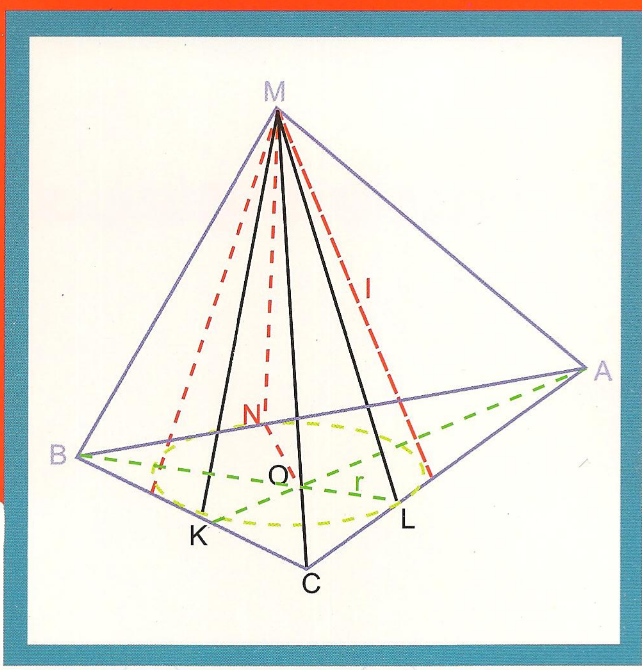
دایرة المعارف هندسه

۱۶

هندسهٔ فضایی

(هرم، استوانه، مخروط)



مؤلّف: محمد هاشم رستمی

دایرةالمعارف هندسه

«جلد شانزدهم»

هندسهٔ فضایی

(هرم، استوانه، مخروط)

مؤلّف: محمّدهاشم رستمی

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.

از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی‌و نه سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه ؛

۲. رابطه‌های متری در هندسه مسطحه ؛

۳. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران،تجانس، انعکاس، و ...) ؛

۴. مکانهای هندسی ؛

۵. ترسیمهای هندسی ؛

۶. هندسهٔ فضایی ؛

۷. هندسهٔ تحلیلی ؛

۸. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی) ؛

۹. هندسه‌های نااقلیدسی ؛

...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را

دربر می‌گیرد. به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، تشابه و ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلثهای : متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه و ...)، مثلثهای ویژه و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

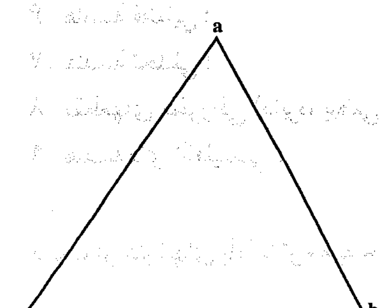
جلد ۷. رابطه‌های متری درچندضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعیها، ...).

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، (مگر در موارد ویژه، مثل برخی از مسأله‌های المپیادهای ریاضی، که رسم شکل درست، جزء هدفهای مسأله است) ؛ تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در مبحث مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هرمثلث قائم‌الزاویه، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^۲ = b^۲ + c^۲$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی آنها، آورده شده است.



● علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overset{\bullet\!-\!\bullet}{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده

شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است. به عنوان مثال گفته شده : در مثلث abc ضلعهای ab ، bc و ac، ....

● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به‌عنوان مثال، همه‌جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A ، B، C و ... ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

● شرح حال هندسه‌دانان بزرگ، پس از اولین قضیه و یا مسأله‌ای که به نام آنها مشهور است (مانند قضیهٔ تالس، قضیهٔ دزارگ، قضیهٔ پاپوس)، بعد از صورت آن قضیه یا مسأله، آورده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، هندسهٔ فضایی و شامل ۳ بخش است :

بخش ۱. هرم

بخش ۲. استوانه

بخش ۳. مخروط

هریک از بخشهای بالا به زیربخشهایی تقسیم شده‌اند. به‌عنوان مثال، بخش ۱. هرم، دارای ۱۵ زیربخش است که عبارتند از :

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. نقطه، خط، صفحه

۳.۱. زاویه

۴.۱. یال، ارتفاع، سهم، ضلع قاعده

۵.۱. پاره‌خط

۶.۱. شعاع کره

۷.۱. مساحت

۸.۱. حجم

۹.۱. رابطهٔ متری

۱۰.۱. مکان هندسی

۱۱.۱. رسم شکل

۱۲.۱. برش، مقطع

۱۳.۱. ثابت کنید هرم منتظم است

۱۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱.۱۵. مسأله‌های ترکیبی

هریک از زیربخشهای بالا، خود شامل زیربخشهای جدیدی هستند. به عنوان مثال زیربخش ۱.۷. مساحت، دارای این زیربخشهاست:

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۷.۲. نسبت مساحتها

۱.۷.۳. رابطهٔ بین مساحتها

برخی از زیربخشهای بالا خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال زیربخش ۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت، دارای ۵ زیربخش می‌باشد که عبارتند از:

۱.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۱.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت کل

۱.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت مقطع

۱.۷.۱.۴. اندازهٔ مساحت تصویر

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

در هریک از این زیر بخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست؛ ولی امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند؛ که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

هندسهٔ فضایی

بخش ۱. هرم
بخش ۲. استوانه
بخش ۳. مخروط

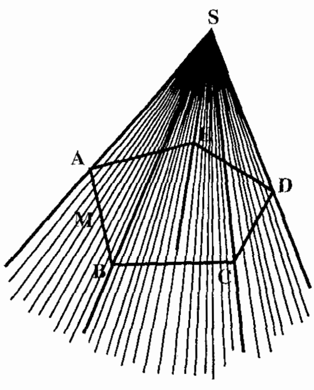
بخش ۱

● هرم

بخش ۱. هرم

۱.۱. تعریف و قضیه

سطح هرمی



تعریف. چند ضلعی مسطح ABCDE... و نقطهٔ S را در خارج صفحهٔ آن در نظر می‌گیریم (شکل). مجموعهٔ نیمخطهای SM که هر یک از آنها بر نقطهٔ S و یک نقطهٔ M از چندضلعی می‌گذرد، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح هرمی می‌نامیم.

در این سطح، چندضلعی ABCDE... را چندضلعی هادی، نقطهٔ S را رأس و هر یک از نیمخطهای مانند SM را یک مولد سطح هرمی می‌گوییم.

هر صفحه که بر رأس S و یک ضلع چندضلعی هادی می‌گذرد، یک وجه از سطح هرمی است. فصل مشترک هر دو وجه مجاور از سطح هرمی مولدی است که از یک رأس چندضلعی هادی می‌گذرد و آن را یک یال سطح هرمی می‌نامیم، مانند یالهای SA، SB و SC و... در شکل.

هر سطح هرمی به تعداد وجه‌هایش نامیده می‌شود. ساده‌ترین سطح هرمی آن است که چندضلعی هادی آن مثلث باشد. سطح هرمی در حقیقت همان است که به عنوان «کنج» قبلاً شناخته‌ایم.

مقطع سطح هرمی با صفحه‌ای که بر رأس نگذرد و همهٔ یالها را قطع کند، چندضلعیی

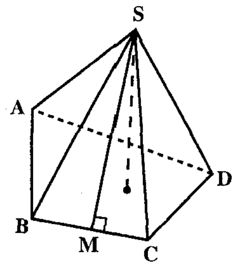
است که تعداد ضلعهای آن با تعداد وجه‌ها یکی است. چندضلعی هادی خود مقطع سطح هرمی با یک صفحه است.

یالها و وجه‌های سطح هرمی نامحدودند و سطح هرمی دو زیرمجموعهٔ متمایز نقطه‌های فضا را مشخص می‌کند که معمولاً یکی را مجموعهٔ نقطه‌های درونی سطح هرمی و دیگری را مجموعهٔ نقطه‌های برونی آن می‌گوییم. مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر وجه‌ها و یالها، خود سطح را مشخص می‌کند.

هرم

تعریف. هرم جسمی است که به یک سطح هرمی و صفحه‌ای که بر رأس آن نمی‌گذرد و همه یالهای آن را قطع می‌کند، محدود است. قسمتی از یال سطح هرمی را که به رأس و قاعده محدود است یال هرم می‌نامند.

در هرم، چندضلعی مقطع را قاعده و قسمتی از سطح هرمی را که به قاعده و رأس محدود است، سطح جانبی می‌نامیم (شکل الف).



(الف)

هرمی را که قاعدهٔ آن یک n ضلعی است هرم n پهلو می‌خوانیم. هرم n پهلو دارای n وجه جانبی، یک قاعده، n یال جانبی، n ضلع قاعده، یک رأس هرم و n رأس قاعده و ۲n فرجه و ۱+n کنج است. (چرا؟)

در حالت کلی می‌توان گفت:

هرم جسمی است محدود به صفحه‌های یک چندضلعی و چند مثلث بترتیبی که هر یک از مثلثها در یک ضلع با چندضلعی مزبور و در دو ضلع دیگر با دو مثلث مجاور مشترک است. هر هرم را به وسیلهٔ عده ضلعهای قاعدهٔ آن مشخص می‌سازند؛ مانند هرم مثلث‌القاعده، هرم مربع‌القاعده و....

هرم مثلث‌القاعده را در بیشتر موارد چهاروجهی می‌گویند. در هر چهاروجهی تمام وجه‌ها مثلثند و هریک از آنها را می‌توان به منزلهٔ قاعدهٔ هرم فرض کرد.

ارتفاع هرم

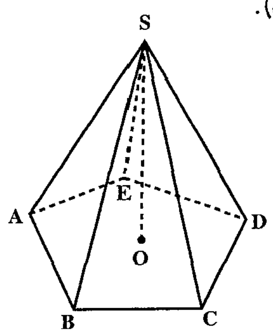
پاره‌خطی را که از رأس هرم می‌گذرد و بر صفحهٔ قاعده عمود و به رأس و صفحهٔ قاعده محدود است، ارتفاع هرم می‌گوییم. مانند ارتفاع SH در شکل (الف). هر هرم تنها یک ارتفاع دارد.

سهمهای هرم

هر یک از ارتفاعهای وجه‌های جانبی هرم، که از رأس هرم بر ضلع قاعده عمود شود، یک سهم هرم نامیده می‌شود. مانند سهم SM در شکل (الف) که به وجه جانبی SBC مربوط است. هر هرم که دارای n وجه جانبی است n سهم دارد.

هرم منتظم

اگر قاعدهٔ هرم چندضلعی منتظم باشد و ارتفاع هرم بر مرکز قاعده بگذرد، هرم را هرم منتظم می‌گوییم، شکل (ب).



(ب)

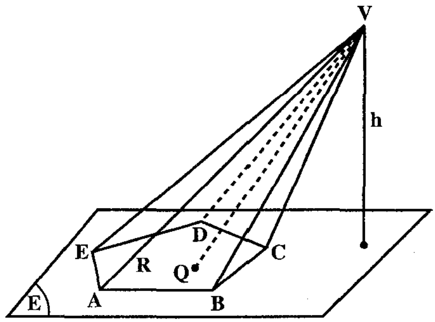
در هرم منتظم یالها متساوی‌اند. وجه‌های جانبی مثلثهای متساوی‌الساقین (متساوی‌الاضلاع) و مساوی یکدیگرند. کنج رأس یک کنج منتظم است. فرجه‌های بین وجه‌های جانبی متساوی‌اند و فرجه‌هایی که بین وجه‌های جانبی و صفحهٔ قاعده پدید می‌آیند، نیز مساوی یکدیگرند. یالهای هرم منتظم با صفحهٔ قاعده، زاویه‌های متساوی تشکیل می‌دهند. سهمهای هرم منتظم مساوی یکدیگرند.

(گزاره‌های بالا را ثابت کنید).

هرم منتظم با تعداد وجه‌ها و یک ضلع قاعده و ارتفاع، یا یک ضلع قاعده و یال، یا یک ضلع قاعده و سهم، یا یک ضلع قاعده و یک زاویهٔ رأس یا ... مشخص می‌شود. یعنی برای مشخص شدن هرم منتظم علاوه بر تعداد وجه‌ها، معلوم بودن دو عامل مستقل، کافی است.

تعریف هرم به صورتی دیگر

هرمی به قاعدهٔ R و به رأس V، جسمی به شکل زیر است.



هرم، اجتماع تمام پاره‌خطهای VQ است، که Q نقطه‌ای از قاعده است. بنابراین:

تعریف. ناحیهٔ چندضلعی R در صفحهٔ E و نقطهٔ V خارج E داده شده‌اند. هرم به قاعدهٔ R و رأس V اجتماع تمام پاره‌خطهای VQ است که Q متعلق به R باشد. ارتفاع هرم عبارت است از فاصلهٔ V تا E.

مقاطع افقی هرم هم مانند مقاطع منشور تعریف می‌شوند. یعنی مقطع افقی هرم، اشتراک هرم با صفحه‌ای موازی با صفحهٔ قاعدهٔ هرم است (به شرطی که این اشتراک تهی نباشد). با حرکت صفحهٔ افقی به سمت رأس، مساحت مقطع کاهش می‌یابد و سرانجام در رأس به صفر می‌رسد.

ویژگیهای هرم

۱. **قضیه.** مقطع هرم با هر صفحهٔ موازی با قاعده یک چندضلعی است که با قاعده متشابه است.

۲. **قضیه.** مساحت هر مقطع موازی قاعدهٔ هرم و مساحت قاعده، با مربع فاصلهٔ رأس از آن مقطع و مربع فاصلهٔ رأس از قاعده متناسبند.

۳. **قضیه.** هرگاه دو هرم را که دارای قاعده‌های متعادل و واقع در یک صفحه و ارتفاعهای متساوی بوده و رأسهای آنها در یک طرف صفحهٔ قاعده واقع باشند، با صفحه‌ای موازی با قاعده‌ها قطع کنیم، دو مقطع حاصل متعادلند (هم‌ارزند).

حجم هرم. برای محاسبه حجم هرم قبلاً قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

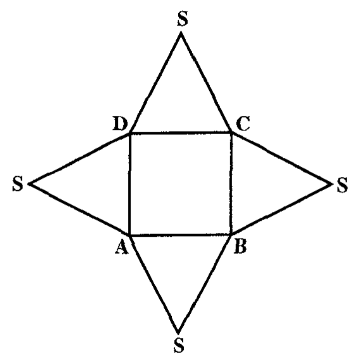
۴. **قضیه.** اگر در دو هرم مساحتهای قاعده‌های آنها با هم برابر و ارتفاعهایشان نیز با هم برابر

باشند، آن گاه اندازه‌های حجمهای آنها با هم برابرند.

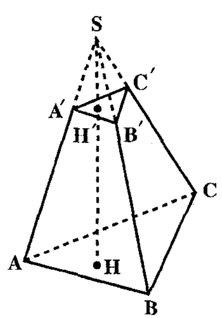
۵. قضیه. حجم هرم سه پهلو برابر است با حاصلضرب مساحت قاعده در ثلث ارتفاع نظیر آن.

۶. حجم یک هرم منتظم برابر است با حاصلضرب مساحت جانبی آن در $\frac{1}{2}$ فاصلهٔ مرکز قاعده‌اش از یک وجه جانبی آن.

گستردهٔ سطح هرم منتظم بر صفحه. گستردهٔ سطح هرم منتظم بر یک صفحه از یک چندضلعی منتظم و چند مثلث متساوی‌الساقین متساوی که قاعده‌های آنها با ضلعهای چندضلعی مشترک هستند و ساقهای آنها مساوی یالهای هرم است، تشکیل می‌شود (شکل). از این شکل برای ساختن هرم منتظمی که قاعده و وجه‌های جانبی آن داده شده باشند، استفاده می‌شود.



هرم ناقص



تعریف. هرم ناقص جزیی است از یک هرم که بین قاعده و مقطع هرم با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن محدود باشد (شکل). مقطع هرم با صفحهٔ موازی قاعدهٔ آن که بر رأس هرم نگذرد، یک چندضلعی متشابه با قاعده است. پس هرم ناقص را به صورت زیر می‌توان تعریف کرد:

هرم ناقص جسمی است که به دو چندضلعی متشابه واقع در دو صفحهٔ متوازی و چند ذوزنقه محدود باشد چنان که هر یک از ذوزنقه‌ها در هر قاعده با یکی از چندضلعیها و در هر ساق با ذوزنقهٔ دیگری از همان نوع، مشترک باشد.

در هرم ناقص، هر یک از دو چندضلعی را قاعده و هر یک از ذوزنقه‌ها را یک وجه جانبی می‌گوییم. ساده‌ترین هرم ناقص آن است که قاعده‌های آن مثلث باشند و این هرم ناقص

روی هم دارای پنج وجه است.

در هرم ناقص منتظم، ذوزنقه‌های جانبی مساوی یکدیگر و متساوی‌الساقین هستند.

پاره‌خط عمود بر صفحه‌های دو قاعدهٔ هرم ناقص و محدود به آن دو صفحه را ارتفاع هرم ناقص می‌گوییم، مانند ارتفاع HH' در شکل. اندازهٔ ارتفاع هرم ناقص مساوی فاصلهٔ صفحه‌های دو قاعده است.

در هرم ناقص منتظم، عمودی که از مرکز هر قاعده بر صفحهٔ قاعدهٔ دیگر رسم شود، از مرکز آن قاعده می‌گذرد.

هر ساق از ذوزنقه‌های جانبی هرم ناقص را یک یال جانبی، و هر ارتفاع از این ذوزنقه‌ها را یک سهم هرم ناقص می‌گوییم.

در هرم ناقص منتظم، همهٔ یالها متساوی و همهٔ سهمها مساوی یکدیگرند.

مساحت جانبی و مساحت کل و حجم هرم ناقص. مساحت جانبی هرم ناقص مجموع مساحتهای وجه‌های جانبی آن است. برای تعیین مساحت جانبی باید مساحتهای ذوزنقه‌های جانبی را حساب کرده و آنها را جمع کنیم.

مساحت کل هرم ناقص مجموع مساحت جانبی و مساحتهای دو قاعدهٔ آن است.

۷. **قضیه.** حجم هرم ناقص مساوی است با ثلث حاصلضرب ارتفاع در مجموع مساحتهای دو قاعده و واسطهٔ هندسی مساحتهای دو قاعده.

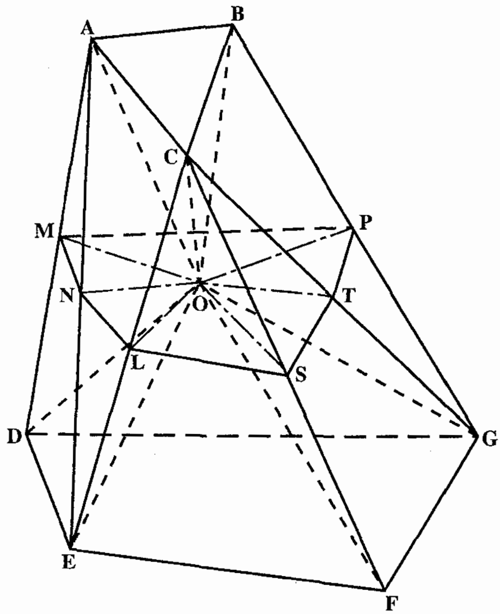
۸. **قضیه.** مساحت جانبی هرم ناقص منتظم برابر است با حاصلضرب محیط مقطع متوسط آن در اندازهٔ سهم.

۹. **قضیه.** حجم منشور ناقص مثلث‌القاعده مساوی است با مجموع حجمهای سه هرم که قاعدهٔ مشترک آنها یکی از دو قاعدهٔ منشور ناقص و رأسهای آنها مرتباً یکی از سه رأس قاعدهٔ دیگر باشد.

۱۰. **قضیه.** حجم منشور ناقص مثلث‌القاعده مساوی است با حاصلضرب مساحت مقطع قائم آن، در یک سوم مجموع طولهای سه یال جانبی.

۱۱. **قضیه.** حجم منشور ناقص قائمی که قاعدهٔ آن چندضلعی منتظم و عده ضلعهای قاعده‌اش زوج باشد، مساوی است با مساحت سطح قاعده در طول محور. (محور این جسم، خطی است که از مرکز قاعده بر صفحهٔ آن عمود شود و طول محور قسمتی از این خط است که مابین دو قاعده محصور می‌باشد.)

۱۲. **تعریف.** شبه منشور (منشور نما) جسمی است که محصور است مابین دو چندضلعی واقع در دو صفحهٔ متوازی و یک عده مثلث که هر یک از آنها در یک رأس با یکی از دو



قاعده و در ضلع مقابل به آن رأس، با قاعدهٔ دیگر شریک باشد (شکل).

هر یک از دو چندضلعی مزبور را قاعدهٔ شبه منشور و فاصلهٔ صفحه‌های آنها از یکدیگر را ارتفاع شبه منشور گویند.

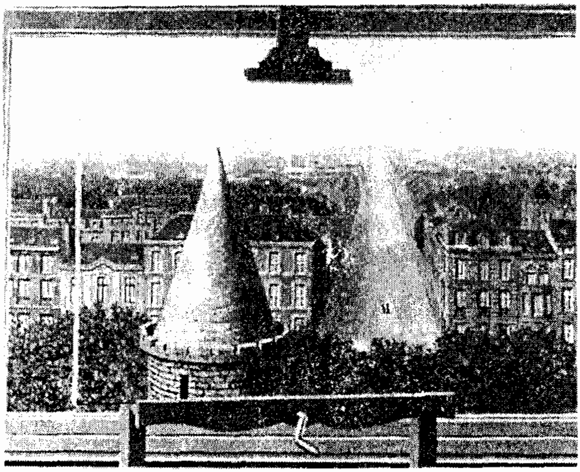
مثلثهای جانبی را وجه‌های جانبی شبه منشور می‌نامند و اگر یک ضلع از قاعدهٔ بالایی با یک ضلع از قاعدهٔ تحتانی موازی باشد، صفحهٔ دو مثلث جانبی بر هم منطبق شده یکی از وجه‌ها تبدیل به ذوزنقه می‌شود. اما چون هر ذوزنقه را نیز می‌توان به وسیلهٔ رسم یکی از قطرهای آن به دو مثلث تجزیه نمود پس در حالت کلی می‌توان گفت که وجه‌های جانبی شبه منشور همگی مثلثند. مقطع صفحه‌ای را که از دو قاعده به یک فاصله باشد، در جسم مقطع متوسط می‌نامند. واضح است که مقطع متوسط از وسط تمام یالهای جانبی می‌گذرد و در حالت کلی، عدهٔ ضلعهای آن، مساوی با مجموع عدهٔ ضلعهای دو قاعده می‌باشد.

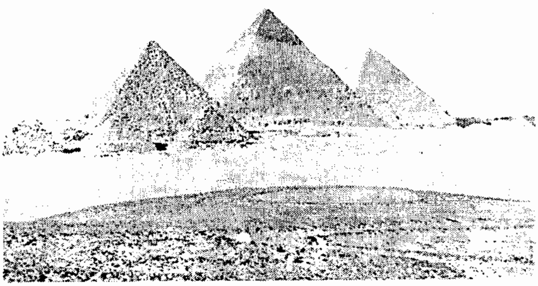
۱۳. **قضیه.** حجم شبه منشور مساوی است با حاصلضرب یک ششم طول ارتفاع در مجموع مساحتهای دو قاعده و چهار برابر مقطع متوسط.

۱۴. **دستور حجم ناوه.** (ناوه را گاهی مسله می‌نامند.) ناوه جسمی است که مابین دو مستطیل غیرمتشابه که ضلعهای آنها دوبه‌دو متوازی‌اند و در نتیجه چهار ذوزنقه که وجه‌های جانبی آن می‌باشند، محصور است.

نکته‌های دیگری دربارهٔ هرم

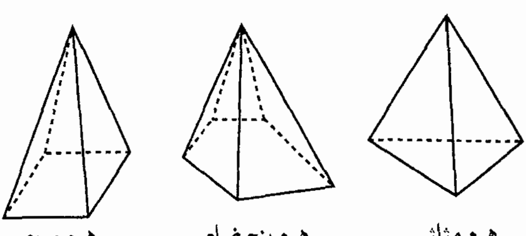
یکی از بزرگترین شکلهای فضایی ساخت دست بشر، اهرام مصر است که بیش از چهار هزار سال از عمر آن می‌گذرد و تنها مورد از «عجایب هفتگانه» است که هنوز پابرجا می‌باشد. هرکدام از این هرمها، ارتفاعی به اندازهٔ یک ساختمان چهل طبقه دارد و بر



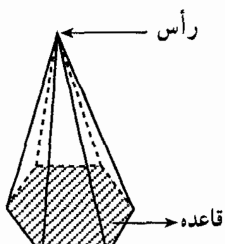


روی هم با بیش از دو میلیون قطعه سنگ که وزن هرکدام بین ۲ تا ۱۵۰ تن است ساخته شده‌اند.

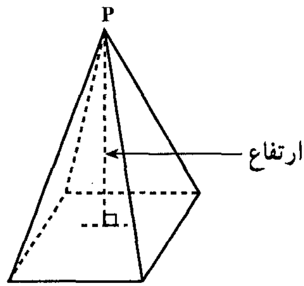
اگرچه مصریان باستان هرمهایی ساختند که قاعدهٔ آنها به شکل مربع بود، ولی چندضلعیهای دیگر نیز می‌توانند قاعدهٔ یک هرم باشند.



هرم یک چند وجهی است که همهٔ وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترکند.

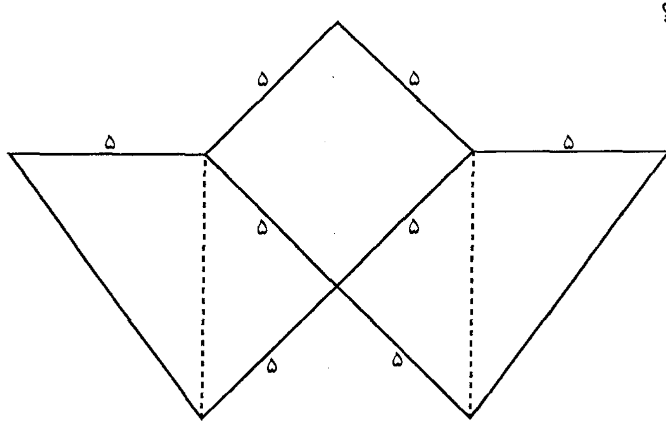


وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده هرم و وجه‌های دیگر وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. (چرا؟)



ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از رأس هرم بر قاعدهٔ آن عمود می‌شود.
قاعده‌های هرمهای معروف مصر، چهارضلعیهای منتظم (مربع شکل) هستند.

۱۵. طول بزرگترین ضلع در الگوی زیر چند واحد است؟ سه قطعه مقوا مطابق الگوی زیر برش دهید و سه هرم بسازید. هرمها را طوری کنار هم قرار دهید تا یک مکعب به‌دست آید. چه نتیجه‌ای دربارهٔ حجم مکعب و هرمها می‌گیرید؟ حجم هرم، برحسب حجم مکعب چقدر است؟



یادداشت تاریخی

۱. هرم. ممکن است یونانیان واژهٔ هرم را از مصریان اقتباس کرده باشند، چون این واژه مثلاً در پاپیروس احمس (ح ۱۵۵۰ پ. م.) دیده می‌شود.
قاعده‌ای که اقلیدس از هرم داده، در اصل بی‌تغییر باقی ماند، جز در قضیهٔ مربوط به تساوی هرمهای دارای ارتفاع و قاعدهٔ مساوی. کاوالیری (۱۶۳۵) روش بخش‌ناپذیر خود را به‌کار برد. ولژاندر (۱۷۹۴) اثبات ساده‌ای عرضه کرد که هنوز هم رایج است. آریابهاتا (ح ۵۱۰) حجم آن را نصف حاصلضربِ قاعده در ارتفاع داد، یا دست‌کم از نسخه‌های موجود چنین استنباط می‌شود.

۲. **هرم ناقص.** روش به دست آوردن حجم یک هرم ناقص مربع‌القاعده یا مثلث‌القاعده در کتاب حجم‌سنجی هرون آمده است. رابطهٔ جدید $V=\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$ نخستین بار به‌صورت یک رابطه در هندسهٔ فیبوناتچی (۱۲۲۰) آمده است، جز این‌که در حاشیه‌ای بر یک اثر عربی سدهٔ دوازدهم دیده می‌شود که این موضوع در آن زمان شناخته شده بود. احتمالاً مصریان خود این روش را دست‌کم برای حالت ویژه‌ای مدتها پیش از هرون می‌شناختند؛ چون در یک پاپیروس به خط دینی، احتمالاً مربوط به مدتی پیش از پاپیروس احمس، مطلبی است که ظاهراً آشنایی با این روش را درحالت هرم مربع‌القاعده نشان می‌دهد. برهماگوپتا (ح ۶۲۸) هم قاعده‌ای برای هرم ناقص مربع‌القاعده با ضلعهای S_2 و S_1 به‌این صورت می‌دهد: $V=\frac{1}{3}h(S_1^2+S_2^2+S_1S_2)$.

۲.۱. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۱. نقطه

۱.۱.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...

۱.۱.۱.۲.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۶. قاعدهٔ هرم ABCDE، چهارضلعی ABCD می‌باشد که قطرهای AC و BD آن بر یکدیگر عمودند و در نقطهٔ M همدیگر را قطع می‌کنند. EM ارتفاع هرم است. ثابت کنید تصویرهای M روی وجه‌های جانبی هرم، بر روی یک صفحه قرار دارند.

۲.۱.۱.۲.۱. نقطه روی یال است

۱۷. در هرم مثلث‌القاعدهٔ SABC، $AC=AB$ و یال SA با صفحه‌های ABC و SBC زاویهٔ 45° می‌سازد. می‌دانیم رأس A و وسطهای همهٔ یالهای هرم به‌جز SA، روی کره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند. ثابت کنید مرکز کره روی یال SA قرار می‌گیرد. همچنین مساحت‌وجه ASC راحساب کنید.

۱.۲.۲. خط

۱.۲.۲.۱. خطهای: همرس، همصفحه،...

۱.۲.۲.۱.۱. خطها همرسند

۱۸. ثابت کنید خطهایی که رأس هرم مثلث‌القاعده را به‌مرکز ثقل وجه مقابل وصل می‌کنند، در یک نقطه همرسند و یکدیگر را در ثلث همدیگر قطع می‌کنند.

۱۹. اگر یک ارتفاع هرم مثلث‌القاعده‌ای از محل برخورد ارتفاعهای قاعدهٔ هرم بگذرد، ثابت کنید ارتفاعهای دیگر نیز از محل برخورد ارتفاعهای قاعده‌های نظیر می‌گذرند.

۲۰. ثابت کنید خطهایی که وسطهای دو یال مقابل هرم مثلث‌القاعده را وصل می‌کند، همرسند.

۲۱. قطرهای یک هرم ناقص که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع باشد، در یک نقطه همرسند.

۱.۲.۲.۱.۲. خطها همصفحه‌اند

۲۲. یک هرم را که به‌وسیلهٔ سه نیمخط SA، SB و SC مشخص شده است، درنظر می‌گیریم. صفحهٔ دلخواه P که از رأس S می‌گذرد، صفحه‌های SBC، SCA و SAB را در فصل مشترکهای $S\alpha$، $S\beta$ و $S\gamma$ قطع می‌کند. قرینه‌های $S\alpha$، $S\beta$ و $S\gamma$ نسبت به نیمسازهای زاویه‌های BSC، CSA و ASB بترتیب $S\alpha'$، $S\beta'$ و $S\gamma'$ می‌نامیم. ثابت کنید که خطهای $S\alpha'$، $S\beta'$ و $S\gamma'$ در یک صفحه قرار دارند.

۱.۲.۲.۱.۳. خطها برهم عمودند

۲۳. قاعدهٔ abcd از هرم sabcd مستطیل است. فصل مشترکهای وجه‌های جانبی مقابل هم، چه‌موقع برهم عمودند؟

الف) به‌ازای هر وضعی که رأس s در خارج صفحهٔ قاعده داشته باشد.

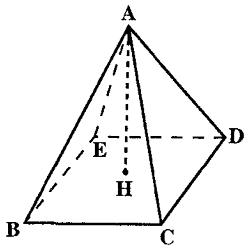
ب) آن‌گاه و تنها آن‌گاه که تصویر قائم s روی صفحهٔ قاعده بر یکی از رأسهای قاعده واقع شود.

ج) آن‌گاه و تنها آن‌گاه که تصویر قائم s روی قاعده در مرکز قاعده واقع شود.

د) هیچ‌گاه

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۴.۱.۲.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

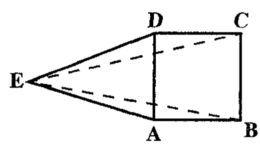


۲۴. هرمی را که قاعده‌اش یک چندضلعی منتظم و رأس آن از تمام رأسهای قاعده به‌یک فاصله باشد، هرم منتظم می‌نامند. ثابت کنید ارتفاعی که از رأس این هرم رسم شود از مرکز محیطی قاعده (نقطه‌ای که از تمام رأسهای قاعده به یک فاصله است) می‌گذرد.

۳.۲.۱. صفحه

۱.۳.۲.۱. تعداد صفحه‌ها

۲۵. شکل زیر یک هرم مربع‌القاعده را نشان می‌دهد که فرض می‌شود قاعدهٔ مربعی‌اش به‌شما نزدیکتر است. صفحه‌هایی را که بر رأس E از این هرم می‌گذرند نام ببرید.



۲.۳.۲.۱. وجه‌های هرم

۲۶. ثابت کنید وجه‌های جانبی هرم منتظم، مثلثهای متساوی‌الساقین همنهشتند.

۲۷. چهار وجه هرمی که قاعدهٔ آن مثلث است، محیطهای برابر دارند. آیا می‌توان نتیجه‌گرفت که این چهار وجه دوبه‌دو همنهشت هستند (دو شکل همنهشت نامیده می‌شود، هرگاه بتوان در یک تغییر مکان یکی را بر دیگری منطبق کرد.)

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۲۸. یک چندضلعی با ضلعهای برابر، قاعدهٔ یک هرم را تشکیل می‌دهد. ثابت کنید، اگر همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ رأس هرم، با یکدیگر برابر باشند، آن وقت در بین وجه‌های جانبی هرم، دو مثلث برابر پیدا می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۲۹. آیا سطح هرمی یک جسم هندسی است؟ ساده‌ترین هرم چند وجه دارد و وجه‌های آن چه شکلی دارند؟

۴.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰. هرمی که قاعدهٔ آن مربع باشد، چند وجه، چند یال، چند فرجه و چند کنج دارد؟

۳۱. مکعب توپری را درنظر بگیرید که دو هرم منتظم بر دو وجه متقابل آن، که قاعدهٔ هرمها را تشکیل می‌دهند، ساخته شده‌اند. حال فرض کنید سوراخی که مقطع عرضی آن مربع و محور آن روی خطی است که رأس هرمها را به‌هم وصل می‌کند، در این جسم ایجاد شود. مقدار $v-e+f$ را برای این جسم حلقوی شکل محاسبه کنید.

الگوهای ساختن ۱۰۰ جسم مختلف را می‌توان در کتاب میلزس. هارتلی، به‌نام الگوهای چندوجهیها پیدا کرد.

۳.۱. زاویه

۱.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۳۲. در هرم چهاربر منتظم، مرکز کرهٔ محیطی روی سطح کرهٔ محاطی‌قراردارد،اندازهٔ زاویهٔ رأس هرم را پیدا کنید.

۳۳. هرم منتظم SABCD داده شده است. هرگاه مرکز کرهٔ محاطی و محیطی هرم بر هم منطبق باشند، زاویه‌های رأس هرم را حساب کنید.

۳۴. قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ SABCD، مثلث متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ می‌باشد. زاویه‌های $S\hat{A}B$ و $S\hat{C}A$ و $S\hat{A}C$ و $S\hat{B}A$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند که قدرنسبت آن، مخالف صفر است (بترتیبی که نوشته شده‌اند). علاوه بر آن، مساحتهای وجه‌های SAB، ABC و SAC تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند. زاویه‌هایی را که تشکیل تصاعد عددی داده‌اند، پیدا کنید.

۲.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳۵. هرم مثلث‌القاعده SABC در داخل مخروطی محاط شده است. (S رأس مخروط و A، B و C روی دایرهٔ قاعده مخروط قرار دارند.) فرجه‌های نظیر یالهای SA، SB و SC را بترتیب α، β و γ درنظر می‌گیریم. زاویهٔ بین صفحهٔ SBC و صفحهٔ مماس بر سطح مخروط در طول مولد SC را پیدا کنید.

۳۶. در هرم مسدّس‌القاعده منتظم SABCDEF، نسبت ارتفاع به طول ضلع قاعده برابر $\sqrt{۶}:۴$ است. زاویهٔ بین صفحه‌های SBC و SDE را محاسبه کنید.

۳۷. طول ضلع قاعدهٔ هرم منتظم چهاربری، با طول سهم یکی از وجه‌های جانبی برابر است. از یکی از ضلعهای قاعده، صفحهٔ قاطعی گذشته و سطح جانبی هرم را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده است. زاویهٔ بین صفحهٔ قاطع و صفحهٔ قاعده هرم را پیدا کنید.

۳.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۳۸. در هرم چهاربر منتظم زاویهٔ رأس هرم، با زاویهٔ بین یالهای جانبی و صفحه قاعده آن برابر می‌باشد. فرجه بین وجه‌های جانبی مجاور هرم را پیدا کنید.

۳۹. در یک هرم منتظم با قاعدهٔ ۲۰ ضلعی، مرکزهای دو کرهٔ محاطی و محیطی هرم، بر هم منطبقند. مقدار زاویه‌های دو وجهی وجه‌های جانبی هرم را (برحسب درجه) پیدا کنید.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۴۰. طول همهٔ یالهای هرم چهارگوش منتظم SABCD با هم برابرند. اندازه فرجهٔ بین وجه‌های SBC و SAD را بیابید.

۴۱. فرجهٔ بین قاعده و وجهٔ جانبی هرم ناقص مثلث‌القاعدهٔ منتظمی را پیدا کنید که، در آن کره‌ای قابل محاط است و علاوه بر آن، کره‌ای هم وجود دارد که بر تمام یالهای آن مماس می‌شود.

۴.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴۲. در هرم چهاربر منتظم، زاویهٔ بین یالهای جانبی و صفحهٔ قاعده، برابر با زاویهٔ بین یال جانبی و صفحهٔ وجه جانبی‌ای است که شامل آن یال نمی‌باشد. این زاویه را پیدا کنید.

۴۳. یال جانبی SB، از هرم مربع‌القاعدهٔ منتظم SABCD با صفحهٔ قاعده، زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ درست می‌کند. زاویهٔ بین این یال و صفحهٔ SCD را بیابید.

۲.۳.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۴. در هرم مثلث‌القاعده‌ای، همهٔ زاویه‌های رأس A قائمه و طول یال AB با مجموع طولهای دو یال دیگر که از رأس A اخراج می‌شوند، برابر است. ثابت کنید مجموع زاویه‌های رأس B، برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۴۵. مجموع فرجه‌های یک هرم که قاعدهٔ آن یک nضلعی محدب است، از $2(n-1)$ قائمه بیش‌تر و از $2(2n-3)$ قائمه کم‌تر است.

۳.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶. هرمی که قاعدهٔ آن مربع باشد، چند وجه، چند یال، چند فرجه و چند کنج دارد؟

۴.۱. یال، ارتفاع، سهم، ضلع قاعده

۱.۴.۱. یال

۱.۱.۴.۱. اندازهٔ یال

۴۷. در هرم مثلث‌القاعده SABC، که قاعده آن ABC می‌باشد، همه یالهای جانبی برابرند. مجموع فرجه‌های نظیر یالهای SA و SC برابر 180° است. اگر $AB = a$ و $BC = b$، طول یالهای جانبی هرم را پیدا کنید.

۴۸. طول هر یک از سه یال هرم مثلث‌القاعده‌ای برابر ۱ و طول هر یک از سه یال دیگر آن، برابر a می‌باشد. هیچ یک از وجه‌های هرم، متساوی‌الاضلاع نیستند. دامنهٔ تغییرات a را پیدا کنید.

۴۹. ارتفاع هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی ۶ سانتیمتر و ضلع قاعده‌اش $8\sqrt{2}$ سانتیمتر است. اندازهٔ یال این هرم را تعیین کنید.

۱.۴.۲. ارتفاع

۱.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۵۰. مقطع هرمی به‌وسیلهٔ یک صفحه موازی قاعده‌اش، یک هرم کوچک به حجم ۲ و ارتفاع ۱ ایجاد کرده است. حجم هرم بزرگ ۵۴ است. ارتفاع هرم بزرگ چقدر است؟

۵۱. مساحت مقطع هرمی با یک صفحهٔ موازی قاعده‌اش، $۱۰۸cm^{۲}$ و فاصله‌اش از رأس $۹cm$ و مساحت قاعده هرم $۱۸۰cm^{۲}$ است. ارتفاع هرم را بیابید.

۵۲. ضلعهای قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای a، b و c است. هرگاه جمیع زاویه‌های مسطحهٔ رأس قائمه باشد، ارتفاع هرم را به‌دست آورید.

۵۳. قاعدهٔ یک هرم منتظم، شش‌ضلعی منتظمی به‌ضلع R است. اندازهٔ ارتفاع و سهم آن را تعیین کنید، درصورتی که سطح کل آن مساوی $۶R^{۲}$ باشد.

۵۴. یک شش‌ضلعی منتظم به‌ضلع R داده شده است. این شش‌ضلعی منتظم را قاعدهٔ یک هرم منتظم می‌گیریم. ارتفاع این هرم منتظم را چنان تعیین کنید که وجه‌های جانبی آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند.

۱.۴.۳. اندازهٔ ضلع قاعده

۵۵. هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی است که ارتفاع آن ۱۲ سانتیمتر و سهم آن ۱۳ سانتیمتر است. اندازهٔ ضلع قاعدهٔ این هرم را تعیین کنید.

۱.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶. در داخل هرم چهاربر منتظمی که در آن، طول ضلع قاعده و ارتفاع با هم مساوی و برابر ۱ می‌باشد، متوازی‌السطوح قائمی را طوری محاط می‌کنیم که قاعده آن در صفحه قاعده هرم قرارگیرد و رأسهای وجه مقابل آن بر روی یالهای جانبی هرم واقع شوند. اگر مساحت سطح قاعده متوازی‌السطوح S باشد، دامنه تغییرات طول قطر متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۵۷. طول یالهای جانبی یک هرم منتظم که قاعده آن nضلعی منتظمی است، مساوی l است. شعاع دایرهٔ محیطی قاعدهٔ این هرم چقدر باشد تا حجم هرم ماکزیمم شود؟

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم

۵۸. به چه فاصله‌هایی از رأس یک هرم، ارتفاع آن هرم را با صفحه‌هایی باید قطع کنیم، تا هرم به ۳، ۴، ... یا n قسمت معادل تقسیم شود؟

۵۹. تحقیق کنید در هرمی به ارتفاع h و مساحت قاعدهٔ S به چه فاصله از رأس، صفحه‌ای موازی قاعده باید درنظر گرفت تا حجم هرم ناقص حاصل، نصف حجم هرم باشد.

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم ناقص

۶۰. یک هرم ناقص به مساحتهای دو قاعده $۲۷m^۲$ و $۱۴۷m^۲$ و ارتفاع ۱۲m داده شده است. به چه فاصله از قاعدهٔ کوچک، صفحه‌ای موازی دو قاعده باید مرور داد تا نسبت حجم مجاور به قاعدهٔ کوچک به حجم مجاور به قاعدهٔ بزرگ $\frac{۱۸۹}{۱۲۷}$ باشد؟

۳.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم سه‌پهلو

۶۱. در هرم SABC، خط راستی یالهای AC و BS را قطع می‌کند، بر آنها عمود است و از وسط SB هم می‌گذرد. وجه ASB با وجه BSC معادل و مساحت ASC دو برابر مساحت BSC می‌باشد. علاوه بر اینها، در داخل هرم نقطه‌ای مانند M وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن، از رأسهای B و S برابر با مجموع فاصله‌های آن از کلیهٔ وجه‌های هرم است. فاصلهٔ نقطهٔ M را از رأس B پیدا کنید، درصورتی که $BS = ۱$ و $AC = \sqrt{۶}$.

۶۲. قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای، مثلثی به ضلعهای a، b و c و طول یالهای جانبی مقابل آنها بترتیب m، n و p می‌باشد. فاصلهٔ رأس هرم را از مرکز ثقل قاعده پیدا کنید.

۶۳. قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD، مثلث ABC است که در آن $\hat{A}=\frac{\pi}{۲}$ و $\hat{C}=\frac{\pi}{۶}$ و $BC=۲\sqrt{۲}$. یالهای AD ، BD و CD از نظر طول برابرند. کره‌ای به شعاع واحد بر یالهای AD و BD و امتداد یال CD، از طرف D و صفحه ABC مماس است. طول خط مماسی را که از نقطهٔ A بر این کره رسم شده است پیدا کنید.

۶۴. ضلعهای مثلث ABC به طولهای a، b و c از نقطهٔ M به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند. فاصلهٔ M با صفحه را پیدا کنید.

۶۵. مختصات رأسهای قاعدهٔ هرم منتظم SABC به‌صورت زیر مفروضند:
$A(۵,۱,-۱)$ ، $B(۵,-۲,۲)$ و $C(۲,-۲,-۱)$. رأس S هرم در صفحهٔ مختصاتی Oyz قرار دارد. فاصلهٔ بین خطهای SB و AC را بیابید.

۶۶. درهرم سه‌پهلوی SABC داریم:

$$SA=SB=SC \ , \ AB=BC=AC \ , \ \tan S\hat{A}C=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

کره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}$ بر نیمخط AS، بر صفحهٔ SBC و صفحهٔ ABC در نقطه‌ای واقع بر AC مماس است. بیش‌ترین طول AC چقدر می‌تواند باشد؟

۶۷. یکی از وجه‌های مکعبی، در صفحهٔ قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی قرار دارد. دو رأس از رأسهای مکعب، روی یکی از وجه‌های جانبی هرم و دو رأس دیگر آن روی دو وجه دیگر آن قرار دارد. (هرکدام در یکی از وجه‌ها) طول یال مکعب را حساب کنید، در صورتی که طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر a و ارتفاع آن h باشد.

۴.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم چهارپهلو

۶۸. قاعدهٔ هرم ABCDM، مربعی به‌ضلع a می‌باشد. یالهای جانبی AM و BM هم به‌طول a هستند. (هرکدام از آنها) طول یالهای CM و DM برابر b است. وجه CDM را به‌عنوان قاعده درنظر گرفته و هرم مثلث‌القاعدهٔ CDMN را طوری بنا می‌کنیم که طول هر یک از یالهای آن a و در بیرون هرم قبلی قرار گیرد. فاصلهٔ بین خطهای AD و MN را پیدا کنید.

به تعریف فاصلهٔ بین اجسام فضایی می‌پردازیم: کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطه‌های دو جسم فضایی $\phi_۱$ و $\phi_۲$ ، فاصلهٔ بین دو جسم فضایی $\phi_۱$ و $\phi_۲$ ، نامیده می‌شود.

اگر نقطه‌ای روی یک صفحه واقع نباشد، در آن صورت، فاصلهٔ نقطه از صفحهٔ مزبور

عبارت از طول عمودی خواهد بود که از آن نقطه به‌صفحه مزبور وارد می‌شود. اگر نقطه متعلق به صفحه باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین آنها صفر خواهد بود. حال برای یافتن آن فاصله روشهای دیگری را مورد بحث قرار می‌دهیم. اگر V، حجم هرم و Q مساحت قاعدهٔ آن معلوم باشد، آن‌گاه H، ارتفاع هرم را می‌توان طبق فرمول زیر محاسبه کرد:

$$H = ۳V / Q$$

این ارتفاع چیز دیگری به‌جز فاصلهٔ رأس هرم از صفحهٔ قاعده آن نیست.

۶۹. مساحت سطح جانبی و حجم هرم چهارگوش منتظمی بترتیب برابر V و S است. فاصلهٔ رأسی از قاعده را، از وجه جانبیی حساب کنید که شامل آن رأس نیست.

۷۰. طول ارتفاع هرم چهارگوش منتظم SABCD و طول ضلع قاعدهٔ آن برابر a است. فاصلهٔ خط AB و صفحهٔ SCD را محاسبه کنید.

۷۱. هرم مربع‌القاعده منتظمی است که طول قاعدهٔ آن a و ارتفاعش b است. صفحهٔ قاطعی بر یک ضلع قاعده و وسطهای دو یال مقابل عبور می‌کند. فاصلهٔ رأس هرم را تا صفحهٔ قاطع معین کنید.

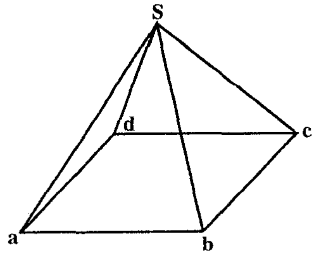
۷۲. هرم چهارپهلوی منتظم SABCD که یالهای جانبی آن مساوی طول معلوم l و زاویهٔ هر وجه آن در رأس مساوی ۳۰° می‌باشد، داده شده است. مطلوب است طول خط شکسته‌ای که از رأس A شروع می‌شود و وجه‌های جانبی آن را طی می‌کند و دوباره به رأس A برمی‌گردد.

۷۳. هرم sabcd (شکل زیر) منتظم و قاعدهٔ آن مربع abcd است. هر ضلع مربع قاعده ۱۲ سانتیمتر و اگر h مرکز مربع قاعده باشد، $|sh|$ به اندازهٔ $۶\sqrt{۲}$ سانتیمتر است. حشره‌ای از رأس a روی سطح جانبی این هرم حرکت می‌کند و خود را به رأس c می‌رساند. کوتاهترین مسیری که این حشره می‌تواند بپیماید، چند سانتیمتر است؟

الف) $۱۲\sqrt{۳}$ ب) ۱۸ ج) $۸\sqrt{۵}$

د) $۱۲\sqrt{۲}$ هـ) ۲۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۵.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم n پهلو

۷۴. در هرمی به قاعدهٔ n ضلعی منتظمی به ضلع a که زاویهٔ وجه‌های جانبی آن با قاعده‌اش α است، کره‌ای محاط می‌کنیم. مطلوب است فاصلهٔ بین نقطه‌های تماس کره با دو وجه مجاور هرم.

۷۵. هرم منتظمی که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منتظم به محیط ۲p و رأس آن نقطهٔ S که به فاصلهٔ h از قاعده است، داده شده است. به چه فاصله‌ای از رأس S باید صفحه‌ای موازی قاعدهٔ هرم رسم کنیم تا هرم به یک هرم جدید و یک هرم ناقص تبدیل شود به‌قسمی که مساحت جانبی آنها هم‌ارز (معادل) باشند؟

۲.۵.۱. نسبت پاره‌خطها

۷۶. ثابت کنید نیمساز هر فرجهٔ هرم مثلث‌القاعده، یال مقابل را به‌نسبت مساحتهای دو وجه همان فرجه تقسیم می‌کند.

۷۷. SABCD هرمی است که قاعدهٔ آن لوزی ABCD به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه می‌باشد. یال جانبی هرم، $SA = a$ است. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود دارد که ضلعهای آن مساوی SB، SC و SD می‌باشد.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۷۸. همه یالهای هرم مثلث‌القاعده ABCD بر یک کره مماس هستند. سه پاره‌خط که وسطهای یالهای متنافر هرم را به‌هم وصل می‌کنند، طولهای مساوی دارند. زاویهٔ $A\hat{B}C = ۱۰۰^\circ$ نسبت طولهای ارتفاعهای هرم را که از رأسهای A و B اخراج می‌شوند، حساب کنید.

۶.۱. شعاع کره

۱.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۷۹. قاعدهٔ هرمی، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد. طول یالهای جانبی آن b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که بر همهٔ یالهای آن، و یا امتداد آنها مماس باشد.

۸۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB = AC = ۵$ و $BC = ۶$ است و ارتفاع هرم که از وسط BC می‌گذرد، به طول یک می‌باشد. شعاع کرهٔ محاط در هرم را پیدا کنید.

۸۱. یالهای جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، دو به دو بر هم عمودند. طول یکی از آنها، با مجموع طولهای دوتای دیگر برابر، و مساوی a می‌باشد. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که بر قاعدهٔ هرم و امتداد وجه‌های جانبی آن مماس باشد.

۸۲. قاعدهٔ هرم ABCEH، چهارضلعی محدب ABCE می‌باشد که با قطر BE به دو مثلث معادل تقسیم می‌شود. طول یال AB برابر ۱ و طول یالهای BC و CE با هم برابرند. مجموع طول یالهای AH و EH برابر $\sqrt{۲}$ و حجم هرم برابر است با $\frac{۱}{۶}$. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که بیش‌ترین حجم را داشته باشد، و در داخل هرم جا بگیرد.

۸۳. طول ضلع قاعدهٔ هرم مربع‌القاعده a و دو وجه مجاور بر قاعده عمودند. یال بزرگتر با صفحهٔ قاعده زاویهٔ β می‌سازد. اگر در داخل این هرم گلوله‌ای محاط کنیم، شعاع گلوله را حساب کنید.

۸۴. شعاعهای کره‌های محیطی و محاطی یک هرم منتظم را که اندازهٔ ارتفاع آن h و قاعده‌اش مربعی به‌ضلع a است، تعیین کنید.

۸۵. دو هرم منتظم مساوی داده شده است. این دو هرم را طوری قرار می‌دهیم که قاعده‌های مربع شکل آنها، برهم منطبق شود و رأسهای دو هرم در دو طرف قاعدهٔ مشترک قرار گیرند. در هشت‌وجهیی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، یک کره محاط کرده‌ایم. مطلوب است شعاع این کره، به‌شرطی که ضلع قاعدهٔ هر یک از هرمها برابر a و زاویهٔ مسطحهٔ رأس هرکدام از آنها برابر α باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۸۶. در هرم منتظمی با قاعدهٔ n ضلعی، کره‌ای محاط کرده‌ایم. اگر طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر q و طول یال جانبی آن برابر a باشد، شعاع کره را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲.۶.۱. نسبت شعاعها

۸۷. وجه‌های جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، همه با هم معادل بوده و با صفحهٔ قاعده زاویه‌های برابر با α، β و γ تشکیل می‌دهند. نسبت شعاع کرهٔ محاط در هرم را، به شعاع کره‌ای

که بر قاعده و امتداد سه وجه جانبی هرم مماس است، پیدا کنید.

۸۸. در هرم منتظم با قاعدهٔ شش‌ضلعی، مرکز کرهٔ محیطی بر سطح کره محاطی واقع است. نسبت طول شعاع کرهٔ محیطی بر شعاع کرهٔ محاطی را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۸۹. در هرم شش‌بر منتظم، مرکز کرهٔ محیطی روی سطح کرهٔ محاطی قرار دارد. نسبت شعاع کرهٔ محیطی به شعاع کرهٔ محاطی را پیدا کنید.

۷.۱. مساحت

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۹۰. سطح جانبی هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم به ضلع a و به زاویهٔ مسطحهٔ φ را پیدا کنید.

۹۱. مثلث ABC قاعدهٔ هرم $SABC$ است و در آن، زاویهٔ بین AB و AC برابر α است و درضمن داریم: $AB = AC = a$. وجه ABC بر صفحهٔ قاعده عمود است و وجه‌های SBA و SCA با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر φ می‌سازند. سطح جانبی این هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۹۲. ثابت کنید در بین هرمهای مثلث‌القاعده با قاعدهٔ مفروض و ارتفاعهای مساوی، کوچکترین مساحت سطح جانبی، از آن هرمی است که رأس آن بر مرکز دایرهٔ محیطی قاعده، تصویر می‌شود.

۹۳. حجم یک هرم مربع‌القاعده ۳۸۴ سانتیمتر مکعب و ارتفاع آن ۸ سانتیمتر است. طول ضلع قاعده چقدر است؟ مساحت رویهٔ جانبی هرم چقدر است؟ (فرض کنید که تصویر رأس هرم در مرکز قاعده قرار دارد.)

۹۴. ارتفاع هریک از وجه‌های جانبی هرم منتظم را سهم هرم می‌نامند. ثابت کنید که مساحت رویهٔ جانبی هرم منتظم، نصف حاصلضرب محیط قاعده در سهم آن است.

۹۵. یک ضلع قاعدهٔ هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای ۱۰cm طول دارد و ارتفاع هرم ۱۲cm است. مساحت رویهٔ جانبی هرم را بیابید.

۹۶. هرمی را با سه صفحه که با قاعدهٔ آن موازی‌اند قطع می‌کنیم، به‌طوری که ارتفاع هرم به

چهار قسمت برابر تقسیم شود. اگر سطح جانبی کوچکترین هرم حاصل را با S_1 نشان دهیم، سطح جانبی هریک از هرمهای دیگر را برحسب S حساب کنید.

۲.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت کل

۹۷. حجم هرم منتظمی که قاعدهٔ آن، مثلثی متساوی‌الاضلاع است، برابر V و زاویهٔ بین هر وجه جانبی با قاعدهٔ آن، برابر α است. مساحت کل هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۹۸. مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع q، قاعدهٔ یک هرم منتظم را تشکیل می‌دهد. از یکی از ضلعهای قاعده، صفحه‌ای عمود بر یال جانبی مقابل به آن ضلع رسم کرده‌ایم. این صفحه، یال را به‌نسبت $m:n$ قطع کرده است. سطح کل هرم را پیدا کنید.

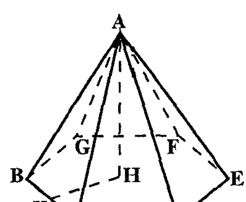
مسأله‌های دشوار ریاضی

۹۹. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ مربعی شکل. زاویهٔ دو وجهی مجاور با یال جانبی هرم برابر α و شعاع کرهٔ محاط در هرم برابر R است. سطح کل هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۰۰. مساحت رویهٔ کل هرم منتظمی را بیابید که قاعدهٔ آن مربعی به ضلع ۱۶ و ارتفاعش ۱۵ است.

۱۰۱. مساحت رویهٔ کل هرم منتظمی را بیابید که ارتفاع آن ۱۲ و قاعدهٔ آن که شش‌ضلعی است، به ضلع ۸ باشد.



۳.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مقطع

۱۰۲. در هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD، مساحتهای وجه‌های ABC و ABD بترتیب p و q و زاویهٔ بین آنها α است. مساحت مقطعی از هرم را پیدا کنید که از یال AB و مرکز کرهٔ محاطی هرم می‌گذرد.

۱۰۳. از وسط ارتفاع هرم منتظم با قاعدهٔ مثلثی، صفحه‌ای موازی با وجه جانبی آن رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطعی که به‌دست می‌آید. سطح جانبی هرم را برابر S بگیرید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۰۴. طول هریک از یالهای چهاروجهی (هرم مثلث‌القاعده) منتظمی ۸ است. مساحت مقطعی را بیابید که از نقطهٔ همرسی چهار ارتفاع هرم می‌گذرد.

۱۰۵. مساحت سطح قاعده هرمی S است. ارتفاع هرم را به چهار قسمت متساوی تقسیم نموده و از هر قسمت صفحاتی موازی قاعده رسم می‌کنیم. مساحت بزرگترین این مقطعها کدام است؟

۱) $\frac{۳S}{۴}$ ۲) $\frac{۹S}{۱۶}$ ۳) $\frac{S}{۴}$ ۴) $\frac{S}{۲}$

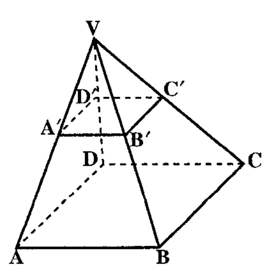
۱۰۶. از مرکز قاعدهٔ هرم منتظم با قاعدهٔ مثلث، صفحه‌ای موازی با دو یال متقاطع آن رسم کرده‌ایم. مساحت مقطع حاصل را پیدا کنید، به‌شرطی که طول یال جانبی هرم برابر 1 و طول یال قاعده برابر a باشد.

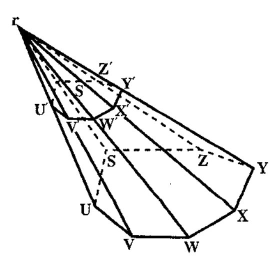
مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۰۷. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ مربع شکل به‌ضلع برابر a. هر زاویهٔ دو وجهی مجاور به قاعدهٔ این هرم برابر است با α . از یکی از ضلعهای قاعده، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که با صفحهٔ قاعده زاویهٔ β بسازد. مساحت مقطع حاصل را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۰۸. دو هرمی که در شکل می‌بینید و یکی از آنها مربع‌القاعده است، به یک ارتفاعند. قاعده‌ها همصفحه و دو مقطع نیز در یک صفحه‌اند. $AB = ۲\sqrt{۶}$ ، $A'B' = ۳\sqrt{۲}$ و مساحت ناحیهٔ چندضلعی SUVWXYZ، ۲۴ است. مساحت مقطع هرم سمت راست را بیابید.





۱۰۹. ارتفاع هرم مربع‌القاعده‌ای ۱۰ و هر ضلع قاعده‌اش ۱۵ است. مساحت مقطعی را بیابید که به فاصلهٔ ۶ از رأس باشد.

۱۱۰. هرم منتظم SABCDE با قاعدهٔ پنج‌ضلعی را با صفحه‌ای که از رأسهای A و C قاعده و وسط یالهای SD و SE گذشته است، قطع کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطع، به‌شرطی که طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر q و طول یال جانبی آن برابر b باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۱۱. مساحت قاعدهٔ یک هرم ۷۲ سانتیمترمربع و شکل آن پنج‌ضلعی است. ارتفاع هرم ۱۲cm است. مساحت مقطعی که از قاعدهٔ ۴cm فاصله دارد، چقدر است؟

۱۱۲. لوزی با قطرهای $AC = a$ و $BD = b$ قاعدهٔ هرم S.ABCD است. یال SA عمود بر قاعده برابر m است. از نقطهٔ A و نقطهٔ K وسط یال SC صفحه‌ای موازی با قطرBD رسم شده است. مساحت مقطع را پیدا کنید.

۱۱۳. ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b $(a > b)$ و ارتفاع h، قاعدهٔ یک هرم را تشکیل داده است. وجه جانبی هرم که از قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه می‌گذرد، بر صفحهٔ قاعده عمود است، و وجه مقابل آن، مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویهٔ رأس آن (در رأس هرم) برابر است با α. از رأس هرم و نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه، صفحه‌ای موازی با قاعده‌های ذوزنقه رسم کرده‌ایم. مساحت مثلثی که روی این صفحه پدید می‌آید، پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۱۴. ارتفاع یک هرم را که مساحت قاعدهٔ آن S فرض می‌شود به ۴ پاره‌خط متساوی تقسیم کرده و از هر نقطهٔ تقسیم، صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعدهٔ هرم می‌گذرانیم. هریک از این صفحه‌ها هرم را در یک مقطع قطع می‌کند. مساحت هریک از مقطعها را حساب کنید.

۱۱۵. هرم ناقص منتظمی با قاعده‌های مربع شکل داده شده است. صفحه‌ای از دو رأس مقابل به موازات قطر قاعده رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مقطع، به‌شرطی که ارتفاع هرم h و ضلعهای قاعده‌ها a و b باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۴.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت تصویر

۱۱۶. مساحت قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای، که همهٔ یالهای جانبی آن دو به دو برهم عمودند، مثلثی است با مساحتی برابر S. مساحت یکی از وجه‌های جانبی آن Q می‌باشد. مساحت تصویر این وجه را روی قاعده پیدا کنید.

۵.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۱۱۷. قاعده هرمی، مربع ABCD به ضلع a می‌باشد. یال جانبی SC بر صفحه قاعده هرم عمود و طول آن برابر b است. نقطهٔ M روی یال AS انتخاب شده است و نقطه‌های M، B و D روی سطح جانبی مخروطی قرار دارند که A رأس آن و نقطهٔ C در صفحهٔ قاعده آن قرار دارد. سطح جانبی مخروط را حساب کنید.

۲.۷.۱. نسبت مساحتها

۱۱۸. هرم منتظمی با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است. هرم را با صفحه‌ای که از رأس قاعده و وسط دو یال جانبی گذشته است، قطع کرده‌ایم. مطلوب است نسبت سطح جانبی هرم به مساحت قاعدهٔ آن، به‌شرطی که بدانیم، صفحهٔ مقطع بر یکی از وجه‌های جانبی عمود است. (بر کدام وجه؟)

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۱۹. قاعدهٔ هرم ABCDE، متوازی‌الاضلاع ABCD می‌باشد. هیچ‌یک از وجه‌های جانبی، مثلث منفرجه‌الزاویه نیستند. روی یال DC، نقطهٔ M طوری قرار دارد که خط EM بر BC عمود است. علاوه بر آن، قطر AC از قاعدهٔ هرم و یالهای جانبی ED و EB در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$AC \geq \frac{۵}{۴} EB \geq \frac{۵}{۳} ED$$

مقطعی به شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، از رأس B و وسط یکی از یالهای جانبی گذشته است. نسبت مساحت سطح مقطع را به‌مساحت قاعدهٔ هرم پیدا کنید.

۱۲۰. دو هرم که قاعدهٔ یکی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a و قاعدهٔ دیگری مربعی به‌ضلع $\frac{۳a}{۲}$ است، به ترتیبی مجاور یکدیگر قرار گرفته‌اند که قاعده‌های آنها بر یک صفحه و رأسهای آنها در یک طرف آن صفحه واقعند. ارتفاع هرم اوّل h و ارتفاع هرم دوم $\frac{۳h}{۲}$ است. صفحه‌ای موازی صفحهٔ دو قاعده درنظر می‌گیریم که از وسط ارتفاع هرم چهاروجهی بگذرد و در دو هرم، دو مقطع پدید آورد؛ نسبت مساحتهای مقطعها را تعیین کنید.

۱۲۱. در هرم شش‌بر منتظمی SABCDEF (S رأس هرم است) و بر روی قطر AD، سه نقطه

را طوری اختیار می‌کنیم که قطر را به چهار قسمت مساوی تقسیم کند. از نقطه‌های تقسیم، صفحه‌های قاطعی به‌موازات صفحهٔ SAB می‌گذرانیم. نسبتهای مساحتهای مقاطع حاصل را پیدا کنید.

۱۲۲. در هرم چهاربر منتظم ناقص، دو مقطع به‌ترتیب زیر رسم می‌شوند:
یکی از آنها، از قطرهای قاعده‌ها می‌گذرد و دیگری از ضلع قاعدهٔ پایین و ضلع مقابل آن از قاعدهٔ بالا. زاویهٔ بین صفحه‌های دو مقطع را α درنظر می‌گیریم. نسبت مساحتهای سطح دو مقطع را پیدا کنید.

۳.۷.۱. رابطهٔ بین مساحتها

۱۲۳. اگر رأس یک هرم کنج سه‌وجهی سه قائمه باشد، مربع مساحت قاعدهٔ این هرم مساوی است با مجموع مربعهای مساحتهای سه‌وجه آن.

۱۲۴. مساحت قاعده‌های یک هرم ناقص، بترتیب، برابر S_1 و S_2 و مساحت سطح جانبی آن، برابر S است. ثابت کنید، اگر صفحه‌ای موازی با قاعده، هرم ناقص را به دو هرم ناقص دیگر تقسیم کند که، در هرکدام از آنها، بتوان کره‌ای محاط کرد، آن‌وقت $S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})(\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2})^2$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۷۷

۸.۱. حجم

۱.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم هرم

۱.۱.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم هرم مثلث‌القاعده

۱۲۵. ضلعهای قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای برابر است با a، b و c و هر سه زاویهٔ مسطحهٔ رأس

این هرم قائمه‌اند. حجم هرم را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۲۶. همهٔ زاویه‌های رأس D از هرم ABCD قائمه و مجموع زاویه‌های رأس هرم ۹۰ درجه می‌باشد. اگر $DA = a$ و $DB = b$ باشد، حجم هرم را بیابید.

۱۲۷. یالهای جانبی و دو ضلع از قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای با هم برابرند و طول هریک از آنها برابر است با b. زاویهٔ بین دو ضلع برابر قاعدهٔ هرم، برابر است با α. حجم هرم را پیدا کنید.

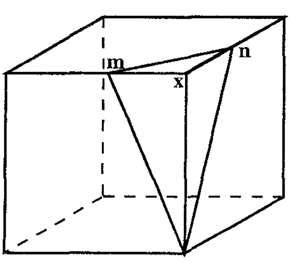
مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۲۸. در هرم SABC، حاصلضرب طولهای یالهای هریک از چهار وجه هرم، با هم برابرند. طول ارتفاع وارد از رأس S بر صفحهٔ ABC برابر $۲\sqrt{\frac{۱۰۲}{۵۵}}$ و اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{A}B$ برابر $\operatorname{Arc}\cos(\frac{۱}{۶}\sqrt{\frac{۱۷}{۲}})$ است. حجم هرم SABC را حساب کنید. درصورتی که $SA^۲ + SB^۲ - ۵SC^۲ = ۶۰$ باشد.

۱۲۹. هرم مثلث‌القاعدهٔ SABC داده شده است. کره‌ای به شعاع R، در نقطهٔ C بر صفحهٔ ABC و در نقطهٔ S بر یال SA مماس شده است. خط راست BS کره را برای بار دوم در نقطه‌ای مقابل C قطع می‌کند. حجم هرم SABC را پیدا کنید، در صورتی که $BC = a$ و $SA = b$ باشد.

۱۳۰. در هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD، مقطعی از یال AD و نقطهٔ E($|AD| = a$ و E وسط BC است) می‌گذرد. این مقطع با وجه‌های ACD و ADB بترتیب زاویه‌هایی برابر با α و β تشکیل می‌دهد. حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که مساحت مقطع ADE برابر S می‌باشد.

۱۳۱. در شکل، یک مکعب را می‌بینید که یک هرم از آن جدا شده است. دو رأس x و y از هرم، دو رأس مجاور از مکعبند، و رأسهای m و n از هرم، وسطهای یالهایی از مکعبند که بر رأس x می‌گذرند. اگر درازای یال مکعب ۱ سانتیمتر باشد، حجم هرم xymn چند سانتیمتر مکعب است؟



الف) $\frac{۱}{۸}$ ب) $\frac{۱}{۱۲}$ ج) $\frac{۱}{۱۸}$

د) $\frac{۱}{۲۴}$ هـ) $\frac{۱}{۴۸}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۱۳۲. هرم مثلث‌القاعدهٔ SABC را درنظر می‌گیریم. ازنقطهٔ E وسط یال SB صفحهٔ DEF را موازی قاعدهٔ ABC ، صفحهٔ EGH را موازی وجه SCA و صفحهٔ EDG را رسم می‌کنیم؛ در این صورت هرم SABC به دو منشور هم‌ارز DEFIGC و ADIHEG و دو هرم مثلث‌القاعدهٔ هم‌ارز SDEF و EHBG تبدیل می‌شود. می‌توان همین کار را برای هرم SDEF انجام داد و به‌همین منوال کار را ادامه داد. حجم هرم SABC را بیابید.

۱۳۳. به وسیلهٔ محاسبه ثابت کنید که حجم یک هرم ناقص مثلث‌القاعده با قاعده‌های موازی، هم‌ارز دو منشور است که دارای ارتفاع همین هرم ناقص هستند و قاعده‌های یکی از آنها نصف مجموع اندازه‌های ضلعهای متناظر دو قاعدهٔ هرم ناقص هستند و دیگری ثلث مثلثی که ضلعهای آن نصف تفاضل ضلعهای متناظر دو قاعدهٔ هرم است.

۱۳۴. هرگاه درهرم مثلث‌القاعده‌ای طول دو یال غیرمتقاطع a ، b و φ زاویهٔ بین آنها و c طول عمود مشترک آنها باشد، ثابت کنید حجمش برابر است با:

$$\frac{1}{6}abc\sin\varphi$$

۱۳۵. مثلث ABC با مساحت S و شعاع دایرهٔ محیطی R داده شده است. در صفحهٔ مثلث از رأسهای A، B و C، سه عمود اخراج می‌کنیم و نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 را روی آنها طوری اختیار می‌کنیم که پاره‌خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ازنظر طول بترتیب با طول ارتفاعهای مثلث که از رأسهای A، B و C رسم می‌شوند، برابر باشند. حجم هرمی را که بین صفحه‌های A_1B_1C ، A_1BC_1 ، AB_1C_1 و ABC محصور شده، پیدا کنید.

۱۳۶. حجم هرمی مثلث‌القاعده را به‌دست آورید، با توجه به این‌که این هرم را حد مجموع منشورهای محاط درآن درنظر بگیرید.

۱۳۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، قاعدهٔ هرم SABC را تشکیل می‌دهد، که طول یال SA در آن برابر b می‌باشد. حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که می‌دانیم وجه‌های جانبی هرم با هم معادل هستند.

۱۳۸. قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده‌ای، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌باشد که طول ضلع آن a است. حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که،

$$S\hat{A}B=\beta \quad , \quad A\hat{S}C=A\hat{S}B=\alpha$$

۱۳۹. قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD را، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تشکیل می‌دهد. وجه BCD با صفحهٔ قاعدهٔ هرم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازد. مرکز دایره‌ای به‌شعاع واحد

که بر یالهای AB و AC و وجه BCD مماس می‌باشد، بر روی خطی قرار دارد که از نقطهٔ D بر قاعده عمود می‌شود. طول ارتفاع DH از هرم برابر با نصف طول ضلع قاعدهٔ هرم است. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۴۰. حجم هرمی که قاعده‌اش مثلث‌متساوی‌الاضلاع به‌ضلع ۶ و هریک از یالهای جانبی آن $\sqrt{۱۵}$ است، برابر است با :

الف) ۹   ب) $\frac{۹}{۲}$ ج) $\frac{۲۷}{۲}$

د) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

۱۴۱. اندازهٔ حجم یک هرم منتظم مثلث‌القاعده را بیابید درصورتی که اندازهٔ هر یال قاعدهٔ مساوی b و اندازهٔ هر یال جانبی مساوی a باشد.

۱۴۲. حجم هرم مثلث‌القاعده منتظمی را بیابید که طول ضلع قاعدهٔ آن a و طول یال جانبی‌اش برابر b است.

۱۴۳. هرم منتظم مثلث‌القاعده‌ای است که زاویهٔ هر وجه رأس α و فاصلهٔ هر دو یال مقابل l است. حجم هرم را حساب کنید.

۱۴۴. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع. ارتفاع هرم برابر h و زاویهٔ دو وجهی مجاور به‌قاعدهٔ آن برابر ۲α است. مطلوب است حجم هرم.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۴۵. در هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم SABC (S رأس هرم است.) نقطهٔ E وسط سهم وجه SBC و نقطه‌های F، L و M بترتیب بر روی AB، AC و SC قرار دارند. $AL = \frac{۱}{۱۰}AC$ علاوه بر آن می‌دانیم EFLM ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و طول قاعدهٔ EF از آن برابر $\sqrt{۷}$ می‌باشد. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۴۶. وجه‌های یک هرم مثلث‌القاعده، عبارتند از مثلثهای متساوی‌الساقین مساوی با هم. در هریک از این مثلثها، طول قاعده برابر با a و زاویهٔ روبه‌روی آن برابر با α است. حجم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱.۸.۱.۱.۲. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ چهارضلعی

۱.۸.۱.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ مستطیل

۱۴۷. در قاعدهٔ هرمی یک مستطیل قرار دارد که زاویهٔ بین قطرهای آن برابر α است. هر یال جانبی هرم با قاعدهٔ آن، زاویه‌ای برابر φ ساخته است. حجم هرم را پیدا کنید، به‌شرطی که شعاع کرهٔ محیطی هرم برابر R باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۴۸. قاعدهٔ یک هرم، عبارت است از یک مستطیل؛ طول هریک از یالهای جانبی هرم برابر m است. زاویه‌های مسطحه در کنجهای سه‌وجهی مجاور قاعدهٔ هرم، عبارتند از α، β و 90°. حجم هرم را پیدا کنید.

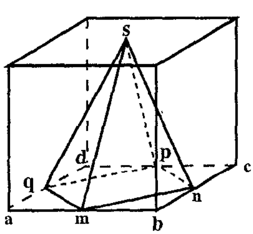
مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۴۹. قاعده هرم چهاربری، یک مستطیل است. ارتفاع هرم h می‌باشد، حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که مساحت هر پنج وجه آن با هم برابرند.

۱۵۰. قاعدهٔ یک هرم، مستطیلی است که زاویهٔ حاده بین دو قطر آن α، $(\alpha < 60)$ و یالهای جانبی آن مساوی و ارتفاع آن h می‌باشد. در داخل هرم، هرم مثلث‌القاعده‌ای طوری قرار داده شده که رأس آن، بر رأس هرم اوّل منطبق است و رأسهای قاعده آن، روی سه ضلع مستطیل قرار دارند. حجم هرم چهاربر را پیدا کنید، درصورتی که می‌دانیم همه یالهای جانبی هرم سه‌بر، با هم برابر و وجه‌های جانبی آن با هم معادل هستند.

۱.۸.۱.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ مربع

۱۵۱. درازای یال مکعبی که در شکل می‌بینید یک واحد طول است. رأس هرم s.mnpq مرکز وجه بالایی مکعب و رأسهای قاعدهٔ آن وسطهای ضلعهای وجه پایینی مکعب هستند. حجم این هرم برحسب واحد حجم برابر است با:



الف) $\frac{1}{9}$ ب) $\frac{1}{6}$ ج) $\frac{1}{4}$

د) $\frac{1}{3}$ هـ) $\frac{1}{2}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۱۵۲. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ مربعی. از وسط ارتفاع، عمودی بر یال جانبی و عمودی

دیگر بر وجه جانبی فرود آورده‌ایم. طول این دو عمود، بترتیب، برابر h و a شده است. مطلوب است حجم هرم.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۵۳. حجم هرم مربع‌القاعده‌ای را پیدا کنید که ارتفاع آن مساوی a و سطح مقطع قطری آن مساوی Q باشد. ($Q=۱۲۰m^۲$ و $a=۱۵m$)

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۵۴. حجم هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی را بیابید که طول هر ضلع قاعده‌اش ۶ و مساحت جانبی‌اش چهار برابرمساحت قاعدهٔ آن باشد.

۱۵۵. قاعدهٔ هرم SABCD، مربع ABCD می‌باشد. یال SD ارتفاع هرم است. حجم هرم را پیدا کنید، درصورتی که،

$$AB=BC=\sqrt{۵}\ ,\ AD=DC=\sqrt{۲}\ ,\ AC=۲$$
$$SA+SB=۲+\sqrt{۵}$$

۱۵۶. قاعدهٔ هرم چهاربر SABCD، مربع ABCD به‌ضلع a می‌باشد. هر دو زاویهٔ بین وجه‌های جانبی متقابل هرم، برابر α است. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۵۷. هرم منتظمی با قاعدهٔ مربع شکل داده شده است. طول ضلع قاعدهٔ هرم برابر a و زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن برابر α است. نیم‌کره‌ای در این هرم محاط کرده‌ایم که صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ آن بر قاعدهٔ هرم قرارگرفته است. مطلوب است حجم چندوجهی که چهار رأس آن بر چهار نقطهٔ تماس کره با وجه‌های جانبی هرم و رأس پنجم آن بر مرکز نیم‌کره واقع است.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۵۸. فرمولی برای حجم هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای بیابید که هریک از وجه‌های جانبی آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع s است.

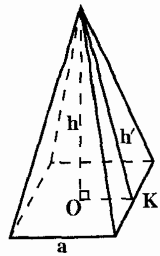
۱۵۹. هرمی را درنظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن یکی از وجه‌های مکعبی به یال a بوده و رأس آن بر روی قطر مکعب واقع است. می‌دانیم مجموع مربعات چهار یال جانبی هرم برابر $۴a^۲$ می‌باشد. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۶۰. حجم هرم مربعی منتظم در شکل صفحه بعد را با توجه به داده‌های زیر به‌دست آورید:

الف. $h'=۲۵cm\ ,\ a=۱۴cm$ ؛

ب. $h'=۶/۵cm\ ,\ h=۶cm$ ؛

پ. $h=۱/۳cm\ ,\ a=۱cm$.



۱.۸.۱.۱.۲.۳. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ لوزی

۱۶۱. یک لوزی به‌ضلع a و زاویهٔ حادهٔ α، قاعدهٔ یک هرم را تشکیل می‌دهد که ارتفاع آن مساوی قطر بزرگ لوزی است. اندازهٔ حجم این هرم را تعیین کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱.۸.۱.۱.۲.۴. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ ذوزنقه

۱۶۲. قاعدهٔ یک هرم را ذوزنقه‌ای تشکیل می‌دهد که هر یک از دو ساق و قاعدهٔ کوچکتر آن، برابر با a و زاویهٔ حادهٔ آن برابر با α است. هر یک از وجه‌های جانبی با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر φ ساخته‌اند. حجم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۶۳. اگر قاعدهٔ یک هرم یک ذوزنقه باشد، حجم آن برابر است با $\frac{1}{3}$ حاصلضرب مجموع قاعده‌های a و b از ذوزنقه در R مساحت مثلث تصویر هرم روی یک صفحهٔ عمود بر این قاعده‌ها.

۱۶۴. شیب وجه‌های جانبی هرمی با قاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، نسبت به صفحهٔ قاعده، یکسان است. از رأس هرم، عمودهایی بر ساقهای ذوزنقه فرود می‌آوریم و پای عمودها را به‌هم وصل می‌کنیم. زاویهٔ رأس مقطع مثلثی حاصل برابر α و مساحت این مقطع برابر S است. حجم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱.۸.۱.۱.۲.۵. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ n ضلعی

۱۶۵. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ nضلعی. از رأس هرم و دو رأس n ضلعی قاعده، صفحه‌ای گذرانیده‌ایم که با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α تشکیل داده است. این صفحه، قاعده را به‌دو چندضلعی تقسیم کرده است که، بترتیب، دارای $(r+2)$ و $(n-r)$ رأس هستند $(r < \frac{n-2}{2})$. مطلوب است حجم هرم، به‌شرطی که طول ضلع مشترک این دو چندضلعی، برابر b باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۶۶. هرم منتظمی داریم که قاعدهٔ آن را یک nضلعی تشکیل می‌دهد. طول ضلع nضلعی قاعده برابر $2a$ و اندازهٔ زاویهٔ دووجهی مجاور به قاعدهٔ هرم برابر 2α است. حجم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۶۷. یک چندضلعی، با مجموع زاویه‌های داخلی $90n$ درجه، قاعدهٔ هرم منتظمی به ارتفاع h را تشکیل می‌دهد. نسبت سطح جانبی هرم به مساحت قاعدهٔ آن برابر است با k. حجم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۶۸. دو هرم منتظم، ارتفاعهایی مشترک دارند؛ رأس هر هرم بر مرکز قاعدهٔ هرم دیگر واقع است؛ یالهای جانبی یکی، یالهای جانبی دیگری را قطع می‌کنند. یال جانبی به‌طول l از هرم اوّل با ارتفاع زاویه‌ای برابر α و یال جانبی هرم دوم با ارتفاع زاویه‌ای برابر β می‌سازند. حجم بخش مشترک دوم هرم را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۱.۸.۱.۱.۲.۶. اندازهٔ حجم هرم با بیش‌ترین تعداد یال

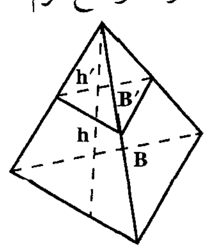
۱۶۹. از همه هرمهایی که طول همه یالهای آنها برابرند، (طول هر یال a) حجم هرمی را پیدا کنید که، از نظر تعداد، بیش‌ترین یالها را داشته باشد.

۱.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم هرم ناقص

۱۷۰. نشان دهید که حجم هرم ناقص از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

که B و B' مساحتهای قاعده‌ها و h ارتفاع هرم ناقص است.



۱۷۱. ثابت کنید که حجم یک هرم ناقص با قاعده‌های متوازی، که در آن h، b، b' و b'' بترتیب اندازه‌های ارتفاع، مساحت دو قاعده و مساحت مقطعی که از وصل کردن وسط

یالهای این هرم پدید می‌آید، می‌باشند، از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$V = \frac{h}{۶}(b + b' + ۴b'')$$

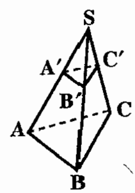
۱۷۲. حجم هرم ناقص را که مساحت دو قاعدهٔ آن بترتیب ۱۶ و ۱۲ سانتیمتر مربع و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر است، حساب کنید.

۱۷۳. حجم یک هرم ناقص با قاعده‌های موازی را، با استفاده از هرم مشخص شده به‌وسیلهٔ یک نقطهٔ O واقع در درون یک قاعده،که آن را به تمام رأسهای جسم وصل می‌نماییم، به‌دست آورید.

۱۷۴. هرمی به‌حجم V را با صفحه‌ای موازی قاعده که از وسط ارتفاع نظیر این قاعده می‌گذرد، قطع می‌کنیم. حجم هرم ناقص برابر است با :

۱) $\frac{۳}{۴}V$ ۲) $\frac{۷}{۸}V$ ۳) $\frac{۸}{۹}V$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}V$

کنکور سراسری رشتهٔ علوم تجربی



۱۷۵. حجم منشور مثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$ برابر V است. نقطه‌های M و N را بترتیب روی یالهای BB_1 و CC_1 طوری انتخاب می‌کنیم که $BM/BB_1 = m$، $CN/CC_1 = n$ باشد. حجم چندوجهی $ABCA_1MN$ (هرم ناقص) را بیابید.

۱۷۶. ارتفاع هرم ناقصی h و مساحت مقطع متوسط آن S است. دامنه تغییرات حجم هرم را تعیین کنید.

۱۷۷. در هرم چهاربر ناقص منتظم، $A_1B_1C_1D_1$، AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 یالهای جانبی، به‌ضلع ۱ قاعده بالا می‌باشد. طول ضلع قاعده پایین ۷ است. صفحه‌ای از یال B_1C_1 گذشته، بر صفحه AD_1C عمود شده و هرم را به دو قسمت با حجمهای مساوی تقسیم کرده است. حجم هرم را پیدا کنید.

۱۷۸. حجم هرم ناقصی را پیدا کنید که ارتفاع آن برابر ۶، ضلع مربع قاعدهٔ پایین آن برابر ۴ و ضلع مربع قاعدهٔ بالای آن برابر ۲ باشد.

از پاپیروس مسکو

۱۷۹. اندازهٔ حجم یک تپهٔ شنی به شکل هرم ناقص با قاعده‌های مستطیل را که ابعاد یکی از

آنها دو برابر دیگری است، اندازهٔ ارتفاع آن مساوی کوچکترین ضلع قاعده است و خط واصل بین مرکزهای دو مستطیل بر صفحهٔ آنها عمود است، به‌دست آورید.

۱۸۰. بخشی از یک هرم که به قاعده، یک مقطع، و نواحی ذوزنقه‌ای وجه‌های جانبی محدود می‌شود، هرم ناقص نام دارد. A، B، C، D، E، V، W، X، Y و Z رأسهای یک هرم ناقصند. حجم این هرم ناقص را بیابید.

۱۸۱. در یک هرم ناقص منتظم، قاعدهٔ بزرگتر شش‌ضلعی منتظمی است به ضلع ۸ و ارتفاعش برابر $۸\sqrt{۲}$ و طول یال جانبی‌اش ۱۲ است. حجم این هرم ناقص کدام است؟

۱) $۶۷۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳۳۶\sqrt{۳}$ ۳) $۴۴۸\sqrt{۶}$ ۴) $۲۰۱۶\sqrt{۳}$

۳.۱.۸.۱. بیش‌ترین مقدار حجم هرم

۱۸۲. اگر مجموع شش یال هرم سه قائمه PABC ($A\hat{P}B = B\hat{P}C = C\hat{P}A = ۹۰^\circ$) برابر S باشد، حداکثر مقدار حجم هرم چقدر است؟

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۶

۱۸۳. قاعدهٔ هرم چهاربری، مستطیلی است که طول یکی از ضلعهای آن برابر a و طول هر یک از یالهای جانبی آن برابر b می‌باشد. بیش‌ترین مقدار حجم این هرم چقدر است؟

۱۸۴. اگر مجموع شش یال در هرم سه قائمهٔ PABC ($A\hat{P}B = B\hat{P}C = C\hat{P}A = ۲\theta$) برابر S باشد، حداکثر مقدار حجم هرم چقدر است؟

۴.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم و ارتفاع هرم

۱۸۵. از نقطهٔ O خط Δ را بر صفحهٔ OAB عمود می‌کنیم و روی آن نقطه‌ای مانند C چنان می‌گیریم که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد. اگر $AB = I$ فرض شود، حجم هرم OABC و ارتفاع وارد از O بر صفحهٔ ABC را برحسب I حساب کنید (توجه کنید که در این فرض، دیگر طول OA مساوی ۲a نیست).

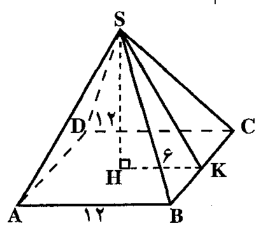
۱۸۶. قاعدهٔ هرم قائمی مستطیلی است به ابعاد ۰/۶ متر و ۰/۴ متر و طول یالهای هرم برابر ۰/۸ متر می‌باشد. ارتفاع و حجم هرم را تعیین کنید (تا سه رقم اعشاری).

۱۸۷. قاعده هرم قائمی مستطیلی است که محیطش مقدار ثابتی برابر ۱۲ متر و طول ارتفاع هرم برابر با ۸ متر است. بیش‌ترین مقدار حجم هرم را تعیین کنید.

۱۸۸. حجم هرم ناقص منتظمی به ارتفاع $۴\sqrt{۳}$ را که قاعده‌های آن ۶ضلعیهایی به‌ضلعهای ۵ و ۲ هستند، تعیین کنید. تحقیق کنید ارتفاع هرم منتظمی که این هرم ناقص، جزئی از آن است، چه‌اندازه است؟

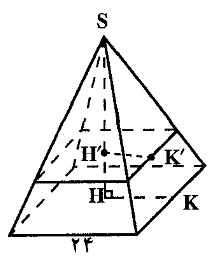
۱. ۸. ۱. ۵. اندازهٔ حجم و سطح جانبی هرم

۱۸۹. حجم هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای را بیابید که ارتفاعش ۱۲ و قاعده‌اش نیز به ضلع ۱۲ باشد. مساحت رویهٔ جانبی هرم را نیز حساب کنید.



۱۹۰. سطح جانبی و حجم هرم مربع‌القاعده منتظم به‌ضلع a و ارتفاع ۳a را حساب کنید.

۱۹۱. صفحه‌ای به موازات قاعدهٔ یک هرم منتظم مربع‌القاعده، ارتفاع هرم را در نقطه‌ای قطع کرده است که فاصلهٔ آن تا رأس، سه‌چهارم ارتفاع است. ارتفاع هرم ۱۶ و طول هرضلع قاعده ۲۴ است. مساحت رویهٔ جانبی و حجم هرم ناقص ایجاد شده را به‌دست آورید.



۱. ۸. ۱. ۶. اندازهٔ حجم و سطح کل هرم

۱۹۲. هرمی است که تمام سطح‌های جانبیش با قاعده، زاویهٔ α می‌سازد. اگر S مساحت قاعده و ۲p محیط آن باشد، حجم هرم و سطح کل آن را محاسبه کنید.

۱. ۸. ۱. ۷. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم هرم

۱۹۳. مساحت جانبی، مساحت کل و حجم هرم منتظم سه‌پهلو را که اندازهٔ هر یال و اندازهٔ هر

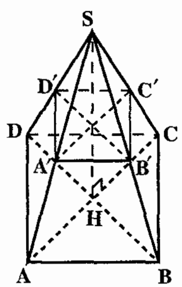
ضلع قاعدهٔ آن مساوی a باشد، برحسب a تعیین کنید.

۱۹۴. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم هرمی را که قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع $۱۲\sqrt{۲}$ و اندازهٔ هر یال جانبی آن ۲۰ سانتیمتر است، حساب کنید.

۱۹۵. حجم ومساحت جانبی و مساحت کل هرم منتظمی را که قاعدهٔ آن شش‌ضلعی به‌ضلع ۴ و ارتفاع آن مساوی ۱۴ است، تعیین کنید.

۱۹۶. هرم منتظمی را درنظر بگیرید که قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع ۱۲ سانتیمتر و ارتفاع آن $۸\sqrt{۲}$ سانتیمتر باشد. این هرم را با صفحه‌ای به فاصلهٔ $۳\sqrt{۲}$ سانتیمتر از رأس و موازی قاعده قطع می‌کنیم. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم هرم ناقص حاصل را حساب کنید.

۱۹۷. هرمی راکه قاعدهٔ آن مربعی به‌ضلع $۶\sqrt{۲}$ واندازهٔ هر یال آن ۱۰ سانتیمتر است، صفحه‌ای که از وسط یالها می‌گذرد، قطع کرده و یک هرم ناقص پدید آمده است. مساحت سطح جانبی، سطح کل و حجم هرم ناقص را بیابید.



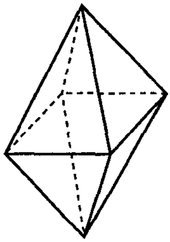
۸.۱.۸.۱. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده

۱۹۸. دو هرم مثلث‌القاعده با حجمهای مساوی V در فضا نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند. حجم مشترک آنها را پیدا کنید، درصورتی که نقطهٔ O روی پاره‌خطی قرار دارد که رأس هرم را به مرکز ثقل قاعده وصل و خود پاره‌خط را به‌نسبت ۱:۱، ۳:۱ ، ۲:۱ و ۴:۱ از رأس تقسیم می‌کند.

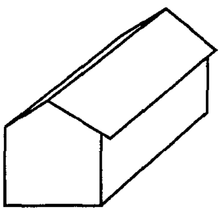
۱۹۹. هرم مثلث‌القاعدهٔ ABCD داده شده است. اندازهٔ حجم هرمی را بیابید که رأسهای آن نقطه‌های برخورد میانه‌های وجه‌های هرم ABCD باشند (اندازهٔ حجم هرم ABCD را می‌دانیم).

۲۰۰. هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ SABCD (به‌رأس S) به حجم V داده شده است. در روی امتداد یال CD نقطهٔ M را چنان انتخاب کنید که داشته باشیم $MD = ۲DC$. اگر E وسط SC باشد و صفحهٔ MBE یالهای SD و AD را بترتیب در نقطه‌های F و G ببرد، حساب کنید حجم هرمهای EMBC و EFMG را برحسب V.

۲۰۱. مقطع هرم چهاربر منتظمی، پنج‌ضلعی منتظم به‌ضلع a شده است. حجم چهاروجهی را پیدا کنید.



۲۰۲. اگر دو هرم منتظم مربع‌القاعده که وجه‌های جانبی آنها مثلثهای متساوی‌الاضلاعند، در قاعده مشترک باشند، جسم هشت‌وجهی حاصل می‌شود که آن را هشت وجهی منتظم می‌نامند. ثابت کنید که حجم هشت‌وجهی منتظمی که طول هر یال آن e است از فرمول $V=\frac{1}{3}\sqrt{2}e^3$ به دست می‌آید.

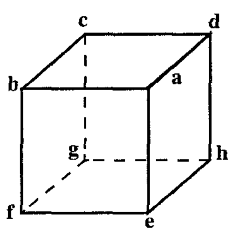


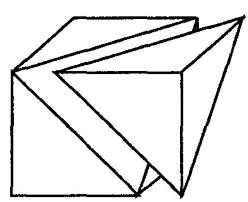
۲۰۳. مقاطعه‌کاری برای محاسبهٔ هزینهٔ تهویهٔ یک ساختمان، باید حجم هوای داخل ساختمان را بداند. ساختمان به‌صورت شکل مقابل طراحی شده است. ابعاد ساختمان ۳۵ m در ۱۵ m است. ارتفاع دو دیوار جنبی ساختمان ۴m و ارتفاع بلندترین نقطهٔ بام ۵m است. حجم ساختمان را بیابید.

۲۰۴. از مکعب abcdefgh ، شکل سمت چپ، مطابق با نمونهٔ شکل سمت راست، چهار هرم a.bde ، c.bdg ، f.beg ، h.deg جدا می‌شود. اگر حجم مکعب داده شده V باشد، پس از این چهار برش، چه حجمی از آن باقی می‌ماند؟

الف) $\frac{1}{6}V$ ب) $\frac{1}{4}V$ ج) $\frac{1}{3}V$ د) $\frac{1}{2}V$ هـ) $\frac{2}{3}V$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

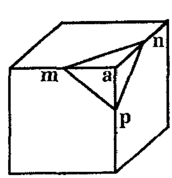




۲۰۵. مکعب شکل زیر به حجم V است. از این مکعب ۸ هرم را جدا می‌کنیم که رأس هر یک از هرمها بر یک رأس مکعب واقع باشد و صفحهٔ قاعدهٔ آن از میان یالهای مجاور آن رأس بگذرد، همان‌گونه که یکی از آنها، amnp ، در شکل نشان داده شده است. حجم چندوجهی باقیمانده چقدر می‌شود؟

الف) $\frac{1}{2}V$ ب) $\frac{2}{3}V$

ج) $\frac{3}{4}V$ د) $\frac{5}{6}V$



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۲.۸.۱. نسبت حجمها

۲۰۶. مساحت یک مقطع هرمی ۲۰ و مساحت قاعدهٔ هرم ۴۵ است. اگر ارتفاع هرم ۶ باشد، فاصلهٔ رأس هرم تا مقطع را بیابید. نسبت حجمهای دو هرم ایجاد شده چقدر است؟

۲۰۷. هرم $S.ABC...$ و ارتفاع آن SO داده شده است. روی وجه‌های جانبی آن پاره‌خطهای $SA' = \frac{SA}{۳}$ ، $SB' = \frac{SB}{۳}$ و ....، و روی ارتفاع از طرف O و در جهت OS ، $OS' = \frac{OS}{۳}$ را جدا می‌کنیم. نسبت مساحتهای کل و حجمهای هرم $S'.A'B'C'...$ و هرم $S.ABC...$ را تعیین کنید.

۲۰۸. صفحه‌ای با قطع وجه‌های جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای، میانه‌های وجه‌هایی را هم که از یک رأس خارج می‌شوند به نسبتهای ۱ :۲ ، ۲ :۱ و ۱ :۴ تقسیم می‌کند. (اندازه‌ها از رأس سنجیده می‌شوند.) این صفحه، حجم هرم را به چه نسبتی تقسیم می‌کند.

۲۰۹. در داخل هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظمی، رأس یک کنج سه‌وجهی قرار دارد. همهٔ زاویه‌های رأس کنج قائمه‌اند و صفحه‌های نیمساز زاویه‌های رأس از رأسهای قاعده می‌گذرند. حجم هرم به‌وسیلهٔ سطح جانبی کنج به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟ در صورتی که هر وجه هرم، به‌وسیلهٔ آن به دو قسمت معادل تقسیم می‌شود.

۲۱۰. هرم منتظم $SABC$ داده شده است. (S رأس هرم است.) یال SC از این هرم، با یال جانبی منشور منتظم $A_1B_1CA_2B_2S$ مشترک است.
(A_1A_2 و B_1B_2 و CS یالهای جانبی و A_1B_1C یکی از قاعده‌های آن می‌باشد.) رأسهای A_1 و B_1 بر روی صفحه وجه SAB هرم قرار دارند. چه قسمتی از تمام حجم هرم، آن قسمت از حجم آن را تشکیل می‌دهد که در داخل منشور واقع شده است؟ در صورتی که می‌دانیم نسبت طول یال جانبی هرم به طول ضلع قاعده آن $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است.

۲۱۱. حجم هرم مثلث‌القاعده‌ای، به‌وسیله صفحه‌ای که موازی با دو یال متنافر آن رسم می‌شود و یکی از یالهای دیگر را به نسبت ۱ :۳ قطع می‌کند، به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۲۱۲. از رأس A و میانگاه یالهای BB_1 و B_1C_1 در منشور مثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$ برشی رسم می‌کنیم. این برش منشور را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. نسبت حجمهای آنها را پیدا کنید.

۲۱۳. سه خط راست، از نقطهٔ A می‌گذرند. دو نقطهٔ B_1 و B_2 را روی یکی از آنها، دو نقطهٔ C_1 و C_2 را روی خط دیگر و D_1 و D_2 را روی خط سوم اختیار می‌کنیم، ثابت کنید :

$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_2C_2D_2}} = \frac{AB_1 . AC_1 . AD_1}{AB_2 . AC_2 . AD_2}$$

۲۱۴. قاعدهٔ منشور قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD می‌باشد که در آن، AD موازی BC و $AD/BC = n$ و $n > 1$. از یالهای AA_1 و BC صفحه‌هایی موازی با قطر B_1D و از یالهای DD_1 و B_1C_1 صفحه‌هایی به موازات قطر A_1C مرور داده شده است. نسبت حجم هرم مثلث‌القاعدهٔ محصور بین این صفحه‌ها، به حجم منشور را پیدا کنید.

۲۱۵. در هرم چهارگوش SABCD که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع ABCD است برشی را از یال AB و میانگاه M یال SC رسم کرده‌ایم. این برش هرم را به دو قسمت تقسیم کرده است. نسبت حجمهای آنها را به‌دست آورید.

۳.۸.۱. رابطهٔ بین حجمها

۲۱۶. برش $A_1B_1C_1$ را در هرم مثلث‌القاعده SABC به موازات قاعده طوری رسم می‌کنیم به‌طوری که $|SA_1|/|SA| = k$ باشد. اگر V_1 و V_2 بترتیب حجم هرمهای $SA_1B_1C_1$ و SABC باشد، آن‌گاه $V_1 = k^3 V$ را ثابت کنید.

۲۱۷. ثابت کنید مجموع حجم هرمهایی که قاعدهٔ آنها وجه‌های جانبی یک منشور و رأس مشترک آنها یک نقطه درون یک قاعدهٔ منشور باشد، مقدار ثابتی است. اندازهٔ این مقدار ثابت را تعیین کنید. حجم منشور را V بگیرید.

۲۱۸. ثابت کنید هر صفحه که بر یک یال هرم سه پهلو و بر وسط یال مقابل به آن می‌گذرد، هرم را به دو جزء که حجمهایشان متساوی است، تجزیه می‌کند.

۲۱۹. نیمخطهای راست OS_1، OS_2 و OS_3، که از نقطهٔ O آغاز شده‌اند، سه صفحهٔ

موازی را، بترتیب، در نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 ؛ A_2 ، B_2 ، C_2 ؛ A_3 ، B_3 ، C_3 قطع کرده‌اند. هرم $OA_1B_2C_3$ حجمی برابر V دارد. حجم هرمهای $OA_1B_1C_1$ ، $OA_2B_2C_2$ ، $OA_3B_3C_3$ را بترتیب V_1 ، V_2 و V_3 می‌نامیم. ثابت کنید:

$$V \leq \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3)$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۹.۱. رابطهٔ متری

۲۲۰. هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم SABC داده شده است. اگر از O' نقطه‌ای واقع بر ارتفاع SO و یا امتداد آن، صفحه‌ای دلخواه رسم کنیم که کنج سه‌وجهی به رأس S را در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کند، ثابت کنید که:

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} = \text{مقدار ثابت}$$

۲۲۱. از نقطهٔ دلخواهی واقع بر روی قاعدهٔ یک هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم، عمودی اخراج شده است. ثابت کنید مجموع طول‌های پاره‌خطهایی که پای عمود را به محل برخورد خط عمود با وجه‌های جانبی و یا امتداد آنها وصل می‌کنند، مقدار ثابتی است.

۲۲۲. هرم چهارپهلوی منتظم SABCD داده شده است. نقطهٔ O' را روی ارتفاع SO درنظر گرفته، از این نقطه صفحه‌ای رسم می‌کنیم تا یالهای جانبی هرم را در نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' قطع کند. ثابت کنید که مجموع $\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SC'} + \frac{1}{SD'}$ هنگامی که صفحهٔ گذرنده بر O' تغییر می‌کند، مقدار ثابتی است.

۲۲۳. هرم چهاربر MABCD ، که قاعدهٔ آن ABCD یک چهارضلعی محدب می‌باشد، داده شده است. صفحه‌ای، یالهای MA ، MB ، MC و MD را بترتیب در نقطه‌های K ، L ، P و N قطع می‌کند. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$S_{BCD} \cdot \frac{MA}{MK} + S_{ADB} \cdot \frac{MC}{MP} = S_{ABC} \cdot \frac{MD}{MN} + S_{ACD} \cdot \frac{MB}{ML}$$

۲۲۴. ثابت کنید، اگر مجموع زاویه‌های مسطحهٔ رأس یک هرم، از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد، آن وقت، طول هر یال جانبی هرم، از نصف محیط قاعده کمتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۱.۱۰. مکان هندسی

۱.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۲۲۵. چهارضلعی ABCD در یک صفحه قرار دارد. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که سطح جانبی هرم ABCDM را بتوان با صفحه‌ای طوری قطع کرد که:

a) مقطع مستطیل باشد.

b) مقطع لوزی باشد.

c) مقطع مربع باشد.

d) در حالت قبل مکان هندسی مرکز مربع را تعیین کنید.

۲۲۶. مثلث ABC داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید تا خط راستی که مرکز ثقل هرم ABCM را به مرکز کرهٔ محیطی آن وصل می‌کند، یالهای AC و BM را قطع کند.

۲۲۷. متوازی‌الاضلاع ABCD ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل داده است. صفحه α ، خطهای راست AD ، SA و SC را، بترتیب، در نقطه‌های P ، Q و R طوری قطع کرده است که داریم:

$$\frac{AP}{AD}=\frac{SQ}{SA}=\frac{RC}{SC}$$

در ضمن، نقطه‌های A ، S و C ، یا هر سه، بترتیب متعلق به پاره‌خطهای راست PD، QA و SR هستند و یا هیچ کدام از آنها متعلق به پاره‌خط متناظر نیستند. نقطهٔ N وسط پاره‌خط CD است و نقطه M بر خط راست SB طوری قرار گرفته است که خط راست MN با صفحهٔ α موازی شده است. ثابت کنید، مکان هندسی نقطهٔ M ، برای هر وضع ممکن صفحهٔ α ، عبارت است از پاره‌خط راستی به طول $\frac{\sqrt{۵}}{۲}SB$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۴

۱۱.۱. رسم شکل

۱.۱۱.۱. رسم صفحه

۲۲۸. هرمی داده شده است. این هرم را با رسم صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن به دو چندوجهی هم‌ارز (معادل) تقسیم کنید.

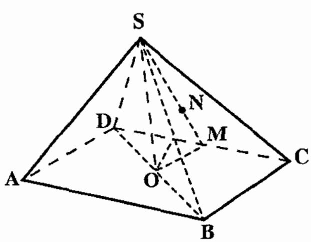
۲۲۹. هرمی را با صفحه‌ای موازی قاعده‌اش چنان قطع کنید که منشوری که قاعده‌اش مقطع حاصل و ارتفاعش مساوی ارتفاع مخروط ناقص ایجاد شده است، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۲۳۰. چند صفحه می‌توان رسم کرد که چهار رأس هرم ABCD از آن به یک فاصله باشند؟
الف) سه صفحه ب) چهار صفحه ج) شش صفحه د) هفت صفحه

دومین دوره المپیادهای ریاضی ایران

۲۳۱. هرم مثلث‌القاعده دلخواه ABCD را درنظر بگیرید. صفحه‌ای توصیف کنید که اشتراکش با این هرم یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی است.

۲۳۲. طول هر یال هرم چهارگوش منتظم SABCD برابر a است. برشی از این هرم را رسم کنید که از قطر BD قاعده طوری عبور کند که با وجه SCD زاویه قائمه درست کند. مساحت این برش را محاسبه کنید.



۲۳۳. قاعدهٔ یک هرم چهارپهلو، چهارضلعی محدبی است. ثابت کنید می‌توان این هرم را با صفحه‌ای چنان قطع کرد که مقطع یک متوازی‌الاضلاع باشد.

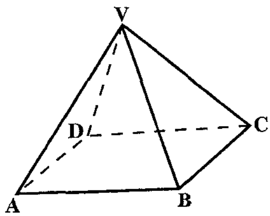
۲۳۴. سطح کل یک هرم چهارپهلوی منتظم را به‌وسیلهٔ رسم صفحه‌ای که بر یکی از یالهای قاعده می‌گذرد، به دو قسمت هم‌ارز تقسیم کنید.

۲۳۵. قاعدهٔ یک هرم یک متوازی‌الاضلاع است. این هرم را به‌وسیلهٔ رسم صفحه‌ای که بر یکی از ضلعهای قاعده می‌گذرد به دو قسمت هم‌ارز (معادل) تقسیم کنید.

۲۳۶. یک هرم ناقص با قاعده‌های موازی را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ها چنان قطع کنید که مساحت مقطع حاصل، واسطهٔ هندسی بین مساحتهای دو قاعده باشد.

۲۳۷. یک هرم ناقص با قاعده‌های موازی را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ها چنان قطع کنید که نسبت فاصله‌های آن از دو قاعده مساوی $\frac{m}{m'}$ باشد. اندازهٔ مساحت این مقطع را برحسب b و b′ اندازه‌های مساحتهای دو قاعدهٔ هرم تعیین کنید.

۲.۱۱.۱. رسم هرم



۲۳۸. هرمها را هم مانند منشورها برحسب شکل قاعده‌هایشان می‌نامند. در این‌جا یک هرم می‌بینید که قاعده‌اش ناحیهٔ مستطیلی است. یک هرم مثلث‌القاعده و یک هرم مربع‌القاعده رسم کنید.

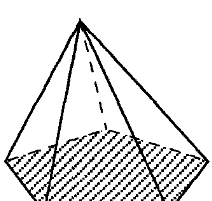
۲۳۹. هرم چهار پهلوی SABCD را با قاعدهٔ ذوزنقه رسم کنید که از آن، وجه ADS، زاویهٔ این وجه با صفحهٔ قاعده، DD′ و AA′ امتدادهای دو ضلع موازی قاعده و اندازهٔ زاویه‌های وجه SBC ، معلوم باشد.

۳.۱۱.۱. رسم مکعب

۲۴۰. در هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی، مکعبی چنان محاط کنید که چهار رأس دیگرش بر صفحهٔ قاعده واقع باشد. اگر همهٔ یالهای هرم مساوی و هر یک از آنها مساوی a باشد، سطح کل و حجم مکعب را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۴.۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۴۱. از جمله چندوجهیهایی که به آسانی توصیف می‌شوند، هرمهایی با قاعدهٔ چندضلعی منتظم هستند. شما با هرمی که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع است، آشنا هستید (یک هرم

مصری). برای هر $n > ۲$، یک هرم وجود دارد که قاعدهٔ آن، یک nضلعی منتظم است. این یک چندوجهی با $n+۱$ وجه، که یکی از آنها، یک n ضلعی منتظم (قاعدهٔ هرم) است، می‌باشد. n وجه دیگر آن مثلثهایی هستند که روی هر یک از n ضلع ساخته شده‌اند. n مثلث با یکدیگر در یک نقطه (رأس هرم) تلاقی می‌کنند. در شکل، هرمی که قاعدهٔ آن یک پنج‌ضلعی منتظم است، نشان داده شده است.

یک الگوی خیاط دقیق برای این شکل رسم کنید. از آن یک رونوشت (کپی) بگیرید و آن را به شکل یک چندوجهی جمع کنید.

۱۲.۱. برش، مقطع

۲۴۲. متوازی‌الاضلاع ABCD نقش قاعدهٔ هرم SABCD را ایفا می‌کند. برشی از هرم را رسم کنید که از رأس A و از نقطه‌های M و P میانگاههای یالهای SB و SD عبور می‌کند. این برش، یال SC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۲۴۳. طول ضلع قاعدهٔ هرم منتظم SABCD برابر a و طول یال جانبی آن برابر l است. برشی از هرم را رسم کنید که بر یال جانبی SC عمود بوده و از میانگاه آن عبور کند.

اگر (a) $l=\sqrt{\frac{۳}{۲}}a$، (b) $l=\sqrt{\frac{۵}{۲}}a$ باشد، آن‌گاه مساحت برش را محاسبه کنید.

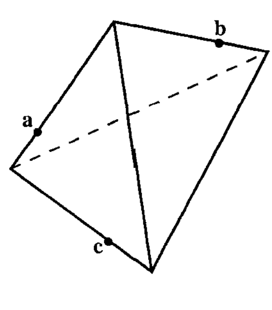
۲۴۴. آیا می‌توان سطح هر کنج سه‌وجهی را با صفحه‌ای طوری قطع کرد که مقطع، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بشود؟

۲۴۵. در شکل زیر تصویر یک هرم با قاعدهٔ مثلث مشاهده می‌شود. سه نقطهٔ a ، b و c یک صفحه را مشخص می‌کنند. مقطع این صفحه هرم، کدام شکل زیر است؟

الف) مثلث　　ب) چهارضلعی　　ج) پنج ضلعی　　د) شش‌ضلعی

هـ) شکلی غیر از این چهار شکل

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

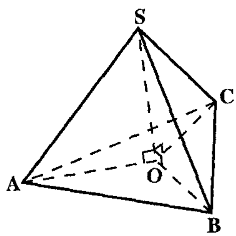


۱۳.۱. ثابت کنید هرم منتظم است

۲۴۶. ثابت کنید اگر قاعدهٔ هرم مثلث‌القاعده ABCD ، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، و

$$D\hat{A}B = D\hat{B}C = D\hat{C}A$$

آن‌گاه ABCD یک هرم منتظم است.



۲۴۷. قاعده هرمی عبارت از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC (شکل) بوده و طول یالهای جانبی SA ، SB و SC از آن با هم برابرند. ثابت کنید که هرم SABC منتظم است.

۲۴۸. ثابت کنید، اگر در هرمی که یالهای جانبی برابر دارد، زاویه‌های دو وجهی بین هر دو وجه مجاور جانبی با هم برابر باشند و درضمن، تعداد ضلعهای قاعدهٔ هرم، عددی فرد باشد، آن وقت، این هرم منتظم است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، مجارستان، ۱۹۷۹

۱۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۴۹. ضلع قاعدهٔ هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای مساوی $۵\sqrt{۲}$ و طول یال جانبی آن مساوی ۱۳ است. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع مکعبی که چهار رأس آن بر چهار یال جانبی هرم قرار گرفته باشد.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۵۰. هرم منتظمی داریم با قاعدهٔ چهارضلعی که ارتفاع آن مساوی h و طول یال جانبی آن مساوی a است. مکعبی در آن محاط کرده‌ایم به‌طوری که چهار رأس آن بر چهار یال جانبی و چهار رأس دیگرش بر صفحهٔ قاعده قرار گیرد. ضلع مکعب را محاسبه کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۵۱. طول ضلع قاعدهٔ هرم مربع‌القاعدهٔ منتظمی برابر a و ارتفاع هرم نیز برابر h است. مکعبی را در درون هرم طوری محاط می‌کنیم که چهار رأس آن روی قاعدهٔ هرم و چهار رأس

دیگر آن روی وجه‌های جانبی هرم قرار گیرد، و نیز چهار یال از مکعب نیز موازی قطر قاعدهٔ هرم باشد. طول یال این مکعب را به‌دست آورید.

۲۵۲. قاعدهٔ هرم ABCD مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۲ می‌باشد. یال BD بر صفحه قاعده عمود، و اندازهٔ آن $۱۰\sqrt{۳}$ است. همه رأسهای هرم روی سطح استوانه دوّار قائمی قرار دارند که محور آن، یال BD و صفحه ABC را قطع می‌کند. شعاع استوانه را تعیین کنید.

۲۵۳. در هرم چهاربر منتظم SABCD با قاعدهٔ ABCD، و به ضلع a ، زاویهٔ بین یالهای جانبی و صفحهٔ قاعده برابر α است. صفحه‌ای که به موازات قطر AC قاعده و یال جانبی BS رسم می‌شود، طوری هرم را قطع می‌کند که در مقطع حاصل، می‌توان دایره‌ای را محاط کرد. شعاع این دایره را تعیین کنید.

۲۵۴. یالهای جانبی هرم مربع‌القاعده S.ABCD برابر a و زاویه‌ای که یالها با قاعده می‌سازند α است. در این هرم، استوانه‌ای که از دوران یک مربع حاصل شده است محاط می‌کنیم، به‌طریقی که سطح جانبی آن بر قاعدهٔ هرم در طول قطر قاعده و همچنین قاعده‌های استوانه بر سطح جانبی هرم مماس باشد. مطلوب است محاسبهٔ شعاع قاعده استوانه.

۲۵۵. در یکی از وجه‌های جانبی هرم چهاربر منتظمی، مثلث دلخواهی را درنظر می‌گیریم. این مثلث را روی قاعدهٔ هرم تصویر می‌کنیم. مثلث تصویر را دوباره روی وجه جانبی مجاور تصویر می‌کنیم. ثابت کنید تصویر نهایی، مثلثی خواهد بود که با مثلث اصلی متشابه است.

۲۵۶. از ۱۲۰ کرهٔ مشابه، یک هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم ساخته‌ایم. در قاعدهٔ هرم چند کره قرار می‌گیرد؟

دومین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، پاییز ۱۳۷۴

۲۵۷. بعد از گستردن یک هرم، مثلثی با زاویه‌های حاده به دست آمده که، در آن، وسط سه ضلع مثلث به هم وصل شده است. ثابت کنید، مکعب مستطیلی وجود دارد که، چهار رأس غیرمجاور آن، بر رأسهای این هرم منطبقند.

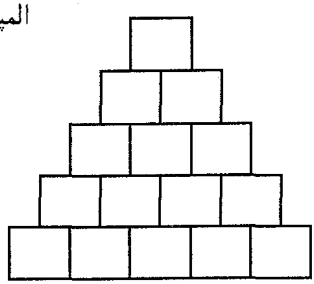
آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲۵۸. آیا هرم مثلث‌القاعده‌ای وجود دارد که همهٔ پاهای ارتفاعهای آن، خارج از وجه‌های نظیرشان قرار گیرند؟

۲۵۹. هرم شگفت‌انگیز بسازید.

۱ـ در این هرم هیچ عددی دو بار تکرار نشود.
۲ـ در هر ردیف از چپ به راست، هر عدد از عدد قبلی، یک یا چند واحد (به دلخواه) کوچکتر باشد.
۳ـ مجموع اعداد واقع در یک ردیف (S) همه‌جا یکسان باشد.
۴ـ همچنین S مینیمم باشد.
۵ـ و نیز مجموع بزرگترین عدد ردیفهای مختلف (T) مینیمم شود.

المپیادهای ریاضی برای همه، فرانسه



S ___ T ___

۲۶۰. نام دیگر هرم مثلث‌القاعده چیست؟

۲۶۱. آیا هرم منتظمی که اندازهٔ ضلع قاعده و تعداد وجه‌های آن داده شده باشند، مشخص است؟ چرا؟ سه ویژگی از هرم منتظم را بنویسید.

۱۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۶۲. الف) قاعدهٔ هرم SABC ، مثلث ABC می‌باشد که در آن $B\hat{A}C=\hat{A}$ ، $C\hat{B}A=\hat{B}$ و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است. یال SC بر صفحهٔ ABC عمود است. مطلوب است |SC| در صورتی که می‌دانیم:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{\sin\gamma}=1$$

α ، β و γ بترتیب زاویه‌های بین یالهای SA ، SB و SC با صفحه‌های SBC ، SAC و SAB می‌باشند.

ب) اگر α ، β و γ زاویه‌هایی باشند که یالهای یک کنج سه‌وجهی با صفحه‌های

وجه‌های مقابلشان می‌سازند، ثابت کنید :

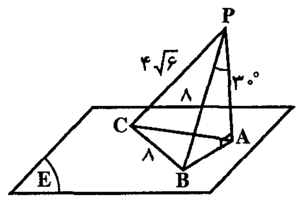
$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}-\frac{1}{\sin\gamma}\geq 1$$

۲۶۳. در شکل، مثلث ABC در صفحهٔ E واقع است و $PA \perp E$.

$PB = BC = 8$

$PC = 4\sqrt{6}$

$B\hat{P}A = 30°$



۱. اندازهٔ هرچند ضلع و هرچند زاویه‌ای را که می‌توانید، بیابید.

۲. مساحت مثلث PBC را حساب کنید.

۲۶۴. هرم سه‌پهلوی SABC با صفحه‌ای که قاعدهٔ آن را در فصل مشترک LMN قطع کرده و مقطع $A'B'C'$ را در آن ایجاد می‌کند، داده شده است. مقطع $A'B'C'$ را حول MN دوران می‌دهیم.

۱. ثابت کنید خطهای AA' ، BB' و CC' همرسند.

۲. مکان هندسی رأس هرم را تعیین کنید.

۲۶۵. در هرم سه‌پهلوی SABC، کنج رأس S سه‌قائمه است.

۱. اگر x ، y و z بترتیب فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه واقع در سطح قاعده از وجه‌های SBC ، SAC و SAB باشند، ثابت کنید $\frac{x}{SA}+\frac{y}{SB}+\frac{z}{SC}=1$.

۲. اگر $SA = SB = SC$ باشد حکم (۱) چگونه بیان می‌شود؟

۲۶۶. در هرم سه‌پهلوی SABC کنج رأس S سه‌قائمه است :

۱. ثابت کنید نقطهٔ H تصویر رأس S روی قاعدهٔ ABC بر نقطه همرس ارتفاعهای مثلث ABC منطبق است.

۲. ثابت کنید :
$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}$$

۳. ثابت کنید مساحت مثلث SAB ، واسطه هندسی است بین مساحتهای دو مثلث ABC و HBC .

۴. ثابت کنید مجموع مربعهای مساحتهای وجه‌های جانبی برابر است با مربع مساحت

قاعدهٔ ABC .

۵. اگر α، β و γ زاویه‌های یالهای جانبی این هرم با صفحهٔ قاعده باشند، چه رابطه‌ای بین نسبتهای مثلثاتی این زاویه‌ها برقرار است؟

۲۶۷. هرم OABC به یالهای $OA = OB = OC = a$ داده شده است به‌طوری که $B\hat{O}C = 90^\circ$ و $A\hat{O}B = A\hat{O}C = 60^\circ$ می‌باشند.

۱. طولهای سایر یالها را برحسب a حساب کرده و ثابت کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

۲. ثابت کنید که یالهای OA و BC برهم عمودند و خط IJ که وسطهای آنها را بر هم وصل می‌کند، عمودمشترک آنهاست.

۳. ثابت کنید که فرجهٔ BC قائمه می‌باشد. حجم هرم و طول IJ را برحسب a حساب کنید و تحقیق کنید که :

$$V = \frac{1}{6} OA.BC.IJ$$

۲۶۸. رأس E از هرم ABCE در داخل هرم ABCD قرار دارد. تحقیق کنید آیا حکم زیر صحیح است.

۱. مجموع یالهای AE ، BE و CE کمتر از مجموع یالهای AD ، BD و CD است.

۲. لااقل یکی از یالهای AE ، BE ، CE کوتاهتر از یالهای متناظر AD ، BD و یا CD است.

۲۶۹. R و R' شعاعهای قاعده‌ها، و h ارتفاع یک هرم شش‌پهلوی منتظم است. اندازهٔ :

۱. حجم

۲. مساحت جانبی

۳. مساحت کل آن را تعیین کنید.

حالت خاص : $R = 6$ ، $R' = 3$ ، $h = 4$

۲۷۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a واقع بر صفحه P داده شده است.

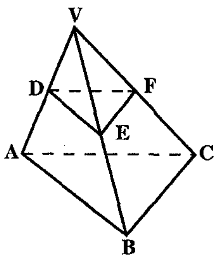
۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشند.

۲. از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث عمود Δ را بر صفحه P اخراج کرده و نقطهٔ M را به فاصلهٔ $OM = x$ روی آن اختیار می‌کنیم. حجم هرم MABC را برحسب a و x حساب کنید.

۳. مجموع مربعات تمام یالهای هرم را با y نمایش می‌دهیم. مطلوب است محاسبهٔ y

برحسب a و تعیین x برای آن که $y = ۶a^۲$ باشد.

۲۷۱. در هرم V ـ ABC ، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. صفحه‌ای موازی با قاعده یالهای جانبی را در D ، E و F قطع می‌کند، به‌نحوی که $VE = \frac{۱}{۲}EB$.



الف) $\frac{DV}{AV}$ چقدر است؟

ب) در مورد ΔDEV و ΔABV چه می‌توان گفت؟ در مورد ΔABC و ΔDEF چطور؟

پ) $\frac{DE}{AB}$ چقدر است؟

ت) اگر $BC = ۶$ ، $a\Delta DEF$ چقدر است؟

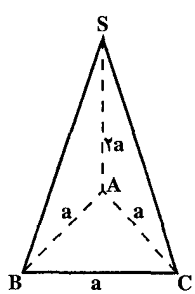
۲۷۲. هرم منتظم SABC که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a و ارتفاع آن x می‌باشد، داده شده است.

۱. مرکز کرهٔ محیطی این هرم را تعیین کرده و شعاع آن را برحسب a و x حساب کنید، در صورتی که شعاع مزبور $\frac{a\sqrt{۶}}{۴}$ باشد، x را محاسبه نمایید.

۲. به ازاء چه مقدار x مرکز کره بر صفحهٔ ABC منطبق می‌شود و به ازاء چه مقدار x زاویهٔ $A\hat{S}B = ۹۰^\circ$ می‌گردد.

۳. طول شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای جانبی هرم را تعیین کنید و ثابت کنید مماسهایی که از رأس S بر این دایره‌ها رسم شوند در یک صفحه قرار دارند.

۲۷۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a ، قاعدهٔ هرم SABC است. یال SA برابر ۲a بوده و بر صفحهٔ قاعده عمود است.



۱. حجم هرم را بیابید.

۲. به چه فاصله‌ای از رأس A باید صفحه‌ای به موازات قاعده رسم کرد، تا نسبت حجم هرم ناقصی که به‌وجود می‌آید به حجم هرمی که از جسم به‌وسیلهٔ مقطع جدا می‌شود $\frac{۱۹}{۸}$ شود. مثال عددی $a = ۶$.

۲۷۴. هرم منتظمی است که قاعدهٔ آن مربع به ضلع a می‌باشد. مقطع صفحه‌ای که از رأس هرم و دو رأس مقابل مربع می‌گذرد با هرم مزبور مثلث قائم‌الزاویه

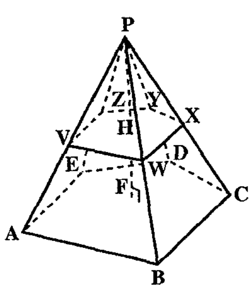
متساوی‌الساقین است. مطلوب است محاسبهٔ :

۱. ارتفاع هرم
۲. حجم هرم
۳. سطح کل هرم

۲۷۵. قاعده هرم SABCD مستطیل ABCD به ضلعهای $AB = a$ و $BC = b$ بوده و یال $SA = c$ بر صفحهٔ قاعده عمود است. نقطه‌های P ، N ، M و Q بترتیب وسطهای یالهای SA ، SB ، SC و SD می‌باشند.

۱. ثابت کنید مثلثهای SBC و SDC قائم‌الزاویه می‌باشد.
۲. ثابت کنید نقطهٔ P مرکز کرهٔ محیطی هرم SABCD است و طول شعاع آن را حساب کنید.
۳. ثابت کنید $SA^{2} + SC^{2} = SB^{2} + SD^{2}$.
۴. ثابت کنید چهار خط AP ، BQ ، CM و DN یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
۵. از N به A و از P به D وصل می‌کنیم. ثابت کنید چندوجهی ANBDPC منشور ناقص قائم است.
۶. به چه فاصله از رأس هرم SABCD باید صفحه‌ای موازی قاعده رسم نمود تا آن را به دو قسمت معادل تقسیم نماید.

۲۷۶. قاعدهٔ هرم PABCDE یک پنج‌ضلعی به مساحت ۶۴ است. ارتفاع PF برابر با ۱۲ است. V ، W ، X ، Y و Z مطابق شکل وسطهای یالهای جانبی هرم هستند.



۱. مساحت مقطع VWXYZ را بیابید. (چرا این شکل یک مقطع است؟)
۲. حجم هرم کوچک را بیابید.
۳. نسبت حجم دو هرم را بیابید.

۲۷۷. ۱. حجم و مساحت جانبی و مساحت کل هرم منتظمی را که قاعدهٔ آن شش‌ضلعی به ضلع ۴ و ارتفاع آن ۳ سانتیمتر است، حساب کنید.
۲. در چه فاصله از رأس این هرم صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن باید مرور داد تا حجم هرمی که بین رأس و آن صفحه پدید می‌آید $\frac{۱}{۸}$ حجم هرم باشد؟

۲۷۸. هرم ناقص منتظمی است که قاعده‌های آن شش‌ضلعیهای منتظمی با ضلع a و $\frac{a}{۲}$

می‌باشند. ارتفاع این هرم را با h نشان می‌دهیم.

۱. ثابت کنید نقطه‌ای مانند O می‌توان یافت که از دوازده رأس هرم ناقص به یک فاصله باشند.

۲. در حالت مخصوصی که نقطهٔ O مرکز قاعده بزرگتر باشد، مقدار h را برحسب a حساب کنید.

۲۷۹. مساحت سطح کل و حجم هرم منتظم با قاعدهٔ nضلعی را، بترتیب، S و V می‌نامیم.

الف) برای مقدارهای مفروض n و S ، حداکثر مقدار V را پیدا کنید.

ب) طول ضلع قاعده و طول ارتفاع همهٔ هرمهایی را پیدا کنید که، برای آنها داشته باشیم : $n = ۴$ ، $S = ۱۴۴$ و $V = ۶۴$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، رومانی، ۱۹۵۸

۲۸۰. اگر یک نقطه روی صفحهٔ قاعدهٔ یک هرم منتظم و در درون قاعده تغییر مکان دهد :

۱. مجموع فاصلهٔ این نقطه از وجه‌های جانبی مقدار ثابتی است.

۲. مجموع پاره‌خطهای محصور بین این نقطه و نقطهٔ برخورد خط عمود بر صفحهٔ قاعده با وجه‌های جانبی آن مقدار ثابتی است.

۲۸۱. نیمدایرهٔ به قطر $AB = ۲R$ داده شده است. از نقطهٔ A عمود $AS = ۲R$ را بر صفحهٔ دایره اخراج نموده و نقطهٔ دلخواه M را روی دایره اختیار می‌کنیم.

۱. ثابت کنید وجه‌های چهاروجهی $SAMB$ مثلثهای قائم‌الزاویه هستند و فرجهٔ M قائمه است.

۲. ارتفاع هرم $SAMB$ را که از A بر وجه مقابل فرود آید، رسم می‌کنیم. اگر $AM = x$ باشد، طول این ارتفاع را برحسب R و x حساب کنید و x را طوری تعیین نمایید که طول ارتفاع مزبور $\frac{۶R}{۵}$ باشد و در این حال هرم را حساب کنید.

۲۸۲. روی یکی از وجه‌های یک مکعب، یک هرم چنان قرار داده شده که قاعدهٔ هرم منطبق بر آن وجه از مکعب است. بدین ترتیب یک وجه از مکعب کم شده و چهار وجه به آن اضافه شده است. در واقع سه وجه به آن اضافه شده است. مطلوب است :

۱. تغییرات تعداد رأسها

۲. تغییرات تعداد یالها

۲۸۳. ۱. یک هرم ناقص با قاعده‌های موازی را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ها چنان قطع کنید که مساحت آن، واسطهٔ هندسی بین مساحتهای دو قاعده باشد.

۲. نسبت حجمهای دو هرم ناقص را که به وسیلهٔ این صفحه از هرم اوّلی ایجاد می‌شوند، تعیین کنید. b و b' مساحتهای قاعده‌های این مخروط ناقص باشد.

۲۸۴. قاعده‌های هرم ناقصی، مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC و $A_1B_1C_1$ به ضلعهای بترتیب ۳ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر می‌باشند. پاره‌خطی که رأس C_1 را به نقطه O مرکز قاعده ABC وصل می‌کند، بر قاعده‌های هرم عمود است و $|C_1O| = ۳$. صفحه‌ای را از رأس B و وسطهای A_1B_1 و B_1C_1 می‌گذرانیم. استوانه‌هایی را درنظر بگیرید که در داخل چندوجهی $ABCA_1MNC_1$ واقع شده و قاعده‌های آنها در داخل وجه A_1MNC_1 قرار دارند. مطلوب است:

الف) بیشترین مقدار حجم مربوط به این نوع استوانه‌ها که ارتفاع آنها h باشد.

ب) بیشترین مقدار حجم در بین همه استوانه‌ها تحت شرایط بالا.

۲۸۵. هم‌ارزی گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

۱. طول یالهای جانبی یک هرم مساوی است.

۲. یالهای جانبی هرم با صفحهٔ قاعده آن زاویه‌های متساوی درست می‌کنند.

۳. بر قاعدهٔ هرمی می‌توان یک دایره محیط کرد؛ ارتفاع هرم از مرکز این دایره می‌گذرد.

بخش ۲

• استوانه

۲.۱. تعریف و قضیه

۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۲.۲.۱. خط

۲.۲.۱.۱. خط مولد است

۲.۲.۱.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲.۳. زاویه

۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۲.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۲.۳.۲. تساوی زاویه‌ها

۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲.۴. یال، ارتفاع، شعاع قاعده

۲.۴.۱. ارتفاع

۲.۴.۱.۱. اندازهٔ ارتفاع

۲.۴.۱.۲. تغییر اندازهٔ ارتفاع

۲.۴.۱.۳. نسبت ارتفاعها

۹.۲. رابطهٔ متری

۱۰.۲. مکان هندسی

۱.۱۰.۲. مکان هندسی نقطه

۲.۱۰.۲. مکان هندسی خط

۱۱.۲. رسم شکل

۱.۱۱.۲. تعیین نقطه

۲.۱۱.۲. رسم خط

۳.۱۱.۲. رسم صفحه

۴.۱۱.۲. رسم سطح استوانه‌ای

۵.۱۱.۲. رسم استوانه

۱۲.۲. برش، مقطع

۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۲. استوانه

۱.۲. تعریف و قضیه

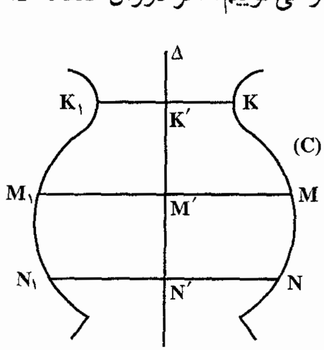
اجسام دوار. جسمی را که به سطحهایی نامستوی، یعنی به سطحی غیر از صفحه، محدود باشد، جسم خمیده گویند. انواع جسمهای خمیده بسیار است. مهمترین آنها جسمهایی هستند که به سطحهای دوار محدود می‌شوند.

سطح دوّار

تعریف. هرگاه خم مسطح C و خط Δ در یک صفحه مانند P واقع باشند و صفحهٔ P گرد خط Δ دوران کند، هر نقطهٔ M از خم C بر دایره‌ای جابه‌جا می‌شود که مرکز آن، نقطهٔ M' تصویر M بر خط Δ، و صفحه‌اش عمود بر Δ، و شعاعش فاصلهٔ نقطهٔ M ازخط Δ است. از دوران خم C نیز سطحی پدید می‌آید که آن را یک سطح دوار می‌گوییم. اگر دوران صفحهٔ P، گرد Δ، 360° یا بیشتر باشد، سطح دوار را سطح بسته می‌گویند. بنابراین:

سطح دوار مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضاست که از دوران یک خم مسطح، گرد خطی واقع در صفحهٔ آن مشخص می‌شود. به بیان دیگر:

سطح دوار از مجموعهٔ اوضاع مختلف یک منحنی ضمن دوران حول خطی که با آن در یک صفحه است



پدید می‌آید (شکل).

در هر سطح دوار منحنی C را مولد و خط Δ را محور سطح دوار می‌گوییم. مسیر حرکت هر نقطه از مولد سطح دوار را ضمن دوران آن یک مدار مسطح دوار و هر وضع از مولد سطح دوار را یک نصف‌النهار سطح دوار می‌نامیم. هر نصف‌النهار سطح دوار با محور آن در یک صفحه واقع است، زیرا مولد اصولاً با محور سطح دوار در یک صفحه فرض شد و دوران آن گرد محور، چنان‌که ذکر شد، درحقیقت دوران آن صفحه گرد محور مزبوراست. از هر نقطهٔ سطح دوار یک مدار و یک نصف‌النهار می‌گذرد، نصف‌النهارهای همهٔ نقطه‌های سطح دوار مساوی یکدیگرند (چرا؟). مدارها لزوماً متساوی نیستند مگر آن‌که بعضی نقطه‌های مولد از محور دوران به یک فاصله باشند که دراین صورت مدارهای گذرنده از آن نقطه‌ها متساوی هستند.

مدارهای سطح دوار مقطعهای آن سطح با صفحه‌هایی هستند که بر محور سطح دوار عمودند.

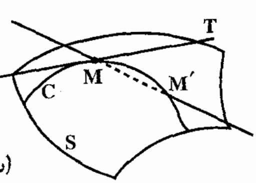
هر صفحه که محور سطح دوار را شامل باشد، آن سطح را در نصف‌النهارهایی قطع می‌کند که از اجتماع دو وضع مختلف از مولد پدید می‌آیند و این دو وضع مولد نسبت به محور سطح دوار قرینه‌اند. اگر مولد سطح دوار با محور سطح در نقطه‌ای متقاطع باشد، سطح دوار در آن نقطه محور را قطع می‌کند.

ساده‌ترین سطح دوار از دوران خط راست و دایره گرد خطی که با آنها در یک صفحه واقع باشد، پدید می‌آید. این سطحهای دوار را در این بخش بررسی می‌کنیم.

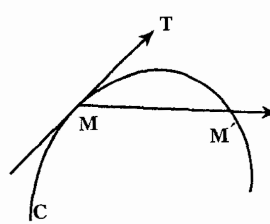
صفحهٔ مماس بر سطح دوار

تعریف. مماس بر یک منحنی. به عنوان یادآوری متذکر می‌شویم که خط مماس بر هر منحنی، حد اوضاع خط قاطعی است که دو نقطهٔ تقاطع آنها بینهایت به یکدیگر نزدیک شوند (شکل الف).

خط مماس بر یک سطح. خطی را بر سطح مفروض S مماس گویند. هرگاه این خط بر یکی از منحنیهای رسم شده بر سطح مانند C مماس باشد (شکل ب)، به عبارت دیگر اگر خطی سطح مفروض S را در دو نقطهٔ M و M′ قطع کند و نقطهٔ M′ روی منحنی C بر سطح S به سمت M نزدیک شود، خط MT حد اوضاع خط MM′ را وقتی که M′ بینهایت به نقطهٔ M

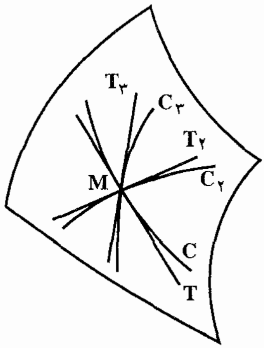


(ب)



(الف)

نزدیک شود، خط مماس بر سطح می‌نامند.



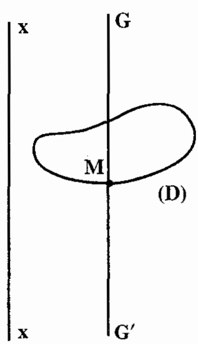
سطح مماس بر سطح دیگر. از نقطهٔ مفروض M بر سطح مفروض رسم بینهایت منحنی بر آن ممکن است (شکل) و بر هریک از منحنیها در نقطهٔ M می‌توان یک خط مماس رسم کرد. مجموعهٔ این مماسها سطحی تشکیل می‌دهند که آن را سطح مماس بر سطح مفروض در نقطهٔ M می‌نامند. در بسیاری از حالتها سطح مزبور یک صفحه است، در این صورت آن را صفحهٔ مماس بر سطح مفروض می‌گویند.

۲۸۶. **قضیه.** در هریک از نقطه‌های سطح دوار، یک صفحهٔ مماس بر آن سطح وجود دارد.

قائم بر سطح دوار. خط قائم بر هر سطح در یک نقطه عمودی است که از آن نقطه بر صفحهٔ مماس بر سطح اخراج شود.

۲۸۷. **قضیه.** صفحهٔ مماس بر هر نقطهٔ از سطح دوار بر صفحهٔ نصف‌النهاری آن نقطه عمود می‌باشد.

سطح استوانه‌ای



تعریف. هرگاه خط راست GG′ چنان تغییر مکان دهد که همواره با خط ثابت x′x موازی باشد و منحنی ثابت (D) را قطع نماید، از حرکت آن سطحی به وجود می‌آید که آن را سطح استوانه‌ای گویند (شکل).

خط متحرک را مولّد سطح استوانه‌ای و منحنی ثابت را منحنی هادی می‌نامند. در آنچه بعد از این گفته می‌شود، چنین فرض می‌نماییم که منحنی هادی همواره یک منحنی مسطح است.

سطح منشوری محاطی. هرگاه در منحنی هادی D یک چندضلعی به‌طور دلخواه محاط کرده از رأسهای آن خطهایی به موازات مولدهای استوانه رسم کنیم، سطح منشوری به‌وجود می‌آید که آن را سطح منشوری محاط دراستوانه می‌نامند (شکل). واضح است که یالهای جانبی این سطح منشوری بر سطح استوانه‌ای قرار دارند.

۲۸۸. **قضیه.** اگر سطح استوانه‌ای را دو صفحهٔ متوازی قطع کنند، مقطعهای به‌وجود آمده،

متساوی‌اند.

مقطع قائم سطح استوانه‌ای. مقطع قائم هر سطح استوانه‌ای مقطع صفحه‌ای است که مولدهای سطح عمود باشد.

استوانه. جسمی را که مابین سطح استوانه‌ای و دو مقطع متوازی محصور است، استوانه می‌نامند و دو مقطع مفروض را دو قاعدهٔ استوانه گویند.

ارتفاع استوانه. عبارت است از فاصلهٔ صفحه‌های دو مقطع مفروض از یکدیگر، اگر دو صفحهٔ قاطع متوازی نباشند جسمی را که مابین سطح استوانه‌ای و این دو صفحه محدود است، استوانهٔ ناقص گویند.

فصل مشترک خط راست و سطح استوانه‌ای. برای تعیین فصل مشترک یک خط راست با سطح استوانه‌ای، بر خط راست صفحه‌ای مرور می‌دهیم تا در سطح استوانه‌ای مقطعی ایجاد نماید. واضح است که عدهٔ نقطه‌های تقاطع خط راست با سطح برابر عده نقطه‌های تقاطع خط راست با منحنی مقطع است.

فرع. مقطع سطح استوانه‌ای به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی با خطهای مولد، چندین خط مولد است.

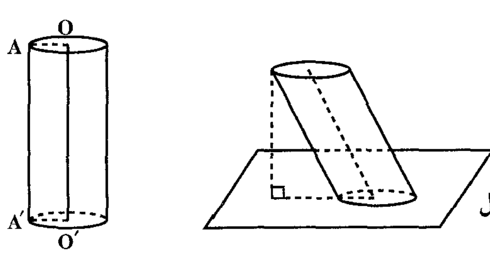
صفحهٔ مماس بر سطح استوانه‌ای

۲۸۹. قضیه. در هر نقطه از سطح استوانه‌ای یک صفحهٔ مماس بر آن سطح وجود دارد و این صفحهٔ مماس خط مولد آن نقطه را نیز شامل است.

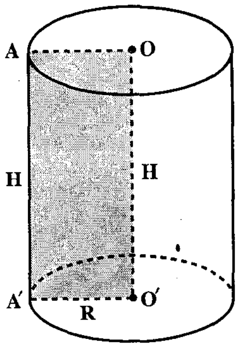
استوانهٔ مستدیر. اگر منحنی هادی سطح استوانه‌ای دایره باشد استوانه را مستدیر می‌نامند.

استوانهٔ قائم و استوانهٔ مایل. اگر محور استوانهٔ مستدیر، یعنی پاره‌خطی که مرکزهای دو دایرهٔ قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند بر قاعده‌ها عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این‌صورت، استوانه را مایل می‌نامند.

استوانهٔ دوار. جسم حاصل از دوران هر مستطیل حول یکی از ضلعهای آن را استوانهٔ



استوانه‌ی قائم   استوانه‌ی مایل



استوانه‌ی دوار

دوار گویند (شکل). به عبارت دیگر اگر مولد یک سطح استوانه‌ای مستدیر بر صفحهٔ دایرهٔ هادی عمود باشد، هر قسمت از این سطح که مابین دو مقطع قائم محصور باشد، استوانهٔ دوار خواهد بود.

نتیجهٔ ۱. دو قاعدهٔ استوانهٔ دوار دو دایرهٔ متساوی می‌باشند.

نتیجهٔ ۲. قسمتی از محور دوران که مابین دو قاعده محصور است با طول مولدهای استوانه برابر بوده، ارتفاع استوانه دوار را نمایش می‌دهد.

نتیجهٔ ۳. استوانهٔ دوار سطح دواری است که مدارهای آن دایره‌های متساوی و نصف‌النهارهای آن خطهای مستقیم می‌باشند.

سطح جانبی و حجم استوانهٔ دوار

۲۹۰. **قضیه.** سطح جانبی استوانهٔ دوار مساوی است با طول محیط قاعده ضرب در طول ارتفاع.

۲۹۱. **قضیه.** حجم استوانهٔ دوار مساوی است با حاصل ضرب مساحت سطح قاعده در طول ارتفاع.

۲۹۲. با توجه به اصل کاوالیری، حجم استوانهٔ قائم را به‌دست آورید.

۲۹۳. آیا حجم استوانهٔ مایل نیز مانند حجم استوانهٔ قائم به دست می‌آید، توضیح دهید.

۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۲. خط

۱.۱.۲.۲. خط مولد است

۲۹۴. اگر یک خط راست بیشتر از دو نقطهٔ مشترک با یک سطح استوانه‌ای با هادی مستدیر داشته باشد، در آن صورت، آن خط یک مولد آن سطح است.

۲.۲.۱.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲۹۵. یک سطح استوانه‌ای دوار داده شده است. ثابت کنید که عمود مشترک محور و یک وتر، از وسط آن وتر می‌گذرد.

۳.۲. زاویه

۱.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۲۹۶. نقطه‌ای از محیط قاعدهٔ فوقانی استوانه را به نقطه‌ای از محیط قاعدهٔ پایینی وصل کرده‌ایم. دو شعاعی که دو مرکز را به این دو نقطه وصل می‌کنند، با هم زاویهٔ α می‌سازند. مطلوب است اندازهٔ زاویهٔ خط واصل بین دو نقطهٔ فوق و محور استوانه.

۲.۱.۳.۲. زاویهٔ بین خط و صفحه

۲۹۷. ضلعهای یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بر یک استوانهٔ دوار مماسند؛ محور استوانه بر ضلع موازی ذوزنقه عمود است. زاویه‌ای را که محور استوانه با صفحهٔ ذوزنقه تشکیل می‌دهد به‌دست آورید. دو قاعدهٔ ذوزنقه، برابر a و b و ارتفاع آن h است.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۲.۳.۲. تساوی زاویه‌ها

۲۹۸. اگر چهارضلعی قابل محاط در یک دایرهٔ $ABCD$، در یک سطح استوانه‌ای دوار محاط باشد، ضلعهای روبه‌روی آن با محور، زاویه‌های مساوی می‌سازند و همین ویژگی برای قطرهای چهارضلعی نیز وجود دارد.

بعکس، اگر یک چهارضلعی مسطح محاط در یک سطح استوانه‌ای دوار دارای دو ضلع روبه‌روی غیرموازی باشد که با محور سطح، زاویه‌های برابر بسازند، یا دو قطر آن با محور زاویه‌های مساوی بسازند، آن‌گاه آن چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است.

۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۹۹. دو انتهای یک قطر از دایرهٔ مربوط به قاعدهٔ استوانهٔ مستدیر قائم را A و B می‌نامیم و روی محیط دایرهٔ قاعدهٔ دوم، نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که بر صفحهٔ AOB منطبق نباشد (O، وسط محور استوانه است). ثابت کنید، مجموع زاویه‌های دو وجهی از کنج به رأس O و یالهای OA، OB و OC، برابر ۳۶۰ درجه است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، شوروی سابق، ۱۹۸۲

۲.۴. یال، ارتفاع، شعاع قاعده

۲.۴.۱. ارتفاع

۲.۴.۱.۱. اندازهٔ ارتفاع

۳۰۰. طول لوله‌ای به قطر داخلی ۲cm را چه‌قدر بگیریم تا ۳/۵ لیتر آب گنجایش داشته باشد؟ (π را $۳\frac{۱}{۷}$ بگیرید.)

۳۰۱. یک مخزن نفت استوانه‌ای شکل، افقی روی زمین افتاده است (مولدهای استوانه افقی هستند). اندازهٔ طول داخلی مولد ۱۰ پا و قطر داخلی ۶ پا است. اگر سطح نفت مستطیلی به مساحت ۴۰ پای مربع باشد، عمق نفت برابر است با :

الف) $\sqrt{۵}$ ب) $۲\sqrt{۵}$

ج) $۳-\sqrt{۵}$ د) $۳+\sqrt{۵}$

هـ) $۳-\sqrt{۵}$ یا $۳+\sqrt{۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۳۰۲. حجم یک کره با حجم یک استوانهٔ مستدیر برابر، و قطر کره با قطر قاعدهٔ استوانه برابر است. ارتفاع استوانه را برحسب قطر کره بیابید.

۲.۴.۱.۲. تغییر اندازهٔ ارتفاع

۳۰۳. R، شعاع قاعدهٔ یک جعبهٔ استوانه‌ای، ۸ سانتیمتر و H، ارتفاع جعبه، ۳ سانتیمتر است.

به ازای چه مقدار x، وقتی R به اندازهٔ x سانتیمتر افزایش می‌یابد، افزایش حجم جعبه، $V = \pi R^2 H$ ، برابر است با این که H، به اندازهٔ x سانتیمتر افزایش یابد؟

الف) هیچ مقدار حقیقی x　　ب) یک مقدار صحیح x

ج) یک مقدار گویا اما ناصحیح x　　د) یک مقدار گنگ x

هـ) دو مقدار حقیقی x

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۳۰۴. مساحت قاعدهٔ یک منبع آب به شکل استوانه یک متر مربع است. منبع تا بیش از نصف ارتفاع آن آب دارد. مکعبی فلزی به چگالی ۴ که درازای هر یال آن ۲۰ سانتیمتر است به درون آب منبع انداخته می‌شود. سطح آب منبع چند سانتیمتر بالا می‌آید؟

الف) $\frac{\pi}{۰/۸}$　　ب) $\frac{۰/۸}{\pi}$

ج) ۰/۸　　د) ۸

هـ) $۰/۸\pi$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳.۱.۴.۲. نسبت ارتفاعها

۳۰۵. مرکبدان استوانه‌ای شکلی دارای یک مجرای مخروطی است به‌طوری که رأس مخروط بر سطح مرکب مماس است. مطلوب است تعیین نسبت ارتفاع مخروط به ارتفاع مرکبدان، برای آن‌که هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب آن نریزد.

المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۶

۳۰۶. نسبت ارتفاعهای دو استوانه را که شعاع قاعدهٔ یکی دو برابر شعاع قاعدهٔ دیگری است، و مساحتهای جانبی آنها مساوی هستند، تعیین کنید.

۳۰۷. نسبت ارتفاعهای دو استوانه را که حجم آنها یکی است و شعاع قاعدهٔ یکی ۳ برابر شعاع قاعدهٔ دیگری است، به دست آورید.

۲.۴.۲. شعاع قاعده، قطر

۱.۲.۴.۲. اندازهٔ شعاع قاعده

۳۰۸. در استوانهٔ چوب‌پنبه‌ای به شعاع R، سوراخ استوانه شکلی به وجود آورده‌ایم و آن را به‌وسیلهٔ یک میلهٔ فلزی پر کرده‌ایم. وزن مخصوص چوب پنبه d و وزن مخصوص میلهٔ فلزی مساوی d_1 است. میلهٔ فلزی چه شعاعی داشته باشد تا جسم حاصل بتواند در آب فرو رود؟

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳۰۹. مکعبی به ضلع a مفروض است. اگر یکی از قطرهای مکعب محور استوانه‌ای فرض شود که مماس بر یالهای مکعب باشد، شعاع قاعدهٔ استوانه را پیدا کنید.

۳۱۰. افزودن ۶ واحد به شعاع یک استوانه، سبب افزایش حجم آن به اندازهٔ y واحد مکعب می‌شود. افزودن ۶ واحد به ارتفاع استوانه نیز، سبب افزایش حجم آن به اندازهٔ y واحد مکعب می‌شود. اگر ارتفاع اولیه ۲ باشد، آن‌گاه شعاع اولیه برابر است با :

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲.۲.۴.۲. اندازهٔ قطر

۳۱۱. معمای نوار چسب

یک نوارچسب، که دور یک استوانهٔ پلاستیکی پیچیده شده است، ۲۵ متر طول و ۰/۱ میلیمتر ضخامت دارد. استوانه‌ای که به این ترتیب از پیچیدن نوارچسب حاصل شده است، ۱۰ سانتیمتر قطر دارد. قطر استوانهٔ پلاستیکی داخل آن را حساب کنید (π را ۳/۱۴ بگیرید).

۳۱۲. در وسط قرص مدوری به قطر ۱۰ سانتیمتر، سوراخی مدور ایجاد می‌شود. اگر با این عمل ۳۶٪ سطح قرص کم بشود، قطر سوراخ برحسب سانتیمتر برابر است با :

الف) ۳ — ب) $3\sqrt{\pi}$

ج) ۶ — د) ۸

هـ) $5\sqrt{\pi}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲.۴.۳. ارتفاع، شعاع قاعده

۳۱۳. شعاع قاعدهٔ یک جعبهٔ استوانه‌ای شکل ۸ سانتیمتر، و ارتفاع آن ۳ سانتیمتر است. چند سانتیمتر به شعاع، یا به ارتفاع اضافه کنیم تا حجم استوانه در هر دو حالت به یک اندازهٔ (غیرصفر) افزایش یابد؟

الف) ۱   ب) $5\frac{1}{3}$ ج) هر عددی

د) هیچ   هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳۱۴. استوانه‌ای دوار به شعاع r و ارتفاع h داده شده است. اندازهٔ شعاع x و ارتفاع y از یک استوانه دوار را که دارای مساحت کل و حجم مساوی با اولی است پیدا کنید.
حالت خاص : $h = 3$ و $r = 4$

۲.۵. پاره‌خط

۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳۱۵. کوتاهترین فاصلهٔ بین نقطهٔ مفروض A و یک سطح استوانه دوار را بیابید.

۳۱۶. دو استوانهٔ قائم که قاعده‌های آنها دایره‌هایی به شعاعهای $R = 18$ و $r = 6$ است، در طول یک مولد مماس خارجند، و در همین حال با یک ریسمان به‌هم بسته شده‌اند. کمترین طول این ریسمان برابر است با :

الف) $4(7\pi + 6\sqrt{3})$ ب) $2(7\pi + 12\sqrt{3})$

ج) $6(5\pi + 4)$ د) $6(5\pi + 4\sqrt{3})$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۶.۲. شعاع کره

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره

۳۱۷. شعاع کرهٔ محاط در استوانه‌ای متساوی‌الساقین به حجم 532π را تعیین کنید.

۷.۲. مساحت

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی

۳۱۸. اندازهٔ مساحت سطح جانبی استوانهٔ دواری به ارتفاع ۸ و شعاع قاعدهٔ ۶ را به‌دست آورید.

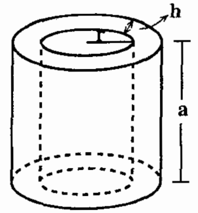
۳۱۹. حجم استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتیمتر برابر است با 150π سانتیمتر مکعب. مساحت سطح جانبی این استوانه را تعیین کنید.

۳۲۰. یک استوانهٔ دوار به شعاع قاعدهٔ r داده شده است. روی یکی از قاعده‌های آن قطر AB و شعاع OC عمود بر AB، و نقطه‌ای مانند D را روی مولد نقطهٔ C با فرض $OC = a$ درنظر می‌گیریم.

مساحت سطح جانبی این استوانه محصور بین نیمدایرهٔ ABC و مقطع ایجاد شده به وسیلهٔ صفحهٔ ABD را پیدا کنید.

این مساحت همانند حد مساحت جانبی یک نیم‌منشور منتظم محاطی محاسبه می‌شود.

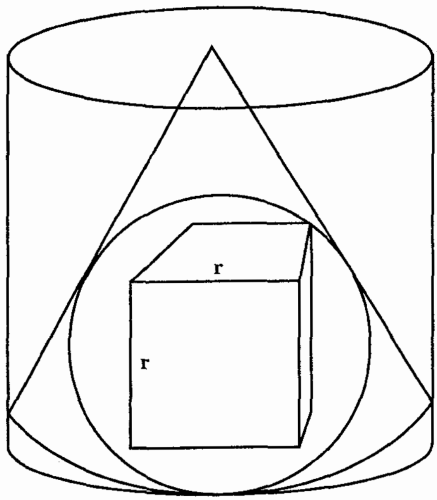
۳۲۱. با استفاده از روشی که برای به‌دست آوردن فرمول مساحت رویهٔ کره به‌کار بردیم، نشان دهید که مساحت رویهٔ جانبی یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع a برابر است با $2\pi ra$.



۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل

۳۲۲. استوانهٔ دواری به شعاع قاعدهٔ ۷ سانتیمتر و به ارتفاع ۱۲ سانتیمتر داده شده است. اندازهٔ مساحت کل این استوانه را بیابید.

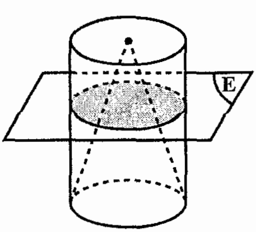
۳۲۳. مکعبی به ضلع r در کره‌ای محاط شده است. کره در مخروطی که طول مولدش برابر با قطر قاعدهٔ آن است، محاط شده است. مخروط در استوانهٔ مستدیر قائمی محاط شده است. مساحت سطح استوانه (با احتساب بالا و پایین آن) چه‌قدر است؟



۳۲۴. بین تمام استوانه‌های دوار هم‌ارز (معادل)، کدام استوانه مساحت کلش می‌نیمم است؟

۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع

۳۲۵. در شکل یک مخروط مستدیر قائم در یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط شده است. صفحهٔ E با قاعدهٔ استوانه موازی و ۱۴ سانتیمتر بالای آن است. ارتفاع مخروط ۲۱ سانتیمتر و شعاع قاعده‌اش ۶ سانتیمتر است. مساحت فصل مشترک صفحهٔ E را با فضای بین دو رویه به‌دست آورید.



۲.۷.۲. نسبت مساحتها

۳۲۶. استوانهٔ دواری بر منشور منتظم شش‌پهلویی محیط است. نسبت مساحتهای جانبی آنها را تعیین کنید.

۸.۲. حجم

۱.۸.۲. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم استوانه

۳۲۷. حجم یک استوانهٔ دوار قائم برابر است با حاصل ضرب مساحت مستطیل مولد آن، در دایرهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ نقطهٔ برخورد قطرهای این مستطیل طی دوران مستطیل حول یک ضلع آن.

۳۲۸. حجم یک استوانه دوار قائم برابر است با حاصل ضرب مساحت جانبی آن در نصف شعاع قاعده‌اش.

۳۲۹. اگر ارتفاع یک استوانه با قطر قاعدهٔ آن برابر باشد (استوانه را اصطلاحاً متساوی‌الاضلاع می‌نامند)، حجم آن مساوی است با حاصل ضرب سطح کل آن، در $\frac{۱}{۳}$ شعاع قاعده‌اش.

۳۳۰. حجم یک استوانهٔ دوار مساوی است با حاصل ضرب مساحت کل آن ضرب در چهار برابر واسطهٔ توافقی بین شعاع قاعده و ارتفاع آن.

۳۳۱. خیزرانی داریم که از ۹ بند تشکیل شده است. حجم ۳ بند پایینی ۴ «شه‌نا» و حجم ۴ بند بالایی ۳ «شه‌نا» است. می‌خواهیم حجم ۲ بند دیگر را پیدا کنیم، به شرطی که تفاوت حجم هر دو بند متوالی، مقدار ثابتی باشد.

از رسالهٔ ریاضیات در نه باب، چین

۳۳۲. قاعدهٔ استوانه‌ای ناحیهٔ مستدیری به قطر ۸ است. ارتفاع استوانه نیز ۸ است. حجم استوانه چه‌قدر است؟

۳۳۳. مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر را حول ضلع بزرگترش دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چند سانتیمتر مکعب است؟

۳۳۴. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R داده شده است. این دایره را به اندازهٔ l در راستایی که با صفحهٔ دایره زاویهٔ α می‌سازد، انتقال می‌دهیم. اندازهٔ حجم استوانهٔ حاصل از این جابه‌جایی را تعیین کنید.

۳۳۵. دو صفحهٔ متوازی به فاصلهٔ h از یکدیگر داده شده‌اند. قاعده‌های یک استوانهٔ مایل دو دایره به شعاع R واقع بر این دو صفحه‌اند. اندازهٔ حجم این استوانه را بیابید.

۳۳۶. استوانه‌ای را در یک چهاروجهی منتظم محاط کرده‌ایم، به‌نحوی که ارتفاع چهاروجهی محور استوانه باشد؛ دایرهٔ یکی از قاعده‌های استوانه بر صفحهٔ قاعدهٔ چهاروجهی منطبق و دایرهٔ قاعدهٔ دوم بر بقیهٔ یالهای چهاروجهی مماس شود، و در ضمن، محیط دایرهٔ اخیر با دو ارتفاع دیگر چهاروجهی برخورد داشته باشد، اگر یال چهاروجهی برابر l باشد، حجم استوانه را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۲.۸.۱.۲. بیشترین مقدار حجم استوانه

۳۳۷. استوانهٔ ماکزیمم به‌وجود آمده از دوران یک مستطیل با محیط ثابت، که حول یکی از ضلعهایش دوران می‌کند، کدام است؟

۳۳۸. بین استوانه‌هایی که مساحت سطح کل آنها مساوی $2\pi a^2$ است، کدام استوانه بیشترین حجم را داراست؟

۳۳۹. ۱. بین استوانه‌های دواری که مساحت کل آنها مساوی $2\pi a^2$ است، استوانه‌ای را مشخص کنید که حجمش ماکزیمم می‌باشد.

۲. همین مسأله را برای حالتی حل کنید که استوانه از طرف یکی از قاعده‌هایش باز باشد.

۳۴۰. بیشترین حجم یک استوانه با مساحت کل داده شده را بیابید، درصورتی که:

۱. استوانه بسته باشد، یعنی دو سطح قاعده داشته باشد.

۲. استوانه باز باشد، یعنی یک قاعده بیشتر نداشته باشد.

۳.۸.۱.۲. کمترین مقدار حجم استوانه

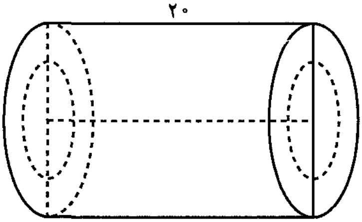
۳۴۱. بین تمام استوانه‌های دوار که نسبت حجم به مساحت کل آنها مساوی عدد داده شدهٔ k است، کدام استوانه کمترین حجم را دارد؟

۴.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۳۴۲. بیشترین مقدار حجم چهاروجهی محاط در داخل استوانه‌ای که شعاع قاعدهٔ آن R و ارتفاع آن h باشد، چه‌قدر است؟

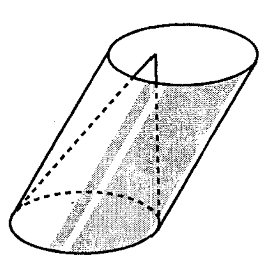
۳۴۳. حجم مشترک دو استوانهٔ مستدیر قائم با شعاعهای برابر را که دارای محورهای متعامدند، پیدا کنید.

۳۴۴. یک ناودان سفالی به شکل استوانهٔ توخالی ۵۶cm طول دارد. قطر داخلی و خارجی آن بترتیب ۱۲cm و ۱۴cm هستند. حجم خاک لازم برای ساختن این ناودان را به‌دست آورید (π را $۳\frac{۱}{۷}$ بگیرید).

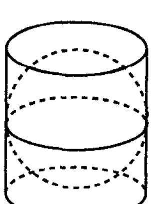


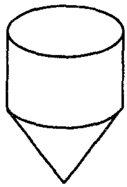
۳۴۵. دو استوانهٔ هم‌محور، قاعدهٔ مشترک دارند. ارتفاع مشترک دو استوانه ۲۰، شعاع قاعدهٔ استوانهٔ کوچکتر ۴ و اختلاف شعاعهای دو قاعده ۰/۲ می‌باشد. اندازهٔ حجم فضای بین دو استوانه را تعیین کنید.

۳۴۶. یک رویهٔ مخروطی در یک رویهٔ استوانه‌ای قرار دارد. قاعدهٔ مخروط، قاعدهٔ استوانه است و رأس آن در قاعدهٔ بالایی استوانه قرار دارد. حجم محصور بین این دو رویه و قاعدهٔ بالایی را برحسب r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه بیابید.



۳۴۷. ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ قبل از میلاد) نشان داد که حجم کره دو سوم حجم کوچکترین استوانهٔ مستدیر قائمی است که می‌تواند آن را دربر گیرد. صحت این مطلب را نشان دهید.





۳۴۸. یک سیلو مطابق شکل درنظر بگیرید. شعاع استوانهٔ بالایی ۲cm و ارتفاع کل سیلو ۸cm و ارتفاع بخش مخروطی ۴ است. حجم سیلو را بیابید.

۵.۱.۸.۲. اندازهٔ مساحت، اندازهٔ حجم

۳۴۹. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم استوانهٔ دواری را که شعاع قاعدهٔ آن ۴ و ارتفاعش ۸ سانتیمتر است حساب کنید.

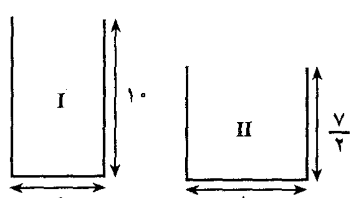
۳۵۰. مستطیل ABCD یک دوران کامل حول خط xy از صفحه‌اش که موازی یکی از ضلعهایش می‌باشد و مستطیل را قطع نمی‌کند، انجام می‌دهد. ثابت کنید که سطح کل و حجم جسم ایجادشده بترتیب مساوی با حاصل ضرب طول دایرهٔ طی شده به وسیلهٔ مرکز مستطیل، در محیط، یا در مساحت این مستطیل است.

۲.۸.۲. نسبت حجمها

۳۵۱. شعاع قاعدهٔ استوانه‌ای را ۳ برابر و ارتفاع آن را ثلث می‌کنیم. نسبت حجم استوانهٔ جدید به استوانهٔ اولیه را تعیین کنید.

۳۵۲. دو ظرف استوانه‌ای شکل I و II که نمای آنها در شکل ملاحظه می‌شوند، مفروضند. نسبت حجم ظرف II به حجم ظرف I کدام عدد زیر است؟

الف) ۰/۷۵ ب) ۱ ج) $\frac{۴}{۳}$ د) $\frac{۷۶}{۶۹}$ هـ) $\frac{۴۶}{۳۹}$



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۳۵۳. استوانه‌ای که قاعده‌اش، دایرهٔ عظیمهٔ یک کره و ارتفاعش برابر قطر همین کره باشد، حجمی برابر $\frac{۳}{۲}$ حجم کره و سطح کلی برابر $\frac{۳}{۲}$ سطح کره خواهد داشت.

از ارشمیدس

۳۵۴. ثابت کنید که حجمهای ایجاد شد از دوران یک مستطیل بترتیب طول دو ضلع مجاورش، به نسبت عکس این ضلعها می‌باشند.

۳.۸.۲. نسبت حجم و سطح

۳۵۵. زاویهٔ قائمهٔ XOY و نقطهٔ P درون آن و به‌فاصلهٔ ۲p از ضلعهای آن داده شده است. از نقطهٔ P خطی رسم می‌کنیم که OX را در A و OY را در B قطع کند و مستطیل OACB را به‌وجود آورد. نسبت حجم به مساحت کل استوانهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ این مستطیل را وقتی که حول OY دوران کند تعیین کنید.

۳۵۶. مستطیلی به ابعاد a و b یک بار گرد ضلع a و یک بار گرد ضلع b دوران می‌کند، از هر دوران استوانهٔ دواری پدید می‌آید. نسبت مساحتهای جانبی، همچنین نسبت حجمهای دو استوانه را حساب کنید.

۴.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها

۳۵۷. در صفحهٔ P مستطیل R و خط xy که مستطیل را قطع نمی‌کند و موازی یکی از ضلعهای مستطیل است داده شده است. دو صفحهٔ عمود برهم P' و P'' بر xy می‌گذرند. R' و R'' تصویرهای R روی این صفحه‌ها هستند. ثابت کنید که اگر این شکل حول xy دوران کند، استوانهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ R، معادل مجموع استوانه‌های ایجاد شده به‌وسیلهٔ R' و R'' است.

۳۵۸. اگر در یک استوانهٔ دوار که ارتفاع آن مساوی قطر قاعده‌اش می‌باشد، یک کره و یک مخروط قائم محاط کنیم، حجمهای این سه جسم متناسب با عددهای ۳، ۲ و ۱ هستند.

۳۵۹. اندازه‌های ضلعهای مستطیلی a و b است که $a > b$. این مستطیل اگر حول ضلع به اندازهٔ b دوران کند، استوانه‌ای به حجم V پدید می‌آید، و اگر حول ضلع به اندازهٔ a دوران کند، استوانه‌ای به حجم W پدید می‌آید. V و W با هم چه رابطه‌ای دارند؟

الف) $V < W$ ب) $V > W$ ج) $V = W$

د) $V = ۰/۹W$ هـ) $V = ۱/۳W$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳۶۰. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a مفروض است. قاعده‌های استوانه‌ای در وجه‌های

ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ محاط شده‌اند. نقطهٔ M روی یال AB طوری قرار گرفته‌اند که $AM = \frac{a}{3}$ و N روی B_1C_1 به قسمی قرار دارد که $NC_1 = \frac{a}{4}$. از نقطه‌های C_1 و M صفحه‌ای گذشته، بر قاعدهٔ استوانه که در ABCD محاط شده، مماس گردیده است. صفحه‌ای هم از A و N گذشته و بر قاعدهٔ استوانه که در $A_1B_1C_1D_1$ محاط شده، مماس شده است. حجم آن قسمت از استوانه را پیدا کنید که بین صفحه‌های محصور شده است.

۹.۲. رابطهٔ متری

۳۶۱. یک سطح استوانه‌ای دوار داده شده است. اگر از یک نقطه مانند P، قاطعهای PAB و PCD را چنان رسم کنیم که با محور سطح استوانه‌ای زاویه‌های مساوی بسازند، ثابت کنید که:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

و بعکس، اگر این رابطه برقرار باشد، قاطعهای PAB و PCD با محور زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۳۶۲. در یک استوانهٔ دوار قائم نسبت مساحت جانبی به مساحت ۲ قاعده برابر است با نسبت ارتفاع استوانه به شعاع قاعدهٔ آن $(\frac{S}{2B} = \frac{h}{r})$.

۳۶۳. در یک استوانهٔ دوار قائم، نسبت مساحت مقطع S ایجاد شده به وسیلهٔ صفحهٔ گذرنده بر محور استوانه، به مساحت قاعدهٔ استوانه یعنی B، برابر است با نسبت ارتفاع استوانه به نصف مساحت قاعدهٔ استوانه $(\frac{S}{B} = \frac{h}{1/2C})$.

۳۶۴. ثابت کنید که در یک استوانهٔ دوار، بین حجم آن V، سطح کل آن S و سطح جانبی‌اش l، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$8\pi V^2 = l^2(S-l)$$

۲.۱۰. مکان هندسی

۲.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۳۶۵. مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از خط ثابت D به فاصلهٔ ثابتی قرار دارند.

۳۶۶. یک سطح استوانه‌ای مستدیر و یک نقطه داده شده‌اند. از این نقطه، خطهایی رسم می‌کنیم که سطح استوانه‌ای را در دو نقطه قطع کند. مکان هندسی وسط پاره‌خط واصل بین این دو نقطه را تعیین کنید.

۳۶۷. مکان هندسی وسط پاره‌خطهای محصور به یک سطح استوانه‌ای مستدیر را که موازی امتداد مفروض Δ هستند، تعیین کنید.

۳۶۸. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از یک نقطهٔ ثابت A و از نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ ثابت به مرکز نقطهٔ A و به شعاع معلوم R به یک فاصله باشد.

۳۶۹. دو سطح استوانه‌ای که مولدهایشان موازی و منحنی هادیشان دایره است و در یک صفحه قرار دارند، داده شده‌اند. مکان هندسی دو سر پاره‌خط MM' که دو سر آن روی دو سطح استوانه‌ای قرار دارد و با پاره‌خط AA' واقع بر صفحهٔ قاعده‌های آنها همسنگ (موازی و مساوی) است، تعیین کنید.

۳۷۰. دو استوانهٔ دوار که دارای محورهای موازی هستند، داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که صفحه‌های مماس رسم شده از هریک از آنها بر سطح دیگر همان زاویه‌ای را می‌سازند که صفحه‌های مماس رسم شده از این نقطه‌ها بر دو استوانه، به‌وجود می‌آورند.

۳۷۱. مکان هندسی مرکزهای تجانس، با نسبت تجانس k را به قسمی بیابید که خط D' متناظر با خط D، دایرهٔ داده شدهٔ C' را قطع کند.

۲.۱۰.۲. مکان هندسی خط

۳۷۲. مکان هندسی محورهای سطحهای استوانه‌ای دواری را پیدا کنید که بر چهارضلع متوازی‌الاضلاع داده شدهٔ ABCD مماسند.

۳۷۳. مکان هندسی محورهای سطحهای استوانه‌ای دواری را که از رأسهای متوازی‌الاضلاع داده شدهٔ ABCD می‌گذرند پیدا کنید.

۳۷۴. مکان هندسی محورهای استوانه‌های دواری را تعیین کنید که دو صفحهٔ مماس موازی

بر آنها، داده شده است.

۳۷۵. صفحهٔ P و خط D موازی با این صفحه داده شده است. مکان هندسی مولدهای تقاطع صفحه‌های موازی P و تانژانت به سطحهای استوانه‌ای دوار گذرنده بر خط D که شعاع دایرهٔ هادی آنها r است، را تعیین کنید.

۳۷۶. امتداد (Direction) مولدهای یک سطح استوانه‌ای را که بر یک دایرهٔ داده شدهٔ O می‌گذرند و به وسیلهٔ صفحهٔ P تحت یک دایره قطع می‌شود، تعیین کنید.

۳۷۷. دو خط عمود بر هم X و Y غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. پاره‌خط AB به طول ثابت، چنان تغییر مکان می‌دهد که دو سر آن روی این دو خط قرار دارد. مطلوب است مکان هندسی محل برخورد صفحه‌هایی که از دو نقطهٔ A و B عمود بر دو خط X و Y رسم می‌شوند.

۳۷۸. مکان هندسی خطهایی مانند D را که به فاصله‌های معلوم a و b از دو خط متوازی X و Y می‌باشند، تعیین کنید.

۳۷۹. در صفحهٔ P نقطهٔ A و دو خط متوازی D و 'D داده شده است. مکان هندسی مولدهای تقاطع صفحه‌هایی را که از نقطهٔ A مماس بر سطحهای استوانه‌ای دوار گذرنده بر دو خط D و 'D رسم می‌شوند، تعیین کنید.

۳۸۰. خط ثابت D و خط متغیر Δ که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد، در فضا داده شده‌اند.

۱. مکان هندسی پای عمود مشترکهای دو خط D و Δ را که روی Δ واقعند بیابید.

۲. مکان هندسی وسط عمود مشترکهای دو خط D و Δ را تعیین کنید.

۳۸۱. مکان هندسی محورهای سطحهای استوانه‌ای دواری را بیابید که :

۱. یک مولد و R شعاع مقطع قائم این سطح استوانه‌ای داده شده باشد.

۲. یک مولد و صفحهٔ مماس بر سطح استوانه‌ای در طول این مولد معلوم باشد.

۳. یک مولد و یک نقطه از سطح استوانه‌ای معلوم باشند.

۴. دو مولد از سطح استوانه‌ای معلوم باشند.

۱۱.۲. رسم شکل

۱.۱۱.۲. تعیین نقطه

۳۸۲. یک دایره به مرکز O و به شعاع r و دو قطر عمود بر هم آن داده شده است. نقطهٔ M را

روی این دایره چنان بیابید که MA و MB عمود بر این قطرها باشند و با دوران مستطیل OAMB حول یکی از این ضلعها استوانه‌ای به حجم ماکزیمم ایجاد شود.

۲.۱۱.۲. رسم خط

۳۸۳. یک سطح استوانه‌ای دوار، نقطهٔ P و خط D داده شده است. خطی از نقطهٔ P رسم کنید که وسط پاره‌خط حاصل از برخورد آن با سطح استوانه‌ای، روی خط D باشد.

۳.۱۱.۲. رسم صفحه

۳۸۴. از یک نقطهٔ مفروض، صفحه‌ای مماس بر یک سطح استوانه‌ای مستدیر رسم کنید.

۳۸۵. صفحه‌ای مماس بر یک سطح استوانه‌ای مستدیر رسم کنید که با خط مفروضی موازی باشد (خط مفروض موازی مولد سطح استوانه‌ای نیست).

۴.۱۱.۲. رسم سطح استوانه‌ای

۳۸۶. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که سه مولد A، B و C از آن معلوم باشد.

۳۸۷. یک سطح استوانه‌ای دوار رسم کنید که سه مولد آن داده شده‌اند.

۳۸۸. یک سطح استوانه‌ای دوار رسم کنید که یک مولد مانند G و دو خط مماس T و T′ از آن معلوم باشند.

۳۸۹. یک سطح استوانه‌ای دوار رسم کنید که از آن، یک صفحهٔ مماس و مولد تماس آن با سطح استوانه‌ای، و شعاع این استوانه داده شده است.

۳۹۰. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که از آن، دو صفحهٔ مماس غیرموازی و یک نقطه از سطح استوانه‌ای، داده شده است.

۳۹۱. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که دو صفحهٔ مماس P و Q بر آن، و خط مماس T معلوم باشند.

۳۹۲. یک سطح استوانه‌ای دوار رسم کنید که از آن، دو صفحهٔ مماس غیرموازی بر آن، و اندازهٔ شعاع استوانه معلوم باشد.

۳۹۳. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که بر سه صفحهٔ داده شدهٔ P، Q و R که با یک خط مفروض D موازی‌اند، مماس باشد.

۳۹۴. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که قاعدهٔ آن دایرهٔ معلوم O باشد، از نقطهٔ مفروض A بگذرد و بر خط داده شدهٔ T مماس باشد.

۳۹۵. سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که شعاع قاعدهٔ آن r است و در دو نقطهٔ معلوم A و A′، بر دو خط موازی T و T′ مماس است.

۳۹۶. مجانس یک سطح استوانه‌ای مستدیر چه شکلی است؟ بعکس.

۵.۱۱.۲. رسم استوانه

۳۹۷. بر چهار نقطهٔ A، B، C و D استوانه‌ای دوار مرور دهید.

۳۹۸. بر سه نقطهٔ A، B و C استوانه‌ای دوار با معلوم بودن امتداد محور مرور دهید.

۳۹۹. در سه صفحهٔ دلخواه موازی با یک خط که دو به دو متقاطعند، می‌توان چهار استوانهٔ مستدیر مماس، رسم نمود.

۴۰۰. در هر منشور مثلث‌القاعدهٔ قائم، می‌توان یک استوانهٔ دوار محاط و بر آن یک استوانهٔ دوار محیط کرد.

۴۰۱. در یک قطعهٔ سهموی دوار، با یک قاعده، استوانه‌ای با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۱۲.۲. برش، مقطع

۴۰۲. نشان دهید دو سطح استوانه‌ای مستدیر که دارای یک منحنی هادی هستند، دارای یک فصل مشترک مسطح دیگرند.

۴۰۳. مدادی است به شکل استوانهٔ قائم با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم. نوک آن که با مداد تراش تراشیده شود، مخروطی دوار در آن پدید می‌آید. مداد تراش در برخورد با هر وجه مداد آن را در منحنیهایی تراش می‌دهد که کمانهایی هستند از:

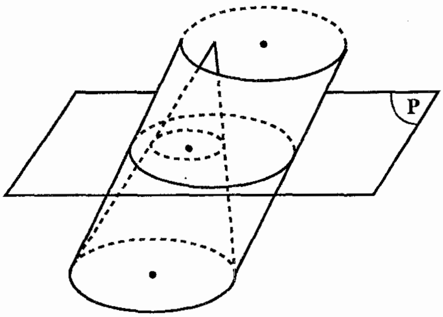
الف) دایره   ب) بیضی   ج) سهمی

د) هذلولی   هـ) سینوسوئید

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۴۰۴. ثابت کنید اگر سطح جانبی استوانه‌ای با صفحهٔ مایلی قطع شود و سپس در طول یک مولد قطع گردد و روی یک صفحه گسترده شود، خط حاصل از تقاطع، یک منحنی

سینوسی خواهد بود.



۴۰۵. در شکل، یک صفحهٔ موازی با قاعده از وسط ارتفاع می‌گذرد. تصویر مقطع را وقتی از بالا به آن نگاه می‌کنیم رسم کنید. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه ۴ باشد، مساحت فصل مشترک صفحه را با فضای بین دو رویه به‌دست آورید.

۴۰۶. استوانهٔ دوار به شعاع قاعدهٔ یک را، صفحه‌ای چنان قطع کرده که مقطع حاصل یک بیضی است که طول قطر بلند آن نسبت به طول قطر کوتاه آن ۵۰٪ بیشتر است. طول قطر بلند این بیضی چه قدر است؟

الف) ۱   ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) ۲   د) $\frac{۹}{۴}$ هـ) ۳

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

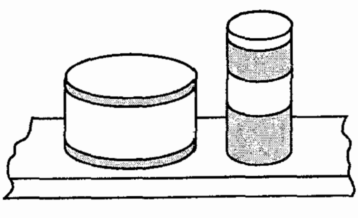
۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۰۷. تعداد لوله‌های مدور با قطر داخلی یک اینچ، که به اندازهٔ لوله‌ای با قطر داخلی ۶ اینچ آب عبور خواهند داد برابر است با:

الف) ۶π ب) ۶   ج) ۱۲   د) ۳۶   هـ) ۳۶π

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۴۰۸. دو ظرف استوانه‌ای مربای آلبالو ساخت یک کارخانه در قفسه‌های یک مغازه قرار دارد. ارتفاع ظرف بلندتر دو برابر ارتفاع ظرف کوتاهتر؛ و شعاع آن نصف شعاع ظرف کوتاهتر است. قیمت ظرف بلندتر ۲۳ تومان و قیمت ظرف کوتاهتر ۴۳ تومان است. کدام را می‌خرید؟



۴۰۹. اگر مساحت قاعده‌های استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و منشور مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعدهٔ a برابر باشند، اندازهٔ طول ضلع مربع یعنی a را برحسب r به‌دست آورید.

۴۱۰. در یک استوانهٔ دوار، ارتفاع، مساوی شعاع قاعده است.

۱. ثابت کنید که در آن مساحت کل دو برابر مساحت جانبی است.

۲. ابعاد، حجم و مساحت این استوانه را با دانستن این که عدد حجم آن سه برابر عدد سطح کل آن است، به‌دست آورید.

۴۱۱. ثابت کنید که :

۱. شکل متشابه با یک استوانهٔ دوار، یک استوانهٔ دوار است و نسبت شعاعهای قاعدهٔ این دو استوانه مساوی نسبت ارتفاعهای آنها است و بعکس.

۲. نسبت مساحتهای دو استوانهٔ دوار متشابه مساوی مجذور نسبت تشابه آنها است ؛ نسبت حجمهای آنها مساوی مکعب نسبت تشابه آنها است.

۴۱۲. دو استوانهٔ قائم یکی به شعاع قاعدهٔ ۲ سانتیمتر و ارتفاع ۱ سانتیمتر و دیگری به شعاع قاعدهٔ ۱ سانتیمتر و ارتفاع ۲ سانتیمتر درنظر بگیرید.

الف. مساحتهای جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

ب. حجمهای این دو استوانه را پیدا کنید و با هم مقایسه کنید.

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۳. سه سطح استوانه‌ای مساوی، با شعاع R و محورهای دو به دو عمود بر هم، بر یکدیگر مماسند.

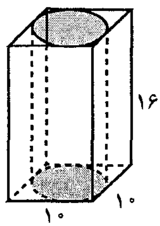
الف. شعاع کوچکترین کره‌ای که بر این سه سطح استوانه‌ای مماس باشد چه‌قدر است؟

ب. شعاع بزرگترین استوانه‌ای که بر این سه سطح استوانه‌ای مماس بوده و محور آن از داخل مثلثی که رأسهای آن از نقطه‌های تماس سه استوانه به‌وجود آمده می‌گذرد، چه‌قدر است؟

۴۱۴. ۱. یک استوانهٔ قائم با قاعدهٔ مستدیر، در یک منشور مربع‌القاعدهٔ قائم با همان ارتفاع محاط است. این دو، در چهار یال موازی مماس می‌باشند.

بر یک ضلع مربع قاعدهٔ بالایی منشور و بر یک قطر از قاعدهٔ پایینی آن، یک صفحهٔ قاطع می‌گذرانیم. ثابت کنید که حجم بخشی از استوانه که، محصور بین صفحهٔ قاطع، قاعدهٔ پایینی استوانه و سطح استوانه است، مساوی $\frac{1}{6}$ حجم منشور است.

۲ . ثابت کنید حجم محصور بین دو استوانهٔ قائم مستدیر محاط در یک مکعب که هریک در چهار خط موازی یالها با مکعب مماسند، و محورهای دو استوانه، عمود بر یکدیگر می‌باشند ؛ مساوی $\frac{۲}{۳}$ حجم مکعب است.



۴۱۵. درشکل روبرو طول ضلع قاعدهٔ مکعب مستطیل ۱۰ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۶ سانتیمتر است.

۱ . مساحت کل و حجم استوانه را به‌دست آورید.

۲ . حجم ناحیهٔ بین استوانه و مکعب مستطیل چه‌قدر است؟

۴۱۶. در یک صفحه، مستطیل ABCD و خط XY موازی ضلع AB، که مستطیل را قطع نمی‌کند و در طرف ضلع AB است، داده شده است. در درون مستطیل، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کنید، چنان‌که :

۱ . نسبت حجمهای ایجاد شده از دوران مستطیلهای ABFE و CDEF حول خط XY مساوی k^2 باشد.

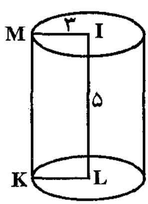
۲ . مساحتهای ایجاد شده به وسیلهٔ محیطهای این مستطیلها مساوی باشد. O را نقطهٔ برخورد AD و XY و $OA = a$ ، $OD = d$ ، $AB = h$ و $OE = x$ قرار می‌دهیم.

۴۱۷. یکی از قاعده‌های یک استوانهٔ دوار به مساحت πr^2 را حول محور استوانه تحت یک حرکت دورانی قرار می‌دهیم. قاعدهٔ دیگر استوانه ثابت می‌ماند. بعلاوه مولدهای استوانه خط راست و با طول ثابت g باقی می‌مانند.

حجم جسم جدید پس از دوران در هریک از حالتهای زیر کدام است؟

۱ . مولدها یکدیگر را روی محور قطع کنند.

۲ . مولدها به اندازهٔ d از محور دور شوند.



۴۱۸. اگر مستطیل MKLI حول یکی از ضلعهایش دوران کند، استوانهٔ دواری به‌وجود می‌آید.

الف. اگر $MI = ۳$ و $IL = a$ و مستطیل حول IL دوران کند، حجم استوانهٔ دوار حاصل را بیابید.

ب. اگر مستطیل حول KL دوران کند، حجم استوانهٔ دوار حاصل را تعیین کنید.

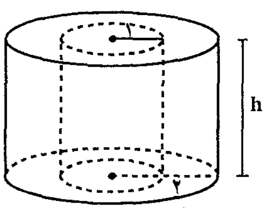
۴۱۹. ۱ . مکان هندسی محورهای سطحهای استوانه‌ای دوار مماس بر دو صفحهٔ داده شده را تعیین کنید.

۲ . سطح استوانه‌ای دواری رسم کنید که از یک نقطهٔ داده شده می‌گذرد و بر دو صفحهٔ مفروض مماس است.

۴۲۰. ۱. مکان هندسی خطهایی را که از یک نقطهٔ داده شدهٔ A می‌گذرند و یا موازی خط مفروض D بوده، بر یک سطح استوانه‌ای مستدیر مماسند، تعیین کنید.
۲. خطهایی رسم کنید که از یک نقطهٔ داده شده می‌گذرند و یا موازی یک خط مفروض هستند و بر دو سطح استوانه‌ای مستدیر مماسند.

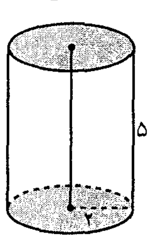
۴۲۱. حجم هریک از استوانه‌های زیر را تعیین کنید :
الف. استوانه‌ای که قطر هر قاعده‌اش ۸ و ارتفاعش ۱۱۱ است.
ب. استوانه‌ای که شعاع قاعده‌اش ۲ و ارتفاعش ۱۱۱۹ است.
پ. استوانه‌ای که مجموع مساحتهای قاعده‌هایش ۲۸۸π و ارتفاعش ۱۲ است.

۴۲۲. دو استوانهٔ قائم که مرکز قاعده‌های آنها یکی است، را در نظر بگیرید. با توجه به‌اندازه‌های روی شکل :



الف. نسبت مساحت کل استوانهٔ بزرگتر به مساحت کل استوانهٔ کوچکتر را بیابید.
ب. نسبت حجم استوانهٔ بزرگتر به حجم استوانهٔ کوچکتر چه‌قدر است؟
پ. حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.

۴۲۳. طول محور یعنی طول ارتفاع استوانهٔ قائم شکل برابر ۵ سانتیمتر وشعاع قاعدهٔ آن ۲ سانتیمتر است. قاعده‌های این استوانه را بردارید و ازکنار، آن را به موازات محور برش داده و باز کنید، یک مستطیل به‌دست می‌آید.



۱. طول و عرض مستطیل حاصل چه‌قدر است؟
۲. مساحت مستطیل را به‌دست آورید.
۳. مساحت این مستطیل چه رابطه‌ای با مساحت جانبی استوانه دارد؟
۴. با توجه به پاسخ سؤال ۳، مساحت جانبی استوانه چیست؟
۵. به همین روش، مساحت جانبی یک استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را به‌دست آورید.
۶. مساحت هریک از دایره‌های استوانه شکل چه‌قدر است؟
۷. مساحت کل استوانه را حساب کنید.
۸. به کمک پاسخ سؤالهای ۶ و ۷، مساحت کل استوانهٔ سؤال ۵ را محاسبه کنید.

بخش ۳

• مخروط

۱.۳. تعریف و قضیه

۲.۳. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۳. خط

۱.۱.۲.۳. خط مولد است

۲.۲.۳. صفحه

۱.۲.۲.۳. صفحه‌ها از یک نقطه می‌گذرند

۲.۲.۲.۳. صفحه مماس بر سطح مخروطی است

۳.۳.زاویه

۳.۳. ۱.اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو محور

۳.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۴.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۳.۳. ۲.رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۲.۳.۳.رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۳ . ۴ . ارتفاع، مولد، شعاع قاعده

۳ . ۴ . ۱. ارتفاع

۳ . ۴ . ۱ . ۱.اندازهٔ ارتفاع

۳ . ۴ . ۲. مولد

۳ . ۴ . ۲ . ۱.اندازهٔ مولد

۳ . ۴ . ۳. شعاع قاعده

۳ . ۴ . ۳ . ۱.اندازهٔ شعاع قاعده

۳ . ۴ . ۳ . ۲.نسبت شعاعها

۳.۴.۴.شعاع قاعده، ارتفاع

۳ . ۴ . ۵ . نسبت ارتفاع و مولد

۳ . ۴ . ۶ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۵.پاره خط

۳ . ۵ . ۱ .اندازهٔ پاره‌خط

۳ . ۵ . ۲ .اندازهٔ ضلع مثلث

۳ . ۵ . ۳ .بیشترین مقدار طول پاره‌خط

۳ . ۵ . ۴ .نسبت پاره‌خطها

۳ . ۵ . ۵ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۶ .شعاع کره

۳ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع کره

۳ . ۶ . ۲ . نسبت شعاعها

۳.۷. مساحت

۳ . ۷ . ۱.اندازهٔ مساحت

۳ . ۷ . ۱ . ۱.اندازهٔ مساحت جانبی

۳ . ۷ . ۱ . ۲.اندازهٔ مساحت کل

۳ . ۷ . ۱ . ۳.اندازهٔ مساحت مقطع

۳ . ۷ . ۱ . ۴.اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۳ . ۷ . ۲ .نسبت مساحتها

۳.۸.حجم
۳ . ۱.۸ .اندازهٔ حجم

۳.۸ . ۱.۱ .اندازهٔ حجم مخروط

۳.۸ . ۲.۱ .بیشترین مقدار حجم مخروط

۳.۸ . ۳.۱ .اندازهٔ حجم مخروط ناقص

۳.۸ . ۴.۱ .اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۳.۸ . ۵.۱ .اندازهٔ سطح و حجم

۳ . ۲.۸ .نسبت حجمها

۳.۸.۳.رابطهٔ بین حجمها

۳.۹. رابطهٔ متری

۳.۱۰.مکان هندسی
۳ . ۱.۱۰. مکان هندسی نقطه

۳ . ۲.۱۰ .مکان هندسی خط

۳.۱۱. رسم شکل
۳ . ۱۱ . ۱. تعیین نقطه

۳.۱۱ . ۲ . رسم خط

۳ . ۱۱ . ۳. رسم صفحه

۳.۱۱ . ۴ . رسم سطح مخروطی دوار

۳ . ۱۱ . ۵. رسم مخروط

۳.۱۱ . ۶ . رسم استوانه

۳.۱۲.برش، مقطع

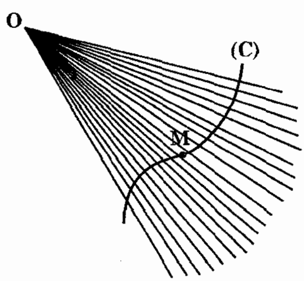
۳.۱۳.سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳.۱۴. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۳. مخروط

۱.۳. تعریف و قضیه

سطح مخروطی



تعریف. منحنی (C) و نقطهٔ O را در خارج آن درنظر می‌گیریم، مجموعهٔ نیمخطهای به مبدأ O که هریک بر یک نقطهٔ M از منحنی C مرور می‌کند، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح مخروطی می‌نامیم (شکل). اگر منحنی (C) ، دایره باشد، سطح مخروطی را مستدیر می‌نامند.

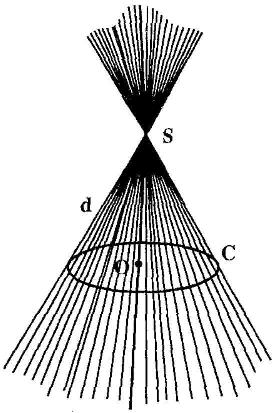
در هر سطح مخروطی نقطهٔ O را رأس و منحنی (C) را هادی و هریک از خطهایی را که بر رأس و یک نقطه از هادی می‌گذرد، یک مولد سطح می‌گوییم. اگر سطح مخروطی مستدیر را با یک صفحهٔ موازی با صفحهٔ منحنی هادی قطع کنیم، جسم حاصل را مخروط مستدیر می‌گوییم.

۴۲۴. **قضیه.** اگر دو صفحهٔ متوازی سطح مخروطی را قطع نمایند، مقطعهای حاصل دو منحنی متشابه‌اند.

ارتفاع مخروط. ارتفاع هر مخروط عبارت است از فاصلهٔ رأس آن از صفحهٔ قاعده.

فصل مشترک خط راست و سطح مخروطی. فصل مشترک خط راست و سطح مخروطی را عیناً مانند حالت سطح استوانه‌ای به دست می‌آورند و همچنین است تعیین فصل مشترک مخروط به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که از رأس مخروط بگذرد.

۴۲۵. قضیه. در هر نقطه از سطح مخروطی یک صفحهٔ مماس بر آن سطح وجود دارد و این صفحهٔ مماس خط مولد این نقطه را نیز شامل است.



سطح دوّار مخروطی. سطح دوار مخروطی آن است که از دوران یک خط راست گرد خط راستی که با آن در یک نقطه متقاطع است پدید می‌آید. مانند سطح دوار با محور Δ و مولد d در شکل. در سطح دوار مخروطی مدارها دایره و نصف‌النهارها خطهای راست همرسند. سطح دوار مخروطی در حقیقت سطحی مخروطی است که هادی آن دایره و رأس آن بر عمودی واقع است که در مرکز دایرهٔ هادی بر صفحهٔ آن دایره رسم شده باشند.

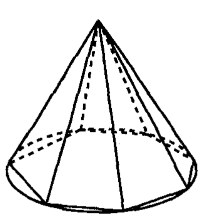
مخروط دوار

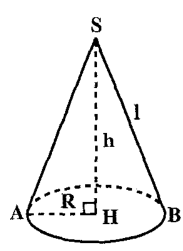
تعریف. مخروط جسمی است که به یک سطح مخروطی و صفحه‌ای که بر رأس آن نمی‌گذرد و همهٔ مولدها را در یک طرف رأس قطع می‌کند، محدود باشد. در مخروط مقطع صفحهٔ قاطع را قاعده و هر خط که یک نقطهٔ قاعده را به رأس وصل می‌کند مولد مخروط می‌نامند.

ارتفاع مخروط پاره‌خطی است محدود به رأس و صفحهٔ قاعده که بر آن صفحه عمود باشد. مانند پاره‌خط SH در شکل (الف).

در حالتی که سطح مخروطی دوار و صفحهٔ قاعده بر محور سطح دوار عمود باشد، مخروط را دوار می‌گوییم. در مخروط دوار مولدها مساوی یکدیگرند (چرا؟) و ارتفاع مخروط بر مرکز قاعده می‌گذرد. یعنی بر محور مخروط منطبق است.

مخروط دوار، با اندازهٔ شعاع قاعده و اندازهٔ ارتفاع یا با شعاع قاعده و اندازهٔ مولد و در هرحال، با دو عامل مشخص می‌شود. به‌طور مثال ممکن است یکی از عوامل مشخص‌کنندهٔ مخروط دوار شعاع قاعدهٔ آن و عامل دیگر زاویهٔ بین مولدها با صفحهٔ


(ب)



(الف)

قاعده یا زاویهٔ بین دو مولد که با محور سطح در یک صفحه واقعند، و به‌عنوان دو نصف‌النهار قرینه شناخته می‌شوند، مشخص گردد.

سطح جانبی مخروط دوار

۴۲۶. قضیه. سطح جانبی مخروط دوار مساوی است با حاصل‌ضرب طول محیط قاعده در نصف طول مولد.

سطح کل مخروط. برای تعیین سطح کل مخروط باید سطح قاعده را برمساحت سطح جانبی بیفزاییم. مساحت کل مخروط دوار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S = \pi R(R + 1)$$

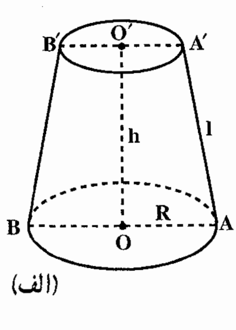
۴۲۷. قضیه. حجم مخروط دوار، مساوی یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

مخروط ناقص

تعریف. مخروط ناقص جسمی است که به یک سطح مخروطی و دو مقطع متوازی آن محدود باشد.

هرگاه مخروطی را صفحه‌ای موازی با صفحهٔ قاعدهٔ آن که بر رأس نگذرد قطع کند، به آن صفحه و صفحهٔ قاعده، جزیی از مخروط محدود می‌شود که یک مخروط ناقص است.

مخروط ناقص دوار جسمی است که به یک سطح دوار مخروطی و دو صفحهٔ عمود بر محور آن محدود باشد (شکل (الف)).

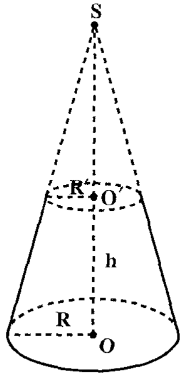


(الف)

در مخروط ناقص هریک از مقطعها را یک قاعده و فاصلهٔ دو قاعده را ارتفاع و هر پاره‌خطی را که دو سر آن بر دو نقطه از قاعده‌ها و با محور مخروط در یک صفحه باشد، یک مولد از مخروط ناقص می‌گوییم. مانند پاره‌خط AA' در شکل (الف).

با توجه به شکل (ب) می‌توان ملاحظه کرد که اگر مخروط دواری را که شعاع قاعدهٔ آن R و ارتفاعش، h_1 باشد، صفحه‌ای موازی صفحهٔ قاعده و به فاصلهٔ h از آن صفحه قطع کند، مقطع دایره‌ای است به شعاع :

$$R' = \frac{R(h_1 - h)}{h_1}$$



(ب)

(چرا؟) و اندازهٔ هریک از مولدها از دستور :

$$l^{۲} = h^{۲} + (R - R')^{۲}$$

به‌دست می‌آید.

هرم ناقص منتظم محاطی. همچنان که در مورد استوانه و مخروط گفتیم، در این مورد نیز می‌توان هرم ناقص منتظمی در مخروط ناقص دوار محاط کرد، به‌طوری که یالهای جانبی آن بر مولدهای سطح جانبی مخروط دوار منطبق باشند.

هرگاه عدهٔ ضلعهای قاعدهٔ این هرم ناقص منتظم را، بینهایت زیاد کنیم، سطح جانبی و حجم هرم ناقص منتظم به سمت سطح جانبی و حجم مخروط ناقص میل می‌نماید و بنابراین با درنظر گرفتن این که سهم هرم ناقص منتظم به‌تدریج به سمت مولد مخروط ناقص میل می‌کند، می‌توان دو قضیهٔ زیر را بیان کرد :

۴۲۸. **قضیه.** مساحت سطح جانبی مخروط ناقص دوار مساوی است با نصف حاصل‌ضرب طول مولد در مجموع محیطهای دو قاعده، و یا برابر است با حاصل‌ضرب طول مولد در محیط مقطع متوسط.

اگر R و R' شعاعهای دو قاعده، و l طول مولد باشد، داریم :

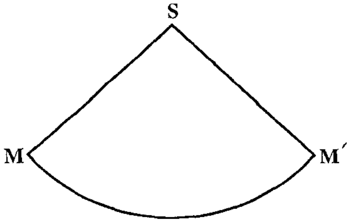
$$S_{\text{جانبی}} = \pi(R - R')l$$

۴۲۹. **قضیه.** حجم مخروط ناقص دوار مساوی است با حاصل‌ضرب یک سوم طول ارتفاع در مجموع مساحتهای دو قاعده و رابطهٔ هندسی آنها یعنی :

$$\text{حجم هرم ناقص} = V = \frac{۱}{۳}h(\pi R^{۲} + \pi R'^{۲} + \sqrt{\pi^{۲}R^{۲}R'^{۲}})$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi h(R^{۲} + R'^{۲} + R' + R')$$

گسترش سطح جانبی مخروط دوار بر صفحه. اگر سطح جانبی مخروط دواری را در امتداد یکی از مولدهای آن تا رأس بریده و آن را بر صفحه‌ای گسترش دهیم، گستردهٔ آن به‌صورتی که در شکل دیده می‌شود قطاعی از یک دایره است که SM و SM'، شعاعهای آن، مساوی مولد مخروط و درازای کمان آن $۲\pi R$، همان اندازهٔ محیط قاعدهٔ مخروط است.



۲.۳.نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۳. خط

۱.۱.۲.۳. خط مولد است

۴۳۰. ثابت کنید اگر خطی با سطح جانبی استوانه یا مخروطی بیش از دو نقطهٔ مشترک داشته باشد، آن خط مولد مخروط است.

۲.۲.۳. صفحه

۱.۲.۲.۳. صفحه‌ها از یک نقطه می‌گذرند

۴۳۱. مخروطی مستدیر داده شده است. نشان دهید که صفحه‌های عمود بر یالها، در نقطه‌هایی که قاعده را قطع می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

۲.۲.۲.۳. صفحه مماس بر سطح مخروطی است

۴۳۲. نیمصفحهٔ P که XY خط اصلی آن است داده شده است. یک نقطهٔ ثابت A روی XY و پاره‌خط AS عمود بر P را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ S را به نقطهٔ متغیر M واقع بر XY وصل می‌کنیم و در نیمصفحهٔ P ، خط MT را چنان رسم می‌کنیم که $A\hat{M}T = ۲A\hat{M}S$ باشد. نشان دهید که صفحهٔ SMT بر یک سطح مخروطی که مقطع آن با P یک دایره است، مماس باقی می‌ماند.

۳.۳. زاویه

۱.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۴۳۳. مقطعی با مساحت ماکزیمم از رأس مخروط دوار قائمی می‌گذرد. می‌دانیم مساحت این مقطع، دو برابر مساحت مقطع محوری مخروط می‌باشد. زاویهٔ رأس مقطع محوری

مخروط را پیدا کنید.

۴۳۴. سطح جانبی مخروطی دو برابر سطح قاعدهٔ آن است. زاویهٔ رأس مخروط را پس از گسترش پیدا کنید.

۴۳۵. نیمدایره‌ای را به مخروطی تبدیل کرده‌ایم. زاویهٔ رأس را در مقطع محوری مخروط پیدا کنید.

۴۳۶. زاویهٔ رأس مقطع محوری یک مخروط را پیدا کنید. در صورتی که می‌دانیم حجم آن، سه برابر حجم کرهٔ محاطی آن است.

۴۳۷. سه مولد از یک مخروط دوار، تشکیل یک کنج سه قائمه داده‌اند. زاویهٔ رأس این مخروط چیست؟

۴۳۸. سه مخروط مساوی که رأسهای مشترک دارند، روی صفحه‌ای قرار گرفته‌اند. هریک از مخروطها، بر دو مخروط دیگر مماس است. زاویهٔ رأس هر مخروط را در مقطع محوری خود پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴۳۹. n مخروط مساوی در یک رأس مشترکند. هریک از آنها به دو مخروط مجاور در طول یک مولد مماس می‌باشد و همهٔ مخروطها به یک صفحه مماس هستند. زاویهٔ رأس مقطع محوری مخروطها را پیدا کنید.

۳.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو محور

۴۴۰. n مخروط در رأس s مشترک و دوبه‌دو برهم مماسند. زاویهٔ بین دو محور هریک از دو مخروط متصل به‌هم را پیدا کنید.

۳.۳.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۴۴۱. یک سطح (Nappe) از یک سطح مخروطی دوار در یک کنج سه وجهی محاط است. زاویه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ هریک از مولدهای مماس با دو یال سه‌وجهی، واقع در وجهی که شامل آن مولد است را برحسب زاویه‌های کنج سه‌وجهی تعیین کنید.

۴۴۲. پاره‌خط AB با طول ثابت، حول محور MN که از نقطهٔ A رسم شده است، دوران می‌کند و سطح جانبی یک مخروط دوار را به‌وجود می‌آورد.
برای کدام وضعیت AB ، حجم مخروط ایجاد شده بیشترین مقدار ممکن است.

۴.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴۴۳. مطلوب است زاویهٔ بین مولد مخروط با صفحهٔ قاعدهٔ آن، به شرطی که سطح کل این مخروط دو برابر سطح مقطع محوری استوانه‌ای، با همین قاعده و ارتفاع باشد.

مسابقه‌های ریاضی، شوروی سابق

۴۴۴. شعاع کرهٔ محاطی و محیطی مخروط قائم دواری برابر R و $R\sqrt{۳۰}$ است. زاویهٔ بین مولد مخروط و صفحهٔ قاعده را تعیین کنید.

۴۴۵. از مرکز کرهٔ محاطی یک مخروط قائم دوار، صفحه‌ای عمود بر محور مخروط گذرانده‌ایم. اگر بدانیم دو بخش حاصل در مخروط، حجمی برابر دارند، زاویهٔ بین مولد مخروط با صفحهٔ قاعدهٔ آن را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴۴۶. نقطهٔ O رأس مشترک دو مخروط برابر می‌باشد که در یک طرف صفحهٔ α قرار دارند؛ طوری که یک مولد از هر مخروط (OA از اولی و OB از دومی) بر روی صفحهٔ α قرار گیرند. زاویهٔ بین ارتفاعهای دو مخروط برابر β و زاویهٔ بین ارتفاع و مولد مخروط برابر φ است. $(۲\varphi < \beta)$. اندازهٔ زاویهٔ بین مولد OA و صفحهٔ قاعدهٔ مخروط دیگر را که نقطهٔ B به آن تعلق دارد، پیدا کنید.

۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۴۴۷. ثابت کنید که اگر یک کنج چهاروجهی محدب در یک سطح (nappe) بر یک سطح مخروطی دوار محیط باشد، مجموع دو وجه روبه‌روی آن مساوی با مجموع دو وجه دیگر آن است.

۴۴۸. یک مخروط دوار و دو صفحهٔ مماس بر مولدهای SB و SC از آن داده شده است. SA را فصل مشترک این دو صفحه می‌گیریم. صفحهٔ مماس متغیری که صفحه‌های SAB و SAC را در SB' و SC' واقع در درون زاویه‌های ASB و ASC قطع می‌کند، درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که مجموع زاویه‌های کنج $S.AB'C'$ ثابت است. همچنین فرجه‌ای که یال آن محور SO از سطح مخروطی و وجه‌هایش SOB' و SOC' می‌باشند، مقدار ثابتی است.

۴۴۹. ثابت کنید که در هر کنج چندوجهی محدب با چهار وجه، محاط در یک سطح (nappe) از یک سطح مخروطی دوار، مجموع دو فرجهٔ روبه‌رو مساوی با مجموع دو فرجهٔ دیگر است.

۲.۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۴۵۰. زاویهٔ رأس یک مخروط دوار، بزرگتر است از زاویهٔ بین دو مولد، که در یک صفحه نصف‌النهاری قرار ندارند.

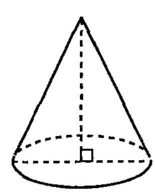
۴.۳. ارتفاع، مولد، شعاع قاعده

۱.۴.۳. ارتفاع

۱.۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

۴۵۱. حجم یک مخروط ۴۰۰ سانتیمتر مکعب و شعاع قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر است. ارتفاع آن را بیابید.

۴۵۲. شکل، یک مخروط مستدیر قائم را نشان می‌دهد. مخروط مستدیر قائم را تعریف کنید. اگر حجم این مخروط ۴۸π و قطر قاعدهٔ آن ۸ باشد، ارتفاع آن چه‌قدر است؟



۴۵۳. h ارتفاع و r و R، شعاعهای دوقاعدهٔ بالا و پایین یک مخروط ناقص است. ارتفاع مخروط کامل متناظر آن را پیدا کنید.

از بهاءالدین عاملی، از مسأله‌های تاریخی ریاضیات ایرانی

۴۵۴. اندازهٔ ارتفاع یک مخروط ناقص دوار را تعیین کنید. در صورتی که بدانیم نسبت مساحتهای قاعده‌هایش مساوی $k^۲$، مساحت جانبی‌اش $\pi m^۲$ و حجمش مساوی $\frac{۴}{۳}\pi a^۲$ است.

حالت خاص. $k^2 = ۴$ ، $m^2 = ۴۵$ ، $a^2 = ۶۳$.

۲.۴.۳. مولد

۱.۲.۴.۳. اندازهٔ مولد

۴۵۵. ارتفاع یک مخروط دوار مساوی ۲۴ سانتیمتر و زاویهٔ رأس مخروط ۳۰ درجه است. اندازهٔ مولد این مخروط را بیابید.

۴۵۶. بین مولدهای یک مخروط دوار، کدام مولد است که بزرگترین یا کوچکترین زاویه را با یک خط داده شدهٔ d می‌سازد؟

۴۵۷. اگر یک خط راست، بیش از دو نقطهٔ مشترک با یک سطح مخروطی مستدیر داشته باشد، این خط یک مولد آن سطح است.

۳.۴.۳. شعاع قاعده

۱.۳.۴.۳. اندازهٔ شعاع قاعده

۴۵۸. شعاع قاعدهٔ مخروطی را پیدا کنید که حجم آن مساوی V و سطح کل آن مساوی S باشد.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۴۵۹. شعاعهای قاعده‌های یک مخروط ناقص دوار را با داشتن اندازهٔ ارتفاع h، اندازهٔ مولدش a و حجمش $\frac{\pi b^2 h}{۳}$ به‌دست آورید. بحث کنید.

۴۶۰. مخروط ناقصی به حجم V و ارتفاع h مفروض است. اگر صفحه‌ای از محور مخروط ناقص عبور دهیم، مقطع ذوزنقه شکلی به سطح m^2 به‌دست می‌آید، شعاع هریک از دو قاعدهٔ مخروط ناقص را پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۴۶۱. مخروطی دوار به ارتفاع h و قاعدهٔ به مرکز O و شعاع R داده شده است. اندازهٔ شعاع قاعدهٔ کوچک یک مخروط ناقص دوار چه قدر باید باشد، در صورتی که ارتفاع این مخروط ناقص مساوی $\frac{h}{۲}$ و قاعدهٔ بزرگ آن مساوی قاعدهٔ مخروط داده شده و حجم آن

مساوی حجم مخروط داده شده باشد؟

۴۶۲. می‌خواهیم آباژوری به شکل مخروط ناقص دوار با ابعاد زیر بسازیم: قطرهای دهانه‌ها ۳۲ cm و ۸ cm و ارتفاع ۹ cm.
ابعاد شکل گستردهٔ آن را تعیین کنید (زاویهٔ دهانه و شعاعها).

۲.۳.۴.۳. نسبت شعاعها

۴۶۳. یک مخروط و یک استوانهٔ دوار دارای یک قاعده می‌باشند. نسبت شعاعهای قاعدهٔ آنها چه‌قدر باید باشد، برای آن که یک حجم داشته باشند. (هم‌ارز باشند.)

۴.۴.۳. شعاع قاعده، ارتفاع

۴۶۴. گستردهٔ سطح جانبی یک مخروط ناقص دوار، مساوی تفاضل دو قطاع مستدیر است که دارای دهانهٔ θ (برحسب درجه) و شعاعهای a و b برحسب سانتیمتر $(a > b)$ است.
اندازهٔ شعاعهای قاعده‌ها و ارتفاع مخروط ناقص را تعیین کنید.
مثال عددی: $\theta = ۲۸۸$ ، $a = ۳۷$ ، $b = ۱$.

۴۶۵. شعاع قاعدهٔ یک مخروط مستدیر قائم مساوی با شعاع یک کرهٔ مفروض است. حجم مخروط نصف حجم این کره است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعدهٔ آن برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۱}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۲}{۳}$

د) $\frac{۲}{۱}$ هـ) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۵.۴.۳. نسبت ارتفاع و مولد

۴۶۶. اگر مساحت سطح جانبی مخروط دوار (C) به طول مولد L و ارتفاع h ، دو برابر مساحت سطح قاعدهٔ آن باشد، نسبت $\frac{h}{L}$ را تعیین کنید.

۶.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۷. $B'C'$ تصویر قطر BC از یک دایره به شعاع OA ، روی خط TT' است که در نقطهٔ A بر این دایره مماس است. بررسی کنید برای چه وضعیتی از BC نسبت مساحت کل مخروط ناقص ایجاد شده از دوران ذوزنقهٔ $BCB'C'$ حول خط TT' ، به مساحت دایره، مساوی $2k$ است بحث کنید.

۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۴۶۸. کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ A را از یک سطح مخروطی دوار تعیین کنید.

۴۶۹. بین دو صفحهٔ متوازی مخروط قائمی محصور است که قاعدهٔ آن روی یکی از صفحه‌ها و رأسش روی صفحهٔ دیگر قرار دارد. زاویهٔ بین محور مخروط با مولد آن α است. هرگاه از نقطهٔ M وسط محور خطی رسم کنیم که با محور زاویهٔ β بسازد، و طول این خط CD (محصور بین صفحه‌های موازی) d باشد، مطلوب است طول AB، قسمتی از این خط که به وسیلهٔ مخروط جدا می‌شود.

۴۷۰. به چه فاصله‌ای از رأس یک مخروط باید مقطع S را موازی قاعدهٔ B از آن رسم کنیم، به قسمی که این مقطع نصف قاعده باشد؟

۴۷۱. به چه فاصله‌ای از رأس یک مخروط، مقطع S را موازی قاعدهٔ B باید رسم کنیم، برای آن که نسبت این مقطع به مساحت قاعده، مساوی عدد داده شدهٔ k باشد؟

۴۷۲. مخروط دوار را در چه فاصله از قاعدهٔ آن با صفحه‌ای موازی قاعده باید قطع کرد که مساحت جانبی آن با این مقطع به دو جزء متساوی تقسیم شود.

۴۷۳. مخروط دوار را در چه فاصله از قاعدهٔ آن با صفحه‌ای موازی قاعده باید قطع کرد تا حجم آن به دو جزء متساوی تقسیم شود.

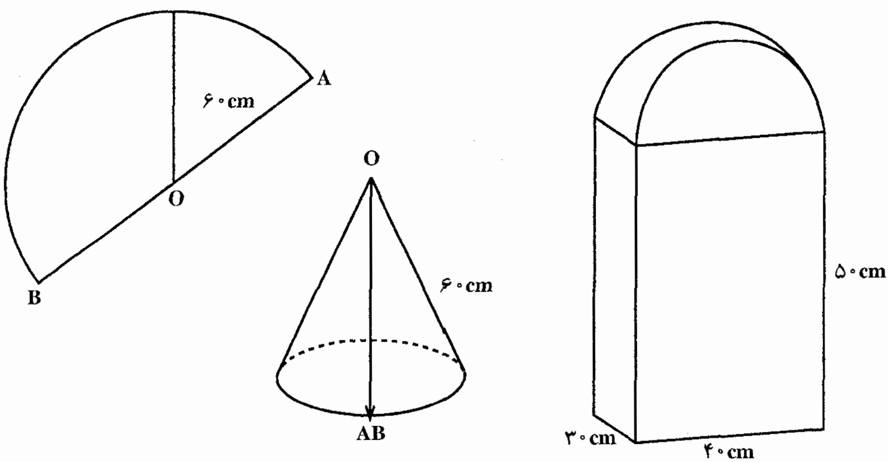
۴۷۴. از مقطع محوری مخروط، دو خط راست عمود برهم به دست می‌آید. روی یکی از مولدهای مخروط، دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ a از یکدیگر انتخاب می‌کنیم. روی سطح مخروط هم، دو نقطهٔ C و D را طوری درنظرمی‌گیریم که ABCD یک چهاروجهی منتظم از آب درآید. مطلوب است فاصلهٔ رأس مخروط تا یال CD از این

چهاروجهی.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴۷۵. کلاهک مخروطی روی جعبه

از مقوا نیمدایره‌ای به شعاع ۶۰ سانتیمتر می‌بریم، و آن را به شکل مخروط درمی‌آوریم برای این کار شعاع OA و OB از نیمدایره را روی هم منطبق می‌کنیم و روی آن نوار چسب می‌زنیم. آن‌گاه جعبه‌ای از مقوا می‌سازیم، که انتهای آن به نیم استوانه‌ای ختم شده است. ابعاد این جعبه را در شکل ملاحظه می‌کنید (در عمل می‌توانید ابعاد جعبه و مخروط را برحسب میلیمتر بگیرید). اگر مخروط مقوایی را روی این جعبه طوری قرار دهیم که محور مخروط عمودی باشد، فاصلهٔ رأس مخروط از قاعدهٔ جعبه چه‌قدر خواهد بود؟



۲.۵.۳. اندازهٔ ضلع مثلث

۴۷۶. اندازهٔ وتر $a = BC$ و اندازهٔ حجمهای V و V' از دو مخروط ایجاد شده از دوران مثلث ABC حول ضلع AB و AC، داده شده است. اندازهٔ ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه این مثلث را تعیین کنید.

۴۷۷. ضلعهای a، b و c از مثلثی را پیدا کنید که از دوران آن دور هریک از ضلعهایش، جسمهایی به‌دست آید که بترتیب حجمهایی مساوی سه کره به شعاعهای r، R و p داشته باشند.

۴۷۸. حول کدام ضلع از یک مثلث، باید مثلث را دوران دهیم، تا بیشترین حجم ممکن ایجاد شود.

۳.۵.۳. بیشترین مقدار طول پاره‌خط

۴۷۹. دو مخروط در قاعده مشترک و در دو طرف آن قرار دارند. شعاع قاعده r و ارتفاع آنها h و H می‌باشد $(h \leq H)$ ماکزیمم فاصلهٔ بین مولدهای این دو مخروط را پیدا کنید.

۴.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۴۸۰. در یک مخروط، دو مقطع S و T را موازی قاعدهٔ B رسم می‌کنیم. به‌نحوی که این دو مقطع و قاعده، به نسبت ۱، ۲ و ۳ باشند. ارتفاع این مخروط به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۵.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۸۱. شعاع قاعدهٔ یک مخروط دوار مساوی r و طول مولدش g می‌باشد. از نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ قاعده، کوتاهترین مسیری را تعیین کنید که تمام مولدهای مخروط را قطع کند و دوباره به همین نقطهٔ A برگردد.

برای حالت خاص r را مساوی $\frac{1}{6}g$ ، $\frac{1}{4}g$ یا $\frac{1}{3}g$ اختیار کنید.

۴۸۲. در مخروط ناقصی، زاویهٔ بین مولد و صفحهٔ قاعدهٔ بزرگتر مخروط، $60°$ است. ثابت کنید طول کوتاهترین مسیر بر روی سطح مخروط مابین یک نقطه واقع بر روی محیط قاعده، و نقطه قطراً متقابل از قاعدهٔ دیگر، برابر ۲R است. R شعاع قاعده بزرگتر مخروط می‌باشد.

۶.۳. شعاع کره

۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره

۴۸۳. در صفحهٔ P قاعده، مخروطی واقع است که مقطع صفحهٔ گذرنده بر محور مخروط مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد. هرگاه ارتفاع مخروط h باشد و در داخل مخروط و روی صفحهٔ P ، سه کره مساوی که دوبه‌دو با یکدیگر و با سطح جانبی مخروط مماسند، محاط شده باشند، شعاع کره را پیدا کنید.

۴۸۴. زاویهٔ بین محور و مولد مخروطی برابر α و شعاع قاعدهٔ آن برابر r است. سطح کروی را درنظر بگیرید که مرکز آن در رأس مخروط قرار گرفته باشد. اگر این سطح کروی حجم مخروط را به دو نیمهٔ برابر تقسیم کرده باشد، شعاع کره را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴۸۵. یک مخروط دوار داده شده است، مقطع نصف‌النهاری این مخروط دوار، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $2r$ است و یک کره درسطح جانبی آن محاط است. شعاع این کره را به قسمی تعیین کنید که حجم قسمت مشترک کره و مخروط حداکثر مقدار ممکن باشد.

۲.۶.۳. نسبت شعاعها

۴۸۶. حجم مخروط دواری سه برابر حجم مخروط دوار دیگری است که ارتفاع آن ثلث ارتفاع مخروط اول است، نسبت شعاعهای قاعده‌های آنها را تعیین کنید.

۷.۳. مساحت

۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی

۴۸۷. اندازهٔ مساحت جانبی مخروط دواری را که شعاع قاعده‌اش ۴ و ارتفاعش ۳

است، تعیین کنید.

۴۸۸. اندازهٔ مساحت جانبی مخروط ناقص دواری را که شعاعهای دو قاعده‌اش $R = ۱۲$ و $R' = ۸$ و طول مولدش $l = ۹$ است، به‌دست آورید.

۴۸۹. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای راکه دو قاعده‌اش ۴ و ۷ سانتیمتر و ساق مایل آن ۵ سانتیمتر است، حول ساق قائمش می‌چرخانیم. سطح جانبی جسم حاصل چند سانتیمتر مربع است؟

الف) ۵۵π ب) $\frac{۵۵}{۲}\pi$

ج) ۲۲π د) ۱۱۰π

۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل

۴۹۰. اندازهٔ مساحت کل مخروط دواری به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۸ را تعیین کنید.

۳.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت مقطع

۴۹۱. شعاع قاعدهٔ مخروطی برابر R و زاویهٔ بین مولد مخروط با صفحهٔ قاعده برابر α است. در این مخروط، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که از رأس آن بگذرد و با ارتفاع مخروط زاویه‌ای برابر φ بسازد. مساحت مقطع حاصل را به‌دست آورید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۴۹۲. یک سطح مخروطی دوار به رأس S داده شده است. روی دایرهٔ قاعدهٔ آن نقطهٔ ثابت A و نقطهٔ M را که از A روی این دایره در یک جهت حرکت می‌کند، درنظر می‌گیریم. تغییرات مساحت مثلث SAM را محاسبه کنید.

۴۹۳. مساحت سطح ایجاد شده به‌وسیلهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، وقتی که دور یک خط Δ واقع در صفحه‌اش که مثلث را قطع نمی‌کند، دوران کند، مساوی است با حاصل‌ضرب محیط مثلث در محیط دایره‌ای که مرکز ثقل این مثلث می‌پیماید.

۴۹۴. پاره‌خط AB و تصویر آن، پاره‌خط $A'B'$ ، روی محور xy داده شده است. محور تقارن پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا این پاره‌خط را در M و xy را در O قطع کند. با

فرض $A'B' = a$ و $OM = b$ ، اندازهٔ مساحت جانبی مخروط ناقص حاصل از دوران یک دور کامل AB حول محور xy را به دست آورید.

۴۹۵. مربع ABCD را درنظر می‌گیریم و در نقطهٔ A خط xAy را بر قطر AC عمود می‌کنیم اندازهٔ مساحت سطح ایجاد شده از دوران محیط مربع حول xAy را تعیین کنید، با فرض آن که اندازهٔ ضلع مربع $AB = a$ باشد.

۴۹۶. مربع ABCD را درنظر گرفته و رأس A را به نقطهٔ M ، وسط ضلع BC وصل می‌کنیم. اگر اندازهٔ ضلع این مربع مساوی a باشد، اندازهٔ مساحت سطح ایجاد شده از دوران محیط چندضلعی ADCM حول AM را (پس از یک دوران کامل) تعیین کنید.

۴۹۷. اندازهٔ مساحت سطح حاصل از دوران یک مربع حول یکی از قطرهایش را وقتی یک دور کامل حول آن قطر دوران کرده باشد، تعیین کنید.

۴۹۸. اندازهٔ هر قطر یک مستطیل مساوی l و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها مساوی α است. اندازهٔ مساحت سطح ایجاد شده از دوران نصف محیط مستطیل واقع در یک طرف قطر را، حول آن قطر، وقتی یک دور کامل دوران انجام شود، محاسبه کنید.

۴۹۹. قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه‌ای مساوی a و قاعدهٔ کوچکتر آن مساوی b و هریک از ساقهای آن مساوی C است. ذوزنقه را دور محوری که از انتهای ضلع a بر آن عمود کرده‌ایم دوران می‌دهیم. مطلوب است سطح کل جسمی که به این ترتیب به‌دست می‌آید.
$(c = 5cm$ و $b = 9cm$ ، $a = 15cm)$

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۰۰. مخروط قائم دواری به شعاع قاعدهٔ ۱ متر و به ارتفاع ۲ متر داده شده است. به فاصلهٔ ۲ متری از مرکز قاعده و عمود بر سطح قاعدهٔ مخروطی، تیری به ارتفاع ۴ متر نصب شده است که بر بالای آن چراغی روشن است. مساحت سایهٔ مخروط را پیدا کنید (قاعدهٔ مخروط را حساب نکنید).

۵۰۱. ثابت کنید بین تمام استوانه‌های محاط در یک مخروط مفروض استوانه‌ای مساحت جانبی ماکزیمم دارد که ارتفاعش نصف ارتفاع مخروط باشد.

۲.۷.۳. نسبت مساحتها

۵۰۲. مخروط دوار قائمی به رأس S ، در داخل هرم مثلث‌القاعده SPQR ، طوری محاط شده

است که دایرهٔ قاعدهٔ مخروط هم، در قاعدهٔ PQR هرم محاط شده است. می‌دانیم :

$$P\hat{S}Q = \frac{۷\pi}{۱۲} \quad , \quad S\hat{Q}R = \frac{\pi}{۴} \quad , \quad P\hat{S}R = \frac{\pi}{۲}$$

نسبت سطح جانبی مخروط را به سطح قاعدهٔ PQR پیدا کنید.

۵۰۳. هرم مثلث‌القاعده‌ای را بر مخروط محیط کرده‌ایم ؛ درضمن ؛ سطح جانبی مخروط به‌وسیلهٔ خطهای مماس به سه بخش با نسبتهای ۷ :۶ :۵ تقسیم شده است. مطلوب است نسبت بین بخشهایی از سطح جانبی هرم، که به خطهای مماس محدود شده‌اند.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۸.۳. حجم

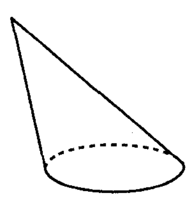
۱.۸.۳. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم مخروط

۵۰۴. حجم یک مخروط قائم دوار برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ مولد آن، در محیط دایرهٔ قاعده‌اش.

۵۰۵. حجم یک مخروط دوار قائم برابر است با مساحت جانبی آن، ضرب در $\frac{۱}{۳}$ فاصلهٔ مرکز قاعده‌اش از مولد آن.

۵۰۶. حجم مخروط مستدیری به ارتفاع ۱۲ و قاعده‌ای به شعاع ۳/۲ چه‌قدر است؟



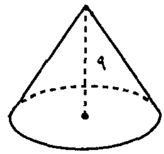
۵۰۷. حجم مخروطی به ارتفاع ۶ و قطر قاعدهٔ ۱۰ چیست؟

۵۰۸. مخروطی داریم که محیط قاعدهٔ آن ۳ «چژان» و ۵ «چی» و ارتفاع آن ۵ «چژان» و ۱ «چی» می‌باشد. حجم مخروط چه‌قدر است؟

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، چین

۵۰۹. یک مخزن مخروطی ۳/۵ متر عمق دارد. ناحیهٔ مستدیر بالای آن به شعاع ۱/۵ متر است. گنجایش این مخزن چند لیتر است؟

۵۱۰. در مخروط دوار داده شده در شکل روبه‌رو اندازهٔ ارتفاع ۹ و اندازهٔ محیط قاعده ۳۱/۴ است. اندازهٔ حجم این مخروط را بیابید. ($\pi = ۳/۱۴$ اختیار شود)



۵۱۱. قطر دهانهٔ ظرف مخروطی شکلی ۵/۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۱/۵ سانتیمتر است. گنجایش این ظرف برحسب لیتر تقریباً برابر است با :

الف) ۰/۰۰۰۹ ب) ۰/۰۰۹ ج) ۰/۰۹ د) ۰/۹ هـ) ۹

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۵۱۲. حجم استوانه‌ای $۱۵۰cm^۳$ است. حجم مخروطی که سطح قاعده و ارتفاع آن با سطح قاعده و ارتفاع این استوانه برابر است، چند سانتیمتر مکعب است؟

الف) ۱۵۰ ب) ۱۰۰ ج) ۵۰ د) ۳۰۰

۵۱۳. ارتفاع یک مخروط ۵ است. یک صفحه به موازات قاعده و به فاصلهٔ ۲ از رأس مخروط، مخروط دیگری به حجم ۲۴π ایجاد می‌کند. حجم مخروط بزرگ را به‌دست آورید.

۵۱۴. مخروط قائمی است به ارتفاع h ، دو مولد عمود برهم این مخروط محیط قاعده را به دو کمان چنان تقسیم می‌کنند که یکی دو برابر دیگری است. حجم مخروط را پیدا کنید.

۵۱۵. سطح جانبی یک مخروط مساوی S است و اگر آن را روی یک صفحه گسترش دهیم، قطاعی به زاویهٔ ۳۰ درجه به دست می‌آید. حجم مخروط را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۱۶. حجم مخروط قائمی را پیدا کنید (با دو رقم اعشار) که اگر سطح جانبی آن را روی یک صفحه باز کنیم، قطاعی به شعاع ۱۵ سانتیمتر و زاویهٔ مرکزی ۱۲۰ درجه به‌دست می‌آید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۱۷. کره‌ای به شعاع r در مخروط محاط شده است. مطلوب است حجم مخروط، به شرطی که بدانیم، فاصلهٔ بین صفحهٔ تماس کره تا عمودی که از رأس بر یکی از مولدهای مخروط اخراج می‌شود، برابر است با d .

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۵۱۸. n کره مساوی به شعاع R بر سطح جانبی و قاعدهٔ مخروط از داخل آن مماسند. هر کره بر دو کره مجاور هم مماس می‌باشد. n کره به شعاع ۲R و به همین‌طریق به طور خارجی برسطح جانبی مخروط مماس هستند. حجم مخروط را پیدا کنید.

۲.۱.۸.۳. بیشترین مقدار حجم مخروط

۵۱۹. بین مخروطهایی که طول مولدشان مساوی l است، کدام مخروط بیشترین حجم را داراست؟

۵۲۰. بین تمام مخروطهای دوار با یک مساحت کل، حجم کدام مخروط بیشترین مقدار ممکن است؟

۵۲۱. بین مخروطهایی که مجموع اندازه‌های ارتفاع و شعاع قاعده‌شان مقدار ثابتی است، کدام مخروط بیشترین حجم ممکن را داراست؟

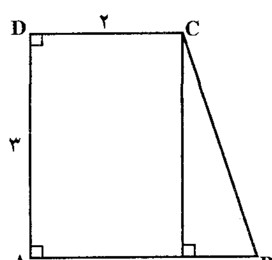
۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم مخروط ناقص

۵۲۲. مخروط ناقصی را به کره‌ای به شعاع R محیط کرده‌ایم، اگر مساحت قاعدهٔ بزرگتر مخروط ناقص دو برابر مساخت قاعدهٔ کوچکتر آن باشد، حجم مخروط ناقص را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۲۳. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD را که در آن قاعدهٔ ۳ = AB و قاعدهٔ ۲ = CD و ساق قائم ۳ = AD حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم حاصل کدام است؟

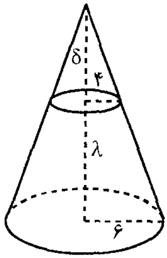
۱) ۱۶π   ۲) ۱۷π   ۳) ۱۸π   ۴) ۱۹π



۵۲۴. حجم مخروط ناقص دواری که شعاعهای دو قاعده‌اش ۸ = R و ۳ = R′ و طول یالش ۱۳ = L می‌باشد، کدام است؟

۱) ۲۹۲π   ۲) ۱۹۴π   ۳) ۳۸۸π   ۴) ۵۸۲π

۵۲۵. ارتفاع یک مخروط ناقص ۸ و شعاعهای قاعده‌های بالا و پایین آن ۴ و ۶ است. حجم مخروط ناقص را به‌دست آورید.



۵۲۶. مخروط ناقص دواری داریم که محیط قاعدهٔ پایین آن ۳ «چژان»، محیط قاعدهٔ بالای آن ۲ «چژان» و ارتفاع آن ۱ «چژان» است. حجم آن را پیدا کنید.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از مسأله‌های چینی

۵۲۷. اگر ارتفاع یک مخروط ناقص مساوی چهار برابر تفاضل شعاعهای قاعده‌های آن باشد، حجم این مخروط ناقص، مساوی تفاضل حجم دو کره‌ای است که شعاعهایشان مساوی شعاعهای دو قاعدهٔ این مخروط ناقص باشند.

۵۲۸. مخروط ناقصی، بر کره‌ای محیط شده است. مساحت سطح کل مخروط، S است. کره دیگری بر سطح جانبی مخروط در طول دایرهٔ قاعدهٔ آن مماس است. حجم مخروط ناقص را پیدا کنید، درصورتی که بدانیم مساحت قسمتی از سطح کرهٔ دوم که در داخل کرهٔ اول قرار دارد، برابر Q است.

۵۲۹. در مخروط قائم دواری که زاویهٔ رأس آن در مقطع محوری برابر α است، کره‌ای به شعاع r محاط کرده‌ایم و، سپس، صفحهٔ شامل دایرهٔ تماس سطح مخروطی با سطح کره را گذرانده‌ایم. حجم مخروط ناقص حاصل را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۵۳۰. حجم مخروط ناقص از نوعی دیگر، با قاعده‌های مستدیر را تعیین کنید. (حالتی که قاعده‌ها در دو طرف رأس مخروط باشند.)

۵۳۱. ثابت کنید که حجم یک مخروط ناقص دوار برابر است با مجموع حجمهای یک مخروط و یک استوانه که دارای ارتفاع مشترکی مساوی ارتفاع آن مخروط ناقص هستند و شعاع قاعدهٔ آنها : برای استوانه نصف مجموع شعاعهای دو قاعدهٔ مخروط ناقص و برای مخروط نصف تفاضل این شعاعها می‌باشد.

۵۳۲. ثابت کنید که حجمهای استوانه، مخروط و مخروط ناقص با قاعده‌های مستدیر از دستور زیر به‌دست می‌آیند :

$$V = \frac{h}{۶}(b + b' + ۴b'')$$

که در آن h ارتفاع آنها، b و b' مساحتهای قاعده‌ها، و b'' مساحت مقطع موازی با قاعده‌هاست که بر وسط ارتفاع می‌گذرد.

۴.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۵۳۳. مثلثی به قاعدهٔ a و ارتفاع نظیر آن h داده شده است. این مثلث را حول محوری که از نقطهٔ برخورد میانه‌های آن، موازی این قاعده رسم می‌شود، دوران می‌دهیم. حجم به‌دست آمده از دوران هر بخش مثلث حول این خط را بیابید.

۵۳۴. مثلث ABC و محور xAy واقع در صفحهٔ این مثلث که مثلث را قطع نکرده است، داده شده است.

با معلوم بودن اندازه‌های $AH = h$ و $BC = a$ و زاویهٔ α که ضلع BC با xy می‌سازد، اندازهٔ حجم ایجاد شده از دوران مثلث ABC حول خط xAy را تعیین کنید.

۵۳۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. از نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های این مثلث خط $B'C'$ را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم (B' روی AB و C' روی AC است). اگر ضلع مثلث مساوی a باشد، اندازهٔ حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ ذوزنقهٔ $B'C'CB$ را وقتی حول $B'C'$ دوران کند تعیین کنید.

۵۳۶. حجم به‌وجود آمده از دوران مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a را، حول خطی که با صفحهٔ مثلث موازی باشد پیدا کنید. درصورتی که تصویر این خط روی صفحهٔ مثلث، یکی از ارتفاعهای مثلث را شامل می‌شود.

۵۳۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a حول ضلع AC دوران می‌کند. اندازهٔ حجم ایجاد شده را تعیین کنید.

۵۳۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم. اندازهٔ حجم جسم حاصل از دوران این مثلث حول یکی از ضلعهایش را تعیین کنید. ضلع مثلث را a فرض کنید.

۵۳۹. حجم ایجاد شده توسط یک مثلث متساوی‌الاضلاع را که حول محوری که از یک رأس آن موازی یک ضلع رسم می‌شود، دوران می‌کند، تعیین کنید.

۵۴۰. مثلث متساوی‌الساقینی به قاعدهٔ a و ارتفاع b مفروض است. اگر آن را دور قاعده‌اش دوران دهیم، حجم جسم حاصل را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۴۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که دو ضلع زاویهٔ قائمه‌اش ۶ و ۸ است، حول وتر می‌چرخانیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $۱۱۵/۲\pi$ ۲) $۳۸/۴\pi$ ۳) $۷۶/۸\pi$ ۴) $۲۳/۰۴\pi$

۵۴۲. مربعی به ضلع ۴ سانتیمتر گرد یکی از قطرهایش دوران می‌کند. مساحت کل و حجم جسم حاصل را حساب کنید.

۵۴۳. مربع ABCD داده شده است. خط xAy را عمود بر قطر AC رسم می‌کنیم. حجم جسم حاصل از دوران مربع حول خط xAy را به‌دست آورید.

۵۴۴. روی یک ضلع مربعی داده شده و در خارج مربع، مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم و پنج ضلعی حاصل را حول یکی از ضلعهای خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع دوران می‌دهیم. اندازهٔ حجم حاصل را برحسب a، ضلع مربع به‌دست آورید.

۵۴۵. a اندازهٔ ضلع و $B\hat{A}D = \alpha$ اندازهٔ یک زاویه از لوزی ABCD است. حجم ایجاد شده از دوران سطح این لوزی را وقتی حول یکی از ضلعهایش دوران کند، تعیین کنید.

۵۴۶. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای است که اندازهٔ قاعده‌های آن ۳ و ۶، و اندازهٔ ساق قائم آن ۳ می‌باشد. این ذوزنقه را حول قاعدهٔ بزرگترش دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

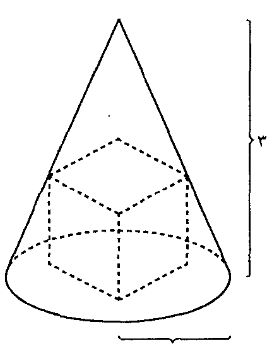
۱) ۲۷π ۲) ۳۰π ۳) ۳۶π ۴) ۴۵π

۵۴۷. در ذوزنقه‌ای یکی از ساقها برابر b، و زاویهٔ بین آن با قاعدهٔ بزرگتر که طولی برابر ۲a دارد، برابر α است. طول قاعدهٔ کوچکتر برابر a است. مطلوب است حجم جسمی که از دوران این ذوزنقه دور ساق مفروض به‌دست می‌آید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۵۴۸. حجم ایجاد شده از دوران یک شش‌ضلعی منتظم، حول یکی از ضلعهایش را تعیین کنید.

۵۴۹. حجم حاصل از دوران یک نیم هشت‌ضلعی منتظم به ضلع a را حول قطرش به‌دست آورید.



۵۵۰. درون مخروط مستدیر قائمی مانند شکل، مکعبی محاط شده است. اگر شعاع مخروط ۱، و ارتفاع آن ۳ باشد، حجم مکعب چه‌قدر است؟

۵۵۱. در مخروط دوار قائم به حجم V، هرم مثلث‌القاعده‌ای محاط کرده‌ایم که زاویه‌های مسطح مجاور رأس آن، برابر α، β و γ هستند. مطلوب است حجم این هرم.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۵۵۲. زاویهٔ بین مولد مخروطی به طول a با قاعدهٔ آن، برابر است با α . هرمی را بر این مخروط محیط کرده‌ایم که قاعدهٔ آن یک لوزی با زاویهٔ حادهٔ β است. حجم این هرم را پیدا کنید.

۵۵۳. دو مخروط ارتفاعی مشترک دارند، ولی رأسهای آنها در دو انتهای مختلف این ارتفاع واقعند. مولد مخروط اول برابر l و زاویهٔ رأس آن در مقطع محوری برابر 2α است. زاویهٔ رأس مخروط دوم در مقطع محوری برابر است با 2β . حجم بخش مشترک دو مخروط را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۵۵۴. ارتفاع یک مخروط مستدیر قائم ۱۵ و شعاع قاعدهٔ آن ۸ است. یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۴ در آن ایجاد می‌کنیم، به‌طوری که محور استوانه بر محور مخروط منطبق باشد. حجم جسم باقیمانده چه‌قدر است؟

۵۵۵. استوانهٔ با بیشترین حجم محاط در یک مخروط داده شده، استوانه‌ای است که قاعده‌اش فصل مشترک مخروط با صفحه‌ای است که موازی قاعده و به فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ ارتفاع از رأس آن رسم می‌شود.

۵۵۶. در مخروط مفروضی استوانه‌ای محاط می‌کنیم. ثابت کنید حجم استوانه ماکزیمم است، هرگاه نسبت شعاع قاعدهٔ استوانه به شعاع قاعدهٔ مخروط مثل ۲ به ۳ باشد.

۵.۱.۸.۳. اندازهٔ سطح و حجم

۵۵۷. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم مخروط دواری را که شعاع قاعدهٔ آن ۸ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۲ سانتیمتر است حساب کنید.

۵۵۸. مساحت جانبی و حجم مخروط ناقص دواری را که شعاعهای دو قاعدهٔ آن ۸ و ۵ سانتیمتر و مولد آن ۵ سانتیمتر است حساب کنید.

۵۵۹. مثلث متساوی‌الاضلاع T، حول محور MN واقع در صفحهٔ آن و عمود بر ضلع a، دوران می‌کند. فاصلهٔ محور از مثلث مساوی ضلع a است. سطح و حجم جسم ایجاد

شده را تعیین کنید.

۵۶۰. مربعی به ضلع a را، حول محوری که از یک رأس آن، عمود بر قطری که از آن رأس می‌گذرد، دوران می‌دهیم. سطح و حجم جسم حاصل را بیابید.

۵۶۱. لوزی را که قطر کوچکترش مساوی ضلع آن، a می‌باشد، دور خطی که از انتهای قطر بزرگتر بر این قطر عمود شده است دوران داده‌ایم. سطح و حجم جسمی که به‌دست می‌آید، پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۶۲. شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است، ضلع BA را به اندازهٔ $AG = a$ امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ انتهایی G، خط MN را عمود بر ضلع BA و امتداد آن رسم می‌کنیم. شکل را حول این خط دوران می‌دهیم. سطح و حجم جسم حاصل را تعیین کنید.

۵۶۳. یک شش ضلعی منتظم به ضلع a داده شده است. از رأس F خطی عمود بر OF (O مرکز شش ضلعی است) رسم می‌کنیم و شکل را حول این خط دوران می‌دهیم. سطح و حجم جسم حاصل را بیابید.

۵۶۴. شش ضلعی منتظم ABCDEF محیط بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع r داده شده است. قطر FC و خطهای AC و BF که یکدیگر را در نقطهٔ I واقع بر خط OH، که بر AB عمود است، قطع می‌کنند.
حجمها و سطحهای مخروطهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلثهای IHA و IOF را که از دوران حول OH پدید می‌آیند، برحسب r حساب کنید.

۵۶۵. نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2R$ را درنظر می‌گیریم. مماسهای در A و B و مماسی در نقطهٔ M بر آن رسم می‌کنیم تا در نقطه‌های A' و B' یکدیگر را قطع کنند. با معلوم بودن R، شعاع نیمدایره و α، زاویهٔ یک شعاع OM با AB، سطح جانبی و حجم مخروط ناقص ایجاد شده از دوران $AA'B'B$ حول AB را تعیین کنید.

۵۶۶. در یک مخروط، استوانه‌ای محاط می‌کنیم که ارتفاع آن، مساوی بخشی از مولد مخروط باشد که بالای این استوانه قرار می‌گیرد.
سطح کل و حجم این استوانه را برحسب r شعاع قاعده و h ارتفاع مخروط داده شده، تعیین کنید.

۲.۸.۳. نسبت حجمها

۵۶۷. نسبت حجمهای اجسامی را که از دوران مثلثی دور ضلعهایش به‌دست می‌آید پیدا کنید (ضلعهای مثلث را a، b و c بگیرید).

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۵۶۸. مثلثی حول خطی که وسطهای دو ضلع آن را به هم وصل می‌کند، دوران می‌کند. نسبت حجم بین دو جسم ایجاد شده از دوران دو بخش این مثلث را تعیین کنید.

۵۶۹. ثابت کنید حجمهای ایجاد شده از دوران یک متوازی‌الاضلاع، حول دو ضلع مجاورش، مساوی عکس اندازهٔ این دو ضلع است.

۵۷۰. دو مخروط داده شده‌اند. ارتفاع اولی نصف ارتفاع دومی و شعاع قاعدهٔ اولی نیز نصف شعاع قاعدهٔ دومی است. نسبت حجم دو مخروط را بیابید.

۵۷۱. شعاع قاعدهٔ مخروطی را نصف و ارتفاع آن را دو برابر می‌کنیم. حجم مخروط حاصل، چه کسری از حجم مخروط اولیه است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) ۱ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۱}{۳}$

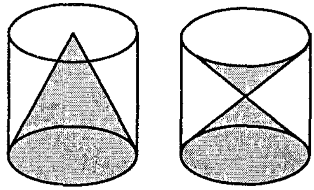
کنکور سراسری رشتهٔ علوم‌تجربی

۵۷۲. رأس A از منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ بر رأس یک مخروط منطبق است و رأسهای B و C آن، روی سطح جانبی مخروط و رأسهای B_1 و C_1 آن، بر روی دایرهٔ قاعده قرار دارند. نسبت حجم مخروط را به حجم هرم پیدا کنید. درصورتی که می‌دانیم $AA_1 = ۲/۴AB$.

۵۷۳. در داخل مخروط دوار قائمی، مکعبی طوری قرار داده شده که یکی از یالهای آن، روی قطر قاعده قرار دارد، و رأسهای مکعب که به این یال تعلق ندارند، روی سطح جانبی مخروط قرار گرفته‌اند. مرکز مکعب هم روی ارتفاع مخروط قرار دارد. نسبت حجم مخروط به حجم مکعب را پیدا کنید.

۵۷۴. هرم مربع‌القاعده‌ای در یک مخروط مستدیر محاط شده است. به‌نحوی که در رأس مشترکند و قاعدهٔ هرم در قاعدهٔ مخروط محاط است. ارتفاع مشترک ۱۸ و طول ضلع مربع ۱۵ است. حجم مخروط و حجم هرم را به‌دست آورید.

۵۷۵. دو استوانهٔ شکل صفحه‌ی بعد به یک اندازه‌اند. حجم مخروط محاط در استوانهٔ سمت چپ را با حجم دو مخروط سمت راست («ساعت شنی») مقایسه کنید.



۵۷۶. نسبت حجم به حجم کرهٔ محاط در آن را پیدا کنید. هرگاه صفحه‌ای مماس بر کره و عمود بر یکی از مولدهای مخروط، مولد را در نقطه‌ای قطع کند که فاصلهٔ رأس مخروط تا این نقطه k برابر شعاع کره باشد.

۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها

۵۷۷. مخروطی، در داخل هرم شش بر منتظم محاط، و مخروط دیگری بر آن محیط شده است. اختلاف حجم مخروط محاطی و مخروط محیطی را پیدا کنید، درصورتی که ارتفاع هرم H و شعاع قاعدهٔ مخروط محیطی برابر R می‌باشد.

۵۷۸. دو کره در داخل یک مخروط محاط و بر هم مماسند. (کره‌ها بر سطح جانبی مخروط مماسند.) کرهٔ سومی وجود دارد، از دو دایره‌ای که در طول آنها دو کرهٔ اول بر سطح جانبی مخروط تماس حاصل می‌کنند، می‌گذرد. ثابت کنید حجم آن قسمت از کره سوم که در خارج مخروط واقع شده است، برابر است با حجم آن قسمت از مخروط که بین دو کره اول در داخل محیط محصور شده است.

۵۷۹. اگر V_a ، V_b و V_c حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در رأس A، بترتیب تحت دوران حول ضلعهای BC، CA و AB باشند، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{۱}{V_a^{۲}} = \frac{۱}{V_b^{۲}} + \frac{۱}{V_c^{۲}}$$

۹.۳. رابطهٔ متری

۵۸۰. رابطه‌هایی بین ضلعهای یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بیابید. برای آن‌که وقتی این ذوزنقه حول یکی از قاعده‌هایش دوران کند، نسبت حجم به سطح ایجاد شده به‌وسیلهٔ سطح و محیط ذوزنقه مساوی نسبت مساحت به محیط این ذوزنقه باشد.

۵۸۱. ثابت کنید که برای یک مخروط دوار با حجم V، مساحت کل S و مساحت جانبی l، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$۹\pi V^۲ = S(s-l)(۲l-s)$$

۵۸۲. برای یک زوج یال روبه‌روی یک مخروط قائم دوار که دارای یک منحنی به مرکز قاعدهٔ مخروط هستند، مجموع عکس طولها برای هر صفحهٔ رسم شده از یک نقطهٔ ثابت واقع بر ارتفاع مخروط، مقدار ثابتی است. اما این مقدار ثابت برحسب زوج مورد بررسی، تغییر می‌کند.

۳.۱۰. مکان هندسی

۳.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۵۸۳. نقطهٔ O و دو خط راست d و ′d که از این نقطه می‌گذرند، داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که فاصله‌های آنها بترتیب از نقطهٔ داده شده و از خطهای داده شده، متناسب با سه عدد معلوم باشد.

۵۸۴. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصله‌های آنها از یک نقطهٔ داده شدهٔ S و از یک خط راست داده شدهٔ ′XSX که از این نقطه می‌گذرد، به نسبت معلوم $\frac{p}{q}>۱$ باشد.

۵۸۵. مربع ABCD به ضلع ۲a و نقطهٔ M را واقع در صفحهٔ آن درنظر می‌گیریم. مثلثهای MAB، MBC، MCD و MDA را بترتیب حول AB، BC، CD و DA دوران می‌دهیم. مجموع این حجمها را به‌دست آورید و مکان هندسی نقطهٔ M را چنان بیابید که این مجموع مساوی $\frac{۴}{۳}\pi a^۲ b$ باشد.

۵۸۶. دایره‌ای به مرکز O داده شده است. ′AA قطری از دایره است و پاره‌خط AS عمود بر صفحهٔ این دایره می‌باشد. خط SX را موازی ′AA و AB را عمود بر SO رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که نسبت فاصله‌های آنها از دو خط SO و SX مساوی نسبت $\frac{AB}{AS}$ باشد.

۵۸۷. دو دایرهٔ ثابت (از نظر وضع) داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند M از فضا، به‌عنوان رأس دو مخروط درنظر گرفته شده، که این دو دایره، قاعده‌های آنها هستند. مکان هندسی نقطهٔ

M را چنان بیابید که مجموع حجم این مخروطها مساوی $\frac{\pi}{3}K^2$ باشد.

۵۸۸. مکان هندسی مرکز مقطعهای مستدیر یک مخروط مایل با قاعدهٔ مستدیر را تعیین کنید.

۵۸۹. مخروطی دوار را با یک صفحه قطع می‌کنیم و از هر یک از نقطه‌های فصل مشترک حاصل، قائمی بر مخروط رسم می‌نماییم. مکان هندسی نقطهٔ دوم برخورد این قائمها و مخروط داده شده را تعیین کنید.

۵۹۰. یک مخروط که به‌وسیلهٔ یک صفحه قطع شده است داده شده است. از هر نقطهٔ واقع بر فصل مشترک مقطع مخروطی حاصل عمودی بر مخروط اخراج می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ دیگر برخورد این نرمالها با مخروط را پیدا کنید.

۵۹۱. در چه حالت یک صفحه می‌تواند یک مخروط دوار را در یک هذلولی متساوی‌الساقین قطع کند. مکان هندسی کانونهای این هذلولیها را پیدا کنید.

۵۹۲. یک مخروط دوار به رأس S، داده شده است. روی دایرهٔ قاعدهٔ آن نقطهٔ ثابت A و یک نقطهٔ متغیر مانند M، درنظر می‌گیریم. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث SAM را تعیین کنید.

۵۹۳. مخروط دوار قائم و نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت و مساوی با ارتفاع از صفحهٔ قاعدهٔ مخروط، در خارج آن داده شده است. نقطهٔ M بر روی مخروط طوری قرار گرفته که شعاع نورانی که از نقطهٔ A خارج و به‌طرف M تابانده می‌شود، روی سطح مخروط مانند سطح آینه، به موازات صفحهٔ قاعده بازتاب پیدا می‌کند. مکان هندسی تصویرهای M را روی صفحهٔ قاعدهٔ مخروط پیدا کنید.

۵۹۴. مطلوب است مکان کانونهای تمام مقاطع بیضوی در یک مخروط دوار مفروض که دارای یک خروج از مرکز باشند.

۵۹۵. مطلوب است مکان انتهای محورهای اقصر جمیع مقاطع بیضوی موازی در یک مخروط دوار مفروض.

۵۹۶. مخروط دواری مفروض است. خطی عمود بر محور آن و مماس بر سطح آن را درنظر می‌گیریم. مطلوب است، تعیین مکان رأسهای محورهای اقصر مقاطع بیضوی با صفحه‌های گذرنده بر این خط.

۵۹۷. مطلوب است، تعیین مکان کانونهای جمیع مقاطع سهموی در یک مخروط دوار مفروض.

۳.۱۰.۲. مکان هندسی خط

۵۹۸. مکان هندسی خطهایی را تعیین کنید که از یک نقطهٔ داده شده می‌گذرند و به یک فاصلهٔ معین از یک نقطهٔ داده شدهٔ دیگر قرار دارند.

۵۹۹. مکان هندسی خطهای SX را که از نقطهٔ داده شدهٔ S می‌گذرند و نسبت فاصله‌های دو نقطهٔ معلوم A و B از آنها مساوی مقدار معلومی می‌باشد، به‌دست آورید.

۶۰۰. مکان هندسی یالهای فرجه‌های قائمه‌ای را که وجه‌های آنها بترتیب، بر دو خط داده شدهٔ متقاطع می‌گذرند، تعیین کنید.

۶۰۱. مکان هندسی یالهای فرجه‌های قائمه‌ای را تعیین کنید که وجه‌های آنها بر یک مخروط دوار داده شده، مماس هستند.

۶۰۲. صفحهٔ P و خط راست d که این صفحه را در نقطهٔ O قطع کرده است، مفروض است. مکان هندسی نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ خط d و تمام خطهایی که از نقطهٔ O در صفحهٔ P رسم می‌شوند را تعیین کنید.

۶۰۳. سطحهای مخروطی دواری را که دارای یک رأس مشترک S بوده و مماس بر یک صفحهٔ P تحت خط راست SD می‌باشند، درنظر می‌گیریم. مکان هندسی مولدهای تماس صفحه‌های مماسی را که از نقطهٔ O واقع بر صفحهٔ P بر این سطحها رسم می‌شوند، تعیین کنید.

۶۰۴. دو خط متقاطع XOX′ و YOY′ و نقطهٔ P در یک صفحه داده شده‌اند. مکان هندسی مولدهای تماس صفحه‌های مماس رسم شده، از P به سطحهای مخروطی دواری که بر این دو خط می‌گذرند را، تعیین کنید.

۶۰۵. مکان هندسی محورهای سطحهای مخروطی دواری را تعیین کنید که از آنها، رأس S و دو نقطهٔ A و B از سطح مخروطی دوار، داده شده است.

۶۰۶. مکان هندسی محورهای سطحهای مخروطی دوار را تعیین کنید درصورتی که:

۱. بر دو خط متقاطع داده شده بگذرند.

۲. مماس بر دو صفحهٔ داده شده باشند.

۳.۱۱. رسم شکل

۳.۱۱.۱. تعیین نقطه

۶۰۷. مستطیل ABCD داده شده است. روی ضلع CD دو نقطهٔ M و N را اختیار می‌کنیم و MB و NB را رسم می‌نماییم به قسمی که مستطیل به سه قسمت افراز شود. جای نقطه‌های M و N روی CD را به قسمی تعیین کنید که سه حجم ایجاد شده توسط این سه قسمت وقتی که مستطیل حول AD دوران کند، معادل یکدیگر باشند. فرض کنید: $AD = h$، $CD = r$، $DM = x$ و $DN = y$.

۳.۱۱.۲. رسم خط

۶۰۸. نشان دهید که دو مخروط از مخروطهای دواری که بر سه خط همرس داده شده می‌گذرند، دارای یک خط چهارم مشترک هستند. این خط را رسم کنید.

۶۰۹. مثلث ABC را به‌وسیلهٔ قاطع AD به دو بخش چنان تقسیم کنید که حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلثهای ABD و ACD هنگامی که شکل حول محور داده شدهٔ Δ واقع در صفحهٔ مثلث و غیرمتقاطع با مثلث، دوران کند، هم‌ارز یکدیگر باشند.

۳.۱۱.۳. رسم صفحه

۶۱۰. صفحه‌ای رسم کنید که بر یک نقطهٔ داده شده بگذرد و یک سطح مخروطی دوار را تحت دو مولد که با هم زاویهٔ حادهٔ داده شده می‌سازند، قطع کند.

۶۱۱. بر خط داده شدهٔ d صفحه‌ای مانند Q بگذرانید که با صفحهٔ مفروض P زاویه‌ای مساوی زاویهٔ داده شدهٔ حادهٔ α بسازد. بحث کنید.

۶۱۲. مساحت جانبی یک مخروط دوار را به‌وسیلهٔ رسم صفحه‌هایی موازی با قاعده‌اش به سه قسمت معادل تقسیم کنید.

۶۱۳. مخروطی قائم را با صفحه‌ای چنان قطع کنید که قطعهٔ سهمی ایجاد شده ماکزیمم باشد.

۶۱۴. مخروطی را با صفحه‌ای موازی قاعده‌اش چنان قطع کنید که استوانه‌ای که این مقطع یک قاعدهٔ آن و قاعدهٔ دیگرش روی قاعدهٔ مخروط است، بیشترین حجم ممکن را

داشته باشد.

۶۱۵. مخروطی را با یک صفحه چنان قطع کنید که مساحت دایرهٔ مقطع، مساوی با مساحت جانبی مخروط ناقص ایجاد شده باشد.

۶۱۶. جسمی از دو مخروط مساوی که دارای یک قاعده‌اند، تشکیل شده است. این جسم را با صفحه‌ای موازی مولدهای SB و AT چنان قطع کنید که مقطع حاصل ماکزیمم باشد.

۶۱۷. دو سطح مخروطی دوار مماس بر ۳ صفحهٔ داده شده، دارای صفحهٔ چهارمی هستند که بر هر سه مماس است. این صفحه را رسم کنید.

۶۱۸. ارتفاع یک مخروط ناقص دوار مساوی $3m$ و شعاع قاعده‌هایش $4m$ و $1m$ است. حجم این مخروط را به‌وسیلهٔ رسم صفحه‌ای موازی قاعده‌ها به دو قسمت چنان تقسیم کنید که حجم مجاور به قاعدهٔ بزرگ معادل ۸ برابر حجم قسمتی دیگر باشد.

۶۱۹. صفحه‌ای مماس به یک سطح مخروطی مستدیر چنان رسم کنید که :

۱. از نقطه‌ای داده شده، بگذرد.

۲. موازی با یک خط داده شده باشد.

۴.۱۱.۳. رسم سطح مخروطی دوار

۶۲۰. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که از آن محور و دو نقطه از سطح آن معلوم باشد.

۶۲۱. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که از آن نقطهٔ A، یک خط مماس T و محور XY داده شده باشد.

۶۲۲. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که از آن محورش، یک مماس و نقطهٔ تماس آن معلوم باشد.

۶۲۳. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که از آن، محور XY و دو خط مماس AT و AT' رسم شده، از نقطهٔ معلوم A، داده شده باشد.

۶۲۴. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که دو مولد G و G' و یک خط مماس T از آن معلوم باشد.

۶۲۵. یک سطح مخروطی دوّار رسم کنید که رأس آن نقطهٔ S، یک نقطهٔ A و دو خط مماس T و T' از آن داده شده باشند.

۶۲۶. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که رأس S از آن، دو مماس T و T' و زاویهٔ θ از آن معلوم باشند.

۶۲۷. یک سطح مخروطی دوار با یک دامنه رسم کنید که سه مولد Ox، Oy و Oz از آن داده شده‌اند.

۶۲۸. یک سطح مخروطی دوار با دو دامنه رسم کنید که از آن سه مولد XSX'، YSY' و ZSZ' معلوم است.

۶۲۹. سطح مخروطی دواری رسم کنید که از آن یک مولد، یک صفحهٔ مماس و زاویهٔ مولد یعنی θ داده شده است.

۶۳۰. یک سطح مخروطی دوار بیابید که مماس بر ۳ صفحهٔ داده شده باشد. چند راه‌حل دارد؟

۶۳۱. یک سطح مخروطی دوار رسم کنید که سه صفحهٔ مماس بر آن داده شده‌اند.

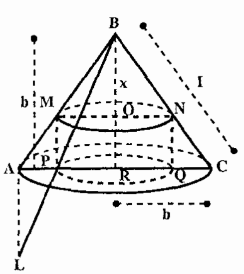
۵.۱۱.۳. رسم مخروط

۶۳۲. در یک استوانهٔ دوار داده شده، مخروط دواری با حجم مینیمم محاط کنید.

۶۳۳. مخروط دواری با کمترین حجم ممکن در یک کرهٔ داده شده محاط کنید. مساحت کل و حجم این مخروط را با مساحت و حجم کره مقایسه کنید.

۶۳۴. بر سه خط همرس غیرواقع در یک صفحه می‌توان چهار مخروط دوار با دو دامنه گذراند.

۶.۱۱.۳. رسم استوانه



۶۳۵. استوانه‌ای در یک مخروط چنان محاط کنید که سطح جانبی استوانه، مساوی مساحت جانبی بخشی از مخروط باشد که در بالای استوانه قرار دارد.

۶۳۶. استوانه‌ای در یک مخروط چنان محاط کنید که نسبت مساحت جانبی بخشی از مخروط که بالای استوانه واقع است به مساحت جانبی استوانه، به نسبت $\frac{m}{n}$ باشد.

۶۳۷. استوانه‌ای در یک مخروط چنان محاط کنید که حجم مخروط بالای استوانه، مساوی حجم استوانه باشد.

۶۳۸. استوانه‌ای در یک مخروط چنان محاط کنید که سطح جانبی بخشی از مخروط که بالای

استوانه قرار می‌گیرد، مساوی مساحت تاج بین دایره‌های قاعدهٔ استوانه و قاعدهٔ مخروط داده شده باشد.

۶۳۹. استوانه‌ای در یک مخروط داده شده، چنان محاط کنید که نسبت مساحت کل مخروط باقی‌مانده در بالای استوانه، به مساحت کل استوانه مساوی $\frac{m}{n}$ باشد.

۶۴۰. استوانه‌ای با حجم ماکزیمم محاط در یک مخروط رسم کنید که مولدهای این مخروط با زاویهٔ ۴۵° رسم شده‌اند و مساحت کل آن مقدار معلومی است.

۶۴۱. یک مخروط دوار و یک استوانهٔ محاط در آن داده شده است. استوانهٔ دیگری هم‌عرض با اوّلی در این مخروط محاط کنید.

۶۴۲. اگرمحورهای دو مخروط دوار منطبق باشند (مخروطها را از سمت رأس نامحدود فرض می‌کنیم، یعنی دو مخروط متقابل به رأس درنظر می‌گیریم)، فصل مشترک آنها دو دایره می‌باشند. حالتهای مختلف را تمیز دهید. ملخص را نسبت به سطح افقی تصویر عمود بر محور مشترک و سطح قائم تصویری دلخواه رسم کنید.

۱۲.۳. برش، مقطع

۶۴۳. در مخروط مایل دو مقطع مستدیر وجود دارد. اگر فرض کنیم که مخروطی مایل دارای قاعدهٔ مستدیر Γ باشد. دومین مقطع مستدیر چگونه است؟

۶۴۴. فصل مشترک دو سطح مخروطی دوار که دارای رأس مشترک می‌باشند، چه شکلی است؟

۶۴۵. ثابت کنید که فصل مشترک یک سطح استوانه‌ای دوار و یک سطح مخروطی دوار که محورهای موازی دارند، یک خط کروی است.

۶۴۶. فصل مشترک دو سطح دوار، یک مخروط و یک استوانه، هنگامی که محور مخروط یکی از مولدهای استوانه است، به یک کره تعلق دارد.

۶۴۷. ثابت کنید، مقطع پاد موازی یک مخروط مایل مستدیر، یک دایره است.

۱۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۴۸. یک سطح مخروطی مستدیر که دارای یک مجموعهٔ (سیستم) متشکل از سه مولد باشد، یک کنج سه قائمه می‌سازند، آن‌گاه بی‌شمار از این مجموعه (سیستم) خواهد داشت.

۶۴۹. بر روی سطح یک مخروط، خطی متمایز از مولد قرار دارد، طوری که هر دو نقطهٔ آن را

می‌توان با کمانی از آن خط به هم وصل کرد و در گسترش، یک پاره‌خط را مشخص می‌کند. این خط در چند نقطه خودش را قطع می‌کند؟ درصورتی که زاویهٔ مقطع محوری مخروط برابر α باشد.

۶۵۰. مردی دستور داد خیمه‌ای برای او درست کنند که محیط آن در روی زمین برابر ۱۲۰ «استوپ» و بلندی آن (در روی لوله) برابر ۱۲۰ «استوپ» باشد. برای ساختن خیمه از ماهوتی استفاده کردند که عرض آن $۲\frac{۱}{۲}$ «آرشین» بود و هر «آرشین» ۲ روبل قیمت داشت. قیمت همهٔ ماهوتی که برای ساختن خیمه لازم است، چقدر می‌شود؟

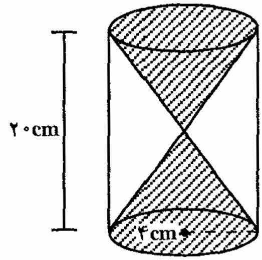
از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، روسی

۱۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۶۵۱. ساعت شنی که مردمان باستان برای اندازه‌گیری زمان از آن استفاده می‌کردند، از دو مخروط یکسان که درون یک استوانهٔ قائم قرار داشتند، ساخته شده بود. فرض کنید ارتفاع استوانه ۲۰ سانتیمتر و شعاع قاعدهٔ آن ۴ سانتیمتر است.

الف. حجم ناحیهٔ سایه زده شده در شکل را پیدا کنید.

ب. حجم ناحیهٔ محصور بین دو مخروط و استوانه را محاسبه کنید.



۶۵۲. مخروطی دوار را با کره‌ای محاط در آن که بر قاعدهٔ مخروط مماس است، درنظر می‌گیریم. استوانه‌ای بر این کره چنان محاط شده که یکی از قاعده‌های آن بر قاعدهٔ مخروط قرار دارد. فرض می‌کنیم V_1 حجم مخروط و V_2 حجم استوانه باشد.

a) ثابت کنید که $V_1 \neq V_2$.

b) کوچکترین عدد k را که به‌ازای آن $V_1 = kV_2$ است، بیابید. در این حالت، زاویه‌ای را، که قطری از قاعدهٔ مخروط از رأس آن با آن زاویه دیده می‌شود، رسم کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۰

۶۵۳. در یک مخروط دوار اندازهٔ شعاع قاعده مساوی ارتفاع مخروط است.

۱. نسبت مساحت جانبی به مساحت قاعدهٔ مخروط را تعیین کنید.

۲. ابعاد، سطح جانبی و حجم این مخروط را بیابید درصورتی که بدانیم عدد حجم آن دو برابر عدد سطح جانبی آن است.

۶۵۴. ۱. نسبت حجم یک مخروط و یک استوانه را که شعاع قاعدهٔ یکی با ارتفاع دیگری برابر است، به‌دست آورید.

۲. اندازهٔ حجم این دو جسم را تعیین کنید درصورتی که بدانیم، نسبت حجمهای آنها مساوی m و نسبت مساحتهای جانبی‌شان برابر k است.

۶۵۵. یک توپی از یک استوانه و یک مخروط که دارای یک شعاع و یک ارتفاع می‌باشند و از قاعده به هم وصل شده‌اند، تشکیل شده است.

۱. اندازهٔ حجم این توپ را بیابید درصورتی که اندازهٔ شعاع مشترک قاعده‌ها مساوی R و اندازهٔ ارتفاع مشترک آنها مساوی h باشد.

۲. اندازهٔ h چه‌قدر باید باشد، تا این حجم مساوی حجم کره‌ای به شعاع R گردد.

۶۵۶. مخروطی بر دو کره محیط است. حجم کرهٔ بزرگتر ۷ برابر حجم کرهٔ کوچکتر که شعاعی مساوی r دارد، می‌باشد.

۱. سطح جانبی مخروط

۲. حجم مخروط

را به‌دست آورید.

۶۵۷. حجم مخروط چه تغییری می‌کند، اگر:

الف. ارتفاع آن دو برابر شود، امّا شعاع قاعده تغییر نکند.

ب. شعاع قاعده دو برابر شود، ولی ارتفاع تغییر نکند.

۶۵۸. حجم یک مخروط چه تغییری می‌کند، درصورتی که:

الف. ارتفاعش سه برابر شود و شعاع قاعده‌اش ثابت بماند.

ب. شعاع قاعده‌اش سه برابر شود و ارتفاعش ثابت بماند.

پ. ارتفاع و شعاع قاعده‌اش هر دو، سه برابر شوند.

۶۵۹. ۱. مساحت جانبی و مساحت کل و حجم مخروط دواری را که هر مولد آن مساوی قطر قاعده است، برحسب R شعاع قاعدهٔ آن حساب کنید.

۲. زاویهٔ بین دو مولد مخروط را که نسبت به محور آن قرینهٔ یکدیگرند، همچنین زاویه‌ای را که هر مولد با صفحهٔ قاعده تشکیل می‌دهد، تعیین کنید.

۶۶۰. یک مخروط به رأس S که قاعدهٔ آن یک دایره است، داده شده است.

۱. ثابت کنید که اگر AB قطری از امتداد متغیر قاعده باشد، مجموع $SA^۲ + SB^۲$ ثابت می‌ماند و زاویه‌های ASB همگی حاده، همگی منفرجه و یا همگی قائمه‌اند.

۲. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث SAB را تعیین کنید.

۶۶۱. اگر یک مخروط دوار، مماس به دو وجه یک فرجه باشد:

۱. مولدهای تماس آن با یال فرجه زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۲. صفحهٔ گذرنده بر محور سطح مخروطی و یال فرجه، با وجه‌های فرجه زاویه‌های مساوی می‌سازند، همچنین با صفحه‌های نصف‌النهاری مولدهای تماس نیز زاویه‌های مساوی ایجاد می‌کند.

۶۶۲. گستردهٔ سطح جانبی یک مخروط دوار، قطاعی به شعاع a و زاویهٔ رأس O (برحسب رادیان) است. شعاع قاعده، ارتفاع، مساحت کل و حجم این مخروط را حساب کنید.

مثال عددی: $\theta = \frac{۶\pi}{۵}$ ، $a = ۵\text{cm}$

۶۶۳. دو مخروط دوار مساوی با مقطعهای نصف‌النهاری SAB و S′A′B′ به قسمی داده شده‌اند که صفحه‌های دایره‌های قاعده‌های آنها با هم موازی است و رأس هر یک در صفحهٔ قاعدهٔ دیگری واقع است. این مخروطها را با صفحهٔ P که موازی قاعده‌هایشان و بین قاعده‌ها قرار دارد، قطع می‌کنیم؛ صفحهٔ P مخروط اوّلی را تحت دایرهٔ CD و مخروط دومی را تحت دایرهٔ C′D′ قطع می‌کند.

شعاع قاعده‌ها، مولد، و ارتفاع هر یک از مخروطها را بترتیب با r، l و h و فاصلهٔ S تا صفحهٔ P و یال SA را با x و فاصلهٔ نقطهٔ S تا P را با y نشان می‌دهیم:

۱. مقدار x را به قسمی تعیین کنید که نسبت مجموع سطحهای جانبی دو مخروط ناقص ABCD و A′B′C′D′ به مساحت جانبی مخروط SAB مساوی با عدد داده شدهٔ k باشد، بحث کنید.

۲. مقدار y را به قسمی تعیین کنید که نسبت مجموع حجمهای مخروطهای ناقص ABCD و A′B′C′D′ به حجم مخروط SAB مساوی عدد داده شدهٔ ′k باشد. بحث کنید.

۶۶۴. ۱. برای آن‌که دو مخروط دوار متشابه باشند، لازم و کافی است که ارتفاعهایشان متناسب با شعاع قاعده‌هایشان باشد.

۲. نسبت حجمهای دو مخروط متشابه مساوی مکعب نسبت ارتفاعهای آنها یا مساوی

مکعب نسبت شعاع قاعدهٔ آنها می‌باشد ؛ نسبت مساحتهای آنها مساوی نسبت مربع ارتفاعهای آنها و یا نسبت مربع شعاعهای آنها است.

۶۶۵. ۱. کنج سه‌وجهی O.ABC و خط راست OD واقع در صفحهٔ OBC داده شده است. برای آن‌که صفحهٔ OAD نیمساز فرجهٔ OA باشد، لازم و کافی است که نسبت فاصله‌ها تا OB و OC از یک نقطهٔ OA و از یک نقطهٔ OD مساوی باشند.

۲. با استفاده از این ویژگی ثابت کنید، مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌های آنها از دو خط متقاطع داده شده مساوی مقدار معلومی است، یک سطح مخروطی با قاعدهٔ دایره‌ای شکل است.

۶۶۶. شرطی را تعیین کنید برای آن که دو سطح مخروطی :

۱. مجانس یکدیگر باشند.

۲. با هم متشابه باشند.

۶۶۷. ۱. چه شرطی بین شعاعهای قاعده‌ها و ارتفاع یک مخروط ناقص دوار باید برقرار باشد، برای این‌که این مخروط ناقص دوار قابل محیط شدن بر یک کره باشد؟

۲. ثابت کنید که سطح جانبی آن هم‌ارز با مساحت دایره‌ای است که شعاع آن مساوی یال جانبی مخروط است.

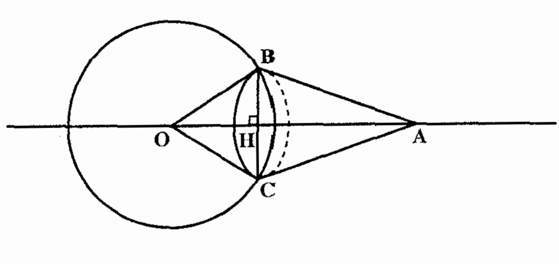
۶۶۸. اگر l، یک مولد مخروطی ناقص، مساوی $r + r'$ یعنی، مجموع شعاعهای دو قاعده‌اش باشد، ثابت کنید که :

۱. ارتفاع h از آن، مساوی دو برابر واسطهٔ هندسی بین این دو شعاع است.

۲. حجم آن مساوی حاصلضرب سطح کل آن S، در $\frac{1}{6}$ ارتفاع آن است.

۶۶۹. ۱. دو نقطهٔ A و O به فاصلهٔ ثابت a از یکدیگر داده شده‌اند. به مرکز یکی از این دو نقطه (مثلاً نقطهٔ O) دایره‌ای چنان رسم کنید که مخروط به رأس A و قاعدهٔ به قطر BC (شکل)، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

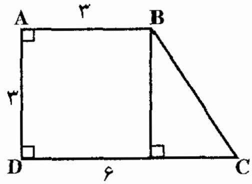
۲. ماکزیمم دو مخروط که قاعده‌های مشترک آنها دایرهٔ به قطر BC و رأسهای آنها A و O است، کدام است؟



۶۷۰. در مثلث متساوی‌الساقین $MON(OM = ON)$، طول ساقهای مساوی مقدار ثابتی است. تغییرات حجم به‌وجود آمده از دوران این مثلث را تعیین کنید، درصورتی که:
۱. مثلث حول ارتفاعش دوران کند.
۲. مثلث، حول محور Oy که از نقطهٔ O موازی قاعدهٔ MN رسم می‌شود، دوران کند.

۶۷۱. سطح جانبی و سطح کل و حجم مخروط دواری را که ارتفاع آن مساوی شعاع قاعده است، برحسب R شعاع قاعده حساب کنید. زاویهٔ بین دو مولد قرینه نسبت به محور مخروط را پیدا کنید. همچنین زاویهٔ هر مولد با صفحهٔ قاعده را بیابید.

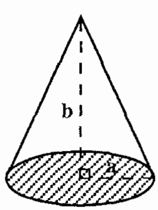
۶۷۲. مطلوب است محاسبهٔ:
۱. سطح جانبی
۲. سطح کل



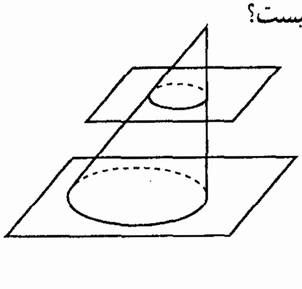
۳. حجم مخروط ناقص دواری که از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD(AD\perp AB)$ با مشخصات زیر حول ساق قائم AD ایجاد می‌شود:

$AB = ۳$ ، $CD = ۶$ و $AD = ۳$

۶۷۳. شعاع قاعدهٔ یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای هر کدام از موارد زیر عبارتی برحسب a و b پیدا کنید:
الف. حجم مخروط؛
ب. حجم مخروطی با همین شعاع قاعده امّا ارتفاع دو برابر؛
پ. حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع قاعدهٔ دو برابر؛
ت. حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعدهٔ دو برابر.



۶۷۴. ارتفاع یک مخروط ۹ است. صفحه‌ای به موازات قاعده مخروط را قطع می‌کند و مخروط کوچکتری به‌وجود می‌آورد. فاصلهٔ دو صفحه ۵ است.
الف. نسبت ارتفاعهای دو مخروط چیست؟
ب. نسبت شعاعهای قاعده‌های دو مخروط چیست؟
پ. نسبت مساحتهای دو قاعده چیست؟
ت. نسبت حجمهای دو مخروط چیست؟



۶۷۵. در دایرهٔ قاعدهٔ مخروط دوار ثابتی به رأس S، وتر AB را که A نقطهٔ ثابت و B نقطه‌ای متغیر است، درنظر می‌گیریم. مطلوب است :

۱. مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB.

۲. مکان هندسی نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث SAB

۳. اگر O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث SAB باشد، ثابت کنید : $SO \times SM$ مقداری است ثابت.

۶۷۶. در مخروط ناقص دواری که شعاعهای دو قاعدهٔ آن r و ۴r هستند، صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع و نزدیک به قاعدهٔ کوچک مرور می‌دهیم تا در مخروط، مقطعی ایجاد کند :

۱. مساحت مقطع مزبور را تعیین کنید.

۲. در حالت خاص که ارتفاع مخروط ناقص ۴r باشد، حجم هر یک از دو جزء مخروط ناقص را که به‌وسیلهٔ مقطع مزبور تفکیک می‌شوند، تعیین کنید.

راهنمایی و حل

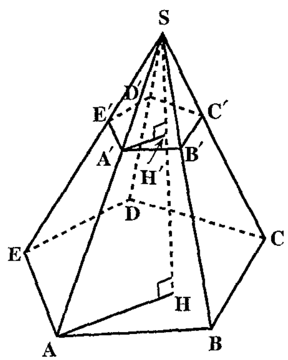
از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید، ولی درصورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.» در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این جلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نمی‌باشند ؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین‌جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به‌نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱
هرم

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. اگر صفحهٔ P با قاعدهٔ هرم SABCDE موازی و در هرم مقطع $A'B'C'D'E'$ را ایجاد کرده باشد (شکل) $A'B' \parallel AB$ و در نتیجه :

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{SB'}{SB}$$

و به همین دلیل :

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{SC'}{SC}$$

از این تساویها نتیجه می‌شود :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots$$

از طرفی :

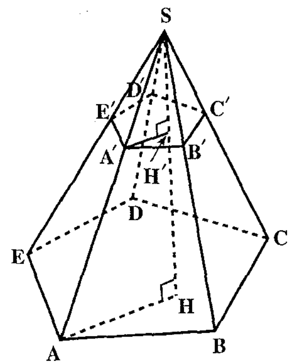
$$(A'B' \parallel AB \ , \ B'C' \parallel BC) \Rightarrow \hat{B}'=\hat{B}$$

یعنی زاویه‌های چندضلعی مقطع و زاویه‌های قاعدهٔ هرم نظیر به نظیر متساوی و ضلعهای آنها متناسبند. بنابراین :

$$A'B'C'D' \cdots \sim ABCD$$

۲. در شکل به علت توازی صفحهٔ P با قاعدهٔ هرم ارتفاع SH بر صفحهٔ P عمود است. اگر ارتفاع صفحهٔ P را در نقطهٔ H' قطع کرده باشد، به دلیلی که ذکر شد $A'H' \parallel AH$ و

بنابراین :



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SH'}{SH}$$

یعنی نسبت تشابه چندضلعی مقطع و قاعدهٔ هرم مساوی نسبت فاصله‌های رأس هرم از دو صفحهٔ آنها است. از طرفی می‌دانیم که در دو شکل متشابه نسبت مساحتها مساوی مربع نسبت تشابه است. پس اگر مساحت مقطع S' و مساحت قاعدهٔ هرم s باشد :

$$\frac{s'}{s}=\frac{A'B'^{2}}{AB^{2}}=\frac{SH'^{2}}{SH^{2}}$$

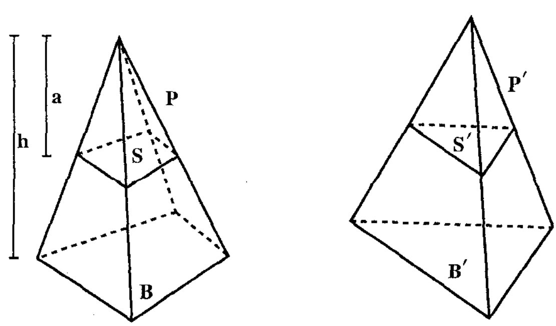
۳. هرگاه ارتفاع مشترک دو هرم را h (شکل) و فاصلهٔ صفحهٔ مقطع را از رأس دو هرم a و مساحت دو قاعده را B و B' و مساحت دو مقطع را S و S' فرض کنیم، می‌توان نوشت :

$$\frac{S}{B}=\frac{a^{2}}{h^{2}}\ ,\ \frac{S'}{B'}=\frac{a^{2}}{h^{2}}$$

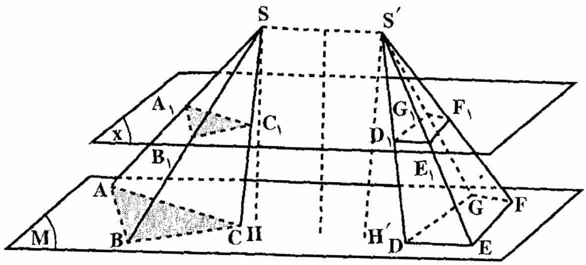
پس :

$$\frac{S}{B}=\frac{S'}{B'}$$

و در حالت مخصوصی که $B=B'$ باشد، $S=S'$ خواهد بود.

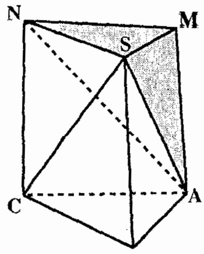


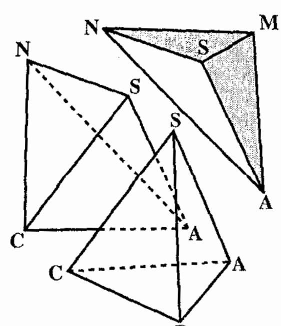
۴. دو هرم SABC و S′DEFG را درنظر می‌گیریم چنان که ارتفاعهای SH و S′H′ باهم برابرند و قاعده‌های ABC و DEFG دارای مساحتهای برابر هستند. قاعده‌های هرمها را بر یک صفحهٔ M چنان قرار می‌دهیم که رأسهای S و S′ در یک طرف M قرار گیرند. اینک صفحهٔ دلخواه X را موازی M رسم می‌کنیم تا یکی از هرمها را قطع کند، چون ارتفاعها برابرند، پس X هرم دیگر را نیز قطع می‌کند. مقطع X با دو هرم چندضلعیهای $A_1B_1C_1$ و $D_1E_1F_1G_1$ را (مطابق شکل) به‌دست می‌دهد که بنابه قضیهٔ قبل دارای مساحتهای برابر هستند، پس بنا به اصل کاوالیری دو هرم حجمهایشان به یک اندازه می‌باشند.



نتیجه. اگر قاعدهٔ هرم سه پهلویی ثابت باشد و رأس آن بر صفحه‌ای موازی قاعده تغییر کند، شکل هرم تغییر می‌کند،ولی اندازه حجم آن ثابت می‌ماند.

۵. هرم سه‌پهلوی SABC را درنظر گرفته و منشور ABCMSN را چنان بنا می‌کنیم که قاعدهٔ آن مثلث ABC و اندازهٔ هر یال جانبی آن مساوی SB باشد، (شکل) این منشور از هرم SABC و هرم دیگری به رأس S و قاعدهٔ AMNC مرکب است. اگر پاره‌خط AN یکی از قطرهای قاعدهٔ هرم چهار پهلو را رسم کنیم، ملاحظه می‌شود که هرم مزبور نیز از دو هرم SAMN و SANC مرکب است که حجمهای متساوی دارند، زیرا در چهارضلعی AMNC





دو مثلث AMN و ANC متساوی و بنابراین مساحتهای مساوی دارند و ارتفاعهای دو هرم نیز فاصلهٔ رأس S از صفحهٔ AMNC است. اما هرم SAMN را هرمی می‌توان درنظر گرفت که قاعدهٔ آن مثلث MSN و ارتفاعش فاصلهٔ رأس A از صفحهٔ قاعده؛ یعنی همان ارتفاع منشور باشد. پس این هرم، با هرم داده شده معادل است؛ یعنی حجمهای آنها برابرند. بنابراین منشور مزبور از سه هرم که حجمهای متساوی دارند و حجم هریک مساوی حجم هرم داده شده است، مرکب می‌باشد، یعنی حجم هرم داده شده مساوی ثلث حجم منشور است. اما قاعدهٔ منشور، مثلث ABC و ارتفاع آن فاصلهٔ رأس S از صفحهٔ قاعده، یعنی ارتفاع هرم است. پس حجم هرم مساوی مساحت قاعده در ثلث ارتفاع آن است. یعنی اگر مساحت قاعدهٔ هرم را s و اندازهٔ ارتفاع را h بگیریم و حجم هم V باشد:

$$V=\frac{۱}{۳}s.h$$

حجم هرم دلخواه. اگر قاعدهٔ هرم چندضلعی باشد، هرم سه‌پهلویی می‌سازیم که مساحت قاعده‌اش با مساحت چندضلعی و همچنین ارتفاع هرم سه‌پهلو با ارتفاع هرم داده شده برابر باشد. آن‌گاه بنابه دو قضیهٔ پیش:

حجم هرم برابر است با حاصلضرب مساحت قاعده آن در یک سوم ارتفاع هرم.

مساحت جانبی و مساحت کل هرم. مساحت جانبی هرم عبارت است از مجموع مساحتهای مثلثهای جانبی آن.

مساحت کل هرم مجموع مساحت جانبی و مساحت قاعدهٔ آن است.

مساحت جانبی و مساحت کل حجم هرم منتظم. اگر قاعدهٔ یک هرم منتظم، n ضلعی به ضلع a و اندازهٔ ارتفاع هرم h باشد، اندازهٔ سهم درچند ضلعی قاعده، $r=\frac{a}{۲}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و شعاع قاعده $R=\frac{a}{۲\sin\frac{۱۸۰}{n}}$ و بنابراین مساحت قاعده $S=\frac{۱}{۲}nar=\frac{۱}{۴}na^۲\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و اندازهٔ هر یال هرم $l=\sqrt{h^۲+R^۲}$ و اندازهٔ هر سهم آن $h'=\sqrt{l^۲-\frac{a^۲}{۴}}$ یا $h'=\sqrt{h^۲+r^۲}$ است (چرا؟). یعنی r و R و h' و l را برحسب a ، n و h می‌توان حساب کرد. بنابراین اگر s مساحت جانبی و S مساحت کل و V حجم هرم باشد:

$$s=\frac{۱}{۲}nah'$$

یعنی :
قضیه. سطح جانبی هرم منتظم مساوی است با نصف حاصلضرب محیط قاعده آن در طول سهم.
همچنین داریم :

سطح کل آن : $S=\frac{۱}{۲}na(r+h')$

و حجم آن : $V=\frac{۱}{۱۲}na^{۲}h\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$

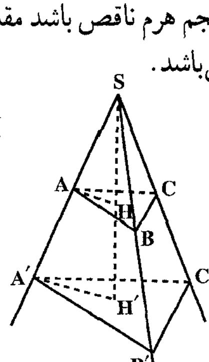
با استفاده از آن چه ذکر شد، s و S را برحسب n ، a و h حساب کنید.

۶. تعداد وجه‌های جانبی را n و یکی از این وجه‌ها را F و فاصلهٔ مرکز قاعده از هریک از این وجه‌ها را r می‌نامیم.
به‌وسیلهٔ صفحه‌های گذرنده بر محور جسم و یالهای جانبی آن، هرم به n هرم مثلث‌القاعده مساوی تقسیم می‌شود. چون می‌توان هریک از وجه‌ها را به‌عنوان قاعدهٔ یکی از این هرمهای مثلث‌القاعده فرض کرد ؛ بنابراین داریم :

حجم یکی از هرمهای جانبی $=F.\frac{۱}{۳}r$

و حجم تمام هرم $=nF.\frac{۱}{۳}r$

۷. هرم ناقص $ABCA'B'C'$ را که به‌وسیلهٔ حذف هرم $S.ABC$ از هرم $S'.A'B'C'$ به‌دست آمده است درنظر گرفته (شکل)، مساحت دو قاعدهٔ ABC و $A'B'C'$ را B و B' و طول ارتفاع $H'H$ را h و طول ارتفاعهای SH و $S'H'$ دوهرم را H و H' می‌نامیم ؛ پس $h=H'-H$. بنابراین اگر V حجم هرم ناقص باشد مقدار آن مساوی تفاضل حجمهای دو هرم $S'.A'B'C'$ و $S.ABC$ می‌باشد.



پس : $V=\frac{۱}{۳}B'\times H'-\frac{۱}{۳}B\times H$

لیکن می‌دانیم که:

$$\frac{H'^{۲}}{H^{۲}}=\frac{B'}{B}$$ و اگر فرض کنیم $k=\frac{H'}{H}$ باشد:

$$B'=k^{۲}\times B\ ,\ H'=H\times k$$

پس
$$V=\frac{۱}{۳}B\times H.k^{۳}-\frac{۱}{۳}B.H$$

و یا
$$V=\frac{۱}{۳}B\times H(k^{۳}-۱)$$

$$=\frac{۱}{۳}B\times H(k-۱)(k^{۲}+k+۱)$$

اما
$$H(k-۱)=Hk-H=H'-H=h$$

و
$$B(k^{۲}+k+۱)=Bk^{۲}+Bk+B$$

و چون
$$B^{۲}k^{۲}=B'B \qquad \text{پس} \quad Bk^{۲}=B'$$

و یا
$$Bk=\sqrt{B^{۲}k^{۲}}=\sqrt{BB'}$$

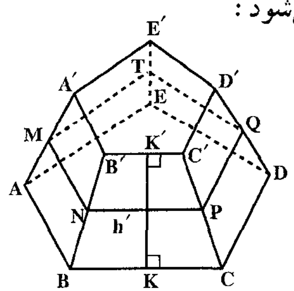
پس
$$V=\frac{۱}{۳}h(B+B'+\sqrt{BB'})$$

از مطالب بالا نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه. حجم هرم ناقص مساوی است با مجموع حجمهای سه هرم که ارتفاعهای آنها با ارتفاع هرم ناقص برابر و قاعده‌های آنها بترتیب دو قاعدهٔ هرم ناقص و واسطهٔ هندسی آنها باشد.

۸. چنان که قبلاً گفته شد، مساحت جانبی هرم ناقص مجموع مساحتهای ذوزنقه‌های جانبی آن است. اگر هرم ناقص منتظمی مانند شکل داشته باشیم که تعداد وجه‌های جانبی آن n و اندازهٔ هر ضلع از دو قاعدهٔ آن a و ′a و اندازهٔ هر سهم آن ′h باشد، مقدار s مساحت هر ذوزنقهٔ جانبی آن چنین می‌شود:

$$s=\frac{۱}{۲}(a+a')h'$$



و چون وجه‌های جانبی هرم ناقص منتظم متساوی‌اند (چرا؟)، مقدار S مساحت جانبی هرم ناقص منتظم از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$S = n.s = \frac{n}{۲}(a + a')h'$$

حال صفحه‌ای موازی دو قاعده و به یک فاصله از آن دو درنظر می‌گیریم که وجه‌های جانبی هرم ناقص منتظم را در مقطع MNPQT قطع کند (مقطع متوسط هرم ناقص)، در هریک از وجه‌های جانبی ضلع این مقطع نصف مجموع دو قاعده است. یعنی :

$$MN = \frac{۱}{۲}(a + a')$$

(چرا؟)، بنابراین :

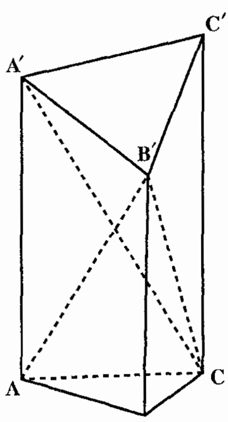
$$S = nMN.h'$$

و با ملاحظهٔ آن که مقطع یک چندضلعی منتظم است (چرا؟)، اگر محیط آن را p بنامیم، $p = n.MN$ و در نتیجه خواهیم داشت :

$$S = p.h'$$

چندضلعی MNPQT را که صفحهٔ آن بر وسط یالهای جانبی هرم ناقص می‌گذرد، مقطع متوسط هرم ناقص می‌گوییم.

۹. منشور ناقص مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ را درنظر می‌گیریم (شکل) و برسه نقطهٔ A، B' و C صفحه‌ای مرور می‌دهیم تا منشور ناقص به دو هرم $B'ABC$ و $B'AA'C'C$ تجزیه شود. هرم اوّلی یکی از سه هرمی است که در صورت قضیه گفته شد. هرم دومی را به‌وسیلهٔ رسم صفحهٔ قطری $B'A'C$ به دو هرم $B'.AA'C$ و $B'.A'CC'$ تجزیه می‌نماییم. ثابت می‌کنیم که دو هرم اخیر معادل با دو هرم دیگری است که در صورت قضیه ذکر شده است. به این منظور در هرم $B'.A'AC$ رأس B' را بر خط BB' که با صفحهٔ قاعدهٔ آن موازی است تا B انتقال می‌دهیم. حجم هرم تغییر نمی‌نماید و هرم مزبور به هرم $B.AA'C$ مبدل می‌شود که اگر رأس آن را A' فرض کرده هرم را به‌صورت $A'.ABC$ بخوانیم، دومین هرم مزبور حاصل می‌شود. در هرم سوم یعنی $B'.A'CC'$ ابتدا به طریق بالا رأس B' را به B منتقل می‌نماییم تا هرم به وضع $B.A'CC'$ درآید. اگر رأس آن را A' و قاعدهٔ آن را BCC' فرض کرده رأس A' را بر خط



AA' موازی با قاعده تا A منتقل نماییم هرم مفروض به وضع $B.ACC'$ درمی‌آید و در هرم اخیر اگر C' را رأس اختیار کنیم، هرم به‌صورت $C'.ABC$ که سومین هرم مذکور در صورت قضیه است، خوانده می‌شود و قضیه ثابت است.

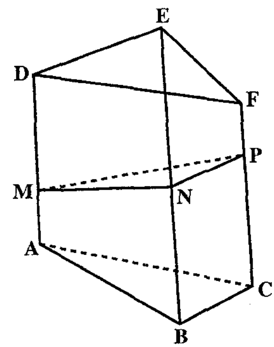
۱۰. در منشور ناقص ABCDEF مقطع قائم PNM را رسم می‌نماییم تا منشور ناقص به دو منشور ناقص قائم DEFMNP و ABCMNP تجزیه شود. هریک از این دو منشور بنا به قضیهٔ قبل معادل است با مجموع سه هرم که قاعدهٔ مشترک آنها مقطع قائم MNP و ارتفاعهایشان یالهای جانبی دو منشور ناقص است پس:

$$\text{حجم } DEFMNP = \text{سطح } MNP \times \frac{DM+EN+FP}{۳}$$

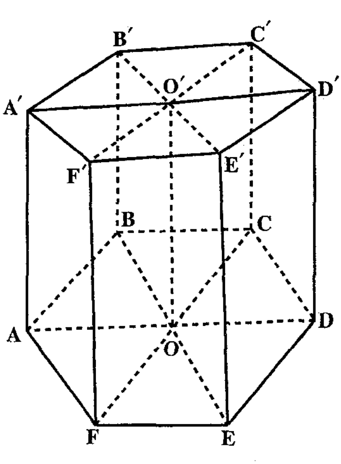
$$\text{حجم } ABCMNP = \text{سطح } MNP \times \frac{AM+BN+CP}{۳}$$

و از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود:

$$V = MNP \times \frac{AD+BE+CF}{۳}$$



۱۱. فرض کنیم قاعدهٔ یک شش‌ضلعی منتظم باشد و مساحت آن‌را S و طول شش‌ضلعی جانبی AA' و BB' و ... و FF' را a ، b ، ... و f و طول محور OO' را h فرض می‌نماییم هرگاه صفحه‌های قطری $AA'D'D$ و ... را که همگی شامل محور OO' می‌باشند (چرا؟) رسم نماییم، منشور ناقص مفروض به شش منشور ناقص مثلث‌القاعده تبدیل می‌شود که همگی در یال OO' مشترکند و سطح قاعدهٔ هریک از آنها $\frac{S}{۶}$ است. پس اگر دستور حجم آنها



را بنویسیم، حاصل می‌شود :

$$V=\frac{۱}{۶}S(\frac{a+b+h}{۳}+\frac{b+c+h}{۳}+\cdots+\frac{f+a+h}{۳})$$
$$=\frac{S}{۱۸}(۲a+۲b+۲c+۲d+۲e+۲f+۶h)$$

حال اگر ملاحظه کنیم که مقطعهای صفحه‌های قطری $AA'D'D$ و غیره در جسم ذوزنقه است، بنابر آنچه در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم، می‌توان نوشت :

$$a+d=b+e=c+f=۲h$$

پس
$$V=\frac{S}{۱۸}(۴h+۴h+۴h+۶h)$$

و یا
$$V=\frac{S}{۱۸}\times ۱۸h=S\times h$$

نتیجه. سطح جانبی جسم مذکور در قضیهٔ بالا مساوی است با حاصلضرب محیط قاعده در طول محور. زیرا وجه‌های جانبی همگی ذوزنقه‌های قائم‌الزاویه‌ای می‌باشند که ارتفاع آنها یکی از ضلعهای قاعدهٔ جسم و دو قاعدهٔ آنها یالهای جانبی می‌باشند. پس اگر طول ضلع قاعده را l فرض کنیم :

$$\text{سطح جانبی}=\frac{1}{۲}(a+d+b+c+\cdots+f+a)$$
$$=\frac{1}{۲}(۲a+۲b+۲c+۲d+۲e+۲f)$$
$$=\frac{1}{۲}\times ۱۲h=۶\times l\times h$$

با ملاحظهٔ آن که طول محیط قاعده $۶l$ است حکم قضیه ثابت می‌شود.

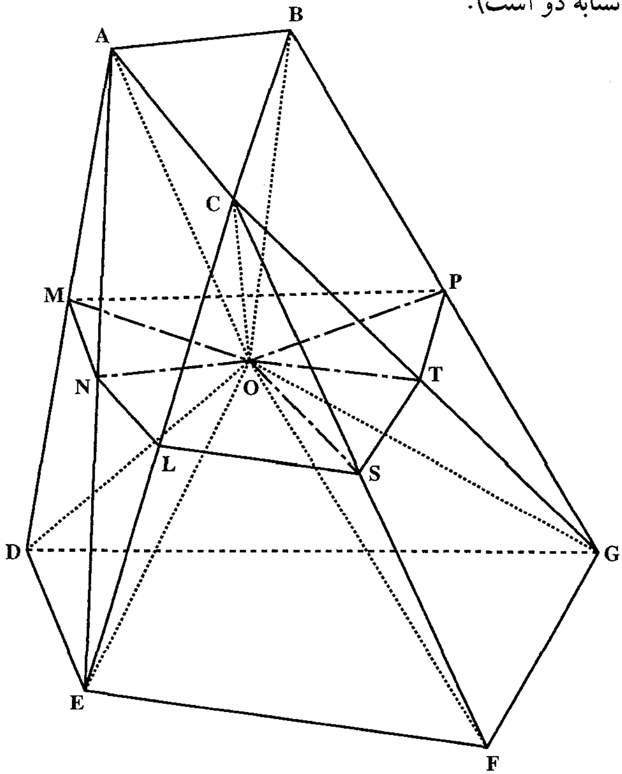
۱۳. شبه منشور ABCDEFG را درنظر گرفته (شکل) ازنقطهٔ اختیاری O واقع در داخل مقطع متوسط خطهایی به تمام رأسهای دو قاعده و قاعدهٔ متوسط وصل می نماییم بدین طریق جسم شبه منشور تقسیم می‌شود.

اولاً: به دو هرم OABC و ODEFG که رأس مشترک آنها نقطهٔ O و قاعده‌های آنها دو قاعدهٔ شبه منشور است و اگر مساحت این دو قاعده را بترتیب S و S' و ارتفاع شبه منشور را h فرض کنیم، دستور حجم آنها چنین است.

$$V_۱=\frac{h}{۶}S \quad , \quad V_۲=\frac{h}{۶}S'$$

ثانیاً: یک عده هرمهایی که رأس مشترک همهٔ آنها نقطهٔ O و قاعده‌های آنها وجه‌های جانبی

شبه منشور می‌باشند. حال یکی از هرمها مانند چهاروجهی O.CEF را درنظر می‌گیریم. حجم این چهاروجهی چهار برابر حجم چهاروجهی O.CSL است، زیرا ارتفاع این دو چهاروجهی که عمود رسم شده از O بر صفحهٔ CEF مشترک است، مابین آنها می‌باشد ولی مساحت مثلث CEF چهار برابر مساحت مثلث CLS است (دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه دو است).



هرگاه در هرم OCLS رأس را C فرض کنیم، قاعدهٔ آن OLS می‌شود و واضح است که در این صورت ارتفاع چهاروجهی نصف ارتفاع منشور می‌باشد.

پس: OCEF حجم $= \frac{h}{۶} \times ۴($سطح $\text{OLS})$

و چون عین این استدلال را دربارهٔ هرم OCFG تکرار کنیم، حجم آن نیز چنین خواهد شد:

OCFG حجم $= \frac{h}{۶} \times ۴($سطح $\text{OST})$

و بنابراین مجموع حجم این قبیل هرمها مساوی می‌شود با یک ششم ارتفاع، ضرب در چهار برابر مساحت مقطع متوسط، و اگر مساحت مقطع متوسط را S'' و مجموع حجمهای این هرمها را V_3 فرض کنیم، داریم :

$$V_3 = \frac{h}{6} \times 4S''$$

پس $$\text{حجم شبه منشور} = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{h}{6}(S + S' + 4S'')$$

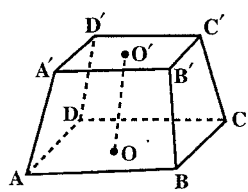
تبصره. باید دانست که حجم شبه منشور حالت کلی است از حجم غالب اجسامی که تاکنون بیان داشته‌ایم مانند هرم و منشور و منشور ناقص مثلث‌القاعده و غیره و به‌وسیلهٔ دستور حجم شبه‌منشور، می‌توان دستور حجم تمام اجسام مزبور را مجدداً به‌دست آورد.

۱۴. اگر در ناوهٔ $ABCDA'B'C'D'$ (شکل)، طول ضلعهای بالایی و پایینی را بترتیب a'، b' و a، b و ارتفاع OO' را h فرض کنیم، طول ضلعهای مقطع متوسط $\frac{a+a'}{2}$ و $\frac{b+b'}{2}$ می‌شود و بنابراین حجم ناوه از دستور زیر به‌دست می‌آید.

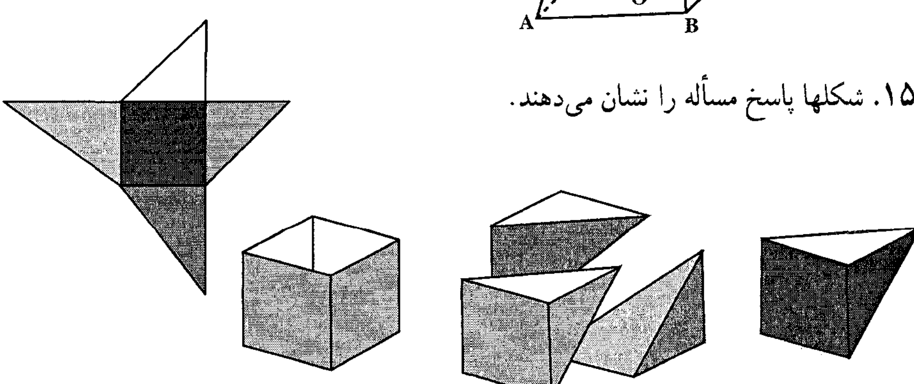
$$V = \frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')]$$

که می‌توان آن را چنین نوشت :

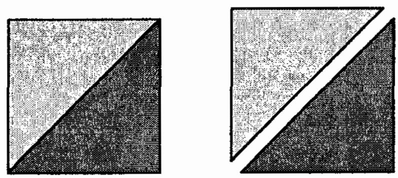
$$V = \frac{h}{6}[b(2a + a') + b'(2a' + a)]$$



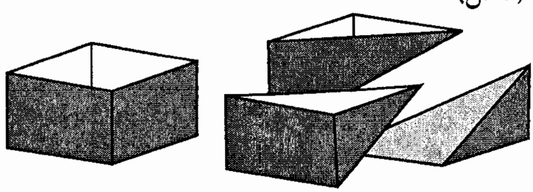
۱۵. شکلها پاسخ مسأله را نشان می‌دهند.



در فعالیت بالا، سه هرم را کنار هم گذاشتید و یک مکعب که خود یک منشور است ساختید. این کار مانند آن است که یک مکعب را به سه هرم با حجمهای مساوی تجزیه کنیم. قبلاً نیز برای محاسبهٔ مساحت مثلث، یک متوازی الاضلاع یا مستطیل را به دو مثلث هم مساحت تجزیه کردیم.



با استفاده از ایدهٔ تجزیهٔ شکلها، می‌توان حجم هرم را در حالت کلی محاسبه کرد. با پذیرفتن این موضوع که دو هرم با سطح قاعده‌ها و ارتفاعهای مساوی دارای حجمهای یکسان هستند، کافی است که حجم یک هرم با قاعدهٔ مربع را پیدا کنیم زیرا برای هر هرم دیگری می‌توان هرمی با قاعدهٔ مربع ساخت که مساحت قاعده و ارتفاع آن با مساحت قاعده و ارتفاع آن هرم برابر باشد. برای این منظور مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعدهٔ آن همان قاعدهٔ هرم بالا و ارتفاع آن نیز با ارتفاع هرم برابر باشد. این مکعب مستطیل را به سه هرم تجزیه می‌کنیم (شکل).



این سه هرم همنهشت نیستند ولی دارای حجمهای مساوی هستند. چون حجم مکعب مستطیل مساوی مجموع حجم این سه هرم است، بنابراین،

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\,(\text{حجم مکعب مستطیل})$$

$$= \frac{۱}{۳}(S \times h)$$

که S مساحت قاعدهٔ هرم و h ارتفاع آن است.

حجم هرمی به مساحت قاعدهٔ S و ارتفاع h برابر است با :

$$V = \frac{۱}{۳} S \times h$$

۲.۱. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۱. نقطه

۱.۱.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همصفحه، ...

۱.۱.۱.۲.۱.نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۶. ثابت کنید تصویرهای M بر روی ضلعهای چهارضلعی ABCD ، بر روی یک کره قرار دارند.
(اگر K و L تصویر نقطهٔ M بر روی AB و BC باشند، آن‌گاه B ، K ، M و L روی یک دایره قرار می‌گیرند و بنابراین، $M\hat{L}K = M\hat{B}K$ ، $M\hat{K}L = M\hat{B}L$ به‌همین ترتیب برای ضلعهای دیگر).

۲.۱.۱.۲.۱. نقطه روی یال است

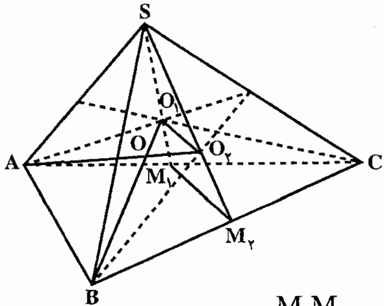
۱۷. به سادگی ثابت می‌شود که صفحه‌های عمودمنصف پاره‌خطها از وصل کردن دوبه‌دوی نقطه‌ها، در یک نقطه روی SA متقاطعند. مساحت وجه ASC مساوی $\sqrt{۳}$ است.

۲.۲.۱. خط

۱.۲.۲.۱. خطهای: همرس، همصفحه، ...

۱.۱.۲.۲.۱. خطها همرسند

۱۸. اگر $O_۱$ مرکز ثقل مثلث ASC و $BO_۱$ یکی از این خطها باشد، نقطهٔ $O_۲$ مرکز ثقل وجه BSC را درنظر می‌گیریم ثابت می‌کنیم خطهای $AO_۲$ و $BO_۱$ در نقطهٔ O متقاطعند و $BO_۱$ را به نسبت $\frac{۱}{۳}$ از نقطهٔ $O_۱$ تقسیم می‌کند. اگر $M_۱$ و $M_۲$ وسطهای AC و AB باشند (شکل) واضح است $AB \| M_۱M_۲$ و بسهولت دیده می‌شود $O_۱O_۲ \| M_۱M_۲$ ، یعنی

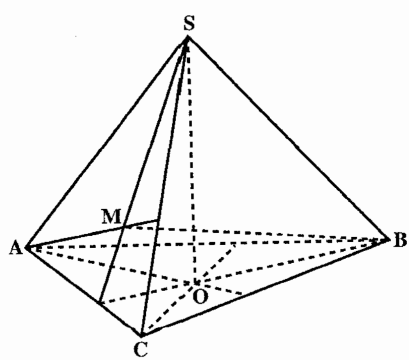


O_1 و O_2 خطهای M_1S و M_2S_2 را به یک نسبت تقسیم می‌کنند. در نتیجه $AB\|O_1O_2$ و شکل ABO_2O_1 ذوزنقه است و قطرهای BO_1 و AO_2 متقاطعند. اگر این نقطه را O بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{1}{3} \qquad \frac{O_1O_2}{M_1M_2}=\frac{2}{3} \qquad \frac{M_1M_2}{AB}=\frac{1}{2}$$

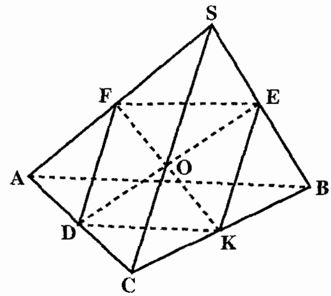
از تشابه دو مثلث AOB و O_1OO_2 نتیجه می‌شود $\frac{1}{3}=\frac{O_1O_2}{AB}=\frac{O_1O}{OB}$. اگر مرکز ثقل وجه دیگری را درنظر بگیریم، همچنین می‌توان ثابت کرد که نقطهٔ O خط BO_1 را در ثلث، قطع می‌کند.

۱۹. فرض می‌کنیم ارتفاع SO از نقطهٔ O محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد (شکل) BM ارتفاع دیگر هرم را بر قاعدهٔ ASC فرود می‌آوریم و AM تصویر AB در این صفحه می‌باشد. چون $AB\perp SC$ است طبق قضیهٔ سه عمود $OC\perp AB$ و $AM\perp SC$ می‌باشد به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $SM\perp AC$ است؛ زیرا $OB\perp AC$ و $SB\perp AC$ می‌باشد. در این صورت نقطهٔ M محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC است. به همین طریق می‌توان در مورد ارتفاعهای رسم شده از نقطه‌های A و C قضیه را اثبات کرد.



۲۰. اگر DE و KF خطهای واصل وسطهای دو یال مقابل باشد (شکل) نقطه‌های D، F ، E و K را به هم وصل می‌کنیم در این صورت $FE\|AB$ و $FE=\frac{1}{2}AB$ و $DK\|AB$ و

$DK = \frac{1}{2} AB$ زیرا وسطهای ضلعهای دو مثلث ASB و ACB را به هم وصل کرده است، پس FE موازی و مساوی DK می‌باشد ؛ یعنی چهارضلعی DEFK متوازی‌الاضلاع است و دو قطر آن منصف یکدیگرند. به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که وسطهای یالهای AB و SC از نقطه O محل تلاقی دو قطر فوق‌الذکر می‌گذرند.

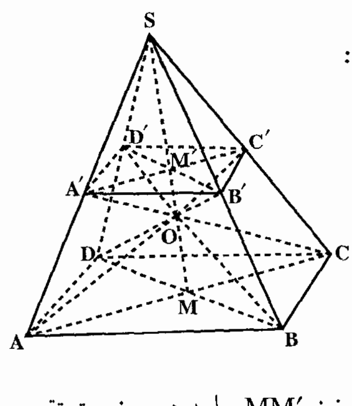


۲۱. فرض می‌کنیم نسبت ضلعهای متناظر و همچنین نسبت قطرهای متناظر و قاعدهٔ هرم ناقص مساوی $\frac{m}{n}$ باشد. یالهای جانبی روبه‌رو، در یک صفحه قرار دارند. که این صفحه، هرم ناقص را ذوزنقهٔ $ACC'A'$ قطع می‌کند. AC' و CA' قطرهای این ذوزنقه در نقطهٔ O متقاطعند که این نقطه، روی خط MS فصل مشترک دو صفحهٔ ASC و BSD واقع است از طرف دیگر :

$$\frac{AO}{OC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{m}{n}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{MO}{OM'} = \frac{m}{n}$$



قطرهای BD' و DB' نیز MM' را به همین نسبت تقسیم می‌کنند. بنابراین آنها نیز از همین نقطهٔ O می‌گذرند.

۲.۱.۲.۲.۱. خطها همصفحه‌اند

۲۲. روی یالهای هرم نقطه‌های A ، B و C را چنان اختیار می‌کنیم که SA = SB = SC باشد. فرض می‌کنیم نقطه‌های α و α' روی BC ؛ β و β' روی CA ؛ و γ و γ' روی AB قرار داشته باشند. مثلث SBC متساوی‌الساقین است و نقطه‌های α و α' نسبت به وسط پاره‌خط BC قرینهٔ یکدیگرند. پس $\overline{\alpha' B} = -\overline{\alpha C}$ و $\overline{\alpha' C} = -\overline{\alpha B}$ و $\dfrac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} = \dfrac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}$.

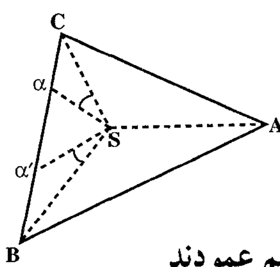
به‌همین ترتیب داریم:

$$\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}\ ,\ \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \cdot \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}} \qquad (1)$$

چون خطهای $S\alpha$ ، $S\beta$ و $S\gamma$ در صفحهٔ P قرار دارند، نقطه‌های α ، β و γ روی یک خط راست واقعند، که این خط نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با صفحهٔ مثلث ABC است. از آن‌جا طرف دوم رابطهٔ (۱) برابر ۱ است. در نتیجه طرف اول این رابطه برابر ۱ می‌باشد، و سه نقطهٔ α' ، β' و γ' روی یک خط راست قرار دارند و این مطلب نشان می‌دهد که خطهای $S\alpha'$ ، $S\beta'$ و $S\gamma'$ در یک صفحه می‌باشند.



۳.۱.۲.۲.۱. خطها برهم عمودند

۲۳. گزینهٔ (الف) درست است.

۴.۱.۲.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

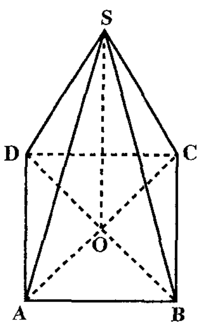
۲۴. مثلثهای ABD و AEC در رأس A متساوی‌الساقین هستند و ارتفاع AH عمودمنصف BD و EC است؛ یعنی از وسط BD و وسط EC می‌گذرد که این نقطه محل برخورد قطرها، یا به عبارتی مرکز قاعده است، می‌گذرد.

۱.۲.۳. صفحه

۱.۲.۳.۱. تعداد صفحه‌ها

۲۵. چهار صفحهٔ وجه‌های جانبی هرم، و دو صفحهٔ EAC و EBD .

۱.۲.۳.۲. وجه‌های هرم



۲۶. مسأله را برای هرم منتظم مربع‌القاعده ثابت می‌کنیم. هرم منتظم مربع‌القاعدهٔ SABCD را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که ارتفاع رأس S از نقطهٔ O مرکز مربع (و به‌طور کلی در هرم منتظم از مرکز چندضلعی منتظم قاعدهٔ هرم) می‌گذرد. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SOA، SOB ، SOC و SOD همنهشتند (به دلیل برابری دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه) بنابراین $SA = SB = SC = SD$. این حکم مسأله برقرار است. برای هر هرم منتظم دیگر نیز مشابه همین استدلال برقرار است.

۲۸. ثابت کنید دو وجهی که به کوتاهترین یال جانبی متصلند، باهم برابرند.

۲۹. خیر. چهار وجه، مثلث.

۱.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰. پنج وجه، هشت یال، هشت فرجه و پنج کنج دارد.

۱.۳. زاویه

۱.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۳۲. دو حالت اتفاق می‌افتد :

۱. مرکز کرهٔ محیطی، بر مرکز قاعده منطبق است.
۲. مرکز کرهٔ محیطی، بر روی سطح کره محاطی قرار دارد که قطراً نسبت به مرکز قاعده قرینه است.

در حالت اوّل زاویه رأس برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

حالت دوم را مورد بررسی قرار دهید. ضلع قاعده، یال جانبی و سهم وجه جانبی را بترتیب a ، b و l بنامید. پس،

$$b^۲ = l^۲ + \frac{a^۲}{۴} \qquad (۱)$$

r شعاع کرهٔ محاطی، برابر با شعاع دایرهٔ محاط در مثلث متساوی الساقین به قاعدهٔ a، و ساق l می‌شود :

$$r = \frac{a\sqrt{۲l-a}}{۲\sqrt{۲l+a}} \qquad (۲)$$

R شعاع کرهٔ محیطی هم، برابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ $a\sqrt{۲}$ ، و ساق b می‌شود.

$$R = \frac{b^۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲b^۲-a^۲}} \qquad (۳)$$

در این‌جا، مرکز دایره باید در داخل مثلث باشد، یعنی $b > a$. چون فاصلهٔ از مرکز دایره کره تا قاعده برابر است با $۲r$ ، پس خواهیم داشت :

$$R^۲ - \frac{a^۲}{۲} = ۴r^۲$$

با قرار دادن مقادیر R و r در فرمول (۲) و (۳) و پس از ساده کردن خواهیم داشت،

$$\frac{(b^۲-a^۲)^۲}{۲(۲b^۲-a^۲)} = \frac{a^۲(۲l-a)}{۲l+a}$$

با نوشتن b برحسب a و l از فرمول (۱) خواهیم داشت،

$$(l^۲ - \frac{۳a^۲}{۴})^۲ = a^۲(۲l-a)^۲$$

با درنظر گرفتن $b > a$ یا $l > a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ نتیجه می‌شود که a و l در تساوی زیر صدق می کنند،

$$l^۲ - \frac{۳a^۲}{۴} = a(۲l-a)$$

بنابراین $\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱=\frac{1}{a}$ (برای ریشهٔ دوم $\frac{\sqrt{۳}}{۲}<\frac{1}{a}$)

جواب: $\frac{\pi}{۲}$ و یا $\frac{\pi}{۶}$

۳۳. اگر $D\hat{S}C=x$ فرض شود (شکل) و O مرکز کرهٔ محاط و محیط در هرم و SM ارتفاع و SK سهم آن باشد فرض می‌کنیم:

$OM=OE=r$ و $OS=OC=R$ و $KC=MK=a$

(R و r شعاع کره‌های محیطی و محاطی هرم است) دو مثلث SOE و COM برابرند چون وترشان $OS=OC$ و $OM=OE$ پس:

$$SE=MC=a\sqrt{۲} \qquad (۱)$$

و از تساوی دو مثلث OEK و OMK داریم:

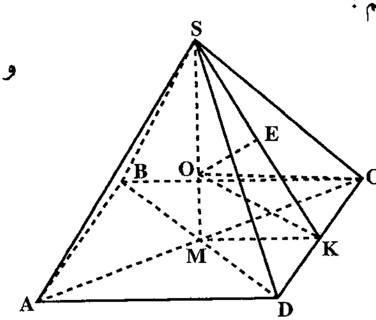
$$EK=MK=a \qquad (۲)$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$SK=SE+EK=a(\sqrt{۲}+۱)$ از مثلث قائم‌الزاویه SKC که در آن زاویهٔ $\hat{S}=\frac{x}{۲}$ است، داریم:

$$tg\frac{x}{۲}=\frac{KC}{SK}=\frac{a}{a(\sqrt{۲}+۱)}=\sqrt{۲}-۱$$ و

$$\frac{x}{۲}=۲۲/۵^\circ \quad \Rightarrow \quad x=۴۵^\circ$$



۳۴. زاویه‌های $S\hat{A}B$ ، $S\hat{C}A$ ، $S\hat{A}C$ و $S\hat{B}A$ را بترتیب با $\alpha-۲\varphi$ ، $\alpha-\varphi$ ، α و $\alpha+\varphi$ نشان دهید. بنابر قضیه سینوسها، از مثلث SAB نتیجه می‌شود،

$$SA=AB\times\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(۲\alpha-\varphi)}$$

و از مثلث SAC داریم،

$$SA=CA\times\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(۲\alpha-\varphi)}$$

اما بنا به فرض، $AB = AC$ پس،

$$\sin(\alpha+\varphi)=\sin(\alpha-\varphi)$$

از آن‌جا
$$\alpha=\frac{\pi}{۲}$$

از شرط مربوط به مساحتهای مثلثهای SAB ، ABC و SAC معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود،

$$\operatorname{cotg}^{۲}\varphi\cos ۲\varphi=۱$$

از آن‌جا
$$\varphi=\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$$

بنابراین جواب مسأله چنین خواهد بود،

$$\frac{\pi}{۲}-\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)\quad,\quad \frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$$

$$\frac{\pi}{۲}\quad,\quad \frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\sqrt{۲}-۱)$$

۱.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳۵. SO ارتفاع مخروط را رسم کنید، تا سه هرم به‌وجود بیاید : SBCO ، SABO و SCAO. در هریک از این هرمها، فرجه‌های نظیر یالهای جانبی SA و SB ، SB و SC، SC و SA، باهم برابرند. این فرجه‌ها را با x ، y و z نشان دهید. دستگاه زیر حاصل می‌شود،

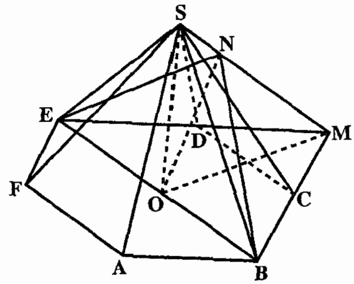
$$\begin{cases}x+y=\beta\\ y+z=\gamma\\ z+x=\alpha\end{cases}$$

از آن‌جا $z=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{۲}$ و زاویه مطلوب برابر است با، $\frac{\pi-\alpha+\beta-\gamma}{۲}$

۳۶. خط SM فصل مشترک صفحه‌های SBC و SDE را رسم می‌کنیم (شکل، $M=BC\cap ED$). برای یافتن فرجه‌ای با وجه‌های BSM و ESM ابتدا زاویه مسطحهٔ آن را رسم می‌کنیم مرکز قاعده هرم را نقطهٔ O درنظر می‌گیریم. نقطهٔ O میانگاه قطر BE بوده و به دلیل متساوی‌الاضلاع بودن مثلث BME ، $MO\perp BE$ را داریم. خط MO تصویر خط SM روی صفحه قاعده بوده (SO بر این صفحه عمود است) و بنابراین $SM\perp BNE$ خواهد بود.

اگر ON ارتفاع مثلث SOM درنظر گرفته شود آن‌گاه از $SM\perp ON$ و $SM\perp BE$

نتیجه می‌شود SM⊥BNE است. یعنی زاویه BNE زاویه مسطحه BSME است. حال زاویه BNE را پیدا می‌کنیم. اگر طول ضلع قاعده هرم را با a نشان دهیم، آن‌گاه $BE = BM = EM = ۲a$ بوده و در نتیجه $MO = a\sqrt{۳}$ را خواهیم داشت.



از مثلث قائم‌الزاویه SOM تساوی $SM = \sqrt{SO^۲ + OM^۲} = \frac{۳\sqrt{۶}}{۴}a$ استنتاج می‌شود.

آن‌گاه $ON = \frac{SO.OM}{SM} = \frac{a}{\sqrt{۳}}$ به‌دست می‌آید. از تقارن حول صفحه SOM نتیجه می‌شود که اگر $B\hat{N}E = \varphi$ باشد آن‌گاه $B\hat{N}O = \frac{\varphi}{۲}$ خواهد بود.

از مثلث BON رابطه $\tan(\frac{\varphi}{۲}) = \frac{BO}{ON} = \sqrt{۳}$ به‌دست می‌آید که از آن نیز $\varphi = \frac{۲\pi}{۳}$ حاصل می‌شود. این مقدار، برابر فرجه BSME است بدلیل $\varphi > \frac{\pi}{۲}$ زاویه بین صفحه‌های ESD و BSC برابر $\pi - \varphi = \frac{\pi}{۳}$ خواهد بود. پس جواب مسأله معادل $\frac{\pi}{۳}$ درمی‌آید.

روش مختصاتی را نیز می‌توان برای یافتن زاویه بین صفحه‌های مورد استفاده قرار داد. صفحه‌هایی را با معادلات زیر درنظر می‌گیریم:

$$a_۱x + b_۱y + c_۱z + d_۱ = ۰ \qquad a_۲x + b_۲y + c_۲z + d_۲ = ۰$$

اگر زاویهٔ بین این صفحه‌ها را با φ نشان دهیم، آن‌گاه رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که در آن $n_۱ = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $n_۲ = (a_۲, b_۲, c_۲)$ است:

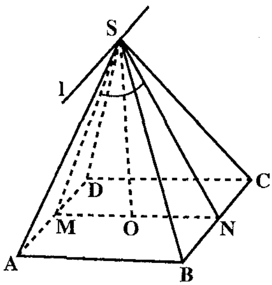
$$\cos\varphi = \frac{|n_۱ . n_۲|}{|n_۱| . |n_۲|}$$

۳۷. اندازهٔ زاویهٔ خواسته شده $\mathrm{Arc\ tg}(۲ - \sqrt{۳})$ است.

۳.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۳۸. $\mathrm{Arc}\cos(۲-\sqrt{۵})$

۳۹. ۹ درجه، ۸۵ درجه و ۳۰ دقیقه



۴۰. صفحهٔ SBC از خط BC که موازی صفحه SAD است عبور کرده است $BC\|AD$، (شکل). بنابراین فصل مشترک صفحه‌های SBC و SAD عبارت از خط l است که از نقطهٔ S به موازات خط BC عبور می‌کند. خط l یال فرجه‌ای است که بایستی آن را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم که M و N بترتیب میانگاه یالهای AD و BC باشند. صفحهٔ SMN بر یال l عمود است. در حقیقت $BC\perp MN$ و $BC\perp SN$ بوده و از این‌رو $BC\perp SMN$ است. ولی $l\|BC$ بوده و در نتیجه $l\perp SMN$ را خواهیم داشت. از این امر استنتاج می‌شود که $\widehat{MSN}$ زاویهٔ مسطحهٔ بین وجه‌های SBC و SAD است. طول یال هرم را با a نشان داده و فرض می‌کنیم که SO ارتفاع هرم است. عبارت $\widehat{MSN}=\alpha$ را نیز درنظر می‌گیریم. در مثلث متساوی‌الساقین MSN رابطه‌های $MN=a$، $MS=NS=a\sqrt{\frac{۳}{۲}}$، $ON=\frac{a}{۲}$ داریم. از این‌رو $\sin(\frac{\alpha}{۲})=\frac{ON}{SN}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ استنتاج می‌شود.

حال درمی‌یابیم که $\cos\alpha=۱-۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})=\frac{۱}{۳}$، $\alpha=\mathrm{Arc}\cos(\frac{۱}{۳})$ است. یعنی جواب مسأله عبارت از $\mathrm{Arc}\cos(\frac{۱}{۳})$ خواهد بود.

دو صفحهٔ متقاطع چهار فرجه تشکیل می‌دهند. اگر این فرجه‌ها باهم مساوی باشند دو صفحهٔ مزبور متعامد خوانده می‌شوند و اندازهٔ هریک از این فرجه‌ها $\frac{\pi}{۲}$ خواهد بود. اگر دو صفحهٔ متقاطع متعامد نباشند، در آن صورت کوچکترین فرجهٔ تشکیل شده به‌عنوان زاویهٔ بین آنها اختیار می‌شود. با این ترتیب زاویهٔ بین دو صفحهٔ متقاطع بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ قرار دارد.

۴۱. وجه‌های جانبی را امتداد دهید تا یکدیگر را قطع کنند. به این ترتیب دو هرم متشابه به‌دست می‌آید که قاعده‌های آنها، قاعده‌های هرم ناقصند. اگر a طول ضلع قاعدهٔ بزرگتر

هرم ناقص، و α زاویهٔ فرجهٔ نظیر این قاعده باشند، می‌توان ارتفاع هرم بزرگتر را حساب کرد که می‌شود :

$$h=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}tg\alpha$$

شعاع کرهٔ محاطی برابر می‌شود با :

$$r=a\frac{\sqrt{۳}}{۲}tg\frac{\alpha}{۲}$$

و ارتفاع هرم کوچکتر برابر است با :

$$h_۱=h-۲r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}(tg\alpha-۲tg\frac{\alpha}{۲})$$

ضلع قاعدهٔ کوچکتر برابر می‌شود با :

$$a_۱=\frac{h_۱}{h}\qquad a=\frac{tg\alpha-۲tg\frac{\alpha}{۲}}{tg\alpha}$$

و طول یال جانبی هرم بزرگتر برابر است با :

$$l=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\sqrt{tg^۲\alpha+۴}$$

طول یال جانبی هرم کوچکتر برابر است با :

$$l_۱=l\frac{h_۱}{h}$$

شرط مسأله، مبنی بر این که کره‌ای وجود دارد که بر یالهای جانبی هرم ناقص مماس است، هم‌ارز این موضوع می‌شود که، دایره‌ای موجود است تا در یکی از وجه‌های جانبی هرم ناقص قابل محاط باشد.

با استفاده از این موضوع، تساویهای زیر نوشته می‌شوند،

$$۲(l-l_۱)=a+a_۱$$

اگر l ، $l_۱$ و $a_۱$ را برحسب a و α بنویسیم خواهیم داشت،

$$\frac{\sqrt{۳}}{۳}\sqrt{tg^۲\alpha+۴}\ tg\frac{\alpha}{۲}=tg\alpha-tg\frac{\alpha}{۲}$$

از آن‌جا

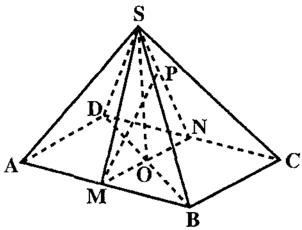
$$tg\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$$

جواب :

$$۲Arc\ \ tg(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۴.۱.۳.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴۲. $\mathrm{Arc\ tg}\sqrt{\frac{۳}{۲}}$



۴۳. $SB = a$ را درنظر می‌گیریم (شکل). آن‌گاه h طول عمود مرسوم از نقطهٔ B بر صفحهٔ SCD یعنی فاصلهٔ آن نقطه را از صفحهٔ SCD به‌دست می‌آوریم. به‌دلیل $AB \parallel SCD$ فاصلهٔ M، میانگاه یال AB از صفحهٔ SCD نیز برابر h است. فرض کنیم که N میانگاه یال CD باشد. آن‌گاه $SMN \perp SCD$ بوده و اگر $MP \perp SN$ باشد آن‌گاه $MP \perp SCD$ خواهد بود. از این‌رو $MP = h$ را داریم. حال MP را به‌عنوان ارتفاع مثلث SMN به‌دست می‌آوریم. به‌دلیل $SBO = \frac{\pi}{۴}$، رابطهٔ $SO = OB = \frac{a}{\sqrt{۲}}$ را داریم. این امر بدین معنی است که:

$$MO = \frac{a}{۲} \ ,\ MN = a \ ,\ SN = \sqrt{SO^{۲} + ON^{۲}} = a\sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

حال می‌توان $h = MP = SO.\frac{MN}{SN} = \sqrt{\frac{۲}{۳}}a$ را به‌دست آورد. از این‌رو نتیجه می‌شود اگر α زاویهٔ بین SB و SCD باشد، آن‌گاه $\sqrt{\frac{۲}{۳}} = \frac{h}{a} = \alpha$ خواهد بود. پس جواب مسأله به‌صورت $\mathrm{Arc\,sin}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ درمی‌آید.

۲.۳.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۴. دو رأس باقیمانده از چهاروجهی را با C و D نشان دهید. بنا به فرض،

$$AC + AD = AB$$

مربع KLMN را درنظر بگیرید که ضلع آن برابر است با AB. روی ضلعهای LM و MN آن، نقطه‌های P و Q را چنان اختیار کنید که،

$$PM = AD \ ,\ QM = AC$$

پس،

$$LP = AC \ , \ NQ = AD \ , PQ = DC$$

و در نتیجه

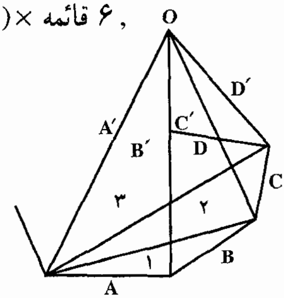
$$\Delta_{KLP} = \Delta_{ABC} \quad , \quad \Delta_{KNQ} = \Delta_{BAD} \quad , \quad \Delta_{BDC} = \Delta_{KPQ}$$

از این تساویها، درستی حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۴۵. مجموع فرجه‌های A'، B'، C' و A، B، C و ... هرم را S می‌نامیم. از یک رأس یک قاعده، قطرهای آن قاعده را رسم می‌کنیم. در این صورت قاعده به $(n-۲)$ مثلث تجزیه می‌شود. در نتیجه هرم به $(n-۲)$ هرم مثلث‌القاعده به رأس O تبدیل می‌شود.
مجموع فرجه‌های این هرمهای مثلث القاعده مساوی است با $(n-۳)۲$ قائمه، امّا مجموع فرجه‌های یک هرم مثلث‌القاعده بین ۴ قائمه و ۶ قائمه است. خواهیم داشت:

$$(n-۲)\times \text{قائمه } ۴ < S+(n-۳)\times \text{قائمه } ۲ < (n-۲)\times \text{قائمه } ۶ ,$$

$$\Rightarrow (n-۱)\times \text{قائمه } ۲ < S < (۲n-۳)\times \text{قائمه } ۲$$



۱.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶. پنج وجه، هشت یال، هشت‌فرجه، پنج کنج

۱.۴. یال، ارتفاع، سهم، ضلع قاعده

۱.۴.۱. یال

۱.۱.۴.۱. اندازهٔ یال

۴۷. یال SA را از طرف S امتداد دهید و در امتداد آن نقطهٔ $A_۱$ را طوری اختیار کنید که $SA_۱ = SA$ در $SA_۱BC$ فرجه‌های نظیر یالهای $SA_۱$ و SC برابر می‌شوند، و چون

$$A_۱B = CB = b \text{ و } SA_۱ = SC$$

مثلث $ABA_۱$ قائم‌الزاویه خواهد بود و ضلعهای آن a و b می‌شود. در نتیجه وتر آن برابر است با:

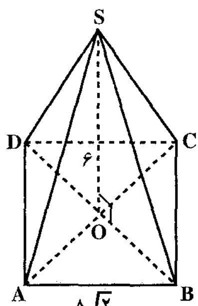
$$AA_۱ = ۲AS = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

جواب: $\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$

.۴۸ $a \neq ۱$، $\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲} < \alpha < \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$

$$V = \frac{۱}{۱۲}\sqrt{(a^۲ + ۱)(۳a^۲ - ۱ - a^۴)}$$

۴۹. هرم مربع‌القاعدهٔ SABCD را در نظر می‌گیریم و محل برخورد قطرهای قاعده را O می‌نامیم. داریم:



$$OA = \frac{AC}{۲} = \frac{۸\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲} = ۸ \text{ و } OC = ۶$$

اندازهٔ یال هرم $\Rightarrow SA = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰cm$

۱.۴.۲. ارتفاع

۱.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۵۰. حجم هرم کوچک را $V_۱$ و حجم هرم داده شده را V، ارتفاع هرم کوچک را $h_۱$ و ارتفاع هرم داده شده را h می‌نامیم. می‌دانیم که:

$$\frac{V_۱}{V} = (\frac{h_۱}{h})^۳$$

از آن‌جا:

$$\frac{۲}{۵۴} = (\frac{۱}{h})^۳ \Rightarrow \frac{۱}{۲۷} = \frac{۱}{h^۳} \Rightarrow$$

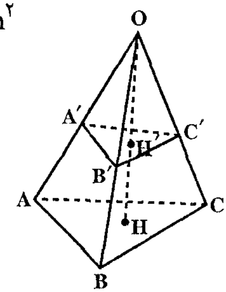
ارتفاع هرم بزرگ $h^۳ = ۲۷ \Rightarrow h = ۳$

۵۱. بنابه فرض داریم :

$S_{A'B'C'}=۱۰۸cm^۲$ و $SH'=۹cm$ و $S_{ABC}=۱۸۰cm^۲$

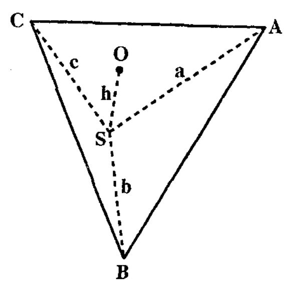
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{SH'}{SH})^۲ \Rightarrow \frac{۱۰۸}{۱۸۰}=(\frac{۹}{SH})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰۸}{۱۸۰}=\frac{۸۱}{SH^۲} \Rightarrow SH=۳\sqrt{۱۵}$$



۵۲. اگر در هرم SABC داشته باشیم : $SA=a$ ، $SB=b$ ، $SC=c$ و SO عمود بر قاعده ABC باشد (شکل) چنانچه $SO=h$ و $O\hat{S}A=\alpha$ و $O\hat{S}B=\beta$ و $O\hat{S}C=\gamma$ فرض شود S را رأس متوازی‌السطوح قائمی بگیریم که یالهای آنها SA ، SB و SC و قطرش امتداد SO باشد، خواهیم داشت :

$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma=۱$$



اما چون $\cos\alpha=\frac{h}{a}$ ، $\cos\beta=\frac{h}{b}$ و $\cos\gamma=\frac{h}{c}$ می‌باشد پس خواهیم داشت :

$$\frac{h^۲}{a^۲}+\frac{h^۲}{b^۲}+\frac{h^۲}{c^۲}=۱ \quad \text{یا} \quad h=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{c^۲}+\frac{۱}{b^۲}}}$$

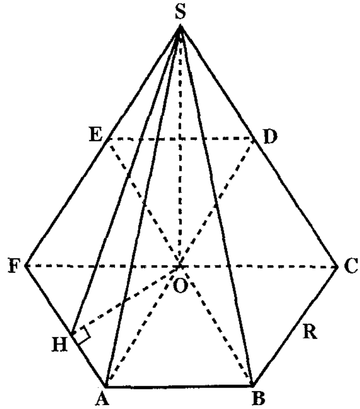
۵۳. داریم :

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{قاعده}}$$

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}\times \text{محیط قاعده} \times \text{سهم هرم}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times ۶R\times SH$$

$$S_{\text{قاعده}}=۶\times\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲}$$



$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = ۳R.SH + \frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲} \Rightarrow ۶R^۲ = ۳R.SH + \frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲}$$

$$۳R.SH = R^۲(۶ - \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow SH = R(۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$$ اندازهٔ سهم هرم

$$OH = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ SH = R(۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow OS = \sqrt{SH^۲ - OH^۲}$$

$$\Rightarrow OS = \sqrt{R^۲(۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - \frac{۳R^۲}{۴}} = \sqrt{R^۲(۴ + \frac{۳}{۴} - ۲\sqrt{۳} - \frac{۳}{۴})}$$

$$\Rightarrow OS = \sqrt{R^۲(\sqrt{۳} - ۱)^۲} = R(\sqrt{۳} - ۱)$$

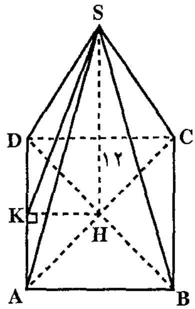
$$\Rightarrow OS = (\sqrt{۳} - ۱)R$$ اندازهٔ ارتفاع هرم

۵۴. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی شش ضلعی منتظم، مساوی طول ضلع آن است که آن را R می‌نامیم. مرکزشش ضلعی منتظم را O، دو رأس از قاعده را A و B، و رأس هرم را S می‌نامیم. خواهیم داشت :

$$SO^۲ = OA^۲ - AB^۲ = OA^۲ - OA^۲ = ۰ \Rightarrow SO = ۰$$

این مطلب نشان می‌دهد که رأس هرم باید روی مرکز قاعده باشد و این امکان ندارد. بنابراین رسم چنین چهاروجهی ممکن نیست.

۱.۴.۳. اندازهٔ ضلع قاعده



۵۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ SHK داریم:

$$SK = ۱۳ \text{ و } SH = ۱۲ \text{ و } KH = \sqrt{SK^۲ - SH^۲}$$

$$\Rightarrow KH = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵ = \frac{AB}{۲}$$

اندازهٔ ضلع قاعدهٔ هرم $\Rightarrow AB = ۱۰$

۱.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶. اگر ارتفاع متوازی‌السطوح x باشد، مقطعی از هرم را در نظر بگیرید که با صفحه‌ای به فاصلهٔ x از قاعده ایجاد شده باشد. این مقطع مربعی به ضلع $(۱-x)$؛ مستطیلی به مساحت S می‌شود که وجهی از متوازی‌السطوح بوده و در داخل مربع محاط شده است.

دو حالت اتفاق می‌افتد:

۱. قاعدهٔ متوازی‌السطوح مربعی است به ضلع $\sqrt{S}$، قطر متوازی‌السطوح،

$$d = \sqrt{x^۲ + ۲S}$$

$$(۱-x)\frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \sqrt{S} \le (۱-x)$$

یا

$$۱ - \sqrt{۲S} \le x \le ۱ - \sqrt{S}$$

پس در این حالت، اگر

$$S < \frac{۱}{۲}$$

آن‌گاه،

$$۱ - ۲\sqrt{۲S} + ۴S \le d^۲ \le ۱ - ۲\sqrt{S} + ۳S$$

اگر،

$$S \ge \frac{۱}{۲}$$

آن‌گاه،

$$۲S < d^۲ \le ۱ - ۲\sqrt{S} + ۳S$$

۲. ضلعهای وجه متوازی‌السطوح که در داخل مقطع محاط می‌شود، موازی با قطرهای مقطعند. آنها را بـا y و z نشان مـی‌دهیم. مسأله، منجر بــه جستجو درباره تغییرات تابع

$$d^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲$$

با شرایط زیر می‌شود،

$$\begin{cases} yz = S \\ y + z = (۱ - x)\sqrt{۲} \end{cases}$$

(دستگاه اخیر شامل، $۰ < x \le ۱ - \sqrt{۲S}$ است اگر $۱ - x \ge \sqrt{۲S}$).

داریم،

$$d^۲ = x^۲ + (y+z)^۲ - ۲yz = x^۲ + ۲(۱-x)^۲ - ۲S$$
$$= ۳x^۲ - ۴x + ۲ - ۲S$$

اگر

$$S \le \frac{۱}{۱۸}$$

آن‌گاه کمترین مقدار $d^۲$ به ازای،

$$x = \frac{۲}{۳}$$

به دست می‌آید.

اگر

$$S > \frac{۱}{۱۸}$$

آن‌گاه کمترین مقدار $d^۲$ به ازای

$$x = ۱ - \sqrt{۲S}$$

به دست می‌آید.

علاوه بر این،

$$d^۲ < ۲ - ۲S$$

با ترکیب نتایج (۱) و (۲) جواب مسأله به دست می‌آید.

جواب :

اگر، $۰ < S \le \frac{۱}{۱۸}$ آن‌گاه،

$$\sqrt{\frac{۲}{۳} - ۲S} \le d < \sqrt{۲ - ۲S}$$

اگر، $\frac{1}{18} < S < \frac{7+2\sqrt{6}}{25}$ آن‌گاه،

$$\sqrt{1-2\sqrt{2S}+4S} \le d < \sqrt{2-2S}$$

اگر، $\frac{7+2\sqrt{6}}{25} \le S < \frac{1}{2}$ آن‌گاه،

$$\sqrt{1-2\sqrt{2S}+4S} \le d \le \sqrt{1-2\sqrt{S}+3S}$$

اگر، $\frac{1}{2} \le S < 1$ آن‌گاه،

$$\sqrt{2S} \le d \le \sqrt{1-2\sqrt{S}+3S}$$

۵۷. هرم S.ABCDE به ارتفاع h را در نظر گرفته و شعاع چندضلعی منتظم قاعدهٔ آن را r می‌نامیم. اندازهٔ حجم این هرم برابر است با :

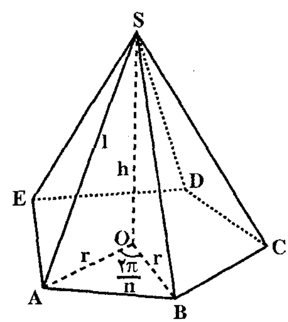
$$V=\frac{1}{3}S_{ABCDE}\times h$$

امّا

$$S_{ABCDE}=nS_{OAB}=\frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

و $h=\sqrt{l^2-r^2}$. از آن‌جا داریم :

$$V=\frac{1}{6}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}\times\sqrt{l^2-r^2}$$



چون $\frac{n}{6}\sin\frac{2\pi}{n}$ مقدار ثابتی است، پس V در صورتی بیشترین مقدار ممکن را داراست که $r^2\sqrt{l^2-r^2}$ یا مربع آن $(r^2)^2l^2-r^2$ ماکزیمم باشد. مجموع دو مقدار مثبت r^2 و l^2-r^2 هنگامی که r^2 تغییر می‌کند، مقدار ثابتی است. بنابراین حاصل‌ضرب آن وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{r^2}{2}=l^2-r^2 \Rightarrow r^2=\frac{2l^2}{3} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{6}l}{3}$$

و تنها یک هرم متناظر با این مقدار r وجود دارد ؛ زیرا $l^۲ < \frac{۲l^۲}{۳}$ است. اندازهٔ این حجم ماکزیمم برابر است با :

$$V = n\sin\frac{۲\pi}{n} \times \frac{\sqrt{۳}l^۲}{۲۷}$$

دیده می‌شود برای مقدار $r^۲$ که جواب است، مربعهای $h^۲$ ، $r^۲$ و $l^۲$، یعنی مربعهای ضلعهای مثلث SOA متناسب با ۲،۱ و۳ می‌باشند.

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم

۵۸. اگر موضوع عبارت از آن باشد که بخواهیم با رسم صفحه‌هایی موازی قاعده، هرم را به سه بخش معادل تقسیم کنیم، نخست صفحه‌ای موازی قاعده رسم می‌کنیم که حجم هرم ایجاد شده در بالا مساوی $\frac{۱}{۳}$ حجم هرم داده شده باشد. سپس صفحه‌ای موازی قاعده رسم می‌کنیم که حجم هرم ایجاد شده در بالا مساوی $\frac{۲}{۳}$ حجم هرم داده شده باشد. در این صورت هرم به سه بخش هم‌ارز تقسیم خواهد شد. همچنین برای تقسیم هرم به چهاربخش هم‌ارز، صفحه‌هایی موازی قاعده چنان رسم می‌کنیم که حجم هرمهای ایجاد شده در بالا، $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۲}{۴}$ و $\frac{۳}{۴}$ حجم هرم داده شده باشد.

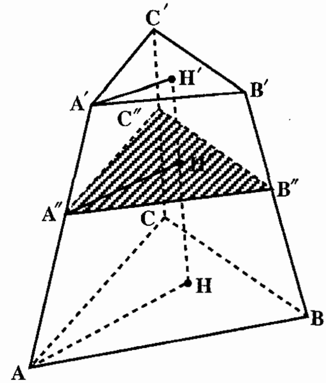
به همین ترتیب برای حالتهای دیگر می‌توان عمل کرد.

۵۹. فاصلهٔ صفحهٔ مقطع از رأس هرم را x می‌نامیم. داریم :

$$\frac{V'}{V} = (\frac{x}{h})^۳ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x^۳}{h^۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۳ = \frac{h^۳}{۲} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt[۳]{۲}}$$

۲.۱.۵.۱. اندازه پاره‌خط در هرم ناقص

۶۰. مقطع صفحه با هرم ناقص را $A''B''C''$ و مساحت آن را S می‌نامیم. داریم:



$$\frac{\text{حجم هرم ناقص بالایی}}{\text{حجم هرم ناقص پایینی}}=\frac{۱۸۹}{۱۲۷}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم هرم ناقص بالایی}}{\text{حجم هرم ناقص}}=\frac{۱۸۹}{۳۱۶}$$

$$\text{حجم هرم ناقص داده شده} = \frac{۱۲}{۳}(۲۷+۱۴۷+\sqrt{۲۷\times ۱۴۷})=۹۴۸m^۳$$

با فرض $H'H''=x$، داریم: $\text{حجم هرم ناقص بالایی}=\frac{x}{۳}(S+۲۷+\sqrt{۲۷S})$

از آن‌جا داریم:
$$\frac{\frac{x}{۳}(S+۲۷+\sqrt{۲۷S})}{۹۴۸}=\frac{۱۸۹}{۳۱۶}$$

$$\Rightarrow x(S+۲۷+\sqrt{۲۷S})=۹\times ۱۸۹ \qquad (۱)$$

حال کافی است رابطهٔ بین x و S را به دست آوریم و با رابطهٔ (۱) در یک دستگاه قرار داده، دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی حاصل را حل کنیم.

۳.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم سه‌پهلو

۶۱. از این که خط راست عمود بر یال AC و BS از وسط BS می‌گذرد، نتیجه می‌شود که وجه‌های ACB و ACS معادل هستند. اگر

$$S_{ASB}=S_{BSC}=Q$$

آن‌گاه،

$$S_{ABC}=S_{ACS}=۲Q$$

تصویرهای نقطهٔ M را روی وجه‌های BCS، ACS، ABS و ABC بترتیب $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $S_۱$ بنامید. ارتفاعهای وارد بر این وجه‌ها را با h_A، h_B، h_C و h_S و حجم هرم را با V

نشان دهید. در این صورت خواهیم داشت،

$$MA_1 + 2MB_1 + MC_1 + 2MS_1 = \frac{3V}{Q}$$

اما بنا به فرض داریم، $MB + MS = MA_1 + MB_1 + MC_1 + MS_2$

از این دو تساوی نتیجه می‌شود،

$$MB + MB_1 + MS + MS_1 = \frac{3V}{Q}$$

اما

$$V = \frac{1}{3}h_S.2Q = \frac{1}{3}h_B.2Q = \frac{Q}{3}(h_B + h_S)$$

در نتیجه

$$MB + MB_1 + MS + MS_1 = h_B + h_S$$

از طرف دیگر:

$$MB + MB_2 \geq h_B$$

$$MS + MS_1 \geq h_S$$

بنابراین

$$MB + MB_1 = h_B$$

$$MS + MS_1 = h_S$$

و ارتفاعهای رسم شده از B و S همدیگر را در نقطهٔ M قطع خواهند کرد و یالهای AC و BS متقابلاً بر هم عمود خواهند بود.

از شرایط مسأله همچنین نتیجه می‌شود که عمود مشترک AC و BS، AC را نصف می‌کند.

اگر F وسط AC و E وسط BS باشد با قرار دادن $EF = x$ خواهیم داشت،

$$Q = S_{ASB} = \frac{1}{2}SB.AE = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \frac{3}{2}}$$

$$2Q = S_{ACB} = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$$

از آن‌جا معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}}$$

در نتیجه
$$x = \frac{۳}{۲}$$

با در نظر گرفتن مثلث متساوی‌الساقین BFS که در آن

$$BS = ۱ \text{ و } BF = FS$$

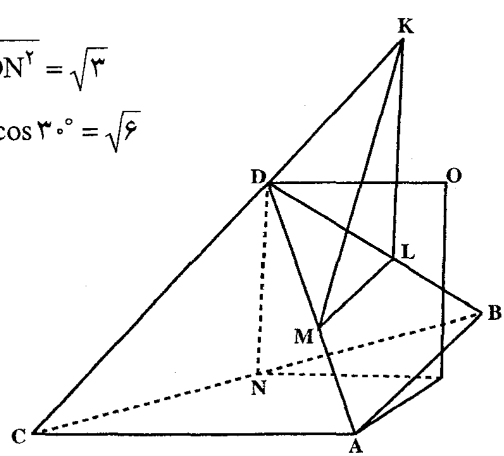
و $FE = \frac{۳}{۲}$ به عنوان ارتفاع و M محل برخورد ارتفاعهای آن خواهیم داشت :

$$BM = SM = \frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$$

۶۲. جواب :
$$\frac{۱}{۳}\sqrt{۳m^۲ + ۳n^۲ + ۳p^۲ - a^۲ - b^۲ - c^۲}$$

۶۳. نقطهٔ تماس کره را با امتداد CD، با K نشان دهید. نقطه‌های تماس با یالهای AD و BD را نیز، با M و L و وسط BC را با N نشان دهید. (شکل) چون،$CD = DB = DA$ و DN بر صفحه ABC عمود است و $DK = DM = DL$ و KL موازی با DN و ML موازی با AB، پس صفحهٔ KLM بر صفحهٔ ABC عمود می‌شود و $K\hat{L}M = ۹۰^\circ$. اگر O مرکز کره باشد، در آن صورت خط DO بر صفحه KLM عمود می‌شود. یعنی DO با صفحهٔ ABC موازی است و در نتیجه $DN = ۱$ (شعاع کره). علاوه بر این DC از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLM، می‌گذرد، یعنی از وسط KM. پس $O\hat{D}M = \frac{۱}{۲}K\hat{D}M$ علاوه بر این،

$$DA = DC$$
$$\sqrt{CN^۲ + DN^۲} = \sqrt{۳}$$
$$CA = CB\cos ۳۰^\circ = \sqrt{۶}$$



و از آن‌جا نتیجه می‌شود مثلث CDA قائم‌الزاویه، $C\hat{D}A = ۹۰^\circ$ ، $O\hat{D}M = ۴۵^\circ$ و $DM = OM = ۱$

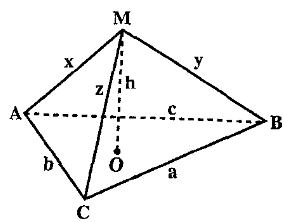
و طول پاره‌خط مماس مطلوب، برابر می‌شود با

$$AM = AD - DM = \sqrt{۳} - ۱$$

۶۴. طبق فرض $A\hat{M}B = B\hat{M}C = C\hat{M}A = ۹۰^\circ$ می‌باشد (شکل) اگر $MA = x$ و $MB = y$ و $MC = z$ و $MO = h$ فرض شود از مثلثهای قائم‌الزاویه AMB و BMC و CMA خواهیم داشت :

$$x^۲ + y^۲ = c^۲ \ , \ y^۲ + z^۲ = a^۲ \ , \ z^۲ + x^۲ = b^۲$$

$$x = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲ + c^۲ - a^۲)} \quad , \quad y = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲ + c^۲ - b^۲)}$$



$z = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲ + a^۲ - c^۲)}$ و V حجم هرم MABC خواهد شد: $V = \frac{۱}{۳}S_{ABC} \times h$ اگر AMC را قاعده و MB را ارتفاع فرض کنیم خواهیم داشت :

$$V_۱ = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}xyz = \frac{۱}{۶}xyz$$

و با توجه به رابطه‌های قبل خواهیم داشت :

$$h = \frac{xyz}{۲S_{ABC}} = \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{(b^۲ + c^۲ - a^۲)(a^۲ + c^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

که در آن p نصف محیط می‌باشد.

۶۵. اگر M مرکز قاعدهٔ ABC باشد (شکل)، آن‌گاه :

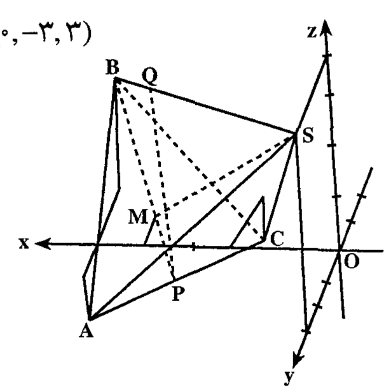
$$\overrightarrow{OM} = \frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = (۴, -۱, ۰)$$

خواهد بود. نقطهٔ S دارای مختصات $S(O,y,z)$ بوده و از این‌رو

$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = (-۴, y+۱, z)$$

را داریم. چنین به دست می‌آید:

$\overrightarrow{AC}=(-۳,-۳,۰)$ و $\overrightarrow{AB}=(۰,-۳,۳)$



به دلیل $MS \perp ABC$ رابطه‌های $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{AB}=۰$ و $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{AC}=۰$ را داریم. از این تساوی، معادله‌های $-۳(y+۱)+۳z=۰$ و $۱۲-۳(y+۱)=۰$ به دست می‌آید که جوابهای آنها عبارت از $y=۳$ و $z=۴$ است. فرض کنید که P میانگاه یال AC و PQ عمود بر (SB) در صفحهٔ SBP باشد. به دلیل $AC\perp SBP$، $AC\perp PQ$ را داریم که به معنی این است که PQ عمود مشترک پاره‌خطهای AC و SB بوده، وPQ فاصلهٔ بین این خطها است. چنین داریم:

$$\overrightarrow{OP}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=(۷/۲,-۱/۲,-۱),\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=(-۳/۲,۳/۲,-۳),$$

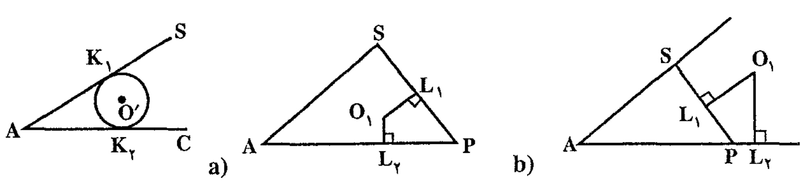
$$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OB}=(-۵,۵,۲)\ ,\ \overrightarrow{MS}=(-۴,۴,۴)\ ,BP=\sqrt{۲۷/۲}\ ,$$

از این‌رو چنین استنتاج می‌شود:

$$BS=\sqrt{۵۴}\ ,\ MS=\sqrt{۴۸}\ ,\ PQ=BP.MS/BS=۲\sqrt{۳}$$

۶۶. مقطع کره با صفحهٔ SAC دایره‌ای به مرکز O' است که بر نیمخطهای AS و AC بترتیب در نقطه‌های $K_۱$ و $K_۲$ مماس است.

پای ارتفاع هرم را که از رأس S بر قاعده وارد می‌شود، H و مرکز و شعاع کره را هم بترتیب O و R می‌نامیم. اگر P وسط BC باشد و قرار دهیم $AC=x$، آن‌گاه از تساوی



$T\hat{S}P = O'\hat{K}_2O$ نتیجه می‌شود :

$$\sin O'\hat{K}_2O = \frac{TP}{SP} = \frac{\frac{1}{3}AP}{\frac{1}{2}BC.\tan S\hat{B}C} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow O'K_2 = OK_2 \cos O'\hat{K}_2O = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

قرار می‌دهیم $S\hat{A}C = \alpha$ و چون

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

پس از مثلث $AO'K_2$ نتیجه می‌شود :

$$AK_2 = \frac{O'K_2}{\tan\frac{\alpha}{2}} = O'K_2.\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{3})$$

هرم و کره را بر روی صفحهٔ ASP تصویر می‌کنیم. تصویر مرکز کره را با O_1 و تصویرهای نقطه‌های تماس کره با صفحه‌های SBC و ABC را بترتیب با L_1 و L_2 نشان می‌دهیم. داریم :

$$AL_2 = AK_2.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{3}).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}(\sqrt{21}+3)$$

بسته به طرز قرار گرفتن مرکز کره نسبت به صفحهٔ SBC دوحالت اتفاق می‌افتد. درشکل (a) $AP > AL_2$ و در شکل (b) برعکس $AP < AL_2$ است. بنابراین از تساوی

$$AC = AP\Big/\cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}AP$$

نتیجه می‌شود که در شکل اوّل، پاره‌خط AC بزرگتر از AP در شکل (a و b) است.

و داریم $O_1L_1 \perp SP\ ,\ O_1L_2 \perp AP\ ,\ O_1L_1 = O_1L_2 = R$

$$S\hat{P}A = \pi/2 - T\hat{S}P = \pi/3$$

بنابراین

$$L_۲P = \frac{O_۱L_۲}{\tan\frac{\hat{SPA}}{۲}} = ۳$$

$$AP = AL_۲ + L_۲P = \frac{۳}{۸}(\sqrt{۲۱}+۳)+۳ = \frac{۳}{۸}\sqrt{۲۱}+\frac{۳۳}{۸}$$

$$AC = \frac{۲}{\sqrt{۳}}AP = \frac{۳}{۴}\sqrt{۷}+\frac{۱۱}{۴}\sqrt{۳}$$

جواب : $AC = \frac{۳}{۴}\sqrt{۷}+\frac{۱۱}{۴}\sqrt{۳}$

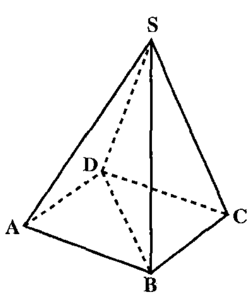
۶۷. طول یال خواسته شده، $\frac{۳ah}{۳a+h(۳+۲\sqrt{۳})}$ است.

۴.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم چهارپهلو

۶۸. چند وجهی ABMDCN، منشور مثلث‌القاعـده‌ای است که ABM قاعدهٔ آن، AD، BC و MN یالهای جانبی آن می‌باشند.

جواب : $\frac{b}{۲a}\sqrt{۴a^۲-b^۲}$

۶۹. یافتن فاصلهٔ رأس B از صفحهٔ SCD مطرح است (شکل). هرم SBCD را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این هرم و هرم SABCD در ارتفاع منشعب از رأس S مشترک بوده و مساحت قاعدهٔ هرم اوّل یعنی مساحت BCD برابر نصف مساحت مربع ABCD است. این امر بدین معنی است که اگر حجم هرم اوّل را با $V_۱$ نشان دهیم، آن‌گاه $V_۱ = V/۲$ خواهد بود. وجه SCD را قاعدهٔ هرم SBCD در نظر می‌گیریم. مساحت این وجه برابر $S/۴$ است. ارتفاع هرم SBCD وارده از رأس B با فاصلهٔ نقطهٔ B از صفحهٔ SCD برابر است. این فاصله را با d نشان می‌دهیم.



آن‌گاه $V_۱ = \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۴}S.d = \frac{۱}{۱۲}S.d$ خواهد بود. با به‌خاطر آوردن $V_۱ = \frac{۱}{۲}V$ درمی‌یابیم که $d = ۶V/S$ است. بدیهی است که نتیجهٔ حاصله، به نوع انتخاب رأس قاعده و انتخاب

صفحهٔ وجه جانبی فاقد آن رأس بستگی ندارد. بنابراین جواب مسأله عبارت از $6V/S$ خواهد بود.

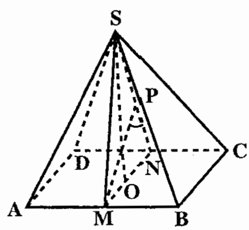
برای یافتن فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه از روش مختصات یعنی از روش زیر نیز می‌توان استفاده کرد:

فاصلهٔ (ρ) نقطهٔ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ از یک صفحه که با معادلهٔ $ax+by+cz+d=0$ تعریف شده است از طریق فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$\rho = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (1)$$

۷۰. از رأس S هرم و نقطه‌های M و N، میانگاههای یالهای AB و CD صفحه‌ای را عبور می‌دهیم (شکل). این صفحه بر صفحهٔ SCD عمود خواهد بود. عمود MP بر خط SN نیز بر صفحه SCD عمود است. طول این عمود دقیقاً برابر فاصلهٔ خط AB از صفحهٔ SCD است. ارتفاع SO هرم و پاره‌خط MP ارتفاعهای مثلث SMN محسوب می‌شوند. در این مثلث چنین داریم:

$$MN = a \text{ ،} SO = a \text{ ،} SN = \sqrt{SO^2+ON^2} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$



مساحت مثلث SMN از یک طرف برابر $\frac{1}{2}SN.MP$ و از طرف دیگر برابر $\frac{1}{2}MN.SO$ است. از این‌رو $MP = \frac{MN.SO}{SN} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$ حاصل شده و جواب مسأله عبارت از $2a/\sqrt{5}$ خواهد بود.

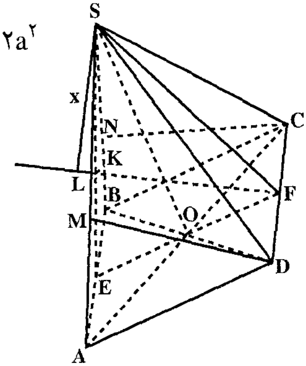
۷۱. چون FK میانهٔ مثلث SEF است (شکل)، پس:

$$S_{ESF} = 2S_{SKF} \qquad (1)$$

در مثلث SOF داریم:

$$SE = SF$$

$SF^۲ = \frac{a^۲}{۴} + h^۲$ و در مثلث ESF میانه خواهد شد :



$$FK = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲SF^۲ + ۲EF^۲ - SE^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{a^۲}{۴} + h^۲ + ۲a^۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}\sqrt{۹a^۲ + ۴h^۲}$$

اگر $SL = x$ فرض شود، خواهیم داشت :

$S = \frac{۱}{۲}x.FK = \frac{x}{۸}\sqrt{۹a^۲ + ۴h^۲}$ و $S_{ESF} = \frac{۱}{۲}ah$ با استفاده از رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{۱}{۲}ah = \frac{x}{۴}\sqrt{۹a^۲ + ۴h^۲} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۲ah}{\sqrt{۹a^۲ + ۴h^۲}}$$

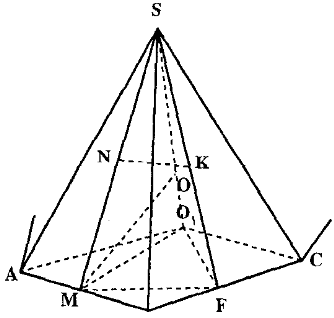
۷۲. وجه‌های جانبی را روی یک صفحه می‌گسترانیم. یک قطاع به مرکز S' و به رأسهای خط شکستهٔ $A'B'C'D'A''$ خواهیم داشت .زاویهٔ مرکزی مساوی $۴ \times ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ است. کوتاهترین پاره‌خط $A'A''$ است و این پاره‌خط مساوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع l است. بنابراین داریم :

$$A'A'' = l\sqrt{۳}$$

۷۳. گزینه (الف) درست است.

۵.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط در هرم n پهلو

۷۴. اگر O مرکز کره و $O_۱$ پای ارتفاع وارد بر قاعده و K و N نقطه‌های تماس کره با دو وجه مجاور هرم باشد (شکل)، می‌دانیم $MN = MO$ (مماسهای مرسوم از نقطهٔ M بر کره). در مثلث $AO_۱M$ خواهیم داشت :



از مثلث SMO_1 داریم: $MO_1 = \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$

و از مثلث MBF داریم: $SM = \frac{MO_1}{\cos\alpha} = \frac{a\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{2\cos\alpha}$ (۱)

بعلاوه: (۲) $MF = a\cos\frac{\pi}{n}$

$$SN = SM - MN = SM - MO_1 = \frac{a}{2}\times\frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{\cos\alpha} - \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{a\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}}{2\cos\alpha}(1-\cos\alpha) \qquad (3)$$

از تشابه دو مثلث NSK و MSF خواهیم داشت:

$$NK = MF \times \frac{SN}{SM}$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$NK = a\cos\frac{\pi}{n}(1-\cos\alpha) = 2a\cos\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

۷۵. فاصلهٔ صفحهٔ جواب مسأله از رأس هرم را x می‌نامیم. مساحت جانبی هرم جدید ایجاد شده، نصف مساحت جانبی هرم داده شده است. چون این مساحتها به نسبت مجذور ارتفاعهای دو هرم هستند، پس داریم:

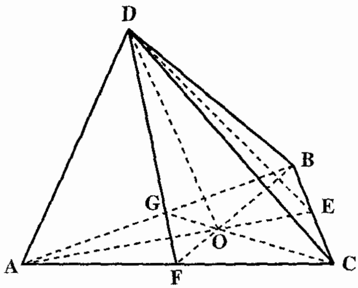
$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{2} = \frac{x^2}{h^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

اندازهٔ محیط داده شدهٔ قاعده لازم نیست و منتظم بودن هرم نیز لازم نیست.

۱.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۷۶. اگر صفحهٔ ADE نیمساز فرجهٔ AD از چهاروجهی ABCD باشد (شکل) و چنانچه



وجه‌های ABD و ACD را قاعده‌های هرم ABDE و ACDE فرض کنیم در این صورت ارتفاعشان مساوی خواهد شد و نقطهٔ E از دو قاعده به یک فاصله است. در این صورت، نسبت حجم دو هرم ABDE به ACDE، برابر نسبت مساحتهای دو قاعده ABD و ACD می‌باشد؛ از طرف دیگر اگر ADE را قاعدهٔ مشترک دو هرم بگیریم نسبت ارتفاعهایشان مانند نسبت EB به EC می‌باشد. از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که نسبت مساحتهای وجه‌های ABD و ACD مانند نسبت پاره‌خطهای EB به EC است.

۷۷. فرض می‌کنیم $SB = x$ ، $SC = y$ و $SD = z$ باشد. SM میانهٔ مثلث SBD است و داریم:

$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 2z^2 - BD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2 + 2z^2 - a^2} \qquad (1)$$

به همین ترتیب در مثلث SAC داریم:

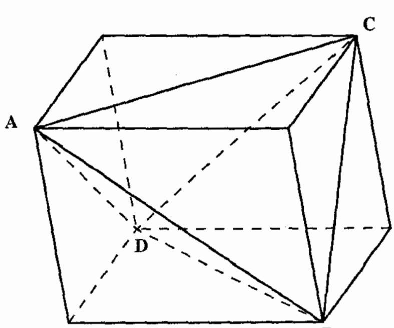
$$SM = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2y^2 - AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2y^2 - 3a^2} \qquad (2)$$

زیرا داریم: $AC^2 = 4a^2 - BD^2 = 3a^2$ و $BD = a$

و با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) بسادگی به دست می‌آید:

$$y^2 = x^2 + z^2$$

۷۸. از این که یالهای هرم ABCD، بر کره مماسند، معلوم می‌شود که مجموع یالهای متقابل هرم، با هم برابرند. هرم ABCD را طوری تکمیل می‌کنیم تا یک متوازی‌السطوح به دست آید. برای این منظور، از هر یال هرم، یک صفحه به موازات یال متقابل آن مرور می‌دهیم. یالهای هرم، قطرهای وجه‌های متوازی‌السطوح و یالهای متوازی‌السطوح، با فاصله‌های بین وسطهای یالهای متقابل هرم برابر می‌شوند. (شکل)



اگر $AD = a$ و $BC = b$ ، آن‌گاه، هر دو یال

متقابل هم، طولهای a و b خواهند داشت. این موضوع را ثابت می‌کنیم.

اگر $AB = x$ و $DC = y$، آن‌گاه $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

$$x + y = a + b$$

(تساوی اخیر از آن‌جا ناشی می‌شود که تمام وجه‌های متوازی‌السطوح، لوزی می‌باشند و ضلعهایشان برابرند) بنابراین نتیجه می‌شود،

$x = b$، $y = a$ یا $x = a$ ،$y = b$

پس در مثلث ABC لااقل دو ضلع از نظر طول با هم برابر وجود دارند. اما

$$A\hat{B}C = 100^\circ$$

از آن‌جا

$$AC = a \text{، } BC = b \text{، } AB = x$$

و

$$DC = a \text{، } DB = b$$

از مثلث ABC نتیجه می‌شود،

$$a = 2b \sin 50^\circ$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ADC} \cdot h_B = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} h_B$$

$$= \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot h_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2 \sin 100^\circ}{2} h_A$$

و از آن‌جا،

$$\frac{h_A}{h_B} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2b^2 \sin 100} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 50^\circ$$

۶.۱. شعاع کره

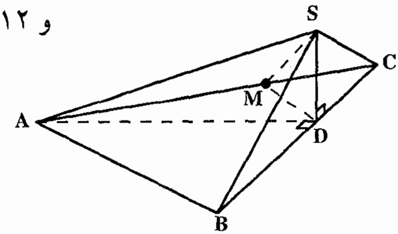
۱.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۷۹. شعاع کرهٔ خواسته شده $\frac{(2b \pm a)a}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$ است.

۸۰. اگر هرم را SABC و SD را ارتفاع فرض کنیم (شکل) می‌دانیم $r=\frac{۳V}{S}$. داریم :

$V=\frac{۱}{۳}S_{ABC}\times SD=۴$ و $S_{ABC}=۱۲$ و

$AD=\sqrt{۵^۲-۳^۲}=۴$



اگر $MS\perp AC$ رسم شود طبق قضیهٔ سه عمود $MD\perp AC$ می‌باشد چون مثلث ADC قائم‌الزاویه است می‌توان نوشت :

$$DM=\frac{AD.DC}{AC}=۲/۴$$

از مثلث قائم‌الزاویه SMD (D قائمه) داریم :

$SM=\sqrt{MD^۲+SD^۲}=۲/۶$ و $S_{ABC}=S_{ASB}=\frac{۵}{۲}\times ۲/۶=\frac{۱۳}{۲}$

از طرفی $S_{BSC}=\frac{۶}{۲}\times ۱=۳$. بنابراین داریم :

$$S=S_{ABC}+۲S_{ASC}+S_{BSC}=۲۸$$

و از آن‌جا :

$$r=\frac{۳V}{S}=\frac{۳\times ۴}{۲۸}=\frac{۳}{۷}$$

۸۱. اگر ABCD هرم داده شده باشد که یالهای جانبی آن، $DA=a$ ، $DB=x$ و $DC=y$ ، با توجه به فرض مسأله که این یالها دوبه‌دو بر هم عمودند و

$$x+y=a$$

به آسانی معلوم می‌شود که

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲(x^۲+y^۲)+x^۲y^۲}\text{ ، }V_{ABCD}=\frac{۱}{۶}axy$$

از طرف دیگر اگر R شعاع کرهٔ مطلوب در نظر گرفته شود، خواهیم داشت،

$$V_{ABCD}=\frac{R}{۳}(S_{DAB}+S_{DBC}+S_{DCA}-S_{ABC})$$

$$=\frac{R}{۶}\left[ax+by+xy-\sqrt{a^۲(x^۲+y^۲)+x^۲y^۲}\right]$$

$$=\frac{R}{۶}\left(a^۲+xy-\sqrt{a^۴-۲xya^۲+x^۲y^۲}\right)$$

$$=\frac{R}{۳}xy$$

از مساوی قرار دادن دو عبارت V_{ABCD} نتیجه می‌شود:

$$R=\frac{a}{۲}$$

۸۲. اگر $EA = x$، مساحت مثلث EMA بیشترین مقدار را خواهد داشت، اگر

$$EH=HA=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

که برابر است با

$$\frac{x}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}-\frac{x^۲}{۴}}$$

فاصلهٔ B تا صفحهٔ EAH بیشتر از $AB = ۱$ نمی‌باشد.

چون $S_{AEB}=S_{EBC}$،

$$\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۲}V_{ABCEH}=V_{ABEH}\leq\frac{x}{۱۲}\sqrt{۲-x^۲}$$

$$=\frac{۱}{۱۲}\sqrt{x^۲(۲-x^۲)}\leq\frac{۱}{۲۴}\left[x^۲+(۲-x^۲)\right]=\frac{۱}{۱۲}$$

پس $x = ۱$ و یال AB بر صفحهٔ EAN عمود است و ABCE مربعی به ضلع ۱ سانتیمتر می‌باشد.

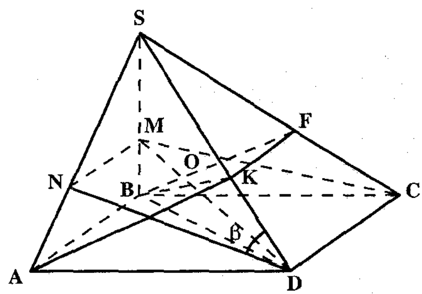
سطح جانبی دو منشور مثلث‌القاعده را در نظر بگیرید که یکی از آنها با صفحه‌های ABCE و AHE و BCH ایجاد شده و دیگری با صفحه‌های ABCE و ECH و ABH به وجود آمده است.

واضح است که شعاع بزرگترین کره‌ای که در داخل هرم ABCEH جا می‌گیرد، با شعاع کوچکترین کره‌هایی که در این منشورها محاط می‌شوند، برابر است و شعاع کرهٔ محاط در هر یک از این منشورها برابر با شعاع دایرهٔ محاط در مقطع قائم می‌باشد. مقطع قائم منشور

اوّل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلعهای آن ۱ و $\frac{۱}{۲}$ و شعاع دایرهٔ محاط در آن برابر با $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$ است. مقطع قائم منشور دوم، مثلث AHE است که شعاع دایرهٔ محاط در آن برابر است با

$$\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲} > \frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$$

جواب: $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۴}$

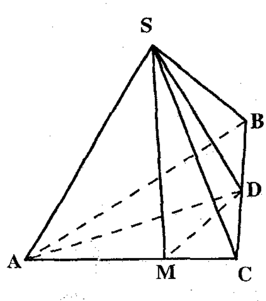


۸۳. اگر SDB صفحهٔ منصف‌الفرجهٔ ASDC و ABSC باشد، همچنین صفحهٔ MCDN صفحهٔ منصف‌الفرجهٔ SCDA باشد MD فصل مشترک این دو خواهد بود. همچنین اگر KABF صفحه منصف‌الفرجهٔ SABC و BK فصل مشترک آن با SBD باشد (شکل)، خطهای MD و BK که هر دو در صفحهٔ SBD واقعند در O متقاطعند و O مرکز کرهٔ محاطی می‌باشد. اگر V حجم هرم و S مساحت قاعدهٔ هرم و r شعاع کره فرض شود خواهیم داشت:

$$r = \frac{۳V}{S} \qquad (۱)$$

زیرا اگر هرم را به پنج هرم به رأس O و به قاعده‌های ABCD، SAB، SBC، SCD و SDA تجزیه کنیم، خواهیم داشت:

$$V = \frac{r}{۳}(S_{ABCD} + S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCD} + S_{SDA})$$



چنانچه H ارتفاع هرم و a طول ضلع مربع قاعده فرض شود از مثلث SBD خواهیم داشت : (شکل)

$$V = \frac{a^۳\sqrt{۲}tg\beta}{۳} \text{ و } H = a\sqrt{۲}tg\beta \qquad (۲)$$

از مثلث ABS داریم :

$SA = \sqrt{a^۲ + ۲a^۲tg^۲\beta} = a\sqrt{۱ + ۲tg^۲\beta}$ طبق فرض SC = SA می‌باشد (یالهای متساوی‌البعد) و چون $AB \perp AD$ و $SA \perp AD$ است، طبق قضیهٔ سه عمود $SC \perp CD$ می‌باشد و داریم :

$$S = a^۲ + a^۲\sqrt{۲}tg\beta + a^۲\sqrt{۱ + ۲tg^۲\beta} \qquad (۳)$$

و یا

$$S = a^۲(۱ + \sqrt{۲}tg\beta + \sqrt{۱ + ۲tg^۲\beta})$$

از رابطهٔ (۱) ، (۲) و (۳) خواهیم داشت :

$$r = \frac{۳V}{S} = \frac{a\sqrt{۲}tg\beta}{۲ + \sqrt{۲}tg\beta + \sqrt{۱ + ۲tg^۲\beta}}$$

۸۴. O را نقطه‌ای دلخواه واقع در درون جسم در نظر می‌گیریم. مساحت مشترک وجه‌ها را با s و فاصلهٔ نقطهٔ O از این وجه‌ها را با x، y، z، ... و حجم چندوجهی را با V نشان می‌دهیم.

اگر نقطهٔ O را به رأسهای چند وجهی وصل کنیم، چند وجهی به هرمهایی تجزیه می‌شود که رأس مشترک آنها نقطهٔ O و قاعدهٔ آنها وجه‌های چند وجهی است. بنابراین با توجه به این مطلب داریم :

$$\frac{sx}{۳} + \frac{sy}{۳} + \frac{sz}{۳} + \cdots = V$$

$$\Rightarrow x + y + z + \cdots = \frac{۳V}{s}$$

۸۵. عمود AO را بر صفحهٔ قاعدهٔ هرم رسم می‌کنیم. روشن است که این عمود، از مرکز کره

می‌گذرد. AB، سهم هرم را می‌کشیم. این سهم بر سطح کره مماس است. نقطهٔ O، پای ارتفاع AO را به نقطهٔ B، پای سهم AB، وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB به دست می‌آید، که از آن، شعاع کره را محاسبه می‌کنیم:

$$r = OC = OB.\sin(C\hat{B}O) = \frac{a}{2}\sin(C\hat{B}O) = \frac{a}{2}\sqrt{1-\cos^2(C\hat{B}O)}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{1-(\frac{OB}{AB})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{1-(\frac{BD}{AB})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

۸۶. صفحه‌ای از ارتفاع MC و سهم ME از هرم می‌گذرانیم. مثلثهای MCE و MOD، که از این راه به دست می‌آیند، متشابه‌اند و داریم: $CE:OD = ME:MO$. ولی

$$CE = BE.\cotg(E\hat{C}B) = \frac{q}{2}\cotg\frac{180^\circ}{n}; OD = R\ (\text{مجهول})\ ;$$

$$ME = \sqrt{MB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2}\ ; MC = \sqrt{ME^2 - CE^2}$$

$$MC = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{4}q^2\cotg^2\frac{180^\circ}{n}} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}q^2\operatorname{cosec}^2\frac{180^\circ}{n}}$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{q^2}{4}.\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}} = \frac{1}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{180^\circ}{n} - q^2}\ ;$$

$$MO = MC - CO = MC - R$$

از تناسبی که در ابتدای حل داشتیم، به دست می‌آید :

$$\frac{CE}{R}=\frac{ME}{MC-R};CE(MC-R)=ME.R;$$

$$R=\frac{CE.MC}{CE+ME}=\frac{q.\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}\sqrt{۴a^۲\sin^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}-q^۲}}{۲(q\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\sqrt{۴a^۲-q^۲}.\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n})}$$

۲.۶.۱. نسبت شعاعها

۸۷. $\frac{۳-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma}{۳+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}$

۸۸. نسبت خواسته شده، $۱+\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ است.

۸۹. دو حالت اتفاق می‌افتد :

(۱). مرکز کرهٔ محیطی، بر مرکز قاعده منطبق است.

(۲). مرکز کرهٔ محیطی، بر نقطه‌ای واقع بر روی سطح کرهٔ محاطی و قطراً قرینه نسبت به‌مرکز قاعده قرار دارد.

در حالت دوم شعاعهای کره‌های محاطی و محیطی را بترتیب R و r بنامید. ارتفاع هرم پیدا می‌شود که برابر است با $۲r+R$ و طول ضلع قاعده هم برابر می‌شود با $\sqrt{R^۲-۴r^۲}$. مقطعی که از ارتفاع و وسط ضلع قاعده می‌گذرد، یک مثلث متساوی‌الساقین به ارتفاع $R+۲r$ و قاعدهٔ $\sqrt{۳(R^۲-۴r^۲)}$ و دایرهٔ محاطی به شعاع r خواهد بود. با استفاده از این موضوع، می‌توان رابطهٔ $۳R^۲-۶Rr-۴r^۲=۰$ را برحسب R و r نوشت.

جواب : $\frac{۳+\sqrt{۲۱}}{۳}$ (در هر دو حالت)

۷.۱. مساحت

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت

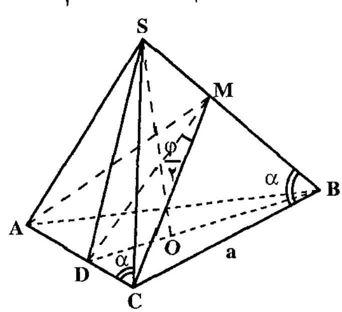
۱.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۹۰. اگر $A\hat{M}C=\varphi$ و $S\hat{C}D=\alpha$ فرض شود (شکل)، در مثلث قائم‌الزاویهٔ CMB $(\hat{M}=90^\circ)$ داریم : $\sin\alpha=\frac{CM}{a}=\frac{CM}{2CD}=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$ و در مثلث DMC خواهیم داشت :

$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{CD}{CM}$ چون $SD=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$ است (در مثلث SDC) پس S سطح جانبی خواهد شد :

$$S=\frac{1}{2}\times 3a\times\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$$

$$=\frac{3a^2\sin\alpha}{4\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{3a^2}{8\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^3\frac{\varphi}{2}}}}=\frac{3a^2}{4\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-1}}$$

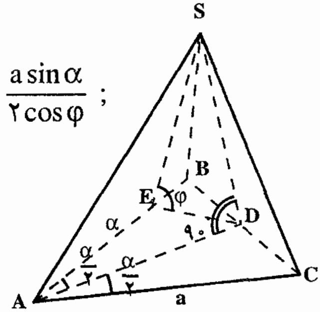


۹۱. چون مساحت مثلث SAC با مساحت مثلث SAB برابر است (شکل)، بنابراین، برای سطح جانبی مطلوب داریم :

$$Q=\frac{1}{2}BC.SD+2\times\frac{1}{2}AB.SE$$

از طرف دیگر داریم :

$$AB = a \; ; \; BC = ۲BD = ۲AB\sin\frac{\alpha}{۲} = ۲a\sin\frac{\alpha}{۲} \; ;$$



$$SE = \frac{ED}{\cos\varphi} = \frac{AD\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\varphi} = \frac{AB\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\varphi} = \frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi} \; ;$$

$$SD = SE.\sin\varphi = \frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\sin\varphi \; ;$$

و بنابراین

$$Q = \frac{۱}{۲}.۲a\sin\frac{\alpha}{۲}.\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\sin\varphi + a.\frac{a\sin\alpha}{۲\cos\varphi}$$

$$= \frac{a^۲\sin\alpha}{۲\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\varphi + ۱\right)$$

۹۲. اگر a، b و c ضلعهای قاعده، $P = \frac{a+b+c}{۲}$ و r شعاع دایرهٔ محاطی و x ، y و z فاصله‌های پای ارتفاع هرم از ضلعهای a ، b ، c و h ارتفاع هرم باشند، داریم :

$$S_{\text{جانبی}} = \frac{۱}{۲}a\sqrt{h^۲+x^۲} + \frac{۱}{۲}b\sqrt{h^۲+y^۲} + \frac{۱}{۲}c\sqrt{h^۲+z^۲}$$

تابع مقعر $f(x) = \sqrt{h^۲+x^۲}$ را درنظر بگیرید (تحدب به سوی پایین) در چنین توابعی، نامساوی زیر برقرار است :

$$\alpha_۱ f(x_۱) + \alpha_۲ f(x_۲) + \cdots + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + \cdots + \alpha_n x_n)$$

$$\alpha_i \geq ۰ \; , \; i = ۱,۲,\cdots,n$$

$$\alpha_۱ + \alpha_۲ + \cdots + \alpha_n = ۱$$

با استفاده از این نامساوی خواهیم داشت :

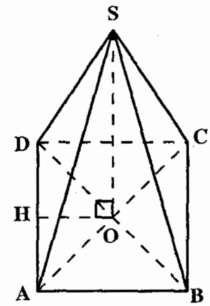
$$S_{\text{جانبی}} = P\left(\frac{a}{۲P}\sqrt{h^۲+x^۲} + \frac{b}{۲P}\sqrt{h^۲+y^۲} + \frac{c}{۲P}\sqrt{h^۲+z^۲}\right) \geq$$

$$\geq P\sqrt{h^۲ + \left(\frac{a}{۲P}x + \frac{b}{۲P}y + \frac{c}{۲P}z\right)^۲}$$

$$=P\sqrt{h^{۲}+\frac{S^{۲}_{\text{قاعده}}}{۴P^{۲}}}=P\sqrt{h^{۲}+r^{۲}}$$

و این همان است که اثبات آن مطلوب مسأله است.

۹۳. ضلع قاعدهٔ هرم را a فرض می‌کنیم. داریم :



$$\text{حجم هرم}=V=\frac{۱}{۳}\times\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع هرم}$$

$$\Rightarrow\ ۳۸۴=\frac{۱}{۳}\times a^{۲}\times ۸$$

$$\Rightarrow\ a^{۲}=۱۴۴\Rightarrow a=۱۲\quad\text{طول ضلع قاعدهٔ هرم}$$

$$\text{سهم قاعده}=OH=\frac{AB}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶\ ,\ SO=۸$$

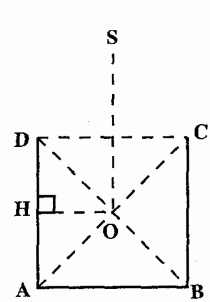
$$\Rightarrow\ SH=\sqrt{SO^{۲}+OH^{۲}}=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰\text{cm}$$

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}\times\text{محیط قاعده}\times\text{سهم هرم}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times(۴\times ۸)\times ۱۰=۱۶۰\ \text{cm}^{۲}$$

۹۴. وجه‌های جانبی هرم منتظم مثلثهای همنهشتی هستند که قاعده و ارتفاع آنها نظیر به نظیر برابر است. بنابراین مساحت جانبی آن مساوی مجموع قاعدهٔ این مثلثها یعنی محیط قاعدهٔ هرم در ارتفاع هر مثلث است که سهم هرم نامیده می‌شود.

۹۵. سهم هرم را به‌دست می‌آوریم، داریم :



$$OH=\frac{AB}{۲}=\frac{۱۰}{۲}=۵\ ,\ SO=۱۲$$

$$\Rightarrow SH=\sqrt{۲۵+۱۴۴}=۱۳\quad\text{سهم هرم}$$

$$\text{جانبی هرم}\ S=\frac{۱}{۲}(۴\times ۱۰)\times ۱۳=۲۶۰\ \text{cm}^{۲}$$

۹۶. ارتفاع هرم داده شده را h می‌نامیم. ارتفاع هرم کوچک $\frac{h}{۴}$ است و ارتفاع هرم دوم $\frac{h}{۲}$ و ارتفاع هرم سوم $\frac{۳h}{۴}$ است.

$S_۲$ را سطح جانبی دومین هرم، $S_۳$ را سطح جانبی سومین هرم و S را سطح جانبی هرم اصلی می‌نامیم. آن‌گاه داریم :

$$\frac{S_۱}{S_۲}=(\frac{SH_۱}{SH_۲})^۲=(\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_۲=۴S_۱$$

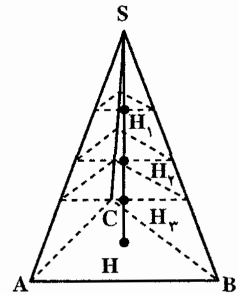
$$\Rightarrow \text{هرم ناقص بالایی } S=۴S_۱-S_۱=۳S_۱$$

$$\frac{S_۱}{S_۳}=(\frac{SH_۱}{SH_۳})^۲=(\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_۳=۹S_۱$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص وسطی } =۹S_۱-۴S_۱=۵S_۱$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S}=(\frac{۱}{۴})^۲\Rightarrow S=۱۶S_۱$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص پایینی } =۱۶S_۱-۹S_۱=۷S_۱$$



۲.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت کل

۹۷. S، سطح کل هرم را برحسب ضلع قاعدهٔ $DB=x$ محاسبه می‌کنیم (شکل). مساحت قاعدهٔ هرم را $S_۱$ می‌گیریم و از مساحت تصویری یک شکل مستوی استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید :

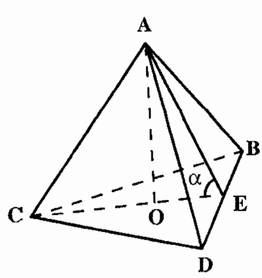
$$S=S_۱+\frac{S_۱}{\cos\alpha}=S_۱.\frac{۱+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۲S_۱\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{\cos\alpha}=\frac{x^۲\sqrt{۳}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos\alpha}\ ;$$

$$V=\frac{۱}{۳}S_۱.AO=\frac{۱}{۳}.\frac{x^۲\sqrt{۳}}{۳}.OE.tg\alpha=\frac{x^۲\sqrt{۳}}{۱۲}.\frac{۱}{۳}CE.tg\alpha$$

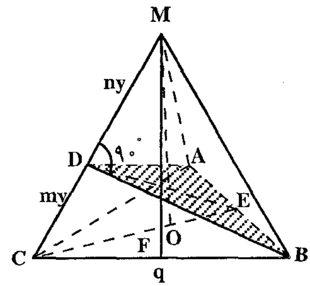
$$=\frac{x^۲\sqrt{۳}}{۳۶}.x\sin ۶۰^\circ tg\alpha=\frac{x^۳}{۲۴}tg\alpha \quad \text{و} \quad x=۲\sqrt[۳]{۳V\,cotg\alpha}$$

و اگر این مقدار x را در عبارت S قرار دهیم :

$$S=\frac{۲\sqrt{۳}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\sqrt[۳]{۹V^۲\,cotg^۲\alpha}}{\cos\alpha}$$



۹۸. برای سطح کل داریم: $S = S_{ABC} + ۳S_{CMB}$ (شکل). ولی



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC.CB \sin ۶۰^\circ = \frac{q^۲\sqrt{۳}}{۴} \; ;$$

$$S_{CMB} = \frac{۱}{۲} CB.MF = \frac{۱}{۲} q\sqrt{CM^۲ - CF^۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} q\sqrt{CM^۲ - \frac{q^۲}{۴}}$$

اکنون، باید CM را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم: $CD = my$ ، $MD = ny$. از تشابه دو مثلث MCO و ECD، به‌دست می‌آید $CE:CD = CM:CO$. ولی

$$CE = CB \sin ۶۰^\circ = \frac{q\sqrt{۳}}{۲} \; ; \; CO = \frac{۲}{۳} CE = \frac{q}{۳}\sqrt{۳} \; ; \; CM = (m+n)y$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$CE.CO = CD.CM \; ; \; \frac{q\sqrt{۳}}{۲} . \frac{q}{۳}\sqrt{۳} = my(m+n)y \; ; \; y = \frac{q}{\sqrt{۲m(m+n)}} \; ;$$

$$CM = (m+n)y = \frac{(m+n)q}{\sqrt{۲m(m+n)}} = \frac{q}{۲m}\sqrt{۲m(m+n)}$$

به این‌ترتیب

$$S_{CMB} = \frac{۱}{۲} q\sqrt{CM^۲ - \frac{۱}{۴}q^۲} = \frac{۱}{۲} q\sqrt{\frac{q^۲(m+n)}{۲m} - \frac{۱}{۴}q^۲}$$

$$= \frac{۱}{۴} q^۲\sqrt{\frac{۲m+۲n-m}{m}} = \frac{q^۲}{۴m}\sqrt{(m+۲n)m} \; ;$$

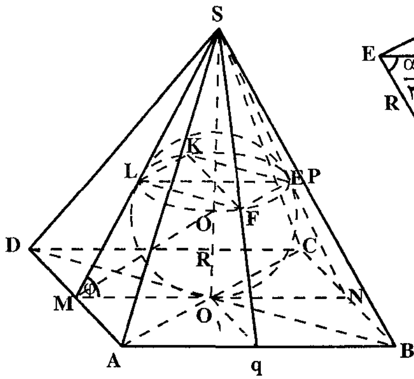
$$S = \frac{q^۲\sqrt{۳}}{۴} + ۳q^۲ \frac{\sqrt{(m+۲n)m}}{۴m} = \frac{q^۲\sqrt{۳}}{۴}\left[m + \sqrt{۳m(m+۲n)}\right]$$

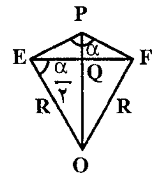
۹۹. زاویهٔ $O_۱MS$ مجاور یال قاعدهٔ هرم داده شده را φ می‌نامیم (شکل). برای سطح کل مجهول داریم:

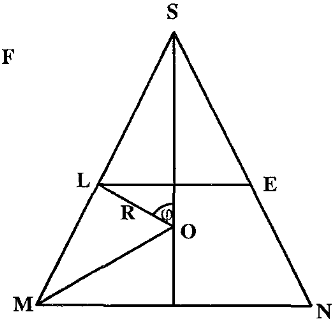
$$S = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}} = AB^۲ + \frac{AB^۲}{\cos\varphi} = AB^۲ . \frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= MN^۲ . \frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi} = (۲R \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{۲})^۲ . \frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= ۴R^۲ \operatorname{cotg}^۲ \frac{\varphi}{۲} . \frac{۱+\cos\varphi}{\cos\varphi} = ۴R^۲ . \frac{(۱+\cos\varphi)^۲}{\sin^۲\varphi \cos\varphi}$$







باید $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ را پیدا کنیم. صفحهٔ OEF را از نقطه‌های E و F (نقطه‌های تماس کره با دو وجه جانبی مجاور) و نقطهٔ O (مرکز کره) می‌گذرانیم. این صفحه بر دو وجهی که E و F روی آنها قرار دارند، عمود است و، بنابراین، بر فصل مشترک آنها، یعنی یال SB عمود می‌شود. درنتیجه $\widehat{EPF} = \alpha$ (P، نقطهٔ برخورد یال SB با صفحه‌ای است که ساخته‌ایم). از چهارضلعی OEPF به‌دست می‌آید :

$$EF = ۲EQ = ۲R\cos\frac{\alpha}{۲}$$

از طرف دیگر، چهارضلعی EFLK مربع است (L و K، نقطه‌های تماس کره، با دو وجه دیگر هرم است)، بنابراین

$$EF = \frac{۱}{۲}LF\sqrt{۲} = \sqrt{۲}R\sin\varphi = ۲R\cos\frac{\alpha}{۲}$$

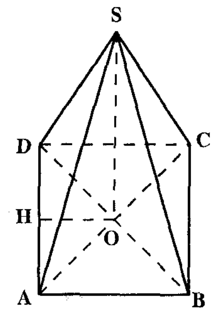
از آن‌جا

$$\sin\varphi = \sqrt{۲}\cos\frac{\alpha}{۲} \;;\; \cos\varphi = \sqrt{۱-\sin^۲\varphi} = \sqrt{۱-۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

$$= \sqrt{-\cos\alpha} \;;\; S = ۲R^۲ . \frac{(۱+\sqrt{-\cos\alpha})^۳}{\sqrt{-\cos\alpha}.\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}$$

۱۰۰. سهم هرم را به‌دست می‌آوریم. داریم :

$$OK = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \;,\; SO = ۱۵$$



سهم هرم $\Rightarrow SK=\sqrt{۸^۲+۱۵^۲}=۱۷$

سطح جانبی هرم $=\frac{۱}{۲}(۴\times ۱۶)\times ۱۷=۵۴۴$

قاعده $S=۱۶^۲=۲۵۶ \Rightarrow$ کل $S=۵۴۴+۲۵۶=۸۰۰$

۱۰۱. سهم هرم را به‌دست می‌آوریم. داریم :

سهم قاعده $HK=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۸=۴\sqrt{۳}$

سهم هرم $AK=\sqrt{AH^۲+HK^۲}=\sqrt{۱۲^۲+(۴\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۱۹۲}=۸\sqrt{۳}$

جانبی هرم $S=\frac{۱}{۲}(۶\times ۱۲)\times ۸\sqrt{۳}=۲۸۸\sqrt{۳}$

قاعدهٔ هرم $S=۶\times(\frac{۸^۲\times\sqrt{۳}}{۴})=۹۶\sqrt{۳}$

$\Rightarrow$ کل هرم $S=۲۸۸\sqrt{۳}+۹۶\sqrt{۳}=۳۸۴\sqrt{۳}$

۳.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مقطع

۱۰۲. اگر مساحت مقطع داده شده را x بنامیم و $AB=a$ ، با استفاده از فرمول حجم هرم ABCD، و قطعه‌های آن، نتیجه می‌شود،

$$\frac{۲}{۳}\frac{Px\sin\frac{\alpha}{۲}}{a}+\frac{۲}{۳}\frac{qx\sin\frac{\alpha}{۲}}{a}=\frac{۲}{۳}\frac{Pq\sin\alpha}{a}$$

و از آن‌جا،

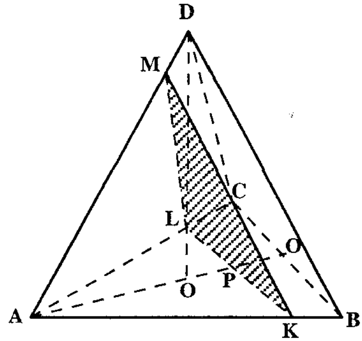
$$x=\frac{۲Pq\cos\frac{\alpha}{۲}}{P+q}$$

۱۰۳. مساحت مجهول مثلث MKL را δ می‌نامیم (شکل). براساس قضیهٔ مربوط به خاصیتهای مقطعهای موازی هرم، داریم :

$$\frac{\delta}{S}=\frac{AP^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{(AO+\frac{۱}{۲}OO_{۱})^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{(\frac{۲}{۳}AO_{۱}+\frac{۱}{۶}AO_{۱})^{۲}}{AO_{۱}^{۲}}=\frac{۲۵}{۳۶}$$

از آن‌جا :

$$\delta=\frac{۲۵}{۳۶}S$$



۱۰۴. هرم منتظم ABCD (چهاروجهی منتظم) را درنظر می‌گیریم. اگر ضلع این هرم a باشد، داریم :

$$\text{ارتفاع هرم}=h=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای هرم باشد، $AH=\frac{a\sqrt{۶}}{۴}$ است.

از آن‌جا داریم :

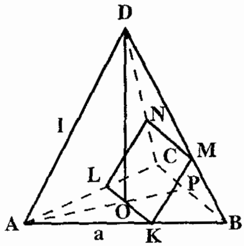
$$\frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{قاعده}}}=(\frac{AH}{AO})^{۲}\Rightarrow\frac{S_{\text{مقطع}}}{\frac{۸^{۲}\sqrt{۳}}{۴}}=\left(\frac{\frac{a\sqrt{۶}}{۴}}{\frac{a\sqrt{۶}}{۳}}\right)^{۲}=(\frac{۳}{۴})^{۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\text{مقطع}}}{۱۶\sqrt{۳}}=\frac{۹}{۱۶}\ \Rightarrow\ S_{\text{مقطع}}=۹\sqrt{۳}$$

۱۰۵. گزینهٔ (۲) درست است. زیرا اگر مساحت بزرگترین مقطع را $S_{۱}$ بنامیم، داریم :

$$\frac{S_{۱}}{S}=(\frac{۳}{۴})^{۲}=\frac{۹}{۱۶}\ \Rightarrow\ S_{۱}=\frac{۹S}{۱۶}$$

۱۰۶. برای این‌که صفحه‌ای از O، مرکز قاعده، موازی با یالهای BC و AD رسم کنیم، کافی است از O خط راست LK را موازی BC، از L، محل برخورد LK با یال AC، خط راست LN را موازی AD رسم کنیم و، سپس، از خطهای راست LK و LN صفحه‌ای



را بگذرانیم، و این، همان صفحه‌ای است که در مسأله، از آن صحبت شده است. مقطع LNMK، مستطیل است. درواقع، صفحه‌ای که رسم کردیم، با یال CB موازی است و، بنابراین، وجه‌های جانبی را، که از این یال می‌گذرند، در خط راستی موازی CB قطع می‌کند؛ یعنی MN‖LK. به همین ترتیب موازی بودن LN و MK هم ثابت می‌شود؛ به‌نحوی که چهارضلعی LNMK متوازی‌الاضلاع است. علاوه بر این، بنا بر قضیهٔ سه عمود، BC بر AD عمود است و، بنابراین، LNMK یک مستطیل است. روشن است که:

$$KL=\frac{۲}{۳}CB=\frac{۲}{۳}a\ ;\ KM=\frac{۱}{۳}AD=\frac{۱}{۳}l$$

و برای مساحت خواسته شده:

$$S=\frac{۲}{۳}a.\frac{۱}{۳}l=\frac{۲}{۹}al$$

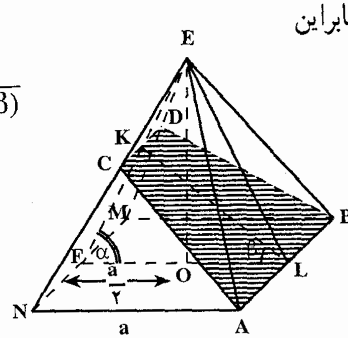
۱۰۷. برای مساحت خواسته شده داریم:

$S=\frac{AB+CD}{۲}.KL$ (شکل). از قضیهٔ کسینوسها در مثلث KFL استفاده می‌کنیم.

$$\frac{KL}{\sin\alpha}=\frac{KF}{\sin\beta}=\frac{FL}{\sin(۱۸۰^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$$

بنابراین

$$KL=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\ ;\ KF=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$



با توجه به تشابه دو مثلث MNE و DCE داریم:

$$CD:MN=KE:EF\ ;\ (MN=a;EF=\frac{FD}{\cos\alpha}=\frac{a}{۲\cos\alpha}\ ;$$

$$KE = EF - KF = \frac{a}{۲\cos\alpha} - \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{۲\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)})$$

و از آن‌جا

$$CD = MN.\frac{KE}{EF} = a.\frac{a\sin(\alpha-\beta).۲\cos\alpha}{۲\cos\alpha\sin(\alpha+\beta).a} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

و درنتیجه

$$S = \frac{AB+CD}{۲}.KL = \frac{۱}{۲}\left[a + \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right].\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= a.\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{۲\sin(\alpha+\beta)}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{a^۲\sin^۲\alpha\cos\beta}{\sin^۲(\alpha+\beta)}$$

۱۰۸. بنا به اصل کاوالیری، مساحت مقطع هرم سمت راست با مساحت مقطع هرم سمت چپ برابر است. بنابراین کافی است مساحت مربع $A'B'C'D'$ را به‌دست آوریم، داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{U'V'W'X'Y'Z'}}{S_{UVWXYZ}} \Rightarrow \frac{\left(۳\sqrt{۲}\right)^۲}{\left(۲\sqrt{۶}\right)^۲} = \frac{S_{U'V'W'X'Y'Z'}}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴} = \frac{S_{U'V'W'X'Y'Z'}}{۲۴} \Rightarrow S_{U'V'W'X'Y'Z'} = ۱۸$$

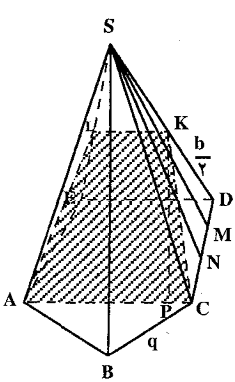
۱۰۹. مساحت مقطع را $S_۱$ می‌گیریم. داریم :

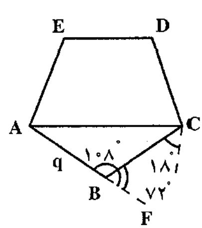
$$\frac{S_۱}{S} = (\frac{۶}{۱۰})^۲ = \frac{۳۶}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{۲۲۵} = \frac{۳۶}{۱۰۰} \Rightarrow S_۱ = ۸۱$$

۱۱۰. طولهای KL، AC و KP را (شکل)، که برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ ALKC لازم است، پیدا می‌کنیم. دو مثلث SLK و SED متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{LK}{ED} = \frac{SK}{SD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow LK = \frac{۱}{۲}ED = \frac{q}{۲}$$





برای پیدا کردن AC، به شکلی که برای قاعده رسم کرده‌ایم، مراجعه می‌کنیم. چون زاویهٔ ABC برابر ۱۰۸ درجه است، پس

$$C\hat{B}F = ۱۸۰^\circ - ۱۰۸^\circ \ ; \ B\hat{C}F = ۱۸^\circ$$

بنابراین، BF برابر نصف ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع q است. یعنی :

$$BF = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}q \ , \ AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ + ۲AB.BF = q^۲.\frac{۲\sqrt{۵}+۶}{۴} \ ;$$

$$AC = \frac{q}{۲}\sqrt{۲\sqrt{۵}+۶} = \frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$$

مقدار AC را به طریق مثلثاتی هم می‌توان به‌دست آورد :

$$AC = ۲AB\cos ۳۶^\circ = ۲q \times \frac{\sqrt{۵}+۱}{۴} = \frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$$

برای ارتفاع KP داریم : $KP = \sqrt{KC^۲ - PC^۲}$. ولی

$$PC = \frac{۱}{۲}(AC - LK) = \frac{۱}{۲}\left[\frac{q}{۲}(\sqrt{۵}+۱) - \frac{۱}{۲}q\right] = \frac{q\sqrt{۵}}{۴}$$

$$KC^۲ = KD^۲ + CD^۲ - ۲CD.DM = (\frac{b}{۲})^۲ + q^۲ - ۲q.\frac{q}{۴}$$

زیرا از تشابه مثلثهای SND و KMD نتیجه می‌شود :

$$MD = \frac{۱}{۲}ND = \frac{۱}{۴}CD = \frac{۱}{۴}q$$

بنابراین $KC^۲ = \frac{b^۲ + ۲q^۲}{۴}$ و درنتیجه

$$KP = \sqrt{\frac{b^۲ + ۲q^۲}{۴} - \frac{۵q^۲}{۱۶}} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۴b^۲ + ۳q^۲}$$

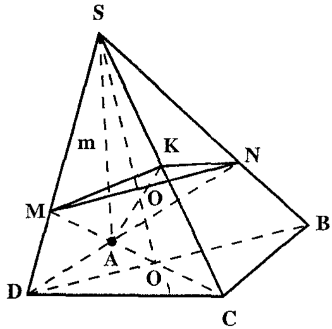
از آن‌جا

$$Q = \frac{AC + KL}{۲}.KP = \frac{q}{۱۶}(\sqrt{۵}+۲)\sqrt{۴b^۲ + ۳q^۲}$$

۱۱۱. این مقطع به فاصلهٔ $۱۲ - ۴ = ۸cm$ از رأس هرم واقع است. بنابراین اگر مساحت مقطع را S بگیریم، داریم :

$$\frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{قاعدهٔ هرم}}} = \left(\frac{۸}{۱۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{مقطع}}}{۷۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{\text{مقطع}} = ۳۲ \ cm^۲$$

۱۱۲. صفحهٔ قاطع P که موازی با قطر BD (A و K روی این صفحه واقعند) است، صفحهٔ DSB را در فصل مشترک MN قطع می‌کند (شکل) و SO_1 فصل مشترک DSB با ASC می‌باشد ؛ درنتیجه AMKN فصل مشترک صفحهٔ P با هرم می‌باشد و داریم :



$$S_{AKMN}=\frac{1}{2}MN.AK$$

چون $MN\perp AK$ است و دو مثلث MSN و DSB متشابه‌اند، پس $\frac{MN}{DB}=\frac{SO}{SO_1}$. از طرفی MN میانهٔ مثلث ASC است، پس $\frac{SO}{SO_1}=\frac{2}{3}$ ؛ درنتیجه $\frac{MN}{DB}=\frac{2}{3}$ یا $MN=\frac{2}{3}b$ می‌شود. از طرف دیگر AK میانهٔ مثلث CAS می‌باشد. پس :

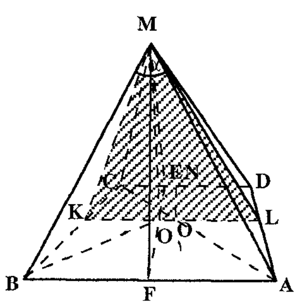
$AK=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+m^2}$ درنتیجه، $S_{AKMN}=\frac{b}{6}\sqrt{a^2+m^2}$

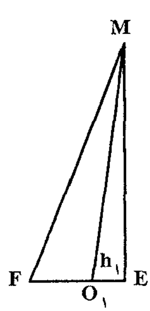
۱۱۳. مقطعی، که مساحت S آن را باید پیدا کنیم، KLM می‌نامیم (شکل). قاعدهٔ KL این مثلث را می‌توان، با توجه به تشابه دو مثلث OKB و DCB و همچنین تشابه دو مثلث KOC و BAC پیدا کرد. داریم :

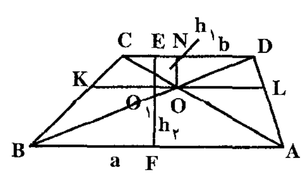
$$KO:b=h_2:h\ ,\ \ KO:a=h_1:h$$

از مجموع این دو برابری به‌دست می‌آید :

$$\frac{KO}{b}+\frac{KO}{a}=\frac{h_2+h_1}{h}=1\Rightarrow KO=\frac{ab}{a+b}$$







به همین ترتیب، خواهیم داشت : $OL=OK=\frac{ab}{a+b}$ ، به‌نحوی که $KL=\frac{2ab}{a+b}$.

برای ارتفاع مثلث مقطع داریم:

$$MO_1 = \sqrt{ME^2 + h_1^2} = \sqrt{MF^2 - EF^2 + h_1^2}$$

ولی $MF = FB\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ ؛ $EF = h$ ؛ h_1 هم از رابطه‌ای که قبلاً پیدا کردیم، یعنی $\frac{h_1}{h} = \frac{OK}{a}$ به‌دست می‌آید: $h_1 = \frac{h}{a}OK = \frac{bh}{a+b}$.

به این ترتیب

$$S = \frac{1}{2}KL.MO_1 = \frac{ab}{a+b}\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - h^2 + \frac{b^2h^2}{(a+b)^2}}$$

۱۱۴. مساحت اولین مقطع را S_1، دومین مقطع را S_2 و سومین مقطع را S_3 می‌نامیم. داریم:

$$\frac{S_1}{S} = (\frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{16}) \Rightarrow S_1 = \frac{S}{16}$$

$$\frac{S_2}{S} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{S}{4}$$

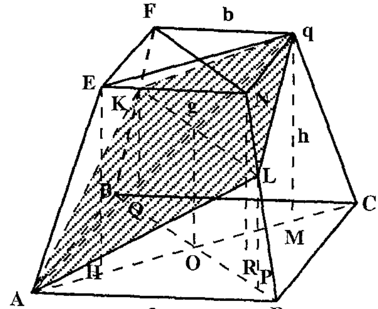
$$\frac{S_3}{S} = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S_3 = \frac{9S}{16}$$

۱۱۵. با توجه به تقارن هرم، روشن است که $Kq = Lq$ و $AK = AL$ (شکل). بنابراین، LK بر Aq عمود است؛ و سطح مجهول: $S = \frac{1}{2}KL.Aq$. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AqM به‌دست آید:

$$Aq = \sqrt{AM^2 + qM^2}\ ;\ (qM = h\ ,\ AM = AC - CM$$

$$= AC - \frac{AC - Eq}{2} = \frac{AC + Eq}{2} = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}})\ ;$$

$$Aq = \sqrt{(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + h^2} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2} + h^2}$$



برای محاسبهٔ پاره‌خط KL، توجه می‌کنیم که KL با BE موازی است، زیرا KL و BD بر صفحهٔ BDMF قرار دارند و، درضمن، BD با صفحهٔ ALqK موازی است. از روی شکل روشن است که

$$KL = BD - PD - PD = BD - ۲PD = a\sqrt{۲} - ۲PD$$

بنابراین، باید PD را محاسبه کنیم. دو مثلث NRD و LPD متشابه‌اند، یعنی :

$$PD : LP = RD : NR$$

ولی $NR = h$ و

$$RD = MC = \frac{AC - Eq}{۲} = \frac{a\sqrt{۲} - b\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a-b}{\sqrt{۲}} \; ; \; LP = OG$$

و OG هم از تشابه مثلثهای qAM و GAO به‌دست می‌آید :

$$\frac{GO}{AO} = \frac{qM}{AM} \; ; \; OG = \frac{qM}{AM} \cdot AO = \frac{h\sqrt{۲}}{a+b} \cdot \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{ah}{a+b} = LP$$

و بنابراین

$$PD = LP \cdot \frac{RD}{NR} = \frac{ah}{a+b} \cdot \frac{a-b}{\sqrt{۲}h} = \frac{(a-b)a}{(a+b)\sqrt{۲}} \; ;$$

$$KL = a\sqrt{۲} - ۲PD = a\sqrt{۲} - \frac{۲(a-b)a}{(a+b)\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}ab}{a+b}$$

و سرانجام به‌دست می‌آید :

$$S = \frac{۱}{۲} KL.Aq = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲\sqrt{۲}ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b)^۲}{۲} + h^۲} = \frac{\sqrt{۲}ab}{a+b} \sqrt{\frac{(a+b)^۲}{۲} + h^۲}$$

۴.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت تصویر

۱۱۶. $\frac{Q^۲}{S}$

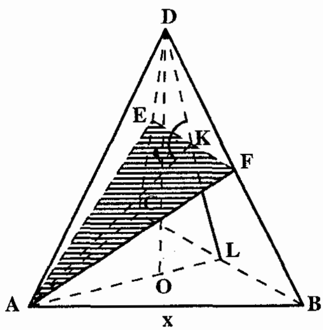
۵.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۱۱۷. روی یال AS، نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که $AK = a$. پس نقطه‌های B، D و K متعلق به مقطعی از مخروط می‌شوند که با قاعدهٔ مخروط موازی‌اند. $(AB = AD = AK)$ چون C در صفحهٔ قاعده قرار گرفته است، معلوم می‌شود که

صفحهٔ BDK ارتفاع مخروط را نصف می‌کند. پس مساحت سطح جانبی مخروط موردنظر ما، چهار برابر مساحت سطح جانبی مخروطی خواهد بود که، شعاع قاعدهٔ آن، با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BDK برابر و مولد آن a می‌باشد.

جواب :
$$\frac{۴\pi\sqrt{۲}a^{۲}(\sqrt{b^{۲}+۲a^{۲}}-a)}{\sqrt[۴]{b^{۲}+۲a^{۲}}.\sqrt{۳\sqrt{b^{۲}+۲a^{۲}}-۴a}}$$

۲.۷.۱. نسبت مساحتها



۱۱۸. روشن است که صفحهٔ مقطع AEF (شکل) نمی‌تواند بر وجه ADC عمود باشد، زیرا در این‌صورت، اگر از رأس D عمودهایی بر AE و AF رسم کنیم، دو عمود برابر می‌شوند، که ممکن نیست، زیرا اوّلی بر صفحه عمود است، درحالی که دومی، نسبت به صفحه، مایل است. این مطلب از ویژگیهای تقارن هم روشن است : عمود بودن بر صفحهٔ ADC، به معنای عمود بودن بر صفحهٔ ADB است. بنابراین، صفحهٔ مقطع، بر صفحهٔ BDC عمود است. ضلع قاعده را x می‌نامیم ؛ و مساحت قاعده و سطح جانبی هرم را برحسب آن بیان می‌کنیم :

$$S_{۱}=\frac{۱}{۲}AB^{۲}\sin ۶۰^{\circ}=\frac{x^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\ ;$$

($S_۱$، مساحت قاعده است) و

$$S_{۲}=۳\cdot\frac{۱}{۲}BC.DL$$

($S_۲$، سطح جانبی است). در این‌جا $BC=x$، و DL از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ DOL و KAL به‌دست می‌آید : $DL:AL=OL:KL$. ولی

$$AL=\frac{x\sqrt{۳}}{۲}\ ;\ \ OL=\frac{۱}{۳}AL=\frac{x\sqrt{۳}}{۶}\ ;\ \ KL=\frac{۱}{۲}DL$$

بنابراین، خواهیم داشت :

$$DL.KL=OL.AL\ ;\ \ DL\cdot\frac{۱}{۲}DL=\frac{x\sqrt{۳}}{۶}\cdot\frac{x\sqrt{۳}}{۲}\ ;$$

$$DL=\frac{x}{\sqrt{۲}}\ ,\ S_۲=\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{۲}}\ ;\ \frac{S_۲}{S_۱}=\frac{۳x^۲.۴}{۲\sqrt{۲}.\sqrt{۳}x^۲}=\sqrt{۶}$$

۱۱۹. ابتدا ثابت کنید ABCD مستطیل است و صفحهٔ DEC بر صفحهٔ ABCD عمود می‌باشد. برای این منظور از نقطهٔ E صفحه قاطعی بگذرانید که بر BC عمود باشد. این مقطع می‌بایست ضمن قطع قاعده در یک خط راست، که از M می‌گذرد، BC و AD را هم قطع کند. (تنها در انتهای آنها امکان‌پذیر است). سپس با رسم مقطع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که از B می‌گذرد و این وقتی امکان‌پذیر است که مقطع شامل AB و DE = EC و AE = EB بشود نتیجه می‌گیریم،

$$\frac{۳}{۵}AC\geq ED=EC\ ،\ \frac{۴}{۵}AC\geq EB=AE$$

یعنی،

$$AC^۲\geq CE^۲+AE^۲$$

مثلث AEC حاده‌الزاویه نیست، اما زاویه $A\hat{E}C$ منفرجه هم نمی‌تواند باشد، زیرا در این‌صورت $D\hat{E}C$ باید حاده بشود. پس

$$AC=\frac{۵}{۴}AE=\frac{۵}{۳}EC$$

جواب: $\frac{۳}{۸}\sqrt{\frac{۶۵}{۱۴}}$

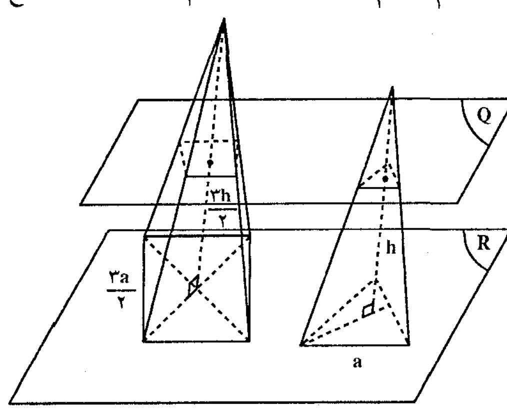
۱۲۰. صفحهٔ قاطع (Q) که به فاصلهٔ $\frac{۳h}{۴}$ از رأس هرم چهارپهلو قرار دارد، به فاصلهٔ $h-\frac{۳h}{۴}=\frac{h}{۴}$ از رأس هرم مثلث‌القاعده واقع است. بنابراین داریم:

$S'=$ مساحت مربع مقطع ,

$S=$ مساحت مثلث مقطع ,

مربع قاعده $S=\frac{۹a^۲}{۴}$,

مثلث قاعده $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$



$$\frac{S}{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}}=(\frac{\frac{h}{۴}}{h})^۲=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۶۴}$$ و

$$\frac{S'}{\frac{۹a^۲}{۴}}=(\frac{\frac{۳h}{۴}}{\frac{۳h}{۲}})^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S'=\frac{۹a^۲}{۱۶}$$

$$\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۶۴}}{\frac{۹a^۲}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳۶}$$

۱۲۱. نسبت خواسته شده، ۹ : ۲۰ :۲۵ است.

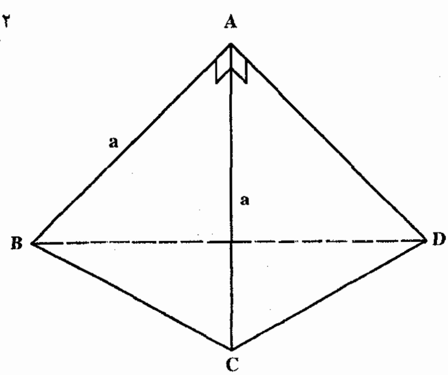
۱۲۲. مساحت تصویر دومین مقطع روی صفحهٔ اول، نصف مساحت مقطع اوّل است. از طرف دیگر، نسبت مساحت تصویر مقطع دوم به مساحت خود مقطع برابر است با $\cos\alpha$.

جواب : $۲\cos\alpha$

۳.۷.۱. رابطهٔ بین مساحتها

۱۲۳. هرم ABCD را که در آن، کنج A سه قائمه است، درنظر می‌گیریم. اگر یالهای هرم مساوی باشند، یعنی $AB=AC=AD=a$ اختیار شود، حکم مسأله بسادگی ثابت می‌شود زیرا داریم :

$$S_{ABC}=S_{ACD}=S_{ABD}=\frac{۱}{۲}a^۲$$



$$BC = CD = BD = a\sqrt{۲} \Rightarrow S_{BCD} = \left(a\sqrt{۲}\right)^{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$$

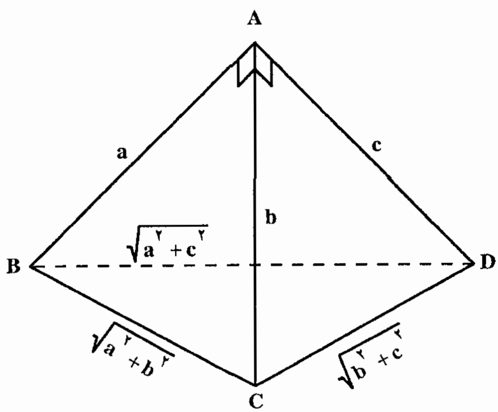
$$S^{۲}_{BCD} = \frac{۳a^{۴}}{۴} \;,\; S^{۲}_{ABC} + S^{۲}_{ACD} + S^{۲}_{ABD} = \frac{a^{۴}}{۴} + \frac{a^{۴}}{۴} + \frac{a^{۴}}{۴} = \frac{۳a^{۴}}{۴} = S^{۲}_{BCD}$$

$$\Rightarrow S^{۲}_{BCD} = S^{۲}_{ABC} + S^{۲}_{ACD} + S^{۲}_{ABD}$$

درصورتی که یالهای هرم را $AB = a$ ، $AC = b$ و $AD = c$ اختیار کنیم خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}ab \;,\; S_{ACD} = \frac{۱}{۲}bc \;,\; S_{ABD} = \frac{۱}{۲}ac$$

$$BC = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}} \;,\; CD = \sqrt{b^{۲} + c^{۲}} \;,\; BD = \sqrt{a^{۲} + c^{۲}}$$



با استفاده از دستور هرون $S_{BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

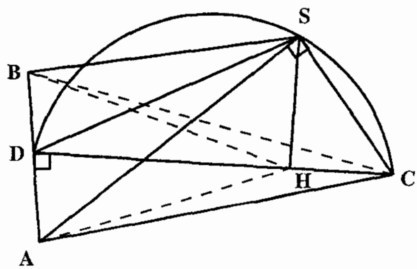
$$S_{BCD} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}} + \sqrt{b^{۲}+c^{۲}} + \sqrt{a^{۲}+c^{۲}}}{۲} \times \frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}} + \sqrt{b^{۲}+c^{۲}} - \sqrt{a^{۲}+c^{۲}}}{۲}}$$

$$\times \sqrt{\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}} + \sqrt{a^{۲}+c^{۲}} - \sqrt{b^{۲}+c^{۲}}}{۲} \times \frac{\sqrt{a^{۲}+c^{۲}} + \sqrt{b^{۲}+c^{۲}} - \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}{۲}}$$

پس از ساده کردن عبارت بالا، درستی رابطهٔ زیر ثابت می‌شود:

$$S^{۲}_{BCD} = S^{۲}_{ABC} + S^{۲}_{ACD} + S^{۲}_{ABD}$$

راه دوم. اگر S رأس کنج سه قائمهٔ هرم SABC باشد، یال CS بر وجه ASB عمود است؛ بنابراین اگر بر CS صفحه‌ای بگذرانیم که در نقطهٔ D بر AB عمود باشد، خط



CD عمود بر AB خواهد بود ؛ پس زاویهٔ CSD قائمه و صفحهٔ مقطع که بر صفحهٔ قاعدهٔ هرم عمود است، شامل ارتفاع SH هرم نیز می‌باشد.

امّا مثلث ASB و تصویر آن مثلث AHB، دارای قاعدهٔ مشترک می‌باشند ؛ بنابراین نسبت مساحت آنها به نسبت ارتفاعهای متناظر این قاعدهٔ مشترک است. همین مطلب برای مثلث ACB نیز درست است.

امّا به‌دلیل قائمه بودن زاویهٔ DSC، داریم $DS^2 = DH.DC$. بنابراین :

$$AB^2.DC^2 = AB.DH.AB.DC \Rightarrow (AB.DS)^2 = (AB.DC)(AB.DH)$$

$$\Rightarrow (ASB)^2 = (ABC).(ABH) \text{ ، } (1)$$

(ASB)، یعنی مساحت مثلث ASB. همچنین داریم :

$$(ASC)^2 = (ACB).(AHC) \quad (2)$$

$$(BSC)^2 = (ACB).(BHC) \text{ ،} (3)$$

از جمع کردن عضوهای متناظر رابطه‌های (۱) ، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$(ASB)^2 + (ASC)^2 + (BSC)^2 = (ABC)^2$$

استدلال دیگر. داریم :

$$AB^2.CD^2 = AB^2(SC^2 + SD^2) = AB^2.SD^2 + AB^2.SC^2 =$$

$$AB^2.SD^2 + (SB^2 + SA^2)SC^2 = AB^2.SD^2 + SB^2.SC^2 + SA^2.SC^2$$

$$\Rightarrow (ABC)^2 = (SAB)^2 + (SBC)^2 + (SAC)^2$$

تبصره. می‌توان قضیهٔ زیر را بیان کرد :

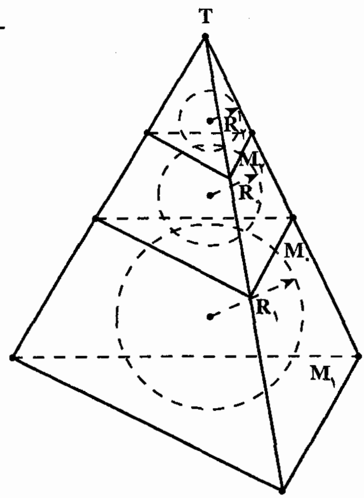
مربع مساحت مثلث ABC مساوی است با، مجموع مربعهای مساحتهای تصویرهای آن، روی سه صفحهٔ عمود رسم شده بر ضلعهای آن.

۱۲۴. قاعدهٔ بزرگ M_1 از هرم اصلی را به مساحت S_1 و قاعدهٔ کوچک M_2 آن را به مساحت S_2 و قاعدهٔ مشترک M_0 دو هرمی که از هرم اصلی به وجود آمده‌اند، به مساحت S_0 می‌گیریم. یالهای هرم ناقص را ادامه می‌دهیم تا در نقطهٔ T به هم برسند و هرمهای به رأس T و قاعده‌های M_1 ، M_2 و M_0 را، بترتیب، P_1 ، P_2 و P_0 می‌نامیم (شکل).

تجانس نسبت به نقطهٔ T، که قاعدهٔ M_1 را به قاعدهٔ M_0 تبدیل کند، کرهٔ محاط در هرم

P_1 را به کرهٔ محاط در هرم P_0 تبدیل می‌کند و، بنابراین در این تجانس، قاعدهٔ M_0 به قاعدهٔ M_2 و کرهٔ محاط در هرم P_0 به کرهٔ محاط در هرم P_2 تبدیل می‌شود. به این ترتیب، برای شعاعهای R_1، R_2 و R_0 از کره‌های محاطی، و مساحتهای Q_1، Q_2 و Q_0، سطح جانبی هرمهای P_1، P_2 و P_0، خواهیم داشت :

$$\frac{R_0}{R_1}=\frac{R_2}{R_0}\ ,\ \frac{Q_2}{Q_1}=\frac{S_2}{S_1}=\frac{R_2^2}{R_1^2}$$



حجم هرم P_2، از یک طرف، برابر است با $\frac{1}{3}R_2(Q_2+S_2)$ و، از طرف دیگر $\frac{1}{3}R_0(Q_2-S_2)$ (زیرا، کرهٔ به شعاع R_0، نسبت به هرم R_2، محاطی بیرونی است)، بنابراین

$$R_2(Q_2+S_2)=R_0(Q_2-S_2)$$

از آن‌جا

$$\frac{Q_2-S_2}{Q_2+S_2}=\frac{R_2}{R_0}=\frac{R_2}{\sqrt{R_1R_2}}=\frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1}}=\frac{\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}}$$

درنتیجه

$$(Q_2-S_2)\sqrt[4]{S_1}=(Q_2+S_2)\sqrt[4]{S_2}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید :

$$\frac{Q_2}{S_2}=\frac{\sqrt[4]{S_1}+\sqrt[4]{S_2}}{\sqrt[4]{S_1}-\sqrt[4]{S_2}}$$

۸.۱. حجم

۱.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم هرم

۱.۱.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم هرم مثلث‌القاعده

۱۲۵. اگر یکی از مثلثهای وجه‌های جانبی هرم و مثلاً ASB را قاعده بگیریم، مسأله بسادگی حل می‌شود. فرض می‌کنیم :

$AS = x$ ، $BS = y$ و $CS = z$ ، در این‌صورت حجم مطلوب چنین است :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{xy}{2}\cdot z = \frac{xyz}{6}$$

از طرف دیگر در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BSC، ASC و ASB رابطه‌های زیر را داریم :

$$y^2 + z^2 = a^2 \ ;$$

$$x^2 + z^2 = b^2 \ ;$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$

و از آن‌جا :

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)} \ ;$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)} \ ;$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)}$$

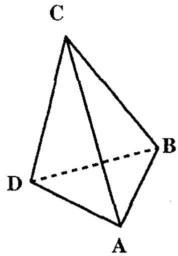
جواب :

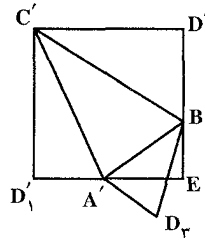
$$V = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}$$

۱۲۶. فرض می‌کنیم $CD = x$ ، ثابت می‌کنیم $a + b = x$. برای این کار گستردهٔ هرم را به‌دست می‌آوریم (شکل). $D_1'A'$ و $D_2'B'$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ E قطع

کنند. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که چهارضلعی $D'_1C'D'_2E$ مربع است.

$EA' = x - a \ , \ EB' = x - b$





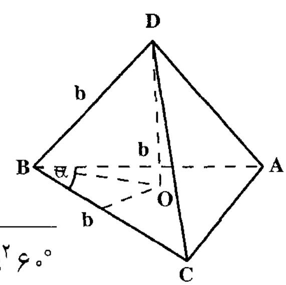
بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$a^2 + b^2 = (x-a)^2 + (x-b)^2 \Rightarrow x = a+b$$

بنابراین حجم برابر است با:

$$\frac{1}{6}ab(a+b)$$

۱۲۷. مساحت قاعدهٔ هرم را S و ارتفاع آن را H می‌گیریم و، با استفاده از شکل، به‌دست می‌آوریم:



$$S = \frac{1}{2}AB.BC\ \sin\alpha = \frac{1}{2}b^2\sin\alpha \ ;$$

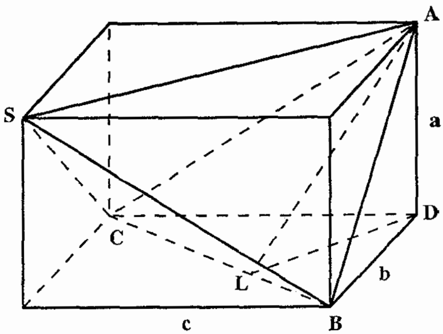
$$H = DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2 60^\circ}$$

$$= \frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin(60^\circ + \frac{\alpha}{2}).\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})} \ ;$$

$$V = \frac{1}{3}S.H = \frac{1}{3}.\frac{b^2\sin\alpha}{2}.\frac{b}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin(60^\circ + \frac{\alpha}{2}).\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{1}{3}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin(60^\circ + \frac{\alpha}{2}).\sin(60^\circ - \frac{\alpha}{2})}$$



۱۲۸. از مساوی بودن حاصلضربهای طولهای یالهای هر وجه، معلوم می‌شود که یالهای متقابل هرم از نظر طول برابرند. هرم SABC را طبق معمول، با مرور دادن صفحه‌ای بر هر یال آن به موازات یال متقابل، به متوازی‌السطوح تبدیل کنید. چون یالهای متقابل هرم SABC، از نظر طول برابرند، متوازی‌السطوح حاصل، یک مکعب مستطیل خواهد شد. یالهای آن را با a، b و c نشان دهید که در (شکل)، در مثلث BCD، ارتفاع DL را رسم کنید. از این مثلث نتیجه می‌شود،

$$DL = \frac{bc}{\sqrt{b^۲ + c^۲}}$$

$$AL = \sqrt{a^۲ + DL^۲} = \frac{\sqrt{a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲}}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲}$$

حجم هرم SABC برابر است با $\frac{۱}{۳}$ حجم متوازی‌السطوح، و ارتفاع وارد بر وجه ABC هم داده شده است، پس خواهیم داشت،

$$\sqrt{a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲}\,.\sqrt{\frac{۱۰۲}{۵۵}} = abc \qquad (۱)$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلث ABC داریم،

$$۶a^۲ = \sqrt{a^۲ + c^۲}\,.\sqrt{a^۲ + b^۲}\,.\sqrt{\frac{۱۷}{۲}} \qquad (۲)$$

سرانجام از آخرین شرط مسأله نتیجه می‌شود،

$$c^۲ - ۲a^۲ - ۲b^۲ = ۳۰ \qquad (۳)$$

با حل دستگاه (۱) ــ (۳) خواهیم داشت:

$$a^۲ = ۳۴ \text{ ، } b^۲ = ۲ \text{ ، } c^۲ = ۱۰۲$$

جواب : $\frac{۳۴\sqrt{۶}}{۳}$

۱۲۹. O را مرکز کره، CD را قطر آن، M را وسط BC بگیرید و ثابت کنید، $AB = AC$. در این‌جا کافی است ثابت کنید که AM بر BC عمود است. بنا به فرض، SA بر OS عمود است و علاوه بر آن، SM بر OS عمود است (مثلث‌های CSD، CSB و BCD قائم‌الزاویه هستند و O و M بترتیب وسط CD و CB هستند.) درنتیجه AMS بر OS عمود می‌شود و AM بر OS عمود خواهد بود. اما AM بر CD عمود است، درنتیجه AM بر صفحهٔ BCD عمود می‌شود. به این ترتیب AM بر BC عمود خواهد بود.

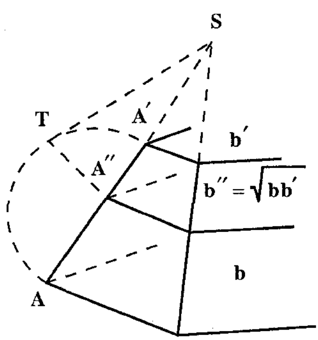
جواب : $\frac{Ra^{۳}\sqrt{۴b^{۲}-a^{۲}}}{۶(۴R^{۲}+a^{۲})}$

۱۳۰. $\frac{۸S^{۲}\sin\alpha\sin\beta}{۳a\sin(\alpha+\beta)}$

۱۳۱. گزینهٔ (د) درست است.

۱۳۳. فرض می‌کنیمABC و $A'B'C'$ قاعده‌های هرم ناقص، b و b' مساحت این قاعده‌ها و h ارتفاع این هرم ناقص باشد.

مثلثهایی که ضلعهای یکی، نصف مجموع ضلعهای موازی قاعده‌ها، و ضلعهای دیگری، نصف تفاضل ضلعهای موازی دو قاعده است، با هم متشابه‌اند، زیرا ضلعهای نظیر به نظیر آنها مشابه‌اند.



در واقع، چون مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، داریم :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=k;$$

در این صورت :

$$\frac{AB\pm A'B'}{۲}=AB\times\frac{۱\pm k}{۲}\ ,\ \frac{BC\pm B'C'}{۲}=BC\times\frac{۱\pm k}{۲}\ ,\ \frac{CA\pm C'A'}{۲}=CA\times\frac{۱\pm k}{۲}$$

اگر x و y مساحتهای این دو مثلث باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$V = h\left(x + \frac{y}{۳}\right)$$

یا چون که $V = \frac{h}{۳}\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right)$ است، $۳x + y = b + b' + \sqrt{bb'}$ اما، نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه، مساوی مجذور نسبت ضلعهای متناظر آنهاست، داریم :

$$\frac{\sqrt{x}}{\frac{AB + A'B'}{۲}} = \frac{\sqrt{b}}{AB} = \frac{\sqrt{b'}}{A'B'} = \frac{\sqrt{b} + \sqrt{b'}}{AB + A'B'},$$

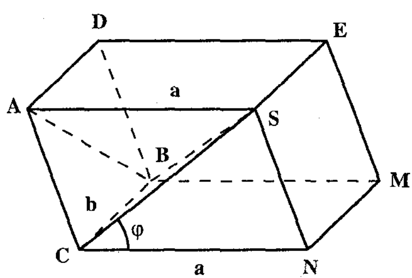
از آن جا محاسبه می‌شود : $\sqrt{x} = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{b} + \sqrt{b'}\right)$

به‌طور مشابه داریم $\sqrt{y} = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{b} + \sqrt{b'}\right)$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$۳x + y = \frac{۱}{۴}\left[۳\left(\sqrt{b} + \sqrt{b'}\right)^۲ + \left(\sqrt{b} - \sqrt{b'}\right)^۲\right] = b + b' + \sqrt{bb'}$$

۱۳۴. اگر SABC چهاروجهی داده شده (شکل)، $SA = a$ و $BC = b$ و زاویهٔ بین این دو یال φ و c طول عمود مشترک آن دو فرض شوند، روی این هرم، متوازی‌السطوح CBMNADES را می‌سازیم ؛ در این صورت $CN = a$ و $B\hat{C}N = \varphi$ و c فاصلهٔ بین وجوه متوازی CBMN و ADES خواهد شد یعنی ارتفاع متوازی‌السطوح می‌شود. اگر $V_۱$ حجم متوازی‌السطوح باشد. داریم :



$V_۱ = abc\sin\varphi$ ، زیرا مساحت متوازی‌الاضلاع CBMN برابر $ab\sin\varphi$ است. اگر قاعدهٔ هرم SABC را مثلث ABC فرض کنیم، قاعدهٔ متوازی‌السطوح را CADB، پس هرم و متوازی‌السطوح دارای یک ارتفاعند و چون مساحت مثلث نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است، با فرض h ارتفاع می‌توان نوشت :

$$V = \frac{۱}{۳}h \times S_{ABC} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}h \times S_{CADB} = \frac{۱}{۶}abc\sin\varphi$$

۱۳۵. ضلعهای مثلث داده شده را با a، b و c، و ارتفاعهای آن را با h_a ، h_b و h_c و نصف محیط آن را با P و شعاع دایرهٔ محاطی آن را با r نشان می‌دهیم. محل برخورد صفحه‌های A_1B_1C ، A_1BC_1 و AB_1C_1 را با M، و مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث را با O_a , O_b , O_c نشان می‌دهیم (O_a مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و امتداد AB و AC مماس شده است و به همین ترتیب ...). ثابت کنید $O_aO_bO_cM$ هرم مطلوب است، ارتفاع رسم شده از نقطهٔ M از مرکز دایرهٔ محاطی (O) می‌گذرد و $MO = ۲r$.

برای مثال، صفحهٔ A_1B_1C را در نظر بگیرید. اگر K محل برخورد این صفحه با خط AB باشد،

$$\frac{KA}{KB} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{AC}{BC}$$

یعنی K محل برخورد خط AB و نیمساز زاویهٔ خارجی C است. بنابراین معلوم می‌شود قاعدهٔ هرم موردنظر ما، در واقع مثلث $O_aO_bO_c$ و M در نقطهٔ O تصویر می‌گردد. MO را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{MO}{h_a} = \frac{OO_a}{AO_a} = \frac{r_a - r}{r_a}$$

که در آن r_a شعاع دایرهٔ محاطی خارجی و به مرکز O_a می‌باشد.

$$r_a = \frac{S}{P-a} \quad ، \quad r = \frac{S}{P} \quad ، \quad h_a = \frac{۲S}{a}$$

در نتیجه

$$MO = h_a \frac{r_a - r}{r_a} = \frac{۲S}{a} \frac{\frac{۱}{P-a} - \frac{۱}{P}}{\frac{۱}{P-a}} = \frac{۲S}{P} = ۲r$$

حالا مساحت مثلث $O_aO_bO_c$ را حساب می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که O_aA و O_bB و O_cC ارتفاعهای مثلثند. زاویه‌های مثلث $O_aO_bO_c$ قابل محاسبه‌اند. برای مثال،

$$O_c\hat{O}_aO_b = B\hat{O}_aC = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}) - (۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}) = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

سایر زاویه‌ها هم به طریق مشابه پیدا می‌شوند. دایرهٔ به قطر O_bO_c از B و C می‌گذرد.

درنتیجه،

$$O_bO_c = \frac{|BC|}{\sin B\hat{O}_bC} = \frac{a}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}}$$

درست به همین طریق خواهیم داشت،

$$O_bO_a = \frac{c}{\sin\frac{\hat{C}}{۲}}$$

بنابراین،

$$O_aA = O_aO_b \sin O_a\hat{O}_bA = \frac{c}{\sin\frac{\hat{C}}{۲}}\cos\frac{\hat{B}}{۲}$$

به این ترتیب مساحت مثلث $O_aO_bO_c$ (که آن را با Q نشان می‌دهیم) برابر است با،

$$Q = \frac{۱}{۲}\frac{ac}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}}\cos\frac{\hat{B}}{۲} = \frac{ac\sin\hat{B}}{۴}\cdot\frac{۱}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}} \qquad (۱)$$

$\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ را حساب می‌کنیم :

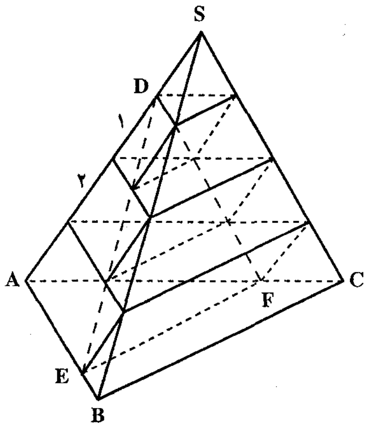
$$\sin\frac{\hat{A}}{۲} = \sqrt{\frac{۱-\cos\hat{A}}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}(۱-\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc})} = \sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{bc}}$$

به طریق مشابه $\sin\frac{\hat{B}}{۲}$ و $\frac{\hat{C}}{۲}$ را پیدا کرده در فرمول (۱) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت،

$$Q = S\frac{abc}{۲(P-a)(P-b)(P-c)}$$

و حجم هرم $MO_aO_bO_c$ برابر خواهد بود،

$$V = \frac{Sabcr}{۳(P-a)(P-b)(P-c)} = \frac{۱}{۳}abc = \frac{۴}{۳}SR$$



۱۳۶. هرم S.ABC را در نظر می‌گیریم و منشورهای محاط در آن را طبق شکل رسم می‌کنیم (با تقسیم SA به n قسمت مساوی و رسم صفحه‌هایی موازی قاعده و سپس رسم صفحه‌هایی موازی SA). مجموع حجم منشورها از حجم هرم کمتر و اختلاف آنها از حجم هرم ناقص SBCDEF کمتر است. بنابراین اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، حجم هرم ناقص SBCDEF به سمت صفر میل خواهد کرد و دراین صورت حد مجموع حجم منشورها مساوی حجم هرم داده شده است. حال این حد را محاسبه می‌کنیم. اگر h ارتفاع هرم باشد، هر یک از این منشورها ارتفاعی مساوی $\frac{h}{n}$ دارند.

b را قاعدهٔ هرم و $b_۱$ ، $b_۲$ ، $b_۳$ ، ...، b_n را قاعده‌های منشورهای محاطی می‌گیریم. می‌دانیم که:

$$\frac{b_۱}{b}=\frac{(\frac{h}{n})^۲}{h^۲}=\frac{۱}{n^۲}\ ,\ \frac{h_۲}{b}=\frac{(\frac{۲h}{n})^۲}{h^۲}=\frac{۲^۲}{n^۲}\ ,\ldots,$$

$$\Rightarrow b_۱=\frac{b}{n_۲}\ ,\ b_۲=\frac{۲^۲b}{n^۲}\ ,\ldots,\ b_{n-۱}=\frac{(n-۱)^۲b}{n^۲}$$

در نتیجه مجموع حجم این منشورها برابر است با:

$$\frac{bh}{n^۲}\left[۱^۲+۲^۲+\ldots+(n-۱)^۲\right]$$

امّا:

$$۱^۲+۲^۲+\ldots+(n-۱)^۲=\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{۶}$$

پس:

$$\frac{bh}{۶}\times\frac{(n-۱)n(۲n-۱)}{n^۲}=\frac{bh}{۶}(۱-\frac{۱}{n})(۲-\frac{۱}{n})$$

و هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد این مجموع مساوی $\frac{bh}{۳}$ است.

۱۳۷. از فرض مسأله معلوم می‌شود که رأس S، یا بر روی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث

ABC تصویر می‌شود، و یا روی مرکز دایرهٔ محاطی خارجی آن (دایرهٔ محاطی خارجی بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است.)

جواب: اگر $\frac{a}{\sqrt{۳}} < b \le a$ آن‌گاه:

$$V = \frac{a^۲}{۱۲}\sqrt{۳b^۲ - a^۲}$$

اگر $a < b \le a\sqrt{۳}$ دو جواب:

$$V_۱ = \frac{a^۲}{۱۲}\sqrt{۳b^۲ - a^۲} \ ، \ V_۲ = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}\sqrt{b^۲ - a^۲}$$

اگر $b > a\sqrt{۳}$، سه جواب:

$$V_۱ = \frac{a^۲}{۱۲}\sqrt{۳b^۲ - a^۲} \ ، \ V_۲ = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}\sqrt{b^۲ - a^۲} \ ، \ V_۳ = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}\sqrt{b^۲ - ۳a^۲}$$

۱۳۸. اگر $SA = l$، l را به آسانی برحسب a، α و β می‌توان نوشت. در صورتی که $l \le a$، آن‌گاه:

$$\Delta ASC = \Delta ASB$$

(مثلث ASC را بسازید: زاویه‌ای برابر α و به رأس S اختیار کنید. روی یک ضلع آن $SA = l$ را جدا کنید و دایره‌ای به مرکز A و شعاع a رسم کنید. چون $a \ge l$ این دایره ضلع دوم زاویه را در یک نقطه قطع می‌کند).

اگر $l > a$، دو حالت اتفاق می‌افتد:

$$\Delta ASC = \Delta ASB$$

و

$$A\hat{C}S = \alpha + \beta$$

برحسب آن که $۲\alpha + \beta$ بزرگتر، مساوی و یا کوچکتر از π باشد، پاره‌خط l کوچکتر، مساوی و یا بزرگتر از π خواهد شد.

علاوه بر این درهر دو حالت، زاویه‌های مجاور A، می‌بایست در شرایط کنج سه‌وجهی صدق کند.

جواب: اگر

$$\beta > \frac{\pi}{۶} \ , \ ۲\alpha + \beta \ge \pi$$

آن گاه:

$$V=\frac{a^{۳}\sin(\alpha+\beta)}{۱۲\sin\alpha}\sqrt{۱-۲\cos ۲\beta}$$

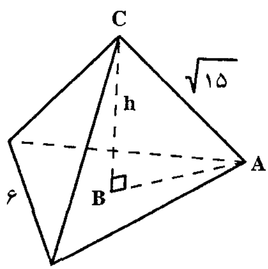
اگر $\frac{\pi}{۳}<\alpha+\beta$ ، $\alpha<\frac{\pi}{۳}$ و $\beta\leq\frac{\pi}{۶}$ آن گاه:

$$V=\frac{a^{۳}\sin(\alpha+\beta)}{۱۲\sin\alpha}\sqrt{۳\sin^{۲}\beta-[۲\cos(۲\alpha+\beta)+\cos\beta]^{۲}}$$

اگر $\frac{۲\pi}{۳}>\alpha+\beta>\frac{\pi}{۳}$ ، $\alpha<\frac{\pi}{۳}$ و $\beta>\frac{\pi}{۶}$ آن گاه هر دو جواب امکان‌پذیر است.

۱۳۹. $\frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$

۱۴۰. الف. حجم هرم برابر است با یک سوم حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع. قاعدهٔ هرم مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ است. پس مساحت آن $۹\sqrt{۳}$ است. ارتفاع هرم مفروض با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در شکل نموده شده به‌دست می‌آید. امّا B مرکز قاعده (محل برخورد سه میانه) است و



$$AB=\frac{۲}{۳}(۳\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}\quad,\quad h^{۲}=(\sqrt{۱۵})^{۲}-(۲\sqrt{۳})^{۲}\quad,\quad h=\sqrt{۳}$$

بنابراین حجم هرم برابر است با: $\frac{۱}{۳}(۹\sqrt{۳})(\sqrt{۳})=۹$.

۱۴۱. قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت $\frac{b^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است. اندازهٔ شعاع قاعده مساوی است با:

$$\frac{۲}{۳}\times\frac{b\sqrt{۳}}{۲}=\frac{b}{\sqrt{۳}}$$

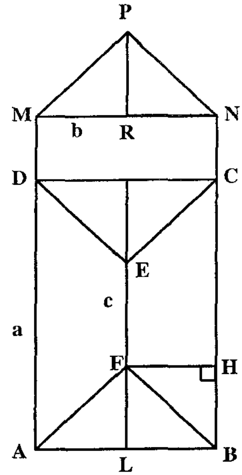
از آن‌جا برای ارتفاع h، داریم:

$$h=\sqrt{a^{۲}-\frac{b^{۲}}{۳}}$$

و برای حجم داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}\times\frac{b^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\sqrt{a^{۲}-\frac{b^{۲}}{۳}}=\frac{۱}{۱۲}b^{۲}\sqrt{۳a^{۲}-b^{۲}}$$

۱۴۲. جسم، چیزی جز یک منشور ناقص سه پهلو نیست. برای محاسبهٔ حجم آن باید مساحت مقطع قائم آن را در واسطهٔ حسابی یالهای جانبی‌اش ضرب کنیم. فرض می‌کنیم PMN مقطع قائم و ABCD تصویر افقی جسم باشد. مثلث FHB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.



بنابراین: $HB = FH = \frac{b}{\sqrt{۲}}$ ؛

در این صورت: $c = a - \frac{۲b}{۲} = a - b$

همچنین مثلث MPN قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس، $PR = RN = \frac{b}{۲}$. از آن‌جا نتیجه می‌شود:

مساحت $MNP = \frac{b}{۲} \times \frac{b}{۲} = \frac{b^۲}{۴}$

بنابراین حجم خواسته شده برابر است با:

$$V = \frac{۲a + a - b}{۳} \times \frac{b^۲}{۴} = \frac{(۳a - b)b^۲}{۱۲}$$

مساحت جانبی از دو ذوزنقهٔ مساوی و دو مثلث مساوی تشکیل می‌شود. ارتفاع مثلثهای مساوی با ارتفاع ذوزنقه یکی است و این ارتفاع وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به ضلع $\frac{b}{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$h^۲ = \frac{۲b^۲}{۴} = \frac{b^۲}{۲} \Rightarrow h = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

$\Rightarrow$ مساحت دو مثلث $= \frac{b^۲}{۲} \times \sqrt{۲}$ و

مساحت دو ذوزنقه $= ۲(\frac{۲a - b}{۲})(\frac{b\sqrt{۲}}{۲}) = (۲a - b) \times \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

$$\Rightarrow \text{مساحت جانبی جسم} = \frac{b^۲}{۲}\sqrt{۲} + (۲a-b)\frac{\sqrt{۲}}{۲}b$$

$$= \frac{b^۲}{۲}\times\sqrt{۲} + ab\sqrt{۲} - \frac{b^۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}ab$$

۱۴۳. به فرض $A\hat{S}C=\alpha$ و $DE=l$ و $S\hat{B}O=\beta$ (شکل). از مثلث SOB خواهیم داشت :

$$\cos\beta = \frac{OB}{SB} = \frac{۲AD}{\sqrt{۳}SB} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{AD}{SA} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\sin\frac{\alpha}{۲}$$

از مثلث SDE خواهیم داشت :

$BD=\frac{l}{\sin\beta}$ و از مثلث ABC داریم $BD=\frac{AC}{۲}\sqrt{۳}$، پس $AC=\frac{۲}{۳}\times\frac{l}{\sin\beta}\times ۳$،

در نتیجه $S_{ABC}=\frac{l^۲}{\sqrt{۳}\sin^۲\beta}$. چون $BO=\frac{۲}{۳}BD=\frac{۲l}{۳\sin\beta}$ است، در مثلث SOB

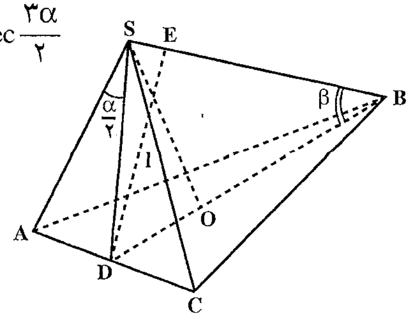
خواهیم داشت : $SO=OB\operatorname{tg}\beta=\frac{۲l}{۳\cos\beta}$ و حجم هرم خواهد شد :

$$V=\frac{۱}{۳}SO\times S_{ABC}=\frac{۱}{۳}\times\frac{l^۲}{\sqrt{۳}\sin^۲\beta}\times\frac{۲l}{۳\cos\beta}=\frac{۲l^۳}{۹\sin^۲\beta\cos\beta\times\sqrt{۳}}$$

$$\sin^۲\beta=۱-\cos^۲\beta=۱-\frac{۴}{۳}\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۳}(۳-۴\sin^۲\frac{\alpha}{۲})$$

$$=\frac{۱}{۳\sin\frac{\alpha}{۲}}(۳\sin\frac{\alpha}{۲}-۴\sin^۳\frac{\alpha}{۲})=\frac{\sin\frac{۳\alpha}{۲}}{۳\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

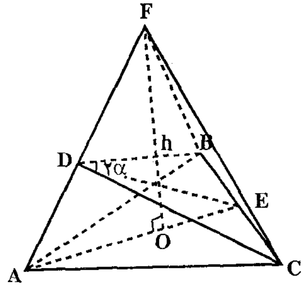
$$V=\frac{۲l^۳\times۳\sqrt{۳}\sin\frac{\alpha}{۲}}{۹\sqrt{۳}\sin\frac{۳\alpha}{۲}\times۲\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۱}{۳}l^۳\operatorname{cosec}\frac{۳\alpha}{۲}$$



۱۴۴. CB، یعنی ضلع قاعده را x می‌گیریم (شکل). برای حجم خواسته شده داریم :

$$V=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲}BC^{۲}\sin ۶۰^\circ\cdot FO$$

$$=\frac{x^{۲}}{۶}\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}h=\frac{x^{۲}\sqrt{۳}}{۱۲}h$$



از تشابه دو مثلث AFO و ADE به‌دست می‌آید : $AE:DE=AF:FO$. ولی

$$AE=AC\cdot\sin ۶۰^\circ=\frac{x\sqrt{۳}}{۲};DE=CE\,\mathrm{cotg}\alpha=\frac{x}{۲}\mathrm{cotg}\alpha;$$

$$OF=h;AF=FO.\frac{AE}{DE}=\sqrt{۳}.h.\mathrm{tg}\alpha$$

در مثلث AFO داریم : $AF^{۲}=AO^{۲}+OF^{۲}$ و چون

$$AO=\frac{۲}{۳}AE=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x;OF=h;AF=h\sqrt{۳}\mathrm{tg}\alpha$$

بنابراین، بترتیب خواهیم داشت :

$$(h\sqrt{۳}\mathrm{tg}\alpha)^{۲}=(\frac{\sqrt{۳}}{۳}x)^{۲}+h^{۲};۳h^{۲}\mathrm{tg}^{۲}\alpha=\frac{۱}{۳}x^{۲}+h^{۲};$$

$$\frac{۱}{۳}x^{۲}=۳h^{۲}\mathrm{tg}\alpha-h^{۲};x^{۲}=۹h^{۲}(\mathrm{tg}^{۲}\alpha-\mathrm{tg}^{۲}۳۰^\circ)$$

$$=\frac{۱۲\sin(\alpha+۳۰^\circ)\sin(\alpha-۳۰^\circ)}{\cos^{۲}\alpha}h^{۲}$$

و به این ترتیب : $$V=\frac{x^{۲}\sqrt{۳}}{۱۲}.h=\frac{\sqrt{۳}h^{۳}\sin(\alpha+۳۰^\circ)\sin(\alpha-۳۰^\circ)}{\cos^{۲}\alpha}$$

۱۴۵. ضلع قاعدهٔ هرم را a در نظر می‌گیریم و طول یال جانبی آن را b. از EF صفحه‌ای به موازات ASC بگذرانید و نقطه‌های برخورد آن را با BC و SB، K و N بنامید. چون E وسط سهم وجه SCB است، پس داریم،

$$AF=CK=\frac{a}{۴}$$

$$SN = \frac{b}{۴}\ ,\ \ KE = ۲EN$$

از L خط راستی به موازات AS رسم کنید و محل برخورد آن را با SC، P بنامید. داریم،

$$SP = \frac{۱}{۱۰}b$$

مثلثهای LPC و FNK متشابه‌اند. ضلعهای متناظر آنها موازی و علاوه بر این، LM و FE نیز موازی‌اند. یعنی،

$$PM/MC = NE/EK = \frac{۱}{۲}$$

در نتیجه

$$SM = \frac{۴}{۱۰}b$$

از آن‌جا

$$LF^۲ = \frac{۱۹}{۴۰۰}a^۲\ \ ,\ \ ME^۲ = ME^۲ = \frac{۱۵}{۴۰۰}a^۲ + \frac{۱}{۱۰۰}b^۲$$

از شرط $LF = ME$ نتیجه می‌شود، $a = b$.

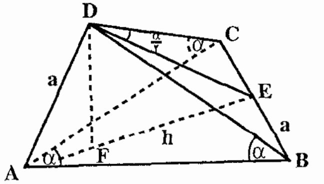
FNK مثلث متساوی‌الاضلاع است و طول ضلع آن برابر است با $\frac{۳}{۴}a$.

$$FE^۲ = \frac{۷}{۱۶}a^۲ = ۷$$

در نتیجه، $a = b = ۴$

جواب: $\frac{۱۶}{۳}\sqrt{۲}$

۱۴۶. DABC را هرم مفروض می‌گیریم (شکل). ارتفاع DE از وجه DCB و ارتفاع DF از هرم را رسم می‌کنیم. روشن است که نقطه‌های E و F ـ پای ارتفاعها ـ بر ارتفاع AE در مثلث ABC قرار می‌گیرند. فرض می‌کنیم: $x = AE = DE$. حجم خواسته شدهٔ V را می‌توان چنین نوشت:



$$V = \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۲}CB.AE.DF = \frac{۱}{۶}ax.DF$$

$$=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{AD^۲-AF^۲}=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{a^۲-AF^۲}$$

برای محاسبهٔ $AF = y$ ، مقدار $DF^۲$ را در دو مثلث ADF و EDF محاسبه می‌کنیم و، سپس برابر قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آید :

$$a^۲-y^۲=x^۲-(x-y)^۲ \Rightarrow a^۲=۲xy \Rightarrow y=\frac{a^۲}{۲x}$$

که در آن، مقدار x، چنین است :

$$x=DE=CE\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{۲}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

بنابراین

$$V=\frac{۱}{۶}ax\sqrt{a^۲-\frac{a^۴}{۴x^۲}}=\frac{a^۲}{۱۲}\sqrt{۴x^۲-a^۲}=\frac{a^۲}{۱۲}\sqrt{a^۲\operatorname{cotg}^۲\frac{\alpha}{۲}-a^۲}$$

$$=\frac{a^۳}{۱۲}\sqrt{\frac{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}}=\frac{a^۳\sqrt{\cos\alpha}}{۱۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

۱.۸.۱.۱.۲. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ چهار ضلعی

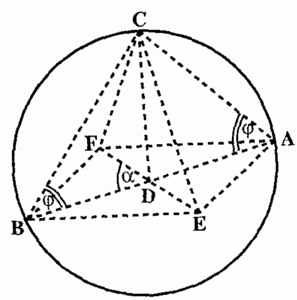
۱.۸.۱.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ مستطیل

۱۴۷. بنابر قضیهٔ سینوسها داریم، (شکل) :

$$AB=۲R\sin(ACB)=۲R\sin(۱۸۰^\circ-۲\varphi)=۲R\sin۲\varphi$$

و برای ارتفاع هرم

$$CD=AD.\operatorname{tg}\varphi=\frac{۱}{۲}AB.\operatorname{tg}\varphi=R\sin۲\varphi\operatorname{tg}\varphi$$



و بنابراین، حجم خواسته شده، چنین می‌شود :

$$V=\frac{1}{3}S.H=\frac{1}{6}AB.EF.\sin\alpha.CD=\frac{1}{6}AB^2.\sin\alpha.CD$$

$$=\frac{1}{6}.4R^2.\sin^2 2\varphi\sin\alpha.R.\sin 2\varphi tg\varphi=\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\varphi\, tg\varphi\sin\alpha$$

۱۴۸. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ECB، EAB و EDC (شکل) به‌دست می‌آید :

$$FB=2CB=2BE\cos\alpha=2m\cos\alpha;$$

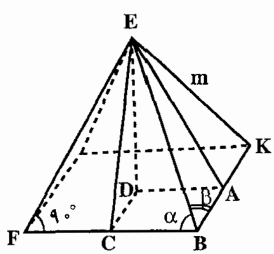
$$KB=2AB=2BE\cos\beta=2m\cos\beta;\ EC=EB\sin\alpha=m\sin\alpha;$$

$$ED=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{EC^2-AB^2}=\sqrt{m^2(\sin^2\alpha-\cos^2\beta)}$$

$$=m\sqrt{-\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}}=m\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

و حجم مجهول چنین می‌شود :

$$V=\frac{1}{3}FB.BK.ED=\frac{4}{3}m^3\cos\alpha\,\cos\beta\sqrt{-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$



یادداشت. $\cos(\alpha+\beta)<0$، زیرا $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ (مجهول دو زاویهٔ کنج سه وجهی بزرگتر از سومی است).

۱۴۹. $\frac{4h^3}{45}$

۱۵۰. چون یالهای جانبی هرم چهاربر، با یکدیگر برابرند، رأس آن در نقطهٔ O تصویر خواهد شد که مرکز مستطیل ABCD است. از طرف دیگر، از تساوی یالهای هرم سه بر معلوم می‌شود که تمام رأسهای قاعدهٔ آن بر روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. دایره‌ای که رأسهای قاعدهٔ هرم سه بر روی آن واقع شده است ضلعهای مستطیل ABCD را در نقطه‌هایی که در شکل (a) مشخص شده قطع می‌کند. از این که وجه‌های جانبی هرم

سه‌بر، مثلثهای متساوی‌الساقین معادل هستند، معلوم می‌شود که زاویه‌های رأس این مثلثها یا برابرند و یا مجموعشان $180°$ است. بنابراین قاعد، یک مثلث متساوی‌الساقین می‌شود. (ثابت کنید نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.) علاوه بر این، دو تا از رأسهای این مثلث نمی‌توانند روی ضلعهای کوچکتر مستطیل ABCD قرار داشته باشند. اگر قاعده را با مثلث LNS نشان دهیم، در آن صورت،

$$SL = LN \quad , \quad S\hat{L}N = 90°$$

و از آن جا نتیجه می‌شود که ABCD مربع است. اما اگر چنین شود که مثلث LNR قاعده بشود، در آن صورت از شرط $\alpha < 60°$ معلوم می‌گردد که

$$BN > NR$$

بنابراین ضلعهای RL و LN برابر خواهند شد، اگر، K و L بر وسط AB منطبق بشوند، با استدلال مشابه، به امکانات دیگری دست می‌یابیم:

رأسهای قاعدهٔ هرم سه بر، در نقطه‌های R ، N و P قرار بگیرند و P وسط CD بشود.

حالت اوّل را در نظر بگیرید (شکل b).

اگر
$$LO = ON = OR = r$$

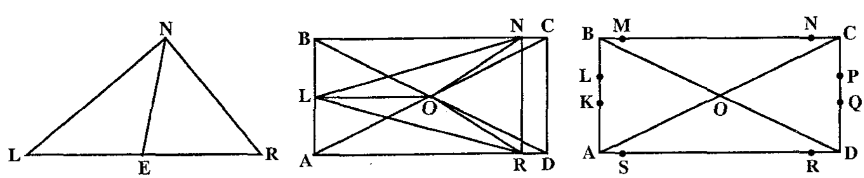
آن‌گاه
$$NR = CD = 2r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

امّا چون

$$L\hat{E}N + N\hat{E}R = 180°$$

از مثلثهای LNE و NER مثلثهای قائم‌الزاویهٔ LNR به‌دست می‌آید (شکل c). بنابراین،

$$LN = \sqrt{4LE^2 - NR^2} = \sqrt{4h^2 + 4r^2 - 4r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$



(c) (b) (a)

از طرف دیگر،

$$LN^2 = \left(r + r\sqrt{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + r^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

به این ترتیب،

$$r^۲ = \frac{۲h^۲}{۲tg^۲\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۱ - tg^۲\frac{\alpha}{۲}} - ۱}$$

با در نظر گرفتن مثلث NRP به طریق مشابه، خواهیم داشت :

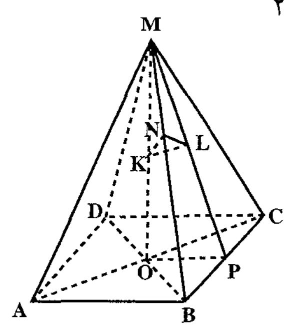
$$r^۲ < ۰$$

جواب :
$$\frac{۸h^۳ tg\frac{\alpha}{۲}}{۳(۲tg^۲\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۱ - tg^۲\frac{\alpha}{۲}} - ۱)}$$

۱.۸.۱.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ مربع

۱۵۱. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۵۲. $KN = h$ و $KL = a$ می‌گیریم (شکل). اگر ارتفاع MO برابر H باشد، داریم : $MK = \frac{۱}{۲}H$. در ضمن



$$MN = \sqrt{MK^۲ - KN^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴}H^۲ - h^۲}$$

$$ML = \sqrt{MK^۲ - KL^۲} = \sqrt{\frac{۱}{۴}H^۲ - a^۲}$$

مثلثهای MOB و MKN و، همچنین، مثلثهای MOP و MKL متشابه‌اند. برای اوّلیها داریم :

$$\frac{KN}{BO} = \frac{MN}{MO} \Rightarrow BO = MO.\frac{KN}{MN} = H.\frac{h}{\sqrt{\frac{۱}{۴}H^۲ - h^۲}}$$

و از مثلثهای متشابه دوم :

$$\frac{OP}{KL} = \frac{MO}{ML} \Rightarrow OP = KL.\frac{MO}{ML} = a.\frac{H}{\sqrt{\frac{۱}{۴}H^۲ - a^۲}}$$

ولی چون $OP = PB$، بنابراین $OB^2 = OP^2 + PB^2 = 2OP^2$. از آن‌جا:

$$\left(\frac{Hh}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - h^2}}\right)^2 = 2\left(\frac{Ha}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - a^2}}\right)^2;$$

$$h^2\left(\frac{1}{4}H^2 - a^2\right) = 2a^2\left(\frac{1}{4}H^2 - h^2\right)H = \frac{2ah}{\sqrt{2a^2 - h^2}}$$

ضلع قاعده را محاسبه می‌کنیم:

$$BC = 2BP = 2OP = 2 \times \frac{aH}{\sqrt{\frac{1}{4}H^2 - a^2}}$$

$$= 2 \times \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2h^2}{2a^2 - h^2} - a^2}} \cdot \frac{2ah}{\sqrt{2a^2 - h^2}} = \frac{2\sqrt{2}ah}{\sqrt{h^2 - a^2}}$$

و بنابراین

$$V = \frac{1}{3} . BC^2 . MO = \frac{16a^3h^3}{3(h^2 - a^2)\sqrt{2a^2 - h^2}}$$

۱۵۳. اگر طول قطر قاعدهٔ هرم را d بگیریم، داریم:

$$Q = \frac{1}{2}ad \Rightarrow d = \frac{2Q}{a}$$

ولی مجذور قطر مربع برابر با دو برابر مساحت آن است، بنابراین مساحت قاعدهٔ هرم چنین می‌شود:

$$S = \frac{2Q^2}{a^2}$$

و از آن‌جا حجم هرم به‌دست می‌آید.

جواب: $V = \frac{2}{3} . \frac{Q^2}{a}$

۱۵۴. هرم مربع‌القاعدهٔ $SABCD$ را در نظر می‌گیریم. ارتفاع SO و سهم SK را رسم می‌کنیم. داریم:

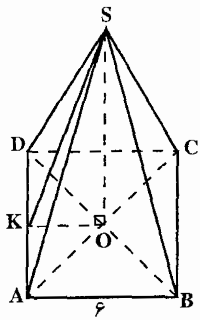
$$S_{\text{جانبی}} = \frac{1}{2}(4 \times 6) \times SK = 12SK$$

$S_{\text{جانبی}} = ۴\times S_{\text{قاعده}}$, $S_{\text{قاعده}} = ۶^۲ = ۳۶$

اندازهٔ سهم هرم $\Rightarrow ۱۲SK = ۴\times ۳۶ = ۱۴۴ \Rightarrow SK = ۱۲$

ارتفاع هرم $OK = \frac{AB}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow SO = \sqrt{SK^۲ - OK^۲} = \sqrt{۱۲^۲ - ۳^۲} = ۳\sqrt{۱۵}$

حجم هرم $= \frac{۱}{۳} \times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع $= \frac{۱}{۳}\times ۶^۲ \times ۳\sqrt{۱۵} = ۳۶\sqrt{۱۵}$



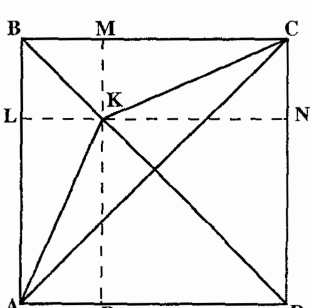
۱۵۵. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که چهارضلعی ABCD محدب است.

جواب : $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

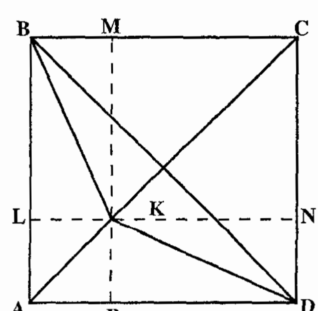
۱۵۶. نقطهٔ K را تصویر رأس S، بر روی صفحه ABCD، و نقطه‌های L، M، N و P را هم تصویر S بترتیب بر روی ضلعهای AB، BC، CD و DA در نظر بگیرید. از فرض مسأله معلوم می‌شود که مثلثهای LSN و MSP در رأس S قائم‌اند. در نتیجه :

$LK.KN = MK.KP = KS^۲$

و چون $LK + KN = MK + KP = a$ دو حالت اتفاق می‌افتد.



(a)



(b)

یا
$$LK = KM \quad ، \quad KP = KN$$
و یا
$$LK = KP \quad ، \quad KM = KN$$
یعنی نقطهٔ K یا روی قطر AC و یا BD قرار دارد. هر دو حالت را درنظر بگیرید.

۱. K بر روی قطر BD قرار دارد. (شکل a) تصویر هرم بر روی صفحهٔ شکل، ABCD خواهد بود. نقطهٔ S «بالای» K قرار دارد. با قرار دادن
$$LK = KM = x$$
خواهیم داشت،
$$KS = \sqrt{LK.KN} = \sqrt{x(a-x)}$$
$$SL = \sqrt{LK + KS} = \sqrt{ax}$$
$$S_{ABS} = \frac{a\sqrt{ax}}{۲}$$
به طریق مشابه،
$$S_{ADS} = \frac{a\sqrt{a(a-x)}}{۲}$$
و بالاخره،
$$V_{ABDS} = \frac{۱}{۶}a^۲\sqrt{x(a-x)}$$
از طرف دیگر با استفاده از فرمول خواهیم داشت،
$$V_{ABDS} = \frac{۲}{۳}\,\frac{S_{ABS}.S_{BDS}\sin\alpha}{AK} = \frac{a^۳\sqrt{x(a-x)}\sin\alpha}{۶\sqrt{(a-x)^۲ + x^۲ + x(a-x)}}$$
با مساوی قرار دادن دو عبارت V_{ABDS} ، داریم،
$$x^۲ - ax + a^۲\cos^۲\alpha = ۰$$
و یا
$$x(a-x) = a^۲\cos^۲\alpha$$
$$V_{ABCDS} = \frac{a^۳|\cos\alpha|}{۳}$$
اگر
$$|\cos\alpha| \leq \frac{۱}{۲}$$
مسأله یک جواب دارد. علاوه بر این، فرجهٔ نظیر یال AS حاده است، زیرا صفحهٔ ASM، بر وجه ASD عمود است و این صفحه از داخل فرجهٔ بین صفحه‌های ASB و

ASD می‌گذرد. پس در حالت اوّل، اگر،

$$\frac{\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۲\pi}{۳}$$

مسأله یک جواب دارد.

۲. نقطهٔ K بر روی قطر AC قرار دارد. (شکل b). با استدلال مشابه حالت اوّل، (مانند قبل $LK = x$ قرار دهید). خواهیم داشت:

$$V_{ABDS} = \frac{a^۲\sqrt{x(a-x)}}{۶} = \frac{a^۳ x \sin\alpha}{۶\sqrt{x(x+a)}}$$

از آن‌جا به آسانی نتیجه می‌شود:

$$x = a|\cos\alpha|$$

$$V = \frac{a^۳\sqrt{|\cos\alpha|(۱-|\cos\alpha|)}}{۶}$$

مانند حالت اوّل، $\alpha > \frac{\pi}{۲}$

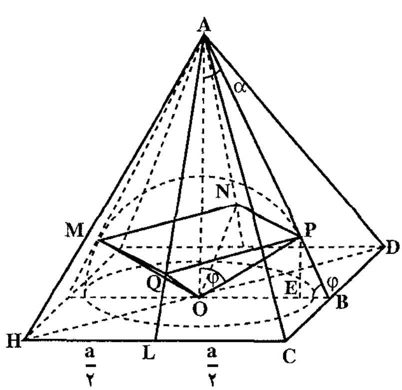
بنابراین جواب را پیدا می‌کنیم:

اگر $\frac{\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۲\pi}{۳}$ دو جواب،

$$V_۲ = \frac{a^۳\sqrt{-\cos\alpha(۱+\cos\alpha)}}{۶} \quad , \quad V_۱ = -\frac{a^۳\cos\alpha}{۶}$$

اگر $\alpha > \frac{۲\pi}{۳}$، آن‌گاه

$$V = \frac{a^۳\sqrt{-\cos\alpha(۱+\cos\alpha)}}{۶}$$



۱۵۷. چند وجهی که باید V، حجم آن را به دست آورد، یک هرم است. رأسهای M، N، P و Q از قاعدهٔ این هرم، روی سهمهای هرم مفروض قرار دارند (شکل). برای اثبات این حکم، صفحه‌ای را از ارتفاع AO هرم مفروض و شعاع OP از نیمکره می‌گذرانیم (P، نقطهٔ تماس نیمکره با وجه ACD است). چون AO بر صفحهٔ

قاعدهٔ هرم و OP بر صفحهٔ وجه جانبی عمودند، پس صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، بر هر دو صفحهٔ مذکور و، بنابراین، بر فصل مشترک آنها، CD، عمود است. و این، به معنای آن است که AB، یعنی فصل مشترک صفحهٔ رسم شده با صفحهٔ CAD، بر CD عمود است و، به این ترتیب، AB، که نقطهٔ تماس P روی آن قرار دارد، یک سهم است. برای حجم داریم:

$$V=\frac{1}{3}PQ^2.PE$$

برای تعیین PQ از تشابه دو مثلث APQ و ABL استفاده می‌کنیم. در این مثلثها داریم:

$$\frac{PQ}{LB}=\frac{AP}{AB}$$

ولی

$$LB=\frac{1}{2}KD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

و برای پیدا کردن نسبت $\frac{AP}{AB}$، هر یک از دو زاویهٔ برابر AOP و PBE را φ می‌گیریم. داریم:

$$AP=AO\sin\varphi=AB\sin^2\varphi;\ \frac{AP}{AB}=\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi=1-(\frac{OB}{OA})^2$$

$$=1-(\frac{BD}{AB})^2=1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

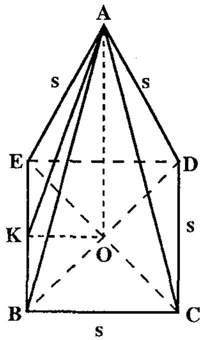
$$PQ=LB.\frac{AP}{AB}=\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\ ;\ PE=PB\sin\varphi$$

$$=OB\cos\varphi\sin\varphi=\frac{a}{2}.\frac{OB}{AB}\sin\varphi=\frac{a}{2}.\frac{BD}{AB}\ \sin\varphi$$

$$=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

بنابراین

$$V=\frac{1}{3}(\frac{a\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}})^2.\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{12\cos^6\frac{\alpha}{2}}$$



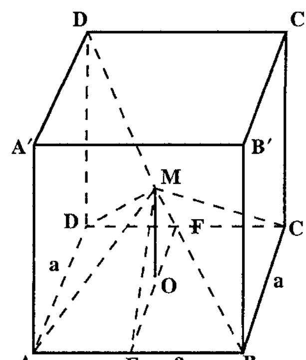
۱۵۸. سهم هرم و از آن‌جا، ارتفاع هرم را برحسب s به‌دست می‌آوریم.
چون وجه‌ها مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند، بنابراین داریم:

$$AK = \frac{s\sqrt{۳}}{۲} \text{ سهم هرم } , \quad OK = \frac{s}{۲} = \text{سهم قاعده}$$

$$AO = \sqrt{AK^{۲} - OK^{۲}} = \sqrt{\frac{۳s^{۲}}{۴} - \frac{s^{۲}}{۴}} = \sqrt{\frac{s^{۲}}{۲}} = \frac{s}{\sqrt{۲}} = \frac{s\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times s^{۲} \times \frac{s\sqrt{۲}}{۲} = \frac{s^{۳}\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}s^{۳}}{۶}$$

۱۵۹. وسط یالهای AB و CD را بترتیب E و F می‌نامیم. EF را از M به O وسط EF (مرکز مربع ABCD) وصل می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} MA^{۲} + MB^{۲} = ۲ME^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} & (۱) \\ MC^{۲} + MD^{۲} = ۲MF^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} & (۲) \end{cases}$$

از جمع کردن عضوهای نظیر دو رابطهٔ بالا با توجه به این که بنا به فرض $MA^{۲} + MB^{۲} + MC^{۲} + MD^{۲} = ۴a^{۲}$ است، نتیجه می‌شود:

$$۴a^{۲} = ۲(ME^{۲} + MF^{۲}) + a^{۲} \Rightarrow ME^{۲} + MF^{۲} = \frac{۳a^{۲}}{۲} \quad (۳)$$

در مثلث MEF، می‌توان نوشت:

$$ME^{۲} + MF^{۲} = ۲MO^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \quad (۴)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$OM^{۲} = \frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

با مشخص شدن اندازهٔ MO، می‌توان فاصلهٔ M از صفحهٔ ABCD یعنی اندازهٔ ارتفاع هرم، و از روی آن، اندازهٔ حجم هرم را به‌دست آورد.

۱۶۰. الف. ارتفاع هرم را تعیین می‌کنیم و از آن‌جا حجم هرم را به‌دست می‌آوریم:

$$OK=\frac{۱۴}{۲}=۷ \quad , \quad h'=۲۵\Rightarrow h=\sqrt{h'^۲-OK^۲}=\sqrt{۶۲۵-۴۹}=\sqrt{۵۷۶}$$

$$=\ ۲۴\Rightarrow \text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times ۱۴^۲\times ۲۴=۱۵۶۸\,cm^۳$$

ب. ضلع قاعدهٔ هرم را به‌دست می‌آوریم و سپس حجم هرم را تعیین می‌کنیم.

$$h'=\sqrt{h^۲+OK^۲}\ \Rightarrow ۶/۵=\sqrt{۶^۲+OK^۲}=\frac{۱۶۹}{۴}=۳۶+OK^۲$$

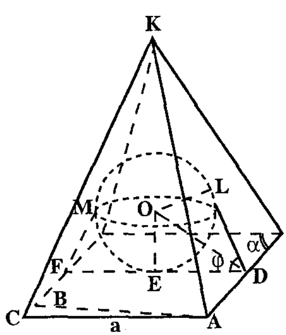
$$\Rightarrow OK^۲=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow OK=\frac{۵}{۲}\Rightarrow a=۵ \qquad \text{ضلع مربع قاعده}$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times ۵^۲\times ۶=۵۰\,cm^۳$$

پ. با معلوم بودن a و h حجم هرم را می‌توان به‌دست آورد.

$$\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times ۱^۲\times ۱/۳=\frac{۱/۳}{۳}cm^۳$$

۱.۸.۱.۱.۲.۳. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ لوزی



۱۶۱. صفحهٔ LDE را از نقطه‌های L و E (نقطه‌های تماس کره با دو وجه هرم) و نقطهٔ O (مرکز کره) می‌گذرانیم (شکل). این صفحه، که از OE و OL، دو خط عمود بر این وجه‌ها، می‌گذرد، بر دو وجه و، بنابراین، بر فصل مشترک آنها عمود است. بنابراین: $\widehat{LDE}=\varphi$. صفحهٔ LDE، CF را در نقطهٔ F تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. از آن‌جا روشن است که پاره‌خط FD، که برابر با ارتفاع لوزی است، به‌وسیلهٔ نقطهٔ تماس E نصف می‌شود. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$r=DE.tg\frac{\varphi}{۲}=\frac{۱}{۲}DF.tg\frac{\varphi}{۲}=\frac{AC}{۲}\sin\alpha tg\frac{\varphi}{۲}$$

$$= \frac{a}{۲} \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{۲} \;;\; V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{\pi a^۳}{۶} \sin^۳\alpha \operatorname{tg}^۳\frac{\varphi}{۲}$$

۱.۸.۱.۱.۲.۴. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ ذوزنقه

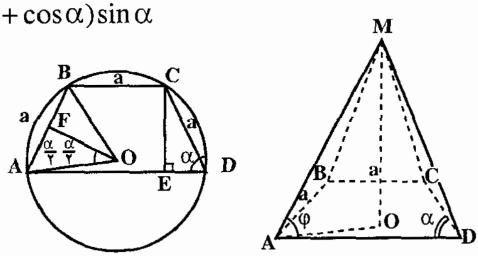
۱۶۲. داریم (شکل):

$$V = \frac{۱}{۳} S_{ABCD} . OM,$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{۲} . CE = \frac{BC+۲DE+BC}{۲} . CE = (BC+DE).CE$$

$$= (a + a\cos\alpha) a \sin\alpha = a^۲(۱+\cos\alpha)\sin\alpha$$

$$= ۲a^۲ \sin\alpha \cos^۲\frac{\alpha}{۲}$$



برای تعیین ارتفاع OM هرم، توجه می‌کنیم که، به دلیل شیب یکسان یالها نسبت به قاعده، تصویر رأس هرم بر قاعده، روی مرکز دایرهٔ محیطی قاعده می‌افتد؛ مرکز این دایره O، و شعاع آن AO است. این شعاع را محاسبه می‌کنیم. دایرهٔ محیطی ذوزنقه را رسم می‌کنیم. چون وترهای AB، BC و CD برابرند، کمانهای متناظر آنها هم، برابر می‌شوند. از این جا نتیجه می‌گیریم $A\hat{O}B = \alpha$ (زیرا $\overset{\frown}{AB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$). اکنون از مثلث OFA به‌دست می‌آید:

$$AO = \frac{AF}{\sin\frac{\alpha}{۲}} = \frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

و از مثلث MOA:

$$MO = AO.\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}} \operatorname{tg}\varphi$$

و در نتیجه

$$V = \frac{۱}{۳} . ۲a^۲ \sin\alpha\cos^۲\frac{\alpha}{۲} . \frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}} . \operatorname{tg}\varphi$$

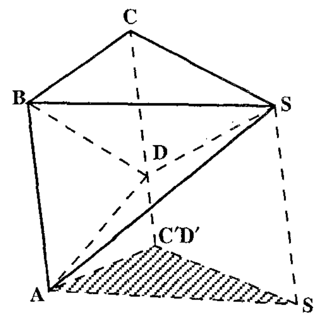
$$=\frac{۲}{۳}a^۳\cos^۳\frac{\alpha}{۲}\text{tg}\varphi$$

۱۶۳. قطر BD از ذوزنقهٔ ABCD را رسم می‌کنیم و صفحهٔ P را عمود بر AB در نقطهٔ A در نظر می‌گیریم.

تصویر هرم روی صفحهٔ P مثلث $S'AC'$ است. چنان که می‌دانیم:

$S.ABD$ حجم هرم $=\frac{۱}{۳}AB\times S'AC'$ مساحت ,

$S.CBD$ حجم $=\frac{۱}{۳}CD\times S'AC'$ مساحت



از جمع کردن عضوهای متناظر دو رابطهٔ بالا داریم:

$S.ABCD$ حجم $=\frac{۱}{۳}(AB+CD)\times S'AC'$ مساحت

۱۶۴. چون شیب وجه‌های هرم نسبت به قاعده، یکسان است، بنابراین، می‌توان دایره‌ای در قاعده محاط کرد، به‌نحوی که تصویر رأس هرم بر قاعده، روی نقطهٔ O، مرکز این دایره، قرار گیرد (شکل). برای حجم مجهول داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}.MO$$

ارتفاع $MO=\sqrt{EM^۲-EO^۲}$ را محاسبه می‌کنیم. از روی شکل مربوط به قاعدهٔ ABCD دیده می‌شود:

$$h=BK=۲EO\Rightarrow EO=\frac{۱}{۲}h$$

اکنون EM را از مثلث EMF به‌دست می‌آوریم. اگر مساحت آن را S بگیریم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}ME^۲\sin\alpha\Rightarrow ME=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}}$$

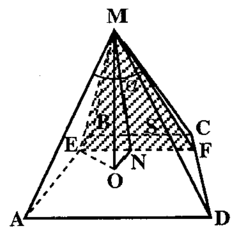
از آن‌جا $MO=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}-\frac{۱}{۴}h^۲}$. برای مساحت قاعده داریم:

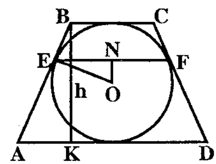
$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{۲}.BK=AB.BK=AB.h$$

(با توجه به محیطی بودن چهارضلعی داریم : $AD+BC=AB+CD$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن ذوزنقه : $AB=AD$) باید به سراغ محاسبهٔ AB برویم. از تشابه دو مثلث ABK و ENO داریم : $AB:BK=EO:EN$ ؛ ولی $BK=h$ و $ED=\frac{۱}{۲}h$ ،

بنابراین

$$AB=BK.\frac{EO}{EN}=\frac{h^{۲}}{۲EN}$$





از مثلث EMN به دست می‌آید :

$$EN=EM\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}}.\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{۲S.\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}}=\sqrt{S.tg\frac{\alpha}{۲}}$$

و از آن‌جا

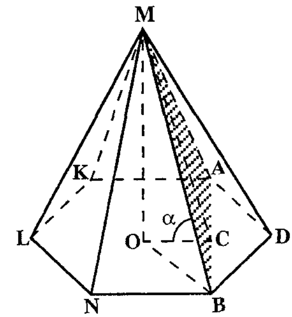
$$AB=\frac{h^{۲}}{۲\sqrt{S.tg\frac{\alpha}{۲}}}\quad ;S_{ABCD}=\frac{h^{۳}}{۲\sqrt{S.tg\frac{\alpha}{۲}}}$$

و برای حجم مجهول

$$V=\frac{h^{۳}}{۶\sqrt{S.tg\frac{\alpha}{۲}}}.\sqrt{\frac{۲S}{\sin\alpha}-\frac{h^{۲}}{۴}}=\frac{h^{۳}}{۱۲\sqrt{۲S}\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{۸S-h^{۲}\sin\alpha}$$

۱.۸.۱.۱.۲.۵. اندازهٔ حجم هرم با قاعدهٔ n ضلعی

۱۶۵. AMB را صفحه‌ای می‌گیریم که موجب تقسیم قاعدهٔ هرم به دو چند ضلعی می‌شود (شکل). حجم مجهول



$$V=\frac{۱}{۳}S.H=\frac{۱}{۳}n.\frac{۱}{۲}OB^{۲}.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}.OM$$

$$=\frac{n}{۶}\left(\frac{CB}{\sin(C\hat{O}B)}\right)^{۲}\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}.OC.tg\alpha$$

$$=\frac{n}{۶}\left[\frac{b}{۲\sin\frac{۱۸۰^\circ(r+۱)}{n}}\right]^{۲}\times OC.tg\alpha.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

$$=\frac{n}{۶}.\frac{b^{۲}}{۴\sin^{۲}\frac{۱۸۰^\circ(r+۱)}{n}}.\frac{b}{۲}\cot g\frac{۱۸۰^\circ(r+۱)}{n}\times\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}.tg\alpha$$

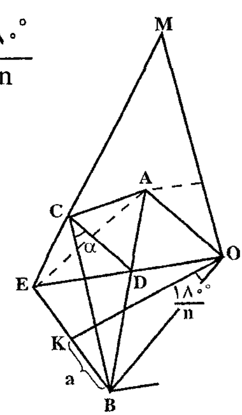
$$=\frac{nb^{۲}\cos\frac{۱۸۰^\circ(r+۱)}{n}.\sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}.tg\alpha}{۴۸\sin^{۳}\frac{۱۸۰^\circ(r+۱)}{n}}$$

یادداشت. از شرط $r<\frac{n-۲}{۲}$ نتیجه می‌شود : $r+۲<\frac{n}{۲}+۱$ ؛ یعنی $n-r>\frac{n}{۲}+۱$ بنابراین $n-r>r+۲$ و زاویهٔ AOB (شکل)، متناظر با چند ضلعی با تعداد ضلعهای کمتر، همیشه از ۱۸۰ درجه کوچکتر است.

۱۶۶. از روی شکل، بخشی از هرم با قاعدهٔ n ضلعی نشان داده شده است. $A\hat{C}B=۲\alpha$ ، زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال جانبی است. مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم :

$$S=n.S_{OBE}=n.\frac{۱}{۲}BE.OK=n.\frac{۱}{۲}.۲a.a.\text{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$=n.a^{۲}\,\text{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$



OM، ارتفاع هرم را پیدا می‌کنیم. از تشابه مثلثهای OME و CDE داریم :

$$OM:CD=EO:EC$$

از طرف دیگر

$$OE=OB=\frac{KB}{\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}=\frac{a}{\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}};CD=BD.\mathrm{cotg}\alpha$$

$$=BE.\cos(D\hat{B}E).\mathrm{cotg}\alpha=۲a\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}\mathrm{cotg}\alpha;$$

$$D\hat{B}E=K\hat{O}B.$$

$$EC=\sqrt{ED^۲-CD^۲}=\sqrt{(EB\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n})^۲-CD^۲}$$

$$=\sqrt{(۲a\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n})^۲-(۲a\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}\cot g\alpha)^۲}$$

$$=\frac{۲a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}\sin^۲\alpha-\cos^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}\cos^۲\alpha}$$

$$=\frac{۲a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha)\cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}-\alpha)}$$

بنابراین، برای حجم مجهول خواهیم داشت :

$$V=\frac{۱}{۳}.S.OM=\frac{۱}{۳}S.CD\frac{EO}{EC}$$

$$=\frac{۱}{۳}.\frac{na^۲\,\mathrm{cotg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}.۲a\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}.\mathrm{cotg}\alpha\frac{a}{\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}}{\frac{۲a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha)\ \cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}-\alpha)}}$$

$$=\frac{na^۳\cos\alpha.\mathrm{cotg}^۲\frac{۱۸۰^\circ}{n}}{۳\sqrt{-\cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha)\cos(\frac{۱۸۰^\circ}{n}+\alpha)}}$$

یادداشت. $\cos(\frac{180^\circ}{n}+\alpha)<0$، زیرا $\frac{180^\circ}{n}+\alpha>\frac{\pi}{2}$. در واقع، زاویهٔ $E\hat{B}D$ (که برابر $\frac{180^\circ}{n}$ است) از زاویهٔ $C\hat{B}D$ بزرگتر است، زیرا داریم :

$$\operatorname{tg}(E\hat{B}D)=\frac{ED}{BD}>\frac{CD}{BD}=\operatorname{tg}(C\hat{B}D)$$

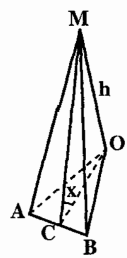
از آن‌جا

$$\frac{180^\circ}{n}+\alpha>C\hat{B}D+B\hat{C}D=90^\circ$$

۱۶۷. برای مجموع زاویه‌های داخلی چند ضلعی داریم :

$$180^\circ(m-2)=90^\circ n;\ 2(m-2)=n\Rightarrow m=\frac{n}{2}+2$$

زاویهٔ MCO را x می‌گیریم (شکل، که در آن، $\frac{1}{m}$ همهٔ هرم نشان داده شده است). بنابر شرط مسأله داریم :



$$\frac{S_{\text{جانبی}}}{S_{\text{قاعده}}}=k$$

بنابراین

$$\frac{m.\frac{1}{2}.AB.MC}{m.\frac{1}{2}.AB.OC}=k;\ \frac{MC}{OC}=k;\ \cos x=\frac{OC}{MC}=\frac{1}{k}$$

اکنون مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم :

$$S_{\text{قاعده}}=m.\frac{1}{2}AB.OC=m.AC.OC=m.OC\operatorname{tg}\frac{360^\circ}{2m}.OC$$
$$=m.OC^2\operatorname{tg}\frac{360^\circ}{n+4}$$

از مثلث MOC به‌دست می‌آید :

$$OC=OM.\operatorname{cotg}x=h\operatorname{cotg}x=\frac{h\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{h}{\sqrt{h^2-1}}$$

و بنابراین

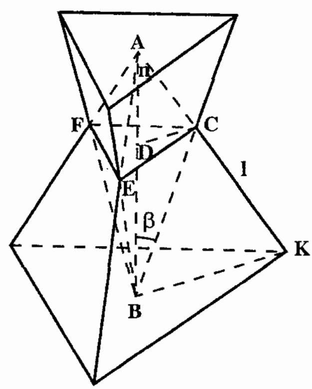
$$S_{\text{قاعده}} = \frac{mh^{۲}}{k^{۲}-۱}.\mathrm{tg}\frac{۳۶۰^\circ}{n+۴};\ V = \frac{(n+۴)h^{۳}}{۶(k^{۲}-۱)}.\mathrm{tg}\frac{۳۶۰^\circ}{n+۴}$$

یادداشت. OC را، بدون استفاده از مثلثات هم می‌توان محاسبه کرد. در واقع، از برابری $\frac{CM}{OC} = k$ به‌دست می‌آید : $CM = k.OC$ ؛ و از مثلث MOC ؛ نتیجه می‌شود :

$$(k.OC)^{۲} = OC^{۲} + h^{۲} \Rightarrow OC = \frac{h}{\sqrt{k^{۲}-۱}}$$

۱۶۸. حجم مجهول V، از دو هرم تشکیل شده است که در قاعدهٔ ECF مشترکند و ارتفاعهای آن AD و DB است (شکل). مساحت قاعده را S می‌گیریم. داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}S.AD + \frac{۱}{۳}S.DB = \frac{۱}{۳}S(AD+DB) = \frac{۱}{۳}S.AB$$



که در آن : $AB = AK.\cos\alpha = l\cos\alpha$. برای این که مساحت S، مثلث متساوی‌الاضلاع را پیدا کنیم، به سراغ شعاع CD، دایرهٔ محیطی آن، می‌رویم :

$$AB = l\cos\alpha = AD + DB = CD.\mathrm{cotg}\alpha + CD.\mathrm{cotg}\beta$$

$$= CD(\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta) = CD.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow CD = \frac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

و از آن جا

$$V = \frac{۱}{۳}S.AB = \frac{۱}{۳}EC^{۲}.\frac{\sin ۶۰^\circ}{۲}.AB$$

$$=\frac{۱}{۳}(CD\sqrt{۳})^{۲}.\frac{\sqrt{۳}}{۴}AB=\frac{\sqrt{۳}l^{۳}\sin^{۲}\alpha\cos^{۳}\alpha\sin^{۲}\beta}{۴\sin^{۲}(\alpha+\beta)}$$

۱.۸.۱.۱.۲.۶. اندازهٔ حجم هرم با بیشترین تعداد یال

۱۶۹. $\frac{۵+\sqrt{۵}}{۲۴}a^{۳}$

۱.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم هرم ناقص

۱۷۰. h' را ارتفاع هرم کوچک فرض کنید. حجم دو هرم را به‌دست آورید. دقت کنید که

$$\frac{h+h'}{h'}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$$

و در نتیجه

$$\frac{h}{h'}=\frac{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}{\sqrt{B'}}\quad,\quad h'=\frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}$$

۱۷۱. حجم یک منشور ناقص با قاعده‌های موازی b و b' و ارتفاع h برابر است با:

$$\frac{h}{۳}(b+b'+\sqrt{bb'})$$

بنابراین باید ثابت کنیم که:

$$\frac{h}{۶}(b+b'+۴b'')=\frac{h}{۳}(b+b'+\sqrt{bb'})$$

و یا

$$۴b''=b+b'+۲\sqrt{bb'}$$

امّا، قاعده‌ها و مقطع موردنظر، چند ضلعیهای متشابه‌اند. پس اگر a، a' و a'' اندازهٔ ضلع آنها باشد، داریم:

$$\frac{b''}{a''^{۲}}=\frac{b}{a^{۲}}=\frac{b'}{a'^{۲}}\Rightarrow\frac{\sqrt{b''}}{a''}=\frac{\sqrt{b}}{a}=\frac{\sqrt{b'}}{a'}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{b'}}{a+a'}$$

از طرفی در ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و a'، پاره‌خط واصل بین وسط ساقها $a''=\frac{a+a'}{۲}$ است؛ از آن‌جا:

$$۲\sqrt{b''}=\sqrt{b}+\sqrt{b'}\Rightarrow ۴b''=b+b'+۲\sqrt{bb'}$$

و حکم ثابت است.

۱۷۲. با استفاده از دستور $V=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})$ ، داریم :

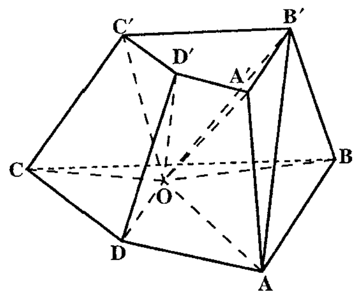
$$V=\frac{۱۰}{۳}(۱۶+۱۲+\sqrt{۱۶\times۱۲})=\frac{۱۰}{۳}(۲۸+۸\sqrt{۳})cm^{۳}$$

۱۷۳. فرض می‌کنیم، b و b' قاعده‌ها ؛ h ارتفاع و V حجم هرم ناقص باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$V=\frac{h}{۳}(b+b'+\sqrt{bb'})$$

و یا :

$$V=\frac{bh}{۳}+\frac{b'h}{۳}+\frac{\sqrt{bb'}h}{۳}$$



برای اثبات، نقطهٔ O را در درون قاعدهٔ ABCD اختیار می‌کنیم و آن را به تمام رأسهای هرم وصل می‌کنیم. در این صورت هرم ناقص به هرمهایی تجزیه می‌شود که یکی $O.A'B'C'D'$ است که اندازهٔ حجم آن مساوی $\frac{b'h}{۳}$ است و هرمهای دیگر به رأس O می‌باشند و قاعده‌های آنها ذوزنقه‌های جانبی می‌باشند.

یکی از این هرمها، به‌عنوان مثال هرم $O.ABB'A'$ را در نظر می گیریم. با رسم قطر AB' ، این هرم به دو هرم سه پهلوی $OABB'$ و $OAB'A'$ تجزیه می‌شود.

ارتفاع هرم $OABB'$ ، مساوی h و قاعدهٔ آن OAB است. پس حجم آن مساوی $\frac{۱}{۳}S_{OAB}\times h$ است ؛ با توجه به روش مشابه برای تجزیهٔ هرمهای چهار پهلوی دیگر دیده می‌شود که مجموع حجم هرمهای سه پهلویی که سه رأس آنها روی قاعدهٔ پایینی و یک رأس آنها روی قاعدهٔ بالایی است برابر است با :

$$\frac{(OAB+OBC+\cdots)h}{۳}=\frac{bh}{۳}$$

آنچه که باقی می‌ماند آن است که، حجم هرمهایی مانند $OAB'A'$ را محاسبه کنیم که دو رأس روی هر یک از قاعده‌ها دارند، داریم :

$$\frac{\text{حجم}\ O.AB'A'}{\text{حجم}\ O.ABB'}=\frac{\text{مساحت}\ AB'A'}{\text{مساحت}\ ABB'}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}}\ ;$$

$$\Rightarrow \text{حجم}\ O.AB'A'=\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}}\times \text{حجم}\ O.ABB'$$

نتیجه می‌شود که مجموع حجمهای هرمهای نظیر $OAB'A'$ مساوی است با حاصلضرب $\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}}$ در مجموع حجمهای هرمهای سه وجهی $OABB'$، که این مجموع برابر است با:

$$\frac{bh}{۳}\times\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{bb'}.h}{۳}$$

بنابراین حکم مسأله درست است.

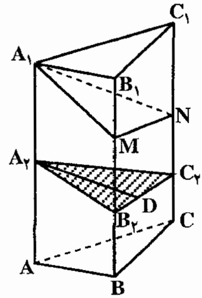
۱۷۴. ابعاد هرم بالایی $\frac{۱}{۲}$ ابعاد هرم اصلی هستند. پس حجم هرم بالایی برابر است با $\frac{۱}{۸}$ حجم هرم اصلی. از آن‌جا:

$$\text{حجم هرم ناقص}=V-\frac{۱}{۸}V=\frac{۷}{۸}V$$

پس گزینهٔ (۲) درست است.

۱۷۵. فرض می‌کنیم که $A_۲B_۲C_۲$ برش قائم منشور (شکل) و $A_۲D$، ارتفاع همان برش باشد. با در نظر گرفتن عبارتهای $A_۲D=h$ ، $B_۲C_۲=a$ و $AA_۱=l$ رابطه‌های زیر را داریم:

$$BM=ml\ ,\ \ CN=nl\ ,\ \ B_۱M=(۱-m)l\ ,\ \ C_۱N=(۱-n)l$$



حجم هرم $A_۱B_۱C_۱NM$ را به‌دست می‌آوریم. قاعده، این هرم عبارت از ذوزنقهٔ

B_1C_1NM است. ارتفاع ذوزنقه، برابر B_2C_2 ؛ یعنی برابر a است. مساحت این ذوزنقه را به‌دست می‌آوریم :

$$S_{tr} = \frac{1}{2}(B_1M + C_1N).a = \frac{2-m-n}{2}al$$

توجه داریم که پاره‌خط A_2D بر صفحهٔ BB_1C_1C عمود بوده و از این رو، ارتفاع رسم شده از رأس A_1 در هرم $A_1B_1C_1NM$ ، برابر $A_2D = h$ خواهد بود. بنابراین نتیجه می‌شود که اگر V_1 حجم هرم باشد آن‌گاه $V_1 = \frac{1}{3}hS_{tr} = \frac{1}{6}(2-m-n)lah$ خواهد بود. حال مساحت برش قائم منشور را به‌دست می‌آوریم :

$$S = \frac{1}{2}ah$$

این امر بدین معنی است که حجم کل منشور را می‌توان با فرمول $V = \frac{1}{2}lah$ بیان کرد.

با مقایسه عبارتهای مربوط به V_1 و V، درمی‌یابیم که $V_1 = \frac{1}{3}(2-m-n)V$ است.

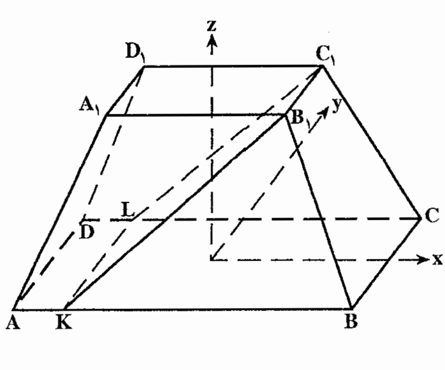
آن گاه متوجه می‌شویم که V_2 ، حجم چند وجهی $ABCA_1MN$ چنین است :

$$V_2 = V - V_1 = \frac{1+m+n}{3}V$$

برای محاسبه حجم یک چند وجهی اغلب از تبدیل و تکمیل آن چند وجهی به یک هرم یا منشور، و تقسیم چند وجهی به این شکلهای فضایی استفاده می‌شود.

۱۷۶. از Sh تا $\frac{4}{3}Sh$

۱۷۷. صفحه‌ای را از B_1C_1 می‌گذرانیم تا AB و DC را در نقطه‌های K و L قطع کند (شکل). به فرض چند وجهیهای $AKLDA_1B_1C_1D_1$ و $KBCLB_1C_1$ دارای حجمهای



مساوی‌اند. با به کار بردن فرمول سیمپسون و قرار دادن $AK = DL = a$ و از آن جایی که ارتفاع این دو چند وجهی با هم برابرند، معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید،

$$۷a+۱ = ۴\frac{(a+۱)}{۲}.\frac{(۷+۱)}{۲} = (۷-a)۷ + ۴\frac{(۷-a)}{۲}.\frac{(۷+۱)}{۲}$$

و یا

$$a = \frac{۱۶}{۵}$$

ارتفاع هرم را با h نشان دهید. محورهای مختصاتی انتخاب کنید که مبدأ آن مرکز ABCD، و محور xها و yها در آن، بترتیب به موازات AB و BC باشند. مختصات A، C و $D_۱$ بترتیب چنین خواهند بود،

$$(-\frac{۷}{۲}, -\frac{۷}{۲}, ۰), (\frac{۷}{۲}, \frac{۷}{۲}, ۰), (-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, h)$$

بآسانی می‌توان معادلهٔ صفحهٔ $ACD_۱$ را نوشت، که چنین است،

$$hx - hy + z = ۰$$

معادلهٔ صفحهٔ $KLC_۱B_۱$ هم، به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$۱۰hx - ۸z + ۳h = ۰$$

بردارهای نرمال صفحه‌ها عبارتند از $n(h,-h,۱)$ و $m(۱۰h,۰,-۸)$ ؛ شرط عمود بودن آنها را می‌نویسیم،

$$۱۰h^۲ - ۸ = ۰ \text{ یا } h = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

پس حجم هرم برابر است با

$$V = \frac{۳۸\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۷۸. اگر حجم هرم ناقص را V بگیریم، با این دستور محاسبه می‌شود:

$$V = \frac{h}{۳}(a^۲ + ab + b^۲)$$

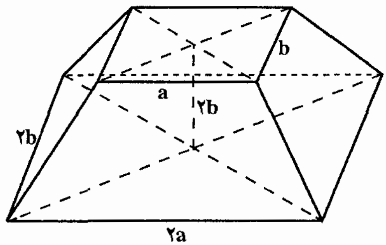
که در آن، h طول ارتفاع و $a^۲$ و $b^۲$ ، بترتیب، مقدار مساحت قاعده‌های پایین و بالا هستند.

جواب: ۵۶

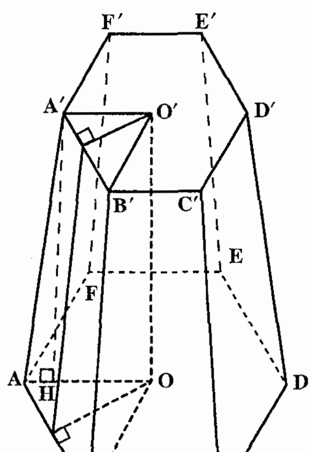
۱۷۹. این حجم را، تفاضل حجم دو هرم در نظر می‌گیریم. ارتفاع هرم کوچکتر مساوی نصف

ارتفاع هرم بزرگتر است زیرا نسبت تشابه دو قاعدهٔ آنها مساوی $\frac{۱}{۲}$ است. دو ضلع قاعدهٔ هرم بزرگتر را ۲a و ۲b و دو ضلع قاعدهٔ کوچکتر را a و b می نامیم. ارتفاع هرم بزرگتر مساوی ۴b و ارتفاع هرم کوچکتر مساوی ۲b است. از آن جا، داریم :

$$V = \frac{۱}{۳} ۲a.۲b.۴b - \frac{۱}{۳} a.b.۲b \Rightarrow V = \frac{۲}{۳} ab^{۲}(۸-۱) = \frac{۱۴ab^{۲}}{۳}$$



۱۸۱. گزینهٔ (۴) درست است زیرا :



$$AH = \sqrt{۱۴۴ - ۱۲۸} = ۴$$

$$OH = O'A' = A'B' = ۴$$

$$\text{سهم قاعدهٔ پایین} = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{سهم قاعدهٔ بالا} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{قاعدهٔ پایین}\ S = ۹۶\sqrt{۳}$$

$$\text{قاعدهٔ بالا}\ S' = ۲۴\sqrt{۳}$$

$$V = \frac{h}{۳}(S + S' + \sqrt{SS'})$$

$$V = \frac{۸\sqrt{۲}}{۳}(۹۶\sqrt{۳} + ۲۴\sqrt{۳} + ۴۸\sqrt{۳})$$

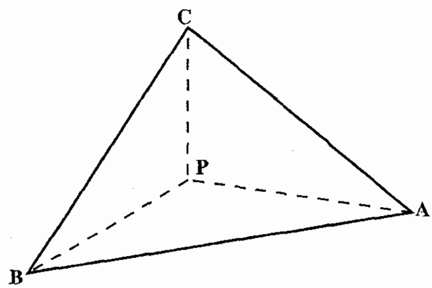
$$V = ۴۴۸\sqrt{۶}$$

۳.۱.۸.۱. بیشترین مقدار حجم هرم

۱۸۲. فرض می‌کنیم $PA = a$، $PB = b$ و $PC = c$ باشد (شکل).

در این صورت $BC^۲ = b^۲ + c^۲$ و غیره. داریم:

$$S = a + b + c + \sqrt{b^۲ + c^۲} + \sqrt{c^۲ + a^۲} + \sqrt{a^۲ + b^۲} \qquad (۱)$$



به این ترتیب، باید ماکزیمم حجم $V = \frac{۱}{۶}abc$ را، با توجه به شرط (۱) پیدا کنیم. با توجه به نابرابری واسطه‌ها داریم:

$$a + b + c \geq ۳(abc)^{\frac{۱}{۳}} \;,\; b^۲ + c^۲ \geq ۲bc$$

و نابرابریهای مشابه، بنابراین:

$$S \geq ۳(abc)^{\frac{۱}{۳}} + (\sqrt{۲bc} + \sqrt{۲ca} + \sqrt{۲ab})$$

دوباره، از نابرابری واسطه‌ها، در مورد مجموع داخل پرانتز استفاده می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$S \geq ۳(۱ + \sqrt{۲})(abc)^{\frac{۱}{۳}} = ۳(۱ + \sqrt{۲})(۶V)^{\frac{۱}{۳}}$$

و سرانجام:

$$V_{Max} = \frac{S^۳}{۶ \times ۳^۳(۱ + \sqrt{۲})^۳} = \frac{(۵\sqrt{۲} - ۷)S^۳}{۱۶۲}$$

و این حجم، وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم $a = b = c$.

۱۸۴. این مسأله تعمیم مسألهٔ ۷۲۷ است که به جای هرم چهاروجهی سه قائمه، هرمی را درنظر

گرفته‌ایم که سه زاویهٔ آن، به جای ۹۰ درجه، برابر 2θ باشد. در این مورد، خواهیم داشت:

$$V=\frac{1}{6}abcn \text{ که، در آن } n^2=1-3\cos^2 2\theta+2\cos^3 2\theta$$

$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos 2\theta \geq 2bc(1-\cos 2\theta)=4bc\sin^2\theta$ و غیره سپس، اگر مثل قبل ادامه دهیم، خواهیم داشت:

$$V_{max}=\frac{nS^3}{162(1+2\sin\theta)^3}$$

مسأله ما، متناظر است با حالتی که داشته باشیم: $2\theta=90°$.

یادداشت. برای پیدا کردن حجم چهاروجهی PABC، برحسب سه یال همرس آن و زاویه‌های بین این یالها، فرض کنید:

$$\alpha=B\hat{P}C,\ \beta=C\hat{P}A,\ \gamma=A\hat{P}B,$$
$$a=\overrightarrow{PA},\ b=\overrightarrow{PB},\ c=\overrightarrow{PC}$$

مؤلفه‌های a را a_1، a_2 و a_3 بگیرید و غیره. در این صورت داریم:

$$6V_{PABC}=a.b\times c=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

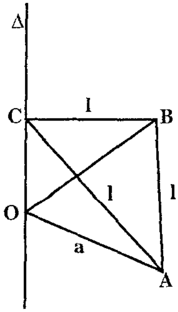
بنابراین

$$36V_{PABC}^2=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a.a & a.b & a.c\\ b.a & b.b & b.c\\ c.a & c.b & c.c\end{vmatrix}=(abc)^2\begin{vmatrix}1 & \cos\gamma & \cos\beta\\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha\\ \cos\beta & \cos\alpha & 1\end{vmatrix}$$

$$=(abc)^2(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

۴.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم و ارتفاع هرم



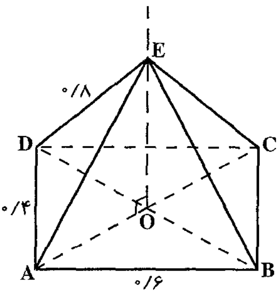
۱۸۵. اگر قاعدهٔ هرم را مثلث ABC فرض کنیم، ارتفاع نظیر این قاعده OC است. با فرض $OA = a$، اندازهٔ OC و OB را برحسب l و a می‌توان به‌دست آورد. و با استفاده از آن حجم هرم و ارتفاع رأس O محاسبه می‌شود.

۱۸۶. مستطیل قاعده را ABCD و مرکز آن را O می‌نامیم و ارتفاع EO را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$OD=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰/۴^{۲}+۰/۶^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰/۵۲}$$

$$OE=\sqrt{ED^{۲}-OD^{۲}}=\sqrt{۰/۶۴-۰/۱۳}=\sqrt{۰/۵۱}$$

$$\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}(۰/۴\times۰/۶)\times\sqrt{۰/۵۱}=۰/۰۵۶۸$$



۱۸۷. می‌دانیم که : ارتفاع هرم× مساحت قاعده $\frac{۱}{۳}$ = حجم هرم ؛ چون ارتفاع هرم ثابت است پس حجم هرم در صورتی بیشترین مقدار را دارد که قاعده آن بیشترین مقدار را داشته باشد. امّا می‌دانیم مستطیلی با محیط ثابت، وقتی بیشترین حجم را دارد که مربع باشد. یعنی دو ضلع مجاور آن برابر باشند بنابراین داریم :

$$۱۲\div۲=۶ \text{ و مجموع یک طول و یک عرض } ۶\div۲=۳m \text{ ضلع مربع}$$

$$\Rightarrow \text{سطح قاعده} = ۳^{۲}=۹m^{۲}$$

$$\Rightarrow V_{max}=\frac{۱}{۳}\times۹\times۸=۲۴m^{۳}$$

۱۸۸. مساحتهای دو قاعدهٔ هرم را تعیین می‌کنیم. داریم :

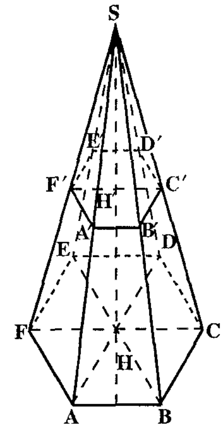
$$\text{قاعدهٔ بزرگ } S=\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}\times۲۵}{۲}=\frac{۷۵\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{قاعدهٔ کوچک } S=\frac{۳\sqrt{۳}b^{۲}}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}\times۴}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow V = \frac{h}{۳}(S + S' + \sqrt{SS'})$$

$$\Rightarrow V = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}(\frac{۷۵\sqrt{۳}}{۲} + ۶\sqrt{۳} + \sqrt{۶۷۵})$$

$$V = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}(\frac{۸۷\sqrt{۳}}{۲} + ۲۵) = ۱۷۴ + \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۳}$$ حجم هرم



برای محاسبهٔ ارتفاع هرم اصلی داریم :

$$\frac{۶\sqrt{۳}}{\frac{۷۵\sqrt{۳}}{۲}} = (\frac{x}{x + ۴\sqrt{۳}})^{۲} \Rightarrow \frac{x}{x + ۴\sqrt{۳}} = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵x = ۲x + ۸\sqrt{۳} \Rightarrow ۳x = ۸\sqrt{۳} \Rightarrow x = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع هرم اصلی} = ۴\sqrt{۳} + \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳}$$

۱.۸.۱.۵. اندازهٔ حجم و سطح جانبی هرم

۱۸۹. برای محاسبهٔ حجم هرم داریم :

$$V = \frac{۱}{۳} \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow V = \frac{۱}{۳} \times ۱۲^{۲} \times ۱۲ = ۵۷۶$$ حجم هرم

$$SK = \text{سهم هرم} = \sqrt{۱۲^{۲} + ۶^{۲}} = \sqrt{۱۸۰} = ۶\sqrt{۵}$$

$$\text{سطح جانبی} = \frac{۱}{۲} \times \text{محیط قاعده} \times \text{سهم هرم} = \frac{۱}{۲} \times (۴ \times ۱۲) \times ۶\sqrt{۵} = ۱۴۴\sqrt{۵}$$

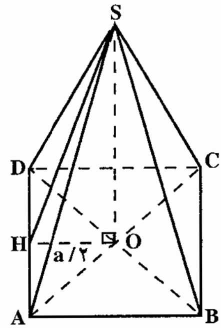
اندازهٔ مساحت جانبی هرم

۱۹۰. داریم:

سهم هرم $L=\sqrt{(\frac{a}{۲})^{۲}+(۳a)^{۲}}=\frac{a\sqrt{۳۷}}{۲}$

سطح جانبی $=\frac{۱}{۳}$ (سهم × محیط قاعده) $=\frac{۱}{۲}(۴a\times\frac{a\sqrt{۳۷}}{۲})=a^{۲}\sqrt{۳۷}$

حجم هرم $V=\frac{۱}{۳}$ ارتفاع × سطح قاعده $=\frac{۱}{۳}\times a^{۲}\times ۳a=a^{۳}$



۱۹۱. داریم:

حجم هرم ناقص $۴=۱۲-۱۶=HH' \Rightarrow ۱۲=۱۶\times\frac{۳}{۴}=SH'$ و ضلع $SH=۱۶$

مربع مقطع را a می‌گیریم. خواهیم داشت:

$\frac{a}{۲۴}=\frac{SH'}{SH}=\frac{۱۲}{۱۶}\Rightarrow\frac{a}{۲۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=۱۸$ ضلع مربع مقطع

حجم هرم ناقص $=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})=\frac{۴}{۳}(۲۴^{۲}+۱۸^{۲}+\sqrt{۵۷۶\times ۳۲۴})$

حجم هرم ناقص $=\frac{۴}{۳}(۵۷۶+۳۲۴+۴۳۲)=\frac{۴}{۳}(۱۳۳۲)=۱۷۷۶$

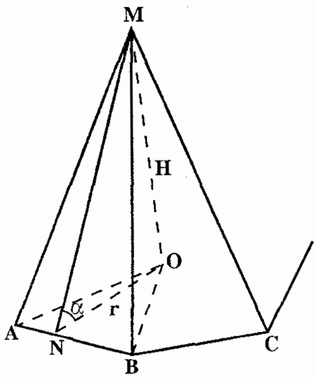
برای محاسبهٔ رویهٔ جانبی هرم ناقص باید سهم هرم اصلی و سهم هرم ناقص را به دست آوریم.

سهم هرم اصلی $=SK=\sqrt{SH^{۲}+HK^{۲}}=\sqrt{۱۶^{۲}+۱۲^{۲}}=۲۰$

$\frac{HH'}{HS}=\frac{KK'}{KS}\Rightarrow\frac{۴}{۱۶}=\frac{KK'}{۲۰}\Rightarrow KK'=۵$ سهم هرم ناقص

سطح جانبی هرم ناقص $=\frac{۱}{۲}\times ۵\times(۴\times ۲۴+۴\times ۱۸)=\frac{۵}{۲}(۹۶+۷۲)=۴۲۰$

۶.۱.۸.۱. اندازهٔ حجم و سطح کل هرم



۱۹۲. اگر زاویهٔ مسطحهٔ MNO را α فرض کنیم (زاویه‌ای که هر وجه هرم .... MABC با قاعده می‌سازد) و $MO = h$ ارتفاع هرم بگیریم (شکل)؛ از مثلث MON خواهیم داشت: $ON = h\operatorname{cotg}\alpha$
چون جمیع زاویه‌های ایجاد شده بین وجه‌های قاعده برابرند، پس O از جمیع ضلعهای قاعده به یک فاصله است. این شعاع (فاصله) را r فرض می کنیم و می‌دانیم $r = \frac{S}{P}$ و داشتیم $h = \frac{ON}{\operatorname{cotg}\alpha}$ و چون $ON = r = \frac{S}{P}$ است پس $h = \frac{S}{P}\operatorname{tg}\alpha$

و می‌توان نوشت:

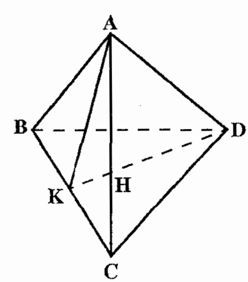
$$V = \frac{۱}{۳}S\times h = \frac{۱}{۳}S\times\frac{S}{P}\operatorname{tg}\alpha = \frac{S^{۲}\operatorname{tg}\alpha}{۳P}$$

اما $S = (\text{جانبی } S)\times\cos\alpha L$ یا $(\text{جانبی } S) = \frac{S}{\cos\alpha}$ پس سطح کل خواهد شد:

$$S + \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{۲S\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{\cos\alpha} \qquad V = \frac{S^{۲}\operatorname{tg}\alpha}{۳P}$$

۷.۱.۸.۱. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم هرم

۱۹۳. با توجه به داده‌های مسأله داریم:



$$KD = AK = \frac{a\sqrt{۳}}{۲},$$

$$KH = \frac{۱}{۳}KD = \frac{۱}{۳}\times\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

$$AH = \sqrt{AK^{۲} - KH^{۲}} = \sqrt{\frac{۳a^{۲}}{۴} - \frac{۳a^{۲}}{۳۶}} = \sqrt{\frac{۳a^{۲}}{۴} - \frac{a^{۲}}{۱۲}}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{۹a^{۲} - a^{۲}}{۱۲}} = \sqrt{\frac{۸a^{۲}}{۱۲}} = \sqrt{\frac{۲a^{۲}}{۳}} = \frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

$$S_{\text{قاعده}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow \text{حجم هرم}=V=\frac{1}{3}\times\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{مساحت جانبی}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{و} \quad S_{\text{کل}}=\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}a^2$$

نکته. نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع BCD محل برخورد میانه‌های این مثلث نیز هست و بدین جهت $KH=\frac{1}{3}HD$ است.

۱۹۴. اندازهٔ سهم هرم و اندازهٔ ارتفاع هرم را تعیین می‌کنیم.

داریم :

$$AC=12\sqrt{2}\times\sqrt{2}=24\Rightarrow OA=OC=OB=OD=12$$

$$OK=\frac{AB}{2}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}\Rightarrow SO=\sqrt{AS^2-OA^2}$$

$$=\sqrt{400-144}=\sqrt{256}=16\Rightarrow OS=16 \quad \text{ارتفاع هرم}$$

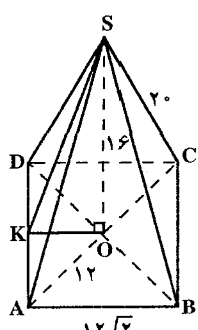
$$SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{16^2+(6\sqrt{2})^2}=\sqrt{256+72}=\sqrt{328}$$

$$\Rightarrow SK=2\sqrt{82} \qquad \text{اندازهٔ سهم هرم}$$

$$\text{حجم هرم}=\frac{1}{3}\times\text{سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{1}{3}\times(12\sqrt{2})^2\times 16=1536$$

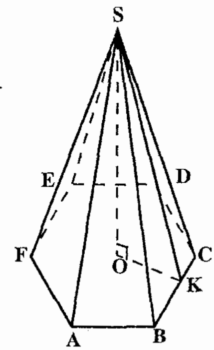
$$\text{سطح جانبی هرم}=\frac{1}{2}(4\times 12\sqrt{2})\times 2\sqrt{82}=48\sqrt{164}=96\sqrt{41}$$

$$\text{سطح کل هرم}=\text{سطح جانبی}+\text{سطح قاعده}=96\sqrt{41}+288$$



۱۹۵. سهم قاعده و سهم هرم را تعیین می‌کنیم و آن گاه سطح جانبی، سطح کل و حجم هرم را به دست می‌آوریم.

داریم :



$$OK = \frac{۴ \times \sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳} \ , \ SO = ۱۴$$

$$SK = \sqrt{SO^۲ + OK^۲} = \sqrt{۱۴^۲ + (۲\sqrt{۳})^۲} = \sqrt{۲۰۸} = ۴\sqrt{۱۳}$$

$$\text{سطح جانبی هرم} = \frac{۱}{۲} \times (۶ \times ۴) \times ۴\sqrt{۱۳} = ۴۸\sqrt{۱۳}$$

$$\text{سطح قاعدهٔ هرم} = \frac{۳\sqrt{۳}(۴)^۲}{۲} = ۲۴\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}} = ۴۸\sqrt{۱۳} + ۲۴\sqrt{۳}$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳} \times ۲۴\sqrt{۳} \times ۱۴ = ۱۱۲\sqrt{۳}$$

۱۹۶. ارتفاع و سهم هرم ناقص را به دست می‌آوریم.

با توجه به شکل داریم :

ارتفاع هرم ناقص $HH' = SH - SH' = ۸\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$

$$SH = ۸\sqrt{۲} \ , \ HK = \frac{۱۲}{۲} = ۶ \ , \ SK = \sqrt{SH^۲ + HK^۲}$$

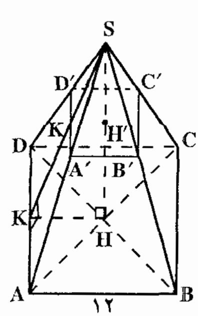
سهم هرم

$$\Rightarrow SK = \sqrt{۱۲۸ + ۳۶} = \sqrt{۱۶۴} = ۲\sqrt{۴۱}$$

$$\frac{SH'}{SH} = \frac{SK'}{SK} \Rightarrow \frac{۳\sqrt{۲}}{۸\sqrt{۲}} = \frac{SK'}{۲\sqrt{۴۱}} \Rightarrow SK' = \frac{۳\sqrt{۴۱}}{۴}$$

سهم هرم ناقص $KK' = SK - SK' = ۲\sqrt{۴۱} - \frac{۳\sqrt{۴۱}}{۴} = \frac{۵\sqrt{۴۱}}{۴}$

ضلع مربع مقطع $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SH'}{SH} \Rightarrow \frac{A'B'}{۱۲} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۸\sqrt{۲}} \Rightarrow A'B' = \frac{۹}{۲}$



$$\text{حجم هرم ناقص} = \frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'}) = \frac{۵\sqrt{۲}}{۳}(۱۲^۲+(\frac{۹}{۲})^۲+\sqrt{(۱۲\times\frac{۹}{۲})^۲})$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم ناقص} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۳}(۱۴۴+\frac{۸۱}{۴}+۲\sqrt{۵۴})$$

$$S_{\text{جانبی مخروط ناقص}} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۵\sqrt{۴۱}}{۴}(۴\times۱۲+۴\times\frac{۹}{۲}) = \frac{۵\sqrt{۴۱}}{۸}(۶۶) = \frac{۱۶۵\sqrt{۴۱}}{۴}$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}} = \frac{۱۶۵\sqrt{۴۱}}{۴}+۱۲^۲+(\frac{۹}{۲})^۲ = \frac{۱۶۵\sqrt{۴۱}}{۴}+۱۴۴+\frac{۸۱}{۴}$$

۱۹۷. چون صفحهٔ قاطع از وسط یالها گذشته است. پس داریم :

$$\text{ضلع مربع پایین } AB = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow \text{ضلع مربع بالا} = A'B' = \frac{۱}{۲}AB = ۳\sqrt{۲}$$

$$AB = ۶\sqrt{۲}\text{ ، } SA = ۱۰ \Rightarrow SH = \sqrt{SA^۲ - AH^۲} = \sqrt{۱۰۰-۳۶} = \sqrt{۶۴} = ۸$$

ارتفاع هرم اصلی

$$S = (۶\sqrt{۲})^۲ = ۷۲\text{ ، } S' = (۳\sqrt{۲})^۲ = ۱۸\text{ ، ارتفاع هرم ناقص } ۸\div۲ = ۴$$

$$\text{حجم هرم ناقص} = \frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})$$

$$= \frac{۴}{۳}(۷۲+۱۸+\sqrt{۷۲\times۱۸}) = \frac{۴}{۳}\times(۹۰+۳۶) = ۱۶۸$$

۸.۱.۸.۱. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده

۱۹۸. شکل a تا d، قسمت مشترک این دو هرم را در تمام چهار حالت نشان می‌دهد.

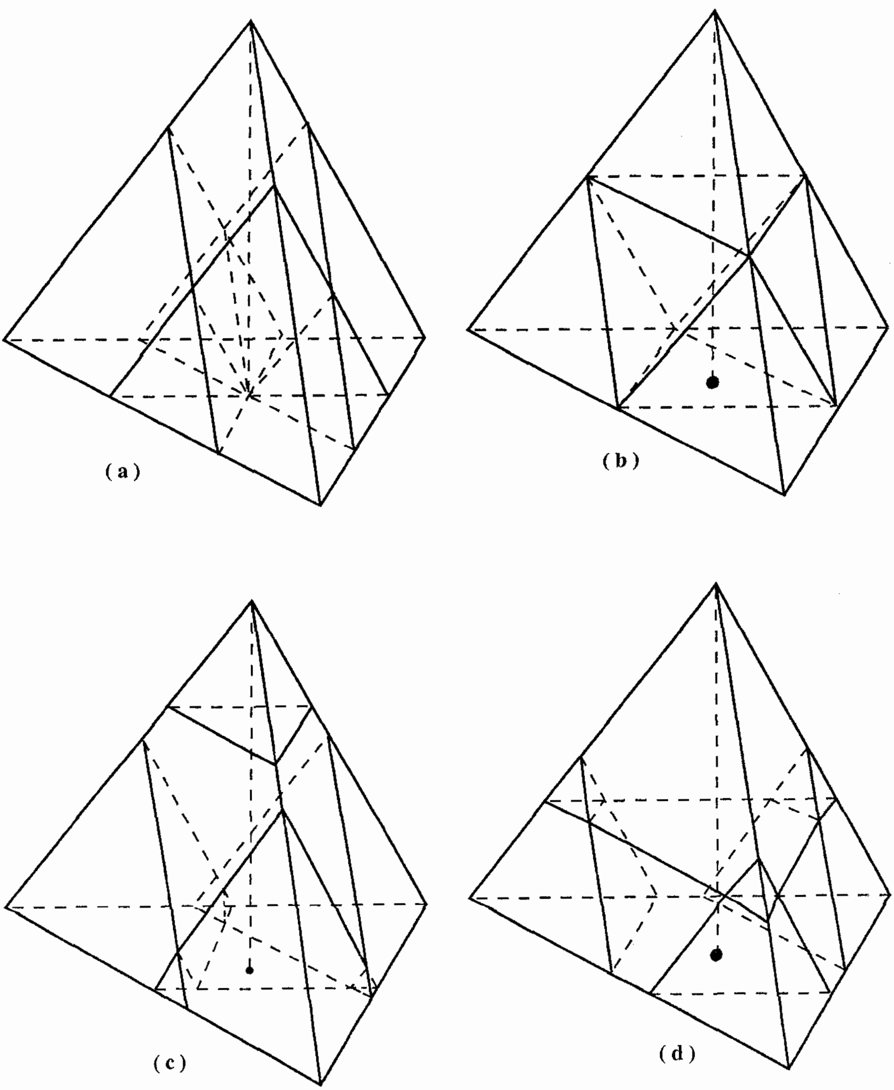
(۱). قسمت مشترک یک متوازی‌السطوح تشکیل می‌دهد (شکل a). برای تعیین حجم آن لازم است از حجم هرم اصلی، حجم سه هرم متشابه را با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$ کم کنیم و حجمهای سه هرم متشابه با هرم اصلی را با نسبت $\frac{۱}{۳}$ به آن اضافه کنیم. به این ترتیب حجم برابر می‌شود با،

$$V[۱-۳(\frac{۲}{۳})^۳+۳(\frac{۱}{۳})^۳] = \frac{۲}{۹}V$$

(۲). قسمت مشترک هشت وجهی است (شکل b). حجم آن برابر است با :

$$V[1-4(\frac{1}{2})^3] = \frac{V}{2}$$

(۳). قسمت مشترک در شکل (c) نشان داده شده است. برای تعیین حجم آن، لازم است از حجم هرم اصلی، حجم هرم متشابه آن را با نسبت $\frac{1}{3}$ کم کنیم (در شکل این هرم در رأس قرار دارد.) سپس حجم سه هرم باز هم متشابه با هرم اصلی را با نسبت $\frac{5}{9}$ از آن کم کنیم و حجم سه هرم با نسبت تشابه $\frac{1}{9}$ را به آن اضافه کنیم. به این ترتیب حجم

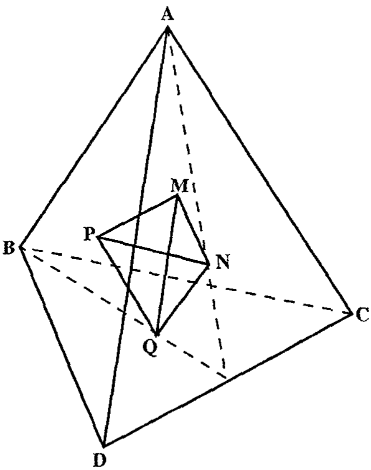

(a) (b) (c) (d)

قسمت مشترک برابر می‌شود با،

$$V[1-(\frac{1}{3})^3-3(\frac{5}{9})^3+3(\frac{1}{9})^3]=\frac{110}{243}V$$

(۴). قسمت مشترک در شکل d، نشان داده شده است. حجم آن برابر است با،

$$V[1-(\frac{3}{5})^3-3(\frac{7}{15})^3+4(\frac{1}{15})^3]=\frac{12}{25}V$$



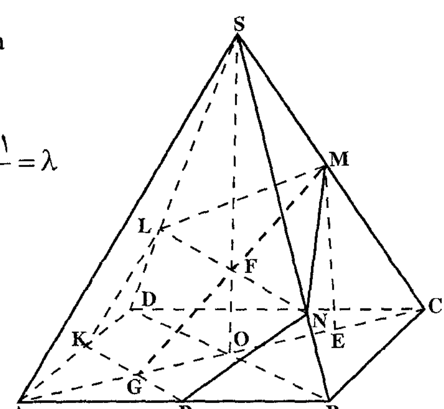
۱۹۹. هرم داده شده و هرم جدید، مجانس معکوس یکدیگرند. مرکز تجانس، نقطهٔ همرسی خطهای واصل بین رأسها و نقطه‌های برخورد میانه‌های وجه‌های رو به روی آنها، و نسبت تجانس مساوی $\frac{1}{3}$ است. از آن جا، نسبت حجمها مساوی $\frac{1}{27}$ است. اگر حجم هرم جدید را v و حجم هرم داده شده را V بنامیم داریم:

$$v=\frac{V}{27}$$

۲۰۱. هرم منتظم ABCDS را درنظر بگیرید که در آن، مقطع KLMNP یک پنج ضلعی منتظم، و به ضلع a می‌باشد (شکل). قطر قاعدهٔ هرم را، b و یال جانبی آن را l و SM = xl و SN = yl بنامید. چون پنج ضلعی KLMNP منتظم است، داریم،

$$LM=2a\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a=\mu a$$

$$\frac{MF}{FG}=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\lambda$$



همچنین می‌توان نوشت :

$$KP = a \ , \ GO = \frac{b-a}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$OE = OC\frac{SM}{SC} = \frac{b}{۲}x$$

$$ME = SO\frac{MC}{SC} = h(۱-x)$$

$$FO = h(۱-y)$$

که در آن h ارتفاع هرم است، بنابراین،

$$\frac{GO}{FO} = \frac{OE}{ME-FO} \ , \ GO = \frac{(۱-y)xb}{۲(y-x)}$$

با مساوی قراردادن عباراتی که برای GO پیدا شده، معادلهٔ زیر به دست می‌آید،

$$\frac{(۱-y)xb}{y-x} = b-a \qquad (۱)$$

و بالاخره،

$$\frac{OE}{GO} = \frac{MF}{FG} = \lambda$$

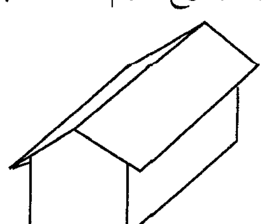
۲۰۲. ارتفاع هر هرم برابر است با :

$$h_۱ = \sqrt{e^۲ - (\frac{e\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{e\sqrt{۲}}{۲} \text{ قاعده و } S = e^۲$$

$$\Rightarrow \text{حجم یک هرم} = \frac{۱}{۳} \times e^۲ \times \frac{e\sqrt{۲}}{۲} = \frac{e^۳\sqrt{۲}}{۶}$$

$$\Rightarrow \text{حجم هشت وجهی} = ۲ \times \frac{e^۳\sqrt{۲}}{۶} = \frac{۱}{۳} \times \sqrt{۲}e^۳$$

۲۰۳. حجم ساختمان برابر است با مجموع حجم یک مکعب مستطیل به ابعاد ۳۵، ۱۵ و ۴



متر، و حجم یک منشور مثلث‌القاعده که طول یک ضلع مثلث مساوی ۱۵ متر و ارتفاع نظیر آن $۱m = ۴ - ۵$ و ارتفاع این منشور مساوی $۳۵m$ است. بنابراین، داریم :

$$\text{حجم ساختمان} = ۳۵\times ۱۵\times ۴+\frac{۱}{۲}\times (۱۵\times ۱)\times ۳۵ = ۲۱۰۰+۲۶۲/۵$$

$$\Rightarrow \text{حجم ساختمان} = ۲۳۶۲/۵m^{۲}$$

۲۰۴. گزینهٔ (ج) درست است.

۲۰۵. گزینهٔ (د) درست است.

۲.۸.۱. نسبت حجمها

۲۰۶. فاصلهٔ رأس هرم تا صفحهٔ قاطع را x می‌نامیم. داریم :

$$\frac{۲۰}{۴۵} = (\frac{x}{۶})^{۲} \Rightarrow \frac{۴}{۹} = (\frac{x}{۶})^{۲} \Rightarrow \frac{x}{۶} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = ۴$$

ارتفاع هرم ایجاد شده در بالا.

$$\text{حجم هرم بالایی} = \frac{۱}{۳}\times ۲۰\times ۴ = \frac{۸۰}{۳}$$

$$\text{حجم هرم اولیه} = \frac{۱}{۳}\times ۴۵\times ۶ = ۹۰$$

$$\frac{\text{حجم هرم بالایی}}{\text{حجم هرم اولیه}} = \frac{\frac{۸۰}{۳}}{۹۰} = \frac{۸}{۲۷}$$

$$\text{حجم هرم ناقص} = ۹۰ - \frac{۸۰}{۳} = \frac{۲۷۰-۸۰}{۳} = \frac{۱۹۰}{۳}$$

$$\frac{\text{حجم هرم بالایی}}{\text{حجم هرم ناقص}} = \frac{\frac{۸۰}{۳}}{\frac{۱۹۰}{۳}} = \frac{۸۰}{۱۹۰} = \frac{۸}{۱۹}$$

نکته. پس از تعیین x یعنی حجم هرم بالایی، نسبت حجمها را به‌صورت ساده‌تری می‌توان به دست‌آورد.

$$\frac{\text{حجم هرم بالایی}}{\text{حجم هرم اولیه}}=(\frac{۴}{۶})^۳=(\frac{۲}{۳})^۳=\frac{۸}{۲۷}\ ,$$

$$\frac{\text{حجم هرم بالا}}{\text{حجم هرم ناقص}}=\frac{\frac{۸}{۲۷}}{۱-\frac{۸}{۲۷}}=\frac{۸}{۱۹}$$

۲۰۷. A' ، B' ، C' ، . . . در یک صفحهٔ موازی قاعدهٔ. . . ABC هستند و ارتفاع SO را در نقطهٔ I چنان قطع می‌کنند که $SI=\frac{SO}{۳}$ است. بنابراین چون بنا به فرض $OS'=\frac{OS}{۳}$ است، داریم $S'I=\frac{OS}{۳}$ ، و نقطهٔ S' قرینهٔ نقطهٔ S نسبت به صفحهٔ $A'B'C'\dots$ است. در این صورت هرمهای $S'.A'B'C'\dots$ و $S.A'B'C'\dots$ نسبت به صفحهٔ $A'B'C'\dots$ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین مساحت آنها با هم برابر است (معادلند) و همین مطلب، برای حجمهای آنها نیز درست است. نسبت سطحهای آنها مساوی مربع نسبت تشابه آنها یعنی مساوی $\frac{۱}{۹}$ است و نسبت حجمهای آنها، مساوی مکعب نسبت تشابه آنهاست که $\frac{۱}{۲۷}$ می‌باشد. بنابراین داریم :

$$\text{مساحت } S'.A'B'C'\dots=\frac{۱}{۹}\times \text{مساحت } S.ABC\dots$$

$$\text{حجم } S'.A'B'C'\dots=\frac{۱}{۲۷}\times \text{حجم } S.ABC\dots$$

۲۰۸. ابتدا مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم :

در مثلث ABC نقطه‌های L و K بر روی AB و AC طوری قراردارند که

$$\frac{AL}{BL}=m\ ,\ \frac{AK}{KC}=n$$

به چه نسبتی KL میانهٔ AM را تقسیم می‌کند؟

محل تقاطع KL و AM را با N، محل برخورد KL و BC را با Q و محل برخورد KL با خط موازی BC را که از A رسم می‌شود، با P نشان دهید. اگر

$$n>m\ ,\ AP=c\ ,\ QC=b\ ,\ BC=۲a$$

آن‌گاه از تشابه مثلثهای متناظر خواهیم داشت،

$$\frac{c}{b}=n\ ,\ \frac{c}{b+۲a}=m$$

و از آن‌جا

$$\frac{AN}{NM}=\frac{c}{b+a}=\frac{۲mn}{m+n}$$

m ، n و p را نسبتهایی درنظر می‌گیریم که یالهای AB ، AC وAD به‌وسیلهٔ صفحه به آن نسبتها تقسیم شده‌اند.

برای تعیین آنها، دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{۲mn}{m+n}=۲\ ,\ \frac{۲np}{n+p}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۲pm}{p+m}=۴$$

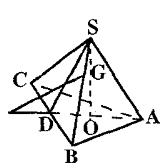
از آن‌جا،

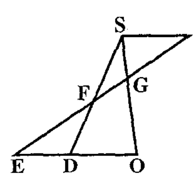
$$m=-\frac{۴}{۵}\ ,\ n=\frac{۴}{۹}\ ,\ p=\frac{۴}{۷}$$

از نامساوی $-۱ < m < ۰$ ، معلوم می‌شود نقطهٔ L برامتداد AB از طرف A قرار دارد، یعنی صفحهٔ مفروض یالهای AC ، AD ، BC و BD را قطع می‌کند. بالاخره با تعیین نسبتی که یالهای BC و BD با آن تقسیم شده‌اند ($\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۹}$). جواب مسأله پیدا می‌شود :

$$\frac{۷۱۲۳}{۱۶۹۰۱}$$

۲۰۹. در شکل (a)، SABC هرم مفروض و SO ارتفاع آن و G رأس کنج سه وجهی است. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که G بر روی SO قرار دارد. علاوه بر این صفحهٔ قاعدهٔ ABC، وجه‌های کنج سه‌وجهی را در مثلث متساوی‌الاضلاعی قطع می‌کند که ضلعهای آن موازی با ضلعهای مثلث ABC است و از رأسهای آن می‌گذرد. در نتیجه، اگر یکی از یالهای کنج سه وجهی، صفحهٔ ABC را در نقطهٔ E و وجه CSB را در F قطع کند، در آن صورت F بر روی سهم SD از وجه CSB قرار می‌گیرد و ED = DA . به فرض





$SF = FD$. از S خط راستی به موازات EO رسم کنید و محل برخورد آن را با EF، نقطهٔ K بنامید. (شکل b) داریم،

$$SK = ED$$

و بنابراین،

$$\frac{SG}{GO} = \frac{SK}{EO} = \frac{ED}{EO} = \frac{۳}{۴}$$

به این ترتیب، حجم هرم GABC، $\frac{۴}{۷}$ حجم هرم SABC می‌شود. از طرف دیگر، کنج سه وجهی ساخته شده، آن بخش از هرم را که بالای GABC قرار دارد، به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

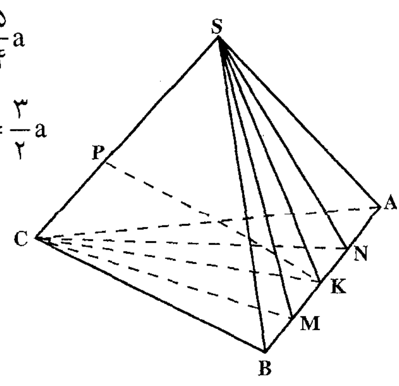
جواب : نسبت حجم آن قسمت از هرم که در خارج کنج سه وجهی قرار دارد، به حجم آن قسمت که در داخل واقع شده برابر است با ۱۱÷۳

۲۱۰. وسط AB را K، پای عمود رسم شده از K بر CS را، P بنامید. روی AB نقطه‌های M و N را طوری اختیار کنید که PMN مثلث متساوی‌الاضلاع باشد (شکل). از تکمیل هرم SPMN، به منشور منتظم $PMNSM_1N_1$ ، طوری که PMN و SM_1N_1 قاعده‌های آن و PS و MN_1 و NN_1 یالهای جانبی آن باشند، منشور $A_1B_1CA_2B_2S$ به دست می‌آید که مجانس منشور $PMNSM_1N_1$ با مرکز تجانس S و نسبت تجانس CS / PS می‌باشد. به آسانی دیده می‌شود، آن بخش مطلوب از حجم هرم SABC که در داخل منشور $A_1B_1CA_2B_2S$ قرار دارد، به نسبت MN / AB است. با قراردادن $CS = ۲a \ , \ AB = a\sqrt{۳}$ خواهیم داشت،

$$SK = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}a \ , \ CK = \frac{۳}{۲}a \ , \ PS = \frac{۵}{۴}a$$

$$PK = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}a \ , \ MN = PK = \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲}a$$

$$MN / AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



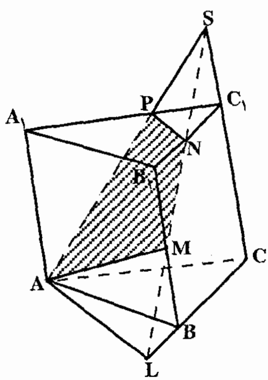
جواب : $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۱۱. طول یالهای متنافر را با a و b و فاصلهٔ آنها را d بنامید. زاویهٔ بین آنها را هم φ فرض کنید. با به کاربردن فرمول حجمهای قسمتهای مطلوب را پیدا کنید.

$$V_۱ = \frac{۱۰}{۸۱} abd \sin\varphi$$

$$V_۲ = \frac{۷}{۱۶۲} abd \sin\varphi$$

جواب : $\frac{۲۰}{۷}$



۲۱۲. برش را رسم می‌کنیم. میانگاه یالهای $BB_۱$ و $B_۱C_۱$ را با M و N نشان می‌دهیم (شکل). نقطه‌های $P = SA \cap A_۱C_۱$ و $S = MN \cap CC_۱$ را مشخص می‌کنیم. برش حاصل عبارت از چهارضلعی AMNP خواهد بود. حجم منشور را با V و حجم بخشی از آن را که شامل یال $CC_۱$ است با $V_۱$ نشان می‌دهیم. روش رسم برش طریق بیان $V_۱$ را بر حسب V نشان می‌دهد. نقطهٔ $L = MN \cap BC$ را مشخص می‌کنیم.

برای یافتن $V_۱$ بایستی حجم هرمهای $SPNC_۱$ و MALB را از حجم هرم SALC کم کنیم و این حجمها را می‌توان به‌آسانی بر حسب حجم منشور بیان کرد. ارتفاع منشور را با H، مساحت قاعده را با Q و حجم هرمهای SALC، $SPNC_۱$ و MALB را بترتیب با $V_۲$ ، $V_۳$ و $V_۴$ نشان می‌دهیم. M و N میانگاه یالها بوده و $CL = \frac{۳}{۲}BC$ ، $BL = \frac{۱}{۲}BC$ را داریم.

از این‌رو نتیجه می‌شود که $S_{ALC} = \frac{۳}{۲}Q$ است. از این گذشته داریم :

$$SC_۱ = \frac{۱}{۲}CC_۱ \ , \ SC = \frac{۳}{۲}CC_۱$$

این امر بدین معنی است که ارتفاع هرم SALC برابر $\frac{۳}{۲}H$ است.

رابطهٔ $V_۲ = \frac{۱}{۳} . \frac{۳}{۲} H \times S_{ALC} = \frac{۳}{۴} HQ$ یعنی $V_۲ = \frac{۳}{۴} V$ حاصل می‌شود. هرم $SPNC_۱$ با نسبت $k = \frac{۱}{۳} (SC_۱ / SC = ۱/۳)$ متجانس هرم SALC است.

از این جا $V_۳ = k^۳ V_۲ = \frac{۱}{۳۶} V$ استنتاج می‌شود. نقطهٔ M میانگاه یال $BB_۱$ بوده و ارتفاع هرم MALB برابر $\frac{۱}{۲} H$ است. با توجه به $BL = \frac{۱}{۲} BC$ نتیجه می‌شود که $S_{ALB} = \frac{۱}{۲} Q$ است.

از این رابطه نتیجه می‌شود که :

$$V_۴ = \frac{۱}{۳} . \frac{۱}{۲} H . \frac{۱}{۲} Q = \frac{۱}{۱۲} H . Q = \frac{۱}{۱۲} V$$

آن‌گاه $V_۱ = V_۲ - V_۳ - V_۴ = \frac{۲۳}{۳۶} V$ حاصل می‌شود. حجم قطعه‌ای از هرم که شامل یال $AA_۱$ است معادل $V - V_۱ = ۱۳/۳۶$ می‌باشد. بنابراین نسبت حجمهای قطعات آن معادل ۱۳/۲۳ خواهد بود.

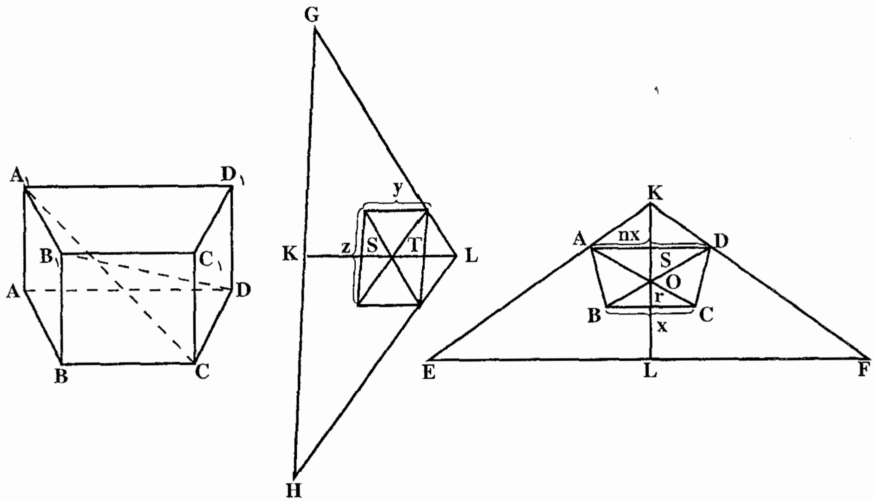
۲۱۳. مثلثهای $AB_۱C_۱$ و $AB_۲C_۲$ را به‌عنوان قاعده‌های هرمهای $AB_۱C_۱D_۱$ و $AB_۲C_۲B_۲$ درنظر بگیرید.

۲۱۴. صفحه‌ای که بر $AA_۱$ می‌گذرد (خود $AA_۱$ با خط $B_۱D$ موازی است) با صفحهٔ $DD_۱BB_۱$ موازی می‌شود. به همین طریق صفحه‌ای که از $DD_۱$ می‌گذرد (خود $DD_۱$ با خط $AC_۱$ موازی است) با صفحهٔ $AA_۱C_۱C$ موازی می‌گردد.

از طرف دیگر، صفحه‌هایی که از یالهای BC، و $B_۱C_۱$ می‌گذرند، بترتیب، با صفحه‌های $AB_۱C_۱D$ و $A_۱BCD_۱$ موازی می‌شوند (شکل). با درنظر داشتن این موضوع، مقطع چندوجهی را با صفحه‌ای که موازی قاعده‌ها رسم می‌شود و از وسطهای یالهای جانبی می‌گذرد و صفحه‌ای که از وسطهای ضلعهای موازی قاعده‌های منشور می‌گذرد، بسازید.

در شکلهای کنار شکل، L و K وسطهای یالهای EF و HG از هرم مثلث‌القاعدهٔ EFGH بوده و یالهای EF و HG متقابلاً بر یکدیگر عمودند. با قرار دادن

$BC = x , AD = nx$



و ارتفاع ذوزنقهٔ ABCD با y و ارتفاع منشور با z خواهیم داشت :

$$KS = SO = \frac{yn}{n+۱}\ ,\ \ TL = \frac{y}{۲}$$

$$KL = y(\frac{۳}{۲} + \frac{n}{n+۱})\quad EF = \frac{۵n+۳}{۲}x$$

$$|GH| = \frac{۵n+۳}{n+۱}z$$

حجم منشور برابر می‌شود با،

$$\frac{(n+۱)xyz}{۲}$$

و حجم هرم مثلث‌القاعده برابر است با

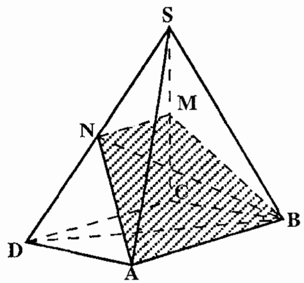
$$\frac{۱}{۶}BF\,.\,GH\,.\,KL = \frac{(۵n+۳)^۳}{۲۴(n+۱)^۲}xyz$$

جواب :

$$\frac{(۵n+۳)^۳}{۱۲(n+۱)^۳}$$

۲۱۵. برش ABMN را رسم می‌کنیم (در شکل، [CD] ∥ [AB] ∥ [MN] را داریم). حجم هرم SABCD را با V و حجم هرم SABMN را با $V_۱$ نشان می‌دهیم. حجم $V_۱$ برابر مجموع $V_۲$ و $V_۳$ مربوط به هرمهای SBMN و SBAN است. حجم هرمهای SBMN و SBCD را مقایسه می‌کنیم. وجه‌های SMN و SCD را به عنوان قاعدهٔ این هرمها و

نقطهٔ B را به عنوان رأس مشترک درنظر می‌گیریم. به دلیل $SM = \frac{۱}{۲}SC$،



$S_{SMN} = \frac{۱}{۴}S_{SCD}$ را داریم که به معنی $V_۲ = \frac{۱}{۴}V_{SBCD}$ است. بدیهی است که $V_{SBCD} = \frac{۱}{۲}V$ بوده و در نتیجه $V_۲ = \frac{۱}{۸}V$ را خواهیم داشت.

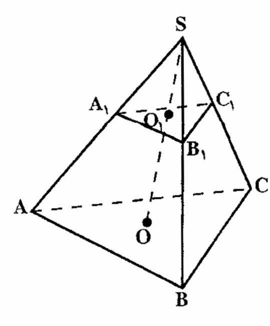
هرمهای SBAN و SBAD را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. وجه‌های SAN و SAD را به عنوان قاعدهٔ آنها و نقطهٔ B را به عنوان رأس مشترک درنظر می‌گیریم. به دلیل این که N میانگاه یال SD است از این رو $S_{SAN} = \frac{۱}{۲}S_{SAD}$ را داریم که به معنی $V_۳ = \frac{۱}{۲}V_{SBAD} = \frac{۱}{۴}V$ است.

حال می‌توانیم حجم $V_۱ = V_۲ + V_۳ = \frac{۳}{۸}V$ را به دست آوریم، حجم قطعهٔ جدا شده از هرم، $\frac{۵}{۸}V$ بوده و نسبت حجمها نیز برابر ۳/۵ است.

۳.۸.۱. رابطهٔ بین حجمها

۲۱۶. تبدیل تجانس با مرکز S و با نسبت تجانس k را درنظر می‌گیریم. مثلث $A_۱B_۱C_۱$ (شکل) تصویر مثلث ABC تحت این تبدیل بشمار می‌رود زیرا

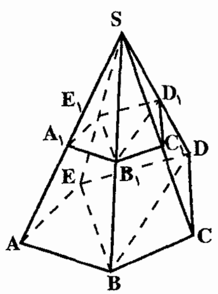
$$SB_۱ / SB = SC_۱ / SC = SA_۱ / SA = k$$



است. در نتیجه $S_{A_1B_1C_1} = k^2 S_{ABC}$ خواهد بود. فرض کنید SO ارتفاع هرم $SABC$ بوده و $O_1 = SO \cap A_1B_1C_1$ باشد. آن‌گاه SO_1 ارتفاع هرم $SA_1B_1C_1$ بوده و $SO_1 = kSO$ خواهد بود. از این‌رو نتیجه می‌شود که :

$$V_1 = \frac{1}{3} SO_1\ S_{A_1B_1C_1} = k^3 . \frac{1}{3} SO\ .\ S_{ABC} = k^3 V$$

و این همان چیزی است که می‌بایست ثابت می‌کردیم.



توجه. (۱) اگر یک هرم دلخواه با قاعدهٔ چندضلعی مورد ملاحظه باشد بدیهی است که همین نتیجه بالا را به دست خواهیم آورد، زیرا این نوع هرم را نیز می‌توان به عنوان اجتماع چندین هرم مثلث‌القاعده درنظر گرفت (شکل).

(۲) با استفاده از نتیجهٔ حاصله، برای محاسبهٔ حجم هرم ناقص می‌توان به آسانی فرمولی به‌صورت زیر استنتاج کرد که در آن H ارتفاع هرم ناقص و S_1 و S_2 مساحت قاعده‌های هرم ناقص است :

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2)$$

در محاسبهٔ حجم منشور علاوه بر فرمول $V = H.Q$ که در آن H، ارتفاع منشور و Q مساحت قاعده آن است، می‌توان از فرمول $V = l.S$ نیز استفاده کرد. در این فرمول l، طول یال جانبی و S، مساحت برش قائم منشور است.

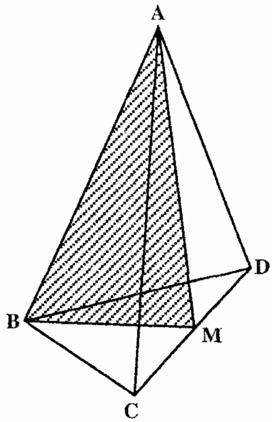
۲۱۷. حجم منشور را V، و مجموع حجمهای هرمهای به رأس O و به قاعده‌های وجه‌های جانبی منشور را P می‌گیریم.

منشور برابر مجموع این هرمها و هرمی است که رأس آن O و قاعدهٔ آن قاعده‌ای از منشور است که شامل نقطهٔ O نیست. با توجه به این که حجم هرم اخیر مساوی $\frac{V}{3}$ است، داریم :

$$V = P + \frac{V}{3} \Rightarrow P = \frac{2}{3} V$$

۲۱۸. هرم سه پهلوی ABCD را درنظر می‌گیریم. صفحه‌ای بر یال AB و نقطهٔ M وسط یال روبه‌روی آن می‌گذرانیم. دو هرم ABCM و ABDM دارای قاعده‌های معادل می‌باشند

زیرا میانهٔ BM، مثلث BDC را به دو مثلث هم‌ارز BMC و BMD بخش کرده است. از طرفی ارتفاع رأس A نیز در هر دو هرم مشترک است. بنابراین این دو هرم معادل یکدیگرند.



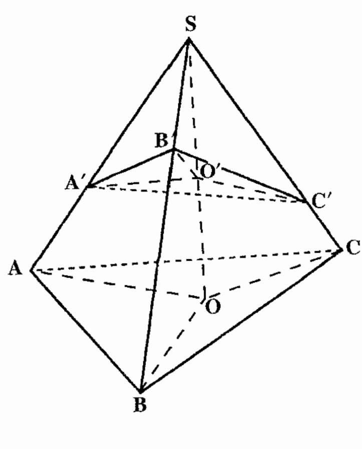
۲۱۹. از این حقیقت استفاده کنید که، اگر روی نیمخطهای راست و ثابت OS_1 ، OS_2 و OS_3 ، بترتیب نقطه‌های X، Y و Z را انتخاب کنیم، حجم هرم OXYZ برابر با

$$k.|OX| \cdot |OY| \cdot |OZ|$$

می‌شود که در آن، k ضریبی است که به جای نقطه‌های X، Y و Z بستگی ندارد.

۹.۱. رابطهٔ متری

۲۲۰. فرض می‌کنیم، a، h و V بترتیب طول یال جانبی، ارتفاع و حجم هرم SABC باشد. OA، OB، OC، O′A′ ، O′B′ ، O′C′ را رسم می‌کنیم. حجم هر یک از هرمهای



SOAB، SOBC و SOCA مساوی $\frac{V}{۳}$ است. فرض می‌کنیم $SO' = l$ باشد. خواهیم داشت:

$$\frac{\text{حجم}\ SO'A'B'}{\text{حجم}\ SOAB} = \frac{SO'.SA'.SB'}{SO.SA.SB} \Rightarrow \frac{\text{حجم}\ SO'A'B'}{\frac{V}{۳}} = \frac{l.SA'.SB'}{ha^{۲}}$$

و به‌طور مشابه داریم:

$$\frac{\text{حجم}\ SO'B'C'}{\frac{V}{۳}} = \frac{l.SB'.SC'}{ha^{۲}}\ ,\quad \frac{\text{حجم}\ SO'C'A'}{\frac{V}{۳}} = \frac{l.SC'.SA'}{ha^{۲}}$$

از جمع کردن سه رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{۳(\text{حجم}\ SA'B'C')}{V} = \frac{l}{ha^{۲}}(SA'.SB' + SB'.SC' + SC'.SA')$$

امّا:

$$\frac{\text{حجم}\ SA'B'C'}{V} = \frac{SA'.SB'.SC'}{a^{۳}}$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{۳SA'.SB'.SC'}{a^{۳}} = \frac{l}{ha^{۲}}(SA'.SB' + SB'.SC' + SC' + SA')$$

از تقسیم طرفین رابطهٔ بالا بر $\frac{l}{ha^{۲}}SA'.SB'.SC'$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۳h}{al} = \frac{۱}{SA'} + \frac{۱}{SB'} + \frac{۱}{SC'}$$

۲۲۱. حکم مسأله از آن‌جا نتیجه می‌شود که، در یک چندضلعی منتظم، مجموع فاصله‌های یک نقطه دلخواه واقع در داخل آن، از ضلعهای چند ضلعی مقدار ثابتی است.

۲۲۲. فرض می‌کنیم a، l و h بترتیب اندازهٔ

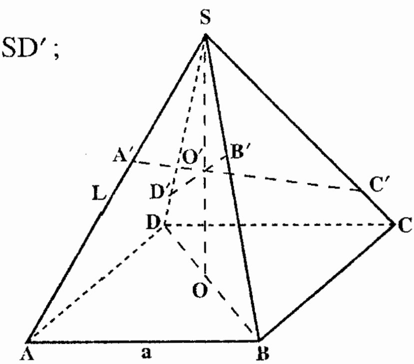
ضلع مربع قاعده، طول یال و ارتفاع هرم و $SO' = h'$ باشد.

می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث که دارای یک زاویهٔ مساوی هستند، به نسبت حاصلضرب اندازه‌های ضلعهای مجاور به این دو زاویه در دو مثلث است. بنابراین :

$$\frac{S_{O'SB'}}{S_{OSB}}=\frac{SO'.SB'}{SO.SB}=\frac{h'}{hl}.SB';$$

و به طور مشابه :

$$\frac{S_{O'SD'}}{S_{OSD}}=\frac{SO'.SD'}{SO.SD}=\frac{h'}{hl}.SD';$$



امّا با توجه به آن که $S_{OSB}=S_{OSD}=\frac{۱}{۲}S_{BCD}$ است : از جمع کردن عضوهای متناظر رابطه‌های بالا داریم :

$$\frac{۲S_{B'SD'}}{S_{BSD}}=\frac{h'}{hl}(SB'+SD');$$

امّا :

$$\frac{S_{B'SD'}}{S_{BSD}}=\frac{SB'.SD'}{SB.SD}=\frac{SB'.SD'}{l^{۲}};$$

$$\Rightarrow ۲\times\frac{SB'.SD'}{l^{۲}}=\frac{h'}{hl}(SB'+SD');$$

از ضرب کردن دو طرف رابطهٔ اخیر در $\frac{hl}{h'.SB'.SD'}$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{۱}{SB'}+\frac{۱}{SD'}=\frac{۲h}{h'l}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\frac{۱}{SA'}+\frac{۱}{SC'}=\frac{۲h}{h'l}$ است.

۲۲۳. از این که نقطه‌های K ، L ، P و N به یک صفحه تعلق دارند، معلوم می‌شود،

$$V_{MKLP}+V_{MPNK}=V_{MNKL}+V_{MLPN} \qquad (۱)$$

$$V_{MKLP}=\frac{MK.ML.MP}{MA.MB.MC}\ V_{MABC}$$

$$V_{MPNK}=\frac{MP.MN.MK}{MC.MD.MA}\ V_{MADC}$$

$$V_{MNLK}=\frac{MN.ML.MK}{MD.MA.MB}\ V_{MABD}$$

$$V_{MLPN}=\frac{ML.MP.MN}{MB.MC.MD}\ V_{MBCD}$$

این عبارات را در کمیتهای متناظر (۱) جایگزین کنید و با تقسیم کردن بر

$$MK.ML.MP.MN$$

و ضرب در

$$MA.MB.MC.MD$$

و نوشتن حجم هر یک از هرمهای باقیمانده بر حسب مساحت قاعده و ارتفاع h، و پس از ساده کردن به $\frac{h}{۳}$ حکم مسأله به دست می‌آید.

۲۲۴. $SA_۱A_۲...A_n$ را، هرم مفروض می‌گیریم. $SA_۱$ را، یال جانبی با بیشترین طول (در بین یالهای جانبی) فرض می‌کنیم. اکنون سطح جانبی هرم را روی یال $SA_۱$ می‌بریم و آن را روی صفحه، می‌گسترانیم. با توجه به شرط مسأله، روشن است که، نقطهٔ S، در درون چندضلعی $A_۱A_۲...A_nA'_۱$ واقع می‌شود. B را نقطهٔ دوم برخورد خط راست $SA'_۱$ با خط شکستهٔ $A_۱A_۲...A_nA'_۱$ فرض می‌کنیم. این نقطه، خط شکسته را به دو خط شکستهٔ $A_۱...B$ به طول a و $A'_۱...B$ به طول b تقسیم می‌کند. نابرابریهای

$$SA_۱<a+SB\ ,\ \ A'_۱S+SB=A'_۱B<b$$

به ما می‌دهند:

$$۲SA_۱=SA_۱+SA'_۱<a+SB+A'_۱S<a+b$$

و این عدد آخر، همان محیط قاعدهٔ هرم است.

۱۰.۱. مکان هندسی

۱.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۲۲۵. محل برخورد ضلعهای متقابل چهارضلعی ABCD را با P و Q نشان دهید. اگر مقطع صفحه با سطح جانبی هرم ABCDM یک متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه صفحهٔ مقطع باید موازی صفحهٔ PQM باشد، ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی PM و QM گردد. بنابراین برای این که مقطع مستطیل باشد، زاویهٔ PMQ باید 90° باشد. یعنی M بر روی سطح کره‌ای به قطر PQ قرار گیرد.

(بنابراین قسمت (a) مسأله به اثبات رسیده است.)

(b) محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD و خط PQ را با K و L نشان دهید. چون قطرهای متوازی‌الاضلاع، از قطع سطح جانبی هرم ABCDM با صفحه‌ای به موازات MK و ML به دست آمده است، این متوازی‌الاضلاع یک لوزی خواهد بود اگر،

$$K\hat{M}L = 90^\circ$$

یعنی M روی سطح کره‌ای به قطر، KL قرار می‌گیرد.

(c) از قسمت (a) و (b) نتیجه می‌شود که مکان نقطهٔ M دایره‌ای است که از تقاطع دو کره به قطرهای PQ و KL به دست می‌آید.

(d) مکان نقطه‌ها، یک سطح مخروطی خواهد بود که رأس آن محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD و دایره‌های آن، دایره قسمت قبلی مسأله می‌باشد.

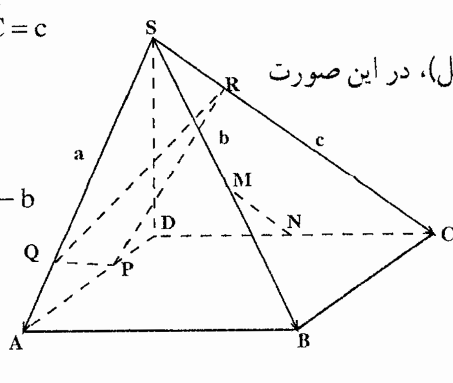
۲۲۷. فرض می‌کنیم :

$$\overrightarrow{SA} = a \ , \ \overrightarrow{SB} = b \ , \ \overrightarrow{SC} = c$$

(شکل)، در این صورت

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = c - b \ ,$$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = a + c - b$$



و اگر، درضمن، فرض کنیم :

$$\overrightarrow{SQ} = xa$$

آن وقت، خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{SR} = (1-x)c \ , \quad \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + x\,\overrightarrow{AD} = a + x(c-b) \ ,$$
$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{SR} - \overrightarrow{SQ} = (1-x)c - xa \ ,$$
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SQ} = (1-x)a + x(c-b)$$

در ضمن، بردارهای $\overrightarrow{QR}$ و $\overrightarrow{QP}$ ، به ازای هیچ مقداری از x، موازی نیستند (که نتیجه‌ای است از تجزیهٔ آنها به سه بردار a، b و c که در یک صفحه واقع نیستند). چون نقطهٔ M، در صفحه‌ای قرار دارد که از نقطهٔ N موازی صفحهٔ α رسم شده است، بنابراین، برای مقدارهایی از λ و μ داریم :

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SN} + \lambda\,\overrightarrow{QR} + \mu\,\overrightarrow{QP}$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}) + \lambda[(1-x)c - xa] + \mu[(1-x)a + x(c-b)]$$
$$= [\frac{1}{2} - \lambda x + \mu(1-x)]a + (-\frac{1}{2} - \mu x)b + [1 + \lambda(1-x) + \mu x]c$$

بنابراین، نقطهٔ M، تنها وقتی بر خط راست SB قرار می‌گیرد که $\overrightarrow{SM} = yb$ ، یعنی

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \lambda x + \mu(1-x) = 0 \\ 1 + \lambda(1-x) + \mu x = 0 \end{cases}$$

از این دستگاه، به دست می‌آید :

$$\mu = -\frac{x+1}{2(2x^2 - 2x + 1)} \ , \ \lambda = \frac{3x-2}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

[توجه کنیم که : $4x^2 - 4x + 2 = (2x-1)^2 + 1 > 0$]. بنابراین، مقدارهای مجهول y، وتنها آنها، در برابری

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{x(x+1)}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

دست‌کم به ازای یک مقدار x، صدق می‌کنند. به‌زبان دیگر، معادلهٔ

$$(۴y+۱)x^۲-(۴y+۳)x+(۲y+۱)=۰$$

نسبت به x، به‌ازای مقدارهای مجهول y، یعنی به‌ازای

$$(۴y+۳)^۲-۴(۴y+۱)(۲y+۱)=-۱۶y^۲+۵\geq ۰$$

قابل حل است (از آن جمله به ازای $۴y-۱=۰$، $۴y+۳\neq ۰$). به این ترتیب، مقدارهای مجهول y، بازهٔ $[-\frac{\sqrt{۵}}{۴}\ ,\ \frac{\sqrt{۵}}{۴}]$ را پر می‌کنند.

۱۱.۱. رسم شکل

۱.۱۱.۱. رسم صفحه

۲۲۸. فرض می‌کنیم x فاصلهٔ صفحهٔ قاطع از رأس هرم باشد. حجم هرم تشکیل شده، نصف حجم هرم داده شده است. از آن‌جا به فرض این‌که ارتفاع هرم داده شده را h بگیریم، داریم:

$$\frac{x^۳}{h^۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{h}{\sqrt[۳]{۲}}$$

۲۲۹. فرض می‌کنیم قاعدهٔ هرم مربعی به‌ضلع a و اندازهٔ ارتفاع هرم نیز مساوی a باشد. برای هر مقطعی از هرم داریم:

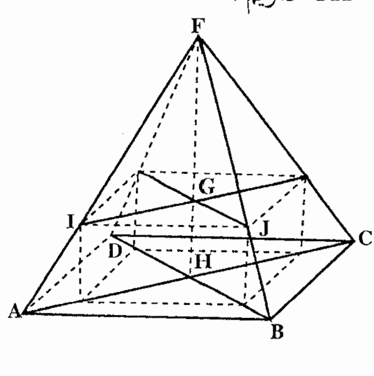
$$IJ=FG$$

یا

$$IJ+GH=FH=a$$

با فرض $IJ=x$ و $GH=y$ داریم:

$$x+y=a$$



امّا حجم منشور مساوی $x^۲y$ است. ازطرفی این حاصلضرب درصورتی ماکزیمم است که $x = ۲y$ باشد. از آن‌جا:

$$y = \frac{a}{۳} \text{ و } x = \frac{۲a}{۳}$$

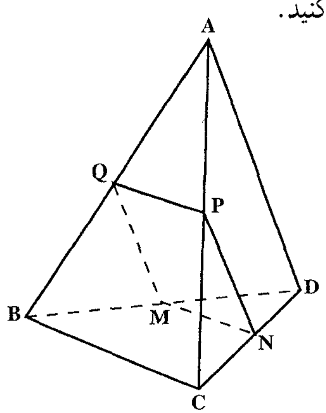
بنابراین، مقطع باید به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع از قاعده باشد (یا $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع از رأس).

$$V = \frac{۴a^۲}{۹} \cdot \frac{a}{۳} = \frac{۴a^۳}{۲۷}$$

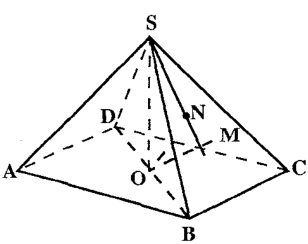
تبصره. مسأله را برای حالتی که هرم دلخواه باشد، حل کنید.

۲۳۰. گزینهٔ (ب) درست است.

۲۳۱. مسأله را حل شده و متوازی‌الاضلاع MNPQ را جواب مسأله فرض کنید و از ویژگی متوازی‌الاضلاع استفاده کنید.



۲۳۲. از نقطه‌ای از خط BD، عمودی بر صفحهٔ CSD رسم می‌کنیم. عمود، به صفحهٔ برش متعلق بوده و به‌همراه خط BD به‌طور کامل آن را تعریف می‌کند. مناسب به‌نظر می‌رسد که ترسیم برش را از نقطهٔ O مرکز قاعده ABCD انجام دهیم. درحقیقت صفحهٔ SOM که در آن M میانگاه یال CD است (شکل)، بر صفحهٔ CSD عمود است (CD⊥CSD ، CD⊥SOM). بدین ترتیب، ارتفاع مثلث SOM که از رأس O رسم می‌شود، بر صفحهٔ CSD عمود خواهد بود. حال تعیین می‌کنیم پای N ارتفاع، ضلع SM را با چه نسبتی تقسیم می‌کند.



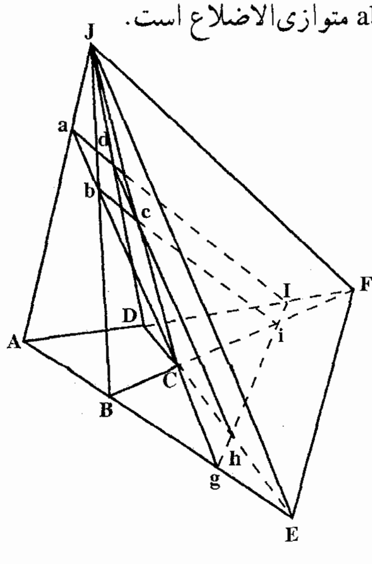
در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOM($S\hat{O}M = ۹۰^\circ$) رابطه‌های $OM = a/۲$ و $SM = a\sqrt{۳}/۲$

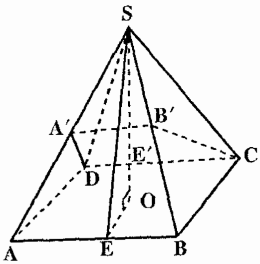
را داریم. طبق خاصیت مثلث قائم‌الزاویه، تساوی $OM^۲ = MN.SM$ در دسترس قرار می‌گیرد که از آن نیز $MN = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$ استنتاج می‌شود. این امر به معنی $MN = \frac{۱}{۳}SM$ و مرکز بودن نقطه N برای مثلث متساوی‌الاضلاع CSD است. میانهٔ DK از مثلث CSD را رسم می‌کنیم. $N = DK \cap SM$ را داریم.

برشی که به‌دست می‌آید، عبارت از مثلث DKB است. حال مساحت برش را به‌دست می‌آوریم. ارتفاع h مثلث DKB رسم شده از رأس B، دو برابر طول عمود ON است، زیرا نقطهٔ O میانگاه پاره‌خط BD است.

در مثلث قائم‌الزاویه SOM، $ON = \sqrt{MN.SN} = a/\sqrt{۶}$ را داریم. درنتیجه $h = ۲a/\sqrt{۶}$ بوده و مساحت مثلث DKB عبارت از $\frac{۱}{۲}hDK = a^۲ / ۲\sqrt{۲}$ خواهد بود.

۲۳۳. می‌دانیم که صفحهٔ قاطع باید با دو خطی که فصل مشترکهای وجه‌های متقابل هرم می‌باشند، موازی باشند، زیرا این صفحه، دو وجه روبه‌رو را درخطهایی موازی فصل مشترک آنها قطع می‌کند. بنابراین دو خط فصل مشترک باهم موازی‌اند. پس باید ضلعهای روبه‌رو را تا نقطهٔ برخوردشان امتداد می‌دهیم، رسم کردن JE و JF هر صفحهٔ موازی با JEF، یک متوازی‌الاضلاع abcd را ایجاد می‌کند. دراین‌صورت gba و EJ متوازی‌اند، زیرا فصل مشترکهای دو صفحهٔ موازی با صفحهٔ JAB می‌باشند. همچنین cd موازی با JE و درنتیجه موازی با ab است. همچنین ad و cb موازی با JF هستند بنابراین چهارضلعی abcd متوازی‌الاضلاع است.





۲۳۴. منشور چهار پهلوی منتظم S.ABCD را درنظر می‌گیریم. ضلع قاعده را با a و ارتفاع وجه جانبی؛ یعنی SE را با l نشان می‌دهیم. مقطع این هرم با صفحه‌ای که بر CD می‌گذرد ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $CDA'B'$ است. درنتیجه، CD که موازی AB است، با $A'B'$ موازی می‌باشد و مثلثهای SCB' و SDA' باهم مساوی‌اند، زیرا دارای یک زاویهٔ مساوی می‌باشند که بین دو ضلع متناظر متساوی قرار دارند.

مساحت کل هرم $a^۲+۲al$ است و بنا به فرض باید داشته باشیم:

$$\text{مساحت } (SCD+SCB'+SDA'+SA'B')=\frac{۱}{۲}(a^۲+۲al) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم $SE'=x$؛ خواهیم داشت:

$$\text{مساحت } SCD=\frac{al}{۲}$$

و

$$\frac{\text{مساحت } SA'B'}{\text{مساحت } SAB}=\frac{x^۲}{l^۲}\Rightarrow \text{مساحت } SA'B'=\frac{ax^۲}{۲l};$$

$$\frac{\text{مساحت } SCB'}{\text{مساحت } SCB}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SE'}{SE}=\frac{x}{l}\Rightarrow \text{مساحت } SCB'=\frac{ax}{۲};$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱)، خواهیم داشت:

$$f(x)=x^۲+۲lx-al-l^۲=۰$$

یک ریشهٔ معادلهٔ بالا منفی است و برای آن‌که ریشه دیگر آن که مثبت است، بین ۰ و l باشد، باید $f(۰)f(l)<۰$ باشد. امّا:

$$f(l)=۲l^۲-al \text{ و } f(۰)=-al-l^۲$$

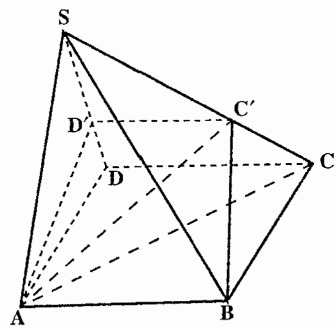
و باید $۲l^۲-al>۰$ باشد؛ یعنی $l>\frac{a}{۲}$.

این شرط همواره برقرار است زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ SOE داریم $OE=\frac{a}{۲}$، $SE=l$ و $SE>SO$.

اندازهٔ ریشهٔ موردنظر معادله، $x=-l+\sqrt{l(۲l+a)}$ است و از آن‌جا، وضع صفحه برای رسم مشخص است.

۲۳۵. هرم S.ABCD را که قاعدهٔ آن ABCD یک متوازی‌الاضلاع است، درنظر می‌گیریم. این هرم را با صفحه‌ای که بر AB می‌گذرد قطع می‌کنیم. مقطع، ذوزنقهٔ $ABC'D'$ است. قطرهای AC و AC' را رسم می‌کنیم. برای آن‌که صفحهٔ $ABC'D'$ هرم را به دو بخش هم‌ارز (معادل) تقسیم کند، باید $S.ABC'D'$ نصف S.ABCD باشد. داریم :

$$\frac{V.SABC'}{V.SABC}=\frac{SC'}{SC} \quad \text{و} \quad \frac{V.SAD'C'}{V.SADC}=\frac{SD'.SC'}{SD.SC}=\frac{SC'^{۲}}{SC^{۲}}$$



امّا SABC و SADC هم‌ارزند، زیرا که قاعده‌های آنها مساوی است و دارای یک ارتفاع می‌باشند.

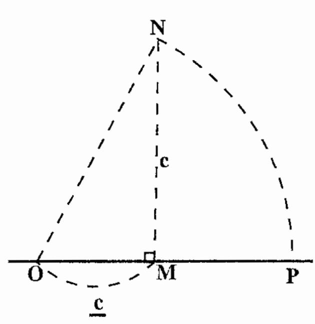
از جمع کردن عضوهای متناظر دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت :

$$\frac{V.SABC'D'}{V.SABC}=\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'^{۲}}{SC^{۲}}$$

از آن‌جا با قرار دادن $SC'=x$ و $SC=c$ و یادآوری این که SABC و $SABC'D'$ هم‌ارز می‌باشند، داریم :

$$x^{۲}+cx-c^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x=-\frac{c}{۲}+\sqrt{\frac{c^{۲}}{۴}+c^{۲}}$$



از آن‌جا روش رسم $OC' = x$ را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد :

روی یک خط، پاره‌خط $OM = \frac{c}{۲}$ و روی عمود، $MN = c$ را جدا می‌کنیم.

داریم :

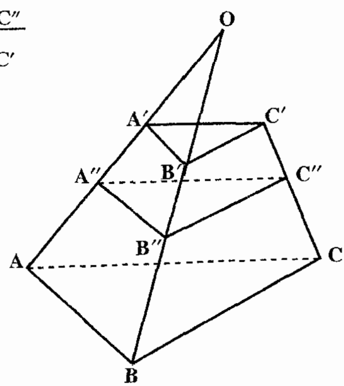
$$ON = \sqrt{\frac{c^۲}{۴} + c^۲}$$

حال اگر ON را به OP واقع بر خط OM تبدیل کنیم، خواهیم داشت :

$$MP = \sqrt{\frac{c^۲}{۴} + c^۲} - \frac{c}{۲} = x$$

۲۳۶. منشور ناقص $ABCA'B'C'$ و یک مقطع $A''B''C''$ از آن، موازی با قاعده‌های منشور را به‌قسمی در نظر می‌گیریم که داشته باشیم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A''B''C''}} = \frac{S_{A''B''C''}}{S_{A'B'C'}}$$



چون این سه چندضلعی متشابه هستند، پس نسبت مساحتهای آنها به نسبت مجذور ضلعهای متناظر آنها می‌باشند. بنابراین رابطهٔ بالا معادل رابطهٔ زیر است :

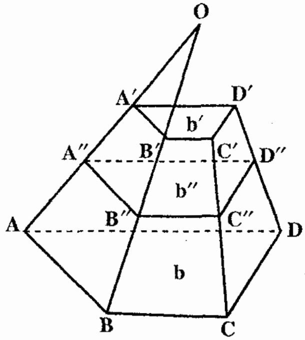
$$\frac{\overline{AB}^۲}{\overline{A''B''}^۲} = \frac{\overline{A''B''}^۲}{\overline{A'B'}^۲} \Rightarrow \frac{AB}{A''B''} = \frac{A''B''}{A'B'}$$

اگر O را نقطهٔ برخورد AA' و BB' بنامیم، داریم :

$$\frac{OA}{OA''} = \frac{OA''}{OA'}$$

بنابراین OA'' واسطهٔ هندسی بین OA و OA' است. درنتیجه نقطهٔ A'' را براحتی می‌توان مشخص کرد. برای این کار، دایره‌ای به‌قطر AA' رسم می‌کنیم و از نقطهٔ

O مماس OT را بر این دایره رسم می‌کنیم $OT = OA''$ است و از آن‌جا نقطهٔ A'' مشخص می‌شود.



۲۳۷. هرم ناقص به قاعده‌های ABCD، $A'B'C'D'$ و مقطع $A''B''C''D''$ از آن را که موازی قاعده‌ها و به‌نسبت $\frac{m}{m'}$ از آنها می‌باشد، درنظر می‌گیریم. اندازهٔ مساحت قاعده‌ها و این مقطع را b، b' و b'' می‌نامیم. می‌خواهیم b'' را محاسبه کنیم. این سه چندضلعی متشابه‌اند. اگر O را نقطهٔ برخورد AA' و BB' فرض کنیم، داریم:

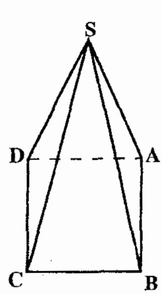
$$\frac{b''}{\overline{OA''}^2} = \frac{b}{\overline{OA}^2} = \frac{b'}{\overline{OA'}^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{b''}}{OA''} = \frac{\sqrt{b}}{OA} = \frac{\sqrt{b'}}{OA'}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{b''}-\sqrt{b'}}{OA''-OA'} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{b''}}{OA-OA''} \Rightarrow \frac{\sqrt{b''}-\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b''}} = \frac{A''A'}{AA''} = \frac{m'}{m}$$

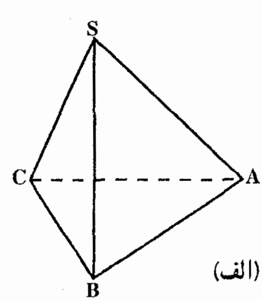
$$\Rightarrow \sqrt{b''} = \frac{m'\sqrt{b}+m\sqrt{b'}}{m+m'}$$

۲.۱۱.۱. رسم هرم

۲۳۸. هرم (الف) مثلث‌القاعده و هرم (ب) مربع‌القاعده است.

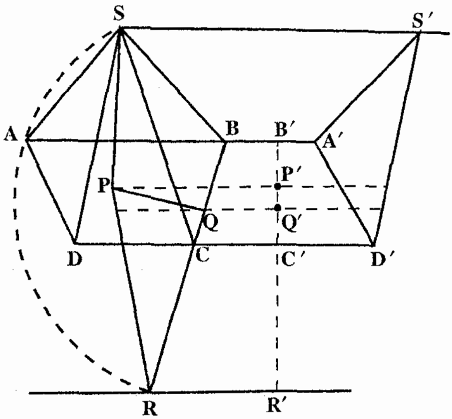


(ب)



(الف)

۲۳۹. فرض می‌کنیم ترسیم انجام شده است. از رأس S، عمود SP را بر صفحهٔ قاعده، و از نقطهٔ P، عمود PQ را بر BC رسم می‌کنیم. روی BC پاره‌خط $QR = QB$ را جدا می‌کنیم و R را به P وصل می‌نماییم. خط RP در صفحهٔ قاعده است و SQ عمود بر BC است.



به موجب زاویهٔ قائمه SPQ داریم:

$$QS^2 - QP^2 = SP^2 \text{ یا } QR^2 - QP^2 = SP^2$$

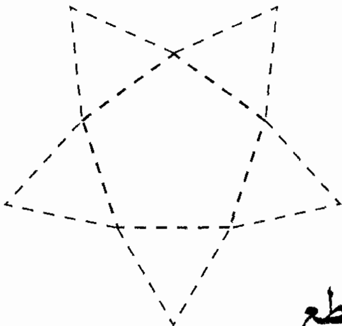
امّا نسبتهای $\frac{BQ}{CQ}$ و $\frac{SQ}{CQ}$ یا $\frac{RQ}{CQ}$ معلومند، زیرا مثلث BCS با مثلثی داده شده متشابه است.

می‌توان نسبت به $B'C'$ و نقطهٔ P'، نقطه‌های Q' و R' را مشخص کرد و خطهایی موازی AA' رسم کرد و مسأله به یک مسأله شناخته شده برمی‌گردد:
مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR را چنان رسم کنید که رأسهای آن روی خطهای موازی داده شده باشند و بعلاوه می‌دانیم که، تفاضل $RQ^2 - PQ^2$ یعنی تفاضل ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه، طول معلومی مساوی SP^2 دارد.

۳.۱۱.۱. رسم مکعب

۲۴۰. $S = \frac{۳}{۴}a^2$ ، $V = \frac{a^3\sqrt{۲}}{۳۲}$

۴.۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

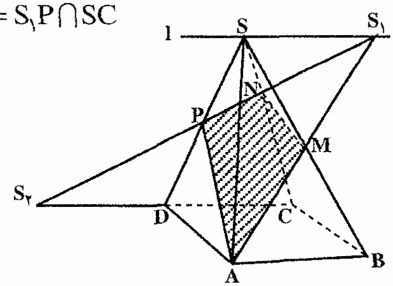


۲۴۱. گستردهٔ، هرم با قاعدهٔ پنج‌ضلعی منتظم به‌صورت روبه‌رو است.

۱۲.۱. برش، مقطع

۲۴۲. نقطه تلاقی خط AM و صفحهٔ SCD را رسم می‌کنیم. به دلیل $AB \| CD$ به $AB \| SCD$ دست می‌یابیم و این امر بدین معنی است که صفحه‌های SAB و SCD در امتداد خط موازی با (AB) همدیگر را قطع می‌کنند (در شکل، $l \| AB$ است)، چنین حاصل می‌شود :

$S_1 = AM \cap l = AM \cap SCD$ ، $N = S_1P \cap SC$



برش عبارت از چهارضلعی AMNP است. رابطهٔ $S_2 = S_1P \cap CD$ را درنظر بگیرید. M و P میانگاه پاره‌خطهای SB و SD و چنین داریم :

$S_2D = S_1S$ و $S_1S = AB$

بدلیل $CD = AB$ نیز داریم :

$S_2C = 2CD$ و $S_2D = CD$

حال از تشابه مثلثهای SNS_1 و CNS_2 به $SN / NC = SS_1 / CS_2 = 1/2$ می‌رسیم.

۲۴۳. در صفحهٔ ASC از M ، میانگاه یال SC که در صفحه برش قرار دارد عمودی بر آن یال رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این عمود و AC را با K نشان داده و KC را پیدا می‌کنیم. از مثلث SOC (شکل b و a) به $\cos\varphi = OC / CS = a / \sqrt{21}$ وصول می‌یابیم.

درنتیجه (a) $\cos\varphi = ۱/\sqrt{۳}$ و (b) $\cos\varphi = ۱/\sqrt{۵}$ خواهد بود. حال از مثلث KMC به

$$(a) KC = MC/\cos\varphi = \frac{۳}{۴}a\sqrt{۲} = \frac{۳}{۴}AC$$

$$(b) KC = \frac{۵}{۴}a\sqrt{۲} = \frac{۵}{۴}AC$$

می‌رسیم. از نقطهٔ K برش را رسم می‌کنیم. صفحهٔ α برش و خط BD بر یال SC عمود بوده و از این رو موازی خواهند بود. این امر بدین معنی است که فصل مشترک صفحه‌های α و ABCD نیز با BD موازی است. خطی به‌صورت $EF \| BD$ رسم می‌کنیم. سپس EM و FM را ترسیم می‌کنیم. درنتیجه برشهای مطلوب به‌دست می‌آید : (a) پنج‌ضلعی MNPQR و (b) چهارضلعی MNPQ .

حال مساحت سطح این برشها را محاسبه می‌کنیم :

(a) چنین داریم :

$$MK = MC\tan\varphi\frac{\sqrt{۳}}{۲}a \quad \text{و} \quad FE = ۲KC = \frac{۳}{\sqrt{۲}}a$$

$$S_{EFM} = EF \cdot MK = \frac{۳\sqrt{۶}}{۸}a^{۲}$$

به آسانی دریافت می‌شود که $CE = \frac{۳}{۲}BC$ و $BE = \frac{۱}{۳}CE$ است.

از این‌رو $EP = \frac{۱}{۳}EF$ را داریم. خطی به‌صورت $MM_{۱} \| SB$ رسم کرده و آن‌گاه $EB = BM_{۱}$ را خواهیم داشت. این رابطه به‌معنی $EN = \frac{۱}{۲}EM$ است.

از $EP = \frac{۱}{۳}EF$ و $EN = \frac{۱}{۲}EM$ درمی‌یابیم که $S_{EPN} = \frac{۱}{۶}S_{EFM}$ است.

از تقارن شکلها حول صفحهٔ SAC استنتاج می‌شود که $S_{FQR} = S_{EPN} = \frac{۱}{۶}S_{EFM}$ است. درنتیجه مساحت سطح برش برابر

$$S_{EFM} - S_{EPN} - S_{FQR} = \frac{۲}{۳}S_{EFM} = \frac{\sqrt{۶}}{۴}a^{۲}$$

خواهد بود.

(b) به‌طریق مشابه چنین حاصل می‌شود :

$KM=\sqrt{\frac{5}{2}}a$ ، $EF=\frac{5}{\sqrt{2}}a$ ، $S_{EFM}=\frac{5\sqrt{5}}{4}a^2$. در مثلث PSM داریم :

$PM=MS.\tan PSM=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}a$ و $\tan PSM=-\tan 2\varphi=\frac{4}{3}, \widehat{PSM}=\pi-2\varphi$

از این‌رو $PM=\frac{2}{3}KM$ حاصل می‌شود. خطی به‌صورت $MM_1\|SB$ رسم می‌کنیم.

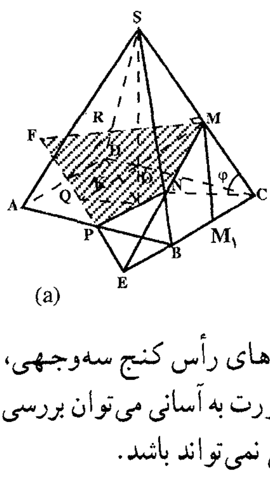
آن‌گاه داریم : $EC=\frac{5}{2}BC$ ، $EM_1=2BC$ ، $BM_1=\frac{1}{2}BC$.

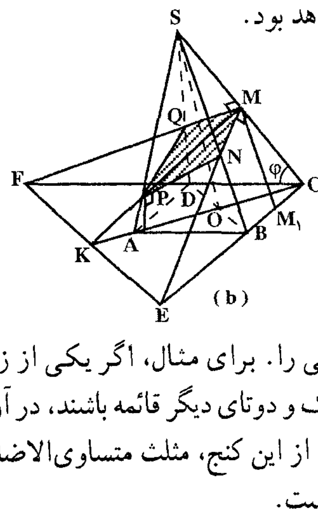
در نتیجه $MN/ME=M_1B/M_1E=1/4$ حاصل می‌شود.

از $MP=\frac{2}{3}MK$ ، $MN=\frac{1}{4}ME$ استنتاج می‌شود که $S_{MNP}=\frac{1}{6}S_{MEK}$ ؛ یعنی

$S_{MNPQ}=\frac{1}{6}S_{MEF}=\frac{5\sqrt{5}}{24}a^2$ است. پس جواب مسأله عبارت از (a) $\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$ ،

(b) $\frac{5\sqrt{5}}{24}a^2$ خواهد بود.



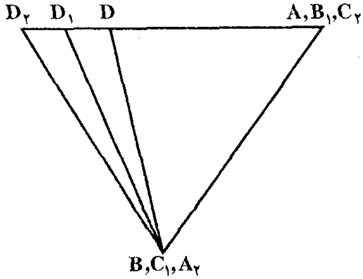


۲۴۴. نه، نه سطح هر کنجی را. برای مثال، اگر یکی از زاویه‌های رأس کنج سه‌وجهی، به اندازه کافی کوچک و دوتای دیگر قائمه باشند، در آن‌صورت به آسانی می‌توان بررسی کرد که هیچ مقطعی، از این کنج، مثلث متساوی‌الاضلاعی نمی‌تواند باشد.

۲۴۵. گزینهٔ (ب) درست است.

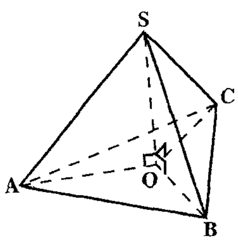
۱۳.۱. ثابت کنید هرم منتظم است

۲۴۶. فرض کنید قطعیت نامساویهای $DA \le DB \le DC$ ، و اکید بودن لااقل یکی از آنها



وجود داشته باشد. همچنین فرض کنیم مثلثهای DAB، DBC و DCA را به‌قسمی می‌خواهیم بر روی هم منطبق کنیم که زاویه‌ها و ضلعهای مساوی آنها بر روی هم قرار گیرند. در شکل رأسهای مثلث دوم اندیس ۱ و مثلث سوم اندیس ۲ دارند. (شکل) اما اگر $D_2A_2 = DA < D_1C_1$ (بنا به فرض). آن‌گاه، $D_2\hat{D}_1B$ حاده و $B\hat{D}_1D$ منفرجه و $DB > D_1C_1$. که این یک تناقض است.

۲۴۷. اگر پاره‌خط SO را ارتفاع هرم درنظر بگیریم، آن‌گاه طبق تعریف تعامد یک خط و یک صفحه مثلثهای SOA، SOB و SOC قائم‌الزاویه خواهند بود. عبارتهای $SA = SB = SC = l$ و $SO = h$ را درنظر می‌گیریم.



از مثلثهای قائم‌الزاویه SOA، SOB و SOC درمی‌یابیم که $BO = CO = \sqrt{l^2 - h^2}$ است. این امر بدین معنی است که نقطهٔ O مرکز دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC بوده و بنابراین مرکز همان مثلث نیز هست.

بدین ترتیب رأس S هرم مفروض را می‌توان روی مرکز قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC تصویر کرد. از این رو هرم مفروض منتظم می‌باشد.

به‌طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد هرمی که قاعدهٔ آن چندضلعی منتظم بوده و طول یالهای آن نیز برابر است یک هرم منتظم می‌باشد. به‌ویژه چهار وجهی منتظم؛ یعنی چهاروجهیی که یالهای آن برابر است؛ یک هرم منتظم محسوب می‌شود. هریک از وجه‌های چهاروجهی منتظم، نقش قاعده را برای آن ایفاء می‌کنند.

ضابطهٔ تعامد یک خط و یک صفحه به شرح زیر است:

اگر خط مستقیمی بر هریک از دو خط متقاطع واقع بر یک صفحه عمود باشد، آن‌گاه خط و صفحه مفروض متعامد خوانده می‌شوند.

۲۴۸. از برابری یالهای جانبی هرم $SA_1 \cdots A_n$ نتیجه می‌شود که نقطهٔ O، تصویر رأس S بر قاعدهٔ هرم، از رأسهای A_1، ....، A_n به یک فاصله است، یعنی، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی چندضلعی $A_1 \cdots A_n$ می‌باشد. چون به‌ازای هر مقدار $K = 1, \ldots, n$، هرم SOA_kA_{k+1} $(A_{n+1} = A_1)$، نسبت به صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دووجهی مربوط به یال

SO، متقارن است، بنابراین، زاویه‌های دووجهی این هرم، که مربوط به یالهای SA_k و SA_{k+1} هستند، باهم برابر می‌شوند که مقدار هرکدام از آنها را φ_k می‌نامیم. بنا بر فرض مسأله

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi_2+\varphi_3=\cdots=\varphi_{n-1}+\varphi_n=\varphi_n+\varphi_1$$

و در ضمن، n، عددی است فرد، بنابراین

$$\varphi_1=\varphi_3=\cdots=\varphi_n=\varphi_2=\cdots=\varphi_{n-1}$$

از این‌جا معلوم می‌شود که همهٔ هرمهای SOA_kA_{k+1} با هم برابرند (زیرا، هر دو هرم مجاور، نسبت به وجه مشترکشان، قرینهٔ یکدیگرند)؛ یعنی همهٔ زاویه‌های $A_k\hat{O}A_{k+1}$ با هم برابرند. به این ترتیب، چندضلعی $A_n \cdots A_1$ منتظم است.

۱۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۴۹. جواب $x=\dfrac{\sqrt{2}h(a^2-h^2)}{h+\sqrt{2(a^2-h^2)}}$

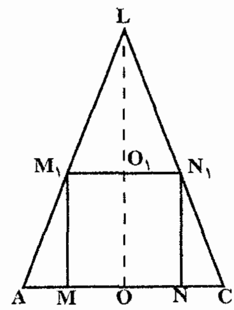
۲۵۰. درشکل قطع هرم با صفحه‌ای که از رأس و قطر قاعدهٔ آن می‌گذرد، داده شده است. از تشابه دو مثلث OLC و O_1LN_1 به‌دست می‌آید:

$$\frac{OL}{O_1L}=\frac{OC}{O_1N_1}; \qquad (1)$$

که اگر $NN_1=x$ ضلع مکعب باشد، داریم:

$$OL=h; O_1L=h-x;$$

$$O_1N_1=\frac{x}{\sqrt{2}}\ ;\ OC=\sqrt{a^2-h^2}$$



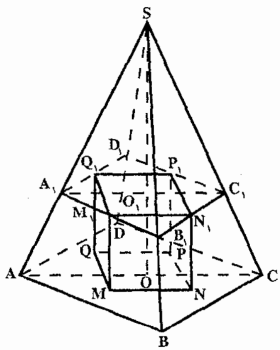
اگر این مقدارها را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{h}{h-x}=\frac{\sqrt{a^2-h^2}\cdot\sqrt{2}}{x}$$

جواب :

$$x = \frac{h\sqrt{۲(a^۲ - h^۲)}}{h + \sqrt{۲(a^۲ - h^۲)}}$$

۲۵۱. فرض می‌کنیم که چهار یال از مکعب موازی قطر AC از قاعده هرم باشد (شکل). این یالها را با MN، PQ، $M_۱N_۱$ و $P_۱Q_۱$ نشان می‌دهیم.



طول یال مطلوب مکعب را با b مشخص می‌کنیم. برشی از هرم را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که با قاعده بالایی مکعب ایجاد شده است ($A_۱B_۱C_۱D_۱$ در شکل). این چهارضلعی مربع بوده و یالهای $M_۱N_۱$ و $P_۱Q_۱$ مکعب با قطر $A_۱C_۱$ موازی است. از این رو $N_۱\hat{M}_۱B_۱ = \pi/۴$ حاصل می‌شود. از این نکته $Q\hat{M}_۱A_۱ = \pi/۴$ نتیجه می‌شود؛ یعنی مثلث قائم‌الزاویه $M_۱A_۱Q_۱$ متساوی‌الساقین نیز هست. از این گذشته مثلثهای $M_۱B_۱N_۱$ و $M_۱A_۱Q_۱$ مساوی هستند زیرا وترهای آنها مساوی هستند:
$M_۱N_۱ = M_۱Q_۱ = b$. این امر به‌معنی $B_۱M_۱ = A_۱M_۱$ است. از این‌رو $b = M_۱N_۱ = A_۱C_۱/۲$ استنتاج می‌شود.

حال این نکته را مورد استفاده قرار می‌دهیم که فاصلهٔ بین صفحه‌های $A_۱B_۱C_۱D_۱$ و ABCD برابر b است. فرض می‌کنیم که SO ارتفاع هرم بوده و $O_۱ = SO \cap A_۱B_۱C_۱D_۱$ باشد. چنین داریم:

$$OO_۱ = b \text{ ، } SO_۱ = h - b \text{ ، } SO_۱/SO = (h-b)/h$$

از این‌رو $A_۱C_۱/AC = (h-b)/h$ استنتاج می‌شود.

با منظور کردن $AC = a\sqrt{۲}$ ، $A_۱C_۱ = ۲b$ رابطه $۲b/a\sqrt{۲} = (h-b)/h$ حاصل می‌شود که از آن نیز $b = ha/(a+\sqrt{۲h})$ به‌دست می‌آید.

پس جواب مسأله عبارت از $ah/(a+\sqrt{۲h})$ خواهد بود.

توجه داشته باشید که درحل این مسأله محاسبه‌ها و استدلالها را با این فرض انجام دادیم که موقعیتهای مفروض برای هرم و مکعب درصورت مسأله امکان‌پذیر است. از حل مسأله استنتاج می‌شود که چنین مکعبی را می‌توان در هرم مفروض محاط کرد. درحقیقت

برشی از هرم را به‌موازات قاعدهٔ آن از نقطه A_1 متعلق به یال SA طوری رسم می‌کنیم که $\frac{SA_1}{SA}=\frac{\sqrt{2}h}{a+\sqrt{2}h}$ باشد.

به آسانی می‌توان ثابت کرد میانگاههای ضلعهای برش و پای عمودهای رسم شده از این نقطه‌ها بر صفحه قاعدهٔ هرم، رأسهای مکعب مفروض در مسأله است.

از حل مسألهٔ بالا استنتاج می‌شود که این نوع مکعب منحصر بفرد است.

۲۵۲. می‌توان ثابت کرد که محور استوانه باید، از وسط یال BD بگذرد و به صفحهٔ BDL تعلق داشته باشد در نقطهٔ L وسط AC است. زاویهٔ حاده‌ای را که محور استوانه با BD می‌سازد، با α نشان می‌دهیم. هرم را روی صفحه‌ای عمود بر محور استوانه، تصویر می‌کنیم و چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ را به‌دست می‌آوریم که در آن،

$$A_1C_1=AC=12$$

قطرهای A_1C_1 و B_1D_1 برهم عمودند و A_1C_1 در نقطهٔ F محل برخورد قطرها، نصف می‌گردد و D_1B_1 به وسیلهٔ نقطهٔ F به پاره‌خطهایی به طولهای $6\sqrt{3}\cos\alpha$ و $10\sqrt{3}\sin\alpha-6\sqrt{3}\cos\alpha$ تقسیم می‌شود.

از شرط، $A_1F\cdot FC_1=B_1F\cdot FD_1$ معادله‌ای برحسب α به‌دست می‌آید که عبارت است از،

$$\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=0$$

از آن‌جا، $tg\alpha_1=1$ ، $tg\alpha_2=4$

امّا $B_1D_1=10\sqrt{3}\sin\alpha$ و برابر قطر قاعدهٔ استوانه است. بنابراین دو مقدار برای قطر استوانه پیدا می‌شود :

$$\frac{5\sqrt{6}}{2} \text{ و } \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$$

۲۵۳. اگر صفحهٔ یالهای AD و CD را قطع کند، مقطع، مثلثی خواهد بود که شعاع دایرهٔ محاطی آن بین صفر و $\frac{a}{\sqrt{2}(2\cos\alpha+\sqrt{4\cos^2\alpha+1})}$ تغییر می‌کند.

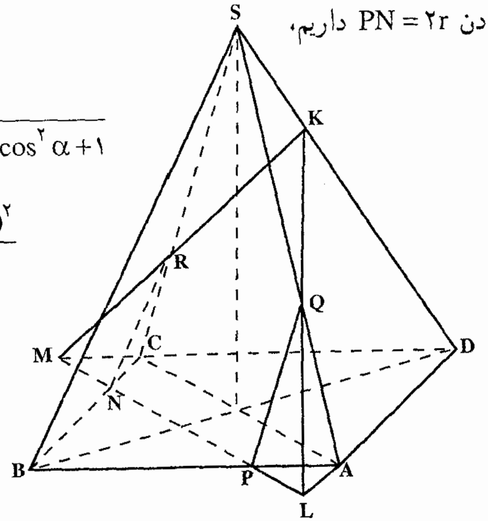
اگر صفحه، یالهای AB، BC را در نقطه‌های P، N و SA، SC را در نقطه‌های Q، R و SD را در نقطهٔ K و امتداد AD و CD را در L و M قطع کند، (شکل) چون PQ و NR موازی و بر دایرهٔ محاط در مقطع مماسند، PN قطر این دایره خواهد بود. با

قراردادن $PN = ۲r$ داریم،

$$ML = ۲a\sqrt{۲} - ۲r$$

$$KL = \frac{a\sqrt{۲} - r}{۲\cos\alpha}\sqrt{۴\cos^{۲}\alpha + ۱}$$

$$S_{MKL} = \frac{(a\sqrt{۲} - r)^{۲}}{۲\cos\alpha}$$



پس

$$r = \frac{a\sqrt{۲} - r}{۲\cos\alpha + \sqrt{۴\cos^{۲}\alpha + ۱}}$$

از آن‌جا

$$r = \frac{a\sqrt{۲}}{۲ + ۲\cos\alpha + \sqrt{۴\cos^{۲}\alpha + ۱}}$$

جواب :

$$۰ < r \leq \frac{a}{\sqrt{۲}(۲\cos\alpha + \sqrt{۴\cos^{۲}\alpha + ۱})}$$

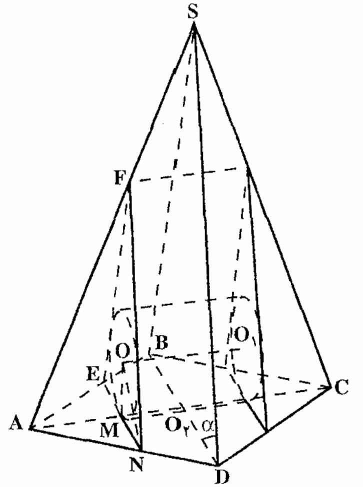
$$r = \frac{a\sqrt{۲}}{۱ + ۲\cos\alpha + \sqrt{۴\cos^{۲}\alpha + ۱}}$$

۲۵۴. اگر محور استوانه را $OO_۱$ فرض کنیم (شکل)، صفحه‌های EFN و BSD موازی‌اند. درنتیجه $F\hat{N}M = S\hat{D}O_۲ = \alpha$ است. اگر $OM = r$ فرض شود، $OO_۱ = ۲r$ خواهد شد و چون NO نیمساز زاویهٔ FNM می‌باشد، از مثلث MON خواهیم داشت :

$$MN = r\,\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} \text{ و } AM = MN = r\,\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} \text{ و } O_۲A = O_۲M + AM$$

$$O_۲A = r + r\,\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} = r(۱ + \text{cotg}\frac{\alpha}{۲}) \qquad (۱)$$

از مثلث $SAO_۲$ داریم :



$O_2A = a\cos\alpha$ (۲)

از رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$r(1+\cot g\frac{\alpha}{2}) = a\cos\alpha \Rightarrow r = a\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2})$$

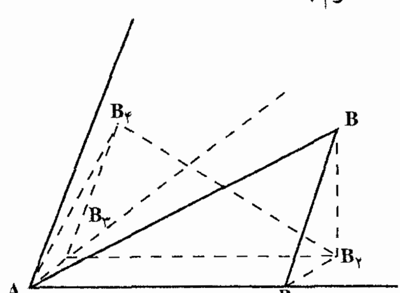
۲۵۵. یک رأس قاعدهٔ هرم را با A نشان می‌دهیم و نقطهٔ B را در صفحهٔ وجه جانبی آن اختیار می‌کنیم،

$AB = a$

تصویر B روی یکی از ضلعهای قاعده را با B_1، و تصویر B بر روی صفحهٔ قاعده را با B_2، و تصویر B_2 بر روی یال قاعده که مجاور AB_1 می‌باشد با B_3، و تصویر B_2 روی وجه جانبی مجاور وجهی که شامل AB است را با B_4 نشان می‌دهیم (شکل).

اگر α فرجه نظیر قاعدهٔ هرم باشد،

$B\hat{A}B_1 = \varphi$



خواهیم داشت :

$B_2B_3 = AB_1 = a\cos\varphi$

$$AB_3 = B_1B_2 = B_1B \cos\alpha = a\sin\varphi\cos\alpha$$
$$B_3B_4 = B_3B_2 \cos\alpha = a\cos\alpha\cos\varphi$$

و بالاخره

$$AB_4 = \sqrt{AB_3^2 + B_3B_4^2} = a\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\alpha + \cos^2\varphi\cos^2\alpha} = a\cos\alpha$$

بنابراین نتیجه می‌شود که طول هریک از پاره‌خطهایی که در صفحه جانبی قرار دارند، پس از دو بار تصویر کردن که در مسأله به آن اشاره شده، در $\cos\alpha$ ضرب می‌شود. (به‌کمک انتقال، یکی از دو سر پاره خط مفروض را به رأس A می‌آوریم.) درنتیجه در چنین تصویرنگاری، هرشکل، به‌شکلی متشابه آن با نسبت تشابهی برابر $\cos\alpha$ تبدیل خواهد شد.

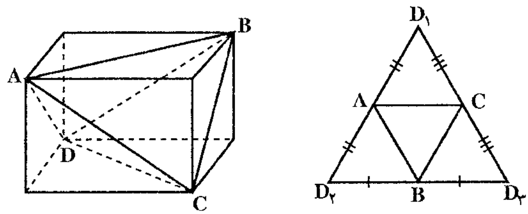
۲۵۶. در لایهٔ اول یک کره (●)، در لایهٔ دوم سه کره (∴)، در لایهٔ سوم شش کره (⁂)، در لایهٔ چهارم ده کره (⁂)، در لایهٔ پنجم ۱۵ کره، در لایهٔ ششم ۲۱ کره، در لایهٔ هفته ۲۸ کره و درلایهٔ هشتم ۳۶ کره موجود می‌باشد و چون ۱۲۰ = ۳۶ + ۲۸ + ۲۱ + ۱۵ + ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱ می‌باشد پس با ۱۲۰ کره یک هرم هشت‌لایه‌ای می‌توان ساخت که در قاعدهٔ آن ۳۶ کره موجود می‌باشد.

۲۵۷. مثلث $D_1D_2D_3$ با زاویه‌های حاده را با خطهای راست AB، AC و BC، که وسط ضلعها را به‌هم وصل کرده‌اند، به‌عنوان گستردهٔ هرم ABCD درنظر می‌گیریم (رأسهای D_1، D_2 و D_3، در یک نقطهٔ D، روی هم قرار می‌گیرند ؛ شکل الف). اگر یالی متناظر با نصف ضلع مثلث $D_1D_2D_3$ باشد، آن‌وقت، یال متناظر با آن، متناظر با پاره‌خط راستی موازی با آن است، که وسط دو ضلع مثلث را به‌هم وصل کرده است ؛ و برعکس. بنابراین یالهای متنافر هرم، با هم برابرند.

متوازی السطوحی می‌سازیم که چهار رأس غیرمجاور آن، بر رأسهای هرم منطبق باشند. برای این‌منظور، از هر یال هرم، صفحه‌ای موازی یال متنافر با آن رسم می‌کنیم. به‌این ترتیب، سه جفت صفحهٔ موازی به‌دست می‌آید که از برخورد آنها یک متوازی‌السطوح ایجاد می‌شود. از آن‌جا که هر دو یال متنافر هرم، طولی برابر دارند، هر وجه متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاعی با قطرهای برابر می‌شود، یعنی وجه‌های متوازی‌السطوح، به شکل مستطیل درمی‌آیند.

متوازی‌السطوحی که همهٔ وجه‌های آن مستطیل باشند، یک مکعب مستطیل است. قضیهٔ عکس هم درست است : اگر رأسهای یک هرم، چهار رأس غیرمجاور مکعب

مستطیلی را تشکیل دهند، آن‌وقت، گستردهٔ این هرم، مثلثی با زاویه‌های حاده خواهد شد که وسط ضلعهای آن به‌هم وصل شده است. درواقع (شکل (ب) را ببینید)، به‌هر رأس، سه مثلث یکسان مربوط می‌شود؛ درضمن سه زاویه‌ای که، از این مثلثها، در یک رأس به‌هم رسیده‌اند، سه نام مختلف دارند و می‌دانیم، مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است، یعنی مجموع زاویه‌های مسطحه در رأس هرم، برابر ۱۸۰ درجه می‌شود.
هرمی که، همهٔ وجه‌های آن باهم برابر باشند (بدون این‌که لزومی به متساوی‌الاضلاع بودن این وجه‌ها باشد)، اغلب هرم متساوی‌الوجوه نامیده می‌شود.



(ب) (الف)

در چنین هرمی:
۱) یالهای متنافر، دو به دو، با هم برابرند؛
۲) مرکز کرهٔ محاطی هرم بر مرکز کرهٔ محیطی آن منطبق است؛
۳) تصویر بر هر صفحه‌ای که موازی با دو یال متنافر باشد، یک مستطیل است؛
۴) مجموع زاویه‌های مسطحهٔ کنجی که در هر رأس تشکیل شده، برابر ۱۸۰ درجه است؛
۵) هر پاره‌خط راستی که وسط دو یال رو به رو را به‌هم وصل کند، بر این یالها عمود است. این گزاره را می‌توان به‌صورت گزارهٔ زیر، که هم‌ارز آن است، بیان کرد: اگر هرم را به اندازهٔ ۱۸۰درجه دور پاره‌خط راستی که وسط دو ضلع رو به رو را به‌هم وصل کرده است، دوران دهیم، هرم بر خودش منطبق می‌شود (این پاره‌خطهای راست، محورهای تقارن مکعب مستطیلی را تشکیل می‌دهند که بر هرم محیط است)؛
۶) سه پاره‌خط راستی که وسط یالهای رو به رو را به هم وصل می‌کنند، دو به دو برهم عمودند. جالب است که از هریک از این ویژگیها، می‌توان ویژگیهای دیگر را نتیجه گرفت.

۲۵۸. ویژگی مورد اشاره را هرمی دارا می‌باشد که، دو فرجه متقابل آن منفرجه باشد.

۲۵۹. غیر از خانهٔ بالایی، خانه‌ها در ۴ ردیف قرار دارند. شمار اعداد نوشته شده در این ۱۴ ردیف ۱۴ تا است.

برای این‌که مجموع عددها در هر ردیف مینیمم باشد، باید کوچکترین عددهای مختلف ممکن را در آنها قرار دهیم و آنها عبارتند از عددهای صحیح متوالی ۱ تا ۱۴، که مجموع آنها نیز چنین می‌شود : $\frac{۱۴\times۱۵}{۲}\to ۱۰۵$

آن را به ۴ تقسیم می‌کنیم تا مجموع عددهای واقع در یک سطح به‌دست آید : $۲۷=\frac{۱۰۸}{۴}$
حال ۲۷ را در خانهٔ بالایی قرار می‌دهیم و در ردیفهای پایین ۱۴ عدد متوالی ۱ تا ۱۴ را طوری قرار می‌دهیم که حاصلجمع آنها ۲۷ باشد. ما دو پاسخ با این روش پیدا کرده‌ایم، که در این‌جا مشاهده می‌کنید. در این جدولها S همه‌جا ۲۷ و T در هر دو جدول ۷۴ است.

		۲۷		
	۱۴	۱۳		
	۱۵	۱۱	۱	
۱۰	۹	۵	۳	
۸	۷	۶	۴	۲

		۲۷		
	۱۴	۱۳		
	۱۵	۱۱	۱	
۱۰	۹	۶	۲	
۸	۷	۵	۴	۳

۲۶۰. چهار وجهی.

۲۶۱. خیر، زیرا به فرض همنهشت بودن وجه‌ها، ممکن است ارتفاع رسم شده از رأس هرم، بر مرکز قاعدهٔ هرم نگذرد. در هرم منتظم، قاعده چندضلعی منتظم است، وجه‌های جانبی مثلثهای همنهشتند، و ارتفاع رسم شده از رأس هرم از مرکز قاعدهٔ هرم می‌گذرد.

۱۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۶۲. (a). اگر $SC=d$ و a ، b و c ضلعهای مثلث ABC و h_a ، h_b و h_c ارتفاعهای مثلث و S مساحت آن باشند، داریم،

$$\sin\alpha=\frac{h_a}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\ ،\ \sin\beta=\frac{h_b}{\sqrt{d^{۲}+a^{۲}}}\ ،\ \sin\gamma=\frac{h_c}{\sqrt{d^{۲}+c^{۲}}}$$

بنابراین یک معادله برحسب d به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{\sqrt{d^2+b^2}}{h_a}+\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{h_b}=1+\frac{\sqrt{d^2+h_c^2}}{h_c}$$

با ضرب کردن این معادله در $2S$ خواهیم داشت :

$$a\sqrt{d^2+b^2}+b\sqrt{d^2+a^2}=2S+\sqrt{c^2d^2+4S^2} \qquad (1)$$

با ضرب صورت و مخرج طرفین (۱) در مزدوج طرف خودش خواهیم داشت (با فرض $\hat{A}\neq\hat{B}$)

$$\frac{a^2-b^2}{a\sqrt{d^2+b^2}-b\sqrt{d^2+a^2}}=\frac{c^2}{\sqrt{c^2d^2+4S^2}-2S}$$

و از آن‌جا،

$$ac^2\sqrt{d^2+b^2}-bc^2\sqrt{d^2+a^2}=(a^2-b^2)(\sqrt{c^2d^2+4S^2}-2S) \qquad (2)$$

با ضرب کردن (۱) در b^2-a^2 و تقسیم نتیجه بر (۲) خواهیم داشت،

$$a(b^2+c^2-a^2)\sqrt{a^2+b^2}+b(b^2-a^2-c^2)\sqrt{d^2+a^2}=4S(b^2-a^2)$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها و سینوسها معادله اخیر به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\cos A.\sqrt{d^2+b^2}-\cos B.\sqrt{d^2+a^2}=\frac{b^2-a^2}{2R} \qquad (3)$$

سمت راست (۳) را به شکل زیر تغییر می‌دهیم :

$$\frac{b^2-a^2}{2R}=2R(\sin^2 B-\sin^2 A)=2R\sin(A+B)\sin(B-A)$$

اکنون، طرفین (۳) را در $\cos A.\sqrt{d^2+b^2}+\cos B.\sqrt{d^2+a^2}$ ضرب می‌کنیم، داریم،

$$(\cos^2 A-\cos^2 B)d^2+b^2\cos^2 A-a^2\cos^2 B=2R\sin(A+B)\sin(B-A)$$

$$\times(\cos A.\sqrt{d^2+b^2}+\cos B.\sqrt{d^2+a^2}) \qquad (4)$$

دیده می‌شود در (۴)،

$$\cos^2 A-\cos^2 B=\sin(B+A)\sin(B-A)،$$

$$b^2\cos^2 A - a^2\cos^2 B = 4R^2\sin(B+A)\sin(B-A)$$

در نتیجه پس از ساده کردن، (۴) به‌صورت زیر درمی‌آید،

$$\cos A.\sqrt{d^2+b^2}+\cos B.\sqrt{d^2+a^2}=\frac{d^2}{2R}+2R \qquad (4')$$

با جمع کردن (۳) و ('۴) خواهیم داشت،

$$2\cos A.\sqrt{d^2+b^2}=\frac{d^2}{2R}+2R(\sin^2 B+\cos^2 A)$$

و از آن‌جا،

$$d^2=4R^2(\cos^2 A-\sin^2 B)=4R^2\cos(A+B)\cos(A-B)$$

و به‌این ترتیب

$$|SC|=2R\sqrt{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

اگر $\hat{A}+\hat{B}<90^\circ$ یا زاویه $\hat{C}$ در مثلث ABC منفرجه باشد، مسأله، یک جواب دارد.
(b). با استفاده از جاگذاریها در (a)، نامساوی موردنظر ما به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{h_b}+\frac{\sqrt{d^2+b^2}}{h_a}-\frac{\sqrt{d^2+h_c^2}}{h_c}\geq 1$$

اگر زاویهٔ C حاده باشد، آن‌گاه طرف راست، همان‌طور که از قسمت (a) نتیجه می‌شود، هرگز برابر ۱ نخواهد بود. بنابراین با یک نامساوی سروکار داریم. زیرا این موضوع به‌ازای $d=0$ صادق است. اگر زاویهٔ C منفرجه باشد، (یا برابر 90°) آن‌گاه سمت راست برای مقدار منحصر به فردی از d، برابر واحد می‌شود. (اگر $\hat{C}=90^\circ$ ، $d=0$) اما به‌ازای $d=0$ ، مقادیر نسبتاً بزرگ d و نامساوی بدیهی و واضح است. (به‌ازای مقادیر بزرگ d، از نامساوی مثلثی نتیجه گرفته می‌شود.)
d، سمت چپ کمتر از واحد باشد، در آن‌صورت باید سمت چپ به‌ازای دو مقدار متمایز d، برابر واحد بشود.

۲۶۳. ۱. مثلثهای PAB و PAC در رأس A قائم‌الزاویه‌اند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAB ($\hat{A}=90^\circ$)، $\hat{P}=30^\circ$ است، پس $P\hat{B}A=60^\circ$ می‌باشد و چون وتر این مثلث $PB=8$ است، پس $AB=3$ (ضلع مقابل به زاویهٔ 30°) و $PA=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

است. در مثلث قائم‌الزاوۀ PAC، $PA = ۴\sqrt{۳}$ و وتر $PC = ۴\sqrt{۶}$ است، پس:

$$AC = \sqrt{PC^۲ - PA^۲} = \sqrt{۹۶ - ۴۸} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳} = PA$$

بنابراین مثلث PAC قائم‌الزاویۀ متساوی‌الساقین در رأس A است. بنابراین $A\hat{C}P = A\hat{P}C = ۴۵^\circ$ است. زاویه‌های مثلث PBC را با معلوم بودن سه‌ضلع آن می‌توان از رابطۀ کسینوسها به‌دست آورید. زاویه‌های مثلث ABC نیز با معلوم بودن سه ضلعش قابل محاسبه است.

۲. برای محاسبه مساحت مثلث PBC از دستور هرون می‌توان استفاده کرد.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

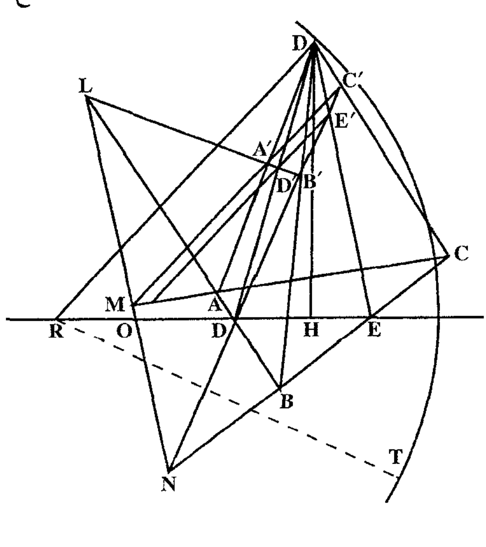
امّا چون این مثلث در رأس متساوی‌الساقین است، مساحت آن از دستور $S = \frac{a}{۲}\sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$ که در آن a قاعده و b ساق مثلث است نیز قابل محاسبه است.

بنابراین داریم:

$$a = ۴\sqrt{۶} \text{ و } b = ۸ \Rightarrow S_{PBC} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲}\sqrt{۶۴ - \frac{۹۶}{۴}} = \frac{۴\sqrt{۶}}{۲} \times ۲\sqrt{۱۰}$$

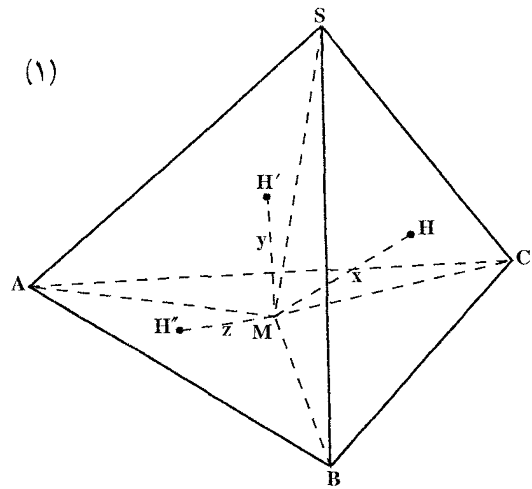
$$\Rightarrow S_{PBC} = ۸\sqrt{۱۵}$$

۲۶۴. ۱ و ۲. صفحۀ SHOR را بر ارتفاع SH و عمود بر محور دوران رسم می‌کنیم. این صفحه، دو خط DE و D′E′ را مشخص می‌کند و کافی است وضع آنها را بررسی کنیم، زیرا آنها به‌طور ثابت بترتیب در صفحۀ قاعده و در صفحۀ مقطع قرار دارند. در این



صورت مسأله، به مسأله‌ای در هندسه مسطحه تبدیل می‌شود و آن مسأله، یافتن مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو خط DD' و EE' است. رأس S دایره‌ای را می‌پیماید که صفحهٔ آن بر MN عمود است، مرکز آن نقطهٔ R و شعاع آن مساوی RS است.

۲۶۵. ۱. نقطهٔ دلخواه M را روی صفحهٔ ABC در نظر گرفته، عمودهای MH، MH' و MH'' را بر وجه‌های SBC، SAC و SAB فرود می‌آوریم. بنا به فرض $MH = x$ ، $MH' = y$ و $MH'' = z$ است. دو هرم ASBC و MSBC در قاعدهٔ SBC مشترکند. بنابراین نسبت حجم آن متناسب با ارتفاع نظیر این قاعدهٔ مشترک است که چون AS عمود بر صفحهٔ SBC است، ارتفاع نظیر این قاعده است. پس داریم :



$$\frac{x}{SA} = \frac{V_{MSBC}}{V_{ASBC}} \qquad (۱)$$

همچنین برای هرمهای MASC و MASB داریم :

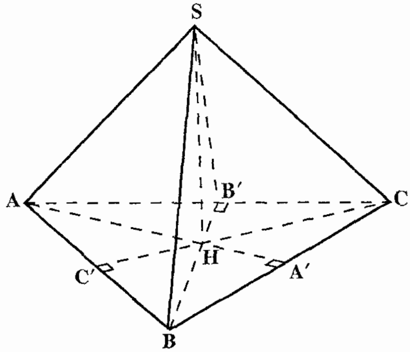
$$\frac{y}{SB} = \frac{V_{MASC}}{V_{BASC}} \quad (۲) \quad و \quad \frac{z}{SC} = \frac{V_{MABC}}{V_{CASB}} \quad (۳)$$

از جمع کردن عضوهای متناظر رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) با توجه به این که مجموع حجم سه هرم به رأس M، مساوی حجم هرم SABC است، داریم :

$$\frac{x}{SA} + \frac{y}{SB} + \frac{z}{SC} = ۱ \qquad (۱)$$

۲. اگر $SA = SB = SC$ باشد، رابطهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$x + y + z = SA$$



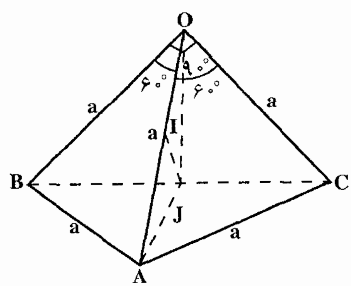
۱.۲۶۶. فصل مشترک صفحه‌های گذرنده بر ارتفاع SH و یالهای SA، SB و SC با صفحهٔ ABC، ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند بنابراین نقطهٔ H پای ارتفاعهای مثلث ABC است.

۲. ....

۱.۲۶۷. داریم :

$$\Delta BOC: BC^2 = OB^2 + OC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$$

$$\Delta OAB \text{ و } \Delta OAC : B\hat{O}A = A\hat{O}C = 60^\circ \text{ و } OA = OB = OC = a$$
$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 = a^2 + a^2 - a \times a = a^2 \Rightarrow AB = AC = a$$



یعنی مثلثهای OBA و OAC متساوی‌الاضلاعند و از آن‌جا، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

زیرا داریم :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = 2a^2 \text{ یا } 2a^2 = 2a^2$$

۲. از A و O به J وصل می‌کنیم در مثلثهای متساوی‌الساقین OBC و ABC، AJ و OJ عمودمنصف BC هستند. به عبارت دیگر BC بر دو خط متقاطع AJ و OJ از صفحه OAJ عمود است. بنابراین بر خط OA از این صفحه عمود می‌باشد. از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین OAJ ($OJ = AJ = a\sqrt{2}$)، IJ میانه نظیر ضلع OA و در نتیجه عمودمنصف آن است. یعنی IJ بر OA عمود است و چون IJ بر BC نیز عمود می‌باشد، پس عمود مشترک OA و BC است.

۳. مثلث AOJ در رأسJ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. زیرا داریم:

$$AJ = OJ = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } OA = a \Rightarrow OA^{۲} = OJ^{۲} + AJ^{۲} \text{ و}$$

$$a^{۲} = \frac{a^{۲}}{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \Rightarrow a^{۲} = a^{۲}$$

پس فرجهٔ به یال BC قائمه است. چون OJ ارتفاع هرم وارد بر قاعدهٔ ABC است. داریم:

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} S_{ABC} \times OJ = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} a \times a \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲} a^{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OJA، IJ میانهٔ نظیر وتر است. پس IJ نصف وتر می‌باشد، یعنی $IJ = \frac{a}{۲}$ است. برای اثبات فرمول داده شده، داریم:

$$V = \frac{۱}{۶} OA.BC.IJ = \frac{۱}{۶} \times a \times a\sqrt{۲} \times \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۱۲} a^{۳}$$

۲۶۸ .۱. این حکم غلط است. برای مثال، در داخل مثلث ABC، دو نقطهٔ $D_۱$ و $E_۱$ را طوری اختیار کنید که، مجموع فاصله‌ها، از $D_۱$ تا رأسهای مثلث، کمتر از مجموع فاصله‌ها از $E_۱$ تا رأسها باشد. اکنون نقطهٔ D را به اندازهٔ کافی، نزدیک به $D_۱$ طوری در نظر بگیرید که، مجموع فاصله‌ها از D تا رأسهای A، B و C، کمتر از مجموع فاصله‌های $E_۱$ از آنها باقی بماند. نقطهٔ E را در داخل ABCD روی عمود بر صفحهٔ ABC که از $E_۱$ اخراج می‌شود، اختیار کنید.

۲. این حکم درست است. محل برخورد DE و صفحهٔ ABC را با M نشان دهید. واضح است که M، در داخل مثلث ABC قرار می‌گیرد. خطهای AM , BM و CM صفحهٔ ABC را به شش قسمت تجزیه می‌کند. تصویر نقطهٔ D روی صفحهٔ ABC، نقطهٔ $D_۱$ در داخل یکی از این شش قسمت قرار می‌گیرد. برحسب موقعیت $D_۱$، یکی از زاویه‌های $D_۱\hat{M}A$، $D_۱\hat{M}B$ و $D_۱\hat{M}C$ منفرجه می‌شود. اگر $D_۱\hat{M}A$ منفرجه باشد، آن‌گاه $D\hat{A}M$ هم منفرجه خواهد بود و بنابراین، زاویهٔ $D\hat{E}A$ نیز منفرجه می‌شود. پس، $DE < DA$.

۲۶۹. داریم:

$$V = \frac{۱}{۳} h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

و این جا :

$$V = \frac{۱}{۳}h(\frac{۳\sqrt{۳}R^{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۳}R'^{۲}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}RR')$$

$$V = \frac{\sqrt{۳}h}{۲}(R^{۲} + R'^{۲} + R'R)$$

مساحت جانبی برابر است با :

$$S = ۶ \times \frac{R+R'}{۲}\sqrt{h^{۲} + \frac{۳(R-R')^{۲}}{۴}}$$

$$S = \frac{۳}{۲}(R+R')\sqrt{۴h^{۲} + ۳(R-R')^{۲}}$$

مساحت کل برابر است با :

$$S' = S + \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}(R^{۲} + R'^{۲})$$

کاربرد. داریم :

$$V = ۱۲۶\sqrt{۳} \text{ و } S = \frac{۲۷}{۲}\sqrt{۹۱}$$

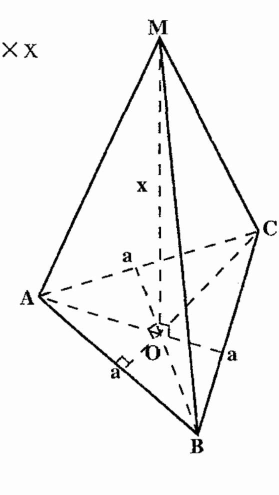
$$S' = \frac{۱}{۴}(۵۴\sqrt{۹۱} + ۱۳۵\sqrt{۳})$$

۱.۲۷۰. این مکان هندسی خطی است که در نقطهٔ O محل برخورد عمود منصفهای (یا ارتفاعها یا میانه‌ها) این مثلث، بر صفحهٔ مثلث عمود است که آن را Δ می‌نامیم.

۲. از M به A، B و C وصل می‌کنیم. حجم هرم MABC برابر است با :

$$V_{MABC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC} \times OM = \frac{۱}{۳} \times \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} \times x$$

$$\Rightarrow V_{MABC} = \frac{a^{۲}x\sqrt{۳}}{۱۲}$$



۳. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ MAO، MOB و MOC داریم :

$$MA = MB = MC = \sqrt{x^۲ + (\frac{a\sqrt{۳}}{۳})^۲} = \sqrt{x^۲ + \frac{a^۲}{۳}}$$

$$AB = BC = AC = a$$

$$y^۲ = MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ + AB^۲ + BC^۲ + AC^۲$$

$$= ۳(x^۲ + \frac{a^۲}{۳}) + ۳a^۲ = ۳x^۲ + ۴a^۲$$

$$\Rightarrow y^۲ = ۳x^۲ + ۴a^۲ \ , \ y^۲ = ۶a^۲ \Rightarrow ۶a^۲ = ۳x^۲ + ۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۲a^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۲a^۲}{۳} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

۲۷۱. الف. دو صفحهٔ DEF و ABC متوازی‌اند. بنابراین $\frac{DV}{AV} = \frac{VE}{EB} = \frac{۱}{۲}$ است.

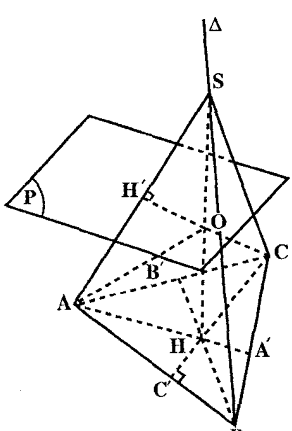
ب. این دو مثلث متشابه‌اند، زیرا $DE \| AB$ است. دو مثلث DEF و ABC نیز متشابه‌اند.

پ. $\frac{DE}{AB} = \frac{VE}{VB} = \frac{۱}{۳}$ است.

ت. اگر $BC = ۶$ باشد، آن‌گاه داریم : $\frac{EF}{۶} = \frac{۱}{۳}$، پس $EF = ۲$ و چون مثلث DEF نیز متساوی‌الاضلاع است، بنابراین داریم :

$$S_{DEF} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۴} = \sqrt{۳}$$

۱.۲۷۲. صفحه‌های عمودمنصف ضلعهای AB، BC و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در خطی مانند Δ که در نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای این مثلث بر صفحهٔ آن عمودند متقاطعند. این خط ارتفاع رأس S از هرم نیز هست. صفحهٔ عمودمنصف یکی از یالها مثلاً صفحهٔ عمودمنصف یال SA را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این صفحه با خط Δ نقطهٔ O مرکز کرهٔ محاطی چهار وجهی است. و شعاع این کره برابر است با :



$$R = OS = OA = OB = OC$$

می‌دانیم که $AH = CH = BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ و $SH = x$ است. پس داریم:

$$SA = SB = SC = \sqrt{AH^2 + SH^2}$$

$$\Rightarrow SA = SB = SC = \sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2} \Rightarrow AH' = SH' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ SOH' و SAH متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SH'}{SH} \Rightarrow \frac{SO}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{3} + x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow SO = R = \frac{\frac{a^2}{3} + x^2}{2x} = \frac{a^2 + 3x^2}{6x}$$

با فرض $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ داریم:

$$\frac{a^2 + 3x^2}{6x} = \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow 2a^2 + 6x^2 = 3\sqrt{6}ax$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 3\sqrt{6}ax + 2a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}a \pm \sqrt{54a^2 - 48a^2}}{12}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\sqrt{6}a \pm a\sqrt{6}}{12} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ و } x = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

۲. برای این که مرکز کره روی صفحهٔ ABC واقع شود، باید $SO = SH$ باشد یعنی:

$$\frac{a^2 + 3x^2}{6x} = x \Rightarrow a^2 + 3x^2 = 6x^2 \Rightarrow 3x^2 = a^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

برای این که $A\hat{S}B = ۹۰^\circ$ باشد، باید $AB = \sqrt{۲}AS$ باشد ؛ یعنی :

$$a = \sqrt{۲} \times \sqrt{\frac{a^۲}{۳} + x^۲} \Rightarrow a^۲ = ۲(\frac{a^۲}{۳} + x^۲)$$

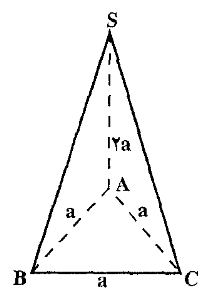
$$\Rightarrow a^۲ = \frac{۲a^۲}{۳} + ۲x^۲ \Rightarrow \frac{a^۲}{۳} = ۲x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۶}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۶}}{۶}$$

۳. طول شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای جانبی از دستور $R = \frac{abc}{۴S}$ که در آن a، b و c ضلعهای هر مثلث جانبی است محاسبه می‌شود.

در این حالت باید بدانیم که x چه مقدار برحسب a داراست. در این صورت محاسبه آسان است.

۱.۲۷۳. داریم :



$$S_{\text{قاعده}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \ , \ V = \frac{۱}{۳} \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$V_{\text{حجم هرم}} = \frac{۱}{۳} \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \times ۲a = \frac{a^۳\sqrt{۳}}{۶}$$

۲. ارتفاع هرم بالایی را x می‌گیریم. داریم :

ارتفاع هرم ناقص $= ۲a - x$

$$\frac{x}{۲a} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{x}{۲a} = \frac{A'B'}{a} \Rightarrow A'B' = \frac{x}{۲}$$ ضلع هرم بالایی

سطح قاعدهٔ بالایی $S = \frac{\frac{x^۲}{۴}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{x^۲\sqrt{۳}}{۱۶}$

حجم هرم بالایی $= \frac{۱}{۳} \times \frac{x^۲\sqrt{۳}}{۱۶} \times x = \frac{x^۳\sqrt{۳}}{۴۸}$

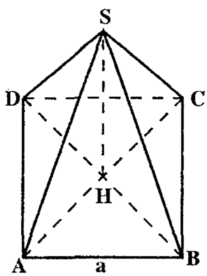
حجم هرم ناقص $- \frac{a^۳\sqrt{۳}}{۶} = \frac{x^۳\sqrt{۳}}{۴۸} = \frac{۸a^۳\sqrt{۳} - x^۳\sqrt{۳}}{۴۸} = \frac{\sqrt{۳}(۸a^۳ - x^۳)}{۴۸}$

$$\frac{\text{حجم هرم ناقص}}{\text{حجم هرم بالایی}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}(۸a^{۳}-x^{۳})}{۴۸}}{\frac{x^{۳}\sqrt{۳}}{۴۸}}=\frac{۱۹}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{۸a^{۳}-x^{۳}}{x^{۳}}=\frac{۱۹}{۸}$$

$$\Rightarrow ۱۹x^{۳}=۶۴a^{۳}-۸x^{۳}\Rightarrow ۲۷x^{۳}=۶۴a^{۳}\Rightarrow ۳x=۴a\Rightarrow x=\frac{۴a}{۳}$$

فاصلهٔ مطلوب $a=۶\Rightarrow x=\frac{۲۴}{۳}=۸$



۲۷۴. هرم SABCD را که در آن ضلع مربع a و مثلثهای ASC و BSD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، در نظر می‌گیریم. با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$BD=AC=a\sqrt{۲}\Rightarrow AS=CS=BS=DS=a$$

بنابراین مثلثهای وجه‌های جانبی نیز متساوی‌الاضلاع به ضلع a هستند. پس سهم هرم مساوی $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است.

از آن‌جا:

۱. ارتفاع هرم میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ASC ؛ یعنی $SH=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۲. حجم هرم برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\times a^{۲}\times\frac{a\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}a^{۳}}{۶}$$

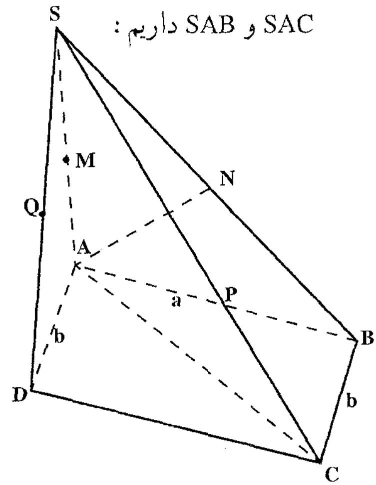
۳. سطح کل هرم:

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}\times\text{محیط قاعده}\times\text{سهم هرم}=\frac{۱}{۲}(۴\times a)\times\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}a^{۲}$$

$$S_{\text{قاعده}}=a^{۲}\Rightarrow S_{\text{کل}}=\sqrt{۳}\,a^{۲}+a^{۲}=a^{۲}(\sqrt{۳}+۱)$$

۱.۲۷۵. هرم در کنج A سه قائمه است و $AC=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$ است. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ

SAC و SAB داریم :



$$SC=\sqrt{SA^{۲}+AC^{۲}}=\sqrt{c^{۲}+a^{۲}+b^{۲}}$$

$$SB=\sqrt{AS^{۲}+AB^{۲}}=\sqrt{c^{۲}+a^{۲}}$$

برای آن که مثلث SBC قائم‌الزاویه باشد، باید داشته باشیم :

$$SC^{۲}=SB^{۲}+BC^{۲}$$

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=c^{۲}+a^{۲}+b^{۲}$$

پس این مثلث قائم‌الزاویه است.

در مثلث SCD داریم :

$$SD=\sqrt{SA^{۲}+AD^{۲}}=\sqrt{b^{۲}+c^{۲}} \text{ و } DC=a$$

$$SC^{۲}=SD^{۲}+DC^{۲}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=b^{۲}+c^{۲}+a^{۲}$$

پس مثلث SCD نیز در رأس D قائم‌الزاویه است.

۲. نقطهٔ P محل برخورد صفحه‌های عمودمنصف یالهای هرم است. بنابراین مرکز کرهٔ محیطی هرم SABCD است. شعاع این کره برابر است با :

$$R=PS=PC=\frac{SC}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}$$

۳. به جای SA، SC، SB و SD مقدارهایشان را قرار می‌دهیم. داریم :

$$SA^{۲}+SC^{۲}=SB^{۲}+SD^{۲}$$

$$c^{۲}+(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})=(c^{۲}+a^{۲})+b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}+b^{۲}+۲c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+۲c^{۲}$$

پس رابطه برقرار است.

۴. نقطهٔ برخورد دو پاره‌خط از پاره‌خطهای داده شده را I بنامید و ثابت کنید بقیهٔ پاره‌خطها نیز از همین نقطه می‌گذرند.

۵. از ویژگیهای داده شده استفاده کنید.

۶. حجم هرمهای بالایی ایجاد شده $\frac{۱}{۲}$ حجم کل هرم باید باشد، پس اگر ارتفاع هرم بالا را h' بگیریم داریم :

$$\frac{V'}{V}=\frac{۱}{۲}=(\frac{h'}{a})^{۳}\Rightarrow\frac{h'}{a}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\Rightarrow h'=\frac{a}{\sqrt[۳]{۲}}$$

۱.۲۷۶. داریم :

$$\frac{S_{\text{مقطع}}}{S_{\text{قاعده}}}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\text{مقطع}}}{۶۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$S_{\text{مقطع}}=۱۶$$

۲. ارتفاع هرم کوچک مساوی ۶ و مساحت قاعده‌اش ۱۶ است. پس حجم هرم کوچک برابر است با :

$$V'=\frac{۱}{۳}\times ۱۶\times ۶=۳۲$$

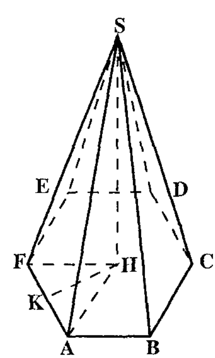
۳. حجم هرم اوّلیه برابر است با :

$$V=\frac{۱}{۳}\times ۶۴\times ۱۲=۲۵۶$$

از آن‌جا داریم :
$$\frac{V'}{V}=\frac{۳۲}{۲۵۶}=\frac{۱}{۸}$$

۱.۲۷۷. می‌دانیم که مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با $\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$.

بنابراین داریم :



$$\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}$$

$$\Rightarrow\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳\sqrt{۳}\times ۱۶}{۲}\times ۳=۲۴\sqrt{۳}$$

$$\text{سهم قاعده}=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}\ \text{و}\ SH=۳$$

$$\Rightarrow SK=\sqrt{(۲\sqrt{۳})^{۲}+۳^{۲}}=\sqrt{۲۱}\ \text{سهم هرم}$$

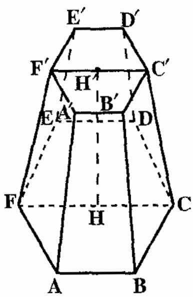
$$\text{سطح جانبی}=\frac{۱}{۲}(۶\times ۴)\times\sqrt{۲۱}=۱۲\sqrt{۲۱}$$

قاعده $S=۲۴\sqrt{۳}$

$\Rightarrow$ کل $S=۱۲\sqrt{۲۱}+۲۴\sqrt{۳}$

۲. فاصلهٔ مورد نظر را h' می‌گیریم. باید داشته باشیم :

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{h'}{۳}\right)^{۳}=\frac{۱}{۸}\Rightarrow\frac{h'}{۳}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow h'=\frac{۳}{۲}$$



۲۷۸. ۱. ثابت کنید صفحه‌های عمودمنصف یالهای جانبی و صفحه‌های عمودمنصف ضلعهای قاعده‌ها از یک نقطه می‌گذرند که این نقطه، مرکز کرهٔ محیطی هرم ناقص است.

۲. در این حالت شعاع کرهٔ محیطی مساوی نصف بزرگترین قطر شش‌ضلعی قاعدهٔ بزرگ به‌عنوان مثال نصف FC است. امّا $FC=۲a$ است. پس $R=a$ است. در این صورت ...

۲۷۹. این نمادهای تکمیلی را می‌پذیریم : Q، مساحت قاعده و h، ارتفاع هرم ؛ x، کسینوس زاویهٔ دووجهی بین قاعده و وجه جانبی ؛ a، ضلع قاعده ؛ r، شعاع دایرهٔ محاطی قاعده. در این صورت، این برابریها را داریم :

$$a=۲r\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}\ ,\ \ Q=n.\frac{۱}{۲}.ra=nr^{۲}tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}\ ,$$

$$h=r\,tg(\mathrm{arc\ \ cos}\,x)=\frac{r\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}\ ,\ \ S=Q+\frac{۱}{x}Q$$

از آن‌جا

$$Q=\frac{xS}{x+۱}\ ,\ \ r=\sqrt{\frac{Q}{n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}}}=\sqrt{\frac{S}{n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}}.\frac{x}{x+۱}}\ ,$$

$$V=\frac{۱}{۳}hQ=\frac{۱}{۳}\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{x}.\sqrt{\frac{S}{n\,tg\frac{۱۸۰^\circ}{n}}.\frac{x}{x+۱}}.\frac{xS}{x+۱}$$

$$=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{S^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}}}\cdot f(x)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x(۱-x)}}{۱+x}$$

الف. داریم :

$$f'(x)=\frac{۱-۳x}{۲(۱+x)^{۲}\sqrt{x(۱-x)}}$$

بنابراین، حداکثر مقدار تابع $f(x)$، برای $x\in(۰,۱)$، برابر است با

$$f(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}$$

(زیرا برای $x<\frac{۱}{۳}$ داریم $f'(x)>۰$، و برای $x>\frac{۱}{۳}$: $f'(x)<۰$)؛ و مقدار مجهول حجم V، چنین می‌شود :

$$\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}\cdot\frac{S^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{n\operatorname{tg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}}}$$

ب. اگر در رابطه‌ای که بین مقدارهای V، S، n و x به‌دست آورده‌ایم، مقدارهای مفروض n، S و V را قرار دهیم، به این معادله برای x می رسیم :

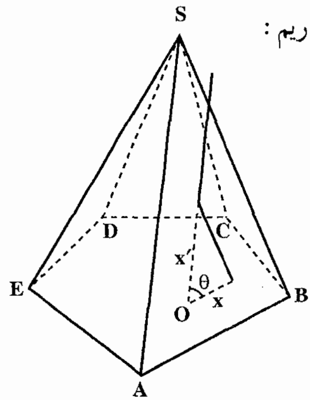
$$\frac{\sqrt{x(۱-x)}}{۱+x}=\frac{۲}{۹}$$

که دو ریشه دارد : $x_۱=\frac{۱}{۱۷}$ و $x_۲=\frac{۴}{۵}$. بنابراین $Q_۱=۸$ و $Q_۲=۶۴$ ؛ از آن‌جا $r_۱=\sqrt{۲}$ و $r_۲=۴$. بنابراین

$$a_۱=۲\sqrt{۲}\ ,\ h_۱=۲۴\ ;\ a_۲=۸\ ,\ h_۲=۳$$

۱.۲۸۰. فرض می‌کنیم S مساحت هر یک از وجه‌های جانبی و x، y، z،... فاصله‌های نقطهٔ O از این وجه‌ها باشد. نقطهٔ O را به رأسهای چندوجهی وصل می‌کنیم. چندوجهی به هرمهای O.SAB، O.SBC،... تجزیه می‌شود. بنابراین V حجم S.ABCDE باشد،

داریم :



$$V=\frac{۱}{۳}S(x+y+z+\cdots)\Rightarrow$$

$$x+y+z+\cdots=\frac{۳V}{S}=\text{مقدار ثابت}$$

بنابراین $x+y+z+\cdots$ مقدار ثابتی است که بستگی به‌جای نقطهٔ O واقع در درون چندوجهی ندارد. اگر نقطهٔ O روی صفحهٔ قاعدهٔ چندوجهی اختیار شود، رابطه‌ای مشابه رابطهٔ بالا خواهیم داشت. در این حالت علامت فاصله‌های متناظر با وجه‌هایی را که پاره‌خط OO' را قطع می‌کند باید تغییر داد.

۲. فرض می‌کنیم x'، y'، z'، ... پاره‌خطهای واقع بر عمود اخراج شده از O بر قاعدهٔ چندوجهی و محصور بین نقطهٔ O و نقطهٔ تقاطع با وجه‌های چند وجهی باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که $x'+y'+z'+\cdots$ مقدار ثابتی، مستقل از محل نقطهٔ O واقع در صفحهٔ قاعده چند وجهی و در درون آن است. برای اثبات توجه می‌کنیم که در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آن x' و اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش x است، زاویهٔ $x'\hat{O}x=\theta$، مساوی زاویهٔ بین یکی از وجه‌های جانبی با قاعدهٔ چندوجهی است. بنابراین داریم :

$$x+y+z+\cdots=(x'+y'+z'+\cdots)\cos\theta$$

$$\Rightarrow x'+y'+z'+\cdots=\frac{۳V}{S\cos\theta}$$

اما b مساحت قاعده، n تعداد ضلعهای قاعده و h ارتفاع چندوجهی است،

$$b=nS\cos\theta$$

و از آن‌جا داریم :

$$x'+y'+z'+\cdots=\frac{bh}{\frac{b}{n}}=nh$$

روشن است که این تساوی، وقتی O در مرکز چندضلعی باشد، برقرار است. همین رابطه برای حالتی که نقطهٔ O روی صفحهٔ قاعده ولی در درون چندضلعی قاعده نباشد، درست است.

۲۸۱. ۱. مثلث MAB در رأس M قائم‌الزاویه است و زیرا $A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = ۹۰^\circ$ است.

مثلثهای SAM و SAB نیز قائم‌الزاویه‌اند. زیرا SA بر AM و AB عمود است.

بدیهی است که فرجهٔ M به دلیل این که زاویهٔ $S\hat{A}B = ۹۰^\circ$ زاویهٔ مسطحهٔ آن است، قائمه است.

۲. ارتفاع هرم را به دو صورت محاسبه کرده، مساوی هم قرار می‌دهیم. اگر قاعدهٔ هرم را AMB فرض کنیم داریم:

$$MB = \sqrt{۴R^۲ - x^۲} \text{ و } \text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times S_{AMB} \times AS$$

$$\Rightarrow \text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times x \times \sqrt{۴R^۲ - x^۲} \times ۲R = \frac{۱}{۳} Rx\sqrt{۴R^۲ - x^۲}$$

حال قاعدهٔ هرم را BSM فرض می کنیم. داریم:

$$SM = \sqrt{۴R^۲ + x^۲} \text{ و } MB = \sqrt{۴R^۲ - x^۲} \text{ و } SB = \sqrt{۴R^۲ + ۴R^۲} = ۲\sqrt{۲}R$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث BMS} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

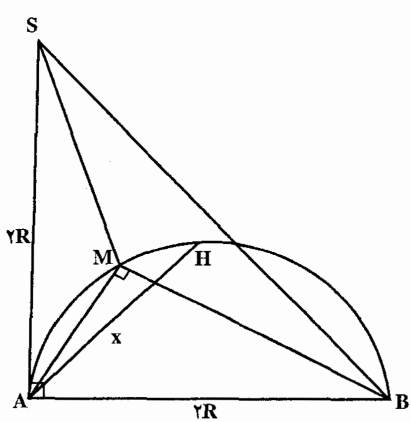
از آن‌جا داریم:

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت مثلث BMS} \times AH$$

پس:

$$\frac{۱}{۳} Rx\sqrt{۴R^۲ - x^۲} = \frac{۱}{۳} S_{BMS} \times AH$$

$$AH = \frac{Rx\sqrt{۴R^۲ - x^۲}}{S_{BMS}}$$



حال با فرض $AH = \frac{۶R}{۵}$ می‌توان اندازهٔ x و از آن‌جا حجم هرم را برحسب R به‌دست آورد.

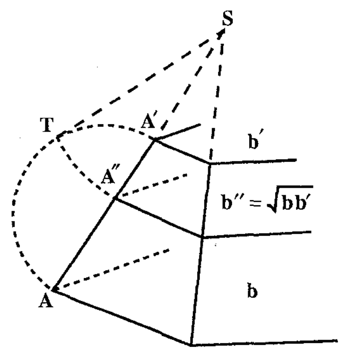
۲۸۲. ۱. به تعداد رأسهای مکعب، تنها یک رأس اضافه شده است. بنابراین جسم حاصل ۹=۱+۸ رأس دارد.

۲. به تعداد یالهای مکعب چهار یال اضافه شده است. پس جسم حاصل ۱۶=۴+۱۲ یال دارد.

۲۸۳. فرض می‌کنیم مثلثهای b و b' مساحتهای قاعده‌های هرم ناقص، S نقطهٔ برخورد یالهای جانبی و A'' نقطهٔ برخورد $SA'A$ و صفحه جواب مسأله باشد. داریم:

$$\frac{SA''^2}{\sqrt{bb'}}=\frac{SA^2}{b}=\frac{SA'^2}{b'}=\frac{SA.SA'}{\sqrt{bb'}}$$

$$\Rightarrow SA''^2=SA.SA'$$



با معلوم بودن SA و SA'، پاره‌خط SA'' را براحتی می‌توان رسم کرد. با مشخص شدن نقطهٔ A'' صفحه موردنظر مشخص می‌شود.

۲. نسبت ارتفاعهای دو بخش از هرم ناقص داده شده، مساوی است با $\frac{AA''}{A''A'}$. از آن‌جا، نسبت حجم آنها برابر است با $R=\frac{AA''(b+b''+\sqrt{bb''})}{A''A'(b''+b'+\sqrt{b''b'})}$.

فرض می‌کنیم $b=\beta^2$، $b'=\beta'^2$، اینک $b''=\beta\beta'$؛ و $\frac{AA''}{A''A'}$ را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{SA}{\beta}=\frac{SA'}{\beta'}=\frac{SA''}{\sqrt{\beta\beta'}}=\frac{AA''}{\beta-\sqrt{\beta\beta'}}=\frac{A''A'}{\sqrt{\beta\beta'}-\beta'}$$

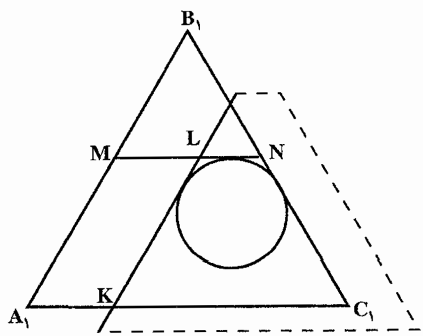
$$\Rightarrow \frac{AA''}{A''A'}=\frac{\beta-\sqrt{\beta\beta'}}{\sqrt{\beta\beta'}-\beta'}=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta'}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{\beta}(\beta^{۲}+\beta\beta'\sqrt{\beta^{۳}\beta'})}{\sqrt{\beta'}(\beta\beta'+\beta'^{۲}\sqrt{\beta\beta'^{۳}}}=\frac{\sqrt{\beta}.\beta(\beta+\beta'+\sqrt{\beta\beta'})}{\sqrt{\beta'}.\beta'(\beta+\beta'+\sqrt{\beta\beta'}}$$

$$=\frac{\beta\sqrt{\beta}}{\beta'\sqrt{\beta'}}=\sqrt{\frac{\beta^{۳}}{\beta'^{۳}}}$$

$$\Rightarrow R=\sqrt[۴]{\frac{b^{۲}}{b'^{۲}}}$$

۲۸۴. چندوجهی $ABCA_۱MNC_۱$ را با صفحه‌ای به فاصلهٔ h از صفحهٔ $A_۱B_۱C_۱$، قطع کنید. نقطهٔ حاصل را که به این طریق به‌دست می‌آید، روی صفحهٔ $A_۱B_۱C_۱$ تصویر کنید (شکل).



در شکل، تصویر این مقطع، با خط‌چین نشان داده شده است. واضح است که دایرهٔ قاعده استوانه، باید در داخل ذوزنقهٔ $KLNC_۱$ جا بگیرد.(K و L بترتیب نقطه‌های تقاطع $A_۱C_۱$ و MN با تصویر این مقطع است).

اگر $h=۳$، آن‌گاه صفحهٔ مقطع، بر صفحهٔ ABC منطبق می‌شود و نقطه‌های K و L بر وسطهای $B_۱C_۱$ و $A_۱C_۱$.

اگر $h<۳$،

$$ML=A_۱K=\frac{h}{۳}\ ,$$

$$LN=۱-\frac{h}{۳}\ ،\ KC_۱=۲-\frac{h}{۳}$$

می‌توان به‌آسانی بررسی کرد که، به‌ازای $h\le ۳$ شعاع بزرگترین دایره در داخل ذوزنقهٔ $KLNC_۱$، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ می‌شود و به‌ازا $h>\frac{۳}{۲}$ این شعاع، برابر با شعاع دایرهٔ محاط در مثلث متساوی‌الاضلاع، به ضلع

$$KC=۲-\frac{h}{۳}$$

می گردد. یعنی برابر می‌شود با :

$$(۲-\frac{h}{۳})\frac{\sqrt{۳}}{۶}$$

جواب :

a. اگر $۰ < h \le \frac{۳}{۲}$ آن‌گاه،

$$V=\frac{۳}{۱۶}\pi h$$

اگر، $\frac{۳}{۲} < h \le ۳$ آن‌گاه،

$$V=\frac{\pi}{۱۲}h(۲-\frac{h}{۳})^۲$$

b. بیشترین مقدار حجم به‌ازای $h=۳$ حاصل می‌شود،

$$V=\frac{۸\pi}{۲۷}$$

۲۸۵. ثابت می‌کنیم که (a) موجب (b) می‌شود، فرض کنید که $SA_۱=SA_۲=\cdots=SA_n=l$ (شکل) بوده، SO ارتفاع هرم و $SO=H$ است. چنین داریم :

$$\sin S\hat{A}_۱O=\sin S\hat{A}_۲O=\cdots=\sin S\hat{A}_nO=H/l$$

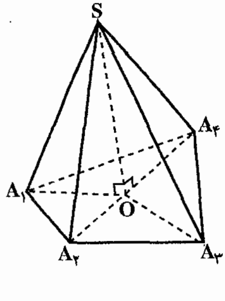
که از آن نیز

$$S\hat{A}_۱O=S\hat{A}_۲O=\cdots=S\hat{A}_nO$$

به‌دست می‌آید. یعنی یالهای جانبی با صفحهٔ قاعده زاویه‌های مساوی درست می‌کنند.

حال ثابت می‌کنیم که (b) موجب (c) می‌شود. اگر $S\hat{A}_۱O=S\hat{A}_۲O=\cdots=S\hat{A}_nO=\varphi$ فرض شود، آن‌گاه $OA_۱=OA_۲=\cdots=OA_n=H\cot g\varphi$ خواهد بود. این امربدین معنی است که دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R=H\cot g\varphi$ بر قاعدهٔ هرم محیط می‌شود. سرانجام ثابت می‌کنیم که (c) موجب (a) می‌شود. اگر O را مرکز دایرهٔ محیطی قاعده فرض کنیم، آن‌گاه $OA_۱=OA_۲=\cdots=OA_n=R$ شعاع دایره خواهد بود. به دلیل این که SO ارتفاع هرم است، چنین داریم :

$$SA_۱=SA_۲=\cdots=SA_n=\sqrt{R^۲+H^۲}$$



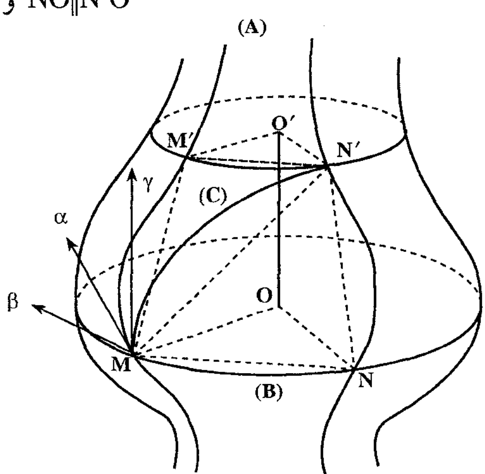
یعنی یالهای جانبی دارای طولهای مساوی هستند. بدین ترتیب ثابت کردیم که از (a) به (b)، از (b) به (c) و از (c) به (a) می‌توان وصول یافت. از این‌رو نتیجه می‌شود که این سه حکم هم‌ارز هستند.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲
استوانه

۲.۱. تعریف و قضیه

۲۸۶. دو نقطهٔ M و M' را به اختیار بر سطح دوار فرض نموده (شکل)، مدارها و نصف‌النهارهای گذرنده بر آنها را رسم می‌کنیم، و نیز این دو نقطه را به‌وسیلهٔ یک خط منحنی اختیاری واقع بر سطح به یکدیگر وصل می‌نماییم. کافی است ثابت کنیم که سه خط مماس در نقطهٔ M بر مدار MN و بر نصف‌النهار MM' و بر منحنی MCN' در یک صفحه واقعند. به این‌منظور گوییم که چون صفحه‌های دو مدار مفروض متوازی‌اند، پس هر صفحهٔ نصف‌النهاری، آنها را در دو خط متوازی قطع می‌کند. به‌عبارت دیگر:

$MO \| M'O'$ و $NO \| N'O'$

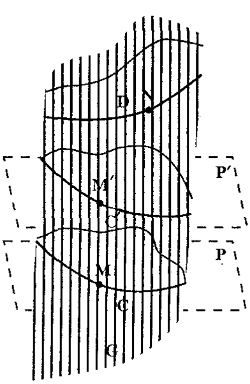


بنابراین دو زاویهٔ $M'O'N'$ و MON متساویند و دو مثلث متساوی‌الساقین $M'O'N'$ و MON متشابه می‌باشند و چون دو ضلع متوازی دارند، پس $MN \| M'N'$، به‌طوری که چهار نقطهٔ M، N، N' و M' در یک صفحه قرار دارند و به‌عبارت دیگر سه خط متقارب MN، MM' و MN' در یک صفحه واقعند. حال اگر نقطهٔ N' روی منحنی (C) به طرف M نزدیک شود، مدار $M'N'$ نیز به‌تدریج به سمت مدار MN نزدیک می‌گردد و نصف‌النهار $N'N$ به سمت نصف‌النهار MM' می‌رود و خطهای MN، MN' و MM' به وضع مماسهای $(M\beta)$، $(M\gamma)$ و $(M\alpha)$ درمی‌آیند، و چون سه خط مزبور همواره در یک صفحه قرار دارند، سه خط مماس نیز که حد وضع این خطها هستند، در یک صفحه واقعند، که همان صفحهٔ مماس بر سطح دوار در نقطهٔ M می‌باشد.

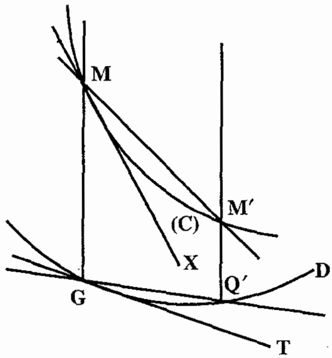
تبصره. استدلال بالا درمورد نقطهٔ برخورد سطح دوار و محور دوران، در بعضی حالتها صحیح نیست؛ زیرا این نقطه دارای مدار نیست و وضع صفحهٔ نصف‌النهار در آن مشخص نمی باشد، مگر درمورد سطحهایی که خط مماس بر نصف‌النهار آنها در این نقطه بر محور دوران عمود باشد. در این صورت، همهٔ مماسهای رسم شده بر نصف‌النهارهایی که از این نقطه می‌گذرند، در صفحه‌ای عمود بر محور واقع می‌شوند.

۲۸۷. زیرا صفحهٔ مماس شامل مماس $M\beta$ بر منحنی مدار، نقطهٔ M می‌باشد (شکل سؤال قبل)، و مماس $M\beta$ بر دو خط MO و OO' از صفحهٔ نصف‌النهاری عمود است (به چه دلیل؟). پس صفحهٔ مماس زیر بر این صفحه عمود می‌باشد.

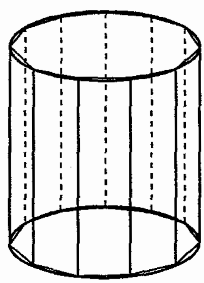
نتیجه. چون خط قائم بر هر نقطه از سطح دوار بر صفحهٔ مماس در این نقطه عمود است، پس در صفحهٔ نصف‌النهاری که نیز عمود بر صفحهٔ مماس است واقع می‌باشد؛ بنابراین خط قائم در هر نقطه از سطح دوار، یا محور دوران را قطع می‌کند، و یا با آن موازی است.



۲۸۸. زیرا مقطع‌های دو صفحهٔ P و P' در سطح منشوری محاطی متساویند، حال اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی هادی سطح منشوری که محاط در منحنی هادی سطح استوانه‌ای است، بینهایت زیاد شود، چندضلعی مزبور به سمت منحنی هادی میل می‌کند و در حد، سطحهای استوانه‌ای و منشوری بر یکدیگر منطبق می‌گردند؛ پس مقطعهای سطح استوانه‌ای نیز برابر هستند.



۲۸۹. فرض کنیم منحنی مسطح (D) هادی سطح استوانه‌ای باشد (شکل) و از نقطهٔ مفروض M واقع بر سطح منحنی اختیاری (C) را روی آن رسم می‌نماییم. حال نقطهٔ M′ را نزدیک M بر (C) اختیار کرده، دو مولد MG و M′G′ را رسم می‌کنیم. اگرنقطهٔ M′ به سمت نقطهٔ M میل کند، خط MM′ به سمت مماس MX بر منحنی (C) میل می‌نماید و در همین حال خط GG′ نیز به سمت مماس GT بر منحنی هادی (D) میل می‌کند و چون چهار نقطهٔ M، M′ ، G و G′ همواره در یک صفحه واقعند (صفحهٔ دو مولد MG و M′G′)، در حد نیز سه خط MX، MG و GT در یک صفحه، که همان صفحهٔ مماس در M بر سطح استوانه‌ای است، واقع می‌باشند.



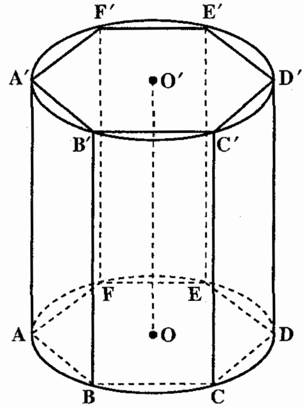
۲۹۰. هرگاه چندضلعی منتظمی در یکی از دو قاعدهٔ استوانهٔ دوار محاط کرده، از رأسهای آن خطهایی عمود بر صفحهٔ قاعده رسم کنیم، این خطها در قاعدهٔ فوقانی، چندضلعی منتظم دیگری برابر با آن ایجاد می‌نمایند (به چه دلیل؟) (شکل) و منشور قائم منتظمی که مابین دو چندضلعی محصور است، منشور منتظم محاطی نامیده می‌شود. اگر عدهٔ ضلعهای قاعدهٔ منشور منتظم محاطی را بینهایت زیاد کنیم، سطح جانبی منشور به سمت سطح استوانه میل می‌کند و بنابراین می‌توان دستور سطح جانبی منشور قائم را در مورد سطح جانبی استوانه به‌کار برد. پس اگر S سطح جانبی استوانه و R شعاع قاعده و h طول ارتفاع آن باشد، داریم:

S = محیط قاعده × ارتفاع = $2\pi Rh$

برای تعیین مساحت تمام بدن استوانه باید مساحت سطح دو قاعده را نیز بر مساحت سطح جانبی افزود.

تبصره. ممکن است منشور منتظمی بر استوانه محیط کرده، سطح جانبی استوانه را حد سطح جانبی منشور محیطی دانست.

۲۹۱. منشور منتظمی در استوانه محاط می‌نماییم (شکل) و حجم استوانهٔ دوار را به منزلهٔ حد



حجم منشور محاطی، وقتی که عدهٔ ضلعهای قاعده بینهایت زیاد شود، درنظر می‌گیریم. پس:

$$V = \text{مساحت قاعده} \times \text{طول ارتفاع} = \pi R^2 h$$

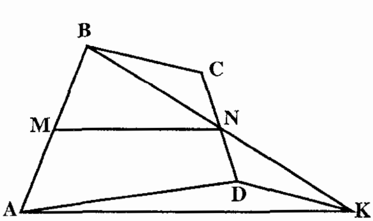
تبصره. با استدلال مشابهی معلوم می‌شود که دستور فوق، برای حجم استوانهٔ مستدیر غیر دوار (استوانه‌ای که دو قاعدهٔ آن دایره باشند) نیز صحیح است.

۲۹۳. حجم استوانهٔ مایل نیز مساوی حاصلضرب اندازهٔ مساحت قاعدهٔ آن، در ارتفاع آن است. باید توجه داشت که در استوانهٔ مایل، ارتفاع استوانه، فاصلهٔ بین دو صفحهٔ قاعده است و با یال استوانه مساوی نیست.

۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۲.۲.۱. خط

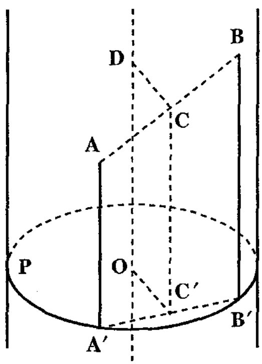
۲.۲.۱.۱. خط مولد است



۲۹۴. فرض می‌کنیم خطی با سطح جانبی استوانه در سه نقطهٔ A، B و C مشترک باشد. استوانه را روی صفحهٔ عمود بر مولد آن تصویر می‌کنیم. در نتیجه سطح جانبی

به‌صورت خط تصویر می‌شود که باید محیط دایره را در بیش از دو نقطه قطع کند و این ممکن نیست.
اگر آن خط موازی مولد استوانه باشد، در این‌صورت تصویر آن فقط یک نقطه خواهد شد که روی محیط دایره قرار خواهد گرفت؛ یعنی خط بر مولد استوانه منطبق است.
قسمت دوم مسأله (مخروط) نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۲.۲.۱.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

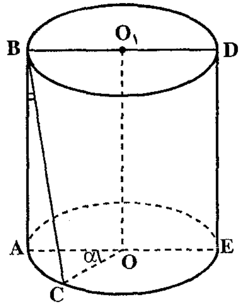


۲۹۵. فرض می‌کنیم AB یک وتر و CD عمود مشترک این وتر و محور باشد. این خطها را روی صفحهٔ P از یک مقطع قائم تصویر می‌کنیم. تصویر AB، پاره‌خط $A'B'$ از دایرهٔ مقطع است، چون CD موازی با صفحهٔ P است؛ زیرا بر محور عمود است، بنابراین تصویر آن OC' بر $A'B'$ عمود است. چون قطر عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، پس نقطهٔ C' وسط وتر $A'B'$ است و از آن‌جا نتیجه می‌شود که نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB است.

۲.۳. زاویه

۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط



۲۹۶. مقطع قائم استوانه مربع ABCD است. خط BC واصل بین دو نقطهٔ مفروض روی محیط دو قاعده است و $AO \| O_1B$؛ پس $A\hat{O}C = \alpha$ خواهد شد.
اگر $A\hat{B}C = x$ فرض شود، $OA = R$ و $AB = 2R$ خواهد شد. از مثلث AOC نتیجه

می‌شود :

$$AC = ۲R\sin\alpha/۲$$

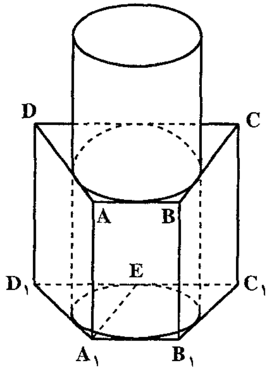
و در مثلث ABC خواهیم داشت :

$$\tan x = \frac{AC}{AB} = \sin\alpha/۲$$ یا

$$x = \mathrm{Arc}\tan(\sin\alpha/۲)$$

۲.۱.۳.۲. زاویهٔ بین خط و صفحه

۲۹۷. ذوزنقهٔ ABCD را بر محور استوانه تصویر می‌کنیم (شکل). در صفحهٔ تصویر، ذوزنقهٔ $A_۱B_۱C_۱D_۱$ به‌دست می‌آید. چون در آن، می‌توان دایره‌ای محاط کرد و در ضمن، متساوی‌الساقین هم می‌باشد، پس :



$$B_۱C_۱ = (A_۱B_۱ + C_۱D_۱) : ۲ = \frac{۱}{۲}(a+b)$$

زیرا $A_۱B_۱ = AB = b$ و $C_۱D_۱ = CD = a$. ارتفاع ذوزنقه را محاسبه می‌کنیم :

$$A_۱E = \sqrt{(\frac{a+b}{۲})^۲ - (\frac{a-b}{۲})^۲} = \sqrt{ab}$$

از این جا، اگر زاویهٔ مجهول را x بگیریم، داریم :

$$\sin x = \frac{\sqrt{ab}}{h}$$

درضمن، باید داشته باشیم : $ab \le h^۲$.

۲.۳.۲. تساوی زاویه‌ها

۲۹۸. دو ضلع روبه‌روی AB و CD را درنظر می‌گیریم. اگر این دو ضلع موازی باشند، زاویه‌هایشان با محور، با هم مساوی خواهد بود و در صورتی که موازی نباشند، در نقطه‌ای مانند P یکدیگر را قطع خواهند کرد که در این‌صورت خواهیم داشت :

$$PA.PB = PC.PD$$

این رابطه نشان می‌دهد که AB و CD با محور، زاویه‌های مساوی می‌سازند. همین استدلال برای دو قطر نیز درست است.

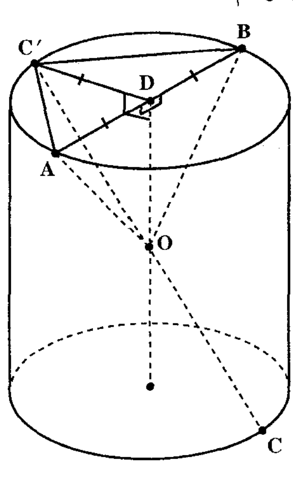
بعکس اگر یک چهارضلعی مسطح محاط در یک سطح استوانه‌ای و دارای دو ضلع روبه‌رو باشد که موازی نباشند و با محور زاویه‌های مساوی بسازند، اگر P نقطهٔ برخورد آنها باشد، داریم : $PA.PB = PC.PD$ و این رابطه نشان می‌دهد که این چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است.

۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۹۹. C' را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به O، مرکز تقارن استوانه می‌گیریم (شکل). اگر در کنج سه‌وجهی OABC، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یالهای OA، OB و OC برابر α، β و γ فرض کنیم، آن‌وقت، زاویه‌های دو وجهی کنج $OABC'$، مربوط به یالهای OA، OB و OC' بترتیب، برابر $۱۸۰^\circ - \alpha$، $۱۸۰^\circ - \beta$ و γ می‌شوند. اگر D را مرکز دایرهٔ به قطر AB فرض کنیم، در هرم $OADC'$، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یالهای OA و OC' برابرند (زیرا این هرم، نسبت به صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OD، متقارن است)؛ همچنین، در هرم $OBDC'$، زاویه‌های دو وجهی مربوط به یالهای OB و OC' برابرند (به همان علت). از آن‌جا :

$$(۱۸۰^\circ - \alpha) + (۱۸۰^\circ - \beta) = \gamma \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = ۳۶۰^\circ$$

چیزی که باید ثابت می‌کردیم.



۴.۲. یال، ارتفاع، شعاع قاعده

۱.۴.۲. ارتفاع

۱.۱.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع

۳۰۰. با توجه به این‌که:

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

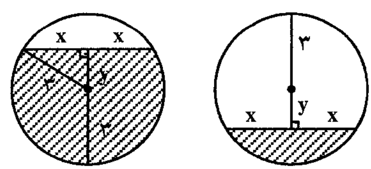
است، داریم:

$$V=\pi R^{۲}h \Rightarrow ۳/۵\times ۱۰۰۰ = ۳\frac{۱}{۷}\times ۲^{۲}\times h$$

$$\Rightarrow h=\frac{۳۵۰۰}{۸۸/۷}=\frac{۲۸۰۰۰}{۸۸}=\frac{۳۵۰۰}{۱۱}=۳۱۸\frac{۲}{۱۱}$$

۳۰۱. مساحت رویهٔ مستطیلی نفت عبارت است از:

$$۱۰\times ۲x=۴۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=\sqrt{۵}$$



بنابراین عمق نفت $۳-\sqrt{۵}$ یا $۳+\sqrt{۵}$ است.

۳۰۲. کرهٔ به شعاع R و استوانهٔ به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h را درنظر می‌گیریم. بنا به فرض مسأله داریم:

$$\text{حجم کره} = \text{حجم استوانه} \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\pi r^{۲}h \qquad (۱)$$

$$۲R=۲r\Rightarrow R=r \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow h=\frac{۲}{۳}(۲R)$$

۲.۱.۴.۲. تغییر اندازهٔ ارتفاع

۳۰۳. گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$V=\pi R^2 H \ , \ \pi(R+x)^2 H=\pi R^2(H+x) \ ;$$
$$R^2 H+2RxH+x^2 H=R^2 H+R^2 x \ ;$$
$$2RxH+x^2 H=R^2 x \ ;$$

چون $x\neq 0$، در نتیجه:

$$2RH+xH=R^2 \Rightarrow x=\frac{R^2-2RH}{H}$$

به ازای $R=8$ و $H=3$ داریم:

$$x=16/3$$

بنابراین (ج) انتخاب صحیح است.

۳۰۴. گزینهٔ (ج) درست است.

۳.۱.۴.۲. نسبت ارتفاعها

۳۰۵. برای این‌که هرگاه مرکبدان واژگون شود، مرکب نریزد، باید حجم قسمت حاوی مرکب برابر حجم بقیهٔ مرکبدان منهای حجم مخروط باشد. یعنی:

$$(h-h')S=h'S-\frac{1}{3}h'S\Rightarrow$$
$$h-h'=\frac{2}{3}h'\Rightarrow$$
$$\frac{h'}{h}=\frac{3}{5}$$

۳۰۶. استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ R و استوانهٔ به ارتفاع h' و به شعاع قاعدهٔ h' را درنظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم $R=2R'$ باشد، داریم:

$$S=S'\Rightarrow 2\pi Rh=2\pi R'h'\Rightarrow Rh=R'h'$$
$$\Rightarrow\frac{h}{h_1}=\frac{R'}{2R'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{h}{h'}=\frac{1}{2}$$

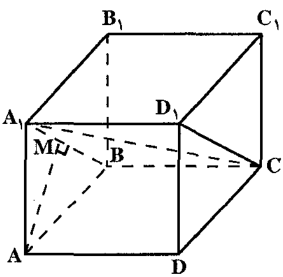
۳۰۷. شعاعهای قاعده‌های استوانه‌ها را R و R' و شعاعهای آنها را h و h' می‌نامیم. با فرض $R'=3R$ داریم:

$$V' = V \Rightarrow \pi R^۲ h = \pi R'^۲ h'$$
$$\Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{R'^۲}{R^۲} = \frac{۹R^۲}{R^۲} = ۹$$
$$\Rightarrow \frac{h}{h'} = ۹$$

۲.۴.۲. شعاع قاعده، قطر

۲.۴.۲.۱. اندازهٔ شعاع قاعده

۳۰۸. جواب: $r = R\sqrt{\dfrac{۱-۲d}{۲(d_۱ - d)}}$



۳۰۹. اگر $A_۱C$ قطر مکعب، محور استوانه فرض شود که بر AD مماس است (شکل)، شعاع کره، فاصلهٔ AD تا $A_۱D$ می‌باشد (نزدیکترین فاصلهٔ بین این دو خط) یا به‌عبارت دیگر فاصلهٔ هر نقطهٔ دلخوه از خط AD تا صفحهٔ $A_۱D_۱CB$. اگر عمود AM را بر صفحه رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$AM = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

چون صفحهٔ $AA_۱B_۱B$ عمود است بر صفحهٔ $A_۱D_۱CB$ ، پس AM بر صفحهٔ $AA_۱B_۱B$ تعلق خواهد داشت، یعنی AM شعاع کره خواهد شد.

۳۱۰. گزینهٔ (ج) صحیح است.

$$V + y = \pi(r+۶)^۲ h = \pi r^۲ (h+۶)$$
$$(r+۶)^۲ \times ۲ = r^۲ \times ۸$$
$$\Rightarrow ۳r^۲ - ۱۲r - ۳۶ = ۰ \Rightarrow r = ۶$$

۲.۴.۲.۲. اندازهٔ قطر

۳۱۱. مساحت کل سطح این حلقهٔ نوارچسب (شامل چسب و استوانهٔ پلاستیکی) را برحسب سانتی‌متر مربع حساب می‌کنیم:

$$۵ \times ۵ \times ۳/۱۴ = ۷۸/۵$$

و مساحت قسمتی از آن، که نوار چسب اشغال کرده است، عبارت خواهد بود از :

$$۲۵۰۰ \times ۰/۰۱ = ۲۵$$

و تفاضل آنها که ۵۳/۵ سانتیمتر مربع است، سطح قاعدهٔ استوانهٔ پلاستیکی را مشخص می‌سازد، که از روی آن قطر موردنظر به‌طور تقریبی ۸/۲۸ سانتیمتر به‌دست می‌آید.

۳۱۲. گزینهٔ (ج) صحیح است.

۳.۴.۲. ارتفاع، شعاع قاعده

۳۱۳. گزینهٔ (ب) درست است. چون $V = \pi r^۲ h$ ، باید داشته باشیم :

$$\pi(r+x)^۲ h = \pi r^۲ (h+x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{r^۲ - ۲rh}{h}$$

به ازای $r = ۸$ و $h = ۳$ داریم : $x = ۵\frac{۱}{۳}$

۳۱۴. بنا به فرض داریم :

$$x(x+y) = r(r+h) \quad (۱)\ ,\ x^۲ y = r^۲ h \quad (۲)$$

اگر از (۲) مقدار y را محاسبه و در (۱) قرار دهیم، دستگاه هم‌ارز زیر را خواهیم داشت :

$$y = \frac{r^۲ h}{x^۲} \quad (۳)\ ,\ x^۳ - r(r+h)x + r^۲ h = ۰ \quad (۴)$$

یک جواب معادلهٔ آخری $x = r$ است و از (۳)، $y = h$ نتیجه می‌شود. بنابراین استوانهٔ داده شده مشخص است. برای تعیین جواب دیگر در صورت وجود اگر طرفین رابطهٔ (۴) را بر $x - r$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت : $x^۲ + rx - rh = ۰$

این معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. ریشهٔ مثبت این معادله به‌صورت زیر است :

$$x = \frac{۱}{۲}(-r + \sqrt{r^۲ + ۴rh})$$

در این صورت x مشخص است و رابطهٔ (۳) نیز مقدار y را مشخص می‌کند. این مقدار x و y جواب دیگری را به‌دست می‌دهند.

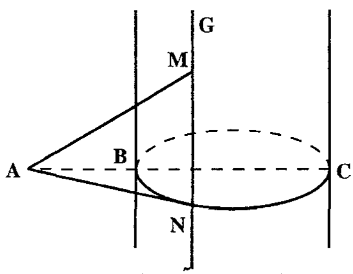
حالت خاص. اگر $r=۴$ و $h=۳$ باشد، خواهیم داشت :

$x=۲$ و $y=۱۲$

۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۳۱۵. دایرهٔ فصل مشترک سطح دوار با صفحه‌ای را که از نقطهٔ A عمود بر محور سطح دوار رسم می‌شود، رسم می‌کنیم.



BC، قطری از این دایره را که از نقطهٔ A می‌گذرد، درنظر می‌گیریم. M را نقطه‌ای دلخواه از سطح دوار و N را نقطهٔ برخورد مولد G ، گذرنده از M با دایره اختیار می‌کنیم. داریم $AM \geq AN$ ، از طرف دیگر نقطهٔ B انتهای قطری از دایره است که از نقطهٔ A می‌گذرد و به A نزدیکتر است. می‌دانیم که $AN \geq AB$ است. از آن‌جا، $AM > AB$ است.

بنابراین کمترین مقدار AM، یعنی کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ A از سطح استوانه‌ای مساوی AB است.

۳۱۶. گزینهٔ (الف) درست است.

۶.۲. شعاع کره

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره

۳۱۷. شعاع کرهٔ محاط در استوانهٔ متساوی‌الساقین مساوی نصف ارتفاع استوانه یا مساوی شعاع قاعدهٔ استوانه است. اگر x را اندازهٔ شعاع قاعدهٔ استوانه بگیریم، داریم :

$x =$ شعاع قاعده $\Longrightarrow$ و ارتفاع استوانه $= ۲x$

ارتفاع × سطح قاعده = حجم استوانه

$\Rightarrow$ حجم استوانه $= \pi x^{2} \times 2x = 2\pi x^{3} = 512\pi$

$\Rightarrow x^{3} = 216 \Rightarrow x = 6$ = شعاع قاعدهٔ استوانه = اندازهٔ شعاع کره

۷.۲. مساحت

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی

۳۱۸. داریم:

S جانبی $= \pi R^{2} h \Rightarrow S$ جانبی $= \pi \times 36 \times 8 = 288\pi$

۳۱۹. نخست ارتفاع استوانه را به‌دست می‌آوریم. داریم:

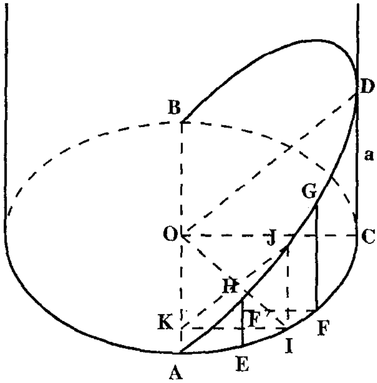
$V = \pi R^{2} h \Rightarrow 150\pi = \pi R^{2} \times 6$

$\Rightarrow R^{2} = 25 \Rightarrow R = 5$

حال خواهیم داشت:

S جانبی $= 2\pi R h \Rightarrow S$ جانبی $= 2\pi \times 5 \times 6 = 60\pi$

۳۲۰. فرض می‌کنیم EF وتری از نیمدایرهٔ قاعده باشد. پاره‌خطهای مولدهای EH و FG را رسم می‌کنیم و نقطه‌های I و J وسطهای EF و HG را به‌هم وصل می‌کنیم. مساحت ذوزنقهٔ EFGH عبارت است از EF.IJ .



IK را عمود بر AB رسم می کنیم؛ JK نیز عمود بر AB است و از آن‌جا مثلثهای KIJ و OCD متشابهند و داریم:

$$\frac{IJ}{IK} = \frac{a}{r} \Rightarrow IJ = \frac{a}{r} \times IK$$

$$\Rightarrow EF \times IJ = \frac{a}{r} EF \times IK$$

از نقطهٔ E خطی موازی AB رسم می کنیم (در شکل این خط به‌وسیلهٔ EH مخفی شده

است) و FF' را عمود بر این خط رسم می‌نماییم. مثلثهای $EF'F$ و IKO که ضلعهای متناظرشان دو به دو برهم عمودند، متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{EF}{OI}=\frac{EF'}{IK'}$$

از آن‌جا :

$$EF.IK=OI.EF'$$

اینک نتیجه می‌شود :

$$\text{مساحت } EFGH=\frac{a}{r}\times OI\times EF'=\frac{a}{r}OI\times \operatorname{Proj}\frac{EF}{AB}$$

این رابطه برقرار است، اگر ما منشور ناقص منتظم محاط شده در نیمدایره را یک پاره‌خط چندضلعی منتظم محدب درنظر بگیریم، مساحت جانبی این منشور ناقص برابر است با :

$$\frac{a}{r}\times \text{ارتفاع کثیرالاضلاع}\times ۲r$$

و اگر ما بلافاصله تعداد ضلعهای چندضلعی منتظم را دو برابر کنیم، در این‌صورت این عبارت دارای حد $\frac{a}{r}\times r\times ۲r=۲ar$ خواهد بود.

از آن‌جا سطح موردنظر برابر است با چهار برابر مساحت مثلث OCD.

۳۲۱. شعاع قاعدهٔ استوانه را r می‌گیریم. اگر به این شعاع به‌اندازهٔ h اضافه کنیم، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ $r+h$ به همان ارتفاع a به‌دست می‌آید. حجم بین این دو استوانه را پوستهٔ استوانه می‌نامیم. اگرمساحت رویهٔ استوانه را A و حجم پوستهٔ استوانه را V فرض کنیم، اگر h کوچک باشد، V تقریباً برابر است با Ah (مثلاً اگر توپی به شعاع $۱m$ رارنگ بزنید و ضخامت رنگ $۰/۱mm$ باشد، حجم رنگی که به‌کار می‌برید $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}A$ است). بنابراین اگر h کوچک باشد، $\frac{V}{h}$ تقریباً برابر با A است. پس وقتی $h\to ۰$ داریم :

$$\text{حد}\frac{V}{h}\to A$$

امّا می‌توانیم $\frac{V}{h}$ را دقیقاً حساب کنیم و ببینیم که وقتی $h\to ۰$، این مقدار به چه مقداری میل می‌کند.

V تفاضل حجمهای دو استوانه است. بنابراین داریم :

$$V = \pi(r+h)^۲ a - \pi r^۲ a = \pi a\left[(r+h)^۲ - r^۲\right] \Rightarrow$$

$$V = \pi a(۲hr + h^۲) = \pi ah(۲r+h) \Rightarrow$$

$$\frac{V}{h} = \frac{\pi ah(۲r+h)}{h} = \pi a(۲r+h)$$

حال اگر $h \to ۰$ ، داریم :

$$\lim_{h\to ۰} \frac{V}{h} = A = \pi a(۲r+۰) = ۲\pi ra$$

بنابراین حکم مسأله ثابت شد.

۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل

۳۲۲. می‌دانیم که مساحت کل استوانه مساوی مجموع مساحت جانبی استوانه و مساحتهای دو قاعدهٔ آن است. بنابراین داریم :

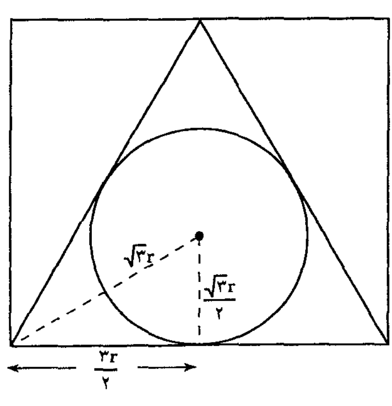
$$\text{مساحت یک قاعدهٔ استوانه} = \pi R^۲ = \pi(۷)^۲ = ۴۹\pi \ cm^۲ \Rightarrow$$

$$\text{مساحت دو قاعده} = ۹۸\pi \ cm^۲$$

$$\text{مساحت جانبی استوانه} = ۲\pi Rh = ۲\pi \times ۷ \times ۱۲ = ۱۶۸\pi \ cm^۲ \Rightarrow$$

$$\text{کل استوانه}\ S = ۱۶۸\pi + ۹۸\pi = ۲۶۶\pi \ cm^۲$$

۳۲۳. راه‌حل. شکل در صورت مسأله را ببینید. قطر کره، یعنی همان قطر اصلی مکعب، $\sqrt{۳}r$ است ؛ پس شعاع کره $\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ است. نمودار ساده‌ای (مانند شکل) نشان می‌دهد



که قطر قاعدهٔ مخروط باید $۳r$ باشد؛ پس طول مولدش $۳r$ است. بنابراین شعاع استوانهٔ قائم $\frac{۳}{۲}r$ و ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}r$ است. در نتیجه، مساحت سطح استوانه برابر است با :

$$۲\pi(\text{شعاع})^۲ + \pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع}) = ۲\pi(\frac{۳r}{۲})^۲ + ۲\pi\frac{۳r}{۲}.\frac{۳\sqrt{۳}r}{۲} =$$

$$= \frac{۹}{۲}\pi r^۲.(۱+\sqrt{۳})$$

به این ترتیب حل مسأله کامل شده است.

۳۲۴. x و y را بترتیب شعاع قاعده و ارتفاع یک استوانه می‌گیریم. مساحت کل و حجم این استوانه برابر است با :

$$S = ۲\pi x^۲ + ۲\pi xy = ۲\pi(x^۲ + xy)$$
$$V = \pi x^۲ y$$

ما کمترین مقدار $x^۲ + xy$ را جستجو می‌کنیم. $x^۲y$ ثابت است.
امّا $x^۲(xy)^۲ = (x^۲y)^۲$ ثابت می‌باشد و کمترین مقدار مجموع $x^۲ + xy$ که مجموع دو مقدار $x^۲$ و xy است، در صورتی حاصل می‌شود که :

$$\frac{x^۲}{۱} = \frac{xy}{۲} \Rightarrow y = ۲x$$

جواب مسأله استوانه‌ای است که قطر قاعدهٔ آن با ارتفاعش برابر می‌شود، که این استوانه را متساوی‌الساقین می‌نامند.
اگر V حجم استوانهٔ موردنظر باشد، داریم :

$$V = ۲\pi x^۳ \Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{V}{۲\pi}} \text{ و } y = ۲\sqrt[۳]{\frac{V}{۲\pi}}$$

استوانه‌ای که ابعاد بالا را داشته باشد، مساحت کلش می‌نیمم است.

۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع

۳۲۵. این مساحت، مساحت حلقهٔ ایجاد شده بین دو دایرهٔ متحدالمرکز است که شعاع دایرهٔ بزرگتر $۶\,cm$ است. برای محاسبهٔ r، شعاع دایرهٔ کوچکتر داریم :

$$\frac{۷}{۲۱} = \frac{r}{۶} \Rightarrow r = ۲$$

از آن‌جا :

$$S = \pi(R^۲ - r^۲) = \pi(۳۶ - ۴) = ۳۲\pi\, cm^۲$$

۲.۷.۲. نسبت مساحتها

۳۲۶. شعاع قاعدهٔ استوانهٔ دوار با ضلع شش‌ضلعی منتظم برابر است. اگر اندازهٔ این ضلع را a و ارتفاع مشترک را h فرض کنیم، داریم :

جانبی منشور $S = ۶ \times a \times h = ۶ah$

جانبی استوانهٔ دوار $S = ۲\pi Rh = ۲\pi ah$

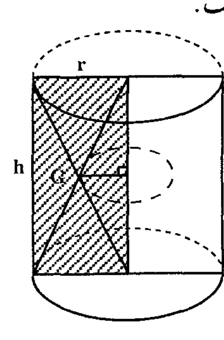
$$\Rightarrow \frac{S_{\text{جانبی منشور}}}{S_{\text{جانبی استوانه}}} = \frac{۶ah}{۲\pi ah} = \frac{۳}{\pi}$$

۸.۲. حجم

۱.۸.۲. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم استوانه

۳۲۷. اگر ابعاد مستطیل مولد را r و h فرض کنیم، مساحت آن rh است ؛ دایرهٔ موردبحث شعاعش مساوی $\frac{۱}{۲}r$ و در نتیجه محیطش $۲\pi \times \frac{۱}{۲} r = \pi r$ است. بنابراین حاصل‌ضرب مساحت مستطیل در محیط دایره، مساوی با $\pi r^۲ h$ است که دستور حجم استوانه به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h است.



۳۲۸. اگر R شعاع قاعدهٔ استوانهٔ دوار و h ارتفاع آن باشد، داریم :

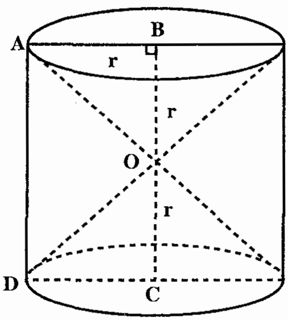
$$\text{حجم استوانهٔ دوار} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^{۲}.h$$

$$\text{نصف شعاع قاعده} \times \text{مساحت جانبی استوانه} = \Rightarrow V = ۲\pi Rh \times \frac{R}{۲}$$

۳۲۹. اگر مرکز کرهٔ محاط در استوانه را O و شعاع آن را r بنامیم، حجم استوانهٔ موردنظر از دو بخش تشکیل می‌شود.

۱. دو مخروط دوار به رأس مشترک O که قاعده‌هایشان دو قاعدهٔ استوانه است، مجموع حجم این دو مخروط برابر است با :

$$۲ \times \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} \times r = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$$



۲. حجم به‌وجود آمده از دوران مثلثی که قاعده‌اش AD مولد استوانه و رأسش نقطهٔO مرکز کره است که حول محور استوانه می‌چرخد، که این حجم از حاصلضرب مساحت جانبی استوانه در ثلث شعاع کره به‌دست می‌آید. یعنی :

$$۲\pi r \times ۲r \times \frac{۱}{۳}r = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

بنابراین داریم :

$$\text{حجم استوانه} = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳} + \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = ۲\pi r^{۳} = (۲\pi r^{۲} + ۴\pi r^{۲}) \times \frac{۱}{۳} r = \text{ثلث شعاع} \times \text{مساحت کل}$$

۳۳۰. استوانه‌ای را درنظر گرفته، شعاع، ارتفاع، مساحت کل و حجم آن را بترتیب با r، h، S و V نشان می‌دهیم. داریم :

$$\frac{V}{S} = \frac{rh}{۲(r+h)}$$

اما اگر H واسطهٔ توافقی بین r و h باشد، داریم :

$$\frac{۱}{H} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{r} + \frac{۱}{h}) \Rightarrow H = \frac{۲rh}{r+h}$$

بنابراین داریم $\frac{V}{S} = \frac{H}{۴}$، و از آن‌جا :

$$V = S \times \frac{H}{۴}$$

۳۳۱. تنظیم کنندهٔ رساله، برای حل مسأله به ذکر قاعده اکتفا می‌کند ؛ ۴ «شه‌نا» را بر بند پایینی

تقسیم می‌کنیم؛ ۳ «شه‌نا» را بر ۲ بند بالایی تقسیم می‌کنیم.
عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر کم می‌کنیم، مقسوم به‌دست می‌آید. مجموع نصف ۴ بند و ۳ بند را از کل ۶ بند کم می‌کنیم، مقسوم‌علیه پیدا می‌شود. تقسیم را انجام می‌دهیم. مقدار مجهول پیدا می‌شود، یعنی معلوم می‌شود که هر بند با بند مجاور خود، چه‌قدر اختلاف دارد. حد متوسط حجم سه‌بند پایینی، همان حجم بند دوم است.
بنابراین قاعده، باید این محاسبه‌ها را انجام داد.

۱) $\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۴}=\frac{۷}{۱۲}$، این مقسوم؛

۲) $۹-\frac{۴}{۳}-\frac{۳}{۲}=\frac{۱۱}{۲}$، این مقسوم علیه؛

۳) $\frac{۷}{۱۲}:\frac{۱۱}{۲}=\frac{۷}{۶۶}=d$، یعنی مقداری که هر بند با بند مجاور خود اختلاف دارد؛

۴) حجم بند دوم از پایین برابر $۱\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$ «شه‌نا» است. اکنون دیگر بدون هیچ اشکالی، می‌توان حجم هر کدام از هشت قسمت دیگر را پیدا کرد.

۳۳۲. شعاع قاعدهٔ استوانه را R و ارتفاع استوانه را h می‌نامیم. داریم:

$$۲R=۸\Rightarrow R=۴ \text{ شعاع قاعدهٔ استوانه}$$

$$h=۸\ ,\ \ V=\pi R^۲h\Rightarrow V=\pi(۴)^۲\times ۸=۱۲۸\pi$$

۳۳۳. شعاع قاعدهٔ استوانه دوار حاصل $R=۵$ و ارتفاع این استوانه $h=۶$ است؛ بنابراین داریم:

$$\text{حجم استوانهٔ دوار}=\pi R^۲h=\pi(۵)^۲\times ۶=۱۵۰\pi cm^۲$$

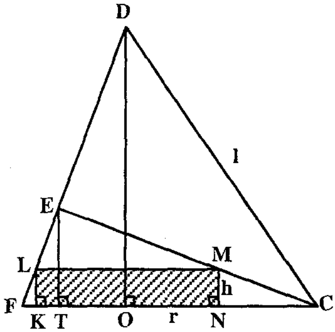
۳۳۴. انتقال دایرهٔ O، یک استوانهٔ مایل به‌وجود می‌آورد که ارتفاعش $h=l\sin\alpha$ است. در نتیجه، حجم استوانه برابر است با:

$$V=\pi R^۲\times h=\pi R^۲ l\sin\alpha$$

۳۳۵. وضع دو دایرهٔ قاعده‌ها روی دو صفحه، به هر صورتی که باشد، ارتفاع استوانهٔ مایل مساوی h و شعاع قاعده مساوی R است. پس حجم آن برابر است با:

$$V=\pi R^۲h$$

۳۳۶. CDE را مقطع چهار وجهی با صفحه‌ای می‌گیریم که از ارتفاع DO و یال جانبی DC (از چهاروجهی) گذشته باشد. مستطیل هاشور خوردهٔ KLMN، متناظر است با برش استوانه‌ای که می‌خواهیم حجم آن، V، را تعیین کنیم. در این‌جا $CD=1$ و



$CF = DF = \frac{l\sqrt{۳}}{۲}$ (ارتفاع وجه چهار وجهی منتظم). ارتفاع استوانه را $MN = h$ و شعاع قاعدهٔ آن را $ON = r$ می‌گیریم. از تشابه مثلثهای ECT و MNC به‌دست می‌آید:

$$NC:MN = TC:ET \Rightarrow \frac{OC - r}{h} = \frac{TC}{TE} (*)$$

از طرف دیگر داریم:

$$OC = \frac{۲}{۳}CF = \frac{\sqrt{۳}}{۳}l؛$$

$$ET^{۲} = FT.TC؛$$

$$FT = \frac{FE^{۲}}{FC} = \frac{(\frac{۱}{۳}FC)^{۲}}{FC} = \frac{۱}{۹}FC = \frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l؛$$

$$TC = FC - FT = \frac{\sqrt{۳}}{۲}l - \frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l = \frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l؛$$

$$ET = \sqrt{\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l.\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l} = \frac{\sqrt{۶}}{۹}l$$

به این ترتیب، برابری (*) را می‌توان چنین نوشت:

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۳}l - r)\frac{\sqrt{۶}}{۹}l = h.\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}l$$

$$\Rightarrow h + \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}r = \frac{۱}{۲\sqrt{۶}}l$$

از تشابه دو مثلث LKF و ETF داریم:

$$FK:KL = FT:ET \Rightarrow \frac{OF - r}{h} = \frac{FT}{ET}$$

ولی $OF = \frac{۱}{۳}FC = \frac{\sqrt{۳}}{۶}l$ ، بنابراین:

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۶}l - r)\frac{\sqrt{۶}}{۹}l = h.\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}l$$

$$\Rightarrow h + ۲\sqrt{۲r} = \frac{۲}{\sqrt{۶}} l$$

با حل دستگاه دو معادله‌ای که برای r و h به‌دست آوردیم، نتیجه می‌شود :

$$r = \frac{\sqrt{۳}}{۷} l \ , \ h = \frac{\sqrt{۶}}{۲۱} l$$

و از آن‌جا :

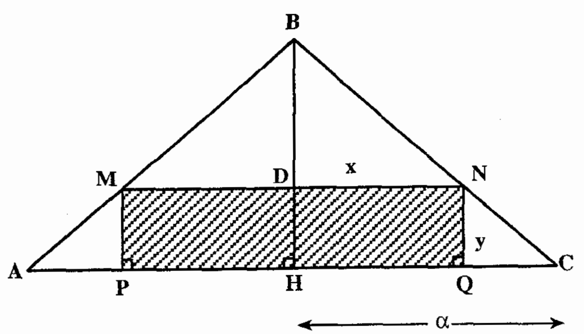
$$V = \pi r^۲ h = \pi (\frac{\sqrt{۳}}{۷} l)^۲ . \frac{\sqrt{۶}}{۲۱} l = \frac{\pi\sqrt{۶}}{۳۴۳} l^۳$$

۲.۱.۸.۲. بیشترین مقدار حجم استوانه

۳۳۷. x را شعاع قاعده، y را ارتفاع و $x + y = a$ می‌گیریم. حجم مخروط مساوی $\pi x^۲ y$ است. داریم :

$$x = \frac{۲a}{۳} \ , \ y = \frac{a}{۳}$$

و $V = \pi \times \frac{۴a^۲}{۹} . \frac{a}{۳} = \frac{۴}{۲۷} \pi a^۳$. کافی است $DH = \frac{a}{۳}$ و $DN = \frac{۲a}{۳}$ اختیار شود.



تبصره. مسأله حالت خاصی از محاط کردن یک استوانه به حجم ماکزیمم در یک مخروط است. درواقع، می‌پذیریم که یک مخروط به شعاع قاعدهٔ a وجود دارد. نیم مقطع BHC مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای خواهد بود که برای آن $x + y = a$ است، هر موقعیتی که نقطهٔ N داشته باشد.

اما ارتفاع استوانهٔ ماکزیمم محاط در مخروط، مساوی $\frac{۱}{۲}$ ارتفاع مخروط است، بنابراین :

$$y = \frac{BH}{3} = \frac{a}{3}$$

۳۳۸. فرض می‌کنیم x شعاع قاعده و y ارتفاع استوانه باشد.

سطح کل استوانه برابر است با :

$$2\pi a^2 = 2\pi x^2 + 2\pi xy$$

از آن‌جا :

$$x^2 + xy = a^2 \ , \ V = \pi x^2 y$$

اما می‌دانیم که :

$$x^2 = \frac{a^2}{3} \ , \ y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V = \pi \times \frac{a^2}{3} \times \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi a^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi a^3 \sqrt{3}}{9}$$

۳۳۹. ۱. فرض می‌کنیم x و y ، شعاع و ارتفاع یکی از استوانه‌های دواری باشد که مجموع مساحت دو قاعده و سطح جانبی آن مساوی $2\pi a^2$ باشد، داریم :

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2 \Rightarrow x^2 + xy = a^2$$

حجم $V = \pi x^2 y$ درصورتی ماکزیمم است که مجذورش یعنی $(x^2 y)^2 = x^2 (xy)^2$ ماکزیمم باشد.

اما مجموع دو عامل x^2 و xy ثابت است. بنابراین ماکزیمم حجم در صورتی است که :

$$\frac{x^2}{1} = \frac{xy}{2} = \frac{x^2 + xy}{3} = \frac{a^2}{3}$$

از این رابطه، رابطه‌های $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ و $y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ نتیجه می‌شود.

۲. اگر استوانه از یک طرف در باز باشد، خواهیم داشت :

$$\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2 \Rightarrow x^2 + 2xy = 2a^2$$

حجم این استوانه یعنی $\pi x^2 y$ درصورتی ماکزیمم است که $x^2 y$ یا

$$4(x^2 y)^2 = x^2 (2xy)^2$$

ماکزیمم باشد، مجموع دو عامل x^2 و $2xy$ ثابت است.

پس ماکزیمم حجم درصورتی پیش می‌آید که :

$$\frac{x^2}{1} = \frac{2xy}{2} = \frac{2a^3}{3}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$x = y = a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۳۴۰. حالت اول. سطح کل را با $۲\pi S^۲$ و حجم با اندازهٔ ماکزیمم را با πV نشان می‌دهیم ؛ x را شعاع قاعده و y را ارتفاع فرض می‌کنیم. داریم :

$$x^۲ + xy = S^۲ \Rightarrow \ y = \frac{S^۲ - x^۲}{x} \quad (۱)$$

$V = x^۲y,\ V = x(S^۲ - x^۲)$ یا $V^۲ = x^۲(S^۲ - x^۲)^۲$

مجموع دو عامل این حاصلضرب ثابت است، پس وقتی ماکزیمم خواهد بود که داشته باشیم :

$$\frac{x^۲}{S^۲ - x^۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \ x = \frac{S}{\sqrt{۳}}\ ,\ (۱) \Rightarrow y = \frac{۲S}{\sqrt{۳}}$$

پس ماکزیمم حجم استوانهٔ بسته هنگامی است که ارتفاع، دو برابر شعاع قاعده است.
حالت دوم. می‌توان به طور مستقیم مثل حالت اول عمل کرد. نتیجه می‌شود که ارتفاع استوانهٔ بدون در، با حجم ماکزیمم، متساوی شعاع قاعدهٔ آن است.

۳.۱.۸.۲. کمترین مقدار حجم استوانه

۳۴۱. فرض می‌کنیم r، h، S و V بترتیب شعاع، ارتفاع، مساحت کل و حجم استوانه‌ای دوار باشد. داریم :

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi r^۲ h}{۲\pi r(r+h)} = \frac{rh}{۲(r+h)} = k$$

$$\Rightarrow h = \frac{۲kr}{r - ۲k} \quad (۱)$$

اینک داریم :

$$\dot{V} = \frac{۲\pi k r^۳}{r - ۲k}$$

موضوع عبارت است از تعیین می‌نیمم $\frac{r^۳}{r - ۲k}$، یا ماکزیمم $\frac{r - ۲k}{r^۳} = \frac{۱}{r^۲}(۱ - \frac{۲k}{r})$ یا

$(\frac{۲k}{r})^۲(۱-\frac{۲k}{r})$. اما مجموع $\frac{۲k}{r}$ و $۱-\frac{۲k}{r}$ ثابت است، پس ماکزیمم موردنظر وقتی حاصل می‌شود که $۱-\frac{۲k}{r}=\frac{\frac{۲k}{r}}{۲}$ باشد. از آن‌جا $r=۳k$ و از رابطهٔ (۱)، $h=۶k$ حاصل می‌شود.

بنابراین مقطع نصف‌النهاری استوانه، یک مربع به ضلع ۶k است.

۴.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۳۴۲. بزرگترین حجم، از آن‌چهار وجهی است که دو یال متقابل در آن دو به دو متناظراً بر یکدیگر عمود، و قطرهای قاعده‌ها بشوند. حجم آن برابر می‌شود با :

$$\frac{۲}{۳}R^۲h$$

۳۴۳. حجم مشترک دو استوانه برابر است با :

$$V=\frac{۱۶}{۳}r^۳$$

۳۴۴. داریم :

$$۲R=۱۴\Rightarrow R=۷ \text{ و } ۲R'=۱۲\Rightarrow R'=۶$$

$$V_{\text{ناودان}}=\pi(R^۲-R'^۲)h=\pi(۴۹-۳۶)\times ۵۶$$

$$\Rightarrow V_{\text{ناودان}}=۷۲۸\pi\ \ cm^۳$$

۳۴۵. داریم :

$$\text{شعاع قاعدهٔ استوانهٔ بزرگتر}=R'=R+۰/۲=۴/۲$$

$$\Rightarrow \text{حجم بین دو استوانه}=\pi(R^۲-R'^۲)h$$

$$\Rightarrow V=\pi(۴/۲^۲-۴^۲)\times ۲۰=۳۲/۸\pi$$

۳۴۶. داریم :

$$\text{حجم استوانه}=\pi r^۲h \text{ و } \text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$$

$$\Rightarrow \text{حجم موردنظر}=\pi r^۲h-\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۲}{۳}\pi r^۲h$$

۳۴۷. شعاع کره را R می‌گیریم. شعاع قاعدهٔ استوانه R و ارتفاع آن ۲R است. بنابراین داریم:

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \quad \text{و}$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}h = \pi R^{۲} \times ۲R = ۲\pi R^{۳}$$

$$\Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{۲}{۳} \times ۲\pi R^{۳} = \frac{۲}{۳}\ (\text{حجم استوانه})$$

۳۴۸. داریم:

$$\text{ارتفاع استوانه} = ۸ - ۴ = ۴m$$

$$\text{حجم سیلو} = \text{حجم استوانه و حجم استوانه} = \pi R^{۲}h = \pi \times ۲^{۲} \times ۴ = ۱۶\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳} \times (\pi \times ۲^{۲}) \times ۴ = \frac{۱۶\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{حجم سیلو} = ۱۶\pi + \frac{۱۶\pi}{۳} = \frac{۶۴\pi}{۳}\ m^{۳}$$

۲.۸.۱.۵. اندازهٔ مساحت، اندازهٔ حجم

۳۴۹. داریم:

$$\text{شعاع قاعده} = R = ۴cm \ \text{و}\ \text{ارتفاع} = h = ۸cm$$

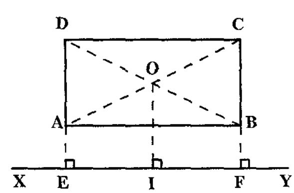
$$S_{\text{جانبی استوانه}} = ۲\pi Rh = ۲\pi(۴)(۸)۶۴\pi\ cm^{۲} \quad \text{و}$$

$$S_{\text{یک قاعده}} = \pi R^{۲} = ۱۶\pi\ cm^{۲}$$

$$S_{\text{کل استوانه}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}} = ۶۴\pi + ۳۲\pi = ۹۶\pi\ cm^{۲}$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}h = \pi(۴)^{۲} \times ۸ = ۱۲۸\pi\ cm^{۳}$$

۳۵۰. سطح ایجاد شده به‌وسیلهٔ محیط مستطیل ABCD از دو سطح حلقوی (مستدیر) ایجاد شده، توسط AD و BC و از سطحهای جانبی دو استوانهٔ ایجاد شده، به‌وسیلهٔ AB و CD تشکیل می‌شود. بنابراین:



$$g = ۲\pi(ED^{۲} - EA^{۲}) + ۲\pi(EA + ED)AB \quad \text{و}$$

$$g = ۲\pi(ED + EA)(ED - EA + AB)$$

امّا $ED + EA = FC + EA = ۲IO$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$g = ۲\pi IO \times ۲(AB + AD)$$

حجم V ایجاد شده به‌وسیلهٔ $ABCD$ مساوی تفاضل حجم استوانه‌های ایجاد شده به‌وسیلهٔ $EFCD$ و $EFBA$ است. از آن‌جا :

$$V = \pi FC^{۲} \times AB - \pi EA^{۲}.AB = \pi(FC + EA)(FC - FB) \times AB$$

امّا : $FC + EA = ۲OI$ و $FG - FB = BC$

و از آن‌جا حاصل می‌شود :

$$V = ۲\pi OI \times BC \times AB = ۲\pi OI \text{ مساحت } ABCD$$

۲.۸.۲. نسبت حجمها

۳۵۱. داریم :

$$R' = ۳R \;,\; h' = \frac{۱}{۳}h \;,\; V = \pi R^{۲}h \;,\; V' = \pi R'^{۲}h'$$

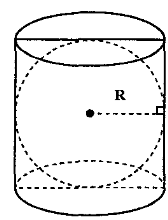
$$\Rightarrow V' = \pi(۳R)^{۲}(\frac{۱}{۳}h) = ۳\pi R^{۲}h$$

$$\frac{V'}{V} = \frac{۳\pi R^{۲}h}{\pi R^{۲}h} = ۳$$

۳۵۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۵۳. با توجه به شرطهای مسأله، برای حجم استوانه داریم (شکل) :

$$V_{۱} = \pi R^{۲}.۲R = ۲\pi R^{۳} = \frac{۳}{۲}(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}) = \frac{۳}{۲}V_{۲}$$



$V_{۱}$ را حجم استوانه و $V_{۲}$ را حجم کره گرفته‌ایم. به‌همین ترتیب، اگر سطح کل استوانه‌ای را $S_{۱}$ و سطح کره را $S_{۲}$ بگیریم، خواهیم داشت :

$$S_{۱} = ۲\pi R.۲R + ۲\pi R^{۲} = ۶\pi R^{۲} = \frac{۳}{۲}(۴\pi R^{۲}) = \frac{۳}{۲}S_{۲}$$

مسأله، از رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است. خود ارشمیدس، علاقهٔ خاصی به این مسأله داشت. بنابر افسانه‌ای، ارشمیدس وصیت کرده بود که بر سنگ مزار او، کره‌ای که محاط در استوانه‌ای باشد، حک کنند و این وصیت هم به‌وسیلهٔ نزدیکان او اجرا شد.

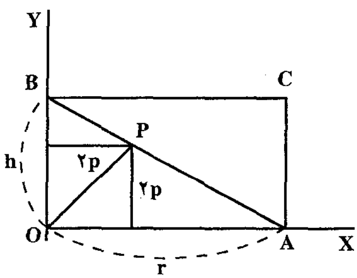
۳۵۴. ضلعهای مجاور مستطیل را a و b می‌گیریم. حجمها برابرند با:

$V = \pi a^2 b$ و $V' = \pi b^2 a$

از آن‌جا:

$$\frac{V}{V'} = \frac{a}{b}$$

۳.۸.۲. نسبت حجم و سطح



۳۵۵. شعاع و ارتفاع استوانهٔ ایجاد شده از دوران مستطیل OACB حول OB را بترتیب r و h می‌نامیم. اگر V و S، بترتیب، حجم و سطح کل این استوانهٔ دوار باشد، داریم:

$$\frac{V}{S} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi r(r+h)} = \frac{rh}{2(r+h)} \qquad (1)$$

هنگامی که AB حول P دوران می‌کند، r و h تغییر می‌کنند. اما بین آنها رابطهٔ زیر برقرار است:

$$S_{OAB} = S_{OAP} + S_{OBP}$$

$$\Rightarrow \frac{rh}{2} = rP + hP = (r+h)P$$

اگر از این رابطه P را محاسبه کنیم، داریم:

$$P = \frac{rh}{2(r+h)}$$

اینک رابطهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{V}{S} = P$$

۳۵۶. اگر مستطیل حول ضلع a دوران کند، a ارتفاع و h شعاع قاعدهٔ آن است و داریم:

$S =$ مساحت جانبی $= ۲\pi Rh = ۲\pi ba$ و

$V =$ حجم $= \pi R^۲ h = \pi b^۲ a$

اگر مستطیل را حول ضلع b دوران دهیم، b ارتفاع و a شعاع قاعدهٔ آن است و داریم :

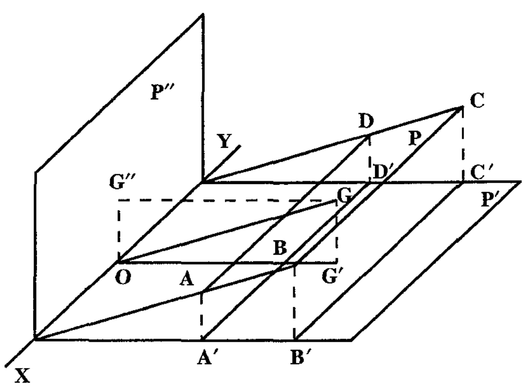
$S' =$ مساحت جانبی $= ۲\pi Rh = ۲\pi ab$ و

$V' =$ حجم $= \pi R^۲ h = \pi a^۲ b$

$$\Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{۲\pi ba}{۲\pi ab} = ۱$$ و

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi b^۲ a}{\pi a^۲ b} = \frac{b}{a}$$

۴.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها



۳۵۷. از نقطهٔ G مرکز مستطیل R یا مستطیل ABCD، عمود GO را بر xy رسم می‌کنیم. V حجم مستطیل ایجاد شده به‌وسیلهٔ R، برابر است با :

$$V = AB \times BC \times ۲\pi OG$$

نقطهٔ G' تصویر نقطهٔ G روی صفحهٔ P' ، مرکز مستطیل R' است و برای V' حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ R' داریم :

$$V' = A'B' \times B'C' \times ۲\pi OG' = A'B' \times BC \times ۲\pi OG'$$

امّا $\cos(\hat{P}, P') = \frac{A'B'}{AB}$ ، از آن‌جا :

$$A'B' = \frac{AB \times OG'}{OG}$$

و نتیجه می‌شود :

$$V' = AB \times BC \times ۲\pi \times \frac{OG'^۲}{OG}$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$V'' = AB \times BC \times ۲\pi \times \frac{OG''^{۲}}{OG}$$

پس داریم :

$$V' + V'' = AB \times BC \times ۲\pi \times \frac{OG'^{۲} + OG''^{۲}}{OG}$$

امّا در مستطیل $OG'GG''$ ، $OG'^{۲} + OG''^{۲} = OG^{۲}$ ؛ در نتیجه :

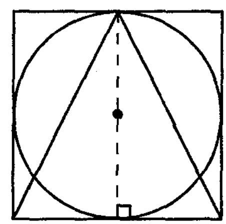
$$V' + V'' = AB \times BC \times ۲\pi OG = V$$

۳۵۸. شعاع قاعدهٔ استوانه r و ارتفاعش ۲r است. شعاع کره مساوی r می‌باشد و شعاع قاعدهٔ مخروط r و ارتفاعش مساوی ارتفاع استوانه یعنی ۲r است. بنابراین اگر حجمهای این سه جسم با V، V' و V'' نشان دهیم، داریم :

$$V = \pi r^{۲} \times ۲r = ۲\pi r^{۳}$$ و

$$V' = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$ و

$$V'' = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} \times ۲r = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$$



از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود :

$$۲\pi r^{۳} = V = \frac{۳V'}{۲} = ۳V''$$

$$\Rightarrow \frac{V}{۳} = \frac{V'}{۲} = \frac{V''}{۱}$$

۳۵۹. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا داریم :

$$V = \pi a^{۲} b = (\pi ab)a$$

$$W = \pi ab^{۲} = (\pi ab)b$$

$$a > b \;\Rightarrow\; V > W$$

۳۶۰. ثابت کنید صفحه‌ای که سطح جانبی استوانه را قطع می‌کند، حجم و محور آن را به یک نسبت قطع می‌کنند.

جواب : $\frac{\pi a^{۳}}{۲۴}$

۹.۲. رابطهٔ متری

۳۶۱. زاویهٔ بین قاطعها و محور را α می‌نامیم. این قاطعها را روی صفحه‌ای عمود بر محور تصویر می‌کنیم. نقطه‌های A'، B'، C' و D'، تصویرهای نقطه‌های A، B، C و D، به دایرهٔ مقطع تعلق دارند و اگر P' تصویر نقطهٔ P باشد، داریم:

$$P'A'.P'B' = P'C'.P'D'$$

امّا، قاطعها با صفحهٔ تصویر زاویهٔ $90^\circ - \alpha$ می‌سازند و می‌دانیم که اندازهٔ تصویر یک پاره‌خط روی یک صفحه، مساوی حاصلضرب طول آن پاره‌خط در کسینوس زاویهٔ بین آن پاره‌خط و آن صفحه است. بنابراین داریم:

$$PA.PB.\sin^2\alpha = PC.PD.\sin^2\alpha$$

یا:

$$PA.PB = PC.PD$$

بعکس، اگر فرض کنیم که تساوی اخیر برقرار باشد و زاویه‌های قاطعها با محور را با α و β نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{P'A'.P'B'}{\sin^2\alpha} = \frac{P'C'.P'D'}{\sin^2\beta}$$

امّا:

$$P'A'.P'B' = P'C'.P'D'$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود که زاویه‌های α و β با هم برابرند.

اگر یکی از این قاطعها به مماس تبدیل شود، خواهیم داشت:

$$PA^2 = PC.PD$$

و بعکس.

۳۶۲. در واقع، در استوانه داریم:

حجم استوانه = مساحت قاعده × ارتفاع $= Bh$

حجم استوانه = مساحت جانبی × $\frac{1}{2}$ شعاع قاعده $= \frac{1}{2}Sr$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}Sr = Bh \Rightarrow Sr = 2Bh$$

از آن‌جا:

$$\frac{S}{2B} = \frac{h}{r}$$

۳۶۳. مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ صفحه‌ای گذرنده بر محور، دو برابر مستطیل مولد استوانهٔ دوار است. داریم :

$$\frac{S}{B}=\frac{2rh}{\pi r^2}=\frac{4h}{2\pi r}=\frac{4h}{C}\Rightarrow\frac{B}{S}=\frac{h}{\frac{1}{2}C}$$

تبصره. در مخروط دوار نیز $\frac{S}{B}=\frac{h}{\frac{1}{2}C}$ است.

۳۶۴. داریم :

$$V=\pi r^2 h\Rightarrow 8\pi V^2=8\pi^3 r^4 h^2\ ;$$

$$l=2\pi rh\Rightarrow l^2=4\pi^2 r^2 h^2\ ;$$

$$S=2\pi rh+2\pi r^2\Rightarrow (S-l)=2\pi r^2\ ;$$

بنابراین :

$$l^2(S-l)=8\pi^3 r^4 h^2=8\pi V^2$$

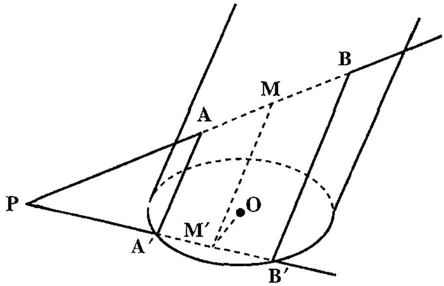
۲.۱۰. مکان هندسی

۲.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۳۶۵. صفحه‌ای درنظر می‌گیریم که بر خط داده شدهٔ D می‌گذرد.

مکان هندسی نقطه‌هایی از این صفحه که از خط D به فاصلهٔ معلوم داده شده می‌باشند، دو خط موازی خط D، واقع در این صفحه و به فاصلهٔ معلوم ازD می‌باشند. این ویژگی که در این صفحهٔ گذرنده بر D وجود دارد، در هر صفحه‌ای که بر خط D می‌گذرد، برقرار است. بنابراین مکان هندسی مورد جستجو یک سطح استوانه‌ای دوار است که شعاع قاعده‌اش طول داده شده و محورش خط راست داده شده است.

۳۶۶. نقطهٔ داده شدهٔ P را درنظر گرفته، از این نقطه صفحه‌ای موازی صفحهٔ منحنی هادی رسم می‌کنیم تا سطح استوانه‌ای را در دایرهٔ به مرکز O قطع کند. از نقطهٔ P قاطع PAB را رسم می‌کنیم (شکل)، و بر PAB صفحه‌ای موازی مولدهای سطح استوانه‌ای رسم می‌کنیم، تا صفحهٔ مقطع رسم شده از P را تحت قاطع PA′B′ از دایرهٔ (O) قطع کند. اگر M نقطه‌ای از AB و MM′ موازی مولدهای سطح استوانه‌ای باشد، برای آن که نقطهٔ

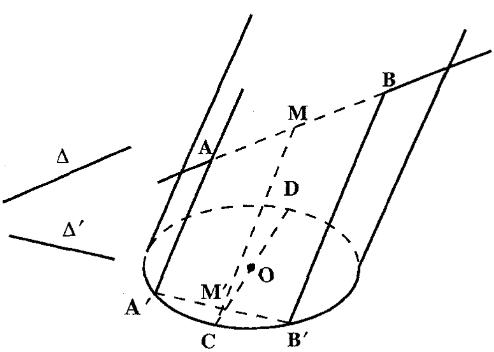


M وسط پاره‌خط AB باشد، لازم و کافی است که نقطهٔ M′ وسط پاره‌خط A′B′ باشد. بدین معنی که M′ به کمانی از دایرهٔ به قطر OP (دایرهٔ C) تعلق داشته باشد که در درون دایرهٔ (O) است.

از آن‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ M، بخشی از سطح استوانه‌ای S است که هادی آن کمانی از دایرهٔ (C) است که درون دایرهٔ (O) قرار دارد و مولدهایش با مولدهای سطح استوانه‌ای داده شده موازی می‌باشند.

هنگامی که نقطهٔ P درون دایرهٔ (O) یا روی این دایره باشد، مکان هندسی نقطهٔ M تمام سطح استوانه‌ای S است که درون سطح استوانه‌ای داده شده قرار دارد، یا بر آن مماس درون است.

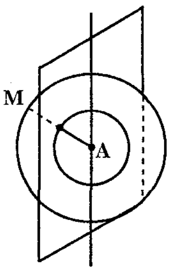
۳۶۷. وتر AB موازی با خط داده شدهٔ Δ را درنظر می‌گیریم و وسط آن را نقطهٔ M می‌نامیم. مولدهای AA′ و BB′ را رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آنها با منحنی هادی سطح استوانه‌ای را A′ و B′ می‌نامیم. خطی که از نقطهٔ M موازی مولد سطح استوانه‌ای رسم می‌شود، از نقطهٔ M′، وسط وتر A′B′ می‌گذرد. A′B′ موازی امتداد Δ″ واقع در صفحهٔ منحنی هادی سطح استوانه‌ای است. بنابراین M′ به قطر CD از دایرهٔ هادی تعلق دارد که این قطر بر Δ′ عمود است. از آن‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ M بخشی از صفحهٔ P است که محصور بین مولدهای رسم شده از دو انتهای قطر CD می‌باشد.



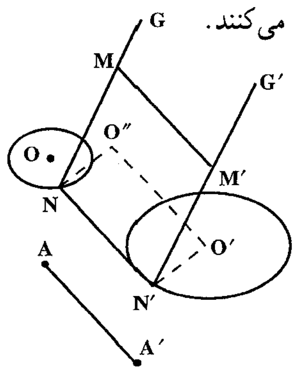
بعکس، اگر M نقطه‌ای از این بخش از صفحهٔ P باشد، و از این نقطه وتر AB را موازی Δ رسم کنیم، از طرفی نقطهٔ M′ به قطر CD تعلق دارد که عمود بر Δ′، و درنتیجه عمود بر A′B′ است و از طرف دیگر نقطهٔ M′ به A′B′ تعلق دارد. بنابراین نقطهٔ M′

وسط وتر $A'B'$ می‌باشد. از آن‌جا نقطهٔ M وسط وتر AB است.

۳۶۸. برای هر نقطهٔ M از دایره، مکان هندسی مورد جستجو، صفحه‌ای عمود بر پاره‌خط AM در نقطهٔ وسط آن است. این صفحه، مماس بر استوانه‌ای دوار باقی می‌ماند که محورش خط عمود در نقطهٔ A بر صفحهٔ دایره و شعاعش مساوی $\frac{R}{2}$ است، و هنگامی که نقطهٔ M روی دایره تغییر می‌کند، مجموعهٔ صفحه‌های قبلی، پوشهای استوانه‌ای هستند که ما می‌خواهیم مشخص کنیم. یعنی این صفحه‌ها، بر استوانه‌ای که دایرهٔ هادی آن $(A, \frac{R}{2})$ و محورش عمود در A بر صفحهٔ دایره است، مماس می‌باشند.



۳۶۹. دو سطح استوانه‌ای در نظر می‌گیریم که دارای مولدهای موازیند، منحنیهای هادیشان دایره‌های O و O' واقع در یک صفحه‌اند و AA' پاره‌خطی واقع در این صفحه است. پاره‌خطی مانند MM' همسنگ با پاره‌خط AA' چنان درنظر می‌گیریم که دو سر آن روی این دو سطح مخروطی باشد. مولدهایی که از دو نقطهٔ M و M' می‌گذرند، منحنیهای هادی را در N و N' قطع می‌کنند.



MM' که موازی صفحهٔ هادیهای دو منحنی است، با NN' موازی و درنتیجه همسنگ NN' است. از آن‌جا، NN' همسنگ AA' است؛ و بعکس، اگر NN' همسنگ با AA' باشد، هر پاره‌خط MM' رسم شده در صفحهٔ مولدهای G و G' که موازی NN' باشد، همسنگ AA' است.

مکان هندسی موردنظر از مولدهایی تشکیل می‌شوند که بر انتهای پاره‌خهایی مانند NN' همسنگ با AA' که نقطه‌های N و N' دایره‌های هادی O و O' را می‌پیمایند، تشکیل

می‌شود. این پاره‌خطها بسادگی قابل رسم می‌باشند.

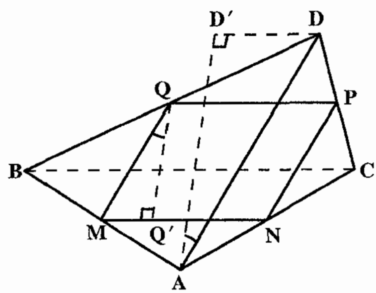
اگر $O'O''$ را همسنگ با AA' رسم کنیم، $O'O''NN'$ متوازی‌الاضلاع و $O''N = O'N'$ است؛ از آن‌جا نقطهٔ N، نقطهٔ مشترک دو دایرهٔ O و O'' است که دایرهٔ اخیر مساوی دایرهٔ O' است. با مشخص شدن نقطهٔ N بلافاصله NN' و درنتیجه نقطهٔ N' مشخص می‌شود.

نقطهٔ N دارای: دو حالت، یا یک حالت است، یا وجود ندارد؛ و مکان هندسی نقطه‌های M و M' از چهار، یا، دو مواد تشکیل می‌شود، یا این مکان وجود ندارد.

۳۷۰. QQ' را عمود بر MN رسم می‌کنیم. داریم:

$$MN \times QQ' = a^2$$ و

$$\frac{BC}{2} \times QQ' = a^2$$ یا



از آن‌جا خواهیم داشت:

$$QQ' = \frac{2a^2}{BC}$$

AD' را موازی QQ' و DD' را عمود بر AD' رسم می‌کنیم.

مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $QQ'M$ و $AD'D$ متشابهند؛ زیرا یک زاویهٔ حادهٔ مساوی دارند،

$$M\hat{Q}Q' = D\hat{A}D'$$

از آن‌جا:

$$\frac{AD'}{QQ'} = \frac{AD}{MQ} = 2 \Rightarrow AD' = 2QQ' = \frac{4a^2}{BC}$$

امّا، AD' که عمودبر MN، یعنی عمود بر BC است، مساوی $\frac{4a^2}{BC}$ باقی می‌ماند و مکان هندسی نقطهٔ D' دایرهٔ به مرکز A و به شعاع $\frac{4a^2}{BC}$، رسم شده در صفحهٔ (R) است که از نقطهٔ A عمود بر BC رسم شده است؛ و چون DD' موازی MQ' یا موازی BC است، بدین معنی که عمود بر صفحهٔ (R) است، پس مکان هندسی نقطهٔ D، یک سطح استوانه‌ای

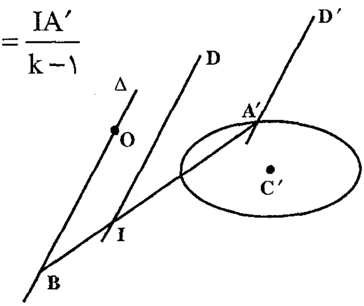
دوار است که مقطع قائم آن دایره‌ای از صفحهٔ (R) است که ما مشخص کردیم.

۳۷۱. نقطهٔ برخورد خط D با صفحهٔ دایرهٔ C' را I می‌نامیم. برای آن که نقطهٔ O مرکز تجانسی با نسبت تجانس k باشد که در آن متناظر خط D، خطی مانند D' باشد که دایرهٔ C' را در نقطهٔ A' قطع می‌کند، لازم و کافی است که نقطهٔ O به خط Δ از صفحهٔ (D' و D) تعلق داشته باشد که موازی با این خطهاست و نسبت فاصله‌اش از D' و D مساوی k است؛

Δ خط $A'I$ را در B قطع می‌کند و نتیجه می‌شود:

$$\frac{BA'}{BI}=k\Rightarrow\frac{BA'}{k}=\frac{BI}{۱}=\frac{BA'-BI}{k-۱}=\frac{IA'}{k-۱}$$

$$\Rightarrow\frac{IB}{IA'}=\frac{۱}{۱-k}\quad(۱)$$



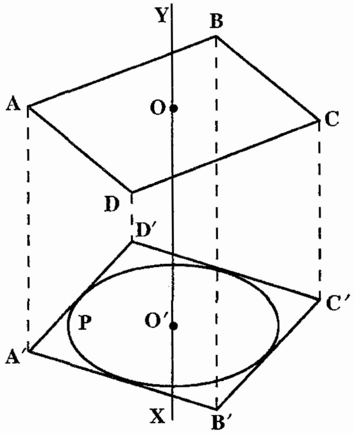
اکنون فرض می‌کنیم که نقطهٔ A' دایرهٔ C' را می‌پیماید. از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که نقطهٔ B مجانس دایرهٔ C' را می‌پیماید، در تجانسی که I و $\frac{۱}{۱-k}$ مرکز و نسبت این تجانسند.

درنتیجه خط Δ یک سطح استوانه‌ای به‌وجود می‌آورد که هادیش دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ B و مولدش موازی با خط D است.

۲.۱۰.۲. مکان هندسی خط

۳۷۲. یک سطح استوانه‌ای دوار مماس بر چهار ضلع متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر گرفته، محور آن را xy می‌نامیم. شکل را روی صفحه‌ای عمود بر xy تصویر می‌کنیم. دو حالت پیش می‌آید:

فرض کنیم که ABCD تحت خط راست $A'B'C'D'$ تصویر شود. در این صورت سطح استوانه‌ای با محور xy که شعاعش مساوی فاصلهٔ xy از صفحهٔ ABCD است، بر چهار ضلع متوازی‌الاضلاع مماس است؛ این مطلب به ما نشان می‌دهد که هر خط xy موازی



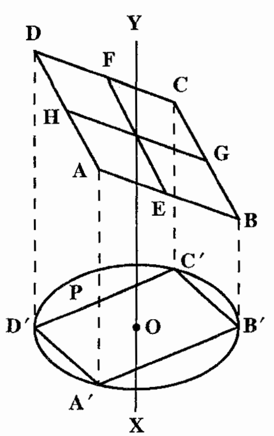
صفحهٔ ABCD، محور یک سطح استوانه‌ای دوار مماس بر ضلعهای متوازی‌الاضلاع است.

اگر A' ، B' ، C' و D' روی یک خط راست نباشند، چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاعی محیط بر دایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ P با سطح استوانه‌ای دوار است؛ یعنی $A'B'C'D'$ ، لوزی است.

اگر O و O' را مرکزهای ABCD و $A'B'C'D'$ بنامیم، xy از O' و درنتیجه از O می‌گذرد؛ بعلاوه صفحه‌های $(XYA'C')$ و $(XYB'D')$ ، یعنی صفحه‌های (XYAC) و (XYBD) برهم عمودند.

بعکس، اگر XY فصل مشترک دو صفحهٔ عمود بر هم گذرنده بر AC و BD باشد، تصویر $A'B'C'D'$ از چهارضلعی ABCD روی صفحهٔ P که عمود بر XY می‌باشد، یک لوزی است، و سطح استوانه‌ای دواری که XY محور آن است، و منحنی هادی‌اش دایرهٔ محاطی این لوزی است، در ABCD محاط است.

به‌طور خلاصه، مکان هندسی محورهای XY، عبارت است از، مکان هندسی فصل مشترک دو صفحهٔ عمود بر هم رسم شده بر قطرهای AC و BD، و ما می‌دانیم که این مکان هندسی یک سطح مخروطی دوار به رأس O، و منحنی هادی دایره‌ای شکل است. هنگامی که ABCD لوزی است، مکان هندسی از دو صفحه تشکیل می‌شود که بترتیب بر قطرهای آن می‌گذرند و بر صفحهٔ این لوزی عمودند.



۳۷۳. فرض می‌کنیم XY محور یکی از سطحهای استوانه‌ای محیط بر متوازی‌الاضلاع ABCD باشد. این شکل را روی صفحهٔ P که عمود بر محور XY است، تصویر می‌کنیم. نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' تصویرهای نقطه‌های A، B، C و D به دایرهٔ مقطع سطح با صفحهٔ P تعلق دارند.

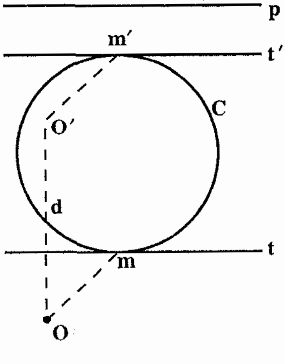
اگر نقطه‌های تصویر روی یک خط راست باشند،

در این صورت دو به دو بر هم منطبق خواهند بود و آن‌گاه، دو ضلع روبه‌روی ABCD با XY موازیند، XY موازی صفحهٔ ABCD و واقع در یکی از دو صفحه‌ای است که بر وسطهای ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی ABCD می‌گذرند و بر صفحهٔ ABCD عمودند. بعکس، هر خط XY که به این صورت ساخته شده باشد، محور یک سطح استوانه‌ای دوار است که شامل رأسهای ABCD است.

اگر نقطه‌های A'، B'، C' و D' روی یک خط راست نباشند، چهارضلعی $A'B'C'D'$ یک مستطیل محاط در دایرهٔ فصل مشترک سطح استوانه‌ای با صفحهٔ P است؛ و XY فصل مشترک صفحه‌های عمودمنصف ضلعهای $A'B'C'D'$ و درنتیجه، فصل مشترک دو صفحهٔ عمودبر هم است که یکی بر نقطه‌های E و F، وسطهای AB و CD می‌گذرد و دیگری شامل نقطه‌های G و H، وسطهای BC و DA است. بعکس، اگر XY فصل مشترک دو صفحهٔ عمودبر هم گذرنده بر EF و GH باشد، ABCD روی صفحه‌ای مانند P که عمود بر XY است، تحت مستطیل $A'B'C'D'$ تصویر می‌شود، و XY محور سطح استوانه‌ای دواری محیط بر این مستطیل و درنتیجه محیط بر ABCD است.
بنابراین، مکان هندسی XY، یک سطح مخروطی با منحنی هادی مستدیر است که رأس آن نقطهٔ O است.

اگر EF و GH عمودبر هم باشند، بدین معنی که اگر ABCD مستطیل باشد، مکان هندسی XY از دو صفحه تشکیل می‌شود که بترتیب بر EF و GH می‌گذرند و بر صفحهٔ ABCD عمودند.

۳۷۴. چون محورهای سطحهای استوانه‌ای مماس بر دو صفحهٔ موازی، از آن دو صفحه به یک فاصله‌اند، پس مکان هندسی محورهای سطهای استوانه‌ای دوار مماس بر دو صفحهٔ موازی، صفحه‌ای موازی آن دو صفحه، بین آن دو صفحه، و به یک فاصله از آن دو صفحه است.

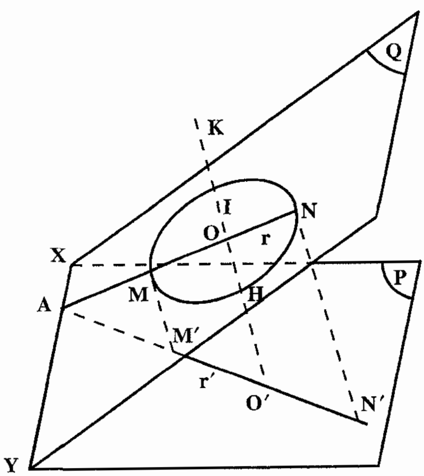


۳۷۵. صفحه‌ای مانند Q عمود بر خط D را درنظر می‌گیریم.
این صفحه، صفحهٔ P را در خطی مانند p، خط D را در نقطهٔ d، یکی از استوانه‌های دواری را که دارای شرطهای ذکر شده در مسأله است، در دایرهٔ C به شعاع r که از نقطهٔ d نیز می‌گذرد، و صفحه‌های مماس T و T' را که موازی صفحهٔ P می‌باشند، تحت مماسهای t و t' بر دایرهٔ C که با خط d نیز موازیند،

قطع می‌کند. هنگامی که دایرهٔ C حول خط d در صفحهٔ Q دوران می‌کند، مکان هندسی نقطه‌های m و m′ ، یعنی نقطه‌های تماس t و t′ با دایرهٔ C، از دو دایره به شعاعهای r تشکیل می‌شوند که مرکزهایشان نقطه‌های O و O′ ، انتهای پاره‌خطهای dO و dO′ ، مساوی با r و عمود بر p می‌باشند.

بنابراین، مکان هندسی مولدهای تماس صفحه‌های مماس T و T′ که موازی با صفحهٔ p هستند، از دو سطح استوانه‌ای دوار تشکیل می‌شود که مقطع قائم آنها دو دایرهٔ مکان هندسی نقطه‌های m و m′ می‌باشند.

۳۷۶. صفحهٔ دایرهٔ O را Q و فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q را XY می‌نامیم. یک سطح استوانه‌ای را که شامل دایرهٔ O است، مورد بررسی قرار می‌دهیم و از نقطهٔ O خطی موازی مولدهای سطح استوانه‌ای رسم می‌کنیم. این خط، صفحهٔ P را در نقطهٔ O′ قطع می‌کند. مقطع سطح استوانه‌ای که به‌وسیلهٔ صفحهٔ P ایجاد شده است، نقطهٔ O′ را به‌عنوان مرکز تقارن دارد. درواقع مولدهای MM′ و NN′ که از دو انتهای یک قطر دلخواه مانند MN از دایرهٔ O می‌گذرند، صفحهٔ P را در دو نقطهٔ M′ و N′ قطع می‌کنند که این دو نقطه نسبت به

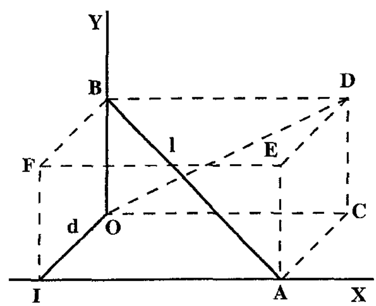


نقطهٔ O′ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین O′ مرکز دایرهٔ مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ صفحهٔ P است. اگر A نقطهٔ برخورد XY و صفحهٔ (NN′ و MM′) باشد، MN و M′N′ یکدیگر را در نقطهٔ A قطع می‌کنند. برای آن که مکان هندسی نقطهٔ M′ یک دایره باشد، باید وقتی M′N′ حول نقطهٔ O دوران می‌کند، طول پاره‌خط O′M′ ثابت باشد. اما هنگامی که MN موازی XY است، M′N′ موازی و درنتیجه مساوی MN است. از آن‌جا لازم است که $O'M' = OM$ باشد. امّا چون که $\frac{O'A}{OA} = \frac{O'M'}{OM}$ و همواره $O'A = OA$ ، هر جایی که A روی XY باشد، پس $O'M' = OM$ است. پس باید XY

به صفحهٔ R، یعنی صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط OO' تعلق داشته باشد، اینک دو نقطهٔ O و O' نسبت به صفحهٔ R قرینهٔ یکدیگرند، و صفحه‌های P و Q نسبت به این صفحهٔ R نیز قرینهٔ یکدیگرند که درنتیجه صفحهٔ نیمساز بین یکی از فرجه‌های حاصل از دو صفحهٔ P و Q است.

به‌طور خلاصه، دو امتداد OO' برای مولدها وجود دارد. این امتدادها عمود بر صفحه‌های نیمساز فرجه‌های حاصل از دو صفحهٔ P و Q می‌باشند.
اگر صفحه‌های P و Q موازی باشند، شعاع OM هر اندازه‌ای که باشد، داریم $O'M' = OM$، و در این حالت، هر سطح استوانه‌ای که شامل دایرهٔ O باشد، به‌وسیلهٔ صفحهٔ P تحت دایره‌ای مساوی دایرهٔ O قطع می‌شوند.

۳۷۷. کوتاهترین فاصلهٔ بین خطهای X و Y را $OI = d$، و $AB = l$ فرض می‌کنیم. متوازی‌السطوح به یالهای OB، OI و IA را رسم می‌کنیم.



صفحه‌های ACDE و BFED در نقطه‌های A و B بر X و Y عمودند، و ما می‌خواهیم مکان هندسی محل برخورد این دو صفحه، یعنی مکان هندسی خط DE را بیابیم.
نخست ملاحظه می‌کنیم که DE موازی OI است، پس مکان هندسی DE یک سطح استوانه‌ای دوار است. OD را محاسبه می‌کنیم. داریم:

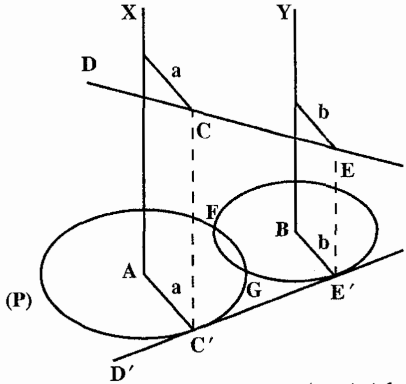
$$OD^2 = OB^2 + OC^2$$

اما:
$$OB^2 + OC^2 + OI^2 = AB^2 = l^2$$

از آن‌جا:
$$OD^2 = l^2 - d^2$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ D دایره‌ای به مرکز نقطهٔ ثابت O و به شعاع $\sqrt{l^2 - d^2}$ واقع در صفحهٔ YOC، عمودبر OI است و مکان هندسی خط DE، یک سطح استوانه‌ای دوار است که این دایره، دایرهٔ هادی آن می‌باشد.

۳۷۸. D را خطی فرض می‌کنیم که کوتاهترین فاصله‌های آن از دو خط X و Y مساوی a و b باشد.



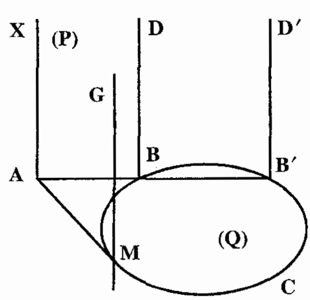
خط D را روی صفحهٔ (P) که عمود بر خطهای X و Y است، تصویر می‌کنیم. خط D′ را این تصویر، نقطه‌های A و B را نقطه‌های برخورد X و Y با صفحهٔ P، و AC′ و BE′ عمودهای رسم شده از A و B بر خط D′ می‌نامیم:

داریم AC′ = a و BE′ = b ؛ زیرا عمود مشترکهای خطهای D و X، D و Y، با صفحهٔ (P) موازی هستند.

همچنین برای این که یک خط (که غیر موازی با X و Y فرض شده)، پاسخگوی شرطهای داده شده در مسأله باشد، لازم و کافی است که تصویرش روی صفحهٔ (P) یک مماس مشترک بین دایره‌های به مرکزهای A و B، و به شعاعهای a و b باشد. بنابراین مکان هندسی خطهای D، صفحه‌های مماس مشترک سطحهای استوانه‌ای دوار به محورهای X و Y، و به شعاعهای a و b می‌باشند. اگر خط D موازی با خطهای X و Y باشد، برای این که فاصله‌هایش از این دو خط مساوی a و b باشد، لازم و کافی است که اثرش روی صفحهٔ (P) بر یکی از نقطه‌های F و G، که نقطه‌های برخورد دایره‌های A و B می‌باشد، منطبق باشد. بنابر وضع نسبی دو دایرهٔ A و B، در این حالت دو خط خواهیم داشت، یا یک خط، و یا خطی وجود نخواهد داشت.

هنگامی که تعداد صفحه‌های مماس مشترک دو سطح استوانه‌ای بسیار زیاد است، تعداد جوابها وابسته به وضع نسبی دو دایره است.

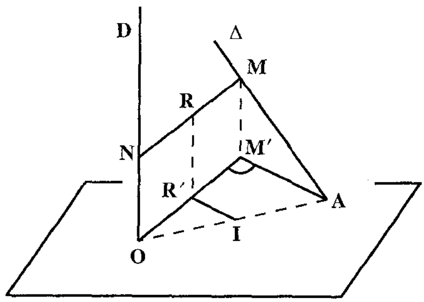
۳۷۹. خط (G) را مولد تماس یکی از صفحه‌های مماس رسم شده از نقطهٔ A بر یکی از سطوح فرض می‌کنیم. صفحهٔ (Q) را که شامل نقطهٔ A و عمود بر مولدها است، درنظر می‌گیریم؛ این صفحه سطح استوانه‌ای را تحت دایرهٔ C که از دو نقطهٔ B و B′ می‌گذرد و صفحهٔ مماس را تحت مماس AM که بر دایرهٔ C مماس می‌باشد، قطع می‌کند.



اما مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای واقع در

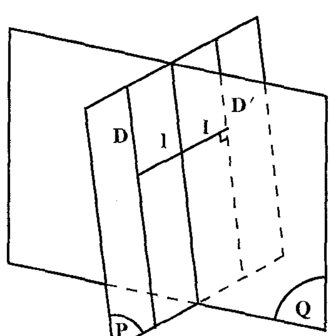
صفحهٔ (Q) است که مرکزش نقطهٔ A و شعاعش $\sqrt{AB \times AB'}$ است؛ بنابراین مکان هندسی مولد G یک سطح استوانه‌ای دوار می‌باشد که منحنی هادی آن این دایره است.

۳۸۰. ۱. فرض می‌کنیم $A\Delta$ یک خط گذرنده بر نقطهٔ A، و MN عمود مشترک بین این خط و خط D باشد. این شکل را روی صفحهٔ P که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر خط D عمود است، تصویر می‌کنیم. زاویهٔ قائمهٔ AMN که ضلع MN آن موازی صفحهٔ P است، تحت زاویهٔ قائمهٔ $AM'O$ تصویر می‌شود. بنابراین نقطهٔ M به سطح استوانه‌ای دوار S تعلق دارد که منحنی هادی آن دایرهٔ به قطر OA واقع در صفحهٔ P است بعکس، اگر M نقطه‌ای واقع بر این سطح استوانه‌ای باشد، زاویهٔ $AM'O$ قائمه است. خط MN که موازی $M'O$ است، عمود بر $A\Delta$ و D است. پس مکان هندسی نقطهٔ M، سطح استوانه‌ای دوار S است.



۲. R را نقطه‌ای از خط MN می‌گیریم. RR' را عمود بر صفحهٔ P رسم می‌کنیم. برای آن که R وسط پاره‌خط MN باشد، لازم و کافی است که R' وسط OM' باشد؛ و با وصل کردن R' به نقطهٔ I وسط OA، با توجه به این که $\widehat{IR'O} = 1$ است، با استدلال خیلی عالی، ثابت می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ R یک سطح استوانه‌ای دوار است که منحنی هادی آن دایرهٔ به قطر OI واقع در صفحهٔ P است.

۳۸۱. ۱. مکان هندسی محورها، مکان هندسی خطهایی است که موازی مولد داده شده و به فاصله‌ای مساوی R (شعاع دایرهٔ قاعده) از آن می‌باشند. پس این مکان هندسی یک سطح استوانه‌ای دوار است که مولد داده شده، محور آن و شعاعش مساوی R است.

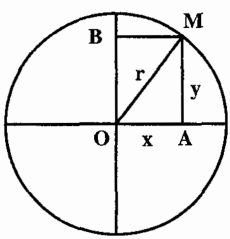


۲. محور در صفحه‌ای قرار دارد که بر مولد تماس داده شده می‌گذرد و بر صفحهٔ مماس عمود است. پس این صفحه، مکان

هندسی خواسته شده است.
۳ و ۴. با معلوم بودن یک مولد و یک نقطه، از آن نقطه، خطی موازی مولد داده شده رسم می‌کنیم، پس درواقع دو مولد از سطح استوانه‌ای دوار داده شده است.
مکان هندسی محورها در این دو حالت، مکان هندسی خطهایی است که موازی این دو خط می‌باشند و از آن دو خط به یک فاصله‌اند. بنابراین، این مکان هندسی صفحه‌ای است که بر صفحهٔ گذرنده بر این دو خط (صفحهٔ P) عمود است و بر خطی (از صفحهٔ آن دو خط) می‌گذرد که از آن دو خط به یک فاصله است.

۱۱.۲. رسم شکل

۱.۱۱.۲. تعیین نقطه



۳۸۲. مستطیل OAMB از دوران حول OA، یک استوانه ایجاد می‌کند که حجم آن مساوی است با $V = \pi y^{۲}x$ و یا :

$$V = \pi(r^{۲} - x^{۲})x$$

V درصورتی بیشترین مقدار خود را دارد که $(r^{۲} - x^{۲})^{۲}x^{۲}$ ماکزیمم باشد، اما چون مجموع دو مقدار $r^{۲} = (r^{۲} - x^{۲}) + x^{۲}$ مقدار ثابتی است، پس این حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که $\frac{x^{۲}}{۱} = \frac{r^{۲} - x^{۲}}{۲}$ باشد و از آن‌جا : $x = \frac{r\sqrt{۳}}{۳}$

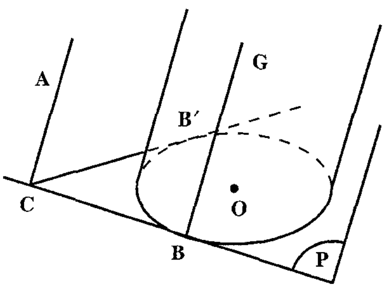
۲.۱۱.۲. رسم خط

۳۸۳. می‌دانیم که مکان هندسی وسط وترهای ایجاد شده از برخورد قاطعهای رسم شده از یک نقطه مانند P با یک سطح استوانه‌ای دوار، یک سطح استوانه‌ای دوار S، و یا بخشی از این سطح استوانه‌ای دوار می‌باشد. پس اگر نقطهٔ M وسط یکی از این وترها، روی خط D باشد، نقطهٔ M، نقطهٔ مشترک خط D و سطح استوانه‌ای دوار S است و بعکس.
بنابراین قاطعهای موردنظر مسأله، از وصل کردن نقطهٔ P به نقطه‌های برخورد خط D با

سطح استوانه‌ای دوار S به‌دست می‌آیند. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

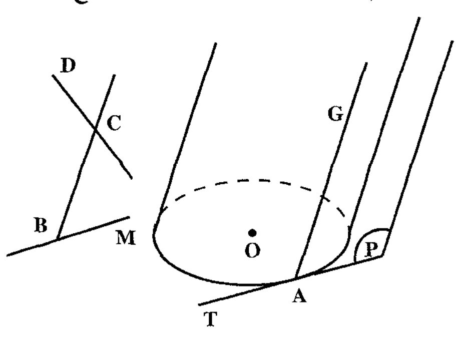
۳.۱۱.۲. رسم صفحه

۳۸۴. صفحهٔ P را که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر سطحی استوانه‌ای با منحنی هادی مستدیر O مماس است، درنظر می‌گیریم.



مولد تماس را BG می‌نامیم. این صفحه، شامل AC است که با مولد موازی است و همچنین شامل خطی مماس بر دایرهٔ هادی O است که این خط از نقطهٔ A نیز می‌گذرد.
بعکس، صفحه‌ای که بر AC، و بر یکی از دو خط مماس رسم شده از C بر دایرهٔ O می‌گذرد، بر سطح استوانه‌ای مستدیر داده شده مماس است. بنابراین برای رسم صفحه‌های خواسته شده، از نقطهٔ داده شدهٔ A، خطی موازی مولد سطح استوانه‌ای رسم می‌کنیم تا صفحهٔ هادی را در نقطهٔ C قطع کند. از C دو خط CB و CB′ را بر دایرهٔ O مماس رسم می‌کنیم. دو صفحهٔ ACB و ACB′ جواب مسأله‌اند.
بحث. اگر نقطهٔ C خارج دایرهٔ O قرار گیرد، مسأله دو جواب دارد. اگر نقطهٔ C روی دایرهٔ O واقع شود، مسأله تنها یک جواب دارد. اگر نقطهٔ C درون دایرهٔ O قرار گیرد، مسأله جواب ندارد.

۳۸۵. فرض می‌کنیم صفحهٔ P، صفحهٔ جواب مسأله، یعنی صفحه‌ای باشد که بر سطح استوانه‌ای داده شده مماس است و با خط داده شدهٔ D موازی است. مولد تماس این صفحه و سطح استوانه‌ای را AG می‌نامیم. از نقطهٔ اختیاری مانند C واقع بر خط D ، خط CB را موازی



مولد سطح استوانه‌ای رسم می‌کنیم. صفحهٔ P بنا به فرض با خط CD موازی است و با خط CB نیز موازی می‌باشد، پس با صفحهٔ DCB موازی است. درنتیجه صفحهٔ قاعدهٔ سطح استوانه‌ای، صفحه‌های P و DCB را در دو خط موازی مماس بر دایره که مماس AT و مماس BM، یعنی مماسی که از B بر دایره رسم می‌شود، قطع می‌کند.

بعکس، اگر مماس AT را بر دایرهٔ O به موازات BM رسم کنیم، صفحهٔ TAG با صفحهٔ DCB و درنتیجه با خط D موازی است. چون بر یک دایره، دو خط مماس، به موازات امتداد معین BC می‌توان رسم کرد، پس مسأله همواره دارای دو جواب است.

۴.۱۱.۲. رسم سطح استوانه‌ای

۳۸۶. سطحی استوانه‌ای درنظر می‌گیریم که مولدهای آن خطهای موازی داده شدهٔ A، B و C باشند؛ اگر این سطح استوانه‌ای را با صفحهٔ P عمود بر این خطها قطع کنیم، مقطع قائم حاصل دایره‌ای خواهد بود که بر سه نقطهٔ a، b و c که نقطه‌های برخورد این خطها با صفحهٔ P می‌باشند، می‌گذرد و این دایره، سطح استوانه‌ای را مشخص می‌کند. برای آن که این مسأله ممکن باشد، لازم و کافی است که سه نقطهٔ a، b و c روی یک خط راست نباشد، برای این منظور خطهای موازی A، B و C نباید در یک صفحه قرار داشته باشند.

۳۸۷. صفحه‌ای عمودبر سه مولد داده شده رسم می‌کنیم. مقطع حاصل یک مثلث است. دایرهٔ محیطی این مثلث را که همان دایرهٔ مقطع قائم سطح استوانه‌ای دوار است، رسم می‌کنیم و از مرکز آن، خطی موازی مولدهای داده شده رسم می‌نماییم. این خط، محور سطح استوانه‌ای دوار ساخته شده است.

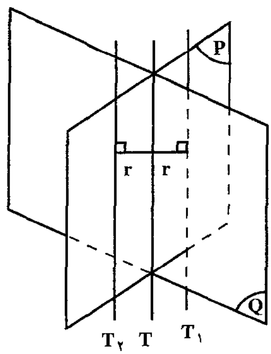
۳۸۸. سطحی استوانه‌ای دوار که خط G یک مولد آن و بر دو خط راست T و ′T مماس است، و صفحه‌ای مانند P عمودبر خط G را درنظر می‌گیریم؛ g را نقطهٔ برخورد G با صفحهٔ P، و t و ′t را تصویرهای دو خط T و ′T روی این صفحه می‌نامیم.

فصل مشترک سطح استوانه‌ای با صفحهٔ P، دایره‌ای است که از نقطهٔ g می‌گذرد و بر دو خط t و ′t مماس است. روش رسم این دایره معلوم است، و می‌دانیم که این مسأله دارای دو جواب است.

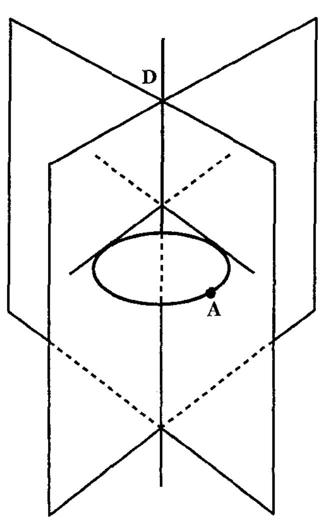
با رسم شدن دایرهٔ بالا، سطح استوانه‌ای دوار مشخص می‌شود و مسأله دارای دو جواب است.

۳۸۹. صفحه‌ای بر مولد تماس می‌گذرانیم که بر صفحهٔ مماس عمود باشد، در این صفحه دو

خط موازی مولد تماس و به فاصله‌ای مساوی شعاع قاعدهٔ داده شده از آن و در دو طرف آن رسم می‌کنیم. این دو خط محورهای دو استوانهٔ دوار جواب مسأله‌اند.
مسأله دارای دو جواب است که نسبت به صفحهٔ مماس قرینهٔ یکدیگرند.



۳۹۰. فصل مشترک دو صفحهٔ مماس، امتداد محور سطح استوانه‌ای دوار خواسته شده را مشخص می‌کند. این خط را D می‌نامیم. از نقطهٔ داده شده، که آن را A می‌نامیم، صفحه‌ای عمود بر فصل مشترک دو صفحهٔ تماس، یعنی عمود بر خط D رسم می‌کنیم. این صفحه، صفحه‌های تماس را در دو خط متقاطع Δ و Δ' قطع می‌کند. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از نقطهٔ A بگذرد و بر دو خط Δ و Δ' مماس باشد. این دایره، دایرهٔ هادی سطح استوانه‌ای دوار است و خطی که از مرکز آن موازی خط D رسم شود، محور این سطح استوانه‌ای دوار می‌باشد.

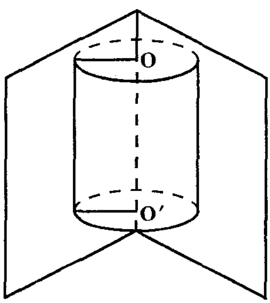


۳۹۱. دو صفحهٔ P و Q را متقاطع و فصل مشترک آنها را D می‌نامیم. خط D با محور سطح استوانه‌ای موازی است. از آن‌جا، صفحهٔ R که بر T به‌موازات خط D رسم می‌شود، بر سطح استوانه‌ای مماس است.

پس اینک موضوع عبارت است از رسم یک سطح استوانه‌ای دوار که بر سه صفحهٔ P، Q و R مماس است؛ و این رسم را می‌دانیم.

حال فرض می‌کنیم که دو صفحهٔ P و Q متوازی باشند، برای آن که سطح استوانه‌ای مماس بر T باشد، لازم و کافی است که بر صفحه‌ای مانند R گذرنده بر T مماس باشد؛ در این صورت مسأله به مسألهٔ (۱۰۸) تبدیل می‌شود. اما چون بیشمار صفحهٔ R وجود دارد که بر خط T بگذرد، پس مسأله نیز دارای بیشمار جواب است.

۳۹۲. فصل مشترک دو صفحهٔ داده شده، امتداد محور سطح استوانه‌ای را مشخص می‌کند. درضمن، این محور، فصل مشترک صفحه‌های موازی با صفحه‌های داده شده و به فاصلهٔ معلوم مساوی شعاع دایره، از این صفحه‌ها می‌باشد. (زیرا مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از یک صفحه به فاصلهٔ معلومی مانند r هستند، دو صفحهٔ موازی آن صفحه، در دو طرف آن، و به فاصلهٔ r از آن می‌باشند).



بدین‌ترتیب چهار محور و درنتیجه چهار استوانهٔ دوار جواب مسأله است.

۳۹۳. فرض می‌کنیم یک سطح استوانه‌ای دوار بر سه صفحهٔ P، Q و R مماس باشد. محور این سطح استوانه‌ای که با هر صفحهٔ مماس موازی است، با خط D موازی می‌باشد.

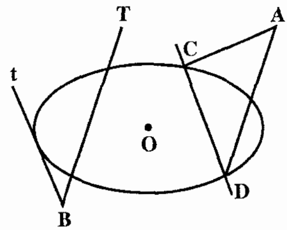
از آن‌جا اگر صفحه‌ای عمود بر خط D رسم کنیم، صفحه‌های P، Q و R را در سه خط راست p، q و r و سطح استوانه‌ای را تحت یک دایره قطع خواهد کرد.

بعکس، هر دایرهٔ مماس بر این سه خط راست، مقطع قائم یک سطح استوانه‌ای دوار مماس بر صفحه‌های P، Q و R می‌باشد.

از رسم این سطحهای دوار بلافاصله آن چه که در زیر می‌آید، نتیجه می‌شود:

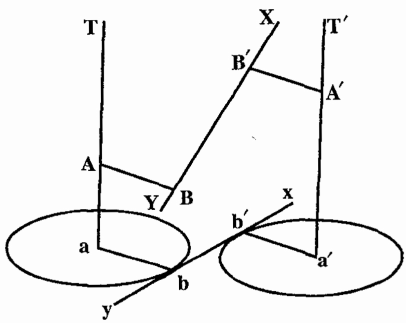
اگر خطهای p، q و r تشکیل مثلث دهند، چهار دایرهٔ مماس بر این سه خط وجود دارد؛ اگر دو تا از این خطها موازی باشند، تنها دو دایرهٔ مماس بر این سه خط وجود دارد و اگر سه خط p، q و r همرس یا موازی باشند، مسأله هیچ جوابی ندارد.

۳۹۴. برای مشخص شدن این سطح استوانه‌ای کافی است امتداد مولدهای آن را بدانیم. اگر B نقطهٔ برخورد T با صفحهٔ دایره باشد، Bt مماس بر این دایره، و صفحهٔ TBt مماس بر



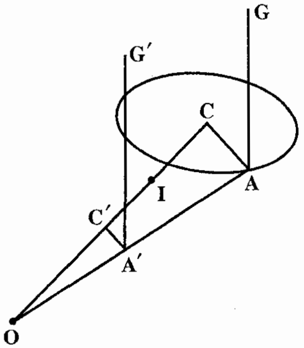
سطح استوانه‌ای است. مولدهای این سطح استوانه‌ای با این صفحهٔ مماس موازی هستند. بنابراین مولدی که از نقطهٔ A می‌گذرد، در صفحه‌ای مانند P واقع است که از نقطهٔ A موازی صفحهٔ TBt رسم می‌شود و این صفحه، صفحهٔ دایره را در خط CD قطع می‌کند.
بعکس، سطحی استوانه‌ای که منحنی‌هادیش دایرهٔ O، و شامل مولد CA است، از نقطهٔ A می‌گذرد و موازی T است ؛ زیرا صفحهٔ TBt که شامل مماس Bt و موازی با مولدهاست، بر سطح استوانه‌ای مماس است. برای آن که مسأله ممکن باشد، باید نقطهٔ B در برون دایرهٔ O و یا روی این دایره واقع باشد و همچنین خط CD اثر صفحهٔ P، دایره را قطع کند و یا بر آن مماس باشد.
اگر از نقطهٔ B دو خط مماس بر دایرهٔ O رسم شود و خط CD دایره را قطع کند، چهار جواب خواهیم داشت.

۳۹۵. خط XY را محور یکی از سطحهای استوانه‌ای دواری می‌گیریم که در شرطهای داده شده در مسأله صدق می‌کند.
خطهای AB و A′B′ را عمود بر XY رسم می‌کنیم ؛ داریم :
. $AB = A'B' = r$



بعلاوه T و T′ در نقطه‌های A و A′ بر سطح استوانه‌ای مماسند، و همچنین شعاعهای AB و A′B′ عمودبر T و T′ می‌باشند.
اینک اگر تصویر روی یک صفحهٔ عمودبر دو مماس را به‌دست آوریم، تصویر XY خط xy مماس مشترک دو دایره به شعاعهای r است که مرکزهایشان a و a′ است و نقطه‌های تماس آن با دو دایره، نقطه‌های b و b′ می‌باشند. با رسم AB و A′B′ مساوی r، موازی با ab و a′b′ و در یک جهت، محور BB′ از سطح استوانه‌ای موردنظر به‌دست می‌آید.
همواره می‌توان بر دو دایرهٔ (a) و (a′) دو مماس مشترک برونی رسم کرد. امّا در مورد مماس مشترکهای داخلی، این مماس مشترکها در صورتی وجود خواهند داشت که اگر d فاصلهٔ بین دو خط مماس T و T′ باشد، $d \geq ۲r$ باشد. بنابراین مسأله دارای چهار، سه یا دو جواب است، بنابر آن که بترتیب $d > ۲r$ ، $d = ۲r$ و یا $d < ۲r$ باشد.

۳۹۶. سطحی استوانه‌ای درنظر می‌گیریم که با منحنی هادی مستدیر C و مولد AG مشخص شده است.



مجانس این سطح استوانه‌ای را نسبت به مرکز تجانس O و نسبت تجانس k به‌دست می‌آوریم. اگر C' و A' بترتیب مجانسهای C و A باشند، $C'A'$ موازی CA و $k = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$ است، و درنتیجه داریم: $\overline{C'A'} = k\overline{CA}$.

مجانس دایرهٔ C نیز دایرهٔ به مرکز C' و به شعاع k.CA و واقع در صفحه‌ای موازی صفحهٔ دایرهٔ C است. بعلاوه مجانس هر مولد دلخواه مانند AG، خط راستی موازی آن مانند $A'G'$ است. درنتیجه مجانس یک سطح استوانه‌ای، یک سطح استوانه‌ای مستدیر است که منحنی هادیش در صفحه‌ای موازی صفحهٔ منحنی هادیش داده شده و مولدهایش موازی مولدهای سطح استوانه‌ای داده شده می‌باشند.

بعکس، هر دو سطح استوانه‌ای S و S' که دارای منحنیهای هادی موازی واقع در دو صفحهٔ متوازی‌اند و مولدهایشان نیز با هم موازی می‌باشند، به صورتهای مختلف مجانس یکدیگرند.

منحنیهای هادی به مرکزهای C و C' و به شعاعهای r و r' را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های O و I را روی خط المرکزین CC' چنان اختیار می‌کنیم که:

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{-\overline{IC'}}{\overline{IC}} = \frac{r'}{r}$$

باشد. مجانس S نسبت به مرکز تجانس O یا I و نسبت تجانس $\dfrac{r'}{r}$ یا $\dfrac{-r'}{r}$ یک سطح استوانه‌ای مانند S_1 متجانس S است. S_1 و S' بر هم منطبق می‌باشند؛ زیرا مولدهایشان برهم منطبقند. بنابراین سطحهای S و S' نسبت به نقطه‌های O و I مجانس یکدیگرند (اگر $r = r'$ باشد، بسادگی دیده می‌شود که یکی از این دو تجانس به یک انتقال تبدیل می‌شود).

اگر برای منحنیهای هادی C و C' دو مقطع موازی دلخواه دیگر درنظر بگیریم، با استدلالی شبیه استدلال بالا، دو مرکز تجانس دیگر مانند O' و I' برای دو سطح استوانه‌ای

به‌دست می‌آید. OO' و II' به‌طور قطع موازی با مولدها می‌باشند و همچنین می‌توان دید که دو سطح S و S' نسبت هر نقطه‌ای از خطهایی که از O و I به موازات مولدهایشان رسم می‌شوند، مجانس یکدیگرند.

۵.۱۱.۲. رسم استوانه

۳۹۷. محور این استوانه خطی است که این چهار نقطه از آن به یک فاصله‌اند و این فاصلهٔ مساوی، شعاع قاعدهٔ استوانهٔ دوار است. برای تعیین این محور، کافی است دو نقطه از آن را به‌دست آوریم.

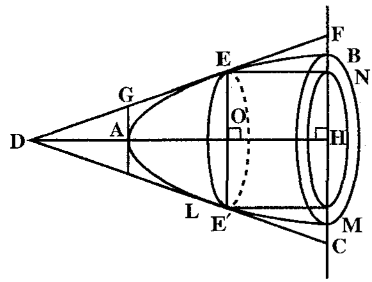
۳۹۸. محور این استوانه خطی است که سه نقطهٔ A، B و C از آن به یک فاصله‌اند و با خط داده شده موازی است. بنابراین چون امتداد آن معلوم است، پس کافی است یک نقطه از آن را مشخص کنیم.

۳۹۹. درواقع، سه صفحهٔ گفته شده، وجه‌های جانبی یک منشور مثلث‌القاعده‌اند که تا بینهایت ادامه یافته‌اند.
اگر شکل حاصل از سه صفحهٔ داده شده را با صفحه‌ای عمود بر فصل مشترکهای این صفحه‌ها قطع کنیم، مقطع یک مثلث است که ضلعهای آن به‌طور نامحدود ادامه یافته است.
اما می‌دانیم که چهار دایره وجود دارد که بر ضلعها یا امتداد ضلعهای یک مثلث مماس می‌باشند (یک دایرهٔ محاطی درونی و سه دایرهٔ محاطی برونی). این دایره‌ها، منحنی هادی استوانه‌های جواب مسأله‌اند، مولدهای این استوانه‌ها موازی فصل مشترکهای صفحه‌های دوبه‌دو متقاطع است.

۴۰۰. درواقع، دو قاعدهٔ منشور دارای دایره‌های محاطی و محیطی مساوی هستند که صفحه‌های آنها با هم موازیند، و یک خط راست می‌تواند عمود بر دو قاعدهٔ منشور چنان حرکت کند که بر دایره‌های محاطی متکی باشد، که این خط، استوانهٔ محاط در منشور را به‌وجود می‌آورد. همچنین خطی وجود دارد که بر صفحه‌های دو قاعده عمود است و بر دایره‌های محیطی قاعده‌ها متکی است که این خط، استوانهٔ محیطی منشور را به‌وجود می‌آورد.

۴۰۱. مماس DEF را چنان باید رسم کنیم که $DE = ۲EF$ باشد. برای این منظور، کافی است ارتفاع AH را به دو قسمت برابر تقسیم کنیم؛ زیرا $AD = AO$ خواهد بود، زیرا تحت مماس به‌وسیلهٔ خط مماس در رأس، به دو قسمت متساوی تقسیم می‌شود. پس قاعدهٔ

استوانهٔ به حجم ماکزیمم، به یک فاصله از رأس A و از قاعدهٔ BC از سهموی ناقص قرار دارد. فرض می‌کنیم $AH = a$ و $BH = b$ باشد. در این صورت: حجم سهموی برابر $\frac{\pi ab^۲}{۲}$ است با.



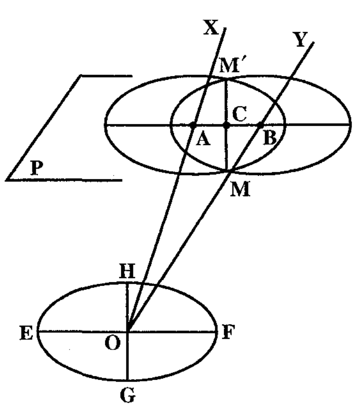
مساحت قاعدهٔ استوانه $\pi OE^۲$، امّا: $OH = \frac{a}{۲}$ و $OE^۲ = \frac{۱}{۲}HB^۲$ است. بنابراین:

$$\frac{\pi ab^۲}{۴} = \text{حجم استوانه}$$

حجم استوانه، نصف حجم سهموی داده شده است.

۱۲.۲. برش، مقطع

۴۰۲. دو سطح استوانه‌ای در نظر می گیریم که هادی مشترکشان دایرهٔ O باشد و مولدهایشان با Ox و Oy موازی باشند.



این دو سطح استوانه‌ای را با صفحه‌ای موازی صفحهٔ دایرهٔ O قطع می کنیم. مقطع های حاصل دو دایرهٔ مساوی به مرکزهای A و B واقع بر Ox و Oy می‌باشند. این دو دایره در دو نقطهٔ M و M′ یکدیگر را قطع می کنند که نقطه‌های مشترک دو سطح استوانه‌ای هستند. MM′ از نقطهٔ C وسط AB می‌گذرد و بر AB عمود است. اما وقتی صفحهٔ P به موازات خود جابه‌جا می‌شود، نقطهٔ C خطی را می‌پیماید که از نقطهٔ O می‌گذرد، MM′ موازی خط ثابتی باقی می‌ماند؛ زیرا خط MM′ در صفحه‌ای جابه‌جا می‌شود که حاوی قطر GH (از دایرهٔ O) عمود بر EF تصویر قائم صفحهٔ xOy روی صفحهٔ دایرهٔ O (دایرهٔ هادی) است.

۴۰۳. گزینهٔ (د) درست است.

۴۰۵. شعاع دایرهٔ مقطع صفحه با استوانه برابر ۴ است (دو دایره همنهشتند). یعنی مساحت این دایره ۱۶π است اما مساحت مقطع با مخروط برابر ۴π است ؛ زیرا نسبت شعاعهای دایرهٔ مقطع با مخروط برابر $۲ = \frac{۴}{۲}$ است. بنابراین سطح مورد نظر مساوی است با $۱۶\pi - ۴\pi = ۱۲\pi$.

۴۰۶. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۰۷. سطح مقطع لوله $\pi R^۲$ است. پس :

$$\frac{\text{لولهٔ بزرگ}}{\text{لولهٔ کوچک}} = \frac{۶^۲}{۱^۲} = ۳۶$$

ظرفیت انتقال در لولهٔ بزرگ ۳۶ برابر لوله‌های کوچک است.

۴۰۸. حجم دو ظرف را محاسبه می‌کنیم.

$h =$ ارتفاع و $R =$ شعاع قاعده : ظرف اول

$۲h =$ ارتفاع و $\frac{R}{۲} =$ شعاع قاعده : ظرف دوم

$= V_۱ = \pi R^۲ h$ حجم ظرف اول

$= V_۲ = \pi(\frac{R}{۲})^۲(۲h) = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ h$ حجم ظرف دوم

بدیهی است $V_۱ = ۲V_۲$ است، امّا $۲۳ \times ۲ > ۴۳$. بنابراین ظرف کوتاهتر را می‌خریم.

۴۰۹. داریم :

S دایره $= S$ مربع و $S = \pi r^۲$ دایره و $S = a^۲$ مربع

$$\Rightarrow a^۲ = \pi r^۲ \Rightarrow r^۲ = \frac{a^۲}{\pi} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$

۴۱۰. داریم : $h = R$ ، بنابراین :

$S = ۲\pi R^۲$ دو قاعده و $S = ۲\pi R^۲$ جانبی

$S = ۴\pi R^۲ = ۲ \times ۲\pi R^۲$ کل

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = 2\times S_{\text{جانبی}}$$

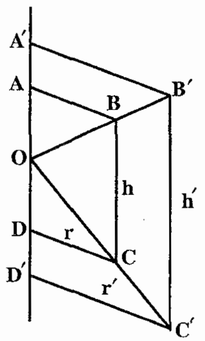
از طرف دیگر $V=\pi R^3$ و $S_{\text{کل}}=4\pi R^2$ است.

بنابراین بنا به فرض داریم :

$$\pi R^3 = 12\pi R^2 \Rightarrow R=12$$

$$\Rightarrow V=1728\pi \text{ و } S_{\text{یک قاعده}}=144\pi \text{ و}$$

$$S_{\text{کل}}=576\pi \text{ و } S_{\text{جانبی}}=288\pi$$



۴۱۱. ۱. یادآوری می‌کنیم که دو شکل را متشابه می‌گوییم، درصورتی که یکی از آنها با یکی از مجانسهای شکل دیگر مساوی (همنهشت) باشد. استوانه‌ای را در نظر می‌گیریم که از دوران مستطیل ABCD حول AD ایجاد شده باشد. یک مجانس این استوانه را نسبت به مرکز تجانس نقطهٔ O، وسط پاره‌خط AD به‌دست می‌آوریم. (اگر k نسبت تجانس باشد، مجانس ABCD، مستطیل $A'B'C'D'$ است) داریم :

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OD'}{OD}=k$$

هنگامی که ABCD حول AD دوران می‌کند، $A'B'C'D'$ حول $A'D'$ دوران می‌کند و استوانه‌ای دوار به وجود می‌آورد، و داریم :

$$\frac{D'C'}{DC}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

بعکس، اگر دو استوانهٔ دوار در نظر بگیریم که برای آنها رابطهٔ :

$$\frac{r'}{r}=\frac{h'}{h}=k \qquad (1)$$

برقرار باشد، می‌توان آنها را طوری جابه‌جا کرد که وسط ارتفاعشان نقطهٔ O باشد و ارتفاعها هم امتداد باشند. اینک اگر این استوانه‌ها را با صفحهٔ دلخواه نصف‌النهاری قطع کنیم، با توجه به رابطهٔ (۱)، دو مستطیل متشابه خواهیم داشت.

۲. اگر S، S'، V و V' ، سطحها و حجمهای این دو استوانه باشند، داریم :

$$\frac{S'}{S}=\frac{2\pi r'(r'+h')}{2\pi r(r+h)}=\frac{r'}{r}\times\frac{r'+h'}{r+h}=k^2 \text{ و}$$

$$\frac{V'}{V}=\frac{\pi r'^{۲}h'}{\pi r^{۲}h}=\frac{r'^{۲}}{r^{۲}}\times\frac{h'}{h}=k^{۲}\times k=k^{۳}$$

۴۱۲. با فرض $R=۲$، $h=۱$، $R'=۱$ و $h'=۲$، داریم:

الف.
$$S_{۱}=۲\pi Rh=۲\pi\times۲\times۱=۴\pi$$
$$S_{۲}=۲\pi R'h'=۲\pi\times۱\times۲=۴\pi$$
$$\Rightarrow S_{۱}=S_{۲}$$

ب.
$$V_{۱}=\pi R^{۲}h=\pi(۲)^{۲}\times۱=۴\pi$$
$$V_{۲}=\pi R'^{۲}h'=\pi(۱)^{۲}\times۲=۲\pi$$
$$\Rightarrow V_{۱}>V_{۲} \text{ و } V_{۱}=۲V_{۲}$$

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۳. مکعب $ABCDA_{۱}B_{۱}C_{۱}D_{۱}$ را به یال $۲R$ در نظر می‌گیریم. محورهای استوانه‌های مفروض را روی $AA_{۱}$، DC و $B_{۱}C_{۱}$ قرار دهید.

(a) مرکز مکعب به فاصلهٔ $R\sqrt{۲}$ از تمام یالهای مکعب قرار دارد. هر نقطه در فضا، به فاصلهٔ بیش از $R\sqrt{۲}$ لااقل یکی از یالهای $AA_{۱}$، DC، $B_{۱}C_{۱}$ قرار دارد و این از آنجا نتیجه می‌شود که استوانه‌های به محورهای $AA_{۱}$، DC و $B_{۱}C_{۱}$ و به شعاع $R\sqrt{۲}$ تنها یک نقطهٔ مشترک دارند که مرکز مکعب است. درنتیجه، شعاع کوچکترین کره که بر همهٔ سه استوانه بر روی خط مماس باشد، برابر $R(\sqrt{۲}-۱)$ می‌شود.

(b) اگر K، L و M بترتیب وسطهای یالهای $AA_{۱}$، DC و $B_{۱}C_{۱}$ باشند، آن‌گاه خطی که از مرکز مکعب می‌گذرد و بر صفحهٔ KLM عمود است، به فاصلهٔ $R\sqrt{۲}$ از $AA_{۱}$، DC و $B_{۱}B$ قرار خواهد داشت. KLM مثلث متساوی‌الاضلاع است و مرکز آن بر مرکز مکعب منطبق است. بنابراین نتیجه می‌شود که هر خط راست که صفحهٔ KLM را قطع کند، لااقل از یکی از رأسهای مثلث KLM به فاصلهٔ نابیشتر از شعاع دایرهٔ محیطی آن که برابر با $R\sqrt{۲}$ است، قرارمی‌گیرد. پس شعاع بزرگترین استوانه، که بر سه استوانهٔ مفروض مماس می‌شود و در شرطهای مسأله صدق می‌کند، برابر است با: $R(\sqrt{۲}-۱)$.

۴۱۴. ۱. فرض می‌کنیم h ارتفاع و R شعاع قاعدهٔ استوانه، و نقطهٔ G مرکز ثقل نیمدایرهٔ نوار

باریک ایجاد شده (l'onglet) باشد.

حجم یک استوانهٔ ناقص از ضرب‌کردن مقطع قائم در پاره‌خط رسم شده از G به موازات مولد استوانه، به‌دست می‌آید. امّا فاصلهٔ نقطهٔ G از نقطهٔ O مرکز نیمدایره برابر است با $OG = \frac{۴R}{۳\pi}$.

بنابراین پاره‌خط موازی رسم‌شده از G برابر است با: $GG' = \frac{۴h}{۳\pi}$، و از آن‌جا داریم:

$$V = \frac{\pi R^۲}{۲} \times \frac{۴h}{۳\pi} \Rightarrow V = \frac{۴R^۲h}{۶} = \frac{۲R^۲h}{۳}$$

بنابراین می‌توان گفت حجم نوار باریک مساوی $\frac{۱}{۶}$ حجم منشور است که مساوی $۴R^۲h$ است.

۲. مسأله را می‌توان با استفاده از مقایسهٔ مقطعها حل کرد.

۴۱۵. ۱. شعاع دایرهٔ محاطی مربع قاعده برابر $R = \frac{۱۰}{۲} = ۵$ است. بنابراین داریم:

$$\text{جانبی استوانه } S = ۲\pi Rh = ۲\pi \times ۵ \times ۱۶ = ۱۶۰\pi \text{ و}$$

$$\text{یک قاعده } S = \pi R^۲ = ۲۵\pi$$

$$\Rightarrow \text{کل استوانه } S = \text{جانبی } S + \text{دو قاعده } S = ۱۶۰\pi + ۵۰\pi = ۲۱۰\pi$$

$$\text{حجم استوانه } = V = \pi R^۲h = \pi(۵)^۲ \times ۱۶ = ۴۰۰\pi$$

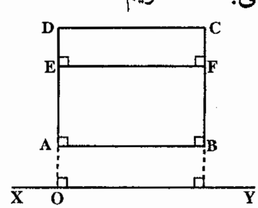
۲. حجم مورد نظر برابر است با:

$$\text{حجم مکعب‌مستطیل} = \text{حجم استوانه} = ۱۰\times۱۰\times۱۶ - ۴۰۰\pi - ۱۶۰۰ - ۴۰۰\pi$$

۴۱۶. ۱. ملاحظه می‌کنیم که دو حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ ABFE و EFCD دو حلقهٔ استوانه‌ای می‌باشد، داریم:

$$\frac{\pi(OE^۲ - OA^۲) \times AB}{\pi(OD^۲ - OE^۲) \times AB} = k \text{ و}$$

$$\frac{x^۲ - a^۲}{d^۲ - x^۲} = k \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^۲ + kd^۲}{۱ + k}}$$



برای به‌دست‌آمدن مقدار بالا باید $a < x < d$ باشد و یا داشته باشیم:

$$a^{۲} < \frac{a^{۲}+kd^{۲}}{۱+k} < d^{۲}$$

اما این نامساوی هم‌ارز نامساوی $a^{۲} < d^{۲}$ است که همواره برقرار است. بنابراین مسأله همواره یک جواب دارد.

سطح به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ محیط هریک از این مستطیلها برابر مجموع دو سطح و سطح جانبی دو استوانه است و داریم:

$$۲\pi(OE^{۲}-OA^{۲})+۲\pi(OE+OA)\times AB$$
$$=۲\pi(OD^{۲}-OE^{۲})+۲\pi(OE+OD)\times AB$$

یا:
$$x^{۲}-a^{۲}+(x+a)h=d^{۲}-x^{۲}+(x+d)h$$

از این رابطه x را محاسبه می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$x=\sqrt{\frac{(d-a)h+a^{۲}+d^{۲}}{۲}}$$

شرط امکان مسأله آن است که، $a<x<d$ یا:

$$۲a^{۲}<(d-a)h+a^{۲}+d^{۲}<۲d^{۲}$$

نامساوی اولی برقرار است؛ زیرا $d>a$، و از نامساوی دومی نتیجه می‌شود:

$$h<d+a$$

۴۱۷. ۱ و ۲، در حالت اول، دوران یک نیمدایره است. مولدها در یک نقطه همرس می‌شوند و جسم دوار از دو مخروط مساوی متقابل به رأس تشکیل می‌شود؛ پس باید ارتفاع کل را محاسبه کنیم؛ امّا این ارتفاع مساوی $\sqrt{g^{۲}-۴r^{۲}}$ است. بنابراین:

$$V=\frac{\pi r^{۲}}{۳}\sqrt{g^{۲}-۴r^{۲}}$$

در حالت دوم، جسم دوار از یک هذلولوی یکپارچه تشکیل می‌شود که مساحت دایرهٔ دهانهٔ آن مساوی $\pi d^{۲}$ است. ارتفاع این هذلولوی یکپارچه برابر است با:

$$\text{ارتفاع}=\sqrt{g^{۲}-۴(r^{۲}-d^{۲})}$$

اما حجم هذلولوی یکپارچه، معادل حجم استوانه‌ای با همین ارتفاع است که قاعده‌اش مساوی مجموع $\frac{۲}{۳}$ مساحت دایرهٔ دهانه و $\frac{۱}{۳}$ دایرهٔ محدود به قطعهٔ هذلولی شکل

است.

بنابراین داریم:

$$V = \pi\sqrt{g^{۲} - ۴(r^{۲} - d^{۲})} \times \frac{۲d^{۲} + r^{۲}}{۳}$$

۴۱۸. الف. داریم:

$$V_{۱} = \pi R^{۲}h = \pi(۳)^{۲} \times ۵ = ۴۵\pi$$
$$V_{۲} = \pi R^{۲}h = \pi(۵)^{۲} \times ۳ = ۷۵\pi$$

۴۱۹. ۱. P و Q را دو صفحه می‌گیریم که در خط راست AB متقاطعند. اگر یک سطح استوانه‌ای دوار مماس بر این صفحه‌ها باشد، دو مولد تماس که موازی هم می‌باشند، با خط AB نیز موازی‌اند؛ از آن‌جا، محور xy سطح استوانه‌ای دوار با AB موازی است. بعلاوه هر نقطهٔ این محور از صفحه‌های P و Q به یک فاصله است. بنابراین این محور، خطی موازی AB است، که در یکی از دو صفحهٔ نیمساز فرجه‌های حاصل از دو صفحهٔ P و Q قرار دارد.

بعکس، اگر خطی مانند xy موازی خط AB در یکی از این دو صفحهٔ نیمساز در نظر بگیریم، سطح استوانه‌ای دوار به محور xy که شعاعش r، فاصلهٔ مشترک خط xy از صفحه‌های P و Q است، بر این صفحه‌ها مماس است. از آن‌جا، مکان هندسی این محور xy، صفحه‌های نیمساز بین فرجه‌های حاصل از صفحه‌های P و Q است. اگر دو صفحهٔ P و Q متوازی باشند، مکان هندسی محور، صفحه‌ای موازی با دو صفحهٔ P و Q و به یک فاصله از آنهاست.

۲. یک سطح استوانه‌ای دوار را که از نقطهٔ داده شدهٔ C گذشته است و بر دو صفحهٔ P و Q مماس می‌باشد، در نظر می‌گیریم.

R را صفحه‌ای می‌گیریم که بر نقطهٔ C گذشته و بر خط AB عمود است؛ این صفحه، صفحه‌های P و Q را در خطهای OD و OE، و سطح استوانه‌ای را در دایره‌ای که بر نقطهٔ C می‌گذرد و بر دو خط OD و OE مماس است، قطع می‌کند. روش رسم این دایره را می‌دانیم. با رسم شدن این دایره، سطح استوانه‌ای مشخص است.

این مسأله همواره ممکن است و دو جواب دارد، مگر در حالتی که نقطهٔ C روی یکی از دو صفحهٔ P و Q باشد که در این صورت یک جواب خواهد داشت.

۴۲۰. ۱. نقطهٔ مفروض A و خط داده شدهٔ D را در نظر می‌گیریم. خط مماس T که از نقطهٔ A مماس بر سطح استوانه‌ای رسم شده است، و یا با خط داده شدهٔ D موازی است، در

صفحه‌ای قرار دارد که از نقطهٔ A بر سطح استوانه‌ای مماس رسم شده است و یا درصفحه‌ای است که مماس بر سطح استوانه‌ای است و با خط D موازی می‌باشد؛ و بعکس، تمام خطهایی از چنین صفحه‌ای که از نقطهٔ A مماس یا موازی D، بر سطح استوانه‌ای رسم شده است، بر سطح استوانه‌ای مماس می‌باشند. از آن‌جا، مکان هندسی مماس T از دو صفحهٔ مماس تشکیل می‌شود که از نقطهٔ A مماس بر سطح استوانه‌ای رسم می‌شود و یا با خط D موازی است.

۲. از آن چه در بالا گفته شد، نتیجه می‌شود که خطهای مورد نظر، فصل مشترکهای هریک از صفحه‌های مماس به یکی از سطحهای استوانه‌ای با هریک از صفحه‌های مماس به دیگری که از نقطهٔ A رسم شده و یا با خط D موازی است.

۴۲۱. الف. ۱۷۷۶π واحد حجم

ب. ۴۴۷۶π واحد حجم

پ. چون دو قاعده همنهشت هستند، پس مساحت هر قاعده برابر است با:

$$۲۸۸\pi : ۲ = ۱۴۴\pi = \pi R^۲$$

از آن‌جا:

$$V = \pi R^۲ h \Rightarrow V = ۱۴۴\pi \times ۱۲ = ۱۷۲۸\pi$$

۴۲۲. الف. $$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۴h + ۸\pi}{۲h + ۲\pi} = \frac{۲h + ۴\pi}{h + \pi}$$

ب. $$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\pi R^۲ h}{\pi R'^۲ h} = \frac{۴\pi h}{\pi h} = ۴$$

پ. $$V = V_۱ - V_۲ = ۴\pi h - \pi h = ۳\pi h$$

۴۲۳. ۱. ۵ و ۴π یعنی ارتفاع و محیط قاعدهٔ استوانه

۲. $S = ۵ \times ۴\pi = ۲۰\pi$ مستطیل

۳. مساحت این مستطیل همان مساحت جانبی استوانه است.

۴. محیط قاعده × ارتفاع = مساحت جانبی استوانه

۵. $S = ۲\pi rh$ جانبی

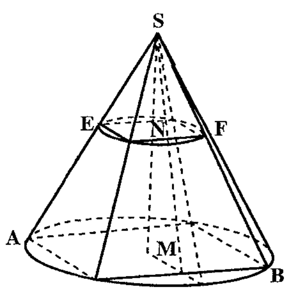
۶. مساحت هر دایره برابر است با: $\pi R^۲ = ۴\pi$

۷. $S = ۲۰\pi + ۸\pi = ۲۸\pi$ دو قاعده S + جانبی S = کل S

۸. $S = ۲\pi Rh + ۲\pi R^۲$ کل

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳
مخروط

۱.۳. تعریف و قضیه



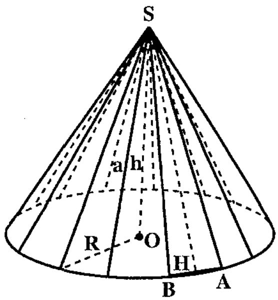
۴۲۴. در یکی از دو مقطع به‌وجود آمده، چندضلعی (AB) را محاط نموده (شکل)، از رأسهای چندضلعی خطهایی به نقطهٔ S وصل می‌نماییم. این خطها محیط مقطع دیگر را قطع نموده، چندضلعی دیگری مانند (EF) به وجود می‌آورند که در مقطع دوم محاط است. واضح است که چندضلعی (AB) قاعدهٔ هرمی است که رأس آن نقطهٔ S می‌باشد و چندضلعی (EF) مقطع این هرم به‌وسیلهٔ صفحه‌ای موازی با صفحهٔ قاعده است و بنابراین با چندضلعی قاعدهٔ هرم متشابه می‌باشد.

حال اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی قاعده را بینهایت زیاد کنیم، مقطعهای هرم به سمت مقطعهای مخروط میل می‌نمایند و چون در هر حال این مقطعها متشابهند، در حد نیز متشابه خواهند بود.

تبصره. سایر ویژگیهای مقطعهای هرم در مورد مقطعهای مخروط نیز برقرار است.

۴۲۵. استدلال عیناً مثل حالت استوانه است.

۴۲۶. چون هرم منتظمی در مخروط دوار محاط کنیم، سطح جانبی هرم، وقتی عدهٔ ضلعهای قاعده بینهایت زیاد شود، به سمت سطح جانبی مخروط دوار میل می‌کند (شکل). پس می‌توان دستور سطح جانبی هرم منتظم را در مورد مخروط دوار به‌کار برد و این نکته را



در نظر داشت که سهم هرم منتظم یعنی عمود SH که از رأس بر یکی از ضلعهای قاعده مانند AB فرود آید، وقتی عدهٔ ضلعها بینهایت زیاد شود، به سمت مولد SA از مخروط میل می‌نماید.

پس :

نصف مولد × محیط قاعده = سطح جانبی مخروط

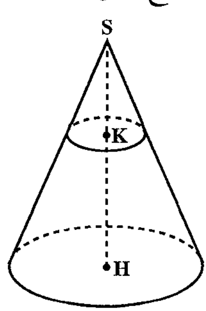
پس :

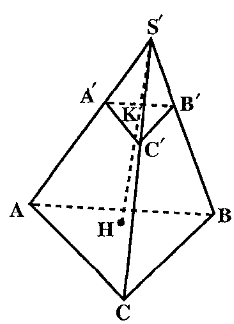
$$S = ۲\pi R \times \frac{l}{۲} = PRl$$

۴۲۷. حجم مخروط دوار. در مخروط هم مانند هرم می‌توان ثابت کرد که هرگاه صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط را قطع کند، نسبت مساحت مقطع به مساحت قاعده، برابر است با نسبت مربع فاصلهٔ رأس مخروط از مقطع، به مربع فاصلهٔ رأس مخروط از قاعده. بنابراین با پذیرفتن اصل کاوالیری برای مخروطها، می‌توان حجم مخروط را چنین تعیین کرد : هرمی در نظر می‌گیریم که مساحت قاعده‌اش با مساحت قاعدهٔ مخروط و همچنین ارتفاعش با ارتفاع مخروط برابر باشد. آن‌گاه اگر قاعده‌های آنها در یک صفحهٔ P و رأسهایشان در یک طرف P باشند، هر صفحه‌ای که آنها را قطع کند، مقطعهای با مساحتهای برابر ایجاد می‌کند و بنا به اصل کاوالیری این دو جسم حجمهای برابر دارند و درنتیجه حجم مخروط هم برابر با مساحت قاعده ضرب در یک سوم ارتفاع است (شکل پ).

یعنی اگر R شعاع قاعدهٔ مخروط دوار و h ارتفاع مخروط و V حجم آن باشد :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$$





حجم مخروط مستدیر نیز از همین دستور به‌دست می‌آید.

۴۲۸. اثبات به کمک حد مساحتهای جانبی هرمهای منتظم محاطی و محیطی، وقتی که تعداد

ضلعهایشان به سمت بینهایت میل کنند، انجام می‌شود.
سطح کل مخروط ناقص، برابر است با مجموع مساحت جانبی آن به‌اضافهٔ مساحتهای دو قاعدهٔ آن. یعنی با فرض قبلی داریم:

$$\text{کل } S = \pi(R+R')l + \pi(R^2 + R'^2)$$

۴۲۹. اثبات به کمک محاسبهٔ حد حجمهای هرمهای منتظم محاطی و محیطی مخروط ناقص، وقتی عدهٔ ضلعها بینهایت زیاد شوند، انجام می‌شود.

۲.۳. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۳. خط

۱.۱.۲.۳. خط مولد است

۴۳۰. فرض می‌کنیم خطی با سطح جانبی استوانه در سه نقطهٔ A، B و C مشترک باشد. استوانه را روی صفحهٔ عمود بر مولد آن تصویر می‌کنیم. درنتیجه سطح جانبی به‌صورت دایره تصویر خواهد شد. چنانچه آن خط با مولد استوانه موازی نباشد، به‌صورت خط تصویر می‌شود که باید محیط دایره را در بیش از دو نقطه قطع کند و این ممکن نیست. اگر آن خط موازی مولد استوانه باشد، در این صورت تصویر آن فقط یک نقطه خواهد شد که روی محیط دایره قرار خواهد گرفت؛ یعنی خط بر مولد استوانه منطبق است.
قسمت دوم مسأله (مخروط) نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۲.۲.۳. صفحه

۱.۲.۲.۳. صفحه‌ها از یک نقطه می‌گذرند

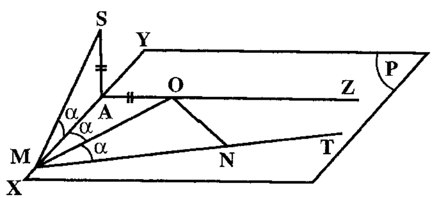
۴۳۱. مخروطی به رأس S را در نظر می‌گیریم که قاعدهٔ آن یک دایره است. بر این دایره و نقطهٔ S یک کره می‌گذرد. زیرا بر سه نقطه از دایره و نقطهٔ S، یک کره و تنها یک کره می‌گذرد. مرکز این کره را I می‌نامیم.
در این صورت، اگر SA یک مولد دلخواه از مخروط باشد، صفحهٔ عمودمنصف SA از I می‌گذرد؛ بنابراین صفحه‌ای که در نقطهٔ A برSA عمود می‌شود، موازی این

صفحهٔ عمودمنصف است و خط SI را در نقطهٔ P، به قسمی قطع می کند که $SP = 2SI$ است. بنابراین، نقطهٔ P، نقطهٔ ثابتی است.

۲.۲.۲.۳. صفحه مماس بر سطح مخروطی است

۴۳۲. در نیمصفحهٔ P، Az را عمود بر xy رسم می‌کنیم و روی این خط، $AO = AS$ را جدا می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AO و MAS همنهشتند و $A\hat{M}O = A\hat{M}S$ است. بنابراین MO نیمساز زاویهٔ AMT است و از آن نتیجه می‌شود که اگر ON عمود بر MT باشد، خواهیم داشت:

$$ON = OA = AS$$



بنابراین خطMT بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA مماس باقی می‌ماند. درنتیجه، صفحهٔ SMT بر سطح مخروطی که این دایره، دایرهٔ هادی آن است و رأسش S می‌باشد، مماس باقی می‌ماند.

۳.۳. زاویه

۱.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۴۳۳. هر مقطعی، با شرط مسأله، یک مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می کند که ساقهای جانبی آن، برابر با مولد مخروط است. بنابراین، بیشترین مساحت، از آن مقطعی خواهد بود که، بیشترین مقدار سینوس زاویهٔ رأس را داشته باشد. اگر زاویهٔ رأس مقطع محوری مخروط حاده باشد، در آن صورت مقطع محوری بیشترین مساحت را دارا خواهد بود، و اگر این زاویه منفرجه باشد، در آن صورت بیشترین مساحت از آن مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود:

جواب : $\frac{5\pi}{6}$

۴۳۴. مولد مخروط را l و شعاع قاعدهٔ آن را r می‌گیریم، با توجه به فرض مسأله داریم :

$\pi rl = 2\pi r^2 \Rightarrow l = 2r$

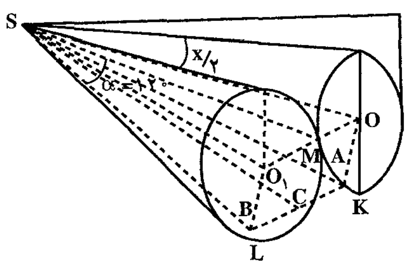
یعنی مقطع مخروط با صفحه‌ای که از ارتفاع آن می‌گذرد، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. پس از گسترش مخروط قطاعی از دایره به دست می‌آید که شعاع آن l و طول قوس آن $2\pi r$ است. اگر زاویهٔ قطاع را α بگیریم، داریم :

$$\frac{\pi l\alpha}{180^\circ} = 2\pi r \Rightarrow \alpha = \frac{2r \times 180^\circ}{l} = 180^\circ$$

۴۳۵. جواب : ۶۰ درجه

۴۳۶. $\pi - 2\operatorname{Arc}\cos\frac{5 \pm 2\sqrt{3}}{13}$

۴۳۷. جواب : ۹۰ درجه



۴۳۸. تصویری که در شکل داده شده است، با جواب متن مسأله، کاملاً تطبیق نمی‌کند. ولی این «تحریف» به ما امکان می‌دهد تا به رابطه‌های لازم برای جواب، بهتر توجه کنیم. SO و SO_1 را ارتفاعهای دو مخروط مجاور، SK و SL را مولدهای آنها (که مخروطها روی آنها بر صفحه مماسند) و A و B را تصویرهای O و O_1 (مرکزهای قاعده‌های دو مخروط) روی این مولدها، می‌گیریم، نقطهٔ M محل برخورد OO_1 با مولدی است که، در مخروط در طول آن بر هم مماسند. روشن است که زاویهٔ OMS قائمه است.

از مثلث OMS به‌دست می‌آید :

$$AB = OO_1 = 2OM = 2OS.\sin(OSM) = 2OS.\sin\frac{x}{2}$$

x را، زاویهٔ مجهول درنظر گرفته‌ایم. از مثلث SAC داریم :

$$AB = 2AC = 2SA.\sin 60^\circ = 2SO.\cos\frac{x}{2}\sin 60^\circ;$$

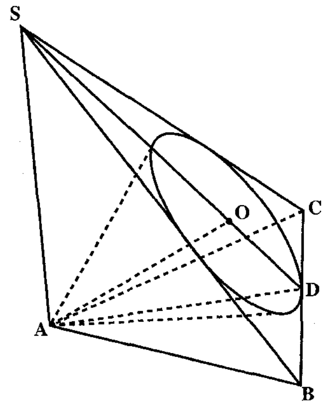
مقایسهٔ دو رابطهٔ حاصل، به ما می‌دهد :

$$2OS.\sin\frac{x}{2} = 2OS.\cos\frac{x}{2}.\sin 60^\circ;$$

$$\tan\frac{x}{2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad x = 2\mathrm{Arc}\tan\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۳۹. هرم SABC را در نظر بگیرید که (شکل) در آن :

$$B\hat{A}C = \frac{2\pi}{n} \text{ ، } CA = AB$$



و SA بر صفحهٔ ABC عمود است و علاوه‌بر آن، تصویر رأس A بر روی صفحهٔ SBC، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی SBC می‌باشد. مخروطی را در این هرم طوری محاط می‌کنیم که رأس آن بر A منطبق شود و دایرهٔ قاعدهٔ آن، دایرهٔ محاطی SBC گردد. واضح است که اگر n را طوری اختیار کنیم تا هرمهایی که قاعده‌هایشان در صفحهٔ ABC قرار دارند، طوری قاعده‌هایشان بر ABC منطبق شوند که تشکیل یک n ضلعی منتظم به مرکز A بدهند، در آن صورت مخروطهایی که دراین هرمها محاط می‌شوند، یک دستگاه از مخروطهای مطلوب را به‌وجود خواهند آورد.

پس اگر D وسط BC، $OD = r$ و $AD = l$ ، آن‌گاه :

$$BD = l\tan\frac{\pi}{n} \quad , \quad SD = \frac{l^2}{r}$$

چون :

$$S\hat{B}D = 2O\hat{B}D$$

و

$$\tan\ S\hat{B}D = \frac{SB}{BD} = \frac{l}{r\tan\frac{\pi}{n}}$$

$$\tan\ O\hat{B}D = \frac{r}{l\tan\frac{\pi}{n}}$$

می‌توان تساوی زیر را نوشت :

$$\frac{1}{r\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{۲\frac{r}{l\tan\frac{\pi}{n}}}{۱-\frac{r^۲}{l^۲\tan^۲\frac{\pi}{n}}}$$

و از آن‌جا :

$$\frac{r}{l}=\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\sqrt{۱+۲\tan^۲\frac{\pi}{n}}}$$

جواب :

$$۲\operatorname{Arc}\sin\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{۱+۲\tan^۲\frac{\pi}{n}}$$

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو محور

۴۴۰. اگر O و $O_۱$ دو مرکز قاعده‌های دو مخروط مجاور باشند که در صفحهٔ P قرار دارند و M وسط $OO_۱$، و SA و SB تصویرهای ارتفاعهای SO و $SO_۱$ این دو مخروط روی صفحهٔ P باشند (شکل)، به فرض $SO=SO_۱=h$ و x زاویهٔ مطلوب، در مثلث AOS خواهیم داشت : $SA=h\cos\frac{x}{۲}$، و در مثلث SAN هم می‌توان نوشت :

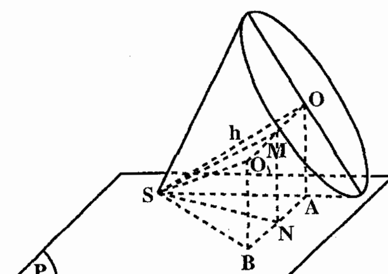
$$AN=SA\sin\frac{\pi}{n}=h\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{\pi}{n}$$

از مثلث SMO نتیجه می‌شود :

$$OM=AN=h\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{\pi}{n} \quad , \quad SM=h\cos\frac{x}{۲}$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{OM}{SM}=\frac{h\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{\pi}{n}}{h\cos\frac{x}{۲}}=\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow x=۲\operatorname{Arc}\tan(\sin\frac{\pi}{n})$$



۳.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۴۴۱. کنج سه‌وجهی را S.ABC، وجه‌های آن را a، b و c، و SA'، SB' و SC' را مولدهای تماس واقع در صفحه‌های SBC، SCA و SAB می‌گیریم. می‌دانیم که SA با SB' و SC' زاویه‌های مساوی می‌سازد. اگر x اندازهٔ مشترک این دو زاویه باشد و قرار دهیم:

$$B\hat{S}A' = B\hat{S}C' = y \text{ و } C\hat{S}B' = C\hat{S}A' = z$$

خواهیم داشت:

$$y+z=a \text{ ، } z+x=b \text{ و } x+y=c$$

و اگر $a+b+c=2p$ قرار دهیم، از این دستگاهها خواهیم داشت:

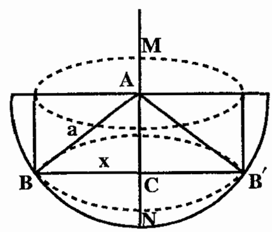
$$x+y+z=p$$

پس:

$$x=p-a \quad \text{،} \quad y=p-b \quad \text{،} \quad z=p-c$$

۴۴۲. ۱. داریم:

$$V=\frac{\pi x^2 y}{3} \;,\; x^2+y^2=a^2$$



ماکزیمم مورد نظر وقتی وجود دارد که:

$$x^2=\frac{2}{3}a^2 \text{ و } y=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

بنابراین در این حالت:

$$V=\frac{\pi}{3}.\frac{2}{3}a^2.\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi a^3$$

۲. مخروط ماکزیمم معادل است با استوانهٔ ماکزیمم محاط در یک نیمکره که شعاعش برابر a است؛ زیرا حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حجم استوانهٔ متناظرش است. اما استوانهٔ ماکزیمم محاط در یک نیمکرهٔ حجمی مساوی $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi a^3$ دارد. بنابراین حجم مخروط مورد نظر مساوی است با:

$$\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi a^3$$

۴.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴۴۳. α را زاویهٔ مجهول و h، r و l را بترتیب ارتفاع، شعاع قاعده و مولد مخروط می‌گیریم، داریم:

$$\tan\alpha = \frac{h}{r}$$

سطح کل مخروط طبق فرض دوبرابر سطح مقطع محوری استوانه است، بنابراین:

$$\pi(r+l)r = ۲\times ۲rh \Rightarrow \pi(r+l) = ۴h$$

علاوه‌بر آن:

$$l = \sqrt{x^۲ + h^۲}$$

از دو رابطهٔ اخیر به دست می‌آید:

$$۴h - \pi r = \pi\sqrt{r^۲ + h^۲}$$

$$\Rightarrow h(۱۶ - \pi^۲) = ۸\pi r$$

و از آن‌جا:

$$\frac{h}{r} = \frac{۸\pi}{۱۶-\pi^۲} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۸\pi}{۱۶-\pi^۲}$$

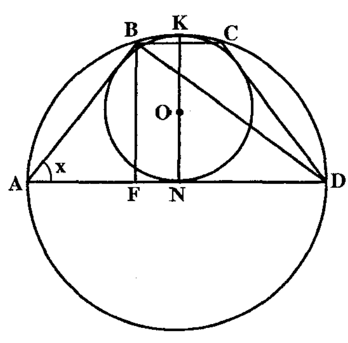
جواب:

$$\alpha = \mathrm{Arc}\tan\frac{۸\pi}{۱۶-\pi^۲}$$

۴۴۴. در شکل، مقطع مخروط و دو کره با صفحهٔ قاطع گذرنده بر محور مخروط دیده می‌شود.

فرض می‌کنیم $B\hat{A}D = x$ ، سپس عمود BF را بر AD فرود می‌آوریم و خواهیم داشت:

$$BF = KN = ۲R \text{ و } FD = \frac{AD+BC}{۲} = \frac{AB+CD}{۲} = AB$$



در مثلث ABF داریم:

$$AB = \frac{۲R}{\sin x}$$

پس: $FD = \frac{۲R}{\sin x}$ و از مثلث BDF داریم:

$$BD=\sqrt{4R^2+\frac{4R^2}{\sin^2 x}}=\frac{2R}{\sin x}\sqrt{1+\sin^2 x}$$

امّا $BD=2R\sqrt{30}\sin x$ است. پس :

$$\frac{2R}{\sin x}\sqrt{1+\sin^2 x}=2R\sqrt{30}\sin x$$

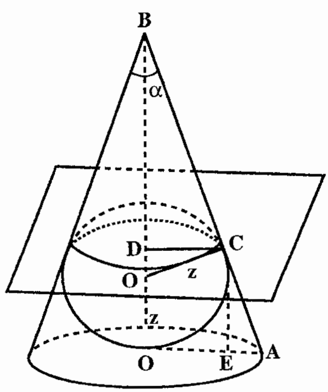
از آن‌جا خواهیم داشت :

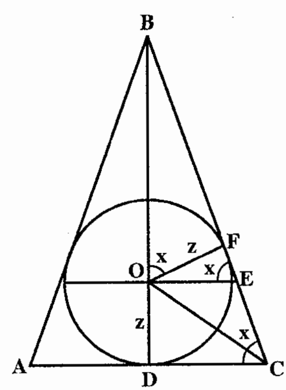
$$30\sin^4 x-\sin^2 x-1=0 \Rightarrow \sin^2 x=0/2$$

$$\cos 2x=0/6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\cos 0/6$$

۴۴۵. مقطع محوری مخروط ABC را در نظر می‌گیریم (شکل). زاویهٔ مجهول BCD را x می‌گیریم. اگر مرکز کره، O را به نقطهٔ C، انتهای مولد BC و به نقطهٔ F، نقطهٔ تماس مولد BC با کره، وصل کنیم، دیده می‌شود که :

$$B\hat{O}F=B\hat{C}D=x \;;\; O\hat{E}F=B\hat{C}D=x$$





بنابر شرط مسأله : $V_2=\frac{1}{2}V_1$ (V_1 حجم مخروط مفروض و V_2، حجم بخشی از مخروط که به وسیلهٔ صفحه، از طرف رأس مخروط مفروض جدا می‌شود). شعاع کره را r می‌گیریم و V_1 و V_2 را برحسب r و x بیان می‌کنیم :

$$V_1=\frac{1}{3}\pi.CD^2.BD=\frac{\pi}{3}(OD.\cot(OCD))^2.CD.\tan(BCD)$$

$$=\frac{\pi}{3}r^2\cot^2\frac{x}{2}.r\cot\frac{x}{2}.\tan x=\frac{\pi}{3}r^3\cot^3\frac{x}{2}\tan x$$

$$V_۲=\frac{\pi}{۳}.OE^۲.OB=\frac{\pi}{۳}(\frac{OF}{\sin(FEO)})^۲.\frac{OS}{\cos(BOF)}=\frac{\pi r^۳}{۳\sin^۲ x\cos x}$$

که اگر مقدارهای حاصل را، در رابطهٔ $V_۲=\frac{۱}{۲}V_۱$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید :

$$\frac{۱}{\sin^۲ x\cos x}=\frac{۱}{۲}\cot^۳\frac{x}{۲};$$

$$\sin^۲ x\cos x\cot^۲\frac{x}{۲}\tan x=۲ \quad ;$$

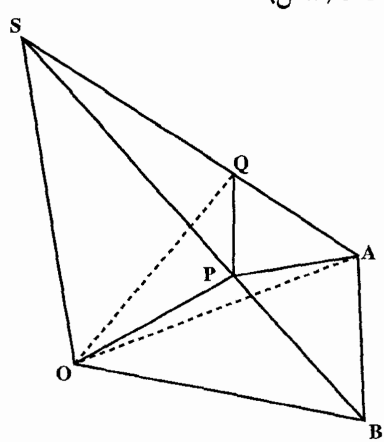
$$\sin^۳ x\cot^۳\frac{x}{۲}=۲ \quad ; \quad \sin x\cot\frac{x}{۲}=\sqrt[۳]{۲} \quad ;$$

$$۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}.\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\sqrt[۳]{۲} \quad ;$$

$$\cos^۲\frac{x}{۲}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} \quad ;$$

$$\cos\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}} \quad ; \quad \Rightarrow x=۲\mathrm{Arc}\cos\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$$

۴۴۶. زاویهٔ مطلوب مسأله، متمم زاویه‌ای است که مولد OA با محور مخروط دوم می‌سازد. مرکزهای قاعده‌های مخروط را با P و Q نشان دهید. S نقطه‌ای است که در آن، صفحه‌های قاعده‌های دو مخروط، خط عمودی را که از O برصفحهٔ OAB اخراج می‌شود، قطع می‌کنند (شکل).



در هرم SOAB داریم : $SO \cdot OA = OB$ بر صفحهٔ OAB عمود است و OP و OQ هم بترتیب بر SB و SA عمودند، $P\hat{O}Q = \beta$ و $P\hat{O}B = Q\hat{O}A = \varphi$. $P\hat{A}O$ را پیدا کنید.

اگر $OA = OB = l$ و $AB = a$ ، آن‌گاه :

$$OP = OQ = \cos\varphi \quad ، \quad SA = SB = \frac{l}{\sin\varphi}$$

$$SP = SQ = OP\cot\varphi = l\frac{\cos^۲\varphi}{\sin\varphi}$$

$$PQ = AB\frac{SP}{SB} = a\cos^۲\varphi$$

از طرف دیگر :

$$PQ = ۲OP\sin\frac{\beta}{۲} = ۲l\cos\varphi\sin\frac{\beta}{۲}$$

بنابراین :

$$a\cos\varphi = ۲l\sin\frac{\beta}{۲} \quad (۱)$$

اکنون PA را حساب کنید :

$$PA^۲ = PB^۲ + AB^۲ - ۲PB.AB\cos(P\hat{B}A)$$

$$= l^۲\sin^۲\varphi + a^۲ - ۲l\sin\varphi . a\frac{a\sin\varphi}{۲l} = l^۲\sin^۲\varphi + a^۲\cos^۲\varphi$$

اگر $\gamma = P\hat{O}A$ ، در آن صورت از مثلث POA نتیجه می‌شود :

$$PA^۲ = l^۲\cos^۲\varphi + l^۲ - ۲l^۲\cos\varphi\cos\gamma$$

با مساوی‌قراردادن دو عبارتی که $PA^۲$ را بیان می‌کنند و با درنظرگرفتن شرط (۱) خواهیم داشت :

$$\cos\gamma = \cos\varphi - \frac{۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}}{\cos\varphi}$$

جواب :
$$\frac{\pi}{۲} - \operatorname{Arc}\cos\left(\cos\varphi - \frac{۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}}{\cos\varphi}\right)$$

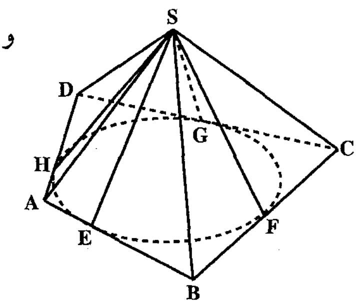
۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۴۴۷. کنج چهاروجهی S.ABCD را در نظر گرفته، مولدهای تماس وجه‌های SAB، SBC، SCD و SDA را SE، SF، SG و SH می‌نامیم. داریم :

$$A\hat{S}B + C\hat{S}D = A\hat{S}E + E\hat{S}B + C\hat{S}G + G\hat{S}D$$ و

$$B\hat{S}C + D\hat{S}A = B\hat{S}F + F\hat{S}C + D\hat{S}H + H\hat{S}A$$



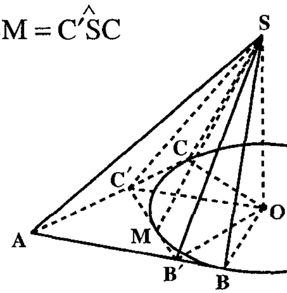
امّا می‌دانیم که : $A\hat{S}E = H\hat{S}A$ و $E\hat{S}B = B\hat{S}F$

و $C\hat{S}G = F\hat{S}C$ و $G\hat{S}D = D\hat{S}H$ است. بنابراین :

$$A\hat{S}B + C\hat{S}D = B\hat{S}C + D\hat{S}A$$

۴۴۸. نقطه‌های A، B، C، 'B و 'C را اثرهای خطهای مشخص‌شده (که داده شده‌اند)، روی قاعدهٔ مخروط و M را نقطهٔ تماس 'B'C و دایرهٔ قاعده می‌نامیم. داریم :

$$B'\hat{S}M = B'\hat{S}B \quad \text{و} \quad C'\hat{S}M = C'\hat{S}C$$



از آن‌جا :

$$A\hat{S}B' = A\hat{S}C + B'\hat{S}C' = A\hat{S}B + A\hat{S}C = ۲A\hat{S}B$$

وقتی فرجهٔ 'B'.SO.C زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ 'B'OC را دارد، می‌دانیم که این زاویه ثابت است و برابر است با : $\frac{B\hat{O}C}{۲}$.

۴۴۹. زاویهٔ چهاروجهی محدب S.ABCD محاط در یک مخروط دوار به محور SX را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم SX درون چهاروجهی باشد. کنج سه وجهی S.XAB که دو وجه ASX و BSX از آن مساویند، فرجه‌های روبه رو به این وجه‌ها نیز با هم مساویند. از آن‌جا داریم :

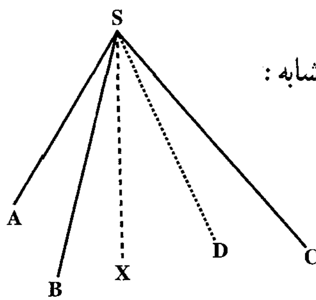
$$X.S\hat{A}.B = X.S\hat{B}.A = d_1$$

و به طور مشابه :

$$X.S\hat{B}.C = X.S\hat{C}.B = d_2$$

$$X.S\hat{C}.D = X.S\hat{D}.C = d_3$$

$$X.S\hat{D}.A = X.S\hat{A}.D = d_4$$



و ما ملاحظه می‌کنیم که اگر فرجه‌های S.ABCD را با A، B، C و D نشان دهیم، دو مجموع $A+C$ و $B+D$ دارای ارزش یکسان $d_1+d_2+d_3+d_4$ هستند. وقتی SX درون زاویهٔ چهاروجهی نباشد، استدلال مشابه اثبات بالا است.

۲.۲.۳.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

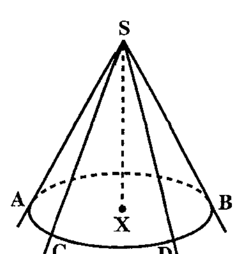
۴۵۰. یک سطح مخروطی دوار با محور دوران SX را در نظر می‌گیریم. دو مولد SA و SB را که در یک صفحهٔ نصف‌النهاری قرار دارند، و دو مولد دلخواه SC و CD غیرواقع در یک صفحهٔ نصف‌النهاری را در نظر می‌گیریم. در کنج سه‌وجهی S.XCD داریم :

$$C\hat{S}X + D\hat{S}X > C\hat{S}D$$

$$C\hat{S}X + D\hat{S}X = A\hat{S}B$$

از آن‌جا :

$$A\hat{S}B > C\hat{S}D$$



۴.۳. ارتفاع، مولد، شعاع قاعده

۱.۴.۳. ارتفاع

۱.۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

۴۵۱. شعاع قاعدهٔ مخروط را R و ارتفاع آن را h می‌نامیم. داریم:

$$R = ۵ \text{ و } V = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} h$$

$$\Rightarrow ۴۰۰ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۲۵ \times h \Rightarrow h = \frac{۴۸}{\pi}$$

۴۵۲. تعریف را قبلاً دیده‌ایم. داریم:

$$۲R = ۸ \Rightarrow R = ۴$$

$$\text{حجم مخروط دوار} = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} h$$

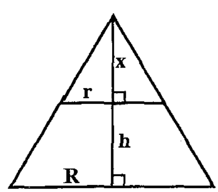
$$\Rightarrow ۴۸\pi = \frac{۱}{۳}\pi \times ۱۶ \times h \Rightarrow h = ۹$$

۴۵۳. با توجه به مثلثها (شکل) داریم:

$$\frac{x}{r} = \frac{x+h}{R} \text{ و }$$

$$x(R-r) = rh \ ,$$

$$\Rightarrow x = \frac{rh}{R-r}$$



۴۵۴. فرض می‌کنیم h ارتفاع و R و R′ شعاعهای دو قاعدهٔ مخروط ناقص دوار داده شده باشد. خواهیم داشت:

$$\frac{R^{۲}}{R'^{۲}} = k^{۲} \Rightarrow \frac{R}{R'} = k$$

$$\pi(R+R')\sqrt{h^{۲}+(R-R')^{۲}} = \pi m^{۲} \text{ و }$$

$$\frac{۱}{۳}\pi h(R^{۲}+R'^{۲}+RR') = \frac{۴}{۳}\pi a^{۳}$$

از این فرمولها نتیجه می‌شود :

$$R = kR' \quad , \quad R'(k+1)\sqrt{R^{2} + R'^{2}(k-1)^{2}} = m^{2}$$
$$\Rightarrow kR'^{2}(1+k+k^{2}) = 4a^{3}$$

از سه معادلهٔ بالا، بعدهای R، R' و h از مخروط ناقص دوار محاسبه می‌شود، اولی R را می‌دهد، وقتی که R' داده شده باشد. دو فرمول آخر، R' و h را مشخص می‌کنند.
همچنین برای مقدارهای داده شده داریم :

$$m^{2} = 45 \quad , \quad a^{3} = 63$$
$$\Rightarrow 3R'\sqrt{h^{2} + R'^{2}} = 45 \Rightarrow kR'^{2} = 36$$

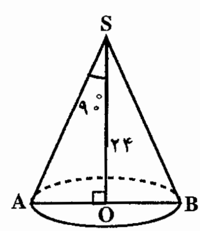
دستگاه جواب $h = 4$ ، $R' = 5$ و از آن جا $R = 6$ را می‌دهد.

۳.۴.۲. مولد

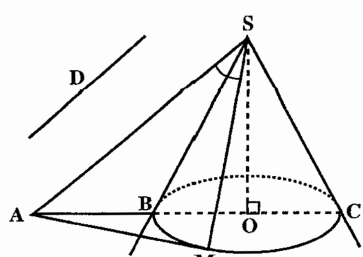
۳.۴.۲.۱. اندازهٔ مولد

۴۵۵. در مثلث قائم الزاویهٔ $S\hat{O}A$ $(\hat{O} = 90^\circ)$، داریم :

$$\cos 30^\circ = \frac{SO}{SA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{24}{SA}$$
$$\Rightarrow SA = 16\sqrt{3} \quad cm$$



۴۵۶. از نقطهٔ S رأس مخروط، خط SA را موازی خط داده شدهٔ D و از نقطهٔ دلخواه A از این خط، صفحه‌ای عمود بر محور مخروط رسم می‌کنیم. این صفحه، مخروط را تحت یک دایره مانند O قطع می‌کند. فرض می‌کنیم BC قطری از این دایره باشد که از نقطهٔ A می‌گذرد.



اکنون SM را یک مولد دلخواه از مخروط می‌گیریم. هنگامی که نقطهٔ M دایرهٔ O را می‌پیماید، زاویهٔ $A\hat{S}M$ در همان جهت AM تغییر می‌کند. زیرا تمام مثلثهای ASM دارای دو ضلع دوبه‌دو مساوی هستند. پس زاویهٔ $A\hat{S}M$ در همان جهت ضلع مقابلش تغییر می‌کند. در نتیجه ASM هنگامی می‌نیمم است که نقطهٔ M بر نقطهٔ B، انتهای قطر BC که نزدیکتر به A است، منطبق شود.

همچنین دیده می‌شود که$A\hat{S}M$ ماکزیمم است. در صورتی که M منطبق بر نقطهٔ C باشد.
بنابراین مولدهایی که کوچکترین و بزرگترین زاویه با SA را می‌سازند، بترتیب SB و SC می‌باشند.

۴۵۷. فرض می‌کنیم که خط راست D سطح مخروطی را در نقطه‌های A، B و C قطع کند. مولدهای SA، SB و SC را که از این سه نقطه می‌گذرند، رسم می‌کنیم. من می‌گویم که این سه مولد برهم منطبقند؛ بدین معنی که D یک مولد این سطح مخروطی است. در واقع اگر دو تا از این مولدها، مثلاً SA و SB برهم منطبق باشند، SC نیز بر آنها منطبق خواهد شد و خط D مولد است؛ و اگر SA، SB و SC متفاوت باشند، دایرهٔ قاعده را در نقطه‌های A'، B' و C' قطع خواهند کرد، که این نقطه‌ها متفاوت و روی یک خط راست قراردارند، که این خط راست، فصل مشترک صفحهٔ (D و S) و صفحهٔ قاعده است و این امر نیز غیرممکن است؛ زیرا یک خط راست با یک دایره نمی‌تواند بیش از دو نقطهٔ تقاطع داشته باشد.

۳.۴.۳.شعاع قاعده

۱.۳.۴.۳. اندازهٔ شعاع قاعده

۴۵۸. سه رابطهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S = \pi r(l + r);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^{3} h;$$

$$l = \sqrt{h^{2} + r^{2}}$$

با حذف h و l از این رابطه‌ها، به معادلهٔ دو مجذوری زیر می‌رسیم :

$$2S\pi r^4 - S^2r^2 + 9V^2 = 0$$

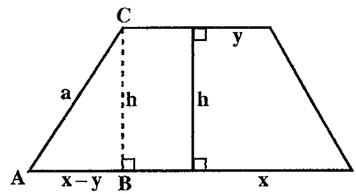
جواب :

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S^2 \pm \sqrt{S^4 - 72\pi SV^2}}{\pi S}}$$

۴۵۹. شعاعهای قاعده‌های مخروط ناقص را x و y می‌گیریم. داریم :

$$\frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 + xy) = \frac{\pi b^2 h}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + xy = b^2$$



از طرف دیگر، از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نتیجه می‌شود :

$$(x-y)^2 = a^2 - h^2$$

برای حل، فرض می‌کنیم $x = u+v$ و $y = u-v$ باشد، داریم :

$$3u^2 + v^2 = b^2 \quad , \quad 4v^2 = a^2 - h^2$$

$$\Rightarrow v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2} \quad , \quad u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}}$$

برای وجود این دو مقدار، باید :

$$a^2 - h^2 \geq 0 \quad , \quad 4b^2 + h^2 - a^2 \geq 0$$

بعلاوه، می‌توان r را شعاع قاعدهٔ بزرگتر مخروط ناقص فرض کرد. در این صورت باید $v \geq 0$، و برای این که y مثبت باشد، باید $u > v$ یا $u^2 > v^2$ باشد، و یا داشته باشیم :

$$\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{12} > \frac{a^2 - h^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 < h^2 < a^2$$

با برقراری این شرطها داریم :

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}} + \sqrt{a^2 - h^2}\right)$$ و

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4b^2 + h^2 - a^2}{3}} - \sqrt{a^2 - h^2}\right)$$

وقتی $h^۲ = a^۲$ است، مخروط ناقص به استوانه تبدیل می‌شود و داریم:

$$x = y = \frac{b\sqrt{۳}}{۳}$$

اگر $h^۲ = a^۲ - b^۲$ باشد، خواهیم داشت $x = b$ و $y = ۰$ ؛ مخروط ناقص تبدیل به یک مخروط می‌شود که شعاع قاعدهٔ آن مساوی b است.

۴۶۰. دستگاه معادلات زیر را تشکیل دهید:

$$\begin{cases} V = \frac{\pi}{۳}(R^۲ + r^۲ + Rr)h \\ m^۲ = (R + r)h \end{cases}$$

که با حل آن مقدارهای R و r به دست می‌آید.

جواب:

$$R = \frac{۱}{۲h}\left(m^۲ + \sqrt{\frac{۳(۴hv - \pi m^۴)}{\pi}}\right)$$

$$r = \frac{۱}{۲h}\left(m^۲ - \sqrt{\frac{۳(۴hv - \pi m^۴)}{\pi}}\right)$$

۴۶۱. حجم مخروط مساوی است با $v = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$ شعاع قاعدهٔ کوچک مخروط ناقص را x می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$v = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{h}{۲}(R^۲ + Rx + x^۲)$$

$$\Rightarrow ۲R^۲ = R^۲ + Rx + x^۲ \quad \Rightarrow \quad x^۲ + Rx - R^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-R + \sqrt{R^۲ + RR^۲}}{۲} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R(\sqrt{۵} - ۱)}{۲}$$

تنها مقدار قابل قبول.

۴۶۲. گسترده مخروط ناقص، مساوی تفاضل دو قطاع دایره است.

اگر x و y شعاعهای آنها برحسب سانتیمتر و اندازهٔ زاویهٔ مشترک گستردهٔ آنها برحسب درجه باشد، طول دایره‌های قاعده‌های آبازور، مساوی طول همین قطاعهاست. بنابراین:

$$۳۲\pi = \frac{\pi x\theta}{۱۸۰} \quad , \quad ۸\pi = \frac{\pi y\theta}{۱۸۰}$$

از آن‌جا:

$$x\theta = ۳۲ \times ۱۸۰ \quad , \quad y\theta = ۸ \times ۱۸۰$$

از طرف دیگر ارتفاع و اختلاف شعاعهای قاعده‌های آباژور، ضلعهای یک زاویهٔ قائم از یک مثلث قائم‌الزاویه است که وترش مساوی ارتفاع مخروط ناقص یا $x-y$ است؛ بنابراین داریم:

$$(x-y)^۲ = ۹^۲ + ۱۲^۲ = ۲۲۵$$

از حل معادله‌های به دست آمده خواهیم داشت:

$$x\theta = ۳۲\times ۱۸۰ \quad , \quad y\theta = ۸\times ۱۸۰ \quad , \quad x-y = ۱۵$$

$$\Rightarrow (x-y)\theta = ۲۴\times ۱۸۰ \quad \text{یا}$$

$$۱۵\theta = ۲۴\times ۱۸۰ \Rightarrow \quad \theta = ۲۸۸^\circ$$

و بالاخره نتیجه می‌شود:

$$x = \frac{۳۲\times ۱۸۰}{۲۸۸} = ۲۰ \quad (cm) \quad \text{و}$$

$$y = \frac{۸\times ۱۸۰}{۲۸۸} = ۵ \quad (cm)$$

۲.۳.۴.۳. نسبت شعاعها

۴۶۳. حجم مشترک را V می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$V = \pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi R'^۲ h$$

از آن‌جا:

$$\frac{R^۲}{R'^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

R شعاع استوانه و R′ شعاع مخروط است.

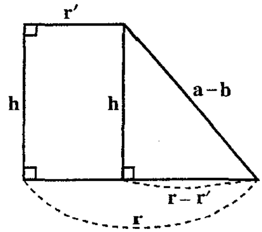
۴.۴.۳. شعاع قاعده، ارتفاع

۴۶۴. شعاعهای دو قاعده را r و r′ می‌گیریم. طول دایره‌های قاعده‌ها، مساوی طول دو قطاع شکل گسترده مخروط ناقص است. بنابراین

$$۲\pi r = \frac{\pi a\theta}{۱۸۰} \quad \text{و} \quad ۲\pi r' = \frac{\pi b\theta}{۱۸۰}$$

از آن‌جا:

$$r = \frac{a\theta}{۳۶۰} \quad , \quad r' = \frac{b\theta}{۳۶۰}$$



بعلاوه، اگر ما مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بررسی کنیم که وترش ارتفاع $a-b$ از مخروط ناقص و ضلعهای زاویهٔ قائمه‌اش h و $r-r'$ باشد، خواهیم داشت :

$$h^{۲}=(a-b)^{۲}-(r-r')^{۲}=(\frac{a-b}{۳۶۰})^{۲}(۳۶۰^{۲}-\theta^{۲})$$

$$\Rightarrow h=\frac{a-b}{۳۶۰}\sqrt{۳۶۰^{۲}-\theta^{۲}}$$

حالت خاص : $b=۱\ ,\ a=۳۷\ ,\ \theta=۲۸۸$

با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده، خواهیم داشت :

$$r=۲۹/۶\ (cm)\ \ ,\ \ r'=۰/۸\ (cm)\ \ ,\ \ h=۲۱/۶\ (cm)$$

۴۶۵. گزینهٔ (د) صحیح است.

$$\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{h}{r}=\frac{۲}{۱}$$

۵.۴.۳. نسبت ارتفاع و مولد

۴۶۶. داریم :

$$\text{شعاع قاعدهٔ مخروط}=R\Rightarrow S_{\text{قاعده}}=\pi R^{۲}$$

و $$S_{\text{سطح جانبی}}=۲\pi R\times\frac{L}{۲}=\pi RL$$

$$S_{\text{سطح جانبی}}=۲\times S_{\text{قاعده}}\Rightarrow \pi RL=۲\pi R^{۲}\Rightarrow R=\frac{L}{۲}$$

و $$L^{۲}=R^{۲}+h^{۲}\Rightarrow L^{۲}=\frac{L^{۲}}{۴}+h^{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳L^{۲}}{۴}=h^{۲}\Rightarrow\frac{h^{۲}}{L^{۲}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{h}{L}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۶.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۷. سطح کل مخروط ناقص برابر است با :

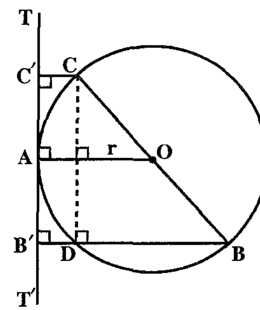
$$S = \pi(BB'^{۲} + CC'^{۲}) + \pi(BB' + CC')BC$$

اما

$$BB' + CC' = ۲OA = ۲r$$

$$BB'^{۲} + CC'^{۲} = (BB' + CC')^{۲} - ۲BB' \times CC'$$

$$= ۴r^{۲} - ۲BB'.CC'$$



با توجه به این که $C\hat{D}B$ زاویهٔ قائمه و در نتیجه $CC' = B'D$ است، خواهیم داشت :

$$BB' \times CC' = BB' \times B'D = AB'^{۲}$$

بنابراین :

$$BB'^{۲} \times CC'^{۲} = ۴r^{۲} - ۲AB'^{۲}$$

اینک بعد از جایگذاری، $S = ۸\pi r^{۲} - ۲\pi AB'^{۲}$ به دست می‌آید.

امّا بنا به فرض مسأله، نسبت این مساحت S به مساحت $\pi r^{۲}$ دایره مساوی $۲m$ است. بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{۸\pi r^{۲} - ۲\pi AB'^{۲}}{\pi r^{۲}} = ۲m$$

$$\Rightarrow AB'^{۲} = (۴ - m)r^{۲} \Rightarrow AB' = r\sqrt{۴ - m}$$

برای آن‌که این مقدار قابل قبول باشد، نخست باید $۴ - m \geq ۰$ و سپس :

$$r\sqrt{۴ - m} \leq r \Rightarrow m \geq ۳$$

به‌طور خلاصه، برای آن که مسأله ممکن باشد، باید $۳ \leq m \leq ۴$.

۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۴۶۸. اگر یک نقطه مانند M مولد SG از سطح مخروطی را بپیماید، پاره‌خط AM در صورتی

کمترین مقدار خود را داراست که نقطهٔ M بر نقطهٔ A'، پای عمود رسم شده از A بر SG منطبق شود. بنابراین باید مولدی را جستجو کنیم که فاصلهٔ AA' از نقطهٔ A برای آن، می‌نیمم باشد. یعنی با درنظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ $SA'A$، مولدی که با خط SA کوچکترین زاویه را می‌سازد.

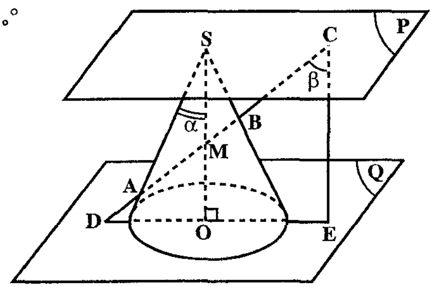
همان طوری که می‌دانیم، این مولد یکی از دو مولد حاصل از برخورد صفحهٔ نصف‌النهاری گذرنده بر A با سطح مخروطی است که همسایهٔ نزدیک این نقطه است.

۴۶۹. در شکل و در مثلث CDE داریم:

$$CD = d \ ، \hat{C} = \beta \ ، \hat{E} = 90^\circ$$

$$CE = d\cos\beta$$

و



در این صورت خواهیم داشت:

$$SM = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}d\cos\beta$$

در مثلث ASM خواهیم داشت:

$$\frac{AS}{\sin(\pi-\beta)} = \frac{SM}{\sin(\beta-\alpha)}$$ و

$$AS = \frac{SM\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\cos\beta\sin\beta}{2\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\sin 2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)}$$

در مثلث ASB داریم:

$$AB = \frac{d\sin 2\alpha\sin 2\beta}{4\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$$ یا

$$\frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{AS}{\sin(\beta+\alpha)}$$

۴۷۰. اگر h ارتفاع و x فاصلهٔ خواسته شده باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{S}{B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} h = ۰/۷۰۷h$$

۴۷۱. باید داشته باشیم :

$$\frac{x^{۲}}{h^{۲}} = \frac{S}{B} = k \Rightarrow \frac{x}{h} = \sqrt{k} \Rightarrow x = h\sqrt{k}$$

۴۷۲. ارتفاع مخروط را h، شعاع قاعدهٔ آن را R، مولدش را l، ارتفاع مخروط بالایی را h' ، و شعاع قاعدهٔ آن را R' ، و مولدش را l' می‌نامیم. داریم :

$$\frac{l'}{l} = \frac{h'}{h} = \frac{R'}{R} = k \Rightarrow h' = kh \ , \quad R' = kR$$

جانبی مخروط بالایی $S = ۲\pi R'l'$ و

جانبی مخروط داده شده $S = ۲\pi Rl$

جانبی مخروط بالایی $S = \frac{۱}{۲} \times$ مخروط داده شده S

$$\Rightarrow ۲\pi R'l' = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi Rl$$

$$\Rightarrow ۲R'l' = Rl \Rightarrow ۲(kR)(kl) = Rl$$

$$\Rightarrow ۲k^{۲} = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$\Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow$ فاصلهٔ صفحه تا قاعده $= h(۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

۴۷۳. شعاع قاعدهٔ مخروط را R و ارتفاع آن را h ، و فاصلهٔ صفحهٔ قاطع از رأس را x می‌نامیم. داریم :

$\frac{x}{h} = \frac{R'}{R} \Rightarrow R' = \frac{Rx}{h}$ شعاع قاعدهٔ بالایی

حجم مخروط بالایی $= \frac{۱}{۳}\pi R'^{۲}x = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^{۲}.x = \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{R^{۲}x^{۳}}{h^{۲}}$

و حجم مخروط داده شده $= \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$

حجم مخروط داده شده $= ۲ \times$ حجم مخروط بالایی

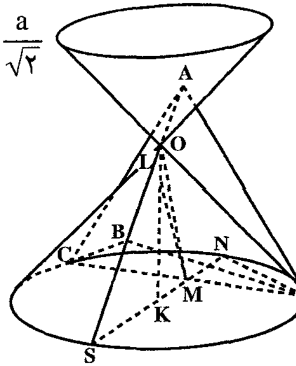
$$\Rightarrow \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{R^۲ x^۳}{h^۲}$$

$$h^۳ = ۲x^۳ \Rightarrow x^۳ = \frac{h^۳}{۲} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{\frac{h^۳}{۲}} = \frac{h}{\sqrt[۳]{۲}}$$

$$\Rightarrow \text{فاصلهٔ صفحه از قاعده} = h - x = h - \frac{h}{\sqrt[۳]{۲}} = h(۱ - \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}})$$

۴۷۴. نقطهٔ L، وسط پاره خط AB را به نقطهٔ M، وسط پاره‌خط CD وصل می‌کنیم (شکل ب). پاره‌خط LM میانهٔ مشترک مثلثهای متساوی‌الساقین و مساوی CLD و AMB است ؛ بنابراین، LM عمود مشترک یالهای AB و CD از چهار وجهی است. طول آن را پیدا می‌کنیم :

$$LM = \sqrt{BM^۲ - BL^۲} = \sqrt{\frac{۳}{۴}a^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲} = \frac{a}{\sqrt{۲}}$$



از یال CD صفحه‌ای می‌گذرانیم که بر محور مخروط عمود باشد. چون مقطع محوری مخروط عبارت است از دو خط راست عمود برهم، بنابراین، زاویهٔ بین مولد AB با صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، برابر ۴۵ درجه است ؛ یعنی :

$$LS = LM = \frac{a}{\sqrt{۲}} \;;\; SM = LM\sqrt{۲} = a$$

ولی $CM^۲ = SM.MN$، یا $\frac{a^۲}{۴} = a.MN$ ، و از آن جا :

$$MN = \frac{a}{۴} \;,\; OK = SK = \frac{۱}{۲}(SM + MN) = \frac{۱}{۲}(a + \frac{a}{۴}) = \frac{۵a}{۸};$$

$$OK \perp SM \;;\; KM = KN - MN = SK - MN = \frac{۵}{۸}a - \frac{۱}{۴}a = \frac{۳a}{۸}$$

و بنابراین :
$$OM=\sqrt{OK^{۲}+KM^{۲}}=\frac{a\sqrt{۳۴}}{۸}$$

۴۷۵. مسلماً مخروط مقوایی با نیم استوانهٔ بالایی جعبه در تماس خواهد بود. مسأله ۳ راه حل دارد :

الف. با توجه به نمای جانبی :

$$HM=AH\tan ۳۰ . AH=\sqrt{۳}HM=۱۵\sqrt{۳}\approx ۲۵/۹۸$$

فاصلهٔ نقطهٔ A از قاعدهٔ جعبه برابر می‌شود با :

$$۷۰+۲۵/۹۸=۹۵/۹۸\ \text{cm}$$

ب. با توجه به نمای روبه‌رو : ضلعهای زاویه‌های OAN و O دوبه‌دو برهم عمودند، و از آن جا :
$$OK=ON\sin\theta=۲۰\sin\theta$$

و نتیجه می‌گیریم که :
$$KN=ON\sin ۶۰=۱۰\sqrt{۳}$$

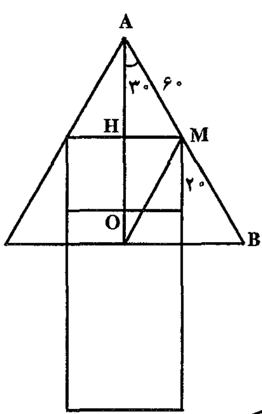
پس :
$$AK=\sqrt{۳}KN=۳۰ \text{ و } KN=AK$$

و حالا :
$$AK+KO+۵۰=۹۰\ \text{cm}$$

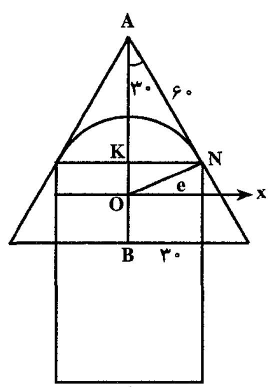
ج. با توجه به نمای فوقانی :
$$AP=۲۵$$

از آن‌جا :
$$AP=OA\sin ۳۰\quad,\quad OA=۵۰$$

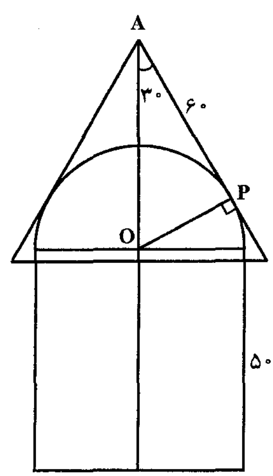
و
$$۵۰+۵۰=۱۰۰\ \text{cm}$$

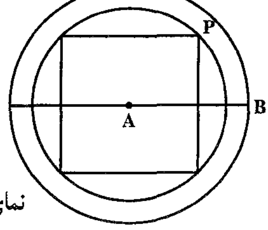


نمای جنبی



نمای روبه‌رو





نمای فوقانی

و از بین سه پاسخ فوق، پاسخ «ج»، صحیح‌تر به نظر می‌رسد، که رأس مخروط بیشترین فاصله را از قاعده دارد.

۲.۵.۳. اندازهٔ ضلع مثلث

۴۷۶. ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث را x و y می‌نامیم. داریم :

$$v = \frac{1}{3}\pi x y^2 \ , \ v' = \frac{1}{3}\pi y x^2 \ , \ x^2 + y^2 = a^2$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$\frac{v}{v'} = \frac{y}{x} \ , \ v^2 + v'^2 = \frac{1}{9}\pi^2 x^2 y^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{9}\pi^2 a^2 x^2 y^2$$

$$\Rightarrow xy = \frac{3\sqrt{v^2 + v'^2}}{\pi a}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{3v}{v'} \cdot \frac{\sqrt{v^2 + v'^2}}{\pi a} \quad \text{و}$$

$$x^2 = \frac{3v'}{v} \cdot \frac{\sqrt{v^2 + v'^2}}{\pi a}$$

از آن جا x و y ریشه‌های معادله‌های بالا محاسبه می‌شوند.
برای آن که مسأله ممکن باشد، باید رابطهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ به ازای مقدارهای بالا برقرار باشد. یعنی داشته باشیم :

$$\pi a^3 v v' = 3\sqrt{(v^2 + v'^2)^5}$$

تبصره. اگر وتر را داده نشده فرض کنیم، برای x و y مقدارهای زیر را خواهیم داشت :

$$x^3 = \frac{3v'^2}{\pi v} \ , \ y^3 = \frac{3v^2}{\pi v'}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3v'}}{\sqrt[3]{\pi v v'}} \ , \ y = \frac{\sqrt[3]{3v}}{\sqrt[3]{\pi v v'}}$$

۴۷۷. حجم جسمی که از دوران مثلث دور ضلع a به دست می‌آید برابر است با مجموع (یا تفاضل) حجمهای دو مخروط که شعاع قاعدهٔ آنها مساوی h_a و مجموع (یا تفاضل) ارتفاعهای آنها مساوی a است، بنابراین داریم :

$$\frac{۱}{۳}\pi a h_a^۲ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow a h_a^۲ = ۴R^۲ \qquad (۱)$$

اگر مساحت مثلث ABC را S بگیریم، داریم :

$$S = \frac{۱}{۲} a . h_a$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید :

$$a = \frac{S^۲}{R^۳} \qquad (۳)$$

و به همین ترتیب برای دو ضلع دیگر مثلث داریم :

$$b = \frac{S^۲}{r^۳} \quad (۴) \qquad و \qquad c = \frac{S^۲}{p^۳} \quad (۵)$$

$S^۲$ را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$S^۲ = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

از طرف دیگر :

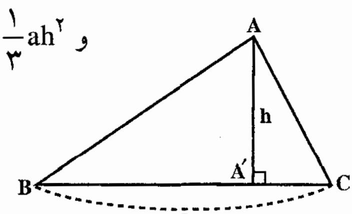
$$p = \frac{۱}{۲}(a+b+c) = \frac{۱}{۲}S^۲\left(\frac{۱}{R^۳} + \frac{۱}{r^۳} + \frac{۱}{p^۳}\right);$$

$$p - a = \frac{۱}{۲}S^۲\left(\frac{۱}{r^۳} + \frac{۱}{p^۳} - \frac{۱}{R^۳}\right);$$

۴۷۸. مثلث ABC به ضلعهای a، b و c را در نظر می‌گیریم. ارتفاع متناظر با ضلع a را با h و مساحت آن را با S نشان می‌دهیم. اگر زاویه‌های B و C حاده باشند، حجم V ایجاد شده از دوران مثلث حول BC، مساوی مجموع دو مخروط ایجاد شده به‌وسیلهٔ $AA'B$ و $AA'C$ است و داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi h^۲ \times A'B + \frac{۱}{۳}\pi h^۲ \times A'C = \frac{۱}{۳} a h^۲ \text{ و}$$

$$S = \frac{ah}{۲} \Rightarrow V = \frac{۴\pi S^۲}{۳a}$$



همین عبارت را برای حالتهایی خواهیم داشت که یکی از زاویه‌های B یا C، قائمه یا منفرجه باشند.

حال اگر V' و V'' حجمهای ایجاد شده از دوران مثلث حول CA و AB باشند، به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$V' = \frac{4\pi S^2}{3b}\ ,\ V'' = \frac{4\pi S^2}{3c}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، این حجمها، به طور معکوس با ضلعهایی که از دوران حول آنها به‌وجود آمده‌اند، متناسب می‌باشند ؛ بنابراین مثلث در صورتی بیشترین حجم را ایجاد می‌کند که حول کوچکترین ضلعش دوران کند.

۳.۵.۳. بیشترین مقدار طول پاره‌خط

۴۷۹. A و B را رأسهای مخروط در نظر می‌گیریم و M و N هم، دو نقطه‌ای هستند که روی دایرهٔ قاعده‌ها اختیار شده‌اند. L نقطه قطراً متقابل نسبت به M است. ($BM = \sqrt{r^2 + h^2}$ و $AM = \sqrt{r^2 + H^2}$). از نقطهٔ M صفحه‌ای بر AM عمود کنید و تصویرهای N ،B و L را بر روی این صفحه، B_1 ، N_1 و L_1 بنامید. فاصلهٔ بین AM و AN برابر است با فاصلهٔ بین M و B_1N_1 و از MB_1 تجاوز نمی‌کند. از شرط $h \le H$ معلوم می‌شود که $MB_1 \le ML_1$ ، یعنی نقطهٔ B_1 در داخل و یا روی مرز تصویر قاعده هرمها، بر روی صفحه گذرنده قرار دارد، و فاصلهٔ بین M و B_1N_1 برابر است با MB_1 ، اگر MB_1 و B_1N_1 متقابلاً برهم عمود باشند.

جواب : $\dfrac{(h+H)r}{\sqrt{r^2+H^2}}$

۴.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۴۸۰. فاصله‌های سه صفحه از رأس مخروط را x، y و h می‌نامیم. داریم :

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{S}{B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}h = 0/577h\ ;$$

$$\frac{y^2}{h^2} = \frac{T}{B} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{3}h = 0/816h\ ;$$

در این صورت مقطعهای S و T بترتیب به فاصله‌های ۵۷۷ هزارم و ۸۱۶ هزارم ارتفاع

از رأس قرار دارند.

۵.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

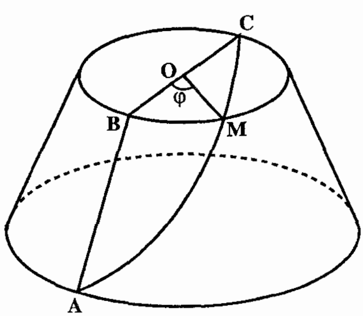
۴۸۱. فرض می‌کنیم SA و SB دو مولد قطری متقابل (دو مولدی که بر دو سر یک قطر از دایرهٔ قاعده می‌گذرند) باشند.

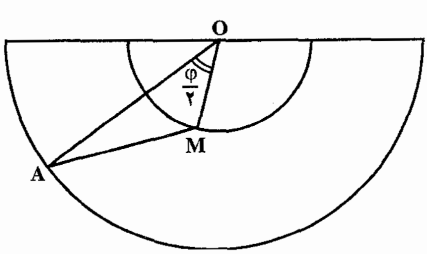
مخروط را روی یک صفحه گسترش می‌دهیم. قطاعی مستدیر مانند $SA'B'A''$ خواهیم داشت که شعاعش g و اندازهٔ کمان $A'B'A''$ از آن، مساوی $2\pi r$ است.

کوتاهترین پاره‌خط $A'A''$ است. برای $r=\frac{1}{6}g$ پاره‌خط $A'A''$ مساوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $SA'A''$ است. بنابراین مساوی g است. برای $r=\frac{1}{4}g$، پاره‌خط $A'A''$ مساوی $g\sqrt{2}$ و برای $r=\frac{1}{3}g$، پاره‌خط $A'A''$ مساوی $g\sqrt{3}$ است.

تبصره. برای $r=\frac{1}{6}g$ می‌توان نشان داد پاره‌خطی به طول می‌نیمم که از A شروع می‌شود برای آن که به همین نقطه برگردد، دوبار هر مولد را قطع می‌کند.

۴۸۲. ثابت کنید که کوتاهترین راه پیمودنی از نقطهٔ A، که به دایرهٔ قاعده بزرگتر مخروط تعلق دارد، تا نقطهٔ C، که متعلق به قاعدهٔ دیگر مخروط و قطراً متقابل با A می‌باشد، شامل مولد AB و قطر BC می‌شود.





شعاع قاعدهٔ کوچک را r، مرکز آن را O بنامید. مسیر A تا نقطه‌ای مانند M را در نظر بگیرید که، نقطهٔ M به دایرهٔ کوچک تعلق دارد. کمان $\overset{\frown}{AM}$ روی سطح جانبی مخروط قراردارد و وقتی کوتاهترین طول را دارا خواهد بود که، در گسترش سطح

جانبی مخروط، متناظر با یک پاره‌خط گردد. اما این گسترش با زاویهٔ بین مولد و قاعده که $\frac{\pi}{۳}$ است و شعاع قاعدهٔ R، نیمدایره‌ای به شعاع ۲R به وجود می‌آورد. پس، گسترش یک مخروط ناقص، یک نیم تاج دایره به‌وجود خواهد آورد.

اکنون، اگر کمان $\overset{\frown}{BM}$، واقع بر روی قاعدهٔ متناظر با زاویه مرکزی φ باشد، آن‌گاه در گسترش، زاویهٔ مرکزی، $\frac{\varphi}{۲}$ متناظر با این کمان خواهد بود (شکل) پس،

$$AM^۲ = ۴R^۲ + ۴r^۲ - ۸Rr\cos\frac{\varphi}{۲}$$

و

$$MC = ۲r\cos\frac{\varphi}{۲}$$

باقی ماند، ثابت کنیم :

$$\sqrt{۴R^۲ + ۴r^۲ - ۸Rr\cos\frac{\varphi}{۲}} + ۲r\cos\frac{\varphi}{۲} \geq ۲R$$

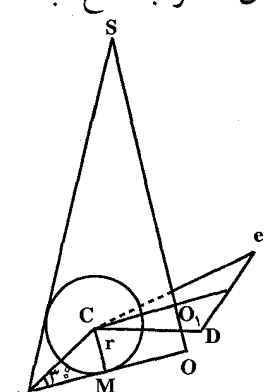
این نامساوی هم با تبدیلات بدیهی به اثبات می‌رسد.

۶.۳.شعاع کره

۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره

۴۸۳. اگر C، D و E مرکزهای سه کره به شعاع r باشند (شکل)، خواهیم داشت :

$CE = CD = DE = ۲r$



و در مثلث ACM چون $A = ۳۰^\circ$ است، پس :

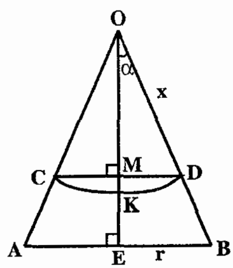
$$AM = r\cot ۳۰^\circ = r\sqrt{۳} \ , \ CO_۱ = \frac{CE}{\sqrt{۳}} = \frac{۲r}{\sqrt{۳}}$$

در مثلث ASO داریم :

$$A = ۶۰^\circ \ , \ AO = h\cot ۶۰^\circ = \frac{h}{\sqrt{۳}}$$

$$AO = AM + MO = AM + CO_۱ = r\sqrt{۳} + \frac{۲r}{\sqrt{۳}}$$

$$r\sqrt{۳} + \frac{۲r}{\sqrt{۳}} = \frac{h}{\sqrt{۳}} \ , \ ۵r = h \Rightarrow r = \frac{h}{۵}$$



۱.۴۸۴. شعاع مجهول را $x = OD$ ، حجم مخروط را $V_۱$ و حجم قطاع کروی واقع در داخل مخروط را $V_۲$ می‌گیریم (شکل). بنا به شرط مسأله داریم ؛ $V_۱ = ۲V_۲$ ؛ $V_۱$ و $V_۲$ را برحسب r ، α و x بیان می‌کنیم :

$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ . OE = \frac{۱}{۳}\pi r^۳ \cot\alpha \ ;$$

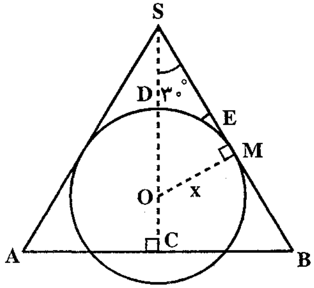
$$V_۲ = \frac{۲}{۳}\pi x^۲ . KM$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi x^۲ (OK - OM) = \frac{۲}{۳}\pi x^۲ (x - x\cos\alpha) = \frac{۴}{۳}\pi x^۳ \sin^۲ \frac{\alpha}{۲}$$

که اگر این مقدارهای $V_۱$ و $V_۲$ را در رابطهٔ $V_۱ = ۲V_۲$ قرار دهیم، سرانجام به دست می‌آید :

$$x^۳ = \frac{r^۳ \cot\alpha}{۸\sin^۲ \frac{\alpha}{۲}} \quad , \quad x = \frac{r}{۲}\sqrt[۳]{\frac{\cot\alpha}{\sin^۲ \frac{\alpha}{۲}}}$$

۴۸۵. بین تمام کره‌هایی که محاط در سطح جانبی و درون کره قراردارند، کره‌ای بیشترین حجم را دارد که بر سطح قاعدهٔ مخروط مماس است. شعاع این کره برابر است با $\frac{SC}{۳}$ یا $\frac{r\sqrt{۳}}{۳}$. اکنون کره‌ای را در نظر می‌گیریم که محاط در سطح جانبی است، امّا قاعدهٔ



مخروط را قطع می‌کند، x را شعاع این کره فرض می‌کنیم. قسمت مشترک این کره و مخروط یک قطعهٔ کروی با قاعده‌ای است که حجمش مساوی است با :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi CD^{۲}(۳x-CD)$$

امّا

$$CD=SC-SD=SC-(SO-OD)=SC+OD-SO$$

$$=r\sqrt{۳}+x-۲x=r\sqrt{۳}-x$$

و از آن‌جا حاصل می‌شود :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(r\sqrt{۳}-x)^{۲}(۴x-r\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow V=\frac{۴}{۳}\pi(r\sqrt{۳}-x)^{۲}(x-\frac{r\sqrt{۳}}{۴})$$

نقطهٔ تماس M به قطعهٔ EB تعلق دارد، E وسط SB است و بنابراین داریم :

$$r\le SM\le ۲r\quad,\quad \frac{r\sqrt{۳}}{۳}\le x\le\frac{۲r\sqrt{۳}}{۳}$$

در نتیجه $r\sqrt{۳}-x$ و $x-\frac{r\sqrt{۳}}{۴}$ مثبتند، اما مجموع این دو عامل ثابت است، پس V وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{r\sqrt{۳}-x}{۲}=x-\frac{r\sqrt{۳}}{۲}\ \Rightarrow x=\frac{r\sqrt{۳}}{۲}$$

برای این مقدار x داریم :

$$CD=r\sqrt{۳}-x=\frac{r\sqrt{۳}}{۲}$$

شعاع این کره مساوی CD است و مرکز کره بر مرکز C از قاعدهٔ مخروط منطبق است.

۲.۶.۳. نسبت شعاعها

.۴۸۶ $V_{۱}=۳V_{۲}$ و $h_{۲}=\frac{۱}{۳}h_{۱}$

$$\frac{۱}{۳}\pi R_۱^۲ h_۱ = ۳\times\frac{۱}{۳}\pi R_۲^۲ h_۲$$

$$\Rightarrow R_۱^۲ h_۱ = ۳R_۲^۲(\frac{۱}{۳}h_۱) \Rightarrow R_۱^۲ = R_۲^۲ \Rightarrow R_۱ = R_۲$$

$$\Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = ۱$$

۷.۳. مساحت

۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی

۴۸۷. اندازهٔ مولد این مخروط برابر است با :

$$l = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵$$

از آن‌جا :

$$S_{\text{جانبی}} = \frac{۱}{۲}\times ۲\pi Rl = \pi Rl \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = \pi\times ۴\times ۵ = ۲۰\pi$$

۴۸۸. داریم :

$$\text{شعاع مقطع متوسط} = \frac{R+R'}{۲} = \frac{۱۲+۸}{۲} = ۱۰$$

$$\text{مساحت جانبی} = \text{محیط مقطع متوسط} \times \text{طول مولد}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت جانبی} = (۲\pi\times ۱۰)\times ۹ = ۱۸۰\pi$$

نکته. می‌توان مساحت جانبی مخروط ناقص دوار را مستقیماً از دستور : $S_{\text{جانبی}} = \pi(R+R')l$ محاسبه کرد.

$$S_{\text{جانبی}} = \pi(۱۲+۸)\times ۹ = ۱۸۰\pi$$

۴۸۹. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا در این دوران، شکل ایجاد شده مخروط ناقص و شعاعهای دو قاعدهٔ آن ۴ و۷ و اندازهٔ مولدش $l = ۵$ است. پس :

$$S_{\text{جانبی}} = \pi(R+R')l \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = \pi(۴+۷)\times ۵ = ۵۵\pi$$

۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل

۴۹۰. می‌دانیم که S قاعده + S جانبی = S کل. امّا برای محاسبهٔ مساحت جانبی مخروط باید اندازهٔ مولد آن را بیابیم. داریم:

$$l=\sqrt{R^{۲}+h^{۲}}=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}(۲\pi\times ۶)\times ۱۰=۶۰\pi$$

$$S_{\text{قاعده}}=\pi R^{۲}=۳۶\pi \Rightarrow S_{\text{کل}}=۶۰\pi+۳۶\pi+۹۶\pi$$

۳.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت مقطع

۴۹۱. نقطهٔ C، مرکز دایره را به نقطهٔ D، وسط وتر AB، و همچنین، نقطهٔ D را به نقطهٔ E، رأس مخروط وصل می‌کنیم (شکل). چون CD بر AB عمود است و $\tan(DEC)=\frac{CD}{EC}$ بنابراین، زاویهٔ DEC، در بین همهٔ زاویه‌هایی که خط راست EC با خطهای راست مختلف واقع بر صفحهٔ مفروض که از E می‌گذرند، می‌سازد، کوچکترین زاویه است. بنابراین، خط راست ED، تصویر خط راست EC بر این صفحه است و داریم $D\hat{E}C=\varphi$. با در نظر گرفتن این موضوع، طول پاره‌خطهای ED و AB را محاسبه می‌کنیم و سپس S، مساحت مطلوب را به دست می‌آوریم.

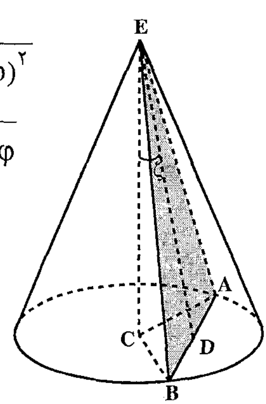
داریم:

$$ED=\frac{CE}{\cos\varphi}=\frac{R\tan\alpha}{\cos\varphi}\ ;$$

$$AB=۲AD=۲\sqrt{AC^{۲}-CD^{۲}}=۲\sqrt{R^{۲}-(CE\tan\varphi)^{۲}}$$

$$=۲\sqrt{R^{۲}-(R\tan\alpha\tan\varphi)^{۲}}=۲R\sqrt{۱-\tan^{۲}\alpha\tan^{۲}\varphi}$$

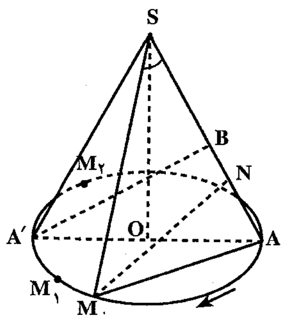
$$=\frac{۲R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi).\cos(\alpha-\varphi)}$$



و در نتیجه برای مساحت مطلوب S، داریم :

$$S = \frac{1}{2} AB.ED = \frac{R^2 \tan\alpha}{\cos\alpha \cos^2\alpha} \sqrt{\cos(\alpha+\varphi).\cos(\alpha-\varphi)}$$

۴.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر



۴۹۲. MN را عمود بر SA رسم می‌کنیم. مثلث SAM که قاعدهٔ SA از آن ثابت است، دارای ارتفاع متغیر MN می‌باشد، پس مساحت آن تغییر می‌کند، و مثلث قائم‌الزاویهٔ SMN که وتر SM از آن ثابت است، ضلع MN از آن تغییر می‌کند و این تغییر در همان جهتی است که زاویهٔ حادهٔ ASM تغییر می‌نماید.

اندازهٔ زاویهٔ رأس مخروط یعنی زاویهٔ $A\hat{S}A'$ را θ می‌نامیم و نخست فرض می‌کنیم که این زاویه، حاده یا قائمه باشد.

هنگامی که نقطهٔ M دایرهٔ قاعده را می‌پیماید، زاویهٔ $A\hat{S}M$ از ۰ تا θ زیاد می‌شود و سپس از θ تا ۰ کم می‌شود ؛ بنابراین MN از ۰ تا A′B زیاد می‌شود و از A′B تا صفر کم می‌شود، و مساحت SAM از صفر تا مساحت SA′A زیاد می‌شود، سپس تا صفر کم می‌گردد. این مساحت هنگامی ماکزیمم است که نقطهٔ M بر نقطهٔ A′ منطبق است.

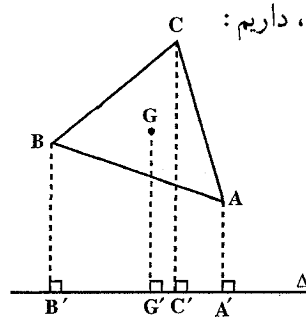
اکنون فرض می‌کنیم θ منفرجه است ؛ M_1 و M_2 را وضعیتهای نقطهٔ M برای حالتی می‌گیریم که زاویهٔ ASM قائمه است، و فرض می‌کنیم $SA = a$ است. هنگامی که نقطهٔ M کمانهای $\overset{\frown}{AM_1}$ ، $\overset{\frown}{M_1A'}$ ، $\overset{\frown}{A'M_2}$ و $\overset{\frown}{M_2A}$ را طی می‌کند، زاویهٔ حاده تشکیل شده به وسیلهٔ SM با خط SA، از صفر تا °۹۰ رشد می‌کند، از °۹۰ تا $۱۸۰^\circ - \theta$ کم می‌گردد، از $۱۸۰^\circ - \theta$ تا °۹۰ رشد می‌کند، سپس تا صفر کم می‌شود ؛ در نتیجه مساحت SAM از ۰ تا $\frac{a^2}{2}$ رشد می‌کند، از $\frac{a^2}{2}$ تا $\frac{a^2 \sin\theta}{2}$ کم می‌شود، از $\frac{a^2 \sin\theta}{2}$ تا $\frac{a^2}{2}$ رشد می‌کند و سپس تا صفر کم می‌شود.

همچنین در این حالت، مساحت مثلث وقتی می‌نیمم است که نقطهٔ M منطبق بر A یا A′

باشد و ماکزیمم است، هنگامی که نقطهٔ M بر نقطه‌های M_1 یا M_2 منطبق است.

۴۹۳. فاصله‌های رأسهای مثلث ABC از خط Δ را AA'، BB' و CC'، و اندازهٔ ضلع این مثلث را a می‌نامیم، داریم :

$$S_{AB} = \pi a(AA' + BB'),$$
$$S_{BC} = \pi a(BB' + CC'),$$
$$S_{CA} = \pi a(CC' + AA');$$



بنابراین سطح ایجاد شده از دوران محیط مثلث برابر است با :

$$S = 2\pi a(AA' + BB' + CC')$$

اگر GG' را فاصلهٔ مرکز ثقل مثلث ABC از خط Δ بنامیم، می‌دانیم که :

$$AA' + BB' + CC' = 3GG'$$

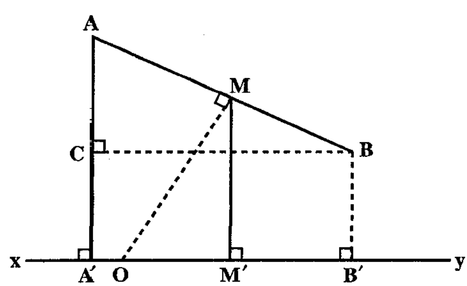
از آن‌جا به دست می‌آید :

$$S = 3a \times 2\pi GG'$$

و این رابطه‌ای است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۹۴. سطح جانبی خواسته شده را S می‌نامیم، داریم :

$$S = \pi(AA' + BB')AB$$



اما اگر تصویر نقطهٔ M روی محور را M' بنامیم، خواهیم داشت :

$$AA' + BB' = aMM'$$

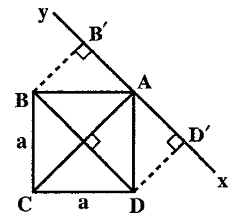
بنابراین :

$$S = 2\pi MM'AB$$

BC را موازی xy رسم می‌کنیم تا AA' را در نقطهٔ C قطع کند، دو مثلث ABC و OMM' متشابهند و داریم :

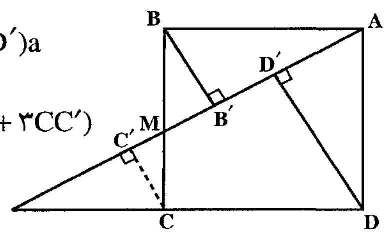
$$\frac{AB}{OM}=\frac{BC}{MM'}\Rightarrow AB.MM'=OM.BC=ab$$
$$\Rightarrow S=۲\pi ab$$

۴۹۵. سطح خواسته شده از دو مخروط مساوی به شعاع قاعدهٔ $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و مولد a، و دو مخروط ناقص به مولد a و شعاعهای دو قاعدهٔ $a\sqrt{۲}$ و $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ تشکیل می‌شود، بنابراین داریم :



$$S=۲\left[\pi\times\frac{a\sqrt{۲}}{۲}.a+\pi(a\sqrt{۲}+\frac{a\sqrt{۲}}{۲})a\right]$$
$$\Rightarrow S=\pi a^{۲}(\sqrt{۲}+۳\sqrt{۲})$$
$$\Rightarrow S=۴\sqrt{۲}\pi a^{۲}$$

۴۹۶. سطح مورد جستجو از سطحهای دو مخروط و یک مخروط ناقص تشکیل می‌شود.
یکی از این دو مخروط به مولد a و شعاع قاعدهٔ DD' و مخروط دیگر به مولد $\frac{a}{۲}$ و شعاع قاعدهٔ CC' است. مخروط ناقص نیز به شعاعهای قاعدهٔ CC' و DD'، و مولد a می‌باشد. بنابراین داریم :



$$S=\pi.DD'.a+\pi.CC'.\frac{a}{۲}+\pi(CC'+DD')a$$
$$S=۲\pi DD'.a+\frac{۳}{۲}\pi CC'.a=\frac{\pi}{۲}a(۴DD'+۳CC')$$

اگر توجه کنیم که DD' دو برابر CC' است، خواهیم داشت :

$$S=\frac{۱۱\pi aCC'}{۲}$$

CC' را محاسبه می‌کنیم. $CC'=BB'$ ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM است. بنابراین :

$$AB=a \quad , \quad MB=\frac{a}{۲}\Rightarrow MA=\frac{a\sqrt{۵}}{۲}$$

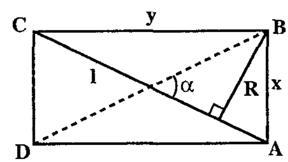
و از آن جا داریم :

$$CC'=\frac{a^{۲}}{a\sqrt{۵}}=\frac{a\sqrt{۵}}{۵}\ \Rightarrow S=\frac{۱۱\pi a^{۲}\sqrt{۵}}{۱۰}$$

۴۹۷. سطح ایجاد شده، سطح دو مخروط مساوی است که شعاع قاعدهٔ آنها مساوی نصف قطر مربع و مولد آنها ضلع مربع است. اگر a اندازهٔ ضلع مربع باشد، داریم:

$$S = ۲\pi a \frac{\sqrt{۲}}{۲} . a = \pi a^{۲} \sqrt{۲}$$

۴۹۸. سطح موردنظر از دو مخروط که مولدهای آنها، دو ضلع مستطیل و شعاع قاعدهٔ آنها فاصلهٔ یک رأس مستطیل از یک قطر آن است، تشکیل می‌شود.
یکی از دو ضلع مستطیل را x و دیگری را y می‌نامیم. x و y از دستورهای زیر محاسبه می‌شوند:



$$\frac{x}{۲} = \frac{l}{۲} \sin \frac{\alpha}{۲} \Rightarrow x = l \sin \frac{\alpha}{۲}$$

$$\frac{y}{۲} = \frac{l}{۲} \sin (\frac{۱۸۰^\circ - \alpha}{۲}) \Rightarrow y = l \cos \frac{\alpha}{۲}$$

R، فاصلهٔ یک رأس مستطیل از یک قطر آن برابر است با:

$$R = \frac{l}{۲} \sin \alpha$$

و از آن‌جا داریم:

$$S = \pi l \sin \frac{\alpha}{۲} . \frac{l}{۲} \sin \alpha + \pi l \cos \frac{\alpha}{۲} . \frac{l}{۲} \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \pi l \sin \alpha (\sin \frac{\alpha}{۲} + \cos \frac{\alpha}{۲})$$

۴۹۹. سطح موردنظر برابر است با، سطح کل یک مخروط ناقص به اضافهٔ سطح جانبی یک مخروط، منهای سطح قاعدهٔ این مخروط.
شعاع قاعدهٔ پایین مخروط ناقص $R = a$ و شعاع قاعدهٔ بالای آن:

$$r = b + \frac{a - b}{۲} = \frac{۱}{۲}(a + b)$$

شعاع قاعدهٔ مخروط:

$$r_۱ = \frac{۱}{۲}(a - b)$$

و مولد مخروطها مساوی C است.
از آن‌جا سطح موردنظر چنین می‌شود:

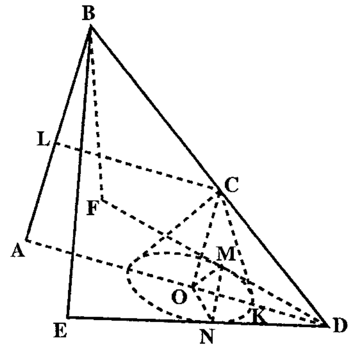
$$S_t = \pi (R + r) l + \pi R^{۲} + \pi r^{۲} + \pi r_۱ l - \pi r_۱^{۲}$$

$$= \pi\left[(a+\frac{a+b}{۲})c+a^۲+(\frac{a+b}{۲})^۲+\frac{a-b}{۲}c-(\frac{a-b}{۲})^۲\right]$$

$$= \pi(۲ac-a^۲+ab)=\pi a(a+b+۲c)$$

۵۰۰. تیر را با AB نمایش می‌دهیم (شکل). نقطهٔ B را به نقطهٔ C رأس مخروط وصل می‌کنیم، مانند BD و از BD صفحه‌های P و Q را مماس بر سطح مخروط می‌گذرانیم. در صفحهٔ ABD خط CL را موازی DA رسم می‌کنیم و در مثلث BCL داریم:

$B\hat{C}L = ۴۵^\circ$ و $CL = BL = ۲$



چون در مثلث OCL زاویهٔ D مساوی ۴۵° است، پس: $OD = OC = ۲$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ODN(N = ۹۰^\circ)$ چون $OD = ۲ON$ است، پس:

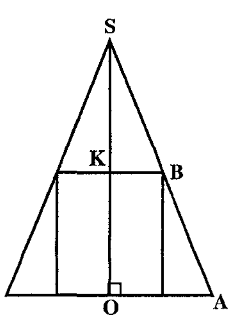
$O\hat{D}N = ۳۰^\circ$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$MN = ON\sqrt{۳} = \sqrt{۳}^m$ و $M\hat{O}N = ۱۲۰^\circ$

$$S_{DMKN} = S_{OMDN} - S_{OMKN} = \frac{۱}{۲}OD.MN - \frac{۱}{۳}\pi ON^۲$$

$$= \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\pi}{۳} = (\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۳})^{m^۲}$$



۵۰۱. فرض می‌کنیم R و H شعاع قاعده و ارتفاع مخروط و r و h شعاع قاعده و ارتفاع استوانه باشد (شکل). اگر O و K مرکزهای قاعده‌های مخروط و استوانه باشد، از تشابه دو مثلث SOA و SKB خواهیم داشت:

$$\frac{SK}{SO} = \frac{BK}{AO} \quad , \quad \frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r)$$

در نتیجه سطح جانبی استوانه خواهد شد :

$$S = ۲\pi rh = ۲\pi r \times \frac{H}{R}(R-r) = \frac{۲\pi H}{R}(-r^۲ + Rr)$$

اگر $y = -r^۲ + Rr$ فرض کنیم. این تساوی وقتی ماکزیمم است که $r = \frac{R}{۲}$ باشد ؛ در نتیجه خواهیم داشت :

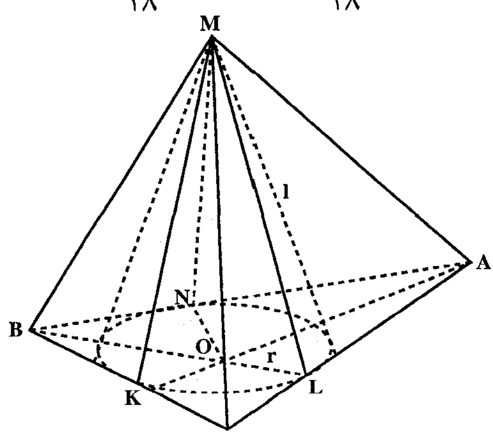
$$h = \frac{H}{R}(R - \frac{R}{۲}) = \frac{H}{۲}$$

۲.۷.۳. نسبت مساحتها

۵۰۲. جواب : $\pi\frac{۴\sqrt{۳}-۳}{۱۳}$

۵۰۳. شعاع قاعدهٔ مخروط را r و مولد آن را l می‌گیریم (شکل). سطح جانبی مخروط با مولدهای MK، ML و MN (که در طول آنها، سطح مخروطی با هرم محیطی مخروط مماس است)، به بخشهای $\frac{۵}{۱۸}\pi rl$ ، $\frac{۶}{۱۸}\pi rl$ و $\frac{۷}{۱۸}\pi rl$ تقسیم شده است. از آن‌جا :

$$\overset{\frown}{KL} = \frac{۱۰}{۱۸}\pi r \quad ; \quad \overset{\frown}{LN} = \frac{۱۲}{۱۸}\pi r \quad ; \quad \overset{\frown}{NK} = \frac{۱۴}{۱۸}\pi r$$



و بنابراین $\overset{\frown}{KL}:\overset{\frown}{LN}:\overset{\frown}{NK} = ۵:۶:۷$ ؛ به نحوی که :

$K\hat{O}L = ۱۰۰^\circ$ ، $L\hat{O}N = ۱۲۰^\circ$ و $N\hat{O}K = ۱۴۰^\circ$

مساحت بخشهایی از سطح جانبی هرم را، که به وسیلهٔ مولدهای MK، ML و MN تقسیم می‌شود، با $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ نشان می‌دهیم. روشن است که :

$$S_۱ = ۲S_{MCL} = CL.l = OL.\tan(LOC).l = rl\tan ۵۰^\circ$$

و به همین ترتیب :

$$S_۲ = rl\tan ۶۰^\circ \quad , \quad S_۳ = rl\tan ۷۰^\circ$$

به این ترتیب، داریم :

$$S_۱ : S_۲ : S_۳ = rl\tan ۵۰^\circ : rl\tan ۶۰^\circ : rl\tan ۷۰^\circ = \tan ۵۰^\circ : \tan ۶۰^\circ : \tan ۷۰^\circ$$

۸.۳. حجم

۱.۸.۳. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم مخروط

۵۰۴. مساحت مثلث مولد، مساوی $\frac{۱}{۲}rh$، و محیط دایره مساوی $۲\pi r$ است. بنابراین $\frac{۱}{۳}$ حاصلضرب این دو مقدار برابر است با :

$$\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} rh \times ۲\pi r = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

بنابراین حکم ثابت است.

۵۰۵. این مسأله یک حالت خاص از حجم ایجاد شده از دوران یک مثلث حول خطی است که از یک رأس آن و در صفحهٔ آن، رسم شده باشد.
این مسأله را می‌توان تعمیم مسأله مربوط به هرم منتظم دانست.

۵۰۶. ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{۱}{۳}$ = حجم مخروط مستدیر

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط مستدیر} = \frac{۱}{۳} \times \pi (۳/۲)^۲ \times ۱۲ = ۴۰/۹۶\pi$$

۵۰۷. شعاع قاعدهٔ مخروط را R می‌نامیم. داریم :

$$۲R = ۱۰ \Rightarrow R = ۵ \quad \text{و} \quad \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳} \times \pi (۲۵) \times ۶ = ۵۰\pi$$

۵۰۸. در رساله، برای حل این مسأله، قاعدهٔ زیر داده شده است :
«محیط قاعده را در خودش ضرب کن، بعد در ارتفاع ضرب کن. بر ۳۶ تقسیم کن.» به این ترتیب، چینی‌ها، حجم مخروط را از این رابطه به دست می‌آورده‌اند :

$$V = \frac{h}{۳} . \frac{C^۲}{۴\pi}$$

که در آن، C عبارت است از محیط قاعدهٔ مخروط. ضمناً چینی‌ها، عدد π را برابر ۳ می‌گرفته‌اند.

۵۰۹. ارتفاع مخروط $h = ۳/۵ \ m$ و شعاع قاعدهٔ آن $R = ۱/۵ \ m$ است، پس :

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi \times (۱/۵)^۲ \times ۳/۵ = ۲/۶۲۵\pi$$

۵۱۰. داریم :

$$۲\pi R = ۳۱/۴$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۳/۱۴ \times R = ۳۱/۴ \Rightarrow R = ۵ \ \text{شعاع قاعدهٔ مخروط}$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi \times ۲۵ \times ۹ = ۷۵\pi$$

۵۱۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۱۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۱۳. ارتفاع مخروط بزرگ را h، شعاع قاعده‌اش را R و ارتفاع مخروط بالایی را h'، و شعاع قاعدهٔ آن را R' می‌نامیم. داریم :

$h = ۵ \ , \ h' = ۲$ و

$$\text{حجم مخروط بالایی} = \frac{۱}{۳}\pi R'^۲ h' \Rightarrow ۲۴\pi = \frac{۱}{۳} \times \pi \times R'^۲ \times ۲$$

$$\Rightarrow ۷۲\pi = ۲\pi R'^۲ \Rightarrow R'^۲ = ۳۶ \Rightarrow R' = ۶ \ \text{شعاع قاعدهٔ مخروط بالایی}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{h'}{h} \Rightarrow \frac{۶}{R} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow R = ۱۵ \ \text{شعاع قاعدهٔ مخروط داده شده}$$

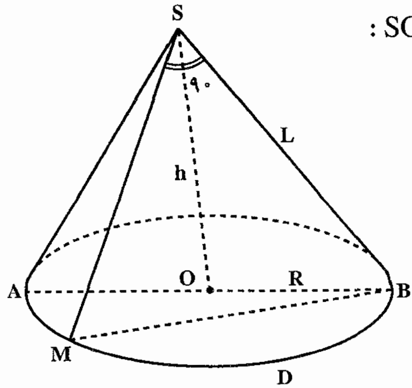
$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi (۱۵)^۲ \times ۵ = ۳۷۵\pi \ \text{حجم مخروط داده شده}$$

۵۱۴. فرض می‌کنیم $SM = SB = l$ و $OB = R$ و $SM \perp SB$ باشد. در این صورت :
$M\hat{D}B = ۱۲۰^\circ$ ، $M\hat{S}B = ۹۰^\circ$ و $BM = R\sqrt{۳}$ است. از مثلث MSB داریم :

$$۲l^۲ = ۳R^۲ \qquad (۱)$$

و از مثلث SOB :

$$l^{۲} = R^{۲} + h^{۲} \quad (۲)$$



از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که :

$$R^{۲} = ۲h^{۲} \quad (۳)$$

$$\Rightarrow V = \frac{۲}{۳}\pi h$$

۵۱۵. پس از گسترش مخروط، قطاعی به دست می‌آید که شعاع آن برابر با l، مولد و طول قوس قطاع برابر با محیط قاعدهٔ مخروط $۲\pi R$ است R(را شعاع قاعدهٔ مخروط گرفته‌ایم).

بنابراین :

$$\frac{\pi l \times ۳۶}{۱۸۰} = ۲\pi R \Rightarrow l = ۱۰R$$

و سطح جانبی مخروط :

$$S = \pi R l = ۱۰\pi R^{۲} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{۱۰\pi}}$$

و ارتفاع مخروط :

$$h = \sqrt{l^{۲} - R^{۲}} = R\sqrt{۹۹} = \sqrt{\frac{۹۹S}{۱۰\pi}}$$

و حجم مخروط :

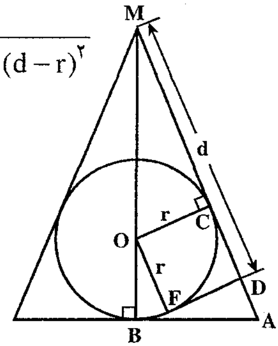
$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^{۳} h = \frac{۱}{۱۰}\sqrt{\frac{۱۱S^{۳}}{۱۰\pi}}$$

۵۱۶. جواب : $V = ۳۷۰ \ cm^{۳}$

۵۱۷. مولدی از مخروط را در نظر می‌گیریم که صفحهٔ مماس بر کره، بر آن عمود باشد و سپس، صفحه‌ای از این مولد و محور مخروط می‌گذرانیم تا مقطع مخروط به دست آید (شکل). اثر این صفحه، در روی شکل، متناظر با خط راست DF است. نقطهٔ O، مرکز کره را، به C، نقطهٔ تماس کره با مولد MA، و به نقطهٔ F، نقطهٔ تماس کره با صفحه‌ای که

رسم کردیم، وصل می‌کنیم. روشن است که چهارضلعی COFD، مربعی است به ضلع r. برای ارتفاع مخروط داریم:

$$MB = OB + OM = OB + \sqrt{OC^۲ + CM^۲}$$
$$= OB + \sqrt{OC^۲ + (MD - CD)^۲} = r + \sqrt{r^۲ + (d-r)^۲}$$



AB، یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط را، از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABM و OCM، به دست می‌آوریم:

$$\frac{AB}{OC} = \frac{MB}{MC}؛\ AB = OC.\frac{MB}{MC} = r.\frac{r + \sqrt{r^۲ + (d-r)^۲}}{d-r}$$

و بنابراین، برای حجم مخروط داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi.AB^۲.MB = \frac{۱}{۳}\pi r^۲.\frac{\left[r + \sqrt{r^۲ + (d-r)^۲}\right]^۳}{(d-r)^۲}$$

یادداشت. صفحهٔ مماس دیگری هم (به جز آن چه در شکل نشان داده شده است) وجود دارد. این صفحه، به فاصلهٔ ۲r از صفحه‌ای که ساخته‌ایم، قراردارد. در این حالت، حجم مخروط، چنین می‌شود:

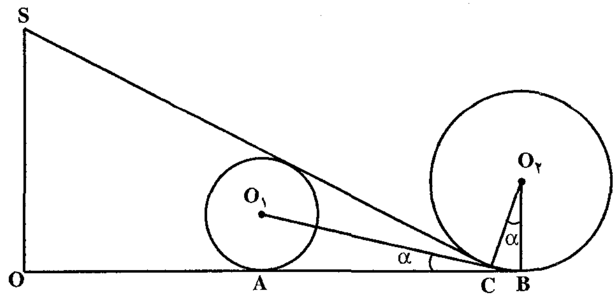
$$V = \frac{\pi r^۲}{۳}.\frac{\left[r + \sqrt{r^۲ + (d+r)^۲}\right]^۳}{(d+r)^۲}$$

۵۱۸. بدون این که به کلیت مسأله خدشه‌ای وارد آید، ملاحظه می‌کنیم که همهٔ مولدهای مخروط بر کره‌هایی که به‌طور همزمان با دو کرهٔ دیگر در تماسند، مماس می‌باشند: داخلی و خارجی.

مقطعی را از رأس S مخروط و مرکزهای دو کره‌ای که بر یک مولد مماسند، می‌گذرانیم

(شکل. مشخصات، به‌طور واضح در شکل نشان داده شده است). از فرض مسأله مبنی بر این که n کره به شعاع R بر یکدیگر مماسند، نتیجه می‌شود:

$$OA = \frac{R}{\sin \pi/n}$$



و به طریق مشابه:

$$OB = \frac{2R}{\sin \pi/n}$$

در نتیجه:

$$AB = a = \frac{R}{\sin \pi/n}$$

اگر $AC = x$ ، آن‌گاه:

$$\cot \alpha = \frac{2R}{a-x} \quad \text{و} \quad \tan \alpha = \frac{R}{x}$$

از ضرب این تساویها در هم معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$x^2 - ax + 2R^2 = 0$$

از آن‌جا:

$$x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8R^2}}{2}$$

و

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8R^2}}{2}$$

که در آن:

$$a = \frac{R}{\sin \pi/n}$$

از شرط $a^2 - 8R^2 \geq 0$ نامساوی:

$$\sin \pi/n \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

نتیجه می‌شود. علاوه بر این، نامساوی:

$$\tan \alpha = \frac{R}{x} < 1$$

هم باید برقرار باشد.

اکنون به آسانی می‌توان ریشه مناسب x_2 را به ازای $\frac{1}{2\sqrt{2}} \geq \sin\pi/n > \frac{1}{3}$ به دست آورد.

برای x_2 یک محدودیت باقی می‌ماند :

$$\sin\pi/n \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

می‌توان ثابت کرد تنها به ازای $n=9$،

$$\frac{1}{3} < \sin\pi/n \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

حجم مخروط برابر خواهد بود با :

$$\frac{1}{3}\pi(a+x)^3\tan 2\alpha$$

با قراردادن a، x و $\tan 2\alpha$ برحسب R و n با استفاده از فرمولهای مناسب، جواب مسأله را به دست می‌آوریم :

$$V=\frac{\pi R^3\left(3+\sqrt{1-8\sin^2\pi/n}\right)^3\left(1+\sqrt{1-8\sin^2\pi/n}\right)}{12\sin^2\pi/n\left(1-6\sin^2\pi/n+\sqrt{1-8\sin^2\pi/n}\right)}$$

$$n \geq 9$$

علاوه بر این به ازای $n=9$ یک جواب اضافی امکان‌پذیر است :

$$\frac{\pi R^3\left(3-\sqrt{1-8\sin^2\pi/9}\right)^3\left(1-\sqrt{1-8\sin^2\pi/9}\right)}{12\sin^2\pi/9\left(1-6\sin^2\pi/9-\sqrt{1-8\sin^2\pi/9}\right)}$$

۳.۸.۱.۲. بیشترین مقدار حجم مخروط

۵۱۹. داریم : $V=\frac{\pi x^2 y}{3}$ و $x^2+y^2=l^2$

۵۲۰. فرض می‌کنیم x، y و πa^2 بترتیب، ارتفاع، شعاع قاعده و مساحت کل یک مخروط و

V حجم آن باشد.

می‌دانیم که :

$$\pi y^۲ + \pi y\sqrt{x^۲ + y^۲} = \pi a^۲ \qquad (۱)$$

و

$$V = \frac{۱}{۳}\pi y^۲ x$$

رابطهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت :

$$y\sqrt{x^۲ + y^۲} = a^۲ - y^۲$$

از آن‌جا :

$$y < a \text{ یا } y^۲ = \frac{a^۴}{x^۲ + ۲a^۲} \qquad (۲)$$

و نتیجه می‌شود :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{a^۴ x}{x^۲ + ۲a^۲}$$

برای یافتن ماکزیمم V یا می‌نیمم $\frac{x^۲ + ۲a^۲}{x}$ ؛ داریم $\frac{x^۲ + ۲a^۲}{x} = x + \frac{۲a^۲}{x}$ و دیده می‌شود که حاصلضرب دو عالم این مجموع مساوی $۲a^۲$، یعنی ثابت است. پس این مجموع وقتی کمترین مقدار ممکن است که این دو عامل مساوی باشند. یعنی داشته باشیم :

$$x = \frac{۲a^۲}{x} \Rightarrow x = a\sqrt{۲}$$

و از رابطهٔ (۲) حاصل می‌شود :

$$y^۲ = \frac{a^۴}{۴a^۲} = \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow y = \frac{a}{۲}$$

بنابراین، مخروطی که بیشترین حجم را دارد، شعاع قاعده‌اش $\frac{a}{۲}$، ارتفاعش $a\sqrt{۲}$ است، و از آن، نتیجه می‌شود که طول مولدش $\frac{۳a}{۲}$ است.

۵۲۱. مسأله، شبیه مسألهٔ استوانهٔ ایجاد شده به وسیلهٔ یک مستطیل با محیط ثابت است. اما حجم، سه بار کمتر از حجم استوانه‌ای است که همین مقدار ثابت را برای مجموع ارتفاع و شعاع قاعده‌اش دارد.

۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم مخروط ناقص

۵۲۲. اگر شعاع قاعده‌های مخروط ناقص را بترتیب $R_۱$ و r فرض کنیم، با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{R_۱^۲}{r^۲}=۲ \quad \Rightarrow R_۱=r\sqrt{۲}$$

مولد مخروط ناقص: $R_۱+r=r(\sqrt{۲}+۱)$ و ارتفاع مخروط $۲R$ و تصویر مولد بر قاعدهٔ مخروط: $R_۱-r=r(\sqrt{۲}-۱)$ می‌شود و از آن‌جا:

$$\left[r(\sqrt{۲}+۱)^۲\right]^۲=۴R^۲+\left[r(\sqrt{۲}-۱)\right]^۲ \Rightarrow r^۲=\frac{R^۲\sqrt{۲}}{۲}$$

جواب: $V=\frac{\pi R^۳}{۳}(۳\sqrt{۲}+۲)$

۵۲۳. $R=۳ \quad , \quad R'=۲ \quad , \quad h=۳$

$$V=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})=\frac{۳}{۴}(۹\pi+۴\pi+\sqrt{۹\pi\times۴\pi})$$

$$V=۱۳\pi+۶\pi=۱۹\pi$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

۵۲۴. گزینهٔ (۳) درست است؛ زیرا داریم:

ارتفاع مخروط ناقص دوار $=h=\sqrt{۱۳^۲-(۸-۳)^۲}=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=۱۲$

حجم مخروط ناقص دوار $=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})$

$$\Rightarrow V=\frac{۱۲}{۳}(۶۴\pi+۹\pi+\sqrt{۶۴\pi\times۹\pi})=۴\times۹۷\pi=۳۸۸\pi$$

۵۲۵. داریم:

$$V=\frac{h}{۳}(S+S'+\sqrt{SS'})$$

$$\Rightarrow V=\frac{۸}{۳}(۱۶\pi+۳۶\pi+\sqrt{۱۶\pi\times۳۶\pi})$$

$$\Rightarrow V=\frac{۸}{۳}(۷۶\pi)=\frac{۶۰۸\pi}{۳}$$

۵۲۶. چینی‌ها، این مسأله را با این قاعده حل می‌کردند: «محیط قاعده‌های بالا و پایین را درهم ضرب کن. هرکدام را در خودش ضرب کن. همهٔ اینها را جمع کن و ضرب کن در ارتفاع. بر ۳۶ تقسیم کن.»

بنابراین، حجم مخروط ناقص، در چین باستان، از روی این رابطه پیدا می‌شد:

$$V = \frac{(Cc + C^۲ + c^۲)h}{۳۶}$$

که اگر π را برابر ۳ بگیریم، می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$V = \frac{h}{۳} \cdot \frac{Cc + C^۲ + c^۲}{۴\pi}$$

که در آن، C و c، بترتیب، محیط قاعده‌های پایین و بالای مخروط ناقص و h ارتفاع آن است.

۵۲۷. فرض می‌کنیم $h = ۴(r - r')$ باشد، داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}h(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{۴}{۳}(r - r')(\pi r^۲ + \pi r'^۲ + \pi rr')$$

$$= \frac{۴}{۳}\pi r^۳ - \frac{۴}{۳}\pi r'^۳$$

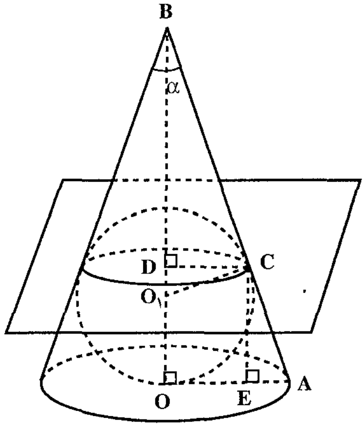
۵۲۸. در حل این مسأله، عاملهای زیر را در نظر بگیرید:

(۱). مرکز کرهٔ محاط در داخل مخروط، بر روی سطح کرهٔ دوم قرار می‌گیرد. (قضیه نظیر آن را در هندسهٔ مسطحه ملاحظه کنید.)

(۲) از این که مرکز کرهٔ محاطی، بر روی سطح کرهٔ دوم قرار دارد، معلوم می‌شود که مساحت سطح جانبی کرهٔ محاطی، برابر با ۴Q و شعاع آن برابر است با $\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

(۳) حجم مخروط ناقص، که در آن کره محاط شده نیز برحسب مساحت کل مخروط ناقص و شعاع کره بیان می‌شود؛ یعنی $V = \frac{۱}{۳}S\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$.

۵۲۹. BO را ارتفاع مخروط می‌گیریم (شکل). این ارتفاع از $O_۱$، مرکز کره، و O، مرکز قاعده می‌گذرد. از C، نقطهٔ تماس کره با مولد AB، عمود CD را بر ارتفاع BO فرود می‌آوریم و نقطهٔ $O_۱$، مرکز کره را، به نقطهٔ C وصل می‌کنیم؛ زاویهٔ $DBO_۱$ به دست می‌آید که ضلعهای آن بر ضلعهای زاویهٔ ABO عمود و بنابراین، برابر $\frac{\alpha}{۲}$ است. از نقطهٔ



C، عمود CE را بر صفحهٔ قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم. در ضمن به دست می‌آید:

$$A\hat{C}E = A\hat{B}O = \frac{\alpha}{۲}$$

حجم مجهول چنین است:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi(CD^{۲} + CD.OA + OA^{۲}).DO$$

پاره‌خطهایی را که در این رابطه وجود دارد، محاسبه می‌کنیم:

$$CD = O_۱C.\cos(DCO_۱) = r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

$$DO = DO_۱ + O_۱O = O_۱C.\sin(DCO_۱) + r = r(۱+\sin\frac{\alpha}{۲});$$

$$OA = AC = \frac{CE}{\cos(ACE)} = \frac{DO}{\cos\frac{\alpha}{۲}} = \frac{r(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

این مقدارها را در رابطهٔ مربوط به حجم قرار می‌دهیم:

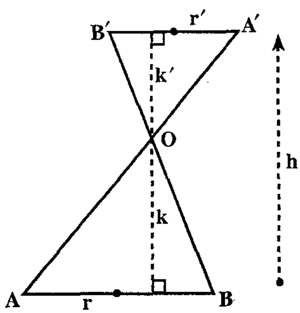
$$V = \frac{\pi}{۳}\left[(r\cos\frac{\alpha}{۲})^{۲} + r\cos\frac{\alpha}{۲}.\frac{r(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})}{\cos\frac{\alpha}{۲}} + \frac{r^{۲}(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})^{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\right]r(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})$$

$$= \frac{\pi r^{۳}(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})}{۳} \times \left[۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲} + ۱ + \sin\frac{\alpha}{۲} + \frac{(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})^{۲}}{۱-\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\right]$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi r^{۳}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}\left(۱-\sin\frac{\alpha}{۲} + ۱ + \frac{۱}{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}\right) =$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi r^{۳}\left(۱+\sin\frac{\alpha}{۲}\right)^{۲}\frac{۳-۳\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۱-\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

$$=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}.\frac{\cos^{۴}(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۴})}{\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۴})}.(۳-۳\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin^{۲}\frac{\alpha}{۲})$$



۵۳۰. مخروط ناقصی در نظر می‌گیریم که محدود به، یک سطح مخروطی با هادی مستدیر، و دو صفحهٔ موازی با منحنی هادی است که در دو طرف رأس قرار دارند.

فرض می‌کنیم r و ′r شعاعهای دو قاعده و h فاصلهٔ بین قاعده‌های آن باشند. این جسم از مجموع دو مخروط تشکیل می‌شود. حجم این جسم برابر است با :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}k+\frac{۱}{۳}\pi r'^{۲}k'$$

k و ′k را بر حسب داده‌های مسأله حساب می‌کنیم. داریم :

$$\frac{k}{r}=\frac{k'}{r'}=\frac{h}{r+r'} \Rightarrow k=\frac{hr}{r+r'} \quad , \quad k'=\frac{hr'}{r+r'}$$

با جایگذاری نتیجه می‌شود :

$$V=\frac{\pi h}{۳}(\frac{r^{۳}+r'^{۳}}{r+r'})=\frac{\pi h}{۳}(r^{۲}-rr'+r'^{۲})$$

۵۳۱. مخروط ناقص دواری به شعاعهای دو قاعدهٔ r و ′r، و ارتفاع h را در نظر می‌گیریم. حجم این مخروط ناقص برابر است با :

$$V=\frac{\pi h}{۳}(r^{۲}+r'^{۲}+rr')$$

حجم استوانه و مخروط دوار با همین ارتفاع h و شعاعهای قاعدهٔ $\frac{r+r'}{۲}$ و $\frac{r-r'}{۲}$ برابر است با :

$$v = \pi h\left(\frac{r+r'}{۲}\right)^{۲} \quad , \quad v' = \frac{\pi h}{۳}\left(\frac{r-r'}{۲}\right)^{۲}$$

و داریم:

$$v+v' = \frac{\pi h}{۳}\left[۳\left(\frac{r+r'}{۲}\right)^{۲} + \left(\frac{r-r'}{۲}\right)^{۲}\right] = \frac{\pi h}{۳}(r^{۲}+r'^{۲}+rr')$$

و بنابراین $v+v'=V$ است.

۵۳۲. استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:

$$b = b' = b'' = \pi r^{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{h}{۶}(b+b'+۴b^{۶}) = \frac{h}{۶}\times ۶\pi r^{۲} = \pi r^{۲}h$$

که این عبارت، حجم استوانه است.

برای مخروط، اگر r و h شعاع قاعده و ارتفاع باشند، داریم:

$$b=\pi r^{۲} \text{ و } b'=۰ \text{ و } b''=\pi\times\frac{r^{۲}}{۴}$$

و

$$\frac{h}{۶}(b+b'+۴b^{۶}) = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$

بالاخره، اگر r ، r' و h شعاعهای قاعده‌ها و ارتفاع یک مخروط ناقص باشند،

$$b=\pi r^{۲} \text{ و } b'=\pi r'^{۲} \text{ و } b''=\frac{\pi}{۴}(r+r')^{۲}$$

در این صورت:

$$\frac{h}{۶}(b+b'+۴b'') = \pi\frac{h}{۶}(۲r^{۲}+۲r'^{۲}+۲rr') = \frac{\pi h}{۳}(r^{۲}+r'^{۲}+rr')$$

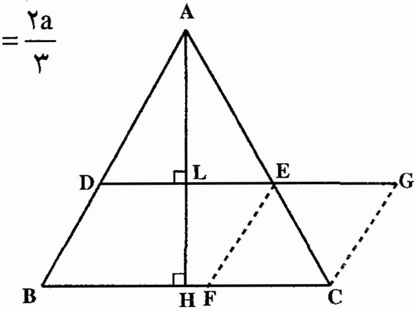
عبارت بالا، دستور محاسبهٔ حجم مخروط ناقص است.

۴.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۵۳۳. فرض می‌کنیم محور DE از نقطه‌های D و E که ضلعهای AB و AC را به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس A تقسیم کرده‌اند، بگذرد.

نقطهٔ برخورد DE و ارتفاع AH را L می‌نامیم. داریم :

$$AL = \frac{۲}{۳}AH = ۲\frac{h}{۳} \text{ و } LH = \frac{h}{۳} \text{ و } DE = \frac{۲a}{۳}$$



خطهای موازی EF و CG را رسم می‌کنیم.

مثلث DAE مخروطهایی را به‌وجود می‌آورد که AL شعاع قاعدهٔ مشترک آنها و DE مجموع ارتفاعهای آنهاست ؛ بنابراین :

۱. داریم :

$$V_{(ADE)} = \frac{\pi.AL^۲.DE}{۳} = \frac{\pi}{۳}.\frac{۴h^۲}{۹}.\frac{۲a}{۳} = \frac{۸ah^۲}{۸۱} \qquad (۱)$$

۲. حجم ایجاد شده توسط متوازی‌الاضلاع DBFE هم‌ارز حجم به‌وجود آمده به وسیلهٔ مستطیلی است که DE قاعده و LH ارتفاع آن است.

$$V_{(DBEF)} = \pi LH^۲.DE = \pi.\frac{h^۲}{۹}.\frac{۲a}{۳} = \frac{۲\pi h^۲a}{۲۷} \qquad (۲)$$

حجم ایجاد شده به وسیلهٔ مثلث FEC که در آن ضلع $FC = EG = \frac{a}{۳}$ موازی محور است، دو برابر حجم ایجاد شده به وسیلهٔ ECG است. بنابراین :

$$V_{(EFC)} = \frac{۲\pi}{۳}LH^۲.FC = \frac{۲\pi}{۳}.\frac{h^۲}{۹}.\frac{a}{۳} = \frac{۲\pi ah^۲}{۸۱} \qquad (۳)$$

$$V_{(DBCE)} = (۲)+(۳) = \frac{۶\pi ah^۲ + ۲\pi ah^۲}{۸۱} = \frac{۸\pi ah^۲}{۸۱} \qquad (۴)$$

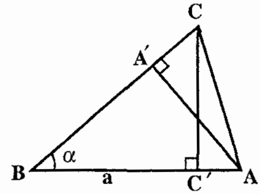
بنابراین حجمهای (۱) و (۴) هم ارز (معادل) یکدیگرند. هرچند که سطحهای ADE یا $\frac{۴}{۱۸}ah$ ، و DBCE یا $\frac{۵}{۱۸}ah$ ، با هم مساوی نیستند.

تبصره. هنگامی که محور رسم شده از نقطهٔ برخورد میانه‌های یک مثلث، بر یکی از میانه‌های مثلث قرارگیرد، مثلث به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌شود، برای هر حالت دیگری از محور، مثلث به دو بخش نابرابر تقسیم می‌شود. حداکثر مقدار اختلاف بین

دو بخش مثلث، وقتی است که محور، موازی یکی از ضلعهای مثلث باشد و مقدار این اختلاف ماکزیمم $\frac{۱}{۹}$ مساحت مثلث است. اما وضع محور دوران هرچه باشد، حجمهای ایجاد شده از دوران هر بخش از مثلث، هم‌ارز می‌باشند.

۵۳۴. فرض می‌کنیم B روی xy و نقطهٔ C' تصویر نقطهٔ C روی AB، بین A و B باشد. حجم ایجاد شده به وسیلهٔ مثلث مجموع حجم دو مخروط است.

$$V = \frac{۱}{۳}\pi CC'^{۲}(BC' + C'A) = \frac{۱}{۳}\pi CC'^{۲}.AB$$



اگر نقطهٔ C' خارج پاره‌خط AB باشد، بازهم به همین مقدار برای V می‌رسیم. با توجه به این که $CC'.AB = BC.AA'$ است، نتیجه می‌شود :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi CC'.BC.AA'$$

و در نتیجه $V = \frac{۱}{۳}\pi a\sin\alpha.a.h$ و یا $V = \frac{۱}{۳}\pi a^{۲}h\sin\alpha$.

حال اگر B روی xy نباشد، و نقطهٔ برخورد BC با xy را I بنامیم، داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi CC'.BI.AA' - \frac{۱}{۳}\pi BB'.CI.AA'$$

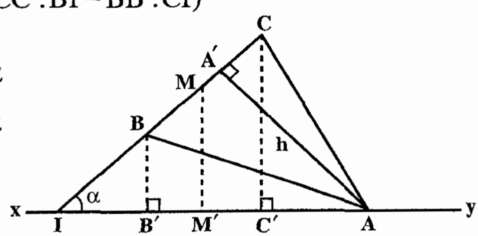
$$V = \frac{۱}{۳}\pi AA'(CC'.BI - BB'.CI)$$

امّا :

$$CC' = CI\sin\alpha$$

و

$$BB' = BI\sin\alpha$$



بنابراین داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi AA'(CI^{۲} - BI^{۲})\sin\alpha \Rightarrow$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi ha(BI + CI)\sin\alpha$$

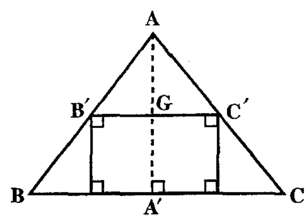
و $BI+CI=aIM$ (M وسط BC است). نهایتاً خواهیم داشت :

$$V=\frac{۲}{۳}\pi ahMM'$$

دیده می‌شود که این حجم وابسته به MM' است. بدین معنی که وضع پاره‌خط BC روی خطی که روی آن قرار دارد، این حجم متناسب با MM' تغییر می‌کند و در نتیجه هنگامی که نقطهٔ وسط BC از محور دوران دور می‌شود، این حجم نیز رشد می‌کند.

۵۳۵. حجم مورد محاسبه تشکیل می‌شود از :

۱. حجم یک استوانه به ارتفاع $B'C'$ و شعاع $\frac{۱}{۳}AA'$ (AA' ارتفاع مثلث است).



۲. حجم دو مخروط مساوی که دارای یک شعاع قاعده مساوی شعاع قاعدهٔ استوانه‌اند و ارتفاع آنها $\frac{۱}{۶}$ ضلع BC است. از آن‌جا داریم :

$$V=\pi\times\frac{a^{۲}}{۱۲}\times\frac{۲}{۳}a+۲\times\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{a^{۲}}{۱۲}\times\frac{۱}{۶}a$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi a^{۳}}{۱۸}+\frac{\pi a^{۳}}{۱۰۸}=\frac{۷\pi a^{۳}}{۱۰۸}$$

۵۳۶. به آسانی دیده می‌شود که مقطع جسم مفروض با صفحه‌ای عمود بر محور دوران، یک تاج دایره به‌وجود می‌آورد که، مساحت آن، مستقل از فاصلهٔ بین محور دوران و صفحهٔ مثلث است.

جواب : $\frac{\pi a^{۳}\sqrt{۳}}{۲۴}$

۵۳۷. اگر a اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، $V=\frac{\pi a^{۳}}{۴}$.

برای مثلثی دلخواه که b اندازهٔ قاعدهٔ آن و این قاعده روی محور دوران و ارتفاعش h باشد، داریم :

$$V=\frac{\pi h^{۲}b}{۳}$$

۵۳۸. حجم به وجود آمده از دو مخروط مساوی به شعاع قاعدهٔ $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a}{۲}$ تشکیل می‌شود. بنابراین داریم :

$$V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{۳a^{۲}}{۴} \times \frac{a}{۲} = \frac{\pi a^{۳}}{۴}$$

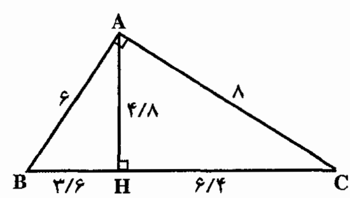
۵۳۹. داریم : $V = \frac{\pi a^{۳}}{۲}$

تبصره. مثلث متساوی الاضلاع ABC ، هنگامی که حول محور MN ، که از رأس A، درصفحهٔ آن رسم شده است، دوران کند، حجمی به‌وجود می‌آورد که بین $\frac{\pi a^{۳}}{۴}$ و $\frac{\pi a^{۳}}{۲}$ قرار دارد.

کمترین مقدار حجم وقتی است که ضلع AC روی محور دوران قرار دارد و بیشترین مقدار حجم وقتی است که محور دوران موازی ضلع BC باشد.

۵۴۰. جواب : $V = \frac{۱}{۳}\pi ab^{۲}$

۵۴۱. گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا حجم مورد نظر مساوی مجموع حجمهای دو مخروط است که شعاع قاعدهٔ مشترک آنها مساوی ۴/۸ و ارتفاعهایشان ۳/۶ و ۶/۴ است. بنابراین داریم :

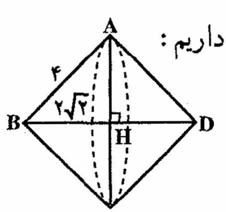


$$V_{۱} = \frac{۱}{۳}\pi(۴/۸)^{۲} \times ۳/۶ = ۲۷/۶۴۸\pi$$

$$V_{۲} = \frac{۱}{۳}\pi(۴/۸)^{۲} \times ۶/۴ = ۴۹/۱۵۲\pi$$

$$\Rightarrow V_{۱} + V_{۲} = ۷۶/۸\pi$$

۵۴۲. حجم جسم حاصل دو برابر حجم مخروطی است که شعاع قاعده‌اش مساوی نصف قطر مربع یعنی $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}$ و ارتفاعش نیز $۲\sqrt{۲}$ است. بنابراین داریم :



$$\text{حجم یک مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۲})^{۲} \times ۲\sqrt{۲} = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳}\pi$$

$$\text{حجم جسم} = ۲\times\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۳}\pi=\frac{۳۲\sqrt{۲}\pi}{۳}$$

۵۴۳. حجم ایجاد شده برابر است باتفاضل دو برابر حجم یک مخروط ناقص به شعاعهای قاعدهٔ $a\sqrt{۲}$ و $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ، و یک مخروط به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$.

بنابراین داریم :

$$V=۲\times\frac{۱}{۳}\times\pi\times\frac{a\sqrt{۲}}{۲}(۲a^۲+\frac{a^۲}{۲}+a^۲)-۲\times\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{a^۲}{۲}\times\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$V=\pi\sqrt{۲}a^۳$$

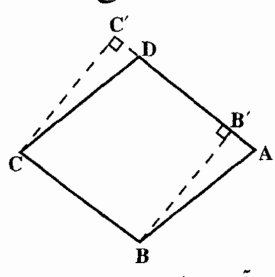
۵۴۴. حجم موردنظر برابر است با :

$$V=\frac{\pi a^۳}{۴}(۳+۲\sqrt{۳})$$

۵۴۵. از نقطه‌های B و C عمودهای BB' و CC' را بر محور دوران AD فرود می‌آوریم. حجم ایجاد شده از دوران لوزی، مساوی حجم ایجاد شده از دوران مستطیل $BCC'B'$ است. اما این حجم یک استوانه به شعاع قاعدهٔ $BB'=a\sin\alpha$ و به ارتفاع a است.

بنابراین داریم :

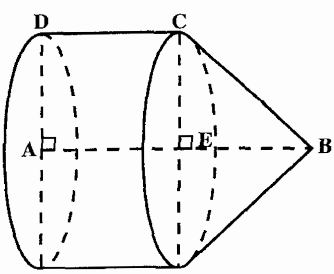
$$V=\pi a^۳\sin^۲\alpha$$



۵۴۶. ارتفاع مخروط به وجود آمده برابر :

$$EB=AB-AE=۶-۳=۳$$

است.



$$\text{حجم استوانه} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۹\pi\times ۳ = ۲۷\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳}۹\pi\times ۳ = ۹\pi$$

$$\text{حجم جسم حاصل} = ۲۷\pi + ۹\pi = ۳۶\pi$$

پس گزینهٔ (۳) درست است.

۵۴۷. در شکل، مقطع محور جسم دوار (شکل هاشور خورده) نشان داده شده است. برای محاسبهٔ حجم مجهول V ، باید حجم مخروط DCK را از مجموع حجمهای مخروط ABL و مخروط ناقص LKDA کم کرد. داریم:

$$V = \frac{\pi}{۳}\left[AF^۲.BF + (AF^۲ + AF.DE + DE^۲).EF - DE^۲.EC\right]$$

$$= \frac{\pi}{۳}\left[AF^۲(BF+FE) + DE^۲(FE-EC) + AF.DE.EF\right]$$

$$= \frac{\pi}{۳}(AF^۲.BE + DE^۲.FC + AF.DE.EF)$$

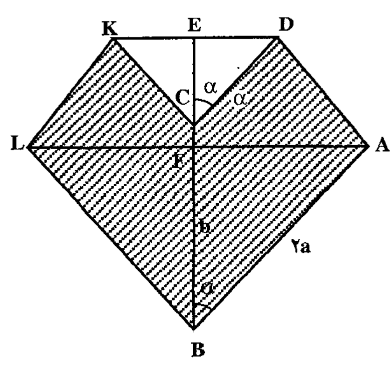
$$= \frac{\pi}{۳}\left[AF^۲(BC+CE) + DE^۲(BC-FB) + AF.DE(BC+CE-BF)\right]$$

$$= \frac{\pi}{۳}\Big[(۲a\sin\alpha)^۲(b+a\cos\alpha) + (a\sin\alpha)^۲(b-۲a\cos a) +$$

$$۲a\sin\alpha.a\sin\alpha(b+a\cos\alpha-۲a\cos\alpha)\Big]$$

$$= \frac{\pi a^۲\sin^۲\alpha}{۳}(۴b + ۴a\cos\alpha + b - ۲a\cos\alpha - ۲a\cos\alpha + ۲b - ۲a\cos\alpha)$$

$$= \frac{۷\pi a^۲ b\sin\alpha}{۳}$$



۵۴۸. داریم : $V=\frac{۹}{۲}\pi a^{۳}$

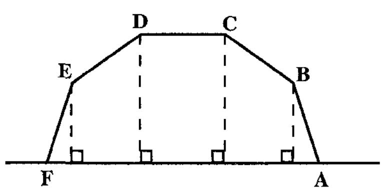
تبصره. ۱. وقتی که شش‌ضلعی بیشتر از یک رأس مانند A روی محور دوران نداشته باشد و قطر شش‌ضلعی عمود بر این محور دوران باشد، داریم :

$$V=۳\pi a^{۳}\sqrt{۳}$$

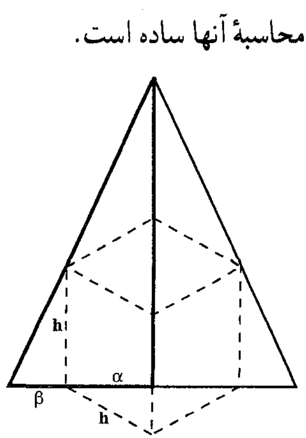
۲. هنگامی که شش وجهی حول رأس A دوران می‌کند، اما تمام شش‌وجهی دریک طرف محور دوران باقی می‌ماند، حجم ایجاد شده از کمترین مقدار یعنی $\frac{۹\pi a^{۳}}{۲}$ تا بیشترین مقدار یعنی $۳\pi a^{۳}\sqrt{۳}$ ، تغییر می‌کند.

۵۴۹. راه اول. حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ یک قطاع چندضلعی منتظم که حول محوری گذرنده برمرکز آن و واقع در صفحه‌اش دوران می‌کند، مساوی است با یک سوم حاصل‌ضرب سطحی که محیط چندضلعی پس از دوران ایجاد می‌کند، در سهم چندضلعی.

این حجم، هم‌ارز با دو سوم حجم استوانه‌ای است که شعاع قاعده‌اش سهم چند ضلعی، و ارتفاعش تصویر محیط چندضلعی روی محور است.



راه دوم. با تصویر کردن رأسهای نیم‌ده‌ضلعی منتظم روی محور، سطح مولد از دو مثلث همنهشت در دو انتهای قطر، دو ذوزنقهٔ مساوی و یک مستطیل تشکیل می‌شود. بنابراین حجم ایجاد شده شامل حجم دو مخروط مساوی، دو مخروط ناقص مساوی و یک استوانه است که محاسبهٔ آنها ساده است.



۵۵۰. طبیعتاً می‌کوشیم که طول ضلع مکعب را پیدا کنیم. شکل را که در آن دو مثلث باخطهای پررنگ مشخص شده‌اند بررسی کنید. این دو مثلث متشابهند ؛ چون ضلعهای متناظر آنها متوازیند.

توجه کنید که α نصف طول قطر قاعدهٔ مکعب است (فاصلهٔ یک رأس قاعده تا مرکز قاعده).

اکنون به مثلث کوچکتر توجه کنید. چند رابطهٔ سودمند وجود دارد. مطمئناً $\alpha+\beta=1$. همچنین $\alpha^2+\alpha^2=h^2$ ؛ و بنابر تشابه مثلثها $h=3\beta$.

سه معادلهٔ سه مجهولی به‌دست آورده‌ایم و می‌کوشیم این معادله‌ها را حل کنیم: آخرین معادله را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$2\alpha^2=9\beta^2 \quad \text{یا} \quad \alpha=\frac{3}{\sqrt{2}}\beta$$

این نتیجه را در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\beta+\beta=1$$

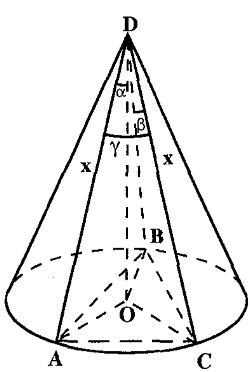
پس $\beta=\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$. فوراً نتیجه می‌شود که:

$$h=3\beta=\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{6}{3\sqrt{2}+2}$$

حجم مکعب محاط در مخروط برابر است با:

$$V=h^3=\left[\frac{6}{3\sqrt{2}+2}\right]^3=\frac{108}{45\sqrt{2}+58}$$

۵۵۱. چون یالهای جانبی DA، DB و DC از هرم مفروض، برابرند، بنابراین، تصویر ارتفاع DO بر نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، قرار می‌گیرد (شکل).



برای حجم مجهول، داریم: $V_1=\frac{1}{3}S.DO$ ، که در آن، S مساحت مثلث ABC است. بنابه شرط مسأله داریم: $V=\frac{1}{3}\pi R^2.DO$ ، که در آن، R شعاع قاعدهٔ مخروط است. از آن‌جا $DO=\frac{3V}{\pi R^2}$ و $V_1=\frac{VS}{\pi R^2}$. یال جانبی هرم را x می‌گیریم. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$AB=2x\sin\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad BC=2x\sin\frac{\beta}{2} \quad ; \quad AC=2x\sin\frac{\gamma}{2}$$

اکنون، اگر از رابطه‌های :

$$R=\frac{abc}{۴S}\ ;\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

استفاده کنیم، به‌دست می‌آید :

$$V_۱=\frac{V}{\pi.AB^۲.AC^۲.BC^۲}.۱۶S^۳=\frac{V}{۴\pi}\operatorname{cosec}^۲\frac{\alpha}{۲}\operatorname{cosec}^۲\frac{\beta}{۲}\times$$

$$\operatorname{cosec}^۲\frac{\gamma}{۲}\sqrt{(\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin\frac{\beta}{۲}+\sin\frac{\gamma}{۲})^۳}\times$$

$$\sqrt{(\sin\frac{\alpha}{۲}+\sin\frac{\beta}{۲}-\sin\frac{\gamma}{۲})^۳.(\sin\frac{\beta}{۲}+\sin\frac{\gamma}{۲}-\sin\frac{\alpha}{۲})^۳}\times$$

$$\sqrt{(\sin\frac{\gamma}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲}-\sin\frac{\beta}{۲})^۳}$$

۵۵۲. داریم (شکل) :

$$V=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}AD.CD\sin\beta.OM=\frac{۱}{۳}CD^۲.OM\sin\beta$$

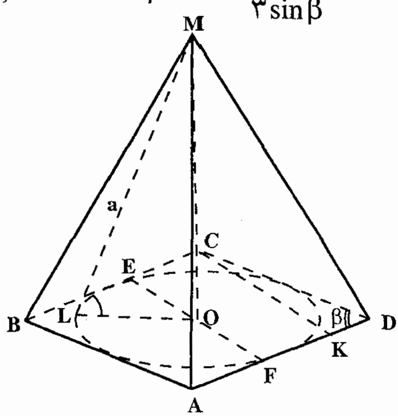
ولی

$$MO=ML\sin\alpha=a\sin\alpha$$

$$CD=\frac{CK}{\sin\beta}=\frac{EF}{\sin\beta}=\frac{۲OL}{\sin\beta}=\frac{۲LM\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{۲a\cos\alpha}{\sin\beta}$$

و بنابراین :

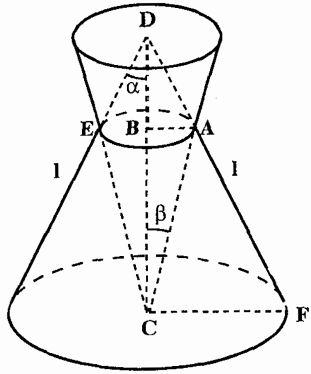
$$V=\frac{۱}{۳}(\frac{۲a\cos\alpha}{\sin\beta})^۲.a\sin\alpha\sin\beta=\frac{۲a^۳\sin۲\alpha\cos\alpha}{۳\sin\beta}$$



۵۵۳. حجم موردنظر V ، برابر است با مجموع حجمهای دو مخروط ADE و ACE (شکل). بنابراین :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi.AB^{۲}.BD+\frac{۱}{۳}\pi.AB^{۲}.BC=\frac{۱}{۳}\pi.AB^{۲}(DB+BC)$$

$$=\frac{۱}{۳}\pi.AB^{۲}.DC$$



ولی $DC=DF\cos\alpha=l\cos\alpha$ از طرف دیگر :

$$DC=DB+BC=AB\,\text{cotg}\alpha+AB\,\text{cotg}\beta\quad;$$

$$l\cos\alpha=AB(\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta)=AB.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

از آن‌جا $AB=\dfrac{l\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. اگر مقدارهای AB و DC را که به‌دست آورده‌ایم، در رابطهٔ حجم قرار دهیم، به‌دست می‌آید :

$$V=\frac{\pi l^{۳}\cos^{۳}\alpha\sin^{۲}\alpha\sin^{۲}\beta}{۳\sin^{۲}(\alpha+\beta)}$$

۵۵۴. داریم :

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi(۸)^{۲}\times ۱۵=۳۲۰\pi$$

$$\text{شعاع قاعدهٔ استوانه}:\quad ۴\div ۲=۲$$

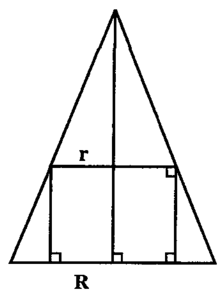
$$\text{حجم استوانه}=\pi(۲)^{۲}\times ۱۵=۶۰\pi$$

$$\text{حجم جسم}=۳۲۰\pi-۶۰\pi=۲۶۰\pi$$

۵۵۵. حجم مخروط $=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ ، و حجم استوانه ماکزیمم $=\frac{۴}{۹}\times\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ است. بعکس هرم

به حجم می‌نیمم محیط بر یک منشور داده شده، ارتفاع FH ، سه برابر ارتفاع منشور را دارد. همچنین مخروط می‌نیمم محیط بر یک استوانه داده شده، ارتفاعی سه برابر ارتفاع استوانه دارد.

۵۵۶. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط را R، ارتفاعش را H و شعاع قاعدهٔ استوانه را r ، و ارتفاعش را h فرض کنیم (شکل)، خواهیم داشت :



$$\frac{H-h}{H}=\frac{r}{R} \quad , \quad h=\frac{H}{R}(R-r)$$

$$V=\pi r^{۲}h=\pi r^{۲}\frac{H}{R}(R-r)$$

یا

$$V=\frac{۴\pi H}{R}.\frac{r}{۲}.\frac{r}{۲}(R-r)$$

چون $\frac{۴\pi H}{R}$ ثابت است و بعلاوه $\frac{r}{۲}+\frac{r}{۲}+R-r=R$ ثابت است، پس V حجم استوانه وقتی ماکزیمم است که : $\frac{r}{۲}=R-r$ یا $\frac{r}{R}=\frac{۲}{۳}$ باشد.

۳.۸.۱.۵. اندازهٔ سطح و حجم

۵۵۷. داریم :

$$\text{اندازهٔ مولد} = l=\sqrt{۸^{۲}+۱۲^{۲}}=\sqrt{۶۴+۱۴۴}=\sqrt{۲۰۸}=۴\sqrt{۱۳}$$

$$S_{\text{جانبی}}=\frac{۱}{۲}(۲\pi\times ۸)\times ۴\sqrt{۱۳}=۳۲\sqrt{۱۳}\pi$$

$$S_{\text{قاعده}}=\pi R^{۲}=۶۴\pi \ ,$$

$$S_{\text{کل}}=S_{\text{جانبی}}+S_{\text{قاعده}}=۳۲\sqrt{۱۳}\pi+۶۴\pi$$

$$\text{حجم}=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi(۸)^{۲}\times ۱۲=۲۵۶\pi$$

۵۵۸. داریم :

$$S_{\text{جانبی مخروط ناقص}}=\pi(R+R')l$$

$$\Rightarrow S_{\text{جانبی مخروط ناقص}}=\pi(۸+۵)\times ۵=۶۵\pi$$

ارتفاع مخروط ناقص $h=\sqrt{5^2-(8-5)^2}=4$,

حجم مخروط ناقص دوار $V=\frac{h}{3}(S+S'+\sqrt{SS'})$

$\Rightarrow$ حجم مخروط ناقص دوار $V=\frac{4}{3}(64\pi+25\pi+\sqrt{64\pi\times 25\pi})=172\pi$

۵۵۹. حجم ایجاد شده مساوی است با : $V=\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$

حجم کل جسم، مساوی $9\pi a^2$ یا نه برابر مساحت دایره‌ای است که شعاعش مساوی a است.

۵۶۰. حجم و سطح مورد نظر برابر است با :

$V=\pi a^3\sqrt{2}$, $S=4\pi a^2\sqrt{2}$

۵۶۱. **راه حل اول.** سطح جسمی که از دوران به‌دست می‌آید تشکیل شده است از سطحهای جانبی دو مخروط ناقص مساوی و سطحهای جانبی داخلی دو مخروط مساوی. شعاع قاعدهٔ بزرگتر مخروط ناقص برابر است با قطر بزرگ لوزی :

$$R=2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{3}$$

و شعاع قاعدهٔ کوچکتر مخروط ناقص و شعاع قاعدهٔ مخروط :

$$r=\frac{R}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

و مولد مخروطها برابر است با a .

بنابراین سطح و حجم موردنظر چنین می‌شود :

$$S=4\pi a^2\sqrt{3}\quad,\quad V=\frac{3}{2}\pi a^3$$

راه حل دوم. مرکز ثقل لوزی بر محل برخورد قطرهای آن واقع است و مسافت طی شده به‌وسیلهٔ مرکز ثقل :

$$2\pi.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\pi a\sqrt{3}$$

در نتیجه سطح و حجم موردنظر چنین است :

$$S=4a.\pi a\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi a^2\ ;$$

$$V = \frac{۱}{۲}a^{۲}\sqrt{۳}.\pi a\sqrt{۳} = \frac{۳}{۲}\pi a^{۳}$$

۵۶۲. حجم و سطح خواسته شده برابرند با :

$$V = \frac{۹\pi a^{۳}\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ \ S = ۱۸\pi a^{۲}$$

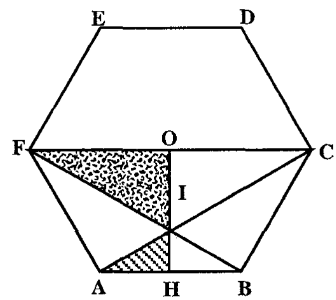
۵۶۳. سطح و حجم خواسته شده برابرند با :

$$S = ۱۲\pi a^{۲}\ \ ,\ \ V = ۳\pi a^{۳}\sqrt{۳}$$

۵۶۴. V و S را بترتیب حجم و سطح کل مخروط ایجاد شده از دوران مثلث AHI حول محور دوران OH می‌نامیم. داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi AH^{۲}\times HI\ ,$$

$$S = \pi AH^{۲} + \pi AH\times AL$$



امّا $OC = r$ ، $AH = \frac{r}{۲}$ و $I\hat{A}H = ۳۰^\circ$ ؛ بعلاوه، مثلثهای IHA و IOC متشابه‌اند.

در نتیجه :

$$IH = \frac{۱}{۲}OI = \frac{۱}{۳}OH = \frac{r\sqrt{۳}}{۶}\quad ,\qquad AI = ۲IH = \frac{r\sqrt{۳}}{۳}$$

و با جایگذاری نتیجه می شود :

$$V = \frac{\pi r^{۳}\sqrt{۳}}{۷۲}\quad ,\quad S = \frac{\pi r^{۲}}{۱۲}(۳ + ۲\sqrt{۳})$$

مثلثهای COI و AHI یا FOI و AHI متشابه‌اند و نسبت تشابه‌شان مساوی $\frac{۱}{۲}$ است.

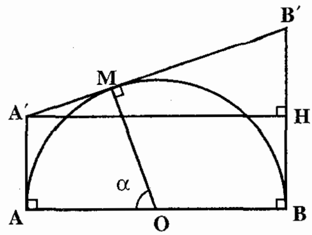
مخروطهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ این مثلثها نیز متشابه‌اند. حال اگر V' و S' را بترتیب حجم و سطح کل مخروط دوار ایجاد شده از دوران مثلث FOI بنامیم، داریم :

$$V' = ۸V = \frac{\pi r^{۳}\sqrt{۳}}{۹}\quad ,\quad S' = ۴S = \frac{\pi r^{۲}}{۳}(۳ + ۲\sqrt{۳})$$

۵۶۵. داریم :

$$V=\frac{1}{3}\pi AB(AA'^{2}+BB'^{2}+AA'.BB')$$

AA' و BB' را حساب می‌کنیم. داریم :



$$AA'=A'M \quad , \quad BB'=B'M$$

$$\begin{cases} A'M.B'M=A'B'=\dfrac{AB}{\sin\alpha} \\ A'M.B'M=R^{2} \end{cases}$$

از آن‌جا داریم :

$$V=\frac{1}{3}\pi AB\left[(AA'+BB')^{2}-AA'.BB'\right]$$

خواهیم داشت :

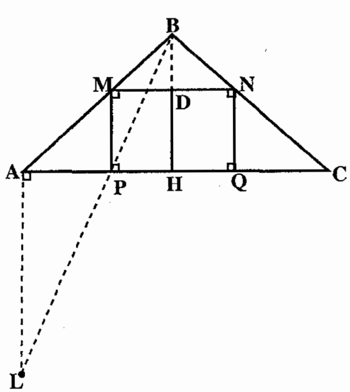
$$V=\frac{1}{3}\pi.2R\left[(\frac{2R}{\sin\alpha})^{2}-R^{2}\right]$$

$$V=\frac{2}{3}\pi R^{3}\times\frac{(4-\sin^{2}\alpha)}{\sin^{2}\alpha}$$

۵۶۶. فرض می‌کنیم ABC و PMNQ مقطعهای مخروط و استوانه باشند که از برخورد یک صفحهٔ گذرنده بر محور مشترک آنها، به‌وجود آمده‌اند.

باید داشته باشیم $MP=BM$. برای مشخص کردن نقطهٔ P می‌توان از شکلهای متشابه استفاده کرد. کافی است خط عمود AL مساوی AB را رسم کنیم و BL را بکشیم. خواهیم داشت : $MP=BM$ با تعیین اندازهٔ شعاع PH و ارتفاع MP برحسب r و h و اگر l طول معلوم AB باشد، خواهیم داشت :

$$V=\pi\times\frac{lr^{2}h^{3}}{(l+h)^{3}}$$



۲.۸.۳. نسبت حجمها

۵۶۷. ارتفاعهای مثلث را به h_a ، h_b و h_c و حجم جسمهایی که از دوران مثلث دور ضلعهای a ، b و c به‌دست می‌آید. بترتیب به V_a ، V_b و V_c نشان می‌دهیم. در هر دوران، حجم جسمی که به دست می‌آید. برابر است با مجموع حجمهای دو مخروط و داریم:

$$V_a = \frac{۱}{۳}\pi h_a^۲.a \quad ; \quad V_b = \frac{۱}{۳}\pi h_b^۲.b \quad ; \quad V_c = \frac{۱}{۳}\pi h_c^۲.c$$

اگر مساحت مثلث را به S نشان دهیم، داریم:

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$V_a = \frac{۲}{۳}\pi Sh_a \quad ; \quad V_b = \frac{۲}{۳}\pi Sh_b \quad ; \quad V_c = \frac{۲}{۳}\pi Sh_c$$

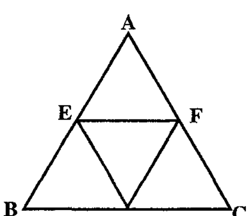
و از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$V_a \div V_b \div V_c = h_a \div h_b \div h_c$$

و اگر درنظر بگیریم که ارتفاعهای هر مثلث متناسب با عکس ضلعهای متناظر آن است، خواهیم داشت:

$$V_a \div V_b \div V_c = \frac{۱}{a} \div \frac{۱}{b} \div \frac{۱}{c}$$

۵۶۸. با وصل کردن دوبه‌دوی وسطهای ضلعهای مثلث، مثلث داده شده به چهار مثلث همنهشت تقسیم می‌شود.



حجم به‌وجود آمده از دوران یک مثلث مانند BED ، دو برابر حجم ایجاد شده توسط مثلث EDF است. بنابراین اگر حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث AEF را با V نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\text{حجم}\ (EDF) = V \Rightarrow \text{حجم}\ (EBD) = ۲V \ \text{و}\ \text{حجم}\ (DFC) = ۲V$$

بنابراین:

$$\text{حجم}\ (EBCF) = ۵V$$

۵۶۹. ضلعهای متوازی‌الاضلاع را a و b و ارتفاعهای متناظر آنها را h و $h_۱$ می‌گیریم. V و $V_۱$ حجم جسمهایی که از دوران متوازی‌الاضلاع دور ضلعهای a و b به‌دست می‌آید، چنین است:

$$V = \pi a h^2 \quad , \quad V_1 = \pi b h_1^2$$

و با توجه به رابطهٔ $ah = bh_1$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{ah^2}{bh_1^2} = \frac{h}{h_1} = \frac{b}{a}$$

۵۷۰. داریم:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \quad , \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2$$

$$h_1 = \frac{1}{2}h_2 \quad , \quad R_1 = \frac{1}{2}R_2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1^2}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2^2} = (\frac{R_1}{R_2})^2 (\frac{h_1}{h_2})^2$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = (\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

۵۷۱. داریم: $R' = \frac{R}{2} \quad , \quad h' = 2h \quad , \quad V' =$ ثلث ارتفاع × سطح قاعده

$$V' = \frac{1}{3}\pi R'^2 h' = \frac{1}{3}\pi \times (\frac{R}{2})^2 \times 2h = \frac{1}{6}\pi R^2 h$$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ حجم مخروط اولیه

نسبت حجم مخروط جدید به حجم مخروط اولیه $\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{6}\pi R^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{1}{2}$

پس گزینهٔ (الف) درست است.

راه دیگر. چون شعاع قاعده نصف شده است، پس حجم حاصل $\frac{1}{4}$ برابر حجم اولی است و چون ارتفاع ۲ برابر شده است، پس حجم مخروط حاصل $\frac{1}{4} \times 2$ یعنی $\frac{1}{2}$ برابر حجم مخروط اولی است.

۵۷۲. اگر $AB = a$ ، آن‌گاه $AB_1 = AC_1 = 2/6a$ ، روی خطهای AB و AC نقطه‌های K و

L را طوری اختیار کنید که:

$$AK = AL = AB_1 = AC_1 = ۲/۶a$$

ضلعهای ذوزنقه متساوی‌الساقین KLC_1B_1 ، که در داخل دایرهٔ قاعده مخروط محاط شده است، به آسانی قابل محاسبه است. از آن‌جا شعاع دایرهٔ محیطی هم، محاسبه می‌شود که مقدار آن برابر می‌شود با $\frac{۱۳}{۲۰}\sqrt{۷}a$. اکنون نسبت حجم مخروط و منشور را هم می‌توان به‌دست آورد.

جواب: $\frac{۱۵۳۷۹\pi}{۴۸۰۰\sqrt{۳}}$

۵۷۳. شعاع قاعدهٔ مخروط را با R و ارتفاع آن را با h ، و یال مکعب را با a نشان دهید. مقطع مخروط با صفحه‌ای که به موازات قاعده رسم می‌شود و از مرکز مکعب می‌گذرد، دایره‌ای خواهد بود به شعاع $R.\frac{۲h-a\sqrt{۲}}{۲h}$ ، که در آن، مستطیلی به ابعاد a و $a\sqrt{۲}$ قابل محاط است؛ یعنی:

$$۳a^۲ = R^۲\frac{(۲h-a\sqrt{۲})^۲}{h^۲} \qquad (۱)$$

مقطع موازی با قاعدهٔ مخروط و گذرنده بر یالی از مکعب که متقابل به یال واقع در قاعده می‌باشد نیز دایره‌ای است به شعاع $R\frac{h-a\sqrt{۲}}{h}$. از طرف دیگر قطر این دایره، برابر با a می‌باشد، یعنی:

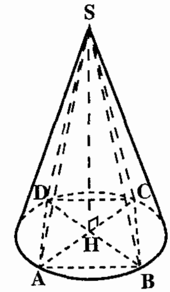
$$a = ۲R\frac{h-a\sqrt{۲}}{h} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$h = \frac{\sqrt{۲}(۵+\sqrt{۳})}{۴}.a \quad , \quad R = \frac{۲\sqrt{۳}-۱}{۲}.a$$

جواب: $\frac{\pi(۵۳-۷\sqrt{۳})\sqrt{۲}}{۴۸}$

۵۷۴. شعاع قاعدهٔ مخروط نصف قطر مربع است، یعنی: $R = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$. از آن‌جا:



$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ h \times ۱۸ = ۶۷۵\pi$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}a^۲ h = \frac{۱}{۳}(۱۵)^۲ \times ۱۸ = ۱۳۵۰$$

$$\frac{\text{حجم مخروط}}{\text{حجم هرم}} = \frac{۶۷۵\pi}{۱۳۵۰} = \frac{n}{۲}$$

۵۷۵. این دو حجم با هم برابرند ؛ زیرا اگر ارتفاع دو مخروط در ساعت شنی را $h_۱$ و $h_۲$ و ارتفاع استوانه را h بنامیم، $h = h_۱ + h_۲$ است. پس اگر شعاع قاعدهٔ استوانه R باشد، داریم :

$$\text{حجم مخروط سمت چپ} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$$

$$\text{حجم ساعت شنی} = V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h_۱ + \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h_۲ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ (h_۱ + h_۲)$$

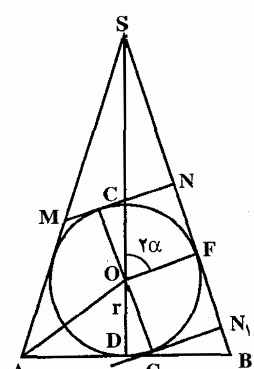
$$\Rightarrow \text{حجم ساعت شنی} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \text{حجم مخروط سمت چپ}$$

۵۷۶. راه اول. اگر ASB مقطع صفحهٔ گذرنده بر محور مخروط (شکل)، و MN مقطع صفحه گذرنده بر محور و صفحهٔ مماس بر کره، طبق شرط مسأله باشد، MN عمود بر SB است. اگر $OD = r$ فرض شود، $SN = kr$ خواهد شد. واضح است COFN مربع است و چنانچه $S\hat{A}D = S\hat{O}F = ۲\alpha$ باشد،

$$SD = AD\tan ۲\alpha$$

خواهد شد. از آن‌جا داریم :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi AD^۲ . SD = \frac{۱}{۳}\pi AD^۳ \tan ۲\alpha \qquad \text{(حجم مخروط)}\ (۱)$$



از مثلث ODA داریم : $AD = r\cot\alpha$. (زیرا AO نیمساز زاویهٔ SAD است.) و

رابطهٔ (۱) خواهد شد :
$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \cot^3\alpha \tan 2\alpha$$

به همین ترتیب حجم کره خواهد شد :
$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \frac{\pi}{3} r^3 \cot^3\alpha \tan 2\alpha \ : \ \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\tan 2\alpha}{4\tan^3\alpha} \qquad (2)$$

از مثلث SOF نتیجه می‌شود :

$$\tan 2\alpha = \frac{SF}{OF} = \frac{SN+NF}{OF} = \frac{kr+r}{r} = k+1$$

$$\tan 2\alpha = k+1 \qquad (k+1)\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - (k+1) = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{k^2+2k+2}-1}{k+1} \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$\frac{V}{V'} = \frac{(k+1)^4}{4(\sqrt{k^2+2k+2}-1)^3} = \frac{(1+\sqrt{k^2+2k+2})^3}{4(k+1)^2}$$

راه دوم. اگر صفحهٔ مماس بر کره و عمود بر SB، مولد را در N_1 قطع کند، پس $SN = k.r$ ، $SF = (k-1)r$ و $\tan 2\alpha = k-1$. با تعویض $k-1$ به $k+1$ خواهیم داشت :

$$\frac{V}{V'} = \frac{(k-1)^4}{4(\sqrt{k^2+2k+2}-1)^3} = \frac{(1+\sqrt{k^2+2k+2})^3}{4(k-1)^2}$$

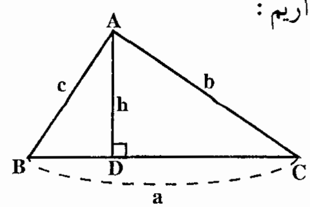
۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها

۵۷۷. مقدار خواسته شده $\frac{1}{12}\pi R^2 H$ است.

۵۷۸. مقطعی از محور مخروط بگذرانید. ذوزنقهٔ ABCD حاصل را درنظر بگیرید که در آن A و B نقطه‌های تماس سطح جانبی یک کره و C و D نقطه‌های تماس کرهٔ دیگر است.

به آسانی ثابت می‌شود که اگر F نقطه‌های برخورد کره‌ها باشد، آن‌گاه F مرکز دایره محاط در ABCD است.

۵۷۹. داریم :



$$V_a = \frac{\pi h^2}{3}(BD + DC) = \frac{\pi ah}{3}h$$

$$V_b = \frac{\pi c^2 b}{3} \quad , \quad V_c = \frac{\pi b^2 c}{3}$$

چون $bc = ah$ است، پس داریم :

$$V_b = \frac{\pi ah}{3}c \quad , \quad V_c = \frac{\pi ah}{3}b$$

و اگر $k = \frac{\pi ah}{3}$ قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$V_a = kh \quad , \quad V_b = kc \quad , \quad V_c = kb$$

اما می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$ است و از آن خواهیم داشت :

$$k^2\left(\frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}\right) = \frac{k^2}{V_a^2} \Rightarrow \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{V_a^2}$$

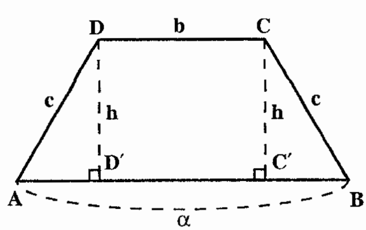
۹.۳. رابطهٔ متری

۵۸۰. فرض می‌کنیم a و b قاعده‌ها، c طول ضلعهای غیرموازی و h ارتفاع ذوزنقهٔ ABCD باشد. از دوران این ذوزنقه حول AB ، داریم :

$$S_{AD} = S_{BC} = \pi hc \quad , \quad S_{CD} = 2\pi hb$$

$$V_{ADD'} + V_{BCC'} = \frac{1}{3}\pi h^2(AD' + C'B) = \frac{1}{3}\pi h^2(a - b)$$

$$V_{CC'D'D} = \pi h^2 b$$



با توجه به فرض نتیجه می‌شود :

$$\frac{\frac{۱}{۳}\pi h^۲(a-b)+\pi h^۲ b}{۲\pi hc+۲\pi hb}=\frac{\frac{a+b}{۲}h}{a+b+۲c}$$

و یا :

$$\frac{a+۲b}{b+c}=\frac{۳(a+b)}{a+b+۲c}\Rightarrow (a-b)(a+b-c)=۰$$

این رابطه وقتی برقرار است که $a=b$ ، یعنی ذوزنقه تبدیل به مستطیل شود، و یا $c=a+b$، که در این حالت اندازهٔ هر ضلع ناموازی، مساوی مجموع اندازه‌های دو قاعده است.

۵۸۱. داریم :

$$V=\frac{\pi r^۲ h}{۳} \quad , \quad l=\pi r\sqrt{r^۲+h^۲} \quad , \quad S=\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}+\pi r^۲ \quad ;$$

$$۹\pi V^۲=\pi^۳ r^۴ h^۴ \quad , \quad (S-l)=\pi r^۲ \quad ,$$

$$۲l-S=\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}-\pi r^۲$$

$$S(S-l)(۲l-S)=\left[\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}+\pi r^۲\right]\pi r^۲\left[\pi r\sqrt{r^۲+h^۲}-\pi r^۲\right]$$

$$=\left[\pi^۲ r^۲(r^۲+h^۲)-\pi^۲ r^۴\right]\pi r^۲=\pi^۳ r^۴ h^۲=۹\pi V^۲$$

پس حکم ثابت است.

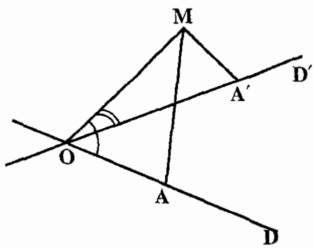
۵۸۲. در هر مخروط قائم که قاعده‌اش یک منحنی مرکزدار (دارای مرکز تقارن) باشد، ارتفاع مخروط، نیمساز زاویهٔ بین هر دو مولد متقابل (روبه‌رو) است. بنابراین برای هرنقطهٔ O، صفحهٔ قاطع هر چه باشد، داریم :

$$\frac{۱}{SA}+\frac{۱}{SB}=\text{مقدار ثابت}$$

اما این مقدار ثابت وابسته بـه زاویهٔ α، زاویه‌ای است کـه این دو مـولد با هم می‌سازند.

۳.۱۰. مکان هندسی

۳.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

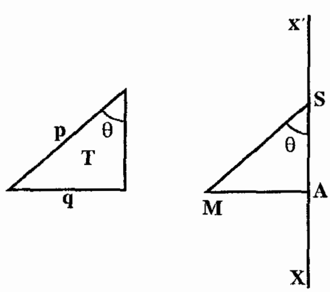


۵۸۳. فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که اگر MA و MA′ عمودهای رسم شده از این نقطه بر خطهای D و D′ باشند، داشته باشیم:

$$\frac{MO}{m}=\frac{MA}{n}=\frac{MA'}{n'}$$

m ، n و n′ سه عدد معلومند.

از این نسبتها، رابطه‌های $\frac{n}{m}=\frac{MA}{MO}$ و $\frac{n'}{m}=\frac{MA'}{MO}$ به‌دست می‌آید. حال اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که اندازهٔ وترش m و یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمه‌اش n باشد، این مثلث با مثلث قائم‌الزاویهٔ MOA متشابه است. بنابراین زاویهٔ $M\hat{O}A$ مساوی با زاویهٔ α از این مثلث است که مقابل به ضلع n است. به‌طور مشابه، زاویهٔ $M\hat{O}A'$ اندازه‌ای مساوی α' دارد که با همین روش ساخته می‌شود. بنابراین نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ M، از مولدهای مشترک دو سطح مخروطی دوار تشکیل می‌شود که محورهایشان D و D′ و زاویه‌های مولدهایشان α و α' است.

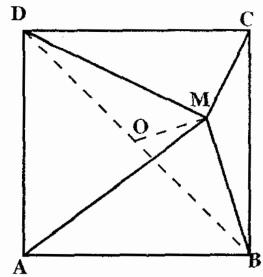


۵۸۴. نقطهٔ دلخواه M را درنظر می‌گیریم. MS را وصل کرده و عمود MA را بر X′SX فرود می‌آوریم. بعلاوه مثلث قائم‌الزاویهٔ T را چنان رسم می‌کنیم که وتر آن p و یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش q باشد.

اگر $\frac{p}{q}=\frac{MS}{MA_1}$ باشد، مثلث SMA با مثلث T متشابه است، و بعکس؛ بنابراین این که $\frac{p}{q}=\frac{MS}{MA}$ باشد، لازم و کافی است که زاویه

$M\hat{S}A$ مساوی زاویهٔ θ از مثلث T باشد. پس مکان هندسی نقطهٔ T ، یک سطح مخروطی به رأس S است که محور آن XX′ و زاویهٔ مولدش θ است.

۵۸۵. x ، y ، z و t را فاصله‌های نقطهٔ M از ضلعهای AB ، BC ، CD و DA فرض می‌کنیم. حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ MAB ، مساوی مجموع یا تفاضل حجم دو مخروط است که شعاع قاعدهٔ هریک مساوی x است و در هر دو حالت داریم :



$$V_{MAB}=\frac{۲\pi ax^۲}{۳} \quad , \quad V_{MBC}=\frac{۲\pi ay^۲}{۳} \quad ,$$

$$V_{MCD}=\frac{۲\pi az^۲}{۳} \quad , \quad V_{MDA}=\frac{۲\pi at^۲}{۳}$$

و با توجه به این که مجموع این حجمها مساوی با $\frac{۴}{۳}\pi a^۲b$ است، خواهیم داشت :

$$x^۲+y^۲+z^۲+t^۲=۲ab$$

امّا $x^۲+y^۲=MB^۲$ و $z^۲+t^۲=MD^۲$ است. بنابراین :

$$MB^۲+MD^۲=۲ab$$

اگر O مرکز مربع باشد، با به‌کار بردن قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلث MBD داریم :

$$MB^۲+MD^۲=۲OM^۲+\frac{BD^۲}{۲}=۲OM^۲+۴a^۲$$

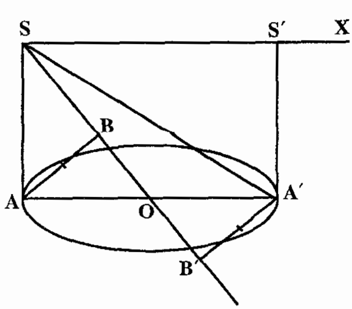
و خواهیم داشت :

$$۲OM^۲+۴a^۲=۲ab \Rightarrow OM^۲=a(b-۲a)$$

برای آن که نقطهٔ M وجود داشته باشد، باید $b\geq ۲a$ باشد. با برقراری این شرط، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{a(b-۲a)}$ است.

اگر $b=۲a$ باشد، دایره به مرکزش نقطهٔ O تبدیل می‌شود و برای این وضع نقطهٔ M ، مجموع چهار حجم مورد بررسی کمترین مقدار ممکن است.

۵۸۶. در صفحهٔ XSA مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصلهٔ آنها از دو خط SO و SX مساوی با $\frac{AB}{AS}$ است، از دو خط SA و SA' تشکیل می‌شود ؛ برای SA مسأله بدیهی است و برای SA' چون که داریم :



$$\frac{A'B'}{S'A'}=\frac{AB}{AS}$$

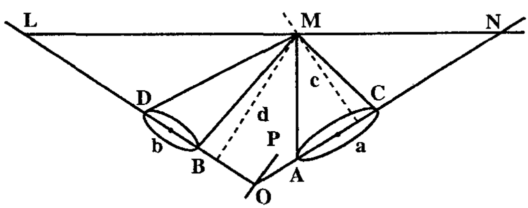
زیرا $A'B'=AB$ و $S'A'=AS$ است.

حال اگر M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، خط SM به این مکان هندسی تعلق دارد و همان طوری که می‌دانیم، مکان هندسی خط SM بر مکان هندسی یالهای فرجه‌های قائمه‌ای منطبق می‌شود که وجه‌های آن شامل خطهای SA و SA′ هستند و این مکان هندسی یک سطح مخروطی به رأس S است که هادی‌اش دایرهٔ O است.

۵۸۷. شعاع قاعده‌های مخروطها را a و b و ارتفاعهای آنها را c و d می‌نامیم. باید داشته باشیم:

$$\frac{\pi a^{۲}c}{۳}+\frac{\pi b^{۲}d}{۳}=\frac{\pi k^{۲}}{۳}\Rightarrow a^{۲}c+b^{۲}c=k^{۲}$$

مسأله به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود:

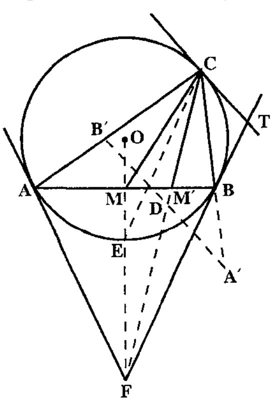


مکان هندسی نقطه‌ای مانند M را چنان بیابید که اگر این نقطه اندازهٔ عمودهای به طولهای c و d را که از این نقطه بر دو ضلع یک زاویهٔ داده شده رسم می‌شوند، بترتیب در دو مقدار ثابت $a^{۲}$ و $b^{۲}$ ضرب کنیم، مجموع این دو حاصلضرب مقدار ثابتی مساوی $k^{۲}$ داشته باشند.

می‌دانیم که این مکان هندسی یک خط مانند LN است که بسادگی رسم می‌شود. این مکان هندسی در فضا، صفحهٔ LMN است که موازی OP یعنی فصل مشترک قاعده‌های داده شده رسم می‌شود.

تبصره. ۱. مسأله دارای یک جواب دیگر است که قرینهٔ اوّلی، نسبت به نقطهٔ O است.

۲. نقطه‌هایی از مکان هندسی واقع در فرجه‌های مجاور فرجهٔ LON، متناظر با مخروطهایی هستند که اختلاف حجمشان برابر $k^{۲}$ است.



۵۸۸. فرض می‌کنیم ABC مقطع مخروط با صفحه‌ای باشد که بر رأس C از مخروط و نقطهٔ M مرکز دایرهٔ قاعده می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ این قاعده است. AB قطر دایرهٔ مماس است. مکان هندسی مرکز مقطعهای موازی با قاعده، میانهٔ CM است. برای این که امتداد مقطعهای مستدیر پادموازی را داشته باشیم، باید خط مماس CT را بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم کنیم و یا به عبارتی

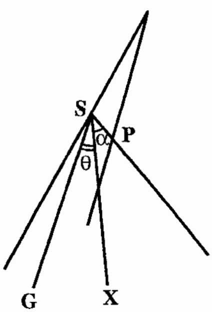
دیگر $CA' = CA$ و $CB' = CB$ بگیریم. در این صورت $A'B'$ موازی با CT خواهد بود. مکان هندسی مرکز مقطعهای عمود بر صفحهٔ $A'CB'$ و موازی CT میانهٔ CM' از مثلث $A'B'C$ ، یعنی شبه میانهٔ مثلث ABC است (قرینهٔ میانهٔ CM نسبت به نیمساز زاویهٔ CDE). همچنین می‌توان مماسهای AF ، BF و سپس CF را رسم نمود.

۵۸۹. مکان هندسی، یک بیضی، یک سهمی و یا هذلولی خواهد بود. بنابر آن که بترتیب $\frac{m}{n} < ۱$ ، $\frac{m}{n} = ۱$ و $\frac{m}{n} > ۱$ باشد :

بیضی و هذلولی دارای دو خط هادی هستند که بر محور کانونی آنها عمودند و به یک فاصله از مرکز آنها قرار دارند.

۵۹۰. مکان هندسی، یک مخروط متشابه با مخروط اوّلی است.

همین طور خواهد بود اگر خطهای همزاویه را به‌جای خطهای نرمال درنظر بگیریم. ریاضیدانی به نام TERQUEM می‌گوید که مجموعهٔ خطهای قائم یک سطح از درجهٔ شش است.



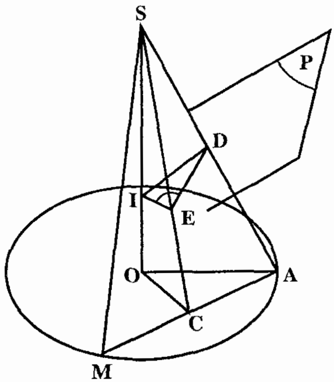
۵۹۱. می‌دانیم که مقطع مخروط (C) به زاویهٔ رأس ۲α با صفحه‌ای که با محور مخروط زاویهٔ θ می‌سازد. دارای خروج از مرکز $e = \frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$ می‌باشد (شکل). یک هذلولی متساوی‌الساقین دارای خروج از مرکز $\sqrt{۲}$ است، پس باید داشته باشیم :

$$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} = \sqrt{۲}$$

از آن‌جا :
$$\cos\theta = \sqrt{۲}\cos\alpha \quad (۱)$$

از این رابطه θ به‌دست می‌آید، پس اگر مخروط (C') را به زاویهٔ رأس ۲θ و متحدالمحور و متحدالرأس با مخروط (C) بسازیم، صفحه‌های موازی با صفحه‌های مماس به مخروط (C') مخروط (C) را در هذلولیهای متساوی‌الساقین قطع می‌کنند و برای این که رابطهٔ (۱) برقرار باشد، باید داشته باشیم : $\sqrt{۲}\cos\alpha \leq ۱$ و از آن‌جا $\cos\alpha \leq \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ، یعنی $\alpha \geq ۴۵^\circ$. اگر $\alpha = ۴۵^\circ$ و $\theta = ۰$ و صفحهٔ قاطع شامل محور باشد و مخروط (C) را در مولدهای عمود برهم واقع در یک صفحهٔ نصف‌النهاری قطع می‌کنند.

اکنون مکان کانونهای مقطع را پیدا می‌کنیم. فرض کنیم ابتدا مقطع صفحهٔ P موازی با صفحهٔ مماس به مخروط (C') که در طول مولد G رسم شده باشد. تمام این مقاطع نسبت به رأس S متجانس بوده و مکان کانونهای آنها از دو خط گذرنده بر S تشکیل می‌شود؛ پس مکان مطلوب تشکیل می‌شود از دو مخروط دوار که از دوران این دو خط حول Sx به‌وجود می‌آید (شکل).

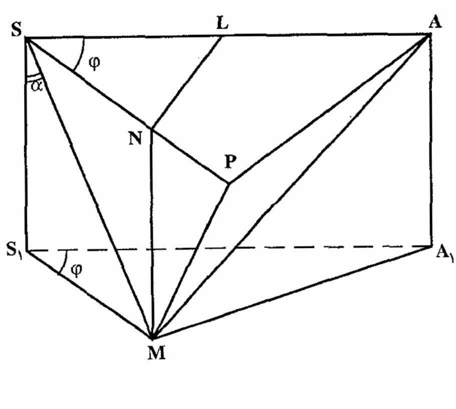


۵۹۲. صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط SA را رسم می‌کنیم. این صفحه، ارتفاع SC از مثلث SMA را در نقطهٔ E که مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث است، و محور SO را در نقطهٔ I قطع می‌کند. اگر D وسط SA باشد، زاویهٔ $\widehat{IED} = 90^\circ$ است. در واقع صفحهٔ P، عمود بر صفحهٔ SAC و صفحهٔ SOC نیز عمود بر صفحهٔ SAC است (زیرا CA بر دو خط متقاطع CO و CS از این صفحه عمود است). بنابراین فصل مشترک آنها یعنی خط IE بر صفحهٔ SAC و در نتیجه بر ED عمود است.

با توجه به این که زاویهٔ $\widehat{IED}$ قائمه است، نقطهٔ E متعلق به دایره‌ای به قطر ID واقع در صفحهٔ P است؛ بعلاوه هنگامی که نقطهٔ M روی دایرهٔ قاعده حرکت کند، نقطهٔ C دایره‌ای به قطر OA را می‌پیماید و در نتیجه نقطهٔ E تمام دایرهٔ به قطر ID را طی می‌کند. بنابراین دایرهٔ اخیر، مکان هندسی نقطهٔ E است.

۵۹۳. S را رأس مخروط، N را تصویر M بر روی صفحه‌ای که از نقطه‌های S و A به موازات قاعدهٔ مخروط رسم می‌شود، P را نقطه‌ای بر روی خط SN درنظر بگیرید به قسمی که (شکل):

$\widehat{SMP} = 90^\circ$



PM را هم نرمال صفحهٔ مخروط درنظر بگیرید. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که AP موازی با شعاع بازتاب است. بنابراین:

$$AM = AP \quad , \quad A\hat{M}P = M\hat{P}A$$

زاویهٔ بین ارتفاع و مولد مخروط را α و $SA = a$ بنامید.

صفحه‌ای که از M به موازات صفحهٔ SPA مرور می‌کند، محور مخروط را در نقطهٔ S_1 قطع می‌کند، تصویر A را روی این صفحه، A_1 بنامید.

$$SS_1 = x \quad , \quad M\hat{S_1}A_1 = \varphi \quad , \quad MA_1 = y$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلث S_1MA_1 داریم:

$$y^2 = x^2 \tan^2\alpha + a^2 - 2ax\tan\alpha\cos\varphi \qquad (1)$$

علاوه بر این:

$$PA^2 = MA^2 = y^2 + x^2 \qquad (2)$$

$$SP = \frac{SM}{\sin\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{2x}{\sin 2\alpha} \qquad (3)$$

با نوشتن قضیهٔ کسینوسها در مثلث SPA و استفاده از رابطه‌های بالا، خواهیم داشت:

$$x^2 + \tan^2\alpha - 2ax\tan\alpha\cos\varphi + x^2 = \frac{4x^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{4ax}{\sin 2\alpha}\cos\varphi$$

که در آن $x = a\sin 2\alpha\cos\varphi$.

اکنون اگر در صفحهٔ SPA، درنقطهٔ N، عمودی بر SN اخراج کنیم و محل برخورد آن را با SA، L بنامیم، آن‌گاه:

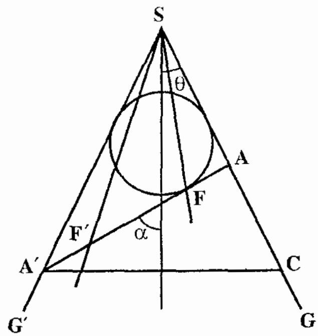
$$SL = \frac{SN}{\cos\varphi} = \frac{x\tan\alpha}{\cos\varphi} = 2a\sin^2\alpha$$

به این ترتیب، SL ثابت است و در نتیجه، مکان N دایره‌ای به قطر SL خواهد بود.

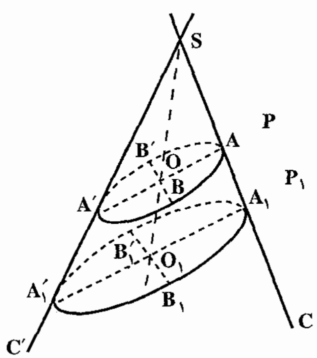
۵۹۴. فرض می‌کنیم صفحهٔ نصف‌النهاری SGG' از سطح مخروطی که عمود باشد، بر صفحهٔ قاطع بیضی شکل، در این صفحه محور کانونی AA' بیضی وجود دارد و کانونهای F و F' نقطه‌های تماس AA' با دایره‌های محاطی و محاطی خارجی زاویهٔ S از مثلث SAA' می‌باشند. می‌دانیم اگر $A'C$ را عمود بر محور رسم کنیم، داریم: $AC = 2FF'$ و خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{AC}{AA'} = \frac{\sin C\hat{A'}A}{\sin A'\hat{C}A} = \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$$

α زاویهٔ میل صفحه مقطع با محور مخروط و θ نیم زاویهٔ رأس مخروط است. برای همهٔ مقاطع بیضی شکل که دارای یک خروج از مرکز می‌باشند، α دارای یک مقدار است؛ از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که مثلثهای مانند SAA' دارای زاویه‌های نظیر به نظیر متساوی‌بوده و متشابهند. در این مثلثها خطهایی مانند SF زاویه‌های برابر با محور مخروط می‌سازند و این خاصیت در مورد خطهای دیگری مانند SF' صدق می‌کند.

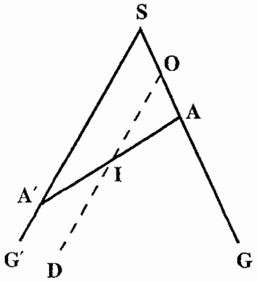


مکان کانونهای F و F' از دو سطح مخروطی تشکیل می‌شود که محور مشترک آنها محور مخروط داده شده بوده و مولد آنها بترتیب SF و SF' باشند و این خطها را با معلوم بودن زاویهٔ α می‌توان به سهولت رسم کرد (شکل).



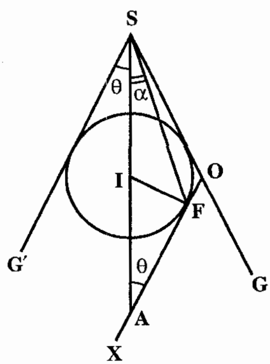
۵۹۵. سطح مخروطی را با صفحهٔ P قطع می‌کنیم به قسمی که فقط یک دامنه آن را قطع کند، یک بیضی به دست خواهد آمد که قطر اطول آنها AA' فصل مشترک صفحهٔ P با صفحهٔ نصف‌النهاری SGG' مقطع مخروطی عمود بر P است. مرکز این بیضی نقطهٔ O وسط AA' و قطر کوچکش BB' از O می‌گذرد و بر صفحهٔ SGG' عمود بوده و به سطح مخروطی محدود می‌شود. مقطع این سطح مخروطی با صفحهٔ دیگر P_1 که موازی با صفحهٔ P باشد، یک بیضی است به محورهای $A_1A'_1$ و $B_1B'_1$ که بترتیب با AA' و BB' موازی‌اند. مکان O_1 خط SO است و مکان رأسهای B_1 و B'_1 از محور اقصر وقتی که P_1 به موازات P تغییر می‌کند از دو مولد تشکیل خواهد شد که آنها را می‌توان از قطع سطح مخروطی با صفحه‌ای گذرنده بر SO و عمود بر صفحهٔ SGG' می‌توان به‌دست آورد (شکل).

۵۹۶. صفحهٔ شکل را صفحهٔ نصف‌النهاری مخروط و عمود بر خط اختیار می‌کنیم. این صفحه خط را در نقطهٔ A که روی مولد SG قرار دارد، قطع می‌کند. صفحهٔ مزبور



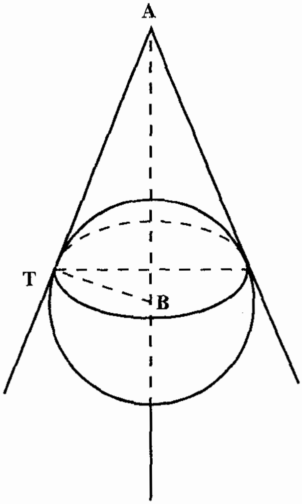
صفحهٔ گذرنده برخط را در فصل مشترک AA' قطع می‌کند که محور اطول مقطع بیضی شکل می‌باشد. مرکز این بیضی نقطهٔ I وسط AA' است. مکان این نقطه خطی است مانند OD موازی با SG که از نقطهٔ O وسط SA رسم شود، مکان محور اقصر صفحه‌ای است که از OD می‌گذرد و عمود بر صفحهٔ شکل است یعنی صفحه‌ای است مانند P گذرنده از O و موازی با صفحهٔ مماس بر مخروط در طول مولد SG' پس مکان رأسهای محور اقصر یک سهمی است که عبارت است از مقطع صفحهٔ P با مخروط (شکل).

۵۹۷. فرض می‌کنیم صفحهٔ نصف‌النهاری یک سطح مخروطی را که عمود باشد، به یک صفحه مقطع سهموی این صفحه سطح مخروطی را در دو مولد قطع می‌کند و شامل محور OX از سهمی‌ایست ؛ این محور موازی است با یکی از مولدهای SG و SG' و کانون سهمی نقطهٔ تماس OX با دایرهٔ (I) مماس بر SG ، SG' و OX می‌باشد ؛ برای همهٔ سهمی‌ها مثلثهایی نظیر OSA متشابه‌اند ؛ زیرا این مثلثها متساوی الساقین بوده و زاویه‌های مجاوربه قاعدهٔ آنها θ می‌باشد. همچنین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ IAF متشابه‌اند ؛ زیرا دارای یک زاویهٔ حادهθ می‌باشند. و بالاخره مثلثهایی نظیر مثلث IFS متشابه‌اند، زیرا داریم :



$$S\hat{I}F = \frac{\pi}{۲} + \theta$$

و ضمناً ضلعهای این زاویه نیز متناسبند، پس زاویهٔ ISF مقداری است ثابت و مکان نقطهٔ F سطح مخروطی دواری است که از دوران SF حول محور سطح داده شده به‌وجود می‌آید ؛ زیرا به هر نقطهٔ F از این سطح یک مثلث SOFA متناظر است و در نتیجه یک مقطع مخروطی به محور OA نظیر می‌باشد (شکل).

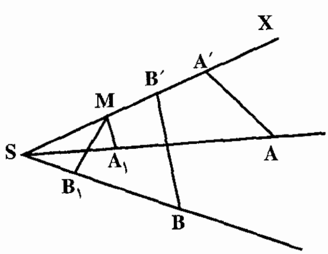


۳.۱۰.۲. مکان هندسی خط

۵۹۸. خطهای گفته شده در مسأله، خطهای مماسی هستند که از نقطهٔ ثابت A بر کره‌ای به مرکز داده شدهٔ B و به شعاع داده شدهٔ R مماس هستند. مکان هندسی این خطها، سطح مخروطی دواری است که رأس آن نقطهٔ A و بر کرهٔ به مرکز B و به شعاع R در طول یک دایره مماس است. این دایره را می‌توان فصل مشترک کرهٔ (B,R) و کرهٔ به قطر AB دانست.

۵۹۹. فرض می‌کنیم $SA = a$ و $SB = b$ باشد؛ AA' و BB' را عمود بر یک خط SX رسم می‌کنیم.

می‌خواهیم مکان هندسی خطهای SX را چنان بیابیم که نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ مساوی مقدار معلوم $\frac{p}{q}$ باشد.



روی SX نقطه‌ای اختیاری مانند M می‌گیریم و MA_1 و MB_1 را عمود بر SA و SB رسم می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SAA' و SA_1M متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AA'}{MA_1} = \frac{a}{SM} \Rightarrow AA' = \frac{a \times MA_1}{SM}$$

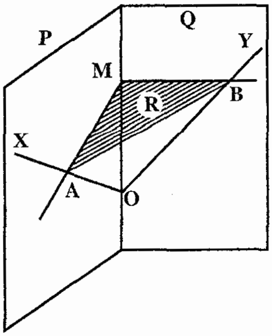
و به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$BB' = \frac{b \times MB_1}{SM}$$

اینک برای آن که $\frac{AA'}{BB'} = \frac{p}{q}$ باشد، لازم و کافی است که $\frac{MA_1}{MB_1} = \frac{pb}{qa}$ باشد.

امّا می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M که نسبت فاصله‌های آنها از دو خط متقاطع SA و SB مساوی یک مقدار داده شده است. یک سطح مخروطی با هادی مستدیر

است. بنابراین مکان هندسی SX نیز همین است.



۶۰۰. فرض می‌کنیم (P,Q) فرجهٔ قائمه‌ای باشد که وجه‌های آن بترتیب بر دو خط متقاطع OX و OY می‌گذرند.

نخست فرض می‌کنیم که این خطها عمود بر هم نیستند. از نقطه‌ای مانند A واقع بر OX صفحهٔ R را عمود بر آن رسم می‌کنیم. این صفحه OY را در نقطهٔ B و فرجه را تحت زاویهٔ قائمهٔ AMB قطع می‌کند (زیرا زاویهٔ XOY کوچکتر از یک قائمه است).

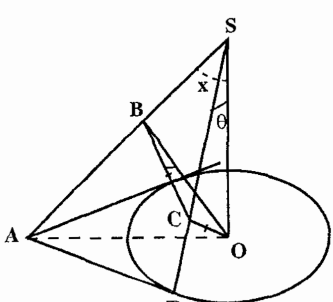
در واقع، MB که فصل مشترک صفحه‌های Q و P است (که هر دو بر صفحهٔ P، عمود می‌باشند)، بر صفحهٔ P عمود است. بنابراین MB بر AM نیز عمود می‌باشد و نقطهٔ M به دایره‌ای به قطر AB که در صفحهٔ R رسم شده است، تعلق دارد.

بعکس، اگر M نقطه‌ای متعلق به این دایره باشد، قائمه ۱ = $A\hat{M}B$ ؛ در این صورت BM که در صفحهٔ R عمود بر صفحهٔ P واقع است، خود بر صفحهٔ P عمود می‌باشد ؛ پس Q بر صفحهٔ P عمود است.

بنابراین مکان هندسی یال OM از فرجهٔ قائمهٔ (P,Q) ، یک سطح مخروطی به رأس O است، که هادیش دایرهٔ به قطر AB واقع در صفحهٔ R می‌باشد.

فرض کنیم قائمه ۱ = $X\hat{O}Y$ است. تصویر این زاویه، روی صفحهٔ یکی از زاویه‌های مسطحهٔ فرجهٔ (P,Q)، زاویهٔ مسطح آن است، و برای آن که این زاویهٔ مسطح فرجهٔ قائمه باشد، لازم و کافی است که OX و OY موازی با یکی از ضلعهای آن باشد و یا این که OX یا OY بر یال این فرجه عمود باشد.

پس اگر خطهای داده شدهٔ OX و OY بر هم عمود باشند، مکان هندسی یال فرجهٔ (P,Q) از صفحهٔ عمود بر OX و صفحهٔ عمود بر OY در نقطهٔ O ، تشکیل می‌شود.



۶۰۱. یک مخروط دوار به رأس S و زاویهٔ مولد θ، و دو صفحهٔ مماس بر این مخروط که یکدیگر را تحت خط راست SA قطع می‌کنند، درنظر می‌گیریم. صفحهٔ نیمساز فرجهٔ حاصل از این دو صفحهٔ مماس، صفحهٔ SOA است.

OB را عمود بر SA رسم می‌کنیم و در صفحهٔ SAT ، BC را عمود بر SA رسم می‌نماییم ؛ زاویهٔ $O\hat{B}C$ ، زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ حاصل از صفحهٔ مماس AST و صفحهٔ ASO است. بنابراین مکان هندسی SA را به قسمی تعیین می‌کنیم که :

$$O\hat{B}C = ۴۵^\circ$$

توجه می‌کنیم که مثلث OCB در رأس C قائمه‌الزاویه است. در واقع، در کنج سه‌وجهی S.OAT ، فرجهٔ ST قائمه است، زیرا صفحهٔ مماس SAT بر صفحهٔ نصف‌النهاری SOT عمود است، و هر مقطع از یک کنج سه وجهی سه قائمه که به‌وسیلهٔ یک صفحهٔ عمود بر یکی از یالها ایجاد می‌شود، یک مثلث قائم‌الزاویه است که رأس زاویهٔ قائمه‌اش روی آن یال قرار دارد.

اینک برای این که $O\hat{B}C = ۴۵^\circ$ باشد، باید $BC = OC$ یا $OB = OC\sqrt{۲}$ باشد. امّا $OC = SO\sin\theta$ ، $OB = OS\sin x$ و از آن‌جا :

$$\sin x = \sqrt{۲}\sin\theta \Rightarrow x = \text{مقدار معلوم}$$

شرط امکان مسأله آن است که :

$$\sqrt{۲}\sin\theta \leq ۱$$

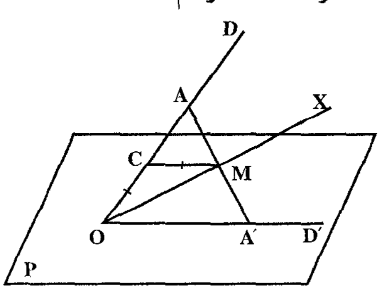
یا

$$\sin\theta \leq \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta \leq ۴۵^\circ$$

پس وقتی $\theta < ۴۵^\circ$ است، مکان هندسی SA یک سطح مخروطی به رأس S ، محور SO و زاویهٔ مولّد x است که در بالا محاسبه شد.

اگر $\theta = ۴۵^\circ$ باشد، $\sin x = ۱$ و از آن‌جا $x = ۹۰^\circ$ و مکان هندسی SA صفحهٔ عمود بر SO در نقطهٔ S است. بالاخره، وقتی $\theta > ۴۵^\circ$ است، نمی‌توان دو صفحهٔ مماس عمود بر هم بر مخروط رسم نمود.

۶۰۲. OD' را یکی از خطهایی می‌گیریم که از نقطهٔ O در صفحهٔ P رسم شده است.



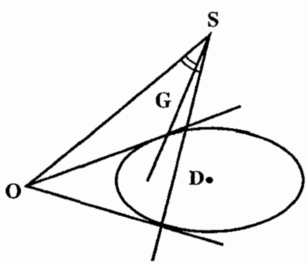
روی OD نقطهٔ A را اختیار می‌کنیم و روی OD' ، پاره‌خط $OA' = OA$ را جدا می‌کنیم. OX نیمساز زاویهٔ DOD' از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' می‌گذرد، در نتیجه اگر C وسط پاره‌خط OA باشد، CM با OA' موازی و مساوی نصف آن است،

یعنی $CA = \frac{OA}{۲} = \frac{OA'}{۲} = CM$. بنابراین نقطهٔ M روی دایره‌ای به مرکز C و به شعاع CA قرار دارد که صفحهٔ این دایره از نقطهٔ C به موازات صفحهٔ P رسم می‌شود. بعکس، اگر M یک نقطهٔ دلخواه از این دایره باشد، صفحهٔ ACM، صفحهٔ P را در خط OD′ موازی با CM قطع می‌کند. از طرف دیگر، AM را رسم می‌کنیم که OD′ را در M′ قطع می‌کند، چون C وسط OA است، پس M وسط AA′ است، بنابراین داریم :

$$OA' = ۲CM = OA$$

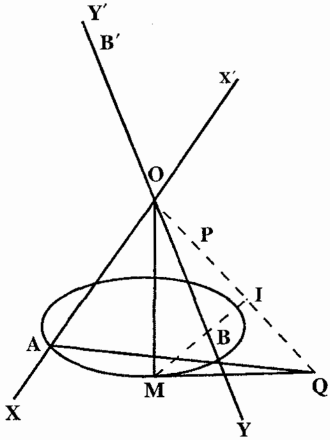
و در مثلث متساوی‌الساقین AOA′ میانهٔ OM نیمساز زاویهٔ AOA′ می‌باشد. پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قبلاً معرفی شد و مکان هندسی OX یک سطح مخروطی است که هادیش این دایره و رأسش نقطهٔ O است.

۶۰۳. سطح مخروطی دواری به رأس S را در نظر می‌گیریم که بر صفحهٔ SOD تحت خط SD مماس است. همچنین، SG را مولد تماس صفحهٔ دیگری با این سطح مخروطی دوار می‌گیریم که بر نقطهٔ O یعنی بر خط SO گذشته است. می‌دانیم که $O\hat{S}G = O\hat{S}D$ است. بنابراین، SG مولد یک سطح مخروطی دوار به محور SO و زاویهٔ مولد $O\hat{S}D$ است. بعکس، اگر SG مولدی از این سطح مخروطی باشد، کنج سه‌وجهی S.ODG متساوی‌الساقین است. بنابراین، SOG و SOD نسبت به نیمساز فرجهٔ به یال SO قرینهٔ یکدیگرند.



و از آن‌جا نتیجه می‌شود که صفحهٔ OSG تحت SG ، بر سطحهای مخروطی که مماس بر صفحهٔ OSD تحت SD هستند و محورشان در این صفحه نیمساز است، مماس می‌باشد. بنابراین مکان هندسی SG ، سطح مخروطی دواری است که در بالا مشخص شده است.

۶۰۴. روی OX نقطه‌ای مانند A را درنظر گرفته و یک سطح مخروطی را که بر دو خط XOX′ و YOY′ گذشته است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. دایرهٔ موازی دایرهٔ هادی این سطح که از نقطهٔ A می‌گذرد. شامل نقطهٔ B از OY یا نقطهٔ B′ از OY′ است که به‌وسیلهٔ رابطهٔ $OB = OB' = OA$ مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم که شامل نقطهٔ B باشد. AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد AB و OP را Q می‌نامیم. سپس QM را مماس بر دایره رسم می‌کنیم. صفحهٔ OQM از نقطهٔ P می‌گذرد و بر سطح مماس است.



داریم : ۱ قائمه = $\widehat{OMQ}$ و $OM = OA$ ؛ بنابراین وقتی سطح تغییر می‌کند، تمام مثلثهای OQM که وتر آنها یعنی OQ ثابت است، همنهشتند و از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر MI عمود بر OQ رسم شود، نقطهٔ I ثابت و IM طول ثابتی دارد. در نتیجه تمام نقطه‌های M روی دایرهٔ (C) به مرکز I و به شعاع IM قرار دارند و صفحهٔ این دایره بر OQ عمود است؛ بعکس، اگر M یک نقطه از این دایره باشد، داریم : $OM = OA = OB$ و ۱ قائمه $= \widehat{OMQ}$ ؛ بنابراین مخروط دوار شامل OA ، OB و OM مانند دایرهٔ موازی، شامل دایرهٔ (ABM) نیز هست. بعلاوه، QM مماس بر این دایرهٔ موازی است، در نتیجه صفحهٔ OQM مماس بر سطح است.

بنابراین مکان هندسی M دایرهٔ (C) است، و مکان هندسی مولد OM سطح مخروطی دوار به محور OQ است که دایرهٔ هادی‌اش دایرهٔ (C) است.

دایرهٔ (C) در صورتی وجود دارد که مثلث قائم‌الزاویهٔ OMQ وجود داشته باشد؛ داریم :

$$OM = OA \ , \ \overline{QM}^{2} = QA.QB$$

برای این که QM وجود داشته باشد، باید نقطهٔ Q خارج پاره‌خط AB باشد یا نقطهٔ P درون زاویه‌های $X'OY$ و $X'OY'$ قرار نداشته باشد، شرطی که از پیش لازم است.

هنگامی که به‌جای B نقطهٔ B' را درنظر بگیریم، اثبات به‌همین روش انجام می‌شود و از آن نتیجه می‌شود که مکان هندسی OM تنها یک مخروط دوار است، زیرا اگر P خارج دو زاویهٔ متقابل به رأس تشکیل شده به‌وسیلهٔ XX' و YY' باشد، در این صورت داخل یکی از دو زاویهٔ دیگر است.

بالاخره، اگر خط OP موازی AB باشد، مکان هندسی OM صفحهٔ نیمساز یکی از زاویه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ $X'X$ و $Y'Y$ است.

۶۰۵. مکان هندسی خواسته شده، نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دو خط SA و SB است. این مکان هندسی صفحه‌ای است که بر صفحهٔ SAB عمود است و بر یکی از دو نیمساز زاویهٔ ASB می‌گذرد (دو جواب).

۱.۶۰۶. دو خط A و B که یکدیگر را در نقطهٔ S قطع کرده‌اند، درنظر می‌گیریم. اگر XSX' محور یک سطح مخروطی دوار باشد که بر دو خط A و B گذشته است، این خط با دو خط A و B زاویه‌های مساوی می‌سازد و بعکس.

بنابراین مکان هندسی این محورها، از دو صفحهٔ نیمساز زاویه‌های بین دو خط داده شده، تشکیل می‌شوند.

۲. اگر یک سطح مخروطی دوار بر دو صفحهٔ داده شده مماس باشد، محورش فصل مشترک آن دو صفحه را قطع می‌کند، و با این دو صفحه،زاویه‌های متساوی می‌سازد.

بنابراین مکان هندسی این محورها صفحه‌های نیمساز فرجه‌های ایجاد شده به‌وسیلهٔ این دو صفحه است.

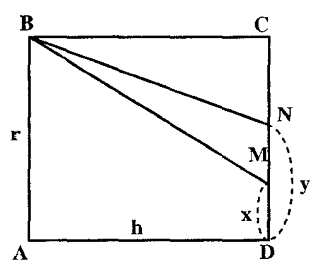
۳.۱۱. رسم شکل

۳.۱۱.۱. تعیین نقطه

۶۰۷. بنا به فرض داریم:

$$V_{ABMD}=\frac{۱}{۳}V_{ABCD}\ ,$$

$$V_{ABND}=\frac{۲}{۳}V_{ABCD}$$



یعنی:

$$\frac{\pi h}{۳}(r^۲+x^۲+rx)=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h$$

$$\frac{\pi h}{۳}(r^۲+y^۲+ry)=\frac{۲}{۳}\pi r^۲h$$

و یا:

$$x^۲+rx=۰$$

$$y^۲+ry-r^۲=۰$$

با شرط $x<y\le r$ ، $۰\le x<r$ ، خواهیم داشت:

$$x=۰\ ,\ \ y=r\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۲.۱۱.۳. رسم خط

۶۰۸. می‌دانیم که چهار مخروط دوار وجود دارد که بر سه خط همرس XSX' ، YSY' و ZSZ' می‌گذرد. رأس مشترک این مخروطها نقطهٔ S و قاعده‌های آنها دایره‌های ABC، ABC' ، $AB'C$ و $AB'C'$ است. دو مخروط از چهار مخروط بالا، به عنوان مثال دو مخروط اوّلی را درنظر می‌گیریم. صفحهٔ P عمود منصف پاره‌خط AB یک صفحهٔ نصف‌النهاری مشترک است؛ در نتیجه چون این دو مخروط هر دو در خط CSC' مشترک می‌باشند، بنابراین بر قرینهٔ این خط نسبت به صفحهٔ P نیز می‌گذرند. برای تصریح، اگر C_1 قرینهٔ C نسبت به قطر دایرهٔ ABC که عمود بر AB است، باشد، این دو کنج SC_1 را به‌عنوان چهارمین مولد خود، خواهند داشت.

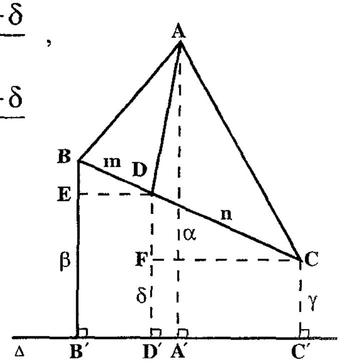
۶۰۹. $BD = m$ و $CD = n$ قرار می‌دهیم و فاصله‌های نقطه‌های A ، B ، C و D از خط Δ را بترتیب، با α ، β ، γ و δ نشان می‌دهیم. فاصله‌های مرکز ثقلهای مثلثهای ABD و ACD از خط Δ مساوی $\frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)$ و $\frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)$ می‌باشد. می‌خواهیم نقطهٔ D را روی ضلع BC چنان تعیین کنیم که:

$$V_{ABD} = V_{ACD}$$

اما می‌دانیم که:

$$V_{ABD} = \text{ABD مساحت} \times 2\pi \times \frac{\alpha+\beta+\delta}{3} ,$$

$$V_{ACD} = \text{ACD مساحت} \times 2\pi \times \frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}$$



بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{ABD مساحت} \times 2\pi \times \frac{\alpha+\beta+\delta}{3} = \text{ACD مساحت} \times 2\pi \times \frac{\alpha+\gamma+\delta}{3}$$

و یا:

$$\text{ABD مساحت} \times (\alpha+\beta+\delta) = \text{ACD مساحت} \times (\alpha+\gamma+\delta)$$

از طرفی می‌دانیم که : $\frac{\text{مساحت ACD}}{n} = \frac{\text{مساحت ABD}}{m}$ است. بنابراین خواهیم داشت :

$$m(\alpha+\beta+\delta) = n(\alpha+\gamma+\delta) \qquad (۱)$$

امّا در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ DEB و CFD داریم :

$$\frac{m}{\beta-\delta} = \frac{n}{\delta-\gamma}$$

و تساوی (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$(\beta-\delta)(\alpha+\beta+\delta) = (\delta-\gamma)(\alpha+\gamma+\delta)$$

α ، β و γ مقدارهای معلومی هستند. بنابراین از رابطهٔ بالا δ به‌دست می‌آید. معادلهٔ حاصل به‌صورت زیر است :

$$f(\delta) = ۲\delta^۲ + ۲\alpha\delta - (\beta^۲ + \gamma^۲ + \alpha\gamma + \alpha\beta) = ۰$$

این معادله یک ریشهٔ مثبت دارد و برای این که قابل قبول باشد، باید این ریشه بین β ، γ قرار داشته باشد. داریم :

$$f(\beta) = (\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma) \;,\; f(\gamma) = -(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$$

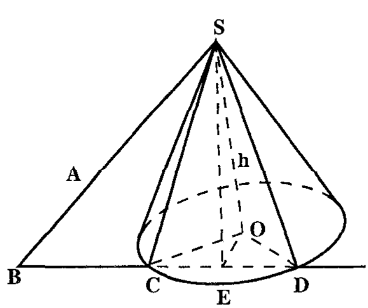
$$\Rightarrow f(\beta)f(\gamma) = -(\beta-\gamma)^۲(\alpha+\beta+\gamma)^۲ < ۰$$

بنابراین حتماً ریشهٔ مثبت معادله، بین β و γ است و مسأله همواره دارای یک جواب و تنها یک جواب است.

نکته. شرط لازم و کافی برای آن که یک ریشه معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c = ۰$ بین دو عدد α و β قرار داشته باشد، آن است که $f(\alpha)f(\beta) < ۰$ باشد.

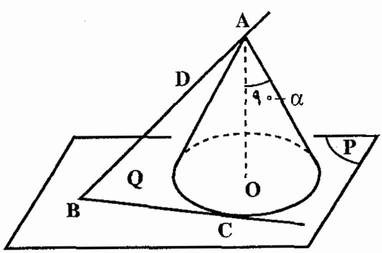
۳.۱۱.۳. رسم صفحه

۶۱۰. فرض می‌کنیم یک صفحه از نقطهٔ A بگذرد، و سطح مخروطی دوار به ارتفاع $SO = h$ و زاویهٔ مولد θ را تحت دو مولد SC و SD که با هم زاویهٔ α می‌سازند، قطع کرده باشد. این صفحه، قاعدهٔ مخروط را در خط CD قطع می کند که این خط شامل نقطهٔ B فصل مشترک خط SA با صفحهٔ قاعده نیز هست.



در مثلث SCD، اندازه‌های SC ، SD و $C\hat{S}D = \alpha$ مشخص است ؛ بنابراین، اندازهٔ CD معلوم می‌باشد. از آن‌جا OC و CE مشخص می‌باشند و می‌توان طول پاره‌خط OE یعنی فاصلهٔ O از CD را رسم نمود ؛ همچنین دیده می‌شود که صفحهٔ SBCD بر سطح مخروطی دواری که ارتفاعش SO و شعاع قاعده‌اش OE است، مماس است.
این‌جا، دو جواب وجود دارد ؛ این دو جواب، دو صفحهٔ مماس رسم شده از نقطهٔ A بر مخروط دومی است.
برای این که این دو جواب وجود داشته باشد، ابتدا باید وتری مانند CD وجود داشته باشد به قسمی که مولدهای SC و SD با هم زاویهٔ α بسازند و یا $2\theta > \alpha$ باشد. بعلاوه، نقطهٔ B نباید درون دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OE باشد.

۶۱۱. روی خط D نقطهٔ A را اختیار می‌کنیم و نقطهٔ برخورد خط D و صفحهٔ P را B می‌نامیم. صفحهٔ Q که بر نقطهٔ A می‌گذرد و با صفحهٔ P زاویهٔ α می‌سازد، بر یک سطح مخروطی دوار که رأسش A، محورش AO عمود بر صفحهٔ P و زاویهٔ مولدش $90^\circ - \alpha$ است، مماس است. بنابراین، برای تعیین صفحهٔ Q، بر خط AB، صفحه‌ای مماس بر این سطح مخروطی رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ B خارج دایرهٔ قاعده باشد، مسأله دو جواب دارد. به بیان دیگر اگر $O\hat{A}B > 90^\circ - \alpha$ باشد و یا اگر θ را زاویهٔ بین خط AB و صفحهٔ P فرض کنیم ؛ اگر $\theta < \alpha$ باشد، مسأله دو جواب دارد، اگر $\theta = \alpha$ باشد، مسأله یک جواب دارد و اگر $\theta > \alpha$ باشد، مسأله دارای جواب نیست.



از آن‌چه گذشت نتیجه می‌شود، که برای خط داده شدهٔ D، صفحه‌ای که شامل این خط باشد و با صفحهٔ P بزرگترین زاویه را بسازد، صفحه‌ای است که این خط را به عنوان خط بزرگترین شیب داراست.

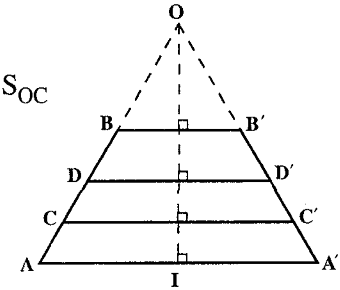
۶۱۲. فرض می‌کنیم $AA'BB'$ مقطع مخروط ناقص با یک صفحهٔ نصف‌النهاری و CC' و DD' فصل مشترکهای این صفحه، با دو صفحهٔ خواسته شدهٔ موازی قاعده‌های مخروط باشند. سطحهای جانبی سه قسمت مخروط ناقص را که به وسیلهٔ پاره‌خطهای

BD، DC و CA از دوران حول OI به‌وجود می‌آیند، با S_{BD}، S_{DC} و S_{CA} نشان می‌دهیم. باید داشته باشیم:

$$S_{BD} = S_{DC} = S_{CA}$$

یا

$$S_{OD} - S_{OB} = S_{OC} - S_{OD} = S_{OA} - S_{OC}$$



امّا، مخروطهای با مولدهای OB، OD، OC و OA که متشابه‌اند، نسبت مساحتهای سطحهای جانبی‌شان متناسب با مربع طول مولدهایشان و درنتیجه با مساحت مثلثهای OBB'، ODD'، OCC' و OAA' متناسب می‌باشند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$ODD' - OBB' = OCC' - ODD' = OAA' - OCC'$$

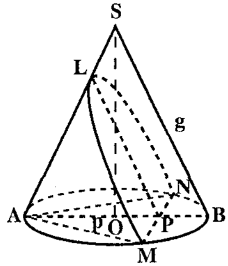
یا

$$\text{مساحت } BB'D'D = \text{مساحت } DD'C'C = \text{مساحت } CC'A'A$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود که CC' و DD' ذوزنقهٔ $AA'B'B$ را به‌وسیلهٔ خطهای موازی به سه قسمت معادل هم (هم‌ارز) تقسیم می‌کنند.

۶۱۳. $$S = \frac{۴}{۳} LP . MP = \frac{۲}{۳} LP . MN$$

LP را برحسب اجزاء دایرهٔ قاعده تعیین می‌کنیم. داریم:



$$\frac{LP}{AP} = \frac{g}{۲r} \Rightarrow LP = AP \cdot \frac{g}{۲r} \qquad (۱)$$

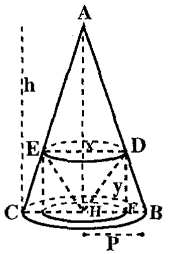
بنابراین:

$$S = \frac{۲}{۳} AP \cdot \frac{g}{۲r} \cdot MN$$

می‌توان نوشت:

$$S = \frac{۲g}{۳r} \cdot \frac{AP . MN}{۲}$$

امّا $\frac{AP . MN}{۲}$ مساحت مثلث محاطی AMN است و تغییرات قطعهٔ سهموی تنها به این عامل وابسته است؛ درنتیجه ماکزیمم مقدار آن وقتی است که مساحت این مثلث ماکزیمم باشد. امّا درصورتی مساحت این مثلث ماکزیمم است که متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی داشته باشیم: $AP = \frac{۳r}{۲}$.



۶۱۴. استوانه به حجم ماکزیمم محاط در یک مخروط داده شده، از قطع کردن مخروط با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مخروط از رأس آن به‌دست می‌آید :

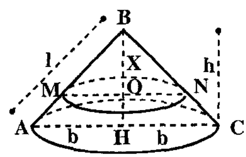
$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{حجم استوانهٔ ماکزیمم} = \frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{27}\pi r^2 h$$

تبصره. ۱. حجم استوانهٔ با حجم ماکزیمم $\frac{۴}{۹}$ حجم مخروط داده شده است.

۲. مخروط به حجم می‌نیمم محیط به یک استوانه به حجم $\pi x^2 y$، مخروطی است که ارتفاعش $h = 3y$ است و حجم آن $\frac{۹}{۴}$ حجم استوانه است.

۳. مقطع ED که به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع از قاعده رسم می‌شود، مخروط محاطی به حجم ماکزیمم HED را می‌دهد.



۶۱۵. فرض می‌کنیم، $AB = l$ ، $BH = h$ ، $AH = b$ و $BD = x$ باشد، باید داشته باشیم :

$$MD^2 = \pi(AH + MD)AM \qquad (1)$$

امّا :

$$MD = \frac{bx}{h} \text{ و } MB = \frac{lx}{h}$$

از آن‌جا :

$$AM = \frac{lh}{h} - \frac{lx}{h} = \frac{l}{h}(h - x)$$

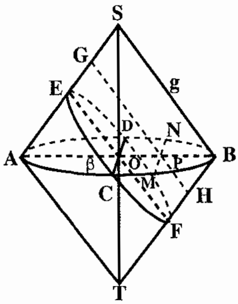
$$AH + MD = \frac{bh}{h} + \frac{bx}{h} = \frac{1}{h}(h + x)$$

رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{b^2x^2}{h^2} = \frac{b}{h}(h + x)\cdot\frac{l}{h}(h - x)$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{l}{b + l}$$



۶۱۶. مقطع از دو قطعهٔ سهموی تشکیل می‌شود. اگر GH و MN پاره‌خطهای اصلی مقطع باشند، دیده می‌شود که قطعه سهموی MGN همانند مثلث MAN تغییر می‌کند و قطعهٔ سهموی MHN همانند مثلث MBN تغییر می‌نماید. بنابراین مقطع، مانند چهارضلعی AMBN تغییر می‌کند. پس ماکزیمم هنگامی است که مقطع از مرکز O می‌گذرد، زیرا مربع ABCD، چهارضلعی ماکزیمم است.

۶۱۷. می‌دانیم که چهار مخروط دوار وجود دارد که بر سه صفحهٔ متقاطع در یک نقطه، مماسند. فرض می‌کنیم که این دو مخروط، مخروطها، مخروطهایی باشند که بر صفحه‌های $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ مماس است و محور یکی، فصل مشترک صفحه‌های نیمساز $Q_{۱,۲}$ و $Q_{۱,۳}$ و محور دیگری فصل مشترک صفحه‌های نیمساز $Q_{۱,۲}$ و $Q'_{۱,۳}$ باشد. صفحهٔ $Q_{۱,۲}$، برای هر یک از این دو مخروط صفحهٔ تقارن است؛ بنابراین، این مخروطها که هر دو بر صفحهٔ $P_۳$ مماسند، دارای یک صفحهٔ مماس چهارم نیز خواهد بود که این صفحه، قرینهٔ صفحهٔ $P_۳$ نسبت به صفحهٔ $Q_{۱,۲}$ است.

تبصره. $Q_{۱,۲}$ و $Q'_{۱,۲}$، یعنی صفحه‌های نیمساز فرجه‌های حاصل از تقاطع دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۲$ و به همین صورت برای $Q_{۱,۳}$ و $Q'_{۱,۳}$ صفحه‌های نیمساز فرجه‌های حاصل از برخورد دو صفحهٔ $P_۱$ و $P_۳$ است.

۶۱۸. مخروط ناقص $ABB'A'$ را درنظر می‌گیریم، که در آن $CA = ۴$، $C'A' = ۱$ و $CC' = ۳$ و صفحهٔ DE موازی با صفحه‌های دو قاعده به قسمی باشد که داشته باشیم:

$$\frac{\text{حجم } ABED}{\text{حجم } DEB'A'} = ۸$$

یا

$$\frac{\text{حجم } OAB - \text{حجم } ODE}{\text{حجم } ODE - \text{حجم } OA'B'} = ۸$$

مخروطهای OAB، ODE و $OA'B'$ که متشابه‌اند، نسبت حجمهایشان به نسبت مکعب ارتفاعهایشان می‌باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\overline{OC}^۳ - \overline{OF}^۳}{\overline{OF}^۳ - \overline{OC'}^۳} = ۸$$

امّا :

$$\frac{OC}{۴}=\frac{OC'}{۱}=\frac{OC-OC'}{۳}=۱$$

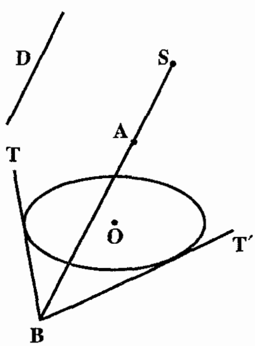
درنتیجه $OC=۴$ و $OC'=۱$ است. با جایگزینی این مقدارها نتیجه می‌شود :

$$\frac{۶۴-OF^{۳}}{OF^{۳}-۱}=۸\Rightarrow OF^{۳}=۸\Rightarrow OF=۲$$

بنابراین نقطهٔ F روی ارتفاع CC'، به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع از نقطهٔ C' قرار دارد. یعنی :

$$FC'=\frac{۲}{۳}CC'$$

۶۱۹. ۱. یک سطح مخروطی را که رأس آن S و منحنی هادیش دایرهٔ O است، همچنین نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم.



صفحه‌ای مماس را درنظر می‌گیریم که بر نقطهٔ A گذشته است ؛ این صفحه، شامل خط راست SA است و به‌وسیلهٔ صفحهٔ دایرهٔ هادی تحت خطی قطع می‌شود که این خط مماس بر دایرهٔ O است و از نقطهٔ B محل تلاقی SA با صفحهٔ دایره نیز می‌گذرد ؛ و بعکس، صفحه‌ای که به این صورت مشخص شده باشد، مماس بر سطح مخروطی است.

بنابراین خط SA را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با صفحهٔ دایرهٔ O را B می‌نامیم. سپس خطهای مماس BT و BT' را بر دایرهٔ هادی O رسم می‌کنیم. صفحه‌های مماس SBT و SBT' را خواهیم داشت که جوابهای مسأله‌اند.

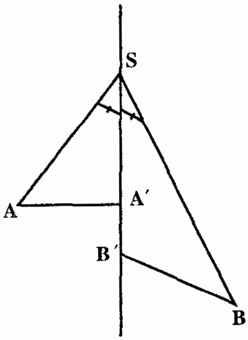
برای آن‌که مسأله ممکن باشد، نقطهٔ B باید درون دایرهٔ O واقع نشود.

۲. برای آن که یک صفحهٔ مماس، موازی یک خط داده شدهٔ D باشد، لازم و کافی است که شامل خط SA موازی خط D باشد، پس روش رسم به حالت قبل برمی‌گردد.

۴.۱۱.۳. رسم سطح مخروطی دوار

۶۲۰. خط XY را محور و A و B را دو نقطهٔ داده شده از سطح مخروطی می‌گیریم. AA' و BB' را عمود بر XY رسم می‌کنیم.

برای آن‌که یک نقطه مانند S از XY رأس سطح مخروطی باشد، لازم و کافی است که $A\hat{S}A' = B\hat{S}B'$ و یا $\frac{AA'}{BB'} = \frac{SA'}{SB'}$ باشد.

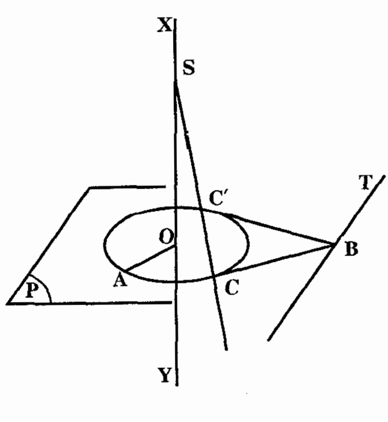


بنابراین رأس مخروط یکی از دو نقطه‌ای واقع بر XY خواهد بود که نسبت فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ A' و B' مساوی و مقدار $\frac{AA'}{BB'}$ باشد؛ با مشخص شدن رأس S، سطح مخروطی مشخص می‌شود؛ زیرا زاویهٔ مولد ASA' مشخص می‌گردد. اگر $\frac{AA'}{BB'} \neq ۱$ باشد، مسأله دارای دو جواب است. اگر $AA' = BB'$ باشد، دو حالت وجود دارد:

اگر A' و B' دو نقطهٔ متمایز باشند، تنها یک سطح مخروطی جواب مسأله است که رأس آن وسط پاره‌خط $A'B'$ است.

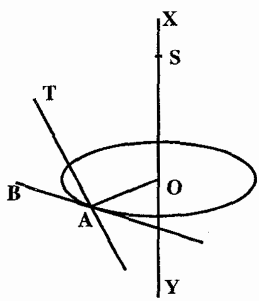
اگر A' و B' بر هم منطبق باشند، هر نقطه‌ای از XY می‌تواند رأس سطح مخروطی باشد و در این صورت مسأله بی‌شمار جواب دارد.

۶۲۱. مسأله را حل شده و نقطهٔ S را رأس سطح مخروطی فرض می‌کنیم. این سطح مخروطی شامل دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ O، تصویر نقطهٔ A، روی خط XY و شعاعش پاره‌خط OA واقع در صفحهٔ P است که این صفحه، در نقطهٔ O بر خط XY عمود است. بعلاوه چون خط T بر سطح مخروطی مماس است، پس صفحهٔ (S,T) بر سطح مخروطی مماس می‌باشد، بنابراین این صفحه، صفحهٔ P را در خط راست BC قطع می‌کند که بر دایرهٔ O مماس است و از نقطهٔ B محل برخورد خط T با صفحهٔ P می‌گذرد.



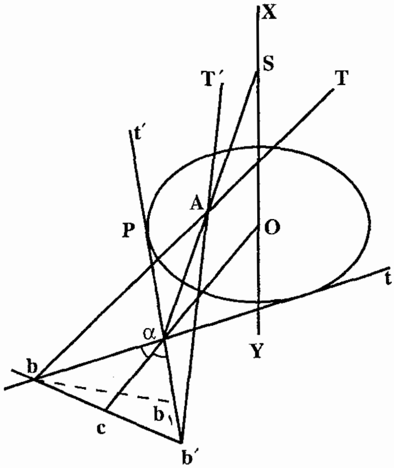
روش رسم رأس S، با توجه به نکته‌های بالا چنین است :
اگر نقطهٔ برخورد خط مماس T با صفحهٔ P، نقطهٔ B باشد، مماسهای BC و 'BC را بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم. صفحه‌های BCT و BC'T خط XY را در S و 'S قطع می‌کنند ؛ سطحهای مخروطی به رأسهای S و 'S و شامل نقطهٔ A و درنتیجه دایرهٔ O که یکی بر صفحهٔ SCB و دیگری بر صفحهٔ SC'B مماسند، هر دو بر خط T مماس می‌باشند.
بنا بر وضع نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ O مسأله دارای ۲ جواب، یک جواب و یا بدون جواب است، بنا بر آن که بترتیب نقطهٔ B برون دایرهٔ O، روی دایرهٔ O و یا در درون این دایره باشد.

۶۲۲. می‌خواهیم یک سطح مخروطی دوار رسم کنیم که محورش خط XY، یک خط مماس بر آن خط T و نقطهٔ تماس این خط با این سطح مخروطی نقطهٔ A است.



فرض می‌کنیم مسأله حل شده و نقطهٔ S رأس سطح مخروطی جواب مسأله باشد. این سطح مخروطی شامل دایره‌ای به مرکز O است که تصویر نقطهٔ تماس A، روی خط XY است و شعاعش مساوی پاره‌خط AO است و صفحهٔ این دایره بر خط XY عمود است. صفحهٔ مماس بر سطح مخروطی در نقطهٔ A، شامل خط T و خط AB است که این خط، در نقطهٔ A و در صفحهٔ دایرهٔ O بر این دایره مماس است ؛ درنتیجه رأس S نقطهٔ برخورد صفحهٔ BAT با خط XY است.
مسأله عموماً دارای یک و تنها یک جواب است.
اگر صفحهٔ BAT با خط XY موازی باشد، یعنی وقتی که AT عمود بر OA باشد، یک سطح استوانه‌ای دوار خواهیم داشت. بالاخره اگر AT عمود بر XY باشد، مسأله جواب ندارد، مگر درحالتی که AT بر AB منطبق باشد. در حالت اخیر، هر نقطهٔ دلخواه از XY را می‌توان به‌عنوان رأس S درنظر گرفت.

۶۲۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و نقطهٔ S رأس سطح مخروطی باشد. صفحه‌های SAT و 'SAT، صفحه‌های مماس می‌باشند. دو حالت پیش می‌آید : اگر این دو صفحه بر هم منطبق باشند، بدین معنی که AT و 'AT در یک صفحهٔ مماس قرار داشته باشند، رأس S، نقطهٔ برخورد محور XY با صفحهٔ 'TAT است ؛ زاویهٔ مولد، زاویهٔ بین محور XY و صفحهٔ 'TAT است و سطح مخروطی که بدین‌ترتیب مشخص می‌شود، یکتاست.

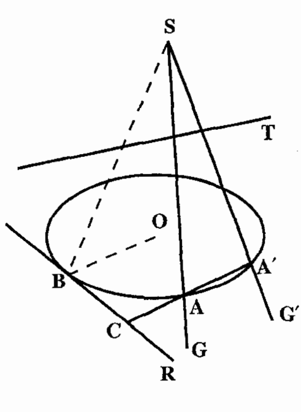


اکنون فرض می‌کنیم که دو صفحهٔ SAT و 'SAT متمایز هستند. صفحه‌ای مانند P عمود بر XY رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم؛ فصل مشترکهای دو صفحهٔ مماس SAT و 'SAT با صفحهٔ P را at و 'at می‌نامیم. این دو خط بر دایرهٔ مقطع مماسند. خطهای T و 'T بترتیب at و 'at را در نقطه‌های b و 'b قطع می‌کنند، و Oa نیمساز زاویهٔ 'tOt است.

بعکس، اگر نقطهٔ S روی xy چنان اختیار شده باشد که خط Oa نیمساز زاویهٔ 'tat باشد، سطح مخروطی که رأسش S و هادی‌اش دایرهٔ به مرکز O و محاط در زاویهٔ 'tat باشد، بر صفحه‌های Sat و 'Sat و درنتیجه بر AT و 'AT مماس است.

در صفحهٔ P، نقطه‌های b و 'b، محل برخورد T و 'T را می‌شناسیم؛ نقطهٔ a روی Oc فصل مشترک صفحهٔ xyA با صفحهٔ P است. حال موضوع عبارت از آن است که نقطهٔ a را روی Oc چنان بیابیم که ac نیمساز زاویهٔ 'bab باشد. امّا برای این منظور، لازم و کافی است که b′a از نقطهٔ b_1 قرینهٔ b نسبت به Oc بگذرد. بنابراین b_1b' را رسم می‌کنیم تا Oc را در a قطع کند، سپس aA محور xy را در نقطهٔ S قطع خواهد کرد، همچنین یک جواب دوم نیز خواهیم داشت. این مسأله عموماً دارای دو جواب است.

۶۲۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و یک سطح مخروطی دوار که خطهای SG و 'SG دو مولّد و خط T یک مماس بر آن است، جواب مسأله باشد. مقطعی را درنظر می‌گیریم که به‌وسیلهٔ یک صفحهٔ عمود بر محور ایجاد شده است. به‌وسیلهٔ این صفحه، سطح مخروطی تحت یک دایره، SG و 'SG در دو نقطهٔ A و 'A از این دایره، و صفحهٔ مماس (S,T) تحت خط BR مماس بر دایره، قطع می‌شوند. از طرف دیگر داریم:



$$SB = SA = SA' \text{ و } S\hat{B}C = ۱ \text{ قائمه}$$

بعکس، روی SG و SG′ دو طول مساوی SA و SA′ را جدا می‌کنیم و نقطهٔ برخورد AA′ و صفحهٔ (S,T) را C می‌نامیم.

در صفحهٔ (S,T) دایرهٔ به مرکز S و به شعاع SA و دایرهٔ به قطر SC را رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ B یکی از نقطه‌های مشترک این دایره‌ها باشد، سه نقطهٔ A، A′ و B یک دایره مانند O مشخص می‌کنند که محورش از نقطهٔ S می‌گذرد، زیرا $SB = SA = SA'$ است؛ این دایره بر CB مماس است، چون که قائمه $S\hat{B}C = ۱$ و در نتیجه قائمه $O\hat{B}C = ۱$ است. بنابراین سطح مخروطی به رأس S که دایرهٔ هادی‌اش دایرهٔ اخیر است، شامل SG و SG′ است و بر صفحهٔ SBC مماس می‌باشد، درنتیجه بر خط T که در این صفحه واقع است، مماس می‌باشد.

برای این‌که مسأله جواب داشته باشد، باید نخست، نقطهٔ C خارج پاره‌خط AA′ باشد و یا، خط مماس T صفحهٔ SGG′ را در نقطه‌ای خارج از زاویهٔ GSG′ و روبه‌رو به رأسش، قطع کند. امّا SA ثابت است، می‌توان $SA' = SA$ را روی SG′ یا روی نیمخط روبه‌رویش جدا کرد؛ و این نشان می‌دهد که یک و تنها یک نقطهٔ C خارج پاره‌خط AA′ وجود دارد.

بعلاوه، باید دایرهٔ به مرکز S و شعاع SA و دایرهٔ به قطر SC یکدیگر را قطع کنند؛ امّا این همواره وجود دارد؛ زیرا SA کوچکتر از SC است. پس مسأله همواره دو جواب دارد.

۶۲۵. صفحه‌های (S,T) و (S,T′) بر سطح مخروطی مماسند و این سطح مخروطی درون فرجهٔ حاصل از این دو صفحه (و فرجهٔ متقابل به یال آن) که شامل نقطهٔ A است، قرار دارد.

بعلاوه، ملاحظه می‌شود که صفحهٔ نیمساز این فرجه، یک صفحهٔ تقارن سطح مخروطی است. بنابراین، این سطح مخروطی شامل نقطهٔ A′ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به این صفحهٔ نیمساز است. بعکس، یک سطح مخروطی دوار که بر صفحهٔ (S,T)، مماس است و بر دو نقطهٔ A و A′ می‌گذرد، نسبت به صفحهٔ نیمساز ذکر شده متقارن است؛ بنابراین بر صفحهٔ (S,T′) مماس است.

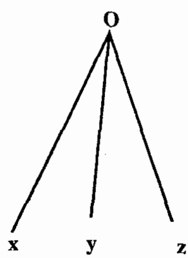
پس مسأله منجر می‌شود به رسم یک سطح مخروطی دوّار که بر صفحهٔ (S,T) مماس است و دو مولدش SA و SA′ است.

۶۲۶. xsy را محور یکی از این سطحهای مخروطی فرض می‌کنیم. صفحه‌های (S,T) و (S,T′) هر دو بر سطح مخروطی مماسند و محور سطح مخروطی با هر یک از این دو

صفحه زاویه‌ای مساوی زاویهٔ داده شدهٔ θ می‌سازد. درنتیجه، این محور روی یکی از صفحه‌های نیمساز فرجه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ این دو صفحهٔ مماس قرار دارد. بعکس، یک خط xSy از یکی از این صفحه‌های نیمساز که با صفحهٔ (S,T) زاویه‌ای مساوی θ بسازد، با صفحهٔ (S,T') نیز همین زاویه را می‌سازد.

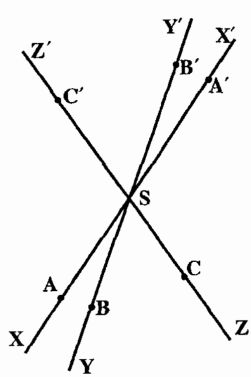
بنابراین مسأله تبدیل می‌شود به رسم یک خط از یک نقطهٔ S واقع در یک صفحهٔ داده شده (یکی از صفحه‌های نیمساز) که با یک صفحهٔ داده شده (صفحهٔ (S,T)) زاویهٔ داده شدهٔ θ را بسازد. حل این مسأله ساده است.

مسأله، حداکثر چهار جواب دارد.



۶۲۷. محور این سطح مخروطی خطی خواهد بود که با سه مولد Ox، Oy و Oz زاویه‌های مساوی بسازد. این خط مکان هندسی نقطه‌هایی است که از سه نیمخط Ox، Oy و Oz به یک فاصله‌اند. برای رسم این محور، صفحهٔ نیمساز فرجه‌های (y ـ Ox ـ z) و (x ـ Oy ـ z) را رسم می‌کنیم. اکنون برای تعیین شعاع دایرهٔ قاعده، صفحه‌ای عمود بر محور سطح مخروطی رسم می‌کنیم تا Ox، Oy و Oz را در A، B و C قطع کند. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این دایره، قاعدهٔ سطح مخروطی داده شده است.

۶۲۸. سطح مخروطی دواری را درنظر می‌گیریم که XSX' ، YSY' و ZSZ' مولدهای آن باشند. یک صفحهٔ موازی افق، این خطها را در نقطه‌های A، B و C قطع می‌کند که از نقطهٔ S به یک فاصله‌اند. بعکس، اگر روی این سه خط طولهای مساوی $SA = SB = SC$ را جدا کنیم، عمودی که از نقطهٔ S بر صفحهٔ ABC رسم می‌شود، آن را در O قطع می‌کند. سه مثلث قائم‌الزاویهٔ SOA و SOB و SOC به‌دلیل مساوی بودن وترها و اشتراک یک ضلعشان همنهشتند، بنابراین $O\hat{S}A = O\hat{S}B = O\hat{S}C$ و SO محور سطح مخروطی دواری است که سه خط داده شده، مولدهای آن هستند. همچنین راه‌حل زیر برای رسم مشخص می‌شود:

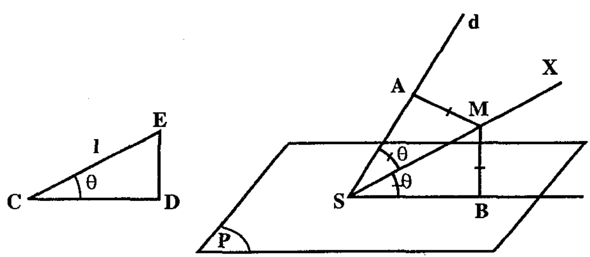


روی SX طول دلخواه SA، و سپس روی خطهای YY' و ZZ' طولهای SB، SB' ؛ SC، SC' را مساوی SA جدا می‌کنیم. عمودهایی که از نقطهٔ S بر هر یک از

صفحه‌های ABC، 'ABC، AB'C و 'AB'C رسم می‌شوند، محورهای چهار سطح مخروطی دوارند که شامل سه خط داده شده نیز هستند. زاویه‌های مولدها، برابرند با زاویهٔ هر یک از محورها با 'XX.

۶۲۹. یک سطح مخروطی دوار را که زاویهٔ مولد آن θ است، درنظر می‌گیریم.

برای آن‌که این سطح مخروطی دوار شامل خط d و مماس بر صفحهٔ P باشد، لازم و کافی است که محورش با خط و با صفحهٔ داده شده، زاویهٔ θ بسازد. پس باید محور سطح مخروطی را با استفاده از این دو شرط رسم کنیم. برای این‌کار فرض می‌کنیم M یک نقطه از این محور SX واقع در یک طرف صفحه و به فاصلهٔ معلوم $SM = l$ از رأس مخروط باشد. MA و MB را بترتیب عمود بر d و عمود بر P رسم می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ MAS و MBS که دارای وتر به طول l و زاویهٔ حاده‌ای مساوی θ هستند، با مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE با همین مشخصات همنهشتند. در این‌صورت، نقطهٔ M در صفحه‌ای مانند 'P قرار دارد که موازی صفحهٔ P و به فاصلهٔ ثابت DE از این صفحه واقع است، و همچنین روی دایره‌ای به مرکز A است به قسمی که $SA = CD$، و شعاع آن مساوی مقدار معلوم DE است که این دایره در صفحهٔ Q است که در نقطهٔ A بر خط Sd عمود است.



بنابراین نقطهٔ M، محل برخورد خط Δ فصل مشترک صفحه‌های 'P و Q و دایرهٔ به مرکز A و شعاع DE است.

اگر 'P و Q متقاطع باشند، یعنی اگر Sd نسبت به صفحهٔ P مایل باشد، مسأله دو جواب دارد، یک جواب دارد یا جواب ندارد.

اگر Sd عمود بر صفحهٔ P باشد، 'P و Q موازی یا بر هم منطبق هستند. در این حالت جواب وجود ندارد یا بیشمار جواب وجود دارد. برحسب آن‌که $DE \neq CD$ یا $CD = DE$ باشد، بدین‌معنی که θ نامساوی با °۴۵، و یا مساوی °۴۵ باشد. در این‌صورت، وقتی $\theta = ۴۵^\circ$ است، تمام سطحهای مخروطی به رأس S که بر خط d

می‌گذرند و زاویهٔ رأس 45° دارند، بر صفحهٔ P مماسند.

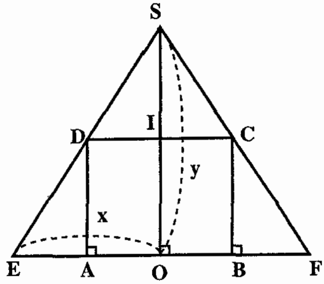
۶۳۰. سه صفحهٔ P_1، P_2 و P_3 را که در نقطهٔ O متقاطعند، درنظر می‌گیریم. برای آن که یک خط مانند Ox محور یک سطح مخروطی دوار باشد که بر این سه صفحه مماس است، لازم و کافی است که این خط با این سه صفحه، زاویه‌های مساوی بسازد و درنتیجه باید در یکی از صفحه‌های نیمساز فرجه‌های حاصل از P_1 و P_2 و در یکی از صفحه‌های نیمساز فرجه‌های پدید آمده از P_1 و P_3 باشد. در این‌صورت اگر $Q_{1,2}$ و $Q'_{1,2}$ نیمسازهای فرجه‌های (P_1,P_2) ؛ و $Q_{1,3}$ و $Q'_{1,3}$ نیمسازهای فرجه‌های حاصل از (P_1,P_3) باشد، چهار خط وجود دارد که با صفحه‌های P_1، P_2 و P_3 زاویه‌های مساوی می‌سازند. این خطها، فصل مشترکهای صفحه‌های $Q_{1,2}$ و $Q_{1,3}$ ؛ $Q_{1,2}$ و $Q'_{1,3}$ ؛ $Q'_{1,2}$ و $Q_{1,3}$ ؛ و $Q'_{1,2}$ و $Q'_{1,3}$ هستند. پس مسأله چهار جواب دارد.

۶۳۱. محور سطح مخروطی، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از سه صفحهٔ مماس به یک فاصله‌اند. این مکان هندسی، محل برخورد صفحه‌های نیمسازهای فرجه‌های تشکیل شده از صفحه‌های مماس، دو به دو می‌باشد. این محور را رسم می‌کنیم. صفحه‌ای عمود بر محور سطح مخروطی رسم می‌کنیم تا صفحه‌های مماس را در سه خط دو به دو متقاطع قطع کند. دایرهٔ محیطی حاصل از برخورد این سه خط، دایرهٔ هادی سطح مخروطی دوار موردنظر است.

۵.۱۱.۳. رسم مخروط

۶۳۲. شعاع قاعده و ارتفاع استوانهٔ داده شده را بترتیب r و h، و شعاع قاعده و ارتفاع یک مخروط محیط بر این استوانه را بترتیب x و y می‌نامیم. حجم این مخروط برابر است با :

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$



امّا مثلثهای SOE و SID متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{y}{x} = \frac{y-h}{r} \Rightarrow y = \frac{hx}{x-r}$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{hx^3}{x-r}$$

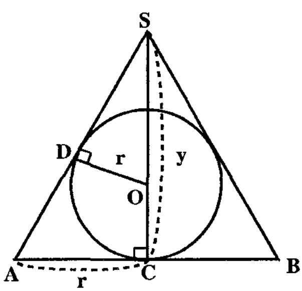
برای آن‌که V کمترین مقدار ممکن را دارا باشد، باید $\frac{x-r}{x^3}$ یا $\frac{r^2(x-r)}{x^3}$ ماکزیمم باشد. امّا این عبارت را چنین می‌توان نوشت :

$$(\frac{r}{x})^2(1-\frac{r}{x})$$

و چون مجموع $\frac{r}{x}$ و $(1-\frac{r}{x})$ مقدار ثابتی است، پس حاصلضرب بالا وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{\frac{r}{x}}{2}=1-\frac{r}{x}\Rightarrow x=\frac{3r}{2}$$

این مقدار، شعاع قاعدهٔ مخروط است. ارتفاع آن $y=3h$ و حجمش $V=\frac{9}{4}\pi r^2h$ است.



۶۳۳. شعاع قاعده، ارتفاع و حجم مخروط محیطی را بترتیب، x، y و V می‌گیریم. داریم :

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2y$$

x را برحسب y و r شعاع کره محاسبه می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SAC و SOD متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{SA}{SO}=\frac{CA}{OD}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y-r}=\frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{r^2y}{y-2r}$$

اکنون داریم :

$$V=\frac{1}{3}\pi\times\frac{r^2y^2}{y-2r}$$

با توجه به ثابت بودن r درصورتی V کمترین مقدار ممکن را داراست که $\frac{y-2r}{y^2}$ و یا

$\frac{2r(y-2r)}{y^2}$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. امّا این عبارت را می‌توان به‌صورت $\frac{2r}{y}(1-\frac{2r}{y})$ نوشت. به‌طوری که دیده می‌شود، مجموع دو عامل این ضرب مقدار ثابتی است، پس درصورتی ماکزیمم خواهند بود که این دو عامل با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم :

$$\frac{2r}{y}=1-\frac{2r}{y}\Rightarrow\frac{4r}{y}=1\Rightarrow y=4r$$

بنابراین مخروط به حجم ماکزیمم، مخروطی است که ارتفاعش مساوی $4r$ باشد یا به عبارتی دیگر مرکز کره بر مرکز ثقل حجم مخروط منطبق باشد. حال از تساوی $x^2=\frac{ry}{y-2r}$ نتیجه می‌شود : $x=r\sqrt{2}$ و داریم :

$$SA=\sqrt{CS^2+CA^2}=3r\sqrt{2}$$

اگر S و V مساحت کل و حجم این مخروط باشند، خواهیم داشت :

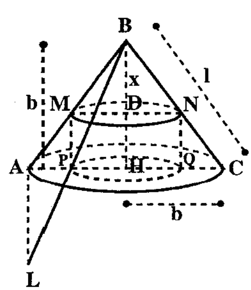
$$S=8\pi r^2 \text{ و } V=\frac{8}{3}\pi r^3$$

به‌طوری که دیده می‌شود، سطح و حجم این مخروط دو برابر سطح و حجم کره است.

۶۳۴. صفحه‌هایی که بر دو به دوی سه خط داده شده می‌گذرند، ۸ کنج سه‌وجهی دو به دو متقابل به رأس (به یال) ایجاد می‌کنند. یک مخروط با دو دامنه، محیط بر هر گروه از کنجهای دو به دو متقابل به یال وجود دارد.

۶.۱۱.۳. رسم استوانه

۶۳۵. باید داشته باشیم :



$$\pi MD.MB=2\pi MD.MP$$
$$\Rightarrow MB=2MP$$

باید نقطهٔ M را چنان بیابیم که طول پاره‌خط MB دو برابر عمود MP باشد. برای حل

مسأله از تشابه استفاده می‌کنیم.

روی عمود رسم شده بر AC در نقطهٔ A، پاره‌خط AL را مساوی $\frac{AB}{۲}$ جدا می‌کنیم و از L به B وصل می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ P قطع کند از P عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا AB را در M قطع کند، $MB = ۲MP$ است.

برای محاسبه، فرض می‌کنیم $BH = h$ ، $AH = b$ ، $AB = l$ و $BD = x$ باشد.

$$\frac{MB}{x} = \frac{l}{h} \Rightarrow MB = \frac{lx}{h} \text{ و } MP = h - x$$

$$\Rightarrow \frac{lx}{h} = ۲h - ۲x \Rightarrow lx = ۲h^۲ - ۲hx$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲h^۲}{l + ۲h}$$

۶۳۶. داریم :

$$x = \frac{۲mh^۲}{ln + ۲hm}$$

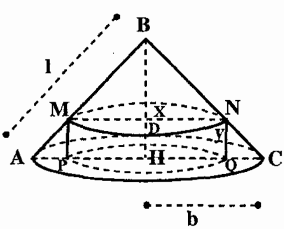
۶۳۷. باید داشته باشیم :

$$\frac{\pi MD^۲ . BD}{۳} = \pi MD^۲ . MP$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{۳} = MP \Rightarrow \frac{lx}{۳h} = h - x$$

$$\Rightarrow hx = ۳h^۲ - ۳hx \Rightarrow x = \frac{۳h^۲}{l + ۳h}$$

۶۳۸. باید داشته باشیم :



$$\pi . MD . MB = \pi (b^۲ - MD^۲)$$

امّا $MB = \frac{lx}{h}$ ، بنابراین :

$$\frac{blx^۲}{h^۲} = b^۲ - \frac{b^۲x^۲}{h^۲}$$

$$\Rightarrow blx^۲ + b^۲x^۲ = b^۲h^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{bh^۲}{l + b}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{h^۲} = \frac{b}{b + l}$$

مسأله برمی‌گردد به تعیین مربع $x^{۲}$ به قسمتی که با یک مربع $h^{۲}$ به نسبت $\frac{b}{b+1}$ باشد.

۶۳۹. داریم:

$$\frac{\pi MD.MB+\pi MD^{۲}}{۲\pi MD.MP+۲\pi MD^{۲}}=\frac{m}{n}$$

می‌دانیم که $MB=\frac{lx}{h}$، $MD=\frac{bx}{h}$ و $MP=\frac{h^{۲}-x^{۲}}{h}$ است. با جایگذاری مقدارهای داد شده دو رابطهٔ بالا، داریم:

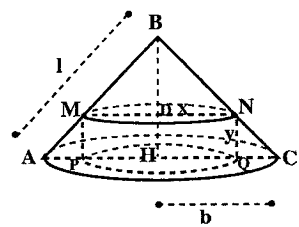
$$\frac{bx.lx+b^{۲}x^{۲}}{bx(h^{۲}-hx)+b^{۲}x^{۲}}=\frac{۲m}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{lx+bx}{h^{۲}-hx+bx}=\frac{۲m}{n}$$

$$\Rightarrow nlx+nbx=۲mh^{۲}-۲mhx+۲mbx$$

$$\Rightarrow x(۲mh-۲mb+nl+nb)=۲mh^{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲mh^{۲}}{۲mh+hl+(n-۲m)b}$$



x چهارمین جزء تناسب را می‌توان رسم کرد.

۶۴۰. فرض می‌کنیم x شعاع قاعدهٔ استوانه، y ارتفاع آن و $\pi a^{۲}$ مساحت کل مخروط باشد. مولد AC وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الساقین است. بنابراین $x+y$ ثابت و $HC=AH$ است.

کافی است AH را برحسب عبارتی از مساحت کل داده شدهٔ $\pi a^{۲}$ محاسبه کنیم. امّا،

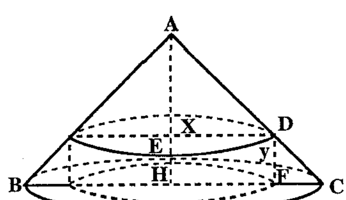
$$S=\pi.HC^{۲}+\pi HC\times AH\sqrt{۲}=\pi.AH^{۲}(۱+\sqrt{۲})=\pi a^{۲}$$

از آن‌جا:

$$AH=\frac{a}{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}$$

بنابراین:

$$x+y=\frac{a}{\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}$$



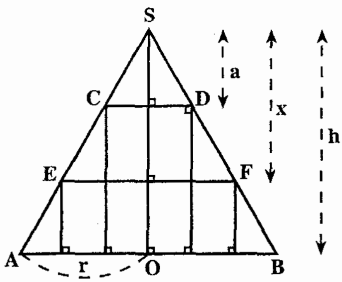
از طرف دیگر حجم $\frac{\pi x^{۲}y}{۳}$ استوانه، هنگامی ماکزیمم است که:

$$x=\frac{۲}{۳}AH \quad \text{و} \quad y=\frac{۱}{۳}AH$$

پس:

$$x^{۲} = \frac{۴a^{۲}}{۹(۱+\sqrt{۲})} \text{ و } y = \frac{a}{۳\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}$$

$$V = \frac{\pi}{۶}\left(\frac{۲a}{۳\sqrt{۱+\sqrt{۲}}}\right)^{۳}$$



۶۴۱. فرض می‌کنیم r و h بترتیب شعاع قاعده و ارتفاع مخروط، a و x فاصله‌های رأس مخروط از قاعده‌های بالایی استوانهٔ داده شده و استوانهٔ دومی باشد. داریم:

$$\pi \times \frac{EF^{۲}}{۴}(h-x) = \pi \times \frac{CD^{۲}}{۴}(h-a)$$

امّا از مثلثهای متشابه SAB، SEF و SCD نتیجه می‌شود که:

$$CD = \frac{۲ra}{h} \text{ و } EF = \frac{۲rx}{h}$$

و از آن‌جا:

$$x^{۲}(h-x) = a^{۲}(h-a) \Rightarrow x^{۳} - a^{۳} - h(x^{۲}-a^{۲}) = ۰$$

پس از تقسیم عبارت بالا بر $x-a$ داریم:

$$f(x) = x^{۲} + (a-h)x + a(a-h) = ۰$$

برای آن‌که این معادله یک ریشه بین ۰ و h داشته باشد، باید $f(۰)f(h) < ۰$ باشد؛ امّا $f(۰) = a(a-h)$ و $f(h) = a^{۲}$ است، پس $f(۰)f(h) = a^{۳}(a-h) < ۰$ است. زیرا a همواره از h کوچکتر است. بنابراین معادلهٔ بالا، همواره یک ریشه بین ۰ و h دارد و این ریشه بزرگترین جواب است، زیرا ریشهٔ دیگر منفی است.

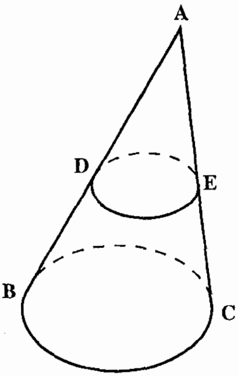
این ریشه که اندازهٔ آن مساوی

$$\frac{۱}{۲}\Sigma h - a + \sqrt{(h-a)(h+۳a)}$$

است، بسادگی قابل رسم است.

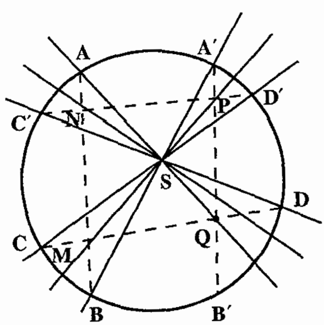
۱۲.۳. برش، مقطع

۶۴۳. اگر بر قاعدهٔ مستدیر، کره‌ای مرور دهیم مخروط را در امتداد یک دایرهٔ دیگر قطع می‌کند. بنابراین دومین مقطع مستدیر دارای صفحه‌ای است که نسبت به صفحهٔ قاعدهٔ

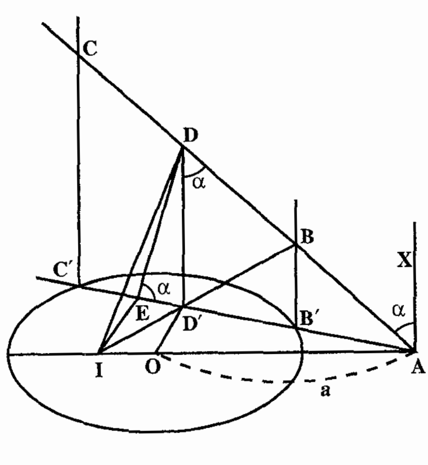


خود موازی است یعنی مقطع اصلی (مقطعی که بر مرکز کره و رأس مخروط می‌گذرد)، چهارضلعی محاطی ایجاد کند. در این صورت قوت رأس مخروط نسبت به کره مساوی است با حاصلضرب طول هر مولد در قطعهٔ نظیر خود نسبت به رأس مخروط.

۶۴۴. مقطع دو سطح مخروطی با صفحهٔ گذرنده بر محورهای این دو سطح مخروطی را در نظر می‌گیریم و همچنین دو سطح مخروطی را با کره‌ای که مرکزش نقطهٔ S رأس مشترک دو سطح است، قطع می‌کنیم. مقطعهای دو سطح مخروطی با این کره از چهار دایرهٔ AB، ´A´B و CD، ´C´D که یکدیگر را در ۸ نقطه که روی صفحهٔ مقطع در چهار نقطهٔ M، N، P و Q تصویر می‌شوند، قطع می‌کند. فصل مشترکهای دو سطح مخروطی (یکی با دیگری) چهار مولّدی هستند که هر یک از دو نقطه، از ۸ نقطهٔ مشترک ایجاد شده به‌وسیلهٔ مقطعهایی که قبلاً گفته شد، می‌گذرند. این نقطه‌ها نسبت به S قرینهٔ یکدیگرند. به طور طبیعی به این نکته می‌توان رسید که گشادگی و وضعیت قرار گرفتن دو سطح مخروطی می‌تواند طوری باشد که بیشتر از دو مولّد مشترک و یا هیچ مولّد مشترکی وجود نداشته باشد.



۶۴۵. فرض می‌کنیم سطح مخروطی دوار به رأس A، محور AX و زاویهٔ مولّد α باشد و سطح استوانه‌ای دوّار به وسیلهٔ دایرهٔ O واقع در صفحه‌ای که در نقطهٔ A بر AX عمود رسم شده است، مشخص شده باشد. قاطع ´AB´C را از نقطهٔ A نسبت به دایره رسم می‌کنیم. صفحهٔ ´XAB´C هر یک از سطحها را تحت دو مولّد قطع می‌کند. B و C را نقطه‌های برخورد یکی از مولّدهای مخروط، با مولّدهای استوانه می‌گیریم.



اگر مکان هندسی نقطه‌های B و C یک خط کروی باشد، نقطهٔ I مرکز این کره، روی خط OA، محور تقارن دو سطح قرار دارد و چون $IB = IC$ است، پس I در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط BC نیز هست. بعلاوه این صفحهٔ عمودمنصف، صفحهٔ $BCC'B'$ را تحت میانهٔ DE از ضلع BC و صفحهٔ دایرهٔ O را تحت EI عمود بر $B'C'$ قطع می‌کند؛ پس اینک مسأله عبارت از آن است که نشان دهیم که نقطهٔ I که بدین ترتیب به دست آمده است، ثابت می‌باشد، و IB نیز طول ثابتی دارد.

فرض می‌کنیم $OA = a$ و شعاع دایرهٔ O مساوی r باشد. OD' را عمود بر $AB'C'$ رسم می‌کنیم، داریم $\frac{AI}{a} = \frac{AE}{AD'}$. امّا در مثلث ADE قائم‌الزاویه در رأس D؛

$AE = \frac{AD}{\sin\alpha}$ ؛ $AD' = AD\sin\alpha$. از آن‌جا، $\frac{AI}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$ و در نتیجه

$AI = \frac{a}{\sin^2\alpha}$، و این نشان می‌دهد که I نقطهٔ ثابتی است.

اکنون IB را محاسبه می‌کنیم. در دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IB داریم:

$$AB.AC = AI^2 - IB^2 = \frac{a^2}{\sin^4\alpha} - IB^2$$

امّا:

$$AB.AC = \frac{AB'}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2 - r^2}{\sin^2\alpha}$$

از مساوی قرار دادن دو رابطهٔ بالا به دست می‌آید:

$$IB^2 = \frac{a^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}{\sin^4\alpha}$$

و این نشان می‌دهد که IB ثابت است و فصل مشترک دو سطح، به کره‌ای به مرکز I و به شعاع $\frac{1}{\sin^2\alpha}\sqrt{a^2\cos^2\alpha + r^2\sin^2\alpha}$ تعلق دارد. با استفاده از شکل، برای به‌دست آوردن نقطهٔ I و شعاع IB از کره، کافی است، دو سطح داده شده را با صفحهٔ XAO قطع کنیم و فصل مشترک مولّد ABC و محور استوانه را نقطهٔ D بگیریم و DI را عمود بر AD رسم کنیم.

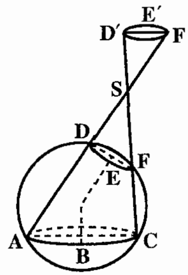
۶۴۷. مخروط SABC با قاعدهٔ مستدیر ABC را درنظر می‌گیریم. اگر DEF مقطع پاد موازی

باشد، $A\hat{D}F = A\hat{C}F$ و $S\hat{F}D = \hat{A}$ است. در یک کلمه، چهارضلعی ACFD محاطی است و داریم :

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SF}{SD}$$

روی دامنهٔ دیگر مخروط، $SF' = SF$ و $SD' = SD$ را اختیار می‌کنیم. خواهیم‌داشت :

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SF'}{SD'}$$

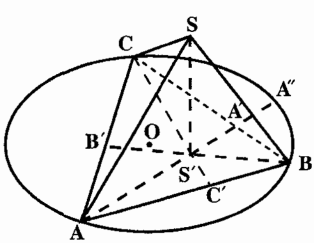


بنابراین مقطع $D'E'F'$ با مقطع ABC موازی است. درنتیجه مانند مقطع ABC مستدیر است. امّا مقطعهای DEF و $D'E'F'$ نسبت به صفحه‌ای که از S عمود بر نیمساز ASC رسم می‌شود، قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین مقطع پاد موازی DEF مستدیر است.

تبصره. قاعدهٔ ABC و هر مقطع پاد موازی DEF به یک کره تعلق دارند.

۱۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۴۸. برای آن‌که کنج سه‌وجهی SABC در رأس S سه قائمه باشد، باید نقطهٔ S' تصویر قائم نقطهٔ S روی صفحهٔ ABC، بر مرکز ارتفاعی این مثلث منطبق، و اگر AA' ، BB' و CC' ارتفاعهای این مثلث باشند، حاصلضربهای $AS' \times S'A'$ ، $BS' \times S'B'$ و $CS' \times S'C'$ که در هر مثلث با هم مساوی‌اند، مساوی با $\overline{SS'}^2$ باشند. درواقع اگر SABC را سه قائمه در S فرض کنیم، BC که عمود بر SA و SS' است، بر AS' نیز عمود می‌باشد. همچنین ارتفاع AA' از نقطهٔ S' می‌گذرد، و به‌طور مشابه دو ارتفاع دیگر نیز از S' می‌گذرند. بعلاوه، مثلث ASA' در رأس S قائم‌الزاویه است و داریم :



$$\overline{SS'}^2 = S'A.S'A'$$

بعکس، تساوی دوم نشان می‌دهد که، قائمه $A\hat{S}A' = ۱$ ؛ امّا $S'A$ همچنین عمود بر

BC است ؛ زیرا S' مرکز ارتفاعی مثلث ABC است ؛ درنتیجه SA بر صفحهٔ SBC عمود می‌باشد.

به‌طور مشابه نشان داده می‌شود که SB و SC بر وجه‌های روبه‌رویشان عمودند، بنابراین کنج SABC در رأس S سه قائمه است.

اینک به قضیهٔ ذکر شده می‌رسیم :

بنا به فرض، یک مثلث ABC وجود دارد که محاط در دایرهٔ O است و برای آن SABC سه قائمه در رأس S است ؛ یعنی برای آن، AA' ، BB' و CC' ارتفاعهای آن و A'' ، B'' و C'' نقطه‌های دیگر برخورد این ارتفاعها با دایره باشد، S' تصویر S روی صفحهٔ ABC مرکز ارتفاعی این مثلث است و داریم :

$$\overline{SS'}^2 = AS' \times S'A'$$

یا چون که A'' قرینهٔ S' نسبت به ضلع BC است :

$$\overline{SS'}^2 = \frac{1}{2}AS'.S'A' = \frac{1}{2}(r^2 - OS'^2)$$

r شعاع دایره است. برای تمام مثلثهای محاط در دایرهٔ O که S' مرکز ارتفاعی آنهاست، شرط دوم برقرار است و مولدهای سطح مخروطی از رأسهای یک چنین مثلثی می‌گذرند که یک کنج سه قائمه تشکیل می‌دهند. امّا بی‌شمار مثلث محاط در دایرهٔ O وجود دارد که نقطهٔ S' مرکز ارتفاعی آنهاست ؛ برای رسم یکی از این مثلثها، وتر دلخواه $A_1S'A''$ را رسم می‌کنیم، سپس وتر B_1C_1 عمودمنصف $S'A_1''$ را رسم می‌کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$ مرکز ارتفاعش S' است. قضیه به همین شکل ثابت می‌شود.

۶۴۹. $\left[\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$، اگر $\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ عدد صحیح نباشد، $\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}-1$. اگر $\dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ عدد صحیح باشد. که در آن، $[x]$، جزء صحیح x است.

۶۵۰. توجه کنیم که : ۱ «ستوپ» برابر است با $\frac{1}{2}$ آرشین. در قاعدهٔ خیمه ۶۰ آرشین و در مولد آن ۱۶ آرشین داریم.

چون خیمه به شکل مخروط است، سطح جانبی آن چنین می‌شود :

$$\frac{60\times16}{2} = 480 \quad \text{(آرشین مربع)}$$

حالا می‌توان معلوم کرد که چند آرشین ماهوت لازم داریم :

$۴۸۰ : ۲\frac{۱}{۲} = ۴۸۰ : \frac{۵}{۲} = ۱۹۲$ (آرشین)

که برای آنها، باید ۱۹۲×۲، یعنی ۳۸۴ روبل بپردازد.

۱۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

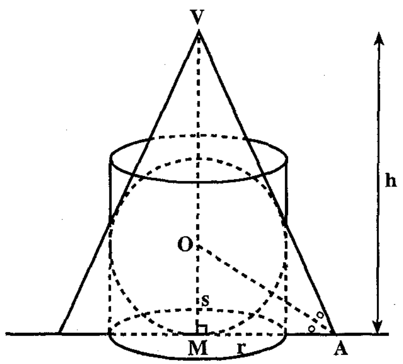
۶۵۱. داریم :

الف. $\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۴)^{۲} \times ۲۰ = \frac{۳۲۰\pi}{۳}$ = حجم قسمت سایه زده

$\pi R^{۲}h = \pi(۴^{۲}) \times ۲۰ = ۳۲۰\pi$ = حجم استوانه

ب. $۳۲۰\pi - \frac{۳۲۰\pi}{۳} = \frac{۶۴۰\pi}{۳}$ = حجم قسمت بین استوانه و مخروطها

۶۵۲. محور مخروط را با VM، شعاع قاعدهٔ آن را با r، شعاع کرهٔ محاطی را با S و مرکزش را با O نمایش می‌دهیم. شکل را ملاحظه کنید. از آن‌جا که AM و AV دو مماس از یک نقطه بر کره‌اند، داریم :



$M\hat{A}O = O\hat{A}V$ ؛ این دو زاویه را با θ نمایش می‌دهیم. در این صورت شعاع قاعدهٔ استوانه : $S = r\tan\theta$ و ارتفاع مخروط $h = r\tan ۲\theta$ می‌شود.

در این صورت حجم مخروط عبارت است از :

$$V_{۱} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi r^{۳}\tan ۲\theta = \frac{۲\pi r^{۳}\tan\theta}{۳(۱-\tan^{۲}\theta)}$$

و حجم استوانه عبارت است از :

$$V_{۲} = ۲\pi S^{۳} = ۲\pi r^{۳}\tan^{۳}\theta$$

و نسبتشان عبارت است از :

$$\frac{V_{۱}}{V_{۲}} = \frac{۱}{۳\tan^{۲}\theta(۱-\tan^{۲}\theta)} = k \qquad (۱)$$

(a) برای اثبات کردن این که $V_{۱} \neq V_{۲}$ است، نشان می‌دهیم $k \neq ۱$ است. (۱) را

به‌صورت معادلهٔ درجه دوم (برحسب $\tan^{۲}\theta$) می‌نویسیم :

$$\tan^{۴}\theta-\tan^{۲}\theta+\frac{۱}{۳k}=۰$$

و ملاحظه می‌کنیم که مبین آن، $۱-۴/۳k$، تنها اگر $k\geq ۴/۳$ باشد، نامنفی است. این نشان می‌دهد که $k\neq ۱$ است و به این ترتیب قسمت (a) اثبات می‌شود.

به طریق دیگر، می‌توان نامساوی واسطهٔ حسابی واسطهٔ هندسی :

$\sqrt{ab}\leq(a+b)/۲$ را برای نشان دادن این‌که $\tan^{۲}\theta(۱-\tan^{۲}\theta)\leq ۱/۴$ و درنتیجه $k\geq ۴/۳$ با $a=\tan^{۲}\theta$ و $b=۱-\tan^{۲}\theta$ به‌کار برد. تساوی اگر و فقط اگر $a=b$، یعنی $\tan^{۲}\theta=۱/۲$ باشد، برقرار است.

(b) کمترین مقدار k که به‌ازای آن $\tan^{۲}\theta$ حقیقی است، ۴/۳ است و چون $k=۴/۳$ باشد، $\tan^{۲}\theta=۱/۲$ می‌شود و بنابراین $\tan\theta=۱/\sqrt{۲}$، درنتیجه :

$$\tan^{۲}\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^{۲}\theta}=۲\sqrt{۲}=\frac{h}{r}$$

مربعی به ضلع r رسم می‌کنیم ؛ در این صورت h دو برابر قطر آن است. اکنون می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ به ضلعهای h و r را رسم کرد. سرانجام، زاویهٔ مطلوب را در V با دو برابر کردن $M\hat{V}A$ بنا می‌کنیم.

۶۵۳. مساحت قاعدهٔ $S=\pi R^{۲}$ و مساحت جانبی $S'=\pi R^{۲}\sqrt{۲}$ است، بنابراین داریم :

$$\frac{S}{S'}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از طرف دیگر داریم :

$$v=\frac{۱}{۳}\pi R^{۳}$$

درنتیجه :

$$\frac{۱}{۳}\pi R^{۳}=۲\pi R^{۲}\sqrt{۲}\Rightarrow R=۶\sqrt{۲}$$

بنابراین :

$$v=\frac{۱}{۳}\pi\times ۲۱۶\times ۲\sqrt{۲}=۱۴۴\sqrt{۲}\pi$$

$$S'=۷۲\pi\sqrt{۲}\quad \text{و}\quad S=۷۲\pi$$

۶۵۴. اگر R شعاع قاعده و h ارتفاع مخروط باشد. داریم :

$$V=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h$$

شعاع قاعدهٔ استوانه h و ارتفاعش R است، پس حجمش برابر است با :

$$v = \pi h^2 R$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{V}{v} = \frac{R}{3h}$$

از طرف دیگر سطح جانبی مخروط مساوی است با $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ و سطح جانبی استوانه مساوی $2\pi Rh$ ؛ پس برای R و h دو معادلهٔ زیر را داریم :

$$m = \frac{R}{3h}$$

$$k = \frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{h}$$

که هر یک از آنها یک مقدار برای $\frac{R}{h}$ به‌دست می‌دهد :

$$\frac{R}{h} = 3m = \sqrt{k^2 - 1}$$

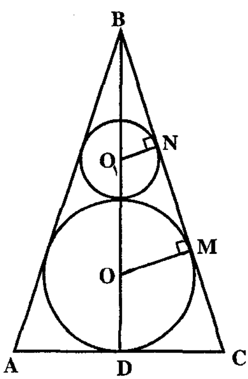
۶۵۵. حجم جسم برابر است با :

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi R^2 h$$

برای این‌که این حجم، حجم کره‌ای به شعاع R باشد، باید داشته باشیم :

$$\frac{4}{3}\pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow h = R$$

۶۵۶. در شکل، مقطع قائم مخروط و کره‌ها داده شده است.



حجم دو کره متناسب با مکعب شعاعهای آنها است. بنابراین اگر شعاع کرهٔ بزرگتر R باشد، داریم :

$$\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow R = 2r$$

چون O_1N مساوی نصف OM و موازی آن است، بنابراین خواهیم داشت :

$$BO_1 = OO_1 = 3r$$

و ارتفاع کل مخروط $h = 8r$ خواهد بود. از تشابه دو

مثلث BDC و BO_1N به‌دست می‌آید :

$$\frac{DC}{BC}=\frac{O_1N}{BO_1}$$

$$\frac{R_1}{l}=\frac{r}{3r}\Rightarrow l=3R_1$$

که در آن $R_1=DC$ و $l=BC$ می‌باشد.

از طرف دیگر داریم :

$$l^2-R_1^2=h^2\Rightarrow 9R_1^2-R_1^2=64r^2\Rightarrow R_1^2=8r$$

و سطح جانبی مخروط :

$$S=\pi R_1 l=24\pi r^2$$

و حجم مخروط :

$$V=\frac{1}{3}\pi R_1^2 h=\frac{64\pi r^3}{3}$$

۶۵۷. الف. حجم دو برابر می‌شود.

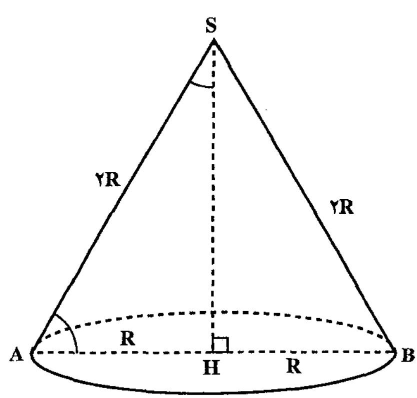
ب. حجم چهار برابر می‌شود.

۶۵۸. الف. سه برابر می‌شود.

ب. نه برابر می‌شود.

پ. بیست و هفت برابر می‌شود.

۶۵۹. اگر S رأس و AB قطر قاعدهٔ مخروط باشد، مثلث SAB متساوی‌الاضلاع و اندازهٔ ضلعش ۲R است. ارتفاع این مثلث ارتفاع مخروط و اندازه‌اش $SH=R\sqrt{3}$ است.



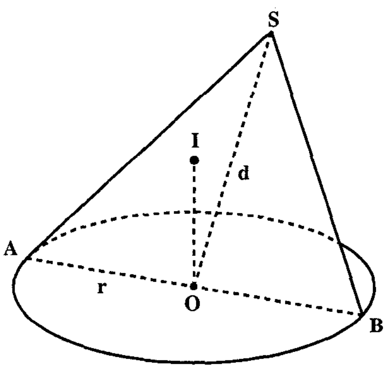
بنابراین داریم :

۱. جانبی $S=\frac{۱}{۲}(۲\pi R)l=\frac{۱}{۲}(۲\pi R)\times ۲R=۲\pi R^{۲}$

قاعده $S=\pi R^{۲} \Rightarrow$ کل $S=۲\pi R^{۲}+\pi R^{۲}=۳\pi R^{۲}$

حجم $=\frac{۱}{۳}(\pi R^{۲})h=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}\times R\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi R^{۳}$

۲. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{S}B=۶۰^{\circ}$ است. زاویهٔ هر مولد با قاعده نیز ۶۰ درجه است. به‌عنوان مثال $S\hat{A}B=۶۰^{\circ}$.



۶۶۰. ۱. شعاع دایرهٔ قاعده را r و $SO=d$ اختیار می‌کنیم. با به‌کار بردن قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلث SAB داریم :

$SA^{۲}+SB^{۲}=۲(d^{۲}+r^{۲})$

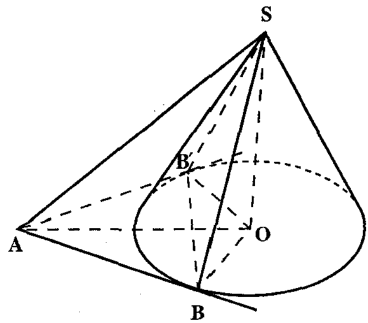
بنابراین مجموع $SA^{۲}+SB^{۲}$ مقدار ثابتی است.

از طرف دیگر، همان‌طوری که می‌دانیم، اگر $d>r$ باشد، زاویهٔ $A\hat{S}B$ حاده است ؛ اگر $d<r$ باشد، زاویهٔ $A\hat{S}B$ منفرجه و اگر $d=r$ باشد، زاویهٔ $A\hat{S}B$ قائمه است.

۲. دایرهٔ O و رأس S تنها به یک کره تعلق دارند. زیرا بر سه نقطه از این دایره و رأس S، یک و تنها یک کره می‌گذرد. مرکز این کره را I می‌نامیم ؛ I' تصویر نقطهٔ I روی صفحهٔ ASB، مرکز دایرهٔ محیط بر مثلث ASB است و هنگامی که صفحهٔ ASB حول SO دوران می‌کند، I' دایره ی رسم می‌کند که یک قطر آن پاره‌خط ID عمود بر SO، و صفحه‌اش نیز بر SO عمود است.

۶۶۱. فرض می‌کنیم SAB و SAB' وجه‌های یک فرجهٔ به یال SA، مماس بر مخروط باشند. داریم $AB=AB'$ و $SB=SB'$ ؛ از طرف دیگر بنا به قضیهٔ سه عمود، قائمه $A\hat{B}S=A\hat{B'}S=۱$ ؛ بنابراین مثلثهای SAB و SAB' همنهشت هستند، در نتیجه داریم :

$A\hat{S}B=A\hat{S}B'$



دو کنج سه‌وجهی S.ABO و S.AB′O را درنظر می‌گیریم. این دو کنج نسبت به صفحهٔ SAO قرینهٔ یکدیگرند؛ زیرا دو نقطهٔ B و B′ نسبت به این صفحه قرینهٔ یکدیگرند. در نتیجه، صفحهٔ SAO با صفحه‌های SAB و SAB′ زاویه‌های مساوی می‌سازد. همچنین با دو صفحهٔ SOB و SOB′ نیز زاویه‌های مساوی می‌سازد.

۶۶۲. طول کمان قطاع، مساوی محیط دایرهٔ قاعدهٔ مخروط است. اگر r را شعاع قاعدهٔ مخروط فرض کنیم، داریم:

$$a\theta = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{a\theta}{۲\pi}$$

پس اگر h ارتفاع مخروط باشد، در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که دو ضلع زاویهٔ قائمه‌اش r و h است، داریم:

$$h^۲ = a^۲ - r^۲ = \frac{a^۲}{۴\pi^۲}(۴\pi^۲ - \theta^۲) \Rightarrow h = \frac{a}{۲\pi}\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}$$

اگر سطح کل و حجم مخروط را بترتیب با S و V نشان دهیم، داریم:

$$S = \pi r^۲ + \pi ra = \frac{a^۲\theta}{۴\pi}(\theta + ۲\pi)$$

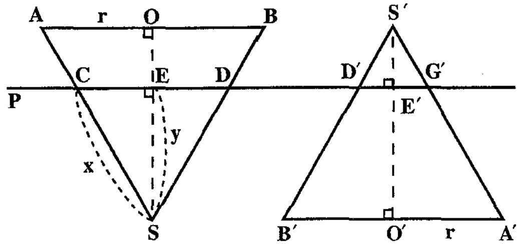
$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{a^۳\theta^۲}{۲۴\pi^۲}\sqrt{۴\pi^۲ - \theta^۲}$$

مثال. اگر $\theta = \frac{۶\pi}{۵}$ و $a = ۵cm$ باشد، خواهیم داشت:

$r = ۳cm$ و $h = ۴cm$ و $S = ۲۴\pi cm^۲$ و $V = ۱۲\pi cm^۳$

۶۶۳. سطح جانبی مخروط SAB را S می‌گیریم. مخروط SCD با مخروط قبلی متشابه است و داریم:

$$\frac{\text{SCD مساحت جانبی مخروط}}{S} = \frac{x^۲}{l^۲}$$



از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\text{مساحت جانبی } SCD = \frac{Sx^۲}{l^۲}$$

و در نتیجه :

$$\text{مساحت جانبی مخروط ناقص } ABCD = \frac{S}{l^۲}(l^۲ - x^۲)$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\text{مساحت جانبی مخروط ناقص } A'B'C'D' = \frac{S}{l^۲}\left[l^۲ - (l-x)^۲\right]$$

و بنا به فرض خواهیم داشت :

$$l^۲ - x^۲ + l^۲ - (l-x)^۲ = kl^۲$$
$$\Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۲lx + (k-۱)l^۲ = ۰ \quad , ۰ < x < l$$

داریم :

$$f(۰) = (k-۱)l^۲ \ \ , \ \ f(l) = (k-۱)l^۲$$
$$\Rightarrow f(۰)f(l) = (k-۱)^۲ l^۴ > ۰$$

بنابراین مسأله دارای دو جواب است و یا اصلاً جواب ندارد.
برای آن‌که مسأله دو جواب داشته باشد، یعنی هر دو ریشه معادلهٔ $f(x) = ۰$ بین ۰ و l باشند، باید داشته باشیم :

$$l^۲ - ۲(k-۱)l^۲ \geq ۰ \ \text{ و } \ (k-۱)l^۲ > ۰ \ \text{ و } \ ۰ < \frac{l}{۲} < l$$

یا :

$$۱ < k < \frac{۳}{۲}$$

اگر $k = ۱$ باشد، $x' = ۰$ و $x'' = l$ و وقتی $k = \frac{۳}{۲}$ باشد، $x' = x'' = \frac{l}{۲}$ است. اگر V حجم مخروط SAB باشد، داریم :

$$\frac{\text{حجم } SCD}{V}=\frac{y^{۳}}{h^{۳}}\Rightarrow \text{حجم } SCD=\frac{Vy^{۳}}{h^{۳}}$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط ناقص } ABDC=\frac{V}{h^{۳}}(h^{۳}-y^{۳})$$

و به طور مشابه داریم :

$$\text{حجم مخروط ناقص } A'B'D'C'=\frac{V}{h^{۳}}\left[h^{۳}-(h-y)^{۳}\right]$$

اینک بنا به فرض داریم :

$$h^{۳}-y^{۳}+h^{۳}-(h-y)^{۳}=k'h^{۳}$$

$$\Rightarrow f(y)=۳y^{۲}-۳hy+(k'-۱)h^{۲}=۰\ ,\ ۰<y<h$$

داریم :

$$f(۰)=(k'-۱)h^{۲}\ ,\ f(h)=(k'-۱)h^{۲}$$

بنابراین $f(۰)f(h)>۰$ است و مسأله هیچ گاه تنها یک جواب ندارد، بلکه دارای دو جواب است. بدین معنی که برای آن که معادله دارای دو ریشه بین ۰ و h باشد، باید داشته باشیم :

$$۹h^{۲}-۱۲(k'-۱)h^{۲}\geq ۰\ ,\ k'-۱>۰\ ,\ ۰<\frac{h}{۲}<h$$

یا :

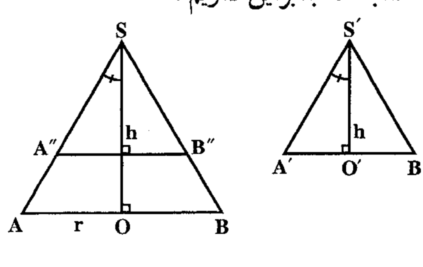
$$۱<k'<\frac{۷}{۴}$$

برای $k'=۱$، $y'=۰$ و $y''=h$، و برای $k'=\frac{۷}{۴}$ داریم :

$$y'=y''=\frac{h}{۲}$$

۶۶۴. ۱. در واقع اگر دو مخروط SAB و S'A'B' متشابه باشند، سطحهای مخروطی نظیر آنها، قابل انطباق هستند ؛ بنابراین زاویه‌های مولدها با هم مساوی‌اند و در نتیجه مثلثهای SOA و S'O'A' متشابه‌اند، بنابراین داریم :

$$\frac{r}{r'}=\frac{h}{h'}$$



این شرط کافی است؛ زیرا اگر برقرار باشد، مثلثهای SOA و $S'O'A'$ متشابه‌اند، بنابراین $A\hat{S}O = A'\hat{S'}O'$ است؛ در این صورت اگر دو سطح مخروطی را روی هم قرار دهیم، مخروطهای SAB و $SA''B''$ مجانس یکدیگر نسبت به نقطهٔ S است؛ در نتیجه، مخروطهای SAB و $S'A'B'$ متشابه‌اند.

۲. اگر V، S، V' و S' حجمها و سطحهای دو مخروط باشند، داریم:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h \ , \ S = \pi r(r + SA) \ ;$$

$$V' = \frac{۱}{۳}\pi r'^{۲} h' \ , \ S' = \pi r'(r' + S'A')$$

بنابراین:

$$\frac{V}{V'} = \frac{r^{۲}h}{r'^{۲}h'} \ , \ \frac{S}{S'} = \frac{r}{r'} \times \frac{r + SA}{r' + S'A'} \ ;$$

امّا بنا به قسمت ۱، $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$ است. همچنین داریم:

$$\frac{r}{r'} = \frac{SA}{S'A'} = \frac{r + SA}{r' + S'A'}$$

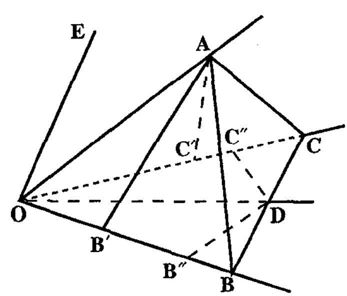
از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{V}{V'} = \frac{h^{۳}}{h'^{۳}} = \frac{r^{۳}}{r'^{۳}} \ ; \ \frac{S}{S'} = \frac{r^{۲}}{r'^{۲}} = \frac{h^{۲}}{h'^{۲}}$$

۶۶۵. ۱. سه نقطهٔ A، B و C را روی یالهای کنج سه وجهی درنظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد OD و BC را D می‌نامیم و خطهای AB'، AC'، DB'' و DC'' را بترتیب در نقطه‌های A و D بر خطهای OB و OC عمود می‌کنیم. داریم:

$$\frac{\text{مساحت } OAB}{\text{مساحت } OAC} = \frac{OB.AB'}{OC.AC'}$$

$$\frac{\text{مساحت } ODB}{\text{مساحت } ODC} = \frac{OB.DB''}{OC.DC''}$$



امّا می‌دانیم برای آن‌که صفحهٔ OAD، صفحهٔ نیمساز فرجهٔ به یال OA باشد، لازم و

کافی است که :

$$\frac{\text{مساحت } OAB}{\text{مساحت } OAC} = \frac{\text{مساحت } ODB}{\text{مساحت } ODC}$$

بدین معنی که $\frac{AB'}{AC'} = \frac{DB''}{DC''}$ باشد.

۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را باید به‌دست آوریم که نسبت فاصله‌های آنها از دو خط OB و OC، مساوی مقدار داده شدهٔ $\frac{\beta}{\gamma}$ باشد.

اگر M نقطه‌ای باشد که این شرط را دارا باشد، آشکار است که این ویژگی برای تمام نقطه‌های خط OM نیز برقرار است؛ مکان هندسی از خطهایی تشکیل می‌شود که از نقطهٔ O می‌گذرند. دو خط برای مکان هندسی در صفحهٔ OBC وجود دارد؛ این دو خط را OD و OE می‌نامیم، و خط دلخواه OA از این مکان هندسی را در خارج صفحهٔ OBC درنظر می‌گیریم.

بنا به قسمت ۱، صفحه‌های OAD و OAE نیمسازهای فرجه‌های مکمل یال OA هستند و بنابراین برهم عمودند. پس OA به یک سطح مخروطی (Γ) با هادی مستدیر تعلق دارد؛ و بعکس، هر مولّد OA از (Γ) ویژگی بالا را دارد.

(قضیهٔ مربوط به مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌شان در نقطهٔ داده شده به یک نسبت معین است.)

بنابراین مکان هندسی OA سطح مخروطی (Γ) است.

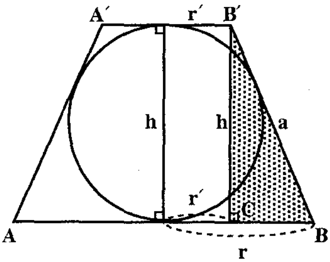
۶۶۶. ۱. یک سطح مخروطی به رأس S درنظر گرفته، SG را یکی از مولدهای آن می‌گیریم. مجانس این سطح مخروطی را نسبت به مرکز تجانس O و با نسبت تجانس k رسم می‌کنیم. S' و $S'G'$ را بترتیب مجانسهای S و SG می‌گیریم.

می‌دانیم که $S'G'$ موازی SG است. در این صورت، مجانس یک سطح مخروطی، یک سطح مخروطی است که مولدهای آن با مولدهای متناظر اوّلی موازی‌اند، بعکس، اگر در دو سطح مخروطی، مولدهای متناظر یک به یک موازی باشند، به بینهایت صورت مجانس یکدیگرند.

در واقع، اگر روی SS' نقطه‌ای دلخواه مانند O اختیار کنیم، مجانس سطح مخروطی به رأس S نسبت به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $\frac{OS'}{OS}$، یک سطح مخروطی به رأس S' است.

همچنین دیده می‌شود که سطح مخروطی دومی می‌تواند از سطح اوّلی، تحت انتقال SS' به‌دست آید و این نشان می‌دهد که دو سطح مخروطی قابل انطباق هستند.

۲. دو شکل را در صورتی می‌توان متشابه نامید که یکی از آنها با مجانس مستقیم دیگری همنهشت باشد. از این مطلب نتیجه می‌شود، برای متشابه بودن دو سطح مخروطی لازم و کافی است که قابل انطباق باشند.



۶۶۷. ۱. برای آن‌که یک مخروط ناقص دوار بر یک کره محیط باشد، لازم و کافی است که مقطعش به‌وسیلهٔ یک صفحهٔ گذرنده بر مرکزهای قاعده‌ها، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قابل محیط بر یک دایره باشد؛ یعنی نیمسازهایش همرس باشند؛ و برای آن، مجموع دو قاعده‌اش، مساوی مجموع ضلعهای ناموازی آن باشد. اگر r و r' شعاعهای دو قاعده باشند و ارتفاع $B'C = h$ را رسم کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCB' داریم:

$$\overline{BB'}^2 = \overline{BC}^2 + h^2 = (r-r')^2 + h^2$$

در این‌صورت برای آن‌که BB' مساوی با $r+r'$ باشد، لازم و کافی است که:

$$(r+r')^2 = (r-r')^2 + h^2$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$h = 2\sqrt{rr'} \text{ یا } h^2 = 4rr'$$

۲. مساحت جانبی یک مخروط ناقص دوار که شعاعهای قاعده‌هایش r و r' و یال جانبی‌اش a است، برابر است با:

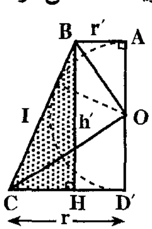
$$S = \pi(r+r')a$$

امّا $a = r+r'$ است، پس:

$$S = \pi a^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶۶۸. ۱. ضلع l وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه‌اش ارتفاع h و تفاضل شعاعها یعنی $r-r'$ است. بنابراین داریم:



$$h^2 = l^2 - (r-r')^2$$

$$= (r+r')^2 - (r-r')^2 = 4rr'$$

$$\Rightarrow h = 2\sqrt{rr'}$$

بنابراین h، دو برابر واسطهٔ هندسی بین r و r′ است.

۲. داریم :

$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'}) = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$$

از طرفی قاعده‌ها πr^2 و $\pi r'^2$ هستند و مساحت جانبی $\frac{1}{2}l(2\pi r + 2\pi r')$ یا $\pi l(r + r')$ یا $\pi(r + r')(r + r')$ و یا بالاخره $\pi(r^2 + r'^2 + 2rr')$ است.

از آن‌جا، مساحت کل برابر است با :

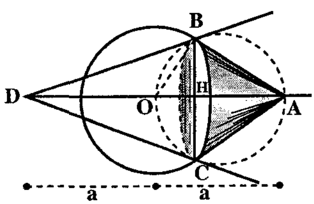
$$S_{کل} = (2\pi r^2 + 2\pi r'^2 + 2\pi rr') = 2\pi(r^2 + r'^2 + rr')$$

حاصلضرب این عبارت در $\frac{1}{3}h$ برابر است با :

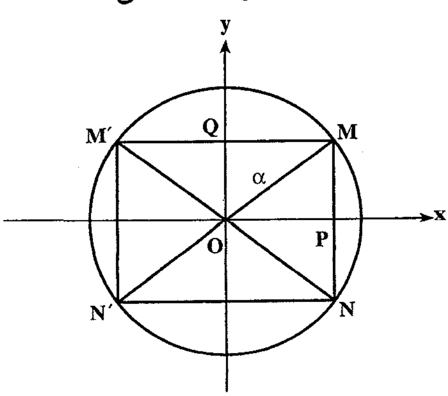
$$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$$

که این عبارت دستور محاسبهٔ حجم مخروط ناقص است.

۶۶۹. ۱. طول پاره‌خط AO ثابت است. مخروط ABC محاط در کره‌ای به شعاع $\frac{a}{2}$ است. برای رسم خط مماس DB که مقدار ماکزیمم را مشخص می‌کند، کافی است $DO = a = AO$ فرض شود ؛ زیرا در این‌صورت $AH = \frac{1}{3}AD$ خواهد بود، پس به مرکز O و به شعاع OB، دایرهٔ خواسته شده را رسم می‌کنیم.



۶۷۰. ۱. برای به‌وجود آمدن مخروط حاصل از دوران MON حول Ox، کافی است، یک دوران ۱۸۰ درجه حول Ox انجام شود و یا می‌توان مثلث OMP را حول Ox به اندازهٔ ۳۶۰ درجه دوران دهیم.



اگر OM روی Ox باشد، مخروط وجود نخواهد داشت (صفر می‌شود). با حرکت نقطهٔ M، حجم مخروط شروع به زیاد شدن می‌کند.

ماکزیمم حجم وقتی است که $OP = \frac{a}{\sqrt{3}}$ باشد. سپس حجم کم می‌شود تاهنگامی که OM روی Oy قرار گیرد که در این حالت حجم مجدداً صفر می‌شود.

۲. حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث MON، هنگامی که حول Oy دوران کند، مساوی $\frac{2}{3}$ حجم استوانه محاطی است که MN مولد آن است؛ زیرا مجموع حجم مخروطهای متناظر با مثلثهای MOM' و NON'، مساوی $\pi OP^2 . \frac{MN}{3}$ است. بنابراین، ماکزیمم حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ MON هنگامی است که استوانه محاطی ماکزیمم باشد.

می‌دانیم که در این حالت $OP^2 = \frac{2}{3}a^2$ است. همچنین حجم مساوی صفر است هنگامی که $OP = a$ و MP مساوی صفر باشد. پس هنگامی OM از Ox شروع به بلند شدن می‌کند، حجم ماکزیمم خواهد بود. درصورتی که داشته باشیم:

$$OP^2 = x^2 = \frac{2}{3}a^2 \quad و \quad MP = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi . OP^2 . 2MP \Rightarrow V = \frac{2}{3}\pi . \frac{2}{3}a^2 . \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{9\sqrt{3}}\pi a^3$$

سپس حجم شروع به کاهش می‌کند تا هنگامی که روی Oy قرار می‌گیرد که در این حالت صفر می‌شود.

۶۷۱. داریم:

$$\text{ارتفاع} = h = R \Rightarrow \text{مولد} = l = R\sqrt{2}$$

$$\text{شعاع قاعده} = R$$

$$\text{سطح جانبی} = S = \text{محیط قاعده} \times \text{نصف مولد} = 2\pi R \times \frac{1}{2} \times R\sqrt{2} = \pi R^2\sqrt{2}$$

$$S_{\text{قاعده}} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}} = \sqrt{2}\pi R^2 + \pi R^2$$

$$\text{حجم} = \text{سطح قاعده} \times \text{ثلث ارتفاع} = \pi R^2 \times \frac{1}{3}R = \frac{\pi R^3}{3}$$

۶۷۲. داریم:

$$R = 3 \quad و \quad R' = 6 \quad و \quad h = 4$$

مولد مخروط ناقص $L = BC = BH \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$$S_{\text{جانبی}} = \pi(R + R')L = \pi(3 + 6) \times 3\sqrt{2} = 27\sqrt{2}\pi$$

سطح کل = جانبی S + دوقاعده S $= ۲۷\pi\sqrt{۲} + ۹\pi + ۳۶\pi = ۲۷\sqrt{۲}\pi + ۴۵\pi$

حجم مخروط ناقص دوار $= \frac{h}{۳}(S + S' + \sqrt{SS'})$

$$= \frac{۳}{۳}(۹\pi + ۳۶\pi + \sqrt{۹\pi \times ۳۶\pi})$$

$$= ۴۵\pi + ۱۸\pi = ۶۳\pi$$

۶۷۳. الف. حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi a^{۲}b$

ب. حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}\pi a^{۲}(۲b) = \frac{۲}{۳}\pi a^{۲}b$

پ. حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}\pi(۲a)^{۲}(b) = \frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$

ت. حجم مخروط $= \frac{۱}{۳}\pi(۲a)^{۲}(۲b) = \frac{۸}{۳}\pi a^{۲}b$

۶۷۴. ارتفاع مخروط ایجاد شده در بالا برابر است با :

$$۹ - ۵ = ۴$$

از آن‌جا :

الف. نسبت ارتفاعها $= \frac{۴}{۹}$

ب. نسبت شعاعها نیز مساوی نسبت ارتفاعها یعنی $\frac{۴}{۹}$ است : $\frac{R}{R'} = \frac{۴}{۹}$.

پ. نسبت مساحتها مجذور نسبت ارتفاعهاست، یعنی

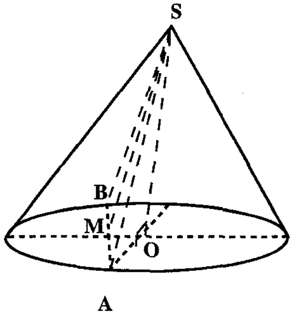
$$\frac{S_{\text{قاعدهٔ بالا}}}{S_{\text{قاعدهٔ پایین}}} = \left(\frac{۴}{۹}\right)^{۲} = \frac{۱۶}{۸۱}$$

ت. نسبت حجمهای دو مخروط مکعب نسبت ارتفاعها است، یعنی

$$\frac{V_{\text{بالایی}}}{V_{\text{کل}}} = \left(\frac{۴}{۹}\right)^{۳} = \frac{۶۴}{۷۲۹}$$

۶۷۵. ۱. اگر O را مرکز دایرهٔ قاعدهٔ مخروط بنامیم، مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر B، دایره‌ای به قطر پاره‌خط ثابتOA است.

۲. چون $\frac{SG}{SM} = \frac{۲}{۳}$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ G مجانس مکان هندسی نقطهٔ M



نسبت به مرکز تجانس ثابت S و نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$ است. یعنی یک دایره است.

۳. چون مثلث SAB متساوی‌الساقین در رأس S است، نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ محیطی آن نیز روی SM است. از آن‌جا ...

۶۷۶. نقطهٔ برخورد دو ساق ذوزنقهٔ $OAA'O'$ را که OA و $O''A'$ شعاعهای دو قاعدهٔ مخروط ناقص هستند، S می‌نامیم. ارتفاع مخروط ناقص را $OO' = h$ و $SO = x$ اختیار می‌کنیم. بنابه فرض $OO'' = \frac{h}{۴}$ است. $O''A''$ شعاع مقطع رسم شده به فاصلهٔ $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع از طرف قاعده کوچکتر است.

داریم:

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{r}{۴r} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = \frac{h}{۳}$$

$$\Rightarrow SO'' = \frac{h}{۳} + \frac{h}{۴} = \frac{۷h}{۱۲}\ ,\ \frac{SO}{SO''} = \frac{OA}{O''A''} \Rightarrow \frac{\frac{h}{۳}}{\frac{۷h}{۱۲}} = \frac{r}{O''A''}$$

$$\Rightarrow O''A'' = \frac{۷r}{۴}$$ شعاع دایرهٔ مقطع

۱. مساحت مقطع برابر است با:

$$S = \pi O''A''^{۲} = \pi(\frac{۷r}{۴})^{۲} = \frac{۴۹\pi r^{۲}}{۱۶}$$

۲. به فرض این که $OO' = ۴r$ باشد، $OO'' = r$ و $O''O' = ۳r$ است و از آن جا داریم:

$$V = \frac{h}{۳}(S + S' + \sqrt{SS'})$$

$$\Rightarrow V_{۱} = \frac{r}{۳}(\pi r^{۲} + \frac{۴۹\pi r^{۲}}{۱۶} + \frac{۷\pi r^{۲}}{۴}) = \frac{۳۱\pi r^{۳}}{۱۶}$$

$$V_{۲} = \frac{۳r}{۳}(۱۶\pi r^{۲} + \frac{۴۹\pi r^{۲}}{۱۶} + ۴\pi r \times \frac{۷r}{۴}) = \frac{۴۱۷\pi r^{۳}}{۱۶}$$

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. از اِردوش تا کی‌یفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای بین‌المَللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشرنام.
۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا.. محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری-ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر - س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو - ماری س. کلامکین - ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس - عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م. یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م. یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فِیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی - حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل المسائل هندسهٔ فضایی. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۰. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی - محمدعلی پرتوی.

ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۱. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۳۲. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۳۸. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۹. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۴۰. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۱. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۲. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۳. دایره‌ها. دَن پِدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۴. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۷. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.

۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۹. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۱. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۲. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۳. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۴. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۵. زیباترین فرمولهای ریاضی. لیونل سالم ـ فردریک تستارد. ترجمهٔ پرویز امینی ـ حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه.
۵۶. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۷. شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید. پرویز شهریاری. انتشارات مدرسه.
۵۸. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۰. کارگاه هندسه / مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی. دکتر آرش رستگار. انتشارات فاطمی.
۶۱. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۶۲. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.
۶۳. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۴. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشربردار.
۶۶. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشرتوسعه.
۶۷. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی

سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۸. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۹. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۷۰. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۷۱. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۷۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۶. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۹. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۸۰. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۸۱. مسأله‌هایی در هندسه. آی. اف. شاریگین ترجمهٔ میرزا جلیلی ـ ابراهیم دارابی. انتشارات مبتکران.

۸۲. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف . شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۸۳. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۸۴. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف. یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۵. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۶. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۷. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱، ۲، ۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۸۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۹۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ.شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۹۱. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۹۲. هندسه تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۹۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۹۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۵. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۶. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۷. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین‌دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۸. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۹. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.

۱۰۰. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۱۰۱. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۲. هندسهٔ مقدس. رابرت لولُر. ترجمهٔ هایده معیری. مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی.
۱۰۳. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۱۰۴. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۵. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

106. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.
107. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.
108. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.
109. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLATERES). PAR.G.PAPELIER.
110. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELANGE. GENE MURROW.
111. GEOMETRY and its APPLICATIONS. Walter Meyer.
112. GEOMETRY AN INFORMAL APPROACH. PHILIP L. COX.
113. GEOMETRY for the Classroom. C. HERBERT CLEMENS MICHAEL A. CLEMENS.
114. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.
115. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.
116. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.
117. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´

WARUSFEL.

118. MATHEMATICS AROUND US.

119. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.

120. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.

121. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.

122. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

123. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

124. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.

125. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.