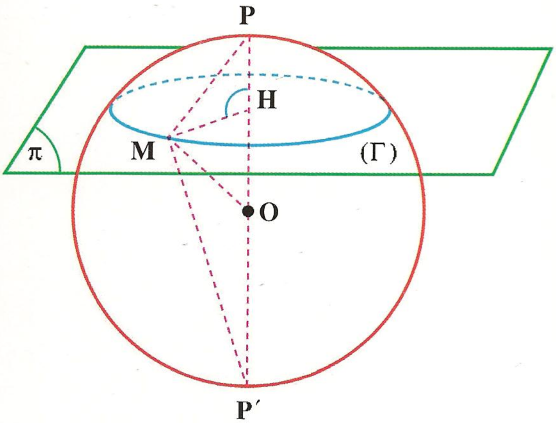
دایرةالمعارف هندسه

۱۷

هندسهٔ فضایی

(کُره)



مؤلّف: محمّد هاشم رستمی

دایرة المعارف هندسه

«جلد هفدهم»

هندسهٔ فضایی

(کره)

مؤلّف: محمدهاشم رستمی

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود چهل سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرة‌المعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

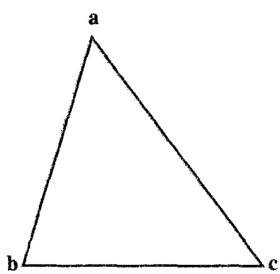
۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسه مسطحه
۳. تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا
۴. مکانهای هندسی
۵. رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۶. هندسهٔ فضایی
۷. هندسهٔ تحلیلی
۸. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۹. هندسه‌های نااقلیدسی
...

هریک از عنوانهای صفحه قبل با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد ؛ به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛
جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛
جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛
جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه و ...) ؛ و مثلثهای ویژه و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛
جلد ۷. رابطه‌های متری درچندضلعیها (چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و ...).

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

- در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند. (به استثنای برخی مسأله‌ها، که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است.)
- قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه حلهای آنها در مبحث مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.
- مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی، آورده شده است.
- علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی



کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$ ، |AB| و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث و یا چندضلعیها استفاده شده است ؛ به عنوان مثال گفته شده : «در مثلث abc ضلعهای ab ، bc، ac و ....».

● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به‌عنوان مثال، همه‌جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند : نقطه‌های A ، B، C و ... ؛ پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است. این جلد از دایرةالمعارف هندسه، هندسهٔ فضایی شامل کره است، که شامل ۱۴ زیربخش است که عبارتند از :

۱. تعریف و قضیه
۲. نقطه، خط، صفحه، دایره، ...
۳. زاویه
۴. شعاع دایره، ارتفاع
۵. پاره‌خط، کمان
۶. شعاع کره
۷. مساحت
۸. حجم
۹. رابطهٔ متری
۱۰. مکان هندسی
۱۱. رسم شکل
۱۲. برش، مقطع
۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به کره
۱۴. مسأله‌های ترکیبی

هریک از زیربخشهای بالا، خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به‌عنوان مثال زیربخش ۸. حجم، شامل این زیربخشهاست :

۸.۱. اندازهٔ حجم
۸.۲. نسبت حجمها
۸.۳. رابطهٔ بین حجمها
۸.۴. رابطهٔ بین سطحها وحجمها

برخی از زیربخشهای صفحه قبل خود به چند زیربخش تفکیک شده است. به عنوان مثال زیربخش

۸ . ۱. اندازهٔ حجم، دارای ۸ زیربخش است. که عبارتند از :

۸ . ۱ . ۱. اندازهٔ حجم کره

۸ . ۱ . ۲ . اندازهٔ حجم بخشی از کره

۸ . ۱ . ۳. اندازهٔ حجم قطعهٔ کروی

۸ . ۱ . ۴. اندازهٔ حجم عرقچین کروی

۸ . ۱ . ۵. اندازهٔ حجم قاچ کروی

۸ . ۱ . ۶. اندازهٔ حجم قطاع کروی

۸ . ۱ . ۷. اندازهٔ حجم حلقهٔ کروی

۸ . ۱ . ۸. اندازهٔ حجم شکل‌های دیگر

بیشتر زیربخشهای بالا نیز، زیربخشهای جدیدی دارند و در هریک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

هندسهٔ فضایی از دیرزمان مورد توجه ریاضیدانان بوده است. اهرام مصر که حدود پنج هزار سال پیش ساخته شده‌اند، همچنین بسیاری دیگر از اثرهای تاریخی یونان، ایران، مصر، بابل، هند، چین و ... همگی گواه بر اطلاع و آگاهی ریاضیدانان آن زمان، از هندسهٔ فضایی می‌باشند.

همزمان با پیشرفت و توسعهٔ هندسهٔ مسطحه، هندسهٔ فضایی نیز توسعه یافته و شاخه‌های جدیدی مانند : هندسه‌های تصویری، هندسهٔ مختصاتی و... پدید آمده است. در واقع هندسهٔ مسطحه و هندسهٔ فضایی به هم آمیخته‌اند. در بسیاری از موارد برای حل یک مسأله در هندسهٔ مسطحه، نیاز به هندسهٔ فضایی داریم و بعکس، برای آن که یک مسأله در هندسهٔ فضایی را حل کنیم، نیازمند استفاده از هندسهٔ مسطحه هستیم.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست ؛ ولی امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

• کره

۱. تعریف و قضیه

۲. نقطه، خط، صفحه، دایره،...

۲.۱. نقطه

۲.۱.۱. نقطه‌های : همخط، همصفحه،...

۲.۱.۱.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۲.۱.۱.۲. نقطه روی صفحه است

۲.۱.۱.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲.۱.۱.۴. نقطه‌ها روی یک کره‌اند

۲.۱.۱.۵. تعداد نقطه‌ها

۲.۱.۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۲. خط

۲.۲.۱. خطهای : همرس، موازی،...

۲.۲.۱.۱. خطها همرسند

۲.۲.۱.۲. خطها بر هم عمودند

۲.۲.۱.۳. کمان نیمساز است

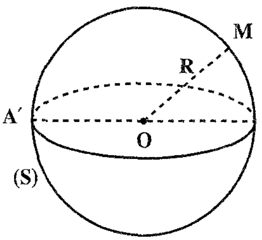
۲.۲.۱.۴. کمان روی دایره است

۲.۳. صفحه

۲.۳.۱. صفحه‌های : موازی، عمود بر هم،...

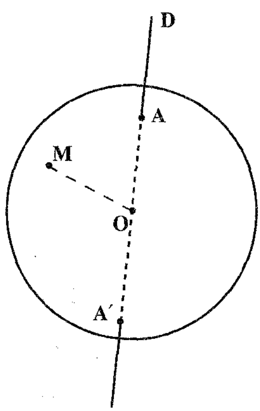
کره

۱. تعریف و قضیه



تعریف. کره مکان هندسی نقطه‌ای از فضا است که به فاصلهٔ ثابتی مانند R از نقطهٔ معین O واقع باشند. این فاصلهٔ ثابت را شعاع کره نامیده، معمولاً به R نمایش می‌دهند و نقطهٔ ثابت O را مرکز کره می‌گویند. کرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به صورت $S(O,R)$ نشان می‌دهند. برای هر نقطهٔ M واقع بر کرهٔ $S(O,R)$ داریم: $OM = R$ و بعکس، هر نقطه‌ای که به فاصلهٔ R از مرکز کره قرار داشته باشد، روی کره واقع است.

از تعریف بالا چنین استنباط می‌شود که هر خط مانند D از مرکز O رسم شود، کره را تنها در دو نقطهٔ A و A′ قطع می‌نماید که این دو نقطه، دو سر قطر AA′ از کره می‌باشند.



چون سطح کروی به وسیلهٔ هر خط رسم شده از O در دو نقطهٔ واقع در طرفین O قطع می‌شود، بنابراین کره سطحی است مسدود و از این‌جا تعریف زیر به‌دست می‌آید:

نقطه‌ای مانند P را واقع در داخل یا در خارج کره گویند برحسب آن که فاصلهٔ OP از شعاع کره کوچکتر، یا از آن بزرگتر باشد.

به‌طور کلی کره مجموعهٔ نقطه‌های فضا را به سه زیرمجموعه به شرح زیر تقسیم می‌کند:

۱. مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از مرکز مساوی شعاع کره است. این مجموعه همان سطح کره را پدید می‌آورد.

۲. مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از مرکز، کوچکتر از شعاع است و درون کره نامیده می‌شود.

۳. مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از مرکز، بزرگتر از شعاع است و آن را برون کره می‌گوییم.

وتر کره. پاره‌خطی را که دو سر آن دو نقطه از یک کره باشند، وتر کره می‌گوییم. قطر کره وتری است که بر مرکز آن بگذرد. قطر کره بزرگترین وترهای آن است. اندازهٔ هر قطر کره دو برابر شعاع کره است.

صفحه‌ای را که از مرکز کره بگذرد، صفحهٔ قطری می‌نامند. دو کره که شعاعشان مساوی یکدیگر باشند، متساوی‌اند و می‌توان آنها را روی یکدیگر منطبق ساخت و در این صورت مرکزهای آنها برهم منطبق می‌شود و می‌توان بدون آن‌که از حالت انطباق خارج شوند، یکی را روی دیگری لغزاند.

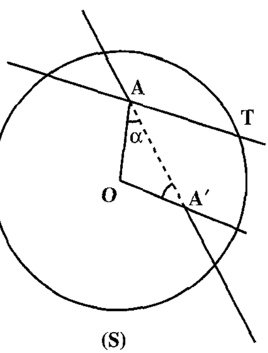
اوضاع نسبی خط و صفحهٔ با کره

۱. قضیه. فصل مشترک کره با هر صفحهٔ قطری، دایره است.

۲. قضیه. فصل مشترک هر کره با یک صفحهٔ قاطع، دایره‌ای است که مرکز آن پای عمود وارد از مرکز کره بر آن صفحه می‌باشد.

خط و صفحهٔ مماس بر کره

خط مماس بر کره. برای این‌که یک خط مماس بر کره در نقطهٔ A به‌دست آوریم، از A منحنی اختیاری روی سطح کره رسم کرده، قاطع AA' را رسم می‌نماییم (شکل الف). خط مماس، حد وضع قاطع AA' است وقتی که A' بی‌نهایت به نقطهٔ A نزدیک گردد. اگر در مثلث متساوی‌الساقین OAA' زاویه‌های دو طرف قاعده را α فرض کنیم، داریم:

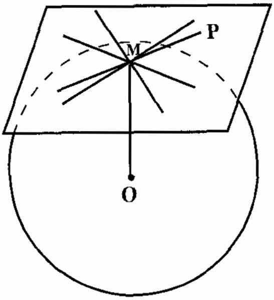


(الف)

$$\hat{\alpha} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{O}}{۲}$$

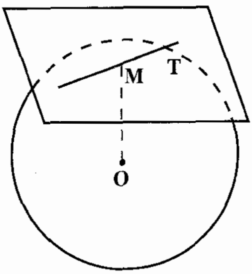
و اگر A' به سمت A میل کند، زاویهٔ O به سمت صفر و α به سمت ۹۰ درجه میل می‌کند، پس مماس AT در وضع حد خود بر شعاع OA عمود است. واضح است که چون بی‌نهایت منحنی از A می‌توان روی سطح کره رسم کرد، بنابراین می‌توان از هر نقطهٔ واقع بر کره بی‌نهایت خط مماس بر کره رسم کرد و از این جا قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیه. اوّلاً هر خط مماس بر کره بر شعاعی که از نقطهٔ تماس بگذرد، عمود است. ثانیاً در هر نقطهٔ A از کره بی‌نهایت خط مماس بر سطح آن وجود دارد که همهٔ آنها بر شعاع نقطهٔ تماس عمودند و بنابراین در صفحه‌ای که از A بر شعاع مزبور عمود شود، قرار دارند. این



(ب)

صفحه را صفحهٔ مماس بر کره می گویند.
این نتیجه را ممکن است به طریقی دیگر به دست آوریم، زیرا می‌دانیم کره سطح دوار است. در شکل (ب) وضع یک صفحهٔ مماس بر کره مشاهده می گردد:
هر صفحهٔ مماس بر کره فقط در یک نقطهٔ M با آن مشترک است و بعکس. هر صفحه که فقط در یک نقطهٔ M با کره مشترک باشد، بر آن مماس است، زیرا اگر نقطهٔ دیگری غیر از M مانند T در این صفحه فرض نماییم، چون T خارج کره واقع است، $OT > OM$ (شکل پ)، پس OM اقصر فاصلهٔ O از صفحهٔ مزبور می‌باشد و لذا این صفحه بر OM عمود است، پس بر صفحهٔ مماس در نقطهٔ M منطبق می‌باشد.



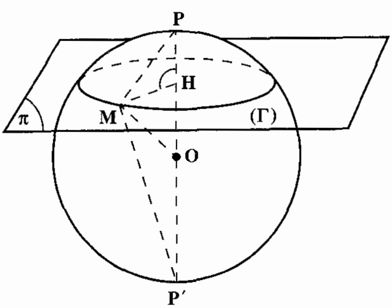
(پ)

بررسی دایره‌های رسم شده بر کره

۳. **قضیه**. از دو نقطهٔ غیر واقع بر یک قطر روی کره می‌توان یک دایرهٔ عظیمه مرور داد.

۴. **قضیه**. بر سه نقطهٔ واقع بر سطح کره می‌توان یک دایره روی کره مرور داد و بیش از یکی نمی‌توان.

قطب دایره‌ها روی کره



قطب هر دایرهٔ واقع روی کره عبارت است از انتهای قطری از کره که بر صفحهٔ دایرهٔ مزبور عمود باشد (شکل) بنابراین هر دایره دو قطب دارد و خط واصل مابین دو قطب از مرکز دایره و مرکز کره می‌گذرد.

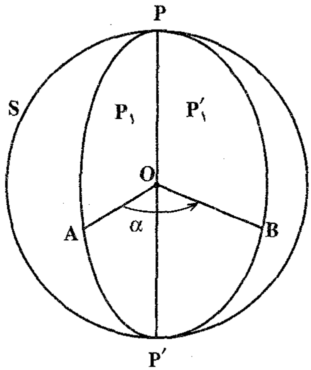
۵. **قضیه**. تمام نقطه‌های یک دایره واقع بر کره از هر قطب آن دایره به یک فاصله‌اند.

۶. **مسأله**. می‌خواهیم شعاع کرهٔ مفروضی را معین نماییم.

۷. **مسأله**. می‌خواهیم بر سه نقطهٔ A، B و C واقع بر سطح کرهٔ معین دایرهٔ صغیره‌ای مرور دهیم.

۸. **قضیه.** هرگاه دو نقطه از سطح کره را با یک قوس دایرهٔ صغیره و یک قوس دایرهٔ عظیمه (کمتر از نصف محیط) به هم وصل کنیم، قوس عظیمه از قوس صغیره کوتاهتر است.

قاچ کروی. هرگاه قطری مانند PP' از کرهٔ S را درنظر بگیریم و دو نیمصفحهٔ P_1 و P'_1 را بر آن مرور دهیم، هر یک از دو نیمصفحه، کره را در نیمدایره‌ای (دو نصف‌النهار) قطع می‌کند (شکل).



قسمتی از کره را که به این دو نیمدایره (نصف‌النهار) محدودند، یک قاچ کروی می‌نامیم. یعنی:
قاچ کروی قسمتی از یک کره است که به دو نیمدایرهٔ بزرگ کره محدود باشد. هر قاچ کروی با اندازهٔ فرجهٔ بین دو نیمصفحهٔ P_1 و P'_1 مشخص می‌شود. کره خود قاچی است که زاویهٔ مسطحهٔ آن ۳۶۰° است.

۹. **قضیه.** اندازهٔ زاویهٔ قاچ مساوی است با اندازهٔ قوسی از دایرهٔ عظیمه که صفحه‌اش بر یال قاچ عمود و مابین دو ضلع قاچ محصور باشد.

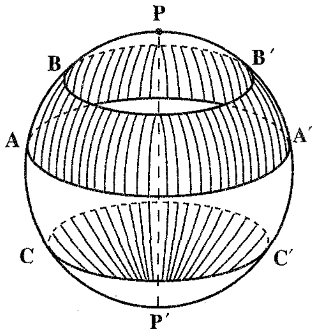
محاسبهٔ سطح و حجم کره

محاسبهٔ سطح کره. چون سطح استوانه و مخروط قابل گسترش بر صفحه می‌باشند، اندازه‌گرفتن سطح جانبی آنها به وسیلهٔ مقایسه با واحد مساحت اشکالی ندارد، لیکن در مورد کره مطلب غیر از این است؛ زیرا سطح کره مستقیماً قابل مقایسه با واحد سطح که مسطح است، نمی‌باشد و قابل گسترش بر صفحه هم نیست. بنابراین برای محاسبهٔ سطح کره از محاسبهٔ سطح اجسامی مانند مخروط و استوانه شروع کرده، به وسیلهٔ رجوع به حد سطح کره را معین می‌سازیم.

۱۰. **قضیه.** اگر پاره‌خطی حول محوری که با آن در یک صفحه واقع است و از آن عبور نمی‌کند، دوران نماید، سطحی حادث می‌شود که مساحت آن برابر است با حاصلضرب تصویر آن پاره‌خط بر محور در طول محیط دایره‌ای که مرکزش بر محور واقع بوده، در وسط پاره‌خط بر آن مماس باشد.

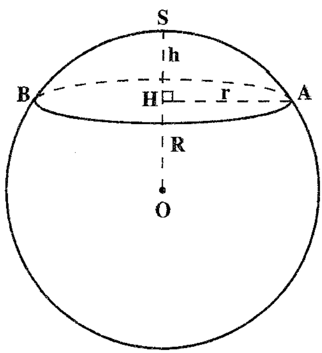
۱۱. **قضیه.** اگر خط شکستهٔ منتظم محدبی حول یکی از قطرهای خود که از آن عبور نمی‌نماید، دوران کند، سطح حاصل از دوران آن برابر است با حاصلضرب تصویر خط شکسته برمحور در طول دایرهٔ محاطی آن.

سطح منطقه



تعریف. منطقه، قسمتی از سطح کره است که مابین دو مقطع متوازی محصور باشد. دو دایرهٔ مقطع را دو قاعدهٔ منطقه گویند (شکل، منطقهٔ $AA'B'B$) و فاصلهٔ این دو مقطع از یکدیگر را ارتفاع منطقه می‌نامند، هرگاه منطقه را به وسیلهٔ صفحه‌ای که بر قطر PP' می‌گذرد، قطع کنیم، کمانی مانند AB به دست می‌آید و می‌توان منطقه را سطح حاصل از دوران این کمان حول قطر PP' دانست این کمان را مولد منطقه می‌نامند. هرگاه یکی از دو صفحهٔ قاعده بر کره مماس شود، منطقه به شکل $CP'C'$ (شکل) درمی‌آید و در این صورت آن را عرقچین کروی گویند.

عرقچین کروی به صورت زیر نیز تعریف می‌شود :



عرقچین کروی. قسمتی از سطح کروی که با یک مقطع از آن سطح تفکیک شده باشد، یک عرقچین کروی است.

در هر عرقچین کروی مقطع صفحهٔ قاطع با سطح کروی را قاعدهٔ عرقچین و پاره‌خطی را که از مرکز کره بر صفحهٔ قاعده عمود و بین قاعده و سطح کره محصور است، ارتفاع عرقچین می‌گوییم. مانند پاره‌خط SH در شکل. سطح نیمکره، عرقچینی است که ارتفاع آن مساوی شعاع کره است.

۱۲. **قضیه.** مساحت سطح منطقه مساوی است با حاصلضرب طول ارتفاع آن در محیط دایرهٔ عظیمه.

۱۳. **سطح کره.**

قضیه. مساحت سطح کره مساوی است با چهار برابر سطح دایرهٔ عظیمه.

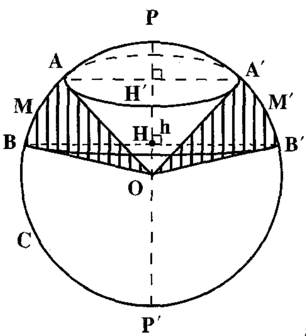
۱۴. **سطح قاچ کروی.** سطح قاچ کروی مساوی است با حاصلضرب سطح دایرهٔ عظیمه در نسبت زاویهٔ قاچ به زاویهٔ قائمه.

۱۵. **حجم کره:**

قضیه. هرگاه مثلثی حول محوری واقع در صفحهٔ خود که از یک رأس مثلث می‌گذرد و

از آن عبور نمی‌نماید، دوران کند، حجم جسمی حاصل از دوران مثلث مساوی است با حاصلضرب سطحی که از دوران ضلع مقابل به رأس ثابت به دست می‌آید، در یک سوم ارتفاع رسم شده از آن رأس.

۱۶. **قضیه.** هرگاه قطاعی از یک چند ضلعی منتظم مانند OABCD، حول یکی از قطرهای خود که از آن عبور نمی‌کند (x′x) دوران نماید، حجم جسم حاصل مساوی است با حاصلضرب سطح حادث از دوران خط شکستهٔ منتظم ABCD در یک سوم شعاع دایرهٔ محاطی چند ضلعی.



قطاع کروی. دایرهٔ C و قطر P′P و قطاع دایرهٔ OAMB از آن را در نظر می‌گیریم، شکل. اگر دایرهٔ C گرد قطر PP′ دوران کند، کرهٔ به شعاع R پدید می‌آید و از دوران قطاع دایرهٔ OAMB قسمتی از حجم کره مشخص می‌شود که آن را قطاع کروی می‌گوییم. سطح حادث از دوران کمان AMB را که خود یک منطقهٔ کروی مشخص می‌کند، قاعدهٔ قطاع کروی و ارتفاع این منطقه را ارتفاع قطاع کروی می‌گوییم.

قطاع کروی در حقیقت قسمتی از حجم کره است که بین سطح یک منطقهٔ کروی و سطحهای جانبی دو مخروط که قاعده‌های آنها دو قاعدهٔ منطقه و رأس هر دو مرکز کره است، محدود می‌شود.

هر قطاع کروی با شعاعهای دو قاعده و ارتفاعش مشخص می‌شود.

۱۷. **قضیه.** حجم قطاع کروی مساوی است با حاصلضرب سطح منطقه‌ای که قاعدهٔ آن است در ثلث شعاع کره.

۱۸. **حجم کره.**

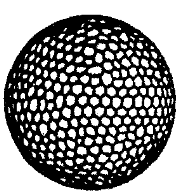
قضیه. حجم کره مساوی است با حاصلضرب مساحت آن در ثلث شعاع.

روش دیگر محاسبهٔ حجم و مساحت سطح کره

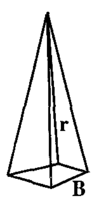
۱۹. **قضیه.** حجم کره‌ای به شعاع r برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$.

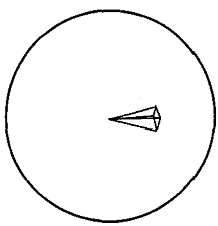
۲۰. **قضیه.** مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع r برابر است با $۴\pi r^{۲}$.

پیداکردن مساحت سطح کره با استفاده از حجم کره



۲۱. حجم تقریبی کره را می‌توانیم به طریق دیگری به دست آوریم. برای این کار، کره را به تعداد زیادی شبه هرم تقسیم می‌کنیم، یعنی تصور کنید که سطح کره با تعداد بسیاری چند ضلعیهای خیلی کوچک پوشانده شده است. البته باید توجّه داشته باشیم که این چند ضلعیها واقعی نیستند، زیرا روی کره هیچ پاره‌خط راستی نمی‌تواند قرار بگیرد. هرکدام از این شبه چند ضلعیها قسمتهایی از سطح کره هستند، پس مسطح نمی‌باشند. تصور کنید که نقطه‌های روی ضلعهای این شبه چند ضلعیها را به مرکز کره وصل کرده‌ایم، به‌طوری که این شبه چند ضلعیها، قاعده‌های تعداد بسیاری شبه هرم با رأس مشترک یعنی مرکز کره باشند. در نتیجه، ارتفاع این شبه هرمها برابر شعاع کره یعنی R است.





اگر قاعدهٔ یکی از شبه هرمها را S در نظر بگیریم، حجم آن تقریباً مساوی $\frac{۱}{۳}R \times S$ می‌گردد. مجموع حجم این شبه هرمها تقریب خوبی برای حجم کره می‌باشد. اگر سطح قاعدهٔ هر شبه هرم را بترتیب $S_۱$، $S_۲$، ...، S_n بنامیم، پس:

$$\text{حجم تقریبی کره} = \text{مجموع حجم شبه هرمها} = \frac{۱}{۳}RS_۱ + \frac{۱}{۳}RS_۲ + \cdots + \frac{۱}{۳}RS_n$$

یا

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}R(S_۱ + S_۲ + \cdots + S_n)$$

از طرفی، مجموع مساحتهای قاعده‌های شبه هرمها برابر مساحت سطح کره است که آن را با S نمایش می‌دهیم. در نتیجه:

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}RS$$

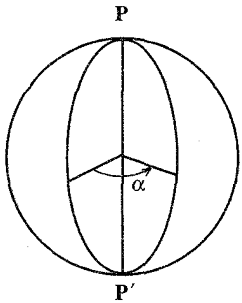
باید توجه داشته باشیم که هرچقدر تعداد شبه هرمها بیشتر و بیشتر شود، حجم تقریبی کره به مقدار واقعی آن یعنی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. بنابراین:

$$\frac{۱}{۳}RS = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

و از آن‌جا $S = ۴\pi R^۲$

یعنی $۴\pi R^۲ =$ مساحت کره

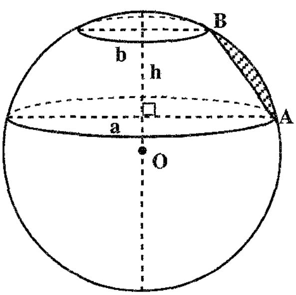
نکته. تنها قسمت نادقیق این استدلال، مساوی قراردادن مقدار حجم تقریبی با حجم واقعی بود. برای دقیق نمودن این استدلال، نیاز به ابزاری داریم که بالاتر از سطح این درس است.



تعریف. اکلیل کروی (قاچ کروی) قسمتی از حجم کره واقع مابین زاویهٔ دو وجهی است که یال آن از مرکز کره بگذرد (شکل).

۲۲. **قضیه.** حجم اکلیل کروی مساوی است با حاصلضرب حجم کره در نسبت زاویهٔ اکلیل به چهار قائمه.

حجم حلقهٔ کروی

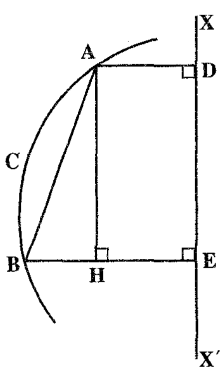


تعریف. حلقهٔ کروی جسمی است که از دوران قطعهٔ دایره، حول قطری که آن را قطع نمی‌کند، به دست آید. این جسم به یک منطقهٔ کروی و به سطح جانبی یک مخروط ناقص (و گاهی اوقات مخروط یا استوانه) محدود می‌شود.

ارتفاع حلقه عبارت است از تصویر وتر قطعهٔ دایره، یعنی AB، روی محور دوران، $ab = h$.

۲۳. **قضیه.** حجم حلقهٔ کروی مساوی است با یک ششم حجم استوانه‌ای که ارتفاعش ارتفاع حلقه و شعاع قاعدهٔ آن وتر قطعهٔ مولد حلقه باشد.

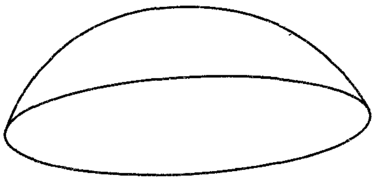
حجم قطعهٔ کروی



تعریف. قطعهٔ کروی قسمتی است از حجم کره که مابین دو صفحهٔ متوازی محصور باشد. دو دایرهٔ مقطع را دو قاعدهٔ قطعه و فاصلهٔ صفحه‌های آنها از یکدیگر را ارتفاع قطعه گویند. بنابراین تعریف قطعهٔ کروی جسمی است که از دوران ذوزنقهٔ مختلط‌الخطوط ADEB (شکل) به دست می‌آید.

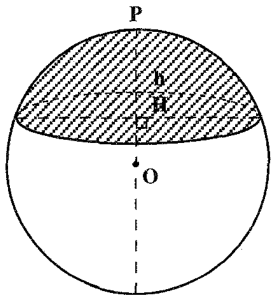
۲۴. قضیه. حجم قطعهٔ کروی مساوی است با نصف مجموع حجمهای دو استوانه که قاعدهٔ آنها مساوی قاعدهٔ قطعه و ارتفاع آنها مساوی ارتفاع قطعه باشد، بعلاوه حجم کره‌ای که قطرش مساوی ارتفاع قطعه باشد.

حجم عرقچین کروی



تعریف. عرقچین کروی قطعهٔ کره‌ای است که یکی از دو قاعدهٔ آن مماس بر کره شود، به عبارت دیگر جسمی است محصور مابین کره و یک صفحهٔ قاطع (شکل).

۲۵. حجم عرقچین کروی از دستور زیر به‌دست می‌آید :

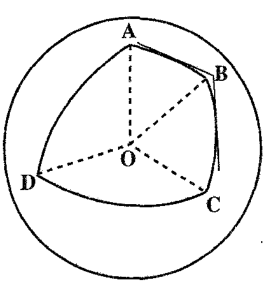


$$V = \frac{\pi h^{۲}}{۳}(۳R - h)$$

مثلث کروی

چند ضلعی کروی. چند ضلعی کروی خط مسدودی است واقع بر سطح کره که از قوسهای دایره‌های عظیمه تشکیل یافته باشد. در شکل، چند ضلعی ABCD یک چندضلعی کروی است و هر یک از قوسهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{DA}$ قوسهای دایره‌های عظیمه می‌باشند.

عناصر چند ضلعی کروی. اولاً هر یک از قوسهای دایره‌های عظیمهٔ مزبور را ضلع چندضلعی کروی و هر یک از دو انتهای هر ضلع را رأس چند ضلعی کروی می‌نامند. زاویهٔ هرچند ضلعی کروی عبارت است از زاویه‌ای که مابین مماسهای رسم شده بر دو ضلع در یک رأس تشکیل می‌شود :



مثلث کروی. اگر تعداد ضلعهای چند ضلعی کروی سه باشد، آن را مثلث گویند. مثلث کروی را متساوی‌الساقین یا متساوی‌الاضلاع نامند، برحسب این که دو ضلع یا سه ضلع آن با یکدیگر مساوی باشند.

مثلثی را که سه زاویهٔ آن متساوی باشند، متساوی‌الزوایا می‌نامند.

کنج مرکزی. هرگاه از نقطهٔ O مرکز کره خطهایی به رأسهای یک چند ضلعی کروی وصل کنیم، کنجی تشکیل می‌شود که تعداد یالهای آن با تعداد رأسهای چند ضلعی کروی برابر است و آن را کنج مرکزی چند ضلعی کروی می‌نامند، مانند کنج O.ABCD (شکل).
برعکس هر کنج که رأس آن در مرکز کره واقع باشد، کره را در چند ضلعی کروی که آن را نظیر کنج مفروض می‌نامند، قطع می‌نماید. در حالت مخصوص مثلث کروی کنج مفروض سه وجهی است. چند ضلعی کروی را محدب گویند، هرگاه کنج مرکزی آن محدب باشد.

۲۶. قضیه. اندازهٔ هر زاویه از کنج مرکزی مساوی است با اندازهٔ ضلع روبه‌رویش از چند ضلعی کروی و اندازهٔ هر فرجه از کنج مرکزی برابر اندازهٔ زاویه‌ای از چند ضلعی کروی است که رأسش بر یال فرجه قرار دارد.

۲۷. قضیه. در هر مثلث کروی هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است.

۲۸. قضیه. در هر چند ضلعی کروی محدب مجموع ضلعها از محیط دایرهٔ عظیمه کوچکتر است.

۲۹. قضیه. در هر مثلث کروی، اگر دو زاویه متساوی باشند، دو ضلع روبه‌روی آن‌ها متساوی‌اند و برعکس.

۳۰. قضیه. در هر مثلث کروی ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچکتر بزرگتر می‌باشد و برعکس.

۳۱. قضیه. در هر مثلث کروی:

اولاً. مجموع زاویه‌ها محصور است مابین دو قائمه و شش قائمه.

ثانیاً. تفاضل مجموع دو زاویه با زاویهٔ سوم از دو قائمه، کمتر است.

فضل کروی مثلث. اگر زاویه‌های مثلث کروی را A، B و C فرض کنیم، داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} > \text{۲ قائمه}$$

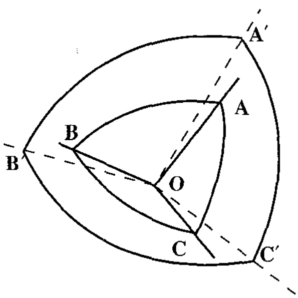
مقدار $e=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}-\text{۲ قائمه}$ را فضل کروی مثلث کروی می‌نامند و مقدار آن مابین صفر و چهار قائمه است.

حالتهای تساوی دو مثلث کروی

می‌دانیم که دو کنج به شرط آن که اجزای نظیرشان به یک وضع قرارگرفته باشد، در چهارحالت متساوی‌اند. بنابراین دو مثلث کروی نیز به شرط آن که کنجهای مرکزیشان متشابه‌الوضع باشند، در چهار حالت زیر متساوی می‌باشند.

۳۲. قضیه. دو مثلث کروی متشابه‌الوضع در چهار حالت مساوی یکدیگرند :
اولاً. اگر دو ضلع از یکی با دو ضلع از دیگری نظیر به نظیر مساوی بوده، زاویهٔ بین آنها نیز در دو مثلث برابر باشد.
ثانیاً. هرگاه دو زاویه از دو مثلث و ضلع مابین این دو زاویه نظیر به نظیر متساوی باشند.
ثالثاً. هرگاه سه ضلع از یکی نظیر به نظیر مساوی با سه ضلع از دیگری باشد.
رابعاً. هرگاه سه زاویه از یکی نظیر به نظیر مساوی با سه زاویه از دیگری باشد.

مثلث قطبی. مثلث کروی $A'B'C'$ را قطبی مثلث کروی ABC گویند، هرگاه رأسهای آن به طریق زیر به دست آمده باشند (شکل). A' قطبی است از دایرهٔ عظیمهٔ BC که با رأس A در یک طرف این دایره واقع شده باشد و B' قطبی است از دایرهٔ عظیمهٔ BC که با رأس B در یک طرف این دایرهٔ عظیمه قرار داشته باشند و به همین طریق است برای رأس C'.



خواص مثلث قطبی. از تعریف بالا چنین نتیجه می‌شود که کنجهای مرکزی دو مثلث قطبی دو کنج قطبی می‌باشند و بنابراین خواص زیر از دو کنج قطبی در مورد دو مثلث قطبی نیز صادق است.

الف. اگر مثلثی قطبی مثلث دیگر باشد، مثلث دوم نیز قطبی مثلث اوّل است، یعنی رأسهای آن نیز قطب ضلعهای مثلث اوّل می‌باشند.

ب. در دو مثلث قطبی هر ضلع از یکی با زاویهٔ نظیرش از دیگری مکملند و برعکس.

مثلثهای کروی متقارن

تعریف. دو مثلث کروی را قرینهٔ یکدیگر گویند، هرگاه رأسهای یکی سه انتهای قطرهایی باشند که بر رأسهای دیگری گذشته است.

از این تعریف چنین نتیجه می‌شود که کنجهای مرکزی دو مثلث کروی قرینه با یکدیگر قرینه‌اند. لیکن می‌دانیم که دو کنج قرینه با وجود تساوی تمام اجزا قابل انطباق نمی‌باشند. بنابراین دو مثلث کروی قرینه نیز قابل انطباق نیستند.

استثنا در حالتی است که دو مثلث کروی و در نتیجه کنج مرکزی آنها متساوی‌الساقین باشند و می‌دانیم که دو کنج قرینهٔ متساوی‌الساقین را ممکن است برهم منطبق ساخت.

۳۳. قضیه. دو مثلث کروی قرینه، متعادلند.

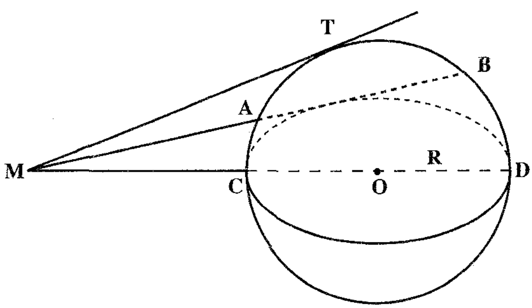
مساحت سطح مثلث کروی

۳۴. قضیه. اگر دو مثلث کروی دارای یک رأس مشترک باشند و دو رأس دیگر یکی از آنها بترتیب با دو رأس دیگر از دومی متقاطر باشند، مجموع این دو مثلث مساوی است با قاچی از کره که زاویهٔ رأس آن زاویهٔ رأس مشترک دو مثلث باشد.

۳۵. قضیه. نسبت مساحت مثلث کروی به مساحت سطح کره برابر است با نسبت فضل کروی آن به‌هشت قائمه.

۳۶. دو کرهٔ دلخواه نسبت به هم دارای شش وضع مختلف هستند و بین خط‌المرکزین و شعاعهای آنها رابطه‌های نظیر وضع دو دایره نسبت به هم برقرار است.

قوت نقطه نسبت به کره



تعریف. قوت یک نقطه نسبت به یک کره حاصلضرب اندازه‌های جبری دو قطعهٔ قاطعی است که از آن نقطه نسبت به آن کره رسم می‌شود. اگر نقطه را M، کره را S(O,R) و قاطع رسم شده از M نسبت به کره را MAB بنامیم، داریم :

$$P_{M/S} = \overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MO}^{۲} - r^{۲}$$

اگر نقطهٔ M برون کره باشد، قوت نقطه نسبت به کره مثبت است و اگر نقطه روی کره باشد، این قوت مساوی صفر است و اگر نقطه درون کره باشد، قوت آن نسبت به کره منفی است. اثبات این مطلب، مشابه اثبات قوت نقطه نسبت به دایره در صفحه است، یعنی برای اثبات کافی است صفحهٔ گذرنده بر MAB و نقطهٔ O مرکز کره را رسم کنیم و قطر گذرنده بر M را MCD بنامیم. آن‌گاه همانند قوت نقطه نسبت به دایره عمل کنیم.

$$P_{M(S)} = MA.MB = MC.MD = (MO - OC)(MO + OD)$$
$$= (MO - R)(MO + R) = MO^{۲} - R^{۲}$$

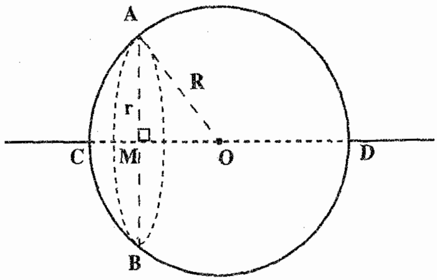
بحث. ۱. اگر M خارج کره باشد : $MO > R \Rightarrow P_{M(S)} > ۰$

۲. اگر M روی کره باشد : $MO = R \Rightarrow P_{M(S)} = ۰$

۳. اگر M درون کره باشد : $MO < R \Rightarrow P_{M(S)} < ۰$

تبصره. اگر نقطهٔ M خارج کره باشد و از این نقطه، مماس دلخواه MT را بر کره رسم

کنیم، داریم : $MT^2 = MA.MB$ ؛ بنابراین قوت نقطهٔ M نسبت به کره، وقتی نقطه روی کره است، مساوی مربع طول مماسی است که از آن نقطه بر کره رسم می‌شود :

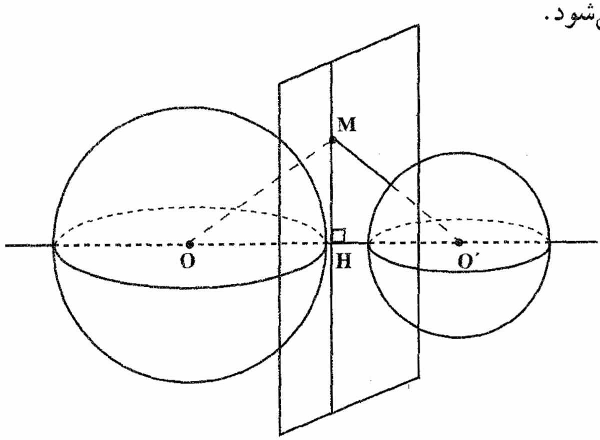


اگر نقطهٔ M درون کره باشد و از این نقطه صفحه‌ای عمود بر قطر MCD (قطری از کره که از M می‌گذرد) رسم کنیم تا کره را در دایره‌ای به شعاع r قطع کند، قوت نقطهٔ M نسبت به کره، مساوی $-r^2$ است ؛ زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOA داریم :

$$P_{M(S)} = MO^2 - R^2 = -(R^2 - OM^2) = -(OA^2 - OM^2)$$
$$= -\overline{MA}^2 = -r^2$$

صفحهٔ اصلی دو کره

تعریف. مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که نسبت به دو کره دارای قوتهای متساوی باشند، صفحه‌ای است، عمود بر خط‌المرکزین آنها که صفحهٔ اصلی دو کره نامیده می‌شود.



۳۷. قضیه. صفحهٔ اصلی دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ در نقطهٔ ثابتی مانند H از خط‌المرکزین دو کره بر این خط‌المرکزین عمود است، به قسمی که اگر I وسط OO' باشد، $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ است.

محور اصلی سه کره

تعریف. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت به سه کره با مرکزهای متمایز و غیرواقع بر یک خط راست، دارای قوتهای مساوی است، خط راستی است، که محور اصلی سه کره نامیده می‌شود.

۳۸. قضیه. محور اصلی سه کره محل برخورد صفحه‌های اصلی سه کره است که دوبه‌دو در نظر گرفته شوند.

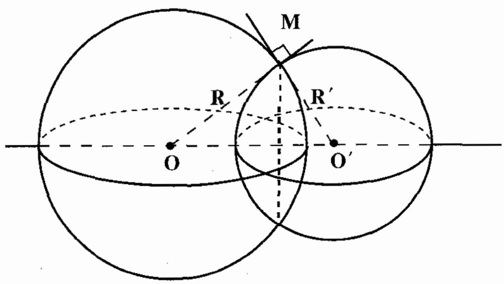
مرکز اصلی چهار کره

تعریف. مرکز اصلی چهار کره نقطه‌ای است که نسبت به آن چهار کره، قوت مساوی دارد. شش صفحهٔ اصلی و چهار محور اصلی چهار کره که دوبه‌دو، یا سه به سه در نظر گرفته شوند، از یک نقطه می‌گذرند که این نقطه همان مرکز اصلی چهار کره است.

اثبات به سادگی انجام می‌شود.

دو کرهٔ عمود برهم

تعریف. دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ را عمود بر هم می‌گویند، در صورتی که متقاطع باشند و هر نقطه از دایرهٔ تقاطع آنها، از خط‌المرکزین دو کره به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، یعنی اگر M یک نقطهٔ دلخواه از این دایره باشد، $O\hat{M}O' = ۹۰^\circ$ باشد.

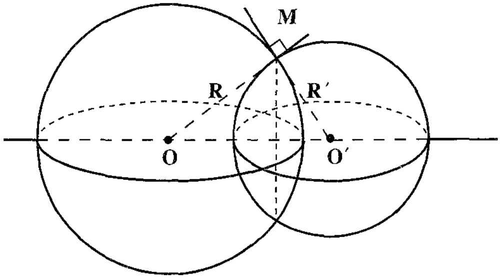


نکته. اگر دو دایرهٔ عمود برهم را حول خط‌المرکزینشان دوران دهیم، دو کرهٔ عمود بر هم به دست می‌آید.

نکته. در دو کرهٔ عمود برهم، قوت مرکز یک کره نسبت به دیگری مساوی مربع شعاع همان کره است، یعنی داریم:

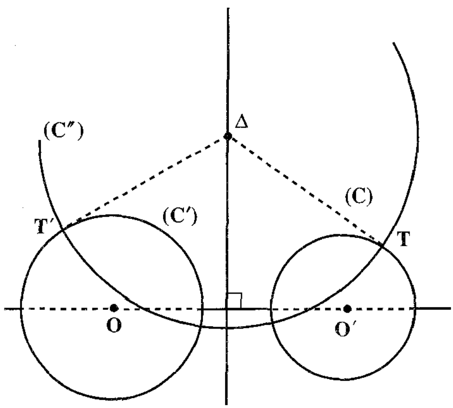
$$P_{O(S')} = R^۲ \quad , \quad P_{O'(S)} = R'^۲$$

۳۹. شرط عمود بودن دو کره



قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ برهم عمود باشند، آن است که مربع طول خط‌المرکزین آنها مساوی مجموع مربعهای شعاع دو کره باشد، یعنی داشته باشیم: $\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2$.

۴۰. قضیه. مکان هندسی مرکزهای کره‌های عمود بر دو کرهٔ مفروض، اگر این دو کره متقاطع نباشند، صفحهٔ اصلی آنهاست و اگر متقاطع باشند، قسمتی از صفحهٔ اصلی دو کره است که خارج آن دو کره قرار دارد.



۴۱. قضیه. مکان هندسی مرکزهای کره‌های عمود بر سه کره که مرکزهایشان روی یک خط راست نباشد، محور اصلی آنهاست. اگر سه کره متقاطع نباشند، و اگر متقاطع باشند، قسمت خارجی محور مزبور است.

دستگاه کرات

تعریف. دستگاه کرات به کره‌هایی گفته می‌شود که با کرهٔ مفروض (S) دارای یک صفحهٔ اصلی (π) باشند.

بنابر وضع کرهٔ داده شدهٔ (S) و صفحهٔ اصلی آنها (π) به روشی مشابه هندسهٔ مسطحه برای دایرهٔ (C) و خط Δ، می‌توان کره‌های این دسته کره را رسم نمود.

نکته ۱. یک دستگاه کرات را می‌توان از دوران یک دسته دایره حول پایهٔ آن دسته دایره به دست آورد.

نکته ۲. همانند دسته دایره، دسته کره نیز می‌تواند، غیر متقاطع، متقاطع یا مماس باشد.

نکته ۳. همانند دستهٔ دایرهٔ مزدوج، دسته کرهٔ مزدوج را نیز می‌توان تعریف کرد.

یادداشت تاریخی
علم اُکَر در عالم اسلامی

بخش ۱. زمینه‌های باستانی

در مسأله‌های علم اُکَر (کره‌ها) محاسبهٔ اندازه‌های کمانهای کروی یا زاویه‌هایی روی سطح کره مطرح است. در کاربردها، این کره، کرهٔ سماوی یا زمین گرفته می‌شد. کرهٔ سماوی، کره‌ای است که فرض می‌شد شامل ستارگان ثابت و شعاع آن به قدری بزرگ است که کرهٔ زمین نسبت به آن نقطه‌ای بیش نیست. با این حال، شعاع متناهی بود و از لحاظ مقاصد ریاضی، می‌شد آن را به عنوان واحد درنظر گرفت.

در بحث نظری هندسهٔ سطح کره، نظیر خطهای مستقیم، دایره‌های عظیمه‌اند که فصل مشترک سطح کره با هر صفحه گذرنده بر مرکز آن هستند. مدارها نیز که از برخورد سطح کره با صفحه‌هایی ناگذرنده بر مرکز آن به‌وجود می‌آیند، واجد اهمیت هستند.

در مورد کرهٔ زمین، دایره‌های عظیمه مهم عبارتند از استوا و نصف‌النهارها. مدارهای عرض جغرافیایی که موازی دایرهٔ استوا هستند، مدارها را تشکیل می‌دهند. در مورد کرهٔ سماوی، بعضی از دایره‌های مهم عبارتند از معدل‌النهار (استوای سماوی)، دایرة البروج و افق که در بخش آتی به تعریف و بحث آنها خواهیم پرداخت. این تعبیرها از دایره‌های عظیمه و مدارها است که موضوع علم اُکر را هم در نجوم و هم جغرافیای ریاضی سودمند می‌گرداند.

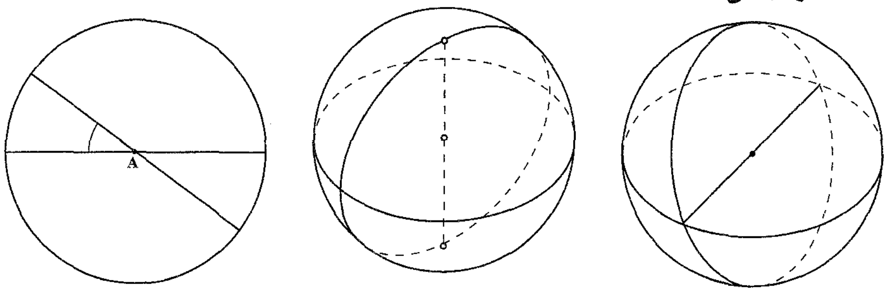
یونانیان اوّلین مردمی بودند که به پژوهش در هندسهٔ سطح کره پرداختند و رساله‌های باقی‌مانده از اتو لوکوس (Auto lykos) که احتمالاً در سدهٔ چهارم پیش از میلاد از معاصرین اقلیدس بوده، نشان می‌دهند که حقیقتهای اساسی زیر از مدتها قبل معلوم بوده‌اند (شکلهای الف، ب، پ).

۱. هر دو دایرهٔ عظیمهٔ یک کره یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲. به ازای هر دو نقطهٔ متقاطر (دو سر یک قطر) مفروض در یک کره، کلیهٔ دایره‌های عظیمه‌ای را در نظر گیرید، که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند. در این صورت، دایرهٔ عظیمهٔ یکتایی عمود بر کلیهٔ این دایره‌های عظیمه موجود است. به عکس به ازای هر دایرهٔ عظیمه، دو نقطهٔ متقاطر موسوم به قطبهای آن موجودند به طوری که هر دایرهٔ گذرنده بر این قطبها بر دایرهٔ مفروض عمود است.

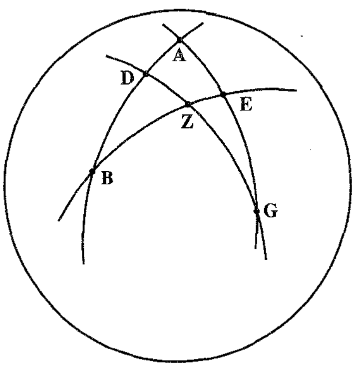
۳. چون هر دو دایرهٔ عظیمه مفروض یک کره، یکدیگر را قطع می‌کنند، نتیجه

می‌شود که این دایره‌ها یکدیگر را در نقطه‌های متقاطر A و B قطع می‌کنند. در این صورت (۲) وجود دایرهٔ عظیمه یکتایی با قطبهای A و B را تضمین می‌کند. کمان اقصری که دو دایرهٔ مفروض بر روی این دایره جدا می‌کنند، اندازهٔ زاویهٔ کوچکتر α بین این دو دایره را می‌دهد.



(پ) (ب) (الف)

منلائوس (Menelaos) که در رم به رصد می‌پرداخت و چند دهه پیش از بطلمیوس (Ptolemy) می‌زیست، تا آن جا که می‌دانیم، اوّلین کسی است که به مثلثهای کروی اشاره کرده است. در اثر او به نام اسفریکا (Spherica) [اُکَر] یک مثلث کروی به صورت «سطح محصور به وسیلهٔ کمانهای (سه) دایرهٔ عظیمه بر یک کره که هر کمان کمتر از نیمدایره باشد» تعریف می‌شود، و در مقالهٔ سوم اسفریکا به قضیه‌ای برمی‌خوریم که نه تنها اوّلین قضیهٔ مثلثات کروی است، بلکه از لحاظ نویسندگان یونانی، تنها قضیهٔ مربوط به این علم است. این قضیه به قضیهٔ منلائوس معروف است، و می‌توان آن را به صورت اندکی امروزی‌تر شدهٔ آن به شکل زیر بیان کرد (شکل ت):



(ت)

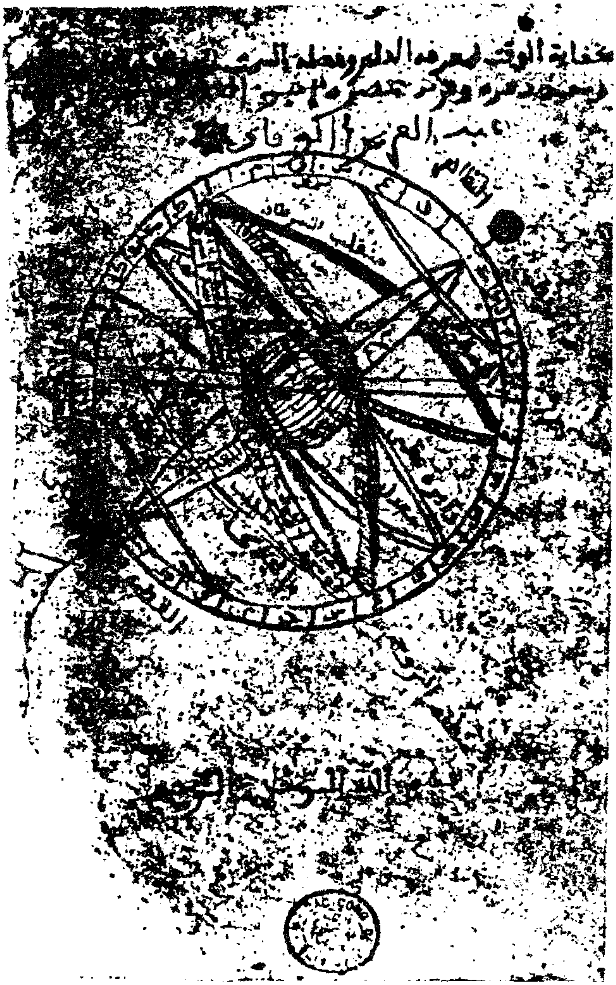
فرض کنید $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AG}$ دو کمان دایره‌های عظیمه‌ای بر یک کره باشند، و فرض کنید دو کمان دیگر $\overset{\frown}{GD}$ و $\overset{\frown}{BE}$ یکدیگر را در داخل زاویه‌ای که دو کمان اوّل به‌وجود می‌آورند، مثلاً در Z ، قطع کنند. بعلاوه فرض کنید که هر چهار کمان کمتر از نیمدایره باشند. در این صورت

$$\mathrm{Crd}(۲\overset{\frown}{GA}):\mathrm{Crd}(۲\overset{\frown}{EA}) = [\mathrm{Crd}(۲\overset{\frown}{GD}):\mathrm{Cd}(۲\overset{\frown}{ZD})]$$
$$[\mathrm{Crd}(۲\overset{\frown}{ZB}):\mathrm{crd}(۲\overset{\frown}{BE})]$$

آن‌گونه که خواننده ممکن است گمان برده باشد، این تنها یکی از چند حالت قضیه است. بطلمیوس یکی دیگر را بیان می‌کند و نویسندگان دورهٔ اسلامی مجموعاً ۷۲ مورد از آن‌چه را که «شکل چهارضلعی کامل» نامیدند، پیدا کردند. از جهت مقاصد ما کافی است توجه کنیم که اغلب کامل کردن چند کمان مفروض و به دست آوردن شکلی که بتوان قضیه را در مورد آن به‌کار برد، نیاز به نبوغ دارد؛ در حالی که پیدا کردن یک مثلث بسیار ساده‌تر است.

علاوه بر قضیهٔ منلائوس، روشهای دیگری برای پیدا کردن کمانها یا زاویه‌هایی بر کره نیز سودمندیهایی داشته‌اند، خواه در آسان به دست‌آوردن تقریبهای معقول، خواه در مبرهن کردن نتایج اساسی برای دانشجوی مبتدی. یکی از این روشها صرفاً عبارت از ساختن مدلی مناسب از یک کره و سپس کندن دایره‌های عظیمه یا مدارهای مهم و نیز موقعیت ستارگان مهم (در مورد کرهٔ سماوی) یا مشخصات جغرافیایی اصلی (در مورد زمین) بر آن است. سپس برای حل مسأله‌های علم اُکر می‌توان صرفاً از ماده‌ای مانند موم رنگی یا گچ برای مشخص کردن کمانها یا زاویه‌های مورد نیاز استفاده کرد و پس از آن موارد مطلوب را اندازه‌گیری کرد.

صورتهای دیگری از شیوهٔ عِملی بالا که تدریجاً بر پیچیدگی آنها افزوده شده، توسط یک رشته از نویسندگان توصیف شده است. مثلاً، در سدهٔ نهم میلادی (سوم هجری) قسطی‌بن لوقا رساله‌ای به نام دربارهٔ کره‌ای با یک قاب نوشت و در سدهٔ دوازدهم میلادی (ششم هجری) عبدالرحمن خازنی اسباب خودکاری از این نوع را در رساله‌ای با عنوان دربارهٔ کره‌ای که خودبه‌خود حرکت می‌کند (مقالة فی اتخاذ کره تدور بذاتها بحرکة مساویة محرکة الفلک و معرفةالعمل بها ساکنه و متحرکه)، شرح داد (این رساله در لرچ (Lorch) توصیف شده است). نه تنها نویسندگان مسلمان و بلکه در دنیای باستان نیز از وجود چنین اسبابهایی با اطلاع بودند و رسالهٔ خازنی در زمرهٔ سنت مرسوم مربوط به ساختن مدلهایی با نیروی محرکه است که می‌توان رد آنها را تا مدل متحرک ارشمیدس از خورشید، ماه، و سیارگانی که حول زمین می‌چرخیدند، پی‌گرفت. صورت ساده‌ای از همین فکر، کرهٔ توپری بود که داربستی از حلقه‌های مدرج آن را احاطه کرده بودند که هریک با یکی از دایره‌های مهم متناظر بودند. چنین آلتی در مجسطی بطلمیوس توصیف و «اسطرلاب» نامیده شده است ولی ما آن را به عنوان ذات‌الحلق می‌شناسیم (لوحهٔ ۱). تصویری از یک ذات‌الحلق را از یک متن دستنویس متعلق به واتیکان را نشان می‌دهد.



لوحهٔ ۱ : تصویری از یک ذات‌الحلق برگزیده از متن دستنویس واتیکان با مشخصات .Borg ar 817. fol. 1r

بخش۲. دایره‌های مهم بر کرهٔ سماوی

چون در قسمت اعظم مطالب آتی به کاربردهای علم اکر در کرهٔ سماوی خواهیم پرداخت، در این‌جا خواننده را با برخی از مهمترین دایره‌ها و زاویه‌های روی این کره آشنا می‌کنیم و با دایره‌ای شروع می‌کنیم که بر خواننده از همه ملموستر است. در این شرح، ما از کلمهٔ «ستاره» در داخل علامت نقل قول برای نشان‌دادن یکی از ستارگان، خورشید، ماه، یا هر یک از پنج سیاره‌ای که با چشم غیرمسلح دیده می‌شوند، استفاده

می‌کنیم و این وقتی است که بحث به هر یک از این اجرام به یک اندازه قابل اطلاق باشد. وقتی شخص در دشت پهناوری به اطراف خود نگاه می‌کند، در اطراف خود خطی را می‌بیند که حد آسمان و زمین است. هر چیزی در آسمان در بالای این خط مرئی و زیر این خط نامرئی است و به همین دلیل یونانیان باستان آن را هوریزون (horizon)، یعنی دایرهٔ «محدود کننده» یا «تعیین کننده» نامیدند و اصطلاح «دایرهٔ افق» (horizon circle) از همین مشتق شده است. نقطه‌هایی از کرهٔ سماوی که درست بالای سر ما و زیر پای ما قرار دارند، قطبهای این دایره‌اند. نامهای کنونی zenith و nadir بترتیب از کلمه‌های عربی «سمت» الرأس (سرسو) نظیر «مقابل» قدم (پاسو) گرفته شده‌اند. دایره‌های عظیمه‌ای که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند، دایره‌های ارتفاع نامیده می‌شوند و یکی از این دایره‌ها که بر نقطه‌های شمال و جنوب افق می‌گذرند، نصف‌النهار محل (راصد) نامیده می‌شود. اگر خواننده «ستاره» و دایرهٔ ارتفاعی گذرنده بر آن را تصور کند، به آسانی ملاحظه خواهد کرد که کمان اقصر این دایره واقع بین «ستاره» و افق بر حسب درجه، اندازهٔ معقولی برای ارتفاع «ستاره» در بالای افق است، و نام دایرهٔ ارتفاع از همین جا نشأت می‌گیرد. همچنین ، زاویهٔ کوچکتر بین دایرهٔ ارتفاع «ستاره» و نصف‌النهار، مقدار زاویه‌ای را که برای دیدن «ستاره» باید از امتداد خط شمال ــ جنوب بچرخیم، برحسب درجه می‌دهد و این زاویه آزیموث (Azimuth) نامیده می‌شود که باز هم از کلمهٔ عربی‌السمت، «جهت» (ستاره) گرفته شده است.

یکی از جالب‌ترین پدیده‌های روزانه در آسمان، طلوع و غروب خورشید، ماه و ستارگان است. نقطهٔ ثابتی که به‌نظر می‌رسد اینها حول آن می‌چرخند یک قطب (سماوی) نامیده می‌شود و این قطب شمال یا جنوب است بسته به این که شخص در نیمکرهٔ شمالی یا جنوبی باشد، زیرا دو قطب موجودند که از این دو فقط یکی برای راصد معینی مرئی است (توجه کنید که ستارگانی که به‌قدر کافی به قطب مرئی نزدیک باشند، هرگز غروب نمی‌کنند). دایره‌ای که به وسیلهٔ یک «ستاره» هنگام چرخش آن به‌طور قطب در دوره‌ای به طول ۲۴ ساعت تشکیل می‌شود، مدار یومیهٔ آن نامیده می‌شود و آن قسمت از مدار یومیهٔ آن که مرئی است، به دلایل بدیهی، قوس مرئی آن نامیده می‌شود.

دایرهٔ عظیمه‌ای که بر کلیهٔ دایره‌های عظیمهٔ گذرنده بر قطبهای شمال و جنوب عمود است، استوای سماوی نامیده می‌شود. اگر این قطبها و دایره‌ها را در آسمان به نحوی مرئی تصور کنیم، در این صورت استوا را در حال چرخش خواهیم دید

که در هر ۲۴ ساعت یک‌بار به دور زمین می‌چرخد. امّا دایره‌های عظیمه‌ای را که قطبها را به‌هم وصل می‌کنند و بر استوا عمودند در حال چرخش در گرداگرد آسمان می‌بینیم که همواره از قطبهای ثابت می‌گذرند. هر «ستاره»‌ای بر یکی از دایره‌ها واقع است و کمان اقصر این دایره که بین ستاره و استوا قراردارد میل «ستاره» نامیده می‌شود و می‌توان آن را اندازهٔ ارتفاع «ستاره» نسبت به استوا تلقی کرد (که با نماد δ نشان داده می‌شود). همچنین، زاویهٔ بین دایرهٔ گذرنده بر «ستاره» و نصف‌النهار، زاویهٔ ساعتی «ستاره» نامیده می‌شود، و در زمان‌سنجی مفید است. مثلاً وقتی ستارهٔ مورد بحث خورشید باشد، زاویهٔ ساعتی اندازهٔ زمان تا ظهر را با استفاده از تبدیل $۱۵^\circ = ۱$ ساعت، می‌دهد.

سرانجام، اگر اندکی پیش از برآمدن آفتاب به نظارهٔ آسمان بپردازیم، درست قبل از آن که به علت روشن شدن هوا امکان دیدن ستاره‌ها میسر نباشد، طلوع ستاره‌ای را بر فراز افق شرقی خواهیم دید. به عبارت دیگر، خورشید نزدیک این ستاره است. پس از یک هفته یا بیشتر، درست پیش از برآمدن خورشید، باز هم طلوع ستاره‌ای را خواهیم دید، امّا این ستاره دیگر همان ستاره‌ای نیست که چند روز جلوتر طلوع کرده بود، لذا چنین به‌نظر می‌رسد که خورشید نسبت به ستارگان حرکت کرده و اینک نزدیک ستاره‌ای دیگر است. اگر در طول یک سال به نظاره بپردازیم، خواهیم دید که خورشید در گرداگرد آسمان با سرعتی در حدود یک درجه در روز کاملاً در حرکت بوده، و به نزدیک همان ستاره (اوّل) بازمی‌گردد. در واقع چنین به‌نظر می‌رسد که خورشید دایرهٔ عظیمه‌ای را بر گنبد آسمان می‌پیماید، و این دایره، دایرةالبروج نامیده می‌شود. اگر نوار باریکی، مثلاً به پهنای ۵° در هر طرف دایرةالبروج در نظر گیریم، در این صورت چنین به نظر می‌رسد، که علاوه بر خورشید، ماه، و پنج سیاره‌ای که با چشم غیرمسلح دیده می‌شوند نیز در داخل این نوار نسبت به ستارگان دیگر در حال حرکتند. وقتی ماه در دایرةالبروج است، امکان خسوف و کسوف وجود دارد، و یونانیان به همین دلیل چنین عنوانی را برگزیده‌اند.

چون دایرةالبروج و استوا دو دایرهٔ عظیمه‌اند، یکدیگر را در دو نقطهٔ متقاطر قطع می‌کنند و در این نقطه‌ها زاویه‌ای تقریباً به اندازهٔ $۲۳\frac{۱}{۲}^\circ$ درست می‌کنندکه زاویهٔ میل دایرةالبروج نامیده می‌شود و با حرف یونانی ε نموده می‌شود. نقطه‌های تلاقی، نقطه‌های اعتدالین بهاری و پاییزی نامیده می‌شوند (زیرا وقتی خورشید در این نقطه‌ها باشد، طول روز و شب برابر است). یکی از این نقطه‌ها، نقطهٔ مربوط به بهار، به عنوان نقطهٔ ۰° (مبدأ) طولهای روی دایرة البروج اختیار می‌شود، و این طول در جهت عکس عقربه‌های ساعت موقعی

که راصد از شمال به پایین به دایرة البروج می‌نگرد، اندازه گرفته می‌شود.
نوار باریکی که دایرةالبروج را احاطه می‌کند، منطقةالبروج نامیده می‌شود و به دوازده قسمت (برج)، هر یک به طول 30° تقسیم می‌شود. نامهای این علامتها، با شروع در نقطهٔ اعتدال بهاری و حرکت در جهت عکس عقربه‌های ساعت عبارتند از (در امتداد سطرها بخوانید):

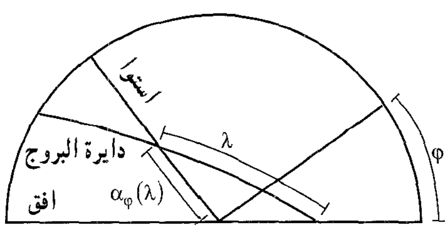
حمل (بره)	ثور (گاو)	جوزا (دو پیکر)
سرطان (خرچنگ)	اسد (شیر)	سنبله (خوشه)
میزان (ترازو)	عقرب (کژدم)	قوس (کمان)
جدی (بزغاله)	دلو (سطل)	حوت (ماهی)

مطابق این آرایه، نقطه‌ای که به اندازهٔ 90° (در جهت عکس عقربه‌های ساعت) از آغاز برج حمل فاصله دارد و بنابراین شمالی‌ترین نقطه در دایرةالبروج است، شروع علامت سرطان است. لذا دایره‌ای که این نقطه ضمن گردش خود در طول روز رسم می‌کند، مدار رأس‌السرطان نامیده می‌شود. به همین نحو جنوبی‌ترین نقطهٔ دایرةالبروج (شش علامت دورتر از آغاز برج سرطان) شروع جدی است، لذا از گردش آن مدار رأس‌الجدی به‌وجود می‌آید.
به‌نظر می‌رسد که یکی از پایدارترین اعتقادات نوع بشر، این بوده است که ترتیب قرارگرفتن خورشید، ماه و سیارات گوناگون در داخل منطقة البروج و نیز طرز قرارگرفتن منطقةالبروج نسبت به افق در زمان وقوع پیشامدی (تولد یک شخص، بنای یک شهر، آغاز یک لشگرکشی)، در نتیجهٔ این پیشامد تأثیر نیک یا بد دارد. این‌گونه بود که دسته‌ای از انگیزه‌ها برای مطالعهٔ حرکت اجرام آسمانی به وجود آمد که علاوه برانگیزه‌هایی از قبیل ساختن گاهنامه‌ها یا زمان‌سنجی که ماهیت عملی یا علمی داشتند، منافع شخصی را هم شامل می‌شدند.

بخش ۳. زمانهای طلوع علامتهای منطقة البروج

یک مسألهٔ نوعی علم اُکر که در آن، هم از استوای سماوی و هم دایرة البروج استفاده می‌شود، یافتن زمانهای طلوع کمانهای روی دایرةالبروج است. مثلاً شکل (ث)، کرهٔ سماوی را در زمانی که نقطه‌ای بر دایرةالبروج با طول λ بر افق شرقی یک محل در حال طلوع است، نشان می‌دهد. فرض کنید که خورشید در این نقطه باشد، در این صورت خورشید نیز در روزی از روزهای سال در حال طلوع است و از حرکت کند خورشید بر

دایرةالبروج که آن‌طور که گفتیم اندکی از 1° در روز کمتر است، صرفنظر کنید. در نتیجه، در غروب همین روز، طول خورشید همچنان λ خواهد بود، امّا خورشید اینک در افق غربی خواهد بود. چون دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را نصف می‌کنند، در هر موقع روز، به خصوص در موقع غروب، نصف دایرةالبروج بالای افق خواهد بود، و در همان هنگام که نقطهٔ قرارگاه خورشید در امتداد آسمان راه می‌پیماید، این نیمهٔ دایرةالبروج در طی روز طلوع کرده است. بنابراین در طول هر روز، 180° از دایرةالبروج بر فراز افق طلوع می‌کند. در نتیجه اگر به ازای هر کمان از دایرةالبروج بتوانیم بگوییم که زمان طلوع آن برفراز افق ما (که زمان طلوع آن، کمان نامیده می‌شود) چه‌قدر است، خواهیم توانست طول مدت روز را در آن روز حساب کنیم (البته به شرطی که موقعیت خورشید را در آن روز بدانیم). در جغرافیای باستان و دورهٔ میانه، طول بلندترین روز سال در محل مفروض، یکی از راههای سنجش عرض محل بود و طول روز در تعیین زمان به‌وسیلهٔ خورشید نیز واجد اهمیت بود. بنابراین تعجب‌آور نیست که کلیهٔ زیجهای اسلامی به این مسأله می‌پردازند.
یکی از طرق پرداختن زیجها به این مسأله چنین است :
برای محاسبهٔ زمان طلوع کمانی که از λ تا λ' امتداد دارد، کافی است که بتوانیم زمانهای کمانهای از 0 تا λ و از 0 تا λ' را محاسبه کنیم ؛ زیرا زمان طلوع کمان مفروض تفاضل این دو زمان طلوع خواهد بود. بنابراین می‌توانیم مسأله‌های زمانهای طلوع را در صورتی که بتوانیم زمان طلوع هرکمان مفروض آغازین از 0 تا λ را محاسبه کنیم، حل نماییم.
این مسأله، مسألهٔ آسانی نیست، زیرا دوران گنبد آسمان حول قطبین استوای سماوی است و نه قطبهای دایرةالبروج و در نتیجه زمانهای طلوع کمانهای برابر دایرةالبروج با هم مساوی نیستند. با این حال، به همین دلیل، زمانهای طلوع کمانهای برابر از استوای سماوی، مساوی‌اند و در نتیجه چون در یک شبانه‌روز 360° طلوع می‌کند، در هر ۴ دقیقه 1° از استوای سماوی طلوع می‌کند. بنابراین، اگر بخواهیم زمان طلوع کمانی از دایرةالبروج را



(ث)

از 0° تا λ° پیدا کنیم، تنها لازم است، حساب کنیم که چند درجهٔ استوا در همین مدت طلوع کرده است و عدد آن را در ۴ ضرب کنیم تا زمان طلوع را برحسب دقیقه به دست آوریم.

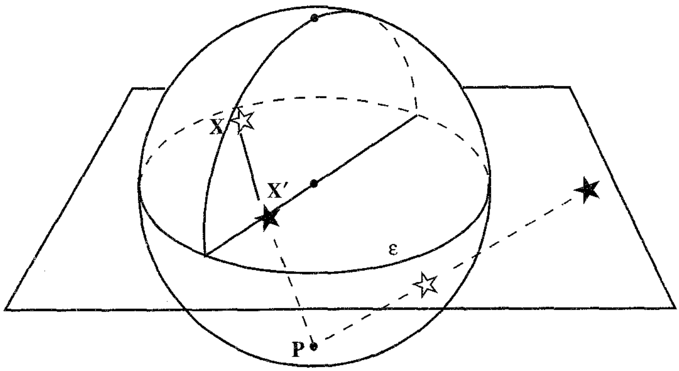
برای محلی واقع بر استوای زمین، استوای سماوی از سمت‌الرأس می‌گذرد، لذا با افق زاویهٔ قائمه می‌سازد. در این حالت، کمان استوا که همراه با کمان دایرةالبروج از 0° تا λ° طلوع کرده است، بعد قائم یا به‌طور خلاصه بعد کمان نامیده می‌شود و با $\alpha(\lambda)$ نشان داده می‌شود. وقتی که محلی بر استوا واقع نباشد، در این صورت استوا زاویهٔ حاده‌ای برابر $90^\circ - \Phi$ با افق می‌سازد که در آن Φ عرض جغرافیایی محل است. در این حالت کمانی از استوا که طلوع کرده است با $\alpha_\Phi(\lambda)$ نشان داده می‌شود و به دلایل واضح، بعد مایل λ نامیده می‌شود. در رساله‌های نجومی بابلیها، یونانیها و عالم اسلامی روشهایی برای محاسبهٔ $\alpha_\Phi(\lambda)$ یافت می‌شود و یکی از جذابترین جنبه‌های تاریخ طرحهای گوناگون برای محاسبهٔ آنها، دوام روشهای بسیار قدیمی به مدتی بیش از ۱۰۰۰ سال و برای مدتها پس از در دسترس قرارگرفتن رهیافتهای پیچیده‌تر است. از برخی از قدیمیترین روشها که از دنباله‌های حسابی استفاده می‌کردند، از این بیشتر چیزی نخواهیم گفت، امّا بعداً در همین فصل برخی از نتایج محاسبات کاملاً پیچیده را که مورد استفادهٔ منجمان عالم اسلامی بود، ملاحظه خواهیم کرد. البته، می‌توانیم به کمک مدلهای کروی که قبلاً توصیف کردیم، نتایجی به دست آوریم که بینش خوبی نسبت به مسأله از آن حاصل آید.

بخش ۴. تصویر گنجنگاشتی و اسطرلاب

ولی به گفتهٔ بیرونی برای این که چنین مدلهای کروی مفید فایده‌ای باشند، باید اندازه‌ای خیلی بزرگ داشته باشند. امّا خود همین عامل بزرگ بودن به معنی آن نیز هست که به ندرت می‌توان آنها را گیر آورد و حمل و نقل و کارکردن با آنها با اشکال توأم است. به قول بیرونی، به سبک بیان موجزش «بنابراین، مشکل آن با فایده‌اش عجین است» و خواه به دلایل آسانتر کردن کارها بوده است یا غیر آن، به نظر می‌رسد که هیپارخوس (Hipparchos) (ابرخس) منجم اهل رودس (Rhodes) همان کسی که اوّلین جدول وترها را بنابر آنچه می‌دانیم تألیف کرده است، در یکی از رسائل خود روشی برای نمایش سطح کره بر یک صفحه عرضه کرد که در آن دایره‌های واقع بر سطح کره به وسیلهٔ دایره‌های واقع بر صفحه نمایانده می‌شدند. این روش امروز تصویر گنجنگاشتی (Stereo graphic [Stereo = جسم، ناگنج، graphein= نگاشتن]) نامیده می‌شود، وگرچه رسالهٔ هیپارخوس دربارهٔ این موضوع از

دست رفته است، کتاب پلانیسفریوم (Planispherium) [تسطیح کره] بطلمیوس که حدود ۳۰۰ سال بعد از آن نوشته شده در دست است.

تصویر گنجنگاشتی را که هر دانشجویی که درس متغیرهای مختلط را گذرانیده با آن آشناست، می‌توان به صورت زیر توصیف کرد (شکل الف) :



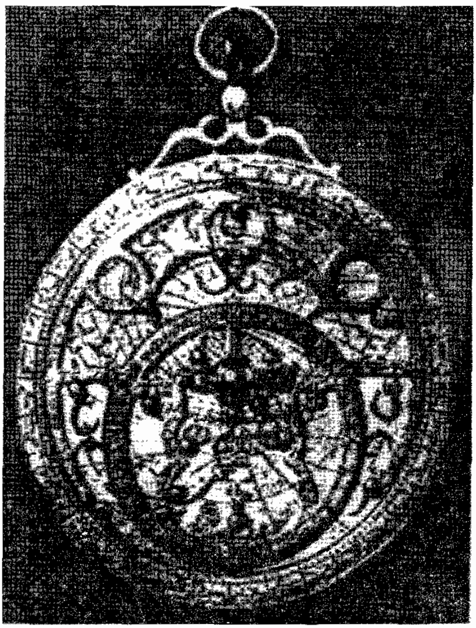
(الف)

دایرهٔ عظیمه‌ای، نظیر استوا را بر سطح کره انتخاب می‌کنیم و صفحهٔ π که شامل آن دایره است، صفحه‌ای است که سطح کره بر آن نگاشته خواهد شد. برای انجام این نگاشت، یکی از قطبهای دایرهٔ عظیمه، مثلاً قطب جنوب S را اختیار می‌کنیم و سپس به ازای هر نقطهٔ X، $X \neq P$ بر کره، تصویر X' بر صفحهٔ π را نقطهٔ تلاقی PX با π تعریف می‌کنیم. چون به ازای هر نقطهٔ X، $X \neq P$ خط PX، صفحهٔ π را فقط در یک نقطه تلاقی می‌کند، تصویر X' به ازای هر X، $X \neq P$ به‌طور یکتا تعریف می‌شود. اثر این نگاشت به ازای نقطه‌های گوناگون X، X_1 و ... بر سطح کره، در شکل (الف) نشان داده شده است.

سودمندی این تصویر در این حقیقت نهفته است که در آن، دایره‌های روی کره به خطهای مستقیم یا دایره‌هایی بر π نگاشته می‌شوند و دیگر این که زاویه‌ها در آن حفظ می‌شوند. از شکل (الف) آشکار است که نصف‌النهارها به خطهای مستقیمی گذرنده بر مرکز کره نگاشته می‌شوند و استوا نیز که بر π واقع است، برخود نگاشته می‌شود، همچنین این حقیقت از شکل آشکار می‌شود که نقطه‌های جنوب [یا زیر] استوا (مانند P_1) خارج استوا نگاشته می‌شوند، در حالی که نقطه‌های شمال [یا بالای] استوا در داخل آن نگاشته می‌شوند.

بر ما معلوم نیست که آیا هیپارخوس به فکر ساختن ابزاری بر مبنای تصویر گنجنگاشتی افتاده است یا خیر، و رسالهٔ بطلمیوس توصیفی از چنین ابزاری را ندارد. با این حال،

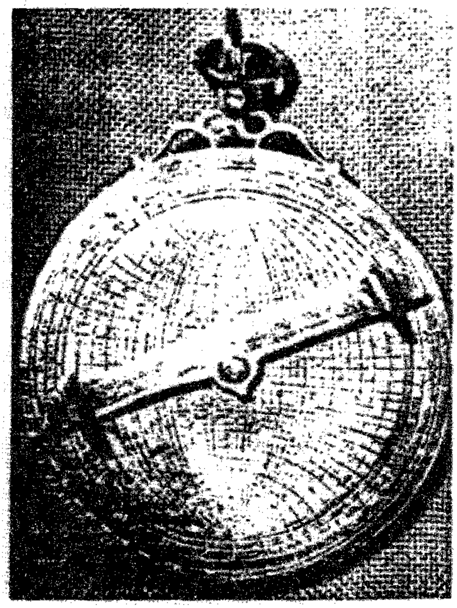
اوّلین رساله دربارهٔ چنین ابزاری که از وجود آن آگاهیم، به وسیلهٔ تئون اسکندرانی در اواخر سدهٔ چهارم پس از میلاد نوشته شده است، بنابراین در زمانی پیش از این تاریخ کسی تصویر گنجنگاشتی را نه تنها در مورد کره و ستارگان آن، بلکه در مورد دستگاه دایره‌های عظیمهٔ مهم آن به کار برده است. نتیجه عبارت از دو قرص بوده است که یکی نشان دهندهٔ کرهٔ ستاره‌ای و دیگری معرف دایره‌های عظیمهٔ گوناگون، به‌ویژه استوا و افق بوده است. وقتی که قرص حامل شبکه مختصات متشکل از دایره‌های عظیمه روی قرصی که ستارگان بر آن حک شده‌اند، دوران می‌کند، یک ساعت ارتفاع‌نما به دست می‌آید. یک چنین ابزاری در «برج بادها» (Tower of winds) جای داده شده است که در نیمهٔ سدهٔ اوّل میلادی در بازار آتن بنا شده و هنوز برپاست. با این حال، اگر قرصی شامل عقربه‌هایی باشد که موقعیتهای ستارگان را نشان دهد و بر یک چارچوب برنجین نصب شود، و روی صفحهٔ ثابتی که حامل دستگاههای مختصات است، دوران یابد، در این صورت یک اسطرلاب خواهیم داشت (نگاه کنید به لوحه‌های ۲ و ۳).



لوحهٔ ۲ : یک اسطرلاب مغربی (غربی) مربوط به سدهٔ هفدهم از نوع مسطح استاندهٔ آن. لوحهٔ مختصات برای موضعها، از زیر نقشهٔ ستارگان رویی کاملاً قابل رؤیت است.

اولین اشاره به یک اسطرلاب که به روشنی به آن چه که از این کلمه می‌فهمیم، اشاره دارد، در نامه‌ای از سونه‌سیوس (Synesios) اسقف پتولماییس (Ptolemais) به معلمش هوپاتیا (Hypatia)، اوّلین بانوی ریاضیدانی است که از نامش آگاهی داریم. پدر هوپاتیا، تئون اسکندرانی، ویرایش مهمی از اصول اقلیدس را به‌عمل آورد و دربارهٔ اسطرلاب مسطح نیز آثاری دارد. در واقع، چنین به‌نظر می‌رسد که او اسطرلاب سونه سیوس را، با یک آلت نشانه روی تجهیز کرده، تا استفاده کننده از آن بتواند ارتفاع ستاره‌ای یا خورشید را بر فراز افق اندازه بگیرد و این مجموعهٔ اصلی

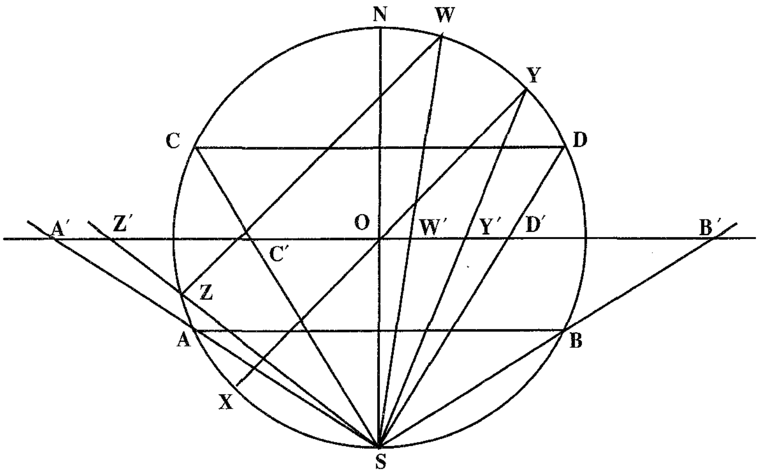
اطلاعاتی است که به خود دستگاه داده می‌شود. اسقف سِوِروس سِبوخت رسالهٔ تئون را به زبان سریانی برگرداند.



لوحهٔ ۳: یک صفحهٔ جامع در پشت اسطرلابی که در لوحهٔ ۲ نشان داده شده است. شبکهٔ آن بر اساس تصویر بر مبنای عرض استواست و بنابراین از عرض جغرافیایی زمینی مستقل است. شبکه با عضادهٔ (قطعهٔ مستطیل شکلی که پشت اسطرلاب سوار شده و اروپاییان کلمهٔ آلیداد alidad را از آن گرفته‌اند) معمولی به صورتی که می‌بینیم، غیرقابل استفاده است. آن‌گونه که در اسپانیای اسلامی سدهٔ یازدهم میلادی [پنجم هجری] کشف کردند، شبکه را باید همراه با عضاده‌ای به کار برند که یک روان خوان عمودی متحرک با آن جفت شده باشد. در این صورت امکان تبدیل از یک دستگاه مختصات متعامد به دستگاهی دیگر به‌وجود می‌آید.

و هموست که تا آن‌جا که می‌دانیم برای اوّلین بار ارقام هندسی را در خارج هند در آثار خود ذکر می‌کند و مؤلفین عرب [عربی‌نویس] از طریق زبان سریانی با این ارقام آشنا شده‌اند.

چون تصویر گنجنگاشتی کره (به غیر از قطب جنوب) را بر تمام صفحه تصویر می‌کند، لازم است که اندازهٔ تصویر محدود شود و این کار تنها با نگاشتن بخشی از کره (و دایره‌های عظیمهٔ آن) در بالای مدار رأس الجدی که عرض آن تقریباً $-23\frac{1}{2}^{\circ}$ است، انجام می‌شود. بنابراین تمام دایرةالبروج، همراه استوا، مدار رأس‌السرطان، افق (یا بخشی از آن در بالای مدار رأس الجدی) و دایره‌های [نقطه‌های] هم ارتفاع در بالای افق و موازی با آن (که هنوز با نام عربیشان، به المقنطرها (مقنطرات چیست؟ دایره‌ها‌اند، موازی، مرافق را. اگر بالای افق باشند سوی سمت الرأس مقنطرات ارتفاع خوانند و اگر زیر افق باشد سوی سمت الرجل به برابری پای مقنطرات انحطاط خوانند) [مقنطرات] معروفند)، در صفحهٔ



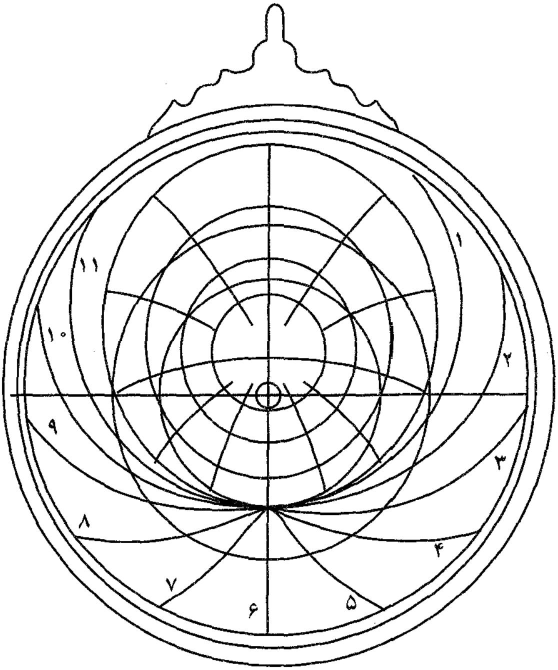
(ب)

نمایش داده می‌شوند. شکل (ب) تصویر دایره‌های مختصات حاصل در مقطع را نشان می‌دهد که در آن حروف بزرگ نمایندهٔ نقطه‌های روی کره و حروف پریم‌دار تصویرهای آن‌ها بر اثر تصویرهای گنجنگاشتی است. خطهای پر، استوا و دایره‌های موازی آن را نشان می‌دهند، بنابراین AB مقطع مدار رأس‌الجدی است، در حالی که CD مقطع مدار رأس‌السرطان است. XY مقطع افق محل و خط ZW که موازی آن است، مقطع یک مقنطر است. توجه کنید که چون در حالت نشان داده شده، کنارهٔ جنوبی افق زیر مدار رأس‌الجدی است، بر روی صفحه تصویر نمی‌شود، به‌طوری که مثلاً X، دارای تصویری نیست.

شکل (پ) تصویرهای این نگاشت را برای عرض 30° نشان می‌دهد. بالای شکل، جنوب را نشان می‌دهد. دایرهٔ بیرونی مدار رأس‌الجدی را نشان می‌دهد، دایرهٔ کوچکتر بعد از آن و هم مرکز با آن، معرف استواست و دایرهٔ درونی در بین سه دایرهٔ هم‌مرکز، مدار رأس‌السرطان است. مرکز این دایره‌ها قطب شمال سماوی است و این قطب با یک دایرهٔ کوچک نشان داده شده است.

دایرهٔ جنوبی قطب، سمت‌الرأس را برای عرض 30° نشان می‌دهد و دایره‌هایی که دور آن گرد آمده‌اند، مقنطرات به فاصلهٔ 20° اند که تا خود افق امتداد می‌یابند (هر چیزی خارج دایرهٔ افق در روی کرهٔ زیر آن قرار دارد و بنابراین نامرئی است). به‌طوری که گفتیم منتهاالیه جنوبی افق زیر مدار رأس‌الجدی است و بنابراین افق (و برخی دایره‌های زیرین موازی با آن [مقنطرات انحطاطی]) با دایرهٔ کاملی نشان داده نمی‌شود. منحنیهایی (در واقع

کمانهای مستدیری) که سمت الرأس را به افق وصل می‌کنند، تصویرهای دایره‌های ارتفاعند و روی افق فاصله‌هایی به طول °۱۰ جدا می‌کنند که در جهت عقربه‌های ساعت از قطب شمال که °۰ است، به پیش می‌روند.



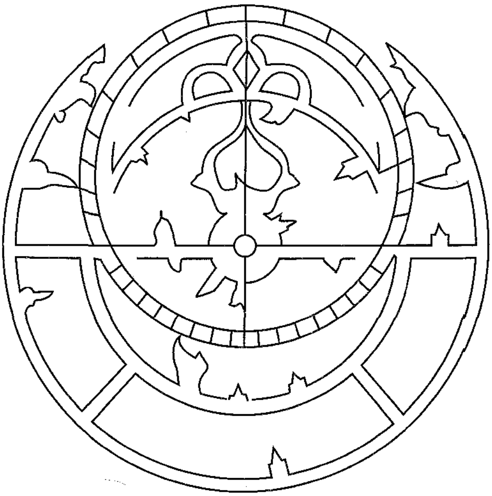
(پ)

بر روی لوحه‌ای که هم‌اکنون توصیف کردیم، نقشهٔ مستدیر ستارگان و هم‌قطر با لوحهٔ زیرین قرار دارد که برخی از ستارگان مهم واقع در بالای مدار رأس‌الجدی و نیز دایرهٔ منطقةالبروج را نشان می‌دهد. تنها نوککهایی که نشانگر موقعیتهای ستارگانند و یک حایل منبت‌کاری شده بر روی نقشهٔ ستارگان وجود دارند و باقی صفحهٔ برنجین بریده شده است تا استفاده کننده از آن بتواند، دایره‌های صفحهٔ زیرین را ببیند. میله‌ای [نامش قطب] از مرکز نقشهٔ ستارگان و صفحهٔ زیرین گذشته است و چرخش نقشهٔ ستارگان برگرد میله، مانند چرخش گنبد آسمان حول قطب شمال است. شکل (ت) نقشهٔ ستارگان را نشان می‌دهد که اسطرلابیهای لاتین زبان آن را رِتِه (rete) (= «تور») نامیدند و این اصطلاح نسبت به معادلهای یونانی و عربی آن که به معنی «عنکبوت» است، جلوهٔ کمتری دارد.

طرز استفاده از اسطرلاب چنین است:

آن را از ریسمانی که با دست گرفته می‌شود، آویزان می‌کنند و بنابراین به طور عمودی آویزان است. عضادهٔ پشت آن حول میلهٔ مرکزی [قطب] می‌چرخد و می‌توانیم در امتداد آن به ستارهٔ خاصی نشانه‌گیری کنیم و ارتفاع ستاره را از روی مقیاس درجات لبه بخوانیم. فرض کنید که دریابیم ستارهٔ اِپیکا (Spica) [سماک اعزل] °۱۶ بالای افق در جنوب غرب است. نقشهٔ ستارگان را بچرخانید تا وقتی که عقربه‌ای سماک اعزل را نشان می‌دهد در

جنوب غربی °۱۶ بالای افق باشد (در این صورت، عقربه در هشتمین مقنطر لوحهٔ مختصات قرارمی‌گیرد). حالا اسطرلاب کلیهٔ ستارگان را در موضعهای درستشان نشان می‌دهد و ارتفاع و سمت [آزیموت] هر ستاره بر صفحه را می‌دهد. به‌ویژه نشان می‌دهد که در این لحظه کدام یک از ستارگان در حال طلوع یا غروبند (یعنی نوککهای آنها بر افق شرقی یا غربی قرار دارد) و کدام یک زیر افق و در نتیجه نامرئی‌اند.



(ت)

قدیمی‌ترین رسالهٔ موجود به عربی دربارهٔ استفاده از اسطرلاب، رساله‌ای است که به توسط علی‌بن‌عیسی نوشته شده است و او دانشمندی است که در حدود ۸۳۰ میلادی [۲۰۹ هجری] رونق یافت و در زمان مأمون در پیمایش نصف‌النهار برای تعیین محیط زمین شرکت داشت. علاوه بر این، او در رصدهای نجومی در بغداد و دمشق شرکت جست و لذا می‌بایست تجربهٔ کافی برای نوشتن رساله‌ای را داشته باشد که به انواع متعدد موارد استفاده از اسطرلاب ــ از جمله کاربردهای زیر ــ پرداخته است:

۱. تعیین طول خورشید در دایرةالبروج.
۲. سمت و ارتفاع هر ستاره.
۳. تعیین طالع [برآینده]، غارب [فرو رونده]، منازل و سایر موارد استفاده در احکام نجوم (برای ساختن زایچه).
۴. طول روز یا شب، طول ساعتهای نابرابر.
۵. وقت روز برحسب ساعتهای برابر یا نابرابر.

ما به آخرین مورد خواهیم پرداخت.

بخش ۵. تعیین وقت به وسیلهٔ خورشید و ستارگان

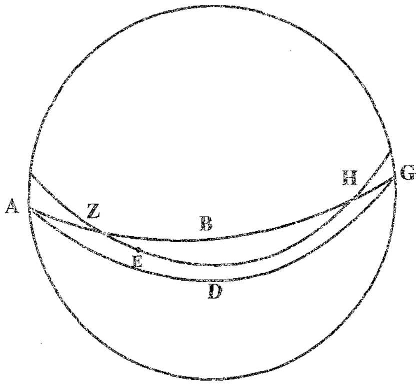
برای درک دستورهای علی‌بن عیسی برای تعیین وقت در شب یا روز باید دو طریقهٔ ثبت زمان در دوران قدیم و میانه را بدانیم. در اوّلین طریقه، که جنبهٔ عام دارد، هر شب و هر

روز به دوازده جزء برابر تقسیم می‌شد که هر جزء یک ساعت فصلی (یا «زمانی») بود. روشن است که ساعتهای روزانه در تابستان بلندتر و در زمستان کوتاهتر می‌شوند. تنها در استوا که در آن تمام شبها و روزها برابرند، ساعتها طی فصلها، تغییر نمی‌کنند. در جاهای دیگر، تنها در زمانهای اعتدالهای بهاری و پاییزی، وقتی که خورشید بر فراز استواست، ساعتهای روزانه با ساعتهای شبانه برابرند. بنابراین، در طریقهٔ دوم که در آن هر شبانه‌روز به ۲۴ ساعت از لحاظ طول برابر تقسیم می‌شود، به ساعتها، ساعتهای اعتدالی اطلاق می‌شود. دربارهٔ اینها بیش از این چیزی نمی‌گوییم، گرچه می‌توان آنها را به کمک اسطرلاب نیز به آسانی تعیین کرد.

اما در مورد مسألهٔ تعیین ساعتهای فصلی، شکل (الف) کرهٔ سماوی را با افق $\widehat{ABG}$ نشان می‌دهد. در روز معینی از سال، خورشید دایره‌ای به موازات استوای $\widehat{ADG}$ رسم می‌کند. فرض کنید که آن جزء از مدار روزانهٔ خورشید که در زیر افق است، $\widehat{ZEH}$ باشد، لذا این کمان مسیر خورشید در هنگام شب است ؛ اگر $\widehat{ZE} = \frac{1}{12}\widehat{ZEH}$. در این صورت کمانی که خورشید در $\frac{1}{12}$ شب می‌پیماید، $\widehat{ZE}$ است. نقطهٔ نظیر E در سایر کمانها، یکی به ازای هر شب سال، منحنی پیوسته‌ای بر کره تشکیل می‌دهد و برخی از منجمان مسلمان دریافتند که این منحنی دایره نیست. بنابراین تصویر آن در اسطرلاب، دایره نخواهد بود. ولی، اگر کمانهای شب را تنها موقعی که خورشید بر مدار رأس‌الجدی، مدار رأس‌السرطان یا استواست، اختیار کنیم در این صورت برای هر ساعت تنها سه نقطه خواهیم داشت. تصویرهای این سه نقطه در اسطرلاب، کمانی از دایرهٔ منحصر به فردی را که آنها را به هم وصل می‌کند، معین می‌کنند و همین کمان است که با ۱ نشانه‌گذاری شده است و کمانهای متوالی بعدی با ۲، ...، ۱۱نشانه‌گذاری شده‌اند، و افق شرقی با ۱۲ نشانه‌گذاری شده است، زیرا وقتی خورشید در آن‌جا باشد، نشانهٔ پایان دوازدهمین ساعت شب، یعنی سپیده‌دم است. البته این کمانهای مستدیر تنها تقریبهایی از منحنیهایی واقعی‌اند، امّا در اغلب کاربردهای ریاضیات نیاز به تقریب داریم، و کمان مستدیر تقریب معقولی است. خطهای ساعتهای شبانه به این طریق در اسطرلاب رسم می‌شوند.

حال، اگر بخواهیم بگوییم چه موقع از شب است، می‌توانیم به روش زیر اقدام کنیم. یا از روی جدولها یا از روی مقیاسی که در پشت اسطرلاب است، محل خورشید در روز مورد بحث را در منطقة‌البروج پیدا می‌کنیم و آن نقطه را روی دایرهٔ منطقة‌البروج که در نقشهٔ

ستارگان دیده می‌شود، علامت می‌زنیم. با این کار، خورشید نسبت به ستارگان در آن روز در موقعیت درست قرار می‌گیرد. حال یکی از ۳۰ ستاره یا بیشتر را که در نقشهٔ ستارگان است، در آسمان پیدا کنید و ارتفاع آن را بگیرید و توجه کنید که آیا این ستاره در شرق یا غرب نصف‌النهار است. سپس نقشهٔ ستارگان اسطرلاب را طوری تنظیم کنید که نوکک متناظر با ستارهٔ رصد شده در دایرهٔ ارتفاع آن و در مشرق یا مغرب نصف‌النهار، بسته به مورد، باشد. حال نوککهای ستاره‌ها نسبت به خط افق در موضع صحیحند و لذا خورشید که در بین ستارگان در موضع صحیح قرار داده شده است، در محلی است که معرف موقعیت دقیق آن در آسمان (و البته در زیر افق) است. اینک، تنها کاری که لازم است انجام دهیم آن است که ببینیم خورشید در (یا نزدیک) به کدام خط ساعت است و عدد روی این خط به ما می‌گوید که چند ساعت از شب گذشته است.



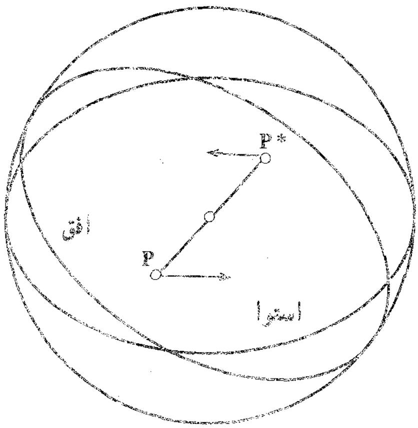
(الف)

اینک می‌توانیم روش علی [ابن عیسای اسطرلابی] را برای تعیین وقت روز نقل کنیم:

نظیرالسمت [یا سمت القدم] درجه‌ای (از دایرةالبروج) است که دقیقاً مقابل به موضع خورشید قرار دارد، هفت علامت بعد از علامتی که خورشید در آن واقع است (علی شمارش از «۱» را از علامت خورشید آغاز می‌کند) و شخص به‌طور پیوسته پیش می‌رود تا این که سرانجام به هفتمین علامت از نقطهٔ شروعش برسد، که موضع نظیرالسمت است. نقطهٔ نظیر خورشید را در ارتفاعی که یافته‌ای قرار ده، سپس به نظیرالسمت (این نقطه) نگاه کن که بر (یا نزدیک) یکی از خطهای ساعتها می‌افتد. باید آن را از نقطهٔ شروع شمارش به حساب آوری، و نقطه‌ای که به آن می‌رسی، نقطه‌ای که نظیرالسمت بر آن می‌افتد، مقدار ساعتها و اجزای ساعت است که سپری شده‌اند.

برای این که روش کار علی را روشن کنیم، در شکل (ب) استوا و افق را رسم کرده‌ایم و خورشید در نقطهٔ مفروض P بر دایرةالبروج گرفته شده است. خط مستقیمی گذرنده بر مرکز کره و P در نظر می‌گیریم، چون P و مرکز کره بر صفحهٔ دایرةالبروج واقعند، نقطهٔ P^*، محل تلاقی خط واصل بین P و مرکز کره با کره، بر دایرةالبروج قرار دارد و نظیرالسمت

است. اینک فرض کنید که P در جهت نشان داده شده، به موازات استوا بچرخد. علاوه بر این، چون یک دایرهٔ عظیمه تمام قطرهای گذرنده بر هر یک از نقطه‌هایش را دربر دارد، P دقیقاً موقعی بر یک دایرهٔ عظیمهٔ مفروض قرار می‌گیرد که P^* قرار گرفته باشد، نتیجه می‌گیریم که P دقیقاً موقعی به زیر افق فرو خواهد رفت که P^* بر بالای افق طلوع کند و خورشید، P، هر کسری از مدار روزانهٔ خود را، که به موازات استوا می‌پیماید تا به افق برسد، نظیرالسمت آن، P^*، نیز همان کسر از مدار یومیهٔ خود را برای رسیدن به افق می‌پیماید. بنابراین اگر P^* روی خط ساعت n بیفتد، که نشانگر آن است که از شب n − ۱۲ ساعت باقی است، آن‌گاه برای p، n − ۱۲ ساعت از روز باقی است. چون اسطرلاب یک کامپیوتر قیاسی است که الگوهای دقیقی از کمانهای مستدیر و زاویه‌ها را در گنبد آسمان به دست می‌دهد، می‌توان برای حل هر مسألهٔ نجوم کروی از آن استفاده کرد. ولی، دقت آن لزوماً با توجه به مهارت در ساخت آن محدود است، و بهترین راه حلها را برای کلیهٔ مسأله‌ها به ما نمی‌دهد.



(ب)

در واقع هیچ روش واحدی بهترین راه حلها را به کلیهٔ مسأله‌ها نمی‌دهد (و بخشی از جذابیت نجوم کروی در همین است)، اما مثلثات کروی با قواعد نیرومند و اغلب توأم با سادگی بیان، یکی از منابع چندین راه حل دلفریب بود و اینک به بسط این موضوع در عالم اسلامی می‌پردازیم.

بخش ۶. مثلثات کروی در عالم اسلامی

سه منجّمند که دوران زندگی آنها دوره‌ای را که قسمت اعظم مثلثات کروی در آن به وجود آمد، می‌پوشانند و خود آنها عامل مهمترین نتایج بوده‌اند. اوّلین اینها حبش حاسب است که با الکندی، دانشمند بزرگ عرب، معاصر و از منجمانی بود که در کنف حمایت مأمون خلیفه فعالیت داشت. دومی، ابوالوفای بوزجانی منجم، یکی از زیوران دربار آل‌بویه در نیمه و اواخر سدهٔ دهم میلادی [چهارم هجری] بود که قبلاً زندگی و مساهمتهای او را در

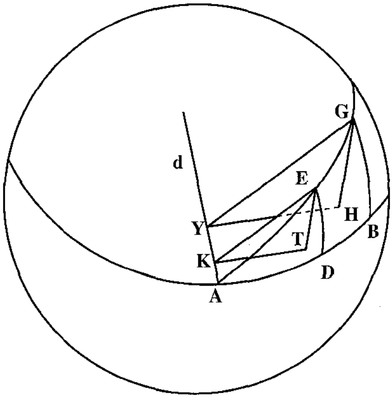
هندسه و مثلثات نقل کرده‌ایم. سومی شاهزاده ابونصر منصوربن عراق بود که در اواخر سدهٔ دهم میلادی [چهارم هجری] استاد و حامی بیرونی بود. بیرونی در کتاب مقالید علم الهیئهٔ خود شرح هیجان‌انگیزی از مجادلات، سوء تفاهمات و اتهاماتی را که پیرامون نزاع بر سر حق تقدم اکتشاف برخی قضایای مهم در مثلثات کروی جریان داشت، و به ویژه در ارتباط با دو منجم اخیر می‌دهد.

بیرونی ضمن شرح خود، مطالبی از سر بی‌مهری در خصوص ابوالوفا بر زبان رانده است، ولی علی‌رغم آن که بیرونی شخصیت ابوالوفا را پایین می‌آورد، ما براهین دو قضیهٔ عمده را به صورتی که ابوالوفا در کتاب نجومی‌اش زیج‌المجسطی عرضه کرده است، دنبال می کنیم.

نخستین قضیه از این دو چنین است : «قاعدهٔ چهار کمیت» (نامی که بعدها در غرب لاتین زبان به آن داده شد) :

اگر ABG و ADE دو مثلث کروی با زاویه‌های قائمه به ترتیب در B، D و زاویهٔ حادهٔ مشترکی در A باشند، آن‌گاه $\sin(\widehat{BG}):\sin(\widehat{GA}) = \sin(\widehat{DE}):\sin(\widehat{EA})$ (شکل الف).

برهان ابوالوفا چنین است : چون کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{AG}$ دایره‌های عظیمه‌اند، صفحه‌هایی که شامل این کمانها هستند، مرکز کره را در بر دارند و لذا یکدیگر را در قطری مانند d از کره قطع می‌کنند. از G و E عمودهای مستقیم الخط GH و ET را در داخل کره بر صفحهٔ شامل $\widehat{AB}$ وارد کنید و در صفحهٔ شامل AG عمودهای مستقیم‌الخط GY و EK را بر قطر d وارد کنید. در این صورت به آسانی نتیجه می‌شود که YH و KT نیز بر d عمودند. لذا زاویه‌های GYH و EKT برابرند، و در نتیجه $\Delta(GHY)$ با $\Delta(ETK)$ متشابه است. بنابراین $TE:EK = AG:GY$ ؛ اما $EK = \sin(\widehat{EA})$ و $GY = \sin(\widehat{GA})$ در حالی که $TE = \sin(\widehat{ED})$ ؛ $HG = \sin(\widehat{BG})$ و با قراردادن اینها در تناسب پیشین، حکم قضیه به دست می‌آید. یکی از کاربردهای مهم قاعدهٔ چهار کمیت را می‌توان در استخراج قانون جیبهای مثلثات کروی به وسیلهٔ ابوالوفا یافت. کشف این قضیه، مسأله‌های بسیاری را در رابطه با کمانهای کروی ساده کرد و مبیّن پیدایش کامل مثلثات کروی بود، از آن‌رو که اوّلین قضیه‌ای بود که کمانهای کروی را به‌کار می‌گرفت. قضیه‌های دیگری هم بودند که از مثلثهای کروی استفاده می‌کردند، امّا سروکار آنها با ضلعها بود.

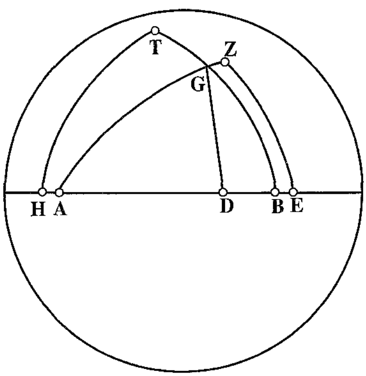


(الف)

با توجه به اهمیت این قضیه، تعجب‌آور نیست که چندین نویسنده مدعی کشف آن شده باشند. کشفیات همزمان چیزی نیست که در ریاضیات نامعمول باشد، زیرا اغلب مسأله‌ها و روشهای مرسوم را همه فعالین این رشته می‌دانند و قانون جیبهای کروی ظاهراً مورد دیگر از این کشفیات همزمان است. با این حال به نظر می‌رسد که ابوالوفا اوّلین کسی بود که در زیج المجسطی خود به انتشار آن پرداخت و آن را به کارگرفت، بنابراین قسمت اعظم امتیاز این دستاورد بزرگ از آن اوست.

قانون جیبها برای مثلثهای کروی بیان می‌کند که : اگر ABG مثلثی کروی به ضلعهای a، b و g مقابل به زاویه‌های A، B و G باشد، آن‌گاه :

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)}=\frac{\sin(b)}{\sin(B)}=\frac{\sin(g)}{\sin(G)}$$



(ب)

برهان ابوالوفا چنین است : در شکل (ب) مثلث کروی (ABG) را معلوم بگیرید و فرض کنید که GD کمانی از دایرهٔ عظیمه‌ای عمود بر $\overset{\frown}{AB}$ باشد. $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AG}$ را تا حد $\overset{\frown}{AE}$ و $\overset{\frown}{AZ}$ که هر دو ربع دایره شوند، امتداد دهید، و BA را تا حد BH و $\overset{\frown}{BG}$ را تا حد $\overset{\frown}{BT}$ که هر دو ربع دایره‌اند، امتداد دهید. در این صورت A قطبی برای دایرهٔ عظیمهٔ $\overset{\frown}{EZ}$ و B قطبی برای دایرهٔ عظیمهٔ $\overset{\frown}{TH}$ است. در نتیجه، بنا بر قسمت دوم حقیقت اساسی ۲ در بخش ۱، زاویه‌های E و H هر دو قائمه‌اند و مثلثهای ADG و AEZ واقع در سمت راست، مثلثهای کروی قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ مشترکی در B هستند. لذا بنابر قاعدهٔ چهار کمیت :

$$\frac{\sin(\overset{\frown}{DG})}{\sin(b)}=\frac{\sin(\overset{\frown}{ZE})}{\sin(\overset{\frown}{ZA})}\quad,\quad\frac{\sin(\overset{\frown}{DG})}{\sin(a)}=\frac{\sin(\overset{\frown}{TH})}{\sin(\overset{\frown}{TB})}$$

ولی، همان‌طور که پیشتر خاطرنشان کردیم، A و B بترتیب قطبهای $\overset{\frown}{ZE}$ و $\overset{\frown}{TH}$ هستند و در نتیجه بنابر تعریف زاویه‌های کروی، $ZE=\hat{A}$ و $TH=\hat{B}$ و لذا می‌توانیم تساویهای بالا را به صورت :

$$\frac{\sin(\overset{\frown}{DG})}{\sin(b)}=\frac{\sin(\hat{A})}{R}\quad,\quad\frac{\sin(\overset{\frown}{DG})}{\sin(a)}=\frac{\sin(\hat{B})}{R}$$

بنویسیم. با حذف $\sin(\widehat{DG})$ از این دو معادله، به دست آوردیم:

$$\sin(a)/\sin(\hat{A}) = \sin(b)/\sin(\hat{B})$$

برهان تساوی باقی‌مانده کاملاً شبیه همین است و بنابراین قضیه ثابت شده است.

بخش ۷. جدولهایی برای نجوم کروی

در فصل مربوط به مثلثات متذکر شدیم که جدولهای کمکی تابعهای مثلثاتی به دست منجمان از قرنهای نهم تا چهاردهم میلادی [هشتم هجری] محاسبه شدند و خاطرنشان کردیم که یکی از موارد استفادهٔ عمدهٔ چنین جدولهایی کمک به محاسبهٔ جدولهایی برای تابعهای مهم نجوم کروی بود. هدف ما در این بخش ارائهٔ جزئیات جدولهای اخیر است، زیرا این جدولها یکی از دستاوردهای گرانقدر روشهای عددی در ریاضیات سده‌های میانه بود.

تاریخچهٔ جدولهای بعدهای مایل مثال خوبی در این زمینه بود که پیشتر در این فصل تعریف شد و ما با جدولهای ابن‌یونس آغاز می‌کنیم. این منجم مصری در کتاب زیج حاکمی خود این بعدها را به ازای هر درجهٔ دایرةالبروج و به ازای هر درجهٔ عرض جغرافیایی از 1° تا 48° با دقت دقیقهٔ کمان، جدولبندی کرده است. این کار به معنی محاسبهٔ تقریباً ۱۸۰۰۰ درایه است. کینگ، که این جدولها را بررسی کرده است، گزارش می‌دهد که برای عرض جغرافیایی قاهره (30°) تنها در یکی از نخستین ۹۰ درایه خطایی به اندازهٔ ۱ دقیقه وجود دارد. با این حال، کینگ مشاهده کرد که در کل جدول در حدود ثلث درایه‌ها خطایی به اندازهٔ ۱ دقیقه داشتند و در چند مورد خاص، مانند عرض جغرافیایی 40°، نسبت درایه‌هایی که ۱ دقیقه خطا داشتند، به‌دو ثلث افزایش یافت. موارد نادری هم موجودند که خطایی به اندازهٔ ۲ یا ۳ دقیقه دارند.

از اطلاعات بالا دو حقیقت آشکار می‌شود. ابن‌یونس اثری برجسته در ریاضیات عدد تصنیف کرده است، و آن‌گونه که از تعداد نسبتاً فراوان خطاهای کم اندازه ولی قابل ملاحظه آشکار می‌شود، وی از برخی روشهای ریاضی برای درونیابی مقادیر بین مقدارهایی که به دقت محاسبه شده‌اند، استفاده کرده است. با این حال، به‌طوری که از تحلیل خطاها به‌وسیلهٔ کینگ نمایان می‌شود، روش درونیابی خطی نبوده است، لذا جدولهای ابن یونس گواه این حقیقتند که در دنیای اسلام سدهٔ دهم میلادی [سدهٔ سوم هجری] تلاشهای محاسباتی پردامنه‌ای، با استفاده از فرمولها و روشهای ریاضی نسبتاً پیچیده، صورت گرفته است (در ارتباط با این سؤال که چرا ابن یونس در عرض جغرافیایی 48° متوقف

شده است، کینگ حدس می‌زند که شاید او همان احساس را داشته است که ابونصر ابراز می‌کند و او [ابن یونس] آن را در جدولهای کمکی چنین بیان می‌کند، «آن (جدول) را برای عرضهای از °۱ تا °۴۵ ساخته‌ام از آن‌رو که در بین ساکنان نقطه‌هایی که عرضهای جغرافیایی آنها بزرگتر از این است، به ندرت می‌توان کسی یافت که به مطالعهٔ این چیزها بپردازد یا حتی در این باره بیندیشد»).

ظاهراً با گذشت قرنها، مردم عرضهای شمالی بیشتر به چنین چیزهایی علاقه‌مند شده‌اند، زیرا نصیرالدین طوسی در کتاب زیج‌ایلخانی خود، بُعدهای مایل را به ازای هر درجهٔ دایرةالبروج، ولی این بار برای کلیهٔ عرضهای جغرافیایی از °۱ تا °۵۳ محاسبه می‌کند و این محاسبه را نه با دقت دقیقه و بلکه با دقت ثانیه صورت می‌دهد. سپس در حدود یک‌و نیم سدهٔ بعد، کاشانی بُعدهای مایل را دوباره با دقت ثانیه، تا عرض جغرافیایی °۷۵ محاسبه کرد، و حامی او، الغ‌بیگ این بُعدها را تا عرض جغرافیایی °۵۰ ولی با دقت ثالثه، محاسبه کرد. کار کاشانی و الغ‌بیگ، نمونهٔ کیفیت عالیترین دستاوردهای مسلمین در تهیهٔ جدولهای علمی دقیق و گسترده برای تابعهایی است که در نجوم کروی پیش می‌آیند.

دومین مثال ما از جدولهای تابعهای مربوط به نجوم کروی جدولهای نگهداری حساب اوقات هستند. ابن یونس اوّلین مجموعهٔ گسترده از چنین جدولهایی را برای عرض جغرافیایی قاهره، به منظور تعیین وقت به کمک خورشید و ستارگان برای استفاده‌های رسمی و نجومی و نیز تنظیم اوقات نمازهای پنجگانه روزانهٔ مسلمین تهیه کرده است. این اوقات، برحسب وضع خورشید نسبت به افق تعریف می‌شدند، بنابراین تصنیف چنین جدولهایی ممارست در علم اکر است که در نجوم، یعنی نجوم کروی به کار بسته می‌شود. این نگهداری حساب اوقات (به‌عربی علم المیقات) موجب پیدایش گروهی از منجمان شد که به مساجد بزرگ وابسته بودند و وظیفهٔ آنها این بود که موقع اذان را به مؤذن اعلام کنند.

مجموعهٔ چنین جدولهایی بسیار گسترده بودند، جدولهای قاهره شامل ۲۰۰ صفحه هر یک شامل ۱۸۰ درایه بودند. در زیر بررسیی از محتویات این مجموعهٔ نوشته‌ها، به گونه‌ای که در اثر منسوب به ابن یونس دیده می‌شود، آمده است. این اثر عنوان توصیفی جداولی بسیار مفید برای تعیین زمانی که از طلوع خورشید گذشته است، زاویهٔ ساعتی و سمت خورشید از ارتفاع خورشید را دارد. این جدولها در مقولهٔ رده‌های عمدهٔ زیر قرار می‌گیرند:

۱. جدولهای کمکی تابعهای مربوط به نجوم کروی

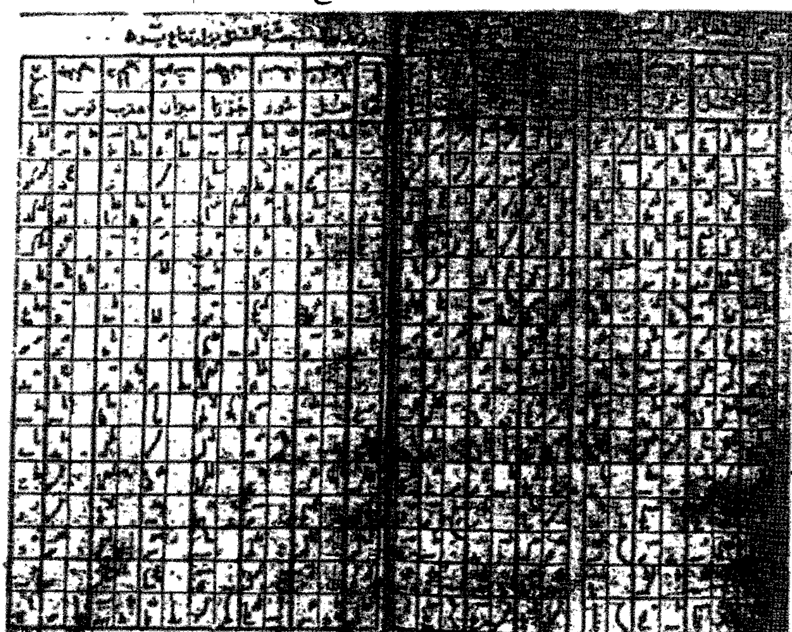
در بین ۱۳ جدول این گروه، جدولهایی موجودند که به ازای هر درجهٔ طول λ ی خورشید، میل خورشید، $\delta(\lambda)$، طول روز را وقتی طول جغرافیایی خورشید λ است و ارتفاع خورشید را وقتی در سمت جنوب، در سمت مشرق یا در سمت مغرب است، می‌دهند.

۲. جدولهای اوقات از طلوع آفتاب و زاویهٔ ساعتی

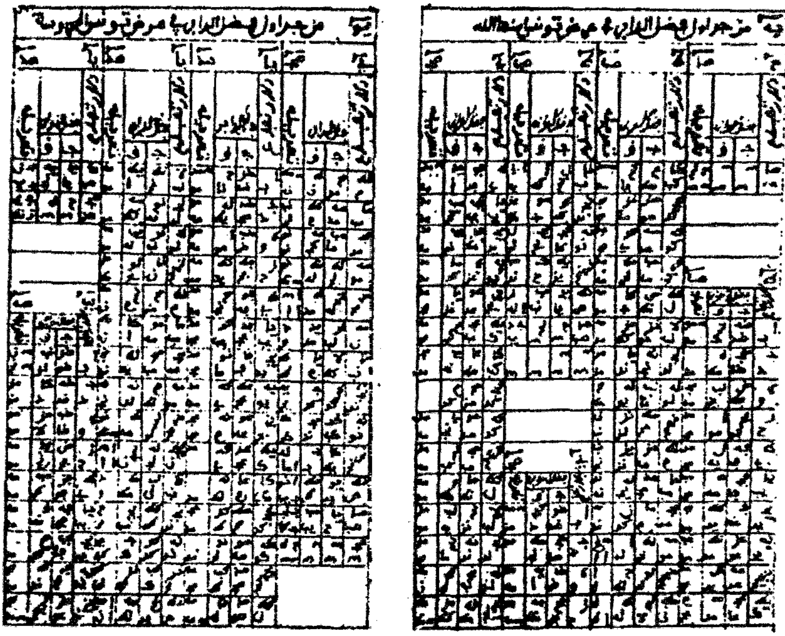
این اوقات به صورت تابعهایی از طول خورشید (بر دایرةالبروج) در روز مورد نظر و ارتفاع خورشید در لحظهٔ رصد جدولبندی شده‌اند (یک راه تعیین ارتفاع خورشید، استفاده از اسباب دیدگری پشت اسطرلاب است) (نمونه‌هایی از این جدولها را در لوحه‌های ۴ و ۵ ببینید). کینگ در بحث از این جدولها خاطرنشان می‌کند که این ادعای بارها گفته شده که ابن‌یونس نخستین کسی بوده که فرمول

$$\cos(\theta).\cos(\delta)=\frac{۱}{۲}\left[\cos(\theta+\delta)+\cos(\theta-\delta)\right]$$

موسوم به فرمول مجموع کسینوسها را برای تسهیل محاسبهٔ زاویهٔ ساعتی از روی ارتفاع خورشید ارائه داده است، اشتباهی است از مورخ سدهٔ نوزدهم فرانسه،دالامبر.



لوحهٔ ۴ : دو جدول از مجموعهٔ نوشته‌های مربوط به نگهداری حساب اوقات که در سرتاسر دورهٔ میانه در قاهره مورد استفاده بود. این جدولها وقت قبل از ظهر را وقتی که خورشید در سمت مکّه است و طول مدّت شفق را نشان می‌دهند، مقادیر برحسب درجه‌ها و دقیقه‌های استوایی به ازای هر درجهٔ طول خورشیدی داده شده‌اند.



لوحهٔ ۵ : گزیدهٔ جدولهایی از مؤلفی ناشناس مربوط به سدهٔ چهاردهم (؟) میلادی [هشتم‌هجری] برای نگهداری حساب اوقات که برای عرض جغرافیایی تونس محاسبه شده و در عنوان جدول سمت چپ از تونس با عنوان «محروسهٔ تونس» یاد شده است. این جدولها زمان پیش از ظهر را به عنوان تابعی از ارتفاع مدار خورشیدی و ارتفاع لحظه‌ای نمایش می‌دهند.

۳. جدولهایی برای سمت خورشید

در این جدولها، سمت به صورت تابعی از همان متغیرهایی که در جدولهای پیشین به کار رفته، یعنی طول و عرض خورشیدی، جدولبندی شده است. کینگ متذکر می‌شود که این مقادیر به ندرت بیش از ۱ واحد در رقم دوم با مقادیر واقعی اختلاف دارند، و برای هر درجهٔ ارتفاع خورشیدی حداکثر تا °۸۳ محاسبه شده‌اند (این مقدار تقریباً حداکثر مقدار ممکن در مورد قاهره است).

۴. جدولهای ارتفاع خورشیدی برای سمتهای خاص

متغیر دیگر، علاوه بر سمت، طول خورشید است، و گردآوری این جدولها شوق و ذوقی افزون از حد را به محاسبه نشان می‌دهد، زیرا به دشواری می‌توان به هدفی فکر کرد که این جدولها حقیقتاً سبب سهل‌الوصولی آنها شوند، سودمند بودنشان که جای خود دارد.
جدولهای دیگری که حال و هوایی بسیار شبیه به جدول اخیر دارند، از قرار زیرند :

۵. جدولهای تعیین سمت بادگیرها

از بادگیرهایی بر فراز بامها برای عبور دادن باد خنک از داخل ساختمانها استفاده می‌شد و مطمئناً هر کتابی که به ساکنین شهری چون قاهره با هوایی چنان گرم چگونگی این کار را یاد می‌داد، می‌توانست مدعی شایسته‌ای برای عنوان «بسیار سودمند» باشد. در واقع، عبداللطیف بغدادی، جهانگرد اهل عراق که در حدود سال ۱۲۰۰ میلادی [۵۷۹ هجری] از مصر دیدار کرده است، دربارهٔ مصریان نوشته است که آنها:

... روزنه‌های خانه‌هایشان را در معرض بادهای موافق شمالی قرار می‌دهند. به ندرت می‌توان خانه‌ای بدون بادگیر دید. این بادگیرها بلند و عریضند و به هر نوع حرکت از سوی باد روی خوش نشان می‌دهند؛ با دقت و مهارت فراوان بر پا شده‌اند. هر بادگیر قیمتی از صد تا پانصد دینار دارد، امّا بادگیرهای کوچک خانه‌های معمولی از یک دینار بیشتر نیست.

با این حال، جدولهای غایة‌الانتفاع ابن یونس به اهالی قاهره نگفته که بادگیرهای خود را به کدام جهت متوجه کنند. به جای آن، این کتاب ارتفاع خورشید را در لحظه‌ای که در سمت جهتی قرار داشت که هر کس بادگیر خود را رو به آن می‌ساخت، داده است. این امری است کاملاً عجیب، امّا عجیبتر از آن، جهتی است که اهالی قاهره برای متوجه کردن بادگیرهای خود به کار می‌بردند (و ابن یونس آن را تجویز کرده است) و آن جهت طلوع خورشید در انقلاب زمستانی بود که ابن یونس آن را $27°30'$ جنوب‌شرقی محاسبه کرده بود، در حالی که بنا بر داده‌های فعلی سمتگیری بهینه در مقابل بادهای قاهره حدود $70°$ جنوب‌شرقی است. ولی مطالعات اخیر کینگ نشان می‌دهد که در عالم اسلامی سده‌های میانه، یکی از سنن نجوم عامه جهت برآمدن خورشید در انقلاب خورشیدی را با برخی بادها مربوط می‌کرد. در نتیجه، این بخش از رسالهٔ ابن یونس نشان‌دهندهٔ آمیزه‌ای از نجوم عامه با محاسبات پیچیده است که از نکات مسرتبخش این پهنه از پژوهشهای تاریخی است.

۶. جدولهای طول زمان شفق و فلق

شفق و فلق برحسب انخفاض [پایین افتادگی] خورشید در زیر افق تعریف شده بود، و تعیین آن به دلیل این که اوقات مناسب نمازهای صبح و مغرب برحسب آن تعریف می‌شود، واجد اهمیت است. همچنین، استفاده از این جدولها، در ارتباط با جدولهای طول روشنایی روز، امکان محاسبهٔ مدت زمان تاریکی حقیقی را در روزی مفروض فراهم ساخت، و ابن یونس این تابع را جدولبندی کرده است.

۷. جدول نماز عصر

گرچه قراردادهای مربوط به زمان نماز عصر در عالم اسلامی متغیر بوده، ابن یونس این قرارداد را پذیرفته بود که نماز عصر در آن لحظه بعدازظهر آغاز می‌شود که سایهٔ میلهٔ قائمی که بر زمین نصب شده برابر با سایهٔ آن در ظهر به اضافهٔ طول میله باشد. ابن یونس به ازای هر درجهٔ عرض خورشیدی، ارتفاع خورشیدی را در شروع نماز عصر جدولبندی می‌کند (زمان مجاز برای این نماز درست پیش از غروب آفتاب پایان می‌پذیرد).

۸. جدولهای تصحیحات انکسار افقی

بطلمیوس در اپتیک [رسالهٔ نور] خود، تأثیرات انکساری جوی، به ویژه در افق را به صورتی کیفی مورد توجه قرار داد؛ اما جدولی که در یکی از دستنویسهای جداول غایةالانتفاع ابن یونس به‌دست آمده، آشکار می‌سازد که منجمان مسلمان قرون وسطی برای تهیهٔ برآوردهای کمّی تأثیر انکسار کوشش کرده‌اند. جدول مورد بحث به طلوع و غروب خورشید می‌پردازد، امّا این جدول فقط در یکی از دستنویسها ظاهر می‌شود و لغزشهایی در آن است که از مردی خبره در نجوم چون ابن یونس غیرقابل انتظار است. لذا کینگ احساس می‌کند که جدول نه به توسط ابن یونس و بلکه به‌وسیلهٔ شخص بسیار کم صلاحیتدارتری تصنیف شده و مبنای آن تذکرات ابن یونس بوده که او آنها را خوب نفهمیده بوده است.

بنابراین، آن چه در بالا آمد، توصیفاتی از چند جدول است که در جدولهای غایة الانتفاع دیده می‌شوند، و اینها مجموعه‌ای از جدولهایی هستند که تا سدهٔ نوزدهم در خدمت منجمان و موقّتان [وقت نگهداران] بودند.

در سده‌های بعد، به تهیهٔ جدولهایی بس بلندپروازانه‌تر مبادرت شد. مثلاً در سال ۱۲۵۰ میلادی [۶۲۹ هجری] نجم‌الدین مصری، منجم مصری، زمان بعد از طلوع ستاره‌ای را به‌عنوان تابعی از کمیتهای زیر جدولبندی کرد:

۱. ارتفاع نقطهٔ اوج ستاره

۲. ارتفاع آنی ستاره

۳. نصف کمان قابل رؤیت مسیر آن

این جدولها به ازای کلیهٔ میلهای ستاره و کلیهٔ عرضهای جغرافیایی محاسبه شده و شامل بیش از ربع میلیون مدخل هستند.

در سدهٔ بعد، موقّت مسجد امیّه در دمشق، محمّدالخلیلی، عملاً کلیهٔ تابعهایی را که ابن‌یونس جدولبندی کرده بود در مورد عرض جغرافیایی دمشق و به ازای مقداری متفاوت

از میل دایرة البروج، جدولبندی کرد. شاید تحمل دیگر بارهٔ زحمت هر آن چه ابن یونس در مورد قاهره انجام داده بود، الهام‌بخش الخلیلی برای تصنیف جدولهای کمکی بوده باشد که در آغاز فصل مربوط به مثلثات ذکرشان رفت؛ و اینها جدولهایی بودند که می‌شد از آنها در حل مسائل کروی متعارف استفاده کرد و بنابراین استفاده‌کنندگان از این جدولها می‌توانستند مجموعه‌ای از جدولهای مشابه را برای عرض جغرافیایی [محل اقامت] خود استخراج کنند. در بخش آتی راه‌حلهای عمومی بیشتری برای مسأله‌های ریاضی را که در محدودهٔ دین اسلام مطرح می‌شوند، از الخلیلی خواهیم دید.

بخش ۸. بعد اسلامی: سمت نماز

مسألهٔ یافتن جهت مکّه نسبت به مکانی مفروض نتیجهٔ دین اسلام بود، زیرا مکه جایگاه کعبه، مقدس‌ترین مکان دنیای اسلام و جهتی است که مسلمانان نمازهای پنجگانهٔ روزانهٔ خود را باید رو به آن بخوانند. این جهت، به عربی، قبله نامیده می‌شود و مسألهٔ تعیین آن مسأله‌ای مهم برای مسلمانان است. از این‌رو است که بسیاری از بزرگترین دانشمندان اسلامی توجه خود را به حل آن معطوف داشتند.

یکی از بزرگترین این دانشمندان، ابوریحان بیرونی، در حوالی انتهای اثر کامل و دقیق خود در جغرافیای ریاضی، تحدید نهایات الاماکن چنین می‌نویسد:

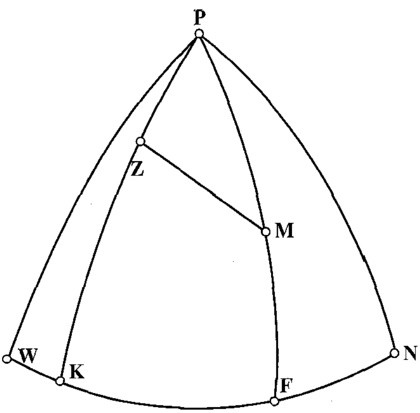
با آن که اکنون به پایان منظور خود [اندازه‌گیری پایانهای جایها] رسیده‌ایم. بایسته است که از آن بهره‌ای بیرون آوریم تا برای همهٔ مردمانی که در سرزمینی زندگی می‌کنند که به یافتن طول و عرض آن پرداختیم سودمند باشد یا خاص گروهی از مردم باشد و آن بهره که به همگان می‌رسد یافتن جهت قبله است.

شکیبایی نسبت به سایر مذهبها که از خصوصیات ابوریحان است، موجب می‌شود که او از فرایض یهودیان در رو به اورشلیم کردن و مسیحیان در رو به شرق ایستادن [درحین عبادات] یاد کند، و می‌گوید که روشهایش برای آنان نیز مفید خواهد بود و «بنابراین به فایده‌ای آگاه شدیم که بیشترین مردمان در دینهای خود از آن برخوردار می‌شوند و در عبادتهایی که ارزش بزرگ و ثواب فراوان دارد از آن بهره‌مندی حاصل می‌کنند و گمان ندارم که در سایر عبادتها هم از فایده‌ای خالی باشد».

در هر حال، بیرونی چهار روش برای حل مسأله عرضه می‌دارد. گرچه توضیح مفصّل هر کدام از این راه‌حلها خارج از حدود این کتاب است، ما به توصیف مسأله پرداخته و شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان آن را به کمک مثلثات کروی حل کرد.

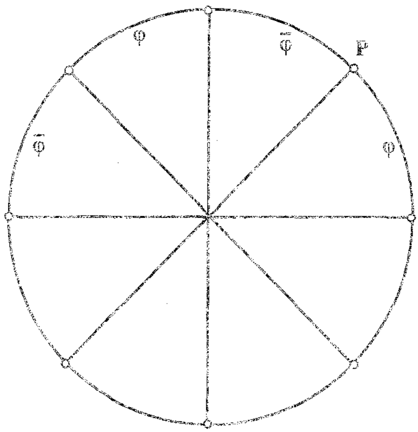
مسأله را در مورد سطح کرهٔ زمین در نظر گیرید. شکل (الف) وضع را در مورد مکانی در شمال غربی مکه نشان می‌دهد که در آن P قطب شمال، Z مکان مورد بحث، M محل مکه و WKFN استواست (چون در زیر تنها کمانها را در نظر خواهیم داشت و هرگز به خطهای راست کاری نداریم، بدون آن که ابهامی پیش آید، به جای $\widehat{XY}$ خواهیم نوشت XY). بنابراین PZ و PM، بترتیب، نصف‌النهارهای محل و مکه‌اند و $P\hat{Z}M$ سمت مکه، یعنی قبله است. بعلاوه، ZM فاصلهٔ محل از مکه روی دایرهٔ عظیمه (برحسب درجه) است. چون KZP نصف‌النهار محل است، اگر در Z بایستیم و جهت دایره به امتداد ZP باشد، روی ما به شمال خواهد بود. در این صورت اگر به قدر زاویهٔ $P\hat{Z}M$ به راست بچرخیم، رویمان به مکّه خواهد بود، زیرا ZM کوتاهترین مسیر ممکن تا آن شهر است. بنابراین، برای آن که قبله را تعیین کنیم، باید $P\hat{Z}M$ را محاسبه کنیم.

روشن است که برای یافتن این زاویه، باید موضع خود و جای مکه را بدانیم، یعنی باید هم عرض جغرافیایی خود، Φ ، و هم عرض جغرافیایی مکه، Φ_M و نیز هر دو طول جغرافیایی، یا حداقل تفاضل آنها (و راست یا چپ بودن مکه را نسبت به نصف‌النهار محل) بدانیم. از روی عرضهای جغرافیایی، می‌توانیم متمّمهای آنها، PZ و PM را تعیین کنیم.



(الف)

بنابراین، برای یافتن قبله، باید PZ و PM و نیز $P\hat{Z}M$ ، یعنی دو ضلع و زاویهٔ بین آنها را در $\Delta(ZPM)$ بدانیم. امّا، یک مثلث کروی به‌وسیلهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آنها معین می‌شود، لذا این معلومات برای حل مسأله، کافی است. ولی، آشکار است که نمی‌توانیم مسأله را تنها با یک بار استفاده از قضیهٔ سینوسها در مورد مثلث PZM حل کنیم، زیرا یکی از زاویه‌ها و ضلع مقابل به آن را نداریم. امّا روشی موجود است که طی آن قضیهٔ سینوسها در مورد یک رشته از مثلثهای کروی به کار گرفته می‌شود. این روش را ابن یونس بدون توجیه آن داده است، امّا بیرونی آن را در کتاب قانون مسعودی خود هم بیان و هم ثابت کرده است. این موضوع را به صورتی که در کینگ (۱۹۷۹) داده شده، در زیر دنبال می‌کنیم.



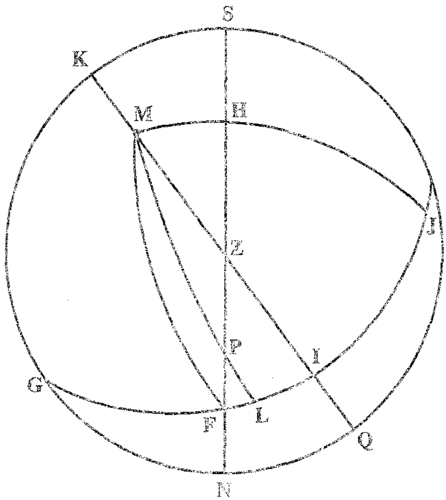
(ب)

با این حال، خواننده باید در بدو امر در نظر داشته باشد که به ازای هر مکان، ارتفاع قطب مرئی (P) در بالای افق برابر Φ، عرض جغرافیایی محل است و فاصله در امتداد نصف‌النهار بین سمت (Z) و قطب مرئی (بر حسب درجه) برابر $\bar{\Phi}$ است. این رابطه‌ها و رابطه‌های دیگر در دایرهٔ عرضهای جغرافیایی که در شکل (ب) نشان داده شده، تشریح شده‌اند. اگر دایرهٔ عظیمه‌ای را که قطب آن نقطه‌ای مانند X است «افق X» بنامیم، در این صورت، یکی از پیامدهای سادهٔ تعریف قطبین یک دایرهٔ عظیمهٔ آن است که X نقطه‌ای در افق Y است اگر و تنها اگر Y نقطه‌ای در افق X باشد. این اصل، دو پیامد فوری دارد که آنها را به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم:

افقهای دو نقطهٔ غیرمتقاطر، یکدیگر را در قطبهای دایره‌های عظیمه‌ای که این نقطه‌ها را دربر دارند، قطع می‌کنند و اگر Y در افق X واقع باشد، آن‌گاه X، افق آن و نقطهٔ متقاطر آن، افق Y را به چهار ربع تقسیم می‌کنند.

اینک، نمودار بیرونی را برای یافتن قبله، به صورتی که در قانون مسعودی دیده می‌شود، معرفی می‌کنیم؛ گرچه ما محل را به جای شمال غربی، شمال شرقی مکه در نظر گرفته‌ایم. در شکل (پ) دایرهٔ KSN افق ناحیه‌ای است که از بالا به آن نظر می‌شود، Z معرف سمت محل، S قطب جنوب و N قطب شمال است، بنابراین NZS نصف‌النهار محل است. نقطهٔ M سمت مکه است، در نتیجه NK یا (معادل آن) KS کمانی است که باید برای تعیین قبله، آن را پیدا کنیم. حال فرض کنید که GFL افق مکه باشد که در آن F یکی از نقطه‌های تلاقی افق با نصف‌النهار محل است، و فرض کنید MHJ افق F باشد. سرانجام، دایرهٔ عظیمهٔ MPL را که در آن P قطب شمال سماوی است، رسم کنید.

چون M یک قطب GLJ است، $\widehat{MLG}$، MJ و ML هر سه، $90°$ هستند و چون F یک قطب MHJ است، $\widehat{FHM}$ و FH هر دو $90°$ هستند. همچنین $PN = \Phi$، $\widehat{MPH} = \Delta(\lambda)$ و $PL = \Phi_M$، Φ_M عرض جغرافیایی مکه، لذا $MP = 90° - \Phi_M$.



(ب)

با به کار بردن قضیهٔ سینوسها در مورد $\Delta(MPH)$:

$$\frac{\sin(MP)}{\sin(MH)} = \frac{\sin(F\hat{H}M)}{\sin(M\hat{P}H)}$$

که با استفاده از رابطه‌های بالا و این حقیقت که $\sin\theta = \cos(\bar{\theta})$ ، به صورت :

$$\frac{\cos(\Phi_M)}{\cos(HJ)} = \frac{\sin(90^\circ)}{\sin(\Delta\lambda)}$$

درمی‌آید، کلیهٔ کمیتهای این رابطه جز $\cos(HJ)$ و بنابراین HJ را می‌توان به‌دست آورد. در این صورت $\hat{F} = HJ$ و در نتیجه MH معلوم و MH برابر $90^\circ - HJ$ است.

حال از به کار بردن قضیهٔ سینوسها در مورد $\Delta(PLF)$ حاصل می‌شود :

$$\frac{\sin(\hat{F})}{\sin(P\hat{L}E)} = \frac{\sin(PL)}{\sin(PF)}$$

و با گذاشتن مقدارهای معلوم دراین رابطه، نتیجه می گیریم که :

$$\frac{\sin(\hat{F})}{\sin(\hat{90})} = \frac{\sin(\Phi_M)}{\sin(PF)}$$

در نتیجه $\sin(PF)$، و لذا PF معلوم است. در این صورت $FN = \Phi - PF$ معلوم است و بنابراین متمم آن FZ معلوم است.

حال بنابر قاعدهٔ چهار کمیت که در مورد $\Delta(FZI)$ و $\Delta(FHJ)$ به‌کار گرفته می‌شود، نتیجه می گیریم که :

$$\frac{\sin(FZ)}{\sin(ZI)} = \frac{\sin(FH)}{\sin(HG)}$$

که با جایگذاری مقدارهای معلوم، به صورت :

$$\frac{\sin(FZ)}{\sin(ZI)} = \frac{\sin(90^\circ)}{\sin(HJ)}$$

درمی‌آید و چون همهٔ کمیتها به جز $\sin(ZI)$ معلومند، می‌توانیم ZI را تعیین کنیم و بنابراین $IQ = \overline{ZI}$. امّا اگر (ت ۱) را در مورد افقهای M و Z به کار بریم نتیجه می‌شود که G یکی از قطبهای KMZIQ، دایرهٔ ارتفاع مکه، است و بنابراین $\hat{G} = IQ$ ، لذا $\hat{G}$ معلوم است. سرانجام، با به کارگیری قضیهٔ سینوسها در مورد $\Delta(GFN)$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{\sin(\hat{G})}{\sin(\hat{F})} = \frac{\sin(FN)}{\sin(GN)}$$

و بنابراین GN معلوم است. اما قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم که $GQ = ۹۰^\circ$ ، لذا $NQ = \overline{GQ}$ معلوم است. چون $KS = NQ$ قبلهٔ Z تعیین شده است. روش بیرونی یکی از چندین راه‌حلی است که برای یافتن جهت نماز در اسلام پیشنهاد شده است. راه‌حلی دیگر، متضمن تدوین جدولهایی است که قبله را برای فهرستی از مکانها می‌دهد. یکی از دستاوردها که چشمگیری خاصی دارد، مجموعهٔ جدولهایی است با ۲۸۸۰ مدخل که به‌وسیلهٔ محمّد الخلیلی موقِت (وقت نگهدار مسجد) سدهٔ چهاردهم [هشتم هجری] گردآوری شده بود و جهت مکه را نسبت به افق محلی در مورد مکانهایی با عرضهای جغرافیایی ۱۰°، ۱۱°، . . . ، ۵۶° و $۳۳\frac{۱}{۲}^\circ$ (عرض جغرافیایی بغداد و شرق یا غرب مکه به فاصله‌های ۱°، ۲°، . . . ، ۶۰°) نشان می‌داد. این راه‌حلها شامل روشهای تقریب، هندسهٔ ترسیمی، هندسهٔ فضایی، مثلثات و ساختن مجموعهٔ جدولهایی بود که از چند دوجین تا چندین هزار مدخل را دربر می‌گرفتند. بقای این همه روش گوناگون درطی چندین صدسال این امر را به ذهن متبادر می‌کند که تاریخ علم اکر باستانی و قرون وسطی را نمی‌توان در زمرهٔ ترقیّات مستمر ذهنی که در آن ابداعات برتر جای روشهای منسوخ را می‌گیرند، به حساب آورد و بلکه، آن داستان توسعهٔ فنون گوناگون تا به درجه‌ای است که در آن هر یک از این فنون قادر به حل مسأله‌هایی باشد که در لحظهٔ حال مورد توجه‌اند. از این بابت، می‌توان، آن را نمایانگر ماهیت تاریخ ریاضیات دانست.

۲. نقطه، خط، صفحه، دایره، ...

۲.۱. نقطه

۲.۱.۱. نقطه‌های: همخط، همصفحه، ...

۲.۱.۱.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۴۲. نقطه‌های A، B، C و D روی یک صفحه نیستند. روی خطهای راست AB، BC، CD و DA، بترتیب، نقطه‌های P و Q، R و S را انتخاب کرده‌ایم. به نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OP}^{۲}-\rho^{۲} \quad , \quad \overrightarrow{QB}.\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{OQ}^{۲}-\rho^{۲}$$

$$\overrightarrow{RC}.\overrightarrow{RD}=\overrightarrow{OR}^{۲}-\rho^{۲} \quad , \quad \overrightarrow{SD}.\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{OS}^{۲}-\rho^{۲}$$

که در آن، O، مرکز کره‌ای است به شعاع ρ. ثابت کنید، نقطه‌های P، Q، R و S روی یک صفحه واقعند.

۴۳. یک کره و دو نقطهٔ A و B در خارج آن مفروضند. از نقطه‌های A و B دو مماس متقاطع بر کره رسم شده است. ثابت کنید، نقطهٔ تقاطع آنها روی یکی از دو صفحه ثابت قرار دارد.

۲.۱.۱.۲. نقطه روی صفحه است

۴۴. برای این که دو دایرهٔ (C) و (C′) از یک کره بر هم عمود باشند، لازم و کافی است که رأس مخروط محیط بر این کره تحت یکی از این دایره‌ها، در صفحهٔ دایرهٔ دیگر قرار داشته باشد.

۴۵. برای آن که دایره‌های تماس (C) و (C′) از دو سطح مخروطی (S) و (S′) محیط بر یک کره، مماس بر هم باشند، لازم و کافی است که یکی از سطحهای مخروطی شامل رأس سطح دیگر باشد.

۲.۱.۱.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۶. کره‌ای و دایره‌ای بر روی آن و نقطهٔ P که بر روی کره قرار ندارد، مفروضند. ثابت کنید، نقطه‌های دیگر محل برخورد خطهایی که نقطهٔ P را به نقطه‌های دایرهٔ مفروض وصل می‌کنند، بر روی کره، یک دایره تشکیل می‌دهند.

۴.۱.۱.۲. نقطه‌ها روی یک کره‌اند

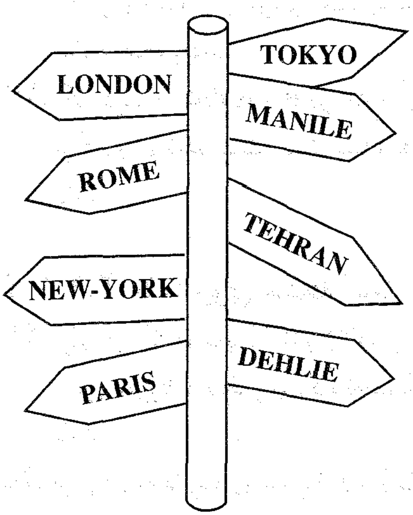
۴۷. سه کرهٔ متقاطع مفروضند. از نقطه‌ای واقع بر روی وتر مشترک آنها سه وتر متعلق به این سه کره رسم شده است. ثابت کنید، نقطه‌های انتهایی این سه وتر بر روی یک کره قرار دارند.

۴۸. از نقطهٔ ثابت P واقع در داخل یک کره، سه شعاع دو به دو برهم عمود را به دلخواه رسم می‌کنیم تا سطح کره را در نقطه‌های A، B و C قطع کنند. ثابت کنید، مرکز ثقل مثلث ABC و تصویر نقطهٔ P بر روی صفحهٔ ABC بر روی سطح جانبی یک کره قرار دارند.

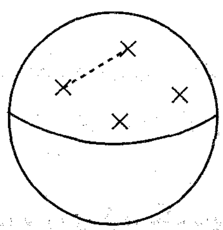
۴۹. اگر چهار کره چنان باشند که هر کدام از آنها بر سه کرهٔ دیگر مماس باشد، آن‌گاه شش نقطهٔ تماس روی یک کره قرار دارند.

۵.۱.۱.۲. تعداد نقطه‌ها

۵۰. چند شهر در روی کرهٔ زمین؟ اگر زمین را به صورت یک کرهٔ کامل، بدون کوهها و اقیانوسها درنظر بگیریم، که طول خط استوا در آن درست ۴۰۰۰۰ کیلومتر است، کلاً چند شهر فرضی می‌تواند روی آن قرار بگیرد که فاصلهٔ آنها از یکدیگر، حتماً بیش از ۱۰۰۰۰ کیلومتر باشد.



۵۱. اگر زمین را به صورت یک کرهٔ کامل در نظر بگیریم که طول خط استوا در آن درست ۴۰۰۰۰ کیلومتر است، کلاً چند شهر فرضی می‌تواند روی آن قرار بگیرد که فاصلهٔ شهرها از همدیگر، دست‌کم، ۱۰۰۰۰ کیلومتر باشد. پاسخ مسأله چند شهر خواهد بود؟



۶.۱.۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۲. برای آن که دو دایره به یک کره تعلق داشته باشند، لازم و کافی است که دو نقطهٔ A و B از فصل مشترک صفحه‌هایشان، هر کدام، نسبت به این دو دایره دارای یک قوت باشند؛ و هنگامی که صفحه‌های دو دایره موازی‌اند، دارای یک محور باشند.

۵۳. **قضیهٔ شاسلس (chasles).** مرکز N' از یک دایرهٔ به دست آمده از تصویر دایرهٔ AMB از یک کره، تصویر رأس N از مخروط محیط بر این کره تحت دایرهٔ مماس AMB است.

۵۴. صفحهٔ P که منعکس آن یک کرهٔ داده شده است، به هر وضعی که قرار داشته باشد، قطب انعکاس، یکی از دو انتهای قطری از کره است که بر صفحهٔ P عمود است.

۲.۲. خط

۱.۲.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۱.۲.۲. خطها همرسند

۵۵. دو دایرهٔ دلخواه از یک کره دارای دو مرکز تجانس هستند و تمام دایره‌های عظیمهٔ رسم شده از یک مرکز تجانس، روی دایره‌های داده شده، زوج نقطه‌های متناظر ایجاد می‌کنند. ثابت کنید که خطهایی که دو به دوی این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

۵۶. هنگامی که یالهای روبه‌روی یک هشت وجهی محاط در یک کره در یک صفحه قرار دارند، سه قطر هشت وجهی در یک نقطه متقاطعند.

۲.۱.۲.۲. خطها بر هم عمودند

۵۷. خط D خارج کرهٔ به مرکز O قرار دارد. بر خط D دو صفحهٔ P و Q را طوری مرور می‌دهیم که در نقطه‌های M و N بر کره مزبور مماس باشند. ثابت کنید، MN بر خط D عمود است.

۳.۱.۲.۲. کمان نیمساز است

۵۸. S را دایرهٔ عظیمهٔ کره‌ای به قطب P می‌گیریم. روی دایرهٔ عظیمه‌ای که از P می‌گذرد، دو نقطهٔ A و B را به یک فاصله از P انتخاب می‌کنیم. مثلث کروی ABC را (که ضلعهای آن، کمانهایی از دایره‌های عظیمه‌اند)، در نظر می‌گیریم. به نحوی که C، نقطه‌ای از S باشد. ثابت کنید، کمان PC از دایرهٔ عظیمه، نیمساز زاویهٔ C است.

یادداشت. دایرهٔ عظیمهٔ کره، دایره‌ای است که مرکز آن بر مرکز کره منطبق باشد. قطب دایرهٔ عظیمهٔ S، نقطه‌ای مانند P از سطح کره است، وقتی که، قطری از کره که از P می‌گذرد، بر صفحهٔ دایرهٔ S عمود باشد.

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۹

۵۹. سه دایره، روی سطح کره‌ای قرار دارند؛ مرکز این سه دایره همان نقطهٔ O، مرکز کره است و در ضمن، هر سه دایره از نقطهٔ A می‌گذرند. روی محیط این دایره‌ها، بترتیب، نقطه‌های B، C و D را طوری انتخاب کرده‌ایم که زاویهٔ AOB برابر ۹۰ درجه و خط راست OB، نیمساز زاویهٔ COD شده است. ثابت کنید، اگر نیمخطهای راست AB'، AC' و AD'، بترتیب، بر کمانهای AB، AC و AD از دایره‌های مربوط، مماس باشند، آن‌گاه، نیمخط راست AB' نیمساز زاویهٔ $C'AD'$ می‌شود.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۷۹

۴.۱.۲.۲. کمان روی دایره است

۶۰. دو نقطه روی کره‌ای به شعاع ۱ با کمانی که طولش از ۲ کمتر و روی کره واقع است، به‌یکدیگر وصل شده‌اند. ثابت کنید که این کمان باید در یک نیمکرهٔ کرهٔ مفروض واقع باشد.

المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴

۳.۲. صفحه

۱.۳.۲. صفحه‌های: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۱.۳.۲. صفحه‌ها از یک نقطه می‌گذرند

۶۱. ثابت کنید، هرگاه یک چند ضلعی مسطح در یک کره محاط باشد، صفحه‌هایی که در رأسهای این چند ضلعی مماس بر کره رسم می‌شوند، در یک نقطه متقاطعند.

۶۲. اگر یک چندضلعی محیط بر یک کره باشد، صفحه‌هایی که بر ضلعهای چند ضلعی می‌گذرند و بر کره مماسند، در یک نقطه متقاطعند.

۲.۱.۳.۲. صفحه از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۳. کرهٔ S به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ ثابت P روی آن داده شده است. سه نقطهٔ A، B و C روی کره به گونه‌ای حرکت می‌کنند که کنج P.ABC همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید، صفحهٔ مثلث ABC از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

هفتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۶۴. رأس یک مخروط محیط بر یک کرهٔ داده شده، روی صفحه‌ای مفروض تغییر مکان می‌دهد. نشان دهید که صفحهٔ دایرهٔ تماس از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و بعکس.

۶۵. یک کره و نقطهٔ ثابت A داده شده‌اند. کره را با صفحهٔ (P) قطع می‌کنیم و دایرهٔ فصل مشترک آنها را قاعدهٔ یک مخروط به رأس A' می‌گیریم. این مخروط بار دیگر کره را در دایره‌ای واقع در صفحهٔ (Q) قطع می‌کند. ثابت کنید، اگر صفحهٔ P چنان تغییر کند که همواره از نقطهٔ ثابت B بگذرد، صفحهٔ (Q) نیز از نقطهٔ ثابتی مانند B' خواهد گذشت.

۳.۱.۳.۲. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۶۶. اگر سه کره دو به دو متقاطع باشند، صفحه‌های تقاطع، در یک خط همدیگر را قطع می‌کنند که این خط، بر صفحهٔ گذرنده بر مرکزهای سه کره عمود است.

۴.۲. دایره

۱.۴.۲. دایره‌ها در یک قطر متقاطعند

۶۷. هنگامی که بر دو نقطهٔ A و B غیرواقع بر یک کره، مجموعه دایره‌هایی می‌گذرند که دایرهٔ داده شده را قطع می‌کنند، ثابت کنید، تمام دایره‌های عظیمه‌ای که بر دو نقطهٔ تقاطع هر دایرهٔ متغیر با دایرهٔ ثابت می‌گذرند، یکدیگر را تحت یک قطر قطع می‌کنند.

۶۸. هنگامی که بر دو نقطهٔ A و B واقع بر یک کره، مجموعه دایره‌هایی می‌گذرند که دایرهٔ داده شدهٔ ثابتی را قطع می‌کنند، تمام دایره‌های عظیمه‌ای که بر دو نقطهٔ تقاطع هر دایرهٔ متغیر با دایرهٔ ثابت می‌گذرند، یکدیگر را تحت یک قطر قطع می‌کنند.

۲.۴.۲. دایره‌ها روی یک کره‌اند

۶۹. اگر دایره‌هایی به تعداد دلخواه، چنان باشند که هر دو دایرهٔ دلخواه همدیگر را در دو نقطه قطع کنند، آن‌گاه تمام این دایره‌ها روی یک کره قرار دارند، یا همگی به یک صفحه تعلق دارند.

۵.۲. کره

۱.۵.۲. کره‌ها بر یک دایره می‌گذرند

۷۰. دو خط AX و BY غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. کره‌ای را در نظر می‌گیریم که از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و بار دیگر این خطها را در A' و B' قطع می‌کند. نشان

دهید که اگر نقطه‌های A' و B' روی این خطها چنان حرکت کنند که پاره‌خطهای متناسب ایجاد کنند، کره‌های متناظر بر یک دایره می‌گذرند.

۲.۵.۲. کره‌ها از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند

۷۱. یک کره و یک صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید، تمام کره‌هایی که مرکزشان نقطه‌هایی از این صفحه است و شعاعشان مساوی طول مماسهای رسم شده از این نقطه‌ها بر کره داده شده می‌باشند، همگی از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۳. زاویه

۱.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۷۲. سه کره که دو تای آنها با هم مساوی‌اند، بر صفحهٔ P مماس شده‌اند. علاوه بر این، کره‌ها دو به دو نیز بر یکدیگر مماس هستند. رأس مخروطی دوار و قائمی روی صفحهٔ P قرار گرفته و محور آن بر این صفحه عمود شده است. هر سه کره در خارج مخروط قرار دارند و بر سطح جانبی آن مماس هستند. کسینوس زاویهٔ بین مولد مخروط و صفحهٔ P را حساب کنید. در صورتی که می‌دانیم مثلث حاصل از نقطه‌های تماس کره‌ها با صفحهٔ مفروض، یک زاویهٔ ۱۵۰° دارد.

۷۳. کره‌ای بر صفحهٔ قاعدهٔ ABCD از هرم چهار بر منتظم SABCD در نقطهٔ A مماس است. علاوه بر این، بر کره محاط در داخل هرم هم مماس می‌باشد. صفحهٔ قاطعی از مرکز کرهٔ اوّل و ضلع BC قاعده می‌گذرد. زاویهٔ شیب این صفحه را با صفحهٔ قاعدهٔ هرم پیدا کنید. در صورتی که قطرهای مقطع، بر یالهای SA و SD عمود می‌باشند.

۷۴. نقطه‌ای در روی سطح زمین در عرض جغرافیایی φ قرار دارد $\left(\circ \leq \varphi \leq \frac{\pi}{۲}\right)$. چه رابطه‌ای بین زمان T کوتاهترین روز این نقطه و φ وجود دارد؟ زمین را می‌توان کره‌ای به حساب آورد که محور دوران آن، با صفحهٔ حرکت زمین به دور خورشید، زاویهٔ معلومی برابر α می‌سازد.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه

۲.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۵. همهٔ چهار وجهیهای AXBY را در نظر می‌گیریم که بر کرهٔ مفروضی محیطند. ثابت کنید، اگر نقطه‌های A و B ثابت باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی AXBY، یعنی مقدار

$$A\hat{X}B + X\hat{B}Y + B\hat{Y}A + Y\hat{A}X$$

به انتخاب نقطه‌های X و Y بستگی ندارد.

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۸۶

۴. شعاع دایره، ارتفاع، ...

۱.۴. شعاع دایره

۱.۱.۴. اندازهٔ شعاع دایره

۷۶. روی کره‌ای به شعاع ۲، سه دایره به شعاع ۱ طوری قرار گرفته‌اند و هر یک از آنها به دو دایرهٔ دیگر مماس است. شعاع دایره‌ای را بر روی کره پیدا کنید که کوچکتر از این دایره‌ها بوده و به هر یک از آنها مماس باشد.

۷۷. بین تمام عرقچینهای کروی دارای یک مساحت ثابت، کدام عرقچین قطعهٔ کروی با بیشترین حجم را ایجاد می‌کند؟

۲.۴. ارتفاع

۱.۲.۴. اندازهٔ ارتفاع مخروط

۷۸. کره‌ای به شعاع R هم حجم است با مخروط قائمی که سطح جانبی آن سه برابر مساحت قاعده‌اش می‌باشد. ارتفاع مخروط را پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۷۹. مخروطی را محیط بر کره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم، اگر نسبت سطح کل مخروط به سطح کره مساوی k باشد، ارتفاع مخروط را محاسبه کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۸۰. مخروطی داریم که مقطع آن با صفحه‌ای که از ارتفاعش می‌گذرد، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. رأس مخروط به طرف پایین است و کره‌ای به شعاع r در آن انداخته‌ایم. سپس در مخروط آن قدر آب ریخته‌ایم تا سطح آب بر کره مماس شود. اگر کره را از مخروط خارج کنیم، آب در چه ارتفاعی خواهد ایستاد؟

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۸۱. رأس مخروطی به ارتفاع H و شعاع قاعدهٔ R به طرف پایین است. در این مخروط تا ارتفاع h آب ریخته‌ایم، سپس گلولهٔ آهنی به شعاع r در آن انداخته‌ایم، به طوری که کاملاً در آب غوطه‌ور شده است. در این صورت آب در چه سطحی خواهد ایستاد؟

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳.۴. شعاع قاعده، ارتفاع استوانه

۸۲. l طول محور دیگ بزرگ استوانه‌ای است که دو طرفش دو نیمکره است. مطلوب است، محاسبهٔ ابعاد قسمت استوانه‌ای در صورتی که مساحت کل دیگ مساوی $4\pi a^2$ باشد.

۴.۴. شعاع قاعده، ارتفاع مخروط

۸۳. اندازهٔ شعاع قاعده و ارتفاع یک مخروط محیط بر یک کره به شعاع r را محاسبه کنید. در صورتی که می‌دانیم که مساحت دایرهٔ تماس، مساوی تفاضل مساحتهای عرقچینهای مشخص شده در کره است.

۵.۴. طول ضلع قاعدهٔ هرم

۸۴. در داخل کره‌ای به شعاع R هرم مثلث القاعدهٔ منتظمی محاط می‌کنیم. هرگاه فرجه‌های قاعده برابر α باشد، طول ضلع قاعدهٔ هرم را به‌دست آورید.

۵. پاره‌خط، کمان

۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط، کمان

۱.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۸۵. AB وتری به طول واحد، از کره‌ای به شعاع واحد است که با قطر CD از کره زاویهٔ $\frac{\pi}{3}$

می‌سازد. اگر $CA = \sqrt{۲}$ کوچکتر از CB باشد، طول پاره‌خط BD را تعیین کنید.

۸۶. هرم منتظم SABC بر کره‌ای به شعاع ۲ محیط شده است. S رأس هرم، ABC قاعدهٔ آن می‌باشد. طول ارتفاع SK هرم برابر است با ۶. ثابت کنید، صفحهٔ قاطع منحصر به فردی موجود است که یالهای AB و BC از قاعدهٔ هرم را در نقطه‌های M و N به قسمی قطع می‌کند که $MN = ۷$ و در نقطه‌ای به یک فاصله از M و N، بر کره مماس می‌شود و امتداد ارتفاع SK را از طرف K، در نقطه‌ای مانند D قطع می‌کند. طول پاره‌خط SD را حساب کنید.

۸۷. یک دایرهٔ عظیمه روی یک کره به شعاع R رسم شده است. فاصلهٔ قطب این دایرهٔ عظیمه از یک نقطه واقع براین دایرهٔ عظیمه را تعیین کنید.

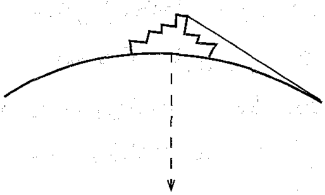
۸۸. از نقطه‌های واقع بر سطح کره، سه وتر برابر رسم کرده‌ایم که دو به دو با هم زاویه‌ای برابر ۲α می‌سازند. اگر شعاع کره برابر R باشد، طول این وترها را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۸۹. خط افق

فردریک در کنار دریا ایستاده است. دریا آرام است، و کوچکترین موجی در آن دیده نمی‌شود. چشمهای وی از سطح دریا ۱/۶۰ متر فاصله دارد. او به افق چشم دوخته است و به نظرش می‌رسد که در فاصلهٔ دوری از وی دریا و آسمان در یک خط به هم رسیده‌اند. در این موقع او خود را روی کره‌ای به شعاع ۶۳۶۰ کیلومتر تصوّر می‌کند و امّا معمّا :

آیا می‌توانید بگویید خط افق به چه فاصله‌ای از او قرار دارد؟



۹۰. روی عرشهٔ کشتی ناخدا از افسر جوانی که در کنارش ایستاده بود، خواست که فاصلهٔ تا افق را معیّن کند. افسر جوان قلم و کاغذی به‌دست گرفت و در طی چند لحظه جواب را یافت. او از فرمول $d = ۳/۶\sqrt{h}$ استفاده کرد که در آن d فاصله تا افق برحسب کیلومتر و h ارتفاع برحسب متر است. نشان دهید که این فرمول فاصله تا افق را با تقریب خوبی به‌دست می‌دهد (شعاع کرهٔ زمین را ۶۳۰۰ کیلومتر فرض کنید). اگر عرشه ۳۰ متر ارتفاع داشته باشد، فاصله تا افق چه‌قدر است؟

۹۱. مطلوب است، محاسبهٔ d فاصلهٔ یک نقطهٔ نورانی S از سطح کرهٔ (O , r)، به طوری که $\frac{1}{n}$ سطح کره روشن شود.

۹۲. فرض می‌کنیم که زمین کرهٔ کامل است و ریسمانی در روی خط استوا یک بار دور تا دور کرهٔ زمین پیچیده شده است. هرگاه قرار باشد این ریسمان در صفحهٔ استوا در وضعی واقع شود که در هر نقطه یک متر از سطح زمین ارتفاع داشته باشد، چه‌قدر باید به طول آن افزوده شود؟

الف) یک متر　　ب) 2π متر　　ج) 20π کیلومتر

د) به اندازهٔ شعاع کرهٔ زمین بعلاوهٔ یک متر

هـ) به اندازهٔ محیط دایرهٔ استوا، بعلاوهٔ یک متر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۹۳. نیمدایره‌ای به قطر AA' داده شده است. خط مماس بر این نیمدایره در نقطهٔ M، خط مماس در نقطهٔ A بر نیمدایره را در نقطهٔ B قطع کرده است. MP را عمود بر AA' رسم می‌کنیم. کمان با دو انتهای A و M را با $\overset{\frown}{ANM}$ نشان می‌دهیم. اندازهٔ $AP = x$ را چنان محاسبه کنید که با دوران شکل حول AA' نسبت حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ سطحهای ABMNA و APMNA مساوی k باشد.

مثال عددی : $k = \frac{1}{2}$.

۹۴. اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC را محاسبه کنید، در صورتی که بدانیم که حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ این مثلث، هنگامی که یکی پس از دیگری، حول هر یک از ضلعهایش، a، b و c دوران کند، هم‌ارز حجم کره‌هایی به شعاعهای α، β و γ باشد.

۹۵. مثلث متساوی‌الساقین ABC در داخل صفحهٔ P مفروض است ($AC = 2a$ و $AB = BC = l$). کره‌ای به شعاع r در نقطهٔ B بر صفحهٔ P مماس شده است. دو خط متنافر از نقطه‌های A و C گذشته و بر کره مماس می‌شوند. زاویهٔ هر یک از این دو خط با صفحهٔ P مساوی و برابر α می‌باشد. فاصلهٔ بین دو خط را پیدا کنید.

۹۶. یک سوراخ مدور به قطر ۴۰cm در یک فیبر ایجاد و کره‌ای به قطر ۵۰cm در این سوراخ گذاشته شده است. کره از روی فیبر چقدر پایینتر می‌رود؟

۹۷. مرکز کره‌ای، روی صفحهٔ قاعدهٔ هرم مثلث القاعدهٔ منتظمی قرار گرفته است، و رأسهای قاعده، روی سطح کره جا گرفته‌اند. طول پاره‌خط l، فصل مشترک سطح کره و هرم را پیدا کنید، در صورتی که شعاع کره R و زاویهٔ رأس هرم برابر α می‌باشد.

۹۸. کره‌ای به شعاع R مفروض است. در چه فاصله‌ای از مرکز کره صفحه‌ای رسم کنیم تا هرمی که رأسش در مرکز کره و قاعده‌اش مربع محاط در دایرهٔ مقطع است، سطح کل مساوی $4m^2$ داشته باشد؟

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۹۹. در مخروطی که رأس آن به طرف پایین قرار گرفته است، کره‌ای انداخته‌ایم. نسبت حجمهای این دو جسم هندسی مساوی m، نسبت شعاع قاعدهٔ مخروط به شعاع کره مساوی n و ارتفاع مخروط مساوی h است. فاصلهٔ مرکز کره را از رأس مخروط پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۰۰. سه سیب p_1، p_2 و p_3 (که آنها را کروی فرض می‌کنیم) روی یک میز به گونه‌ای قرار دارند که p_1 بر p_2 و p_2 بر p_3 مماس است. p_1 به شعاع ۳ سانتیمتر و p_2 به شعاع ۴ سانتیمتر و p_3 به شعاع ۳/۵ سانتیمتر است. کرمی که در مرکز p_1 لانه دارد، می‌خواهد با گذشتن از مرکز p_2 خود را به مرکز p_3 برساند. کوتاهترین راهی که این کرم می‌تواند، بپیماید چند سانتیمتر است؟

الف) ۱۴　　ب) ۱۰/۵　　ج) ۲۱　　د) ۱۳/۵　　هـ) ۱۴/۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۱۰۱. چهار کره، هر یک به شعاع ۱۰ سانتیمتر، روی یک میز کنار هم گذاشته شده‌اند که مرکزهای آنها رأسهای مربع به ضلع ۲۰ سانتیمتر است. کرهٔ دیگر به شعاع ۱۰ سانتیمتر روی این چهار کره قرار گرفته است. مرکز این کره نسبت به سطح میز چند سانتیمتر ارتفاع دارد؟

الف) $۱۰(\sqrt{۲}-۱)$　　ب) $۱۰\sqrt{۲}$　　ج) $۱۰(۱+\sqrt{۲})$　　د) ۳۰

هـ) $۱۰(۱+\sqrt{۳})$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲.۱.۵. اندازهٔ کمان

۱۰۲. ثابت کنید، کوتاهترین خطی که دو نقطه از سطح کره را به هم وصل می‌کند، کمانی از یک دایرهٔ عظیمه است که از این دو نقطه می‌گذرد (در این جا خطهایی مورد نظر هستند که از روی سطح کره می‌گذرند).

۱۰۳. سه نقطهٔ A، B و C روی سطح جانبی کره‌ای به شعاع R قرار دارند و به‌وسیلهٔ کمانهایی از دایره‌های عظیمه‌ای که کمانهایشان کمتر از نیمدایره می‌باشند، دوبه‌دو به همدیگر وصل شده‌اند. از وسطهای کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ دایرهٔ عظیمهٔ دیگری می‌گذرد که امتداد کمان $\overset{\frown}{BC}$ را در نقطهٔ K قطع می‌کند. طول کمان $\overset{\frown}{CK}$ را حساب کنید، در صورتی که $|BC|=l$، $(l<\pi R)$.

۱۰۴. ثابت کنید، روی یک کره ممکن نیست سه کمان از دایره‌های عظیمه را که هر یک از آنها 300° باشد، طوری قرار داد که هیچ دوتای آنها نقطه‌های مشترک داشته باشند.

۳.۱.۵. اندازهٔ یال چهاروجهی

۱۰۵. چهار کره به شعاع یک بر هم مماسند. سه کره بر زمین تکیه دارند و چهارمی روی آن سه تکیه دارد. یک چهاروجهی که طول هر یال آن s است، بر این کره‌ها محیط است. مقدار s برابر است با:

الف) $4\sqrt{2}$ ب) $4\sqrt{3}$ ج) $2\sqrt{6}$ د) $1+2\sqrt{6}$ هـ) $2+2\sqrt{6}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰

۲.۵. نسبت پاره‌خطها

۱۰۶. دو کره بر هم و بر وجه‌های فرجه‌ای که اندازهٔ آن α است، مماس شده‌اند. نقطه‌های A و B، نقطه‌های تماس دو کره با وجه‌های فرجه در نظر گرفته شده‌اند (A و B به کره‌های متفاوت و وجه‌های متفاوت تعلق دارند). پاره‌خط AB، در نقطه‌های برخوردش با سطحهای دو کره، به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۱۰۷. چهاروجهی ABCD در کره‌ای محاط است و می‌دانیم همهٔ ارتفاعهای آن در نقطهٔ H به هم رسیده‌اند. یکی از ارتفاعهای چهاروجهی و مثلاً AH، وجه روبه‌رو را در نقطهٔ A_1 و کره را در نقطهٔ A_2 قطع کرده است. ثابت کنید:

$$|HA_1| : |A_1A_2| = \frac{1}{2}$$

۶. شعاع کره

۱.۶. اندازهٔ شعاع کره

۱۰۸. اندازهٔ شعاع کره‌ای را بیابید که مساحت سطح آن، مساوی ۱ مترمربع است.

۱۰۹. اندازهٔ شعاع کره‌ای را بیابید که حجم آن مساوی ۱ لیتر است.

۱۱۰. عدد حجم کره‌ای با عدد سطح آن کره برابر است. شعاع این کره را بیابید.

۱۱۱. در کرهٔ مفروضی APB، CPD و EPF سه وتر متعامد همرس (در نقطهٔ P) هستند. اگر $\overline{AP}=2a$، $\overline{PB}=2b$، $\overline{CP}=2c$، $\overline{PD}=2d$، $\overline{EP}=2e$ و $\overline{PF}=2f$ شعاع کره، R را تعیین کنید.

۱۱۲. دو مثلث KLM و KLN با هم مساوی و در ضلع KL مشترکند و علاوه بر آن، $K\hat{L}M=K\hat{L}N=\frac{\pi}{3}$ و $LM=KN=6a$ و $KL=a$. صفحه‌های KLM و KLN بر همدیگر عمودند. کره‌ای در وسط پاره‌خطهای LM و KN بر آنها مماس است. شعاع این کره را پیدا کنید.

۱۱۳. در یک روز آفتابی کره‌ای بزرگ روی زمینی افقی گذاشته شده است. در لحظه‌ای از روز، سایهٔ کره روی زمین به نقطه‌ای می‌رسد که از نقطهٔ اتکای کره بر زمین ۱۰ متر فاصله دارد. در همان لحظه، میله‌ای به طول یک متر که قائم بر سطح زمین قرار دارد دارای سایه‌ای به طول ۲ متر است، شعاع کره چند متر است؟

الف) ۲/۵ ب) $9-4\sqrt{5}$ ج) $8\sqrt{10}-23$ د) $6-\sqrt{15}$

هـ) $10\sqrt{5}-20$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۱۴. شعاعهای r و r′ $(r \geq r')$ از دو مقطع موازی ایجاد شده در یک کره و d فاصلهٔ بین این دو مقطع داده شده است. شعاع کره را حساب کنید.

۱۱۵. کره‌ای به مرکز O داده شده است. کرهٔ دیگری بر نقطهٔ O مرکز این کره می‌گذرد. اندازهٔ r شعاع کرهٔ دوم را چنان بیابید که منطقهٔ ایجاد شده در کرهٔ دوم توسط کرهٔ اولی، مساحت ثابتی داشته باشد.

۱۱۶. دو نقطهٔ A و O داده شده است. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع متغیر r رسم می‌کنیم و از A مماس AB را بر آن رسم می‌نماییم. شکل را حول OA دوران می‌دهیم. مقدار r را چنان بیابید که سطح ایجاد شده از دوران پاره‌خط AB مساوی سطح کرهٔ به مرکز O باشد.

۱۱۷. اندازهٔ شعاع کره‌ای را به دست آورید که اندازهٔ سطح آن، مساوی اندازهٔ مساحت جانبی یک مخروط به شعاع قاعده و ارتفاع مساوی R باشد.

۱۱۸. اندازهٔ شعاع کره‌ای هم ارز با یک استوانه با شعاع قاعدهٔ R وارتفاع 2R را تعیین کنید.

۱۱۹. سطح جانبی یک مخروط قائم برابر ۶۰ متر مربع و سطح کل آن برابر است با سطح مثلثی به ضلعهای ۱۳، ۱۴ و ۱۵ متر. مطلوب است، شعاع کره‌ای که حجم آن با حجم یک مخروط برابر است.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۲۰. چهار کرهٔ توپر بر سطح میزی قرار دارند. هر کره بر سه کرهٔ دیگر مماس است. اگر شعاع سه تا از کره‌ها R باشد، شعاع کرهٔ چهارم چه قدر است؟

۱۲۱. چهار کره روی یک صفحه به گونه‌ای واقع شده‌اند که هر یک از آنها بر سه کرهٔ دیگر مماس است. اگر سه عدد از این کره‌ها به شعاع R باشند، شعاع کرهٔ چهارم چه‌قدر است؟

الف) R ب) $\frac{R}{۲}$ ج) $\frac{R}{۳}$ د) ۲R هـ) $\frac{۲R}{۳}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۱۲۲. چهاروجهی T در کرهٔ واحدی به مرکز O محاط شده است. شعاع کرهٔ Sی را که از مرکز ثقل هر وجه T می‌گذرد، معین کنید. فاصلهٔ بین O و مرکز S را نیز به صورت تابعی از طولهای یالهای T تعیین کنید.

المپیادهای ریاضی امریکا

۱۲۳. تفاضل مساحتهای سطحهای دو کره، مساوی مساحت کره‌ای به شعاع a و تفاضل شعاعهای آنها مساوی طول b است. اندازهٔ شعاعهای دو کره را تعیین کنید.

۱۲۴. سه کره مماس بر هم، بر صفحهٔ یک مثلث در رأسهای آن مماسند. شعاع این کره‌ها را پیدا کنید. در صورتی که ضلعهای مثلث a، b و c باشند.

۱۲۵. سه کره را که در سه نقطهٔ A، B و C بر صفحهٔ B مماس و دو به دو نیز بر یکدیگر مماسند، درنظر می‌گیریم. شعاعهای x، y و z از این کره‌ها را بر حسب a، b و c فاصله‌های سه نقطهٔ A، B و C از یکدیگر پیدا کنید.

۱۲۶. پاره‌خط AB عمود مشترک دو خط غیرواقع در یک صفحهٔ Ax و By است. ثابت کنید، کره‌ای که بر دو نقطهٔ A و B، و بر دو نقطهٔ C و D (دو انتهای پاره‌خط راستی که روی دو خط داده شده حرکت می‌کنند) می‌گذرد، شعاع ثابتی دارد.

۲.۶. نسبت شعاعها

۱۲۷. مرکز کرهٔ α، بر سطح کرهٔ β واقع شده است. نسبت مساحت سطح کره β که در داخل کره α قرار دارد، به تمام مساحت سطح کرهٔ α، برابر $\frac{۱}{۵}$ است. نسبت شعاعهای دو کرهٔ α و β را پیدا کنید.

۱۲۸. حجم کره‌ای نصف حجم کرهٔ دیگری است. نسبت شعاعهای دو کره را بیابید؟

۱۲۹. دو کره با شعاعهای مساوی و دو کره با شعاعهای متمایز با آنها طوری قرار داده شده‌اند که هر یک از کره‌ها، به سه کرهٔ دیگر و یک صفحهٔ مفروض مماسند. نسبت شعاع بزرگترین کره را به شعاع کوچکترین کره پیدا کنید.

۳.۶. رابطهٔ بین شعاعها

۱۳۰. A، B و C، سه نقطهٔ واقع در درون کرهٔ S هستند، به نحوی که AB و AC بر قطری از کرهٔ S که از A می‌گذرد، عمودند. دو کره از نقطه‌های A، B و C گذرانده‌ایم که هر دوی آنها، بر کرهٔ S مماسند. ثابت کنید، مجموع شعاعهای این دو کره، برابر با شعاع کرهٔ S است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۲

۱۳۱. دو کره به شعاعهای r_1 و r_2 که بر هم منطبق نیستند، در درون کرهٔ S به شعاع R قرار دارند و بر آن مماسند. هر یک از دو کرهٔ درونی از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرند و می‌دانیم که عمود بر صفحهٔ ABC در نقطهٔ A، از مرکز کرهٔ S عبور می‌کند. ثابت کنید: $r_1 + r_2 = R$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۲

۴.۶. افزایش شعاع کره

۱۳۲. وقتی محیط یک بادکنک از ۲۰ سانتیمتر به ۲۵ سانتیمتر افزایش یابد، افزایش شعاع آن برحسب سانتیمتر برابر است با:

الف) ۵ ب) $۲\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۵}{\pi}$ د) $\frac{۵}{۲\pi}$ هـ) $\frac{\pi}{۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۵.۶. قطر کره

۱۳۳. قطر کره‌ای را بیابید که حجم آن با عدد مساحت رویهٔ آن برابر باشد؟

۱۳۴. ثابت کنید که هر وتری از یک کره، از قطر آن کره کوچکتر است.

۱۳۵. قطر تیلهٔ کوچک را بیابید.

سه جسم کروی، هر کدام به قطر ۱۰ سانتیمتر، را روی میز کنار هم قرار می‌دهیم، به‌طوری که این سه کره دو به دو با هم در تماس باشند. حال چهارمین کره به قطر ۱۰ سانتیمتر را روی آنها قرار می‌دهیم. در فضایی که بین چهار کره باقی می‌ماند، یک تیلهٔ

کوچک می‌توان قرار داد. بزرگترین قطری که این تیله می‌تواند داشته باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ تقریبی تا دو رقم بعد از ممیز کافی است. cm □□□ . □□

۱۳۶. سطح کره‌ای را به سه بخش تقسیم کرده‌ایم. به نحوی که هر بخش، رنگ خودش را دارد و هر مرز دو بخش دارای دو رنگ است. ثابت کنید می‌توان قطری از کره را پیدا کرد که دو سر آن از نظر رنگ یکسان باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۷. مساحت

۱.۷. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷. اندازهٔ مساحت سطح کره

۱۳۷. اندازهٔ مساحت سطح کره‌ای به شعاع ۶ را تعیین کنید.

۱۳۸. سطح هر کره برابر است با $\frac{۴}{۹}$ سطح کل مخروط متساوی‌الاضلاع محیط بر آن کره.

۱۳۹. نیمدایره‌ای به شعاع ۸ سانتیمتر حول قطرش دوران می‌کند، سطح جسم حاصل چند سانتیمترمربع است؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۵۶π ۴) ۱۲۸π

۲.۱.۷. اندازهٔ مساحت بخشی از کره

۱۴۰. کرهٔ S، به مرکز O و به شعاع r، داده شده است. P را نقطه‌ای در بیرون کرهٔ S، S' را کره‌ای به مرکز P و به شعاع PO فرض می‌کنیم. اگر مساحت بخشی از کرهٔ S' را که در درون کرهٔ S قرار دارد، F بنامیم، ثابت کنید مقدار F بستگی به جای نقطهٔ P ندارد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۲

۱۴۱. مرکز کره‌ای به شعاع R، در خارج فرجه، روی یکی از وجه‌های آن و به فاصلهٔ a $(a < R)$ از یال آن قرار دارد. اندازهٔ فرجه α می‌باشد. مساحت آن بخش از کره را پیدا کنید که در داخل فرجه محصور شده است.

۱۴۲. سطح کروی بر سه یال مکعب که از یک رأس گذشته‌اند، و به سه وجه مکعب که در رأس مقابل رأس قبلی به هم رسیده‌اند، مماس است. مطلوب است محاسبهٔ بخشی از سطح کره که در بیرون مکعب قرار دارد، به شرطی که طول یال مکعب برابر a باشد.
از مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۴۳. حدود سه چهارم سطح زمین را آب پوشانده است. سطح خشکیهای کره زمین را به‌طور تقریبی پیدا کنید؟ (شعاع کره زمین تقریباً ۶۴۰۰km است.)

۳.۱.۷. اندازهٔ مساحت منطقهٔ کروی

۱۴۴. ثابت کنید مساحت سطح آن قسمت از یک کره، که بین دو صفحهٔ موازی و قاطع کره محصور شده است، از فرمول،

$$S = ۲\pi Rh$$

به دست می‌آید. دراینجا، R شعاع کره و h فاصله بین دو صفحهٔ موازی است.

۱۴۵. در کره‌ای به شعاع ۱۳ سانتیمتر منطقه‌ای کروی چنان در نظر بگیرید که ارتفاعش ۱۱ سانتیمتر باشد، مساحت این منطقه را حساب کنید.

۱۴۶. ثابت کنید، منطقه‌ای که دو کرهٔ هم مرکز داده شده در یک کره دلخواه که از مرکز مشترک آنها می‌گذرد، به وجود می‌آورند، مساحت ثابتی دارد.

۱۴۷. در کره‌ای به شعاع ۸ سانتیمتر ارتفاع منطقه‌ای ۴ سانتیمتر است. سطح این منطقه چند سانتیمتر مربع است؟

۱) ۴۸π ۲) ۹۶π ۳) ۳۲π ۴) ۶۴π

۱۴۸. در کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر، مساحت منطقهٔ کروی به ارتفاع ۷ سانتیمتر چه‌قدر است؟

۱) $۱۴۰\pi cm^۲$ ۲) $۷۰\pi cm^۲$ ۳) $۷۰ cm^۲$ ۴) $۱۴۰ cm^۲$

۴.۱.۷. اندازهٔ مساحت عرقچین کروی

۱۴۹. اندازهٔ مساحت عرقچینی به شعاع قاعدهٔ ۵ در کره‌ای به شعاع ۱۳ را تعیین کنید.

۱۵۰. نشان دهید که مساحت یک عرقچین کروی معادل است با مساحت دایره‌ای که شعاعش، وتر کمان مولد عرقچین باشد.

۱۵۱. مساحت عرقچین کروی به ارتفاع ۸ سانتیمتر از کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر کدام است؟

۱) $۴۰\pi cm^۲$ ۲) $۸۰\pi cm^۲$ ۳) $۱۶۰\pi cm^۲$ ۴) $۱۶۰ cm^۲$

۱۵۲. ارتفاع عرقچینی کروی در یک کره به شعاع ۱۲ سانتیمتر برابر ۸ سانتیمتر است. مساحت عرقچین چند سانتیمترمربع است؟

۱) ۹۶ ۲) ۴۸π ۳) ۱۹۲π ۴) ۱۹۲

۱۵۳. اندازهٔ مساحت بخشی از سطح کرهٔ زمین که توسط یک خلبان که به فاصله h از سطح زمین قرار دارد، دیده می‌شود، چه‌قدر است؟

مثال عددی $h = ۵۰۰۰m$

۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت قاچ کروی

۱۵۴. در کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر مساحت قاچ کروی را که زاویهٔ مسطحهٔ آن ۲۴° است، حساب کنید.

۱۵۵. در کره‌ای که سطحش ۳۲۴π است، مساحت منطقه‌ای به ارتفاع ۵ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۹۰π ۳) ۴۵π ۴) ۱۸۰π

۷.۱.۶. اندازهٔ مساحت قطاع کروی

۱۵۶. مساحت قطاع کروی برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن برابر باشد با پاره‌خطی که رأس قطاع را به یکی از نقطه‌های محیط قاعدهٔ آن وصل می‌کند.

از ارشمیدس

۷.۱.۷. اندازهٔ مساحت قطعهٔ کروی

۱۵۷. بین تمام قطعه‌های کروی دارای یک قاعده و حجم مساوی، کدام قطعه کمترین مساحت را دارد؟

۷.۱.۸. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۷.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۵۸. مساحت مثلثی را پیدا کنید که از برخورد کره‌ای به شعاع R با یک کنج سه‌وجهی به‌وجود آمده باشد. اندازه‌های فرجه‌های کنج α، β و γ و رأس آن بر مرکز کره منطبق است.

۱۵۹. سه دایره با شعاع $\sqrt{۲}$ و دو به دو مماس بر هم، روی کره‌ای به شعاع ۲ قرار دارند. آن

قسمت از سطح کره که در خارج دایره‌ها قرار دارد، دو مثلث منحنی‌الخط مشخص می‌سازند. مساحت این مثلثها را پیدا کنید.

۱۶۰. کره‌ای به شعاع واحد و کنجی سه وجهی که رأس آن در مرکز کره است، مفروضند. ثابت کنید، مساحت مثلث کروی که از برخورد کنج با سطح کره به‌دست می‌آید، برابر است با $(\alpha+\beta+\gamma)-\pi$، که در آن، α، β و γ عبارتند از مقدار زاویه‌های دووجهی این کنج سه وجهی (که در واقع، همان زاویه‌های مثلث کروی‌اند).

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۶۱. مساحت یک مثلث سه قائمه بر روی کره‌ای به قطر ۲۸ اینچ را پیدا کنید.

۱۶۲. نشان دهید که مساحت A از یک مثلث کروی به زیادتی کروی E با

$$A=\frac{\pi r^{2}E}{180^\circ}$$

داده می‌شود که در آن r شعاع کره است.

۱۶۳. نشان دهید که مساحت یک مثلث کروی، برحسب درجهٔ کروی، برابر با زیادتیِ کروی آن است.

۱۶۴. بنابر تعریف یک درجهٔ کروی مساحتی است از کره معادل با (۱/۷۲۰) اُم سطح کل آن. نشان دهید که مساحت یک هلال به زاویهٔ α درجه برابر با 2π درجهٔ کروی است.

۲.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت چهارضلعی

۱۶۵. کره‌ای به شعاع R بر یالهای یک کنج چهاروجهی که اندازهٔ هر یک از زاویه‌های رأس آن 60° می‌باشد، مماس است. سطح جانبی کره که در داخل کنج قرار دارد، شامل دو چهارضلعی منحنی‌الخط می‌باشد. مساحت چهارضلعیها را پیدا کنید.

۳.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت ۸ وجهی منتظم

۱۶۶. سطح کره‌ای برابر است با Q، سطح ۸ وجهی منتظمی را پیدا کنید که در این کره محاط شود.

۴.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت منشور

۱۶۷. مساحت سطح کل منشور محیط بر کره‌ای را پیدا کنید، در صورتی که مساحت قاعده آن S باشد.

۵.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت هرم ناقص

۱۶۸. دور یک کره، هرم ناقص چهار بر منتظمی محیط شده است. سهم هرم a می‌باشد. سطح جانبی آن را پیدا کنید.

۶.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت مخروط ناقص

۱۶۹. دو کره به شعاع R، r مماس خارجند. مخروطی بر این دو کره محیط کرده‌ایم. سطح جانبی مخروط ناقصی را پیدا کنید که قاعده‌های آن دایره‌های مماس بر دو کره باشند.

۱۷۰. کره‌ای به سطح S را در مخروط ناقصی محاط کرده‌ایم. زاویهٔ مولد مخروط ناقص با قاعدهٔ بزرگتر مساوی ۶۰ درجه است. سطح جانبی مخروط ناقص را محاسبه کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۷۱. بر کره‌ای مخروط ناقصی محیط شده است که قاعده‌های آن دایره‌های عظیمهٔ دو کرهٔ دیگر هستند. سطح کل مخروط ناقص را پیدا کنید. در صورتی که مجموع مساحتهای سطح جانبی سه کره برابر S می‌باشد.

۷.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت n وجهی

۱۷۲. بر روی کره‌ای، دایره‌ای داده شده است. ثابت کنید از همه n وجهیهای کروی که دایرهٔ مفروض را در درون خود دارند، یک n وجهی کروی منتظم کمترین مساحت را دارد.

۸.۸.۱.۷. اندازهٔ سطح استوانه

۱۷۳. ثابت کنید بین جمیع استوانه‌های محاط در کرهٔ مفروض استوانه‌ای سطح جانبی‌اش ماکزیمم است که فصل مشترک صفحه گذرنده بر محور دوران استوانه با استوانه، مربع باشد.

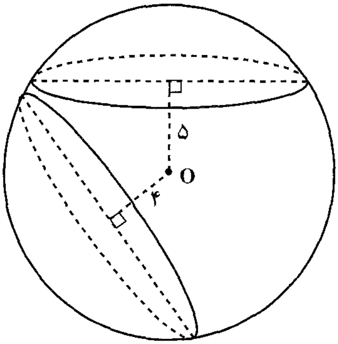
۹.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۱۷۴. سطح ایجاد شده از دوران یک دایره حول محوری را به دست آورید که تصویر آن محور روی صفحهٔ دایره، از مرکز دایره می‌گذرد.

۱۷۵. عدد اندازهٔ حجم یک کره، ۳ برابر عدد اندازهٔ مساحت کره است. مساحت دایرهٔ عظیمهٔ این کره کدام است؟

۱) 36π ‏ ۲) 49π ‏ ۳) 64π ‏ ۴) 81π

۲.۷. نسبت مساحتها



۱۷۶. در کره‌ای به شعاع $10\,cm$، با دو صفحه که از مرکز کره $4\,cm$ و $5\,cm$ فاصله دارند، مقطعهایی ایجاد شده است. مساحت کدام مقطع بزرگتر است؟ نسبت مساحتهای دو مقطع را بیابید.

۱۷۷. حجم یک کره با حجم یک استوانه مستدیر قائم برابر است. شعاع کره با شعاع قاعدهٔ استوانه برابر است. مساحت رویهٔ کره و مساحت رویهٔ کل استوانه را با یکدیگر مقایسه کنید.

۳.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۱۷۸. استوانهٔ دوّاری با ارتفاع R و شعاع قاعدهٔ R، و نیمکره‌ای با همین قاعده را در نظر می‌گیریم ثابت کنید که مساحت جانبی استوانه، مساوی مساحت سطح این نیمکره است.

۱۷۹. کره‌ای و نقطه‌ای در داخل آن مفروضند. سه صفحه دو به دو عمود بر هم، به‌طور دلخواه از این نقطه می‌گذرند و کره را در سه دایره قطع می‌کنند. ثابت کنید مجموع مساحتهای این سه دایره مقدار ثابتی است. این مجموع را حساب کنید، در صورتی که شعاع کره برابر R و فاصلهٔ بین نقطهٔ برخورد صفحات از مرکز کره برابر d می‌باشد.

۱۸۰. دو خط شکستهٔ منتظم که ضلعهایشان موازی یکدیگرند، داده شده‌اند. یکی از آنها محاط و دیگری محیط بر یک نیمدایره است. ثابت کنید که اگر این شکل حول قطری از نیمدایره که دو انتهای این دو خط شکسته را به هم وصل می‌کند دوران نماید، مساحت سطح کروی ایجاد شده به‌وسیلهٔ نیمدایره، واسطهٔ هندسی بین مساحتهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ دو خط شکسته است.

۱۸۱. دو دایره به مرکزهای OO' مماس خارجی بر یکدیگر و یک مماس مشترک خارجی AA' را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که اگر شکل حول OO' دوران کند مساحت سطح ایجاد شده به وسیلهٔ AA'، واسطهٔ هندسی بین مساحتهای کره‌های ایجاد شده به‌وسیلهٔ دو دایره می‌باشد.

۱۸۲. ثابت کنید که مساحت یک کره، مساحت کل استوانهٔ متساوی‌الاضلاع محیط بر آن و مساحت کل مخروط متساوی‌الاضلاع محیط بر آن بترتیب متناسب با عددهای ۴، ۶ و ۹ هستند. (یک استوانه را متساوی‌الاضلاع می‌نامند هنگامی که صفحهٔ نصف‌النهاری مقطعش مربع باشد ؛ یک مخروط را متساوی‌الاضلاع می‌نامند، هنگامی که مقطع نصف‌النهاریش مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد).

۱۸۳. ثابت کنید که مساحت سطح استوانهٔ محیط بر یک کره، واسطهٔ هندسی بین مساحت کره و مساحت مخروط متساوی‌الاضلاع محیط بر این کره است. همین ویژگی برای حجم آنها نیز برقرار است.

۱۸۴. ثابت کنید مساحت سطح استوانهٔ محیط بر یک کره، واسطهٔ عددی بین مساحتهای کرهٔ محاطی و مساحت کرهٔ محیط بر این استوانه است.

۱۸۵. از رأسهای A، B، C و D از یک چهارضلعی کروی به عنوان قطب، کمانهای دایره‌های عظیمهٔ ختم شده به ضلعهای چهارضلعی، و ممتد در یک جهت را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مساحت شکلی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، مساوی نصف و مسطح کره است. همین مسأله را برای یک چندضلعی کروی با تعداد دلخواه ضلع حل کنید.

۸. حجم

۱.۸. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸. اندازهٔ حجم کره

۱۸۶. در داخل کره و در یک طرف مرکز آن دو صفحهٔ موازی به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر رسم کرده‌ایم. این دو صفحه دو عرقچین کروی به‌وجود آورده‌اند که شعاع قاعده‌های آنها بترتیب ۹ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر است، حجم کره را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۸۷. نیمدایره‌ای به قطر ۱۲ سانتیمتر حول قطرش دوران می‌کند. حجم جسم حاصل چند سانتیمترمکعب است؟

۱) ۲۳۰۴π　　۲) ۲۱۶π　　۳) ۱۴۴π　　۴) ۲۸۸π

۱۸۸. مساحت سطح کره‌ای برابر است با ۱۰۰π، حجم این کره برابر است با :

۱) $۲۰۰\pi cm^۳$ ۲) $\frac{۵۰۰\pi}{۳}cm^۳$ ۳) $\frac{۴۰۰\pi}{۳}cm^۳$ ۴) $۱۰۰\pi cm^۳$

۱۸۹. مساحت دایرهٔ عظیمهٔ کره‌ای برابر ۸۱π است. حجم این کره چند است؟

۱) ۹۷۲π ۲) ۶۴۸π ۳) ۱۲۹۶π ۴) ۹۷۲

۱۹۰. شعاع مخزنی کروی $۲/۱m$ است. این ظرف چند لیتر گنجایش دارد؟ (π را برابر با $۳\frac{۱}{۷}$ فرض کنید.)

۱۹۱. ثابت کنید که حجم کره از فرمول $\frac{۱}{۶}\pi d^۳$ به‌دست می‌آید که d قطر کره است.

۱۹۲. هرم منظمی با قاعدهٔ مربع شکل، به ارتفاع h است. عمودی که از مرکز کرهٔ محیطی هرم، بر یکی از وجه‌های جانبی فرود آورده‌ایم، با ارتفاع هرم، زاویه‌ای برابر α ساخته است. حجم کره را پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۹۳. مخزن آب یک شهر، منبعی است کروی. مهندسی که قدش ۲ متر است ضمن بازدید وقتی به فاصلهٔ ۶ متری از محل تماس منبع با زمین ایستاده بود، سرش با منبع مماس شد. با توجه به این که مصرف شهر ۴۰۰۰۰ لیتر آب در ساعت است بی‌درنگ حساب کرد که آب مخزن برای چه مدت مصرف شهر کافی است. محاسبهٔ او چگونه بود و به چه نتیجه‌ای انجامید؟

۲.۱.۸. اندازهٔ حجم بخشی از کره

۱۹۴. در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای محاط کرده‌ایم، به‌طوری که محور استوانه از مرکز کره می‌گذرد و قطر قاعدهٔ استوانه مساوی شعاع کره شده است. حجم قسمتی از کره که باقیمانده است، به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱۹۵. یک متوازی‌السطوح با قاعدهٔ مستطیل به ضلعهای ۱۲ در ۲۰، در کره‌ای به قطر ۲۵ محاط شده است. حجم بخشی از کره را که بیرون متوازی‌السطوح است، بیابید.

۱۹۶. کره‌ای به قطر یک مخروط رسم کرده‌ایم. حجم بخشی از کره را که در داخل مخروط قرار دارد، پیدا کنید، به شرطی که ارتفاع مخروط برابر h و زاویهٔ رأس آن در مقطع محوری برابر ۲α باشد.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۳.۱.۸. اندازهٔ حجم قطعهٔ کروی

۱۹۷. نشان دهید که حجم قطعهٔ کروی با عبارت $V=\frac{h}{۶}(b+b'+۴b'')$ مشخص می‌شود که در آن h ارتفاع قطعه، b و 'b قاعده‌های قطعه و "b مساحت مقطعی از کره است که از وسط ارتفاع، موازی قاعده‌های قطعه رسم می‌شود.

۱۹۸. ثابت کنید که حجم یک قطعهٔ کروی برابر است با تفاضل با حجم استوانه‌ای که همان ارتفاع را دارد و قاعده‌اش، مقطعی از قطعه است که موازی و متساوی‌الفاصله از دو قاعدهٔ قطعه می‌باشد، و نصف حجم کره‌ای به قطر ارتفاع، یعنی:

$$V=\left(\pi P''^{۲}h-\frac{۱}{۱۲}\pi h^{۲}\right)$$

۱۹۹. حجم یک قطعهٔ کروی برابر است با حجم استوانه‌ای با همین ارتفاع و قاعده‌ای که به یک فاصله از قاعده‌های منطقه است، منهای نصف حجم کره‌ای به قطر ارتفاع منطقه.

$$V=\pi r^{۲}h-\frac{۱}{۱۲}\pi h^{۳}$$

۲۰۰. مساحت یک قطعهٔ کروی برابر است با S. ماکزیمم حجم آن چه‌قدر است؟

۲۰۱. بین تمام قطعه‌های کروی دارای یک قاعده و مساحت مساوی، کدام قطعه بیشترین حجم را داراست؟

۴.۱.۸. اندازهٔ حجم عرقچین کروی

۲۰۲. اندازهٔ حجم عرقچین کروی به شعاع قاعدهٔ ۵ سانتیمتر را در کره‌ای به شعاع ۱۳ سانتیمتر تعیین کنید.

۲۰۳. ظرف کره‌ای شکل به شعاع r را تا ارتفاع $\frac{۳r}{۲}$ از آب پر کرده‌ایم. حجم آب کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۸}\pi r^{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}\pi r^{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۸}\pi r^{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}\pi r^{۳}$

۵.۱.۸. اندازهٔ حجم قاچ کروی

۲۰۴. کره‌ای به شعاع ۱۲ داده شده است. حجم قاچ کروی به زاویهٔ ۶۰ درجه را تعیین کنید.

۲۰۵. در کره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر حجم قاچ کروی به زاویهٔ °۳۰ چند سانتیمتر مکعب است؟

۱) ۱۹۲π ۲) ۹۶π ۳) ۲۸۸π ۴) ۳۸۴π

۶.۱.۸. حجم قطاع کروی

۲۰۶. در کره‌ای به شعاع ۴ سانتیمتر حجم قطاع کروی به ارتفاع ۳ سانتیمتر، چند سانتیمتر مکعب است؟

۱) ۳۲π ۲) ۶۴π ۳) ۱۶π ۴) ۴۸π

۷.۱.۸. اندازهٔ حجم حلقهٔ کروی

۲۰۷. ثابت کنید که اندازهٔ حجم یک حلقهٔ کروی برابر است با حاصلضرب دو سوم ارتفاع آن در اندازهٔ مساحت مقطع آن که از رسم صفحهٔ عمودمنصف‌ارتفاع آن، پدید می‌آید.

۲۰۸. ثابت کنید حجم حاصل از دوران کمانی از یک دایره، حول قطری از آن که آن را قطع نمی‌کند، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{۱}{۶}\pi a^{۲} h$$

که در آن a طول وتر این کمان، و h طول تصویر آن روی قطر می‌باشد. (حجم حلقهٔ کروی).

۸.۱.۸. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۱.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم عدسی

۲۰۹. اندازهٔ حجم یک عدسی دو طرفه محدب را برحسب شعاعهای r و r′ دو کره و ضخامتش یعنی e، به‌دست آورید.

۲.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۲۱۰. در کره‌ای به شعاع R، قطر AB رسم شده است. دو خط در نقطه‌های A و B بر کره مماس و با هم زاویهٔ α می‌سازند ($\alpha < ۹۰$). روی این خطها نقطه‌های C و D طوری اختیار شده‌اند که CD بر کره مماس بوده و زاویهٔ بین AB و CD برابر φ می‌باشد ($\varphi < ۹۰$). حجم چهاروجهی ABCD را پیدا کنید.

۳.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم منشور

۲۱۱. کره‌ای در یک منشور قائم محاط شده است. هر یک از قاعده‌های منشور، یک مثلث قائم‌الزاویه است. ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ قائمه بر وتر این مثلث طولی برابر h دارد و با یکی از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مطلوب است محاسبهٔ حجم منشور.

۴.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم هرم

۲۱۲. کره‌ای به شعاع R، بر همهٔ وجه‌های جانبی هرم مثلث‌القاعده‌ای در وسط ضلعهای قاعده‌هایشان مماس است. پاره‌خطی که رأس هرم را به مرکز کره وصل می‌کند، در محل برخورد خود با قاعده نصف می‌گردد. حجم هرم را پیدا کنید.

۵.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم استوانه

۲۱۳. حجم استوانه‌ای که بر کره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر محیط شده است، چند سانتیمتر مکعب است؟

۱) ۲۵۰π ۲) ۱۲۵π ۳) ۱۵۰π ۴) ۱۷۵π

۲۱۴. در کره‌ای به شعاع R، استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه را به عنوان تابعی از شعاع قاعدهٔ آن پیدا کنید.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۲۱۵. شعاع کره‌ای ۱ متر است. حجم بزرگترین استوانه‌ای را که می‌توان از این کره برید، حساب کنید.

۲۱۶. ثابت کنید بین استوانه‌های محاط در کره‌ای به شعاع R استوانه‌ای حجمش ماکزیمم می‌شود که نسبت شعاع قاعدهٔ استوانه به شعاع کره برابر $\sqrt{۲}$ به $\sqrt{۳}$ باشد.

۲۱۷. حجم بزرگترین استوانه‌ای که درکره‌ای به شعاع R می‌توان محاط کرد، کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi R^۳}{\sqrt{۶}}$ ۲) $\frac{۴\pi R^۳}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۴\pi R^۲}{۳\sqrt{۳}}$

۲۱۸. کره‌ای بر مولدها و بر دو قاعدهٔ یک استوانه به ارتفاع h مماس است. با معلوم بودن اندازهٔ h، حجم بخشی از استوانه را که شامل کره نیست، به دست آورید.

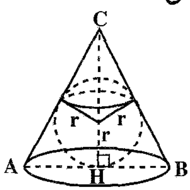
۲۱۹. یک حلب استوانه‌ای به ارتفاع ۲۵cm و شعاع قاعدهٔ ۱۲cm پر از آب است. کره‌ای به‌شعاع ۲۰cm را در حلب فرو می‌بریم و آن‌گاه بیرون می‌آوریم. چه‌قدر آب در حلب باقی می‌ماند؟

۶.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم مخروط

۲۲۰. حجم یک مخروط محیط بر یک کره مساوی است با حاصلضرب سطح کل آن در $\frac{۱}{۳}$ شعاع کره.

۲۲۱. ثابت کنید بین جمیع مخروطهای محاط در کره، مخروطی حجمش ماکزیمم است که نسبت شعاع کره به ارتفاع مخروط برابر ۳ به ۴ باشد.

۲۲۲. قطر قاعدهٔ یک مخروط قائم مستدیر ۱۲cm و ارتفاع آن ۲۴cm است. مخروط را پر از آب می‌کنیم. کره‌ای را تا حد ممکن در مخروط فرو می‌بریم. دقیقاً نصف کره خارج از آب می‌ماند. پس از خارج کردن کره چه‌قدر آب در مخروط می‌ماند؟



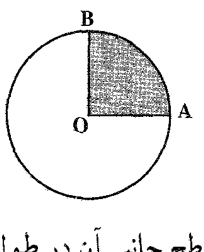
۲۲۳. در شکل، کره در مخروط مستدیر قائم محاط است. AB قطر قاعده و C رأس مخروط است. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. حجم مخروط را برحسب r، شعاع کره، پیدا کنید.

۲۲۴. حجم یک مخروط ناقص محیط بر یک کره برابر است با حاصلضرب سطح کل این مخروط ناقص در $\frac{۱}{۳}$ شعاع کره.

۲۲۵. ثابت کنید حجم یک استوانه، حجم یک مخروط یا یک مخروط ناقص دوار محیط بر یک کره، مساوی حاصلضرب مساحت کل آن در $\frac{۱}{۳}$ شعاع کره است.

۷.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم جسم

۲۲۶. حجم ایجاد شده از دوران یک مثلث حول خط راستی که در صفحهٔ آن مثلث قرار دارد اما آن را قطع نمی‌کند، برابر است با حاصلضرب اندازهٔ مساحت مثلث در اندازهٔ محیط دایرهٔ پیموده شده توسط مرکز ثقل این مثلث.



۲۲۷. ربع دایرهٔ AOB به شعاع OA = ۶ سانتیمتر حول OA دوران می‌کند. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $۲۸۸\,cm^۳$ ۲) $۲۸۸\,\pi cm^۳$ ۳) $۱۴۴\,cm^۳$

۴) $۱۴۴\pi cm^۳$

۲۲۸. کره‌ای به شعاع R، بر یکی از قاعده‌های مخروط ناقص، و بر سطح جانبی آن در طول دایره‌ای که منطبق بر دایرهٔ قاعده دیگر مخروط است، مماس می‌باشد. حجم جسمی را پیدا کنید که از ترکیب یک مخروط و یک کره ساخته شده است. در صورتی که مساحت سطح کل این جسم برابر S می‌باشد.

۲۲۹. حجم جسمی را پیدا کنید که از دوران یک شش ضلعی منتظم دور یکی از اضلاعش به‌دست آید (ضلع شش ضلعی را a بگیرید).

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۳۰. مطلوب است حجم جسمی که از دوران یک شش ضلعی منتظم به ضلع a دور قطری که آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، به دست آید. این حجم را با حجم کرهٔ محیطی آن مقایسه کنید.

۲۳۱. یک توپ کروی به شعاع ۳cm در مرکزش دارای حفره‌ای به شعاع ۲cm است. حجم این جسم چه‌قدراست؟

۲۳۲. حجم محصور بین دو کرهٔ هم مرکز به شعاعهای a و b برابر است با حجم مخروط ناقصی که قاعده‌هایش مساوی دایره‌های عظیمهٔ این دو کره و ارتفاعش مساوی ۴ برابر فاصلهٔ این دو سطح کروی است، یعنی : $V = \frac{۴}{۳}\pi(a^{۳} - b^{۳})$.

۲۳۳. کمترین فاصلهٔ بین دو کرهٔ مساوی برون هم، برابر a است. اندازهٔ حجم محصور بین این دو کره و سطح استوانهٔ محیط بر آنها را بیابید.

۸.۱.۹. اندازهٔ سطح و حجم کره

۲۳۴. سطح و حجم کره‌ای به‌دست آورید که شعاعش برابر با یال یک ۸ وجهی منتظم به سطح $۱۰\sqrt{۷۵}$ باشد.

۲۳۵. حجم و مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع ۴ را بیابید.

۲۳۶. قطر یک کره ۱۸ است. حجم و مساحت آن را بیابید.

۲۳۷. سطح و حجم کره‌ای را حساب کنید که سطح قاچ ۴۵° از آن مساوی ۱۸π باشد.

۲۳۸. در کره‌ای به قطر ۴، عدد حجم کره بزرگتر است یا عدد مساحت رویهٔ کره؟

۲۳۹. در کره‌ای به قطر ۱۰، عدد حجم کره بزرگتر است یا عدد مساحت رویهٔ کره؟

۲۴۰. در مخروطی که قطر قاعده‌اش برابر با مولدش می‌باشد، کره‌ای محاط کرده‌ایم. به شرطی که مولد مخروط برابر a باشد، سطح و حجم کرهٔ محاطی را به‌دست آورید.

۸.۱.۱۰. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر

۲۴۱. روی میز یک حلقه قرار گرفته است (منظور از حلقه شکل هندسی است که از دوران دایره‌ای به شعاع r دور محوری که آن را قطع نمی‌کند، به‌دست آید). اگر سطح کره‌ای که در داخل این حلقه و مماس بر میز قرار گرفته است مساوی S باشد، سطح و حجم

حلقه را به‌دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۴۲. مستطیلی به ضلعهای a و b را دور محوری که از یک رأس آن گذشته و با قطر مستطیل موازی است، دوران داده‌ایم. سطح و حجم جسمی که به‌دست می‌آید، حساب کنید.

۲۴۳. یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع محاط در دایره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم. یک ضلع از هر کدام روی یک خط مماس برده شدند. شکل را حول محور تقارنش دوران می‌دهیم. ثابت کنید که مساحت کل استوانهٔ حاصل، واسطهٔ هندسی بین مساحت کل مخروط و مساحت کرهٔ ایجاد شده است. همین سؤال را برای حجمها حل کنید.

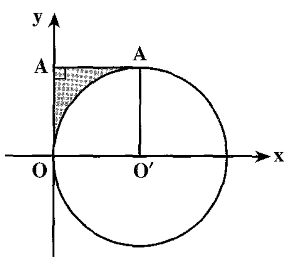
۲۴۴. شش ضلعی منتظمی به ضلع a را دور محوری که در صفحهٔ شش ضلعی واقعی است دوران داده‌ایم. محور دوران موازی یکی از ضلعهای شش ضلعی و به فاصلهٔ a از مرکز آن قرار دارد. سطح و حجم جسمی که به‌دست می‌آید پیدا کنید.

۲۴۵. حجم یک گوهٔ استوانه‌ای یا سم را که از قطع دادن یک استوانهٔ مستدیر قائم با صفحه‌ای گذرنده بر یکی از قطرهای قاعدهٔ استوانه حاصل می‌شود، حساب کنید.

۲۴۶. در شکل مقابل حجم حاصل از دوران سطح هاشور زده حول محورOX کدام است؟

۱) ۲π ۲) $\frac{۷}{۳}\pi$

۳) $\frac{۸}{۳}\pi$ ۴) ۳π



کنکور سراسری رشتهٔ علوم تجربی

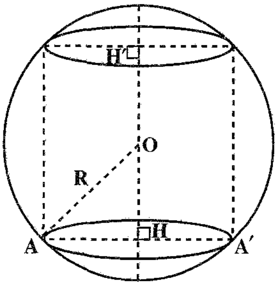
۲.۸. نسبت حجمها

۲۴۷. نسبت حجم کره‌ها بر همدیگر

یک جسم تزیینی وهنری تشکیل یافته است از یک کرهٔ شیشه‌ای توخالی، که داخل آن یک مکعب شیشه‌ای تو خالی قرار دارد و ۸ گوشهٔ این مکعب با بدنهٔ کره در تماس است. در داخل مکعب شیشه‌ای نیز یک کرهٔ رنگی شیشه‌ای واقع است، که با ۶ وجه مکعب تماس دارد. آیا می‌توانید بگویید، حجم کرهٔ بزرگ چند برابر حجم کرهٔ کوچک است؟

۲۴۸. قطر ماه تقریباً $\frac{۱}{۴}$ قطر کرهٔ زمین است. حجم ماه را با حجم زمین مقایسه کنید.

۲۴۹. در کره‌ای به شعاع R استوانهٔ دواری به ارتفاع R محاط شده است. نسبت حجم این استوانه به حجم آن کره برابر است با :



۱) $\frac{۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۸}$

۲۵۰. کره‌ای در یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط شده است به قسمی که بر دو قاعدهٔ استوانه مماس است. نسبت حجم کره به حجم استوانه چه‌قدر است؟

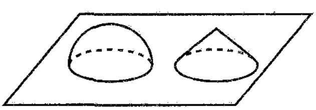
۲۵۱. مخروط یک بستنی قیفی ۱۰cm عمق دارد و قطر بالای آن ۵cm است. دو تکه بستنی به شکل نیمکره به قطر ۵cm روی قیف بستنی گذاشته شده است. پس از آب شدن، بستنی از قیف بیرون می‌ریزد یا نه؟

۲۵۲. ثابت کنید، نسبت حجمهای یک کره و مخروط ناقص محیط بر آن، برابر است با نسبت مساحتهای سطح کل آنها.

۲۵۳. در یک کره، مخروطی چنان محاط کرده‌ایم که ارتفاع مخروط به‌وسیلهٔ مرکز کره به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده است. نسبت حجم کره به حجم مخروط را پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۵۴. قاعده‌های یک نیمکره و یک مخروط همنهشت و همصفحه‌اند. صفحه‌ای که از رأس مخروط می‌گذرد و با قاعده‌ها موازی است، بر نیمکره مماس است. نسبت حجم نیمکره به حجم مخروط چه‌قدر است؟



۲۵۵. کوچکترین مقدار نسبت حجمهای مخروط و استوانه محیط بر یک کره را که می‌توان به‌دست آورد، چه‌قدر است؟

۲۵۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی را در یک دایره محاط کرده‌ایم. نسبت حجمهای دو جسمی را پیدا کنید که از دوران مثلث و دایره دور قطری که از رأس مثلث می‌گذرد، به‌وجود آید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳.۸. رابطهٔ بین حجمها

۲۵۷. در کره‌های دلخواه قطعه‌های دارای یک ارتفاع و یک قاعده متوسط، هم‌ارزند. زیرا فرمول داده شده مستقل از شعاع کره است.

۲۵۸. حجم استوانهٔ متساوی‌الاضلاع محاط در یک کره، واسطهٔ هندسی بین حجم مخروط متساوی‌الاضلاع محاط در آن کره و حجم آن کره است.

۲۵۹. استوانهٔ دوّاری به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع R را درنظر می‌گیریم. نیمکره‌ای که قاعدهٔ آن یک قاعدهٔ استوانه است و یک مخروط که قاعدهٔ آن نیز همین قاعدهٔ استوانه و رأسش مرکز قاعدهٔ بالایی استوانه است را نیز درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که حجمهای استوانه، کره و مخروط بترتیب، تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) می‌دهند.

۲۶۰. دایره‌هایی هم‌مرکز داده شده‌اند. در هر یک از آنها وترهایی مساوی هم و موازی با یک قطر مشترک رسم می‌کنیم. ثابت کنید حجمهای ایجاد شده از دوران قطعه‌های دایره به‌دست آمده، حول قطری که آنها را قطع نمی‌کند، هم‌ارز (معادل) یکدیگرند.

۲۶۱. دو دایرهٔ O و O' در نقطهٔ A مماس خارجند. T و T' نقطه‌های تماس یک مماس مشترک خارجی آنها با این دو دایره است. اگر این شکل حول OO' دوران کند، ثابت کنید که حجم محصور بین سطح جانبی مخروط ناقص ایجاد شده به‌وسیلهٔ TT' و کره‌ای که شامل دایره‌های قاعده‌های این مخروط ناقص است، مساوی دو برابر حجم بخشی از این مخروط ناقص است که خارج کره‌های S و S' ایجاد شده به‌وسیله دایره‌های O و O' قرار دارد.

۲۶۲. SA و SB دو مماس رسم شده از نقطهٔ معلوم S بر دایرهٔ O می‌باشند. BC عمودی است که از نقطهٔ B بر قطر OA رسم شده است. شکل را حول این قطر دوران می‌دهیم. ثابت کنید که حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث مختلط‌الاضلاع SAMB مساوی حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث SAC است.

۲۶۳. هنگامی که یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، حول خطی که از رأس قائمه موازی وتر مثلث رسم شده، دوران می‌کند؛ حجمی معادل با حجم کره‌ای به قطر این وتر مثلث، ایجاد می‌کند.

۲۶۴. حجم محصور در سطح ایجاد شده به‌وسیله پاره‌خط CD که دو سر آن، روی دو خط عمود بر هم Ax و By غیرواقع در یک صفحه، حرکت می‌کنند، هنگامی که CD مساوی ۲ برابر AB یعنی عمود مشترک دو خط Ax و By است، هم‌ارز کره‌ای به قطر AB است.

۴.۸. رابطهٔ بین سطحها و حجمها

۲۶۵. به کره‌ای با شعاع R، مخروطی محیط کرده‌ایم، به‌نحوی که ارتفاع آن دو برابر قطر کره باشد. ثابت کنید سطح کل این مخروط دو برابر سطح کره و حجم آن دو برابر حجم کره است.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲۶۶. ثابت کنید دو جسم دلخواه A و A′ که بر دو کرهٔ مساوی محیطند، به نسبت مساحت سطحهای کلشان یعنی S و S′ هستند.

۲۶۷. چنان‌که در هندسه دیده شده است هر شکلی (مستقیم‌الخطوط و گاهی منحنی‌الخطوط) که بر دایره محیط باشد دارای این خاصیت است که نسبت سطح آن به محیط آن همواره برابر نصف شعاع دایره است (یعنی برابر نسبت سطح دایره به محیط دایره) محقق کنید که حکم مذکور برای اشکال فضایی نیز صحیح است به این معنی که هر شکلی که بر کره محیط باشد دارای این خاصیت است که نسبت حجم آن به سطح کل آن برابر نسبت حجم کره به سطح کره یعنی ثلث شعاع کره است. خاصیت مذکور را با محاسبه برای مکعب و هرم، چهاروجهی منتظم و استوانهٔ محیطی و مخروط محیطی و مخروط ناقص محیطی نشان دهید. بعد برای اشکال مستوی‌السطوح اثباتی از آن به‌دست دهید.

۲۶۸. شخص ناوارد اغلب به‌طور شهودی چنین تصور می‌کند که از بین دوازده وجهی و بیست‌وجهی منتظم محاط در یک کره، بیست‌وجهی حجم بیشتر را دارد. نشان دهید که درواقع عکس آن صحت دارد و نیز نشان دهید که از بین یک مکعب و یک هشت‌وجهی منتظم محاط در یک کره، مکعب حجم بیشتر را دارد.

۹. رابطهٔ متری

۲۶۹. سه شعاع دو به دو عمود بر هم از یک کره را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که مجموع مربعهای تصویرهای این سه شعاع روی صفحه‌ای دلخواه، مساوی دو برابر مجذور شعاع آن کره می‌باشد.

۲۷۰. از نقطه‌ای که به فاصلهٔ a از مرکز کره‌ای به شعاع R قرار دارد، $(R > a)$ سه وتر دو به دو عمود بر هم رسم شده است. مجموع مربعات طولهای پاره‌خطهایی را که توسط نقطهٔ مفروض روی وترها به‌وجود آمده، پیدا کنید.

۲۷۱. یک کره و یک نقطهٔ ثابت در درون آن داده شده است. سه صفحهٔ دو به دو عمود بر هم از این نقطه در کره رسم می‌کنیم، که سه دایره در کره به‌وجود می‌آورند. ثابت کنید که مجموع این سه دایره ثابت است.

۲۷۲. سه دایرهٔ O و دو خط Ax و By که دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند و در صفحهٔ دایره قرار ندارند، مفروضند. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر دایرهٔ O می‌گذرد و شعاعش متغیر است. ثابت کنید که نقطه‌های B' و A' جاهایی که این کره مجدداً خطهای AX و BY را قطع می‌کنند، روی این خطها، پاره‌خطهای متناسب ایجاد می‌کنند.

۲۷۳. یک چهاروجهی در کرهٔ واحدی که مرکزش داخل این چهاروجهی قرار دارد، محاط شده است. نشان دهید که مجموع طولهای یالهای این چهاروجهی متجاوز از ۶ است.

۲۷۴. در داخل کره‌ای به شعاع ۱ چندوجهی محدبی جا گرفته است که همه فرجه‌های آن کمتر از $\frac{۲\pi}{۳}$ است. ثابت کنید مجموع طولهای یالهای این چندوجهی از ۲۴ کمتر است.

۲۷۵. اگر یک شش‌وجهی به‌وسیلهٔ یالهایش محیط بر یک کره باشد، با وصل کردن دو به دوی رأسهای هر دو وجه روبه‌رو، ۱۲ یال شش‌وجهی، به سه دسته شامل چهار پاره‌خط تقسیم می‌شوند. ثابت کنید که مجموع یالهای یکی از این گروهها مساوی مجموع یالهای گروه دیگر است.

۲۷۶. S و V بترتیب مساحت و حجم یک چندوجهی محیط بر یک کره به شعاع r می‌باشند. ثابت کنید داریم :

$$V = \frac{۱}{۳} r.S$$

۲۷۷. اگر یک مخروط بر یک کره محیط باشد، ثابت کنید بین a شعاع کره، r شعاع قاعدهٔ مخروط و h ارتفاع مخروط رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{۱}{a^۲} - \frac{۱}{r^۲} = \frac{۲}{ah}$$

۲۷۸. کرهٔ s به شعاع r، از مرکز کرهٔ S به شعاع R گذشته است. ثابت کنید، اگر وتر AB از کرهٔ S، بر کرهٔ s، در نقطهٔ C مماس باشد، آن‌گاه :

$$AC^۲ + BC^۲ \le ۲R^۲ + r^۲$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۴

۲۷۹. یک عدسی دوطرفه محدب را درنظر می‌گیریم. ضخامت آن را با e، رأسش را با S و حجمش را با V نشان می‌دهیم. ثابت کنید که :

$$۱۲V = ۳eS - \pi e^۳$$

۲۸۰. سه کره مماس بر هم، در رأسهای یک مثلث بر صفحه آن مماسند. ثابت کنید اگر مثلث مختلف‌الاضلاع باشد، در آن صورت دو کره وجود خواهد داشت که بر سه کره و صفحه مثلث مماس باشند. اگر r و ρ $(\rho > r)$ شعاعهای این دو کره باشند، و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث درنظر گرفته شود، در آن صورت:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{R}$$

۱۰. مکان هندسی

۱.۱۰. مکان هندسی نقطه

۱.۱.۱۰. مکان هندسی نقطه با معلوم بودن: نقطه، خط، صفحه، کره،...

۱.۱.۱.۱۰. نقطه، خط، صفحه

۲۸۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا کنید که مجموع مربعهای فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ داده شده، مساوی مقدار معلوم k^2 باشد.

۲۸۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا کنید که نسبت فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B مساوی نسبت داده شدهٔ $k \neq 1$ باشد.

۲۸۳. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو نقطهٔ داده شده به فاصله‌های معلومی باشد.

۲۸۴. مکان هندسی مرکز کره‌ای را بیابید که بر دو خط متقاطع یا بر دو خط متوازی داده شده مماس باشد.

۲۸۵. مطلوب است مکان هندسی تصویرهای یک نقطهٔ مفروض، بر همهٔ صفحه‌هایی که از نقطهٔ مفروض دیگری می‌گذرند.

۲۸۶. مکان هندسی تصویرهای نقطهٔ مفروض A را روی صفحه‌هایی که بر نقطهٔ ثابت O می‌گذرند، تعیین کنید.

۲۸۷. کره‌ای متغیر بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و بر صفحهٔ ثابت P مماس است. مکان هندسی نقطهٔ تماس را تعیین کنید.

۲۸۸. کره‌ای به شعاع متغیر بر صفحهٔ داده شدهٔ P در نقطهٔ معلوم A مماس است. مکان هندسی نقطه‌های تماس صفحه‌های مماس بر این کره‌ها که موازی با صفحهٔ مفروض Q می‌باشند را تعیین کنید.

۲۸۹. کره‌ای متغیر بر دو خط ثابت غیرواقع در یک صفحه مماس و مرکزش روی صفحه‌ای است که موازی این دو خط رسم شده و به یک فاصله از آنها قرار دارد. مکان هندسی مرکزش را پیدا کنید.

۲۹۰. دو خط عمود بر هم XX' و YY' غیرواقع در یک صفحه داده شده‌اند. دو نقطهٔ A و B بترتیب این دو خط را چنان می‌پیمایند که AB همواره موازی با یک صفحهٔ داده شده است. مکان هندسی مرکز کرهٔ به قطر AB را تعیین کنید و نشان دهید که این کره از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۲۹۱. زاویهٔ قائمهٔ XOY و روی OX نقطهٔ A داده شده است، $OA = a$ است. از یک نقطهٔ M واقع در درون زاویه، MB را عمود بر OY رسم می‌کنیم. سپس MA و کمان دایرهٔ $\overset{\frown}{OCM}$ مماس بر OX، و گذرنده از نقطهٔ M را رسم می‌کنیم. شکل را حول OY دوران می‌دهیم. مکان هندسی نقطهٔ M را چنان بیابید که حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث OAB و مثلث مختلط‌الاضلاع OAMC، هم‌ارز (معادل) باشند.

۱۰.۱.۱.۲. مثلث

۲۹۲. صفحهٔ مثلث ABC مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M را در فضا طوری تعیین کنید تا خط راستی که مرکز کرهٔ محیطی ABCM را به نقطهٔ G مرکز ثقل چهاروجهی ABCM وصل می‌کند، بر صفحهٔ AMG عمود باشد.

۱۰.۱.۱.۳. دایره، خط

۲۹۳. دایرهٔ (C) و خط D غیرمتقاطع با آن در صفحهٔ P داده شده‌اند. کره‌ای متغیر بر دایرهٔ (C) می‌گذرد. مکان هندسی نقطه‌های تماس صفحه‌هایی را که از خط D مماس بر این کرهٔ متغیر رسم می‌شوند، تعیین کنید.

۱۰.۱.۱.۴. کره

۱۰.۱.۱.۴.۱. یک کره

۲۹۴. مکان هندسی وسطهای وترهایی از کره به شعاع R را تعیین کنید که طول آنها برابر مقدار معلوم l باشد.

۲۹۵. مکان هندسی وسط وترهایی را که از یک نقطهٔ داده شده در یک کره رسم می‌شوند، تعیین کنید.

۲۹۶. کره‌ای به شعاع r داده شده است. مکان هندسی رأس کنجی را بیابید که سه وجه آن مماس بر کره و اندازهٔ هر زاویهٔ رأسش مساوی ۶۰ درجه است. (همین مسأله را برای کنج سه قائمه حل کنید.)

۲۹۷. کره‌ای به شعاع r داده شده است. مکان هندسی رأس کنجی سه‌وجهی را بیابید که سه یال آن مماس بر کره است و هر یک از زاویه‌های وجه‌هایش مساوی ۶۰ درجه است.

۲۹۸. مطلوب است مکان هندسی مرکز مقطعهای سطح کروی مفروض با صفحه‌هایی که از نقطهٔ مفروضی می‌گذرند.

۱۰.۱.۱.۴.۲. دو کره

۲۹۹. دو کره داده شده است. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی را پیدا کنید که دو کرهٔ مفروض را تحت دو دایرهٔ عظیمه قطع کنند.

۳۰۰. مکان هندسی مرکز کره‌هایی را پیدا کنید که توسط دو کرهٔ مفروض تحت دایره‌های عظیمه قطع می‌شوند.

۳۰۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا کنید که مجموع قوتهایشان نسبت به دو کرهٔ داده شده مساوی صفر باشد.

۳۰۲. مکان هندسی وسطهای مماسهای مشترک دو کرهٔ مفروض را پیدا کنید.

۳۰۳. مکان هندسی نقطه‌ای را پیدا کنید به قسمی که مخروطهای محیط بر دو کرهٔ داده شده که این نقطه رأس مشترک آنهاست، مساوی باشند.

همین مسأله را برای وقتی که سه کره داده شده باشد، حل کنید.

۱۰.۱.۱.۴.۳. سه کره

۳۰۴. دو کرهٔ α و β بر کرهٔ ω در نقطه‌های A و B مماسند، نقطه‌ای مانند M را روی کرهٔ α اختیار کرده‌ایم. خط AM کرهٔ ω را در نقطهٔ N و خط NB کرهٔ β را در نقطهٔ K قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که MK بر کره β مماس بشود.

۳۰۵. مکان هندسی مرکز کره‌هایی را بیابید که سه کرهٔ داده شده را تحت دایره‌های عظیمه قطع می‌کنند.

۳۰۶. مکان هندسی مرکز کره‌هایی را که بر سه کره داده شده عمودند، تعیین کنید.

۳۰۷. اگر یک کره با شعاع متغیر بر سه کره ثابت مماس باشد، ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌های تماس با هر کرهٔ ثابت، یک دایره است.

۱۰.۱.۱.۵. کره و داده‌های دیگر

۱۰.۱.۱.۵.۱. کره، نقطه

۳۰۸. مکان هندسی نقطه‌هایی از یک کره را تعیین کنید که از دو نقطهٔ مفروض A و B واقع بر سطح کره به یک فاصله باشند.

۳۰۹. مکان هندسی دو انتهای پاره‌خطی مساوی و موازی با یک پاره‌خط داده شده و در یک جهت را چنان تعیین کنید، که انتهای آن روی دو کرهٔ داده شده قرار داشته باشد.

۳۱۰. کره‌هایی را درنظر می‌گیریم که بر دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B می‌گذرند و بر کره‌ای به مرکز O مماسند. مکان هندسی نقطه‌های تماس کره‌های متغیر با کرهٔ داده شده را پیدا کنید.

۳۱۱. مکان هندسی وسطهای وترهایی از کره را تعیین کنید که از نقطه ثابت A می‌گذرند.

۳۱۲. نقطه‌ای مفروض داخل کرهٔ مفروضی است. سه شعاع متقابلاً متعامد مرسوم از P کره را در نقطه‌های U، V و W قطع می‌کنند؛ Q رأس مقابل P در قطر متوازی‌السطوحی است که با PU، PV و PW مشخص شده است. مکان هندسی Q را در مورد تمام چنین شعاعهای سه‌تایی رسم شده از P بیابید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸

۳۱۳. یک کره و دو نقطهٔ A و B واقع بر دو امتداد یک قطر از این کره داده شده‌اند. مکان هندسی رأسهای سطحهای مخروطی محیط بر این کره را که از این دو نقطه می‌گذرند، تعیین کنید.

۳۱۴. یک کره و k نقطهٔ A_1، A_2، ...، A_k $(k>1)$ در فضا داده شده‌اند. برای هر نقطهٔ M از سطح کره، نقطهٔ N را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_k}$$

مجموعهٔ نقطه‌های N را به‌دست آورید.

۱۰.۱.۱.۵.۲. کره، خط

۳۱۵. دو خط l_1 و l_2 بر کره‌ای مماسند. نقطه‌های M و N بر روی l_1 و l_2 طوری قرار گرفته‌اند که MN هم بر کره مماس شده است. مکان هندسی نقطه‌های تماس MN را با کره پیدا کنید.

۱۰.۱.۱.۵.۳. کره، صفحه

۳۱۶. صفحهٔ P مماس بر کره (S) است. مطلوب است تعیین مکان نقطه‌های Σ رأس یک مخروط محیط بر کره به‌طوری که مقطع آن با صفحهٔ P یک مقطع مخروطی به مرکز نقطهٔ معلوم O از این صفحه باشد. مناطقی از این مکان نظیر یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص کنید.

۳۱۷. مکان هندسی مرکزهای مقطعهای یک کره را که به‌وسیلهٔ صفحه‌های گذرنده بر یک نقطهٔ ثابت یا صفحه‌های گذرنده بر یک خط ثابت ایجاد می‌شوند، تعیین کنید.

۳۱۸. خط D در صفحه ثابت P که مماس بر کرهٔ به مرکز O می‌باشد، به موازات خود حرکت می‌کند، صفحهٔ متغیر P' را بر خط D طوری مرور می‌دهیم که بر کره مزبور مماس باشد. مکان هندسی نقطه‌های تماس را تعیین نمایید.

۳۱۹. بر روی سطح زمین نقطه‌هایی وجود دارند که طول و عرض جغرافیایی آنها با هم برابرند. مکان هندسی تصویرهای این نقطه‌ها را روی صفحهٔ استوا پیدا کنید.

۱۰.۱.۱.۵.۴. کره، چهاروجهی

۳۲۰. در کرهٔ $\sigma(O,R)$، چهاروجهی ABCD را محاط کرده‌ایم. از نقطهٔ M، خطهای راست MA، MB، MC و MD را رسم کرده‌ایم که سطح کره را، در نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 قطع کرده‌اند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به‌شرطی که

$$۱)\ \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MA_1}}+\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MB_1}}+\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MC_1}}+\frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{MD_1}}=۴;$$

$$۲)\ \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MA_1}}+\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MB_1}}+\frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MC_1}}+\frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{MD_1}}=-۴$$

۱۰.۱.۱.۵.۵. کره، مکعب مستطیل

۳۲۱. در دو گوشهٔ یک اتاق به شکل مکعب مستطیل، دو توپ کروی با اندازه‌های مختلف قرار گرفته‌اند که هر کدام بر دو دیوار و کف اتاق در تماس هستند. اگر روی هر توپ نقطه‌ای یافت شود که از هر یک از دو دیواری که توپ بر آنها مماس است به فاصلهٔ ۵ واحد و از کف اتاق به فاصله ۱۰ واحد باشد، آن‌گاه مجموعه قطرهای توپها برابر است با:

الف) ۲۰ واحد　　ب) ۳۰ واحد　　ج) ۴۰ واحد　　د) ۶۰ واحد

هـ) مقداری که با اطلاعات داده شده مشخص نمی‌شود.

مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

۱۰.۱.۱.۵.۶. کره، هرم

۳۲۲. کره‌ای به مرکز O داده شده است. هرم ABCD طوری بر آن محیط شده است که نامساوی زیر برای آن برقرار است،

$$OA \geq OB \geq OC \geq OD$$

مکان هندسی نقطه‌های A، B و C را پیدا کنید.

۱۰.۱.۱.۵.۷. کره، سطح مخروطی

۳۲۳. یک سطح مخروطی به رأس S و محیط بر یک کرهٔ داده شده را درنظر می‌گیریم: مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را چنان بیابید که نسبت فاصله‌های مماسی نقطه‌های M و S از کره، مساوی نسبت فاصله‌های این دو نقطه از صفحهٔ دایرهٔ تماس باشد. (فاصلهٔ مماسی یک نقطه از یک کره طول مشترک مماسهای رسم شده از این نقطه بر

کره می‌باشد).
ثابت کنید که فصل مشترک دو سطح مخروطی محیط بر یک کره از دو منحنی مسطح تشکیل می‌شود.

۳۲۴. در فضا مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی که مرکزهای کره‌هایی به شعاع r مماس بر یک صفحه‌اند، صفحه‌ای است موازی با آن صفحه و به فاصلهٔ r از آن.

۱۰.۱.۱.۵.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۲۵. هنگامی که یک نقطه مانند M واقع بر سطح کره‌ای به مرکز O، از یک نقطه مانند A از دایرهٔ عظیمهٔ خط استوایی کره، روی صفحهٔ نصف‌النهاری AP با حرکتی یکنواخت شروع به حرکت می‌کند و در همین حال صفحهٔ نصف‌النهاری AP نیز با همان سرعت دور محور PO شروع به حرکت می‌نماید. ثابت کنید که تصویر خط سیر نقطهٔ M روی صفحه استوایی، یک دایره به قطر AO است.

۱۰.۱.۱.۶. نقطه، صفحه، منحنی

۳۲۶. منحنی مسطح مسدود Γ در سطح ثابتی در دست است. کره‌ای به مرکز O و به شعاع R ثابت است. مطلوب است مکان هندسی رأسهای مخروطهایی به قاعدهٔ Γ که حجم آنها برابر باشد با حاصلضرب طول ثابتی در قوت رأس مخروط نسبت به کرهٔ مفروض.

۱۰.۲. مکان هندسی پاره‌خط، خط

۱۰.۲.۱. مکان هندسی پاره‌خط

۳۲۷. مکان هندسی وترهایی به طول معین در یک کرهٔ داده شده را تعیین کنید.

۳۲۸. مکان هندسی وترهای به طول معین از یک کره را که از یک نقطه داده شده در آن کره می‌گذرند، تعیین کنید.

۱۰.۲.۲. مکان هندسی خط

۳۲۹. دایرهٔ (C) و روی آن دو نقطهٔ A و B داده شده است. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر این دایره می‌گذرد و شعاعش متغیر است. مکان هندسی فصل مشترک صفحه‌های مماس در نقطه‌های A و B بر این کره را تعیین کنید.

۳۳۰. دو خط متقاطع SA و SB داده شده‌اند. بر SA یک صفحه می‌گذرانیم و سپس بر SB صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ اوّلی رسم می‌کنیم. مکان هندسی خطهای فصل مشترک این دو صفحه را تعیین کنید.

۳۳۱. مکان هندسی محورهای سطحهای استوانه‌ای دوار محیط بر یک کرهٔ داده شده و گذرنده بر یک نقطهٔ داده شده یا مماس بر یک خط داده شده، چیست؟

۳۳۲. دو کره به مرکزهای O و O′ و شعاعهای r و r′ و نقطهٔ P داده شده‌اند. پاره‌خط MM′ را که وسط آن نقطهٔ P می‌باشد و دو سر آن روی دو کرهٔ داده شده قرار دارد، درنظر می‌گیریم. مکان هندسی خط MM′ را تعیین کنید. چگونه می‌توانیم نقطهٔ P را جابه‌جا کنیم تا این مکان، یک صفحه باشد؟

۳.۱۰. مکان هندسی دایره

۳۳۳. نقطهٔ O مرکز یک کره، ثابت است، اما شعاع آن تغییر می‌کند. مکان هندسی دایرهٔ تماس مخروط محیط بر این کره را که رأس آن نقطهٔ داده شدهٔ S است، پیدا کنید.

۳۳۴. دایرهٔ O و نقطهٔ A روی این دایره و نقطهٔ P خارج صفحهٔ این دایره داده شده است. دایره‌ای دیگر رسم می‌کنیم که از دو نقطهٔ P و A و از نقطهٔ متغیر دیگری مانند M واقع بر دایرهٔ O می‌گذرد. ثابت کنید که این دایره یک کره ایجاد می‌کند.

۳۳۵. عرقچینهایی کروی و دارای یک مساحت، در رأسشان، در یک نقطهٔ P بر یک صفحهٔ داده شده، مماسند. مکان هندسی دایره‌های قاعده‌های این عرقچینها را تعیین کنید.

۱۱. رسم شکل

۱.۱۱. تعیین نقطه

۳۳۶. بر یک کرهٔ مادی مفروض جاهای رأسهای یک چهاروجهی منتظم محاطی را مشخص کنید.

۳۳۷. بر یک کرهٔ مادی جاهای رأسهای یک مکعب محاطی را مشخص کنید.

۳۳۸. نقطه‌هایی از یک کره را مشخص کنید که هر یک از آنها از سه نقطهٔ مفروض واقع بر سطح کره به یک فاصله باشند.

۳۳۹. روی یک کرهٔ (I) سه دایرهٔ عظیمهٔ (C_1)، (C_2) و (C_3) داده شده‌اند. رأس سطح مخروطی (S) محیط بر (Σ) تحت یک دایرهٔ (C) مماس به سه دایرهٔ داده شده را تعیین کنید.

۳۴۰. روی کرهٔ (Σ) دو نقطهٔ A و B و دایرهٔ (C) داده شده است. رأس سطح مخروطی محیط بر (Σ) تحت یک دایرهٔ گذرنده بر A و B و مماس به دایرهٔ (C) را تعیین کنید.

۳۴۱. روی یک کرهٔ (Σ) یک نقطهٔ A و دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) داده شده‌اند. رأس سطح مخروطی محیط به (Σ) را تحت یک دایرهٔ گذرنده بر A و مماس به دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) پیدا کنید.

۳۴۲. ثابت کنید که دو نقطه روی خط‌المرکزین دو کرهٔ مفروض وجود دارد، که از آن نقطه‌ها، می‌توان صفحه‌های مماس مشترک، بر دو کره رسم کرد. از آن‌جا، روش رسم صفحه‌های مماس مشترک بر دو کرهٔ داده شده را که از نقطه‌ای داده شده می‌گذرند، شرح دهید.

۳۴۳. سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست داده شده‌اند (B بین A و C است) و $AB = a$ و $BC = b$ است. به قطر BC نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم و مماس AD را بر آن رسم می‌نماییم. نقطهٔ M را روی کمان BD طوری تعیین کنید که اگر شکل حول AC دوران کند، حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث MAC توسط منطقه‌ای که کمان $\overset{\frown}{MB}$ ایجاد می‌کند به دو قسمت هم‌ارز تقسیم شود.
اگر ME عمود بر BC فرض شود، مقدار مجهول CE را مساوی x فرض کنید، بحث کنید.

۳۴۴. آیا می‌توان پنج نقطه با فاصله‌های دو به دو مختلف، طوری در فضا پیدا کرد که محیط همهٔ پنج‌ضلعیهای فضایی با رأسهایی در این پنج نقطه، با هم برابر باشند؟

۳۴۵. مرکز هندسی قطعهٔ کروی را پیدا کنید.

۲.۱۱. رسم پاره‌خط

۳۴۶. دانشمندان عرب (عربی‌نویس) به ترسیمهایی بر سطح یک کره علاقه نشان می‌دادند. مسائل زیر را درنظر بگیرید، که باید با ابزارهای اقلیدسی و ترسیمهای مسطحهٔ مناسب حل شوند.
یک کرهٔ مادی مفروض است، قطر آن را پیدا کنید.

۳۴۷. پاره‌خطی به طول و امتداد معلوم رسم کنید که دو انتهای آن روی یک کره و روی یک خط راست مفروض باشند.

۳.۱۱. رسم خط

۳۴۸. از نقطهٔ معلوم O خطی رسم کنید که به فاصلهٔ معلوم l از نقطهٔ A و به فاصلهٔ معلوم l' از خط راست D باشد.

۳۴۹. مثلث ABC که اندازهٔ ارتفاع رأس A از آن مساوی h است، داده شده است. این مثلث را با خطی موازی BC و به فاصلهٔ h' از A قطع می‌کنیم. وضعیت خطی مانند D خارج این مثلث و موازی BC را چنان تعیین کنید که اگر شکل حول خط D دوران کند، حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث ABC و ذوزنقهٔ $BCB'C'$ هم‌ارز باشند.

۳۵۰. از رأس A از مثلث ABC، خط xy را در صفحهٔ مثلث و غیرمتقاطع با آن چنان رسم کنید که حجم حاصل از دوران این مثلث حول xy، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۳۵۱. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ و نقطهٔ O در یک صفحه داده شده‌اند. از نقطهٔ O خطی در این صفحه چنان رسم کنید که دو مثلث را قطع نکند و نسبت حجمهای ایجاد شده از دوران مثلثها حول آن، مساوی $\frac{m}{m'}$ باشد.

۳۵۲. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲r$ داده شده است. از مرکز O خطی رسم می‌کنیم که نیمدایره را در نقطهٔ C و خط مماس در نقطهٔ A بر نیمدایره را در نقطهٔ D قطع کند. راستای قاطع OCD را چنان تعیین کنید که با دوران شکل حول AB نسبت به حجم به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ قطاع OAC به حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ مثلث OAD مساوی مقدار معلوم M باشد. مثال عددی : $M = \frac{۱}{۶}$.

۴.۱۱. رسم صفحه

۳۵۳. صفحه‌ای قاطع نسبت به یک کره چنان تعیین کنید که حجم یکی از قطعه‌های کروی ایجاد شده با حجم قطاع کروی محدود به عرقچین همان قطعه، مساوی مقدار معلومی باشد.

۳۵۴. کره‌ای را با یک صفحه چنان قطع کنید که تفاضل منطقه‌های ایجاد شده، مساوی مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ این صفحه باشد.

۳۵۵. صفحه‌ای مماس بر سه کرهٔ داده شدهٔ A، B و C رسم کنید.

۳۵۶. از یک نقطه مانند A صفحه‌ای رسم کنید که یک کره را در یک دایره چنان قطع کند که مخروطی که این دایره قاعدهٔ آن و نقطهٔ O مرکز کره رأس آن باشد، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۳۵۷. صفحه‌ای مماس بر یک کره داده شده رسم کنید که بر خط داده شده‌ای بگذرد. در مورد امکان حل مسأله بحث کنید.

۳۵۸. سطح یک کره را با رسم صفحه‌هایی که بر یک خط راست واقع در خارج آن کره می‌گذرند، به بخشهای هم‌ارز (معادل) تقسیم کنید.

۳۵۹. صفحه‌ای رسم کنید که بر یک خط راست داده شده بگذرد و بر کره‌ای داده شده مماس باشد.

۳۶۰. خط Δ خارج کره‌ای به مرکز O و به شعاع R در دست است. بر این خط صفحه‌ای مرور دهید به قسمی که با تقاطع کره، سطح کره را به n قسمت متساوی تقسیم کند. مسأله دارای حل و ترسیم هندسی است ولی نظیر آن در صفحه برای دایره حل هندسی ندارد.

۳۶۱. از نقطهٔ مفروض A صفحه‌ای رسم کنید که بر دو کرهٔ داده شدهٔ B و C مماس باشد.

۳۶۲. بر خط راست AB صفحه‌ای مماس بر یک کره به مرکز C رسم کنید.

۳۶۳. یک کره و صفحه‌ای مماس بر آن داده شده است. صفحه‌ای قاطع موازی صفحهٔ داده شده چنان رسم کنید که استوانه‌ای که قاعده‌اش مقطع به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ صفحهٔ قاطع، و ارتفاعش مساوی فاصلهٔ بین دو صفحهٔ موازی باشد، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۳۶۴. یک کره به شعاع r و یک صفحه مانند صفحهٔ P داده شده‌اند. صفحه‌ای موازی صفحهٔ داده شده چنان رسم کنید که مقطع آن با کره بر مربعی به ضلع a محیط باشد.

۳۶۵. یک کره و دایرهٔ عظیمه AB از آن و صفحه NT داده شده است. صفحه‌ای موازی صفحه NT چنان رسم کنید که کره را در دایرهٔ CIDJ قطع کند و استوانه‌ای که قاعده‌اش تصویر دایرهٔ CIDJ روی دایرهٔ عظیمه ثابت باشد، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۳۶۶. مخروطی در یک نیمکره محاط است. این دو جسم را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط چنان قطع کنید که تفاضل مقطعهای ایجاد شده مساوی πa^2 باشد.

۳۶۷. در یک کره، مخروط متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. صفحه‌ای موازی قاعدهٔ این مخروط چنان رسم کنید که تفاضل مقطعهای ایجاد شده در کره و مخروط، بیشترین یا کمترین مقدار ممکن باشد.

۳۶۸. مخروطی متساوی‌الاضلاع، در یک کره محاط است. این دو جسم را با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ این مخروط چنان رسم کنید که تفاضل دو مقطع ایجاد شده مساوی πa^2 باشد.

در کدام حالت این تفاضل حداکثر مقدار خود را دارد؟

۳۶۹. کره‌ای روی یک صفحهٔ افقی داده شده است. روی همین صفحه قاعدهٔ مخروطی قرار دارد که ارتفاع آن مساوی قطر کره است، با صفحه‌ای موازی صفحهٔ داده شده طوری این کره و مخروط را قطع کنید که نسبت مقطعهای ایجاد شده مساوی نسبت دو عدد معلوم باشد.

۳۷۰. مرکزهای سه کره، به شعاعهای ۳، ۴ و ۶ بر روی رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۱ قرار دارند. چند صفحه یافت می‌شود که توأماً بر هر سه کره مماس باشند؟

۵.۱۱. رسم مثلث

۳۷۱. مثلثی را بیابید که از انتقال مثلثی داده شده به‌دست آمده باشد و رأسهایش روی سه کرهٔ مفروض واقع باشد.

۶.۱۱. رسم چندضلعی منتظم

۳۷۲. با استفاده از یک انتقال، یک چندضلعی منتظم را چنان تغییر مکان دهید که رأسهایش روی کره‌ای مفروض قرار گیرند.

۷.۱۱. رسم چندضلعی کروی

۳۷۳. ثابت کنید که ۵، یا بیشتر از ۵، دایرهٔ عظیمه روی کره، که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، دست‌کم یک چندضلعی کروی با ۵، یا بیشتر از ۵، ضلع مشخص می‌کنند.

۸.۱۱. رسم کمان

۳۷۴. روی یک کره، کمانی از یک دایرهٔ عظیمه رسم کنید چنان‌که از دو نقطهٔ داده شده A و B واقع بر سطح کره بگذرد.

۳۷۵. از نقطهٔ A واقع بر سطح یک کره، کمانی از یک دایرهٔ عظیمه رسم کنید که بر یک کمان از دایرهٔ عظیمهٔ دیگر عمود باشد.

۳۷۶. کمانی از یک دایرهٔ عظیمهٔ یک کره رسم کنید، که بر دو دایرهٔ صغیرهٔ داده شده از این کره مماس باشند.

۹.۱۱. رسم دایره

۳۷۷. روی یک کره دایره‌ای چنان بیابید که نسبت حجم مخروطی که قاعده‌اش این دایره و رأسش یکی از قطبهای آن باشد، به حجم قطعه‌ای کروی که قاعده‌اش همین دایره و شامل مخروط است، مساوی k باشد.

۳۷۸. از نقطهٔ A واقع بر سطح یک کره، دایرهٔ عظیمه‌ای رسم کنید که بر یک دایرهٔ صغیره واقع بر همین کره مماس باشد.

۳۷۹. از دو نقطهٔ A و B واقع بر یک کره دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ داده شدهٔ (C) از این کره مماس باشد.

۳۸۰. از نقطهٔ داده شدهٔ A دایره‌ای رسم کنید که بر دو دایرهٔ مفروض B و C مماس باشد.

۳۸۱. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ داده شده مماس باشد.

۱۰.۱۱. رسم عرقچین

۳۸۲. روی یک کره عرقچینی بیابید که نسبت مساحت آن به مساحت دایرهٔ قاعده‌اش مساوی مقدار معلوم k باشد.

۱۱.۱۱. رسم چندوجهی

۳۸۳. ثابت کنید یک شش‌وجهی درصورتی قابل محاط شدن در یک کره است، که وجه‌هایش چهارضلعیهای محاطی باشند.

۱۲.۱۱. رسم منشور

۳۸۴. در یک کره، منشور منتظمی با حجم ماکزیمم محاط کنید. به‌عنوان مثال : منشور منتظم مثلث‌القاعده.

۳۸۵. در یک کره، منشور مربع‌القاعدهٔ منتظمی محاط کنید که بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۳۸۶. در یک کره، منشور منتظمی با تعداد ضلعهای دلخواه محاط کنید که بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۱۳.۱۱. رسم متوازی‌السطوح

۳۸۷. در یک نیمکره متوازی‌السطوح قائمی با بیشترین حجم محاط کنید. یکی از وجه‌های این متوازی‌السطوح باید روی قاعدهٔ قطعه باشد.

۳۸۸. در یک کره متوازی‌السطوحی با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۱۴.۱۱. رسم هرم

۳۸۹. در یک کرهٔ داده شده یک هرم با قاعدهٔ مربع و مساحت جانبی ماکزیمم محاط کنید.

۳۹۰. بر یک کرهٔ داده شده، هرم مثلثی‌القاعدهٔ منتظمی چنان محیط کنید که حجمش کمترین مقدار ممکن باشد. اندازهٔ حجم این هرم چه‌قدر است؟

۱۵.۱۱. رسم استوانه

۳۹۱. در یک قطعهٔ کروی، استوانه‌ای محاط کنید که سطح جانبی‌اش بیشترین مقدار ممکن باشد.

۳۹۲. در یک قطاع کروی، استوانه‌ای با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۳۹۳. در یک مخروط محیط بر یک کره، استوانه‌ای با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۳۹۴. در یک قطعهٔ کروی با یک قاعده، استوانه‌ای با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۳۹۵. در یک کره، استوانه‌ای محاط کنید که سطح جانبی‌اش بیشترین مقدار ممکن باشد.

۳۹۶. در یک کره، استوانه‌ای محاط کنید که سطح کلش بیشترین مقدار ممکن باشد.

۳۹۷. در یک کره به شعاع R، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r محاط کنید.

۳۹۸. در کرهٔ به شعاع R استوانه‌ای با حجم ماکزیمم محاط کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳۹۹. در کره‌ای به شعاع معلوم، استوانهٔ قائم دواری محاط کنید که حجم آن مساوی حجم دو قطعهٔ کروی، با قاعده‌هایی مساوی قاعده‌های استوانه باشد و راه‌حل هندسی مسأله را بیان کنید.

۱۶.۱۱. رسم مخروط

۴۰۰. بر یک قطعهٔ کروی داده شده، مخروطی با کمترین حجم ممکن محیط کنید.

۴۰۱. در قطعهٔ کروی $ACC'A'$ مخروطی با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.

۴۰۲. در کره‌ای داده شده، مخروطی محاط کنید که سطح کل آن، بیشترین مقدار ممکن باشد.
۴۰۳. بر یک کرهٔ داده شده، مخروطی با کمترین حجم ممکن محیط کنید.
۴۰۴. بر کره‌ای به شعاع r، مخروطی با حجم ماکزیمم محیط کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۴۰۵. در یک کره، مخروطی با بیشترین حجم ممکن محاط کنید.
۴۰۶. ثابت کنید که بر دو دایرهٔ واقع بر یک کره، می‌توان دو مخروط گذراند که این دو دایره مقطعهای موازی یا پاد موازی آنها با کره باشد.
۴۰۷. یک سطح مخروطی محیط بر یک کرهٔ داده شده و مماس بر سه خط داده شده رسم کنید.

۱۷.۱۱. رسم کره

۴۰۸. بر چهار نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت A، B، C و D یک کره و تنها یک کره می‌توان گذراند.
۴۰۹. نشان دهید که چگونه می‌توان کره‌ای رسم کرد که از ۵ نقطهٔ غیرواقع بر یک کره که هیچ چهارتایی از آنها در یک صفحه واقع نیستند به یک فاصله باشد. آیا جواب یکتاست؟
۴۱۰. کره‌ای بیابید که مرکزش روی خط راست داده شدهٔ D قرار داشته باشد، از نقطهٔ مفروض A بگذرد و مماس بر یک خط داده شدهٔ D' باشد.
۴۱۱. دو خط D و D' و نقطهٔ A روی خط D داده شده‌اند. کره‌ای به شعاع r رسم کنید که در نقطهٔ A بر خط D مماس باشد و بر خط D' نیز مماس گردد. مسأله چند جواب دارد؟
۴۱۲. دو نقطه مفروضند و هر یک از آنها روی یکی از دو خط متنافر مفروض واقع است. ثابت کنید کرهٔ یکتایی وجود دارد که در نقطه‌های مفروض بر خطهای مفروض مماس است.
۴۱۳. کره‌ای رسم کنید که بر دو خط متنافر داده شده مماس باشد. مسأله چند جواب دارد؟
۴۱۴. کره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و صفحه قطبی نقطه مفروض B نسبت به آن، صفحهٔ مفروض P باشد.
۴۱۵. سه نقطه از یک کره، و یک صفحهٔ مماس بر این کره داده شده‌اند، کره را رسم کنید.
۴۱۶. کره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B بگذرد و بر دو صفحهٔ داده شدهٔ P و Q مماس باشد.

۴۱۷. کره‌ای به شعاع داده شدهٔ r رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A می‌گذرد و بر دو صفحهٔ غیرموازی داده شدهٔ P و Q مماس است.

۴۱۸. دو صفحهٔ مماس غیرموازی بر یک کره، یک نقطه از کره و اندازهٔ شعاع این کره داده شده است؛ آن را رسم کنید.

۴۱۹. کره‌ای مماس بر یک صفحهٔ داده شدهٔ P در یک نقطهٔ معلوم A از آن، و مماس بر یک خط راست داده شدهٔ D رسم کنید.

۴۲۰. نشان دهید که اگر دو دایرهٔ غیرواقع در یک صفحه، دو نقطهٔ مشترک داشته باشند و یا بر هم مماس باشند، یک کره و تنها یک کره وجود دارد که بر این دو دایره می‌گذرد.

۴۲۱. کره‌ای رسم کنید که از یک دایره و یک نقطه غیرواقع در صفحهٔ این دایره بگذرد.

۴۲۲. کره‌ای رسم کنید که بر یک دایرهٔ داده شده می‌گذرد و بر یک خط داده شده، مماس است.

۴۲۳. کره‌ای رسم کنید که بر یک دایرهٔ داده شده می‌گذرد و بر صفحه‌ای داده شده، مماس است.

۴۲۴. کره‌ای رسم کنید که از آن، یک دایرهٔ صغیرهٔ (C) و نقطهٔ P محل برخورد محور این دایره با صفحه‌ای که مماس بر کره در نقطهٔ معلوم A از این دایرهٔ صغیره رسم می‌شود، داده شده است.

۴۲۵. مثلث متساوی‌الساقین $PAB(PA = PB)$ داده شده است. کره‌ای رسم کنید که قطب یک دایرهٔ عظیمهٔ آن که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، نقطهٔ P باشد.

۴۲۶. کره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A واقع در درون کنج سه‌وجهی داده شدهٔ S.XYZ می‌گذرد و بر سه وجه این کنج مماس است.

۴۲۷. کره‌ای به شعاع r رسم کنید به قسمی که مخروطهای محیطی که رأسهایشان چهار نقطهٔ غیرواقع در یک صفحهٔ A، B، C و D است، با هم مساوی باشند.

۴۲۸. کره‌ای به شعاع معلوم r رسم کنید که از دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B می‌گذرد و بر یک کرهٔ داده شده به مرکز S و شعاع s مماس است.

۴۲۹. کره‌ای رسم کنید که از دایره مفروضی بگذرد و بر کره دیگری عمود شود.

۴۳۰. چندوجهیی که با یالهای مساوی بر یک کره مماس است، مفروض است. تحقیق کنید آیا همواره کره‌ای موجود است که بر این چندوجهی محیط بشود؟

۴۳۱. کره‌ای رسم کنید که حجمی برابر با حجم یک مخروط یا یک استوانهٔ مفروض، داشته باشد.

۴۳۲. کره‌ای محاط در یک سطح استوانه‌ای دوار رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد یا بر یک خط داده شده مماس باشد.

۴۳۳. کره‌ای محاط در یک سطح مخروطی دوار داده شده، رسم کنید، که از نقطهٔ مفروض A بگذرد.

۴۳۴. کره‌ای محاط در یک سطح مخروطی دوار داده شده و مماس بر یک خط راست رسم کنید.

۱۲. برش، مقطع

۴۳۵. توپی به قطر ۱۰ سانتیمتر روی آب رها شده است. بالاترین نقطهٔ توپ ۲ سانتیمتر از سطح آب ارتفاع دارد. فصل مشترک سطح آب با توپ دایره‌ای است به قطر

الف) ۴ سانتیمتر — ب) ۶ سانتیمتر

ج) ۸ سانتیمتر — د) $\sqrt{۳۹}$ سانتیمتر

هـ) $\sqrt{۹۱}$ سانتیمتر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۴۳۶. اگر از نقطه‌ای مانند T، صفحه‌هایی بر یک کره مماس کنیم، نقطه‌های تماس رأسهای یک چندضلعی محاطی هستند.

۴۳۷. هنگامی که قاعدهٔ یک هرم قابل محاط شدن در یک دایره است، ثابت کنید که هر کرهٔ محیط بر این قاعده، یالهای هرم را در نقطه‌هایی قطع می‌کند که رأسهای یک چندضلعی مسطح قابل محاط در یک دایره است.

۴۳۸. ثابت کنید که فصل مشترک دو سطح استوانه‌ای محیط بر یک کره از دو منحنی مسطح تشکیل می‌شود.

۴۳۹. ثابت کنید استوانه‌ای که در یک مقطع دایره وارد یک کره می‌شود، در یک مقطع دایره مساوی دایرهٔ اول از آن خارج می‌شود.

۴۴۰. صفحهٔ P، یک کره و دایرهٔ عظیمهٔ ثابتی از آن داده شده است. مقطعی موازی صفحهٔ P از این کره بیابید به قسمی که استوانه ناقص قائمی که این مقطع قاعدهٔ آن است و به دایرهٔ عظیمهٔ ثابت محدود می‌شود، بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

۴۴۱. ثابت کنید فصل مشترک دو سطح مخروطی محیط بر یک کره از دو منحنی مسطح تشکیل می‌شود.

۴۴۲. مقطع یک کره و یک مخروط محیط بر آن، یک دایره است.

۴۴۳. ثابت کنید هنگامی که یک مخروط تحت یک دایره وارد یک کره می‌شود، تحت دایره‌ای دیگر از آن خارج می‌شود.

۴۴۴. ثابت کنید که بر خط فصل مشترک یک سطح مخروطی دوار و یک کره که مرکز آن روی محور سطح مخروطی و در رأس آن تصویر می‌شود، یک سطح استوانه‌ای دوار می‌گذرد.

۴۴۵. در صفحهٔ P دو دایرهٔ (C) و (C′) که دایرهٔ دومی واقع در درون دایرهٔ اولی است و یا مماس داخل با یکدیگر می‌باشند، داده شده است. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که دایرهٔ عظیمه‌اش دایرهٔ (C) و سطح استوانه‌ای دواری را درنظر می‌گیریم که منحنی هادی‌اش دایرهٔ (C′) است. ثابت کنید که بر فصل مشترک این دو سطح، یک سطح مخروطی دوار می‌گذرد که رأس آن روی خط‌المرکزین دو دایرهٔ داده شده است.

۴۴۶. یک کره به‌وسیلهٔ ۹ صفحه که از مرکز آن می‌گذرند تقسیم شده است. اگر هیچ سه صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند، کره به چند قسمت تقسیم می‌شود.

الف) $۲^{۸}$ ب) $۲^{۹}$ ج) ۷۶ د) ۸۱ هـ) ۷۴

۴۴۷. کرهٔ S (O ،۱۰) داده شده است. صفحه‌ای که به فاصلهٔ ۶ از مرکز این کره واقع است، کره را قطع کرده است. شعاع دایرهٔ مقطع را بیابید.

۴۴۸. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲R از مرکز کرهٔ S(O,R) قرار دارد. از این نقطه صفحه‌ای رسم می‌کنیم که با خط AO زاویهٔ $\frac{\pi}{۸}$ رادیان بسازد. مقطع این صفحه با کره را مشخص کنید.

۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به کره

۴۴۹. دو نقطه از سطح کره‌ای به شعاع واحد را، به‌وسیلهٔ یک منحنی که از درون کره گذشته است، به هم وصل کرده‌ایم. طول این منحنی، از ۲ کمتر است. ثابت کنید، تمامی این منحنی در درون نیم‌کره‌ای از کرهٔ مفروض قرار دارد.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۴

۴۵۰. اگر هر مقطع دلخواهی از یک سطح با صفحه، محیط یک دایره باشد، آن‌وقت، این سطح، یک کره است.

از مسأله‌های دشوار ریاضی

۴۵۱. شرط این که دو دایره بر روی یک کره واقع باشند، چیست؟

۴۵۲. منعکس یک صفحه نسبت به نقطه‌ای (قطب انعکاس) واقع در خارج این صفحه، یک کره است که از قطب انعکاس می‌گذرد و قطر نظیر قطب انعکاس بر صفحهٔ داده شده عمود است.

۴۵۳. منعکس یک کره نسبت به قطب انعکاسی غیرواقع بر آن کره، یک کرهٔ دیگر است که قطب انعکاس، یکی از مرکزهای تجانس برای این دو کره است.

۴۵۴. منعکس یک کره نسبت به مرکز انعکاسی واقع بر آن کره، صفحه‌ای است که بر قطری از کره که از آن نقطه می‌گذرد، عمود است.

۴۵۵. ثابت کنید منعکس یک دایره نسبت به قطب انعکاسی غیرواقع در صفحهٔ آن دایره، یک کره است.

۴۵۶. تصویر استرئوگرافیک یک شکل کروی تصویر مخروطی به‌دست آمده روی یک صفحهٔ قطری آن کره است، درصورتی که رأس این مخروط مصوّر؛ یکی از دو انتهای قطر عمود بر این صفحهٔ قطری باشد. حالت خاصی از تمام آنچه که در شکلهای منعکس در فضا ثابت شده، به حالت خاصی از تصویر استرئوگرافیک تعلق دارد.

۴۵۷. مطلوب است تعیین بیشترین تعداد کره‌هایی با شعاع ۷ که همگی با هم و بدون تقاطع با یکدیگر بر کره‌ای به شعاع ۳ مماس باشند.

۴۵۸. ثابت کنید حداقل پنج و حداکثر هشت کره پیدا می‌شود که هر یک از آنها بر همهٔ صفحات وجه‌های یک چهاروجهی در داخل آن مماس بشوند.

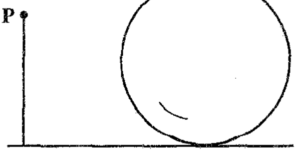
۴۵۹. چهار کره با شعاعهای برابر در فضا داده شده‌اند. ثابت کنید، هیچ سه‌تایی از آنها، چهارمی را نمی‌پوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۴۶۰. کره‌ای که در یک چهاروجهی محاط شده است، بر هر وجه چهاروجهی، در مرکز هندسی آن مماس است. ثابت کنید، این چهاروجهی منتظم است.

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۸۰

۴۶۱. کرهٔ به قطر ۲ سانتیمتر روی سطحی افقی واقع است. نقطهٔ نورانی P، که به ارتفاع ۱/۷ متر بالای سطح افقی قرار دارد، سایهٔ کره را روی سطح افقی می‌اندازد. خط مرزی این سایه چه شکلی است؟



الف) کمانی از دایره
ب) کمانی از بیضی
ج) کمانی از سهمی
د) کمانی از هذلولی
هـ) اجتماعی از دو نیمخط

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴۶۲. مطلوب است همهٔ مقدارهای $n \in N$ بزرگتر از واحد و $r_n > 0$ که برای آنها، بتوان روی سطح کرهٔ به شعاع واحد، دایره‌های غیرمتقاطع C_0 ، C_1 ، ...، C_n به شعاع r_n را طوری رسم کرد که به‌ازای هر مقدار $i = 1, ..., n$ ، دایرهٔ C_i بر دایره‌های C_0 و C_{i+1} مماس باشد ($C_{n+1} = C_1$) .

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چک واسلواکی، ۱۹۷۰

۴۶۳. عددی را نام ببرید که نه‌تنها از تعداد شنهای داخل کره‌ای برابر کرهٔ زمین، بلکه از تعداد شنهای به اندازهٔ تمامی جهان بیشتر باشد. به شرطی که تمام جهان را برابر کره‌ای بگیریم که مرکز آن در مرکز زمین و شعاع آن برابر فاصلهٔ بین مرکز زمین و مرکز خورشید باشد.

از ارشمیدس

۴۶۴. چهار صفحه، فضا را، به ۱۵ بخش تقسیم کرده‌اند. در چند بخش از این بخشها، می‌توان کره‌ای جا داد که بر هر چهار صفحه مماس باشد؟

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۴۶۵. چهار کره، فضا را، حداکثر به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۴۶۶. هر سطح کروی، درصورتی در اندازه‌های واقعی، روی استوانهٔ محیط بر آن تصویر می‌شود، که مصورهای آن محور استوانه را قطع کنند و عمود بر این محور باشند.

۴۶۷. هر سطح کروی ...ABC، در اندازهٔ واقعی $A'B'C'$ ، روی یک صفحهٔ مماس بر کره تصویر می‌شود. درصورتی که هر نقطه مانند A، B، C و... از سطح کروی اولی، روی صفحهٔ مماس بر کره، توسط یک دایرهٔ AA' ، BB' و... که مرکزش نقطهٔ تماس P است، تصویر شوند.

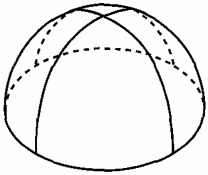
۴۶۸. هر سطح کروی ...ABC با بزرگی واقعی ...$A'B'C'$ روی یک مخروط محیط بر کره تصویر می‌شود، درصورتی که هر نقطهٔ A، B، C و... از سطح کروی به نقطه‌های A' ، B' ، C' و... واقع بر سطح مخروطی توسط دایره‌های AA' ، BB' ، ... که مرکزشان نقطهٔ S رأس مخروط محیطی است، تصویر شده باشند.

۴۶۹. هر سطح کروی ...ABC با تصویرش روی یک مخروط دوار که محورش از مرکز آن کره می‌گذرد دارای نسبت ثابتی است، درصورتی که نقطه‌های A، B، C و... از سطح کروی، به نقطه‌های A' ، B' ، C' و... واقع بر مخروط دوار توسط کمانهایی از دایره‌های به مرکز S تصویر شوند.

۴۷۰. کره‌ای از دو نیمکره، یکی مسی و دیگری آهنی درست شده است. وزن کره Q کیلوگرم

است. از این کره، مکعبی درآورده‌ایم که قطر آن مساوی قطر کره است. وزن براده‌هایی را که از تراش کره به‌دست آمده است، پیدا کنید.

۴۷۱. ساختمان مخزنی به شکل نیمکره است. اگر برای رنگ کردن کف مخزن ۲۶ لیتر رنگ لازم باشد، برای رنگ کردن روی آن چند لیتر رنگ لازم است؟



۴۷۲. در سیاره‌ای که به شکل کره است، موجودی زندگی می‌کند که می‌تواند، روی سطح سیاره، با سرعتی که از u تجاوز نمی‌کند، حرکت کند. یک سفینهٔ فضایی در اطراف این سیاره در پرواز است که می‌تواند با سرعت v حرکت کند. ثابت کنید اگر داشته باشیم $\frac{v}{u} > 10$، آن‌وقت، موجود روی سیاره نمی‌تواند خود را از دید سفینه مخفی کند.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۵

۱۴. مسأله‌های ترکیبی

۴۷۳. سه نقطهٔ A، B و C در فضا داده شده‌اند. نقطهٔ متغیر چهارمی مانند S درنظر می‌گیریم. MNPQ را متوازی‌الاضلاعی می‌گیریم که رأسهایش وسطهای ضلعهای چهارضلعی چپ BACS باشد. مکان هندسی نقطهٔ S را چنان بیابید که:

۱. چهارضلعی MNPQ لوزی باشد.

۲. نسبت قطرهای چهارضلعی MNPQ مساوی مقدار معلوم k باشد.

۴۷۴. خطهایی مانند D رسم شده از یک نقطهٔ داده شده مانند S را چنان درنظر می‌گیریم که بر هر یک از آنها دو صفحهٔ مماس عمود بر هم P و P′ بر یک کرهٔ مفروض به مرکز O و شعاع r بگذرد.

۱. مکان هندسی خطهای D را پیدا کنید.

۲. مکان هندسی نقطه‌های M و M′ (نقطه‌های تماس صفحه‌های P و P′ با کره) و پوش خط MM′ را پیدا کنید.

۴۷۵. یک چندضلعی محدب که یک مرکز تقارن دارد، حول خط Δ که در صفحهٔ آن واقع است، امّا آن را قطع نمی‌کند، دوران می‌کند. ثابت کنید که:

۱. سطح ایجاد شده به‌وسیلهٔ محیط چندضلعی مساوی است با حاصلضرب اندازهٔ محیط چندضلعی در محیط دایره‌ای که مرکز تقارن چندضلعی می‌پیماید.

۲. حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ سطح چندضلعی مساوی است با حاصلضرب اندازهٔ مساحت چندضلعی در محیط دایره‌ای که مرکز تقارن چندضلعی طی می‌کند.

۴۷۶. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ مفروض است. نقطهٔ C را روی نیمدایره انتخاب می‌کنیم که $BC = x$ باشد و در داخل نیمدایره کمان CD را به مرکز B و به شعاع BC رسم می‌کنیم (D بر AB واقع است).

۱. S مجموع مساحتهای سطحهای حادث از دوران کمانهای AC و CD را حول AB برحسب R و x حساب کنید.

۲. نمایش هندسی تابع $y = \frac{S}{R}$ را در ازاء مقادیر قابل‌قبول x رسم کنید.

۴۷۷. ۱. چهاروجهی SABC که در آن کنج سه‌وجهی به رأس S سه قائمه و $SA = a$ و $SB = b$ و $SC = c$ است، داده شده است. مرکز کرهٔ محیطی را تعیین و اندازهٔ شعاع این کره را به‌دست آورید.

۲. اگر یک کنج سه‌وجهی سه قائمه S.XYZ حول رأس ثابتش نقطهٔ S که روی یک کرهٔ داده شده قرار دارد دوران کند، ثابت کنید صفحه مشخص شده به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ A، B و C، یعنی نقطه جایی که یالهای کنج، کره را قطع می‌کنند، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴۷۸. نقطه‌های A، B و C روی سطح یک کره‌اند. نقطهٔ M را بر سطح کره طوری پیدا کنید که مجموع $|MA|^۲ + |MB|^۲ + |MC|^۲$:

۱. حداکثر باشد؛

۲. حداقل باشد.

۴۷۹. یک کره داده شده است، قطر ثابت PP' از این کره را درنظر می‌گیریم. دایرهٔ عظیمهٔ EE' را که صفحهٔ آن بر این قطر عمود است، رسم می‌کنیم و روی این دایره نقطهٔ ثابت A و نقطهٔ متغیر B که این دایره را در یک جهت می‌پیماید، درنظر می‌گیریم؛ روی دایرهٔ عظیمهٔ PBP' و در یک جهت کمان BM را مساوی با کمان AB جدا می‌کنیم.

۱. مکان هندسی تصویر نقطهٔ M روی صفحهٔ دایرهٔ EE' را تعیین کنید.

۲. مکان هندسی خطهای AM را بیابید.

۴۸۰. دو نیمخط عمود بر هم AX و BY با عمود مشترک AB و کرهٔ به قطر AB داده شده است.

۱. نشان دهید که اگر یک مماس بر این کره نیمخطهای فوق را دوباره در A' و B' قطع کند، داریم: $AA' \times BB' = \frac{AB^۲}{۲}$ و به عکس.

۲. مکان هندسی نقطه‌های تماس این مماسها را تعیین کنید.

۴۸۱. نسبت مساحتهای دو عرقچین مشخص شده روی یک کره به‌وسیلهٔ صفحهٔ P برابر k می‌باشد.

۱. مطلوب است محاسبهٔ k'، نسبت حجمهای قطعه‌های کروی مشخص شده به‌وسیلهٔ صفحهٔ P.

۲. k' و k را با هم مقایسه کنید.

۴۸۲. یک کره، یک سطح استوانه‌ای محیطی و مخروطی که رأس آن مرکز کره و منحنی هادیش مقطع استوانه با صفحه‌ای مانند P است که عمود بر محورش بوده و مماس بر کره است، داده شده‌اند. ثابت کنید:

۱. اگر این سه جسم را با صفحه‌ای موازی صفحهٔ P قطع کنیم، مساحت مقطع استوانه معادل مجموع مساحتهای مقطعهای کره و مخروط است.

۲. اگر این سه جسم را با دو صفحه موازی صفحهٔ P قطع کنیم، قسمتی از حجم استوانه محصور بین این دو صفحه، معادل مجموع حجمهایی از کره و مخروط که بین این دو صفحه قرار دارند، می‌باشد.

۴۸۳. دور کره‌ای به شعاع r، مخروط قائمی محیط شده است.

۱. کمترین مقدار حجم مخروط؛

۲. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع کره را پیدا کنید.

۴۸۴. حداکثر تعداد نقطه‌هایی را پیدا کنید که بتوان روی کرهٔ به شعاع واحد قرار داد، به‌نحوی که فاصلهٔ بین هر دو تا از آنها:

الف. کمتر از $\sqrt{2}$ نباشد؛

ب. بیشتر از $\sqrt{2}$ باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۶۸

۴۸۵. یک کنج سه قائمه دور رأسش که ثابت است دوران می‌کند. یالهای این کنج، یک کرهٔ داده شده را قطع می‌کنند. ثابت کنید که:

۱. مجموع مربعهای وترهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ کره روی سه یال این کنج مقدار ثابتی است.

۲. مجموع مربعهای ۶ پاره‌خط واقع بر یالها محصور بین رأسها کنج و کره، مقدار ثابتی است.

۳. مجموع مساحتهای دایره‌های مقطع کره با صفحه‌های سه وجه کنج مقدار ثابتی است.

۴۸۶. یک نیمدایره که به سه قسمت مساوی تقسیم شده است، حول قطرش دوران می‌کند. ثابت کنید که :

۱. منطقهٔ ایجاد شده به‌وسیلهٔ کمان وسطی مساوی مجموع دوتای دیگر است.

۲. اکلیل کروی (قطاع کروی) میانی (وسطی)، مساوی مجموع دوتای دیگر است.

۳. قطعه کروی میانی (وسطی) مساوی $\frac{۱۱}{۵}$ مجموع دو قطعهٔ کروی محدود به عرقچینهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ دو کمان انتهایی است.

۴۸۷. نیمدایره‌ای به مرکز O داده شده است. وتر AB را موازی قطر CD رسم می‌کنیم. این وتر، نیمدایره را به دو بخش، یکی قطعهٔ AMB و دیگری شکل CABD تقسیم می‌کند. نیمدایره را حول قطر CD دوران می‌دهیم. مطلوب است محاسبهٔ :

۱. حجم جسم ایجاد شده از دوران شکل CABD.

۲. حجم جسم ایجاد شده از دوران قطعهٔ AMB، با استفاده از حجم کره و به‌طور مستقیم.

۳. تعیین رابطه‌ای بین AB و CD برای آن‌که حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطعهٔ AMB، نصف حجم کره باشد.

۴۸۸. نیمکره‌ای به شعاع r که دایرهٔ عظیمهٔ قاعدهٔ آن در صفحهٔ Q می‌باشد، داده شده است. تمام کره‌های محاط در این نیمکره یعنی کره‌هایی را که در نقطه‌هایی مانند A بر نیمکره و در نقطه‌هایی مانند B بر صفحهٔ Q مماسند را درنظر می‌گیریم.

۱. ثابت کنید که خط AB از نقطهٔ ثابتی مانند P می‌گذرد.

۲. حاصلضرب $PA \times PB$ را برحسب r حساب کنید.

۳. نشان دهید که اگر دو کره به مرکزهای C و C' محاط در نیمکره بر هم در نقطه‌ای مانند M مماس باشند، صفحهٔ مماس مشترک آنها در نقطهٔ M از نقطهٔ P می‌گذرد.

۴۸۹. کرهٔ O و صفحهٔ P مماس بر این کره در نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ O مرکز کره نیمخطی رسم می‌کنیم که با OA زاویهٔ حاده بسازد و کره را در نقطهٔ B و صفحهٔ P را در نقطهٔ C قطع کند. اگر M مزدوج توافقی نقطهٔ O نسبت به دو نقطهٔ B و C باشد، ثابت کنید که :

۱. کرهٔ به مرکز M مماس بر صفحهٔ P به کرهٔ O نیز مماس است.

۲. کرهٔ به قطر OM بر صفحهٔ P مماس می‌باشد.

۳. صفحهٔ دایرهٔ مشترک کرهٔ داده شده و کرهٔ به قطر OM بر کرهٔ به قطر OA مماس است.

۴۹۰. دو کره به شعاعهای ۱ و ۲ داده شده‌اند.
الف. مساحت سطح هر یک از آنها را بیابید.
ب. اندازهٔ حجم هر یک از دو کره را بیابید.
در مورد جوابهای به‌دست آمده در الف و ب، به سؤالهای زیر پاسخ دهید.
۱. سطح یک کره چه تغییری می‌کند، درصورتی که شعاع آن دو برابر شود.
۲. حجم یک کره چه تغییری می‌کند، درصورتی که شعاع آن دو برابر شود.

۴۹۱. قطر کره‌ای یک سوم شعاع کرهٔ دیگری است.
الف. نسبت شعاعهای دو کره چه‌قدر است؟
ب. نسبت مساحتهای رویه‌های دو کره چه‌قدر است؟
پ. نسبت حجمهای دو کره چه‌قدر است؟

۴۹۲. قطر یک کره با شعاع کرهٔ دیگری برابر است.
الف. نسبت شعاعهای دو کره چه‌قدر است؟
ب. نسبت مساحتهای رویه‌های دو کره چه‌قدر است؟
پ. نسبت حجمهای دو کره چه‌قدر است؟

۴۹۳. رأس یک مخروط محیط بر یک کرهٔ داده شده، خط راست D را می‌پیماید. ثابت کنید که:
۱. صفحهٔ دایرهٔ تماس بر یک خط ثابت D′ می‌گذرد.
۲. خطهای D′ و D بر هم عمودند و عمود مشترک آنها از نقطهٔ O مرکز کره می‌گذرد.
۳. حاصلضرب فاصله‌های نقطهٔ O از این دو خط مساوی مربع شعاع کره است.
۴. به عکس، اگر رأس مخروط روی خط D′ جابه‌جا شود، صفحهٔ دایرهٔ تماس بر خط D می‌گذرد.

۴۹۴. هر جمله را با اصطلاح مناسب کامل کنید:
الف) در منشور قائم هر یال جانبی بر قاعده......... است.
ب) مقطع هرم با صفحه‌ای موازی......... هرم،......... با قاعدهٔ هرم است.
پ) مساحت دو مقطع یک هرم با......... از رأس متناسب است.
ت) اگر قاعده‌های یک مخروط و یک استوانه همنهشت و ارتفاعهای آنها برابر باشند، حجم استوانه......... حجم مخروط است.
ث) حجم دو کره با......... شعاعهای آنها و مساحتهایشان با......... شعاعهای آنها متناسب است.

۴۹۵. چهارضلعی مسطح $ABCD$ داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ S از فضا را چنان بیابید که ؛ فصل مشترک کنج چهاروجهی $S.ABCD$ با یک صفحه، بتواند یکی از شکلهای زیر باشد :

۱. یک مستطیل

۲. یک لوزی

۳. یک مربع

۴۹۶. کرهٔ $S(O,R)$ و نقطهٔ A به فاصلهٔ $R\sqrt{2}$ از مرکز این کره داده شده‌اند.

۱. چند خط از نقطهٔ A می‌گذرد که با خط OA زاویهٔ 30° می‌سازد و کره را قطع می‌کند؟

۲. چند خط از نقطهٔ A می‌گذرد که با خط OA زاویهٔ 45° می‌سازد و کره را قطع می‌کند؟

۳. چند خط از نقطهٔ A می‌گذرد که با خط OA زاویهٔ 60° می‌سازد و کره را قطع می‌کند؟

۴۹۷. کرهٔ $S(O,R)$ و نقطهٔ A به فاصلهٔ $3R$ از مرکز این کره داده شده‌اند.

۱. چند صفحه از نقطهٔ A می‌گذرد که بر این کره مماس باشند؟

۲. زاویهٔ بین صفحه‌هایی را که از A بر کره مماس می‌شوند، با خط AO تعیین کنید.

۳. چند صفحه از نقطهٔ A می‌گذرد که این کره را قطع می‌کند؟ حدود زاویهٔ بین این صفحه‌ها و خط OA را بیابید.

۴۹۸. سه کره هریک به شعاع R و دو به دو مماس بر هم و هر سه مماس بر یک صفحه داده شده‌اند.

۱. کوچکترین کرهٔ مماس بر هر سه کره را S می‌نامیم. شعاع این کره را تعیین کنید.

۲. سطح و حجم کرهٔ S را به‌دست آورید.

۳. بزرگترین کرهٔ مماس بر هر سه کره داده شده، چگونه است؟

۴۹۹. دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R)$ با خط‌المرکزین $OO'=R\sqrt{2}$ داده شده‌اند.

۱. شعاع دایرهٔ فصل مشترک این دو کره را بیابید.

۲. زاویهٔ رأس مخروطهایی را که مرکز هریک از دو کره، رأسهای آنها، و دایرهٔ مقطع، قاعدهٔ آنها باشد، تعیین کنید.

۳. اگر $S(O,R)$ و $S'(O',2R)$ و $OO'=R\sqrt{5}$ باشد، مسأله را حل کنید.

۵۰۰. کرهٔ $S(O,R)$ و نقطهٔ M به فاصلهٔ $R\sqrt{2}$ از مرکز این کره داده شده است.

۱. چند خط از نقطهٔ M می‌توان رسم کرد که بر این کره مماس باشد؟

۲. مکان هندسی خطهای مماسی را که از نقطهٔ M بر کره رسم می‌شوند، تعیین کنید.

۳. شعاع دایرهٔ فصل مشترک مخروط و کره را به‌دست آورید.

۴. طول مولّد مخروط به رأس M را که بر این کره مماس است تعیین کنید.

۵. اگر $MO=2R$ باشد، مسأله را حل کنید.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید، ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این جلد از دایرة‌المعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنمایی‌های ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی، نمی‌باشند ؛ و به‌طور یقین، دانشجویان، با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرة‌المعارف درج خواهد شد.

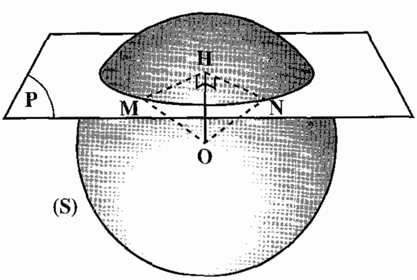
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌ها

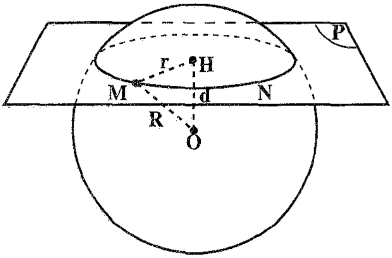
۱. تعریف و قضیه

۱. زیرا نقطه‌های فصل مشترک چون روی کره واقعند، همگی از مرکز، به فاصله‌ای برابر با شعاع قرار دارند و چون در یک صفحه واقعند، مکان آنها دایره‌ای است که شعاع آن برابر با شعاع کره است.

تبصره. هر گاه همهٔ صفحه‌هایی را که بر یک قطر AA' از کره می‌گذرند، درنظر بگیریم، هریک از مقطعهای حاصل را می‌توان به‌وسیلهٔ دوران حول AA' از روی مقطع دیگر به‌دست آورد و از این‌جا معلوم می‌شود که: کره، سطح دواری است که از دوران دایره حول یکی از قطرهای آن به‌دست آمده است.

۲. اگر P صفحهٔ قاطع باشد، دو نقطهٔ M و N از مقطع را (شکل) به‌نقطهٔ H پای عمود OH وارد بر صفحه وصل می‌نماییم. دو شعاع OM و ON دو مایل متساوی‌الطولند که نسبت به صفحهٔ P رسم شده‌اند و بنابراین پای آنها از پای عمود OH وارد بر صفحه به یک فاصله است؛ یعنی $MH = NH$ و برای سایر نقطه‌های فصل مشترک نیز، وضع به همین منوال است. پس این نقطه‌ها از H به یک فاصله‌اند و بنابراین بر دایره‌ای به مرکز H قرار دارند.





بحث در قضیهٔ بالا. فرض کنیم صفحهٔ P کرهٔ مفروض S را قطع کرده و فصل مشترک دایره‌ای به مرکز H باشد. هرگاه شعاع کره را R و فاصلهٔ OH را d و شعاع دایرهٔ مقطع را r فرض کنیم (شکل) از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH حاصل می‌شود :

$$r^2 = R^2 - d^2$$

و یا :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

بنابراین اگر d از صفر تا R ترقی کند، r از R تا صفر تنزل می‌نماید و شرط تقاطع صفحه با کره آن است که $d < R$ باشد.

به ازای $d = 0$ صفحهٔ قاطع از مرکز O می‌گذرد و r بزرگترین مقدار خود را داراست و به همین علت است که مقطع هر صفحهٔ قطری را در کره، دایرهٔ عظیمه می‌نامند و در سایر حالتها که $r < R$ است، مقطع را دایرهٔ صغیره گویند.

در ضمن نتیجه‌های زیر را داریم :

نتیجهٔ ۱. اگر فاصلهٔ صفحه‌ای از مرکز کره بیش از شعاع کره باشد، صفحهٔ کره را قطع نمی‌نماید ؛ زیرا در این حالت $d > R$ است.

نتیجهٔ ۲. اگر فاصلهٔ صفحه‌ای از مرکز کره مساوی شعاع دایره باشد، آن صفحه مماس بر کره است.

نتیجهٔ ۳. هرگاه دو صفحه کره را قطع کنند، مقطعی که صفحه‌اش از مرکز دورتر است، کوچکتر است و اگر فاصلهٔ مرکز کره از دو صفحهٔ قاطع یکی باشد، دو مقطع متساوی‌اند.

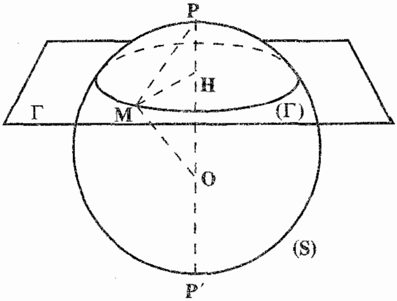
نتیجهٔ ۴. هر خط راست حداکثر کره را در دو نقطه قطع می‌نماید. زیرا نقطه‌های تقاطع هر خط راست با کره عبارتند از نقطه‌های تقاطع مقطع یک صفحه گذرنده بر خط راست در کره با آن خط راست و چون مقطع یک دایره است، حداکثر خط و دایره می‌توانند در دو نقطه، تقاطع داشته باشند.

نتیجهٔ ۵. هر دایره حداکثر کره را در دو نقطه قطع می‌نماید. استدلال این موضوع نیز مانند استدلال نتیجهٔ ۴ است.

نتیجهٔ ۶. اگر سه نقطه از دایره‌ای بر کره منطبق باشند، آن دایره کاملاً روی کره واقع خواهد شد.

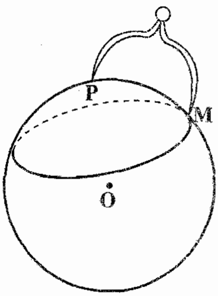
۳. زیرا این دو نقطه با مرکز کره وضع یک صفحه را مشخص می‌نمایند و این صفحه که از مرکز می‌گذرد، آن را در یک دایرهٔ عظیمه قطع می‌نماید.

۴. سه نقطهٔ واقع بر کره، هرگز روی یک خط راست واقع نمی‌شوند و بنابراین وضع یک صفحه را مشخص می‌نمایند و این صفحه کره را در یک دایره قطع می‌کند. این دایره عموماً یک دایرهٔ صغیره است.



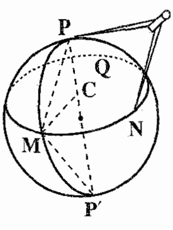
۵. زیرا فاصله‌های قطب از نقطه‌های یک دایره، طولهایی مانند PM می‌باشند (شکل) که همگی عبارتند از مایلهایی که پای آنها از پای عمود به یک فاصله است، پس متساوی‌الطولند. این طولهای متساوی را فاصلهٔ قطبی نقطه‌های دایره می‌نامند.

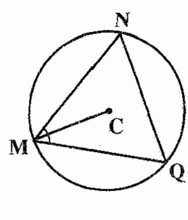
تبصره. عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی مکان هندسی نقطه‌هایی از کره که از یک نقطهٔ واقع بر سطح آن به یک فاصله می‌باشند، یک دایره است.

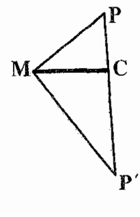


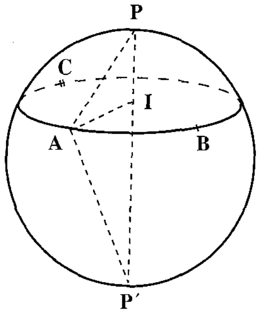
پرگار کروی. برای رسم مکان هندسی بالا و اصولاً برای رسم دایره بر کره، یا اندازه‌گیری فاصله‌های نقطه‌ها روی کره، وسیله‌ای به‌کار می‌برند که آن را پرگار کروی گویند و به‌صورت شکل روبه‌رو می‌باشد.

۶. روی کرهٔ مفروض نقطه‌ای مانند P را قطب قرار داده (شکل). دایرهٔ صغیرهٔ اختیاری بر آن رسم می‌نماییم و بر این دایرهٔ صغیره سه نقطهٔ دلخواه M، N و Q را اختیار کرده، فاصله‌های MN، MQ و NQ را به‌وسیلهٔ پرگار کروی اندازه می‌گیریم و در خارج روی صفحهٔ کاغذ مثلث MNQ را با معلومات سه ضلع رسم کرده، دایرهٔ محیطی آن را نیز می‌سازیم تا نقطهٔ C مرکز آن و در نتیجه طول شعاع MC معلوم گردد. حال از مثلث قائم‌الزاویهٔ PMP′ طول PM معلوم است (اول بار برای رسم دایرهٔ صغیرهٔ قطب P دهانهٔ پرگار کروی را به اندازهٔ طول MP باز نموده بودیم.) و ارتفاع وارد بر وتر یعنی MC را نیز یافته‌ایم. پس این مثلث را می‌توان رسم کرد و وتر PP′ از مثلث قائم‌الزاویهٔ حاصل قطر کرهٔ مفروض است.









۷. برای حل این مسأله کافی است، نقطهٔ P قطب دایرهٔ مطلوب را به‌دست آوریم؛ زیرا در این‌صورت به‌وسیلهٔ پرگار کروی می‌توان دایره‌ای به قطب P و فاصلهٔ قطبی AP رسم کرد که همان دایرهٔ مطلوب خواهد بود (شکل). برای این کار به‌وسیلهٔ پرگار کروی فاصله‌های AC، AB و BC را اندازه گرفته در خارج بر صفحهٔ کاغذ، مثلث ABC را با معلومات سه‌ضلع رسم می‌کنیم و دایرهٔ محیطی آن را نیز می سازیم تا شعاع آن AI معلوم شود. حال از مثلث قائم‌الزاویهٔ PAP′ ارتفاع وارد بر وتر AI و طول وتر PP′ (زیرا کره معلوم است) در دست است، پس آن را رسم می‌نماییم و فاصلهٔ قطبی PA به‌دست می‌آید. اگر A و B را مرکز قرار داده، با فاصلهٔ قطبی معلوم AP دو دایرهٔ صغیره بر کره رسم نماییم نقطهٔ تقاطع آنها P می‌باشد و بعکس دایره‌ای به مرکز P که با فاصلهٔ قطبی PA رسم شود، دایرهٔ مطلوب است.

۸. به عنوان مقدمه گوییم که اگر مابین دو نقطهٔ اختیاری A و B را به وسیلهٔ دو قوس منحنی محدب واقع در یک طرف AB به هم وصل نماییم، همواره منحنی محیطی بزرگتر از منحنی محاطی است؛ زیرا این قضیه که در هندسهٔ مسطحه برای دو خط منکسر محدب ثابت شده است، برای حالتی که عدهٔ ضلعهای دو خط منکسر بی‌نهایت زیاد شود و به‌صورت خط منحنی درآیند نیز صحیح می‌باشد.

پس از بیان این مقدمه فرض می‌کنیم، M مرکز کره بوده، بر سطح کره یک دایرهٔ عظیمه و یک دایرهٔ صغیره از دو نقطهٔ A و B رسم کرده باشیم، نقطهٔ M در صفحهٔ دایرهٔ عظیمه بر عمود منصف پاره‌خط AB، یعنی MC قرار دارد و مرکز دایرهٔ صغیره، یعنی M′ نیز در صفحهٔ دایرهٔ صغیره بر M′C عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است. بنابراین اگر صفحهٔ دایرهٔ صغیره را حول AB چندان دوران دهیم که بر صفحهٔ دایرهٔ عظیمه منطبق شود، M′C روی امتداد MC قرار می‌گیرد و چون $M'C < MC$ است، نقطهٔ M′ به وضع M″ مابین M و C واقع می‌شود.

حال اگر امتداد MC قوس صغیره را در E و قوس عظیمه را در D قطع نماید (نقطهٔ D را روی شکل بگذارید)، برای اثبات قضیه به موجب مقدمهٔ بالا کافی است، ثابت کنیم که قوس صغیره محیط بر قوس عظیمه است و یا $M''E' > M''D$.

از مثلث $MM''A$ حاصل می‌شود: $M''A > MA - MM''$

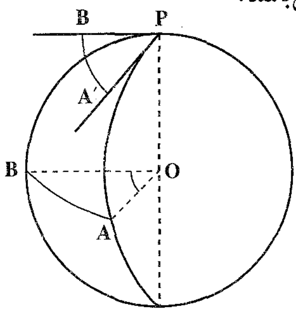
لیکن (شعاع عظیمه = $MA = MD$ و شعاع صغیره = $M''A = M''E'$)

پس رابطهٔ مزبور چنین می‌شود : $M''E' > MD - MM''$

و یا $M''E' > M''D$ و قضیه ثابت است.

تبصرهٔ ۱. ممکن است قضیهٔ بالا را چنین بیان کرد که کمترین فاصلهٔ مابین دو نقطهٔ واقع بر سطح کره قوس دایرهٔ عظیمه می‌باشد، به شرط آن‌که از نصف محیط کمتر باشد و به همین دلیل قوس دایرهٔ عظیمه (کمتر از نصف محیط) واصل مابین دو نقطه از سطح کره را فاصلهٔ کروی دو نقطه گویند.

تبصرهٔ ۲. قوس دایرهٔ عظیمه (بزرگتر از نصف محیط) واصل بین دو نقطه از سطح کره از قوس دایرهٔ صغیره واصل مابین همین دو نقطه طویلتر می‌باشد.



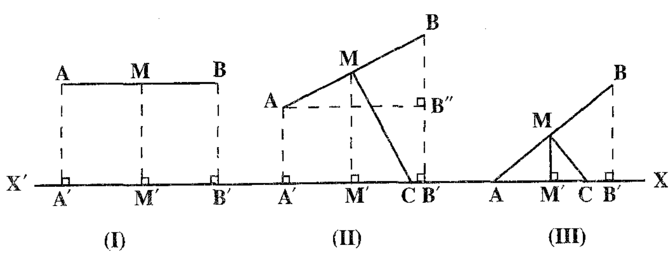
۹. اگر دو مماس PA' و PB' را بر دو نیمدایرهٔ عظیمهٔ مفروض رسم نماییم (شکل) زاویهٔ بین این دو مماس مسطحهٔ فرجهٔ قاچ است و از طرفی زاویهٔ $B\hat{O}A$ نیز مساوی با همین مسطحه است. پس $B'\hat{P}A' = B\hat{O}A$

و چون اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $B\hat{O}A$ مساوی اندازهٔ قوس $\widehat{AB}$ از دایرهٔ عظیمه می‌باشد، برای زاویهٔ $B'PA'$ نیز همین‌طور است.

اگر زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ قاچ α درجه باشد، قاچ کروی را قاچ α° می‌نامند.

نتیجه. نسبت دو قاچ از یک کره به یکدیگر مثل نسبت قوس دو قاچ و یا مثل نسبت زاویه‌های آنها است.

۱۰. محور $x'x$ و قطعه خط AB را در نظر می‌گیریم (شکل حالت II).



حالت کلی. قطعه خط AB موازی با محور نیست و رأس آن بر محور قرار ندارد. در این حال اگر M وسط قطعه خط AB و M' تصویر M بر محور و $A'B'$ تصویر AB روی محور باشد، از M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا محور را در C قطع نماید. سطح S حاصل از دوران AB سطح جانبی مخروط ناقصی است که مولد آن AB و شعاع مقطع

متوسط آن MM' است، پس $S = ۲\pi \times AB \times MM'$. برای تبدیل این عبارت به‌صورت مطلوبِ حکم قضیه از A عمود AB'' را بر BB' رسم می‌نماییم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $AB''B$ و $MM'C$ متشابه‌اند؛ زیرا ضلعهایشان نظیر به نظیر عمود بر یکدیگر است.

پس :
$$\frac{AB}{MC} = \frac{AB''}{MM'}$$

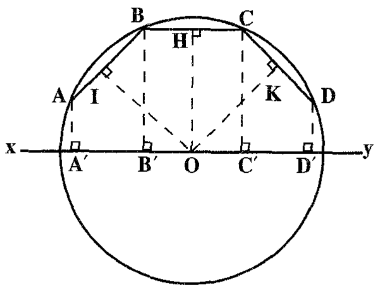
و یا :
$$AB \times MM' = MC \times AB'' = MC \times A'B'$$

پس :
$$S = ۲\pi \times MC \times A'B'$$

حالت خاص ۱. اگر AB با محور موازی باشد، سطح حاصل از دوران آن سطح استوانه است، پس :

$$S = ۲\pi \times AB \times AA' = ۲\pi \times AB \times MM'$$

حالت خاص ۲. یک سر قطعه خط بر محور واقع است. در این حالت استدلال مانند استدلال حالت کلی است.

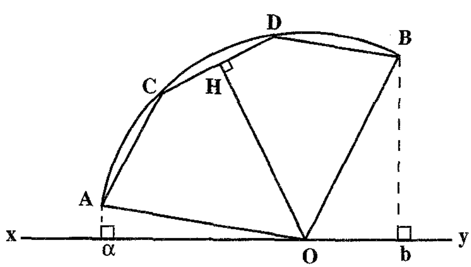


۱۱. فرض کنیم ABCD خط شکستهٔ منتظم (شکل) و O مرکز دایرهٔ محاطی و I، H و K وسط ضلعها باشند. بنابر قضیهٔ قبل داریم :

$$AB \text{ سطح} = ۲\pi \times OI \times A'B'$$
$$BC \text{ سطح} = ۲\pi \times OH \times B'C'$$
$$CD \text{ سطح} = ۲\pi \times OK \times C'D'$$

از جمع این رابطه‌ها با ملاحظهٔ آن که $OI = OH = OK$ است، حاصل می شود :

$$ABCD \text{ سطح} = ۲\pi \times OI(A'B' + B'C' + C'D') = ۲\pi \times OI \times A'D'$$



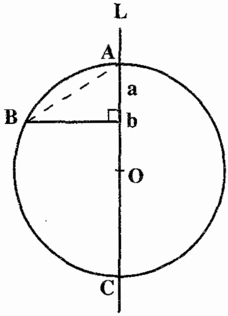
۱۲. فرض کنیم $\widehat{AB}$ کمان مولد منطقه باشد، در این صورت خط شکسته منتظم ACDB را در آن محاط نموده، شعاع دایرهٔ محاطی آن را OH می‌نامیم. قبلاً ثابت کردیم :

$$ACDB \text{ سطح} = ۲\pi \times OH \times ab$$

حال اگر عدهٔ ضلعهای خط شکسته بی‌نهایت زیاد شود، به‌طوری که هر ضلع به‌سمت صفر میل نماید، شعاع OH دایرهٔ محاطی به‌سمت R یعنی شعاع دایرهٔ محیطی میل می‌کند و ab تغییر نمی‌نماید و سطح S حادث از دوران خط شکسته به سمت سطح منطقه میل می‌کند؛ پس :

$$S = ۲\pi R \times ab = ۲\pi R \times h = ۲\pi Rh$$

نتیجهٔ ۱. در روی یک کره تمام منطقه‌هایی که ارتفاعهایشان یکی باشد، دارای مساحتهای متساوی می‌باشند.



نتیجهٔ ۲. سطح عرقچین کروی مساوی است با سطح دایره‌ای که شعاعش مساوی با وتر قوس مولد عرقچین باشد (شکل).

زیرا اگر AB وتر قوس مولد عرقچین باشد، از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC نتیجه می‌شود :

$$AB^{۲} = Ab \times AC = ۲Rh$$

$$S = \pi AB^{۲}$$

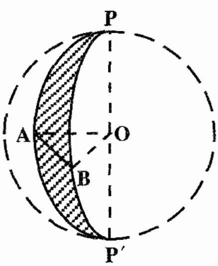
نتیجهٔ ۳. مساحت عرقچین کروی به ارتفاع h در کرهٔ به شعاع R برابر است با :

$$S = ۲\pi Rh$$

۱۳. زیرا کره منطقه‌ای است که ارتفاعش $h = ۲R$ می‌باشد.

$$S = ۲\pi Rh = ۲\pi R \times ۲R = ۴\pi R^{۲}$$

۱۴. زیرا اگر قاچی مثلاً دارای زاویهٔ مرکزی یک درجه باشد،

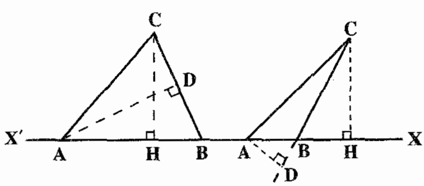


مساحت سطح آن $\frac{۱}{۳۶۰^\circ}$ مساحت سطح کره است، پس اگر زاویهٔ مرکزی قاچ α درجه باشد :

$$S_{\text{قاچ}} = \frac{۴\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰} = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۹۰}$$

۱۵. فرض کنیم A رأس ثابت مفروض باشد. برای اثبات قضیه سه حالت درنظر می‌گیریم :

حالت اوّل. یک ضلع AB از مثلث روی محور واقع است. در این صورت برحسب آن که ارتفاع CH از مثلث در داخل یا در خارج آن واقع شود، دو حالت از شکل ممکن است (شکل). ولی چون نتیجهٔ محاسبه در هر دو حالت یکی خواهد شد،



فقط در حالتی که این ارتفاع در داخل واقع است، محاسبه می‌نماییم. در این صورت حجم حاصل مساوی است با مجموع حجمهای دو مخروط.

$$V = \text{حجم } ACH + \text{حجم } BCH$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi CH^{۲} \times AH + \frac{۱}{۳}\pi CH^{۲} \times BH$$

و یا :
$$V=\frac{1}{3}\pi CH^2(AH+BH)=\frac{1}{3}\pi CH^2\times AB$$

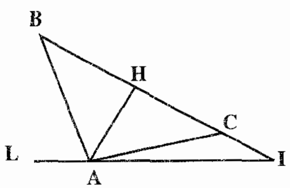
لیکن اگر مساحت مثلث ABC را به دو طریق حساب کنیم، حاصل می‌شود :
$$CH\times AB=CB\times AD$$

پس :
$$V=\frac{1}{3}\pi CH\times CH\times AB=\frac{1}{3}\pi CH\times CB\times AD$$

و از طرف دیگر می‌دانیم که BC ضمن دوران، سطح جانبی مخروطی را تولید می‌کند به قسمی که :
$$\text{سطح } BC=\pi\times BC\times CH$$

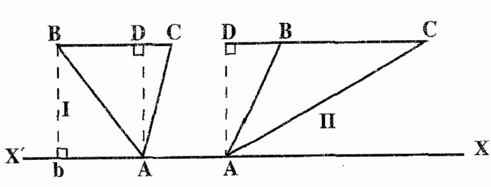
پس :
$$V=(\text{سطح } CB)\frac{AD}{3}$$

حالت دوم. ضلع BC موازی با محور نیست و هیچ‌یک از ضلعها بر محور قرار ندارند. در این حالت ضلع CB را امتداد می‌دهیم تا محور را در نقطهٔ I قطع کند (شکل). به موجب نتیجهٔ حالت اوّل داریم :



$$V=\text{حجم } ABI-\text{حجم } ACI$$
$$=(\text{سطح } BI)\frac{AH}{3}-(\text{سطح } CI)\frac{AH}{3}$$
$$=\frac{1}{3}AH(\text{سطح } BI-\text{سطح } CI)$$
$$=\frac{1}{3}AH(\text{سطح } BC)$$

حالت سوم. ضلع BC با محور دوران موازی است، در این صورت نیز مطابق شکل دو حالت وجود دارد و چون نتیجهٔ محاسبه در هر دو حالت یکی می‌باشد، فقط در حالتی که ارتفاع AD داخل مثلث واقع است، محاسبه می‌نماییم. در این‌صورت حجم مطلوب مجموع حجمهای حاصل از دوران دو مثلث ADC و ADB است (شکل).



اما حجم حاصل از دوران مثلث ADB نیز تفاضل حجم استوانهٔ حاصل از دوران مستطیل ADBb و مخروط حاصل از دوران مثلث ABb است و چون این مخروط و استوانه در قاعده و ارتفاع شریکند، حجم استوانه سه برابر حجم مخروط است.

پس : $\text{ADB حجم} = \frac{۲}{۳}\pi BD \times AD^{۲}$

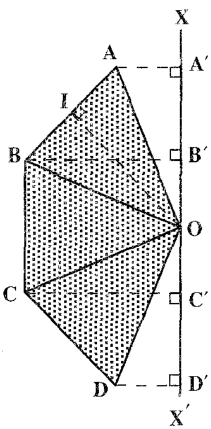
اما $\text{BD سطح} = ۲\pi \times BD \times AD$

پس : $\text{ABD حجم} = \frac{AD}{۳}(\text{BD سطح})$

و بنابراین V، یا حجم حاصل از دوران ABC چنین می‌شود :

$$\frac{AD}{۳}(\text{BC سطح}) = \frac{AD}{۳}(\text{CD سطح}) + \frac{AD}{۳}(\text{BD سطح})$$

و قضیه در تمام حالتها ثابت است.



۱۶. قطاع چند ضلعی منتظم OABCD (شکل) را درنظر گرفته به‌وسیلهٔ ترسیم اشعهٔ OB و OC آن را به سه مثلث متساوی که ارتفاع وارد بر ضلع روبه‌روی O در هر سه‌ی آنها مساوی OI است، تقسیم می‌نماییم. به موجب قضیهٔ قبل حاصل است :

$$\text{OAB حجم} = \frac{OI}{۳}(\text{AB سطح})$$

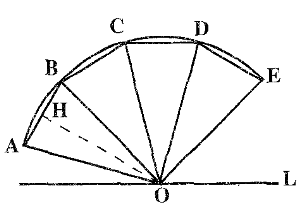
$$\text{OBC حجم} = \frac{OI}{۳}(\text{BC سطح})$$

$$\text{OCD حجم} = \frac{OI}{۳}(\text{CD سطح})$$

از جمع این سه رابطه حاصل می‌شود :

$$V = \frac{OI}{۳}(\text{AB سطح} + \text{BC سطح} + \text{CD سطح})$$

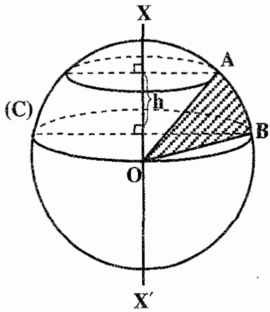
$$= \frac{OI}{۳}(\text{ABCD سطح})$$



۱۷. قطاع کروی حاصل از دوران قطاع دایرهٔ OAF را درنظر گرفته و قطاع چندضلعی منتظم OABCDE را در آن محاط می‌نماییم (شکل).

می‌دانیم :

$$\text{OABCDE حجم} = \frac{AH}{۳}(\text{ABCDE سطح})$$



حال اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی محاطی بی‌نهایت زیاد شود به‌طوری که هر ضلع به سمت صفر میل نماید، AO به سمت شعاع دایره و سطح ABCDE به‌سمت سطح منطقهٔ حاصل از دوران کمان $\widehat{AE}$ میل می‌نماید و حجم حاصل از دوران قطاع چند ضلعی به‌سمت حجم قطاع کروی میل می‌کند ؛ پس :

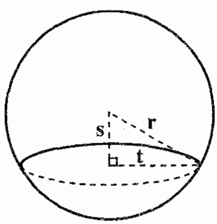
$$\text{(سطح منطقهٔ AE)}\ \frac{R}{۳} = \text{حجم قطاع کروی}$$

و چون دستور سطح منطقه $S = ۲\pi Rh$ است، دستور حجم قطاع چنین می‌شود :

$$V = \frac{۲}{۳}\pi R^۲ h$$

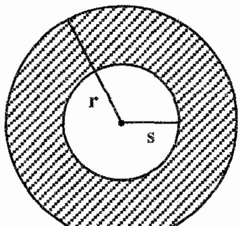
۱۸. می‌توان کره را قطاعی دانست که از دوران نیمدایره حاصل شده باشد. بنابراین ارتفاع منطقه‌ای که قاعدهٔ آن است، ۲R می‌باشد. پس دستور حجم کره چنین است :

$$V = \frac{۲}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi R^۲ \times ۲R = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$



۱۹. تا این‌جا بهترین وسیلهٔ ما برای محاسبهٔ حجم، اصل کاوالیری بوده است. برای استفاده از این اصل در محاسبهٔ حجم کره باید جسم دیگری بیابیم که مساحت هر مقطع آن با مساحت مقطعی از کره، که با آن در یک سطح است، برابر باشد. بنابراین اوّلین قدم ما باید یافتن مساحت مقطعهای کره باشد. این کار ساده است. کره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید، مقطعهای افقی نواحی مستدیرند. اگر فاصلهٔ مقطع تا مرکز کره s و شعاع آن t باشد، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم : $t^۲ = r^۲ - s^۲$. پس مساحت این مقطع برابر است با :

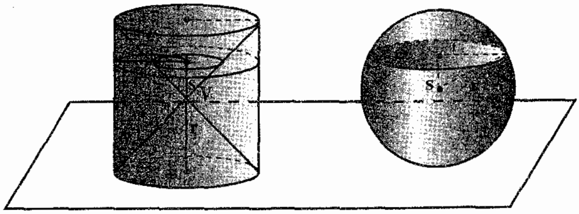
$$A_s = \pi t^۲ = \pi(r^۲ - s^۲) = \pi r^۲ - \pi s^۲$$



$A = \pi r^۲ - \pi s^۲$

این فرمول معنی هندسی دارد : مساحت چنین مقطعی برابر است با مساحت یک ناحیهٔ حلقوی محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز، به شعاع بیرونی r و شعاع درونی s. ناحیهٔ حلقوی را در شکل می‌بینید. چنین شکلی را طوق می‌نامند.

اکنون جسمی پیدا می‌کنیم که مقطع آن چنین شکلی باشد. صفحهٔ افقی E را مماس بر کره و در این صفحه یک ناحیهٔ



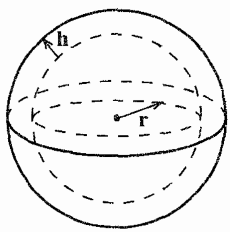
مستدیر به‌شعاع r درنظر می‌گیریم و روی آن استوانهٔ قائمی به ارتفاع ۲r می‌سازیم. فرض کنید V وسط محور استوانه، یعنی وسط پاره‌خط واصل بین مرکزهای دو قاعدهٔ بالایی و پایینی آن باشد. دو مخروط تشکیل می‌دهیم که V رأس آنها و دو قاعدهٔ استوانه قاعده‌هایشان باشد.

جسم داخل استوانه و خارج دو مخروط از نوعی است که به دنبالش هستیم. هر مقطع این جسم یک طوق است، مساحت هر مقطع که به فاصلهٔ s از V باشد، برابر است با $\pi(r^2-s^2)$. بنابراین حجم این جسم با حجم کره برابر است.

و اما محاسبهٔ حجم این جسم جدید کار ساده‌ای است : حجم استوانه منهای حجمهای دو مخروط. پس خواهیم داشت :

$$\pi r^2\times 2r-2\times\frac{1}{3}\pi r^2 r=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$



۲۰. با به‌کار بردن یک شگرد خاص می‌توانیم نتیجهٔ قضیهٔ قبل را در یافتن مساحت رویهٔ کره به‌کار بریم. کره‌ای به شعاع r درنظر می‌گیریم و کره‌ای به شعاع r+h تشکیل می‌دهیم. h را کوچک فرض می‌کنیم. جسم بین این دو کره را که در شکل می‌بینید، پوستهٔ کروی می‌نامیم. مساحت رویهٔ کره را A و حجم پوستهٔ کروی را V فرض کنید. اگر h کوچک باشد، V تقریباً برابر است با Ah (مثلاً اگر توپی به شعاع ۱m را رنگ بزنید و ضخامت رنگ ۰/۱ mm باشد، حجم رنگی که به‌کار می‌برید $\frac{1}{10000}$ A است). بنابراین اگر h کوچک باشد، $\frac{V}{h}$ تقریباً برابر با A است. پس وقتی $h\to 0$ داریم $\frac{V}{h}\to A$.

اما می‌توانیم $\frac{V}{h}$ را دقیقاً حساب کنیم و ببینیم که وقتی $h\to 0$ به چه مقداری میل می‌کند. V تفاضل حجمهای دو کره است ؛ بنابراین :

$$V=\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$=\frac{۴}{۳}\pi\left[(r+h)^{۳}-r^{۳}\right]$$

$$=\frac{۴}{۳}\pi\left[r^{۳}+۳r^{۲}h+۳rh^{۲}+h^{۳}-r^{۳}\right]$$

$$=\frac{۴}{۳}\pi\left[۳r^{۲}h+۳rh^{۲}+h^{۳}\right]$$

پس :

$$\frac{V}{h}=\frac{۴}{۳}\pi(۳r^{۲}+۳rh+h^{۲})$$

$$=۴\pi r^{۲}+h(۴\pi r+\frac{۴}{۳}\pi h)$$

وقتی $h \to ۰$ ، جملهٔ دوم کلاً به سمت صفر میل می‌کند. پس :

$$\frac{V}{h}\to ۴\pi r^{۲}$$

چون می‌دانیم که $\frac{V}{h}\to A$ ، پس $A=۴\pi r^{۲}$.

به این نکتهٔ جالب توجه کنید که مساحت رویهٔ کره دقیقاً چهار برابر مساحت مقطعی است که از مرکز کره می‌گذرد.

۲۲. راه اثبات قضیه عیناً نظیر راهی است که برای تعیین سطح قاچ به‌کار رفت.
اگر زاویهٔ قاچ α درجه باشد، حجم اکلیل کروی (قاچ کروی) برابر است با :

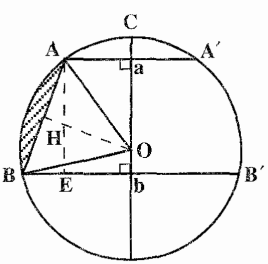
$$V_{\text{قاچ}}=\frac{۴}{۳}\times\frac{\pi R^{۳}\alpha}{۳۶۰}=\frac{\pi R^{۳}\alpha}{۲۷۰}$$

۲۳. اگر V حجم مزبور باشد :

$$V=\text{حجم قطاع } OAB-\text{حجم مثلث } OAB$$

$$=\frac{۱}{۳}(\text{سطح منطقهٔ } AB)R-(\text{سطح وتر } AB)\frac{OH}{۳}$$

$$=\frac{۲}{۳}\pi R^{۲}h-\frac{۲}{۳}\pi OH^{۲}\times h$$



(زیرا سطح حاصل از دوران وتر AB حول قطر مساوی $۲\pi\times OH\times ab$ می‌باشد.)

پس :

$$V=\frac{۲}{۳}\pi h(R^{۲}-OH^{۲})$$

لیکن در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB می‌توان نوشت :

$$R^۲ - OH^۲ = BH^۲ = (\frac{AB}{۲})^۲ = \frac{AB^۲}{۴}$$

پس :

$$V = \frac{۲}{۳}\pi h \frac{AB^۲}{۴} = \frac{۱}{۶}\pi AB^۲ \times h$$

۲۴. اگر V حجم قطعه کره و r و r′ اشعهٔ دو قاعده ($BE = r$ و $AD = r'$) و $h = DF$ ارتفاع قطعهٔ کره باشد.

$$V = \text{ACB حجم قطعهٔ} + \text{BBED حجم مخروط ناقص}$$

$$= \frac{۱}{۶}\pi h \times AB^۲ + \frac{۱}{۳}\pi h(r^۲ + r'^۲ + rr')$$

$$= \frac{۱}{۶}\pi h(AB^۲ + ۲r^۲ + ۲r'^۲ + ۲rr')$$

اما از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH حاصل می‌شود :

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ = h^۲ + (r - r')^۲ = h^۲ + r^۲ + r'^۲ - ۲rr'$$

که چون به‌جای آن در رابطهٔ قبل قرار دهیم، حاصل می‌شود :

$$V = \frac{۱}{۶}\pi h(۳r^۲ + ۳r'^۲ + h^۲) ,$$

و یا :

$$V = \frac{۱}{۲}\pi h(r^۲ + r'^۲) + \frac{۱}{۶}\pi h^۳$$

۲۵. هرگاه در دستور حجم قطعه کره شعاع یکی از دو قاعده مثلاً r′ را صفر قرار دهیم، دستور حجم عرقچین حاصل می‌شود :

$$V = \frac{۱}{۶}\pi h(۳r^۲ + h^۲)$$

لیکن در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل) می‌توان نوشت :

$$AH^۲ = r^۲ = BH \times CH = h(۲R - h)$$

که چون به جای آن قرار دهیم، حاصل می‌شود :

$$V = \frac{۱}{۶}\pi h(۶Rh - ۲h^۲) = \frac{\pi h^۲}{۳}(۳R - h)$$

دقت کنید: در تمام دستورهایی که در این فصل ثابت کردیم :

الف. تمام دستورهای مربوط به مساحت، نسبت به طولهای معلوم، از درجهٔ دوم می‌باشند.

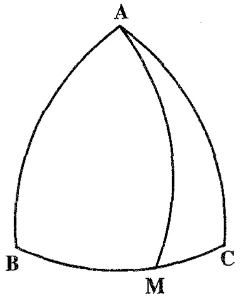
ب. تمام دستورهای مربوط به حجم، نسبت به طولهای معلوم، از درجهٔ سوم هستند.

۲۶. اولاً. چون ضلعهای چند ضلعی کروی قوسهای دایرهٔ عظیمه‌اند، اندازهٔ آنها بترتیب با اندازهٔ زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آنها برابر است، پس: اندازهٔ AB = اندازهٔ $\widehat{AOB}$ و... (شکل).
ثانیاً. اگر دو مماس مثلاً در نقطهٔ B بر ضلعهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ رسم کنیم، چون این دو مماس بر شعاع OB عمودند، زاویهٔ مابین آنها مسطحهٔ فرجهٔ AOBC می‌شود و...
نتیجه. از قضیهٔ بالا معلوم می‌شود که نظیر هر خاصیت از کنج مرکزی خاصیت متشابهی برای چند ضلعی کروی وجود دارد و فقط کافی است که در احکام کنج به‌جای کلمات زاویه و فرجه مرتباً کلمات ضلع و زاویه را جانشین سازیم.

۲۷. زیرا در هر کنج سه‌وجهی، یک زاویه از مجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر می‌باشد.

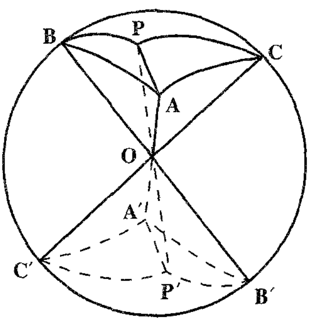
۲۸. زیرا در هر کنج محدب، مجموع زاویه‌ها از چهار قائمه کمتر می‌باشد.

۲۹. زیرا در هر کنج سه وجهی، دو فرجهٔ روبه‌روی دو زاویهٔ متساوی با یکدیگر مساوی‌اند و برعکس.



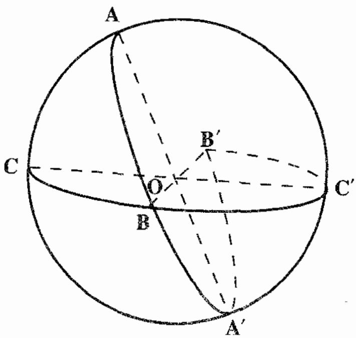
۳۰. زیرا در هر کنج سه وجهی، زاویهٔ مقابل به فرجهٔ بزرگتر از زاویهٔ مقابل به فرجهٔ کوچکتر، بزرگتر می‌باشد و برعکس.

۳۱. قضیه‌ها بترتیب نظیر قضیه‌های کنج سه وجهی می‌باشند.
تبصره. از قضیهٔ بالا معلوم می‌شود که در مثلث کروی برخلاف مثلث مسطح مجموع زاویه‌ها همواره از دو قائمه بیشتر است و به‌خصوص یک مثلث کروی می‌تواند دارای یک یا دو یا سه زاویهٔ قائمه باشد و نیز می‌تواند حتی سه زاویهٔ منفرجه داشته باشد.



۳۳. بر سه رأس A، B و C از مثلث کروی ABC دایرهٔ صغیره‌ای می‌توان مرور داد. محور این دایره یعنی PP′ را رسم کرده بر نقطهٔ P و هر یک از رأسهای A، B و C دایرهٔ عظیمه‌ای مرور می‌دهیم، مثلث ABC به سه مثلث متساوی‌الساقین PAB، PBC و PAC تجزیه می‌شود و مثلث قرینه یعنی A′B′C′ نیز به‌همین نحو به سه مثلث متساوی‌الساقین P′A′B′، P′B′C′ و P′A′C′ تجزیه

می‌شود که بترتیب با مثلثهای اوّلی قرینه می‌باشند و چون این مثلثها متساوی‌الساقین هستند، هر یک از آنها با مثلث قرینهٔ خود معادل است. پس مثلث ABC نیز که مجموع سه مثلث اوّلی است، با مثلث $A'B'C'$ که مجموع سه مثلث دومی می‌باشد، معادل است. اگر قطبهای P و P' در خارج دو مثلث قرارگیرند، در این صورت مثلث ABC تفاضل مجموع دو مثلث با مثلث سوم خواهد شد و برای $A'B'C'$ نیز همین‌طور خواهد بود.



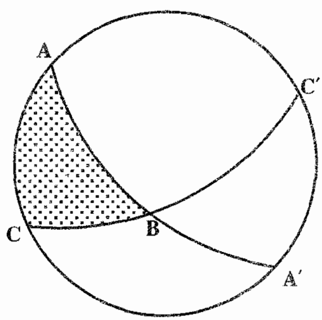
۳۴. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را (شکل) که در شرایط حکم قضیه صادقند درنظر گرفته، قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به O نقطهٔ B' می‌نامیم. مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ قرینه است و بنابراین معادل یکدیگرند، پس:

$$ABC + A'BC' = A'B'C' + A'BC'$$

و مجموع دو مثلث طرف دوم، قسمتی است از سطح کره که مابین دو نیمدایرهٔ عظیمهٔ $BA'B'$ و $BC'B'$ محصور است و این قسمت بنا به تعریف قاچ کروی مساوی است با قاچی که زاویهٔ رأس آن زاویهٔ B باشد، پس:

$ABC + A'BC' = $ قاچ B

۳۵. مثلث کروی ABC را درنظر گرفته، مساحت سطح آن را S فرض می‌کنیم (شکل). ضلعهای این مثلث را روی کره امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های A' و C' متقاطر با A و C به‌دست آیند. هرگاه قاچهای کروی را که زاویهٔ رأسشان برابر زاویه‌های مثلث ABC است، قاچ A، قاچ B و قاچ C بنامیم، از روی شکل واضح است که:



$ABC + A'BC = $ قاچ A

$ABC + ABC' = $ قاچ C

و بنابر قضیهٔ قبلی:

$ABC + A'BC' = $ قاچ B

از جمع این سه رابطه با ملاحظهٔ آن که روی شکل سطح نیمکره از چهار مثلث که در رابطه‌های بالا موجودند، تشکیل شده حاصل می‌شود:

قاچ C + قاچ B + قاچ A = سطح نیمکره + $2ABC$

یا
$$۲S+۲\pi R^۲=\frac{۴\pi R^۲(A+B+C)}{۴\ \text{قائمه}}$$

اگر طرفین تساوی را بر $۸\pi R^۲$ تقسیم کنیم نتیجه می‌شود :

$$\frac{S}{۴\pi R^۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{A+B+C}{۸\ \text{قائمه}}$$

و یا
$$\frac{S}{\text{سطح کره}}=\frac{A+B+C-۲\ \text{قائمه}}{۸\ \text{قائمه}}$$

نتیجهٔ ۱. مساحت مثلث کروی مساوی است با مساحت سطح دایرهٔ عظیمه ضرب در فضل کروی آن.

زیرا از دستور قضیهٔ قبل حاصل می‌شود :

$$S=۴\pi R^۲\frac{A+B+C-۲\ \text{قائمه}}{۸\ \text{قائمه}}=\frac{\pi R^۲}{۲}(A+B+C-۲\ \text{قائمه})$$

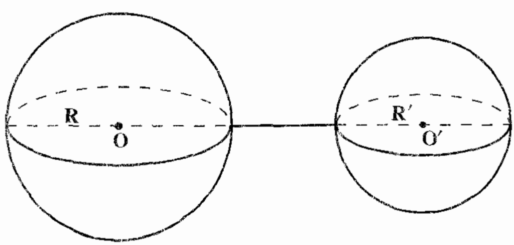
نتیجهٔ ۲. نیمکره مثلث کروی است که هریک از زاویه‌های آن ۲ قائمه است. زیرا در دستور بالا اگر $A+B+C$ مساوی شش قائمه شود، سطح S مساوی $۲\pi R^۲$ می‌گردد.

نتیجهٔ ۳. مثلث سه قائمه برابر با یک هشتم سطح کره است.

۳۶. دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ را درنظر گرفته، اندازهٔ خط‌المرکزین آنها را $OO'=d$ می‌نامیم. این دو کره نسبت به هم یکی از پنج حالت زیر را دارند :

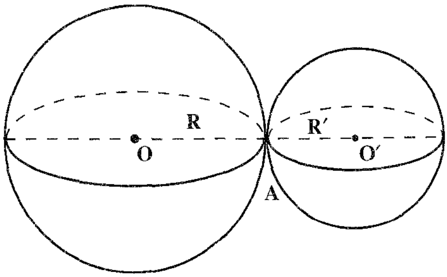
۱. دو کره متخارجند. در این صورت دو کره نقطهٔ مشترکی ندارند و اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع دو شعاع کره بیشتر است، یعنی داریم :

$$d>R+R'$$



به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن که دو کره برون هم باشند، آن است که خط‌المرکزین آنها از مجموع دو شعاع آن دو کره بیشتر باشد.

۲. دو کره مماس برون هستند. در این حالت، دو کره تنها در یک نقطه مشترک هستند که این نقطه، نقطهٔ تماس دو کره است. در این حالت داریم:

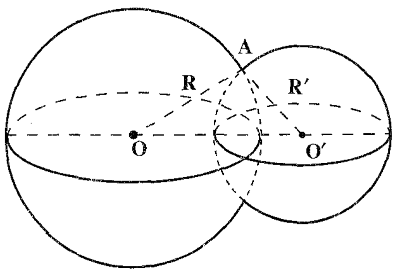


$$d = R + R'$$

به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن‌که دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ مماس برون باشند، آن است که داشته باشیم:

$$d = OO' = R + R'$$

۳. دو کره متقاطعند. در این حالت فصل مشترک دو کره، یک دایره است و داریم:

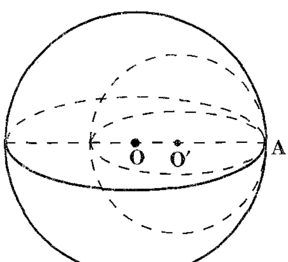


$$|R - R'| < d = OO' < R + R'$$

به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن که دو کرهٔ $S(O,R)$ و $S'(O',R')$ متقاطع باشند، آن است که داشته باشیم:

$$|R - R'| < OO' < R + R'$$

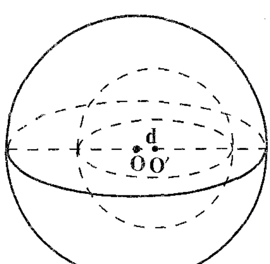
۴. دو کره مماس درونند. در این حالت دو کره در یک نقطه مانند A برهم مماسند و داریم:



$$d = |R - R'|$$

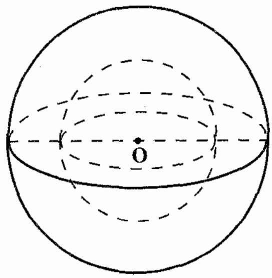
به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن که دو کره مماس درون باشند، آن است که خط‌المرکزین دو کره، مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهای آنها باشد.

۵. دو کره متداخلند یعنی یکی درون دیگری است امّا مرکزهای آنها متمایز است. در این حالت دو کره نقطهٔ مشترکی ندارند و داریم:



$$d < |R - R'|$$

به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن که دو کره، یکی درون دیگری باشد، آن است که خط‌المرکزین کره از قدرمطلق تفاضل آن دو کره کمتر باشد.



۶. دو کره متحدالمرکزند. در این صورت دو کره نقطهٔ مشترکی ندارند و داریم:

$d = 0$

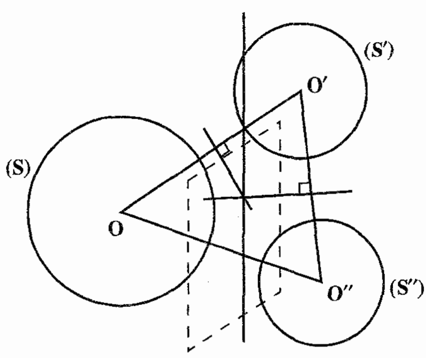
به‌طور کلی می‌توان گفت، شرط لازم و کافی برای آن که دو کره هم‌مرکز باشند، آن است که خط‌المرکزین آنها مساوی صفر باشد.

۳۷. **اثبات.** اگر M نقطه‌ای باشد که نسبت به دو کره قوت مساوی داشته باشد، صفحهٔ گذرنده بر M و خط‌المرکزین دو کره، این دو کره را در دو دایرهٔ (C) و (C′) قطع می‌کند و برای نقطهٔ M و این دو دایره می‌دانیم که مکان هندسی نقطهٔ M خط ثابتی است که در نقطهٔ ثابت H بر OO' عمود است به قسمی که اگر I وسط OO' باشد $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ است.

امّا مکان هندسی خطهایی که در نقطهٔ ثابت H بر خط OO' عمودند، صفحه‌ای است که در این نقطه بر OO' عمود می‌شود که این صفحه را صفحهٔ اصلی دو کره می‌نامند.

نکته. درمورد وضع صفحهٔ اصلی دو کره، نسبت به آن دو کره مطلب، مشابه وضع محور اصلی دو دایره نسبت به آن دو دایره در صفحه است.

۳۸. **اثبات.** سه کره $S(O,R)$، $S'(O',R')$ و $S''(O'',R'')$ را درنظر می‌گیریم. صفحهٔ اصلی دو کرهٔ (S) و (S′) را P و صفحهٔ اصلی دو کرهٔ (S) و (S″) را P′ می‌نامیم. فصل مشترک این دو صفحه را که متقاطعند، Δ می‌نامیم. هر نقطه‌ای از Δ نسبت به دو کرهٔ (S′) و (S″) نیز دارای قوت یکسان است؛ زیرا داریم:



$$\begin{cases} P_{M(s)} = P_{M(s')} \\ P_{M(s)} = P_{M(s'')} \end{cases} \Rightarrow P_{M(s')} = P_{M(s'')}$$

بنابراین صفحهٔ اصلی دو کرهٔ (S′) و (S″) نیز بر خط Δ می‌گذرد، یعنی سه صفحهٔ اصلی کره‌ها دوبه‌دو، بر یک خط راست می‌گذرند که این خط کمان محور اصلی سه دایره است.

نکته. اگر مرکزهای سه کره روی یک خط راست باشند، دو حالت پیش می‌آید.

الف. صفحه‌های P و ′P ، متمایز و موازی باشند، که در این صورت یکدیگر را قطع نمی‌کنند ؛ یعنی سه کره محور اصلی ندارند.

ب. صفحه‌های P و ′P برهم منطبق باشند که در این صورت محور اصلی تبدیل به صفحهٔ اصلی می‌شود (بدیهی است که صفحهٔ ″P نیز بر P و ′P منطبق خواهد بود).

۳۹. اثبات مشابه شرط عمود بودن دو دایره در صفحه است. زیرا کافی است صفحه‌ای دلخواه بر خط‌المرکزین دو کره بگذرانیم تا دو کره را در دو دایرهٔ (C) و (′C) قطع کند، و شرط عمود بودن را برای این دو ثابت کنیم.

۴۰. در هندسهٔ مسطحه، می‌دانیم که مکان هندسی مرکز دایره‌های عمود بر دو دایره، بخشی از محور اصلی دو دایره است که در خارج آن دو دایره قرار دارد. اگر این دو دایره و محور اصلی آنها را حول خط‌المرکزین دو کره دوران دهیم، از دوران دو دایره، دو کره و از دوران محور اصلی آنها، صفحهٔ اصلی دو کره پدید می‌آید و حکم ثابت است.

نکته. قضیه را مستقیماً نیز می‌توان ثابت کرد.

۴۱. اثبات. با انتخاب نقطه‌ای دلخواه واقع بر محور اصلی ۳ کره واقع در خارج آنها و رسم مماسهایی بر این کره‌ها، قضیه ثابت می‌شود.

نکته. مرکز اصلی چهار کره، مرکز تنها کره‌ای است که بر آن چهار کره عمود است. شعاع این کره مساوی طول مماس رسم شده از این نقطه بر این کره‌هاست.

۲. نقطه، خط، صفحه، دایره، ...

۲.۱. نقطه

۲.۱.۱. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...

۲.۱.۱.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۴۲. نقطهٔ P به خط راست AB تعلق دارد، بنابراین :

$$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$$

در این صورت :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} &= (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}).(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\\ &= (\overrightarrow{OA}-\alpha\overrightarrow{OA}-(1-\alpha)\overrightarrow{OB}).(OB-\alpha\overrightarrow{OA}-(1-\alpha)\overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

$$=\alpha(\alpha-1)(\vec{OA}^2-2\vec{OA}.\vec{OB}+\vec{OB}^2) \qquad (1)$$

از طرف دیگر :

$$\vec{OP}^2-\rho^2=(\alpha\vec{OA}+(1-\alpha)\vec{OB})^2-\rho^2$$

$$=\alpha^2\vec{OA}^2+2\alpha(1-\alpha)\vec{OA}.\vec{OB}+(1-\alpha)^2\vec{OB}^2-\rho^2 \qquad (2)$$

با مقایسهٔ سمت راست برابریهای (۱) و (۲)، به دست می‌آید :

$$\alpha=\frac{\rho^2-\vec{OB}^2}{\vec{OA}^2-\vec{OB}^2}$$

نقطهٔ P، پاره‌خط راست AB را به نسبت λ_P تقسیم می‌کند :

$$\lambda_P=\frac{1-\alpha}{\alpha}=\frac{\vec{OA}-\rho^2}{\rho^2-\vec{OB}^2}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان به نسبتهای زیر رسید :

$$\lambda_Q=\frac{\vec{OB}^2-\rho^2}{\rho^2-\vec{OC}^2}\ ,\ \lambda_R=\frac{\vec{OC}-\rho^2}{\rho^2-\vec{OD}^2}\ ,\ \lambda_S=\frac{\vec{OD}-\rho^2}{\rho^2-\vec{OA}^2}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید : $\lambda_P\lambda_Q\lambda_R\lambda_S=1$ (معیار بر یک صفحه بودن چهار نقطه).
به این ترتیب، نقطه‌های P، Q، R و S متعلق به یک صفحه‌اند.

۴۳. مرکز کره را با O، و شعاع آن را با r نشان دهید. AP و BQ مماسهای رسم شده بر کره‌اند (P و Q نقطه‌های تماس هستند) و M محل برخورد AP و BQ. با قرار دادن،

$$PM=QM=x\ ,\ OB=b\ ,\ OA=a$$

داریم :

$$OM^2=r^2+x^2\ ,\ AM^2=(\sqrt{a^2-r^2}\pm x)^2\ ,\ BM^2=(\sqrt{b^2-r^2}\pm x)^2$$

اگر علایم را یکسان درنظر بگیریم، رابطه‌های زیر را خواهیم داشت :

$$\sqrt{b^2-r^2}.AM^2-\sqrt{a^2-r^2}.BM^2+(\sqrt{a^2-r^2}-\sqrt{b^2-r^2}).OM^2=l_1 \quad (1)$$

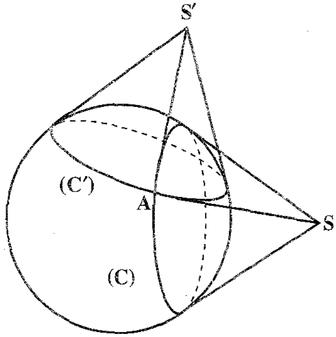
اگر علایم را مختلف درنظر بگیریم، آن‌گاه :

$$\sqrt{b^2-r^2}.AM^2+\sqrt{a^2-r^2}.BM^2-(\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}).OM^2=l_2 \qquad (2)$$

که در آن l_1 و l_2 ثابتهای وابسته به r، a و b هستند.

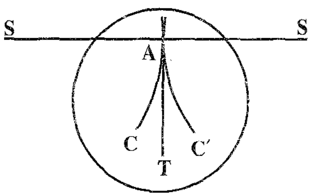
چون مجموع ضرایب AM^2 ، BM^2 و OM^2 در (۱) و (۲) برابر صفر است، مکان نقطهٔ M برای هریک از این رابطه‌ها، یک صفحه خواهد بود. در هر دو حالت این صفحه، بر صفحهٔ OAB عمود است.

۲.۱.۱.۲. نقطه روی صفحه است



۴۴. فرض می‌کنیم S و S′ رأسهای مخروطهای محیط بر یک کره، تحت دایره‌های تماس (C) و (C′) باشد که آنها را عمود بر هم می‌گیریم. خطهای مماس بر این دو دایره در یک نقطهٔ مشترک مانند A بترتیب بر SA و SA′ عمودند، بعلاوه آنها در صفحهٔ ASS′ که در نقطهٔ A بر کره مماس است، قرار دارند. در این صورت، اگر این دو خط مماس بر هم عمود باشند، بر خطهای AS′ و AS منطبق خواهند بود؛ همچنین AS′ مماس بر دایرهٔ (C) است، و این ثابت می‌کند که S′ در صفحهٔ (C) قرار دارد.

بعکس، فرض می‌کنیم که رأس S′ در صفحهٔ دایرهٔ (C) باشد، صفحهٔ (C′) از S می‌گذرد و کره را قطع می‌کند؛ بنابراین (C′) دایرهٔ (C) را قطع می‌کند. A را یکی از نقطه‌های تقاطع آنها می‌گیریم؛ SA′ که مماس بر کره و در صفحهٔ دایر÷ةٔ (C) واقع است، مماس بر (C) است. امّا SA′ بر خط مماس در نقطهٔ A بر دایره (C′) عمود است؛ درنتیجه مماسهای در نقطهٔ A بر دایره‌های (C) و (C′)، بر هم عمود، و در نتیجه این دو دایره بر هم عمود می‌باشند.



۴۵. فرض می‌کنیم دایره‌های C و C′ در نقطهٔ A بر هم مماس و AT مماس مشترک آنها باشد. خط عمود بر AT در نقطهٔ A و واقع در صفحهٔ مماس بر کره در این نقطه، یکی از مولدهای هر یک از سطحهای مخروطی است. بنابراین، رأس هریک از این سطحها روی دیگری است.

بعکس، فرض می‌کنیم رأس S′ روی سطح (S) باشد، خط SS′ یک مولد مشترک است؛ A را نقطه‌ای می‌گیریم که این مولد بر کره مماس است و فرض می‌کنیم در صفحهٔ مماس بر کره، خط AT عمود بر SS′ باشد؛ دایره‌های تماس C و C′ بر AT در نقطهٔ A مماس هستند و درنتیجه، دو دایره بر هم مماسند.

تبصره. اگر به‌جای یکی از سطحهای مخروطی، به‌عنوان مثال به‌جای (S')، یک سطح استوانه‌ای را جایگزین کنیم. به‌همین روش دیده می‌شود که S رأس سطح مخروطی، روی سطح استوانه‌ای قرار دارد.
بالاخره، اگر دو سطح استوانه‌ای محیطی درنظر بگیریم، دایره‌های تماس، دایره‌های عظیمه هستند و نمی‌توانند بر هم مماس باشند، مگر این که بر هم منطبق باشند؛ در این حالت سطحهای استوانه‌ای بر هم منطبق می‌شوند.

۲.۱.۱.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۶. حکم مسأله از یک موضوع هندسه مسطحه نتیجه می‌شود که اگر از نقطه‌ای مانند P در خارج دایره، دو خط رسم کنیم که بترتیب دایره را در نقطه‌های A، A_1، B و B_1 قطع کنند، آن گاه خط A_1B_1 موازی با خط مماس بر دایرهٔ محیطی PAB است که از نقطهٔ P می‌گذرد. به این ترتیب، مجموعه نقطه‌های تحت شرایط مسأله، متعلق است به صفحه‌ای موازی با صفحه‌ای که بر کرهٔ (در نقطهٔ P) مماس بوده و از دایرهٔ مفروض و نقطهٔ P می‌گذرد.

۲.۱.۱.۴. نقطه‌ها روی یک کره‌اند

۴۷. حکم مسأله از این عامل نتیجه می‌شود که حاصلضرب پاره خطهایی از هر وتر که به وسیلهٔ نقطهٔ تقاطعشان به‌وجود آمده، با هم برابرند.

۴۸. وقتی به حل این مسأله می‌پردازیم، به حکم زیر در هندسه مسطحه احتیاج پیدا می‌کنیم:
اگر در دایره‌ای از نقطهٔ P به فاصلهٔ d از مرکز آن، دو وتر عمود برهم AD و BE را رسم کنیم، خواهیم داشت:

(a). $AD^2 + BE^2 = 8R^2 - 4d^2$

(b). عمودی که از P بر AB رسم می‌شود، DE را نصف می‌کند.

در حالت فضایی، این دو حکم بترتیب زیر تعمیم پیدا می‌کنند:
اگر از نقطهٔ P در داخل یک کره به شعاع R و مرکز O سه وتر دو به دو متقابلاً عمود بر هم AD، BE و CF به فاصلهٔ d از مرکز آن رسم شوند، آن‌گاه:

(a′). $AD^2 + BE^2 + CF^2 = 12R^2 - 8d^2$

(b′). خط راستی که از P می‌گذرد و بر صفحهٔ ABC عمود است، از مرکز ثقل مثلث DEF می‌گذرد.

ابتدا قسمت (a') را ثابت می‌کنیم. R_1 ، R_2 و R_3 را بترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی چهار ضلعیهای ABDE، ACDF و BCEF، d_1 ، d_2 و d_3 را فاصله‌های نقطهٔ P از مرکز دایره‌های محیطی این چهارضلعیها، و x، y و z را بترتیب فاصله‌های نقطهٔ O تا صفحه‌های این سه چهارضلعی درنظر می گیریم. پس :

$$x^2+y^2+z^2=d^2 \ ، \ d_1^2+d_2^2+d_3^2=2(x^2+y^2+z^2)=2d^2$$

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=3R^2-d^2$$

با استفاده از حکم (a) داریم :

$$AD^2+BE^2+CF^2=\frac{1}{2}[(AD^2+BE^2)+(BE^2+CF^2)+(CF^2+AD^2)]$$

$$=\frac{1}{2}(8R_1^2-4d_1^2+8R_1^2-4d_2^2+8R_3^2-4d_3^2)$$

$$=12R^2-8d^2$$

برای اثبات (b')، خطهایی را که بر صفحه‌های چهارضلعیهای ABDE، ACDF و BCEF وارد شده، تصویر کنید و سپس از قسمت (b) کمک بگیرید.

اکنون به حکم مسألهٔ خودمان برمی‌گردیم. روی پاره‌خطهای PA، PB و PC متوازی‌السطوحی را بنا کنید و رأس متقابل P از این متوازی‌السطوح را M بنامید.

به طریق مشابه، نقطهٔ N را برای پاره خطهای PD، PE و PF تعیین کنید. محل برخورد PM و صفحهٔ ABC را K، وسط PM را Q، وسط PN را T، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O_1 و پای عمود وارد از P بر ABC را H بنامید.

از قسمت (b') نتیجه می‌شود که H روی خط NP قرار دارد. بالاخره، K مرکز ثقل مثلث ABC است و $PK=\frac{1}{3}PM$.

خط OQ بر صفحهٔ ABC عمود است و از O_1 می‌گذرد. زیرا O و Q مرکزهای دو کره هستند که بر A، B و C می‌گذرند (توجه داشته باشید ثابت کرده‌ایم که توأماً نقطه‌های O_1 ، K و H بر یک امتداد قرار دارند و $KH=2O_1K$ و به‌طوری که می‌دانید این خط راست، خط اولر خوانده می‌شود). به این ترتیب OQ موازی با NP می‌شود. به‌همین ترتیب TO موازی MP است ؛ پس O وسط MN است.

روی پاره‌خط OP، نقطهٔ S را طوری اختیار کنید که :

$$PS=\frac{1}{3}PO$$

خط عمودی که از S بر KH وارد می‌شود، از وسط KH می‌گذرد. در نتیجه :

$$SK = SH \ , \ SK \| OM \ , \ SK = \frac{۱}{۳} OM = \frac{۱}{۶} NM$$

از قسمت (a') نتیجه می‌شود :

$$NM^۲ = ۱۲R^۲ - ۸d^۲$$

(NM قطر متوازی‌السطوحی که یالهای آن برابر AD، BE و CF است)، یعنی $SK = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳R^۲ - ۲d^۲}$ مقداری است که بستگی به طرز رسم PA، PB و PC ندارد.

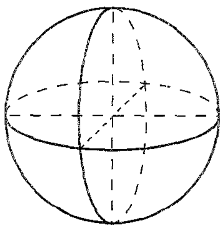
۴۹. باید ثابت کنیم، شش نقطهٔ تماس، از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله‌اند.

۲.۱.۱.۵. تعداد نقطه‌ها

۵۰. چند شهر در روی کرهٔ زمین؟

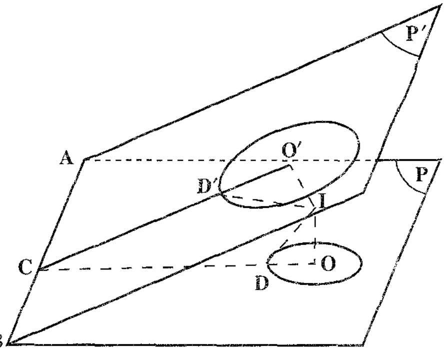
می‌توانیم فرض کنیم که یک شهر در قطب شمال واقع شده است (هرچند که در عمل نمی‌تواند چنین باشد). در این صورت هیچ شهری در نیمکرهٔ شمالی، و حتّی در خط استوا، نمی‌تواند مورد قبول قرار گیرد. زیرا فاصله‌اش از شهر «قطب شمال» ۱۰۰۰۰ کیلومتر و یا کمتر است. پس باید دایره‌ای روی کرهٔ زمین و پایین‌تر از خط استوا و به موازات آن درنظر بگیریم و شهرهای دیگر را در آن قرار دهیم. چون محیط این دایره از ۴۰۰۰۰ کیلومتر کمتر است، پس در محیط این دایره فقط ۳ شهر «قطب شمال» بیش از ۱۰۰۰۰ کیلومتر باشد. پس پاسخ صحیح این است : فقط ۴ شهر با این ویژگی خواهیم داشت.

۵۱. به فاصله‌های ۱۰۰۰۰ کیلومتر از هم این‌بار نیز یک شهر در قطب شمال را درنظر می‌گیریم ؛ در این صورت هیچ شهری در نیمکرهٔ شمالی نمی‌تواند مورد قبول قرار گیرد. امّا روی خط استوا چهار شهر می‌توان فرض کرد، که فاصله‌های آنها از هم و از شهر «قطب شمال» درست برابر ۱۰۰۰۰ کیلومتر باشد و حالا با تجسم یک شهر دیگر در «قطب جنوب» پاسخ معمّا در این حالت چنین خواهد بود :



در کل، ۶ شهر با ویژگی جدید ذکر شده در معمّا می‌توان داشت.

۶.۱.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۵۲. دو دایره به مرکزهای O و O′ و به شعاعهای r و r′ غیرواقع در یک صفحه را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که صفحه‌های این دو دایره متقاطعند و نقطه‌های A و B، دو نقطه از این فصل مشترک می‌باشند. اگر این دایره‌ها به یک کره تعلق داشته باشند، نقطهٔ A نسبت به این دو دایره دارای یک قوت است (قوت نقطهٔ A نسبت به کره)، و نقطهٔ B نیز همین ویژگی را دارد.

بعکس فرض می‌کنیم که:

$$AO^2 - r^2 = AO'^2 - r'^2 \;,\; BO^2 - r^2 = BO'^2 - r'^2$$

و یا:

$$AO^2 - AO'^2 = BO^2 - BO'^2 = r^2 - r'^2$$

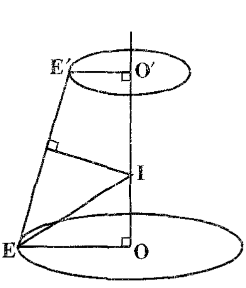
این رابطه ثابت می‌کند که AB و OO′ برهم عمودند، و بعلاوه تمام نقطه‌های واقع بر خط AB نسبت به دو دایره دارای یک قوت می‌باشند؛ زیرا AB در صفحهٔ مکان هندسی نقطه‌هایی قرار دارد که تفاضل مربعهای فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ O و O′، مساوی مقدارثابت $r^2 - r'^2$ است. بنابراین OO′ عمود بر AB است، و اگر C محل برخورد AB و صفحهٔ گذرنده بر OO′ و عمود بر AB باشد، داریم: $CO^2 - r^2 = CO'^2 - r'^2$.

از آن چه گفته شد، نخست نتیجه می‌شود که محورهای دو دایره، در یک نقطه مانند I متقاطعند. سپس نشان می‌دهیم که $ID = ID'$ است. در واقع داریم:

$$DI^2 = CI^2 - (CO^2 - r^2) \;,\; D'I^2 = CI^2 - (CO'^2 - r'^2)$$

بنابراین:

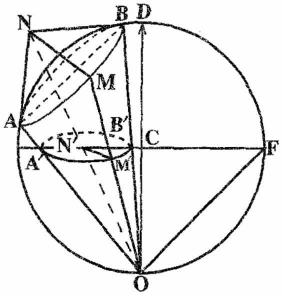
$$ID = ID'$$



در این صورت دایره‌های O و O′ به کره‌ای به مرکز I و به شعاع ID تعلق دارند.

اکنون، فرض می‌کنیم که صفحه‌های P و P′ موازی‌اند. برای این که دایره‌های O و O′ به یک کره تعلق داشته باشند، به‌وضوح دیده می‌شود که دو دایره باید دارای یک محور باشند، و این شرط کافی است؛ زیرا اگر OE و O′E′

دو شعاع موازی و I نقطهٔ برخورد OO' و صفحهٔ عمودمنصف EE' باشد، کره به مرکز I و به شعاع IE شامل دو دایره است.



۵۳. درواقع برای نقطهٔ دلخواه M، صفحهٔ MON را که از قطب انعکاس O و از نقطهٔ N رأس مخروط محیطی می‌گذرد، رسم می‌کنیم.

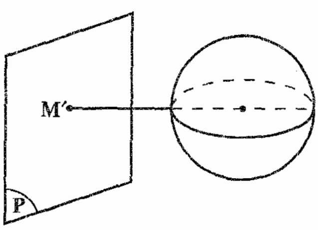
خط $NN'O$ رسم شده از رأس N و خط $M'N'$ تصویر مماس MN است. برای اثبات قضیه، باید ثابت کنیم که $M'N'$ طول ثابتی دارد.

درواقع، زاویهٔ OMN که به‌وسیلهٔ شعاع OM و مماس MN ایجاد می‌شود، مساوی زاویهٔ بین همین شعاع OM است با کمان دایره‌ای که صفحهٔ OMN را مشخص می‌کند.

منعکس این کمان خط راست $M'N'$ است. بنابراین زاویه‌های OMN و $OM'N'$ مکمل یکدیگرند. امّا ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های مساوی یا مکمل متناسبند؛ بنابراین داریم:

$$\frac{M'N'}{MN}=\frac{ON'}{ON}\Rightarrow M'N'=MN.\frac{ON'}{ON}$$

بنابراین، طول پاره‌خط $M'N'$ ثابت است؛ پس...



۵۴. اگر نقطه‌ای از صفحهٔ داده شده را که به‌وسیلهٔ قطر OM گذرنده بر قطب انعکاس، مشخص می‌شود با M' نشان دهیم، داریم: منعکس هر دایره عظیمه‌ای از یک کره که از قطب انعکاس O می‌گذرد، خط راستی است که از نقطهٔ M' می‌گذرد.

هر دایرهٔ صغیره‌ای که بر قطب انعکاس O بگذرد، منعکسش یک خط راست است، امّا این خط راست از نقطهٔ M' نمی‌گذرد.

هر دایره‌ای که از قطب انعکاس نگذرد، منعکسش یک دایره است. دایره‌هایی که در صفحهٔ P از نقطهٔ M' می‌گذرند، منعکس دایره‌های صغیره‌ای هستند که از انتهای دیگر قطر گذرنده بر قطب انعکاس می‌گذرند.

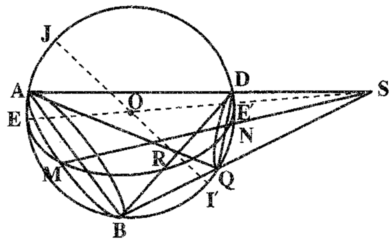
تمام ویژگیهای یک سطح کروی جای خود را به ویژگیهای یک شکل مسطح متناظر آن می‌دهند. بعکس، تمام ویژگیهای یک شکل مسطح، جای خود را به ویژگیهای یک سطح کروی متناظر با آن سطح مسطح می‌دهند.

۲.۲. خط

۱.۲.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۱.۲.۲. خطها همرسند

۵۵. نقطهٔ S را رأس مخروطی می‌گیریم که بر دو دایرهٔ داده شده، می‌گذرد. رأس S را به نقطهٔ O مرکز کره وصل می‌کنیم، تا کره را در E و E′ قطع کند.



هر دایرهٔ عظیمه‌ای که بر EE′ بگذرد، نقطه‌های متناظری را مشخص می‌کند. درواقع، اگر یک مولد دلخواه مانند SMN دایره‌های داده شده را در M و N قطع کند، با استفاده از کره داریم:

$$SM.SN = SE.SE'$$

بنابراین چهار نقطهٔ M، N، E و E′ به یک دایرهٔ عظیمه تعلق دارند.

بعکس: ۱. هر دایرهٔ عظیمهٔ EME′ دو نقطهٔ M و N را مشخص می‌کند به قسمی که خط MN از نقطهٔ ثابت S می‌گذرد.

۲. وترهای AM و DN پاد موازی هستند. اگر مولدهای SA و SM بی‌نهایت به‌هم نزدیک شوند، حد قاطعهای پاد موازی AM و DN، مماسهای بر دایره‌ها در نقطه‌های M و N خواهند بود.

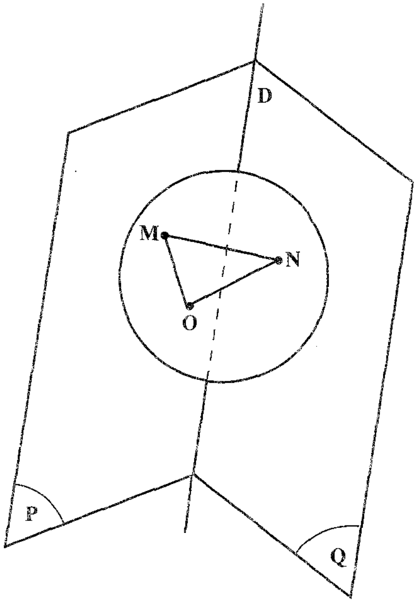
بنابراین، این خطهای مماس بر دایره‌ها در M و N نسبت به SNM، پاد موازی می‌باشند. ثابت می‌شود که مماسهای رسم شده در M و N بر دایرهٔ عظیمهٔ EMNE′ نیز پاد موازی‌اند.

۳. زاویهٔ بین مماسها در M مساوی زاویهٔ بین مماسها در N است. بنابراین دایرهٔ عظیمه، دایره‌های داده شده را تحت یک زاویه قطع می‌کند.

تبصره. قطر IORI′ مرکزهای درونی I و I′ تشابه را مشخص می‌کند.

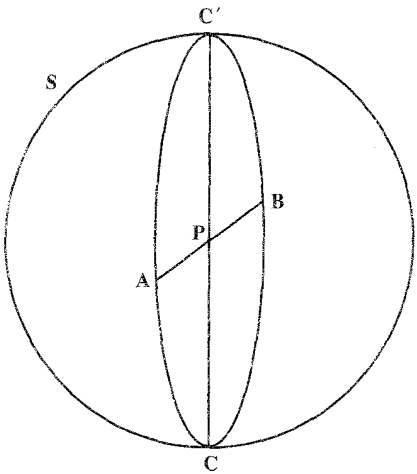
۵۶. بر هر رأس از هشت وجهی، صفحه‌ای مماس بر کره رسم می‌کنیم، یک شش وجهی محیطی به‌دست می‌آید که وجه‌های آن چهار به چهار در یک نقطه همرسند.

۲.۱.۲.۲. خطها بر هم عمودند



۵۷. اگر مرکز کره را نقطهٔ O بنامیم، OM بر صفحهٔ P و ON بر صفحهٔ Q عمودند و چون خط D در صفحه‌های P و Q قرار دارد، پس OM و ON بر خط D عمودند، بنابراین خط D بر صفحهٔ OMN و درنتیجه بر خط MN عمود است.

۳.۱.۲. کمان نیمساز است



۵۸. زاویهٔ بین دو کمان $\overset{\frown}{CA}$ و $\overset{\frown}{CB}$ را، که از نقطهٔ C روی دو دایرهٔ عظیمه رسم شده‌اند، با توجه به اندازهٔ هلال بین این دو کمان، اندازه‌گیری می‌کنند (هلال، بخشی از سطح کره است که بین دو دایرهٔ عظیمه واقع باشد). به این ترتیب، طبیعی است که به کره، از بالای نقطهٔ P نگاه کنیم. اثبات را، با توجه به تقارن می‌دهیم (شکل).

اگر کمانهای CP، CA و CB را روی دایره‌های عظیمهٔ خود امتداد دهیم، در نقطهٔ C' (که قطب مقابل C نامیده می‌شود)، یکدیگر را قطع می‌کنند.

OP را محور دوران می‌گیریم و کره را، به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دور آن دوران می‌دهیم. این دوران، هر دایرهٔ عظیمهٔ به قطب P را، بر خودش منطبق می‌کند و تنها جهت آن را تغییر می‌دهد، بنابراین، نقطهٔ B، در جایی از دایرهٔ عظیمه و روی کمانی که از P و A می‌گذرد، قرار می‌گیرد. چون کمانهای $\overset{\frown}{AP}$ و $\overset{\frown}{BP}$ برابرند، B و A، ضمن این دوران، جای خود را با هم عوض می‌کنند؛ به‌همین ترتیب، C و C' هم با یکدیگر عوض می‌شوند. در این

صورت، هلال $ACPC'$ روی هلال $BC'PC$ قرار می‌گیرد، یعنی دو هلال همنهشتند و CC' زاویه‌های C و C' را نصف می‌کند.

یادداشت. توجه کنیم که :

$$\text{ArcCA} + \text{ArcAC}' = \text{ArcCA} + \text{ArcCB} = \text{نصف دایرهٔ عظیمه}$$

بنابراین، دایرهٔ عظیمهٔ S، یک بیضی کروی است با کانونهای A و B. بیضی کروی با کانونهای A و B، در کرهٔ مفروض، به‌عنوان مجموعهٔ نقطه‌های مانند P از سطح کره تعریف می‌شوند که برای آنها، داشته باشیم :

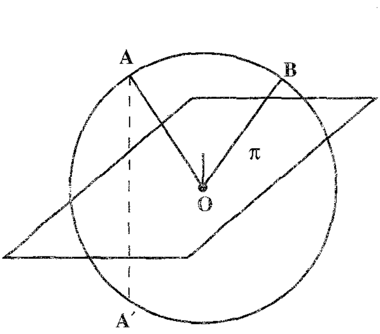
$$\text{ArcPA} + \text{ArcPB} = \text{مقداری ثابت}$$

در این‌جا، منظور از ArcPA، کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و P روی سطح کره است.

۵۹. زاویهٔ بین $C'AB'$ برابر با زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OA و وجه‌هایی است که از نقطه‌های C و B می‌گذرند. زیرا نیمخطهای راست AC' و AB' بر شعاع مشترک OA عمودند (شکل). به‌همین ترتیب، زاویهٔ $D'AB'$ برابر است با زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال OA و وجه‌هایی که از نقطه‌های D و B می‌گذرند. از آن‌جا که این زاویه‌های دو وجهی، نسبت به خط راست OB قرینهٔ یکدیگرند (خط راست OA قرینهٔ خودش، و نقطهٔ C قرینهٔ نقطهٔ D است)، بنابراین با هم برابرند، یعنی زاویه‌های خطی آنها هم، با یکدیگر برابرند :

$$C'\hat{A}B' = D'\hat{A}B'$$

۴.۱.۲.۴. کمان روی دایره است



۶۰. فرض کنید A و B دو نقطهٔ انتهایی کمان باشند. صفحهٔ π را که از مرکز O می‌گذرد و بر نیمساز $A\hat{O}B$ عمود است، درنظر بگیرید (شکل را ببینید). ثابت می‌کنیم، $\widehat{AB}$ باید روی نیمکره‌ای واقع باشد که صفحهٔ π ایجاد کرده و شامل A و B است.

فرض کنید A' قرینهٔ A نسبت به صفحهٔ π باشد. توجه کنید که $\overline{A'B} = ۲$، چون A'،

O و B همخطند. همچنین توجه کنید که اگر X نقطه‌ای واقع بر π باشد، $\overline{AX} = \overline{A'X}$.
امکان ندارد کمانی مانند $\widehat{AB}$ به‌طول کمتر از ۲ شامل نقطه‌ای از صفحهٔ π باشد، چون اگر $\widehat{AB}$ شامل نقطهٔ X از صفحهٔ π باشد، آن‌گاه:

$$\widehat{AX} + \widehat{XB} \geq \overline{AX} + \overline{XB} = \overline{A'X} + \overline{XB}$$

و بنابر نابرابری مثلثی،

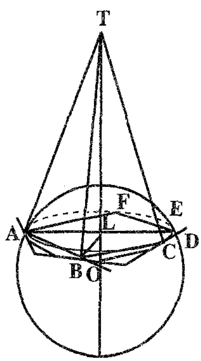
$$\overline{A'X} + \overline{XB} \geq \overline{A'B}$$

به‌همین روش می‌توانیم ثابت کنیم که به‌طور کلی اگر دو نقطهٔ مرزی جسمی با تقارن مرکزی که طول کوتاهترین قطر مرکزی آن ۲ است با کمانی به‌طول کوچکتر از ۲ به یکدیگر وصل شوند، این کمان باید در نیمه‌ای از جسم واقع باشد که به سطح مقطعی که از مرکز تقارن می‌گذرد، محدود است.

۳.۲. صفحه

۱.۳.۲. صفحه‌های: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۱.۳.۲. صفحه‌ها از یک نقطه می‌گذرند



۶۱. چند ضلعی ABC...F را محاط در یک دایرهٔ ABCD به مرکز L درنظر می‌گیریم.
از مرکز کره خط OL را رسم کنیم تا صفحهٔ مماس رسم شده از نقطهٔ A را قطع کند. خط مماس AT، فصل مشترک صفحهٔ مماس با نصف‌النهار AOL است. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAT نتیجه می‌شود:

$$OT.OL = AO^2 \ , \ OT = \frac{AO^2}{OL}$$

بنابراین صفحهٔ مماس هرچه باشد، پاره‌خط OT ثابت است. همچنین تمام صفحه‌های مماس بر این نقطهٔ T می‌گذرند.

۶۲. صفحه‌های مماس رسم شده بر ضلعها، همان صفحه‌های مماسی هستند که بر رأسهای A، B و C از یک چندضلعی محاطی رسم می‌شوند.

۲.۱.۳.۲. صفحه از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۳. ادعا می‌کنیم مرکز میانه‌ای مثلث نقطهٔ ثابتی است که روی OP قرار دارد و $PM=\frac{۲}{۳}PO$.

می‌گیریم $\vec{x}=\vec{PX}$ ، $\vec{y}=\vec{PY}$ ، $\vec{z}=\vec{PZ}$ و $\vec{r}=\vec{PO}$. به وضوح :

$$\vec{PM}=\frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}}{۳}$$

کافی است ثابت کنیم $\vec{PM}=\frac{۲}{۳}\vec{r}$. برای این کار ثابت می‌کنیم بردار

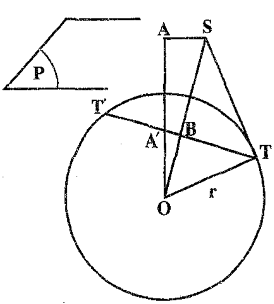
$$\vec{a}=۳(\vec{PM}-\frac{۲}{۳}\vec{r})=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-۲\vec{r}$$

مساوی صفر است. حاصلضرب این بردار در بردار $\vec{x}$ صفر است ؛ زیرا :

$$\begin{aligned}\vec{a}.\vec{x}&=(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}-۲\vec{r}).\vec{x}\\&=\vec{x}.\vec{x}+\vec{y}.\vec{x}+\vec{z}.\vec{x}-۲\vec{r}.\vec{x}\\&=\vec{x}.\vec{x}-۲\vec{r}.\vec{x}\\&=|\vec{x}|^۲-۲|r|.|x|.\cos O\hat{P}X\\&=PX^۲-۲PX.PO.\cos O\hat{P}X\end{aligned}$$

امّا مثلث OPX متساوی‌الساقین به رأس O است، پس $PX=۲PO.\cos O\hat{P}X$ که از این‌جا برابر صفر بودن $\vec{a}.\vec{x}$ معلوم می‌شود. به‌همین ترتیب، $\vec{a}.\vec{y}=\vec{a}.\vec{z}=۰$.

حال که حاصلضرب $\vec{a}$ در سه بردار متعامد صفر است، این بردار خود، برابر صفر است که درستی حکم را نتیجه می‌دهد.



۶۴. از مرکز کره، عمود OA را بر صفحهٔ P که در آن صفحه، رأس مخروط جابه‌جا می‌شود، رسم می‌کنیم و S را نقطه‌ای دلخواه از این صفحه، و صفحهٔ شکل را صفحهٔ OAS می‌گیریم. کره، توسط این صفحه، تحت یک دایرهٔ عظیمه و مخروط، تحت مماسهای ST و

ST' بر این دایره، و صفحهٔ دایرهٔ تماس تحت قطر TT' قطع می‌شود. اگر شعاع کره را r فرض کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTS داریم :

$$OB.OS = r^2$$

امّا، چهار ضلعی $ASBA'$ قابل محاط شدن در یک دایره است ؛ زیرا دو زاویهٔ قائمهٔ روبه‌روی هم دارد. پس داریم :

$$OA.OA' = OB.OS$$

بنابراین :

$$OA.OA' = r^2$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$OA' = \frac{r^2}{OA}$$

و این ثابت می‌کند که A' یک نقطهٔ ثابت است.

بعکس، اگر صفحهٔ TT' از یک دایرهٔ متغیر که بر یک نقطهٔ ثابت A' می‌گذرد، رأس S مربوط به مخروط محیط بر این کره در طول این دایره، در صفحهٔ عمود بر OA' در نقطهٔ A که به‌وسیلهٔ رابطهٔ $\overline{OA} = \frac{r^2}{OA'}$ مشخص می‌شود، جابه‌جا می‌شود.

درواقع، داریم : $OA.OA' = r^2$ و $OB.OS = r^2$. بنابراین $OB.OS = OA.OA'$.

در این صورت $AA'BS$ قابل محاط شدن در یک دایره است و $A'\hat{A}S = 90^\circ$ است و این نشان می‌دهد که نقطهٔ A به صفحهٔ عمود بر OA' در نقطهٔ A تعلق دارد.

۶۵. از صفحهٔ گذرنده بر مرکز کره و دو نقطهٔ ثابت A و B استفاده کنید.

۳.۱.۳.۲. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

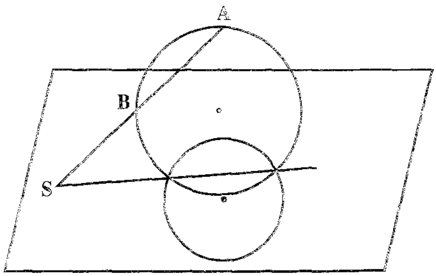
۶۶. درواقع، صفحه‌ای که بر مرکزهای این سه کره می‌گذرد، سه دایره که یکدیگر را قطع کرده‌اند، مشخص می‌کند، و سه وتر مشترک دوبه‌دوی دایره‌ها از یک نقطه می‌گذرند.

اگر بر این وترها صفحه‌هایی بگذرانیم که بر صفحهٔ گذرنده بر مرکزها عمود باشند، سه صفحهٔ متقاطع با کره‌ها خواهیم داشت که مقطع مشترکشان عمودی است که نقطهٔ همرسی سه وتر بر صفحهٔ گذرنده بر مرکزها رسم می‌شود.

تبصره. محل برخورد سه وتر مشترک دایره‌ها، مرکز اصلی سه دایره است.

۴.۲. دایره

۱.۴.۲. دایره‌ها در یک قطر متقاطعند

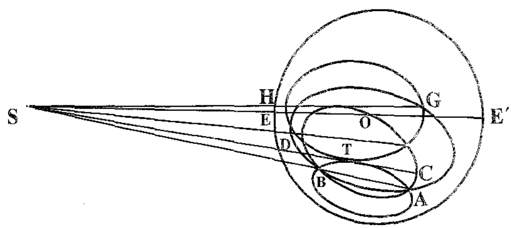


۶۷. نقطهٔ S را محل برخورد خط راست AB با صفحهٔ دایرهٔ داده شده می‌گیریم؛ هر صفحه‌ای که بر ABS می‌گذرد، کره را تحت یک دایره قطع می‌کند و فصل مشترک این صفحه، با صفحهٔ دایرهٔ داده شده از نقطهٔ S می‌گذرد که مشترک در دو صفحه است و نقطهٔ دیگری وجود ندارد.

۶۸. فرض می‌کنیم CDGH دایرهٔ داده شده و CD، وتر فصل مشترک با یکی از دایره‌های رسم شده باشد.

دو خط‌راست AB و CD که هر دو در صفحهٔ دایرهٔ ABCD قرار دارند، در نقطه‌ای مانند S یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱. ثابت می‌کنیم که هر وتر مشترک دیگر مانند GH از این نقطهٔ S می‌گذرد. با توجه به کره یا دایرهٔ ABCD داریم: $SA.SB = SC.SD$



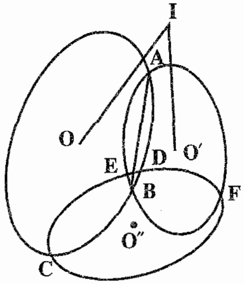
نقطهٔ S را به نقطهٔ G وصل می‌کنیم. H را نقطه‌ای می‌گیریم که SG دایرهٔ BAG را قطع می‌کند و H′ را نقطه‌ای می‌گیریم که دایرهٔ DCG را قطع می‌نماید. خواهیم داشت:

$$SG.SH = SA.SB \Rightarrow SC.SD = SG.SH'$$

پس H′ و H بر هم منطبقند، یعنی GH از نقطهٔ S می‌گذرد.

۲. نقطهٔ S را به نقطهٔ O مرکز کره وصل می‌کنیم. صفحه‌هایی که بر SEE′ و بر هریک از وترهای مشترک می‌گذرند، دایره‌های عظیمهٔ EBAE′، EDCE′ و EHGE′ را به‌وجود می‌آورند که بر نقطه‌های تقاطع می‌گذرند و EE′ قطر مشترک آنهاست.

۲.۴.۲. دایره‌ها روی یک کره‌اند

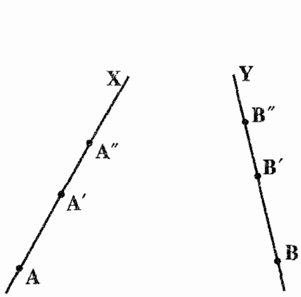


۶۹. دو دایرهٔ O و O′ غیرواقع در یک صفحه، که یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده‌اند، درنظر می‌گیریم. محورهای این دو دایره که در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند و با هم موازی نیستند، در یک نقطه مانند I متقاطعند؛ تمام نقطه‌های واقع بر این دایره‌ها از نقطهٔ I، به فاصلهٔ IA هستند، این دایره‌های O و O′ به کره‌ای تعلق دارند که مرکزش نقطهٔ I و شعاعش مساوی IA است.

اینک دایره‌ای دلخواه مانند O″ درنظر می‌گیریم که دایرهٔ O را در C و D و دایرهٔ O′ را در E و F قطع کند. صفحهٔ این دایره، کرهٔ S را تحت دایره‌ای قطع می‌کند که بر سه نقطهٔ C، D و E، یعنی تحت دایرهٔ O″ قطع می‌کند. به‌همین صورت، تمام دایره‌های نظیر دایرهٔ O″، روی کرهٔ S قرار دارند. اگر دو دایرهٔ O و O′ در یک صفحه قرار داشته باشند، هر دایره‌ای که یکی از این دو دایره را در دو نقطه قطع کند، در این صفحه قرار دارد، زیرا شامل سه نقطه از این صفحه است. بنابراین در این حالت تمام دایره‌های مورد نظر در یک صفحه‌اند.

۵.۲. کره

۱.۵.۲. کره‌ها بر یک دایره می‌گذرند



۷۰. دو کرهٔ S′ و S″ را درنظر می‌گیریم که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و AX و AY را بار دیگر در نقطه‌های A′، B′، A″ و B″ قطع می‌کنند. این دو کره در یک دایره که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، متقاطعند. می‌خواهیم، نشان دهیم که اگر A‴ و B‴ دو نقطهٔ متناظر دلخواه از تقسیمهای متناسب مشخص شده به‌وسیلهٔ AA′ و BB′ باشد، کرهٔ S‴ که بر چهار نقطهٔ A، A‴، B و B‴ می‌گذرد، شامل دایرهٔ (C) است؛ یا کرهٔ S_1 که شامل دایرهٔ (C) و A‴ است، بر B‴ می‌گذرد. اگر

B_1''' نقطه‌ای باشد که BY مجدداً S_1 را قطع می‌کند، داریم:

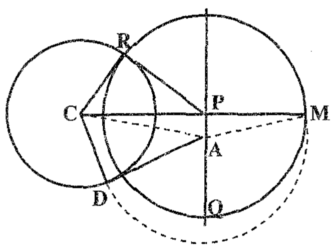
$$\frac{B''B'''}{A''A'''}=\frac{B'B''}{A'A''} \quad \text{یا} \quad \frac{B''B'''}{A''A'''}=\frac{B'B''}{A'A''}$$

بنابراین $B''B_1'''=B''B'''$ و درنتیجه B_1''' بر B''' منطبق است و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم.

۲.۵.۲. کره‌ها از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند

۷۱. کافی است مقطع نصف‌النهاری به‌دست آمده از تقاطع کره با صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ داده شده را بررسی کنیم؛ زیرا اگر قضیه درست باشد، بنا به قانون تقارن نقطهٔ مشترک ثابت نمی‌تواند جز روی عمود CP که از نقطهٔ C مرکز کره بر صفحهٔ PQ رسم می‌شود واقع باشد. بنابراین فرض می‌کنیم $PM = PB$ باشد و ثابت می‌کنیم که برای یک مماس دلخواه AD داریم:

$AM = AD$



اگر $CP = a$ و $CB = r$ باشد، خواهیم داشت:

$$PM^2 = PB^2 = a^2 - r^2$$

با اضافه کردن AP^2 به دو طرف رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$PM^2 + AP^2 = a^2 + AP^2 - r^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = AC^2 - r^2 = AD^2$$

پس طول پاره‌خط AM، مساوی طول مماس AD است. بنابراین کره‌ای که به مرکز A و به شعاع AD رسم می‌شود، از نقطهٔ ثابت M می‌گذرد.

تبصره. ۱. خط AD محور اصلی نقطهٔ M و دایرهٔ CDB است. صفحه‌ای که PQ فصل مشترک آن با یک صفحهٔ رسم شده بر CP است، صفحهٔ اصلی کرهٔ C و نقطهٔ M است.

۲. تمام کره‌ها از یک نقطهٔ ثابت دیگر می‌گذرند، نقطهٔ N که قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به صفحهٔ داده شده است.

۳. زاویه

۱.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴۲. نقطه‌های تماس کره‌ها را با صفحهٔ P، $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ بنامید: $O_۱$ برای کره به شعاع r، $O_۲$ و $O_۳$ برای کره‌های به شعاع R.

O رأس مخروط، (شکل) و φ زاویهٔ بین مولد مخروط و صفحهٔ P است. می‌توان نوشت:

$$O_۱O = r\cot\frac{\varphi}{۲} \text{ ، } OO_۲ = OO_۳ = R\cot\frac{\varphi}{۲}$$

$$O_۱O_۲ = O_۱O_۳ = ۲\sqrt{Rr} \text{ , } O_۲O_۳ = ۲R$$

چون $O_۱O_۲ = O_۱O_۳$، تنها زاویهٔ $O_۲O_۱O_۳$ می‌تواند ۱۵۰° بشود. بنابراین $\frac{R}{r} = ۴\sin^۲ ۷۵^\circ = ۲+\sqrt{۳}$. علاوه بر این، اگر L وسط $O_۲O_۳$ باشد، آن‌گاه:

$$OL = \sqrt{OO_۳^۲ - O_۳L^۲} = R\sqrt{\cot^۲\frac{\varphi}{۲} - ۱}$$

$$O_۱L = \sqrt{O_۱O_۳^۲ - O_۳L^۲} = \sqrt{۴Rr - R^۲}$$

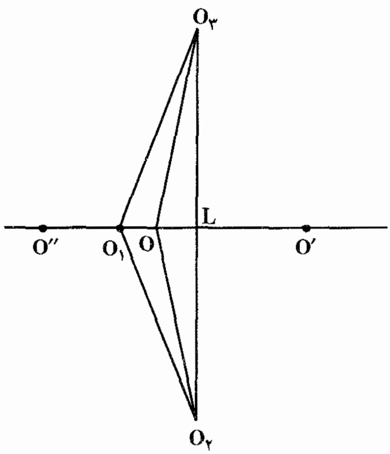
نقطهٔ O روی $O_۱L$ قرار می‌گیرد و می‌تواند روی خود $O_۱L$، و یا در امتداد آن، از طرف L و یا $O_۱$ قرار گیرد (O' و O'' در شکل). به این ترتیب، می‌توانیم سه رابطهٔ زیر را به‌دست آوریم:

$$O_۱L = OO_۱ + OL$$

$$O_۱L = O_۱O' - O'L$$

$$O_۱L = O''L - O''O_۱$$

با جایگذاری $R = (۲+\sqrt{۳})r$ و $\cot\frac{\varphi}{۲} = x$ در هریک از این رابطه‌ها، در دو حالت اوّل $x = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۳}$، $x = ۱$ که به تناقض می‌رسیم.



در حالت سوم، $x = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$.

جواب : $\cos\varphi = \frac{۱}{۷}$

.۷۳ $\operatorname{Arc\,tan} \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$

۲.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

.۷۵ $A_۱$ ، $B_۱$ ، $X_۱$ و $Y_۱$ را بترتیب نقطه‌های تماس کره با وجه‌های BXY، XYA، YAB و ABX می‌گیریم. در این‌صورت مثلثهای $XY_۱B$ و $XA_۱B$ همچنین مثلثهای $AY_۱X$ و $AB_۱X$ و غیره، با هم برابرند. با استفاده از این برابریها، می‌توان ثابت کرد که مجموع زاویه‌های چهارضلعی فضایی AXBY برابر است با :

$$A\hat{Y}_۱B + A\hat{X}_۱B = ۲A\hat{X}_۱B$$

و نتیجه گرفت که $A\hat{Y}_۱B + A\hat{X}_۱B$ ، به X و Y بستگی ندارد.

۴. شعاع دایره، ارتفاع، ...

۱.۴. شعاع دایره

۱.۱.۴. اندازهٔ شعاع دایره

.۷۶ مرکز کره را با O، مرکزهای دایره‌های مفروض را با $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ و مرکز دایرهٔ مطلوب را با $O_۴$ نشان دهید. دیده می‌شود که مثلث $O_۱O_۲O_۳$ متساوی‌الاضلاع است. ضلعهای

آن را پیدا کنید (M محل برخورد دایره‌های $O_۱$ و $O_۲$ می‌باشد).

$$OM = ۲ \ ، \ O_۱M = O_۲M = ۱$$

پس:

$$M\hat{O}O_۱ = M\hat{O}O_۲ = ۳۰^\circ$$

$$OO_۱ = OO_۲ = \sqrt{۳} \ ، \ O_۱O_۲ = \sqrt{۳}$$

$OO_۴$ بر صفحهٔ $O_۱O_۲O_۳$ عمود و از مرکز مثلث $O_۱O_۲O_۳$ می‌گذرد. فاصله‌های $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ تا $OO_۴$ برابر است با ۱. اگر K محل برخورد دایره‌های $O_۱$ و $O_۴$ ، L پای ارتفاع وارد از $O_۱$ بر روی $OO_۴$ باشد، KN بر $LO_۱$ عمود است و $|O_۱L| = |O_۱K| = ۱$ و $|OO_۱| = \sqrt{۳}$. از تشابه مثلثهای $O_۱KN$ و $OO_۱L$ نتیجه می‌شود $|O_۱N| = \sqrt{\frac{۲}{۳}}$؛

پس شعاع مطلوب برابر است با:

$$|O_۴K| = |LN| = ۱ - \sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

۷۷. عرقچین جواب مسأله، نیمکره است. زیرا اگر دو برابر سطح داده شده را درنظر بگیریم، می‌دانیم که کره، حداکثر حجم را دارا می‌باشد.

۲.۴. ارتفاع

۱.۲.۴. اندازهٔ ارتفاع مخروط

۷۸. h را ارتفاع مخروط، l مولد و r را شعاع قاعدهٔ آن فرض می‌کنیم. طبق فرض مسأله داریم:

$$\pi rl = ۳\pi r^۲ \Rightarrow l = ۳r$$

و بنابر قضیهٔ فیثاغورس داریم:

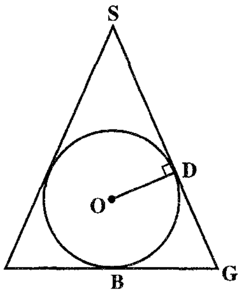
$$h^۲ + r^۲ = l^۲ \Rightarrow h^۲ + r^۲ = ۹r^۲ \Rightarrow r^۲ = \frac{h^۲}{۸}$$

و چون حجم کره با حجم مخروط برابر است، داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h$$

که اگر به‌جای r^2 مقدارش را قرار دهیم، به‌دست می‌آید :

$$4R^3 = \frac{1}{8}h^3 \Rightarrow h = 2R\sqrt[3]{4}$$



۷۹. اگر شعاع قاعده، مولد و ارتفاع مخروط را بترتیب R، L و h بگیریم (شکل)، طبق فرض مسأله داریم :

$$\pi R(R+l) = 4\pi r^2 . k \qquad (1)$$

علاوه‌بر آن :

$$h^2 = l^2 - R^2 \qquad (2)$$

از تشابه دو مثلث BCS و ODS به‌دست می‌آید :

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{l-R} \qquad (3)$$

که با درنظر گرفتن رابطهٔ (۲) چنین می‌شود :

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{l-R} = \sqrt{\frac{l+R}{l+R}}$$

این رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} = \frac{l}{R}$$

مقدار l را از رابطهٔ (۱) استخراج می‌کنیم :

$$l = \frac{4r^2k - R^2}{R} \qquad (4)$$

و در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم :

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} = \frac{4r^2k - R^2}{R^2}$$

و یا :

$$R^4 - 2r^2kr^2 + 2r^4k = 0$$

و از آن‌جا :

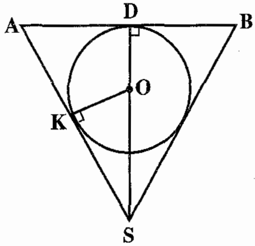
$$R^2 = r^2(k \pm \sqrt{k^2 - 2k}) \qquad (5)$$

از رابطه‌های (۲)، (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم :

$$h^2 = 4r^2(k \pm \sqrt{k^2 - 2k})^2$$

جواب :

$$h = 2r(k \pm \sqrt{k^2 - 2k})$$



۸۰. در شکل، مقطع اصلی مخروط با کرهٔ داخل آن و سطح AB، آبی که در مخروط ریخته‌ایم نشان داده شده است.

مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و بنابراین:

$$AB = AS = BS = ۲r\sqrt{۳}$$

$$AD = r\sqrt{۳}\ ;\ DS = \sqrt{AS^{۲} - AD^{۲}} = ۳r$$

از آن‌جا حجم آبی که در مخروط ریخته شده، چنین است:

$$V = V_{۱} - V_{۲} = \frac{۱}{۳}\pi AD^{۲}.DS - \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

$$= ۳\pi r^{۳} - \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۵}{۳}\pi r^{۳}$$

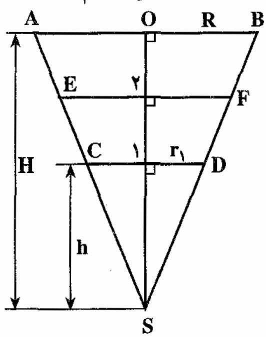
این حجم پس از برداشتن کره باز به شکل مخروطی خواهد بود که با مخروط اوّل متشابه است. ولی نسبت حجمهای دو مخروط متشابه مثل مکعب نسبت ارتفاعها و یا مکعب نسبت شعاعهای قاعدهٔ آنهاست. اگر ارتفاع مجهول را h بگیریم، داریم:

$$V:V_{۱} = h^{۳}:DS^{۳} \Rightarrow \frac{۵}{۳}\pi r^{۳}:۳\pi r^{۲} = h^{۳}:۲۷r^{۳}$$

و از آن‌جا ارتفاع موردنظر به‌دست می‌آید:

$$h = r\sqrt[۳]{۱۵}$$

۸۱. حجم کره، $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ می‌باشد. حجم اوّلیهٔ آب را در مخروط $V_{۱}$ می‌گیریم، از تشابه دو مثلث BOS و $DO_{۱}S$ (شکل) به‌دست می‌آید:



$$\frac{r_{۱}}{R} = \frac{h}{H} \Rightarrow r_{۱} = \frac{Rh}{H}$$

$$V_{۱} = \frac{\pi r_{۱}^{۲}h}{۳} = \frac{\pi R^{۲}h^{۳}}{۳H^{۲}}$$

اگر حجم کره را V بگیریم، حجم آب پس از غوطه‌ور شدن کره چنین می‌شود:

$$V = V_{۱} + v \qquad (۱)$$

ارتفاع مجهول را $O_{۲}S = x$ و شعاع $O_{۲}F = r_{۲}$ می‌گیریم، از تشابه دو مثلث BOS و $FO_{۲}S$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{r_{۲}}{R} = \frac{x}{H} \Rightarrow r_{۲} = \frac{Rx}{H}$$

$$V=\frac{\pi}{3}r_2^2x=\frac{\pi R^2x^3}{3H^2}$$

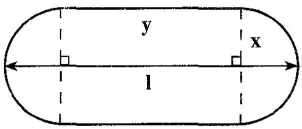
حالا اگر در رابطهٔ (۱) به‌جای V، V_1 و v مقدارهایشان را قرار دهیم، پس از عملیات سادهٔ جبری ارتفاع مجهول به‌دست می‌آید.

جواب : $x=\sqrt[3]{h^3+\frac{4H^2r^3}{R^2}}$

۳.۴. شعاع قاعده، ارتفاع استوانه

۸۲. x و y را بترتیب شعاع قاعده و ارتفاع استوانه می‌گیریم. برای تعیین مجهول مسأله، دستگاه زیر را می‌توانیم تشکیل دهیم :

$$\begin{cases} y+2x=l & (1)\\ 2\pi xy+4\pi x^2=4\pi a^2 & (2)\end{cases}$$



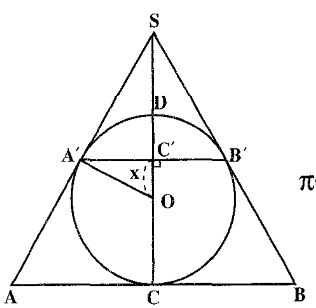
از (۱) نتیجه می‌شود $y=l-2x$ و با قرار دادن این مقدار در (۲) داریم :

$$(l-2x)x+2x^2=2a^2 \Rightarrow x=\frac{2a^2}{l} \Rightarrow y=l-2x=l-\frac{4a^2}{l}$$

مقدارهای بالا، ابعاد استوانه می‌باشند. برای آن که این مقدارها قابل قبول باشند، لازم و کافی است که اندازه‌شان مثبت باشد، یعنی $l>2a$. وقتی $l=2a$ است، دیگ به کره‌ای به شعاع a تبدیل می‌شود.

۴.۴. شعاع قاعده، ارتفاع مخروط

۸۳. فرض می‌کنیم SAB یک مخروط محیط بر کره‌ای به مرکز O و به شعاع r، و $A'B'$ قطر دایرهٔ تماس باشد.



بنا به فرض داریم :

$$\pi C'A'^2=2\pi rC'C-2\pi rC'D=2\pi r(CC'-C'D)$$

یا :

$$C'A'^2=2r(C'C-C'D)$$

اگر $OC' = x$ اختیار شود، خواهیم داشت :

$$C'A'^{۲} = r^{۲} - x^{۲} \ , \ C'C = r + x \ , \ C'D = r - x$$

با قرار دادن این مقدارها در رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$x^{۲} - ۴rx - r^{۲} = ۰$$

ریشهٔ مثبت این معادله که کمتر از r است، $x = r(\sqrt{۵} - ۲)$ است. از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OA'S$ داریم :

$$OA'^{۲} = OC'.OS \text{ یا } r^{۲} = r(\sqrt{۵} - ۲) \times OS$$

از آن‌جا داریم :

$$OS = r(\sqrt{۵} + ۲)$$

و برای ارتفاع مخروط $CS = r + OS = r(\sqrt{۵} + ۳)$ حاصل می‌شود. اکنون AC را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{SC}{SC'} \Rightarrow AC = \frac{SC.A'C'}{SC'} \ , \ SC = r(\sqrt{۵} + ۳)$$

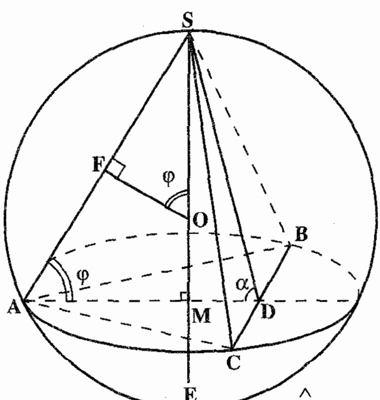
$$SC' = OS - x = ۴r \ , \ A'C' = \sqrt{OC'.C'S} = ۲r\sqrt{\sqrt{۵} - ۲}$$

و از آن‌جا : $AC = \frac{r}{۲}\sqrt{۲(\sqrt{۵} + ۱)}$ است.

۵.۴. طول ضلع قاعدهٔ هرم

۸۴. اگر SM ارتفاع هرم SABC و $S\hat{A}M = \varphi$ باشد (شکل)، خواهیم داشت :

$$\tan\varphi = \frac{SM}{AM} = \frac{SM}{۲MD} = \frac{۱}{۲}\tan\alpha \qquad (۱)$$



از O مرکز کره عمودی بر یال SA فرود می‌آوریم. در مثلث SOF خواهیم داشت :

$$S\hat{O}F = \varphi \ , \ \hat{F} = ۹۰^\circ \ , \ OS = R \ , \ SF = R\sin\varphi \ ,$$

$$SA = ۲SF = ۲R\sin\varphi$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ ASM داریم :

$$AB = AM.\sqrt{۳} = R\sqrt{۳}\sin ۲\varphi$$

$$AM = ۲R\sin\varphi\cos\varphi = R\sin ۲\varphi$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$AB = R\sqrt{۳}\times\frac{۲\tan\varphi}{۱+\tan^{۲}\varphi} = \frac{۴R\sqrt{۳}\tan\alpha}{۴+\tan^{۲}\alpha}$$

۵. پاره خط، کمان

۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط، کمان

۱.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۸۵. از نقطهٔ C خطی به موازات AB رسم کنید. نقطهٔ E را روی آن طوری اختیار کنید که CE = CE ، ABEC متوازی‌الاضلاع خواهد بود. اگر O مرکز کره باشد، آن‌گاه مثلث OCE متساوی‌الاضلاع می‌شود. زیرا $O\hat{C}E = \frac{\pi}{۳}$ و CE = ۱ (از فرض مسأله هم ثابت می‌شود). پس نقطهٔ O از همهٔ رأسهای متوازی‌الاضلاع ABEC به یک فاصله است، بنابراین ABEC مستطیل است و تصویر O بر روی صفحهٔ ABEC که آن را با K نشان می‌دهیم، بر مرکز ABEC منطبق می‌شود.

$$BD = ۲OK = ۲\sqrt{OC^{۲} - \frac{۱}{۴}BC^{۲}} = ۱$$

۸۶. با در دست داشتن شعاع کرهٔ محاطی و هرم مثلث القاعدهٔ منتظم و ارتفاع هرم، به آسانی ضلعهای قاعده پیدا می‌شوند که برابر ۱۲ است و MK = KN (به‌فرض مماس بر کره از نقطه‌های M و N از نظر طول برابرند). با قرار دادن BM = x و BN = y و پیدا کردن MN ، با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلث BMN، و پیدا کردن MK و NK بترتیب از مثلثهای BMK و BNK، می‌توانیم دستگاه زیر را تشکیل دهیم :

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-xy=۴۹ \\ x^{۲}-۱۲x=y^{۲}-۱۲y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-xy=۴۹ \\ (x-y)(x+y-۱۲)=۰ \end{cases}$$

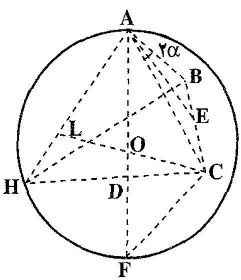
جوابهای دستگاه عبارتند از $x_۱ = y_۱ = ۷$. در این حالت فاصلهٔ K از MN برابر است با $۴\sqrt{۳} - \frac{۷\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} < ۲$. یعنی صفحه‌ای که از MN می‌گذرد و بر کره مماس می‌شود، در واقع امتداد SK را در آن طرف K قطع می‌کند.

$$KD = \frac{۱۲}{۱۳} \text{ ، } SD = ۶\frac{۱۲}{۱۳}$$

ریشه‌های دیگر این دستگاه در شرط $x + y = ۲۲$ صدق می‌کنند. از معادلهٔ اوّل نتیجه می‌شود :

$$(x+y)^۲ - ۳xy = ۴۹$$

۸۷. این فاصله، مساوی ضلع مربع محاط در یک دایرهٔ عظیمهٔ این کره، یعنی $R\sqrt{۲}$ است.



۸۸. اگر نقطه‌های B، C و H، انتهای این وترها را به‌هم وصل کنیم (شکل)، یک هرم منتظم به‌دست می‌آید که در کرهٔ به شعاع R محاط شده است و زاویه‌های مسطحهٔ کنار رأس هر وجه جانبی آن، برابر ۲α است. باید طول AC، یال جانبی این هرم را پیدا کنیم. اگر AF را، که از نقطهٔ D مرکز قاعده می‌گذرد، رسم و سپس F را به C وصل کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه به‌دست می‌آید. اگر $AC = x$ بگیریم، داریم :

$$x^۲ = AF.AD = ۲R\sqrt{AC^۲ - CD^۲} = ۲R\sqrt{x^۲ - (\frac{۲}{۳}CL)^۲}$$

$$= ۲R\sqrt{x^۲ - (\frac{۲}{۳}.CB\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = ۲R\sqrt{x^۲ - (\frac{۲}{\sqrt{۳}}AC\sin\alpha)^۲}$$

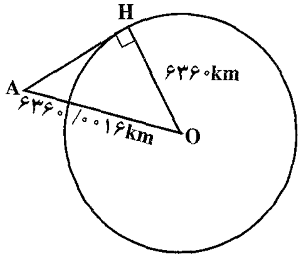
$$= ۲R\sqrt{x^۲ - (\frac{۲x}{\sqrt{۳}}\sin\alpha)^۲} = \frac{۴Rx}{\sqrt{۳}}\sqrt{\frac{۳}{۴} - \sin^۲\alpha}$$

و به این ترتیب :

$$x = \frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\frac{۳}{۴} - \sin^۲\alpha} = \frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\sin^۲ ۶۰^\circ - \sin^۲\alpha}$$

$$= \frac{۴R}{\sqrt{۳}}\sqrt{\sin(۶۰^\circ + \alpha).\sin(۶۰^\circ - \alpha)}$$

۸۹. خط افق.



آخرین نقطه‌ای را که او در سطح دریا مشاهده می‌کند، H می‌نامیم و محل چشم او را که ناظر بر افق است، با A مشخص می‌کنیم. خط AH بر دایره‌ای به شعاع OH مماس است و O مرکز زمین را نشان می‌دهد، و OH نیز بر AH عمود است. پس داریم:

$$OH = ۶۳۶۰\text{km}$$

$$OA = ۶۳۶۰/۰۰۱۶\text{km}$$

(شعاع زمین به‌اضافهٔ فاصلهٔ چشمان فردریک از سطح زمین)

طبق قضیهٔ فیثاغورس:

$$AH^۲ = (۶۳۶۰/۰۰۱۶)^۲ - (۶۳۶۰)^۲ = ۲۰/۳۵$$

$$AH = ۴/۵۱\text{km}$$

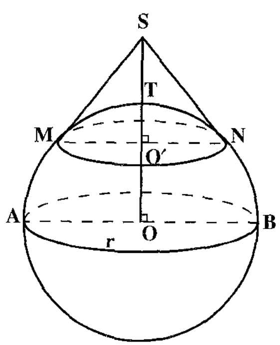
پس فاصلهٔ خط افق تا چشمان فردریک تقریباً ۴/۵ کیلومتر است.

۹۰. اگر r شعاع کرهٔ زمین و h ارتفاع عرشهٔ کشتی و d فاصلهٔ تا افق باشد، داریم:

$$(r+h)^۲ = r^۲ + d^۲$$

که از آن‌جا، با معلوم بودن دو مقدار، مقدار سوم قابل محاسبه است.

۹۱. ارتفاع عرقچینی از کره را که $\frac{۱}{n}$ سطح کره است، با استفاده از دستور مساحت عرقچین $S = ۲\pi rh$ که در آن r شعاع کره و h ارتفاع عرقچین است به‌دست می‌آوریم. داریم:



$$\text{کره } S = ۴\pi r^۲ \Rightarrow \text{سطح کره } \frac{۱}{n} = \frac{۴\pi r^۲}{n}$$

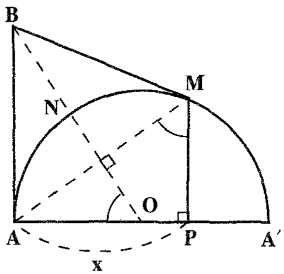
$$\Rightarrow ۲\pi rh = \frac{۴\pi r^۲}{n} \Rightarrow h = \frac{۲r}{n} = O'T \Rightarrow OO' = r - \frac{۲r}{n}$$

$$OM^۲ = OO' \times OS \Rightarrow r^۲ = (r - \frac{۲r}{n}).OS$$

$$\Rightarrow OS = \frac{r^۲}{r(۱-\frac{۲}{n})} = \frac{r}{۱-\frac{۲}{n}}$$

فاصلهٔ S از سطح کره
$$ST = OS - OT = \frac{r}{۱-\frac{۲}{n}} - r$$

۹۲. گزینهٔ (ب) درست است.



۹۳. APMNA یک قطعهٔ کروی با یک قاعده پدید می‌آورد که حجم آن برابر است با :

$$V = \frac{۱}{۶}\pi AP \times (AP^۲ + ۳MP^۲)$$

سطح ABMNA، حجم V' را به‌وجود می‌آورد که از حجم مخروط ناقص ایجاد شده به‌وسیلهٔ ذوزنقهٔ APMB به‌اندازهٔ V کمتر است. داریم :

$$V' = \frac{\pi AP}{۳}(AB^۲ + MP^۲ + AB.MP) - V$$

بنا به‌فرض $\frac{V'}{V} = k$ یا $\frac{V'+V}{V} = k+۱$ است، یعنی :

$$\frac{۲(AB^۲ + MP^۲ + AB.MP)}{AP^۲ + ۳MP^۲} = k+۱$$

امّا $AP = x$ ، $MP = \sqrt{x(۲r-x)}$ و از مثلثهای متشابه OAB و MPA داریم :

$$\frac{AB}{x} = \frac{r}{MP} \Rightarrow AB = \frac{rx}{\sqrt{x(۲r-x)}}$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{۲[\frac{r^۲x}{۲r-x} + x(۲r-x) + rx]}{x^۲ + ۳x(۲r-x)} = k+۱$$

$$\Rightarrow kx^۲ - ۵krx + (۶k-۱)r^۲ = ۰ \ , \ ۰ < x < ۲r$$

نمی‌توانیم دو جواب داشته باشیم ؛ زیرا نصف مجموع ریشه‌های این معادله $\frac{۵r}{۲}$ است که

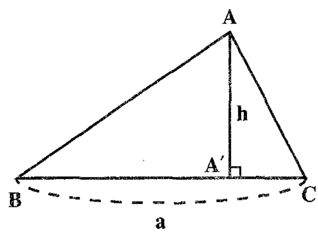
از $۲r$ بیشتر می‌باشند.

یک جواب وجود دارد، درصورتی که $f(۰)f(۲r)<۰$ باشد.

امّا :
$$f(۰)=(۶k-۱)r^۲ \ , \ f(۲r)=-r^۲ \Rightarrow f(۰)f(۲r)=-r^۴(۶k-۱)$$
$$f(۰)f(۲r)<۰ \Rightarrow ۶k-۱>۰ \Rightarrow k>\frac{۱}{۶}$$

حالت خاص. $k=\frac{۱}{۲}$ در این حالت معادله به‌صورت $x^۲-۵rx+۴r^۲=۰$ نوشته می‌شود که تنها یک ریشه $x=r$ قابل قبول دارد.

۹۴. اگر زاویه‌های B و C حاده باشند، حجم ایجاد شده از دوران مثلث ABC حول ضلع BC، مساوی مجموع حجمهای دو مخروطی است که از دوران مثلثهای قائم‌الزاویه BAA' و CAA' حول BC ایجاد می‌شود، یعنی با فرض $AA'=h$ داریم :



$$V=\frac{۱}{۳}\pi h^۲.A'B+\frac{۱}{۳}\pi h^۲.A'C=\frac{۱}{۳}\pi h^۲(A'B+A'C)=\frac{۱}{۳}\pi h^۲a$$

درصورتی که یکی از زاویه‌های B یا C قائمه و منفرجه باشد، به‌روش مشابه باز همین نتیجه حاصل می‌شود. اکنون بنا به فرض مسأله داریم :

$$\frac{۱}{۳}\pi h^۲a=\frac{۴}{۳}\pi\alpha^۳ \Rightarrow ah^۲=۴\alpha^۳$$

امّا می‌دانیم که $h^۲=\frac{۴}{a^۲}P(P-a)(P-b)(P-c)$ است. بنابراین خواهیم داشت :

$$P(P-a)(P-b)(P-c)=a\alpha^۳$$

بنابراین a، b و c جواب دستگاه زیر می‌باشند :

$$a\alpha^۳=b\beta^۳=c\gamma^۳=P(P-a)(P-b)(P-c)$$

برای حل، فرض می‌کنیم :

(۱)
$$P(P-a)(P-b)(P-c)=\lambda$$

خواهیم داشت :

(۲)
$$a=\frac{\lambda}{\alpha^۳} \ , \ b=\frac{\lambda}{\beta^۳} \ , \ c=\frac{\lambda}{\gamma^۳}$$

با قرار دادن a، b و c در رابطهٔ (۱) و قرار دادن $۲\omega=\frac{۱}{\gamma^۳}+\frac{۱}{\beta^۳}+\frac{۱}{\alpha^۳}$ خواهیم داشت:

$$\lambda^۴\omega(\omega-\frac{۱}{\alpha^۳})(\omega-\frac{۱}{\beta^۳})(\omega-\frac{۱}{\gamma^۳})=\lambda$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{۱}{\sqrt[۳]{\omega(\omega-\frac{۱}{\alpha^۳})(\omega-\frac{۱}{\beta^۳})(\omega-\frac{۱}{\gamma^۳})}}$$

از آن‌جا، با استفاده از (۲) اندازه‌های a، b و c، یعنی ضلعهای مثلث محاسبه می‌شوند.

۹۵. نقطه‌هایی را که در آنها خطهای رسم شده از A و B بر کره مماس می‌شوند، M و N بنامید.

$M_۱$ و $N_۱$ را هم، تصویرهای M و N برروی صفحهٔ ABC درنظر بگیرید (شکل الف، شکل یکی از دو حالت هم ارز را که مربوط به آرایش مماسها می‌باشد، نشان می‌دهد، این مماسها، با هم متنافرند. در دو حالت دیگر، این مماسها در یک صفحه قرار دارند).

به‌آسانی می‌توان تساویهای زیر را نوشت:

$$MM_۱=NN_۱=l\sin\alpha\ \text{،}\ AM=CN=l$$

$$AM_۱=CN_۱=l\cos\alpha$$

$BM_۱$ و $BN_۱$ را پیدا کنید (شکل ب، O مرکز کره و $OL\|BM_۱$).

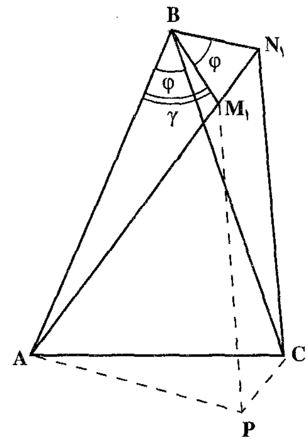
$$BN_۱=BM_۱=OL=\sqrt{r^۲-(l\sin\alpha-r)^۲}$$
$$=\sqrt{۲rl\sin\alpha-l^۲\sin^۲\alpha}$$

وقتی حول نقطهٔ B به اندازهٔ $\varphi=A\hat{B}C$ دوران حاصل شود. نقطهٔ A بر C و $M_۱$ بر $N_۱$ تبدیل می‌شود، پس مثلثهای $BM_۱N_۱$ و BAC متشابه‌اند،

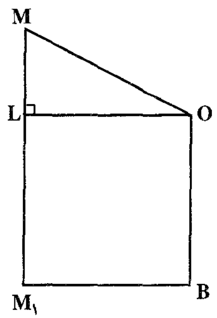
$$MN=M_۱N_۱=BM_۱\frac{AC}{AB}=\frac{۲a}{l}\sqrt{۲rl\sin\alpha-l^۲\sin^۲\alpha}$$

مثلث $M_۱BN_۱$، از دوران مثلث ABC حول نقطهٔ B، تحت زاویهٔ $\gamma=A\hat{B}M_۱$ حاصل شده است و تبدیلی است تجانسی، درنتیجه زاویهٔ بین $M_۱N_۱$ و AC برابر γ می‌باشد. چون $M_۱N_۱$ موازی MN است. زاویهٔ بین MN و AC نیز مساوی γ می‌شود. از مثلث

$BM_۱A$ نتیجه می‌شود :



(الف)



(ب)

$$\cos\gamma = \frac{۲rl\sin\alpha - l^۲\sin^۲\alpha + l^۲ - l^۲\cos^۲\alpha}{۲l\sqrt{۲rl\sin\alpha - l^۲\sin^۲\alpha}} = \frac{r\sin\alpha}{\sqrt{۲rl\sin\alpha - l^۲\sin^۲\alpha}}$$

پس :

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{۲rl\sin\alpha - (l^۲ + r^۲)\sin^۲\alpha}}{\sqrt{۲rl\sin\alpha - l^۲\sin^۲\alpha}}$$

با استفاده از مقدارهای حاصل برای MN و $MM_۱$ و $\sin\gamma$، حجم هرم $ACMN$ را به‌دست آورید.

$$V_{ACMN} = \frac{۱}{۶}|AC|.|MN|.|MM_۱|\sin\gamma$$

$$= \frac{۲a^۲\sin\alpha}{۳}\sqrt{۲rl\sin\alpha - (l^۲ + r^۲)\sin^۲\alpha} \qquad (۱)$$

اکنون نقطهٔ P را طوری اختیار کنید که $M_۱N_۱CP$ متوازی‌الاضلاع باشد. پس $MNCP$ هم متوازی‌الاضلاع می‌شود. اگر β زاویهٔ بین AM و CN باشد، پس.

$$\beta = A\hat{M}P$$

امّا مثلث $ABM_۱$ از دوران مثلث $CBN_۱$ حول نقطهٔ B، تحت زاویهٔ $\varphi = A\hat{B}C$، به‌دست آمده است. درنتیجه زاویهٔ بین $AM_۱$ و $CN_۱$ برابر φ می‌شود. از آن‌جا $A\hat{M_۱}P$

هم با φ مساوی می‌شود. یعنی مثلثهای AM_1P و ABC متشابه‌اند. از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود :

$$|AP| = ۲a\cos\alpha$$

زاویهٔ β با زاویهٔ $A\hat{M}P$ برابر است و AMP مثلث متساوی‌الساقینی است که در آن :

$$|AM| = |MP| = l \ , \ |AP| = ۲a\cos\alpha$$

درنتیجه :

$$\sin\frac{\beta}{۲} = \frac{a\cos\alpha}{l}$$

$$\sin\beta = ۲\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲} = \frac{۲a.\cos\alpha\sqrt{l^۲ - a^۲\cos^۲\alpha}}{l^۲}$$

از بیان حجم هرم $ACMN$ با دو عبارت نتیجه می‌شود :

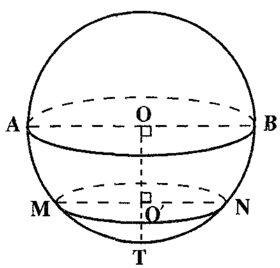
$$V_{ACMN} = \frac{۱}{۶}|AM|.|CN|x\sin B$$

$$= \frac{۱}{۳}ax\cos\alpha\sqrt{l^۲ - a^۲\cos^۲\alpha}$$

که در آن x فاصلهٔ مطلوب را نشان می‌دهد. از مقایسهٔ این فرمول با فرمول (۱) خواهیم داشت :

$$x = \frac{۲a\tan\alpha\sqrt{۲rl\sin\alpha - (l^۲ + r^۲)\sin^۲\alpha}}{\sqrt{l^۲ - a^۲\cos^۲\alpha}}$$

۹۶. در حقیقت می‌خواهیم ارتفاع عرقچینی از کرهٔ به شعاع ۲۵ سانتیمتر را تعیین کنیم که اندازهٔ شعاع عرقچین ۲۰cm است. با توجه به شکل داریم :



$$MN = ۴۰ \Rightarrow O'M = ۴۰:۲ = ۲۰ \ , \ OM = ۲۵$$

$$OO' = \sqrt{OM^۲ - MO'^۲} = \sqrt{۲۵^۲ - ۲۰^۲} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

$$\Rightarrow O'T = ۲۵ - ۱۵ = ۱۰cm$$

ارتفاع عرقچین با مقداری که کره از روی فیبر پایین می‌رود.

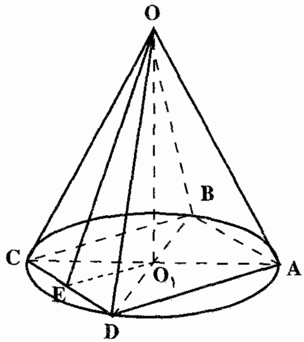
۹۷. $I = R\sqrt{27+3\tan^2\frac{\alpha}{2}}[\mathrm{Arc}\tan(3\cot\frac{\alpha}{2})-\alpha]$

اگر $0<\alpha<\mathrm{Arc}\cos\frac{1}{4}$، $l=0$

اگر $\alpha \geq \mathrm{Arc}\cos\frac{1}{4}$

۹۸. فاصلهٔ مجهول را $OO_1 = x < R$ می‌گیریم، از مثلث AO_1O (شکل) داریم:

$$AO_1^2 = R^2 - x^2$$



و سطح قاعدهٔ هرم:

$$Q = 2AO_1^2 = 2(R^2-x^2)$$

و ضلع قاعدهٔ هرم:

$$a = \sqrt{Q} = \sqrt{2(R^2-x^2)}$$

و سهم هرم:

$$l = OE = \sqrt{x^2+(\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{R^2+x^2}{2}}$$

و سطح کل هرم: $\qquad 4al + Q = 4m^2$

یا:

$$2\sqrt{2(R^2-x^2)}\sqrt{\frac{R^2+x^2}{2}}+2(R^2-x^2) = 4m^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{R^4-x^4}+R^2-x^2 = 2m^2$$

یعنی: (۱) $\qquad x^4+(2m^2-R^2)x^2+2m^2(m^2-R^2)=0$

یا با فرض $x^2 = z$:

(۲) $\qquad z^2+(2m^2-R^2)z+2m^2(m^2-R^2)=0$

بحث. (۱) اگر $m^2 > R^2$ باشد، عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱) به ازای همهٔ مقادیر x مثبت می‌شود و مسأله جواب ندارد.

۲) اگر $m^2 = R^2$ باشد، $x = 0$ می‌شود، یعنی صفحهٔ موردنظر از مرکز کره می‌گذرد.

۳) اگر $m^2 < R^2$ باشد، معادلهٔ (۲) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه خواهد داشت:

$z_1 < 0$ و $z_2 > 0$. یعنی مسأله دارای یک جواب است؛ $x = \sqrt{z_2}$.

۹۹. شعاع قاعدهٔ مخروط و شعاع کره را بترتیب R و r می‌گیریم، داریم:

$$R:r = n \Rightarrow R = nr$$

همچنین اگر حجم مخروط و حجم کره را بترتیب V و v بگیریم، داریم:

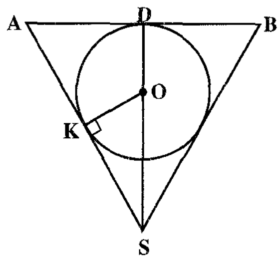
$$V:v = m \Rightarrow V = mv$$

و از آن‌جا:

$$\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = m.\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow n^{۲}r^{۲}h = ۴mr^{۳}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$r = \frac{hn^{۲}}{۴m}\ ;\ R = \frac{hn^{۳}}{۴m}$$



علاوه بر آن داریم:

$$l^{۲} = h^{۲} + R^{۲}$$

از این‌جا طول مولد مخروط به‌دست می‌آید:

$$l = \frac{h}{۴m}\sqrt{۱۶m^{۲} + n^{۶}}$$

از تشابه دو مثلث ADS و KOS به‌دست می‌آید (شکل):

$$\frac{OS}{l} = \frac{r}{R} \Rightarrow OS = \frac{rl}{R}$$

جواب: $OS = \frac{h}{۴mn}\sqrt{۱۶m^{۲} + n^{۶}}$.

۱۰۰. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۰۱. گزینهٔ (ج) درست است.

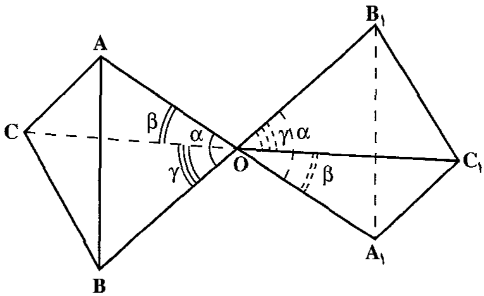
۲.۱.۵. اندازهٔ کمان

۱۰۲. A و B را دو نقطه بر روی کره درنظر بگیرید و C را هم، روی کمان کوچکتر دایرهٔ عظیمه‌ای که بر A و B می‌گذرد، اختیار کنید. ثابت کنید، کوتاهترین راه از A به B، باید از C بگذرد. دو دایرهٔ α و β را بر روی سطح کره درنظر بگیرید که از C می‌گذرند و مرکزهایشان بر روی شعاعهای OA و OB قرار دارند (O مرکز کره است). فرض کنیم، خطی که A را به B وصل می‌کند، از C نگذرد و دایرهٔ α را در M و دایرهٔ β را در N قطع کند. با دوران دایرهٔ α و قسمتی از خط داخل آن، به قسمتی که M بر روی C

قرار گیرد و همچنین با دوران دایرهٔ β، به همان شکل، که نقطهٔ N را روی C منطبق سازد، خطی به‌دست خواهیم آورد که A را به B وصل می‌کند و طولش به‌طور وضوح کمتر از خط مورد بحث ما است.

۱۰۳. وتر BC، موازی با هر صفحه‌ای است که از وسطهای وترهای AB و AC بگذرد. بنابراین وتر BC، موازی با صفحه‌ای خواهد بود که از مرکز کره و وسطهای کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ می‌گذرد. از آن‌جا معلوم می‌شود که دایرهٔ عظیمه‌ای که از B و C می‌گذرد، با دایرهٔ عظیمه‌ای که از وسطهای کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ می‌گذرد، در دو نقطهٔ K و K_1 طوری همدیگر را قطع می‌کنند که قطر KK_1 با وتر BC موازی می‌شود.

جواب : $\frac{\pi R}{۲} \pm \frac{1}{۲}$



۱۰۴. فرض کنید، این‌طور نباشد. نقطه‌های تقاطع دو به دوی صفحه‌هایی را که کمانها را شامل می‌شوند، بر روی سطح کره، A و A_1، B و B_1، C و C_1 بنامید (شکل).

چون اندازهٔ هر کمان از °۱۸۰ بیشتر است، باید هر کمان لااقل شامل یکی از هر دو نقطهٔ متقابل از دایره‌ای باشد که روی آن قرار گرفته است. این کمانها را برحسب صفحه‌هایی که در آن قرار گرفته‌اند، شماره‌گذاری می‌کنیم : I، II و III. A و A_1 نقطه‌های برخورد صفحه‌های I و II، B و B_1 محل برخورد صفحه‌های II و III، C و C_1 محل برخورد صفحه‌های III و I. هر یک از نقطه‌های A، A_1، B، B_1، C و C_1 باید به یک کمان تعلق داشته باشند. A_1 و C_1 را متعلق به کمان I و B_1 را متعلق به II درنظر بگیرید، پس B و C باید متعلق به کمان III باشند و A متعلق به II.

زاویه‌های رأس کنجهای سه‌وجهی را که در شکل مشخص شده با α، β و γ نشان دهید، O مرکز کره است. چون کمان I شامل نقطه‌های A و C نمی‌باشد، نامساوی $۳۶۰° - \beta > ۳۰۰°$ باید برقرار باشد.

به طریق مشابه، چون کمان II شامل نقطه‌های B و A_1 نمی‌شود، باید داشته باشیم :

$$۱۸۰° + \alpha > ۳۰۰°$$

و بالاخره برای کمان III خواهیم داشت :

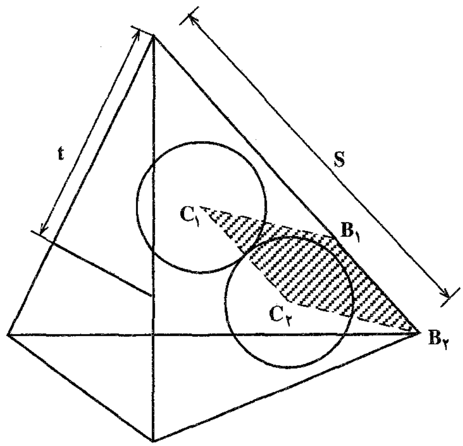
$$۳۶۰° - \gamma > ۳۰۰°$$

بدین‌ترتیب : $\gamma < 60^\circ$ و $\alpha > 120^\circ$ ، $\beta < 60^\circ$

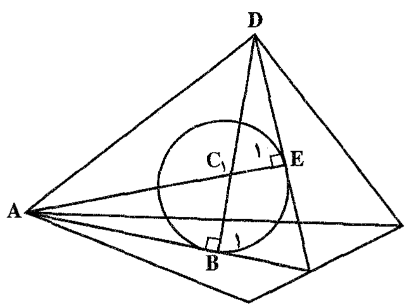
و از آن‌جا، $\alpha > \beta + \gamma$ که این ممکن نیست.

۳.۱.۵. اندازهٔ یال چهاروجهی

۱۰۵. (هـ). همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، در چهاروجهی مفروض صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن به‌گونه‌ای رسم می‌کنیم که یک چهاروجهی منتظم کوچکتر و فقط محیط بر یک کره حاصل شود. طول هر یال این چهاروجهی را t می‌گیریم. بعد چهارضلعی $C_1B_1B_2C_2$ را رسم می‌کنیم، C_1 و C_2 مرکزهای دو کره‌اند که در شکل ۱ رسم شده‌اند، بنابر تقارن شکل مرکب از کره و چهاروجهی ضلعهای C_1B_1 و C_2B_2 با هم برابر و موازی‌اند. درنتیجه :



(شکل ۱)



(شکل ۲)

$$B_1B_2 = C_1C_2 = 1 + 1 = 2$$

پس $S = t + 2$ و مسأله به تعیین t تبدیل می‌شود.

مطابق با شکل ۲، اگر b طول ارتفاعهای DB و AE چهاروجهی کوچکتر باشد، در مثلث ABC_1 طول ضلع AC_1 برابر است با $b-1$ ؛ و طول ضلع AB برابر است با $(\sqrt{3}/2)(2/3)$ ، زیرا B مرکز یکی از وجه‌هاست. از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC_1

نتیجه می‌شود :

$$(b-1)^2 = 1^2 + \left[\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})t\right]^2$$

همچنین از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ADB نتیجه می‌شود :

$$t^2 = b^2 + \left[\frac{2}{3}(\frac{\sqrt{3}}{2})t\right]^2$$

از حل معادله دوم نسبت به b، گذاشتن این مقدار b در معادلهٔ اوّل، و حل معادلهٔ حاصل نسبت به مقدار مثبت t، نتیجه می‌شود : $t = 2\sqrt{6}$. بنابراین :

$$S = 2 + t = 2 + 2\sqrt{6}$$

راه دیگر. نخست چهاروجهی منتظم T را درنظر می‌گیریم که رأسهایش مرکزهای چهار کره باشند، و مقدار d، فاصلهٔ مرکز T تا هر وجه آن، را حساب می‌کنیم. آن‌گاه T را به اندازه‌ای بزرگ می‌کنیم که فاصلهٔ مرکز تا هر وجه آن به مقدار ۱، شعاع کره‌ها، افزون شود. در این‌صورت چهاروجهی T' را به‌دست می‌آوریم که e' طول هر یال آن باید تعیین گردد. چون T و T' متجانسند و طول هر یال T برابر ۲ است. داریم :

$$\frac{e'}{2} = \frac{d+1}{d} \qquad (1)$$

مرکز T را مبدأ یک دستگاه مختصات سه بعدی می‌گیریم. بردارهای از مبدأ به رأسهای T را c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 و طول مشترک آنها را c می‌نامیم. چون $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$ ، پس :

$$-c_1 = c_2 + c_3 + c_4 \qquad (2)$$

دو طرف را در c_1 ضرب اسکالر می‌کنیم، نتیجه می‌شود :

$$-c_1 \cdot c_1 = -c^2 = c_1 \cdot c_2 + c_1 . c_3 + c_1 \cdot c_4 = 3c^2 \cos\theta$$

θ زاویهٔ بین c_i با c_j به فرض $i \neq j$ است ؛ بنابراین :

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}$$

مربع طول هر یال T برابر است با :

$$|c_1 - c_2|^2 = 4 = 2c^2 - 2c^2 \cos\theta = c^2 (2 + \frac{2}{3}) = \frac{8}{3} c^2$$

$$c = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad (3)$$

خط عمود از مبدأ بر یک وجه T، از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن وجه می‌گذرد. پس فاصلهٔ d طول بردار $(c_۲+c_۳+c_۴)/۳$ است. بنابر (۲) داریم:

$$d=\left|\frac{۱}{۳}(c_۲+c_۳+c_۴)\right|=\frac{۱}{۳}c$$

که چون به‌جای c مقدار آن را از (۳) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$d=\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

سرانجام، از (۱) داریم:

$$e'=۲\times\frac{d+۱}{d}=۲\times\frac{(۱/\sqrt{۶})+۱}{۱/\sqrt{۶}}=۲+۲\sqrt{۶}$$

راه دیگر. شاید بدانید که در یک چهاروجهی منتظم ارتفاعها در یک نقطه همرسند و این نقطه در سه چهارم هر ارتفاع، در جهت از رأس به مرکز وجه روبه‌روی آن، واقع است (برای اثبات این قضیه چهار واحد جرم در چهار رأس چهاروجهی درنظر می‌گیریم و M مرکز ثقل آنها را تعیین می‌کنیم، به‌جای سه واحد جرم واقع در سه رأس وجه قاعده یک جرم ۳ واحدی در مرکز وجه قاعده قرار می‌دهیم. بنابراین M در $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ از رأس به مرکز قاعده واقع است. نتیجهٔ مطلوب از تقارن به‌دست می‌آید). از این واقعیت نتیجه می‌شود که طول ارتفاع چهاروجهی کوچکتر از ۴ است. در مثلث ADB داریم:

$$t^۲=۴^۲+\left(\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}t\right)^۲=۱۶+\frac{t^۲}{۳}$$

$$\frac{۲}{۳}t^۲=۱۶\ ;\ \ t=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

۲.۵. نسبت پاره‌خطها

۱۰۶. دو نقطهٔ تماس دیگر را با $A_۱$ و $B_۱$ و شعاعهای کره‌ها را هم با R و r نشان دهید. در ذوزنقهٔ $AA_۱BB_۱$، طول قاعده برابر است با:

$$AA_۱=۲R\cos\frac{\alpha}{۲}\ ,\ \ BB_۱=۲r\cos\frac{\alpha}{۲}$$

و طول ضلعهای جانبی برابر است با :

$$AB_1 = A_1B = 2\sqrt{Rr}$$

پس قطرهای آن برابر می‌شود با :

$$AB = A_1B_1 = 2\sqrt{Rr(1+\cos^2\frac{\alpha}{2})}$$

اگر کره ضمن گذشتن از A و A_1، AB را در نقطهٔ K قطع کند، در آن‌صورت :

$$A_1B^2 = BK.BA$$

و از آن‌جا :

$$BK = \frac{2\sqrt{Rr}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{AB}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$AK = \frac{AB\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

قسمتهای دیگر، که در آن پاره‌خط AB تقسیم می‌شود، به طریق مشابه پیدا می‌شود.

جواب : پاره‌خط AB به نسبت زیر تقسیم می‌شود :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}:\sin^2\frac{\alpha}{2}:\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

۱۰۷. رأس A را آغاز بردارها می‌گیریم و فرض می‌کنیم :

$$\overrightarrow{AB} = b\ ,\ \overrightarrow{AC} = c\ ,\ \overrightarrow{AD} = d$$

اگر در یک چهاروجهی، ارتفاعها از یک نقطه بگذرند، یالهای روبه‌رو بر هم عمود‌ند (ثابت کنید!)، درنتیجه :

$$b.(c-d) = 0\ ,\ c.(d-b) = 0\ ,\ d.(b-c) = 0$$

و یا :

$$b.c = c.d = d.b = k$$

با توجه به این‌که نقطهٔ A_1 به صفحهٔ BCD تعلق دارد، داریم :

$$a_1 = \beta b + \gamma c + \delta d\ ,\ \beta+\gamma+\delta = 1$$

در ضمن :

$$a_1.b = a_1.c = a_1.d$$

یا :

$$\beta b^2 + k\gamma + k\delta = \beta k + \gamma c^2 + k\delta = \beta k + \gamma k + \delta d$$

از آن‌جا :

$$\beta:\gamma:\delta = \frac{1}{b^2-k}:\frac{1}{c^2-k}:\frac{1}{d^2-k}$$

و یا $(m \neq 0)$:

$$\beta = \frac{m}{b^2 - k}\ ,\ \gamma = \frac{m}{c^2 - k}\ ,\ \delta = \frac{m}{d^2 - k}$$

روشن است که $h = h.a_1$ ؛ ولی $(b-h).c = 0$ یا $(b - ha_1).c = 0$، از آن‌جا $h = \frac{b.c}{a_1.c}$. به این ترتیب :

$$h = \frac{k}{\beta k + \gamma c^2 + k\delta} = \frac{k}{(1-\gamma)k + \gamma c^2} = \frac{k}{k + \gamma(c^2 - k)} = \frac{k}{k+m}$$

m را بردار مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی می‌گیریم و فرض می‌کنیم :

$$a_2 = qa_1$$

در این صورت :

$$(2m - a_2).a_1 = 0 \Rightarrow (2m - qa_1).a_1 = 0$$

و $q = \frac{2m.a_1}{a_1^2}$ که از آن‌جا، نتیجه می‌شود :

$$q = \frac{1}{a_1^2}(2\beta m.b + 2\gamma m.c + 2\delta m.d)$$

ولی :

$$(b - 2m).b = 0\ ,\ (c - 2m).c = 0\ ,\ (d - 2m).d = 0$$

بنابراین :

$$q = \frac{1}{a_1^2}(\beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2)$$

و به همین ترتیب :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = a_2 - a_1 = (q-1)a_1\ ;$$

$$HA_1 : A_1A_2 = (1-h)a_1 : (q-1)a_1 = \frac{m}{m+k} \cdot \frac{1}{q-1}$$

$$= \frac{ma_1^2}{(m+k)(\beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 - a_1^2)}$$

و اگر به حساب آوریم که :

$$\beta b^2 = m + \beta k\ ,\ \gamma c^2 = m + \gamma k\ ,\ \delta d^2 = m + \delta k$$

آن‌وقت به‌دست می‌آید :

$$HA_1 : A_1A_2 = ma_1^2 : (m+k)(3m + k - a_1^2)$$

از طرف دیگر داریم :

$$a_1^2 = \beta b.a_1 + \gamma c.a_1 + \delta d.a_1 = b.a_1$$
$$= \beta b^2 + k\gamma + k\delta = (m + k\beta) + k\gamma + k\delta = m + k$$

به این ترتیب، سرانجام :

$$HA_1 : A_1A_2 = \frac{m(m+k)}{(m+k)(3m+k-m-k)} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

۶. شعاع کره

۱.۶. اندازهٔ شعاع کره

۱۰۸. داریم :

$$4\pi R^2 = 1 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{12/5664}$$
$$\Rightarrow R = \frac{1}{3/54} = 0/28\ \mathrm{m}$$

۱۰۹. داریم :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 1000\ \ \mathrm{cm}^3$$
$$R^3 = \frac{3000}{4\pi} = \frac{750}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}$$

شعاع کره با تقریب $\Rightarrow R = 63\ \mathrm{cm}$

۱۱۰. داریم :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2 \Rightarrow R = 3$$

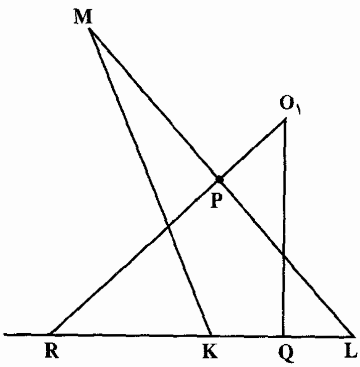
۱۱۱. اگر دستگاه مختصات قائمی را انتخاب کنیم که محورهای آن در امتداد سه وتر مفروض باشند، B نقطهٔ $(2b,0,0)$ و (بنا بر تقارن) مرکز کره، O، نقطهٔ $(b-a,d-c,f-e)$ خواهد بود ؛ در این‌جا بدون کاستن از کلیت برهان فرض کرده‌ایم $b \geq a$ ، $d \geq c$ و $f \geq e$ اکنون

$$R^2 = \overline{OB}^2 = (b-a-2b)^2 + (d-c)^2 + (f-e)^2$$

و چون $ab = cd = ef$ ، پس :

$$R^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲ + f^۲ - ۲ef$$

۱۱۲. $O_۱$ و $O_۲$ را تصویرهای O، مرکز کره بر روی صفحه‌های KLM و KLN درنظر بگیرید و وسط ML را P بنامید.



تصویرهای $O_۱$ و $O_۲$ روی KL، بر روی هم منطبق می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که این تصویرها، بر وسط KL یعنی نقطهٔ Q هم تصویر می‌شوند (شکل).

چون فرجهٔ بین صفحه‌های KLM و KLN برابر یک قائمه است، شعاع کره مطلوب برابر می‌شود با : $\sqrt{PO_۱^۲ + O_۱Q^۲}$. اگر $O_۱P$ را امتداد دهیم تا KL را در نقطهٔ R قطع کند، از مثلث قائم‌الزاویهٔ PLR نتیجه می‌شود $RL = ۶a$ و $RP = ۳a\sqrt{۳}$. بنابراین داریم :

$$RQ = \frac{۱۱a}{۲} \text{ ، } O_۱Q = \frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۶} \text{ ، } RO_۱ = \frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۳}$$

$$PO_۱ = \frac{۱۱a\sqrt{۳}}{۳} - ۳a\sqrt{۳} = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

از آن‌جا شعاع کره برابر می‌شود با :

$$\sqrt{\frac{۴a^۲}{۳} + \frac{۱۲۱a^۲}{۱۲}} = \frac{a}{۲}\sqrt{\frac{۱۳۷}{۳}}$$

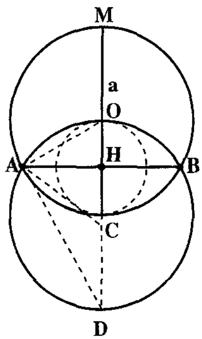
۱۱۳. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۱۴. فرض می‌کنیم شعاع کرهٔ جواب مسأله x باشد. فاصله‌های مرکزهای دو دایره از مرکز کره برابر است با : $\sqrt{x^۲ - r^۲}$ و $\sqrt{x^۲ - r'^۲}$. بنابراین با توجه به این‌که فاصلهٔ بین صفحه‌های دو دایره d می‌باشد، $\sqrt{x^۲ - r^۲} - \sqrt{x^۲ - r'^۲}$ یا $\sqrt{x^۲ - r^۲} + \sqrt{x^۲ - r'^۲}$ مساوی d است، بنابر آن که دو صفحه در یک طرف مرکز کره قرار داشته باشند و یا در دو طرف آن باشند، پس داریم :

$$\sqrt{x^۲ - r^۲} \pm \sqrt{x^۲ - r'^۲} = d$$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$\sqrt{x^۲ - r^۲} = d \mp \sqrt{x^۲ - r'^۲}$$
$$\Rightarrow x^۲ - r^۲ = d^۲ + x^۲ - r'^۲ \pm ۲d\sqrt{x^۲ - r'^۲}$$
$$\Rightarrow r'^۲ - r^۲ - d^۲ = \pm ۲d\sqrt{x^۲ - r'^۲}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲d}\sqrt{۴d^۲r'^۲ + (d^۲ + r^۲ - r'^۲)^۲}$$



۱۱۵. فرض می‌کنیم a شعاع کرهٔ داده شده و C مرکز کرهٔ دیگر و $OD = ۲OC = ۲r$ باشد. برای تعیین مساحت عرقچین کروی که متناظر با کمان AOB است، باید ارتفاع OH این عرقچین را محاسبه کنیم. زیرا مساحت موردنظر از دستور $S = ۲\pi r.OH$ به‌دست می‌آید. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAD نتیجه می‌شود :

$$OD.OH = AO^۲ \Rightarrow ۲r.OH = a^۲$$

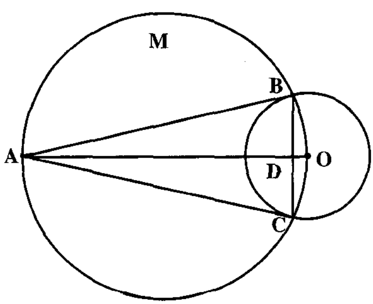
بنابراین :

$$\text{سطح عرقچین} = \pi a^۲$$

منطقهٔ مورد محاسبه، هم‌ارز دایره‌ای عظیمه از کرهٔ اوّلی است. این منطقه، همچنین معادل مساحت سطح کره‌ای است که a قطر آن کره باشد.

تبصره. می‌توان گفت :

$$\text{مساحت منطقه} = \pi.OA^۲ = \text{مقدار ثابت}$$



۱۱۶. فرض می‌کنیم $AO = a$ و $OB = r$ و $AB = g$ باشد. سطح مخروط مساوی $\pi.BD.AB$ است. امّا :

$$DO = \frac{BO^۲}{AO} = \frac{r^۲}{a}$$

$$AD = a - \frac{r^۲}{a} = \frac{a^۲ - r^۲}{a} \; ;$$

$$BD = AD.DO = \frac{a^۲ - r^۲}{a} \cdot \frac{r^۲}{a} = \frac{r^۲(a^۲ - r^۲)}{a^۲} \; ;$$

$$AB^۲ = AO^۲ - BO^۲ = a^۲ - r^۲ \; ;$$

بنابراین :

$$\pi BD.AB=\pi\times\frac{r\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}}{a}\cdot\sqrt{a^{۲}-r^{۲}}=\pi\times\frac{r(a^{۲}-r^{۲})}{a} \qquad (۱)$$

اندازهٔ مساحت سطح کره مساوی $۴\pi r^{۲}$ است. بنابراین $\frac{\pi r(a^{۲}-r^{۲})}{a}=۴\pi r^{۲}$ و از آن‌جا خواهیم داشت :

$$a^{۲}-r^{۲}-۴ar=۰\Rightarrow r^{۲}+۴ar-a^{۲}=۰\Rightarrow r=-۲a\pm\sqrt{۴a^{۲}+a^{۲}}$$

$$\Rightarrow r=a(-۲\pm\sqrt{۵})$$

۱۱۷. اگر x شعاع خواسته شده باشد، باید داشته باشیم :

$$۴\pi x^{۲}=\pi R\sqrt{R^{۲}+h^{۲}}$$

$$\Rightarrow ۴x^{۲}=R^{۲}\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{R\sqrt[۴]{۲}}{۲}$$

۱۱۸. اگر شعاع کره را x بنامیم، باید داشته باشیم :

$$\frac{۴}{۳}\pi x^{۳}=\pi R^{۲}\times۲R$$

$$\Rightarrow x^{۳}=\frac{۳R^{۳}}{۲}\Rightarrow x=R\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}=\frac{R}{۲}\sqrt[۳]{۱۲}$$

۱۱۹. شعاع قاعده، مولد و ارتفاع مخروط را بترتیب r، l و b می‌گیریم، داریم :

$$\pi rl=۶۰ \qquad (۱)$$

سطح کل مخروط را محاسبه می‌کنیم (یعنی سطح مثلث را با معلوم بودن سه ضلع آن) :

$$S=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۵)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۳)}=۸۴$$

و بنابراین :

$$\pi r^{۲}+۶۰=۸۴\Rightarrow r^{۲}=\frac{۲۴}{\pi} \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آید :

$$l^{۲}=\frac{۱۵۰}{\pi} \qquad (۳)$$

علاوه بر آن :

$$h^{۲}=l^{۲}-r^{۲}$$

از آن‌جا، با درنظر گرفتن رابطه‌های (۲) و (۳)، خواهیم داشت :

$$h=\sqrt{\frac{۱۲۶}{\pi}}$$

شعاع کرهٔ مطلوب را R می‌گیریم، داریم :

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \Rightarrow R^{۳}=\frac{۶}{\pi}\sqrt{\frac{۱۲۶}{\pi}}$$

یا :

$$R=\sqrt[۶]{\frac{۳۶\times ۱۲۶}{\pi^{۳}}}$$

محاسبات لگاریتمی را انجام می‌دهیم :

$$\frac{۱}{۶}\log ۳۶=۰/۲۵۹۴ \ ;$$

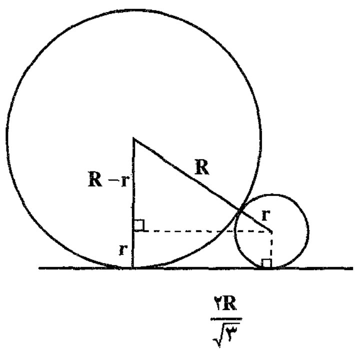
$$\frac{۱}{۶}\log ۱۲۶=۰/۳۵۰۱ \ ;$$

$$\frac{۱}{۲}\operatorname{colog}\pi=۱/۷۵۱۶ \ ;$$

$$\log R=۰/۳۶۱۱$$

جواب : $R \# ۲/۳^{m}$

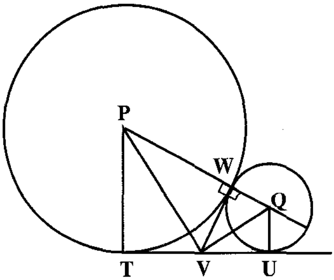
۱۲۰. سه کره هر یک به شعاع R طوری روی میز قرار دارند که هر یک از آنها بر دو کرهٔ دیگر مماس است و کرهٔ کوچکتر چهارمی به شعاع r بین سه کرهٔ دیگر و میز قرار دارد. چون نقطهٔ تماس کرهٔ چهارم با میز مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲R است که رأسهایش نقطه‌های تماس کره‌های بزرگتر با میزند، فاصلهٔ این نقطه تا هر یک از سه نقطهٔ تماس کره‌های بزرگتر با میز $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ است.



راه‌حل اول. $R+r$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با قاعده‌ای به طول $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و ارتفاعی به طول $R-r$ است (شکل را ببینید). بنابراین :

$$(R+r)^{۲}=(R-r)^{۲}+\frac{۴}{۳}R^{۲}$$

و درنتیجه : $r=\frac{R}{3}$.



راه‌حل دوم. شکل، نقطهٔ P مرکز یکی از کره‌های بزرگتر و Q مرکز کوچکتر است و نقطهٔ تماس این کره‌ها با میز T و V است. $VW\perp PQ$ ، $PV\perp VQ$ و $\overline{VW}=\overline{TV}=\overline{VU}=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

چون $\overline{VW}^2=PW.QW$ ، $\frac{R^2}{3}=Rr$ و درنتیجه $r=\frac{R}{3}$.

۱۲۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۲۲. ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم :

لم. فرض می‌کنیم A، B، C و D رأسهای چهاروجهی T باشند، و فرض می‌کنیم M مرکز کرهٔ محیطی آن باشد. T' چهاروجهی‌ای است که رأسش مرکزهای ثقل وجه‌های Tاند، و K مرکز S، کرهٔ محیطی T' است. در این صورت نمایش K عبارت است از :

$$k=\frac{1}{3}(a+b+c+d-m) \qquad (1)$$

(که در آن x بردار به نقطهٔ X از مبدأ مشترک Oای را نمایش می‌دهد.)

اثبات. شعاعهای حامل از K به رأسهای T' عبارتند از :

$$\frac{1}{3}(b+c+d)-k\ ,\ \frac{1}{3}(c+d+a)-k\ ,\ \frac{1}{3}(d+a+b)-k$$

$$\frac{1}{3}(a+b+c)-k$$

اگر k با (۱) داده شده باشد، آنها را به‌صورت :

$$\frac{1}{3}(m-a)\ ,\ \frac{1}{3}(m-b)\ ,\ \frac{1}{3}(m-c)\ ,\ \frac{1}{3}(m-d)$$

بیان و توجه می‌کنیم که آنها موازی و مساوی یک سوم شعاعهای حامل از M به رأسهای Tاند.

در مسألهٔ مفروض، M را مساوی O قرار می‌دهیم، بنابراین : $|m|=0$ و :

$$|a|=|b|=|c|=|d|=1$$

می‌شود و در این صورت شعاع S طولی برابر $\frac{1}{3}$ دارد.

بنا به (۱)، $|k|$ فاصلهٔ بین مرکزهای کره‌ها در :

$$9|k|^2 = |a+b+c+d|^2$$
$$= |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2+2(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)$$

صدق می‌کند. از اتحاد :

$$2u.v = |u|^2+|v|^2-|u-v|^2$$

و از این حقیقت که a، b، c و d بردارهای یکه‌اند، استفاده کرده، رابطهٔ

$$9|k|^2 = 16 - (\text{مجموع مربعهای یالهای } T) \quad (2)$$

را می‌نویسیم.

۱۲۳. اگر دو شعاع را x و y بنامیم، داریم :

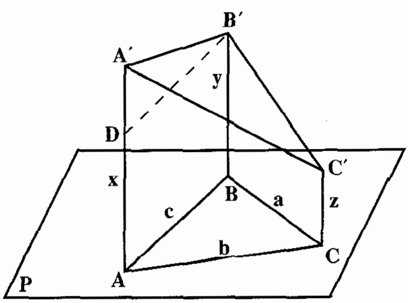
$$\begin{cases} x-y=b \\ 4\pi(x^2-y^2)=4\pi a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=b \\ x^2-y^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=b \\ (x-y)(x+y)=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=b \\ x+y=\dfrac{a^2}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b^2+a^2}{2b} \\ y=\dfrac{a^2-b^2}{2b} \end{cases}$$

مقدارهای موردنظر با فرض این‌که $a > b$ باشد.

۱۲۴. $\dfrac{ca}{2b}$ ، $\dfrac{bc}{2a}$ ، $\dfrac{ab}{2c}$



۱۲۵. فرض می‌کنیم، A' ، B' و C' مرکزهای کره‌ها باشند. داریم :

$AA'=x$ و $BB'=y$ و $CC'=z$

برای آن‌که کره‌ها دو به دو بر هم مماس باشند، باید :

$$B'C'=y+x \;,\; C'A'=z+x \;,\; A'B'=x+y$$

به‌عنوان مثال، ذوزنقهٔ $ABB'A'$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و $B'D$ را موازی BA

رسم می‌کنیم. در مثلث $A'DB'$ داریم:

$$A'B'^{2} = A'D^{2} + DB'^{2} \Rightarrow (x+y)^{2} = (x-y)^{2} + c^{2}$$

$$\Rightarrow xy = \frac{c^{2}}{4}$$

و به‌طور مشابه $yz = \frac{a^{2}}{4}$ و $zx = \frac{b^{2}}{4}$.

از این سه رابطه x، y و z محاسبه می‌شود. درواقع با ضرب کردن این رابطه‌ها داریم:

$$x^{2}y^{2}z^{2} = \frac{a^{2}b^{2}c^{2}}{64} \Rightarrow xyz = \frac{abc}{8}$$

از تقسیم این رابطه بر هر یک از رابطه‌های قبلی داریم:

$$x = \frac{bc}{2a}\ ,\ y = \frac{ca}{2b}\ ,\ z = \frac{ab}{2c}$$

۱۲۶. به‌عنوان مثال بر یکی از خطهای BY، صفحه‌ای موازی AB رسم می‌کنیم. اگر D' تصویر D روی این صفحه باشد، زاویهٔ XAD' ثابت است. همچنین دایرهٔ محیطی CAD' ثابت می‌باشد. اگر l قطر این دایره و h کوچکترین فاصلهٔ AB از خطهای داده شده باشد، قطر d از کرهٔ $ABCD$ با رابطهٔ زیر مشخص خواهد شد:

$$d^{2} = h^{2} + l^{2}$$

بنابراین شعاع کره ثابت است.

تبصره. پوش کره‌هایی مساوی که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، یک چنبره (tore) می‌باشد که قطر دایرهٔ مولد آن مساوی d است.

۲.۶. نسبت شعاعها

۱۲۷. اگر کره‌های α و β متقاطع باشند، در آن‌صورت مساحت سطح آن قسمت از کرهٔ β که در داخل کرهٔ α محصور شده، برابر با یک چهارم تمام مساحت سطح کرهٔ α می‌شود (این قسمت یک قطعهٔ کروی است به ارتفاع $\frac{r^{2}}{2R}$ که در آن r شعاع کرهٔ α و R شعاع کرهٔ β می‌باشد. درنتیجه مساحت سطح آن $2\pi R \times \frac{r^{2}}{2R} = \pi r^{2}$ می‌شود). از این‌جا کرهٔ α، کرهٔ β را در خود شامل می‌شود و نسبت شعاعها برابر $\sqrt{5}$ است.

۱۲۸. داریم :

$$V_۱ = ۲V_۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R_۱^{۳} = ۲\times\frac{۴}{۳}\pi R_۲^{۳}$$

نسبت شعاعها
$$\Rightarrow \frac{R_۱^{۳}}{R_۲^{۳}} = ۲ \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \sqrt[۳]{۲}$$

۱۲۹. $۲+\sqrt{۳}$

۳.۶. رابطهٔ بین شعاعها

۱۳۰. راه‌حل اوّل را با روش هندسهٔ تحلیلی می‌دهیم. باید دستگاه مختصات مناسبی انتخاب کنیم. هر کرهٔ S' که از نقطه‌های A، B و C بگذرد، شامل دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. بنابراین، O'، مرکز کرهٔ S'، بر خط راستی قرار دارد که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (نقطهٔ D) می‌گذرد و بر صفحهٔ آن عمود است. دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که مرکز کرهٔ S، منطبق بر مبدأ مختصات O، محور طول منطبق بر امتداد OA، و O' و D واقع بر صفحهٔ xy باشد؛ شعاع کرهٔ S را به‌عنوان واحد درنظر می‌گیریم. معادلهٔ کرهٔ S، به‌صورت $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ درمی‌آید. مختصات نقطه‌های O'، D و A را بترتیب، $(a,۰,۰)$، $(a,d,۰)$ و $(t,d,۰)$ فرض می‌کنیم (a و d، ثابتهای مفروضند). معادلهٔ کرهٔ S'، چنین است :

$$(x-t)^۲+(y-d)+z^۲=r^۲$$

که باید در آن t و r (شعاع کرهٔ S') را محاسبه کنیم. چون S' شامل نقطهٔ A است، بنابراین :

$$r^۲=(a-t)^۲-r^۲ \qquad (۱)$$

S' بر S مماس است، بنابراین فاصلهٔ بین دو مرکز کره، برابر $۱-r$ (تفاضل دو شعاع) است :

$$(۱-r)^۲=t^۲+d^۲ \qquad (۲)$$

اگر (۱) را از (۲) کم کنیم، به‌دست می‌آید :

$$۱-۲r=۲at-a^۲$$

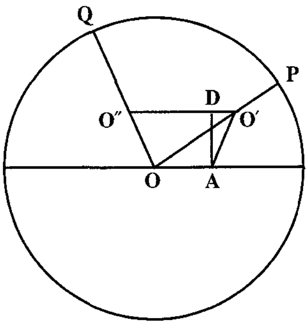
بنابراین :

$$t-a=\frac{(۱-۲r-a^۲)^۲}{۲a} \qquad (۳)$$

با توجه به (۳) و (۱) به‌دست می‌آید :

$$(1-a^2)r^2-(1-a^2)r+a^2d^2+\frac{1-a^2}{4}=0$$

که معادلهٔ درجه دومی است نسبت به r و مجموع دو ریشهٔ آن $r_1+r_2=1$. همچنین از (۳) به‌دست می‌آید : $t_1+t_2=a$.



راه‌حل دوم. مسأله را می‌توان با روش هندسی حل کرد. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را D می‌گیریم و به صفحه‌ای توجه می‌کنیم که از خط راست OA و نقطهٔ D بگذرد. مقطع این صفحه، با کرهٔ S و دو کرهٔ داخلی مماس بر S، در شکل داده شده است. نقطه‌های O′ و O″، مرکزهای دو کره‌ای که از A، B و C گذشته‌اند، بر خط راستی قرار دارند که از D می‌گذرند و با OA موازی است. P و Q را، نقطه‌های تماس دو کره، با S فرض می‌کنیم. باید داشته باشیم :

$$AO'=O'P=r_1 \text{ و } AO''=O''Q=r_2$$

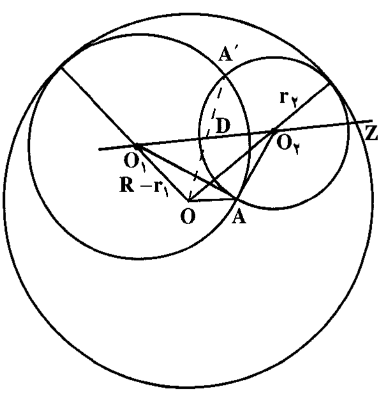
$$OO'=r-r_1 \text{ یا } OO'+AO'=r \qquad (4)$$

$$OO''=r-r_2 \text{ یا } OO''+AO''=r$$

(r، r_1 و r_2، شعاعهای سه کره‌اند). با توجه به (۴) معلوم می‌شود که O′ و O″ بر محیط یک بیضی به کانونهای O و A قرار دارند. چون O′O″ با OA موازی است، با توجه به متقارن بودن بیضی نتیجه می‌شود که ذوزنقهٔ OAO′O″ متساوی‌الساقین است، یعنی OO′ = AO″ و سرانجام

$$r_1+r_2=O'P+OO'=r$$

۱۳۱. خط راست d را از نقطهٔ A، عمود بر صفحهٔ ABC رسم می‌کنیم. در این‌صورت، مرکزهای O_1 و O_2 کره‌های مماس بر کرهٔ S، روی خط راست l قرار دارد که نقطه‌های آن از سه نقطهٔ A، B و C به یک فاصله‌اند، یعنی با خط راست d موازی است. A′ را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط راست l، و D را



نقطهٔ برخورد خطهای راست OA' و l می‌گیریم (شکل). نقطهٔ A (و همچنین، نقطهٔ A') متعلق به هر دو کره است، بنابراین $O_1A = r_1$ و $O_2A = r_2$. از شرط مماس بودن کره‌ها، به‌دست می‌آید:

$$O_1O = R - r_1 \ , \ O_2O = R - r_2$$

درنتیجه:

$$O_1O + O_1A = R = O_2O + O_2A$$

ثابت می‌کنیم، نقطه‌های O_1 و O_2، نسبت به نقطهٔ D، قرینهٔ یکدیگرند. درواقع، اگر نقطهٔ O_1 را که برای آن داریم:

$$O_1O + O_1A = R$$

تثبیت کنیم، برای نقطهٔ O_2، قرینهٔ O_1 نسبت به نقطهٔ D، داریم:

$$O_2O + O_2A = O_1A + O_1O = R$$

سپس، برای هر نقطهٔ O'_2، واقع بر خط راست l بین نقطه‌های D و O_2، داریم:

$$O'_2O + O'_2A = O'_2O + O'_2A' < O_2O + O_2A' = O_2O + O_2A = R$$

(زیرا، محیط مثلث درونی از محیط بیرونی، کمتر است)؛ و برای هر نقطهٔ O''_2 واقع بر امتداد پاره‌خط راست DO_2 (از طرف نقطهٔ O_2)، به همان ترتیب به‌دست می‌آید:

$$O''_2O + O''_2A > R$$

نقطه‌های نیمخط راست DO_1 را هم به همین ترتیب، می‌توان مورد بررسی قرار داد، به این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$R - r_1 = O_1O = O_2A = r_2$$

و از آن‌جا:

$$R = r_1 + r_2$$

۴.۶. افزایش شعاع کره

۱۳۲. چون $C = 2\pi r$، با فرض این‌که، r_2 شعاع اوّلیه، r_1 شعاع نهایی باشد، داریم:

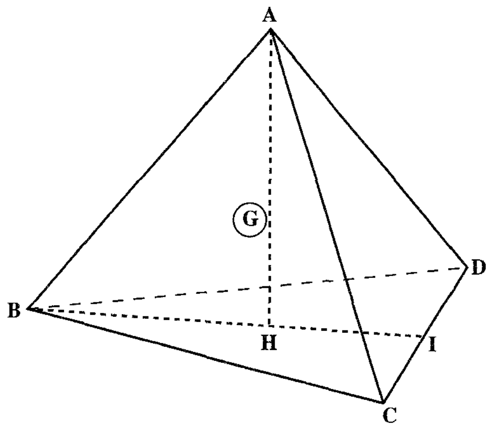
$$25 - 20 = 2\pi r_1 - 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 - r_2) \ ;$$

$$r_1 - r_2 = \frac{5}{2\pi}$$

۵.۶. قطر کره

۱۳۳. شعاع این کره $R = 3$ است، از آن‌جا قطر کره $2R = 6$ است.

۱۳۴. درواقع، تمام قطرها با هم برابرند. می‌توانیم قطری را درنظر بگیریم که دو صفحهٔ قطری مرکزی گذرنده بر وتر موردنظر واقع باشد، به عبارت دیگر بر وتر موردنظر و مرکز کره یک صفحه می‌گذرانیم. این صفحه، کره را در یک دایره به شعاع کره قطع می‌کند که قطرش مساوی قطر کره است. بدیهی است که هر وتری از این دایره از قطر آن یعنی از قطر کره، کوچکتر است.



۱۳۵. مرکز چهار کره با هم چهاروجهی منتظم ABCD را تشکیل می‌دهد. که طول یالهای آن a، برابر ۱۰ سانتیمتر هستند (شکل را ببینید). می‌دانیم که مرکز تیلهٔ کوچک به نقطهٔ G، یعنی مرکز ثقل (گرانیگاه) مجموعهٔ چهار کره منطبق است. برای تعیین محل G، ابتدا از نقطهٔ B به نقطهٔ I (وسط CD) وصل می‌کنیم و از A عمودی بر BI فرود می‌آوریم، تا آن را در H قطع کند.

می‌دانیم که نقطهٔ G در سه چهارم AH قرار دارد، یعنی: $GA = \frac{۳}{۴}AH$. در مثلث متساوی‌الاضلاع BCD داریم: $BI = a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. نقطهٔ H نیز در وسط این مثلث قرار دارد و از آن‌جا: $BH = \frac{۲}{۳}BI = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم: $AH^{۲} + ۳AB^{۲} = BH^{۲} = \frac{۲}{۳}a^{۲}$.

و درنتیجه: $AH = \frac{a\sqrt{۲}}{۳}$. برای محاسبهٔ GA کافی است که AH را در سه چهارم ضرب کنیم، پس: $GA = \frac{۹\sqrt{۶}}{۴}$.

با کم کردن طول شعاع یک کره از آن خواهیم داشت: $\frac{a\sqrt{۶} - ۲}{۴}$.

و این همان طول شعاع تیلهٔ مطلوب معماست، که با دو برابر کردن آن، طول قطر را

خواهیم داشت : $\frac{a\sqrt{۶}-۲}{۲}$.
که برابر است با ۲/۲۴۷۴۴۸۷ cm و یا نزدیک به ۲/۲۵ cm .

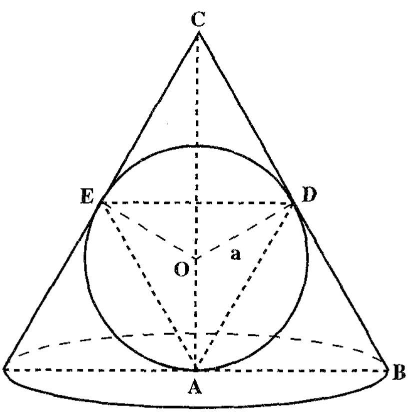
۷. مساحت

۱.۷. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷. اندازهٔ مساحت سطح کره

۱۳۷. می‌دانیم که مساحت کره‌ای به شعاع R، برابر است با $S = ۴\pi R^۲$. بنابراین داریم :
کره $S = ۴\pi(۶)^۲ = ۱۴۴\pi$

۱۳۸. مخروط متساوی‌الاضلاع، مخروطی است که مقطع آن با صفحه‌ای گذرنده بر محور، مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. شعاع کره را a فرض می‌کنیم. شعاع AB، نصف ضلع BC است و مساوی DE، و متناظر با ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع a است. بنابراین داریم :



$$AB = DE = a\sqrt{۳}$$

امّا $CD^۲ = DE^۲ = ۳a^۲$ ؛ بنابراین داریم :

$$CO^۲ = ۴a^۲ \;,\; CO = ۲a \;,\; CA = ۳a$$

همهٔ عاملهای لازم برای محاسبهٔ سطح مخروط مشخص شده‌اند :

$$AB = a\sqrt{۳} \;;\; AC = ۳a \;;\; BC = ۲a\sqrt{۳}$$

مساحت دایرهٔ قاعده برابر است با :

$$\pi AB^۲ = \pi r^۲ = \pi ۳a^۲ = ۳\pi a^۲$$

مساحت جانبی برابر است با $\pi AB \times BC = \pi a\sqrt{۳} \times ۲a\sqrt{۳} = ۶\pi a^۲$. از آن‌جا سطح کل مخروط برابر است با :

$$S_{کل} = ۳\pi a^۲ + ۶\pi a^۲ = ۹\pi a^۲$$

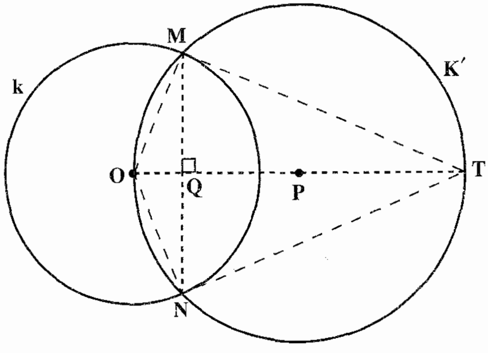
مساحت سطح کره مساوی $۴\pi R^۲$. بنابراین نسبت مساحت سطح کره و مخروط مساوی $\frac{۴}{۹}$ است.

حجم مخروط برابر است با $\pi AB^۲ \times \frac{۱}{۳} AC = \pi(a\sqrt{۳})^۲ a = ۳\pi a^۲$. حجم کره مساوی $\frac{۴}{۳}\pi a^۳$ است. بنابراین نسبت حجم کره به حجم مخروط برابر است با :

$$\frac{\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{۳\pi a^۳} = \frac{۴}{۹}$$

۱۳۹. گزینهٔ (۳) درست است.

۲.۱.۷. اندازهٔ مساحت بخشی از کره



۱۴۰. از O به P وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا کرهٔ S′ را در نقطهٔ T قطع کند (نقطهٔ متقاطر O در کرهٔ S′). M را نقطهٔ مشترکی از دو کره می‌گیریم و صفحه‌ای از سه نقطهٔ O، T و M می‌گذرانیم (شکل). K و K′ را دایره‌های عظیمه‌ای می‌گیریم که از برخورد این صفحه، با کره‌های S و S′ به‌دست می‌آیند. دو دایرهٔ K و K′، نقطهٔ مشترک دومی هم خواهند داشت، که آن را N می‌نامیم. دو خط راست MN و OT، یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع می‌کنند.

مساحت سطح عرقچین F، بخشی از کرهٔ S′ که در درون کرهٔ S قرار دارد، برابر است با حاصلضرب محیط دایرهٔ K′ در ارتفاع OQ از عرقچین کروی یعنی :

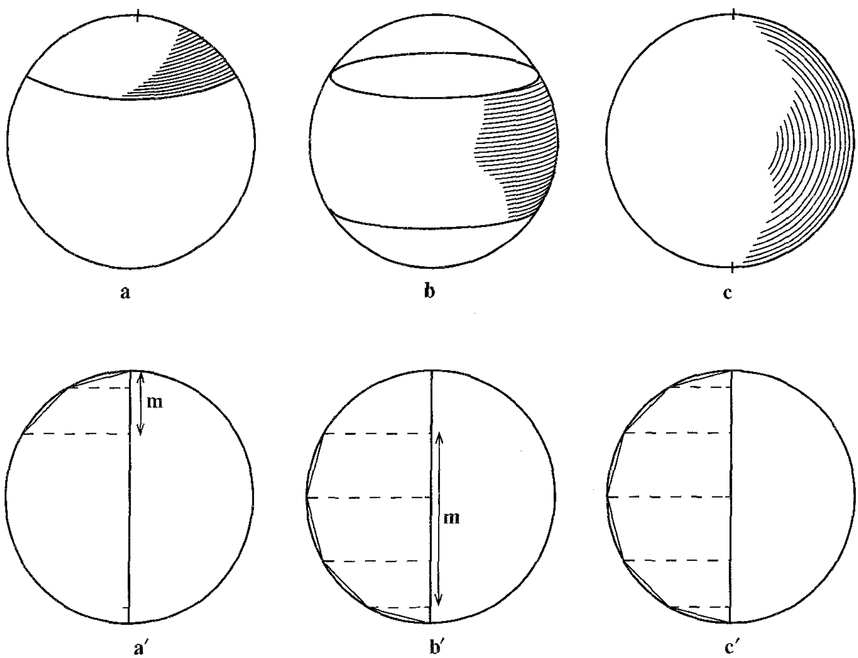
$$F = \pi . OT . OQ \qquad (۱)$$

که بستگی به جای نقطهٔ P، مرکز کرهٔ S′، ندارد. دربارهٔ رابطهٔ (۱)، یادداشت صفحه بعد را ببینید.

یادداشت. مساحت عرقچین کروی، قطعهٔ کروی و کره.

a) این سه سطح، به‌وسیلهٔ بخشهایی از نیمدایره به‌دست می‌آیند: «کمان انتهایی، کمان درونی و نیمدایرهٔ کامل (شکل الف، a، b و c). هر یک از این سطحها، با دوران کمان متناظر خود، دور قطر دایره به‌دست می‌آیند. مساحت این سطحها را می‌توان به تقریب محاسبه کرد، به این ترتیب که کمان متناظر را به چند بخش برابر تقسیم کنیم و به‌جای کمان، خط شکسته‌ای را درنظر بگیریم که از وصل نقطه‌های متوالی تقسیم به‌دست آمده است.» (شکل الف، ′a، ′b و ′c).

روشن است که در این‌صورت، مساحت حاصل، از مساحت موردنظر کوچکتر می‌شود.



(الف)

درضمن، مساحت شکلی که از دوران این خط شکسته به‌دست می‌آید، برابر است با مجموع مساحتهای چند مخروط ناقص. ابتدا، این مساحتها را محاسبه می‌کنیم.

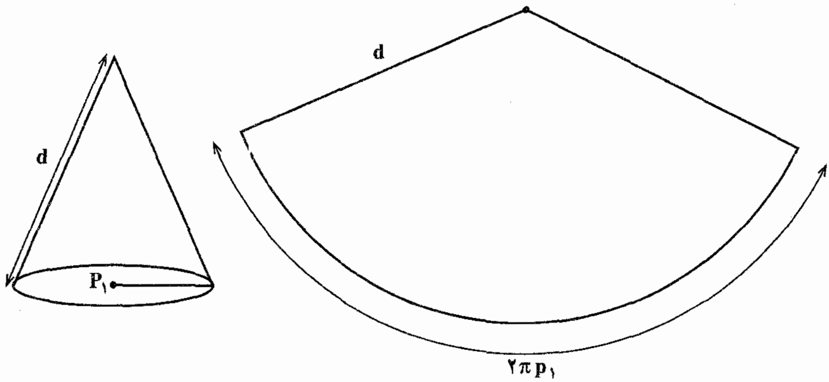
b) مخروط دواری با شعاع قاعدهٔ ρ_1 و مولد d درنظر می‌گیریم. اگر سطح مخروطی را روی یکی از مولدهای آن ببریم و روی صفحه، پهن کنیم، قطاعی از یک دایره به‌دست می‌آید که شعاع آن برابر d و کمان روبه‌روی آن به طول $2\pi\rho_1$ است (شکل ب). مساحت این قطاع را t_1 می‌گیریم. نسبت مساحت قطاع به مساحت تمامی دایره (یعنی

$d^2\pi$)، برابر است با نسبت طول کمان قطاع به محیط دایره ($2\pi d$)، یعنی:

$$\frac{t_1}{d^2\pi}=\frac{2\pi\rho_1}{2\pi d}=\frac{\rho_1}{d}$$

که از اینجا، مساحت سطح جانبی مخروط بهدست میآید:

$$t_1=\pi\rho_1 d$$

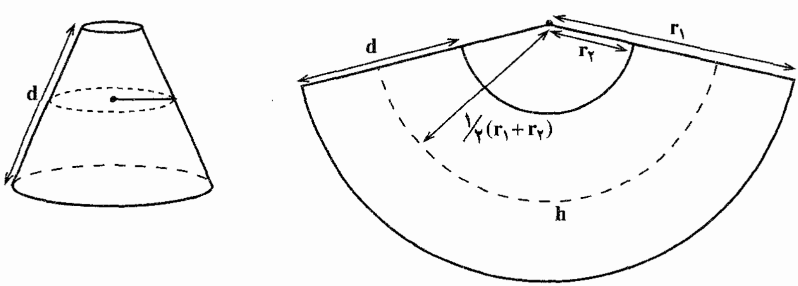


(ب)

به محاسبهٔ سطح جانبی مخروط ناقص میپردازیم. در شکل (ج) (سمت راست) بخشی از یک حلقه را میبینید که بین دو دایرهٔ هممرکز، به شعاعهای r_1 و r_2، قرار گرفته است. مساحت این حلقه، (اگر حلقهٔ کامل درنظر گرفته شود) برابر است با:

$$\pi r_1^2-\pi r_2^2=\pi(r_1+r_2)(r_1-r_2)$$

که در آن $d=r_1-r_2$، عرض حلقه است. r_1+r_2 را r مینامیم (r، شعاع دایرهٔ دیگری است که برابر با دو برابر واسطهٔ حسابی دو شعاع r_1 و r_2 است). به این ترتیب، مساحت حلقه برابر $2\pi rd$ میشود، یعنی حاصلضرب محیط دایرهٔ به شعاع r (که آن را دایرهٔ مرکزی مینامیم) در عرض حلقه از طرف دیگر، اگر مساحت این بخش حلقه را



(ج)

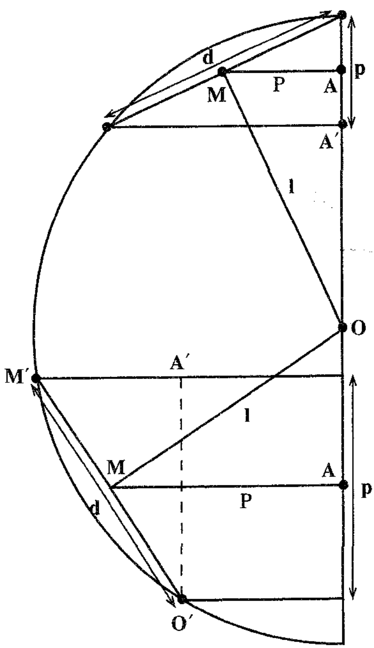
$t_۲$ بگیریم، نسبت $t_۲$ به مساحت حلقهٔ کامل، برابر است با نسبت h، طول کمان دایرهٔ مرکزی به محیط دایرهٔ مرکزی :

$$\frac{t_۲}{۲\pi rd}=\frac{h}{۲\pi r}\Rightarrow t_۲=hd$$

مخروط ناقص، مولدی برابر d دارد و دایرهٔ به محیط k (مقطع متوسط)، به فاصلهٔ $\frac{d}{۲}$ از قاعدهٔ مخروط ناقص است (شکل ج). اگر شعاع دایرهٔ مقطع متوسط را ρ و سطح جانبی مخروط ناقص را t بگیریم، به‌دست می‌آید :

$$t=۲\pi\rho d \qquad (۱)$$

که اگر $\rho=\frac{\rho_۱}{۲}$ فرض کنیم، به همان مساحت سطح جانبی مخروط می‌رسیم که در(a) به‌دست آوردیم.



c) به کره می‌گردیم. طول هر یک از ضلعهای خط شکستهٔ محاط در نیمدایره را d فرض می‌کنیم (شکل د). فاصلهٔ وسط این ضلع از قطر کره را با ρ، فاصلهٔ وسط ضلع از مرکز کره را با l و طول تصویر این ضلع (ضلع به طول d) را بر قطر کره با p نشان می‌دهیم. در این‌صورت مساحت سطحی که از دوران این ضلع دور قطر کره به‌دست می‌آید، همان است که در (۱) داده‌ایم.

ضلعهای نظیر، در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMA و O′MA′ بر هم عمود و بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند، یعنی :

$$\frac{\rho}{l}=\frac{p}{d}\Rightarrow \rho d=pl$$

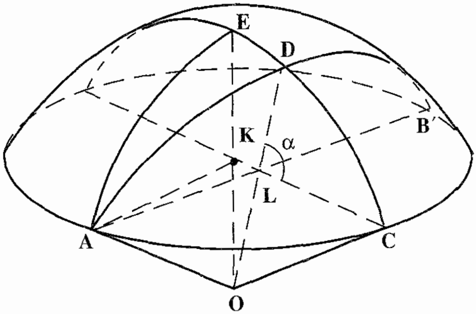
و بنابراین $t=۲\pi pl$.

به زبان دیگر : مساحت شکلی که از دوران یک وتر، دور قطر دایره به‌دست می‌آید، برابر است با ۲π برابر حاصلضرب فاصلهٔ مرکز دایره از وتر در طول تصویر وتر به قطر دایره.

اگر ضلع خط شکسته را، به تقریب کمانی از دایره فرض کنیم، همهٔ ضلعهای خط

شکسته، به یک فاصله از مرکز می‌شوند و مجموع تصویرهای این وترها روی قطر، برابر با m، ارتفاع سطح دوار خواهد شد (درحالت دوران تمامی نیمدایره، m برابر طول قطر می‌شود). بنابراین، مساحت سطحی که از دوران این خط شکسته به‌دست می‌آید، برابر است با : $۲\pi lm$ ، که در آن، مقدار l، در حالت حدی، همان شعاع کره، یعنی R است.
به این ترتیب، مساحت سطح عرقچین کروی و قطعهٔ کروی، برابر $۲\pi Rm$ است که در آن R شعاع کره و m ارتفاع سطح موردنظر است. وقتی که با کرهٔ کامل سر و کار داشته باشیم، $m = ۲R$ و بنابراین، برای مساحت کره به‌دست می‌آید : $۴\pi R^۲$.

۱۴۱. در شکل، مرکز کره، A و B محل برخورد یال فرجه با سطح کره، C و D بترتیب وسطهای کمانهای $\overset{\frown}{ACB}$ و $\overset{\frown}{ADB}$ می‌باشند. صفحهٔ ADB از O می‌گذرد و E رأس قطعهٔ کروی می‌باشد که با صفحهٔ ACB قطع شده است. اندازهٔ مساحت مثلث منحنی‌الخط ACD برابر نصف مساحت مطلوب مسأله است. از طرف دیگر (با فرض $\alpha \le \frac{\pi}{۲}$)،



$$S_{ADC} = S_{AEC} - S_{AED} \qquad (۱)$$

S_{AEC} را پیدا کنید. اگر زاویهٔ بین صفحه‌های AEO و OEC برابر با φ ،

$EK = h$

آن‌گاه، :

$$S_{AEC} = \frac{\varphi}{۲\pi}\ ۲\pi Rh = \varphi Rh$$

و h و φ به آسانی پیدا می‌شوند.

$$h = EK = R - OK = R - a\sin\alpha$$

$$\sin\varphi = \sin A\hat{K}L = \frac{AL}{AK} = \frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲ \sin^۲\alpha}}$$

$$\varphi = \operatorname{Arc}\sin\frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲ \sin^۲\alpha}}$$

پس :

$$S_{AEC} = R(R - a\sin\alpha)\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}} \qquad (۲)$$

اکنون S_{AED} را پیدا کنید.
همانطور که می‌دانیم :

$$S_{AED} = R^۲(\varphi + \psi + \gamma - \pi)$$

که در آن φ ، ψ و γ فرجه‌های کنج سه‌وجهی‌ای می‌باشند که رأس آن O، و یالهای آن OE، OA و OD می‌باشند. زاویهٔ φ به آسانی پیدا می‌شود. برای تعیین ψ (فرجهٔ نظیر یال OA) از قضیهٔ اوّل کسینوسها استفاده کنید و آن را دربارهٔ کنج سه‌وجهی به رأس A، به‌کار ببرید که در آن :

$$K\hat{A}L = \frac{\pi}{۲} - \varphi$$

$$\sin K\hat{A}O = \frac{a\sin\alpha}{R} \text{ ، } \sin A\hat{L}O = \frac{R}{a}$$

درنتیجه :

$$\cos\psi = \frac{\dfrac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}} - \sqrt{۱ - \dfrac{a^۲\sin^۲\alpha}{R^۲}}\sqrt{۱ - \dfrac{a^۲}{R^۲}}}{\dfrac{a\sin\alpha}{R}\cdot\dfrac{a}{R}}$$

$$= \frac{\sqrt{R^۲ - a^۲}}{\sqrt{R^۲ - a^۲\sin^۲\alpha}}\sin\alpha$$

واضح است که :

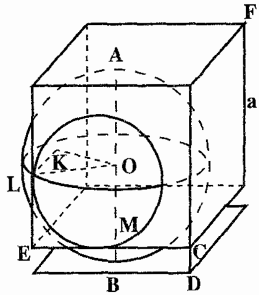
$$\gamma = \frac{\pi}{۲}$$

۱۴۲. سطح مجهول S از سه قطعهٔ مساوی از سطح کره تشکیل شده است. در شکل، این قطعه‌ها، در جلو مکعب، پایین آن و سمت چپ آن قرار گرفته‌اند. سطح کره، بر یالهایی که در رأس E به هم رسیده‌اند و بر وجه‌هایی که در رأس F به هم رسیده‌اند، مماس است. شعاع کره (یعنی OA، OL یا OB) را r می‌گیریم و از رابطهٔ مربوط به سطح قطعهٔ کره استفاده می‌کنیم :

$$S = ۳\times ۲\pi r.CD = ۶\pi r.MB = ۶\pi r(AB - AM) = ۶\pi r(۲r - a)$$

برای محاسبهٔ r، مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین OKL را درنظر می‌گیریم. به‌دست می‌آید :

$$OK = OM = AM - OA = a - r \text{ و } OL = r \text{ و چون } OL = OK\sqrt{۲}$$



پس :

$$r = (a - r)\sqrt{۲} \;;\; r = \frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+۱} = a(۲ - \sqrt{۲})$$

بنابراین :

$$S = ۶\pi r(۲r - a) = ۶\pi a^۲(۲ - \sqrt{۲})(۳ - ۲\sqrt{۲})$$

$$= ۶\pi a^۲(۱۰ - ۷\sqrt{۲})$$

۱۴۳. مساحت کرهٔ زمین را به‌دست می‌آوریم :

$$S = ۴\pi R^۲ = ۴\pi(۶۴۰۰)^۲ = ۱۶,۳۸۴,۰۰۰ \text{km}^۲$$

مساحت خشکیهای زمین :

$$۱۶۳۸۴۰۰۰ \times \frac{۱}{۴} = ۴,۰۹۶,۰۰۰ \text{km}^۲$$

۳.۱.۷. اندازهٔ مساحت منطقهٔ کروی

۱۴۴. ابتدا لم زیر را ثابت کنید :

اگر پاره‌خط AB حول خط l (l پاره‌خط AB را قطع نمی‌کند) دوران کند، عمودمنصف AB (وسط AB را C بنامید)، خط l را در O قطع کند، و تصویر AB بر روی l، MN باشد، در آن صورت سطح حاصل از دوران AB حول خط l برابر می‌شود با :

$$۲\pi.CO.MN$$

سطح ایجاد شده از دوران AB، سطح جانبی مخروط ناقص را نشان می‌دهد که شعاعهای قاعده‌های آن، BN و AM و ارتفاع آن، MN و مولدش، AB می‌باشد. از نقطهٔ A خطی به موازات l رسم کنید و محل برخورد آن را با خط عمود بر BN، نقطهٔ L بنامید : $MN = AL$.

تصویر نقطهٔ C را بر روی خط l، K بنامید. دیده می‌شود که مثلثهای ABL و COK با هم متشابه‌اند. از شرط مسأله معلوم می‌شود سطح جانبی مخروط ناقص برابر است با :

$$۲\pi\frac{BN + AM}{۲}.AB = ۲\pi.CO.MN$$

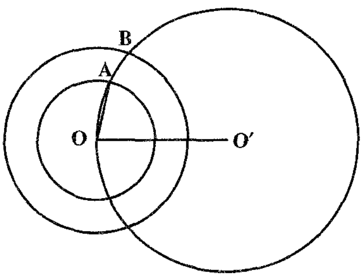
اکنون با استفاده از حد، به آسانی می‌توان حکم مسأله را به اثبات رساند. (اگر تحت

شرایط مسأله) منطقه‌ای کروی، از دوران کمان AB از یک دایره، حول قطر، به‌دست آمده باشد، مساحت حاصل از آن، برابر است با، حد مساحت سطح ایجاد شده از دوران چند ضلعی $AL_1L_2 \ldots L_nB$ حول همان قطر که همهٔ رأسهای آن بر روی AB قرار دارند و طولِ ضلعهای آن به سمت صفر میل می‌کنند.

۱۴۵. می‌دانیم که :

$$S_{\text{منطقه}} = 2\pi Rh$$
$$\Rightarrow S_{\text{منطقه}} = 2\pi \times 13 \times 11 = 286\pi$$

۱۴۶. شعاعهای دو کره به مرکز مشترک O را a و b می‌نامیم و یک کره مانند O′ در نظر می‌گیریم که بر نقطهٔ O می‌گذرد و کره‌های اوّلی را قطع می‌کند. یک مقطع، از این کره‌ها را به‌وسیلهٔ رسم صفحه‌ای که بر OO′ می‌گذرد، ایجاد می‌کنیم، باید نشان دهیم که منطقهٔ به‌وجود آمده به‌وسیلهٔ دوران کمان $\widehat{AB}$ حول OO′، دارای مساحت ثابتی است.



در واقع می‌دانیم که این منطقه، تفاضل عرقچینهای ایجاد شده به وسیلهٔ کمانهای OB و OA است و اندازهٔ مساحتش مساوی $\pi\overline{OB}^2 - \pi\overline{OA}^2$ یا $\pi(b^2 - a^2)$ است.

۱۴۷. گزینهٔ (۴) درست است.

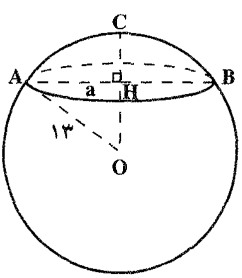
۱۴۸. داریم :

$$S_{\text{منطقه}} = 140\pi$$
$$S_{\text{منطقه}} = 2\pi Rh = 2\pi \times 10 \times 7$$

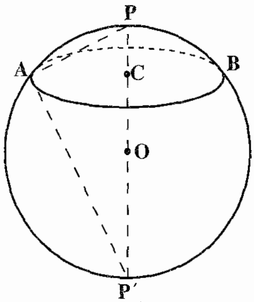
پس گزینهٔ (۱) درست است.

۴.۱.۷. اندازهٔ مساحت عرقچین

۱۴۹. ارتفاع عرقچین را محاسبه می‌کنیم، داریم :



$$OH = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$
$$\Rightarrow HC = 13 - 12 = 1 \text{ ارتفاع منطقه}$$
$$S_{\text{عرقچین}} = 2\pi Rh = 2\pi \times 13 \times 1 = 26\pi$$



۱۵۰. اگر شعاع کره r باشد، مساحت عرقچین ایجاد شده به‌وسیلهٔ کمان PA وقتی حول قطر PP' دوران کند، برابر است با :

$$S=\text{۲}\pi r.PC=\pi PP'.PC$$

امّا در مثلث قائم الزاویهٔ PAP' داریم :

$$PP'.PC=\overline{PA}^{\text{۲}}$$

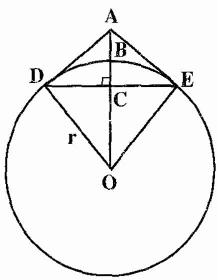
بنابراین :

$$S=\pi\overline{PA}^{\text{۲}}$$

۱۵۱. گزینهٔ (۳) درست است.

$$S=\text{۲}\pi Rh=\text{۲}\pi\times\text{۱۰}\times\text{۸}=\text{۱۶۰}\pi\,cm^{\text{۲}}$$

۱۵۲. گزینهٔ (۳) درست است.



۱۵۳. خلبان، عرقچین DBE را می‌بیند که مساحت آن برابر است با :

$$S=\text{۲}\pi r\times BC$$

r شعاع کرهٔ زمین است.

BC را محاسبه می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODA داریم :

$$r^{\text{۲}}=OC.OA=(r-BC)(r+h)$$

از آن‌جا $BC=\frac{rh}{r+h}$ ، و در این صورت داریم :

$$S=\text{۲}\pi\times\frac{r^{\text{۲}}h}{r+h}$$

یا تقریباً چون $\frac{r}{r+h}$ خیلی به ۱ نزدیک است، داریم :

$$S=\text{۲}\pi rh$$

بعلاوه داریم : $\text{۲}\pi r=\text{۴۰,۰۰۰,۰۰۰}m$ و اگر فرض کنیم $h=\text{۵۰۰۰}^{M}$ باشد، خواهیم داشت :

$$S=\text{۲}\times\text{۱۰}^{\text{۱۱}}(m^{\text{۲}})\;,\;\;S=\text{۲۰,۰۰۰,۰۰۰}\,(ha)$$

۵.۱.۷. اندازهٔ مساحت قاچ کروی

۱۵۴. داریم :

$$S_{\text{قاچ } \alpha \text{ درجه}} = \frac{\pi R^{۲}\alpha}{۹۰} \Rightarrow S_{\text{قاچ } \alpha \text{ درجه}} = \frac{\pi \times ۱۰۰ \times ۲۴}{۹۰} = \frac{۸۰\pi}{۳}$$

۶.۱.۷. اندازهٔ مساحت قطاع کروی

۱۵۶. مساحت قطاع کروی، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$S = ۲\pi Rh$$

که در آن، R شعاع کره و h ارتفاع قطاع است.

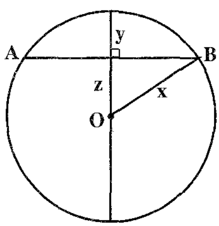
اگر l، طول خط راستی باشد که رأس قطاع را به یکی از نقطه‌های محیط دایرهٔ قاعده وصل می‌کند، داریم : $l^{۲} = ۲Rh$ و از آن جا :

$$S = \pi l^{۲}$$

(مسأله، از رسالهٔ ارشمیدس، به نام «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است.)

۷.۱.۷. اندازهٔ مساحت قطعهٔ کروی

۱۵۷. شعاع کره، ارتفاع قطعهٔ کروی و شعاع دایرهٔ قاعده را بترتیب با x، y و z نشان می‌دهیم و S و V را بترتیب سطح کل و حجم این قطعه می‌نامیم. می‌دانیم که :



$$S = \pi y(۴x - y)\ ,\ V = \frac{\pi}{۳} y^{۲}(۳x - y)$$

پس :

$$۱۲V = ۳Sy - \pi y^{۲}$$

V را معلوم فرض می‌کنیم و از رابطهٔ بالا رابطهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم :

$$۳S = \frac{۱۲V}{y} + \pi y^{۲}$$

امّا حاصلضرب $\pi y^{۲} \times (\frac{۱۲V}{y})^{۲}$ ثابت است، پس S در صورتی کمترین مقدار ممکن را داراست که داشته باشیم :

$$\frac{۱۲V}{۲y} = \pi y^{۲} \Rightarrow \pi y^{۳} = ۶V$$

با قرار دادن در $V=\frac{\pi}{3}y^2(3x-y)$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{\pi y^3}{6}=\frac{\pi}{3}y^2(3x-y)\Rightarrow y=2x$$

این ثابت می‌کند که قطعهٔ کروی موردنظر با کره‌ای به شعاع زیر معادل است :

$$x=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۵۸. قبل از هر چیز، این موضوع را در نظر بگیرید که مساحت هلالی که (قسمتی از سطح کره که بین دو دایرهٔ عظیمه قرار دارد) از تقاطع کره، با وجه‌های فرجه‌ای با اندازهٔ α ساخته می‌شود و یال آن، از مرکز کره می‌گذرد، برابر است با $2\alpha R^2$. این موضوع از آن‌جا نتیجه می‌شود که این مساحت متناسب است با مقدار α و به ازای $\alpha=\pi$ برابر می‌شود با $2\pi R^2$. به‌ازای هر جفت صفحه که دو وجه فرجه مفروض را می‌سازند، دو هلال متناظر با آن، بر روی کره ایجاد می‌شود. با جمع کردن مساحتهای آنها، سطح کره را که به اندازهٔ $4S_\Delta$ بزرگ شده است، به‌دست می‌آوریم. در این‌جا S_Δ مساحت مثلث مطلوب مسألهٔ ما است. پس :

$$S_\Delta=R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

اندازهٔ $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ را فزونی کروی مثلث کروی می‌نامند.

۱۵۹. مکعبی به یال $\sqrt{2}$ را در نظر بگیرید. کره‌ای که مرکز آن، مرکز مکعب بوده و بر یالهای آن مماس باشد، شعاعی برابر با ۲ خواهد داشت. سطح جانبی کره، به‌وسیلهٔ سطح مکعب به شش قطعهٔ کروی و هشت مثلث منحنی‌الخط برابر با کوچکترین مثلث مطلوب مسأله تجزیه می‌شود.

جواب : $\pi(9\sqrt{2}-4)$, $\pi(3\sqrt{2}-4)$

۱۶۱. 98π اینچ مربع.

۱۶۲. فرض کنید S مساحت کره باشد. در این صورت $A:S=E:720$ ، امّا : $S=4\pi r^2$.

۱۶۳. ضلع‌های مثلث ABC را امتداد دهید تا دایره‌های عظیمه کامل شوند. فرض کنید A' ، B' و C' بترتیب نقطه‌های متقاطر A، B و C باشند. مثلثهای $A'BC$ و $AB'C'$

متقارن هستند و بنابراین معادلند. نتیجه می‌شود که :

$\Delta ABC + \Delta AB'C' = ABA'C$ هلال

همچنین :

$\Delta ABC + \Delta AB'C = BAB'C$ هلال

$\Delta ABC + \Delta ABC' = CAC'B$ هلال

امّا :

$\Delta ABC + \Delta AB'C' + \Delta AB'C + \Delta ABC' =$ ۳۶۰ درجهٔ کروی

و $ABA'C + BAB'C + CAC'B =$ ۲ درجهٔ کروی $(A+B+C)$

بنابراین :

$۲\Delta ABC +$ ۳۶۰ درجهٔ کروی = ۲ درجهٔ کروی $(A+B+C)$

۱۶۴. یک هلال بخشی از سطح کرهٔ محصور بین دو نیمدایره از دو دایرهٔ عظیمه می‌باشد. زاویهٔ هلال، زاویهٔ بین این دو نیمدایره است.

۲.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت چهارضلعی

۱۶۵. هشت وجهی منتظمی به یال ۲R را در نظر بگیرید. شعاع کره‌ای که بر همهٔ یالهای آن مماس باشد برابر با R است. سطح کره به‌وسیلهٔ هشت وجهی، به هشت قطعه کروی و شش چهارضلعی منحنی‌الخط برابر با سطح کوچکتر دو سطح مطلوب مسأله تجزیه می‌شود.

جواب : $\frac{۲\pi R^۲}{۳}(۴\sqrt{\frac{۲}{۳}}-۳)$ ، $\pi R^۲(\frac{۱۶}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}-۲)$

۳.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت هشت وجهی منتظم

۱۶۶. اگر ضلع هشت وجهی منتظم را a فرض کنیم، شعاع کرهٔ محیطی آن چنین می‌شود :

$$R = \frac{\sqrt{۲}}{۲}.a$$

و سطح این کره : $Q = ۴\pi R^۲ = ۲\pi a^۲$

و سطح هشت وجهی منتظم : $S = ۲a^۲\sqrt{۳}$

با حذف a از این دو رابطه خواهیم داشت :

$$S = \frac{Q\sqrt{۳}}{\pi}$$

۴.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت منشور

۱۶۷. هر وجه منشور، یک متوازی‌الاضلاع می‌باشد. اگر نقطهٔ برخورد این وجه و کرهٔ محاطی را به همهٔ رأسهای این متوازی الاضلاع وصل کنیم، در آن صورت این وجه، به چهار مثلث تجزیه خواهد شد. مجموع مساحتهای دو تا از آنها که مجاور به ضلعهای قاعده هستند، برابر با مجموع مساحتهای دوتای دیگر است. مقدار مساحتهای مثلثهای نوع اوّل، برای همهٔ وجه‌های جانبی برابر $۲S$ می‌شود. بنابراین مساحت جانبی برابر $۴S$ و سطح کل منشور برابر $۶S$ خواهد بود.

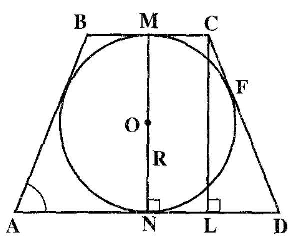
۵.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت هرم ناقص

۱۶۸. $۴a^{۳}$

۶.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت مخروط ناقص

۱۶۹. جواب : $۴\pi Rr$

۱۷۰. سطح کره :



$$(۲R)^{۲}\pi = S;\ \ ۲R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

و سطح جانبی مخروط ناقص (شکل) :

$$S_{۱} = \pi(ND + MC).CD$$

$$= \pi(DF + FC).CD = \pi.CD^{۲}$$

ولی : $CD^{۲} = (۲R)^{۲} - LD^{۲} = (۲R)^{۲} - \frac{CD^{۲}}{۴}$

و از آن‌جا : $CD^{۲} = \frac{۴}{۳}(۲R)^{۲} = \frac{۴S}{۳\pi}$

و بنابراین : $S_{۱} = \frac{۴}{۳}S$

۱۷۱. ثابت کنید، اگر R و r شعاعهای دایره‌های قاعده‌های مخروط ناقصی باشند، آن‌گاه، شعاع کرهٔ محاط در آن، برابر است با $\sqrt{Rr}$.

جواب : $\frac{S}{۲}$

۷.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت n وجهی

۱۷۲. α را زاویهٔ مرکزی نظیر شعاع کروی دایره (زاویهٔ بین شعاعهایی از کره که مرکز کره را به مرکز دایره و یک نقطه واقع بر روی آن وصل می‌کند) بنامید. مثلث کروی نظیر یک کنج سه وجهی را در نظر بگیرید که رأس آن بر روی مرکز کره یکی از یالهای آن (OL) از مرکز دایره و یال دیگر آن (OA) از نقطه‌ای واقع بر روی دایره بگذرد، و یال سوم آن (OB) طوری قرار بگیرد که صفحهٔ OAB، بر دایره مماس بشود. فرجه نظیر یال OL را با φ نشان دهید و $L\hat{O}A = \alpha$. با به کار بستن قضیهٔ دوم کسینوسها فرجهٔ نظیر یال OB را پیدا کنید که برابر می‌شود با $\operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi)$.

هر چند ضلعی محیطی (چند ضلعی محیطی در نظر گرفته می‌شود، زیرا در غیر این صورت ممکن است مساحتش کاهش پیدا کند) را می‌توان به مثلثهایی با همان خصوصیت تجزیه کرد. خواهیم دید با جمع کردن مساحتهای این مثلثها، مساحت چندضلعی همراه با مجموع :

$$\operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_1)+\operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_2)+\ldots+\operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha\sin\varphi_N)$$

به کمترین مقدار خود خواهد رسید، که در آن φ_1 ، φ_2 و ... φ_n فرجه‌های نظیر زاویه‌ها هستند و

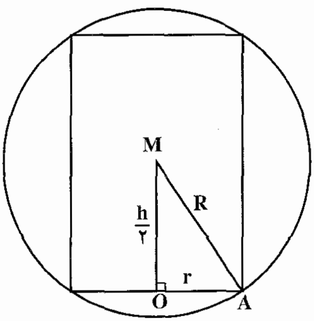
$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_N=2\pi$$

آن‌گاه می‌توان از این مطلب استفاده کرد که تابع $\operatorname{Arc}\cos(k\sin\varphi)$ به ازای $0<k<1$ یک تابع مقعر است ؛ بنابراین مینیمم مجموع به‌ازای

$$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_N$$

حاصل می‌شود.

۸.۸.۱.۷. اندازهٔ سطح استوانه



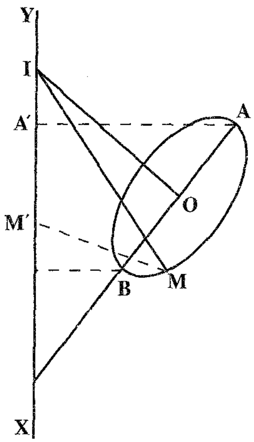
۱۷۳. اگر R شعاع کره و r و h شعاع قاعده و ارتفاع استوانه فرض شود (شکل)، از نقطهٔ M مرکز کره (وسط ارتفاع استوانه)، عمود MO را بر قاعدهٔ استوانه و همچنین شعاع MA را رسم می‌کنیم :

$$OM^2=AM^2-OA^2\ ;\ \frac{h^2}{4}=R^2-r^2$$

$$h=2\sqrt{R^2-r^2}\ ,\ S=2\pi rh=4\pi r\sqrt{R^2-r^2}$$

وقتی $S^{۲}$ ماکزیمم است که $r^{۲} = R^{۲} - r^{۲}$ یا $r = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$ باشد. از آن‌جا $h = r\sqrt{۲}$ و $۲r = R\sqrt{۲}$ خواهد شد، یعنی مقطع استوانه مربع می‌باشد.

۹.۸.۱.۷. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر



۱۷۴. فرض می‌کنیم دایرهٔ O، حول خط XY که تصویر آن روی صفحهٔ دایره قطر AB است، دوران می‌کند. محور این دایره، خط XY را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کند که این نقطه، از تمام نقطه‌های دایره به فاصلهٔ ثابتی مانند R واقع است. M را نقطه‌ای دلخواه از این دایره می‌گیریم و عمود MM′ را بر XY رسم می‌کنیم.

در دوران، نقطهٔ M′ ثابت می‌ماند و MM′ نیز طول ثابتی دارد. بنابراین IM همواره مساوی با مقدار ثابت R است. از آن‌جا نتیجه می‌شود که در دوران، دایره‌هایی که به‌وسیلهٔ نقطه‌های دایرهٔ داده شده ایجاد می‌شوند به کره‌ای به مرکز I و شعاع R تعلق دارند، و دایرهٔ O یک منطقه در این کره ایجاد می‌کند که بین دایره‌های موازی رسم شده به‌وسیلهٔ نقطه‌های A و B محصور است.

۱۷۵. داریم:

$$\frac{۴\pi}{۳}R^{۳} = ۳ \times ۴\pi R^{۲} \Rightarrow R = ۹$$

$$\Rightarrow \text{دایرهٔ عظیمه } S = \pi R^{۲} = ۸۱\pi$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.

۲.۷. نسبت مساحتها

۱۷۶. اندازهٔ شعاع هر یک از دو مقطع را به دست می‌آوریم:

$$r_{۱} = \sqrt{۱۰۰ - ۱۶} = \sqrt{۸۴} = ۲\sqrt{۲۱}$$

$$r_{۲} = \sqrt{۱۰۰ - ۲۵} = \sqrt{۷۵} = ۵\sqrt{۳}$$

چون $r_{۱} > r_{۲}$ است، پس مساحت مقطع نظیر آن نیز بزرگتر است.

۱۷۷. شعاع مشترک کره و قاعدهٔ استوانه را R، و ارتفاع استوانه را h می‌نامیم. داریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \pi R^{۲} h \Rightarrow h = \frac{۴}{۳}R$$

$S=2\pi Rh=2\pi R\times\frac{4}{3}R=\frac{8\pi R^2}{3}$ جانبی استوانه و $S=4\pi R^2$ کره

$S=\pi R^2$ یک قاعده

$S=\pi R^2 \Rightarrow$ مساحت رویهٔ کل استوانه $=\frac{8\pi R^2}{3}+2\pi R^2=\frac{14\pi R^2}{3}$

مساحت کره $=4\pi R^2<\frac{14\pi R^2}{3}=S$ کل استوانه

۳.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۱۷۸. سطح جانبی استوانه برابر است با :

$$2\pi R\times R=2\pi R^2$$

سطح نیمکره برابر است با :

$$\frac{4\pi R^2}{2}=2\pi R^2$$

بنابراین تساوی دو مقدار بالا، مشخص است.

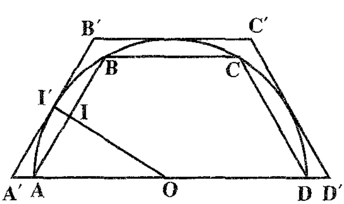
۱۷۹. اگر x، y و z بترتیب فاصله‌های مرکز کره از صفحه‌های مفروض باشند، آن‌گاه :

$$z^2+y^2+x^2=d^2$$

مجموع مساحتهای این سه دایره برابر است با :

$$\pi[(R^2-x^2)+(R^2-y^2)+(R^2-z^2)]=\pi(3R^2-d^2)$$

۱۸۰. دو خط شکستهٔ منتظم ABCD و A′B′C′D′ یکی محیط و دیگر محاط در نیمدایره‌ای به شعاع r در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نشان دهیم که اگر شکل حول AD دوران کند، داریم :



$$S_{ABCD}\times S_{A'B'C'D'}=16\pi^2r^4$$

می‌دانیم که :

$$S_{ABCD}=AD\times 2\pi OI\ ,\ \ S_{A'B'C'D'}=A'D'\times 2\pi OI'$$

بنابراین :

$$S_{ABCD}\times S_{A'B'C'D'}=4\pi^2 AD.A'D'.OI.OI'$$

امّا دو خط شکستهٔ داده شده نسبت به نقطهٔ O مجانس یکدیگرند و داریم :

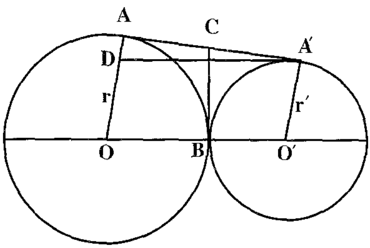
$$\frac{A'D'}{AD}=\frac{OI'}{OI}\Rightarrow A'D'=\frac{OI'.AD}{OI}$$

و از آن‌جا خواهیم داشت :

$$S_{ABCD}\times S_{A'B'C'D'}=۴\pi^۲AD^۲\times OI'=۱۶\pi^۲r^۴$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۸۱. مماس مشترک BC پاره‌خط AA' را در نقطهٔ وسطش قطع می‌کند و $CB=\frac{AA'}{۲}$ است. در واقع داریم :



$BC=CA\ ,\ CB=CA'$

زیرا مماسهای رسم‌کننده از یک نقطه بر یک دایره مساوی‌اند.

از دوران AA' یک مخروط ناقص به‌وجود می‌آید که مساحت جانبی آن برابر است با :

$$S=۲\pi BC\times AA'=\pi\overline{AA'}^۲$$

$A'D$ را موازی OO' رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'AD(\hat{A}=۹۰°)$ داریم :

$$AA'^۲=A'D^۲-AD^۲=(r+r')^۲-(r-r')^۲=۴rr'$$

بنابراین : $S=\sqrt{۴\pi r^۲\times ۴\pi r'^۲}$ و یا $S=۴\pi rr'$

۱۸۲. اندازهٔ مساحت سطح کره‌ای به شعاع r مساوی است با

$$S=۴\pi r^۲$$

شعاع قاعده و ارتفاع استوانهٔ متساوی‌الاضلاع محیط بر کره بترتیب مساوی r و ۲r است و سطح کل آن برابر است با :

$$S'=۲\pi r^۲+۲\pi r\times ۲r=۶\pi r^۲$$

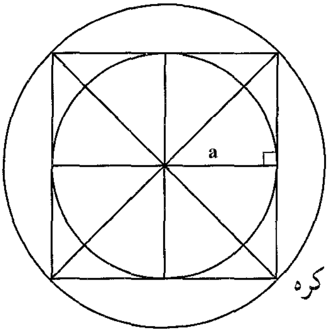
مقطع نصف‌النهاری مخروط متساوی‌الاضلاع محیطی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر یک دایرهٔ عظیمهٔ کره است. شعاع قاعده و سهم این مخروط بترتیب $r\sqrt{۳}$ و $۲r\sqrt{۳}$ است. پس سطح کلّش برابر است با :

$$S''=۳\pi r^۲+۶\pi r^۲=۹\pi r^۲$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$\frac{S}{۴}=\frac{S'}{۶}=\frac{S''}{۹}=\pi r^۲$$

۱۸۳. در واقع چون که یک چندوجهی، یک مخروط یا یک استوانه بر یک کره محیطند، نسبت حجمهای آنها، مساوی همان نسبت سطحهای متناظر آنها می‌باشد.
اگر سطح کره را با ۴ نشان دهیم، سطح استوانه با ۶ و سطح مخروط با ۹ نشان داده خواهد شد.
یا $\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۶}$، بنابراین . . .



۱۸۴. اگر شعاع کرهٔ محاطی را R فرض کنیم، شعاع قاعدهٔ استوانه R و ارتفاع آن ۲R خواهد بود.
اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی این استوانه $R\sqrt{۲}$ است. بنابراین داریم :

سطح کل استوانه محیط بر کره $= (۲\pi R)(۲R)+۲\pi R^{۲}$
$= ۶\pi R^{۲}$

سطح کرهٔ محاط در استوانه $= ۴\pi R^{۲}$

سطح کرهٔ محیط بر استوانه $= ۴\pi(R\sqrt{۲})^{۲} = ۸\pi R^{۲}$

$$۶\pi R^{۲} = \frac{۴\pi R^{۲}+۸\pi R^{۲}}{۲} \Rightarrow ۶\pi R^{۲} = ۶\pi R^{۲}$$

بنابراین حکم مسأله برقرار است.

۱۸۵. فرض می‌کنیم A'، B'، C' و D' زاویه‌های خارجی و مکملهای زاویه‌های A، B، C و D باشند. مساحت چهارضلعی را با S و مساحت چهار مثلثی را که به روش گفته شده ساخته می‌شوند با S' نشان می‌دهیم.
با گرفتن مثلث کروی سه قائمه به عنوان واحد سطح و زاویهٔ قائمه به عنوان واحد زاویه، اندازهٔ مساحت چهارضلعی کروی برابر است با مجموع زاویه‌ها، منهای چهار قائمه.
بنابراین :

(۱) (d = ۱ قائمه) $\quad S = A+B+C+D-۴d$

امّا مثلث ایجاد شده به‌وسیلهٔ کمان رسم شده به‌وسیلهٔ رأس A به عنوان قطب، یک ضلع چهارضلعی کروی و ضلع مجاور به این ضلع از چهارضلعی کروی، مثلثی دو قائمه است ؛ زیرا نقطهٔ A قطب ضلع روبه‌رو است. زاویهٔ رأس این مثلث را با A' نشان می‌دهیم. این زاویه مکمل زاویهٔ A است. از طرفی

(۲) $\quad S' = A'+B'+C'+D'$

از جمع کردن رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$S+S'=A+A'+B+B'+C+C'+D+D'-۴$ قائمه

امّا $A'=۲d-A$ ، $B'=۲d-B$ ، $C'=۲d-C$ و $D'=۲d-D$ ، پس :

$S+S'=۴d$

در این صورت، مساحت کل شکل، مساوی چهار مثلث سه قائمه، یعنی نصف کره است.

۸. حجم

۱.۸. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸. اندازهٔ حجم کره

۱۸۶. ۱/۴ متر مکعب

۱۸۷. گزینهٔ (۴) درست است.

۱۸۸. داریم :

$$۴\pi R^{۲}-۱۰۰\pi \Rightarrow R=۵\,cm \Rightarrow V=\frac{۴\pi}{۳}R^{۳}=\frac{۴P}{۳}\times ۱۲۵=\frac{۵۰۰}{۳}\pi cm^{۳}$$

گزینه (۲) درست است.

۱۸۹. گزینهٔ (۱) درست است ؛ زیرا داریم :

شعاع کره $R=۹$ $\Rightarrow R^{۲}=۸۱ \Rightarrow$ $۸۱\pi=\pi R^{۲}$ $\Rightarrow$ $S=\pi R^{۲}$ دایرهٔ عظیمهٔ کره

حجم کره $=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi(۹)^{۳}=۹۷۲\pi$

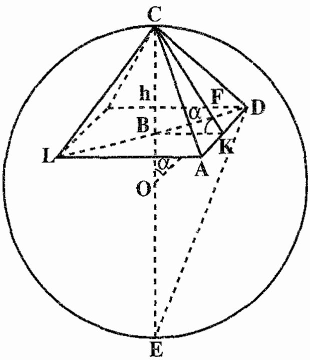
۱۹۰. داریم :

حجم مخزن برحسب مترمکعب $\qquad$ حجم کره $=\frac{۴}{۳}\pi(۲/۱)^{۳}=۱۲/۳۴۸m^{۳}$

حجم مخزن برحسب لیتر $\qquad ۱۲/۳۴۸\times ۱۰۰۰=۱۲۳۴۸$

۱۹۱. می‌دانیم که $d=۲R$ است. بنابراین داریم :

$$R=\frac{d}{۲}\;,\;\; V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi(\frac{d}{۲})^{۳}=\frac{۴\pi d^{۳}}{۲۴}=\frac{۱}{۶}\pi d^{۳}$$



۱۹۲. ارتفاع CB و سهم CK از هرم را رسم و انتهای آنها، B و K را به هم وصل می‌کنیم (شکل). در مثلث CBK، که به این ترتیب به‌دست می‌آید، داریم :

$C\hat{K}B = C\hat{O}F = \alpha$

قطر LD قاعده را رسم و نقطهٔ D را به انتهای E از قطر CE وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CDE داریم :

$BD^{۲} = CB.BE$

ولی از طرف دیگر

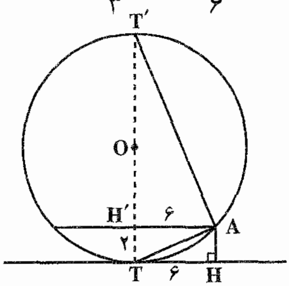
$$BD = \frac{۱}{۲}LD = \sqrt{AD^{۲} + AL^{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AD = \sqrt{۲}.DK = \sqrt{۲}.BK$$

$$= \sqrt{۲}.CB.\cot\ ga = \sqrt{۲}h\cot\ ga;\ CB = h;\ BE = ۲R - h$$

اکنون به‌دست می‌آید :

$$۲h^{۲}.\cot\ g^{۲}a = h(۲R - h); R = \frac{h}{۲}(۱ + ۲\cot\ g^{۲}a);$$

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۱}{۶}\pi h^{۳}(۱ + ۱\cot\ g^{۲}a)^{۳}$$



۱۹۳. اگر AH مشخص‌کنندهٔ موقعیت مهندس، T نقطهٔ تماس منبع با زمین و T′ انتهای دیگر قطر گذرنده بر T باشد، مثلث TAT′ در رأس A قائم‌الزاویه است و AH′ ارتفاع وارد بر وتر آن است. با توجه به شکل داریم :

$AH = TH' = ۲\ ,\ TH = AH' = ۶\ ,$

$AT = \sqrt{۳۶ + ۴} = ۲\sqrt{۱۰}$

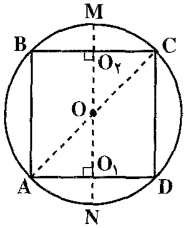
$$AT^{۲} = TH'.TT' \Rightarrow ۴۰ = ۲ \times TT' \Rightarrow TT' = ۲۰ = ۲R$$

$\Rightarrow R = ۱۰$ شعاع منبع $\Rightarrow$ حجم منبع $= \frac{۴}{۳}\pi(۱۰)^{۳} = \frac{۴۰۰۰}{۳}\pi$ مترمکعب

$\Rightarrow$ حجم منبع $= \frac{۴۰۰۰۰۰۰}{۳}\pi$ اندازهٔ حجم منبع به لیتر

$\frac{۴۰۰۰۰۰۰\pi}{۳} : ۴۰۰۰۰ = \frac{۱۰۰\pi}{۳}$ تعداد ساعتها

۲.۱.۸. اندازهٔ حجم بخشی از کره



۱۹۴. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC (شکل) ارتفاع استوانه را به‌دست می‌آوریم:

$$H=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3};$$

و ارتفاع قطعه:
$$h=\frac{2R-H}{2}=\frac{R}{2}(2-\sqrt{3})$$

شعاع قاعدهٔ استوانه و قطعه:
$$r=\frac{R}{2}$$

اگر حجم استوانه را V_1 و حجم هر یک از دو قطعهٔ کروی را V_2 و حجم باقیمانده کره را V فرض کنیم، داریم:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3-(2V_2+V_1)=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$$

۱۹۵. داریم:

بُعد سوم $a^2+b^2+c^2=25^2 \Rightarrow 12^2+20^2+c^2=25^2 \Rightarrow c^2=81 \Rightarrow c=9$

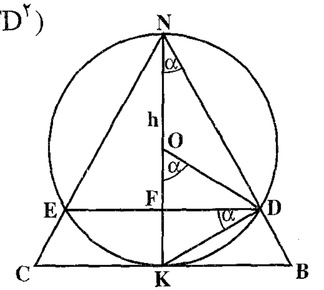
مکعب مستطیل $V=12\times 20\times 9=2160$

کره $R=25:2=12/5 \Rightarrow$ کره $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{15625\pi}{6}$

حجم باقیمانده $V=\frac{15625\pi}{6}-2160=\frac{15625\pi-12960}{6}$ = مکعب مستطیل $V -$ کره V

۱۹۶. همان‌طور که از شکل دیده می‌شود، برای حجم موردنظر داریم:

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2.KF+\frac{1}{3}\pi FD^2.AF-\frac{1}{3}\pi FD^2.OF$$
$$=\frac{\pi}{3}[2r^2.KF+FD^2(AF-OF)]=\frac{\pi}{3}(2r^2.KF+FD^2.r)$$
$$=\frac{\pi r}{3}(2rKF+FD^2)$$

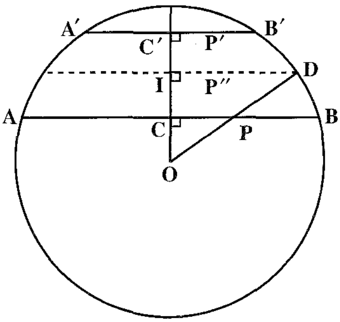


که در آن $r=\frac{h}{۲}$ ، $KF=KD.\sin\alpha=۲r\sin^۲\alpha=h\sin^۲\alpha$ و

$$FD=OD\sin ۲\alpha=r\sin ۲\alpha=\frac{h}{۲}\sin ۲\alpha$$

به این ترتیب $V=\frac{\pi h}{۶}(h^۲\sin^۲\alpha+\frac{h^۲}{۴}\sin^۲ ۲\alpha)=\frac{\pi h^۳}{۶}(۱+\cos^۲\alpha)\sin^۲\alpha$

۳.۱.۸. اندازهٔ حجم قطعهٔ کروی



۱۹۷. حجم قطعهٔ کروی $ABB'A'$ ، که شعاعهای دو قاعده‌اش ρ و ρ' و ارتفاعش h است برابر است با :

$$V=\frac{\pi h}{۶}(h^۲+۳\rho^۲+۳\rho'^۲) \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم r شعاع کره و ρ'' شعاع دایرهٔ مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر ارتفاع CC' در نقطهٔ وسطش I، باشد، داریم :

$$\rho^۲=r^۲-(OI-\frac{h}{۲})^۲ \;,\; \rho'^۲=r'^۲-(OI+\frac{h}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \rho^۲+\rho'^۲=۲r^۲-۲OI^۲-\frac{h^۲}{۲}\Rightarrow \rho^۲+\rho'^۲=۲\rho''^۲-\frac{h^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow h^۲=۴\rho''^۲-۲(\rho^۲+\rho'^۲)$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) داریم :

$$V=\frac{\pi h}{۶}(\rho^۲+\rho'^۲+۴\rho''^۲)$$

یعنی اگر مساحت قاعده‌ها و مساحت قاعدهٔ متوسط را با b، b' و b'' نشان دهیم، داریم :

$$V=\frac{h}{۶}(b+b'+۴b'')$$

۱۹۸. حجم قطعهٔ کروی که شعاعهای قاعده‌هایش ρ و ρ' و ارتفاعش h است، برابر است با :

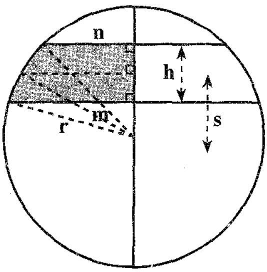
$$V=\frac{\pi h}{۶}(h^۲+۳\rho^۲+۳\rho'^۲)$$

امّا می‌دانیم که :

$$\rho^۲+\rho'^۲=۲\rho''^۲-\frac{h^۲}{۲}$$

ρ'' شعاع دایرهٔ مقطعی است که صفحه‌اش به یک فاصله از قاعده‌های قطعه است.
بنابراین داریم:

$$V = \frac{\pi h}{6}(6\rho''^2 - \frac{h^2}{2}) = \pi\rho''^2 h - \frac{1}{12}\pi h^3$$



۱۹۹. فرض می کنیم m و n شعاعهای قاعده‌های قطعهٔ کروی، s شعاع مقطع متساوی‌الفاصله از دو قاعده، h ارتفاع قطعه و r شعاع کره باشد. بین طولهای m، n، s و h رابطهٔ زیر را داریم:

$$m^2 + n^2 = 2s^2 - 2(\frac{1}{2}h)^2$$

با استفاده از دستور محاسبه حجم قطعهٔ کروی داریم:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(m^2 + n^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(2s^2 - 2\times\frac{1}{4}h^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \pi h(s^2 - \frac{1}{4}h^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi h^3 + \pi s^2 h - \frac{1}{4}\pi h^3$$

$$= \pi s^2 h - \frac{1}{12}\pi h^3$$

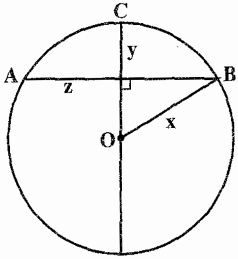
حال اگر ارتفاع قطعه مساوی قطر کره، یعنی $h = 2r$ باشد، داریم:

$$V = \pi r^2 . 2r - \frac{1}{12}\pi(2r)^3 = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

که این دستور، دستور محاسبهٔ حجم کره است.

۲۰۰. اگر h ارتفاع قطعه باشد، حجم آن برابر است با $\frac{1}{2}Sh - \frac{1}{3}\pi h^3$. بیشترین مقدار به‌ازای $h = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ ممکن می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$



۲۰۱. فرض می‌کنیم x شعاع کره، y ارتفاع قطعهٔ کروی ACB و z شعاع قاعدهٔ آن باشد. سطح کل و حجم این قطعهٔ کروی را به ترتیب با S و V نشان می‌دهیم. داریم:

$$S = ۲\pi xy + \pi z^۲ = ۲\pi xy + \pi y(۲x - y) \ ,$$

یا

$$S = \pi y(۴x - y)$$

و

$$V = \frac{\pi}{۳} y^۲(۳x - y)$$

با حذف x بین این دو رابطه خواهیم داشت:

$$۱۲V = ۳Sy - \pi y^۳$$

و یا

$$۱۲V = y(۳S - \pi y^۲)$$

مقدار S معلوم است ما می‌خواهیم ماکزیمم $y(۳S - \pi y^۲)$ یا $\pi y^۲(۳S - \pi y^۲)^۲$ را تعیین کنیم.

امّا مجموع دو مقدار مثبت $\pi y^۲$ و $۳S - \pi y^۲$ ثابت است، پس حاصلضرب آنها در صورتی حداکثر مقدار خود را داراست که داشته باشیم:

$$\pi y^۲ = \frac{۳S - \pi y^۲}{۲} \Rightarrow \pi y^۲ = S \Rightarrow y = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

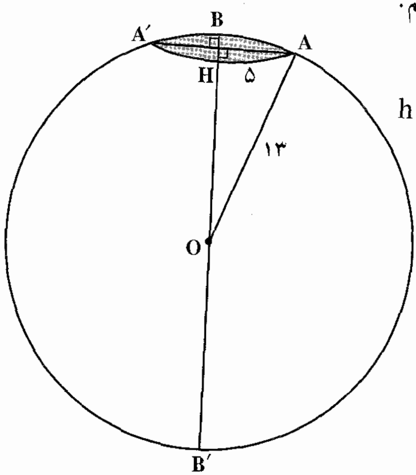
در این صورت با جایگذاری در $S = \pi y(۴x - y)$ خواهیم داشت:

$$y = ۲x$$

بنابراین، قطعهٔ کروی در صورتی به حجم ماکزیمم خواهد بود که منطبق با کره‌ای به شعاع $x = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ باشد.

۴.۱.۸. اندازهٔ حجم عرقچین کروی

۲۰۲. نخست ارتفاع عرقچین را محاسبه می‌کنیم.



داریم:

ارتفاع عرقچین $h = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲\,cm$

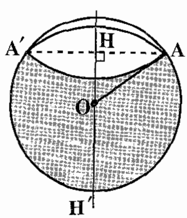
اکنون با استفاده از دستور محاسبهٔ حجم عرقچین به ارتفاع h دو کره‌ای به شعاع R یعنی از دستور

$$V = \frac{\pi h^۲}{۳}(۳R - h)$$

استفاده کرده، اندازهٔ حجم عرقچین را به‌دست می‌آوریم.

$$V = \frac{\pi \times ۱۴۴}{۳}(۳۹ - ۱۲) = ۱۲۹۶\pi$$

۲۰۳. داریم:



$V = \pi h^۲(r - \frac{۱}{۳}h)$ حجم عرقچین کروی به ارتفاع h در کره‌ای به شعاع r

$$V = \pi h^۲(\frac{۳r}{۲})^۲(r - \frac{۱}{۳} \times \frac{۳r}{۲}) = \frac{۹\pi r^۳}{۸}$$

پس گزینهٔ (۱) صحیح است.

۵.۱.۸. اندازهٔ حجم قاچ کروی

۲۰۴. حجم قاچ α° در کره‌ای به شعاع R از دستور $V = \frac{\pi R^۳ \alpha}{۲۷۰^\circ}$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$V = \frac{\pi(۱۲)^۳ \times ۶۰}{۲۷۰} = ۳۸۴\pi$$

۲۰۵. گزینهٔ (۱) درست است.

۶.۱.۸. حجم قطاع کروی

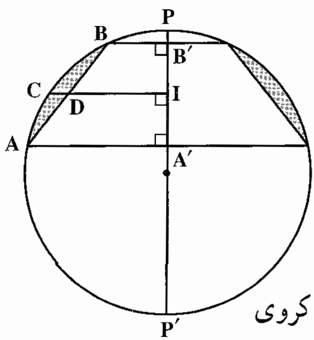
۲۰۶. گزینهٔ (۱) درست است. زیرا حجم قطاع کروی به ارتفاع h در کره‌ای به شعاع R برابر است با :

$$V = \frac{۲}{۳}\pi R^{۲}h$$

بنابراین داریم :

$$V = \frac{۲}{۳}\pi(۴)^{۲} \times ۳ = ۳۲\pi$$

۷.۱.۸. اندازهٔ حجم حلقهٔ کروی



۲۰۷. حجم حلقهٔ (anneau) به‌دست آمده از دوران قطعهٔ ABC حول قطر PP′ ، مساوی تفاضل حجم یک قطعهٔ کروی و یک مخروط ناقص است. با فرض این که I وسط A′B′ باشد، داریم :

$$\text{حجم قطعهٔ کروی} = \frac{h}{۶}(\pi\overline{A'A}^{۲} + \pi\overline{B'B}^{۲} + ۴\pi\overline{IC}^{۲})$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{h}{۶}(\pi\overline{A'A}^{۲} + \pi\overline{B'B}^{۲} + ۴\pi\overline{ID}^{۲})$$

با کم کردن این دو رابطه از هم و با فرض این که حجم حلقه را با V نشان دهیم، داریم :

$$V = \frac{h}{۶}(\pi\overline{IC}^{۲} - \pi\overline{ID}^{۲}) = \pi h$$

این بهترین فرمول محاسبه حجم حلقه کروی است زیرا $\pi\overline{IC}^{۲} - \pi\overline{ID}^{۲}$ ، مساوی مساحت حلقهٔ کروی ایجاد شده به‌وسیلهٔ CD است.

۲۰۸. اگر AB وتر کمانی از دایرهٔ مفروض، O مرکز دایره، x فاصله O از وتر AB و R شعاع دایره باشد، حجم حاصل از دوران قطاع AOB حول قطر، برابر است با حاصلضرب مساحت سطح حاصل از دوران کمان $\widehat{AB}$، در $\frac{R}{۳}$. بنابراین حجم حادث برابر می‌شود با :

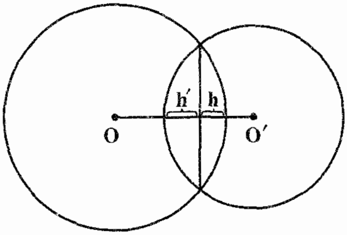
$$\frac{۲}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۲}{۳}\pi(x^{۲} + \frac{a^{۲}}{۴})h = \frac{۱}{۶}\pi a^{۲}h + \frac{۲}{۳}\pi x^{۲}h$$

اما جملهٔ دوم، برابر با حجم جسم حاصل از دوران مثلث AOC حول قطر است.

بنابراین جمله اول، درست برابر با حجم حادث از دوران کمان مفروض خواهد بود.

۸.۱.۸. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۱.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم عدسی



۲۰۹. اگر S و V بترتیب سطح و حجم عدسی باشد، می‌دانیم که $12V = 3Se - \pi e^3$ است، که در آن $e = h + h'$ است (شکل). بنابراین موضوع آن است که اندازهٔ S را برحسب r و r′ شعاعهای دو کره و e به‌دست آوریم.

می‌دانیم که:

$$S = 2\pi(rh + r'h') \qquad (1)$$

$$h(2r - h) = h'(2r' - h') \qquad (2)$$

$$h + h' = e \qquad (3)$$

از تساویهای (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$h = \frac{e(2r' - e)}{2(r + r' - e)}\ ,\ \ h' = \frac{e(2r - e)}{2(r + r' - e)}$$

و از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{\pi e\left[4rr' - e(r + r')\right]}{r + r' - e}$$

پس:

$$V = \frac{\pi e^2\left[4rr' - e(r + r')\right]}{4(r + r' - e)} - \frac{\pi e^3}{12}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi e^3\left[12rr' - 4e(r + r') + e^3\right]}{12(r + r' - e)}$$

۲.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۲۱۰. با قرار دادن $|AC| = x$، $|BD| = y$، (AC و BD بر کره مماسند.) D_1 را تصویر D بر روی صفحه‌ای در نظر بگیرید که از AC گذشته و به موازات BD رسم شده است. داریم،

$$|CD| = x + y = \frac{2R}{\cos\varphi}\ ,\ \ |CD_1| = 2R\,tg\varphi$$

در مثلث CAD_1 زاویهٔ $C\hat{A}D_1$ برابر است با α و یا $(180-\alpha)$. با توجه به این موضوع، x و y باید در یکی از دستگاه معادلات زیر صدق کند.

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi} \\ x^2+y^2-2xy\cos\alpha=4R^2tg^2\varphi \end{cases} \qquad (1)$$

یا

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{2R}{\cos\varphi} \\ x^2+y^2+2xy\cos\alpha=4R^2tg^2\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

از دستگاه (۱) داریم:

$$x+y=\frac{2R}{\cos\varphi} \quad , \quad xy=\frac{R^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

و از دستگاه (۲)

$$x+y=\frac{2R}{\cos\varphi} \quad , \quad xy=\frac{R^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

با توجه به نامساوی $(x+y)^2\geq 4xy$ معلوم می‌شود که دستگاه (۱) یک جواب

$$\varphi\geq\frac{\alpha}{2}$$

دارد و جواب دستگاه (۲) عبارت است از:

$$\varphi\geq\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

چون حجم چهاروجهی ABCD برابر است با:

$$\frac{1}{3}xyR\sin\alpha$$

بنابراین اگر

$$\frac{\alpha}{2}<\varphi\leq\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

آن‌گاه حجم چهاروجهی برابر است با :

$$\frac{۲}{۳}R^{۳}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{۲}$$

اگر

$$\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۲}\le\varphi<\frac{\pi}{۲}$$

آن‌گاه دو جواب برای حجم چهاروجهی پیدا می‌شود :

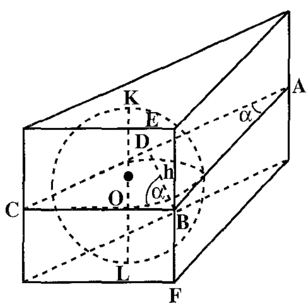
$$V_{۱}=\frac{۲}{۳}R^{۳}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{۲}\quad,\quad V_{۲}=\frac{۲}{۳}R^{۳}\cot\ g\frac{\alpha}{۲}$$

۳.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم منشور

۲۱۱. داریم (شکل) :

$$V=S.H=\frac{۱}{۲}AB.BC.EF=\frac{۱}{۲}.\frac{DB}{\sin\alpha}.\frac{DB}{\cos\alpha}.EF$$

$$=\frac{h^{۲}.EF}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{h^{۲}}{\sin ۲\alpha}.EF$$



بنابراین، باید ارتفاع EF را محاسبه کنیم. این ارتفاع برابر است با KL، قطر دایرهٔ محاطی مثلث ABC. این قطر را می‌توان از روی رابطهٔ $۲r=\frac{۲S}{p}$ به دست آورد. برای این منظور، AC را به دست می‌آوریم.

$$AC=\frac{AB}{\cos\alpha}=\frac{DB}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{h}{\cos\alpha\sin\alpha};$$

$$۲p=AB+BC+AC=\frac{h}{\cos\alpha}+\frac{h}{\sin\alpha}+\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+۱}{\sin\alpha\cos\alpha}.h=\frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}+۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha}.h$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha}.h=\frac{h\sqrt{۲}.\sin(\frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲})}{\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha};$$

$$EF = 2r = \frac{2S}{p} = \frac{2h^2 . 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin 2\alpha . h\sqrt{2} . \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}h . \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})} = \frac{\sqrt{2}h}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})};$$

$$V = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} . EF = \frac{\sqrt{2}h^3}{2\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2})}$$

۴.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم هرم

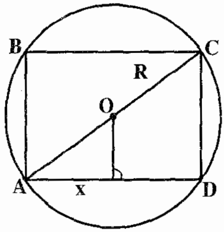
۲۱۲. از مساوی بودن خطهای مماسی که از یک نقطه بر کره رسم می‌شوند، ثابت کنید قاعده، یک مثلث قائم‌الزاویه است و میانه‌های وجه‌های جانبی که بر ضلع‌های قاعده رسم می‌شوند، با هم برابرند، و این ثابت می‌کند که هرم منتظم است.

جواب : $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$

۵.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم استوانه

۲۱۳. گزینهٔ (۱) درست است. این استوانه به شعاع قاعدهٔ $5cm$ و ارتفاع $10cm$ است، پس داریم :

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi(5)^2(10) = 250\pi$$



۲۱۴. مقطع محوری استوانه را درنظر می‌گیریم (شکل). اگر شعاع استوانه را x و حجم آن را y بگیریم، می‌توان نوشت: $y = \pi x^2 . CD$، ولی از مثلث قائم‌الزاویهٔ CDA داریم :

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{4R^2 - 4x^2} = 2\sqrt{R^2 - x^2}$$

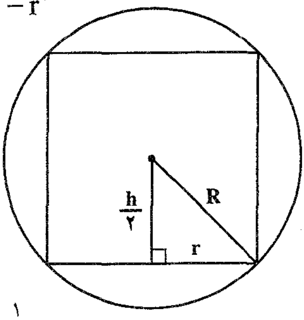
که از آن جا به دست می‌آید :

$$y = 2\pi x^2\sqrt{R^2 - x^2}$$

۲۱۶. اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را r و h فرض کنیم از (شکل) معلوم می‌شود :

$$\frac{h^۲}{۴}=R^۲-r^۲ \Rightarrow h=۲\sqrt{R^۲-r^۲}$$ و

$$V=\pi r^۲h=۲\pi r^۲\sqrt{R^۲-r^۲}$$



V حجم استوانه وقتی ماکزیمم است که $r^۲(R^۲-r^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ ماکزیمم باشد یعنی داشته باشیم :

$$\frac{r^۲}{۱}=\frac{۲(R^۲-r^۲)}{۱}\Rightarrow ۳r^۲=۲R^۲\Rightarrow \frac{r}{R}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

۲۱۷. گزینهٔ (۳) درست است. زیرا حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r در کره‌ای به شعاع R برابر است با :

$$V=۲\pi r^۲\sqrt{R^۲-r^۲}$$

برای آن که این حجم، بیشترین مقدار ممکن باشد باید $\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ یا $r=\sqrt{\frac{۲}{۳}}R$ باشد.

بنابراین داریم :

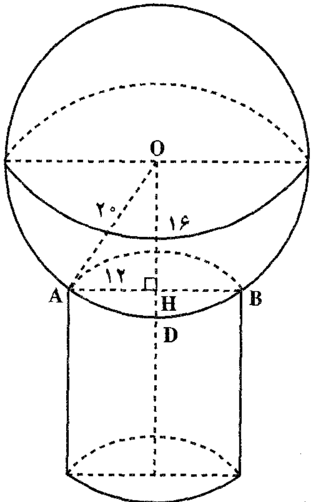
$$V=۲\pi\times\frac{۲}{۳}R^۲\sqrt{R^۲-\frac{۲}{۳}R^۲}=\frac{۴\pi}{۳}R^۲\times R\times\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{۴\pi R^۳}{۳\sqrt{۳}}$$

۲۱۸. اگر حجم مورد جستجو را V و حجم‌های استوانه و کره را به ترتیب V' و V'' فرض کنیم، داریم :

$$V=V'-V''=\pi R^۲h-\frac{۱}{۶}\pi h^۳$$

اما $R=\frac{h}{۲}$ است. بنابراین :

$$V=\pi\frac{h^۳}{۴}-\pi\frac{h^۳}{۶}=\pi\frac{h^۳}{۱۲}$$



۲۱۹. چون قطر کره از قطر دهانهٔ استوانه بیشتر است، پس کره به‌طور کامل داخل حلب استوانه‌ای شکل قرار نمی‌گیرد، بلکه بخشی از آن که یک عرقچین کروی است داخل حلب واقع می‌شود که باید حجم آن را محاسبه کنید. برای این کار ارتفاع عرقچین را باید مشخص کنیم. داریم :

$AH = ۱۲ \ , \ OA = ۲۰ \Rightarrow OH = \sqrt{۴۰۰ - ۱۴۴} = ۱۶$

$\Rightarrow HD = ۲۰ - ۱۶ = ۴$ ارتفاع عرقچین

$$\text{حجم عرقچین کروی} = \frac{\pi h^۲}{۳}(۳R - h) = \frac{\pi \times ۱۶}{۳}(۶۰ - ۴) = \frac{۸۹۶\pi}{۳}$$

حال حجم استوانه را به‌دست می‌آوریم :

$V = \pi r^۲ h = \pi \times ۱۴۴ \times ۲۵ = ۳۶۰۰\pi$

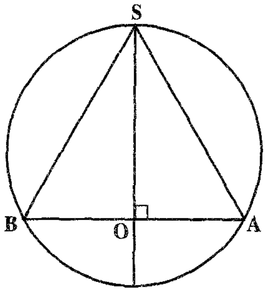
اینک می‌توان حجم آب باقی‌مانده در حلب را به دست آورد.

$$\text{حجم آب باقی‌مانده} = ۳۶۰۰\pi - \frac{۸۹۶\pi}{۳} = \frac{۹۹۰۴\pi}{۳} = ۳۳۰۱\frac{۱}{۳}\pi \ \text{cm}^۳$$

۶.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم مخروط

۲۲۰. می‌توان دید که این مخروط تشکیل شده است از :

۱. یک مخروط که رأس آن منطبق بر مرکز کرهٔ محاطی است و قاعده‌اش، قاعدهٔ مخروط داده شده است.



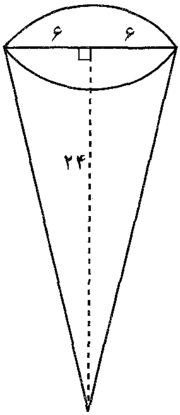
۲. از حجم به‌وجود آمده توسط یک مثلث که یک رأسش مرکز کره است و ضلع روبه‌روی به این رأس مولّد خود مخروط می‌باشد. بنابراین، حجم مخروط برابر است با، حاصل‌ضرب سطح کل آن در $\frac{۱}{۳}$ شعاع کرهٔ محاطی‌اش.

۲۲۱. اگر R شعاع کره و r و h شعاع قاعده و ارتفاع مخروط فرض شود (شکل) ارتفاع SO مخروط را امتداد می‌دهیم تا کره را در E قطع کند. چون $SE = ۲R$ ، $SO = h$ و $OE = ۲R - h$ می‌باشد، خواهیم داشت : $AO^۲ = SO.OE$ یا $r^۲ = h(۲R - h)$ و حجم مخروط خواهد شد :

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۴\pi}{۳}.\frac{h}{۲}.\frac{h}{۲}(۲R - h)$$

چون مجموع عوامل ثابت است پس حاصل‌ضرب وقتی ماکزیمم است که $\frac{h}{۲} = ۲R - h$ یا $\frac{R}{h} = \frac{۳}{۴}$ باشد.

۲۲۲. چون نصف کره خارج از آب می‌ماند پس قطر کره مساوی قطر قاعدهٔ مخروط یعنی ۱۲ سانتیمتر است. بنابراین حجم آب باقی‌مانده در مخروط، مساوی تفاضل حجم مخروط و حجم نیم‌کره است. از آن‌جا داریم :



$$R = ۶ \Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۶)^۳ = ۲۸۸\pi \text{ کره}$$

$$\Rightarrow \text{حجم نیمکره} = ۱۴۴\pi \text{ و } \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۶)^۲ \times ۲۴ = ۲۸۸\pi$$

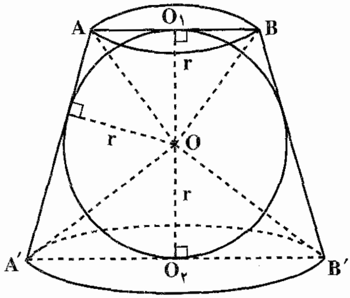
$$\text{حجم آب باقی‌مانده} = ۲۸۸\pi - ۱۴۴\pi = ۱۴۴\pi$$

۲۲۳. اگر O مرکز کره باشد، $A\hat{C}O = B\hat{C}O = ۳۰^\circ$ است و از آن‌جا $OC = ۲r$ است. پس $CH = r + ۲r = ۳r$ است. از طرفی داریم :

$$tgA\hat{C}H = \frac{AH}{CH} \Rightarrow tg۳۰ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AH}{۳r}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{۳}r \text{ شعاع قاعدهٔ مخروط و } \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h$$

$$\Rightarrow \text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۳}r)^۲ \times ۳r = ۳\pi r^۳$$



۲۲۴. مخروط ناقص را به دو قسمت زیر می‌توان تقسیم کرد :

۱. دو مخروط که رأس مشترک آنها مرکز کرهٔ محاطی و قاعده‌های آنها، قاعده‌های مخروط ناقص است. حجم این دو مخروط برابر است با :

$$V_۱ + V_۲ = \frac{۱}{۳} r(S_۱) + \frac{۱}{۳} r(S_۲) = \frac{۱}{۳} r(S_۱ + S_۲)$$

۲. حجم ایجاد شده از دوران مثلثی که رأسش منطبق بر مرکز کره و قاعدهٔ روبه‌روی این رأس. مولد مخروط ناقص است، وقتی که حول محور مخروط ناقص دوران کند، این حجم برابر است با حاصل‌ضرب مساحت جانبی مخروط در یک سوم شعاع کره.

$$V_۳ = \frac{۱}{۳} \times S_{\text{جانبی}}$$

بنابراین حجم مخروط ناقص که $V_۱ + V_۲ + V_۳$ است، مساوی است با حاصل‌ضرب مساحت کل مخروط ناقص، در یک سوم شعاع کرهٔ محاطی‌اش.

$$V = V_۱ + V_۲ + V_۳ = \frac{۱}{۳} r(S_۱ + S_۲ + S_{\text{جانبی}}) = \frac{۱}{۳} r \times S_{\text{کل}}$$

۲۲۵. شعاع کره را r می‌گیریم. مقطع محوری (نصف‌النهاری) یک استوانه، مربعی به ضلع ۲r است. بنابراین اگر S و V به ترتیب سطح کل و حجم آن باشند، داریم :

$$S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r \times ۲r = ۶\pi r^۲ \ , \ V = \pi r^۲ \times ۲r = ۲\pi r^۳$$

از آن جا داریم :

$$V = \frac{۱}{۳} S \times r$$

اکنون یک مخروط محیط بر کره را در نظر می‌گیریم و شعاع قاعده، ارتفاع و یال آن را به‌ترتیب با x، y و z نشان می‌دهیم، داریم :

$$S = \pi r^۲ + \pi rz = \pi x(x+z) \ , \ V = \frac{۱}{۳} \pi x^۲ y$$

$$\Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{۱}{۳} . \frac{xy}{x+z}$$

امّا با درنظرگرفتن مثلث مقطع محوری که مساحتش مساوی xy است، با استفاده از

فرمول $S = pr$ ، مساحتش مساوی $(x+z)r$ خواهد بود. بنابراین :

$$(x+z)r = xy \Rightarrow \frac{xy}{x+z} = r$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{V}{S} = \frac{1}{3}r$$

بالاخره، یک مخروط ناقص دوّار محیط بر کره را در نظر می‌گیریم، شعاعهای دو قاعده‌اش را با x و y نشان می‌دهیم. ارتفاعش مساوی $2r$ است و مقطع محوری آن یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیط بر دایره است که قاعده‌هایش $2x$ و $2y$ و اندازهٔ ساقش مساوی $x+y$ است و داریم :

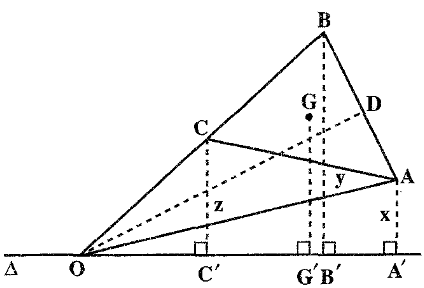
$$S = \pi x^2 + \pi y^2 + \pi(x+y)^2 = 2\pi(x^2+y^2+xy),$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \times 2r(x^2+y^2+xy)$$

$$\Rightarrow \frac{V}{S} = \frac{1}{3}r$$

۷.۸.۱.۸. اندازهٔ حجم جسم

۲۲۶. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که حول خط Δ که در صفحهٔ آن قرار دارد ولی آن را قطع نکرده است، دوران می‌کند. حداقل امتداد یکی از ضلع‌های این مثلث، خط Δ را قطع می‌کند فرض می‌کنیم. این ضلع BC باشد که امتدادش خط Δ را در نقطهٔ O قطع کرده است. OA را رسم می‌کنیم. داریم :



$$V_{ABC} = V_{OAB} - V_{OAC}$$

ارتفاع OD را رسم می‌کنیم و AA' ، BB' و CC' فاصله‌های رأس‌های A، B و C از خط Δ را به ترتیب با x، y و z نشان می‌دهیم. می‌دانیم که :

$$V_{OAB} = \frac{1}{3}OD.S_{AB} = \frac{1}{3}OD \times \pi(x+y)AB$$

و یا :

$$V_{OAB} = \text{مساحت } OAB \times \frac{2}{3}\pi(x+y)$$

و به‌طور مشابه داریم :

$$V_{OAC} = \text{مساحت } OAC \times \frac{2}{3}\pi(x+y)$$

در نتیجه داریم :

$$V_{ABC}=\frac{۲}{۳}\pi[\text{مساحت}OAB\times(x+y)-\text{مساحت } OAC\times(x+z)] \quad (۱)$$

امّا داریم :

$$\frac{\text{مساحت } OAB}{OB}=\frac{\text{مساحت } OAC}{OC}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{مساحت } OAB}{OB}=\frac{\text{مساحت } OAC}{OC}=\frac{\text{مساحت } ABC}{y-z}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت } OAB=\text{مساحت } ABC\times\frac{y}{y-z},$$

$$\text{مساحت } OAC=\text{مساحت } ABC\times\frac{z}{y-z}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) داریم :

$$V_{ABC}=\frac{۲}{۳}\pi\times\text{مساحت } ABC\times\frac{y(x+y)-z(x+z)}{y-z}$$

$$=\text{مساحت } ABC\times ۲\pi\times\frac{x+y+z}{۳}$$

اگر G مرکز ثقل مثلث و GG' فاصلهٔ آن از خط Δ باشد، می‌دانیم که $GG'=AA'+BB'+CC'$ و بنابراین $GG'=\frac{x+y+z}{۳}$ است. با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ بالا داریم :

$$V_{ABC}=\text{مساحت } ABC\times ۲\pi GG'$$

و حکم مسأله ثابت شد.

۲۲۷. جسم حاصل نیمکره‌ای به شعاع ۶ است، پس :

$$\text{حجم کره}=\frac{۴\pi}{۳}R^{۳}=\frac{۴}{۳}(\pi\times ۲۱۶)=۲۸۸\pi cm^{۳}$$

و از آن‌جا، حجم نیمکره= $۱۴۴\pi cm^{۳}$ پس گزینهٔ (۴) درست است.

۲۲۸. $\frac{۱}{۳}SR$

۲۲۹. راه حل اوّل. فرض می‌کنیم شش ضلعی منتظم ABDEF دور ضلع AB دوران کند. سطح جسمی که به دست می‌آید برابر است با مجموع سطوح جانبی استوانه‌ای با مولد

DE ؛ دو مخروط ناقص با مولدهای CD و EF و دو مخروط با مولدهای BC و AF.

اگر $BD=d$ باشد، $NC=\frac{۱}{۲}d$ خواهد بود (N پای عمودی است که از C بر امتداد AB فرود آید). در این صورت سطح کل جسم دوار چنین است:

$$S=۲\pi da+۲\pi(d+\frac{d}{۲})a+۲\pi.\frac{d}{۲}a=۶\pi ad=۶\sqrt{۳}\pi a^{۳}$$

زیرا $d=a\sqrt{۳}$ قطر دایره محاطی شش ضلعی است. حجم جسم دوار برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده d و ارتفاع a به اضافه حجم دو مخروط ناقص با شعاعهای d و $\frac{d}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a}{۲}$ منهای حجم دو مخروط به شعاع $\frac{d}{۲}$ و ارتفاع $\frac{a}{۲}$:

$$V=\pi ad^{۲}+\frac{۲}{۳}\pi(d^{۲}+d.\frac{d}{۲}+\frac{d^{۲}}{۴})\frac{a}{۲}-\frac{۲}{۳}\pi.\frac{a}{۲}.\frac{d^{۲}}{۴}=\frac{۹}{۲}\pi a^{۳}$$

راه دوم. قضیهٔ اول گولدن: ۱) سطح جسمی که از دوران قوس یک منحنی مسطحه (یا یک خط شکسته مسطحه) دور محوری که در همان صفحه است ولی خط منحنی (یا خط شکسته) را قطع نمی‌کند، به دست می‌آید، برابر است با حاصلضرب طول خط منحنی (یا خط شکسته) در طول راهی که مرکز ثقل این خط ضمن دوران طی می‌کند.
۲) حجم جسمی که از دوران یک شکل مسطحه دور محوری که با آن در یک صفحه است ولی آن را قطع نمی‌کند، به‌دست می‌آید، برابر است با حاصل‌ضرب سطح شکل دوار در طول راهی که مرکز ثقل منحنی ضمن دوران طی می‌کند. مرکز ثقل یک شش ضلعی منتظم بر مرکز آن منطبق است؛ بنابراین طول راهی که مرکز ثقل شش‌ضلعی ضمن دوران دور AB طی می‌کند، چنین است:

$$۲\pi.\frac{a}{۲}\sqrt{۳}=\pi a\sqrt{۳}$$

و سطح کل جسم حاصل طبق قضیهٔ اوّل گولدن می‌شود:

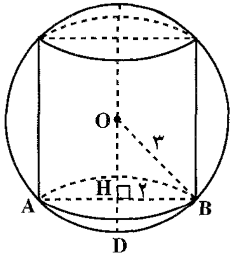
$$S=۶a.\pi a\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}\pi a^{۲}$$

و حجم آن طبق قضیهٔ دوم گولدن:

$$V=\frac{۳}{۲}a^{۲}\sqrt{۳}.\pi a\sqrt{۳}=\frac{۹}{۲}\pi a^{۳}$$

جواب: $S=۶\sqrt{۳}\pi a^{۲}$ و $V=\frac{۹}{۲}\pi a^{۳}$

۲۳۰. جواب: $V_t=\pi a^{۳}$ و $V_t:V_m=۳:۴$



۲۳۱. برای محاسبهٔ حجم جسم باید حجم استوانهٔ به شعاع قاعدهٔ ۲ محاط در کرهٔ به شعاع ۳ و همچنین حجم دو عرقچین کروی به شعاع قاعده ۲ که ارتفاع آنها نیز قابل محاسبه است، از حجم کره کم شود. داریم :

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^{۳} = ۳۶\pi$$

$$OH = \sqrt{۹-۴} = \sqrt{۵} \Rightarrow \text{ارتفاع استوانه} = h = ۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}h = \pi(۲)^{۲} \times ۲\sqrt{۵} = ۸\sqrt{۵}\pi$$

$$HD = OD - OH = ۳ - \sqrt{۵} \quad \text{ارتفاع عرقچین}$$

$$\text{حجم عرقچین} = \frac{\pi h^{۲}}{۳}(۳R - h) = \frac{\pi \times (۳-\sqrt{۵})^{۲}}{۳}(۹ - ۳ + \sqrt{۵})$$

$$\text{حجم عرقچین} = \frac{\pi(۳-\sqrt{۵})^{۲}(۶+\sqrt{۵})}{۳} = \frac{\pi(۱۴-۶\sqrt{۵})(۶+\sqrt{۵})}{۳}$$

$$= \frac{\pi(۵۴ - ۲۲\sqrt{۵})}{۳}$$

$$\text{حجم جسم} = ۳۶\pi - (۸\sqrt{۵}\pi + ۲ \times \frac{(۵۴-۲۲\sqrt{۵})\pi}{۳})$$

۲۳۲. می‌دانیم که $a^{۳} - b^{۳} = (a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$ است، بنابراین داریم :

$$V = \frac{۴}{۳}\pi(a^{۳} - b^{۳}) = \frac{۴}{۳}\pi(a^{۲}+ab+b^{۲})(a-b)$$

$$= \pi(a^{۲}+ab+b^{۲}) \times \frac{۴}{۳}(a-b)$$

امّا اولین عامل حاصل‌ضرب بالا، مجموع قاعده‌های $\pi a^{۲}$ ، $\pi b^{۲}$ و واسطهٔ هندسی آنها یعنی $\pi ab = \sqrt{\pi a^{۲} \times \pi b^{۲}}$ است و قسمت دوم حاصلضرب، یک سوم ارتفاع. بنابراین ارتفاع مخروط ناقص باید $۴(a-b)$ باشد.

۲۳۳. اگر شعاع کره‌ها را r فرض کنیم، ارتفاع استوانه مساوی $a + ۲r$ است و از حجم استوانه باید حجم دو نیمکره، کم شود.
از آن‌جا :

$$V = \pi r^{۲}(۲r + a) - \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \pi r^{۲}(\frac{۲}{۳}r + a)$$

۹.۱.۸. اندازهٔ سطح و حجم کره

۲۳۴. جواب : $S=100\pi$ ، $V=\frac{500\pi}{3}$

۲۳۵. داریم :

$$\text{کره } S=4\pi R^2 \Rightarrow \text{کره } S=4\pi(4)^2=64\pi$$

$$\text{حجم کره}=V=\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi(4)^3=\frac{256\pi}{3}$$

۲۳۶. شعاع این کره مساوی ۹ است. بنابراین داریم :

$$\text{سطح کره}=4\pi(9)^2=324\pi$$

$$\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi(9)^3=972\pi$$

۲۳۷. داریم :

$$\text{درجه } \alpha \text{ قاچ } S=\frac{\pi R^2\alpha}{90}\Rightarrow 18\pi=\frac{\pi R^2\times 45}{90}$$

$$\Rightarrow R^2=36\Rightarrow R=6$$

$$\Rightarrow \text{سطح کره}=S=4\pi R^2=4\pi(6)^2=144\pi$$

$$\text{حجم کره}=V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(6)^3=288\pi$$

۲۳۸. داریم :

$$\text{شعاع کره } R=4\div 2=2$$

$$\text{کره } S=4\pi R^2=4\pi(2)^2=16\pi$$

$$\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(2)^3=\frac{32\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 16\pi>\frac{32\pi}{3}\Rightarrow \text{عدد حجم کره} < \text{عدد سطح کره}$$

۲۳۹. داریم :

$$R=10\div 2=5$$

$$\text{کره } S=4\pi R^2=4\pi(5)^2=100\pi$$

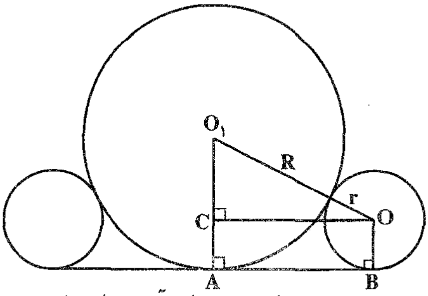
$$\text{حجم کره}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(5)^3=\frac{500\pi}{3}$$

$$100\pi<\frac{500\pi}{3}\Rightarrow \text{عدد حجم} > \text{عدد سطح}$$

۲۴۰. جواب : $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{54}$ ، $S = \frac{\pi a^2}{3}$

۱.۸. ۱۰. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر

۲۴۱. در شکل مقطع مرکزی حلقه و کرهٔ داخلی آن که در نقطهٔ A بر میز مماس است، داده شده است. شعاع کره را R فرض می‌کنیم، طبق شرط مسأله داریم :



$$S = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

مرکز ثقل دایرهٔ به شعاع r که دور محور O_1A دوران می‌کند بر مرکز آن منطبق است و طول مسیری که این مرکز ثقل ضمن دوران خود طی می‌کند برابر است با :

$$2\pi.OC = 2\pi\sqrt{O_1O^2 - O_1C^2} = 2\pi\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 4\pi\sqrt{Rr}$$

و سطح مجهول حلقه، طبق قضیهٔ اول گولدن چنین می‌شود :

$$S = 2\pi r.4\pi\sqrt{Rr} = 8\pi^2 r\sqrt{Rr}$$

و حجم آن، طبق قضیهٔ دوم گولدن :

$$V = \pi r^2.4\pi\sqrt{Rr} = 4\pi^2 r^2\sqrt{Rr}$$

که در آنها $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ است.

۲۴۲. جواب : $V = \frac{2\pi a^2 b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $S = \frac{4\pi(a+b)ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

۲۴۳. شعاع قاعدهٔ استوانه r و ارتفاعش 2r است. برای مخروط، شعاع قاعده، ارتفاع و مولّد برابر است با $r\sqrt{3}$ ، 3r و $2r\sqrt{3}$.

حال اگر مساحت کل و حجم استوانه، مخروط و کره را به ترتیب با s، v، s′، v′ و s″، v″ نشان دهیم، داریم :

$$s = 6\pi r^2 \ , \ s' = 9\pi r^2 \ , \ s'' = 4\pi r^2$$

$$v = 2\pi r^3 \ , \ v' = 3\pi r^3 \ , \ v'' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

و بلافاصله دیده می‌شود که :

$$s^2 = s' \times s'' \ , \ v^2 = v'.v''$$

۲۴۴. طبق قضیهٔ اول گولدن سطح جسم دوار چنین است :

$$S = ۶a.۲\pi a = ۱۲\pi a^۲$$

و طبق قضیهٔ دوم گولدن حجم جسم دوار چنین است :

$$V = \frac{۳}{۲}a^۲\sqrt{۳}.۲\pi a = ۳\sqrt{۳}\pi a^۳$$

۲۴۵. اگر شعاع استوانه را r و ارتفاع گووه را h بگیریم. حجم گودهٔ استوانه‌ای برابر است با :

$$V = \frac{۲r^۲h}{۳}$$

۲۴۶. از دوران مربع $OO'AA'$ حول OO' یک استوانه به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع R به‌وجود می‌آید که حجم آن :

$$\text{حجم استوانه} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^۲ \times R = \pi R^۳$$

و از دوران ربع دایره $OO'A$ حول OO' یک نیمکره به‌وجود می‌آید که حجم آن برابر است با :

$$\text{حجم نیمکره} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

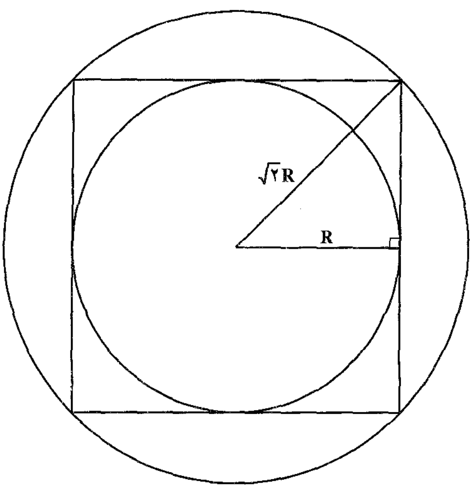
تفاضل این دو مقدار حجم مطلوب است.

$$V = \pi R^۳ - \frac{۲}{۳}\pi R^۳ = \frac{\pi R^۳}{۳}$$

که اگر $R = ۲$ باشد، $V = \frac{۸\pi}{۳}$ و گزینهٔ (۳) صحیح است.

۲.۸. نسبت حجمها

۲۴۷. مقطع این وسیلهٔ هنری را در شکل نشان داده‌ایم. صفحهٔ قاطع از مرکز مشترک دو کره می‌گذرد، و عمود بر یکی از یال‌های مکعب است. در این شکل محاسبهٔ طول شعاع کرهٔ بزرگ با توجه به طول شعاع کرهٔ کوچک خیلی ساده است و نسبت به حجم دو کره بر یکدیگر



مساوی با نسبت مکعب شعاع آن خواهد بود؛ یعنی :

$(\sqrt{۲})^{۳} = ۲\sqrt{۲} \neq ۲/۸۳$

۲۴۸. شعاع کرهٔ زمین را R می‌گیریم. شعاع کرهٔ ماه تقریباً $\frac{R}{۴}$ خواهد بود. پس حجم کرهٔ ماه تقریباً $\frac{۱}{۶۴} = (\frac{۱}{۴})^{۳}$ حجم زمین است. زیرا نسبت حجم‌های متشابه مساوی مکعب نسبت تشابه است.

۲۴۹. داریم :

$$HH' = R \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \ , \ OA = R$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{R^{۲} - \frac{R^{۲}}{۴}} = \frac{R\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{۳}}{۲} \qquad \text{شعاع قاعدهٔ استوانه}$$

$$\text{حجم استوانه} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = (\frac{R\sqrt{۳}}{۲})^{۲} \times R = \frac{۳\pi R^{۳}}{۴}$$

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \Rightarrow \frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم کره}} = \frac{\frac{۳\pi R^{۳}}{۴}}{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}} = \frac{۹}{۱۶}$$

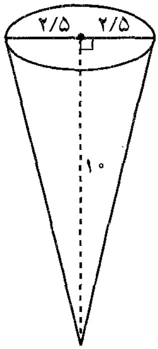
جواب درست گزینهٔ (۱) است.

۲۵۰. شعاع کره، مساوی شعاع استوانه است و ارتفاع استوانه، دو برابر شعاع کره است. پس اگر شعاع کره را R فرض کنیم، داریم :

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳} \text{ و } \text{حجم استوانه} = \pi R^{۲}(۲R) = ۲\pi R^{۳}$$

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم استوانه}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}}{۲\pi R^{۳}} = \frac{۲}{۳}$$

نکته. این مطلب را ارشمیدس ریاضیدان یونان باستان ثابت کرده است.



۲۵۱. حجم مخروط و حجم دو نیمکره را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h = \frac{۱}{۳}\pi(۲/۵)^{۲} \times ۱۰ = \frac{۶۲/۵\pi}{۳}$$

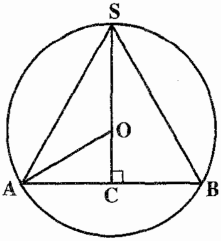
شعاع یک نیمکره $۵ \div ۲ = ۲/۵$

$$\Rightarrow \text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi(۲/۵)^{۳} = \frac{۶۲/۵\pi}{۳} \Rightarrow$$

به‌طوری که دیده می‌شود، این دو حجم برابرند پس بستنی از قیف بیرون نمی‌ریزد.

۲۵۲. زیرا مخروط ناقص نامبرده را می‌توان حد هرم ناقص محیط بر همان کره، در نظر گرفت. در آن صورت فرمول حجم هرم ناقص دربارهٔ حجم مخروط ناقص صدق می‌کند.

۲۵۳. در شکل مقطع اصلی مخروط داده شده است. اگر پاره‌خط SC به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، داریم:



$$\frac{OS}{SC}=\frac{OC}{OS}\Rightarrow OS^{۲}=SC.OC$$

حجم کره را V و حجم مخروط را v می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$V=\frac{۴}{۳}\pi OS^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi OS^{۲}.OS=\frac{۴}{۳}\pi OS.OC.OS؛$$

$$v=\frac{\pi}{۳}AC^{۲}.SC=\frac{\pi}{۳}.OC.OS.SC$$

با توجه به مثلث AOC می‌توان نوشت:

$$AC^{۲}=AO^{۲}-OC^{۲}=OS^{۲}-OC^{۲}=SC.OC-OC^{۲}$$
$$=OC(SC-OC)=OC.OS$$

و از آن جا نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{V}{v}=۴$$

۲۵۴. شعاع قاعدهٔ مشترک مخروط و نیمکره را R می‌نامیم. ارتفاع مخروط نیز مساوی R است، پس داریم:

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}\times R=\frac{\pi R^{۳}}{۳}$$

$$\text{حجم کره}=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\Rightarrow \text{حجم نیمکره}=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\text{حجم نیمکره}}{\text{حجم مخروط}}=\frac{\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}}{\frac{\pi R^{۳}}{۳}}=۲$$

۲۵۵. جواب: $\frac{۴}{۳}$

۲۵۶. نسبت خواسته شده برابر $\frac{۳۲}{۹}$ است.

۳.۸. رابطهٔ بین حجمها

۲۵۷. زیرا دستور محاسبهٔ حجم قطعه، یعنی: $V=\pi s^{۲}h-\frac{۱}{۱۲}h^{۳}$ مستقل از شعاع کره است:

در این دستور، h ارتفاع قطعه و s شعاع مقطع متوسط (میانهٔ) قطعه است.

۲۵۸. اگر r شعاع کره باشد، حجم آن مساوی است با $V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$.

مقطع نصف‌النهاری استوانهٔ متساوی‌الاضلاع محاط در این کره، یک مربع محاط در یک دایرهٔ عظیمهٔ این کره است. بنابراین شعاع قاعده و ارتفاع آن $\frac{r\sqrt{۲}}{۲}$ و $r\sqrt{۲}$ و از آن‌جا حجمش مساوی است با:

$$V'=\pi(\frac{\sqrt{۲}}{۲}r)^{۲}.r\sqrt{۲}=\frac{\pi r^{۳}\sqrt{۲}}{۲}$$

مقطع نصف‌النهاری مخروط متساوی‌الاضلاع محاط در این کره، یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایرهٔ عظیمهٔ این کره است که شعاع قاعده و ارتفاعش به ترتیب $\frac{r\sqrt{۳}}{۲}$ و $\frac{۳r}{۲}$ است و حجم این مخروط برابر است با:

$$V''=\frac{۱}{۳}\pi(\frac{r\sqrt{۳}}{۲})^{۲}\times\frac{۳r}{۲}=\frac{۳}{۸}\pi r^{۳}$$

اینک دیده می‌شود که $V'^{۲}=V.V''$ است.

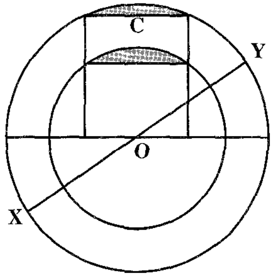
۲۵۹. در واقع اگر V، V′ و V″ را به ترتیب حجم‌های استوانه، کره و مخروط فرض کنیم، داریم:

$$V=\pi R^{۳}\ ,\ \ V'=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}\ ,\ \ V''=\frac{۱}{۳}\pi R^{۳}$$

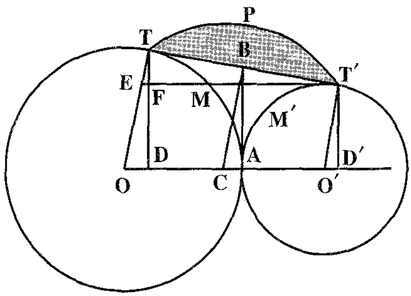
از آن‌جا خواهیم داشت:

$$V=V'+\frac{۱}{۳}\pi R^{۳}=V''+\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}$$

قدر نسبت این تصاعد $V''=\frac{۱}{۳}\pi R^{۳}$ است.



۲۶۰. حجم یک حلقهٔ کروی مساوی $\frac{۱}{۶}\pi c^{۲}h$ است که c وتر قطعهٔ مستدیر مولّد و h تصویر این وتر روی محور دوران است.
امّا بنا به فرض، وترهای این قطعه‌ها با هم برابرند و تصویرهایش روی قطر XY نیز با هم مساوی می‌باشند؛
بنابراین حلقه‌های ایجاد شده به وسیلهٔ این قطعه‌ها، هم ارز می‌باشند.



۲۶۱. خط مماس مشترک در A، TT' را در نقطهٔ B قطع می‌کند و داریم $BT = BA = BT'$؛ و عمودمنصف TT'، خط OO' را در نقطهٔ C مرکز کره‌ای که شامل دایره‌های قاعده‌های مخروط ناقص است، قطع می‌کند. فرض می‌کنیم v و v' حجم‌های ایجاد شده به وسیلهٔ قطعهٔ TPT' و مثلث مختلط‌الضلع TAT' باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $v = ۲v'$ است.

امّا، $v = \frac{۱}{۶}\pi TT'^{۲} \times DD'$ و v' مساوی تفاضل حجم مخروط ناقص به یال TT' و حجم‌های دو قطعهٔ کروی ایجاد شده به وسیلهٔ DAMT و $D'AM'T'$ است. داریم:

$$v' = \pi\frac{DD'}{۳}(DT^{۲} + D'T'^{۲} + DT.D'T') - \frac{۱}{۶}\pi AD(AD^{۲} + ۳DT^{۲})$$

$$-\frac{۱}{۶}\pi AD'(AD'^{۲} + ۳D'T'^{۲})$$

TT'، DT، $D'T'$، AD، AD' و DD' را محاسبه می‌کنیم. برای این کار $T'E$ را موازی OO' رسم می‌کنیم. داریم:

$$ET = r - r' \quad , \quad ET' = OO' = r + r'$$

و از مثلث قائم‌الزاویه ETT' داریم:

$$TT'^{۲} = (r + r')^{۲} - (r - r')^{۲} \Rightarrow TT' = ۲\sqrt{rr'}$$

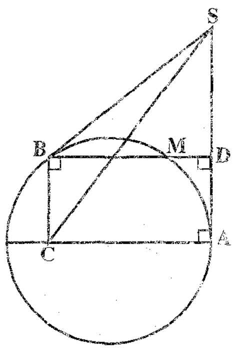
به علاوه در همین مثلث، $TT'^{۲} = T'F.T'E$ است؛ از آن‌جا:

$$T'F = \frac{۴rr'}{r + r'} \text{ و } DD' = \frac{۴rr'}{r + r'}$$

از طرف دیگر، اگر B وسط TT' باشد، A وسط DD' است و بنابراین $AD = AD' = \frac{۲rr'}{r+r'}$ ، و بالاخره مثلثهای قائم‌الزاویه ODT و ETT' متشابه‌اند؛ زیرا دارای یک زاویهٔ حادهٔ مساوی می‌باشند، از آن‌جا $\frac{OT}{ET'} = \frac{DT}{TT'}$ و در نتیجه $DT = \frac{۲r\sqrt{rr'}}{r+r'}$ و به‌طور مشابه $D'T' = \frac{۲r'\sqrt{rr'}}{r+r'}$. حال بعد از قراردادن مقدارهای بالا خواهیم داشت:

$$V = \frac{۸}{۳}\pi \times \frac{r^۲ r'^۲}{r+r'} \quad \text{و} \quad V' = \frac{۴}{۳}\pi \times \frac{r^۲ r'^۲}{r+r'}$$

بنابراین $V = ۲V'$ است.



۲۶۲. حجم ایجاد شده به وسیلهٔ مثلث مختلط‌الاضلاع SAMB مساوی تفاضل حجم مخروط ناقص ایجاد شده از ذوزنقهٔ SACB، و قطعهٔ کروی ایجاد شده به وسیلهٔ ACBM است. در نتیجه اندازهٔ این حجم برابر است با:

$$V = \frac{\pi AC}{۳}(SA^۲ + BC^۲ + SA.BC) - \frac{\pi AC}{۶}(AC^۲ + ۳BC^۲)$$

یا:

$$V = \frac{\pi AC}{۶}(۲SA^۲ + ۲SA.BC - AC^۲ - BC^۲)$$

امّا اگر BD را عمود بر AS رسم کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ SDB؛ $BD = AC$ ، $SD = SA - BC$ و داریم:

$$SA^۲ = AC^۲ + (SA - BC)^۲ \Rightarrow ۲SA.BC - AC^۲ - BC^۲ = ۰$$

در نتیجه $V = \frac{\pi SA^۲ . AC}{۳}$.

بنابراین این حجم معادل حجم ایجاد شده به وسیلهٔ مثلث CAS است.

۱.۲۶۳. این یک نتیجه ساده از قضیه سه جسم گرد است.

۲. به کمک قضیهٔ گولدن (Guldin) ثابت می‌شود.

۳. حجم ایجاد شده به وسیلهٔ مثلث، حالت خاصی از حجم ایجاد شده به وسیلهٔ یک قطعهٔ هذلولی است.

۲۶۴. کافی است، مقطعهای متناظر از یک سطح بیضوی ایجاد شده به وسیلهٔ CD و از یک کره را با هم مقایسه کنیم.

هر مقطع از سطح اولی یک بیضی است که مجموع قطرهایش مساوی $\frac{CD}{۲}$ است. r را شعاع کره می‌گیریم. نیم‌محورهای مقطع بیضوی از مرکز دایره به فاصله‌های $r+h$ و $r-h$ خواهند بود. بنابراین:

$$\text{بیضی} = \pi(r+h)(r-h) = \pi(r^۲ - h^۲)$$

امّا مقطع متناظر از کره نیز برابر است با $\pi(r^۲ - h^۲)$.

بنابراین مقطعهای ایجاد شده معادل یا هم ارزند و همین مطلب برای حجم آنها درست است.

تبصره. امتداد قطعهٔ CD یک سطح با دو دامنه ایجاد می‌کند، که مقطعهای آن با مقطعهای متناظر از یک هذلولی دوّار دارای دو دامنه، (که شکل متناظر کره است) هم‌ارزند.

۴.۸. رابطهٔ بین سطحها و حجمها

۲۶۵. راهنمایی: اگر سطح کل و حجم مخروط را برحسب شعاع کره به دست آوریم، چنین می‌شود:

$$S = ۸\pi R^۲ \;;\; V = \frac{۸}{۳}\pi R^۳$$

۲۶۶. در واقع r شعاع کره‌های محاطی است، بنابراین داریم:

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{۱}{۳}Sr}{\frac{۱}{۳}S'r} = \frac{S}{S'}$$

۲۶۷. مکعبی که بر کره محیط باشد دارای ضلعی برابر ۲R قطر کره می‌باشد پس حجم آن $۸R^۳$ است و سطح کل آن شش مربع با ضلعهای ۲R است یعنی سطح کل مکعب مساوی است با $۲۴R^۲$ نسبت $\frac{۸R^۳}{۲۴R^۲}$ برابر $\frac{۱}{۳}R$ می‌باشد. در استوانهٔ محیطی شعاع قاعده R و ارتفاع نیز ۲R است پس سطح جانبی استوانه $۴\pi R^۲$؛ پس سطح کل آن

$6\pi R^2$ می‌باشد. حجم استوانه $2\pi R^3$ می‌باشد نسبت حجم به سطح برابر است با $\frac{R}{3}$.

در مخروط کامل محیطی بر کره اگر شعاع قاعدهٔ مخروط r باشد ارتفاع آن $\frac{2r^2R}{r^2-R^2}$

و مولد آن $r\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2}$ می‌باشد. پس حجم مخروط $\frac{2}{3}\pi\frac{Rr^4}{r^2-R^2}$ و سطح جانبی آن

$\pi\frac{r^2+R^2}{r^2-R^2}r^2$ است. نسبت حجم و سطح $2\pi\frac{r^4}{r^2-R^2}$ می‌باشد و سطح کل مساوی با

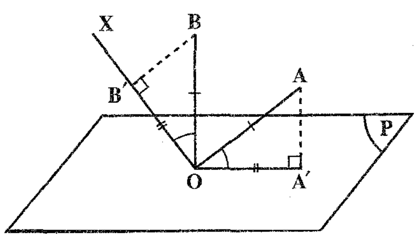
مساوی است با $\frac{R}{3}$ و هم‌چنین نسبت بسیار اشکال.

اکنون فرض کنیم که جسمی مستوی‌السطوح بر کره محیط باشد چون از مرکز کره به رأسهای جسم وصل کنیم جسم به چندین هرم که رأسهای آنها مرکز کره و قاعده‌های آنها وجه‌های جانبی جسم محیطی می‌باشند، تجزیه می‌شود. حجم هر هرم، مساوی است با سطح قاعده ضرب در ثلث ارتفاع یعنی ثلث شعاع کره، پس حجم بالمآل مساوی خواهد بود با حاصلضرب ثلث شعاع کره در مجموع سطحهای وجه‌های جسم؛ یعنی سطح کل جسم، پس نسبت حجم به سطح کل جسم، برابر ثلث شعاع کره خواهد بود.

۲۶۸. باید ضلعهای دوازده وجهی منتظم، بیست وجهی منتظم، مکعب و هشت وجهی منتظم محاط در کره‌ای به شعاع R را برحسب R بدانیم.

۹. رابطهٔ متری

۲۶۹. پاره‌خط OA و تصویرش OA' روی صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم. روی عمودی که از نقطهٔ O بر صفحهٔ P رسم می شود، $OB = OA$ را اختیار می‌کنیم و در صفحهٔ OAB، OX را عمود بر OA رسم می‌کنیم و OB' را تصویر OB روی OX می‌نامیم.



دو زاویهٔ AOA' و BOB' که ضلعهایشان دو به دو برهم عمودند، با هم برابرند. مثلثهای $OA'A$ و $OB'B$ همنهشتند و از آن‌جا نتیجه می‌شود که $OB' = OA'$ است. دیده می‌شود که تصویر پاره‌خط OA روی صفحهٔ P، مساوی

تصویر پاره خط $OB = OA$ عمود بر صفحهٔ P روی یک صفحهٔ عمود بر OA است.
این مطلب، نشان می‌دهد که اگر OA_1، OA_2 و OA_3 سه شعاع دو به دو عمود برهم از یک کره و OA'_1، OA'_2 و OA'_3 تصویرهای آنها روی صفحهٔ P باشند، $OB = OA_1$ را عمود بر صفحهٔ P رسم کنیم و OB'_1، OB'_2 و OB'_3 تصویرهای OB روی سه عمود OA_1، OA_2 و OA_3 باشند، داریم:

$$OA_1'^2 + OA_2'^2 + OA_3'^2 = OB_1'^2 + OB_2'^2 + OB_3'^2$$

امّا، چون این سه صفحه دو به دو برهم عمودند، می‌دانیم که:

$$OB_1'^2 + OB_2'^2 + OB_3'^2 = 2OB^2 = 2r^2$$

r شعاع کره است.

۲۷۰. $6R^2 - 2a^2$

۲۷۱. شعاعهای این دایره‌ها را a، b و c، شعاع کره را r و فاصلهٔ مرکز کره از این دایره‌ها را a'، b' و c' می‌گیریم، می‌خواهیم ثابت کنیم که:

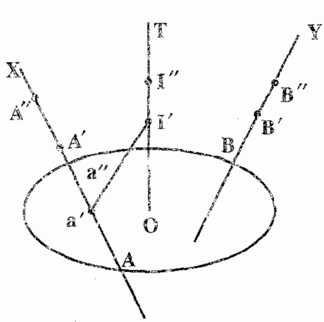
$$\pi a^2 + \pi b^2 + \pi c^2 = \text{مقدار ثابت}$$

یا می‌توان گفت که: مقدار ثابت $= a^2 + b^2 + c^2$. امّا داریم:

$$a^2 = r^2 - a'^2 \;,\; b^2 = r^2 - b'^2 \;,\; c^2 = r^2 - c'^2$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3r^2 - (a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

پس کافی است ثابت کنیم که $a'^2 + b'^2 + c'^2$ مقدار ثابتی است.
امّا سه پاره‌خط دو به دو عمود بر هم a'، b' و c' که از مرکز کره بر سه صفحهٔ عمود بر هم رسم شده‌اند و P نقطهٔ مشترک آنهاست، سه یال متوازی‌السطوح قائمی هستند که PO قطر آن است. پس مجموع مربعهای این سه یال، مساوی PO^2، و در نتیجه مقدار ثابتی است.

۲۷۲. فرض می‌کنیم I' مرکز یکی از کره‌هایی باشد که ثابت فرض شده، و شامل دایرهٔ O است و AX و BY را دوباره در A' و B' قطع می‌کند. نقطهٔ I' به محور OT از دایره تعلق دارد، و اگر a' و b' تصویرهای I' روی AX و BY باشند، داریم:



$$AA' = 2Aa' \;\text{ و }\; BB' = 2Bb'$$

کرهٔ دلخواه دیگری را مورد بررسی قرار می‌دهیم

که شامل دایرهٔ O است، و AX و BY را بار دیگر در نقطه‌های A'' و B'' قطع می‌کند؛ مرکز این کره را I'' می‌نامیم و تصویرهای آن روی این دو خط را a'' و b'' می‌نامیم.
به‌طور مشابه داریم:

$$AA''=۲Aa'' \ , \ BB''=۲Bb''$$

در نتیجه:

$$A'A''=۲a'a'' \ , \ B'B''=۲b'b''$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که وقتی I'' تغییر می‌کند، $\frac{A'A''}{B'B''}$ و یا، $\frac{a'a''}{b'b''}$ ثابت می‌ماند. امّا؛ نسبت $\frac{a'a''}{I'I''}$، ثابت می‌ماند زیرا پاره‌خطهای $a'a''$ و $I'I''$ قطعه‌هایی از AX و OT هستند که بین دو صفحهٔ موازی واقعند، که یکی از این صفحه‌ها ثابت و دیگری متغیر است. به‌طور مشابه نسبت $\frac{b'b''}{I'I''}$ نیز ثابت می‌ماند؛ در نتیجه نسبت $\frac{a'a''}{b'b''}$ ثابت باقی می‌ماند.

۲۷۳. راه اوّل. فرض می‌کنیم مرکز کره در مبدأ باشد، و فرض می‌کنیم بردارهای از مرکز به رأسهای: $v_۱$، ...، $v_۴$ باشند. در این صورت، نامساوی را از فرمولی که v_i را، که می‌دانیم طولی برابر ۱ دارد، برحسب یالهای چهاروجهی بیان می‌کند، استخراج می‌کنیم. این شرط که مرکز کره داخل چهاروجهی است معادل وجود اعداد نامنفی $c_۱$، ...، $c_۴$ به‌طوری که:

$$c_۱v_۱+\cdots+c_۴v_۴=۰ \ , \ c_۱+\cdots+c_۴=۱ \qquad (۱)$$

باشد، است.
این معادلات بیان بردارهای فردی v_i برحسب یالهای: v_j-v_k را ممکن می‌سازند.
در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} v_۱ &= c_۲(v_۱-v_۲)+c_۳(v_۱-v_۳)+c_۴(v_۱-v_۴)+(c_۱v_۱+\cdots+c_۴v_۴) \\ &= c_۲(v_۱-v_۲)+c_۳(v_۱-v_۳)+c_۴(v_۱-v_۴) \qquad (۲) \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم: $x_{ij}=\left|v_i-v_j\right|$ باشد. قدرمطلق گرفتن از (۲) نامساوی:

$$c_۲x_{۱۲}+c_۳x_{۱۳}+c_۴x_{۱۴}\geq ۱$$

را به دست می‌دهد، و سه نامساوی مشابه حاصل از تبدیل دوری اندیسها نیز داریم، و مجموع این چهار نامساوی:

$$\sum_{i>j}(c_i+c_j)x_{ij}\geq ۴ \qquad (۳)$$

یا :

$$S=\sum_{i=1}^{4} c_i \sum_{j\neq i} x_{ij}=\sum_{i=1}^{4} c_i X_i \geq 4 \qquad (4)$$

که در آن X_i مجموع یالهای واقع در رأس iام است، می‌شود.

از آن‌جا که تمام v_i ها به طول ۱ اند، (۱) مستلزم این است که هیچ یک از ضرایب c_i بزرگتر از مجموع سه ضریب دیگر نیست، چه در غیر این صورت مجموع مورد بحث نمی‌تواند بردار صفر شود، و این مستلزم این است که :

$$c_i \leq \frac{1}{2} \quad , \quad i=1,2,3,4 \qquad (5)$$

باشد. می‌توان بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کرد که رأسها به‌طوری شماره‌گذاری شده‌اند که :

$$X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq X_4 \qquad (6)$$

باشد. در این صورت ادعا می‌کنیم که :

$$S'=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2 \geq c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3+c_4X_4=S \qquad (7)$$

است، زیرا 'S از S، با متمرکز کردن تا حد امکان عوامل وزنی بر بزرگترین X_i، به دست آمده است. می‌توانیم (۷) را از راه جبری به طریق زیر اثبات کنیم :

$$S'-S=(\frac{1}{2}-c_1)X_1+(\frac{1}{2}-c_2)X_2-c_3X_3-c_4X_4$$

از دومین معادله در (۱) داریم :

$$(\frac{1}{2}-c_1)X_2+(\frac{1}{2}-c_2)X_2-c_3X_2-c_4X_2=0 \qquad (8)$$

با تفریق این رابطه از معادلهٔ قبلی حاصل می‌کنیم :

$$S'-S=(\frac{1}{2}-c_1)(X_1-X_2)+c_3(X_2-X_3)+c_4(X_2-X_4)$$

در این صورت بنا به (۵) و (۶) جمیع عبارات این مجموع نامنفی است.

از (۴) و (۷) حاصل می‌کنیم :

$$X_1+X_2 \geq 8 \qquad (9)$$

در سمت چپ نامساوی اخیر، مجموع تمام یالها به استثنای x_{34} را داریم، و یال x_{12} دوبار رخ می‌دهد و از آن‌جا که چهار وجهی در کرهٔ واحد قرار دارد : $x_{12} \leq 2$ است. در نتیجه، همان‌گونه که ادعا شده، مجموع ۵ یال غیر از x_{34} حداقل ۶ است. توجه

داشته باشید که در این مورد چیزی بیشتر از آنچه به اثباتش اقدام کردیم، اثبات کردیم، و نشان دادیم که مجموع پنج یال بزرگتر چهاروجهی، حداقل ۶ است.

راه حل بالا را واضحاً می‌توان تعمیم داد؛ اما در این‌جا راه حل دیگری در حالت n بعدی به دست می‌دهیم و به ذکر تعمیمات بیشتری می‌پردازیم.

راه دوم. تعمیمی با در نظر گرفتن r بردار یکه در E^n، فضای n بعدی اقلیدسی به دست می‌دهیم.

قضیه. اگر v_1، v_2، ...، v_r بردارهای یکه‌ای در E^n باشند، و مبدأ مشمول پوشش محدبشان باشد، در این صورت:

$$\sum|v_i - v_j| \geq ۲(r-۱) \qquad (۱)$$

که مجموع آن روی $۱ \leq i < j \leq r$ است، برقرار می‌باشد.

قضیهٔ فرعی. کل طول یالهای سادک محاط در کرهٔ واحد واقع در E^n و شامل مرکز آن بزرگتر از یا مساوی با $۲n$ است.

اثبات: اتحاد زیر در مورد بردارهای دلخواه برقرار است:

$$\sum_{۱\leq j\leq r}|v_i - v_j|^۲ = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{r}\sum_{j=۱}^{r}|v_i - v_j|^۲$$

$$= r\sum_{i=۱}^{r}|v_i|^۲ - (\sum_{i=۱}^{r} v_i).(\sum_{j=۱}^{r} v_j)$$

در مورد بردارهای یکه، حاصل می‌کنیم:

$$\sum_{i<j}|v_i - v_j|^۲ = r^۲ - \left|\sum_{i=۱}^{r} v_i\right|^۲ \qquad (۲)$$

بنا به فرض، پوشش محدب v_i شامل مبدأ است؛ و این بدان معنی است که بردار صفر ترکیب محدبی از v_i است، یعنی:

$$\sum_{i=۱}^{r} a_i v_i = ۰ \qquad (۳)$$

به ازای a_iهای صادق در:

$$a_i \geq ۰،\ i=۱,۲,\cdots,r \text{ و } \sum_{i=۱}^{r} a_i = ۱ \qquad (۳)'$$

برقرار است. (۳) را به ازای هر j حل کرده، به دست می‌آوریم:

$$-a_j v_j = \sum_{i\neq j} a_i v_i$$

با قدرمطلق گرفتن از دو طرف، به کاربردن نامساوی مثلث و استفاده از (۳)′ حاصل می‌کنیم:

$$a_j = \left|\sum_{i=j} a_i v_i\right| \leq \sum_{i \neq j} a_i = ۱ - a_j$$

یا:

$$a_j \leq \frac{۱}{۲}$$

از آن‌جا که بنا به (۳)، $\sum a_i v_i = ۰$ است، می‌توان نوشت:

$$\sum_{i \neq ۱}^{r} v_i = \sum_{i=۱}^{r} (۱ - ۲a_i) v_i$$

سپس از آن‌جا که ضرایب سمت راست نامنفی‌اند، داریم:

$$\left|\sum_{i=۱}^{r} v_i\right| \leq \sum_{i=۱}^{r} \left|(۱ - ۲a_i) v_i\right| = \sum_{i=۱}^{r} (۱ - ۲a_i) = r - ۲ \qquad (۴)$$

قراردادن (۴) در (۲) می‌دهد:

$$\sum_{i<j} \left|v_i - v_j\right|^۲ \geq r^۲ - (r-۲)^۲ = ۴r - ۴ \qquad (۵)$$

از آن‌جا که هر $|v_i| = ۱$ است، نامساوی مثلث:

$$\left|v_i - v_j\right| \leq \left|v_i\right| + \left|v_j\right| = ۲$$

را می‌دهد. و این نامساوی مستلزم:

$$\sum_{i<j} \left|v_i - v_j\right|^۲ \leq ۲ \sum_{i<j} \left|v_i - v_j\right|$$

است. و این نامساوی همراه با (۵) نامساوی مطلوب را به دست می‌دهد:

$$\sum \left|v_i - v_j\right| \leq ۲(r - ۱)$$

تساوی اگر و فقط اگر $r-۱$ بردار مساوی باشند و یکی باقی‌مانده منفی باشد، برقرار است.

سرانجام، نتیجهٔ مربوط دیگری موجود است: فرض می‌کنیم K منحنی محدب مسطح شامل مبدأ در داخل خود باشد، و $v_۱$، $v_۲$، ...، v_r نقطه‌هایی واقع بر K که پوشش محدبشان شامل مبدأ است، باشند. در این صورت اگر s طول وتر می‌نیمم Kی شامل مبدأ باشد، داریم:

$$\sum_{i<j} \left|v_i - v_j\right| \geq s(r - ۱)$$

۲۷۴. آنچه را که به نام همسایگی به شعاع d از چند وجهی خوانده می‌شود، مورد بررسی قرار دهید. یعنی مجموعه نقطه‌هایی را بررسی کنید که هریک از آنها: از حداقل یک نقطه چند وجهی در فاصله نابیشتر از d قرارداشته باشند. سطح جسم حاصل شامل قسمتهایی از صفحه‌های برابر و متناظر با وجه‌های چند وجهی، قسمت‌هایی استوانه‌ای متناظر با یالهای چند وجهی (در این‌جا اگر l_i طول بعضی از یالها و a_i فرجه‌های نظیر این یالها باشد آن‌گاه مساحت قسمتی که متناظر با استوانه است $(\pi-a_i)l_i d$ می‌شود.) و قسمتهایی کروی متناظر با رأسهای چند وجهی خواهد بود که کل مساحت آنها برابر با مساحت سطح کره‌ای به شعاع d می‌شود. به عبارت دیگر، مساحت سطح همسایگی به شعاع d از چند وجهی، کمتر از مساحت سطح کره‌ای به شعاع $d+۱$ می‌شود. یعنی:

$$S+d\sum(\pi-a_i)d_i+۴\pi d^۲<۴\pi(d+۱)^۲$$

و چون،

$$a_i\le\frac{۲\pi}{۳}$$

داریم:

$$\sum l_i<۲۴$$

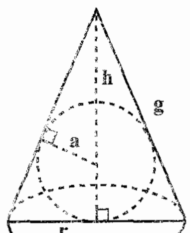
۲۷۵. مجموع چهاریال یک چنین گروهی از ۸ پاره‌خط a، b، c، d، e، f، g و h تشکیل می‌شود.

۲۷۶. نقطهٔ O مرکز کره را به رأسهای چند وجهی وصل می‌کنیم. بدین ترتیب، این چند وجهی به هرمهایی تجزیه می‌شود که رأس مشترک آنها O و قاعده‌هایشان وجه‌های چند وجهی می‌باشند. ارتفاع تمام این هرمها مساوی شعاع کره است. بنابراین اگر مساحت وجه‌های چندوجهی را با $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و ... نشان دهیم و V حجم چند وجهی باشد، داریم:

$$V=\frac{۱}{۳}r.S_۱+\frac{۱}{۳}r.S_۲+\cdots=\frac{۱}{۳}r(S_۱+S_۲+\cdots)=\frac{۱}{۳}rS$$

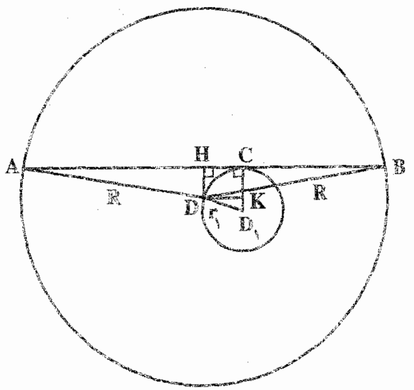
بلافاصله از این قضیه نتیجه می‌شود، که اگر دو چندوجهی بر یک کره محیط باشند، نسبت حجمهای آنها، مساوی نسبت سطحهای آنهاست.

۲۷۷. از مثلثهای متشابه نتیجه می‌شود:



$$\frac{a}{r}=\frac{\sqrt{h(h-۲a)}}{h}\Rightarrow\frac{a^۲}{r^۲}=۱-\frac{۲a}{h},$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{r^۲}=\frac{۱}{a^۲}-\frac{۲}{ah}\Rightarrow\frac{۱}{a^۲}-\frac{۱}{r^۲}=\frac{۲}{ah}$$



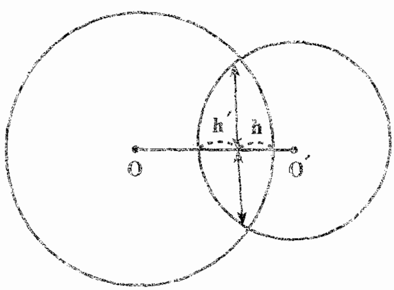
۲۷۸. از نقطه‌های A و B و نقطهٔ O، مرکز کرهٔ S، صفحه‌ای می‌گذرانیم. مقطع کره، یعنی دایره‌ای است به مرکز O_1 و شعاع $r_1 \le r$، که بر خط راست AB مماس است. OK و OH را، به‌ترتیب، عمود بر خطهای راست O_1C و AB فرض می‌کنیم (شکل). در این صورت با فرض

$AB = 2a \ , \ OH = h$

به دست می‌آید:

$$AC^2 + BC^2 = (a+HC)^2 + (a-HC)^2 = 2a^2 + 2HC^2$$
$$= 2(R^2 - OH^2) + 2(OO_1^2 - O_1K^2)$$
$$= 2(R^2 - h^2) + 2\left[r_1^2 - (r_1 - h)^2\right]$$
$$= 2R^2 - 4h^2 + 4hr_1 = 2R^2 + r_1^2 - (2h - r_1)^2 \le 2R^2 + r^2$$

۲۷۹. r و r' را شعاعهای کره‌هایی می‌گیریم که قسمت مشترک آنها عدسی است. این عدسی، مساوی مجموع دو قطعهٔ کروی با یک قاعده است. بنابراین داریم:



$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi h'^2}{3}(3r' - h')$$

یا:

$$V = \pi(h^2 r + h'^2 r') - \frac{\pi}{3}(h^3 + h'^3)$$

اندازهٔ سطح این عدسی برابر است با:

(۱) $S = 2\pi(rh + r'h')$

به علاوه با مساوی قرار دادن اندازهٔ طول وتر مشترک در دو دایره داریم:

(۲) $h(2r - h) = h'(2r' - h')$، و سپس فرض می‌کنیم $h + h' = e$.

در این صورت رابطه‌های (۱) و (۲) که به صورتهای $hr - h'r' = \frac{1}{2}(h^2 - h'^2)$ و $rh + r'h' = \frac{S}{2\pi}$ نوشته می‌شوند، مقدارهای $r = (\frac{S}{\pi} + h^2 - h'^2)$ و $r' = \frac{1}{4h'}(\frac{S}{\pi} + h'^2 - h^2)$ را به دست می‌دهد.

با قراردادن این مقدارها در عبارت حجم، داریم:

$$V = \frac{Se}{4} + \frac{\pi}{4}(h^3 + h'^3 - h^2h' - hh'^2) - \frac{\pi}{3}(h^3 + h'^3)$$

یا:

$$V = \frac{Se}{4} - \frac{\pi}{12}(h + h')^3 = \frac{Se}{4} - \frac{\pi e^3}{12}$$

و یا:

$$12V = 3Se - \pi e^3$$

۲۸۰. ABC را مثلث مفروض در نظر می‌گیریم. ضلعهای آن را a، b و c می‌نامیم. شعاعهای سه کره‌ای که بر یک‌دیگر مماس و بر صفحه مثلث هم در نقطه‌های A، B و C مماسند، به ترتیب برابر است با $\frac{bc}{2a}$، $\frac{ca}{2b}$ و $\frac{ab}{2c}$. شعاع کره‌ای را که به سه کره مفروض و صفحهٔ مثلث مماس است x در نظر می‌گیریم و نقطهٔ تماس این کره را هم با صفحه، M می‌نامیم. داریم:

$$MA = 2\sqrt{\frac{bcx}{2a}}\ ,\ MB = 2\sqrt{\frac{acx}{2b}}\ ,\ MC = 2\sqrt{\frac{abx}{2c}}$$

در نتیجه:

$$MA : MB = b : a\ ,\quad MB : MC = c : b$$

یا:

$$MA : MB : MB = bc : ac : ab$$

برای هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاع، دو نقطه M_1 و M_2 موجود است که این رابطه دربارهٔ آن صادق باشد: در این جا از قضیه برتشنیدیر استفاده می‌کنیم. اگر ABCD یک چهارضلعی مسطحه باشد که در آن $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$، $DA = d$، $AC = m$ و $BD = n$، مجموع زاویه‌های $\hat{A} + \hat{C} = \varphi$، آن‌گاه تساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos\varphi$$

سپس نتیجه می‌گیریم که اگر $\hat{A} = \alpha$ کوچک‌ترین زاویه مثلث باشد، آن‌گاه زاویه‌های

$B\hat{M}_1C$ و $B\hat{M}_2C$ برابر $60^\circ+\alpha$ و $60^\circ-\alpha$ خواهند بود.

اگر $B\hat{M}_1C=60^\circ+\alpha$، قضیه کسینوسها را در مثلث BM_1C می‌نویسیم و شعاع کرهٔ مماس بر صفحه را در نقطهٔ M_1، $r(x=r)$ می‌نامیم.

$$a^2=\frac{2acr}{b}+\frac{2abr}{c}-4ar\cos(60^\circ+\alpha)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{r}=2\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}-\frac{2\cos(60^\circ+\alpha)}{a}\right)\qquad(1)$$

به طریق مشابه اگر شعاع کرهٔ مماس بر صفحه، در نقطهٔ M_2 را با ρ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\rho}=2\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}-\frac{2\cos(60^\circ-\alpha)}{a}\right)\qquad(2)$$

با کم کردن (۲) از (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{\rho}=\frac{4\left[\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)\right]}{a}$$

$$=\frac{8\sin60^\circ\sin\beta}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{R}$$

و این همان چیزی بود که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۰. مکان هندسی

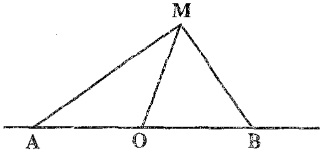
۱.۱۰. مکان هندسی نقطه

۱.۱.۱۰. مکان هندسی نقطه با معلوم بودن: نقطه، خط، صفحه، کره، ...

۱.۱.۱.۱۰. نقطه، خط، صفحه

۲۸۱. دو نقطهٔ داده شده را A و B و وسط پاره‌خط AB را O و M را یک نقطهٔ دلخواه در نظر می‌گیریم.

در مثلث MAB داریم:



$$MA^2+MB^2=\frac{AB^2}{2}+2OM^2$$

در این صورت برای این که $MA^2 + MB^2 = k^2$ باشد، لازم و کافی است که

$$\frac{AB^2}{2} + 2OM^2 = k^2 \Rightarrow OM^2 = \frac{1}{2}(k^2 - \frac{AB^2}{2})$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M، کره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است، در صورتی که $k^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ باشد ؛ اگر $k^2 < \frac{AB^2}{2}$ باشد، هیچ نقطه‌ای که در شرایط داده شدهٔ مسأله صدق کند، وجود ندارد.

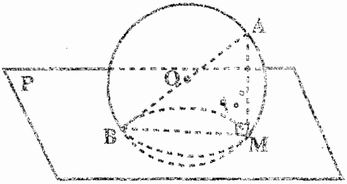
۲۸۲. صفحه‌ای مانند P در نظر می‌گیریم. که بر خط راست AB می‌گذرد. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M از این صفحه که برای آنها $\frac{MA}{MB} = k$ است، دایره‌ای است مانند (C) که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس) ؛ هنگامی که صفحهٔ P حول خط AB دوران می‌کند، این دایره (C) یک کره ایجاد می‌کند که مکان هندسی خواسته شده است.

۲۸۳. این مکان هندسی محل برخورد دو کره است. نقطه‌های داده شده را A وB و دو مقدار ثابت داده شده را R و R' می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R قرار دارند کره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. همچنین مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطهٔ B به فاصله R' واقعند، کره‌ای به مرکز B و به شعاع R' است. این دو کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک آنها در صورت وجود یک دایره است که جواب مسأله است. شرط جواب مسأله آن است که $|R - R'| < AB < R + R'$ باشد.

۲۸۴. مکان هندسی مورد جستجو، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از این دو خط به یک فاصله‌اند. دو حالت در نظر می‌گیریم :

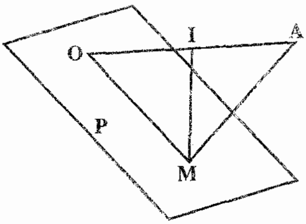
۱. اگر دو خط داده شده متقاطع باشند، صفحهٔ شامل آنها را رسم می‌کنیم و نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط را می‌کشیم. صفحه‌هایی که بر این نیمسازها بگذرند و بر صفحهٔ زاویه عمود باشند، جواب مسأله‌اند.

۲. اگر دو خط متوازی باشند صفحهٔ شامل آنها را رسم می‌کنیم. در این صفحه، خطی را که به یک فاصله از این دو خط واقع است، یعنی موازی آنها و بین آنها و متساوی‌الفاصله از آنها است، رسم می‌کنیم. صفحه‌ای که بر این خط می‌گذرد و بر صفحهٔ شامل دو خط عمود است، جواب مسأله است.



۲۸۵. صفحهٔ دلخواه P را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که از نقطهٔ مفروض B بگذرد، ولی نقطهٔ مفروض دوم A بر آن واقع نباشد (شکل). AM را عمود بر صفحهٔ P می‌گیریم. B را به A و M وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB به‌دست می‌آید.

از این جا روشن است که،نقطهٔ M بر کرهٔ به قطر $AB = 2R$ و مرکز نقطهٔ O (وسط پاره‌خط AB) قرار دارد. عکس حکم هم، به‌سادگی ثابت می‌شود: هر نقطه از این کره، تصویری از نقطهٔ A بر یکی از صفحه‌هایی است که از B گذشته است. به این ترتیب، این کره، مکان هندسی مطلوب است.

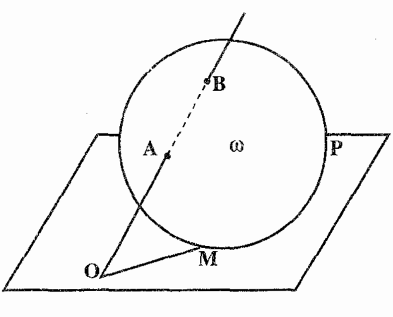


۲۸۶. صفحهٔ P را که از نقطهٔ O گذشته است، در نظر می‌گیریم، و تصویر نقطهٔ A روی این صفحه را M می‌نامیم. مثلث OMA در رأس M قائم‌الزاویه است؛ بنابراین اگر I وسط پاره‌خط OA باشد، داریم:

$$IM = IO = IA$$

و این نشان می دهد که نقطهٔ M به کرهٔ (S) به قطر OA، تعلق دارد. بعکس، اگر M نقطه‌ای دلخواه از این کره باشد، زاویهٔ OMA قائمه است، و M تصویر نقطهٔ A روی صفحهٔ عمود بر AM در نقطهٔ M است. یعنی روی صفحهٔ P که از نقطهٔ O می‌گذرد؛ بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M کرهٔ (S) است.

۲۸۷. کره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر دو نقطهٔ ثابت A و B گذشته و بر صفحهٔ P در نقطهٔ M مماس است. نقطهٔ متقاطع AB با صفحهٔ P را O نامیده، از O به M وصل می‌کنیم، داریم:



$$\overline{OM}^2 = OA.OB$$

با توجه به ثابت‌بودن نقطه‌های O، A و B، رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که OM طول ثابتی دارد، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OM است. بعکس، اگر M نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد، یک کره وجود دارد که بر صفحهٔ P در نقطهٔ M مماس است و بر نقطهٔ A می‌گذرد. مرکز این کره محل برخورد صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AM و خط عمودی است که از نقطهٔ M

بر صفحهٔ P اخراج می‌شود. این کره بر نقطهٔ B نیز می‌گذرد، زیرا اگر بر B بگذرد، خط OA را در نقطه‌ای مانند B' قطع خواهد کرد که داریم:

$$OM^{۲} = OA.OB'$$

امّا داشتیم:

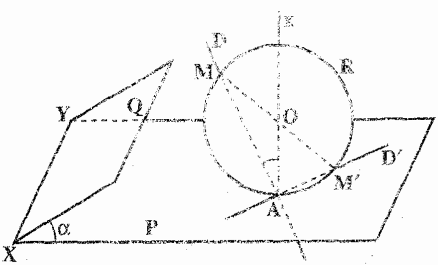
$$OM^{۲} = OA.OB$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $OB = OB'$.

که چون B و B' در یک طرف صفحهٔ P قرار دارند، نقطهٔ B' بر نقطهٔ B منطبق است. یعنی کره بر نقطهٔ B نیز می‌گذرد. پس به‌طور خلاصه، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای واقع در صفحهٔ P است که مرکزش نقطهٔ M و شعاع $\sqrt{OA.OB}$ است.

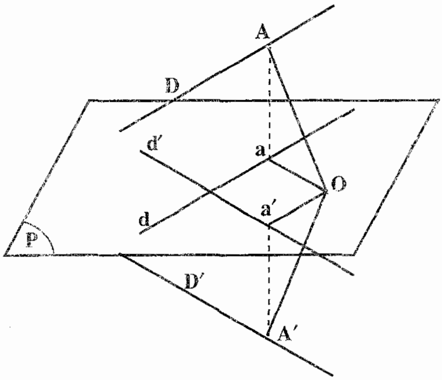
اگر AB موازی صفحهٔ P باشد، دیگر نقطهٔ O وجود ندارد. امّا در این حالت شعاع ωM کره، در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB واقع است و مکان هندسی نقطهٔ M، خط D فصل مشترک صفحهٔ P و صفحهٔ عمودمنصف AB است. بعکس، هر کرهٔ مماس بر صفحهٔ P در یکی از نقطه‌های واقع بر خط D که بر نقطهٔ A بگذرد، بر نقطهٔ B نیز می‌گذرد. پس مکان هندسی نقطهٔ M خط D است.

۲۸۸. کره‌ای به مرکز O، مماس در نقطهٔ A بر صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های تماس دو صفحهٔ مماس بر این کره که موازی صفحهٔ Q می‌باشند، دو نقطهٔ M و M'، دو انتهای قطری از این کره هستند که بر صفحهٔ Q عمود است. هنگامی که شعاع کره تغییر می‌کند، این دو نقطه، در صفحهٔ R که بر نقطهٔ A می‌گذرد و بر خط XY فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q عمود است، باقی می‌مانند.



از طرف دیگر، اگر α زاویهٔ صفحهٔ Q با صفحهٔ P باشد، $O\hat{A}M = \frac{\alpha}{۲}$ و $AOM = ۱۸۰^{\circ} - \alpha$ است. بعلاوه AM' عمود بر AM است. بدین ترتیب، نقطه‌های M و M' روی دو خط عمود بر هم AD و AD' از صفحهٔ R، جابه‌جا می‌شوند که با $x\hat{A}D = \frac{\alpha}{۲}$ مشخص می‌شوند.

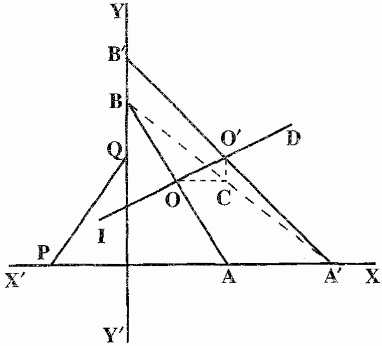
چون نقطهٔ O روی عمود Ox بر صفحهٔ P تغییر مکان می‌دهد، پس فاصله‌های AM و AM' همه مقدارهای داده شده را می‌پذیرند. بنابراین مکان هندسی خواسته شده از دو خط عمود بر هم D و D' تشکیل می‌شود.



۲۸۹. خطهای D و D′ غیرواقع در یک صفحه، صفحهٔ P را که موازی این خطها و به فاصلهٔ مساوی از آنها رسم شده است، d و d′ تصویرهای دو خط D و D′ روی صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم. کره‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که مرکزش نقطهٔ O روی صفحهٔ P و بر دو خط D و D′ مماس باشد. نقطه تماس A و A′ را روی صفحهٔ P بترتیب a و a′ می‌نامیم. این دو نقطه روی خطهای d و d′ قرار دارند. داریم:

$OA = OA'$ و $Aa = A'a'$

بنابراین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAa و OA′a′ همنهشتند. درنتیجه $Oa = Oa'$ است؛ از طرف دیگر، تصویر زاویه‌های قائمه OAD و OA′D′ که یک ضلعشان موازی صفحهٔ P است، زاویه‌های قائمه می‌باشند. بنابراین، Oa و Oa′ فاصله‌های نقطهٔ O از دو خط d و d′ می‌باشند، که چون این فاصله‌ها مساوی‌اند، نقطهٔ O روی یکی از نیمسازهای زاویه‌های تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ d و d′ می‌باشد. بعکس، اگر O نقطه‌ای واقع بر یکی از این نیمسازها باشد، داریم $Oa = Oa'$ ؛ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OaA و Oa′A′ همنهشتند، درنتیجه $OA = OA'$ است. بعلاوه زاویه‌های OAD و OA′D′ قائمه‌اند. در این صورت کرهٔ به مرکز O و به شعاع OA بر نقطهٔ A′ می‌گذرد و بر دو خط D و D′ مماس است. به‌طور خلاصه، مکان هندسی و مورد جستجو، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d′ می‌باشند.



۲۹۰. عمودمشترک دو خط X′X و Y′Y را PQ می‌نامیم. مرکز کرهٔ به قطر AB نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB است. وضعیتی دیگر از قطر، مانند A′B′ را در نظر می‌گیریم و وسط آن را O′ می‌نامیم. BA′ را رسم می‌کنیم. سپس OC را موازی X′X و بالاخره CO′ را رسم می‌نماییم. نقطهٔ C وسط BA′ است، بنابراین CO′ موازی BB′ است. از

طرف دیگر داریم :

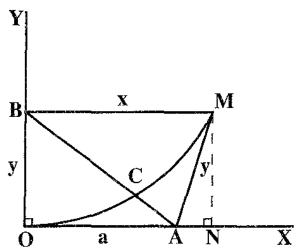
$$CO' = \frac{BB'}{۲} \quad ، \quad OC = \frac{AA'}{۲}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{AA'}{BB'}$$

اما، AB ثابت و $A'B'$ متغیر فرض شده است ؛ چون $A'B'$ موازی صفحهٔ ثابتی باقی می‌ماند که AB نیز با آن موازی است. نسبت $\frac{AA'}{BB'}$ ثابت می‌ماند و همچنین نسبت $\frac{OC}{O'C}$ ثابت است. در این صورت مثلثهای OCO' که در رأس C قائم‌الزاویه‌اند، متشابه می باشند، و زاویهٔ $O'OC$ ثابت است، و اگر ملاحظه کنیم که این مثلثها در صفحه‌ای قرار دارند که بر نقطهٔ C می‌گذرد و با خطهای $X'X$ و $Y'Y$ موازی‌اند، می‌بینیم که نقطهٔ O' روی خط OD که با OC زاویهٔ $O'OC$ را می‌سازد، جابه‌جا می‌شود. بعلاوه وقتی که A' روی $X'X$ حرکت می‌کند، O' تمام خط D را می‌پیماید. با ملاحظهٔ این که کرهٔ به قطر $A'B'$ بر نقطه‌های P و Q می‌گذرد، چون که $A'\hat{P}B' = A'\hat{Q}B' = ۹۰^\circ$ است، دیده می‌شود که خط D در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط PQ واقع است. اگر I را نقطهٔ برخورد D و صفحهٔ عمود بر این خط گذرنده بر PQ بنامیم، داریم $IP = IQ$ ؛ خط D محور دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IP است و این، نشان می‌دهد که تمام کره‌های مورد نظر شامل این دایره‌اند.

۲۹۱. فرض می‌کنیم $BM = x$ و $OB = y$ باشد. مثلث OAB مخروطی به وجود می‌آورد که حجمش مساوی $\frac{۱}{۳}\pi a^۲ y$ است.



حجم ایجادشده توسط OAMC، فزونی حجم مخروط ناقص ایجاد شده از OAMB بر حجم قطعهٔ کروی ایجاد شده توسط OBMC است. بنابراین اندازهٔ این حجم عبارت است از :

$$V = \frac{\pi y}{۳}(a^۲ + x^۲ + ax) - \frac{\pi y}{۶}(y^۲ + ۳x^۲)$$

در این صورت، بنا به فرض داریم :

$$\frac{\pi y}{3}(a^2+x^2+ax)-\frac{\pi y}{6}(y^2+3x^2)=\frac{1}{3}\pi a^2 y \Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$$

امّا، اگر MN را عمود بر OX رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ ANM نشان می‌دهد که :

$$(x-a)^2+y^2=AM^2$$

درنتیجه $AM^2=a^2$ و یا $AM=a$ است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M، نیمدایره‌ای به مرکز A و به شعاع AO واقع در درون زاویهٔ XOY است.

۱۰.۱.۱.۲. مثلث

۲۹۲. اگر K و L وسطهای BC و AM، و O مرکز کرهٔ محیطی ABCM باشند، چون G وسط LK و OG عمود بر LK می‌باشد، پس :

$$OL=OK$$

بنابراین نتیجه می‌شود که :

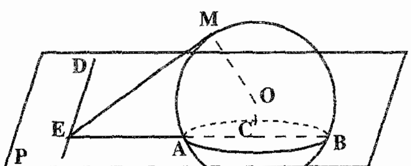
$$AM=BC$$

یعنی M بر روی سطح کره‌ای به شعاع BC و مرکز A قرار دارد.
بالاخره اگر N مرکز ثقل مثلث ABC و O_1 مرکز دایرهٔ محیطی ABC و G_1 تصویر G بر صفحه ABC باشند، چون بنا به فرض OG بر AK و O_1G_1 عمود است بر AK هم عمود می‌شود. از آن‌جا G بر روی صفحه‌ای قرار می‌گیرد که از O_1 می‌گذرد و بر AK عمود است. چون

$$NG=\frac{1}{4}NM$$

پس نتیجه می‌شود نقطهٔ M نیز، روی صفحه عمود بر AK قرار دارد.
بنابراین، مکان نقطه‌های مطلوب مسأله، خطی است که از تقاطع یک کره و یک صفحه به‌وجود می‌آید. یعنی به‌طور کلی، یک دایره است.

۱۰.۱.۱.۳. دایره، خط



۲۹۳. نقطهٔ O را مرکز یکی از کره‌هایی می‌گیریم که بر دایرهٔ C می‌گذرد و M را نقطهٔ تماس یکی از صفحه‌هایی فرض می‌کنیم که بر خط D واقع در صفحهٔ دایرهٔ C گذشته و بر کرهٔ O مماس است. صفحهٔ COM که بر صفحهٔ P و بر صفحهٔ مماس در M، عمود

می‌باشد، بر فصل مشترک آنها یعنی بر خط D عمود است. این صفحه که ثابت می‌باشد، صفحهٔ P راتحت قطر AB از دایرهٔ C و کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ ABM قطع می‌کند. پس موضوع عبارت از آن است که مکان هندسی نقطه‌های تماس M مربوط به مماسهایی را بیابیم که از نقطهٔ ثابت E بر دایره‌های گذرنده بر دو نقطهٔ ثابت A و B که در صفحهٔ گذرنده بر AB و عمود بر صفحهٔ P رسم می‌شوند، را به‌دست آوریم. می‌دانیم که این مکان هندسی دایره‌ای به مرکز E و به شعاع $\sqrt{EA.EB}$ است، زیرا داریم:

$$EM^{۲} = EA.EB$$

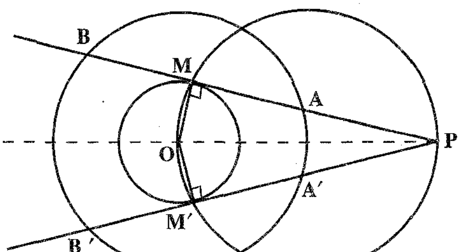
۱۰.۱.۱.۴. کره

۱۰.۱.۱.۴.۱. یک کره

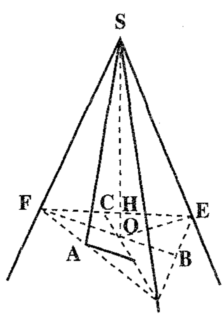
۲۹۴. این مکان هندسی یک کره است متحدالمرکز با کرهٔ داده شده که شعاعش برابر است با:

$$R' = \sqrt{R^{۲} - (\frac{l}{۲})^{۲}} = \sqrt{R^{۲} - \frac{l^{۲}}{۴}}$$

۲۹۵. از مرکز کره عمودی بر یکی از این وترها رسم می‌کنیم. پای این عمود، وسط این وتر است. برای هر وتری از کره واقع در یک صفحهٔ قطری، همین مطلب درست است. بنابراین برای هر وتر واقع در یک صفحهٔ قطری مکان هندسی وسط وترها دایره‌ای واقع در این صفحه است که قطرش مساوی فاصلهٔ مرکز کره از نقطهٔ ثابت داده شده است. پس در فضا، مکان هندسی مورد نظر کره‌ای است که قطرش همان قطر دایرهٔ گفته شده در بالاست. بدیهی است هنگامی که نقطهٔ داده شدهٔ P خارج کره واقع است، بخشی از کرهٔ مکان هندسی جواب مسأله است که در درون کرهٔ داده شده واقع باشد. اگر نقطهٔ P روی کرهٔ داده شده و یا در درون آن باشد، تمام کرهٔ مکان هندسی جواب مسأله است.



۲۹۶. مثلث ایجادشده از سه نقطهٔ تماس متساوی‌الاضلاع است. اگر S رأس کنج باشد، به دلخواه SD = SE = SF را اختیار می‌کنیم، و نقطه‌های A، B و C وسط ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع DEF را که معرف نقطه‌های تماس هستند به هم وصل می‌کنیم. فرض می‌کنیم SH ارتفاع چهاروجهی



منتظم SDEF باشد که از مرکزهای دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و DEF می‌گذرد، در صفحهٔ SAH، عمود AOرا بر SA اخراج می‌کنیم، این پاره‌خط، شعاع کرهٔ محاطی را معرفی می‌کند.

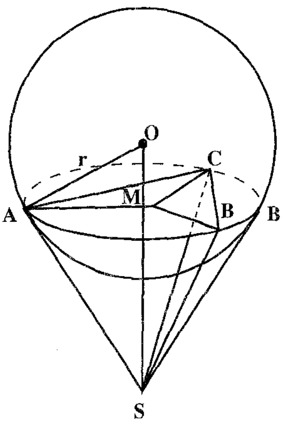
حال کافی است SO یعنی فاصلهٔ مرکز O از رأس S کنج سه‌وجهی را برحسب شعاع AO محاسبه کنیم.

مثلثهای SAO و SHA متشابه‌اند. بنابراین، داریم :

$$\frac{SO}{AO}=\frac{SA}{HA}=\frac{AE}{AH}=\frac{۳}{۱}$$

چون مثلث DEF متساوی‌الاضلاع است، بنابراین طول SO سه برابر شعاع است و مکان هندسی رأس S یک کره هم مرکز با کرهٔ داده شده است که شعاعش سه برابر، بزرگ شده است.

۲۹۷. SB ،SA و SC را سه یال مماس می‌گیریم.



چهاروجهی SABC منتظم است. بنابراین :

$AB=AC\ \ ,\ ...$

خط SO بر صفحهٔ مقطع عمود است و از نقطهٔ M مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گذرد و برای شعاع AM داریم :

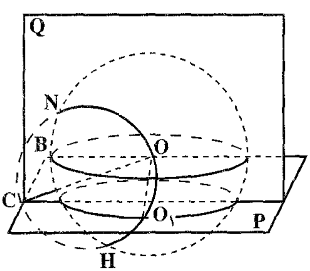
$$AM=\frac{AB}{\sqrt{۳}}=\frac{AS}{\sqrt{۳}}$$

از مثلث قائم‌الزاویه OAS به‌دست می‌آید :

$$AO.AS=AM.OS \ \text{و}\ r.AS=\frac{AS}{\sqrt{۳}}.OS\Rightarrow OS=r\sqrt{۳}$$

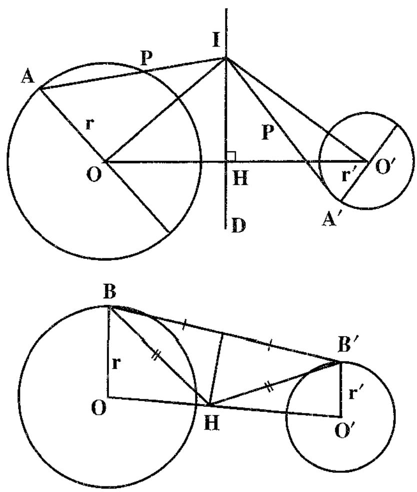
مکان هندسی نقطهٔ S، یک کره هم‌مرکز با کرهٔ داده شده و به شعاع $r\sqrt{۳}$ است.

۲۹۸. صفحهٔ P را از خط راست مفروض AB می‌گذرانیم (شکل). این صفحه، سطح کروی مفروض به مرکز O را، در دایره‌ای به مرکز $O_۱$ قطع می‌کند. O را به $O_۱$ وصل می‌کنیم $OO_۱$ (بر صفحهٔ P عمود است) و از O، صفحهٔ Q را عمود بر AB می‌گذرانیم، که AB را در نقطهٔ C قطع می‌کند. مثلث $OO_۱C$ قائم‌الزاویه است و بر صفحهٔ Q قرار دارد. اگر صفحهٔ P دور AB دوران کند، در هر



حال، مثلث OO_1C قائم‌الزاویه باقی می‌ماند و درضمن، در صفحهٔ Q قرار می‌گیرد. بنابراین، اگر AB نقطه‌های مشترکی با کره نداشته باشد، مکان هندسی نقطهٔ O_1، بخشی از محیط دایرهٔ به قطر OC خواهد بود، که در داخل کرهٔ مفروض واقع است. اگر AB بر کره مماس باشد، آن‌وقت، مکان هندسی، دایره‌ای خواهد بود که شعاع آن نصف شعاع کره است. وقتی که AB کره را قطع کند، مکان هندسی نقطهٔ O_1، محیط دایرهٔ به قطر OC خواهد بود. در هر حال، مرکز مکان، در نقطهٔ وسط پاره‌خط OC است.

۲.۴.۱.۱.۱۰. دو کره



۲۹۹. دو کره به مرکزهای O و O′ و به شعاعهای r و r′، و یک کره به مرکز I و به شعاع ρ در نظر می‌گیریم که دو کرهٔ O و O′ را تحت دو دایرهٔ عظیمه قطع کند.
صفحهٔ IOO′ را صفحهٔ شکل می‌گیریم و خطهای IO و IO′ را رسم می‌کنیم. شعاعهای OA و O′A′ بترتیب بر IO و IO′ عمودند و داریم:

$$\rho^2 = IO^2 + r^2 = IO'^2 + r'^2$$

$$\Rightarrow IO^2 - IO'^2 = r'^2 - r^2 \qquad (1)$$

$$\rho^2 = IO^2 + r^2 \qquad (2)$$

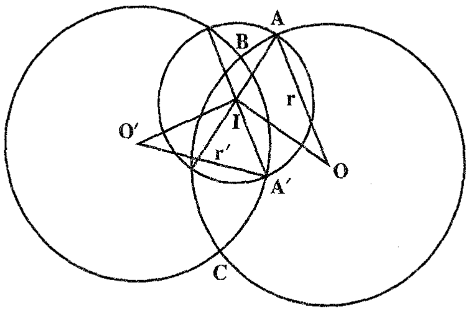
بعکس، اگر نقطه‌ای مانند I و عددی مانند ρ وجود داشته باشند که برای آنها رابطه‌های (۱) و (۲) برقرار باشد، I و ρ بترتیب مرکز و شعاع کره‌ای هستند که دو کرهٔ داده شده را تحت دایره‌های عظیمه‌شان قطع می‌کند.
در یک صفحه مانند P که بر OO′ می‌گذرد، مکان هندسی نقطهٔ I که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند، خطی راست مانند D عمود بر OO′ در نقطه‌ای مانند H است، به قسمی که $\overline{IH} = \dfrac{r'^2 - r^2}{2\overline{OO'}}$ است؛ و در فضا، این مکان هندسی صفحه‌ای مانند Q است که در نقطهٔ H بر OO′ عمود می‌باشد. این صفحه از دوران خط D حول OO′ هنگامی که

صفحهٔ P حول OO' دوران کند، به‌دست می‌آید. صفحهٔ Q درصورتی مشخص می‌شود که نقطهٔ H مشخص باشد. برای تعیین نقطهٔ H، دو شعاع OB و $O'B'$ را عمود بر OO' رسم می‌کنیم، سپس BB' را رسم نموده، عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم تا OO' را در H قطع کند. این نقطه، نقطهٔ H مورد نظر است، در واقع داریم:

$$HO^2 = HB^2 - r^2 \text{ و } HO'^2 = HB'^2 - r^2 \text{ و } HB = HB'$$

$$\Rightarrow HO^2 - HO'^2 = r'^2 - r^2$$

۳۰۰. کره‌های داده شده را، کره‌های به مرکزهای O و O' و به شعاعهای r و r' می‌گیریم و فرض می‌کنیم یک کره به مرکز I و به شعاع ρ توسط این دو کره تحت قطر قطع شده باشد. صفحهٔ شکل را صفحهٔ IOO' می‌گیریم. این صفحه، کره‌ها را در سه دایره قطع می‌کند



که وتر مشترک کرهٔ I و هریک از کره‌های O و O' قطری از کرهٔ I است. OI و $O'I$ بر این قطرها عمود می‌باشند. در این صورت داریم:

$$IO^2 = r^2 - \rho^2 \text{ و } IO'^2 = r'^2 - \rho^2$$

$$\Rightarrow IO^2 - IO'^2 = r^2 - r'^2 \quad (1) \quad \text{و} \quad \rho^2 = r^2 - OI^2 \quad (2)$$

بعکس، اگر I یک نقطه و ρ عددی باشد که برای آنها رابطه‌های (۱) و (۲) برقرار باشند، نقطهٔ I و عدد ρ بترتیب مرکز و شعاع کره‌ای هستند که به‌وسیلهٔ دو کرهٔ داده شده، تحت دایره‌های عظیمه قطع می‌شود.

مکان هندسی نقطهٔ I که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند، صفحهٔ اصلی کره‌های داده شده است؛ و برای آن که رابطهٔ (۲) برقرار باشد، باید $OI < r$ ؛ یعنی I درون کرهٔ O و به‌طور مشابه، درون کرهٔ O' باشد.

در این صورت، برای آن که این مکان هندسی وجود داشته باشد، باید کره‌های داده شده متقاطع باشند. در این صورت، مکان هندسی، بخشی از صفحه است که درون دایرهٔ مشترک دو کره است.

۳۰۱. کره‌های به مرکزهای O و O' $(OO' = d)$، و به شعاعهای r و r' را در نظر می‌گیریم. قوتهای یک نقطه مانند M نسبت به این دو کره برابر است با $OM^2 - r^2$ و $O'M^2 - r'^2$

و داریم :

$$OM^2 - r^2 + O'M^2 - r'^2 = 0$$

$$\Rightarrow OM^2 + O'M^2 = r^2 + r'^2 \qquad (1)$$

امّا به‌کارگیری قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلث OMO' و با فرض این که I وسط OO' باشد، داریم :

$$OM^2 + O'M^2 = 2IM^2 + \frac{d^2}{2}$$

بنابراین برای آن که (۱) برقرار باشد، لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$2IM^2 + \frac{d^2}{2} = r^2 + r'^2$$

$$\Rightarrow IM = \frac{1}{2}\sqrt{2(r^2 + r'^2) - d^2}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ای به مرکز نقطهٔ ثابت I و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(r^2 + r'^2) - d^2}$ است. درصورتی که دو کره متقاطع باشند، کرهٔ مکان هندسی نقطهٔ M شامل دایرهٔ فصل مشترک دو کره است و اگر نقطه‌ای از این مکان هندسی برون یکی از دو کرهٔ داده شده باشد حتماً در درون کرهٔ دیگر خواهد بود.

شرط جواب مسأله آن است که :

$$2(r^2 + r'^2) - d^2 \geq 0$$

۳۰۲. مرکزهای کره‌های مفروض را با O_1 و O_2 و شعاعهای آنها را بترتیب با R_1 و R_2 نشان دهید. وسط مماس مشترک را هم M بنامید. به‌آسانی دیده می‌شود،

$$O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$$

و درنتیجه M، بر روی صفحه‌ای عمود بر O_1O_2 قرار دارد و این پاره‌خط را در نقطه‌ای مانند N طوری قطع می کند که،

$$O_1N^2 - O_2N^2 = R_1^2 - R_2^2$$

دامنه تغییرات NM را پیدا می‌کنیم. اگر $O_1O_2 = a$ ، $R_1 \geq R_2$ داریم :

$$O_1N = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{a} + a\right)$$

اگر طول مماس مشترک $2x$ باشد، و وسط آن را M بنامیم، خواهیم داشت :

$$MN^2 = O_1M^2 - O_1N^2 = x^2 + R_1^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{R_1^2 - R_2^2}{a} + a\right)$$

اکنون، اگر $a \geq R_1 + R_2$، آن‌گاه مقدار $4x^2$ در فاصله

$$a^2 - (R_1 - R_2)^2 \text{ و } a^2 - (R_1 + R_2)^2$$

تغییر خواهد کرد و بنابراین در این حالت، مکان M، تاج دایره‌ای خواهد بود که صفحه آن، بر O_1O_2 عمود است و مرکز آن نقطه N می‌باشد. شعاع داخلی آن برابر است با

$$\frac{1}{2}(R_1 - R_2)\sqrt{1 - \frac{(R_1 + R_2)^2}{a^2}}$$

و شعاع دایره خارجی آن برابر می‌شود با :

$$\frac{1}{2}(R_1 + R_2)\sqrt{1 - \frac{(R_1 - R_2)^2}{a^2}}$$

اگر

$$a < R_1 + R_2$$

یعنی دو کره متقاطع باشند، آن‌گاه شعاع داخلی تاج دایره برابر می‌شود با شعاع دایرهٔ فصل مشترک آنها، یعنی برابر می‌شود با :

$$\frac{1}{2a}\sqrt{(a + R_1 + R_2)(a + R_1 - R_2)(a + R_2 - R_1)(R_1 + R_2 - a)}$$

۳۰۳. نقطه‌های O و O' را مرکزهای این دو کره ؛ r و r' را شعاعهای آنها و S را رأس مشترک دو مخروط محیط بر این دو کره می‌گیریم.

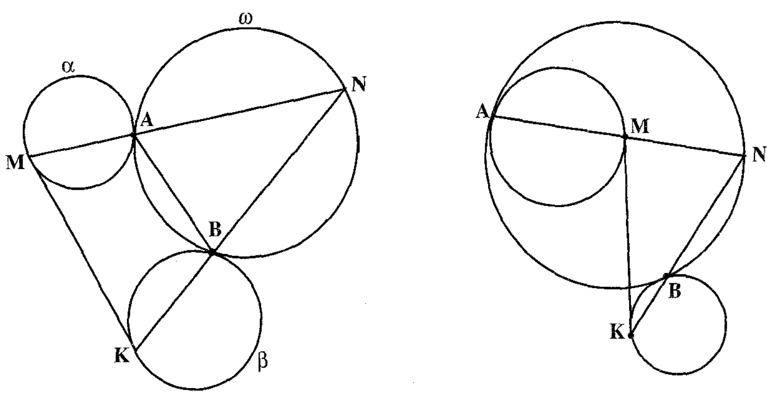
مثلثهای SOA و $SO'A'$ را در نظر می‌گیریم. A و A' دو نقطهٔ تماس مخروطها با دو کرهٔ متناظر می‌باشند. این مثلثها در رأسهای A و A' قائم‌الزاویه‌اند، و اگر $O\hat{S}A = O'\hat{S}'A'$ باشد، این دو مثلث متشابه‌اند ؛ در این صورت $\frac{r}{r'} = \frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}}$، و بعکس، این تناسب تشابه دو مثلث و درنتیجه تساوی دو زاویهٔ $O\hat{S}A$ و $O'\hat{S}A'$ را نشان می‌دهد. بنابراین مکان هندسی نقطه‌های S، بخشی (یا تمام) از کرهٔ (Σ) است که خارج کره‌های داده شده واقع است. (Σ) کره‌ای است که قطرش پاره‌خط HH' است که خط‌المرکزین OO' را به نسبت $\frac{r}{r'}$ تقسیم می‌کند، یعنی داریم :

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{HO'}} = \frac{-\overline{H'O}}{\overline{H'O'}} = \frac{r}{r'}$$

اگر سه کره وجود داشته باشد، مکان هندسی S بخشی (یا تمام) دایرهٔ تقاطع دو کرهٔ Σ و Σ' است که در خارج کره‌های داده شده است.

۱۰.۱.۱.۴.۳. سه کره

۳۰۴. ابتدا ثابت می‌کنیم اگر MK بر کرهٔ β مماس باشد، آن‌گاه بر کرهٔ α هم مماس می‌شود. مقطعی از کره‌های مفروض را در نظر بگیرید که به وسیله صفحه‌ای که از نقطه‌های M، K، A، B و N می‌گذرد، ایجاد شده باشد. (شکل)، زاویهٔ MKB از نظر اندازه، نصف کمان $\overset{\frown}{KB}$ است که در داخل این زاویه محصور شده است. درنتیجه، $M\hat{K}B = B\hat{A}N$. زیرا کمانهای $\overset{\frown}{KB}$ و $\overset{\frown}{BN}$ از نظر اندازه با هم مساوی‌اند. (اگر KN مماس خارجی باشد، کمانهای $\overset{\frown}{KB}$ و $\overset{\frown}{BN}$ را در طرفین KN می‌گیریم (شکل الف) و اگر KN مماس داخلی باشد در یک طرف آن (شکل ب).



(ب) (الف)

از آن‌جا نتیجه می‌شود $A\hat{M}K = A\hat{B}N$ یا $A\hat{M}K = ۱۸۰^\circ - A\hat{B}N$ یعنی AMK از نظر اندازه، با نصف $\overset{\frown}{AM}$ برابر است. زیرا کمانهای متناظر $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{AN}$ یک زاویه دربر دارند، پس MK بر دایره‌ای که در طول آن مقطع مورد اشاره کره α را قطع می‌کند، مماس خواهد بود.

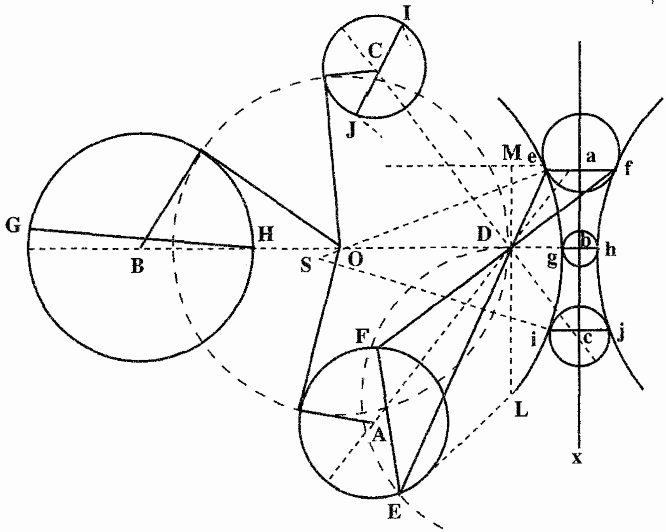
اکنون می‌توان ثابت کرد که مکان نقطه M یک دایره است.

۳۰۵. این مکان هندسی، خطی است عمود بر صفحهٔ شامل مرکزهای سه کره، از نقطه‌ای واقع در این صفحه، که از آن نقطه می‌توان دایره‌ای رسم کرد، که سه دایرهٔ عظیمهٔ ایجاد شده از برخورد کره‌ها با صفحهٔ شامل کره‌ها را، تحت قطر قطع کند.

۳۰۶. این مکان هندسی، خط راستی است که بر صفحهٔ گذرنده بر سه مرکز کره‌های داده شده عمود است و از مرکز اصلی سه دایره‌ای که از برخورد صفحهٔ گذرنده بر سه مرکز یا سه کره به وجود می‌آیند، رسم می‌شود.

۳۰۷. سه کره در نظر می‌گیریم و صفحهٔ شامل مرکزهای آنها را رسم می‌کنیم و مرکزهای دایره‌های عظیمه ایجاد شده در سه کره را A، B و C می‌نامیم.

برای تعیین مکان هندسی خواسته‌شده با استفاده از انعکاس، کره‌ها را به سه کره تبدیل می‌کنیم که مرکزهایشان روی یک خط راست باشد. برای این کار مرکز اصلی سه دایره عظیمهٔ A، B و C را مشخص می‌کنیم و دایره‌ای را که عمود بر این سه دایره است، رسم می‌نماییم.



با انتخاب نقطهٔ دلخواه مانند D واقع بر دایرهٔ کمکی بالا و یک قوت انعکاس دلخواه مانند $k^۲$، منعکس دایرهٔ O، یک خط راست مانند xy عمود بر OD خواهد بود به قسمی که :

$Db.۲DO = k^۲$

منعکس دایره‌های A، B و C ، دایره‌های a، b و c می‌باشند که مرکزهای آنها روی خط xy است. زیرا منعکس دایرهٔ متعامد OD باید عمود بر سه دایرهٔ a، b و c باشد، و این ممکن نیست مگر آن که xy از مرکز سه دایره بگذرد.

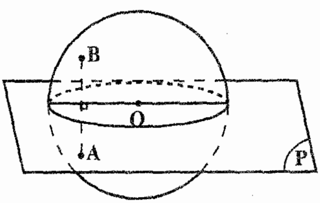
به‌طور خلاصه، منعکس کره‌هایی به مرکزهای A، B و C کره‌های a، b و c هستند که مرکزهایشان روی یک خط راست است.

هر کره‌ای که بر سه کره اولی مماس باشد منعکس بر سه کره دوم مماس خواهد بود، بعکس ؛ امّا تمام کره‌های مماس خارج بر کره‌های a، b و c، به طور قطع با هم مساوی‌اند. برای هر یک از این کره‌ها، سه نقطهٔ تماس و خط‌المرکزین xy در یک صفحه قرار دارند. در صفحهٔ شامل مرکزها، S مرکز دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره‌هاست. پوش کره‌های

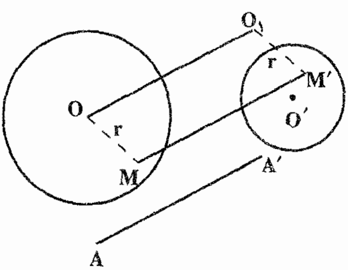
مساوی مماس بر کره‌های a، b و c یک چنبره است که محور آن خط xy است.
منحنی تماس این چنبره و کرهٔ a، یا به عبارت دیگر مکان هندسی نقطه‌های تماس کره‌های مماس بر کره‌های a، b و c، روی کرهٔ a، یک دایره است به قطر ef که صفحه‌اش بر خط xy عمود است. همین ویژگی برای کره‌های b و c نیز درست است.
شکل منعکس دایرهٔ ef دایره‌ای مانند EF از کرهٔ A است؛ در واقع، شکل منعکس صفحه‌ای که بر ef و عمود بر صفحهٔ شامل مرکزهای A، B و C رسم می‌شود، کره‌ای است که بر مرکز اصلی D می‌گذرد و شعاع DL از رابطهٔ $2DL.DM = k^2$ به‌دست می‌آید و فصل مشترک کره های A و L یک دایرهٔ EF است که صفحه‌اش عمود بر صفحهٔ شامل مرکزهای A، B، C و L است. منحنی معکوس دایره‌ای که ef قطر آن است، باید هم روی کرهٔ A منعکس کرهٔ a، و هم روی کرهٔ L، منعکس صفحهٔ رسم شده بر feM باشد؛ بنابراین دایرهٔ تصویر شده تحت قطر EF منعکس دایرهٔ تصویر شده تحت قطر ef است. همین مطالب برای کره‌های B و C درست است.

۵.۱.۱.۱۰. کره و داده‌های دیگر

۱.۵.۱.۱.۱۰. کره، نقطه



۳۰۸. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند صفحهٔ عمود منصف AB است. پس این صفحه را که از مرکز کره می‌گذرد رسم می‌کنیم. فصل مشترک آن با کره، یک دایرهٔ عظیمه جواب مسأله است.



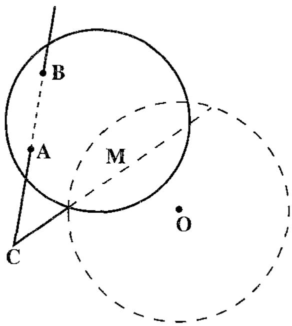
۳۰۹. پاره‌خط 'MM، موازی و مساوی پاره‌خط داده شدهٔ 'AA را که دو سر آن روی دو کرهٔ O و 'O است، در نظر می‌گیریم. OO_1 را همسنگ با 'MM رسم می‌کنیم و O_1M' را نیز رسم می‌نماییم. چهارضلعی $OMM'O_1$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین:

$$O_1M' = OM = r$$

درنتیجه نقطهٔ 'M، نقطهٔ مشترک کرهٔ 'O، با کره‌ای به مرکز O_1 وبه شعاع r است.
بعکس، اگر نقطهٔ 'M بدین صورت اختیار شده باشد و M'M را همسنگ با A'A یا O_1O رسم کنیم، $OO_1M'M$ متوازی‌الاضلاع و $OM = r$ می‌باشد، بنابراین نقطهٔ M

به کرهٔ O تعلق دارد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M'، دایرهٔ فصل مشترک کرهٔ O' با کره‌ای به مرکز O_1 و به شعاع r است.

در مورد مکان هندسی نقطهٔ M ؛ این مکان هندسی دایره‌ای مساوی دایرهٔ اوّلی است که از انتقال آن به اندازهٔ بردار $A'A$ به‌دست می‌آید. برای آن که این مکانها وجود داشته باشند، لازم و کافی است که کره‌های O_1 و O' متقاطع یا بر هم مماس باشند.



۳۱۰. فرض می‌کنیم M، نقطهٔ تماس یکی از کره‌های گذرنده بر A و B، با کرهٔ داده شده، و نقطهٔ C محل برخورد خط AB با صفحهٔ مماس مشترک دو کره در نقطهٔ M باشد. داریم :

$$\overline{CM}^2 = CA.CB$$

امّا $\overline{CM}^2$ قوت نقطهٔ C نسبت به کرهٔ O است ؛ CA.CB قوت نقطهٔ C نسبت به تمام کره‌های گذرنده بر A و B می‌باشند. بنابراین C نقطه‌ای ثابت از خط AB است. این نقطه، محل برخورد خط AB با صفحهٔ اصلی کرهٔ O، و یکی از کره‌های گذرنده بر A و B است ؛ بعلاوه پاره‌خط CM طول ثابتی مساوی $\sqrt{CA.CB}$ دارد ؛ درنتیجه نقطهٔ M به دایرهٔ فصل مشترک سطح مخروطی به رأس C با کرهٔ O تعلق دارد که این سطح مخروطی بر کرهٔ O محیط است. بعکس، اگر M یک نقطه از این دایره و P صفحهٔ مماس بر کرهٔ O در این نقطه باشد، کره‌ای که بر این صفحه در نقطهٔ M مماس است و بر نقطهٔ A می‌گذرد، بر نقطهٔ B نیز می‌گذرد، زیرا $CA.CB = \overline{CM}^2$ است.

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M، دایرهٔ فصل مشترک سطح مخروطی به رأس C و محیط بر کرهٔ O است.

۳۱۱. اگر O مرکز کره باشد، مکان هندسی وسط وترهای گذرنده از A، کره‌ای به قطر OA است.

۳۱۲. این مسأله، که در فضای سه‌بعدی بیان شده، مشابهی nبعدی دارد، و حل آن مدلول قضیهٔ بیان شده در زیر است.

قضیه. فرض می‌کنیم S کره‌ای به مرکز O و شعاع R باشد ؛ و فرض می‌کنیم P نقطه‌ای داخل S باشد، و :

$$PU_1 ، PU_2 ، \ldots ، PU_k (k \le n)$$

(i) متقابلاً متعامد باشند و

U_i(ii) بر S قرار داشته باشد.
بردارهای:

$$x_i = \overrightarrow{PU}_i \text{ و } p = \overrightarrow{OP}$$

را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم:

$$q = \overrightarrow{OQ} = p + x_1 + x_2 + \cdots + x_k \qquad \text{(iii)}$$

باشد، در این صورت داریم:

$$|q|^2 = kR^2 - (k-1)|p|^2 \qquad (1)$$

برعکس، با معلوم‌بودن کرهٔ S، نقطهٔ Pای داخل آن، و نقطهٔ Qای واقع بر کرهٔ (۱)، و فوق صفحهٔ kبعدی H شامل P و Q، حداقل یک مجموعهٔ نقطه‌ها: U_1، U_2، ...، U_k در H و دارای خواص (i)، (ii) و (iii) فوق موجود است.

در زبان هندسی گزارهٔ مسأله، مکان هندسی مطلوب Q کره‌ای به مرکز O و شعاع (۱) است؛ این شعاع، هنگامی که $k = 3$ باشد:

$$|q| = \sqrt{3R^2 - 2|p|^2}$$

است.

این قضیه را با استفاده از روشهای برداری اثبات می‌کنیم، و همان‌طورکه در مورد قضیهٔ بالا انجام دادیم، بردارها را با حروف کوچک سیاه متناظر با نقطه‌ها با حروف بزرگ مشخص شده، نمایش می‌دهیم. در این مورد همان‌گونه که در (iii)، با جمع برداری اقدام می‌کنیم، و استفاده‌های مکرر از y.z، حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار، مخصوصاً در نوشتن مربع طول y به‌صورت $|y|^2 = y.y$ و بیان تعامد y و z با: $y.z = 0$، به عمل می‌آوریم. بردارها را در فرهنگ لغات فنی ملاحظه کنید.

اثبات. بنا به خاصیت (i) به ازای: $i \neq j$ داریم:

$$\overrightarrow{PU}_i = u_i - p = x_i \text{ و } x_i . x_j = 0$$

از این رابطه و (iii) برای محاسبهٔ:

$$|q|^2 = (p + \sum_1^k x_i).(p + \sum_1^k x_i) = |p|^2 + 2p.\sum_1^k x_i + \sum_1^k |x_i|^2$$

$$= |p|^2 + 2p.\sum_1^k (u_i - p) + \sum_1^k |u_i - p|^2$$

$$= |p|^2 + 2p.\sum_1^k u_i - 2k|p|^2 + \sum_1^k |u_i|^2 - 2p.\sum_1^k u_i + k|p|^2$$

استفاده می‌کنیم، طبق خاصیت (ii)،

$$|u_i|^{۲} = R^{۲}$$

است، بنابراین داریم :

$$|q|^{۲} = kR^{۲} - (k-۱)|p|^{۲}$$

عکس قضیه را با استفاده از استقراء بر k اثبات می‌کنیم. چون $k=۱$ باشد، $|q|^{۲} = R^{۲}$ می‌شود ؛ H خطی گذرنده از P و Q است، و $U_۱ = P$ به‌طور بدیهی مطلوبات را برآورده می‌کند.

در مورد $k > ۱$ ، فرض می‌کنیم T کره‌ای به قطر PQ باشد. بنا به قضیهٔ تالس، T مجموعهٔ جمیع نقطه‌های U به‌طوری که : $\overrightarrow{PU} \perp \overrightarrow{UQ}$ باشد است، و به‌عبارت دیگر :

از آن‌جا که P و Q بر T واقعند و $|p| < R < |q|$ است، T، S را قطع می‌کند.

فرض می‌کنیم U_k نقطهٔ دلخواهی بر $T \cap S$ باشد، و $x_k = u_k - p$ را تعریف می‌کنیم.

در این صورت نقطهٔ V چنان که :

$$v = q - x_k = p + q - u_k \qquad (۳)$$

باشد، رأس چهارم مستطیل $PU_k QV$ است. [این موضوع از قانون جمع متوازی‌الاضلاع و این حقیقت که : $PU_k \perp QU_k$ است، نتیجه می‌شود.]

از (۳) برای محاسبهٔ :

$$|v|^{۲} = |p+q|^{۲} - ۲u_k.(p+q) + |u_k|^{۲}$$
$$= |p|^{۲} + ۲p.q + |q|^{۲} - ۲u_k.(p+q) + |u_k|^{۲}$$

استفاده می‌کنیم، و (۲) را برای حذف : $۲[p.q - u_k.(p+q)]$ به‌کار می‌بریم :

$$(u_k - p).(u_k - q) = |u_k|^{۲} - u_k.(p+q) + p.q = ۰$$

$$p.q - u_k.(p+q) = -|u|^{۲}$$

بنابراین بنا به فرض (۱)مان، به‌دست می‌آوریم :

$$|v|^{۲} = |p|^{۲} + |q|^{۲} + |u_k|^{۲} - ۲|u_k|^{۲}$$
$$= |q|^{۲} - R^{۲} - |p|^{۲}$$
$$= (k-۱)R^{۲} - (k-۲)|p|^{۲}$$

به طریق دیگر، می‌توانیم $|v|^{۲}$ را با به‌کاربردن لم مقدماتی و مفید زیر تعیین کنیم :

لم. اگر ABCD مستطیلی با اقطار AC و BD باشد، و اگر O نقطهٔ دلخواهی باشد، در

این صورت داریم :

$$OA^۲ + OC^۲ = OB^۲ + OD^۲$$

اثبات. برداری با مبدأ در مرکز مستطیل انتخاب می‌کنیم، رأسهای مستطیل و نقطهٔ O (که لازم نیست در صفحهٔ مستطیل باشد) بترتیب دارای نمایش برداری : m، n، ‎−m ، ‎−n و o، که در آنها : $|m| = |n|$ است، می‌باشند. در این صورت نتیجه می‌شود که :

$$|o+m|^۲ + |o-m|^۲ = |o+n|^۲ + |o-n|^۲$$

چون این لم را در مورد مستطیل PU_kQV به‌کار بریم، درمی‌یابیم که :

$$|V|^۲ + |U_k|^۲ = |p|^۲ + |q|^۲$$

بنابراین داریم :

$$|v|^۲ = q^۲ - R^۲ + |p|^۲$$

در این صورت، چون $|p|^۲ - R^۲$: را به : $|q|^۲ = kR^۲ - (k-۱)|p|^۲$ اضافه کنیم :

$$|v|^۲ = (k-۱)R^۲ - (k-۲)|p|^۲$$

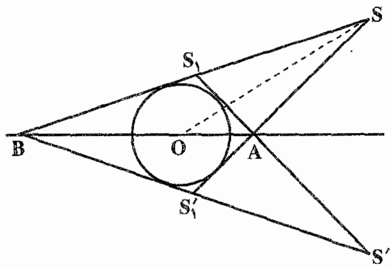
را به‌دست می‌آوریم.

اکنون فرض می‌کنیم $H_\perp$ مجموعهٔ نقطه‌های E در H چنان باشد که : $\overrightarrow{PE} \perp x_k$ باشد. در این صورت V و P در $H_\perp$ اند، و بنا به فرض استقراء، نقطه‌های v_i ، $i = ۱، ۲، \ldots، k-۱$ بر S چنان وجود دارند که : $x_i = u_i - p$ متعامدند، و :

$$v = p + x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{k-۱}$$

برقرار است.

۳۱۳. یک سطح مخروطی که در شرطهای داده شده صدق کند، در نظر می گیریم ؛ S را رأس آن فرض می کنیم. صفحهٔ ABS کره را تحت یک دایرهٔ عظیمه، و سطح مخروطی را تحت دو مولد که در نقطه‌های A و B بر این دایرهٔ عظیمه مماسند، قطع می کند. بعکس، اگر در یک صفحهٔ دلخواه P که بر AB می گذرد، در نقطه‌های A و B دو مماس بر دایرهٔ عظیمه مقطع کره رسم کنیم و S نقطهٔ برخورد آنها باشد، سطح مخروطی به رأس S و محیط بر کره، بر دو نقطهٔ A و B می گذرد.



درنتیجه، مکان هندسی رأسهای سطحهای مخروطی از دو دایره تشکیل می‌شود که به

وسیلهٔ S و S_1 وقتی که صفحهٔ P حول AB دوران می‌کند، ایجاد می‌شوند. اگر دو نقطهٔ A و B نسبت به نقطهٔ O مرکز کره قرینهٔ یکدیگر باشند، مکان هندسی به یک دایره تبدیل می‌شود که مرکزش نقطهٔ Oاست.

۳۱۴. O را نقطه‌ای دلخواه می‌گیریم. روشن است که

$$\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_2})+\cdots+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_k})$$
$$=k\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_k})$$

مجموع داخل پرانتز عبارت اخیر را $\overrightarrow{OO_1}$ می‌گیریم، در آن صورت:

$$\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OO_1}\Rightarrow\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OO_1}$$

و یا $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{OO_1}=(k-1)\overrightarrow{MO}$ از آن‌جا $\overrightarrow{O_1N}=(1-k)\overrightarrow{OM}$.

اگر O مرکز کره باشد، آن وقت برای هر نقطهٔ M از سطح کره $|OM|=R$ و بنابراین $|O_1N|=|k-1|R$.

به این ترتیب، مکان هندسی نقطهٔ N، کره‌ای است به شعاع $(1-k)R$ و به مرکز نقطهٔ O_1.

۲.۵.۱.۱.۱۰. کره، خط

۳۱۵. نقطه‌های تماس l_1 و l_2 را با کره A و B بنامید. نقطهٔ تماس MN با کره را هم با K نشان دهید. داریم:

$$AM=MK \quad ، \quad BN=NK$$

l_1 و l_2 را روی صفحه عمود بر AB، تصویر کنید. اگر A_1، M_1، N_1 و K_1 بترتیب تصویرهای A (همچنین B)، M، N و K باشند دیده می‌شود،

$$\frac{A_1M_1}{AM}=p \quad ، \quad \frac{A_1N_1}{BN}=q$$

که در آن p و q مقادیر ثابتی هستند.

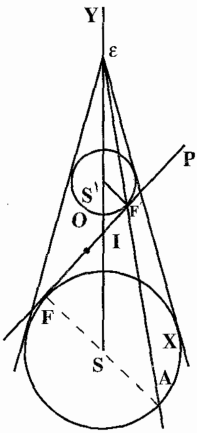
فاصله‌های K_1 را از A_1M_1 و A_1N_1 با d و h نشان می‌دهیم، داریم:

$$\frac{d}{h}=\frac{\frac{1}{2}A_1M_1.d}{\frac{1}{2}A_1N_1.h}.\frac{A_1N_1}{A_1M_1}=\frac{S_{A_1M_1K_1}}{S_{A_1N_1K_1}}.\frac{A_1N_1}{A_1M_1}$$
$$=\frac{M_1K_1}{N_1K_1}.\frac{A_1N_1}{A_1M_1}=\frac{MK}{NK}.\frac{A_1N_1}{A_1M_1}$$

$$= \frac{AM}{A_1M_1}\cdot\frac{A_1N_1}{BN} = \frac{q}{p}$$

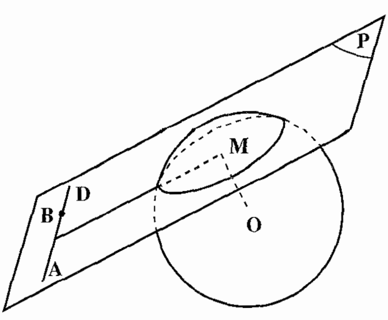
به این ترتیب نسبت فاصله K_1 از خطهای مفروض در داخل صفحه، مقدار ثابتی است یعنی نقطهٔ K_1، به یکی از دو خط راست که از A_1 می‌گذرند، تعلق دارد و مکان مطلوب عبارت از دو دایره است که بر روی سطح کره مفروض قرار دارند. این دایره‌ها از قطع کره با دو صفحه‌ای به‌دست می‌آیند که بر خطهایی که با نقطهٔ K_1 توصیف می‌شوند و از AB می‌گذرند. نقطه‌های A و B خودشان حذف شده هستند.

۳.۵.۱.۱.۱۰. کره، صفحه



۳۱۶. فرض کنیم Σ رأس یک سطح مخروطی با شرایط داده شده باشد. مقطع آن با صفحهٔ P دارای کانونی است مانند F که نقطهٔ تماس صفحهٔ مزبور با کرهٔ مفروض S بوده و نقطهٔ F' قرینهٔ F نسبت به مرکز داده شدهٔ O می‌باشد؛ و F' نقطهٔ تماس صفحهٔ P با کرهٔ دیگر S' و محاط در مخروط و مماس بر صفحهٔ P می‌باشد. بنابراین Σ مرکز تجانس دو کرهٔ S و S' است که روی خط FF' قرار ندارد.

تقسیم $(SS'I\Sigma)$ توافقی است و دستگاه $F'.SS'I\Sigma$ توافقی بوده اشعهٔ $F'S$، $F'I$ و $F'S'$ ثابتند. چهارمین شعاع $F'\Sigma$ نیز ثابت خواهد بود و مکان Σ قسمتی از خط X خارج کرهٔ S است. مقطع سطح مخروطی با صفحهٔ P بیضی یا هذلولی‌ایست برحسب آن که S و S' در طرفین P و یا در یک طرف آن واقع باشند و اگر A فصل‌مشترک X و FS باشد مقطع هذلولی است وقتی که Σ متعلق به قطعهٔ $F'A$ و در خارج کرهٔ S باشد و مقطع بیضی‌ایست در مواضع دیگری که Σ می‌توانند نسبت به X داشته باشد (شکل).



۳۱۷. صفحهٔ P را که بر نقطهٔ A گذشته و کرهٔ O را قطع کرده است، در نظر می‌گیریم.

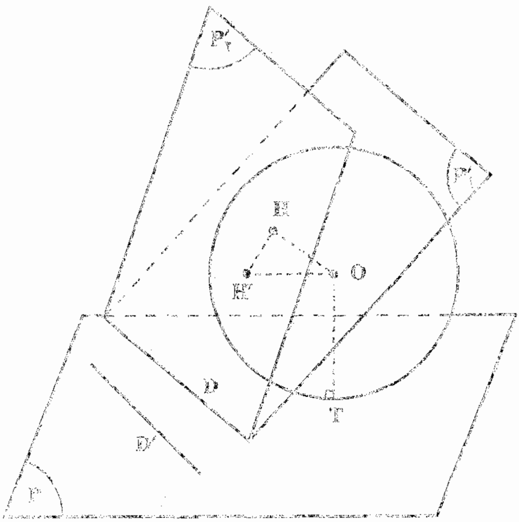
نقطهٔ M مرکز دایرهٔ مقطع، تصویر نقطهٔ O روی صفحهٔ P است. بنابراین $A\hat{M}O = 90^\circ$ است و نقطهٔ M به کره‌ای به قطر AO تعلق دارد.

بعکس، اگر M نقطه‌ای متعلق به کرهٔ به قطر

AO باشد که درون کرهٔ O واقع است، M مرکز دایرهٔ فصل مشترک صفحهٔ P است که این صفحه، بر AM می‌گذرد و در نقطهٔ M بر OM عمود است.

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ٔ به قطر AO است. درصورتی که نقطهٔ A بیرون کرهٔ O نباشد، اگر نقطهٔ A برون کرهٔ O باشد، مکان هندسی نقطهٔ M عرقچینی از کرهٔ به قطر AO است که مشترک بین کرهٔ O و کرهٔ به قطر AO است (درون کرهٔ O است). هنگامی که صفحهٔ P بر یک خط داده شده مانند D بگذرد، استدلال مشابه نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ای به قطر OB یا بخشی از این کره است. بنا بر آن که نقطهٔ B درون یا برون کرهٔ O باشد، در این حالت، B فصل مشترک خط با صفحه‌ای است که از نقطهٔ O مرکز کره بر خط D عمود می‌شود (یعنی نقطهٔ ثابتی است).

۳۱۸. H و H′ را دو نقطهٔ تماس دو صفحهٔ P'_1 و P'_2 از صفحه‌های متغیر گذرنده بر خطهای موازی D، بر کره فرض کنید و وضع خط HH′، صفحهٔ OHH′ و وضع آن نسبت به کره را تعیین کنید.



جواب مسأله دایرهٔ عظیمه‌ای از کره است که از نقطهٔ T (نقطهٔ تماس کره با صفحهٔ ثابت P) می‌گذرد.

۳۱۹. اگر O مرکز زمین، A نقطه‌ای واقع بر روی استوا و نظیر نصف‌النهار صفر، و M نقطه‌ای بر روی زمین باشد که طول و عرض جغرافیایی آن با هم برابر و مساوی φ است و N تصویر M بر روی صفحه استوا باشد، دستگاه محورهای قائم دکارتی را در صفحه استوا طوری اختیار کنید تا

$$x = R\cos^2\varphi \quad \text{و} \quad y = R\cos\varphi\sin\varphi$$

که در آن R شعاع زمین است.

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که مختصات N در معادله از

$$(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

صدق می‌کند. یعنی مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب مسأله، دایره‌ای است به مرکز $(0,\frac{R}{2})$ و شعاع $\frac{R}{2}$.

۱۰.۱.۱.۵.۴. کره، چهاروجهی

۳۴۰. ۱) از شرط مسأله نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overrightarrow{AM}^2}{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MA_1}}+\frac{\overrightarrow{BM}^2}{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MB_1}}+\frac{\overrightarrow{CM}^2}{\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MC_1}}+\frac{\overrightarrow{DM}^2}{\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{MD_1}}=4$$

از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{MD_1}=R^2-\overrightarrow{OM}^2$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2+\overrightarrow{CM}^2+\overrightarrow{DM}^2=4(R^2-\overrightarrow{OM}^2) \qquad (1)$$

یا

$$(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})^2+\cdots+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD})^2=4R^2-4\overrightarrow{OM}^2$$

که بعد از تبدیلهای ساده به این صورت درمی‌آید:

$$8\overrightarrow{OM}^2-2\overrightarrow{OM}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=0$$

اگر G مرکز چهاروجهی (یعنی محل برخورد خطهای راستی که از هر رأس به محل برخورد میانه‌های وجه مقابل وصل می‌شوند) باشد، آن وقت $4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. درنتیجه، برابری اخیر به صورت $\overrightarrow{OM}^2-\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OG}=0$ یا $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM}=0$ درمی‌آید.

مکان هندسی مطلوب عبارت است از کرهٔ به قطر OG (اگر $O\neq G$) و یا نقطهٔ O (اگر $G=O$).

۲) اگر شبیه حالت قبل استدلال کنیم، به جای (۱)، به این برابری می‌رسیم:

$$\overrightarrow{AM}^2+\cdots+\overrightarrow{DM}^2=-4(R^2-\overrightarrow{OM}^2) \qquad (1)'$$

از آن‌جا $(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})^2+\cdots+(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD})^2=-4R^2+\overrightarrow{OM}^2$ و با بعد از ساده کردن $R^2-\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OG}=0$. نقطهٔ G_1 را طوری در نظر می‌گیریم که $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OG_1}=R^2$ (برای $O\neq G$)، نقطهٔ G_1 یکی از نقطه‌های M است و می‌توان آن را روی خط راست OG به‌نحوی

پیدا کرد که داشته باشیم $|\overrightarrow{OG}|.|\overrightarrow{OG_1}| = R^2$. در این صورت به این برابری می‌رسیم :

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{MG_1} = 0$$

مکان مطلوب عبارت است از صفحه‌ای که از نقطهٔ G_1 عمود بر خط راست OG رسم شود. اگر $G = O$ ، مکان مطلوب، مجموعه‌ای تهی است ؛ نقطهٔ M وجود ندارد. در این حالت چهاروجهی، وجه‌هایی برابر دارد و یالهای روبه‌رو، دو به دو برابرند.

۱۰.۱.۱.۵.۵. کره، مکعب‌مستطیل

۳۲۱. گزینهٔ (ج) درست است. در هر گوشه از اتاق، دو دیوار یکدیگر را در یک خط قائم، و هرکدام کف اتاق را در یک خط افقی قطع می‌کنند. این نیمخطهای عمود بر هم را جهتهای مثبت دستگاه محورهای مختصات x، y و z در نظر می‌گیریم. کرهٔ به شعاع a و مماس بر هریک از سه صفحهٔ مختصات، دارای معادلهٔ به شکل زیر است :

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2$$

هرگاه نقطهٔ (۵,۵,۱۰) روی چنین کره‌ای واقع باشد، آن‌گاه :

$$(5-a)^2 + (5-a)^2 + (10-a)^2 = a^2$$

$$2a^2 - 40a + 150 = 0$$

$$a^2 - 20a + 75 = 0$$

دو ریشهٔ این معادلهٔ درجهٔ دوم شعاعهای کره‌هایی هستند که در شرایط مفروض صدق می‌کنند. مجموع جوابها (قرینهٔ ضریب a) برابر ۲۰ است. پس مجموع قطرهای کره‌ها ۴۰ است. (معادلهٔ بالا هم‌ارز است با $(a-15)(a-5) = 0$ و ملاحظه می‌شود که شعاعهای کره‌ها ۱۵ و ۵ است.

۱۰.۱.۱.۵.۶. کره، هرم

۳۲۲. توجه داشته باشید که اگر، r شعاع کرهٔ محاط در هرم ABCD باشد، آن گاه اوّلاً معلوم می‌شود که همهٔ یالهای چهاروجهی ABCD بزرگتر از ۲r هستند. ثانیاً، شعاع دایره محاط در هر وجه چهاروجهی، از r بزرگتر است.

حکم اوّل آشکار است. برای اثبات حکم دوم، از مرکز کره محاطی در هرم، صفحه‌ای طوری بگذرانید که مثلاً موازی با وجه ABC باشد. مقطع مثلث $A_1B_1C_1$ می‌شود که متشابه است با مثلث ABC و به نسبت کمتر از واحد، و در داخل خود دایره‌ای به شعاع r را شامل می‌شود.

(۱) شرط تعیین مجموعهٔ نقطه‌های A، با نامساوی

$$OA \geq ۳r$$

بیان می‌شود.

تساوی

$$OA = ۳r$$

در یک چهاروجهی منتظم برقرار است.

اگر برای نقطه‌ای مانند A، نامساوی

$$OA < ۳r$$

برقرار باشد، شعاع کوچکترین کره‌ای که چهاروجهی ABCD را شامل بشود، کمتر از ۳r خواهد بود، که این، ممکن نیست.

(۲) شرط تعیین مجموعهٔ نقطه‌های B، با نامساوی

$$OB > r\sqrt{۵}$$

بیان می‌شود.

در واقع اگر به‌ازای نقطه‌ای مانند B، داشته باشیم،

$$OB \leq r\sqrt{۵}$$

آن‌گاه برای مثلث DBC، شعاع دایرهٔ شامل این مثلث، بزرگتر از

$$\sqrt{۵r^۲ - r^۲} = ۲r$$

نخواهد بود. یعنی شعاع دایرهٔ محاط در مثلث DBC، از r تجاوز نخواهد کرد و این غیرممکن است.

(۳) شرط تعیین مجموعهٔ نقطه‌های C (مکان هندسی C) با نامساوی،

$$OC > r\sqrt{۲}$$

تعریف می‌شود. در واقع اگر،

$$OC \leq r\sqrt{۲}$$

آن‌گاه

$$CD \leq ۲r$$

(۴) شرط تعیین مجموعهٔ نقطه‌های D با نامساوی

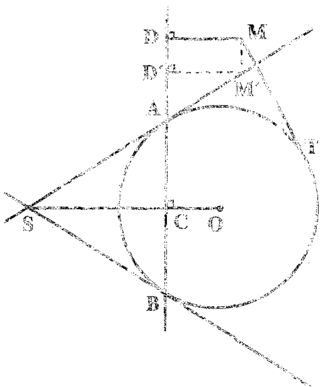
$$OD > r$$

بیان می‌شود.

نشان می‌دهیم OD می‌تواند طول دلخواه بزرگ داشته باشد. برای این منظور، برای چهاروجهی ABCD چهاروجهیی را در نظر بگیرید که همهٔ وجه‌های آن، مثلثهای متساوی قابل انطباق بر هم، با زاویه‌های رأس به اندازهٔ کافی کوچک باشند. در این

صورت مرکزهای کره‌های محاطی و محیطی بر یکدیگر منطبق و نسبت $\frac{R}{r}$ که در آن R شعاع کره محیطی می‌باشد، می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد.

۱۰.۱.۱.۵.۷. کره، سطح مخروطی



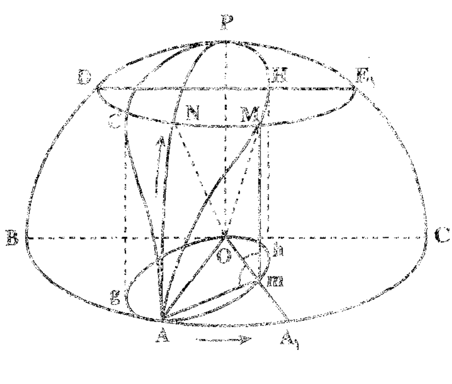
۳۲۳. یکی از نقطه‌های مکان هندسی را M می‌گیریم. شکل را با صفحهٔ SOM قطع می‌کنیم؛ MT را مماس بر دایرهٔ عظیمهٔ مقطع کره، MD را عمود بر AB، سپس MM' را موازی با AB و M'D' را عمود بر AB رسم می‌کنیم. می‌خواهیم مکان هندسی نقطهٔ M را چنان بیابیم که: $\frac{MT}{SA}=\frac{MD}{SC}$

امّا $MD = M'D'$ و $\frac{SA}{M'A}=\frac{SC}{M'D'}$ است.

درنتیجه، اگر این دو تناسب را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت: $\frac{MT}{M'A}=\frac{MD}{M'D'}=1$. از آن‌جا نتیجه می‌شود: $MT = M'A$. در این صورت، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OTM و OAM'، مساوی (همنهشت) هستند زیرا دارای ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ متناظر متساوی می‌باشند، درنتیجه $OM = OM'$ است. بنابراین دو مایل OM و OM' که مساوی و در یک طرف عمود رسم شده از O بر MM' قرار دارند بر هم منطبق، و درنتیجه نقطه‌های M و M' منطبق بر هم می‌باشند. پس مکان هندسی نقطهٔ M، سطح مخروطی داده شده است.

۳۲۴. بدیهی است که فاصلهٔ مرکز هر کره پس از صفحهٔ مماس، برابر r یعنی شعاع کره است.

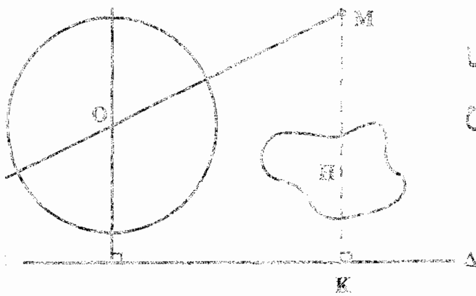
۱۰.۱.۱.۵.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۲۵. در واقع m را تصویر افقی نقطهٔ متحرک M می‌گیریم. POA را وضع جدید نصف‌النهار اول PNA فرض می‌کنیم؛ کمان استوایی $\overset{\frown}{AA_1}$، مساوی با کمان $\overset{\frown}{AN}$ است که بوسیلهٔ نقطهٔ M روی نصف‌النهار متحرک رسم می‌شود.

زیرا دو سرعت با هم برابرند. بنابراین مثلثهای MmO و AmO مساوی‌اند زیرا ضلع mO مشترک است و ضلعهای $MO = AO$ و $M\hat{O}A_1 = A\hat{O}N = A\hat{O}A_1$ ؛ درنتیجه مثلث AmO همانند مثلث MmO در رأس m قائم‌الزاویه است. پس مکان هندسی نقطهٔ تصویر m از خط سیر روی صفحه خط استوا دایره‌ای است که به قطر AO رسم می‌شود.

۱۰.۱.۱.۶. نقطه، صفحه، منحنی



۳۲۶. حجم مخروط برابر است با $\frac{1}{3}S\times MH$ (که S سطح منحنی Γ است) پس:

$$a(OM^2-R^2)=\frac{1}{3}S\times MH$$

و یا:

$$a.OM^2=\frac{1}{3}S.MH+aR^2$$

و یا:

$$a.OM^2=\frac{1}{3}S(MH+\frac{3aR^2}{S})$$

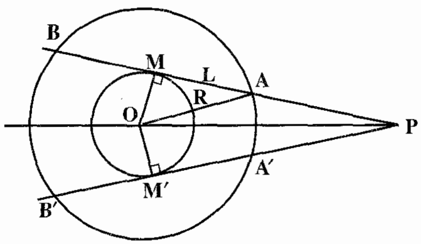
چون طول $\frac{3aR^2}{S}$ را بر MH افزوده و سطحی به موازات سطح ثابت منحنی Γ رسم کنیم و مقطع شکل را توسط صفحهٔ تصویر عمود بر سطح ثابت منحنی Γ رسم کنیم خواهیم داشت:

$$a.MD^2=\frac{S}{3}.MK$$

مکان M در مقطع دایره‌ای است که مرکز آن بر قطر D کره عمود بر سطح ثابت واقع است. چون شکل را حول این قطر دوران دهیم خط Δ صفحهٔ ثابت را ایجاد می کند و دایرهٔ مکان M کره‌ای ایجاد می کند. پس مکان M کره‌ای است که مرکز آن بر قطر D کرهٔ O واقع است.

۲.۱۰. مکان هندسی پاره‌خط، خط

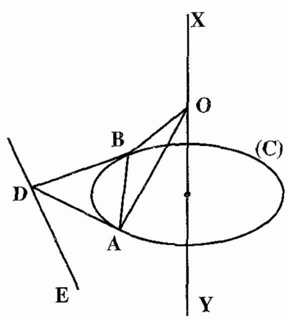
۱.۲.۱۰. مکان هندسی پاره‌خط



۳۲۷. وترهای به طول معین داده شده از یک کره، از مرکز آن کره به یک فاصله‌اند. پای عمود رسم شده از مرکز کره بر هریک از این وترها، وسط آن وترهاست. مکان هندسی این نقطه‌ها کره‌ای است که مرکزش، مرکز کره و شعاعش $\sqrt{R^2 - l^2}$ است، درصورتی که R شعاع کره و $2l$ طول وتر داده شده باشد. بلافاصله دیده می‌شود برای آن که مسأله جواب داشته باشد باید $2R > 2l$ و یا $R > l$ باشد.

۳۲۸. در هر مقطع قطری گذرنده بر نقطهٔ داده شده (در هر صفحه‌ای که بر نقطهٔ داده شده و مرکز کره می‌گذرد) دو وتر وجود دارد که به طول معین داده شده می‌باشند و نسبت به قطر گذرنده بر نقطهٔ مفروض قرینهٔ یکدیگرند. با دوران حول این قطر، وترها یک مخروط ناقص ایجاد می‌کنند که جواب مسأله است.

۲.۲.۱۰. مکان هندسی خط

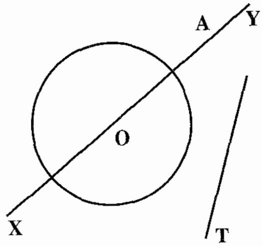


۳۲۹. مکان هندسی مرکزهای کره‌هایی که بر دایرهٔ (C) می‌گذرند، محور XY از این دایره است. D را نقطهٔ برخورد مماسها بر دایره در نقطه‌های A و B ؛ و DE را فصل‌مشترک صفحه‌های مماس بر یکی از کره‌های به مرکز O واقع بر XY می‌نامیم. DE بر OA و OB عمود است، بنابراین بر صفحهٔ OAB عمود می‌باشد و چون که $DA = DB$ است، DE در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. بعکس، اگر DE یک خط رسم شده از نقطهٔ D در این صفحه و O فصل مشترک صفحهٔ گذرنده بر AB و عمود بر DE، با خط XY باشد، کرهٔ به مرکز O و به شعاع OA در نقطه‌های A و B بر صفحه‌های ADE و BDE مماس است. زیرا OA که عمود بر AD و DE است، بر صفحهٔ ADE عمود است و به‌طور مشابه OB بر صفحهٔ BDE عمود می‌باشد.

بنابراین مکان هندسی خط DE، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۳۳۰. صفحهٔ گذرنده بر مرکز کره و دو نقطهٔ ثابت A و B را در نظر بگیرید.

۳۳۱. نقطهٔ O را مرکز کرهٔ داده شده، r را شعاع آن، و XOY را محور یک سطح استوانه‌ای محیط بر این کره می‌گیریم.

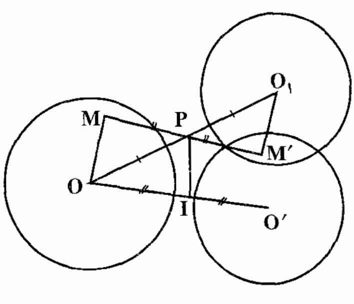


برای آن که این سطح از نقطهٔ داده شدهٔ A بگذرد، لازم و کافی است که فاصلهٔ A از XY مساوی با r باشد. بنابراین مکان هندسی XY، یک سطح مخروطی به رأس O است که بر کرهٔ به مرکز A و شعاع r محیط است. برای این که این مکان وجود داشته باشد، باید $OA \geq r$ باشد، بدین معنی که نقطهٔ A در ناحیه برونی کره قرار داشته باشد، یا روی این کره باشد. در حالت اخیر، مکان هندسی به یک صفحه عمود بر AO در نقطهٔ O تبدیل می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، XOY محور یک سطح استوانه‌ای محیط بر کره و مماس بر خط T باشد. برای این که شرط اخیر برقرار باشد، لازم و کافی است که کوتاهترین فاصلهٔ بین T و XY مساوی r باشد، یا این که XY بر سطح استوانه‌ای دوار (S) به محورT و شعاع r، مماس باشد. بنابراین مکان هندسی XY از دو صفحهٔ مماس تشکیل می‌شود که از O بر (S) رسم می‌شوند.

برای آن که این مکان وجود داشته باشد، لازم و کافی است که نقطهٔ O خارج یا روی (S) باشد، بدین معنی که فاصلهٔ O تا T بزرگتر یا مساوی r باشد، این بدان معنی است که T خارج کرهٔ داده شده یا مماس بر آن است؛ در حالت اخیر، مکان هندسی XY به یک صفحه تبدیل می‌شود که از نقطهٔ O عمود بر شعاع نقطهٔ تماسT رسم می‌شود.

۳۳۲. M را نقطه‌ای از کرهٔ O و M' را نقطه‌ای از کرهٔ O' می‌گیریم و وسط پاره‌خط MM' را P می‌نامیم. OP را به طول مساوی خود، امتداد می‌دهیم. $O_1P = OP$ چهارضلعی OMO_1M' که قطرهایش منصف یکدیگرند، متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $O_1M' = OM = r$، و درنتیجه، نقطهٔ M' بین



کرهٔ O' و کرهٔ به مرکز O_1 و به شعاع r مشترک می‌باشد. بعکس، اگر نقطهٔ M' به این صورت انتخاب شده باشد، با رسم شعاع OM به موازات پاره‌خط $M'O_1$، متوازی‌الاضلاع OMO_1M' را خواهیم داشت، زیرا ضلعهای OM و $M'O_1$ مساوی

و موازی و در یک جهت‌اند. در نتیجه نقطهٔ P وسط MM' است.

پس مکان هندسی نقطهٔ M، یک سطح مخروطی است که رأسش P و هادی‌اش دایرهٔ فصل مشترک کره‌های O' و O_1 است. برای آن که این مکان هندسی وجود داشته باشد، لازم و کافی است که این دو کره متقاطع و یا مماس بر هم باشند، و برای این منظور باید $O'O_1 \le r+r'$ و $O'O_1 \ge r-r'$ باشد، و یا اگر I وسط پاره‌خط OO' باشد، $IP = \frac{O'O_1}{2}$، از آن‌جا خواهیم داشت:

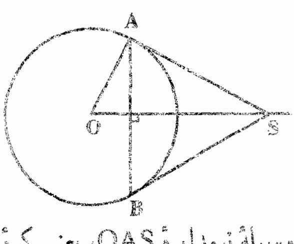
$$IP \le \frac{r+r'}{2} \quad \text{و} \quad IP \ge \frac{r-r'}{2}$$

این عبارتها نشان می‌دهد که نقطهٔ P باید در ناحیهٔ بین دو کره به مرکز I و به شعاع‌های $\frac{r+r'}{2}$ و $\frac{r-r'}{2}$ قرار داشته باشد، و یا روی یکی از این دو کره واقع باشد. در حالت اخیر، سطح مخروطی به یک خط تبدیل می‌شود. برای آن که سطح مخروطی مکان هندسی MM' به یک صفحه تبدیل شود، باید رأسش نقطهٔ P روی دایرهٔ فصل مشترک دو کرهٔ O_1 و O' قرار داشته باشد، یعنی در صفحهٔ اصلی این دو کره واقع شود. بنابراین لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$PO'^2 - r'^2 = PO_1^2 - r^2 \quad \text{یا} \quad PO'^2 - r'^2 = PO^2 - r^2$$

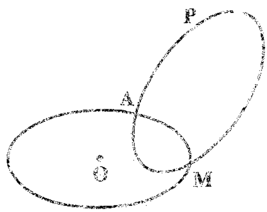
رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که نقطهٔ P باید روی صفحهٔ اصلی دو کرهٔ داده شدهٔ O و O' قرار داشته باشد و همان طوری که در بالا دیدیم، در حلقه (تاج) محصور بین دو دایرهٔ رسم شده در صفحهٔ اصلی که مرکزشان I و شعاع‌هایشان $\frac{r+r'}{2}$ و $\frac{r-r'}{2}$ است، واقع شود.

۱۰.۳. مکان هندسی دایره



۳۳۳. صفحه‌ای مانند P شامل OS، کره را تحت یک دایره و مخروط محیطی را تحت دو مماس SA و SB قطع می‌کند. هنگامی که صفحهٔ P حول OS دوران کند، نقطهٔ A، دایرهٔ تماس AB کره و مخروط را می‌پیماید. امّا، مکان هندسی نقطهٔ A نیمدایرهٔ OAS از صفحهٔ P به قطر OS، و مکان هندسی دایرهٔ AB کرهٔ ایجاد شده به‌وسیلهٔ نیمدایرهٔ OAS، یعنی کرهٔ به قطر OS است.

۳۳۴. بر دایرهٔ O و نقطهٔ P، یک و تنها یک کره می‌گذرد. در واقع، تنها یک نقطه وجود دارد که از نقطهٔ P و از نقطه‌های واقع بر این دایره به یک فاصله است. این نقطه، محل برخورد محور دایره و صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AP است. این کره را S می‌نامیم. با برقراری این مطلب، هر دایره مانند (PAM) به این کره تعلق دارد، زیرا با این کره سه نقطهٔ مشترک دارد. بعلاوه، بر هر نقطهٔ N از کرهٔ S، یکی از این دایره‌های متغیر مورد ملاحظه، می‌گذرد. در واقع، صفحهٔ PAN صفحهٔ دایرهٔ O را تحت یک خط گذرنده از A قطع می‌کند که این خط این دایره را در نقطهٔ دیگری مانند M′ قطع می‌نماید و دایرهٔ (APM′) شامل نقطهٔ N است.



در این صورت، چون هر دایرهٔ متغیر به کرهٔ S تعلق دارد و بر هر نقطهٔ از کرهٔ S یک دایرهٔ متغیر می‌گذرد، دایره‌های متغیر، کرهٔ S را به‌وجود می‌آورند.

۳۳۵. فرض می‌کنیم r شعاع عرقچین نیمکره‌ای، به مساحت سطح داده شده باشد، که بیشترین حجم را دارد؛ مکان هندسی دایره‌های قاعده، یک سطح کروی است که نقطهٔ P مرکز و شعاعش مساوی ۲r است.

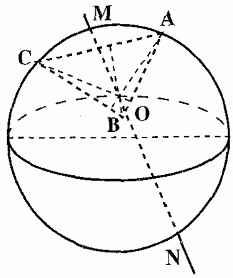
۱۱. رسم شکل

۱.۱۱. تعیین نقطه

۳۳۶. اگر d قطر کره و e یال چهاروجهی منتظم محاطی باشد، در این صورت $e = (d\sqrt{6})/3$، که از آن‌جا e وتر مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای است که ساق آن برابر با یال مکعب محاطی است.

۳۳۷. اگر d قطر کره و e یال مکعب محاطی باشد، در این صورت $e = (d\sqrt{3})/3$، و از آن‌جا e یک سوم ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع 2d است.

۳۳۸. سه نقطهٔ داده شده را A، B و C می‌نامیم و نقطهٔ برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث را O می‌نامیم. خطی که از نقطهٔ O و صفحهٔ مثلث عمود می‌شود، کره را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند که این دو نقطه جواب مسأله‌اند. مسأله همواره دو جواب دارد.



۳۳۹. نقطهٔ S را رأس سطح مخروطی (S) می‌گیریم. برای برقراری شرطهای بیان شده در مسأله، لازم وکافی است که S نقطهٔ مشترک سطحهای استوانه‌ای (S_1)، (S_2) و (S_3) محیط بر (Σ) تحت دایره‌های (C_1)، (C_2) و (C_3) باشد.
امّا می‌دانیم که دو سطح (S_1) و (S_2) یکدیگر را تحت دو منحنی مسطح قطع می‌کنند؛ فرض می‌کنیم $(P_{1,2})$ و $(Q_{1,2})$ صفحه‌های این دو منحنی باشند، به‌طورمشابه $(P_{1,3})$ و $(Q_{1,3})$ را صفحه‌های منحنیهای مشترک (S_1) و (S_3) می‌گیریم.
رأس S بین (S_1) و یکی از صفحه‌های $(P_{1,2})$ یا $(Q_{1,2})$، و یکی از صفحه‌های $(P_{1,3})$ یا $(Q_{1,3})$ مشترک است، یعنی که S مشترک بین (S_1) و یکی از چهار خط فصل‌مشترک هریک از دو صفحهٔ اوّلی با هریک از دو صفحهٔ دومی است.
این چهار صفحه، شامل نقطهٔ O مرکز کرهٔ (Σ) می‌باشند؛ بنابراین چهار خط فصل‌مشترکهای آنها از نقطهٔ O می‌گذرند و هریک از آنها، سطح استوانه‌ای را در دو نقطهٔ متقارن نسبت به O قطع می‌کنند.
بنابراین مسأله دارای ۸ جواب است و ۸ نقطهٔ Sای که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند، رأسهای یک هشت‌وجهی منتظم هستند که نقطهٔ O مرکز تقارن آن است. اگر به جای دایره‌های عظیمهٔ (C_1)، (C_2) و (C_3) سه دایرهٔ صغیره داده شوند، رأس، به همین روش ساخته می‌شود. در این حالت، سطحهای استوانه‌ای (S_1)، (S_2) و (S_3) جایگزین سطحهای مخروطی خواهند شد و حداکثر هشت جواب وجود دارد.

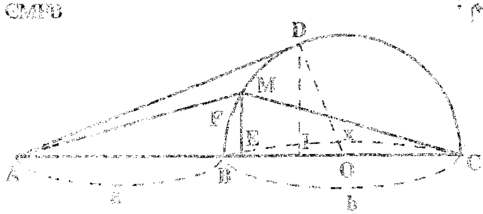
۳۴۰. سطح مخروطی محیط بر کره تحت دایرهٔ (C) را، با (S) نشان می‌دهیم. سطح مخروطی دیگری مانند (S') به رأس S' در نظر می‌گیریم که تحت دایره‌ای مانند (C') بر کره

محیط باشد. برای آن که دایرهٔ (C') از نقطه‌های A و B بگذرد، لازم وکافی است که نقطهٔ S' در صفحه‌های مماس رسم شده در A و B باشد؛ یعنی روی خط (D) فصل مشترک آنها قرار داشته باشد، و برای آن که (C') مماس بر (C) باشد، لازم و کافی است که S' روی سطح (S) قرار داشته باشد. پس S' نقطهٔ برخورد سطح (S) و خط (D) است. مسأله دارای دو جواب است، یک جواب دارد و یا بدون جواب است.

۳۴۱. سطحهای مخروطی محیط بر کره تحت دایره‌های (C_1) و (C_2) را با (S_1) و (S_2) نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم یک سطح مخروطی (S) محیط بر (Σ) تحت دایرهٔ (C) باشد. برای آن که دایرهٔ (C) بر نقطهٔ A بگذرد و بر دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) مماس باشد، لازم و کافی است که رأس S در صفحهٔ P مماس در A بر کره، قرار داشته باشد و همچنین روی هر یک از سطحهای (S_1) و (S_2) باشد.
امّا می‌دانیم که دو سطح (S_1) و (S_2) یکدیگر را تحت دو منحنی مسطح قطع می‌کنند؛ فرض می‌کنیم Q و R صفحه‌های آنها باشند؛ بنابراین رأس S روی صفحهٔ P و روی یکی از صفحه‌های Q یا R و روی سطح مخروطی (S_1) واقع است؛ یعنی که اگر (D) و (E) فصل مشترک صفحهٔ P با هریک از صفحه‌های Q و R باشند، S نقطهٔ برخورد سطح مخروطی (S_1) با هریک از خطهای (D) و (E) است.
همچنین دیده می‌شود که این مسأله حداکثر ۴ جواب دارد.

۳۴۲. مقطع شکل با صفحه‌ای را که بر خط‌المرکزین دو کرهٔ داده شده می‌گذرد، در نظر می‌گیریم. این مقطع دو دایره به مرکزهای O و O' (مرکزهای دو کره) و به شعاعهای R و R' (شعاعهای دو کره) می‌باشند. مرکزهای تجانس این دو دایره را رسم می‌کنیم.
اگر این مرکزهای تجانس خارج دو دایره باشند، مماس مشترکهای دو دایره از این نقطه‌ها می‌گذرند و نقطه‌های تماس این خطهای مماس مشترک نقطه‌های تماس صفحه‌های مماس مشترک بر دو کره می‌باشند که از نقطه‌های مرکز تجانس رسم می‌شوند. بنابراین نقطه‌های جواب مسأله، مرکزهای تجانس دو کره می‌باشند درصورتی که بیرون دو کره واقع باشند.
هر صفحهٔ مماس بر یکی از کره‌ها که از یک نقطهٔ داده شده و از یکی از مرکزهای تجانس می‌گذرد، بر کرهٔ دیگر نیز مماس است.
این نقطه‌ها رأسهای دو مخروط دوارند که محیط بر هر دو کره می‌باشند. دو جواب وجود دارد اگر دو کره متخارج باشند، یکی، اگر دو کره متقاطع باشند و جوابی وجود ندارد وقتی دو کره متداخل باشند.

۳۴۳. باید داشته باشیم: $V_{MAC} = 2V_{CMFB}$



امّا، $V_{MAC} = \frac{1}{3}\pi ME^2 \times AC$

و $V_{CMFB} = V_{CME} + V_{MEBF}$

$$= \frac{1}{3}\pi ME^2 \times EC + \frac{1}{6}\pi BE(BE^2 + 3ME^2)$$

و از آن‌جا: $ME^2.AC = 2ME^2.EC + BE(BE^2 + 3ME^2)$

یا، با توجه به این که $AC = a + b$، $BE = b - x$ و $ME^2 = x(b - x)$، نتیجه می‌شود

$ax = b^2$، و از آن‌جا $x = \frac{b^2}{a}$ به‌دست می‌آید.

برای قابل قبول بودن این مقدار، لازم است که x از CI بزرگتر و از b کوچکتر باشد. داریم:

$$CI = \frac{b}{2} + OI$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODA،

$$OI = \frac{\frac{b^2}{4}}{\frac{b}{2} + a} = \frac{b^2}{2(b + 2a)}$$

بنابراین $CI = \frac{b(a+b)}{2a+b}$، که در این صورت، داریم:

$$\frac{b(a+b)}{2a+b} < \frac{b^2}{a} < b \Rightarrow b < a < \frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$$

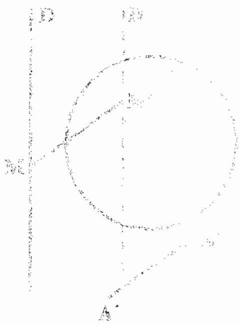
اگر $a = b$ باشد، نقطهٔ M بر نقطهٔ B منطبق است و اگر $a = \frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$ باشد، نقطهٔ M بر نقطهٔ تماس D منطبق خواهد بود. در حالت اخیر دیده می‌شود که نقطهٔ B پاره‌خط AC را به نسبت طلایی تقسیم می‌کند، در واقع داریم:

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \Rightarrow BA^2 = BC.AC$$

۳۴۴. بله، می‌توان. چهار کره با شعاعهای مختلف، در فضا در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که، دو به دو برهم مماس باشند؛ سپس، کرهٔ پنجم را، در فضای بین این چهار کره و مماس بر همهٔ آنها، رسم می‌کنیم. مرکزهای این پنج کره، همان پنج نقطهٔ مورد نظر مسأله است.

۲.۱۱. رسم پاره‌خط

۳۴۶. دایرهٔ دلخواهی مانند Σ بر کره رسم کنید و سه نقطهٔ دلخواه A، B و C را بر محیط آن مشخص کنید. بر روی یک صفحه مثلثی بسازید که با مثلث ABC همنهشت باشد، دایرهٔ محیطی آن را پیدا کنید، و سپس شعاع Σ را به دست آورید. مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که یک ساق آن شعاع Σ و وتر آن وتر قطبی Σ باشد. اکنون یافتن قطر کره آسان است.

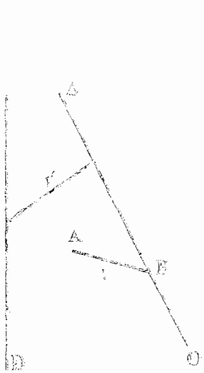


۳۴۷. کرهٔ S، خط D، پاره‌خط AA′ و یک پاره‌خط مانند MM′ موازی و مساوی با پاره‌خط AA′، که انتهای M آن روی خط D باشد، در نظر می‌گیریم. هنگامی که نقطهٔ M خط D را می‌پیماید نقطهٔ M′ خطی مانند D′ را می‌پیماید که موازی D است و برای آن که M′ به کرهٔ S تعلق داشته باشد، لازم و کافی است که بر یکی از نقطه‌های مشترک خط D′ و کرهٔ S منطبق شود. با تعیین نقطهٔ M′، وضعیت پاره‌خط MM′ مشخص می‌شود.

این مسأله بنا به وضع خط D′ و کرهٔ S دارای دو جواب، یک جواب است و یا جواب ندارد، بنابر آن که D′ با کرهٔ S دو نقطهٔ مشترک داشته باشد، مماس بر آن باشد و یا آن را قطع نکند.

نکته. اگر $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ باشد، جوابهای مسأله به صورت بالا است. ولی اگر تنها موازی بودن و مساوی بودن دو پاره‌خط AA′ و MM′ مورد نظر باشد، مسأله می‌تواند حداکثر چهار جواب داشته باشد؛ زیرا می‌توان حالت $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{AA'}$ را نیز در نظر گرفت.

۳.۱۱. رسم خط

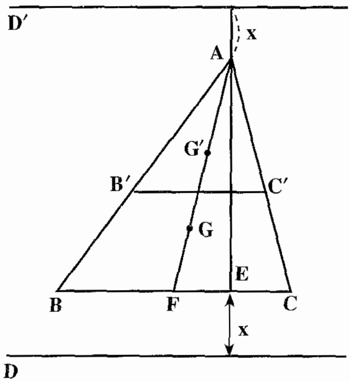


۳۴۸. فرض می‌کنیم مسأله حل شده، و OΔ خطی باشد که به شرطهای مسأله پاسخ می‌دهد.

AB را عمود بر OΔ رسم می‌کنیم؛ داریم: AB = l؛ و OΔ بر کرهٔ به مرکز A و شعاع l مماس است؛ از طرف دیگر، کوتاهترین فاصله بین خطهای راست D و OΔ مساوی l′ است. پس OΔ بر سطحی استوانه‌ای دوار به محور D و شعاع قاعدهٔ l′ مماس می‌باشد. بنابراین خطهای راست

$O\Delta$ که موردنظر ما هستند مماسهای مشترک رسم شده از نقطهٔ O بر کره و بر سطح استوانه‌ای می‌باشند. برای به‌دست آوردن آنها از نقطهٔ O صفحه‌های مماس بر سطح استوانه‌ای، را رسم می‌کنیم و مقطعهای کره با این صفحه‌ها را رسم می‌نماییم، آنچه که می‌ماند آن است که از نقطهٔ O مماسهایی بر این دایره‌های مقطع رسم کنیم.

دیده می‌شود که این مسأله بیشتر از چهار جواب دارد.



۳۴۹. نخست فرض می‌کنیم که D نسبت به رأس A در همان طرفی قرار دارد که ضلع BC واقع است و فاصله D از BC را با x نشان می‌دهیم. بنا به فرض حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ ABC دو برابر حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ $AB'C'$ است. امّا می‌دانیم که حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ یک مثلث که حول یک خط مانند D دوران می‌کند، برابر است با حاصلضرب مساحت این مثلث در محیط دایره‌ای که مرکز ثقل این مثلث می‌پیماید.

فاصله‌های مرکز ثقل مثلثهای ABC و $AB'C'$ از خط D برابرند با $\frac{h}{۳}+x$ و $h-\frac{۲h'}{۳}+x$ ؛ خواهیم داشت :

$$\text{مساحت } ABC \times ۲\pi(\frac{h}{۳}+x) = ۲ \times \text{مساحت } AB'C' \times ۲\pi(h-\frac{۲h'}{۳}+x)$$

امّا چون $\frac{\text{مساحت } AB'C'}{h'^{۲}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{h^{۲}}$ است، خواهیم داشت :

$$h^{۲}(\frac{h}{۳}+x) = ۲h'^{۲}(h-\frac{۲h'}{۳}+x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{۶hh'^{۲}-۴h'^{۳}-h^{۳}}{۳(h^{۲}-۲h'^{۲})} = \frac{(h-۲h')(-h^{۲}-۲hh'+۲h'^{۲})}{۳(h^{۲}-۲h'^{۲})}$$

برای این که این مقدار قابل قبول باشد، باید مثبت باشد ؛ امّا $-h^{۲}-۲hh'+۲h'^{۲}<۰$ است، زیرا $h>h'$ می‌باشد، بنابراین باید داشته باشیم $(h-۲h')(h-h'\sqrt{۲})<۰$ ، یعنی $\frac{h}{\sqrt{۲}}<h'<\frac{h}{۲}$. وقتی $h'=\frac{h}{۲}$ است، $x=۰$ و خط D بر ضلع BC منطبق

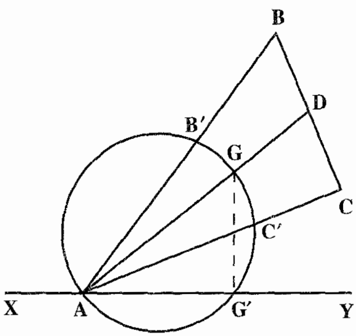
می‌شود. وقتی h' به سمت $\frac{h}{\sqrt{۲}}$ می‌گراید، خط D تا بی‌نهایت دور می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم که D و BC در دوطرف رأس A قرار دارند و x را فاصلهٔ رأس A از D'، وضعیت دوم D فرض می‌کنیم. فاصله‌های G و G' تا D' برابر $x+\frac{۲h}{۳}$ و $x+\frac{۲h'}{۳}$ است و خواهیم داشت:

$$h^{۲}(\frac{۲h}{۳}+x)=۲h'^{۲}(\frac{۲h'}{۳}+x)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۲(۲h'^{۳}-h^{۳})}{۳(h^{۲}-۲h'^{۲})}=\frac{۲(\sqrt[۳]{۲}h'-h)(\sqrt[۳]{۴}h'^{۲}+h^{۲}+\sqrt[۳]{۲}hh')}{۳(h-\sqrt{۲}h')(h+\sqrt{۲}h')}$$

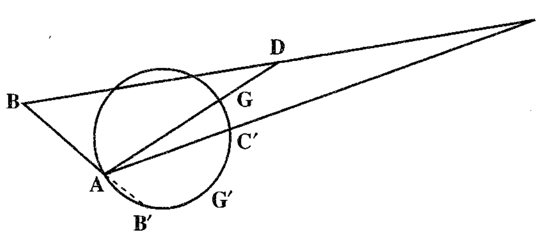
برای این که این مقدار مثبت باشد باید $(\sqrt[۳]{۲}h'-h)(h-\sqrt{۲}h')>۰$ باشد. از آن‌جا: $\frac{h}{\sqrt[۳]{۲}}<h'<\frac{h}{\sqrt{۲}}$ وقتی $h'=\frac{h}{\sqrt[۳]{۲}}$ باشد، D' بر A می‌گذرد، و وقتی $h'=\frac{h}{\sqrt{۲}}$ باشد، خط D' از نقطهٔ A بینهایت دور می‌شود.



۳۵۰. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که حول خط XY که از نقطهٔ داده شدهٔ A می‌گذرد و مثلث را قطع نمی‌کند، دوران می‌نماید. می‌دانیم که اگر G مرکز ثقل مثلث و G' تصویر آن روی XY باشد، حجم حاصل برابر است با:

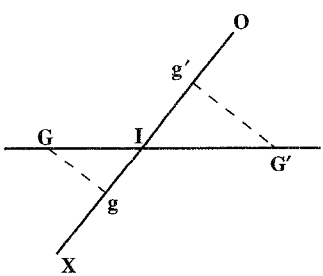
$V=$ مساحت ABC $\times ۲\pi GG'$

بیشترین مقدار V وابسته به بیشترین مقدار GG' است. فرض می‌کنیم هیچکدام از زاویه‌هایی که میانهٔ AD با ضلعهای AB و AC تشکیل می‌دهد، منفرجه نباشد، در این صورت اگر دایرهٔ به قطر AG را رسم کنیم، کمانهای $\overset{\frown}{GB'}$ و $\overset{\frown}{GC'}$ در دو طرف AG قرار خواهند داشت و هنگامی که XY حول A، از حالت AB تا حالت AC دوران کند، درحالی که خارج مثلث باقی می‌ماند، نقطهٔ G' کمان $C'AB'$ را می‌پیماید و GG' در صورتی ماکزیمم است که G' بر نقطهٔ A منطبق شود. در این صورت، وضعیت مورد جستجو برای XY، حالت عمود بر میانهٔ AD است.



در حالت خاص، اگر یکی از زاویه‌های DAB یا DAC قائمه باشد، XY بر یکی از ضلعهای AB یا AC منطبق خواهد شد که بر میانهٔ AD عمود است. اکنون فرض کنیم زاویهٔ DAB منفرجه است. در این حالت، خطهای AB و AC دایرهٔ به قطر AG را در نقطه‌های B' و C' قطع می‌کنند که در یک طرف قطر AG قرار دارند. G' کمان $\overset{\frown}{B'C'}$ را می‌پیماید و GG' در صورتی ماکزیمم است که G' بر نقطهٔ B' منطبق شود. در این صورت XY بر AB منطبق خواهد شد ؛ یعنی بر یکی از ضلعهای AB یا AC که با میانهٔ AD زاویه‌ای منفرجه می‌سازند.

۳۵۱. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ (شکل رسم نشده) را درنظر گرفته، مرکز ثقلهای آنها را G و G' و مساحتهایشان را S و S' می‌نامیم و خط OX را که بر نقطهٔ O می‌گذرد و مثلثها را قطع نمی‌کند اختیار می‌کنیم. اگر g و g' تصویرهای نقطه‌های G و G' روی OX باشند، داریم :



$$V_{ABC} = S \times ۲\pi Gg \quad , \quad V_{A'B'C'} = S' \times ۲\pi G'g'$$

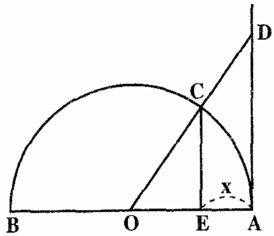
و برای این که $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{m}{m'}$ باشد، باید داشته باشیم $\dfrac{S \times Gg}{S' \times G'g'} = \dfrac{m}{m'}$ ؛ امّا اگر نقطهٔ I محل برخورد GG' و خط OX باشد، داریم :

$$\frac{S \times IG}{S \times IG'} = \frac{m}{m'} \Rightarrow \frac{IG}{IG'} = \frac{m \times S'}{m' \times S}$$

با استفاده از این رابطه نقطهٔ I را می‌توان روی GG' تعیین نمود. با مشخص شدن نقطهٔ I ، خط OX نیز مشخص می‌شود. امّا برای این که این خط جواب باشد باید مثلثها را قطع کند. بنابراین مسأله دارای دو جواب، یک جواب و یا بدون جواب است.

۳۵۲. CE را عمود بر AB رسم می‌کنیم و مقدار مجهول AE را مساوی x می‌گیریم. حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطاع OAC برابر است با $\frac{۲}{۳}\pi r^۲ x$، و حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ OAD برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi AD^۲.r$. $AD^۲$ را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$\frac{AD^۲}{CE^۲}=\frac{r^۲}{(r-x)^۲}$$



امّا $CE^۲=x(۲r-x)$ و از آن‌جا :

$$AD^۲=\frac{r^۲x(۲r-x)}{(r-x)^۲}$$

بنا به فرض باید داشته باشیم :

$$\frac{\frac{۲}{۳}\pi r^۲x(r-x)^۲}{\frac{۱}{۳}\pi r^۲x(۲r-x)}=m$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-(۲-m)rx+(۱-۲m)r^۲=۰ \quad , \quad ۰<x<r$$

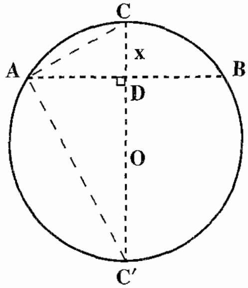
امّا : $f(۰)=(۱-۲m)r^۲ \quad , \quad f(r)=-mr^۲$

چون $af(r)<۰$ است، معادله دارای دو ریشه جداشده به‌وسیلهٔ r (یکی کوچکتر از r و دیگری بزرگتر از r) دارد. برای این که ریشه کوچکتر از r به‌دست آید، باید داشته باشیم :

$$(۱-۲m)r^۲>۰ \text{ یا } m<\frac{۱}{۲}$$

وقتی $m=\frac{۱}{۶}$ باشد، معادله به‌صورت $۶x^۲-۱۱rx+۴r^۲=۰$ درمی‌آید و ریشهٔ قابل قبول آن $x=\frac{r}{۲}$ است. در این حالت دیده می‌شود که $A\hat{O}C=۶۰^\circ$ است.

۴.۱۱. رسم صفحه



۳۵۳. شعاع کره را r می‌گیریم. قطعهٔ کروی محدود به دایرهٔ به قطر AB و منطقه ABC را مورد بررسی قرار می‌دهیم. داریم :

$$\frac{\frac{1}{6}\pi CD(CD^2+3AD^2)}{\frac{2}{3}\pi r^2 CD}=m \Rightarrow CD^2+3AD^2=4mr^2 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم $CD=x$ باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ CAC' داریم $AD'^2=x(2r-x)$. با قرار دادن این مقدارها در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$f(x)=x^2-3rx+2mr^2=0 \quad , \quad 0<x<2r$$

یک و تنها یک جواب وجود دارد، در صورتی که $f(0)f(2r)<0$ باشد. امّا :

$$f(0)=2mr^2 \ , \ f(2r)=2(m-1)r^2 \Rightarrow f(0)f(2r)=4m(m-1)r^4$$

پس برای آن‌که $f(0)f(2r)<0$ باشد، باید $m(m-1)<0$ باشد، یعنی $0<m<1$ باشد. در این‌حالت تنها یک جواب قابل قبول وجود دارد؛ یعنی کوچکترین، چون که صفر خارج ریشه‌هاست. این ریشه برابر است با $x=\frac{3-\sqrt{9-8m}}{2}r$. برای آن که هر دو ریشه معادله قابل قبول باشد، باید : $f(2r)f(\frac{S}{2})<0$ و $f(0)f(\frac{S}{2})<0$ فرض کنیم S مجموع ریشه‌ها مساوی 3r باشد، یا :

$$m(8m-9)<0 \ , \ (m-1)(8m-9)<0 \Rightarrow 1<m<\frac{9}{8}$$

وقتی $m=1$ است، $x'=r$ و $x''=2r$ که هردو قابل قبول هستند.

وقتی $m=\frac{9}{8}$ است، $x'=x''=\frac{3r}{2}$ می‌باشد که قابل قبول است.

۳۵۴. x را فاصله مرکز کره از صفحهٔ رسم شده می‌گیریم. شعاع مقطع مساوی است با $\sqrt{r^2-x^2}$. منطقه‌های کروی بترتیب دارای ارتفاعهای $r+x$ و $r-x$ می‌باشند.

تفاضل دو منطقه برابر است با :

$$2\pi r(r+x)-2\pi r(r-x)=2\pi r.2x=4\pi rx$$

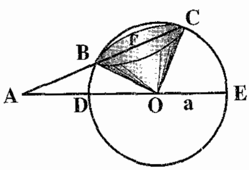
مساحت مقطع برابر $\pi(r^2+x^2)$ است ؛ بنابراین :

$$4\pi rx=\pi(r^2-x^2)\Rightarrow x^2+4rx=r^2$$

$$\Rightarrow x=-2r\pm\sqrt{4r^2+r^2}=r(-2\pm\sqrt{5})$$

جواب مثبت که از ۱ کمتر است، جواب مسأله است، زیرا باید $x<r$ باشد.

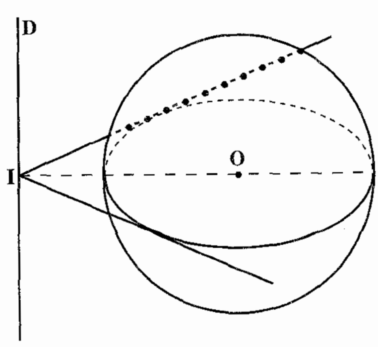
۳۵۵. بنا به قضیهٔ دالامبر، شش مرکز تجانس دوبه‌دوی کره‌ها، سه‌به سه روی یک خط راست قرار دارند و چهار خط بر آنها می‌گذرد. بر هریک از این خطها می‌توان یک صفحهٔ مماس بر یک کره رسم کرد، و این صفحه بر سه کرهٔ داده شده مماس خواهد بود. عموماً مسأله هشت جواب دارد.



۳۵۶. فرض می‌کنیم DBCE دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که از نقطهٔ A عمود بر مقطع به قطر BC رسم شده است.
با فرض $FC=BF=x$ و $OF=y$ ، حجم مخروط مساوی $\frac{\pi}{3}x^2y$ خواهد بود. از طرفی $x^2+y^2=a^2$ است. بنابراین بیشترین مقدار حجم در صورتی حاصل می‌شود که داشته باشیم :

$$x^2=\frac{2}{3}a^2 \quad , \quad y=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

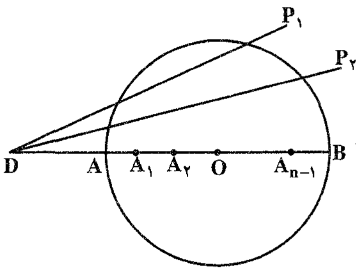
$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}.\frac{2}{3}a^2.\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}a^3$$



۳۵۷. کره و خط را با صفحه‌ای مانند P که از مرکز کره بر خط داده شده عمود می‌شود قطع می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این صفحه و خط دادهٔ شدهٔ D را I و فصل مشترک کره با این صفحه را دایرهٔ O می‌نامیم. بنا به قانون تقارن، نقطه‌های تماس صفحه‌های مماس مورد جستجو، در این صفحه خواهند بود. این نقطه‌ها، نقطه‌های تماس دایرهٔ مقطع صفحه با کره (دایرهٔ O)، با خطهایی هستند که از نقطهٔ I مماس بر این دایره

رسم می‌شوند.
دیده می‌شود برای آن که مسأله جواب داشته باشد، لازم و کافی است که نقطهٔ I خارج کره باشد یعنی خط D کره را قطع نکند. در صورتی که خط D مماس بر کره باشد تنها صفحه‌ای که در نقطهٔ تماس بر کره مماس رسم می‌شود، جواب مسأله است.

۳۵۸. صفحهٔ شکل را صفحه‌ای می‌گیریم که از نقطهٔ O مرکز کره بر خط عمود می‌شود. تصویرهای این صفحه‌ها روی صفحهٔ شکل خطهای P_1، P_2 و ... هستند که بر D نقطه برخورد خط یا صفحهٔ شکل می‌گذرند. می‌دانیم که مساحت یک منطقه به ارتفاع h در کره‌ای به شعاع r مساوی $2\pi rh$ است. در این صورت اگر $2\pi rh_1$ مساحت عرقچین واقع در بالای P_1 مساوی nامین قسمت از مساحت شعاع کره باشد، داریم:

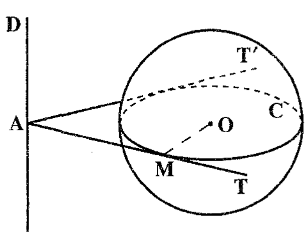


$$2\pi rh_1 = \frac{4\pi r^2}{n} \Rightarrow h_1 = \frac{2r}{n}$$

عرقچین واقع در بالای P_2 باید دو برابر اوّلی باشد؛ بنابراین اگر h_2 ارتفاع آن باشد، داریم: $h_2 = \frac{4r}{n}$. به‌طور مشابه عرقچین واقع در بالای صفحهٔ P_3 ارتفاعی مساوی $h_3 = \frac{2r}{n} \times 3$ دارد و ...

در این صورت اگر قطر AB را به n قسمت مساوی AA_1، A_1A_2، ... و $A_{n-1}B$ تقسیم کنیم و کره‌های هم‌مرکز با کرهٔ اوّلی و به شعاعهای OA_1، OA_2، ... و OA_{n-1} را رسم کنیم، صفحه‌های مورد جستجوی P_1، P_2 و ... صفحه‌های مماس بر این کره‌ها هستند که این صفحه‌ها در بالای AB هستند در صورتی که $AA_k < r$ و در پایین AB هستند در صورتی که $AA_k > r$ باشد.

۳۵۹. کره‌ای به مرکز O، خط راست D و M نقطهٔ تماس یک صفحه که بر خط D گذشته با کره، را درنظر می‌گیریم؛ شعاع OM بر این صفحه و بنابراین بر خط D عمود است.

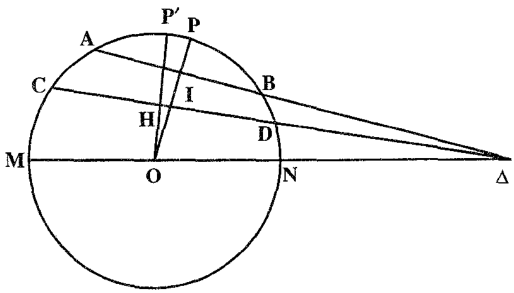


مقطع شکل را با صفحه‌ای که از نقطهٔ O عمود بر

خط D رسم می‌شود درنظر می‌گیریم. این صفحه، کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ (C) که بر نقطهٔ M می‌گذرد، خط D را در نقطهٔ A قطع می‌کند؛ AM در نقطهٔ M بر دایرهٔ (C) مماس است.

بعکس، صفحه‌ای که با خط D و مماس AT بر دایره، مشخص می‌شود، بر کره مماس است، زیرا شعاع OM که بر AT و بر خط D عمود می‌باشد، بر صفحه DAT عمود است.

از آن‌چه گفته شد نتیجه می‌شود که صفحه‌های مشخص شده با خط D و مماسهایی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ C رسم می‌شوند، صفحه‌های مماس بر کره هستند که شامل خط D می‌باشند. اگر نقطهٔ A خارج دایرهٔ C، یعنی خط D خارج کره قرار داشته باشد، مسأله دو جواب دارد. اگر خط مماس بر کره باشد، مسأله یک جواب دارد و اگر خط D کره را قطع کند، مسأله جواب ندارد.



۳۶۰. می‌دانیم که سطح عرقچین کروی مساوی است با سطح جانبی استوانه‌ای که قاعدهٔ آن دایرهٔ عظیمهٔ کره و ارتفاع آن ارتفاع عرقچین کروی باشد. پس اگر فرض کنیم که شکل مقطع مسأله طرح شده با صفحه‌ای عمود بر خط Δ از مرکز کره باشد و خط Δ بر صفحهٔ شکل عمود باشد شکل بالا را خواهیم داشت که Δ اثر خط Δ برصفحهٔ کاغذ و دایرهٔ O دایرهٔ عظیمهٔ شکل کره است.

سطح عرقچین کروی AB مساوی است با $2\pi R$. IP که IP عمودی است از O بر صفحهٔ (در شکل بر خط AB) AB و چون :

$$IP=\frac{2R}{n} \quad \text{پس} \quad 2\pi R\times IP=4\pi R^2\times\frac{1}{n}$$

و همچنین برای عرقچین دوم CPD سطح آن باید دو برابر سطح عرقچین قبل باشد پس $HP=\frac{4R}{n}$ و همچنین برای عرقچین مرتبهٔ iام ارتفاع آن $\frac{2iR}{n}$ خواهد بود. لذا فاصله‌های این صفحه‌ها از مرکز کره مرتباً $2R\frac{n-1}{n}$ و $2R\frac{n-2}{n}$ و.... و $2R\frac{n-i}{n}$ و...

۳۶۱. خط تماس؛ یعنی خطی که نقطه‌های تماس دوکره با صفحهٔ مماس را به هم وصل می‌کند، یک خط مماس مشترک دو کره است. بنابراین از یکی از مرکزهای تجانس دوکره می‌گذرد؛ همین ویژگی برای صفحه مماس نیز وجود دارد. بنابراین مرکزهای تجانس دو کره را مشخص می‌کنیم. فرض می‌کنیم E یکی از مرکزها باشد، مسأله برمی‌گردد به این مسأله که باید بر خط AE صفحه‌ای بگذرانیم که بر کرهٔ B مماس باشد. حل این مسأله را در مسألهٔ ۳۶۲ خواهیم دید.

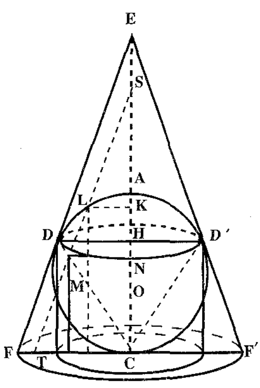
مسأله عموماً چهار جواب دارد زیرا دو کره، دو مرکز تجانس دارند و به ازای هر مرکز تجانس نیز دو جواب وجود دارد. بدیهی است اگر مرکز تجانسی از دو کره درون آنها قرار بگیرد، مسأله به ازای آن جواب ندارد.

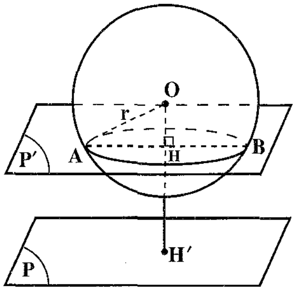
۳۶۲. از نقطهٔ C مرکز کره، صفحه‌ای عمود بر خط AB رسم می‌کنیم. این صفحه، خط AB را در نقطه‌ای مانند D و کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ EFG قطع می‌کند. در این صفحهٔ کمکی و از نقطهٔ D باید خط مماس DE را بر دایرهٔ عظیمهٔ ایجاد شده رسم کنیم. صفحهٔ گذرنده بر ADB و DE جواب مسأله است؛ در واقع این صفحه، بر شعاع OE در نقطهٔ تماس عمود است. زیرا شعاع OE بر خط مماس ED و بر خطی که آن را از نقطهٔ E موازی AB رسم می‌کنیم، عمود است.

تبصره. هنگامی که خط AB کره را قطع نکند، مسأله دو جواب دارد، اگر مماس بر کره باشد مسأله یک جواب دارد و اگر کره را قطع کند، مسأله جواب ندارد.

۳۶۳. حجم مخروط CDD' در صورتی ماکزیمم خواهد بود که حجم استوانه‌ای که حجم این مخروط $\frac{۱}{۳}$ آن است ماکزیمم باشد و این درصورتی است که $CH=\frac{۴}{۳}r$ باشد. از آن‌جا $V=\frac{۳۲}{۸۱}\pi r^{۳}$.

تبصره. $HC=\frac{۴r}{۳}$ ، بنابراین $CE=۴r$ و همچنین $AE=۲r$.

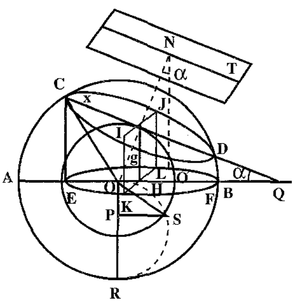




۳۶۴. از مرکز کره عمود OH' را بر صفحهٔ P رسم می‌کنیم. مرکز دایرهٔ مقطع روی این خط قرار دارد. برای تعیین مرکز این دایره، می‌دانیم که شعاع دایرهٔ محاط بر مربع به ضلع a مساوی $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است. پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم:

$$OH = \sqrt{r^۲ - (\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \sqrt{r^۲ - \frac{a^۲}{۲}} = \text{مقدار معلوم}$$

بنابراین برای رسم صفحهٔ خواسته شده، روی OH' به اندازهٔ OH جدا می‌کنیم و از نقطهٔ H صفحهٔ موردنظر را موازی صفحهٔ P رسم می‌نماییم.



۳۶۵. از مرکز O عمود OMN را بر صفحهٔ داده شده فرود می‌آوریم. این عمود، از نقطهٔ M مرکز مقطع می‌گذرد. عمود NQ را رسم می‌نماییم. زاویه‌های ONQ و OGM مساوی‌اند. بنابراین نسبت $\frac{NQ}{NO}$ معلوم است، زیرا زاویهٔ α داده شده است. $OM = MJ$ را با x و OM را با y نشان می‌دهیم. تصویر ELFK از دایرهٔ CD یک بیضی است. قطر IJ که با دایرهٔ عظیمه موازی است، به اندازهٔ طول واقعی‌اش تصویر می‌شود. پس:

$$LH = MJ = x$$

$$HF = HE = CM\cos\alpha = x\cos\alpha (\cos\alpha = \frac{NQ}{NO})$$

$$V = \pi\, HE.HL.HM$$

اما $MH = y\cos\alpha$ ؛ بنابراین:

$$V = \pi x\cos\alpha . x . y\cos\alpha$$

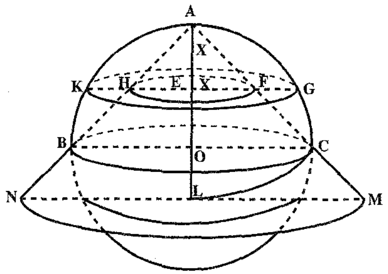
یا

$$V = \pi x^۲ y \cos^۲\alpha$$

ماکزیمم حجم تنها وابسته به $x^۲y$ است؛ امّا $x^۲ + y^۲ = r^۲$ است. پس ماکزیمم حجم

وقتی است که $x^{۲} = \frac{۲}{۳} r^{۲}$ و یا $y^{۲} = \frac{r^{۲}}{۳}$ باشد. در این صورت با تقسیم OR به سه قسمت مساوی، اخراج کردن عمود PS، دایره‌ای به شعاع OS خواهیم داشت و صفحه‌ای موازی صفحهٔ داده شده می‌توان رسم کرد.

۳۶۶. داریم :



$$EG^{۲} = ۲rx - x^{۲} \ , \ EF^{۲} = x^{۲}$$

$$EG^{۲} - EF^{۲} = ۲rx - ۲x^{۲} = a^{۲}$$

$$(r-x)x = \frac{a^{۲}}{۲}$$

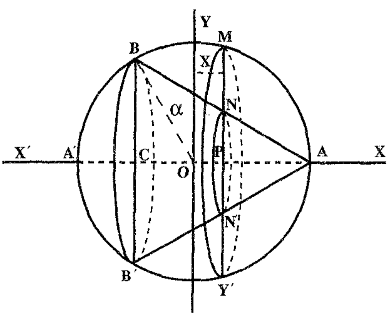
ماکزیمم حاصلضرب $(r-x)x$ وقتی ماکزیمم است که $r - x = x$ ؛ یعنی $x = \frac{r}{۲}$ باشد، زیرا مجموع دو مقدار x و $r - x$ ثابت است.

تبصره. هنگامی که بخواهیم مقطعها به نسبت $\frac{m}{n}$ باشد، داریم :

$$\frac{EG^{۲}}{EF^{۲}} = \frac{m}{n} = \frac{۲rx - x^{۲}}{x^{۲}}$$

با حل معادله‌ای درجهٔ دوم، x بسادگی محاسبه می‌شود.

۳۶۷. فرض می‌کنیم a شعاع کره، A رأس مخروط و BB' قطر قاعدهٔ مخروط باشد. می‌دانیم که $BB' = AB$ و $OC = \frac{a}{۲}$، زیرا مثلث ABB' متساوی‌الاضلاع است.



مقطع رسم شده از نقطهٔ A یا از قاعدهٔ BB'، تفاضلی مساوی صفر ایجاد می‌کند. حال آن که، هر مقطع مقدار زیر را برای تاج دایره می‌دهد :

$$\pi(MP^{۲} - NP^{۲})$$

پس یک ماکزیمم بین A و C وجود دارد.

برای تعیین مساحت تاج دایرهٔ متناظر با MN ، کافی است که $MP^۲$ و $NP^۲$ را برحسب a و x یا OP به‌دست آوریم :

اوّلاً، $MP^۲ = a^۲ - x^۲$

ثانیاً، مثلث ANN' متساوی‌الاضلاع است. بنابراین :

$$AP = \frac{AN}{۲}\sqrt{۳} = PN\sqrt{۳} \Rightarrow PN = \frac{AP}{\sqrt{۳}} = \frac{a-x}{\sqrt{۳}} \ ,$$

$$PN^۲ = \frac{a^۲ - ۲ax + x^۲}{۳} \qquad (۱)$$

$$MP^۲ - PN^۲ = \frac{۲a^۲ + ۲ax - ۴x^۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \pi(MP^۲ - NP^۲) = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{a^۲}{۲} + \frac{ax}{۲} - x^۲) \qquad (۲)$$

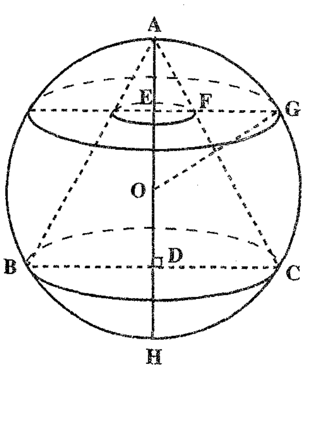
تغییرات، تنها به عامل $\frac{a}{۲}x - x^۲$ یعنی $x(\frac{a}{۲} - x)$ وابسته است امّا مجموع این دو مقدار ثابت است. پس وقتی ماکزیمم وجود دارد که :

$$x = \frac{a}{۲} - x \Rightarrow x = \frac{a}{۴}$$

بنابراین ماکزیمم $\frac{۲}{۳}\pi(a^۲ + ax - ۲x^۲)$ برابر است با :

$$\frac{۲}{۳}\pi(a^۲ + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۸}) = \frac{۳}{۴}\pi a^۲$$

۳۶۸. BC را ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی درنظر می‌گیریم. در این صورت نصف آن برابر است با :



$$DC = \frac{r}{۲}\sqrt{۳}$$

و داریم :

$$DO = \frac{r}{۲}$$

فرض می‌کنیم $AE = x$ باشد. سطح چنبری ایجاد

شده برابر است با :

$$\pi(EG^{۲} - EF^{۲})$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع $EF = \frac{AF}{۲}$ است. بنابراین :

$$EF^{۲} = \frac{x^{۲}}{۳} \quad , \quad EG^{۲} = AE.EH = x(۲r - x) = ۲rx - x^{۲}$$

بنابراین :

$$۲rx - x^{۲} - \frac{x^{۲}}{۳} = a^{۲} \Rightarrow ۲rx - \frac{۴x^{۲}}{۳} = a^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}rx - x^{۲} = \frac{۳}{۴}a^{۲} \;\; , \;\; \frac{۳}{۲}r - x = \frac{۳}{۴}a^{۲}$$

مسأله برمی‌گردد به رسم یک مثلث که از آن اندازهٔ مساحت $\frac{۳}{۴}a^{۲}$ و مجموع ضلعها $\frac{۳}{۲}r$ ، x و $\frac{۳}{۲}r - x$ معلوم است.

ماکزیمم. ماکزیمم سطح هنگامی است که دو ضلع مجاور مستطیل مساوی با نصف مجموع این دو ضلع باشد. یعنی در این حالت داریم : $x = \frac{۳}{۴}r$.

۳۶۹. شعاع کره را a و شعاع قاعدهٔ مخروط را b و ارتفاع آن را ۲a می‌گیریم و فاصلهٔ رأس مخروط از صفحهٔ قاطع را x می‌نامیم.

شعاع b' از مقطع مخروط از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$\frac{b'}{b} = \frac{x}{۲a} \quad , \quad b' = \frac{bx}{۲a}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\pi b'^{۲} = \frac{\pi b^{۲}x^{۲}}{۴a^{۲}}$$

a' شعاع مقطع کره، واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط x و $(۲a - x)$ است. پس مقطع کره مساوی است با :

$$\pi a'^{۲} = \pi x(۲a - x)$$

اگر نسبت مقطع مخروط به مقطع کره مساوی $\frac{m}{n}$ باشد، خواهیم داشت :

$$\frac{\pi b^2 x^2}{4a^2} : \pi x(2a-x) = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{b^2 x}{4a^2(2a-x)} = \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8a^3 m}{b^2 n + 4a^2 m}$$

تبصره. اگر $m = n$ باشد، خواهیم داشت :

$$x = \frac{8a^3}{b^2 + 4a^2}$$

درحالت خاصی که قاعدهٔ مخروط مساوی دایرهٔ عظیمهٔ کره یعنی $b = a$ است، خواهیم داشت :

$$x = \frac{8a}{5}$$

۳۷۰. هر صفحه مماس، فضا را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در این صورت دو حالت ممکن است اتفاق افتد : یا هر سه کره، در یک طرف نیم‌فضا قرار می‌گیرند. یا دو تا از کره‌ها، در یک طرف نیم‌فضا، و دیگری درطرف دیگر قرار می‌گیرد. به آسانی دیده می‌شود که اگر صفحه‌ای بر یک کره مماس باشد، صفحه دیگری که نسبت به صفحه گذرنده از مرکز کره، قرینه آن باشد، بر همان کره مماس می‌شود. نشان می‌دهیم صفحه‌ای موجود نیست که، بر کره‌های داده شده مماس باشد، به قسمی که کره‌های به شعاع ۳ و ۴ در یک طرف آن، و کره به شعاع ۶ در طرف دیگر آن قرار داشته باشد. فرض کنیم مرکزهای کره‌های به شعاعهای ۳، ۴ و ۶ بترتیب A ، B و C باشند. صفحه مماس بر کره‌ها به قسمی که در بالا به آن اشاره شد، ضلعهای AB و BC را بترتیب به نسبتهای ۲ :۱ و ۳ :۲ تقسیم می‌کند. یعنی از نقطه‌های K و L بر روی AC و BC طوری می‌گذرند که :

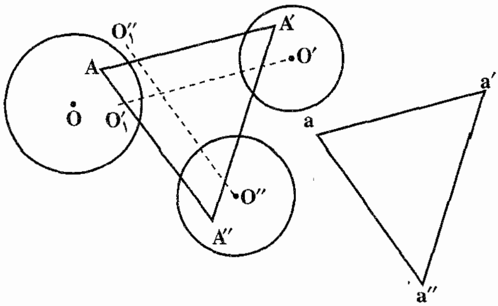
$$CL = \frac{33}{5} \quad , \quad CK = \frac{22}{3}$$

فاصله C از KL هم، به آسانی محاسبه می‌شود، که برابر است با $33\sqrt{\frac{3}{91}} < 6$.

بنابراین بلافاصله، معلوم می‌شود که از KL ، نمی‌توان صفحه‌ای مماس بر کره به شعاع ۶ و مرکز C مرور داد.

می‌توان نشان داد همه صفحه‌های مماس دیگر، وجود دارند و تعداد آنها کلاً شش تا است.

۵.۱۱. رسم مثلث



۳۷۱. فرض می‌کنیم $AA'A''$ مثلثی باشد که سه رأسش روی سه کرهٔ داده شدهٔ O ، O' و O'' است. برای آن که بتوانیم این مثلث را از انتقال مثلث داده شدهٔ $aa'a''$ به‌دست آوریم، لازم وکافی است که ضلعهای متناظر این دو مثلث، مساوی و موازی باشند.

برای حل مسأله، پاره‌خطهای $O'O_1'$ و $O''O_1''$ را موازی و مساوی با $a'a$ و $a''a$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ A نقطهٔ مشترک بین کرهٔ O و کره‌های به مرکزهای O_1' و O_1'' است که بترتیب با کره‌های O' و O'' مساوی می‌باشند. با مشخص شدن نقطهٔ A ، پاره‌خطهای AA' و AA'' را موازی و مساوی aa' و aa'' رسم می‌کنیم. ما دو رأس دیگر A' و A'' نیز خواهیم داشت، که بترتیب روی کره‌های O' و O'' واقعند. برای آن که مسأله جواب داشته باشد، باید کره‌های O ، O_1' و O_1'' دست کم یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

۶.۱۱. رسم چندضلعی منتظم

۳۷۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و چندضلعی منتظم P' محاط در کره از انتقال چندضلعی منتظم داده شدهٔ P به‌دست آمده است.

در این انتقال دایره‌های محیطی C و C' از این دوچندضلعی منتظم، متناظرند. پس برای تعیین چندضلعی P' ، کافی است روی کره، دایرهٔ C' را مشخص کنیم. امّا برای آن که C' متناظر دایرهٔ C در یک انتقال باشد، لازم و کافی است که با دایرهٔ C مساوی و صفحه‌های آن دو، با هم موازی باشند.

در نتیجه، اگر R شعاع کرهٔ داده شده و r شعاع دایرهٔ C باشد، صفحهٔ C' مماس با کره‌ای هم مرکز با کرهٔ C و به شعاع $\sqrt{R^2-r^2}$ است ؛ بنابراین بر کرهٔ اخیر صفحه‌ای مماس و موازی صفحهٔ دایرهٔ C رسم می‌کنیم. فصل مشترک این صفحه با کرهٔ داده شده، دایرهٔ C' است.

مسأله دارای دو جواب است. شرط امکان مسأله آن است که $R > r$ باشد.

۷.۱۱. رسم چند ضلعی کروی

۳۷۳. (د. دانکن) سه دایرهٔ عظیمه که یکدیگر را در نقطه‌های متمایز قطع می‌کنند، سطح کروی را به ۸ مثلث کروی تقسیم می‌کنند که به شکل زوجهایی متقارن در نیمکره‌های روبه‌روی هم‌واقع‌اند. فرض کنید دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را در O و O′ قطع کنند و دایرهٔ عظیمهٔ سومی این دو دایره را به ترتیبی در A، A′ ، B و B′ قطع کند. در نیمکرهٔ محدود به دایرهٔ عظیمه‌ای که از A، B، A′ و B′ می‌گذرد و شامل نقطهٔ O است، آرایش حاصل از رسم دایرهٔ عظیمهٔ چهارمی را بررسی می‌کنیم. این دایرهٔ عظیمهٔ چهارم، دایرهٔ عظیمهٔ سوم را در نقاط متقاطر C و C′ ، نیمدایرهٔ AOA′ را در P و نیمدایرهٔ BOB′ را در Q قطع می‌کند. بنابراین از تقاطع دایره‌ها مثلث OPQ حاصل می‌شود که دورتادور آن این شکلها قرار دارند: مثلث AOB ، چهارضلعی BOPC ، مثلث CPA′ ، چهارضلعی A′PQB′ ، مثلث B′QC′ و چهارضلعی C′QOA . بنابراین چهار دایرهٔ عظیمه که نقطه‌های تقاطع آنها متمایزند، همیشه باید ۸ مثلث کروی و ۶ چهارضلعی کروی روی کره ایجاد کنند.

باز هم نیمکرهٔ محدود به دایرهٔ عظیمهٔ سوم را با آرایش پیشگفته درنظر بگیرید. فرض کنید دایرهٔ عظیمهٔ پنجم دایرهٔ عظیمهٔ سوم را در نقاط D و D′ قطع کند که یکی از آنها باید روی یکی از ضلعهای یکی از مثلثها و دیگری روی یکی از ضلعهای یکی از چهارضلعیها باشد. فرض کنید D روی ضلع AB از مثلث AOB و D′ روی ضلع A′B′ از چهارضلعی A′PQB′ باشد. توجه کنید که هر ضلع مثلث OPQ ضلع یکی از چهارضلعیها نیز هست. اکنون DD′ یا از درون مثلث OPQ می‌گذرد یا نمی‌گذرد.

اگر DD′ از درون مثلث OPQ بگذرد، باید دو ضلع این مثلث را قطع کند، و در نتیجه مثلث OPQ را به یک مثلث و یک چهارضلعی تقسیم می‌کند. نیمدایرهٔ DD′ نیز باید AOB را به یک مثلث و یک چهارضلعی، چهارضلعیی که از آن به OPQ وارد می‌شود به یک مثلث و یک پنج‌ضلعی و A′PQB′ را به دو چهارضلعی تقسیم می‌کند. بنابراین دایرهٔ پنجم روی نیمکره آرایشی متشکل از ۵ مثلث، ۵ چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی ایجاد می‌کند.

اگر DD′ به OPQ وارد نشود، باید از چهار چندضلعی متوالی جانبی بگذرد و به این ترتیب AOB را به یک مثلث و یک چهارضلعی، چهارضلعی مجاورش را به دو چهارضلعی، مثلث مجاور بعدی را به یک مثلث و یک چهارضلعی، و A′PQB′ را به یک مثلث و یک پنج‌ضلعی تقسیم می‌کند. باز هم ۵ مثلث، ۵ چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی به‌دست آورده‌ایم.

بنابراین، آرایش حاصل از ۵ دایرهٔ عظیمه روی کره که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، دقیقاً از ۱۰ مثلث، ۱۰ چهارضلعی و ۲ پنج‌ضلعی تشکیل می‌شود. گذشته از این، دایرهٔ عظیمهٔ ششمی اگر پنج‌ضلعیی را قطع کند، آن را یا به یک پنج‌ضلعی و یک چهارضلعی و یا به یک مثلث و یک شش‌ضلعی تقسیم می‌کند. بنابراین، اگر روی کره n دایرهٔ عظیمه $(n \geq ۵)$ داشته باشیم که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، همواره دست‌کم یک چندضلعی کروی با ۵ ضلع یا بیشتر از ۵ ضلع داریم.

۸.۱۱. رسم کمان

۳۷۴. به کمک یک پرگار کروی، و گشادگی مساوی وتر یک دایره، یا $r\sqrt{۲}$، یا $۱/۴۱۴r$ به مرکزهای A و B کمانهایی رسم می‌کنیم که نقطهٔ P قطب کمان خواسته شده AB را مشخص می‌کنند.

۳۷۵. به مرکز A، با شعاعی به اندازهٔ $r\sqrt{۲}$، کمان داده شده BC را قطع می‌کنیم، و از نقطهٔ C با همین شعاع، کمان خواسته شده BAP را رسم می‌کنیم.

۳۷۶. باید مرکز تجانس دو دایره را مشخص کنیم، و از این نقطه، دایرهٔ عظیمه‌ای مماس بر یکی از دایره‌های داده شده رسم کنیم.

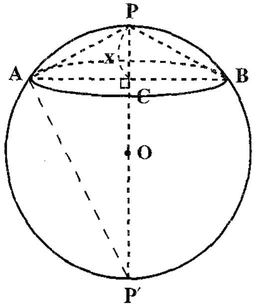
تبصره. چون دو دسته مرکز تجانس وجود دارد و هر دسته دو دایرهٔ مماس را مشخص می‌کند، پس مسأله وقتی که دو دایره برون هم باشند، دارای چهار جواب است.

۹.۱۱. رسم دایره

۳۷۷. دایرهٔ کوچک به قطر AB را با فاصله‌اش از قطب P یعنی $CP = x$ نشان می‌دهیم و شعاع کره را r می‌نامیم. اندازهٔ حجم مخروط به قاعدهٔ AB و رأس P برابر است با:

$\frac{۱}{۳}\pi CA^۲.CP$ و حجم قطعهٔ کروی APB برابر است

با: $\frac{۱}{۶}\pi CP(CP^۲ + ۳CA^۲)$ از آن‌جا بنا به فرض داریم:



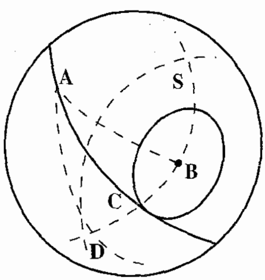
$$\frac{\frac{۱}{۳}\pi.CA^۲.CP}{\frac{۱}{۶}\pi CP.(CP^۲ + ۳CA^۲)} = k \Rightarrow \frac{۲CA^۲}{CP^۲ + ۳CA^۲} = k$$

امّا $CP = x$ ، و در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAP' ، داریم : $CA^{۲} = x(۲r - x)$ از آن‌جا با جایگذاری و ساده کردن نتیجه می‌شود : $\frac{۲r - x}{۳r - x} = k \Rightarrow x = \frac{۳k - ۲}{k - ۱} r$ برای قابل قبول بودن، این مقدار باید مثبت و کمتر از $۲r$ باشد. برای مثبت بودن مقدار x، باید k بین ۱ و $\frac{۲}{۳}$ قرار نداشته باشد $((۳k - ۲)(k - ۱) > ۰)$ و برای این که $x < r$ باشد باید داشته باشیم :

$$\frac{۳k - ۲}{k - ۱} r < ۲r \Rightarrow \frac{k}{k - ۱} < ۰ \Rightarrow ۰ < k < ۱$$

به‌طور خلاصه، برای آن که مسأله ممکن باشد، باید $k < \frac{۲}{۳}$ باشد، بنابراین مخروط از $\frac{۲}{۳}$ قطعه کوچکتر است.

۳۷۸. راه حل این مسأله شبیه راه حل مسأله مشابه در هندسه مسطحه است.
فرض می‌کنیم B مرکز دایرهٔ داده شده، r وتری از دایرهٔ عظیمه‌ای باشد که با دایرهٔ کوچک داده شده شعاع همخط دارد.



وتر S را چنان مشخص می‌کنیم که، در یک دایرهٔ عظیمه، وتر کمانی باشد که این کمان دو برابر کمان نظیر وتر r است. سپس به مرکز B و با شعاع S یک دایره رسم می‌کنیم و فصل مشترک آن را با دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم D یک نقطه برخورد آنها باشد، بالاخره دایرهٔ عظیمه‌ای را که بر وسط BD می‌گذرد رسم می‌کنیم. این دایرهٔ عظیمه بر دایرهٔ داده شده مماس است.
تبصره. نقطهٔ تماس C به وسیلهٔ فصل مشترک دایرهٔ داده شده و دایرهٔ عظیمه‌ای که بر B و D می‌گذرد، مشخص می‌شود.

۳۷۹. می‌توان مشابه هندسهٔ مسطحه عمل کرد.

بر A و B دایره‌ای دلخواه مانند D می‌گذرانیم که دایرهٔ C را در دو نقطهٔ E و F قطع کند. محل برخورد دایره‌های عظیمه‌ای را که بر AB و EF می‌گذرد، G می‌نامیم. از نقطهٔ G دایرهٔ عظیمه‌ای مماس بر دایرهٔ C رسم می‌کنیم، و H را نقطهٔ تماس آنها می‌نامیم؛ آن‌گاه دایره‌ای بر سه نقطهٔ A ، B و H می‌گذرانیم. این دایره جواب مسأله است.

۳۸۰. می‌توان مشابه هندسهٔ مسطحه عمل کرد.

نقطهٔ S یک مرکز تجانس دو دایرهٔ B و C را مشخص می‌کنیم. بر نقطهٔ S دایره‌ای می‌گذرانیم که دو دایره B و C را قطع کند. نقطه‌های برخورد غیرمتجانس را E و F می‌نامیم. بر نقطه‌های E ، F و نقطهٔ A یک دایرهٔ صغیره رسم می‌کنیم. D را نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ SA می‌نامیم. سپس بر A و D دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر یکی از دایره‌های داده شده مماس باشد.

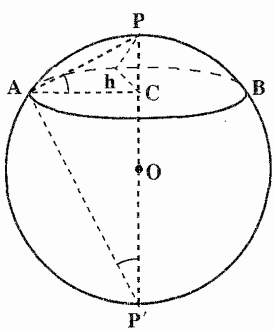
۳۸۱. به روش مشابه هندسهٔ مسطحه، این مسأله تبدیل به مسأله‌ای می‌شود که بخواهیم بر یک نقطهٔ داده شده، دایره‌ای رسم کنیم که بر دو دایرهٔ داده شده مماس باشد. حل این مسأله را قبلاً دیدیم.

۱۱.۱۰. رسم عرقچین

۳۸۲. مساحت عرقچین PAB مساوی $\pi \overline{PA}^2$ است.

و بنابه فرض داریم:

$$\frac{\pi \overline{PA}^2}{\pi \overline{CA}^2} = k \Rightarrow \frac{PA}{CA} = \sqrt{k}$$



امّا، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PAC و PP′A متشابه‌اند، زیرا یک زاویهٔ حاده مشترک دارند، پس داریم:

$$\frac{PA}{CA} = \frac{PP'}{P'A} = \frac{2r}{P'A}$$

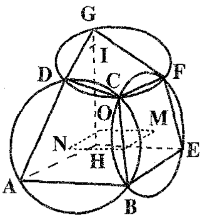
بنابراین داریم:

$$\frac{2r}{P'A} = \sqrt{k} \Rightarrow P'A = \frac{2r}{\sqrt{k}}$$

وتر $P'A$ معلوم است، بنابراین عرقچین PAB مشخص شده است. برای آن که مسأله ممکن باشد، لازم و کافی است که $P'A < ۲r$، یعنی $k > ۱$ باشد.

۱۱.۱۱. رسم چندوجهی

۳۸۳. یک دایره برچهارضلعی ABCD و دایره‌ای دیگر بر چهارضلعی BEFC محیط می‌کنیم. مرکزهای این دو دایره را به‌ترتیب N و M می‌نامیم. در صفحه‌ای که برخط MN عمود بر وتر مشترک BC می‌گذرد، می‌توان از نقطه‌های M و N عمودهایی بر چهارضلعیهای ABCD و BEFC اخراج نمود. این دو عمود متقاطعند، و O را نقطهٔ برخورد آنها می‌نامیم. این نقطه، مرکز کره‌ای است که بر دو دایره رسم شده در بالا می‌گذرد؛ یعنی بر نقطه‌های A ، B ، C ، D ، E و F مرور می‌کند.



امّا مقطع این کره با صفحهٔ مشخص شده با سه نقطهٔ D ، C و F باید شامل چهارمین رأس G از هر چهارضلعی محاطی بشود که نقطه‌های D ، C و F رأسهای آنها هستند. بنابراین کره از نقطهٔ G می‌گذرد، و به دلیل مشابه، از نقطهٔ رأس H نیز می‌گذرد. بنابراین ...

۱۲.۱۱. رسم منشور

۳۸۴. راه اولّ. نصف ارتفاع منشور مثلث‌القاعدهٔ محاطی را y ، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی را که قاعدهٔ منشور گرفته می‌شود x ، و شعاع کره را a فرض می‌کنیم. داریم:

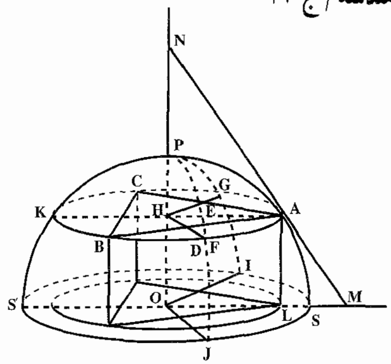
$$x^۲ + y^۲ = a^۲$$

باید مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع قاعده را برحسب x به‌دست آوریم. امّا شعاع دایرهٔ محیطی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع این مثلث است، بنابراین:

$$h = \frac{۳}{۲}x \Rightarrow h^۲ = \frac{۹}{۴}x^۲$$

امّا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برحسب h برابر است با:

$$S = \frac{h^۲\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad S = \frac{۹}{۴}x^۲ . \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$



اینک حجم نصف منشور برابر است با :

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}x^۲y$$

و حجم تمام منشور مساوی است با :

$$\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}x^۲y$$

ماکزیمم حجم تنها به تابع $x^۲y$ وابسته است و چون که داریم $x^۲+y^۲=a^۲$ ؛ مجموع مربعها مقدار ثابتی است، و برای آن باید داشته باشیم :

$$x^۲=۲y^۲ \Rightarrow ۳y^۲=a^۲ \quad , \quad y=\frac{a}{\sqrt{۳}} \quad , \quad x^۲=\frac{۲a^۲}{۳}$$

برای محاسبهٔ حجم تمام منشور داریم :

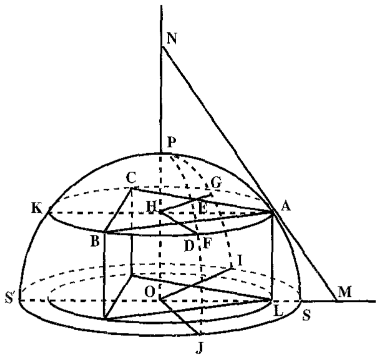
$$V=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۲a^۲}{۳}\times\frac{a}{\sqrt{۳}}=a^۳$$

راه دوم. فرض مسأله حل شده و ABCL نیم منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم به حجم ماکزیمم است. نصف‌النهاری راکه بر یال AL می‌گذرد، به‌عنوان نصف‌النهار اصلی اختیار می‌کنیم. و دایرهٔ عظیمهٔ 'SS را عمود بر یالهای جانبی رسم می‌نماییم ؛ سپس بر PO صفحه‌های نصف‌النهاری PFJ و PGI را بترتیب عمود بر وجه‌های BAL و ALC رسم می‌کنیم. $\frac{۲}{۳}$ منشور بین صفحه‌هایی که به این ترتیب رسم شوند قرار می‌گیرد. کافی است بخشی از منشور را مورد بررسی قرار دهیم که قاعده‌اش ADHE و ارتفاعش AL است. امّا AD عمود بر HD ، و بخش AE از خط AC ، عمود بر HEG است. بنابراین منشور (ADHE و AL) محاط در کنج سه‌وجهی تشکیل شده به‌وسیلهٔ صفحهٔ دایرهٔ عظیمهٔ 'SS و نصف‌النهارهای رسم شده بر HF و HG ، وقتی ماکزیمم خواهد بود که رأس A نقطهٔ تماس یک خط مماس باشد که به نسبت $\frac{۱}{۳}$ از نقطهٔ M تقسیم شده است.

بنابراین رأس A از منشور ماکزیمم، همان رأس مکعب محاط در کره است.

۳۸۵. روش حل این مسأله شبیه راه حل محاط کردن یک منشور منتظم مثلث‌القاعده به حجم ماکزیمم، در یک کره داده شده است.

۳۸۶. روش تعیین حجم ماکزیمم برای تمام منشورهایی که قاعده‌شان متشابه با یک چندضلعی داده شده قابل محاط شدن در یک دایره است، یکسان می‌باشد. در یک کلمه: مماس MAN به قسمی که $AN = ۲AM$ باشد، معرّف استوانهٔ محاطی به حجم ماکزیمم است و هر منشور به حجم ماکزیمم که دارای یک قاعدهٔ متشابه با یک چندضلعی داده شده است که در استوانه به حجم ماکزیمم محاط است.



حجم جسمهای محاطی. شعاع کره را با a نشان می‌دهیم. می‌دانیم که رابطه‌های زیر برقرارند:

$$AL^۲ = \frac{a^۲}{۳} \Rightarrow AA' = \frac{۲a}{\sqrt{۳}} \quad , \quad AH^۲ = \frac{۲}{۳}a^۲ \quad , \quad AH = a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

AA' ارتفاع مشترک برای تمام اجسام منشوری شکل به حجم ماکزیمم هستند که می‌توان درکره محاط کرد، و AH شعاع دایرهٔ محیط بر قاعدهٔ این منشورهاست.

a. استوانه $\quad V = \pi r^۲ h = \pi \times \frac{۲}{۳}a^۲ \times \frac{۲a}{\sqrt{۳}} = \frac{۴}{۳\sqrt{۳}}\pi a^۳$ = حجم استوانه

b. مکعب $\quad AH^۲ = \frac{۲}{۳}a^۲ = ۲AL^۲ \quad , \quad AL^۲ = \frac{a^۲}{۳}$

همچنین هنگامی که منشور منتظم قاعده‌اش مربع باشد، یک مکعب به ضلع AA' یا $\frac{۲a}{\sqrt{۳}}$ خواهد بود که قطر یک وجهش AK است.

حجم مکعب $= V = (\frac{۲a}{\sqrt{۳}})^۳ = \frac{۸}{۳\sqrt{۳}}a^۳$ حجم

c. **منشور مثلث‌القاعده.** ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع

AH ، مساوی $AH\sqrt{۳}$ است. ارتفاع این مثلث $\frac{۲}{۳}HA$ است. بنابراین :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}AH\sqrt{۳} \times \frac{۲}{۳}AH = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}AH^{۲}$$

امّا $AH^{۲} = \frac{۲}{۳}a^{۲}$ است، پس، $\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}.\frac{۲}{۳}a^{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$

$$\text{حجم منشور مثلث‌القاعده} = S_{ABC} \times AA' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}.\frac{۲a}{\sqrt{۳}} = a^{۳}$$

در این صورت، منشور مثلث‌القاعده به حجم ماکزیمم محاط در کره، معادل مکعب شعاع این کره است.

۱۳.۱۱. رسم متوازی السطوح

۳۸۷. دو برابر جسم موردنظر را محاط در کره درنظر می‌گیریم. مکعب دارای بزرگترین حجم است. یعنی بین متوازی‌السطوحهای محاط در یک کره (یا در واقع مکعب مستطیلهای محاط در یک کره) مکعب بیشترین حجم را دارد. بنابراین برای نیمکره، نصف این مکعب، جسم جواب مسأله است.

۳۸۸. فرض می‌کنیم x ، y و z ابعاد متوازی‌السطوح و d قطر کره باشد. می‌پذیریم که z هیچ تغییری نکند. وجه xy در یک دایره محاط است که این دایره در صفحه‌ای واقع است که از مرکز کره به فاصلهٔ $\frac{z}{۲}$ قرار دارد، امّا، برای یک ارتفاع ثابت، جسم در صورتی ماکزیمم است که سطح قاعدهٔ آن یعنی xy ، ماکزیمم باشد امّا می‌دانیم که از نظر مساحت، مربع بزرگترین مستطیلی است که می‌توان در یک دایره محاط کرد. بنابراین وجه xy مربع است. با ثابت گرفتن یک بعد دیگر مانند y و با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که برای ماکزیمم بودن حجم متوازی‌السطوح باید وجه xz نیز مربع باشد، بنابراین، مکعب، متوازی‌السطوح به حجم ماکزیممی است که می‌توان در یک کرهٔ داده شده محاط کرد.

تبصره. ۱. قطر مکعب محاط در یک کره مساوی قطر کره است. بنابراین :

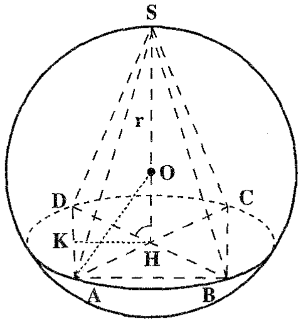
$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=d^{۲} \Rightarrow ۳x^{۲}=d^{۲} \Rightarrow x=\frac{d}{\sqrt{۳}} ,$$

$$xyz = x^{۳} = \frac{d^{۳}}{۳\sqrt{۳}}$$

۲. مجموع مربعهای سه بعد ثابت است. بنابراین می‌توان اصل زیر را بیان کرد: هرگاه مجموع مربعهای سه عامل یک حاصلضرب ثابت باشد، آن حاصلضرب وقتی بیشترین مقدار را داراست که آن سه مقدار با هم مساوی باشند.

۱۴.۱۱. رسم هرم

۳۸۹. شعاع کره را r و فاصلهٔ مرکز کره از مرکز مربع را x می‌گیریم (شکل) داریم:



$$\Delta AOH: AH=\sqrt{r^۲-x^۲}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=\sqrt{۲(r^۲-x^۲)}$$

$$HK=\frac{AB}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(r^۲-x^۲)}\quad,\quad SH=r+x\Rightarrow$$

$$SK=\sqrt{SH^۲+HK^۲}=\sqrt{(r+x)^۲+\frac{r^۲-x^۲}{۲}}$$

$$\text{جانبی هرم } S=۴\times\frac{۱}{۲}AD.SK=۲\times\sqrt{۲(r^۲-x^۲)}.\sqrt{(r+x)^۲+\frac{r^۲-x^۲}{۲}}$$

$$\text{جانبی هرم } S=۲\sqrt{۲(r^۲-x^۲)(r+x)^۲+(r^۲-x^۲)^۲}=۲\sqrt{(r+x)^۲(۳r^۲-x^۲-۲rx)}$$

$$\text{جانبی هرم } S=۲\sqrt{(r^۲+x^۲+۲rx)(۳r^۲x^۲-۲rx)}$$

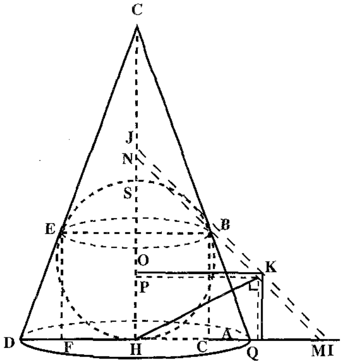
حال ماکزیمم این مقدار را باید به‌دست آوریم، با توجه به این که مجموع دو مقدار زیر رادیکال ثابت است، وقتی این حاصلضرب ماکزیمم است که این دو عامل مساوی باشند، یعنی:

$$۳r^۲-x^۲-۲rx=r^۲+x^۲+۲rx\Rightarrow ۲x^۲+۴rx-۲r^۲=۰\Rightarrow x^۲+۲rx-r^۲=۰$$

$$x=-r\pm\sqrt{r^۲+r^۲}=-r\pm r\sqrt{۲}\quad \text{و}\quad x=r(\sqrt{۲}-۱)$$

مقدار منفی قابل قبول نیست. از آن‌جا، هرم بسادگی قابل رسم است.

۳۹۰. اگر شعاع کره را r بگیریم، ارتفاع هرم موردنظر مساوی $۴r$ است. برای محاسبهٔ حجم هرم، باید مساحت مقطع مثلثی را که به‌وسیلهٔ نقطه‌های تماس وجه‌های جانبی ایجاد شده است، به‌دست آوریم. امّا می‌دانیم که این مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت آن چهار برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی است که رأسهای آن نقطه‌های تماس کره با وجه‌های جانبی می‌باشند. r' شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اخیر مساوی $\frac{۲}{۳}r\sqrt{۲}$ است.



امّا ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایره مساوی $r'\sqrt{۳}$ است. بنابراین این ضلع مساوی $\frac{۲}{۳}r\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}\times ۲r$ است.

اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برحسب ضلع a مساوی $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس مساحت این مثلث برابر است با :

$$۴r^{۲}\times\frac{۲}{۳}.\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}r^{۲}$$

مساحت مقطع چهار برابر مساحت این مثلث است، پس $S=\frac{۸}{۳}\sqrt{۳}r^{۲}$ مقطع. فاصلهٔ رأس هرم از صفحهٔ مقطع مساوی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع است، بنابراین نسبت مساحت هرم به مساحت مقطع مساوی ۱ به $\frac{۴}{۹}$ است. در این صورت :

$$\text{مساحت قاعدهٔ هرم}=\frac{۹}{۴}\times\frac{۸}{۳}r^{۲}\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}r^{۲}$$

چون ارتفاع هرم نیز مساوی $۴r$ است، پس حجم آن برابر است با :

$$V=\frac{۱}{۳}\times۶\sqrt{۳}r^{۲}\times۴r=۸\sqrt{۳}r^{۳}$$

تبصره. تعداد وجه‌های هرم به حجم می‌نیمم محیط بر یک کره هرچند که باشد، ارتفاع آن همواره مساوی $۴r$ است.

۱۵.۱۱. رسم استوانه

۱.۳۹۱. خط مماس MDN را چنان رسم می‌کنیم که در نقطهٔ تماس D به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۲. حاصلضرب مستطیلهای به مساحت ماکزیمم، محاط در دو قطاع دایره که مجموع آن دو قطاع، مساوی آن دایره است، مساوی مقدار ثابت $R^۴$ است. امّا چون بر هر یک از مستطیلهای جانبی به مساحت ماکزیمم متناظر، سطحی می‌گذرد که مساحت آن از ضرب کردن در مقدار ثابت ۲π به‌دست می‌آید، بنابراین دیده می‌شود که حاصلضرب دو سطح مساوی $۴\pi^۲R^۴$ یا $(۲\pi R^۲)^۲$ است.

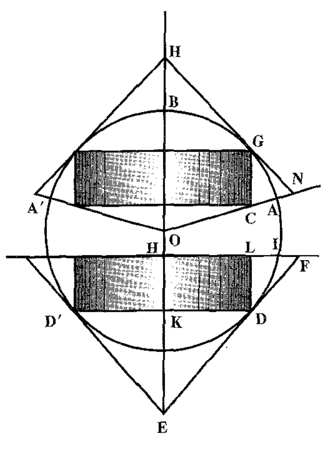
از طرف دیگر، مساحت نیمکره، واسطهٔ هندسی بین مساحت جانبی دو استوانه است.

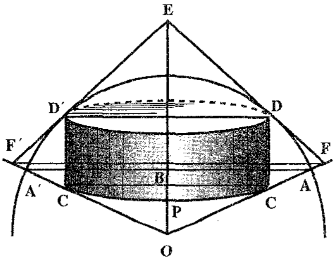
تبصره. برای محاط کردن یک استوانه به مساحت جانبی ماکزیمم در یک قطعهٔ کروی، MDN را باید چنان رسم کرد که $MD = DN$ باشد.

$$ON = \frac{a - \sqrt{a^۲ - ۸r^۲}}{۲}$$

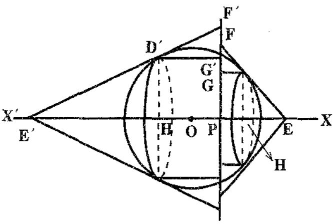
۳۹۲. کافی است مقطع اصلی به‌دست آمده از برخورد صفحه‌ای گذرنده بر محور را مورد ملاحظه قرار دهیم.

برای قطاع، باید مماس HCN را محدود به شعاعهای OA و OB چنان رسم کنیم که $HC = \frac{۲}{۳}HN$ باشد.





۳۹۳. برای مخروط به رأس E که EDF مولد آن است، استوانه در صورتی به حجم ماکزیمم خواهد بود که مقطع ′DD در $\frac{2}{3}$ ارتفاع از طرف رأس قرار داشته باشد.



۳۹۴. اگر PF نصف شعاع قاعدهٔ قطعهٔ کروی باشد، باید خط مماس DEF را چنان رسم کنیم که $DE = 2DF$ باشد. حجم استوانه برابر است با:

$$V = \pi DH^2 . PH \Rightarrow V = \frac{-2a^2 + 6r^2 - 2a\sqrt{a^2 + 3r^2}}{9}$$

$$\Rightarrow V = \frac{-2a + \sqrt{a^2 + 3r^2}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{2}{27}\pi\left[a^3 - 9ar^2 + (a^2 + 3r^2)\sqrt{a^2 + 3r^2}\right]$$

برای قطعهٔ دیگر، $$V' = \frac{2}{27}\pi\left[-a^3 + 9ar^2 + (a^2 + 3r^2)\sqrt{a^2 + 3r^2}\right]$$

۳۹۵. فرض می‌کنیم x شعاع قاعده و ۲y ارتفاع استوانه باشد. مساحت جانبی آن مساوی است با:

$$2\pi x \times 2y = 4\pi xy$$

امّا داریم: $$x^2 + y^2 = r^2$$

بنابراین: $$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

تبصره. ۱. مسأله شبیه محاط کردن مستطیل با مساحت ماکزیمم در یک دایره است. زیرا تغییرات مساحت جانبی از xy تجاوز نمی‌کند.

۲. با همین روش به تمام مسأله‌های مربوط به محاط کردن یک منشور منتظم که مساحت جانبی آن ماکزیمم باشد، می‌توان پاسخ داد.

در این صورت در مورد منشور مثلث‌القاعده اگر ارتفاعش را با $۲y$ و شعاع دایرهٔ محیط بر قاعده‌اش را با x نشان دهیم، برای محاسبهٔ محیط قاعده‌اش بر حسب a خواهیم داشت:

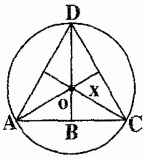
$$OB=\frac{x}{۲}\ ,\ AB^۲=\frac{۳}{۴}x^۲\ ,\ AB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\ ,\ ۶AB=۶\sqrt{۳}x$$

$$\text{مساحت جانبی}=۳\sqrt{۳}x\times ۲y=۶\sqrt{۳}xy$$

می‌توان قرار داد $x=y=\frac{r}{\sqrt{۲}}$؛

در این حالت، مساحت جانبی مساوی است با:

$$۶\sqrt{۳}\times\frac{r^۲}{۲}=۳\sqrt{۳}r^۲$$



۳. برای یافتن یک استوانه به مساحت جانبی ماکزیمم، که یک قاعده‌اش روی یک صفحهٔ داده شده و قاعدهٔ دیگرش به‌وسیله یک مقطع کروی موازی با صفحهٔ داده شده مشخص می‌شود، مسأله برمی‌گردد به محاط کردن یک مستطیل به مساحت ماکزیمم در یک قطعهٔ مستدیر. خط مماسی رسم می‌کنیم که در نقطهٔ تماس به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۳۹۶. فرض می‌کنیم r شعاع کره، x شعاع قاعدهٔ استوانه و y نصف ارتفاع استوانه باشد. مساحت کل نیم‌استوانه برابر است با:

$$۲\pi xy+\pi x^۲=\pi x(۲y+x) \qquad (۱)$$

از طرفی داریم: $x^۲+y^۲=r^۲$

با محاسبه‌های جبری، اندازهٔ ماکزیمم سطح کل از رابطهٔ $\pi r^۲(۱+\sqrt{۵})$ به‌دست می‌آید.

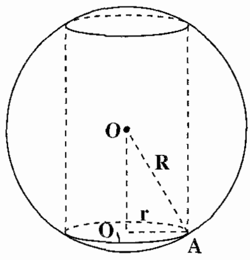
در این صورت: $x=\frac{r}{۱۰}\sqrt{۱۰(۵+\sqrt{۵})}$

۳۹۷. کافی است ارتفاع استوانه را به دست آوریم. اگر نصف ارتفاع استوانه را x فرض کنیم، داریم:

$$R^۲=x^۲+r^۲\Rightarrow x^۲=R^۲-r^۲\Rightarrow x=\sqrt{R^۲-r^۲}$$

بنابراین برای رسم استوانهٔ موردنظر دو صفحه متوازی و به فاصلهٔ $\sqrt{R^۲-r^۲}$ از مرکز کره رسم می‌کنیم. مقطعهای این دو صفحه، قاعده‌های استوانهٔ جواب مسأله می‌باشند.

۳۹۸. شعاع قاعده و ارتفاع استوانهٔ محاطی را بترتیب r و h می‌گیریم (شکل)، در این صورت حجم استوانه چنین است : $V = \pi r^2 h$



از مثلث AOO_1 به‌دست می‌آید :

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4}h^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

بنابراین :

$$V = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$$

تبدیلات زیر را انجام دهیم :

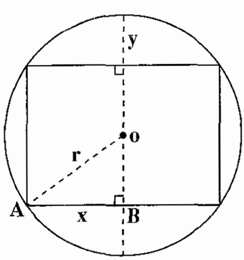
$$\frac{1}{4}.\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2 = \frac{r^4}{4}(R^2 - r^2) = \frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2}.(R^2 - r^2)$$

می‌بینیم که مجموع این سه عامل متغیر مقداری است ثابت و مساوی R^2، بنابراین حجم V وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{r^2}{2} = R^2 - r^2 \Rightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$$

جواب : $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ ؛ $V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

۳۹۹. شعاع قاعدهٔ استوانه را با x و ارتفاع هریک از قطعه‌های کروی را با y ، و شعاع کره را با r نشان می‌دهیم.



حجم دو قطعهٔ کروی برابر است با :

$$V = 2\left(\frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 y\right)$$

و حجم استوانهٔ محاطی مساوی است با :

$$2\pi x^2(r - y)$$

از آن‌جا :

$$\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2 y = x^2(r - y) \Rightarrow \frac{1}{6}y^3 = x^2\left(r - \frac{3y}{2}\right) \qquad (1)$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABO داریم :

$$x^2 = r^2 - (r - y)^2 = 2ry - y^2$$

اگر این مقدار را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$y^۲ - ۳ry + \frac{۳}{۲}r^۲ = ۰$$

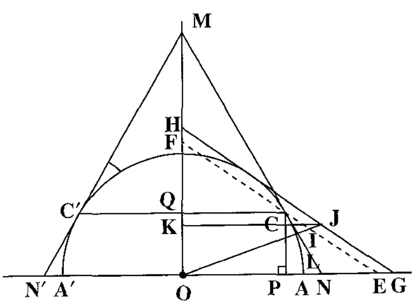
از آن‌جا:

$$\begin{cases} y_۱ = \frac{۳}{۲}r + \frac{r\sqrt{۳}}{۲} \\ y_۲ = \frac{۳}{۲}r - \frac{r\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

تبصره. اندازهٔ $y_۱$ غیرقابل قبول است، زیرا باید داشته باشیم $y < r$. امّا $y_۲$ به‌طور هندسی به مسأله جواب می‌دهد.

رسم. $\frac{r\sqrt{۳}}{۲}$ سهم شش‌ضلعی منتظم و $\frac{۳r}{۲}$ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایرهٔ عظیمهٔ کره می‌باشند. روش رسم ساده است.

۱۶.۱۱. رسم مخروط



۴۰۰. باید ثابت کنیم، حجم مخروطی که رأس آن نقطهٔ M و مولدش MCN است، از حجم هر مخروط دیگر ایجاد شده به‌وسیلهٔ مولدی مانند HG، کمتر است. در واقع استوانهٔ CPOQ که CP ارتفاع و CQ شعاع قاعده آن است، $\frac{۴}{۹}$ مخروط ایجاد شده به‌وسیلهٔ MON است.

$$\text{استوانه } CPOQ \times \frac{۹}{۴} = \text{مخروط } MON$$

از نقطهٔ C، خط EF را موازی خط مماس GH رسم می‌کنیم. I و J را نقطه‌های واقع بر $\frac{۲}{۳}$ این پاره‌خطها از طرف F و H می‌گیریم.

در مخروط ایجاد شده به‌وسیلهٔ FOE، استوانهٔ CPOQ کمتر است از استوانه IKOL که متناظر با $\frac{۱}{۳}$ نخست از طرف قاعده است.

بنابراین :
$$(\text{استوانه CPOQ}) \frac{۹}{۴} > \text{مخروط FOE}$$
$$\text{مخروط MON} > \text{مخروط FOE}$$

پس به دلیل قوی‌تر داریم :
$$\text{مخروط MON} > \text{مخروط HOG}$$

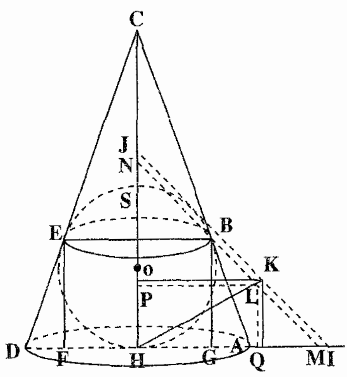
در حالت خاص می‌توان نیمکره را درنظر گرفت. در این صورت :
$$PE = OE = r\sqrt{۳}$$

در این صورت ارتفاع مخروط به حجم می‌نیمم محیط بر یک نیمکره، مساوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ عظیمهٔ کره خواهد بود.

نکته. برای این که بر قطعهٔ کروی $ACC'A'$ مخروطی با کمترین حجم ممکن محیط کنیم، باید خط مماس MCN را چنان رسم کنیم که $MC = ۲CN$ (یا $MC = \frac{۲}{۳}MN$) باشد.

۴۰۲. برای حل این مسأله باید از روش ضریبهای نامعین کمک بگیریم.

۴۰۳. باید خط مماس ABC را چنان رسم کنیم که $AB = \frac{BC}{۲}$ باشد. مخروط ACD، مخروط به حجم می‌نیمم است.



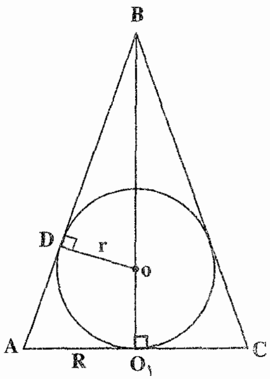
در واقع، موازی با یک مولد مماس IJ از یک مخروط محیطی دیگر یعنی خط MBN را رسم می‌کنیم. اگر L نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{۱}{۳}$ اوّل آن باشد، کافی است $SC = SH$ اختیار شود. استوانه LPHQ خیلی بزرگتر از استوانه‌ای است که BG ارتفاع و GH شعاع قاعدهٔ آن است. بنابراین به دلیل قوی، استوانهٔ اخیر خیلی کوچکتر از استوانهٔ K است که متناظر با ماکزیمم مخروط IJ است. پس مخروط ACD، که $\frac{۹}{۴}$ استوانهٔ B است، کمتر از مخروط IJ است که $\frac{۹}{۴}$ حجم استوانهٔ K را دارد.

تبصره. ۱.
$$CH = SH = ۲r \quad , \quad CH = ۴r \quad , \quad AH^۲ = ۲r^۲$$
$$\Rightarrow V = \frac{\pi AH^۲ . CH}{۳} = \frac{\pi \times ۲r^۲ \times ۴r}{۳} = \frac{۸}{۳}\pi r^۳$$

حجم مخروط می‌نیمم، دو برابر حجم کرهٔ محاطی و سطح کل آن مساوی $8\pi r^2$ است.

۲. مخروط به حجم می‌نیمم، مخروطی است که بین مخروطهای محیط بر یک کره سطح کل آن می‌نیمم است؛ زیرا، برای تمام اجسام محیط بر کره، حجم از حاصلضرب سطح کل در $\frac{1}{3}$ شعاع، به‌دست می‌آید. بنابراین مخروط به حجم می‌نیمم محیط بر یک کره، بین تمام مخروطهای محیط بر آن کره، سطح کلش کمترین مقدار ممکن است.

۴۰۴. حجم مخروطی که محیط بر یک کره باشد بستگی به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ آن دارد، اگر شعاع قاعده را R و ارتفاع مخروط را h فرض کنیم (شکل) حجم مخروط چنین است:



$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

از تشابه دو مثلث ABO_1 و DBO به‌دست می‌آید:

$$\frac{R}{r}=\frac{h}{\sqrt{h(h-2r)}}\Rightarrow R^2=\frac{r^2h}{h-2r}$$

بنابراین:

$$V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2h^2}{h-2r}=\frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{h^2}{h-2r}$$

می‌نیمم مقدار V همراه با می‌نیمم مقدار $\frac{h^2}{h-2r}$ و یا ماکزیمم عکس آن است. عکس عبارت بالا را به این ترتیب تبدیل می‌کنیم:

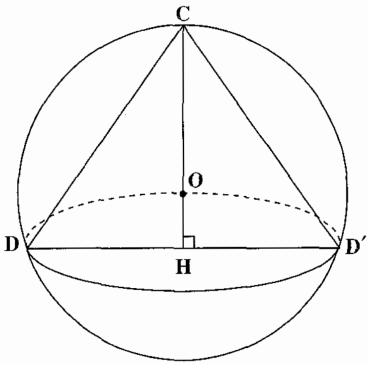
$$\frac{h-2r}{h^2}=\frac{1}{h}(1-\frac{2r}{h})=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2r}{h}\cdot(1-\frac{2r}{h})$$

و این عبارت وقتی ماکزیمم است که عوامل $\frac{2r}{h}$ و $1-\frac{2r}{h}$ برابر باشند یعنی:

$$\frac{2r}{h}=1-\frac{2r}{h}\Rightarrow h=4r=2(2r)$$

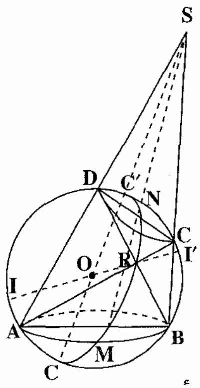
بنابراین حجم مخروط محیط بر کره وقتی می‌نیمم است که ارتفاع آن دو برابر قطر کره باشد.

جواب: $V=\frac{8}{3}\pi r^3$



۴۰۵. مخروط CDD' هنگامی ماکزیمم خواهد بود که استوانه‌ای که حجمش سه برابر آن است، ماکزیمم باشد. بنابراین باید $CH = \frac{۴}{۳}r$ اختیار شود. از آن‌جا:

$$V = \frac{۳۲}{۸۱}\pi r^۳$$



۴۰۶. بر مرکزهای دو دایره و مرکز کره می‌توان صفحهٔ ABCD را گذراند. این صفحه بر صفحه‌های دو دایره عمود است.
خطی که مرکز کره را به مرکز یکی از دایره‌های کوچک وصل می‌کند بر صفحهٔ این دایرهٔ کوچک عمود است. برای آن‌که مسأله را ساده‌تر بتوانیم بررسی کنیم، ABCD را صفحهٔ اصلی می‌گیریم. AB و CD قطرهای دایره‌های داده شده‌اند.
ADS، BCS و ARC، BRD را رسم می‌کنیم. S و R رأسهای دو مخروط جواب مسأله‌اند.

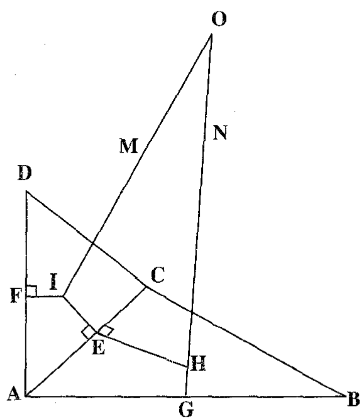
در واقع، به‌عنوان مثال برای S، مخروط SAB از کره به‌وسیلهٔ یک دایره که قطرش DC است خارج می‌شود، و صفحه‌اش عمود بر صفحهٔ SAB است. بنابراین، منحنی خروجی غیر از نقطه‌های دایرهٔ CD، نقطهٔ دیگری ندارد.

۴۰۷. فرض می‌کنیم یک سطح مخروطی بر کرهٔ S محیط و بر سه خط داده شدهٔ $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ مماس باشد. صفحه‌های مماس بر هریک از این خطها بر سطح مخروطی، بر کره مماس می‌باشند. نقطه‌های تماس این صفحه‌ها با کره را $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ می‌نامیم. بعکس، اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ نقطه‌های تماس سه صفحهٔ مماس بر کره باشند که هرکدام بترتیب بر یکی از خطهای $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ گذشته‌اند، سطح مخروطی محیط بر کره، تحت دایره‌ای که بر سه نقطهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ می‌گذرد، بر خطهای $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ مماس است. برای رسم سطح مخروطی موردنظر چنین عمل می‌کنیم: می‌دانیم که بر یک خط خارج یک کره، دو صفحه مماس بر این کره می‌توان رسم کرد. در این‌صورت،

اگر نقطه‌های تماس صفحه‌هایی را که بر $D_۱$ ، $D_۲$ و $D_۳$ مماس بر کره رسم می‌شوند، $A_۱$ ، $A'_۱$ و $A_۲$ ، $A'_۲$ ، $A_۳$ و $A'_۳$ بنامیم، هشت دایره خواهیم داشت:
$(A'_۱, A_۲, A_۳)$ و $(A_۱, A'_۲, A_۳)$ و $(A_۱, A_۲, A'_۳)$ و $(A_۱, A_۲, A_۳)$ و $(A'_۱, A'_۲, A'_۳)$
و $(A'_۱, A'_۲, A_۳)$ و $(A'_۱, A_۲, A'_۳)$ و $(A_۱, A'_۲, A'_۳)$.
بنابراین مسأله دارای هشت جواب است.

۱۷.۱۱. رسم کره

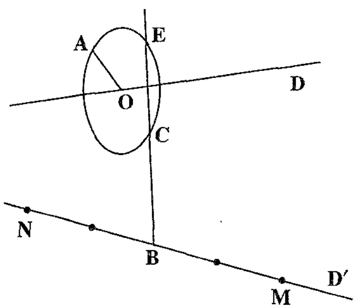
۴۰۸. ۱. نقطه‌های داده شده، دو مثلث ABC و ACD را به‌وجود می‌آورند. از نقطه‌های E، F و G وسطهای ضلعهایی که از رأس A شروع می‌شوند، در صفحهٔ مثلثها، عمودهای EI ، EH، FI و GH را رسم می‌کنیم و بالاخره خطهای IM و HN را عمود بر صفحه‌های ACD و ACB رسم می‌نماییم. پای این عمودها یعنی نقطه‌های I و H مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلثند. درنتیجه این عمودها مکان هندسی مرکزهای تمام کره‌هایی هستند که می‌توان بر ADC و ABC گذراند. این دو مکان در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند. در واقع، اگر بر عمودهای EI و EH (هر دو عمود بر AC)، صفحهٔ IEH را رسم کنیم، این صفحه بر AC که فصل مشترک دو صفحهٔ DAC و BAC عمود است. این صفحه بر هریک از این صفحه‌ها نیز عمود می‌باشد، بنابراین این صفحهٔ IEH شامل دو عمود IM و HN نیز هست و این خطها یعنی IM و HN یکدیگر را قطع می‌کنند. پس محل برخوردشان یعنی نقطهٔ O، مرکز کرهٔ خواسته شده است.



۲. خط IM مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از نقطه‌های A، C و D است، و خط HN مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از نقطه‌های A، B و C می‌باشد، پس نقطهٔ O که محل برخورد IM و HN است، تنها نقطه‌ای است که از چهار نقطهٔ A، B، C و D به یک فاصله است. بنابراین ...

۴۰۹. ازاین پنج نقطه چهار تا انتخاب کنید. در وضعیت مفروض، کرهٔ یکتایی وجود دارد که شامل این چهار نقطه است؛ فرض کنید مرکز این کره نقطهٔ C و شعاع آن r باشد. اگر d فاصلهٔ بین C و نقطهٔ پنجم باشد، کرهٔ به‌مرکز C و شعاع $\frac{۱}{۲}(r+d)$ (اگر نقطهٔ پنجم بیرون کرهٔ اوّل باشد) از هر پنج نقطه به یک فاصله است. پس دست‌کم پنج کره با ویژگی مطلوب وجود دارد.

بسته به این که آرایش نقطه‌های مفروض چگونه باشد، ممکن است تعدادی متناهی یا نامتناهی، جواب دیگر نیز وجود داشته باشد. مکان هندسی مرکز کره‌ای که شامل سه تا از نقطه‌ها باشد خط است؛ مکان هندسی مرکز کره‌ای که شامل دو نقطهٔ دیگر باشد صفحه است. این خط ممکن است با صفحه موازی باشد، صفحه را در یک نقطه قطع کند و یا در صفحه واقع باشد. اگر O نقطهٔ تقاطع خط با صفحه باشد، به شیوه‌ای مشابه با آنچه در بند قبل توصیف شد می‌توان کره‌ای به مرکز O همفاصله از پنج نقطه یافت (که سه تا از نقطه‌ها در یک طرف و دو نقطهٔ دیگر در طرف دیگر آن واقع باشند).



۴۱۰. AO را عمود بر D رسم می‌کنیم. برای آن‌که مرکز کره روی خط D باشد، لازم و کافی است که این کره، شامل دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA واقع در صفحه P باشد که در نقطهٔ O بر خط D عمود می‌شود.

نقطهٔ برخورد صفحهٔ P و خط D′ را B، و نقطهٔ تماس کره با خط D′ را M می‌نامیم و از B قاطع BCE را نسبت به دایره رسم می‌کنیم. داریم:

$$BM^{۲} = BC.BE$$

بنابراین نقطهٔ M به فاصلهٔ $BM = \sqrt{BC.BE}$ از نقطهٔ B قرار دارد، و مرکز کره محل برخورد خط D و صفحهٔ Q است که عمود بر D′ در نقطهٔ M رسم می‌شود.

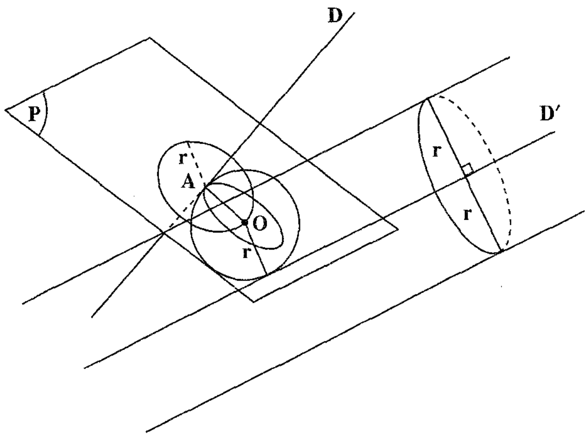
بحث در رسم. اگر صفحهٔ P خط D′ را قطع کند؛ یعنی D و D′ عمود بر هم نباشند، باید $BC.BE > ۰$، یعنی نقطهٔ B خارج دایرهٔ O قرار داشته باشد، و این کافی است، زیرا صفحهٔ عمود بر D′ در نقطهٔ M یا N، خط D را قطع می‌کند؛ در این‌صورت دو جواب وجود دارد.

اگر صفحهٔ P موازی D′ باشد، بسادگی دیده می‌شود که M محل برخورد خط D′ و

صفحه گذرنده بر D و عمود بر D' است.

بالاخره اگر P شامل خطهای D و D' باشد، برای آن‌که مسأله ممکن باشد، باید بر دایرهٔ O مماس باشد، و در این‌حالت تمام کره‌هایی که بر دایرهٔ O می‌گذرند، بر خط D' مماسند.

۴۱۱. مکان هندسی مرکز کره‌هایی که در نقطهٔ A بر خط D مماسند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع r واقع در صفحهٔ P است که در نقطهٔ A بر خط D عمود می‌شود. این صفحه و دایره را رسم می‌کنیم. از



طرفی مکان هندسی مرکز کره‌هایی به شعاع r که بر خط مفروض D' مماس می‌باشند، یک رویهٔ استوانه‌ای دوار است که شعاع قاعدهٔ (مقطع قائم) آن مساوی r است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک دو مکان هندسی به‌دست آمده (دایرهٔ به مرکز A و به شعاع r و رویهٔ استوانه‌ای دوار به محور D' و شعاع قاعدهٔ r) مرکز کرهٔ جواب مسأله است. و مسأله به تعداد نقطه‌های اشتراک این دو مکان هندسی، دارای جواب است، بدیهی است که اگرنقطهٔ مشترکی برای این دو مکان وجود نداشته باشد، مسأله جواب ندارد.

۴۱۲. فرض کنید دو خط متنافر مفروض a و b باشند، و A روی a و B روی b باشد. اگر C مرکز کرهٔ مورد نظر باشد، آن‌گاه $a \perp AC$ و $b \perp BC$. همچنین C از A و B به یک فاصله است. بنابراین، C روی سه صفحه واقع است:

σ : که از A می‌گذرد و بر a عمود است؛

μ : که از B می‌گذرد و بر b عمود است؛

τ : که عمودمنصف s، یعنی پاره‌خط AB است.

چون a و b متنافرند، σ و μ نه موازی‌اند و نه منطبق بر هم، و بنابراین یکدیگر را در راستای خطی مانند m قطع می‌کنند. فرض کنید در صورت امکان τ موازی با m یا شامل m باشد. در این‌صورت m بر خطهای a، b و s عمود است. پس m بر صفحهٔ

شامل a و s (که از A می‌گذرد) و همچنین بر صفحهٔ شامل b و s (که از B می‌گذرد) عمود است. چون هر دو صفحه شامل s هستند، باید بر هم منطبق باشند و a و b باید در یک صفحه باشند که با فرض ما تناقض دارد. پس τ خط m را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند و فقط این نقطه ممکن است مرکز کرهٔ مطلوب باشد (و هست).

۴۱۳. دو خط مماس را D و ′D و دو نقطه اختیاری از این خطها یعنی A و ′A را نقطه‌های تماس در نظر می‌گیریم. مرکز این کره محل برخورد سه صفحهٔ زیر است:

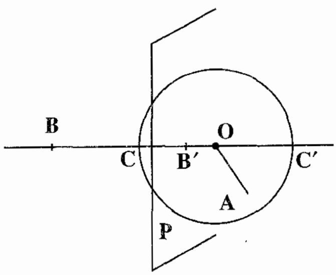
۱. صفحه عمود بر خط داده شدهٔ D در نقطهٔ تماس A.

۲. صفحهٔ عمود بر خط داده شدهٔ ′D در نقطهٔ تماس ′A.

۳. صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط ′AA.

این صفحه‌ها در یک نقطه متقاطعند، زیرا بنا به فرض، دو خط D و ′D موازی نیستند. نقطهٔ مشترک این صفحه‌ها نقطهٔ O مرکز کره است و شعاع آن $OA = OA'$ است. بنابراین با تغییر نقطه‌های A و ′A روی دو خط D و ′D کره‌های بیشماری می‌توانیم رسم کنیم که بر این دو خط متنافر مماس باشند.

۴۱۴. فرض کنیم مسأله حل شده است و O مرکز و OA شعاع کره مطلوب باشد. نقطهٔ O روی عمود ′BB مرسوم از نقطهٔ B بر صفحهٔ P واقع است و داریم:



$$OB \times OB' = \overline{OA}^2$$

پس O محل تلاقی خط ′BB و مماس مرسوم از A بر دایرهٔ گذرنده بر A، B و ′B است. اگر استثنائاً A روی ′BB واقع باشد، چنین دایره‌ای وجود نخواهد داشت اما در این حالت A یکی از دو سر قطر ′CC است و سر دیگر این قطر مزدوج توافقی A نسبت به ′BB است و به این ترتیب کره (O) مشخص می‌شود.

۴۱۵. نقطهٔ تماس صفحهٔ مماس با کره را، جستجو می‌کنیم. سه نقطهٔ داده شده را A، B و C و صفحهٔ مماس را P می‌نامیم. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و سپس محور این دایره را رسم می‌نماییم. صفحه‌ای مانند Q بر این محور می‌گذرانیم که بر صفحهٔ دایره عمود باشد. این صفحه، دایرهٔ محیطی مثلث را در دو نقطهٔ M و N و صفحهٔ P را در خطی مانند Δ قطع می‌کند. نقطهٔ تماس صفحهٔ P با کره روی خط Δ قرار دارد. برای تعیین این نقطه، توجه داریم که دایره‌ای به مرکزO، یعنی مرکز کره و به

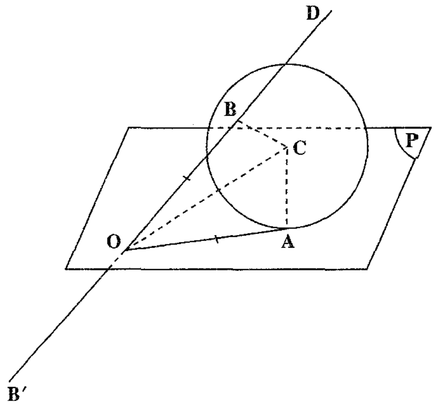
شعاع $OT = OM = ON$ یعنی شعاع کره بر سه نقطهٔ M، N و T می‌گذرد و در نقطهٔ T بر خط Δ مماس است.
بنابراین برای حل مسأله در صفحهٔ Q بر دو نقطهٔ M و N صفحه‌ای رسم می‌کنیم که بر خط Δ مماس باشد (روش رسم این دایره را در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم). نقطهٔ تماس این دایره با خط Δ، نقطهٔ T، نقطهٔ تماس کره است. در این نقطه و در صفحهٔ Q خطی بر Δ عمود می‌کنیم تا محور دایرهٔ (ABC) را در نقطهٔ O مرکز کره قطع کند.
عموماً دو دایره وجود دارد که بر دو نقطهٔ M و N می‌گذرد و بر خط Δ مماس است.
بنابراین مسأله عموماً دو جواب دارد.

۴۱۶. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر دو نقطهٔ A و B گذشته و بر دو صفحهٔ P و Q مماس باشد. این کره درون یکی از فرجه‌های تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ دو صفحهٔ P و Q قرار دارد. بنابراین شرط امکان مسأله آن است که دو نقطهٔ A و B درون یکی از فرجه‌های تشکیل‌شده به‌وسیلهٔ دو صفحهٔ P و Q باشند. بعلاوه، مرکز کره از دو صفحهٔ P و Q به یک فاصله است، بنابراین روی صفحهٔ R یعنی صفحهٔ نیمساز فرجه‌ای از بین دو صفحه قرار دارد که A و B در آن فرجه هستند، از طرفی کره، بر نقطهٔ A' قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به صفحهٔ R نیز می‌گذرد.
بعکس، کره‌ای که بر سه نقطهٔ A، B و A' بگذرد و بر صفحهٔ P مماس باشد، بر صفحهٔ Q نیز مماس است ؛ زیرا مرکزش که در صفحهٔ نیمساز R قرار دارد، از دو صفحهٔ P و Q به یک فاصله است. بنابراین مسأله منجر می‌شود به رسم کره‌ای که بر سه نقطهٔ A ، B و A' می‌گذرد و بر صفحهٔ P مماس است که حل این مسأله ساده است. اگر دو صفحهٔ P و Q موازی باشند، به‌جای صفحهٔ نیمساز R، می‌توانیم صفحهٔ متساوی‌الفاصله از دو صفحهٔ P و Q را که موازی آنها و بین آنهاست، جایگزین کنیم.

۴۱۷. فرض می‌کنیم نقطهٔ O مرکز یکی از کره‌هایی به شعاع r باشد که بر نقطهٔ A می‌گذرد و بر دو صفحهٔ P و Q مماس است. این کره، و در نتیجه مرکزش در فرجه‌ای از فرجه‌های حاصل از صفحه‌های P و Q قرار دارند که نقطهٔ A در آن فرجه است. بنابراین مرکز کره به صفحه‌های P' و Q' که به موازات صفحه‌های P و Q و به فاصلهٔ r از آنها در فرجهٔ مورد نظر رسم می‌شوند، تعلق دارد، و در نتیجه متعلق به خط D فصل مشترک دو صفحهٔ P' و Q' است. از طرف دیگر نقطهٔ O به کره‌ای به مرکز A و به شعاع r تعلق دارد. پس نقطهٔ O محل برخورد خط D و کرهٔ اخیر است ؛ بعکس، یک چنین نقطه‌ای، مرکز کره‌ای به شعاع r است که بر نقطهٔ A می‌گذرد و بر دو صفحهٔ P و Q مماس است.
بر حسب اندازهٔ r مسأله دارای دو جواب یا یک جواب است و یا جواب ندارد. اگر

صفحه‌های P و Q موازی باشند، صفحه‌های ′P و ′Q نیز موازی یا منطبق بر هم خواهند بود.
در این حالت برای آن که مسأله ممکن باشد، باید فاصلهٔ بین صفحه‌های P و Q مساوی ۲r باشد و در این صورت مسأله دارای بی‌شمار جواب است.

۴۱۸. مرکز این کره از دو صفحهٔ مماس به یک فاصله است. بنابراین روی یکی از دو صفحهٔ نیمساز فرجهٔ حاصل از این دو صفحهٔ مماس قرار دارد. از طرفی مرکز کره روی صفحه‌هایی است که به فاصله معلوم R (شعاع کرهٔ داده شده) از دو صفحهٔ مماس واقعند. بنابراین مرکز کره روی خط فصل مشترک یکی از این صفحه‌ها با صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحهٔ مماس قرار دارد. از طرفی مرکز کره روی کره‌ای به مرکز نقطهٔ داده شده و به شعاع R (شعاع کرهٔ داده شده) واقع است. پس برای حل مسأله صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین دو صفحهٔ مماس را رسم می‌کنیم. یکی از صفحه‌هایی را که به فاصلهٔ R از یکی از دو صفحهٔ مماس است نیز رسم می‌نماییم و فصل مشترک آنها را خط D می‌نامیم. به مرکز A (نقطهٔ داده شده) و به شعاع R (شعاع کره)، کره‌ای رسم می‌کنیم تا خط D را در نقطهٔ O که مرکز کره جواب مسأله است قطع کند. به تعداد نقطه‌های برخورد این کره و خط D مسأله دارای جواب است.



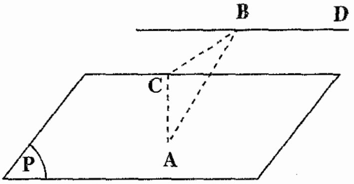
۴۱۹. نخست فرض می‌کنیم که خط D صفحهٔ P را قطع می‌کند. نقطهٔ مشترک آنها را O می‌نامیم. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که در نقطهٔ A بر صفحهٔ P و بر خط D مماس باشد. اگر B نقطهٔ تماس کره با خط D باشد، داریم:

$$OB = OA$$

نقطهٔ B، بدین ترتیب مشخص می‌شود. نقطهٔ C مرکز کره محل برخورد عمود رسم شده در نقطهٔ A بر صفحهٔ P و صفحهٔ عمود بر خط D در نقطهٔ B است، و این نقطهٔ C وجود دارد، چون که خط D غیرموازی با صفحهٔ P فرض شده است.
بعکس، کره‌ای به مرکز C و به شعاع CA که بدین ترتیب ساخته شده باشد، در نقطهٔ A بر صفحهٔ P مماس است؛ همچنین در نقطهٔ B بر خط D مماس می‌باشد، چون که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAC و OBC همنهشت هستند، زیرا وتر مشترکشان OC و

$OA = OB$ است، پس داریم:

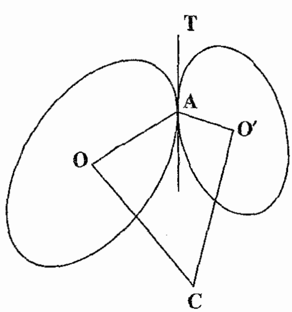
$$CB = CA$$

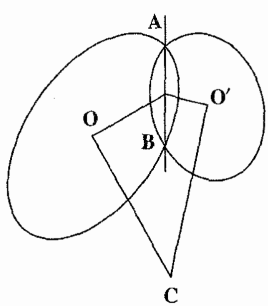


دو کره وجود دارد که پاسخگوی شرطهای داده شده در مسأله است، زیرا روی خط D، دو نقطه مانند B و B' وجود دارد، به قسمی که $OB = OB' = OA$ است. اکنون فرض می‌کنیم که خط D با صفحهٔ P موازی است. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که در نقطهٔ A بر صفحهٔ P و همچنین بر خط D مماس باشد. C را مرکز این کره و B را نقطهٔ تماسش با D می‌گیریم. خط D بر CA و CB عمود است. بنابراین بر صفحهٔ CAB عمود می‌باشد، پس B نقطهٔ برخورد D و صفحهٔ Q است که از نقطهٔ A عمود بر این خط رسم می‌شود، و C که به یک فاصله از A و B است، محل برخورد عمود بر صفحهٔ P در نقطهٔ A و صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB و واقع در صفحهٔ Q است.

بعکس، کره‌ای که مرکزش نقطهٔ C و شعاعش CA و بدین‌ترتیب ساخته شده باشد، در نقطهٔ A بر صفحهٔ P مماس است و همچنین بر خط D مماس می‌باشد. در این حالت مسأله یک و تنها یک جواب دارد.

۴۲۰. دو دایره به مرکزهای O و O' را که در یک صفحه قرار ندارند و در دو نقطهٔ A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند؛ درنظر می‌گیریم. محورهای این دو دایره که هر دو در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند، متقاطعند؛ نقطهٔ تقاطع آنها را C می‌گیریم. فرض می‌کنیم M نقطه‌ای واقع بر یکی از این دو دایره باشد، داریم $CM = CA$؛ بنابراین دو دایره به کره‌ای به مرکز C و به شعاع CA تعلق دارند. اگر دو دایره مماس باشند، اثبات شبیه اثبات بالاست.



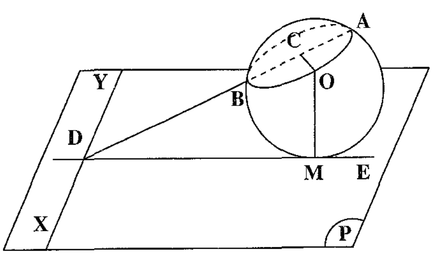


۴۲۱. دایرهٔ محیطی گذرنده بر سه نقطه از چهار نقطهٔ داده شده را درنظر گرفته، محور آن را رسم می‌کنیم. بدین معنی که از مرکز این دایره، خطی عمود بر صفحهٔ دایره رسم می‌کنیم. این خط مکان هندسی نقطه‌هایی است که از این سه نقطهٔ داده شده به یک فاصله‌اند. حال صفحهٔ P مکان هندسی نقطه‌هایی را که از نقطهٔ چهارم و یکی از سه نقطهٔ قبلی به یک فاصله است رسم می‌کنیم. این صفحه، محور دایرهٔ گذرنده بر سه نقطه را در یک نقطه قطع می‌کند که این نقطه، مرکز کره جواب مسأله است و شعاع آن فاصلهٔ این نقطه تا یکی از چهار نقطهٔ داده شده است. درحالتی که چهار نقطه در یک صفحه نباشند، مسأله دارای یک جواب است. حال اگر چهار نقطه روی یک دایره باشند، هر نقطه از محور رسم نشده مرکز کرهٔ جواب مسأله است، یعنی در این صورت مسأله بی‌شمار جواب دارد. اگر چهار نقطه در یک صفحه باشند امّا روی یک دایره نباشند، صفحهٔ عمودمنصف نقطهٔ چهارم و یکی از نقطه‌ها موازی محور خواهد بود. حال اگر با محور نقطهٔ مشترکی نداشته باشد، مسأله جواب ندارد و اگر بر محور بگذرد، مسأله بی‌شمار جواب دارد.

اگر یک دایره و یک نقطه داده شده باشد، مسأله دقیقاً همانند مسألهٔ بالا حل می‌شود.

۴۲۲. دایرهٔ داده شده را $C(O',r)$ و خط مماس را D می‌نامیم. نقطهٔ تماس خط D با کره را M می‌نامیم. اگر A نقطهٔ برخورد D با صفحهٔ دایرهٔ (C) باشد، $\overline{AM}^2$ قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ داده شده است که مقداری معلوم است. بنابراین طول پاره‌خط AM و از آن‌جا نقطهٔ M براحتی مشخص می‌شود. پس از تعیین این نقطه، صفحه‌ای در نقطهٔ M بر خط D عمود می‌کنیم تا محور دایرهٔ داده شدهٔ (C) را در نقطهٔ O مرکز کره قطع کند. کرهٔ به مرکز O و به شعاع $OM = R$ جواب مسأله است. باید توجه داشت که دو نقطهٔ M روی خط D وجود دارد که فاصله‌اش از A برابر مقدار معلوم است، پس مسأله دارای دو جواب است.

۴۲۳. کره‌ای را درنظر می‌گیریم که بر صفحهٔ P مماس است و شامل دایرهٔ داده شده به مرکز C است و صفحهٔ این دایره، صفحهٔ P را در خط XY قطع می‌کند. اگر M نقطهٔ تماس کره با صفحهٔ P و O مرکز کره باشد، صفحهٔ MOC بر XY



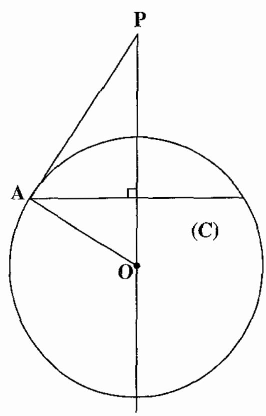
عمود است ؛ زیرا بر صفحهٔ P و بر صفحهٔ دایرهٔ C عمود می‌باشد. این صفحه، صفحهٔ

P را تحت خط DME، صفحهٔ دایرهٔ C را تحت‌قطر AB که امتداد قطر AB خط XY را در نقطهٔ D قطع می‌نماید، و کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ MAB قطع می‌کند. بنابراین کافی است، این دایرهٔ عظیمه را که بر دو نقطهٔ مشخص شدهٔ A و B می‌گذرد و بر خط DE مماس است، رسم نمود. رسم این دایره ساده است. هنگامی که صفحهٔ دایرهٔ C موازی صفحهٔ P است، نقطهٔ تماس M، محل برخورد محور دایرهٔ C و صفحهٔ P، و نقطهٔ O مرکز کره، محل برخورد این محور و صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خطی است که نقطهٔ M را به یک نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ C وصل می‌کند.

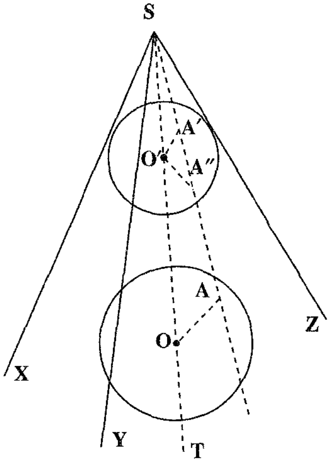
۴۲۴. مرکز کره‌ای که می‌خواهیم رسم کنیم، رأس سوم مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که رأس زاویهٔ قائمه‌اش نقطهٔ A و دومین رأسش نقطهٔ P و وترش روی محور دایرهٔ کوچکتر داده شده است.

۴۲۵. فاصلهٔ $PA = PB$ مساوی $R\sqrt{۲}$ است. در صورتی‌که اندازهٔ شعاع این کره را R بنامیم، اندازهٔ این شعاع معلوم است، زیرا داریم:

$$R = \frac{PA}{\sqrt{۲}}$$



دراین صورت مرکز کرهٔ مورد جستجو، محل برخورد کره‌ای به مرکز P و به شعاع $\frac{PA}{\sqrt{۲}}$ با دو کره به مرکزهای A و B و به شعاع $\frac{PA}{\sqrt{۲}}$ است. این سه کره در دو نقطهٔ متقارن نسبت به صفحهٔ PAB متقاطع خواهند بود. در صورتی که $AB < ۲R$، یعنی $AB < PA\sqrt{۲}$ باشد. نکته‌ای که قابل ذکر است، آن است که زاویهٔ P از مثلث PAB باید حاده باشد.



۴۲۶. نقطهٔ O را مرکز یکی ازکره‌های جواب مسأله می‌گیریم. یک کرهٔ دلخواه مماس بر سه وجه کنج سه‌وجهی را رسم می‌کنیم. مرکزش نقطهٔ O' نقطه‌ای دلخواه از خط ST فصل مشترک صفحه‌های نیمساز فرجه‌های کنج و شعاعش مساوی فاصلهٔ نقطهٔ O' از یکی از وجه‌های کنج است. رأس S، مرکز تجانس کره‌های O و O' است. در این صورت اگر A' و A'' نقطه‌های برخورد SA با کرهٔ O' باشند، $O'A'$ یا $O'A''$ با OA موازی خواهد بود.

بعکس، اگر کرهٔ O' را ساخته باشیم و نقطهٔ O را به‌صورتی که در زیر خواهیم گفت تعیین کنیم، کرهٔ به مرکز O و به شعاع OA بر وجه‌های کنج مماس خواهد بود.

در واقع داریم : $\frac{SO}{SO'}=\frac{OA}{O'A'}$ ؛ بنابراین کره‌ها نسبت به نقطهٔ S مجانس یکدیگرند و هر صفحه‌ای که از نقطهٔ S مماس بر کرهٔ O' رسم شود، بر کرهٔ O نیز مماس است. مسأله دارای دو جواب است.

۴۲۷. فرض می‌کنیم O مرکز یک چنین کره‌ای باشد. OA، OB، OC و OD را رسم می‌کنیم. نخست باید بتوانیم مماسهای AA' ، BB' ، CC' و DD' را بر این کره رسم کنیم و برای این‌که ، این کار ممکن باشد، باید OA، OB، OC و OD بیشتر از r یا مساوی r باشد.

با برقراری این شرطها، باید بنا به فرض داشته باشیم :

$$O\hat{A}A'=O\hat{B}B'=O\hat{C}C'=O\hat{D}D'$$

و چون که $OA'=OB'=OC'=OD'$ است، لازم و کافی است که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $OA'A$ ، $OB'B$ ، $OC'C$ و $OD'D$ با هم مساوی باشند یا که :

$$OA=OB=OC=OD$$

دراین صورت، نقطهٔ O مرکز کرهٔ جواب مسأله، بر مرکز کره‌ای که بر چهار نقطهٔ داده شده می گذرد، منطبق است، و پس از آن چه که در شروع گفتیم، برای آن‌که این مسأله ممکن باشد، باید r کمتر یا مساوی شعاع این کرهٔ محیطی باشد.

۴۲۸. برای آن‌که مسأله ممکن باشد، باید دو نقطهٔ A و B هر دو، برون، یا هر دو درون کرهٔ S، و یا یکی از آنها روی کرهٔ S و دیگری برون یا درون این کره باشد.

به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم دو نقطهٔ A و B هر دو در ناحیهٔ خارجی کرهٔ S باشند. اگر مرکز یکی ازکره‌های جواب مسأله را O بگیریم، داریم:

$$OA = OB = r \ , \ OS = r + s \text{ یا } OS = r - s \ , \ (r > s)$$

بنابراین نقطهٔ O نقطهٔ اشتراک کره‌های به مرکزهای A و B و به شعاع a و یکی از کره‌های به مرکز S و به شعاع r+s یا r−s است. بعکس، یک چنین نقطه‌ای مرکز کره‌ای به شعاع r است که بر نقطه‌های A و B می‌گذرد و بر کرهٔ S مماس است. با روش مشابهی می‌توان مسأله را برای حالتی که هر دو نقطه درون کرهٔ S باشند، حل کرد. اگر یکی از دو نقطه مثلاً نقطهٔ A روی کرهٔ S باشند، نقطهٔ O محل برخورد صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB و خط SA است.

۴۲۹. سه نقطه A، B و C را روی دایره اختیار می‌کنیم. برای این که کره‌ای شامل دایره شود، لازم و کافی است که از سه نقطه بگذرد بنابراین مسأله به این شکل مطرح است که کره‌ای رسم کنید از سه نقطهٔ A، B و C بگذرد و بر کرهٔ (O) عمود شود. یعنی کره‌ای باید رسم کرد که بر چهار کره عمود شود در صورتی که نقطه‌های A، B و C را کرات به شعاع صفر درنظر بگیریم. می‌دانیم مرکز کره مطلوب مرکز اصلی ω متعلق به چهار کره A، B، C و (O) می‌باشد و شعاع آن ωA است. مسأله عموماً یک جواب دارد.

۴۳۰. کرهٔ محیطی نمی‌تواند وجود داشته باشد. برای مثال، چند وجهی‌ای را به‌طریق زیر بسازید:

مکعبی را اختیار کنید و روی وجه‌های آن، به عنوان قاعده‌های هرم، هرمهای چهاربر منتظمی را به‌طرف خارج طوری بنا کنید که فرجه‌های نظیر قاعده °۴۵ باشند. در نتیجه یک دوازده وجهی حاصل می‌شود (یالهای مکعب یالهای این دوازده وجهی نیستند) که چهارده رأس خواهد داشت و هشت تای آنها، رأسهای مکعب هستند، و شش تای آن، رأسهای هرمهای ساخته شده هستند که بر رأسهای مکعب منطبق نشده‌اند. به آسانی دیده می‌شود که، همه یالهای چندوجهی، ازنظر طول مساوی و از مرکز مکعب به یک فاصله هستند، با وجود این، رأسهای آن نمی‌توانند متعلق به یک کره باشند.

۴۳۱. حجم کره برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ و حجم مخروط برابر است با $\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$. برای برابر بودن این دو حجم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \Rightarrow R = \sqrt[۳]{\frac{r^{۲}h}{۴}}$$

حجم استوانه، برابر است با $\pi r^2 h$. بنابراین، برای این‌که حجم کره برابر با حجم استوانه باشد، داریم :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{4}r^2 h}$$

(مسأله، از رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه» برداشته شده است.)

۴۳۲. نقطهٔ O را مرکز کره‌ای می‌گیریم که بر نقطهٔ داده شدهٔ A می‌گذرد و برسطح استوانه‌ای دوار به محور XY و شعاع r مماس است. نقطهٔ O روی XY قرار دارد و $OA = r$ است. بنابراین O، نقطهٔ برخورد XY و دایرهٔ به مرکز A و به شعاع r است و در صفحه XYA قرار دارد. بعکس، کره‌ای به مرکز O و به شعاع r که بدین صورت ساخته شده باشد، بر نقطهٔ A می‌گذرد و بر سطح استوانه‌ای مماس است. بنابر آن‌که فاصلهٔ A از XY کمتر از r یا مساوی r ؛ یعنی نقطهٔ A، درون یا روی سطح استوانه‌ای باشد، مسأله دارای دو جواب، یا یک جواب است.

اکنون کره‌ای به مرکز O را درنظر می‌گیریم که بر خط داده شدهٔ T مماس و محاط در سطح استوانه‌ای به محور XY و به شعاع r باشد. A را نقطهٔ تماس خط با کره می‌نامیم. AO عمود بر T و $AO = r$ است. بعلاوه، O روی محور XY قرار دارد ؛ بنابراین O محل برخورد خط XY و سطح استوانه‌ای دوار (S) به محور T و شعاع r است. بعکس، کرهٔ به مرکز O و به شعاع r که بدین صورت ساخته شده باشد، بر خط T مماس و در سطح استوانه‌ای داده شده محاط است.

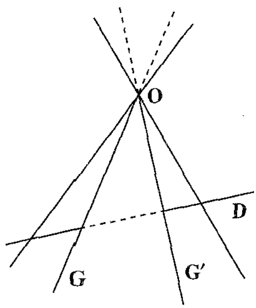
مسأله دارای دو جواب یا تنها یک جواب است، بنابر آن‌که خط XY را قطع کند، یا بر آن مماس باشد. یعنی، وقتی که کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خط T و XY کمتر از r یا مساوی r باشد ؛ یا به‌صورت دیگر می‌توان گفت، وقتی که خط T سطح استوانه‌ای داده شده را قطع کند یا برآن مماس باشد.

۴۳۳. صفحهٔ محوری (نصف‌النهاری) را که بر نقطهٔ داده شدهٔ A می‌گذرد موردنظر قرار می‌دهیم. برای آن‌که یک کره در یک سطح مخروطی محاط باشد و بر نقطهٔ A بگذرد، لازم و کافی است که مقطعش با این صفحه، دایرهٔ عظیمه‌ای از کره باشد که بر دو مولد نصف‌النهاری سطح مخروطی مماس باشد و بر نقطهٔ A نیز بگذرد. پس مسأله منجر می‌شود به رسم دایره‌ای که بر دو خط راست داده شده مماس است و بر یک نقطهٔ داده شده می‌گذرد. حل این مسأله را در هندسهٔ مسطحه دیده‌ایم. برای آن‌که مسأله جواب داشته باشد، نقطهٔ A باید خارج سطح مخروطی نباشد. به برقراری این شرط، اگر نقطهٔ A روی سطح مخروطی

باشد، مسأله یک جواب دارد و اگر در درون آن باشد، مسأله دو جواب خواهد داشت.

۴۳۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و یک کره در سطح مخروطی به رأس O محاط و بر خط داده شدهٔ D مماس باشد.

صفحهٔ (D و O) کره را تحت دایره‌ای قطع می‌کند که این دایره، بر خط D و دو مولد OG و OG′ از سطح مخروطی مماس است. بعکس، کره‌ای که شامل دایره‌ای مماس بر سه خط D، OG و OG′، واقع در درون زاویهٔ GOG′ و مرکزش محل برخورد محور این دایره و محور سطح مخروطی باشد، در سطح مخروطی محاط است و بر خط داده شدهٔ D مماس می‌باشد. مسأله دارای دو جواب است.



۱۲. برش، مقطع

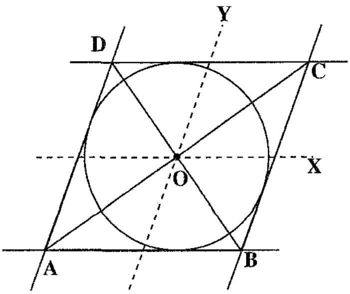
۴۳۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۴۳۶. مماسهایی که از یک نقطه بر یک کره رسم می شوند با هم مساوی‌اند و نقطه‌های تماس همگی روی صفحه‌ای قرار دارند که از یک نقطهٔ تماس بر خطی که نقطه داده شده را به مرکز کره وصل می‌کند، عمود می‌شود. فصل مشترک این صفحه با کره، دایرهٔ محیطی چندضلعی حاصل از نقطه‌های مماس است.

۴۳۷. فرض می‌کنیم A، B، C، D، ... رأسهای چندضلعی قاعده و A′ ، B′ ، C′ ، D′ ، ... نقطه‌هایی باشند که یالهای SA، SB، SC، ... کره را قطع می‌کنند. این نقطه‌ها متعلق به دایرهٔ مقطع خروجی مخروطی هستند که رأس آن S و قاعده‌اش دایرهٔ محیطی چندضلعی ABCD.... است.

پس نقطه‌های A′ ، B′ ، C′ ، D′ ، ... رأسهای یک چندضلعی مسطح محاطی می‌باشند.

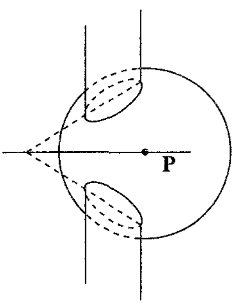
نکته. می‌دانیم که اگر مقطع ورودی یک مخروط با یک کره دایره باشد، مقطع خروجی آن نیز دایره است.



۴۳۸. صفحهٔ شکل را صفحهٔ گذرنده بر OX و OY یعنی محورهای سطحهای استوانه‌ای دوار، اختیار می‌کنیم. این صفحه، کره را تحت یک دایرهٔ عظیمه و سطحهای استوانه‌ای را تحت خطهای دو به دو موازی که بر این دایرهٔ عظیمه مماسند و لوزی ABCD را تشکیل می‌دهند، قطع می‌کند. هر نقطهٔ مشترک M بین سطحهای استوانه‌ای، که به یک فاصله از محورهای OX و OY قرار دار،د روی یکی از صفحه‌های نیمسازهای P و Q از زاویه‌های تشکیل شده بین این دو محور قرار دارد؛ و بعکس، اگر M نقطه‌ای مشترک بین یکی از سطحهای استوانه‌ای و یکی از دو صفحه P یا Q باشد، این نقطه به سطح استوانه‌ای دیگر نیز تعلق خواهد داشت.

از آن‌چه گفته شد، نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطه‌های مشترک بین این دو سطح استوانه‌ای، از مقطعهای یکی از آنها به‌وسیلهٔ صفحه‌های P و Q تشکیل می‌شود. یعنی به‌وسیلهٔ دو صفحه‌ای که بترتیب بر AC و BD می‌گذرند و بر صفحهٔ شکل عمودند.

۴۳۹. کره و استوانه را روی صفحه‌ای موازی مولدهای استوانه که بر مرکز کره و مرکز دایرهٔ ورودی می‌گذرد، نمایش می‌دهیم. بدیهی است که منحنی وارد شده و منحنی خروجی فصل مشترک استوانه و کره نسبت به صفحهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای که بر استوانه عمود می‌شود، قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین دو منحنی مقطع ورودی و خروجی با هم مساوی‌اند.



تبصره. به‌طور کلی می‌توان گفت: هنگامی که یک استوانه یک کره را قطع می‌کند، مقطع از دو قسمت متقارن نسبت به صفحهٔ دایرهٔ عظیمه‌ای از کره که عمود بر محور استوانه است، تشکیل می‌شود.

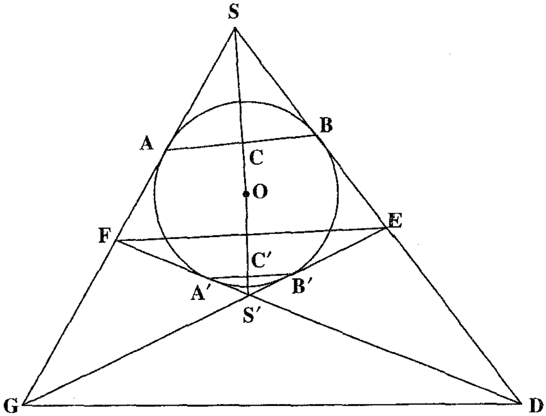
۴۴۰. ۱. x را شعاع مقطع و y را فاصلهٔ مرکز کره از مرکز مقطع می‌نامیم. حجم موردنظر مساوی $\pi x^2 y$ است. ازطرفی $x^2 + y^2 = r^2$ است. بنابراین باید مقدارهای x و y را به‌صورت زیر اختیار کنیم:

$$x^2 = \frac{2}{3} r^2 ; y = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

برای این مقدار از شعاع، باید کره‌ای هم‌مرکز با کرهٔ داده شده رسم و صفحه‌ای موازی صفحهٔ داده شدهٔ P رسم کرد.

۲. با امتداد دادن استوانه ناقص به‌دست آمده، استوانهٔ محاط در کره حاصل می‌شود، بنابراین باید برای قاعده، مقطعی مساوی با $\frac{۲}{۳}\pi r^۲$ داشته باشیم.

۴۴۱. صفحه شکل را صفحهٔ گذرنده بر محورهای دو سطح مخروطی می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از فصل مشترک خواسته شده باشد (این نقطه در شکل داده نشده است) و از این نقطه مماس MT را بر کره رسم می‌کنیم و



فاصله‌های نقطهٔ M از صفحه‌های دایره‌های تماس AB و A′B′ را با d و d′ نشان می‌دهیم.

برای آن‌که نقطهٔ M به سطحهای مخروطی تعلق داشته باشد، لازم و کافی است که :

$$\frac{MT}{d}=\frac{SA}{SC} \quad و \quad \frac{MT}{d'}=\frac{S'A'}{S'C'}$$

امّا دو تناسب بالا، معادل دو رابطهٔ زیر می‌باشند :

$$\frac{MT}{d}=\frac{SA}{SC} \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{d'}=\frac{S'A'.SC}{S'C'.SA} \qquad و\ (۲)$$

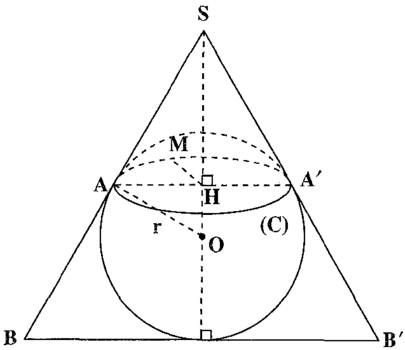
رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که نقطهٔ M به سطح مخروطی به رأس S تعلق دارد و رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که نقطهٔ M به یکی از دو صفحهٔ P و Q تعلق دارد که مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که نسبت فاصله‌شان از دو صفحهٔ دایره‌های تماس، مساوی $\frac{S'A'.SC}{S'C'.SA}$ است.

بنابراین فصل مشترک دو سطح مخروطی، عبارت است از فصل مشترک یکی از آنها، با صفحه‌های P و Q.

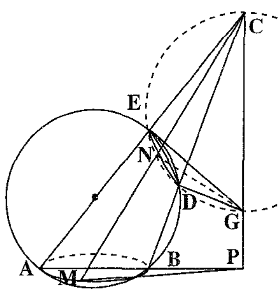
صفحه‌های P و Q، صفحه‌های عمود بر صفحهٔ شکل هستند که بترتیب بر خطهای EF

و GD گذشته‌اند. زیرا این چهار نقطهٔ E، F، G و D مشترک بین دو سطح مخروطی می‌باشند.

تبصره. در صورتی که به جای یکی از دو سطح مخروطی، به‌عنوان مثال، به‌جای سطح مخروطی به رأس S، یک سطح استوانه‌ای جایگزین کنیم، این قضیه باز هم درست است، زیرا رابطهٔ (۱) به‌صورت $MT = d$ درمی‌آید، و همین استدلال به‌کار می‌رود.



۴۴۲. اگر منحنی تماس کرهٔ به مرکز O و به شعاع X با مخروط محیط بر آن را (C) بنامیم و نقطهٔ تقاطع صفحهٔ منحنی (C) با خطی که رأس مخروط را به O مرکز کره وصل می‌کند H بنامیم، بسادگی ثابت می‌توان کرد که هر نقطهٔ منحنی (C) از نقطهٔ H به یک فاصله است، پس این منحنی دایره است.



۴۴۳. مخروط ABC را که قاعده‌اش دایرهٔ AMB از کرهٔ داده شده است، درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که منحنی خروجی DNE دایره است.

از رأس C، عمود CP را بر صفحهٔ قاعدهٔ مخروط فرود می‌آوریم و قطر AB از قاعده را که از پای عمود، یعنی از نقطهٔ P می‌گذرد رسم می‌کنیم.

در صفحهٔ ACP، خط EG را عمود بر CE رسم می‌کنیم و بالاخره CM را یک مولد دلخواه و N را نقطهٔ برخورد این مولد با کره می‌نامیم.

۱. با استفاده از ویژگی قاطعهای رسم شده ازیک نقطه نسبت به یک کره داریم :

$$CM.CN = CA.CE$$

امّا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CAP و CGE متشابه‌اند، و داریم :

$$CA.CE = CP.CG$$

بنابراین

$$CM.CN = CP.CG$$

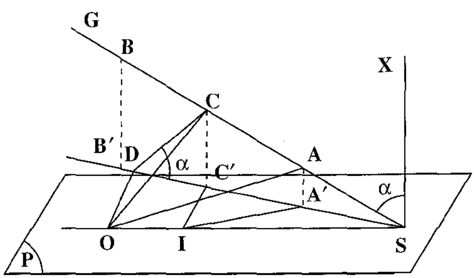
در نتیجه مثلثهای CMP و CGN متشابه‌اند، زیرا یک زاویهٔ مساوی، بین دو ضلع

متناسب دارند، امّا زاویهٔ CPM قائمه است زیرا CP بر صفحهٔ قاعده عمود است. بنابراین زاویهٔ CNG نیز قائمه است.

۲. نقطه‌های E، N و C روی کره‌ای قرار دارند که به قطر CG رسم می‌شود. در این‌صورت، منحنی خروجی، منحنی تقاطع دو کره است، امّا می‌دانیم که منحنی حاصل از تقاطع دو کره یک دایره است. بنابراین ...

تبصره. همچنین داریم $CE.CA = CB.CD$ پس دایرهٔ END مقطع پاد موازی مخروط CAMB است. بنابراین مقطع پاد موازی یک مخروط مایل با قاعدهٔ مستدیر، یک دایره است.

۴۴۴. محور سطح را SX و زاویهٔ مولدش را α می‌نامیم و مرکز کرهٔ به شعاع r را نقطهٔ O می‌گیریم که تصویرش روی SX نقطهٔ S است؛ صفحهٔ عمود برSX در نقطهٔ S را با P نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم یک مولد SG از



سطح مخروطی، کره را در نقطه‌های A و B قطع کند، OC را عمود بر AB رسم می‌کنیم، سپس AA' ، BB' و CC' را عمود بر صفحه P رسم می نماییم. بالاخره در صفحهٔ $ABB'A'$ ، CD را عمود بر AB و سپس $C'I$ را موازی DO رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که I ثابت و IA' نیز ثابت است؛ در این‌صورت نتیجه خواهد شد که نقطه‌های A و B به سطح استوانه‌ای دوار تعلق دارند که هادی‌اش در صفحهٔ P، دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IA' است. برای این کار، نخست ملاحظه می‌کنیم که صفحهٔ ODC، بر SG و در نتیجه بر صفحهٔ $ABB'A'$ عمود است، OD و IC' بر $A'B'$ عمودند؛ بنابراین $IA' = IB'$ است. با فرض $OS = d$ داریم: $\frac{SI}{d} = \frac{SC'}{SD}$ ؛ امّا در مثلث قائم‌الزاویه SCD$(\hat{C} = ۹۰^\circ)$، داریم:

$$SC' = SC\sin\alpha \quad \text{و} \quad SD = \frac{SC}{\sin\alpha}$$

از آن‌جا، $\frac{SI}{d} = \sin^۲\alpha$ و در نتیجه، $SI = d\sin^۲\alpha$ به دست می‌آید و این نشان می‌دهد

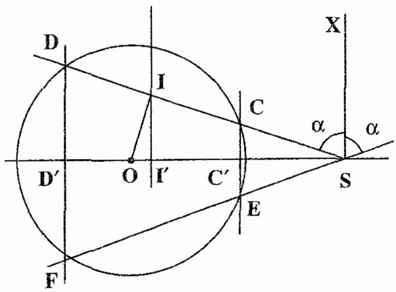
که نقطهٔ I ثابت است. بعلاوه، $SA.SB = d^2 - r^2$ ؛ امّا، همچنین داریم :

$$SA.SB = \frac{SA'.SB'}{\sin^2 \alpha} = \frac{SI^2 - IA'^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{d^2 \sin^4 \alpha - IA'^2}{\sin^2 \alpha}$$

با مساوی قرار دادن دو مقدار SA.SB نتیجه می‌شود که :

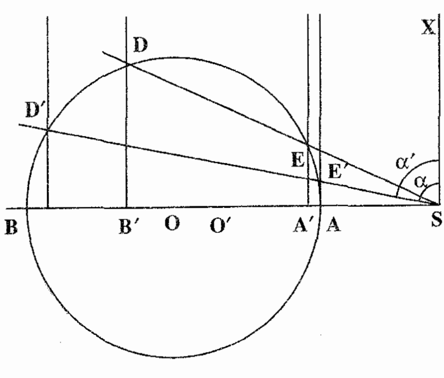
$$IA'^2 = (r^2 - d^2 \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha$$

و این نشان می‌دهد که IA' طول ثابتی دارد. شرط حقیقی بودن IA' یعنی $r \geq d\cos\alpha$ ، برقرار است، چون که سطح مخروطی کره را قطع می‌کند یا بر آن مماس است.



صفحهٔ XSO یک صفحهٔ نصف‌النهاری کره، یک صفحهٔ محوری سطح مخروطی و در نتیجه یک صفحهٔ محوری سطح استوانه‌ای است. در این صورت مقطع شکل با این صفحه از یک دایرهٔ عظیمهٔ کره، مولدهای SCD و SEF از سطح مخروطی و مولدهای محوری CE و DF از سطح استوانه‌ای تشکیل می‌شود.

۴۴۵. صفحه‌ای که بر خط شامل مرکزهای O و O′ از دایره‌ها می‌گذرد و بر صفحهٔ P عمود است، کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ به قطر AB و سطح استوانه‌ای را تحت مولدهای A′E و B′D قطع می‌کند ؛ DE خط OO′ را در نقطهٔ S قطع می‌نماید ؛ SX را عمود بر صفحهٔ P رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $D\hat{S}X = \alpha$ باشد.



تمام نقطه‌های مشترک M بین کره و سطح استوانه‌ای، به سطح مخروطی به رأس S و محور SX و زاویهٔ مولّد α تعلق دارند، یا که $M\hat{S}X = \alpha$.

درواقع، فرض کنیم که $M\hat{S}X \neq \alpha$ و $M\hat{S}X = \alpha'$ باشد. نقطهٔ M که مشترک بین کره و سطح مخروطی به رأس S، محور SX و زاویهٔ مولد α' است، به سطح استوانه‌ای دواری تعلق دارد، که دو مولّد محوری آن از دو نقطهٔ E' و D' می‌گذرند، و چون این سطح استوانه‌ای و سطح استوانه‌ای داده شده، یکی درون دیگری است، پس نقطهٔ M به سطح استوانه‌ای داده شده تعلق ندارد. بنابراین $\alpha' = \alpha$ است و نقطهٔ M روی سطح مخروطی مشخص شده در بالا واقع است.

۴۴۶. پاسخ صحیح گزینه (هـ) می‌باشد.

اگر n صفحه با این شرط که هرکدام از مرکز کره بگذرند و هیچ سه‌صفحه‌ای در یک قطر مشترک نباشند کره را به f_n ناحیه تقسیم کنند آن‌گاه با اضافه شدن یک صفحه دیگر با شرایط بالا کره به f_{n+1} ناحیه افراز می‌شود. می‌دانیم n صفحه قبلی n دایرهٔ عظیمه بر روی کره به‌وجود می‌آورند و صفحه اضافه شده نیز خود یک دایره عظیمه به‌وجود می‌آورد که با هر دایره قبلی دو نقطهٔ تلاقی خواهند داشت یعنی تعداد ۲n نقطه تلاقی جدید که برابر با تعداد نواحی اضافی شده می‌باشند به‌وجود خواهد آمد. پس داریم:

$f_{n+۲} = f_n + ۲n$ و $f_۱ = ۲$ و این رابطهٔ بازگشتی ما را به جواب خواهد رساند و نتیجه می‌شود: $f_۹ = ۷۴$ (محاسبه به عهده خواننده می‌باشد.)

۴۴۷. شعاع دایرهٔ مقطع $r = \sqrt{۱۰^۲ - ۶^۲} = ۸$ است.

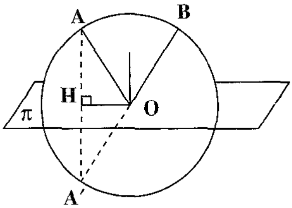
۴۴۸. می‌دانیم که مقطع هر صفحه با یک کره، یک دایره است (در حالت مماس بودن صفحه و کره، یک نقطه است). اگر OH فاصلهٔ مرکز کره از صفحه و MN قطری از دایرهٔ مقطع گذرنده بر A باشد داریم:

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = \frac{OH}{۲R} \Rightarrow OH = R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$r = HN = \sqrt{ON^۲ - OH^۲} = \sqrt{R^۲ - (۲-\sqrt{۲})R^۲} = \sqrt{R^۲(\sqrt{۲}-۱)}$$

$$\Rightarrow r = R\sqrt{\sqrt{۲}-۱} \text{ شعاع دایرهٔ مقطع}$$

۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به کره



۴۴۹. دو انتهای منحنی را A و B می‌گیریم و صفحهٔ π را درنظر می‌گیریم که از نقطهٔ O، مرکزکره بگذرد و بر نیمساز زاویهٔ AOB عمود باشد. ثابت می‌کنیم، منحنی AB در نیمکرهٔ بازی قرار دارد که به وسیلهٔ این صفحه به‌وجود آمده و شامل A و B است. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم، نقطهٔ X از منحنی AB، روی صفحهٔ π و یا زیر آن واقع باشد؛ X' را نقطهٔ برخورد AX با π می‌گیریم. بنابر نابرابری مثلثی داریم:

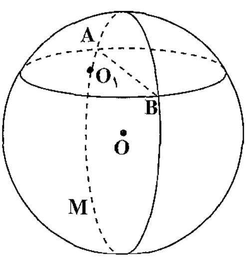
$$AX + XB > AX' + X'B$$

اگر A'، قرینهٔ A نسبت به صفحهٔ π باشد، داریم (شکل): $A'B = ۲$، زیرا A'، O و B بر یک استقامتند. بنابراین:

$$AX' + X'B = A'X' + X'B \geq A'B = ۲$$

تناقض حاصل، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

در حالت کلی‌تر، می‌توان ثابت کرد که، اگر دو نقطه را روی سطح جسمی انتخاب کنیم که دارای مرکز تقارن باشد و حداقل قطر مرکزی آن برابر ۲ درنظر گرفته شود، و این دو نقطه را با یک منحنی به طول کمتر از ۲ به‌هم وصل کنیم، این منحنی در یکی از نیم‌صفحه‌های بازی قرار می‌گیرد که به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که از مرکز جسم گذشته است، به‌وجود می‌آیند. مسأله‌ای که به این مسأله مربوط می‌شود، چنین است: هر منحنی بسته به طول ۲π در کرهٔ به شعاع واحد، در یکی از نیمکره‌های باز کره قرار دارد.



۴۵۰. **راه اوّل.** فرض کنید، مقطع این سطح با صفحه، دایره‌ای به مرکز O_1 باشد (شکل). از نقطهٔ O_1، صفحه‌ای عمود بر صفحهٔ دایرهٔ حاصل رسم می‌کنیم. این صفحه، دایره را روی قطر AB و سطح را روی دایرهٔ دیگری، که ازنقطه‌های A و B می‌گذرد، قطع می‌کند. مرکز و شعاع این دایرهٔ دوم را، مرکز و شعاع کره‌ای می‌گیریم و آن را رسم می‌کنیم. هر نقطهٔ M از این کره، بر سطح مورد بررسی قرار دارد. در واقع، اگر صفحه‌ای را از این نقطه و از مرکزهای دو دایرهٔ رسم شده، بگذرانیم، هریک از دایره‌ها را در دو نقطه، و کره را در دایرهٔ تازه‌ای قطع می‌کند. دایرهٔ اخیر، که با سطح دارای سه نقطهٔ (و حتی

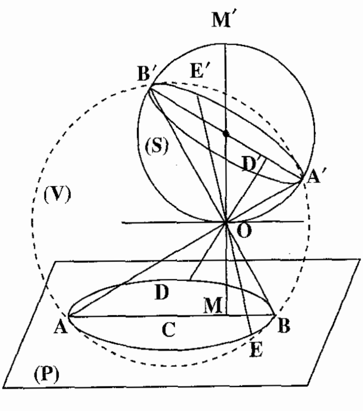
چهار نقطه) مشترک است، بر سطح قرار دارد و بنابراین، نقطهٔ انتخابی از سطح کره هم، بر این سطح واقع است. از طرف دیگر، هر نقطه‌ای که بر سطح این کره واقع نباشد، بر سطح مورد بررسی قرار ندارد، زیرا اگر متعلق به آن باشد، آن‌وقت، این نقطه و دو نقطهٔ برخورد کره با خط راستی که مرکز کره را به این نقطه وصل می‌کند، بر محیط یک دایره قرار می‌گیرند که ممکن نیست. قضیه ثابت شد.

راه دوم. فرض کنید C طولانی‌ترین وتر شکل فضایی مفروض باشد. هر مقطع این شکل که حاوی C باشد دایره‌ای به قطر C است. پس شکل فضایی مفروض سطحی دوار حول C، و بنابراین کره است.

۴۵۱. اگر سطح دو دایره در خط D متقاطع باشند، باید جمیع نقطه‌های خط D نسبت به دو دایره دارای قوای متساوی باشند؛ زیرا هر یک از قوتها برابر قوت نقطه نسبت به کره می‌باشد. در این صورت دو دایره بر روی یک مخروط نیز قرار می‌گیرند زیرا شرط قرار داشتن دو دایره بر روی یک مخروط نیز در مرحلهٔ آخر به همین شرط منجر می‌شود. (بدیهی است این مخروط دورانی نیست مگر این که دو دایره در دو سطح متوازی باشند.) بر دو دایره که در دو سطح متوازی قرار دارند همواره ممکن است یک کره مرور داد. تعیین مرکز کره مشکل نیست.

۴۵۴. منعکس یک صفحه نسبت به نقطه‌ای واقع در خارج آن صفحه، یک کره است که بر قطب انعکاس می‌گذرد و مرکزش روی خطی است که از قطب انعکاس عمود بر صفحه رسم می‌شود.

منعکس یک کره نسبت به یک نقطه واقع در خارج آن کره، یک کرهٔ دیگر است، و قطب انعکاس یکی از مرکزهای تشابه دو کره است.



۴۵۵. فرض می‌کنیم AB یک دایره و نقطهٔ O واقع در خارج آن، قطب انعکاس باشد. عمود OM را بر صفحهٔ دایره فرود می‌آوریم و صفحهٔ OMC را به عنوان صفحهٔ اصلی شکل مورد بحث در نظر گرفته، نقطهٔ M′ منعکس نقطهٔ M را مشخص می‌کنیم. کرهٔ رسم شده روی قطر OM′، منعکس صفحهٔ P خواهد بود که این صفحه، دایرهٔ داده شده را دربر دارد. پس تمام نقطه‌های منعکس دایرهٔ AB روی کرهٔ S

قرار دارند. با رسم یک شعاع انعکاس دلخواه DOD' محدود به کره، خواهیم داشت: $OD.OD' = k^2$.

در صفحهٔ OMC، دایره‌ای از نقطه‌های A و B و منعکسهای آنها یعنی A' و B' می‌گذرانیم. کرهٔ V که دایرهٔ عظیمه‌اش دایرهٔ $ABB'A'$ است، باید از تمام نقطه‌های منعکس مانند D' و E' بگذرد، زیرا حاصلضرب هر دو قطعهٔ هر وتر رسم شده از نقطهٔ O در این کره، مقدار ثابتی است.

بنابراین منعکس دایرهٔ AB، دایرهٔ $A'D'B'E'$ است، زیرا این دایره فصل مشترک دو کرهٔ S و V است.

۴۵۶. تصویر استرئو گرافیک Ste´re´ographique.

تصویر استرئو گرافیک یک شکل کروی، تصویر مخروطی به‌دست آمده روی یک صفحه قطری از کره، هنگامی که رأس مخروط یکی از دو انتهای قطر عمود بر صفحهٔ قطری اختیار شده باشد.

تمام آن چه که در مورد شکلهای معکوس در فضا نشان داده شده است،حالت خاصی از تصویر استرئوگرافیک است. در این صورت، تصویر دایرهٔ AMB، دایرهٔ $A'M'B'$ است. زاویه‌ها در اندازه‌های واقعی‌شان محفوظ می‌مانند.

۴۵۷. ثابت کنید بیش از شش کره یافت نمی‌شود.

فرض کنید هفت تا کره موجود باشد. مراکز همهٔ هفت کره را به مرکز کرهٔ مفروض وصل کنید و محل برخورد این پاره‌خطها را با سطح کرهٔ مفروض، O_1، O_2، ... ، O_7 بنامید. برای هر O_i، بر روی کره، مجموعه نقطه‌هایی را در نظر بگیرید که فاصله‌های آنها (بر روی سطح کره) تا O_i بیشتر از فاصله تا هر O_k دیگر $k \neq i$ نباشد. سطح کره، به هفت چندضلعی کروی تجزیه خواهد شد. هر چند ضلعی از برخورد شش نیمکره که شامل نقطه O_i می‌باشند به‌وجود می‌آید و مرز آن دایرهٔ عظیمه‌ای است که در طول آن صفحه‌ای که از وسط O_iO_k می‌گذرد و بر آن عمود است، کره را قطع می‌کند. هر یک از n ضلعیهای تشکیل شده، شامل دایره‌ای هستند که شعاع کروی آنها، از مرکز کره اصلی، تحت زاویه α دیده می‌شود و $\sin\alpha = ۰/۷$.

تعداد ضلعها و رأسهای جدا شده حاصل را، بترتیب با K و N نشان دهید. (هر ضلع، ضلع مشترک دو چند ضلعی مجاور است و یکبار به حساب می‌آید. در مورد رأسها هم، این موضوع صدق می‌کند.) به آسانی دیده می‌شود که در مورد این گونه جداسازیها هم، فرمول اولر صادق است. در این حالت

$$K = N + ۵$$

صدق خواهد کرد. از طرف دیگر،

$$K \geq \frac{۳}{۲} N$$

زیرا از هر رأس، لااقل سه ضلع خارج می‌شود و هر ضلع دو بار به حساب می‌آید. اما به آسانی نتیجه می‌شود،

$$N \leq ۱۰ \ ، \ K \leq ۱۵$$

در بین همهٔ n ضلعیهای کروی شامل دایرهٔ مفروض یک n ضلعی منتظم کمترین مساحت را دارد. علاوه بر این، می‌توان نشان داد که مجموع مساحتهای n ضلعی، (n+۲) ضلعی بیشتر از دو برابر مساحت یک n ضلعی منتظم است. (چند ضلعی محیطی یک دایره، موردنظر است.) همچنین معلوم است که، مساحت یک n ضلعی، با افزایش n کمتر می‌شود. از آن‌جا نتیجه می‌شود که مجموع مساحتهای هفت n ضلعی حاصل، نمی‌تواند کمتر از مجموع مساحتهای پنج چهارضلعی منتظم و دو پنج‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای باشد که شعاع کروی آن، نظیر زاویه مرکزی

$$\alpha = \operatorname{Arc}\sin \frac{۷}{۱۰}$$

است. مساحت پنج ضلعی نظیر برابر خواهد بود با :

$$S_۵ = ۹[۱۰ \operatorname{Arc}\cos(\cos\alpha \sin\frac{\pi}{۵}) - ۳\pi]$$

مساحت چهارضلعی منتظم برابر است با :

$$S_۴ = ۹[۸ \operatorname{Arc}\cos(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\alpha) - ۲\pi]$$

به آسانی می‌توانیم ثابت کنیم :

$$۲S_۵ + ۵S_۴ > ۳۶\pi$$

به این ترتیب هفت کره با شعاع ۷ نمی‌توانند توأماً به کره‌ای به شعاع ۳ بدون تقاطع با یکدیگر مماس بشوند. در عین حال به آسانی می‌توانیم نشان بدهیم که امکان آن تحت شرایط مسأله با شش کره وجود دارد.

۴۵۸. مساحتهای وجه‌های چهاروجهی را با $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ و $S_۴$ و حجم آن را با V نشان دهید. اگر r شعاع کرهٔ مماس بر همه وجه‌های چهاروجهی باشد، آن‌گاه با علائم

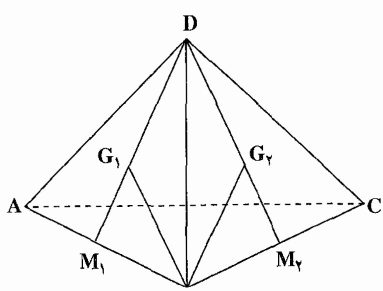
$$\varepsilon_i = \pm ۱ \ , \ i = ۱,۲,۳,۴$$

که مناسب انتخاب شده باشند تساوی زیر به‌دست می‌آید :

$$(\varepsilon_۱ S_۱ + \varepsilon_۲ S_۲ + \varepsilon_۳ S_۳ + \varepsilon_۴ S_۴)\frac{r}{۳} = V \qquad (۱)$$

در این حالت اگر به ازای مجموعه مفروض ε_i، مقدار r که با تساوی (۱) تعیین می‌شود، مثبت باشد، آن‌گاه کره متناظر وجود خواهد داشت.
بنابراین برای هر چهاروجهی دلخواه، همیشه یک کره محاطی ($\varepsilon_i = +1$) و چهار کره محاطی خارجی (برای یکی $\varepsilon_i = -1$ و برای بقیه $\varepsilon_i = +1$) وجود دارد. یعنی چهار کره‌ای، که مرکزهای هر یک در خارج چهاروجهی بوده و بر یکی از وجه‌های آن در نقطه‌ای واقع در داخل آن مماس باشند.
به علاوه، به‌طور وضوح معلوم می‌شود اگر برای بعضی مقادیر انتخابی ε_i کره‌ای وجود داشته باشد، آن‌گاه برای مجموعه مخالف ε_i کره‌ای وجود نخواهد داشت و این بدین معناست که حداکثر ۸ کره وجود خواهد داشت. دقیقاً ۸ کره، اگر مجموع مساحتهای هر دو وجه، برابر با مجموع مساحتهای دو وجه دیگر نباشد.

۴۶۰. **راه اول.** G_1 و G_2 را مرکزهای هندسی و DG_1M_1 و DG_2M_2 را، بترتیب، میانه‌های مثلثهای DAB و DBC می‌گیریم. چون مماسهایی که از یک نقطهٔ واقع در خارج کره، بر آن رسم شوند، طولهایی برابر دارند، بنابراین $DG_1 = DG_2$ و $BG_1 = BG_2$ بنابراین دو مثلث DBG_1 و DBG_2 برابرند و $B\hat{D}G_1 = B\hat{D}G_2$. از آن‌جا که $DM_1 = \frac{3}{2}DG_1$ و $DM_2 = \frac{3}{2}DG_2$، بنابراین دو مثلث DBM_1 و DBM_2 برابرند و $BM_1 = BM_2$ و همچنین BA=BC. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، هر دو یال مجاور، طولهای برابر دارند، یعنی چهاروجهی منتظم است.
راه دوم. a، b، c و d را، بردارهای از مرکز کرهٔ محاطی، بترتیب، به رأسهای A، B،



C و D می‌گیریم. بردار نقطهٔ G مرکز هندسی مثلث ABC، از رابطهٔ $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$ به‌دست می‌آید. بنابر فرض داریم $|g| = r$، (r، شعاع کرهٔ محاطی چهاروجهی است).

بنابراین

$$|a+b+c|^2 = 3g.(a+b+c) = 9r^2$$

و یا

$$g.a+g.b+g.c = 3r^2 \qquad (1)$$

همچنین، بنابه فرض، g بر صفحهٔ ABC و بنابراین، بر هر خط راست واقع در صفحهٔ ABC عمود است. از این‌رو، حاصلضربهای داخلی $g.(a-b)$ و $g.(b-c)$ برابر صفرند و به‌دست می‌آید : $g.a = g.b = g.c = r^2$ (با توجه به برابری (۱)) و یا :

$$(a+b+c).a = (a+b+c).b = (a+b+c).c = 3r^2 \qquad (2)$$

به همین ترتیب، می‌توان به نتیجه‌های مشابهی برای ضلعهای دیگر رسید ؛ مثلاً برای ABD داریم :

$$(a+b+d).a = (a+b+d).b = (a+b+d).c = 3r^2 \qquad (3)$$

از (۲) و (۳) به‌دست می‌آید : $a.c = a.d$ ؛ به همین ترتیب، به دست می‌آید :

$$a.b = a.c = a.d = b.c = b.d = c.d = \lambda^2$$

از رابطهٔ (۲) داریم :

$$|a|^2 + a.b + a.c = 3r^2$$

یعنی $|a|^2 = 3r^2 - 2\lambda^2$.

و به همین ترتیب :

$$|b|^2 - |c|^2 = |d|^2 = 3r^2 - 2\lambda^2$$

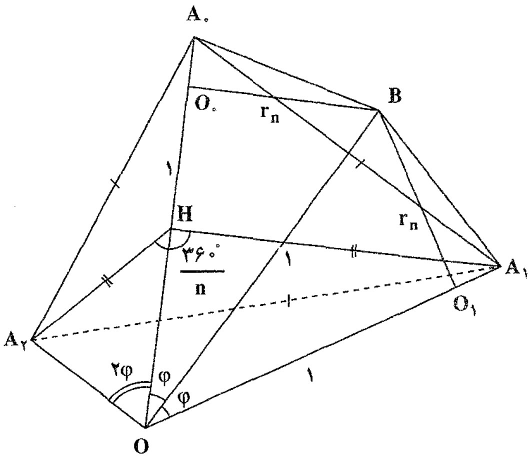
مربع طول یال AB، برابر است با :

$$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a.b = 6r^2 - 6\lambda^2$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، طول هر یال دیگر چهاروجهی هم، همین مقدار است، یعنی با چهاروجهی منتظم سروکار داریم.

یادداشت. در مسألهٔ بالا، می‌توان به جای مرکزهای هندسی وجه‌ها، فرض کرد که کرهٔ محاطی چهاروجهی، بر چهار وجه آن در، (I) مرکزهای دایره‌های محاطی وجه‌ها، (II) محل برخورد سه ارتفاع وجه‌ها، (III) مرکزهای دایره‌های محیطی وجه‌ها، مماس است. به عنوان تمرین ثابت کنید : در حالتهای (I) و (II) چهاروجهی منتظم است، ولی درحالت (III)، با یک چهاروجهی متساوی‌الساقین سروکار داریم (یعنی یالهای روبه‌رو در آن، با هم برابرند).

۴۶۱. گزینهٔ (د) درست است.



۴۶۲. مرکز کره را O، مرکز دایره‌های O_i $(i=\circ,۱,\dots,n)$ را O_i، نقطهٔ برخورد نیم‌خط راست OO_i با کره را A_i و نقطهٔ تماس دایره‌های $C_\circ$ و $C_۱$ را B می‌نامیم.

$A_\circ\hat{O}B=\varphi$ می‌گیریم، در این صورت:

$$\sin\varphi=r_n\ ,\ A_\circ A_i=۲r_n$$

زیرا

$$OB=OA_\circ=OA_۱=۱\ ,\ O_\circ B=O_۱B=r_n\ ,$$

$$O\hat{O}_\circ B=O\hat{O}_۱B=۹\circ^\circ$$

(شکل). در هرم منتظم $OA_\circ A_۱A_۲$، زاویه‌های مسطحهٔ رأس O برابر ۲φ و زاویهٔ دو وجهی مربوط به یال $OA_\circ$ برابر $\frac{۳۶\circ^\circ}{n}$ است. اگر $A_۱H$، بر یال $OA_\circ$ عمود باشد، آن وقت

$$A_۱H=A_۲H=\sin^۲\varphi=۲\sin\varphi\cos\varphi=۲r_n\sqrt{۱-r_n^۲}$$

سپس، داریم:

$$۲r_n=A_\circ A_۱=A_۱A_۲=۲A_۱H\sin\frac{۱۸\circ^\circ}{n}=۴r_n\sqrt{۱-r_n^۲}\sin\frac{۱۸\circ^\circ}{n}$$

از آن‌جا

$$۲\sqrt{۱-r_n^۲}\sin\frac{۱۸\circ^\circ}{n}=۱$$

بنابراین

$$\sin\frac{۱۸\circ^\circ}{n}=\frac{۱}{۲\sqrt{۱-r_n^۲}}>\frac{۱}{۲}\ ,\ n<۶$$

(نابرابری اخیر را، از این جا هم می‌توان به‌دست آورد که، زاویهٔ دو وجهی

$A_1HA_2 = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$ مربوط به یال جانبی OA_0، از زاویهٔ مسطحهٔ $A_0A_1A_2 = ۶۰^\circ$ در قاعدهٔ هرم، بزرگتر است)؛ و برای بقیهٔ مقدارهای $n = ۲,۳,۴,۵$، داریم:

$$r_n = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۴\sin^۲ \frac{۱۸۰^\circ}{n}}}$$

۴۶۳. حل ارشمیدس. ارشمیدس خطاب به پادشاه هه‌لونا می‌گوید: «تو می‌دانی که بسیاری از اخترشناسان گمان می‌کنند که، همهٔ دنیا کره‌ای است که، مرکز آن در مرکز زمین و شعاع آن برابر فاصلهٔ از مرکز زمین تا خورشید است. برخلاف اخترشناسان، آریستارک‌ساموسی، در نوشته‌های خود می‌کوشد این نظر را رد کند و ثابت کند، همهٔ دنیا مضربی از این مقدار است. او به این نتیجه می‌رسد که ستارگان و خورشید بی‌حرکتند، زمین روی دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخد و خورشید در مرکز این دایره قرار دارد. قبول می‌کنیم که قطر کرهٔ ستارگان بی‌حرکت نسبت به قطر همهٔ دنیا ـ به معنایی که بیشتر اخترشناسان می‌فهمند (یعنی منظومهٔ شمسی) ـ مثل نسبت آخری باشد به قطر زمین. من ادعا می‌کنم، اگر توده‌ای از شن، حتی به بزرگی کرهٔ ستاره‌ای آریستارک، داشته باشیم، باز هم می‌توانم عددی را نام ببرم که از تعداد شنهای چنین کرهٔ فرضی هم بیشتر باشد.
پیشنهاد من این است:

۱) محیط کرهٔ زمین، کمتر از ۳ میلیون «ستادی» است [هر «ستادی» برابر ۱۸۵ متر است].

همان طور که می‌دانی، کوشش شده است ثابت کنند که محیط دایرهٔ زمین قریب ۳۰۰۰۰۰ ستادی است، ولی من رأی گذشتگان را ترجیح می‌دهم و آن را ده برابر بزرگتر می‌گیرم.

۲) خورشید از زمین و زمین از ماه بزرگتر است. در این مورد، من با اکثریت اخترشناسان موافقم.

۳) قطر خورشید از ۳۰ برابر قطر ماه بزرگتر نیست [در واقع، قطر خورشید، قریب ۴۰۰ برابر قطر ماه است].

۴) قطر خورشید بیشتر از ضلع هزار ضلعی محاط در دایرهٔ عظیمهٔ کرهٔ سماوی است.

من، این اعتقاد آریستارک را قبول دارم که اندازهٔ ظاهری خورشید را $\frac{۱}{۷۲۰}$ اندازهٔ دایرهٔ منطقةالبروج می‌داند. من خودم زاویه‌ای را، که خورشید تحت آن دیده می‌شود، اندازه گرفته‌ام، ولی اندازهٔ دقیق این زاویه، به سادگی به‌دست نمی‌آید، زیرا، نه چشمها،

نه دستها و نه وسیله‌های اندازه‌گیری، قابل اطمینان نیستند. ولی، این جا، جای باز کردن این مطلب نیست. همین قدر کافی است بدانیم که، این زاویه، از $\frac{۱}{۱۶۴}$ زاویهٔ قائمه کوچکتر و از $\frac{۱}{۳۰۰}$ آن بزرگتر است.

براساس فرض (۲) و (۳)، قطر خوشید از ۳۰ برابر قطر زمین کوچکتر است. بنابراین، (طبق فرض ۴)، محیط هزارضلعی محاط در یکی از دایره‌های عظیمهٔ کرهٔ سماوی، کمتر از ۳۰۰۰۰۰ برابر قطر زمین است. ولی، اگر این مطلب درست باشد، آن وقت، قطر همهٔ جهان (یعنی به اعتقاد آریستارک، قطر منظومهٔ شمسی)، کمتر از ۱۰۰۰۰ برابر قطر زمین است، زیرا تنها برای شش ضلعی منتظم، قطر برابر است با $\frac{۱}{۳}$ محیط، برای هر چندضلعی دیگر، قطر از $\frac{۱}{۳}$ محیط کمتر است.

بنا بر فرض نخست، محیط دایرهٔ زمین، از ۳ میلیون «ستادی» کمتر است؛ در نتیجه، قطر آن، کمتر از یک میلیون «ستادی» می‌شود، زیرا طول قطر دایره، از $\frac{۱}{۳}$ محیط آن کمتر است. بنابراین، قطر همهٔ دنیا هم، از ۱۰۰۰۰ میلیون «ستادی» کمتر می‌شود.

اکنون، فرض می‌کنیم که، دانهٔ شن، چنان کوچک باشد که ۱۰۰۰۰ از آن، به اندازهٔ یک دانهٔ خشخاش بشود. من قطر دانهٔ خشخاش را $\frac{۱}{۴۰}$ اینچ می‌گیرم. در یکی از آزمایشها، وقتی ۲۵ دانهٔ خشخاش را در امتداد هم، روی خط راست قرار دادم، یک اینچ شد. ولی من می‌خواهم، استدلالی را داشته باشم که در برابر هر اعتراضی، تضمین شده باشد.

برای ما [یونانی‌ها]، تنها نام عددها تا «میریاد» ($۱۰^۴=۱۰۰۰۰$) وجود دارد با وجود این، ما تا ۱۰۰۰۰ میریاد هم ($۱۰^۸=۱۰^۴.۱۰^۴$) حساب می‌کنیم. برای این که جلوتر برویم، ۱۰۰۰۰ میریاد ($۱۰^۸$) را، به عنوان واحد مرتبهٔ دوم می‌گیریم و دوباره ۱۰۰۰۰ برابر آن را انتخاب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۱۰^۸ \times ۱۰^۸ = ۱۰^{۸\times۲}$$

که آن را، واحد مرتبهٔ سوم می‌گیریم. به همین ترتیب، می‌توان ۱۰۰۰۰ میریاد بار از واحد مرتبهٔ سوم را انتخاب کرد و واحد مرتبهٔ چهارم را به‌دست آورد، ($۱۰^{۸\times۳}$) و غیره، مثلاً، $۱۰^{۸\times۷}=۱۰^{۵۶}$، واحد مرتبهٔ هشتم می‌شود؛ ضمناً، عدد ۱، واحد مرتبهٔ اوّل است.

حالا حساب می‌کنیم که چند دانهٔ شن، که یک میریاد آن حجم یک دانهٔ خشخاش را پر می‌کند، در کره‌ای به قطر یک اینچ جا می‌گیرد. بنابر فرض ما، هر دانهٔ خشخاش برابر $\frac{1}{40}$ اینچ است، ولی بنابر حکم معلوم هندسی، حجم کره‌ها بر نسبت مکعب قطرهای آنهاست، یعنی بر نسبت

$$1^3 : 40^3 = 1 : 64000$$

به این ترتیب، کرهٔ به قطر یک اینچ، حاوی ۶۴۰۰۰ دانهٔ خشخاش، یا ۶۴۰۰۰ میریاد، یعنی 64×10^7، یا کمتر از 10^9 دانهٔ شن می‌باشد. نسبت حجم کرهٔ به قطر ۱۰۰ اینچ به کرهٔ به قطر یک اینچ، مثل $1 : 100^3$ یا $1 : 10^6$ است.

به این ترتیب، روشن است که، در کرهٔ به قطر ۱۰۰ اینچ، کمتر از $10^6 \times 10^9$ دانهٔ شن است.

کرهٔ به قطر ۱۰۰۰۰ اینچ، دارای کمتر از $10^{16} \times 10^4 \times 10 = 10^{21}$ یعنی ده میریاد واحد مرتبهٔ سوم ما، دانه شن می‌باشد.

ولی چون «ستادی» از ۱۰۰۰۰ «اینچ» کمتر است، روشن است که در کرهٔ به قطر یک ستادی، کمتر از ۱۰ میریاد واحد مرتبهٔ سوم، از دانه‌های شن وجود دارد، به همین ترتیب، پیدا می‌کنیم که در کرهٔ

به قطر 10^2 ستادی، کمتر از $1000 \times 10^{8\times3}$ دانهٔ شن؛

به قطر 10^4 ستادی، کمتر از $10 \times 10^{8\times4}$ دانهٔ شن؛

به قطر 10^6 ستادی، کمتر از $10^6 \times 10 \times 10^{8\times4}$ دانهٔ شن؛

به قطر 10^8 ستادی، کمتر از $10 \times 10^4 \times 10^{8\times5}$ دانهٔ شن؛

به قطر 10^{10} ستادی، کمتر از $1000 \times 10^{8\times6}$ دانهٔ شن، جا می‌گیرد.

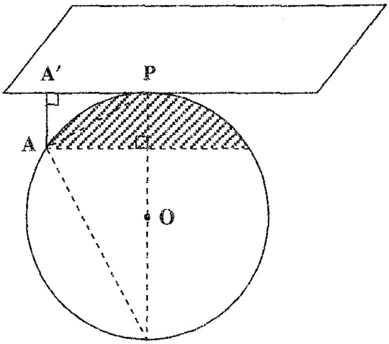
ولی 10^{10}، یعنی ۱۰۰۰۰ میلیون ستادی. و چون قطر همهٔ دنیا، از ۱۰۰۰۰ میلیون ستادی کمتر است، پس در همهٔ دنیا، کمتر از $1000 \times 10^{8\times6}$ دانهٔ شن جا می‌گیرد. سپس، قطر کرهٔ آریستارک از ستارگان بی‌حرکت، آن قدر برابر قطر همهٔ دنیا (یعنی ۱۰۰۰۰ میلیون ستادی) است؛ که همهٔ دنیا همان قدر برابر قطر زمین (یعنی ۱ میلیون ستادی) است. بنابراین، معلوم می‌شود که کرهٔ آریستارک (ستارگان بی‌حرکت)، به کرهٔ همهٔ جهان، نسبتی برابر $1 : 10^{12}$ دارد. در نتیجه، می‌تواند کمتر از ۱۰۰۰ میریاد واحد مرتبهٔ هشتم ($100 \times 10^4 \times 10^{8\times7} = 10^{63}$) دانهٔ شن در خود جا بدهد.

و پادشاه هه لونا می‌تواند آن را به همه نشان بدهد : لزومی ندارد که اینها خبرگان ریاضیات باشند، بلکه کافی است درک ریاضی داشته باشند و بتوانند دربارهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های زمین، خورشید، ماه و تمامی جهان بیندیشند. آن وقت، خواهی دید که همهٔ آنها، آن چه را که گفته‌ام، می‌پذیرند، به همین جهت است که این بررسی را نامناسب نمی‌دانم».

هر کسی که در زمان ما، دورهٔ دبستان را به پایان رسانده باشد و یا، بهتر بگوییم، با عددنویسی (دهدهی)، به خوبی آشنا باشد، می‌تواند چنین محاسبه‌ای را انجام دهد و حتی، عددهای بسیار بزرگتر از آن را هم بنویسد. پس چرا ارشمیدس بزرگ، به این محاسبهٔ خود افتخار می‌کند و رساله‌ای مستقل را به آن اختصاص داده است.

واقعیت این است که، حتی در متن ترجمهٔ ارشمیدس، تا حد زیادی دست‌کاری شده است : چرا که همهٔ عددها را با شکل عددنویسی امروزی نشان داده‌ایم. در حالی که، در زمان ارشمیدس، این شکل عددنویسی وجود نداشته است. عددنویسی معمول امروزی، کمتر از ۲۰۰۰ سال است که معمول شده (یعنی چند سده بعد از ارشمیدس). شکل امروزی عددنویسی، که به‌وسیلهٔ هندیها کشف و وارد در فرهنگ بشری شده است، در واقع، انقلابی در حساب، و به طور کلی ریاضیات، به‌وجود آورد و کار پیشرفت را، به صورت جهشی، تأمین کرد. تمام عملهای امروزی در حساب (جمع، ضرب، تقسیم، ریشه گرفتن، نشان دادن عدد به صورت توان و غیره) براساس «موضعی» بودن عددنویسی است. وقتی که مثلاً می‌نویسید ۴۴۴۴، تنها از یک علامت ۴ استفاده کرده‌اید، ولی ارزش این ۴، بسته به «موضع» و «مرتبهٔ» آن فرق می‌کند (از سمت راست و بترتیب، ارزش این علامت، برابر است با ۴، ۴۰، ۴۰۰، ۴۰۰۰). در یونان باستان، از عددنویسی موضعی اطلاعی نداشته و عددها را به کمک حرفهای الفبا نشان می‌دادند (شبیه عددنویسی به کمک حرفهای «ابجد») و به همین مناسبت، هم نوشتن عددها و هم انجام عمل روی آنها، بسیار دشوار بود. یونانیان، که در جامعه‌ای برده‌داری زندگی می‌کردند و کارهای عملی به عهدهٔ برده‌ها بود، از کار محاسبه و عملهای حساب اکراه داشتند، چرا که به درد عمل و زندگی می‌خورد و کسر شأن «آزادها» بود که به کارهای عملی ـ که خاص برده‌ها بود ـ بپردازند. به این دلیل است که، هندسهٔ یونانی تا مرز هندسهٔ عالی پیش رفت، ولی حساب و جبر تکان زیادی نخورد. (این مسأله از رسالهٔ ارشمیدس، به نام «محاسبهٔ دانه‌های شن» برداشته شده است.)

۴۶۶. منطقه‌های کروی و استوانه‌ای متناظر، هم‌ارزند.



۴۶۷. یک عرقچین به رأس P و وتر PA از کمان مولدش را در نظر می‌گیریم. سطح آن مساوی $\pi\overline{AP}^2$ است و دایره رسم شده روی صفحهٔ مماس دارای مساحت $\pi\overline{A'P}^2$ است.

۴۷۰. شعاع کره را R و ضلع مکعب را a و وزن مخصوص آهن و مس را بترتیب P_1 و P_2 می‌گیریم، داریم:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{Q}{P_1 + P_2};$$

از آن‌جا شعاع کره و وزن جسم بترتیب چنینند:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3Q}{2\pi(P_1 + P_2)}}\ ;\ Q = \frac{2}{3}\pi R^3(P_1 + P_2)$$

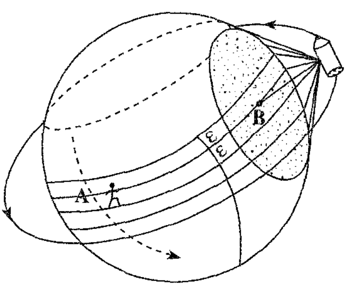
ضلع و حجم مکعب:

$$a = \frac{2R}{\sqrt{3}}\ ;\ a^3 = \frac{4\sqrt{3}\,Q}{3\pi(P_1 + P_2)}$$

حجم مکعب و حجم براده‌های تراشیده شده:

$$P = \frac{a^3}{2}(P_1 + P_2) = \frac{2\sqrt{3}\,Q}{3\pi}\ ;\ Q - P = \frac{Q(3\pi - 2\sqrt{3})}{3\pi}$$

۴۷۱. شعاع قاعدهٔ مخرج، یعنی شعاع نیمکره را R فرض می‌کنیم. مساحت کف مخزن برابر است با $S = \pi R^2$، از طرفی مساحت سطح نیمکره برابر $S' = 2\pi R^2$ است. پس چون $S' = 2S$ است، بنابراین برای رنگ زدن روی مخزن $52 = 2 \times 26$ لیتر رنگ لازم است.



۴۷۲. شعاع سیاره را واحد می‌گیریم. دو نقطه از سطح سیاره را در نظر می‌گیریم که دو سر یک قطب آن باشند (قطبها)، از این دو نقطه، نصف‌النهاری به نام «نصف‌النهار مبدأ» را می‌گذرانیم و آن را به کمانهای برابر به طول ۴ تقسیم می‌کنیم و از هرنقطهٔ تقسیم، مداری عبور می‌دهیم (شکل).

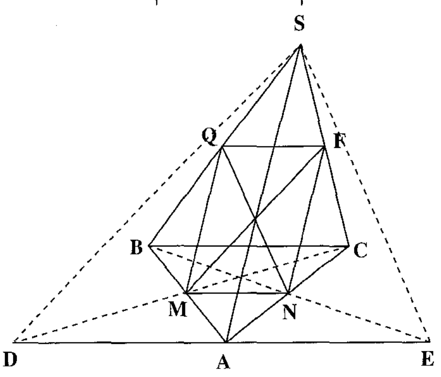
برای سفینه، این برنامهٔ جست وجو را می‌ریزیم، سفینه در فاصلهٔ ثابت $R > ۱$، نسبت به مرکز سیاره، روی مدارهایی که مشخص کرده‌ایم پرواز می‌کند؛ در ضمن از نوار شمالی آغاز می‌کند و هر بار که به «نصف‌النهار مبدأ» می‌رسد، در امتداد آن خود را به مدار بعدی می‌رساند. فرض کنید: $R = \sqrt{۲}$. در این صورت، از سفینه، «کلاهک کروی» به شعاع $\frac{\pi}{۴}$ دیده می‌شود (همهٔ فاصله‌ها را، در روی سطح کره اندازه می‌گیریم).

از آن‌جا که ۴ را می‌توان به دلخواه کوچک گرفت، تنها باید تحقیق کرد، اگر نسبت سرعتها بزرگتر از ۱۰ باشد، ساکن سیاره نمی‌تواند، در فاصلهٔ زمانی که سفینه یک مدار را دور می‌زند، از دید او خارج شود، و این، تقریباً روشن است. هر مدار از استوا کوتاهتر است، مرکز دایرهٔ دید سفینه، با سرعت دست‌کم $\frac{۱۰}{\sqrt{۲}}$ برابر سرعت موجود ساکن سیاره جا به جا می‌شود. اگر این موجود، مدار را در نقطهٔ A قطع کند، آن وقت سفینه، در B قرار دارد، و بنابراین، یکی از دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ از مدار از π تجاوز نمی‌کند و در زمانی که سفینه آن را طی می‌کند، ساکن سیاره می‌تواند از A، به فاصله‌ای که بیشتر از $\frac{\pi}{۴} > \frac{\pi\sqrt{۲}}{۱۰}$ نیست از A دور شود، به نحوی که در لحظهٔ بودن در A، باید از سفینه دیده شود (قبل از دور زدن مدار یا بعد از آن).

۱۴. مسأله‌های ترکیبی

۴۷۳. ۱. BC و AS را رسم می‌کنیم:

$$MN = \frac{BC}{۲}\ ,\ NP = \frac{AS}{۲}$$

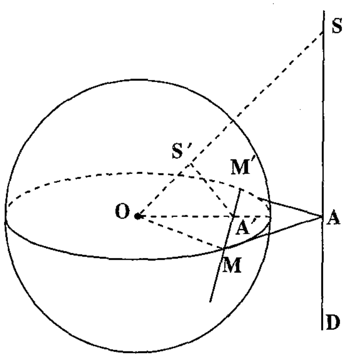


بنابراین برای آن که MN=NP باشد، لازم و کافی است که AS=BC باشد. پس مکان هندسی S، کره‌ای است که مرکزش نقطهٔ A و شعاعش مساوی BC است.

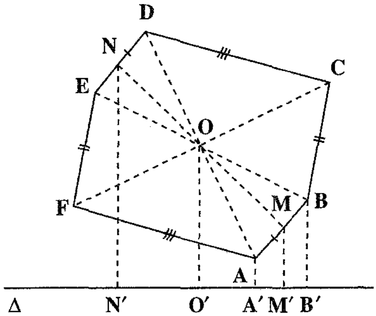
۲. نقطه‌های D و E را نقطه‌های

برخورد CM و BM با خطی موازی BC که از نقطهٔ A رسم شده است، می‌گیریم و DS و ES را رسم می‌کنیم. مثلثهای MAD و MBC همنهشتند زیرا دارای یک ضلع مساوی MA=MB مجاور به دو زاویهٔ مساوی نظیر به نظیر می‌باشند؛ از آن‌جا نتیجه می‌شود که AD=CB و CM=MD، و به‌طور مشابه AE=BC و BN=NE است. اینک در مثلث DCS، $DS=2MP$؛ همچنین داریم $ES=2QN$؛ در نتیجه $\frac{DS}{ES}=\frac{MP}{NQ}=k$، و مکان هندسی نقطهٔ S کره‌ای است که قطرش پاره‌خطی از خط راست DE است که این پاره‌خط را به نسبت k تقسیم می‌کند (کره آپولونیوس).

۴۷۴. برای رسم صفحه‌هایی که بر خط D می‌گذرند و بر کرهٔ O مماسند از نقطهٔ O صفحه‌ای عمود بر خط D رسم می‌کنیم تا این خط را در نقطهٔ A و کره را تحت دایرهٔ عظیمهٔ (C) قطع کند. از A مماسهای AM و 'AM را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم. دو صفحهٔ DAM و 'DAM صفحه‌هایی هستند که بر خط D گذشته‌اند و بر کره مماسند. $M\hat{A}M'$ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ بین این دو صفحه است، برای این که، این دو صفحه بر هم عمود باشند باید $M\hat{A}M'=90^\circ$ و برای این منظور لازم و کافی است که $OA=r\sqrt{2}$؛ یعنی چهارضلعی 'OMAM مربع باشد، و یا خط D بر کره‌ای به مرکز O و شعاع $r\sqrt{2}$ مماس باشد.



بنابراین مکان هندسی خطهای SD یک سطح مخروطی دوار به رأس S و محیط بر کرهٔ به مرکز O و به شعاع $r\sqrt{2}$ است. OS را رسم می‌کنیم و سپس 'A'S را عمود بر OS رسم می‌نماییم. بعلاوه ملاحظه می‌کنیم که در مربع 'OMAM نقطهٔ 'A وسط OA است و 'MM بر صفحهٔ OAS و در نتیجه بر 'A'S عمود است. در این صورت، هنگامی که SD سطح مخروطی دوار به محور SO را که مکان هندسی آن است طی می‌کند، 'S ثابت می‌ماند. نقطهٔ 'A دایره‌ای به شعاع 'S'A و محور OS، خط 'MM پوش این دایره، و بالاخره M و 'M دایرهٔ مقطع کرهٔ داده شده، با صفحهٔ عمود بر OS در نقطهٔ 'S را، می‌پیمایند.



۴۷۵. ۱. به عنوان مثال، یک شش ضلعی محدب ABCDEF در نظر می‌گیریم که دارای مرکز تقارن O است. نقطهٔ O وسط قطرهای AD، BE و CF است. وسطهای AB و DE را M و N می‌گیریم. AA'، BB'، MM' و NN' را عمود بر Δ رسم می‌کنیم.

داریم:

$$S_{AB} = \pi AB(AA' + BB') = ۲\pi AB.MM'$$

به طور مشابه داریم:

$$S_{DE} = ۲\pi DE.NN'$$

بنابراین:

$$S_{AB} + S_{DE} = ۲\pi AB(MM' + NN') = ۴\pi AB \times OO'$$

همچنین خواهیم داشت:

$$S_{BC} + S_{EF} = ۴\pi BC \times OO' \ , \ S_{CD} + S_{FA} = ۴\pi CD \times OO'$$

مساحت سطح حاصل از دوران محیط چندضلعی برابر است با:

$$S = ۴\pi OO'(AB + BC + CD) = ۲\pi OO' \times \text{محیط چندضلعی}$$

۲. نقطه‌های G و H را مرکزهای ثقل دو مثلث OAB و ODE می‌گیریم (در شکل رسم نشده‌اند) و GG' و HH' را عمود بر Δ رسم می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$V_{OAB} = \text{مساحت } OAB \times ۲\pi GG' \quad \text{و} \quad V_{ODE} = \text{مساحت } ODE \times ۲\pi HH'$$

از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

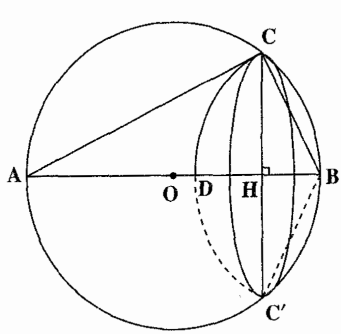
$$V_{OAB} + V_{ODE} = \text{مساحت } OAB \times ۲\pi(GG' + HH') = \text{مساحت } OAB \times ۴\pi OO'$$

چون نقطه‌های G و H نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ یکدیگرند؛ و به طور مشابه خواهیم داشت:

$$V_{OBC} + V_{OEF} = \text{مساحت } OBC \times ۴\pi OO' \quad \text{و}$$
$$V_{OCD} + V_{OFA} = \text{مساحت } OCD \times ۴\pi OO'$$

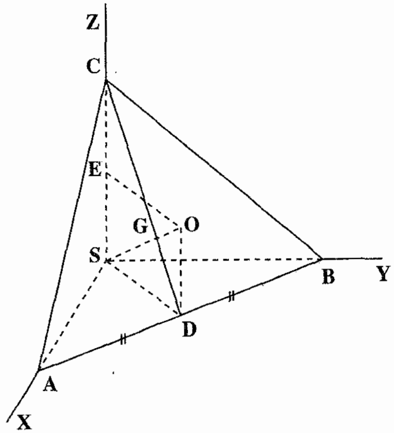
بنابراین حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ سطح چند ضلعی برابر است با:

$$V = ۴\pi OO'(\text{مساحت } OAB + \text{مساحت } OBC + \text{مساحت } OCD)$$
$$= ۲\pi OO' \times \text{مساحت چندضلعی}$$



۴۷۶. ۱. از دوران کمان $\widehat{AC}$ حول قطر AB یک عرقچین کروی ایجاد می‌شود. و مساحتی که کمان $\widehat{AC}$ دراین دوران ایجاد می‌کند مساوی مساحت این عرقچین کروی است. از طرفی مساحت ایجاد شده از دوران کمان CD حول AB، برابر مساحت عرقچینی به ارتفاع OH در کره‌ای به مرکز B و به شعاع x است. این دو مساحت را باید برحسب x و R محاسبه و با هم جمع کنیم.

۲. تابع $y=\frac{S}{R}$ را محاسبه کنید.



۴۷۷. ۱. مرکز کرهٔ محیط بر چهاروجهی SABC روی محور دایرهٔ محیطی مثلث SAB است، یعنی روی خط عمود بر صفحهٔ SAB که از نقطهٔ D وسط AB و در صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط SC؛ بنابراین چهارمین رأس O از مستطیل روی SD و SE ساخته می‌شود. E وسط پاره‌خط SC است.

شعاع این کره OS است و داریم:

$$OS^۲ = SD^۲ + DO^۲$$

امّا:

$$SD=\frac{AB}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲}\ ,\ \ SE=\frac{c}{۲}$$

و از آن‌جا:

$$OS^۲=\frac{۱}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

$$\Rightarrow OS=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$$

۲. این کره و نقطهٔ S ثابت باشند، یعنی شعاع OS ثابت باشد؛ اگر صفحهٔ ABC بر یک نقطهٔ ثابت بگذرد، بدیهی است که این نقطه روی SO واقع است. پس اگر G نقطهٔ برخورد SO و صفحهٔ ABC باشد؛ کافی است نشان دهیم که G ثابت است.

برای آن، مثلثهای متشابه SGC و OGD را مورد بررسی قرار می‌دهیم، داریم:

$$\frac{SG}{SC}=\frac{GO}{OD} \text{ یا } \frac{SG}{۲}=\frac{GO}{۱}=\frac{SO}{۳} \Rightarrow SG=\frac{۲}{۳}SO$$

بنابراین نقطهٔ G ثابت است. بعلاوه داریم $GD=\frac{۱}{۳}CD$، و این نشان می‌دهد که G مرکز ثقل مثلث ABC است.

به‌طور خلاصه، صفحهٔ ABC خط SO را در یک نقطهٔ ثابت قطع می‌کند که مرکز ثقل تمام مثلثهای ABC است.

۴۷۸. کرهٔ ω را به مرکز σ و شعاع R در نظر می‌گیریم. در این صورت:

$$|MA|^۲+|MB|^۲+|MC|^۲=$$

$$=(\vec{OA}-\vec{OM})^۲+(\vec{OB}-\vec{OM})^۲+(\vec{OC}-\vec{OM})^۲$$

و یا

$$|MA|^۲+|MB|^۲+|MC|^۲=۶R^۲-۶\,\vec{OM}.\vec{OG}$$

که در آن $۳\vec{OG}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$ (G، مرکز مثلث ABC است). از طرف دیگر داریم:

$$\varphi=(\vec{OM}\hat{,}\vec{OG}) \text{ ، } \vec{OM}.\vec{OG}=R.|OG|.\cos\varphi$$

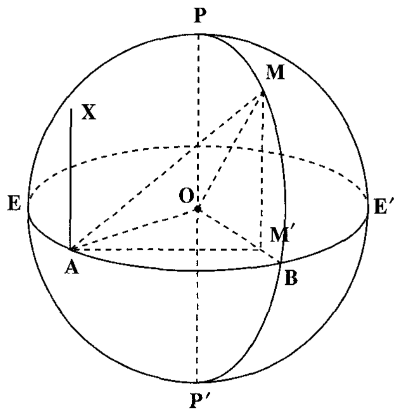
بنابراین

$$|MA|^۲+|MB|^۲+|MC|^۲=۶R^۲-۶R.|OG|.\cos\varphi$$

اگر $O\neq G$، آن وقت مجموع موردنظر تنها به $\cos\varphi$ بستگی دارد، بنابراین وقتی به حداکثر خود می‌رسد که داشته باشیم $\cos\varphi=-۱$ و وقتی حداقل مقدار خود را پیدا می‌کند که داشته باشیم $\cos\varphi=۱$.

به این ترتیب، نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ که از برخورد خط راست OG با کرهٔ ω به‌دست می‌آیند، نقطه‌های موردنظرند. اگر صفحهٔ ABC نقطه‌های O و $M_۱$ را از هم جدا کند، آن وقت مجموع $|MA|^۲+|MB|^۲+|MC|^۲$، برای نقطهٔ $M_۱$ حداکثر و برای نقطهٔ $M_۲$، نقطهٔ مقابل $M_۱$ روی قطر $M_۱M_۲$، حداقل خواهد بود.

یادآوری می‌کنیم که، اگر نقطه‌های A، B و C رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند که روی صفحهٔ دایرهٔ عظیمه قرار گیرد، آن وقت نقطه‌های O و G برهم منطبق می‌شوند و مجموع $|MA|^۲+|MB|^۲+|MC|^۲$ برای هر نقطهٔ M از سطح کره، برابر $۶R^۲$ می‌شود.

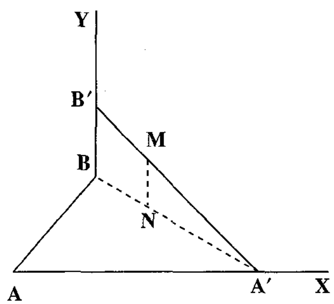


۴۷۹. ۱. تصویر نقطهٔ M روی صفحهٔ دایرهٔ EE' را M' می‌نامیم و AM' را رسم می‌کنیم. مثلثهای OAM' و OMM' همنهشتند، زیرا یک زاویهٔ مساوی محصور بین دو ضلع متناظر متساوی دارند: $A\hat{O}B = M\hat{O}B$ ، OM' مشترک و $OA=OM$ ؛ بنابراین:

$A\hat{M'}O = M\hat{M'}O = 90^\circ$

پس نقطهٔ M' به دایرهٔ C به قطر OA، و واقع در صفحهٔ EE' تعلق دارد. بعلاوه، وقتی نقطهٔ M چنان تغییر مکان می‌دهد که $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AB}$ است، نقطهٔ M' تمام دایرهٔ (C) را می‌پیماید که در نتیجه این دایره، مکان هندسی نقطهٔ M' است.

۲. از تساوی مثلثهای OAM' و OMM' ، تساوی $AM' = MM'$ نتیجه می‌شود و در نتیجه $M\hat{A}M' = 45^\circ$ است. در این صورت AM با صفحه EAE' و در نتیجه با AX خط قائم بر این صفحه، زاویهٔ ثابت 45° می‌سازد و مکان هندسی خط AM، سطح مخروطی به محور AX است که زاویهٔ مولدش مساوی 45° است؛ زیرا تمام مولدهای این سطح مخروطی، کره را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند که برای آن $AM' = MM'$ و در نتیجه، $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AB}$ است.



۴۸۰. ۱. فرض می‌کنیم M نقطهٔ تماس $A'B'$ باشد، داریم: $A'M = A'A$ و $B'M = B'B$ زیرا مماسهایی هستند که هر کدام از یک نقطه بر یک کره رسم می‌شوند.

بنابراین

$$A'B' = A'A + B'B$$

به دنبال آن، با ملاحظهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'BB'$ داریم:

$$(AA'+BB')^2 = BB'^2 + A'B^2 = BB'^2 + AA'^2 + AB^2$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$AA'.BB' = \frac{\overline{AB}^2}{2}$$

بعکس، اگر این رابطه برقرار باشد، $A'B'$ مماس بر کره است. در واقع، از نقطهٔ A' دو خط مماس بر کره می‌گذرد که در صفحهٔ $A'BY$ است، یعنی متقاطع با خط BY است ؛ آنها نسبت به صفحه BAX قرینهٔ یکدیگرند ؛ یکی BY را قطع می‌کند و دیگری نیمخط مقابل آن را، اگر B'' نقطهٔ برخورد اوّلی و BY باشد، بنا به (۱) داریم

$\overline{AA'}.\overline{BB''} = \frac{\overline{AB}^{۲}}{۲}$. بنابراین بنا به خاصیت فرض نتیجه می‌شود :

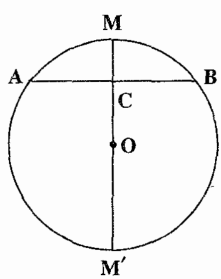
$AA'.BB'' = AA'.BB'$ از آن‌جا نتیجه می‌شود $BB'' = BB'$. این ثابت می‌کند که B' و B'' برهم منطبقند و یا $A'B'$ مماس بر کره است.

۲. MN را عمود بر صفحهٔ BAX رسم می‌کنیم. داریم :

$$\frac{MN}{BB'} = \frac{A'M}{A'B'} \quad \text{یا} \quad \frac{MN}{BB'} = \frac{AA'}{A'B'} \Rightarrow MN = \frac{AA'.BB'}{A'B'}$$

به همین ترتیب نشان می‌دهیم که فاصلهٔ نقطهٔ M از صفحهٔ ABY نیز مساوی با $\frac{AA'.BB'}{A'B'}$ است، و از آن‌جا نتیجه می‌شود که نقطهٔ M که از دو صفحهٔ ABX و BAY به یک فاصله است، در نیمصفحهٔ نیمساز فرجهٔ حاصل از این دو نیمصفحه است، و بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M نیمدایرهٔ مقطع کره با این نیمصفحهٔ نیمساز است. وقتی A'، AX را می‌پیماید، مماس $A'A$ یا $A'M$ از ۰ تا تمام کران تغییر می‌کند، یعنی نقطهٔ M تمام نیمدایره را طی می‌کند.

۴۸۱. ۱. فرض می‌کنیم s و s' ؛ v و v'، مساحتهای عرقچینهای ABM و ABM' و حجمهای قطعه‌های کروی متناظر آنها باشند ؛ داریم :



$$k = \frac{۲\pi r \times MC}{۲\pi r \times M'C} = \frac{MC}{M'C} \qquad (۱)$$

$$k' = \frac{\frac{\pi}{۳} MC^{۲}(۳r - MC)}{\frac{\pi}{۳} M'C^{۲}(۳r - M'C)} \qquad (۲)$$

از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید :

$$\frac{MC}{k}=\frac{M'C}{۱}=\frac{۲r}{k+۱}\Rightarrow MC=\frac{۲kr}{k+۱}\ ,\ M'C=\frac{۲r}{k+۱}$$

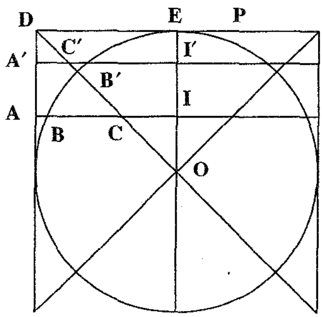
با قرار دادن این مقدارها در رابطهٔ (۲) خواهیم داشت :

$$k'=\frac{k^۲\left(۳r-\frac{۲kr}{k+۱}\right)}{۳r-\frac{۲r}{k+۱}}=\frac{k^۲(k+۳)}{۱+۳k}$$

۲. برای مقایسهٔ k و ′k، تفاضل آنها را تشکیل می‌دهیم، داریم :

$$k'-k=\frac{k(k-۱)(k-۱)}{۱+۳k}$$

و می‌بینیم که : $k'>k$ است اگر $k>۱$ و $k'<۱$ است، اگر $k<۱$ باشد و بالاخره $k'=k$ است، در صورتی که $k=۱$ باشد.



۴۸۲. ۱. شکل را به‌وسیلهٔ مقطع صفحه‌ای که بر محور سطح استوانه‌ای می‌گذرد، تصویر می‌کنیم و فرض می‌کنیم ABCI فصل مشترک این صفحه و صفحه‌ای موازی P باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که :

$$\pi\overline{IA}^۲=\pi\overline{IB}^۲+\pi\overline{IC}^۲$$

یا با نمایش دادن شعاع کره با r و ملاحظهٔ این که IC=OI چون که مثلث OED متساوی‌الساقین است، (OE = DE)، باید ثابت کنیم :

$$r^۲=\overline{IB}^۲+\overline{OI}^۲$$

یا :

$$r^۲=OB^۲$$

که درستی این تساوی روشن است.

۲. اگر $A'I'$ تصویر صفحهٔ دیگری موازی صفحهٔ P، روی صفحهٔ شکل باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که حجم ایجاد شده از دوران مستطیل $II'A'A$، مساوی مجموع حجمهای ایجاد شده از دوران ذوزنقهٔ $II'C'C$ و نیمقطعهٔ $II'B'B$ حول محور دوران II' می‌باشد، یعنی :

$$\pi\overline{IA}^۲.II'=\frac{۱}{۳}\pi II'\left(\overline{IC}^۲+\overline{I'C'}^۲+IC.I'C'\right)$$
$$+\frac{۱}{۶}\pi II'\left(\overline{II'}^۲+۳\overline{IB}^۲+۳\overline{I'B'}^۲\right)$$

و یا $۶\overline{IA}^۲ = ۲(\overline{IC}^۲ + \overline{I'C'}^۲ + IC.I'C') + \overline{II'}^۲ + ۳\overline{IB}^۲ + ۳\overline{I'B'}^۲$

امّا $IA = r$ ، $IC = OI$ ، $I'C' = OI'$ ، $II' = OI' - OI$ است و باید تساوی زیر را ثابت کنیم:

$$۶r^۲ = ۳\overline{OI}^۲ + ۳\overline{OI'}^۲ + ۳\overline{IB}^۲ + ۳\overline{I'B'}^۲$$

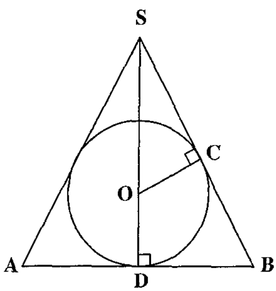
امّا در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OIB و OI'B' داریم:

$$\overline{OI}^۲ + \overline{IB}^۲ = r^۲ \ , \ \overline{OI'}^۲ + \overline{I'B'}^۲ = r^۲$$

بنابراین تساوی بالا برقرار است.

اگر خطهای موازی IA و I'A' در دو طرف نقطهٔ O باشند، استدلال به همین روش انجام می‌شود.

۴۸۳. رأس و ارتفاع مخروط را بترتیب با S و h نشان می‌دهیم.



فرض کنیم مثلث ASB از مقطع محوری به‌دست آمده باشد.

از شرایط مسأله نتیجه می‌شود که ارتفاع مثلث ASB برابر با h و شعاع دایره محاطی این مثلث r است. نقطهٔ O مرکز دایره، بر روی نیمساز زاویهٔ ASB یعنی SD قرار دارد که در آن SD عمودمنصف AB هم هست، زیرا SA=SB. فرض کنیم نقطهٔ C پای عمودی باشد که از نقطهٔ O بر SB وارد می‌شود. از تشابه مثلثهای SBD و SOC داریم:

$$\frac{DB}{OC} = \frac{SD}{SC}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{rh}{\sqrt{(h-r)^۲ - r^۲}} = r\sqrt{\frac{h}{h-۲r}}$$

V حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi.DB^۲.h = \frac{۱}{۳}\pi r^۲.\frac{h^۲}{h-۲r}$$

$$= \frac{۲}{۳}\pi r^۲\left[\frac{(h-۲r) + \frac{۴r^۲}{h-۲r}}{۲} + ۲r\right] \geq \frac{۸}{۳}\pi r^۳$$

این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود، وقتی مقدار V برابر $\frac{۸}{۳}\pi r^۳$ می‌گردد. اگر :

$$h - ۲r = \frac{۴r^۲}{h - ۲r} \Rightarrow h = ۴r \Rightarrow \frac{h}{r} = ۴$$

جواب : $\frac{۸\pi r^۳}{۳}$ و ۴

۴۸۴. الف. ثابت می‌کنیم، اگر نقطه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، .... ، A_n ، روی سطح کرهٔ به مرکز O و شعاع واحد، طوری قرار گرفته باشند که، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه A_i و $A_j(i \neq j)$ ، کمتر از $\sqrt{۲}$ نباشد، آن وقت $n \leq ۶$. فرض می‌کنیم $n > ۶$. بنا به قضیهٔ کسینوسها داریم :

$$A_iA_j^۲ = ۲ - ۲\cos(A_iOA_j) \geq ۲$$

از آن جا $A_i\hat{O}A_j \geq ۹۰°$ و $\vec{OA}_i.\vec{OA}_j \leq ۰$. دستگاه محورهای مختصات فضایی را به مبدأ O، به این طریق، انتخاب می‌کنیم. قبل از همه، یادآوری می‌کنیم که، بین بردارهای $\vec{OA}_i$ ، حتماً سه بردار پیدا می‌شود که هم صفحه نیستند (در غیراین صورت، همهٔ $n > ۴$ بردار، روی یک صفحه قرار می‌گیرند و، بنابراین، زاویهٔ بین هر دو بردار دلخواه، حاده می‌شود). بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض را بر این گرفت که، بردارهای $\vec{OA}_۱$ ، $\vec{OA}_۲$ و $\vec{OA}_۳$ ، روی یک صفحه نیستند، محور OX را در طول خط راست $OA_۱$ طوری در نظر می‌گیریم که، طول نقطهٔ $A_۱$ ، برابر واحد شود. سپس، محور OY را طوری انتخاب می‌کنیم که، نقطهٔ $A_۲$ ، در صفحهٔ XOY قرار گیرد و عرضی مثبت داشته باشد. سرانجام، جهت محور OZ را طوری درنظر می‌گیریم که ارتفاع نقطهٔ $A_۳$ ، مقداری مثبت باشد. مختصات نقطهٔ A_i را (x_i, y_i, z_i) فرض می‌کنیم. در این صورت :

$$\vec{OA}_۱ = (۱,۰,۰) \ , \ \vec{OA}_۲ = (x_۲, y_۲, ۰) \ , \ \vec{OA}_۳ = (x_۳, y_۳, z_۳)$$

که در آنها $y_۲ > ۰$ و $z_۳ > ۰$ ؛ بنابراین، برای هر مقدار $i > ۱$ داریم :

$$\vec{OA}_i.\vec{OA}_۱ = x_i \leq ۰$$

سپس، برای هر مقدار $i > ۲$ داریم :

$$\vec{OA}_i.\vec{OA}_۲ = x_ix_۲ + y_iy_۲ \leq ۰$$

از آن‌جا $y_i \leq ۰$ (زیرا $x_۲ \leq ۰$ ، $x_i \leq ۰$ ، $y_۲ > ۰$) ؛ سرانجام، برای همهٔ مقدارهای

$i > ۳$ داریم :

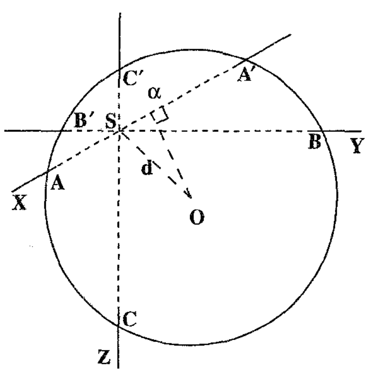
$$\vec{OA}_i . \vec{OA}_۳ = x_i x_۳ + y_i y_۳ + z_i z_۳ \leq ۰$$

از آن‌جا $z_i \geq ۰$ (زیرا $x_۳ \geq ۰$ ، $x_i \leq ۰$ ، $y_۳ \leq ۰$ ، $y_i \leq ۰$ ، $z_۳ > ۰$). بین چهار بردار $\vec{OA}_۴$ ، $\vec{OA}_۵$ ، $\vec{OA}_۶$ و $\vec{OA}_۷$ ، دست کم دو بردار، دارای مختص هم نام منفی هستند، یعنی، حاصلضرب اسکالر آنها، مثبت است. تناقض حاصل، ثابت می کند $n \leq ۶$. چون شش نقطهٔ با مختصات

$$(\pm۱,۰,۰) \; , \; (۰,\pm۱,۰) \; , \; (۰,۰,\pm۱)$$

با شرط بخش (الف) سازگارند، بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌ها، برابر است با ۶.

ب. ثابت می کنیم، اگر نقطه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ ، …. ، A_n ، روی همان کره، طوری قرار گرفته باشند که فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ A_i و $A_j (i \neq j)$ ، بزرگتر از $\sqrt{۲}$ باشد، آن وقت $n \leq ۴$. فرض می کنیم $n > ۴$. در این صورت $\vec{OA}_i . \vec{OA}_j < ۰$ و اگر همان دستگاه مختصات فضایی بخش (الف) را در نظر بگیریم، شبیه همان جا، برای $i > ۳$ خواهیم داشت : $x_i < ۰$، $y_i < ۰$ ، $z_i < ۰$. بنابراین، حاصلضرب اسکالر بردارهای $\vec{OA}_۴$ و $\vec{OA}_۵$ ، مثبت می‌شود. به این ترتیب، ثابت شد $n \leq ۴$. چون ۴ رأس چهاروجهی منتظم محاط در کره، با شرط بخش (ب) سازگارند، بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌ها برابر است با ۴.



۴۸۵. ۱. کرهٔ به مرکز O و به شعاع r و یک کنج سه‌وجهی سه قائمه S.XYZ که یالهایش کره را در نقطه‌های A' و A ؛ B' و B و C و C' قطع می کند در نظر می گیریم. تصویرهای نقطهٔ O روی یالها را با α ، β و γ نشان می‌دهیم ؛ این نقطه‌ها وسطهای پاره‌خطهای AA' ، BB' و CC' است ؛ OS را مساوی d اختیار می کنیم.

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OαA ، OβB و OγC داریم :

$$\frac{AA'^۲}{۴} = r^۲ - O\alpha^۲$$

$$\frac{BB'^۲}{۴} = r^۲ - O\beta^۲$$

$$\frac{CC'^2}{4} = r^2 - O\gamma^2$$

بنابراین :

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = 12r^2 - 4(O\alpha^2 + O\beta^2 + O\gamma^2)$$

امّا $O\alpha$ ، $O\beta$ و $O\gamma$ مساوی تصویرهای OS روی وجه‌های کنج سه‌وجهی می‌باشند. و می‌دانیم که $O\alpha^2 + O\beta^2 + O\gamma^2 = 2d^2$ است. پس خواهیم داشت :

$$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 = 12r^2 - 8d^2$$

۲. اگر $\overline{SA}$ و $\overline{SA'}$ را اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{SA}$ و $\overrightarrow{SA'}$ فرض کنیم، داریم :

$$\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 = (\overline{SA'} - \overline{SA})^2 + 2\overline{SA}.\overline{SA'}$$
$$= \overline{AA'}^2 + 2\overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{AA'}^2 + 2(d^2 - r^2)$$

و به‌طور مشابه داریم :

$$\overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2 = \overline{BB'}^2 + 2(d^2 - r^2)$$
$$\overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2 = \overline{CC'}^2 + 2(d^2 - r^2)$$

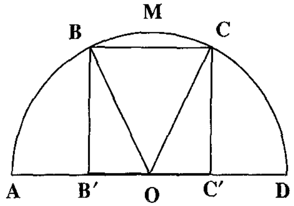
بنابراین :

$$\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SB'}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SC'}^2$$
$$= \overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 + 6(d^2 - r^2)$$
$$= 12r^2 - 8d^2 + 6(d^2 - r^2) = 6r^2 - 2d^2$$

۳. فاصله‌های نقطه O از صفحه‌های YSZ ، ZSX و XSY را بترتیب x، y و z می‌گیریم. مربعهای شعاعهای دایره‌های مقطع به‌وسیلهٔ سه وجه کنج سه‌وجهی، مساوی $r^2 - x^2$ ، $r^2 - y^2$ و $r^2 - z^2$ ، و مجموع مساحتهای این دایره‌ها، عبارت $3\pi r^2 - \pi(x^2 + y^2 + z^2)$ است. امّا، x ، y و z ، مساوی تصویرهای SO روی سه یال کنج سه‌وجهی می‌باشند و داریم :

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

بنابراین مجموع مساحتهای سه دایره، مساوی $3\pi r^2 - \pi d^2$ است.



۴۸۶. ۱. شعاع نیمدایره را r می‌گیریم. کمانهای مساوی $\overset{\frown}{AB}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{DC}$ دارای وترهایی مساوی شعاع هستند، و وتر AB موازی قطر AD است.

مساحت منطقهٔ کروی ایجاد شده به‌وسیلهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ مساوی است با :

$$۲\pi r \times B'C' = ۲\pi r^۲$$

مجموع مساحتهای عرقچینهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ ، که مساوی تفاضل مساحت کره و مساحت منطقهٔ اولی است، برابر است با :

$$۴\pi r^۲ - ۲\pi r^۲ = ۲\pi r^۲$$

که این مقدار، با مساحت اوّلی برابر است.

۲. حجم ایجاد شده به وسیلهٔ قطاع OBMC مساوی است با :

$$\frac{۲}{۳}\pi r^۳ \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{۳}\pi r^۲ \times B'C'$$

به‌طوری که دیده می‌شود، این حجم، معادل نصف حجم کره است، یعنی معادل مجموع حجمهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطاعهای OAB و OCD است.

۳. حجم قطعهٔ کروی ایجاد شده به‌وسیلهٔ B′BCC′ که شعاعهای دو قاعده‌اش $BB' = CC' = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ و ارتفاعش $B'C' = r$ است، برابر است با :

$$V = \frac{۱}{۶}\pi r(r^۲ + ۳BB'^۲ + ۳CC'^۲) = \frac{۱۱\pi r^۳}{۱۲}$$

از آن‌جا، مجموع حجمهای ایجاد شده از دوران دو سطح ABB′ و CC′D برابر است با :

$$\frac{۴}{۳}\pi r^۳ - \frac{۱۱}{۱۲}\pi r^۳ = \frac{۵}{۱۲}\pi r^۳$$

پس نسبت حجمهای خواسته شده، مساوی $\frac{۱۱}{۵}$ است.

۴۸۷. داریم : $A'C = h = R - l$ و $AA' = m$ و $AB = ۲l$ و $OC = R$ حجم به‌وجود آمده از CABD از یک استوانه و دو قطعهٔ کروی با یک قاعده تشکیل می‌شود.

$$\text{حجم استوانه} = \pi m^۲ \times ۲l$$

$$\text{حجم دو قطعهٔ کروی} = ۲\left[\frac{۱}{۶}\pi h^۳ + \frac{۱}{۲}\pi m^۲ h\right]$$

$$=\pi\left[\frac{(R-l)^{۳}}{۳}+m^{۲}(R-h)\right]$$

با جمع کردن این دو مقدار، حجم ایجاد شده برابر است با :

$$۲\pi m^{۲}l+\pi\left[\frac{(R-l)^{۳}}{۳}+m^{۲}(R-l)\right]=\pi\left[۲m^{۲}l+\frac{(R-l)^{۳}}{۳}+Rm^{۲}+m^{۲}l\right]$$

$$=\pi\left[Rm^{۲}+lm^{۲}+\frac{(R-l)^{۳}}{۳}\right]$$

چون $(R-l)^{۳}=R^{۳}-۳R^{۲}l+۳Rl^{۲}-l^{۳}$ ، و $\frac{(R-l)^{۳}}{۳}=\frac{R^{۳}-l^{۳}}{۳}-R^{۲}l+Rl^{۲}$

می‌توان نوشت :

$$ABCD\ \text{حجم}=\pi\left[\frac{R^{۳}-l^{۳}}{۳}+R(m^{۲}+l^{۲})-l(R^{۲}-m^{۲})\right]$$

امّا $R^{۲}-m^{۲}=l^{۲}$ و $m^{۲}+l^{۲}=R^{۲}$ است. پس :

۱. $$ABCD\ \text{حجم}=\pi\left[\frac{R^{۳}-l^{۳}}{۳}+R^{۳}-l^{۳}\right]=\frac{۴}{۳}\pi(R^{۳}-l^{۳})$$

حجم کره مساوی $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ است. درنتیجه حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطعهٔ AMB برابر است با :

$$\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}-\frac{۴}{۳}\pi(R^{۳}-l^{۳})=\frac{۴}{۳}\pi(R^{۳}-R^{۳}+l^{۳})=\frac{۴}{۳}\pi l^{۳}$$

۲. برای محاسبهٔ مستقیم حجم قطعه :

$$AMB\ \text{حجم}=\frac{۱}{۶}\pi(۲l)^{۳}\times ۲l=\frac{۴}{۳}\pi l^{۳}$$

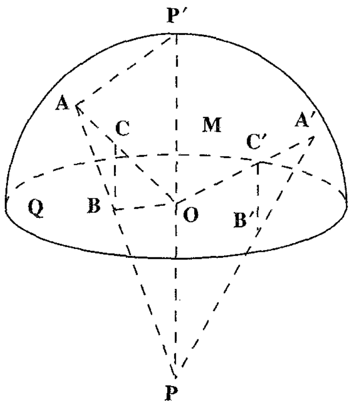
برای این که حجم ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطعه، نصف حجم کره باشد، باید داشته باشیم :

$$\frac{۴}{۳}\pi l^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi(R^{۳}-l^{۳})\Rightarrow l^{۳}=R^{۳}-l^{۳}$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید : $\Rightarrow l = \frac{R}{۲}\sqrt[۳]{۴}$

و یا : $AB = ۲l = R\sqrt[۳]{۴} = R.۱/۵۸۷$

۴۸۸. ۱. نقطه‌های O و C را مرکزهای نیمکره، و کره‌ای می‌گیریم که در نقطهٔ A بر نیمکره و در نقطهٔ B بر صفحهٔ Q مماس است. AB در صفحه‌ای قرار دارد که شامل نقطهٔ A و عمود OP' اخراج شده بر صفحه Q است. نقطهٔ برخورد AB و OP' را P می‌نامیم، داریم: $CB = CA$. بنابراین $OP = OA = r$. بنابراین AB بر نقطهٔ P که متقابل با نقطهٔ P' است می‌گذرد.



۲. AP' را رسم می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PAP' و POB متشابه‌اند زیرا یک زاویهٔ حادهٔ مشترک دارند، بنابراین :

$$\frac{PA}{PO} = \frac{PP'}{PB} \Rightarrow PA.PB = PO.PP' = ۲r^۲$$

۳. نقطهٔ C' را مرکز کرهٔ دومی می‌گیریم که در نقطهٔ A' بر نیمکره و در نقطهٔ B' بر صفحهٔ Q و در نقطهٔ M بر کرهٔ اوّل به مرکز C مماس باشد. ثابت می‌کنیم که صفحهٔ مماس مشترک دو کره در نقطهٔ M از نقطهٔ P می‌گذرد. برای این کار کافی است ثابت کنیم که خط PM در نقطهٔ M بر این دو کره مماس است، یا این دو کره را در بیشتر از یک نقطه قطع نمی‌کند. در واقع اگر خط PM کرهٔ C را در نقطه‌ای غیر از M ، مثلاً نقطهٔ $M_۱$ قطع کند، داریم :

$$PM.PM_۱ = PA.PB = ۲r^۲ = PA'.PB'$$

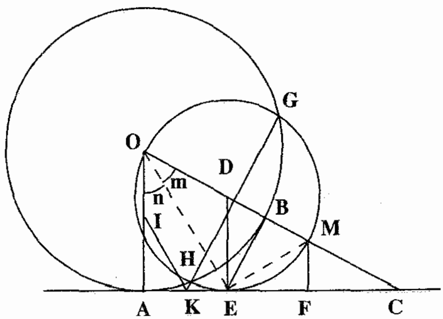
بنابراین نقطهٔ $M_۱$ همچنین به کرهٔ به مرکز C' تعلق خواهد داشت و این کره‌ها دارای دو نقطهٔ مشترک M و $M_۱$ خواهند بود، که این، خلاف فرض است. با برقراری این مطلب، داریم :

$$PM^۲ = PA.PB = ۲r^۲$$

و تمام نقطه‌های M متعلق است به عرقچینی درون نیمکرهٔ داده شده، از کره‌ای که مرکزش نقطهٔ P و شعاعش $r\sqrt{۲}$ است.

بعکس، اگر R صفحه‌ای باشد که بر نقطهٔ P و یک نقطهٔ M از این عرقچین گذشته است، دو کرهٔ مماس در نقطهٔ M بر صفحهٔ R ، و در نتیجه مماس بر همدیگر در نقطهٔ M و مماس بر صفحهٔ Q وجود دارد. نقطه‌های C و C′ مرکزهای آنها محل برخورد عمود رسم شده بر R در نقطهٔ M و صفحه‌های نیمساز فرجه‌های بین Q و R است. من می‌گویم که این کره‌ها بر نیمکره مماسند. در واقع، اگر B نقطه تماس یکی از این کره‌ها و صفحهٔ Q و A نقطهٔ برخورد PA و نیمکره باشد، AOP متساوی‌الساقین است، بنابراین ACB متساوی‌الساقین است. پس داریم : CA = CB و در نتیجه OC = OA − CB . پس مکان هندسی نقطهٔ M عرقچین مشخص شده در بالاست.

۱.۴۸۹. صفحهٔ OAC را صفحهٔ شکل می‌گیریم و E را نقطهٔ برخورد AC و خط مماس در نقطهٔ B بر یک دایرهٔ عظیمهٔ مقطع کره می‌نامیم. OE و EM را رسم می‌کنیم. EO نیمساز زاویهٔ AEB است. بنابراین اگر M مزدوج توافقی نقطهٔ O نسبت به BC باشد، EM نیمساز زاویهٔ BEC است. در



این صورت MF بر AC عمود است و داریم MF = MB ، و این نشان می‌دهد که کرهٔ به مرکز M و به شعاع MF در نقطهٔ B بر کرهٔ O مماس است.

۲. وسط پاره‌خط OM را D می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEM ، DE = DO ؛ در نتیجه $m = D\hat{E}O$ امّا در نقطهٔ O زاویه‌های m و n باهم مساوی‌اند، و این نشان می‌دهد که ED موازی OA ، یعنی عمود بر AC است ؛ پس کرهٔ به قطر OM یعنی کرهٔ به مرکز D و شعاع DE ، در نقطهٔ E بر AC ، و در نتیجه بر صفحهٔ P مماس است.

۳. صفحه Q از دایرهٔ مشترک کرهٔ داده شده و کرهٔ به قطر OM ، شامل قاطع مشترک GH و بر صفحهٔ شکل عمود است ؛ اگر K نقطهٔ برخورد GH و AC باشد، داریم :

$$\overline{KA}^2 = \overline{KH}.\overline{KG} \quad , \quad \overline{KE}^2 = \overline{KH}.\overline{KG}$$

بنابراین نقطهٔ K وسط پاره‌خط AE است.

اگر I وسط OA باشد، KI موازی با EO است ؛ امّا خطهای KG و EB نیز با هم موازی‌اند. چون هر دو بر OB عمود می‌باشند ؛ از آن‌جا نتیجه می‌شود که چون EO نیمساز زاویهٔ AEB است، KI نیمساز زاویهٔ AKG است. بنابراین فاصلهٔ I تا KG و

در نتیجه تا صفحهٔ Q ، مساوی IA است ؛ این ثابت می‌کند که صفحهٔ Q بر کرهٔ به قطر OA عمود است.

۴۹۰. الف.

$$R_1 = 1 \Rightarrow S_1 = 4\pi R_1^2 = 4\pi$$

$$R_2 = 2 \Rightarrow S_2 = 4\pi R_2^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

ب.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$$

۱. سطح کره چهار برابر می‌شود ؛ $4 = 2^2$

۲. هشت برابر می‌شود ؛ $8 = 2^3$

۴۹۱. شعاع یک کره را R فرض می‌کنیم. قطر کرهٔ دیگر $\frac{R}{3}$ و درنتیجه شعاع آن $\frac{R}{6}$ خواهد بود، یعنی داریم :

$$R_2 = \frac{R}{6} \quad , \quad R_1 = R$$

الف. نسبت شعاعهای دو کره $R_2 : R_1 = \frac{R}{6} : R = \frac{1}{6}$

ب. نسبت رویه‌های دو کره $\frac{1}{36} = (\frac{1}{6})^2$ است.

پ. نسبت حجمهای دو کره $\frac{1}{216} = (\frac{1}{6})^3$ است.

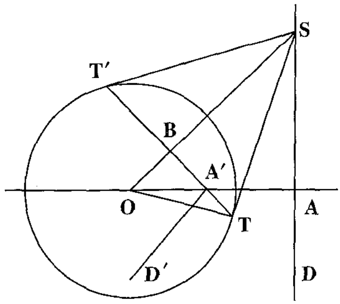
۴۹۲. اگر $R_1 = R$ اختیار شود، $2R_2 = R$ و از آن‌جا $R_2 = \frac{R}{2}$ است.

الف. نسبت شعاعها $R_2 : R_1 = \frac{1}{2}$

ب. نسبت رویه‌ها $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$

پ. نسبت حجمها $\frac{1}{8} = (\frac{1}{2})^3$

۴۹۳. صفحهٔ شکل را صفحهٔ (O,D) و S را نقطه‌ای از خط D می‌گیریم. مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ (O,D) از مخروط محیطی به رأس S، از دو خط مماس ST و ST' بر دایرهٔ عظیمهٔ مقطع کره، تشکیل می‌شود؛ بالاخره صفحهٔ دایرهٔ تماس تحت قطر TT' از این دایره قطع می‌شود، که بر OS، و در نتیجه بر صفحه (O,D) عمود است.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTS داریم $OB.OS = OT^2 = r^2$؛ امّا $ASBA'$ قابل محاط شدن در یک دایره است، پس $OB.OS = OA.OA'$؛ در نتیجه $OA.OA' = r^2$.
این رابطه ثابت می‌کند که A' نقطهٔ ثابتی است. بنابراین دایرهٔ تماس حاوی خط ثابت D' است که بر صفحهٔ (O,D) در نقطهٔ A' عمود است. از آن‌چه که قبلاً گفته شد، بلافاصله نتیجه می‌شود که D و D' برهم عمودند و $OA'A$ عمودمشترک آنهاست و بعلاوه داریم $OA.OA' = r^2$.
بعکس، اگر رأس S' از یک مخروط محیطی روی D' باشد، صفحهٔ دایرهٔ تماس بر یک خط D_1 عمود بر D' بگذرد و OA' را در نقطهٔ A_1 به قسمی قطع کند که $OA'.OA_1 = r^2$ باشد؛ این ثابت می‌کند که نقطهٔ D_1 بر نقطهٔ D منطبق است.
همچنین می‌توان دید که: یکی از خط‌های D و D' خارج و دیگری متقاطع با کره است؛ یا هردو در یک نقطه مماس بر کره‌اند، و این که، خط قاطع، از نقطه‌های تماس دو صفحه‌ای می‌گذرد که شامل خط D است و بر کره مماسند. خطهای D و D' را خطهای مزدوج نسبت به کره می‌نامند.

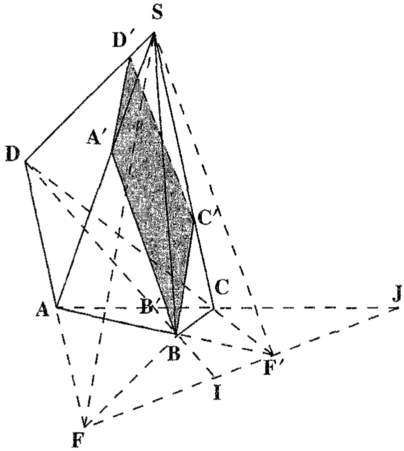
۴۹۴. الف. عمود

ب. قاعدهٔ یک چندضلعی متشابه

پ. مجذور فاصله

ت. سه برابر

ث. مکعب، مجذور



۴۹۵. نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی ABCD را E و F می‌نامیم. صفحه‌ای را درنظر می‌گیریم که S.ABCD را تحت متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ قطع کند. $A'B'$ و $C'D'$ که با هم موازی‌اند، با SF موازی می‌باشند. به‌طور مشابه $A'D'$ و $B'C'$ نیز با SE موازی می‌باشند؛ و بعکس، هر مقطع از کنج که به وسیلهٔ یک صفحه موازی صفحهٔ SEF ایجاد شود، یک متوازی‌الاضلاع است.

۱. برای آن که $A'B'C'D'$ یک مستطیل باشد، باید زاویهٔ ESF یک قائمه باشد، و مکان هندسی نقطهٔ S کره‌ای به قطر EF است.

۲. قطر $B'D'$ که با صفحهٔ SEF موازی و در صفحه SBD واقع است، موازی با SI، فصل مشترک این دو صفحه است، به‌طور مشابه $A'C'$ موازی با SJ است. اینک برای آن که $A'B'C'D'$ لوزی باشد، یعنی برای آن که $A'C'$ و $B'D'$ برهم عمود باشند، باید زاویهٔ ISJ مساوی یک قائمه باشد و مکان هندسی نقطه S کره‌ای به قطر IJ است.

۳. برای آن که $A'B'C'D'$ مربع باشد، یعنی برای آن که این متوازی‌الاضلاع، هم مستطیل و هم لوزی باشد، باید نقطهٔ S به کره‌های به قطرهای EF و IJ تعلق داشته باشد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ S دایره فصل مشترک این دو کره است.

۴۹۶. از نقطهٔ A خطی دلخواه مماس بر کره رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ تماس را H بنامیم داریم:

$$\sin O\hat{A}H = \frac{OH}{OA} = \frac{R}{R\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow O\hat{A}H = ۴۵^\circ$$

بنابراین پاسخها عبارتند از:

۱. بی‌شمار

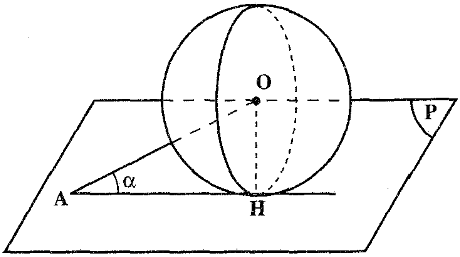
۲. بی‌شمار

۳. هیچ

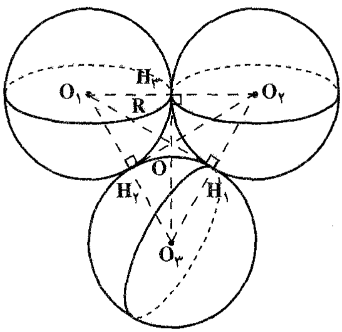
۱.۴۹۷. چون نقطهٔ A برون کرهٔ S(O,R) قرار دارد، پس از این نقطه، بی‌شمار صفحه مماس بر کره می‌توان رسم کرد.

۲. اگر H نقطهٔ تماس یکی از این صفحه‌ها با کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه AOH داریم:

$$\sin O\hat{A}H = \frac{OH}{OA} = \frac{R}{۳R} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow O\hat{A}H = \operatorname{Arc}\sin(\frac{۱}{۳})$$



۳. بی‌شمار صفحه وجود دارد که بر نقطهٔ A می‌گذرند و کره را قطع می‌کنند، در واقع تمام صفحه‌هایی که با OA زاویه‌ای کمتر از $\alpha = \operatorname{Arc}\sin(\frac{۱}{۳})$ می‌سازند، کره را قطع می‌کنند. بدیهی است برای $\alpha = ۰$ صفحه از مرکز کره می‌گذرد. بعلاوه باید توجه داشت که قدرمطلق زاویهٔ OAH در نظر گرفته شده است.



۱.۴۹۸. مرکزهای این سه کره را $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ می‌نامیم و به هم وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع $O_۱O_۲O_۳$ ایجاد می‌شود. سه نقطهٔ $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ که نقطه‌های تماس کره‌ها می‌باشند، وسطهای ضلعهای مثلث $O_۱O_۲O_۳$ می‌باشند. O نقطهٔ برخورد $O_۱H_۱$، $O_۲H_۲$ و $O_۳H_۳$ (عمودمنصفهای ضلعهای مثلث $O_۱O_۲O_۳$) مرکز کوچکترین کرهٔ مماس بر سه کره داده شده است. r شعاع این کره برابر است با:

$$r = OO_۱ - R = \frac{۲}{۳}O_۱H_۱ - R = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲R \times \sqrt{۳}}{۲} - R = R(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} - ۱)$$

۲. داریم:

$$S = ۴\pi r^۲ = ۴\pi \times R^۲(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} - ۱)^۲ = ۴(\frac{۷}{۳} - \frac{۴\sqrt{۳}}{۳})\pi R^۲$$

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \times R^۳(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} - ۱)^۳$$

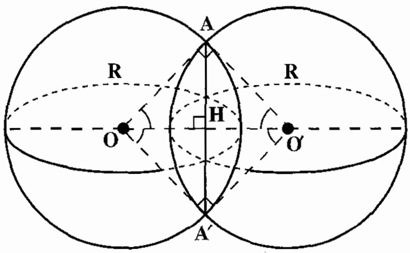
۳. مکان هندسی مرکز کره‌های مماس بر این سه کره، خطی است که در نقطهٔ O بر صفحهٔ مثلث $O_۱O_۲O_۳$ عمود می‌شود. حال اگر بنابراصل دزارگ نقطهٔ بی‌نهایت دور این خط را درنظر بگیریم، بزرگترین کرهٔ مماس بر این سه کره، شعاعش به $+\infty$ میل خواهد کرد؛ بنابراین این کره را در حد، صفحهٔ مماس بر این سه کره می‌توان درنظر گرفت.

نکته. در واقع، نمی‌توان بزرگترین کرهٔ مماس بر این سه کره را مشخص ساخت، یا چنین کره‌ای وجود ندارد. امّا در صورتی که فرض کنیم شعاع این کره به $+\infty$ میل کند، آن‌گاه این کره به صفحهٔ مماس بر سه کره تبدیل می‌شود.

۴۹۹. این دو کره برهم عمودند زیرا داریم:

$$OO'^۲ = R^۲ + R'^۲ \Rightarrow (R\sqrt{۲})^۲ = R^۲ + R'^۲ \Rightarrow ۲R^۲ = ۲R^۲$$

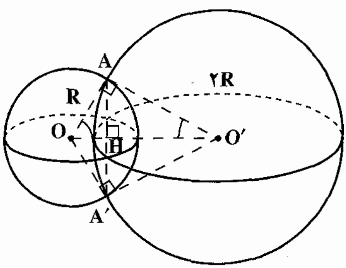
۱. اگر AA' قطری از دایرهٔ فصل مشترک این دو کره باشد، $OAO'A'$ مربع است و درنتیجه داریم:



$$AA' = OO' = R\sqrt{۲} \Rightarrow r = \frac{AA'}{۲} = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$$

۲. این زاویه‌ها هرکدام ۴۵° هستند زیرا $OAO'A'$ مربع و OO' نیمساز زاویه‌های AOA' و $AO'A'$ می‌باشد.

۳. در این حالت نیز دو کره برهم عمودند زیرا داریم:



$$OO'^۲ = R^۲ + R'^۲ \Rightarrow (R\sqrt{۵})^۲ = R^۲ + (۲R)^۲$$

$$۵R^۲ = R^۲ + ۴R^۲ \Rightarrow ۵R^۲ = ۵R^۲$$

امّا چهارضلعی $OAO'A'$ مربع نیست، بلکه شبه لوزی (کایت) است؛ زیرا $OA = OA' = R$ و $O'A = O'A' = ۲R$ است، اما $O\hat{A'}O' = O\hat{A}O' = ۹۰^\circ$

است. چون دو کره برهم عمودند، پس اگر H مرکز دایرهٔ مقطع دو کره باشد، با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه داریم :

$$AH \times OO' = OA \times O'A \Rightarrow AH \times R\sqrt{۵} = R \times ۲R$$

$$\Rightarrow AH = \frac{۲R}{\sqrt{۵}} = r$$ شعاع دایرهٔ مقطع

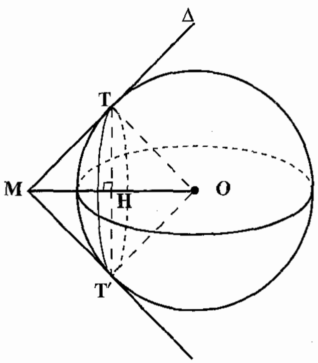
از آن‌جا زاویهٔ رأسهای مخروطهای خواسته شده برابرند با :

$$\sin A\hat{O}H = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{۲R}{\sqrt{۵}}}{R} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow A\hat{O}H = \operatorname{Arcsin}(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})$$

$$\sin A\hat{O'}H = \frac{AH}{O'A} = \frac{۲R}{\sqrt{۵}} \div ۲R = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow A\hat{O'}H = \operatorname{Arcsin}(\frac{\sqrt{۵}}{۵})$$

۵۰۰. ۱. چون $OM > R$ است، پس نقطهٔ M بیرون کره قرار دارد ؛ بنابراین بی‌شمار خط راست از این نقطه مماس بر کره می‌توان رسم کرد.

۲. اگر T نقطهٔ تماس یکی از این خطها با کره باشد، از O به T وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMT $(\hat{T} = ۹۰^\circ)$ داریم :



$$\sin T\hat{M}O = \frac{OT}{OM} = \frac{R}{R\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin ۴۵^\circ \Rightarrow T\hat{M}O = ۴۵^\circ$$

بنابراین تمام خطهایی که از نقطه O بر کره مماس رسم می‌شوند، با خط ثابت MO زاویهٔ ثابت ۴۵° می‌سازند ؛ در نتیجه مکان هندسی خطهای مماس، سطح مخروطی دواری به رأس M و به زاویهٔ رأس ۴۵° است.

۳. فصل مشترک این مخروط دوّار و کره، دایره‌ای به مرکز H و به شعاع $HT = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$ است ؛ زیرا در این حالت اگر TT' قطری از دایرهٔ مقطع باشد، به دلیل مربع بودن $MTOT'$، $MO = TT'$ و H مرکز مربع، یعنی وسط OM و TT' است. بنابراین $HT = \frac{TT'}{۲} = \frac{OO'}{۲} = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۴. مولّد مخروط دوّار مماس بر کره، MT است و داریم :

$$MT = R$$

زیرا چهارضلعی $MTOT'$ مربع است.

۵. اگر $OM = ۲R$ باشد، نقطهٔ M بیرون کره قرار می‌گیرد و در این حالت نیز بی‌شمار خط از این نقطه، مماس بر کره می‌توان رسم کرد. برای تعیین مکان هندسی خطهای مماس داریم :

$$\sin O\hat{M}T = \frac{OT}{OM} = \frac{R}{۲R} = \frac{۱}{۲} = \sin ۳۰^\circ \Rightarrow O\hat{M}T = ۳۰^\circ$$

بنابراین مکان هندسی خطهای مماسی که از نقطهٔ M بر کره رسم می‌شوند، سطح مخروط دوّاری به رأس M و زاویهٔ رأس ۳۰° است.

در این حالت شعاع دایرهٔ مقطع سطح مخروطی دوّار و کره برابر است با :

$$TH = OT \sin T\hat{O}M = R \sin ۶۰^\circ = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$

و اندازهٔ مولد مخروط به رأس M و قاعدهٔ دایره مقطع برابر است با :

$$MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۴R^۲ - R^۲} = R\sqrt{۳}$$

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. از اِردوش تا کی‌یِفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشرنام.
۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. موورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۸ . المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا. . محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری-ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر - س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو - ماری س. کلامکین - ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس - عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی - حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل المسائل هندسهٔ فضایی. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۰. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی - محمدعلی پرتوی.

ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۱. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۳۲. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۳۸. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۹. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۴۰. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۱. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۲. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۳. دایره‌ها. دَن پدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۴. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۷. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.

۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۹. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۱. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۲. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۳. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۴. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۵. زیباترین فرمولهای ریاضی. لیونل سالم ـ فردریک تستارد. ترجمهٔ پرویز امینی ـ حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه.
۵۶. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۷. شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید. پرویز شهریاری. انتشارات مدرسه.
۵۸. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۰. کارگاه هندسه / مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی. دکتر آرش رستگار. انتشارات فاطمی.
۶۱. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۶۲. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.
۶۳. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۴. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. موری.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشربردار.
۶۶. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۶۷. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی

سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۸. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۹. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۷۰. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۷۱. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۷۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور- محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۶. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۹. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۸۰. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۸۱. مسأله‌هایی در هندسه. آی. اف. شاریگین ترجمهٔ میرزا جلیلی ــ ابراهیم دارابی. انتشارات مبتکران.

۸۲. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف . شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۸۳. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۸۴. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف. یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۵. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۶. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۷. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱،۲،۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۸۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۹۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ.شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۹۱. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۹۲. هندسه تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۹۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۹۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۵. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۶. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۷. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین‌دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۸. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۹. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.

۱۰۰. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۱۰۱. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۲. هندسهٔ مقدس. رابرت لولُر. ترجمهٔ هایده معیری. مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی.
۱۰۳. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۱۰۴. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۵. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

106. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.
107. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.
108. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.
109. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLATERES). PAR.G.PAPELIER.
110. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELANGE. GENE MURROW.
111. GEOMETRY and its APPLICATIONS. Walter Meyer.
112. GEOMETRY AN INFORMAL APPROACH. PHILIP L. COX.
113. GEOMETRY for the Classroom. C. HERBERT CLEMENS MICHAEL A. CLEMENS.
114. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.
115. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.
116. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.
117. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´

WARUSFEL.

118. MATHEMATICS AROUND US.

119. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.

120. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.

121. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.

122. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

123. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

124. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.

125. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.