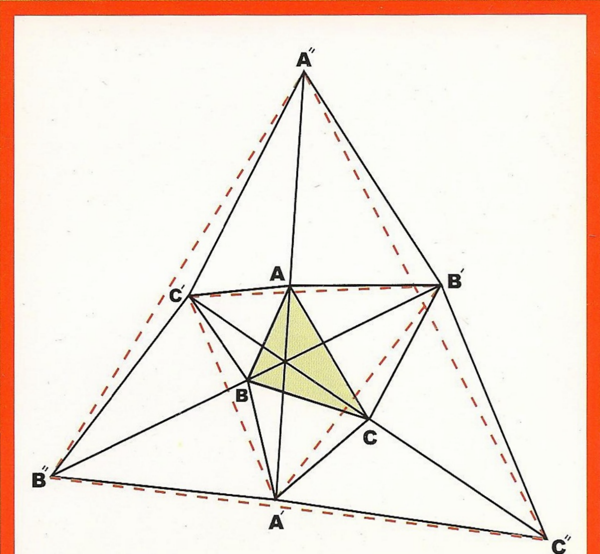
دایرة المعارف هندسه

۱

ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی درهندسهٔ مسطحه

(نقطه، خط، زاویه، مثلث، چهارضلعیهای ویژه ،...)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرةالمعارف هندسه

«جلد اوّل»

ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی
در
هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ -
دایرةالمعارف هندسه : ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه/ مؤلف محمدهاشم رستمی. - [ویرایش ۲]. -
تهران : مدرسه، ۱۳۷۸.
ج. : مصور، جدول.
I.S.B.N:964-353-873-7 (ج. ۱)

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
چاپ چهارم : ۱۳۸۶.
ویرایش قبلی این کتاب قبلاً تحت عنوان «دایرةالمعارف مسائل هندسه» در سال ۱۳۷۴ توسط سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه منتشر شده است.
کتابنامه.
مندرجات : ج. ۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه. - -
۱. هندسه - - مسائل، تمرینها و غیره. الف. مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان : دایرةالمعارف مسائل هندسه.

QA ۵۰۱/۵ / ۵ ر ۲ د
۱۳۷۸
۵۱۶/۰۰۷۶

خواننده‌ی محترم، با سلام و احترام؛ ضمن تشکر از شما، خواهشمند است هرگونه نظر، انتقاد و پیشنهاد خود را در مورد این کتاب یا دیگر کتاب‌های انتشارات مدرسه از طریق پیام‌نگار (ایمیل) madreseh@madresehpublications.com یا از طریق صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹ ارائه فرمایید. هم‌چنین می‌توانید کتاب‌های ما را از طریق پایگاه اینترنتی www.madresehpublications.com ثبت و سفارش دهید تا در کوتاه‌ترین زمان ممکن، پاسخ لازم یا کتاب مورد نظر خود را دریافت کنید.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

دایرةالمعارف هندسه
(جلد اول)
ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اول: ۷۸/ چاپ چهارم: ۱۳۸۶
تیراژ چاپ اول تا سوم: ۱۰۰۰۰/ تیراژ چاپ چهارم: ۱۵۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

شابک ۷-۸۷۳-۳۵۳-۹۶۴
ISBN 964-353-873-7

نشانی: تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۸۹۰۳۸۰۹

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش، نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه‌تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی و پنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه اقدام و تمام مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس،...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه‌های نااقلیدسی

......

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند مجلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد، به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج مجلد به‌شرح زیر است:

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس،...)؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی الساقین، قائم‌الزاویه،...) و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعیها (چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای دیگر، پنج‌ضلعیها و...).

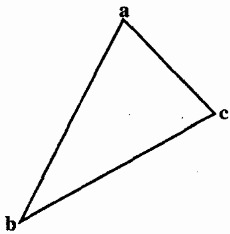
برای استفاده بهینه از این مجموعه، ذکر چند نکته ضروری است.

- در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.
- قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، شرح حال ارائه‌دهنده، و راه‌حلهای آنها، در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و تنها، تعداد محدودی

راه‌حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$»، که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس، از هشت راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به‌عنوان مثال، در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به‌صورتهای $\overrightarrow{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac،....



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به‌عنوان مثال، همه‌جا نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین، مانند نقطه‌های A، B، C و...، و پاره‌خط AB به‌صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت، $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این مجلد از دایرةالمعارف هندسه، شامل تاریخچهٔ هندسه، و خاصیتهای توصیفی نقطه، خط، زاویه، مثلث، چهارضلعیها و چندضلعیها $(n \geq 5)$ است، که دارای هفت بخش زیر است :

بخش ۱. تاریخچهٔ هندسه
بخش ۲. نقطه، خط، زاویه
بخش ۳. خطهای : موازی، عمود بر هم،...
بخش ۴. مثلث
بخش ۵. چهارضلعیهای ویژه (متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی و ذوزنقه)
بخش ۶. چهارضلعیهای دیگر
بخش ۷. چندضلعیها $(n \geq 5)$

هر یک از بخشهای بالا، به زیربخشهایی تقسیم شده است. به‌عنوان مثال، بخش ۴. مثلث، شامل شش زیربخش به‌صورت زیر است :

۴ . ۱. مثلث
۴ . ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع
۴ . ۳. مثلث متساوی‌الساقین
۴ . ۴. مثلث قائم‌الزاویه
۴ . ۵. مثلث با زاویه‌های حاده

۶.۴. مثلث منفرجه‌الزاویه

هر یک از زیربخشهای بالا نیز خود شامل چند زیربخش است. از آن جمله، زیربخش ۱.۴. مثلث، ۱۵ زیربخش زیر را دربردارد:

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

۲.۱.۴. زاویه

۳.۱.۴. ضلع

۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۵.۱.۴. پاره‌خط

۶.۱.۴. محیط

۷.۱.۴. مساحت

۸.۱.۴. همنهشتی مثلثها

۹.۱.۴. نقطه‌های ویژه

۱۰.۱.۴. نقطه‌های همخط

۱۱.۱.۴. خطهای همرس

۱۲.۱.۴. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز،...

۱۳.۱.۴. شکلهای ایجاد شده در مثلث

۱۴.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۵.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

زیربخشهای بالا نیز دارای زیربخشهایی است، و در هر یک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب مشخصی ارائه گردیده‌اند.

لازم به ذکر است که در این مجلد، راهنماییها یا راه‌حلهای ارائه شده، تنها با استفاده از خاصیتهای توصیفی شکلهای هندسی انجام شده است. بنابراین قضیه‌ها و مسأله‌هایی که راه‌حلهای دیگری نیز دارند، براساس نوع راه‌حل، در مجلدهای دیگر دایرةالمعارف، راهنمایی یا حل خواهند شد.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف، کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضی‌دانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند که پیشاپیش، از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی
در
هندسهٔ مسطحه

بخش ۱ . پیدایش هندسه، نقش هندسه در علوم، صنعت و زندگی و کاربرد هندسه
بخش ۲ . نقطه، خط، زاویه
بخش ۳ . خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز،...
بخش ۴ . مثلث
بخش ۵ . چهار ضلعیهای ویژه
بخش ۶ . چهار ضلعیهای دیگر
بخش ۷ . n ضلعیها $(n \geq 5)$

بخش ۱

•پیدایش هندسه، نقش هندسه در علوم، صنعت و زندگی و کاربرد هندسه

بخش ۱. پیدایش هندسه، نقش هندسه در علوم، صنعت و زندگی و کاربرد هندسه

۱.۱. پیدایش و سیر تحول هندسه

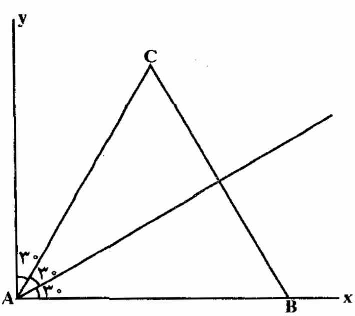
این عبارت «کسی که هندسه نمی‌داند از این در داخل نشود» جملهٔ نوشته شده بر کتیبهٔ سردر ورودی آکادمی افلاطون، انتشار کتاب «اصول هندسه» اثر بزرگ داوید هیلبرت David Hilbert (۱۸۶۲ـ۱۹۴۳) ریاضی‌دان نامدار آلمانی در سال ۱۸۹۹، و این عبارت «منابع و مآخذ هندسه که نه‌تنها از کل منابع حساب و جبر بلکه اقلاً از آنچه مربوط به آنالیز و حتی مربوط به هر شاخهٔ دیگر ریاضی است گسترده‌تر می‌باشند، گنجی است سرشار از اشیاء بسیار جالب...» از دکتر اریک تمپل بل E.T.Bell (۱۸۸۳ـ ۱۹۶۳) که خود از ریاضی‌دانان بزرگ است، اهمیت هندسه را از عهد باستان تا زمان حاضر به‌خوبی نشان می‌دهند.

زمان دقیق پیدایش هندسه به‌درستی مشخص نیست. اما مسلم است که پس از گذشت قرنها از عمر آدمی، درک مفهومهای هندسی میسر گردیده است.

هندسه در نقاشیهای رسم شده توسط اقوام اوّلیه روی ظرفها، دیوارهٔ غارها و...، تجلی می‌کند و مناظر و تزئینات نوسنگی، سرشار از شکلهای گوناگون هندسی است.

هندسه یا ژئومتری Geometry از دو کلمهٔ یونانی ژئو به معنی زمین و متراین به معنی اندازه‌گیری آمده است؛ زیرا گفته می‌شود که هندسه در اصل علم اندازه‌گیری زمین بوده است. هرودوت Herodotus مورخ یونانی سدهٔ پنجم قبل از میلاد، پدیدآورندگان هندسه را مساحان مصری می‌داند که مجبور بوده‌اند هر سال پس از طغیان رودخانهٔ نیل محدودهٔ زمینها را مجدداً مشخص سازند. اما تمدنهای کهن دیگر مانند بابلی، هندی، چینی و ایرانی هم اطلاعات هندسی زیادی داشته‌اند.

پیدایش ریاضیات در بابل باستانی را باید مربوط به ده‌ها سده پیش از میلاد دانست. از فرهنگ ریاضی بابل قدیم ۴۶ لوحهٔ گلی پخته به خط میخی پیدا شده است که در تعدادی از موزه‌های جهان از جمله موزهٔ بریتانیا در لندن، موزهٔ آرمیتاژ در لنینگراد و موزهٔ هنرها در مسکو نگهداری می‌شوند. در این لوحها روشهای کاملاً ساده‌ای برای حل مسأله‌های عملی مربوط به تقسیم زمین، ساختمان و بازرگانی ارائه شده است.



بابلیها قادر بودند مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم نمایند و به کمک آن زاویهٔ قائمه را به سه قسمت متساوی تقسیم کنند. به این ترتیب که روی ضلع Ax از زاویهٔ قائمه xAy مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را می‌ساختند. در این صورت $y\hat{A}C = ۳۰^\circ$ می‌گردد. سپس با رسم نیمساز زاویهٔ CAx زاویهٔ قائمه xAy به سه زاویهٔ متساوی تقسیم می‌شود.

مردم بابل قدیم، قرنها قبل از یونانیها، در ریاضیات و نجوم به پیشرفتهای حیرت‌انگیزی رسیده بودند. بابلیها در عددنویسی و ریاضیات محاسبه‌ای به مرحله‌ای رسیدند که یونانیان تا قرنها بعد نتوانستند به آن برسند. بابلیها پایه‌گذار اخترشناسی، سازندهٔ دستگاه شصت شصتی (تقسیم دایره به 360° و هر درجه به ۶۰ دقیقه و... و تقسیم‌بندی زمان)، بنیان‌گذار عددهای موضعی برحسب ارزش نسبی، کاشف صفر در مرحله‌ای از تاریخ خود و قادر به حل معادلهٔ درجهٔ دوم و برخی از حالتهای معادلهٔ درجهٔ ۳ بوده‌اند. بابلیان قضیهٔ فیثاغورس را که در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ مربع وتر مساوی مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر است، خیلی پیش از آن که فیثاغورس به دنیا بیاید، می‌دانسته‌اند.

عیلامیها که از هزارهٔ چهارم پیش از میلاد تا نیمهٔ هزارهٔ اوّل پیش از میلاد از مرکز خود شهر شوش بر جنوب غربی ایران حکومت می‌کردند، با سومریها و بابلیها همسایه بودند. تعداد محدودی از متنهای ریاضی که در شوش به‌دست آمده، نشان می‌دهد که ریاضی‌دانان عیلامی از حالت خاص قضیهٔ فیثاغورس (مثلاً مثلثهای قائم‌الزاویه به ضلعهای ۳ و ۴ و ۵ یا ۶ و ۸ و ۱۰) اطلاع داشته‌اند و آن را برای رسم دو خط عمود بر هم و محاسبهٔ طول پاره‌خطهای راست به‌کار می‌بردند. گونه‌های مختلف مثلث را می‌شناختند. عدد π را به کمک چندضلعیهای منتظم محاط در دایره به‌دست آورده، آن را مساوی ۳/۲۵ می‌گرفته‌اند. در عددنویسی، هم از مبنای ده‌دهی، و هم از مبنای شصت شصتی استفاده می‌کرده‌اند.

هندسهٔ زمان باستان موضوعی تجربی بود که نتیجه‌های تقریبی به‌دست آمدهٔ آن، برای مقاصد عملی آن زمان کافی بود. مثلاً بابلیان سالهای ۲۰۰۰ تا ۱۶۰۰ قبل از میلاد، عدد π را مساوی ۳ اختیار می‌کردند، یعنی محیط دایره را سه برابر قطرش درنظر می‌گرفتند و در نوشته‌های چینی نیز همین مقدار پیدا شده است.

مصریان سال ۱۸۰۰ قبل از میلاد، طبق نوشته‌های پاپیروس رایند (شامل ۸۴ مسأله ریاضی) که یکی از کهنترین اسناد ریاضیات مصر باستان است، π را مساوی $(\frac{16}{9})^2 \simeq 3/1604$ می‌گرفته‌اند. در پاپیروس مسکو که مربوط به سال ۱۸۵۰ قبل از میلاد است مسأله‌هایی در مورد محاسبهٔ حجم هرم ناقص مربع‌القاعده حل شده است.

به کمک این پاپیروسها و دیگر مدارک، روشن می‌گردد که مصریها حتی در ۴۰۰۰ سال پیش می‌توانسته‌اند مسأله‌های عملی دربارهٔ حساب و جبر و هندسه را حل کنند.

هندسهٔ پیشینیان مجموعه‌ای بود از قاعده‌هایی که از طریق آزمایش، بررسی شباهتها و حدسها به‌دست آمده بود، اما این قاعده‌ها هیچ‌گونه ارتباطی به یکدیگر نداشتند. بنابراین هندسه در شوش و مصر و بابل به معنی واقعی کلمه علم نبود بلکه انبانی پر از قاعده‌های محاسبه بود.

تا آن که از سدهٔ هفتم پیش از میلاد، راه ورود آزاد به کشور مصر برای مسافران خارجی گشوده شد و دانشمندان یونانی از این امکان بخوبی استفاده کردند.

یونانیها تقریباً از سدهٔ چهارم پیش از میلاد جست‌وجوهای مستقل خود در ریاضیات را آغاز کردند و در این زمینه به‌خصوص در هندسه به موفقیتهای زیادی دست یافتند. یونانیان و بیش از همه تالس Thalés (۶۲۵ تا ۵۴۵ ق.م) اصرار داشتند که احکام هندسی نه از راه آزمایش و خطا، بلکه از راه استدلال قیاسی باید ثابت گردند.

تالس با اطلاع از محاسبه‌های ریاضیات مصری و بابلی، ضمن تلاش برای مشخص ساختن درست از نادرست، نخستین هندسهٔ منطقی را بنا نهاد.

نظم بخشیدن به هندسه و تابع اصول‌سازی آن که با تالس شروع گردید، توسط فیثاغورس و شاگردانش به مدت ۲ قرن ادامه یافت.

فیثاغورس Pythagoras (۵۶۹ تا ۵۰۰ ق. م) خود مدتها در مصر به سر برد و در خدمت کاهنان مصری به شاگردی پرداخت و اطلاعات و معتقدات بسیاری کسب کرد و از آن‌جا روانهٔ بابل شد و دوران شاگردی را از نو آغاز نمود. برخی می‌گویند که به هند نیز رفته است. آن‌گاه به وطن بازگشت و در جزیرهٔ کروتون Crotone در ایتالیای جنوبی مکتب اخوتی دایر نمود تا بتواند مسأله‌های عالی ریاضیات و نظریه‌های فیزیکی و اخلاقی را تدریس کند و پیشرفت دهد. چنان که مشهور است بین اروپاییان، فیثاغورس نخستین کسی بود که در این نکته اصرار ورزید که در هندسه باید ابتدا اصول (متعارفی و موضوع) را معین کرد و آن‌گاه به اتکاء آنها، روش استنتاج متوالی را پیش گرفت و با این روش استدلال پیشرفت نمود. به این ترتیب اروپاییان، فیثاغورس را نخستین کسی می‌دانند که استدلال را وارد ریاضیات کرد.

بقراط ریاضی‌دان (با طبیبی به همین نام اشتباه نشود) که از پیروان مکتب فیثاغورس بود در حدود ۴۰۰ سال پیش از میلاد پی‌ریزی منظم هندسهٔ مسطحه را در کتابی به‌نام اصول به انجام رسانید که طبق بررسیهای انجام شده، مطالب این کتاب، قسمت اعظم مطالب کتابهای اوّل تا چهارم اقلیدس را که یک قرن بعد منتشر شد، دربرداشته است. به‌این ترتیب استخراج منظم از راه اثبات، از مشخصه‌های ریاضیات یونانی و کاملاً تازه بوده است، گو این‌که طبق بررسیهایی که اخیراً به عمل آمده، مشخص گردیده است که بابلیان نخستین قومی بوده‌اند که لزوم استدلال را حس نموده و این موضوع خود یکی از بزرگترین ترقیاتی است که در ریاضیات انجام گرفته است. اما یونانیان دربارهٔ پیشگامان خود سخاوت به خرج نداده و در این مورد نامی از آنان نبرده‌اند.

«هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود» جمله‌ای است که بر سر در آکادمی علوم و فلسفهٔ افلاطون، بزرگترین مرکز آموزش ریاضی آن زمان، که در حدود سال ۳۸۷ قبل از میلاد بنا نهاده شد، نوشته شده بود، که این جمله خود اهمیت ریاضیات و به‌خصوص هندسه را نزد یونانیان باستان به‌خوبی نشان می‌دهد. افلاطون در کتاب جمهوری خود می نویسد «مطالعهٔ ریاضیات، دستگاهی ذهنی را توسعه می‌دهد و به کار می‌اندازد که ارزش آن از هزار چشم بیشتر است ؛

زیرا که درک حقیقت فقط از راه ریاضی میسر است». افلاطون با وجود آن که ریاضی‌دان نبود اما او را ایجادکنندهٔ ریاضی‌دانان نامیده‌اند؛ زیرا وی بسیاری از ریاضی‌دانانی را که هزاران بار از نظر ریاضی بر او تقدم فضل داشتند، وادار به ابداعات ریاضی واقعی کرد.

تأثیر افلاطون بر ریاضی‌دانان، مشکلاتی هم برای ریاضیات و بخصوص هندسه پدید آورد؛ زیرا بنا به نوشتهٔ دکتر اریک‌تمپل‌بل، حکومت مستبدانه افلاطون بر هندسه، بیش از بیست قرن طول کشید و تنها ۱۹۸۵ سال بعد از مرگ افلاطون با اختراع هندسهٔ تحلیلی توسط رنه‌دکارت René Descartes (۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰)، هندسه توانست از زیر این بار گران شانه خالی کند. البته دانشمندانی چون ارشمیدس Archimedes (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق.م) هم بودند که دنبال افکار استبدادی افلاطون نرفتند و به همین علت، شاهکارهای زیادی در ریاضی به‌وجود آوردند. ارشمیدس اندکی بعد از آن که اقلیدس در دانشگاه اسکندریه به تدریس پرداخت برای تحصیل به آن‌جا رفت و پس از تحصیل به سیراکیوز زادگاهش بازگشت. ارشمیدس دانشمندی به معنی واقعی کلمه متجدد بود. به‌طوری که ۲۰۰۰ سال قبل از نیوتن Newton (۱۶۴۳ـ ۱۷۲۷) و لایب‌نیتس Leibnitz (۱۶۴۶ـ۱۷۱۶) موفق به اختراع حساب انتگرال شد و حتی می‌توان او را از پیش‌قدمان فکر ایجاد حساب دیفرانسیل دانست.

ارشمیدس در کارهای علمی خود از همان رهنمودی استفاده کرد که سده‌ها بعد به‌وسیلهٔ دکارت تنظیم شد «وقتی می‌خواهیم موضوعی را بررسی کنیم نباید در جست‌وجوی چیزی باشیم که دیگران می‌اندیشند و یا در گمان خودمان وجود دارد. باید چیزی را جست‌وجو کنیم که یا آشکارا و به‌روشنی دیده می‌شود و یا با استدلال قیاسی قابل اثبات است. چرا که دانش، از راه دیگری به‌دست نمی‌آید».

ارشمیدس در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری دایره»، به کمک ۹۶ ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی، عدد π را بین دو عدد $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ و $۳\frac{۱}{۷}$ به‌دست آورده است و در رسالهٔ «دربارهٔ کره و استوانه»، ثابت نمود که سطح و حجم کره به شعاع R برابر است با: $۴\pi R^{۲}$ = سطح کره و $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ = حجم کره. همچنین در همین رساله ثابت می‌کند که اگر در یک استوانه متساوی‌الساقین (استوانه‌ای که ارتفاعش مساوی قطر قاعده‌اش باشد) کره‌ای محاط کنیم سطح کل و حجم استوانه برابر $\frac{۳}{۲}$ سطح و حجم کره است.

ارشمیدس رساله‌هایی نیز در مورد پارابلوئیدها و هیپربولوئیدها و تربیع سهمی دارد. کتاب «قضایای مکانیک و روش آنها» که در سال ۱۹۰۶ در شهر قسطنطنیه کشف شد یکی دیگر از آثار ارزشمند این دانشمند بزرگ است.

ارشمیدس موجد و مکتشف یک شاهکار نبود، تعداد بیشماری از شاهکارهای ریاضی مرهون مساعی اوست.

اقلیدس Euclide (۳۵۰ تا ۲۷۶ ق.م) که شاگرد مکتب افلاطون بود در حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح (ع)، روش قاطع هندسهٔ یونانی و نظریهٔ اعداد را در کتاب اصول Eléments که در سیزده جلد تدوین شده بود منتشر ساخت، که در قرن پانزدهم میلادی وقتی ماشین چاپ اختراع گردید، جزء اوّلین کتابهایی بود که به چاپ رسید.

شاهکار اقلیدس مدوّن ساختن و تنظیم کردن هندسه بود. پیش از اقلیدس ریاضی‌دانان برجسته‌ای چون تالس و فیثاغورس در زمینهٔ هندسه کارهای زیادی انجام داده بودند اما آن را مدوّن نساخته بودند. اقلیدس کارهای پیشینیان را گرد هم آورد و خود به آن مطالبی افزود و همه را بر مبنای اصول (اصول متعارفی و اصول موضوع) چنان مرتب و منظم کرد، که قرنها بهترین نمونه کار علمی بود. وی تجارب فیثاغورسیان را در کتابهای اوّل تا چهارم و هفتم و نهم، کارهای آرکیتاس Archytas (۳۴۷ تا ۴۲۸ ق.م) را در کتاب هشتم، کارهای ائودوکس Eudoxe (۳۵۵ تا ۴۰۸ ق.م) را در کتابهای پنجم، ششم و دوازدهم و کارهای تئه‌تتوس Thaeatetus (حدود ۴۸۰ ق.م) را در کتابهای دهم و سیزدهم گرد آورده است.

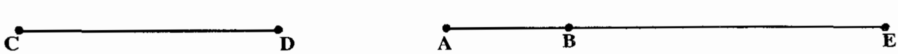
کتاب اصول اقلیدس آن‌چنان به‌طور کامل جایگزین تلاشهای پیشینیان در شناسانیدن هندسه گردید که کمتر نشانه‌ای از آن کوششها به‌جای ماند. روش اصل موضوعی که اقلیدس به‌کار برد الگویی است برای آنچه که ما امروز ریاضیات محض می‌نامیم. و این روش او متجاوز از ۲۰۰۰ سال بر هندسه مسلط بود. محض به معنی اندیشهٔ محض است، هیچ تجربهٔ عینی برای تحقیق درستی احکام لازم نیست. تنها باید مراقب استدلال در اثبات قضیه‌ها بود.

کار بزرگ اقلیدس آن بود که با انتخاب چند اصل ساده که بدون هیچ توجیهی پذیرفتنی بودند، توانست ۴۶۵ گزاره را که بسیاری از این گزاره‌ها پیچیده هم بودند و به‌طور شهودی مسلم و بدیهی نبودند، نتیجه بگیرد.

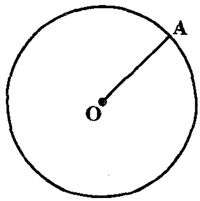
اصول پنجگانهٔ اقلیدس عبارتند از:

اصل اوّل. به‌ازای هر نقطهٔ P و هر نقطهٔ Q که با P مساوی نباشد، خط یکتایی مانند L وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد (هر دو نقطهٔ متمایز یک خط راست منحصر به فرد را مشخص می‌سازند).

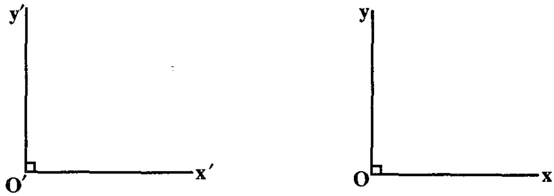
اصل دوم. به‌ازای هر پاره‌خط AB و هر پاره‌خط CD، نقطهٔ منحصر به‌فردی چون E وجود دارد، چنان‌که B میان A و E واقع است و پاره‌خط CD با پاره‌خط BE قابل انطباق است (هر پاره‌خط AB را می‌توان به اندازهٔ پاره‌خط BE که با پاره‌خط دادهٔ شدهٔ CD قابل انطباق است، امتداد داد).



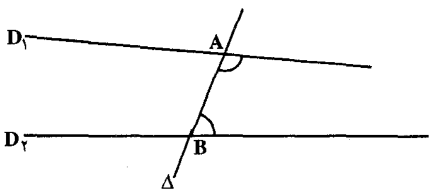
اصل سوم. به‌ازای هر نقطهٔ O و هر نقطهٔ A که با O مساوی نباشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA وجود دارد.



اصل چهارم. همهٔ زاویه‌های قائمه، با یکدیگر قابل انطباقند.

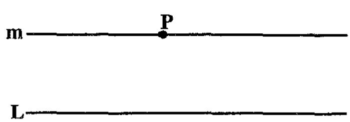


اصل پنجم. اگر دو خط به‌وسیلهٔ موربی چنان قطع شوند که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ درونی واقع در یک طرف مورب کمتر از 180° باشد، اگر این دو خط را بی نهایت امتداد دهیم آن‌گاه این دو خط همدیگر را در همان طرف مورب، تلاقی می کنند.



اصل توازی پلی‌فیر Playfair's Postulate:

به‌ازای هر خط L و هر نقطهٔ P غیرواقع بر آن، تنها یک خط مانند m وجود دارد چنان که از P می گذرد و با L موازی است (پلی فیر در کتاب هندسهٔ اقلیدسی خود که در سال ۱۷۹۵ چاپ شد، اصل توازی را به‌صورت بالا آورده است که منطقاً با اصل پنجم اقلیدس که در کتاب اصول آمده است، هم‌ارز است).



یک دلیل بر زیبایی کار اقلیدس آن است که توانست آن همه را، از این اندک نتیجه بگیرد.

یکی دیگر از یونانیانی که آثارشان در ریاضیات بعد از قرن هفدهم مؤثر واقع شد، آپولونیوس Apollonius (۲۶۰ تا ۲۰۰ ق. م) است. آپولونیوس هندسه را به مفهومی که اقلیدس درنظر داشت تا جایی پیش برد، که قابل قیاس با آن‌چه اقلیدس باقی گذارده بود، نیست. آپولونیوس بین

هندسه‌دانان نوع خویش، در اطلاع بر هندسهٔ خالص نظیری نیافت، تنها اشتاینر Steiner (۱۸۶۳-۱۷۸۶) ریاضی‌دان سوئیسی در قرن نوزدهم را می‌توان با او مقایسه نمود. آپولونیوس ریاضی‌دان حوزهٔ علمی اسکندریه نویسندهٔ اوّلین اثر مهم و مستقل در مخروطات است.

یونانیان نه‌تنها در زمینهٔ هندسهٔ مسطحه (هندسهٔ مقدماتی) کار کردند بلکه مبانی استواری هم به‌وسیلهٔ ارشمیدس، آپولونیوس و دیگران برای هندسهٔ عالی پی‌ریزی نمودند.

اگر ریاضی‌دانان و دانشمندان یونانی به‌جای تبعیت از افلاطون و اقلیدس و ارسطو از روش ارشمیدس پیروی می‌کردند، به آسانی می‌توانستند دوران جدید ریاضیات را که همراه با دکارت و نیوتن در قرن هفدهم شروع می‌شود، و عصر فیزیک جدید را که گالیله Galilée (۱۶۴۲-۱۵۶۴) واضع آن است، لااقل دو هزار سال جلو بیندازند.

پس از اقلیدس حدود ۲۰۰۰ سال در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدسی کاری چندان مهم و جدی انجام نگرفت. یکی از کارهای انجام شده، شرحی است که پروکلوس Proclus (۴۱۰-۴۸۵م) بر کتاب اصول اقلیدس نوشته است که قسمت اعظم اطلاعات کنونی ما در مورد هندسهٔ اقلیدسی از این کتاب است. لئوناردو فیبوناتچی Leonardo Fibonatci (۱۱۷۰-۱۲۵۰) ریاضی‌دان ایتالیایی (متولد در پیسا PISA) نیز کتاب هندسهٔ عملی را نوشت.

آدرین‌ماری لژاندار Adrian Mari Lejandr (۱۸۳۳-۱۷۵۲) ریاضی‌دان فرانسوی در کتاب «اصول هندسه» ترتیب قضیه‌های کتاب اصول اقلیدس را تغییر داد و اثبات برخی از آنها را ساده‌تر نمود که این کتاب بزودی در مدارس اروپا و امریکا جایگزین کتاب اصول اقلیدس شد. در این کتاب اصم بودن π با راه‌حلی ساده ثابت گردیده است.

با کشف هندسه‌های نااقلیدسی در اوایل قرن نوزدهم به‌وسیلهٔ کارل فردریک گوس C.F. Gauss (۱۸۵۵-۱۷۷۷) و یانوش بویوئی Johann Bolyai (۱۸۰۲-۱۸۶۰) و نیکلای ایوانویچ لوباچفسکی Nicolas Ivanovich Lobatchewsky (۱۸۵۶-۱۷۹۳) و ژرژ فردریک برنارد ریمان G.F.B. Riemann (۱۸۶۶-۱۸۲۶) ریاضی‌دان آلمانی در بیست سال آخر قرن نوزدهم، بسیاری از ریاضی‌دانان احساس نمودند که لازم است استخوان‌بندی منطقی استدلالهای هندسهٔ اقلیدسی را روشن و واضح سازند و آنها را از قید و بند توجه به الهام و اشراق و بدیهیات فارغ سازند. اما پیش از هیلبرت هیچکس موفق به اجرای این برنامه آن هم با این همه دقت و روشنی نشده بود.

داوید هیلبرت در کتابش به‌نام مبانی هندسه که در سال ۱۸۹۹ منتشر شد، تعاریف هندسه اقلیدسی را روشن ساخت و شکافهای موجود در برخی از استدلالهای اقلیدس را پر کرد و اصلهای جدیدی به آن افزود و هندسه اقلیدسی را با آنالیز سازگار نمود که این هندسه با تغییراتی در برخی موارد، هندسهٔ اقلیدسی زمان حاضر می‌باشد.

۲.۱. نقش هندسه در ریاضیات

بین فلاسفهٔ ریاضی و تاریخ‌دانان ریاضی اختلاف نظر وجود دارد که آیا ابتدا مفاهیم مربوط به عدد در ریاضیات مطرح شد، یا مفاهیم مربوط به خط و صفحه و پیوستارهای هندسی. ولی آنچه که مسلم است تکامل ریاضیات در ارتباط با پیشرفتهای دو رشتهٔ حساب و هندسه صورت پذیرفته است. اما این دو عنصر اساسی ریاضیات همواره همدوش یکدیگر به پیش نرفته‌اند. چه بسیار اتفاق افتاده است که این دو با هم رقابت داشته‌اند و ترقی یکی باعث رکود دیگری گردیده است.

اوّلین قدم واقعی ریاضی به‌وسیلهٔ هندسه برداشته شد. یونانیان سالهای ۶۰۰ تا ۳۰۰ قبل از میلاد به ریاضیات سازمان و رنگ تجرد و استدلال قیاسی دادند و ساختمان عظیم هندسهٔ اقلیدسی را بنیان نهادند. یونانیان خطها و منحنیها (مثلث، دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) را در یک طبقه و سطحها (مکعب، کره، پارابولوئید و هیپربولوئید) را در طبقه‌ای دیگر مورد مطالعه قرار می‌دادند.

چون یونانیان به‌طور خالص در هندسه کار می‌کردند، بنابراین هندسهٔ اقلیدسی، جبری را که تا آن زمان شناخته شده بود نیز دربر می‌گرفت. مثلاً حل معادلهٔ درجهٔ دوم یک مجهولی به روش هندسی انجام می‌شد.

پس از ویرانی تمدن یونان به‌وسیلهٔ اسکندر و انتقال آن به اسکندریه، دانشمندان اسکندریه حساب و جبر را به هندسهٔ اقلیدسی اضافه کردند تا به این وسیله بتوانند نتایج کمّی به‌دست آورند.

بعد از ریاضی‌دانان اسکندریه، ریاضی‌دانان اسلامی و ایرانی در پیشرفت و تکامل ریاضیات نقش عمده‌ای به عهده داشته‌اند. محمدبن موسی خوارزمی (؟ ـ ۲۳۲ هـ. ق، ؟ ـ ۸۴۷ م) بنیان‌گذار جبر و مقابله است که کلمهٔ جبر یا الجبر Algebre، Algebra از نام کتاب وی گرفته شده است و واژهٔ «آلگوریتم»، نیز شکل لاتینی شدهٔ نام الخوارزمی است (آلگوریتم به معنی روش و قانونهای محاسبه است).

در تکامل هندسه که منتهی به پیدایش هندسه‌ها و فضاهای جدید گردیده است ریاضی‌دانان ایرانی نقش مهمی داشته‌اند. حکیم عمر خیام (۴۳۹ ـ ۵۲۶ هـ.ق) اوّلین کسی است که در جبر و مقابله، معادلات را برحسب درجهٔ مجهول مرتب، و با روشی تحلیلی‌گونه حل و بحث کرد. خیام نخستین ریاضی‌دانی است که ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم را به روش هندسی به‌دست آورد و مقدمات کاربرد جبر در هندسه را طرح‌ریزی نمود.

در رساله‌ای به‌نام «فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» خیام به اصل توازی که اقلیدس جزء اصول متعارفی آورده است ایراد گرفته، می‌گوید که این حکم نیاز به اقامهٔ برهان

دارد، و خود برای آن هشت مقدمه می‌آورد که بعدها خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷ ـ ۶۷۲ هـ.ق)، (۱۲۰۱ـ۱۲۷۴ م) ریاضی‌دان بزرگ ایرانی مقدمه هشتم او را مخدوش می‌یابد و خود در زمینهٔ اثبات اصل توازی تلاش می‌نماید.

خواجه نصیرالدین طوسی نخستین اثر مستقل در مثلثات (مثلثات زاییدهٔ احتیاج مربوط به محاسبه‌های عملی بخصوص نیاز به وسیله‌ای برای محاسبهٔ اجزاء شکلهای مختلف هندسی می‌باشد) را به‌نام «شکل القطاع» Ŝeklolquetta نوشت که پس از ترجمه، مدتها کتاب درسی در اروپا و امریکا بود.

پس از نهضت علمی اروپا، ریاضی‌دانان بتدریج اعداد منفی و بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک، و عناصر موهومی را وارد هندسه نمودند و آن را در سطوح و فضاهای مختلف به‌طور شگفت‌انگیزی بسط و توسعه دادند که از آن جمله است :

ـ هندسه تحلیلی، که به‌وسیلهٔ دکارت در سال ۱۶۱۹ به دنیا معرفی گردید و پی‌یرفرما Pierre de Fermat (۱۶۰۱ ـ ۱۶۶۵) ریاضی‌دان فرانسوی نیز تقریباً به‌طور همزمان با دکارت این هندسه را کشف نمود.

ـ هندسهٔ تصویری، که توسط دزارگ Desargues (۱۵۹۳ ـ ۱۶۶۲) و بلز پاسکال Belese Pascal (۱۶۲۳ـ۱۶۶۲) ریاضی‌دانهای فرانسوی پایه‌گذاری گردید.

ـ هندسهٔ ترسیمی، که به‌وسیلهٔ گاسپار مونژ Gaspard Monge (۱۷۴۶ـ۱۸۱۸) ریاضی‌دان فرانسوی بنیان نهاده و کشف شد.

ـ محاسبهٔ برداری، شاخه‌ای از هندسه که در رابطه‌ای تنگاتنگ با نیازهای مکانیک و فیزیک شکل گرفته است، توسط ویلیام هامیلتون W. Hamilton (۱۸۰۵ـ ۱۸۶۵) ریاضی‌دان ایرلندی و هرمان گراسمان H. Grassmann (۱۸۰۹ـ۱۸۷۷) ریاضی‌دان آلمانی پایه‌گذاری گردید و ژیبس Gibbs (۱۸۳۹ـ۱۹۰۳) فیزیک‌دان امریکایی آن را به روش جدید ارائه کرده است.

ـ هندسهٔ دیفرانسیل، که شیب و انحناء منحنیها و خطهای ژئودزیک géodesic یا کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه بر روی یک سطح را بررسی می‌کند، توسط نیوتن و لایب‌نیتس کشف و پایه‌گذاری گردید.

ـ هندسه‌های نااقلیدسی، که جایگاه خاص خویش را دارند. هر هندسه‌ای غیر از هندسهٔ اقلیدسی را هندسهٔ نااقلیدسی می‌نامند. بسیاری از این‌گونه هندسه‌ها تاکنون شناخته شده‌اند. تلاش برای اثبات اصل توازی اقلیدس، موجب پیدایش هندسه‌های نااقلیدسی گردید.

دانشمندان در طی ۲۰۰۰ سال تلاش کردند تا اصل توازی را که آن‌چنان ساده و بدیهی هم نبود از ۴ اصل دیگر نتیجه بگیرند و یا اصل دیگری را که به خودی خود بداهت بیشتری داشته باشد، جایگزین آن سازند اما همهٔ این تلاشها به ناکامی انجامید.

نخستین تلاشی که برای اثبات اصل توازی به عمل آمد، از آنِ بطلمیوس در قرن دوم میلادی است، و سپس پروکلوس در قرن پنجم میلادی سعی نمود که اصل توازی را ثابت کند. مهمترین تلاشی که بعداً برای اثبات اصل توازی به عمل آمد، از آنِ خواجه نصیرالدین طوسی ریاضی‌دان ایرانی و سپس جان‌والیس John Wallis (۱۶۱۶-۱۷۰۳) ریاضی‌دان انگلیسی است. اصل توازی چنان ذهن آدرین‌ماری لژاندر فرانسوی را که یکی از بهترین ریاضی‌دانان عصر خود بود و در شاخه‌های مختلف ریاضی کشفهای مهمی دارد، به خود معطوف داشته بود که در طی ۲۹ سال، چند بار اصول هندسه‌اش را تجدید چاپ کرد و هر بار یکی از کوششهای تازه‌اش در مورد اصل توازی را در آن درج نمود. فورکوش بویوئی Forkosh Bolyai ریاضی‌دان مجارستانی و جیرولاموساکری Girolamo Saccheri ایتالیایی (۱۶۶۷-۱۷۳۳) نیز در این زمینه تلاش نمودند.

نیکولای لوباچفسکی نخستین کسی بود که در سال ۱۸۲۹ عملاً مقاله‌ای در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی منتشر کرد. یانوش بویوئی اکتشافات خود در زمینهٔ هندسه نااقلیدسی را در سال ۱۸۳۱ در یک ضمیمهٔ ۲۶ صفحه‌ای در کتاب تنتامن که پدرش نوشته بود منتشر کرد.

گائوس که از پانزده سالگی یعنی از ۱۷۹۲ در هندسهٔ نااقلیدسی کار می‌کرده است در حقیقت پیش‌تر از یانوش بویوئی و لوباچفسکی هندسهٔ هذلولوی را کشف نمود.

در هندسهٔ هذلولوی به‌جای اصل توازی اقلیدس اصل زیر که به اصل هذلولوی مشهور است، گذاشته می‌شود:

در هندسهٔ هذلولوی یک خط L و یک نقطهٔ P غیرواقع بر L وجود دارند چنان که دست کم دو خط موازی با L از نقطهٔ P می‌گذرد.

هندسهٔ دیگر نااقلیدسی هندسهٔ بیضوی است که توسط ژرژ فردریک برنهارد ریمان ریاضی‌دان آلمانی کشف گردید. هندسهٔ بیضوی بر این اصل استوار است که از یک نقطهٔ P واقع در خارج یک خط مانند L اصلاً نمی‌توان خطی به موازات خط L کشید. یعنی هندسه‌ای که در آن خطهای موازی وجود ندارد.

هندسه‌های نااقلیدسی خود هر کدام الگوهای متفاوتی دارند.

تاریخچهٔ مختصر اصل موضوع توازی اقلیدس را در بخش دیگری، خواهیم دید.

۳.۱. کاربرد هندسه در علوم، صنعت و زندگی

ریاضیات در زمینه‌های مختلف علمی و صنعتی کاربرد فراوان دارند. امروزه علوم مختلف مانند اقتصاد، بیولوژی، علوم سیاسی، زبان‌شناسی، جغرافیا و... به سمت ریاضی شدن گام

برمی‌دارند و تلاش می‌کنند تا هر مبحث خاصی را که مورد مطالعهٔ آنهاست به‌صورت یک مدل ریاضی درآورند. به کمک مدلهای ریاضی، مسأله‌های مختلف در زمینه‌های علمی، اجتماعی، اقتصادی و... را می‌توان بررسی و حل نمود. حتی علومی مانند علوم انسانی نیز که خیلی دور از مباحث ریاضی به‌نظر می‌رسند به سمت ریاضی شدن حرکت نموده‌اند. تجربهٔ ریاضی شدن علوم، بسیار مفید و ثمربخش بوده و در مدت زمانی کوتاه پیشرفتهای بسیار اساسی در آنها به‌وجود آمده است.

ذکر این نکته ضروری است که در ابتدای کشف یک شاخه از ریاضی، ممکن است کاربردی برای آن متصور نباشد، اما بعد از مدت زمانی، امکان دارد کاربردهایی برای آن به‌وجود آید، که حتی به ذهن ابداع‌کننده‌های آن رشته هم نمی‌رسید. به‌عنوان مثال:

ـ حدود ۲۰۰ سال قبل از میلاد مسیح (ع)، آپولونیوس ریاضی‌دان یونانی، اوّلین مقاله دربارهٔ مقاطع مخروطی را نوشت که در سال ۱۶۰۴ کپلر Kepler (۱۵۷۱ـ۱۶۳۰) ستاره‌شناس آلمانی با استفاده از آن آینه‌های خاصی طراحی نمود که به آینه‌های سهموی معروفند. در سال ۱۶۰۹ نظریه حرکت خورشید مرکزی را در مقابل نظریهٔ بطلمیوس که زمین مرکزی بود (بطلمیوس زمین را مرکز جهان می‌دانست)، ارائه داد. کوپرنیک (۱۴۷۳ـ۱۵۴۳) ستاره‌شناس آلمانی و گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) نیز در مورد فرضیهٔ خورشید مرکزی کار کرده‌اند که داستان گالیله در این مورد مشهور است.

ـ نظریهٔ اعداد، مبنای ساخت ماشین حساب و سپس کامپیوتر گردید.

ـ عددهای مختلط، در مهندسی برق و در فیزیک، کاربرد فراوان پیدا کردند.

ـ نظریهٔ گروهها، در کریستالوگرافی (بلورشناسی) و گروه‌های «لی» منسوب به سوفوس‌لی Sophus Lie (۱۸۴۲ـ ۱۸۹۸) ریاضی‌دان نروژی، در مکانیک کوانتم از مهمترین ابزارند.

ـ ماتریسها، در مکانیک کوانتم، در حل اکثر معادلات دیفرانسیل و در رشته‌های مختلف مهندسی، در برنامه‌ریزی خطی و... کاربرد دارند. هایزنبرگ Heisenberg استاد کرسی تدریس فیزیک ریاضی، نخستین کسی بود که در فیزیک از ماتریس استفاده نمود و گفت که این تنها ابزاری است که من در مکانیک کوانتم بدان نیاز دارم.

ـ در معماری و مهندسی برای اندازه‌گیری فاصله‌های معمولی که زیاد بزرگ نیستند، هندسهٔ اقلیدسی مفید و مناسب است، ولی هنگامی که با فاصله‌های بسیار بزرگ سر و کار پیدا می‌کنیم، هندسه‌های نااقلیدسی کارسازترند. نظریهٔ عمومی نسبی اینشتین کوشش در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی ریمان را برانگیخت. چنان که اینشتین خود می‌گوید، من برای این هندسه ارزش زیادی قائلم؛ زیرا که اگر با آن آشنا نبودم هرگز قادر به بسط نگرهٔ نسبیت نمی‌شدم.

هیلبرت، هنگام دفاع از تز دکترای خود در سال ۱۸۸۵ می‌گوید «درحال حاضر هیچ استفاده‌ای از هندسه‌های غیراقلیدسی نمی‌توان کرد، ولی من حدس می‌زنم که بشر باید روزی

انرژی را که در عالم طبیعت هست، وارد قضیه‌های هندسی کند و به‌عنوان یک قسمت از هندسه مورد بحث قرار دهد و در آن صورت هندسه‌های غیراقلیدسی به کار بشر می‌آیند نه هندسهٔ اقلیدسی».

هندسه نه‌تنها مدلهایی از فضاهای فیزیکی را می‌سازد، بلکه برای هر سازمانی که مفهومها و خاصیتهای آن، قالب هندسی داشته باشند، مدل تهیه می‌کند. قرن حاضر شاهد به حقیقت پیوستن این ادعای دکارت است که می‌گفت «فیزیک را می‌توان هندسی ساخت».

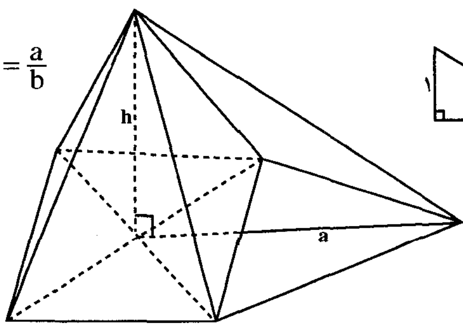
در نظریهٔ نسبیت که یکی از دو پیشرفت عمدهٔ علمی قرن حاضر است (دومی نظریهٔ کوانتم می‌باشد)، اثر جاذبه‌ای مادّه وزنی به‌صورت هندسی خلاصه شده است. همان‌طوری که در هندسهٔ ناحیهٔ کوهستانی فرمولی برای تعیین فاصله لازم است که از یک مکان به مکان دیگر تغییر کند تا شکل زمین را نشان دهد، هندسهٔ اینشتین فرمول فاصلهٔ متغیری دارد که نمایندهٔ جرمهای مختلف در فضاست. مادّه، هندسه را مشخص می‌سازد و هندسه، نتیجهٔ پدیده‌هایی را که قبلاً به‌عنوان جاذبه بیان می‌شد، دربر می‌گیرد.

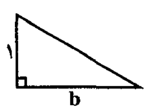
هندسه با اشیا و پدیده‌های جهان اطراف ما نیز رابطه‌ای تنگاتنگ دارد، که بسیاری از این ارتباط بی‌خبرند و نمی‌دانند که چگونه می‌توان از هندسه در عمل استفاده نمود. محاسبهٔ ارتفاع یک درخت، ارتفاع یک ساختمان، عرض یک رودخانه، حجم و وزن یک قطعه از یک درخت و... همگی با استفاده از هندسه به آسانی امکان‌پذیر است.

تالس با استفاده از خاصیت خطهای متناسب، یا تشابه که خود از آن اطلاع داشت توانست ارتفاع اهرام بزرگ مصر را که تا آن زمان کسی نتوانسته بود محاسبه کند، در حضور فرعون مصر و کاهنان مصری که با تعجب او را می‌نگریستند به‌دست آورد.

اگر ارتفاع هرم را h و طول سایه آن را a اختیار کنیم و اندازهٔ سایهٔ چوبی به طول ۱ متر را که به‌طور قائم در زمین نصب شده است مساوی b بگیریم، ارتفاع هرم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{h}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow h = \frac{a}{b}$$



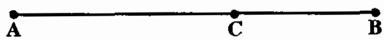


گفته می‌شود که تالس روز و ساعتی را در نظر گرفته بود که اندازهٔ سایه چوب با طول چوب برابر باشد، یعنی $b = 1$، در این‌صورت ارتفاع هرم مساوی سایه آن خواهد بود $(h = a)$، که با اندازه‌گیری سایهٔ هرم، بسهولت ارتفاع هرم به‌دست می‌آید.

جلوه‌های دیگری از مفهومهای هندسی وجود دارند که اغلب در طبیعت و در ساخته‌های دست بشر به آن برمی‌خوریم. از آن جمله است نسبت طلایی یا «تقسیم به نسبت ذات وسط و طرفین».

تعریف نسبت طلایی. هرگاه نقطه‌ای مانند C روی پاره‌خط AB چنان اختیار کنیم که پاره‌خط بزرگتر ایجاد شده روی آن مثلاً پاره‌خط AC واسطهٔ هندسی بین آن پاره‌خط و قطعهٔ کوچکتر باشد، یعنی : $AC^۲ = AB.BC$ ، در این صورت گفته می‌شود که نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت طلایی تقسیم کرده است. اگر $AB = a$ فرض شود، اندازهٔ پاره‌خط AC برحسب a برابر است با : $AC = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a$ ، زیرا داریم :

$$AB = a \text{ و } AC = x \Rightarrow BC = a - x$$

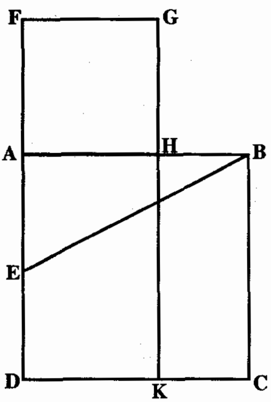


$$AC^۲ = AB.BC \Rightarrow x^۲ = a(a-x) \Rightarrow x^۲ + ax - a^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{۵a^۲}}{۲} = a \times \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

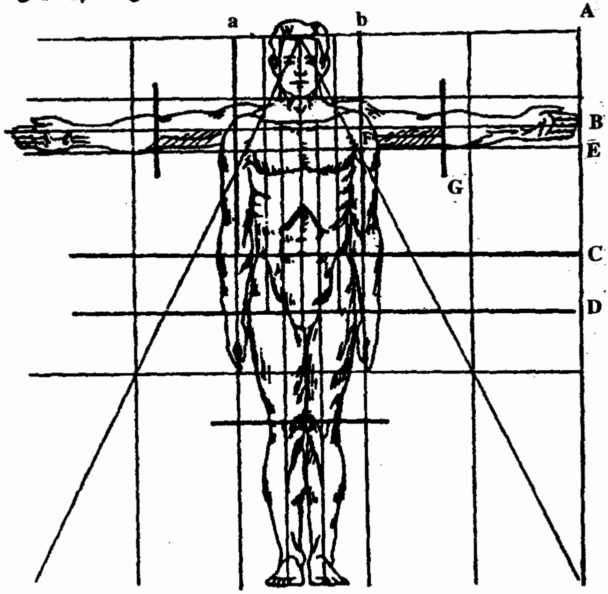
عدد $۱/۶۱۸۰ = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ را عدد طلایی می نامند.



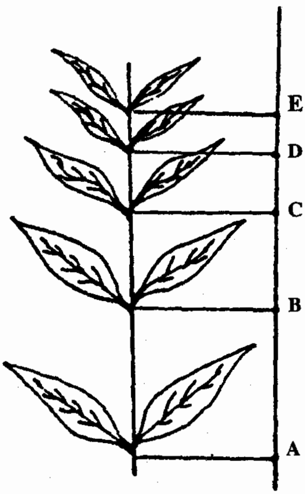
اصل این مسأله، یعنی تقسیم یک پاره‌خط به نسبت طلایی، از اقلیدس است (برخی تکمیل این مسأله را به ائودوکس نسبت می‌دهند). اقلیدس این مسأله را به روش هندسی به‌صورت زیر حل نمود :

پاره‌خط AB را درنظر می‌گیریم و روی آن مربع ABCD را می‌سازیم. از نقطهٔ E وسط ضلع AD به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. سپس EA را از طرف A به اندازهٔ EF=EB امتداد می‌دهیم. روی AF مربع AFGH را بنا می‌کنیم و GH را امتداد می‌دهیم تا CD را در نقطهٔ K قطع کند. من حکم می‌کنم که AB در نقطهٔ H طوری تقسیم شده است که مستطیل حاصل از AB و BH برابر است با مربعی که روی AH ساخته می‌شود (یعنی $AH^۲ = AB.BH$).

براساس بررسی و محاسبه، مشخص گردیده است که ساختمان بدن آدمی چه در کل بدن و چه در بعضی قسمتهای جداگانهٔ آن مانند دست، سر، پا و حتی گوش و چشم، از نسبت طلایی پیروی می کنند.



در این شکل داریم: $\frac{AC}{CB}=\frac{CB}{AB}=\frac{AE}{AD}=\frac{ab}{bA}=\frac{bA}{aA}=\frac{FG}{GE}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$



طرز قرار گرفتن برگها روی ساقه‌های درختان، و شاخه‌های جداگانه روی ساقه، به نسبت طلایی است. در شکل، $AB^۲ = AC.BC$ و $BC^۲ = BD.CD$ و...

تقسیم طلایی به‌طور آگاهانه در ساختمانهای مذهبی و در مجسمه‌سازی مورد استفاده قرار گرفته است. بخصوص در یونان باستان ضمن ساختن بناهای تاریخی به تقسیم طلایی توجه داشته‌اند.

در قلمرو هنرهای مختلف نیز هندسه و نقشهای هندسی جایگاه خاصی دارند. هنرمندان ایرانی در هنرهای تزئینی مانند منبت کاری، معرق، خاتم‌سازی، گره چینی، کاشیکاری، بافت مسند و... با چیره‌دستی فراوان از شکلهای هندسی بهره گرفته، آثار هنری بسیار جالب و دلپذیری به‌وجود آورده‌اند.

در معماری سنتی ایران از هندسه به حد کمال برای ساختن تالارها، گنبدها، طاقها و قوسها و... استفاده شده است. آندره گدار Andre Godard باستان‌شناس فرانسوی که از سال ۱۳۰۸ عهده‌دار شغلهایی در باستان‌شناسی در ایران بوده است، کتاب «طاقهای ایرانی» را تألیف نموده است که در این کتاب مسأله مساحی و کاربرد مباحث هندسی و رعایت اصول و قراردادهای

محاسباتی مربوط به طاقها و قوسها در ایران را از زمان ساسانیان تاکنون بیان داشته است.

برای مفروش کردن کف سالنها از سه شکل هندسی : مثلث متساوی الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم، استفاده می‌کنند و در این مورد بخشی از هندسه به‌نام هندسه کف‌پوشها به وجود آمده است که خود بخش جالبی از هندسه است.

۴.۱. نقش هندسه در تقویت قوهٔ تفکر

حکیم عمر خیام در مقدمهٔ رسالهٔ «شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» می‌نویسد :

«این جزو از حکمت که آن را علوم ریاضی می‌نامند، آسانترین اجزای حکمت، هم در ادراک تصوری و هم در تصدیق، اما آن رشته که مربوط به عدد و حساب باشد خود واضح و آشکار است. اما بخش هندسیات نیز بر کسانی که دارای فطرت سلیم و رأی راست، و جودت حدس باشند، پنهان نباشد. و فایدت علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تند ـ کردن خاطر گردد و نیز نفس را عادت دهد تا از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد، اجتناب کند، و سبب این امر همانا سهولت براهین و نزدیک بودن مآخذ آن به ذهن و معاونت تخیل است با تعقل، و قلت مخالفت و هم، با عقل،...»

پروفسور جورج پولیا George Polya (۱۸۸۷ـ۱۹۸۵) ریاضی‌دان برجسته قرن حاضر و استاد مسلم روش تدریس ریاضی می‌گوید :

«اگر تعلیم و تربیت عمومی درصدد ارزانی داشتن اندیشهٔ نظام منطقی به دانشجویان است باید در آن، مقام خاصی برای استدلالهای هندسی درنظر گرفته شود. حتی استدلالهای ساده ممکن است از دیدگاه هوش‌افزایی، سودمند واقع شوند.»

ریاضیات محض و به‌خصوص هندسه در تقویت قوهٔ تفکر و شکوفایی استعدادها نقش مهمی به عهده دارد. ریاضیات محض با سبک و روش خاصی که در تجزیه و تحلیل قضیه‌ها و حکمها و استنتاج دارد چهارچوبی منطقی بین تعریفها، اصلها ، مفروضات و حکمها برقرار می‌سازد و این امکان را به وجود می‌آورد که ذهن و فکر، قوی‌تر و خلاق‌تر شوند. هندسه با دقت منطقی و قدرت استدلالهای قیاسی‌اش، علاوه بر تقویت قوهٔ تفکر، موجب می‌گردد تا بتوانیم درست را از نادرست تشخیص دهیم و مسیر حرکت خود در زمینه‌های مختلف کار و زندگی، صنعت و دانش را بهتر بشناسیم و کارها را براساس نظم و منطقی صحیح پایه‌گذاری کنیم ؛ زیرا جهان براساس نظم آفریده شده است، آن‌چنان نظمی که بشر تاکنون فقط گوشه‌هایی از آن را توانسته است کشف نماید و قوانین حاکم بر آن زوایا را روشن سازد. نیوتن در پایان عمر خویش می‌گوید : «من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم. اما به‌نظر خودم

چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه بیگاه سنگ‌ریزه‌ای صاف‌تر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر به‌دست می‌آورم. در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»

هندسه منشأ عمدهٔ ثروت و باروری مکاشفه است، که به نوبهٔ خود نیروی آفرینش ریاضیات می‌باشد. بسیاری از ریاضی‌دانان به‌صورت طرحهای هندسی فکر می‌کنند، حتی وقتی سازمان تحلیلی پیچیده‌ای ارائه شود، که هیچ اثر و نشانهٔ هندسی نداشته باشد.

بسیاری از ریاضی‌دانان و دانشمندان که به کشفیات بزرگی نایل شده‌اند و نظریه‌های آنان تحولی در جهان علم به‌وجود آورده است، از اثری که هندسه در آغاز کار در ذهن و اندیشهٔ آنان داشته و باعث شکوفایی استعدادهایشان و پیشرفت کارشان گردیده است، بخوبی یاد کرده‌اند.

۱.۵. چگونه مسألهٔ هندسه را حل کنیم؟

پروفسور جورج پولیا ریاضی‌دان نامدار متولد در بوداپست، بیش از ۲۵۰ مقاله و رساله دربارهٔ حساب احتمالات و آنالیز کومپلکس و مسأله‌های دیگر و نیز دربارهٔ اختراع ریاضی و روش تدریس ریاضیات دارد.

بهترین کتاب وی چگونه مسأله را حل کنیم How to Solve it است که تاکنون به ۱۵ زبان زندهٔ دنیا ترجمه شده است و در سال ۱۳۶۴ به‌وسیلهٔ آقای احمد آرام به فارسی ترجمه گردیده است. با وجود آن که این کتاب به نیازمندیهای استادان و دانشجویان ریاضیات توجه داشته است، ممکن است برای هر کسی که علاقه‌مند به راه‌های اختراع و اکتشاف باشد سودمند و برانگیزانندهٔ شوق و علاقه باشد.

پروفسور پولیا را مؤسس و پدر تأکید جدید دربارهٔ امر حل کردن مسأله خوانده‌اند. وی مسأله‌ها را به دو دستهٔ عمده: «مسأله‌های ثابت کردنی» و «مسأله‌های یافتنی» تقسیم می‌کند. به‌نظر پروفسور پولیا: بخشهای اساسی یک مسألهٔ ثابت کردنی عبارت است از «فرض» و «نتیجه» و بخشهای اساسی یک مسألهٔ یافتنی عبارت است از «مجهول»، «داده‌ها» و «شرط». هدف یک مسأله ثابت کردنی اثبات قطعی یک ادعا یا اثبات قطعی عدم صحت آن است و هدف یک مسألهٔ یافتنی به‌دست آوردن چیزی است که، همان مجهول مسأله است. مسألهٔ یافتنی ممکن است نظری یا عملی، مجرد یا مجسم، جدی یا فقط معمایی باشد. مسأله‌های عملی از جهات مختلف با مسأله‌های ریاضیات محض تفاوت دارند، اما روشهای حل آنها اساساً همان راه‌حل مسأله‌های یافتنی است، مانند مسأله‌های عملی مهندسی، که مستلزم حل مسأله‌های ریاضی است.

پروفسور پولیا برای حل کردن یک مسأله چهار مرحله را پیشنهاد می‌کند:

اول. فهمیدن مسأله است: اوّل باید مسأله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام است؟ شرط چیست؟ آیا شرط مسأله می‌تواند تحقق یابد؟ آیا شرط مسأله برای تعیین مجهول کافی است؟ یا کافی نیست؟ یا زاید است؟ و یا متناقض است؟ شکلی رسم کنید، علامتهای مناسب را به‌کار برید. قسمتهای مختلف شرط را از هم جدا کنید. آیا می‌توانید آنها را بر روی کاغذ بیاورید؟

دوم. طرح نقشه: ارتباط میان داده‌ها و مجهول را پیدا کنید. ممکن است در صورت یافت نشدن ارتباط مستقیمی بین آنها مجبور شوید که مسأله‌های کمکی در نظر بگیرید. باید سرانجام یک نقشه برای حل مسأله طرح کنید. آیا پیشتر، آن را دیده بودید؟ آیا همین مسأله را به‌صورت دیگر دیده‌اید؟ آیا از مسأله‌ای وابسته به آن آگاهی دارید؟ آیا از قضیه‌ای که بتواند سودمند واقع شود آگاهی دارید؟

به مجهول نگاه کنید و بکوشید تا دربارهٔ مسأله‌ای بیندیشید که همین مجهول یا شبیه آن را داشته باشید. در اینجا مسأله‌ای وابسته به مسألهٔ شما وجود دارد که پیشتر حل شده است؟ آیا می‌توانید روش آن را به‌کار برید؟ آیا می‌توانید صورت مسأله را دوباره بیان کنید؟ آیا می‌توانید آن را به‌صورتی دیگر بیان کنید؟ به تعریفها رجوع کنید.

اگر نمی‌توانید مسألهٔ طرح شده را حل کنید، نخست به حل کردن مسأله‌ای وابسته به آن بپردازید. آیا می‌توانید مسألهٔ وابسته‌ای که بیشتر در دسترس باشد، تخیل کنید؟ یا یک مسألهٔ کلی‌تر؟ یا یک مسألهٔ خاص‌تر؟ یا یک مسألهٔ مشابه؟ آیا می‌توانید یک قسمت از مسأله را حل کنید؟ تنها یک جزء از شرط را نگاهدارید و باقی آن را کنار بگذارید. در این صورت مجهول تا چه اندازه معلوم می‌شود و چگونه تغییر می‌کند؟ آیا می‌توانید از داده‌ها چیز سودمندی استخراج کنید؟ آیا داده‌های دیگری به فکر شما خطور می‌کند که بتواند برای به‌دست آوردن مجهول سودمند باشد؟ آیا می‌توانید مجهول یا داده‌ها، یا در صورت لزوم هر دو را چنان تغییر دهید که مجهول تازه و داده‌های تازه به یکدیگر نزدیک باشند؟ آیا همهٔ داده‌ها را به‌کار برده‌اید؟ آیا همهٔ شرط را به‌کار برده‌اید؟ آیا همهٔ مفاهیم اصلی مندرج در مسأله را به‌کار برده‌اید؟

سوم. اجرای نقشه: در ضمن اجرای نقشهٔ حل مسأله، هر گام را که برمی‌دارید وارسی و امتحان کنید. آیا می‌توانید آشکارا ببینید که گام برداشته شده، درست بوده است؟ آیا می‌توانید درست بودن آن را ثابت کنید؟

چهارم. امتحان کردن جوابی که به‌دست آمده: آیا می‌توانید نتیجه را وارسی کنید؟ آیا می‌توانید نتیجه را از راه دیگری به‌دست آورید؟ آیا می‌توانید نتیجه یا روش را در مسأله دیگری به‌کار برید؟

برای حل مسأله‌های هندسه باید مرحله‌های چهارگانهٔ بالا را انجام دهید ضمن آن که توجه به نکات زیر نیز ضروری است :

الف ـ تعریفها را باید به‌طور صحیح به‌کار برید. به گفتهٔ پاسکال : هر تعریف را به‌جای چیزی که تعریف شده است، قرار دهید.

ب ـ کشیدن شکل در حل مسأله‌های هندسه از اهمیت زیادی برخوردار است. اگر برای حل یک مسألهٔ هندسی می‌خواهید شکلی رسم کنید باید به نکات زیر توجه داشته باشید :

۱. آیا چنین شکلی می‌تواند وجود داشته باشد؟

۲. آیا شکلی که رسم کرده‌اید به حد کافی دقیق است؟

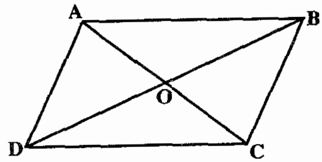
۳. از کشیدن شکل در حالت خاص که در مسأله قید نشده است جداً خودداری کنید.

ج ـ هرگاه شکل مسأله رسم شده باشد و با استفاده از آن نتوانید مسأله را حل کنید باید تغییرات مناسب لازم را در آن شکل ایجاد کنید.

نمونه‌هایی از مسأله‌های ثابت کردنی و یافتنی:

مسألهٔ ثابت کردنی: قطرهای هر متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند.

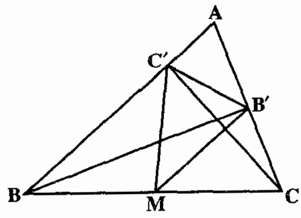
فرض: چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



نتیجه: قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند.

مسألهٔ ثابت کردنی: نقطهٔ M وسط ضلع BC از مثلث ABC را به نقطه‌های B' و C' پای ارتفاعهای رأسهای B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید $MB' = MC'$.

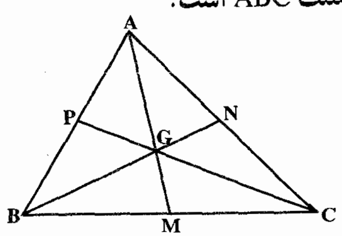
فرض: $MB = MC$ ، $BB' \perp AC$ و $B' \in AC$ و $CC' \perp AB$ و $C' \in AB$.



نتیجه: $MB' = MC'$.

مسألهٔ ثابت کردنی: ثابت کنید که اگر G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، سه مثلث GAB و GAC و GBC معادل یکدیگرند.

فرض: نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است.

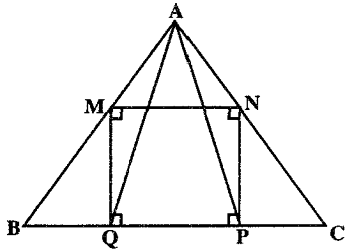


نتیجه: $S_{\Delta GAB} = S_{\Delta GAC} = S_{\Delta GBC}$

مسألهٔ یافتنی: مربعی را در مثلثی متساوی‌الاضلاع چنان محاط کنید که یک ضلع آن روی یکی از ضلعهای مثلث، و دو رأس دیگرش روی دو ضلع دیگر مثلث باشند.

مجهول: یک مربع است.

شرط: یک ضلع مربع روی یک ضلع مثلث و دو رأس دیگر روی دو ضلع دیگر مثلث باشند.



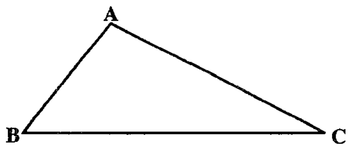
داده‌ها: یک مثلث متساوی الاضلاع است.

مسألهٔ یافتنی: مثلثی رسم کنید که اندازهٔ ضلعهایش عددهای ۳ و ۴ و ۶ باشند.

مجهول: یک مثلث است.

داده‌ها: طولهای ۳ و ۴ و ۶.

شرط: مثلث حاصل، شرط داشتن ضلعهایی به طولهای ۳ و ۴ و ۶ را تأمین کند.



بخش ۲

• نقطه، خط، زاویه

۲ . ۱ . تعریف و قضیه

۲.۲. نقطه

۲.۳. پاره خط، خط

۲.۳.۱. تعداد پاره‌خطها، تعداد خطها

۲.۳.۲. اندازهٔ پاره خط

۲.۳.۳. نابرابری پاره‌خطها

۲.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۴. زاویه

۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۲. نقطه، خط، زاویه

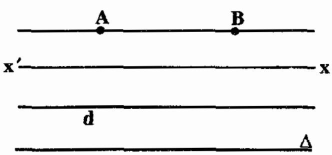
۱.۲. تعریف و قضیه

تعریف. یعنی شناساندن، برای شناساندن یک چیز (مثل یک شکل) صفتهای مشخص کنندهٔ آن را بیان می‌کنیم.

تعریف خوب و درست آن است که از توضیح اضافی بی‌نیاز باشد، و حذف هیچ جزیی از آن ممکن نباشد. به عبارت دیگر، تعریف باید جامع و مانع باشد.

تعریف نشده‌ها. آنچه را با درک و تصور کردن، و یا از طریق مشاهده شناخته، بدون تعریف می‌پذیریم. یک مفهوم تعریف نشده یا یک مفهوم نخستین می‌نامیم ؛ مانند : نقطه، خط، صفحه، فضا، شکل، مجموعه و ...

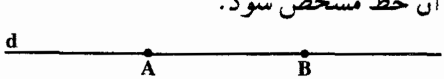
نقطه. از مفاهیم تعریف نشده است. نقطه را معمولاً با یک حرف نشان می‌دهند ؛ مانند نقطهٔ A ، نقطهٔ B ، نقطهٔ M ، نقطهٔ L ، ...



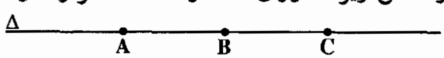
خط راست. از مفاهیم اوّلیه یا تعریف نشده است. خط با دو حرف دلخواه از آن و گاهی با یک حرف نمایش داده می‌شود، مانند خط AB، خط x′x ، خط d ، خط Δ ، ...

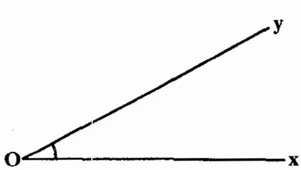
نیمخط راست. مجموعه‌ای از نقطه‌های یک خط راست است که در یک طرف نقطه ثابتی از آن خط راست قرار دارند. این نقطه ثابت را مبدأ نیمخط می‌نامند. مانند نیمخط Ox .

پاره خط راست. بخشی از یک خط راست است که از دو طرف به دو نقطه محدود باشد. مانند پاره خط راست AB. در این مجموعه، خط راست، نیمخط راست و پاره خط راست را بترتیب ؛ خط، نیمخط و پاره خط می‌نامیم. و به طور کلی مراد از خط، خط راست است. مگر آن که، نوع آن خط مشخص شود.



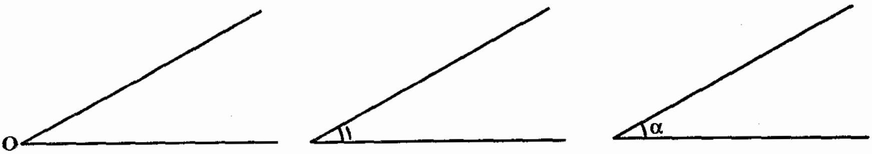
نقطه‌های همخط. نقطه‌هایی هستند که روی یک خط راست قرار داشته باشند. مانند نقطه‌های A، B و C در شکل زیر که روی خط راست Δ قرار دارند.





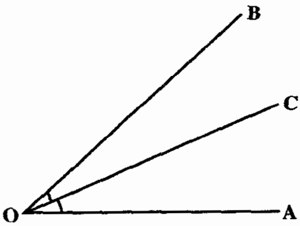
زاویه. شکلی است که از دو نیمخط با مبدأ مشترک پدید می‌آید. مبدأ مشترک، رأس زاویه، و هر یک از دو نیمخط، یک ضلع زاویه نامیده می‌شوند ؛ مانند زاویهٔ xOy. گاهی زاویه را فقط با یک حرف

که رأس آن را مشخص می‌کند، نمایش می‌دهند؛ مانند زاویهٔ O (یا $\angle O$) و گاهی هم از یک حرف یا یک عدد که در مجاورت رأس و بین دو ضلع نوشته می‌شود، استفاده می‌شود، مانند زاویهٔ α ($\angle\alpha$) یا زاویه ۱ ($\angle ۱$).

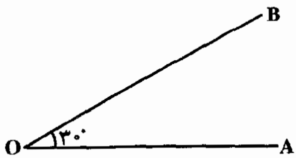


زاویهٔ نیمصفحه. زاویه‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند. مانند زاویهٔ xOy.

نیمساز زاویه. نیمخطی است که مبدأ آن رأس زاویه است و زاویه را به دو زاویهٔ مساوی (همنهشت) تقسیم می‌کند. مانند نیمخط OC که نیمساز زاویهٔ AOB است.



اندازهٔ زاویه. نسبت آن زاویه است به زاویه‌ای که به عنوان واحد زاویه اختیارشده است.



واحد اندازه‌گیری زاویه. واحدی است که به کمک آن می‌توان اندازهٔ زاویه‌ها را تعیین کرد.

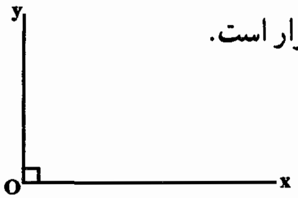
یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه، درجه است که $\frac{1}{180}$ زاویهٔ نیمصفحه است. علامت درجه (°) است؛ بنابراین: $180^\circ =$ زاویهٔ نیمصفحه.

اجزای درجه، دقیقه با علامت (′) و ثانیه با علامت (″) است که $1' = (\frac{1}{60})^\circ$ و $1'' = (\frac{1}{60})'$ است. از دیگر واحدهای اندازه‌گیری زاویه، گراد است و آن $\frac{1}{200}$ زاویهٔ نیمصفحه است. اجزای گراد، عددهای اعشاری هستند. $\frac{1}{10}$ گراد را دسی‌گراد، $\frac{1}{100}$ گراد را سانتی‌گراد و $\frac{1}{1000}$ گراد را میلی‌گراد می‌نامند.

یکی دیگر از واحدهای اندازه‌گیری زاویه، رادیان است که $\frac{1}{\pi}$ زاویهٔ نیمصفحه است.

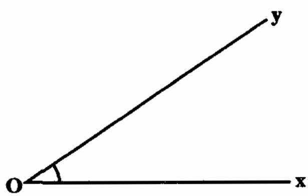
اجزای رادیان عددهای اعشاری می‌باشند.

اگر اندازهٔ یک زاویه را بر حسب درجه با D، بر حسب گراد با G و بر حسب رادیان با R نمایش دهیم، بین D و G و R رابطهٔ $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{R}{\pi}$ برقرار است.

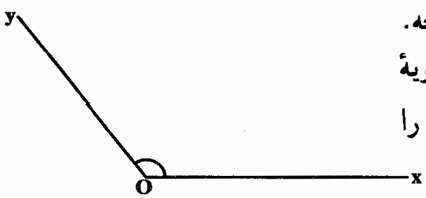


زاویهٔ قائمه. نصف زاویهٔ نیمصفحه است.

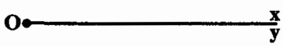
اندازه زاویهٔ قائمه برابر ۹۰ درجه، ۱۰۰ گراد و یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان است. زاویهٔ قائمه را زاویهٔ راست نیز می‌نامند.



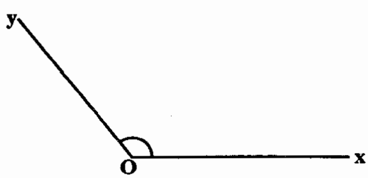
زاویهٔ حاده (زاویهٔ تند). زاویه‌ای است که از زاویهٔ قائمه کوچکتر است. اندازهٔ زاویهٔ حاده، بین صفر و ۹۰ درجه است، مانند زاویهٔ xOy.



زاویهٔ منفرجه (زاویهٔ باز). زاویه‌ای است بزرگتر از زاویهٔ قائمه و کوچکتر از زاویهٔ نیمصفحه. مانند زاویهٔ منفرجهٔ xOy در شکل. اندازهٔ زاویهٔ منفرجه بین 90° و 180° است. زاویهٔ منفرجه را زاویهٔ باز نیز می‌نامند.

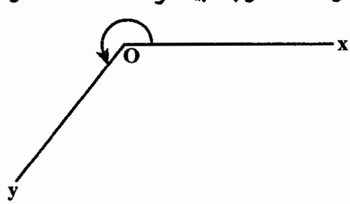


زاویهٔ صفر. زاویه‌ای است که دو ضلع آن بر هم منطبقند.

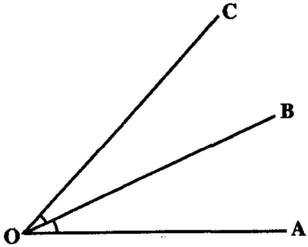


زاویهٔ کوژ (محدب). زاویه‌ای است که از زاویهٔ نیمصفحه کوچکتر است. به بیان دیگر زاویه‌ای است که اندازهٔ آن از 180° درجه کمتر است، مانند زاویهٔ xOy.

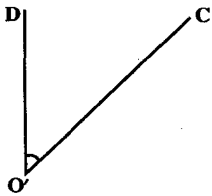
زاویهٔ کاو (مقعر). زاویه‌ای است که از زاویهٔ نیمصفحه بزرگتر است. به بیان دیگر، زاویه‌ای است که اندازهٔ آن از 180° درجه بیشتر است، مانند زاویهٔ xOy.

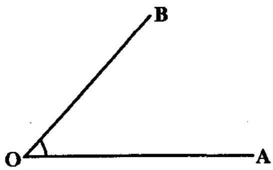


دو زاویهٔ مجاور. دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیرمشترک آنها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد مانند دو زاویهٔ AOB و BOC .



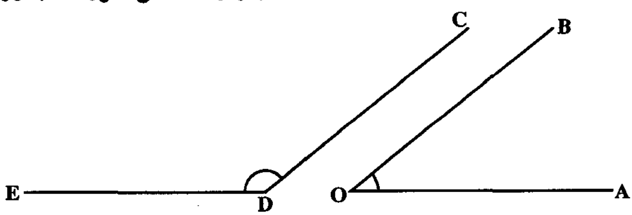
دو زاویهٔ متمم. دو زاویه‌ای هستند که مجموع آنها یک زاویهٔ قائمه است ؛ به بیان دیگر، دو زاویه که مجموع اندازه‌های آنها برابر ۹۰° درجه باشد، دو زاویهٔ متمم نامیده می‌شوند، مانند دو زاویهٔ ۳۰° و ۶۰° که ۹۰° = ۶۰° + ۳۰° ؛ و یا دو زاویهٔ ۱۵° و ۷۵° که ۹۰° = ۷۵° + ۱۵° است. در حالت کلی دو زاویهٔ α° و $(۹۰-\alpha)^\circ$ متمم یکدیگرند. دو زاویهٔ متمم لزوماً مجاور نیستند، مانند دو زاویهٔ متمم AOB و COD در شکل.





دو زاویهٔ مکمل. دو زاویه هستند که مجموع آنها یک زاویهٔ نیمصفحه است ؛ به بیان دیگر، دو زاویه که مجموع اندازه‌های آنها برابر ۱۸۰° است دو زاویهٔ مکمل نام دارند، مانند دو زاویهٔ ۶۰° و ۱۲۰° و یا ۱۵° و ۱۶۵° ، و یا ۱۰° و ۱۷۰°.

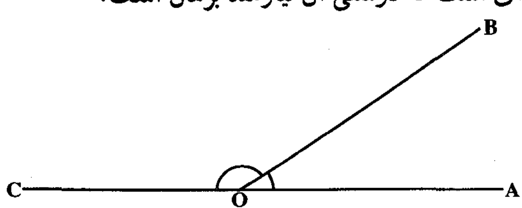
مکمل زاویهٔ α° ، زاویهٔ $(۱۸۰-\alpha)^\circ$ است. دو زاویهٔ مکمل، لزوماً مجاور نیستند.



نکته. اگر دو زاویه مساوی باشند، مکملهای آنها نیز با یکدیگر مساویند.

دو زاویهٔ مجانب. دو زاویه‌ای هستند که مجاور و مکملند. به بیان دیگر، دو زاویهٔ مجاور که ضلعهای غیر مشترکشان بر یک امتداد باشند، دو زاویهٔ مجانب نامیده می‌شوند مانند دو زاویهٔ AOB و COD.

قضیه. گزاره‌ای است که درستی آن نیازمند برهان است.



هر قضیه شامل دو قسمت است :

قسمت اوّل. فرض قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها را قبول داریم.

قسمت دوم. حکم یا نتیجهٔ قضیه، گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها را می‌خواهیم ثابت کنیم.

عکس قضیه. گزاره‌هایی است که از عوض کردن جای فرض و نتیجه، یا قسمتی از فرض و نتیجه (در مواردی که فرض و یا نتیجه چند قسمتی هستند) یک قضیه، به دست می‌آید.

به مثال زیر توجه کنید :

قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ وتر، مساوی مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه است.

عکس قضیه. اگر مربع اندازهٔ یک ضلع مثلثی، برابر مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

نکته. باید توجه داشت که عکس یک قضیه، ممکن است درست نباشد.

مثال :

قضیه. هر دو زاویهٔ قائمه با هم برابرند.

عکس قضیه. هر دو زاویه برابر قائمه هستند.

واضح است که عکس این قضیه همواره درست نیست.

قضیه دو شرطی. اگر عکس یک قضیهٔ شرطی، خود یک قضیهٔ شرطی باشد، آن گاه این دو قضیهٔ شرطی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیهٔ دو شرطی نامیده می‌شود و برای بیان آن، جمله شرط لازم و کافی را به کار می‌بریم.

مثال. اگر در قضیهٔ فیثاغورس، فرض قضیه، یعنی : «مثلث قائم‌الزاویه است» را با p و حکم قضیه یعنی «مربع اندازهٔ وتر برابر مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر است» را با q نشان دهیم، آن گاه با این نمادگذاری قضیه فیثاغورس به صورت $p \Rightarrow q$ و عکس آن به صورت $q \Rightarrow p$ نمایش داده می‌شود. چون قضیهٔ فیثاغورس و عکس آن هر دو درستند، با استفاده از نمادگذاری بالا داریم $p \Leftrightarrow q$ ؛ و می گوییم P هم ارز (معادل) q است.

یا : p اگر و تنها اگر q

یا : p شرط لازم و کافی برای q است.

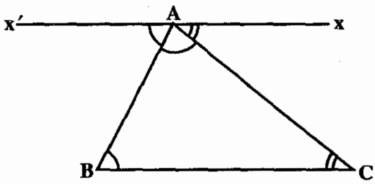
مثال : مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر، مربع اندازهٔ وتر برابر مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد.

یا : شرط لازم و کافی برای آن که مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آن است که مربع اندازهٔ وتر آن، مساوی مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگرش باشد.

برای اثبات قضیهٔ دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ باید قضیه‌های شرطی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را ثابت کرد.

اثبات قضیه. عبارت است از ارائه دلیل برای درستی یک حکم، بر اساس مفاهیم تعریف نشده، تعریفها، اصول و قضیه‌هایی که درستی آنها را قبلاً پذیرفته‌ایم.

استدلال استقرایی. روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهده‌هاست. به عنوان مثال با اندازه‌گیری زاویه‌های درونی چند مثلث و پیدا کردن مجموع آنها، یا بریدن زاویه‌ها و قرار دادن آنها در مجاورت یکدیگر، به این نتیجه برسیم که مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰ درجه است.

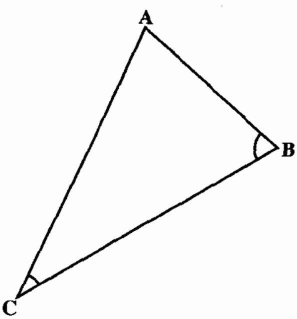


استدلال استنتاجی. روش نتیجه‌گیری کلی است با استفاده از حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم ؛ به عنوان مثال، با رسم کردن خطی از یک رأس مثلث به موازات ضلع روبه‌روی آن، و استفاده از برابری زاویه‌های متبادل به وجود آمده، و این حقیقت که اندازهٔ هر زاویهٔ نیمصفحه ۱۸۰ درجه است، ثابت کنیم که مجموع زاویه‌های درونی هر مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد.

برهان خلف. یا اثبات غیر مستقیم، روشی برای اثبات قضیه‌هاست. در این روش نادرست‌بودن نقیض حکم را ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ زیر به روش برهان خلف ثابت شده است :

قضیه. اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچکتر است.



یعنی در مثلث ABC، $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$.

برهان. اگر $AC > AB$ نباشد دو حالت وجود دارد :

۱) $AC > AB$ که در این صورت باید $\hat{B} < \hat{C}$ باشد، و این خلاف فرض است.

۲) $AC = AB$ که در این صورت باید $\hat{B} = \hat{C}$ باشد، و این نیز خلاف فرض است ؛ پس $AC > AB$ یعنی نتیجه یا حکم مسأله برقرار است.

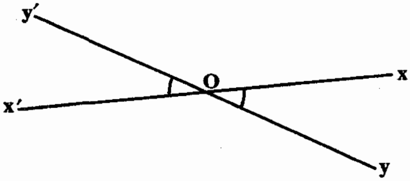
اصلها. حکمهایی که درستی آنها را بدون اثبات می‌پذیریم، اصول نامیده می‌شوند. برخی از این اصلها عبارتند از :

۱. هر دو نقطهٔ متمایز یک خط راست و تنها یک خط راست را مشخص می‌کنند.

۲. هر خط راست دست کم دارای دو نقطهٔ متمایز است. حداقل سه نقطه وجود دارد که بر یک خط راست واقع نیستند.

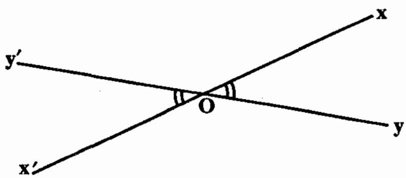
۳. بین هر دو نقطهٔ متمایز از یک خط راست می‌توان نقطه‌ای متمایز از آن دو نقطه بدست آورد.
۴. در هر صفحه دست‌کم سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست وجود دارد.
۵. بر هر سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست، تنها یک صفحه می‌گذرد.
۶. اگر دو نقطهٔ خطی، در صفحه‌ای باشند، تمام نقطه‌های آن خط در آن صفحه‌اند.
۷. فضا مجموعهٔ نامتناهی همهٔ نقطه‌هاست.
۸. دست‌کم چهار نقطهٔ غیر واقع بر یک صفحه وجود دارند.

دو زاویهٔ متقابل به رأس. دو زاویه‌اند که رأس مشترک دارند و ضلعهای آنها دوبه دو در امتداد یکدیگر و در دو جهت مختلف هستند، مانند زاویه‌های xOy و $x'Oy'$ در شکل.

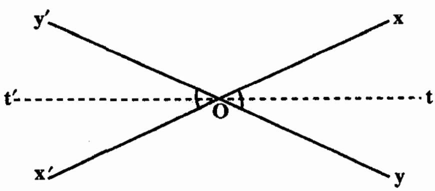


۱. **قضیه.** دو زاویهٔ متقابل به رأس متساویند.

۲. **قضیهٔ عکس.** اگر دو زاویهٔ متساوی رأس مشترک داشته، یک ضلع از یکی با یک ضلع از دیگری در امتداد یک خط راست و در دو جهت مخالف باشند، و دوضلع دیگرشان متمایز با آن خط‌راست ودردو طرف آن خط راست قرارداشته باشند، آن دو زاویه، متقابل به رأسند. (یعنی دو ضلع دیگرشان نیز یک خط راست می‌سازند.)



۳. **قضیه.** نیمسازهای دو زاویه متقابل به رأس بر یک خط راست واقعند.



۲.۲. نقطه

۴. مشخص کنید که ۱۰۰ خط متمایز در صفحه، دارای دقیقاً ۱۹۸۵ نقطهٔ برخورد متمایز هستند یا خیر؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۵

۵. فرض می‌کنیم پنج نقطه در یک صفحه طوری قرار داده شده‌اند که هیچ دو خط مستقیم واصل آنها، متوازی، عمود بر هم یا منطبق بر هم نیستند. از هر نقطه، عمودهایی به جمیع خطهای واصل چهار نقطهٔ دیگر رسم کرده‌ایم. بیشترین تعداد نقاط برخوردی را که این عمودها می‌توانند داشته باشند، معین کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۴

۶. روی خط راستی، ۵۰ پاره خط راست داده شده است. ثابت کنید، دست‌کم یکی از دو حکم زیر درست است:

الف) هشت پاره خط راست پیدا می‌شود که دارای نقطهٔ مشترکی هستند؛

ب) هشت پاره خط راست وجود دارد که هیچ دوتایی از آنها نقطهٔ مشترکی ندارند.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۲

۷. روی خط راستی، n^2+1 پاره‌خط قرار گرفته است $(n \in N)$. ثابت کنید، یا بین این پاره خطها می‌توان $n+1$ پاره خط غیرمتقاطع پیدا کرد و یا برای $n+1$ پاره خط، یک نقطهٔ مشترک وجود دارد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۹

۸. پاره خطهای راست، a_1، a_2، ...، a_{1977}، b_1، b_2، ...، b_{1977} روی یک خط راست واقعند. می‌دانیم، هر پاره خط راست a_k، با هر یک از پاره‌خطهای راست b_{k-1} و b_{k+1}، نقطهٔ مشترکی دارد. بجز این، a_{1977} و b_1 و همچنین، a_1 و b_{1977} هم دارای نقطهٔ مشترکند. ثابت کنید، به ازای هر k، پاره‌خطهای راست a_k و b_k دارای نقطهٔ مشترکند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

۹. روی خط راستی، چند مجموعه وجود دارد که، هر کدام از آنها، اجتماعی از دو پاره‌خط است. ثابت کنید، اگر هر سه مجموعه، از این مجموعه‌ها، نقطهٔ مشترکی داشته باشند، آن وقت، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست‌کم، متعلق به نیمی از همهٔ مجموعه‌هاست.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۳

۱۰. حداکثر چند نقطه می‌توان روی پاره خط راست به طول واحد قرار داد تا روی هر پاره خط راست به طول d واقع بر پاره‌خط اصلی، بیش از $1+100d^2$ نقطه وجود نداشته باشد؟

مسابقه‌های ریاضی سراسری، روسیه

۱۱. چند نقطه داده شده است که بعضی از آنها به وسیلهٔ پاره‌خطهای راستی به هم وصل شده‌اند؛ در ضمن، این پاره خطهای راست به گونه‌ای رسم شده‌اند که از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان از طریق آنها رفت. آیا همیشه می‌توان، یکی از نقطه‌ها را، همراه با پاره‌خطهای راستی که از آن خارج شده‌اند برداشت، به نحوی که باز هم نقطه‌های باقی مانده، از طریق پاره‌خطهای راست به هم مربوط باشند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۱۲. چند نقطهٔ قرمز و چند نقطهٔ آبی داده شده است. برخی از آنها را، با پاره‌خطهای راست به هم وصل کرده‌ایم. یک نقطه را در نظر می گیریم و در حالتی که بیش از نیمی از پاره‌خطهای راست متصل به آن، به نقطه‌هایی منتهی شده باشند که رنگی مخالف رنگ نقطهٔ مفروض دارند، نقطهٔ مفروض را «ویژه» می‌نامیم. تصمیم می گیریم، نقطه‌های «ویژه» را تغییر رنگ بدهیم: در هر گام، یکی از نقطه‌های ویژه را انتخاب می کنیم و رنگ آن را، به رنگ مخالف خود در می‌آوریم. ثابت کنید، بعد از چند گام، نقطهٔ «ویژه‌ای» باقی نمی‌ماند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۴

۱۳. n خط راست روی یک صفحه چنانند که، هیچ دوتایی با هم موازی نیستند و، هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرد. به ازای چه مقداری از n، می‌توان، در هر نقطهٔ برخورد خطهای راست، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n−۱ را طوری قرار داد که، روی هر خط راست، به همهٔ این عددها برخورد کنیم و از هر کدام تنها یکبار؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۱۴. خطهای $L_۱$، $L_۲$، ...، $L_{۱۰۰}$ از یکدیگر متمایزند. همهٔ خطهای $L_{۴n}$ با یکدیگر موازی و همهٔ خطهای $L_{۴n-۳}$ بر نقطهٔ مفروض A می‌گذرند و n عددی صحیح و مثبت است. ماکزیمم تعداد نقطه‌های برخورد تمام جفتهای مجموعهٔ $\{L_۱,L_۲,...,L_{۱۰۰}\}$ برابر است با:

الف) ۴۳۵۰ ب) ۴۳۵۱ ج) ۴۹۰۰

د) ۴۹۰۱ هـ) ۹۸۵۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۱۵. فرض کنیم n و k اعداد صحیح مثبت و S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد به طوری که:

الف) هیچ سه نقطهٔ S روی یک خط واقع نباشند.

ب) به ازای هر نقطه P در S حداقل K نقطه در S وجود داشته باشد که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند. ثابت کنید:

$$k < \frac{۱}{۲} + \sqrt{۲n}$$

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، آلمان، ۱۹۸۹

۳.۲. پاره خط، خط

۱.۳.۲. تعداد پاره‌خطها، تعداد خطها

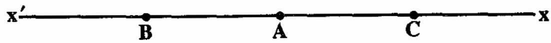
۱۶. چهار نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل می‌کنیم، چند پاره‌خط ایجاد می‌شود؟

۱۷. اگر ۷ نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم، تعداد پاره‌خطهای حاصل چه قدر است؟

۱۸. اگر n نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت را دو به دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط ایجاد می‌شود؟

۱۹. اگر ۲۰۰ نقطهٔ غیر واقع بر یک استقامت را دو به‌دو به هم وصل کنیم، چند پاره‌خط ایجاد می‌شود؟

۲۰. روی خط راست $x'x$ سه نقطهٔ متمایز A و B وC را در نظر می‌گیریم، تعداد پاره‌خطهای حاصل، چند است؟



۲۱. n نقطه را، به کمک پاره‌خطهای راست غیرمتقاطع، طوری به هم وصل کرده‌ایم که، از هر نقطه بتوان، از طریق این پاره‌خطها به بقیهٔ نقطه‌ها عبور کرد ؛ در ضمن دو نقطه‌ای پیدا نشود که با دو مسیر به هم وصل شده باشند. ثابت کنید، تعداد کل پاره‌خطهای راست، برابر است با $n-1$.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۱

۲۲. $n+4$ نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، چهار نقطه از آنها، در چهار رأس یک مربع و بقیهٔ نقطه‌ها در درون این مربع واقعند. این نقطه‌ها را، با این شرط، به‌وسیلهٔ پاره‌خطهای راستی به هم وصل کرده‌ایم که، اوّلاً، هیچ پاره‌خطی جز در دو انتهای خود، شامل این نقطه‌ها نباشد و ثانیاً، هیچ دو پاره‌خطی، به جز احتمالاً در یکی از دو انتهای خود، نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. حداکثر تعداد پاره‌خطهای راستی را که، به این ترتیب، می‌توان رسم کرد، پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۵

۲۳. ۱۲ نقطه که هیچ سه نقطه‌ای از آنها بر یک خط واقع نیستند، در یک صفحه داده شده‌اند. تعداد خطهایی که این نقطه‌ها مشخص می‌کنند برابر است با :

الف) ۲۴ ب) ۵۴ ج) ۱۲۰ د) ۶۶ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

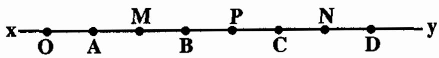
۲.۳.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۴. چهار نقطهٔ A، B، C و D با همین ترتیب روی خط راست xy واقعند. در صورتی که $AD = ۹$ و $BC = ۶$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

۱) $AB + CD$ ۲) طول پاره‌خط حاصل بین وسطهای AB و CD.

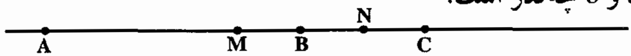
۲۵. سه نقطهٔ A، B و C روی خط راستی داده شده‌اند. با فرض این‌که نقطهٔ C خارج پاره‌خط AB و $AB = ۸$ و $BC = ۴$ و نقطه‌های M، N و P بترتیب وسطهای پاره‌خطهای AB، AC و BC باشند، ثابت کنید که وسط پاره‌خطهای MN و AP بر هم منطبق می‌باشند. سپس فاصلهٔ این نقطه تا نقطهٔ A را به‌دست آورید.

۲۶. پنج نقطهٔ O، A، B، C و D روی خط راست xy بترتیب از چپ به راست واقعند. اگر $OA = ۱$، $OB = ۳$، $OC = ۵$، $OD = ۷$ و نقطه‌های M و N بترتیب وسطهای دو پاره‌خط AB و CD و نقطهٔ P وسط پاره‌خط MN باشد، اندازهٔ OP را حساب کنید.

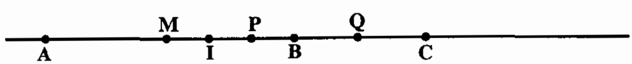


۲۷. نقطهٔ O را روی خط راستی اختیار نموده و روی این خط در یک طرف نقطهٔ O، پاره‌خطهای $OA = ۴$ و $OB = ۱۰$ را اختیار می‌کنیم. طول پاره‌خط AB و طول پاره‌خط OM (M وسط AB) را حساب کنید. همین مسأله را وقتی نقطه‌های A و B در دو طرف نقطهٔ O اختیار شوند، حل کنید.

۲۸. سه نقطهٔ A، B و C روی خط راستی چنان قرار دارند که AB=a و BC=b می‌باشد. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AC و نقطهٔ N وسط پاره خط BC باشد، طول پاره‌خط MN برحسب a و b چه‌قدر است؟

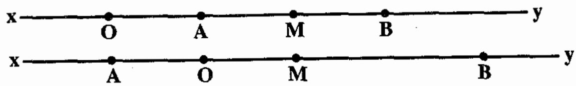


۲۹. سه نقطهٔ A، B و C بر خط راستی قرار دارند. نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB و نقطهٔ P وسط پاره‌خط AC و نقطهٔ Q وسط پاره‌خط BC می‌باشند. ثابت کنید نقطهٔ I وسط پاره‌خط PM بر وسط پاره‌خط AQ منطبق است. سپس AI را برحسب AB و AC حساب کنید.



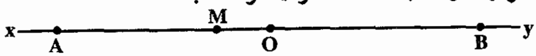
۳۰. سه نقطهٔ O، A و B را روی خط راست xy اختیار می‌کنیم. با فرض OA=a و OB=b طول پاره‌خط AB را برحسب a و b حساب کنید، و سپس فاصلهٔ نقطهٔ O تا نقطهٔ M وسط

پاره‌خط AB را به‌دست آورید. (دو حالت درنظر بگیرید.)



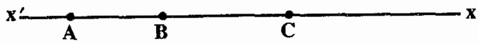
۳.۳.۲. نابرابری پاره‌خطها

۳۱. خط xy و دو نقطهٔ A و B روی آن داده شده‌اند. نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB است. ثابت کنید که همهٔ نقطه‌هایی مانند M که روی خط xy در یک طرف نقطهٔ O و در طرفی که نقطهٔ A واقع است، قرار دارند، به نقطهٔ A نزدیکترند تا به نقطهٔ B.



۳۲. سه نقطهٔ A و B و C با همین ترتیب روی خط راست xx' واقعند. نقطهٔ M را در چه قسمتی از خط xx' می‌توان اختیار نمود تا یکی از حالتهای زیر به‌وجود آید:

۱) $MB < MA$ ۲) $MB < MC$ ۳) $MB < MA$ ، $MB < MC$



۳۳. مجموعهٔ M، شامل k پاره‌خط راست دو به دو غیرمتقاطع و، واقع بر یک خط راست است. می‌دانیم، هر پاره‌خط راستی را که طولی بیشتر از واحد ندارد، می‌توان طوری روی خط راست قرار داد که دو انتهای آن متعلق به مجموعهٔ M باشد. ثابت کنیدمجموع طولهای پاره‌خطهای راستی که M را تشکیل داده‌اند، از $\frac{1}{k}$ کمتر نیست.

مسابقه‌های ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۸۳

۳۴. روی خط راست، ۴۵ نقطه را، در بیرون پاره‌خط راست AB نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطهٔ A، برابر با مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها تا نقطهٔ B نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۴.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۵. n نقطه متمایز غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کرده‌ایم. اگر تعداد پاره‌خطهای حاصل برابر ۳۰۰ باشد، n چه‌قدر است؟

۳۶. روی خط راستی، ۱۹۷۸ پاره‌خط راست داده شده است که، هیچ دو پاره‌خط راستی، در یکی از دو انتهای خود مشترک نیستند. ثابت کنید، این پاره‌خطهای راست را نمی‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر k از ۱ تا ۱۹۷۸، k امین پاره‌خط راست، درست شامل k انتها از دیگر پاره‌خطهای راست باشد.

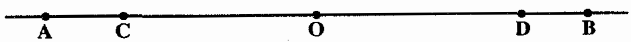
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۳۷. آیا ۷ نقطه را می‌توان روی صفحه طوری قرار داد، به نحوی که بین هر سه تا از آنها، دو نقطه به فاصلهٔ واحد وجود داشته باشد؟

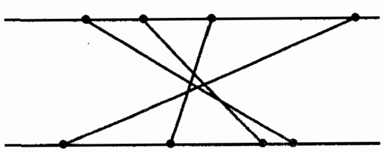
۳۸. مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر صفحه را در اختیار داریم. می‌توانیم، قرینهٔ هر نقطه را، نسبت به خط راستی پیدا کنیم که عمودمنصف پاره‌خط راستی باشد که دو انتهای آن، دو نقطه از این مجموعه است. اگر از سه نقطه‌ای آغاز کنیم که فاصلهٔ دو به دوی آنها، کمتر از واحد است، آیا می‌توان به مجموعه‌ای رسید که در آن، دو نقطه با فاصله‌ای بزرگتر از واحد وجود داشته باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۳۹. دو پاره‌خط AB و CD روی یک خط راست طوری قرار دارند که نقطهٔ O وسط هر دو پاره‌خط مزبور می‌باشد. اندازه‌های دو پاره‌خط AC و BD، همچنین اندازه‌های دو پاره‌خط AD و BC را با هم مقایسه کنید.



۴۰. روی صفحه، نواری داده شده است که دو مرز آن را، دو خط موازی با هم تشکیل می‌دهند. n خط راست، این نوار را قطع کرده است. هر دو خط راست، در درون نوار، یکدیگر را قطع می‌کنند و هیچ سه خط راستی در یک نقطه به هم نمی‌رسند. همهٔ مسیرهایی را درنظر می‌گیریم که، با آغاز از کنارهٔ پایین نوار و روی این خطهای راست، تا کنارهٔ بالای نوار امتداد دارند. این مسیرها، باید دارای این ویژگی باشند: ضمن عبور از مسیر، همیشه رو به بالا برویم؛ وقتی که به یک نقطهٔ برخورد می‌رسیم، باید روی خط راست دیگری حرکت کنیم (شکل) ثابت کنید، بین این مسیرها



a) دست‌کم $\frac{n}{۲}$ مسیر، بدون برخورد با یکدیگر وجود دارد؛

b) مسیری وجود دارد که شامل دست‌کم n پاره‌خط راست است؛

c) مسیری وجود دارد که شامل بیش از $\frac{n}{۲}+۱$ پاره‌خط راست نیست؛

d) مسیری وجود دارد که از طریق هر n خط راست می‌گذرد.

[در کلاس هشتم، بخشهای a، b و d برای حالت n = ۲۰؛ و برای کلاس نهم، بخشهای b، c و d در حالت کلی خواسته شده است.]

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۵

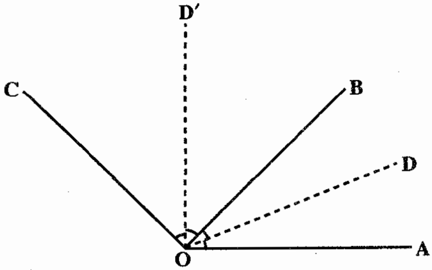
۴.۲. زاویه

۱.۴.۲. اندازهٔ زاویه

۴۱. در مدت یک ساعت و ۱۲ دقیقه، عقربهٔ دِقیقه‌شمار ساعت، چند درجه طی می کند؟
۴۲. در هریک از مدتهای : ۲۷ دقیقه، ۴۵ دقیقه و ۲ ساعت و ۱۷ دقیقه، عقربه دقیقه‌شمار ساعت، چند درجه طی می کند؟
۴۳. در مدت ۲ ساعت و ۲۴ دقیقه عقربهٔ ساعت‌شمار ساعت، چند درجه طی می کند؟
۴۴. زاویهٔ $۲۳^\circ, ۱۵'$ را به گراد تبدیل کنید.
۴۵. زاویهٔ ۵۳/۲۵ گراد را به درجه و اجزای آن تبدیل کنید.
۴۶. مطلوب است تعیین زاویه‌ای که اگر به عدد آن برحسب درجه ۵ واحد اضافه کنیم، عدد آن برحسب گراد، به‌دست می‌آید.
۴۷. مطلوب است تعیین زاویه‌ای که تفاضل عکس عددهای اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد، مساوی عدد اندازهٔ آن برحسب رادیان بخش‌بر ۲π باشد.
۴۸. زاویه‌ای برابر ۳۷ گراد است، متمم آن چند درجه است؟
۴۹. مجموع دو زاویه ۹۰° است، مجموع مکملهای آنها چند درجه است؟
۵۰. اگر $a = ۴۱/۴۵۶۷gr$ و $b = ۸۵/۰۱۲۳gr$ باشند، متمم و مکمل هریک از آنها چند گراد است؟
۵۱. اندازهٔ زاویهٔ حاده‌ای را به‌دست آورید که دو برابر اندازهٔ مکمل آن، ۲۴ واحد بیشتر از پنج برابر اندازهٔ متمم آن باشد.
۵۲. مجموع اندازه‌های یک زاویهٔ حاده و یک زاویهٔ منفرجه ۱۴۰° است. مجموع اندازه‌های دوبرابر مکمل زاویهٔ منفرجه و سه برابر متمم زاویهٔ حاده ۳۴۰° است. اندازهٔ این دو زاویه را به‌دست آورید.
۵۳. زاویه‌های $a = \frac{۱}{۲}$ ، $b = \frac{۱}{۳}$ ، $c = \frac{۱}{۵}$ و $d = \frac{۱}{۶}$ زاویهٔ قائمه داده شده‌اند. متمم و مکمل هریک از این زاویه‌ها را برحسب زاویهٔ قائمه تعیین کنید.
۵۴. ضلعهای غیرمشترک دو زاویهٔ مجاور، برهم عمودند. اگر یکی از آن دو زاویه برابر ۳۰ گراد باشد، زاویهٔ دیگر چند درجه است؟
۵۵. از چهار زاویهٔ مجاور a ، b ، c و d که حول نقطهٔ M تشکیل شده‌اند، زاویه‌های $a = ۵۸g$ و $b = ۸۷^\circ, ۳۰'$ و $c = \frac{۲\pi}{۳}$ رادیان می‌باشد. اندازهٔ زاویهٔ d را حساب کنید.

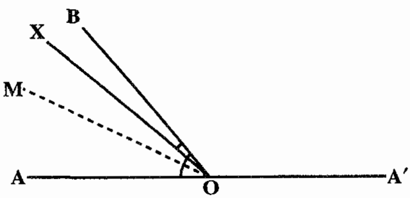
۵۶. از نقطه‌ای مانند M واقع در یک صفحه، ۱۲ نیمخط چنان رسم کرده‌ایم که ۱۲ زاویهٔ مساوی به‌دست آمده است. اندازهٔ هریک از این زاویه‌ها را برحسب درجه و گراد محاسبه کنید.

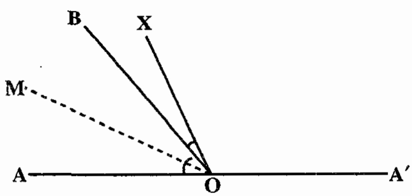
۵۷. دو زاویهٔ مجاور داده شده‌اند. ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ حاصل از نیمسازهای این دو زاویه، برابر نصف مجموع این دو زاویه است. سپس اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور و متمم، همچنین اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور و مکمل (مجانب) را به دست آورید.



۵۸. از نقطهٔ O واقع بر خط راست AA' و در یک طرف AA' دو نیمخط OB و OX را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم که اندازهٔ زاویه‌های $X\hat{O}A = a$ و $X\hat{O}B = b$ باشد.

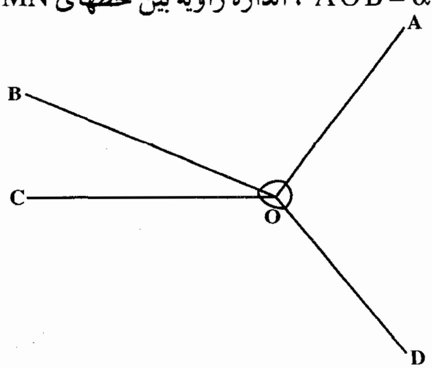
اندازهٔ زاویهٔ AOB و اندازهٔ زاویهٔ XOM را که از OX و OM (نیمساز زاویهٔ AOB) به وجود آمده است، حساب کنید. دوحالت درنظربگیرید یکی این‌که OX خارج زاویهٔ AOB باشدوحالت دیگر این که OX داخل زاویهٔ AOB باشد. فرض کنید $a > b$.



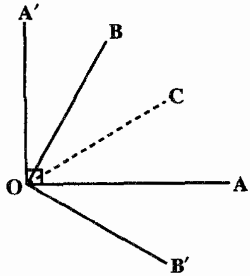


۵۹. دو نقطهٔ A و B و دو خط راست که در نقطهٔ O متقاطعند، در یک صفحه داده شده‌اند. پای عمودهای وارد بر خطهای مفروض، از نقطهٔ A را بترتیب با M و N و از نقطهٔ B را، بترتیب با K و L نشان می‌دهیم. اگر $A\hat{O}B = \alpha \le 90°$ ، اندازهٔ زاویهٔ بین خطهای MN و KL را پیدا کنید.

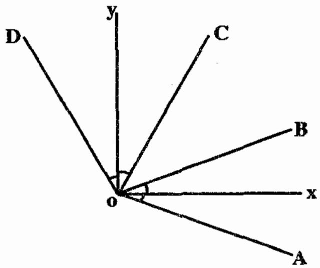
۶۰. چهار نیمخط با مبدأ مشترک واقع در یک صفحه، چهار زاویهٔ مجاور پدید آورده‌اند. نشان دهید که اگر این چهار زاویه متساوی نباشند، لااقل یک زاویهٔ حاده و لااقل یک زاویهٔ منفرجه دارند.



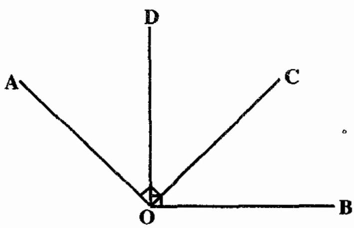
۲ . ۴ . ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۶۱. زاویهٔ AOB داده شده است. نیمخط ′OA را عمود بر OA و در همان طرفی که OB هست و نیمخط ′OB را عمود بر OB و در همان طرفی که OA هست، رسم می‌کنیم. ثابت کنید که زاویه‌های AOB و ′A′OB یک نیمساز دارند و این دو زاویه مکملند.



۶۲. زاویهٔ قائمهٔ xOy داده شده است. اگر Ox نیمساز زاویهٔ AOB وOy نیز نیمساز زاویهٔ COD باشد، ثابت کنید که زاویه‌های AOC و BOD مکملند.

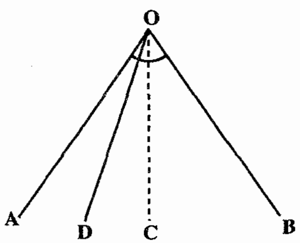


۶۳. زاویهٔ منفرجهٔ AOB را درنظر می‌گیریم و در داخل آن عمود OC را بر OA و عمود OD را بر OB اخراج می‌کنیم.

۱. ثابت کنید که زاویهٔ COD حاده است.

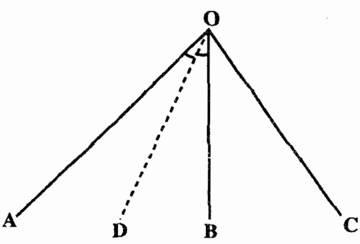
۲ . ثابت کنید زاویه‌های AOB و COD مکملند.

۶۴. آیا دوزاویهٔ ۱۷۶ گراد و ′۳۶ ,°۲۱ مکمل یکدیگرند؟



۶۵. زاویهٔ AOB را درنظر گرفته، نیمساز آن OC و همچنین نیمخط OD را در داخل این زاویه رسم می‌نماییم.

ثابت کنید $B\hat{O}D - A\hat{O}D = ۲C\hat{O}D$.



۶۶. دو زاویهٔ مجاور AOB و BOC را درنظر می‌گیریم. خط OD نیمساز زاویهٔ AOB را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

$$C\hat{O}D = \frac{C\hat{O}A + C\hat{O}B}{۲}$$

و

$$A\hat{O}D = \frac{A\hat{O}C - B\hat{O}C}{۲}$$

۶۷. در یک صفحه از یک نقطه چهار نیمخط A ، A' ، B و B' به گونه‌ای رسم شده‌اند که $A \perp B$ و $A' \perp B'$. اگر زاویهٔ بین A و A' به اندازهٔ α درجه و زاویهٔ بین B و B' به اندازهٔ β درجه باشد، الزاماً خواهیم داشت:

الف) $\alpha = \beta$ ب) $\alpha = ۹۰^\circ - \beta$ ج) $\alpha = ۱۸۰^\circ - \beta$

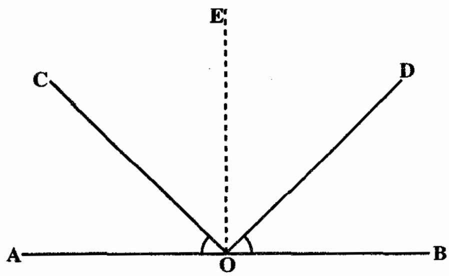
د) $\alpha = \beta$ یا $\alpha = ۹۰^\circ - \beta$ هـ) $\alpha = \beta$ یا $\alpha = ۱۸۰^\circ - \beta$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

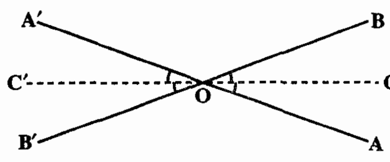
۶۸. ۱. زاویه‌های ۵۶^g, ۴۹° را با هم و زاویه‌های ۷۳^g, ۶۵° را نیز با هم مقایسه کنید و تعیین کنید کدام کوچکتر است؟

۲. زاویه‌های $۱۷^\circ ,۱۵'$ و $۲۴/۸۶g$ را باهم بسنجید و تعیین کنید کدام بزرگتر است؟

۳.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

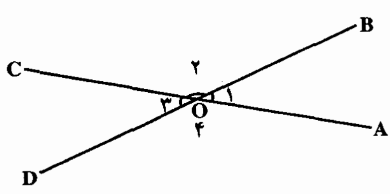


۶۹. نقطهٔ O را روی خط راست AB اختیار کرده، دو نیمخط OC و OD را در یک طرف خط AB چنان رسم می‌کنیم که $A\hat{O}C = D\hat{O}B$ باشد. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ DOC بر AB عمود است.

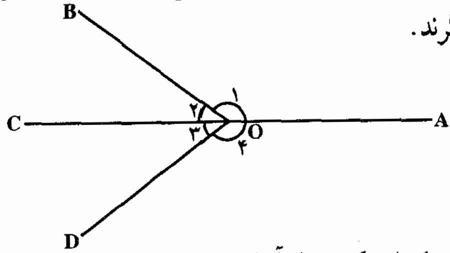


۷۰. دو زاویهٔ AOB و $A'OB'$ و نیمسازهای آنان OC و OC' مفروضند. ثابت کنید در صورتی که OA و OA' ، همچنین OC و OC' در یک امتداد (متقابل) باشند، OB و OB' نیز متقابلند.

۷۱. چهار نیمخط با مبدأ مشترک O واقع در یک صفحه، چهار زاویه چنان پدید آورده‌اند که زاویهٔ اوّل با زاویهٔ سوم و زاویهٔ دوم با زاویهٔ چهارم مساوی است. ثابت کنید که این چهار نیمخط دوبه‌دو متقابلند.



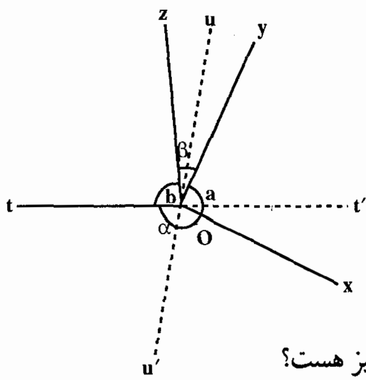
۷۲. چهار نیمخط با مبدأ مشترک O واقع در یک صفحه چنانند که اگر آنها را در جهت مثبت صفحه شماره‌گذاری نماییم، زاویهٔ اوّل با زاویهٔ چهارم و زاویهٔ دوم با زاویهٔ سوم برابرند. ثابت کنید که دوتا از این نیمخطها متقابلند و این دو نیمخط نیمسازهای زاویه‌های حاصل از دو نیمخط دیگرند.



۷۳. پنج نیمخط راست، که از یک نقطه آغاز شده‌اند، روی صفحه‌ای رسم کرده‌ایم. حداکثر چند زاویهٔ منفرجه تشکیل می‌دهند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۲ . ۴ . ۴. مسأله‌های ترکیبی



۷۴. چهار نیمخط Ox ، Oy ، Oz و Ot چنان رسم شده‌اند که $x\hat{O}y = a$ و $y\hat{O}z = \beta$ و $z\hat{O}t = b$ و $t\hat{O}x = \alpha$ ، و می‌دانیم که $a = b = 3\beta$ و $\alpha = 5\beta$، در این صورت :

۱. مقدار هریک از زاویه‌ها را حساب کنید.

۲. امتداد Ot را رسم کرده، هریک از زاویه‌های جدیدی را که به‌وجود می‌آیند، محاسبه کنید.

۳. چرا نیمساز زاویهٔ tOx، نیمساز زاویهٔ yOz نیز هست؟

۷۵. دو زاویه، مکمل یکدیگرند. در حالتهای زیر، اندازهٔ هریک را مشخص کنید.

الف. دو زاویه مساوی باشند.

ب. یک زاویه دو برابر دیگری باشد.

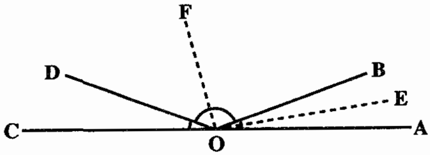
پ. یک زاویه n برابر دیگری باشد.

۷۶. در صورتی که $a = 70g$ ، $b = 140g$ ، $c = 30^\circ, 29', 50''$ و $d = 119^\circ, 30', 10''$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ :

۱. متممهای زاویه‌های a و c و مکملهای زاویه‌های b و d.

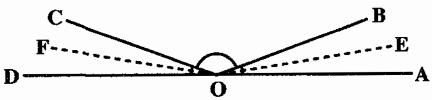
۲. $a+b+c+d$.

۷۷. چهار نیمخط OA، OB، OC و OD از یک نقطه رسم شده‌اند و زاویه‌های متوالی AOB و BOC و COD را تشکیل داده‌اند. در صورتی که OA و OD در یک امتداد و $B\hat{O}C = ۱۳۵^{\circ}$ باشند،



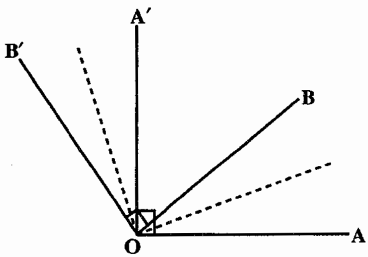
۱. مجموع دو زاویهٔ COD و BOA را حساب کنید.
۲. اندازهٔ زاویه‌ای را که از نیمسازهای زاویه‌های AOB و BOD تشکیل می‌گردد، به‌دست آورید.

۷۸. چهار نیمخط OA، OB، OC و OD، زاویه‌های متوالی AOB ، BOC و COD را تشکیل می‌دهند. با فرض این که دو نیمخط OA و OD متقابل و



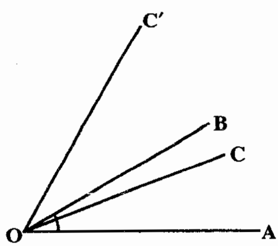
$A\hat{O}B + C\hat{O}D = ۶۰^{\circ}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ :
۱. اندازهٔ زاویهٔ BOC .
۲. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های AOB و COD.

۷۹. زاویهٔ AOB داده شده است. OA′ عمود بر OA و در همان طرفی که OB قرار دارد و OB′ را عمود بر OB و در طرفی که OAواقع نیست، رسم می‌کنیم، ثابت کنید که :



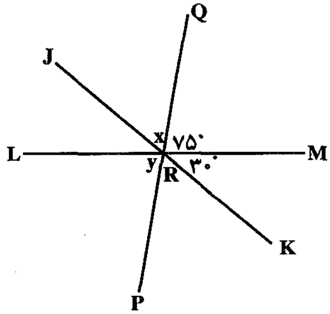
۱. زاویه‌های AOB و A′OB′ متساوی‌اند.
۲. نیمسازهای این دو زاویه برهم عمودند.

۸۰. زاویهٔ $A\hat{O}B = ۳۰^{\circ}$ داده شده است. ثابت کنید که یک نیمخط مثل OC داخل این زاویه وجود دارد به قسمی که $A\hat{O}C = ۲B\hat{O}C$ باشد. همچنین یک نیمخط مانند OC′ غیرواقع در داخل این زاویه وجود دارد به قسمی که

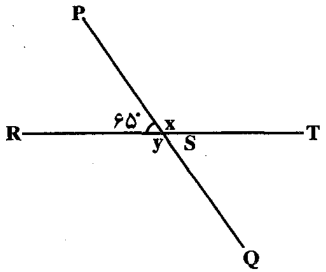


$A\hat{O}C' = ۲B\hat{O}C'$ باشد. سپس اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{O}C'$ را بیابید.

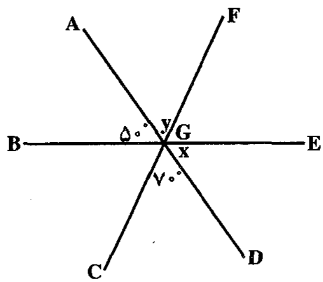
۸۱. مقدارهای x و y را در هریک از شکلهای زیر بیابید.



(الف)



(ب)



(پ)

بخش ۳

• خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز،...

۳.۱. تعریف و قضیه

۳.۲. زاویه

۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۳.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳.۳. پاره‌خط

۳.۳.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳.۴. خطهای: موازی، عمودبرهم، ...

۳.۴.۱. خطها موازی‌اند

۳.۴.۲. خطها برهم عمودند

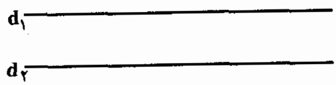
۳.۴.۳. خط نیمساز است

۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

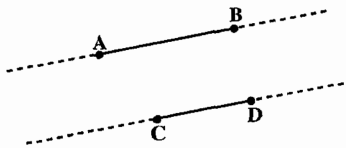
بخش ۳. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز،...

۱.۳. تعریف و قضیه

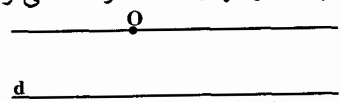
خطهای موازی. دو خط واقع بر یک صفحه را موازی می‌گوییم، هرگاه آن دو خط برهم منطبق باشند و یا هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند ؛ مانند دو خط d_1 و d_2 که باهم موازیند. موازی بودن این دو خط به صورت $d_1 \| d_2$ نشان داده می‌شود.



پاره‌خطهای موازی. پاره‌خطهایی هستند که امتدادهای آنها موازی باشند.



اصل موضوع توازی (اصل پنجم اقلیدس). خط راست d و نقطهٔ O غیرواقع بر آن داده شده‌اند. در نقطهٔ O یک خط راست و تنها یک خط راست می‌توان موازی خط d رسم کرد.



تاریخچهٔ اصل موضوع توازی

بار دیگر به بیان پنج اصل موضوع اقلیدس می‌پردازیم :

اصل اوّل. به ازای هر نقطهٔ P و هر نقطهٔ Q که با P مساوی نباشد، خط یکتایی مانند l وجود دارد که بر P و Q می‌گذرد.

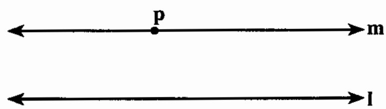
اصل دوم. به ازای هر پاره‌خط AB و هر پاره‌خط CD نقطهٔ منحصر بفردی مانند E وجود دارد، چنان که B میان A و E واقع است و پاره‌خط CD با پاره‌خط BE همنهشت است.

اصل سوم. به ازای هر نقطهٔ O و هر نقطهٔ A که با O مساوی نباشد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA وجود دارد.

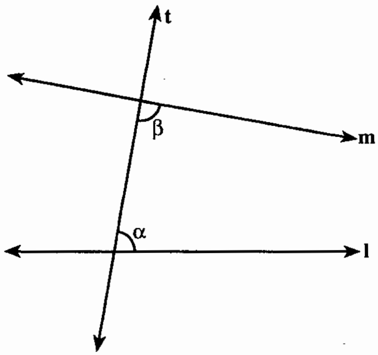
اصل چهارم. همهٔ زاویه‌های قائمه با یکدیگر همنهشتند.

اصل پنجم. به ازای هر خط l و هر نقطهٔ P غیرواقع بر آن، تنها یک خط مانند m وجود دارد چنان که از P می‌گذرد و با l موازی است (این اصل، اصل توازی جان پلی فیـــراست که منطقاً هم‌ارز اصل توازی اقلیدس می‌باشد).

چرا این اصل باید تا این اندازه مایهٔ جدل باشد؟ این اصل ممکن است در نظر شما «بدیهی» جلوه کند. شاید در شرایطی بوده‌اید که می‌بایستی طبق مفاهیم هندسهٔ اقلیدسی فکر کنید. اما اگر ما اصلهای هندسه را انتزاعهایی از تجربه انگاریم، می‌توانیم تفاوت اساسی بین این اصل و چهار اصل دیگر را دریابیم. دو اصل اوّل از تجربیات ما دربارهٔ رسم با یک ستاره منتزع شده‌اند ؛ اصل سوم از تجربیات ما در رسم با پرگار ناشی می‌شود ؛ اصل چهارم شاید به عنوان تجریدی با بداهت کمتر درنظر آید. ولی این اصل هم از تجربیات ما دربارهٔ اندازه‌گیری زاویه‌ها با نقاله نتیجه می‌شود (که در این اندازه‌گیری مجموع دو زاویهٔ مکمل ۱۸۰ درجه است و اگر دو زاویهٔ مکمل با یکدیگر قابل انطباق باشند، اندازهٔ هریک باید ۹۰ درجه باشد).



اصل پنجم با هر چهار اصل بالا متفاوت است. بدین معنی که نمی‌توانیم به طور تجربی تحقیق کنیم که آیا دو خط همدیگر را می‌برند یا نه، زیرا که ما فقط پاره‌خطها را می‌توانیم رسم کنیم نه خطها را. می‌توانیم پاره‌خطها را بیش از پیش امتداد دهیم تا ببینیم که آیا همدیگر را قطع می‌کنند یا نه ؛ ولی نمی‌توانیم آنها را تا بی‌نهایت امتداد دهیم. تنها وسیلهٔ ما این است که توازی را به طور نامستقیم با استفاده از ملاک دیگری غیر از تعریف فوق تحقیق کنیم.



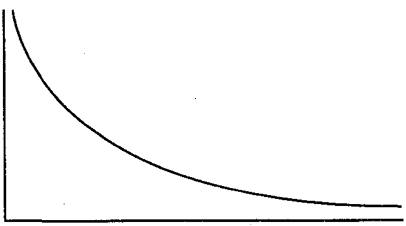
چه ملاک دیگری برای توازی l و m می‌تواند وجود داشته باشد؟ اقلیدس فکر رسم خطی مانند t متقاطع با l و m (در دو نقطهٔ متمایز)، و اندازه‌گیری عدهٔ درجات زاویه‌های درونی α و β ، واقع در یک طرف t را عرضه کرد. اقلیدس پیش‌بینی کرد که هرگاه مجموع زاویه‌های α و β کمتر از ۱۸۰ باشد، دو خط l و m (اگر به اندازهٔ کافی امتداد داده شوند) یکدیگر را در یک طرف t ، در همان طرف زاویه‌های α و β می‌برند. در واقع محتوای اصل پنجم اقلیدس همین است.

اشکالی که در این ملاک توازی وجود دارد این است که [این ملاک مبتنی] بر فرضی است که در واقع، با اصل توازی که در بالا ذکر کردیم، منطقاً هم‌ارز است. پس برای متقاعد ساختن خود به صحت اصل توازی، نمی‌توانیم از این ملاک ـ که به دور در استدلال منجر می‌شود ـ استفاده کنیم. خود اقلیدس از ماهیت چون و چرادار اصل توازی آگاهی داشته است، زیرا که استفاده از آن را تا آن‌جا که می‌توانسته (تا اثبات بیست و نهمین قضیهٔ خود) به تأخیر انداخته است.

تلاش برای اثبات اصل توازی

به یاد بیاورید که اساساً منظور از اصلِ موضوع (بنداشت) اصلی بود آن‌چنان ساده و بدیهی که هیچکس نتواند در درستی آن تردید کند. ولی، اصل توازی از همان آغاز، به این عنوان که خصوصیات یک فرض اثبات نشده را دارا نیست، مورد حمله قرار گرفت. ریاضی‌دانان در طول دوهزار سال تلاش کردند تا آن را از چهار اصل دیگر نتیجه بگیرند، و یا اصل دیگری را که به خودی خود بداهت بیشتری داشته باشد، جانشین آن سازند. همهٔ تلاشها برای این که آن را از چهار اصل دیگر نتیجه گیرند به ناکامی انجامید. زیرا آنچه را که اصطلاحاً برهان می‌نامیدند، همیشه متضمن فرضی نهانی بود که درستی آن قابل اثبات نبود. جانشین ساختن آن هم به وسیله اصلهایی که به خودی خود بداهت بیشتری داشته باشند منجر به اصلهایی می‌شد که به طور منطقی با اصل توازی هم‌ارز بودند و بالمآل از این جانشینها هم نتیجه‌ای عاید نمی‌شد. ما به بررسی برخی از این تلاشها که بسیار آموزنده‌اند، می‌پردازیم :

پروکلوس Proclus (۴۱۰ تا ۴۸۵ بعد از میلاد) که شرح او برکتاب اصول اقلیدس یکی از منابع اصلی اطلاعات ما در زمینهٔ هندسه یونان است، از اصل توازی بدین‌گونه انتقاد کرده است. «این را باید حتی از شمار اصول بیرون آورد ؛ زیرا این قضیه‌ای است که دشواریهای زیادی دربر دارد و بطلمیوس در کتابی به گشودن آنها همت گمارده است...» این حکم که، چون [دو خط] را هرچه بیشتر امتداد دهیم بیش از پیش به هم نزدیک می‌شوند و سرانجام همدیگر را می‌برند، پذیرفتنی است ولی نه همیشه. پروکلوس یک هذلولی را مثال می‌زند که آن اندازه که بتوان تصور کرد به مجانبهایش نزدیک می‌شود بی‌آن که هرگز آنها را ببرد. این مثال نشان می‌دهد که لااقل ممکن است تصوری مخالف نتیجه‌گیریهای اقلیدس هم داشت.

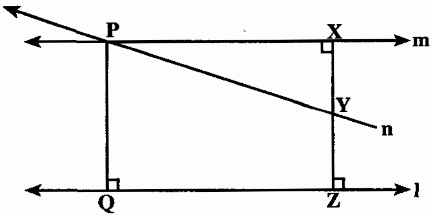


پروکلوس می‌گوید : «پس روشن است که باید برای این قضیهٔ کنونی برهانی بیابیم و این، مخالف ماهیت خاص اصول است.»

در مدتی بیش از دوهزار سال بعضی از بهترین ریاضی‌دانان برای اثبات اصل پنجم اقلیدس تلاش کردند. اثبات مطابق اصطلاح ما، یعنی چه؟ لزومی ندارد که اصل توازی را به عنوان یک بنداشت (اصل موضوع) بپذیریم. باید بتوانیم آن را از روی بنداشتهای دیگر ثابت کنیم. اگر امکان می‌داشت که اصل پنجم اقلیدس را بدین‌گونه اثبات کنیم، در آن صورت این اصل در هندسهٔ نتاری (هندسهٔ بدون اصل موضوع توازی) به صورت یک قضیه درمی‌آمد و تمام هندسهٔ اقلیدسی را دربرمی‌گرفت.

تا آن‌جا که می‌دانیم نخستین تلاشی که برای اثبات اصل توازی به عمل آمده، از آن بطلمیوس بوده است و بی‌آن که وارد جزئیات این برهان بشویم، باید بگوییم که او، بی‌آن که خود

متوجه باشد، اصل توازی هیلبرت را پذیرفته است که این اصل منطقاً با اصل پنجم اقلیدسی هم‌ارز است. لذا بطلمیوس آنچه را می‌خواست ثابت کند قبول می‌کرد. یعنی استدلال او اصولاً به دور منجر می‌شد.



پروکلوس سعی کرده است اصل توازی را چنین ثابت کند: دو خط موازی l و m داده شده‌اند. فرض کنیم خط n خط m را در نقطهٔ P می‌برد. می‌خواهیم نشان دهیم که n هم خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم Q پای عمودی باشد که از P بر l وارد شده است. اگر n بر PQ منطبق باشد، پس l را در Q بریده است وگرنه نیمخطی مانند PY از n بین PQ و نیمخطی مانند PX از m قرار دارد. فرض کنید که X پای عمود مرسوم از Y بر m است. حال، وقتی نقطهٔ Y در روی خط n از نقطهٔ P بینهایت دور شود، پاره‌خط XY اندازه‌اش بینهایت بزرگ می‌شود و سرانجام از پاره‌خط PQ تجاوز می‌کند. بنابراین، Y باید از l بگذرد و در طرف دیگر آن قرار گیرد. یعنی n باید l را ببرد.

مطالب بالا جان کلام و برهان پروکلوس است؛ برهان نسبتاً پیچیده‌ای است که شامل حرکت و پیوستگی است. از آن گذشته، درستی هر مرحله از برهان را می‌توان نشان داد جز این که نتیجه‌ای را که می‌خواهیم از آن به‌دست نمی‌آید.

چگونه می‌توان درستی آخرین مرحله را ثابت کرد؟ فرض می‌کنیم عمود yz را از y بر l فرود آورده‌ایم. آن وقت شما می‌توانید بگویید که (۱) x ، y و z بر یک خط راست قرار دارند، و (۲) $XZ \cong PQ$. بنابراین هنگامی که XY از PQ بزرگتر می‌شود، باید از XZ هم بزرگتر شود، و در نتیجه y باید در طرف دیگر l قرار گیرد. در این‌جا نتایج واقعاً از احکام (۱) و (۲) حاصل می‌شود. مشکل کار این است که اثباتی برای درستی این دو حکم وجود ندارد.

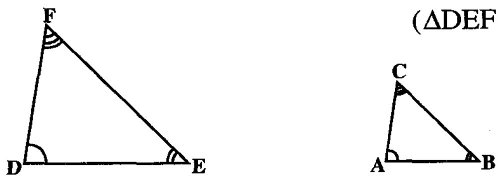
اگر گفتهٔ ما، شما را به تأمل وامی‌دارد، علتش آن است که شکل رسم شده، حکمهای (۱) و (۲) را درست به نظر جلوه می‌دهد. اما باید دانست که برای درستی اثبات یک مرحله، ما مجاز نیستیم از شکل استفاده کنیم. هر مرحله باید از روی بنداشتها و یا از روی قضیه‌هایی که قبلاً ثابت شده‌اند، اثبات شود. (اساساً می‌توان نشان داد که اثبات حکمهای (۱) و (۲) در هندسهٔ نتاری ممکن نیست. اثبات این احکام، تنها در هندسهٔ اقلیدسی ممکن است. آن هم تنها با استفاده از اصل توازی، این امر برهان پروکلوس را به برهان دوری مبدل می‌سازد.)

تجزیه و تحلیلی که هم‌اکنون از برهان ناقص پروکلوس انجام دادیم، نشان می‌دهد که تا چه اندازه باید مراقب طرز تفکر خود دربارهٔ خطهای موازی باشیم. شاید شما خطهای موازی را مانند ریلهای راه‌آهن تجسم می‌کنید، که در همه‌جا فاصله‌شان از همدیگر یکی است وبستهای ریلها برهر دو موازی، عمودند. این تجسّم تنها در هندسهٔ اقلیدسی درست است. بدون اصل

توازی، تنها چیزی که می‌توانیم دربارهٔ دو خط که «موازی» هستند بگوییم، این است که مطابق تعریف «توازی» آنها نقطهٔ مشترکی ندارند. نمی‌توانید فرض کنید که متساوی‌الفاصله‌اند؛ حتی نمی‌توانید فرض کنید که یک عمود مشترک دارند. بنابر قول معروف «وقتی واژه‌ای را به‌کار می‌برم معنای آن همان است که می‌خواهم باشد، نه بیشتر و نه کمتر!» بعد از پروکلوس مهمترین کار انجام شده روی اصل توازی اقلیدس به وسیلهٔ ریاضی‌دان بزرگ ایرانی حکیم عمرخیام نیشابوری صورت پذیرفت و در این مورد رسالهٔ «فی شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس» را نوشت. در واقع خیام را از پیشگامان ایجاد هندسهٔ نااقلیدسی می‌توان به حساب آورد. خواجه‌نصیرالدین طوسی دیگر ریاضی‌دان بزرگ ایرانی پس از حکیم عمر خیام، مهمترین تلاش را برای اثبات اصل توازی به عمل آورد و در قسمت هشتم اثبات حکیم عمر خیام برای این اصل اشکالی پیدا نمود و خود سعی برای اثبات آن نمود؛ امّا در اثبات خواجه‌نصیرالدین طوسی نیز چند فرض وجود دارد که درستی آنها ثابت نشده است.

والیس John Wallis (۱۶۱۶ ـ ۱۷۰۳) ریاضی‌دان انگلیسی تلاش برای اثبات اصل توازی در هندسهٔ نتاری را رها کرد و در عوض بنداشت تازه‌ای که حس می‌کرد بیش از اصل توازی مقبول است، طرح نمود. سپس اصل توازی را از روی این بنداشت تازه و بنداشتهای دیگر هندسهٔ نتاری ثابت کرد.

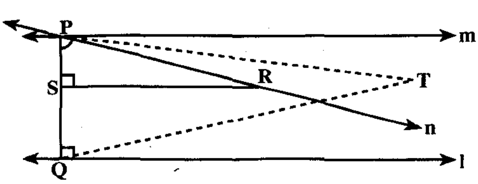
اصل والیس. مثلث نامشخص ABC و پاره‌خط نامشخص DE داده شده‌اند. مثلثی مانند DEF (به ضلع DE) وجود دارد چنان که با مثلث ABC متشابه است و چنین نموده می‌شود: $(\Delta DEF \sim \Delta ABC)$



معنی شهودی اصل والیس، آن است که شما می‌توانید مثلث را، هر اندازه که بخواهید بی‌آن که از شکل طبیعی بیندازید، بزرگ یا کوچک کنید.

با استفاده از اصل والیس، اصل توازی را می‌توان چنین ثابت کرد:

برهان. نقطه‌ای مانند P غیرواقع بر l را درنظر می‌گیریم و مانند پیش، خط m را موازی با l ـ با رسم عمود PQ بر l و رسم عمود m بر PQ ـ می‌کشیم. فرض می‌کنیم که n خط دیگری باشد که بر P بگذرد. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. مانند پیش، نیمخطی از n به مبدأ P را، که میان PQ و یک نیمخط m قرار دارد، درنظر می‌گیریم. به ازای هر نقطهٔ R واقع بر این نیمخط، خط RS را بر PQ عمود می‌کنیم. حال اصل والیس را برای مثلث PSR و پاره‌خط PQ به‌کار می‌بریم. این اصل به ما می‌گوید که نقطه‌ای مانند T وجود

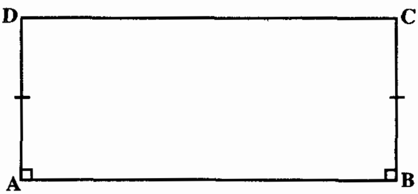


دارد چنان که مثلث PSR با مثلث PQT متشابه است. به علاوه فرض می‌کنیم که نقطهٔ T در همان طرف PQ باشد که Rدر آن قرار دارد.

بنابر تعریف مثلثهای متشابه $\angle RPS \cong \angle TPQ$ امّا چون این زاویه‌ها در نیمخط $PQ = PS$ به عنوان یک ضلع مشترکند و چون T در همان‌طرف PQ واقع است که R در آن قرار دارد، تنها راهی که آنها بتوانند قابل انطباق باشند این است که مساوی باشند. بنابراین $PR = PT$ یعنی T بر n واقع است. به‌طور مشابه، $\angle PSR \cong \angle PQT$ چون هردو قائمه‌اند. بنابراین، T بر l قرار دارد. لذا n و l در یک نقطه متقاطعند. پس m تنها خطی است که از P به موازات l کشیده شده است.

دیگر دلیلی وجود ندارد که اصل والیس را پذیرفتنی‌تر از اصل پنجم اقلیدس بدانیم، زیرا معلوم خواهد شد که این دو اصل منطقاً هم‌ارز هستند.

ساکری و لامبرت. از دیگر کسانی که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس تلاش کردند کشیش یسوعی، جیرولامو ساکری Girolamo Saccheri (۱۶۶۷ ـ ۱۷۳۳) است. او پیش از مرگ کتاب کوچکی به نام اقلیدس عاری از هرگونه نقص چاپ کرد که در واقع تا یک قرن و نیم بعد که ائوجینو بلترامی Eugenio Beltrami آن را دوباره کشف کرد، مورد توجه واقع نشد.



چهار ضلعی ساکری

فکر ساکری این بود که از یک برهان خلف استفاده کند. او نقیض اصل توازی را فرض کرد و سپس کوشید تا تناقضی از آن نتیجه بگیرد. بویژه بعضی از چهارضلعیها را که زاویه‌های مجاور به قاعده‌شان قائمه و ضلعهای این زاویه‌ها باهم قابل انطباقند مورد مطالعه قرار داد که این چهارضلعیها بعداً به چهارضلعیهای ساکری معروف شدند.

در هندسهٔ نتاری به آسانی می‌توان ثابت کرد که دو زاویهٔ دیگر قابل انطباقند $\angle D \cong \angle C$ سه حالت ممکن است پیش آید:

حالت ۱. زاویه‌های بالایی قائمه‌اند.

حالت ۲. زاویه‌های بالایی منفرجه‌اند.

حالت ۳. زاویه‌های بالایی حاده‌اند.

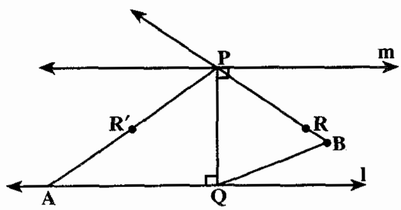
برای اثبات حالت اوّل یعنی همان حالتی که در هندسهٔ اقلیدسی هست، ساکری کوشش کرد نشان دهد که دو حالت دیگر به تناقض منجر می‌شود. او توانست ثابت کند که حالت دوم به تناقض منجر می شود یعنی اگر زاویه‌های بالایی منفرجه باشند، مجموع زاویه‌های چهارضلعی از ۳۶۰ درجه بیشتر می‌شود که با فرع ۲ قضیهٔ ساکری ـ لژاندر متناقض است.

ولی هر اندازه کوشش کرد نتوانست تناقضی در حالت سوم به دست آورد و آن را «فرض

خصمانهٔ زاویهٔ حاده» نامید. او موفق شد نتایج بسیار عجیبی به‌دست آورد ولی تناقضی به‌دست نیاورد و سرانجام از روی عجز بانگ برآورد: «فرض زاویهٔ حاده مطلقاً غلط است زیرا که [این فرض] با ذات خط مستقیم ناسازگار است!» درست شبیه مردی که الماس نایابی را کشف کرده باشد ولی نتواند آن چه را می‌بیند باور کند و بانگ برمی‌آورد که شیشه است. با وجود آن که ساکری خود متوجه نشده بود، هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کرده بود.

با راهی مشابه راه مسأله توازی، یوهان هانریش لامبرت Johann. Heinrich Lambert (۱۷۲۸ ـ ۱۷۷۷) چهارضلعیهایی را که لااقل سه زاویهٔ قائمه دارند مورد مطالعه قرار داد که حالا به نام خود او معروفند. او هم بسیاری از گزاره‌های هندسه اقلیدسی را از زاویهٔ حاده نتیجه گرفت ولی برخلاف ساکری ادعا نکرد که به تناقضی دست یافته است. لامبرت که بیشتر از ساکری به‌جلو رفته بود نشان داد که فرض زاویهٔ حاده مستلزم این است که مساحت یک مثلث با کاستی آن متناسب باشد و می‌پنداشت که این فرض به هندسه‌ای در روی «کرهٔ با شعاع انگاری» مربوط می‌شود.

آدرین‌ماری‌لژاندر Adrien Marie Legendre (۱۷۵۲ ـ ۱۸۳۳) فرانسوی یکی از بهترین ریاضی‌دانان عصر خود بود که در بسیاری از شاخه‌های علوم ریاضی کشفهای مهمی دارد. اصل توازی ذهن این دانشمند را چنان به خود مشغول کرده بود که در طی ۲۹ سال چندبار اصول هندسه‌اش را تجدید چاپ کرد و در هر بار، یکی از کوششهای تازه‌اش در مورد اصل توازی را در آن درج نمود. در این‌جا به ذکر یکی از کوششهای او می‌پردازیم:



نقطهٔ P که بر خط l نسبت داده شده است. از P عمود PQ را بر l فرود می‌آوریم (Q پای عمود) و فرض می‌کنیم m خطی باشد که از P بر PQ عمود شده باشد. پس m با l موازی است، زیرا که l و m دارای عمود مشترک PQ هستند. فرض می‌کنیم n خط دلخواهی غیر از m و PQ باشد که از P رسم شده است. باید نشان دهیم که خط n خط l را می‌برد. فرض می‌کنیم PR نیمخطی از n میان PQ و یک نیمخط m که از P خارج شده است، باشد. نقطه‌ای مانند R′ در آن طرفی از PQ که R در آن نیست وجود دارد چنان که $\angle QPR' \cong \angle QPR$، پس Q درون $\angle RPR'$ قرار دارد. چون خط l از نقطهٔ Q درون $\angle RPR'$ می‌گذرد، باید یکی از ضلعهای این زاویه را ببرد. اگر l ضلع PR را ببرد، مطمئناً n را هم خواهد برید. فرض کنید l ضلع PR′ را در نقطهٔ A ببرد، و B تنها نقطه‌ای بر ضلع PR باشد چنان که $PA \cong PB$، پس $\Delta PQA \cong \Delta PQB$ (ض ز ض) بنابراین زاویهٔ PQB قائمه است و از آن‌جا B بر l (و n) قرار دارد.

ممکن است این احساس به شما دست داده باشدکه این برهان به اندازهٔ کافی پذیرفتنی

است. با این حال چگونه می‌توانید بگویید درست است؟ باید درستی هر مرحله را اوّل با تعریف دقیق هر اصطلاح اثبات کنید. مثلاً، باید معنی «عمود بودن» دو خط را تعریف کنید، والا چگونه می‌توانید درستی ادعای موازی بودن l و m را، صرفاً به سبب یک عمود مشترک داشتن، بپذیرید؟ (باید اوّل، اگر بتوانید، آن را به عنوان یک قضیهٔ جداگانه اثبات کنید.) بایستی درستی ملاک قابلیت انطباق (ض ز ض) را در آخرین حکم قبول کنید. باید «درون» یک زاویه را تعریف و ثابت کنید خطی که از درون یک زاویه می‌گذرد باید یکی از ضلعهای آن را ببرد. در اثبات همهٔ این چیزها باید خاطرجمع باشید که تنها از چهار اصل اوّل استفاده می‌کنید و از هیچ حکمی، هم‌ارز اصل پنجم، کمک نمی‌گیرید والا گرفتار برهان دوری می‌شوید. (برهان لژاندر شامل چند حکم است که نمی‌توان آنها را به کمک چهار اصل اوّل ثابت کرد.)

تلاشهایی که برای اثبات اصل پنجم اقلیدس صورت گرفته بود به اندازه‌ای زیاد بود. گ.ز. کلوگل Gustav Simon Klugel در سال ۱۷۶۳ موفق شد رساله‌ای برای دکترا تهیه کند که در آن نقایص ۲۸ برهان مختلف از اصل توازی را پیدا و در ثابت شدنی بودن آنها اظهار تردید کند. حتی شصت سال بعد از آن در ۱۸۲۳، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، لژاندر، خیال می‌کرد که برهان آن را پیدا کرده است. ریاضی‌دانان به تدریج نومید می‌شدند.

فورکوش بویویی مجارستانی به پسرش یانوش نوشت :

تو دیگر نباید برای گام نهادن در راه توازیها تلاش کنی. من پیچ و خمهای این راه را از اوّل تا آخر آن می‌شناسم. این شب بی‌پایان را که همهٔ روشنایی و شادمانی زندگی مرا به کام نابودی فرو برده است، سپری کرده‌ام. التماس می‌کنم که دانش موازیها را رها کنی. من در این اندیشه بودم که خود را در راه حقیقت فدا کنم. حاضر بودم شهیدی باشم که این نقص هندسه را مرتفع سازد و پاک شدهٔ آن را به عالم بشریت تقدیم نماید. من زحمتی عظیم و سترگ کشیدم. آنچه را که من آفریدم به مراتب بهتر از آفریدهٔ دیگران است، ولی باز هم رضای خاطر به‌دست نیاوردم ... وقتی دریافتم که هیچ‌کس نمی‌تواند به پایان این شب ظلمانی راه یابد، بازگشتم. بی‌تسلای خاطر بازگشتم، در حالی که برای خود و بشریت متأسف بودم.

می‌پذیرم که انتظار بیجایی است که بخواهم تو از راه خود منحرف شوی. اما به نظرم می‌رسد که من مدتها در این دیار بوده‌ام و به تمامی صخره‌های جهنمی این دریای مرده سفر کرده‌ام و همیشه هم با دکل شکسته و بادبان پاره‌پاره برگشته‌ام. تباهی وضع و سقوط من به آن دوران بازمی‌گردد. من از روی بی‌فکری، زندگانی و خوشبختیم را به مخاطره افکندم. یا امپراطور یا هیچ!

ولی بویویی جوان از اخطار پدر نهراسید. زیرا که اندیشهٔ کاملاً تازه‌ای را درسر می‌پروراند. او فرض می‌کرد که نقیض اصل پنجم اقلیدس حکمی بی‌معنی نیست و در سال ۱۸۲۳ توانست به پدرش بنویسد : اکنون نقشهٔ قطعی من این است که به محض این که مطالب را کامل و مرتب

کنم و فرصتی به دست آورم کتابی دربارهٔ موازیها چاپ کنم. فعلاً هنوز راه خود را به روشنی نمی‌بینم، ولی راهی را که پیش گرفته‌ام نشان می‌دهد که به هدف خواهم رسید. اگر اساساً این هدف رسیدنی باشد. ولی چیزهایی که کشف کرده‌ام به اندازه‌ای شگفت‌انگیزند که خودم حیرت‌زده شده‌ام. و بدبختی جبران‌ناپذیری خواهد بود اگر اینها از دست بروند. پدرجان وقتی آنها را ببینید خواهید فهمید که چه می‌گویم. در شرایط کنونی، تنها چیزی که می‌توانم بگویم این است که از هیچ، دنیایی تازه و شگفت‌انگیز آفریده‌ام. آنچه را که قبلاً برای شما فرستادم از لحاظ مقایسه با آنچه که اکنون پدید آورده‌ام بسان خانه‌ای است مقوایی در مقابل برجی رفیع. اطمینان من به افتخارهایی که این کشفها نصیب من خواهند کرد کمتر از اعتقادم به مباهاتی نیست که در تکمیل آنها احساس خواهم کرد!

یک سده بعد از آن که یانوش بویویی این نامه را نوشت، فیزیکدان انگلیسی ج.ج. تامسون تاحدی به شوخی چنین خاطرنشان ساخت :

ما فضای انیشتن، فضای دویستر De Sitter's Space، جهانهای در حال ارتعاش و جهانهای مرموز را در برابر خود داریم. در واقع ریاضی‌دانی که در ریاضیات محض کار می‌کند، ممکن است با نوشتن یک معادله، جهانی بیافریند، و در حقیقت اگر فردگرا باشد، می‌تواند برای خود جهانی مجزا از جهان دیگر بسازد. در واقع هم در سال ۱۹۲۹ کورت گودل منطقی مشهور نمونه‌ای از جهان پیدا کرد که در معادلات گرانشی انیشتن صدق می‌کند. جهانی که در آن از لحاظ نظری ممکن است در زمان، به عقب برگشت.

یانوش بویویی اکتشافات خود در زمینهٔ هندسهٔ نااقلیدسی را در یک ضمیمهٔ ۲۶ صفحه‌ای در کتاب تنتامن که پدرش نوشته بود، در سال ۱۸۳۱ منتشر ساخت.

همزمان با یانوش بویویی، نیکلای ایوانوویچ لباچفسکی Nikolai Ivanovich Lobache´vsky (۱۷۹۲ - ۱۸۵۰) ریاضیدان برجسته و استاد دانشگاه قازان موفق به کشف هندسهٔ نااقلیدسی گردید و در سال ۱۸۲۹ آن را در کتابی منتشر ساخت. تقریباً همزمان با این دو نفر ریاضیدان نامدار آلمانی کارل فریدریش گوس C.F.Gauss (۱۷۷۷ - ۱۸۵۵) از ۱۵سالگی حدود ۳۵ سال در زمینهٔ هندسه نااقلیدسی کارکرد و به نتایج فراتر از بویویی رسید. اما نتایج کار خود را منتشر نساخت، بخصوص که توسط دوست قدیمی خود فورکوش بویویی از کار یانوش بویویی در این زمینه اطلاع پیدا کرد.

مطالب بالا شرح مختصری است از تاریخچهٔ اصل موضوع توازی اقلیدس و تلاشهایی که طی بیش از دو هزار سال به وسیلهٔ بهترین ریاضی‌دانان هر عصر برای اثبات این اصل به عمل آمد و سرانجام به کشف هندسه‌های نااقلیدسی منجر گردید. مانند هندسهٔ هذلولوی (هندسه‌ای که در آن از هر نقطهٔ واقع در خارج یک خط، حداقل دو خط موازی آن می‌توان رسم کرد) و هندسهٔ بیضوی (هندسه‌ای که از هر نقطه واقع در خارج یک خط هیچ خطی موازی آن نمی‌توان رسم کرد).

نتیجه‌هایی از اصل توازی

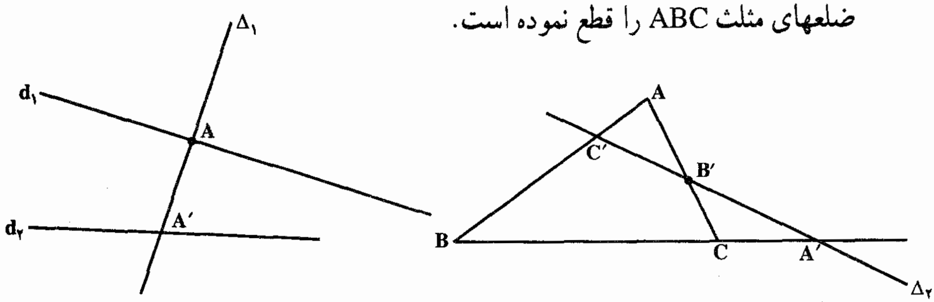
۸۲.قضیه. در هر صفحه دو خط موازی با یک خط ، موازی یکدیگرند.

۸۳.قضیه.در هرصفحه اگر خطی یکی از دو خط متوازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

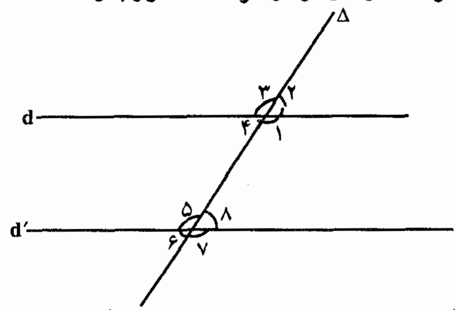
۸۴. قضیه. در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط، موازی یکدیگرند.

۸۵. قضیه. در هر صفحه اگر خطی بر یکی از دو خط متوازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

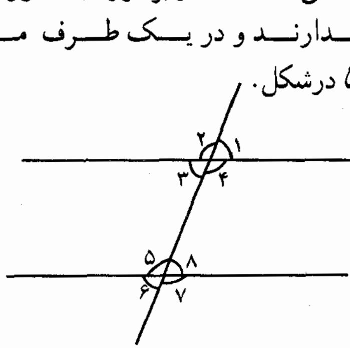
مورب. خطی است که دو یا چند خط را قطع کند. مانند مورب Δ_1 که خطهای d_1 و d_2 را قطع کرده است و یا مورب Δ_2 که ضلعها و امتداد ضلعهای مثلث ABC را قطع نموده است.



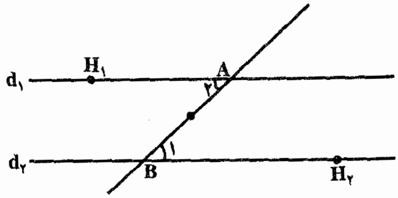
زاویه‌های متبادل. زاویه‌هایی هستند که از برخورد یک مورب با دو خط راست ایجاد می‌شوند،رأس مشترک ندارند و در دو طرف خط مورب واقعند ؛ مانند زاویه های ۴و۸،۱و۶ در شکل.



زاویه‌های متقابل. زاویه‌هایی هستند که از برخورد یک مورب با دو خط پدید می‌آیند، رأس مشترک ندارند و در یک طرف مورب واقعند ، مانند زاویه های ۱و۸،۳و۵ درشکل.

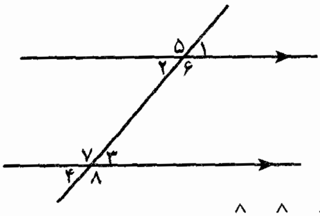


۸۶. قضیه. زاویه‌های متبادل داخلی که از تقاطع دو خط موازی با خط سومی پدید می‌آیند، مساوی یکدیگرند.



۸۷. قضیهٔ عکس. اگردر یک صفحه دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویهٔ متبادل داخلی متساوی باشند، دو خط مزبور موازی یکدیگرند. یعنی در شکل :

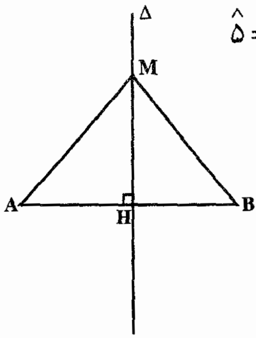
$$H_1\hat{A}B = A\hat{B}H_2 \Rightarrow d_2 \| d_1$$



۸۸. قضیه. خطهای موازی. اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، آن گاه :

الف) همهٔ زاویه‌های حاده با یکدیگر مساویند. $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$

ب) همهٔ زاویه‌های منفرجه با یکدیگرمساویند. $\hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8}$

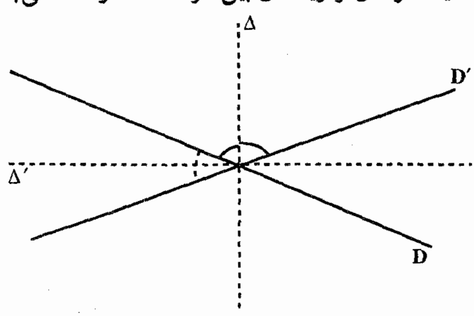


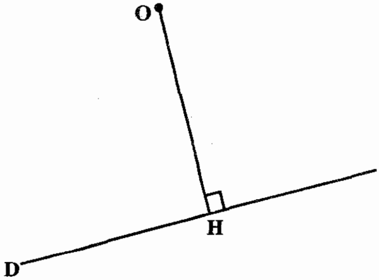
عمودمنصف یک پاره خط. خطی است که از وسط آن پاره‌خط می‌گذرد و بر آن عمود است. مانند خط Δ که عمودمنصف پاره خط AB است.

۸۹. قضیه. هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط ، از دو سر آن به یک فاصله است.

۹۰. قضیهٔ عکس . هر نقطه که از دو سر پاره‌خطی به یک فاصله باشد، برعمودمنصف آن پاره‌خط واقع است.

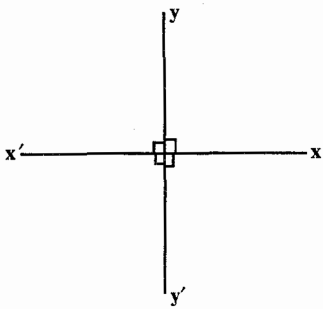
نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط . دوخط عمود برهم هستند که از نقطهٔ برخوردآن دو خط می‌گذرند و زاویه‌های ایجاد شده به وسیلهٔ آن دو خط را نصف می‌کنند. در شکل دو خط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' می‌باشند.





فاصلهٔ نقطه از خط راست. از نقطهٔ O غیرواقع بر خط راست D خطی بر D رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ H قطع کند. اندازهٔ پاره خط OH را فاصلهٔ نقطهٔ O از خط راست D می‌نامند. فاصلهٔ یک نقطه واقع بر یک خط، از آن خط را صفر تعریف می‌کنیم.

۹۱. قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، آن است که بر نیمساز یکی از زاویه‌های بین آنها باشد.



خطهای عمود برهم. دو خط هستند که از برخورد آنها، چهار زاویهٔ مساوی (چهار زاویه قائمه) پدید آید مانند دو خط راست عمود برهم x′x و yy′.

۹۲. قضیه. در هر نقطه واقع بر خطی، یک خط و فقط یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۹۳. قضیه. در هر صفحه، از هر نقطه واقع در خارج یک خط راست، یک خط و فقط یک خط، عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۹۴. قضیه. اگر از یک نقطه واقع در خارج یک خط، یک عمود و چند مایل نسبت به آن خط رسم کنیم:

۱. اندازهٔ عمود از اندازهٔ هر مایل کوچکتر است.

۲. هردو مایل که پای آنها از پای عمود به یک فاصله است، متساوی‌اند.

۳. از دو مایل، آن که پایش از پای عمود دورتر است، بزرگتر است.

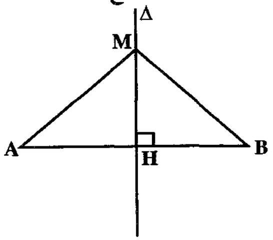
۹۵. قضیه. اگر نقطهٔ O در خارج خط d واقع باشد،

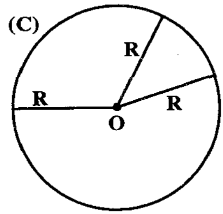
۱. کوتاهترین پاره‌خطی که ازدوطرف به نقطهٔ O و خط d محدود است، برخط d عمود است.

۲. اگر دو مایل که از نقطهٔ O نسبت به خط d رسم شوند، متساوی باشند، پای آنها از پای عمود به یک فاصله است.

۳. اگر دو مایل که از نقطهٔ O نسبت به خط d رسم می‌شوند مساوی نباشند، فاصلهٔ پای مایل بزرگتر تا پای عمود بیشتر است از فاصلهٔ پای مایل کوچکتر تا پای عمود.

مکان هندسی. مجموعه نقطه‌هایی است که ویژگی مشترکی داشته باشند به قسمی که :
الف. هر نقطه از آن مجموعه، آن ویژگی را داشته باشد.
ب. هر نقطه که آن ویژگی را دارا باشد، متعلق به آن مجموعه باشد. مانند: **عمود منصف هر پاره خط**، که مکان هندسی نقاطی است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشند؛ و **دایره**، که مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به یک فاصله‌اند.

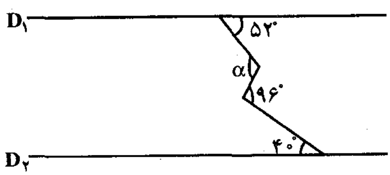




۳.۲. زاویه

۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه

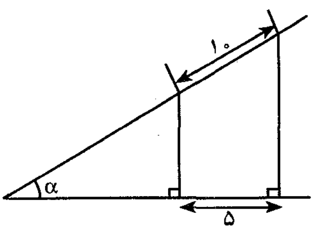
۹۶. در شکل روبرو که دو خط D_1 و D_2 با هم موازیند. زاویه α چند درجه است؟



الف) 92° ب) 100° ج) 108°
د) 132° هـ) 148°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

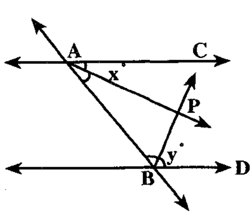
۹۷. در شکل روبرو، که دقیق رسم نشده است، با توجه به اندازه‌های داده شده، اندازهٔ زاویه α چند درجه است؟



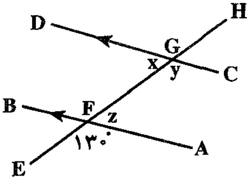
الف) 30° ب) 45° ج) 60°
د) 75° هـ) معلومات داده شده برای تعیین اندازهٔ α کافی نیست.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

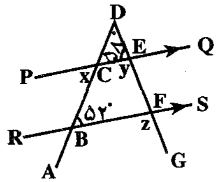
۹۸. $AC \parallel BD$، نیمسازهای $\angle CAB$ و $\angle DBA$ یکدیگر را در P قطع می‌کنند و $AB = 2PB$. x و y را بیابید.



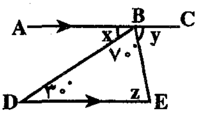
۹۹. در شکلهای زیر ، مقدارهای x، y و z را بیابید.



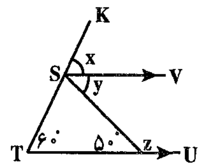
(الف)



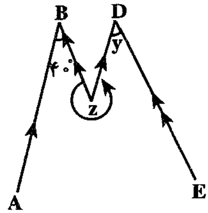
(ب)



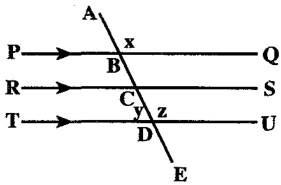
(پ)



(ت)

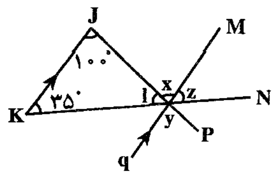


(ث)

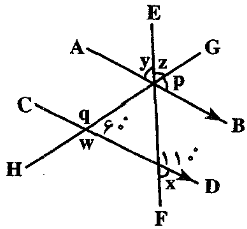


(ج)

۱۰۰. اندازهٔ زاویه‌هایی را که به وسیلهٔ حروف کوچک مشخص شده‌اند، پیدا کنید.

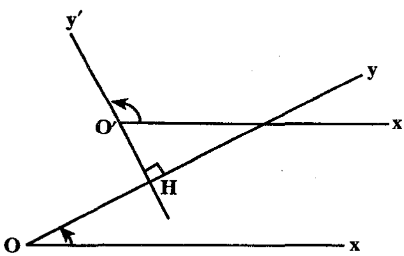


(الف)

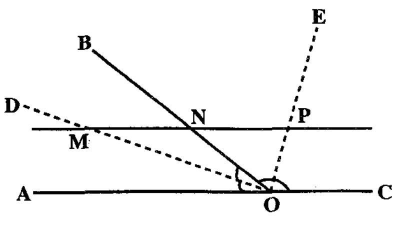


(ب)

۲.۲.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها



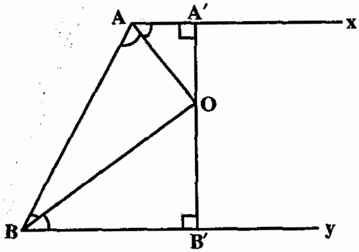
۱۰۱. دو زاویهٔ xOy و x′O′y′ داده شده‌اند. در صورتی که Ox∥O′x′ و Oy⊥O′y′ باشد، ثابت کنید مجموع یا تفاضل این دو زاویه یک قائمه است .



۱۰۲. نیمخطهای OD وOE بترتیب نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب AOB و BOC می‌باشند. خطی موازی AC می‌کشیم تا OD را در نقطهٔ M و OB را در نقطهٔ N و OE را در نقطهٔ P قطع کند. ثابت کنید مثلثهای OMN و ONP متساوی‌الساقین می‌باشند.

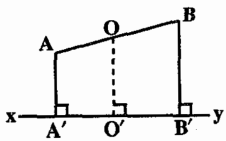
۳.۳. پاره‌خط

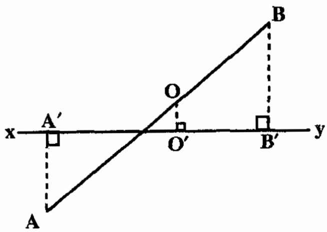
۱.۳.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها



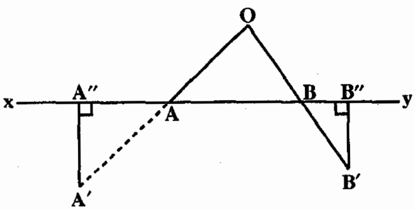
۱۰۳. دو نیمخط موازی Ax و By ممتد در یک جهت می‌باشند. نیمسازهای زاویه‌های xAB و yBA را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O متلاقی شوند. آنگاه از O عمود OA' را بر Ax و عمود OB' را بر By فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$$AB = AA' + BB'$$





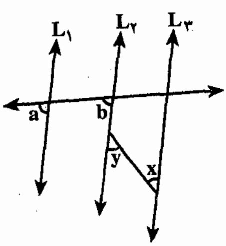
۱۰۴. خط xy و دو نقطهٔ A و B را در یک طرف آن در نظر می‌گیریم. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ O وسط AB از خط xy مساوی نصف مجموع فاصله‌های نقطه‌های A و B از خط xy می‌باشد. اگر نقطه‌های A و B در طرفین xy باشند، چه می‌توان گفت؟



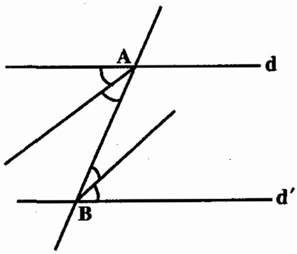
۱۰۵. روی خط راست xy دو نقطهٔ A و B اختیار کرده و نقطهٔ O را در خارج xy فرض می‌نماییم و OA و OB را به اندازهٔ AA' و BB' بترتیب مساوی با OA و OB امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که نقطه‌های A' و B' از xy به یک فاصله هستند.

۴.۳. خطهای: موازی، عمودبرهم، ...

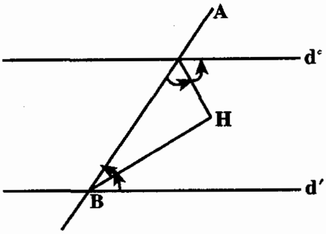
۱.۴.۳. خطها موازی‌اند



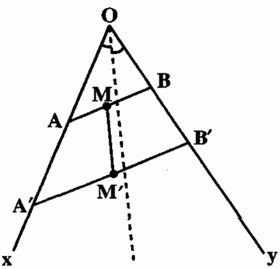
۱۰۶. در این شکل $x = y$ و $a = b$. ثابت کنید $L_۱ \| L_۳$.



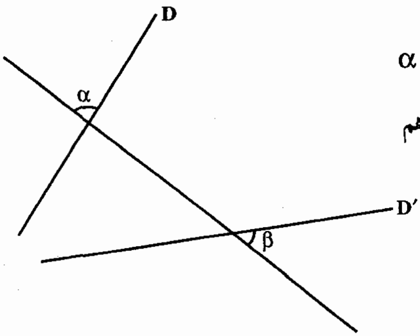
۱۰۷. موربی دو خط متوازی d و d′ را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویهٔ متبادل (هر دو درونی یا هر دو بیرونی) A و B با یکدیگر متوازی‌اند .



۱۰۸. دو خط d و d′ را خط سومی چنان قطع کرده است که نیمسازهای زاویه‌های متبادل داخل و خارج که به این ترتیب تشکیل می‌شوند بر یکدیگرعمودند، ثابت کنید که d و d′ متوازیند.



۱۰۹. زاویه xOy داده شده است. روی Ox پاره‌خط AA′ و روی Oy پاره خط BB′ را مساوی AA′ جدا می کنیم. وسطهای AB و A′B′ را بترتیب M و M′ می‌نامیم. ثابت کنید خط MM′ با نیمساز زاویه xOy موازی است.



۱۱۰. اندازه‌های بر حسب درجهٔ دو زاویهٔ α و β (شکل رو به رو) عبارتند از :

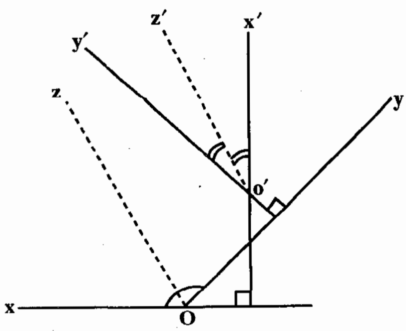
$\alpha = ۳x + ۱۷ \quad , \quad \beta = ۴(x - ۳)$

به ازای چه مقدار x ، دو خط D و D′ با هم موازی‌اند؟

الف) $\frac{۸۵^\circ}{۷}$ ب) ۲۰° ج) ۲۵°

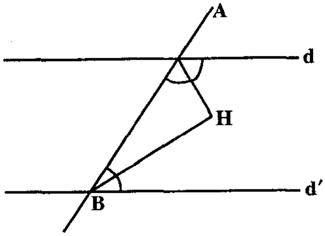
د) ۲۹° هـ) $\frac{۳۵۵^\circ}{۷}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

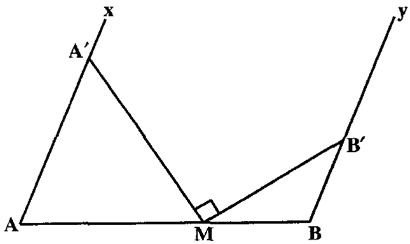


۱۱۱. هرگاه ضلعهای دو زاویهٔ نظیر به نظیر بر یکدیگر عمود بوده یکی از آن دو زاویه y حاده و دیگری منفرجه باشد ، نیمسازهای آنها با هم موازی‌اند.

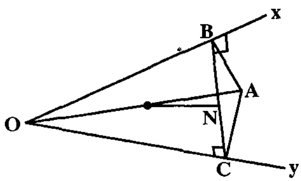
۲.۴.۳. خطها بر هم عمودند



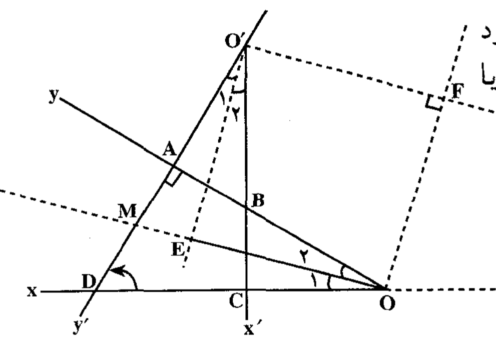
۱۱۲. موربی دوخط متوازی d و d′ را در نقطه‌های A و B قطع نموده است. ثابت کنید که نیمسازهای هر دو زاویهٔ متقابل داخلی A و B برهم عمودند .



۱۱۳. پاره خط AB داده شده است. از A و B دو نیمخط Ax و By را به موازات هم و در یک طرف AB رسم می کنیم . نقطهٔ غیر مشخص M را روی AB انتخاب کرده ، روی Ax طول $AA' = AM$ و روی By طول $BB' = BM$ را جدا می کنیم. از نقطه های A′ و B′ به نقطهٔ M وصل می کنیم . ثابت کنید $A'\hat{M}B' = 90°$ است.

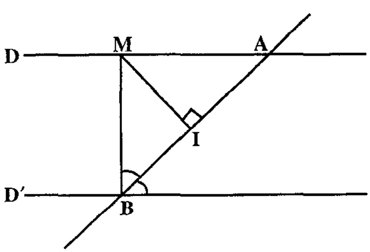


۱۱۴. از نقطهٔ A واقع در داخل زاویهٔ xOy عمودهای AB و AC را به ترتیب بر Ox و Oy فرود می‌آوریم. ثابت کنید خطی که وسطهای OA و BC را به هم وصل می کند (خط MN) بر BC عمود است.



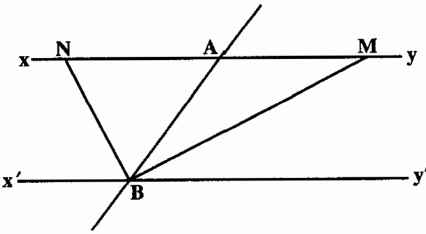
۱۱۵. اگر ضلعهای دو زاویهٔ حاده بر هم عمود باشد، ثابت کنید نیمسازهای داخلی (یا خارجی) آنها بر هم عمودند.

۳.۴.۳. خط نیمساز است

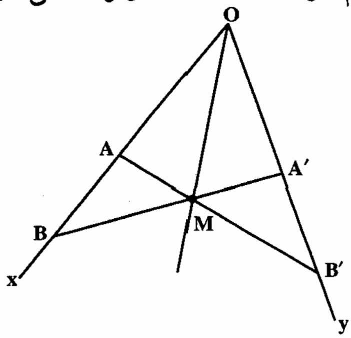


۱۱۶. دوخط متوازی D و D′ را خطی در نقطه‌های A و B قطع کرده است. از نقطهٔ I، وسط پاره‌خط AB ، عمودی بر آن اخراج می کنیم تا خط D را در نقطهٔ M قطع کند. ثابت کنید AB نیمساز یکی از زاویه‌های خط MB با خط D′ است.

۱۱۷. دو خط متوازی xy و $x'y'$ را خط ثالثی بترتیب در نقطه‌های A و B قطع می کند. روی خط xy و در دو طرف A ، طولهای AM وAN را مساوی AB جدا می کنیم. ثابت کنید BM و BN نیمسازهای زاویه‌هایی هستند که AB با$x'y'$ تشکیل می دهد.



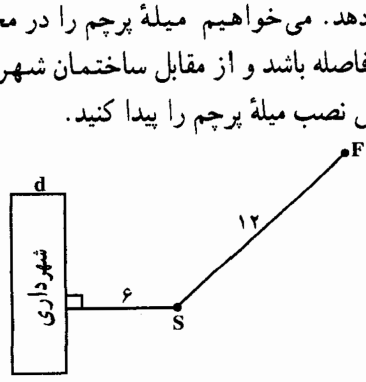
۱۱۸. زاویهٔ xOy را در نظر گرفته ، نقطه‌های A و B را روی Ox و نقطه‌های A' وB' را روی Oy چنان اختیار می کنیم که $OA = OA'$ و $OB = OB'$ باشد، آن گاه پاره خطهای AB' و $A'B$ را رسم نموده نقطهٔ تقاطعشان را M می‌نامیم. ثابت کنید OM نیمساز زاویهٔ xOy است.



۵.۳.سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۱۹. خط D در صفحهٔ P مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را که به فاصلهٔ ثابت l از خط D قرار دارد ، تعیین کنید.

۱۲۰. نمودار روبرو محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری ، مجسمهٔ S و فوارهٔ F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میلهٔ پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصلهٔ ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میلهٔ پرچم را پیدا کنید.



بخش ۴
• مثلث

۱.۴. مثلث در هر حالت

۱.۱.۴.تعریف و قضیه

۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴.اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۱.۴ . اندازهٔ زاویهٔ مثلث داده شده

۲.۱.۲.۱.۴ . اندازهٔ زاویهٔ مثلثها و شکلهای دیگر

۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۱.۴ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۲.۲.۱.۴ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۳.۱.۴. ضلع

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع

۲.۳.۱.۴.حدود ضلع

۳.۳.۱.۴ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴ .ارتفاع

۲.۴.۱.۴ .میانه

۳.۴.۱.۴ .نیمساز

۵.۱.۴.پاره خط

۱.۵.۱.۴.اندازهٔ پاره خط

۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره خطها

۱.۲.۵.۱.۴ .رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

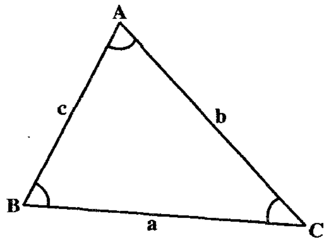
۲.۲.۵.۱.۴ .رابطهٔ بین پاره خطها (نابرابریها)

۳.۵.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

بخش ۴. مثلث

۴ . ۱. مثلث در هر حالت

۱.۱.۴ .تعریف و قضیه



مثلث .اگر سه نقطهٔ غیرواقع بریک خط راست را، دو به دوبه هم‌وصل کنیم، شکل حاصل را مثلث می‌نامند. هر یک از این نقطه‌ها ، یک رأس مثلث و پاره خط ایجاد شده بین هر دو نقطه ، یک ضلع مثلث است.زاویه های ایجاد شده بین هر دو ضلع را زاویه های درونی مثلث می‌نامند، مانند مثلث ABC که نقطه‌های A، B وC رأسهای آن ؛AB، BC و AC، ضلعهای آن و$\angle ABC$ ، $\angle BAC$ و$\angle ACB$ ، زاویه‌های آن می‌باشند.

سه ضلع و سه زاویهٔ هر مثلث را اجزای اصلی مثلث می‌نامند.

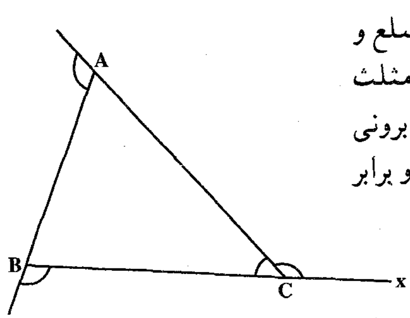
هر ضلع مثلث مقابل یک رأس و یک زاویه از آن است و هر زاویه یا هر رأس نیز مقابل یک ضلع از مثلث است .

اندازهٔ هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابل به آن نمایش می‌دهند. یعنی ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را به a، b و c نشان می‌دهند.

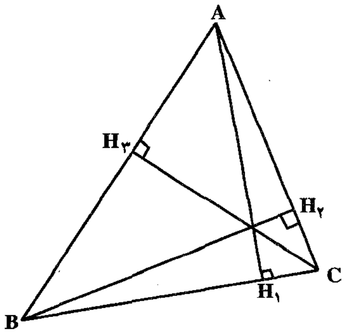
زاویه‌های مثلث را به طور خلاصه به صورت $\angle A$ ، $\angle B$ و $\angle C$ و اندازهٔ این زاویه‌ها را به صورت $\hat{A}$ ،$\hat{B}$ و$\hat{C}$ نمایش می‌دهند.

مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث

۱۲۱. **قضیه.** مجموع زاویه‌های درونی هر مثلث 180°است.

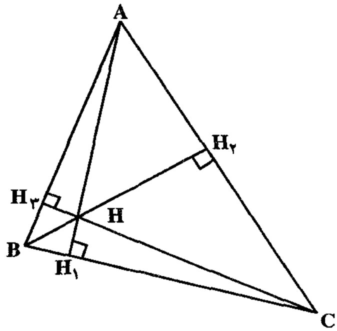


زاویه‌های برونی مثلث . زاویهٔ بین هر ضلع و امتداد ضلع دیگر از مثلث را یک زاویهٔ برونی مثلث می‌نامند و مانند زاویهٔ ACx. هر مثلث سه زاویهٔ برونی دارد که هر یک، مکمل زاویهٔ درونی مجاور خود و برابر مجموع دو زاویهٔ درونی دیگر است، می‌باشند.

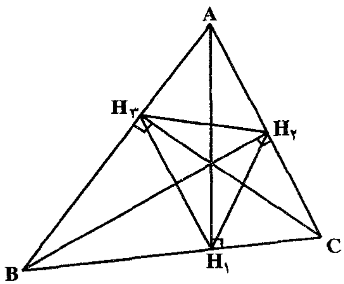


ارتفاع مثلث. هر ارتفاع مثلث پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث، و سر دیگر آن پای عمودی است که از آن رأس بر ضلع مقابل به آن رأس فرود می‌آید: مانند ارتفاع AH_1 در شکل رو به رو.

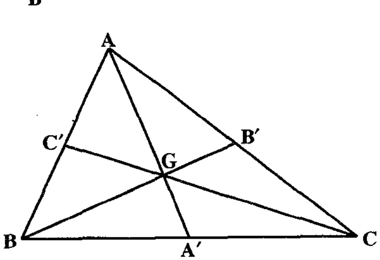
هر مثلث سه ارتفاع دارد؛ AH_1، BH_2 و CH_3 که در یک نقطه مانند H به نام مرکز ارتفاعی مثلث همرسند. اندازهٔ ارتفاعهای AH_1، BH_2 و CH_3 را بترتیب با h_a، h_b و h_c نشان می‌دهند.



مرکز ارتفاعی مثلث. نقطهٔ همرسی سه ارتفاع هر مثلث، مرکز ارتفاعی آن مثلث نامیده می‌شود.



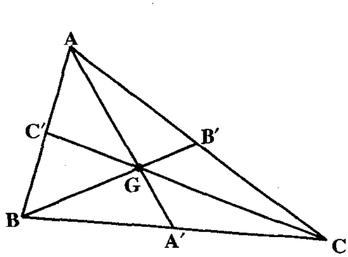
مثلث ارتفاعی یا مثلث پادک یک مثلث. مثلثی که رأسهایش پای سه ارتفاع مثلث است، مثلث پادک یا مثلث ارتفاعی یا مثلث ارتفاعیهٔ آن مثلث نامیده می‌شود، مانندمثلث $H_1H_2H_3$ در شکل.



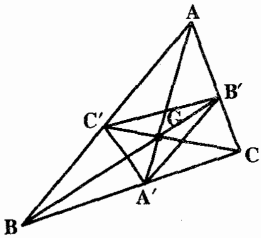
میانه‌های مثلث. پاره خطهایی که هر رأس مثلث را به وسط ضلع رو به رو به آن رأس وصل می‌کنند، میانه‌های مثلث نامیده می‌شوند.

هر مثلث سه میانه دارد که در یک نقطه همرسند. نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل یا مرکز میانه‌ای مثلث نام دارد.

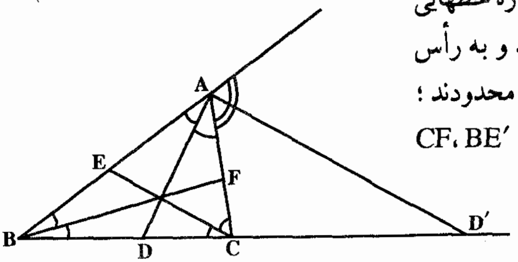
اندازهٔ میانه‌های AA' و BB' و CC' از مثلث ABC را به m_a، m_b و m_c نشان می‌دهند.



مرکز ثقل مثلث. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث است. این نقطه را مرکز میانه‌ای مثلث نیز می‌نامند. مانند نقطهٔ G در شکل. این نقطه میانه‌های مثلث را به یک نسبت تقسیم می‌کند.



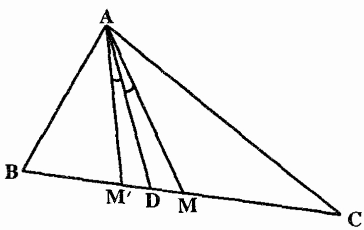
تعریف. مثلث میانک یا مثلث مکمل یا مثلث میانه‌ای یا مثلث اولر یک مثلث. مثلثی است که رأسهایش، وسطهای ضلعهای یک مثلث باشد. مانند مثلث $A'B'C'$ در شکل که در آن نقطه‌های A'، B' و C' بترتیب وسط ضلعهای BC، AC و AB می‌باشند.



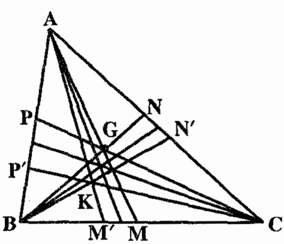
نیمسازهای زاویه‌های مثلث. پاره خطهایی هستند که هر زاویه را نصف می‌کنند و به رأس زاویه و نقطه‌ای از ضلع رو به رو به آن محدودند؛ مانند پاره خطهای AD، AD'، BE، BE'، CF و CF' در مثلث ABC.

هر مثلث سه نیمساز زاویهٔ درونی و سه نیمساز زاویهٔ برونی دارد.

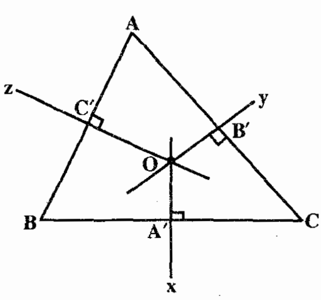
سه نیمساز زاویه‌های درونی هر مثلث در یک نقطه همرسند. نیمسازهای دو زاویهٔ برونی و نیمساز زاویهٔ درونی سوم نیز همرسند.



شبه میانهٔ مثلث (میانه‌های متقارن مثلث). قرینهٔ میانهٔ هر رأس مثلث نسبت به نیمساز زاویهٔ نظیر همان رأس از مثلث، شبه میانهٔ نظیر آن رأس نامیده می‌شود. در شکل، AM' شبه‌میانهٔ نظیر میانهٔ AM از مثلث ABC است. هر مثلث سه شبه میانه دارد که در یک نقطه همرسند.



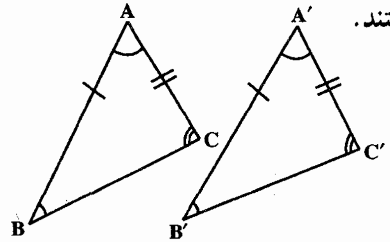
نقطهٔ لومواین یک مثلث. نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های یک مثلث را نقطهٔ لومواین آن مثلث می‌نامند و معمولاً به K نمایش می‌دهند. AM'، AN' و AP' شبه میانه‌های مثلث ABC و K نقطهٔ لومواین این مثلث است.



عمود منصف ضلع مثلث. خطی است که از وسط یک ضلع مثلث می‌گذرد و بر آن عمود است. هر مثلث سه عمود منصف دارد که در یک نقطه همرسند. این نقطه از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

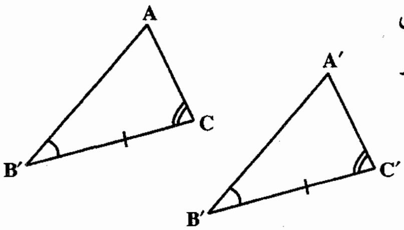
حالتهای اصلی همنهشتی دو مثلث. دو مثلث مختلف‌الاضلاع بنا بر یکی از ۳ حالت زیر همنهشتند :

۱۲۲. **حالت اوّل. قضیه.** هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.



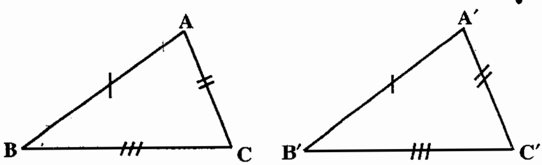
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

۱۲۳. **حالت دوم. قضیه.** هرگاه دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.



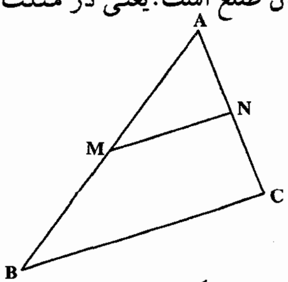
$$(\hat{B} = \hat{B}',\ \hat{C} = \hat{C}',\ BC = B'C') \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

۱۲۴. **حالت سوم. قضیه.** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشتند.



$$(AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C') \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

۱۲۵. **قضیه. ویژگیهای دیگری از مثلث.** پاره خطی که وسطهای دو ضلع از مثلثی را به هم وصل می کند، موازی ضلع سوم مثلث و مساوی نصف آن ضلع است. یعنی در مثلث ABC :

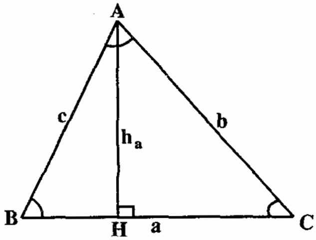


$$AM = MB\ ,\ AN = NC$$

$$\Rightarrow MN \parallel BC\ ,\ MN = \frac{BC}{۲}$$

۱۲۶. **قضیهٔ عکس.** خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی ضلع دیگر رسم می‌شود، از وسط ضلع سوم می گذرد و جزئی از آن که در داخل مثلث قرار می گیرد، نصف آن ضلعی است که با آن موازی است.

مساحت مثلث



مساحت مثلث برابر است با نصف حاصلضرب اندازهٔ هر ضلع مثلث، در اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع. اگر مساحت مثلث ABC را به S نمایش دهیم، داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}a.h_a=\frac{۱}{۲}b.h_b=\frac{۱}{۲}c.h_c$$

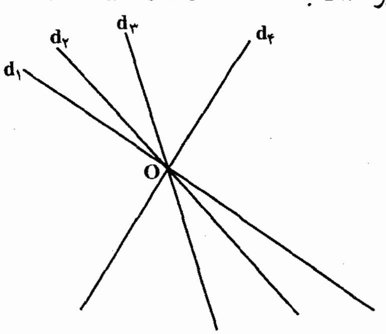
با توجه به این که $h_a=b\sin\hat{C}$ ، $h_b=c\sin\hat{A}$ و $h_c=a\sin\hat{B}$ است، داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث از دستور $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ که در آن $۲P=a+b+c$ است و به دستور هرون Heron موسوم است، نیز استفاده می‌کنند.

محیط مثلث

محیط مثلث ABC به ضلعهای a ، b و c برابر است با : $۲P=a+b+c$

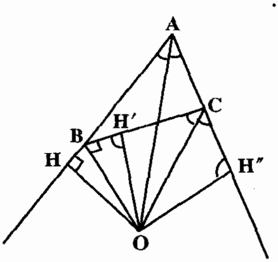


خطهای همرس. سه خط و یا بیشتر، که از یک نقطه می‌گذرند، خطهای همرس نامیده می‌شوند. مانند خطهای $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$ و $d_۴$ که از نقطهٔ O گذشته‌اند. O را نقطهٔ همرسی خطها می‌نامند.

۱۲۷. قضیه. سه عمود منصف ضلعهای هر مثلث همرسند.

۱۲۸. قضیه. سه نیمساز زاویه‌های درونی هر مثلث همرسند.

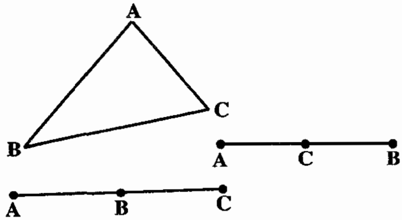
۱۲۹. قضیه. نیمسازهای هر دو زاویهٔ برونی مثلث با نیمساز زاویهٔ درونی سوم، همرسند.



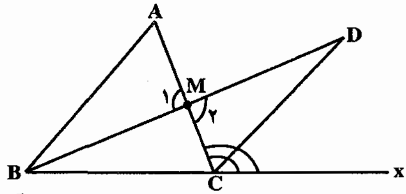
۱۳۰. قضیه. سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

۱۳۱. **قضیه.** سه میانهٔ هر مثلث همرسند و فاصلهٔ نقطهٔ همرس آنها از وسط هر ضلع مثلث $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن ضلع است.

نامساویها

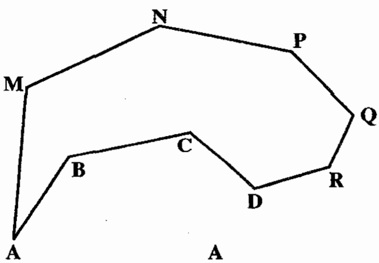


اصل نامساوی مثلثی. هرگاه A، B و C سه نقطهٔ دلخواه باشند، $AC \leq AB + BC$. تساوی مربوط به حالتی است که سه نقطه روی یک خط راست و نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C باشند.

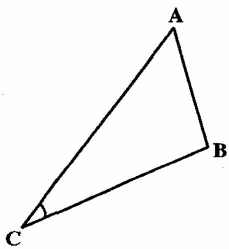


۱۳۲. **قضیه.** در هر مثلث هر زاویهٔ خارجی از هر زاویهٔ داخلی غیر مجاور آن بزرگتر است.

۱۳۳. **قضیه.** اندازهٔ هر پاره‌خط راست، از اندازهٔ هر خط شکستهٔ محدب یا مقعری که بر آن پاره‌خط محیط باشد، کوچکتر است.

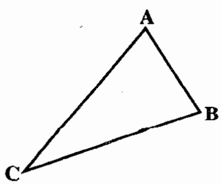


۱۳۴. **قضیه.** اندازهٔ هر خط شکستهٔ محدب از اندازهٔ هر خط شکستهٔ محدب یا مقعری که بر آن محیط باشد، کوچکتر است.



۱۳۵. **قضیه.** اگردرمثلثی دو ضلع نابرابرباشند، زاویهٔ رو به رو به ضلع بزرگتر، از زاویهٔ رو به رو به ضلع کوچکتر، بزرگتر است. یعنی در مثلث ABC :

$$AC > AB \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

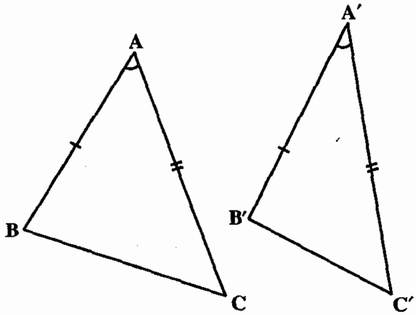


۱۳۶. **قضیهٔ عکس.** اگر در مثلثی دو زاویهٔ نابرابر باشند، ضلع رو به روی زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از ضلع رو به روی زاویهٔ کوچکتر. یعنی در مثلث ABC :

$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

۱۳۷. **قضیه.** درهر مثلث ، هرضلع از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. یعنی اگر اندازه‌های ضلعهای مثلث را a، b و c بنامیم، $a > |b-c|$، $b > |a-c|$ و $c > |a-b|$ است.

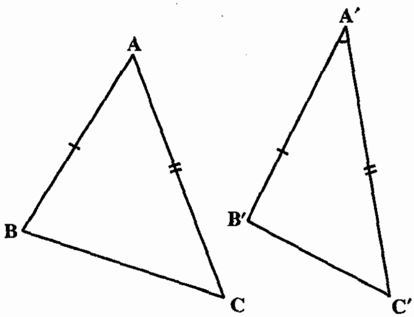
۱۳۸. قضیهٔ وجود مثلث. سه عدد حقیقی a، b و c داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آن‌گاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن a، b و c هستند.



۱۳۹. قضیهٔ لولا یا قضیهٔ قیچی. هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند اما زاویه‌های بین آن ضلعها در دو مثلث متساوی نباشند، مثلثی که آن زاویه‌اش بزرگتر باشد، ضلع سومش هم بزرگتر است.

یعنی: در دو مثلث ABC و A′B′C′

$$\Delta ABC, \Delta A'B'C': \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \Rightarrow BC > B'C' \\ \hat{A} > \hat{A}' \end{cases}$$



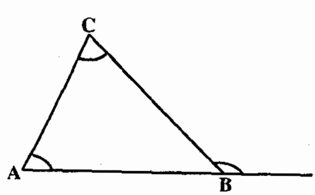
۱۴۰. عکس قضیهٔ لولا. هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، اما ضلع سوم آنها متساوی نباشند، مثلثی که ضلع سومش بزرگتر است، زاویهٔ مقابل به ضلع سومش هم بزرگتر است. یعنی:

$$\Delta ABC \ , \Delta A'B'C': \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \ \Rightarrow \hat{A} > \hat{A}' \\ BC > B'C' \end{cases}$$

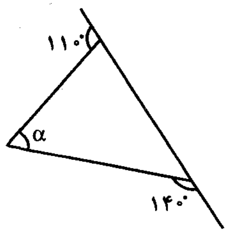
۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویهٔ مثلث داده شده



۱۴۱. زاویهٔ خارجی B از مثلث ABC برابر ۱۴۵°, ۴۵′ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} =$ ۶۴°, ۳۵′ است. اندازهٔ زاویهٔ C را پیدا کنید.



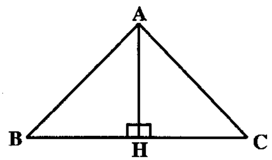
۱۴۲. در شکل رو به رو، اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟

الف) 50° ب) 60° ج) 70°

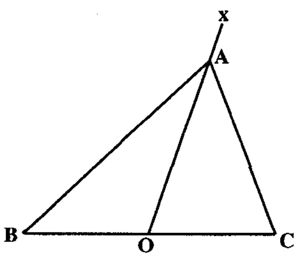
د) 80° هـ) 90°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۱۴۳. ثابت کنید که در هر مثلث مختلف‌الاضلاع دست کم یک زاویهٔ کوچکتر از 60° و لااقل یک زاویهٔ بزرگتر از 60° وجود دارد.



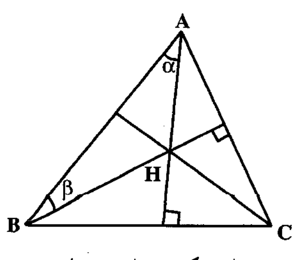
۱۴۴. در مثلث ABC فرض می‌کنیم ارتفاع AH مساوی نصف ضلع BC باشد، ثابت کنید زاویهٔ A از این مثلث، حاده یا حداکثر قائمه است.



۱۴۵. از نقطهٔ O وسط پاره خط BC نیمخط Ox را رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ A را اختیار می‌نماییم. ثابت کنید بنابر آن که OA مساوی، بزرگتر یا کوچکتر از $\frac{BC}{2}$ باشد، زاویهٔ A در مثلث ABC، قائمه ،حاده یا منفرجه است.

۱۴۶. اندازهٔ یک زاویهٔ مثلثی از زاویهٔ دوم ۲۵ واحد بیشتر است و اندازهٔ زاویهٔ سوم ۹ واحد کمتر از دو برابر زاویهٔ دوم است. اندازهٔ هر یک از سه زاویهٔ مثلث را بیابید.

۱۴۷. زاویه های مثلثی بر حسب درجه اعداد صحیح بوده و در رابطهٔ $\frac{\hat{A}}{5}+\frac{\hat{B}}{8}+\frac{\hat{C}}{13}=21$ صدق می‌کنند. این زاویه‌ها را محاسبه کنید.



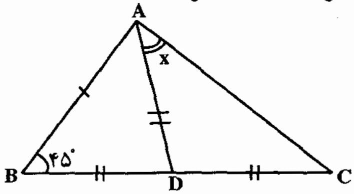
۱۴۸. فرض کنید H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. اندازهٔ زاویه‌های داخلی مثلث ABC را، اگر $B\hat{A}H=\alpha$ و $A\hat{B}H=\beta$ ، پیدا کنید.

۱۴۹. پنج پاره خط راست چنانند که، با هر سه تای آنها، می‌توان یک مثلث ساخت. ثابت کنید، دست کم یکی از این مثلثها، زاویه‌هایی حاده دارد.

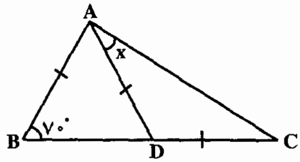
المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۰

۲.۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه در مثلثها و شکلهای دیگر

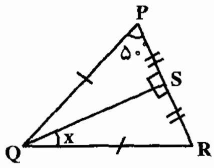
۱۵۰. در شکل، $AB = BD$ و $AD = DC$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$ است. اندازهٔ x را بیابید.



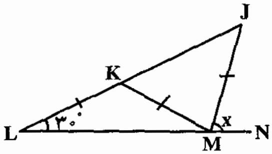
۱۵۱. در هر یک از شکلهای زیر، مقدار x را تعیین کنید. ضلعهای مشخص شده با علامتهای نظیر هم، با هم برابرند.



(الف)

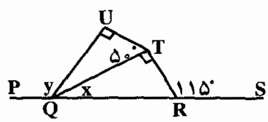


(ب)

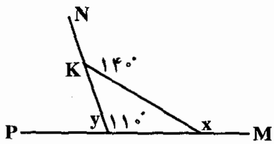


(پ)

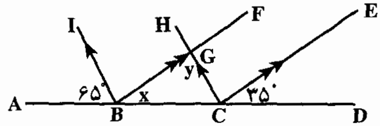
۱۵۲. در هر یک از شکلهای زیر، مقدارهای x و y را پیدا کنید.



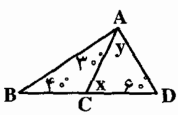
(الف)



(ب)



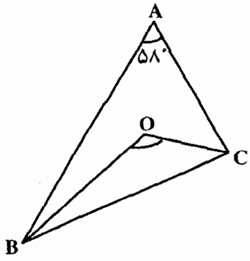
(پ)



(ت)

۱۵۳. زاویه‌ای که یک ضلع مثلث با ضلع متناظر مثلث پادک (مثلث ارتفاعی) می‌سازد، برابر است با تفاضل زاویه‌های مجاور آن ضلع در مثلث مفروض.

۱۵۴. در مثلث ABC ، $\hat{A} = ۵۸^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های درونی B و C را بیابید.

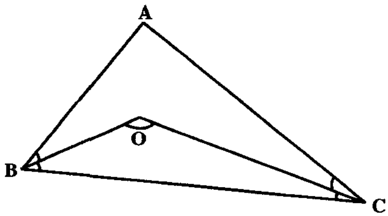


۱۵۵. در مثلث abc دو زاویهٔ cab و abc بترتیب 72° و 46° هستند. نیمسازهای این دو زاویه در s برخورد می کنند. اندازهٔ زاویهٔ asb چند درجه است؟

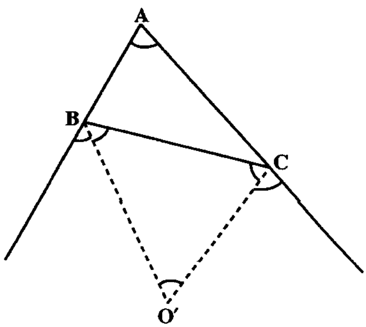
الف) 118° ب) 119° ج) 120° د) 121° هـ) 124°

المپیادهای ریاضی بلژیک ، ۱۹۸۵

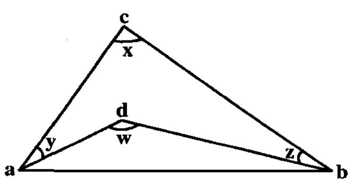
۱۵۶. ثابت کنید در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C مساوی است با $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ (به طور کلی در هر مثلث اندازهٔ زاویهٔ منفرجه بین نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی برابر است با 90° به اضافهٔ نصف اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث).



۱۵۷. در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C برابر است با $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ (به طور کلی در هر مثلث اندازهٔ زاویهٔ حاده بین نیمسازهای دو زاویهٔ برونی، برابر است با 90° منهای نصف اندازهٔ زاویهٔ سوم).



۱۵۸. در شکل رو به رو ، d نقطه‌ای دلخواه در داخل مثلث abc، و x و y و z و w، اندازه‌های زاویه‌های نموده شده بر حسب درجه هستند. مقدار x بر حسب y و z و w برابر است با :

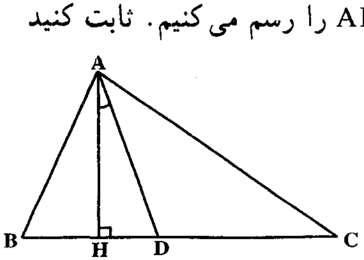


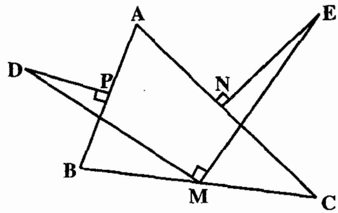
الف) $w-y-z$ ب) $w-2y-2z$ ج) $180-w-y-z$

د) $2w-y-z$ هـ) $180-w-y+z$

المپیادهای ریاضی بلژیک ، ۱۹۸۷

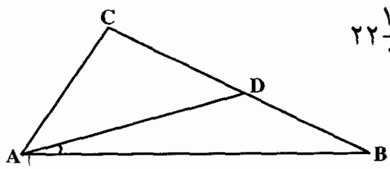
۱۵۹. در مثلث ABC ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می کنیم. ثابت کنید $H\hat{A}D = \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}$. (به طور کلی در هر مثلث اندازهٔ زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز زاویهٔ داخلی نظیر یک رأس، مساوی نصف قدرمطلق تفاضل اندازه‌های دو زاویهٔ دیگر مثلث است).





۱۶۰. در مثلث ABC نقطه‌های M ، N و P وسطهای ضلعهای BC ، AC و AB می‌باشند. از نقطهٔ N عمودی بر AC درخارج مثلث اخراج می کنیم و روی آن طول $NE = \frac{AC}{۲}$ را جدا می نماییم، همچنین از نقطهٔ P عمودی بر AB در خارج مثلث اخراج نموده، روی آن طول $PD = \frac{AB}{۲}$ را جدا می کنیم. ثابت کنید $D\hat{M}E = ۹۰^\circ$ است.

۱۶۱. در مثلث ABC، $AC = CD$ و $C\hat{A}B - A\hat{B}C = ۳۰^\circ$. در این صورت اندازهٔ زاویهٔ BAD برابر است با :

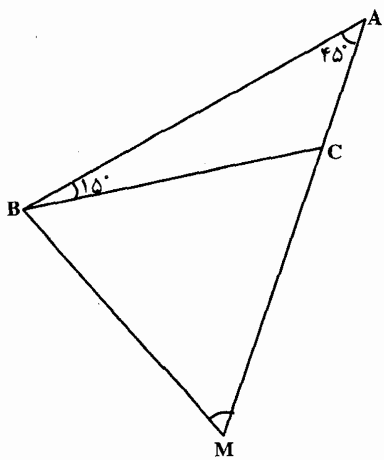


الف) ۳۰°　　ب) ۲۰°　　ج) $۲۲\frac{۱^\circ}{۲}$

د) ۱۰°　　هـ) ۱۵°

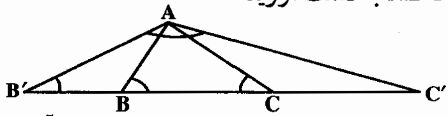
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا ، ۱۹۵۷

۱۶۲.در مثلث ABC : $\hat{A} = ۴۵^\circ$ و $\hat{B} = ۱۵^\circ$. بر امتداد ضلع AC، از طرف نقطهٔ C ، نقطهٔ M طوری اختیار می‌شود که $CM = ۲AC$. $A\hat{M}B$ را پیدا کنید.



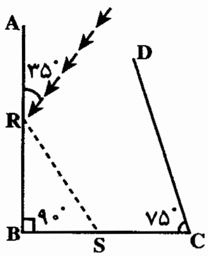
۱۶۳.در مثلث ABC ، $\hat{B} = ۷۰^\circ$ و $\hat{C} = ۵۰^\circ$. نقطهٔ M روی ضلع AB، به طوری که $M\hat{C}B = ۴۰^\circ$ ، و نقطهٔ N بر ضلع AC، به‌طوری که $N\hat{B}C = ۵۰^\circ$ ، اختیار می‌شود. $N\hat{M}C$ را پیدا کنید.

۱۶۴. مثلث ABC داده شده است. ضلع BC را از طرفین B و C بترتیب به اندازهٔ AB و AC امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های B' و C' به دست آیند. زاویه‌های مثلث $AB'C'$ را برحسب زاویه‌های مثلث ABC به دست آورید.



۱۶۵. زاویه‌ای که نیمساز خارجی هر زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد برابر است با نصف تفاضل دو زاویهٔ مجاور به این ضلع.

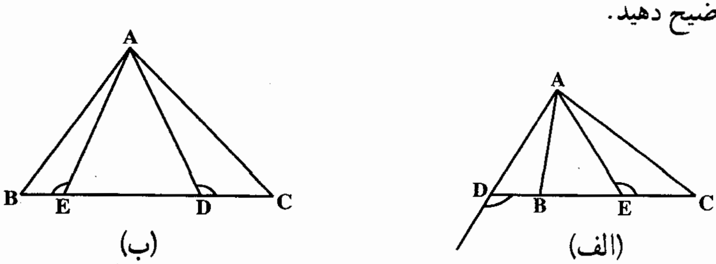
۱۶۶. وقتی شعاع نور از یک سطح تخت باز می‌تابد، زاویهٔ بین شعاع تابش و سطح، همنهشت است با زاویهٔ بین شعاع بازتاب و سطح.
در شکل $A\hat{B}C = 90^\circ$ و $B\hat{C}D = 75^\circ$ و شعاع نور با RA زاویهٔ 35° می‌سازد. مسیر شعاع نور را وقتی از AB، BC، CD و مجدداً از AB باز می‌تابد تکمیل کنید. شعاع نور در بار دوم با چه زاویه‌ای از AB باز می‌تابد؟



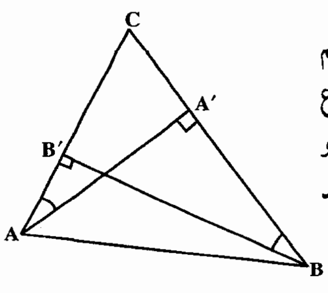
۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

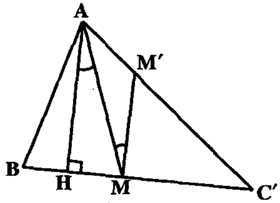
۱۶۷. با توجه به تساوی زاویه‌های مشخص شده در شکل زیر، علت تساوی $A\hat{D}E = A\hat{E}D$ را توضیح دهید.



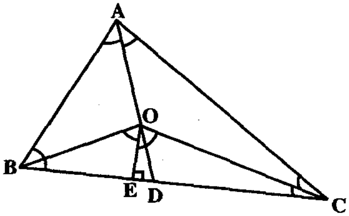
(ب) (الف)



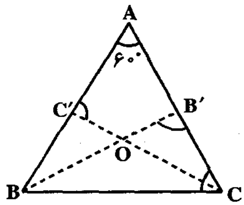
۱۶۸. در مثلث ABC ارتفاعهای AA' و BB' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید $C\hat{A}A' = C\hat{B}B'$. سپس ارتفاع رأس سوم مثلث را رسم کرده، زاویه‌های دو به دو مساوی را که به وسیلهٔ ارتفاعها روی شکل پدید می‌آید، تعیین نمایید.



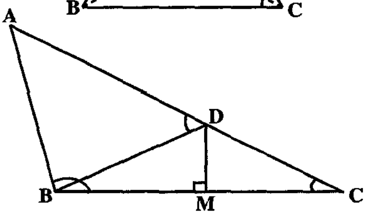
۱۶۹. در هر مثلث، میانهٔ وارد بر هر ضلع، با ارتفاع و عمودمنصف همان ضلع، زاویه‌های متساوی تشکیل می‌دهد.



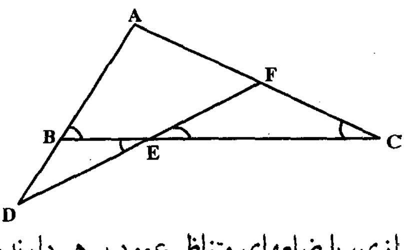
۱۷۰. در مثلث ABC نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث است. اگر نقطهٔ D محل برخورد AO با ضلع BC و OE عمود بر BC باشد، ثابت کنید: $B\hat{O}D = C\hat{O}E$.



۱۷۱. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. نیمسازهای BB' و CC' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که $A\hat{C'}C = B\hat{B'}C$ است.

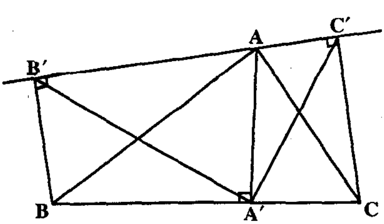


۱۷۲. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۳\hat{C}$، عمودمنصف ضلع BC ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌نماید. ثابت کنید که $A\hat{B}D = A\hat{D}B$ است.

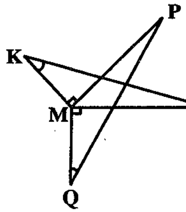


۱۷۳. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{B}$ دو برابر زاویهٔ $\hat{C}$ است. روی ضلع BC نقطه‌ای مانند E اختیار کرده ضلع AB را از طرف B به اندازهٔ طول BD = BE امتداد می‌دهیم و DE را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ F قطع کند. ثابت کنید: $F\hat{E}C = \hat{C}$.

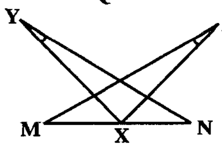
۱۷۴. ثابت کنید دو مثلث که ضلعهای متناظر متوازی، یا ضلعهای متناظر عمود بر هم دارند، زاویه‌هایشان مساوی است.



۱۷۵. مثلث ABC را در نظر گرفته از رأس A خط دلخواهی رسم می‌نماییم به قسمی که در خارج زاویهٔ BAC واقع باشد. تصویرهای نقطه های B و C را روی این خط B' و C' می‌نامیم و ارتفاع AA' مثلث را نیز رسم می‌کنیم. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث $A'B'C'$ با زاویه‌های مثلث ABC نظیر به نظیر برابرند.

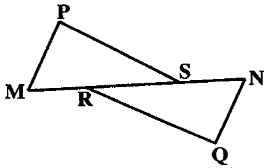


۱۷۶. در شکل، $MK = MQ$ ، $\hat{K} = \hat{Q}$ ، $MK \perp PM$ ، و $LM = MQ$ ، ثابت کنید $\hat{L} \cong \hat{P}$.

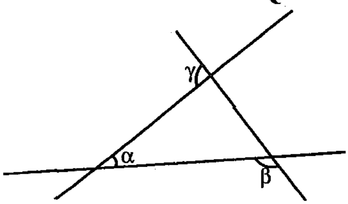


۱۷۷. الف. ثابت کنید اگر در شکل، X وسط پاره خط MN باشد و $MZ = NY$ و $XZ = XY$ ، آن گاه $\hat{Y} = \hat{Z}$.

ب. در شکل، M ، N ، X ، Y و Z همصفحه‌اند، X وسط MN است، $\hat{M} = \hat{N}$ و $M\hat{X}Y = N\hat{X}Z$. ثابت کنید $\hat{Y} = \hat{Z}$.



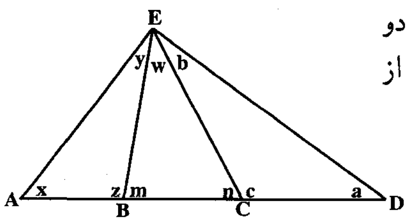
۱۷۸. در شکل، $PM = QN$ ، $PS = QR$ ، $MR = NS$. ثابت کنید $P\hat{S}N = Q\hat{R}M$.



۱۷۹. در شکل رو به رو، α و β و γ اندازه‌های زاویه‌ها برحسب درجه‌اند. مقدار $\beta + \gamma - \alpha$ برابر است با :

الف) $210°$ ب) $180°$ ج) $150°$ د) $200°$ هـ) $120°$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

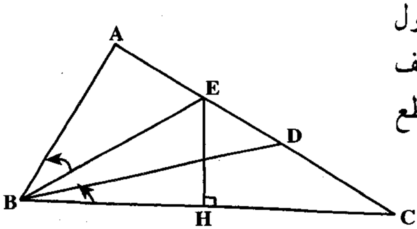


۱۸۰. در مثلث غیر مشخص ADE (مطابق شکل)، دو خط EB و EC رسم شده‌اند. کدام یک از رابطه‌های زیر بین زاویه‌ها صحیح است؟

الف) $x + z = a + b$ ب) $y + z = a + b$ ج) $m + x = w + n$

د) $x + z + n = w + c + m$ هـ) $x + y + n = a + b + m$

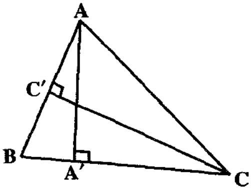
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸



۱۸۱. در مثلث ABC روی ضلع AC ، طول $AD = AB$ را جدا می کنیم. عمود منصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می کند. ثابت کنید : $A\hat{B}E = 2D\hat{B}C$.

۱۸۲. اگر E و F پای ارتفاعهای وارد بر ضلعهای AC و AB و 'B و 'C وسطهای این ضلعها باشند، ثابت کنید زاویه‌ای که توسط دوخط C′E و B′F ساخته می‌شود برابر ۳A یا مکمل آن است.

۱۸۳. در مثلث ABC ارتفاع 'CC ارتفاع 'AA را نصف کرده است. ثابت کنید $\operatorname{tg}\hat{B}.\operatorname{tg}\hat{C}=۲$ است.



۱۸۴. ثابت کنید، در هر مثلث مستقیم‌الخط، مجموع زاویه‌های داخلی، نمی‌تواند از ۲d بیشتر باشد ($d=۹۰^\circ$) ؛ ضمناً، برای اثبات، از اصل موضوع توازی یا نتیجه‌های آن (یعنی، معادلهای اصل موضوع توازی)، استفاده نکنید.

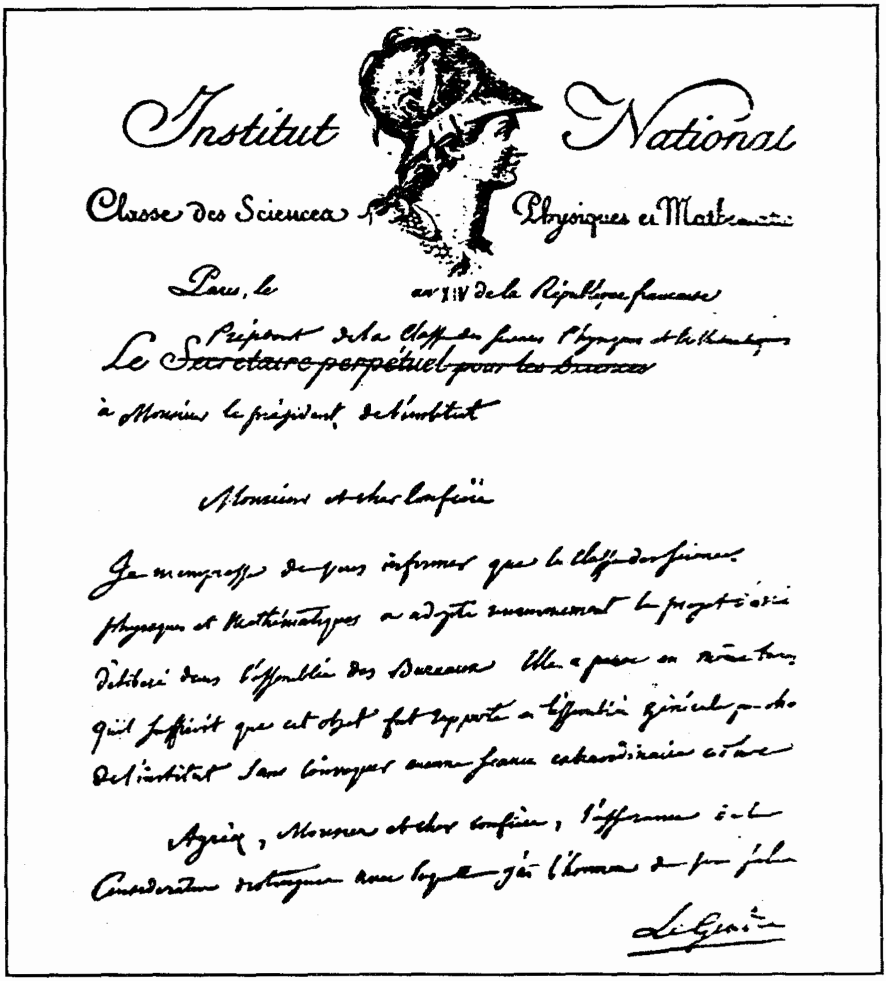
از لژاندر، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

لژاندر

آدرین ماری لژاندر

سومین عضو گروه سه نفری که لاگرانژ و لاپلاس دو عضو دیگرش بودند، آدرین ماری لژاندر بود A.M.Legendre(متولد ۱۸ سپتامبر ۱۷۵۲ در تولوز، متوفی ۱۰ ژانویهٔ ۱۸۳۳ در پاریس). او در مدرسهٔ مازارن پاریس تحصیل کرد و در آن جا نخستین علاقهٔ خود را به ریاضیات نشان داد و با کمک معلمش آبه ماری (J.F.Marie ۱۷۳۸ـ۱۸۰۱) و دالامبر، استاد ریاضیات مدرسهٔ نظامی پاریس (۱۷۷۵) شد، و در سال ۱۷۸۰ از آن کناره گرفت. دو سال بعد (۱۷۸۲)، جایزهٔ فرهنگستان علوم برلین را به خاطر مقاله‌اش در زمینهٔ مسیر گلوله به‌دست آورد. او در ریاضیات مقدماتی بیشتر به خاطر کتاب هندسه‌اش معروف است، زیرا این کتاب در کشورهای مختلف مورد تقلید عمومی قرار گرفت و از جملهٔ بهترین کتابهای درسی است که در این زمینه تاکنون نوشته شده. لژاندر در این کتاب سعی کرده قضیه‌های اقلیدس را از نو تنظیم، قضایا را از مسأله‌ها جدا، و برهانها را ساده‌تر سازد، بی آن که، چیزی از صراحت شیوه‌های اثبات کهن بکاهد. ترک تدریس اصول اقلیدس در مدارس آمریکا ناشی از تأثیر لژاندر است. لژاندر در ریاضیات عالی به خاطر کارهایش در زمینهٔ علم عدد و توابع بیضوی معروف است. همچنین به خاطر رسالاتش راجع به حساب انتگرال و دیفرانسیل،

هندسهٔ عالی، مکانیک، نجوم و فیزیک شهرت دارد. نخستین اثبات قانع کنندهٔ روش کوچکترین مجذور را بدو مدیونیم، هر چند گوس قبلاً این روش را کشف کرده بود. قانون تقابل درجهٔ دوم، که گوس آن را «زینت حساب» می‌خواند، در کتاب علم عدد لژاندر پدیدار شد. رسالهٔ در باب توابع بیضوی تقریباً همزمان با آثار آبل و یاکوبی در این زمینه انتشار یافت؛ و هر چند لژاندر سی سال بر سر آن کار کرده بود، برتری اظهارات این افراد جوان، و فروتری روش خود را پذیرفت. لژاندر از آن جا که نتوانست تقاضاهای خود را به دولت بقبولاند، از عضویت فرهنگستان کناره گرفت و روزهای آخر عمرش در فقر سپری شد. نامه‌های او در این دوره به خوبی نشان می‌دهد از این که مردم حسن نیت و قدرت فکر او را درک نکرده‌اند، چه قدر دلشکسته است.


Institut National

Classe des Sciences Physiques et Mathématiques

Paris, le an XIV de la République française

Président de la Classe des Sciences Physiques et Mathématiques

Le ~~Secrétaire perpétuel pour les Sciences~~

à Monsieur le président de l'Institut

Monsieur et cher Confrère

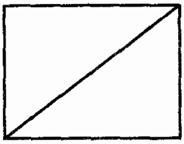
Le Gendre

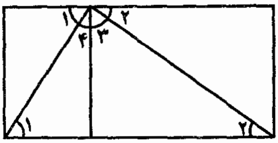
نامه‌ای به خط لژاندر

در برخی نامه‌ها مانند این یکی، نام او به‌صورت Le Gendre و در بقیه به‌صورت Legendre دیده می‌شود.

۱۸۵.دومین قضیهٔ معروف فیثاغورس*

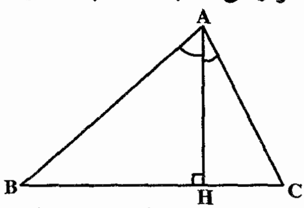
دومین قضیهٔ هندسی که به فیثاغورس نسبت می‌دهند (و در میان قضیه‌های هندسه اهمیت خاصی دارد) ، قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های مثلث است، که این مجموع برابر است با ۲ زاویهٔ قائمه.



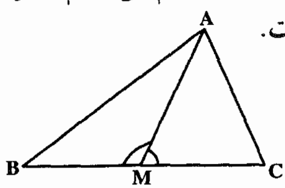


۴.۱.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

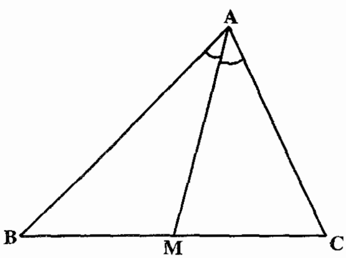
۱۸۶. درمثلث ABC اگر $AB > AC$ و AH ارتفاع نظیر رأس A باشد، ثابت کنید : $H\hat{A}B > H\hat{A}C$. به طور کلی : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ای که ارتفاع وارد بر ضلع سوم با ضلع بزرگتر می‌سازد، بزرگتر است از زاویه‌ای که این ارتفاع با ضلع کوچکتر می سازد.



۱۸۷. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم می کنیم. اگر $AB > AC$ باشد، ثابت کنید که $A\hat{M}B > A\hat{M}C$ است.

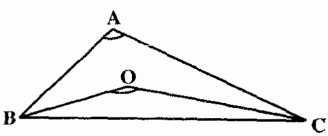


۱۸۸. در مثلث ABC اگر $AB > AC$ و AM میانهٔ نظیر رأس A باشد، ثابت کنید که $M\hat{A}B < M\hat{A}C$ است.به طور کلی : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌ای که میانهٔ نظیر ضلع سوم با ضلع بزرگتر می‌سازد، کوچکتر است از زاویه‌ای که این میانه با ضلع کوچکتر ایجاد می کند.



۱۸۹. در مثلثی، یک میانه، یک نیمساز و یک ارتفاع از رأس A خارج شده‌اند. زاویهٔ A داده شده است، معلوم کنید کدام یک از این زاویه ها بزرگتر است : زاویهٔ بین میانه و نیمساز یا زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع.

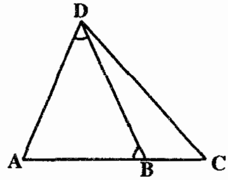
۱۹۰. هرگاه از نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC به رأسهای B و C وصل کنیم، ثابت کنید که $B\hat{O}C > B\hat{A}C$.



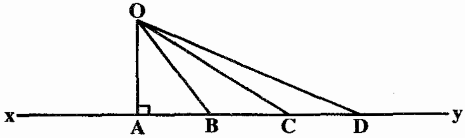
---

* سرگذشت فیثاغورس در جلدهای دیگر دایرةالمعارف خواهد آمد.

۱۹۱. در ΔACD داریم $AC = DC$ و $AD = DB$. ثابت کنید $A\hat{B}D > A\hat{D}B$.



۱۹۲. از نقطهٔ O واقع در خارج خط xy عمود OA و مایلهای OB و OC و OD را که همگی در یک طرف OA واقعند رسم می‌کنیم به قسمی که ... = $AB = BC = CD$ باشد، ثابت کنید که:



$$A\hat{O}B > B\hat{O}C > C\hat{O}D > \ldots$$

۴ . ۱ . ۳. ضلع

۴ . ۱ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۱۹۳. دو ضلع مثلثی برابر ۲ و ۹ است. ضلع سوم مثلث که ضلع بزرگتر نیز هست، با کدام عددهای صحیح بیان می‌شود؟

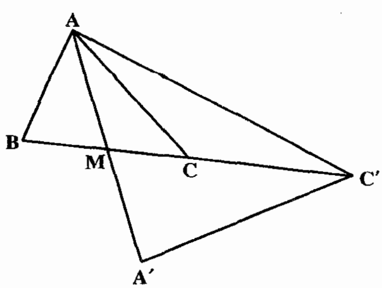
۱۹۴. یک ضلع مثلثی برابر ۶ سانتی‌متر و مجموع دو ضلع دیگر که عددهای صحیحند کوچکتر از ۱۰ و تفاضل آن دو ضلع یک سانتی‌متر است. طول آن دو ضلع را تعیین کنید.

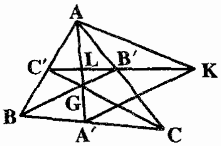
۱۹۵. اگر ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ باشد، قاعدهٔ آن را حساب کنید.

۱۹۶. ارتفاع مثلثی نصف قاعدهٔ آن است. اگر مساحت این مثلث ۳۶ مترمربع باشد، اندازهٔ قاعدهٔ آن را بیابید.

۱۹۷. در مثلث ABC، $h_a = x - ۵$ ، $a = ۲x - ۲$ و $S = x^۲ - ۵۵$ است. اندازهٔ یک ضلع را بیابید.

۱۹۸. در مثلث ABC میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم. سپس ضلع BC را از طرف C به اندازهٔ $CC' = BC$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید ضلعهای مثلث $AA'C'$ دو برابر میانه‌های مثلث ABC است.





۱۹۹. با میانه‌های یک مثلث، مثلث جدیدی رسم می‌کنیم. ثابت کنید که میانه‌های این مثلث $\frac{۳}{۴}$ ضلعهای متناظر مثلث اوّلی هستند.

۲۰۰. سه پاره‌خط با طولهای ۶x، x + ۷، ۴(x − ۱) داده شده‌اند. اگر مجموع این طولها ۳۶ باشد، آیا این پاره‌خطها می‌توانند ضلعهای یک مثلث باشند؟ توضیح دهید.

۲.۳.۱.۴. حدود ضلع

۲۰۱. دو ضلع مثلثی برابر ۷ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر می‌باشند، اندازهٔ ضلع سوم مثلث چه حدودی می‌تواند داشته باشد؟

۲۰۲. در مثلثی، یک ضلع به‌اندازهٔ ۴ و ضلع دیگر به اندازهٔ ۳ است. لازم می‌آید که اندازهٔ ضلع سوم،

الف) ۵ باشد. ب) عددی صحیح باشد. ج) عددی بین ۳ و ۴ باشد.
د) بیشتر از ۴ باشد. هـ) کوچکتر از ۷ باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

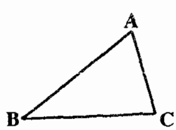
۲۰۳. سه نقطهٔ a، b و c در یک صفحه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که پاره‌خط [ab] به طول ۱۰ سانتی‌متر و پاره‌خط [bc] به طول ۶ سانتی‌متر است. به‌ازای همهٔ وضعهایی که این سه نقطه می‌توانند داشته باشند،

الف) پاره‌خط [ac] به طول ۱۶ سانتی‌متر است.
ب) پاره‌خط [ac] طولی کمتر از ۱۶ سانتی‌متر دارد.
ج) پاره‌خط [ac] طولی بیشتر از ۱۶ سانتی‌متر دارد.
د) نقطهٔ c به نقطهٔ b نزدیکتر است تا به نقطهٔ a.

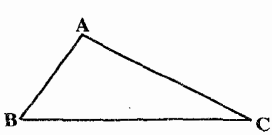
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۲۰۴. در مثلث ABC ضلع $b = ۱۵cm$ و ضلع $c = ۸cm$ می‌باشد، حدود a را طوری تعیین کنید که:

۱. زاویهٔ A منفرجه باشد.
۲. زاویهٔ A حاده باشد.



۲۰۵. ثابت کنید در هر مثلث هر ضلع از نصف محیط مثلث کوچکتر است.



۲۰۶. ثابت کنید در هر مثلث، بزرگترین ضلع از ثلث محیط، بزرگتر و کوچکترین ضلع از ثلث محیط، کوچکتر است.

۲۰۷. نقطه‌های D، E و F، به‌ترتیب، روی ضلعهای AB، BC و CA (و نه روی رأسها) از مثلث ABC داده شده‌اند. بزرگترین ضلعهای مثلثهای DEF، ADF، BDE و CEF را، به‌ترتیب با طولهای $d_۰$، $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ می‌گیریم. ثابت کنید:

$$d_۰ \geq \frac{\sqrt{۳}}{۲} Min(d_۱, d_۲, d_۳)$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۸۳

۳.۳.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۰۸. سه میلهٔ چوبی، هر کدام به‌طول یک متر، به رنگ‌های قرمز، سبز و آبی وجود دارد. کولیا دو میله را، هر کدام، به سه بخش تقسیم کرد؛ سپس واسیا میلهٔ سوم را به سه بخش تقسیم کرد. آیا کولیا می‌تواند، میله‌های اوّل و دوم را طوری تقسیم کند که، بدون بستگی به نوع تقسیم میلهٔ سوم به وسیلهٔ واسیا، بتوان از ۹ تکه موجود، سه مثلث ساخت، به نحوی که ضلعهای هر مثلث با سه رنگ مختلف باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۲۰۹. از میان مجموعهٔ داده‌های زیر تنها یک مورد است که شکل یک مثلث را مشخص نمی‌کند، آن مورد کدام است؟

الف) نسبت دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع

ب) نسبتهای سه ارتفاع　　　ج) نسبتهای سه میانه

د) نسبت ارتفاع به قاعدهٔ متناظر　　　هـ) دو زاویه

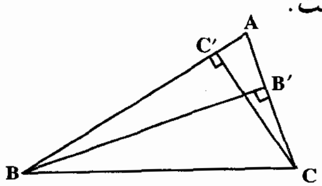
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۲۱۰. حدود m را به قسمی تعیین کنید که مقدارهای $۲m-۳$ و $۴-m$ و ۳، ضلعهای یک مثلث باشند.

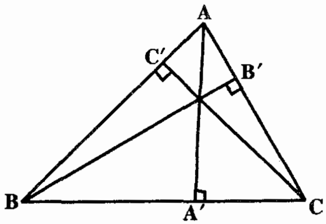
۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴. ارتفاع

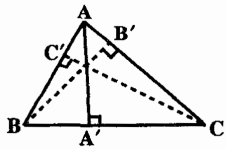
۲۱۱. ارتفاعهای BB' و CC' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. در صورتی که $AB > AC$ باشد، ثابت کنید $BB' > CC'$ است.



۲۱۲. ثابت کنید که در هر مثلث ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع کوتاهترین ارتفاع مثلث است.

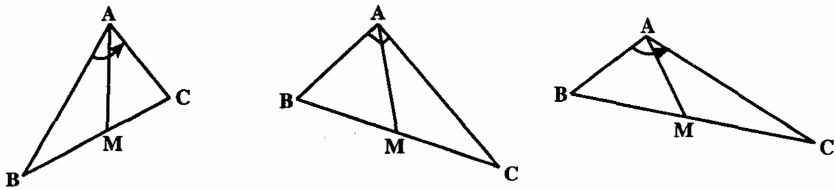


۲۱۳. ثابت کنید مجموع اندازه‌های سه ارتفاع هر مثلث از محیط مثلث کوچکتر است.



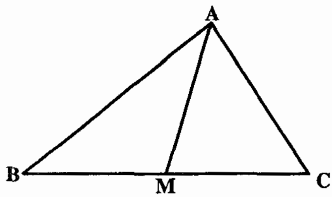
۲.۴.۱.۴. میانه

۲۱۴. برحسب آن که زاویهٔ A از مثلثی، منفرجه یا قائمه یا حاده باشد، میانهٔ وارد بر ضلع a : از $\frac{a}{۲}$ کوچکتر، با $\frac{a}{۲}$ مساوی یا از $\frac{a}{۲}$ بزرگتر است.

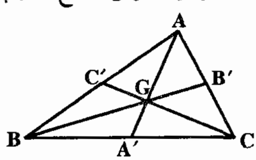


۲۱۵. میانهٔ AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم، ثابت کنید :

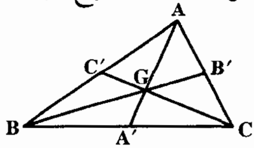
$$\frac{AB+AC-BC}{۲}<AM<\frac{AB+AC}{۲}$$



۲۱۶. ثابت کنید در هر مثلث میانهٔ نظیر بزرگترین ضلع، کوچکترین میانه است.

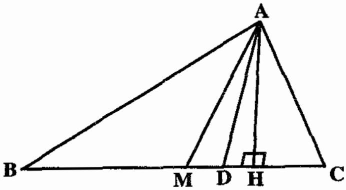


۲۱۷. ثابت کنید که در هر مثلث، هر میانه از مجموع دو میانهٔ دیگر کوچکتر است.

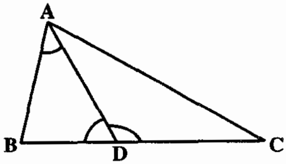


۲۱۸. ثابت کنید مجموع سه میانهٔ هر مثلث از $\frac{۳}{۴}$ مجموع سه ضلع آن بزرگتر و از $\frac{۳}{۲}$ مجموع سه ضلع کوچکتر است.

۳.۴.۱.۴. نیمساز



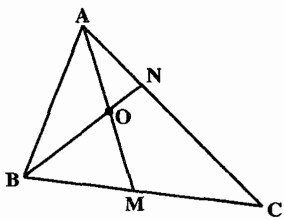
۲۱۹. ثابت کنید که در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ درونی، کوتاهتر است از میانهٔ وارد بر ضلع مقابل به آن زاویه.



۲۲۰. نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC ضلع مقابل را در نقطهٔ D قطع می کند. ثابت کنید که $AB > BD$ و $AC > CD$ است.

۵.۱.۴. پاره‌خط

۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط



۲۲۱. در مثلث ABC رأس B را به نقطهٔ O وسط میانهٔ AM وصل می کنیم و نقطهٔ تقاطع امتداد BO با ضلع AC را N می‌نامیم. ثابت کنید: $AN = \frac{۱}{۳}AC$ و $ON = \frac{۱}{۴}BN$.

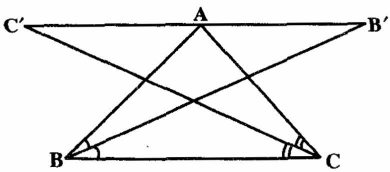
۲۲۲. در ΔABC نقطهٔ M وسط ضلع BC، خط AN نیمساز زاویهٔ BAC و $BN \perp AN$ و اندازهٔ $B\hat{A}C$ برابر θ است. اگر طول ضلعهای AB و AC بترتیب ۱۴ و ۱۹ باشد، طول MN برابر است با:

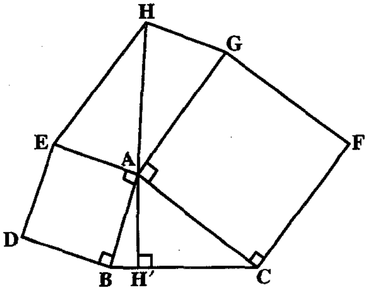
الف) ۲   ب) $\frac{۵}{۲}$ ج) $\frac{۵}{۲} - \sin\theta$

د) $\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin\theta$ هـ) $\frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲}\sin\frac{\theta}{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۲۲۳. از رأس A خطی موازی ضلع BC در مثلث ABC رسم می کنیم تا نیمسازهای زوایه‌های داخلی B و C را به ترتیب در B' و C' قطع کند. ثابت کنید: $B'C' = AB + AC$.





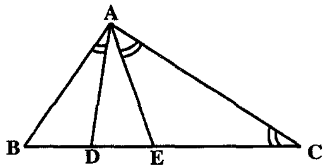
۲۲۴. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن دو مربع ABDE و ACFG و سپس متوازی‌الاضلاع AEHG را بنا می‌کنیم. ثابت کنید:

۱ـ $AH = a$ است.

۲ـ AH بر BC عمود است.

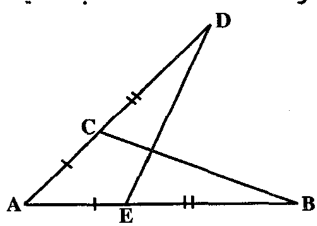
۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)



۲۲۵. در مثلث ABC دو خط AD و AE را چنان رسم می‌کنیم که بترتیب با AB و AC زاویه‌های مساوی C و B بسازند و ضلع مقابل را در D و E قطع نمایند. ثابت کنید $AD = AE$ است.

۲۲۶. در شکل، $AC = AE$ و $CD = EB$ است. ثابت کنید $BC = DE$.



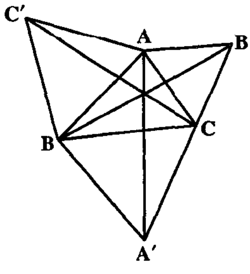
۲۲۷. نقطهٔ P را در درون مثلث ABC و نقطه‌های M و L را، بترتیب بر ضلعهای AC و BC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

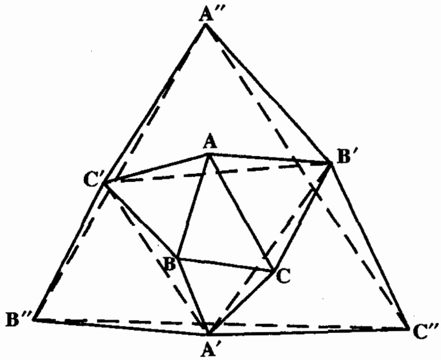
$$P\hat{A}C = P\hat{B}C\ ;\ \ P\hat{L}C = P\hat{M}C = ۹۰^\circ$$

ثابت کنید، اگر D وسط ضلع AB باشد، داریم: $DM = DL$.

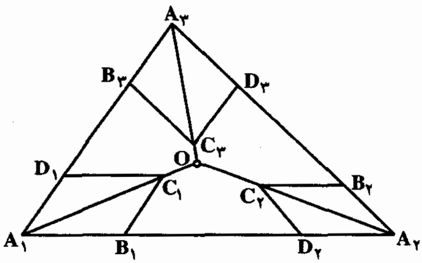
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف،یوگسلاوی، ۱۹۸۳

۲۲۸. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC' و BCA' و ACB' را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA' = BB' = CC'$.





۲۲۹. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع $A'BC$ و $B'CA$ و $C'AB$ را بنا می‌کنیم و روی ضلعهای مثلث $A'B'C'$ به همین ترتیب سه مثلث متساوی‌الاضلاع $A''B'C'$ و $B''A'C'$ و $C''A'B'$ را می‌سازیم. ثابت کنید که نقطه‌های A و B و C وسطهای پاره‌خطهای $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ می‌باشند.

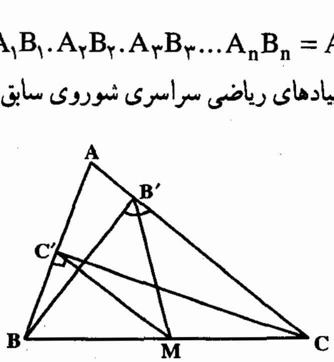


۲۳۰. a) مثلث $A_1A_2A_3$ داده‌شده است. نقطه‌های B_1 و D_2 را روی ضلع A_1A_2، نقطه‌های B_2 و D_3 را روی ضلع A_2A_3 و نقطه‌های B_3 و D_1 را روی ضلع A_3A_1 طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاعهای $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ و $A_3B_3C_3D_3$ را بسازیم، آن وقت، خطهای راست A_1C_1 و A_2C_2 و A_3C_3 در یک نقطهٔ O به هم برسند. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $A_1B_1 = A_2D_2$ و $A_2B_2 = A_3D_3$، آن وقت داریم: $A_3B_3 = A_1D_1$ (شکل بالا).

b) چند ضلعی محدب $A_1A_2...A_n$ داده شده است. نقطه‌های B_1 و D_2 را روی ضلع A_1A_2، نقطه‌های B_2 و D_3 را روی ضلع A_2A_3، ....، نقطه‌های B_n و D_1 را روی ضلع A_nA_1 طوری انتخاب می‌کنیم که، اگر متوازی‌الاضلاع‌های $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$، ....، $A_nB_nC_nD_n$ را بسازیم، آن وقت، خطهای راست A_1C_1، A_2C_2، A_3C_3، ....، A_nC_n در یک نقطهٔ O به هم برسند. ثابت کنید، برابری زیر، از حاصلضرب طولها، برقرار است:

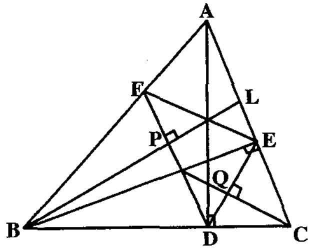
$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 \ldots A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \ldots A_nD_n$$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۱

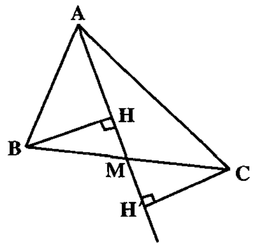


۲۳۱. نقطهٔ M وسط ضلع BC از مثلث ABC را به نقطه‌های B' و C' پای ارتفاعهای رأسهای B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید: $MB' = MC'$.

۲۳۲. اگر P و Q پاهای عمودهایی باشند که از رأسهای B و C از مثلث ABC بترتیب بر ضلعهای DF و DE از مثلث DEF فرود می‌آیند. ثابت کنید EQ = FP ، DEF مثلثی است که رأسهایش پاهای سه ارتفاع AD، BE و CF از مثلث ABC است.



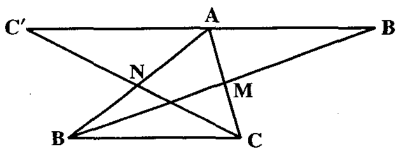
۲۳۳. ثابت کنید که هر دو رأس یک مثلث از میانهٔ نظیر رأس سوم به یک فاصله می‌باشند.



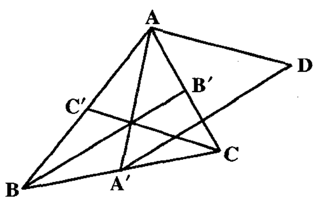
۲۳۴. در مثلث غیرمشخص ABC میانه‌های BM و CN را رسم می‌کنیم و به اندازهٔ خودشان تا نقطه‌های ′B و ′C امتداد می‌دهیم. ثابت کنید :

۱) $AB' = AC'$

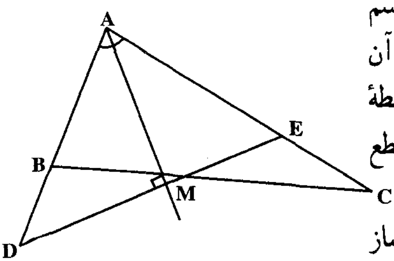
۲) زاویهٔ $B'\hat{A}C'$ یک زاویهٔ نیمصفحه است.



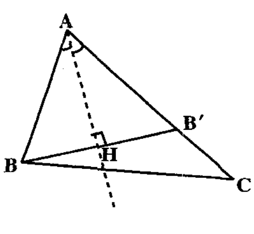
۲۳۵. مثلث ABC را در نظر گرفته، میانه‌های آن ′AA ، ′BB و ′CC را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ ′A پاره‌خط $A'D$ را مساوی و موازی ′BB و در جهت آن رسم کرده و A را به D وصل می‌نماییم. ثابت کنید $AD = CC'$ است.

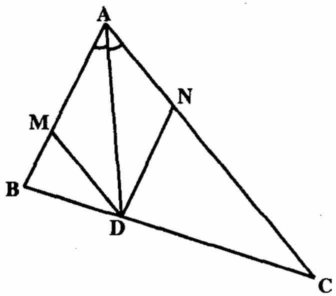


۲۳۶. نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC را رسم نموده از نقطهٔ M وسط ضلع BC عمودی بر آن رسم می‌کنیم تا ضلع AB یا امتداد آن را در نقطهٔ D و ضلع AC یا امتداد آن را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید : $BD = CE$.

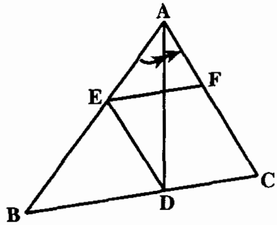


۲۳۷. اگر در مثلث ABC از نقطهٔ B عمودی بر نیمساز زاویهٔ A رسم کنیم تا آن را در نقطهٔ H و ضلع AC یا امتداد آن را در نقطهٔ ′B قطع کند، ثابت کنید : $HB = HB'$.

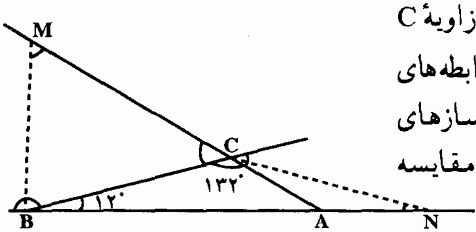




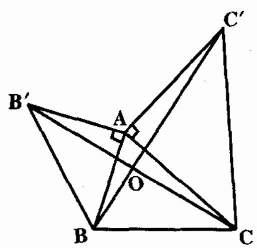
۲۳۸. در هر مثلث اگر از نقطهٔ تقاطع نیمساز یکی از زاویه‌های داخلی مثلث با ضلع مقابل دو پاره‌خط به موازات دو ضلع دیگر مثلث رسم کنیم تا به آنها محدود شوند، ثابت کنید که این دو پاره‌خط متساویند.



۲۳۹. نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و از D خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ E قطع کند، سپس از E خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در F تلاقی نماید. ثابت کنید $AE = FC$ است.

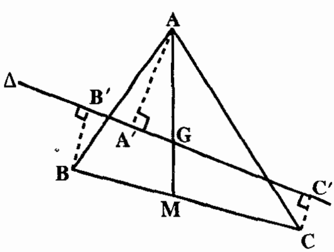


۲۴۰. مسألهٔ بوتما (O.Bottema) : در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۲° و اندازهٔ زاویهٔ C برابر ۱۳۲° است. بدون استفاده از رابطه‌های مثلثاتی، طولهای BM و CN نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را با هم مقایسه کنید.



۲۴۱. در مثلث ABC از A خط AB' را عمود بر AB و برابر آن رسم می‌کنیم و همچنین AC' را عمود بر AC و برابر آن می‌کشیم. ثابت کنید CB' و BC' با هم برابر و بر هم عمودند.

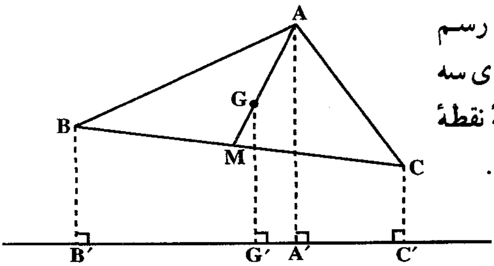
۲۴۲. نیمساز داخلی زاویهٔ B از مثلث ABC ضلعهای $B'C'$ و $B'A'$ از مثلث میانک (میانه‌ای) مثلث ABC را درنقطه‌های A'' و C'' قطع می‌کند. ثابت کنید AA'' و CC'' بر نیمساز عمودند و $B'A'' = B'C''$. مشابه این مطلب را برای نیمساز زاویهٔ خارجی نیز ثابت کنید.



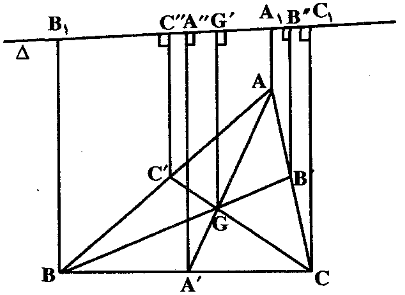
۲۴۳. ثابت کنید اگر خط Δ از نقطهٔ G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC بگذرد به قسمی که رأس A در یک طرف و دو رأس B و C در طرف دیگر Δ باشند، فاصلهٔ رأس A تا خط Δ مساوی مجموع فاصله‌های رأسهای B و C از Δ است. یعنی :

$$AA' = BB' + CC'$$

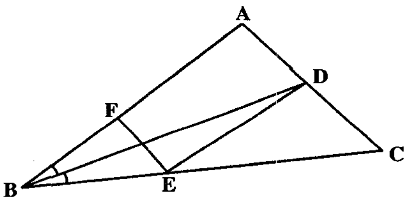
۲۴۴. خط Δ را در خارج مثلث ABC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های سه رأس مثلث از آن خط سه برابر فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث از خط Δ است.



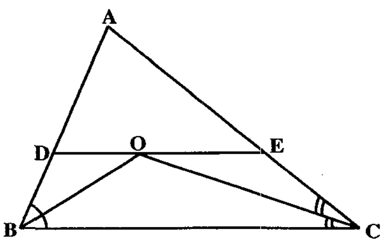
۲۴۵. ثابت کنید مجموع جبری فاصله‌های رأسهای یک مثلث از خطی که در صفحه‌اش رسم شده برابر است با مجموع فاصله‌های وسطهای ضلعهای این مثلث از آن خط.



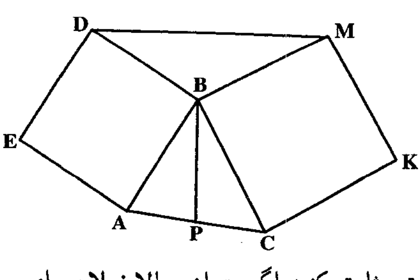
۲۴۶. نیمساز زاویهٔ داخلی B از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ D قطع نماید و از نقطهٔ D خطی به موازات AB می‌کشیم تا BC را در نقطهٔ E قطع کند و از E خطی به موازات AC رسم می‌نماییم تا AB را در نقطهٔ F تلاقی کند. ثابت کنید : $BE + BF = AB$.



۲۴۷. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. از نقطهٔ O خطی موازی BC می‌کشیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D و ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید : $DE = BD + CE$.

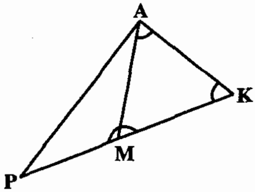


۲۴۸. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC مربعهای ABDE و BCKM را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید که طول پاره‌خط DM دو برابر طول میانه BP از مثلث ABC است.



۲۴۹. مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه Q داده شده است. ثابت کنید اگر متوازی الاضلاعهای QBB_1C و QAA_1B_1 را رسم کنیم، آن گاه قطر QA_1 از متوازی‌الاضلاع QAA_1B_1 از نقطهٔ مرکز ثقل مثلث داده شده، عبور کرده و $QA_1 = ۳QO$ است.

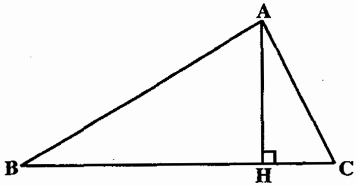
۴.۱.۵.۲.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



۲۵۰. در مثلث PAK، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد.

الف. ثابت کنید اگر $PM = AK$، آن‌گاه $AP > MK$.

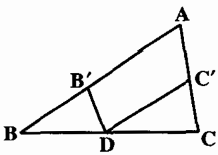
ب. ثابت کنید اگر $AM = AK$، آن‌گاه $AP > AK$.



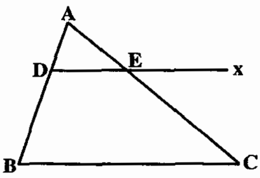
۲۵۱. در مثلث ABC اگر $AB > AC$ باشد، نقطهٔ H پای ارتفاع رأس A به C نزدیکتر است تا به B.

۲۵۲. نقطه‌های D و E بترتیب، وسطهای ضلعهای AB و BC از مثلث ABC هستند. نقطهٔ M روی AC و $|ME| > |EC|$. ثابت کنید: $|MD| < |AD|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴



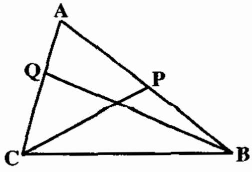
۲۵۳. در مثلث ABC با فرض $AB > AC$ از نقطهٔ D واقع بر ضلع BC خطهای موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در نقطه‌های B' و C' قطع کند. ثابت کنید: $AC < DB' + DC' < AB$.



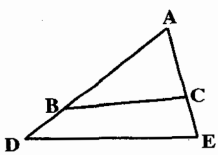
۲۵۴. از نقطهٔ دلخواه D واقع بر ضلع AB از مثلث ABC خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که:

۱. این خط AC را قطع می‌کند.

۲. قطعه خط DE از این خط، که بین دو ضلع AB و AC محصور است، از BC کوچکتر است.



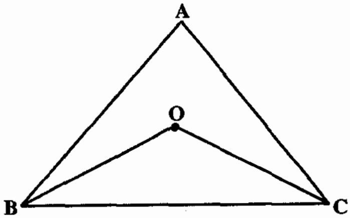
۲۵۵. هرگاه در مثلث ABC، $AB > AC$ باشد و روی ضلعهای AB و AC طولهای BP و CQ را مساوی هم جدا کنیم، ثابت کنید $BQ > CP$ است، اگر BP و CQ را روی امتداد AB و AC جدا کنیم مسأله چه تغییری می‌کند؟



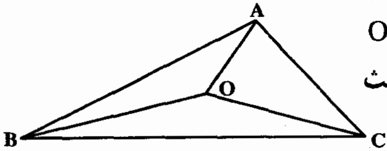
۲۵۶. در مثلث ABC ضلعهای AB و AC را به اندازه‌های مساوی BD و CE $(BD = CE)$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که $DE > BC$ است.

۲۵۷. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC به دو رأس B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید :

$$OB+OC<AB+AC$$

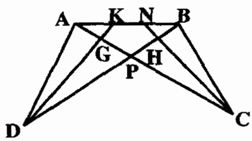


۲۵۸. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC به رأسهای آن وصل می‌کنیم. ثابت کنید $OA+OB+OC$ از محیط مثلث کوچکتر و از نصف محیط مثلث بزرگتر است.

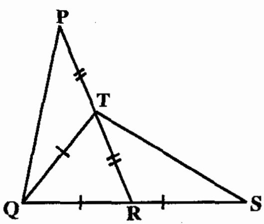


۴ . ۱ . ۵ . ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

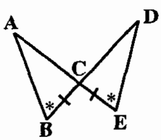
۲۵۹. در شکل روبه‌رو $AD=BC$ ، $AC=BD$ ، $AK=BN$ و $AG=BH$. ثابت کنید $KG=NH$.



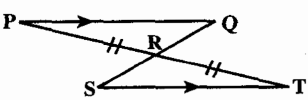
۲۶۰. در شکل روبه‌رو، ثابت کنید $P\hat{T}Q=T\hat{R}S$ و $PQ=TS$. ضلعهای مشخص شده با علامتهای مشابه، با هم برابرند.



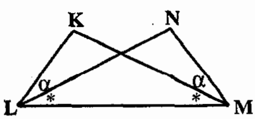
۲۶۱. با توجه به شکل مقابل، چرا $CA=CD$ و $\hat{A}=\hat{D}$ ؟ (زاویه‌ها و ضلعهای مشخص شده با علامتهای مشابه، با هم برابرند.)



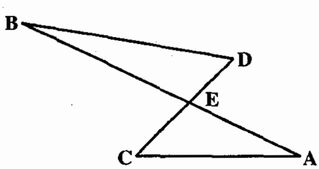
۲۶۲. اگر $PQ\|ST$ و R وسط PT باشد، ثابت کنید R وسط QS نیز هست. (ضلعهای مشخص شده با → با هم موازی‌اند.)

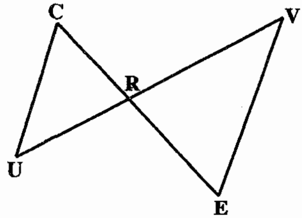


۲۶۳. در شکل مقابل ثابت کنید $KL=NM$. (زاویه‌های مشخص شده با علامتهای مشابه، با هم برابرند.)

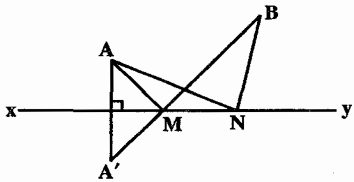


۲۶۴. AB و CD یکدیگر را در E قطع می‌کنند. زاویه‌های $\hat{C}>\hat{A}$ و $\hat{D}>\hat{B}$. ثابت کنید $AB>CD$.

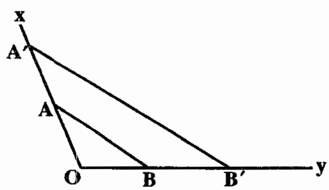




۲۶۵. در شکل مقابل فرض می‌کنیم $CR < UR$ و $RE < RV$. ثابت کنید $CE < UV$.



۲۶۶. خط xy و دو نقطهٔ A و B غیر واقع بر آن داده شده‌اند. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به این خط را A' نامیده از A' به B وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آن با xy را M می‌نامیم. اگر N نقطهٔ دلخواه دیگری از خط xy باشد، ثابت کنید $NA + NB > MA + MB$ است.



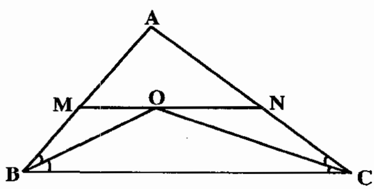
۲۶۷. زاویهٔ قائمه یا منفرجهٔ xOy را در نظر می‌گیریم. روی Ox نقطه‌های A و A' و روی Oy نقطه‌های B و B' را به قسمی انتخاب می‌کنیم که: $OA' > OA$ و $OB' > OB$ باشد، ثابت کنید $A'B' > AB$ است.

۲۶۸. ۵۰ ساعتی که درست کار می‌کنند، روی میز قرار دارند. ثابت کنید، لحظه‌ای وجود دارد که، در آن، مجموع فاصله‌های مرکز میز تا انتهای عقربه‌های دقیقه‌شمار، از مجموع فاصله‌های مرکز میز تا مرکز ساعتها، بیشتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۶

۶.۱.۴. محیط

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ محیط



۲۶۹. در شکل روبه‌رو، BO نیمساز $\angle ABC$، CO نیمساز $\angle ACB$ و MN با BC موازی است، اگر $AB = ۱۲$، $BC = ۲۴$ و $AC = ۱۸$، آن‌گاه محیط ΔAMN برابر است با:

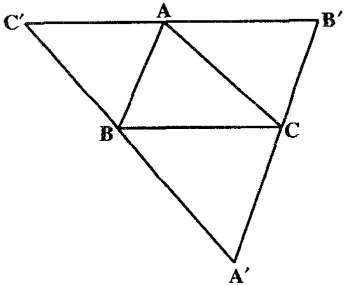
الف) ۳۰ ب) ۳۳ ج) ۳۶ د) ۳۹ هـ) ۴۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

۲۷۰. ثابت کنید که از میان همهٔ مثلثهای محاط در یک مثلث حادهٔ داده شده، مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلث مفروض است، کمترین محیط را دارد.

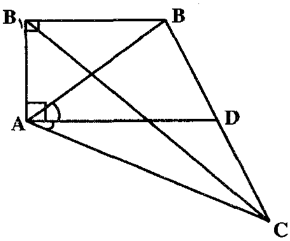
۴ . ۱ . ۶ . ۲. رابطهٔ بین محیطها

۴ . ۱ . ۶ . ۲ . ۱. رابطهٔ بین محیطها (برابریها)

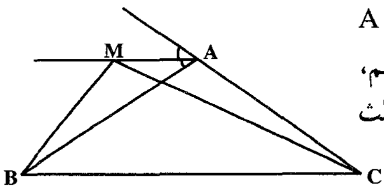


۲۷۱. در مثلث ABC از هر رأس خطی موازی ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید که محیط مثلث $A'B'C'$ دو برابر محیط مثلث ABC است.

۴ . ۱ . ۶ . ۲ . ۲. رابطهٔ بین محیطها (نابرابریها)



۲۷۲. خط AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A خطی بر AD عمود می‌نماییم و از نقطهٔ B عمود BB_1 را بر این خط فرود می‌آوریم. ثابت کنید محیط مثلث BB_1C از محیط مثلث ABC بزرگتر است.



۲۷۳. اگر از نقطهٔ M واقع بر نیمساز زاویهٔ خارجی A از مثلث ABC به رأسهای B و C وصل کنیم، ثابت کنید که محیط مثلث MBC از محیط مثلث ABC بزرگتر است.

۲۷۴. نقطهٔ C در درون زاویهٔ قائمه xOy واقع است. نقطهٔ A را روی نیمخط راست Ox و نقطهٔ B را روی نیمخط راست Oy انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، محیط مثلث ABC از دو برابر طول پاره‌خط راست OC بزرگتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۲۷۵. به فرض آنکه O یک نقطهٔ داخلی مثلث ABC باشد، و $S_1 = OA + OB + OC$ ، $S_2 = AB + BC + CA$ ، آن‌گاه :

الف. در هر مثلث : $S_1 \le S_2$ و $S_2 > 2S_1$

ب. در هر مثلث : $S_1 < S_2$ و $S_2 \ge 2S_1$

ج. در هر مثلث : $S_1 < S_2$ و $S_1 > \frac{1}{2}S_2$

د. در هر مثلث : $S_1 \le S_2$ و $S_2 \ge 2S_1$

هـ. در هیچ مثلثی گزینه‌های (الف)، (ب)، (ج) یا (د) صدق نمی‌کنند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۴.۱.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۷۶. تعداد مثلثهای مختلف‌الاضلاعی که ضلعهای آنها عددهای صحیح و محیط هر یک کمتر از ۱۳ باشد، برابر است با :

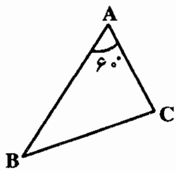
الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۱۸

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۴ . ۱ . ۷. مساحت

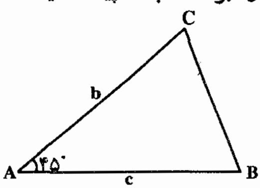
۴ . ۱ . ۷ . ۱. اندازهٔ مساحت

۴ . ۱ . ۷ . ۱ . ۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده



۲۷۷. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلثی که در آن دو ضلع $AB=12$ و $AC=8$ و زاویهٔ بین آنها $\hat{A}=60°$ است.

۲۷۸ . ارتفاع مثلثی h و قاعدهٔ آن $2h$ است. مساحت مثلث را بر حسب h پیدا کنید.

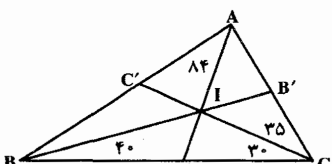


۲۷۹. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلثی که در آن طول دو ضلع $AC=b$ و $AB=c$ و زاویهٔ بین آنها $45°$ می‌باشد.

۲۸۰. در مثلث ABC میانه‌های AM و CN در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند. P وسط ضلع AC است و MP، CN را در Q قطع می‌کند، اگر مساحت مثلث OMQ برابر n باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC برابر است با :

الف) $16n$ ب) $18n$ ج) $21n$ د) $24n$ هـ) $27n$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶



۲۸۱. در مثلث روبه‌رو مساحت چهار تا از مثلثهای کوچک معلوم است. مساحت مثلث بزرگ اصلی چه‌قدر است؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۲۸۲. نه خط موازی با قاعدهٔ یک مثلث ضلعهای دیگر را به ۱۰ پاره‌خط مساوی و سطح آن را به ۱۰ بخش متمایز تقسیم می‌کنند. اگر مساحت بزرگترین این بخشها ۳۸ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث اصلی برابر است با :

الف) ۱۸۰ ب) ۱۹۰ ج) ۲۰۰ د) ۲۱۰ هـ) ۲۴۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱

۴.۱.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت مثلثها و شکلهای دیگر

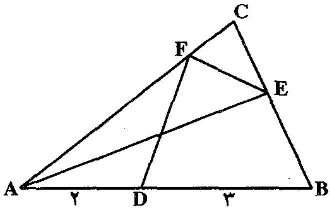
۲۸۳. در مثلث ABC، نقطهٔ D وسط AB، نقطهٔ E وسط DB و نقطهٔ F وسط BC است. هرگاه مساحت مثلث ABC برابر ۹۶ باشد، مساحت مثلث AEF برابر است با :

الف) ۱۶ ب) ۲۴ ج) ۳۲

د) ۳۶ هـ) ۴۸

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۲۸۴. در مثلث ABC نقطه‌های D ، E و F بترتیب بر ضلعهای AB ، BC و CA چنان انتخاب شده‌اند که AD = ۲ و DB = ۳ و مساحت چهارضلعی DBEF با مساحت مثلث ABE برابر است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۱۰ باشد، مساحت مثلث ABE چه‌قدر است؟

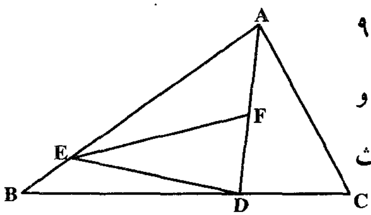


۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶

۴) $\frac{۵}{۳}\sqrt{۱۰}$ ۵) نمی‌توان مشخص کرد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۲۸۵. در شکل روبه‌رو مساحت مثلث ABC برابر ۹۰ سانتی‌متر مربع، BD = ۲DC و $BE = \frac{۱}{۴}EA$ و نقطهٔ F وسط پاره‌خط AD است. مساحت مثلث DEF چند سانتی‌متر مربع است؟



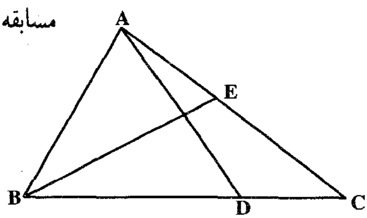
الف) ۱۸ ب) ۲۰ ج) ۲۴

د) ۲۷ هـ) ۳۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۲۸۶. مثلثی به مساحت ۱ واحد مربع، مطابق شکل، به چهار قسمت تقسیم شده است که مساحت نه بخش از آنها مساوی یکدیگر است. مساحت چهارمین قسمت را بیابید. مقدار تقریبی $\sqrt{۵}$ را در این مسأله ۲/۲۳۶ بگیرید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



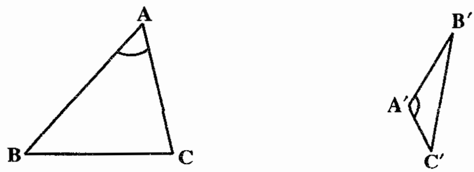
۲۸۷. مثلث ABC با مساحت واحد داده شده است. A_1، B_1 و C_1 را، بترتیب، وسط ضلعهای BC، CA و AB می‌گیریم. اگر K، L و M، بترتیب، نقطه‌هایی واقع بر پاره‌خطهای راست AB_1 ، CA_1 و BC_1 باشند، بخش مشترک مثلثهای $A_1B_1C_1$ و KLM، چه مقدار مساحتی می‌تواند داشته باشد؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی، ۱۹۷۴

۲۸۸. نشان دهید خطهایی که از رأسهای A، B و C از مثلث ABC بترتیب به موازات میانه‌های رسم شده از رأسهای B، C و A رسم می‌شوند، مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحتش سه برابر مساحت مثلث ABC است.

۲.۷.۱.۴. نسبت مساحتها

۲۸۹. هرگاه یک زاویه از مثلثی با یک زاویه از مثلث دیگر مکمل باشند، نسبت مساحت این دو مثلث مساوی نسبت حاصل‌ضرب ضلعهای دو زاویهٔ مزبور است.

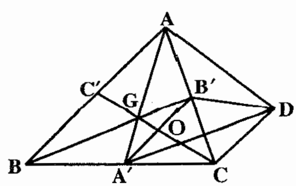


۲۹۰. اگر قاعده‌های دو مثلث برابر باشند، ثابت کنید که نسبت مساحتهای آنها برابر نسبت ارتفاع‌های نظیر آن قاعده‌ها است.

۲۹۱. اگر ارتفاعهای دو مثلث برابر باشند، نشان دهید که نسبت مساحتهای آنها برابر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاعهاست.

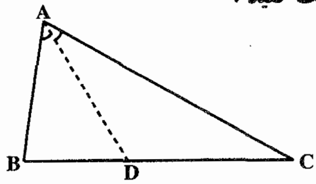
۲۹۲. اگر در دو مثلث دو زاویه مساوی و دو زاویه مکمل باشد، نشان دهید که نسبت ضلعهای مقابل به زاویه‌های مساوی، برابر نسبت ضلعهای مقابل به زاویه‌های مکمل است.

۲۹۳. دو مثلث چنانند که ضلعهای یکی از آنها، بترتیب با میانه‌های دیگری برابرند. نسبت مساحتهای این دو مثلث را بیابید.



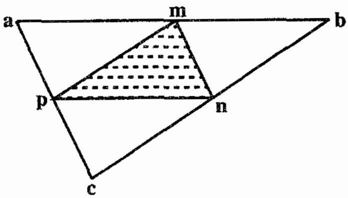
۲۹۴. ثابت کنید خطی که از مرکز ثقل یک مثلث موازی یکی از ضلعهای آن رسم می‌شود، سطح مثلث را به دو قسمت متناسب با ۴:۵ تقسیم می‌کند.

۲۹۵. در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$$

۲۹۶. m ، n و p وسطهای ضلعهای مثلث abc هستند. نسبت مساحت مثلث mnp به مساحت مثلث abc برابر است با :



الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$

د) $\frac{۱}{۶}$ هـ) عددی غیر از اینها

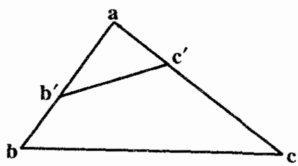
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲۹۷. در شکل زیر، ۹ = |cc′| و ۵ = |ac′| و ۳ = |bb′| و ۷ = |ab′| . نسبت مساحت مثلث abc به مساحت مثلث ab′c′ با ۰/۰۱ تقریب برابر است با :

الف) ۳/۰۴ ب) ۳/۸۵ ج) ۴

د) ۴/۵ هـ) ۴/۶۱

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

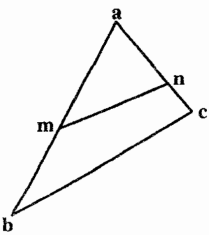


۲۹۸. در مثلث abc نقطهٔ m وسط [ab] و نقطهٔ n بر [ac] چنان واقع است که [ac] = ۳[nc] .
نسبت مساحت amn به مساحت abc برابر است با :

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۴}{۹}$

د) $\frac{۲}{۳}$ هـ) $\frac{۵}{۱۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳



۲۹۹. در مثلث ABC نقطهٔ M وسط ضلع AB و نقطهٔ P روی AB بین A و M واقع است. MD را موازی با PC رسم می‌کنیم تا BC را در D قطع کند. اگر نسبت مساحت مثلث BPD به مساحت مثلث ABC را به r نشان دهیم، آن‌گاه :

الف) بسته به موضع P، $\frac{۱}{۲} < r < ۱$

ب) مستقل از موضع P، $r = \frac{۱}{۲}$

ج) بسته به موضع P، $\frac{۱}{۲} \le r < ۱$

د) بسته به موضع P، $\frac{۱}{۳} < r < \frac{۲}{۳}$

هـ) مستقل از موضع P، $r = \frac{۱}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

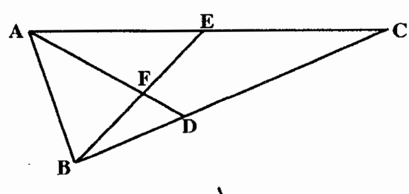
۳۰۰. نقطه‌های D، E و F بترتیب روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC طوری انتخاب شده‌اند، که $AD : DB = BE : CE = CF : FA = ۱ : n$. نسبت مساحت مثلث DEF به مساحت مثلث ABC برابر است با :

الف) $\frac{n^۲ - n + ۱}{(n+۱)^۲}$ ب) $\frac{۱}{(n+۱)^۲}$ ج) $\frac{۲n^۳}{(n+۱)^۳}$

د) $\frac{n^۳}{(n+۱)^۳}$ هـ) $\frac{n(n-۱)}{n+۱}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۳۰۱. در مثلث ABC، $C\hat{B}A = ۷۲^\circ$ ، نقطهٔ E وسط ضلع AC واقع است و نقطهٔ D روی ضلع BC به گونه‌ای است که $۲BD = DC$ ؛ AD و BE در F برخورد می‌کنند. نسبت مساحت ΔBDF به مساحت چهارضلعی FDCE برابر است با :

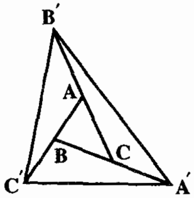


الف) $\frac{۱}{۵}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$

د) $\frac{۲}{۵}$ هـ) هیچ یک از اینها

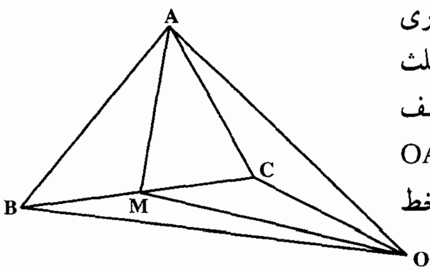
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰

۴.۱.۷.۳. رابطه‌ای در مساحتها

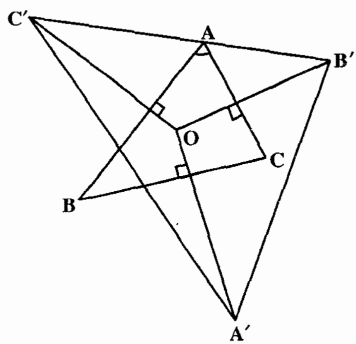


۳۰۲. ضلعهای مثلث ABC را در یک جهت به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا مثلث A′B′C′ به‌دست آید. ثابت کنید که مساحت مثلث A′B′C′ هفت برابر مساحت مثلث ABC است.

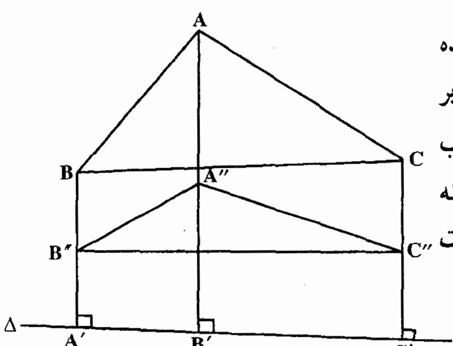
۳۰۳. نقطه‌های A′، B′ و C′ را روی ضلعهای مثلث ABC چنان اختیار می کنیم که پاره‌خطهای CA′، BC′ و AB′ در یک جهت بوده و بترتیب یک سوم ضلعهای CB، BA و AC باشند. ثابت کنید که مساحت مثلث A′B′C′ ثلث مساحت مثلث ABC است.



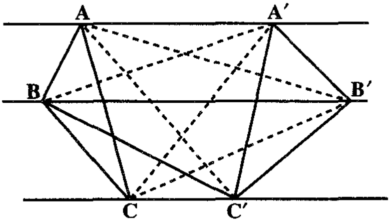
۳۰۴. مثلث ABC و میانهٔ AM از آن و نقطهٔ اختیاری O داده شده‌اند. ثابت کنید که مساحت مثلث OAM مساوی نصف مجموع یا نصف تفاضل مساحت دو مثلث OAB و OAC است، بنابر آن که B و C در یک طرف خط OA یا در طرفین آن واقع باشند.



۳۰۵. از نقطهٔ O واقع در درون مثلث ABC سه نیمخط عمود بر ضلعهای مثلث رسم می کنیم، و روی این نیمخطها از O به طرف بیرون مثلث طولهایی برابر ضلعی که نیمخط به آن عمود شده است، جدا می کنیم و نقطه‌های حاصل را A′، B′ و C′ می‌نامیم. ثابت کنید مساحت مثلث A′B′C′ سه برابر مساحت مثلث ABC است.



۳۰۶. خط Δ در خارج مثلث ABC داده شده است. عمودهای AA′، BB′ و CC′ را بر Δ فرود می‌آوریم و وسطهای آنها را بترتیب A″، B″ و C″ می‌نامیم. ثابت کنید که مساحت مثلث A″B″C″ نصف مساحت مثلث ABC است.



۳۰۷. دو مثلث ABC و A′B′C′ در یک صفحه داده شده‌اند، به نحوی که خطهای راست AA′، BB′ و CC′ با هم موازی‌اند. اگر [ABC] به معنای مساحت مثلث ABC (با علامت مناسب ±) بگیریم، ثابت کنید :

$$3([ABC]+[A'B'C'])$$
$$=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]$$

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۷

۳۰۸. روی یکی از ضلعهای یک مثلث غیرمشخص، متوازی‌الاضلاعی ساخته‌ایم، به نحوی که قسمتی از آن در داخل مثلث قرار گیرد و دو رأس آن در دو طرف ضلعهای دیگر مثلث و در بیرون آنها واقع باشند. سپس، روی هر کدام از دو ضلع دیگر متوازی‌الاضلاعهایی می‌سازیم که در خارج مثلث واقع شوند و ضلعهایی از آنها که موازی ضلعهای مثلثند، از رأسهای متوازی‌الاضلاع قبلی بگذرند. ثابت کنید، مساحت متوازی‌الاضلاع اوّل، برابر است با مجموع مساحتهای دو متوازی‌الاضلاع دیگر.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، پاپوس اسکندرانی

پاپوس

جانشینان بلافصل اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس برای مدتی سنت والای هندسی یونان را ادامه دادند، ولی این سنت بعدها رو به ضعف نهاد و پیشرفتهای جدید به نجوم، مثلثات و جبر محدود شد. پس از آن در اواخر قرن سوم ب.م. ۵۰۰ سال بعد از آپولونیوس، مردی پرشور و شوق و توانا به نام پاپوس اسکندرانی Pappus پا به عرصه گذاشت که سعی کرد تا علاقهٔ تازه‌ای را از نو نسبت به این موضوع برانگیزد.

پاپوس شرحهایی بر اصول و داده‌های اقلیدس، و دربارهٔ المجسطی و پلانیسفریوم Planispherium (تسطیح کره) بطلمیوس نوشت، ولی تقریباً همهٔ آن چه ما در این‌باره می‌دانیم از طریق تأثیر آنها در نوشته‌های شارحین بعدی است. اثر واقعاً عظیم پاپوس مجموعهٔ ریاضی Mathematical Collection وی است، که ترکیبی از شرح و راهنمای آثار هندسی موجود در زمان او، مملو از قضایای بدیع متعدد، اصطلاحات، تعمیمها، و تذکرات تاریخی است. از بین هشت مقالهٔ آن ، اوّلی و قسمتی از دومی مفقود شده است.

از قضاوت نسبت به آنچه باقی مانده ؛ مقالهٔ دوم مجموعهٔ ریاضی، به روشی برای نوشتن و کار با اعداد بزرگ، که توسط آپولونیوس به‌وجود آمده بود، می‌پردازد.

مقالهٔ سوم دارای چهار بخش است، دو بخش اوّل به نظریهٔ میانگینها می‌پردازند، و در آنها اشاره‌ای به درج دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض شده است. سومی برخی نامساویها در

یک مثلث، و چهارمی محاط کردن پنج چند وجهی منتظم در یک کره را مورد بررسی قرار می‌دهد.

در مقالهٔ چهارم، تعمیم پاپوس از قضیهٔ فیثاغورس، و «قضیهٔ قدیمی» دربارهٔ گزن، توصیف، تکوین، و بعضی خواص حلزونی ارشمیدس، کونکوئیدنیکومدس، مربع ساز (کوادراتریکس) دینوستراتوس، با کاربردهایی در سه مسألهٔ مشهور و بحثی از حلزونی خاصی که بر کره‌ای رسم شده، دیده می‌شود.

مقالهٔ پنجم، عمدتاً به همپیرامونی Isoperimetric یا مقایسهٔ مساحت دو شکل که دارای محیطهای محصورکنندهٔ مساوی‌اند و حجم اجسامی که دارای سطوح محصورکنندهٔ برابرند، اختصاص دارد. این کتاب همچنین شامل قطعهٔ جالبی دربارهٔ زنبورها و خواص ماکسیمم، مینیمم حجره‌های شانهای عسل است. در این کتاب است که اشارهٔ پاپوس به ۱۳ چند وجهی نیمه منتظم ارشمیدس را می‌بینیم. مقالهٔ ششم دربارهٔ نجوم است و به رساله‌هایی می‌پردازد که می‌بایست به عنوان مقدمه‌ای بر المجسطی بطلمیوس مطالعه می‌شده‌اند.

مقالهٔ هفتم از نظر تاریخی بسیار مهم است، زیرا شرح آثاری است که گنجینهٔ آنالیز Treasury of Analysis را تشکیل می‌دهند. این گنجینه بعد از اصول اقلیدس، مدعی در برداشتن مطالبی بوده که برای ریاضیدانان حرفه‌ای از لوازم اساسی تلقی شده است. ۱۲ رسالهٔ مورد بحث عبارتند از : داده‌ها، پوریسمها، و مکانهای رویه‌ای اقلیدس، مقاطع مخروطی آپولونیوس، و شش اثر به نامهای :

۱. در باب قطعهای متناسب On Prorortional Sections (۱۸۱ قضیه)

۲. در باب قطع فاصله‌ای On Spatial Sections (۱۲۴ قضیه)

۳. در باب قطع معین On Determinate Sections (۸۳ قضیه)

۴. در باب تماسها Tangencies (۱۲۴ قضیه)

۵. گرایشها Vergings (۱۲۵ قضیه)

۶. مکانهای مسطح Plane Loci (۱۴۷ قضیه)

که از میان آنها تنها اوّلی باقی مانده است.

مکانهای فضایی Solid Loci آریستایوس، و در باب میانگینهای اراتستن On Means. در این مقاله صورت ابتدایی قضیهٔ مرکز هندسی گولدین Goldin را می‌بینیم که راجع به ایجاد حجمی به‌وسیلهٔ دوران یک شکل مسطح حول محور خود می‌باشد. همچنین بحثی راجع به «مکانهای هندسی نسبت به سه یا چهار خط» داده شده است : اگر P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 طول چهار پاره‌خطی باشند که از نقطه‌ای مانند P، و متکی بر چهار خط مفروض رسم می‌شوند و زوایای مفروضی با این چهار خط می‌سازند، اگر $P_1P_2 = kP_3^2$ ، یا $P_1P_2 = kP_3P_4$ ، که در آن k یک مقدار ثابت است، آن‌گاه مکان هندسی P یک مقطع مخروطی است. این مسأله که به‌وسیلهٔ آپولونیوس حل شده، از نظر تاریخی بدان جهت اهمیت دارد که در تلاش برای تعمیم

آن به n خط بود که دکارت در سال ۱۶۳۷ به تبیین روش مختصاتی هدایت شد؛ معاصرین پاپوس بدون موفقیت سعی به تعمیم دادن این مسأله کرده بودند. حالت خطی به اصطلاح قضیهٔ استوارت Stewart که در کتابهای هندسه ظاهر می‌شود، نیز در این کتاب دیده می‌شود، یعنی: اگر A، B، C و D چهار نقطهٔ دلخواه بر خطی باشند، آن‌گاه:

$$(AD)^{2}(BC)+(BD)^{2}(CA)+(CD)^{2}(AB)+(BC)(CA)(AB)=0$$

که در آن پاره‌خطهای مورد بحث پاره‌خطهای علامت‌دار هستند. در واقع رابرت سیمسن در کشف قضیه‌ای برای حالت کلی‌تر که در آن D ممکن است خارج از خط ABC باشد، بر استوارت پیشی گرفت. نسبت ناتوافقی، یا خاجی (CD و AB) چهار نقطهٔ همخط A، B، C و D را می‌توان به صورت (AC:CB) / (AD:DB)، یعنی به صورت نسبت نسبتهایی که C و D پاره‌خط AB را به آنها تقسیم می‌کنند، تعریف کرد. در مقالهٔ هفتم مجموعهٔ ریاضی، پاپوس ثابت می‌کند که اگر چهار نیمخط همرس به‌وسیلهٔ دو مورب قطع شوند، به‌طوری که نقطه‌های متناظر A، B، C، D و A′ ، B′ ، C′ و D′ به‌دست آیند، در این صورت دو نسبت خاجی (AB,CD) و (A′B′,C′D′) برابرند. به‌عبارت دیگر، نسبت خاجی چهار نقطهٔ همخط نسبت به عمل تصویر کردن پایاست. این، از قضیه‌های بنیادی هندسهٔ تصویری است. مقالهٔ هفتم راه‌حلی برای مسأله زیر را در بردارد:

محاط کردن مثلثی در دایرهٔ مفروض به‌طوری که ضلعهای آن، یا در صورت لزوم امتداد آنها، از سه نقطهٔ همخط بگذرند. این مسأله به عنوان مسأله کاستیون-کرامر Castillon - Cramer شهرت یافته است. زیرا در قرن هفدهم مسأله به وسیلهٔ کرامر به حالتی که در آن سه نقطه لزوماً همخط نیستند، تعمیم داده شد، و حلی از این تعمیم به وسیلهٔ کاستیون در سال ۱۷۷۶ منتشر گردید. همچنین راه‌حلهایی توسط لاگرانژ، اویلر، لوییلیه Lhuilier، فوس Fuss، ولکسل Lexell در سال ۱۷۸۰ داده شدند. چند سال بعد پسر بچهٔ ۱۶ سالهٔ صاحب قریحه‌ای از ایتالیا، به نام جیوردانو Giordano مسأله را به محاط کردن یک n ضلعی، که ضلعهای آن از n نقطهٔ مفروض می‌گذرند در یک دایره، تعمیم، و راه‌حل زیبایی برای آن ارائه داد. پونسله مسأله را با گذاشتن مقطع مخروطی دلخواهی به جای دایره تعمیم بیشتری داد. در مقالهٔ هفتم، اوّلین بیان ضبط شدهٔ خاصیت کانون هادی سه مقطع مخروطی، ظاهر می‌شود.

مقالهٔ هشتم، مانند مقالهٔ هفتم، شامل مطالبی است که بیشتر آن احتمالاً ابداع خود پاپوس است. در این‌جا ما راه‌حلی از مسألهٔ ساختن یک مقطع مخروطی گذرنده بر پنج نقطهٔ مفروض را می‌بینیم. قضیهٔ جالب دیگری که به احتمال زیاد کار پاپوس بوده است، این است:

اگر D، E و F نقطه‌هایی بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند به طوری که $BD / DC = CE / EA = AF / FB$، آن‌گاه مثلثهای DEF و ABC دارای یک مرکز هندسی مشترکند.

مجموعهٔ ریاضی پاپوس منبعی است واقعی سرشار از قطعات هندسی، مقایسه‌هایی که در حد امکان به عمل آمده، نشان می‌دهند که شرحهای تاریخی مشمول در این اثر موثقند. ما قسمت عمدهٔ دانش خود از هندسهٔ یونانی را مدیون این اثر هستیم که از آثار بیش از ۳۰ ریاضیدان باستانی مختلف شاهد می‌آورد، یا به آنها ارجاع می‌دهد. شاید بتوان آن را تذکرهٔ هندسهٔ یونانی نامید.

۳۰۹. در دو مثلث ABC و DEF ضلعهای AC، BC، DF و EF طولهای برابر دارند. طول AB دو برابر طول ارتفاع نظیر رأس F از مثلث DEF است. از گزاره‌های زیر کدام (یا کدامها) راست است؟

I. زاویه‌های ACB و DFE متمم یکدیگرند.

II. زاویه‌های ACB و DFE مکمل یکدیگرند.

III. مثلثهای ABC و DEF مساحتهای برابر دارند.

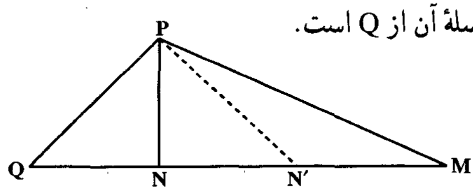
IV. مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث DEF است.

الف) فقط II　　ب) فقط III　　ج) فقط IV

د) فقط I و III　　هـ) فقط II و III

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۳۱۰. در شکل روبه‌رو، نقطهٔ N روی پاره‌خط QM چنان انتخاب شده است که فاصلهٔ آن از M دو برابر فاصلهٔ آن از Q است.

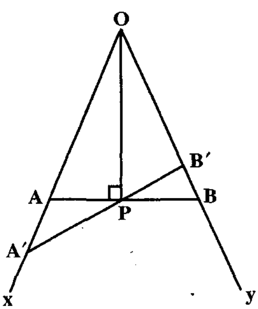


الف) ثابت کنید مساحت PNM دو برابر مساحت PQN است.

ب) اگر N′ وسط NM باشد، مساحتهای PN′M و PQN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) چه رابطه‌ای بین مساحت PNN′ و مساحت PQM وجود دارد؟

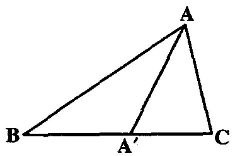
۳۱۱. زاویهٔ xOy و نقطهٔ P واقع بر نیمساز این زاویه داده شده است. از O خطی رسم می‌کنیم که بر OP عمود باشد و ضلعهای زاویه را در A و B قطع نماید و خطی دلخواه و غیرعمود بر OP رسم می‌کنیم تا ضلعهای زاویه را در A′ و B′ قطع نماید. ثابت کنید مساحت مثلث OAB از مساحت مثلث OA′B′ کمتر است.



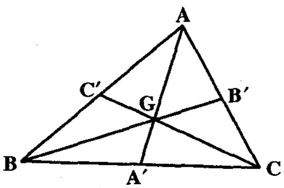
۳۱۲. نقطهٔ D وسط ضلع AB، و نقطه‌های E و F بترتیب روی پاره‌خطهای راست AC و BC از مثلث ABC قرار دارند. ثابت کنید، مساحت مثلث DEF، از مجموع مساحتهای دو مثلث ADE و BDF تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۸۳

۴.۷.۱.۴. مثلثهای هم‌ارز

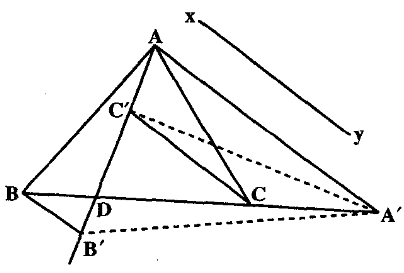


۳۱۳. ثابت کنید که هر میانهٔ مثلث، آن را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.

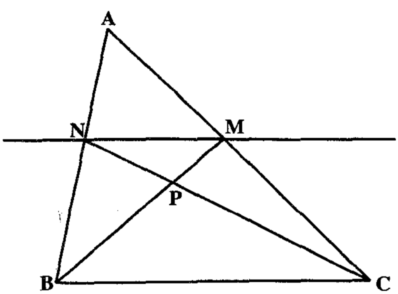


۳۱۴. ثابت کنید هرگاه G نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC باشد، سه مثلث GAB ، GAC و GBC معادل یکدیگرند.

۳۱۵. **قضیه.** سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث معادل با هم تقسیم می‌کنند. بررسی شکل (در حل) را دنبال می‌کنیم ؛ بنابر آنچه گفتیم مساحت GAB دو برابر مساحت GBA′ است. اما این دو مثلث در ارتفاع نظیر رأس B مشترکند، پس قاعده‌های آنها به نسبت ۲ بر ۱ است، یعنی AG = ۲GA′ . همچنین داریم : BG = ۲GB′ و CG = ۲GC′ .

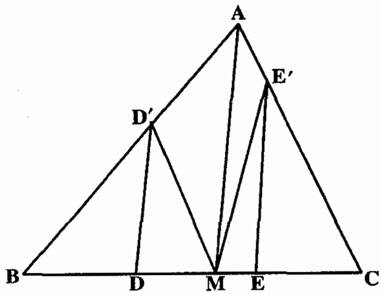


۳۱۶. مثلث ABC و نقطهٔ D روی ضلع BC از آن، و خط راست xy مفروضند. از رأسهای مثلث خطهای موازی خط xy رسم می‌کنیم. خط رسم شده از A ضلع BC یا امتداد آن را در A′ قطع می‌کند و خطهای کشیده شده از B و C خط AD را در نقطه‌های B′ و C′ قطع می‌نمایند. ثابت کنید که مثلث A′B′C′ معادل مثلث ABC است.

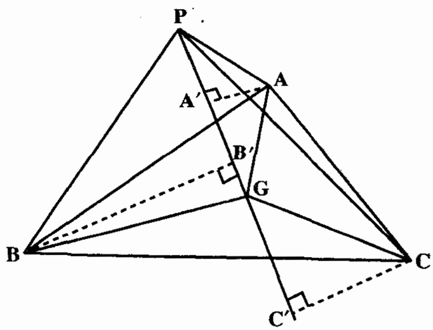


۳۱۷. خطی موازی ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ N و ضلع AC را در نقطهٔ M قطع کند، BM و CN را وصل می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P تلاقی نمایند. ثابت کنید که دو مثلث PCM و PBN معادل یکدیگرند.

۳۱۸. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌های D و E را روی ضلع BC چنان اختیار می‌کنیم که ضلع BC به سه قسمت متساوی $BD = DE = EC$ تقسیم شود. سپس نقطهٔ M واقع بر پاره‌خط DE را به رأس A وصل می‌کنیم و از نقطه‌های D و E خطهایی به موازات AM رسم می‌نماییم تا ضلعهای AB و AC را در D' و E' قطع کنند. ثابت کنید که خطهای MD' و ME' مثلث را به سه قسمت معادل بخش می‌کنند.



۳۱۹. اگر نقطهٔ G محل تلاقی سه میانهٔ مثلث ABC را به نقطه‌ای مانند P واقع در خارج آن وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA، PGB و PGC معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



۳۲۰. از نقطه‌ای درون یک مثلث، پاره‌خطهایی به سه رأس مثلث وصل شده‌اند. شرط لازم و کافی برای آن که مساحتهای سه مثلثی که بدین ترتیب به‌دست می‌آیند، برابر باشند، این است که نقطه:

الف) مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد.

ب) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد.

ج) چنان باشد که هر یک از سه زاویه‌ای که در این نقطه تشکیل می‌شوند، 120° باشد.

د) محل برخورد سه ارتفاع مثلث باشد.

هـ) محل برخورد سه میانهٔ مثلث باشد.

مسأله‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۴.۱.۷.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۲۱. دو مثلث abc و abd در ضلع [ab] مشترکند. برای آن که مساحت مثلث abc از مساحت مثلث abd بیشتر باشد، کافی است که:

الف) محیط مثلث abc از محیط مثلث abd بیشتر باشد.

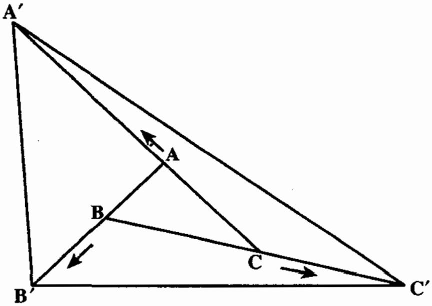
ب) اندازهٔ زاویهٔ acb از اندازهٔ زاویهٔ adb بیشتر باشد.

ج) اندازهٔ زاویهٔ acb از اندازهٔ زاویهٔ adb کمتر باشد.

د) شعاع دایرهٔ محیطی مثلث abc از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث abd بزرگتر باشد.

هـ) شرط دیگری غیر از چهار شرط بالا برقرار باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



۳۲۲. سه ستارهٔ آلفا، بتا و شامپیونا در ۱۴ ژوئیهٔ سال ۱۷۸۹، بترتیب در وضعیتهای A، B و C، مطابق شکل قرار داشتند. ستاره‌شناسان ضمن بررسی متوجه شدند که این ستاره‌ها روی یک سطح هندسی و در امتداد ضلعهای مثلث ABC از هم دور می‌شوند. پژوهشهای بعدی نشان داد که در طول مدت هر ۱۰ سال، ستارهٔ آلفا به اندازهٔ CA، ستارهٔ بتا به اندازهٔ AB و ستارهٔ شامپیونا به اندازهٔ BC جلو می‌رود، مدتها بعد وقتی که وضعیت آنها را بررسی کردند، این ستاره‌ها در رأسهای A'، B' و C' مثلث بزرگی قرار داشتند که مساحت آن ۱۰۲۷ برابر مثلث ABC بود. در کدام سال آخرین بررسی روی آنها انجام شده است؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۳۲۳. n نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که، هر مثلث به رأسهای این نقطه‌ها، مساحتی کمتر از ۱ دارد. ثابت کنید، همهٔ این نقطه‌ها را، می‌توان در مثلثی به مساحت ۴ جا داد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۳۲۴. هرگاه در یک مثلث قاعده ۱۰٪ افزایش یابد و ارتفاع نظیر این قاعده ۱۰٪ کاهش پیدا کند، تغییر مساحت برابر است با:

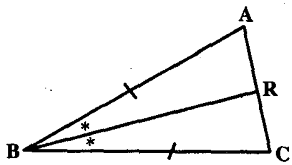
الف) ۱٪ افزایش　　ب) $\frac{1}{2}$٪ افزایش　　ج) ۰٪

د) $\frac{1}{2}$٪ کاهش　　هـ) ۱٪ کاهش

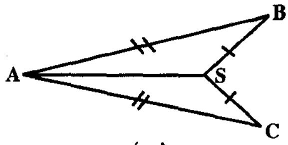
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۴ . ۱ . ۸. همنهشتی مثلثها

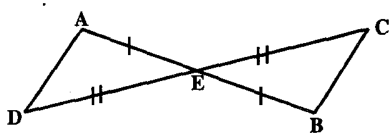
۳۲۵. ابتدا دلیل همنهشت بودن مثلثها را بگویید، سپس تساوی ضلعها و زاویه‌های متناظر را بنویسید.



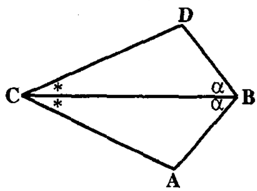
(الف)



(ب)

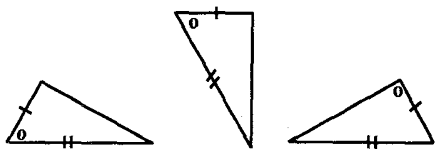


(پ)

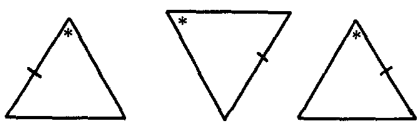


(ت)

۳۲۶. مثلثهای همنهشت را مشخص کنید و حالت همنهشتی آنها را بیان نمایید.

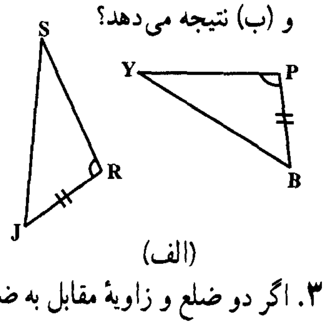


(الف)

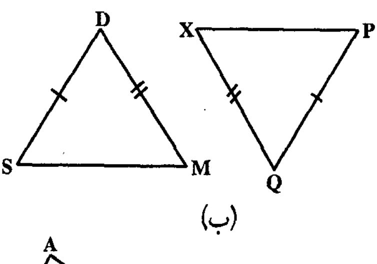


(ب)

۳۲۷. با توجه به شکلهای رو به رو، تساوی کدامیک از اجزاء، همنهشتی مثلثها را در (الف) و (ب) نتیجه می‌دهد؟

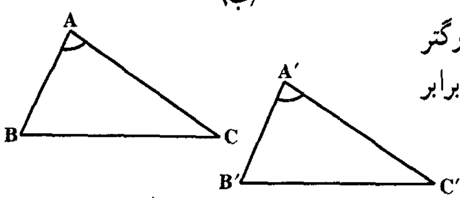


(الف)

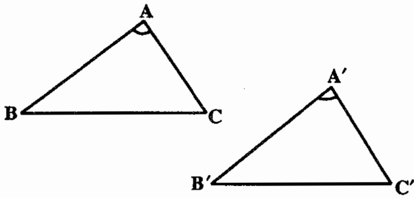


(ب)

۳۲۸. اگر دو ضلع و زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگتر از مثلثی با همین اجزا از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث همنهشتند.

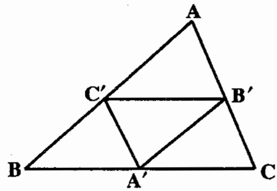


$(\Delta ABC$ و $\Delta A'B'C' : AB = A'B'$ و $BC = B'C'$ و $\hat{A} = \hat{A}')$

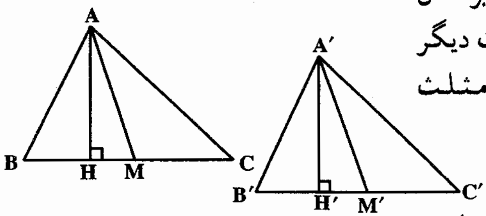


۳۲۹. در دو مثلث ABC و A′B′C′ زاویه‌های A و A′ و ضلعهای AC و A′C′ برابرند. در صورتی که مجموع دو ضلع دیگر نیز مساوی باشند، ثابت کنید دو مثلث بالا، همنهشتند.

۳۳۰. ثابت کنید اگر وسطهای ضلعهای مثلثی را به هم وصل کنیم، چهارمثلث حاصل، همنهشتند.

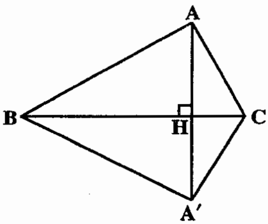


۳۳۱. هرگاه یک ضلع و ارتفاع و میانهٔ وارد بر همان ضلع از مثلثی، با همین اجزا از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

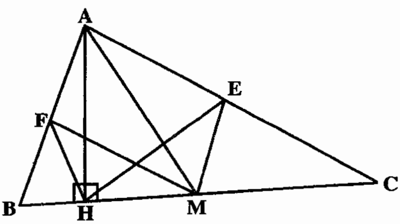


(ΔABC و $\Delta A'B'C': BC = B'C'$ و
$AH = A'H'$ و $AM = A'M'$)

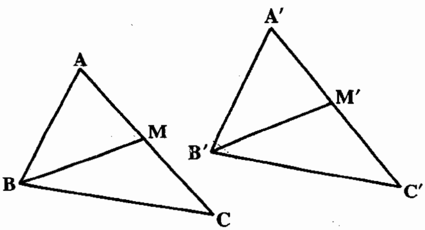
۳۳۲. در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کرده و آن را از طرف نقطهٔ H به اندازهٔ AH تا نقطهٔ A′ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید دو مثلث ABC و A′BC همنهشتند.



۳۳۳. نقطه‌های H و M بترتیب پای ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس A از مثلث ABC و نقطه‌های E و F وسطهای دو ضلع AC و AB می‌باشند. ثابت کنید دو مثلث EMH و FMH همنهشتند و در هریک از این دو مثلث مجموع دو ضلعی که بر BC منطبق نیستند، نصف مجموع ضلعهای AB و AC است.

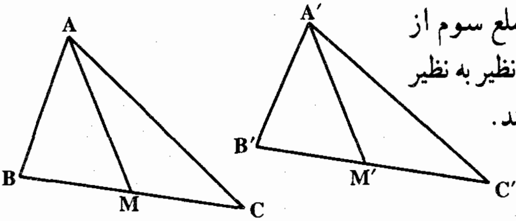


۳۳۴. ثابت کنید که اگر در دو مثلث، دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آن دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

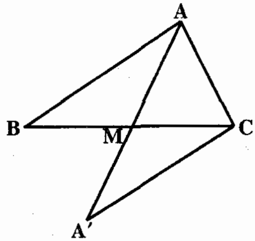


($AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $BM = B'M'$)

۳۳۵. هرگاه دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم از مثلثی با همین اجزا از مثلثی دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

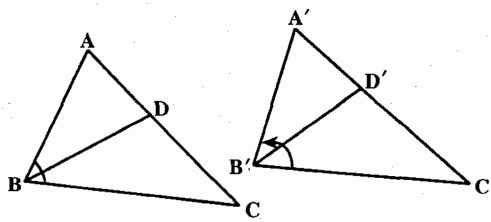


۳۳۶. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم کرده و آن را از طرف M به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ ′A امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که دو مثلث ABM و A′MC همنهشتند.



۳۳۷. خطی که از نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC موازی قاعدهٔ BC از آن رسم می‌شود، ضلعهای AB و AC را در A_b و A_c قطع می‌کند و موازیCA از G ضلعهای BC و BA را در B_c و B_a و موازی AB از G ضلعهای CA و CB را در C_a و C_b قطع می‌نماید، ثابت کنید دو مثلث $A_bB_cC_a$ و $A_cB_aC_b$ همنهشتند.

۳۳۸. هرگاه یک ضلع و یک زاویهٔ مجاور به آن ضلع و نیمساز داخلی آن زاویه از مثلثی با همین اجزا از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند،آن دو مثلث همنهشتند.

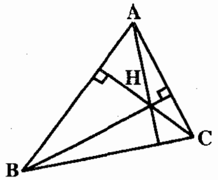


(ΔABC و $\Delta A'B'C' : AB = A'B'$ ، $\hat{B} = \hat{B'}$ ، $BD = B'D'$)

۳۳۹. نشان دهید که مثلث مکمل و مثلث اویلر یک مثلث مفروض همنهشتند.

۴ . ۱ . ۹ . نقطه‌های ویژه

۳۴۰. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد ، چهار مثلثی که با نقطه‌های (H و C و B و A) ایجاد می‌شوند، یک مرکز ارتفاعی دارند.



۳۴۱. مرکز ثقل هر مثلث و مرکز ثقل مثلث میانه‌ای (میانک) آن مثلث بر هم منطبقند.

۳۴۲. تعریف. اگر از هر رأس یک مثلث خطی موازی با ضلع مقابل آن رسم کنیم مثلثی تشکیل می‌شود ؛ این مثلث را مثلث پاد مکمل مثلث مفروض می‌نامیم.

قضیه. مرکز ثقل هر مثلث و مرکز ثقل مثلث پاد مکمل آن بر هم منطبقند.

۳۴۳. از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC بر ضلعهای BC، AC و AB عمودهایی رسم می‌کنیم. روی این عمودها پاره خطهای MA_1، MB_1 و MC_1 را مساوی ضلعهای متناظر به این عمودها جدا می‌کنیم. ثابت کنید که نقطه M مرکز ثقل مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۳۴۴. سه مگس روی ضلعهای مثلث ABC طوری حرکت می‌کنند که، مرکز ثقل مثلثی که تشکیل می‌دهند، تغییر جا نمی‌دهد. ثابت کنید، این نقطه بر مرکز ثقل مثلث ABC منطبق است، به شرطی که بدانیم، یکی از مگس‌ها، روی تمامی محیط مثلث حرکت می‌کند. (مرکز ثقل یک مثلث، در محل برخورد میانه‌های آن واقع است.)

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۷۵

۳۴۵. در جزیره‌ای به شکل مثلث، کدام نقطه است که از دریا دورترین فاصله را دارد؟

الف) نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث　　ب) مرکز ثقل مثلث

ج) مرکز دایرهٔ محاطی مثلث　　د) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳۴۶. تعداد هسته‌های یک تودهٔ مثلثی را پیدا کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از آریابهاتا

آریابهاتا

آریابهاتا Aryabhata (۴۷۵ یا ۴۷۶ ـ ح ۵۵۰ م) ؛ نخستین نویسنده بزرگ هندی که نامش به ما رسیده است، آریابهاتای مهتر است که در شهر کوسوماپورا Kussumapura یعنی شهر گلها زاده شد. این شهر از محل کنونی شهر پتنه Patna که مسلمانان آن را عظیم‌آباد می‌خوانند چندان دور نیست.

آثار آریابهاتا که غالباً Aryabhatiam یا Aryabhatiya خوانده می‌شود عبارت است از Gitika یا Dasagitika، یعنی مجموعه‌ای از جدولهای نجومی و Aryastasata شامل Ganita، یعنی رساله‌ای در باب حساب Kalakriya راجع به زمان و اندازه‌گیری آن، و Gala راجع به کره.

رسالهٔ حساب راجع به عددنویسی تا $۱۰^۸$ است، اعداد مسطحه و مجسمه، و قاعده‌ای برای جذر گرفتن و همچنین قاعده‌ای برای جمع سری‌های اعداد بعد از جملهٔ Pام که با علامتهای امروزی می‌توان چنین نوشت :

$$S = n\left[a + \left(\frac{n-۱}{۲} + p\right)d\right]$$

و قاعده‌ای که با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم :

$$n=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{-۲a\pm\sqrt{(d+۲a)^۲+۸sd}}{d}\right)$$

در باقی آن معلوماتی راجع به معادله‌های درجهٔ دو و معادله‌های سیال درجه یک دیده می‌شود. در میان قاعده‌های به‌دست آوردن مساحت، یکی هم به مثلث متساوی‌الساقین مربوط است که نقص اظهارات آریابهاتا را نشان می‌دهد : «مساحت مثلث برابر است با حاصلضرب طول عمودی که بر قاعده وارد می‌شود و آن را نصف می‌کند در طول قاعده». قاعدهٔ محاسبهٔ حجم کرهٔ به شعاع r را به صورت $\pi r^۲\sqrt{\pi r^۲}$ می‌دهد که درست نیست و در آن عدد پی برابر $\frac{۱۶}{۹}$ است.

قاعدهٔ به‌دست آوردن عدد π را چنین می‌نویسد : «چهار بر صد بیفزای، در هشت ضرب کن و باز شصت و دوهزار بیفزای، این محیط دایره‌ای است که قطرش بیست هزار باشد.» بدین ترتیب عدد π برابر $\frac{۶۲۰۸۳۲}{۲۰۰۰۰}$ یا ۳/۱۴۱۶ می‌شود که دقت خوبی دارد.

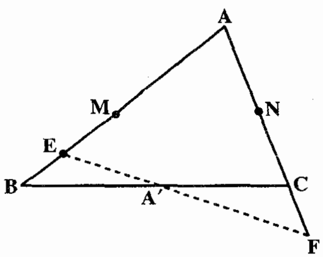
آریابهاتا قاعده‌ای هم برای محاسبهٔ جیب (سینوس) می‌دهد. و در Gitika جدول مختصری هم در این مورد وجود دارد.

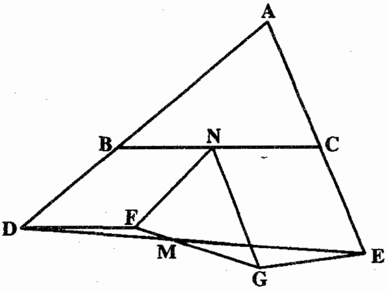
تألیف او از لحاظ یکی از نخستین کوششها برای حل کلی یک معادلهٔ خطی سیال به وسیلهٔ کسرهای مسلسل هم درخور توجه است.

همچنان که در بالا آمد، آریابهاتایی که در اینجا ذکر شد به عنوان نفر اوّل از دو ریاضی‌دان همنام معروف است. زمان زندگی آریابهاتای کهتر معلوم نیست و آثار این دو تن را نیز نمی‌توان در حال حاضر از هم تشخیص داد.

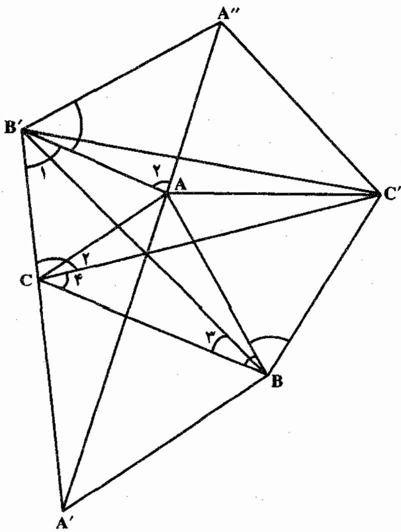
۴.۱.۱۰. نقطه‌های همخط

۳۴۷. مثلث ABC را درنظر گرفته، وسط ضلع AB را M و وسط ضلع AC را N می‌نامیم. از نقطهٔ M و در جهت از A به طرف B پاره‌خط ME را مساوی $\frac{AC}{۲}$ و از نقطهٔ N و در جهت از A به طرف C پاره‌خط NF را مساوی $\frac{AB}{۲}$ جدا می‌کنیم، ثابت کنید که EF از وسط BC می‌گذرد.

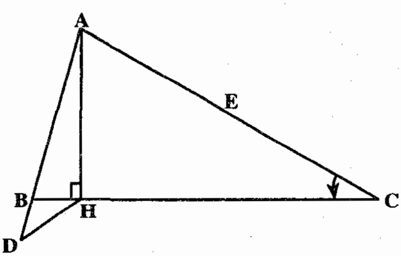




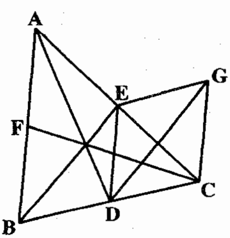
۳۴۸. مثلث ABC را درنظر گرفته، روی امتداد ضلعهای AB و AC طولهای مساوی BD و CE را جدا نموده، وسط BC را N و وسط DE را M می‌نامیم. سپس از نقطه‌های N و D بترتیب خطهایی به موازات BD و BC رسم می‌کنیم، تا یکدیگر را در نقطهٔ F قطع کنند و از نقطه‌های N و E بترتیب خطهایی به موازات CE و BC رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ G یکدیگر را تلاقی نمایند، ثابت کنید که نقطه‌های F و M و G بر یک استقامتند.



۳۴۹. مثلث ABC با ضلعهای $a=۵$ و $b=۲/۵$ و $c=۴$ داده شده است. بر سه ضلع این مثلث و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC' و BCA' و CAB' را رسم می‌کنیم و سپس بر ضلع $B'C'$ از مثلث $A'B'C'$ مثلث متساوی‌الاضلاع $B'C'A''$ را در خارج این مثلث بنا می‌کنیم. ثابت کنید سه نقطهٔ A ، A' و A'' بر یک استقامت واقعند، به قسمی که $AA' = AA''$.

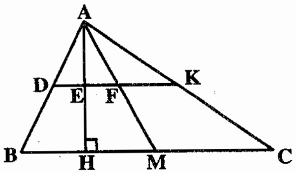


۳۵۰. مثلث ABC را که در آن زاویهٔ B حاده و دو برابر زاویهٔ C می‌باشد، درنظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و ضلع AB را به اندازهٔ BD مساوی با BH امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که نقطهٔ E وسط ضلع AC روی خط DH واقع است.

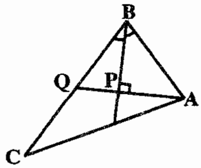


۳۵۱. میانه‌های AD و BE و CF از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و از D پاره‌خط DG را موازی و مساوی و همجهت با BE رسم می‌کنیم. ثابت کنید $AG = CF$ و سه نقطهٔ F، E و G بر یک استقامتند.

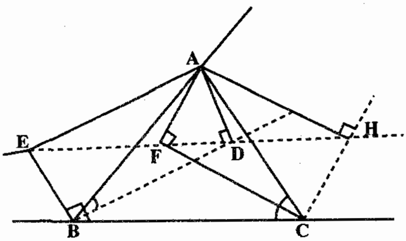
۳۵۲. ثابت کنید که در هر مثلث وسطهای ضلعهای AB و AC و وسطهای ارتفاع AH و میانهٔ AM روی یک خط راست واقعند.



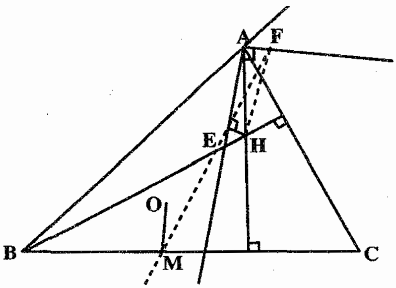
۳۵۳. پای عمودی که از یک رأس مثلث بر نیمساز رأس دیگری از آن رسم می‌شود، روی ضلعی از مثلث میانک (مکمل) قرار دارد که روبه روی آن رأس مثلث واقع است.



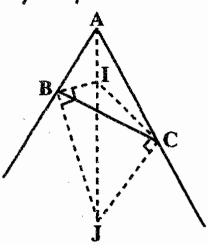
۳۵۴. ثابت کنید که اگر از رأس A در مثلث ABC، چهار عمود بر نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی B و C فرود آوریم پای این عمودها چهار نقطه هستند که روی خط واصل مابین وسطهای دو ضلع AB و AC واقعند.



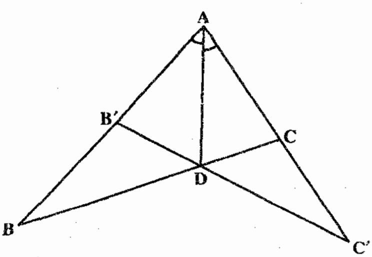
۳۵۵. در مثلث ABC نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعها را در نقطه‌های E و F روی نیمسازهای زاویهٔ A تصویر می‌کنیم. ثابت کنید که خط EF از نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌گذرد.

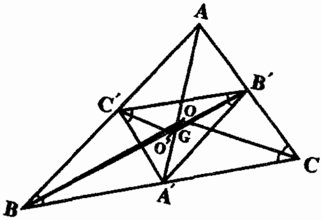


۳۵۶. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C یکدیگر را در نقطهٔ I و نیمسازهای خارجی همین دو زاویه یکدیگر را در نقطهٔ J قطع می‌کنند. ثابت کنید که سه نقطهٔ A و I و J روی یک خط راست واقعند.



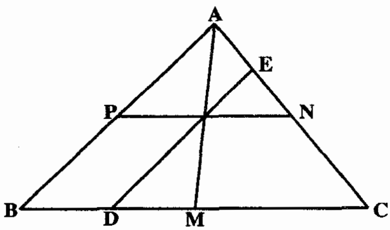
۳۵۷. مثلث ABC را درنظر گرفته، پای نیمساز زاویهٔ داخلی A را D می‌نامیم. طولهای $AB' = AC$ و $AC' = AB$ را روی خطهای AB و AC جدا می‌کنیم. ثابت کنید نقطه‌های B'، C' و D بر یک استقامتند.





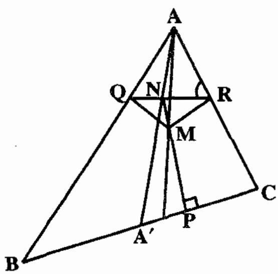
۳۵۸. در هر مثلث محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی، مرکز ثقل مثلث و محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلثی که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث مفروض می‌باشند، بر یک استقامت واقعند و فاصلهٔ دو نقطهٔ اوّل و دوم دو برابر فاصلهٔ دو نقطهٔ دوم و سوم می‌باشد.

۴ . ۱ . ۱۱ . خطهای همرس

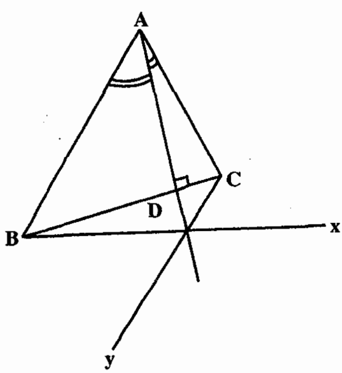


۳۵۹. وسطهای ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب M و N و P می‌نامیم. اگر D وسط MB و E وسط AN باشد، ثابت کنید که خطهای AM و NP و DE همرسند.

۳۶۰. رأسهای مثلثی روی ارتفاعهای مثلث مفروضی قرار دارند. اگر از وسط ضلعهای این مثلث عمودهایی بر ضلعهای متناظر مثلث مفروض رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود همرسند.

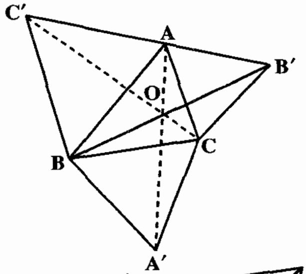


۳۶۱. اگر R و Q تصاویر نقطهٔ M از نیمساز داخلی AM از زاویهٔ A از مثلث ABC روی دو ضلع AC و AB باشد، نشان دهید که عمود MP که از M بر BC فرود می‌آید، QR را در نقطهٔ N روی AA′ میانهٔ ABC قطع می‌کند.

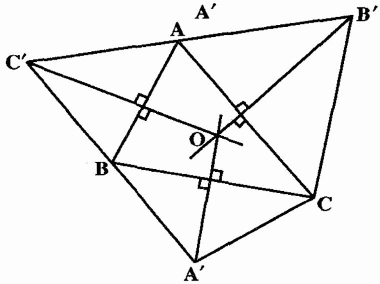


۳۶۲. ارتفاع AD از مثلث ABC را رسم کرده، در خارج مثلث نیمخط Bx را طوری رسم می‌کنیم که $C\hat{B}x = C\hat{A}D$ باشد و نیمخط Cy را طوری رسم می‌کنیم که $B\hat{C}y = B\hat{A}D$ باشد. ثابت کنید که خطهای Bx، Cy و AD همرسند.

۳۶۳. فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 معرف پای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه M، بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید، سه خط راست که از وسط پاره‌خطهای B_1C_1 و MA ، C_1A_1 و MB، و A_1B_1 و MC می‌گذرند، در یک نقطه همرسند.

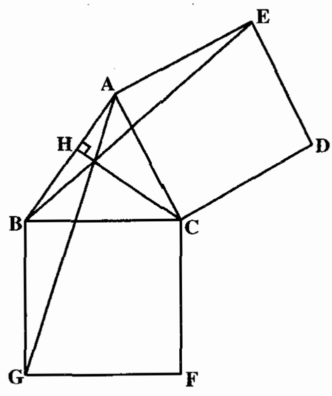


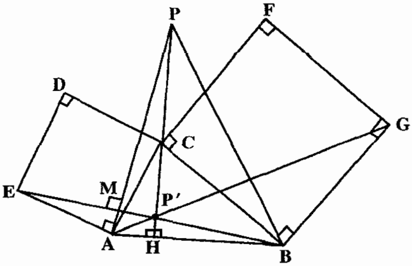
۳۶۴. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و رأس هریک از این مثلثها را به رأس مقابل از مثلث ABC وصل می‌کنیم. ثابت کنید سه خط حاصل همرسند.



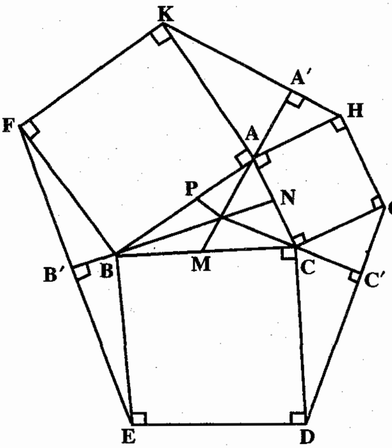
۳۶۵. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم که قاعده‌های آنها ضلعهای مثلث ABC باشند. ثابت کنید عمودهایی که از رأسهای این مثلثهای متساوی‌الساقین بر قاعدهٔ آنها فرود می‌آیند، همرسند.

۳۶۶. روی دو ضلع AB و BC از مثلث غیرمشخص ABC، دو مربع ACDE و BCFG را می‌سازیم. ثابت کنید خطهای AG و BE یکدیگر را روی ارتفاع CH قطع می‌کنند.





۳۶۷. روی دو ضلع AC و BC از مثلث ABC دو مربع ACDE و BCFG را می‌سازیم. ثابت کنید که خطهای AM و BN که بترتیب از A بر BE و از B بر AG عمود فرود آیند، یکدیگر را روی ارتفاع نظیر رأس C قطع می‌کنند.



۳۶۸. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن مربعهای BCDE و ACGH و ABFK را ساخته، خطهای KH و EF و DG را رسم می‌کنیم. ثابت کنید عمودهایی که از A ، B و C بترتیب بر خطهای HK، EF و DG فرود می‌آیند، همرسند.

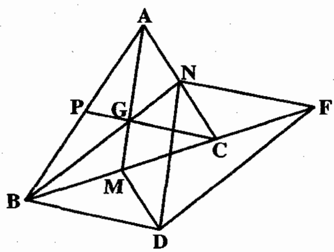
۴ . ۱ . ۱۲. خطهای موازی، عمود برهم، ...

۴ . ۱ . ۱۲ . ۱. خطها موازی‌اند

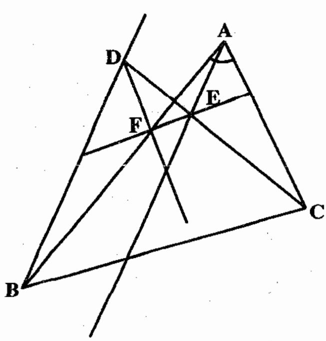
۳۶۹. مثلث ABC و نقطه‌های E و F بترتیب روی پاره‌خطهای AB و AC مفروضند. فرض کنید BF و CE یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند. نقطه‌های K، L، M و N را بترتیب روی پاره‌خطهای AC، CE، AB و BF به گونه‌ای درنظر می‌گیریم که داشته باشیم:

$BM = EA$ ؛ $BN = FD$ ؛ $CL = ED$ ؛ $KC = AF$. ثابت کنید : $KL \| MN$

اوّلین المپیاد آزمایشی ایران، ۱۳۷۰

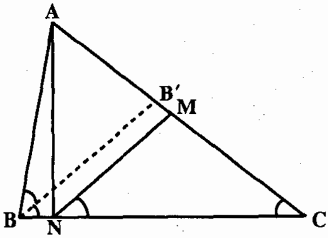


۳۷۰. میانه‌های AM و BN و CP از مثلث ABC را رسم کرده، از نقطهٔ N خطی به موازات CP رسم می‌کنیم تا خط BC را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. سپس از F خطی به موازات BN و از B خطی به موازات CP رسم می‌نماییم. این دو خط یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند. ثابت کنید که $DM \| AC$ و $DN \| AM$ است.



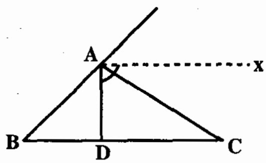
۳۷۱. دو خط موازی AE و BD از دو رأس A و B از مثلث ABC خطی را که از رأس C رسم شده در نقطه‌های E و D قطع می‌کند، اگر از E خطی موازی BC رسم کنیم AB را در F قطع می‌کند، ثابت کنید DF موازی AC است.

۴ . ۱ . ۱۲ . ۲. خطها برهم عمودند

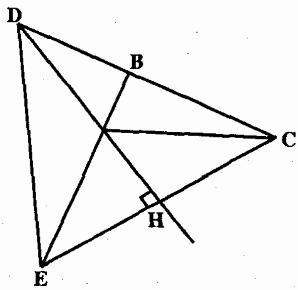


۳۷۲. در مثلث ABC زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C است. از نقطهٔ M وسط ضلع AC خطی به موازات نیمساز زاویهٔ B رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید که $AN \perp BC$ است.

۴ . ۱ . ۱۲ . ۳. خط، نیمساز است



۳۷۳. ثابت کنید نیمخط Ax که در نقطهٔ A بر نیمساز زاویهٔ داخلی A عمود است، نیمساز زاویهٔ خارجی A می‌باشد.

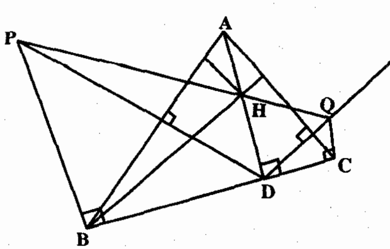


۳۷۴. در مثلث ABC ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AE = AC$ امتداد می‌دهیم و نیمساز زاویهٔ CAE را رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید AD نیمساز زاویهٔ BDE می‌باشد.

۳۷۵. M و N نقطه‌هایی روی ضلعهای AC و AB از مثلث ABC هستند و خطهای BM و CN یکدیگر را روی ارتفاع AD از مثلث قطع می‌کنند؛ نشان دهید که AD نیمساز زاویهٔ MDN است.

۴ . ۱ . ۱۲ . ۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

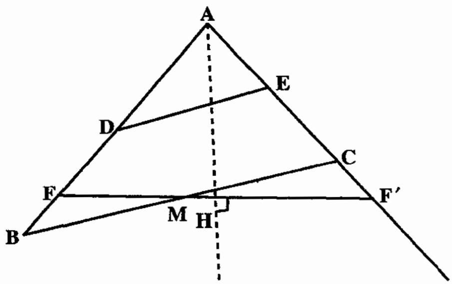
۳۷۶. در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم کرده، از نقطهٔ H دو خط می‌کشیم که با AH زاویه‌های مساوی ساخته و AB و AC را بترتیب در D و E قطع کنند. ثابت کنید DE همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



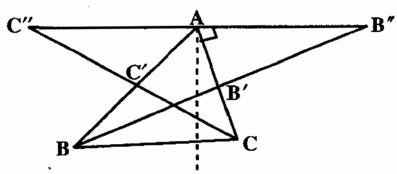
۳۷۷. عمودهای DP و DQ که از D پای ارتفاع AD از مثلث ABC بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آیند، عمودهای BP و CQ را که در B و C بر BC اخراج می‌شوند، بترتیب در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که PQ از H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد.

۳۷۸. اگر K و 'K دو نقطهٔ به یک فاصلهٔ از وسط ضلع BC و روی آن در مثلث ABC باشد و AK خط 'B'C ('B وسط AC و 'C وسط AB) را در "K قطع کند، ثابت کنید خط "K'K از G مرکز ثقل مثلث ABC عبور می کند و $K'G:GK'' = ۲:۱$.(مثلث 'AKK را مطالعه کنید.)

۳۷۹. نقطه‌های D و E وسطهای ضلعهای AB و AC از مثلث ABC می‌باشند. AD را از طرف D به اندازهٔ $DF = AE$ جدا می کنیم. ثابت کنید عمود وارد از F بر نیمساز زاویهٔ درونی A از وسط ضلع BC می گذرد.

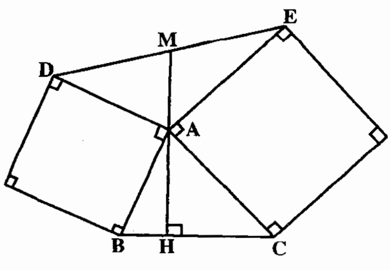


۳۸۰. در مثلث ABC میانهٔ 'BB را از طرف 'B به اندازهٔ خود تا نقطهٔ "B و میانهٔ 'CC را از طرف'C به اندازهٔ خود تا نقطهٔ "C امتداد می‌دهیم. ثابت کنید عمودمنصف "B"C از نقطهٔ A می گذرد.



۴ . ۱ . ۱۲ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۱. روی ضلعهای AB و AC از مثلث غیرمشخص ABC دو مربع می‌سازیم و رأسهای مجاور به رأس A این دو مربع را D و E نامیده به هم وصل می کنیم. ثابت کنید میانهٔ مثلث ADE ارتفاع مثلث ABC است و بعکس.



۴ . ۱ . ۱۳ . شکلهای ایجاد شده

۴ . ۱ . ۱۳ . ۱ . شکلهای ایجاد شده (مثلثها)

۳۸۲. ثابت کنید که مثلث ABC مثلث ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ می‌باشد.

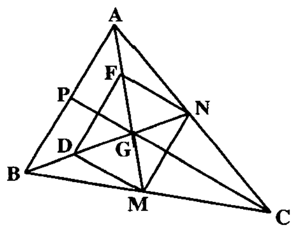
۳۸۳. نشان دهید که اگر خط واصل بین پای دو نیمساز دو زاویهٔ درونی یک مثلث موازی ضلع سوم مثلث باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۳۸۴. نشان دهید که پای عمودهایی که از دو رأس یک مثلث بر نیمساز زاویهٔ داخلی (یا خارجی) رأس سوم رسم می‌شود، و وسط ضلع مقابل رأس سوم، رأسهای یک مثلث متساوی‌الساقین هستند و دو ضلع مساوی این مثلث بترتیب، با ضلعهای گذرنده از رأس سوم مثلث مفروض موازیند.

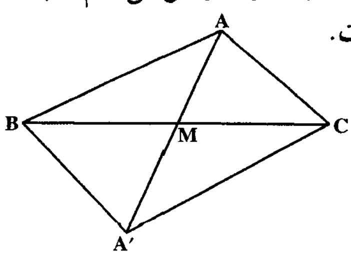
۳۸۵. قضیه. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی، مثلث پادک (ارتفاعی) یکسانی دارند.

۴.۱.۱۳.۲. شکلهای ایجاد شده (چند ضلعیها)

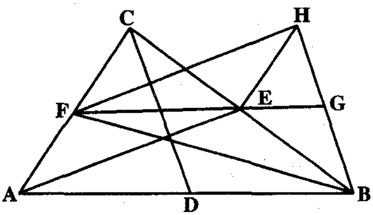
۳۸۶. نقطهٔ برخورد میانه‌های AM و BN و CP از مثلث ABC را G و وسطهای AG و BG را بترتیب F و D می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی MNFD متوازی‌الاضلاع است.



۳۸۷. میانهٔ AM از مثلث ABC را رسم کرده و آن را از طرف M به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است.



۳۸۸. متوازی‌الاضلاع ADEF را در مثلث ABC طوری محاط کرده‌ایم که رأسهای D، E و F بترتیب روی ضلعهای AB، BC و AC قرار گرفته‌اند. از نقطهٔ M میانگاه ضلع BC خط مستقیم AM را رسم می‌کنیم تا خط DE را در نقطهٔ K قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی CFDK یک متوازی‌الاضلاع است.



۳۸۹. مثلث ABC با میانه‌های AE، BF و CD داده شده است. FH موازی و مساوی AE است. BH و HE رسم می‌شوند. امتداد FE، BH را در G قطع می‌کند. کدام یک از گزاره‌های زیر ممکن است درست نباشد؟

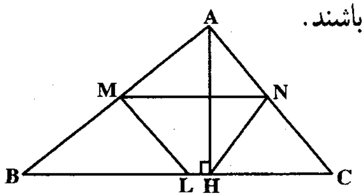
الف) AEHF متوازی‌الاضلاع است.

ب) $HE = HG$ ج) $BH = DC$

د) $FG = \frac{۳}{۴} AB$ هـ) FG میانهٔ مثلث BFH است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۳۹۰. ثابت کنید که در هر مثلث و سطحهای سه ضلع و پای یک ارتفاع، رأسهای یک ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌باشند.



۱۴.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به مثلث در هر حالت

۳۹۱. a) نقطه‌های B و C در درون پاره‌خط راست AD واقعند. ثابت کنید، اگر AB برابر CD باشد، آن وقت، برای هر نقطهٔ P از صفحه، داریم:

$$PA + PD \geq PB + PC$$

b) نقطه‌های A، B، C و D، روی یک صفحه مفروضند. می‌دانیم، برای هر نقطهٔ P از صفحه، این نابرابری برقرار است:

$$PA + PD \geq PB + PC$$

ثابت کنید، نقطه‌های B و C روی پاره‌خط راست AD واقعند و $AB = CD$.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۶، ۱۹۸۴

۳۹۲. از ۱۰۶ نقطه که هیچ سه نقطه‌ای از آن‌ها بر یک خط راست نیستند، چهار نقطه رأسهای یک مربع به ضلع واحد را تشکیل داده‌اند، و بقیهٔ نقطه‌ها در داخل این مربعند. ثابت کنید، دست کم ۱۰۷ مثلث وجود دارد که، رأسهای آن‌ها، روی این نقطه‌هاست و مساحتی دارند که از ۰/۰۱ تجاوز نمی‌کند.

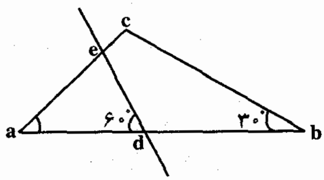
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

۳۹۳. نقطهٔ C، نقطه وسط پاره‌خط راست AB است. روی نیمخط راست به مبدأ C و غیرواقع بر خط راست AB، سه نقطهٔ پیاپی P، M و Q را طوری انتخاب کرده‌ایم که $|PM|=|MQ|$. ثابت کنید:

$$|AP|+|BQ|>۲|CM|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

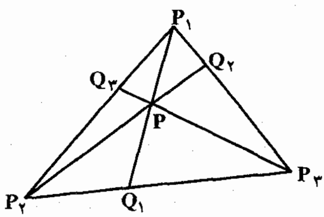
۳۹۴. در مثلث abc، زاویهٔ a به اندازهٔ °۴۵ و زاویهٔ b به اندازهٔ °۳۰ است. خطی با [ab] در d و با [ac]، یا اینکه با [bc]، در e برخورد می‌کند، به گونه‌ای که زاویهٔ ade به اندازهٔ °۶۰ است و مساحت مثلث abc به دو بخش برابر تقسیم می‌شود. نسبت $\frac{|ad|}{|ab|}$ برابر است با:



الف) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ب) $\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}$ ج) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ د) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۶}}$ هـ) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۱۲}}$

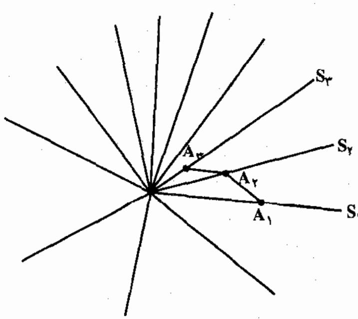
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳۹۵. مثلث $P_۱P_۲P_۳$ و نقطهٔ P داخل آن را در نظر می‌گیریم. خطهای $P_۱P$ و $P_۲P$ و $P_۳P$ ضلعهای مقابلشان را بترتیب در نقطه‌های $Q_۱$ و $Q_۲$ و $Q_۳$ قطع می‌کنند. ثابت کنید از عددهای $\frac{P_۳P}{PQ_۳}$، $\frac{P_۲P}{PQ_۲}$ و $\frac{P_۱P}{PQ_۱}$، حداقل یکی کوچکتر یا مساوی ۲ و حداقل یکی، بزرگتر یا مساوی ۲ است.

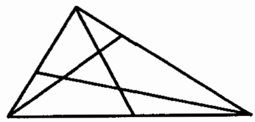


المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۱

۳۹۶. از نقطهٔ O، ۱۲ نیمخط راست، در یک صفحه رسم شده است و می‌دانیم، هر دو نیمخط مجاور، زاویهٔ کوچکتر از $\frac{\pi}{۴}$ تشکیل می‌دهند. روی نیمخط راست $S_۱$، نقطهٔ $A_۱$ را به فاصلهٔ ۷۲۹ از O انتخاب کرده‌ایم. از نقطهٔ $A_۱$، خط راستی موازی با نیمخط راست $S_{۱۲}$ کشیده‌ایم تا $S_۲$ را در نقطهٔ $A_۲$ قطع کند. از نقطهٔ $A_۲$، خط راستی موازی با $S_۱$ رسم کرده‌ایم تا $S_۳$ را در $A_۳$ قطع کند و غیره. سرانجام، نقطه $A_{۱۳}$ روی $S_۱$ به‌دست می‌آید. ثابت کنید: $|OA_{۱۳}|\leq ۱$. المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴



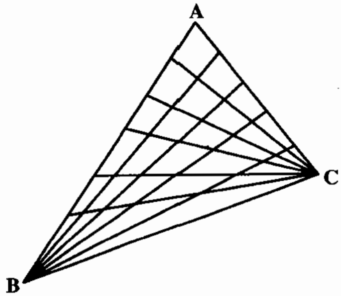
۳۹۷. در شکل زیر چند مثلث وجود دارد؟



الف) ۷　　ب) ۸　　ج) ۱۶　　د) ۱۷

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۳۹۸. از هریک از دو رأس یک مثلث، ۵ پاره خط به ضلع مقابل رسم کرده‌ایم. آیا می‌توانید بگویید چند مثلث، در ابعاد مختلف می‌توان شمرد؟

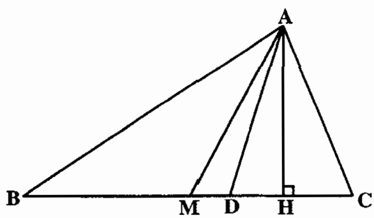


مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۳۹۹. روی هر ضلع مثلث، نقطه‌ای انتخاب و آنها را به هم وصل کرده‌ایم. به این ترتیب ۴ مثلث کوچک به‌دست می‌آید. می‌دانیم این چهار مثلث محیطهای برابر دارند. ثابت کنید نقطه‌های انتخابی در وسط ضلعها واقعند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

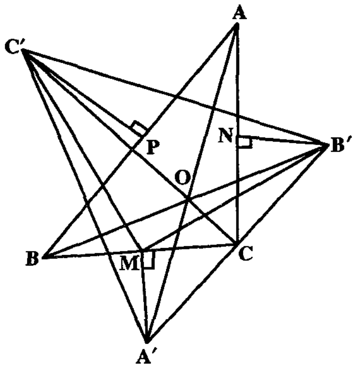
۴۰۰. ثابت کنید که در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ درونی، داخل زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس آن زاویه واقع است.



۴۰۱. رأس مثلث متغیری، ثابت است و ضلع مقابل این رأس، که طول آن متغیر است، روی خط راست ثابتی قرار دارد. نشان دهید که مکان هندسی تصویر رأس ثابت این مثلث متغیر روی هر یک از نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر یک خط راست است.

۱۵.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۴۰۲. مثلث ABC را در نظر گرفته وسطهای ضلعهای BC و CA و AB را بترتیب M و N و P می‌نامیم و در خارج مثلث، پاره‌خطهای MA' و NB' و PC' را بترتیب عمود بر BC و CA و AB و مساوی نصف آنها رسم می‌کنیم.

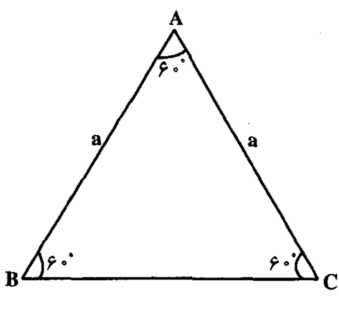


۱. ثابت کنید مثلث $B'MC'$ متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.
۲. ثابت کنید که $A'B'$ و CC' بر هم عمود و با هم مساویند.
۳. ثابت کنید که خطهای AA' و BB' و CC' از یک نقطه می‌گذرند.

۲.۴. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۲.۴. تعریف و قضیه

مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع آن با هم برابر باشند. مانند مثلث ABC که در آن $AB = BC = AC$ است. اندازهٔ هر زاویه از مثلث متساوی‌الاضلاع برابر ۶۰° است.



۲.۲.۴. زاویه

۱.۲.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۴۰۳. نقطه‌های K، L و M را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کرده‌ایم و می‌دانیم:

$$K\hat{A}B = L\hat{B}A = 15^\circ \ , \ M\hat{B}C = K\hat{C}B = 20^\circ \ , \ L\hat{C}A = M\hat{A}C = 25^\circ$$

زاویه‌های مثلث KLM را محاسبه کنید.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران هلند، ۱۹۷۹

۴۰۴. مثلثهای متساوی‌الساقین PXQ و QYR و RZP به قاعدهٔ ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع PQR، و در بیرون آن رسم شده‌اند، به‌طوری که:

$$R\hat{Z}P = \frac{1}{3}(\pi + 2\hat{C}) \ , \ Q\hat{Y}R = \frac{1}{3}(\pi + 2\hat{B}) \ \ ، \ \ P\hat{X}Q = \frac{1}{3}(\pi + 2\hat{A})$$

که در آنها $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های مثلث معلوم ABC هستند. فرض کنید $A_\circ$ معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست ZP و YQ، $B_\circ$ نقطهٔ برخورد خطهای XQ و ZR، و $C_\circ$ نقطهٔ برخورد YR و XP باشد. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$ بر زاویه‌های نظیر از مثلث ABC قابل انطباقند.

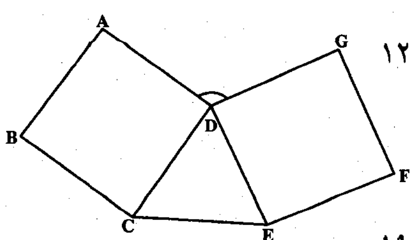
با استفاده از نتیجهٔ حاصل، قضیهٔ زیر از مورلی را ثابت کنید. اگر هر یک از زاویه‌های مثلثی دلخواه، به سه قسمت برابر تقسیم شود (از این رو، خطهای مربوط را سه‌ساز می‌نامند)، آن‌وقت سه نقطهٔ برخورد زوج سه‌سازهای مجاور به ضلعهای نظیر از مثلث رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع است (مثلث مورلی).

یادداشت. این قضیهٔ مهم هندسهٔ مقدماتی در حدود سال ۱۹۰۴ توسط فرانک مورلی Frank Morley ثابت شد. وی نخست این قضیه را برای دوستان انگلیسی خود در کمبریج شرح داد و بیست سال بعد، آن را در ژاپن منتشر ساخت.

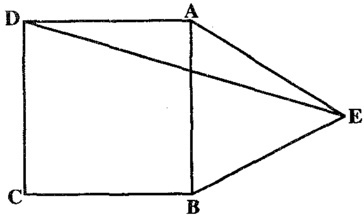
۴۰۵. در شکل روبه‌رو، CDE مثلث متساوی‌الاضلاع و ABCD و DEFG مربع هستند. اندازهٔ $\angle GDA$ برابر است با:

الف) ۹۰° ب) ۱۰۵° ج) ۱۲۰°

د) ۱۳۵° هـ) ۱۵۰°



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰



۴۰۶. در شکل روبه‌رو، ABCD یک مربع و ABE یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و نقطهٔ E در خارج مربع ABCD واقع است. اندازهٔ $\angle AED$ برحسب درجه چه‌قدر است؟

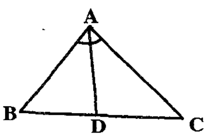
الف) ۱۰　　ب) ۱۲/۵　　ج) ۱۵

د) ۲۰　　هـ) ۲۵

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۴۰۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم، هر یک از زاویه‌های A، B و C را به سه زاویهٔ α، β و γ تقسیم می‌کنیم. از تقاطع دوبه‌دوی خطهای حاصل، (دو خطی که از ضلع نظیر دورترند) مثلث $A'B'C'$ تشکیل می‌شود. ثابت کنید که اندازه‌های زاویه‌های A'، B' و C' از این مثلث بترتیب برابر با 3α، 3β و 3γ می‌باشد.

۲.۲.۲.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۴۰۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با قاعدهٔ BC داده شده است. اگر $BD < DC$، ثابت کنید $B\hat{A}D < D\hat{A}C$.

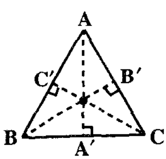
۳.۲.۴. ضلع

۱.۳.۲.۴. اندازهٔ ضلع

۴۰۹. اندازهٔ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی $3\sqrt{3}$ سانتیمتر است. اندازهٔ ضلع این مثلث را بیابید.

۴۱۰. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $16\sqrt{3}$ سانتیمتر مربع است. اندازهٔ ضلع این مثلث را بیابید.

۴.۲.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز



۱.۴.۲.۴. اندازهٔ ارتفاع

۴۱۱. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی الاضلاع سه ارتفاع متساوی‌اند.

۴۱۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱۲ سانتیمتر، اندازهٔ ارتفاع چه‌قدر است؟

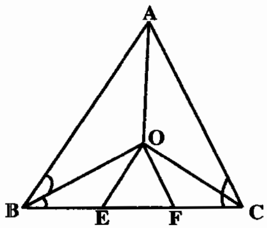
۴۱۳. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $9\sqrt{3}$ سانتیمتر مربع است. اندازهٔ ارتفاع این مثلث را بیابید.

۴.۲.۵. پاره‌خط

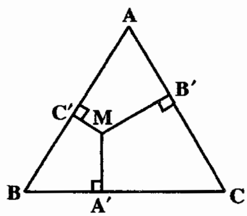
۴.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۱۴. اندازهٔ پاره‌خط واصل بین دو ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که اندازهٔ مساحت آن $۳۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع است.

۴.۲.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۴۱۵. اگر از نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC دو خط موازی با AB و AC رسم کنیم، این خطها ضلع BC را به سه جزء متساوی تقسیم می‌کنند.



۴۱۶. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مقداری است ثابت، برابر با ارتفاع مثلث.

۴۱۷. مثلث متساوی‌الاضلاع T و نقطهٔ P در داخل آن را در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های P از سه ضلع مثلث T،

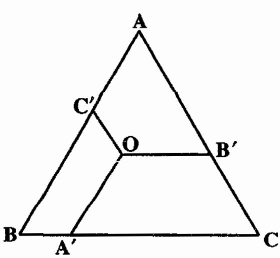
الف) آنگاه و تنها آنگاه مینیمم است که P بر مرکز ثقل مثلث T واقع باشد.

ب) آنگاه و تنها آنگاه ماکسیمم است که P بر مرکز ثقل مثلث T واقع باشد.

ج) به ازای هر وضعی از P در داخل مثلث برابر است با طول ارتفاع مثلث.

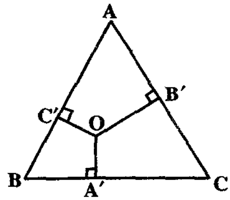
د) به ازای هر وضعی از P در داخل مثلث، برابر است با نصف محیط مثلث.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰



۴۱۸. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC خطهای OA′ و OB′ و OC′ را به موازات AB و BC و AC رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $OA'+OB'+OC'$ برابر با ضلع مثلث است.

۴۱۹. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC عمودهای OA' و OB' و OC' را بترتیب بر ضلعهای BC و AC و AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید اگر نقطهٔ O تغییر کند مجموع $AC' + BA' + CB'$ ثابت می‌ماند.



۴.۲.۶. محیط

۴.۲.۶.۱. اندازهٔ محیط

۴۲۰. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $۲۴\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع است. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

۴۲۱. ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی $۱۲\sqrt{۶}$ سانتیمتر است. اندازهٔ محیط آن را بیابید.

۴.۲.۶.۲. رابطهٔ بین محیطها

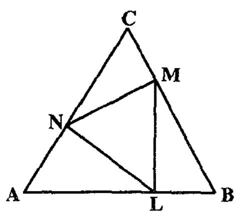
۴۲۲. وسط ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به هم وصل کرده‌ایم. نسبت محیط مثلث حاصل به محیط مثلث ABC را بیابید.

۴.۲.۷. مساحت

۴.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت

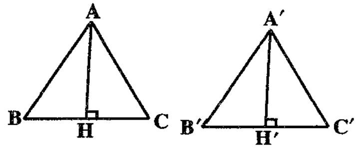
۴۲۳. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸ سانتیمتر را تعیین کنید.

۴۲۴. مثلث متساوی‌الاضلاع LMN را در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC چنان محاط کرده‌ایم که رأسهای آن روی ضلعهای مثلث ABC واقع شده و هریک از ضلعهای این مثلث را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. اگر ضلع مثلث ABC برابر a باشد، مساحت مثلث LMN را به‌دست آورید.

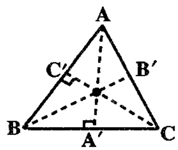


۸.۲.۴. همنهشتی مثلثها

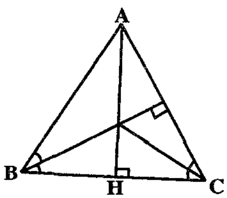
۴۲۵. دو مثلث متساوی‌الاضلاع که یک ارتفاع متساوی داشته باشند، با هم برابرند.



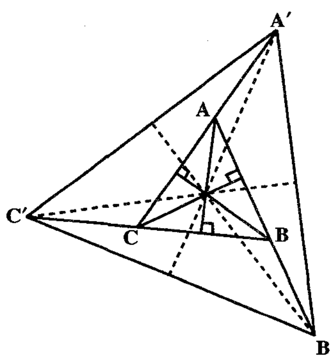
۹.۲.۴. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است



۴۲۶. ثابت کنید اگر سه ارتفاع مثلثی متساوی باشند، آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



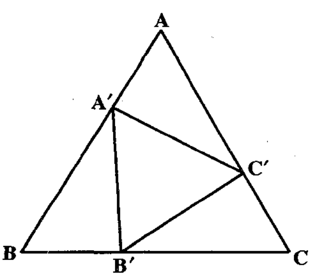
۴۲۷. ثابت کنید هر مثلث که در آن نقطهٔ تلاقی سه عمودمنصف ضلعها و نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی بر هم منطبق باشند، متساوی‌الاضلاع است.



۴۲۸. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، ضلعهای AB و BC و CA را در یک جهت به یک اندازه امتداد می‌دهیم به قسمی که $AA' = BB' = CC'$ باشد، ثابت کنید:

۱. مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. محل تلاقی عمودمنصفهای ضلعهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بر هم منطبقند.



۴۲۹. نقطه‌های A' و B' و C' را بترتیب روی ضلعهای AB و BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC چنان اختیار می‌کنیم که $AA' = BB' = CC' = \frac{۱}{۳}AB$ باشد. ثابت کنید که:

۱. مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. ضلعهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ بر هم عمودند.

۴۳۰. مثلث ABC به ضلعهای a و b و c را درنظر می‌گیریم و هر یک از ضلعها را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم. نقطه‌های حاصل را ابتدا از ضلع BC و در جهت B به C و C به A و A به B بترتیب D، E، F، H، I و K می‌نامیم. سه مثلث متساوی‌الاضلاع $A'DE$، $B'FH$ و $C'IK$ را می‌سازیم. (هر سه مثلث یا در جهت داخل مثلث و یا در جهت خارج مثلث) ثابت کنید که مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۴۳۱. وسط ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، آن را به چهار مثلث ADE، BDF، DEF و CEF تقسیم می‌کنند، وسط ضلعهای مثلثهای اخیر را K، L، M، N، O، P، Q، R و S می‌نامیم. هر یک از ۱۵ نقطهٔ حاصل را با یکی از دو رنگ موجود، رنگ می‌کنیم. ثابت کنید، می‌توان سه نقطه از یک رنگ پیدا کرد، به نحوی که رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۰

۴.۲.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۳۲. a) زمین قلعه‌ای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع، با ضلع به طول ۱۰۰ متر است. آن را به ۱۰۰ سالن مثلثی شکل تقسیم کرده‌اند. همهٔ دیوارهای سالن، طولهایی برابر دارند: ۱۰ متر. در وسط هر دیوار بین هر دو سالن، دری تعبیه شده است. ثابت کنید، اگر کسی بخواهد، سالن‌های قلعه را بازدید کند، بدون این که دوبار وارد یک سالن بشود، نمی‌تواند، بیش از ۹۱ سالن را ببیند.

b) هریک از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع را به k بخش برابر تقسیم کرده‌ایم. از هر نقطهٔ تقسیم، خط‌های راستی موازی ضلعها کشیده‌ایم. به این ترتیب، مثلث مفروض، به k^2 مثلث کوچکتر تقسیم می‌شود. دنبالهٔ مثلثهایی را یک «زنجیره» می‌نامیم که، در آن، هیچ مثلثی دوبار تکرار نشده باشد و در ضمن هر مثلث با مثلث قبلی خود در یک ضلع مشترک باشد. حداکثر تعداد مثلثهای این زنجیره چند است؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۴۳۳. کدامیک از گزاره‌های زیر دروغ است؟ همهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع:

الف) متساوی‌الزوایا هستند.

ب) متساوی‌الساقین هستند.

ج) چندضلعی منتظم هستند.

د) با یکدیگر همنهشتند. (= قابل انطباقند)

هـ) با یکدیگر متشابهند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

۴۳۴. مثلث abc دارای دو ویژگی زیر است :

α : مثلث abc متساوی‌الاضلاع است.

β : زاویهٔ به رأس a به اندازهٔ $60°$ است.

ویژگی β نسبت به ویژگی α،

الف) یک شرط لازم، اما غیرکافی است.

ب) یک شرط کافی، اما غیرلازم است.

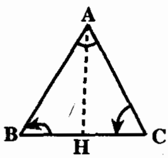
ج) یک شرط لازم و کافی است.

د) شرطی است نه لازم و نه کافی.

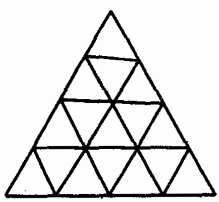
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۴۳۵. روی صفحهٔ سفیدی رنگ پاشیده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان دو نقطهٔ هم رنگ پیدا کرد، به نحوی که فاصلهٔ بین آن‌ها، برابر ۱۹۶۵ متر باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵



۴۳۶. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt[4]{3}$ داده شده است. ضلع مربع معادل این مثلث را پیدا کنید.



۴۳۷. در شکل روبه‌رو، چند مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد؟

الف) ۲۲ ب) ۲۳

ج) ۲۴ د) ۲۶

هـ) ۲۷

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۴۳۸. مثلث را «بزرگ» می‌نامیم، وقتی که طول هر ضلع آن از واحد بیشتر باشد. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، با طول ضلع ۵، داده شده است. ثابت کنید :

a) از مثلث ABC، می‌توان ۱۰۰ مثلث «بزرگ» جدا کرد ؛

b) مثلث ABC را می‌توان، به طور کامل، دست کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» تقسیم کرد.

c) مثلث ABC را می‌توان دست کم به ۱۰۰ مثلث «بزرگ» طوری تقسیم کرد که، هر دو مثلث «بزرگ» یا متقاطع نباشند، یا تنها یک رأس مشترک داشته باشند و یا ضلع یکی از دو مثلث، ضلع دیگری هم باشد (این نوع تقسیم را، مثلث بندی گویند).

d) مسأله‌های b) و c) را، برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ حل کنید.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۶

۴۳۹. اگر A_1 نقطه‌ای در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و A_2 نقطه‌ای در درون مثلث A_1BC باشند، ثابت کنید :

$$I.Q.(A_1BC) > I.Q.(A_2BC)$$

که در آن، منظور از I.Q، نسبت همپیرامونی شکل است. نسبت همپیرامونی شکل F، به این صورت تعریف می‌شود :

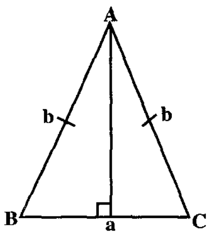
$$I.Q.(F) = \frac{S_F}{(P_F)^2}$$

(S_F مساحت و P_F محیط شکل F است.)

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۸۲

۳.۴. مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳.۴. تعریف و قضیه



مثلث متساوی‌الساقین مثلثی است که دو ضلع آن مساوی باشند. دو ضلع مساوی را ساقها و ضلع سوم را قاعدهٔ مثلث می‌نامند. مانند مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ است. اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ a و ساق b برابر است با : $2p = a + 2b$ و اندازهٔ مساحت این مثلث برابر است با : $S = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

۴۴۰. قضیه. در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز زاویهٔ درونی رأس و ارتفاع و میانهٔ وارد بر قاعده و عمودمنصف قاعده برهم منطبقند.

۴۴۱. قضیه‌های عکس:

قضیهٔ ۱. مثلثی که میانه و ارتفاع نظیر یک ضلع آن برهم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.

قضیهٔ ۲. مثلثی که ارتفاع نظیر یک ضلع از آن، نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

قضیهٔ ۳. مثلثی که میانهٔ نظیر یک ضلع از آن، نیمساز زاویهٔ درونی مقابل به آن ضلع هم باشد، متساوی‌الساقین است.

۴۴۲. حالتهای همنهشتی دو مثلث متساوی‌الساقین:

قضیهٔ ۱. اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین یک ساق و زاویهٔ رأس از یک مثلث با یک ساق و زاویهٔ رأس از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

قضیهٔ ۲. اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده و یک زاویهٔ مجاور قاعده از یکی با قاعده و یک زاویهٔ مجاور قاعده از دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

قضیهٔ ۳. اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین زاویهٔ رأس و قاعده از یکی با زاویهٔ رأس و قاعده از دیگری برابر باشند، دو مثلث همنهشتند.

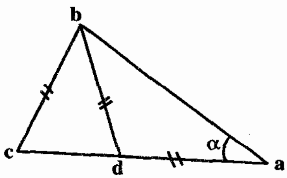
قضیهٔ ۴. اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین قاعده و ساق از یکی با قاعده و ساق از دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

۴۴۳. **قضیه.** در مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های روبه‌روی ساقها متساوی‌اند و بعکس.

۴ . ۳ . ۲ . زاویه

۴ . ۳ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

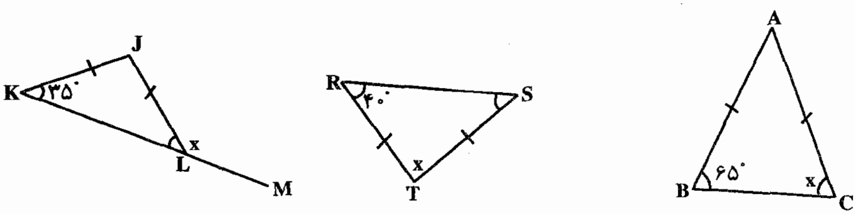
۴۴۴. در شکل روبه‌رو، هریک از مثلثهای abc و abd و bcd متساوی‌الساقین است. زاویهٔ α چند درجه است؟



الف) °۱۸ ب) °۲۴ ج) °۳۰ د) °۳۶ هـ) قابل محاسبه نیست.

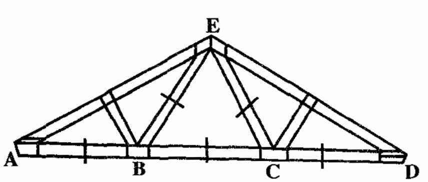
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۴۴۵. ۱. مقدار x را در مثلثهای متساوی‌الساقین زیر بیابید.



(الف) (ب) (پ)

۲. مقدار هریک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید. ضلعهای مشخص شده با علامت / با هم برابرند.



الف) $B\hat{E}C$

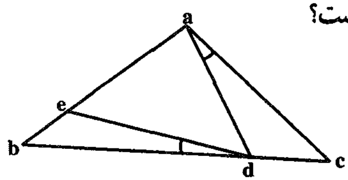
ب) $A\hat{B}E$

پ) $E\hat{A}B$

۴۴۶. در درون مثلث ABC، نقطهٔ M را درنظر گرفته‌ایم، و برای آن، داریم:
$M\hat{B}A = ۳۰^\circ$ و $M\hat{A}B = ۱۰^\circ$. به شرط $A\hat{C}B = ۸۰^\circ$ و $AC = BC$ ، مقدار زاویه AMC را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۸۳

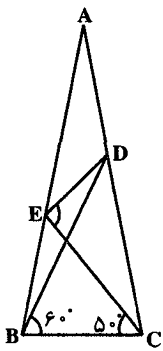
۴۴۷. در مثلث شکل روبه‌رو، داریم $c\hat{a}d = ۲۰^\circ$ ، $|ab| = |ac|$. هرگاه $|ad| = |ae|$، اندازهٔ زاویهٔ bde چه‌قدر است؟



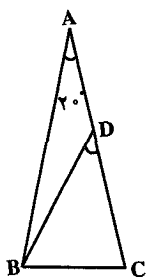
الف) ۸° ب) ۹° ج) ۱۰° د) $۱۲/۵^\circ$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۴۴۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) هریک از زاویه‌های B و C مساوی ۸۰ درجه است. از نقطهٔ B خطی رسم می‌کنیم که با AC در نقطهٔ D برخورد کند و زاویهٔ $D\hat{B}C = ۶۰^\circ$ باشد. همچنین از C خطی رسم می‌کنیم که با AB در C برخورد کند و $E\hat{C}B = ۵۰^\circ$ باشد. اندازهٔ زاویهٔ DEC را به‌دست آورید.



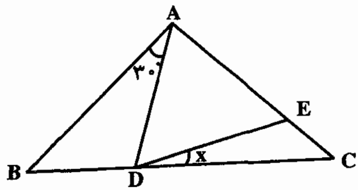
۴۴۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) اندازهٔ زاویهٔ A مساوی ۲۰° است. روی ساق AC طول AD را مساوی قاعدهٔ BC اختیار نموده از D به B وصل می‌کنیم، اندازهٔ زاویهٔ BDC را محاسبه کنید.



۴۵۰. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\hat{A} = ۴۰^\circ$. نقطهٔ O داخل مثلث است، به طوری که $O\hat{C}A = O\hat{B}C$. زاویهٔ BOC چند درجه است؟

الف) ۱۱۰° ب) ۳۵° ج) ۱۴۰° د) ۵۵° هـ) ۷۰°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴



۴۵۱. در شکل، $AB = AC$ ، $B\hat{A}D = 30^\circ$ و $AE = AD$. در این صورت x برابر است با :

الف) $7\frac{1}{2}^\circ$ ب) 10° ج) $12\frac{1}{2}^\circ$ د) 15° هـ) 20°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۴۵۲. در مثلث ABC، $CA = CB$. مربع BCDE بر ضلع CB و در خارج مثلث ساخته می‌شود. اگر x اندازهٔ زاویهٔ DAB بر حسب درجه باشد، آن‌گاه :

الف) x به مثلث ABC بستگی دارد.

ب) x مستقل از مثلث است.

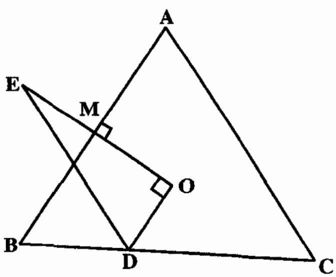
ج) x ممکن است مساوی زاویهٔ CAD باشد.

د) x هرگز نمی‌تواند مساوی زاویهٔ CAB باشد.

هـ) x از 90° کمتر و از 45° بیشتر است.

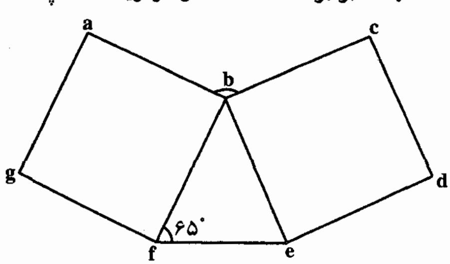
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۴۵۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ قرینهٔ نقطهٔ O محل برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث نسبت به ضلع AB را E می‌نامیم. از نقطهٔ E خطی به موازات ضلع AC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. از O به D وصل می‌کنیم.



ثابت کنید $D\hat{O}E = 90^\circ$ است.

۴۵۴. در شکل روبه رو، اندازهٔ زاویه bfe برابر 65° است و چهارضلعیهای abfg و bcde مربعهایی با مساحتهای برابر هستند. اندازهٔ زاویهٔ abc چند درجه است؟

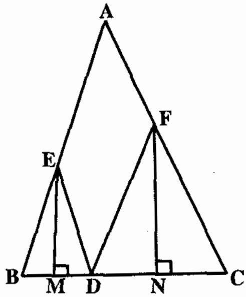


الف) 115° ب) 120° ج) 125° د) 130° هـ) 135°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)



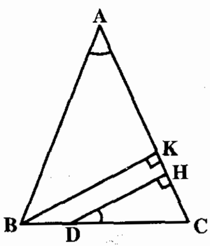
۴۵۵. نقطهٔ D را روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ اختیار می کنیم. از نقطه‌های M و N که بترتیب وسط پاره‌خطهای DB و DC می‌باشند، دو عمود بر BC اخراج می کنیم تا AB و AC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع نمایند. ثابت کنید: $B\hat{A}C = E\hat{D}F$.

۴۵۶. نقطه‌های D، E و F را روی ضلعهای AC، AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(|AB| = |BC|)$، طوری درنظر گرفته‌ایم که داشته باشیم:

$|DE| = |DF|$ و $|AE| + |FC| = |AC|$

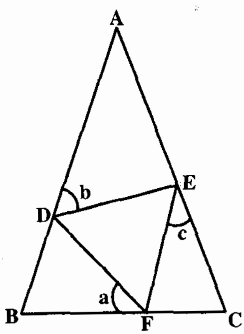
ثابت کنید، دو زاویهٔ BAC و FDE برابرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳



۴۵۷. از نقطهٔ D واقع بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC یا واقع بر امتداد آن عمود DH را بر ساق AC فرود می‌آوریم.

ثابت کنید: $B\hat{A}C = ۲H\hat{D}C$.



۴۵۸. در شکل روبه‌رو AB و AC ساقهای مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند، که در آن مثلث متساوی‌الاضلاع DEF محاط شده است. اگر زاویهٔ BFD را با a، زاویهٔ ADE را با b و زاویهٔ FEC را با c، مشخص کنیم، آن‌گاه:

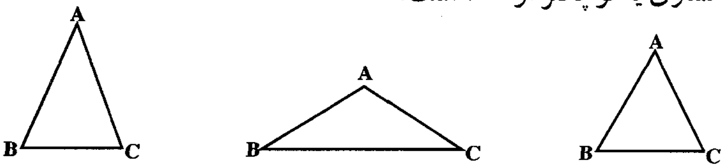
الف) $b = \frac{a+c}{۲}$ ب) $b = \frac{a-c}{۲}$

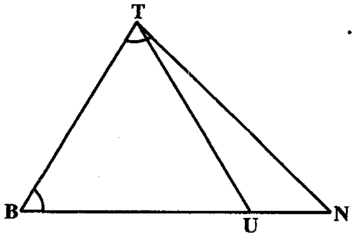
ج) $a = \frac{b-c}{۲}$ د) $a = \frac{b+c}{۲}$

هـ) هیچ یک از اینها

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۴۵۹. مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB=AC) داده شده است. ثابت کنید اگر در این مثلث قاعدهٔ BC بزرگتر یا مساوی یا کوچکتر از هریک از ساقها باشد، زاویهٔ A بترتیب بزرگتر یا مساوی یا کوچکتر از 60° است.





۴۶۰. در شکل روبه رو : فرض کنیم $BT = BU$.

ثابت کنید $B\hat{T}N > T\hat{U}B$.

۴ . ۳ . ۳ . ضلع

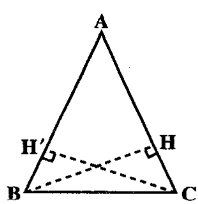
۴ . ۳ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۴۶۱. در یک مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع ۳ و ۸ سانتیمترند. اندازهٔ ضلع سوم چه‌قدر است؟

۴۶۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏$(AB = BC)$، اندازهٔ قاعدهٔ AC برابر ۸ سانتیمتر است. حدود اندازهٔ ساقهای این مثلث را تعیین کنید.

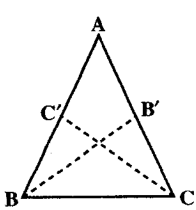
۴ . ۳ . ۴ . ارتفاع، میانه، نیمساز

۴ . ۳ . ۴ . ۱ . ارتفاع



۴۶۳. ثابت کنید در هرمثلث متساوی‌الساقین، ارتفاعهای نظیر دو ساق باهم برابرند.

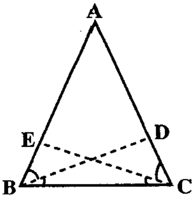
۴ . ۳ . ۴ . ۲ . میانه



۴۶۴. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه‌های نظیر دو ساق با هم برابرند.

۴ . ۳ . ۴ . ۳ . نیمساز

۴۶۵. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای زاویه‌های داخلی رو به رو به ساقها با هم برابرند.



۴ . ۳ . ۴ . ۴ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۶. در مثلثی که متساوی‌الساقین است، ولی متساوی‌الاضلاع نیست، تعداد خطهای متمایز معرف ارتفاعها، میانه‌ها و نیمسازهای داخلی برابر است با :

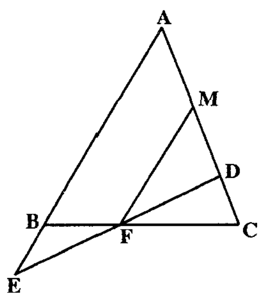
الف) ۹ ب) ۷ ج) ۶ د) ۵ هـ) ۳

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۴ . ۳ . ۵ . پاره‌خط

۴ . ۳ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

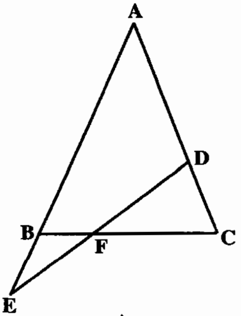
۴۶۷. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) داده شده است، نقطهٔ D را روی ساق AC اختیار نموده و ساق AB را از طرف B به اندازهٔ BE برابر CD امتداد می‌دهیم و خط DE را وصل می‌کنیم تا در نقطهٔ F قاعدهٔ BC را قطع کند. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AD باشد، ثابت کنید $FM = \frac{AB}{۲}$ است.



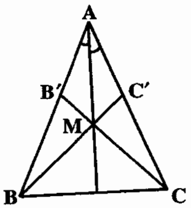
۴۶۸. مثلث متساوی‌الساقین ABC داده شده است، $AB = BC$ و AD نیمساز آن است. عمود وارد بر AD در D، امتداد ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند ؛ پای عمودهای وارد از B و D بر AC بترتیب نقطه‌های M و N هستند. اگر $AE = a$ ، MN را پیدا کنید.

۴ . ۳ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

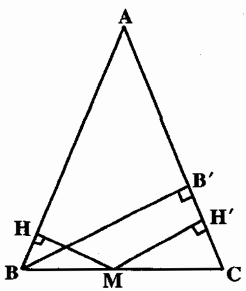
۴ . ۳ . ۵ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)



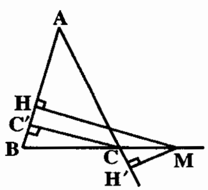
۴۶۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC) طول اختیاری BE را بر امتداد ساق AB و طول CD = BE را روی ساق AC جدا می‌کنیم. اگر DE قاعدهٔ BC را در نقطهٔ F قطع کند، ثابت کنید EF = FD است.



۴۷۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC) را درنظر گرفته و نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ A اختیار می‌کنیم. خطهای BM و CM بترتیب ضلعهای AC و AB را در نقطه‌های C′ و B′ قطع می‌کند. ثابت کنید : BB′ = CC′ .

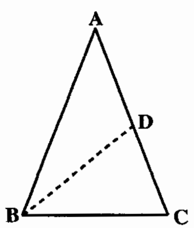


۴۷۱. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه واقع بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن مثلث، مقداری است ثابت برابر اندازه ارتفاع وارد بر یک ساق.

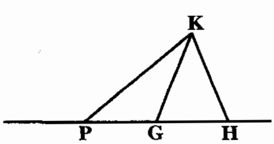


۴۷۲. ثابت کنید که تفاضل فاصله‌های هر نقطه واقع بر امتداد قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق، برابر است با یکی از دو ارتفاع وارد بر ساقها.

۴ . ۳ . ۵ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



۴۷۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC) نقطهٔ B را به نقطهٔ D واقع بر ساق AC (بین A و C) وصل می‌کنیم، ثابت کنید : BD > DC .

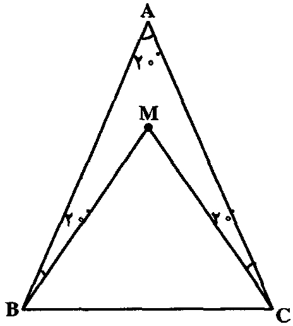


۴۷۴. در مثلث KGH، KG = KH ؛ P نقطهٔ دلخواهی از GH است که روی GH قرار ندارد. ثابت کنید PK همیشه از KG یا KH بزرگتر است.

۴ . ۳ . ۶. محیط

۴ . ۳ . ۶ . ۱. اندازهٔ محیط

۴۷۵. اندازهٔ ساق مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۸ سانتیمتر و اندازهٔ قاعدهٔ آن برابر ۶ سانتیمتر است. اندازهٔ محیط مثلث را بیابید.



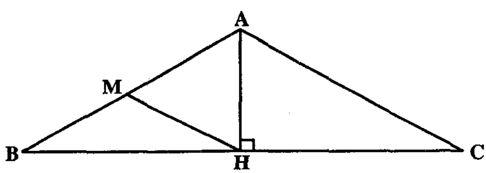
۴۷۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$،

$\hat{A} = ۲۰^\circ$ و $BC = ۸cm$ است. نیمخطهای BM و CM را چنان رسم می‌کنیم که $A\hat{B}M = A\hat{C}M = ۲۰^\circ$ باشد، محیط مثلث BMC چه‌قدر است؟

۴ . ۳ . ۷. مساحت

۴ . ۳ . ۷ . ۱. اندازهٔ مساحت

۴۷۷. مطلوب است مساحت مثلث متساوی الساقینی که قاعدهٔ آن مساوی ۱۲ و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن برابر با پاره‌خطی باشد که وسط قاعده را به وسط یکی از ساقها وصل می کند.



۴۷۸. مصری‌ها، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصلضرب قاعدهٔ آن را در یکی از ساقها، به‌دست می‌آوردند. درصد اشتباه آنها را برای حالتی که قاعدهٔ مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

پاپیروس رایند، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۴۷۹. ثابت کنید، مساحت هر مثلث متساوی‌الساقین، همیشه کوچکتر است از مساحت مثلثی که همان قاعده را داشته باشد و مجموع دو ضلع دیگرش، با مجموع دو ساق مثلث متساوی‌الساقین، برابر باشد.

از اشتینر، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

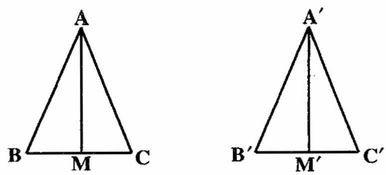
اشتینر

یاکوب اشتینر

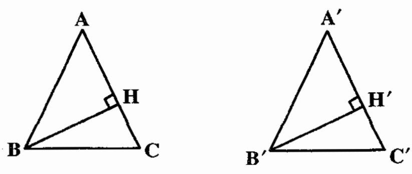
یاکوب اشتینر J.steiner (متولد ۱۸ مارس ۱۷۹۶ در اوتسندورف، متوفی اول آوریل ۱۸۶۳ در برن، ریاضیدان بزرگ سویسی است). کسانی که او را در کودکی می‌شناختند کمتر از هر کسی احتمال می‌دادند روزی از بزرگترین هندسه دانان عصر جدید شود. او اندکی پس از ترک سویس به دانشگاه هیدلبرگ آلمان رفت (۱۸۱۸)، استعداد ریاضی خود را در آن جا نشان داد، و در ۱۸۲۱ به تدریس خصوصی در برلین پرداخت، و سپس معلم مدرسه شد (۱۸۲۵). در ۱۸۳۴ استاد دانشگاه برلین شد و از آن پس، آثار متعددی در زمینهٔ هندسه نوشت. سالهای آخر عمرش در سویس گذشت. کتابهایی در عالیترین حد نوشت و در شمار برجسته ترین ریاضی دانان درآمد. او بحث کارنو Carnot در زمینهٔ چهارضلعیها را، به n ضلع در فضا بسط داد. در خواص میدانها Range، و خطهای شعاعی Pencil، بحث کرد و نظریهٔ منحنیها و سطوح درجهٔ دوم را تکمیل کرد.

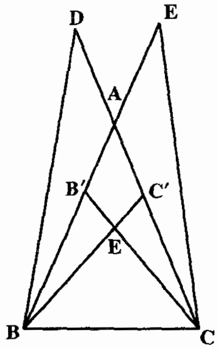
۴ . ۳ . ۸. همنهشتی مثلثها

۴۸۰. اگر در دو مثلث متساوی‌الساقین زاویهٔ رأس و میانهٔ نظیر قاعده با هم برابر باشند آن دو مثلث همنهشتند.



۴۸۱. هرگاه یک ضلع و یک ارتفاع از مثلث متساوی‌الساقینی با یک ضلع و یک ارتفاع از مثلث متساوی‌الساقین دیگر نظیر به نظیر متساوی باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

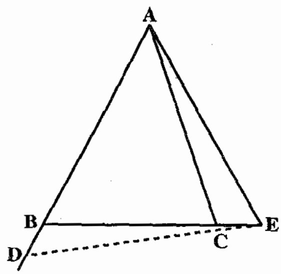




۴۸۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ داده شده است. ضلعهای AB و AC را به طولهای مساوی $AE = AD$ امتداد می‌دهیم (D در امتداد AC و E در امتداد AB).

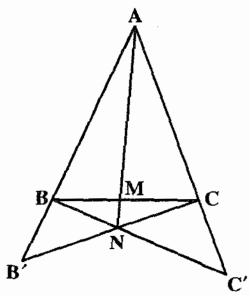
۱. ثابت کنید مثلثهای DAB و EAC همنهشتند.

۲. روی AB و AC طولهای $AB' = AC'$ (B' روی AB و C' روی AC) را جدا می‌کنیم و محل برخورد CB' و BC' را E می‌نامیم. ثابت کنید مثلثهای EBB' و ECC' همنهشتند.

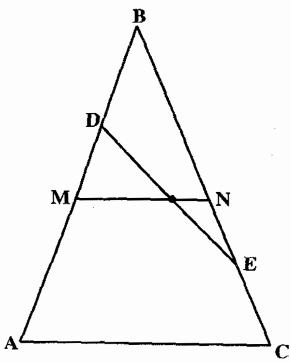


۴۸۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ داریم $BC < AB$. قاعدهٔ BC را از طرف C امتداد می‌دهیم و روی آن پاره‌خط $BE = BA$ را جدا می‌کنیم و نیز AB را از طرف B به اندازهٔ $BD = CE$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید دو مثلث ACE و EBD همنهشتند.

۴ . ۳ . ۹ . نقطه‌های همخط



۴۸۴. روی دو ساق AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC دو طول متساوی BB' و CC' را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که نقطهٔ N فصل مشترک BC' و $B'C$ و نقطهٔ M وسط BC و رأس A بر یک استقامت هستند.

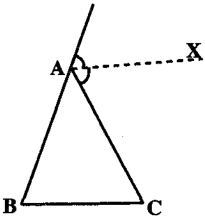


۴۸۵. نقطهٔ D روی ضلع AB و نقطهٔ E روی ضلع BC مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = BC)$ طوری قرار دارند که $BD = CE$ است. ثابت کنید که وسط پاره‌خط DE بر خط واصل بین وسطهای دو ساق مثلث منطبق است.

۴ . ۳ . ۱۰ . خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

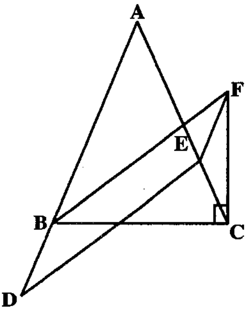
۴ . ۳ . ۱۰ . ۱ . خطها موازی‌اند

۴۸۶. در مثلث متساوی الساقین ABC ‏(AB = AC) نیمساز زاویهٔ خارجی A را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این نیمساز با قاعدهٔ BC موازی است.

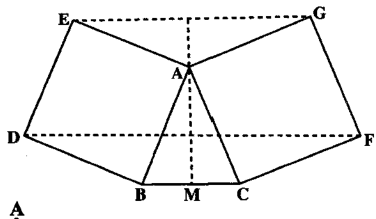


۴ . ۳ . ۱۰ . ۲ . خطها برهم عمودند

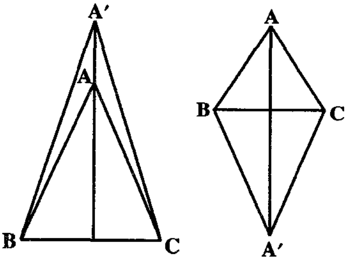
۴۸۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC) در امتداد AB نقطهٔ D و روی ضلع AC نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که BD = CE باشد. ثابت کنید اگر با ضلعهای BD و DE متوازی‌الاضلاع DBFE را بسازیم، FC بر BC عمود است.



۴۸۸. روی ساقهای AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC و در خارج مثلث دو مربع ABDE و ACFG را بنا می‌کنیم. اگر نقطهٔ M وسط قاعدهٔ BC باشد، ثابت کنید AM بر EG و DF عمود است.



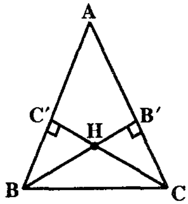
۴۸۹. هرگاه دو مثلث متساوی‌الساقین در قاعده مشترک باشند، خطی که دو رأس آنها را به هم وصل می‌کند بر قاعدهٔ مشترک عمود است و آن را نصف می‌کند (دو حالت).



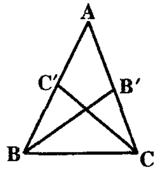
۴ . ۳ . ۱۱ . ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است

۴ . ۳ . ۱۱ . ۱ . مثلث داده شده متساوی‌الساقین است

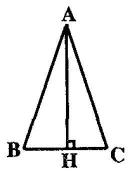
۴۹۰. ثابت کنید که اگر دو ارتفاع از مثلثی با هم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



۴۹۱. در مثلث ABC ارتفاعهای ′BB و ′CC در نقطهٔ H یکدیگر را قطع می‌کنند. در صورتی که HB = HC باشد، ثابت کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

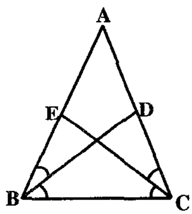


۴۹۲. ثابت کنید مثلثی که دو میانهٔ متساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

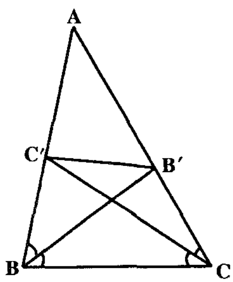


۴۹۳. هرگاه در مثلثی میانه و ارتفاع نظیر یک رأس برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۴۹۴. ثابت کنید هر مثلثی که در آن نیمساز یک زاویهٔ خارجی با ضلع روبه رو به رأس نظیر آن زاویه موازی باشد، متساوی‌الساقین است.



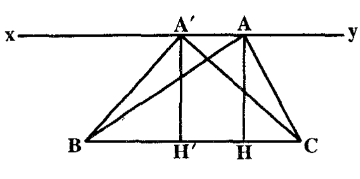
۴۹۵. **قضیهٔ اشتینر ـ لموس.** ثابت کنید اگر در مثلثی دو نیمساز دو زاویهٔ داخلی متساوی باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



۴۹۶. هرگاه خطی که پاهای دو نیمساز داخلی یک مثلث را به‌هم وصل می‌کند موازی ضلع سوم باشد ثابت کنید که آن مثلث متساوی‌الساقین است.

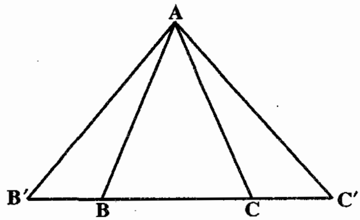
۴۹۷. اگر نیمساز یک زاویهٔ داخلی مثلث نیمساز زاویه‌ای که از دو نیمساز زاویه‌های داخلی دیگر آن تشکیل می‌شود باشد، مثلث متساوی الساقین است.

۴۹۸. قرینهٔ میانهٔ نظیر یک رأس مثلث را نسبت به نیمساز زاویهٔ همان رأس، شبه میانه می‌نامیم. ثابت کنید که اگر در مثلثی دو شبه‌میانه با هم برابر باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

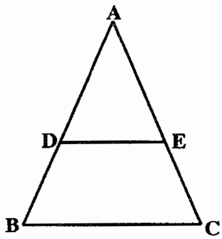


۴۹۹. بین تمام مثلثهایی که در قاعده مشترکند و مساحت سطح آنها یکی است، آن که محیطش از همه کوچکتر است، متساوی‌الساقین می‌باشد.

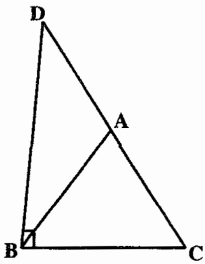
۴. ۳. ۱۱. ۲. مثلثهای دیگر ایجاد شده متساوی‌الساقیند



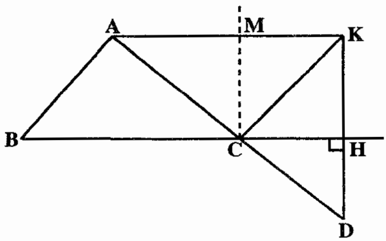
۵۰۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$ را درنظر گرفته و قاعدهٔ BC را از دو طرف به اندازهٔ دو طول برابر $BB' = CC'$ امتداد داده از نقطهٔ A به B' و C' وصل می‌کنیم. ثابت کنید مثلث $AB'C'$ متساوی‌الساقین است.



۵۰۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ خطی موازی قاعدهٔ BC رسم می‌کنیم تا دو ساق مثلث را در نقطه‌های D و E قطع کند. ثابت کنید مثلث ADE متساوی‌الساقین است.



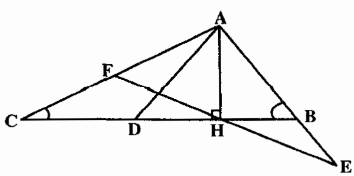
۵۰۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ از نقطهٔ B عمودی بر BC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع این عمود با امتداد ساق CA را D می‌نامیم. ثابت کنید مثلث ABD متساوی‌الساقین است.



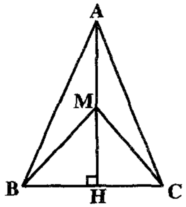
۵۰۳. در مثلث ABC ضلع AC را از طرف C به اندازهٔ $CD = AC$ امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ D عمود DH را بر BC (یا امتداد آن) فرود آورده و آن را از طرف H به اندازهٔ $HK = HD$ امتداد می‌دهیم.

۱. ثابت کنید مثلث ACK متساوی‌الساقین است.

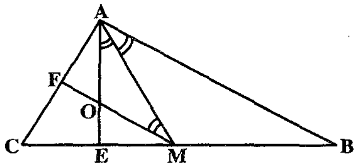
۲. اندازهٔ زاویه‌ای را که ضلع BC با نیمساز زاویهٔ ACK می‌سازد، محاسبه کنید.



۵۰۴. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۲\hat{C}$ می‌باشد. ضلع AB را از طرف B تا نقطهٔ E به قسمی امتداد می‌دهیم که $BE = BH$ گردد (H پای ارتفاع رسم شده از رأس A است). خط EH را امتداد می‌دهیم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید نقطهٔ F وسط AC است. سپس طول $HD = HB$ را روی ضلع BC اختیار می‌نماییم و از D به A وصل می‌کنیم. ثابت کنید مثلث ACD متساوی‌الساقین است.



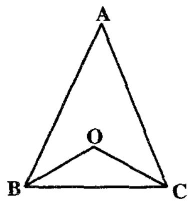
۵۰۵. ثابت کنید از هر نقطهٔ ارتفاع رسم شده از رأس مثلث متساوی‌الساقینی که به دو سر قاعدهٔ آن مثلث وصل کنیم، مثلثی متساوی‌الساقین به وجود می‌آید.



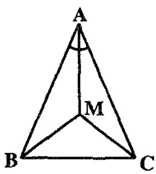
۵۰۶. در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AC است. میانهٔ AM را رسم کرده، میانه‌های AE و MF از مثلث AMC یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند.

۱. ثابت کنید مثلث AOM متساوی‌الساقین است.

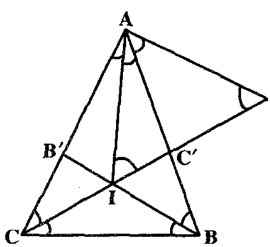
۲. ثابت کنید AM نیمساز زاویهٔ BAE است.



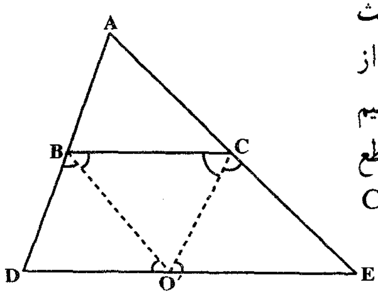
۵۰۷. در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$ نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند، ثابت کنید مثلث OBC متساوی‌الساقین است.



۵۰۸. ثابت کنید اگر از نقطهٔ M واقع در داخل مثلث متساوی‌الساقین ABC به رأس A وصل کنیم و MA زاویهٔ A را نصف کند، مثلث MBC هم متساوی‌الساقین است.



۵۰۹. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ محل تلاقی نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را I و نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ C با عمودی که در نقطهٔ A بر AC رسم شده است را نقطهٔ D می‌نامیم. ثابت کنید مثلث AID متساوی‌الساقین است.



۵۱۰. نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C از مثلث ABC یکدیگر را در نقطهٔ O' قطع کرده‌اند. از نقطهٔ O' خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در D و E قطع کند. ثابت کنید مثلثهای BDO' و CEO' متساوی‌الساقین هستند.

۵۱۱. ثابت کنید پاهای دو عمودی که از دو رأس یک مثلث بر نیمساز داخلی (خارجی) گذرنده بر رأس سوم آن مثلث فرود می‌آید و وسط ضلعی که آن دو رأس را به هم وصل می‌کند مثلث متساوی‌الساقینی را مشخص می‌کنند که ضلعهای برابر آن موازی ضلعهای زاویه‌ای از مثلثند که نیمساز آن رسم شده است.

۴ . ۳ . ۱۲ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

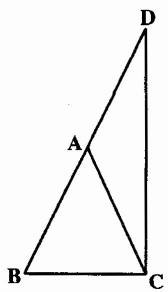
۵۱۲. قضیهٔ «اگر دو زاویهٔ مثلثی مساوی باشند، مثلث متساوی‌الساقین است» و چهار گزارهٔ زیر را درنظر بگیرید:

۱. اگر دو زاویهٔ مثلثی مساوی نباشند، مثلث متساوی‌الساقین نیست.
۲. زاویه‌های مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.
۳. اگر مثلثی متساوی‌الساقین نباشد، آن‌گاه دو زاویهٔ آن مساوی نیستند.
۴. شرط لازم برای آن که دو زاویهٔ یک مثلث برابر باشند، این است که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

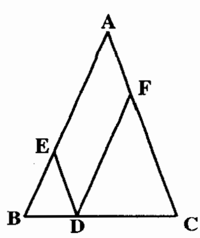
از این ترکیبهای گزاره‌ای کدامها منطقاً با قضیهٔ داده شده هم ارزند؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۵۱۳. ثابت کنید اگر یکی از ساقهای مثلث متساوی‌الساقینی را به اندازهٔ خودش از طرف رأس امتداد داده و انتهای پاره‌خط حاصل را به رأس مقابل به آن ساق وصل کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه پدید می‌آید.

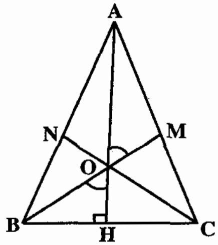


۵۱۴. اگر از یک نقطه از قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی دو خط موازی ساقهای مثلث رسم کنیم، از آن دو خط و ساقهای مثلث، متوازی‌الاضلاعی پدید می‌آید که محیطش مقدار ثابتی است.



۱۳.۳.۴. مسأله‌های ترکیبی

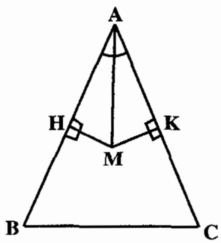
۵۱۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ ارتفاع AH و میانهٔ BM را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، سپس از C به O وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید:



۱. نقطهٔ N وسط ضلع AB است.

۲. دو زاویهٔ COH و MOA برابرند.

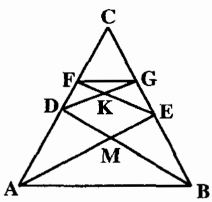
۵۱۶. عمودمنصفهای دو ساق مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ در نقطهٔ M متقاطعند.



۱. ثابت کنید قسمتی از عمود منصفها که به ساقها و نقطهٔ M محدودند متساوی‌اند.

۲. اگر زاویهٔ رأس $\hat{A} = ۳۰°$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های پنج ضلعی حاصل را پیدا کنید.

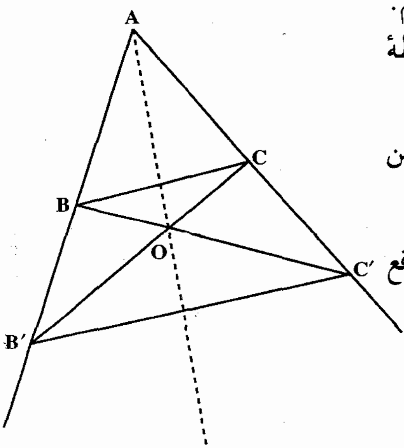
۵۱۷. در شکل، ΔCFG متساوی‌الساقین است، و $CD = CE$؛ D و E، بترتیب وسطهای ضلعهای AC و BC اند. ثابت کنید:



۱. $DK = EK$.

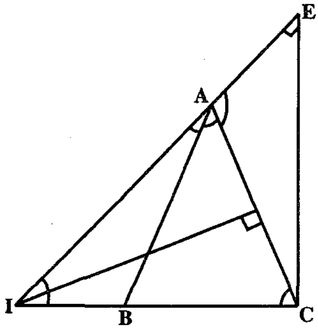
۲. ΔAMB متساوی‌الساقین است.

۵۱۸. روی ضلعهای زاویهٔ به رأس A طولهای $AB = AC$ و $AB' = AC'$ را جدا می‌کنیم. پاره‌خطهای BC' و CB' را رسم نموده نقطهٔ تقاطعشان را O می‌نامیم. ثابت کنید:



۱. مثلثهای OBC و $OB'C'$ متساوی الساقین هستند.

۲. نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ به رأس A واقع است.



۵۱۹. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$) داده شده است. عمود منصف ساق AC امتداد ضلع BC را در نقطهٔ I قطع می‌کند.

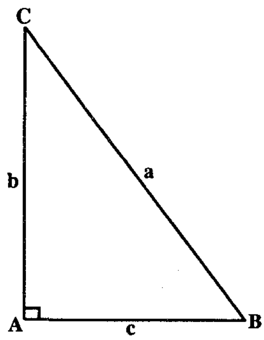
۱. ثابت کنید $A\hat{B}C = I\hat{A}C$.

۲. اگر IA را از طرف A به اندازهٔ $AE = IB$ امتداد دهیم، ثابت کنید دو مثلث IAB و ACE برابرند (همنهشتند).

۳. ثابت کنید مثلث CIE متساوی‌الساقین است.

۴.۴. مثلث قائم‌الزاویه

۱.۴.۴. تعریف و قضیه



مثلث قائم‌الزاویه. مثلثی‌است که یک زاویهٔ آن قائمه باشد. ضلع روبه‌رو به زاویهٔ قائمه، وتر مثلث نام دارد. دو ضلع دیگر مثلث را ساقهای مثلث می‌نامند.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ضلع BC وتر و ضلعهای AB و AC ساقهای مثلثند. با فرض $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

۱. اندازهٔ مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} b.c = \frac{۱}{۲} a.h_a$$

۲. اندازهٔ محیط مثلث برابر است با: $۲p = a + b + c$

۵۲۰. قضیه. مثلث نمی‌تواند بیش از یک زاویهٔ قائمه داشته باشد.

حالتهای همنهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه:

۵۲۱. قضیه. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه ضلعهای زاویهٔ قائمه از یکی با ضلعهای زاویهٔ قائمه از دیگری نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

۵۲۲. قضیه. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ حاده مجاور به آن ضلع از یک مثلث، با یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ حادهٔ مجاور به آن از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

۵۲۳. قضیه. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ مقابل به آن ضلع از یک مثلث با یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ مقابل به آن ضلع از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث همنهشتند.

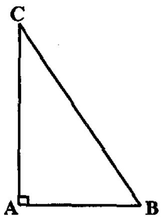
۵۲۴. قضیه. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از یک مثلث با وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

۵۲۵. قضیه. اگر در دو مثلث قائم‌الزاویه، وتر و یک زاویهٔ حاده از یکی با وتر و یک زاویهٔ حاده از دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

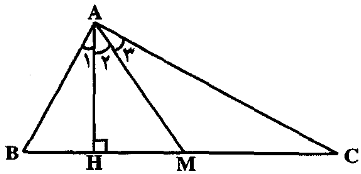
$$\Delta ABC \ , \ \Delta A'B'C' \ : \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ \\ BC = B'C' \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

۴.۴.۲. زاویه

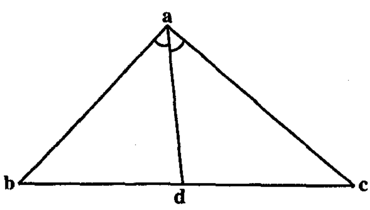
۴.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۵۲۶. ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یک ضلع نصف وتر باشد، زاویهٔ مقابل به آن ضلع ۳۰° است.



۵۲۷. ثابت کنید اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌های حاده مساوی ۳۰° باشد، ارتفاع و میانهٔ نظیر وتر، زاویهٔ قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌نمایند.

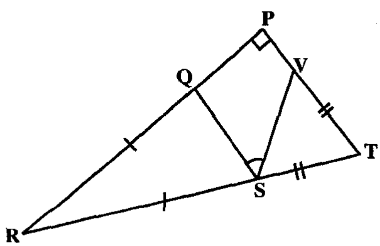


۵۲۸. مثلث abc ، شکل روبه‌رو، در زاویهٔ a قائمه است و ad نیمساز زاویهٔ a است. اگر زاویهٔ c به اندازهٔ ۴۰° باشد، اندازهٔ زاویهٔ adb برحسب درجه برابر است با :

الف) ۹۰° ب) ۸۵° ج) ۸۰°

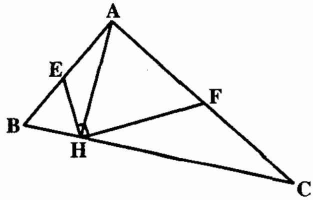
د) ۷۵° هـ) ۷۰°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

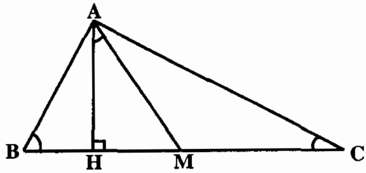


۵۲۹. در مثلث قائم الزاویهٔ PRT ($\hat{P} = ۹۰^\circ$)، $RS = RQ$ و $ST = TU$ است. ثابت کنید $Q\hat{S}U = ۴۵^\circ$ است.

۵۳۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در رأس A، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطهٔ H را به نقاط E و F که بترتیب وسطهای ضلعهای AB و AC می‌باشند وصل می‌نماییم. ثابت کنید: $E\hat{H}F = 90^\circ$.



۵۳۱. ثابت کنید زاویهٔ بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ مثلث.

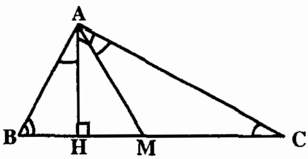


۴. ۴. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵۳۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

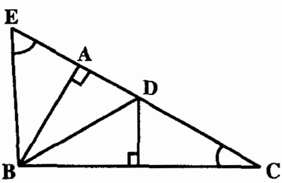
$C\hat{A}H = A\hat{B}H = M\hat{A}B$ و

$B\hat{A}H = M\hat{A}C = B\hat{C}A$

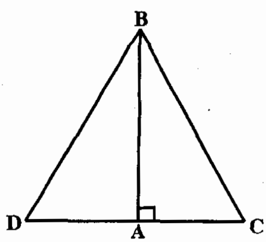


۵۳۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$ و $AB < AC$) عمودمنصف وتر BC ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌نماید، قرینهٔ نقطهٔ D را نسبت به رأس A نقطهٔ E می‌نامیم.

ثابت کنید: $B\hat{E}C = 2B\hat{C}E$.

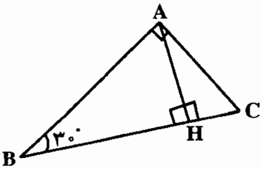


۵۳۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) وتر BC دو برابر ضلع AC می‌باشد. ضلع AC را از طرف A به اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. ثابت کنید مثلث BCD متساوی‌الاضلاع است و $A\hat{C}B = 2C\hat{B}A$ می‌باشد.

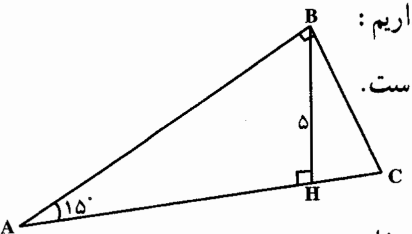


۴ . ۴ . ۳. ضلع

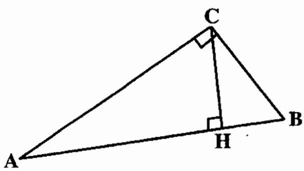
۴ . ۴ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع



۵۳۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ‏($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، AH ارتفاع وارد بر وتر برابر ۸ سانتیمتر و $\hat{B} = ۳۰^\circ$ است. اندازهٔ ضلع AB چه‌قدر است؟



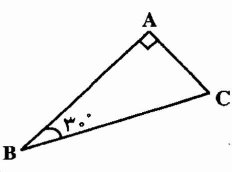
۵۳۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ‏($\hat{B} = ۹۰^\circ$)، داریم: $\hat{A} = ۱۵^\circ$ و ارتفاع BH برابر ۵ سانتیمتر است. اندازهٔ وتر مثلث چه‌قدر است؟



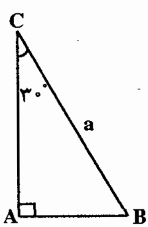
۵۳۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ‏($\hat{C} = ۹۰^\circ$)، ارتفاع CH را رسم کرده ایم. اگر $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $AC = ۱۲\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ ضلعهای BC و AB را بیابید.

۴ . ۴ . ۳ . ۲. رابطهٔ بین ضلعها

۴ . ۴ . ۳ . ۲ . ۱. رابطهٔ بین ضلعها (برابریها)



۵۳۸. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است.



۵۳۹. اندازهٔ ضلع مقابل به زاویهٔ ۶۰° در مثلث قائم‌الزاویه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر مثلث است.

۴ . ۴ . ۳ . ۲ . ۲. رابطهٔ بین ضلعها (نابرابریها)

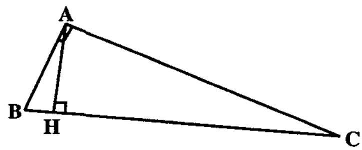
۵۴۰. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و A′B′C′ ‏($\hat{A} = \hat{A}' = ۹۰^\circ$) اگر $AB < A'B'$ و $AC < A'C'$ باشد، ثابت کنید که $BC < B'C'$ است.

۵۴۱. اگر یک مثلث زاویه‌ای قائمه یا منفرجه داشته باشد، ضلع مقابل به این زاویه از هریک از ضلعهای دیگر مثلث بزرگتر است.

۵۴۲. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$ ($\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$) اگر $\hat{B} = \hat{B}'$ و $BC > B'C'$ باشد، ثابت کنید $AC > A'C'$ و $AB > A'B'$ می‌باشد.

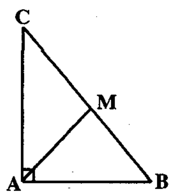
۴ . ۴ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴ . ۴ . ۴ . ۱. ارتفاع

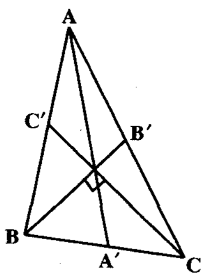


۵۴۳. ثابت کنید اگر یک زاویهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر 15° باشد، ارتفاع وارد بر وتر مساوی $\frac{1}{4}$ وتر است.

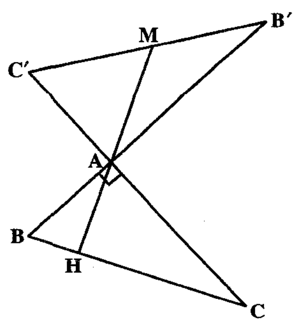
۴ . ۴ . ۴ . ۲. میانه



۵۴۴. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.



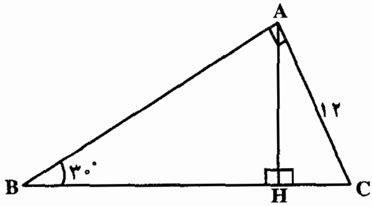
۵۴۵. ثابت کنید اگر در مثلثی دو میانه بر هم عمود باشند، میانهٔ سوم، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دو میانهٔ دیگر دو ضلع مجاور آن می‌باشند.



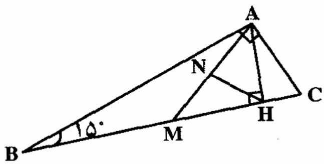
۵۴۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ AC ($AB' = AC$) و ضلع AC را از طرف A به اندازهٔ AB ($AC' = AB$) امتداد می‌دهیم. ثابت کنید امتداد ارتفاع AH از مثلث ABC میانهٔ نظیر رأس A از مثلث $AB'C'$ است.

۴.۴.۵. پاره‌خط

۴.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



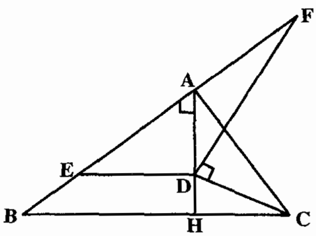
۵۴۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر $AC=۱۲cm$ و $A\hat{B}C=۳۰^\circ$ باشد، طول پاره‌خط HC را بیابید.



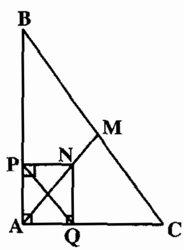
۵۴۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، $\hat{B}=۱۵^\circ$ و اندازهٔ وتر BC برابر ۱۲ سانتیمتر است. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. اگر N وسط میانهٔ AM باشد طول پاره‌خط HN چه قدر است؟

۴.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

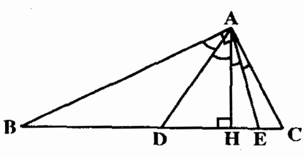
۴.۴.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)



۵۴۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ بر ارتفاع AH یا امتداد آن نقطهٔ D و بر ضلع AB و امتداد آن نقطه‌های E و F را چنان اختیار می‌کنیم که $DE\parallel HB$ و $DF\perp DC$ باشد. ثابت کنید $AF=BE$ است.

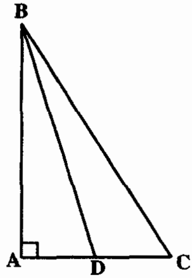


۵۵۰. از نقطهٔ N واقع بر میانهٔ AM از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ یا بر امتداد آن عمودهای NP و NQ را بترتیب بر AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید $NA=PQ$ و $PQ\parallel BC$ است.



۵۵۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ارتفاع AH را رسم کرده نیمسازهای زاویه‌های BAH و CAH را رسم می‌کنیم تا بترتیب BC را در D و E قطع کنند. ثابت کنید: $AB=EB$ و $AC=CD$.

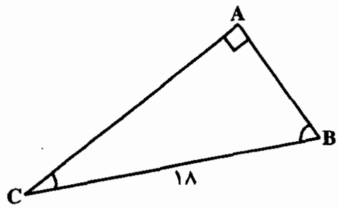
۴.۴.۵.۲.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



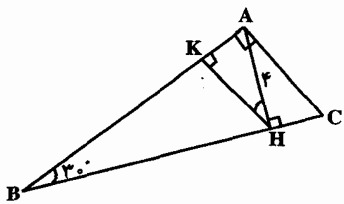
۵۵۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) نیمساز زاویهٔ B را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید که $AD < DC$ است.

۴.۴.۶. محیط

۴.۴.۶.۱. اندازهٔ محیط



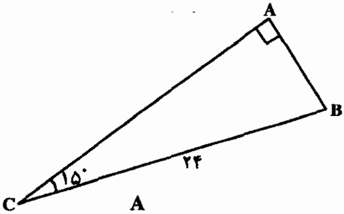
۵۵۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، $\hat{B}=۲\hat{C}$ است. اگر اندازهٔ وتر BC برابر ۱۸ سانتیمتر باشد، اندازهٔ محیط مثلث چه‌قدر است؟



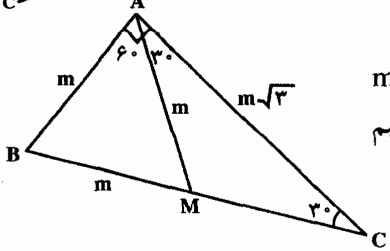
۵۵۴. ارتفاع AH از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\hat{A}=۹۰^\circ$ را رسم می‌کنیم و تصویر نقطهٔ H روی ضلع AB را K می‌نامیم. اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $AH=۴cm$ باشد، محیط مثلث AKH را بیابید.

۴.۴.۷. مساحت

۴.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت



۵۵۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، $\hat{C}=۱۵^\circ$، اندازهٔ وتر برابر ۲۴ سانتیمتر است. مساحت این مثلث چه‌قدر است؟



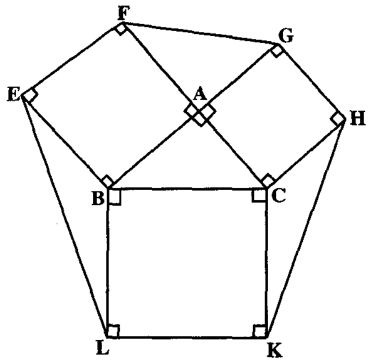
۵۵۶. طول میانهٔ رأس قائم مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر m است و زاویهٔ قائمه را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را پیدا کنید.

۵۵۷. دو مثلث همنهشت $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ چنان قرار گرفته‌اند که وترهای آنها و همچنین بخشهایی از آنها برهم منطبقند. هرگاه طول وتر هرکدام از آنها ۱۲ باشد. مساحت بخش مشترک دو مثلث برابر است با:

الف) $6\sqrt{3}$ ب) $8\sqrt{3}$ ج) $9\sqrt{3}$ د) $12\sqrt{3}$ هـ) ۲۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

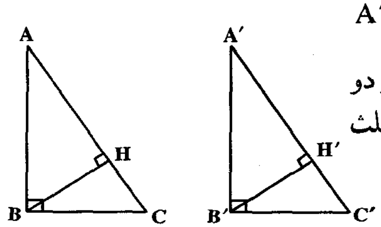
۴.۴.۷.۲. رابطهٔ بین مساحتها



۵۵۸. بر روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه مربع می‌سازیم و رأسهای مجاور آنها را به هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید که سه مثلث معادل با مثلث اصلی ایجاد می‌شوند.

۴.۴.۸. همنهشتی مثلثها

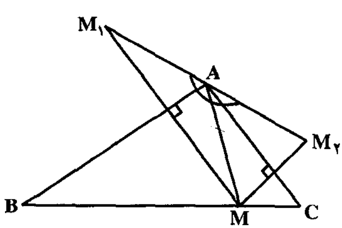
۵۵۹. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$ ($\hat{B} = \hat{B'} = 90^\circ$) ضلعهای $AB = A'B'$ و دو ارتفاع $BH = B'H'$ است. ثابت کنید دو مثلث برابرند.

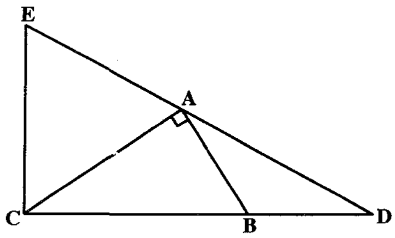


۵۶۰. در دو مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاعها و میانه‌های نظیر دو وتر باهم برابرند. ثابت کنید که این دو مثلث همنهشتند.

۴.۴.۹. نقطه‌های همخط

۵۶۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را درنظر گرفته، نقطهٔ M را روی وتر آن درنظر می‌گیریم و قرینهٔ آن را نسبت به AB و AC بترتیب M_1 و M_2 می‌نامیم. ثابت کنید نقطه‌های M_1 ، A و M_2 روی یک خط راست واقعند.

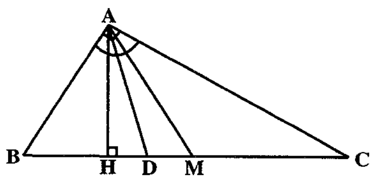




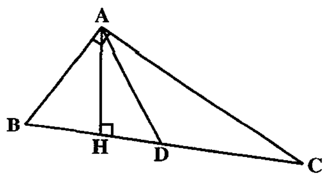
۵۶۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) را درنظر گرفته، و از رأس C عمودی بر وتر BC در نیم‌صفحه‌ای که شامل مثلث است رسم و روی آن طول CE را مساوی با AC جدا می‌کنیم و وتر BC را به طول BD مساوی با AB از طرف نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. ثابت کنید سه نقطهٔ D و A و E بر یک استقامتند.

۴.۴. ۱۰. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

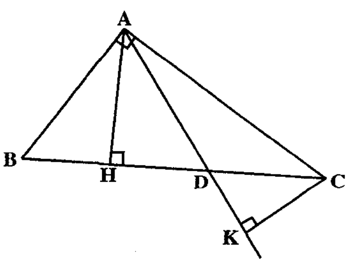
۴.۴. ۱۰. ۱. خط، نیمساز است



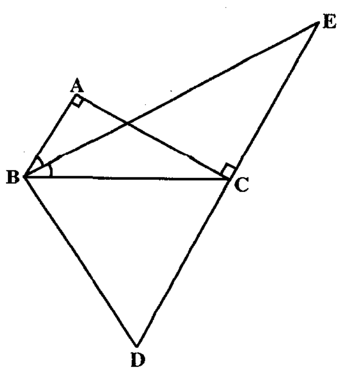
۵۶۳. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، نیمساز زاویهٔ قائمه، نیمساز زاویهٔ بین میانه و ارتفاع نظیر وتر نیز هست.



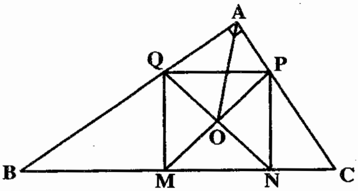
۵۶۴. درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم و طول $BD = AB$ را بر وتر جدا می‌نماییم. ثابت کنید که خط AD زاویهٔ HAC را نصف می‌کند.



۵۶۵. درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ضلع AB از ضلع AC کوچکتر است. ارتفاع AH را رسم کرده قرینهٔ ضلع AB را نسبت به آن AD می‌نامیم و از نقطهٔ C عمود CK را بر خط AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید که BC نیمساز زاویهٔ KCA می‌باشد.

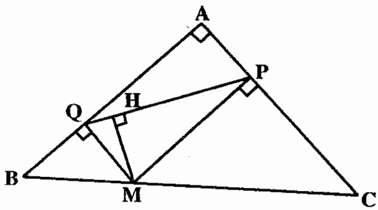


۵۶۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) از رأس C عمودی بر ضلع AC اخراج نموده در دوطرف C روی این عمود طولهای CD و CE را مساوی با BC جدا می‌کنیم. ثابت کنید که BD و BE نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ ABC می‌باشند.



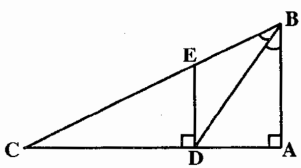
۵۶۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ مربعی محاط می‌کنیم که یک ضلع آن بر وتر قرار داشته باشد. ثابت کنید خطی که رأس A را به مرکز این مربع وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ A می‌باشد.

۴.۴.۱۰.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

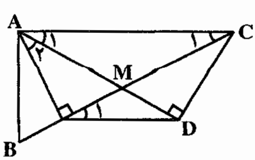


۵۶۸. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC از نقطهٔ M واقع بر وتر BC عمودهای MP و MQ را بر دو ساق فرود می‌آوریم. PQ را وصل می‌کنیم و از نقطهٔ M عمود MH را بر PQ رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی نقطهٔ M، روی وتر مثلث تغییر کند، عمود MH همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴.۴.۱۱. شکلهای ایجاد شده



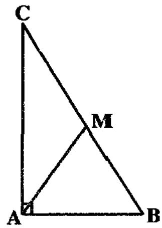
۵۶۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ نیمساز زاویهٔ B ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌نماید. از نقطهٔ D عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید مثلث DEB متساوی‌الساقین است.



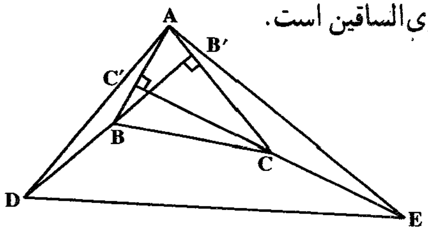
۵۷۰. زاویهٔ $\hat{C}$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ برابر 30° است. ارتفاع AH و میانهٔ AM وارد بر وتر را رسم می‌کنیم و از C عمود CD را بر میانهٔ AM فرود می‌آوریم. ثابت کنید AHDC ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است که قاعدهٔ کوچکتر آن با ساق آن برابر است.

۴ . ۴ . ۱۲ . ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۷۱. ثابت کنید اگر در مثلثی یکی از میانه‌ها نصف ضلع نظیرش باشد (میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد)، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



۵۷۲. در مثلث ABC ارتفاع BB' را از طرف B به اندازهٔ $BD = AC$ و ارتفاع CC' را از طرف C به اندازهٔ $CE = AB$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید مثلث ADE در رأس A قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



۵۷۳. سه مربع BCDE، ACFG و BAHK روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و بیرون آن رسم شده‌اند. فرض کنید FCDQ و EBKP متوازی الاضلاع باشند. ثابت کنید که مثلث APQ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۴ . ۴ . ۱۳ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۷۴. اندازه‌های زاویه‌های مثلثی برحسب درجه α، β و γ است. هرگاه $\beta - \alpha = \gamma - \beta$، $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

آن‌گاه لازم می‌آید که این مثلث:

الف) در یک زاویهٔ قائمه باشد. ب) متساوی‌الاضلاع باشد.

ج) متساوی‌الساقین غیر متساوی‌الاضلاع باشد. د) دارای یک زاویهٔ 60° باشد.

هـ) دارای یک زاویهٔ 45° باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۵۷۵. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) هر مثلث قائم‌الزاویه که متساوی‌الساقین باشد، متساوی الاضلاع است.

ب) هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای متساوی‌الاضلاع نیست.

ج) هر مثلث قائم الزاویه، متساوی الساقین است.

د) هیچ مثلث متساوی الاضلاع، متساوی‌الساقین نیست.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۵۷۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را درنظر بگیرید که عدد محیط آن (به دست آمده برحسب سانتیمتر) با عدد مساحت آن (به دست آمده برحسب سانتیمتر مربع) برابر باشد. چند عدد از این مثلثها که غیر برابر باشند، وجود دارد؟

الف) هیچ　　ب) ۱عدد　　ج) ۲عدد　　د) ۴عدد　　هـ) به تعداد نامتناهی

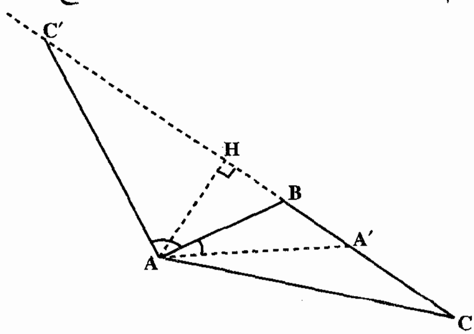
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۷۷. دونفر در یک‌جا ایستاده‌اند. معیار راه رفتن A برابر ۷ و معیار راه رفتن B برابر ۳ می‌باشد. B به طرف مشرق می‌رود. A ، ۱۰ «یو» به طرف جنوب می‌رود، بعد راه خود را کج می‌کند و به طرف شمال شرقی حرکت می‌کند، تا به B برسد، هرکدام از دو نفر A و B چه‌قدر راه رفته‌اند؟

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، چینی

۱۴.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۷۸. در مثلث شبه قائم‌الزاویهٔ ABC، $(\hat{B}-\hat{C}=90^\circ)$ ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



۱. ثابت کنید $H\hat{A}B=\hat{C}$ است.

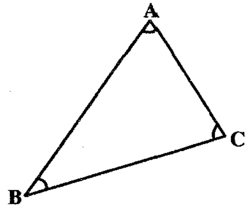
۲. اگر CH را از طرف H به اندازهٔ $HC'=CH$ امتداد دهیم، ثابت کنید $C'\hat{A}B=90^\circ$ است.

۳. اگر AA' نیمساز زاویهٔ BAC را رسم کنیم، ثابت کنید : $AH=A'H$.

۴ . ۵. مثلث حاده‌الزاویه

۴ . ۵ . ۱. تعریف و قضیه

تعریف. مثلثی که هر سه زاویهٔ آن حاده باشد، مثلث حاده‌الزاویه یا مثلث با زاویه‌های حاده نامیده می‌شود ؛ مانند مثلث ABC .



۴ . ۵ . ۲. زاویه

۴ . ۵ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۵۷۹. a) در مثلث ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، بزرگترین ارتفاع آن AH با میانهٔ BM برابر است. ثابت کنید، زاویهٔ ABC از ۶۰ درجه تجاوز نمی کند.

b) در مثلث ABC ، با زاویه‌های حاده، ارتفاع AH با میانهٔ BM و با نیمساز CD برابر است. ثابت کنید، ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

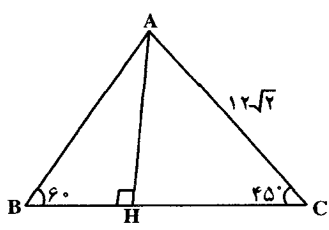
نخستین المپیاد سراسری شوروی، ۱۹۶۷

۵۸۰. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC ، $\hat{A} = ۷۰^\circ$ است. حدود دو زاویهٔ دیگر مثلث را تعیین کنید.

۴ . ۵ . ۳. ضلع

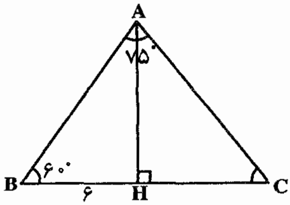
۴ . ۵ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۵۸۱. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۵^\circ$ و $AC = ۱۲\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ دو ضلع دیگر مثلث را بیابید.



۴.۵.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

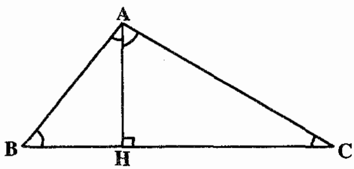
۴.۵.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع



۵۸۲. اندازهٔ ارتفاع AH از مثلث ABC را بیابید در صورتی که $\hat{A}=۷۵^\circ$ و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $BH=۶cm$ باشد.

۴.۵.۵. پاره خط

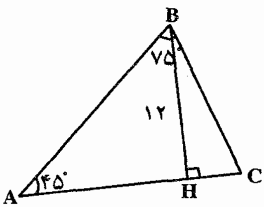
۴.۵.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



۵۸۳. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{C}<۴۵^\circ$ و زاویهٔ B حاده اما بزرگتر از ۴۵° است. ثابت کنید که اگر AH ارتفاع رسم شده از رأس A باشد، داریم: $BH<AH<CH$.

۴.۵.۶. محیط

۴.۵.۶.۱. اندازهٔ محیط



۵۸۴. در مثلث ABC، داریم: $BH=۱۲cm$ و $\hat{A}=۴۵^\circ$ و $\hat{B}=۷۵^\circ$ است. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

۵۸۵. ثابت کنید محیط مثلثی که رأسهای پاهای ارتفاعهای یک مثلث با زاویه‌های حاده است (مثلث ارتفاعی)، از دو برابر هریک از ارتفاعهای آن مثلث کوچکتر است.

۴.۵.۶.۲. رابطه‌ای در محیطها

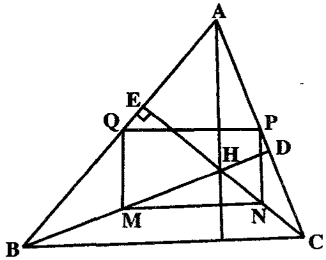
۵۸۶. در مثلث با زاویه‌های حاده، محیط مثلث ارتفاعیه از نصف محیط مثلث کوچکتر یا با آن مساوی است. تساوی وقتی برقرار است که مثلث متساوی الاضلاع باشد.

۴.۵.۷. مساحت

۴.۵.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۵۸۷. در مثلث ABC، $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $\hat{B}=۴۵^\circ$ است. اگر اندازهٔ ارتفاع AH برابر ۹ سانتیمتر باشد، اندازهٔ مساحت مثلث را تعیین کنید.

۸.۵.۴. شکلهای ایجاد شده



۵۸۸. ارتفاعهای BD و CE از مثلث با زاویه های حادهٔ ABC در نقطهٔ H متقاطعند. اگر نقطه های M ، N ، P و Q بترتیب وسطهای BH ، CH ، AC و AB باشند، ثابت کنید، چهارضلعی MNPQ مستطیل است.

۵۸۹. در مثلثی با زاویه های حاده و ضلعهای نابرابر از یک رأس ارتفاع، از رأس دوم میانه و از رأس سوم نیمساز زاویه را گذرانده‌ایم. ثابت کنید، اگر این سه خط راست، ضمن برخورد باهم ، مثلثی را تشکیل دهند، این مثلث، نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد.

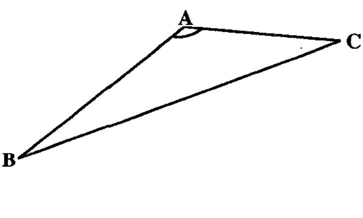
المپیادهای ریاضی یوگسلاوی، ۱۹۸۱

۵۹۰. در صفحه‌ای ۱۰۰ نقطه، به‌طوری که هیچ سه نقطه‌ای از آنها بر یک استقامت نیستند، موجود است. تمام مثلثهای ممکنی را که این نقطه‌ها را به عنوان رأس دارند، درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، بیش از ۷۰٪ این مثلثها حادة‌الزاویه نیستند.

دوازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۰

۴ . ۶. مثلث منفرجه‌الزاویه

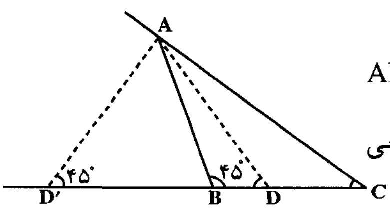
۴ . ۶ . ۱. تعریف و قضیه



تعریف. مثلثی که یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد، مثلث منفرجه‌الزاویه یا مثلث با زاویهٔ منفرجه نامیده می‌شود. مانند مثلث ABC که در آن زاویهٔ A منفرجه است. بدیهی است که هر مثلث بیش از یک زاویهٔ منفرجه نمی‌تواند داشته باشد.

۴ . ۶ . ۲. زاویه

۴ . ۶ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه



۵۹۱. ثابت کنید که در مثلث شبه‌قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}-\hat{C}=90^\circ)$ نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A با ضلع BC زاویهٔ 45° می‌سازند.

۵۹۲. در مثلث ADE زاویهٔ ADE به اندازهٔ 140° است و نقطه‌های B و C بترتیب روی ضلعهای AD و AE واقعند به‌گونه‌ای که نقطه‌های A، B ، C ، D و E از یکدیگر متمایزند. اگر AB ، BC ، CD و DE همه باهم برابر باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ EAD برابر است با :

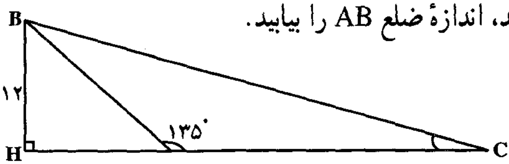
الف) 5° ب) 6° ج) $7/5^\circ$ د) 8° هـ) 10°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸

۴.۶.۳. ضلع

۴.۶.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۵۹۳. در مثلث ABC ، زاویهٔ A برابر 135° است. اگر اندازهٔ ارتفاع BH از این مثلث برابر 12 cm باشد، اندازهٔ ضلع AB را بیابید.



۴.۶.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۶.۴.۱. نیمساز

۵۹۴. در مثلث ABC زاویهٔ B به اندازهٔ 12° و زاویهٔ C به اندازهٔ 132° است. بدون استفاده از رابطه‌های مثلثاتی طولهای BM و CN نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را باهم مقایسه کنید.

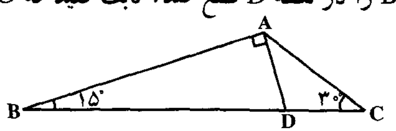
[این مسأله از O.Bottema است و از آن، این نتیجه به دست می‌آید که ممکن است دو نیمساز زاویهٔ خارجی از مثلثی باهم برابر باشند، اما آن مثلث متساوی الساقین نباشد.]

۴.۶.۵. پاره‌خط

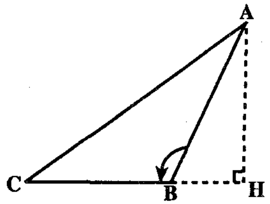
۴.۶.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴.۶.۵.۱.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۵۹۵. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{B}=15^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ$ است. از رأس A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید که $BD=2AC$ می‌باشد.



۴.۶.۵.۱.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

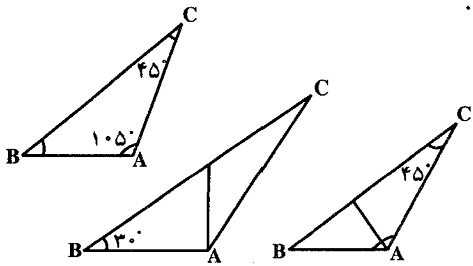


۵۹۶. در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه ولی از 135° کوچکتر است و زاویهٔ C از 45° کوچکتر می‌باشد. ثابت کنید که اگر AH ارتفاع باشد، داریم: $BH < AH < CH$.

۴.۶.۶. محیط

۴.۶.۶.۱. اندازهٔ محیط

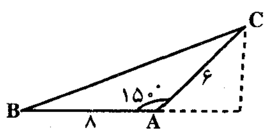
۵۹۷. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 105^\circ$ ، $\hat{C} = 45^\circ$ و $AB = 8cm$ است. اندازهٔ محیط مثلث ABC را بیابید.



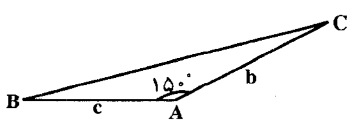
۴.۶.۷. مساحت

۴.۶.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۵۹۸. در مثلث ABC ، $\hat{A} = 150^\circ$ ، $AB = 8cm$ و $AC = 6cm$ است. اندازهٔ مساحت این مثلث را بیابید.

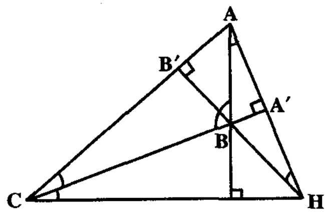


۵۹۹. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلثی که از آن طول دو ضلع $AC = b$ و $AB = c$ و زاویهٔ بین آنها $\hat{A} = 150^\circ$ است.



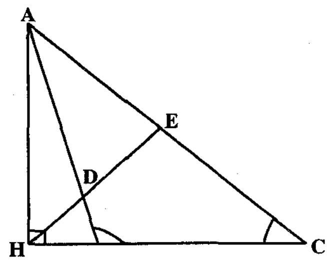
۴ . ۶ . ۸. همنهشتی مثلثها

۶۰۰. در مثلث ABC ، $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ است. اگر نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث باشد، ثابت کنید که مثلث ABC با مثلث HBC برابر است.



۴ . ۶ . ۹. نقطه‌های همخط

۶۰۱. مثلث ABC را که در آن زاویهٔ B منفرجه و مساوی دو برابر زاویهٔ C می‌باشد درنظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و روی ضلع BA ابتدا از B طول BD = BH را جدا می‌نماییم. ثابت کنید که نقطهٔ E وسط AC روی خط DH واقع است.



۴ . ۶ . ۱۰. شکلهای ایجاد شده

۶۰۲. ثابت کنید که هرگاه یکی از زاویه‌های مثلثی برابر با 120° باشد، آن‌گاه مثلثی که با پای نیمسازهای آن تشکیل شده، قائم‌الزاویه است.

بخش ۵

● چهارضلعیهای ویژه

۱.۵. متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۱.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع

۴.۱.۵. قطر

۵.۱.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱.۵. رابطهٔ بین پاره خطها

۶.۱.۵. محیط

۱.۶.۱.۵. اندازهٔ محیط

۷.۱.۵. مساحت

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت

۲.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳.۷.۱.۵. نسبت مساحتها

۴.۷.۱.۵. رابطهٔ بین مساحتها

۸.۱.۵. همنهشتی متوازی‌الاضلاعها

۹.۱.۵. نقطه‌های ویژه

۱۰.۱.۵. نقطه‌های همخط

۵.۱.۱۱. خطهای همرس
۵.۱.۱۲. خطهای: موازی، عمودبرهم، ...
۵.۱.۱۲.۱. خطها موازی‌اند
۵.۱.۱۲.۲. خط نیمساز است
۵.۱.۱۳. شکلهای ایجاد شده
۵.۱.۱۴. ثابت کنید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است
۵.۱.۱۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۵.۱.۱۶. مسأله‌های ترکیبی

۵.۲. مستطیل

۵.۲.۱. تعریف و قضیه
۵.۲.۲. زاویه
۵.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۵.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۵.۲.۳. ضلع
۵.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع
۵.۲.۳.۲. افزایش یا کاهش ضلع
۵.۲.۴. قطر
۵.۲.۵. پاره‌خط
۵.۲.۶. محیط
۵.۲.۷. مساحت
۵.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت
۵.۲.۷.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده
۵.۲.۷.۳. رابطه‌ای در مساحتها
۵.۲.۸. همنهشتی مستطیلها
۵.۲.۹. نقطه‌های ویژه (مرکز تقارن مستطیل)
۵.۲.۱۰. نقطه‌های همخط
۵.۲.۱۱. شکلهای ایجاد شده
۵.۲.۱۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵ . ۳ . مربع

۵.۴ . لوزی

۵.۴.۲. زاویه
۵.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۵.۴.۳. ضلع
۵.۴.۳.۱. اندازهٔ ضلع
۵.۴.۴. قطر
۵.۴.۴.۱. اندازهٔ قطر
۵.۴.۵. پاره‌خط
۵.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۵.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۵.۴.۶. محیط
۵.۴.۶.۱. اندازهٔ محیط
۵.۴.۷. مساحت
۵.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت
۵.۴.۸. همنهشتی لوزیها
۵.۴.۹. نقطه‌های ویژه
۵.۴.۱۰. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...
۵.۴.۱۰.۱. خط، نیمساز است
۵.۴.۱۱. شکلهای ایجاد شده
۵.۴.۱۲. ثابت کنید چهارضلعی لوزی است
۵.۴.۱۳. مسأله‌های ترکیبی
۵.۵. ذوزنقه
۵.۵.۱. ذوزنقه در هر حالت
۵.۵.۱.۱. تعریف و قضیه
۵.۵.۱.۲. زاویه
۵.۵.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۵.۵.۱.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۵.۵.۱.۳. ضلع
۵.۵.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع
۵.۵.۱.۳.۲. رابطهٔ بین ضلعها

۵.۵.۱.۴. قطر

۵.۵.۱.۴.۱. اندازهٔ قطر

۵.۵.۱.۵. پاره‌خط

۵.۵.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵.۵.۱.۶. محیط

۵.۵.۱.۶.۱. اندازهٔ محیط

۵.۵.۱.۷. مساحت

۵.۵.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه

۵.۵.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵.۵.۱.۷.۳. رابطه‌ای در مساحتها

۵.۵.۱.۸. همنهشتی ذوزنقه‌ها

۵.۵.۱.۹. نقطه‌های همخط

۵.۵.۱.۱۰. خطهای همرس

۵.۵.۱.۱۱. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵.۵.۱.۱۲. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است

۵.۵.۱.۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۵.۱.۱۴. مسأله‌های ترکیبی

۵.۵.۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۵.۵.۲.۱. تعریف و قضیه

۵.۵.۲.۲. زاویه

۵.۵.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۵.۲.۳. ضلع

۵.۵.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۵.۵.۲.۴. قطر

۵.۵.۲.۵. پاره خط

۵.۵.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

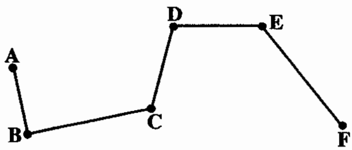
۵.۵.۲.۶. محیط

۵.۵.۲.۶.۱. اندازهٔ محیط

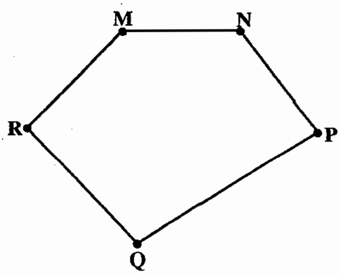
بخش ۵. چهارضلعیهای ویژه

چهارضلعیها و از جمله چهارضلعیهای ویژه زیرمجموعه‌ای از چند ضلعیها می‌باشند. بنابراین، نخست تعریفها و قضیه‌هایی در مورد چند ضلعیها را می‌آوریم.

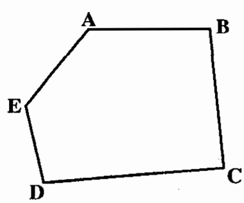
خط شکسته. از چند پاره‌خط تشکیل می‌شود که انتهای یکی بر ابتدای دیگری واقع باشد. مانند خط شکستهٔ ABCDEF.



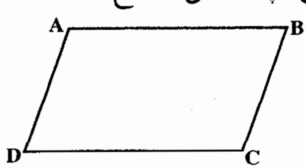
اگر انتهای آخرین پاره‌خط بر ابتدای اوّلین پاره خط منطبق باشد، خط شکسته را بسته، و در غیراین صورت خط شکسته را باز می‌نامند. مانند خط شکستهٔ باز ABCDEF و خط شکستهٔ بستهٔ MNPQR.



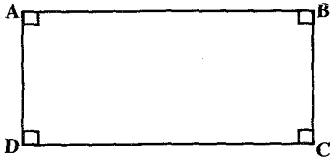
چندضلعی. خط شکستهٔ بسته است. هر یک از پاره‌خطهای خط شکسته، یک ضلع چند ضلعی و زاویهٔ بین هر دو پاره‌خط یک زاویهٔ چندضلعی نامیده می‌شود. چندضلعی با تعداد ضلعهای آن مشخص می‌شود. مانند چهارضلعی ABCD، پنج ضلعی ABCDE و ... .



چند ضلعیی که همهٔ رأسهای آن در یک صفحه باشند، چندضلعی مسطح نامیده می‌شود. در این مجلد مراد از چندضلعی، چندضلعی مسطح است.



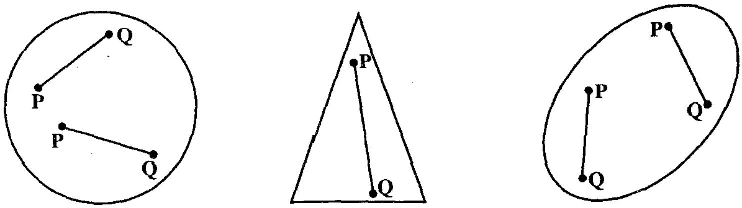
برخی چهارضلعیها اسامی ویژه دارند. مانند متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی و ذوزنقه.



طول خط شکستهٔ بسته را محیط چندضلعی می‌نامند.

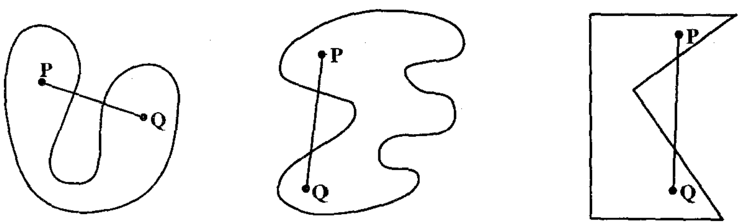
مجموعه‌های محدب (کوژ) و تفکیک

مجموعه‌ای از نقطه‌ها را در صورتی محدب می‌نامیم که برای پیمودن کوتاهترین فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ آن مجبور نباشیم آن مجموعه را ترک کنیم. شکلهای الف، ب و پ مجموعه‌های محدبند. هر یک از این مجموعه‌ها یک ناحیهٔ کامل صفحه است نه این که فقط مرز ناحیه باشد.



(الف) (ب) (پ)

در تمام این مجموعه‌ها می‌توانید در امتداد یک خط راست از نقطهٔ دلخواه P به نقطهٔ دلخواه

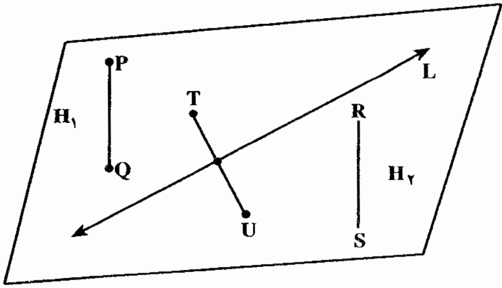


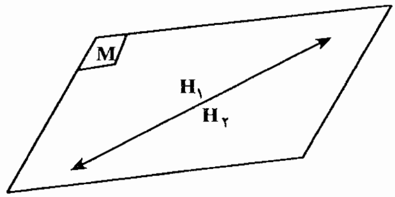
(ت) (ث) (ج)

Q بروید، بدون این که مجموعه را ترک کنید. به نمونه‌های بالا توجه کنید. ولی مجموعه‌های ت، ث و ج مجموعه‌های محدب نیستند. این شکلها نشان می‌دهند که به چه علت این مجموعه‌ها محدب نیستند. به این ترتیب که نمونه‌هایی از نقطه‌های P و Q ارائه شده است که با پاره‌خطهای واقع در مجموعه نمی‌توان آن دو را به هم پیوست. برای بیان ریاضی این مطلب‌ها، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف

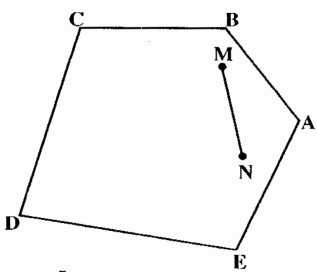
مجموعهٔ M را محدب می‌نامیم، اگر هر دو نقطهٔ P و Q دلخواه آن مجموعه را برگزینیم، تمام پاره‌خط $\overline{PQ}$ در M قرار داشته باشد. مجموعه‌هایی که تا اینجا مثال زدیم مجموعه‌های



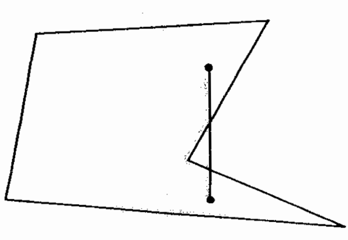


کوچکی بودند، ولی مجموعهٔ محدب می‌تواند بسیار بزرگ باشد. مثلاً هر صفحه یک مجموعهٔ محدب است ؛ هر خط واقع در یک صفحه، آن صفحه را به دو مجموعهٔ محدب تقسیم می‌کند، دو مجموعه‌ای که تا بینهایت امتداد دارند، هر یک از دو مجموعهٔ H_1 و H_2 را یک نیمصفحه یا یک طرف خط L و خط L را مرز این نیمصفحه‌ها می‌نامیم. نیمصفحه‌ها محدبند، زیرا اگر دو نقطه در یک طرف خط باشند، پاره خطی که از آن دو می‌گذرد هرگز خط را قطع نمی‌کند. ولی اگر T و U دو نقطه در دو طرف خط باشند، پاره‌خط $\overline{TU}$ حتماً خط را قطع می‌کند.

چندضلعی محدب. چندضلعیی است که هر پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ دلخواه از درون آن، کاملاً درون چندضلعی واقع شود.

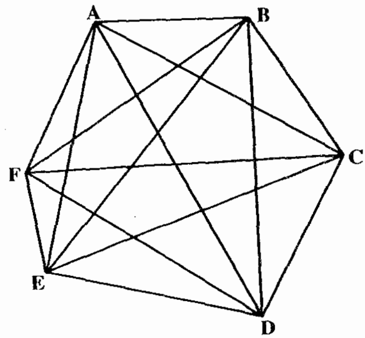


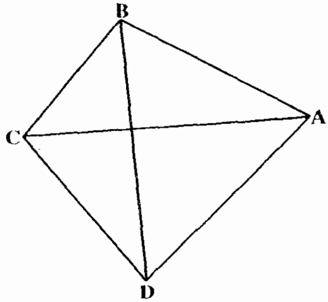
چندضلعی مقعر. چندضلعیی است که در صفحهٔ آن لااقل یک پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ درونی آن کاملاً درون چندضلعی واقع نشود (محیط چندضلعی را قطع کند).



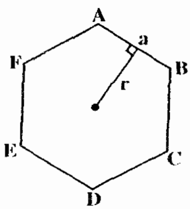
قطر چندضلعی. هر پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور از یک چندضلعی را به هم وصل می کند، قطر چندضلعی نامیده می‌شود. مانند پاره خطهای AC و BD که قطرهای چهارضلعی ABCD و یا پاره‌خطهای AD و BE و CF که قطرهایی از شش ضلعی ABCDEF می‌باشند.

هر n ضلعی دارای $\frac{n(n-۳)}{۲}$ قطر است. هر چهارضلعی ۲ قطر دارد.

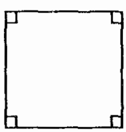




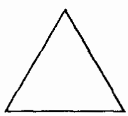
چندضلعی منتظم. چندضلعیی است که ضلعهایش با هم و زاویه‌هایش نیز با هم برابرند. چندضلعی منتظم با تعداد ضلعهایش مشخص می‌شود. مانند شش ضلعی منتظم، هفت ضلعی منتظم و ... .



سه ضلعی منتظم را مثلث متساوی‌الاضلاع و چهارضلعی منتظم را مربع می‌نامند.



هر n ضلعی منتظم به n مثلث همنهشت افراز می‌شود. ارتفاع هریک از این مثلثها را سهم چندضلعی نامند و به r نشان می‌دهند. مساحت n ضلعی منتظم که اندازهٔ هر ضلعش برابر a و اندازهٔ سهمش r باشد، برابر است با:



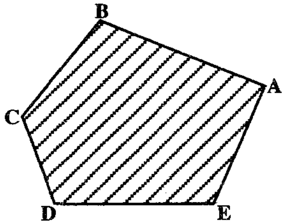
$$S=\frac{۱}{۲}n.a.r$$

اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ و اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی آن برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. هر n ضلعی منتظم n محور تقارن دارد.

مجموع زاویه‌های درونی یک چندضلعی

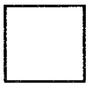
۶۰۳. قضیه. مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب برابر $(۲n-۴)$ قائمه است.

۶۰۴. قضیه. مجموع زاویه‌های برونی هر n ضلعی محدب ۴ قائمه است.



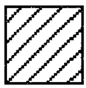
سطح چندضلعی. سطح چندضلعی مجموعهٔ نقطه‌هایی است که در درون یا روی ضلعهای چندضلعی است.

مربع. مربع چهارضلعیی است که هر چهار ضلع آن با هم برابر و هر زاویه‌اش برابر 90° است ؛ مانند مربع ABCD.

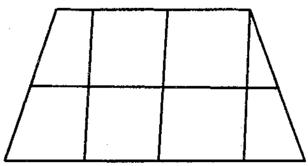


مربع واحد. مربع واحد مربعی است که اندازهٔ هر ضلعش یک واحد باشد (هر واحد اندازه‌گیری طول). برای مثال اگر سانتیمتر را واحد اندازه‌گیری طول اختیار کنیم، مربع واحد، مربعی به ضلع ۱ سانتیمتر خواهد شد.

واحد اندازه‌گیری سطح. واحد اندازه‌گیری سطح، مربعی به ضلع واحد است. اگر اندازهٔ ضلع مربع واحد برابر ۱ سانتیمتر باشد واحد اندازه‌گیری سطح، ۱ سانتیمتر مربع است.



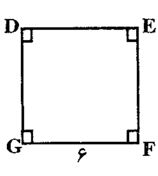
مساحت چندضلعی. مساحت چندضلعی برابر است با تعداد مربعهای واحد، و بخشهایی از مربعهای واحد که سطح آن چندضلعی را می‌پوشانند.

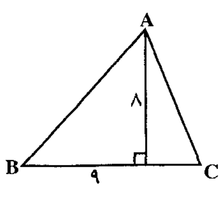


چندضلعیهای هم ارز. چندضلعیهای هم‌ارز دو چندضلعی هستند که مساحتشان یکی باشد به عنوان مثال مثلثی به قاعدهٔ ۹ سانتیمتر و ارتفاع نظیر ۸ سانتیمتر با مربعی به ضلع ۶ سانتیمتر، هم‌ارز یا معادل است ؛ زیرا :

$S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} \times ۹ \times ۸ = ۳۶\text{cm}^۲$

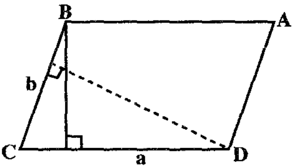
$S_{\text{مربع}} = ۶^۲ = ۳۶\text{cm}^۲ \Rightarrow S_{\text{مثلث}} = S_{\text{مربع}}$





۱.۵. متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۵.تعریف و قضیه



متوازی‌الاضلاع. متوازی الاضلاع چهارضلعیی است که ضلعهای آن دو به دو با هم موازی باشند، مانند متوازی‌الاضلاع ABCD که در آن $AB \| CD$ و $AD \| BC$ است. فاصلهٔ بین هر دو ضلع متوازی، یک ارتفاع متوازی‌الاضلاع است.

اندازهٔ محیط متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن a و b است، برابر $۲(a+b)$ است.

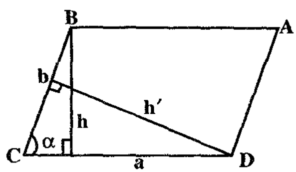
۶۰۵. قضیه‌هایی در مورد متوازی‌الاضلاع:

قضیهٔ ۱. در هر متوازی‌الاضلاع، ضلعهای روبه‌رو مساوی یکدیگرند و بعکس.

قضیهٔ ۲. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو متساوی و زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند و بعکس.

قضیهٔ ۳. در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و بعکس.

قضیهٔ ۴. در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع روبه‌رو متوازی و متساوی‌اند و بعکس.



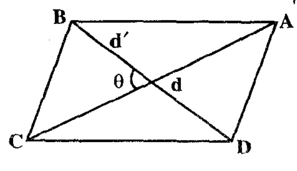
مساحت متوازی‌الاضلاع

مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب اندازهٔ هر ضلع در ارتفاع نظیر آن ضلع به عنوان مثال در متوازی‌الاضلاع ABCD به ضلعهای a و b و ارتفاعهای نظیر h و h' داریم :

$$\text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = a.h = b.h'$$

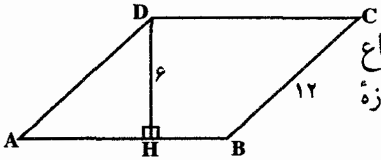
اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن a و b و اندازهٔ یک زاویهٔ آن α باشد برابر $ab\sin\alpha$ است.

اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاعی که اندازهٔ قطرهای آن d و d' و اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر θ باشد، برابر $\frac{۱}{۲}d.d'\sin\theta$ است.



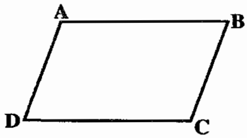
۲.۱.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵. اندازهٔ زاویه



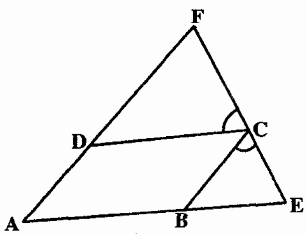
۶۰۶. یک ضلع متوازی‌الاضلاعی ۱۲ سانتیمتر و ارتفاع نظیر ضلع دیگر آن ۶ سانتیمتر است. اندازهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

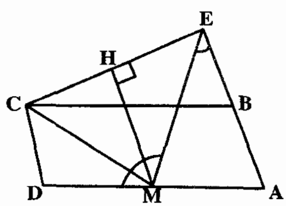


۶۰۷. نقطهٔ P را در بیرون متوازی‌الاضلاع ABCD طوری انتخاب کرده‌ایم که دو زاویهٔ PAB و PCB با هم برابر باشند و، در ضمن رأسهای A و C در دو نیمصفحهٔ مختلف نسبت به خط راست PB قرار گیرند. ثابت کنید، دو زاویهٔ APB و DPC با هم برابرند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، مجارستان، ۱۹۷۶



۶۰۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD ضلع AB را به اندازهٔ $BE = BC$ و ضلع AD را به اندازهٔ $DF = DC$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که $D\hat{C}F = B\hat{C}E$ است.



۶۰۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD زاویهٔ A حاده و ضلع BC دو برابر AB است. ارتفاع CE را بر AB فرود آورده، نقطه‌های E و C را به M وسط AD وصل می‌کنیم. ثابت کنید $D\hat{M}E = ۳A\hat{E}M$.

۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع

۶۱۰. محیط متوازی‌الاضلاعی برابر ۳۰ و یک ضلع آن از دو برابر ضلع مجاورش ۳ واحد کمتر است. اندازهٔ ضلعهای این متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۴.۱.۵. قطر

۶۱۱. روی هر ضلع متوازی‌الاضلاع، یک نقطه طوری انتخاب کرده‌ایم که، با وصل آنها به یکدیگر، یک چهارضلعی به‌دست آمده است که مساحتی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع دارد. ثابت کنید، یکی از قطرهای چهارضلعی، با یکی از ضلعهای متوازی‌الاضلاع، موازی است.

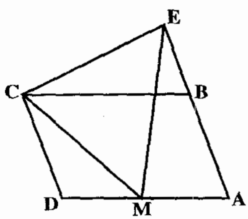
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۶۱۲. یک متوازی‌الاضلاع را درنظر می گیریم و یک ذوزنقه در آن محاط می کنیم به قسمی که هریک از رأسهای ذوزنقه روی یکی از ضلعهای متوازی‌الاضلاع واقع باشد. ثابت کنید که نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه روی یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع واقع است.

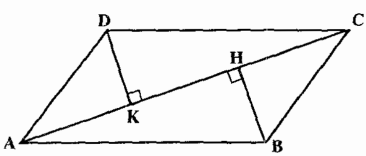
۵.۱.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

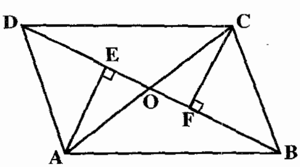
۶۱۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD زاویهٔ A حاده است. ارتفاع CE را بر ضلع AB فرود آورده، نقطه‌های E و C را به نقطهٔ M وسط AD وصل می کنیم. ثابت کنید : $ME = MC$.



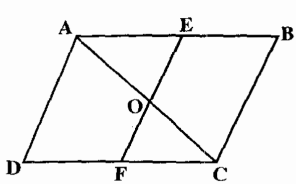
۶۱۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطر AC را رسم کرده و از دو رأس B و D عمودهای BH و DK را بر آن فرود می‌آوریم. ثابت کنید $BH = DK$ می‌باشد.

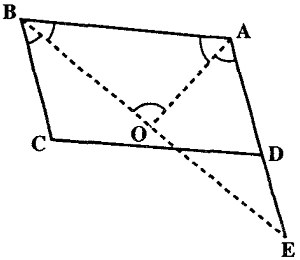


۶۱۵. عمودهای AE و CF را بر قطر BD از متوازی‌الاضلاع ABCD فرود می‌آوریم. ثابت کنید قطر AC از وسط پاره‌خط EF می گذرد.



۶۱۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD از نقطهٔ O وسط قطر AC خطی رسم می کنیم تا دو ضلع موازی AB و CD را در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید $OF = OE$ است.

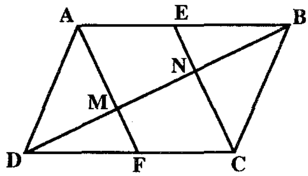




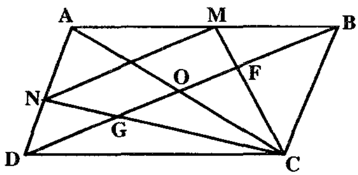
۶۱۷. در متوازی‌الاضلاع ABCD نیمسازهای درونی زاویه‌های A و B را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند:

۱. ثابت کنید $A\hat{O}B = 90^\circ$ است.

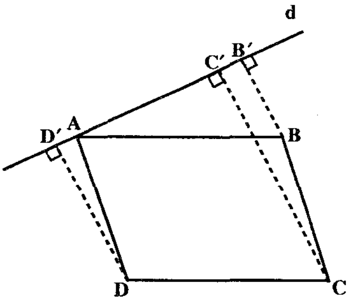
۲. BO را از طرف O امتداد می‌دهیم تا ضلع AD را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید $OB = OE$.



۶۱۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD نقطهٔ E وسط AB و نقطهٔ F وسط CD می‌باشد. ثابت کنید خطهای AF و CE قطر BD را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.



۶۱۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD وسطهای دو ضلع مجاور AB و AD را بترتیب M و N نامیده، پاره‌خطهای CM و CN را رسم می‌کنیم تا قطر BD را بترتیب در نقطه‌های F و G قطع نمایند. ثابت کنید: $BF = FG = GD$.

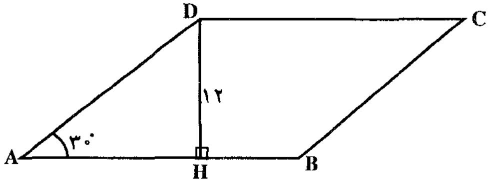


۶۲۰. بر رأس A از متوازی‌الاضلاع ABCD خطی مانند d گذرانده‌ایم. ثابت کنید که فاصلهٔ رأس C از این خط مساوی با مجموع یا تفاضل فاصلهٔ دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع از همین خط است.

۶.۱.۵. محیط

۱.۶.۱.۵. اندازهٔ محیط

۶۲۱. یک ضلع متوازی‌الاضلاعی ۲ برابر ضلع دیگر آن است. ارتفاع نظیر ضلع بزرگتر برابر ۱۲ سانتیمتر و زاویهٔ حادهٔ آن 30° است. محیط این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید.



۷.۱.۵. مساحت

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت

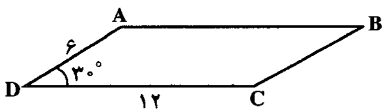
۶۲۲. در متوازی‌الاضلاع abcd هریک از ضلعهای [ab] و [bc] به اندازهٔ ۲۰ سانتیمتر و زاویهٔ abc به اندازهٔ °۶۰ است. مساحت این متوازی‌الاضلاع برحسب سانتیمتر مربع برابر است با :

الف) ۲۰۰ ب) $۲۰۰\sqrt{۲}$

ج) $۲۰۰\sqrt{۳}$ د) $\frac{۸۰۰}{۳}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۶۲۳. محیط و مساحت متوازی‌الاضلاعی را پیدا کنید که دو ضلع آن ۱۲ و ۶ سانتیمتر و یک زاویهٔ آن °۳۰ باشد.

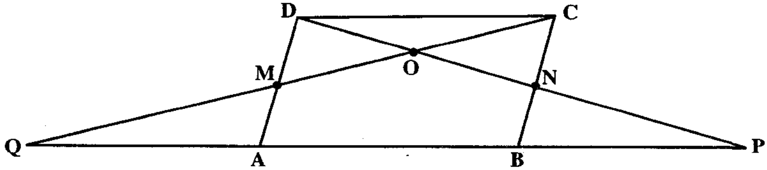


۲.۷.۱.۵. مساحت شکلهای ایجاد شده

۶۲۴. ثابت کنید مساحت هر مثلث محاط در یک متوازی‌الاضلاع، حداکثر می‌تواند برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۵

۶۲۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD، خط DP از N وسط BC می‌گذرد و امتداد AB را در P قطع می‌کند. خط CQ از C آغاز می‌شود، از M وسط AD می‌گذرد و با امتداد AB در Q برخورد می‌کند. خطهای DP و CQ در O با هم برخورد می‌کنند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD برابر K باشد، مساحت مثلث QPO برابر است با :



الف) K ب) $\frac{۶K}{۵}$ ج) $\frac{۹K}{۸}$

د) $\frac{۵K}{۴}$ هـ) ۲K

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

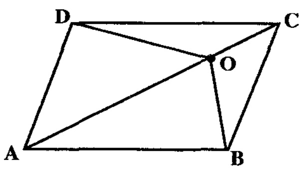
۶۲۶. از هر رأس متوازی‌الاضلاع به وسط دو ضلع غیرمجاور خود رسم کرده‌ایم؛ این هشت خط راست، یک هشت ضلعی به‌وجود می‌آورند. ثابت کنید، مساحت این هشت ضلعی، $\frac{1}{6}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۲

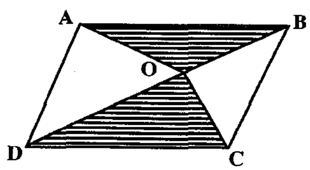
۳.۷.۱.۵. نسبت مساحتها

۶۲۷. نقطهٔ غیرمشخص P واقع بر روی ضلع AB از متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأسهای C و D وصل می‌کنیم تا قطرهای AC و DB را در نقطه‌های R و Q قطع کند. نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت ROQ را به‌دست آورید. (O محل تلاقی قطرها)

۴.۷.۱.۵. رابطهٔ بین مساحتها



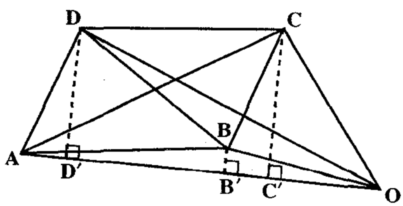
۶۲۸. نقطهٔ O واقع بر قطر AC از متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأسهای B و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید که: $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OAD}$.



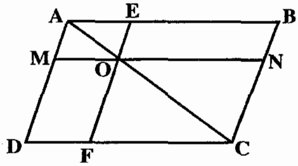
۶۲۹. نقطهٔ O واقع در داخل متوازی‌الاضلاع ABCD را به رأسهای A و B و C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع مساحتهای دو مثلث OAB و OCD مساوی نصف مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است.

۶۳۰. متوازی‌الاضلاع ABCD و نقطهٔ O را که در داخل زاویه‌های A و C قرار ندارند در نظر می‌گیریم و از O به نقطه‌های A و B و C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

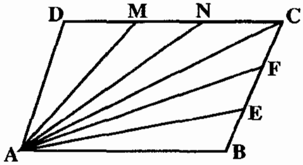
$$S_{\Delta OAC} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OAD}$$



۶۳۱. در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطهٔ E بر خط AB و نقطهٔ F بر خط AD (B روی پاره‌خط AE و D روی AF) قرار دارد. K نقطهٔ برخورد خطهای ED و FB است. ثابت کنید که مساحتهای چهارضلعیهای ABKD و CEKF برابرند.



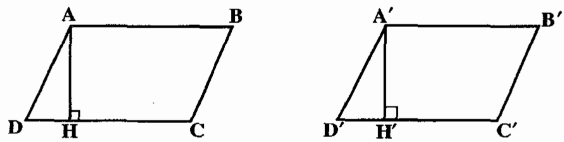
۶۳۲. از یک نقطهٔ واقع بر قطر متوازی‌الاضلاعی دو خط موازی با دو ضلع آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دو متوازی‌الاضلاع معادل به‌وجود می‌آیند.



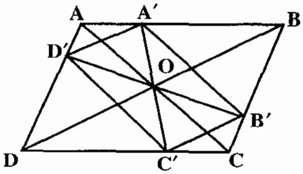
۶۳۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD هریک از ضلعهای AB و AC را به سه قسمت متساوی تقسیم کرده و از رأس D به نقطه‌های تقسیم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید شش مثلثی که به این طریق به‌دست می‌آیند معادلند و از آن جا راهی برای تقسیم متوازی‌الاضلاع به سه قسمت معادل پیدا کنید.

۸.۱.۵. همنهشتی متوازی‌الاضلاعها

۶۳۴. هرگاه در دو متوازی‌الاضلاع، دو ضلع مجاور و فاصلهٔ دو ضلع متوازی (ارتفاع) نظیر به نظیر متساوی باشند، آن دو متوازی‌الاضلاع متساوی‌اند.

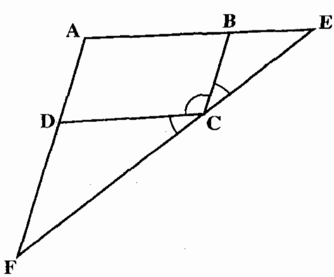


۹.۱.۵. نقطه‌های ویژه

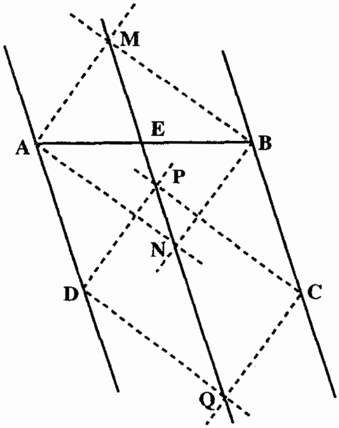


۶۳۵. هرگاه یک متوازی‌الاضلاع در متوازی‌الاضلاع دیگری محاط باشد، محل تلاقی قطرهایشان بر هم منطبق است.

۱۰.۱.۵. نقطه‌های همخط

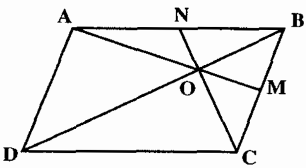


۶۳۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD ضلع AB را از طرف B به اندازهٔ $BE = BC$ و ضلع AD را از طرف D به اندازهٔ $DF = CD$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که خط EF از نقطهٔ C می‌گذرد. (سه نقطهٔ E و C و F بر یک استقامتند.)

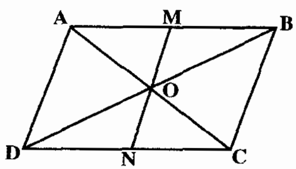


۶۳۷. نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A و B از متوازی‌الاضلاع ABCD یکدیگر را در M و N قطع می‌کنند و نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی C و D یکدیگر را در نقطه‌های P و Q تلاقی می‌نمایند. ثابت کنید نقطه‌های M، N، P و Q روی یک خط راست واقع هستند و این خط راست از نقطه‌های E و F وسطهای ضلعهای AB و CD می‌گذرد.

۱۱.۱.۵. خطهای همرس



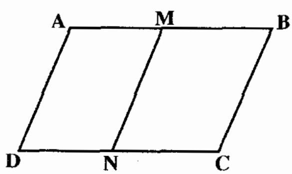
۶۳۸. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر گرفته، رأس A را به نقطهٔ M وسط BC و رأس C را به نقطهٔ N وسط AB وصل می‌کنیم. ثابت کنید خطهای AM و CN و BD همرسند.



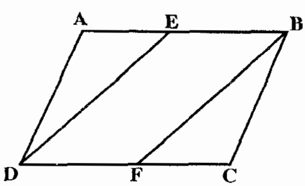
۶۳۹. ثابت کنید هر خط که وسطهای دو ضلع روبه‌روی یک متوازی‌الاضلاع را به هم متصل می‌سازد از محل تلاقی دو قطر آن متوازی‌الاضلاع می‌گذرد.

۱۲.۱.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

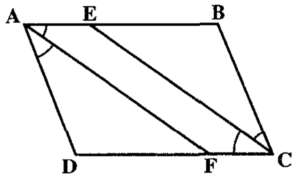
۱.۱۲.۱.۵. خطها موازی‌اند



۶۴۰. در متوازی‌الاضلاع ABCD نقطهٔ M وسط ضلع AB را به نقطهٔ N وسط ضلع CD وصل می‌کنیم. ثابت کنید MN موازی ضلع BC است.

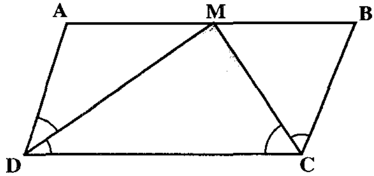


۶۴۱. در متوازی‌الاضلاع ABCD رأس D را به نقطهٔ E وسط ضلع AB و رأس B را به نقطهٔ F وسط ضلع CD وصل می‌کنیم. ثابت کنید دو خط ED و BF متوازی‌اند.



۶۴۲. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های متقابل هر متوازی‌الاضلاع متوازی‌اند.

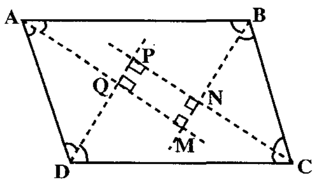
۲.۱۲.۱.۵. خط نیمساز است



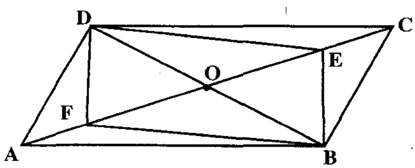
۶۴۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD ضلع AB دو برابر ضلع AD می‌باشد. از نقطهٔ M وسط ضلع AB به نقطه‌های C و D وصل می کنیم. ثابت کنید خطهای MC و MD بترتیب نیمسازهای دو زاویهٔ C و D می‌باشند.

۶۴۴. ضلع AB از متوازی‌الاضلاع ABCD را تا نقطهٔ E به اندازهٔ BE = AD امتداد داده‌ایم. عمودی که از E بر ABE اخراج می‌شود، عمودی را که از C بر قطر BD فرود می‌آید در نقطهٔ F قطع می کند. ثابت کنید که AF زاویهٔ A را نصف می کند.

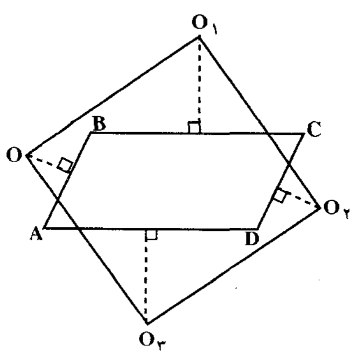
۱۳.۱.۵. شکلهای ایجاد شده



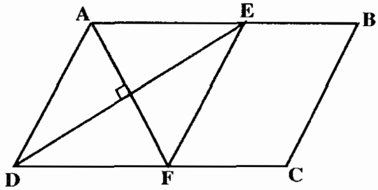
۶۴۵. ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های درونی هر متوازی‌الاضلاع یک مستطیل ایجاد می‌شود. اگر به جای متوازی‌الاضلاع مستطیل باشد، شکل حادث چه خواهد بود؟



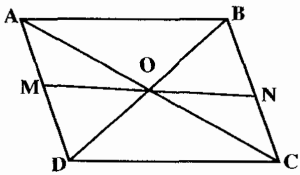
۶۴۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD که قطر AC بزرگتر از قطر BD می‌باشد، از نقطهٔ O محل تلاقی دو قطر، طولهای OE و OF را مساوی OB روی قطر AC جدا کرده، نقطه‌های E و F را به رأسهای B و D وصل می کنیم. ثابت کنید چهارضلعی BFDE مستطیل است.



۶۴۷. هرگاه بر روی ضلعهای متوازی‌الاضلاع و در خارج متوازی‌الاضلاع مربعهایی بنا کنیم، ثابت کنید از اتصال مرکزهای این مربعها، مربع جدیدی ساخته می‌شود.

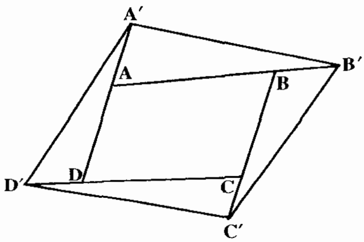


۶۴۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD ضلع AB بزرگتر از ضلع AD می‌باشد. روی ضلع AB پاره‌خط AE را برابر AD جدا کرده، نقطه‌های E و D را به هم وصل می‌کنیم و از رأس A عمودی بر خط DE فرود می‌آوریم تا ضلع CD را در نقطهٔ F قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی AEFD لوزی است.



۶۴۹. هر خط که بر مرکز متوازی‌الاضلاع بگذرد، آن را به دو ذوزنقهٔ متساوی تقسیم می‌کند.

۱۴.۱.۵. ثابت کنید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است



۶۵۰. ضلعهای متوازی‌الاضلاع ABCD را در یک جهت امتداد داده و روی آنها پاره‌خطهای $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.

۶۵۱. الف. روی هریک از ضلعهای متوازی‌الاضلاع ABCD و در خارج آن مثلثهایی متساوی‌الاضلاع ساخته‌ایم. ثابت کنید رأسهای سوم مثلثها خود تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند.

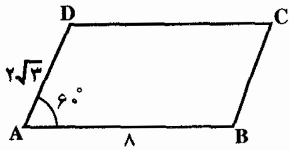
ب. روی هر یک از ضلعهای متوازی‌الاضلاع و در خارج آن مربعهایی می‌سازیم. ثابت کنید که از وصل کردن مرکزهای این مربعها به یکدیگر متوازی‌الاضلاع جدیدی به‌دست خواهد آمد.

۶۵۲. ثابت کنید، اگر چهارضلعیهای ACPH، AMBE، AHBT، BKXM، CKXP متوازی‌الاضلاع باشند، آن وقت چهارضلعی ABTE هم یک متوازی‌الاضلاع است (رأسهای همهٔ چهارضلعیها را، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به حساب آورید).

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

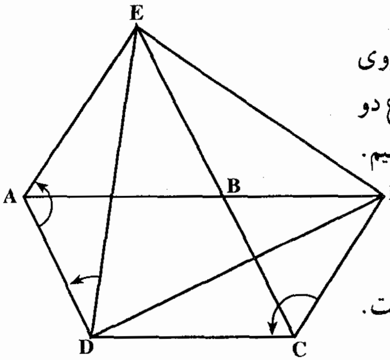
۶۵۳. از دو رأس متقابل یک متوازی‌الاضلاع خطهای مستقیمی را عبور می‌دهیم. این خطها ضلعهای متوازی‌الاضلاع یا امتداد آنها را در چهار نقطه قطع می‌کنند. ثابت کنید این نقطه‌ها، رأسهای یک ذوزنقه یا متوازی‌الاضلاع هستند.

۱۵.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۶۵۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD اندازهٔ دو ضلع ۸ و $2\sqrt{3}$ و یک زاویه برابر 60° است. ضلع مربع معادل این متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.

۱۶.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی



۶۵۵. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است، روی ضلعهای BC و AB و در خارج متوازی‌الاضلاع دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABE و BCF را بنا می‌کنیم.

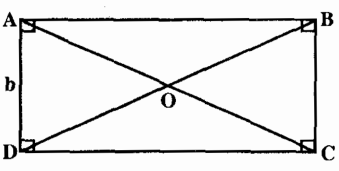
۱. ثابت کنید $D\hat{A}E = D\hat{C}F$.

۲. $\Delta ADE = \Delta FBE$.

۳. ثابت کنید مثلث DFE متساوی‌الاضلاع است.

۲.۵. مستطیل

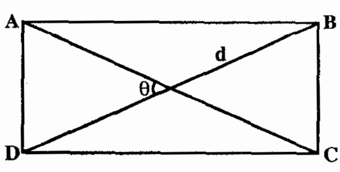
۱.۲.۵. تعریف و قضیه



متوازی‌الاضلاع چهارضلعیی است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. به بیان دیگر، مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. بنابراین مستطیل تمام ویژگیهای متوازی‌الاضلاع را دارد.

دو ضلع مجاور مستطیل را طول و عرض آن می‌نامند.

اندازهٔ محیط مستطیلی که طول و عرضش برابر a و b می‌باشد، برابر $2(a+b)$ است.



اندازهٔ قطر مستطیل به طول و عرض a و b، برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است. اندازهٔ مساحت مستطیل به طول و عرض a و b، برابر $S = ab$ است. اگر اندازهٔ هر قطر مستطیل برابر d و زاویهٔ بین دو قطر مساوی θ باشد، مساحت مستطیل برابر است با:

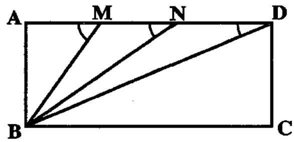
$$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\theta$$

۵ . ۲ . ۲ . زاویه

۵ . ۲ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۶۵۶. قطر مستطیلی دو برابر ضلع کوچکتر آن است. اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر این مستطیل را بیابید.

۶۵۷. ضلع AD از مستطیل ABCD، سه برابر ضلع AB است، نقطه‌های M و N، AD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. $A\hat{M}B+A\hat{N}B+A\hat{D}B$ را بیابید.



۵ . ۲ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

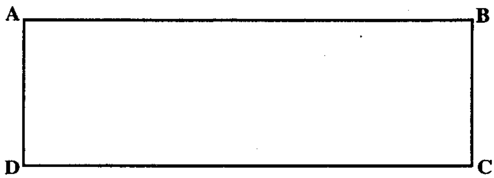
۶۵۸. M را وسط ضلع AD و N را وسط ضلع BC در مستطیل ABCD گرفته‌ایم. روی امتداد پاره‌خط راست CD، و از طرف D، نقطهٔ P را انتخاب کرده‌ایم. محل برخورد خطهای راست PM و AC را Q می‌نامیم. ثابت کنید : $Q\hat{N}M=M\hat{N}P$.

ششمین المپیاد سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۲

۵ . ۲ . ۳ . ضلع

۵ . ۲ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۶۵۹. یک ضلع مستطیلی سه برابر ضلع دیگر است. مساحت آن ۸/۶۷ سانتیمتر مربع است. اندازهٔ دو ضلع آن را به‌دست آورید.



۵ . ۲ . ۳ . ۲ . افزایش یا کاهش ضلع

۶۶۰. ضلعهای مستطیلی مساوی a و b هستند. اگر از a به اندازهٔ k واحد کم کنیم، به b چه‌قدر باید اضافه کنیم تا مساحت مستطیل حاصل، دو برابر مساحت مستطیل داده شده باشد.

۶۶۱. اگر قاعدهٔ یک مستطیل ۱۰٪ افزایش یابد ولی مساحت آن تغییر نکند، آن‌گاه کاهش ارتفاع آن عبارت است از :

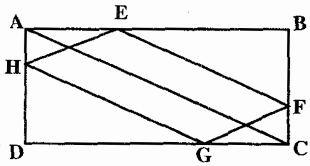
الف) ۹٪ ب) ۱۰٪ ج) ۱۱٪ د) $\frac{1}{9}$۱۱٪ هـ) $\frac{1}{11}$۹٪

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۵ . ۲ . ۴. قطر

۶۶۲. ثابت کنید در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

۵ . ۲ . ۵. پاره خط



۶۶۳. در مستطیل ABCD دو وتر EF و GH را موازی قطر AC و به یک فاصله از آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دو پاره‌خط FG و EH موازی و مساوی‌اند.

۵ . ۲ . ۶. محیط

۶۶۴. مستطیل ABCD مفروض است. در صورتی که مساحت آن برابر ۶۳ و یک ضلعش ۲ واحد بیشتر از ضلع دیگرش باشد، محیط این مستطیل را تعیین کنید.

۵ . ۲ . ۷. مساحت

۵ . ۲ . ۷ . ۱. اندازهٔ مساحت

۶۶۵. مطلوب است مساحت مستطیلی که قاعدهٔ آن دو برابر ارتفاع، و عدد مساحت آن برابر عدد محیطش باشد.

از کرجی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

کرجی

ابوبکر محمدبن حسین (یا حسن) کرجی که در کرج نزدیک شهر تهران زاده شد، تاریخ ولادتش به درستی مشخص نیست، در حدود سال ۱۰۲۹ میلادی درگذشت. از ریاضیدانان

برجسته ایرانی است که نخستین تألیف مهمش الکافی فی‌الحساب نام دارد که احتمالاً در اثنای سالهای ۱۰۱۰ و ۱۰۱۶ نوشته است. دراین کتاب نه تنها مطالب ریاضی را به صورتی که ریاضی‌دانان آن زمان بیان کرده‌اند آورده است، بلکه قاعدهٔ مربع ربعی را هم به دست دهد.

$$\left(\frac{a+b}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{a-b}{۲}\right)^{۲}=ab$$

همچنین روشهای ضرب را به صورتی که با فرمول بیان شده توصیف می کند :

$$(۱۰a+a)(۱۰b+b)=\left[(۱۰a+a)b+ab\right]۱۰+ab$$

و

$$(۱۰a+b)(۱۰a+c)=(۱۰a+b+c)a\times۱۰+bc$$

کرجی ریشه‌ها را چنین حساب می کند :

$\sqrt{m}=\frac{a+r}{۲a+۱}:m=a^{۲}+r$ برای

همچنین مساحت شکلهای مسطح، مخصوصاً آنها را که مستلزم اعداد گنگ است، مورد بحث قرار می‌دهد. از جمله مسأله مربوط به رابطهٔ هرون $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ را. این کتاب به بحث در معادله های درجه دو و به توضیح اصطلاحهای جبر و مقابلهٔ متداول در ریاضیات اسلامی پرداخته است.

کتاب الفخری

با این همه مهمترین تألیف کرجی در زمینهٔ جبر کتاب الفخری است که در آن اعمال متداول مقادیر جبری، جذر، معادله های درجه یک و دو، آنالیز سیال، و حل مسأله‌ها دیده می‌شود. معادله های درجه دو از این قبیل است $x^{۴}+۵x^{۲}=۱۲۶$ ، و حل معادلات درجه دو به طور کلی بر اساس قاعدهٔ زیر است :

$$ax^{۲}+bx=c$$

و رابطهٔ a: $x=\left[\sqrt{(\frac{b}{۲})^{۲}+ac}-\frac{b}{۲}\right]$.

قاعده‌ها به طریق هندسی بیان شده است. مسأله های متعددی که داده ظاهراً برخی از آنها قبلاً به وسیلهٔ خوارزمی و دیوفانتوس ذکر شده و شامل مواردی است از قبیل یافتن جوابهای صحیح معادله های زیر :

$$x^{۳}+y^{۳}=z^{۲}\quad,$$
$$x^{۲}-y^{۲}=z^{۳}\quad,$$
$$x^{۲}y^{۳}=z^{۲}\quad,$$
$$x^{۳}+۱۰x^{۲}=y^{۲}$$

و به دست آوردن جواب کسری برای این معادله‌ها

$$x^2 - y^2 = z^2 \quad , \quad x^3 + y^2 = z^3$$

این کتاب در شمار عالمانه‌ترین آثار جبر اسلامی است. گرچه نویسندگانی چون دیوفانتوس و ابوالوفا امکان استفاده از توانهای بالای دلخواه را خاطرنشان کرده‌اند، به نظر می‌رسد که کرجی نخستین کسی است که جبر عبارتهای مشتمل بر این توانها را بسط داده است.

رشدی راشد از مدل‌بندی جبر چندجمله‌ایها بر مبنای حساب ارزش موضعی توسط کرجی به عنوان «حسابیدان جبر» یاد می‌کند.

۶۶۶. طول اتاقی سه برابر عرض آن و محیط اتاق $2x$ متر است. مساحت کف اتاق چقدر است؟

الف) $\frac{3x^2}{16}$ ب) $\frac{x^2}{48}$ ج) $\frac{3x^2}{8}$ د) $3x^2$ هـ) $\frac{x^2}{3}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۶۶۷. اگر مستطیل را ۲/۵ سانتیمتر بلندتر و ۲/۳ سانتیمتر باریکتر کنیم، یا آن را ۲/۵ سانتیمتر کوتاهتر و ۴/۳ سانتیمتر پهن‌تر کنیم، مساحت آن تغییر نمی‌کند. مساحت این مستطیل برحسب سانتیمتر مربع، برابر است با :

الف) ۳۰ ب) ۸۰/۳ ج) ۲۴ د) ۴۵/۲ هـ) ۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

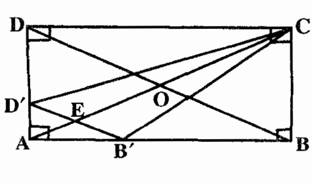
۵ . ۲ . ۷ . ۲ . مساحت شکلهای ایجاد شده

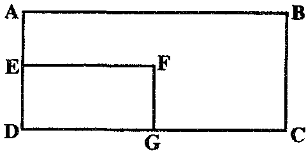
۶۶۸. طول مستطیل ABCD، ۵ سانتیمتر، و عرض آن ۳ سانتیمتر است. نقطه‌های E و F قطر AC را به سه پاره‌خط برابر تقسیم کرده‌اند. مساحت مثلث BEF، بر حسب سانتیمتر مربع، برابر است با :

الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{5}{3}$ ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{1}{3}\sqrt{34}$ هـ) $\frac{1}{3}\sqrt{68}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۶۶۹. مستطیل ABCD داده شده است، روی قطر AC نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که $AE = \frac{AC}{6}$ باشد، از E خطی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا AD را در D' و AB را در B' قطع کند. مطلوب است محاسبهٔ مساحتهای مثلثهای CDD' و CBB' برحسب مساحت مستطیل.

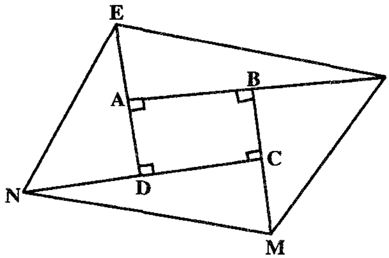




۶۷۰. در مستطیل ABCD نقطه‌های E و G بترتیب در وسط ضلعهای AD و CD واقعند. اگر مساحت مستطیل مزبور ۷۲ سانتیمتر مربع باشد، مساحت مستطیل DEFG بر حسب سانتیمتر مربع برابر است با :

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۲ د) ۱۸ هـ) ۲۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹



۶۷۱. ضلعهای مستطیلی را در یک جهت به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که نقطه‌های انتهای این چهار پاره‌خط، رأسهای متوازی‌الاضلاعی هستند که مساحتش ۵ برابر مساحت مستطیل داده شده است.

۵ . ۲ . ۷ . ۳. رابطه‌ای در مساحتها

۶۷۲. دو مستطیل برابر، طوری روی هم قرار گرفته‌اند که محیطهای آنها، در هشت نقطه، یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مساحت بخش مشترک دو مستطیل، از نصف مساحت هریک از مستطیلها، بیشتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

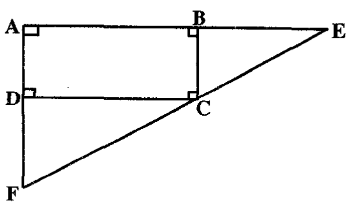
۵ . ۲ . ۸. همنهشتی مستطیلها

۶۷۳. دو مستطیل که قطر و یک ضلع نظیر به نظیرمساوی داشته باشند، همنهشتند.

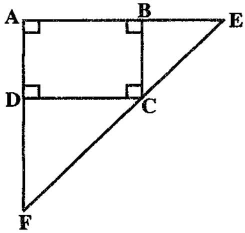
۵ . ۲ . ۹. نقطه‌های ویژه (مرکز تقارن مستطیل)

۶۷۴. اگر مستطیلی در یک مستطیل دیگر محاط باشد، محل برخورد قطرهای آنها برهم منطبقند.

۵ . ۲ . ۱۰. نقطه‌های همخط



۶۷۵. ضلع AB از مستطیل ABCD را به اندازهٔ BE = AB و ضلع AD را به اندازهٔ DF = AD امتداد می‌دهیم. ثابت کنید نقطه‌های E، C و F بر یک استقامت می‌باشند.



۶۷۶. مستطیل ABCD داده شده است. ضلع AB را به اندازهٔ BE = BC و ضلع AD را به اندازهٔ DF = DC امتداد می‌دهیم. ثابت کنید نقطه‌های E، C و F بر یک استقامت قرار دارند.

۵ . ۲ . ۱۱ . شکلهای ایجاد شده

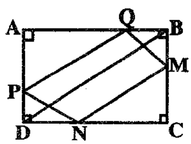
۶۷۷. از هر رأس یک مستطیل سه خط چنان رسم می‌شود که زاویهٔ آن رأس به سه قسمت مساوی تقسیم شود. نقطه‌های تقاطع هر زوج از این خطهای مجاور یک ضلع همواره چه شکلی تشکیل می‌دهند؟

الف) مربع　　　ب) مستطیل

ج) متوازی‌الاضلاعی با ضلعهای نابرابر　　د) لوزی

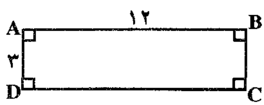
هـ) چهارضلعی غیرمشخص

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳



۶۷۸. مستطیل ABCD مفروض است. دو وتر MN و PQ را به موازات قطر BD و به یک فاصله از آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است و محیط آن دو برابر قطر مستطیل است.

۵ . ۲ . ۱۲ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۶۷۹. مستطیلی به ابعاد ۳ و ۱۲ با مربعی معادل است. ضلع مربع را حساب کنید.

۶۸۰. ثابت کنید از تمام مستطیلهایی که محیط آنها یکی است، آن که مساحتش از همه بیشتر است، مربع می‌باشد.

۶۸۱. روی یک صفحهٔ مربع شکل کاغذ، n مستطیل رسم کرده‌ایم، به نحوی که ضلعهای آنها، موازی با ضلعهای صفحه باشد. بین این مستطیلها، هیچ دو مستطیلی، دارای نقطهٔ درونی مشترک نیستند. ثابت کنید، اگر همهٔ این مستطیلها را از صفحهٔ مربعی شکل کاغذ جدا کنیم، تعداد قطعه‌های بخش باقی ماندهٔ کاغذ، از $n+1$ تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۶

۶۸۲. صفحهٔ کاغذ شطرنجی، شامل ۴۵×۳۰ خانه در دسترس است. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می کنند : در هر حرکت (که به نوبت انجام می گیرد)، روی خط راستی که دو گروه مجاور شبکه را به هم وصل می کند، می برند. نفر اوّل، بریدن را از کنار صفحه آغاز می کند ؛ سپس، هر بازیکن در نوبت خود، باید برش بعدی را، به دنبال برش قبلی و از جایی ادامه دهد که برش نفر قبل تمام شده است. کسی بازی را می برد که، بعد از حرکت او، صفحهٔ شطرنجی کاغذ، به دو بخش تقسیم شده باشد. به شرط بازی درست، کدام برنده می‌شود، آن که بازی را آغاز کرده است، یا رقیب او؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۶۸۳. یک مستطیل داریم که شامل ۱۶۹×۲۶۰ خانهٔ مربعی است. دو گوشهٔ روبه رو از آن را با یک خط راست به هم وصل می‌سازیم. این خط از چند مربع عبور می کند؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۶۸۴. می‌خواهیم کف یک استخر شنا به شکل مستطیل و با طول ۹ متر و عرض ۶ متر را با کاشیهای مربع‌شکلی به ضلع ۰/۵ متر بپوشانیم. اگر قیمت هر کاشی ۳۵۰ تومان باشد، هزینهٔ این کار چه‌قدر خواهد بود؟

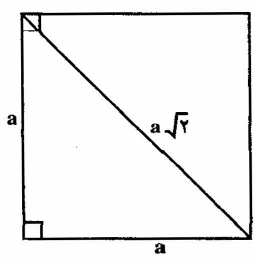
۶۸۵. یک صفحهٔ مقوّا به شکل مستطیل به ابعاد ۱۷×۲۲ داریم. می‌خواهیم آن را به قطعه‌هایی به شکل مستطیل و به ابعاد ۳×۵ تقسیم کنیم. در عمل چگونه آن را ببریم که شمار این مستطیلها حداکثر مقدار ممکن شود؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۵ . ۳ . مربع

۵ . ۳ . ۱ . تعریف و قضیه

مربع چهارضلعیی است که زاویه‌های آن قائمه و ضلعهای آن متساوی باشند. همان‌طور که می‌دانیم مربع، لوزی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند و یا مربع، مستطیلی است که دو ضلع مجاورش باهم برابرند. در مربع به ضلع a : اندازهٔ محیط برابر $4a$ ؛ اندازهٔ قطر برابر $a\sqrt{2}$ ؛ و اندازهٔ مساحت برابر a^2 است.

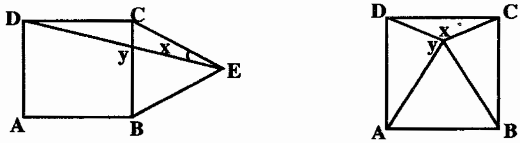


۵. ۳. ۲. زاویه

۵. ۳. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۶۸۶. نقطهٔ M در درون مربع ABCD طوری اختیار می شود که $M\hat{A}B=60^\circ$ و $M\hat{C}D=15^\circ$، $M\hat{B}C$ را پیدا کنید.

۶۸۷. در هریک از شکلهای زیر، ABCD یک مربع است. اندازه‌های x و y را به‌دست آورید؛ ضلعهای مشخص شده با علامت (ـ) متساوی‌اند.



(ب) (الف)

۶۸۸. مربع ABCD مفروض است. نقطه‌های P و Q، بترتیب، بر ضلعهای AB و BC واقعند و در ضمن $BP = BQ$. H را پای عمودی می‌گیریم که از B بر پاره‌خط راست PC رسم شده است. ثابت کنید، زاویهٔ DHQ برابر ۹۰ درجه است.

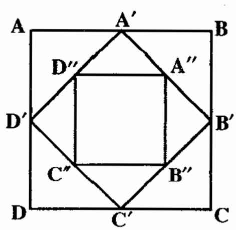
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۴

۵. ۳. ۳. ضلع

۵. ۳. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۶۸۹. اندازهٔ ضلع مربعی به مساحت ۴۹ سانتیمتر مربع را بیابید.

۶۹۰. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. وسطهای ضلعهای این مربع را به طور متوالی به هم وصل کرده‌ایم، چهارضلعی $A'B'C'D'$ ایجاد شده است. سپس وسطهای ضلعهای این چهارضلعی را به‌طور متوالی به هم وصل نموده‌ایم. چهارضلعی $A''B''C''D''$ به وجود آمده است. نوع چهارضلعی اخیر را مشخص کنید و اندازهٔ ضلعهای آن را تعیین کنید.



۵ . ۳ . ۴. قطر

۵ . ۳ . ۴ . ۱. اندازهٔ قطر

۶۹۱. مربعی به مساحت ۶۴ سانتیمترمربع داده شده است. اندازهٔ قطر این مربع چه‌قدر است؟

۵ . ۳ . ۵. پاره‌خط

۵ . ۳ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶۹۲. شبکه‌ای از مربعهای به ضلع واحد تشکیل شده است. یکی از مربعهای شبکه را به دلخواه انتخاب می کنیم. ثابت کنید، فاصلهٔ هر نقطهٔ گرهی دلخواه از این شبکه تا یکی از رأسهای این مربع، عددی است گنگ.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۶۹۳. یک جدول ۱۹۸۹×۱۹۸۹ خانه‌ای داریم. در این جدول طول پاره‌خط واصل بین هر دو رأس مجاور ۱ واحد است. طول بزرگترین مدار بسته‌ای که در این جدول از یک رأس شروع و به همان رأس ختم می‌شود، چه‌قدر است؟ در صورتی که اولاً این مسیر همه جا فقط از ضلعهای مربوط به خانه‌ها عبور کند. ثانیاً این مسیر از هر ضلع بیش از یک بار عبور نکند. ثالثاً از هر رأس نیز بیش از یک بار عبور نکند. (به غیر از نقطهٔ حرکت)

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۶۹۴. فرض می کنیم S مربعی با ضلعهایی به طول ۱۰۰، و L مسیری در داخل S که با خودش تلاقی نمی کند و از پاره‌خطهای: A_0A_1 ، A_1A_2 ، ... ، $A_{n-1}A_n$ با $A_0 \neq A_n$ ترکیب شده است. فرض می کنیم به‌ازاء هر نقطهٔ P مرز S نقطه‌ای از L به فاصلهٔ نابزرگتر از $\frac{1}{2}$ از P موجود باشد. ثابت کنید، دو نقطهٔ X و Y بر L چنان وجود دارند که فاصلهٔ بین X و Y بزرگتر از ۱ نیست، و طول آن قسمت از L که بین X و Y قرار دارد، از ۱۹۸ کوچکتر نیست.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۲

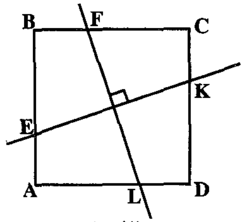
۶۹۵. در درون مربع ۱×۱، چند ضلعی کوژی به مساحت بیشتر از $\frac{1}{2}$ قرار داده‌ایم. ثابت کنید، در چند ضلعی، وتر با طول بیشتر از $\frac{1}{2}$ پیدا می‌شود که با ضلعی از مربع، که از قبل تعیین شده است، موازی باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

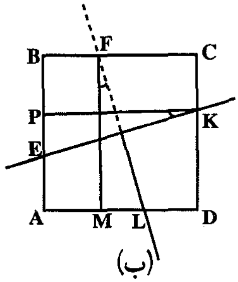
۲.۵.۳.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۲.۵.۳.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۶۹۶. دو خط متقاطع، ضلعهای AB، BC، CD و AD از مربع ABCD را بترتیب در نقطه‌های E، F، K و L قطع می‌کنند. EK = FL را ثابت کنید.

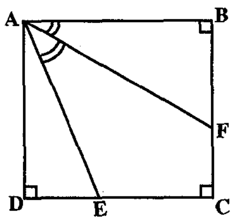


(الف)

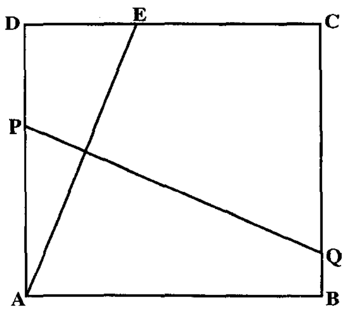


(ب)

۶۹۷. در مربع ABCD از رأس A خط دلخواهی رسم می‌کنیم تا ضلع CD را در نقطهٔ E قطع کند. اگر F نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ BAE با ضلع BC باشد، ثابت کنید که : BF + DE = AE .



۶۹۸. مطابق شکل، در داخل مربع ABCD به ضلع ۱۲ سانتیمتر، پاره‌خط AE را طوری رسم کرده‌ایم که نقطهٔ E روی D و به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر از D قرار دارد. عمودمنصف AE پاره‌خطهای AE، AD و BC را به ترتیب در M، P و Q قطع می‌کند. نسبت PM به MQ برابر است با :



الف) ۵:۱۲ ب) ۵:۱۳ ج) ۵:۱۹

د) ۱:۴ هـ) ۵:۲۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۲.۲.۵.۳.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶۹۹. در مربعی به ضلع ۵۰، خط شکسته‌ای قرار دارد. ثابت کنید، اگر فاصلهٔ هر نقطه از مربع تا دست‌کم، یکی از نقطه‌های خط‌شکسته، بیشتر از واحد نباشد، آن‌وقت، طول خط‌شکسته، از ۱۲۴۸ بزرگتر است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۳

۷۰۰. چهار دهکده در رأسهای مربعی به ضلع ۲km واقعند. دهکده‌ها با جاده به هم مرتبطند، به‌طوری که هر دهکده به بقیه وصل شده است. آیا ممکن است طول همهٔ جاده‌ها از ۵/۵km کمتر باشد.

۵.۳.۶. محیط

۵.۳.۶.۱. اندازهٔ محیط

۷۰۱. ثابت کنید، هرگاه مربعی و مثلثی معادل یکدیگر باشند، محیط مربع از محیط مثلث کوچکتر است.

۵.۳.۷. مساحت

۵.۳.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۷۰۲. مساحت مربعی به ضلع $\sqrt{2}+1$ سانتیمتر چه‌قدر است؟

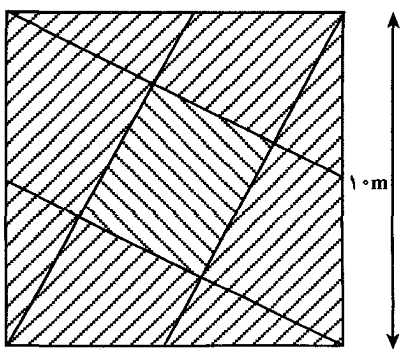
۷۰۳. قطر مربعی $5\sqrt{2}$ سانتیمتر است. اندازهٔ مساحت این مربع را بیابید.

۵.۳.۷.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده

۷۰۴. مساحت مربع وسطی؟

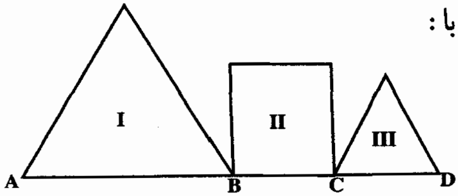
در یک باغچه به شکل مربع، و ضلع ۱۰ متر، مطابق شکل، از هر گوشه به وسط ضلع مقابل وصل، و قسمت وسطی را سیمانکاری کرده‌اند و بقیهٔ باغچه را نیز به چمنکاری اختصاص داده‌اند. مساحت قسمت وسطی را بیابید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۳.۷.۳.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۷۰۵. در نمودار زیر که با مقیاس درست رسم نشده است، شکلهای I، III دو مثلث متساوی‌الاضلاع، بترتیب، با مساحتهای $۳۲\sqrt{۳}$ و $۸\sqrt{۳}$ سانتیمترمربع، و شکل II مربع به مساحت ۳۲ سانتیمتر مربع است. اگر طول پاره‌خط AD به اندازهٔ ۱۲/۵٪ طول خود کاهش یابد و در همان حال طولهای AB و CD تغییر نکند. درصد کاهش مساحت مربع برابر است با :



الف) ۱۲/۵ ب) ۲۵ ج) ۵۰ د) ۷۵ هـ) ۸۷/۵

مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۷۰۶. قطعه زمینی را هم با کاشیهای مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتیمتر و هم با کاشیهای مربع ـ شکل به ضلع ۲۵ سانتیمتر می‌توان کاملاً پوشاند (بدون آن که نیازی به خرد کردن حتی یک کاشی باشد). مساحت این قطعه زمین، برحسب مترمربع کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

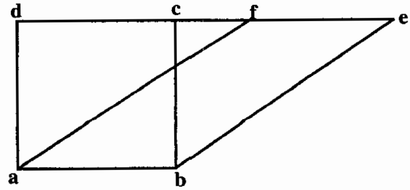
الف) ۱۳/۵۰ ب) ۳۰ ج) ۱۶/۲۰ د) ۱۶/۷۵ هـ) ۲۱

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۷۰۷. سه رأس متوالی لوزی، بترتیب، روی ضلعهای AB، BC و CD از مربع مفروض به ضلع واحد قرار دارند. مطلوب است مساحت شکلی که به‌وسیلهٔ رأس چهارم چنین لوزیهایی پر می‌شود.

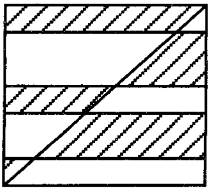
مسابقه‌های سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۷

۷۰۸. مساحت مربع abcd را A و مساحت متوازی‌الاضلاع abef را B می‌گیریم. بین A و B کدام رابطهٔ زیر برقرار است؟



الف) $A=B$ ب) $A>B$ ج) $A<B$ د) $A=\frac{۲}{۳}B$ هـ) $\frac{۳}{۴}A=B$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۷۰۹. ضلع قائم AB از مربع ABCD را، به n پاره‌خط راست طوری تقسیم کرده‌ایم که، مجموع طولهای پاره‌خطهای راست ردیف زوج با مجموع طولهای پاره‌خطهای راست ردیف فرد، برابر شود. از نقطه‌های تقسیم، پاره‌خطهای راستی موازی با ضلع AD رسم و سپس، هر یک از n نوار حاصل را، به‌وسیلهٔ قطر BD، به دو بخش چپ و راست تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع مساحتهای بخشهای چپ در ردیفهای فرد، برابر است با مجموع مساحتهای بخشهای راست در ردیفهای زوج (در شکل، این بخشها را هاشور زده‌ایم).

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۸

۸.۳.۵. همنهشتی مربعها

دو مربع در صورتی همنهشتند که ضلعهایشان برابر باشد.

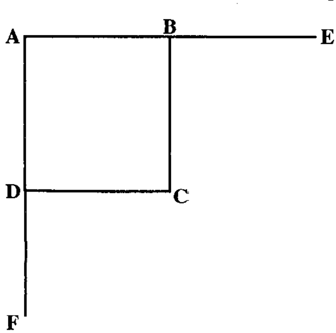
۷۱۰. اگر قطرهای دو مربع برابر باشند، آیا دو مربع همنهشت هستند؟

۹.۳.۵. نقطه‌های ویژه

۷۱۱. اگر مربعی در مربع دیگر محاط باشد، مرکزهای آنها برهم منطبق است.

۱۰.۳.۵. نقطه‌های همخط

۷۱۲. ضلعهای AB و AD از مربع ABCD را از طرف رأسهای B و D به‌اندازهٔ خودشان امتداد داده‌ایم، نقطه‌های E و F به‌دست آمده است. ثابت کنید، سه نقطهٔ E، C و F بر یک خط راست واقعند.

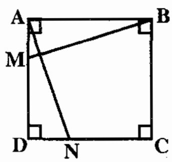


۱۱.۳.۵. خطهای همرس

۷۱۳. هر یک از نه خط راست، مربع را به دو چهار ضلعی تقسیم کرده‌اند که، نسبت مساحتهای آنها، برابر ۳ : ۲ شده است. ثابت کنید، دست‌کم، سه خط راست، از این نه خط راست، از یک نقطه می‌گذرند.

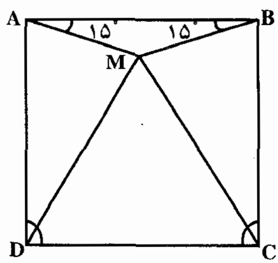
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۲

۱۲.۳.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

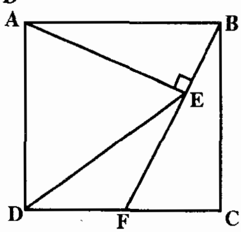


۷۱۴. در مربع ABCD روی ضلعهای AD و DC طولهای متساوی AM و DN را جدا کرده، نقطهٔ B را به M و نقطهٔ A را به N وصل می‌کنیم، ثابت کنید، $AN \perp BM$ است.

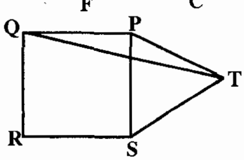
۱۳.۳.۵. شکلهای ایجاد شده



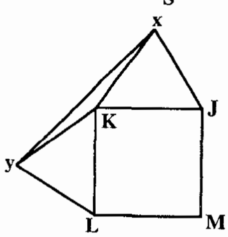
۷۱۵. در مربع ABCD از رأسهای A و B و در داخل مربع دو خط چنان رسم می‌کنیم که با ضلع AB زاویهٔ 15° بسازد. نقطهٔ برخورد این دو خط را M نامیده و از M به C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید که مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است.



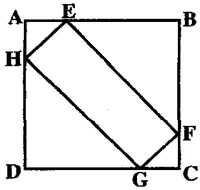
۷۱۶. در مربع ABCD از رأس B به نقطهٔ F، وسط ضلع CD وصل کرده و از رأس A عمود AE را بر BF رسم می‌کنیم، ثابت کنید که مثلث ADE متساوی‌الساقین است.



۷۱۷. الف. PQRS یک مربع و PST یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. نشان دهید مثلث PQT متساوی‌الساقین است.



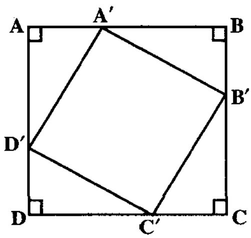
ب. JKLM یک مربع و مثلثهای JXK و KYL هر دو متساوی‌الاضلاع هستند. نشان دهید مثلث KXY متساوی‌الساقین است.

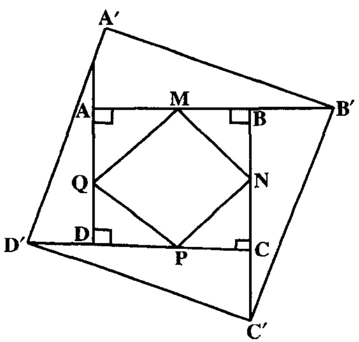


۷۱۸. مربع ABCD را در نظر می گیریم و روی ضلعهای AB، BC، CD و DA، بترتیب، نقطه‌های E، F، G و H را چنان اختیار می کنیم که $AE = CG = AH$ باشد. ثابت کنید، چهار ضلعی EFGH مستطیل است و محیط آن مقدار ثابتی است.

۱۴.۳.۵. ثابت کنید چهارضلعی مربع است

۷۱۹. هرگاه، روی چهار ضلع یک مربع، چهار پاره‌خط متساوی در یک جهت جدا کنیم، ثابت کنید، چهار نقطهٔ حاصل رأسهای یک مربع می‌باشند.

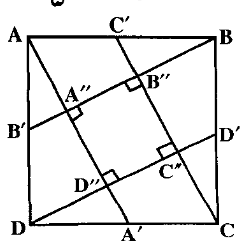




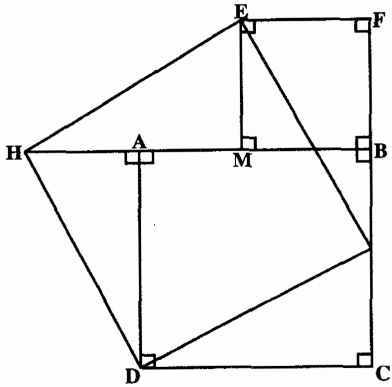
۷۲۰. ۱. وسطهای ضلعهای مربع ABCD را به‌طور متوالی به هم وصل می کنیم. ثابت کنید، چهار ضلعی حاصل مربع است.

۲. در امتداد ضلعهای مربع و در یک جهت پاره‌خطهای $AA' = BB' = CC' = DD'$ را جدا می کنیم. ثابت کنید، چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است.

۷۲۱. نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' ، بترتیب، وسطهای ضلعهای CD ، AD ، AB و BC از مربع ABCD می‌باشند. ثابت کنید که از تقاطع خطهای AA' ، BB' ، CC' و DD' مربعی حاصل می‌شود که طول ضلعش $\frac{2}{5}AA'$ است.



۷۲۲. مربع ABCD داده شده است. ضلع BC را از طرف B و به اندازهٔ BF < BC امتداد داده و با ضلع BF مربع BFEM را چنان می‌سازیم که نقطهٔ M روی AB باشد. ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ AH = BF امتداد داده و روی ضلع CB نقطهٔ K را چنان انتخاب می‌کنیم که CK = BF باشد. ثابت کنید، EHDK مربع است.



۷۲۳. شکل حاصل از برخوردهای چهار زوج ثلث سازهای مجاور زاویه‌های یک مربع را بررسی کنید.

۷۲۴. شکل حاصل از برخوردهای چهار زوج چهارسازی (ربع سازها) مجاور زاویه‌های مربع را، در صورتی که ربع‌سازها اشعهٔ تقسیم کنندهٔ زاویهٔ مربع و داخلش به چهار زاویهٔ همنهشت و داخل هاشان تعریف شوند، بررسی کنید.

۱۵.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۲۵. دو مربع مساوی، در برخورد با یکدیگر، یک هشت ضلعی ساخته‌اند. ضلعهای یکی از مربعها سبز و ضلعهای مربع دیگر قرمز است. ثابت کنید، مجموع طول ضلعهای سبز هشت ضلعی با مجموع طول ضلعهای قرمز آن، برابر است.

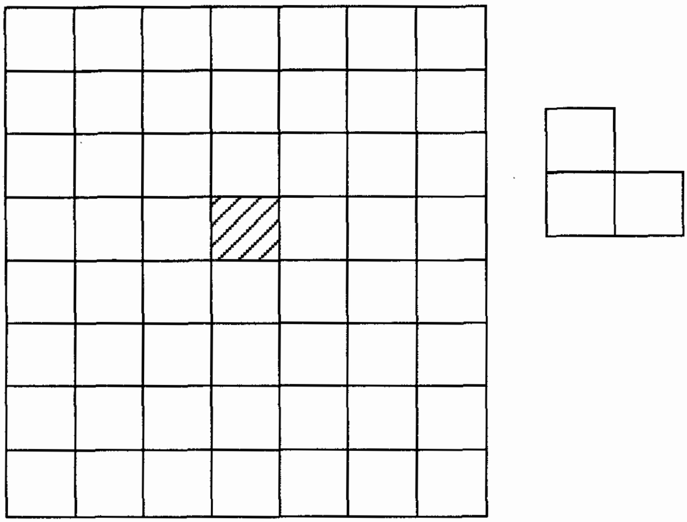
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۶

۷۲۶. چند مربع داریم که، مجموع مساحتهای آنها، برابر است با ۴. ثابت کنید، با این مربعها، همیشه می‌توان مربع به مساحت واحد را پوشاند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۹

۷۲۷. ترومینو (سه مربعیها). ۲۱ ترومینو (سه مربعی) به شکل L (مطابق تصویر) داریم. آیا شما می‌توانید ۶۳ خانهٔ سفید از یک جدول ۸×۸ خانه‌ای را با این سه مربعی‌ها بپوشانید؟ در صورتی که پاسخ مثبت است، چگونگی کار را در جدول نشان دهید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

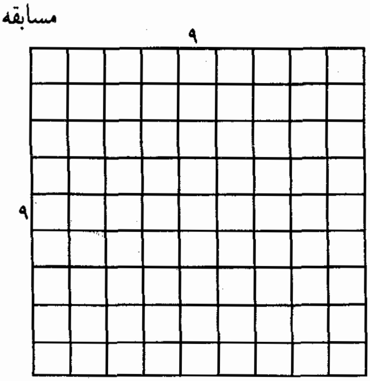


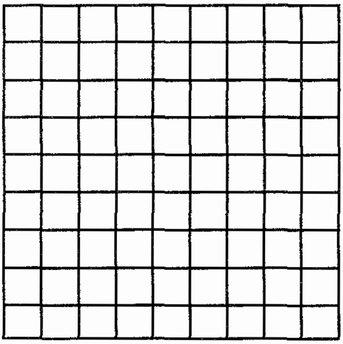
۷۲۸. ۱۰۰۰ مربع را روی صفحه رسم کرده‌ایم، به نحوی که، ضلعهای آنها، موازی با محورهای مختصات باشد، M را، مجموعهٔ مرکزهای این مربعها می‌گیریم، ثابت کنید، می‌توان بخشی از مجموعهٔ مربعها را، طوری جدا کرد که، هر نقطهٔ مجموعهٔ M، حداقل متعلق به یکی و حداکثر متعلق به چهار تا از مربعهای جدا شده باشد.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۷

۷۲۹. یک جدول ۹×۹ خانه‌ای داریم. می‌خواهیم برخی از خانه‌های آن را سیاه کنیم، به‌قسمی که هرگز سه خانهٔ مجاور، به طور افقی یا عمودی یا اریب (به هر طرف) سیاه نباشند. حداکثر چند خانه را می‌توان سیاه کرد. دست‌کم، دو نمونه رسم کنید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه





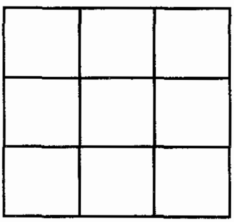
۷۳۰. چند خانه را سیاه کنیم؟
در این جا یک مربع ۹×۹ خانه‌ای مشاهده می‌شود. می‌خواهیم برخی از خانه‌های آن را سیاه کنیم، به‌طوری که هرگز چهارخانهٔ سیاه در یک امتداد به‌طور افقی، عمودی یا اریب نداشته باشیم. کدام خانه‌ها را سیاه کنیم که با مراعات شرایط بالا، شمار خانه‌های سیاه Max باشد؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۷۳۱. شمار مربعها در صفحهٔ شطرنج.
در یک صفحهٔ شطرنج (مربعی به ضلع ۸) شمار مربعهای ۱ خانه‌ای و ۴ خانه‌ای و ۹ خانه‌ای و ... کلاً چند است؟
به احتمال زیاد پاسخ معما خیلی بیشتر از حدس شما است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

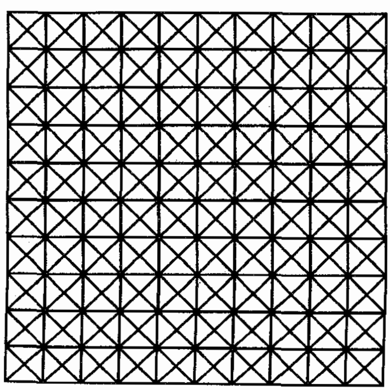
۷۳۲. چند مربع می‌توان شمرد؟
در این جدول ۳×۳ خانه‌ای ۲۴ مربع می‌توان شمرد. ۹ مربع یک خانه‌ای، ۴ مربع ۴خانه‌ای، یک مربع ۹خانه‌ای. در یک مربع ۸۵×۸۵ خانه‌ای، چند مربع می‌توان شمرد؟



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۷۳۳. صدها مربع در یک مربع. به شکل زیر نگاه کنید. در آن چند مربع می‌توان شمرد؟ منظور ما فقط مربعهای با ضلعهای افقی و عمودی نیست. بلکه مربعهایی با ضلعهای اریب نیز باید منظور شوند. همچنین مربعها می‌توانند یک خانه‌ای یا چندخانه‌ای باشند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۷۳۴. گزارهٔ راست «اگر یک چهار ضلعی مربع باشد، آن گاه مستطیل است» داده شده است. در مورد عکس و عکس عکس نقیض این گزاره، کدام حکم زیر درست است؟

الف) فقط عکس گزاره راست است.

ب) فقط عکس عکس نقیض این گزاره راست است.

ج) هر دو راست‌اند.

د) هیچ یک راست نیست.

هـ) عکس عکس نقیض راست است، اما عکس گزاره بعضی وقتها راست است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۹

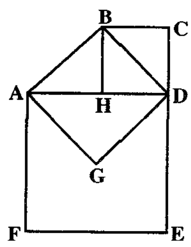
۷۳۵. در یک صفحهٔ شطرنجی $2n \times 2n$، تعدادی مستطیل $1 \times n$ چیده‌ایم (هر مستطیل دقیقاً n خانهٔ شطرنجی را پوشانده است و مستطیلها با هم تلاقی ندارند)، به‌طوری که دیگر نمی‌توان مستطیل $1 \times n$ قرار داد. حداکثر تعداد خانه‌هایی را که پوشانده نشده، پیدا کرده و آن را ثابت کنید.

اوّلین المپیاد ریاضی اکو، تهران، ۱۳۷۳

۷۳۶. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتیمتر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتیمتر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آن جا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.

۷۳۷. مکان هندسی نقطه‌ای درون یک مربع به ضلع ۴ سانتیمتر را بیابید که فاصله‌اش دست کم، از یک ضلع مربع یک سانتیمتر است.

۷۳۸. سه مربع مانند شکل یکدیگر را قطع کرده‌اند. مساحت مثلث ADG را در هر یک از حالتهای زیر به‌دست آورید.



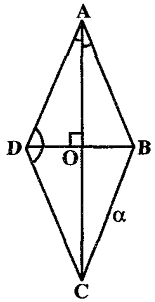
الف) $AF = 10$ ؛ ب) $CE = 18$ ؛

پ) $BD = 3\sqrt{2}$ ؛ ت) ۴۹ = مساحت مربع BCDH ؛

ث) ۲۷ = مساحت شکل AGDEF.

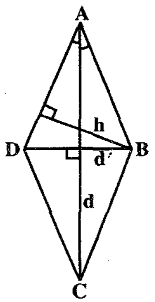
۴.۵. لوزی

۱.۴.۵. تعریف و قضیه



لوزی، چهار ضلعیی است که چهارضلع آن با هم برابرند. مانند لوزی ABCD که در آن $AB = BC = CD = DA$ است. به بیان دیگر می‌توان گفت، لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن متساوی‌اند. بنابراین لوزی تمام ویژگیهای متوازی‌الاضلاع را داراست.

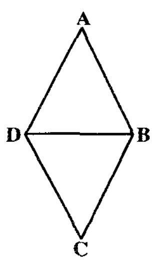
محیط لوزی به ضلع a برابر ۴a است.



اندازهٔ مساحت لوزی که اندازهٔ قطرهای آن d و d' است برابر با $\frac{1}{2}dd'$ است. اگر اندازهٔ ضلع لوزی برابر a و اندازهٔ ارتفاع لوزی h باشد، مساحت لوزی برابر a.h است. (شکل بالا)

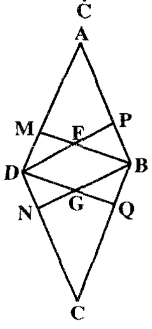
۷۳۹. قضیه. در لوزی قطرها بر هم عمودند و زاویه‌ها را نصف می‌کنند.

۲.۴.۵. زاویه



۱.۲.۴.۵. اندازهٔ زاویه

۷۴۰. اندازهٔ یکی از قطرهای یک لوزی با اندازهٔ یک ضلع آن برابر است. اندازهٔ زاویه‌های آن را حساب کنید.



۷۴۱. لوزی ABCD را در نظر می‌گیریم و از رأسهای B و D عمودهای BM و BN و DP و DQ را بر ضلعهای مقابل فرود می‌آوریم و نقطه‌های تقاطع این عمودها را F و G می‌نامیم. ثابت کنید که زاویه‌های چهار ضلعی BFDG با زاویه‌های لوزی نظیر به نظیر برابر می‌باشند.

۳.۴.۵. ضلع

۱.۳.۴.۵. اندازهٔ ضلع

۷۴۲. مساحت یک لوزی برابر با S و مجموع طول قطرهایش برابر با m است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید.

۷۴۳. ارتفاع یک لوزی برابر $۴\sqrt{۳}$ سانتیمتر و قطرهایش ۸ سانتیمتر و $۸\sqrt{۳}$ سانتیمترند. اندازهٔ ضلع این لوزی را پیدا کنید.

۴.۴.۵. قطر

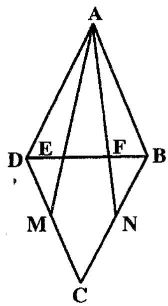
۱.۴.۴.۵. اندازهٔ قطر

۷۴۴. در یک لوزی، اندازهٔ یک قطر دو برابر اندازهٔ قطر دیگر است. اگر مساحت این لوزی ۳۶ باشد، اندازهٔ قطرهای لوزی را بیابید.

۵.۴.۵. پاره خط

۱.۵.۴.۵. اندازهٔ پاره خط

۷۴۵. ثابت کنید، اگر در یک لوزی از یک رأس به وسط دو ضلع مقابل به همان رأس وصل کنیم قطر مقابل به رأس را به سه قسمت متساوی تقسیم می کند.



۲.۵.۴.۵. رابطهٔ بین پاره خطها

۷۴۶. ثابت کنید، مجموع یا تفاضل طول عمودهای رسم شده از یک نقطهٔ معلوم بر دو ضلع مجاور یک لوزی، مساوی مجموع یا تفاضل عمودهای رسم شده از این نقطه بر دو ضلع دیگر لوزی است.

۶.۴.۵. محیط

۱.۶.۴.۵. اندازهٔ محیط

۷۴۷. اندازهٔ قطر کوچک یک لوزی که زاویهٔ حادهٔ آن ۶۰° است، برابر ۹ سانتیمتر است. اندازهٔ محیط این لوزی را بیابید.

۷.۴.۵. مساحت

۱.۷.۴.۵. اندازهٔ مساحت

۷۴۸. مساحت یک لوزی را بیابید در صورتی که :

الف. اندازهٔ دو قطر آن ۸cm و ۱۲cm باشد.

ب. زاویهٔ حادهٔ لوزی ۶۰ درجه و اندازهٔ هر ضلع آن ۱۸cm باشد.

۸.۴.۵. همنهشتی لوزیها

۷۴۹. لوزی به ضلع ۶ سانتیمتر و زاویهٔ حادهٔ ۸۰ درجه با کدام لوزی همنهشت است؟

۱) لوزی به ضلع ۶cm و زاویهٔ حادهٔ ۱۰ درجه

۲) لوزی به ضلع ۱۲cm و زاویهٔ حادهٔ ۴۰ درجه

۳) لوزی به ضلع ۶cm و زاویهٔ منفرجهٔ ۱۰۰ درجه

۴) لوزی به ضلع ۱۲cm و زاویهٔ منفرجهٔ ۱۰۰ درجه

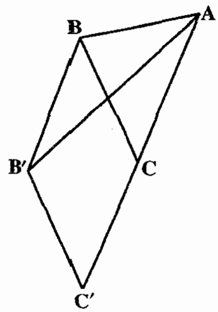
۹.۴.۵. نقطه‌های ویژه

۷۵۰. اگر یک لوزی در لوزی دیگری محاط باشد، مرکزهای این دو لوزی بر هم منطبقند.

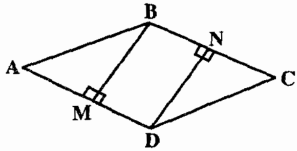
۱۰.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز،...

۱.۱۰.۴.۵. خط، نیمساز است

۷۵۱. روی ضلع CC' از لوزی $CBB'C'$ نقطهٔ A را چنان اختیار می‌کنیم که $AB = BC$ باشد. ثابت کنید که AB' یک نیمساز زاویهٔ BAC است.

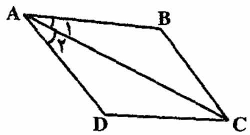


۱۱.۴.۵. شکلهای ایجاد شده



۷۵۲. در لوزی ABCD خط BM را عمود بر AD و خط DN را عمود بر BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید، شکل BMDN مستطیل است.

۱۲.۴.۵. ثابت کنید چهارضلعی لوزی است



۷۵۳. متوازی‌الاضلاعی که یک قطر آن نیمساز زاویهٔ آن متوازی‌الاضلاع باشد، لوزی است.

۱۳.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۴. ثابت کنید:

۱. نقطهٔ برخورد قطرهای یک لوزی از ضلعهای آن به یک فاصله است.

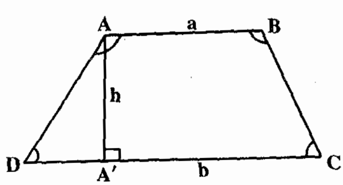
۲. قطرهای لوزی نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده بین این قطرها و عمودهای رسم شده از مرکز لوزی بر ضلعهای آن می‌باشند.

۳. چهار ضلعی حاصل از تصویر مرکز لوزی روی ضلعهای آن، مستطیل است.

۵.۵. ذوزنقه

۱.۵.۵. ذوزنقه درهر حالت

۱.۱.۵.۵. تعریف و قضیه



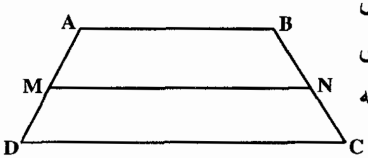
ذوزنقه. چهارضلعیی است که تنها دو ضلع آن با هم موازی باشند. دو ضلع موازی را قاعده‌ها و دو ضلع دیگر را ساقهای ذوزنقه می‌نامند. فاصلهٔ بین دو قاعده، ارتفاع ذوزنقه است. در ذوزنقهٔ ABCD، AB و CD قاعده‌ها، BC و AD ساقها و AA' ارتفاع است.

اگر a و b اندازه‌های دو قاعده و h اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه باشد، مساحت آن برابر $\frac{1}{2}(a+b)h$ است.

در هر ذوزنقه زاویه‌های مجاور به هر ساق، مکمل یکدیگرند. به عنوان مثال در ذوزنقهٔ بالا، $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$ و $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ است.

۷۵۵. قضیه. پاره خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می کند، موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنها است.

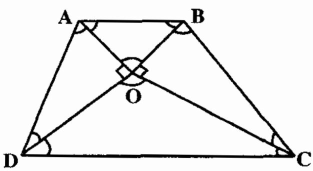
قضیهٔ عکس. خطی که از وسط یک ساق ذوزنقه موازی دو قاعده رسم شود، از وسط ساق دیگر می گذرد و جزیی از آن که در داخل ذوزنقه می افتد، نصف مجموع دو قاعده است.



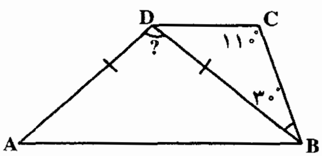
۲.۱.۵.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵.۵. اندازهٔ زاویه

۷۵۶. ثابت کنید، اگر نیمسازهای زاویه‌های داخلی ذوزنقهٔ ABCD در نقطهٔ O همرس باشند، حول این نقطه دو زاویهٔ قائمه و دو زاویهٔ نامساوی مکمل تشکیل می‌شود.



۷۵۷. در ذوزنقهٔ ABCD، ضلعهای AB و CD با هم موازی‌اند، قطر BD و ضلع AD طولهای برابر دارند. اگر $D\hat{C}B=110^\circ$ ، $C\hat{B}D=30^\circ$ ، آن‌گاه $A\hat{D}B$ برابر است با :

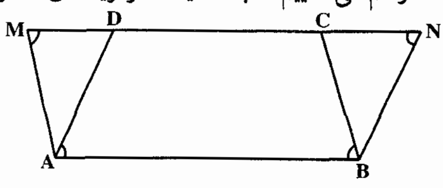


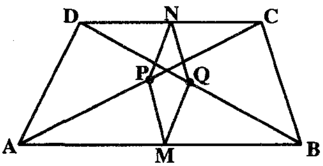
الف) 80° ب) 90° ج) 100° د) 110° هـ) 120°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۲.۲.۱.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۵۸. از دو انتهای قاعدهٔ بزرگتر AB از ذوزنقهٔ ABCD، خط AM را موازی با BC و خط BN را موازی با AD رسم می‌نماییم. ثابت کنید که زاویه‌های M و N با زاویه‌های A و B ذوزنقه برابرند.



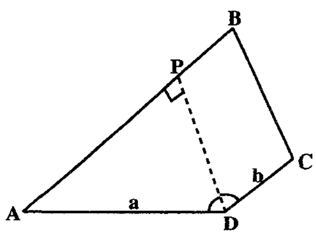


۷۵۹. ذوزنقهٔ ABCD را در نظر گرفته، وسطهای دو قاعدهٔ AB و CD را بترتیب M و N و وسطهای دو قطر AC و BD را بترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید، زاویه‌های M و N از چهارضلعی MPNQ مساوی با زاویهٔ بین دو ساق ذوزنقه هستند.

۳.۱.۵.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵.۵. اندازهٔ ضلع

۷۶۰. مطابق شکل، پاره خطهای AB و CD موازی‌اند. اندازهٔ زاویهٔ D دو برابر زاویهٔ B و اندازه‌های AD و CD، بترتیب، a و b است. اندازهٔ AB برابر است با :



الف) $\frac{1}{2}a+2b$ ب) $\frac{3}{2}a+\frac{3}{4}a$

ج) $2a-b$ د) $4b-\frac{1}{2}a$

هـ) $a+b$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۷۶۱. مساحت یک مزرعهٔ ذوزنقه‌ای شکل، ۱۴۰۰ متر مربع و ارتفاع آن ۵۰ متر است. اندازهٔ هر قاعده برحسب متر، عددی صحیح و تقسیم پذیر بر ۸ است. اگر مقصود پیدا کردن اندازه‌های دو قاعده باشد، تعداد جوابهای مسأله برابر است با :

الف) هیچ ب) یک

ج) دو د) سه

هـ) بیشتر از سه

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲.۳.۱.۵.۵. رابطهٔ بین ضلعها

۷۶۲. روی قاعدهٔ AD در ذوزنقهٔ ABCD، نقطهٔ E طوری انتخاب شده است که مثلثهای ABE، BCE و CDE، محیطهایی برابر پیدا کرده‌اند.

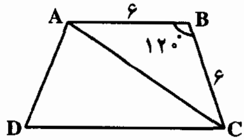
ثابت کنید : $BC=\frac{1}{2}AD$.

سومین المپیاد ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۹

۴.۱.۵.۵. قطر

۱.۴.۱.۵.۵. اندازهٔ قطر

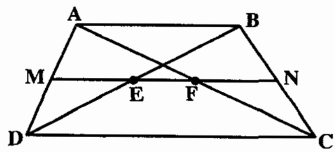
۷۶۳. در ذوزنقهٔ ABCD، $(AB \parallel CD)$، $\hat{ABC}=۱۲۰^\circ$ و $AB = BC = ۶cm$ است. اندازهٔ قطر AC را بیابید.



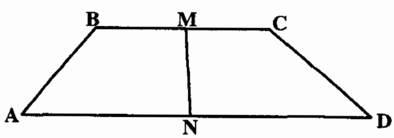
۵.۱.۵.۵. پاره خط

۱.۵.۱.۵.۵. اندازهٔ پاره خط

۷۶۴. ثابت کنید، دو قطر ذوزنقه بر خطی که از وسط یک ساق موازی دو قاعده رسم شود، پاره‌خطی جدا می‌کنند که اندازهٔ آن مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.



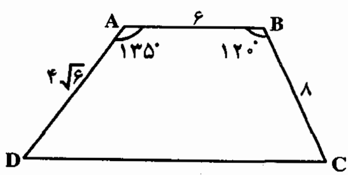
۷۶۵. مجموع زاویه‌های درونی مجاور به قاعدهٔ AD از ذوزنقه‌ای ۹۰° است. ثابت کنید، خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، مساوی نصف تفاضل دو قاعده است.



۶.۱.۵.۵. محیط

۱.۶.۱.۵.۵. اندازهٔ محیط

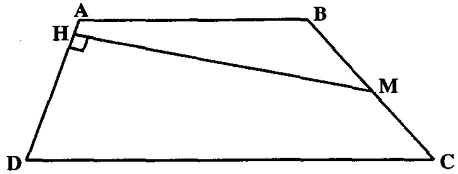
۷۶۶. در ذوزنقهٔ ABCD، $(AB \parallel CD)$، $AB = ۶$، $BC = ۸$، $AD = ۴\sqrt{۶}$، $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$ و $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$ است. اندازهٔ محیط این ذوزنقه را تعیین کنید.



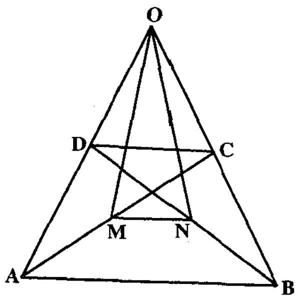
۷.۱.۵.۵. مساحت

۵.۵.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه

۷۶۷. ثابت کنید که مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصلضرب یک ساق در فاصلهٔ آن ساق از وسط ساق دیگر.



۷۶۸. ثابت کنید که مساحت هر ذوزنقه مساوی است با چهار برابر مساحت مثلثی که دو رأس آن وسطهای دو قطر و رأس سوم آن نقطهٔ تقاطع دو ساق باشد.



۷۶۹. مصریها، برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، حاصلضرب نصف مجموع دو قاعدهٔ آن را، در یکی از ساق‌ها به‌دست می‌آوردند. اگر از این راه، مساحت ذوزنقه‌ای را به‌دست آوریم که قاعدهٔ پایین آن برابر ۶، قاعدهٔ بالای آن برابر ۴ و یکی از ساقهای آن برابر ۲۰ باشد، درصد اشتباه را پیدا کنید.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، مصری

۷۷۰. مساحت ذوزنقه‌ای k واحد مربع است و قاعدهٔ کوچک، ارتفاع، و قاعدهٔ بزرگ آن، به همین ترتیب، یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. بنابراین :

الف) k باید یک عدد صحیح باشد.

ب) k باید یک کسر گویا باشد.

ج) k باید یک عدد گنگ باشد.

د) k باید یک عدد صحیح یا یک کسر گویا باشد.

هـ) هیچ‌یک از پاسخهای (الف)، (ب)، (ج) و (د)، به تنهایی درست نیست.

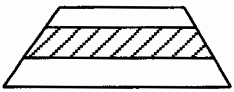
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۷۷۱. دو قاعدهٔ ذوزنقه‌ای ۱۲ سانتیمتر و ۴۸ سانتیمتر و ارتفاع آن واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ آن است. اندازهٔ مساحت این ذوزنقه چند سانتیمتر مربع است؟

۷۷۲. یک دهقان، مزرعه‌ای به شکل مستطیل داشت که طول و عرض آن برحسب متر، عدد صحیح است و طول مستطیل ۱۰۰ متر از عرض آن بیشتر است. پسرعموی او مزرعه‌ای به شکل ذوزنقه دارد که طول قاعدهٔ بزرگ و ارتفاع آن مساوی یکدیگرند. و درازای هر کدام سه برابر عرض مستطیل است. طول قاعدهٔ کوچک ذوزنقه نیز بر حسب متر، عدد صحیح و فرد است و اندازه‌های آن، دقیقاً بیشتر از ۱۳ متر است. به فرض این که مساحت هر دو مزرعه مساوی هم باشند، مساحت هر یک را بیابید. درصورتی که مساحت آنها نیز، بر حسب متر مربع، عدد فرد باشد.

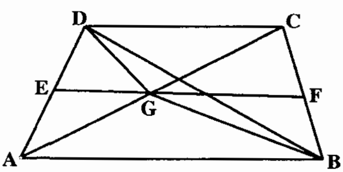
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۲.۷.۱.۵.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

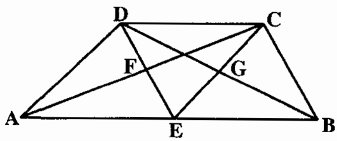


۷۷۳. دو خط راست موازی با قاعده‌های یک ذوزنقه، هر ضلع جانبی آن را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. این خطها، ذوزنقهٔ اصلی را به سه بخش تقسیم می‌کنند. اگر مساحت بخشهای بالایی و پایینی، بترتیب، S_1 و S_2 باشد، مساحت بخش میانی را پیدا کنید.

۳.۷.۱.۵.۵. رابطه‌ای در مساحتها

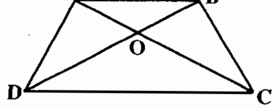


۷۷۴. ذوزنقهٔ ABCD داده شده است. خط EF واصل مابین وسطهای دو ساق ذوزنقه را رسم می‌کنیم تا قطر AC را در G قطع کند. ثابت کنید که تفاضل مساحت ذوزنقه‌های ABFE و EFCD مساوی با مساحت مثلث BDG است.

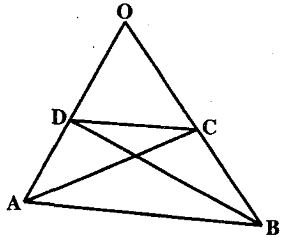


۷۷۵. □ABCD ذوزنقه است؛ DC∥AB. E وسط AB، F وسط DE، و G وسط CE است. ثابت کنید $a\Delta AFD = a\Delta BGC$. (area یعنی مساحت به a نمایش داده شده است.)

۷۷۶. خطی که وسطهای دو قاعدهٔ ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، آن را به دو چهارضلعی هم‌ارز تقسیم می‌کند.



۷۷۷. مثلثهایی که رأس آنها نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای ذوزنقه و قاعدهٔ آنها، ساقهای ذوزنقه است، معادل یکدیگرند.



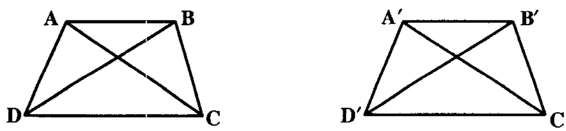
۷۷۸. ساقهای AD و BC از ذوزنقهٔ ABCD در نقطهٔ O متقاطع می‌باشند. ثابت کنید که دو مثلث OAC و OBD معادل یکدیگرند.

۷۷۹. دو خط موازی که قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه‌ای را قطع می‌کنند، از دو انتهای قاعدهٔ کوچکتر آن رسم شده‌اند. این خطها و قطرهای ذوزنقه، آن را به هفت مثلث و یک پنج ضلعی تقسیم می‌کنند. ثابت کنید که مجموع مساحتهای مثلثهای مجاور به ضلعهای جانبی و قاعدهٔ کوچکتر، برابر با مساحت پنج ضلعی است.

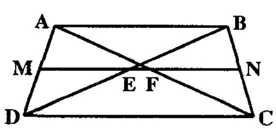
۸.۱.۵.۵. همنهشتی ذوزنقه‌ها

۷۸۰. دو ذوزنقه که ضلعهایشان نظیر به نظیر متساوی باشند با یکدیگر برابرند (همنهشتند).

۷۸۱. دو ذوزنقه که دارای قاعده‌ها و قطرهای نظیر به نظیر متساوی باشند، همنهشتند.

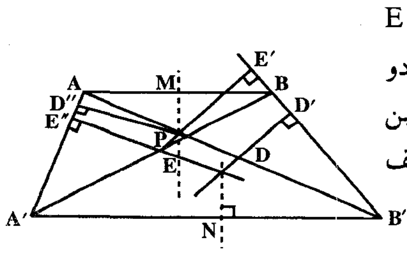


۹.۱.۵.۵. نقطه‌های همخط



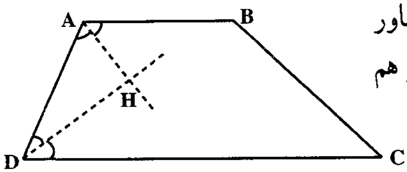
۷۸۲. ذوزنقهٔ ABCD داده شده است. ثابت کنید وسطهای دو ساق و وسطهای دو قطر، چهار نقطهٔ واقع بر یک استقامت می‌باشند.

۱۰.۱.۵.۵. خطهای همرس



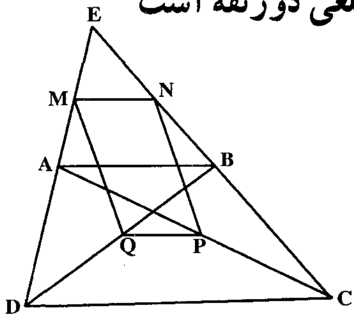
۷۸۳. در ذوزنقهٔ ′ABB′A اگر از نقطه‌های D و E وسطهای دو قطر ′AB و A′B عمودهایی بر دو ساق′AA و ′BB فرود آوریم، ثابت کنید این عمودها دو به دو یکدیگر را روی عمودمنصف دو قاعده قطع می‌کنند.

۱۱.۱.۵.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

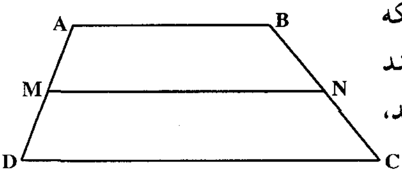


۷۸۴. ثابت کنید که نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور به یکی از دو ضلع غیرمتوازی یک ذوزنقه بر هم عمودند.

۱۲.۱.۵.۵. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است



۷۸۵. ساقهای ذوزنقهٔ ABCD را امتداد می‌دهیم، تا یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کنند و وسطهای پاره‌خطهای AE و BE را بترتیب M و N و وسطهای قطرهای AC و BD را نیز بترتیب P و Q می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی MNPQ ذوزنقه است.



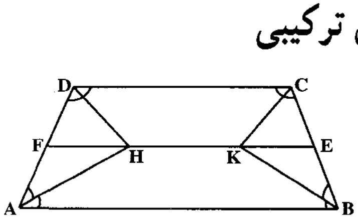
۷۸۶. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدّب خطی که وسطهای دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کند اگر مساوی نصف مجموع دو ضلع دیگر باشد، آن چهارضلعی، ذوزنقه است.

۱۳.۱.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۸۷. نقطهٔ K روی قاعدهٔ ذوزنقهٔ ABCD داده شده است. نقطهٔ M را روی قاعدهٔ دیگر CD در کجا انتخاب کنیم تا مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلثهای AMB و CKD به‌دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

المپیادهای ریاضی شوروی سابق

۱۴.۱.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

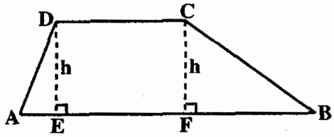


۷۸۸. ذوزنقهٔ ABCD با قاعده‌های AB و CD داده شده است. اگر E و F بترتیب وسطهای ساقهای BC و DA و نقطهٔ H محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های درونی A و D و نقطهٔ K محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی B و C باشند، ثابت کنید که:

۱. HK موازی قاعده‌های ذوزنقه است.

۲. $FH = \frac{AD}{۲}$ و $EK = \frac{BC}{۲}$.

۳. برای آن که چهار نیمساز، زاویه‌های یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند، کافی است که مجموع طولهای قاعده‌ها، مساوی مجموع طول ساقها باشد.



۷۸۹. ABCD□ذوزنقه، و AB و CD دو ضلع متوازی آن هستند.

الف. اگر AB=۱۸ ، DC=۱۲ و h=۹ ؛ آن‌گاه a □ ABCD چه قدر است؟

ب. اگر a □ ABCD = ۸۴، AB=۱۷ ، و CD=۱۱ ؛ آن‌گاه h = ? .

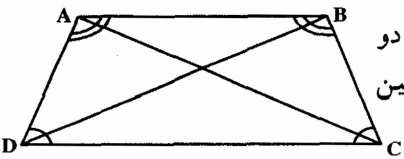
پ. اگر a □ ABCD = ۳۷۵، h=۱۵ ، و AB = ۳۸ ؛ آن‌گاه CD = ? .

ت. اگر AB=۱۵ ، DC=۸ ، BC=۱۰ ، و $m\angle B = 30°$ ؛ آن‌گاه a□ ABCD چه قدر است؟

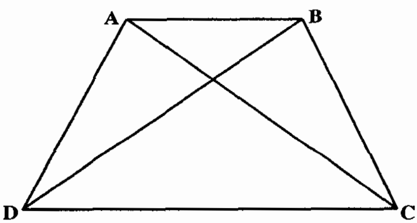
ث. اگر AB=۱۳ ، h=۵ ، و a □ ABCD=۶۵ ؛ آن‌گاه CD = ? .

۲.۵.۵. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۱.۲.۵.۵. تعریف و قضیه



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ذوزنقه‌ای است که دو ساق آن با هم برابرند، مانند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که در آن AD = BC است.

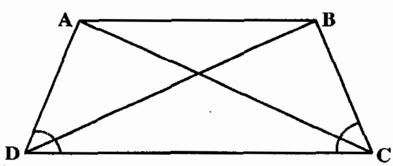


۷۹۰. **قضیه**. در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین :

۱. دو زاویهٔ مجاور به هر قاعده، متساویند.

۲. دو قطر، متساویند.

۷۹۱. **قضیه‌های عکس:**

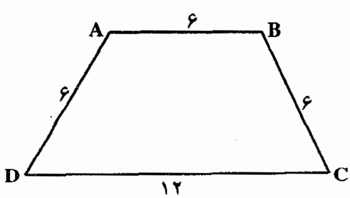


۱. هر ذوزنقه که دو زاویهٔ مجاور به یک قاعدهٔ آن برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۲. هر ذوزنقه که دو قطر آن مساوی باشند، متساوی‌الساقین است.

۲.۲.۵.۵. زاویه

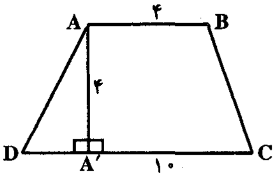
۱.۲.۲.۵.۵. اندازهٔ زاویه



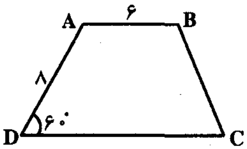
۷۹۲. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، (AB‖CD) اندازه‌های دو قاعده ۶ و ۱۲ سانتیمتر و اندازهٔ هر ساق ۶ سانتیمتر است. اندازهٔ زاویه‌های این ذوزنقه را تعیین کنید.

۵.۵.۲.۳. ضلع

۵.۵.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع

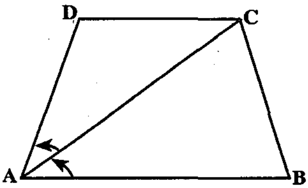


۷۹۳. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD(AB\|CD)$ اندازه‌های دو قاعده ۴cm و ۱۰cm و اندازهٔ ارتفاع ذوزنقه ۴ سانتیمتر است. اندازهٔ ساق ذوزنقه را بیابید.



۷۹۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD(AB\|CD)$ قاعدهٔ AB برابر ۶ سانتیمتر، ساق AD برابر ۸ سانتیمتر و $A\hat{D}C = ۶۰°$ است. اندازهٔ قاعدهٔ CD را بیابید.

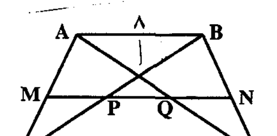
۵.۵.۲.۴. قطر



۷۹۵. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD(AD = BC)$ ساق AD با قاعدهٔ CD مساوی است. ثابت کنید قطر AC زاویهٔ $\hat{A}$ را نصف می‌کند.

۵.۵.۲.۵. پاره خط

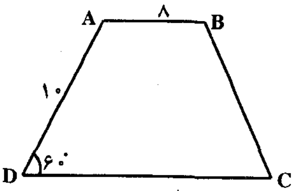
۵.۵.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره خط



۷۹۶. دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، $AB = ۸cm$ و $CD = ۱۲cm$ می‌باشند. طول پاره‌خطهایی که وسطهای دو ساق و دو قطر این ذوزنقه را به هم وصل می‌کنند، تعیین کنید.

۵.۵.۲.۶. محیط

۵.۵.۲.۶.۱. اندازهٔ محیط

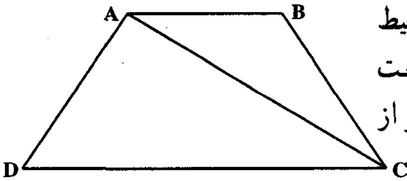


۷۹۷. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD(AB\|CD)$، $\hat{D} = ۶۰°$، $AD = ۱۰cm$ و $AB = ۸cm$ است. اندازهٔ محیط ذوزنقه را بیابید.

۵.۵.۲.۷. مساحت

۵.۵.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۷۹۸. دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی ۴ و ۱۰ سانتیمتر و هر ساق آن ۵ سانتیمتر می‌باشد، محیط و مساحت آن را تعیین کنید. همچنین مساحت هر یک از دو مثلثی را که به وسیلهٔ یک قطر از ذوزنقه به‌وجود می‌آید، تعیین کنید.

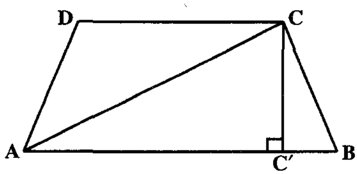


۷۹۹. در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین هریک از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به طول ثابت L هستند. مساحت این ذوزنقه آن‌گاه ماکسیمم است که اندازهٔ زاویهٔ بین قاعدهٔ بزرگ و یک ساق برحسب رادیان برابر باشد با:

الف) $\frac{\pi}{۳}$ ب) $\frac{\pi}{۴}$ ج) $\frac{\pi}{۵}$ د) $\frac{\pi}{۶}$

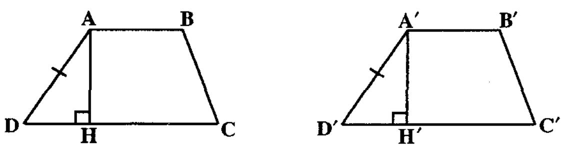
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۸۰۰. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD و ارتفاع CC' آن داده شده است. ثابت کنید که مساحت ذوزنقه دو برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ACC' است.



۵.۵.۲.۸. همنهشتی ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین

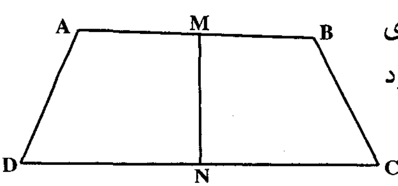
۸۰۱. ارتفاعهای دو ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین برابرند و ساقهای این دو ذوزنقه نیز برابر می‌باشند. آیا این دو ذوزنقه همنهشتند؟



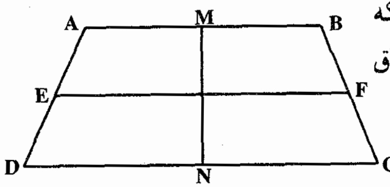
۵.۵.۲.۹. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵.۵.۲.۹.۱. خطها برهم عمودند

۸۰۲. در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند بر قاعده‌ها عمود است.

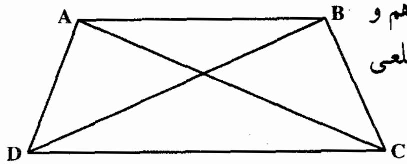


۸۰۳. در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خطهایی که وسطهای دو قاعده را به هم و وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کنند، بر هم عمودند.



۵.۵.۲.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است

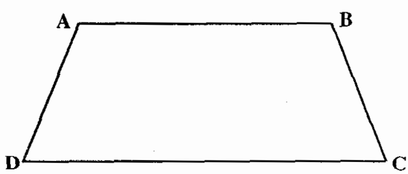
۸۰۴. اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع متقابل با هم و دو قطر نیز با هم مساوی باشند، آن چهار ضلعی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.



۸۰۵. ثابت کنید یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است اگر و تنها اگر، زاویه‌های مقابلش مکمل باشند.

۵.۵.۲.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۰۶. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی اندازه‌های دو قاعده ۱۶ و ۱۰ و اندازهٔ هر ساق آن برابر ۵ می‌باشد. ضلع مربع معادل آن را بیابید.

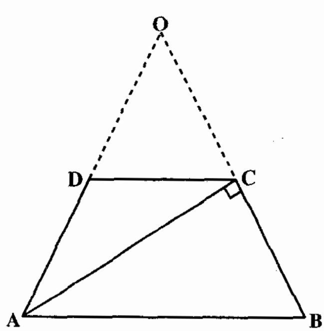


۵.۵.۲.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۸۰۷. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD$(AD = BC)$، قطر AC بر ساق BC عمود بوده و طول ساق BC نصف قاعدهٔ AB می‌باشد.

۱. زاویه‌های ذوزنقه را حساب کنید و ثابت کنید که $CD = \frac{AB}{۲}$.

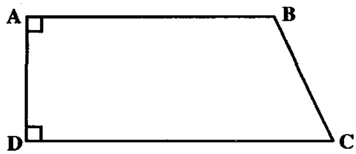
۲. ساقها را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. ثابت کنید که $OC = BC$ است.



۳.۵.۵. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۱.۳.۵.۵. تعریف و قضیه

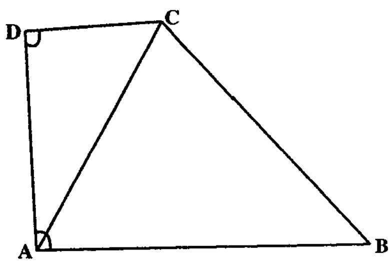
ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، ذوزنقه‌ای است که تنها یک ساق آن بر قاعده‌ها عمود است، مانند ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD که در آن $(AB \parallel CD)$ و $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ است.



۲.۳.۵.۵. زاویه

۱.۲.۳.۵.۵. اندازهٔ زاویه

۸۰۸. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD(\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ)$ قاعدهٔ بزرگ AB با ساق BC برابر بوده و دو برابر قاعدهٔ کوچک می‌باشد. ثابت کنید که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و اندازهٔ زاویه‌های ذوزنقه را حساب کنید.



۳.۳.۵.۵. پاره خط

۸۰۹. خطهای HK و BC در یک صفحه واقعند. M وسط پاره خط BC است و BH و CK بر HK عمودند. در این صورت :

الف) همواره $MH = MK$

ب) همواره $MH > BK$

ج) گاهی $MH = MK$

د) همواره $MH > MB$

هـ) همواره $BH < BC$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانهای امریکا، ۱۹۷۰

بخش ۶

• چهارضلعیهای دیگر

۱.۶. تعریف و قضیه

۲.۶. زاویه

۱.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۲.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۳.۶. ضلع

۱.۳.۶. اندازهٔ ضلع

۲.۳.۶. رابطهٔ بین ضلعها

۴.۶. قطر

۵.۶. پاره خط

۱.۵.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۲.۱.۵.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶.۶. محیط

۱.۶.۶. اندازهٔ محیط

۷.۶. مساحت

۱.۷.۶. اندازهٔ مساحت چهارضلعی

۱.۱.۷.۶. اندازهٔ مساحت چهارضلعی (برابریها)

۲.۱.۷.۶. اندازهٔ مساحت چهارضلعی (نابرابریها)

۲.۷.۶. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

بخش ۶. چهارضلعیهای دیگر

۱.۶. تعریف و قضیه

چهارضلعیهایی غیر از چهارضلعیهای ویژه (متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی و ذوزنقه) را چهارضلعیهای دیگر می‌نامیم که این چهارضلعیها مقعر نیز می‌توانند باشند.

۲.۶. زاویه

۱.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۸۱۰. در یک چهارضلعی محدب، زاویه‌ها به نسبت اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ هستند. زاویه‌های این چهارضلعی را حساب کنید.

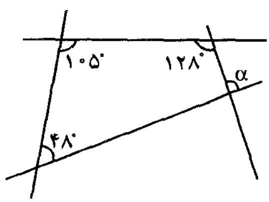
۸۱۱. در چهارضلعی محدب abcd، زاویهٔ b به اندازهٔ °۹۲، زاویهٔ c به اندازهٔ °۸۱، و زاویهٔ d به اندازهٔ °۱۱۳ است. اندازهٔ زاویهٔ a چند درجه است؟

الف) °۷۱ ب) °۷۲

ج) °۷۳ د) °۷۴

هـ) °۷۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



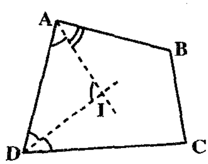
۸۱۲. در شکل روبه‌رو، اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟

الف) °۷۹ ب) °۸۱

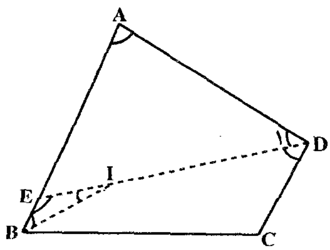
ج) °۱۰۰ د) °۱۰۱

هـ) °۱۰۹

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

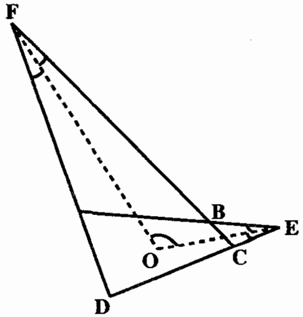


۸۱۳. زاویهٔ حادث بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور هر چهارضلعی محدب مساوی است با نصف مجموع دو زاویهٔ دیگر.



۸۱۴. در هر چهارضلعی محدب، زاویهٔ حادهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مقابل، مساوی نصف تفاضل دو زاویهٔ دیگر است.

۸۱۵. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های حادث از تقاطع امتداد ضلعهای مقابل هر چهارضلعی محدب، مساوی با نصف مجموع دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی است.



۸۱۶. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب که زاویه‌هایش برابر نیستند، لااقل یک زاویهٔ حاده و حداقل یک زاویهٔ منفرجه وجود دارد.

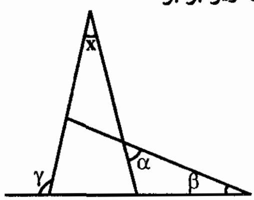
۸۱۷. ثابت کنید که یک چهارضلعی محدب بیش از سه زاویهٔ حاده نمی‌تواند داشته باشد.

۸۱۸. با توجه به شکل روبه‌رو، زاویهٔ x با کدام یک از مقدارهای زیر برابر است؟

الف) $\gamma-\alpha-\beta$ ب) $\alpha-\gamma-\beta$

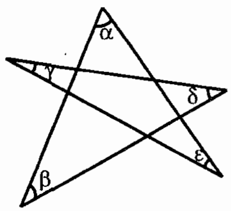
ج) $\alpha+\beta-\gamma$ د) $\beta+\gamma-\alpha$

هـ) $\gamma-\beta$



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۸۱۹. مجموع زاویه‌های رأسهای یک پنج ضلعی ستاره‌ای (یعنی $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$) چند درجه است؟



الف) 180° ب) 240° ج) 270° د) 360° هـ) 540°

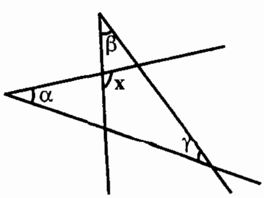
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۸۲۰. در شکل زیر، به ازای هر اندازه‌ای از زاویه‌های α و β و γ، اندازهٔ زاویهٔ x برابر است با:

الف) $\alpha+\beta$ ب) $\alpha-\beta-\gamma$

ج) $\pi-\alpha-\beta$ د) $2\pi-\alpha-\beta-\gamma$

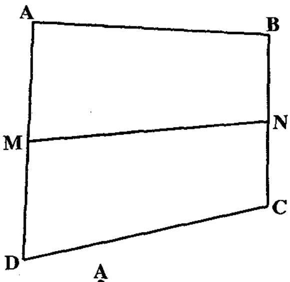
هـ) $\alpha+\beta+\gamma$



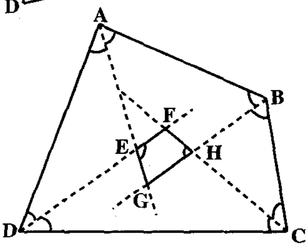
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۶.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

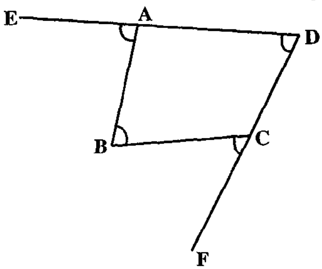
۶.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)



۸۲۱. در چهارضلعی ABCD ضلعهای مقابل AB و CD برابرند. ثابت کنید خط MN که وسطهای دو ضلع دیگر را به هم وصل می‌کند، با AB و CD زاویه‌های متساوی می‌سازد.



۸۲۲. نیمسازهای زاویه‌های داخلی یا خارجی هر چهارضلعی محدب از تقاطع با یکدیگر چهارضلعی دیگری می‌سازند که زاویه‌های مقابلش مکمل یکدیگرند.



۸۲۳. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محدب، مجموع هر دو زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ غیر مجاورشان. یعنی در شکل داریم:

$$E\hat{A}B + B\hat{C}F = \hat{B} + \hat{D}$$

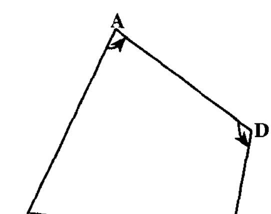
۸۲۴. در چهارضلعی کوژ ABCD، امتداد ضلع AD از طرف نقطهٔ D و امتداد ضلع BC از طرف نقطهٔ C، یکدیگر را در نقطهٔ E قطع می‌کنند. مجموع دو زاویهٔ CDE و DCE برحسب درجه S، و مجموع دو زاویهٔ BAD و ABC بر حسب درجه S′ است. اگر $r = S/S'$، آن‌گاه،

الف) گاهی $r = 1$، گاهی $r > 1$ ب) گاهی $r = 1$، گاهی $r < 1$ ج) $0 < r < 1$

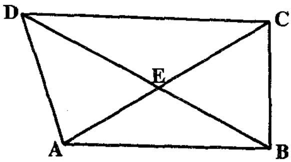
د) $r > 1$ هـ) $r = 1$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

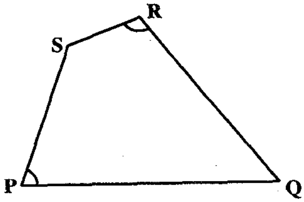
۶.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)



۸۲۵. در چهارضلعی محدب ABCD، ضلعها غیرمتساویند، AB بزرگترین و CD کوچکترین آنها است. ثابت کنید که $\hat{C} > \hat{A}$ و $\hat{D} > \hat{B}$ است.



۸۲۶. در $ABCD$□ داریم $AD = BC$ ، $DE > AE$ ، و $BE > EC$. ثابت کنید $D\hat{A}B > A\hat{B}C$.

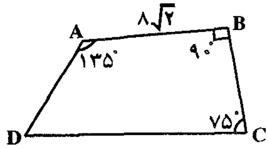


۸۲۷. در شکل، PQ بزرگترین و SR کوچکترین ضلع $PQRS$ است. ثابت کنید $\hat{R} > \hat{P}$.

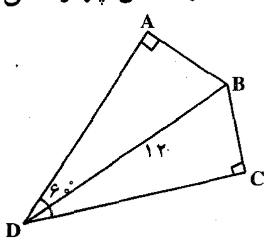
۳.۶. ضلع

۱.۳.۶. اندازهٔ ضلع

۸۲۸. در چهارضلعی $ABCD$، $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$ ، $\hat{B} = ۹۰^\circ$ ، $\hat{C} = ۷۵^\circ$ و $AB = BC = ۸\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ ضلعهای CD و AD را تعیین کنید.

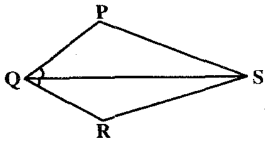


۸۲۹. در چهارضلعی $ABCD$، $\hat{A} = \hat{C} = ۹۰^\circ$ ، $\hat{D} = ۶۰^\circ$ و BD نیمساز زاویهٔ D است. اگر $BD = ۱۲cm$ باشد، اندازهٔ ضلعهای این چهارضلعی را بیابید.

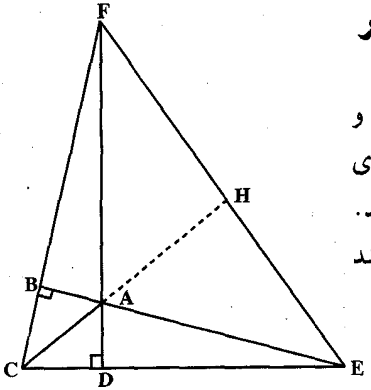


۲.۳.۶. رابطهٔ بین ضلعها

۸۳۰. در چهارضلعی $PQRS$، $PQ = QR$ و قطر QS، زاویهٔ Q را نصف می کند. ثابت کنید $PS = RS$.



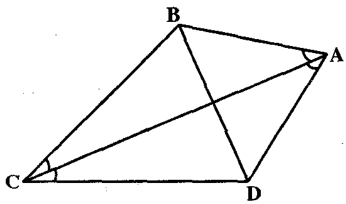
۴.۶. قطر



۸۳۱. در چهارضلعی ABCD امتداد ضلعهای AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ E و امتداد ضلعهای AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ F قطع می‌نمایند. ثابت کنید که اگر دو زاویهٔ B و D قائمه باشند قطر AC بر FE عمود است.

۸۳۲. اگر یکی از قطرهای چهارگوشه‌ای آن را به دو مثلث معادل (= با مساحتهای برابر) تقسیم کند، این قطر منصف قطر دیگر است.

برعکس؛ هرگاه قطری از یک چهارگوشه منصف قطر دیگر باشد، آن قطر چهارگوشه را به دو مثلث معادل تقسیم می‌کند.

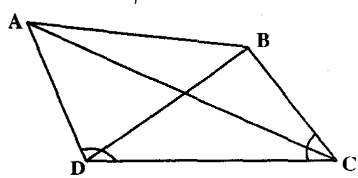


۸۳۳. ثابت کنید اگر در چهارضلعی ABCD، $AB = AD$ و $CB = CD$ باشد، قطر AC عمودمنصف قطر BD و نیمساز دو زاویهٔ A و C خواهد بود.

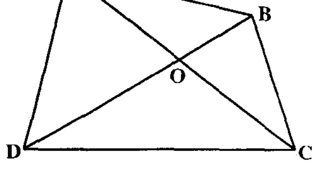
۸۳۴. ثابت کنید، اگر برای نقطهٔ O، واقع در درون چهارضلعی ABCD، مساحت مثلثهای ABO، BCO، CDO و DAO، با هم برابر باشند، آن‌گاه این نقطه، دست کم روی یکی از قطرهای AC و BD قرار دارد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۸۱ و سوئد، ۱۹۸۲

۸۳۵. اگر در چهارضلعی ABCD داشته باشیم، $AD = BC$ و $\hat{D} > \hat{C}$، ثابت کنید که $AC > BD$ است.



۸۳۶. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محدب، مجموع دو قطر از محیط چهارضلعی کوچکتر ولی از نصف محیط چهارضلعی بزرگتر است.



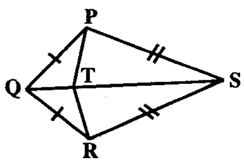
۸۳۷. نقطه‌های P، Q، R و S بترتیب وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی ABCD را به‌طور متوالی به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید که محیط چهارضلعی PQRS مساوی مجموع اندازه‌های دو قطر چهارضلعی ABCD است.

۵.۶. پاره‌خط

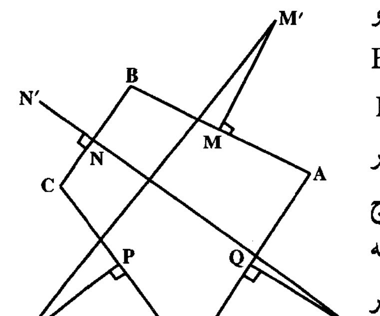
۶ . ۵ . ۱ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۵.۱.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۸۳۸. در یک چهارضلعی که قطرهایش برهم عمودند، دو خطی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کند، برابرند.



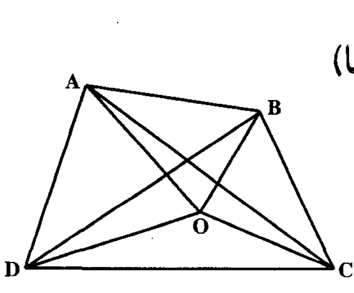
۸۳۹. در چهارضلعی PQRS، $PQ = RQ$ و $PS = RS$. اگر T نقطهٔ دلخواهی روی قطر QS باشد، ثابت کنید $PT = RT$.



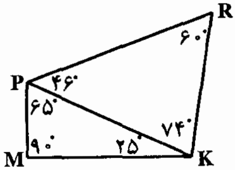
۸۴۰. در چهارضلعی ABCD از نقطه‌های M و N و P و Q که بترتیب وسطهای ضلعهای AB و BC و CD و DA می‌باشند، خطهای ′MM و ′NN و ′PP و ′QQ را بترتیب عمود بر ضلعهای مزبور و برابر نصف طول ضلع نظیر آنها و در خارج چندضلعی رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دو قطعه خط ′M′P و ′N′Q متساوی وعمود بر یکدیگرند.

۸۴۱. چهار لوزی، هر یک با زاویهٔ حادهٔ α ، روی ضلعهای چهارضلعیی محدب و بیرون آن رسم شده‌اند. زاویه‌های دو لوزی مجاور به یک رأس از چهارضلعی، برابرند. ثابت کنید که پاره‌خطهایی که مرکز لوزیهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، با یکدیگر برابرند و زاویهٔ حادهٔ میان این پاره‌خطها، برابر با α است.

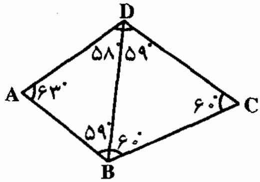
۶.۵.۱.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



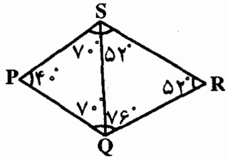
۸۴۲. هرگاه از یک نقطه واقع در درون یک چهارضلعی به چهار رأس آن وصل کنیم، مجموع چهار پاره‌خطی که تشکیل می‌شوند از مجموع دو قطر چهارضلعی بزرگتر است.



۸۴۳. در شکل روبه‌رو، اندازهٔ هر یک از زاویه‌ها داده شده است. ثابت کنید $\overline{PR}$ بزرگترین پاره‌خط این شکل است.



۸۴۴. بزرگترین پاره‌خط این شکل کدام است؟



۸۴۵. کوچکترین پاره‌خط این شکل کدام است؟

۸۴۶. پاره‌خطی به طول ۱ به چهار پاره‌خط تقسیم شده است. این چهار پاره‌خط یک چهارضلعی تشکیل می‌دهند اگر و تنها اگر طول هر پاره‌خط:

الف) برابر $\frac{1}{4}$ باشد.

ب) ناکوچکتر از $\frac{1}{8}$ و کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

ج) بزرگتر از $\frac{1}{8}$ و کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

د) بزرگتر از $\frac{1}{8}$ و کوچکتر از $\frac{1}{4}$ باشد.

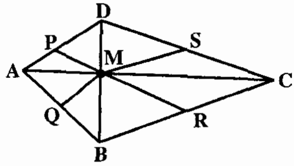
هـ) کوچکتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۶.۶. محیط

۶.۶.۱. اندازهٔ محیط

۸۴۷. قطرهای ABCD□ در M برهم عمودند، و P، Q، R و S وسطهای ضلعها هستند. ثابت کنید مجموع $MP+MQ+MR+MS$ با نصف محیط ABCD □ برابراست.

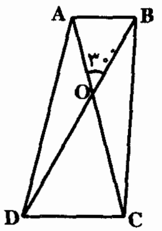


۷.۶. مساحت

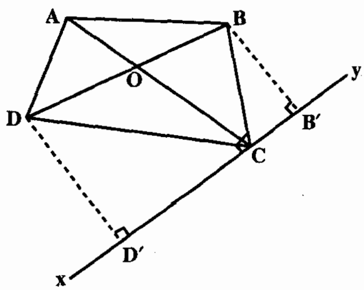
۱.۷.۶. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۶. اندازهٔ مساحت چهارضلعی (برابریها)

۸۴۸. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی برابر است با حاصلضرب قطرهای آن در سینوس زاویهٔ بین آنها.



۸۴۹. مساحت هر چهارضلعی که دو قطر آن با یکدیگر زاویهٔ °۳۰ بسازند، مساوی با یک‌چهارم حاصلضرب دو قطر آن است.



۸۵۰. مساحت هر چهارضلعی مساوی است با نصف حاصلضرب اندازهٔ یک قطر در تصویر قطر دیگر بر روی خط عمود بر قطر اوّلی.

۸۵۱. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی محدب برهم عمود باشند، مساحت چهارضلعی برابر نصف حاصلضرب اندازهٔ قطرها خواهد بود.

۸۵۲. ثابت کنید که مساحت هر چهارضلعی معادل است با مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر آن محیط شود و ضلعهایش با قطرهای آن چهارضلعی موازی باشند.

۸۵۳. بابلیها، برای محاسبهٔ مساحت یک چهارضلعی، نصف مجموع دو ضلع روبه‌رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند. روشن کنید، در چه نوع چهارضلعیهایی، این روش محاسبه، مساحت را به‌طور دقیق به‌دست می‌دهد.

بابلیها، همچنین، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، اغلب، طول یک ساق را در نصف قاعدهٔ مثلث ضرب می‌کردند. روشن کنید، با چه فرضی، رابطهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، حالتی حدی (یا حالتی خاص) از رابطهٔ تعیین مساحت چهارضلعی می‌شود.

۸۵۴. نقطه‌های K و M، وسط ضلعهای AB و CD از چهارضلعی محدب ABCD هستند؛ نقطه‌های L و N روی دو ضلع دیگر چهارضلعی طوری قرار گرفته‌اند که، چهارضلعی KLMN، یک مستطیل شده است. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی ABCD، دو برابر مساحت مستطیل KLMN است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

۶.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت چهارضلعی (نابرابریها)

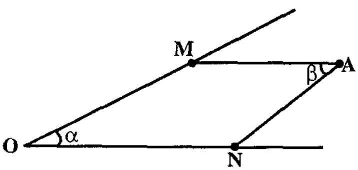
۸۵۵. نقطه‌های M و P، بترتیب، وسط ضلعهای BC و CD از چهارضلعی ABCD هستند. می‌دانیم: $MP + AF = a$

ثابت کنید مساحت چهارضلعی ABCD، از $\frac{1}{2}a^2$ کمتر است.

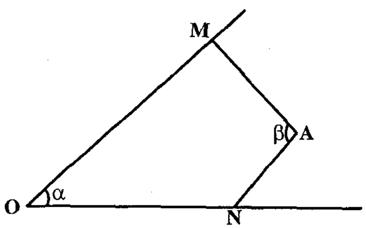
۸۵۶. a، b، c و d را طولهای ضلعهای متوالی یک چهارضلعی می گیریم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی از

a) $\frac{1}{2}(ab+cd)$ b) $\frac{1}{2}ac+bd$ تجاوز نمی کند.

المپیادهای ریاضی شوروی سابق



۸۵۷. رأس زاویه‌ای به اندازهٔ α ، نقطهٔ O، و A نقطه‌ای ثابت در درون این زاویه است. روی ضلعهای زاویه، نقطه‌های M و N چنان اختیار می‌شوند که $M\hat{A}N = \beta$ $(\alpha+\beta<\pi)$. ثابت کنید که هرگاه $AM = AN$ ، آن وقت مساحت چهارضلعی OMAN به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد (از همهٔ چهارضلعیهای ممکن در نتیجهٔ تغییر نقطه‌های M و N).



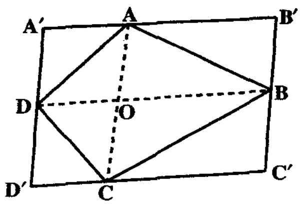
۸۵۸. زاویه‌ای به اندازهٔ α با رأس نقطهٔ O و نقطهٔ ثابت A در درون زاویه، داده شده است. همهٔ چهارضلعیهای مانند OMAN را، با رأسهای M و N روی ضلعهای زاویه، چنان در نظر بگیرید که $M\hat{A}N = \beta$ $(\alpha+\beta>\pi)$. ثابت کنید که اگر بین این چهارضلعیها، چهار ضلعیی محدب وجود داشته باشد، به طوری که $AM = AN$ ، آن وقت این چهارضلعی، کمترین مساحت را بین چهارضلعیهای مورد بحث، داراست.

۶.۷.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

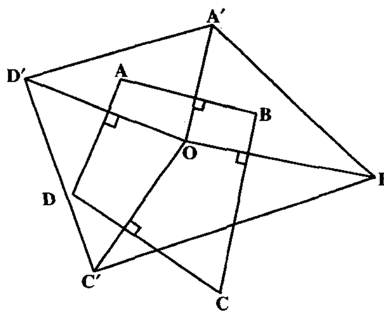
۸۵۹. قضیهٔ وارینیون. هرگاه وسطهای ضلعهای یک چهارضلعی را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید که مساحت آن، نصف مساحت آن چهارضلعی است. این متوازی‌الاضلاع را متوازی‌الاضلاع وارینیون چهارضلعی مفروض می‌نامند.

پی‌یر وارینیون

پی‌یر وارینیون Warignon (متولد ۱۶۵۴ در کان، متوفی ۱۷۲۱ در پاریس). استاد ریاضیات کولژ مازارن (۱۶۸۸) و سپس کولژ روایال، و عضو فرهنگستان علوم پاریس بود. با این که قصد داشت وارد خدمت کلیسا شود، به‌طور تصادفی نسخه‌ای از اصول اقلیدس به دستش افتاد، و مانند بسیاری دیگر بدین ترتیب به تحصیل ریاضیات روی آورد. سپس هندسهٔ دکارت را خواند و پس از آن خود را وقف ریاضیات کرد، با تأکید خاص بر موضوعهای طبیعی. او از نخستین علمای فرانسه بود که ارزش ریاضیات جدید را شناخت. بهترین کارش در زمینهٔ علم مکانیک بود، هر چند در زمینهٔ ریاضیات ناب هم نوشت.



۸۶۰. هرگاه از رأسهای چهارضلعی چهارخط به موازات قطرهای آن رسم کنیم، متوازی‌الاضلاعی به‌دست می‌آید که مساحت آن دو برابر مساحت چهارضلعی داده شده است.



۸۶۱. از نقطهٔ O واقع در درون چهارضلعی محدب ABCD نیمخطهایی عمود بر ضلعهای چهارضلعی رسم می کنیم و روی این نیمخطها از نقطهٔ O به اندازهٔ ضلعی که نیمخط به آن عمود است جدا می‌نماییم و نقطه‌های حاصل را ′A، ′B، ′C و ′D می‌نامیم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی محدب A′B′C′D′ دو برابر مساحت چهارضلعی ABCD است.

۸۶۲. روی امتداد ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی محدب ABCD، نقطه‌های ′A، ′B، ′C و ′D را طوری انتخاب کرده‌ایم، که داشته باشیم:

$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DA}$.

ثابت کنید، مساحت چهارضلعی A′B′C′D′، پنج برابر مساحت چهارضلعی ABCD است.

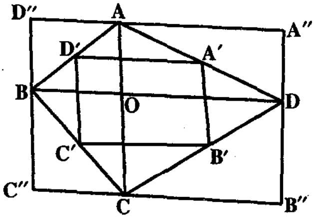
المپیاد ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۲

۸۶۳. AB، BC، CD و DA ضلعهای چهارضلعی محدب ABCD بترتیب از طرف رأسهای B، C، D و A تا نقطه‌های ′B، ′C، ′D و ′A امتداد داده شده‌اند. اگر $AB = BB' = ۶$، $BC = CC' = ۷$، $CD = DD' = ۸$ و $DA = AA' = ۹$ و مساحت ABCD برابر ۱۰ باشد، مساحت A′B′C′D′ برابر است با:

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۴۵ د) ۵۰ هـ) ۶۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸

۳.۷.۶. نسبت مساحتها



۸۶۴. در چهارضلعی ABCD وسطهای ضلعها را به‌طور متوالی وصل می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع A′B′C′D′ به‌وجود آید، سپس از رأسهای چهارضلعی خطهایی موازی قطرهای آن رسم می‌نماییم تا متوازی‌الاضلاع A″B″C″D″ حاصل شود. نسبت مساحت این دو متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.

۴.۷.۶. رابطهٔ بین مساحتها

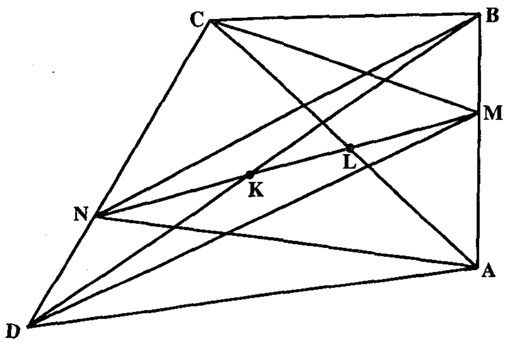
۸۶۵. مساحت چهارضلعیهای ABCD و A′B′C′D′، بترتیب، برابرند با S و S′. ثابت کنید، اگر در درون چهارضلعی ABCD، نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد که برای آن داشته باشیم:

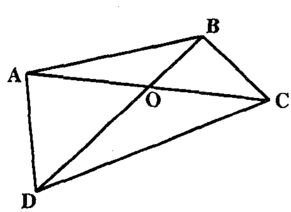
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'B'},\ \ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B'C'},\ \ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{C'D'},\ \ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{D'A'}$$

آن وقت $S = 2S'$.

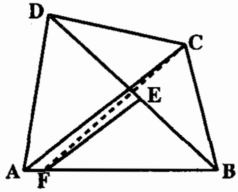
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، کانادا، ۱۹۸۲

۸۶۶. خط راستی که از وسط قطرهای AC و BC از چهارضلعی ABCD می‌گذرد، ضلعهای AB و DCی آن را، بترتیب، در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، $S_{\Delta DCM} = S_{\Delta ABN}$.

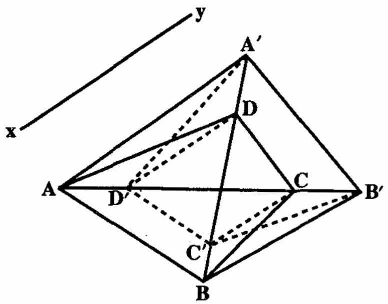




۸۶۷. ثابت کنید اگر یک قطر چهارضلعی قطر دیگر را نصف کند، همان قطر، چهارضلعی را به دو مثلث هم‌سطح افراز می‌کند.

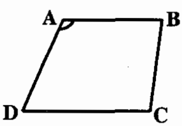


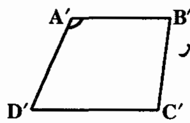
۸۶۸. چهارضلعی ABCD داده شده است. از نقطهٔ E وسط قطر BD خطی موازی قطر دیگر چهارضلعی رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ F قطع کند. ثابت کنید خط CF چهارضلعی را به دو قسمت معادل تقسیم می‌کند.



۸۶۹. چهارضلعی ABCD و خط xy واقع در یک صفحه داده شده‌اند. از دو رأس مقابل A و C خطهایی موازی xy رسم می‌کنیم تا قطر BD را در ′A و ′C قطع کنند و از دو رأس B و D نیز خطهای موازی xy رسم می‌کنیم تا قطر AC را در ′B و ′D قطع کنند. ثابت کنید چهارضلعی A′B′C′D′ معادل چهارضلعی ABCD است.

۸.۶. همنهشتی چهارضلعیها



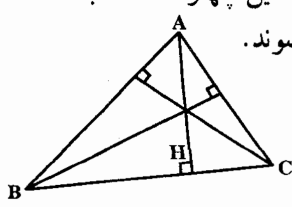


۸۷۰. اگر دو چهارضلعی، چهارضلع و یک زاویهٔ نظیر به نظیر متساوی داشته باشند با هم برابرند.

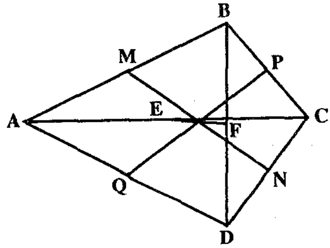
۹.۶. نقطه‌های ویژه

۸۷۱. در کدام چهارضلعیها مرکز ثقل محل تلاقی قطرها است؟
اگر رأسهای چهارضلعی فقط دارای جرمهای مساوی باشند ولی ضلعها بی‌وزن باشند، در این صورت برای کدام چهارضلعیها مرکز ثقل رأسها محل تلاقی قطرها است؟

۸۷۲. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، هرکدام از چهار نقطهٔ A، B، C و H مرکز ارتفاعی مثلث متشکل از سه نقطهٔ دیگر است. هر چهار نقطه‌ای که این خاصیت را داشته باشند، یک گروه نقطه‌های مرکز ارتفاعی یا یک چهارضلعی مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند؛ چهار مثلثی که این چهار نقطه سه به سه، مشخص می‌کنند، گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی نامیده می‌شوند.



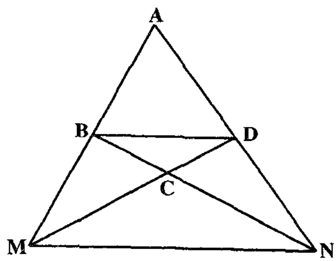
۱۰.۶. خطهای همرس



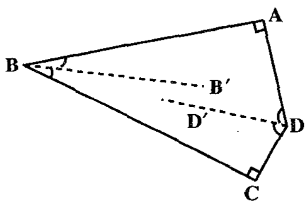
۸۷۳. در هر چهارضلعی خطهای واصل بین وسطهای هر دو ضلع متقابل، و خط واصل بین وسطهای دو قطر، همرسند.

۱۱.۶. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۱۱.۶. خطها موازیاند



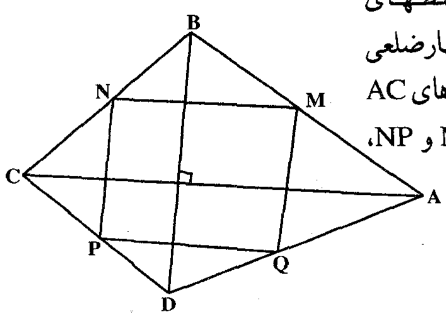
۸۷۴. در چهارضلعی ABCD داریم : AB = AD و BC = CD . ضلعهای روبه رو را امتداد میدهیم تا یکدیگر را در نقطههای M و N قطع کنند. ثابت کنید که MN با BD موازی است.



۸۷۵. هرگاه دو زاویهٔ متقابل یک چهارضلعی قائمه باشند، نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر با هم موازیاند.

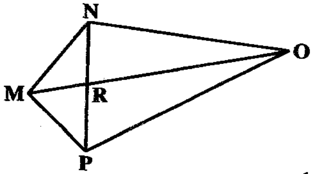
۲.۱۱.۶. خطها برهم عمودند

۸۷۶. چهارضلعیی محدب را قطرهایش به چهار مثلث تقسیم کردهاند. ثابت کنید، خطی که مرکزهای ثقل دو مثلث متقابل را به هم وصل میکند، بر خط راست واصل بین نقطههای برخورد ارتفاعهای دو مثلث دیگر، عمود است.



۸۷۷. نقطههای M، N، P و Q بترتیب وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی ABCD میباشند. ثابت کنید که اگر قطرهای AC و BD برهم عمود باشند، خطهای MN و NP، همچنین NP و PQ برهم عمودند.

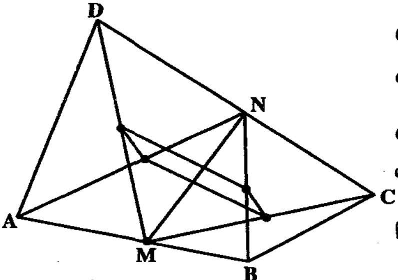
۱۲.۶. سایر مساله‌های مربوط به این بخش



۸۷۸. در چهارضلعی MNOP دو قطر MO و NP یکدیگر را در نقطهٔ R قطع می‌کنند.

الف. نشان دهید، اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$، آن‌گاه OM نیمساز زاویهٔ PMN نیست.

ب. نشان دهید ، اگر $MP = MN$ و $ON \neq OP$ ، آن‌گاه OM بر NP عمود است.



۸۷۹. نقطه‌های M و N بترتیب میانگاههای ضلعهای AB و CD از چهارضلعی ABCD است. ثابت کنید که میانگاههای قطرهای چهارضلعی AMND و BMNC رأسهای یک متوازی‌الاضلاع است (یا روی یک خط مستقیم قرار دارد).

۸۸۰. یک چهارضلعی که دو قطرش برهم عمود و دو ضلع آن باهم موازی باشند حتماً،

الف) لوزی است　　ب) مربع است

ج) متوازی‌الاضلاع است　　د) ذوزنقه است

هـ) مستطیل است

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۸۸۱. در یک شهر، برای هر سه چهارراه A، B و C، مسیری وجود دارد که از A به B می‌رود. ولی از C نمی‌گذرد. ثابت کنید، هر چهارراه با هر چهارراه دیگر، دست‌کم به‌وسیلهٔ دو مسیر غیرمتقاطع، مربوط است. (چهارراه، به نقطه‌ای می‌گوییم که، از آن‌جا، دست‌کم دو خیابان عبور کند ؛ در شهر، دست‌کم، دو چهارراه وجود دارد.)

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۶

۸۸۲. مجموعهٔ چهارضلعیهایی که دو قطر آنها عمودمنصف یکدیگرند، کدام مجموعهٔ زیر است؟

الف) مجموعهٔ ذوزنقه‌ها　　ب) مجموعهٔ متوازی‌الاضلاعها

ج) مجموعهٔ مستطیلها　　د) مجموعهٔ لوزیها

هـ) مجموعهٔ مربعها

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۸۸۳. $n > 4$ نقطه در یک صفحه چنان مفروضند که هیچ سه نقطه‌ای از آنها بر یک استقامت واقع نیستند. ثابت کنید حداقل $\binom{n-3}{2}$ چهارضلعی محدب که رأسهایشان چهار نقطه از نقاط مفروضند، موجود است.

یازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۹

بخش ۷

● n ضلعیها (n≥۵)

۱.۷. تعریف و قضیه

۲.۷. زاویه

۱.۲.۷. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۳.۷. ضلع

۱.۳.۷. تعداد ضلعها

۲.۳.۷. رابطهٔ بین ضلعها

۱.۲.۳.۷. رابطهٔ بین ضلعها (برابریها)

۲.۲.۳.۷. رابطهٔ بین ضلعها (نابرابریها)

۳.۳.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴.۷. قطر

۱.۴.۷. اندازهٔ قطر

۲.۴.۷. تعداد قطرها

۳.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۷. پارهٔ خط

۱.۵.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۲.۱.۵.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶.۷. محیط

۱.۶.۷. اندازهٔ محیط

۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها

۱.۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها (برابریها)

۲.۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها (نابرابریها)

۷.۷. مساحت

۱.۷.۷. اندازهٔ مساحت

۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۱.۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها (نابرابریها)

۳.۷.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸.۷. رأسها

۹.۷. مجموعه‌های صفحه

۱۰.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

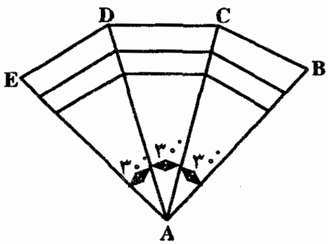
بخش ۷ • n ضلعیها $(n \geq ۵)$

۱.۷. تعریف و قضیه

در این بخش، ویژگیهای توصیفی چندضلعیهایی را که پنج ضلع و یا بیشتر از پنج ضلع دارند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۷. زاویه

۱.۲.۷. اندازهٔ زاویه



۸۸۴. شکل روبه‌رو، طرح یک تالار را نشان می‌دهد. اگر هر سه بخش مثلثی شکل همنهشت باشند، اندازهٔ $B\hat{C}D$ را تعیین کنید.

۸۸۵. اندازهٔ هر یک از زاویه‌های درونی یک ۸ ضلعی منتظم، همچنین اندازهٔ هر یک از زاویه‌های درونی یک ۱۱ ضلعی منتظم را تعیین کنید.

۸۸۶. مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب بدون یکی از آنها برابر °۲۵۷۰ است. اندازهٔ زاویهٔ کنار گذاشته شده برابر است با :

الف) °۹۰ ب) °۱۰۵ ج) °۱۲۰ د) °۱۳۰ هـ) °۱۴۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

۸۸۷. در یک چند ضلعی محدب تمام زاویه‌های داخلی متساوی هستند. مقدار هر یک از این زاویه‌ها چه‌قدر است؟

۸۸۸. ثابت کنید که یک چند ضلعی محدب نمی‌تواند بیش از سه زاویهٔ حاده داشته باشد.

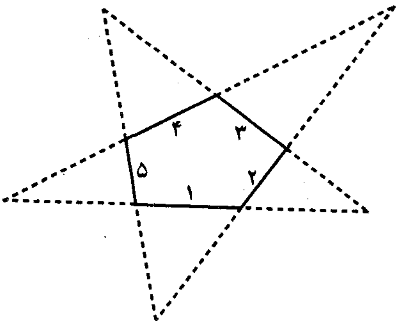
۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۸۸۹. مجموع زاویه‌های داخلی یک ۴ ضلعی، ۵ ضلعی و ۲۰ ضلعی محدب را حساب کنید.

۸۹۰. اگر یک چند ضلعی محدب ۱۹۹۱ ضلع داشته باشد، حاصل جمع زاویه‌هایش چند درجه است؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



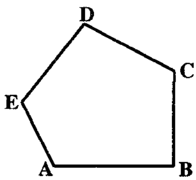
۸۹۱. چند ضلعی به شکل «ستارهٔ n پر» را بترتیب زیر می‌سازیم. ضلعهای یک n ضلعی کوژ را پی‌درپی شماره‌گذاری می کنیم: ۱، ۲، ...، k، ...، n، که $n \geq ۵$؛ به‌ازای همه n مقدار k، ضلعهای k و $k+۲$ ناموازی و ضلعهای $n+۱$ و $n+۲$، بترتیب، همان ضلعهای ۱ و ۲ هستند؛ n جفت ضلعهای k و $k+۲$ را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند. (در حالت $n=۵$ یک نمونه شکل را نمایش می‌دهیم) مجموع زاویه‌های داخلی n رأس ستارهٔ n پر برحسب درجه برابر است با:

الف) ۱۸۰   ب) ۳۶۰   ج) $۱۸۰(n+۲)$

د) $۱۸۰(n-۲)$ هـ) $۱۸۰(n-۴)$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۲.۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)



۸۹۲. در هر چند ضلعی محدب که حداقل چهار ضلع داشته باشد، همواره یک زاویه از مجموع زاویه‌های دیگر کوچکتر است.

۸۹۳. وقتی تعداد ضلعهای یک چند ضلعی محدب از ۳ به n افزایش می‌یابد، مجموع زاویه‌های خارجی حاصل از امتداد متوالی ضلعها:

الف) افزایش می‌یابد.   ب) کاهش می‌یابد.

ج) ثابت باقی می‌ماند.   د) نمی‌توان پیش‌بینی کرد.

هـ) $(n-۳)$ برابر زاویهٔ ۱۸۰ درجه می‌شود.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۳.۷. ضلع

۱.۳.۷. تعداد ضلعها

۸۹۴. اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب تصاعد حسابی می‌سازند. هرگاه کوچکترین زاویه به اندازهٔ °۱۰۰ و بزرگترین زاویه به اندازهٔ °۱۴۰ باشد، تعداد ضلعهای چندضلعی برابر است با:

الف) ۵   ب) ۶   ج) ۸   د) ۱۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۸۹۵. اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی محدب، تصاعدی حسابی می‌سازند. اگر کوچکترین زاویه °۱۰۰ و بزرگترین زاویه °۱۴۰ باشد، تعداد ضلعهای چند ضلعی برابر است با :

الف) ۶ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۱۱ هـ) ۱۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۷۶

۸۹۶. مجموع زاویه‌های یک چند ضلعی محدب مساوی ۱۲ قائمه است. عدهٔ ضلعهای چندضلعی را معین کنید.

۸۹۷. اندازه‌های زاویه‌های داخلی یک n ضلعی کوژ یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. اگر قدر نسبت این تصاعد °۵ و بزرگترین زاویه °۱۶۰ باشد، آن‌گاه n برابر است با :

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ هـ) ۳۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۸۹۸. هرگاه به غیر از یکی از زاویه‌های یک چند ضلعی محدب، مجموع اندازه‌های زاویه‌های دیگر آن °۲۱۹۰ باشد، تعداد ضلعهای این چند ضلعی برابر است با :

الف)۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۷ د) ۱۹ هـ) ۲۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

۸۹۹. یک خط شکستهٔ بسته، که خودش را قطع نکرده است، روی صفحه داده شده است ؛ هیچ سه رأسی از خط شکسته، روی یک خط راست نیستند. دو ضلع غیرمجاور آن را، «خاص» می‌نامیم، وقتی که ادامهٔ یکی از آنها، دیگری را قطع کند. ثابت کنید، تعداد جفت ضلعهای خاص، عددی زوج است.

المپیاد ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۷

۹۰۰. در یک چند ضلعی محدب، دقیقاً سه عدد از زاویه‌های داخلی، منفرجه‌اند. این چندضلعی حداکثر چند ضلع می‌تواند داشته باشد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۹۰۱. شمار قطرهای دو چند ضلعی با هم، ۸۹ تا است. تعداد ضلعهای این دو چند ضلعی روی هم چند است؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانهای فرانسه

۹۰۲. در یک چند ضلعی محدب، چند ضلع می‌تواند وجود داشته باشد که، طول هر کدام از آنها، برابر با طول بزرگترین قطر چند ضلعی باشد.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۷.۳.۲. رابطهٔ بین ضلعها

۷.۳.۲.۱. رابطهٔ بین ضلعها (برابریها)

۹۰۳. در یک هشت ضلعی، همهٔ زاویه‌ها برابرند و طول ضلعها عددهایی درستند. ثابت کنید، در این هشت ضلعی، ضلعهای روبه‌رو با هم برابرند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۹۰۴. در یک n ضلعی که تمام زاویه‌های داخلیش مساوی‌اند، طولهای ضلعهای متوالی در رابطهٔ : $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ صدق می‌کنند. ثابت کنید که : $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۳

۷.۳.۲.۲. رابطهٔ بین ضلعها (نابرابریها)

۹۰۵. ثابت کنید که در هر چند ضلعی هر ضلع از مجموع ضلعهای دیگر کوچکتر است.

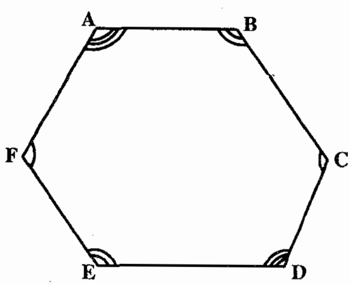
۷.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۰۶. دو خط شکستهٔ بسته، که تعداد ضلعهای هر کدام از آنها عددی فرد است، روی صفحه‌ای داده شده‌اند. همهٔ ضلعهای این خطهای شکسته، روی خطهای راست مختلفی قرار دارند و هیچ سه‌تایی از آنها، از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، از هر خط شکسته، می‌توان یک ضلع طوری انتخاب کرد که دو ضلع روبه‌رو در یک چهارضلعی محدب باشند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

۹۰۷. در شش ضلعی محدب ABCDEF زاویه‌های روبه‌رو دو به‌دو متساوی‌اند $(\hat{C} = \hat{F},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{A} = \hat{D})$.

ثابت کنید، ضلعها دوبه‌دو با هم موازی‌اند. $(AB \parallel DE,\ BC \parallel EF,\ CD \parallel FA)$



۴.۷. قطر

۱.۴.۷. اندازهٔ قطر

۹۰۸. a. هر یک از ضلعهای یک شش ضلعی محدب، طولی بزرگتر از واحد دارد. آیا همیشه، در این شش ضلعی، می‌توان قطری با طول بزرگتر از ۲ پیدا کرد؟

b. در شش ضلعی محدب ABCDEF، طول هر یک از قطرهای AD، BE و CF از ۲ بیشتر است. آیا، در این شش ضلعی، همیشه می‌توان ضلعی با طول بزرگتر از واحد پیدا کرد؟

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۷۴

۲.۴.۷. تعداد قطرها

۹۰۹. در یک چند ضلعی هر پاره‌خط که دو رأس غیرمجاور را به هم وصل کند، قطر نام دارد. در یک چند ضلعی که ۲۰ رأس دارد (که هیچ سه عدد آنها بر یک راستا نیستند)، تعداد همهٔ قطرها برابر است با:

الف) ۱۵۳ ب) ۱۷۰ ج) ۱۹۰ د) ۳۴۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۹۱۰. تعداد قطرهای یک ۱۰۰ ضلعی برابر است با:

الف) ۴۸۵۰ ب) ۴۹۵۰ ج) ۹۹۰۰ د) ۹۸ هـ) ۸۸۰۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۹۱۱. هر n ضلعی محدب چند قطر دارد؟

الف) $\frac{n(n-۱)}{۲}$ ب) $(n-۲)(n-۳)$

ج) $\frac{n(n-۳)}{۲}$ د) $n(n-۳)$

هـ) $۲(n-۳)$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۹۱۲. در یک صفحه مجموعه‌ای از n نقطه ($n \geq ۳$) مفروض است. هر زوج نقطه با پاره‌خطی به هم وصل شده‌اند. فرض می‌کنیم d طول درازترین این قطعات باشد. هر پاره‌خط واصل به طول d را به‌عنوان قطر مجموعه تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که تعداد قطرهای مجموعهٔ مفروض حداکثر n است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۵

۳.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۱۳. ثابت کنید، در هر شش ضلعی محدب، قطری پیدا می‌شود که، از آن، مثلثی را جدا می‌کند، به نحوی که مساحت آن از $\frac{1}{6}$ مساحت شش ضلعی تجاوز نمی‌کند.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۹۱۴. ثابت کنید، هر دو قطر یک مجموعهٔ محدب در صفحه، دست کم، یک نقطهٔ مشترک دارند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۲

۹۱۵. در شش ضلعی ABCDEF ضلعهای روبه‌روی BC و EF با قطر AD موازی هستند. و همچنین ضلعهای روبه‌روی CD و FA با قطر BF و ضلعهای روبه‌روی DE و AB با هم موازی‌اند. ثابت کنید که قطر CF با AB موازی است و مرکزهای ثقل دو مثلث ACE و BDF برهم منطبقند.

۹۱۶. رأسهای یک چند ضلعی محدب با تعداد ضلعهای فرد را، به نحوی رنگ کرده‌ایم که، هیچ دو رأس مجاوری، هم‌رنگ نباشند. ثابت کنید، برای هر نوع رنگ‌آمیزی که با این شرط انجام شود، می‌توان چندضلعی را، به‌وسیلهٔ قطرهای غیرمتقاطع آن، طوری به مثلث‌ها تقسیم کرد که، دو انتهای هر قطر، رنگهای مختلفی داشته باشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، مجارستان، ۱۹۷۸

۹۱۷. فاصلهٔ هوایی از شهر A تا شهر B برابر ۳۰ کیلومتر، از B تا C برابر ۸۰ کیلومتر، از C تا D برابر ۲۳۶ کیلومتر، از D تا E برابر ۶ کیلومتر و از E تا A برابر ۴۰ کیلومتر است. فاصلهٔ هوایی از E تا C را پیدا کنید.

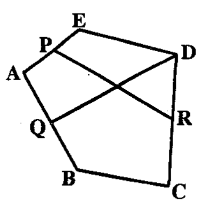
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۵.۷. پاره‌خط

۱.۵.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۹۱۸. در شکل، $ED \| BC$ ، $ED = BC$ ، و P، Q، و R وسطهای پاره‌خطها هستند. ثابت کنید، QD، PR را نصف می‌کند.



۹۱۹. a. در شش ضلعی محدب ABCDEF، همهٔ زاویه‌ها برابرند. ثابت کنید:

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA$$

b. ثابت کنید، عکس این حکم هم درست است: اگر برای شش پاره‌خط راست به طول‌های a_1، a_2، a_3، a_4، $a_5 = a_1 - a_4$.

آن وقت می‌توان، با این پاره‌خطهای راست، یک شش ضلعی محدب با زاویه‌های برابر ساخت.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۴

۹۲۰. نقطهٔ O، در درون چند ضلعی محدب طوری انتخاب شده است که، با هر دو رأس چندضلعی، یک مثلث متساوی‌الساقین می‌سازد. ثابت کنید، این نقطه، از رأسهای چندضلعی، به یک فاصله است.

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۷۲

۹۲۱. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون چند ضلعی محدب تا ضلعهای آن، ثابت است، به شرطی که (الف) همهٔ ضلعهای چند ضلعی برابر باشند؛ (ب) همهٔ زاویه‌های چند ضلعی برابر باشند.

۷.۵.۱.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۹۲۲. در درون یک دوازده ضلعی محدب، دو نقطه داده شده است که به فاصلهٔ ۱۰ سانتیمتر از یکدیگر قرار دارند. برای هر یک از این نقطه‌ها، مجموع فاصله‌های از آنها تا رأسهای دوازده ضلعی را پیدا کرده‌اند. ثابت کنید، اختلاف این دو مجموع، از یک متر کمتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۶

۹۲۳. ثابت کنید، می‌توان صفحه را با سه رنگ مختلف چنان رنگ کرد که فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ همرنگ با ۱۹۶۶ متر فرق داشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۷.۶. محیط

۷.۶.۱. اندازهٔ محیط

۹۲۴. رأسهای یک ۳۲ ضلعی محدب در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی قرار دارند. اگر طول ضلع هر خانه برابر واحد باشد، حداقل محیط ۳۲ ضلعی چه قدر است؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۵

۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها

۱.۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها (برابریها)

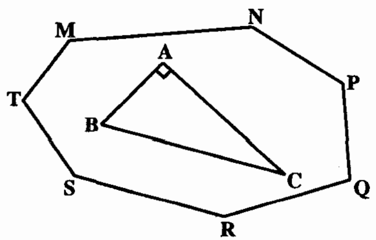
۹۲۵. سهم یک شش‌ضلعی منتظم برابر $۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر و سهم یک هشت‌ضلعی منتظم برابر $(\sqrt{۲}+۱)$ سانتیمتر است. نسبت محیطهای این دو را بیابید.

۲.۲.۶.۷. رابطهٔ بین محیطها (نابرابریها)

۹۲۶. ثابت کنید، اگر یک چند ضلعی محدب در داخل چند ضلعی محدب دیگری باشد، محیط چند ضلعی داخلی، از محیط چند ضلعی خارجی، کمتر است.

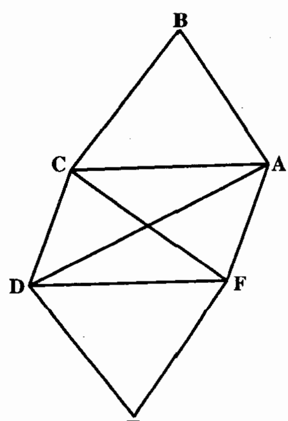
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۶

۹۲۷. مثلث ABC به‌طور کامل در داخل یک چندضلعی قرار دارد. ثابت کنید، محیط مثلث نمی‌تواند بزرگتر از محیط چند ضلعی باشد.



المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۵

۹۲۸. در شکل زیر، ACDF متوازی‌الاضلاع و مثلثهای ABC و DEF متساوی‌الاضلاع می‌باشند. اندازهٔ دو خط شکستهٔ ABCFDE و FEDACB را با هم مقایسه کنید.



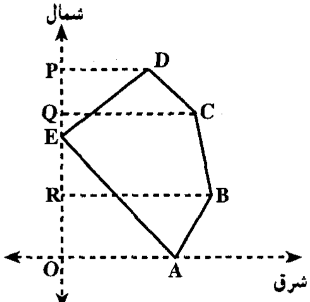
۹۲۹. قضیه. محیط هر چند ضلعی محدب، از محیط هر چند ضلعی محدب یا مقعر که بر آن چند ضلعی محیط باشد، کوچکتر است.

۷.۷. مساحت

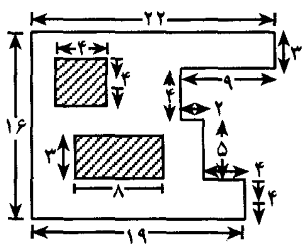
۱.۷.۷. اندازهٔ مساحت

۹۳۰. در پنج ضلعی محدب ABCDE می‌دانیم مساحت هر یک از پنج مثلث ABC، BCD، CDE، DEA و EAB برابر واحد است. ثابت کنید، همهٔ پنج ضلعیهای محدب با این ویژگی، مساحتهایی برابر دارند، مقدار این مساحت را پیدا کنید. در ضمن، ثابت کنید، بی‌نهایت پنج‌ضلعی با این ویژگی وجود دارند که همنهشت نیستند.

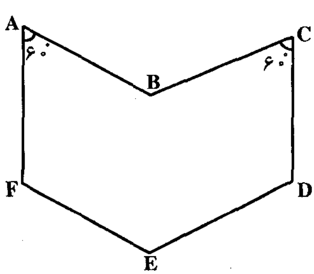
المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۲



۹۳۱. یک مساح می‌خواست مساحت زمین ABCDE را اندازه بگیرد. برای این منظور از E خطی از شمال به جنوب و از A، B، C، و D خطوطی از شرق به غرب رسم کرد و طول این پاره‌خطها را به دست آورد $AO = 37m$، $BR = 47m$، $CQ = 42m$، $DP = 28m$، $PQ = 13m$، $QE = 7m$، $ER = 19m$ و $RO = 18m$. سپس مساحت زمین را محاسبه کرد. شما هم مساحت زمین را به‌دست آورید.



۹۳۲. شکل روبه‌رو، قطعه‌ای از یک ماشین را نشان می‌دهد. برای برآورد هزینهٔ رنگ کردن این قطعه باید مساحتش را بدانیم. قسمتهای تیره نباید رنگ شود. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که باید رنگ شود. برای این محاسبه چه اصول موضوع و قضیه‌هایی را لازم دارید؟



۹۳۳. در شش ضلعی کاو ABCDEF به شکل روبه‌رو، هر ضلع به طول یک است و AB با EF، BC با DE و CD با FA موازی است و هر یک از زاویه‌های FAB و BCD به اندازهٔ $60°$ است. مساحت این شش ضلعی چه‌قدر است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) ۱ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\sqrt{3}$ هـ) ۲

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۹۳۴. ثابت کنید، مساحت یک چند ضلعی محدب که رأسهای آن در گره‌های یک صفحهٔ شطرنجی باشد، برابر است با $i+\frac{r}{۲}-۱$ که، در آن، i تعداد گره‌های واقع در درون این چند ضلعی و r تعداد گره‌های واقع بر ضلعها و رأسهای چند ضلعی است؛ طول ضلع هر خانه از صفحهٔ شطرنجی را واحد به حساب می‌آوریم (قضیهٔ پیک).

المپیادهای ریاضی شوروی سابق

۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۱.۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها (نابرابریها)

۹۳۵. ثابت کنید، اگر وسط ضلعهای یک n ضلعی محدب را $(n \geq ۴)$، پشت سرهم به یکدیگر وصل کنیم، مساحت چند ضلعی حاصل، کمتر از نصف مساحت چند ضلعی اصلی نیست.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۵

۳.۷.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۳۶. P ضلعی محدبی را $(P \geq ۵)$، روی همهٔ قطرها بریده‌ایم. ثابت کنید، بین بخشهای حاصل، بخشهایی با مساحتهای برابر وجود دارد.

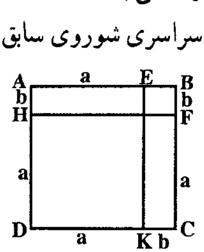
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

۹۳۷. چند ضلعی محدبی داده شده است و در آن، نمی‌توانیم هیچکدام از مثلثهای به مساحت واحد را جا بدهیم. ثابت کنید، این چند ضلعی را می‌توان در مثلثی با مساحت ۴ جا داد.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۴

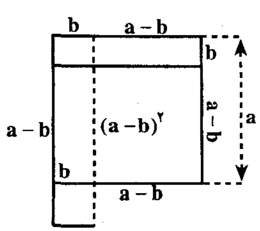
۹۳۸. با مراجعه به شکل روبه‌رو، ثابت کنید:

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$



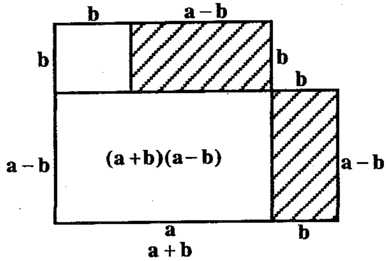
۹۳۹. با مراجعه به شکل روبه‌رو، ثابت کنید که:

$$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$$

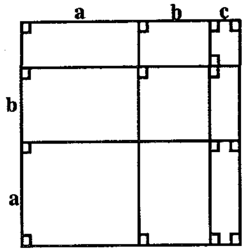


۹۴۰. با مراجعه به شکل زیر، ثابت کنید که:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$



۹۴۱. به کمک شکل زیر یک اتحاد جبری نتیجه بگیرید.



۸.۷. رأسها

۹۴۲. مجموع ضلعها و قطرهای یک n ضلعی محدب برابر ۳۶ است. عدهٔ رأسهای این nضلعی را مشخص سازید.

۹۴۳. دو مجموعهٔ سه تایی نقطه‌های واقع بر یک خط را در نظر می‌گیریم. این دو مجموعه را به چندگونه می‌توانیم رأسهای یک در میان یک شش‌ضلعی اختیار کنیم؟

۹۴۴. ثابت کنید، نمی‌توان مجموعهٔ با پایانی از n نقطه $(n>4)$ پیدا کرد به نحوی که هیچ سه‌نقطه‌ای روی یک خط راست نباشد و در ضمن برای هر سه نقطهٔ این مجموعه بتوان نقطهٔ چهارمی از همین مجموعه پیدا کرد که با سه نقطهٔ انتخابی رأسهای یک متوازی‌الاضلاع باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۹۴۵. الف. ثابت کنید، اگر رأسهای یک n ضلعی محدب در n ضلعی محدب دیگری که با اولّی برابر است، قرار گیرد، رأسهای این دو n ضلعی بر هم منطبق می‌شوند.

ب. آیا حکم (الف) برای چند ضلعیهای غیرمحدب هم درست است؟

ج. آیا برای همهٔ چند ضلعیهای غیر محدب، حکم (الف) نادرست است؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۷۴ و ۱۹۷۹

۹.۷. مجموعه‌های صفحه

۹۴۶. مجموعهٔ M، از یک صفحه، با کنار گذاشتن سه نقطهٔ A، B و C از آن، به دست آمده است. کمترین تعداد مجموعه‌های محدبی را پیدا کنید که، اجتماع آنها، همان مجموعهٔ M باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۸۰

۹۴۷. پنج خط واقع در یک صفحه، آن صفحه را به حداکثر چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

الف) ۱۲ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ هـ) ۱۷

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۹۴۸. تعداد n خط متمایز واقع در یک صفحه دوبه‌دو یکدیگر را در نقطه‌هایی متمایز قطع می‌کنند. این خطها صفحه را به p ناحیهٔ جدا از هم تقسیم می‌کنند. مقدار p برحسب n برابر است با:

الف) $p=\frac{n(n+1)}{2}+1$ ب) $p=2n$

ج) $p=2n+1$ د) $p=4n-5$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۹۴۹. a. n خط راست روی یک صفحه‌اند، به نحوی که هیچ دوتایی با هم موازی نیستند و هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند. این n خط راست صفحه را به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

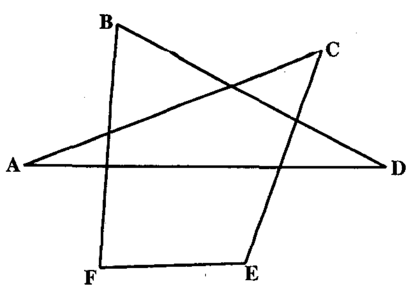
b. ثابت کنید که، n صفحه در حالت کلی (وقتی که هیچ سه صفحه‌ای موازی با یک خط راست نباشند و هیچ چهار صفحه‌ای از یک نقطه نگذرند)، فضا را به $\frac{1}{6}(n^2+5n)+1$ بخش تقسیم می‌کنند.

۱۰.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۹۵۰. در شکل، اگر مجموع اندازه‌های زاویه‌های A، B، C، D، E و F برحسب درجه $90n$ باشد، آن‌گاه n برابر است با:

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴

د) ۵ هـ) ۶



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۹۵۱. دو چند ضلعی کوژ P_1 و P_2 که اوّلی n_1 و دومی n_2 ضلع دارد، (به‌طوری که $n_1 \leq n_2$) در یک صفحه رسم شده‌اند. اگر P_1 و P_2 در هیچ ضلعی مشترک نباشند، آن‌گاه حداکثر تعداد نقطه‌های مشترک P_1 و P_2 برابر است با:

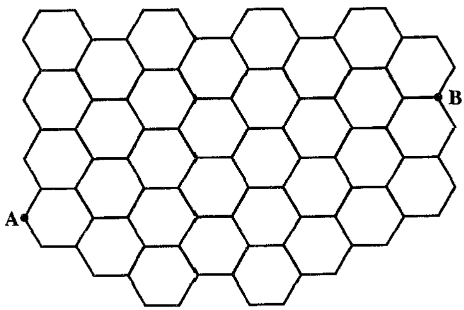
الف) $2n_1$ ب) $2n_2$

ج) n_1n_2 د) $n_1 + n_2$

هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۹۵۲. به کمک شش ضلعیهای منتظم به ضلع واحد، شبکه‌ای را روی صفحه رسم کرده‌ایم. حشره‌ای روی ضلعهای شبکه، از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B، روی کوتاه‌ترین مسیر ممکن، راهی به اندازهٔ ۱۰۰ را می‌پیماید. ثابت کنید، نیمی از تمامی مسیر را، در یک جهت طی می‌کند.



۹۵۳. یک n ضلعی محدب، که هیچ دو ضلعی از آن با هم موازی نیستند، و نقطه‌ای در درون آن داده شده است. ثابت کنید، از این نقطه، نمی‌توان بیش از n خط راست رسم کرد، به‌نحوی که هر کدام از آنها، مساحت n ضلعی را نصف کند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۳

۹۵۴. مجموعه‌ای متناهی از چند ضلعیها، در صفحه داده شده است، به نحوی که هر دو تا از آنها، دارای نقطهٔ مشترکی هستند. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که همهٔ این چند ضلعیها را قطع کند.

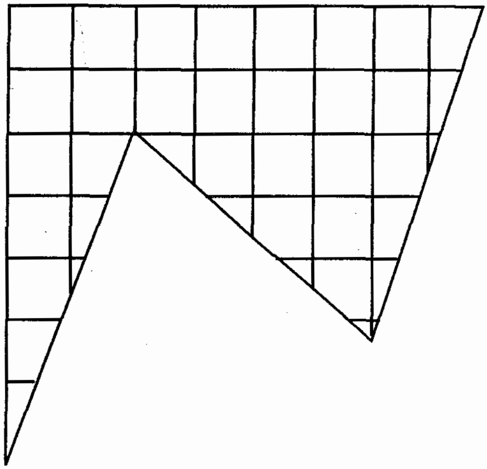
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۵

۹۵۵. یالهای یک گراف کامل را، که $2n+1$ رأس دارد، با سه رنگ مختلف، رنگی کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان یکی از رنگها و $n+1$ رأس را طوری انتخاب کرد که، از هر یک از این رأسها به هر رأس دیگر از آنها، بتوان از طریق یالهایی حرکت کرد که دارای رنگ انتخابی ما باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

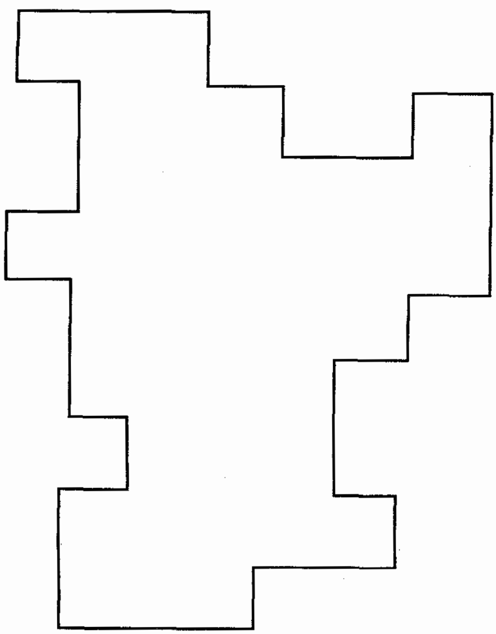
۹۵۶. چگونه می‌توان این شکل را به دو قسمت مساوی و قابل انطباق بر هم تقسیم کرد؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



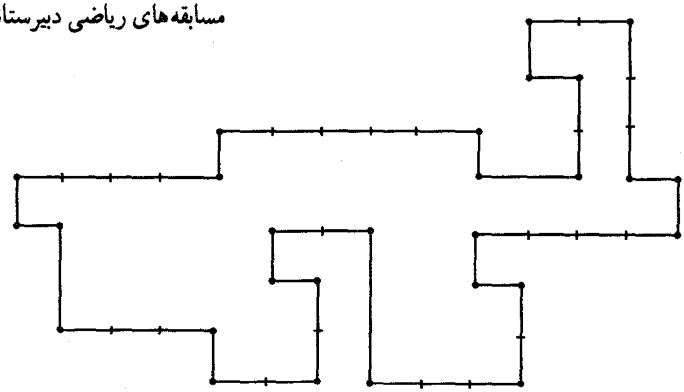
۹۵۷. یک دهقان، مزرعه‌ای به شکل زیر، داشت. او وصیت کرده بود که این زمین را بین چهار فرزندش به‌طور مساوی تقسیم کنند، به قسمی که علاوه بر مساوی بودن مساحتشان، چهار مزرعهٔ حاصل، قابل انطباق باشند. نحوهٔ انجام این کار را نشان دهید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۹۵۸. چند ضلعی داده شده را با دو برش مستقیم قیچی به سه قطعهٔ نامساوی طوری تقسیم کنید که از کنار هم گذاشتن آن سه تکه، یک مربع درست شود. ابتدا و انتهای برشها در روی شکل مشخص شده‌اند. فقط انتخاب دو جفت مناسب از بین آنها به عهدهٔ شما است.

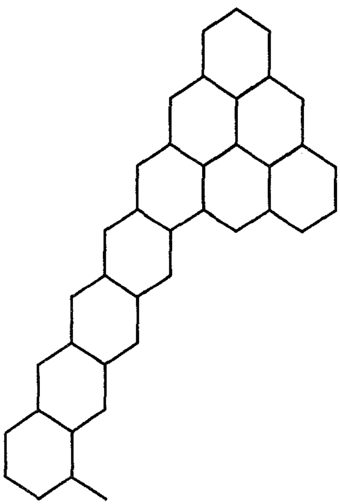
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۹۵۹. شش گوشه‌ها

یک دهقان باغی با ۲۸ کرت شش‌گوشهٔ مساوی دارد. او می‌خواهد این باغ را بین ۷ فرزندش به قسمتهای مساوی طوری تقسیم کند که سهم هر فرزند قابل انطباق بر دیگری یا قرینهٔ آن باشد. در تقسیم زمین به او کمک کنید.

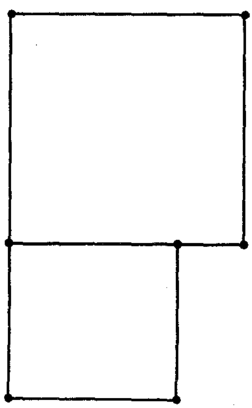
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۹۶۰. یک مربع از دو مربع

می‌خواهیم این دو مربع را که کنار هم قرار دارند، در این وضعیت با دو برش مستقیم به ۵ قطعهٔ غیرمساوی تقسیم کنیم و از کنار هم گذاشتن این قطعه‌ها یک مربع دیگر بسازیم که مساحتش برابر با مجموع مساحتهای دو مربع قبلی باشد. چگونه؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



راهنمایی و حل

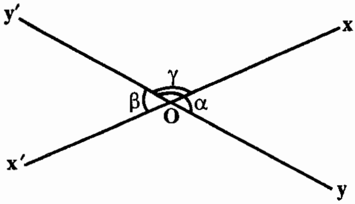
از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است استفاده نماید ؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل، یا راهنمایی، نمی‌باشند ؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین‌جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به‌نام فرستندهٔ آن،در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲

۲.۱. تعریف و قضیه

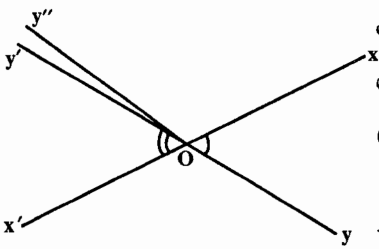


۱. دو زاویهٔ متقابل به رأس xOy و $x'Oy'$ را درنظر می‌گیریم. با فرض $x\hat{O}y=\alpha$ و $x'\hat{O}y'=\beta$ و $x\hat{O}y'=\gamma$ داریم:

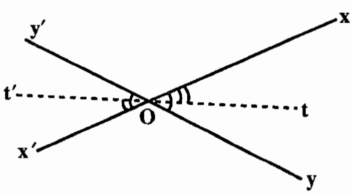
خط راست $y'Oy \Rightarrow \alpha+\gamma=180^\circ$ (۱)

خط راست $x'Ox \Rightarrow \beta+\gamma=180^\circ$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \alpha=\beta$ یا $x\hat{O}y=x'\hat{O}y'$



۲. اگر $x\hat{O}y=x'\hat{O}y'$ و xOx' خط راست باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که $y'Oy$ نیز خط راست است. Oy را امتداد می‌دهیم اگر بر Oy' منطبق شود حکم ثابت است، و در غیر این‌صورت به وضع Oy'' درمی‌آید. حال ثابت می‌کنیم که Oy'' بر Oy' منطبق است که این مطلب با استفاده از برابری دو زاویهٔ $x'Oy'$ و $x'Oy''$ ثابت می‌شود.



۳. اگر Ot و Ot'، بترتیب، نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل به رأس xOy و $x'Oy'$ باشند، چون $x\hat{O}t=x'\hat{O}t'$ و $x'Ox$ خط راست است. پس tOt' خط راست، یعنی Ot بر امتداد Ot' است.

۲.۲. نقطه

۴. **راه‌حل اوّل.** توجه می‌کنیم که:

$$1985=73\times26+99-12$$

است. اکنون ۱۰۰ خط زیر را درنظر می‌گیریم:

(i) ۹۹ خط: $x=k$، $k=1,2,\ldots,73$، و $y=k$، $k=1,2,\ldots,26$

(ii) خط: $y=x+14$

خطهای واقع در (i) در ۷۳×۲۶ نقطه متقاطع می‌شوند. خط: $y = x + ۱۴$ هر یک از ۹۹ خط واقع در (i) را قطع می‌کند، اما دوازده نقطه از این نقطه‌های برخورد، یعنی:

(۱،۱۵)، (۲،۱۶)، ...، (۱۲،۲۶)

نقطه‌های برخورد ۹۹ خط (i) نیز هستند. بنابراین پاسخ سؤال مثبت است.

راه‌حل دوم. اگر ۱۰۰ خط در صفحه‌ای در وضعیت کلی رسم شده باشند (یعنی هیچ دو خط از آنها موازی، و سه خط از آنها همرس نباشند)، تعداد نقطه‌های برخوردشان:

$$\binom{۱۰۰}{۲} = ۴۹۵۰$$

است. نشان می‌دهیم که با حرکت دادن بعضی از این خطها، می‌توانیم این عدد را به ۱۹۸۵ کاهش دهیم. خطهای مورد بحث را ناموازی نگه می‌داریم، اما، بعضی از آنها را طوری انتقال می‌دهیم که دسته‌هایی به تعداد $n_۱$، $n_۲$، ...، n_k (همه بزرگتر از یا مساوی با ۳) خط تشکیل دهند، و هر دسته در نقطهٔ منفردی همرس باشند. اکنون، خطهای واقع در دسته‌ای به تعداد n_i، که قبلاً یکدیگر را در: $\binom{n_i}{۲}$ نقطه قطع می‌کردند، تنها در یک نقطه متقاطعند.

به این ترتیب، تشکیل این دسته تعداد برخوردها را به اندازهٔ: $\binom{n_i}{۲}-۱$ عدد کاهش داده است. از آن‌جا که می‌خواهیم مجموع کاهشها:

$$۴۹۵۰ - ۱۹۸۵ = ۲۹۶۵$$

باشد، به مسألهٔ حل دستگاه:

$$n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k \le ۱۰۰$$

$$\binom{n_۱}{۲} - ۱ + \binom{n_۲}{۲} - ۱ + \cdots + \binom{n_k}{۲} - ۱ = ۲۶۹۵$$

با اعداد صحیح $n_i \ge ۳$، رهنمون می‌شویم. محاسبهٔ ساده‌ای نشان می‌دهد که بزرگترین عدد صحیح به صورت: $\binom{n}{۲}-۱$ کمتر از ۲۹۶۵:

$$\binom{۷۷}{۲} - ۱ = ۲۹۲۵$$

است. درنتیجه $n_۱$ را مساوی ۷۷ می‌گیریم، و اکنون باید کاهش دیگر:

$$۲۹۶۵ - ۲۹۲۵ = ۴۰$$

را انجام دهیم. بعد چون: $\binom{۹}{۲} - ۱ = ۳۵$ است، بنابراین $n_۲$ را مساوی ۹ درنظر می‌گیریم و اکنون باید کاهش دیگر:

$$۴۰ - ۳۵ = ۵$$

را انجام دهیم. از آن‌جا که : $\binom{4}{2} - 1 = 5$ است، برای تکمیل کار n_3 را مساوی ۴ درنظر می‌گیریم. (توجه داشته باشید که : $n_1 + n_2 + n_3 = 77 + 9 + 5 = 91 < 100$ می‌باشد، و بدین‌معنی است که ۹ خط وجود دارند که در این جریان مورد تزاحم قرار نگرفته‌اند.)

۵. (از : P.Herdeg). یکی از پنج نقطه را انتخاب می‌کنیم. چهار نقطهٔ باقیمانده : $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ خط، که باید به هر یک از آنها عمودی رسم شود، تعیین می‌کنند. از آن‌جا که مجموعاً ۵ نقطه موجود است، مجموعاً $5 \times 6 = 30$ عمود رسم می‌شود. در این‌صورت ماکزیمم تعداد نقطه‌های برخورد آنها : $\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$ است. اما، چنانچه نشان خواهیم داد، تمام این نقطه‌های برخورد متمایز نیستند.

(i) یکی از ده خط مشخص شده با ۵ نقطهٔ اصلی را درنظر می‌گیریم. دو نقطه از این نقطه‌ها بر این خط قرار دارند، و سه نقطه ندارند. بنابراین سه عمود مرسوم از این سه نقطه بر خط منتخب موازی‌اند. درنتیجه متقاطع نمی‌شوند. اما در صورتی که موازی نبودند، در سه نقطه متقاطع می‌شدند. از آن‌جا که این واقعه برای هر یک از ۱۰ خط رخ می‌دهد، از تعداد ماکزیمم ۴۳۵ تقاطع محاسبه شده در بالا، $10 \times 3 = 30$ تقاطع از بین می‌رود، و بنابراین عدد ۴۰۵ باقی می‌ماند.

(ii) ۵ نقطه اصلی : $\binom{5}{3} = \frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ مثلث مشخص می‌کنند.

در هر یک از آنها، عمودهای از رأسها به ضلعهای روبه‌رو (یعنی ارتفاعها) همرسند، و به‌عبارت دیگر به‌جای ۳ نقطه در یک نقطه تلاقی می‌کنند. بنابراین در هر یک از این ۱۰ مثلث دو نقطهٔ تقاطع از میان می‌رود، و به این ترتیب، ۲۰ تقاطع کمتر می‌شود و ۳۸۵ باقی می‌ماند.

(iii) از هر یک از ۵ نقطهٔ اصلی شش عمود می‌گذرد ـ شش عمودی که از آن به شش خط مشخص‌شده با ۴ نقطهٔ دیگر رسم می‌شود. این شش خط همرس به‌جای $15 = \frac{6.5}{2} = \binom{6}{2}$ نقطه در یک نقطه تلاقی می‌کنند، بنابراین به‌ازاءِ هر یک از این پنج نقطه ۱۴ نقطهٔ تقاطع، و کلاً $5 \times 14 = 70$ نقطه از میان می‌رود. در این‌صورت ۳۱۵ تقاطع ممکن عمودها باقی می‌ماند.

ملاحظهٔ این مطلب که در حالت کلی، تقاطع از میان رفتهٔ بررسی شده در (i)، (ii) و (iii) در طبقات متمایز قرار می‌گیرند و بر هم منطبق نمی‌شوند، مشکل نیست. بنابراین کار ما در تفریق هر یک از این مجموعه‌ها از شمارش اصلی موجه است.

۶. $[a_1, b_1]$ را، پاره‌خط راستی با حداقل انتهای راست فرض می‌کنیم. اگر تعداد پاره‌خطهای شامل نقطهٔ b_1 ، از ۷ بیشتر باشد، مسأله حل شده است. اگر این تعداد، کمتر یا برابر ۷ باشد، آن وقت، دست کم، ۴۳ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست $[a_1, b_1]$ قرار گرفته‌اند، در بین آنها، نقطهٔ $[a_2, b_2]$ را، با حداقل انتهای راست درنظر می‌گیریم. در این‌صورت یا b_2 متعلق به ۸ پاره‌خط راست است و یا ۳۶ پاره‌خط راست وجود دارد که در سمت راست b_2 قرار دارند. با ادامهٔ این استدلال، یا به نقطه‌ای برخورد می‌کنیم که به ۸ پاره‌خط راست تعلق دارد، و یا ۷ پاره‌خط راست $[a_1, b_1]$ و $[a_2, b_2]$، ...، $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شوند که برخوردی با هم ندارند.

در سمت راست این ۷ پاره‌خط راست، دست‌کم $50 - 7k$ پاره‌خط راست دیگر وجود خواهد داشت، یعنی، دست‌کم، یک پاره‌خط راست $[a_8, b_8]$ در سمت راست $[a_7, b_7]$ پیدا می‌شود.

۷. سمت چپ را روی خط راست مشخص می‌کنیم و یک پاره‌خط را وقتی در سمت چپ دیگری به حساب می‌آوریم که، انتهای چپ اوّلی در سمت چپ انتهای چپ دومی باشد (دقیق‌تر: و انتهای چپ پاره‌خط اوّل، در سمت راست انتهای چپ پاره‌خط دوم نباشد).

هر پاره‌خط را متناظر با یکی از n شمارهٔ ۱، ۲، ...، n، بترتیب زیر، قرار می‌دهیم. در گام اوّل، در بین همهٔ پاره‌خطها، چپ‌ترین آنها را، شمارهٔ ۱ می‌نامیم (اگر از این‌گونه پاره‌خطها، چند تا وجود داشته باشد، یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم). سپس، در هر گام بعدی، چپ‌ترین پاره‌خطی را که شماره‌گذاری نشده است، متناظر با شمارهٔ خود (که با شماره‌های قبلی فرق دارد) قرار می‌دهیم (در هر مورد، اگر چند پاره‌خط قابل انتخاب باشند، یکی را به‌دلخواه درنظر می‌گیریم). اگر در مرحله‌ای، به پاره‌خطی برسیم که، برای آن شمارهٔ نوبتی نگذاریم، به معنای آن است که، این پاره‌خط، با n پاره‌خط قبلی که در سمت چپ آن قرار گرفته‌اند و شماره‌های مختلفی دارند، متقاطع است. در این حالت، انتهای چپ این پاره‌خط، متعلق به $(n+1)$ پاره‌خط است. ولی اگر در مرحله‌ای، پاره‌خط آخر را شماره‌گذاری کنیم، آن‌وقت بنا به اصل دیریکله، دست‌کم، یکی از n شمارهٔ متناظر با بیشتر از n پاره‌خط است که، بنا بر نوع شماره‌گذاری ما، غیرمتقاطعند. اثبات به پایان رسید.

اصل دیریکله:

اگر مجموعه‌ای را که شامل n عضو است، به‌صورت اجتماع k زیر مجموعه نشان دهیم، آن‌گاه، دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها، شامل حداقل $\frac{n}{k}$ عضو است. این اصل، معمولاً در موقعیتی به‌کار می‌رود که $k < n$ و، زیر مجموعه‌ها دو به دو غیر متقاطع باشند.

۸. از برهان خُلف استفاده و فرض می‌کنیم، برای برخی از مقدارهای k، a_k و b_k نقطهٔ

مشترکی نداشته باشند. فرض می‌کنیم a_1، در سمت چپ b_1 باشد. چون b_2 با a_1 و b_1 با a_2 متقاطع است، بسادگی روشن می‌شود که b_2 باید به‌ناچار در سمت چپ a_2 باشد. اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شود که a_{1977} در سمت چپ b_{1977} و b_1 در سمت چپ a_1 واقع است. تناقض حاصل، حل مسأله را تمام می‌کند.

۹. هر مجموعهٔ $A_i (i=1, \ldots, n)$، اجتماعی از دو پاره‌خط راست است (که با توجه به «چپ» و «راست» بودن آنها، از هم جدا شده‌اند). مجموعهٔ A_i را در تناظر با پاره‌خط B_i قرار می‌دهیم که انتهای چپ آن، بر نقطهٔ سمت چپ مجموعهٔ A_i و انتهای راست آن بر نقطهٔ سمت راست مجموعهٔ A_i منطبق باشد. چون $B_i \supset A_i$، بنابراین هر دو پاره‌خط (و حتی هر سه پاره‌خط) از پاره‌خطهای $B_1, \ldots, B_n$، نقطهٔ مشترکی دارند. ثابت می‌کنیم، پاره‌خطهای B_k و B_m وجود دارند (که ممکن است $k=m$)، به نحوی که، اشتراک C آنها، متعلق به هر یک از پاره‌خطهای B_i است. در واقع، فرض کنید، انتهای چپ پاره‌خط B_k، سمت راست‌ترین نقطه از بین انتهاهای چپ پاره‌خطهای B_i و، انتهای راست پاره‌خط B_m، سمت چپ‌ترین نقطه از بین انتهاهای راست پاره‌خطهای B_i باشد. در این‌صورت، اشتراک

$$C = B_k \cap B_m$$

نه در «چپ‌ترین» انتهای چپ هر یک از پاره‌خطهای B_i قرار دارد و نه در «راست‌ترین» انتهای راست آن، یعنی $C \subset B_i$. توجه می‌کنیم که

$$C \cap A_i = B_k \cap B_m \cap A_i \supset A_k \cap A_m \cap A_i \neq \varnothing$$

بنابراین، هر مجموعهٔ A_i، یا شامل «چپ‌ترین» نقطهٔ a از مجموعهٔ C است و یا شامل «راست‌ترین» نقطهٔ b آن (ممکن است a=b). درواقع در غیر این‌صورت داریم :

$$a\ ,\ b \in B_i \setminus A_i\ ,\ C \subset B_i \setminus A_i$$

و از آن‌جا :

$$C \cap A_i = \varnothing$$

که درست نیست. بنابر اصل دیریکله، دست‌کم یکی از دو نقطهٔ a یا b، حداقل متعلق به نیمی از مجموعهٔ A_i است، چیزی که باید ثابت می‌کردیم.

۱۱. بله، می‌توان. ابتدا، بیشترین تعداد پاره‌خطهای راستی را که می‌توان کنار گذاشت، به‌نحوی که رابطهٔ مفروض بین نقطه‌ها، همچنان برقرار باشد، حذف می‌کنیم. سپس، نقطه‌ای را پیدا می‌کنیم که درست یک پاره‌خط راست از آن خارج شده باشد. وجود چنین نقطه‌ای را، می‌توان بسادگی ثابت کرد. کافی است دو نقطهٔ انتهایی خط شکسته‌ای را درنظر بگیریم که به وسیلهٔ پاره‌خطهای راست ساخته شده است. هر یک از این دو انتها چنین نقطه‌ای است.

۱۲. برای اثبات کافی است به این نکته توجه کنیم که، ضمن تغییر رنگ هر نقطهٔ ویژه، از تعداد پاره‌خطهای راستی که در دو انتهای خود دو رنگ مختلف دارند، دست‌کم یکی کم می‌شود. بنابراین، تجدید رنگ را تنها به تعداد محدودی می‌توان انجام داد و بعد از آن نقطهٔ ویژه‌ای باقی نمی‌ماند.

۱۳. تنها وقتی ممکن است که n، عددی زوج باشد. همه نقطه‌هایی را درنظر می‌گیریم که با عدد ۱ مشخص شده‌اند، از هر یک از این نقطه‌ها، دو خط راست عبور می‌کند و، بنابراین n باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

اکنون، فرض کنید، n عددی زوج است. خطهای راست را، با عددهای از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و برای i و j که از n کوچکترند، در نقطهٔ برخورد iامین با jامین خط راست، باقی‌ماندهٔ مثبت حاصل از تقسیم i+j بر n را می‌نویسیم (یعنی، اگر باقی‌مانده‌ای نداشته باشد، به‌جای ۰، عدد n را می‌نویسیم). پهلوی نقطهٔ برخورد nامین خط راست با iامین خط راست، باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم عدد ۲i بر n را می‌نویسیم.

۱۴. (ب) تعداد نقطه‌های تقاطع صد خط، حداکثر برابر است با :

$$\binom{۱۰۰}{۲}=\frac{۱۰۰\times ۹۹}{۲}=۴۹۵۰$$

اما تعداد ۲۵ خط $L_۴$ ، $L_۸$ ،...، $L_{۱۰۰}$ با هم موازیند، پس از حداکثر تعداد تقاطع $۳۰۰=\binom{۲۵}{۲}$ عدد کم می‌شود. همچنین چون تعداد ۲۵ خط $L_۱$ ، $L_۵$ ،...، $L_{۹۷}$ فقط در نقطهٔ A مشترکند، از تعداد نقطه‌های تقاطع باز هم $۲۹۹=۱-\binom{۲۵}{۲}$ عدد کم می‌شود.

از این‌رو ماکزیمم تعداد نقطه‌های تقاطع برابر است با :

$$۴۹۵۰-۳۰۰-۲۹۹=۴۳۵۱$$

۱۵. فرض می‌کنیم $k\geq \frac{۱}{۲}+\sqrt{۲n}$. نقطهٔ P از S را درنظر می‌گیریم. حداقل k نقطه در S موجود است که فاصله‌شان از P یکسان است. درنتیجه حداقل $\binom{k}{۲}$ جفت نقطه از A و B موجود است به‌طوری که AP=BP. چون این موضوع برای تمام نقطه‌های P از S صادق است، پس حداقل $n.\binom{k}{۲}$ جفت نقطه از B و A وجود دارد به‌طوری که بر عمودمنصف AB حداقل یک نقطه از S وجود دارد. داریم :

$$n.\binom{k}{۲}=n(k-۱)k/۲>n/۲(\sqrt{۲n}-\tfrac{۱}{۲})(\sqrt{۲n}+\tfrac{۱}{۲})=$$

$$\frac{n}{۲}(۲n-\tfrac{۱}{۴})=n(n-\tfrac{۱}{۸})>n(n-۱)=۲\binom{n}{۲}$$

چون $\binom{n}{2}$ مجموع کلیهٔ جفتهای ممکن از نقطه‌های A و B در S است، باید جفت نقطه‌ای از A و B در S باشد به‌طوری که برای آنها

$$(i=1,2,\ldots,m)AP_1 = BP_1(M>2)P_1,P_2,\ldots,P_m$$

این نقطه‌ها بر روی یک خط قرار دارند و این (۱) را نقض می‌کند.

۳.۲. پاره‌خط، خط

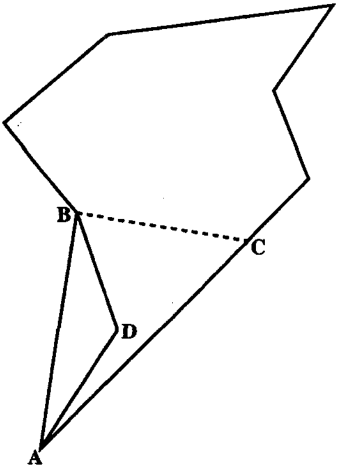
۱.۳.۲. تعداد پاره‌خطها، تعداد خطها

۱۶. با رسم پاره‌خطها دیده می‌شود که تعداد پاره‌خطهای حاصل برابر ۶ است.
۱۷. با رسم پاره‌خطها دیده می‌شود که تعداد پاره‌خطهای حاصل برابر ۲۱ است.
۱۸. تعداد پاره‌خطهای حاصل مساوی $\frac{n(n-1)}{2}$ است. زیرا از وصل کردن هر نقطه به نقطه‌های دیگر $(n-1)$ پاره‌خط ایجاد می‌شود و برای n نقطه، $n(n-1)$، اما هر نقطه دو بار منظور شده است، پس تعداد پاره‌خطهای حاصل برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است.
۲۰. مانند حالتی که سه نقطه بر یک خط راست قرار ندارند، تعداد پاره‌خطهای حاصل برای n نقطه، $\frac{n(n-1)}{2}$ است که در این مسأله به ازاء $n=3$ داریم:

$$3 = \frac{3(3-1)}{2} = \text{تعداد پاره‌خطها}$$

۲۱. یکی از نقطه‌ها را «ریشه» می‌نامیم. هر یک از $n-1$ نقطهٔ باقی‌مانده را، در تناظر با آخرین پاره‌خط مسیری قرار می‌دهیم که از «ریشه» به این نقطه می‌رود (بنابر شرط، این مسیر، منحصر به فرد است). این تناظر، یعنی تناظر بین مجموعهٔ $n-1$ نقطه و مجموعهٔ همهٔ پاره‌خطها، یک به یک است. اگر روی همه پاره‌خطهای راستی که از «ریشه» آغاز شده‌اند، در مسیری که به سمت نقطه‌های دیگر می روند، علامت پیکان بگذاریم، آن وقت، به هر نقطه (به جز ریشه)، یک پیکان می‌رسد.

نکته. گرافی که، در این مسأله، مورد مطالعه قرار گرفته است «درخت» نامیده می‌شود. در این‌جا، یکی از «رأسهای» گراف را به‌عنوان «ریشه» انتخاب کرده‌ایم. یادآوری می‌کنیم، این مسأله را، با روش استقرای ریاضی هم می‌توان حل کرد.



۲۲. فرض می کنیم، با $n+4$ نقطهٔ مفروض، شبکه‌ای از پاره‌خطها را ساخته باشیم که با شرط مسأله سازگار باشند (چنین شبکه‌هایی که آنها را شبکه‌های ماکزیمال می نامیم، وجود دارند، زیرا تعداد همهٔ پاره‌خطهای راست ممکن، محدود به عدد C_{n+4}^{2} است). چندضلعی را که، رأسهای آن بر نقطه‌های مفروض واقعند و، هر ضلع آن، یا پاره‌خطی از شبکه است و یا اجتماعی از چند پاره‌خط شبکه که روی یک خط راست قرار دارند، چندضلعی شبکه‌ای می‌نامیم. مربع K با رأسهای در چهار نقطهٔ مفروض، که n نقطهٔ بقیه در درون آن قرار دارند، همیشه متعلق به شبکه ماکزیمال است، به‌نحوی که این مربع، یک چندضلعی شبکه‌ای است. ثابت می کنیم، شبکهٔ ماکزیمال، مربع K را به چنان مثلثهای شبکه‌ای تقسیم می کند که، هر یک از آنها درست شامل سه نقطهٔ مفروض است که در رأسهای آن قرار گرفته‌اند.

نقطهٔ دلخواه O از مربع را درنظر می گیریم. از بین همهٔ چندضلعیهای شبکه‌ای که شامل این نقطه هستند (مجموعهٔ این چندضلعیها، تهی نیست، زیرا شامل مربع K است)، m ضلعی M را انتخاب می کنیم که حداقل مساحت را داشته باشد. چون مجموع زاویه‌های چندضلعی M، برابر است با :

$$180^\circ(m-2)$$

بنابراین، بین رأسهای آن، می توان رأس A را پیدا کرد که زاویهٔ متناظر آن، از ۱۸۰ درجه کمتر باشد. روی هر یک از دو ضلع این زاویه، نزدیک‌ترین نقطه (از نقطه‌های مفروض) به رأس A را انتخاب می کنیم، به نقطه‌های B و C می‌رسیم (شکل). مثلث ABC، به‌جز دو نقطهٔ A و B، شامل نقطه‌های مفروض دیگری است، مثلاً نقطهٔ C. از بین آنها، نقطهٔ D را انتخاب می کنیم که، برای آن، زاویهٔ ABD، کمترین مقدار باشد (اگر چند نقطه از این‌گونه وجود داشته باشد آن را درنظر می گیریم که به B نزدیک‌تر است). در این‌صورت در مثلث ABD، به‌جز رأسهای A، B و D، نقطهٔ دیگری از نقطه‌های مفروض وجود ندارد، یعنی هیچ کدام از پاره‌خطهای شبکه، نقطهٔ مشترکی با ضلعهای AD و BD (به‌جز احتمالاً خود این رأسها) ندارد، ولی پاره‌خطهای AD و BD متعلق به شبکهٔ ماکزیمال هستند. به این ترتیب، مثلث ABD، یک چندضلعی شبکه‌ای است. اگر این مثلث بر چندضلعی M منطبق نباشد، آن وقت، چندضلعی M به دو بخش تقسیم می‌شود که، هر کدام از آنها، خود یک چندضلعی شبکه‌ای است و این، نوع انتخاب چندضلعی M را نقض می کند. درنتیجه

مثلث ABD، همان چندضلعی M است. به این ترتیب، نقطهٔ O، که جزو نقطه‌های مفروض نیست، در داخل مثلث ABD قرار می‌گیرد و با رأسهای آن فرق دارد. اکنون، به محاسبهٔ K، تعداد پاره‌خطهای شبکهٔ ماکزیمال می‌پردازیم. برای این منظور، مجموع زاویه‌های همهٔ مثلثهایی را محاسبه می‌کنیم که، مربع K، به آنها تقسیم شده است. این مجموع، از یک طرف، برابر است با ۱۸۰l درجه که، در آن، l معرف تعداد مثلثهاست ؛ از طرف دیگر، از مجموع زاویه‌های رأسهای مربع و همهٔ زاویه‌های کاملی که به رأس نقطه‌های مفروض داخل مربع به وجود آمده‌اند، تشکیل شده است، یعنی برابر است با $۳۶۰(n+۱)$ درجه. بنابراین :

$$۱۸۰l = ۳۶۰(n+۱)$$

از آن‌جا $l = ۲(n+۱)$. سرانجام، هر ضلع مربع K، یکی از ضلعهای این مثلثهاست، و هر ضلع شبکه، که غیر از ضلع این مربع باشد، ضلع مشترکی برای دو مثلث است. بنابراین، به برابری

$$۴+۲(K-۴)=۳l$$

می‌رسیم، که از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$K=\frac{۳}{۲}l+۲=۳n+۵$$

۲۳. گزینهٔ (د) درست است. زیرا :

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=\frac{۱۲(۱۲-۱)}{۲}=۶۶$$

۲.۳.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۴. ۱) $AB+CD=۳$ ۲) $MN=۷/۵$

۲۶. $OP=۴$

۲۸. $MN=\frac{a}{۲}$

۲۹. اندازهٔ پاره‌خط AI : $AI=\frac{AB+AC}{۲}$

۳۰. اگر نقطهٔ O بین نقطه‌های A و B باشد داریم :

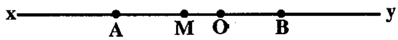
$$AB=a+b \quad \text{و} \quad OM=\frac{|a-b|}{۲}$$

و در صورتی که نقطهٔ O خارج پاره‌خط AB باشد خواهیم داشت :

$$AB=|a-b| \quad \text{و} \quad OM=\frac{a+b}{۲}$$

۲.۳.۳. نابرابری پاره‌خطها

۳۱. دو حالت وجود دارد :

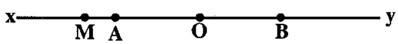


۱) نقطهٔ M بین نقطه‌های O و A واقع است. در این‌صورت :

$$\begin{cases} MA < OA = \dfrac{AB}{۲} \\ MB > OA = \dfrac{AB}{۲} \end{cases} \Rightarrow MA < MB$$

۲) نقطهٔ M روی نیمخط Ax واقع است. در این صورت :

$$MB = MA + AB \Rightarrow MA < MB$$



۳۳. اگر پاره‌خطهای راست و غیرمتقاطع $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ را، با طولهای α و β روی خط راستی داده باشند، آن‌وقت، مجموعهٔ طولهای پاره‌خطهای راستی که دو انتهای آنها متعلق به $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ باشند، پاره‌خط راستی به طول $\alpha+\beta$ را پر می‌کنند. بنابراین، اگر $\delta_۱$، $\delta_۲$، ...، δ_k طولهای پاره‌خطهای مفروض باشند، آن‌وقت

$$\delta_۱ + (\delta_۱ + \delta_۲) + (\delta_۱ + \delta_۳) + \cdots + (\delta_۱ + \delta_k) + \cdots$$

$$+ (\delta_{k-۱} + \delta_k) + \delta_k = k(\delta_۱ + \delta_۲ + \cdots + \delta_k) \geq ۱$$

۳۴. اختلاف فاصلهٔ یکی از این نقطه‌ها تا A' با فاصلهٔ همین نقطه تا B، برابر است با طول پاره‌خط راست AB ؛ و روشن است، مجموع ۴۵ عدد به صورت $\pm|AB|$ نمی‌تواند برابر صفر شود.

۴.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۵. داریم :

$$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ - n - ۶۰۰ = ۰ \Rightarrow n = ۲۵ \;,\; n = -۲۴ < ۰$$

۳۸. بلی ممکن است.

۴۰. $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n را نقطه‌های برخورد خطهای راست با کنارهٔ بالای نوار و آنها را به ردیف (از چپ به راست) شماره‌گذاری می‌کنیم ؛ همچنین $B_۱$، $B_۲$، ...، B_n را نقطه‌های برخورد خطهای راست با کنارهٔ پایین و باز هم از چپ به راست، فرض می‌کنیم. مسیرهایی

را که از نقطه‌های B_1 ، B_2 ، ...، B_n آغاز می‌شوند، با شماره‌های ۱ ، ۲ ، ...، n شماره‌گذاری می‌کنیم. با توجه به قانون ساختمان مسیر، این ویژگیها به‌دست می‌آید.

۱. از هر پاره‌خط راست، درست یک مسیر می‌گذرد ؛

۲. مسیرهای مجاور ـ K ام و $(K+1)$ ام ـ در رأسهایی با هم تماس دارند ؛ در ضمن، مسیر Kام همیشه در سمت چپ مسیر $(K+1)$ ام است (برای هر k از ۱ تا $n-1$). مسیرهای غیرمجاور، دارای نقطهٔ مشترکی نیستند.

۳. مسیری که از B_k آغاز شده است، به A_k ختم می‌شود.

اکنون به اثبات بخشهای مختلف مسأله می‌پردازیم :

a) همهٔ مسیرهایی را درنظر می‌گیریم که از شماره‌های فرد آغاز شده‌اند. بنابر ویژگی ۲°، این مسیرها، نقطهٔ مشترکی ندارند و، تعداد آنها، از $\frac{n}{2}$ کمتر نیست.

b) با دو روش، تعداد کل پاره‌خطهای راست همهٔ مسیرها را محاسبه می‌کنیم، هر یک از پاره‌خطهای راست B_iA_{n+1-i} ، یکی از خطهای راست، به‌وسیلهٔ خطهای راست دیگر، به n پاره‌خط تقسیم می‌شود. بنابراین، تعداد کل این پاره‌خطها برابر n^2 است. با توجه به ویژگی ۱°، باید همین مجموع n^2 ، با جمع تعداد پاره‌خطهای همهٔ n مسیر هم، به‌دست آید. بنابراین، دست‌کم، یکی از جمله‌های این جمع، از n کمتر نیست.

البته حکم (b) را از حکم (d) هم می‌توان نتیجه گرفت.

c) تعداد پاره‌خطها را در دو مسیر مرزی ـ مسیر اوّل و مسیر nام ـ ارزیابی می‌کنیم. این مسیرها مجموعه‌های محدبی را، که در سمت چپ مسیر اوّل و در سمت راست مسیر nام قرار دارند، محدود می‌کنند ؛ مسیر اوّل در درون زاویهٔ B_1PA_1 و مسیر nام در درون زاویهٔ B_nPA_n قرار دارند که، در آنها، P عبارت است از نقطهٔ برخورد خطهای راست B_1A_n و B_nA_1 . بقیهٔ خطهای راست B_2A_{n-1} ، B_3A_{n-2} ، ...، $B_{n-1}A_2$ تنها می‌توانند با یکی از دو مسیر مرزی، پاره‌خط مشترکی داشته باشند (و درواقع، با آن مسیری که، نسبت به نقطهٔ P، در طرف دیگر این خط راست باشد). به این ترتیب، در دو مسیر مرزی، بیش از $(n-2)+4$ پاره‌خط وجود ندارد و، بنابراین، در یکی از آنها، حداکثر $\frac{n}{2}+1$ پاره‌خط خواهد بود.

d) مسیر وسط، یعنی مسیر با شمارهٔ $m=\frac{1}{2}(n+1)$ (اگر n عددی فرد باشد) یا مسیر $m=\frac{n}{2}$ (اگر n عددی زوج باشد) را درنظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که، این مسیر، از همهٔ خطهای راست می‌گذرد (شکل). درواقع، این مسیر، نوار را به دو بخش تقسیم می‌کند ؛

هر یک از پاره‌خطهای راست $B_۱A_n$ ، $B_۲A_{n-۱}$ ، ....، $B_nA_۱$ از یک بخش آغاز و در بخش دیگر ختم می‌شوند. (یکی از آنها ممکن است روی مرز دو بخش واقع باشد) و، بنابراین، با مسیر وسط، دارای نقطهٔ مشترکند و درنتیجه (بنابر قانون ساختمان مسیر) با آنها، در یک پاره‌خط مشترک است.

نکته. در این مسأله، جالب است که بتوانیم بهترین ارزیابی از پایین و از بالا را، برای تعداد پاره‌خطهای طولانی‌ترین مسیر (طولانی، از نظر تعداد پاره‌خطها) پیدا کنیم.

۴.۲. زاویه

۱.۴.۲. اندازهٔ زاویه

۴۱ . ۴۳۲ درجه

۴۴. $۲۵\frac{۵}{۶}$ گراد

۴۵. ۴۷° و $۵۵'$ و $۳۰''$

۴۶. اندازهٔ زاویهٔ مطلوب برحسب درجه.

$$\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{D+۵}{۱۰}\Rightarrow D=۴۵^\circ$$

۴۷. با توجه به رابطهٔ بین درجه و گراد و رادیان $(\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi})$ G و R را برحسب D محاسبه و در رابطهٔ فرض قرار می‌دهیم.

$$\frac{۱}{D}-\frac{۱}{G}=\frac{R}{۲\pi}\Rightarrow\frac{۱}{D}-\frac{۹}{۱۰D}=\frac{D}{۳۶۰}\Rightarrow$$

$$D^۲=۳۶\Rightarrow D=+۶^\circ \quad , \quad D=-۶^\circ$$

$D=-۶^\circ$ در صورتی قابل قبول است که زاویه درصفحهٔ جهت‌دار اختیار شده باشد.

۵۱. اندازهٔ زاویه برحسب درجه را α فرض می‌کنیم. داریم :

$$۲(۱۸۰^\circ-\alpha)=۲۴+۵(۹۰^\circ-\alpha)\Rightarrow\alpha=۳۸^\circ$$

۵۲. زاویهٔ حاده را α و زاویهٔ منفرجه را β می‌نامیم. داریم :

$$\begin{cases}\alpha+\beta=۱۴۰\\ ۲(۱۸۰-\beta)+۳(۹۰-\alpha)=۳۴۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=۱۴۰\\ -۳\alpha-۲\beta=-۲۹۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\alpha=۱۰^\circ \qquad \beta=۱۳۰^\circ$$

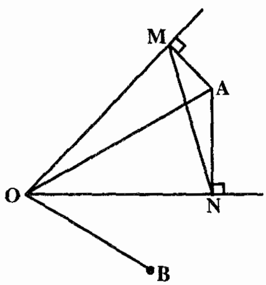
۵۷. دو زاویهٔ مجاور AOB و BOC را درنظر می‌گیریم. اگر OD و 'OD نیمسازهای این دو زاویه باشند، داریم :

$$D\hat{O}D' = D\hat{O}B + B\hat{O}D' = \frac{A\hat{O}B}{۲} + \frac{B\hat{O}C}{۲} = \frac{A\hat{O}B + B\hat{O}C}{۲}$$

یعنی اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور مساوی نصف مجموع آن دو زاویه است. حال اگر دو زاویه، مجاور، و متمم باشند، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای آنها مساوی °۴۵ است. واگر دو زاویهٔ مجاور، مکمل باشند، اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهایشان مساوی °۹۰ است.

۵۹. توجه داشته باشید که نقطه‌های N،M،A و O بر یک دایره واقعند.

۶۰. با توجه به این که مجموع این ۴ زاویه، °۳۶۰ است، هر چهار زاویه حاده نیستند و هر چهار زاویه منفرجه نیز نمی‌توانند باشند، پس حکم مسأله برقرار است.



۲ . ۴ . ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۱. دو زاویهٔ A'OB و 'AOB که ضلعهایشان دوبه‌دو برهم عمود می‌باشند متساوی‌اند. پس اگر OC نیمساز زاویهٔ AOB باشد، نیمساز زاویهٔ 'A'OB نیز می‌باشد. یعنی نیمسازهای دو زاویهٔ AOBو 'A'OB برهم منطبق می‌باشند. از آن‌جا داریم :

$$A\hat{O}B + A'\hat{O}B' = ۲A\hat{O}C + ۲C\hat{O}A' = ۲(A\hat{O}C + C\hat{O}A')$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B + A'\hat{O}B' = ۲A\hat{O}A' = ۱۸۰^\circ$$

پس زاویه‌های AOB و 'A'OB مکمل یکدیگرند.

۶۵. از روی شکل می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} B\hat{O}D = B\hat{O}C + C\hat{O}D \\ A\hat{O}D = A\hat{O}C - C\hat{O}D \end{cases}$$

اما با توجه به اینکه $A\hat{O}C = B\hat{O}C$ است، با کم کردن دو رابطه از هم خواهیم داشت :

$$B\hat{O}D - A\hat{O}D = ۲C\hat{O}D$$

۶۷. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲ . ۴ . ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۹. اگر این نیمساز را OE بنامیم، داریم :

$$A\hat{O}E = E\hat{O}B = ۹۰^\circ \Rightarrow OE \perp AB$$

۷۲. بنا به فرض $\hat{۴} = \hat{۱}$ و $\hat{۳} = \hat{۲}$ است. از طرفی داریم :

$$\hat{۱}+\hat{۲}+\hat{۳}+\hat{۴} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲(\hat{۱}+\hat{۲}) = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{۱}+\hat{۲} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ$$

پس دو نیمخط OA و OC متقابل می‌باشند واین دونیمخط نیمسازهای دو زاویهٔ محدب و مقعر BOD می‌باشند.

۷۳. ۷۵ زاویهٔ منفرجه

۲ . ۴ . ۴. مسأله‌های ترکیبی

۷۴. ۱. $x\hat{o}y = ۹۰^\circ$ و $y\hat{o}z = ۳۰^\circ$ و $z\hat{o}t = ۹۰^\circ$ و $t\hat{o}x = ۱۵۰^\circ$.

۲. $t'\hat{o}x = ۳۰^\circ$ و $t'\hat{o}y = ۶۰^\circ$.

۳. $z\hat{o}u = ۱۵^\circ = \frac{۱}{۲} z\hat{o}y$. پس ou نیمساز زاویهٔ yoz است.

۷۵. اگر یک زاویه را α فرض کنیم زاویه دیگر $۱۸۰^\circ - \alpha$ است و داریم :

۱. $\alpha = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = ۹۰^\circ$

۲. $۲\alpha = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$

۳. $n\alpha = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow (n+۱)\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{n+۱}$

۸۱. الف. $x = ۷۵^\circ \ , \ y = ۷۵^\circ$

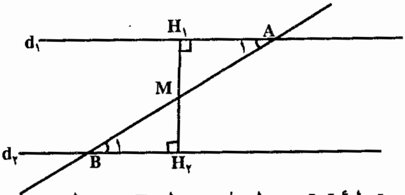
ب. $x = ۱۱۵^\circ \ , \ y = ۱۱۵^\circ$

پ. $x = ۵۰^\circ \ , \ y = ۷۰^\circ$

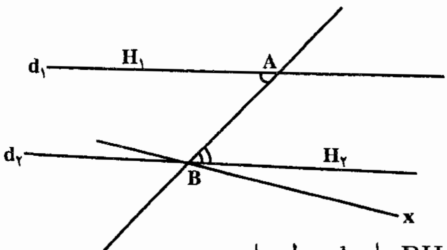
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳

۱.۳. تعریف و قضیه

۸۲. اگر این دو خط متوازی نباشند، در یک نقطه متقاطع خواهند بود و در این صورت از یک نقطه خارج یک خط، دو خط موازی آن رسم شده است که این خلاف اصل توازی اقلیدس است و ممکن نیست.



۸۶. دو خط موازی d_1 و d_2 را درنظر می‌گیریم و نقطه‌های برخورد مورب Δ با این دو خط را A و B می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است. از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB خطی عمود برخطهای موازی d_1 و d_2 رسم می‌کنیم تا این دو خط را بترتیب در H_1 و H_2 قطع کند، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MH_1A و MH_2B همنهشتند ($\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$، $A\hat{M}H_1 = B\hat{M}H_2$ و $MA = MB$) در نتیجه : $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.



۸۷. از نقطهٔ B خط Bx را موازی d_1 رسم می‌کنیم. بنابه قضیهٔ قبل می‌دانیم که

$$H_1\hat{A}B = A\hat{B}x$$

از طرفی بنا به فرض $H_1\hat{A}B = A\hat{B}H_2$

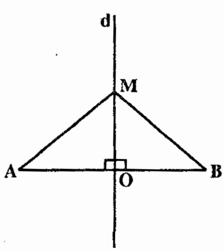
درنتیجه $A\hat{B}x = A\hat{B}H_2$. یعنی Bx بر BH_2 یا d_2 منطبق است.

نکته. می‌توان گفت : شرط لازم و کافی برای آن که دو خط موازی باشند، آن است که اگر خط سومی آنها را قطع کند، زاویه‌های متبادل داخلی متساوی باشند.

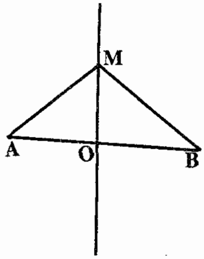
نتیجه. از این قضیه نتیجه‌های زیر به دست می‌آید :

۱. اگردو خط موازی را خط سومی قطع کند، هر دو زاویهٔ متقابل داخلی مکمل یکدیگرند و بعکس.

۲. اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، هر دو زاویهٔ متقابل داخلی و خارجی متساوی‌اند و بعکس.



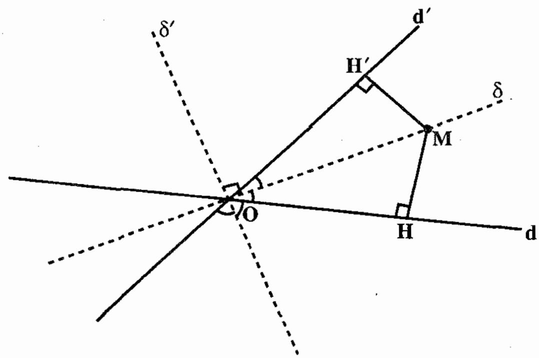
۸۹. پاره‌خط AB و عمود منصف آن خط d را که از نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB می‌گذرد درنظر می‌گیریم. اگر M نقطه‌ای اختیاری واقع بر عمود منصف پاره خط AB باشد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAO و MBO همنهشتند، پس $MA = MB$ است.



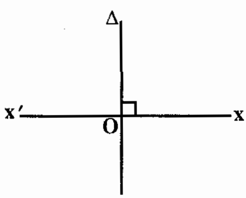
۹۰. پاره‌خط AB را درنظر می‌گیریم. اگر M نقطه‌ای باشد که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد یعنی $MA = MB$. از نقطهٔ M به نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم. دو مثلث MAO و MBO به دلیل برابری سه ضلع همنهشتند. پس $\hat{MOA} = \hat{MOB} = 90°$ یعنی MO عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته. به طور کلی می‌توان گفت : شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای بر عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، آن است که از دوسر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد.

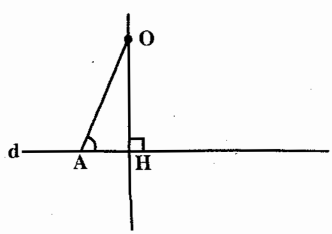
۹۱. دو خط d و d′ متقاطع در نقطهٔ O و نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط، یعنی خطهای δ و δ′ را رسم می‌کنیم. اگر M نقطه‌ای واقع بر نیمساز δ باشد و عمودهای MH و MH′ را بر d و d′ رسم کنیم، از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OMH′ (در دو حالت) قضیه ثابت می‌شود.

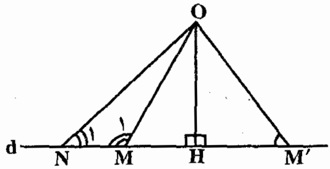


۹۲. نیمساز زاویهٔ نیمصفحهٔ x′Ox یکتاست.



۹۳. با استفاده از زاویهٔ خارجی مثلث و یا برهان خلف، قضیه را ثابت کنید.



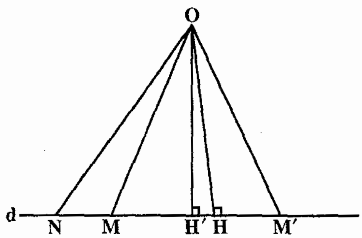


۹۴. ۱. اگر OH و OM نسبت به خط d، بترتیب عمود و مایل باشند، در مثلث قائم الزاویهٔ OHM داریم:

$$O\hat{M}H < O\hat{H}M \Rightarrow OH < OM$$

۲. اگر دو مایل OM و OM′ چنان رسم شده باشد که HM = HM′ باشد، از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OM′H′ نتیجه می‌شود که OM = OM′ است.

۳. در مثلث OMH زاویهٔ M_1 زاویهٔ برونی مثلث OMH است. پس $\hat{M}_1 > ۹۰^\circ$ یعنی زاویهٔ M_1 منفرجه است. و در مثلث ONH زاویهٔ N_1 حاده است؛ پس $\hat{M}_1 > \hat{N}_1$ ، و در نتیجه در مثلث OMN ، ON > OM است.



۹۵. ۱. اگر OH کوتاهترین پاره‌خط محدود بین نقطهٔ O و خط باشد، برخط d عمود است. زیرا که اگر OH برخط d عمود نباشد، باید پاره‌خط دیگری مانند OH′ بر d عمود باشد و در آن صورت عمود OH′ از مایل OH کوچکتر خواهد بود و این خلاف فرض است و ممکن نیست. بنابراین OH′ و هر خط دیگری که از نقطهٔ O می‌گذرد، نمی‌تواند برخط d عمود باشد و در نتیجه OH⊥d است.

۲. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM و OHM′ برابرند پس HM′ = HM .

۳. با فرض ON > OM ثابت می‌شود که HN > HM است. اثبات به کمک برهان خلف انجام می‌شود.

۳ .۲. زاویه

۳ .۲ .۱. اندازهٔ زاویه

۹۶. گزینهٔ (ج) درست است.

۹۷. گزینهٔ (ج) درست است.

۹۸. $x = ۳۰^\circ$ و $y = ۶۰^\circ$

۹۹. الف. $x = ۵۰^\circ$ ، $y = ۱۳۰^\circ$ ، $z = ۵۰^\circ$

ب. $x = ۵۲^\circ$ ، $y = z = ۱۲۲^\circ$

پ. $x = ۳۰^\circ$ ، $y = z = ۸۰^\circ$

ت. $x=60^\circ$ ، $y=50^\circ$ ، $z=130^\circ$

ث. $x=y=40^\circ$ ، $z=320^\circ$

ج. $x=y=115^\circ$ ، $z=65^\circ$

۱۰۰. الف. $x=100^\circ$ ، $y=100^\circ$ ، $z=35^\circ$ ، $p=45^\circ$

ب. $x=70^\circ$ ، $y=70^\circ$ ، $z=50^\circ$ ، $p=60^\circ$ و $q=120^\circ$

۳. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۰۱. در شکل داده شده، تفاضل دو زاویه یک قائمه است.

۳. ۳. پاره‌خط

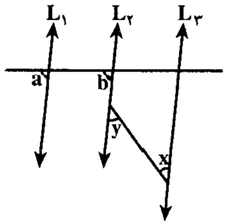
۳. ۳. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۰۳. از نقطهٔ O عمود OH را بر AB فرود آورید.
۱۰۵. از نقطهٔ O عمود OH را بر خط xy فرود آورید (نقطهٔ H پای عمود است) و ثابت کنید که $A'A''=OH=B'B''$ است.

۳. ۴. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۳. ۴. ۱. خطها موازی‌اند

۱۰۶. از $a=b$ نتیجه می‌شود که $L_1 \| L_2$ و از $x=y$ نتیجه می‌شود که $L_2 \| L_3$ ، در نتیجه $L_1 \| L_3$ است.



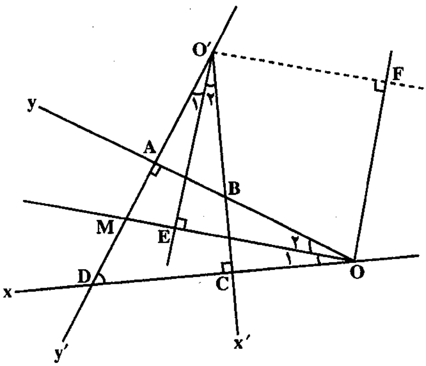
۱۱۰. گزینهٔ (ج) درست است.

۳.۴.۲. خطها برهم عمودند.

۱۱۲. مجموع دو زاویهٔ متقابل A و B برابر ۱۸۰ درجه است.

۱۱۴. ثابت کنید، $MB = MC$ ، یعنی مثلث MBC متساوی‌الساقین است.

۱۱۵. نقطهٔ تقاطع نیمسازهای داخلی زاویه‌های O و O' را E و نقطهٔ برخورد OE با AD را M می‌نامیم. با توجه به این که زاویهٔ $O'ED$ زاویهٔ خارجی مثلث $O'ME$ و زاویهٔ $O'ME$ زاویهٔ خارجی مثلث OMD است، پس $\hat{E} = \hat{M} + \hat{O}'_1$ و $\hat{M} = \hat{D} + \hat{O}_1$ است. در نتیجه $\hat{E} = \hat{D} + \hat{O}_1 + \hat{O}'_1$ می‌باشد. اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'CD$ ، $\hat{D} + 2\hat{O}'_1 = 90^\circ$. و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAD، $\hat{D} + 2\hat{O}_1 = 90^\circ$. پس خواهیم داشت : $2\hat{D} + 2(\hat{O}_1 + \hat{O}'_1) = 180^\circ$ یا $\hat{D} + \hat{O}_1 + \hat{O}'_1 = 90^\circ$ ، اما $\hat{E} = \hat{D} + \hat{O}_1 + \hat{O}'_1$ است. پس $O'\hat{E}O = 90^\circ$ می‌باشد، یعنی نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ حاده برهم عمودند. نیمسازهای خارجی این دو زاویه نیز برهم عمودند زیرا چهارضلعی $O'EOF$ که سه زاویهٔ قائمه دارد، زاویهٔ چهارمش نیز قائمه است.



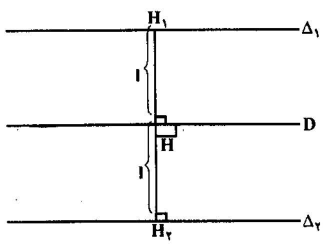
۳.۴.۳. خط، نیمساز است

۱۱۶. مثلث MAB متساوی‌الساقین است.

۱۱۸. OM نیمساز زاویهٔ داخلی xOy است.

۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۱۹. این مکان هندسی دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی خط D در دوطرف آن، و به فاصلهٔ L از آن می‌باشند.



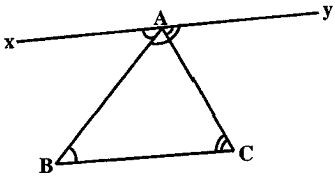
۱۲۰. محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط SF با خطی که به فاصلهٔ ۹ متر موازی ضلع d از ساختمان شهرداری رسم شود، جواب مسأله است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴

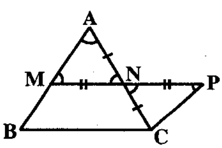
۱.۴. مثلث در هر حالت

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

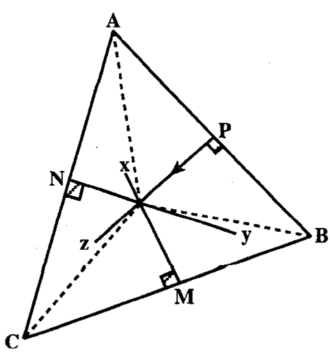
۱۲۱. مثلث ABC را درنظر گرفته از رأس A خط xy را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $x\hat{A}B=\hat{B}$ و $y\hat{A}C=\hat{C}$ از طرفی $x\hat{A}B+B\hat{A}C+C\hat{A}y=180^\circ$ است. پس $\hat{B}+\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ و یا $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$.



۱۲۵. پاره‌خط MN را به اندازهٔ خود از طرف نقطهٔ N تا نقطهٔ P امتداد دهید و از P به C وصل کنید. سپس از تساوی مثلثها استفاده کنید و ثابت کنید که MB∥PC و MB = PC است.



۱۲۷. در مثلث ABC نیمخطهای Mx و Ny عمودمنصفهای دو ضلع BC و AC در نقطه‌ای مانند O تلاقی می‌کنند (چرا؟) ثابت می‌کنیم که Pz عمودمنصف ضلع AB هم از نقطهٔ O می‌گذرد. برای اثبات این قسمت می‌توان نوشت:

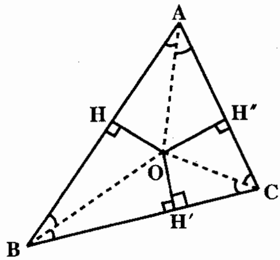


$$O \in Mx \Rightarrow OB = OC$$

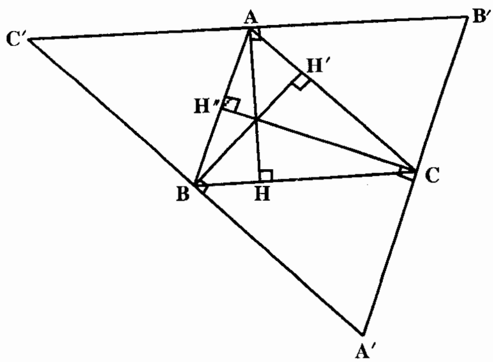
$$\Rightarrow OB = OA \Rightarrow O \in Pz$$

$$O \in Ny \Rightarrow OA = OC$$

۱۲۸. نیمسازهای دو زاویهٔ درونی B و Cرا رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم. از O عمودهای OH، OH' و OH'' را بترتیب، بر ضلعهای AB ، BC و AC فرود می‌آوریم. می‌دانیم که $OH = OH'$ و $OH' = OH''$ است. پس $OH = OH''$ یعنی نیمساز زاویهٔ درونی A نیز از نقطهٔ O می‌گذرد.

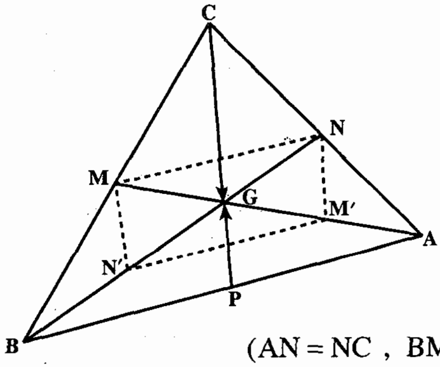


۱۳۰. برای اثبات این قضیه ثابت می‌کنیم که ارتفاعهای هر مثلث، عمودمنصفهای ضلعهای مثلث دیگری هستند و بنابراین باید همرس باشند. برای این منظور از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی با ضلعهای مقابل رسم می‌کنیم. این خطها دوبه‌دو یکدیگر را قطع



می‌کنند. (چرا؟) و از تقاطع آنها مثلث $A'B'C'$ پدید می‌آید (شکل). چهارضلعی $AB'CB$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AB' = BC$ به دلیل مشابه $AC' = BC$ و در نتیجه $AB' = AC'$. از طرفی داریم:

$(AH \perp BC \ , \ BC \| B'C') \Rightarrow AH \perp B'C'$، پس AH عمودمنصف ضلع $B'C'$ از مثلث $A'B'C'$ است. به دلیل مشابه ثابت می‌شود که BH' عمودمنصف $A'C'$ و CH'' عمودمنصف $A'B'$ است. می‌دانیم که سه عمودمنصف ضلعهای هر مثلث همرسند. بنابراین ارتفاعهای مثلث ABC همرسند.



۱۳۱. AM و BN میانه‌های نظیر دو رأس A و B از مثلث ABC در نقطه‌ای مانند G تلاقی می‌کنند (چرا؟). اگر نقطه‌های M' و N' بترتیب وسطهای پاره‌خطهای AG و BG باشند، در مثلث ABC :

$$(AN = NC \ , \ BM = MC) \Rightarrow (MN \| AB \ , \ MN = \frac{1}{2} AB)$$

و در مثلث AGB :

$$(AM' = M'G \ , \ BN' = N'G) \Rightarrow (M'N' \| AB \ , \ M'N' = \frac{1}{2} AB)$$

بنابراین : $MN \| M'N'$ ، $MN = M'N'$.

یعنی چهارضلعی $MNM'N'$ متوازی‌الاضلاع است و بنابراین قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند. پس $GN' = GN$ و $GM' = GM$ و در نتیجه $BN' = N'G = GN$ و $AM' = M'G = GM$.

یعنی دو میانهٔ AM و BNدر نقطه‌ای برخورد می‌کنند که از وسط هر ضلع در فاصله‌ای مساوی $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانهٔ وارد بر آن ضلع است. چون میانهٔ نظیر ضلع سوم نیز به همین دلیل با هریک از دو میانهٔ مزبور در نقطه‌ای به فاصلهٔ ثلث اندازهٔ هر میانه از وسط ضلع نظیر تلاقی می‌کند، ناچار آن میانه نیز از نقطهٔ G می‌گذرد و حکم ثابت است. نقطهٔ همرسی میانه‌ها، مرکز ثقل مثلث است.

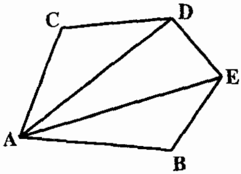
۱۳۲. زاویهٔ خارجی ACx از مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. میانهٔ BM را از طرف نقطهٔ M به اندازهٔ $BM = MD$ امتداد می‌دهیم و پاره خط DC را رسم می‌کنیم. از تساوی دو مثلث BMA و DMC نتیجه می‌شود که $\hat{A} = \hat{C}_1$ و چون M بین A و C است، MD در داخل زاویهٔ ACx قرار می‌گیرد و CD در داخل آن زاویه واقع می‌شود. پس زاویهٔ ACDجزیی از زاویهٔ ACx است و در نتیجه کوچکتر از آن است. بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} \hat{C}_1 < A\hat{C}x \\ \hat{A} = \hat{C}_1 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} < A\hat{C}x$$

به همین ترتیب با استفاده از زاویهٔ بین BC و امتداد AC می‌توان ثابت کرد $\hat{B} < A\hat{C}x$.

۱۳۳. پاره خط AB و خط شکستهٔ ACDEB را که محیط بر پاره خط AB است، درنظر می‌گیریم. از A به D و E وصل می‌کنیم، داریم :

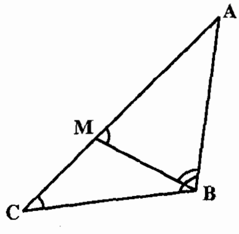
$$\begin{cases} AD < AC + CD \\ AE < AD + DE \\ AB < AE + EB \end{cases}$$



از جمع کردن طرفهای نظیر رابطه‌ها نتیجه می‌شود : $AB < AC + CD + DE + EB$ ؛ و حکم ثابت است.

۱۳۴. خط شکستهٔ محدب ABCD و خط شکستهٔ AMNPQRD محیط بر آن را درنظر بگیرید. پاره‌خطهای AB و BC را امتداد دهید تا خط شکستهٔ AMNPQRD را قطع کنند. آن‌گاه از قضیهٔ یک پاره‌خط و خط شکستهٔ محیط بر آن استفاده کنید.

۱۳۵. در مثلث ABC که $AC > AB$ است، بر ضلع AC پاره خط $AM = AB$ را جدا می‌کنیم و از M به B وصل می‌کنیم. مثلث AMB متساوی الساقین است. پس $A\hat{M}B = A\hat{B}M$ اما نقطهٔ M بین دو نقطهٔ A و C است. پس MB داخل زاویهٔ ABC و در نتیجه (۱) $A\hat{M}B < A\hat{B}C$ است. از طرفی زاویهٔ $A\hat{M}B$ زاویهٔ خارجی مثلث MBC است. پس (۲) $\hat{C} < A\hat{M}B$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{C} < \hat{B}$.



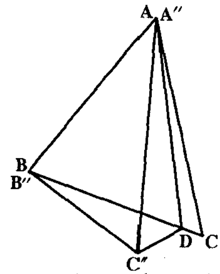
۱۳۶. اگر در این مثلث $AC > AB$ نباشد، ناچار کوچکتر از آن، یا با آن مساوی است. امّا اگر $AC = AB$ ، لازم می‌آید که $\hat{B} = \hat{C}$ و این خلاف فرض است و می‌دانیم که چنین نیست و اگر $AC < AB$ باشد، لازم می‌آید که $\hat{B} < \hat{C}$ باشد و این نیز خلاف فرض است. پس $AC > AB$ است.

۱۳۷. بنابر اصل نامساوی مثلثی داریم : $a < b + c$ از آن‌جا نتیجه می‌شود $b > |a - c|$ و $c > |a - b|$. به همین ترتیب چون $b < a + c$ است، $a > |b - c|$.

نتیجه. در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر، و از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر بزرگتر است. به عنوان مثال داریم :

$$|b - c| < a < b + c$$

۱۳۹. هم‌اندازهٔ مثلث $A'B'C'$ را به صورت $A''B''C''$ چنان بر مثلث ABC قرار می‌دهیم که $A''B''$ بر مساوی آن AB منطبق شود و ضلعهای AC و $A''C''$ در یک طرف ضلع AB واقع شوند. چون $\hat{A} > \hat{A}''$ است ضلع $A''C''$ در داخل زاویهٔ BAC واقع می‌شود



و اگر نیمساز زاویهٔ ADC'' را رسم کنیم و این نیمساز ضلع BC را در نقطهٔ D قطع کند، دو مثلث ADC و ADC'' باهم برابرند. پس $DC = DC''$. و در مثلث $B''C''D$ داریم :

$$B''D + DC'' > B''C'' \Rightarrow B''D + DC > B''C'' \Rightarrow BC > B''C'' = B'C'$$

۱۴۰. **به روش برهان خلف.** اگر $\hat{A} > \hat{A}'$ نباشد، یا $\hat{A} < \hat{A}'$ و یا $\hat{A} = \hat{A}'$ است که در صورت اوّل $BC < B'C'$ و در صورت دوم $BC = B'C'$ است که هردو مخالف فرض است. بنابراین $\hat{A} > \hat{A}'$ و حکم برقرار است.

۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویهٔ مثلث داده شده

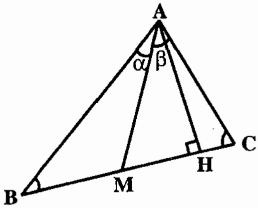
۱۴۱. $\hat{C} = ۸۱^\circ$ و $۱۰'$

۱۴۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۴۳. اگر هیچ یک از زاویه‌های مثلث از ۶۰° کوچکتر نباشند، یا هرکدام برابر ۶۰° باشند که در این صورت مثلث متساوی‌الاضلاع است، و این خلاف فرض است، و یا یک زاویه مساوی ۶۰° و دو زاویهٔ دیگر از ۶۰° بزرگتر است و یا هرسه زاویهٔ مثلث از ۶۰° بزرگتر می‌باشند، که در دو حالت اخیر، مجموع زاویه‌های داخلی مثلث از ۱۸۰° بیشتر خواهد شد و این نشدنی است. پس هر مثلث مختلف‌الاضلاع لااقل یک زاویهٔ کوچکتر از ۶۰° دارد و به همین ترتیب ثابت می‌شود که هر مثلث مختلف‌الاضلاع، لااقل یک زاویهٔ بزرگتر از ۶۰° دارد.

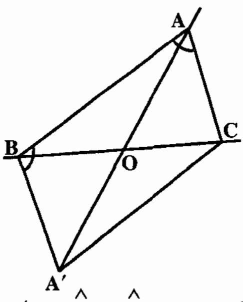
۱۴۴. ابتدا فرض می‌کنیم که ضلعهای AB و AC متساوی نباشند. اگر میانهٔ AM را رسم کنیم طبق فرض داریم : $MB = AH = MC$ اما $AM > AH$ است. پس $AM > MB$ و در مثلث AMB ، (۱) $\hat{B} > \alpha$ است. همچنین در مثلث MAC ، $MA > MC$ و در نتیجه (۲) $\hat{C} > \beta$ است. از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

$$\hat{B}+\hat{C}>\alpha+\beta=\hat{A} \Rightarrow \text{۲ قائمه} - \hat{A} > \hat{A} \Rightarrow ۲\hat{A} < \text{۲ قائمه} \Rightarrow \hat{A} < \text{۱ قائمه}$$



حال اگر $AB = AC$ باشد، ارتفاع AH و میانهٔ AM بر هم منطبق می‌گردند و داریم :

$$\begin{cases}\hat{B}=\alpha \\ \hat{C}=\beta\end{cases} \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=\alpha+\beta=\hat{A} \Rightarrow \text{۲ قائمه} - \hat{A} = \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \text{۱ قائمه}$$



۱۴۵. در مثلث ABC میانهٔ AO را از طرف O به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد دهید و از A' به نقطه‌های B و C وصل کنید. در متوازی الاضلاع حاصل زاویه‌های $A'BA$ و BAC مکمل یکدیگرند.

۱۴۷. می‌دانیم که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$. از آن‌جا زاویهٔ $\hat{A}$ را برحسب $\hat{B}$ و $\hat{C}$ محاسبه و در رابطهٔ داده شده قرار می‌دهیم :

$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{B}-\hat{C}\,,\ \frac{\hat{A}}{۵}+\frac{\hat{B}}{۸}+\frac{\hat{C}}{۱۳}=۲۱ \Rightarrow \frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}-\hat{C}}{۵}+\frac{\hat{B}}{۸}+\frac{\hat{C}}{۱۳}=۲۱ \Rightarrow$$

$$۳۹\hat{B}+۶۴\hat{C}=۷۸۰۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=(۳۹k)^\circ$$

$$k=۱ \Rightarrow \hat{C}=۳۹^\circ\ ,\ \hat{B}=۱۳۶^\circ\ ,\ \hat{A}=۵^\circ$$

$$k=۲ \Rightarrow \hat{C}=۷۸^\circ\ ,\ \hat{B}=۷۲^\circ\ ,\ \hat{A}=۳۰^\circ$$

$$k=۳ \Rightarrow \hat{C}=۱۱۷^\circ\ ;\ \hat{B}=۸^\circ\ ,\ \hat{A}=۵۵^\circ$$

$k=۴ \Rightarrow \hat{C}=۱۵۶^\circ\ ,\ \hat{B}=-۵۶^\circ$ غیرقابل قبول

۱۴۸. اگر $\alpha<۹۰^\circ$ و $\beta<۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌های مثلث ABC برابرند با $۹۰^\circ-\alpha$ و $۹۰^\circ-\beta$ و $\alpha+\beta$؛ اگر $\alpha>۹۰^\circ$ و $\beta<۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌ها برابرند با $\alpha-۹۰^\circ$، $۹۰^\circ+\beta$ و $۱۸۰^\circ-\alpha-\beta$؛ اگر $\alpha<۹۰^\circ$ و $\beta>۹۰^\circ$، آن وقت زاویه‌ها برابرند با $۹۰^\circ+\alpha$، $\beta-۹۰^\circ$ و $۱۸۰^\circ-\alpha-\beta$.

۲.۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه در مثلثها و شکلهای دیگر

۱۵۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABD داریم:

$$۲\,A\hat{D}B=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ \Rightarrow A\hat{D}B=۶۷^\circ\;,\;۳۰'$$

و از آن‌جا در مثلث متساوی الساقین ADC، زاویهٔ رأس ADC برابر است با $۱۱۲^\circ,۳۰'$.
درنتیجه خواهیم داشت:

$$۲x=۱۸۰^\circ-۱۱۲^\circ,\;۳۰'=۶۷^\circ,۳۰'\Rightarrow x=۳۳^\circ,۴۵'$$

۱۵۱. الف. $x=۳۵^\circ$

ب. $x=۴۰^\circ$

پ. $x=۹۰^\circ$

۱۵۲. الف. $x=۲۵^\circ$، $y=۱۱۵^\circ$؛

ب. $x=۱۵۰^\circ$، $y=۷۰^\circ$؛

پ. $x=۳۵^\circ$، $y=۸۰^\circ$؛

ت. $x=۷۰^\circ$، $y=۵۰^\circ$.

۱۵۳. اگر D نقطهٔ برخورد ضلع BC از مثلث ABC با $H_۲H_۳$ ضلع نظیرش از مثلث ارتفاعی (پادک) باشد، داریم:

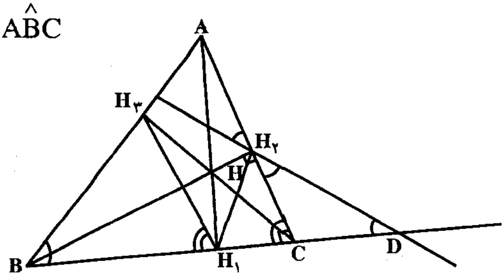
$$\hat{D}=B\hat{C}H_۲-C\hat{H}_۲D \quad (۱)$$

اما

$$C\hat{H}_۲D=H_۳\hat{H}_۲A=A\hat{B}C \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

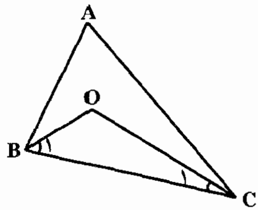
$$\hat{D}=A\hat{C}B-A\hat{B}C$$



۱۵۴. اگر O نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ درونی B و C از مثلث ABC باشد، $B\hat{O}C=۱۱۹^\circ$ است.

۱۵۵. گزینهٔ (د) درست است.

۱۵۶. در مثلث ABC داریم :



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۹۰^\circ \qquad (۱)$$

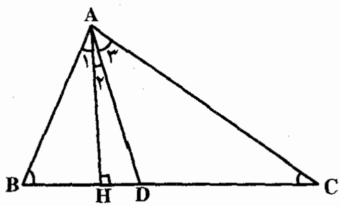
و در مثلث BOC داریم :

$$\hat{B}_۱+\hat{C}_۱+\hat{O}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\hat{O}=۱۸۰^\circ \qquad (۲)$$

از کم‌کردن رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

$$\hat{O}-\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow B\hat{O}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$$

۱۵۸. گزینهٔ (الف) درست است.



۱۵۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم : $\hat{B}=۹۰^\circ-\hat{A}_۱$ (۱) و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH داریم : (۲) $\hat{C}=۹۰^\circ-(\hat{A}_۲+\hat{A}_۳)$ از طرفی AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است پس (۳) $\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=\hat{A}_۳$. اگر رابطه‌های (۱) و (۲) را از هم کم کنیم با توجه به رابطهٔ (۳) خواهیم داشت :

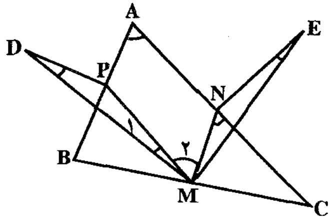
$$\hat{B}-\hat{C}=۲\hat{A}_۲ \Rightarrow \hat{A}_۲=H\hat{A}D=\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$$

۱۶۰. دو مثلث NME و PDM به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند زیرا :

$PM = \frac{AC}{۲} = NE$ و $DP = \frac{AB}{۲} = NM$ و $\hat{P} = \hat{N} = ۹۰^\circ + \hat{A}$ و چهارضلعی APMN متوازی‌الاضلاع است. زیرا $AP \| MN$ و $AN \| PM$ است. پس :

$\hat{N}_۱ = \hat{M}_۲ = \hat{A}$ و $\hat{M}_۱ = \hat{D}$ و $\hat{M}_۳ = \hat{E}$. در مثلث MNE داریم :

$$\hat{E} + \hat{N}_۱ + \hat{M}_۳ = ۹۰^\circ \rightarrow \hat{M}_۳ + \hat{M}_۲ + \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ \rightarrow D\hat{M}E = ۹۰^\circ$$

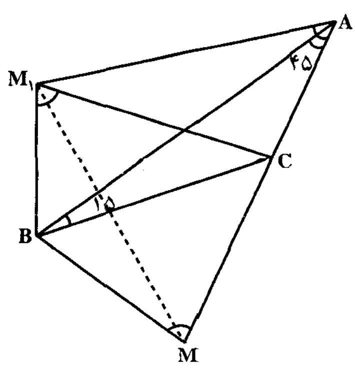


۱۶۱. گزینهٔ (هـ) درست است. زیرا :

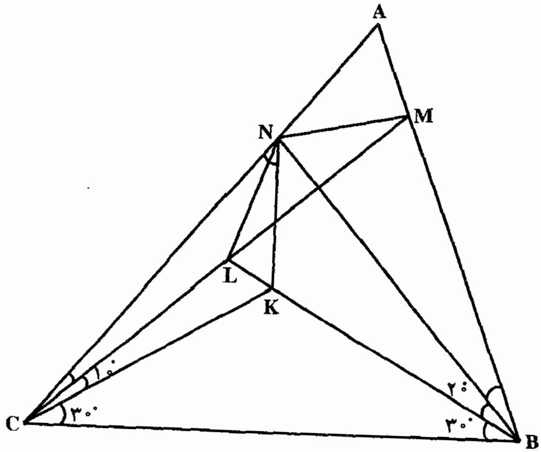
$$B\hat{A}D = C\hat{A}B - C\hat{A}D = C\hat{A}B - C\hat{D}A = C\hat{A}B - (B\hat{A}D + \hat{B})$$

$$\Rightarrow ۲B\hat{A}D = C\hat{A}B - \hat{B} = ۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}D = ۱۵^\circ$$

۱۶۲. فرض کنید $M_۱$ قرینهٔ M نسبت به BC، و CB نیمساز زاویهٔ $MCM_۱$ باشد. چون $M_۱\hat{C}A = ۶۰^\circ$ و $AC = \frac{۱}{۲}CM_۱$ ، داریم: $M_۱\hat{A}C = ۹۰^\circ$ ، بنابراین AB نیمساز زاویهٔ $M_۱AC$ است. بعلاوه CB نیمساز زاویهٔ $M_۱CM$ است، یعنی B، از خطهای راست $M_۱C$ و $M_۱A$ ، به یک فاصله است و روی نیمساز زاویهٔ مجاور به زاویهٔ $AM_۱C$ قرار دارد. بنابراین، $B\hat{M}C = B\hat{M}_۱C = ۷۵^\circ$.



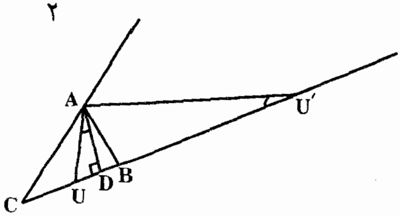
۱۶۳. نقطه‌ای مانند K (شکل) طوری اختیار می‌کنیم که $K\hat{B}C = K\hat{C}B = ۳۰^\circ$، و نقطهٔ برخورد خطهای راست MC و BK را به L نشان می‌دهیم. از آن جا که ΔBNC متساوی‌الساقین است ($N\hat{B}C = N\hat{C}B = ۵۰^\circ$)، $K\hat{N}C = ۴۰^\circ$. L نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث NKC است (LK و LC نیمسازها هستند). در نتیجه، NL هم نیمساز زاویهٔ KNC است و $L\hat{N}B = ۶۰^\circ$؛ همچنین، BN نیمساز زاویهٔ MBL است؛ بعلاوه، BN بر ML عمود است؛ بنابراین، BN و ML را نصف می‌کند و $M\hat{N}B = B\hat{N}L = ۶۰^\circ$ و $N\hat{M}C = ۳۰^\circ$.



۱۶۴. مثلثهای ABB' و ACC' متساوی‌الساقینند؛ پس $\hat{B}' = \frac{\hat{B}}{۲}$ و $\hat{C}' = \frac{\hat{C}}{۲}$ و $B'\hat{A}C' = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}$.

۱۶۵. دو ضلع زاویه‌ای که نیمساز خارجی AU' (شکل) با قاعدهٔ BC می‌سازد، بترتیب، بر نیمساز داخلی AU و ارتفاع AD عمودند؛ بنابراین:

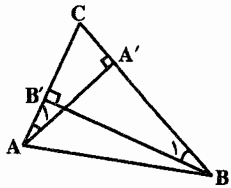
$$A\hat{U}'U = U\hat{A}D = \frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{۲}$$



۴.۱.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴.۱.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۱۶۷. در هر دو شکل (الف) و (ب) زاویه‌های ADE و AED مکمل زاویه‌های مشخص شده‌اند.



۱۶۸. در دو مثلث $AA'C$ و $BB'C$ دو زاویهٔ $A_۱$ و $B_۱$ هر دو، یک متمم دارند.

۱۷۰. زاویهٔ BOD زاویهٔ خارجی مثلث AOB است. پس: $B\hat{O}D=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}$ و در مثلث COE داریم: $C\hat{O}E=۹۰^\circ-O\hat{C}E=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}$. پس $B\hat{O}D=C\hat{O}E$ است.

۱۷۱. اگر O نقطهٔ تقاطع نیمسازهای BB' و CC' باشد، می‌دانیم که:

$B\hat{O}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}=۹۰^\circ+۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$ است. پس $C'\hat{O}B=۶۰^\circ$ می‌باشد. زاویهٔ $CC'A$ زاویهٔ خارجی مثلث BOC' است پس $C\hat{C'}A=۶۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$ و زاویهٔ $BB'C$ خارجی مثلث BAB' است. پس $B\hat{B'}C=۶۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$ در نتیجه: $B\hat{B'}C=C\hat{C'}A=۶۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$.

۱۷۲. ثابت کنید که $A\hat{B}D=A\hat{D}B=۲\hat{C}$ است.

۱۷۳. زاویهٔ ABC زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین BDE است.

۱۷۹. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۸۰. گزینهٔ (هـ) درست است. زیرا: $x+n+y+w=۱۸۰^\circ$

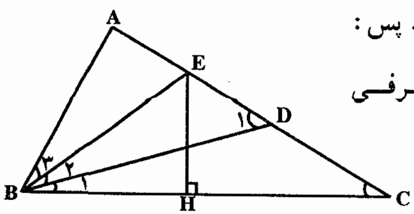
در مثلث AEC؛ $m+a+w+b=۱۸۰^\circ$

و در مثلث BED؛ $\Rightarrow x+y+n=a+b+m$

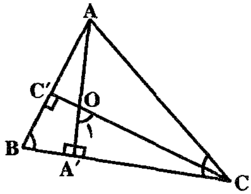
۱۸۱. مثلثهای EBC و ABD متساوی‌الساقینند. پس:

$\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\hat{C}$ و $\hat{B}_۳+\hat{B}_۲=\hat{D}_۱$. از طرفی

$\hat{D}_۱=\hat{B}_۱+\hat{C}$ است. پس:



$$\hat{B}_۳+\hat{C}-\hat{B}_۱=\hat{B}_۱+\hat{C}\Rightarrow\hat{B}_۳=۲\hat{B}_۱\Rightarrow A\hat{B}E=۲D\hat{B}C$$



۱۸۳. اگر نقطهٔ O محل برخورد دو ارتفاع AA' و CC' باشد، داریم : $OA = OA'$ و $\hat{O}_1 = \hat{B}$.

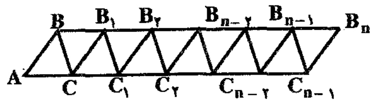
در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OA'C$ و $AA'C$ داریم :

$$tg\,\hat{C} = \frac{AA'}{A'C} \;,\; tg\,\hat{O}_1 = tgB = \frac{A'C}{OA'} \Rightarrow$$

$$tgB.\,tgC = \frac{AA'}{A'C} \times \frac{A'C}{OA'} = \frac{2OA'}{A'C} \times \frac{A'C}{OA'} = 2$$

$$\Rightarrow tgB.\,tgC = 2$$

۱۸۴. اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم زاویه‌های مثلثی مثل ABC، بزرگتر از ۲d باشد. ضلع AC را ادامه می‌دهیم (شکل) و از نقطهٔ C و در سمت راست آن، n − ۱ پاره‌خط CC_1 ، C_1C_2 ، C_2C_3 ، ...، $C_{n-2}C_{n-1}$ را برابر با ضلع AC جدا می‌کنیم :



$$CC_1 = C_1C_2 = \ldots = C_{n-2}C_{n-1} = AC$$

حالا، روی این پاره‌خطها، مثلثهای

$$CB_1C_1 \,،\, C_1B_2C_2 \,،\, \ldots\, C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$$

را برابر مثلث مفروض می‌سازیم، یعنی :

$$\Delta ABC = \Delta CB_1C_1 = \ldots = \Delta C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}$$

اکنون، نقطه‌های B و B_1 ، B_1 و B_2 ، ...، B_{n-2} و B_{n-1} را به وسیلهٔ پاره‌خطهای راستی به هم وصل می‌کنیم (این که، این نقطه‌ها روی یک خط راست واقع باشند، هنوز برای ما معلوم نیست). مثلثهای برابر BCB_1 ، $B_1C_1B_2$ ، $B_2C_2B_3$ ، ...، $B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$ به‌دست می‌آیند.

روی پاره‌خط $B_{n-1}C_{n-1}$ هم، مثلث $B_{n-1}C_{n-1}B_n$ را برابر مثلثهایی که هم‌اکنون به‌وجود آوردیم، می‌سازیم.

روشن است که اگر دو ضلع یک مثلث با دو ضلع از مثلث دیگر برابر و زاویهٔ بین این دو ضلع، در یک مثلث، بزرگتر از زاویهٔ نظیر آن در مثلث دیگر باشد، ضلع سوم مثلث اوّل از ضلع سوم مثلث دوم بزرگتر خواهد بود. این حکم را در مورد مثلثهای ABC و BCB_1 به کار می‌بریم، نتیجه می‌شود : $BB_1 < AC$ و از آن‌جا، $AC - BB_1 > 0$ ، یعنی $AC - BB_1$ یک پاره‌خط است.

از آن‌جا که خط شکسته، همیشه بزرگتر است از پاره‌خطی که دو سر خط شکسته را به

هم وصل می کند، داریم:

$$AB+BB_1\times B_1B_2+\ldots+B_{n-1}B_n+B_nC_{n-1}>AC+CC_1+C_1C_2+\ldots+C_{n-2}C_{n-1}$$

از آن‌جا:

$$AB+n.BB_1+B_nC_{n-1}>n.AC$$

که با توجه به این که $B_nC_{n-1}=AB$، برای هر عدد طبیعی n داریم:

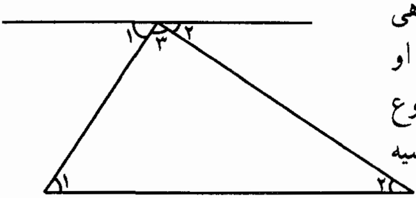
$$2AB+n.BB_1>n.AC\Rightarrow n(AC-BB_1)<2AB$$

نابرابری اخیر، با اصل ارشمیدس متناقض است که می‌گوید: «برای هر دو پاره‌خط دلخواه، می‌توانیم پاره‌خط کوچکتر را به تعداد محدودی تکرار کنیم، به نحوی که، نتیجه، از پاره‌خط دیگر، بزرگتر شود»، بنا بر این اصل، برای پاره‌خطهای $AC-BB_1$ و $2AB$ می‌توان عدد طبیعی n را به اندازهٔ کافی، طوری بزرگ انتخاب کرد که نابرابری زیر برقرار باشد:

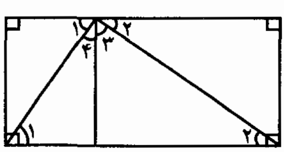
$$n(AC-BB_1)>2AB$$

تضاد منطقی پیش می‌آید. از این جا نتیجه می‌شود، در دستگاه هندسی که، اصل ارشمیدس در مورد آن صادق باشد، مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث نمی‌تواند از 2d بیشتر شود.

۱۸۵. مورخین ریاضی کوشش می کنند این مطلب را روشن کنند که خود ریاضی‌دان نابغه از چه راهی این قضیه را ثابت می‌کرده است. به احتمالی او از مثلث قائم‌الزاویه و با تبدیل آن به مستطیل شروع کرده است. (شکل) و کوشیده است درستی قضیه را در مورد آن ثابت کند.



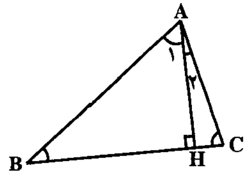
سپس متوجه شده است که هر مثلث می‌تواند، با رسم عمودی از یک رأس به ضلع روبه‌رو، به دو مثلث قائم‌الزاویه و سپس، با دو برابر کردن هر یک از این مثلثها، به دو مستطیل تبدیل شود.



این احتمال هم وجود دارد که فیثاغورس قضیهٔ خود را به کمک خطی که از رأس موازی ضلع روبه‌رو رسم می‌شود، ثابت کرده باشد، ولی در این حالت باید فرض کرد که فیثاغورس از قضیهٔ دو خط موازی که به‌وسیلهٔ خط سوم قطع می‌شوند (و امروز آن را به اقلیدس نسبت می‌دهند)، اطلاع داشته است.

۴.۱.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

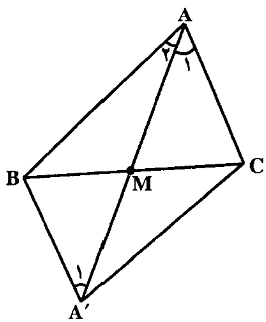
۱۸۶. چون $AB > AC$ است، پس (۱) $\hat{C} > \hat{B}$ می‌باشد. از طرفی در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH داریم :



(۲) $\hat{B}_1 + \hat{A}_1 = \hat{C} + \hat{A}_2$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$ یا $H\hat{A}B > H\hat{A}C$.

۱۸۷. در دو مثلث AMB و AMC ضلع AM مشترک است و $MB = MC$ است و $AB > AC$ می‌باشد، پس $A\hat{M}B > A\hat{M}C$ است.

۱۸۸. میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌نماییم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. پس $A'B = AC$ و $\hat{A}'_1 = \hat{A}_1$ است. اما بنا به فرض $AB > AC$ است پس $AB > A'B$ و در نتیجه در مثلث ABA' داریم $\hat{A}_2 < \hat{A}'_1$ ، پس $\hat{A}_2 < \hat{A}_1$ یا $M\hat{A}B < M\hat{A}C$.

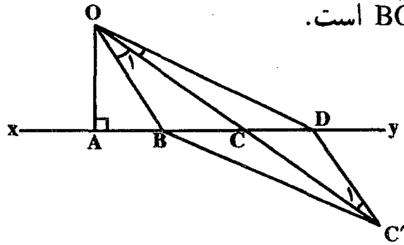


۱۸۹. فرض کنید AD معرف ارتفاع، AL نیمساز و AM میانه باشد. نیمساز را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ A_1 قطع کند. چون MA_1 با AD موازی است، داریم $M\hat{A}_1A = L\hat{A}D$.

اگر $\hat{A} < ۹۰°$ ، آن وقت زاویهٔ میان میانه و نیمساز، از زاویهٔ میان نیمساز و ارتفاع کمتر است و اگر $\hat{A} > ۹۰°$ ، برعکس، اگر $\hat{A} = ۹۰°$ ، زاویه‌ها برابرند.

۱۹۰. یکی از دو پاره‌خط BO یا CO را امتداد دهید تا ضلع روبه‌رو را قطع کند. سپس از ویژگی زاویهٔ برونی مثلث استفاده کنید.

۱۹۲. به عنوان مثال ثابت می‌کنیم که $B\hat{O}C > C\hat{O}D$ است. برای اثبات OC را به اندازهٔ خود از طرف نقطهٔ C تا نقطهٔ C' امتداد می‌دهیم و از C' به D و B وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ODC'B$ متوازی‌الاضلاع است. پس $OB = DC'$ و $\hat{C}'_1 = \hat{O}_1$ است. اما $OB < OD$ است، پس $DC' < OD$ و در مثلث ODC' ، $\hat{C}'_1 > C\hat{O}D$ می‌باشد. در نتیجه $B\hat{O}C > C\hat{O}D$ است.



۳.۱.۴. ضلع

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع

۱۹۳. $9 < a < 2+9 = 11 \Rightarrow a = 10$

۱۹۴. اگر $a = 6$ و $b + c < 10$ و $b - c = 1$ باشد با توجه به شرط مسأله داریم:

$6 < b+c < 10 \Rightarrow b+c = 9$ یا $b+c = 8$ یا $b+c = 7$

از آن‌جا:

$$\begin{cases} b+c=9 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b=5 \\ c=4 \end{array} \right. ، \begin{cases} b+c=8 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b=4/5 \\ c=3/5 \end{array} \right.$$ غیرقابل قبول

$$\begin{cases} b+c=7 \\ b-c=1 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b=4 \\ c=3 \end{array} \right.$$

۱۹۵. داریم:

$$36 = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times 12 \Rightarrow \text{قاعده} = 6$$

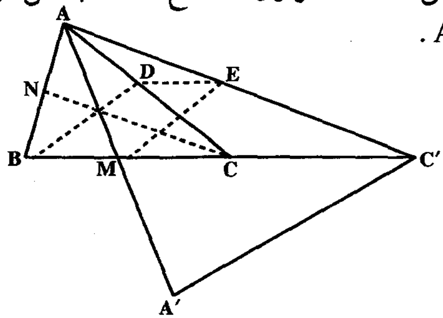
۱۹۶. ۱۲ متر.

۱۹۷. داریم:

$$S = \frac{1}{2} a.h_a \Rightarrow x^2 - 55 = \frac{1}{2}(2x-2)(x-5) \Rightarrow$$

$$x^2 - 55 = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow a = 18$$

۱۹۸. اگر BD و CN دو میانهٔ دیگر مثلث ABC و نقطهٔ E وسط ضلع AC' باشد، با توجه به این که چهارضلعی BMED متوازی‌الاضلاع است، ثابت می‌شود که : $AC' = ۲CN$ و $A'C' = ۲BD$.



۱۹۹. مثلث ABC را در نظر گرفته AA' ، BB' و CC' میانه‌های آن را رسم می‌کنیم. پاره‌خط $C'B'$ را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ K امتداد می‌دهیم و از K به A' وصل می‌کنیم. مثلث $AA'K$ مثلثی است که ضلعهایش میانه‌های مثلث ABC می‌باشند. در این مثلث KL یک میانه است و داریم :

$$KL = \frac{۳}{۴}CK = \frac{۳}{۴}(BC) = \frac{۳}{۴}a$$

چهارضلعی $BB'KA'$ متوازی‌الاضلاع است. از آن‌جا $B'K = \frac{۱}{۲}KC' = BA' = \frac{۱}{۲}BC$.

۲۰۰. خیر، زیرا داریم :

$$۶x + x + ۷ + ۴(x-۱) = ۳۶$$
$$\Rightarrow ۱۱x = ۳۳ \Rightarrow x = ۳$$
$$\Rightarrow ۶x = ۱۸ \text{ و } x + ۷ = ۳ + ۷ = ۱۰ \text{ و } ۴(x-۱) = ۴(۳-۱) = ۸$$
$$۱۰ + ۸ = ۱۸$$

۲.۳.۱.۴. حدود ضلع

۲۰۱. $۲ < a < ۱۲$.

۲۰۲. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲۰۳. گزینهٔ (ب) درست است.

۲۰۴. اگر $\hat{A} = ۹۰^\circ$ باشد، داریم : $a^۲ = b^۲ + c^۲ = ۲۲۵ + ۶۴ = ۲۸۹ \Rightarrow a = ۱۷$

۱. اگر $\hat{A} > ۹۰^\circ$ باشد $a > ۱۷$ و $۱۵ - ۸ < a < ۱۵ + ۸$ یا $۷ < a < ۲۳$ پس : $۱۷ < a < ۲۳$.

۲. اگر $\hat{A} < ۹۰^\circ$ باشد، $a < ۱۷$ و $۷ < a < ۲۳$ پس : $۷ < a < ۱۷$.

۲۰۵. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. اگر AB بزرگترین ضلع مثلث باشد از نصف محیط مثلث کوچکتر است، زیرا اگر AB مساوی نصف محیط مثلث باشد، مجموع دو ضلع دیگر یعنی $AC+BC$ که بزرگتر از AB می‌باشند، از نصف محیط مثلث بزرگتر و در نتیجه مجموع سه ضلع از محیط مثلث بزرگتر خواهد شد و این ممکن نیست. پس ضلع AB از نصف محیط مثلث کوچکتر است. بنابراین هریک از دو ضلع دیگر نیز از نصف محیط مثلث کوچکترند.

۲۰۶. **حالت اول.** یکی از ضلعها از هریک از دو ضلع دیگر بزرگتر است. در این صورت اگر بزرگترین ضلع از $\frac{۱}{۳}$ محیط کوچکتر یا با آن برابر باشد، به طریق اولیٰ هر یک از دو ضلع دیگر کوچکتر از $\frac{۱}{۳}$ محیط خواهند بود و در این صورت مجموع سه ضلع از محیط مثلث کوچکتر می‌شود و این نشدنی است. پس بزرگترین ضلع مثلث از $\frac{۱}{۳}$ محیط مثلث بزرگتر است.

حالت دوم. دو ضلع با هم برابر و بزرگتر از ضلع سوم هستند. در این حالت اگر هر یک از دو ضلع برابر، از $\frac{۱}{۳}$ محیط کوچکتر یا با آن برابر باشند، به طریق اولیٰ، ضلع سوم از $\frac{۱}{۳}$ محیط کوچکتر خواهد بود، و در این صورت نیز مجموع سه ضلع از محیط مثلث کمتر می‌شود و این نشدنی است.

به طریق مشابه ثابت می‌شود که کوچکترین ضلع مثلث از $\frac{۱}{۳}$ محیط مثلث کوچکتر است.

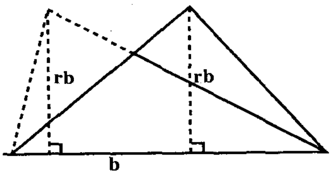
۲۰۷. علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که مثلثهای ABC و DEF متساوی‌الاضلاع و، در ضمن، ضلعهای متناظر آنها، بر هم عمود باشند. از نابرابری

$$d_۰ < \frac{۲}{۳}\min(d_۱, d_۲, d_۳)$$

نتیجه می‌شود که همهٔ زاویه‌های مثلث ABC باید از ۶۰ درجه کمتر باشند که ممکن نیست.

۳.۳.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۰۸. بلی می‌تواند. او باید هر دو میلهٔ اوّل را به بخشهای ۵۰، ۲۵ و ۲۵ سانتی‌متری تقسیم کند.



۲۰۹. گزینهٔ (د) درست است. زیرا فرض کنید نسبت ارتفاع به قاعده r باشد، مثلثهای شکل بعد در شرط (د) صدق می‌کنند، اما شکلهای متفاوت دارند. بنابراین (د) شکل مثلث را مشخص نمی‌کند.

۲۱۰. $۲ < m < \frac{۱۰}{۳}$.

۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴. ارتفاع

۲۱۱. می‌دانیم که $S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB.CC' = \frac{۱}{۲}AC.BB'$. پس $AB.CC' = AC.BB'$ است، اما بنا به فرض $AB > AC$ است، پس $CC' < BB'$ می‌باشد.

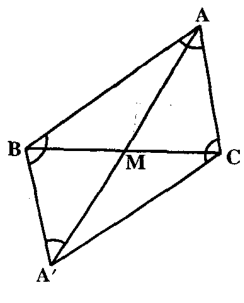
۲۱۲. اگر AA' و BB' و CC' ارتفاعهای مثلث ABC باشند، داریم:

$$AA'.BC = BB'.AC = CC'.AB$$

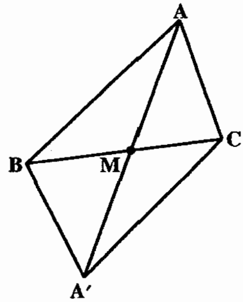
۲.۴.۱.۴. میانه

۲۱۴. میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است پس دو زاویهٔ $B\hat{A}C$ و $A\hat{C}A'$ مکمل یکدیگرند. بنابراین اگر $B\hat{A}C < ۹۰°$ باشد، $A\hat{C}A' > ۹۰°$ و اگر $B\hat{A}C = ۹۰°$ باشد، $A\hat{C}A' = ۹۰°$ و اگر $B\hat{A}C > ۹۰°$ باشد، $A\hat{C}A' < ۹۰°$ خواهد بود. اگر حالتی را در نظر بگیریم که زاویهٔ BAC حاده باشد، در دو مثلث ABC و ACA' که دو ضلع برابر دارند و زاویهٔ بین آن دو ضلع برابر نیست ($B\hat{A}C < A\hat{C}A'$ و $AC = AC$ و $AB = A'C$) داریم $AA' > BC$ یا $۲AM > a$ و یا $AM > \frac{a}{۲}$.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر $B\hat{A}C = ۹۰°$ باشد، $AM = \frac{a}{۲}$ و اگر $B\hat{A}C > ۹۰°$ باشد، $AM < \frac{a}{۲}$ است.



۲۱۵. میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ که قطرهایش منصف یکدیگرند متوازی‌الاضلاع است، پس $A'B = AC$ است. در مثلث ABA' می‌توان نوشت:



$$AA' < AB + A'B \Rightarrow ۲AM < AB + AC \Rightarrow AM < \frac{AB+AC}{۲} \qquad (۱)$$

از طرفی در دو مثلث AMB و AMC می‌توان نوشت:

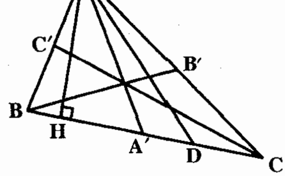
$$\begin{matrix} \Delta AMB: \\ \Delta AMC: \end{matrix} \begin{cases} AM > AB - MB \\ AM > AC - MC \end{cases} \Rightarrow ۲AM > AB + AC - (MB + MC)$$

$$\Rightarrow ۲AM > AB + AC - BC \Rightarrow AM > \frac{AB+AC-BC}{۲} \qquad (۲)$$

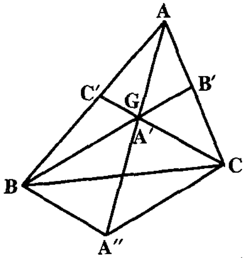
از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB+AC-BC}{۲} < AM < \frac{AB+AC}{۲}$$

۲۱۶. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $BC > AC > AB$ باشد. در این صورت $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ خواهد بود. میانه‌های AA' و BB' و CC' را رسم می‌کنیم. باید ثابت کنیم $AA' < BB' < CC'$ است. روی ضلع BC از طرف رأس C طول $CD = AC'$ را جدا می‌کنیم و از D به A وصل می‌نماییم. در دو مثلث ACC' و ADC داریم: $\hat{A} > \hat{C}$ و $AC' = DC$ و $AC = AC$، پس $CC' > AD$ است. اما $AD > AA'$ می‌باشد. زیرا $DH > A'H$ است. در نتیجه $CC' > AA'$ یا $AA' < CC'$ است. به همین ترتیب برای میانه‌های دیگر مطلب قابل اثبات است. یعنی داریم: $AA' < BB' < CC'$.



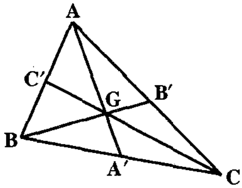
۲۱۷. میانهٔ AA' از مثلث ABC را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}AA'$ از طرف نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A'' به‌دست آید. از A'' به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی $BGCA''$ متوازی‌الاضلاع است. پس $A''B = GC$ و $A''C = GB$ است. در مثلث $A''GB$ می‌توان نوشت:



$$GA'' < BA'' + GB \Rightarrow \frac{۲}{۳}m_a < \frac{۲}{۳}m_c + \frac{۲}{۳}m_b \Rightarrow m_a < m_b + m_c$$

به همین ترتیب برای میانه‌های دیگر مطلب قابل اثبات است.

۲۱۸. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و میانه‌های آن را رسم می‌نماییم و نقطهٔ برخورد آنها را G می‌نامیم. در مثلثهای GBC و GAB و GAC داریم:



$$GB + GC > BC \Rightarrow \frac{۲}{۳}(m_b + m_c) > a \Rightarrow m_b + m_c > \frac{۳}{۲}a$$

$$GA + GB > AB \Rightarrow \frac{۲}{۳}(m_a + m_b) > c \Rightarrow m_a + m_b > \frac{۳}{۲}c$$

$$GA + GC > AC \Rightarrow \frac{۲}{۳}(m_a + m_c) > b \Rightarrow m_a + m_c > \frac{۳}{۲}b$$

از جمع این رابطه‌ها داریم: $۲(m_a + m_b + m_c) > \frac{۳}{۲}(a + b + c)$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c > \frac{۳}{۴}(a + b + c)$$

از طرفی داریم:

$$GB + GC < BA + AC \Rightarrow \frac{۲}{۳}(m_b + m_c) < b + c$$

$$\Rightarrow m_b + m_c < \frac{۳}{۲}(b + c) \Rightarrow m_a + m_b < \frac{۳}{۲}(a + b)$$ و

$$m_a + m_c < \frac{۳}{۲}(a + c)$$

$$\Rightarrow ۲(m_a + m_b + m_c) < ۳(a + b + c) \Rightarrow m_a + m_b + m_c < \frac{۳}{۲}(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(a + b + c) < m_a + m_b + m_c < \frac{۳}{۲}(a + b + c)$$

۳.۴.۱.۴. نیمساز

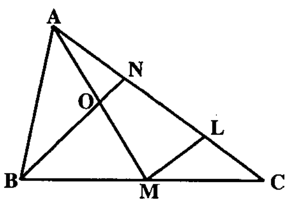
۲۱۹. با فرض $AB > AC$ ، زاویه‌های ارتفاع و میانه با ضلعهای AB و AC را بررسی کنید.

۲۲۰. زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ACD و $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ است. همچنین زاویهٔ $A\hat{D}C$ زاویهٔ خارجی مثلث ADB و $D\hat{A}C = D\hat{A}B$ است.

۵.۱.۴. پاره‌خط

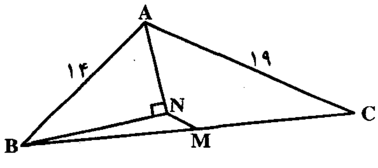
۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط

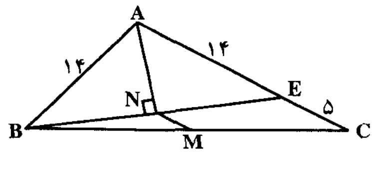
۲۲۱. از نقطهٔ M خطی موازی BN رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ L قطع کند. این نقطه وسط ضلع NC از مثلث BNC است. پس $NL = LC$ و $ML = \frac{BN}{۲}$ است. از طرفی در مثلث AML چون نقطهٔ O وسط ضلع AM و $ON \| ML$ است، پس $AN = NL$ و $ON = \frac{ML}{۲}$ می‌باشد. در نتیجه :

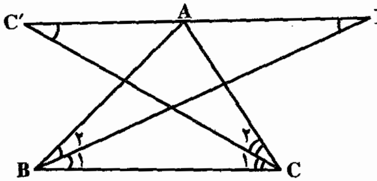


$$AN = NL = LC \Rightarrow AN = \frac{۱}{۳}AC \text{ و } ON = \frac{۱}{۲}ML = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}BN) = \frac{۱}{۴}BN$$

۲۲۲. مطابق شکل، BN را امتداد می‌دهیم تا با AC در E برخورد کند. مثلثهای BNA و ENA همنهشتند، زیرا $B\hat{A}N = E\hat{A}N$ و $A\hat{N}B = A\hat{N}E$. بنابراین N وسط BE واقع است و $AE = AB = ۱۴$. در نتیجه $EC = ۵$ و چون MN وسطهای دو ضلع BC و BE از مثلث BCE را به هم وصل کرده است، با نصف ضلع EC برابر است، پس $MN = \frac{۵}{۲}$ ، و گزینهٔ (ب) درست است.







۲۲۳. دو مثلث ABB' و ACC' متساوی‌الساقین می باشند، زیرا $\hat{B}'=\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{C}'=\hat{C}_1=\hat{C}_2$ است. پس $AB'=AB$ و $AC'=AC$ و در نتیجه :

$$B'C'=AB'+AC'=AB+AC$$

۲۲۴. دو مثلث ABC و AGH به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند.

۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

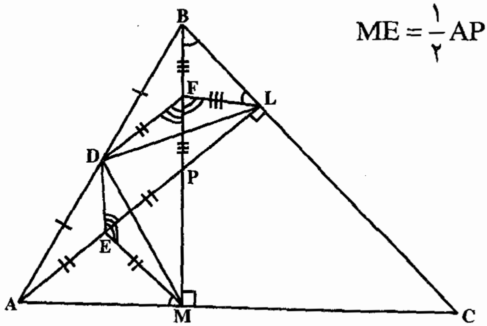
۱.۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۲۲۵. ثابت کنید $A\hat{D}E=A\hat{E}D$.

۲۲۶. دو مثلث ADE و ACD همنهشتند.

۲۲۷. وسط پاره‌خطهای راست AP و BP را، بترتیب، E و F می‌نامیم. چون DE و DF وسط ضلعهای مثلث APB را به هم وصل کرده‌اند، چهارضلعی DFPE متوازی‌الاضلاع می‌شود و از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ APM و BPL به‌دست می‌آید :

$$ME=\frac{1}{2}AP=DF\ ;\ LF=\frac{1}{2}BP=DE$$



سپس

$$P\hat{E}M=2E\hat{A}M=2F\hat{B}L=P\hat{F}L\ ;\ P\hat{E}D=P\hat{F}D$$

به این ترتیب، مثلثهای DEM و DFL، در دو ضلع و زاویهٔ بین آنها، با یکدیگر برابر می‌شوند. در واقع، اگر $\alpha<180^\circ$، آن طور که در (شکل) می‌بینیم ؛ داریم :

$$\alpha=P\hat{E}M+P\hat{E}D=P\hat{F}L+P\hat{F}D$$

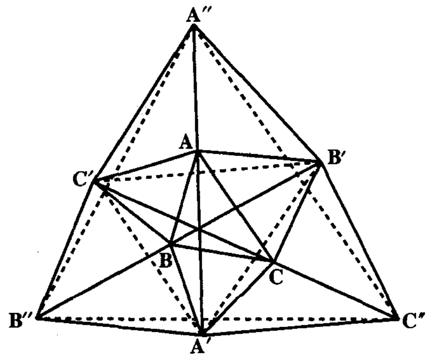
و اگر $\alpha>180^\circ$، آن وقت به جای α باید $360^\circ-\alpha$ گرفت ؛ در حالت $\alpha=180^\circ$ به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید :

$$DM=ME+DE=DF+LF=DL$$

و به هرحال، برابری $DM=DL$ به‌دست می‌آید.

۲۲۸. از تساوی دو مثلث CBB' و CAA' (به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین)، نتیجه می‌گردد که $AA' = BB'$، و از برابری دو مثلث BCC' و BAA' نیز (به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین) خواهیم داشت : $AA' = CC'$. پس از آن‌جا داریم : $AA' = BB' = CC'$.

۲۲۹. اگر از A به A' و A'' و از B به B' وصل کنیم، دو مثلث $AA'C$ و $BB'C$، همچنین مثلثهای $AA''C'$ و $BB'C'$ متساویند. در نتیجه $AA'' = BB' = AA'$ است. برای این که $A'AA''$ خط راست باشد، باید ثابت کنیم که $A''\hat{A}A' = ۱۸۰°$ است و برای این منظور از برابری مثلثهای $A'AB$ و $C'BC$ می‌توان استفاده نمود.

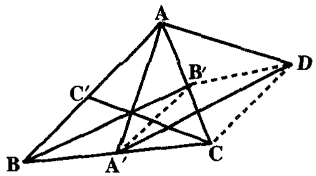


۲۳۰. مسألهٔ a) نتیجه‌ای از مسألهٔ b) است، بنابراین تنها به حل این مسألهٔ کلی‌تر می‌پردازیم. نقطه‌های D_k و B_k از خط راست OA_k به یک فاصله‌اند. بنابراین $S_{OA_kB_k} = S_{OA_kD_k}$. اگر n برابری از این گونه را در هم ضرب کنیم و هر مساحت را به‌صورت ضرب قاعده A_kB_k یا A_kD_k در نصف ارتفاع متناظر بنویسیم (این ارتفاع، برابر است با فاصلهٔ از نقطهٔ O تا ضلع چندضلعی)، به برابری مورد نظر می‌رسیم : طول ارتفاعها، در حاصلضربها، حذف می‌شوند.

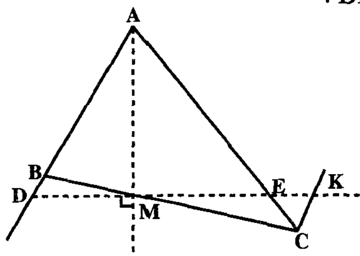
∇ در مسألهٔ a)، با توجه به شرطها، نیروهای $\overrightarrow{A_kC_k}$ که در نقطه‌های A_k بر صفحهٔ سخت $A_۱A_۲A_۳$ اثر می‌کنند، یکدیگر را خنثی می‌کنند، زیرا صفحه بی‌حرکت می‌ماند ؛ مجموع نیروها (به عنوان بردارها) و مجموع گشتاورهای آنها برابر صفر است، زیرا گشتاور هر یک از این نیروها، نسبت به نقطهٔ O، برابر صفر است.
برای مثلث، برابری حاصلضربهایی که در صورت مسأله آمده، نه تنها لازم، بلکه در ضمن کافی است تا خطهای راست A_kC_k در یک نقطهٔ O به هم برسند.

۲۳۱. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ و $CC'B$ پاره‌خطهای MB' و MC' میانهٔ وارد بر وترند.

۲۳۵. اگر از B' به D و A' و از C به D وصل کنیم، چهار ضلعیهای $BA'DB'$ ، $CA'B'D$ و $AC'CD$ متوازی‌الاضلاعند.



۲۳۶. از رأس C خطی موازی ضلع AB رسم کنید تا DE را در نقطهٔ K قطع کند. آن‌گاه ثابت کنید $BD = CK = CE$.



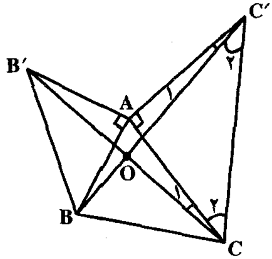
۲۳۷. در مثلث ABB' ، ارتفاع و نیمساز رأس A بر هم منطبقند، پس AH عمودمنصف BB' است.

۲۳۹. مثلث ADE متساوی‌الساقین و چهارضلعی $DEFC$ متوازی‌الاضلاع است.

۲۴۰. مثلثهای BCM و ACN متساوی‌الساقینند، زیرا درمثلث BCM داریم :

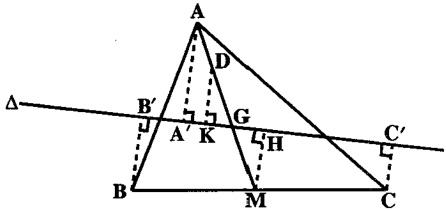
$\hat{M} = M\hat{C}B = ۴۸°$ و در مثلث ACN، $\hat{N} = A\hat{C}N = ۱۲°$ پس $BM = BC$ و $BC = BN$ است. در نتیجه $BM = CN$ می‌باشد. یعنی نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C از مثلث ABC متساوی‌اند. از این مسأله که به مسألهٔ بوتما (O.Bottema) مشهور است، این نتیجه حاصل می‌شود که در مثلثی ممکن است دو نیمساز خارجی برابر باشند ولی مثلث متساوی‌الساقین نباشد.

۲۴۱. دو مثلث ABC' و ACB' به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند و در مثلث $C'OC$ داریم : $\hat{C}'_۲ + \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۹۰°$

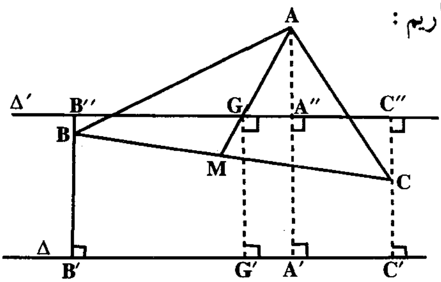


۲۴۳. اگر از نقطهٔ D وسط پاره‌خط AG عمود DK و از نقطهٔ M عمود MH را بر خط Δ فرود آوریم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ AGA' داریم $AA' = ۲DK$. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ GKD و GMH به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند. از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود : $MH = DK = \frac{AA'}{۲}$. اما ذوزنقهٔ $BB'C'B$ پاره‌خط MH که از وسط یک ساق موازی قاعده‌ها رسم شده است از وسط ساق دیگر می گذرد و اندازه‌اش مساوی نصف مجموع دو قاعده است یعنی $MH = \frac{BB' + CC'}{۲}$. پس :

$$MH = \frac{AA'}{۲} = \frac{BB' + CC'}{۲} \Rightarrow AA' = BB' + CC'$$



۲۴۴. از نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث، خط Δ' را موازی خط Δ رسم می کنیم و از رأسهای مثلث عمودهایی بر این دو خط متوازی رسم می کنیم تا خط Δ را در نقطه‌های A' و B' و C' و خط Δ را در نقطه‌های A'' و B'' و C'' قطع کنند. می‌دانیم که $AA'' = BB'' + CC''$. از طرفی اگر فاصلهٔ بین دو خط موازی Δ و Δ' را l بنامیم ($GG' = L$)، داریم :



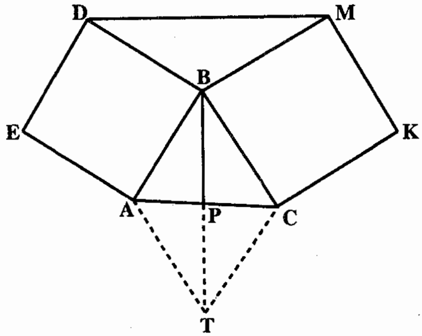
$$\begin{cases} AA' = AA'' + L \\ BB' = L - BB'' \\ CC' = L - CC'' \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم :

$$AA' + BB' + CC' = ۳L = ۳GG'$$

۲۴۶. چهارضلعی ADEF، متوازی‌الاضلاع است و مثلث BED متساوی‌الساقین می‌باشد.

۲۴۷. ثابت کنید مثلثهای BOD و COE متساوی‌الساقینند.



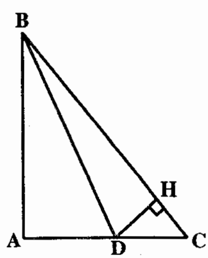
۲۴۸. از آن‌جا که بایستی $DM = ۲BP$ را ثابت کنیم از اینرو مناسب بنظر می‌رسد که طول BP را دو برابر کرده و مثلث ABC را به متوازی‌الاضلاع ABCT تبدیل کنیم و سپس $DM = BT$ را ثابت کنیم (شکل). برای اثبات برابری DM و BT، این دو پاره‌خط را به عنوان دو ضلع از دو مثلث مورد ملاحظه قرار داده و سپس به اثبات تساوی این دو مثلث می‌پردازیم. براساس این طرح، حل مسألهٔ مفروض انجام می‌گیرد.

با ادامه دادن پاره‌خط BP به اندازه‌ای که برابر خود BP است و نیز با اتصال نقطهٔ T که انتهای این امتداد است به نقطه‌های A و C متوازی‌الاضلاع ABCT به‌دست می‌آید. مثلثهای DMB و BCT را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. چنین داریم : (a) به عنوان ضلعهای مربع BMKC تساوی $BM = BC$ برقرار است ؛ (b) $DB = CT$. به‌طور مشروح در مورد این تساوی چنین می‌توان گفت : به عنوان ضلعهای مربع BDEA، $DB = AB$ و به‌عنوان ضلعهای مقابل متوازی‌الاضلاع ABCT، $AB = CT$ بوده و از اینرو $DB = CT$ خواهد بود ؛ (c) $D\hat{B}M = B\hat{C}T$ (دو زاویه‌ای که ضلعهای آنها برهم عمود هستند). از اینرو $\Delta DBM = \Delta BCT$ (به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها) و در نتیجه $DM = BT$ حاصل می‌شود. به‌دلیل $BT = ۲BP$ از $DM = BT$ تساوی $DM = ۲BP$ نتیجه می‌شود.

۲.۲.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

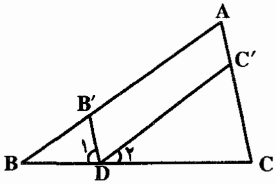
۲۵۰. الف. دو مثلث APM و AMK را مقایسه کنید.

ب. در مثلث APK، $\hat{K} > \hat{P}$ است.



۲۵۱. اگر از نقطهٔ D عمود DH را بر ضلع BC فرود آوریم $AD = DH$ و $DC > DH$ است.

۲۵۲. چون میانهٔ ME در مثلث MBC، از نصف ضلع BC بزرگتر است، پس زاویهٔ BMC حاده و، در نتیجه، زاویهٔ BMA منفرجه است. در مثلث ABM، منفرجه بودن زاویهٔ BMA، به معنای آن است که طول میانهٔ MD از نصف طول ضلع AB کوچکتر است.

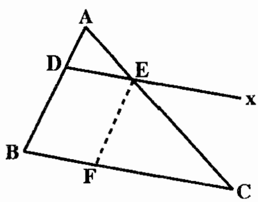


۲۵۳. چون $AB > AC$ است، پس $\hat{C} > \hat{B}$ است. از طرفی بنا به فرض $DB' \| AC$ و $DC' \| AB$ است. پس چهارضلعی $AB'DC'$ متوازی‌الاضلاع و $\hat{D}_1 = \hat{C}$ و $\hat{D}_2 = \hat{B}$ است.
از آن‌جا داریم $DC' = AB'$ و $DB' = AC'$. در مثلث DBB' داریم : $\hat{D}_1 = \hat{C} > \hat{B}$ پس (۱) $BB' > DB'$ است، اما (۲) $AB' = DC'$ می‌باشد. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$BB' + AB' > DB' + DC' \Rightarrow DB' + DC' < AB$$

همچنین در مثلث DCC' ، $\hat{D}_2 = \hat{B} < \hat{C}$ است، پس $DC' > CC'$ است. از طرفی $D'B = AC'$ است، پس $D'C + D'B > CC' + C'A$ یا $D'C + D'B > AC$. پس $AC < D'B + D'C < AB$.

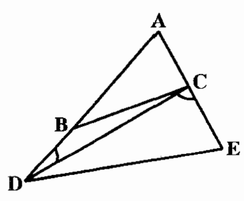
۲۵۴. ۱. چون خط Dx با BC موازی است دو نقطهٔ B و C در یک طرف آن واقعند، ولی چون A و B در طرفین این خط هستند، پس A و C هم در دو طرف آن قرار دارند بنابراین خط Dx حتماً AC را قطع می‌کند.



۲. اگر از نقطهٔ E خط EF را موازی ضلع AB رسم کنیم این خط به‌طور حتم BC را قطع می‌کند (بنا به قسمت اوّل) و اگر F نقطهٔ تقاطع آن با BC باشد $BF < BC$ است. اما $DE = BF$ می‌باشد. پس $DE < BC$ است.

۲۵۵. دو مثلث BCP و BCQ را با هم مقایسه کنید.

۲۵۶. دو مثلث DCE و DCB را در نظر می‌گیریم. این دو مثلث دو ضلع مساوی دارند. زیرا DC در هر دو مشترک و $DB = CE$ است. اما $D\hat{C}E > B\hat{D}C$ می‌باشد. چون زاویهٔ DCE زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، در نتیجه $DE > BC$ است.

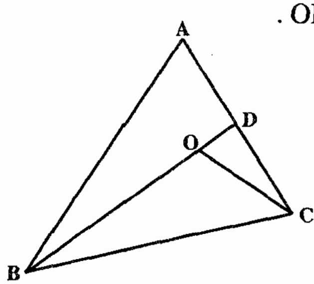


۲۵۷. BO را از طرف O امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. در مثلث ABD داریم:

$BD < AB + AD \Rightarrow BO + OD < AB + AD$ (۱) و در مثلث ODC داریم:

$OC < OD + DC$ (۲). از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$OB + OC < AB + AC$.



۲۵۸. می‌دانیم که:

$$\begin{cases} OB + OC < AB + AC \\ OA + OB < AC + BC \\ OA + OC < AB + BC \end{cases}$$

از جمع رابطه‌های فوق داریم:

$$۲(OA + OB + OC) < ۲(AB + AC + BC)$$

$$\Rightarrow OA + OB + OC < AB + AC + BC$$

از طرفی درمثلثهای OAB و OAC و OBC می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} OA + OB > AB \\ OA + OC > AC \\ OB + OC > BC \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم:

$$۲(OA + OB + OC) > AB + AC + BC$$

$$\Rightarrow OA + OB + OC > \frac{AB + AC + BC}{۲}$$

در نتیجه:

$$\frac{AB + AC + BC}{۲} < OA + OB + OC < AB + BC + AC$$

۳.۵.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۹. دو مثلث AGK و NBH برابرند.

۲۶۰. از ویژگی زاویهٔ خارجی مثلث و متساوی‌الساقین درون مثلث TQR و همنهشتی دو مثلث PQT و TRS استفاده کنید.

۲۶۱. دو مثلث ABC و CDE همنهشتند.

۲۶۲. دو مثلث PQR و RST همنهشتند.

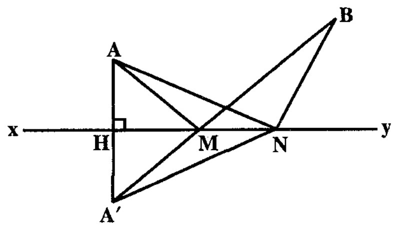
۲۶۳. دو مثلث MKL و MNL همنهشتند.

۲۶۶. از نقطهٔ N به نقطهٔ A' وصل می‌کنیم. مثلثهای NAA' و MAA' که در آنها xy عمودمنصف AA' است متساوی‌الساقین هستند. پس $NA = NA'$ و $MA = MA'$ است. از طرفی در مثلث $NA'B$ داریم:

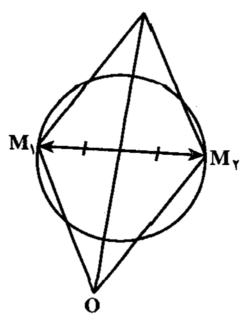
$$NA' + NB > A'B \Longrightarrow NA' + NB > MA' + MB$$

که اگر به‌جای MA' و NA' مقدارهای مساوی آنها را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$NA + NB > MA + MB$$



۲۶۸. با توجه به یک حقیقت، اندیشهٔ راه‌حل تلقین می‌شود: مجموع فاصله‌های تا انتهای عقربه‌ها به‌طور متوسط (در طول زمان) بیشتر از مجموع فاصله‌های تا مرکزهای ساعتهاست. اثبات را می‌توان به این ترتیب انجام داد. مجموع S_1 و S_2، فاصله‌های از نقطهٔ O، مرکز میز، تا انتهای عقربه‌های دقیقه‌شمار را، در دو لحظهٔ زمانی، واقع در ۳۰ دقیقه، در نظر می‌گیریم، مقدار $S_1 + S_2$، از $2S_0$ بیشتر است (S_0، مجموع فاصله‌های از O تا مرکز ساعتهاست)، زیرا در هر مثلث OM_1M_2، مجموع طولهای دو ضلع OM_1 و OM_2 از دو برابر میانهٔ بین آنها بزرگتر است (شکل). بنابراین، دست‌کم یکی از عددهای S_1 یا S_2 از S_0 بیشتر است.



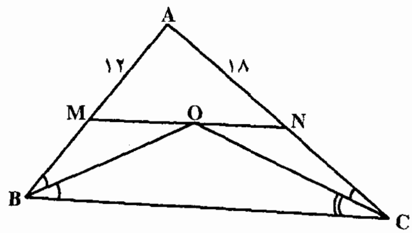
۶.۱.۴. محیط

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ محیط

۲۶۹. (الف) چون MN با BC موازی است، $\hat{MOB} = \hat{CBO} = \hat{OBM}$ و $\hat{CON} = \hat{OCB} = \hat{NCO}$ از این‌رو $MB = MO$ و $ON = NC$. بنابراین:

$$AM + MO + ON + AN = (AM + MB) + (AN + CN) =$$

$$AB + AC = ۱۲ + ۱۸ = ۳۰$$



توجه کنید که از مقدار $BC = ۲۴$ استفاده نکردیم؛ در واقع فقط مجموع طولهای دو ضلع دیگر مورد استفاده واقع شد.

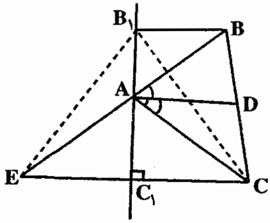
۲۷۰. فرض کنید ABC مثلث حادهٔ مفروض، $A_۱$ نقطه‌ای بر ضلع BC، $B_۱$ نقطه‌ای بر ضلع CA و $C_۱$ نقطه‌ای بر ضلع AB باشد؛ $A_۲$ و $A_۳$ نقطه‌های قرینهٔ $A_۱$، بترتیب، نسبت به ضلعهای AB و AC هستند. طول خط شکستهٔ $A_۲C_۱B_۱A_۳$، برابر محیط مثلث $A_۱B_۱C_۱$ است؛ در نتیجه، با ثابت بودن نقطهٔ $A_۱$، این محیط، کمترین مقدار، و برابر با $|A_۲A_۳|$ است، وقتی که نقطه‌های $C_۱$ و $B_۱$ روی پاره‌خط $A_۲A_۳$ قرار گیرند. اما، $AA_۲A_۳$ مثلثی متساوی‌الساقین است، $\angle A_۲AA_۳ = ۲\angle BAC$ و $|A_۲A| = |A_۳A| = |AA_۱|$. به این ترتیب، $|A_۲A_۳|$ کمترین مقدار است، به شرط این که $AA_۱$ ارتفاع مثلث BAC باشد. به همین روش، $BB_۱$ و $CC_۱$ هم، باید ارتفاعهای مثلث باشند.

۲.۶.۱.۴. رابطهٔ بین محیطها

۱.۲.۶.۱.۴. رابطهٔ بین محیطها (برابریها)

۲۷۱. هر ضلع مثلث $A'B'C'$ دو برابر ضلعهای نظیر از مثلث ABC است.

۲.۲.۶.۱.۴. رابطهٔ بین محیطها (نابرابریها)



۲۷۲. عمود CC_1 را به اندازهٔ خود تا E امتداد می‌دهیم و ثابت می‌کنیم BAE خط مستقیم است. می‌دانیم $B\hat{A}B_1 = C\hat{A}C_1$ (۱). چون نقطه‌های A و B روی عمود منصف CE واقعند پس $AC = AE$ و $B_1C = B_1E$ است و AC_1 نیمساز هم می‌شود. پس (۲) $E\hat{A}C_1 = C\hat{A}C_1$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $B\hat{A}B_1 = E\hat{A}C_1$ یعنی ABE خط راست است. در مثلث BB_1E داریم:

$$BA + AC < BB_1 + B_1E \qquad \text{و} \qquad BA + AC < BB_1 + B_1C$$

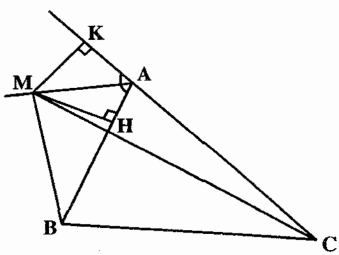
به طرفین نامساوی اخیر BC را اضافه می‌کنیم:

$$BA + AC + BC < BB_1 + B_1C + BC$$

۲۷۳. از نقطهٔ M عمودهای MH و MK را بترتیب بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم. بنا به خاصیت نیمساز $MH = MK$ و $AH = AK$ است. در مثلث MCK داریم: $MC > KC$ یا (۱) $MC > AK + AC$ و در مثلث MBH داریم: (۲) $MB > HB$.
از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به این که $AK = AH$ است، خواهیم داشت:

$$MB + MC > AK + AC + HB = AC + AH + HB = AC + AB$$

$$\Rightarrow MB + MC > AC + AB \qquad (۳)$$



در صورتی که به طرفین رابطهٔ (۳) مقدار BC را اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$MA + MB + BC > AB + AC + BC \Rightarrow$ محیط مثلث MBC $>$ محیط مثلث ABC

۲۷۴. قرینه‌های نقطهٔ C را نسبت به ضلعهای زاویه، C' و C'' می‌نامیم. محیط مثلث ABC برابر است با طول خط شکستهٔ $C'ABC''$ که به روشنی، از طول پاره‌خط راست $C'C''$ کمتر نیست، پاره‌خط راست $C'C''$ هم، طولی دو برابر طول پاره‌خط راست OC دارد.

۲۷۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۴.۱.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۷۶. گزینهٔ (ج) درست است زیرا فرض کنید c بزرگترین ضلع باشد. در این صورت $a+b+c\leq ۱۲$. امّا:

$$c<a+b \Rightarrow ۲c<۱۲ \Rightarrow c<۶$$

اکنون ترکیبهای عددهای صحیح را امتحان کنید به‌طوری که مثلث، مختلف‌الاضلاع باشد. چون c بزرگترین ضلع است، نمی‌تواند کوچکتر از ۴ باشد. در نتیجه سه ترکیب وجود دارد:

$c=۵$	$c=۵$	$c=۴$
$a=۴$	$a=۴$	$a=۳$
$b=۳$	$b=۲$	$b=۲$

۴.۱.۷. مساحت

۴.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۴.۱.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده

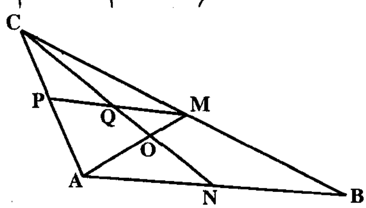
۲۷۷. $S=۲۴\sqrt{۳}$.

۲۷۸. $h^۲$ واحد سطح.

۲۷۹. $S=\frac{\sqrt{۲}}{۴}bc$.

۲۸۰. (د) قاعدهٔ OQ از مثلث OMQ برابر است با:

$$OQ=CO-CQ=\frac{۲}{۳}CN-\frac{۱}{۲}CN=\frac{۱}{۶}CN$$



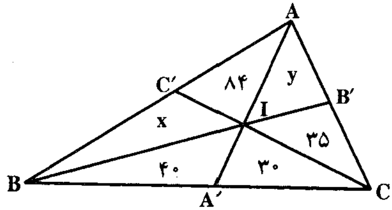
فرض کنید h ارتفاع مثلث OMQ وارد از رأس M بر ضلع OQ باشد. بنابراین ۲h ارتفاع نظیر رأس B از مثلث CNB است. در نتیجه:

$$\text{مساحت مثلث } OMQ=\frac{۱}{۲}OQ\times h=\frac{۱}{۱۲}CN\times h=n$$

$$\text{مساحت مثلث } ABC=۲\,(\text{مساحت مثلث } CNB)$$

$$=۲(\frac{۱}{۲}CN\times ۲h)=۲CN\times h=۲۴n$$

۲۸۱. مساحت دو مثلث مجهول را x و y می‌نامیم. خواهیم داشت:



$$\frac{S_{IBA'}}{S_{ABA'}}=\frac{S_{ICA'}}{S_{ACA'}} \text{ و } \frac{S_{IAB'}}{S_{BAB'}}=\frac{S_{ICB'}}{S_{BCB'}}$$

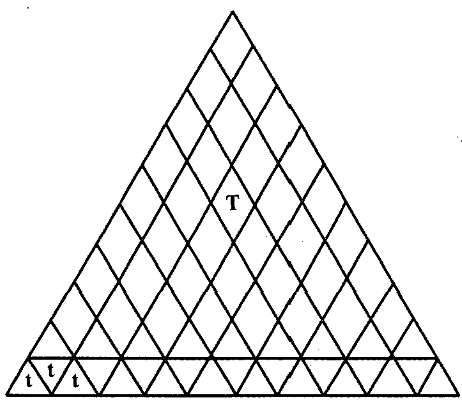
$$\Rightarrow \frac{۴۰}{۱۲۴+x}=\frac{۳۰}{۶۵+y} \text{ و } \frac{y}{x+y+۸۴}=\frac{۳۵}{۱۰۵}$$

که از آن‌جا: $x=۵۶$ و $y=۷۰$ و مساحت کل مثلث ۳۱۵ است.

۲۸۲. (ج) فرض کنید b و h بترتیب طول قاعده و ارتفاع مثلث مفروض باشند. بزرگترین بخش از ده بخشی که مثلث به آنها تقسیم شده، ذوزنقه‌ای است با ارتفاع به طول $۰/۱\ h$ و قاعده‌های به طول b و $۰/۹b$. مساحت این بزرگترین بخش:

$$\frac{۱}{۲}(۰/۱h)(b+۰/۹b)=۰/۱۹(\frac{۱}{۲}bh)=۳۸$$

است، که از آن‌جا مساحت مثلث مفروض $bh/۲=۲۰۰$ است.

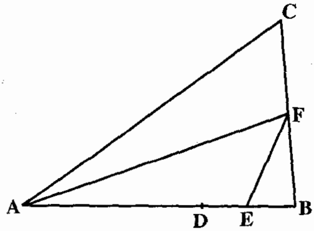


راه دیگر: از محلهای برخورد خطّهای موازی با هر ضلع مثلث مفروض T، خطهای موازی با ضلعهای دیگر رسم می‌کنیم (شکل بالا را ملاحظه کنید). بنابراین نوار ذوزنقه‌ای به مساحت ۳۸ به ۱۹ مثلث مساوی t تقسیم می‌گردد و در نتیجه مساحت هر کدام ۲ است. چون ضلعهای T، ده برابر ضلعهای متناظر t هستند،

$$T \text{ مساحت } = ۱۰۰\times t \text{ مساحت } = ۲۰۰$$

۲.۱.۷.۱.۴. اندازهٔ مساحت مثلثها و شکلهای دیگر

۲۸۳. (د) چون F وسط BC است، ارتفاع مثلث AEF که از F بر AE (یا امتداد AE) فرود می‌آید نصف ارتفاع مثلث ABC است که از C بر AB (یا امتداد AB) فرود می‌آید. طول AE، قاعدهٔ مثلث AEF، برابر با $\frac{۳}{۴}$ طول AB قاعدهٔ مثلث ABC است. بنابراین مساحت مثلث AEF برابر است با:



$$(\frac{۱}{۲})(\frac{۳}{۴})(۹۶) = ۳۶$$

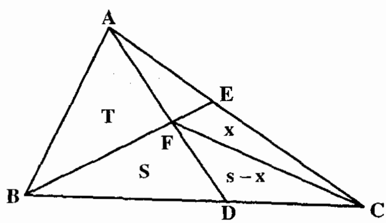
۲۸۴. گزینهٔ (۳) درست است، زیرا با شرطهای داده شده $DE \parallel AC$ است.

۲۸۵. اگر مساحت مثلث BDE را $S_۱$ فرض کنیم، مساحت مثلث ABD مساوی $۵S_۱$ و در نتیجه مساحت مثلث ADC مساوی $\frac{۵}{۲}S_۱$ خواهد بود.

در نتیجه:

$$۵S_۱ + \frac{۵}{۲}S_۱ = ۹۰ \Rightarrow S_۱ = ۱۲ \Rightarrow S_{DEF} = ۲S_۱ = ۲۴cm^۲$$

۲۸۶. محل برخورد AD و BE را با F نشان می‌دهیم. بی‌شک منظور از سه قسمت با مساحتهای مساوی، سه مثلث داخلی نیستند. زیرا در این صورت باید $BF = FE$ و $AF = FD$ باشد که لازمهٔ آن متوازی‌الاضلاع بودن AEDB است، و این وقتی امکان‌پذیر است که C در بی‌نهایت دور باشد. بنابراین منظور از سه قسمت مساوی معمّا، برابر بودن مساحت چهارضلعی CEFD با مساحت دو تا از سه مثلث است. پس دو حالت خواهیم داشت و مسأله دو پاسخ صحیح دارد:



حالت اول. مثلثهای موردنظر عبارتند از: AEF و BFD. هر یک از سه مساحت مساوی را با S و مساحت مثلث CEF را با x، و مساحت مثلث ABF را با T نشان می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{Area\ \ BDF}{Area\ \ DCF} = \frac{Area\ \ BDA}{Area\ \ DCA}$$

به بیان دیگر:

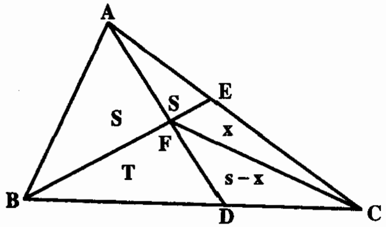
$$\frac{BD}{DC} = \frac{S}{S-x} = \frac{S+T}{۲S} \quad و \quad \frac{AE}{EC} = \frac{S}{x} = \frac{S+T}{۲S}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{S-x} = \frac{S}{x} \Rightarrow S = ۲x \Rightarrow T = ۳S$$

و چون مساحت کلی مثلث ABC برابر ۱ است، پس:

$$۱ = T + ۳S = ۲T \Rightarrow T = ۰/۵$$

حالت دوم. یکی از مثلثهای هم مساحت با چهارضلعی CEFD را AFB و دیگری را AEF می‌گیریم. با همان روشی که در بالا به‌کار بردیم، معادلهٔ زیر را به‌دست خواهیم آورد:



$$S^۲ - T^۲ = ۴ST$$

که آن را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$(\frac{S}{T})^۲ - ۴(\frac{S}{T}) - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{S}{T} = ۲ + \sqrt{۵}$$

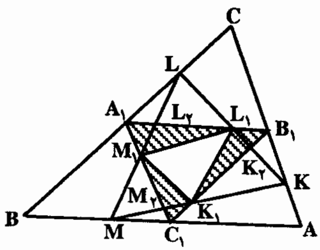
و چون مساحت کلی مثلث ABC برابر ۱ است، پس:

$$۱ = ۳S + T = (۷ + \sqrt{۸۵})T \ ,$$

$$\Rightarrow T = \frac{۱}{۷ + ۳\sqrt{۵}} = \frac{۷ - ۳\sqrt{۵}}{۴} = ۰/۰۷۳$$

۲۸۷. $\frac{۱}{۸}$.

با توجه به نامگذاریهای شکل داریم:



$$\frac{C_۱M_۲}{M_۲M_۱} \le \frac{AK}{KC} \le \frac{AB_۱}{B_۱C} = ۱$$

بنابراین $C_۱M_۲ < M_۲M_۱$ و در نتیجه $S_{C_۱M_۲K_۱} \le S_{M_۲M_۱K_۱}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود: $S_{B_۱K_۲L_۱} \le S_{K_۲K_۱L_۱}$ و $S_{AL_۲M_۱} \le S_{L_۲L_۱M_۱}$

S را مساحت بخش مشترک مثلثهای KLM و $A_۱B_۱C$ می‌گیریم.

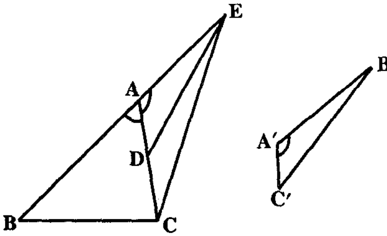
از مجموع نابرابری‌های حاصل، به‌دست می‌آید:

$$S_{A_۱B_۱C_۱} - S \le S_{K_۱M_۲M_۱} + S_{M_۱L_۲L_۱} + S_{L_۱K_۲K_۱} = S - S_{K_۱M_۱L_۱} \le S$$

از آن‌جا $۲S \ge S_{A_۱B_۱C_۱} = \frac{۱}{۴}$، یعنی $S \ge \frac{۱}{۸}$. اگر نقطهٔ M بر $C_۱$، نقطهٔ L بر C و نقطهٔ K بر A منطبق باشند، آن وقت $S = \frac{۱}{۸}$.

۲.۷.۱.۴. نسبت مساحتها

۲۸۹. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را که در آنها $\hat{A}+\hat{A}'=180^\circ$ است در نظر می‌گیریم. آن‌گاه مثلث $A'B'C'$ را در مجاورت مثلث ABC چنان قرار می‌دهیم که رأس A' روی رأس A و ضلع $A'C'$ روی ضلع AC قرار گیرد. چون $\hat{A}+\hat{A}'=180^\circ$ است، پس $A'B'$ در امتداد ضلع AB واقع می‌شود. اگر وضع جدید مثلث $A'B'C'$ را AED بنامیم و از E به C وصل کنیم، داریم:



$$\frac{S_{AEC}}{S_{ADE}}=\frac{AC}{AD}$$ (در ارتفاع رأس E مشترکند)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AEC}}=\frac{AB}{AE}$$ (در ارتفاع رأس C مشترکند)

از ضرب این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{AB.AC}{AE.AD}\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$$

۲۹۰. برای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ اگر $a=a'$ باشد، داریم:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}a.h_a}{\frac{1}{2}a'.h_{a'}}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{h_a}{h_{a'}}$$

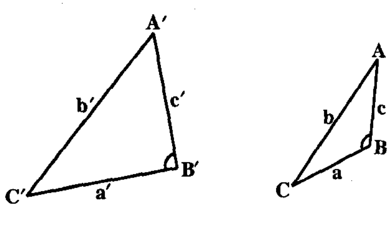
۲۹۱. برای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ اگر $h_a=h_{a'}$ باشد، داریم:

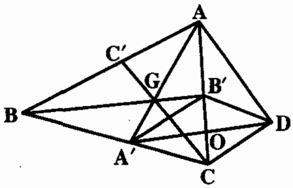
$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}a.h_a}{\frac{1}{2}a'.h_{a'}}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{a}{a'}$$

۲۹۲. فرض می‌کنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}+\hat{B}'=180^\circ$ باشد، داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}b'.c'\sin A'}{\frac{1}{2}b.c\sin A}=\frac{\frac{1}{2}a'.c'\sin B'}{\frac{1}{2}a.c\sin B}$$

$$\frac{b'}{b}=\frac{a'}{a}$$





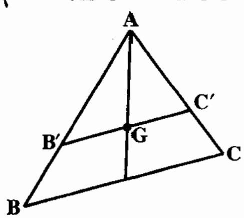
۲۹۳. مثلث ABC را در نظر گرفته AA' ، BB' و CC' میانه‌های آن را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A' پاره‌خط $A'D$ را موازی و مساوی BB' رسم می‌نماییم و از D به C و A و B' و از B' به A' وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای $A'CDB'$ و $BA'DB'$ و $CDAC'$ متوازی‌الاضلاع هستند، در نتیجه $A'D = BB'$ و $AD = CC'$ است. یعنی ضلعهای مثلث $AA'D$ میانه‌های مثلث ABC می‌باشند. پس اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع باشد، داریم:

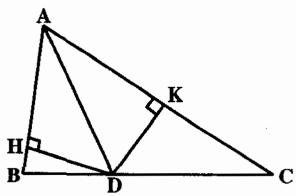
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AA'D}} = \frac{S_{AA'C}}{S_{AA'O}} = \frac{AC}{OA} = \frac{۴}{۳}$$

۲۹۴. از نقطهٔ G، مرکز ثقل مثلث، خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در B' و C' قطع کند. برای دو مثلث ABC و $AB'C'$ داریم:

$B'C' = \frac{۲}{۳}BC$ و $AH' = \frac{۲}{۳}AH$ ، از آن‌جا:

$$S_{AB'C'} : S_{ABC} = (\frac{۲}{۳})^{۲} = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{AB'C'} : S_{BB'C'C} = ۴:۵$$





۲۹۵. از نقطهٔ D پای نیمساز AD دو عمود DH و DK را بر ضلعهای AB و AC فرودمی‌آوریم. می‌دانیم که $DH = DK$ است. از طرفی $S_{ADC} = \frac{۱}{۲}AC.DK$ و $S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.DH$ است. از تقسیم این دو رابطه با توجه به برابری DH و DK داریم: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$.

۲۹۶. گزینهٔ (ج) درست است.

۲۹۷. گزینهٔ (الف) درست است.

۲۹۸. داریم:

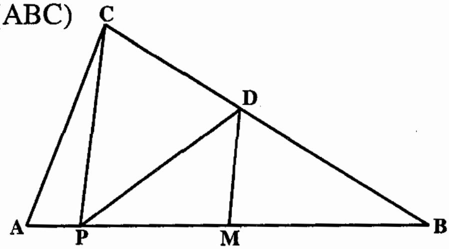
$$an = \frac{۲}{۳}ac$$

$$\frac{S_{amn}}{S_{abc}} = \frac{am \times an}{ab \times ac} = \frac{\frac{۱}{۲}an \times \frac{۲}{۳}ac}{an \times ac} = \frac{۱}{۳}$$

۲۹۹. (ب) مساحت مثلث XYZ را (XYZ) نشان می‌دهیم. (MDC) = (MDP) چرا که PC||MD، بنابراین:

$$(BPD) = (BMD) + (MDP) = (BMD) + (MDC)$$

$$= (BMC) = \frac{۱}{۲}(ABC)$$



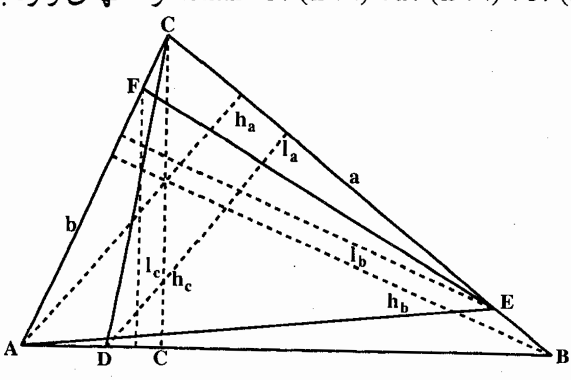
زیرا CM میانه است از آن‌جا $\frac{۱}{۲} = \frac{(BPD)}{(ABC)} = r$.

یادآوری. اگر P در طرف چپ A قرار داشته باشد، اثبات به همین ترتیب است، ولی اگر P بین M و B قرار گیرد، PC قاعدهٔ مشترک مثلثهای PCM و PCD با مساحتهای برابر است که اگر مساحت آنها به مساحت مثلث PCB اضافه شود، داریم:

$$(BPD) = (BMC) = \frac{۱}{۲}(ABC)$$

اگر P در سمت راست B قرار گیرد چه می‌شود؟ آیا می‌توانید برای هر یک از حالتهایی که P روی AB قرار می‌گیرد به کمک مساحتهای مزبور، اثباتی ارائه کنید؟

۳۰۰. الف. فرض کنید a، b و c، بترتیب، طول ضلعهای روبه‌رو به رأسهای A، B و C از مثلث ABC و h_a، h_b، h_c ارتفاعهای فرود آمده بر این ضلعها باشند (شکل را ملاحظه کنید). همچنین فرض کنید k، k_o، k_A، k_B و k_C، بترتیب، مساحتهای مثلثهای ABC، DEF، ADF، BED و CFE باشند. سه مثلث آخر دارای قاعده‌های $c/(n+۱)$، $a/(n+۱)$، $b/(n+۱)$ هستند، ارتفاعهای وارد بر این قاعده‌ها، l_c،



l_a، l_b، بترتیب با h_c، h_a، h_b موازیند ؛ و

$$l_a/h_a = l_b/h_b = l_c/h_c = n/(n+۱)$$

حال

$$k_o = k - k_A - k_B - k_C$$

$$= k - \frac{h_c}{۲}.\frac{c}{n+۱}.\frac{n}{n+۱} - \frac{h_a}{۲}.\frac{a}{n+۱}.\frac{n}{n+۱} - \frac{h_b}{۲}.\frac{b}{n+۱}.\frac{n}{n+۱}$$

$$= k - \frac{n}{(n+۱)^۲}\left[\frac{۱}{۲}c.h_c + \frac{۱}{۲}a.h_a + \frac{۱}{۲}b.h_b\right]$$

$$= k - \frac{n}{(n+۱)^۲} \times ۳k = k \times \frac{(n+۱)^۲ - ۳n}{(n+۱)^۲} = k \times \frac{n^۲ - n + ۱}{(n+۱)^۲}$$

بنابراین :

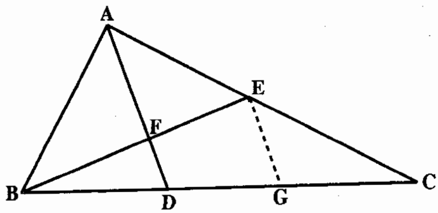
$$\frac{k_o}{k} = \frac{n^۲ - n + ۱}{(n+۱)^۲}$$

یادآوری. از این مطلب بدیهی است که وقتی n به سمت صفر یا بی‌نهایت میل کند، نسبت مطلوب به سمت ۱ میل می‌کند، می‌توان پاسخ را حدس زد. از پنج گزینه تنها (الف) این ویژگی را دارد.

۳۰۱. (الف) مطابق شکل، از E به G وسط DC وصل می‌کنیم، آن‌گاه :

$$\text{مساحت}\ \Delta EBG = (\tfrac{۲}{۳})\ (\text{مساحت}\ \Delta EBC)$$

$$\text{مساحت}\ \Delta BDF = (\tfrac{۱}{۴})\ (\text{مساحت}\ \Delta EBG) = (\tfrac{۱}{۶})\ (\text{مساحت}\ \Delta EBC)$$



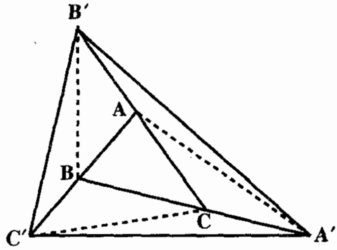
(توجه داشته باشید که چون EG وسط ضلع AC را به وسط DC وصل می‌کند با ضلع AD موازی است.) بنابراین :

$$\text{مساحت}\ FDCE = (\tfrac{۵}{۶})\ (\text{مساحت}\ \Delta EBC)$$

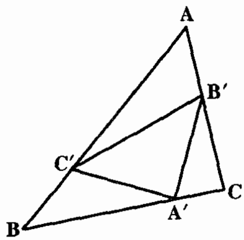
$$\frac{\text{مساحت}\ \Delta BDF}{\text{مساحت}\ FDCE} = \frac{۱}{۵}$$

از اندازهٔ CBA استفاده نکردیم.

۳.۷.۱.۴. رابطه‌ای در مساحتها



۳۰۲. اگر خطهای AA' و BB' و CC' را وصل کنیم، شش مثلث ایجاد می‌شود که همه با مثلث ABC معادلند.



۳۰۳. دو مثلث $AB'C'$ و ABC در زاویهٔ A مشترکند.

پس:

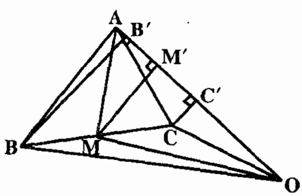
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\frac{AB'.AC'}{AB.AC}=\frac{\frac{۱}{۳}AC\times\frac{۲}{۳}AB}{AB.AC}=\frac{۲}{۹}$$

$$\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$$

به همین ترتیب $S_{CA'B'}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$ و $S_{BA'C'}=\frac{۲}{۹}S_{ABC}$

پس: $S_{A'B'C'}=S_{ABC}-۳\times\frac{۲}{۹}S_{ABC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}$

نکته. اگر نقطه‌های A'، B' و C' چنان اختیار شوند که ضلعهای مثلث را به نسبت k تقسیم کنند (به‌طور داخلی)، باز هم سه مثلث $AB'C'$، $BC'A'$ و $CA'B'$ هم‌ارزند. نسبت مساحت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در این صورت برابر $\frac{k^۲-۳k+۳}{k^۲}$ است.



۳۰۴. اگر از نقطه‌های B، C و M، بترتیب، عمودهای BB' و CC' و MM' را بر OA فرود آوریم، داریم:

$$S_{\Delta OAM}=\frac{OA.MM'}{۲} \text{ و } S_{\Delta OAB}=\frac{OA.BB'}{۲} \text{ و } S_{\Delta OAC}=\frac{OA.CC'}{۲}$$

اما در ذوزنقهٔ $BB'C'C$ پاره‌خط MM' وسطهای دو ساق را به هم وصل کرده است. پس $MM'=\frac{BB'+CC'}{۲}$. از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$MM'.OA=\frac{۱}{۲}OA.BB'+\frac{۱}{۲}OA.C'C$$

و یا:

$$۲S_{\Delta OAM}=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OAC}\Rightarrow S_{\Delta OAM}=\frac{۱}{۲}(S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OAC})$$

در صورتی که نقطه‌های B و C در دو طرف OA باشند، داریم:

$MM' = \frac{BB' - CC'}{۲}$ و از آن‌جا خواهیم داشت:

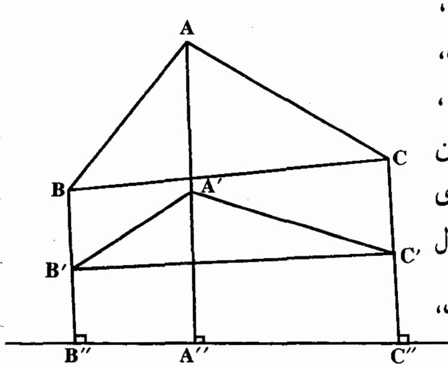
$$S_{\Delta OAM} = \frac{۱}{۲}\left|S_{\Delta OAB} - S_{\Delta OAC}\right|$$

۳۰۵. با توجه به این که $OA' = BC$ و $OB' = AC$ و $OC' = AB$ است، مثلثهای $OB'C'$، $OA'B'$ و $OA'C'$ معادل مثلث ABC می‌باشند، زیرا هریک از این مثلثها یک زاویهٔ مکمل با یکی از زاویه‌های مثلث ABC دارند. برای مثال زاویهٔ $B'\hat{O}C'$ مکمل زاویه $B\hat{A}C$ است و ضلعهای این زاویه‌ها برابرند. پس:

$$\frac{S_{OB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{OB'.OC'}{AB.AC} = \frac{AC.AB}{AB.AC} = ۱$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'} = S_{OA'B'} + S_{OA'C'} + S_{OB'C'} = ۳S_{ABC}$$

۳۰۶. مساحت ذوزنقه‌های $A''B''B'A'$، $B''C''C'B'$ و $A''C''C'A'$، بترتیب، نصف مساحت ذوزنقه‌های $ABB'A'$، $BCC'B'$ و $ACC'A'$ می‌باشد. زیرا این ذوزنقه‌ها ارتفاع مساوی دارند، اما قاعده‌های آنها نصف یکدیگر می‌باشند. برای مثال $A''A' = \frac{۱}{۲}AA'$ و $B''B' = \frac{۱}{۲}BB'$ است،



پس داریم:

$$S_{A''A'B'B''} = \frac{۱}{۲}S_{AA'B'B}$$

$$S_{B''B'C'C''} = \frac{۱}{۲}S_{BB'C'C}$$

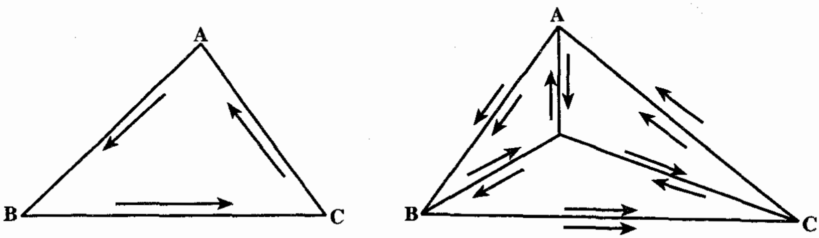
$$S_{A''A'C'C''} = \frac{۱}{۲}S_{AA'C'A}$$

اما:

$$S_{ABC} = S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} - S_{AA'C'C}\ ,$$
$$S_{A''B''C''} = S_{A''A'B'B''} + S_{B''B'C'C''} - S_{A''A'C'C''}$$

پس: $S_{A''B''C''} = \frac{۱}{۲}S_{ABC}$.

۳۰۷. نکته ۱. هرگاه مثلث ABC در صفحه‌ای جهت‌دار اختیار شود، مساحت مثلث ABC که به‌صورت [ABC] نمایش داده می‌شود، عددی است جبری که اگر جهت حرکت از A به B به C و به A در جهت مثبت صفحه باشد، مساحت مثلث، عددی مثبت می‌باشد و در غیر این صورت مساحت مثلث، عددی منفی خواهد بود. برای مثال اگر جهت مثبت صفحه را مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اختیار کنیم، در شکل بالا، [ABC] عددی است مثبت و [CAB] نیز عددی مثبت می‌باشد اما [CBA] عددی منفی خواهد بود.



نکته ۲. اگر نقطهٔ O را در صفحهٔ مثلث ABC (در داخل یا خارج مثلث) اختیار کنیم، آن‌گاه اتحاد زیر همواره برقرار است:

$$[ABC]=[OAB]+[OBC]+[OCA] \qquad (۱)$$

حال برای حل مسأله با توجه به اتحاد (۱) می‌توان نوشت:

$$[ABC]=[A'BC]+[A'CA]+[A'AB] \qquad (۲)$$

$$[A'B'C']=[AB'C']+[AC'A']+[AA'B'] \qquad (۲')$$

از جمع رابطه‌های (۲) و ('۲) با توجه به این که $AA'\|CC'$ است، قدر مطلقهای [A'CA] و [AC'A'] با هم برابرند، اما چون جهت حرکت روی آنها یکی نیست پس علامت اندازهٔ جبری این دو مساحت مختلف است، پس مجموع آنها برابر صفر می‌باشد. یعنی $[A'CA]+[AC'A']=۰$. همچنین $[AA'B']+[A'AB]=۰$ می‌باشد. پس از جمع رابطه‌های (۲) و ('۲) خواهیم داشت:

$$[ABC]+[A'B'C']=[A'BC]+[AB'C'] \qquad (۳)$$

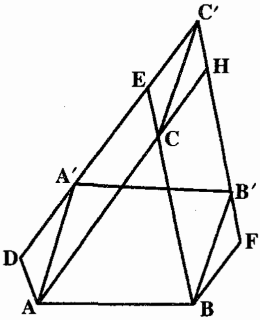
$$[ABC]+[A'B'C']=[B'CA]+[BC'A'] \qquad (۳')$$

به همین ترتیب داریم:

$$[ABC]+[A'B'C']=[C'AB]+[CA'B'] \qquad (۳'')$$

از جمع رابطه‌های (۳) و ('۳) و (''۳) نتیجه می‌شود:

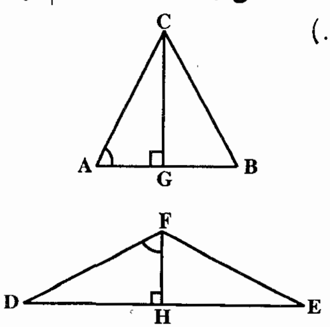
$$۳([ABC]+[A'B'C'])=[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]+[AB'C']+$$
$$[BC'A']+[CA'B']$$



۳۰۸. مثلث دلخواه ABC را درنظر می‌گیریم و روی ضلع AB و در سمت درون مثلث، متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ را می‌سازیم، به نحوی که رأسهای A' و B' آن در بیرون مثلث واقع شوند. سپس، روی دو ضلع دیگر مثلث، دو متوازی‌الاضلاع ACED و BFHC را طوری می‌سازیم که ضلعهای آنها از رأسهای متوازی‌الاضلاع اوّل بگذرند. باید ثابت کنیم که مساحت متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$، برابر است با مجموع مساحتهای دو متوازی‌الاضلاع ACED و BFHC. برای این منظور، ضلعهای DE و FH را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C' قطع کنند. بعد C' را به C وصل می‌کنیم. قبلاً یادآوری می‌کنیم که دو مثلث $A'B'C'$ و ABC برابرند، زیرا یک ضلع و دو زاویهٔ برابر دارند ($AB = A'B'$، $C\hat{A}B = C'\hat{A'}B'$ و $C\hat{B}A = C'\hat{B'}A'$). مساحت متوازی‌الاضلاع $ACC'A'$ با مساحت متوازی‌الاضلاع ACED و مساحت متوازی‌الاضلاع $BB'C'C$ با مساحت متوازی‌الاضلاع BFHC برابر است، زیرا در هر دو مورد، قاعده‌ها و ارتفاعهای برابر دارند.

اکنون اگر از شکل $ABB'C'A'A$، مثلث $A'B'C'$ را برداریم، متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ باقی می‌ماند. همین‌طور، اگر از همان شکل $ABB'C'A'A$ مثلث ABC را، که با مثلث $A'B'C'$ برابر است برداریم، مجموع متوازی‌الاضلاعهای $ACC'A'$ و $BB'C'C$، و یا هم‌ارز آنها مجموع متوازی‌الاضلاعهای ACED و AFHC باقی می‌ماند.

(این مسأله در «نیکوماکوس» ارشمیدس وجود ندارد و آن را، برای نخستین بار، در «مجموعهٔ ریاضیات» پاپوس اسکندرانی پیدا کردند. قضیهٔ پاپوس، تعمیمی از قضیهٔ فیثاغورس است. در واقع اگر در مسألهٔ پاپوس، مثلث اصلی را، یک مثلث قائم‌الزاویه بگیریم، به حالت خاص قضیهٔ فیثاغورس می‌رسیم.)

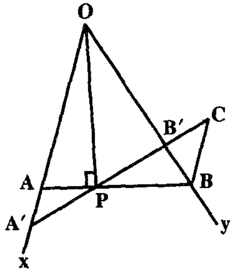


۳۰۹. (هـ) پاهای ارتفاعهای وارد از رأسهای C و F بر ضلعهای AB و DE را بترتیب با G و H نشان می‌دهیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AGC و FHD همنهشتند، زیرا ضلع AG با ضلع FH و وتر AC با وتر DF برابر است. بنابراین دو زاویهٔ GAC و DFH با هم برابرند و

$$\angle ACG + \angle GAC = \angle ACG + \angle DFH = ۹۰^\circ$$

$$\angle ACB + \angle DFH = ۲\angle ACG + ۲\angle DFH = ۱۸۰^\circ$$

مساحت مثلث ABC دو برابر مساحت مثلث ACG و در نتیجه دو برابر مساحت مثلث DFH، یعنی برابر با مساحت مثلث DEF است.



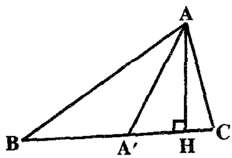
۳۱۱. اگر از نقطهٔ B خطی موازی OA رسم کنیم تا امتداد A′B′ را در نقطهٔ C قطع کند، $S_{PBB'} < S_{PBC}$ است و دو مثلث PBC و PAA′ معادلند.

۳۱۲. بترتیب، داریم:

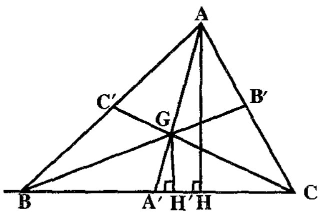
$$S_{DEF} = \frac{۱}{۲}(S_{DEF} + S_{AEF}) < \frac{۱}{۲}(S_{BEF} + S_{ADF})$$

$$= \frac{۱}{۲}S_{ABFE} = \frac{۱}{۲}(S_{ABF} + S_{AFE}) \le \frac{۱}{۲}(S_{ABF} + S_{ABE}) = S_{BDF} + S_{ADE}$$

۴.۷.۱.۴. مثلثهای هم‌ارز



۳۱۳. دو مثلث AA′B و AA′C در ارتفاع رأس A مشترک می‌باشند.

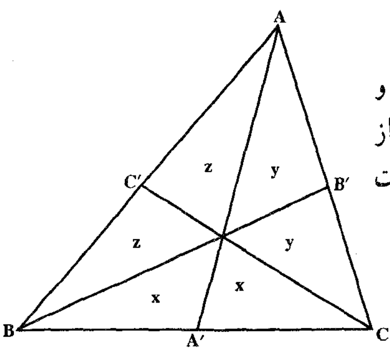


۳۱۴. هریک از مثلثهای GAB، GAC و GBC در یک قاعده با مثلث ABC شریک هستند و نسبت ارتفاعهای نظیر ضلعهای مشترک $\frac{۱}{۳}$ می‌باشد. برای مثال $\frac{AH}{GH'} = \frac{AA'}{GA'} = \frac{۱}{۳}$ است، پس:

$$S_{GBC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC}$$

در نتیجه:

$$S_{GBC} = S_{GAB} = S_{GAC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC}$$



۳۱۵. شکل را باز درنظر می‌گیریم. دو مثلث GBA′ و GA′C معادلند، زیرا قاعده‌های BA′ و A′C از آنها با هم برابرند و ارتفاع آنها مشترک است. مساحت هریک از این دو مثلث را با x نشان می‌دهیم:

$$S(GBA') = S(GA'C) = x$$

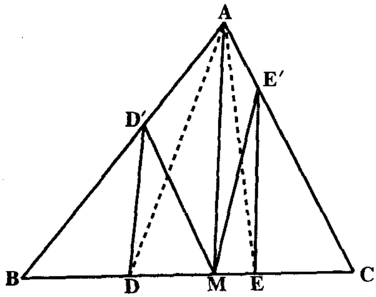
همچنین داریم:

$$S(GCB') = S(GB'A) = y$$

$$S(GAC') = S(GC'B) = z$$

اما دو مثلث CAC' و $CC'B$ نیز معادلند، پس: $2y+z=z+2x \Rightarrow x=y$. از این که دو مثلث ABA' و $AA'C$ نیز معادلند، نتیجه می‌شود $y=z$ و بنابراین داریم $x=y=z$.

۳۱۶. در ذوزنقهٔ $AA'B'B$ دو مثلث ABD و $DA'B'$ معادل هستند و در ذوزنقهٔ $AA'CC'$ که D محل برخورد ساقهای آن است دو مثلث DAC و $DA'C'$ معادلند.

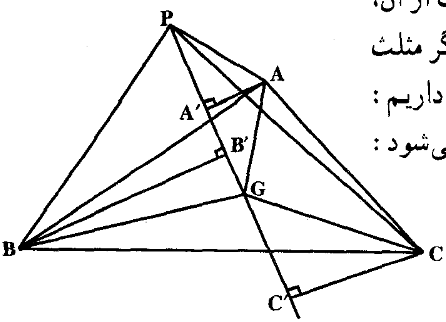


۳۱۸. باید ثابت کنیم که:

$$S_{BMD'}=S_{MD'AE'M}=S_{CME'}=\frac{1}{3}S_{ABC}$$

با توجه به این که $S_{DD'A}=S_{DD'M}$ و ...

۳۱۹. اگر خط Δ از نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث بگذرد، فاصلهٔ یک رأس مثلث از آن، مساوی مجموع فاصله‌های دو رأس دیگر مثلث از آن است. یعنی در شکل روبه‌رو، داریم: $BB'=AA'+CC'$. از آن جا نتیجه می‌شود:



$$BB'\times\frac{PG}{2}=\frac{AA'.PG}{2}+\frac{CC'.PG}{2}\Rightarrow S_{PBG}=S_{PAG}+S_{PCG}$$

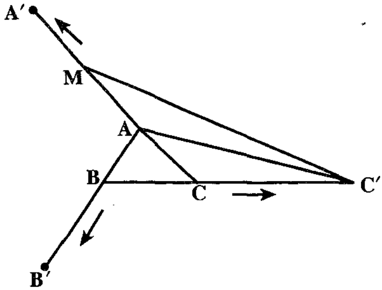
۳۲۰. گزینهٔ (هـ) درست است. زیرا فرض کنید d فاصلهٔ نقطهٔ P از یک ضلع مثلث، مثلاً ضلع c باشد. در این صورت می‌خواهیم: $\frac{1}{3}S_{ABC}=$ مساحت مثلث APB، یا اگر h ارتفاع وارد بر ضلع c باشد، می‌خواهیم:

$$\frac{1}{2}dc=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ch\ ;\ \Rightarrow d=\frac{1}{3}h$$

برای آن که این رابطه برای هر ضلع مثلث برقرار باشد، نقطهٔ مطلوب باید، نقطهٔ همرسی سه میانهٔ مثلث باشد.

۵.۷.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۲۱. گزینهٔ (هـ) درست است.



۳۲۲. تعداد سالهای خواسته شده را n فرض می‌کنیم.
ابتدا A را به C' وصل می‌کنیم. مثلثهای ABC و ABC'، بترتیب، قاعده‌های BC و nBC را دارند و چون در ارتفاع رأس A مشترکند، پس: $S_{ABC'} = nS_{ABC}$ با فرض $S_{ABC} = \alpha$، می‌توان نوشت $S_{ABC'} = n\alpha$.
اکنون نقطه‌ای مانند M روی CA' چنان اختیار می‌کنیم که $CA = AM$ باشد. در این صورت $S_{AMC'} = S_{ACC'}$ و چون $AA' = nAC$ است، پس می‌توان روی AA'، n مثلث نظیر AMC' ساخت. پس مساحت مثلث $A'C'C$ برابر است با:

$$n \times n\alpha + n\alpha = (n^۲ + n)\alpha$$

نظیر همین مقدارها را برای مثلثهای $A'B'A$ و $B'C'B$ داریم، پس می‌توان نوشت:

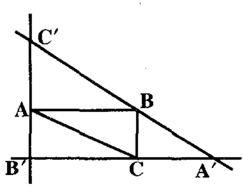
$$S_{A'B'C'} = ۳(n^۲ + n)\alpha$$

و از آن‌جا:

$$(۳n^۲ + ۳n + ۱)\alpha = ۱۰۲۷\alpha$$
$$\Rightarrow n(n+۱) = ۳۴۲ \Rightarrow n = ۱۸$$

پس در سال ۱۹۶۹ آخرین بررسی روی ستاره‌ها انجام شده است. زیرا:

$$۱۷۸۹ + ۱۸ \times ۱۰ = ۱۹۶۹$$



۳۲۳. مثلث ABC را درنظرمی‌گیریم که، رأسهای آن در نقطه‌های مفروض باشد و حداکثر مساحت را داشته باشد. در این صورت، روشن است که هریک از n نقطهٔ مفروض در مثلث $A'B'C'$ قرار می‌گیرد (شکل) که در آن $A'B'$، $B'C'$ و $A'C'$، بترتیب، موازی AB، BC و AC هستند. از آن‌جا که، مساحت مثلث $A'B'C'$ چهار برابر مساحت مثلث ABC است، بنابراین مساحت آن از ۴ تجاوز نمی‌کند و همان مثلث مطلوب است.

۳۲۴. (هـ) اگر b و h، بترتیب، قاعده و ارتفاع مثلث باشند پس از ۱۰٪ تغییر آنها، مساحت مثلث به صورت $\frac{۱}{۲}(۱/۱b)(۰/۹h) = ۰/۹۹(\frac{۱}{۲}bh)$ درمی‌آید که نسبت به مساحت اصلی یعنی $\frac{۱}{۲}bh$ مقدار ۱٪ کاهش را نشان می‌دهد.

یادداشت. اگر b به اندازهٔ c برابر خود افزایش یابد، $(b + cb)$، و h به اندازهٔ c برابر خود کاهش پیدا کند، $(h - ch)$، آن‌گاه حاصلضرب $p = bh$ به اندازهٔ $c^۲$ برابر خود کاهش می‌یابد.

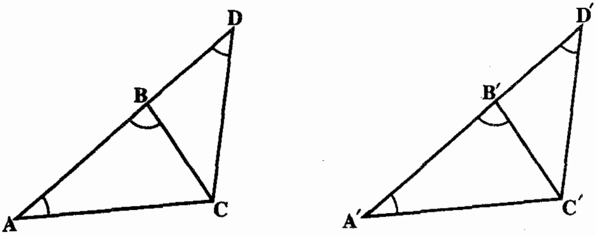
$$p' = (۱+c)b(۱-c)h = (۱-c^۲)bh = (۱-c^۲)p = p - c^۲p$$

۸.۱.۴. همنهشتی مثلثها

۳۲۷. الف. $\hat{D}=\hat{Q}$ یا $MS=XP$.

ب. $\hat{B}=\hat{J}$ یا $PY=RS$.

۳۲۹. ضلعهای AB و $A'B'$ را بترتیب از طرف A و A' به اندازه‌های $BD=BC$ و $B'D'=B'C'$ امتداد می‌دهیم. از D به B و از D' به B' وصل می‌کنیم. زاویه‌های ABC و $A'B'C'$ زاویه‌های خارجی مثلثهای متساوی‌الساقین BDC و $B'D'C'$ می‌باشند. پس $A\hat{B}C=2\hat{D}$ و $A'\hat{B}'C'=2\hat{D}'$. از طرفی دو مثلث ADC و $A'D'C'$ به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند ($AD=A'D'$ و $BC=B'C'$ و $\hat{A}=\hat{A}'$). از تساوی آنها نتیجه می گردد که $\hat{D}=\hat{D}'$. پس $A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$ و چون دو زاویه از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ برابرند پس زاویهٔ سومشان نیز با هم مساوی است یعنی $\hat{C}=\hat{C}'$ است. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت برابری دو زاویه و یک ضلع متساویند.

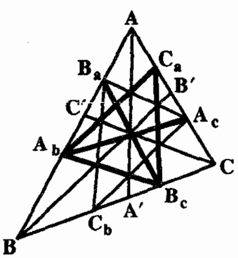


۳۳۲. BC عمود منصف پاره خط AA' است.

۳۳۳. مثلثهای EMH و FMH به حالت برابری سه ضلع مساویند و داریم:

$$ME+MF=HE+HF=\frac{AB+AC}{2}$$

۳۳۷. میانه‌های مثلث را AA'، BB' و CC' می‌نامیم. دو مثلث $A_bB_cC_a$ و $A_cB_aC_b$ به دلیل برابری سه ضلع نظیر با هم برابرند. زیرا داریم:



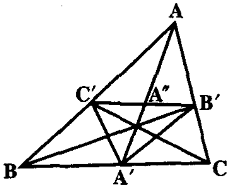
$$B_aA_c=A_bB_c=\frac{2}{3}CC'=\frac{2}{3}m_c$$

$$A_cC_b=A_bC_a=\frac{2}{3}m_b$$

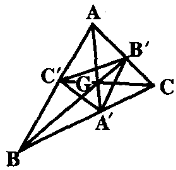
$$C_bB_a=B_cC_a=\frac{2}{3}m_c$$

۹.۱.۴. نقطه‌های ویژه

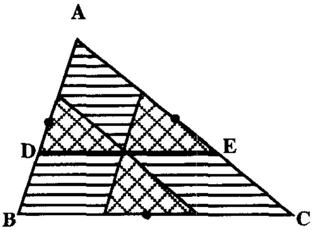
۳۴۰. این مرکز ارتفاعی، همان نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.



۳۴۱. اگر $A'B'C'$ مثلث میانه‌ای مثلث ABC باشد، میانهٔ AA' پاره‌خط $B'C'$ را نصف می کند. پس AA' میانهٔ مثلث $A'B'C'$ نیز هست. همین مطلب درمورد بقیهٔ میانه‌ها نیز درست است.



۳۴۲. در واقع اگر مثلث $A'B'C'$ را مثلث مفروض درنظر بگیریم، مثلث ABC پاد مکمل $A'B'C'$ خواهد بود و نقطهٔ G مرکز ثقل هر دو مثلث است.



۳۴۴. اگر یکی از مگسها در رأس A قرار گیرد، آن وقت مرکز ثقل مثلثی که از مگسها تشکیل می‌شود، در مثلث ADE قرار دارد، که در آن $\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۳}$. چون یکی از مگسها، از همهٔ رأسها می گذرد، بنابراین مرکز ثقل «مثلث مگسها» باید متعلق به سه مثلثی باشد که روی شکل هاشور زده‌ایم. تنها نقطهٔ مشترک این سه مثلث، مرکز ثقل مثلث مفروض است.

۳۴۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۴۶. این مسأله، عبارت است از محاسبهٔ مجموع عددهای به اصطلاح مثلثی که به صورت $\frac{n(n+۱)}{۲}$ هستند. اگر در این عبارت، مقدار n را بترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ... بگیریم، عددهای مثلثی به‌دست می‌آیند :

۱ ,۳ ,۶ ,۱۰ ,۱۵ ,۲۱ ,۲۸ ,۳۶ ,۴۵ ,۵۵ ,...

توجه کنیم که مجموع هر دو عدد مجاور مثلثی، یک مجذور کامل است. اکنون، اگر عدد مثلثی را به T نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$T_n+T_{n-۱}=n^۲$$

$$T_{n-۱}+T_{n-۲}=(n-۱)^۲$$

....

$$T_۳+T_۲=۳^۲$$

$$T_۲+T_۱=۲^۲$$

اگر طرفهای نظیر این برابریها را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$T_n + ۲(T_{n-۱} + T_{n-۲} + \dots + T_۲) + T_۱ = n^۲ + (n-۱)^۲ + \dots + ۳^۲ + ۲^۲$$

$$= \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} - ۱ \text{ و}$$

$$\Rightarrow ۲(T_n + T_{n-۱} + \dots + T_۲ + T_۱) = T_۱ + T_n + \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} - ۱$$

اکنون اگر توجه کنیم که $T_۱ = ۱$ و $T_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$، به‌دست می‌آید:

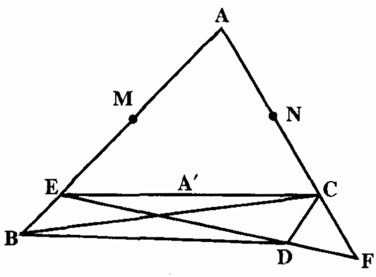
$$T_n + T_{n-۱} + \dots + T_۲ + T_۱ = \frac{۱}{۲}\left[\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} + \frac{n(n+۱)}{۲}\right]$$

که بعد از ساده کردن خواهیم داشت:

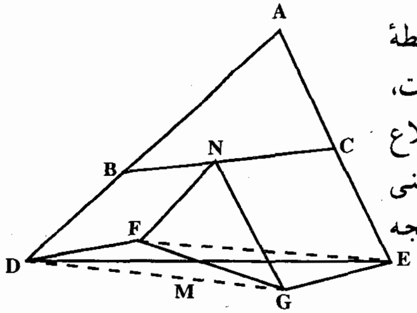
$$T_۱ + T_۲ + \dots + T_n = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

۱۰.۱.۴. نقطه‌های همخط

۳۴۷. با فرض $AB > AC$ از نقطهٔ C خطی موازی ضلع AB رسم کنید تا EF را در نقطهٔ D قطع کند. آن‌گاه، ثابت کنید که چهارضلعی BECD متوازی‌الاضلاع است.



۳۴۸. چهارضلعیهای BNFD و CNGE که ضلعهایشان دو به دو متوازی‌اند متوازی‌الاضلاع می‌باشند، پس DF||BN و GE||NC است و چون نقطهٔ N وسط ضلع BC است، پس DF||GE است، یعنی چهارضلعی DFEG متوازی‌الاضلاع است. پس قطرهای آن منصف یکدیگرند، یعنی FG از نقطهٔ M وسط DE می‌گذرد. در نتیجه نقطه‌های G، M و F بر یک استقامتند.



۳۴۹. دو مثلث ACA' و BCB' مساوی‌اند زیرا $BC = A'C$ و $AC = B'C$ و $BCB' = A'\hat{C}A$. نتیجه می‌شود $AA' = BB'$ (۱) نیز دو مثلث $BC'B'$ و $AC'A''$ همنهشتند، زیرا $AC' = BC'$ و $B'C' = A''C'$ و $B\hat{C'}B' = A\hat{C'}A''$. نتیجه می‌شود که $AA'' = B'B$ با توجه به رابطهٔ (۱) داریم : $AC' = AA'' = BB'$ (۲) .

دو مثلث $C'BC$ و ABA' همنهشتند چون $AB = BC'$ و $A'B = BC$ و $C'\hat{B}C = A\hat{B}A'$ نتیجه می‌شود که $AA' = CC'$ با توجه به رابطهٔ (۲) داریم : $AA'' = AA'$.

از تساوی مثلثهای بالا داریم که :

$$\hat{A'_4} = \hat{B_4}\ ,\ \hat{A'_3} = \hat{C_3}$$

و :

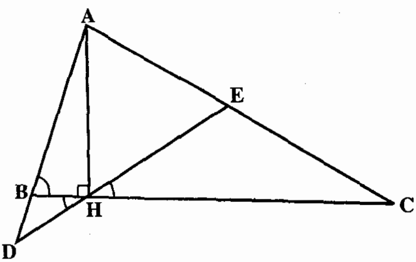
$$\hat{B_2} = \hat{A_2}\ ,\ \hat{A_1} = \hat{C'_1}$$

نتیجه می‌شود :

$$\hat{A_1} + \hat{A_2} = 120^\circ$$

پس زاویهٔ $A'\hat{A}A'' = 180^\circ$ ، یعنی سه نقطه A ، B' و A'' بر یک استقامتند.

۳۵۰. از نقطهٔ H به نقطه‌های D و E وصل کنید و ثابت کنید که : $B\hat{H}D = E\hat{H}C$.



۳۵۱. BEGD که دو ضلع روبه‌رویش مساوی و موازی‌اند متوازی‌الاضلاع است و می‌توان نوشت :

$$DC = BD = \frac{BC}{2} \text{ و } EG \| BC$$

در نتیجه EGCD که دو ضلعش موازی و مساوی‌اند، متوازی‌الاضلاع است و CG مساوی و موازی DE است. از طرفی دیگر DE که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند مساوی و موازی نصف ضلع سوم است. در نتیجه CG موازی و مساوی نصف ضلع سوم یعنی AF است و AGCF متوازی‌الاضلاع می‌شود و $AG = CF$ خواهد شد. EF که وسطهای دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند موازی BC است، EG هم موازی BC بود پس EF و EG روی یک خط هستند.

۳۵۳. اگر P پای عمودی باشد که از رأس A بر نیمساز زاویهٔ B رسم شده است، و Q محل برخورد AP و ضلع BC باشد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BPA و BPQ همنهشتند، و نقطهٔ P وسط پاره‌خط AQ است؛ و به این ترتیب، قضیه ثابت می‌شود.

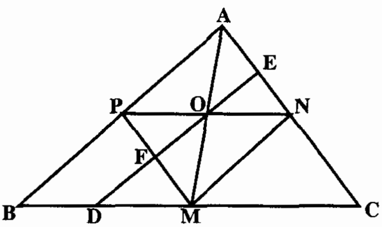
۳۵۴. اگر پای عمودهای رسم شده از A بر نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی B و C را D، E، F و H بنامیم، چهارضلعیهای AEBD و AFCH مستطیلهایی هستند که قطرهایشان از وسطهای ضلعهای AB و AC که نقطه‌های ثابتی هستند، می‌گذرند.

۳۵۵. چهارضلعی AEHF مستطیل و نقطهٔ H' وسط AH است. اگر O نقطهٔ برخورد عمود‌ـ منصفهای ضلعهای مثلث ABC باشد، ثابت کنید، چهارضلعی $AH'MO$ متوازی‌الاضلاع است.

۳۵۶. نقطه‌های I و J روی نیمساز داخلی زاویهٔ A واقعند.

۳۵۷. با توجه به این نکته که اگر دو خط راست نسبت به یک خط راست قرینهٔ یکدیگر باشند، نقطهٔ تقاطعشان روی آن خط راست واقع است. نقطهٔ برخورد $B'C'$ با BC را D' بنامید و ثابت کنید که نقطهٔ D' بر نقطهٔ D منطبق است.

۱۱.۱.۴. خطهای همرس



۳۵۹. از M به N و P وصل می‌کنیم. چهارضلعی APMN متوازی‌الاضلاع است، زیرا $MN\|AB$ و $PM\|AC$ است. بنابراین اگر نقطهٔ برخورد قطرهای آن (یعنی AM و PN) را O بنامیم، خطی که از نقطهٔ E وسط ضلع AN به نقطهٔ O محل برخورد قطرها وصل می‌شود، موازی AB است و از نقطهٔ F وسط ضلع PM می‌گذرد و در مثلث MBP خطی که از نقطهٔ F موازی ضلع AB رسم می‌شود، از نقطهٔ D وسط ضلع BM می‌گذرد. پس خطهای AM، PN و DE از یک نقطه می‌گذرند.

۳۶۳. خطهای راست مورد بحث، عمود منصف ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۳۶۴. نقطهٔ برخورد دو خط AA' و BB' را O فرض کنید و ثابت کنید که سه نقطهٔ C، O و C' بر یک استقامت می‌باشند.

۳۶۵. خطهای مورد نظر عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند، پس همرسند.

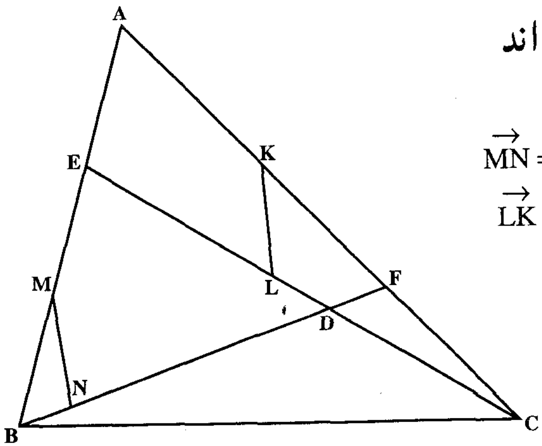
۳۶۶. ثابت کنید خطهای AG، BE و CH ارتفاعهای مثلث ACB می‌باشند.

۳۶۷. نقطهٔ برخورد ارتفاع CH با AM را P می‌نامیم. دو مثلث ACP و ABE با هم همنهشتند زیرا $AC = AE$ و $B\hat{A}E = A\hat{C}P$ و $A\hat{E}B = P\hat{A}C$، پس $CP = AB$ است. حال

اگر نقطهٔ برخورد ارتفاع CH با BN را نقطهٔ P' بنامیم، از برابری دو مثلث $P'BC$ و ABG نیز ثابت می‌شود که $P'C = AB$ است. در نتیجه نقطهٔ P' بر نقطهٔ P منطبق است. پس خطهای AM، BN و CH از یک نقطه می گذرند.

۳۶۸. همان‌طوری که در مسأله دیدیم این خطها میانه های مثلث ABC می باشند، پس همرسند.

۱۲.۱.۴. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...



۱.۱۲.۱.۴. خطها موازی‌اند

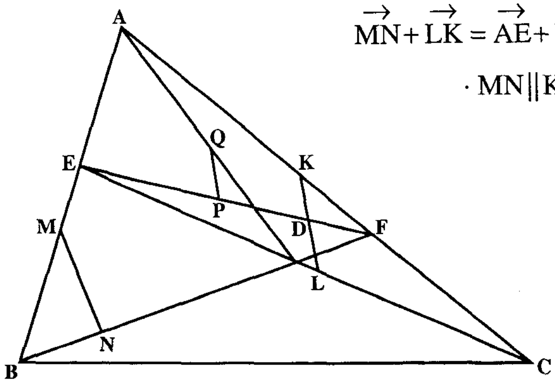
۳۶۹. راه حل اوّل.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA}$$

از جمع دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{\circ}$$

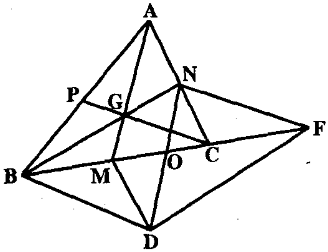
پس $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$ یعنی $MN \| KL$.



راه حل دوم. وسطهای قطرهای چهارضلعی AEDF را P و Q می‌نامیم. اگر مساحت این چهارضلعی را با $S_\circ$ نمایش دهیم، خواهیم داشت :

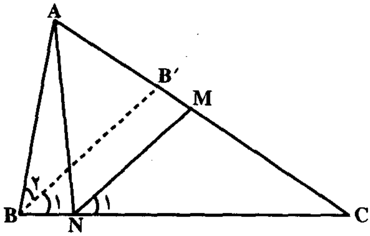
$$S_{QKL} = S_{QKCL} - S_{KLC}$$
$$\Rightarrow S_{QKL} = S_{QKC} + S_{QCL} - S_{KLC} = S_{QAF} + S_{QDE} - S_{KLC}$$
$$\Rightarrow S_{QKL} = \frac{۱}{۲} S_{DAF} + \frac{۱}{۲} S_{ADE} - S_{KLC} = \frac{۱}{۲} S_\circ - S_{KLC}$$

و به همین ترتیب، اثبات می‌شود که : $S_{PKL} = \frac{1}{2}S_{0} - S_{KLC}$ و سپس موازی بودن PQ و KL نتیجه می‌شود، به طریق مشابه ثابت می‌شود که PQ و MN موازی یکدیگرند و از آن‌جا حکم مسأله نتیجه می‌شود.



۳۷۰. اگر نقطهٔ برخورد DN و BF را O بنامیم، باید ثابت کنیم که نقطهٔ O هم وسط پاره‌خط DN، و هم وسط پاره‌خط MC است.

۴.۱.۱۲.۲. خطها بر هم عمودند



۳۷۲. مثلث MNC متساوی‌الساقین است، زیرا $MN \| BB'$ است. در نتیجه $\hat{N}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \hat{C}$ است، پس MN = MC و چون نقطهٔ M وسط ضلع AC است، پس MN = MA = MC می‌باشد. در مثلث ANC میانهٔ MN نصف ضلع AC است. پس این مثلث در رأس N قائم‌الزاویه است، یعنی $AN \perp BC$ است.

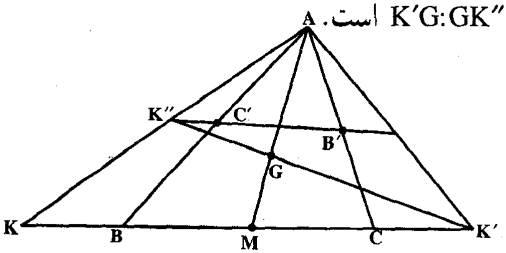
۴.۱.۱۲.۳. خط، نیمساز است

۳۷۳. امتداد BA را y بنامید و ثابت کنید $y\hat{A}x = x\hat{A}C$.

۴.۱.۱۲.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۳۷۶. در مثلث DHE، خطهای BH و BC، نیمسازهای درونی و برونی زاویهٔ DHE می‌باشند.

۳۷۸. در مثلث AKK′ ، خطهای AM، K′K″ میانه‌اند. بنابراین K′K″ از نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرد و $K'G:GK'' = 2:1$ است.



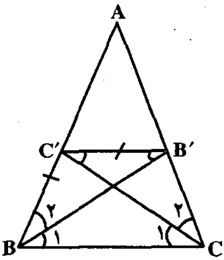
۴.۱.۱۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۱. با توجه به این که $B\hat{A}C + D\hat{A}E = 180^\circ$ است، ثابت کنید $A\hat{B}H + B\hat{A}H = 90^\circ$ است.

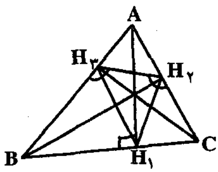
۴.۱.۱۳. شکلهای ایجاد شده

۴.۱.۱۳.۱. شکلهای ایجاد شده (مثلثها)

۳۸۲. نیمسازهای داخلی و خارجی هریک از زاویه‌های مثلث بر هم عمودند.



۳۸۳. اگر BB' و CC' نیمسازهای دو زاویهٔ درونی B و C از مثلث ABC و $B'C'$ موازی ضلع BC باشد، داریم: $BC' = C'B' = B'C$ و چهارضلعی $BC'B'C$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. پس $\hat{B} = \hat{C}$ یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.



۳۸۵. اگر H_1 ، H_2 و H_3 پای ارتفاعهای مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی آن باشد، مثلث $H_1H_2H_3$ مثلث ارتفاعی (پادک) هر چهارمثلث گروه مرکز ارتفاعی (A، B، C و H) است.

۴.۱.۱۳.۲. شکلهای ایجاد شده (چند ضلعیها)

۳۸۶. ثابت کنید، دو ضلع روبه‌روی آن موازی و مساویند.

۳۸۹. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا (الف) درست است به این دلیل که FH موازی و مساوی AE است. (ج) صحیح است، زیرا وقتی HE که موازی CA است امتداد داده شود، AB را در D قطع می کند ؛ DC و BH ضلعهای متناظر مثلثهای متشابه ACD و HDB هستند. (د) صحیح است، زیرا :

$$FG = FE + EG = AD + \frac{۱}{۲}DB = \frac{۳}{۴}AB$$

(هـ) صحیح است، زیرا G نقطهٔ میانی HB است (FE موازی AB و E نقطهٔ میانی CB است). (ب) را با اطلاعات داده شده نمی‌توان ثابت کرد. آیا می‌توانید تعیین کنید که برای اثبات گزارهٔ (ب) چه اطلاعات اضافی برای مسأله لازم است؟

۳۹۰. اگر نقطهٔ H پای ارتفاع رأس A و نقطه‌های M، N و L وسطهای ضلعهای مثلث ABC باشند، $MN \parallel BC$ و $ML = HN = \frac{AB}{۲}$ است. پس چهارضلعی MNHL ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۱۴.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به مثلث در هر حالت

۳۹۱. a) اگر نقطهٔ P روی خط راست AD واقع باشد، درستی گزاره روشن است. فرض می‌کنیم، نقطهٔ P روی خط راست AD نباشد و O را وسط پاره‌خط راست AD می‌گیریم. نقطهٔ P'، قرینهٔ P نسبت به O را پیدا می‌کنیم. چهارضلعیهای $BPCP'$ و $P'APD$ متوازی‌الاضلاعند و داریم:

$$AP+PD=AP'+AP>P'B+BP=BP+PC$$

b) بنابر شرط، P نقطه‌ای دلخواه است. P را منطبق بر A می‌گیریم. در این صورت $AD \ge AB+AC$. اکنون P را منطبق بر D می‌گیریم. به‌دست می‌آید: $AD \ge BD+DC$. از مجموع این دو نابرابری، خواهیم داشت:

$$2AD \ge AB+AC+BD+CD$$

از طرف دیگر، همیشه داریم:

$$AD \le AC+CD \ , \ \ AD \le AB+BD$$

در ضمن، در هریک از این دو نابرابری، تنها وقتی به علامت برابری می‌رسیم که، سه نقطه، بر یک خط راست باشند. از مجموع دو نابرابری اخیر، به‌دست می‌آید:

$$2AD \le BD+AB+AC+CD$$

از مقایسهٔ این نابرابری با نابرابری قبل نتیجه می‌شود:

$$2AD = BD+AB+AC+CD$$

از آن‌جا، بلافاصله نتیجه می‌شود که، نقطه‌های A، B، C و D، روی یک خط راستند و همهٔ نابرابری‌های قبلی، برابری‌اند و در نتیجه، نقطه‌های B و C، روی پاره‌خط راست AD واقعند و درضمن $AB=CD$.

۳۹۲. این عبارت را درنظر می‌گیریم:

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})(b_1+\ldots+b_k)$$

با باز کردن پرانتزها، بسادگی معلوم می‌شود که:

$$S=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

از طرف دیگر، چون a_k-a_{k+1} غیرمنفی است و هر عبارت به صورت $b_1+\ldots+b_k$، از لحاظ قدرمطلق، از B تجاوز نمی‌کند، بنابراین:

$$|S| \le B[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)]=Ba_1$$

۳۹۴. گزینهٔ (هـ) درست است.

۳۹۵. دو مثلث PP_2P_3 و $P_1P_2P_3$ در قاعدهٔ P_2P_3 مشترکند. پس:

$$\frac{[PP_2P_3]}{[P_1P_2P_3]}=\frac{PQ_1}{P_1Q_1}$$

همچنین داریم : $\frac{[PP_1P_2]}{[P_1P_2P_3]}=\frac{PQ_3}{P_3Q_3}$ و $\frac{[PP_3P_1]}{[P_2P_3P_1]}=\frac{PQ_2}{P_2Q_2}$

از جمع رابطه‌های بالا خواهیم داشت :

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}+\frac{PQ_2}{P_2Q_2}+\frac{PQ_3}{P_3Q_3}=1$$

این رابطه مستلزم آن است که حداقل یکی از نسبتهای $\frac{PQ_i}{P_iQ_i}$ کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{3}$ و یکی، بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{3}$ باشد و این، معادل نامساویهای مطرح شده در صورت مسأله است. زیرا : $\frac{PQ_i}{P_iQ_i}\le\frac{1}{3}$ ، اگر و فقط اگر : $3\le 1+\frac{P_iP}{PQ_i}=\frac{P_iP+PQ_i}{PQ_i}=\frac{P_iQ_i}{PQ_i}$ باشد و این نامساوی برقرار است، اگر و فقط اگر $2\le\frac{P_iP}{PQ_i}$. به همین ترتیب $\frac{PQ_i}{P_iQ_i}\ge\frac{1}{3}$ ، اگر و فقط اگر $2\ge\frac{P_iP}{PQ_i}$ باشد.

۳۹۷. گزینهٔ (د) درست است.

۳۹۸. تعداد مثلثها ۲۱۶ است. زیرا اگر شمار خطهای رسم شده از A به استثنای AB را n و شمار خطهای رسم شده از B به استثنای AB را P بنامیم، در برخی از مثلثهای این شکل AB یک ضلع هر یک از آنهاست و دو ضلع دیگرشان یکی از A و دیگری از B رسم شده است (به غیر از AB). شمار این مثلثها nP است. مثلهای دیگری نیز که یک ضلع آنها AB نیست دو نوعند : الف. در برخی دو ضلعشان از A و یک ضلعشان از B رسم شده است. شمار مثلثهای مربوط به دو ضلع رسم شده از A، $n(n-1)/2$ و شمار مثلثهایی که به ضلع سوم آنها (رسم شده از B) مربوط می‌شود، P است. پس شمار این مثلثها $Pn(n-1)/2$ است. ب. دو ضلع آنها از B و یک ضلعشان از A رسم شده. در این جا نیز $Pn(n-1)/2$ مثلث می‌توان شمرد. پس شمار کل مثلثها $nP(n+P)/2$ و چون در این‌جا $n=P=6$ است، کلاً ۲۱۶ مثلث می‌توان شمرد.

۴۰۰. در مثلث ABC فرض می کنیم، $AB>AC$ باشد. در این صورت اگر AM میانه و AH ارتفاع و AD نیمساز داخلی نظیر رأس A باشند، داریم $M\hat{A}B<M\hat{A}C$. پس نیمساز AD داخل زاویهٔ MAB نمی‌تواند قرار داشته باشد. همچنین $H\hat{A}C=H\hat{A}B$ است. پس نیمساز AD داخل زاویهٔ HAC نیز قرار ندارد. پس نیمساز AD داخل زاویهٔ MAH واقع است.

۱۵.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

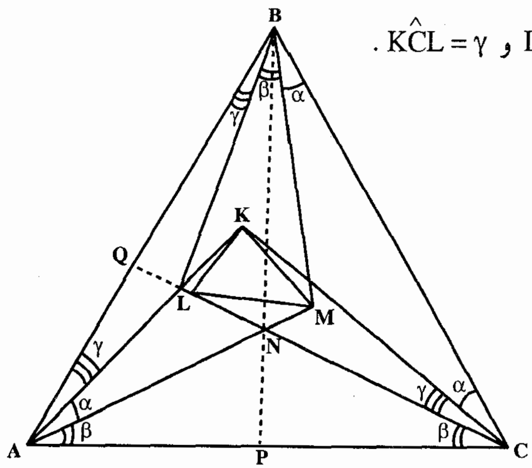
۴۰۲. ۱. ثابت کنید، مثلث $MB'C'$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین در رأس M است. ۲. تساوی مثلثهای $MA'B'$ و MCC' را ثابت کنید. ۳. خطهای AA' و BB' و CC' ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ می‌باشند.

۲.۴. مثلث متساوی الاضلاع

۲.۲.۴. زاویه

۱.۲.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۴۰۳. قرار می‌گذاریم: $\alpha = 20°$، $\beta = 25°$، $\gamma = 15°$. در این صورت $\alpha، \beta، \gamma < 30°$، $\alpha+\beta+\gamma = 60°$ و $K\hat{A}M = 60° - M\hat{A}C - K\hat{A}B = \alpha$ و به همین ترتیب: $L\hat{B}M = \beta$ و $K\hat{C}L = \gamma$.



فرض می‌کنیم، پاره‌خطهای راست AM و CL، در نقطهٔ N؛ خطهای راست BN و AC در نقطهٔ P و خطهای راست CL و AB در نقطهٔ Q، یکدیگر را قطع کرده باشند. چون $AB = BC$ و $AN = NC$ (زیرا هر یک از زاویه‌های NAC و NCA برابر β هستند)، بنابراین BP، نیمساز زاویهٔ ANC و، در نتیجه، نیمساز زاویهٔ LNM است. نقطهٔ B' را داخل زاویهٔ LNM، بیرون مثلث LMN و به یک فاصله از سه خط راست LN، LM و MN انتخاب می‌کنیم. این نقطه، روی خط راست NB و نیمسازهای

خارجی زاویه‌های L و M از مثلث LMN قرار دارد، بنابراین :

$$L\hat{B'}M = ۱۸۰^\circ - B'\hat{L}M - B'\hat{M}L$$

$$= ۱۸۰^\circ - \frac{۱۸۰^\circ - M\hat{L}N}{۲} - \frac{۱۸۰^\circ - N\hat{M}L}{۲} = \frac{N\hat{L}M + N\hat{M}L}{۲}$$

$$= \frac{۱۸۰^\circ - L\hat{N}M}{۲} = \frac{N\hat{A}C + N\hat{C}A}{۲} = \beta = L\hat{B}M$$

یعنی B' بر B منطبق است و

$$B\hat{L}M = B\hat{L}Q = ۱۸۰^\circ - C\hat{Q}B - A\hat{B}L$$

$$= A\hat{B}C + B\hat{C}Q - A\hat{B}L = ۶۰^\circ + \alpha + \gamma - \gamma = ۶۰^\circ + \alpha$$

چون :

$$B\hat{L}C = ۱۸۰^\circ - L\hat{B}C - L\hat{C}B = ۱۸۰^\circ - (\beta + \alpha) - (\alpha + \gamma) = ۱۲۰^\circ - \alpha$$

بنابراین :

$$M\hat{L}C = B\hat{L}C - B\hat{L}M = ۱۲۰^\circ - \alpha - (۶۰^\circ + \alpha) = ۶۰^\circ - ۲\alpha$$

(به یاد بیاوریم که $\alpha < ۳۰^\circ$) به همین ترتیب، ثابت می‌شود :

$$K\hat{L}B = ۶۰^\circ - ۲\alpha$$

به این ترتیب داریم :

$$K\hat{L}M = B\hat{L}C - K\hat{L}B - M\hat{L}C$$

$$= (۱۲۰^\circ - \alpha) - (۶۰^\circ - ۲\alpha) - (۶۰^\circ - ۲\alpha) = ۳\alpha$$

یعنی $K\hat{L}M = ۳\alpha = ۶۰^\circ$.

به همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد :

$$L\hat{K}M = ۳\beta = ۷۵^\circ \ , \ K\hat{M}L = ۳\gamma = ۴۵^\circ$$

۴۰۴ . مثلث $B_\circ XC_\circ$ را در نظر می‌گیریم. خط راست XR نیمساز زاویهٔ $C_\circ XB_\circ$ است. بسادگی می‌توان تحقیق کرد که $C_\circ\hat{R}B_\circ = \frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲}C_\circ\hat{X}B_\circ$. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که $C_\circ R$ و $B_\circ R$ ، بترتیب، نیمساز زاویه‌های $XC_\circ B_\circ$ و $XB_\circ C_\circ$ هستند. به همین نحو، در مثلثهای $C_\circ YA_\circ$ و $A_\circ ZB_\circ$ ، نقطه‌های P و Q نقطه‌های برخورد نیمسازها هستند. بنابراین، با در نظر گرفتن این که $P\hat{A_\circ}Q = \frac{\hat{A}}{۳}$ ، $Q\hat{B_\circ}R = \frac{\hat{B}}{۳}$ و $R\hat{C_\circ}P = \frac{\hat{C}}{۳}$ به حکمی می‌رسیم که از آن قضیهٔ مورلی نتیجه می‌شود.

۴۰۵. (ج) اندازه‌های $\angle ADC$ ، $\angle CDE$ و $\angle EDG$ ، بترتیب، ۹۰°، ۶۰°و ۹۰° است.
بنابراین اندازهٔ $\angle GDA$ برابر است با :

$$۳۶۰^\circ-(۹۰^\circ+۶۰^\circ+۹۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$

۴۰۶. (ج) چون :

$$DA=AB=AE\ ,\ \angle DAE=۹۰^\circ+۶۰^\circ=۱۵۰^\circ$$

$$\angle AED=\left(\frac{۱۸۰-۱۵۰}{۲}\right)^\circ=۱۵^\circ$$

۴ . ۲ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۰۸. دو مثلث ABD و ADC را با هم بسنجید.

۴ . ۲ . ۳. ضلع

۴ . ۲ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۴۰۹. ۶ سانتی متر.

۴۱۰. با توجه به این که $S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است، داریم :

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۱۶\sqrt{۳}\Rightarrow a=۸cm$$

۴ . ۲ . ۴ . ارتفاع (میانه، نیمساز)

۴ . ۲ . ۴ . ۱ . اندازهٔ ارتفاع

۴۱۱. از تساوی مثلثها استفاده کنید.

۴۱۲. $۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر.

۴۱۳. $۳\sqrt{۳}$ سانتیمتر.

۴ . ۲ . ۵ . پاره‌خط

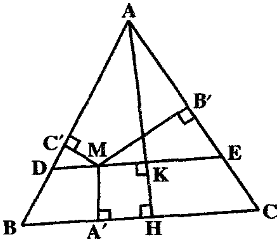
۴ . ۲ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

۴۱۴. این پاره‌خط نصف ضلع مثلث است. پس اگر ضلع مثلث را a فرض کنیم، داریم :

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۱۴۴\Rightarrow a=۱۲\Rightarrow \frac{a}{۲}=۶cm$$

۴ . ۲ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

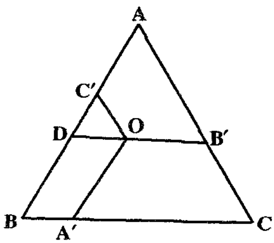
۴۱۵. مثلثهای OBE و OFC متساوی‌الساقین و مثلث OEF متساوی‌الاضلاع است.



۴۱۶. از نقطهٔ M واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC عمودهای MA' ، MB' و MC' را بر ضلعهای مثلث فرود می‌آوریم. آن‌گاه، ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌نماییم و از نقطهٔ M خطی موازی ضلع BC می‌کشیم تا ارتفاع AH را در نقطهٔ K و ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع نماید. در مثلث متساوی‌الاضلاع ADE مجموع فاصله‌های هر نقطه از قاعدهٔ DE از دو ضلع دیگر مساوی ارتفاع این مثلث است یعنی $MB'+MC'=AK$. از طرفی چهار ضلعی $MKHA'$ مستطیل است، پس $MA'=KH$ است. از آن‌جا داریم :

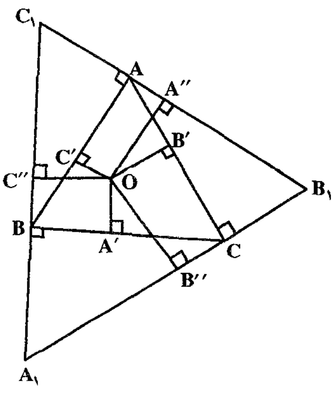
$$MA'+MB'+MC'=KH+AK=AH=h_a=C^{te}$$

۴۱۷. گزینهٔ (ج) درست است.



۴۱۸. نقطهٔ برخورد OB' با ضلع AB را D می‌نامیم. چهارضلعی $OA'BD$ متوازی‌الاضلاع است، پس $OA'=BD$ (۱) است. از طرفی مثلث ODC' متساوی‌الاضلاع می‌باشد، پس $OC'=DC'$ (۲) است و چهارضلعی $OC'AB'$ نیز ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، درنتیجه $OB'=AC'$ (۳) است. از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم :

$$OA'+OB'+OC'=BD+DC'+C'A=BA\rightarrow OA'+OB'+OC'=AB$$



۴۱۹. در نقطه‌های A، B و C خطهایی عمود بر ضلعهای AB، BC و CA رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع کنند. مثلث $A_1B_1C_1$ متساوی‌الاضلاع است، زیرا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC_1 ، BCA_1 و CAB_1 به حالت برابری یک ضلع و یک زاویهٔ حاده متساوی‌اند. حال اگر از نقطهٔ O عمودهای OA'' ، OB'' و OC'' را بر ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ فرود آوریم می‌دانیم که

$OA''+OB''+OC''$ مقداری ثابت مساوی ارتفاع مثلث $A_1B_1C_1$ است. اما چهارضلعیهای $OA'BC''$ و $OC'AA''$ و $OB'CB''$ مستطیلند. پس داریم:

$$\begin{cases} AC' = OA'' \\ BA' = OC'' \\ CB' = OB'' \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم:

$$AC' + BA' + CB' = OA'' + OB'' + OC'' = h_{a_1} = C^{te}$$

۴ . ۲ . ۶. محیط

۴ . ۲ . ۶ . ۱. اندازهٔ محیط

۴۲۰. $۱۲\sqrt{۶}$ سانتی‌متر.

۴۲۱. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس داریم:

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۶} \Rightarrow a = ۲۴\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۲P = ۷۲\sqrt{۲}cm$$

۴ . ۲ . ۶ . ۲. رابطهٔ بین محیطها

۴۲۲. نسبت خواسته شده برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۴ . ۲ . ۷. مساحت

۴ . ۲ . ۷ . ۱. اندازهٔ مساحت

۴۲۳. $۱۶\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع.

۴۲۴. دو ضلع مثلث ANL عبارتند از: $AN = \frac{۱}{۳}a$ و $AL = \frac{۲}{۳}a$. از طرفی دو مثلث ANL و ABC در زاویهٔ A مشترکند. پس داریم:

$$\frac{S_{ANL}}{S_{ABC}} = \frac{AN.AL}{AB.AC} = \frac{۱/۳a.۲/۳a}{a\times a} = \frac{۲}{۹}$$

اما مثلثهای ALN و BLM و CNM معادل هستند. پس:

$$S_{LMN} = S_{ABC} - ۳S_{ALN} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۶}{۹}.\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲} \Rightarrow S_{LMN} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}$$

۴ . ۲ . ۸. همنهشتی مثلثها

۴۲۵. اگر ارتفاعهای AH و A′H′ از دو مثلث را رسم کنیم، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ حاصل برابرند.

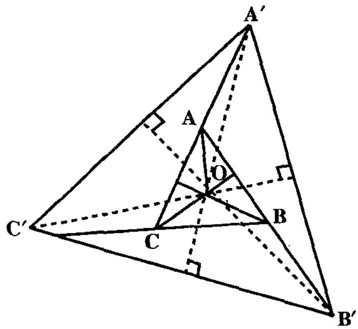
۴ . ۲ . ۹. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۴۲۶. از تساوی مثلثهای قائم‌الزاویه و یا از ویژگی مثلث متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۴۲۷. اگر O نقطهٔ برخورد سه نیمساز داخلی و نیز محل تلاقی سه عمود منصف ضلعهای مثلث ABC باشد، و از این نقطه عمود OH را بر ضلع BC فرود آوریم، ثابت می‌شود که $\hat{B}=\hat{C}$ است و به همین ترتیب $\hat{A}=\hat{C}$ می‌باشد، پس $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

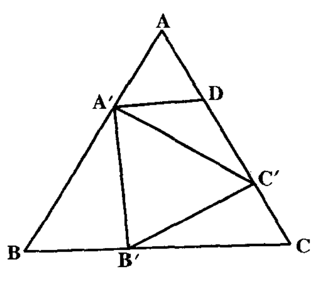
۴۲۸. ۱. مثلثهای AA′B′ و BB′C′ و CC′A′ به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند.

۲. اگر نقطهٔ تقاطع عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC را O بنامیم و از O به نقطه‌های A′ و B′ و C′ وصل کنیم، از تساوی مثلثهای OAA′ و OBB′ و OCC′ ثابت می‌شود که $OA'=OB'=OC'$ است. یعنی نقطهٔ O محل برخورد عمودمنصفهای ضلعهای مثلث A′B′C′ نیز هست.

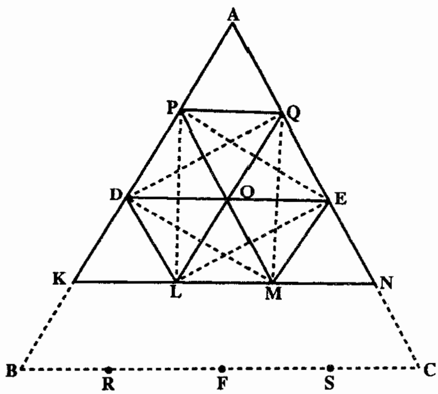


۴۲۹. ۱. مثلثهای AA′C′ و CC′B′ و BB′A′ به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند.

۲. از نقطهٔ A′ به نقطهٔ D وسط پاره‌خط AC′ وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که A′D نصف ضلع A′C′ است و درنتیجه مثلث AA′C′ در رأس A′ قائم‌الزاویه است.



۴۳۱. حکم نیرومندتری را، ثابت می‌کنیم: بین ۱۰ نقطهٔ A، D، E، K، L، M، N، O، P و Q، به‌نحوی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان سه نقطه از یک رنگ پیدا کرد که رأسهای یک مثلث متساوی الاضلاع باشند. فرض می‌کنیم، این‌طور نباشد. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان O را به رنگ سیاه گرفت؛ در ضمن، دست کم یکی از سه نقطهٔ P، E، L و مثلاً P، باید سیاه باشد (این سه نقطه نمی‌توانند هم‌رنگ باشند، زیرا رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاعند) همین‌طور، از بین سه نقطهٔ Q، D، M، دست کم یکی سیاه است، ولی نقطه‌های Q و D به ناچار باید سفید باشند (تا رأسهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع OPQ و OPD همرنگ نشوند). به این ترتیب، M سیاه و Q و D سفیدند. به همین ترتیب، معلوم می‌شود که، نقطه‌های E و L هم باید سفید باشند (بترتیب، از مثلثهای OME و OML). اکنون، اگر مثلثهای DEA، QLN و DLK را در نظر بگیریم، به این جا می‌رسیم که رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع AKN سیاهند. تناقض حاصل، درستی حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.



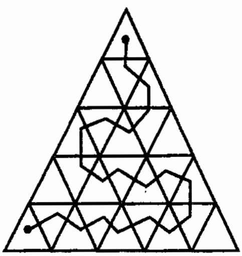
۴ . ۲ . ۱۰ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

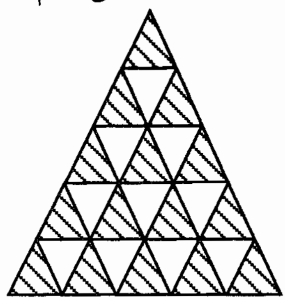
۴۳۲. a) از برهان خلف استفاده می‌کنیم. دو عدد را زیر هم می‌نویسیم و آنها را، به صورت ستونی، با هم جمع می‌کنیم. چون آخرین رقم مجموع، عددی فرد است، بنابراین ضمن جمع نخستین رقمها، مجموعی فرد به‌دست می‌آید. بنابراین، از مرتبهٔ قبل، واحدی به این مرتبه، ضمن جمع، منتقل نشده است؛ و این به معنای آن است که، مجموع رقمها در ستون دوم و، همچنین مجموع رقمها در ستون ماقبل آخر، از ۱۰ کمتر است. توجه می‌کنیم که از ستون دوم به مرتبهٔ سوم هم، واحدی منتقل نشده است، زیرا این وضع تنها وقتی پیش می‌آید که مجموع رقمهای مرتبهٔ دوم برابر ۹ باشد و مجموع رقمهای مرتبهٔ اوّل بزرگتر از ۱۰؛ ولی در این صورت، در مرتبهٔ دوم مجموع، رقم ۰ به دست می‌آید.

اکنون، دو رقم آخر و دو رقم اوّل را، از عدد مفروض حذف می کنیم و از همین استدلال برای عدد ۱۳ رقمی، سپس ۹ رقمی و بالاخره ۵ رقمی تکرار می کنیم. به این نتیجه می‌رسیم که به مرتبهٔ وسط مجموع، واحدی از مرتبهٔ قبل منتقل نشده است. ولی رقمهای وسط دو جملهٔ جمع، با هم برابرند و رقم وسط مجموع، عددی زوج می‌شود.

همان‌طور که از حل مسأله دیده می‌شود، این حکم برای هر عددی که $4k+1$ رقم داشته باشد، درست است. مثالهای ساده‌ای (مثل ۲۱+۱۲، ۶۰۵+۵۰۶، ...) نشان می‌دهند که حکم، برای عددهایی که با تعداد رقمهای دیگر باشند، درست نیست.

b) مثلثها را به دو رنگ درمی‌آوریم، شبیه شکل a.


b


a

تعداد مثلثهای سیاه، به اندازهٔ k، از تعداد مثلثهای سفید بیشتر است. بنابراین تعداد مثلثهای سفید برابر $\frac{1}{2}(k^2-k)$ و تعداد مثلثهای سیاه برابر $\frac{1}{2}(k^2+k)$ است. در «زنجیره» رنگ مثلثها، یک درمیان سیاه و یک در میان سفید است. بنابراین تعداد مثلثهای سیاه «زنجیره» نمی‌تواند از $\frac{1}{2}(k^2-k)+1$ بیشتر باشد. درنتیجه تعداد کل مثلثهای «زنجیره» از $\frac{1}{2}(k^2-k)+\frac{1}{2}(k^2-k)+1=k^2-k+1$ بیشتر نیست. در شکل b نمونهٔ «زنجیره‌ای» داده شده است که، در آن، تعداد مثلثها درست برابر k^2-k+1 است.

۴۳۳. (د) اگر طول ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع S و طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر t باشد، این دو مثلث همنهشت هستند اگر و تنها اگر $S=t$.

۴۳۴. گزینهٔ (الف) درست است.

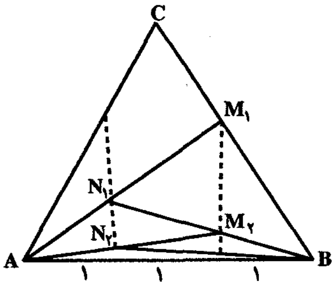
۴۳۶. اگر ضلع مثلث را a و ضلع مربع را a' فرض کنیم، داریم:

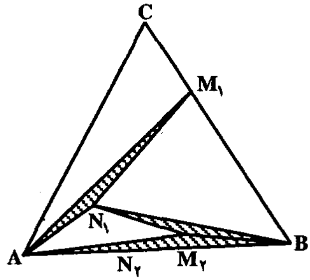
$$a\sqrt[4]{3} \quad \text{مساحت مثلث} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\text{مساحت مربع} = a'^2=\frac{3}{4}\Rightarrow a'=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{اندازهٔ ضلع مربع}$$

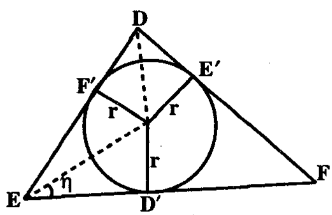
۴۳۷. گزینهٔ (هـ) درست است.

۴۳۸. در شکل، مسیر ساختمان تقسیم، که با شرطهای کلی‌تر b)، c)، d) سازگار باشد و برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ داده شده است. ضمن عبور از شکل سمت چپ به شکل سمت راست، هر یک از نقطه‌های $M_۲$ ، $M_۳$ ، ...، $N_۱$ ، $N_۲$ ، $N_۳$ ، ... ، بسادگی خود را پایین می‌کشند تا مثلثهای تکمیلی خیلی باریکتر AM_kN_k ، $BN_kM_{k+۱}$ را بسازند $(k=۱,۲, \ldots)$.





۴۳۹. کافی است ثابت کنیم، نسبت هم پیرامونی در مثلث DEF، نسبت به قاعدهٔ مجاور به زاویه‌های E و F، با شرط $۰<\hat{E}<۶۰^\circ$ و $۰<\hat{F}<۶۰^\circ$، تابعی صعودی است. اگر مساحت مثلث DEF را S و محیط آن را P فرض کنیم، با توجه به شکل داریم :



$S=\frac{۱}{۲}r.p$ بنابراین :

$$\frac{۱}{۲(I.Q.)}=\frac{p}{r}=\frac{DF'}{r}+\frac{F'E}{r}+\frac{ED'}{r}+\frac{D'F}{r}+\frac{FE'}{r}+\frac{E'D}{r}$$

$$=۲(\cot g\eta+\cot g\varphi+\cot g\delta)$$

که η ، φ ، δ نصف زاویه‌های مثلث EFD هستند، یعنی $\eta+\varphi+\delta=۹۰^\circ$ از آن‌جا که

$$\cot g\delta=tg(۹۰^\circ-\delta)=tg(\eta+\varphi)$$

به دست می‌آید :

$$\frac{۱}{۴(I.Q.)}=\cot g\eta+\cot g\varphi+tg(\eta+\varphi)$$

$$=\cot g\eta+\cot g\varphi+\frac{\cot g\eta+\cot g\varphi}{\cot g\eta\ \cot g\varphi-۱}$$

فرض می‌کنیم : $\cot g\eta=p$ و $\cot g\varphi=q$. عبارت $\frac{۱}{۴(I.Q.)}$ به‌صورت تابع زیر درمی‌آید :

$$J(p,q)=p+q+\frac{p+q}{pq-۱}$$

که نسبت به p و q متقارن است. صعودی بودن تابع نسبت به $\hat{E}(0<\hat{E}<60^\circ)$ با فرض ثابت بودن $\hat{F}(0<\hat{F}<60^\circ)$، هم‌ارز است با این که، تابع $\frac{1}{4(I.Q.)}$ تابعی نزولی از $\eta(0<\eta<30^\circ)$ به شرط ثابت بودن $\varphi(0<\varphi<30^\circ)$، یا J تابعی صعودی نسبت به $p(p>\sqrt{3})$ به شرط ثابت بودن $q(q>\sqrt{3})$ است. تابع را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(u)=u+\frac{c}{u} \tag{1}$$

که در آن، c مقداری است ثابت. تابع (۱) در بازهٔ $u\geq\sqrt{c}$ تابعی صعودی است (این مطلب را کمی بعد ثابت می‌کنیم).

دو عدد u و v را در بازهٔ مفروض با شرط $v>u$ انتخاب می‌کنیم. داریم:

$$f(v)-f(u)=v+\frac{c}{v}-u-\frac{c}{u}=(v-u)\frac{uv-c}{uv}$$

و روشن است که، برای $u\text{، }v\geq\sqrt{3}$ مثبت است.

اکنون، سعی می‌کنیم J را به صورت (۱) درآوریم:

$$p+q+\frac{p+q}{pq-1}=p+q+\frac{1}{q}+\frac{1+\frac{1}{q^2}}{p-\frac{1}{q}}$$

$$=p-\frac{1}{q}+\frac{1+\frac{1}{q^2}}{p-\frac{1}{q}}+q+\frac{2}{q}$$

که در آن $p-\frac{1}{q}$ در نقش u، $1+\frac{1}{q^2}$ در نقش ثابت c است. وقتی $q\geq\sqrt{3}$ مقداری ثابت باشد، $q+\frac{2}{q}$ مقداری ثابت است و در یکنوا بودن تابع تأثیری ندارد. بنابراین، J به ازای

$$p-\frac{1}{q}\geq\sqrt{1+\frac{1}{q^2}} \quad \text{یا} \quad p\geq\frac{1}{q}+\sqrt{1+\frac{1}{q^2}}$$

تابعی صعودی است و وقتی $q\geq\sqrt{3}$، سمت راست از $\sqrt{3}$ کوچکتر می‌شود و، بنابراین، دامنهٔ یکنوا بودن عبارت است از $p\geq\sqrt{3}$. و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. یکی از راه‌ها، برای این که نزولی بودن تابع

$$J=\frac{1}{4(I.Q.)}=\cot g\eta+\cot g\varphi+tg(\eta+\varphi)$$

را، برای $\circ<\eta<\frac{\pi}{۶}$ و مقدار ثابت φ $(\circ<\varphi<\frac{\pi}{۶})$ ثابت کنیم، این است که نشان دهیم، مشتق آن برحسب متغیر η، در بازهٔ مفروض، منفی است:

$$J_\eta=-\frac{۱}{\sin^۲\eta}+\frac{۱}{\cos^۲(\eta+\varphi)}=-\frac{۱}{\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-\eta)}+\frac{۱}{\cos^۲(\eta+\varphi)}$$

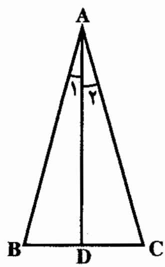
به ازای $\circ<\eta<\frac{\pi}{۶}$ و $\circ<\varphi<\frac{\pi}{۶}$ داریم: $۲\eta+\varphi<\frac{\pi}{۲}$. یعنی $\eta+\varphi<\frac{\pi}{۲}-\eta$

بنابراین:
$$\frac{۱}{\cos^۲(\eta+\varphi)}<\frac{۱}{\cos^۲(\frac{\pi}{۲}-\eta)}$$

پس J_η منفی است.

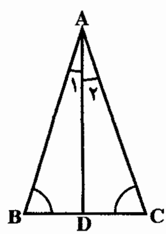
۴ . ۳. مثلث متساوی‌الساقین

۴ . ۳ . ۱. تعریف و قضیه



۴۴۰. در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم کنید و ثابت کنید که این نیمساز ارتفاع و میانه و عمودمنصف نظیر ضلع BC است.

۴۴۱. برای اثبات قضیه‌های ۱ و ۲ از تساوی مثلثها استفاده کنید و برای اثبات قضیهٔ ۳ میانه را از وسط ضلع به اندازهٔ خود امتداد دهید و نقطهٔ انتهای آن را به یکی از دو رأس دیگر مثلث وصل کنید و از تساوی مثلثها استفاده کنید.



۴۴۳. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$ را در نظر می‌گیریم و AD نیمساز زاویهٔ درونی رأس A را رسم می‌کنیم، دو مثلث ADB و ADC با هم برابرند. درنتیجه: $\hat{B}=\hat{C}$.

برهان عکس قضیه. AD نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم. دو مثلث ADC و ADB با هم برابرند، پس: $AB=AC$.

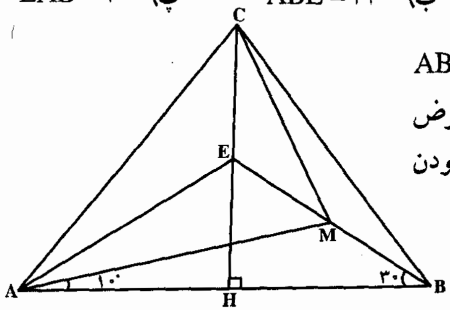
۴ . ۳ . ۲ . زاویه

۴ . ۳ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۴۴۴. گزینهٔ (د) درست است.

۴۴۵ . ۱ . الف) $65°$ ب) $100°$ پ) $70°$

۲ . الف) $B\hat{E}C = 60°$ ب) $A\hat{B}E = 120°$ پ) $E\hat{A}B = 30°$



۴۴۶. محل برخورد ارتفاع CH از مثلث ABC را با خط راست BM، نقطهٔ E فرض می‌کنیم. به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، داریم :

$AE = BE$

$E\hat{A}M = E\hat{A}B - M\hat{A}B = 30° - 10° = 20°$,

$A\hat{C}E = \frac{1}{2} A\hat{C}B = 40°$,

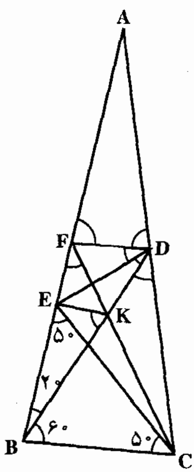
$E\hat{A}C = C\hat{A}H - E\hat{A}B = (90° - 40°) - 30° = 20°$,

$A\hat{M}E = M\hat{A}B + M\hat{B}A = 10° + 30° = 40°$

یعنی مثلثهای AME و ACE همنهشتند (یک ضلع مشترک و دو زاویهٔ برابر).

درنتیجه : $AM = AC$, $A\hat{M}C = A\hat{C}M = \frac{1}{2}(180° - C\hat{A}M) = 70°$

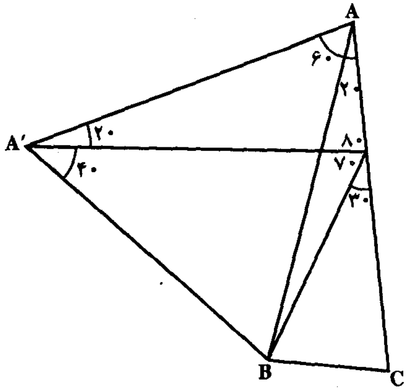
۴۴۷. گزینهٔ (ج) درست است.



۴۴۸. از نقطهٔ D خطی موازی قاعدهٔ BC رسم می‌کنیم تا ساق AB را در نقطهٔ F قطع کند. از F به C وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع FC با BD را K می‌نامیم. مثلث BCK متساوی‌الاضلاع است و داریم $BK = BC$ و در مثلث متساوی‌الساقین CBE داریم $BE = BC$. بنابراین مثلث BKE متساوی‌الساقین می‌باشد و داریم $F\hat{K}E = 40°$ و $B\hat{K}E = 80°$ و چون $E\hat{F}K = 40°$ است، پس مثلث FEK

متساوی‌الساقین و $FE = EK$ است. همچنین داریم $DF = DK$، پس مثلثهای KDE و FDE با هم برابرند و DE نیمساز زاویه‌های FEK و FDK است. درنتیجه $D\hat{E}K = ۵۰^\circ$ و $K\hat{E}C = ۳۰^\circ$، پس $D\hat{E}C = ۸۰^\circ$ است.

۴۴۹. مثلث متساوی‌الساقین $A'AD$ را مساوی مثلث متساوی‌الساقین ABC چنان رسم می‌کنیم که قاعده‌اش پاره‌خط AD باشد. از A' به نقطه‌های B و C وصل می‌کنیم، مثلث $AA'B$ متساوی‌الساقین است. زیرا: $A'A = A'D = AB = AC$ است. از طرفی $A'\hat{A}D = ۸۰^\circ$ و $B\hat{A}C = ۲۰^\circ$ است. پس $A'\hat{A}B = ۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث $AA'B$ متساوی‌الاضلاع است. پس $A'B = A'A = AB$ و $A'\hat{B}A = A\hat{A'}B = ۶۰^\circ$ است، درنتیجه $A'B = A'D$ و $D\hat{A'}B = ۴۰^\circ$ می‌باشد.



در مثلث متساوی‌الساقین $DA'B$ چون زاویه رأس $D\hat{A'}B = ۴۰^\circ$ است، پس هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مساوی ۷۰° می‌باشند. یعنی $A'\hat{B}D = A'\hat{D}B = ۷۰^\circ$ است و چون $A'\hat{D}A = A\hat{B}C = ۸۰^\circ$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$$

۴۵۰. گزینهٔ (الف) درست است؛ زیرا:

$$B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C})$$

$$\frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C}) = \frac{۱}{۲}(۱۴۰^\circ) = ۷۰^\circ$$

$$B\hat{O}C = ۱۱۰^\circ$$

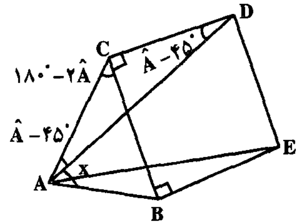
۴۵۱. گزینهٔ (د) درست است؛ زیرا با فرض $D\hat{A}E = \alpha$ داریم:

$$B\hat{C}A = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - \alpha) = ۷۵^\circ - (\frac{\alpha}{۲})$$

$$D\hat{E}A = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \alpha) = ۹۰^\circ - (\frac{\alpha}{۲}) = A\hat{D}E$$

$$\alpha + A\hat{D}E + x + B\hat{C}A = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

۴۵۲. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا داریم :



$$CA = CD \Rightarrow A\hat{C}B = 180^\circ - 2\hat{A}$$

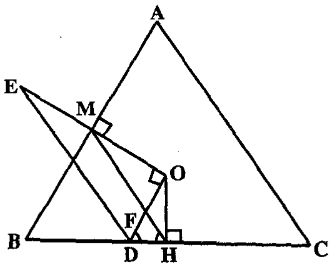
$$\Rightarrow C\hat{A}D = \frac{1}{2}\left[180^\circ - (A\hat{C}B + 90^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[180^\circ - (180^\circ - 2\hat{A} + 90^\circ)\right]$$

$$= \hat{A} - 45^\circ$$

$$= \hat{A} - x$$

$$\Rightarrow x = 45$$



۴۵۳. از نقطهٔ O به نقطهٔ H وسط قاعدهٔ BC وصل می‌کنیم و از نقطهٔ H به نقطهٔ M وسط ضلع AB نیز وصل می‌نماییم تا OD را در نقطهٔ F قطع کند. در مثلث ABC، $MH \| AC$ می‌باشد پس $M\hat{H}B = \hat{C}$ است. از طرفی نقطهٔ F وسط ضلع OD از مثلث قائم‌الزاویهٔ ODH است، زیرا نقطهٔ M وسط OE و $MH \| ED$ است، یعنی HF میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHD می‌باشد. پس $F\hat{D}H = F\hat{H}D = \hat{C}$ و چون $\hat{B} = \hat{C}$ است، پس $F\hat{D}H = \hat{B}$ است. پس $OD \| AB$ و درنتیجه $OD \perp OE$ می‌باشد. یعنی $E\hat{O}D = 90^\circ$ است.

۴۵۴. گزینهٔ (د) درست است.

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۴۵۵. چهارضلعی AEDF متوازی‌الاضلاع است.

۴۵۶. روی قاعدهٔ AC، نقطهٔ D' را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم :

$$|AD'| = |FC| \ , \ |D'C| = |AE|$$

در این صورت، مثلثهای AED' و FCD' برابرند و، بنابراین، $|ED'| = |D'F|$. از این جا نتیجه می‌شود $D = D'$. سپس، معلوم می‌شود، اگر مجموع دو زاویهٔ $A\hat{D}E = C\hat{F}D$ و $C\hat{D}F$ را از ۱۸۰ درجه کم کنیم، زاویهٔ FDE به دست می‌آید و، بنابراین، برابر است با زاویهٔ FCD.

۴۵۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم: $B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - ۲\hat{C} = ۲(۹۰^\circ - \hat{C})$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC داریم: $H\hat{D}C = ۹۰^\circ - \hat{C}$. پس $B\hat{A}C = ۲(۹۰^\circ - \hat{C}) = ۲H\hat{D}C$.

۴۵۸. گزینهٔ (د) درست است؛ زیرا:

$$b + ۶۰ = a + \hat{B}$$
$$a + ۶۰ = c + \hat{C}$$
$$\Rightarrow b - a = a - c + \hat{B} - \hat{C},\ \hat{B} = \hat{C}$$
$$\Rightarrow b + c = ۲a \Rightarrow a = \frac{b+c}{۲}$$

۴ . ۳ . ۲ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۴۵۹. در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ داریم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و یا $\hat{A} + ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ$. حال:

۱) اگر $BC > AB$ باشد، داریم:

$$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} > ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} > \hat{A} + ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} > ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} > ۶۰^\circ$$

۲) اگر $BC = AB$ باشد، داریم:

$$\hat{A} < \hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} < ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} < \hat{A} + ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} < ۶۰^\circ$$

۳) اگر $BC = AB$ باشد، داریم:

$$\hat{A} < \hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} < ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} < \hat{A} + ۲\hat{C} \Rightarrow ۳\hat{A} < ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} < ۶۰^\circ$$

۴۶۰. داریم:

$$B\hat{T}U = T\hat{U}B$$

۴ . ۳ . ۳ . ضلع

۴ . ۳ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۴۶۱. ۸ سانتی‌متر.

۴۶۲. بنا به نامساوی مثلثی داریم :

$$AB - BC < AC < AB + BC \Rightarrow \text{۰} < AC < \text{۲}AB$$

$$\text{۰} < \text{۸} < \text{۲}AB \Rightarrow AB > \text{۴}cm$$

۴ . ۳ . ۴ . ارتفاع، میانه، نیمساز

۴ . ۳ . ۴ . ۱ . ارتفاع

۴۶۳. ارتفاعهای BH و 'CH از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH و 'BCH به دلیل برابری وتر و یک زاویهٔ حاده متساوی‌اند. پس $BH = CH'$ است.

۴ . ۳ . ۴ . ۲ . میانه

۴۶۴. اگر میانه‌های 'BB و 'CC از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را رسم کنیم، دو مثلث BB'C و BC'C با هم برابرند. پس $BB' = CC'$ است.

۴ . ۳ . ۴ . ۳ . نیمساز

۴۶۵. BD و CE نیمسازهای دو زاویهٔ درونی B و C از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را رسم می‌کنیم. دو مثلث BCD و BCE به دلیل برابری دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند. پس $BD = CE$ است.

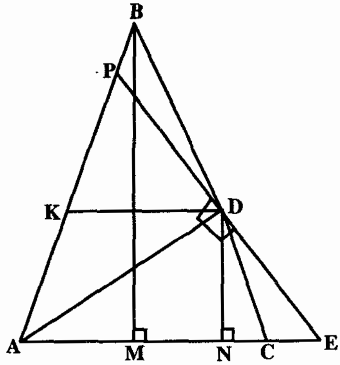
۴ . ۳ . ۴ . ۴ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۶. گزینهٔ (ب) درست است.

۴ . ۳ . ۵ . پاره‌خط

۴ . ۳ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

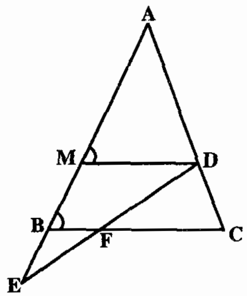
۴۶۷. نقطهٔ F وسط پاره‌خط DE است و چون نقطهٔ M وسط پاره‌خط AD می‌باشد، پس $MF \parallel AE$ و $MF = \frac{AE}{\text{۲}}$.



۴۶۸. فرض کنید P نقطهٔ برخورد خط راست DE با AB و K نقطه‌ای روی AB باشد، به طوری که KD با AC موازی است، AKD مثلثی متساوی‌الساقین است، زیرا: $K\hat{D}A = D\hat{A}C = D\hat{A}K$. بنابراین، KD میانه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه است؛ و $MN = \frac{1}{2}KD = \frac{1}{4}AP = \frac{1}{4}AE = \frac{1}{4}a$.

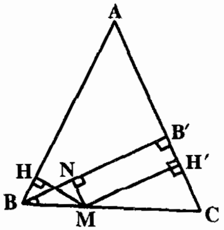
۴ . ۳ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴ . ۳ . ۵ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)



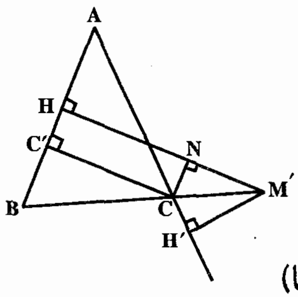
۴۶۹. طول BM را روی ضلع AB به اندازهٔ پاره‌خط BE جدا می‌کنیم و از M به D وصل می‌نماییم. چون $MB = DC$ و از طرفی $AB = AC$ است. پس $AM = AD$ است، یعنی مثلث AMD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{M} = \hat{B}$ بنابراین $MD \| BC$ یا $MD \| BF$ است. در مثلث MED چون نقطهٔ B وسط ME و $BF \| MD$ است، پس نقطهٔ F وسط پاره‌خط DE است، یعنی $DF = FE$.

۴۷۰. نیمساز زاویهٔ A عمود منصف ضلع BC است، پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است و از آن‌جا دومثلث BCB' و BCC' به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین همنهشتند.



۴۷۱. از نقطهٔ M عمود MN را بر ارتفاع BB' فرود می‌آوریم. چهارضلعی $B'H'MN$ مستطیل است. در نتیجه (۱) $MH' = B'N$ است. از طرفی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MNB و MHB به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشتند، زیرا وتر MB در هر دو مشترک و $M\hat{B}H = B\hat{M}N = \hat{C}$ است، $\hat{H} = \hat{N} = 90^\circ$ است پس (۲) $MH = BN$. از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$MH' + MH = B'N + NB = B'B = C^{te}$$



۴۷۲. اگر از نقطهٔ C خطی موازی ضلع AB رسم کنیم تا MH را در نقطهٔ N قطع کند، $MN = MH'$ و $NH = CC'$ است. در نتیجه $MH - MH' = CC' = C^{te}$ است.

۴ . ۳ . ۵ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۴۷۳. در مثلث BCD، $\hat{C} > D\hat{B}C$ است، پس $BD > DC$.

۴۷۴. داریم:

$$K\hat{G}P > K\hat{G}H \quad \text{و} \quad K\hat{G}H > K\hat{P}G$$

$$\Rightarrow K\hat{G}P > K\hat{P}G \Rightarrow PK > KG$$

۴ . ۳ . ۶. محیط

۴ . ۳ . ۶ . ۱ . اندازهٔ محیط

۴۷۵. داریم: $2p = 2\times 8 + 6 = 22cm$

۴۷۶. مثلث BMC متساوی‌الاضلاع است. پس محیط آن برابر $3\times 8 = 24$ سانتی‌متر است.

۴ . ۳ . ۷ . مساحت

۴ . ۳ . ۷ . ۱ . اندازهٔ مساحت

۴۷۷. $S = 12\sqrt{3}$.

۴۷۸. مقدار اشتباه بیش از ۲٪ نیست، زیرا بنا به روش مصری داریم:

$$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot b$$

که در آن، a طول قاعده و b طول ساق مثلث متساوی‌الساقین است. ارتفاع مثلث را h می‌گیریم. داریم:

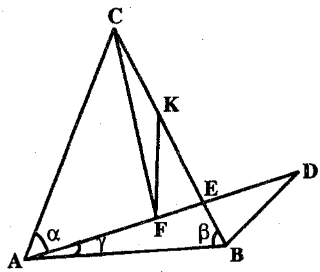
$$b = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b\sqrt{1 - (\frac{a}{2b})^2}$$

در نتیجه مقدار دقیق مساحت چنین می‌شود:

$$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot b\sqrt{1 - (\frac{a}{2b})^2} = S_1\sqrt{1 - (\frac{a}{2b})^2}$$

و از آن‌جا:

$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1 - (\frac{a}{2b})^2} = \sqrt{1 - (\frac{4}{2\times 10})^2} = 0/98$$



۴۷۹. مثلث متساوی‌الساقین ABC و مثلث دلخواه و غیر متساوی‌الساقین ABD را درنظر می گیریم. قاعدهٔ دو مثلث یکی هستند. فرض می کنیم داشته باشیم :

$$AD + DB = AC + CB$$

مثلث ABE قسمت مشترک دو مثلث ABC و ABD را تشکیل می‌دهد. برای این که مسأله را حل کنیم کافی است ثابت کنیم، مثلث BDE بخشی از مثلث ACE را تشکیل می‌دهد. برای این منظور روی پاره‌خطهای EA و EC، بترتیب $EF = EB$ و $EK = EC$ را جدا می‌کنیم. روشن است که مثلث FKE با مثلث BDE برابر است. حال باید ثابت کنیم، نقطهٔ F بین نقطه‌های A و E و نقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد.

به مثلث AEB توجه می کنیم. دراین مثلث داریم : $\alpha < \beta$، زیرا $\gamma < \alpha$ و $\alpha = \beta$. از آن‌جا $AE > BE$ و $AE > EF$، زیرا $BE = FE$. بنابراین نقطهٔ F بین نقطه‌های A و E قرار دارد.

اکنون فرض می‌کنیم، نقطهٔ K بین C و E واقع باشد، در این صورت داریم :

$$AF + FK + KE + EF < AF + FC + CE + EF \ ,$$

$$EF = EB \ , \ KE = ED \ , \ FK = BD \ ,$$

$$AF + DB + ED + EF < AF + FC + CE + EB \ ,$$

$$AF + FE + ED + DB < AF + FC + CB \ ,$$

$$AD + DB < AF + FC + CB$$

و بنابر شرط $AD + DB = AC + CB$. بنابراین $AC + CB < AF + FC + CB$ یا $AC < AF + FC$.

به نابرابری درستی رسیدیم. بنابراین، حکم نخستین هم دراین باره که نقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد، درست است.

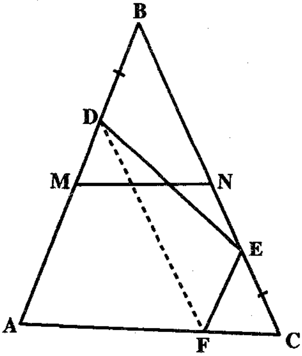
۴ . ۳ . ۸. همنهشتی مثلثها

۴۸۰. میانه‌های نظیر رأس در دو مثلث نیمسازهای زاویه‌های رأس و عمودمنصف قاعده‌ها هستند.

۴ . ۳ . ۹. نقطه‌های همخط

۴۸۴. مثلث BNC در رأس N متساوی‌الساقین است.

۴۸۵. از نقطهٔ E خطی به صورت EF‖AB رسم می‌کنیم (نقطهٔ F روی AC قرار دارد) و نتایج ضروری را از متوازی‌الاضلاع DBEF به‌دست می‌آوریم.

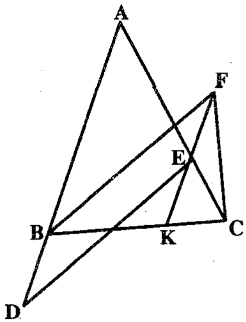


۴ . ۳ . ۱۰ . خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۴ . ۳ . ۱۰ . ۱ . خطها موازی‌اند

۴۸۶. اگر Ax نیمساز زاویهٔ برونی رأس A از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ باشد، داریم: $x\hat{A}C = A\hat{C}B$ پس Ax‖BC است.

۴ . ۳ . ۱۰ . ۲ . خطها بر هم عمودند

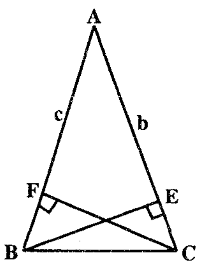


۴۸۷. امتداد EF ضلع BC را در نقطهٔ K قطع می‌کند. در مثلث FKC میانهٔ CE نصف ضلع FK است $(CE = EK = EF)$. پس مثلث FCK در رأس C قائم‌الزاویه است. یعنی FC بر BC عمود است.

۴۸۸. میانهٔ AM عمود منصف قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC است و دو چهارضلعی BCFD و DFGE ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند.

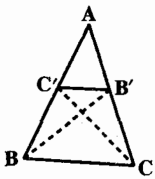
۴ . ۳ . ۱۱ . ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است

۴ . ۳ . ۱۱ . ۱ . ثابت کنید مثلث داده شده متساوی‌الساقین است

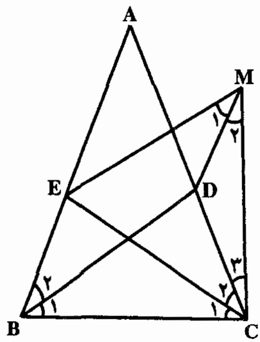


۴۹۰. اگر BE و CF دو ارتفاع با هم برابر باشند، مساحت مثلث برابر است با نصف هریک از حاصلضربهای $b \cdot BE$ و $c \cdot CF$ و بنابراین $b = c$.

۴۹۱. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCB' و HBC' به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده باهم برابرند ($\hat{B'} = \hat{C'} = 90^\circ$ و $HB = HC$ و $B\hat{H}C' = C\hat{H}B'$). از برابری این دو مثلث داریم $HB' = HC'$. در نتیجه $BB' = CC'$ است و مثلث ABC که دو ارتفاعش برابرند متساوی‌الساقین است.



۴۹۲. اگر دو میانهٔ BB' و CC' از مثلث ABC متساوی باشند، از B' به C' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $BCB'C'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، پس $\hat{B} = \hat{C}$ ، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

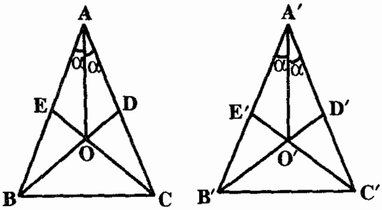


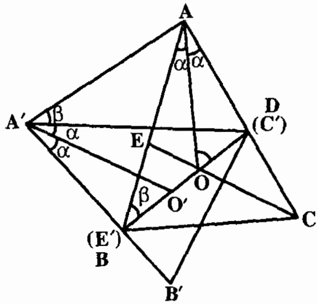
۴۹۵. راه اول. در مثلث ABC اگر نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C برابر باشند، یعنی $BD = CE$ باشد، باید ثابت کنیم که $\hat{B} = \hat{C}$ است. اگر $\hat{B} = \hat{C}$ نباشد، فرض می‌کنیم $\hat{B} > \hat{C}$ است.

دراین صورت $\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} > \hat{C}_2 = \frac{\hat{C}}{2}$ خواهد بود.

از نقطهٔ E پاره‌خط EM را موازی BD و مساوی آن رسم می‌کنیم و از M به D و C وصل می‌نماییم. چهارضلعی $BEMD$ متوازی‌الاضلاع است، در نتیجه $DM = BE$ و $\hat{M}_1 = \hat{B}_2 > \hat{C}_2$ است. از طرفی مثلث EMC متساوی‌الساقین است، زیرا $EC = BD = EM$ ، پس $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = \hat{C}_2 + \hat{C}_3$ می‌باشد، و با توجه به این که $\hat{M}_1 > \hat{C}_2$ ، نتیجه می‌گردد که $\hat{M}_2 < \hat{C}_3$ است، از آن‌جا در مثلث MCD داریم $DC < DM$ ، و چون $DM = BE$ است، پس $DC < BE$. پس در دو مثلث BDC و BEC که دو ضلع متساوی و یک ضلع نامساوی دارند ($DC < BE$ و $BC = BC$ و $BD = CE$) نتیجه می‌گردد که :

$\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} < \hat{C}_1 = \frac{\hat{C}}{2}$ و یا $\hat{B} < \hat{C}$ است ؛ و این خلاف فرضی است که کرده‌ایم. پس $\hat{B} > \hat{C}$ نمی‌تواند باشد. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که $\hat{B} < \hat{C}$ نیز نمی‌تواند باشد، پس $\hat{B} = \hat{C}$ است. یعنی مثلثی که در آن نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی برابر باشند، متساوی‌الساقین است.



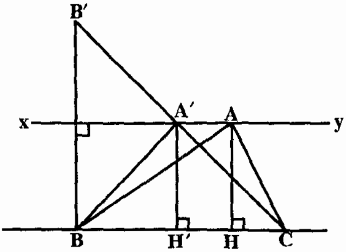


راه دوم. نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. این نیمساز از نقطهٔ O محل تلاقی BD و CE نیمسازهای زاویه‌های B و C می‌گذرد. مثلث A′B′C′ را نظیر و مساوی مثلث ABC رسم می‌کنیم و چنان این دو مثلث را روی هم قرار می‌دهیم که نیمساز BD بر مساویش C′E′ منطبق شود (مانند شکل). سپس از A به A′ وصل می‌کنیم. چهارضلعی BDAA′ محاطی است، زیرا : $B\hat{A}'D = B\hat{A}D = ۲\alpha$ است. در نتیجه $A\hat{B}D = A\hat{A}'D$. از طرفی در مثلث AOB می‌توان نوشت :

$A\hat{O}D = O\hat{B}A + O\hat{A}B = \alpha + \beta = O'\hat{A}'D + D\hat{A}'A = O'\hat{A}'A$ ، پس چهارضلعی OO′A′A نیز محاطی می‌باشد که چون $OA = O'A'$ است، ذوزنقهٔ متساوی الساقین می‌باشد و لذا $OO' \| A'A$ و $O\hat{A}A' = O'\hat{A}'A$ است. در نتیجه چهارضلعی AA′BD نیز ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. پس دو قطر آن متساوی‌اند، یعنی $A'D = AB$ است. اما $A'D = A'C' = AC$ می باشد، پس $AB = AC$ است. یعنی مثلث ABCمتساوی‌الساقین است.

یادداشت. حل این مسأله در سال ۱۸۴۰ از طرف لموس Lehmus از اشتینر ریاضی‌دان بزرگ سویسی درخواست گردید و اشتینر راه حلی بسیار پیچیده برای آن ارائه داد. این مطلب باعث شد که عدهٔ بسیاری از ریاضی‌دانان در جستجوی راه حلهای ساده‌تری برای این مسأله برآیند و بدین ترتیب از سال ۱۸۴۲ به بعد راه حلهای بسیاری برای این مسأله ارائه گردیده است. راه حل اوّل این مسأله درسال ۱۸۸۰ توسط مهندس دسکوب فرانسوی داده شده است.

۴۹۹. مکان هندسی نقطهٔ A رأس سوم مثلثهایی که قاعدهٔ آنها پاره‌خط ثابت BC و مساحتشان یکی است، دو خط راست موازی BC واقع در طرفین آن و به فاصلهٔ $AH = \frac{۲S}{BC}$ است که فرض می‌کنیم xy یکی از این دو خط باشد. مساحت مثلث ABC وقتی کمترین مقدار خود را داراست که $AB + AC$ کمترین مقدار خود را دارا باشد.



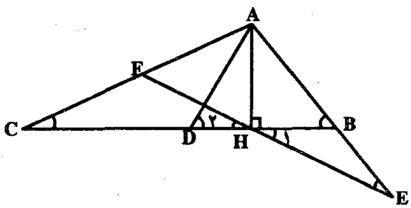
اگر قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط xy را نقطهٔ B' بنامیم و از B' به C وصل کنیم، نقطهٔ A' محل تقاطع $B'C$ با خط xy رأس مثلث جواب مسأله است، زیرا $A'B+A'C$ کمترین مقدار ممکن را داراست، اما مثلث $A'BC$ در رأس A' متساوی‌الساقین است، زیرا $A'\hat{B}C=A'\hat{C}B$ است.

۴ . ۳ . ۱۱ . ۲ . ثابت کنید مثلثهای دیگر ایجاد شده متساوی‌الساقینند

۵۰۰. ارتفاع رأس A از مثلث متساوی‌الساقین ABC، عمودمنصف پاره‌خط $B'C'$ است.

۵۰۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DBC داریم: $A\hat{B}D=90°-A\hat{B}C$ و $A\hat{D}B=90°-\hat{C}$. از طرفی $\hat{C}=A\hat{B}C$ است، پس $A\hat{D}B=A\hat{B}D$ ، یعنی مثلث ABD متساوی‌الساقین است.

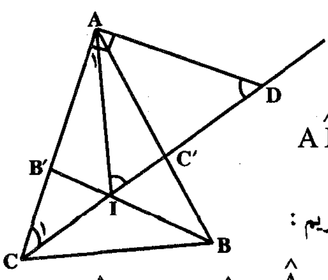
۵۰۴. ۱. زاویهٔ ABC زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین BHE است، پس $\hat{B}=2\hat{E}=2\hat{H}_1=2\hat{H}_2$ و $\hat{B}=2\hat{C}$ ، پس $\hat{E}=\hat{H}_1=\hat{H}_2=\hat{C}$ است. در نتیجه، مثلث HFC متساوی‌الساقین، یعنی $CF=FH$ است. همچنین مثلث FHA متساوی‌الساقین می‌باشد، یعنی $FH=FA$ است. در نتیجه : $FH=FC=FA$. یعنی نقطهٔ F وسط ضلع AC است.



۲. مثلث ABD که در آن AH عمودمنصف BD است، متساوی‌الساقین می‌باشد. پس $\hat{D}=\hat{B}=2\hat{C}$. از طرفی زاویهٔ D زاویهٔ خارجی مثلث ADC است که چون $\hat{D}=2\hat{C}$ می‌باشد، این مثلث متساوی‌الساقین در رأس D است، یعنی $DA=DC$ است.

۵۰۶. ۱. مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

۲. $AB\|DF$ است.



۵۰۹. زاویهٔ AID زاویهٔ خارجی مثلث AIC است. پس :

$$A\hat{I}D=\hat{A}_1+\hat{C}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2} \qquad (1)$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD$(C\hat{A}D=90°)$ داریم :

$$A\hat{D}I=90°-\hat{C}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}-\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}$$

و چون $\hat{B}=\hat{C}$ است، پس : (۲) $A\hat{D}I=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}$.

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $A\hat{I}D = A\hat{D}I$. یعنی مثلث AID متساوی‌الساقین است.

۵۱۰. ثابت کنید که $B\hat{O'}D = ۹۰° - \frac{\hat{B}}{۲}$ و $C\hat{O'}E = ۹۰° - \frac{\hat{C}}{۲}$ است.

۴ . ۳ . ۱۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۱۲. (۱) عکس عکس نقیض قضیه است.

(۲) عکس قضیه است.

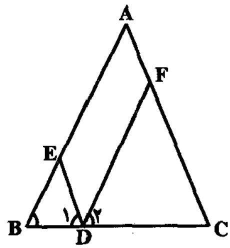
(۳) عکس نقیض قضیه است.

(۴) روش دیگری برای بیان قضیه است.

در نتیجه ترکیبهای (۳) و (۴) درست هستند.

۵۱۳. در مثلث BCD میانهٔ وارد بر ضلع BD نصف آن ضلع است.

۵۱۴. مثلثهای EBD و FDC متساوی‌الساقینند ؛ زیرا :



$DE \| AC \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{C}$ و $DF \| AB \Rightarrow \hat{D}_۲ = \hat{B}_۲$

$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_۱ = \hat{B} = \hat{D}_۲ = \hat{C}$

پس : $EB = ED$ و $FD = FC$ است. از آن‌جا داریم :

محیط متوازی‌الاضلاع AEDF $= ۲(AE + ED) = ۲(AE + EB) = ۲AB = C^{te}$

۴ . ۳ . ۱۳. مسأله‌های ترکیبی

۵۱۵. ۱. ارتفاع AH در مثلث متساوی‌الساقین ABC میانهٔ نظیر ضلع BC است. پس نقطهٔ O محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC است.

۲. ارتفاع AH عمودمنصف ضلع BC است. پس در مثلث متساوی‌الساقین OBC ارتفاع OH نیمساز زاویهٔ BOC می‌باشد.

۵۱۶. ۱. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH و AMK به حالت برابری وتر و یک ضلع متساوی‌اند. ($\hat{H}=\hat{K}=۹۰^\circ$ و $AM=AM$ و $AH=\frac{AB}{۲}=AK=\frac{AC}{۲}$). پس $MH=MK$ است.

۲. اگر $\hat{A}=۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های پنج ضلعی MHBCK برابرند با:

$$\hat{H}=\hat{K}=۹۰^\circ \text{ و } \hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰-۳۰}{۲}=۷۵^\circ \text{ و } H\hat{M}K=۲۱۰^\circ$$

۵۱۸. مثلثهای ABC و A′B′C′ متساوی‌الساقین و دو مثلث ABC′ و AB′C به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند.

۵۱۹. ۱. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است. پس مثلث AIC متساوی‌الساقین است.

۲. دو مثلث IAB و ACE به حالت تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند.

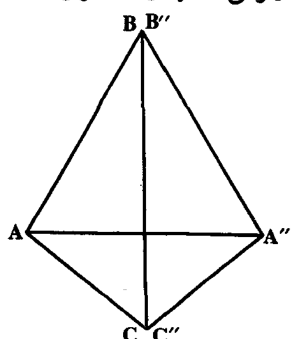
۳. از همنهشتی دو مثلث AEC و ABI نتیجه می‌شود که $\hat{I}=\hat{E}$ است.

۴. ۴. مثلث قائم‌الزاویه

۴. ۴. ۱. تعریف و قضیه

۵۲۰. فرض می‌کنیم زاویهٔ A از مثلث ABC قائمه باشد، در این صورت زاویهٔ برونی A نیز قائمه است و از هریک از زاویه‌های غیرمجاورش بزرگتر است. پس زاویه‌های B و C از مثلث ABC حاده‌اند.

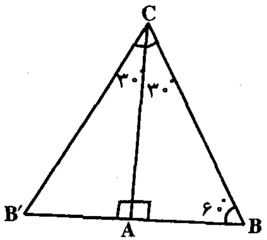
۵۲۴. هم‌اندازهٔ یک مثلث را چنان در مجاورت مثلث دیگر قرار دهید که وترهای دو مثلث برهم منطبق شوند و دو مثلث در دو طرف وتر مشترک قرار گیرند. پس دو رأس زاویهٔ قائمه را به هم وصل کنید و از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین استفاده کنید.



۵۲۵. هم‌اندازهٔ مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC چنان قرار دهید که زاویهٔ حادهٔ B' بر مساویش زاویهٔ حادهٔ B منطبق شود. در این صورت نقطهٔ C' روی نقطهٔ C (چون $B'C' = BC$) و نقطهٔ A' روی نقطهٔ A واقع می‌شود (زیرا اگر A' بر A منطبق نشود در مثلث CAA' باید زاویهٔ خارجی مثلث برابر زاویهٔ داخلی غیرمجاور خود باشد که این درست نیست) و دو مثلث همنهشتند.

۴ . ۴ . ۲ . زاویه

۴ . ۴ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

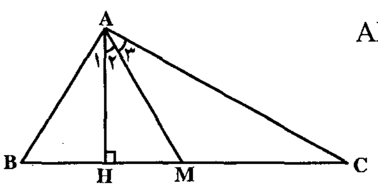


۵۲۶. اگر قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به ضلع AC پیدا کنیم و B' بنامیم، مثلث CBB' متساوی‌الاضلاع است.

۵۲۸. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۲۹. چون $\hat{R}+\hat{T} = ۹۰°$ است، با توجه به مثلثهای متساوی‌الساقین RSQ و STU، $Q\hat{S}R + U\hat{S}T = ۱۳۵°$ و از آن‌جا $Q\hat{S}U = ۴۵°$ است.

۵۳۰. در مثلثهای AHB و AHC خطهای HE و HF میانه‌های وارد بر وترند، پس مثلثهای BHE و HCF متساوی‌الساقینند.



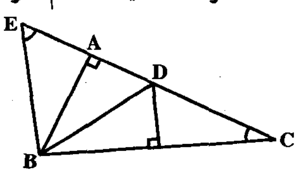
۵۳۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) اگر AH ارتفاع و AM میانهٔ نظیر وتر باشد، داریم:

$\hat{B} = \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳$ و $\hat{C} = \hat{A}_۳$. پس:

$$\hat{B} = \hat{A}_۲ + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B} - \hat{C} \Rightarrow M\hat{A}H = \left|\hat{B} - \hat{C}\right|$$

۴ . ۴ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵۳۲. میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، یعنی مثلثهای MAB و MAC در رأس M متساوی‌الساقین هستند. از طرفی زاویه‌های CAH و ABH یک متمم دارند، همچنین دو زاویهٔ BAH و BCA.



۵۳۳. اگر از نقطهٔ D به نقطهٔ B وصل نماییم، دو مثلث BDC و BED متساوی‌الساقین می‌باشند.

۴ . ۴ . ۳. ضلع

۴ . ۴ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۵۳۵. ۱۶ سانتی‌متر.

۵۳۶. ۲۰ سانتی‌متر.

۵۳۷. داریم :

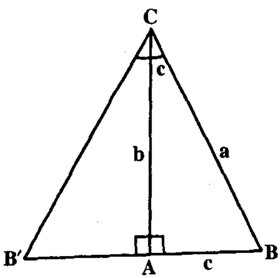
$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \sin ۶۰^\circ = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{AB}$$

$$\Rightarrow AB = ۱۲\sqrt{۳} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} = ۲۴ \quad , \quad \hat{A} = ۳۰^\circ \Rightarrow BC = \frac{AB}{۲} = ۱۲$$

۴ . ۴ . ۳ . ۲. رابطهٔ بین ضلعها

۴ . ۴ . ۳ . ۲ . ۱. رابطهٔ بین ضلعها (برابریها)

۵۳۸. اگر نقطهٔ C' قرینهٔ رأس C نسبت به ضلع AB باشد، مثلث BCC' متساوی‌الاضلاع است.



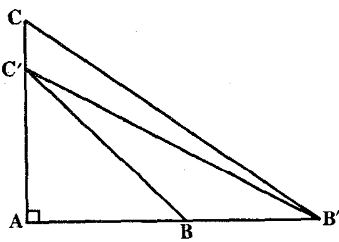
۵۳۹. قرینهٔ مثلث ABC نسبت به ضلع AC را پیدا می‌کنیم. مثلث $BB'C$ متساوی‌الاضلاع است که AC ارتفاع این مثلث است.

پس داریم : $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$ و یا :

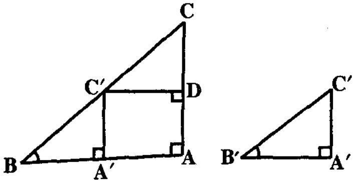
$. b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

نکته. با استفاده از نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° یا ۶۰° می‌توان رابطهٔ $b = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ را نتیجه گرفت.

۴ . ۴ . ۳ . ۲ . ۲. رابطهٔ بین ضلعها (نابرابریها)



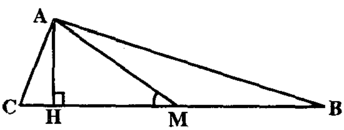
۵۴۰. مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC چنان قرار می‌دهیم که زاویهٔ قائمهٔ $B'A'C'$ بر زاویهٔ قائمهٔ BAC منطبق شود. چون $AB' > AB$ و $AC' > AC$ است، پس نقطه‌های B' و C' در امتداد پاره‌خطهای AB و AC قرار می‌گیرند. از B' به C وصل می‌کنیم. نسبت به مایلهای رسم شده از نقطهٔ C نسبت به عمود AC داریم $BC < B'C$، و نسبت به مایلهای رسم شده از B' نسبت به عمود $B'A$ داریم $B'C < B'C'$. در نتیجه $BC < B'C'$ است.



۵۴۲. مثلث $A'B'C'$ را چنان روی مثلث ABC قرار می‌دهیم که زاویهٔ B' روی زاویهٔ B منطبق گردد. چون $B'C' < BC$ است، پس نقطهٔ C' بین نقطه‌های B و C واقع می‌شود. از طرفی $C'A'$ و CA هردو عمود بر AB می‌باشند، پس متوازی‌اند. و چون نقطه‌های A' و C' هردو در یک طرف AC واقعند، پس نقطهٔ A' نیز بین A و B قرار دارد، در نتیجه $A'B < AB$ و یا $A'B' < AB$ است. اگر از نقطهٔ C' خطی موازی ضلع AB رسم کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند، چهارضلعی $C'DAA'$ مستطیل است، پس $C'A' = AD$ است و $AD < AC$ است، پس $A'C' < AC$ است.

۴ . ۴ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

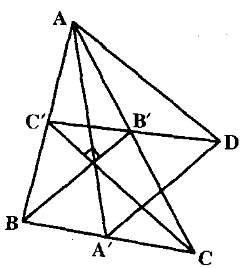
۴ . ۴ . ۴ . ۱. ارتفاع



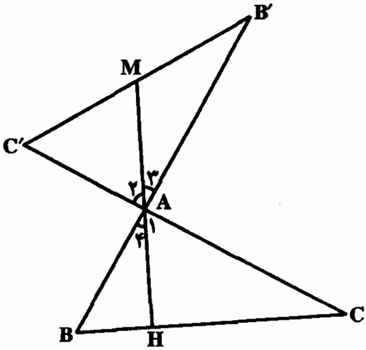
۵۴۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ فرض می‌کنیم، $\hat{B}=۱۵^\circ$ باشد. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. چون $MB = \frac{BC}{۲} = AM$ می‌باشد، پس مثلث AMB متساوی‌الساقین است و داریم $A\hat{M}H = ۲\hat{B} = ۳۰^\circ$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AMH(\hat{H}=۹۰^\circ)$، ضلع AH که رو به رو به زاویهٔ ۳۰° است، نصف وتر می‌باشد؛ یعنی $AH = \frac{AM}{۲}$، اما $AM = \frac{BC}{۲}$ بود، پس $AH = \frac{BC}{۴}$ یا $h_a = \frac{۱}{۴}a$.

۴ . ۴ . ۴ . ۲. میانه

۵۴۴. میانهٔ نظیر وتر را به اندازهٔ خود امتداد دهید.



۵۴۵. اگر در مثلث ABC دو میانهٔ BB' و CC' برهم عمود باشند و از B' به C' وصل کنیم و پاره‌خط $B'C'$ را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد دهیم و از D به A' وصل کنیم، مثلث $AA'D$ مثلث قائم‌الزاویهٔ موردنظر است.



۵۴۶. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $AB'C'$ به حالت برابری دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه متساوی‌اند. از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود که $\hat{B}' = \hat{C}$ و $\hat{C}' = \hat{B}$، اما $\hat{C} = \hat{A}_۴ = \hat{A}_۳$ و $\hat{B} = \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است، پس $\hat{C}' = \hat{A}_۲$ و $\hat{B}' = \hat{A}_۳$ می‌باشد. در نتیجه مثلثهای $AC'M$ و $AB'M$ متساوی‌الساقین‌اند، یعنی $MA = MC'$ و $MA = MB'$ است، پس $MA = MC' = MB'$ یعنی AM میانهٔ نظیر ضلع $B'C'$ از مثلث $AB'C'$ است.

۴.۴.۵. پاره‌خط

۴.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۴۷. ۶ سانتیمتر.

۵۴۸. داریم :

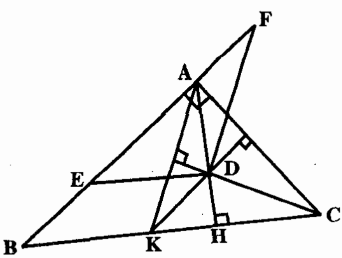
$$AM = ۶cm \text{ و } AH = \frac{۱}{۴}BC = \frac{۱}{۴}\times ۱۲ = ۳cm$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM میانهٔ وارد بر وتر AM نصف وتر AM است، پس :

$$NH = \frac{AM}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳cm$$

۴.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴.۴.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)



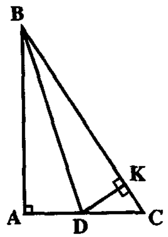
۵۴۹. از نقطهٔ D خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ K قطع کند. از K به A وصل می‌کنیم. نقطهٔ D محل برخورد ارتفاعهای مثلث ACK و چهارضلعیهای DEBK و AKDF متوازی‌الاضلاع‌اند، پس $BE = KD = AF$ است.

۵۵۱. دو مثلث ABE و CAD متساوی‌الساقیند ؛ زیرا داریم :

$$B\hat{E}A = B\hat{A}E = \hat{C} + \frac{\hat{B}}{۲}$$

$$C\hat{D}A = C\hat{A}D = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{۲}$$

۴.۴.۵.۲.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)



۵۵۲. از نقطهٔ D عمود DK را بر وتر BC فرود می‌آوریم. $AD = DK$ است، اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ DKC ($\hat{K} = ۹۰^\circ$) $DK < DC$ است، پس $AD < DC$.

۴.۴.۶. محیط

۴.۴.۶.۱. اندازهٔ محیط

۵۵۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ $۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ$ است، و محیط این مثلث برابر است با :

$$۱۸ + ۹ + ۹\sqrt{۳} = ۲۷ + ۹\sqrt{۳}$$

۵۵۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AKH، $AH = ۴cm$ ، $A\hat{H}K = ۳۰^\circ$ است. از آن‌جا :

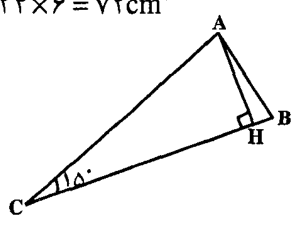
$$AK = ۲ \text{ ، } KH = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \text{محیط } AKH = ۴ + ۲ + ۲\sqrt{۳} = ۶ + ۲\sqrt{۳}$$

۴.۴.۷. مساحت

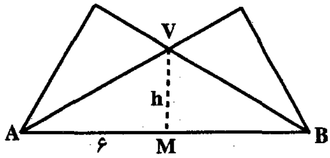
۴.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۵۵۵. ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث $\frac{۱}{۴}$ وتر یعنی ۶ سانتیمتر است. از آن جا :

$$S = \frac{۱}{۲} BC.AH = \frac{۱}{۲} \times ۲۴ \times ۶ = ۷۲cm^۲$$



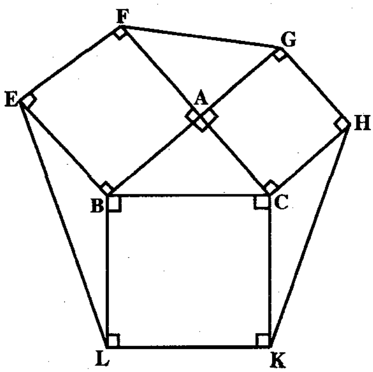
.۵۵۶ $S=\frac{m^2\sqrt{3}}{2}$.



.۵۵۷ د) در شکل MV ارتفاع مثلث ABV است، چون AMV یک مثلث °۳۰ – °۶۰ – °۹۰ است، طول MV برابر است با $2\sqrt{3}$. بنابراین مساحت موردنظر یعنی مساحت مثلث ABV برابر است با :

$$\frac{1}{2}(AB)(MV)=\frac{1}{2}(12)(2\sqrt{3})=12\sqrt{3}$$

۲.۷.۴.۴. رابطهٔ بین مساحتها



.۵۵۸ یک زاویهٔ هر یک از مثلثهای حاصل با یک زاویهٔ مثلث اصلی مکمل می‌باشند. پس مساحت آنها به نسبت ضلعهای مجاور به این زاویه‌ها است. پس داریم :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AFG}}=\frac{AB.AC}{AF.AG}=1$$

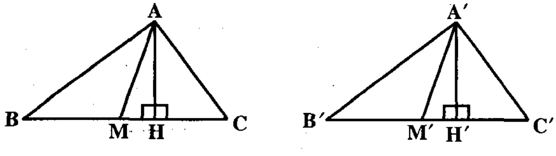
$$\frac{S_{ABC}}{S_{CHK}}=\frac{AC.BC}{CH.CK}=1 \quad \text{و} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{BEL}}=\frac{AB.BC}{BE.BL}=1$$

بنابراین : $S_{AFG}=S_{CHK}=S_{ABL}=S_{ABC}$

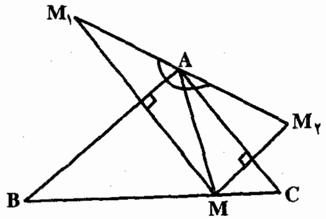
۸.۴.۴. همنهشتی مثلثها

.۵۵۹ مثلثهای ABH و A′B′H′ همنهشتند.

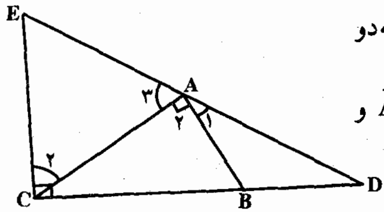
.۵۶۰ دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و A′B′C′ $(A=A'=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاعهای AH و A′H′ و میانه‌های AM و A′M′ را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH و A′M′H′ همنهشتند. در نتیجه $A'\hat{M}'H'=A\hat{M}H$ ، در نتیجه $\hat{B}=\hat{B}'$ و از آن‌جا، دو مثلث ABC و A′B′C′ همنهشتند.



۹.۴.۴. نقطه‌های همخط



۵۶۱. از نقطهٔ M به نقطهٔ A وصل کنید و ثابت کنید که $M_۱\hat{A}M_۲ = ۱۸۰^\circ$ است.



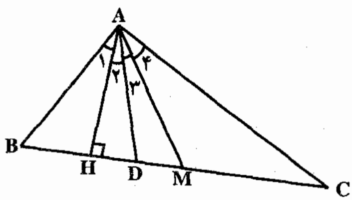
۵۶۲. مثلثهای ABD و ACE متساوی‌الساقینند و زاویهٔ $\hat{C}_۲ = A\hat{B}C$ است؛ زیرا ضلعهایشان دوبه‌دو برهم عمودند. پس $\hat{A}_۱ = \frac{\hat{B}}{۲}$ و $\hat{A}_۳ = \frac{۱۸۰-\hat{B}}{۲} = ۹۰ - \frac{\hat{B}}{۲}$. در نتیجه:

$$D\hat{A}E = \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = \frac{\hat{B}}{۲} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

پس سه نقطهٔ D و A و E روی یک خط راست واقعند.

۱۰.۴.۴. خطهای: موازی، عمود برهم،...

۱.۱۰.۴.۴. خط، نیمساز است

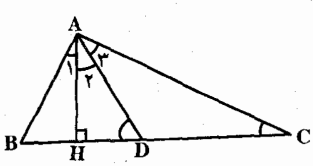


۵۶۳. اگر AH ارتفاع و AM میانه و AD نیمساز نظیر رأس A از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ باشند، داریم:

$$AH \perp BC \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۴ \quad \text{و}$$

$$MA = MC \Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_۴$$

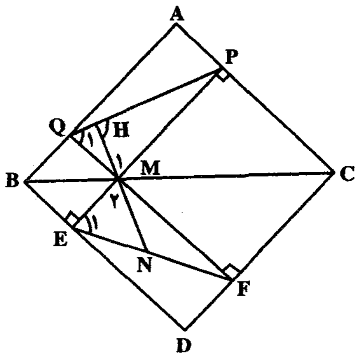
از طرفی چون AD نیمساز داخلی زاویهٔ BAC است، پس $\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{A}_۳ + \hat{A}_۴$ است. در نتیجه $\hat{A}_۲ = \hat{A}_۳$ یعنی AD نیمساز زاویهٔ MAH است.



۵۶۴. مثلث ABD متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $\hat{A}_۱ = \hat{C}$ است و زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ADC است.

۵۶۶. در مثلث BDE میانهٔ BC نصف ضلع DE است. پس این مثلث در رأس B قائم‌الزاویه است؛ از طرفی CE∥AB است.

۴.۴.۱۰.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۵۶۸. مربع ABDC را می‌سازیم. سپس MP و MQ را امتداد می‌دهیم تا BD و CD را بترتیب در E و F قطع کنند. از E به F وصل می کنیم و MH را نیز ادامه می‌دهیم تا EF را در نقطهٔ N قطع نماید. حال ثابت می کنیم که MH از نقطهٔ ثابت D می گذرد. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMQ و BME، همچنین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MCP و MCF به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده متساویند. پس ME = MQ و MF = MP است. از آن جا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MPQ و MEF به حالت تساوی دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه با هم برابرند. پس $\hat{Q}_1 = \hat{E}_1$ است. اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ MPQ که MH ارتفاع وارد بر وتر است، $\hat{Q}_1 = \hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است، پس $\hat{E}_1 = \hat{M}_2$ یعنی مثلث MNE متساوی‌الساقین است و از آن جا، MN = NE است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که MN = NF است، یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ MEF، MN میانه است و چون چهارضلعی MEDF مستطیل است و قطرهای مستطیل منصف یکدیگرند پس MN از نقطهٔ ثابت D می گذرد.

۴.۴.۱۱. شکلهای ایجاد شده

۵۶۹. دو زاویهٔ EDB و EBD با هم برابرند.

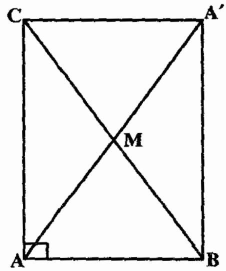
۵۷۰. میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، پس AM = MC و در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM و MDC به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده برابرند و AH = CD. دو زاویهٔ AHC و ADC هر یک ۹۰ درجه‌اند، پس D و H روی محیط دایره‌ای به قطر AC قرار دارند. و چون MAC متساوی‌الساقین است، $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$؛ و چون $\hat{A}_1$ و $\hat{H}_1$ محاطی و روبه‌رو به یک کمانند، پس $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$ و در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{H}_1$، یعنی دو خط AC و HD موازی‌اند و چهارضلعی AHDC ذوزنقه است. ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه در

مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس :

$$BM = AB = AM \text{ و } B\hat{A}M = ۶۰^\circ$$

و چون ارتفاع AH در ABM نیمساز نیز هست، پس $\hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$ زاویهٔ $\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ بود پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و در دایرهٔ کمانهای روبه‌رو به زاویه‌های محاطی مساوی برابرند، یعنی $\widehat{HD} = \widehat{DC}$ و در نتیجه وترها برابرند، یعنی : $HD = DC$

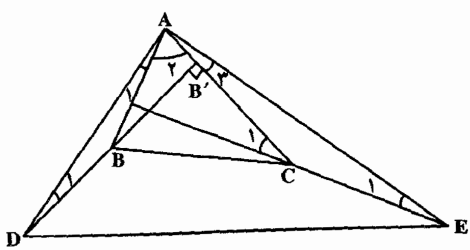
۱۲.۴.۴. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است



۵۷۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC فرض می‌کنیم، میانهٔ AM نصف ضلع BC باشد. این میانه را از طرف M به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A′ امتداد می‌دهیم و از A′ به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABA′C متوازی‌الاضلاعی است که اندازهٔ دو قطرش متساوی‌اند؛ پس مستطیل است. در نتیجه مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

۵۷۲. دو زاویهٔ $A\hat{B}B'$ و $A\hat{C}C'$ با هم برابرند $(\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱)$ ؛ زیرا ضلعهایشان دوبه‌دو برهم عمودند. در نتیجه دو مثلث ABD و ACE به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین متساوی‌اند، زیرا :

$$AB = CE \text{ و } BD = AC \text{ و } A\hat{B}D = A\hat{C}E = ۱۸۰ - \hat{B}_۱ = ۱۸۰ - \hat{C}_۱$$



از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $AD = AE$ و $\hat{D}_۱ = \hat{A}_۳$. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB′ داریم :

$$\hat{D}_۱ + \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۳ + \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}E = ۹۰^\circ$$

پس مثلث ADE قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۵۷۳. ثابت کنید که $\Delta ABP \cong \Delta ACQ$. برای این منظور، کافی است ثابت شود $\Delta KBP \cong \Delta ABC$ و $\Delta FCQ \cong \Delta ABC$ (بنا بر تساوی دو ضلع و زاویهٔ میان آنها) :

$$Q\hat{A}P = C\hat{A}B + C\hat{A}Q + B\hat{A}P = C\hat{A}B + C\hat{A}Q + C\hat{Q}A$$

$$= C\hat{A}B + ۱۸۰^\circ - Q\hat{C}A = C\hat{A}B + ۹۰^\circ - Q\hat{C}F = ۹۰^\circ$$

(فرض شده است که $C\hat{A}B \le ۹۰^\circ$ ؛ حالت $C\hat{A}B > ۹۰^\circ$ ، به روش مشابه بررسی می شود.)

۱۳.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۷۴. گزینهٔ (د) درست است.

۵۷۵. گزینهٔ (ب) درست است.

۵۷۶. گزینهٔ (هـ) درست است.

۵۷۷. ریاضی‌دان چین باستان، برای حل این مسأله قاعدهٔ زیر را در رسالهٔ خود، ذکر می کند :

«۷ را در خودش ضرب کن، ۳ را هم در خودش ضرب کن، با هم جمع و بعد نصف کن. این را به عنوان معیار A در جهت کج بگیر. از ۷ که در خودش ضرب کرده‌ای، معیار حرکت در جهت کج را کم کن، باقی‌مانده، معیار همان حرکت به طرف جنوب می‌شود. ۳ را در ۷ ضرب کن، این معیار حرکت B به طرف مشرق است، ۱۰ «بو» حرکت به طرف جنوب را در معیار حرکت A در جهت کج ضرب کن ؛ ۱۰ «بو» را در معیار حرکت B به طرف شرق ضرب کن. هر کدام از این‌ها مقسوم است. مقسومها را با معیار حرکت به طرف جنوب در نظر بگیر و مقدارها را پیدا کن».

با استفاده از این قاعده، مسأله به این ترتیب حل می‌شود :

۱) ابتدا معیار حرکت A را «در جهت کج» به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{۷^۲ + ۳^۲}{۲} = ۲۹$$

۲) معیار حرکت A به طرف جنوب را به‌دست می‌آوریم :

$$۷^۲ - \frac{۷^۲ + ۳^۲}{۲} = ۲۰$$

۳) مقدار حرکت به طرف شرق چنین می‌شود :

$$۷ \times ۳ = ۲۱$$

۴) «مقسوم»ها را پیدا می کنیم :

$$۱۰ \times ۲۹ \ ; \ ۱۰ \times ۲۱$$

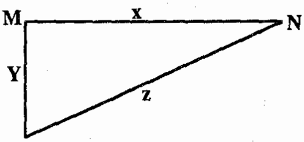
۵) A «در جهت کج»، این مقدار راه رفته است :

$$\frac{10\times 29}{20}=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}$$ «بو»

۶) B به طرف شرق، این مقدار راه رفته است :

$$\frac{10\times 21}{20}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$$ «بو»

راه‌حل عادی این مسأله، چنین است : x را راهی می‌گیریم که B به طرف شرق رفته است ؛ y مسافتی که A به طرف جنوب طی کرده است (ضمناً، بنا به شرط مسأله می‌دانیم : $y=10$) و بالاخره، z را مقدار «راه کج» به طرف شمال‌شرقی می‌گیریم، که همان وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌شود (شکل روبرو) در این صورت، داریم :



$$x^2+10^2=z^2,$$

$$\frac{x}{z+10}=\frac{3}{7}$$

از آن جا :

$$z=\frac{7}{3}x-10$$

سپس :

$$x^2+10^2=\left(\frac{7}{3}x-10\right)^2$$

یا :

$$x^2+100=\frac{49}{9}x^2-\frac{2\times 7\times 10}{3}x+100,$$

$$40x^2-3\times 2\times 7\times 10x=0,$$

$$2x^2-21x=0,$$

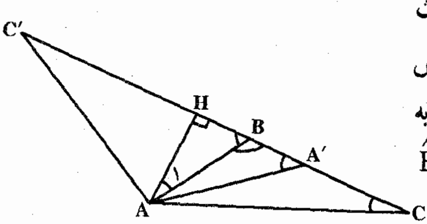
$$x(2x-21)=0 \Rightarrow x=10\frac{1}{2}$$ «بو»

حالا، z را پیدا می‌کنیم :

$$z=\frac{7}{3}\times\frac{21}{2}-10=\frac{49}{2}-10=\frac{29}{2}=14\frac{1}{2}$$ «بو»

۱۴.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۷۸. ۱. زاویهٔ ABC زاویهٔ خارجی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH است، پس $A\hat{B}C=90+\hat{A}_1$ است. از طرفی بنا به فرض $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ یا $\hat{B}=90+\hat{C}$ است، در نتیجه: $H\hat{A}B=\hat{A}_1=\hat{C}$.



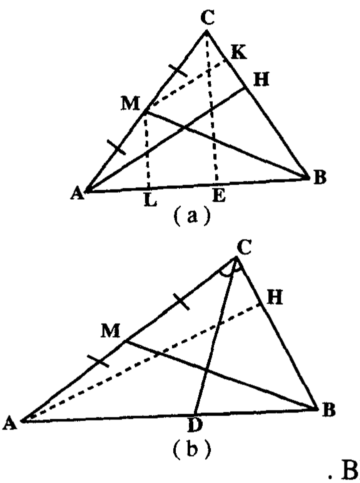
۲. چون AH عمودمنصف CC' است، مثلث ACC' متساوی‌الساقین و $\hat{C'}=\hat{C}=\hat{A}_1$ است. اما در مثلث AHB، $\hat{A}_1+\hat{B}=90^\circ$. پس $\hat{C'}+\hat{B}=90^\circ$ و در نتیجه درمثلث $AC'B$ اندازهٔ زاویهٔ $C'\hat{A}B=90^\circ$ است.

۳. می‌دانیم که در مثلث شبه قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}-\hat{C}=90^\circ)$ نیمساز داخلی زاویهٔ A با ضلع BC زاویهٔ 45° می‌سازد، پس $B\hat{A'}A=45^\circ$ و در نتیجه مثلث AHA' قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس $AH=A'H$ می‌باشد.

۵.۴. مثلث حاده‌الزاویه

۲.۵.۴. زاویه

۱.۲.۵.۴. اندازهٔ زاویه



۵۷۹. a) مقدار زاویهٔ B از مثلث قائم‌الزاویه برابر یا کوچکتر از ۳۰ درجه است، برحسب آن که، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ B، طولی برابر با نصف طول وتر و یا کوچکتر از آن داشته باشد. اگر از این مطلب، در مثلثهای BMK و BML استفاده کنیم (شکل a، $MK\perp BC$)، به دست می‌آید:

$M\hat{B}C=30^\circ$، زیرا:

$BM=AH=2MK$

و $M\hat{B}A<30^\circ$، زیرا $BM=AH\geq EC=2ML$.

بنابراین:

$$\hat{B}=M\hat{B}C+M\hat{B}A<60^\circ$$

یادآوری می کنیم که «حاده بودن زاویه‌های مثلث» ضرورت دارد؛ بدون آن، حکم مسأله درست نیست.

b) از مسألهٔ a نتیجه می‌شود: $\hat{B}\leq 60^\circ$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، ضلع AC از دو ضلع دیگر کوچکتر نیست؛ در این صورت:

$$\hat{A}\leq\hat{B}\leq 60^\circ\ ,\ \hat{C}\leq\hat{B}\leq 60^\circ$$

(در هر مثلث، زاویهٔ بزرگتر، روبه‌رو به ضلع بزرگتر است) و از این نابرابری‌ها بلافاصله نتیجه می‌شود:

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^\circ$$

۵۸۰. مجموع دو زاویهٔ دیگر مثلث $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ است، و چون این دو زاویه حاده‌اند، پس هر یک از آنها از 90° کوچکتر است. بنابراین به فرض $\hat{B}<90^\circ$، $\hat{C}>20^\circ$ با شرط $\hat{B}+\hat{C}=110^\circ$ است.

۳.۵.۴. ضلع

۱.۳.۵.۴. اندازهٔ ضلع

۵۸۱. داریم:

$$AB = 8\sqrt{3} \ , \ BC = 4\sqrt{3}+12$$

۴.۵.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۵.۴. اندازهٔ ارتفاع

۵۸۲. $6\sqrt{3}$ سانتیمتر.

۵.۵.۴. پاره‌خط

۱.۵.۵.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۵۸۳. اگر $\hat{C}<45^\circ$ باشد، متمم آن در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC از 45° بزرگتر است. همچنین اگر $\hat{B}>45^\circ$ باشد، متمم آن در مثلث قائم‌الزاویه ABH از 45° کوچکتر است.

۶.۵.۴. محیط

۱.۶.۵.۴. اندازهٔ محیط

۵۸۴. داریم:

$$AB = 12\sqrt{2} \ ، \ BC = 8\sqrt{2} \ ، \ AC = 12+4\sqrt{3}$$

$$2p = 12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)\text{cm}$$

۵۸۵. اگر a'، b' و c' اندازهٔ ضلعهای مثلث ارتفاعیهٔ مثلث حاده الزاویهٔ ABC به ضلعهای a، b و c و مساحت S باشند، داریم: $2p' = a'+b'+c' = \dfrac{8S^2}{abc}$.

۴.۵.۶.۲. رابطه‌ای در محیطها

۵۸۶. اگر $2p$ محیط مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC به ضلعهای a، b و c و مساحت S و $2p'$ محیط مثلث ارتفاعیهٔ این مثلث باشد، با توجه به این که $2p' = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{8S^2}{abc}$ است، مسأله را حل کنید.

۴.۵.۷. مساحت

۴.۵.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۵۸۷. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH داریم:

$$BH = AH = 9 \ , \ HC = 3\sqrt{3} \Rightarrow BC = 9 + 3\sqrt{3}$$

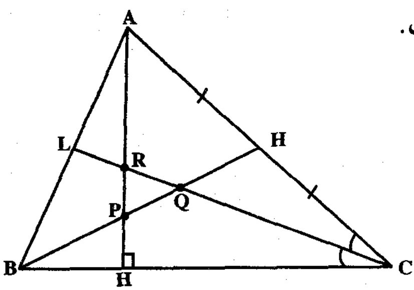
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}(9+3\sqrt{3})\times 9 = \frac{27(3+\sqrt{3})}{2}$$

۴.۵.۸. شکلهای ایجاد شده

۵۸۸. در چهارضلعی $MNPQ$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \ , \ MN = \frac{BC}{2} \\ PQ \parallel BC \ , \ PQ = \frac{BC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{array}$$

پس $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است. اما چون $PN \parallel AH$ و $PQ \parallel BC$ است، پس، $Q\hat{P}N = 90^\circ$ یعنی $MNPQ$ مستطیل است.



۵۸۹. از برهان خلف استفاده می کنیم، یعنی فرض می کنیم در مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده و ضلعهایی نابرابر دارد، ارتفاع AH، میانهٔ BM و نیمساز CL، ضمن برخورد با هم، مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته باشند. نقطه‌های برخورد پاره‌خطهای راست AH و BM، BM و CL، CL و AH را بترتیب P، Q و R می‌نامیم. (شکل بالا) در مثلث CRH داریم:

$$C\hat{H}R = 90^\circ \text{ و } C\hat{R}H = 60^\circ$$

از آن‌جا $R\hat{C}H = 30^\circ$. سپس، در مثلث CMQ داریم:

$$Q\hat{C}M = R\hat{C}M = 30^\circ \text{ و } M\hat{Q}C = 60^\circ$$

(برابری $B\hat{Q}C=۶۰^\circ$ ممکن نیست، زیرا در غیر این صورت باید داشته باشیم :

$$A\hat{B}C > Q\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - B\hat{Q}C - Q\hat{C}B = ۹۰^\circ$$

یعنی مثلث ABC، زاویه‌ای منفرجه دارد)، از آن‌جا $BM \perp AC$. به این ترتیب، میانهٔ BM در عین حال بر قاعده عمود می‌شود و از آن‌جا :

$$B\hat{A}C = B\hat{C}A = A\hat{C}L + B\hat{C}L = ۶۰^\circ$$

یعنی، مثلث مفروض باید متساوی‌الاضلاع باشد که فرض مسأله را نقض می‌کند.

۵۹۰. با استفاده از استقراء نشان خواهیم داد که اگر $A(n)$ ماکزیمم تعداد مثلثهای حاده‌الزوایایی که می‌توان با n نقطه تشکیل داده باشد و $T(n)=\binom{n}{۳}$ کل تعداد مثلثها باشد، در این صورت نسبتهای : $A(n)/T(n)$ یک دنبالهٔ غیرصعودی تشکیل می‌دهند. نشان می‌دهیم که : $A(۵)/T(۵)=۰/۷$ و در نتیجه به ازاء $n>۵$ و در حالت خاص به‌ازاء $n=۱۰۰$ ، $A(n)/T(n)\leq ۰/۷$ می‌باشد.

برای بررسی حالت $n=۵$ ، به اطلاعاتی در مورد $n=۴$ نیاز داریم.

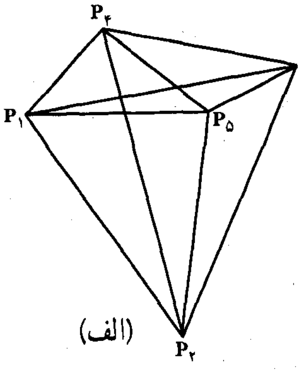
$n=۴$

حالت (a) یکی از نقطه‌ها، مثلاً $P_۴$ ، داخل مثلث تشکیل شده از سه نقطهٔ دیگر است. سه زاویه در $P_۴$ به ۳۶۰° بالغ می‌شوند، و از آن‌جا که هر یک کمتر از ۱۸۰° است، حداقل دو زاویه از آنها بزرگتر از ۹۰° می‌باشند. در نتیجه در این حالت حداقل دو مثلث منفرجه‌الزاویه (یعنی حداکثر دو مثلث حاده‌الزوایا) موجود است.

حالت (b) چهار نقطه، یک چهارضلعی محدب تشکیل می‌دهند. از آن‌جا که مجموع زاویه‌های داخلی این چهارضلعی ۳۶۰° است، حداقل یکی از آنها بزرگتر یا مساوی با ۹۰° است، و حداقل یک مثلث ناحاده‌الزوایا به‌دست می‌دهد. در این حالت سه مثلث از چهار مثلث می‌توانند حاده‌الزوایا باشند ؛ بنابراین : $A(۴)/T(۴)=۰/۷۵$ است.

$n=۵$

حالت (a) پوشش محدب پنج نقطهٔ $P_۱$ ، $P_۲$ ، $P_۳$ ، $P_۴$ و $P_۵$ (یعنی کوچکترین مجموعهٔ محدب شامل آنها) مثلث، مثلاً $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ است.



(الف)

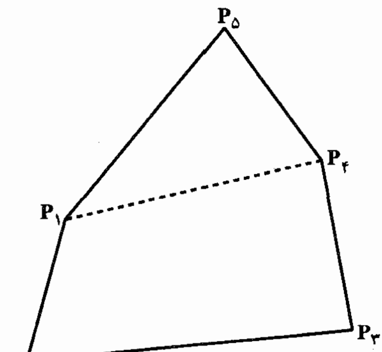
در این صورت حداقل دو زاویه از زاویه‌های : $P_۳P_۴P_۱$ ، $P_۲P_۴P_۳$ و $P_۱P_۴P_۲$ حاده نیستند بنابراین حداقل چهار مثلث ناحاده‌الزوایا داریم.

حالت (b) پوشش محدب پنج نقطهٔ مورد بحث چهارضلعی، مثلاً $P_۴P_۳P_۲P_۱$ است، و $P_۵$ داخل آن قرار دارد ؛ شکل (الف) را ملاحظه کنید. در این

صورت P_5 داخل دو مثلث از : $\binom{4}{3} = 4$ مثلثی که می‌توانند با نقطه‌های P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 ساخته شوند (در مثلثهای $P_3P_2P_1$ و $P_4P_3P_2$ در شکل صفحه‌قبل) است. همان‌گونه که به ازاء $n = 4$ ، حالت (a) ملاحظه کردیم دو زوج مثلث ناحاده‌الزوایا با رأس P_5 (مثلثهای $P_1P_3P_5$ ، $P_2P_3P_5$ ، $P_3P_2P_5$ و $P_2P_4P_5$ در شکل (الف)) به‌دست می‌آوریم ؛ اما این زوجها می‌توانند عضو مشترکی ($P_2P_3P_5$ در شکل الف) داشته باشند، بنابراین می‌توانیم روی حداقل سه مثلث ناحاده‌الزوایای به رأس P_5 حساب کنیم. از این گذشته، باید یکی از زاویه‌های P_1 ، P_2 ، P_3 و P_4 بزرگتر یا مساوی با 90° باشد، که مثلث ناحاده‌الزوایای دیگر به‌دست می‌دهد.

حالت (c) نقطه‌های مورد بحث پنج ضلعی محدب $P_5P_4P_3P_2P_1$ را تشکیل می‌دهند. مجموع زاویه‌های داخلی این پنج ضلعی 540° است، بنابراین دو زاویه از این زاویه‌ها ناحاده‌اند، و دو مثلث ناحاده‌الزوایا به صورت : $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ می‌دهند. اگر جمیع سه زاویهٔ داخلی باقیمانده حاده باشند، دو زاویه از آنها، مثلاً در P_2 و P_3 باید مجاور باشند و بنا به حالت (b) ی $n = 4$ ، که در مورد چهارضلعی $P_1P_2P_3P_4$ به کار رود، یکی از زاویه‌های $P_1P_4P_3$ یا $P_4P_1P_2$ ناحاده است (شکل (ب) را ملاحظه کنید)، که در این صورت مجموعاً سه مثلث ناحاده‌الزوایا به‌دست می‌آید.

به این ترتیب، در هر هیأت پنج نقطه، حداقل ۳ مثلث ناحاده‌الزوایا هستند، و از آن جا که



(ب)

کل تعداد مثلثها : $\binom{5}{3} = 10$ است، حداکثر ۷ مثلث حاده‌الزوایا می‌باشند، و به عبارت دیگر $A(5) \leq 7$ است. شکل (ب) نشان می‌دهد که تساوی می‌تواند رخ دهد و بنابراین :

$A(\text{۵})=\text{۷}$ و : $A(\text{۵})/T(\text{۵})=\text{۷}/\text{۱۰}=\text{۰/۷}$ است.

اکنون فرض می‌کنیم به ازاء جمیع اعداد صحیح از ۵ تا n : $A(n)\le cT(n)$ باشد، در این صورت ادعا می‌کنیم که : $A(n+\text{۱})\le cT(n+\text{۱})$ است، برای اثبات این مطلب، از s مجموعهٔ $n+\text{۱}$ نقطه، به‌طور متوالی، اوّلین نقطه، دومین نقطه، ...، $(n+\text{۱})$ امین نقطه را حذف می‌کنیم. این عمل $n+\text{۱}$ مجموعهٔ n نقطه‌ای به‌دست می‌دهد. تعداد مثلثهای حاده‌الزوایای تشکیل شده را، هنگامی که k امین نقطه حذف شود، با B_k نمایش می‌دهیم. بنا به فرض استقراء به ازاء هر k داریم : $B_k\le A(n)\le cT(n)$. برای محاسبهٔ B تعداد کل مثلثهای حاده‌الزوایای واقع در مجموعهٔ اصلی S، مجموع :

$$B_\text{۱}+B_\text{۲}+\ldots+B_{n+\text{۱}}$$

را تشکیل می‌دهیم. در این مجموع، هر مثلث حاده‌الزوایا : $(n+\text{۱})-\text{۳}=n-\text{۲}$ بار شمرده شده است، زیرا $n-\text{۲}$ طریق، که طبق آنها یک نارأس هر یک از چنین مثلثهایی بتواند از S حذف شود، وجود دارد. در نتیجه داریم :

$$B=\frac{\text{۱}}{n-\text{۲}}(B_\text{۱}+B_\text{۲}+\ldots+B_{n+\text{۱}})\le c\frac{n+\text{۱}}{n-\text{۲}}T(n)=cT(n+\text{۱})$$

(در این جا از این حقیقت که : $\left[(n+\text{۱})/(n-\text{۲})\right]\binom{n}{\text{۳}}=\binom{n+\text{۱}}{\text{۳}}$ است، استفاده کرده‌ایم). از آن‌جا که این نامساوی به‌ازاء هر مجموعهٔ $n+\text{۱}$ نقطه‌ای برقرار است، نتیجه می‌شود که : $A(n+\text{۱})\le cT(n+\text{۱})$ و استقراء تکمیل است.

تبصره. راه‌حلمان اثبات کرد که ماکزیمم $R_n=A(n)/T(n)$ یعنی نسبت تعداد مثلثهای حادةالزوایا به تعداد کل مثلثها : به‌ازاء $n=\text{۴}$ ، ۰/۷۵ و به ازاء $n=\text{۵}$ ، ۰/۷۰ است، و صعود نمی‌کند، یعنی :

$$R_\text{۴}=\text{۰/۷۵} \text{ و } R_\text{۵}=\text{۰/۷}\ge R_\text{۶}\ge R_\text{۷}\ge\ldots\ge R_n\ge\ldots$$

می‌دانیم که چنین دنبالهٔ نامتناهی‌ای دارای حد است، و ممکن است یافتن مقدار این حد برای خواننده جالب باشد. یکی از طرق کمی نزدیکتر به پاسخ این سؤال شدن، بررسی وضعیت در مورد nهای بسیار بزرگ، حداقل در بعضی هیأتهای خاص است. یکی از چنین هیأتهایی عبارت از n نقطهٔ به‌طور یکنواخت توزیع شده در امتداد محیط یک دایره است. این هیأت برای R_n حد زیرین ۰/۲۵ را به دست می‌دهد.

۶.۴. مثلث منفرجه‌الزاویه

۲.۶.۴. زاویه

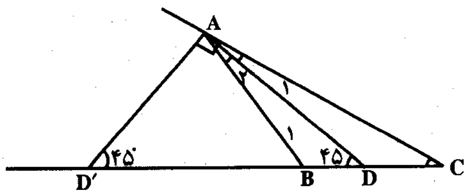
۱.۲.۶.۴. اندازهٔ زاویه

۵۹۱. اگر AD و AD′ ، بترتیب، نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی نظیر رأس A از مثلث ABC باشند، چون D زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس $\hat{D}=\hat{A}_1+\hat{C}$ است ؛ و در مثلث ADB داریم :

$D=180^\circ-(\hat{A}_2+\hat{B}_1)$. از جمع این دو رابطه با توجه به این که $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ است داریم :

$$2\hat{D}=180^\circ-\hat{A}_2-\hat{B}_1+\hat{A}_1+\hat{C}=180^\circ-(\hat{B}_1-\hat{C})=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D}=45^\circ$$



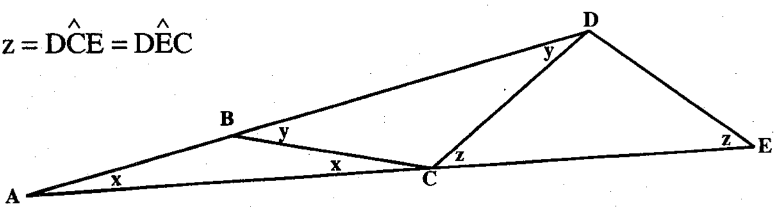
پس نیمساز زاویهٔ داخلی A با ضلع BC زاویهٔ °۴۵ می‌سازد. از طرفی می‌دانیم که نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی نظیر یک رأس بر هم عمودند. پس مثلث DAD′ در رأس A قائم‌الزاویه است که چون اندازهٔ زاویهٔ D از این مثلث °۴۵ است، پس اندازهٔ زاویهٔ D′ نیز مساوی °۴۵ خواهد شد، یعنی نیمساز زاویهٔ برونی A نیز با ضلع BC زاویهٔ °۴۵ می‌سازد.

۵۹۲. (هـ) فرض می‌کنیم :

$y=C\hat{B}D=C\hat{D}B$ و

$x=B\hat{A}C=B\hat{C}A$ و

$z=D\hat{C}E=D\hat{E}C$



و با استفاده از قضیهٔ مربوط به زاویهٔ خارجی در مثلثهای ABC و ACD و قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های داخلی در مثلث ADE خواهیم داشت :

$$y = ۲x$$
$$z = x + y = ۳x$$
$$x + A\hat{D}E + z = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۴۰^\circ + ۴x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$$

۳.۶.۴. ضلع

۱.۳.۶.۴. اندازهٔ ضلع

۵۹۳. مثلث ABH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس :

$AB = BH\sqrt{۲}$ و یا $AB = ۱۲\sqrt{۲}cm$

۴.۶.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۶.۴. نیمساز

۵۹۴. با توجه به این که :

$C\hat{B}N = ۱۲^\circ = B\hat{N}C$ و $B\hat{C}M = ۴۸^\circ = C\hat{M}B$

نتیجه می‌شود که : $BM = BC = CN$.

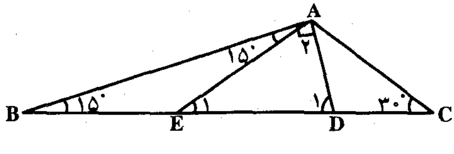
توجه خواهید داشت که I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی در خارج پاره‌خط CN و در داخل پاره‌خط BM واقع است.

۵.۶.۴. پاره‌خط

۱.۵.۶.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۶.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۵۹۵. از رأس A خطی رسم می کنیم تا با ضلع AB زاویهٔ $B\hat{A}E = ۱۵^\circ$ بسازد. در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین می گردد، یعنی $AE = EB$ است. از طرفی $\hat{E}_۱ = ۲\hat{B} = ۳۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ است. پس مثلث AEC نیز متساوی‌الساقین است، یعنی $AE = AC$ است. در مثلث AED زاویهٔ $\hat{D}_۱ = ۷۵^\circ$ و $\hat{A}_۲ = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$ است. پس این مثلث نیز



متساوی‌الساقین است و $AE = ED$ می‌باشد. پس AE میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD است و داریم $AE = \frac{BD}{2}$. اما $AE = AC$ است، پس $AC = \frac{BD}{2}$ و یا $BD = 2AC$ است.

۲.۱.۵.۶.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۵۹۶. چون $\hat{C} < 45°$ پس $C\hat{A}H > 45°$. بنابراین در مثلث CAH (۱) $AH < CH$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH (۲) $BH < AH$ است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $BH < AH < CH$.

۶.۶.۴. محیط

۱.۶.۶.۴. اندازهٔ محیط

۵۹۷. $12 + 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ سانتیمتر.

۷.۶.۴. مساحت

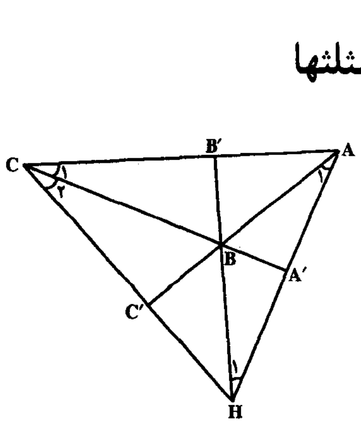
۱.۷.۶.۴. اندازهٔ مساحت

۵۹۸. ارتفاع CH برابر ۳ سانتیمتر و از آن‌جا مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} AB.CH = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12 cm^2$$

۵۹۹. $S_{ABC} = \frac{1}{4} bc$.

۸.۶.۴. همنهشتی مثلثها



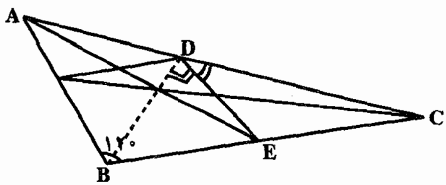
۶۰۰. زاویهٔ ABC زاویهٔ خارجی مثلث ′ABA است، پس $A\hat{B}C = 90° + \hat{A}_1$. از طرفی بنا به فرض $\hat{B} - \hat{C}_1 = 90° \Rightarrow \hat{B} = 90° + \hat{C}_1$، از آن‌جا نتیجه می‌شود که $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$. اما زاویه‌های $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ و $\hat{H}_1 = \hat{C}_1$ می‌باشند (ضلعهایشان بر هم عمودند)، پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \hat{A}_1 = \hat{H}_1$ است، یعنی مثلثهای ABH و ACH متساوی‌الساقین می‌باشند، پس $CA = CH$ و $BA = BH$ است. در نتیجه دو مثلث ABC و BHC به حالت تساوی سه ضلع با هم برابرند.

۹.۶.۴. نقطه‌های همخط

۶۰۱. باید ثابت کنیم، BHD = BHE است. با توجه به این که مثلث BHD متساوی‌الساقین در رأس B و HE میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC است.

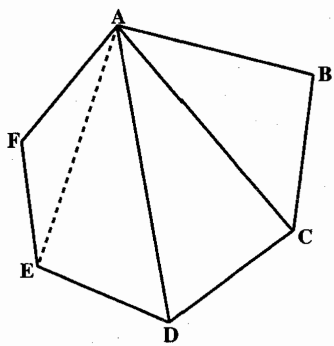
۱۰.۶.۴. شکلهای ایجاد شده

۶۰۲. فرض کنید $\hat{ABC}=120^\circ$ و AE ،BD و CM نیمسازهای مثلث ABC باشند. نشان خواهیم داد که DE نیمساز زاویهٔ BDC و DM نیمساز زاویهٔ BDA است. در حقیقت، BE نیمساز زاویهٔ مجاور به زاویهٔ ABD است، یعنی، در مثلث ABD، E، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویهٔ BAD و زاویهٔ مجاور به زاویهٔ ABD است ؛ به این ترتیب نقطهٔ E، از خطهای راست AB، BD و AD به یک فاصله است ؛ بنابراین، DE نیمساز زاویهٔ BDC است. درست به همین روش، DM نیمساز زاویهٔ BDA است.



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵

۶۰۳. در n ضلعی $ABC...F$ رأس A را به رأسهای غیرمجاور خود وصل می کنیم. nضلعی به $n-۲$ مثلث تجزیه می‌شود که چون مجموع زاویه‌های درونی هر مثلث ۲ قائمه است، پس مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب $(n-۲)۲$ قائمه و یا $(۲n-۴)$ قائمه است.



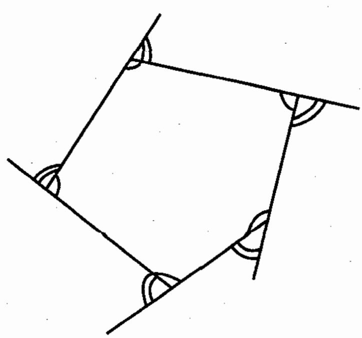
نتیجه. مجموع زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۴ قائمه و یا ۳۶۰ درجه است.

۶۰۴. مجموع هر زاویهٔ درونی و برونی نظیر یک رأس از هر n ضلعی برابر ۲ قائمه است. پس :

مجموع زاویه‌های برونی n ضلعی محدب + مجموع زاویه‌های درونی n ضلعی محدب
$=۲n$ قائمه

و یا قائمه $۲n$ = مجموع زاویه‌های برونی n ضلعی محدب + $(۲n-۴)$ قائمه

قائمه ۴ = مجموع زاویه‌های برونی n ضلعی محدب $\Leftarrow$

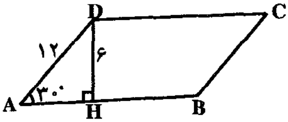


۱.۵. متوازی الاضلاع

۲.۱.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵. اندازهٔ زاویه

۶۰۶. اندازهٔ زاویه‌های حاده °۳۰ و اندازهٔ زاویه‌های منفرجه °۱۵۰ است.



۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۰۷. نقطهٔ Q را طوری انتخاب می‌کنیم که چهارضلعی QPAB متوازی‌الاضلاع باشد. در این صورت QPDC هم متوازی‌الاضلاع است، زیرا :

$CD = BA = QP$ و $CD \| BA \| QP$

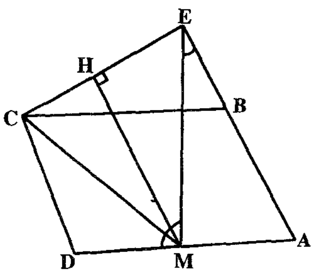
چون رأسهای دو زاویهٔ برابر PQB و PCB در یک طرف خط راست PB قرار گرفته‌اند، نقطه‌های Q، P، B و C روی محیط یک دایره‌اند و داریم :

$$A\hat{P}B = P\hat{B}Q = P\hat{C}Q = D\hat{P}C$$

که از آن جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

۶۰۸. DC||AE و مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

۶۰۹. مثلث MCE متساوی‌الساقین است، زیرا اگر از M عمود MH را بر CE فرود آوریم، MH عمودمنصف CE است، پس MH نیمساز زاویهٔ CME می‌باشد. از طرفی با توجه به فرض مسأله مثلث DMC نیز متساوی‌الساقین است.



۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع

۶۱۰. اگر دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع را a و b فرض کنیم، داریم :

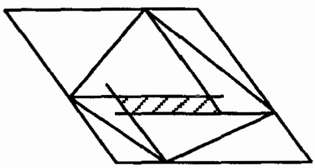
$$۲(a+b) = ۳۰ \Rightarrow a+b = ۱۵ \quad (۱)$$

$$a = ۲b - ۳ \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow ۲b - ۳ + b = ۱۵ \Rightarrow b = ۶ \Rightarrow a = ۹$$

۴.۱.۵. قطر

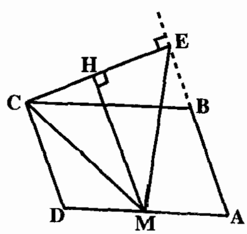
۶۱۱. از آن جا که مثلثهای واقع در بیرون چهارضلعی باید مساحتهایی به مجموعی برابر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع داشته باشند، بنابراین، چهارمتوازی‌الاضلاعی که روی این مثلثها ساخته می‌شود (شکل زیر)، باید در مجموع مساحتی برابر مساحت متوازی‌الاضلاع داشته باشند. ولی در این صورت، مساحت چهارضلعی که با ضلعهای این چهار متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود (روی شکل، این چهارضلعی را هاشور زده‌ایم)، باید برابر صفر باشد. ولی این ممکن نیست، مگر این که یکی از قطرهای چهارضلعی شامل یکی از ضلعهای متوازی‌الاضلاعها باشد، یعنی با ضلع متوازی‌الاضلاع اصلی موازی باشد.



۵.۱.۵. پاره خط

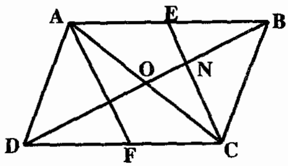
۱.۵.۱.۵. رابطه بین پاره خطها

۶۱۳. از نقطهٔ M به نقطهٔ H وسط پاره خط CE وصل می کنیم. $MH \| AE$ است، زیرا چهارضلعی ADCE ذوزنقه و MH خطی است که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می کند. بنابراین موازی قاعده‌ها می‌باشد. در نتیجه $MH \perp CE$ است، یعنی MH ارتفاع و میانهٔ رأس M از مثلث MCE می‌باشد. پس این مثلث متساوی‌الساقین است، یعنی $MC = ME$ است.



۶۱۵. ثابت کنید که $DE = FB$ است.

۶۱۶. مثلثهای OAE و OFC برابرند.



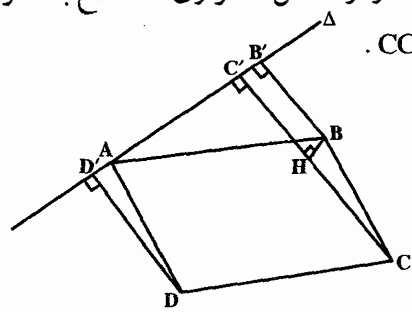
۶۱۸. اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع باشد، پاره‌خطهای BO و CE میانه‌های مثلث ABC می‌باشند. پس به نسبت $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ یکدیگر را قطع می‌کنند. یعنی:

$$NB = \frac{2}{3}OB = \frac{1}{3}BD \text{ و } ON = \frac{1}{3}OB = \frac{1}{6}BD$$

همچنین در مثلث ACD پاره‌خطهای AF و DO میانه‌اند. پس: $MD = \frac{2}{3}OD = \frac{1}{3}BD$ و $MO = \frac{1}{3}DO = \frac{1}{6}BD$ است. در نتیجه $DM = MN = NB = \frac{1}{3}BD$ است، یعنی خطهای AF و CE قطر BD را به سه قسمت متساوی تقسیم نموده‌اند.

۶۱۹. اگر قطر AC را رسم کنیم، نقطه‌های F و G بترتیب، محل برخورد میانه‌های دو مثلث ABC و ADC است.

۶۲۰. اگر خط Δ در خارج متوازی‌الاضلاع باشد، از رأس B عمود BH را بر CC' فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH و ADD' به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده با هم برابرند، پس $DD' = CH$ است. از طرفی چهار ضلعی $BHC'B'$ مستطیل است، پس $HC' = BB'$ است. در نتیجه: $BB' + DD' = CH + HC' = CC'$ در صورتی که خط Δ از رأس A و از داخل متوازی‌الاضلاع بگذرد، خواهیم داشت: $CC' = |BB' - DD'|$.



۵ . ۱ . ۶ . محیط

۵ . ۱ . ۶ . ۱ . اندازهٔ محیط

۶۲۱. ۱۴۴ سانتی متر.

۵ . ۱ . ۷ . مساحت

۵ . ۱ . ۷ . ۱ . اندازهٔ مساحت

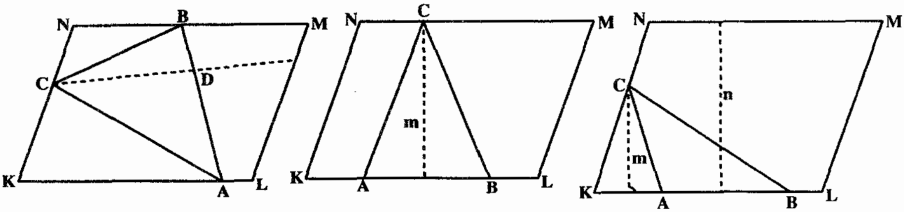
۶۲۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۵ . ۱ . ۷ . ۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۶۲۴. حالت اول. دو رأس مثلث بر یک ضلع متوازی‌الاضلاع واقعند ؛A و B بر ضلع KL قرار دارند (شکلهای الف وب). مساحت مثلث ABC را با t و ارتفاع نظیر رأس C از آن را با m ، مساحت متوازی‌الاضلاع KLMN را با T و ارتفاع وارد بر ضلع KL ازآن را با n نشان می‌دهیم. در این صورت :

$$t = \frac{۱}{۲} m.AB \text{ و } T = n.KL$$

چون $m \le n$ و $AB \le KL$ ؛ در نتیجه $t \le \frac{۱}{۲} T$



(پ) (ب) (الف)

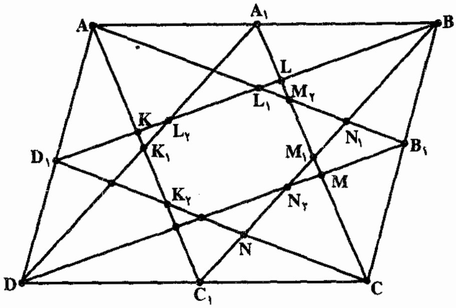
حالت دوم. هیچ دو رأسی از مثلث بر یک ضلع متوازی‌الاضلاع قرار ندارند(شکل پ). در این حالت دو رأس از مثلث بر دو ضلع رو به رو از متوازی‌الاضلاع قرار خواهند داشت ؛ فرض می‌کنیم A بر KL و B بر MN و C بر KN واقع باشد. از C خطی موازی با KL رسم می‌کنیم. این خط با AB و LM بترتیب، در نقطه‌های D و E برخورد می‌کند. بنابر نتیجهٔ حالت اول مساحت مثلث ACD بزرگتر از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع KLEC نیست، و مساحت مثلث BCD بزرگتر از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع MNCE نیست. از این رو مساحت مثلث ABC نمی‌تواند بزرگتر از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع KLMN باشد.

۶۲۵. (ج) درست است. چون $DM = AM$ ، $\angle QMA = \angle DMC$ و $\angle CDM = \angle QAM$. دو مثلث QAM و MCD همنهشت هستند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که دو مثلث BPN و DNC همنهشتند.

$$\text{حال : مساحت } \Delta DOC + \text{مساحت } \square ABCD = \text{مساحت } \Delta QPO$$

$$\text{مساحت } \Delta DOC = \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲} \square \text{ مساحت } ABCD) = \frac{K}{۸}$$

$$\text{مساحت } \Delta QPO = K + \frac{K}{۸} = \frac{۹K}{۸}$$



۶۲۶. وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA را، بترتیب A_1، B_1، C_1 و D_1 می‌نامیم؛ مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را S و نقطه‌های برخورد خط راست AC_1 را با خطهای راست BD_1، A_1D و CD_1 بترتیب، K، K_1 و K_2 می‌گیریم. به همین ترتیب، نقطه‌های L، L_1، L_2، M، M_1، M_2، N، N_1 و N_2 را به دست می‌آوریم. چون متوازی‌الاضلاع AA_1CC_1 $(AA_1 = CC_1, AA_1 \| CC_1)$، ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$ وقاعده‌ای برابر نصف قاعدهٔ آن دارد $(AA_1 = \frac{1}{2}AB)$، بنابراین مساحت آن برابر $\frac{1}{2}S$ است. سپس، متوازی‌الاضلاع $KLMN$ $(LM\|KN$ و $KL\|MN)$ ارتفاعی برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع AA_1CC_1 و قاعدهٔ $KN = \frac{2}{5}AC_1$ دارد (زیرا از تشابه دو مثلث AKD_1 و AND داریم: $AK = KN$، در ضمن: $KN = LM = MC = 2NC_1$)؛ بنابراین:

$$S_{KLMN} = \frac{2}{5}S_{AA_1CC_1} = \frac{2}{5}.\frac{1}{2}S = \frac{1}{5}S$$

K_1 نقطهٔ برخورد قطرهای AC_1 و DA_1 از متوازی‌الاضلاع AA_1C_1D است، بنابراین $AK_1 = K_1C_1$؛ K_2 نقطهٔ برخورد میانه‌های CD_1 و AC_1 از مثلث ACD است، پس $AK_2 = 2K_2C_1$. بنابراین داریم:

$$KK_1 = AK_1 - AK = \frac{1}{2}AC_1 - \frac{2}{5}AC_1 = \frac{1}{10}AC_1 = \frac{1}{4}KN$$ و

$$NK_2 = C_1K_2 - C_1N = \frac{1}{3}AC_1 - \frac{1}{5}AC_1 = \frac{2}{15}AC_1 = \frac{1}{3}KN$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$KL_2 = \frac{1}{3}KL$$

از آن جا:

$$S_{KK_1L_2} = \frac{1}{2}KK_1.KL_2.\sin(K_1\hat{K}L_2)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{4}KN.\frac{1}{3}KL.\sin(N\hat{K}L)$$

$$= \frac{1}{12}S_{NKL} = \frac{1}{24}S_{KLMN} = \frac{1}{120}S$$

و با روشی مشابه ثابت می‌شود که :

$$S_{LL_۱M_۲}=S_{MM_۱N_۲}=S_{NN_۱K_۲}=\frac{۱}{۱۲۰}S$$

بنابراین :

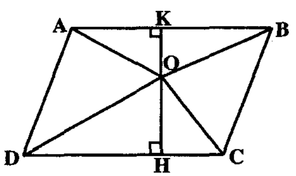
$$S_{K_۱L_۲L_۱M_۲M_۱N_۲N_۱K_۲}=\frac{۱}{۵}S-۴\times\frac{۱}{۱۲۰}S=\frac{۱}{۶}S$$

۵ . ۱ . ۷ . ۳ . نسبت مساحتها

۶۲۷. نسبت مساحتهای این دو مثلث به نسبت ارتفاعهای نظیر دو رأس O و P است

۵ . ۱ . ۷ . ۴ . رابطهٔ بین مساحتها

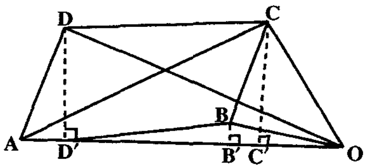
۶۲۸. رأسهای B و D از قطر AC به یک فاصله‌اند.



۶۲۹. از نقطهٔ O خطی عمود بر CD رسم می کنیم تا CD را در نقطهٔ H و AB را در نقطهٔ K قطع کند. می‌دانیم که پاره خط HK ارتفاع متوازی‌الاضلاع ABCD است و $S_{ABCD}=AB.HK$ است. از طرفی :

$$\begin{cases} S_{OAB}=\frac{۱}{۲}OK.AB \\ S_{OCD}=\frac{۱}{۲}OH.CD=\frac{۱}{۲}OH.AB \end{cases}$$

$$S_{OAB}+S_{OCD}=\frac{۱}{۲}AB(OK+OH)=\frac{۱}{۲}AB.HK=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$



۶۳۰. اگر از نقطه‌های B، C و D عمودهای BB'، CC' و DD' را بر OA فرود آوریم، داریم :

$$CC'=BB'+DD'$$

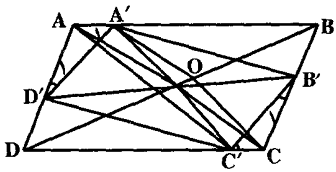
۶۳۱.اگر S مساحت متوازی الاضلاع باشد، آن‌وقت $S_{ABK}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$.از طرف دیگر، $S_{DBC}=S_{EKC}+S_{KCD}=\frac{۱}{۲}S$ ، بنابراین، $S_{ABK}=S_{EKC}$. به همین ترتیب، $S_{AKD}=S_{KCP}$ ؛ با جمع کردن دو تساوی اخیر با یکدیگر، به‌دست می‌آوریم : $S_{ABKD}=S_{CEKF}$.

۶۳۳. هرقطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث معادل تقسیم می کند، و هرسه مثلثی که قاعده‌شان ثلث یکی از ضلعهای متوازی الاضلاع است، ارتفاع مشترک دارند.

۸.۱.۵. همنهشتی متوازی الاضلاعها

۶۳۴. زاویه‌های متناظر این دو متوازی‌الاضلاع نیز برابرند.

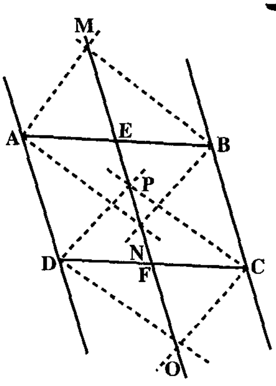
۹.۱.۵ نقطه‌های ویژه



۶۳۵. اگر متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ محاط شده باشد، باید ثابت کنیم که وسطهای قطرهایشان برهم منطبق است. دو مثلث $AA'D'$ و $CB'C'$ برابرند، زیرا $A'D' = B'C'$ و $\hat{A}_1{}' = \hat{C}_1{}'$ و $\hat{D}_1{}' = \hat{B}_1{}'$ است.

پس $CC' \| AA'$ و $CC' = AA'$ است و در نتیجه چهارضلعی $AC'CA'$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد که چون قطرهایش منصف یکدیگرند، پس AC و $A'C'$ یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی نقطهٔ وسط AC بر نقطهٔ وسط $A'C'$ منطبق است یا به‌عبارت دیگر مرکز دو متوازی‌الاضلاع برهم منطبق می‌باشند.

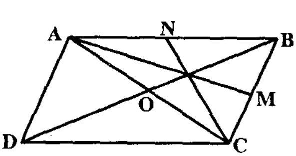
۱۰.۱.۵. نقطه‌های همخط



۶۳۶. ثابت کنید که $F\hat{C}D + D\hat{C}B + B\hat{C}E = 180^\circ$ است.

۶۳۷. وسطهای ضلعهای AB و CD از دو خط BC و AD به یک فاصله قرار دارند و نقطه‌های M، N، P و Q نیز از این دو خط به یک فاصله می‌باشند.

۱۱.۱.۵. خطهای همرس



۶۳۸. اگر قطر AC از متوازی الاضلاع را رسم کنیم، خطهای AM، CN و BD میانه‌های مثلث ABC می‌باشند.

۶۳۹. در متوازی الاضلاع ABCD اگر خط MN قطر BD را در نقطهٔ O قطع کند، دو مثلث OMB و OND باهم برابرند.

۱۲.۱.۵. خطهای: موازی، عمود برهم،...

۱.۱۲.۱.۵. خطها موازی‌اند

۶۴۰. چهار ضلعی AMND متوازی الاضلاع است .

۶۴۲. نیمسازهای زاویه‌های مجاور متوازی الاضلاع برهم عمودند.

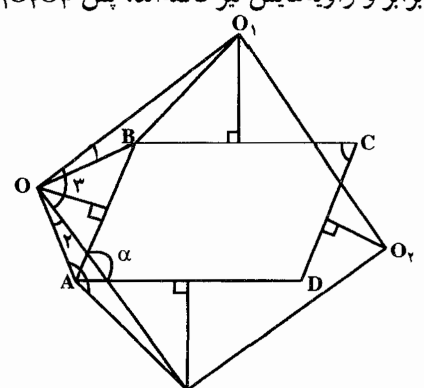
۲.۱۲.۱.۵. خط، نیمساز است

۶۴۳. مثلثهای AMD و BMC متساوی‌الساقین هستند و $AB \| CD$ است.

۱۳.۱.۵. شکلهای ایجاد شده

۶۴۵. زاویه‌های چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازها، ۹۰ درجه‌اند. اگر چهارضلعی اصلی مستطیل باشد، چهارضلعی حاصل ، مربع است .

۶۴۷. مرکزهای این مربعها را O، O_1، O_2 و O_3 می‌نامیم . دو مثلث AOO_3 و BOO_1 باهم برابرند. زیرا $OA = OB$ و $O_3A = O_1B$ و $O\hat{A}O_3 = O\hat{B}O_1 = 90^\circ + \alpha$ است . از برابری این دومثلث نتیجه می شود $OO_3 = OO_1$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ اما $\hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 90^\circ$ است (قطرهای مربع بر هم عمودند). پس $\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = 90^\circ$ یعنی زاویهٔ $O_1\hat{O}O_3 = 90^\circ$ است . به همین ترتیب، ثابت می‌شود که هر چهار ضلع چهارضلعی $OO_1O_2O_3$ با هم برابر و زاویه‌هایش نیز قائمه‌اند، پس $OO_1O_2O_3$ مربع است .



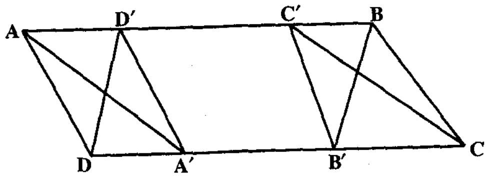
۵ . ۱ . ۱۴. ثابت کنید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است

۶۵۰. از تساوی مثلثها، نتیجه می‌شود که $B'C' = A'D' = A'B' = C'D'$ است .
پس $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است .

۶۵۲. با توجه به شرط مسأله داریم :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{XK} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BP}$$

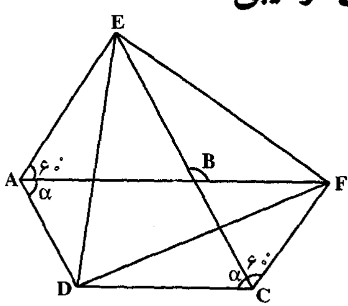
۶۵۳. شکل حاصل ، یا تنها دوضلع موازی دارد و یا چهار ضلع آن دو به دو موازی‌اند.



۵ . ۱ . ۱۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۵۴. مساحت این متوازی الاضلاع برابر $۸ \times ۲\sqrt{۳} \times \sin ۶۰ = ۲۴$ است . پس ضلع مربع معادل آن برابر $\sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$ است .

۵ . ۱ . ۱۶. مسأله های ترکیبی



۶۵۵. ۱. اگر $D\hat{A}B = \alpha$ فرض شود،
داریم: $E\hat{A}D = ۶۰^\circ + \alpha$ و $D\hat{C}F = ۶۰^\circ + \alpha$ ،
پس $E\hat{A}D = D\hat{C}F$ است .

۲. دو مثلث AED و FBE به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین باهم همنهشتند ؛ زیرا :

$$E\hat{B}F = ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۱۸۰^\circ - \alpha) = ۶۰^\circ + \alpha \ ,$$

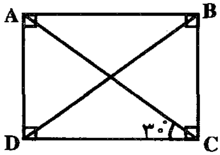
$$D\hat{A}E = ۶۰^\circ + \alpha, \ AD = FB \ , \ EA = EB$$

۳. مثلث DCF نیز بامثلث AED به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند، پس $DE = DF$ است. درنتیجه $DE = FD = FE$ ، یعنی مثلث FDE متساوی‌الاضلاع است.

۲.۵ . مستطیل

۵ . ۲ . ۲. زاویه

۵ . ۲ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه



۶۵۶. در مستطیل ABCD، اگر قطر AC دو برابر ضلع AD باشد، $A\hat{C}D = ۳۰^\circ$ و از آن جا، زاویهٔ بین دو قطر مستطیل برابر °۱۲۰ است .

۶۵۷. ۹۰ درجه.

۵ . ۲ . ۲ . ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۵۸. نقطهٔ برخورد خطهای راست QN و CD را R ، و مرکز مستطیل ABCD را O می‌نامیم . از OM = ON نتیجه می شود : PC = CR و، بنابراین، مثلث PNR متساوی الساقین است (NC ، هم ارتفاع و هم میانهٔ این مثلث است). حکم مسأله ،از برابریهای زیرنتیجه می شود :

$$M\hat{N}P = N\hat{P}R \quad \text{و} \quad Q\hat{N}M = Q\hat{R}P$$

۵ . ۲ . ۳. ضلع

۵ . ۲ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۶۵۹. اگرضلع کوچکتر مستطیل را a فرض کنیم ، ضلع بزرگتر ۳a است و از آن جا :

$$۳a.a = ۸/۶۷ \Rightarrow a^۲ = ۲/۸۹ \Rightarrow a = ۱/۷ \quad \text{و} \quad ۳a = ۵/۱$$

در مورد مستطیل دیگر، طول وعرض مستطیل بترتیب $۶۰\sqrt{۲}cm$ و $۱۲\sqrt{۲}cm$ است .

۵ . ۲ . ۳ . ۲. افزایش یا کاهش ضلع

۶۶۰. ضلعهای مستطیل مورد نظر را a′ و b′ اختیار می کنیم ، در این صورت داریم :

$$a' = a - k \quad \text{و} \quad b' = b + x \quad \text{و} \quad a'b' = ۲ab \Rightarrow (a-k)(b+x) = ۲ab$$

$$\Rightarrow x = \frac{b(a+k)}{a-k}$$

۶۶۱. گزینه (هـ) درست است . زیرا : $bh=\left(\frac{11}{10}b\right)(xh)\Rightarrow x=\frac{10}{11}$

و h به اندازه $\frac{1}{11}$ یا $9\frac{1}{11}$ ٪ کاهش می‌یابد ؛ یا :

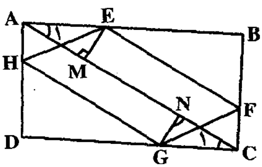
$$bh=\left(b+\frac{1}{10}b\right)\left(h-\frac{r}{100}b\right)=bh-\frac{r}{100}bh-\frac{r}{1000}bh$$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}-\frac{r}{100}-\frac{r}{1000}=0\Rightarrow r=-9\frac{1}{11}$$

۴.۲.۵. قطر

۶۶۲. قطرهای مستطیل را رسم کنید و از همنهشتی مثلثهای قائم‌الزاویه استفاده نمایید.

۵.۲.۵. پاره خط



۶۶۳. از E و G بترتیب عمودهای EM و GN را بر AC فرود آورید. دو مثلث قائم الزاویهٔ AEM و CGN همنهشتند $(EM=GN,\hat{A}_1=\hat{C}_1,\hat{M}=\hat{N}=90^\circ)$. پس AE =CG . به روش مشابه AH = CF و در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AEH و CFG همنهشتند . پس FG = EH و FG||EH (دو زاویهٔ همنهشت AEH و CGF یک ضلع موازی دارند. پس ضلع دیگرشان باهم موازی است).

۶.۲.۵. محیط

۶۶۴. اگرضلع کوچکتر را a فرض کنیم ، ضلع بزرگتر a + ۲ ، و از آن جا خواهیم داشت :

$a(a+2)=63\Rightarrow a^2+2a-63=0\Rightarrow a=-9<0$ و $a=7$

$a+2=9$ و محیط = ۳۲

۷.۲.۵. مساحت

۱.۷.۲.۵. اندازه مساحت

۶۶۵. اگر ارتفاع مستطیل را a فرض کنیم،قاعده آن ۲a است و داریم :

$2(a+2a)=a(2a)\Rightarrow 6a=2a^2\Rightarrow a=3\Rightarrow 2a=6\Rightarrow$ مستطیل S =۱۸

۶۶۶. گزینه (الف) درست است .

۶۶۷. گزینه (هـ)درست است. طول وعرض مستطیل را بترتیب با l و w نشان می‌دهیم ، بنابراین مساحت آن ، lw، در معادله‌های :

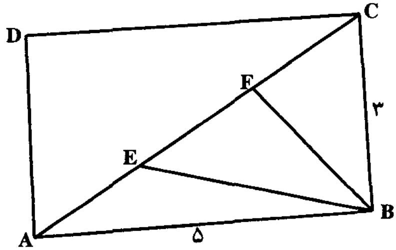
$$lw=\left(l-\frac{۵}{۲}\right)\left(w+\frac{۴}{۳}\right) \quad و \quad lw=\left(l+\frac{۵}{۲}\right)\left(w-\frac{۲}{۳}\right)$$

صادق است . پس از خلاصه کردن هر معادله ، به دستگاه معادله‌های خطی

$$\frac{۴}{۳}l-\frac{۵}{۲}w=\frac{۲۰}{۶} \quad و \quad -\frac{۲}{۳}l+\frac{۵}{۲}w=\frac{۱۰}{۶}$$

می‌رسیم که تنها جواب آن ۱۵/۲ = l و ۸/۳ = w است. بنابراین lw = ۲۰ .

۲.۷.۲.۵. مساحت شکلهای ایجاد شده



۶۶۸.(ج) . مثلثهای AEB، BEF و FCB مساحتهای برابر دارند، زیرا در ارتفاع رأس B مشترک،و دارای قاعده‌های برابرند، در نتیجه مساحت هرکدام یک سوم مساحت مثلث ABC، یعنی $\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۳)=\frac{۵}{۲}$ سانتیمترمربع است .

۶۶۹. $S_{CDD'}=S_{CBB'}=\frac{۱}{۳}S_{ABCD}$.

۶۷۰. (د) . مساحت مستطیل DEFG یک چهارم مساحت مستطیل ABCD و در نتیجه برابر با ۱۸ سانتیمتر مربع است .

۶۷۱. هر یک از مثلثهای ساخته شده AFE ، BFM ، CMN و NDE معادل مستطیل ABCD می‌باشند.

۳.۷.۲.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۶۷۲. a و b را طول ضلعهای هریک از مستطیلها می‌گیریم . اگر محیطهای دو مستطیل در هشت نقطه یکدیگر را قطع کرده باشند، آن وقت روی هر ضلع هر مستطیل ، دو نقطهٔ برخورد با دوضلع مجاورمستطیل دیگر وجود دارد. اگر روی ضلعی ، کمتر از دو نقطهٔ برخورد وجود داشته باشد، آن وقت روی هم ، کمتر از هشت نقطهٔ برخورد به دست

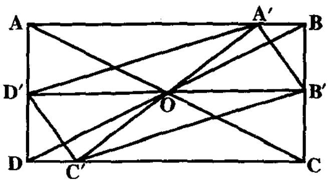
می‌آید . بنابراین ، ضلع یکی از مستطیلها، نمی‌تواند دو ضلع موازی را در دیگری قطع کند. A و C را نقطه‌های برخورد ضلعهای به طول a ، B و D را نقطه‌های برخورد ضلعهای به طول b می‌گیریم . به سادگی ثابت می‌شود که پاره‌خطهای راست AC وBD ، نیمسازهای بین ضلعهایی هستند که ، به ترتیب ، از A و C، و، B وD گذشته‌اند. بنابراین $AC \perp BD$. مساحت S ، از چهارضلعی ABCD ، برابر است با $AC \cdot BD$ وچون $AC \geq b$ و $BD \geq a$ ، بنابراین $S \geq \frac{1}{2}ab$.

۸.۲.۵. همنهشتی مستطیلها

۶۷۳. از تساوی مثلثهای قائم‌الزاویه استفاده کنید.

۹.۲.۵. نقطه‌های ویژه (مرکز تقارن مستطیل)

۶۷۴. اگر O' محل برخورد قطرهای مستطیل $A'B'C'D'$ که محاط در مستطیل ABCD است، باشد، O' وسط قطرهای $A'C'$ و $B'D'$ است ، امّا این نقطه محل برخورد دو خط است که وسط ضلعهای رو به روی مستطیل ABCD را به هم وصل می‌کنند. این نقطه مرکز تقارن مستطیل ABCD است .پس O' و O بر هم منطبقند.
نکته . مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که دو سرشان روی دو ضلع موازی مستطیل است خطی است که وسط دو ضلع دیگر را به هم وصل می‌کند.



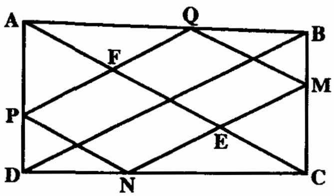
۱۰.۲.۵. نقطه های همخط

۶۷۵. $F\hat{C}D + B\hat{C}E = 90^\circ$ است .

۶۷۶. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE و DCF متساوی‌الساقین هستند.

۱۱.۲.۵ . شکلهای ایجاد شده

۶۷۷. گزینهٔ (د) درست است . زیرا :قطرهای چهارضلعیی که با این نقطه ها درست می‌شود، در امتداد دو خط عمود برهم قرار دارند، که وسطهای ضلعهای مقابل مستطیل را به هم وصل می کنند. این قطرها طولهای متفاوت دارند و عمود منصف یکدیگرند. بنابراین شکل یک لوزی است . یا :از راه تساوی مثلثها می‌توان نشان داد که ضلعهای چهارضلعی برابرند. همچنین می‌توان ثابت کرد که هیچ یک از زاویه های داخلی قائمه نیستند.



۶۷۸ . AA' و CC' را عمود برقطر BD رسم ، وثابت می کنیم که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ APQ و CMN همنهشتند . یعنی $MN = PQ$ وچون $MN \| PQ$ است ، پس چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است . حال قطرAC را رسم کرده نقطه های برخورد آن با MN و PQ را به ترتیب E و F می‌نامیم . با توجه به برابریهای $EM = EC$، $MQ = EF$ و $FP = FA$، داریم :

$$EM + MQ + FQ = EC + EF + FA = AC$$

$$\Rightarrow \text{محیط متوازی الاضلاع} = ۲AC$$

۱۲.۲.۵ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۷۹ . اگر ضلع مربع را a بنامیم، داریم :

$$a^۲ = ۳ \times ۱۲ = ۳۶ \Rightarrow a = ۶$$

۶۸۰ . $\text{مستطیل} \quad S = xy = x(p-x) \Rightarrow S_{max} : x = p - x \Rightarrow x = \frac{p}{۲}$

$$\Rightarrow x = y = \frac{p}{۲} \Rightarrow \text{مستطیل باید مربع باشد}$$

۶۸۱ . فرض می کنیم ، بخش باقیمانده صفحه ، شامل k قطعه باشد. چهار رأس هر یک از این قطعه ها را (که رأس زاویه هایی برابر ۹۰ درجه یا ۲۷۰ درجه اند) علامت می گذاریم. هریک از این ۴k نقطه‌ای که علامت گذاشته‌ایم ، رأس یکی از n مستطیلی است که جدا کرده‌ایم و یا یکی از رأسهای مربع اصلی ؛ در ضمن اگر یک نقطه دوبار علامت گذاری شده باشد، به معنای آن است که در این نقطه دو مستطیل به هم وصل شده‌اند . به این ترتیب :

$$۴k \le ۴n + ۴ \Rightarrow k \le n + ۱$$

۶۸۲ . آغازکنندهٔ بازی برنده می‌شود.

۶۸۳ . ۲۶۰ و ۱۶۹ بر ۱۳ بخش پذیر هستند. از تقسیم آنها بر ۱۳ یک مستطیل ۱۳×۲۰ خانه‌ای خواهیم داشت . پس می توان گفت ، که سر راه این خط مستقیم ۱۳ تا از این مستطیلها قراردارند، که از گوشه‌ها به هم وصل شده‌اند. پس کافی است ، که در مورد یکی از این مستطیلها مطالعه کنیم و ببینیم ، خط مستقیمی که دو گوشهٔ رو به رو از آن را به هم وصل می کند، از چند خانهٔ مربعی عبور می کند. اگر دقت کنیم ، متوجه خواهیم شد که این خط مورب وقتی از یک سطر یا ستون می گذرد به یک خانهٔ جدید می‌رسد ودر این جا خط مزبور از ۱۲ ستون و۱۹ سطر عبور می کند که مجموع آنها ۳۱ می‌شود. اما خط مزبور قبل از عبور از این خانه ها، از یک خانه(مبدأ) نیز عبور کرده است ! پس در این مستطیل کوچک خط مورد نظر از ۳۲ خانه عبور می کند. وچون ۱۳ تا از این مستطیلها سر راه خط اریب مزبور قراردارند، پس شمارهٔ خانه های مربعی مطلوب ۱۳×۳۲ ، یعنی ۴۱۶تا خواهد بود.

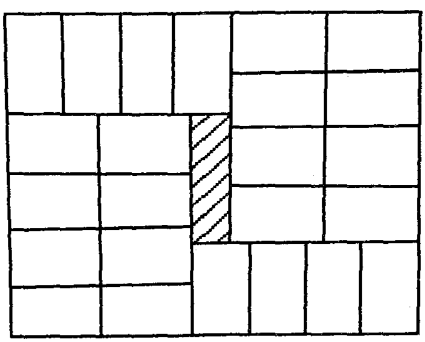
در حالت کلی این معما را می‌توان چنین حل کرد : اگر در یک مستطیل شمارهٔ خانه‌ها در قاعده و ارتفاع آن به ترتیب m و n باشد و بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها نیز d باشد می‌توان نوشت :

$m = dm'$ و $n = dn'$

و شمارهٔ خانه‌های مورد نظر از رابطهٔ کلی زیر به‌دست می‌آید :

$d(m' + n' - 1)$

۶۸۵ . شکل نحوهٔ انجام عمل را نشان می‌دهد. و تنها با این روش می‌توان ۲۴ مستطیل ۳×۵ برید و۱۴ سانتیمتر از مقوا هم باقی می‌ماند.

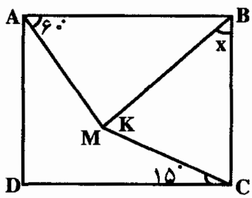


۳.۵. مربع

۲.۳.۵. زاویه

۱.۲.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۶۸۶ . مثلث متساوی الاضلاع ABK را روی AB و دردرون مربع رسم کنید. در این صورت، $K\hat{A}B = ۶۰^\circ$ و $K\hat{C}D = ۱۵^\circ$ ، یعنی ، K بر M منطبق است . جواب : ۳۰° .

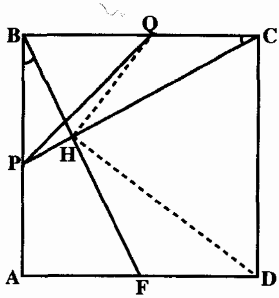


۶۸۷ .در شکل (الف) ، $x = ۱۵۰^\circ$ و $y = ۷۵^\circ$ است .

در شکل (ب) ، $x = ۱۵^\circ$ و $y = ۱۰۵^\circ$ است .

۶۸۸ . F را نقطهٔ برخورد خط راست BH با خط راست AD می‌گیریم :از همنهشتی مثلثهای ABF و BPC (در یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ویک زاویهٔ حاده) نتیجه می شود :

$AF = BP = BQ$ و $FD = CQ$



بنابراین ، چهارضلعی QCDF، یک مستطیل است .

دایرهٔ محیط براین مستطیل ، از نقطه H می گذرد، زیرا FC قطر این دایره است و، در ضمن $F\hat{H}C = ۹۰^\circ$. چون DQ قطر مستطیل است ، بنابراین $D\hat{H}Q = ۹۰^\circ$.

۳.۳.۵. ضلع

۱.۳.۳.۵. اندازهٔ ضلع

۶۸۹. ۷ سانتی متر.

۶۹۰. از تساوی مثلثهای قائم الزاویهٔ متساوی الساقین $AA'D'$ ، $A'BB'$ ، $B'CC'$ و $C'DD'$ نتیجه می‌شود که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است . همچنین چهارضلعی $A''B''C''D''$ مربع می‌باشد واندازهٔ هر ضلع آن برابر $\frac{a}{۲}$ است .

۴.۳.۵. قطر

۱.۴.۳.۵. اندازهٔ قطر

۶۹۱. $۸\sqrt{۲}$ سانتی متر.

۵.۳.۵. پاره خط

۱.۵.۳.۵. اندازهٔ پاره خط

۶۹۲. مختصات نقطهٔ داده شده را (m,n) می‌گیریم . از چهار رأس مربع ، نقطه‌ای را با مختصات (x,y) ، طوری انتخاب می کنیم که عددهای $m-x$ و $n-y$ فردباشد. در این صورت عدد $(m-x)^۲+(n-y)^۲$ نمی تواند مجذور یک عدد درست باشد، زیرا به صورت $۴k+۲$ است .

۶۹۳. ۱۹۸۹×۱۹۸۹ و به طور کلی در یک مربع به ضلع n، (n عدد صحیح فرد) پاسخ $n\times n$ واحد است .

۶۹۴. فاصلهٔ بین p نقطه‌ی واقع بر ضلع مربع و Q نقطه‌ی واقع بر مسیر چند ضلعی گونهٔ L را با $d(PQ)$ نمایش می‌دهیم، و طول مسیر چند ضلعی گونهٔ از نقطهٔ A تا نقطه B را با $S(AB)$ نشان می‌دهیم . و هنگامی که :

$$S(A_\circ A)<S(A_\circ B)$$

باشد می‌نویسیم : $A<B$ ، فرض می کنیم : $S_۱$ ، $S_۲$ ، $S_۳$ و $S_۴$ رأسهای مربع مورد بحث باشند. بر L، نقطه‌های $S'_۱$ ، $S'_۲$ ، $S'_۳$ و $S'_۴$ را چنان در نظر می گیریم که : $d(S_iS'_i)\le\frac{۱}{۲}$ باشد. می توانیم این نقطه‌ها را چنان نام‌گذاری کنیم که، $S'_۱<S'_۴<S'_۲$ باشد ؛ تبصرهٔ صفحهٔبعد را ملاحظه کنید.

اکنون فرض می کنیم $L_۱$ مجموعهٔ تمام X های واقع برL چنان باشد که $X\le S'_۴$ باشد، و

فرض می کنیم L_2 مجموعهٔ تمام Yهای واقع بر L چنان باشد که $Y \geq S'_4$. ضلع S_1S_2 را در نظر می گیریم . زیر مجموعهٔ L'_1 از S_1S_2 که فاصلهٔ نقاطش از L_1 کوچکتر از، یا مساوی با $\frac{1}{2}$ باشد وجود دارد و زیرمجموعهٔ L'_2 از S_1S_2 که فاصلهٔ نقاطش از L_2 کوچکتر از یا مساوی با $\frac{1}{2}$ باشد موجود است . (ازآن جا که L'_1 شامل S_1 و L'_2 شامل S_2 است، هیچ یک از دو مجموعه تهی نیست).

اجتماع L'_1 و L'_2 ضلع S_1S_2 است، و به علت شرط مربوط به فاصله‌ها ، اشتراک L'_1 و L'_2 تهی نیست . فرض می کنیم M نقطهٔ مشترک L'_1 و L'_2 باشد.

اکنون نقطهٔ Xی در L_1 و نقطهٔ Yی در L_2 چنان برمی گزینیم که : $d(MX) \leq \frac{1}{2}$ و $d(MY) \leq \frac{1}{2}$ باشد. در این صورت : $d(XY) \leq 1$ است . نیز : $X < S'_4 < Y$ و :

$$S(XY) = x(XS'_4) + s(S'_4Y) \geq 99 + 99 = 198/41$$

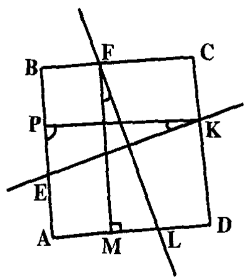
تبصره. می توانیم مسیر $L: A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ را ، به عنوان گسترش Q از فاصلهٔ : $0 \leq t \leq 1$ در L ، با $Q(0) = A_0$ ، $Q(1) = A_n$ و : $Q(0) \neq Q(1)$ در نظر بگیریم . چون با شروع از $Q(0)$ ، L ، را بپیماییم ، زمان اولیّه t_1 ی وجود خواهد داشت که طی آن L درون $\frac{1}{2}$ از رأسی از مربع خواهد بود. این رأس را S_1 ، و $a(t_1)$ را نقطهٔ S'_1 می‌نامیم . رأسی را که قطراً مقابل S_1 است ، با S_3 نمایش می‌دهیم . اکنون به پیمودن L ادامه می‌دهیم تا درون $\frac{1}{2}$ از یکی از رأسهای مجاور به S_1 قرار گیریم . این رأس مجاور را S_4 می نامیم، ونقطهٔ واقع بر L درون $\frac{1}{2}$ از S_4 را با : $S'_4 = Q(t_4)$ نمایش می‌دهیم . S_1 و S_4 نقطه های انتهایی ضلعی از مربعند، و مرز آن را در ترتیب $S_1S_4S_1S_2$ جهت یابی می کنند، و L باید سرانجام به S_2 نزدیک شود، زیرا مقادیر پارامتر t بزرگتر از t_4 است . نقطه‌ای واقع بر L درون $\frac{1}{2}$ از S_2 انتخاب می کنیم ، آن را : $S'_2 = Q(t_2)$ می‌نامیم ، و به این ترتیب به نامگذاری مطلوب می‌رسیم .

۶۹۵. فرض می کنیم چنین وتری وجود نداشته باشد. از هر رأس چند ضلعی ، خط راستی موازی باضلع مورد نظر مربع ، رسم می کنیم . این خطهای راست ، چند ضلعی را به مثلثها وذوزنقه‌هایی تقسیم می کنند که طول قاعدهٔ هیچ کدام از آنها ، از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی کند. از آن جا که مجموع طولهای ارتفاعها،در این مثلثها وذوزنقه‌ها از ۱ تجاوز نمی کند، بنابراین از مجموع نابرابریهای مربوط به مساحتها معلوم می‌شود که مساحت تمام چندضلعی نمی تواند از $\frac{1}{2}$ بیشتر باشد که با فرض مسأله متناقض است .

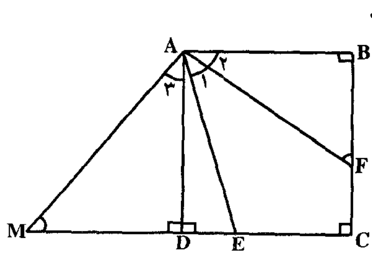
۵ . ۳ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

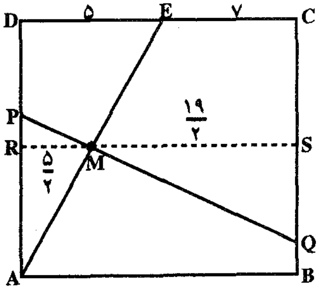
۵ . ۳ . ۵ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین پاره خطها (برابریها)

۶۹۶. ازدو نقطهٔ F و M بترتیب، FM را موازی CD و KP را موازی AD رسم می‌کنیم. آنگاه پاره‌خطهای مورد نظر EK و FL، ضلعهای دو مثلث قائم الزاویهٔ EKP وFLM بوده واز این رو اثبات برابری این دو مثلث کفایت می‌کند. چنین داریم: PK = FM (ارتفاعهای مربع مفروض) ؛ $L\hat{F}M = E\hat{K}P$ (دو زاویه‌ای که ضلعهای آنها دو به دو بر هم عمود هستند) از این رو مثلثهای EKP و FLM همنهشت (به حالت تساوی یک ضلع زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ حاده) خواهند بود. تساوی این دو مثلث قائم الزاویه ، موجب برابری وترهای آنها شده ودر نتیجه EK و FL با هم برابرخواهند شد.



۶۹۷. از نقطهٔ A خطی عمود بر نیمساز AF اخراج می‌کنیم تا امتداد CD را در نقطهٔ M قطع کند، چون ضلعهای دو زاویهٔ A_2 و A_3 بر هم عمودند پس با یکدیگر برابرند($\hat{A}_2 = \hat{A}_3$). همچنین $\hat{D} = \hat{B} = 90^\circ$ و AD = AB است . پس دو مثلث AMD و ABF به حالت برابری وتر و یک زاویهٔ حاده باهم برابرند. در نتیجه MD = BF و $\hat{M} = \hat{F}$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3$ است . پس باید ثابت کنیم MD + DE = AE یا ME = AE می‌باشد. چون زاویهٔ MAE متمم زاویه EAF است و زاویهٔ AME متمم زاویهٔ A_3 است ، که $\hat{A}_3 = E\hat{A}F$ می‌باشد. پس $M\hat{A}E = F\hat{A}D$ و در نتیجه ME = AE است .





۶۹۸. (ج) . خطی از M موازی ضلع AB از مربع رسم می‌کنیم که ضلعهای AD و BC را به‌ترتیب در نقطه‌های R و S قطع می‌کند ؛ شکل را ملاحظه کنید. چون M وسط AE است، پس بر حسب سانتی‌متر، $RM = DE / ۲ = ۵ / ۲$ و بنابراین: $MS = ۱۲ - ۵/۲ = ۱۹/۲$. از آن جا که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PMR و QMS متشابه‌اند :

$$PM:MQ = RM:MS = ۵:۱۹$$

زیرا ضلعهای متناظر مثلثهای متشابه ، متناسبند.

۲.۲.۵.۳.۵ .رابطهٔ بین پاره خطها (نابرابریها)

۶۹۹. اجتماع همهٔ دایره‌های به شعاع واحد را، که مرکزهای آن‌ها متعلق به مجموعهٔ M واقع بر صفحه باشند، با $U(M)$ نشان می‌دهیم . با استقرای روی $n \in N$ ، ثابت می‌کنیم ، برای هر خط شکستهٔ $A_۰A_۱ \dots A_n$ ، این نابرابری برقرار است :

$$S_u(A_۰ \dots A_n) \le ۲\sum_{i=۱}^{n} A_{i-۱}A_i + \pi$$

به ازای $n = ۱$ ، مجموعهٔ $U(A_۰A_۱)$ ، به دو نیمدایره به شعاع واحد و یک مستطیل به بعدهای $A_۰A_۱$ و ۲ تقسیم می‌شود، بنابراین :

$$S_U(A_۰A_۱) = ۲A_۰A_۱ + \pi$$

یعنی حکم ، برای $n = ۱$ درست است .

اکنون ، فرض می‌کنیم ، حکم ، برای $(n-۱) \in N$ درست باشد، قرار می‌گذاریم :

$$X = U(A_۰ \dots A_{n-۱}),\ Y = U(A_{n-۱}A_n) \text{ و } Z = X \cap Y$$

در این صورت $S_Z \ge \pi$ (زیرا $Z \supset U(A_{n-۱})$) و، با در نظر گرفتن فرض استقرا، داریم :

$$S_U(A_۰ \dots A_{n-۱}A_n) = S_{X \cup X} = S_{X \setminus Z} + S_{Y \setminus Z} + S_Z$$
$$= (S_{X \setminus Z} + S_Z) + (S_{Y \setminus Z} + S_Z) - S_Z = S_X + S_Y - S_Z$$
$$\le \left(۲\sum_{i=۱}^{n-۱} A_{i-۱}A_{i+\pi} \right) + (۲A_{n-۱}A_n + \pi) - \pi = ۲\sum_{i=۱}^{n} A_{i-۱}A_i + \pi$$

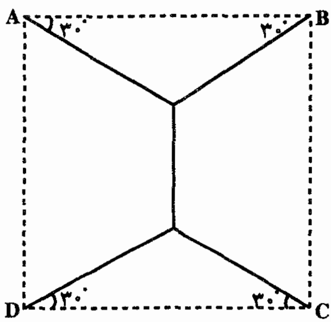
که اثبات نابرابری را به پایان می رساند.

برای خط شکسته‌ای که در صورت مسأله داده شده است ، مجموعهٔ $U(A_\circ \ldots A_n)$ شامل تمامی مربع به ضلع ۵۰ است ، بنابراین ، طول آن از

$$\frac{۱}{۲} S_U(A_\circ \ldots A_n) - \frac{\pi}{۲} > \frac{۱}{۲}(۵۰^۲ - ۴) = ۱۲۴۸$$

کمتر نیست ؛ و این، همان چیزی است که باید ثابت می کردیم .

۷۰۰. اگر جاده‌ها مطابق شکل زیر رسم شوند (A ، B ، C و D معرف دهکده‌ها هستند و جاده‌ها با خطهای پیوسته نشان داده شده‌اند)، آن وقت مجموع طول آنها ، برابر با $۲ + ۲\sqrt{۳} < ۵/۵$ است . می‌توان نشان داد که ترتیب مشخص شدهٔ جاده‌ها، مینیمم مجموع طول آنها را به دست می‌دهد.



۵.۳.۶. محیط

۵.۳.۶.۱. اندازهٔ محیط

۷۰۱. اگر ضلع مربع را a بگیریم ، محیطش ۴a ومساحتش $a^۲$ خواهد شد. واضح است بین جمیع مثلثهای به مساحت ثابت مثلث متساوی‌الاضلاع محیطش کوچکتر است . پس مثلث را متساوی الاضلاع فرض می کنیم . اگر ضلع این مثلث را b بگیریم ، محیطش ۳b و مساحتش $\frac{b^۲\sqrt{۳}}{۴}$ خواهد شد. پس طبق فرض خواهیم داشت $a^۲ = \frac{b^۲\sqrt{۳}}{۴}$.اکنون باید ثابت کنیم $۳b > ۴a$ می‌باشد. می‌دانیم :

$$۳b - ۴a = ۳b - ۲b\sqrt[۴]{۳} = b\sqrt[۴]{۳}\left(\sqrt[۴]{۲۷} - \sqrt[۴]{۱۶}\right) \geq ۰$$

پس $۳b > ۴a$ می‌باشد.

۷.۳.۵. مساحت

۱.۷.۳.۵. اندازهٔ مساحت

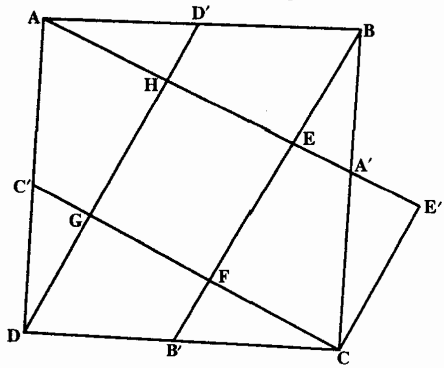
۷۰۲. $۳+۲\sqrt{۲}$ سانتی‌مترمربع.

۷۰۳. ۲۵ سانتی‌متر مربع.

۲.۷.۳.۵. مساحت شکلهای ایجادشده

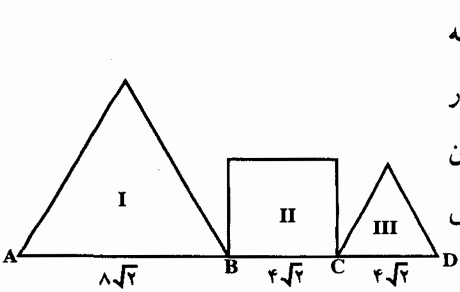
۷۰۴. مساحت مربع وسطی

چهارذوزنقه با هم ، و چهار مثلث با یکدیگر همنهشتند، و اگر یک ذوزنقه و یک مثلث را با هم جمع کنیم ، یک مربع حاصل می‌شود (شکل را ببینید). در این صورت مربع بزرگ به ۵ مربع کوچک ومساوی ، تقسیم شده است ، ومساحت هر مربع کوچک مساوی با یک پنجم مساحت مربع بزرگ است . پس مساحت مطلوب ۲۰ متر مربع خواهد بود.



۳.۷.۳.۵. رابطه‌ای در مساحتها

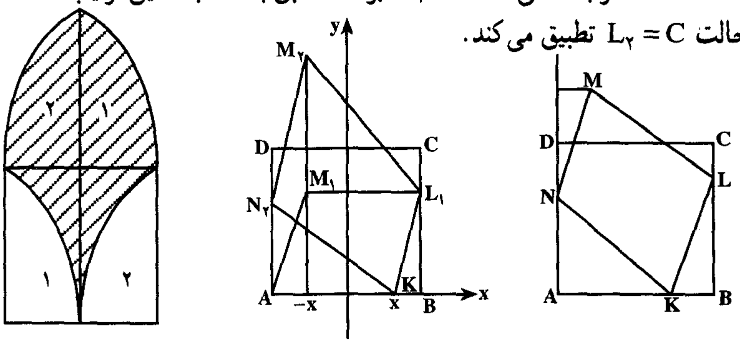
۷۰۵. (د). در مثلثهای II و I با استفاده از رابطه $k=\left(\sqrt{۳}/۴\right)S^{۲}$ ، که مساحت مثلث متساوی الاضلاع را برحسب ضلع آن به دست می‌دهد، طولهای $AB=۸\sqrt{۲}$ و $CD=۴\sqrt{۲}$ را محاسبه می‌کنیم . طول ضلع مربع II برابر $BC=۴\sqrt{۲}$ است . بنابراین طول $AD=۱۶\sqrt{۲}$ و ۱۲/۵٪ یا ۱/۸ این طول ، $۲\sqrt{۲}$ است و چنانچه این مقدار را ازBC کم کنیم ، طول BC به $۲\sqrt{۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ تعداد قبلی کاهش می‌یابد. در نتیجه مساحت مربع به $\frac{۱}{۴}$ مقدار قبلی آن کاهش پیدا می کند و درصد کاهش مساحت آن ۷۵٪ است .



۷۰۶. گزینهٔ (الف) درست است .

۷۰۷. $S = 1$.

K، L و M را رأسهایی از لوزی می گیریم که بترتیب بر ضلعهای AB، BC و AD از مربع واقعند (شکل a). طول پاره خط راست KB برابر است با فاصلهٔ از نقطهٔ M تا خط راست AD. بنابراین اگر نقطهٔ K را ثابت نگه داریم، آن وقت موضع نقطهٔ M، پاره‌خط راست M_1M_2 را که با ضلع AD موازی است، پر می کند. درضمن نقطهٔ M_1، پایین‌ترین موضع نقطهٔ M، متناظر با حالتی است که N_1 بر A منطبق باشد ؛ به همین ترتیب، نقطهٔ M_2، با حالت $L_2 = C$ تطبیق می کند.



(c)　　(b)　　(a)

برای این که موضع نقطه‌های M_1 وM_2 را معین کنیم (در رابطه با موضع نقطهٔ K)، دستگاه محورهای مختصات را به آن گونه که در شکل (b) دیده می‌شود، در نظر می گیریم.
بسادگی می توان محاسبه کرد که اگر طول نقطهٔ K برابر $x > 0$ باشد، آن وقت خواهیم داشت :

$$M_1 = (-x, \sqrt{2x}) \ , \ M_2 = (-x, \sqrt{1-2x} + 1)$$

با استفاده از تقارن مجموعهٔ نقطه های M، نسبت به محور Oy، معلوم می‌شود که این مجموعه به‌صورت شکلی درمی‌آید که هاشور زده‌ایم، برای محاسبهٔ مساحت لزومی ندارد ازمحاسبهٔ انتگرالی استفاده کنیم ؛ در شکل (C)، دو شکلی که با عددهای ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند، برابرند.

۷۰۸. گزینهٔ (الف) درست است.

۷۰۹. اگر S_1 وS_2 را، بترتیب، مجموع مساحتهای بخشهای چپ در ردیفهای زوج و فرد و به همین ترتیب، S_3 و S_4 را مجموع مساحت بخشهای سمت راست بگیریم، داریم :

$$S_2 + S_4 = S_3 + S_1 = S_3 + S_4 = S_1 + S_2$$

۸.۳.۵. همنهشتی مربعها

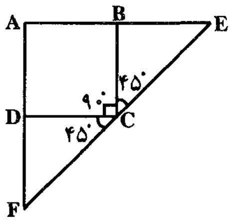
۷۱۰. اگر دو مربع قطر برابر داشته باشند، اندازهٔ ضلعهایشان نیز برابر است، پس همنهشتند.

۹.۳.۵. نقطه‌های ویژه

۷۱۱. مربع ویژگی متوازی‌الاضلاع و مستطیل را دارد.

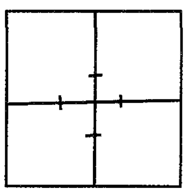
۱۰.۳.۵. نقطه‌های همخط

۷۱۲. مثلثهای BEC و DCF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، پس اگر از E و F به C وصل کنیم $B\hat{C}E = D\hat{C}F = ۴۵^\circ$ است و $D\hat{C}B = ۹۰^\circ$ می‌باشد. درنتیجه $F\hat{C}E = ۱۸۰^\circ$ و نقطه‌های E، C و F همخطند.



۱۱.۳.۵. خطهای همرس

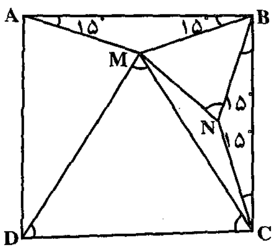
۷۱۳. هر خط راست، مربع را به دو ذوزنقه یا دو مستطیل با نسبت مساحتهای ۳ :۲ تقسیم می‌کند. پاره‌خط راستی هم که وسط دو ضلع روبه‌روی مربع را به هم وصل می‌کند (که در ضمن، از وسط ساقهای ذوزنقه‌ها هم می‌گذرد)، به وسیلهٔ ساق مایل ذوزنقه، به همین نسبت قطع می‌شود؛ و این، از آن جا ناشی می‌شود که، مساحت ذوزنقه برابر است با حاصلضرب ارتفاع در پاره‌خط راستی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند.
از این‌گونه نقطه‌ها، که پاره‌خط راست بین وسط دو ضلع روبه‌روی مربع را به نسبت ۳ :۲ تقسیم می‌کنند، روی هم چهارتا وجود دارد (شکل بالا) و بنابراین، از بین ۹ خط راست مفروض، دست کم سه تا، از یکی از این نقطه‌ها می‌گذرند.



۱۲.۳.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۷۱۴. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و AND با هم برابرند.

۱۳.۳.۵. شکلهای ایجاد شده



۷۱۵. راه اوّل. دو مثلث AMD و BMC با هم برابرند. زیرا $MA = MB$ و $AD = BC$ و $D\hat{A}M = M\hat{B}C = 75^\circ$ است. پس $MD = MC$ می‌باشد. حال باید ثابت کنیم که $MD = CD$ است. اگر $MD < CD$ باشد، در این صورت زاویهٔ CMD از هریک از دو زاویهٔ MCD و MDC و درنتیجه از 60° بزرگتر خواهد بود، و خواهیم داشت: $D\hat{M}A < 75^\circ$ و $AD < MD < CD$ خواهد بود، که این خلاف فرض است. پس $MD = CD$ و درنتیجه $MD = MC = CD$ است. یعنی مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم. مثلث BCN را در داخل مربع و مساوی مثلث AMB می‌سازیم و از N به M وصل می‌کنیم. به‌آسانی ثابت می‌شود که مثلث MNB متساوی‌الاضلاع است ($M\hat{B}N = 60^\circ$ و $MB = NB$). از آن جا نتیجه می‌شود که مثلث $MNC = NBC$.

پس $M\hat{C}N = 15^\circ$ و از آن‌جا $M\hat{C}D = 60^\circ$ خواهد بود. پس مثلث متساوی‌الساقین MCD که یک زاویهٔ رأس 60° دارد، متساوی‌الاضلاع است.

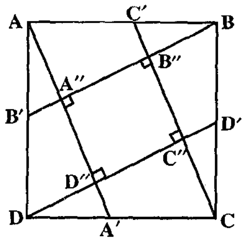
۷۱۷. الف. داریم: $QP = PS = PT$

ب. داریم: $KY = KL = KJ = KX$

۷۱۸. زاویه‌های چهارضلعی EFGH قائمه است. پس مستطیل است و با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین تشکیل شده محیط این مستطیل دو برابر قطر AC است.

۱۴.۳.۵. ثابت کنید چهارضلعی مربع است

۷۱۹. مثلثهای قائم‌الزاویه $AA'D'$ و $A'BB'$ و $B'CC'$ و $C'DD'$ به حالت برابری دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه همنهشتند.



۷۲۱. چهارضلعیهای $AA'CC'$ و $BB'DD'$ متوازی‌الاضلاعند. زیرا $AC' \| A'C$ و $AC' = A'C$ و $B'D \overset{\parallel}{=} BD'$ است. پس چهارضلعی $A''B''C''D''$ متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های آن قائمه‌اند. پس مستطیل است. از تساوی مثلثهای

قائم‌الزاویهٔ نظیر، و این مطلب که اگر خطی از وسط یک ضلع مثلث موازی یک ضلع رسم شود از وسط ضلع دیگر می‌گذرد و اندازه‌اش نصف ضلعی است که با آن موازی است.

ثابت می‌شود که $AA'' = A''D'' = ۲D''A'$ می‌باشد. پس $A''D'' = \frac{۲}{۵}AA'$ است.

۷۲۲. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHD، DCK، KEF و EMH با هم برابرند.

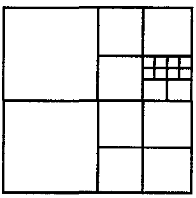
۷۲۳. چهار نقطهٔ مربوطه، رأسهای یک مربع می‌باشند.

۷۲۴. چهار نقطهٔ مربوطه، رأسهای یک مربع می‌باشند.

۱۵.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

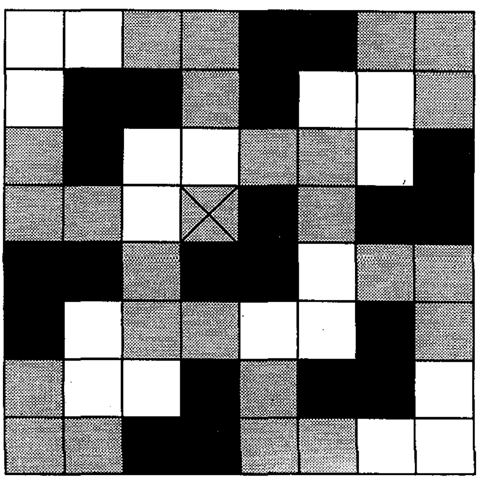
۷۲۵. اگر مربع سبز را در طول یکی از ضلعهای آن، انتقال موازی بدهیم، مجموع ضلعهای سبز هشت‌ضلعی تغییر نمی‌کند، و وقتی که مرکز مربعهای سبز و قرمز، بر هم منطبق باشند، مجموع ضلعهای سبز برابر مجموع ضلعهای قرمز است.

۷۲۶. اگر مربعهای داده شده را طوری کوچک کنیم که، ضلع هرکدام از آنها، برابر کوچکترین عدد نزدیک به خود، به صورت $\frac{۱}{۲^k}$ باشد $(k = ۱, ۲, \cdots)$ آن وقت این مربعها را می‌توان، بدون این که روی هم قرار گیرند، جا داد. چون مساحت هر مربع جدید، بیشتر از $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع اصلی است، بنابراین مجموع مساحتهای آنها از واحد بیشتر می‌شود، به‌نحوی که تمامی مربع واحد را می‌پوشانند.



۷۲۷. ترومینو (سه مربعیها)

تنها پاسخ صحیح عبارت است از :

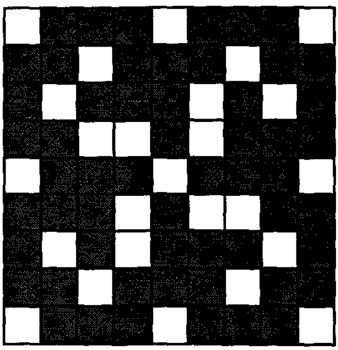


۷۲۸. K_1 را بزرگترین مربع از مربعهای مفروض، سپس K_2 را بزرگترین مربع از بین مربعهایی که مرکزشان در K_1 قرار ندارند، بعد K_3 را بزرگترین مربع از بین آنهایی که مرکزی در داخل مربعهای K_1 و K_2 ندارند و غیره، فرض می‌کنیم.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ C، مرکز یک مربع، در بیش از چهار مربع، ازمربعهای K_1 ، K_2 ، ...، واقع باشد، در این صورت، مرکزهای دو تا از آنها (K_i و K_j) در یکی از چهار بخش صفحه که به‌وسیلهٔ محورهای تقارن مربع به مرکز C به‌وجود آمده‌اند، قرار می‌گیرد. از بین K_i و K_j ، آن مربعی که مرکز آن، نسبت به این محورها، دورتر است (مثلاً نسبت به مجموعها، یا نسبت به بزرگترین فاصله‌ها) شامل مرکز دیگری هم می‌شود. ولی این، با قانون انتخاب مربعها متناقض است.

۷۲۹. دو پاسخ را در شکل می‌بینید. ولی پاسخهای دیگری هم هست. آنها را بیابید.

۷۳۰. پاسخی را که در این جا ملاحظه می‌کنید دارای ۵۶ خانه با تقارن خاص است. ولی به‌صحت آن زیاد نمی‌توان اطمینان داشت. پس شما هم در این مورد فکر کنید.



۷۳۱. تعداد مربعها ۲۰۴ است. زیرا داریم:

$$n = ۸^۲ + ۷^۲ + ۶^۲ + \cdots + ۱^۲ = ۲۰۴$$

که در آن $۸^۲$ ، تعداد مربعهای یک خانه‌ای، $۷^۲$ تعداد مربعهای ۴ خانه‌ای (به ضلع ۲) و $۶^۲$ تعداد مربعهای ۹ خانه‌ای (به ضلع ۳) و ... است.

۷۳۲. ۶۲۵۰۰۵ مربع، زیرا در جدول $n\times n$ خانه‌ای تعداد مربعها

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

است که در این جا $n = ۸۵$ و درنتیجه تعداد مربعها ۶۲۵۰۰۵ است.

۷۳۳. تعداد مربعهای افقی و عمودی با فرض $n = ۲p$ برابر است با:

$$a = \frac{۲p(۲p+۱)(۴p+۱)}{۶}$$

و تعداد مربعهای اریب با ضلع فرد برابر است با :

$$b = \frac{2p(2p+1)(4p-1)}{6}$$

و تعداد مربعهای اریب با ضلع زوج برابر است با :

$$c = \frac{p(2p-1)(4p-1)}{6}$$

پس تعداد کل مربعها $a+b+c = 2p^2(4p+1)$ است که چون $n=10$ و یا $p=5$ است، پس تعداد کل مربعهای مورد نظر ۱۰۵۰ است. چه قدر کم!

۷۳۴. گزینهٔ (د) درست است. عکس گزاره عبارت است از : اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه مربع است. عکس عکس نقیض عبارت است از : اگر یک چهارضلعی مربع نباشد، آن‌گاه مستطیل نیست. هر دو گزاره دروغند ؛

یا :

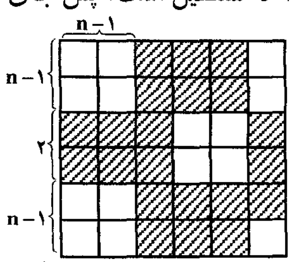
برای مجسم کردن مجموعه‌های مذکور از نمودار ون استفاده کنید.

۷۳۵. جواب $n(2n-1)$ است $(n>1)$.

اثبات. نشان می‌دهیم حداقل $2n+1$ مستطیل در صفحه قرار داده شده است. اگر در هر ردیف یک مستطیل افقی باشد، آن‌گاه با یک مستطیل قسمتی از ستون اوّل را اشغال کرده است که در این صورت یک مستطیل $1\times n$ جلوی آن جا هست و یا یک مستطیل عمودی در ستون اوّل جای می‌گیرد. پس حداقل به $2n+1$ مستطیل نیاز است. اگر ردیفی باشد که مستطیل افقی نداشته باشد، آن ردیف باید با حداقل ۲ مستطیل عمودی طوری اشغال شود که در آن مستطیل افقی نتوان قرار داد. حداقل $n-1$ ستون $1\times n$ بین این دو مستطیل و ضلعهای صفحهٔ شطرنجی وجود دارند که هریک با یک مستطیل عمودی اشغال شوند (یا قسمتی از آنها اشغال شود) پس به دست کم $n+1$ مستطیل عمودی نیاز است. به همین ترتیب به دست کم $n+1$ مستطیل افقی هم نیاز است. بنابراین در این حالت نیز به حداقل $2n+2$ مستطیل نیاز است. پس درهر صورت دست کم به $2n+1$ مستطیل نیاز است، که حداکثر جای خالی برابر

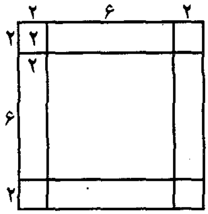
$$\text{حداکثر جای خالی} = (2n)^2 - n(2n+1) = n(2n-1)$$

تعداد مستطیلها : $2n$ تا افقی، یک عمودی، $2n+1$ تا مستطیل است. پس جای خالی ماکزیمم است.

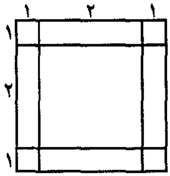


برای $n=1$ بدیهی است که ماکزیمم صفر است.

برای $n=2$ مستقیماً جواب قابل بررسی است.



۷۳۶. چهار خط موازی ضلعهای مربع داده شده هریک به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از هر ضلع در درون مربع رسم می‌کنیم. درون مربع حاصل از این چهار خط جواب مسأله است.



۷۳۷. چهار خط موازی ضلعهای مربع داده شده و به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از هر ضلع رسم می‌کنیم. مربعی به ضلع ۲ سانتی‌متر به‌وجود می‌آید. مکان هندسی مورد نظر محیط این مربع است.

۴.۵. لوزی

۱.۴.۵. تعریف و قضیه

۷۳۹. **قضیه های عکس:** ۱. متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲. متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش نیمسازهای زاویه‌هایش باشند، لوزی است.

۲.۴.۵. زاویه

۱.۲.۴.۵. اندازهٔ زاویه

۷۴۰. زاویه‌های حاده 60° و زاویه‌های منفرجه 120° می‌باشند.

۳.۴.۵. ضلع

۱.۳.۴.۵. اندازهٔ ضلع

۷۴۲. اگر d و d' قطرهای لوزی باشند، ضلع لوزی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اندازهٔ دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه‌اش $\frac{d}{2}$ و $\frac{d'}{2}$ است. امّا داریم:

$$\begin{cases} dd' = 2s \\ d + d' = m \end{cases} \Rightarrow x^2 - mx + 2s = 0 \Rightarrow x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8s}}{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8s}}{2} \text{ و } d' = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8s}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ضلع لوزی} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4s}$$

۵.۴.۴. قطر

۵.۴.۴.۱. اندازهٔ قطر

۷۴۳. اگر ضلع لوزی را a، ارتفاع آن‌را h، و دو قطرش را d و d' بنامیم، داریم:

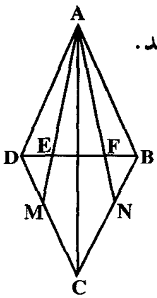
اندازهٔ ضلع لوزی $\frac{۱}{۲}dd' = a.h \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸\sqrt{۳} = a \times ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۸cm$

۷۴۴. قطر کوچکتر را d فرض می‌کنیم، قطر بزرگتر ۲d و از آن‌جا خواهیم داشت:

$\frac{۱}{۲}d(۲d) = ۳۶ \Rightarrow d = ۶cm \Rightarrow ۲d = d' = ۱۲cm$

۵.۴.۵. پاره‌خط

۵.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



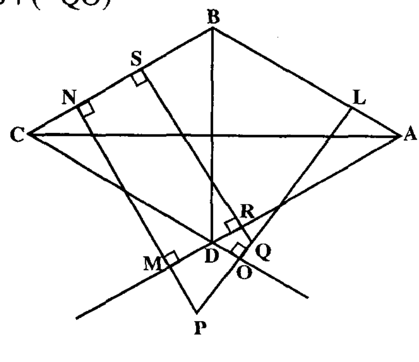
۷۴۵. قطر AC را رسم کنید و از خاصیت میانه‌ها در مثلث استفاده کنید.

۵.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷۴۶. باید ثابت کنیم، $PL + PM = PO + PN$ و یا

$PO + OL + PM = PO + PM + MN$ و یا $OL = MN$، که این رابطه برقرار است.

برای عمومیت دادن به مسأله باید به علامتها توجه کنیم. به‌عنوان مثال برای نقطه‌ای مانند Q داریم: $QL + QR = QS + (-QO)$



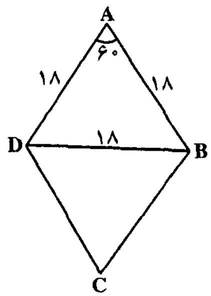
۵.۴.۶. محیط

۵.۴.۶.۱. اندازهٔ محیط

۷۴۷. ۳۶ سانتیمتر.

۷.۴.۵. مساحت

۱.۷.۴.۵. اندازهٔ مساحت



۷۴۸. الف. ۴۸ سانتیمترمربع.

ب. با رسم قطر کوچک لوزی، دو مثلث متساوی‌الاضلاع هریک به ضلع ۱۸ سانتی‌متر به‌دست می‌آید. پس:

$$S_{\text{لوزی}} = ۲ \times \frac{۱۸^{۲} \times \sqrt{۳}}{۴} = ۱۶۲\sqrt{۳}\text{cm}^{۲}$$

۸.۴.۵. همنهشتی لوزیها

۷۴۹. گزینهٔ (۳) درست است. زیرا در این لوزی زاویه‌های حاده ۸۰° است و شرط همنهشتی دو لوزی نیز آن است که ضلعها برابر و زاویه‌های متناظر نیز متساوی باشند.

۹.۴.۵. نقطه‌های ویژه

۷۵۰. لوزی ویژگی متوازی‌الاضلاع را دارد.

۱۰.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۱۰.۴.۵. خط، نیمساز است

۷۵۱. مثلث ABB' متساوی‌الساقین است.

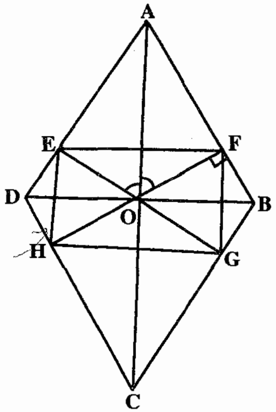
۱۱.۴.۵. شکلهای ایجاد شده

۷۵۲. چهارضلعی BMDN متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند.

۱۲.۴.۵. ثابت کنید چهارضلعی، لوزی است

۷۵۳. در این صورت ضلعهای آن متوازی‌الاضلاع نیز با هم برابر خواهند بود. پس لوزی است.

۱۳.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی



۷۵۴. ۱. در لوزی ABCD، تصویر نقطهٔ O محل برخورد قطرها روی ضلعهای DA، AB، BC و CD را بترتیب E، F، G و H می‌نامیم. به کمک همنهشتی مثلثها، ثابت می‌شود که $OE = OF = OG = OH$ است.

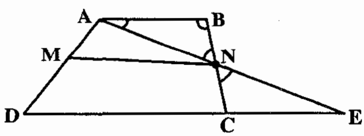
۲. داریم $A\hat{O}E = A\hat{O}F$ و . . .

۳. داریم $EF = GH = \frac{BD}{۲}$ و $FG = HE = \frac{AC}{۲}$.
پس زاویه‌های چهارضلعی EFGH قائمه‌اند.

۵.۵. ذوزنقه

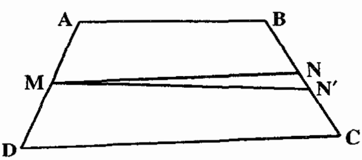
۱.۵.۵. ذوزنقه در هر حالت

۱.۱.۵.۵. تعریف و قضیه



۷۵۵. **برهان.** در ذوزنقهٔ ABCD وسط ساق AD را M و وسط ساق BC را N می‌نامیم و از M به N وصل می‌کنیم. از A به N وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا امتداد قاعدهٔ CD را درنقطهٔ E قطع کند. دو مثلث ABN و NCE همنهشتند. پس $AB = CE$ و $AN = NE$ است. از آن جا $DE = DC + CE = DC + AB$ و $MN \| DE$ و چون نقطه‌های M و N وسطهای دو ضلع AD و AE از مثلث ADE می‌باشند، پس داریم:

$$MN = \frac{۱}{۲} DE = \frac{۱}{۲}(AB + CD)$$



عکس قضیه. از نقطهٔ M وسط ساق AD از ذوزنقهٔ ABCD خطی موازی قاعدهٔ AB رسم می‌کنیم تا ساق BC را در نقطهٔ N قطع کند. نقطهٔ N وسط ساق BC است. زیرا اگر چنین نباشد از M به N′ وسط ساق BC وصل می‌کنیم. بنا به قضیهٔ قبل MN′ باید موازی AB باشد و چون از یک نقطه دو خط موازی AB نمی‌توان رسم کرد، پس N′ بر N منطبق است.

یعنی همان نقطهٔ N وسط BC است و بنا به قضیهٔ قبل :

$$MN = \frac{۱}{۲}(AB + CD)$$

۵.۵.۱.۲. زاویه

۵.۵.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۷۵۶. $\hat{O}_۲ = \hat{O}_۴ = ۹۰^\circ$ و $\hat{O}_۱ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ$

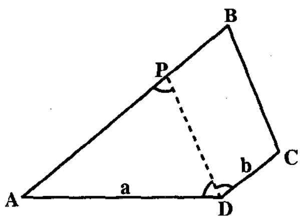
۷۵۷. (ج). در ΔBDC ، $\angle BDC = ۴۰^\circ$ ، چون DC با AB موازی است $\angle DBA = ۴۰^\circ$. در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور به قاعده با هم برابرند، پس $\angle BAD = ۴۰^\circ$ و درنتیجه $\angle ADB = ۱۰۰^\circ$.

۵.۵.۱.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۵۸. زاویه‌های مورد نظر، زاویه‌های مقابل در دو متوازی‌الاضلاعند.

۵.۵.۱.۳. ضلع

۵.۵.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع



۷۶۰. (هـ). نیمساز زاویهٔ D با پاره‌خط AB در P برخورد می‌کند (شکل را ملاحظه کنید). بنابراین زاویه‌های متبادل داخلی APD و PDC و زاویهٔ ADP با زاویهٔ B برابرند، درنتیجه مثلث APD متساوی‌الساقین است و زاویه‌های P و D از آن با هم برابرند. این مطلب می‌رساند که $AP = AD = a$. چون PBCD متوازی‌الاضلاع است، داریم $PB = DC = b$. بنابراین $AB = AP + PB = a + b$.

۷۶۱. گزینهٔ (د) درست است. زیرا :

$$۱۴۰۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵۰(۸a + ۸b) \Rightarrow a + b = ۷$$

جفتهای ۱، ۶، ۲، ۵، ۳ و ۴، در این معادلهٔ سیال صدق می‌کنند.

۵.۵.۱.۳.۲. رابطهٔ بین ضلعها

۷۶۲. روی خط راست BC، نقطهٔ $C_۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که چهارضلعی $ABC_۱E$ متوازی‌الاضلاع باشد. در این صورت، مثلثهای ABE، $BEC_۱$ و BEC، محیطی برابر پیدا می‌کنند. از این جا نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ C و $C_۱$ بر هم منطبقند. بنابراین $BC = AE$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود $BC = ED$.

۴.۱.۵.۵. قطر

۱.۴.۱.۵.۵.اندازهٔ قطر

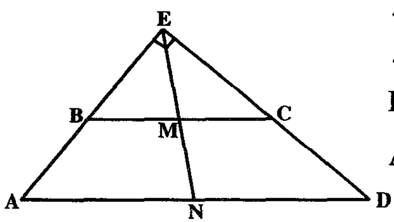
۷۶۳. $۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر.

۵.۱.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۷۶۴. خطی که از وسط یک ساق به موازات قاعده‌ها رسم شود، از وسط دو قطر و همچنین از وسط ساق دیگر می‌گذرد. پس: $EF = EN - FN = \frac{CD}{۲} - \frac{AB}{۲} = \frac{CD - AB}{۲}$.

۷۶۵. اگر نقطهٔ برخورد دو ساق ذوزنقه را E بنامیم، مثلث BEC در رأس E قائم‌الزاویه است. زیرا: $\Delta AED : \hat{A} + \hat{D} = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{E}D = ۹۰^\circ$. از طرفی می‌دانیم که خط MN از نقطهٔ E می‌گذرد. درمثلثهای قائم‌الزاویهٔ BEC و ADE داریم:



$$EN = \frac{AD}{۲},\ \ EM = \frac{BC}{۲} \Rightarrow MN = EN - EM = \frac{AD - BC}{۲}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{AD - BC}{۲}$$

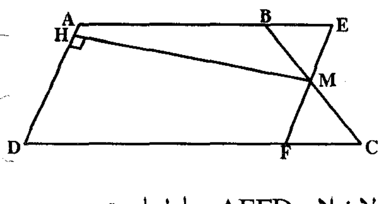
۶.۱.۵.۵. محیط

۱.۶.۱.۵.۵. اندازهٔ محیط

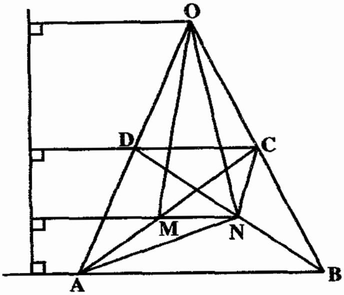
۷۶۶. ارتفاعهای AA' و BB' از ذوزنقه را رسم کنید. محیط ذوزنقه برابر است با $(\sqrt{۶} + \sqrt{۳})۴ = ۲۴$ سانتیمتر.

۷.۱.۵.۵. مساحت

۱.۷.۱.۵.۵. اندازهٔ مساحت ذوزنقه



۷۶۷. اگر از نقطهٔ M وسط ساق BC خطی موازی ساق AD رسم کنیم تا دو قاعدهٔ ذوزنقه را در E و F قطع کند، مثلثهای MBE و MFC متساوی‌اند و درنتیجه ذوزنقهٔ ABCD با متوازی‌الاضلاع AEFD معادل است.



۷۶۸. با توجه به این که N وسط قطر BD است، داریم:

$S_{OAB} = ۲S_{OAN}$ و $S_{OCD} = ۲S_{OCN}$ پس

$S_{ABCD} = S_{OAB} - S_{OCD} = ۲(S_{OAN} - S_{OCN})$.

اما MN میانهٔ مثلث ANC است و A و C در دو طرف ON واقعند و داریم:

$S_{OMN} = \frac{۱}{۲}(S_{OAN} - S_{ONC})$. از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$S_{ABCD} = ۴S_{OMN}$$

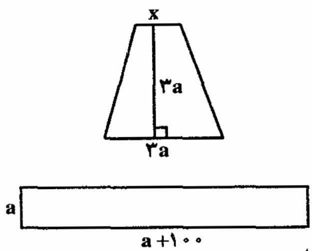
۷۷۰. (هـ). اگر قاعدهٔ کوچک، ارتفاع، و قاعدهٔ بزرگ را بترتیب با $(a-d)$، a و $(a+d)$ نشان دهیم، آن‌گاه مساحت برابر است با:

$$k = \frac{۱}{۲}a(a-d+a+d) = a^۲$$

چون هیچ اطلاعی دربارهٔ ماهیت عدد a نداریم، نمی‌توانیم ویژگیهای $a^۲$ را استنباط کنیم، بنابراین گزینهٔ (هـ) پاسخ درست است.

۷۷۱. ۷۲۰ سانتیمترمربع.

۷۷۲. مزرعهٔ دو پسرعمو چنین خواهند بود. چون مساحت آنها برابر یکدیگرند. پس $a(a+۱۰۰) = \frac{۳a(۳a+x)}{۲}$. از آن جا $a = \frac{۲۰۰-۳x}{۷}$، پس $(۲۰۰-۳x)$ باید بر ۷ بخش‌پذیر باشد. برخی از مقدارهای به‌ظاهر مناسب بر x، a و ۳a در جدول زیر نشان داده شده است:



x	۶	۱۳	۲۰	۲۷	۳۴	۴۱
a	۲۶	۲۳	۲۰	۱۷	۱۴	۱۱
۳a	۷۸	۶۹	۶۰	۵۱	۴۲	۳۳

چون x باید فرد باشد، می‌تواند ۴۱ یا ۲۷ یا ۱۳ گردد. اگر $x = ۴۱$ باشد، از ۳a بزرگتر است. درصورتی که باید دقیقاً از a بزرگتر باشد. اگر $x = ۱۳$ باشد از a کوچکتر است. امّا اگر $x = ۲۷$ باشد شرایط معما را داراست و در این صورت مساحت هرکدام از مزرعه‌ها ۱۹۸۹ مترمربع (فرد) است.

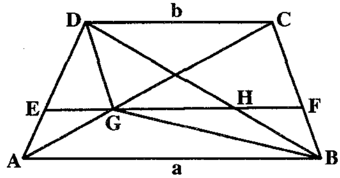
$$۵۱(۵۱+۲۷):۲ = ۱۹۸۹m^۲$$

۲.۷.۱.۵.۵. مساحت شکلهای ایجاد شده

۷۷۳. $\frac{۱}{۲}(S_۱+S_۲)$.

۳.۷.۱.۵.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۷۷۴. اگر $AB=a$ و $CD=b$ و ارتفاع ذوزنقه را h فرض کنیم، داریم:



$$EF=\frac{a+b}{۲}, GH=\frac{a-b}{۲}$$

$$S_{BDG}=S_{GHB}+S_{GHD}=۲\times\frac{a-b}{۲}\times\frac{h}{۴}=\frac{(a-b)h}{۴}$$

$$S_{ABFE}=\frac{(۳a+b)h}{۸} \text{ و } S_{FEDE}=\frac{(a+۳b)h}{۸}$$

۷۷۸. مثلثهای ADC و BDC معادل یکدیگرند.

۷۷۹. فرض کنید، Q معرف مساحت پنج ضلعی باشد و $S_۱$، $S_۲$ و $S_۳$ مساحت مثلثهای، بترتیب، مجاور به یک ضلع جانبی، قاعدهٔ کوچکتر و ضلع جانبی دیگر باشند؛ x مساحت مثلث محصور بین مثلثهای با مساحت $S_۱$، $S_۲$ و y مساحت مثلث محصور بین مثلثهای با مساحت $S_۲$ و $S_۳$ است. در این صورت،

$$S_۱+x+S_۲=S_۲+y+S_۳=\frac{۱}{۲}(x+y+S_۲+Q)$$

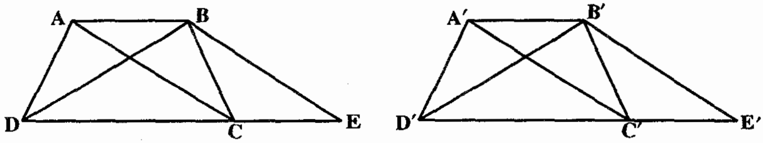
و بنابراین

$$S_۱+x+S_۲+S_۲+y+S_۳=x+y+S_۲+Q \Rightarrow S_۱+S_۲+S_۳=Q$$

۸.۱.۵.۵. همنهشتی ذوزنقه‌ها

۷۸۰. از نقطه‌های B و B′، بترتیب، خطهایی موازی AD و A′D′ رسم کنید تا قاعده‌های CD و C′D′ را در نقطه‌های E و E′ قطع کنند. مثلثهای BCE و B′C′E′ به دلیل برابری سه ضلع همنهشتند و از آن جا . . .

۷۸۱. از نقطه‌های B و B' خطهایی به موازات AC و $A'C'$ رسم می‌کنیم تا قاعده‌های CD و $C'D'$ را بترتیب در نقطه‌های E و E' قطع کنند. دو مثلث BED و $B'E'D'$ به حالت تساوی سه ضلع همنهشتند. زیرا: $BE = AC = A'C' = B'E'$ و $DB = D'B'$ و $DC + CE = D'C' + C'E'$.

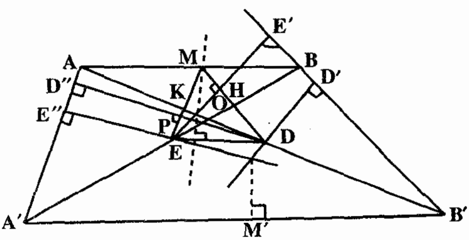


یعنی $DE = D'E'$. حال اگر دو ذوزنقه را طوری روی هم قرار دهیم که مثلث DBE بر مساویش $D'B'E'$ منطبق شود، نقطهٔ C' بر نقطهٔ C منطبق می‌شود (زیرا $EC = AB = A'B' = E'C'$ است.) و نقطهٔ A بر A' منطبق می‌شود (زیرا $AB = A'B'$ و $AB \| CE$ و $A'B' \| C'E'$ است)، پس ذوزنقهٔ ABCD با ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ همنهشت است.

۵.۵.۱.۹. نقطه‌های همخط

۷۸۲. خطهای ME، MF، NE و NF همگی موازی قاعده‌های ذوزنقه می‌باشند.

۵.۵.۱.۱۰. خطهای همرس



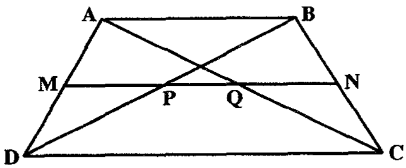
۷۸۳. از نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AB به نقطه‌های D و E وصل می‌کنیم. در مثلث ABB' داریم $MD \| BB'$، پس EE' در نقطهٔ H بر MD عمود است. به همین ترتیب $ME \| AA'$ و $DD'' \perp AA'$ است، پس DD'' در نقطهٔ K بر ME عمود است. درنتیجه خطهای EH و DK دو ارتفاع از مثلث MED می‌باشند. پس اگر نقطهٔ برخورد این دو ارتفاع را O بنامیم، ارتفاع رأس M مثلث MDE نیز از نقطهٔ O می‌گذرد، یعنی $MO \perp DE$ است. اما DE موازی قاعده‌ها می‌باشد. پس MO عمود بر AB است و چون M وسط AB است، پس MO عمود منصف قاعدهٔ AB می‌باشد. بنابراین نقطهٔ برخورد DD'' و EE' روی عمود منصف قاعدهٔ AB واقع است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که نقطهٔ برخورد EE'' و DD' نیز روی عمود منصف قاعدهٔ $A'B'$ است.

۵.۵.۱.۱۱. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۷۸۴. دو زاویهٔ درونی A و D از ذوزنقه مکمل یکدیگر و $AB\|CD$ است.

۵.۵.۱.۱۲. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است

۷۸۵. ثابت کنید: $NM\|AB\|PQ\|CD$.



۷۸۶. اگر M، N و P، بترتیب، وسطهای ساقهای AD و BC و قطر BD باشند، بنا به فرض $MN=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$ است. در مثلث ABD داریم: $MP\|AB$ و $MP=\frac{AB}{۲}$ و در مثلث BCD داریم: $PN\|DC$ و $PN=\frac{CD}{۲}$، پس خواهیم داشت:

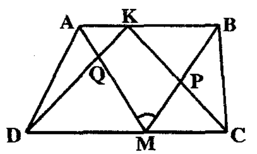
$$MP+PN=\frac{AB}{۲}+\frac{CD}{۲}=\frac{۱}{۲}(AB+CD)$$

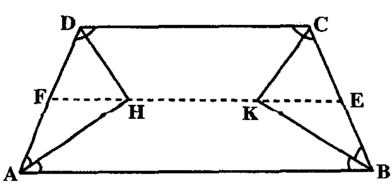
درنتیجه $MP+PN=MN$ خواهد بود. و این رابطه درصورتی برقرار است که سه نقطهٔ M، N و P روی یک خط راست باشند. اما $MP\|AB$ و $NP\|CD$ است، پس $AB\|CD$، یعنی چهارضلعی ABCD ذوزنقه است.

۵.۵.۱.۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۸۷. مساحت چهارضلعی MPKQ را برحسب پارامتری مانند $P\hat{M}Q=\alpha$ یا پارامتر مناسب دیگری به‌دست آورید و ماکزیمم آن را بیابید.

۵.۵.۱.۱۴. مسأله‌های ترکیبی





۷۸۸. ۱. نقطهٔ H روی نیمساز داخلی زاویهٔ A واقع است. پس H از قاعدهٔ AB و ساق AD به یک فاصله است.

همچنین این نقطه روی نیمساز داخلی زاویهٔ D قرار دارد، پس از ساق AD و قاعدهٔ DC به یک فاصله می‌باشد. درنتیجه نقطهٔ H از دو قاعدهٔ AB و CD به یک فاصله است. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که نقطهٔ K از دو قاعدهٔ ذوزنقه به یک فاصله است. پس خط HK خط راستی موازی دو قاعده و به یک فاصله از دو قاعده می‌باشد.

۲. مثلثهای AHD و BKC قائم‌الزاویه و خطهای HF و KE، بترتیب، میانه‌های وارد بر وتر در این دو مثلث می‌باشند ،پس مساوی نصف وتر نظیر خود می‌باشند، یعنی $FH = \frac{AD}{۲}$ و $KE = \frac{BC}{۲}$ است.

۳. برای آن که نقطهٔ برخورد نیمسازها بر هم منطبق شوند، باید $HK = ۰$ و یا $FE = FH + KE$ گردد. اما $FE = \frac{AB + CD}{۲}$ و $FH = \frac{AD}{۲}$ و $KE = \frac{BC}{۲}$ است، پس باید داشته باشیم :

$$\frac{AB + CD}{۲} = \frac{AD}{۲} + \frac{BC}{۲} \Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

۲.۵.۵. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

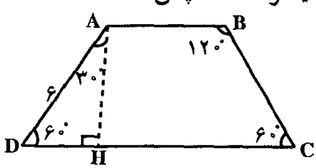
۱.۲.۵.۵. تعریف و قضیه

۷۹۱ . ارتفاعهای ذوزنقه را رسم کنید، و از همنهشتی مثلثها استفاده کنید.

۲.۲.۵.۵. زاویه

۱.۲.۲.۵.۵. اندازهٔ زاویه

۷۹۲. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH ضلع DH برابر ۳ سانتیمتر و اندازهٔ وتر $AD = ۶$ سانتیمتر است. پس $D\hat{A}H = ۳۰^\circ$ و از آنجا : $A\hat{D}H = ۶۰^\circ$ و $D\hat{A}B = ۱۲۰^\circ$.



۳.۲.۵.۵. ضلع

۱.۳.۲.۵.۵ .اندازهٔ ضلع

۷۹۳. ۵ سانتیمتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'D$ ، $AA' = ۴cm$ و $DA' = ۳cm$ است. پس $AD = ۵cm$ است.

۷۹۴. ۱۴ سانتیمتر. ارتفاع AH را رسم کنید. $D\hat{A}H = ۳۰^\circ$ و از آن‌جا : $DH = ۴cm$ پس : $DC = AB + ۲DH = ۶ + ۸ = ۱۴cm$ است.

۴.۲.۵.۵. قطر

۷۹۵. مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

۵.۲.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۲.۵.۵ . اندازهٔ پاره‌خط

۷۹۶. پاره‌خط واصل بین دو ساق ذوزنقه برابر است با $MN = \frac{۱۲+۸}{۲} = ۱۰$ سانتیمتر. و اندازهٔ پاره‌خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند برابر است با : $PQ = \frac{۱۲-۸}{۲} = ۲$ سانتیمتر.

۶.۲.۵.۵. محیط

۱.۶.۲.۵.۵ . اندازهٔ محیط

۷۹۷. ۴۶ سانتیمتر.

۷.۲.۵.۵. مساحت

۱.۷.۲.۵.۵ . اندازهٔ مساحت

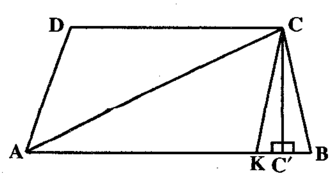
۷۹۸. ارتفاع ذوزنقه ۴cm است. پس :

مساحت ذوزنقه = $۲۸cm^۲$

محیط ذوزنقه = ۲۴cm

۷۹۹. گزینهٔ (الف) درست است.

۸۰۰. از نقطهٔ C خطی به موازات ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ AB را در نقطهٔ k قطع کند. چهارضلعی ADCK متوازی‌الاضلاع و AC قطر آن است. پس داریم : $S_{ADC} = S_{AKC}$ و $BC = AD = CK$. بنابراین مثلث KCB در رأس C متساوی‌الساقین است. پس $S_{KCC'} = S_{BCC'}$ و یا $S_{ABCD} = ۲S_{ACC'}$.

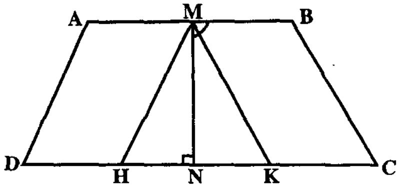


۸.۲.۵.۵. همنهشتی ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین

۸۰۱. در صورتی که یک قاعده نظیر برابر داشته باشند، همنهشت خواهند بود.

۹.۲.۵.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۹.۲.۵.۵ .خطها برهم عمودند



۸۰۲. از نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AB دو خط به موازات ساقهای ذوزنقه رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ BC را در H و K قطع کنند. مثلث MHK متساوی‌الساقین است. زیرا $MH = AD = BC = MK$ می‌باشد (چهارضلعیهای AMHD و MBCK متوازی‌الاضلاعند). همچنین $DH = CK$ و $ND = NC$ است، پس $NH = NK$ است، یعنی MN میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین MHK است، پس عمودمنصف قاعده نیز می‌باشد. یعنی $MN \perp CD$ و بنابراین $MN \perp AB$ است. در نتیجه خط واصل بین وسطهای قاعده‌های یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین؛ عمود منصف قاعده‌های ذوزنقه است.

۸۰۳. در هر ذوزنقهٔ متساوی الساقین؛ خط واصل بین وسطهای دو قاعده، عمودمنصف دو قاعده، و خط واصل بین وسطهای دوساق، موازی قاعده‌ها است.

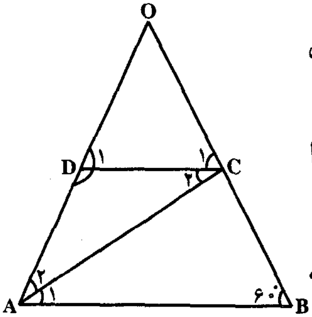
۱۰.۲.۵.۵. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است

۸۰۴. دو مثلث ADC و DBC، همچنین مثلثهای ABC و ABD به حالت برابری سه ضلع همنهشتند.

۱۱.۲.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۰۶. $۲\sqrt{۱۳}$.

۱۲.۲.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی



۸۰۷. ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چون $BC = \frac{AB}{۲}$ است، پس $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{A}_۱ = ۳۰^\circ$ است. از طرفی $D\hat{A}B = \hat{B} = ۶۰^\circ$ و $C\hat{D}A = ۱۲۰^\circ$ و $D\hat{C}B = ۱۲۰^\circ$ می‌باشند و مثلث ADC متساوی‌الساقین است. زیرا $\hat{C}_۲ = ۱۲۰^\circ - ۹۰^\circ = ۳۰^\circ$ و $\hat{A}_۲ = ۶۰^\circ - ۳۰^\circ = ۳۰^\circ$ است، پس $DC = DA$ و چون $DA = CB = \frac{AB}{۲}$ است، پس $DC = \frac{AB}{۲}$.

۲. در مثلث OAB چون $DC \parallel AB$ است، بنابراین $\hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ و در نتیجه مثلث ODC متساوی‌الاضلاع است. پس $OC = OD = CD$ است و چون $CD = BC$ است، پس $OC = BC$ می‌باشد.

۳.۵.۵ . ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۳.۵.۵ . ۲.زاویه

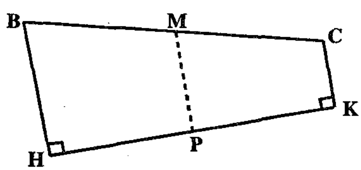
۳.۵.۵ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۸۰۸. به دلیل این که ارتفاع رأس C عمودمنصف قاعدهٔ AB است (چون $AB = 2CD$ است)، پس $AC = CB$ و در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و از آن‌جا :

$$A\hat{B}C = 60^\circ \Rightarrow B\hat{C}D = 120^\circ$$

۳.۵.۵ . ۳. پاره‌خط

۸۰۹. (الف). مطابق شکل، خط MP که از وسط پاره‌خط BC عمود بر HK رسم شود، موازی BH و CK است و مورب BC را نصف می‌کند. بنابراین هر مورب دیگر از جمله HK را نصف می‌کند، در نتیجه عمودمنصف HK است. از این‌رو M (و هر نقطهٔ روی MP) از H و K به یک فاصله است ؛ بنابراین همان‌طور که در گزینهٔ (الف) بیان شده، همواره داریم $MH = MK$. گزینه‌های (ب) و (ج)، با گزینهٔ (الف) تناقض دارند و از این‌رو نادرستند. با رسم شکلهایی که در شرطهای داده شده صدق کنند و گزینه‌های (د) و (هـ) را نقض کنند، بسادگی دیده می‌شود که (د) و (هـ) نادرست هستند.



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۶

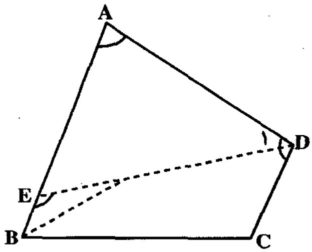
۶.۲. زاویه

۶.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۸۱۰. مجموع زاویه های درونی چهارضلعی محدب ۳۶۰درجه است که اگر به نسبت ۵،۴،۳ و۶ تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویه‌ها ۶۰، ۸۰، ۱۰۰ و ۱۲۰ درجه است.

۸۱۱. گزینهٔ (د) درست است.

۸۱۲. گزینهٔ (د) درست است.



۸۱۴. نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ D با ضلع ABرا Eمی نامیم. در مثلث BEIداریم :

$\hat{I}+\hat{B}_1+\hat{E}_1=180^\circ$ ، اما $\hat{E}_1=\hat{A}+\hat{D}_1$ ، پس :

$\hat{I}+\hat{B}_1+\hat{A}+\hat{D}_1=180^\circ$ و یا

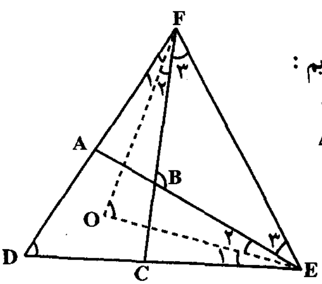
$$\hat{I}+\frac{\hat{B}}{2}+\hat{A}+\frac{\hat{D}}{2}=180^\circ \qquad (1)$$

. از طرفی در چهارضلعی محدب ABCDداریم :

$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+\frac{\hat{D}}{2}=180^\circ \qquad (2)$$

. از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\hat{I}=\frac{\left|\hat{A}-\hat{C}\right|}{2}$$



۸۱۵. از E به F وصل می‌کنیم. با توجه به فرض مسأله داریم :

$$\Delta FDE:\ \hat{D}+2\hat{F}_2+\hat{F}_3+2\hat{E}_2+\hat{E}_3=180^\circ \qquad (1)$$

$$\Delta FOE:\ \hat{O}+\hat{F}_2+\hat{F}_3+\hat{E}_2+\hat{E}_3=180^\circ \qquad (2)$$

$$\Delta FBE:\ \hat{B}+\hat{F}_3+\hat{E}_3=180^\circ \qquad (3)$$

$$\Rightarrow 2(2)=(1)+(3)$$

$$\Rightarrow 2(\hat{O}+\hat{F}_2+\hat{F}_3+\hat{E}_2+\hat{E}_3)=\hat{D}+\hat{B}+2\hat{F}_2+2\hat{F}_3+2\hat{E}_2+2\hat{E}_3$$

$$\Rightarrow 2\hat{O}=\hat{D}+\hat{B}\Rightarrow \hat{O}=\frac{\hat{D}+\hat{B}}{2}$$

۸۱۶. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب ۴ قائمه است. بنابراین اگر هیچ یک از زاویه‌های چهارضلعی حاده نباشند، یا هر چهار زاویهٔ آن قائمه‌اند، و یا برخی قائمه و بقیه منفرجه‌اند، که حالت اوّل مخالف فرض است و در حالت دوم نیز مجموع زاویه‌های چهارضلعی بیشتر از ۴ قائمه خواهد شد، و این نشدنی است. بنابراین هر چهارضلعی محدب که زاویه‌هایش برابر نیستند، لااقل یک زاویهٔ حاده دارد. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که چهارضلعی با شرایط بالا حداقل یک زاویهٔ منفرجه دارد.

۸۱۷. مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.

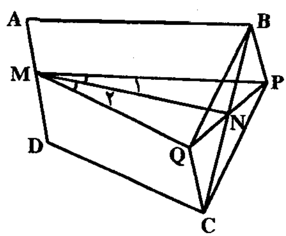
۸۱۸. گزینهٔ (الف) درست است.

۸۱۹. گزینهٔ (الف) درست است.

۸۲۰. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲.۲.۶ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۶ .رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)



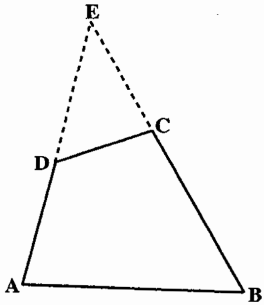
۸۲۱. از نقطهٔ M پاره‌خطهای MP و MQ را بترتیب به موازات AB و CD و مساوی آنها رسم می‌کنیم و نقطه‌های B ، P ، Q و C را به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای ABPM و CDMQ متوازی‌الاضلاعند. پس MP = MQ ، یعنی مثلث MPQ متساوی‌الساقین است و BP ∥ QC و BP = QC است، یعنی چهارضلعی BPCQ نیز متوازی الاضلاع است. پس قطرهای آن منصف یکدیگرند، پس BC از نقطهٔ N وسط پاره‌خط PQ می‌گذرد. درنتیجه MN میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین است و این میانه (MN) نیمساز زاویهٔ رأس M می‌باشد، یعنی $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ است.

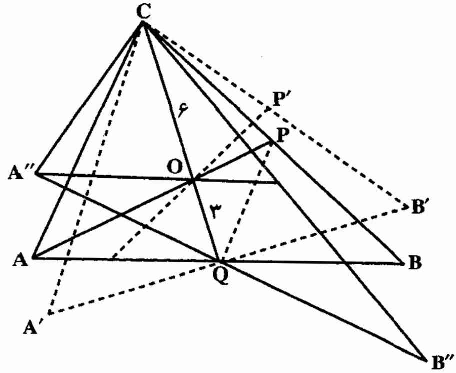
۸۲۲. در مثلث HBC داریم : $\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\hat{H}=۱۸۰^\circ$ و در مثلث AED داریم :

$$\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{D}}{۲}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$$

از جمع دو رابطهٔ بالا با توجه به مجموع زاویه‌های یک چهارضلعی محدب نتیجه می‌شود که $\hat{H}+\hat{E}=۱۸۰^\circ$ است.

۸۲۴. (هـ). مجموع زاویه‌های یک مثلث ۱۸۰° است. پس در مثلث EDC(شکل پایین سمت چپ) داریم :
$$\angle E = \angle CDE + \angle DCE = \angle E + S = ۱۸۰^\circ$$
در مثلث EAB داریم :
$$\angle E + \angle BAD + \angle ABC = \angle E + S' = ۱۸۰^\circ$$

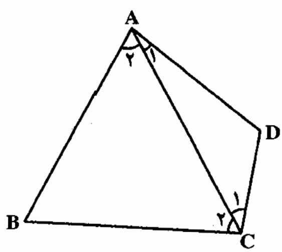




بنابراین : $r = S/S' = ۱$ و در نتیجه : $S = S' = ۱۸۰^\circ - \angle E$.

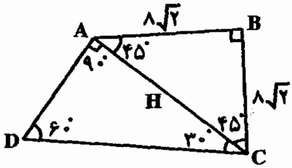
۲.۲.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۸۲۵. قطر AC را رسم می‌کنیم. در مثلث ACDداریم : (۱) $CD < AD \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{A}_1$. همچنین در مثلث ABCداریم : (۲) $AB > BC \Rightarrow \hat{C}_2 > \hat{A}_2$. از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}$. به همین ترتیب اگر قطر BDرا رسم کنیم، ثابت می‌شود که $\hat{D} > \hat{B}$ است.



۳.۶. ضلع

۱.۳.۶. اندازهٔ ضلع



۸۲۸. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و مثلث ACD قائم‌الزاویهٔ $۹۰^\circ-۶۰^\circ-۳۰^\circ$ است و $\hat{D}=۶۰^\circ$ است. و بنابراین داریم:

$$AC = AB\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲}\times\sqrt{۲} = ۱۶$$

$$\Rightarrow DC = \frac{AC}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳}\ ,\ \ AD = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}\text{cm}$$

۸۲۹. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABD و BDC، $۹۰^\circ-۶۰^\circ-۳۰^\circ$ و همنهشتند. پس:

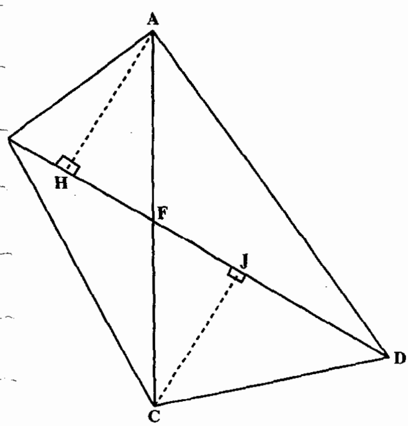
$AB = BC = ۶\text{cm}$

$AD = CD = ۶\sqrt{۳}\text{cm}$

۲.۳.۶. رابطهٔ بین ضلعها

۸۳۰. دو مثلث PQS و QRS همنهشتند.

۴.۶. قطر

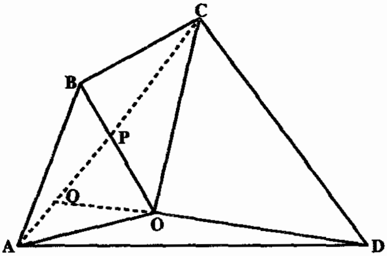


۸۳۱. در مثلث CEF خطهای FD و EB ارتفاعند.

۸۳۲. در چهار گوشهٔ ABCD هرگاه دو مثلث ABD و CBD معادل باشند، چون این دو مثلث در قاعدهٔ BD مشترکند، پس ارتفاعهای AH و CJ از آنها باهم برابرند و درنتیجه دو مثلث AHF و CJF باهم برابرند و نتیجه می‌شود $AF = FC$ یعنی F وسط قطر AC است. برعکس، از تساوی $AF = FC$، تساوی دو مثلث AHF و CJF و از آن‌جا تساوی $AH = CJ$ نتیجه می‌شود که معلوم می‌دارد، دو مثلث ABD و CBD باهم معادلند.

۸۳۳. نقطه‌های C و A روی عمودمنصف پاره‌خط BD واقعند.

۸۳۴. فرض می‌کنیم، قطر AC، خطهای راست OB و OD را بترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کرده باشد. چون مساحت مثلثهای AOB و COB باهم برابرند، بنابراین، ارتفاعهای وارد بر ضلع مشترک آنها، یعنی OB ، باهم برابر می‌شوند، یعنی $AP = PC$. به همین ترتیب، به دست می‌آید : $AQ = QC$ ؛ از آن‌جا $P = Q$ ، به این ترتیب، اگر داشته باشیم : $O \neq P$ ، آن‌وقت، نقطه‌های B، P ، O و D روی یک خط راست قرار می‌گیرند، یعنی نقطهٔ O برقطر BD واقع می‌شود ؛ و اگر $O = P$ آن وقت، نقطهٔ O بر قطر AC قرار دارد.



۸۳۵. دومثلث BCD و ADC را باهم مقایسه کنید.

۸۳۶. اگر نقطهٔ O محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD باشد، داریم :

$$\begin{array}{ll} \Delta OAB : & \left\{\begin{array}{l} OA + OB > AB \\ OB + OC > BC \\ OC + OD > CD \\ OD + OA > AD \end{array}\right. \\ \Delta OBC : & \\ \Delta OCD : & \\ \Delta ODA : & \end{array}$$

از جمع این رابطه‌ها نتیجه می‌شود :

$$۲(OA + OC + OB + OD) > AB + BC + CD + DA$$

$$\Rightarrow ۲(AC + BD) > AB + BC + CD + DA$$

$$\Rightarrow AC + BD > \frac{AB + BC + CD + DA}{۲}$$

همچنین :

$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ AC < CD + DA \\ BD < AB + AD \\ BD < BC + BD \end{cases}$$

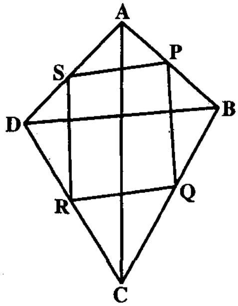
از جمع این رابطه‌ها داریم :

$$۲(AC + BD) < ۲(AB + BC + CD + DA)$$

$$\Rightarrow AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

پس :
$$\frac{AB + BC + CD + DA}{۲} < AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

۸۳۷. پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع سوم مثلث و اندازه‌اش برابر نصف ضلع سوم است. پس داریم :



$$PS = QR = \frac{BD}{۲} \ , \ PQ = SR = \frac{AC}{۲}$$

$$PS + QR = BD \ , \ PQ + RS = AC$$

$$\Rightarrow PQRS \ \text{محیط} \ = BD + AC$$

نکته. چهارضلعی PQRS متوازی‌الاضلاعی است که آن را متوازی‌الاضلاع وارینیون چهارضلعی ABCD می‌نامند.

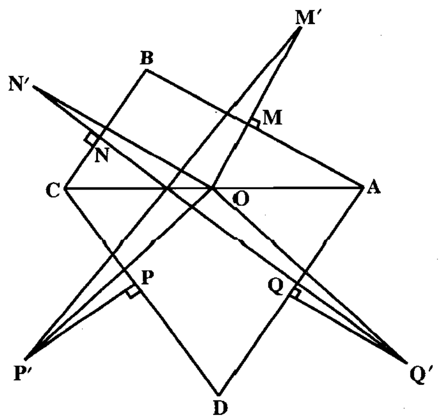
۵.۶. پاره‌خط

۱.۵.۶ .رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۶ .رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۸۳۸. چون قطرهای چهارضلعی برهم عمودند، پس متوازی‌الاضلاعی که رأسهایش وسطهای ضلعهای چهارضلعی است، مستطیل است و در مستطیل دوقطر باهم برابرند.

۸۴۰. اگر نقطهٔ O وسط قطر AC باشد، $OP' = QQ'$ و $OP' \perp QQ'$ است. همچنین دو قطعه خط OM' و ON' نیز مساوی و برهم عمودند، پس دو مثلث $OP'M'$ و $OQ'N'$ باهم برابرند.



۸۴۱. فرض کنید، $ABCD$ معرف چهارضلعی داده شده باشد و O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 مرکز لوزیهای ساخته شده، بترتیب، روی AB ، BC، CD و DA باشند ؛ K و L، بترتیب، وسط ضلعهای AB و BC هستند و M وسط قطر AC است. مثلثهای O_1KM و O_2LM برهم قابل انطباقند.

$$(O_1\hat{K}M = O_2\hat{L}M \ , \ |KM| = \frac{1}{2}|BC| = |O_2L| \ , |O_1K| = \frac{1}{2}|AB| = |LM|)$$

اگر $A\hat{B}C+\alpha < \pi$ ، آن‌وقت این مثلثها در درون مثلث O_1MO_2 قرار می‌گیرند، و اگر $A\hat{B}C+\alpha > \pi$ ، آن وقت آنها بیرون مثلث O_1MO_2 واقعند (زاویه‌های لوزی با رأس B، برابرند با α). بنابراین، $|O_1M| = |O_2M|$ و $O_1\hat{M}O_2 = \pi - \alpha$. به روش مشابه، $|O_3M| = |O_4M|$ و $O_3\hat{M}O_4 = \pi - \alpha$. در نتیجه، مثلثهای O_1MO_3 و O_2MO_4 برهم قابل انطباقند و هرکدام، از دیگری، با دوران دور M به اندازهٔ زاویهٔ $\pi - \alpha$ ، به‌دست می‌آید. بدین ترتیب، حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۲.۱.۵.۶ .رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۸۴۲. در مثلث BOD داریم : $OB + OD > BD$ و در مثلث AOC داریم : $OA + OC > AC$. از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$OA + OB + OC + OD > BD + AC$$

۸۴۴. BD.

۸۴۵. SQ . با توجه به این که $RQ = SQ$ و $PQ = PS$ و ضلع مقابل به زاویهٔ کوچکتر، کوچکتر از ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگتر است (در هر مثلث PSQ)، پس SQ کوچکترین پاره‌خط است.

۸۴۶. (هـ). اثبات بر پایهٔ این واقعیت است که چهار پاره‌خط مفروض یک چهارضلعی تشکیل می‌دهند، اگر و تنها اگر طول هر پاره‌خط کمتر از مجموع طولهای سه پاره‌خط دیگر باشد.* حال، فرض کنید S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 طولهای چهار پاره‌خط را نشان دهند.

---

* بخش «تنها اگر» واضح است، چرا که طول مسیر یک چندضلعی حداقل برابر است با فاصلهٔ بین دو سر آن. از طرف دیگر اگر طول هر پاره‌خط کمتر از مجموع طولهای سه پاره‌خط دیگر باشد، پاره‌خطها را طوری دسته‌بندی کنید که $S_1 + S_2 \geq S_3 + S_4$. بنابراین مثلثی با ضلعهای S_1 ، S_2 ، $S_3 + S_4$ وجود دارد. این مثلث را می‌توان به صورت چهارضلعی با ضلعهای S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 در نظر گرفت.

اگر یک چهارضلعی وجود داشته باشد، آن‌گاه بنا به مطالبی که در بالا ذکر شد :

$S_1 < S_2 + S_3 + S_4$

بنا به فرض : $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1$

اگر به جای مجموع $S_2 + S_3 + S_4$ عدد کوچکتر S_1 را قرار دهیم، نابرابری :

$S_1 < \frac{1}{2}$ یعنی $S_1 + S_1 = 2S_1 < 1$

را به دست می‌آوریم. چون هیچ یک از چهار پاره‌خط، ویژگی خاصی ندارند، با استدلال مشابه می‌توانیم نتیجه بگیریم که :

$S_4 < \frac{1}{2}\ ,\ S_3 < \frac{1}{2}\ ,\ S_2 < \frac{1}{2}$

بعکس، اگر $S_i < \frac{1}{2} (i = 1, 2, 3, 4)$ و $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1$. آن‌گاه $S_2 + S_3 + S_4 = 1 - S_1 > 1 - (\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > S_1$، بنابراین $S_1 < S_2 + S_3 + S_4$. نابرابریهای متناظری برای پاره‌خطهای دیگر برقرار است. بنابراین گزینهٔ (هـ) درست است. همهٔ گزینه‌های دیگر رد می‌شوند، چرا که به عنوان مثال مستطیلی با ضلعهای مجاور به طولهای $\frac{1}{16}$ و $\frac{7}{16}$ که دارای محیط ۱ است، امکان انتخاب گزینه‌های دیگر را سلب می‌کند. گزینهٔ (د) به روشنی رد می‌شود، چرا که تقسیم خط به چنین پاره‌خطهایی امکان ندارد.

۶. ۶. محیط

۶. ۶. ۱. اندازهٔ محیط

۸۴۷ . از ویژگی میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید.

۶. ۷. مساحت

۶. ۷. ۱. اندازهٔ مساحت

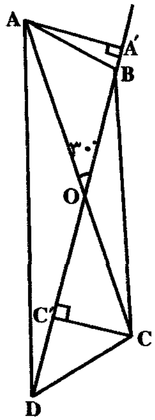
۶. ۷. ۱. ۱. اندازهٔ مساحت (برابریها)

۸۴۸. نقطهٔ برخورد دو قطر AC و BD از چهارضلعی را O و زاویهٔ بین دو قطر را α می‌نامیم. با توجه به این که $AH = OA\sin\alpha$ و $CK = OC\sin\alpha$ است، داریم :

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = BD.AH + BD.CK = BD.OA\sin\alpha + BD.OC\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = BD\sin\alpha(OA + OC) = AC.BD\sin\alpha$$

۸۴۹. راه اوّل. اگر d و d' قطرها و α زاویهٔ بین دو قطر چهارضلعی باشد، داریم :



$$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}dd'\sin\alpha=\frac{۱}{۲}d.d'\sin ۳۰°=\frac{۱}{۴}dd'=\frac{۱}{۴}AC.BD$$

راه دوم. اگر از A و C عمودهای AA' و CC' را بر قطر BD فرود آوریم، داریم :

$$CC'=\frac{OC}{۲}\ ,\ AA'=\frac{AO}{۲}$$

$$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}=\frac{۱}{۲}BD.AA'+\frac{۱}{۲}BD.CC'$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}BD(AA'+CC')=\frac{۱}{۲}BD(\frac{AO}{۲}+\frac{OC}{۲})$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}BD(\frac{AC}{۲})=\frac{۱}{۴}AC.BD$$

۸۵۰. خط xy را عمود بر قطر AC رسم می‌کنیم، و تصویر نقطه‌های B و D روی xy را B' و D' می‌نامیم. در این صورت داریم: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC.B'C$ و $S_{ADC}=\frac{۱}{۲}AC.CD'$. از جمع این دو رابطه خواهیم داشت :

$S_{ABCD}=\frac{۱}{۲}AC(B'C+CD')=\frac{۱}{۲}AC.B'D'$.

۸۵۴. L' و N' را وسط ضلعهای BC و AD بگیرید، یا متوازی‌الاضلاع $KL'MN'$ بر KLMN منطبق است و یا منطبق نیست ؛ در حالت اخیر، چهارضلعی ABCD مستطیل است ($BC\|AD$).

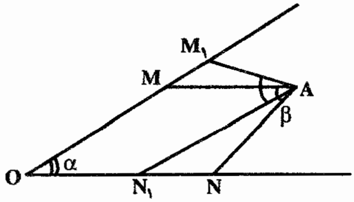
۶ . ۷ . ۱ . ۲ . اندازهٔ مساحت چهارضلعی (نابرابریها)

۸۵۵. $S_{ABCD}=۲S_{AMPC}$. $AM=x$ فرض کنید، در این صورت :

$$S_{AMCD}<۲S_{AMP}\le x(a-x)\le\frac{a^۲}{۴}$$

۸۵۷. فرض کنید M_1 و N_1 دو نقطهٔ دیگر روی ضلعهای زاویه باشند. در این صورت،

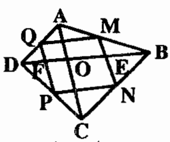
$$A\hat{M_1}M = ۳۶۰^\circ - \alpha - \beta - O\hat{N_1}A > ۱۸۰^\circ - O\hat{N_1}A = A\hat{N_1}N \quad \text{و} \quad M_1\hat{A}N_1 = \beta$$



به این ترتیب، با توجه به این که $M\hat{A}M_1 = N\hat{A}N_1$ ، به‌دست می‌آوریم : $M_1A < N_1A$
و بنابراین $S_{M_1AM} < S_{N_1AN}$ ؛ به این ترتیب، $S_{OM_1AN_1} < S_{OMAN}$.

۸۵۸. جای دیگری از نقطه‌ها، M_1 و $N_1(M_1\hat{A}N_1 = \beta)$ ، را در نظر بگیرید، با توجه به شرط $\alpha + \beta > ۱۸۰^\circ$ ، نشان دهید که مساحت مثلث «اضافه شده»، از مساحت مثلث «برداشته شده» از چهارضلعی، بزرگتر است.

۶ . ۷ . ۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۸۵۹. راه اول. چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم و نقطه‌های M، N، P و Q وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA از آن را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است، زیرا : در مثلثهای ABD و BCD، بترتیب، پاره‌خطهای MQ و NP که وسطهای دو ضلع از این مثلثها را به هم وصل کرده‌اند با ضلع سوم موازی و مساوی نصف این ضلع می‌باشند، یعنی MQ موازی BD و مساوی نصف آن، همچنین NP موازی BD و مساوی نصف BD است. بنابراین دوپاره‌خط MQ و NP موازی و مساویند. درنتیجه MNPQ متوازی‌الاضلاعی است که آن را متوازی الاضلاع وارینیون چهارضلعی ABCD می‌نامند. واضح است که دو ضلع MN و PQ نیز با قطر AC از چهارضلعی ABCD موازی و مساوی نصف این قطر می‌باشند. لذا زاویه‌های بین دو قطر چهارضلعی ABCD با زاویه‌های متوازی‌الاضلاع MNPQ برابر می‌باشند، پس اگر یک زاویهٔ متوازی‌الاضلاع را α بگیریم، با توجه به این که مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصلضرب اندازهٔ دو قطر آن در سینوس زاویهٔ بین دو قطرش، داریم :

$$S_{MNPQ} = MN.NP.\sin\alpha = \frac{۱}{۲}AC.\frac{۱}{۲}BD.\sin\alpha$$

$$= \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}AC.BD.\sin\alpha) = \frac{۱}{۲}S_{ABCD}$$

راه دیگر. با توجه به این که $MQ = NP = \frac{BD}{۲}$ و ارتفاع مثلث ABD دو برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع MEFQ، و ارتفاع مثلث BCD دو برابر ارتفاع متوازی‌الاضلاع EFPN است، پس داریم :

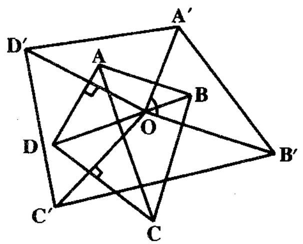
$$S_{MEFQ} = \frac{۱}{۲} S_{ABD} \ , \ S_{ENPF} = \frac{۱}{۲} S_{BCD} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

نکته. اگر دو قطر چهارضلعی ABCD بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع MNPQ به مستطیل تبدیل می‌شود، و اگر اندازهٔ دو قطر AC و BD برابر باشند، متوازی‌الاضلاع وارینیون به لوزی تبدیل می‌شود و در صورتی که قطرهای چهارضلعی ABCD هم مساوی و هم عمود بر هم باشند، متوازی‌الاضلاع MNPQ به مربع تبدیل می‌شود.

۸۶۰. با توجه به متوازی‌الاضلاعهای ایجاد شده و این خاصیت که هر قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث معادل بخش می‌کند، داریم :

$$\begin{cases} S_{OAB'B} = ۲S_{OAB} \\ S_{OBC'C} = ۲S_{OBC} \\ S_{OCD'D} = ۲S_{OCD} \\ S_{ODA'A} = ۲S_{ODA} \end{cases} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = ۲S_{ABCD}$$

۸۶۱. دو مثلث $OA'B'$ و ABC که دارای دو زاویهٔ مکمل B و O می‌باشند و ضلعهای این دو زاویه برابرند، معادل می‌باشند. همچنین دو مثلث $OC'D'$ و ACD معادلند و...



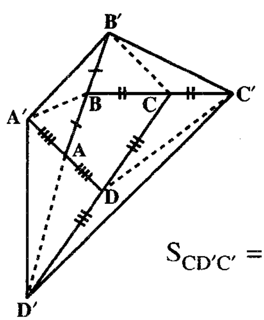
۸۶۲. هر میانه، مثلث را به دو مثلث با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. بنابراین داریم :

$$S_{ABC} = S_{CBB'} = S_{CB'C'}$$

که از آن جا نتیجه می‌شود : $S_{BB'C'} = ۲S_{ABC}$.

به همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد :

$$S_{CD'C'} = ۲S_{BCD} \ ; \ S_{DD'A'} = ۲S_{CDA} \ ; \ S_{AA'B'} = ۲S_{DAB}$$

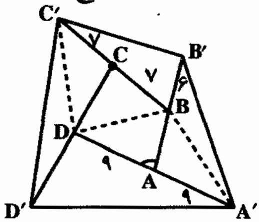


و از مجموع این چهار برابری، به‌دست می‌آید :

$$S_{BB'C} + S_{CC'D'} + S_{DD'A'} + S_{AA'B'}$$
$$= ۲(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}) = ۴S$$

به این ترتیب : $S_{A'B'C'D'} = ۴S + S = ۵S$.

۸۶۳. (د). در دو مثلث $AA'B'$ و ABD قاعده‌های AA' و AD دارای طولهای برابرند و ارتفاع نظیر از مثلث $AA'B'$ دو برابر ارتفاع نظیر از مثلث ABC است. بنابراین :



مساحت $\Delta AA'B' = ۲$ (مساحت ΔABD)

این رابطه را می‌توانیم از راه دیگر نیز به‌دست آوریم : اگر θ اندازهٔ زاویهٔ DAB باشد،مطابق شکل ملاحظه می‌کنیم که :

مساحت $\Delta AA'B' = \frac{۱}{۲}(AD)(۲AB)\sin(۱۸۰^\circ - \theta)$

$= ۲\left[\frac{۱}{۲}(DA)(AB)\sin\theta\right] = ۲$ (مساحت ΔABD)

به روش مشابه داریم :

مساحت $\Delta BB'C' = ۲$ (مساحت ΔBAC)

مساحت $\Delta CC'D' = ۲$ (مساحت ΔCBD)

مساحت $\Delta DD'A = ۲$ (مساحت ΔDCA)

بنابراین :

مساحت $A'B'C'D'$ = (مساحت $\Delta AA'B'$ + مساحت $\Delta BB'C'$)

+ (مساحت $\Delta CC'D'$ + مساحت $\Delta DD'A'$) + مساحت $ABCD$

= ۲ (مساحت ΔABD + مساحت ΔBAC)

+۲ (مساحت ΔCBD + مساحت ΔDCA) + مساحت $ABCD$

= ۵ (مساحت $ABCD$) = ۵۰

نکته. با استفاده از مسألهٔ قبل رابطهٔ $S_{A'B'C'D'} = ۵S_{ABCD} = ۵\times۱۰ = ۵۰$ را داریم، پس گزینهٔ (د) درست است.

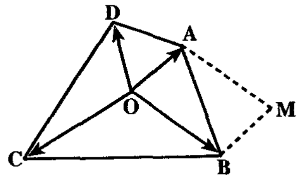
۶ . ۷ . ۳ . نسبت مساحتها

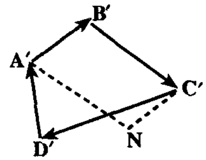
۸۶۴. نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ به مساحت متوازی‌الاضلاع $A''B''C''D''$، برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

۶ . ۷ . ۴ . رابطهٔ بین مساحتها

۸۶۵. متوازی‌الاضلاعهای OAMB و A′B′C′N ، که روی بردارهای $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ ، $\overrightarrow{B'C'}$ ساخته شده‌اند، برابرند. بنابراین داریم :

$$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}S_{OAMB}=\frac{۱}{۲}S_{A'B'C'N}=S_{A'B'C'}$$





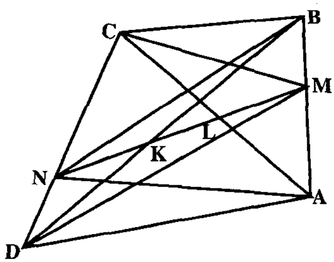
به همین ترتیب، به دست می‌آید :

$$S_{BOC}=S_{B'C'D'}\ ,\ \ S_{COD}=S_{C'D'A'}\ ,\ \ S_{DOA}=S_{D'A'B'}$$

از آن‌جا :

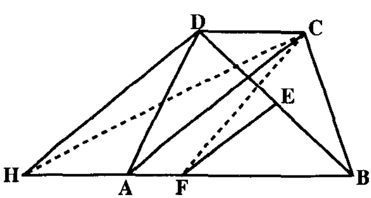
$$S=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}=(S_{A'B'C}+S_{A'D'C'})+$$

$$(S_{B'C'D'}+S_{B'A'D'})=۲S'$$



۸۶۶. فرض کنید K وسط DB و L وسط AC باشد، $S_{ANM}=S_{CNM}$ (چون $AL=LC$). به همین نحو، $S_{BNM}=S_{DNM}$ ، که از آن‌جا حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۸۶۷. اگر قطر BD قطر AC از چهارضلعی ABCD را نصف کرده باشد، نقطه‌های A و C از قطر BD به یک فاصله‌اند.



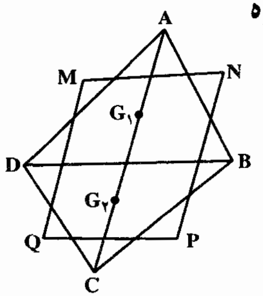
۸۶۸. از نقطهٔ D خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطهٔ H قطع کند و CH را وصل می‌کنیم. مثلثهای CAD و CAH معادلند. از آن‌جا چهارضلعی CFAD معادل مثلث CFH است، اما نقطهٔ E وسط DB و EF موازی DH است. پس F وسط BH است. پس مثلث CFH معادل مثلث CFB و در نتیجه چهارضلعی CFAD معادل مثلث CFD است.

۸۶۹. چهار ضلعیهای $AA'DD'$ و $BB'CC'$ و $ABB'A'$ و $CDD'C'$ ذوزنقه‌اند. بنابراین باید ثابت کنیم چهار مثلث حاصل از برخورد قطرهای دو چهارضلعی معادلند. برای مثال: $S_{OAB} = S_{OA'B'}$ است.

۶ . ۸ . همنهشتی چهارضلعیها

۸۷۰. قطرهای BD و $B'D'$ را رسم کنید.

۶ . ۹ . نقطه‌های ویژه

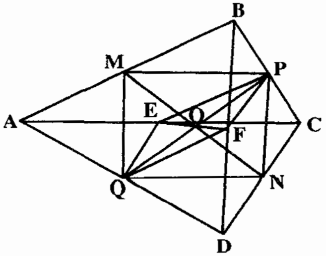


۸۷۱. اگر در چهارضلعی غیرمشخص $ABCD$ هر ضلع را به سه قسمت برابر تقسیم کنیم و نقطه‌های حاصل، دو نقطهٔ نزدیکتر به رأس واقع بر دو ضلع مجاور به آن رأس را به هم وصل کنیم و خطهای حاصل را امتداد دهیم، متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ پدید می‌آید که مرکز ثقل آن منطبق بر مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ است.

لازم به ذکر است که اگر I وسط قطر BD، G_1، G_2، G_3 و G_4 بترتیب مرکز ثقل مثلثهای ABD، CBD، ABC و DAC باشند خطهای G_1G_2 و G_3G_4 از مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ و مرکز ثقل متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ می‌گذرند. پس مرکز ثقل چهارضلعی $ABCD$ همان مرکز ثقل متوازی‌الاضلاع $MNPQ$ است.

۸۷۲. شکل درستی مسأله را نشان می‌دهد.

۶ . ۱۰ . خطهای همرس



۸۷۳. چهارضلعی $MPNQ$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا نقطه‌های M، P، N و Q وسطهای ضلعهای چهارضلعی $ABCD$ می‌باشند. پس پاره‌خطهای PQ و MN یکدیگر را نصف می‌کنند. به عبارت دیگر پاره‌خط MN از وسط پاره‌خط PQ می‌گذرد. همچنین چهارضلعی $PFQE$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. زیرا $PE \parallel FQ$ و $PE = FQ$ است. پس قطرهای آن نیز منصف یکدیگرند. یعنی EF از وسط پاره‌خط PQ می‌گذرد. درنتیجه خطهای MN، PQ و EF از یک نقطه می‌گذرند.

۶ . ۱۱ . خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز،...

۶ . ۱۱ . ۱ . خطها موازی‌اند

۸۷۴. ثابت کنید $D\hat{B}N = B\hat{N}M$ است.

۶ . ۱۱ . ۲ . خطها برهم عمودند

۸۷۶. وسط ضلعهای این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که قطرهایش با پاره‌خطهایی که مرکزهای ثقل مثلثهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، موازی‌اند. متوازی‌الاضلاع دیگری با چهار ارتفاع مثلثهای گفته شده در صورت مسأله، که از رأسهای چهارضلعی خارج می‌شوند، تشکیل می‌شود. ضلعهای متوازی‌الاضلاع اوّل، با قطرهای چهارضلعی موازی‌اند، در حالی که ضلعهای متوازی‌الاضلاع دوم، بر آنها عمودند. به علاوه، طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع دوم، $\cot g\alpha$ بار از ضلعهای متناظر متوازی‌الاضلاع اوّلی بزرگترند (α زاویهٔ حادهٔ میان قطرهای چهارضلعی است).

۸۷۷. با توجه به این که چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع وارینیون چهارضلعی $ABCD$ است و ضلعهای این متوازی‌الاضلاع دوبه‌دو موازی قطرهای AC و BD از چهارضلعی $ABCD$ می‌باشند، پس به دلیل عمود بودن AC و BD بر یکدیگر، داریم $MN \perp NP$ و $NP \perp PQ$.

۶ . ۱۲ . سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۸۷۸. در هر دو حالت (الف) و (ب) مثلثهای MNO و MPO همنهشت نیستند.

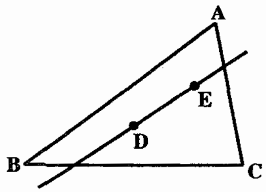
۸۸۰. گزینهٔ (د) درست است.

۸۸۱. هر مسیر را با تعداد پاره‌خطهای راستی بیان می‌کنیم که، از طریق آنها، می‌گذرد. n را طول کوتاهترین مسیری می‌گیریم که از A به B می‌رود. حکم را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم.
برای $n = 1$، به جز کوتاهترین مسیر AB، مسیری وجود دارد که از A به چهارراه $C \neq A$ می‌رود که از B به اندازهٔ ۱ فاصله دارد و از B نمی‌گذرد.
$n > 1$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، D نزدیکترین چهارراه به A، در کوتاهترین مسیر از A به B باشد. بنابر فرض استقرا، دو مسیر غیرمتقاطع p و q از D به B وجود دارد که از

A در مسیر l حرکت می‌کنیم، به نحوی که از D عبور نکند. اگر این مسیر، با مسیرهای p و q برخوردی نداشته باشد، همه چیز ثابت شده است. ولی اگر مثلاً با p برخورد داشته باشد، از آن به بعد، باید مستقیماً روی p به سمت B رفت. این مسیر q را قطع نخواهد کرد.

۸۸۲. گزینهٔ (د) درست است.

۸۸۳. راه حل اول. (i) ابتدا حالت $n=۵$ را در نظر می‌گیریم: باید نشان دهیم که حداقل $۱=\binom{۵-۳}{۲}$ چهارضلعی محدب موجود است. اگر پوشش محدب این پنج نقطه دارای چهار نقطه از این پنج نقطه بر خط مرزیش باشد، این چهار نقطه تشکیل یک چهارضلعی محدب می‌دهند. اگر خط مرزی پوشش محدب مزبور شامل تنها سه نقطه، مثلاً A، B و C باشد، در این صورت دو نقطهٔ دیگر یعنی D و E داخل ΔABC قرار می‌گیرند؛ شکل (الف) را ملاحظه کنید. در این صورت دو نقطه از سه نقطهٔ A، B و C باید در یک طرف خط DE قرار گیرند. برای صراحت مطلب فرض می‌کنیم، چنانچه در شکل (الف) آمده، A و B واقع در یک طرف DE باشند. در این صورت ABDE یک چهارضلعی محدب است.



(الف)

(ii) اکنون حالت کلی $n \geq ۵$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت به هر یک از $\binom{n}{۵}$ زیرمجموعهٔ ۵ نقطه از n نقطه، یکی از چهارضلعیهای محدبی را که وجودشان را در فوق اثبات کردیم تخصیص می‌دهیم. هر چهارضلعی با حداکثر $n-۴$ پنج نقطه‌ای وابسته است، زیرا برای نقطهٔ پنجم $(n-۴)$ امکان موجود است. بنابراین حداقل $\binom{n}{۵}\Big/(n-۴)$ چهارضلعی محدب متفاوت در مجموعهٔ n نقطهٔ داده شده وجود دارد. اما:

$$\frac{۱}{n-۴}\binom{n}{۵}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}\cdot\frac{n-۴}{n-۴}$$
$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)}{۶۰(n-۴)\times۱\times۲}$$
$$=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶۰(n-۴)}\binom{n-۳}{۲}$$

تقسیم $n(n-۱)(n-۲)$ بر $n-۴$:

$$n^۲+n+۶+۲۴/(n-۴)$$

را به دست می‌دهد؛ و چون $n\geq ۵$ باشد:

$$n^۲+n+۶+۲۴/(n-۴)\geq ۶۰$$

و درنتیجه نامساوی زیر را داریم :

$$\frac{۱}{n-۴}\binom{n}{۵} \geq \binom{n-۳}{۲} \qquad (۱)$$

نامساوی (۱) را می‌توان از این حقیقت که به ازاء $n \geq ۵$:

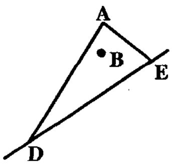
$$n(n-۱)(n-۲) \geq ۶۰(n-۴)$$

را داریم، نیز مشخص کرد. برای اثبات این مطلب تفاضل :

$$n(n-۱)(n-۲)-۶۰(n-۴) = n^{۳}-۳n^{۲}-۵۸n+۲۴۰$$

$$= (n-۵)(n-۶)(n+۸)$$

را تشکیل داده ملاحظه می‌کنیم که به ازاء $n=۵$ و $n=۶$ صفر می‌شود، و به ازاء جمیع nهای بزرگتر مثبت است. بنابراین علامت تساوی در (۱) تنها اگر $n=۵$ یا $n=۶$ باشد، برقرار است.



(ب)

راه حل دوم. سه نقطهٔ A، B و C از مجموعهٔ داده شدهٔ S را، که واقع بر خط مرزی پوشش محدب آن واقع باشند، انتخاب می‌کنیم. در این صورت : $\binom{n-۳}{۲}$ طریق انتخاب دو نقطهٔ اضافی D و E از S موجود است. چون این دو نقطه انتخاب شدند، حداقل دو نقطه از نقطه‌های A، B و C باید در یک طرف DE قرار داشته باشند. در این صورت E، D، B و A رأسهای یک چهارضلعی محدبند. زیرا اگر چنین نباشد، پوشش محدبشان، همان‌طور که در شکل (ب) آمده، یک مثلث می‌شود، و یکی از نقطه‌های B و A داخل این مثلث قرار می‌گیرد، که مناقض این حقیقت، که : C، B و A چنان انتخاب شده‌اند، که واقع بر پوشش محدب S باشند، است. بدین ترتیب $\binom{n-۳}{۲}$ چهارضلعی محدب که رأسهایشان بین نقطه‌ها مفروضند، به‌دست می‌آوریم.

تبصره. راه‌حل اوّل از این لحاظ بر راه‌حل دوم رجحان دارد که وجود حداقل $\binom{n}{۵}\Big/(n-۴)$ چهارضلعی محدب را نشان می‌دهد، و این به‌ازاء جمیع مقادیر $n \geq ۷$ از $\binom{n-۳}{۲}$ تجاوز می‌کند. (در واقع، وقتی : $n \to \infty$ چون $\binom{n}{۵}\Big/(n-۴) \sim n^{۴}/۱۲۰$ است، در حالی که $\binom{n-۳}{۲} \sim n^{۲}/۲$ می‌باشد.) اما، با توجه به طریق بیان مسأله، محتمل به نظر می‌رسد که راه‌حل دوم بیشتر در جهت خطی باشد که طراح در ذهن خود داشته است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۷

۷ . ۲ . زاویه

۷ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۸۸۴. ۱۵۰ درجه.

۸۸۵. اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{2n-4}{n}$ قائمه یا $\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$ درجه.

بنابراین داریم :

$$n=8 \Rightarrow \text{اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی ۸ ضلعی منتظم} = \frac{6\times 180^\circ}{8}=135^\circ$$

$$n=11 \Rightarrow \text{اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی ۱۱ ضلعی منتظم} = \frac{9\times 180^\circ}{11}=\frac{1620^\circ}{11}=147\frac{3^\circ}{11}$$

۸۸۶. (د). مجموع زاویه‌های n ضلعی محدب $(n-2)180^\circ$ است. پس اگر x اندازهٔ زاویهٔ مطلوب باشد، داریم :

$$(n-2)180^\circ = 2570^\circ + x \ , \ 0^\circ < x < 180^\circ$$

اگر $n=17$ ، آن‌گاه :

$$(n-2)180^\circ = 15(180^\circ) = 2700^\circ \ , \ x=130^\circ$$

به ازای $n<17$ برای x مقادیر منفی و به ازای $n>17$ برای x مقادیر بزرگتر از 180° به‌دست می‌آید.

۸۸۷. اگر تعداد ضلعها را n فرض کنیم، اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی آن برابر است با :

$$\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$$

۸۸۸. در هر چند ضلعی محدب مجموع زاویه‌های خارجی مساوی ۴ قائمه است. پس اگر یک چند ضلعی محدب بیش از سه زاویهٔ حاده داشته باشد، چون هر زاویهٔ داخلی یک چند ضلعی با زاویهٔ خارجی‌اش مکمل یکدیگرند، پس این چهارضلعی بیش از ۳ زاویهٔ خارجی منفرجه خواهد داشت و در این صورت مجموع زاویه‌های خارجی‌اش از ۴ قائمه بیشتر خواهد شد و این امکان‌پذیر نیست. پس هر چند ضلعی محدب نمی‌تواند بیش از سه زاویهٔ حاده داشته باشد.

۷ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷ . ۲ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۸۸۹. مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب $(۲n - ۴)$ قائمه است. بنابراین :

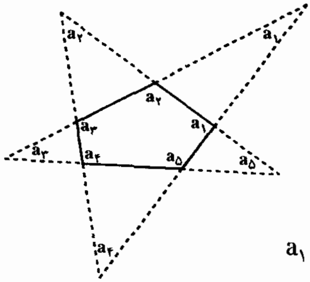
$n = ۴ \Rightarrow$ مجموع زاویه‌های درونی یک ۴ ضلعی = ۴ قائمه $= ۳۶۰^\circ$

$n = ۵ \Rightarrow$ مجموع زاویه‌های درونی یک ۵ ضلعی = ۶قائمه $= ۵۴۰^\circ$

$n = ۲۰ \Rightarrow$ مجموع زاویه‌های درونی ۲۰ ضلعی = ۳۶ قائمه $= ۳۲۴۰^\circ$

۸۹۰. مجموع زاویه‌های درونی هر n ضلعی محدب $(n - ۲)\times ۱۸۰^\circ$ است. پس جواب خواسته شده برابر است با :

$$(۱۹۹۱ - ۲)\times ۱۸۰^\circ = ۳۵۸۰۲۰^\circ$$



۸۹۱. (هـ). مطابق شکل، زاویه‌های ستاره را با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n، و زاویه‌های n ضلعی کوژ نخستین را با $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$، ...، α_n، نشان دهید، با این شرط که $\alpha_{n+۱} = \alpha_۱$. بنابراین :

$$a_۱ = ۱۸۰ - (۱۸۰ - \alpha_۱) - (۱۸۰ - \alpha_۲) = \alpha_۱ + \alpha_۲ - ۱۸۰$$

$$a_۲ = ۱۸۰ - (۱۸۰ - \alpha_۲) - (۱۸۰ - \alpha_۳) = \alpha_۲ + \alpha_۳ - ۱۸۰$$

$$a_n = ۱۸۰ - (۱۸۰ - \alpha_n) - (۱۸۰ - \alpha_{n+۱}) = \alpha_n + \alpha_۱ - ۱۸۰$$

از جمع جمله به جملهٔ عبارتهای بالا داریم :

$$S = ۲(\alpha_۱ + \alpha_۲ + \alpha_۳ + \ldots + \alpha_n) - ۱۸۰n$$

از آن جا که مجموع n زاویهٔ داخلی یک n ضلعی کوژ $۱۸۰(n - ۲)$ درجه است، پس :

$$S = ۲\times ۱۸۰(n - ۲) - ۱۸۰n = ۱۸۰(n - ۴)^\circ$$

۷ . ۲ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۸۹۲. مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب مساوی $(۲n - ۴)$ قائمه است. بنابراین $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots = (۲n - ۴)$قائمه . چون بنا به فرض $n \geq ۴$ است، پس $۲n \geq ۸$ و درنتیجه $۲n - ۴ \geq ۴$ است. پس $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots \geq ۴$ می‌باشد. حال اگر $\hat{A} <$ ۲ قائمه باشد، $\hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \ldots >$ ۲ قائمه خواهد بود و درنتیجه $\hat{A} < \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \ldots$ است.

۸۹۳. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا مجموع زاویه‌های برونی هر n ضلعی محدب ثابت و برابر ۳۶۰ درجه است.

۷.۳. ضلع

۷.۳.۱. تعداد ضلعها

۸۹۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۸۹۵. (الف). تعداد ضلعهای چند ضلعی را n می‌گیریم. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی محدب، $(n-۲)۱۸۰^\circ$، و مجموع n جملهٔ یک تصاعد حسابی برابر است با $\frac{n}{۲}$ مجموع جمله‌های اوّل و آخر. بنابراین :

$$(n-۲)۱۸۰^\circ=\frac{n}{۲}(۱۰۰+۱۴۰)$$

از حل این معادله جواب $n=۶$ به دست می‌آید.

۸۹۷. (الف). مجموع زاویه‌های داخلی این n ضلعی برحسب درجه عبارت است از :

$$۱۶۰+(۱۶۰-۵)+(۱۶۰-۵\times۲)+(۱۶۰-۵\times۳)+...+۱۶۰-۵(n-۱)$$

$$=۱۶۰n-۵(۱+۲+...+n-۱)=۱۶۰n-۵\times\frac{n(n-۱)}{۲}^{**}$$

$$=\frac{۵n}{۲}[۶۴-(n-۱)]=\frac{۵n}{۲}(۶۵-n)$$

و مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی کوژ $۱۸۰(n-۲)$ درجه است. با مساوی قراردادن این عبارتها و ضرب آنها در ۲/۵ داریم $n(۶۵-n)=۷۲(n-۲)$ که هم‌ارز است با :

$$n^۲+۷n-۱۴۴=۰\ ,\ (n-۹)(n+۱۶)=۰$$

چون n مثبت است، همان‌طور که در گزینهٔ (الف) بیان شده است، $n=۹$.

** در این جا از این مطلب استفاده کرده‌ایم که مجموع نخستین k عدد طبیعی $k(k+۱)/۲$ است.

۸۹۸. (ب). تعداد ضلعهای چندضلعی محدب را به n و اندازهٔ زاویهٔ کنار گذاشته شده را برحسب درجه به x نشان می‌دهیم. از فرمول $۱۸۰(n-۲)=۲۱۹۰+x$ به‌دست می‌آید :

$$n-۲=\frac{۲۱۹۰}{۱۸۰}+\frac{x}{۱۸۰}$$

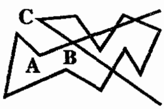
چون $۰<x<۱۸۰$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{۲۱۹۰}{۱۸۰}<n-۲<\frac{۲۱۹۰}{۱۸۰}+۱$$

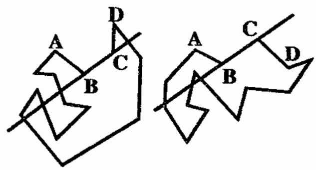
$$۱۲\frac{۱}{۶}<n-۲<۱۳\frac{۱}{۶}$$

اما n عدد صحیح است. بنابراین لازم می‌شود که $n-۲=۱۳$ و در نتیجه $n=۱۵$. (در ضمن داریم : $۱۳\times۱۸۰=۲۳۴۰=۲۱۹۰+۱۵۰$ پس اندازهٔ زاویهٔ استثناء شده ۱۵۰° است).

۸۹۹. خط راستی که با امتداد یک ضلع BC از خط شکسته به‌دست آمده است، برحسب این که دو ضلع مجاور آن AB و CD در یک طرف مختلف خط راست BC واقع باشند، ضلعهای دیگر خط شکسته را در تعدادی زوج یا تعدادی فرد قطع می‌کند (در حالت اخیر، ضلع BC را «زیگزاگ» می‌نامیم). در واقع، زوج یا فرد بودن تعداد برخوردهای خط شکسته با خط راست BC، با این مطلب معلوم می‌شود که بدانیم، نقطه‌های A و D، در یک طرف این خط راست قرار دارند یا در دو طرف آن (شکل الف). ولی روی هر خط شکستهٔ بسته، تعداد «زیگزاگها» زوج است: وقتی روی محیط این خط شکسته حرکت می‌کنیم، اگر توجه کنیم که در هر رأس به کدام طرف می‌چرخیم ـ به راست یا به چپ ـ روشن می‌شود که تعداد چرخش‌های به راست برابر است با تعداد چرخش‌های به چپ، با توجه به این دو نکته، حکم مسأله ثابت می‌شود.



(ب)



(الف)

اگر به نکتهٔ زیر توجه کنیم، می‌توان اثبات کوتاه‌تری به‌دست آورد:
ضلعهای زاویه‌ای که از امتداد هر دو ضلع مجاور AB و BC حاصل می‌شود، خط شکسته را به تعدادی زوج قطع می‌کند. (شکل ب)

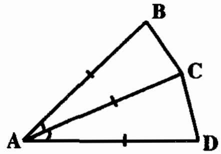
۹۰۰. گزینهٔ (ج) درست است.

۹۰۱. می‌دانیم که تعداد قطرهای یک nضلعی از دستور $\frac{n(n-۳)}{۲}$ محاسبه می‌شود. در جدول زیر در ردیف اوّل عدهٔ ضلعهای چهارضلعی، و در ردیف دوم تعداد قطرهای آن است. دو عدد از ردیف پایین را باید انتخاب کنیم که مجموع آنها ۸۹ است. داریم:

$۳۵ + ۵۴ = ۸۹$

چندضلعیهای نظیر آنها ۱۰ و ۱۲ ضلعی است. پس مجموع ضلعهای آنها ۲۲ است.

۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۰	۲	۵	۹	۱۴	۲۰	۲۷	۳۵	۴۴	۵۴	۶۵



۹۰۲. حداکثر دو ضلع. نمونه‌ای از چند ضلعی را که، دو ضلع آن برابر با قطر بزرگتر است، در شکل ببینید. فرض می‌کنیم، تعداد چنین ضلعهایی، بیشتر از ۲ باشد. دو ضلع AB و CD از این ضلعها را، که رأس مشترکی ندارند، در نظر می‌گیریم (این انتخاب ممکن است، زیرا وقتی چندضلعی دارای قطر باشد، مسلماً مثلث نیست). در این صورت، دست‌کم یکی از قطرهای AC یا BC، طولی بزرگتر از طول ضلع AB دارد. اگر این قطرها در نقطهٔ K یکدیگر را قطع کرده باشد، آن‌وقت:

$$AC + BD = AK + KC + BK + KD > AB + CD = ۲AB$$

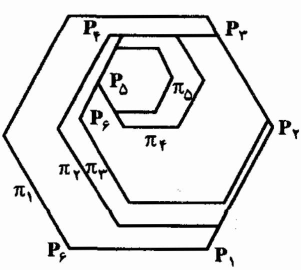
۷ . ۳ . ۲ . رابطهٔ بین ضلعها

۷ . ۳ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین ضلعها (برابریها)

۹۰۳. $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_۸$ را، بترتیب، طول ضلعهای هشت ضلعی می‌گیریم. از برابری زاویه‌ها، بلافاصله نتیجه می‌شود که ضلعهای روبه‌رو، با هم موازی‌اند. دو ضلع روبه‌روی $a_۱$ و $a_۵$ و همچنین دو ضلع روبه‌روی $a_۳$ و $a_۷$ را ادامه می‌دهیم، مستطیلی به دست می‌آید که، از آن، می‌توان هشت ضلعی را «با بریدن گوشه‌ها» به دست آورد. از برابری ضلعهای روبه‌رو در مستطیل، به دست می‌آید:

$$\frac{a_۸}{\sqrt{۲}} + a_۱ + \frac{a_۲}{\sqrt{۲}} = \frac{a_۶}{\sqrt{۲}} + a_۵ + \frac{a_۴}{\sqrt{۲}}$$
$$\Rightarrow a_۵ - a_۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a_۸ + a_۲ - a_۶ - a_۴)$$

چون a_i عددی درست است و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ عددی گنگ، بنابراین $a_۵ = a_۱$. به همین ترتیب، برابری بقیهٔ ضلعهای روبه‌رو هم ثابت می‌شود.



۹۰۴. راه حل اوّل. نتیجهٔ مطلوب را عملاً با این فرض که تنها $n-۱$ ضلع n ضلعی رابطهٔ داده شده را برقرار می‌سازند، و به عبارت دیگر:

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots \geq a_{n-۱}$$

است اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n رأسهای چندضلعی داده شدهٔ II، که در آن $P_iP_{i+۱}$ دارای طول a_i است، باشد، بی‌آن که عمومیت مسأله از بین برود. فرض می‌کنیم که $P_nP_۱$ افقی است. به ازاء هر $i(i = ۱, ۲, \cdots, n-۱)$، فرض می‌کنیم II، nضلعی منتظمی با ضلع $P_iP_{i+۱}$، که یال تحتانیش افقی است، باشد (شکل را که در

آن $n = ۶$ است ملاحظه کنید). از آن‌جا که $a_i \geq a_{i+۱}$ است، هرچند ضلعی II_i شامل چندضلعی بعدی $II_{i+۱}$ است. در این صورت هرگاه نامساوی اکید $a_i > a_{i+۱}$ رخ دهد، یال تحتانی $II_{i+۱}$ از یال تحتانی II_i بلندتر است. بنابراین اگر هریک از نامساوی‌های $a_۱ > a_۲, a_۲ > a_۳, \ldots, a_{n-۲} > a_{n-۱}$ برقرار باشد، یال تحتانی $II_{n-۱}$ از یال تحتانی $II_۱$ بلندتر می‌شود و این تناقض ایجاد می‌کند، زیرا P_n بر هر دو این یالهای تحتانی قرار دارد. در نتیجه:

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_{n-۱}$$

می‌شود. واضح است که $a_n = a_۱$ نیز برقرار است، زیرا در غیراین‌صورت II در $P_۱$ بسته نخواهد بود.

راه حل دوم. از آن‌جا که زاویه‌های داخلی n ضلعی مساویند، زاویه‌های خارجی آن، هریک به اندازهٔ $۲\pi/n$، نیز چنینند. و از آن‌جا که nضلعی بسته است، ملاحظه می کنیم که جمع برداری:

$$a_۱(\cos ۰ + i\sin ۰) + a_۲\left(\cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}\right) + \cdots$$

$$+a\left(\cos\frac{۲(n-۱)\pi}{n} + i\sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n}\right) = ۰ \qquad (۱)$$

است. در این صورت هریک از قسمتهای حقیقی و موهومی (۱)، ۰ است؛ و بنابراین با استفاده از قسمت موهومی و این حقیقت که $\sin ۰ = ۰$ است، حاصل می‌شود:

$$a_۲ \sin\frac{۲\pi}{n} + a_۳ \sin\frac{۴\pi}{n} + \cdots + a_n \sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n} = ۰ \qquad (۲)$$

این معادله، $(n-۱)$ جمله دارد، و اگر جمله‌های k ام و $(n-k)$ام آن را مقایسه کنیم درمی‌یابیم که بترتیب دارای فاکتورهای:

$$\sin\frac{۲k\pi}{n} \quad , \quad \sin\frac{۲(n-k)\pi}{n} = \sin\left(۲\pi - \frac{۲k\pi}{n}\right) = -\sin\frac{۲k\pi}{n}$$

می‌باشند. دراین صورت این زوج جمله‌ها را ترکیب کرده، (۲) را به صورت:

$$(a_۲ - a_n)\sin\frac{۲\pi}{n} + (a_۳ - a_{n-۱})\sin\frac{۴\pi}{n} + \cdots = ۰ \qquad (۳)$$

می‌نویسیم. در این مورد اگر n فرد باشد، تمام جمله‌های (۲) زوج زوج می‌شوند؛ و اگر n زوج باشد، جملهٔ وسط، یعنی $a_{(n+۲)/۲} \cdot \sin\pi = ۰$، باقی می‌ماند. و در هر حال، تمام جمله‌های (۳) نامنفی‌اند. زیرا تمام زاویه‌های بین ۰ و π، و تمام ضریبهای $a_j - a_m$ دارای $j < m$ اند. نتیجه می‌شود که هر جملهٔ (۳) برابر ۰ است و این در حالت خاص مستلزم این است که $a_۲ = a_n$، که همراه با نامساویهای داده شده نشان می‌دهد که

$a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ است. بنابراین (۱) می‌شود :

$$a_1 + a_n\left[\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right] = 0$$

مجموع واقع در کروشه شامل $n-1$ ریشهٔ : $x^n - 1 = 0$

است که ریشهٔ nام آن ۱ است. از آن‌جا که مجموع تمام n ریشهٔ ضریب x^{n-1}، که درحالت مسأله‌مان ۰ است، می‌باشد، نتیجه می گیریم که مقدار داخل کروشه ۱- است و بنابراین :

$$a_1 + a_2(-1) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2$$

۷ . ۳ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین ضلعها (نابرابریها)

۹۰۵. از مثلث و نامساوی مثلثی استفاده کنید.

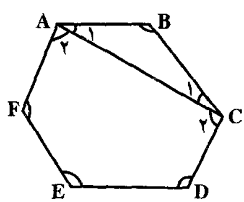
$$AC < AB + CD$$

$$AD < AC + CD$$

۷ . ۳ . ۳ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۰۶. اگر حکم مسأله درست باشد، هر خط راستی که شامل ضلعی از یک خط شکسته است، ضلعهای خط شکستهٔ دیگر را در نقطه‌های داخلی آن قطع می کند و تعداد چنین نقطه‌هایی عددی زوج است.

۹۰۷. چون مجموع زاویه‌های شش ضلعی محدب برابر ۸ قائمه است و زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند، پس قائمه۸ $= 2\hat{A}+2\hat{B}+2\hat{C}$. در نتیجه قائمه۴ $= \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ است. از طرفی درمثلث ABC داریم : $\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}_1 = 180°$ پس خواهیم داشت : $\hat{A}-\hat{A}_1+\hat{C}-\hat{C}_1 = 180° \Rightarrow \hat{A}_2+\hat{C}_2 = 180° \Rightarrow FA \| CD$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که ضلعهای مقابل دیگر نیز متوازی‌اند.



۷ . ۴ . قطر

۷ . ۴ . ۱ . اندازهٔ قطر

۹۰۸. a) نه همیشه. مثلاً، اگر روی هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول ۲، مثلث‌های متساوی‌الساقین به ارتفاع $\frac{۱}{۱۰}$ بسازیم، همهٔ ضلعهای شش‌ضلعی حاصل، بیشتر از واحد است، درحالی که طول هر قطر آن از ۲ تجاوز نمی‌کند.

b) همیشه بین قطرهای AD، BE و CF، دو قطر پیدا می‌شود که زاویهٔ بین آن، α، از ۶۰ درجه کمتر نیست. این دو قطر را، مثلاً، AD و BE می‌گیریم. متوازی‌الاضلاع BEDK را می‌سازیم. چون :

$$D\hat{A}K = \alpha \geq ۶۰^\circ \text{ و } AD > ۲ \text{ و } BE = DK > ۲$$

بنابراین $AK > ۲$ ، ولی $AB + BK \geq AK$ ، بنابراین یا $AB > ۱$ و یا $ED = BK > ۱$.

۷ . ۴ . ۲ . تعداد قطرها

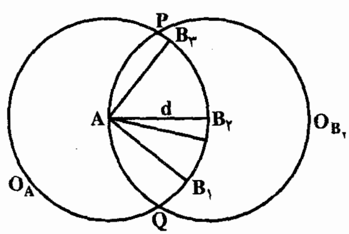
۹۰۹. گزینهٔ (ب) درست است.

۹۱۰. گزینهٔ (الف) درست است.

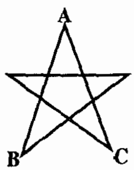
۹۱۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۹۱۲. نتیجه را با استفاده از استقرا روی n، به کمک لم زیر اثبات می‌کنیم.

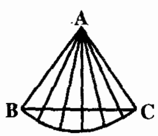
لم. اگر بیش از دو قطر از یکی از نقطه‌های مفروض اخراج شود، در این صورت نقطهٔ دیگری موجود است که از آن، فقط یک قطر اخراج می‌شود.



(الف)



(ب)



(ث)

اثبات. فرض می‌کنیم A نقطهٔ انتهایی سه (یا بیشتر از) سه قطر باشد، شکل (الف) را ملاحظه کنید. نقطه‌های انتهایی دیگر این قطرها بر دایرهٔ O_A به مرکز A و شعاع d قرار می‌گیرند. از این گذشته، تمام آنها بر کمانی که بر حسب رادیان کوچکتر یا مساوی $\pi/۳$

است واقع می‌شوند، زیرا در غیر این‌صورت زوجی که بیشترین فاصله را دارند در فاصله‌ای بزرگتر از d از یکدیگر قرار می‌گیرند، نقطه‌های انتهایی دیگر سه قطر از A را با B_1 ، B_2 و B_3 نمایش می‌دهیم و در آن‌ها B_2 بین B_1 و B_3 ی بر این کمان واقع است.

به مرکز B_2 و به شعاع d دایرهٔ O_{B_2} را رسم می‌کنیم، و نقطه‌های برخورد O_{B_2} و O_A را با P و Q نمایش می‌دهیم، و ادعا می‌کنیم که غیر از A، هیچ نقطه‌ای از مجموعهٔ داده شده بر دایرهٔ O_{B_2} واقع نیست. زیرا فاصلهٔ هریک از نقطه‌های واقع بر کمان $\widehat{PQ}$ ی بزرگتر این دایره (غیر از P و Q) از A بیشتر از d است، فاصلهٔ هریک از نقطه‌های واقع بر کمان $\widehat{PA}$ (از جمله P اما نه A) از B_1 بیشتر از d است و فاصلهٔ تمام نقطه‌ها واقع بر کمان $\widehat{QA}$ (از جمله Q اما نه A) از B_3 بیشتر از d است. در این صورت نتیجه می‌شود که B_2A تنها قطر اخراج شده از B_2 است. بنابراین اگر از A، $k > 2$ قطر اخراج شود، حداقل یک نقطه موجود است که از آن تنها یک قطر اخراج شده است.

اثبات استقرایی. در مورد مجموعهٔ سه نقطه ، واضحاً حداکثر سه قطر موجود است. بنابراین ادعای مسأله در مورد $n = 3$ برقرار است. فرض می‌کنیم این ادعا برای مجموعه‌های n نقطه با : $n = 3 , 4 , \dots , m$ برقرار باشد. در این صورت نشان می‌دهیم که به ازاء مجموعه‌های $m+1$ نقطه نیز برقرار است.

یک مجموعهٔ $m+1$ نقطه به نام S را درنظر می‌گیریم. در این مورد دو حالت تمیز می‌دهیم :

(a) از هریک از $m+1$ نقطه حداکثر دو قطر اخراج شده است. در این صورت از آن‌جا که هر قطر دو نقطهٔ انتهایی دارد، حداکثر $2(m+1)/2 = m+1$ قطر موجود است، و بنابراین ادعای مسأله در مورد S برقرار است.

(b) نقطهٔ Aیی از S موجود است که از آن بیش از دو قطر اخراج شده است. در این صورت، بنا به لم اثبات شده در بالا، نقطهٔ دیگر Bیی از S وجود دارد که از آن فقط یک قطر اخراج شده است. اکنون مجموعهٔ $S - B$ ی m نقطهٔ باقیمانده (چون B از S حذف شود) را درنظر می‌گیریم. بنا به فرض استقرا، $S - B$ حداکثر m قطر دارد. در این صورت چون B به $S - B$ افزوده شود، مجموعهٔ S نتیجه، دقیقاً یک قطر حاصل می‌کند. در نتیجه S حداکثر $m+1$ قطر دارد، و این اثبات را کامل می‌کند.

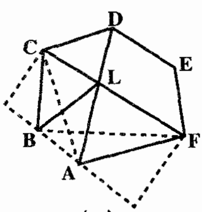
تبصره. به ازاء هر $n \geq 3$ ، مجموعه‌های S شامل n نقطه واقع در صفحهٔ با دقیقاً n قطر موجود است. اگر n فرد باشد، در این صورت S مجموعهٔ رئوس یک n ضلعی منتظم دارای این خاصیت است. (شکل ب، که در آن $n = 5$ است، را ملاحظه کنید). برای به‌دست آوردن مثالی که در مورد تمام n های بزرگتر از یا مساوی با ۳ به‌کار رود، شکل (ث) را درنظر می‌گیریم. در این شکل A، B و C رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاعند. $n - 3$ نقطهٔ باقی‌مانده بر کمان دایروی $\widehat{BC}$ به مرکز A انتخاب شده‌اند. با ترکیب مفاهیم

مشمول در این دو شکل می‌توان بازهم مثالهای دیگری به دست آورد. بنابراین در شکل (ب) می‌توانیم نقطه‌های واقع بر کمان BC به مرکز A را اضافه کنیم.

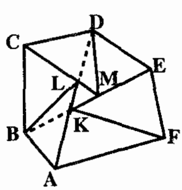
ضمناً توجه داشته باشید که شکلهای (ب) و (ث) دو حالت (a) و (b)ی رخ دهنده در اثبات استقرایی‌مان را توضیح می‌دهند.

۷ . ۴ . ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

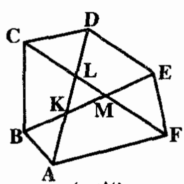
۹۱۳. سه قطر AD، BE و CF از شش ضلعی ABCDEF را (که هر رأس را به رأس مقابل وصل می‌کنند) رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم، این قطرها، یکدیگر را در نقطه‌های K، L و M قطع کرده باشند (شکل الف)، در حالت خاص، ممکن است نقطه‌های K، L و M بر هم منطبق باشند. شش مثلثی را درنظر می‌گیریم که، همراه با مثلث KLM، شش‌ـضلعی ABCDEF را تشکیل می‌دهند. روی شکل، این مثلثها عبارتند از ABL، BCL، CDM، DEM، EFK و FAK (شکل ب). اگر مساحت شش ضلعی را S بنامیم، دست کم مساحت یکی از این مثلثها از $\frac{1}{6}$ S کمتر است (در غیر این‌صورت، مجموع مساحتهای این شش مثلث از S بیشتر می‌شود، که ممکن نیست). مثلاً فرض کنید $S_{ABL} \le \frac{1}{6}S$ (شکل ج). ثابت می‌کنیم که، در این صورت، مساحت یکی از مثلثهای ABC و ABF (با قاعدهٔ مشترک AB)، از $\frac{1}{6}S$ تجاوز نمی‌کند. در واقع، مساحت مثلث با قاعدهٔ AB و ارتفاع h برابر است با $\frac{1}{2}AB \times h$ ؛ ارتفاع مثلث ABL، بین ارتفاعهای دو مثلث ABC و ABF قرار دارد، یعنی از هر دوی آنها نمی‌تواند کوچکتر باشد.



(ج)



(ب)



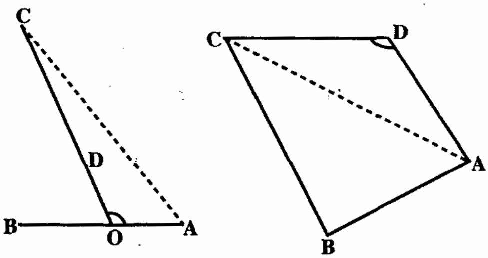
(الف)

نکته. در استدلال پایان حل مسأله، می‌توان به نکته‌ای برخورد که اغلب با آن روبه رو می‌شویم: حداکثر مقدار تابع خطی f(x)، که در بازهٔ مفروض [a,b] داده شده است، همیشه در یکی از دو انتهای بازه ظاهر می‌شود، یعنی مقدار f(x)، به ازای هر مقدار x، از f(a) یا f(b) تجاوز نمی‌کند. در مسألهٔ ما، این تابع، عبارت است از مساحت مثلث $f(h) = \frac{1}{2}AB \times h$.

۹۱۴. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و دو پاره‌خط غیرمتقاطع را درنظر می‌گیریم که قطرهای یک مجموعهٔ محدب باشند. دو حالت ممکن است: ۱) هیچ کدام از پاره‌خطها با امتداد دیگری نقطهٔ مشترک ندارد؛ ۲) یکی از پاره‌خطها، امتداد دیگری را قطع می‌کند.

در حالت اول، چهارضلعی محدب ABCD را درنظر می‌گیریم که، ضلعهای AB و CD آن، قطر باشند. از آن‌جا که، دست کم یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویهٔ D، از ۹۰ درجه کمتر نیست، بنابراین $AC > CD$ ، یعنی CD قطر نیست. در حالت دوم، نقطهٔ O محل برخورد قطر AB با امتداد قطر CD (از طرف D) را درنظر می‌گیریم. چون دست‌کم یکی از دو زاویهٔ AOC یا BOC؛ و مثلاً اولی، کمتر از ۹۰ درجه نیست، بنابراین

$AC > OC > CD$



یعنی CD قطر نیست. به این ترتیب، در هر دو حالت، مواجه با تناقض می‌شویم.

۹۱۵. ضلعهای AB، CD و EF را امتداد می‌دهیم تا از برخورد آنها با یکدیگر مثلث UVW پدید آید که A و B بر UV، C و D بر VW، E و F بر WU واقع باشند. چون $UE = AD = FW$ نتیجه می‌شود که $UF = EW = BC$. پس BCFU متوازی‌الاضلاع است و CF با AB موازی است. هرگاه X و Y نقطه‌های برخورد BE با CF و AD باشد، CDEX و BCDY متوازی‌الاضلاعند و A' و F' مرکزهای آنها که وسطهای DB و DX می‌باشند، روی خطی موازی با BX و AF قرار دارند، و داریم:

$AF = BX = ۲F'A'$

بنابراین AA' و FF' در G برخورد می‌کنند به گونه‌ای که:

$AG = ۲GA'$ و $FG = ۲GF'$

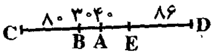
اما AA' و FF' میانه‌های مثلثهای ACF و BDF می‌باشند، پس G مرکز ثقل هریک از این دو مثلث است.

۹۱۶. اثبات را، با استقرای روی n، تعداد ضلعهای چند ضلعی، می‌دهیم.

حکم، برای $n = ۳$ درست است، زیرا سه ضلعی قطر ندارد. اکنون، فرض می‌کنیم حکم، برای عدد $n \geq ۳$ درست باشد، و $(n + ۲)$ ضلعی محدبی را درنظر می‌گیریم که، رأسهای آن، با روشی که در مسأله گفته شده است، رنگ شده باشند. در این صورت، چنان رأسی مثل A وجود دارد که، دو رأس مجاور آن، دارای رنگهای مختلف هستند.

در واقع، در غیر این صورت، باید هر دو رأسی که یک در میان قرار گرفته‌اند، رنگهای یکسانی داشته باشند و به خاطر فرد بودن تعداد $n+2$، همهٔ رأسها همرنگ می‌شوند که شرط مسأله را نقض می‌کند. در این صورت، قطری که دو رأس مجاور رأس A را به هم وصل می‌کند، $(n+2)$ ضلعی را به یک مثلث و یک $(n+1)$ ضلعی تقسیم می‌کند. اگر در این $(n+1)$ ضلعی، باز هم رأسی پیدا شود که در همسایگی خود، دو رأس با رنگهای مختلف داشته باشد، آن وقت با وصل این دو رأس ناهمرنگ، $(n+1)$ ضلعی، به یک مثلث و یک nضلعی تبدیل می‌شود و برای nضلعی حاصل، بنا بر فرض استقرا تقسیم مطلوب وجود دارد. ولی اگر چنین رأسی در $(n+1)$ ضلعی وجود نداشته باشد، آن وقت، هر دو رأس دلخواه آن که، تنها یک رأس در بین خود داشته باشند، همرنگند، یعنی تمام رأسها با دو رنگ و به صورت یک درمیان، رنگ شده‌اند. چون رنگ رأس A با رنگ هریک از دو رأس مجاور خود فرق دارد، بنابراین، باید با رنگ همه رأسهای دیگر $(n+2)$ ضلعی اصلی فرق داشته باشد. بنابراین، اگر از همان ابتدا، همهٔ قطرهایی از $(n+2)$ ضلعی را، که از A گذشته‌اند، رسم کنیم، به تقسیم مطلوب می‌رسیم. به این ترتیب، درستی حکم برای $(n+2)$ ضلعی هم ثابت شد.

۹۱۷. این نابرابری روشن است:



$$|CD| \le |CB| + |BA| + |AE| + |ED|$$

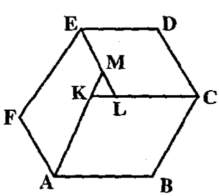
ولی، هر دو طرف نابرابری، بنا به فرض، برابر ۲۳۶ است. بنابراین، باید نقطه‌های C، B، A، E و D روی یک خط راست باشند و در نتیجه، فاصلهٔ E تا C برابر ۱۵۰ کیلومتر شود.

۷. ۵. پاره‌خط

۷. ۵. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷. ۵. ۱. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۹۱۸. PQ و EB را رسم کنید.



۹۱۹. a) مقدار هریک از زاویه‌های شش ضلعی برابر ۱۲۰ درجه و بنابراین، ضلعهای روبه‌رو، با هم موازی‌اند. در ضمن، می‌توان فرض کرد $AB \ge DE$. اکنون، متوازی‌الاضلاعهای ABCK، CDEL و AFEM را می‌سازیم. اگر نقطه‌های K، L و M منطبق برهم نباشند، هر زاویهٔ مثلث KLM برابر ۶۰ درجه می‌شود. یعنی:

$$KL = LM = KM$$

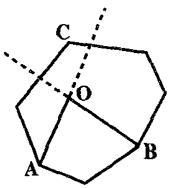
و بنابراین : $AB - DE = CD - FA = FE - BC$

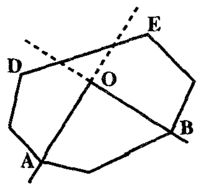
b) می‌توان فرض کرد $a_1 > a_4$. مثلث متوازی‌الاضلاع KLM را، با این ضلعها می‌سازیم :

$$KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_3 - a_6 = a_5 - a_2$$

KL را به اندازهٔ $LC = a_4$، LM را به اندازهٔ $ME = a_6$ و MK را به اندازهٔ $KA = a_2$ امتداد می‌دهیم و متوازی‌الاضلاعهای AKCB، CLED و AFEM را می‌سازیم. ABCDEF همان شش ضلعی مطلوب است.

۹۲۰. حکم، برای مثلث ABC بسادگی ثابت می‌شود : اگر نقطهٔ O در درون مثلث و در ضمن مثلثهای AOB، BOC و COA متساوی‌الساقین باشند، آن وقت از بین زاویه‌های AOB، BOC و COA، دست کم دو تا، از ۱۲۰ درجه بیشترند. این زاویه‌ها را AOB و BOC می‌گیریم. در این صورت $AO = BO = OC$.





اکنون با استفاده از این حالت خاص، به عنوان پیش قضیه، حکم مسأله را برای چندضلعی ثابت می‌کنیم. اگر A و B دو رأس دلخواه از چندضلعی باشند، آن وقت یا در درون زاویه‌ای که از امتدادهای AO و BO در نقطهٔ O تشکیل می‌شود، رأس E از چندضلعی را قطع می‌کند و یا ضلعهای این زاویه، ضلع ED از چندضلعی را قطع می‌کند. (شکل) در حالت اوّل، نقطهٔ O در درون مثلث ABCواقع است و، همان طور که در بالا ثابت کردیم، $AO = BO = CO$ ؛ در حالت دوم، نقطهٔ Oدر درون مثلثهای BDE و ADE قرار دارد و بنابراین $AO = DO = EO = BO$.

۹۲۱. الف. اگر طول ضلع چندضلعی برابر با a وS مساحت آن باشد و x_1، x_2، ...، x_n فاصله‌های نقطه‌ای معلوم در درون چندضلعی تا ضلعهای آن باشد، آن وقت حکم مسأله از برابری $S = \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{2}$ نتیجه می‌شود.

ب. چندضلعی منتظمی را درنظر بگیرید که چندضلعی داده شده را دربردارد و ضلعهایش با ضلعهای چندضلعی داده شده موازی است. مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون چندضلعی داده شده تا ضلعهای چندضلعی منتظم، مقدار ثابتی است (قسمت (الف)) و تفاضل آن با مجموع فاصله‌های این نقطه تا ضلعهای چندضلعی داده شده ثابت است.

۷ . ۵ . ۱ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۰.۹۲۲ و O' را دو نقطهٔ مفروض می‌گیریم و برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم نقطهٔ O' در درون، یا روی ضلعهای مثلث $OA_۱A_۲$ واقع باشد. در این صورت داریم :

$$O'A_۱ + O'A_۲ < OA_۱ + OA_۲ \,,\; O'A_i - OA_i \le ۱۰$$

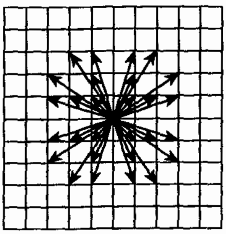
$$(i = ۳, ۴, \ldots, ۱۲)$$

۷ . ۶ . محیط

۷ . ۶ . ۱ . اندازهٔ محیط

۹۲۴.محیط ۳۲ ضلعی $A_۱A_۲ \cdots A_{۳۲}$ را به صورت مجموع ۳۲ بردار می‌گیریم :

$$\overrightarrow{A_۱A_۲} + \overrightarrow{A_۲A_۳} + \cdots + \overrightarrow{A_{۳۲}A_۱} = ۰$$



چون با هر ۳۲ بردار با جهتهای مختلف و مجموع۰، می‌توان یک ۳۲ ضلعی محدب ساخت، مسأله به این جا منجر می‌شود که : ۳۲ بردار پیدا کنیم که با شرطهای زیر سازگار باشند :

الف) ابتدا و انتهای هر بردار، در نقطه‌های گرهی کاغذ شطرنجی باشد ؛ ب) هر دو بردار، دارای جهتهای مختلف باشند ؛ ج) مجموع همهٔ بردارها، برابر ۰ باشد ؛ د) با برقراری شرطهای الف) تا ج) مجموع طولهای همهٔ بردارها، حداقل ممکن باشد.

همهٔ بردارها را با مبدأ مشترک درنظر می‌گیریم. دستگاه ۳۲ بردار شکل، با همهٔ شرطهای الف) تا د) سازگارند. در بین آنها چهار بردار به طول واحد (در شکل رسم نشده) چهار بردار به طول $\sqrt{۲}$ و سه گروه هشت برداری، بترتیب به طول $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۳}$ وجود دارد.

نکته. به همین ترتیب می‌توان n گروه چهار برداری با جهتهای مختلف انتخاب کرد به نحوی که ۴n ضلعی محدبی که با ضلعهایی به طول این بردارها و با رأسهایی واقع در نقطه‌های گرهی صفحهٔ شطرنجی ساخته می‌شود، حداقل محیط را داشته باشند.

۷. ۶. ۲. رابطهٔ بین محیطها

۷. ۶. ۲. ۱. رابطهٔ بین محیطها (برابریها)

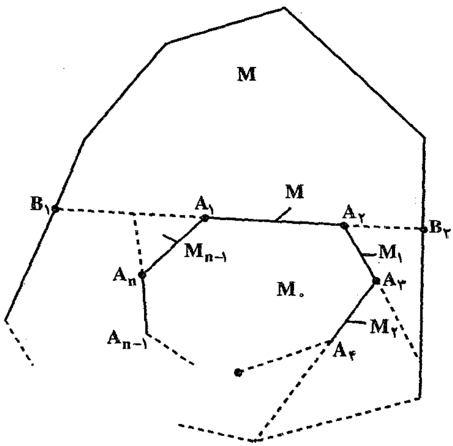
۹۲۵. با توجه به این که در n ضلعی منتظم به ضلع C_n و سهم a_n، $C_n = ۲a_n \cdot tg\frac{۱۸۰}{n}$ است، نسبت خواسته شده برابر است با : ۲۴:۱۶ = ۴ / ۳ زیرا

$$C_۶ = ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times tg۳۰ = ۴ \Rightarrow ۲P = ۲۴$$

$$C_۸ = ۲ \times (\sqrt{۲}+۱)tg۲۲/۵ = ۲(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱) = ۲ \Rightarrow ۲P' = ۸ \times ۲ = ۱۶$$

$$۲P:۲P' = ۲۴ \div ۱۶ = \frac{۳}{۲}$$

۷. ۶. ۲. ۲. رابطهٔ بین محیطها (نابرابریها)



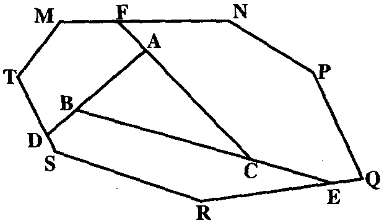
۹۲۶. فرض می‌کنیم، چندضلعی محدب $M_۰ = A_۱A_۲\cdots A_n$ در درون چندضلعی محدب M واقع باشد. خط راست $A_۱A_۲$، چند ضلعی M را به دو بخش تقسیم می‌کند که، یکی از آنها، چندضلعی محدب $M_۱$ را تشکیل می‌دهد که شامل چندضلعی $M_۰$ است (شکل)؛ درضمن، ضلع $B_۱B_۲$ از چندضلعی $M_۱$، که پاره‌خط راست $A_۱A_۲$ را دربر می‌گیرد، ضلع چندضلعی M نیست؛ بنابراین $P_{M_۱} < P_M$ (زیرا پاره‌خط راست $B_۱B_۲$، از هر خط شکسته‌ای که دو انتهای آن را به هم وصل کند، کوچکتر است). خط راست $A_۲A_۳$ از چندضلعی $M_۱$، چند ضلعی محدب $M_۲$، را جدا می‌کند که شامل چندضلعی $M_۰$ است و در ضمن، $P_{M_۲} \le P_{M_۱}$. اگر استدلال را، به همین ترتیب، ادامه دهیم، به دنبالهٔ این چند ضلعیها می‌رسیم :

$$M \supset M_۱ \supset M_۲ \supset \cdots \supset M_n$$

که آخرین آنها، بر چندضلعی $M_۰$ منطبق است و در ضمن، این نابرابریها برقرار است :

$$P_M \ge P_{M_۱} \ge P_{M_۲} \ge \cdots \ge P_{M_n} = P_{M_۰}$$

که از آن‌جا، نابرابری مورد نظر، به‌دست می‌آید.



۹۲۷. ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC را بترتیب از طرف C،B و A امتداد می‌دهیم تا چند ضلعی را بترتیب در نقطه‌های D، E و F قطع کنند. با توجه به این مسأله که «طول هر پاره خط از طول هر پاره خط شکسته‌ای که دو سرش منطبق بر دو سر آن پاره خط باشد کوچکتر است» می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} AD = AB + BD < DT + TM + MF + FA & (۱) \\ BE = BC + CE < BD + DS + SR + RE & (۲) \\ CF = CA + AF < FN + NP + PQ + QE & (۳) \end{cases}$$

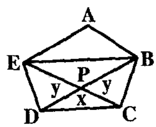
از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم :

$$AB + BC + CA < MN + NP + PQ + RS + QR + ST + TM$$

$\Rightarrow$ ABC محیط مثلث < MNPQRST محیط چند ضلعی

۷ . ۷ مساحت

۷ . ۷ . ۱. اندازهٔ مساحت



۹۳۰. [ABC] را به معنای مساحت مثلث ABC می‌گیریم. چون

$$[EDC] = [BDC] = ۱$$

بنابراین، ارتفاعهای وارد بر ضلع CD در این دو مثلث، طولی برابر دارند و از آن‌جا $CD \parallel EB$، به همین ترتیب، ثابت می‌شود که هر قطر پنج ضلعی با یکی از ضلعهای آن، موازی است. چهارضلعی ABPE متوازی‌الاضلاع است و $[PEB] = ۱$. فرض می‌کنیم :

$$x = [PDC] \;,\; y = [BPC] = [EDP]$$

داریم : $x + y = ۱$ و

$$\frac{[EDP]}{[EPB]} = \frac{DP}{PB} = \frac{[PDC]}{[PCB]} \text{ یا } \frac{y}{۱} = \frac{x}{y}$$

بین دو معادلهٔ $x + y = ۱$ و $\frac{x}{y} = \frac{y}{۱}$، مجهول x را حذف می‌کنیم، به این معادله می‌رسیم :

$$y^۲ + y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲} \;,\; x = y^۲ = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲}$$

از این جا، برای S ، مساحت پنج ضلعی، خواهیم داشت :

$$S = y + x + y + ۲ = \frac{۵ + \sqrt{۵}}{۲}$$

برای این که نشان دهیم، بی‌نهایت پنج ضلعی ناهمنهشت از این‌گونه وجود دارد، مثلث دلخواه PDC را با مساحتی برابر x رسم می‌کنیم. CP را از طرف P تا E و DP را از طرف P تا B امتداد می‌دهیم، به نحوی که داشته باشیم :
$[EDC] = [BDC] = ۱$. سرانجام $EA \| BD$ و $AB \| EC$ را رسم می‌کنیم. به سادگی روشن می‌شود که، این پنج ضلعی، دارای ویژگی مورد نظر است.

یادداشت. موبیوس، در کتاب خود، مسألهٔ کلی پیدا کردن مساحت پنج ضلعی ABCDE را طرح کرده است، با این فرض که بدانیم :

$$[ABC] = a \ ,[BCD] = b \ , \ [CDE] = c \ ,[DEA] = d \ , \ [EAB] = e$$

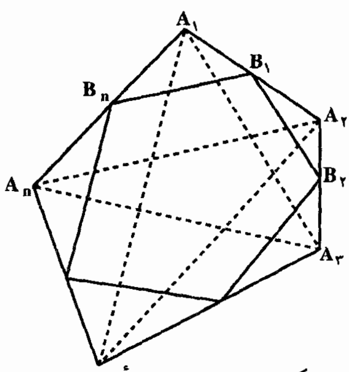
گوس، این مساله را حل کرد. در واقع، مساحت پنج ضلعی ABCDE، برابر با ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $t^۲ - pt + q = ۰$ است که در آن

$$p = a + b + c + d + e \ , \ \ q = ab + bc + cd + de + ea$$

۹۳۳. گزینهٔ (د) درست است.

۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۱.۲.۷.۷. رابطهٔ بین مساحتها (نابرابریها)



۹۳۵. مساحت n ضلعی محدب $A_۱A_۲ \ldots A_n$ را S، و وسط ضلعهای $A_۱A_۲$ ، $A_۲A_۳$ ، .... ، $A_nA_۱$ آن را، بترتیب $B_۱$ ، $B_۲$ ، .... ، B_n می‌نامیم. اگر فرض کنیم $A_{n+۱} = A_۱$ و $A_{n+۲} = A_۲$ ، آن وقت، هر مثلث

$$A_iA_{i+۱}A_{i+۲} \ , \ (i = ۱ \ ,\ldots, n)$$

هیچ نقطهٔ مشترک درونی با یکی دیگر از مثلث‌ها ندارد. مگر دو مثلثی که در رأس، $A_{i+۱}$ مشترکند (شکل). بنابراین، هر نقطهٔ n ضلعی، نقطهٔ درونی بیش از دو تا از این مثلثها نیست. از آن جا :

$$۲S \geq \sum_{i=۱}^{n} S_{A_iA_{i+۱}A_{i+۲}}$$

هر پاره خط راست B_iB_{i+1} ($B_{n+1} = B_1$)، وسط دو ضلع از مثلث $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ را به هم وصل کرده است، بنابراین:

$$S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}} = \frac{1}{4} S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}$$

یعنی می‌توان نوشت:

$$S_{B_1B_2\ldots B_n} = S - \sum_{i=1}^{n} S_{B_iA_{i+1}B_{i+1}}$$

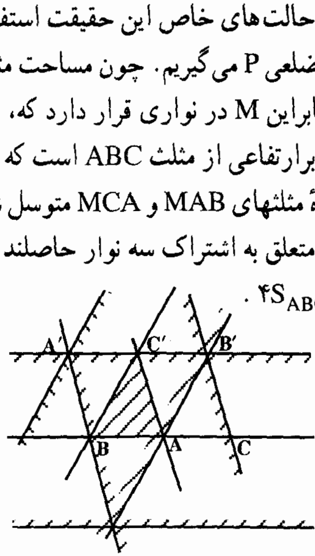
$$= S - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}} \geq S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$$

که از آنجا، نابرابری مطلوب، به دست می‌آید.

۷.۷.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۳۶. رأسهای A_{p-1}، A_p، A_1، A_2، A_3 و A_4، از P ضلعی مفروض را در نظر می‌گیریم. قطرهای A_1A_3، A_2A_4، A_pA_2 و $A_{p-1}A_2$ را رسم می‌کنیم. B_1 و B_2 را نقطهٔ برخورد قطر A_pA_2 با قطرهای A_1A_4 و A_1A_3 و همچنین B_4 و B_3 را نقطهٔ برخورد $A_{p-1}A_2$ با همان قطرها فرض می‌کنیم. (اگر $P = 5$، آن وقت $B_4 = A_4$) از برابری مساحتها نتیجه می‌شود $B_1B_2 = B_2A_2$ و $A_1B_2 = B_2B_3$. بنابراین $A_1A_4 \| A_2A_{p-1}$.

۹۳۷. مجموعهٔ رأسهای چند ضلعی مفروض P را در نظر می‌گیریم و از بین آنها، سه رأس A، B و C را طوری انتخاب می‌کنیم که، مساحت مثلث ABC، حداکثر باشد. (روشن است که، مساحت مثلث ABC، از مساحت هر مثلثی که بتوان در چند ضلعی P جا داد، کمتر نیست. در این جا، از حالت‌های خاص این حقیقت استفاده خواهیم کرد.)
M را نقطه‌ای از چند ضلعی P می‌گیریم. چون مساحت مثلث MBC از مساحت مثلث ABC بیشتر نیست، بنابراین M در نواری قرار دارد که، محور تقارن آن، خط راست BC و عرض آن دو برابر ارتفاعی از مثلث ABC است که از رأس A گذشته باشد. اگر به همین استدلال دربارهٔ مثلثهای MAB و MCA متوسل شویم، معلوم می‌شود که، همهٔ نقطه‌های چند ضلعی، متعلق به اشتراک سه نوار حاصلند. مثلث $A'B'C'$ که مساحت آن برابر است با $4S_{ABC} = 4$.



۹۴۱. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

۸.۷. رأسها

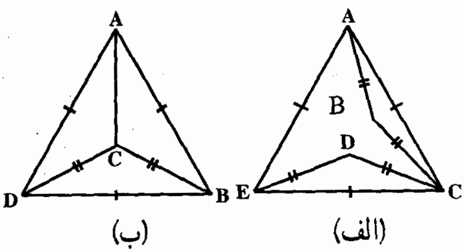
۹۴۲. مجموع ضلعها و قطرهای یک n ضلعی محدب همان تعداد پاره‌خطهای واصل بین n نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت است که دو به دو به هم وصل شده باشند، یعنی: $\frac{n(n-۱)}{۲}$ = مجموع عده ضلعها و قطرهای n ضلعی محدب. پس داریم:

$$\frac{n(n-۱)}{۲}=۳۶ \Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰ \Rightarrow n=۹\ ,\ n=-۸<۰$$

۹۴۳. شش گونه.

۹۴۴. بزرگترین مثلثی را در نظر می‌گیریم که رأسهای آن، سه نقطه از این مجموعه باشند. D را نقطه‌ای از مجموعه می‌گیریم، به نحوی که ABCD متوازی‌الاضلاع باشد. همهٔ نقطه‌های این مجموعه، در درون مثلث DEF واقعند. اکنون نقطهٔ دیگری از مجموعه را، مثل X در نظر می‌گیریم که در درون مثلث AEC باشد (حالتهای دیگر هم، شبیه همین حالت مورد بررسی قرار می‌گیرند). در این صورت XBC را می‌توان، تا یک متوازی‌الاضلاع تکمیل کرد (رأس چهارم آن را Y می‌نامیم)؛ مثلث YBD را هم به یک متوازی‌الاضلاع، با رأس چهارم Z، تبدیل می‌کنیم. تنها این می‌ماند که توجه کنیم، برای تکمیل مثلث XYZ به یک متوازی‌الاضلاع، به نقطه‌ای واقع در بیرون مثلث DEF نیاز داریم.

۹۴۵. الف) اگر رأسهای چند ضلعی اول، در چند ضلعی محدب دوم که برابر با آن است، قرار گیرد، آن وقت چند ضلعی اول، به طور کامل در دومی قرار می‌گیرد و از برابری مساحتهای آنها نتیجه می‌شود که دو چند ضلعی بر هم منطبقند.



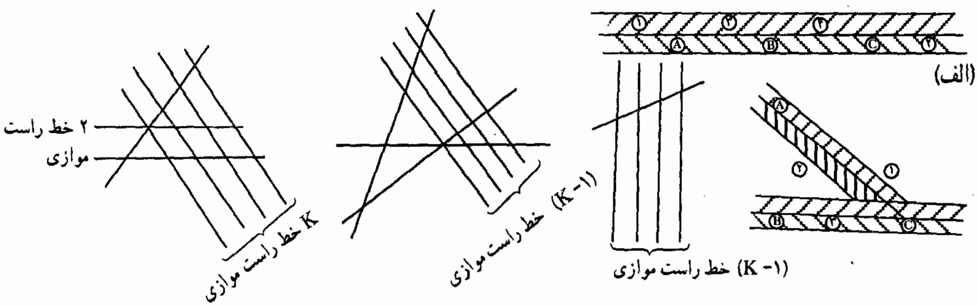
ب) درست نیست (شکل الف را ببینید که، در آن، چهارضلعیهای غیر محدب ABCE و ACDE نشان داده شده است).

ج) چهارضلعی مقعر ABCD را در نظر می‌گیریم که، در آن، رأس C، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABD است (شکل ب). در این صورت، اگر رأسهای چهارضلعی برابر با آن، A′B′C′D′، در چهارضلعی ABCD قرار گیرد، آن وقت، رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع A′B′D′ در مثلث ABD قرار می‌گیرد و بنا بر حکم بخش الف)، رأسهای این دو مثلث بر هم منطبق می‌شوند که، در نتیجه رأسهای C و C′ هم روی هم قرار می‌گیرند. بنابراین، پاسخ به پرسش ج)، منفی است.

۷ . ۹. مجموعه‌های صفحه

۹۴۶. ابتدا فرض می‌کنیم، نقطه‌های A، B و C، روی یک خط راست را به ۴ بازه تقسیم می‌کنند که، در ضمن، هیچ دو نقطه‌ای از دو بازهٔ مختلف، نمی‌توانند متعلق به یک مجموعهٔ محدب باشند. بنابراین، تعداد مجموعه‌های مطلوب نمی‌تواند از ۴ کمتر باشد. اگر مجموعهٔ M را، آن طور که در شکل (الف) نشان داده شده است، تقسیم کنیم، همان تعداد ۴ به دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست نباشند، در این صورت، نقطه‌های B و C، خط راست BC را به سه بازه تقسیم می‌کنند و در ضمن، بازه‌های جداگانه باید در دو مجموعهٔ محدب جداگانه قرار گیرند. بنابراین، تعداد مجموعه‌های مطلوب، نمی‌تواند از ۳ کمتر باشد و ۳ مجموعه را می‌توان به صورتی که در شکل (ب) نشان داده شده است، انتخاب کرد.

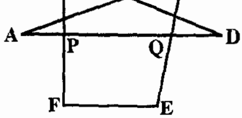


(ب) (پ) (ت) (ث)

۹۴۷. گزینهٔ (د) درست است.

۹۴۸. گزینهٔ (الف) درست است.

۷ . ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۹۵۰. (ج). مطابق شکل، AD با BF و EC به ترتیب در P و Q برخورد می‌کند. زاویهٔ FPQ را با $\angle P$ و زاویهٔ EQP را با $\angle Q$ نشان می‌دهیم. مجموع زاویه‌های چهارضلعی EFPQ برابر 360° است و مجموع زاویه‌های هر یک از مثلثهای DPB و ACQ برابر 180°

است، بنابراین :

$$\angle F + \angle P + \angle Q + \angle E = ۳۶۰^\circ$$

$$\angle B + (۱۸۰^\circ - \angle P) + \angle D = ۱۸۰^\circ$$

$$\angle C + (۱۸۰^\circ - \angle Q) + \angle A = ۱۸۰^\circ$$

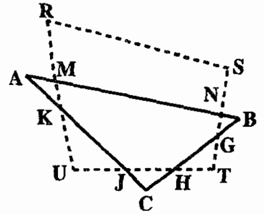
پس از جمع این سه رابطه و کسر ۳۶۰° از هر طرف، داریم :

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = ۳۶۰^\circ = ۹۰^\circ n$$

بنابراین : $n = ۴$.

راه دیگر : AD را به ترتیب زیر و به طور متوالی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم : حول نقطهٔ A، تا در امتداد AC قرار گیرد ؛ حول نقطهٔ C، تا در امتداد CE واقع شود ؛ حول نقطهٔ E، تا در امتداد EF قرار گیرد ؛ حول نقطهٔ F، تا در امتداد FB واقع شود ؛ حول نقطهٔ B، تا در امتداد BD قرار گیرد ؛ و در پایان حول نقطهٔ D تا دوباره در امتداد AD قرار گیرد، روشن است که AD در مجموع به اندازهٔ $K \times ۱۸۰^\circ$ چرخیده است، که دقیقاً برابر است با مجموع اندازه‌های همهٔ زاویه‌های چندضلعی ؛ چرا که در همهٔ رأسها و در هر رأس به اندازهٔ زاویهٔ آن رأس چرخیده است. بنابراین مجموع زاویه‌ها $۴ \times ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ است و $n = ۴$.

۹۵۱. (الف). بنا به تعریف مجموعه‌ای از نقطه‌هایی کوژ است که اگر هر دو نقطهٔ آن به هم وصل شوند، تمام پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، جزء این مجموعه باشد. در نتیجه یک چند ضلعی کوژ است (یعنی از یک مجموعهٔ کوژ است)، اگر و تنها اگر همهٔ زاویه‌های آن کمتر از ۱۸۰° باشند. از کوژ بودن $P_۲$ نتیجه می‌شود که هر ضلع $P_۱$ می‌تواند حداکثر در دو نقطه $P_۲$ را قطع کند، بنابراین تعداد نقطه‌های مشترک حداکثر $۲n_۱$ است. حال نشان می‌دهیم که همواره می‌توان با انتخاب یک چندضلعی مناسب $P_۲$ به حداکثر تعداد نقطه‌های مشترک دست یافت ؛ چند ضلعیی که از هر دو نقطهٔ مشخص بر روی هر یک از ضلعهای $P_۱$ بگذرد، نخست این $۲n_۱$ نقطه را روی $P_۱$ علامت‌گذاری می‌کنیم. سپس دو نقطهٔ مجاور به هر رأس $P_۱$ را با یک پاره خط «نقطه‌چین» مربوط به آنهارا به طرف خارج $P_۱$ امتداد می‌دهیم. اگر این دو امتداد «نقطه‌چین» یکدیگر را قطع کنند، محل قطع آنها یک رأس $P_۲$ است، اما اگر قطع نکند، هر نقطهٔ واقع بر روی هر یک از این امتدادها را می‌توان به عنوان یک رأس $P_۲$ در نظر گرفت. در حالت دوم بهتر است دو رأس $P_۲$ را روی این امتدادها طوری انتخاب کنیم که ضلع حاصل برای $P_۲$ موازی ضلعی از $P_۱$ باشد که دو نقطهٔ اوّل روی آن قرار داشتند. بدین ترتیب امتداد هر یک از پاره‌خطهای «نقطه‌چین» از دو طرف به دو رأس



مجاور P_2 ختم می‌شود و بنابراین یک ضلع P_2 را تشکیل می‌دهد که شامل دو نقطهٔ P_1 است.
تعداد n_1 پاره خط «نقطه‌چین» وجود دارد (برای هر رأس P_1 یک پاره خط) و بنابراین P_2 دقیقاً در $2n_1$ نقطه (تعداد حداکثر نقاط) P_1 را قطع می‌کند. چند ضلعی P_2 کوژ است، زیرا هر زاویهٔ آن یا زاویهٔ داخلی یک مثلث است یا زاویهٔ خارجی یک مثلث، و در هر حالت کمتر از 180° است.

یادآوری ۱. در شکل بالا P_1 مثلث ABC ، P_2 چهار ضلعی کوژ RSTU است، این چهار ضلعی P_1 را در حداکثر $2n_1 = 6$ نقطهٔ G، H، J، K، M و N واقع بر پاره‌خطهای (نقطه چین) NG، HJ و KM قطع می‌کند. رأسهای P_2 که روی این امتدادها قرار دارند، بترتیب عبارتند از: T و S ؛ U و T ؛ R و U. چون امتدادهای پاره‌خطهای «نقطه‌چین» مرسوم از M و N به طرف خارج P_1 ، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، رأسهای R و S را روی آنها طوری در نظر می‌گیریم که ضلع RS از P_2 موازی ضلع AB [ضلعی که نقطه‌های M و N روی آن قرار دارند] از P_1 باشد. زاویه‌های R و S بترتیب، برابر زاویه‌های خارجی مثلثهای AKM و BGN هستند و زاویه‌های T و U بترتیب، زاویه‌هایی از مثلثهای GHT و JKU می‌باشند.

یادآوری ۲. هرگاه $n_1 = 1$ و $n_2 = 3$ ، آن گاه P_1 یک پاره‌خط و P_2 یک مثلث، و حداکثر تعداد نقطه‌های مشترک ۲ است که گزینه‌های (ب)، (ج) و (د) را رد می‌کند.

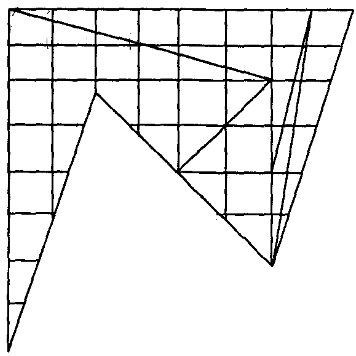
۹۵۳. هر دو خط راستی را که از نقطهٔ O، واقع در درون n ضلعی می‌گذرند و مساحت n ضلعی M را نصف می‌کنند، با هم، در نظر می‌گیریم. در این صورت، بین دو زاویهٔ روبه‌رو که به وسیلهٔ این دو خط راست تشکیل شده است، بخشهای برابری از مساحت n ضلعی واقع است (S_1 و S_2 روی شکل).
چند ضلعی M' را قرینهٔ چند ضلعی M نسبت به O فرض می‌کنیم. اگر از نقطهٔ O ، K خط راست طوری عبور کند که هر کدام از آنها مساحت را نصف کند، آن وقت در هر یک از $2k$ زاویه که به وسیلهٔ این K خط راست در صفحه به وجود می‌آید، باید نقطهٔ برخوردی از محیطهای M و M' وجود داشته باشد. ولی روی هر ضلع چند ضلعی M، بیش از دو نقطه از این گونه نقطه‌های برخورد وجود ندارد. یعنی، اگر M دارای n ضلع باشد، تعداد نقطه‌های برخورد از $2k$ کمتر و از $2n$ بیشتر نیست، از این جا $k \leq n$.

۹۵۵. استقرای روی n. مجموعهٔ X شامل n رأس را انتخاب می‌کنیم که با یالهای (مثلاً با رنگ اوّل) به هم مربوطند. اکنون یکی از آنها را کنار می‌گذاریم و از بین بقیهٔ رأسها باز هم n رأس انتخاب می‌کنیم که با یک رنگ به هم مربوط شده باشند (مجموعهٔ Y).

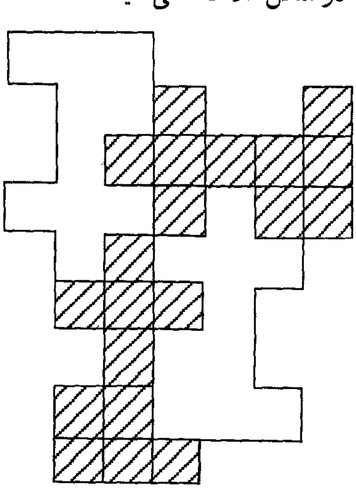
حالت اوّل. این رنگ همان رنگ اوّل است. در این صورت، دو انتخاب از n رأس نباید متقاطع باشند و رأس باقی‌ماندهٔ A ، به این 2n رأس تنها با یالهای به رنگهای دوم و سوم، به هم مربوطند. ولی در این صورت، تعداد یالهای یکی از این دو رنگ، دست کم برابر با n ؛ و n رأس متناظر، همراه با A ، n+1 رأس مورد نظر را تشکیل می‌دهند.

حالت دوم. رنگ اخیر، رنگ دوم (یا سوم) است. در این حالت، همهٔ 2n+1 رأس را به دو دسته تقسیم می کنیم : دستهٔ اوّل شامل سه رأس که در یکی از دو مجموعهٔ X یا Y باشند ؛ دستهٔ دوم، شامل بقیهٔ رأسها به سادگی دیده می‌شود، به جز حالت بی‌معنی که ممکن است پیش آید، هر یک از این دسته‌ها به دو بخش چنان تقسیم می‌شود که، رأسهای بخشهای مختلف دسته، تنها با یالهای به رنگ سوم (و یا دوم) می‌توانند به هم مربوط شده باشند ؛ در غیر این صورت، مجموعهٔ شامل n+1 رأس (که مورد نظر ماست)، بلافاصله ظاهر می‌شود. در یکی از این دسته‌ها، دست کم، n+1 رأس وجود دارد که تنها با یالهای به رنگ سوم به هم مربوطند ؛ همان چیزی که لازم داریم.

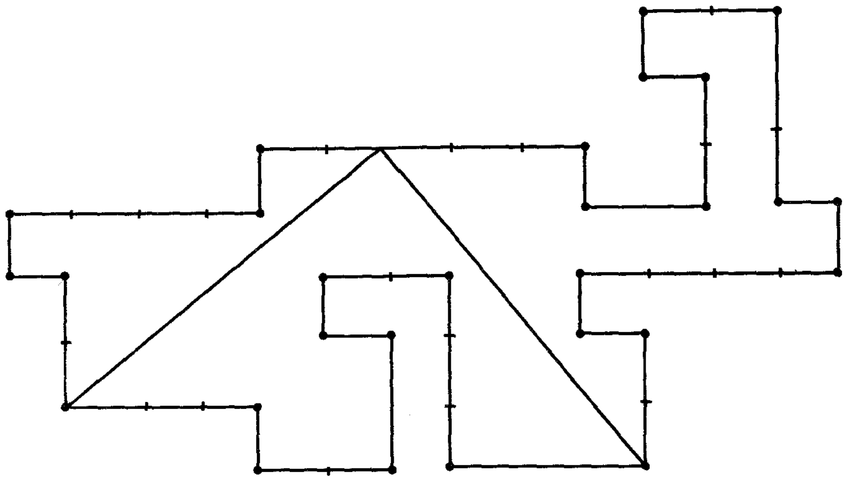
۹۵۶. تنها پاسخ صحیح را در شکل می‌بینید.



۹۵۷. تنها پاسخ صحیح را در شکل ملاحظه می کنید.

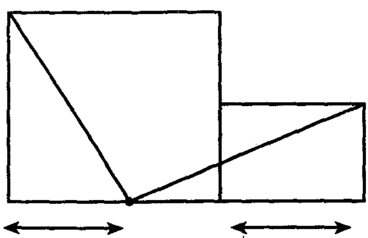


۹۵۸. پاسخ طبق شکل زیر است.



۹۵۹. حل ساده است و به عهدهٔ شما واگذار می‌شود.

۹۶۰. تنها پاسخ صحیح در شکل دیده می‌شود، با این توضیح که طول دو ضلعش برابرند.



فهرست منابع جلد اوّل

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابوت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشرناس ـ نشر نام.
۶. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۷. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۸. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۱۰. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د.فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۱. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ.س.م. کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۳. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا.
۱۴. تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۷. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اوّل، دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.

۱۸. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۱۹. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۰. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۳. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۴. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۵. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۹. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۳۰. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقرازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۱. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۲. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۳. خطهای راست و منحنی‌ها. ن.ب. واسی‌لی‌یو ـ و.ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۴. در پی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان جلدهای اوّل و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکترحسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۳۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.

۳۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.
۴۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۳. ریاضی‌دانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۵. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۴۶. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی.ال.برگرن. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۷. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور. مؤسسهٔ انتشارات مدبر.
۴۸. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای.اس.کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۹. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۵۰. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۱. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و.د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۵۲. مسأله‌های ریاضی آسان ولی ... . گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۵۳. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۴. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای.خ.سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اوّل. چارلز.ت.سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل‌ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز.ت.سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت.سالکیند ـ جیمز.م.ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو. گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشردانشگاهی.

۵۹. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و.س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۲. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۶۳. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمد باقر ازگمی - پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۴. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۶۵. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی - چنتسوف - یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات مجید، انتشارات فردوس.
۶۶. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۷. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری.
۶۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفاء محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م.هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۷۱. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی - باقر امامی - غلامرضا بهنیا - پرویز شهریاری - علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۲. هندسهٔ تحلیلی. حسین غیور - محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۷۳. هندسه‌های جدید. جیمز.ار.اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۷۵. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۷۶. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده - حسین غیور - حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۷۷. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

۷۸. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.

۷۹. هندسهٔ سالهای اوّل، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

۸۰. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان. آلتشیلرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.

۸۱. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. اِدوین ا.موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.

۸۲. هندسهٔ موئیز ـ لانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.

۸۳. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

۸۴. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

85. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR F.G.M.

86 . EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR Th. CARONNET.

87. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE MODERNE. PAR G.PAPELIER.

88. GEOMETRYA HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE,GENE MURROW.

89. GIANT COLOUR BOOK OF MATHEMATICS BY IRVING ADLER.

90. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II.GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRÉ.

91. JACOBS HAROLD R GEOMETRY.

92. LES NOMBRES ET LEURS MYSTÉRES. PAR ANDRÉ WARUSFEL.

93. MATHEMATICS AROUND US.

94. MÉMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR A.PONT.

95. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS, W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R.PEARSON.

96. PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE PAR ANDRÉ VIEILLEFOND, P.TURMEL.

97. PRENTICE HALL GEOMETRY. BY, ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

98. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.

99. RESOLUSION DES PROBLEMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOM–ÉTRIE. PAR, E.J.HONNET.

100. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN Mc DONOUGH, ALVIN J. HANSEN.