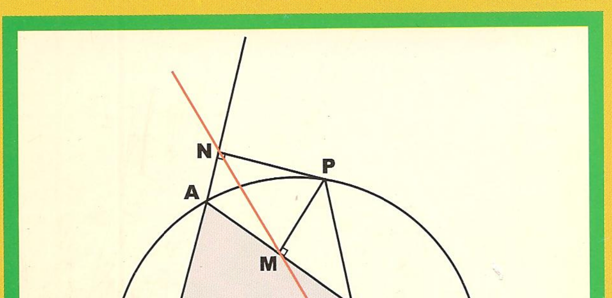
دایرة المعارف هندسه

۲

ویژگیهای توصیفی دایره در هندسهٔ مسطحه

(ربع دایره و نیمدایره، دایره، دایره و مثلث، دایره و مثلثهای ویژه ،....)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ـ
دایرةالمعارف مسائل هندسه/ تألیف محمدهاشم رستمی. ـ تهران: سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴.
ج.: مصور، نمودار.
(ج. ۱).

ISBN 964-436-737-5 (ج. ۲)
ISBN 964-436-567-4 (ج. ۳)
ISBN 964-436-560-7 (ج. ۴)

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
از جلد دوم به بعد عنوان کتاب به «دایرةالمعارف هندسه» تغییر یافته است.
کتابنامه.
مندرجات: ج. ۱. خواص توصیفی اشکال هندسه (نقطه، خط، زاویه، مثلث، چهارضلعی و دایره. ــ) ج. ۲. ویژگیهای توصیفی دایره در هندسه مسطحه. ــ ج. ۳. رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه. ــ ج. ۴. رابطه‌های متری در دایره. ــ
ج. ۲ (چاپ اوّل: ۱۳۷۸).
۱. هندسه ــ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

۵۱۶/۰۰۷۶ QA ۵۰۱ /۵/ ۵ ر ۲ د
۱۳۷۸

کتابخانهٔ ملی ایران ۱۴۰۰ـ۷۴ م*

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه

(جلد دوم)

ویژگیهای توصیفی دایره در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۸
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
شابک ۵ـ ۷۳۷ ـ ۴۳۶ ـ ۹۶۴
ISBN-964-436-737-5

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه، احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه‌تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا، قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی و پنج سال پیش، به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرة المعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی، در هندسهٔ مسطّحه؛

۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطّحه؛

۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی؛

۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس و ...)؛

۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)؛

۶. هندسهٔ تحلیلی؛

۷. هندسهٔ فضایی؛

۸. هندسه‌های نااقلیدسی؛

...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را

دربرمی‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطّحه شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث مختلف‌الاضلاع ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی الساقین، قائم‌الزاویه و...) ؛

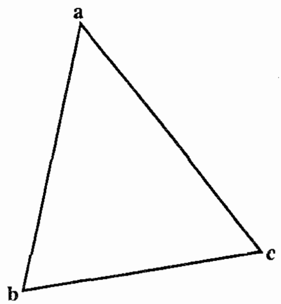
جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعیها.

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه‌حلهای آنها، در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و تنها، یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آنها آورده شده است و علامتهای به‌کار گرفته شده در این مسأله‌ها نیز به همان صورت متن اصلی آنها است. به عنوان مثال، درالمپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است. به عنوان مثال، گفته شده : در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac، ...



● در دیگر قضیه‌ها و مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به عنوان مثال، همه‌جا نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند : نقطه‌های A، B، C و ... ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB، و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، شامل : تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ مربوط به ویژگیهای توصیفی دایره است که ۸ بخش دارد :

بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره
بخش ۲. یک دایره
بخش ۳. دو دایره
بخش ۴. سه دایره و بیشتر
بخش ۵. دایره و مثلث
بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه
بخش ۷. دایره و چهارضلعی
بخش ۸. دایره و n ضلعی $(n \geq ۵)$

هریک از بخشهای بالا، خود به چند زیربخش، تفکیک شده است. به عنوان مثال، بخش۵. دایره و مثلث، شامل زیربخشهای زیر است :

۵ . ۱ . دایرهٔ محیطی مثلث
۵ . ۲ . دایره‌های محاطی مثلث
۵ . ۳ . دایره‌های محیطی و محاطی مثلث
۵ . ۴ . دایره‌های اولر، بروکار، لوموان، ...
۵ . ۵ . دایره‌های دیگر و مثلث

هریک از زیربخشهای بالا نیز به چند زیربخش جدید تقسیم گردیده است. به عنوان مثال، زیربخش ۵ . ۴ . دایره های اولر، بروکار، لوموان، ... خود، شامل زیربخشهای زیر است :

۵ . ۴ . ۱ . دایرهٔ اولر یا فوئرباخ
۵ . ۴ . ۲ . دایرهٔ بروکار
۵ . ۴ . ۳ . دایرهٔ لوموان
۵ . ۴ . ۴ . دایرهٔ تیلور
۵ . ۴ . ۵ . دایرهٔ آدامس
۵ . ۴ . ۶ . دایرهٔ آپولونیوس

هریک از موارد بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تفکیک شده‌اند. از جمله، زیربخش ۵ . ۴ . ۱ . شامل موارد زیر است :

۵ . ۴ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه
۵ . ۴ . ۱ . ۲. شعاع دایره
۵ . ۴ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۵ . ۴ . ۱ . ۴. کمان

۵ . ۴ . ۱ . ۵. پاره‌خط

۵ . ۴ . ۱ . ۶. زاویه

۵ . ۴ . ۱ . ۷. خطهای : موازی، عمودبرهم ،...

۵ . ۴ . ۱ . ۸. شکلهای ایجاد شده

۵ . ۴ . ۱ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵ . ۴ . ۱ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

برخی از زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تفکیک شده‌اند و در هریک از آنها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

لازم به ذکر است که در این جلد، راهنماییها، یا راه حلهای ارائه شده، تنها با استفاده از ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی انجام شده است. بنابراین قضیه‌ها و مسأله‌هایی که راه‌حلهای دیگری نیز دارند، براساس نوع راه‌حل، در جلدهای دیگر دایرةالمعارف، راهنمایی یا حل خواهند شد.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدّعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست. ولی امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

ویژگیهای توصیفی دایره
در
هندسهٔ مسطحه

بخش ۱

• ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. شعاع

۳.۱. نقطه و نیمدایره

۴.۱. کمان

۵.۱. وتر

۶.۱. قطر

۷.۱. زاویه

۸.۱. پاره‌خط

۹.۱. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۹.۱. خطها موازی‌اند

۲.۹.۱. خطها برهم عمودند

۱۰.۱. شکلهای ایجاد شده

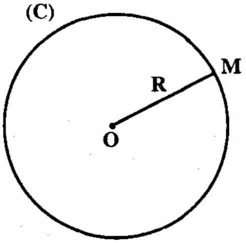
۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه

نخست به بررسی دایره می‌پردازیم.

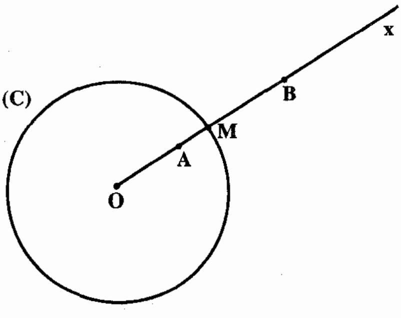


دایره. دایره، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطهٔ ثابت مرکز دایره، و مقدار ثابت شعاع دایره نامیده می‌شوند. دایرهٔ به مرکز O و شعاع R را به صورت C(O,R) نشان می‌دهند. برای هر نقطهٔ M از این دایره داریم:

$$OM = R$$

پاره‌خط OM را شعاع دایره و اندازهٔ این پاره‌خط را که اندازهٔ شعاع دایره است نیز به‌طور خلاصه، شعاع دایره می‌نامند.

درون و برون دایره. نیمخط دلخواه Ox را به مبدأ O، مرکز دایرهٔ C(O,R) ،درنظر می‌گیریم.



نقطهٔ M را به فاصلهٔ $OM = R$ از نقطهٔ O بر این نیمخط اختیار می‌کنیم. این نقطه، نقطهٔ برخورد دایره و نیمخط مزبور است. برای هر نقطهٔ مانند A از نیمخط Ox که بین O و M واقع باشد، $OA < R$ و برای هر نقطه مانند B از نیمخط مزبور که بر امتداد OM واقع باشد $OB > R$.

بدین ترتیب بر هر نیمخط به مبدأ O از صفحه، نقطه‌هایی نظیر A، M و B می‌توان درنظر گرفت که فاصله‌های آنها از نقطهٔ O بترتیب، کوچکتر از شعاع دایره، مساوی با شعاع دایره، یا بزرگتر از آن باشد. بنابراین دایرهٔ C مجموعهٔ نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه به شرح زیر تقسیم می‌کند:

۱. I، مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از مرکز، کوچکتر از شعاع است:

$$I = \{A | OA < R\}$$

این زیرمجموعه از صفحه را که شامل مرکز دایره و به دایره محدود است، درون دایره می‌گوییم (داخل = Interior).

۲. C، مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر دایره :

$$C = \{M | OM = R\}$$

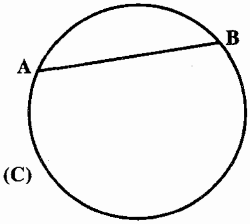
۳. E، مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ O از شعاع دایره، بزرگتر است :

$$E = \{B | OB > R\}$$

این زیرمجموعه از صفحهٔ P را برون دایرهٔ C می‌گوییم (خارج = Exterior).

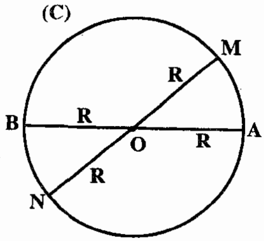
مجموعه نقطه‌هایی که روی، یا در درون یک دایره هستند، سطح آن دایره می‌نامند. سطح دایره گرده نیز نامیده می‌شود.

۱. **قضیه.** در هر صفحه بر دو نقطهٔ متمایز دایره‌های بی‌شمار می‌گذرند. عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه، مکان هندسی مرکزهای این دایره‌هاست.



۲. **قضیه.** خط راست نمی‌تواند با دایره بیش از دو نقطهٔ مشترک داشته باشد.

۳. **قضیه.** بر سه نقطهٔ غیر واقع بر یک خط راست، یک دایره و تنها یک دایره می‌گذرد.

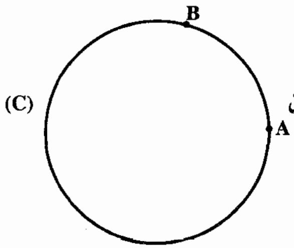


وتر (در دایره). پاره‌خطی است که دو نقطهٔ متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند. مانند وتر AB در دایرهٔ (C).

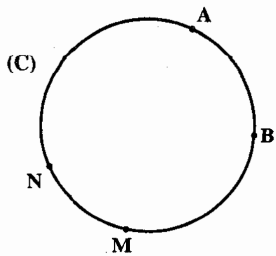
قطر دایره. وتری از دایره است که از مرکز آن می‌گذرد، مانند : قطرهای AB و MN در دایرهٔ (C).

اندازهٔ هر قطر یک دایره، دو برابر اندازهٔ شعاع آن دایره است.

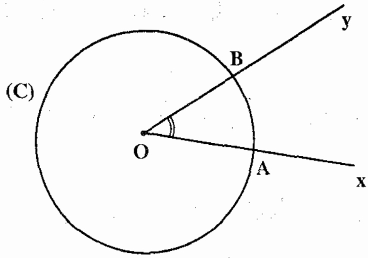
$$AB = MN = ۲R$$



کمان دایره. بخشی از دایره است که بین دو نقطه از آن محدود است. مانند کمان $\widehat{AB}$ در شکل.

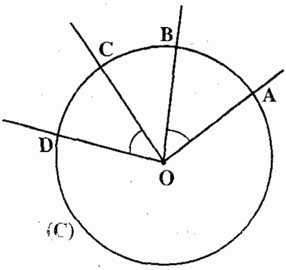


نقطه‌های همدایره. نقطه‌هایی هستند که روی یک دایره واقع باشند. مانند : نقطه‌های A، B، M و N که روی دایرهٔ (C) قرار دارند.



زاویهٔ مرکزی. زاویه‌ای است که رأسش مرکز دایره است.

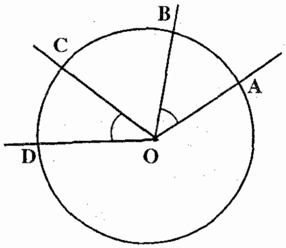
قوسی از دایره که بین نقطه‌های برخورد دایره با ضلعهای زاویهٔ مرکزی محصور است، قوس روبه‌روی آن زاویه، و آن زاویه را زاویهٔ مرکزی مقابل به آن قوس می‌نامند. مانند : زاویهٔ مرکزی xOy یا AOB که روبه‌رو به قوس $\overset{\frown}{AB}$ است.



۴. **قضیه.** هرگاه در دایره‌ای دو زاویهٔ مرکزی متساوی باشند، قوسهای روبه‌رویشان نیز متساوی‌اند.

فرض. $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

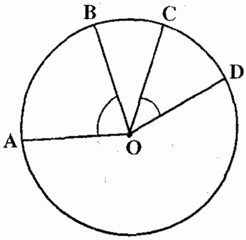
حکم. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$



۵. **قضیهٔ عکس.** هرگاه در دایره‌ای، دو قوس متساوی باشند، زاویه‌های مرکزی روبه‌روی آنها متساوی‌اند.

فرض. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

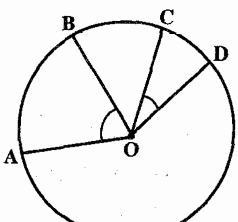
حکم. $A\hat{O}B = C\hat{O}D$



۶. **قضیه .** هرگاه در دایره‌ای، دو زاویهٔ مرکزی متساوی نباشند، قوس مقابل به زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر است از قوس مقابل به زاویهٔ کوچکتر.

فرض . $A\hat{O}B > C\hat{O}D$

حکم . $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$



۷. **قضیهٔ عکس.** هرگاه در دایره‌ای، دو قوس نامتساوی باشند، قوس بزرگتر، مقابل است به زاویهٔ مرکزی بزرگتر.

فرض. $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

حکم. $A\hat{O}B > C\hat{O}D$

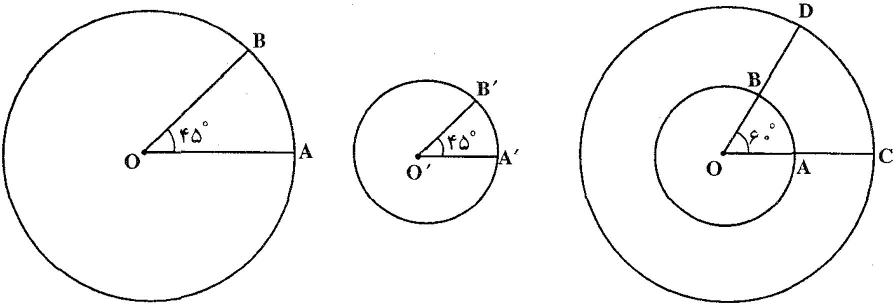
اندازهٔ کمان. از قضیه‌های اخیر، نتیجه می‌شود که یک وابستگی میان هرکمان و زاویهٔ مرکزی آن وجود دارد، مثلاً اگر یک زاویهٔ مرکزی چند

برابر شود، کمان آن هم چند برابر می‌شود و بعکس. همچنین بزرگی و کوچکی کمانهای یک دایره به بزرگی و کوچکی زاویه‌های مرکزی آنها بستگی دارد، بنابراین می‌توان از تعریف زیر برای مقایسه و اندازه‌گیری کمانهای یک دایرهٔ ثابت استفاده کرد.

تعریف. هرگاه اندازهٔ زاویهٔ مرکزی یک کمان، برابر با α واحد باشد، گوییم اندازهٔ کمان هم برابر با α واحد است.

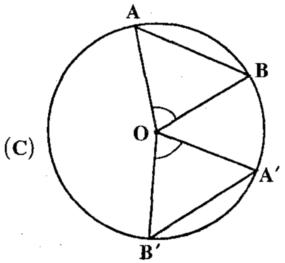
بنابراین اگر زاویهٔ مرکزی یک کمان ۶۰ درجه باشد، آن کمان هم ۶۰ درجه است.

در جلدهای دیگر، درازای یک کمان را نیز تعریف خواهیم کرد که برحسب واحدهای درازا مانند متر، سانتیمتر، اینچ و غیره بیان می‌شود. یادآوری می‌کنیم که درازای (طول) یک کمان و اندازهٔ آن، دو چیز متفاوت هستند و از یک گونه نیستند. دو کمان از دو دایره با شعاعهای مختلف، ممکن است یک اندازه داشته باشند ولی درازایشان متفاوت باشد (شکلهای (الف) و (ب) را ببینید).

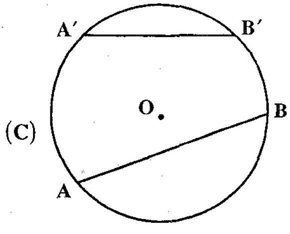


(ب) (الف)

۸. قضیه. فرض کنیم AB و $A'B'$ دو وتر از یک دایره هستند. و $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ کمانهایی هستند که از 180° بیشتر نیستند، آن‌گاه $AB = A'B'$ اگر و تنها اگر $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.



۹. قضیه. فرض کنیم AB و $A'B'$ دو وتر از یک دایره‌اند $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ از 180° بیشتر نیستند، آن‌گاه AB از $A'B'$ بزرگتر است، اگر و تنها اگر، $\widehat{AB}$ از $\widehat{A'B'}$ بزرگتر باشد.



۱۰. قضیه. در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، وتر و کمانهای آن را نصف می‌کند.

۱۱. قضیه‌های عکس:

قضیهٔ ۱. خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر آن وصل کند، بر آن وتر عمود است؛ بنابراین کمانهای نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

قضیهٔ ۲. قطری که از وسط یک کمان از دایره بگذرد، بر وتر نظیر آن کمان عمود است؛ بنابراین وتر و کمان دیگر نظیر آن را، نصف می‌کند.

قضیهٔ ۳. کمانهایی که بین دو وتر متوازی از دایره‌ای محصور باشند، مساوی یکدیگرند.

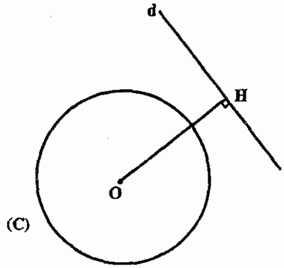
۱۲. در هر دایره، وترهای متساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بعکس.

۱۳. از دو وتر نامتساوی یک دایره، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است.

۱۴. **قضیهٔ عکس.** اگر دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله نباشند، وتری که به مرکز نزدیکتر است، از وتر دیگر بزرگتر است.

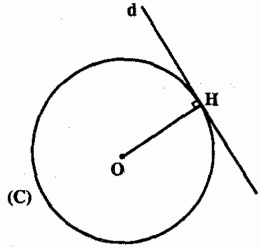
اوضاع نسبی خط و دایره . خط d و دایرهٔ $C(O, R)$ در یک صفحه نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را می‌توانند داشته باشند:

۱. خط d و دایرهٔ $C(O, R)$ هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، شکل (الف)، اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط d را با OH نشان دهیم، در این حالت، $OH > R$ (چرا؟).



(الف)

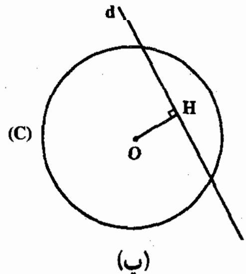
۲. خط d و دایرهٔ $C(O, R)$ در یک نقطه مشترکند. شکل (ب)، در این حالت، خط و دایره را مماس برهم می‌نامند و $OH = R$ است. H را نقطهٔ تماس خط d با دایرهٔ (C) می‌نامند.



(ب)

۳. خط d و دایرهٔ $C(O, R)$ در دو نقطه مشترکند. در این حالت، خط و دایره را متقاطع می‌نامند و $OH < R$ است. شکل (پ) .

نتیجه. در هر دایره، شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس، عمود است.



(پ)

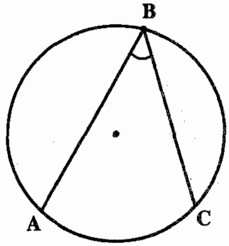
بعکس، اگر : $OH > R$ ، $OH = R$ و یا $OH < R$ باشد، بترتیب، خط و دایره : متخارج، مماس و یا متقاطعند.

۱۵. از نقطهٔ M واقع در صفحهٔ دایرهٔ $C(O, R)$، خطّی مماس بر دایره رسم کنید.

۱۶. **قضیه.** هرگاه از یک نقطه در برون دایره‌ای، دو مماس بر آن دایره رسم شود :

۱. قطعه‌هایی از مماسها که بین آن نقطه و نقطه‌های تماس محصورند، متساوی‌اند.

۲. خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل کند، زاویهٔ بین دو خطّ مماس و همچنین زاویهٔ بین شعاعهای نقطه‌های تماس را نصف می‌کند و بر وتری از دایره که دو نقطهٔ تماس را به هم وصل می‌کند، عمود است و آن را نصف می‌کند.



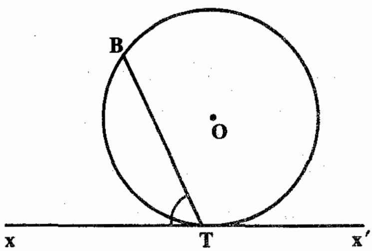
زاویهٔ محاطی. زاویهٔ محاطی زاویه‌ای است که رأس آن، یک نقطه از دایره و ضلعهای آن، دو وتر از همان دایره‌اند. کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویهٔ محاطی، محدود است و در داخل آن زاویه قرار دارد، کمان روبه‌رو به آن زاویهٔ محاطی می‌گویند.

مانند : زاویهٔ محاطی ABC.

۱۷. **قضیه.** اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر است با نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن.

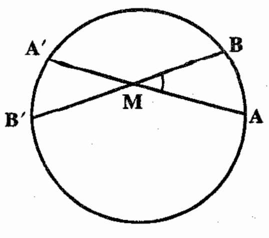
۱۸. **قضیه.** مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از وصل کردن آنها به دو نقطهٔ ثابت A و B از آن صفحه، زاویه‌ای مساوی α پدید می‌آید، کمانهایی است از دو دایرهٔ متساوی در آن صفحه، که بر دو نقطهٔ مزبور می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترک آنها، مساوی 2α است.

زاویهٔ بین مماس و وتر (زاویهٔ ظلّی). هر زاویه که رأس آن، یک نقطه از دایره، و یک ضلع آن، مماس بر دایره در آن نقطه و ضلع دیگرش وتر دایره باشد، زاویهٔ ظلّی نامیده می‌شود. مانند : زاویهٔ xTB در شکل.



کمانی از دایره را که در داخل زاویهٔ ظلّی واقع می‌شود و در حقیقت، کمان نظیر وتر مزبور است، کمان روبه‌رو به زاویهٔ ظلّی می‌گوییم.

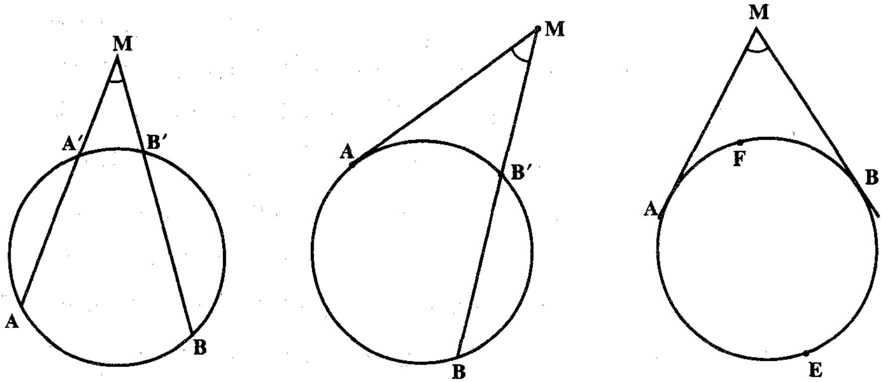
۱۹. **قضیه.** اندازهٔ هر زاویهٔ ظلّی، نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن، از دایره است.



زاویهٔ درونی (زاویهٔ بین دو وتر). زاویه‌ای است که رأسش درون دایره است و ضلعها و امتداد ضلعهایش قاطعهایی از دایره‌اند.

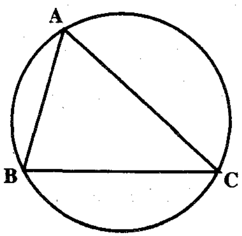
۲۰. **قضیه.** اندازهٔ زاویهٔ درونی، یعنی زاویه‌ای که بین دو وتر متقاطع در درون یک دایره پدید می‌آید، نصف مجموع اندازه‌های دو کمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند، و در آن زاویه و زاویهٔ متقابل به رأس آن قرار دارند.

زاویهٔ برونی (زاویهٔ بین امتدادهای دو وتر، امتداد یک وتر و یک مماس، دو مماس). زاویه‌ای است که رأسش بیرون دایره است و ضلعهایش قاطعهای دایره و یا مماس بر دایره‌اند (یک یا هر دو ضلع). زاویهٔ AMB در هریک از شکلهای (الف)، (ب) و (پ) زاویه‌ای برونی است.



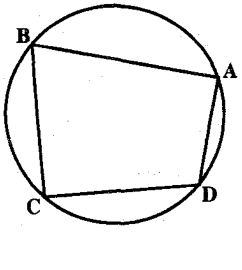
(الف) (ب) (پ)

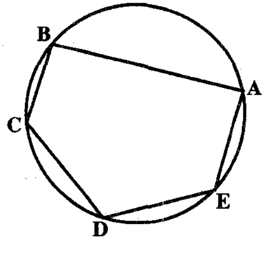
۲۱. **قضیه.** اندازهٔ زاویه‌ای که بین امتدادهای دو وتر در خارج دایره پدید می‌آید (زاویهٔ برونی)، نصف تفاضل اندازه‌های دو کمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند و در زاویه قرار دارند.



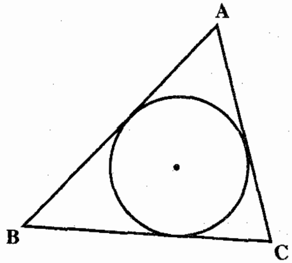
چندضلعی محاطی. چند ضلعیی است که همهٔ رأسهایش روی یک دایره قرار دارند مانند : مثلث ABC، چهارضلعی ABCD و پنج ضلعی ABCDE .

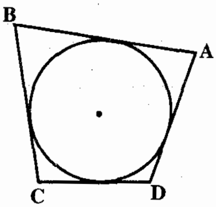
دایره را محیط بر چند ضلعی، یا دایرهٔ محیطی چند ضلعی می‌نامند.

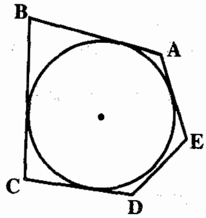


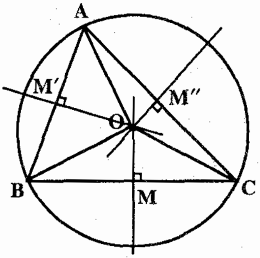


چند ضلعی محیطی. چند ضلعیی است که همهٔ ضلعهایش بر یک دایره، مماس باشند. دایره را محاط در چند ضلعی می‌نامند. مانند : مثلث محیطی ABC ، چهارضلعی محیطی ABCD و پنج ضلعی محیطی ABCDE .

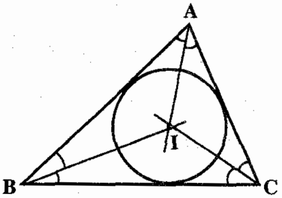






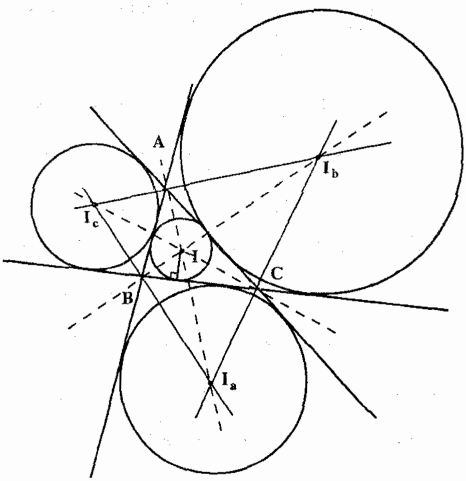


دایرهٔ محیطی مثلث. اگر نقطهٔ O محل همرسی سه عمودمنصف ضلعهای مثلث ABC باشد (شکل) ، دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد و مثلث در داخل آن قرار می‌گیرد. این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث ABC نامیده می‌شود. هر مثلث، تنها یک دایرهٔ محیطی دارد.



دایرهٔ محاطی درونی مثلث. دایره‌ای است که بر ضلعهای مثلث، **مماس** است. مرکز این دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است.

دایره‌های محاطی برونی مثلث. دایره‌هایی هستند که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماسند. مرکز هریک از این دایره‌ها، نقطه‌های برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ برونی مثلث و نیمساز زاویهٔ درونی سوم است.



هر مثلث، سه دایرهٔ محاطی برونی دارد. شعاعهای آنها را با r_a ، r_b و r_c نشان می‌دهند.

نکته. دایرهٔ محاطی درونی و دایره‌های محاطی برونی

مثلث را، چهار دایرهٔ سه مماس مثلث، و مرکزهایشان را مرکزهای سه مماس مثلث می‌نامند. مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث را معمولاً با I و مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مماس بر ضلعهای BC، AC و AB را بترتیب، با I_a، I_b و I_c نشان می‌دهند.

مثلث $I_aI_bI_c$ را مثلث مرکزیهٔ مثلث ABC می‌نامند.

نتیجه. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش خط که نیمسازهای زاویه‌های مثلثند، قرار دارند. هر مرکز سه مماس روی سه خط واقع است و روی هر خط دو مرکز سه مماس قرار دارد.

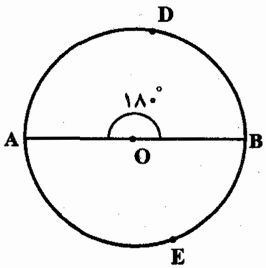
چهارضلعیهای محیطی و محاطی. چهارضلعیها، برخلاف مثلث همیشه محیطی یا محاطی نیستند. یک چهارضلعی در صورتی در یک دایره، محاط یا بر دایره‌ای محیط است که خواصّ معیّنی داشته باشد. در این قسمت، ویژگیهای چهارضلعیهای محاطی و محیطی را خواهیم شناخت.

۲۲. **قضیه.** در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های مقابل، مکمّل یکدیگرند.

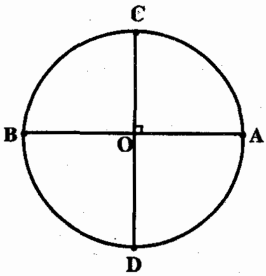
۲۳. **عکس قضیه.** هر چهارضلعی که زاویه‌های مقابل آن، مکمل یکدیگر باشند، یک چهارضلعی محاطی است.

۲۴. **قضیه.** مجموع دو ضلع مقابل هر چهارضلعی محیطی، برابر است با مجموع دو ضلع مقابل دیگر.

۲۵. **عکس قضیه.** هر چهارضلعی که مجموع دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر، مساوی باشد، بر یک دایره محیط است.



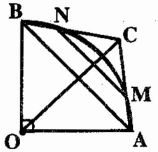
نیمدایره. هر قطر دایره، آن دایره را به دو بخش متساوی تقسیم می‌کند که هرکدام، یک نیمدایره نامیده می‌شوند. در شکل، قطر AB دایرهٔ C(O,R) را به دو نیمدایره بخش کرده است (نیمدایره‌های $\overset{\frown}{ADB}$ و $\overset{\frown}{AEB}$) . مرکز هریک از این دو نیمدایره، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) و شعاع هر نیمدایره همان R ، شعاع دایرهٔ (C) است.



ربع دایره. هر دو قطر عمود برهم از یک دایره، آن دایره را به چهار بخش برابر، تقسیم می‌کنند که هر بخش، یک ربع دایره نامیده می‌شوند. مرکز ربع دایره، همان مرکز دایره و شعاع ربع دایره، همان شعاع دایره است.

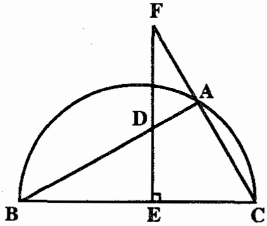
در شکل، دو قطر عمود برهم AB و CD از دایرهٔ C(O,R)، آن دایره را به چهار ربع دایره بخش کرده است.

۲.۱. شعاع



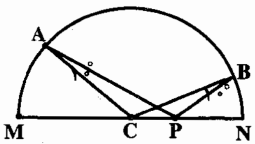
۲۶. ربع دایرهٔ AOB را درنظر گرفته، دو وتر متساوی AM و BN را می‌کشیم و آنها را امتداد می‌دهیم تا خطهای حاصل، یکدیگر را درنقطهٔ C قطع نمایند. ثابت کنید: شعاعی از ربع دایره که از نقطهٔ C می‌گذرد، بر AB و MN عمود است.

۳.۱. نقطه و نیمدایره



۲۷. نیمدایره‌ای به قطر BC و نقطهٔ A روی این نیمدایره داده شده است. از نقطه‌هایی مانند D واقع بر AB خطی بر BC عمود می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این عمودها را با خط BC و ACبترتیب، E وF می‌نامیم. ثابت کنید که چهار نقطهٔ A، E، Bو F روی یک دایره واقعند.

۴.۱. کمان



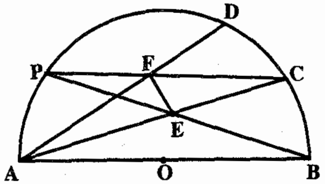
۲۸. نیمدایره‌ای به قطر MN و به مرکز C داده شده است. دو نقطهٔ A و B بر نیمدایره و نقطهٔ P بر CN طوری واقع شده‌اند که هریک از دو زاویهٔ CAP و CBP به اندازهٔ 10° است. اگر کمان $\overset{\frown}{AM}$ به اندازهٔ 40° باشد، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BN}$ چه‌قدر است؟

الف) 10° ب) 15° ج) 20° د) 25° هـ) 30°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

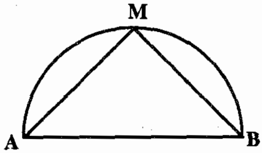
۵.۱. وتر

۲۹. اگر P نقطه‌ای از نیمدایره‌ای به قطر AB و $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دو کمان مساوی از آن باشند و E و



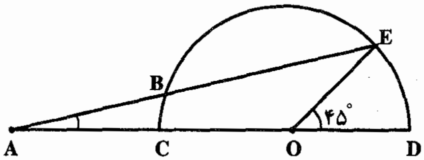
محل برخورد وترهای CA و PB و F محل برخورد وترهای AD و PC باشد، ثابت کنید : وتر AD بر EF عمود است.

۱.۶. قطر



۳۰.در نیمدایره‌ای به قطرAB ، نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$است. اگر $MA = ۶\sqrt{۲}$ سانتیمتر باشد، اندازهٔ قطر AB چند سانتیمتر است؟

۱.۷. زاویه

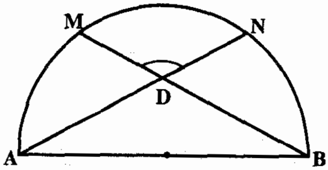


۳۱.در شکل، CD قطر نیمدایره‌ای به مرکز O است. نقطهٔ A بر امتداد DC و نزدیکتر به C قرار دارد. نقطهٔ E بر نیمدایره واقع است و B نقطهٔ برخورد (متمایز از E) خط AE با نیمدایره است. هرگاه طول AB با طول OD برابر و اندازهٔ زاویهٔ EOD برابر °۴۵ باشد، اندازهٔ زاویهٔ BAO برابر است با :

الف) °۱۰ ب) °۱۵ ج) °۲۰ د) °۲۵ هـ) °۳۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

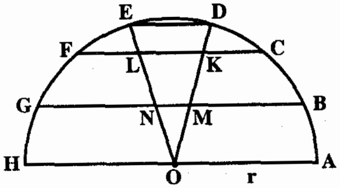
۳۲. دو وتر AN و BM از نیمدایره‌ای به قطر AB یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کرده‌اند (شکل). اندازهٔ زاویهٔ MDN را تعیین کنید، در صورتی که $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$ باشد.



۸.۱. پاره‌خط

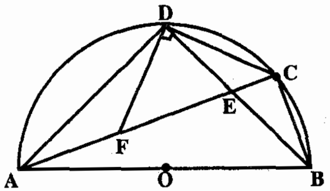
۳۳. نیمدایره‌ای با نقطه‌های A_0 ، A_1 ، ... ، A_{2n+1} ، به ۲n+۱ کمان برابر، تقسیم می‌شود. (A_0 و A_{2n+1} دو انتهای نیمدایره هستند)، O مرکز نیمدایره است. ثابت کنید که : خطهای راست A_1A_{2n} ، A_2A_{2n-1} ، ... و A_nA_{n+1} ، ضمن برخورد با خطهای راست OA_n و OA_{n+1} ، پاره‌خطهایی تشکیل می‌دهند که مجموع طولهایشان، برابر با شعاع دایره است.

۳۴. نیمدایره‌ای به قطر $AH = 2r$ مفروض است. نقطه‌های A ،B، C ، D ، E ، F ،G و H کمان $\widehat{AB}$ را به ۷ قسمت برابر، تقسیم کرده‌اند. از نقطهٔ O مرکز نیمدایره به دو نقطهٔ وسطی D و E وصل می‌کنیم تا وترهای موازی CF و BG را در نقطه‌های L ،K ،M و N قطع کنند، ثابت کنید که :



$$DE + KL + MN = r$$

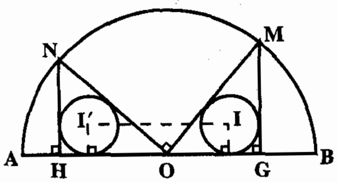
۳۵. روی نیمدایره‌ای به قطر AB دو کمان $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ را متساوی اختیار کرده، از D عمودی بر DC اخراج می‌کنیم تا AC را در F قطع کند، ثابت کنید : نقطهٔ F وسط AE است (E نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD است).



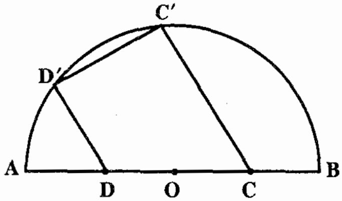
۹.۱. خطهای: موازی، عمودبرهم، ...

۱.۹.۱. خطها موازی‌اند

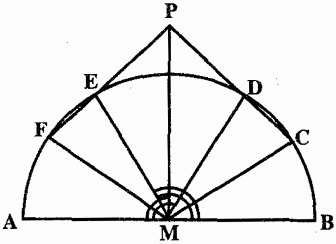
۳۶. در نیمدایره‌ای به قطر AB و مرکز O دو شعاع عمود برهم OM و ON را رسم کرده، از M و N عمودهای MG و NH را بر قطر AB فرود می‌آوریم و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث MOG را I و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث NOH را I′ می‌نامیم. ثابت کنید : II′ با AB موازی است.



۱.۹.۲. خطها برهم عمودند

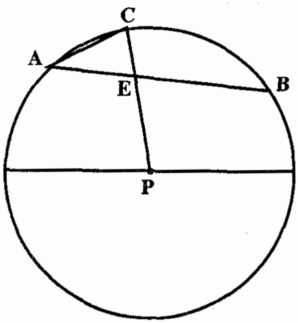


۳۷. در نیمدایره‌ای به مرکز O روی قطر AB، نقطه‌های C و D را در طرفین نقطهٔ O طوری اختیار می‌کنیم که $OC = OD$ باشد. از نقطه‌های C و D دو خط موازی می‌کشیم تا نیمدایره را بترتیب، در نقطه‌های ′C و ′D قطع کنند. ثابت کنید : ′C′D بر ′DD عمود است.



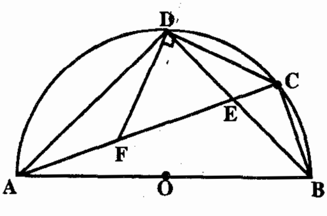
۳۸. فرض کنید AB قطر یک نیمدایره و M نقطه‌ای روی قطر AB باشد. نقطه‌های C ، D ، E و F روی نیمدایره طوری قرار گرفته‌اند که $A\hat{M}D = E\hat{M}B$ و $C\hat{M}A = F\hat{M}B$. فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد خطهای CD و EF باشد. ثابت کنید که : خط PM بر AB عمود است.

۱.۱۰. شکلهای ایجاد شده



۳۹. روی نیمدایره‌ای به مرکز P، وترهای AB و AC را به نحوی برگزینید که $\widehat{AB} = ۳\widehat{AC}$ و C نقطه‌ای از کمان کوچکتر $\widehat{AB}$ باشد. شعاع PC وتر AB را در E قطع می‌کند. ثابت کنید : مثلث ACE متساوی‌الساقین است.

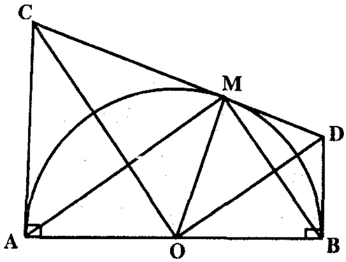
۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۴۰. نیمدایره‌ای به قطر AB و به مرکز O مفروض است : نقطه‌های D و E روی این نیمدایره چنان قرار دارند که $\widehat{AD} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{DE} = ۹۰^\circ$ است. فاصلهٔ مرکز نیمدایره از وترهای AD ، DE و EB را باهم مقایسه کنید.

۴۱. در یک نیمدایرهٔ مفروض، یک چهارضلعی با محیط معلومی، محاط شده است. اگر ضلع روبه‌رو به قطر این نیمدایره، طولی برابر l داشته باشد، کدام چهارضلعی بیشترین محیط را دارد؟

۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی



۴۲. نیمدایره‌ای به قطر AB داده شده است. از A و B دو عمود AC و BD را بر AB اخراج کرده و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر نیمدایره، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم و محلّ برخورد این مماس با عمودهای AC و BD را بترتیب، C و D می‌نامیم:

۱. ثابت کنید: $AC+BD=CD$،

۲. از M به A و B و از O به C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید: چهارضلعی که به این ترتیب به دست می‌آید، مستطیل است.

بخش ۲

• یک دایره

۱.۲. تعریف و قضیه

۲.۲. شعاع

۳.۲. نقطه و دایره

۱.۳.۲. نقطه درون دایره

۲.۳.۲. نقطه روی دایره

۳.۳.۲. نقطه برون دایره

۴.۳.۲. نقطه‌های همخط

۵.۳.۲. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۴.۲. کمان

۱.۴.۲. اندازهٔ کمان

۲.۴.۲. رابطهٔ بین کمانها

۳.۴.۲. تعداد کمانها

۵.۲. وتر

۱.۵.۲. اندازهٔ وتر

۲.۵.۲. برابری وترها

۳.۵.۲. برابری قطعه‌های وترها

۴.۵.۲. نابرابری وترها

۵.۵.۲. ثابت کنید وترها بر هم عمودند

۶.۵.۲. تعداد وترها

۲.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۶. قطر

۲.۷. زاویه

۲.۷.۱. زاویهٔ مرکزی

۲.۷.۲. زاویهٔ محاطی

۲.۷.۳. زاویهٔ ظلی

۲.۷.۴. زاویهٔ درونی (زاویهٔ بین دو وتر)

۲.۷.۵. زاویهٔ برونی (زاویهٔ بین امتداد دو وتر، دو مماس، یا یک وتر و یک مماس)

۲.۷.۶. زاویه‌های مختلف

۲.۷.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲.۷.۷.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۷.۷.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۲.۷.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۸. پاره‌خط

۲.۸.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲.۸.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲.۸.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۲.۸.۲.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۲.۸.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۹. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۲.۹.۱. خطها موازی‌اند

۲.۹.۲. خطها بر هم عمودند
۳.۹.۲. خط نیمساز است
۴.۹.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد
۵.۹.۲. خطها همرسند
۶.۹.۲. وضع نسبی خط و دایره
۱.۶.۹.۲. خط مماس بر دایره است
۲.۶.۹.۲. خط متقاطع با دایره است

۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده
۱.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (مثلث)
۲.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (چند ضلعیها، $n \geq ۴$)

۱۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

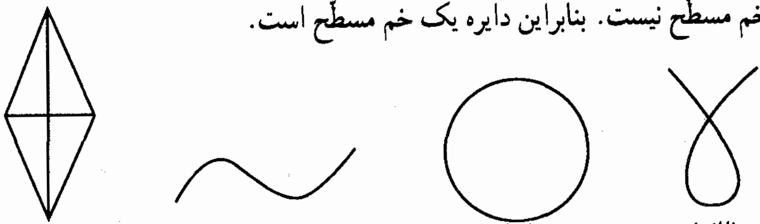
۱۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

بخش۲. یک دایره

۱.۲. تعریف و قضیه

تعریف دایره و برخی عاملهای دیگر در ارتباط با دایره و قضیه‌هایی از دایره را در بخش ۱ دیدیم. اینک، نکته‌ها و قضیه‌هایی دیگر در مورد دایره را بررسی می‌کنیم.

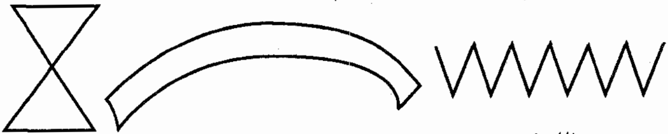
خم مسطّح. مجموعه‌ای از نقطه‌هاست که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. در شکل، نمونه‌های (الف)، (ب) و (پ) هر کدام یک خم مسطّح هستند ولی (ت) یک خم مسطّح نیست. بنابراین دایره یک خم مسطّح است.

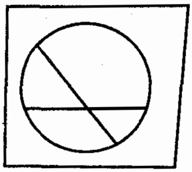


(الف) (ب) (پ) (ت)

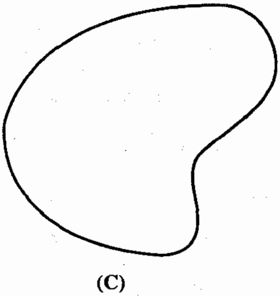
خم ساده. یک خم مسطّح، ساده است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به‌هم می‌رسند. در شکل، (الف) و (ب) خمهای ساده هستند ولی (پ) و (ت) خمهای ساده نیستند. خم ساده می‌تواند بسته یا باز باشد.

(الف) خم سادهٔ باز و (ب) خم سادهٔ بسته است.





(الف) (ب) (پ) (ت)



(C)

قضیهٔ خم جردن. هر خم سادهٔ بسته (C) صفحه را به سه زیرمجموعهٔ جدا از هم، درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

۴۳. قضیه. در هر دایره، کمانهای محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند.

۴۴. قضیه. ثابت کنید، خطی که در وسط یک قوس از دایره‌ای بر آن دایره مماس شود، با وتر آن قوس، موازی است.

۴۵. **قضیه.** ثابت کنید، هر دو وتر متوازی که بر دو انتهای یک قطر دایره‌ای بگذرند، متساوی‌اند.

۴۶. ثابت کنید، هر دو وتر متساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، متوازی‌اند.

۴۷. **قضیه.** در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو به هر ضلع با هم برابرند و بعکس.

۴۸. **قضیهٔ عکس.** اگر در یک چهارضلعی، دو زاویهٔ روبه‌رو به یک ضلع برابر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.

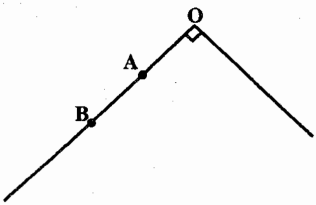
۴۹. **قضیه.** در هر چهارضلعی محاطی، هر زاویهٔ خارجی چهارضلعی با زاویهٔ داخلی غیرمجاورش برابر است و بعکس.

۲.۲. شعاع

۵۰. ثابت کنید: طول شعاع دایره، برابر است با تفاضل طولهای دو پاره‌خط راست که یکی وتر کمان $\frac{۱}{۱۰}$ و دیگری وتر کمان $\frac{۳}{۱۰}$ دایره است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۵۱. نقطه‌های A و B بر یک ضلع زاویهٔ قائمه‌ای به رأس O اختیار می‌شوند، $OA = a$ و $OB = b$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از A و B می‌گذرد و بر ضلع دیگر زاویه، مماس است.



۳.۲. نقطه و دایره

۱.۳.۲. نقطه درون دایره

۵۲. ثابت کنید، مجموعهٔ نقطه‌های درون دایره، مجموعه‌ای محدّب است.

۵۳. روی یک کاغذ شطرنجی که طول ضلع هر خانهٔ آن برابر واحد است، دایره‌ای به شعاع ۱۰ رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید، بیش از ۲۵۰ گره، از شبکه، درون این دایره وجود دارد.

۵۴. هفت نقطه در سطح دایره‌ای به شعاع واحد چنان قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ هیچ دو نقطه‌ای از آنها، از واحد کوچکتر نیست. ثابت کنید، یکی از نقطه‌ها بر مرکز دایره واقع است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۵

۲.۳.۲. نقطه روی دایره

۵۵. ثابت کنید، همهٔ نقطه‌های محیط دایره را می‌توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که بین رأسهای هر مثلث قائم‌الزاویهٔ محاط در این دایره، نقطه‌های هر دو مجموعه وجود داشته باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، برزیل، ۱۹۸۳

۵۶. نقطهٔ P در صفحهٔ دایرهٔ C و در خارج آن واقع است. حداکثر تعداد نقطه‌های دایرهٔ C که به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر از P می‌توانند باشند، چند عدد است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۷. در ساحل یک دریاچهٔ گرد بزرگ، چند نقطهٔ مسکونی وجود دارد. بین برخی از این نقطه‌های مسکونی، می‌توان با کشتی رفت و آمد کرد. می‌دانیم، تنها وقتی بین دو نقطه، رفت‌وآمد با کشتی ممکن است که، بین دو نقطهٔ مسکونی بعد از آنها (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، این وسیلهٔ ارتباطی وجود نداشته باشد. ثابت کنید: از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، می‌توان با کشتی مسافرت کرد، به نحوی که حداکثر به دوبار جابه‌جایی نیاز باشد.

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۸۰

۵۸. n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند و می‌دانیم، برای هر دو نقطهٔ دلخواه، یکی از دو کمانی که آنها را به هم پیوسته، از ۱۲۰° درجه کمتر است. ثابت کنید: همهٔ این n نقطه، روی کمانی برابر ۱۲۰° درجه واقعند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۵۹. در صفحه‌ای، دو نقطهٔ متفاوت O و A داده شده‌اند. به‌ازای هر نقطهٔ X صفحه، غیر از O، اندازهٔ زاویهٔ بین OA و OX برحسب رادیان، و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، را با $a(X)$ نمایش می‌دهیم ($۰ \leq a(X) < ۲\pi$). فرض می‌کنیم $C(X)$ دایره‌ای با مرکز O و شعاع به طول: $OX + a(X)/OX$ باشد. هر نقطهٔ صفحه با یکی از رنگها به تعداد متناهی رنگ شده است. ثابت کنید که، نقطهٔ Yی که به‌ازای آن: $a(Y) > ۰$ است چنان موجود است که رنگ آن بر محیط دایرهٔ $C(Y)$ ظاهر می‌شود.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۴

۶۰. ۳۰۰ نقطه روی محیط دایره‌ای نشان گذاشته شده است. حشره‌ای در یکی از این نقطه‌ها نشسته است. او در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، مرتب از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر می‌جهد، به این ترتیب: اوّل روی نقطهٔ مجاور، بعد از روی یک نقطه می‌جهد و در نقطهٔ بعد از آن می‌نشیند، سپس از روی دو نقطه می‌جهد، بعد از روی سه نقطه و غیره.

ثابت کنید که: می‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که حشره هرگز روی آن قرار نمی‌گیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۶۱. دایره‌ای به شعاع واحد و ۱۹۸۲ نقطه، روی صفحه داده شده است. ثابت کنید که: روی محیط این دایره نقطه‌ای پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های از آن تا ۱۹۸۲ نقطه، از ۱۹۸۲ بیشتر باشد.

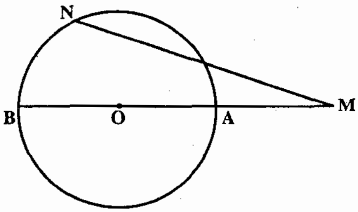
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۶۲. فرض می‌کنیم $n \geq 3$ و مجموعهٔ E از $2n-1$ نقطهٔ متمایز روی یک دایره تشکیل شده باشد. فرض می‌کنیم، دقیقاً k نقطه از این نقطه‌ها به رنگ سیاه، رنگ‌آمیزی شده است. یک چنین رنگ‌آمیزی را «خوب» می‌گوییم. اگر حداّقل، یک زوج از نقطه‌های سیاه وجود داشته باشد به‌طوری که درون یکی از دو کمان منتهی به این دو نقطه شامل درست n نقطه از E باشد.

کمترین مقدار k را برای این که هر رنگ‌آمیزی E خوب باشد، پیدا کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، چین، ۱۹۹۰

۲.۳.۳. نقطه برون دایره

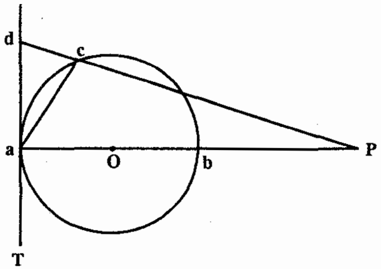


۶۳. دایره‌ای به قطر AB داده شده است. روی این قطر و یا در امتداد آن نقطهٔ M را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که، فاصلهٔ M از هر نقطهٔ N واقع بر محیط دایره، محصور بین MA و MB می‌باشد. به عبارت دیگر MA و MB بترتیب کمترین و بیشترین فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره به مرکز O می‌باشند.

۶۴. تعداد نقطه‌هایی که از یک دایره و از دو خط موازی مماس بر آن دایره به یک فاصله‌اند، برابر است با:

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) نامتناهی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳ و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانهای امریکا، ۱۹۶۹

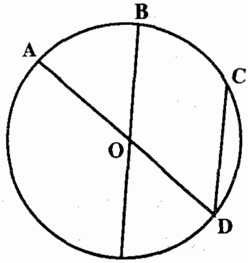


۶۵. دایره‌ای به شعاع یک، داده شده است. [ab] قطری از آن و خط T در a بر آن مماس است. وتر [ac] به طول k در این دایره رسم می‌شود و نقطهٔ d بر خط T به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که c و d در یک

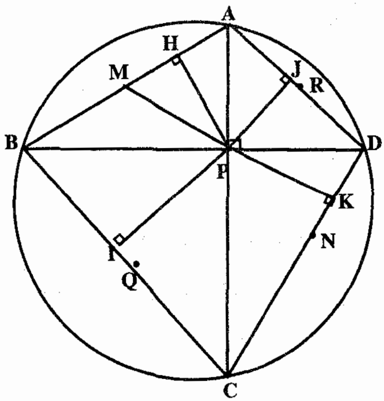
طرف خط ab واقع باشند و $[ad = k]$. اگر P نقطهٔ برخورد دو خط ab و cd باشد، هرگاه k به سمت صفر میل کند، وضع حدّی نقطهٔ P چه خواهد بود؟

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

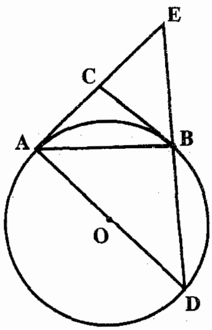
۴.۳.۲. نقطه‌های همخط



۶۶. سه نقطهٔ A، B و C بترتیب، روی دایرهٔ به مرکز O طوری قرار دارند که $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ می‌باشد. از نقطهٔ C وتر CD را موازی شعاع OB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه نقطهٔ A، O و D روی یک خط راست واقعند.



۶۷. در دایرهٔ O دو وتر AC و BD را عمود بر هم رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. وسطهای وترهای AB، BC، CD و DA را بترتیب، M، Q، N و R و تصویرهای نقطهٔ P روی این وترها را بترتیب، H، I، K و J می‌نامیم. ثابت کنید، سه نقطهٔ M، P و K بر یک استقامتند. سه دسته نقطهٔ دیگر نظیر این نقطه‌ها را مشخص سازید.



۶۸. بر دایرهٔ داده شده از نقطهٔ C، دو مماس CA و CB را رسم می‌کنیم و قطر AD را در نظر گرفته و AC را به اندازهٔ CE مساوی با خودش امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که، نقطه‌های D، B و E بر یک خط راست واقعند.

۵.۳.۲. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۶۹. کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

الف) بر هر نقطهٔ صفحه، بی‌نهایت دایره می‌گذرد.

ب) بر دو نقطهٔ صفحه، بی‌نهایت دایره می‌گذرد.

ج) بر دو نقطهٔ صفحه، یک و فقط یک دایره می‌گذرد.

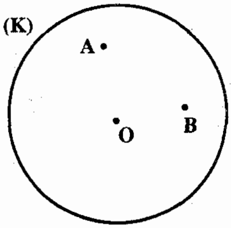
د) بر هر سه نقطهٔ صفحه، غیرواقع بر یک خط راست، یک و فقط یک دایره می‌گذرد.

هـ) بر سه نقطهٔ صفحه واقع بر یک خط راست، هیچ دایره‌ای نمی‌گذرد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۷۰. A و B را دو نقطه در درون دایرهٔ K فرض کنید. ثابت کنید که بی‌نهایت دایره وجود دارد که از A و B بگذرند و در درون دایرهٔ K باشند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۸

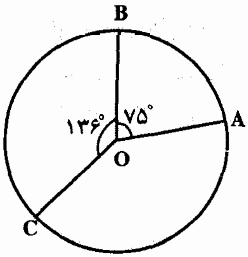


۷۱. ۳ + ۲n نقطه روی صفحه قرار دارند؛ هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط راست و هیچ چهار نقطه‌ای بر محیط یک دایره واقع نیستند. آیا دایره‌ای وجود دارد که از سه نقطه از این نقطه‌ها بگذرد و درست نیمی از بقیهٔ نقطه‌ها را در درون خود جا دهد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چین، ۱۹۶۳

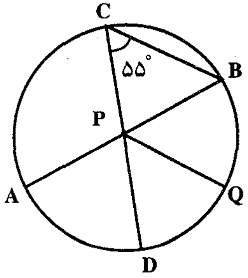
۴.۲. کمان

۱.۴.۲. اندازهٔ کمان



۷۲. سه نقطهٔ A، B و C بر یک دایره به مرکز O چنان قرار دارند که $A\hat{O}B = ۷۵^\circ$ و $B\hat{O}C = ۱۳۶^\circ$ و دو زاویه در دو طرف OB هستند. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ را تعیین کنید.

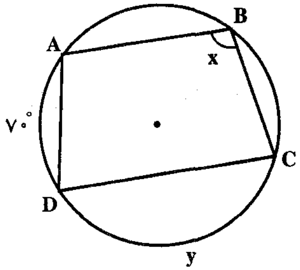
۷۳. P مرکز این دایره است و CB||PQ . اگر $B\hat{C}P = ۵۵^\circ$ ، اندازهٔ کمانهای $\overset{\frown}{BQ}$ و $\overset{\frown}{AD}$ چه‌قدر است؟



۷۴. دو وترِ عمود بر هم از دایرهٔ C(O,R) بر دایره، چهار کمان پدید آورده‌اند، اگر اندازه‌های دو کمان از چهار کمان مزبور ۴۰° و ۶۰° باشند، اندازه‌های دو کمان دیگر را تعیین کنید.

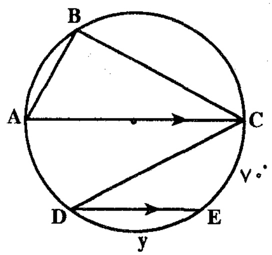
۷۵. اندازهٔ کمانهای خواسته شده در هر شکل را تعیین کنید.

الف) اگر $x = ۱۰۰^\circ$ باشد، y را بیابید.



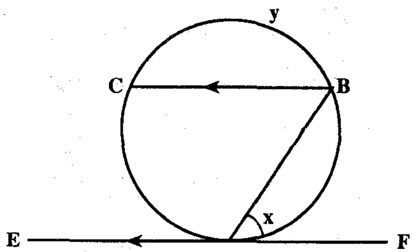
(الف)

ب) DE||AC است. اندازهٔ y را بیابید.



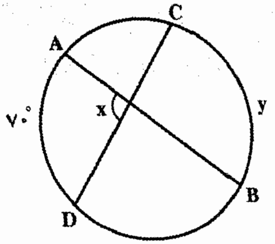
(ب)

پ) اگر $x = ۷۰^\circ$ باشد، y را بیابید.



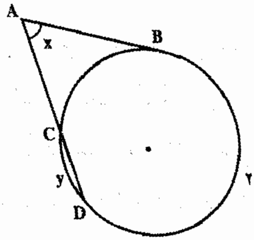
(پ)

ت) اگر $x = ۹۵^\circ$ باشد، y را بیابید.



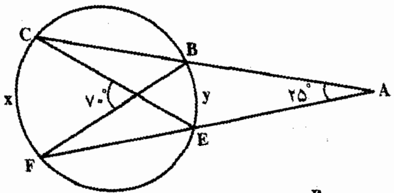
(ت)

ث) اگر $x = ۶۷^\circ$ باشد، y را بیابید.

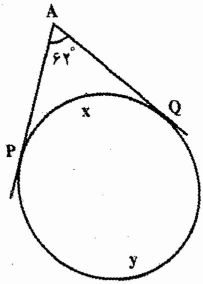


(ث)

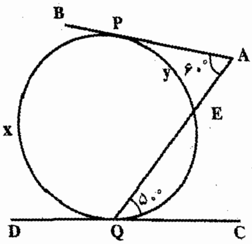
ج، چ، ح و خ) x و y را بیابید.



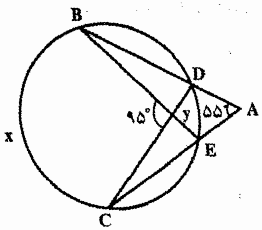
(ج)



(چ)

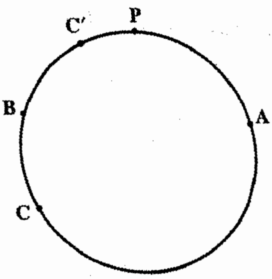


(ح)

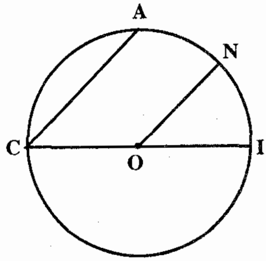


(خ)

۲.۴.۲. رابطهٔ بین کمانها



۷۶. روی محیط دایره‌ای، کمان $\widehat{AB}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم P وسط کمان $\widehat{AB}$ باشد. اگر C، نقطه‌ای خارج کمان $\widehat{AB}$ و روی محیط دایره باشد، ثابت کنید: $\widehat{CP} = \frac{\widehat{CA} + \widehat{CB}}{۲}$. اگر C'، بین A و B اختیار شود، رابطهٔ بالا به چه صورت درمی‌آید؟



۷۷. در دایرهٔ به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \| ON$. ثابت کنید، $\widehat{AN} = \widehat{NI}$.

۲.۴.۳. تعداد کمانها

۷۸. مثلثهایی را در نظر می‌گیریم که دو به دو، نابرابر و رأسهای آنها در نقطه‌هایی از محیط دایره باشند که آن را به n کمان برابر تقسیم کرده‌اند $(n > 2)$. به‌ازای چه مقداری از n، درست نیمی از این مثلثها متساوی‌الساقینند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۷۹. به‌ازای چه مقدارهایی از k، می‌توان ۱۰۰ کمان روی محیط دایره قرار داد، به نحوی که، هر کمان، درست به‌وسیلهٔ k کمان دیگر قطع شده باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۸۰. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر، نقطهٔ دلخواه A_0 را انتخاب و در جهت مثبت دایرهٔ مثلثاتی، نقطه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 ،... را طوری انتخاب می‌کنیم که متر $\widehat{AA_1} = 1$ ، متر $\widehat{A_1A_2} = \frac{1}{2}$ ، ...، متر $A_{n-1}A_n = \frac{1}{n}$ و ... (تعداد نقطه‌ها نامتناهی است).

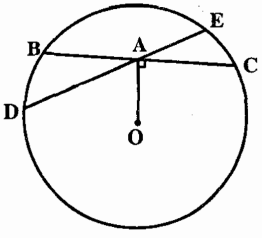
الف) نشان دهید، هیچ دو نقطهٔ A_i و $A_j (i \neq j)$ بر هم منطبق نیستند.

ب) نشان دهید، اقلاً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقطه‌های A_i واقع بر آن بی‌نهایت است.

مرحلهٔ اوّل هفتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۲.۵. وتر

۲.۵.۱. اندازهٔ وتر

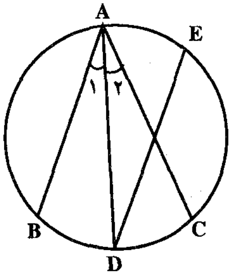


۸۱. نقطهٔ A، داخل دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. ثابت کنید، طول وتری که از نقطهٔ A گذشته و بر OA عمود باشد، کوچکتر از طول هر وتر دیگری است که از نقطهٔ A می‌گذرد.

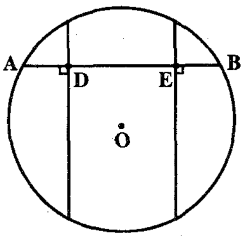
۸۲. نقطهٔ X درون دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. نقطهٔ Y را روی قطری که از X می‌گذرد، طوری انتخاب می‌کنیم که نقطهٔ O وسط دو نقطهٔ X و Y باشد. می‌خواهیم از نقطهٔ Y، وتر AB را چنان بگذرانیم که زاویهٔ AXB، حداّقلِ مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۲.۵.۲. برابری وترها



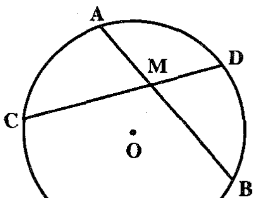
۸۳. زاویهٔ BAC در یک دایره محاط است. نیمساز این زاویه، دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید، وتر DE که به موازات AB رسم شود با وتر AC مساوی است.



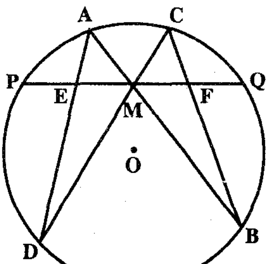
۸۴. روی وتر AB دو نقطهٔ D و E را چنان اختیار می‌کنیم که AD = BE باشد. ثابت کنید، دو وتری که در نقطه‌های D و E عمود بر AB رسم می‌شوند، با هم برابرند.

۸۵. در یک دایـره،دو زاویه یکی محاطی و دیگری مرکزی، هر کـدام برابر 120° = زاویهٔ‌قائمه × $\frac{4}{3}$ می‌باشند. ثابت کنید، که وترهای نظیر این دو زاویه برابرند.

۳.۵.۲. برابری قطعه‌های وترها



۸۶. هرگاه دو وتر متساوی در یک دایره، یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، قطعه‌هایی که به‌وسیلهٔ M روی آنها جدا می‌شود، دو به دو متساوی‌اند.

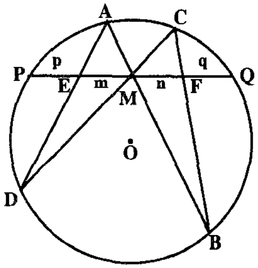


۸۷. **قضیهٔ پروانه.** در دایرهٔ مفروض، از نقطهٔ M وسط وتر PQ دو وتر AB و CD را رسم می‌کنیم. وترهای AD و BC با وتر PQ ، بترتیب در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید که، نقطهٔ M وسط پاره‌خط EF است.

نکته. یکی از مسأله‌های مهم و جالب هندسهٔ اقلیدسی، مسأله‌ای است که نام پروانه بر روی آن گذاشته‌اند. این که چه کسی این نام را بر این مسأله گذاشته است، به‌درستی روشن نیست. اما این نامگذاری برای اوّلین بار، در مجلهٔ

ریاضی American Mathematical Monthly در فوریهٔ سال ۱۹۴۴ ظاهر شد و بتدریج مقبولیّت عامه پیدا کرد. برای این مسأله تاکنون راه‌حلهای مختلفی توسط ریاضیدانان با استفاده از نسبتهای متقاطع، قضیهٔ منولائوس، قضیهٔ دزارگ، هندسهٔ تحلیلی، مثلثات، هندسهٔ اقلیدسی پیشرفته و روشهای دیگر ارائه گردیده است که برخی ساده و برخی مشکل می‌باشند، اما به نظر راجرجانسون Roger Johnson مؤلف کتاب هندسهٔ مدرن Modern geometry، اثبات این قضیهٔ ساده به‌طور شگفت‌انگیزی مشکل است.

۸۸. در پاورقی کتاب هندسهٔ جدید راجر جانسون گفتار جالبی دربارهٔ حالت کلی‌تر مسأله پروانه توسط ا. کندی Arthur Candy آمده است که در سالنامهٔ ریاضی Annals Mathematics چاپ ۱۸۹۶ نیز همین قضیه به‌صورت زیر عنوان گردیده است:

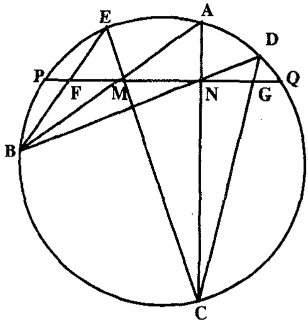


قضیه. اگر نقطهٔ M را روی وتر PQ در یک دایره چنان اختیار کنیم که $MP = p$ و $MQ = q$ باشد و وترهای AB و CD گذرنده از M را رسم کنیم و نقطه‌های برخورد AD و BC با وتر PQ را E و F بنامیم و پاره‌خطهای $ME = m$ و $MF = n$ فرض شوند، داریم:

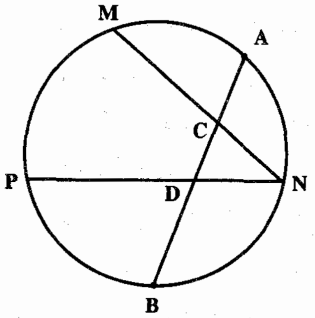
$$\frac{pq}{mn}=\frac{p-q}{m-n} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \quad \text{یا} \quad mn(p-q)=pq(m-n) \ (1)$$

قضیهٔ پروانه، حالت بسیار ساده‌ای از این قضیهٔ کلی و زیباست که اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط PQ اختیار شود، $p = q$ و در نتیجه از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $pq(m-n)=0$ و چون $pq \neq 0$ است پس $m = n$، یعنی $ME = MF$ می‌باشد.

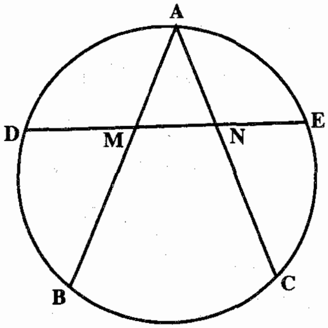
قضیهٔ پروانه در حال حاضر، برای هر مقطع مخروطی تعمیم یافته است و مسأله‌ای نیز به نام «پروانهٔ سه بال» در ماه مارس ۱۹۸۴ توسط ار. اس. لوتار R.S.Luthar در مجلّهٔ Mathematics Magazin عنوان شده است.



مسألهٔ پروانهٔ سه بال. وتر PQ در دایره‌ای مفروض است. اگر نقطه‌های M و N پاره‌خط PQ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند و A نقطهٔ دلخواهی از محیط این دایره، غیر از نقاط P و Q باشد و نقطه‌های برخورد AM و AN با دایره را B و C و نقطه‌های برخورد BN و CM با دایره را D و E و نقطه‌های برخورد EB و DC با وتر PQ را F و G بنامیم، ثابت کنید: $PF = QG$.

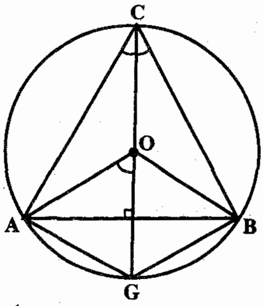


۸۹. بر دایره‌ای سه نقطهٔ M، N و P را اختیار می‌کنیم و از A وسط کمان $\widehat{MN}$ به B وسط کمان $\widehat{NP}$ وصل می‌کنیم. این خط وترهای MN و NP را بترتیب در C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که : $NC = ND$.



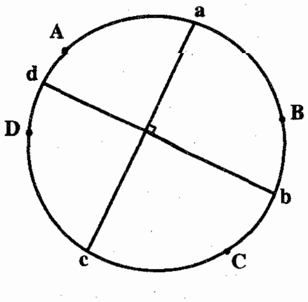
۹۰. روی یک دایره دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ هر کدام مساوی ۱۲۰° می‌باشند. ثابت کنید، وتر DE که وسطهای این دو کمان را به هم وصل می‌کند، به وسیلهٔ وترهای AB و AC به سه قسمت برابر تقسیم می‌شود.

۲.۵.۴. نابرابری وترها



۹۱. هنگامی که هر یک از زاویه‌های مساوی در یک دایره، یکی محاطی و دیگری مرکزی، کمتر از $\frac{۴}{۳}$ زاویهٔ قائمه باشد، وتر زاویهٔ مرکزی از وتر زاویهٔ محاطی کوچکتر، و از نصف وتر زاویهٔ محاطی بزرگتر است، یعنی در این شکل باید ثابت کنیم $AG < AB$ و $AG > \frac{AB}{۲}$ است.

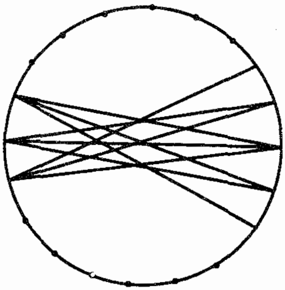
۹۲. در دایره‌ای به شعاع ۵cm ، دو وتر AB و CD بترتیب، به فاصلهٔ ۲cm و ۴cm از مرکز دایره قرار دارند. کدام وتر بزرگتر است؟



۲.۵.۵. ثابت کنید وترها بر هم عمودند

۹۳. نقطه‌های A، B، C و D روی یک دایره به همین ترتیب داده شده‌اند. اگر a، b، c و d بترتیب، وسط کمانهای $\widehat{AB}$، $\widehat{BC}$، $\widehat{CD}$ و $\widehat{DA}$ باشند، ثابت کنید، دو وتر ac و bd برهم عمودند.

۶.۵.۲. تعداد وترها



۹۴. دایره‌ای به ۲۰ کمان برابر بخش می‌شود. هر یک از نقطه‌های به‌دست آمده به هر یک از نقطه‌های دیگر به غیر از هشت نقطهٔ نزدیکتر به آن وصل می‌شود، تعداد همهٔ پاره‌خطهایی که به این ترتیب رسم می‌شوند، برابر است با:

الف) ۳۰　　ب) ۱۱۰　　ج) ۲۲۰　　د) ۳۰۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۹۵. ۱۰ نقطه روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم. حداکثر چند پاره‌خط راست، که دو انتهای هر یک از آنها در این نقطه‌ها باشند، می‌توان رسم کرد، به نحوی که هیچ سه پاره‌خط راستی تشکیل یک مثلث، به رأسهایی در این نقطه‌ها، ندهند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۷.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۶. P یک نقطهٔ داخلی دایرهٔ K و متمایز از مرکز آن است. همهٔ وترهای K را که بر P می‌گذرند، در نظر بگیرید. مکان هندسی نقطه‌های وسط این وترها عبارت است از:

الف. دایره‌ای به غیر از یک نقطهٔ آن.

ب. یک دایره به شرط آن که فاصلهٔ P تا مرکز دایره، کوچکتر از نصف شعاع دایرهٔ K باشد؛ در غیر آن صورت کمانی کوچکتر از 360° از یک دایره.

ج. یک نیمدایره به غیر از یک نقطهٔ آن.

د. یک نیمدایره.

هـ. یک دایره.

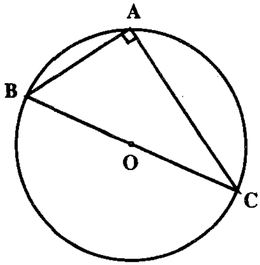
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

۹۷. $4n$ نقطه روی محیط دایره‌ای انتخاب و آنها را، یک در میان، به رنگهای قرمز و آبی درآورده‌ایم. نقطه‌های هر رنگ را به زوجهایی تقسیم و نقطه‌های هر زوج را با پاره‌خطهای راستی از همان رنگ، به هم وصل کرده‌ایم (در ضمن، هیچ سه پاره‌خط راستی، در یک نقطه به هم نرسیده‌اند). ثابت کنید، دست کم، n نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای راست قرمز با پاره‌خطهای راست آبی پیدا می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۴

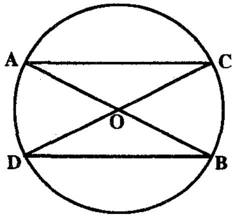
۹۸. مکان هندسی نقطه‌های وسط وترهایی از یک دایرهٔ مفروض که از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند، در صورتی که این نقطهٔ ثابت، درون یا روی دایره باشد، یک دایره است.

۹۹. مکان هندسی نقطه‌های وسط همهٔ وترهایی از یک دایرهٔ مفروض که طول مفروضی داشته باشند، دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ مفروض است.



۶.۲. قطر

۱۰۰. اگر از نقطهٔ دلخواه A، واقع بر دایره‌ای دو وتر AB و AC را عمود بر یکدیگر رسم کنیم، قطعه خط BC که دو انتهای غیرمشترک آنها را به هم وصل می‌کند، یکی از قطرهای دایره است.



۱۰۱. در دایره‌ای به مرکز O از نقطه‌های A و B، دو سر قطر AB، دو وتر متوازی AC و BD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، CD قطر دایره است.

۱۰۲. ۳k نقطه، روی محیط دایره‌ای قرار داده‌ایم؛ از ۳k کمانی که به‌دست می‌آید، k کمان به طول ۱، k کمان به طول ۲ و k کمان باقیمانده به طول ۳ هستند. ثابت کنید، بین این نقطه‌ها دو نقطه وجود دارد که در دو انتهای یک قطرند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۲

۱۰۳. ثابت کنید، وسط وترهای متوازی در یک دایره، روی قطری که بر وترها عمود است، قرار دارند.

۱۰۴. سطح دایره‌ای را به ۴۹ بخش، چنان تقسیم کرده‌ایم که هیچ سه بخشی، نقطهٔ مشترک نداشته باشند. «نقشهٔ» حاصل را با سه رنگ مختلف طوری رنگ کرده‌ایم که هر دو بخش مجاور، رنگهای متفاوت داشته باشند. مرز دو بخش را، با هر دو رنگ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، روی محیط دایره می‌توان دو نقطه پیدا کرد که دو سطر یک قطر و در ضمن به یک رنگ باشند.

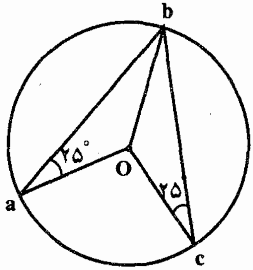
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۱۰۵. تصویر یک شکل مسطّحه، بر هر خط راستی که در صفحهٔ شکل واقع باشد، از واحد تجاوز نمی‌کند. آیا درست است که این شکل را می‌توان در دایره‌ای به قطر a) ۱ ؛ b) ۱/۵ جا داد؟

۱۰۶. اگر در یک دایره، دو وتر متساوی در یک سر مشترک باشند، قطری که از سر مشترکشان می‌گذرد، زاویهٔ بین آنها را نصف می‌کند.

۷.۲. زاویه

۱.۷.۲. زاویهٔ مرکزی

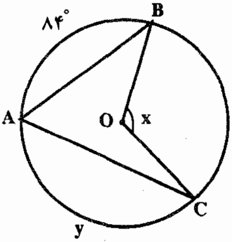


۱۰۷. در شکل روبه‌رو، هر یک از دو زاویهٔ Oab و Ocb به اندازهٔ °۲۵ و O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ aOc چند درجه است؟

الف) °۱۱۰ ب) °۱۳۰ ج) °۱۱۵

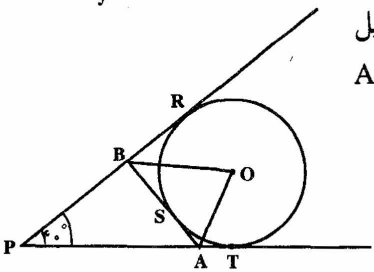
د) °۹۵ هـ) °۱۰۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



۱۰۸. الف) اگر $y = ۱۴۰°$، آن‌گاه $x = ?$

ب) اگر $x = ۱۶۵°$، آن‌گاه $y = ?$



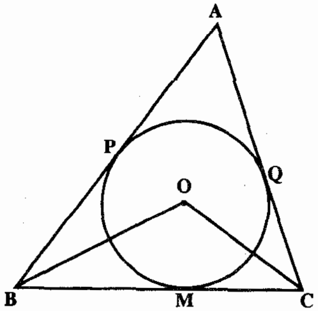
۱۰۹. با رسم سه مماس بر دایرهٔ O، مثلث PAB تشکیل می‌شود. اگر $\hat{APB} = ۴۰°$، آن‌گاه زاویهٔ AOB برابر است با:

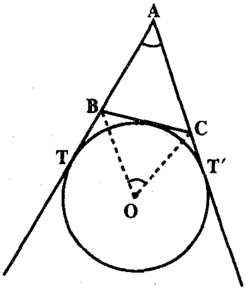
الف) °۴۵ ب) °۵۰ ج) °۵۵

د) °۶۰ هـ) °۷۰

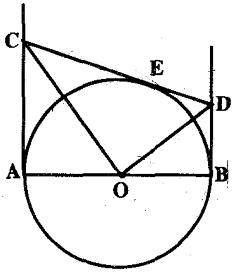
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۱۱۰. دایره‌ای به مرکز O و مماسهای AP و AQ که در نقطه‌های P و Q بر دایره مماسند، داده شده‌اند. اگر M نقطه‌ای متحرک از قوس بزرگتر $\widehat{PQ}$ باشد (قوسی که تقعرش به طرف نقطهٔ A است) و در این نقطه مماسی بر دایره رسم کنیم تا مماسهای AP و AQ را در نقطه‌های B و C قطع کند، ثابت کنید که با تغییر نقطهٔ M، اندازهٔ $AB + AC - BC$ و اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{O}C$ تغییر نمی‌کند (ثابت می‌ماند).



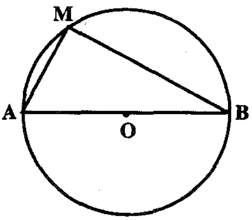


۱۱۱. قطعه‌ای از یک مماس متحرک که مابین دو مماس ثابت یک دایره محصور باشد، از مرکز آن دایره به زاویهٔ ثابتی دیده می‌شود (حالتهای مختلف شکل). حالت خاصی را که در آن مماسهای ثابت متوازی‌اند، مطالعه کنید.

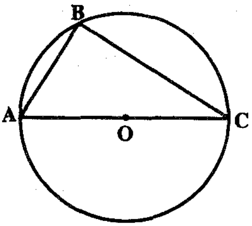


۱۱۲. دایرهٔ (O) و قطر AB از آن داده شده است. از نقطه‌های A و B دو خطّ مماس بر دایره رسم و مماس دیگری نیز بر دایره رسم می‌کنیم تا دو مماس اوّل را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید: زاویهٔ COD قائمه است.

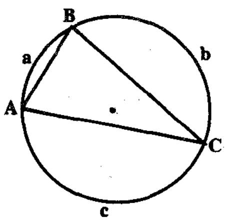
۲.۷.۲. زاویهٔ محاطی



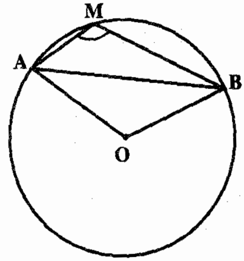
۱۱۳. نقطهٔ M از یک دایره را به دو سر قطر AB از آن دایره وصل می‌کنیم. ثابت کنید که زاویهٔ AMB مساوی یک قائمه است.



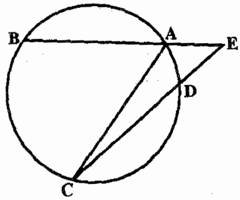
۱۱۴. در یک دایره، قطر AC و وتر AB مساوی با شعاع دایره را رسم می‌کنیم. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را به‌دست آورید.



۱۱۵. روی یک دایره و در یک جهت دوران، کمانهای $\widehat{AB}=60^\circ$ و $\widehat{BC}=120^\circ$ را اختیار می‌کنیم. زاویه‌های مثلث ABC را حساب کنید.



۱۱۶. نقطهٔ O مرکز دایره و نقطهٔ M واقع بر محیط آن را به دو سر وتر AB از این دایره وصل می‌کنیم. در صورتی که دو زاویهٔ AOB و AMB متساوی باشند، اندازهٔ هر یک از این دو زاویه را تعیین کنید.

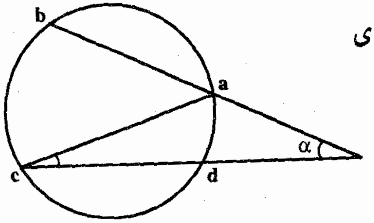


۱۱۷. در شکل $\hat{E} = ۴۰^\circ$ و کمانهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CD}$ دارای طولهای برابرند. اندازهٔ $A\hat{C}D$ را به‌دست آورید.

الف) ۱۰° ب) ۱۵° ج) ۲۰°

د) $\frac{۴۵^\circ}{۲}$ هـ) ۳۰°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷



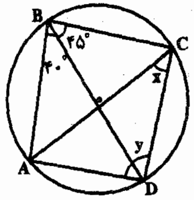
۱۱۸. مطابق شکل، چهار نقطهٔ a، b، c و d بر یک دایره واقعند و کمانهای $\overset{\frown}{ab}$ و $\overset{\frown}{bc}$ و $\overset{\frown}{cd}$ اندازه‌های برابر دارند. اندازهٔ زاویهٔ acd برابر است با:

الف) $۴۵^\circ - \frac{۳\alpha}{۴}$ ب) $\frac{۲}{۳}\alpha$

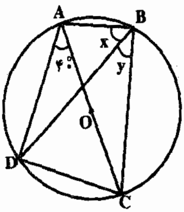
ج) $۹۰^\circ - ۲\alpha$ د) $۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۴}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۱۱۹. با توجه به شکل، اندازهٔ x و y را بیابید.

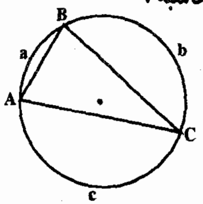


(الف)



(ب)

۱۲۰. مثلث ABC در دایره‌ای محاط است.



اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{a}$ و $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{b}$ و $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{c}$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $\overset{\frown}{a} = ۱۱۰^\circ$ و $\overset{\frown}{c} = ۲۰۰^\circ$

ب. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $AB \perp BC$ و $\overset{\frown}{a} = ۱۰۲^\circ$

پ. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر AC قطر دایره و $\overset{\frown}{a} = ۸۰^\circ$

ت. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $\overset{\frown}{a} : \overset{\frown}{b} : \overset{\frown}{c} = ۳:۱:۲$

ث. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر AC قطر و $\widehat{a} : \widehat{b} = ۵:۴$

ج. اندازهٔ زاویهٔ B، اگر $\widehat{ABC} = ۲۰۸^\circ$

چ. اندازهٔ زاویهٔ B، اگر $\widehat{a} + \widehat{b} = ۳\widehat{c}$

ح. اندازهٔ زاویهٔ B، اگر $\widehat{a} = ۷۵^\circ$ و $\widehat{c} = ۲\widehat{b}$

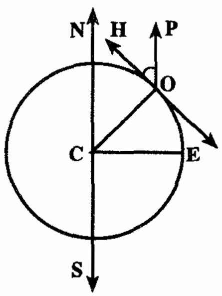
خ. اندازهٔ زاویهٔ C، اگر $AB \perp BC$ و $\widehat{a} = ۵\widehat{b}$

د. اندازهٔ زاویهٔ C، اگر $\hat{A}:\hat{B}:\hat{C} = ۵:۴:۳$

۱۲۱. $n \geq ۳$ نقطهٔ دلخواه $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n را روی صفحه‌ای در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که، هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند. زاویهٔ $A_iA_jA_k$ را که به‌وسیلهٔ سه نقطهٔ مختلف A_i، A_j و A_k به‌وجود می‌آید، α می‌نامیم. برای هر مقدار n، حداکثر مقدار α را پیدا کنید. نقطه‌ها چگونه بر صفحه واقع باشند تا به این مقدار برسیم؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۴

۳.۷.۲. زاویهٔ ظلّی



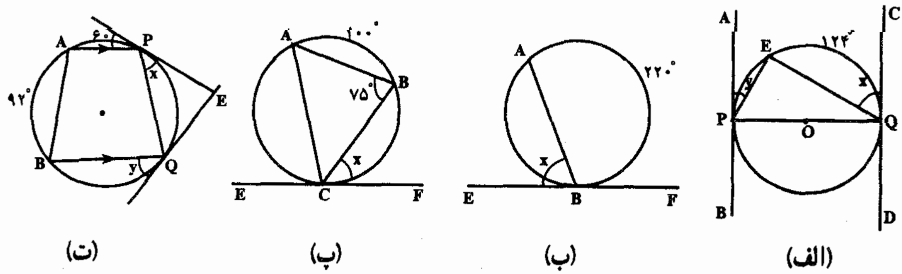
۱۲۲. یکی از اولّین حقایقی که در درس اخترشناسی فرا می‌گیرند این است که عرض جغرافیایی یک محلّ روی زمین برابر است با زاویه‌ای که ستارهٔ قطبی با افق آن محل می‌سازد. درستی این مطلب را با اثبات قضیهٔ زیر نشان دهید. وضعیت فیزیکی با علائم زیر نشان داده شده است:

$\overline{NS}$ محور زمین، دایره‌ای که در شکل می‌بینید یک نصف‌النهار، C مرکز زمین، E نقطه‌ای از استوا، O ناظر، $\overline{OH}$ افق و $P\hat{O}H$ ارتفاع ستارهٔ قطبی است.

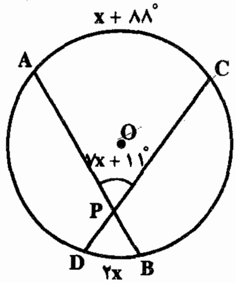
فرض: در دایره‌ای به مرکز C، $CE \perp NS$. OH در O مماس است. $OP \| NS$

حکم: $m\widehat{OH} = mP\hat{O}H$

۱۲۳. اندازهٔ زاویه‌های ظلی خواسته شده در هر شکل را بیابید.

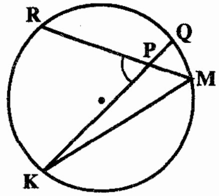


۲.۷.۴. زاویهٔ درونی (زاویهٔ بین دو وتر)

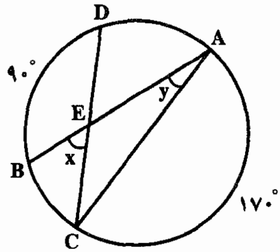


۱۲۴. دو وتر AB و CD از دایرهٔ O در نقطه‌ای مانند P درون دایره متقاطعند به قسمی که $\hat{P} = (7x+11)^\circ$ و کمانهای مقابل به آن از دایره بترتیب، به اندازه‌های $(2x)^\circ$ و $(x+88)^\circ$ می‌باشند. اندازهٔ زاویهٔ P را تعیین کنید.

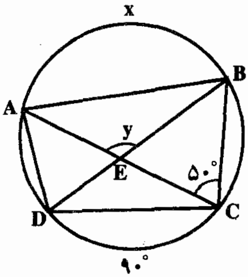
۱۲۵. در این شکل، اگر $MR = MK$ ، $\widehat{MK} = 140^\circ$ و $\widehat{MQ} = 26^\circ$ ، زاویهٔ $R\hat{P}K$ چه‌قدر است؟



۱۲۶. با توجه به هر شکل، اندازهٔ x و y را بیابید.

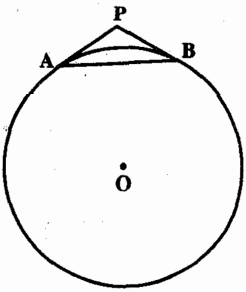


(الف)



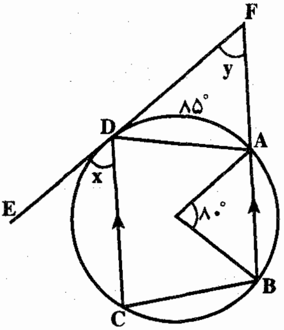
(ب)

۲.۷.۵. زاویهٔ برونی (زاویهٔ بین امتداد دو وتر یا دو مماس یا یک وتر و یک مماس)

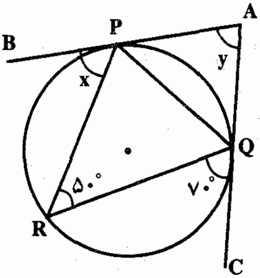


۱۲۷. کمان $\widehat{AB} = 60^\circ$ را بر دایرهٔ O اختیار کرده، در نقطه‌های A و B، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث PAB را تعیین کنید.

۱۲۸. اندازهٔ x و y را در هر شکل بیابید.

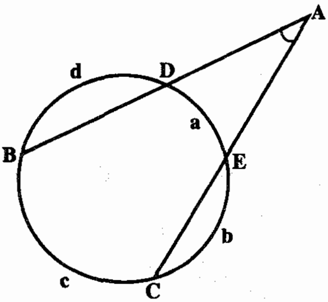


(ب)



(الف)

۱۲۹. اگر AB و AC، دو وتر متقاطع از دایرهٔ (O) باشند، حساب کنید:



الف. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $\widehat{c}=۱۰۰^\circ$، $\widehat{a}=۴۰^\circ$

ب. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $\widehat{c}-\widehat{a}=۷۴^\circ$

پ. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $\widehat{c}=\widehat{a}+۴۰^\circ$

ت. اندازهٔ زاویهٔ A، اگر $a:b:c:d=۱:۴:۳:۲$

ث. اندازهٔ کمان a، اگر $\widehat{c}=۱۶۰^\circ$ و $\hat{A}=۲۰^\circ$

ج. اندازهٔ کمان c، اگر $\widehat{a}=۶۰^\circ$ و $\hat{A}=۳۵^\circ$

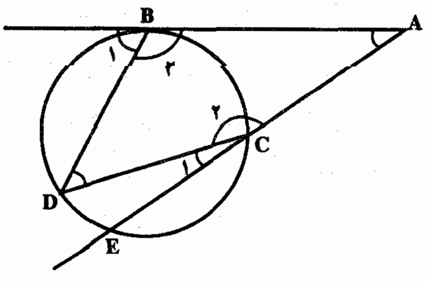
چ. اندازهٔ $\widehat{c}-\widehat{a}$، اگر $\hat{A}=۴۷^\circ$

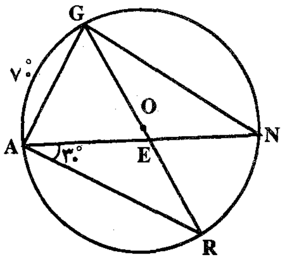
ح. اندازهٔ کمان a، اگر $\widehat{c}=۳\widehat{a}$ و $\hat{A}=۲۵^\circ$

۱۳۰. نقطه‌های A، B، C و D، دایره‌ای را به نسبت ۶:۵:۳:۱ تقسیم می‌کنند. زاویهٔ بین مماسهای رسم شده بر دایره در نقطه‌های A، B، C و D را پیدا کنید.

۶.۷.۲. زاویه‌های مختلف

۱۳۱. در این شکل، AB بر دایره مماس است. اگر $\widehat{BD}=۱۲۸^\circ$، $\widehat{DE}=۳۸^\circ$ و $\widehat{CE}=۱۰۴^\circ$؛ اندازهٔ شش زاویهٔ موجود در این شکل را به‌دست آورید.

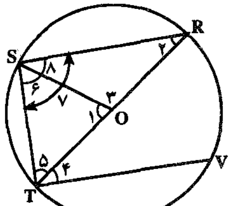




۱۳۲. در دایرهٔ به مرکز O، GR قطر دایره است، $\overset{\frown}{AG}$ = ۷۰° و $N\hat{A}R$ = ۳۰° . اندازه‌های زیر را به‌دست آورید و در جای مناسب روی شکل، یادداشت کنید :

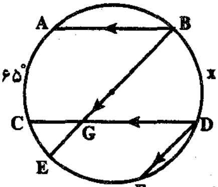
الف. $\hat{N}$ ب. $\hat{R}$ پ. $\overset{\frown}{NR}$

ت. $\overset{\frown}{GN}$ ث. $G\hat{A}N$ ج. $G\hat{A}R$

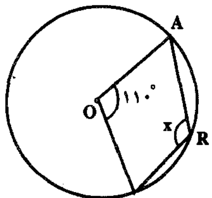


۱۳۳. در دایرهٔ به مرکز O، RS||VT ، $\overset{\frown}{TS}$ = ۷۰° و RT قطر دایره است. اندازهٔ زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.

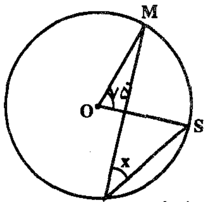
۱۳۴. اندازهٔ x و y را در هر یک از شکلهای زیر تعیین کنید :



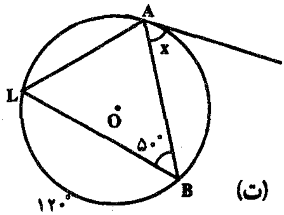
(الف)



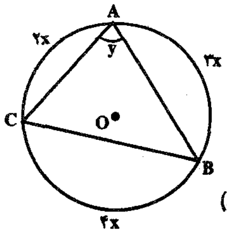
(ب)



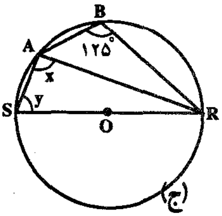
(پ)



(ت)

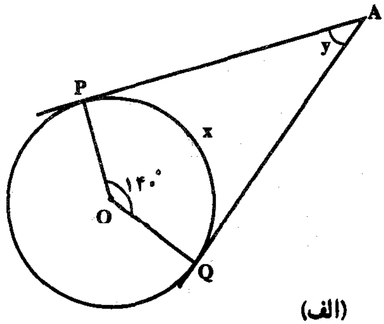


(ث)

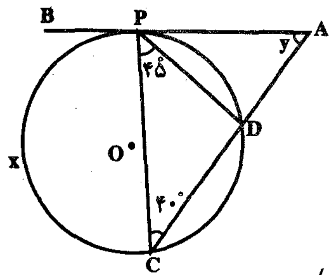


(ج)

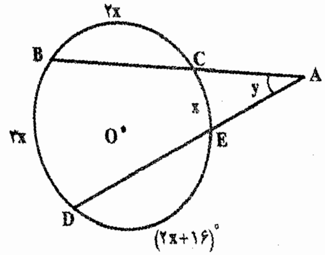
۱۳۵. اندازهٔ x و y را در هر شکل تعیین کنید.



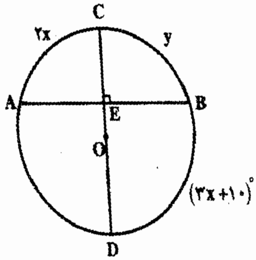
(الف)



(ب)

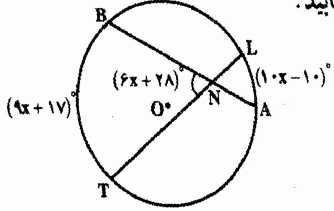


(پ)

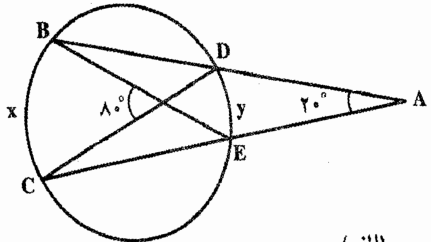


(ت)

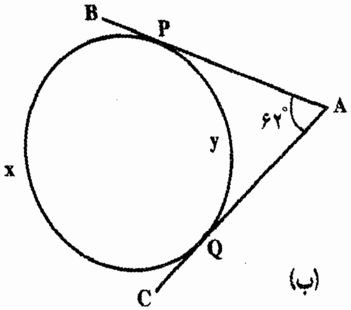
۱۳۶. در شکل اندازهٔ x و اندازهٔ زاویهٔ BNT را بیابید.



۱۳۷. در هر کدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.

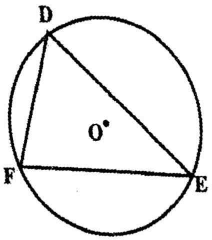


(الف)

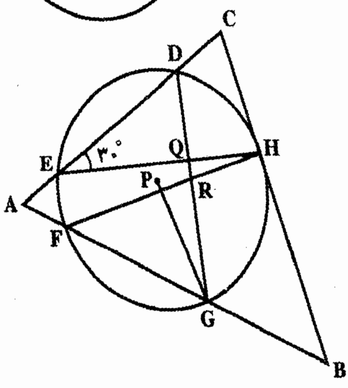


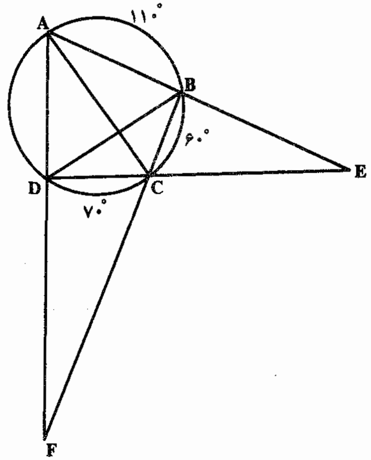
(ب)

۱۳۸. با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.



۱۳۹. در شکل، P مرکز دایره است. CB در H، مماس بر دایره است. $ED = FG$ ، $\widehat{ED} = 96^\circ$ و $D\hat{E}H = 30^\circ$. اندازهٔ تمام زاویه‌ها و کمانهای شکل را بیابید.

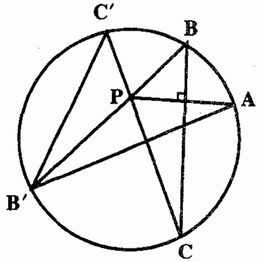




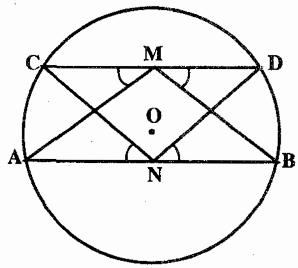
۱۴۰. روی محیط دایره‌ای در یک جهت، قوسهای $\widehat{AB}=110^\circ$ و $\widehat{BC}=60^\circ$ و $\widehat{CD}=70^\circ$ را جدا می‌کنیم. زاویه‌های چهارضلعی ABCD و زاویهٔ بین دو قطر و زاویه‌هایی را که ضلعهای روبه‌رو با هم می‌سازند، محاسبه کنید.

۷.۷.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

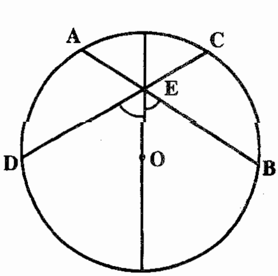
۱.۷.۷.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)



۱۴۱. نقطهٔ A روی دایرهٔ O و نقطهٔ P، داخل آن داده شده است. وتر BC را عمود بر PA و گذرنده از وسط PA رسم می‌کنیم. خط PB، دایره را در B' و خط PC، دایره را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید: $B\hat{B'}C' = B\hat{B'}A$.



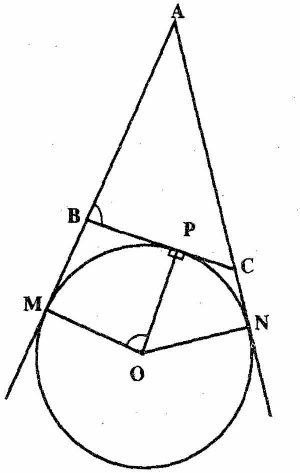
۱۴۲. دو وتر AB و CD در دایرهٔ O مفروضند. اگر خطهایی که نقطه‌های A و B را به نقطهٔ M وسط وتر CD وصل می‌کنند، با آن، زاویه‌های مساوی بسازند، ثابت کنید، خطهایی که نقطه‌های C و D را به وسط AB وصل می‌کنند، با آن، زاویه‌های مساوی می‌سازند.



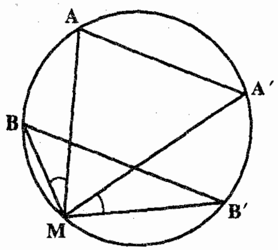
۱۴۳. در یک دایره، دو وتر متقاطع متساوی، با قطری که از نقطهٔ تقاطعشان می‌گذرد، زاویه‌های متساوی می‌سازند.

۱۴۴. دایرهٔ O در نقطه‌های M و N، با ضلعهای زاویهٔ A مماس است. خطی رسم می‌کنیم که با دایره در نقطه‌ای مانند P مماس بوده و ضلعهای زاویهٔ A را در نقطه‌های B و C قطع

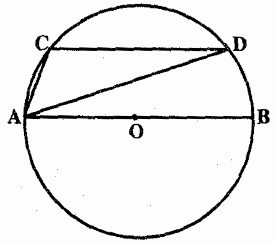
نماید، به‌طوری که A و O در طرفین این خط واقع شوند. ثابت کنید که، زاویهٔ دو شعاع که از دو نقطهٔ تماس متوالی (P, M) یا (N, P) می‌گذرند، با یکی از زاویه‌های B یا C از مثلث ABC برابر است. اگر نقطه‌های A و O در یک طرف خطّ مماس در نقطهٔ P واقع باشند، مسأله به چه صورتی درمی‌آید؟



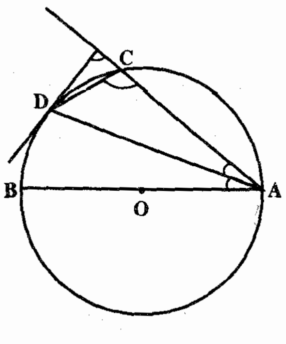
۱۴۵. دو وتر متوازی و هم‌جهت AA' و BB' و نقطهٔ دلخواه M واقع بر روی محیط دایره‌ای مفروضند. ثابت کنید که، زاویه‌های AMB و $A'MB'$ یا متساوی‌اند و یا مکمل یکدیگرند.

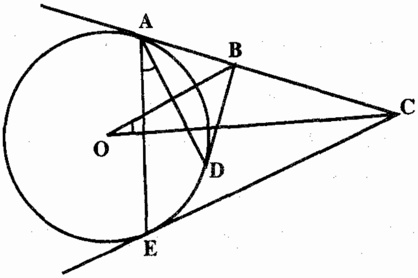


۱۴۶. قطر AB از دایرهٔ O رسم شده است. وتر CD، موازی قطر AB است. ثابت کنید، در مثلث ACD تفاضل دو زاویه 90° است.

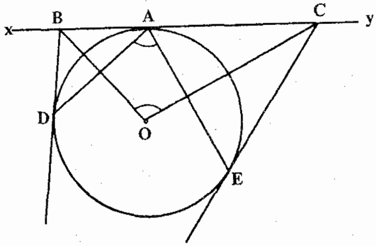


۱۴۷. دایرهٔ O و قطر AB و وتر AC داده شده‌اند. AD نیمساز زاویهٔ CAB را رسم می کنیم. ثابت کنید که، تفاضل دو زاویهٔ C و A از مثلث ACD یک قائمه و مماس در نقطهٔ D بر دایره، ارتفاع مثلث ACD است.

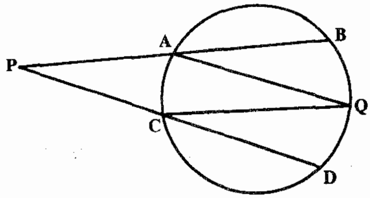




۱۴۸. روی مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ (O)، دو نقطهٔ B و C را اختیار کرده، از آن نقطه‌ها دو مماس BD و CE را بر دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید، زاویه‌های BOC و DAE متساوی یا مکمل یکدیگرند.



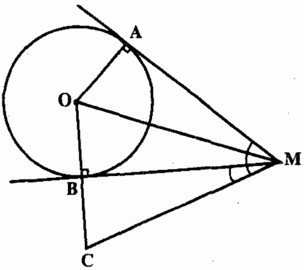
۱۴۹. خط xy در نقطهٔ A بر دایرهٔ O مماس است. از نقطه‌های B و C در طرفین A واقع بر xy دو مماس BD و CE را بر دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید، $E\hat{A}D$ و $C\hat{O}B$ مکمل یکدیگرند.



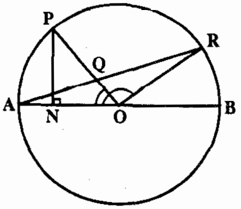
۱۵۰. در شکل روبه‌رو، نقطه‌های A، B، Q، D و C روی یک دایره و نقطهٔ P خارج دایره قرار دارند و اندازهٔ کمانهای $\widehat{BQ}$ و $\widehat{QD}$ بترتیب، °۴۲ و °۳۸ است. مجموع اندازه‌های زاویه‌های P و Q برابر است با:

الف) °۸۰ ب) °۶۲ ج) °۴۰ د) °۴۶ هـ) هیچ یک از اینها

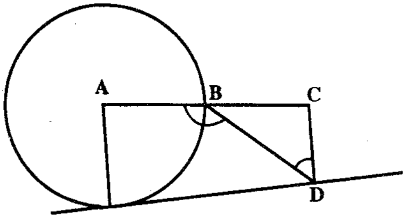
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱



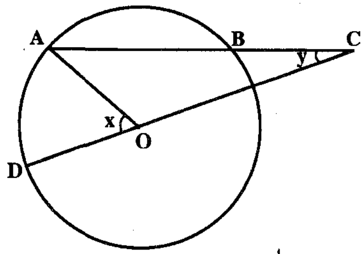
۱۵۱. از نقطهٔ M دو مماس MA و MB را بر دایرهٔ (O) رسم کرده‌ایم. سپس شعاع OB را از طرف B به اندازهٔ $BC = R$ امتداد داده‌ایم. ثابت کنید: $A\hat{M}C = ۳B\hat{M}C$.



۱۵۲. از نقطهٔ P روی محیط دایره‌ای به مرکز O عمودی بر قطر AOB فرود می‌آوریم (N پای عمود) و روی PO نقطهٔ Q را چنان اختیار می‌کنیم که $PQ = ۲AN$ باشد. اگر AQ دایره را در نقطهٔ R قطع کند، ثابت کنید، زاویهٔ AOR سه برابر زاویهٔ AOP می‌باشد.



۱۵۳. نقطهٔ B وسط پاره‌خط AC است؛ دایرهٔ (A , AB) را رسم می‌کنیم و از C، عمود CD را بر یک مماس دلخواه آن دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید که، $A\hat{B}D = ۳B\hat{D}C$.



۱۵۴. در دایرهٔ O وتر AB را به اندازهٔ BC برابر با شعاع دایره امتداد می‌دهیم. امتداد CO، دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. AO را رسم می‌کنیم. کدام یک از موردهای زیر رابطهٔ بین دو زاویهٔ x و y را بیان می‌کند؟

الف) $x = ۳y$ ب) $x = ۲y$

ج) $x = ۶۰^\circ$ د) رابطهٔ خاصی بین x و y وجود ندارد.

هـ) بسته به طول AB، $x = ۲y$ یا $x = ۳y$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

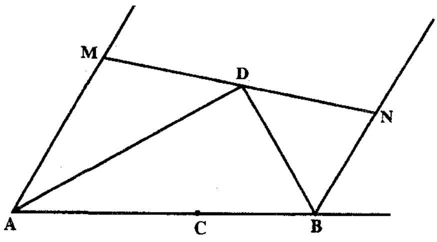
۲.۷.۷.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۱۵۵. A و B، دو نقطه از محیط دایره، C نقطهٔ وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ و P نقطه‌ای از درون دایره است و در ضمن $|AP| < |BP|$. ثابت کنید : $A\hat{P}C > B\hat{P}C$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۸.۷.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۵۶. روی پاره‌خط AB، نقطهٔ دلخواه C را انتخاب کرده، از A و B دو خط متوازی در یک طرف AB رسم می‌نماییم و روی این دو خط متوازی، طولهای $AM = AC$ و $BN = BC$ را جدا می‌کنیم و وسط پاره‌خط MN را D می‌نامیم. ثابت کنید، زاویهٔ ADB قائمه است.



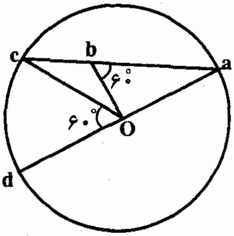
۱۵۷. صفحه را به‌وسیلهٔ ۲n خط راست $(n > ۱)$ به بخشهایی تقسیم کرده‌ایم؛ در ضمن، هیچ دو خط راستی با هم موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. ثابت کنید، این بخشها، با بیش از $۲n - ۱$ زاویه به‌وجود نیامده‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۱۵۸. بین مثلثهایی که طول قاعدهٔ ثابتی دارند و بر دایرهٔ ثابتی مماسند، کدام مثلث، بزرگترین زاویه (مقابل به این ضلع ثابت) را دارد؟

۲ . ۸. پاره خط

۲ . ۸ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

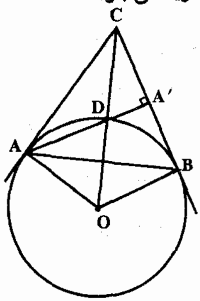


۱۵۹. در دایرهٔ به مرکز O قطر ad، وتر ac و نقطهٔ b بر این وتر چنان انتخاب شده‌اند که هریک از زاویه‌های abO و cOd به اندازهٔ °۶۰ و ۵ = [bO] است. مقدار [bc] چه‌قدر است؟

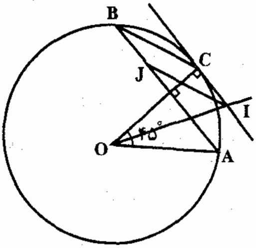
الف) ۳   ب) $۳+\sqrt{۳}$ ج) $۵-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

د) ۵   هـ) مقداری غیر از اینها

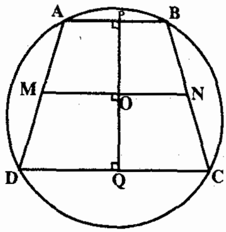
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۱۶۰. دایره‌ای به مرکز O و دو نقطهٔ A و B را روی آن درنظر می‌گیریم. در نقطه‌های A و B دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند و از نقطهٔ A عمودی بر مماس CB فرود می‌آوریم تا OC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید که AD مساوی با شعاع دایره است.



۱۶۱. در دایرهٔ O شعاعهای OC و OA باهم زاویهٔ °۴۵ می‌سازند. نیمساز زاویهٔ COA مماس در نقطهٔ C بر دایره را در I قطع می‌کند. اگر وتر AB را عمود بر OC رسم کنیم تا خط IJ موازی BC را در J قطع کند، ثابت کنید، AJ مساوی با شعاع دایره است.



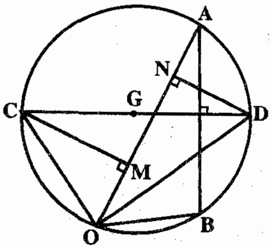
۱۶۲. در دایره‌ای به مرکز O، در دو طرف مرکز دو وتر متوازی رسم می‌کنیم که یکی از آنها AB = R و دیگری $CD = C_۳$ است. ثابت کنید، پاره خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقهٔ ABCD را به هم وصل می‌کند، مساوی با ارتفاع این ذوزنقه است.

۲ . ۸ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲ . ۸ . ۲ . ۱ . رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۱۶۳. قطر A_0A_5، دایرهٔ به مرکز O را، به دو نیمدایره تقسیم کرده است. کمان یکی از این نیمدایره‌ها را، به پنج کمان برابر A_0A_1، A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4 و A_4A_5 تقسیم کرده‌ایم. خط راست A_1A_4، پاره خطهای OA_2 و OA_3 را در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، مجموع طولهای دو پاره خط راست A_2A_3 و MN برابر است با شعاع دایره. $A_2A_3 + MN = R$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی۱۹۸۵



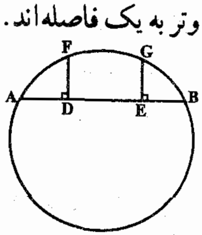
۱۶۴. در یک دایره وتر AB عمود بر قطرCD را رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ دلخواه O واقع بر دایره را به انتهای این قطر و وتر وصل می‌کنیم: OC و OD را روی OA تصویر می‌کنیم. نشان دهید که مجموع این تصویرها برابر OA است و تفاضل این دو تصویر برابر OB است.

۱۶۵. در دایره‌ای، دو وتر AB و AC داده شده‌اند. از نقطهٔ M وسط کمان $\widehat{BAC}$، عمودی بر وتر با طول بزرگتر فرود آورده‌ایم. ثابت کنید، پای عمود خط شکستهٔ BAC را نصف می‌کند.

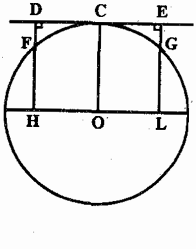
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۱۶۶. نقطه‌هایی روی یک وتر که به یک فاصله از وسط آن وتر در یک دایره قرار داشته باشند، از محیط دایره به یک فاصله‌اند.

۱۶۷. تصویرهای دو سر یک قطر دایره روی هر وتر دلخواه، از وسط این وتر به یک فاصله‌اند.



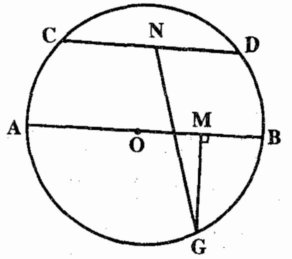
۱۶۸. از دو نقطهٔ D و E که متساوی‌الفاصله از وسط وتر AB هستند، دو عمود بر این وتر اخراج می‌کنیم تا بترتیب دایره را در F و G قطع کنند. ثابت کنید، DF = EG است.



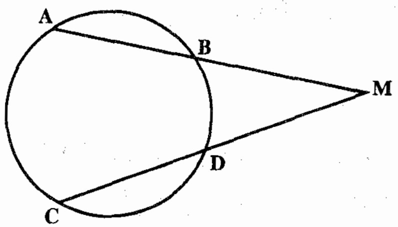
۱۶۹. روی خط مماس بر دایرهٔ (O) در نقطهٔ C و به یک فاصله از این نقطه دو نقطهٔ D و E را اختیار می‌کنیم و از این دو نقطه عمودهایی بر خط مماس اخراج می‌کنیم تا دایره را بترتیب در نقطه‌های F و G قطع کنند. ثابت کنید، DF = EG است.

۱۷۰. دو وتر متساوی در یک دایره داده شده‌اند. ثابت کنید، روی همهٔ قاطعهایی که به موازات خط واصل بین وسط کمانهای این دو وتر رسم می‌شوند، پاره‌خطهایی مساوی ایجاد می‌شود.

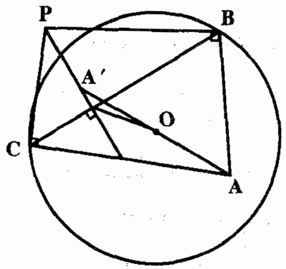
۱۷۱. در دایرهٔ O به قطر AB وتر CD را موازی با AB و مساوی با شعاع دایره رسم کرده، از نقطهٔ M وسط پاره‌خط OB عمودی بر قطر AB اخراج می‌نماییم تا دایره را در نقطهٔ G قطع کند. ثابت کنید، اگر نقطهٔ G را به نقطهٔ N وسط پاره‌خط CD وصل کنیم، قطر AB پاره خط GN را نصف می‌کند.



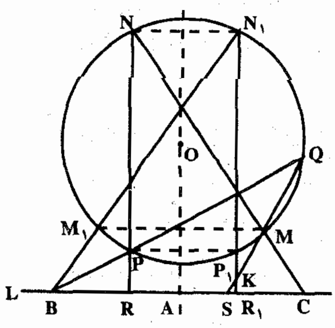
۱۷۲. دو وتر متساوی AB و CD در دایرهٔ به مرکز O رسم شده‌اند. امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. ثابت کنید، دو پاره خطی که یک سر آنها نقطهٔ M و سر دیگر آنها انتهای دو وتر مزبور باشند، برابرند.

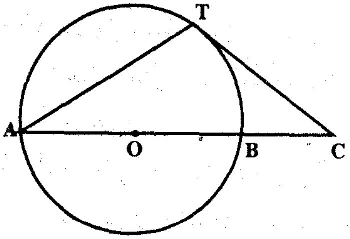


۱۷۳. نقطهٔ اختیاری A را به دو نقطهٔ B و C از دایره‌ای وصل کرده، از نقطهٔ B عمودی بر BA و از نقطهٔ C عمودی بر CA اخراج می‌کنیم و از نقطهٔ P محل تلاقی این دو عمود خطی بر BC عمود می‌کنیم تا OA را در نقطهٔ A′ قطع کند. ثابت کنید: OA = OA′.

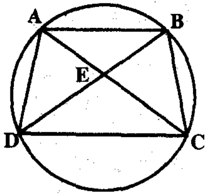


۱۷۴. فرض کنید، A معرف تصویر مرکز دایره‌ای روی خط راست l باشد. دو نقطهٔ B و C روی این خط طوری اختیار می‌شوند که AB = AC. دو قاطع دلخواه که دایره را، بترتیب در جفت نقطه‌های P، Q، M و N قطع می‌کنند، از B و C رسم می‌شوند. فرض کنید، خطهای NP و MQ، خط l را، بترتیب، در نقطه‌های R و S قطع کنند. ثابت کنید: RA = AS.





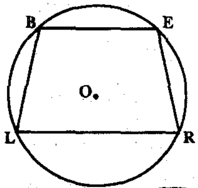
۱۷۵. قطر AB از یک دایرهٔ به مرکز O را به طول BC مساوی شعاع آن دایره امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ C مماس CT را بر آن دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $TA = TC$.



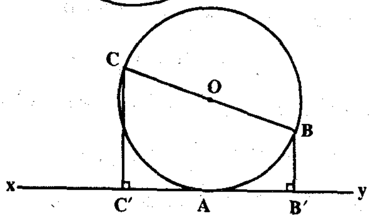
۱۷۶. با توجه به شکل نشان دهید:

الف. اگر $AD = BC$، آن‌گاه $AC = BD$.

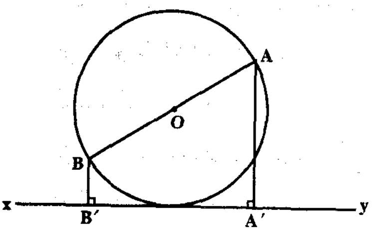
ب. اگر $AC = BD$، آن‌گاه $AD = BC$.



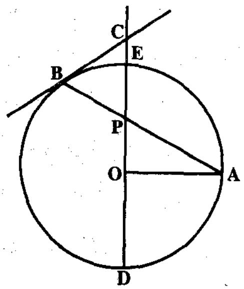
۱۷۷. در دایرهٔ (O)، $BL = ER$. نشان دهید: $BE \| LR$.



۱۷۸. خط xy در نقطهٔ A بر دایرهٔ O مماس و BC قطر دلخواهی از این دایره است. از B و C عمودهای BB' و CC' را بر xy فرود می‌آوریم. ثابت کنید، نقطهٔ A وسط پاره خط $B'C'$ است.

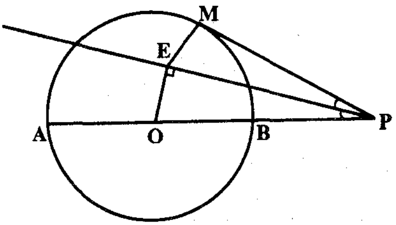


۱۷۹. در نقطه‌های A و B دو سر قطر دایرهٔ C(O,R) عمودهای AA' و BB' را بر مماس دلخواه xy از این دایره فرود می‌آوریم. ثابت کنید، همواره $AA' + BB' = ۲R$ است.

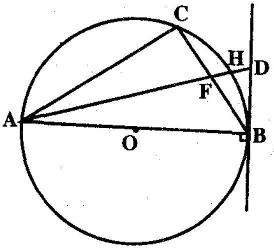


۱۸۰. از نقطهٔ P واقع بر قطر دایرهٔ O، به انتهای شعاع عمود بر آن وصل می‌کنیم. امتداد AP دایره را در B قطع می‌کند. در نقطهٔ B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا OP را در نقطهٔ

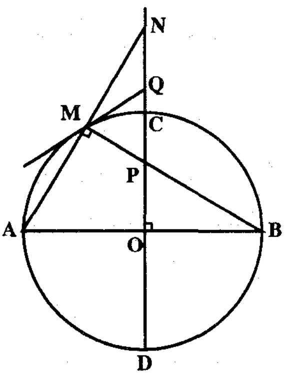
C قطع کند. ثابت کنید : $CB = CP$.



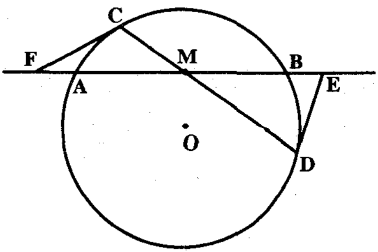
۱۸۱. روی امتداد قطر AB از دایرهٔ O نقطهٔ P را اختیار کرده، از آن، مماس PM را بر دایره رسم می‌کنیم و سپس نیمساز زاویهٔ MPA را می‌کشیم و از O عمودی بر آن فرود می‌آوریم و پای عمود را F می‌نامیم. ثابت کنید : $OF = FM$.



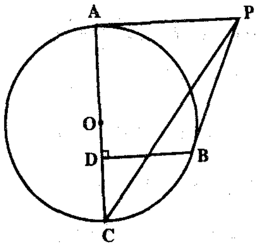
۱۸۲. دایره‌ای به قطر AB داده شده است. وتر دلخواه AC و نیمساز زاویهٔ CAB را رسم می‌کنیم. این نیمساز وتر BC را در نقطهٔ F و دایره را در نقطهٔ H و مماسی را که بر دایره در نقطهٔ B رسم شود، در نقطهٔ D قطع می‌نماید. ثابت کنید : $BD = BF$ و $FH = HD$.



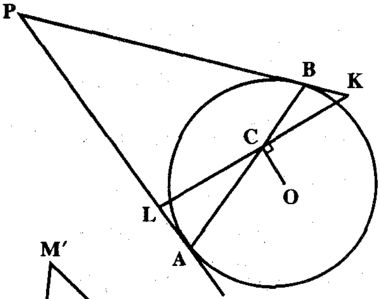
۱۸۳. در دایره‌ای به مرکز O دو قطر عمود بر هم AB و CD را رسم کرده، نقطه‌ای مانند M از دایره را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم و مماس در نقطهٔ M بر دایره را نیز می‌کشیم. خطهای MA و MB و مماس در نقطهٔ M، بترتیب خط CD را در نقطه‌های N ، P و Q قطع می‌نمایند. ثابت کنید: $NQ = QM = QP$.



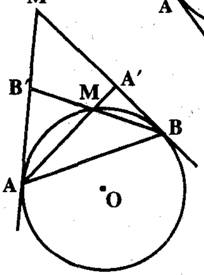
۱۸۴. در دایرهٔ به مرکز O از نقطهٔ M وسط وتر AB قاطع اختیاری CMD را رسم کرده، از نقطه‌های C و D دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید که : $AF = BE$.



۱۸۵. از نقطهٔ P دو مماس PA و PB بر یک دایره رسم شده است. قطر AC را نیز می‌کشیم و از نقطهٔ B خط BD را بر آن عمود می‌کنیم. ثابت کنید، BD به وسیله PC به دو قسمت متساوی تقسیم می‌شود.

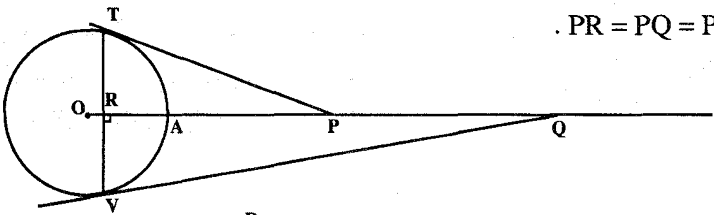


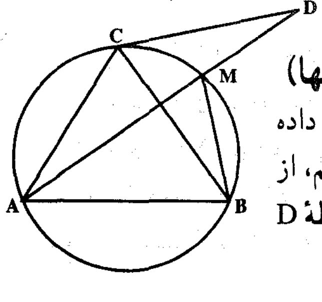
۱۸۶. از نقطهٔ P دو مماس PA و PB را بر دایرهٔ به مرکز O رسم می‌کنیم و روی وتر AB نقطهٔ اختیاری C را اختیار کرده و به مرکز دایره وصل می‌کنیم. ثابت کنید، هر خطی که از نقطهٔ C گذشته و بر OC عمود باشد، امتداد مماسها را در دو نقطهٔ K و L قطع می‌کند که نقطهٔ C وسط KL است.



۱۸۷. در دایرهٔ O وتر AB مقابل به قوس 120° است. نقطهٔ M را روی قوس $\widehat{AB}$ اختیار کنید. امتداد MA و MB مماسهای در نقطه‌های A و B بر دایره را در B' و A' قطع می‌کنند. ثابت کنید: $AA' = BB'$.

۱۸۸. در امتداد شعاع OA نقطهٔ P را درنظر گرفته و مماس PT را رسم می‌کنیم. OP را طوری امتداد دهید که PQ مساوی PT باشد و مماس QV را بر دایره رسم کنید. اگر VR که عمود بر OA رسم می‌شود، OA را در R قطع کند، ثابت کنید: $PR = PQ = PT$.





۲.۸.۲.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۱۸۹. کمان $\widehat{AB}$ از یک دایره و نقطهٔ C وسط آن کمان داده شده‌اند. نقطهٔ M را روی کمان $\widehat{AB}$ اختیار می‌کنیم، از A به M وصل نموده، AM را از طرف M تا نقطهٔ D

به قسمی امتداد می‌دهیم که $MD = MB$ باشد. ثابت کنید :

۱. $CB = CD$

۲. $MA + MB < CA + CB$

۲. ۸. ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۰. AB قطر ثابت یک دایرهٔ به مرکز O است. از نقطهٔ C بر این دایره وتر CD عمود بر AB رسم می‌شود. آن‌گاه وقتی C بر نیمدایره حرکت کند، نیمساز زاویهٔ OCD دایره را در نقطه‌ای قطع می‌کند که همواره :

الف. کمان $\widehat{AB}$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ب. $\widehat{AB}$ را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

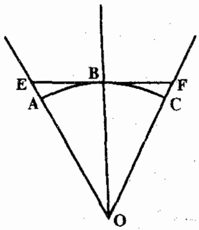
ج. بر دایره تغییر می‌کند.

د. از AB و از D به یک فاصله است.

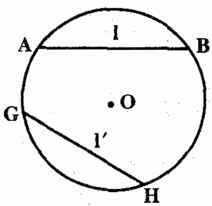
هـ. از B و C به یک فاصله است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۱۹۱. کمان ABC از یک دایرهٔ به مرکز O را درنظر می‌گیریم و شعاعهای OA و OC را امتداد می‌دهیم. کدام مماس بر این کمان که بین دو نیمخط OA و OC محصور است، کمترین طول را دارد؟



۱۹۲. دو وتر به طولهای l و l' محاط در یک دایره داده شده‌اند. بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقطهٔ وسط این وترها از وترهای موازی آنها را بیابید.



۲. ۹. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

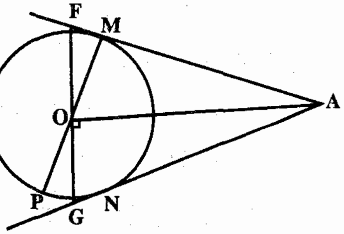
۲. ۹. ۱. خطها موازی‌اند

۱۹۳. نقطه‌های A، B، M و N روی محیط یک دایره‌اند. از نقطهٔ M وترهای MA_1 و MB_1 را، بترتیب، عمود بر خطهای راست NB و NA رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خطهای راست AA_1 و BB_1 موازی‌اند.

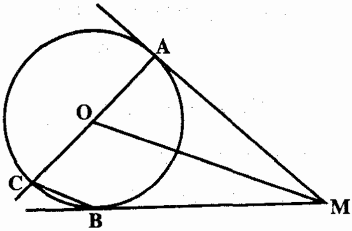
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

۱۹۴. دو خط قاطع یا مماس نسبت به دایره که یکدیگر را قطع نکنند و کمانهای مساوی روی دایره به‌وجود آورند، با هم موازی‌اند.

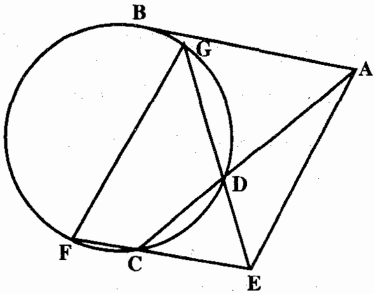
۱۹۵. از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ O دو مماس AM و AN را بر آن رسم کرده، قطر MOP را می‌کشیم و قطر عمود بر OA را نیز رسم می‌کنیم تا خط AN را در نقطهٔ G و خط AM را در نقطهٔ F قطع کند. ثابت کنید، PG با AM موازی است.



۱۹۶. از نقطهٔ M دو مماس MA و MB را بر دایرهٔ به مرکز O رسم کرده‌ایم و از نقطهٔ A قطر AC را کشیده‌ایم. ثابت کنید، OM و CB متوازی‌اند.

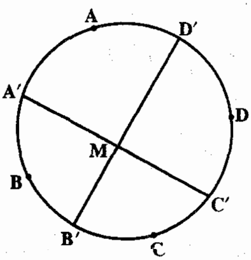


۱۹۷. از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ O، مماس AB را بر آن رسم می‌کنیم و نقطهٔ D را روی دایره و نقطهٔ E را در خارج آن، چنان انتخاب می‌کنیم که AB = AE باشد. DA دایره را در C و DE و CE دایره را بترتیب در G و F قطع می‌کنند. ثابت کنید که FG با AE موازی است.

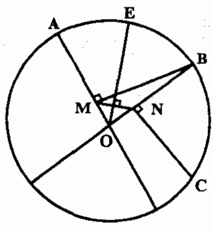


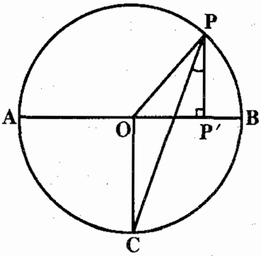
۲ . ۹ . ۲. خطها بر هم عمودند

۱۹۸. چهار نقطهٔ A، B، C و D با همین ترتیب، به توالی یکدیگر روی یک دایره مفروضند. وسط کمانهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{DA}$ را بترتیب A'، B'، C'، و D' می‌نامیم. ثابت کنید، دو خط راست $A'C'$ و $B'D'$ برهم عمودند.

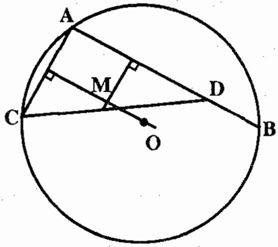


۱۹۹. در دایرهٔ O دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ متساوی‌اند. از نقطهٔ B عمود BM را بر خط OA و از نقطهٔ C عمود CN را بر خط OB فرود می‌آوریم. ثابت کنید، MN بر نیمساز زاویهٔ AOB عمود است.

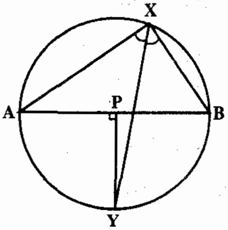




۲۰۰. تصویر نقطهٔ P متعلق به دایرهٔ O را بر قطر AB از همین دایره، نقطهٔ P′ می‌نامیم. نیمساز زاویهٔ OPP′ دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید که OC بر AB عمود است.



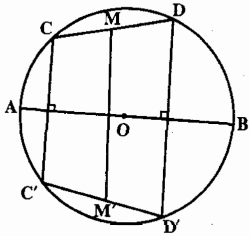
۲۰۱. در دایرهٔ O وتر AB را رسم کرده، روی آن نقطه‌ای مانند D اختیار می‌کنیم و این نقطه را به نقطهٔ دلخواه C از دایره وصل می‌کنیم. عمود منصف پاره‌خط AD عمود منصف پاره‌خط CD را در M قطع می‌کند. ثابت کنید، OM بر AC عمود است.



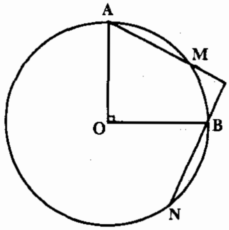
۲۰۲. اگر AB قطر دایره‌ای به مرکز P، و X و Y دو نقطه از دایره باشند، به نحوی که XY نیمساز زاویهٔ AXB باشد، ثابت کنید : $PY \perp AB$.

۲۰۳. نقطه‌های A، B و C روی محیط دایره واقعند. D وسط خط شکستهٔ ABC، روی پاره‌خط راست BC و E وسط کمان $\overset{\frown}{ABC}$ است. ثابت کنید، خط راست ED بر خط راست BC عمود است.

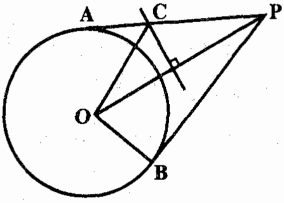
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴



۲۰۴. در دایرهٔ O دو وتر CC′ و DD′ را عمود بر قطر AB رسم کرده، CD و C′D′ را نیز رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط MM′ که وسط CD را به وسط C′D′ وصل می‌کند، بر AB عمود است.



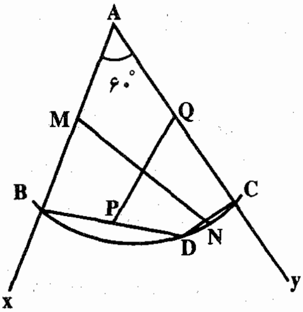
۲۰۵. در دایرهٔ O دو شعاع عمود برهم OA و OB را رسم کرده، از A و B و در یک جهت دو کمان متساوی $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{BN}$ را روی دایره جدا می‌کنیم. ثابت کنید که خط AM بر خط BN عمود است.



۲۰۶. از نقطهٔ P دو مماس PA و PB را بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم. عمودمنصف پاره‌خط PO خط PA را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید که OC و OB برهم عمودند.

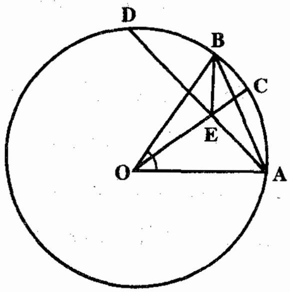
۲۰۷. نقطهٔ P در بیرون دایرهٔ به مرکز O واقع است. خطهای راست L_1، L_2 را، از نقطهٔ P طوری گذرانده‌ایم که L_1، در نقطهٔ A بر دایره مماس است و L_2، در نقطه‌های B و C دایره را قطع می‌کند. مماسهای بر دایره، در نقطه‌های B و C، یکدیگر را در X قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خطهای راست AX و PO برهم عمودند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

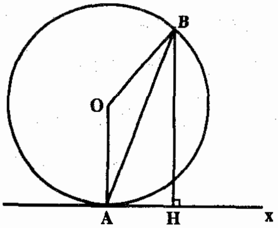


۲۰۸. زاویهٔ $x\hat{A}y = 60°$ را درنظر گرفته به مرکز A و به شعاعی دلخواه کمان $\overset{\frown}{BC}$ محصور بین ضلعهای این زاویه را رسم می‌کنیم و نقطهٔ دلخواه D واقع بر این کمان را به نقطه‌های B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید، خطی که وسط پاره‌خط DC را به وسط پاره‌خط AB وصل می‌کند، بر خطی که وسط پاره‌خط BD را به وسط پاره‌خط AC وصل می‌کند، عمود است.

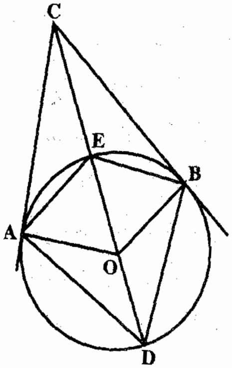
۲. ۹. ۳. خط نیمساز است



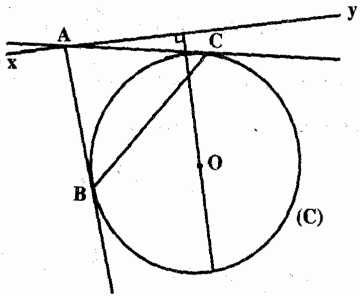
۲۰۹. در دایره‌ای به مرکز O کمان $\overset{\frown}{AB}$ مساوی °۶۰ است. نقطهٔ C را روی دایره چنان اختیار می‌کنیم که OC داخل زاویهٔ AOB باشد و کمان $\overset{\frown}{BD}$ را مساوی با دو برابر کمان $\overset{\frown}{BC}$ طوری جدا می‌کنیم که نقطه‌های C و D در دو طرف OB واقع شوند و فصل مشترک AD و OC را E می‌نامیم. ثابت کنید، EB نیمساز زاویهٔ CED است.



۲۱۰. خط Ax در نقطهٔ A بر دایرهٔ O مماس است. از نقطهٔ غیر مشخص B واقع بر دایره خط BH را بر Ax عمود می‌کنیم، ثابت کنید که AB نیمساز زاویهٔ OBH است.

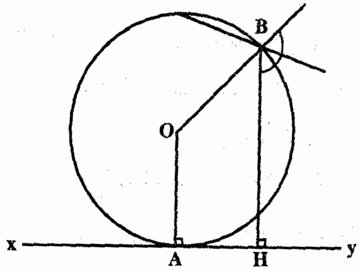


۲۱۱. دایره‌ای به مرکز O داده شده است. در نقطه‌های A و B واقع بر این دایره دو مماس بر آن رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند. خط CO دایره را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. ثابت کنید که CD نیمساز زاویهٔ ADB و CE نیمساز زاویهٔ AEB است.

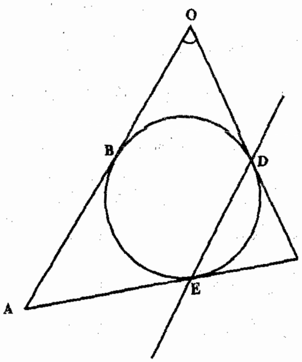


۲۱۲. دایرهٔ (C) به مرکز O و شعاع R و خط xy که دایره را قطع نمی‌کند داده شده است. از نقطهٔ غیرمشخص A واقع بر xy دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط BC واصل بین نقطه‌های تماس، قطر عمود بر xy را در نقطهٔ ثابتی قطع می‌کند.

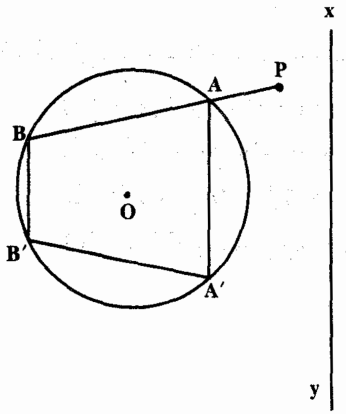
۲ . ۹ . ۴ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۲۱۳. از نقطهٔ متغیر B واقع بر دایرهٔ به مرکز O عمود BH را بر خط xy که در نقطهٔ ثابت A بر دایره مماس است رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ مکمل و مجاور OBH از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۲۱۴. دایره‌ای متغیر بر ضلعهای OB و OD از زاویه‌ای ثابت در نقطه‌های B و D مماس است. E نقطهٔ تماس این دایره با دومین مماسی است که ازنقطهٔ ثابت A روی OB بر آن رسم شده است. ثابت کنید که DE از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



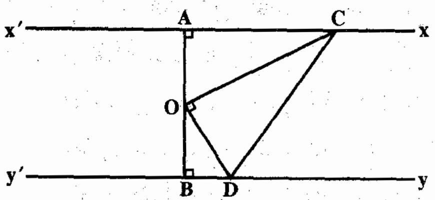
۲۱۵. دایرهٔ O و نقطهٔ P و خط xy داده شده‌اند. از نقطهٔ P قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند. سپس وترهای ′AA و ′BB از این دایره را به موازات xy رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی که قاطع PAB حول نقطهٔ P دوران کند، خط ′A′B نیز حول یک نقطهٔ ثابت مانند ′P دوران می‌کند.

۲ . ۹ . ۵. خطها همرسند

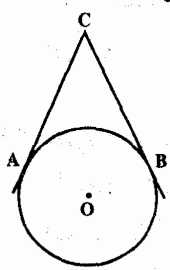
۲۱۶. از یک نقطه سه عمود بر سه خط داده شده در یک صفحه رسم می‌کنیم. دایرهٔ گذرنده بر پای این سه عمود این سه خط را در سه نقطهٔ دیگر قطع می‌کند. ثابت کنید که عمودهای اخراج شده بر سه خط در این نقطه‌ها ، همرسند.

۲ . ۹ . ۶. وضع نسبی خط و دایره

۲ . ۹ . ۶ . ۱. خط مماس بر دایره است

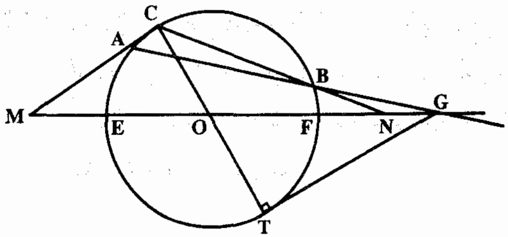


۲۱۷. پاره‌خط AB و نقطهٔ O وسط آن داده شده‌اند. دو خط ′xx و ′yy در نقطه‌های A و B بر خط AB عمودند. از نقطهٔ O زاویهٔ قائمهٔ COD را چنان رسم می‌کنیم که نقطه‌های C و D بترتیب روی ′xx و ′yy قرار داشته باشند. ثابت کنید که خط CD بر دایرهٔ به قطر AB مماس است.



۲۱۸. دو نقطهٔ A و B روی دایره‌ای به مرکز O و نقطهٔ C در خارج این دایره داده شده‌اند، به‌طوری که $CA = CB$ است. ثابت کنید اگر CA با دایره مماس باشد، خط CB نیز با دایره مماس است.

۲۱۹. در دایرهٔ به مرکز O دو نقطهٔ M و N را به یک فاصله از مرکز دایره روی یک قطر درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ اختیاری C واقع بر این دایره به نقطه‌های M ، N و O وصل می‌کنیم و نقطه‌های برخورد CM، CO و CN با دایره را به‌ترتیب A، T و B می‌نامیم. اگر G



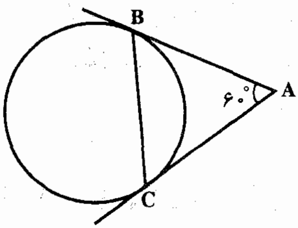
نقطهٔ برخورد AB با امتداد قطر EF (قطر گذرنده بر N و M) باشد، ثابت کنید GT مماس بر دایره است.

۲۲۰. اگر فاصلهٔ بین دو نقطه مساوی باشد با مجموع (یا تفاضل) دو مماس که از این دو نقطه بر یک دایرهٔ معلوم رسم می‌شوند، ثابت کنید خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، بر دایره مماس است.

۲ . ۹ . ۶ . ۲ . خط متقاطع با دایره است

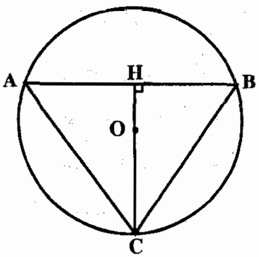
۲۲۱. ثابت کنید که اگر خط راستی، دایره‌ای را قطع نکند، آن وقت برای هر دو نقطه از خط، فاصلهٔ میان آنها، بین مجموع و تفاضل طول مماسهای رسم شده از این نقطه‌ها بر دایره، محدود است. عکس این را هم ثابت کنید : اگر برای دو نقطه روی خط، ادعای بالا محقق نباشد، آن وقت خط دایره را قطع می‌کند.

۲ . ۱۰ . شکلهای ایجاد شده

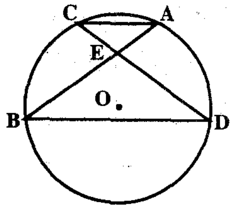


۲ . ۱۰ . ۱ . شکلهای ایجاد شده (مثلث)

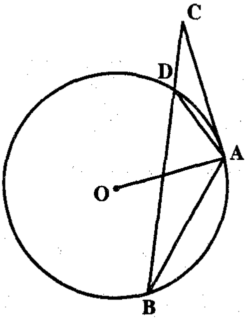
۲۲۲. ثابت کنید : اگر اندازهٔ زاویهٔ دو پاره‌خط مماسی که از نقطه‌ای بیرون یک دایره بر آن دایره رسم می‌شود ۶۰ باشد، این دو پاره‌خط مماس، با وتر واصل بین دو نقطهٔ تماس یک مثلث متساوی الاضلاع می‌سازد.



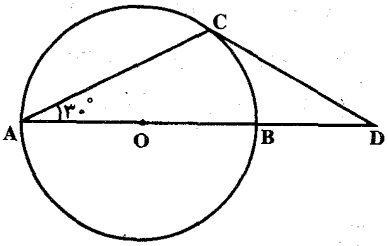
۲۲۳. در دایرهٔ به مرکز O عمود OH را بر وتر AB فرود آورده و آن را از طرف O امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند. ثابت کنید مثلث CAB متساوی‌الساقین است.



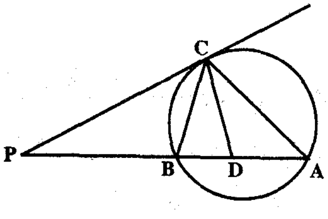
۲۲۴. دو وتر متقاطع AB و CD در دایرهٔ به مرکز O به یک فاصله از مرکز دایره می‌باشند. اگر E نقطهٔ برخورد این دو وتر باشد، ثابت کنید مثلثهای EAC و EBD متساوی‌الساقین می‌باشند.



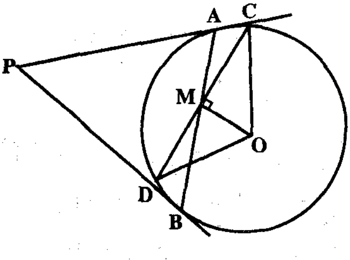
۲۲۵. در دایره‌ای مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.



۲۲۶. در دایرهٔ O قطر AB با وتر AC زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. مماس در نقطهٔ C بر دایره، امتداد قطر AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

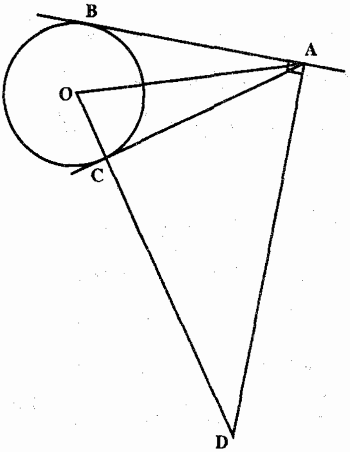


۲۲۷. دراین شکل PC پاره‌خط مماس و CD نیمساز زاویه ACB است. ثابت کنید مثلث PCD متساوی‌الساقین است.

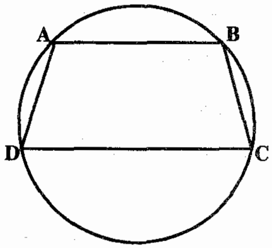


۲۲۸. از نقطهٔ P واقع در خارج دایرهٔ O دو مماس PA و PB را رسم نموده از نقطهٔ دلخواه M واقع بر پاره‌خط AB عمودی بر MO اخراج می‌نماییم تا PA را در C و PB را در D قطع کند. ثابت کنید مثلث OCD متساوی‌الساقین است.

۲۲۹. از نقطهٔ A واقع در خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می‌کنیم. خط OC و عمودی که از نقطهٔ A بر خط AB رسم شود، یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید که مثلث AOD متساوی‌الساقین است.

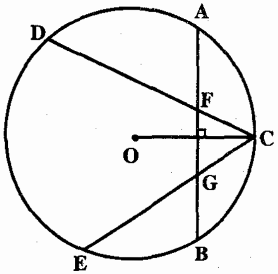


۲ . ۱۰ . ۲ . شکلهای ایجاد شده (چندضلعیها $n \geq ۴$)



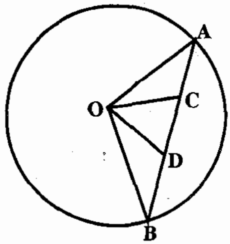
۲۳۰. در دایرهٔ به مرکز O دو وتر متوازی AB و CD رسم شده‌اند. ثابت کنید چهارضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۲۳۱. در هر دایره دو وتر متقاطع متساوی، قطرهای یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند.



۲۳۲. نقطهٔ C روی دایرهٔ به مرکز O قرار دارد. وتر AB را عمود بر شعاع OC رسم کرده از نقطهٔ C دو وتر دلخواه CD و CE را رسم می‌کنیم تا AB را در نقطه‌های F و G قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی DEGF محاطی است.

۲ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۲۳۳. در دایرهٔ به مرکز O وتر AB را رسم می‌کنیم و نقطه‌های C و D را روی آن چنان اختیار می‌کنیم که $AC = CD = DB$ باشد. ثابت کنید دو مثلث AOC و BOD همنهشتند.

۲۳۴. سطح دایره‌ای به n قطاع تقسیم شده و $n+1$ قورباغه، به نحوی در آنها نشسته‌اند. هر ثانیه، دو قورباغه‌ای که در یک قطاع باشند، به قطاعهای مجاور (و مختلف) می‌جهند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که قورباغه‌ها، دست کم نیمی از قطاعها را اشغال کرده باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۲۳۵. به چند طریق می‌توان دایره‌ای که به P قطاع تقسیم شده است (P، عددی است اوّل) به‌وسیلهٔ n رنگ مختلف، رنگ کرد؟ (هر قطاع فقط یک رنگ دارد ؛ اجباری نیست از همهٔ رنگها استفاده شود ؛ اگر ضمن دوران دایره، دو روش رنگ‌آمیزی، بر هم منطبق شوند، آنها را یکی به حساب می‌آوریم.) المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق

۲۳۶. در جادهٔ کمربندی، که به شکل دایره است، در یک لحظه و از یک نقطه، چهار اتومبیل A، B، C و D به راه افتادند ؛ A و B در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و C و D در خلاف جهت آنها. سرعت هر اتومبیل، مقدار ثابتی است (ولی ممکن است با هم فرق داشته باشند). می‌دانیم، در همان لحظه‌ای که A و C، برای نخستین بار به هم رسیده‌اند، B و D هم، یکدیگر را ملاقات کرده‌اند. ثابت کنید، در لحظه‌ای که A و B، برای نخستین بار به هم می‌رسند، C و D هم یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۲۳۷. n نقطه روی محیط دایره داده شده است. دونفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند : مداد را از یک نقطه به نقطهٔ دیگر (روی پاره‌خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند) می‌برند. حرکت، به نوبت انجام می‌گیرد ؛ در ضمن، نمی‌توان روی یک پاره‌خط راست، دوبار حرکت کرد. کسی این بازی را باخته است که نتواند حرکت کند. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کند ـ به شرط بازی درست ـ برنده می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

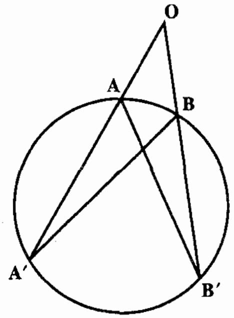
۲۳۸. روی محیط دایره‌ای، ۱۰۰ عدد درست نوشته‌ایم که، مجموع آنها، برابر واحد است. به هرعددی که از مجموع چند عدد پشت سرهم به دست آید، یک حلقه می‌گوییم. چند حلقهٔ مثبت وجود دارد؟ المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق

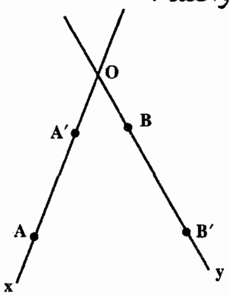
۲۳۹. سرعت یک چرخ در حال حرکت با محیط ۱۱ فوت، بر حسب مایل بر ساعت r است. اگر زمان لازم برای یک دور کامل چرخ ۱/۴ ثانیه کمتر شود، سرعت ۵ مایل بر ساعت افزایش می‌یابد. بنابراین r برابر است با :

الف) ۹   ب) ۱۰   ج) $10\frac{1}{2}$ د) ۱۱   هـ) ۱۲

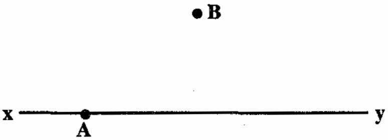
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۲۴۰. از نقطهٔ مفروض O دو قاطع OAA′ و OBB′ را نسبت به دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید، زاویه‌های مثلثهای OAB و OA′B′، و OAB′ و OA′B، نظیر به نظیر متساوی‌اند. سپس ثابت کنید اگر دو خط x و y در نقطهٔ O متقاطع باشند، روی x نقطه‌های A و A′ و روی y نقطه‌های B و B′ به قسمی باشند که نقطهٔ O خارج پاره خطهای AA′ و BB′ باشد (یا بین هر دو پاره خط)، ثابت کنید که اگر در مثلثهای OAB و OA′B′ زاویه‌های A و B′ برابر باشند، چهار نقطهٔ A، B، A′ و B′ روی یک دایره واقعند.





۲۴۱. خط xy و نقطهٔ A روی آن و نقطهٔ B خارج آن داده شده‌اند. ثابت کنید فقط یک دایره وجود دارد که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد و در نقطهٔ A بر خط xy مماس است.



قضیهٔ اشتینر ـ لموس

۲۴۲. دشواری ویژه‌ای که در حل برخی از مسأله‌های هندسه یافت می‌شود، خود موجب پدیدآمدن کششی در اشخاص برای حل این مسأله‌ها است. در سده‌های گذشته وجود این چنین کششی از امتیازهای ویژهٔ هندسه بوده است. برای نمونه از سه مسألهٔ بسیار مشهور قدیمی می‌توان نام برد: تضعیف مکعب(رسم مکعبی که حجمش دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد)، تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به سه قسمت برابر از راه رسم)، تربیع دایره (رسم مربع معادل با دایرهٔ مفروض). کوششهایی که برای حل این مسأله‌ها انجام گرفته خود شاخه‌های تازه‌ای را در ریاضیات پدید آورده است. حتی اکنون هم کسانی که به دنبال نام‌آوری در ریاضیات می‌باشند روشهای تازه‌ای در حل این مسأله‌ها ارائه می‌دهند و رقیبان را در پیدا کردن اشتباههای موجود در آنها به مبارزه می‌خوانند.

یکی از مسأله‌هایی که به ویژه همواره انگیزه‌ای برای نام‌آوری بوده است، در این جا به

صورت قضیهٔ زیر بیان می‌شود:

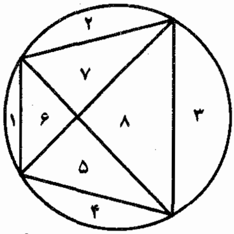
قضیه. اگر نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی مثلثی با هم برابر باشند آن مثلث متساوی‌الساقین است. این مسأله در سال ۱۸۴۰ از طرف لموس، که اگر غیر از این بود نامش فراموش شده بود، برای ریاضیدان بزرگ سوئیسی اشتینر فرستاده شده و حل هندسی آن از وی درخواست شده بود. اشتینر حلی بسیار پیچیده برای آن ارائه داد و این خود موجب شد که بسیاری دیگر از ریاضیدانان در جستجوی حل سادهٔ مسأله برآیند. در سالهای ۱۸۴۲، ۱۸۴۴، ۱۸۴۸ و همچنین در همهٔ سالهای از ۱۸۵۴ تا ۱۸۶۴، و بالاخره به‌طور منظم در صدسال اخیر، این مسأله زیر عنوان (قضیهٔ اشتینر ـ لموس) درمجله‌های ریاضی مورد بحث بوده است.

۲۴۳. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که در یک نقطهٔ مشخص بر یک خط داده شده در یک صفحه مماسند.

۲۴۴. مکان هندسی مرکز توپی رابیابیدکه روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد.

۲۴۵. مکان هندسی مرکز دایره‌ای رابیابیدکه روی محیط خارجی دایرهٔ دیگری می‌غلتد.

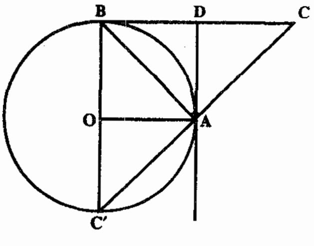
شمار ناحیه‌ها



۲۴۶. در محیط یک دایره ۱۰ علامت x، به فاصله‌های مساوی یا نامساوی از یکدیگر قرار می‌دهیم. سپس هر علامت را به ۹ علامت دیگر مربوط می‌سازیم. چند ناحیه مستقل از هم در داخل دایره به وجود می‌آید؟ به عنوان مثال، در شکلی که ملاحظه می‌کنید، ۴ علامت در دور دایره قرار داده، و هر علامت را به ۳ علامت دیگر وصل کرده‌ایم. در نتیجه ۸ ناحیهٔ مستقل از هم داخل دایره به دست آمده است.

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۲ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

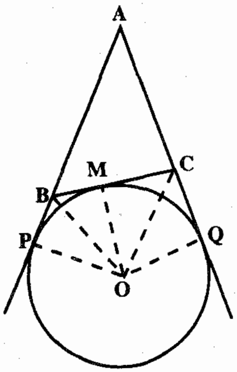


۲۴۷. قوس $\overset{\frown}{AB}=90^\circ$ را روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم و از نقطهٔ A مماس AD را بر دایره رسم کرده و AC را عمود بر وتر AB و برابر آن در خارج دایره رسم و BD را وصل می‌کنیم.

۱. ثابت کنید : $BC \perp AD$.

۲. AC را امتداد داده‌ایم تا دایره را در C' قطع کند. ثابت کنید BC' قطری از دایره است.

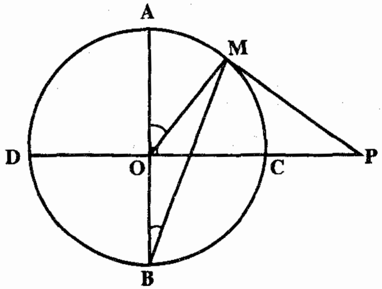
۲۴۸ . دایره‌ای به مرکز O و دو مماس AP و AQ رسم شده از نقطهٔ A بر آن داده شده‌اند. روی کمان $\overset{\frown}{PQ}$ که کوچکتر از نیمدایره است، نقطه‌ای مانند M اختیار کرده در آن نقطهٔ مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا AP و AQ را بترتیب در نقطه‌های B و C قطع کند. ثابت کنید :



۱. محیط مثلث ABC همواره مساوی با $2AP$ است.

۲. زاویهٔ $B\hat{O}C$ وقتی نقطهٔ M تغییر کند همیشه مساوی نصف زاویهٔ $P\hat{O}Q$ می‌باشد.

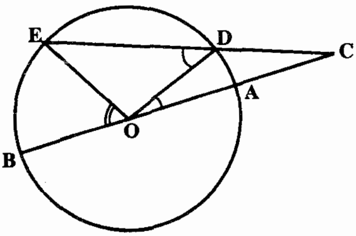
۲۴۹. در دایره‌ای به مرکز O دو قطر AB و CD بر یکدیگر عمودند. از نقطهٔ M که روی کمان $\overset{\frown}{AC}$ قرار دارد مماسی بر دایره رسم شده و CD را در نقطهٔ P قطع کرده است.



۱. ثابت کنید : $M\hat{P}O = M\hat{O}A$.

۲. ثابت کنید : $M\hat{P}O = 2M\hat{B}A$.

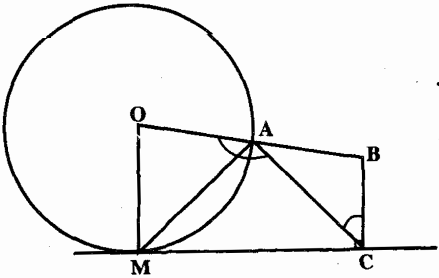
۲۵۰. در دایرهٔ به مرکز O وتر DE را از طرف D به اندازهٔ شعاع دایره تا نقطهٔ C امتداد می‌دهیم. نقطهٔ C را به مرکز دایره وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند (A بین O و C است).



۱. زاویهٔ $O\hat{D}E$ را با زاویهٔ $D\hat{O}A$ مقایسه کنید.

۲. ثابت کنید که : $B\hat{O}E - 3D\hat{O}A = 0$.

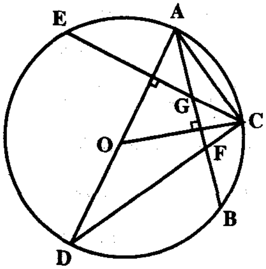
۲۵۱. در دایره‌ای به مرکز O، شعاع OA را از طرف A به اندازهٔ $AB = OA$ امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایره مماسی بر دایره رسم کرده عمود BC را



بر آن فرود می‌آوریم. M و C در یک طرف AO قرار دارند.

۱. ثابت کنید : $O\hat{A}C = ۳A\hat{C}B$.

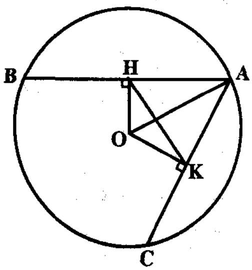
۲. ثابت کنید : $AM = AC$.



۲۵۲. نقطهٔ C روی دایرهٔ به مرکز O قرار دارد. وتر AB را عمود بر OC رسم می‌کنیم. قطر AD و وتر CE عمود بر این قطر را می‌کشیم. خطهای CD و CE وتر AB را در نقطه‌های F و G قطع می‌کنند.

۱. ثابت کنید مثلث ACG متساوی‌الساقین است.

۲. ثابت کنید : $AG = GC = GF$.



۲۵۳. در دایرهٔ به مرکز O دو وتر مساوی AB و AC رسم شده‌اند. از نقطهٔ O عمودهای OH و OK را بر این دو وتر رسم می‌کنیم.

۱. ثابت کنید مثلث OHK متساوی‌الساقین است.

۲. ثابت کنید خط OA عمودمنصف پاره‌خط HK است.

بخش ۳

• دو دایره

۳ . ۱. دو دایره در حالت کلی

۳ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه

۳ . ۱ . ۲. وضع نسبی دو دایره

۳ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۳ . ۱ . ۴. زاویه

۳ . ۱ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۱ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳ . ۱ . ۵ . ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳ . ۱ . ۶. مماس مشترک دو دایره

۳ . ۲. دو دایرهٔ برون‌هم (متخارج)

۳ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

۳ . ۲ . ۲. شعاع

۳ . ۲ . ۳. نقطه و دایره

۳ . ۲ . ۴. وتر

۳ . ۲ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۲ . ۵ . ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳ . ۲ . ۶. خطهای: موازی، عمود برهم،...

۳ . ۲ . ۶ . ۱.خطها برهم عمودند

۳ . ۲ . ۷. مماس مشترک دو دایره

۳ . ۳. دو دایرهٔ مماس برون

۳ . ۳ . ۱. تعریف و قضیه

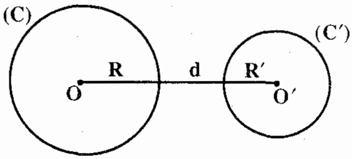
۳ . ۳ . ۲. شعاع

بخش ۳. دو دایره

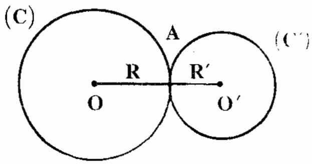
۳. ۱. دو دایره در حالت کلی

۳. ۱. ۱. تعریف و قضیه

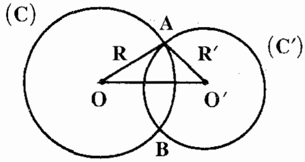
وضع دو دایره نسبت به هم. دو دایره واقع در یک صفحه، نسبت به هم یکی از حالتهای زیر را دارند:



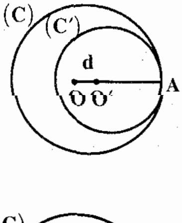
۱. **دو دایرهٔ برون هم (متخارج).** دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع اندازهٔ شعاعهایشان بیشتر است، دو دایرهٔ برون هم می‌نامند. در این صورت با فرض $OO' = d$، داریم: $d > R + R'$.



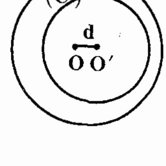
۲. **دو دایرهٔ مماس برون.** دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را مماس برون می‌نامند. در صورتی که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر مجموع شعاعهای آن دو دایره باشد، یعنی با فرض $OO' = d$، داشته باشیم: $OO' = d = R + R'$.



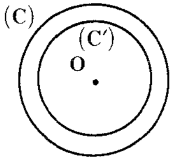
۳. **دو دایرهٔ متقاطع.** دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را متقاطع می‌نامند. در صورتی که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع اندازه‌های دو شعاع، کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره بیشتر باشد. یعنی با فرض $OO' = d$، داشته باشیم: $|R - R'| < d < R + R'$.



۴. **دو دایرهٔ مماس درون.** دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را مماس درون می‌نامند. در صورتی که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره باشد، یعنی با فرض $OO' = d$، داشته باشیم: $d = |R - R'|$.



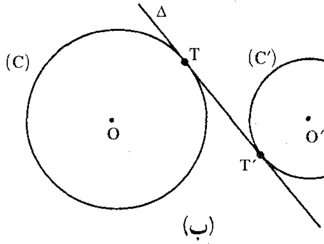
۵. **دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل).** دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره کمتر باشد، دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل) می‌نامند. یعنی با فرض $OO' = d$، داشته باشیم: $d < |R - R'|$.



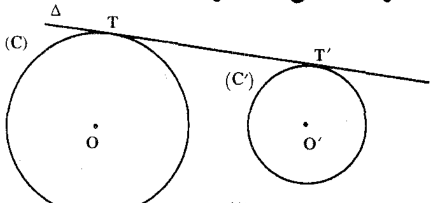
۶. دو دایرهٔ هم‌مرکز. دو دایرهٔ متمایزند که مرکز مشترک داشته باشند. به عبارت دیگر $OO' = d = \circ$ باشد.

مماس مشترک دو دایره. خطی است که بر دو دایره، مماس است. اگر دو دایره در یک طرف این خط مماس قرار گیرند، مماس مشترک را برونی و اگر در دو طرف این خط مماس واقع شوند، مماس مشترک را درونی می‌نامند.

در شکل (الف) خط Δ مماس مشترک برونی دو دایره و در شکل (ب) خط Δ مماس مشترک درونی دو دایرهٔ (C) و (′C) است.



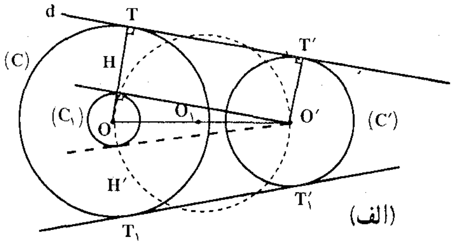
(ب)



(الف)

رسم مماس مشترک دو دایره

رسم مماس مشترک برونی دو دایره. دایره‌های $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم ؛ اگر خط d در نقطه‌های T و ′T بر این دو دایره مماس باشد و مرکزهای دو دایره در یک طرف آن واقع باشند (شکل الف)، دو شعاع OT و ′O′T بر خط d عمودند، بنابراین موازی یکدیگرند، پس اگر $R > R'$ باشد، خطی که از نقطهٔ ′O (مرکز دایرهٔ کوچکتر) موازی مماس مشترک رسم شود، شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند (چرا؟)، و بر آن عمود است. بنابراین چهارضلعی $HTT'O'$ مستطیل و خط $O'H$ با مماس مشترک خارجی دو دایره موازی است. درنتیجه اگر خط $O'H$ مشخص باشد، خطی که موازی آن و مماس بر یکی از دو دایره رسم شود همان مماس مشترک خارجی دو دایره است. اما مثلث $OO'H$ را به آسانی می‌توان رسم کرد، به این ترتیب که به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر ′OO را در نقطهٔ H قطع کند و مثلث $OO'H$ و درنتیجه خط $O'H$ ، که امتداد مماس مشترک را مشخص می‌کند، به دست آید.



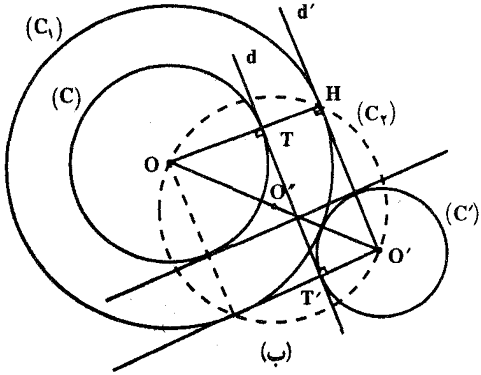
(الف)

در حالتی که $R = R'$ باشد، چهارضلعی $OO'T'T$ مستطیل است (چرا؟)، و مماس

مشترک خارجی دو دایره (در صورت وجود)، موازی خط‌المرکزین است، یعنی خود خط‌المرکزین راستای مماس مشترک خارجی دو دایره را مشخص می‌کند. هر دو دایرهٔ برون هم و دو دایرهٔ مماس برون و دو دایرهٔ متقاطع، هر کدام دو مماس مشترک برونی دارند و دو دایرهٔ مماس درون، تنها یک مماس مشترک برونی دارند.

دو دایرهٔ یکی درون دیگری و دو دایرهٔ هم مرکز مماس مشترک برونی ندارند.

رسم مماس مشترک درونی دو دایره. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ واقع در یک صفحه و خط d را که در دو نقطهٔ T و T' بر این دو دایره مماس است و مرکزهای دو دایره در طرفین آن واقعند در نظر می‌گیریم (شکل ب). از نقطهٔ O' خط d' را موازی d رسم می‌کنیم. این خط امتداد شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند و چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است، پس $OH \perp d'$ و $OH = R + R'$ است. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که خط $O'H$ که از مرکز یک دایره موازی مماس مشترک داخلی دو دایره رسم شود بر دایره‌ای به مرکز دایرهٔ دیگر و شعاعی مساوی مجموع دو شعاع دایره‌ها مماس است و از همین خط برای به‌دست آوردن امتداد مماس مشترک داخلی دو دایره استفاده می‌کنیم.



(ب)

با توجه به شکل، طریقهٔ ترسیم مماس مشترک داخلی دو دایره را بیان کنید.

هر دو دایرهٔ برون هم، دارای دو مماس مشترک داخلی هستند، و دو دایرهٔ مماس برونی فقط یک مماس مشترک داخلی دارند. دایره‌های متقاطع، مماس درونی، و درون هم، مماس مشترک داخلی ندارند.

۳ . ۱ . ۲. وضع نسبی دو دایره

۲۵۴. اگر R و R' شعاعها و d خط‌المرکزین دو دایرهٔ C و C' باشند، وضع نسبی این دو دایره را در هر یک از حالتهای زیر مشخص سازید.

الف. $d=10\ ,\ R=4\ ,\ R'=6$

ب. $d=1\ ,\ R=6\ ,\ R'=4$

پ. $d=10\ ,\ R=2\ ,\ R'=3$

ت. $d=4\ ,\ R=4\ ,\ R'=4$

ث. $d=3\ ,\ R=6\ ,\ R'=3$

۲۵۵. دو دایرهٔ $C(O,۴)$ و $C'(O',۶)$ داده شده‌اند. در صورتی که طول خط‌المرکزین این دو دایره (OO') یکی از مقدارهای زیر باشد، وضع نسبی دو دایره را در هر حالت مشخص کنید.

الف) ۸ ب) ۲ پ) ۱۰

ت) ۱ ث) ۱۲

۲۵۶. دایره‌ای به مرکز P و شعاع p و دایرهٔ کوچکتری به مرکز Q و شعاع q داده شده‌اند. PQ را رسم کنید. کدام یک از حکمهای زیر نادرست است؟

الف) $p-q$ می‌تواند با $\overline{PQ}$ مساوی باشد.

ب) $p+q$ می‌تواند با $\overline{PQ}$ مساوی باشد.

ج) $p+q$ می‌تواند کوچکتر از $\overline{PQ}$ باشد.

د) $p-q$ می‌تواند کوچکتر از $\overline{PQ}$ باشد.

هـ) هیچ یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۳ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۲۵۷. دو دایرهٔ C و ′C در یک صفحه مفروضند. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه را تعیین کنید که حداقل روی یکی از خطهایی واقعند که نقطه‌ای از دایرهٔ C را به نقطه‌ای از دایرهٔ ′C وصل می‌کنند (این دو نقطه متمایز فرض می‌شوند). برحسب اوضاع نسبی دو دایره در نوع جواب بحث کنید.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳ . ۱ . ۴. زاویه

۲۵۸. اندازهٔ زاویهٔ بین مماسهای مشترک داخلی و مماسهای مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای R و r را پیدا کنید، به شرطی که فاصلهٔ میان مرکزهایشان برابر با $\sqrt{۲(R^۲+r^۲)}$ باشد (مرکز دایره‌ها در یک طرف مماس خارجی و دو طرف مماس داخلی قرار دارند).

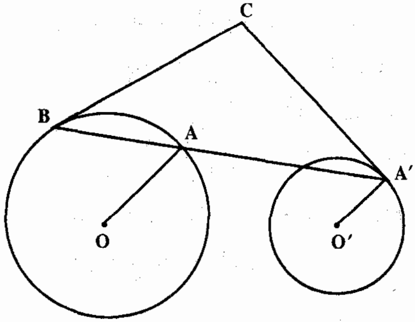
۳ . ۱ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۱ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

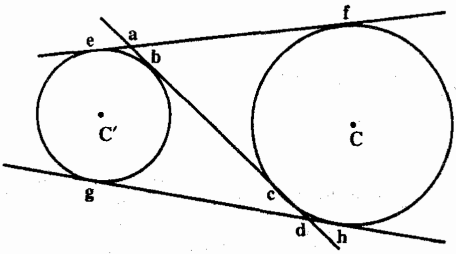
۲۵۹. بزرگترین و کوچکترین قطعه خطی را که دو سرش روی دو دایرهٔ داده شده باشد تعیین کنید.

۳ . ۱ . ۵ . ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۶۰. دو دایره با مرکزهای O و O′ و دو شعاع متوازیِ OA و O′A′ از آنها را رسم می‌کنیم. خط AA′ دایرهٔ O را در نقطهٔ دیگری مانند B قطع می‌کند. در نقطهٔ B مماسی بر دایرهٔ O و در نقطهٔ A′ مماسی بر دایرهٔ O′ رسم می‌کنیم. این دو مماس یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند. ثابت کنید: $CA' = CB$.



۲۶۱. دو دایرهٔ C و C′ متخارجند. ef و gh مماسهای مشترک خارجی آنها و bc یکی از مماسهای داخلی آنها است. bc با ef در a و با gh در d برخورد کرده است. ثابت کنید که پاره‌خطهای [ab] و [cd] با هم برابرند.



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳ . ۱ . ۶. مماس مشترک دو دایره

۲۶۲. مماس مشترکهای خارجی دو دایره، همچنین مماس مشترکهای داخلی دو دایره یکدیگر را روی خط‌المرکزین دو دایره قطع می‌کنند.

۲۶۳. تعداد مماسهای مشترک دو دایرهٔ مساوی واقع در یک صفحه نمی‌تواند برابر باشد با :

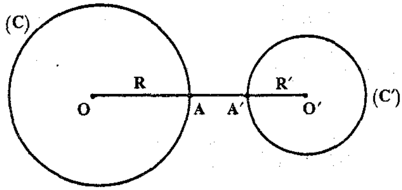
الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۳

د) ۴　　هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۳ . ۲ . دو دایرهٔ برون هم (متخارج)

۳ . ۲ . ۱ . تعریف و قضیه



دو دایره را برون‌هم (متخارج) می‌نامند، در صورتی که هر یک در برون دیگری باشد. می‌توان ثابت کرد که:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برون‌هم باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $(OO'=d)$ از مجموع اندازهٔ شعاعهای دو دایره بیشتر باشد. یعنی: $d > R+R' \Leftrightarrow$ دو دایرهٔ برون‌هم

۳ . ۲ . ۲ . شعاع

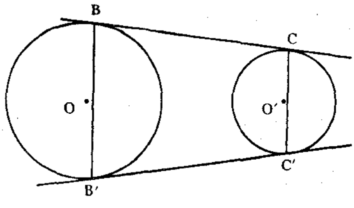
۲۶۴. دو دایرهٔ A و B به شعاعهای ۳ سانتیمتر و ۱ سانتیمتر و خط‌المرکزین ۵ سانتیمتر مفروضند. دایرهٔ C را چنان رسم می‌کنیم که با هر دو دایرهٔ A و B مماس و مرکزش روی خط‌المرکزین این دو دایره باشد، شعاع دایرهٔ C و فاصلهٔ مرکز آن از مرکز هر یک از دایره‌های A و B را پیدا کنید.

۲۶۵. فاصلهٔ مرکزهای دو دایرهٔ برون‌هم برابر با d است. ثابت کنید که چهار نقطهٔ برخورد مماسهای مشترک درونی و برونی آنها، بر یک دایره واقعند. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۳ . ۲ . ۳ . نقطه و دایره

۲۶۶. روی صفحه، دو دایره، در بیرون یکدیگر داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای در بیرون این دو دایره وجود دارد، به نحوی که هر خط راستی که از این نقطه می‌گذرد، دست‌کم یکی از دایره‌ها را قطع کند؟ المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۳ . ۲ . ۴ . وتر



۲۶۷. دو دایره به مرکزهای O و O′ متخارجند. دو مماس مشترک خارجی آنها را BC و B′C′ می‌نامیم (B و B′ روی دایرهٔ O هستند). ثابت کنید، دو وتر BB′ و CC′ متوازی‌اند.

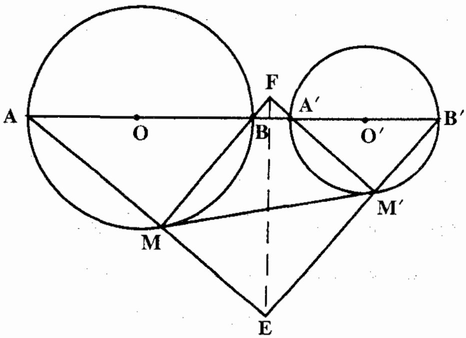
۳ . ۲ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۲ . ۵ . ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۶۸. ثابت کنید که طول قطعه‌ای از مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ برون‌هم که بین مماسهای مشترک داخلی آنها محصور شده، برابر با طول مماس مشترک داخلی آنهاست.

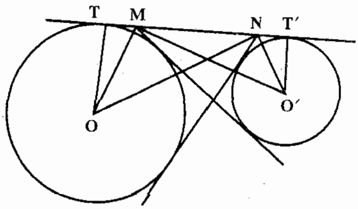
۳ . ۲ . ۶. خطهای: موازی، عمودبرهم،...

۳ . ۲ . ۶ . ۱. خطها برهم عمودند



۲۶۹. دو دایرهٔ O و O′ برون هم هستند. مماس مشترک خارجی MM′ آنها را رسم کرده، خط‌المرکزین OO′ را می‌کشیم تا دایرهٔ O را در نقطه‌های A و B و دایرهٔ O′ را در نقطه‌های A′ و B′ قطع کند. ثابت کنید، دوخط MA و M′B′ در نقطهٔ E، و دو خط MB و M′A′ در نقطهٔ F برهم عمودند. EF نیز بر خط‌المرکزین عمود می‌باشد.

۲۷۰. دو دایرهٔ برون‌هم O و O′ را در نظر گرفته، مماسهای مشترک داخلی آنها و یک مماس مشترک خارجی آنها را رسم می‌کنیم. مماس مشترک خارجی، دو مماس مشترک دیگر را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، OM بر O′M و ON بر O′N عمود است.



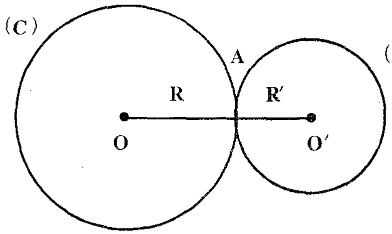
۳ . ۲ . ۷. مماس مشترک دو دایره

۲۷۱. دو دایره به شعاعهای ۲ و ۳ سانتیمترو فاصلهٔ مرکزهای آنها ۶ سانتیمتر است. این دو دایره چند مماس مشترک خارجی دارند؟

۳ . ۳. دو دایرهٔ مماس برون

۳ . ۳ . ۱. تعریف و قضیه

تعریف. دو دایره را مماس برون می‌نامند، در صورتی که تنها یک نقطهٔ مشترک داشته و هر دایره در برون دایرهٔ دیگر باشد.

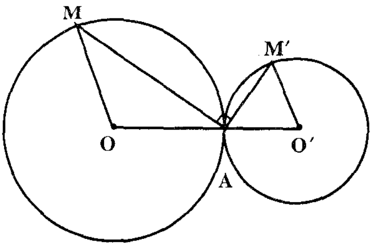


می‌توان ثابت کرد :

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس برون باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $(OO' = d)$ برابر مجموع شعاعهای آن دو دایره باشد.

یعنی : دو دایرهٔ مماس برون $\Leftrightarrow d = R + R'$

۳ . ۳ . ۲. شعاع



۲۷۲. دو دایرهٔ O و ′O در نقطهٔ A مماس برون هستند. در دایرهٔ O وتر AM را به اختیار رسم کرده و در دایرهٔ ′O وتر ′AM را عمود بر AM رسم می‌کنیم. ثابت کنید، شعاعهای OM و ′O′M موازی‌اند.

۲۷۳. مماس مشترک دو دایرهٔ مماس برونی با خط‌المرکزین دایره‌ها زاویه‌ای برابر α درست می‌کند. نسبت شعاعهای دو دایره را پیدا کنید.

۳ . ۳ . ۳. نقطه و دایره

۲۷۴. مماسهای مشترک برونی دو دایرهٔ مماس برون را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ تماس روی یک دایره قرار دارند.

۲۷۵. دو دایرهٔ مماس برون مفروضند. ثابت کنید، نقطه‌هایی که روی یکی از این دو دایره به یک فاصله از نقطهٔ تماس باشند، از دایرهٔ دوم نیز به یک فاصله‌اند.

۲۷۶. دایرهٔ $C(O,1)$ و نقطهٔ A که به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر از نقطهٔ O قرار دارد مفروضند. مرکز دایره‌ای را مشخص سازید که شعاعش برابر ۲ بوده، از نقطهٔ A بگذرد، و با دایرهٔ C مماس باشد.

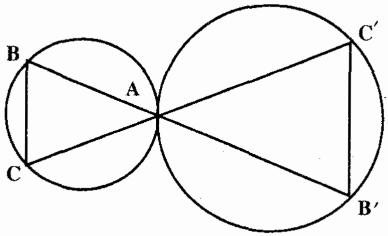
۲۷۷. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۱۶ سانتیمتر و خط D که از نقطهٔ O می‌گذرد، مفروضند. مرکز دایره‌ای را مشخص کنید که شعاعش برابر ۴ باشد و به دایرهٔ O و خط D مماس باشد.

۳ . ۳ . ۴. کمان

۲۷۸. تمام قاطعهایی که از نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس می‌گذرند در دو دایره کمانهایی ایجاد می‌کنند که از نظر عدهٔ درجه‌ها با هم برابرند.

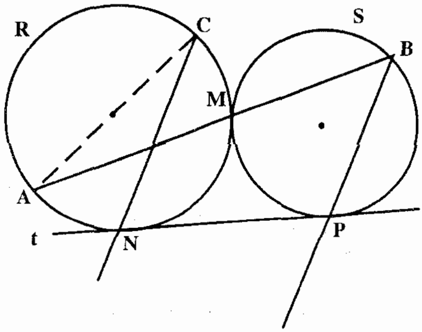
۳ . ۳ . ۵. وتر

۲۷۹. دو دایرهٔ غیرمساوی در نقطهٔ A بر هم مماس برون می‌باشند. از نقطهٔ A دو قاطع BAB' و CAC' را رسم می‌کنیم. (B و C روی یک دایره‌اند.) ثابت کنید، وترهای BC و $B'C'$ موازی‌اند.



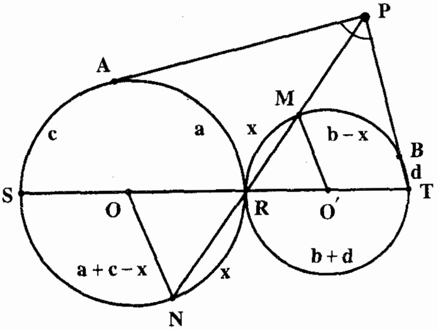
۳ . ۳ . ۶. قطر

۲۸۰. فرض می‌کنیم دایره‌های R و S در نقطهٔ M بر یکدیگر مماس برونی هستند و t را مماس مشترک بر این دو دایره و N و P را بترتیب نقطه‌های مماس t با دو دایره می‌گیریم (شکل). A را نقطه‌ای دلخواه از R می‌گیریم و فرض می‌کنیم B دومین نقطهٔ برخورد AM با S باشد. از N خطی موازی با PB می‌کشیم تا R را در نقطهٔ C قطع کند. ثابت کنید که A و C دو نقطهٔ متقاطر (دو سر یک قطر) از R هستند.



۳ . ۷ . ۳. زاویه

۳ . ۷ . ۳ . ۱. اندازهٔ زاویه



۲۸۱. در شکل مقابل، PA مماس بر نیمدایرهٔ SAR و PB مماس بر نیمدایرهٔ RBT، و SRT یک خط مستقیم است. اندازه‌های قوسها در شکل مشخص شده‌اند. اندازهٔ زاویهٔ مقعر APB برابر است با :

الف) $\frac{1}{2}(a-b)$ ب) $\frac{1}{2}(a+b)$

ج) $(c-a)-(d-b)$ د) $a-b$

هـ) $a+b$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

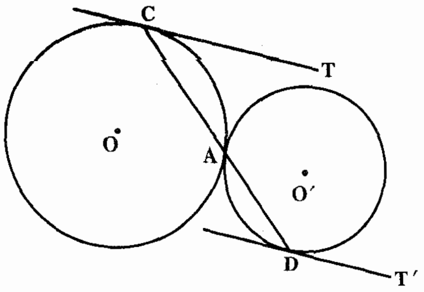
مسأله‌ای از موبیوس

۲۸۲. از یک نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ متقاطع، خط متغیّری می‌گذرانیم، تا دایره‌ها را در دو نقطه قطع کند. ثابت کنید، زاویه‌ای که نقطهٔ دیگر برخورد دو دایره را به نقطه‌های برخورد قاطع متغیّر با دو دایره وصل می‌کند اندازهٔ ثابتی دارد.

موبیوس MOEBIUS (۱۷۹۰ ــ ۱۸۶۸) شاگرد گوس GAUSS و ادامه‌دهندهٔ کارهای او است.

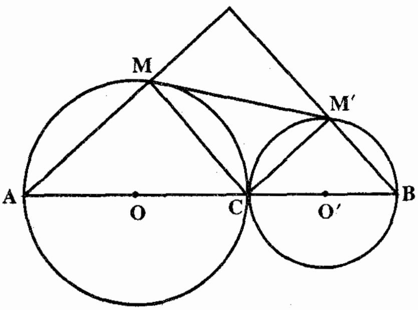
۳ . ۸ . ۳. خطهای: موازی، عمود بر هم،...

۳ . ۸ . ۳ . ۱. خطها موازی‌اند



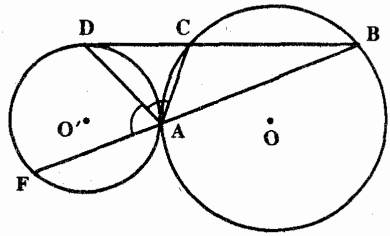
۲۸۳. دو دایره به مرکزهای O و ′O در نقطهٔ A مماس برون می‌باشند. از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید، مماسهایی که در این دو نقطه بر دو دایره رسم شوند، متوازی‌اند.

۳ . ۳ . ۸ . ۲. خطها برهم عمودند



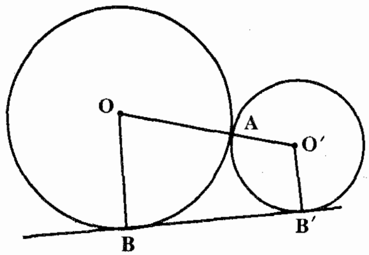
۲۸۴. دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ C مماس برون هستند. مماس مشترک برونی آنها MM′ را رسم کرده ،خط‌المرکزین OO′ را می‌کشیم تا دایرهٔ O را در A و دایرهٔ O′ را در نقطهٔ B قطع کند. ثابت کنید، دو خط MA و M′B و دو خط MC و M′C برهم عمودند.

۳ . ۳ . ۸ . ۳. خط نیمساز است



۲۸۵. دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ A مماس برون هستند، از نقطهٔ B واقع بر یکی از آنها مماس BD را بر دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. BD دایرهٔ اوّل را بار دیگر در نقطهٔ C قطع می‌نماید. BA را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ دوم را باز در نقطهٔ F قطع کند. ثابت کنید که AD نیمساز زاویهٔ CAF است.

۳ . ۳ . ۸ . ۴. خط مماس بر دایره است



۲۸۶. دو دایره به مرکزهای O و O′ را که در نقطهٔ A مماس خارج هستند در نظر گرفته، مماس مشترک خارجی آنها BB′ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، دایرهٔ به قطر BB′ در نقطهٔ A با خط OO′ مماس است.

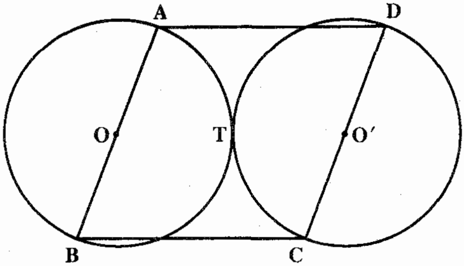
۳ . ۳ . ۹. مماس مشترک دو دایره

۲۸۷. ثابت کنید، مماس مشترک درونی دو دایرهٔ مماس برهم، از وسط مماسهای مشترک برونی آنها می‌گذرد.

۲۸۸. ثابت کنید که در دو دایرهٔ مماس برونی، مماس مشترک برونی بر دایره‌ای که به قطر خط‌المرکزین رسم شود، مماس است.

۳ . ۳ . ۱۰. شکلهای ایجاد شده

۲۸۹. دو دایرهٔ متساوی در نقطه‌ای مانند T مماس برونی هستند و AB و CD دو قطر متوازی از این دو دایره‌اند، ثابت کنید که چهارضلعی ABCD لوزی است.

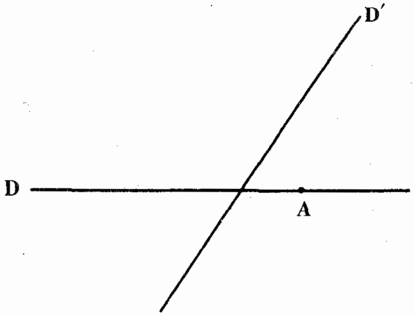


۳ . ۳ . ۱۱. دو دایره بر هم مماسند

۲۹۰. دایره‌های K_1 و K_2 دارای نقطه‌های مشترک درونی نیستند. خطهای راست L_1 و L_2 بر این دو دایره از بیرون مماسند و چهار نقطهٔ تماس، رأسهای یک چهارضلعی محیطی هستند. ثابت کنید، دایره‌های K_1 و K_2، برهم از بیرون مماسند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۲۹۱. دو خط متقاطع D و D′ و نقطهٔ A روی خط D داده شده‌اند. ثابت کنید، دو دایره وجود دارد که بر خط D در نقطهٔ A و همچنین بر خط D′ مماس می‌باشند.

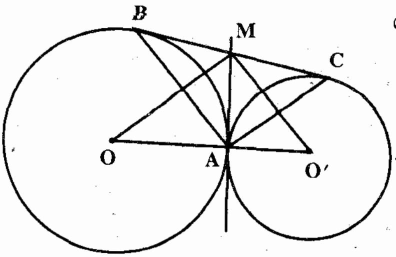


۳ . ۳ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۹۲. دو دایره به مرکزهای O و O′ در نقطهٔ A مماس برون می‌باشند. مماس مشترک برونی آنها را BC می‌نامیم. مماس مشترک درونی آنها BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند.

۱. ثابت کنید، زاویهٔ BAC قائمه است.

۲. ثابت کنید، مثلث OMO′ قائم‌الزاویه است.



۲۹۳. دو دایره که نسبت شعاعهای آنها ۱:۳ است، بر هم مماس برونی بوده و طول مماس مشترک برونی آنها برابر $۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر است.
۱. زاویهٔ بین دو مماس مشترک برونی را تعیین کنید.
۲. اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره $(d = OO')$ را بیابید.

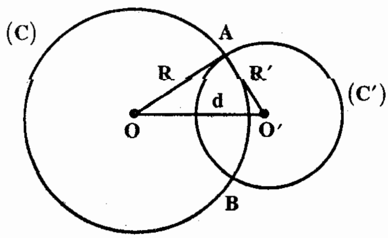
۲۹۴. دو دایرهٔ غیرمساوی به مرکزهای O و O' در نقطهٔ A باهم، مماس برون هستند. یکی از مماسهای مشترک برونی دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطه‌های تماسش با دو دایره را بترتیب T و T' و نقطه‌های تلاقیش را با خط OO' و مماس مشترک داخلی، بترتیب، S و M می‌نامیم. ثابت کنید:
۱. M وسط قطعه خط TT' است.
۲. شکل محدود به نقطه‌های تلاقی چهارخط AT، AT'، MO و MO' مستطیل است.
۳. اگر K وسط OO' باشد، TT' بر KM عمود است.

۴.۳. دو دایرهٔ متقاطع

۱.۴.۳. تعریف و قضیه

دو دایره را متقاطع می‌نامند، در صورتی که تنها دو نقطهٔ مشترک داشته باشند. می‌توان ثابت کرد که:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ متقاطع باشند، آن است که، اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از مجموع شعاعهای دو دایره کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشند، یعنی با فرض $OO' = d$:



$$|R-R'| < d < R+R' \Leftrightarrow \text{دو دایرهٔ متقاطع}$$

دایره‌های متعامد

۲۹۵. تعریف. دو دایره را متعامد می‌نامیم، درصورتی که زاویهٔ بین مماسهای رسم شده بر دو دایره در هر نقطهٔ برخورد، برابر 90° باشد.

قضیهٔ ۱. (الف) در دو دایرهٔ متعامد دو شعاعی که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرند، بر هم عمودند. (ب) بعکس، اگر دو شعاعی که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرند، بر هم عمود باشند، دو دایره متعامدند.

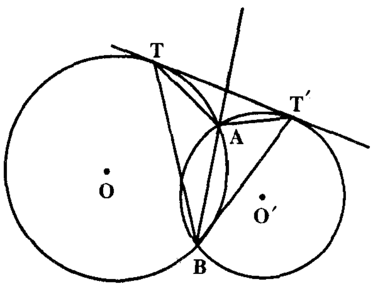
قضیهٔ ۲. (الف) اگر دو دایره متعامد باشند، دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است، از نقطه‌های مشترکشان می‌گذرد. (ب) بعکس، اگر دایره‌ای که خط‌المرکزین دو دایرهٔ مفروض قطر آن است، از نقطه‌های مشترک دو دایره بگذرد، آن دو دایره متعامدند.

قضیهٔ ۳. اگر دو دایره متعامد باشند، شعاع یکی از دو دایره که از نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایرهٔ دیگر مماس است.

قضیهٔ عکس. دو دایرهٔ متقاطع مفروضند. اگر شعاع یک دایره که از یک نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایرهٔ دوم مماس باشد، آن‌گاه دو دایره متعامدند.

۲.۴.۳. شعاع

۲۹۶. دو دایره به مرکزهای O و O′ و شعاعهای R و R′ در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط TT′ مماس مشترک برونی آنها را رسم می‌کنیم (T روی دایرهٔ به مرکز O می‌باشد). ثابت کنید، دایرهٔ محیطی دو مثلث ATT′ و BTT′ متساوی‌اند.



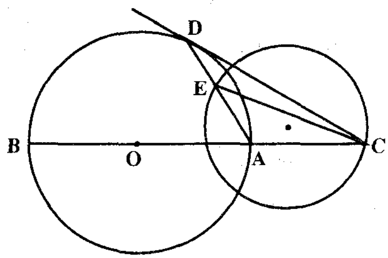
۳.۴.۳. نقطه و دایره

۲۹۷. دو دوچرخه سوار دور دو دایرهٔ متقاطع می چرخند، هر دوچرخه سوار دور دایرهٔ خودش با تندیی ثابت می‌چرخد. با شروع همزمان از یک نقطهٔ برخورد دایره‌ها، دوچرخه‌سوارها، پس از یک دور چرخش، یک بار دیگر در همین نقطه به هم می‌رسند. ثابت کنید که نقطه‌ای ثابت وجود دارد، به‌طوری که فاصله‌های آن تا دوچرخه سوارها، در هر لحظه برابرند، به شرطی که آنها

الف. در یک جهت (جهت گردش عقربه‌های ساعت)؛

ب. در جهت مخالف هم، گردش کنند.

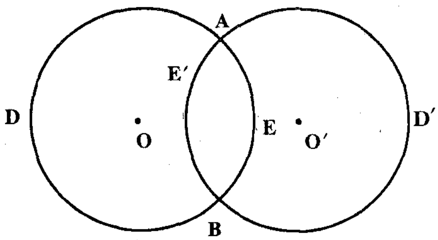
۲۹۸. از نقطهٔ C واقع بر قطر دایره‌ای مماس CD را بر آن رسم کرده، وسط AD را نقطهٔ E می‌نامیم. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ACD بر دایرهٔ به قطر CE قرار دارد.



۲۹۹. دو دایره به مرکزهای O و O′ و به شعاع R که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر R است، مفروضند. مرکزهای دایره‌هایی را که شعاعهایشان برابر $\frac{R}{۲}$ و با دو دایرهٔ بالا مماس باشند، مشخص سازید.

۴.۴.۳. کمان

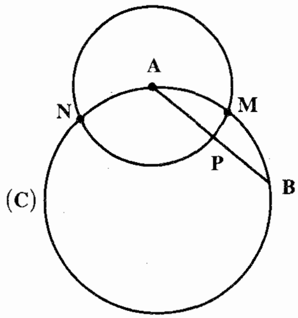
۳۰۰. اگر دو دایرهٔ متساوی یکدیگر را قطع کنند، دو کمانی که به‌وسیلهٔ نقطه‌های تقاطع روی هر یک از آنها پدید می‌آید، نظیر به نظیر با هم برابرند.



۳۰۱. A و B را دو نقطه از محیط دایرهٔ K می‌گیریم. فرض می‌کنیم، دو انتهای کمانی مانند K′ از دایرهٔ دیگری مانند I بر دو نقطهٔ A و B منطبق باشد و مساحت دایرهٔ K را به دو بخش برابر تقسیم کند. ثابت کنید، طول کمان K′ از قطر دایرهٔ K بزرگتر است.

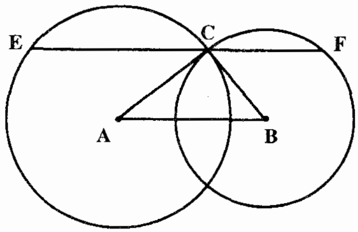
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۴

۳۰۲. وتر AB از دایرهٔ (C) را درنظر می‌گیریم. دایرهٔ دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقطه‌های M و N و وتر AB را در نقطهٔ P قطع کند. ثابت کنید، عمودمنصف BP از وسط کمان $\overset{\frown}{MB}$ می‌گذرد.



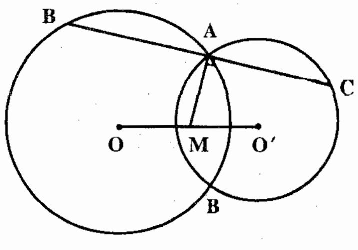
مرحلهٔ اوّل هشتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹

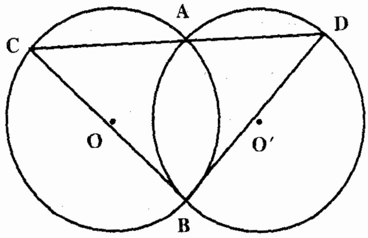
۳۰۳. از نقطهٔ C، نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ متقاطع به مرکزهای A و B، قاطع ECF را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، $\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{CF}$ مقدار ثابتی است.



۵.۴.۳. وتر

۳۰۴. دو دایرهٔ O و O′ متقاطع در نقطه‌های A و B مفروضند. نقطهٔ A را به نقطهٔ M وسط خط‌المرکزین OO′ وصل کرده، عمودی از نقطهٔ A بر AM اخراج می‌نماییم تا دایرهٔ O را در نقطهٔ B و دایرهٔ O′ را در نقطهٔ C قطع کند. ثابت کنید : AB=AC.





۳۰۵. دو دایرهٔ متساوی در نقطه‌های A و B متقاطعند. از نقطهٔ A خطی رسم کرده‌ایم که دو دایره را در نقطه‌های C و D قطع کرده است. ثابت کنید، BC=BD است.

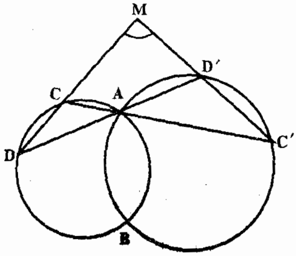
۳.۴.۶. قطر

۳۰۶. دو دایره، در نقطه‌های A و B، یکدیگر را قطع کرده‌اند. مماسهای بر دایره‌ها در نقطه‌های A و B، بر هم عمودند. M را نقطه‌ای واقع بر محیط یکی از دایره‌ها می‌گیریم، به نحوی که در درون دایرهٔ دیگر قرار گرفته باشد. AM و BM را از طرف M امتداد می‌دهیم تا محیط دایره‌ای را که M در درون آن است، در نقطه‌های X و Y قطع کنند. ثابت کنید XY، قطری از این دایره است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

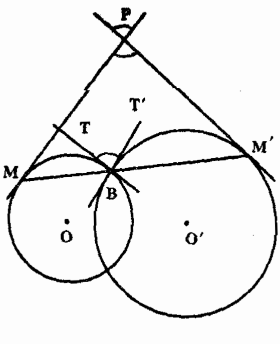
۳۰۷. **قضیه.** دو خطی که از نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ متعامد به نقطه‌ای روی یکی از دایره‌ها رسم می‌شوند، دایرهٔ دیگر را در دو انتهای قطری از آن دایره قطع می‌کنند.

۳.۴.۷. زاویه



۳.۴.۷.۱. اندازهٔ زاویه

۳۰۸. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. از نقطهٔ A دو قاطع CAC′ و DAD′ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، دو وتر CD و C′D′ به زاویهٔ ثابت یکدیگر را قطع می‌کنند.



۳۰۹. از نقطهٔ B محل تقاطع دو دایرهٔ O و O′ قاطع MBM′ را در دو دایره رسم کرده و در نقطه‌های M و M′ دو مماس بر دو دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ P یکدیگر را قطع نمایند. ثابت کنید که زاویهٔ بین این دو مماس با زاویهٔ بین مماسهایی که در نقطهٔ B بر دو دایره رسم شوند، برابر است.

۳۱۰. یک قاطع متغیّر از یک نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ متقاطع رسم می‌شود. ثابت کنید، خطهایی که از نقطهٔ دیگر تقاطع دو دایره به دو سر قاطع وصل می‌شوند، زاویهٔ ثابتی می‌سازند.

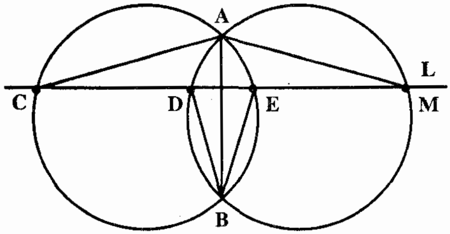
۳۱۱. دو دایرهٔ متقاطع و دو نقطه را، هر کدام روی یکی از دایره‌ها، به‌طوری که در دو طرف وتر مشترک باشند درنظر بگیرید. نشان دهید اگر مجموع دو زاویه‌ای که وتر مشترک از این نقطه‌ها با آن زاویه‌ها دیده می‌شود $90°$ یا $270°$ باشد، دو دایره متعامدند.

۲.۷.۴.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

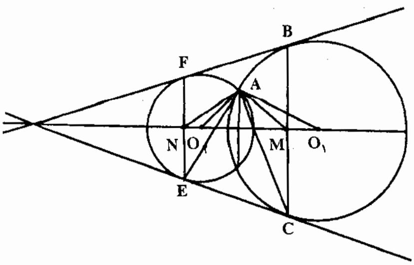
۳۱۲. K و M، نقطه‌های برخورد دو دایره‌اند. از نقطهٔ K، دو نیمخط راست رسم کرده‌ایم؛ یکی از نیمخطها، دایرهٔ اوّل را در A و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ B و نیمخط دیگر، دایرهٔ اوّل را در نقطهٔ C و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید، دو زاویهٔ MAB و MCD برابرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۳۱۳. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطع هستند. خط L دایره‌ها را در نقطه‌های C، D، E و M قطع می‌کند. نقطه‌های A و B در دو طرف این خط قرار دارند. ثابت کنید که مجموع زاویه‌های DBE و CAM برابر $180°$ است.

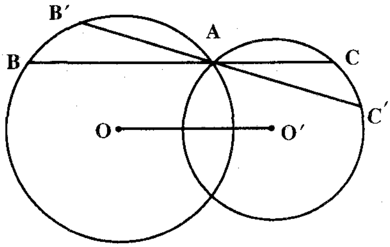


۳۱۴. نقطه‌های O_1 و O_2 مرکزهای دو دایرهٔ متقاطع هستند و A یکی از نقطه‌های برخورد آنهاست. دو مماس مشترک بر دایره‌ها رسم می‌شوند؛ BC و EF وترهای این دایره‌ها با نقطه‌های انتهایی نقطه‌های تماس هستند. M و N، بترتیب، وسط BC و EF هستند. ثابت کنید که $O_1\hat{A}O_2 = M\hat{A}N = 2C\hat{A}E$.



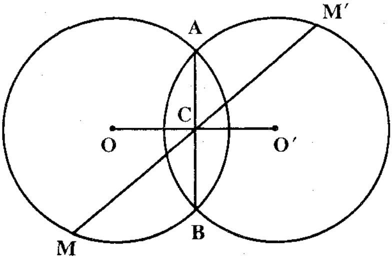
۳.۴.۸. پاره‌خط

۳.۴.۸.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۳۱۵. خطی که از نقطهٔ تقاطع دو دایره، موازی با خط‌المرکزین رسم شود، بزرگترین قاطعی است که می‌توان در دو دایره رسم کرد.

۳.۴.۸.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها



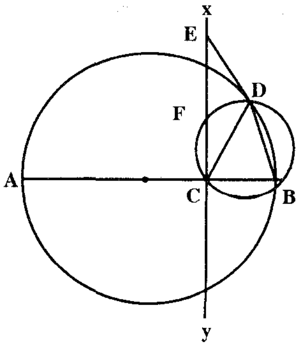
۳۱۶. دو دایرهٔ متساوی یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند و وتر مشترک AB خط‌المرکزین OO' را در نقطهٔ C قطع کرده است. ثابت کنید، اگر خطی از نقطهٔ C بگذرد و دو دایره را در نقطه‌های M و M' قطع کند، داریم : $MC = M'C$.

۳۱۷. اگر دو دایرهٔ مساوی، یکدیگر را قطع کنند، هر نقطهٔ دلخواه از خط راستی که از نقطه‌های برخورد گذشته است، از دو مرکز به یک فاصله است.

از لئوناردو داوینچی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

لئوناردو داوینچی

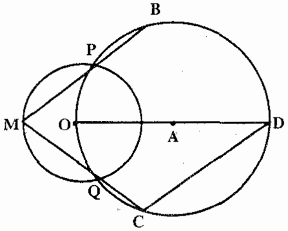
لئوناردو داوینچی Leonardo da Vinci (۱۴۵۲ـ۱۵۱۹) از ریاضیدانان ایتالیاست. او در وینچی نزدیک فلورانس به دنیا آمد و در نزدیکی آمبواز وفات یافت. علاوه بر شهرتش در مقام نقاش، مجسمه‌ساز، زرگر، پژوهشگر گردش خون، دانشمند عمومی، معمار، نویسندهٔ مکانیک، اپتیک و مناظر و مرایا، ریاضیدان بزرگی نیز بود. در زمینهٔ ریاضیات کاربردی او را می‌توان از بنیانگذاران اصول اپتیک جدید دانست. در زمینهٔ هندسه میان منحنیهای انحنای منفرد و مضاعف فرق گذاشت. به چندضلعیهای ستاره‌ای توجه خاصی کرد. به ترسیم شکلها با یک گشادگی پرگار علاقهٔ خاصی نشان داد و ترسیمهای دقیق یا تقریبی از چندضلعیهای منتظم فراهم ساخت. در فیزیک از اصول سطح شیب‌دار اطلاع داشت. گرانیگاه هرم را به‌دست آورد. در زمینهٔ مویینگی و شکست نور کار کرد. اتاق تاریک بدون عدسی را می‌شناخت. از مقاومت هوا و اثر اصطکاک



خبر داشت. جهان کمتر یک چنین نابغهٔ جامع‌الاطرافی پرورده است.

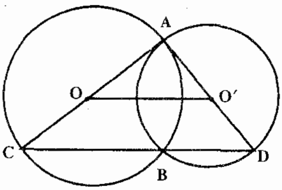
۳۱۸. دایرهٔ به قطر AB و خط xy که در نقطهٔ C واقع بر قطر AB (یا امتداد آن) بر این قطر عمود است، مفروضند. اگر D نقطه‌ای از این دایره باشد، خط مماس بر دایره در این نقطه، خط xy را در نقطهٔ E قطع می‌کند. دایرهٔ محیطی مثلث CBD خط xy را در نقطهٔ دیگر F تلاقی می‌نماید. ثابت کنید : ED=EF.

۳۱۹. دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند A داده شده است. به مرکز A و به شعاع AO دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقطه‌های P و Q و امتداد OA را در نقطهٔ D قطع کند، سپس نقطهٔ M متعلق به دایرهٔ O را به نقطه‌های P و Q وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا خطهای حاصل، دایرهٔ A را بترتیب در نقطه‌های B و C قطع کنند. ثابت کنید : MB=DC.



حالات مختلف شکل را برحسب آن که نقطهٔ A داخل دایرهٔ C یا خارج آن واقع باشد درنظر بگیرید.

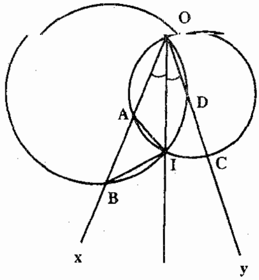
۳۲۰. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. قطرهای AC و AD از این دو دایره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که پاره‌خط CD از نقطهٔ B می‌گذرد و اندازه‌اش مساوی دو برابر طول خط‌المرکزین دو دایره است.

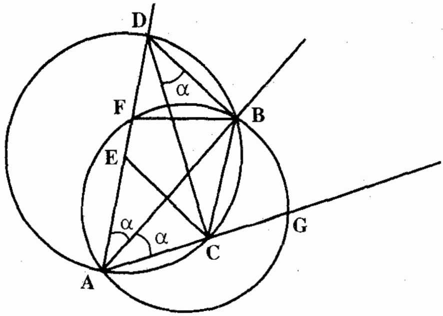


۳۲۱. دایره‌ای و دو نقطهٔ A و B روی آن داده شده است. مماسهای بر دایره که از A و B می‌گذرند، یکدیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کنند. دایره‌ای که از C می‌گذرد، در نقطهٔ B بر AB مماس است و، برای بار دوم، دایرهٔ داده شده را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که خط AM، پاره‌خط CB را نصف می‌کند.

۳۲۲. روی یک خط راست، نقطه‌های A، B، C و D طوری قرار گرفته‌اند که BC=۲AB و CD=AC. دایره‌ای از A و C، و دایرهٔ دیگری از B و D می‌گذرد. ثابت کنید که وتر مشترک این دایره‌ها، پاره‌خط AC را نصف می‌کند.

۳۲۳. زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نقطهٔ I روی نیمساز آن مفروض است، روی Ox دو نقطهٔ دلخواه A و B را اختیار کرده، دایره‌های محیطی دو مثلث OAI و OBI را رسم می‌کنیم تا نیمخط Oy را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید : CD=AB.

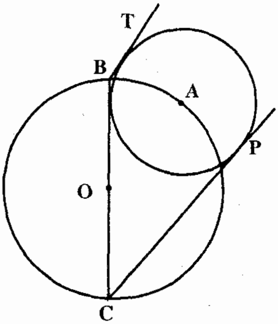




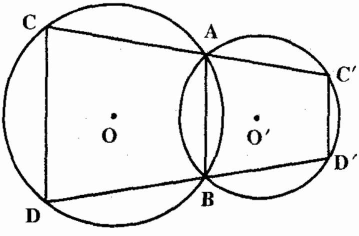
۳۲۴. زاویهٔ FAG مفروض است. نقطهٔ ثابت B را روی نیمساز این زاویه اختیار می‌کنیم و دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم که از B بگذرد و دو ضلع زاویه را در C و D قطع کند. ثابت کنید که AC+AD ثابت است.

۳.۴.۹. خطهای: موازی، عمود بر هم،...

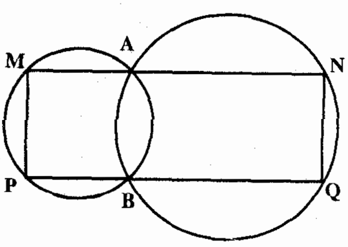
۳.۴.۹.۱. خطها موازی‌اند



۳۲۵. دایرهٔ به قطر BC و به مرکز O و نقطهٔ A روی آن را درنظر گرفته، دایرهٔ دیگری به مرکز A چنان رسم می‌کنیم که با قطر BC مماس باشد و از نقطه‌های B و C دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید، این دو مماس با هم موازی‌اند.



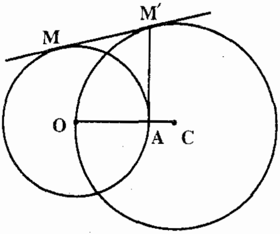
۳۲۶. از نقطه‌های A و B محل تلاقی دو دایره دو قاطع چنان رسم کرده‌ایم که دایرهٔ O را در نقطه‌های C و D و دایرهٔ O′ را در نقطه‌های C′ و D′ قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $DC \parallel D'C'$.



۳۲۷. از نقطه‌های تقاطع A و B‌ی دو دایرهٔ متقاطع، دو وتر متوازی MAN و PBQ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MP و NQ مساوی و موازی‌اند.

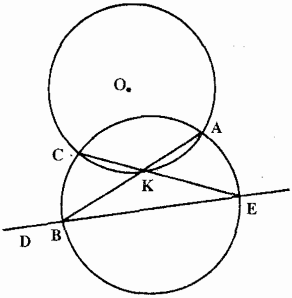
۳.۴.۹.۲. خطها بر هم عمودند

۳۲۸. نقطهٔ C واقع در خارج دایرهٔ (O) را مرکز قرار داده، به شعاع OC دایره‌ای رسم می‌کنیم



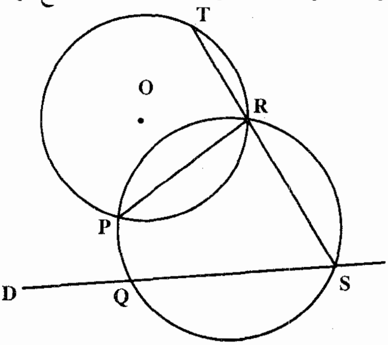
و مماس مشترک خارجی MM' دو دایرهٔ (O) و (C) را نیز می‌کشیم (M' روی دایرهٔ C). خط‌المرکزین دو دایره، دایرهٔ (O) را در نقطهٔ A قطع می‌کند. ثابت کنید که $M'A$ بر OC عمود است.

۳.۹.۴.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



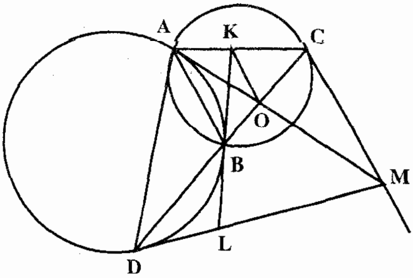
۳۲۹. دایرهٔ ثابت O و خط ثابت D و نقطهٔ ثابت A روی دایرهٔ O و نقطهٔ ثابت B روی خط D داده شده است. دایرهٔ متغیّری از A و B گذشته، دایرهٔ O را در نقطهٔ دیگری مانند C و خط D را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط CE از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳۳۰. دایرهٔ (C) به مرکز O و نقطهٔ ثابت P واقع بر آن و خط راست D و نقطهٔ ثابت Q واقع بر آن مفروضند. از نقطه‌های P و Q دایره‌ای با شعاع متغیّر می‌گذرد که دوباره دایرهٔ (C) را در نقطهٔ R و خط D را در نقطهٔ S قطع کند. ثابت کنید که خط RS دایرهٔ (C) را در یک نقطهٔ ثابت T قطع می‌کند.



۴.۹.۴.۳. خط مماس بر دایره است

۳۳۱. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. خط راستی دلخواه از نقطهٔ B می‌گذرد و برای بار دوم، دایرهٔ اوّل را در نقطهٔ C و دایرهٔ دوم را در نقطهٔ D قطع می‌کند. مماس بر دایرهٔ اوّل در نقطهٔ C و مماس بر دایرهٔ دوم در نقطهٔ D، در نقطهٔ M متقاطعند. از نقطهٔ برخورد AM و CD، خط راستی به موازات CM می‌گذرد و AC را در نقطهٔ K قطع می‌کند. ثابت کنید، KB بر دایرهٔ دوم مماس است.

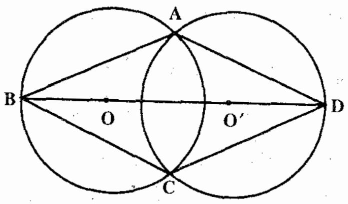


۱۰.۴.۳. شکلهای ایجاد شده

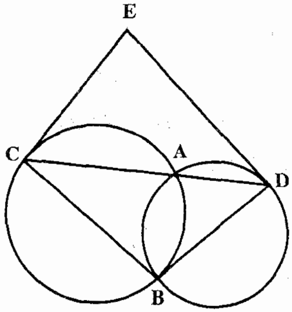
۳۳۲. دو دایرهٔ C' و C'' در دو نقطهٔ متمایز a و b یکدیگر را قطع می‌کنند. بر a و b دو خط موازی با هم A و B به‌گونه‌ای رسم می‌شوند که A با دایره‌های C' و C'' بترتیب در a' و a'' و B با دایره‌های C' و C'' بترتیب در b' و b'' برخورد کند و a بین a' و a'' و b بین b' و b'' واقع باشد. ثابت کنید که چهارضلعی $a'b'b''a''$ متوازی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۳۳۳. دو دایرهٔ متساوی O و O' در نقطه‌های A و C متقاطعند. اگر محل تلاقی OO' با دو دایره را B و D فرض کنیم، ثابت کنید، چهارضلعی ABCD لوزی است.



۳۳۴. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. قاطع گذرنده بر A دو دایره را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. اگر E نقطهٔ برخورد مماسهای مرسوم بر دو دایره در نقطه‌های C و D باشند، ثابت کنید چهارضلعی BCED محاطی است.



۱۱.۴.۳. سایر مساله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۵. هرگاه D_1 و D_2 دو قرص باز [= سطح داخلی دایره بدون محیط آن] از صفحه با فصل مشترک ناتهی باشند، از گزاره‌های زیر کدامها به‌ازای هر وضعی از D_1 و D_2 درست هستند؟

الف) $D_1 \cap D_2$ یک قرص باز است.

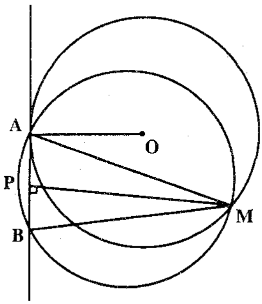
ب) هر نقطهٔ $D_1 \cap D_2$ در قرص بازی قرار دارد که مشمول در $D_1 \cap D_2$ است.

ج) $D_1 \cup D_2$ یک قرص باز است.

د) هر نقطهٔ $D_1 \cup D_2$ در قرص بازی واقع است که مشمول در $D_1 \cup D_2$ است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۳۳۶. دایرهٔ O و مماس در نقطهٔ A بر آن مفروض است. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر دایره عمود MP را بر مماس فرود آورده روی مماس طول PB=PA را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث AMB همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

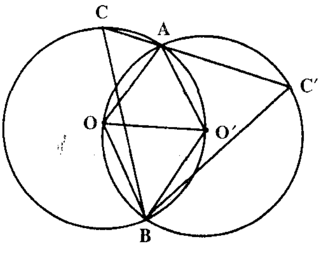


۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۷. دو دایره به مرکزهای O و O′ طوری رسم شده‌اند که مرکز یکی روی دیگری قرار دارد. نقطه‌های A و B محل تلاقی دو دایره را به نقطه‌های O و O′ وصل می‌کنیم.

۱. ثابت کنید مثلثهای AOO′ و BOO′ متساوی‌الاضلاعند.

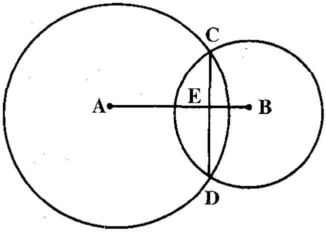
۲. از نقطهٔ A قاطع CAC′ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مثلث BCC′ متساوی‌الساقین است.



۳۳۸. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده‌اند.

الف. ثابت کنید که AB، عمودمنصف CD است.

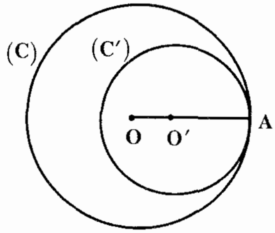
ب. ثابت کنید : $A\hat{C}B = A\hat{D}B$.



۵.۳. دو دایرهٔ مماس درون

۱.۵.۳. تعریف و قضیه

دو دایره که تنها یک نقطهٔ مشترک داشته و یکی درون دیگری باشد، دو دایرهٔ مماس درون یا مماس درونی نامیده می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که :

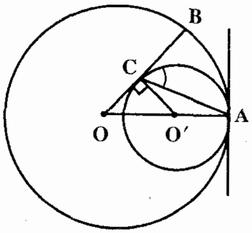


شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس درون باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره باشد. یعنی با فرض $OO' = d$:

$d = |R - R'| \Leftrightarrow$ دو دایرهٔ مماس برون

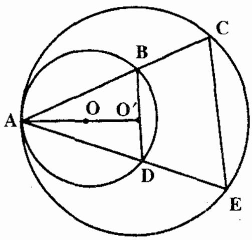
۲.۵.۳. زاویه

۱.۲.۵.۳. اندازهٔ زاویه

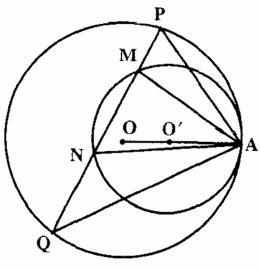


۳۳۹. دو دایره بر یکدیگر در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. شعاع OB، مماس بر دایرهٔ کوچکتر در نقطهٔ C، از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ بزرگتر، رسم می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ BAC را پیدا کنید.

۲.۲.۵.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۳۴۰. دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. از نقطهٔ A دو قاطع ABC و ADE را رسم می‌نماییم (B و D روی دایرهٔ O هستند). ثابت کنید که زاویه‌های دو مثلث DBA و ECA نظیر به نظیر با هم برابرند.

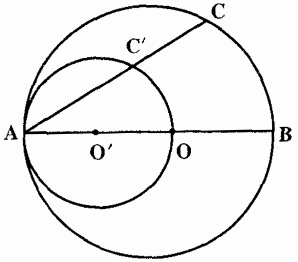


۳۴۱. دو دایرهٔ O و O′ در نقطهٔ A مماس درونی‌اند. قاطع دلخواهی دو دایره را در نقطه‌های P، M، N و Q قطع می‌کند. ثابت کنید :

۱. $P\hat{A}M = N\hat{A}Q$

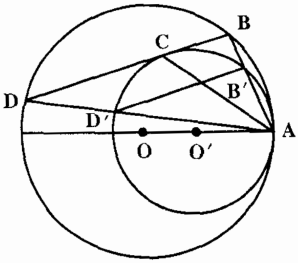
۲. $P\hat{A}N = M\hat{A}Q$

۳.۵.۳. پاره‌خط



۳۴۲. دایره‌ای به قطر AB و به مرکز O داده شده است. دایرهٔ دیگری به قطر AO رسم نموده، از نقطهٔ A خطی می‌کشیم که دایرهٔ بزرگ را در نقطهٔ C و دایرهٔ کوچکتر را در نقطهٔ C′ قطع کند. ثابت کنید : $AC' = CC'$.

۴.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی



۳۴۳. دو دایره در نقطهٔ A مماس درون می‌باشند. از نقطهٔ C روی دایرهٔ درونی مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ دیگر را در نقطه‌های B و D قطع کند. خطهای AB و AD دایرهٔ درونی را در نقطه‌های B′ و D′ قطع می‌کنند.

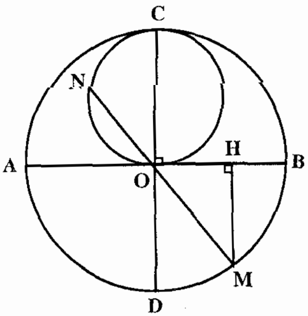
۱. ثابت کنید، $B'D' \| BD$ است.

۲. ثابت کنید، خط AC نیمساز زاویهٔ BAD می‌باشد.

۳۴۴. در دایره‌ای به مرکز O قطرهای AB و CD را عمود بر هم رسم می‌کنیم و به قطر OC دایره‌ای می‌زنیم.

۱. ثابت کنید، این دایره بر قطر AB مماس است.

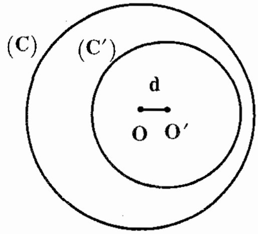
۲. شعاع دلخواه OM را رسم کرده، از M عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم. اگر N نقطهٔ تلاقی OM با دایرهٔ به قطر OC باشد، ثابت کنید : $ON=MH$.



۶.۳. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۱.۶.۳. تعریف و قضیه

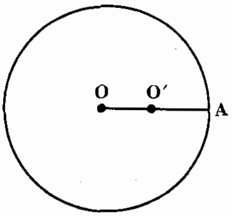
دو دایره را یکی درون دیگری (متداخل) می‌نامند، درصورتی که هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند و یکی از دایره‌ها درون دایرهٔ دیگر باشد. ثابت می‌شود که :



شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ یکی درون دیگری باشد، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از قدرمطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره کمتر باشد، یعنی با فرض $OO' = d$:

$d < |R - R'| \Leftrightarrow$ دو دایره یکی درون دیگری

۲.۶.۳. شعاع



۳۴۵. دایرهٔ (C) به مرکز O و شعاع ۴ سانتیمتر و نقطهٔ O' در درون این دایره مفروض است. حدود شعاع دایره‌های به مرکز O' و واقع در درون این دایره را تعیین کنید.

۳۴۶. دایره‌ای با مساحت $A = \pi r^{۲}$ داخل دایره‌ای بزرگتر با مساحت $A_۱ + A_۲ = ۹\pi$ واقع است و $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۱ + A_۲$ یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، اندازهٔ r شعاع دایرهٔ کوچکتر برابر است با :

الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ب) ۱ ج) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ د) $\frac{۳}{۲}$ هـ) $\sqrt{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۳.۶.۳. خط و دایره

۳۴۷. دایرهٔ β در درون دایرهٔ α قرار دارد. روی دایرهٔ α، دو دنباله از نقطه‌ها داده شده‌اند: A_1، A_2، A_3، ... و B_1، B_2، B_3، ...، پشت سر هم در یک جهت و به‌طوری که خطهای راست A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4، ... و B_1B_2، B_2B_3، B_3B_4، ... بر دایرهٔ β مماسند. ثابت کنید که خطهای راست A_1B_1، A_2B_2، A_3B_3، ... بر یک دایره، که مرکزش روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می‌گذرد، مماسند.

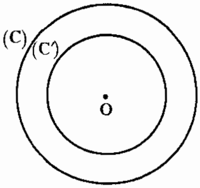
۴.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۴۸. روی محیط دایرهٔ به مرکز O_1 و شعاع r_1، نقطه‌های M و K را انتخاب کرده‌ایم. در زاویهٔ مرکزی، MO_1K، دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 محاط شده است. مساحت چهارضلعی MO_1KO_2 را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۲

۷.۳. دو دایرهٔ هم‌مرکز

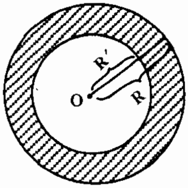
۱.۷.۳. تعریف و قضیه



دو دایره با شعاعهای متفاوت را هم‌مرکز می‌نامند، درصورتی که مرکز مشترک داشته باشند. به‌طورکلی:

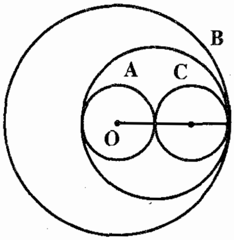
شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ هم‌مرکز باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر صفر باشد، یعنی با فرض $OO' = d$:

$$d = 0 \Leftrightarrow \text{دو دایرهٔ هم‌مرکز}$$



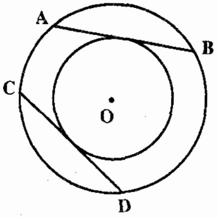
طوق دایره. بخشی از صفحهٔ محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز است که به آن، تاج دایره نیز می‌گویند.

۲.۷.۳. شعاع

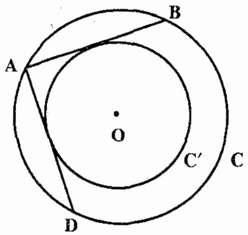


۳۴۹. دو دایرهٔ متحدالمرکز A و B به شعاعهای ۱ و ۳ سانتیمتر مفروضند. دایرهٔ C به این دو دایره مماس است. مطلوب است، محاسبهٔ شعاع دایرهٔ C و فاصلهٔ مرکز آن از مرکز مشترک دو دایره.

۳.۷.۳. وتر

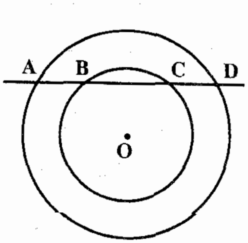


۳۵۰. در دو دایرهٔ هم‌مرکز همهٔ وترهایی از دایرهٔ بزرگتر که بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشند، با هم برابرند.



۳۵۱. دو دایرهٔ هم‌مرکز $C(O,R)$ و $C'(O,R')$ با فرض $R > R'$ را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، مماسهایی که از نقطه‌های مختلف واقع بر دایرهٔ C بر دایرهٔ C' رسم می‌شوند، متساوی‌اند.

۴.۷.۳. پاره‌خط



۳۵۲. اگر خطی دو دایرهٔ متحدالمرکز را قطع کند، پاره‌خطهای محصور بین دو دایره با هم مساوی‌اند.

۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره

۳۵۳. دو دایرهٔ متحدالمرکز A و B به شعاعهای ۱cm و ۴cm، همچنین دایرهٔ سوم C به شعاع ۲cm مفروضند. دایرهٔ C در چه ناحیه‌ای باید قرار گیرد تا با دو دایرهٔ A و B متقاطع باشد؟

بخش ۴

• سه دایره و بیشتر

۴.۱.سه دایره
۴.۱.۱.تعریف و قضیه
۴.۱.۲.شعاع
۴.۱.۳. نقطه و دایره
۴.۱.۴. کمان
۴.۱.۵. وتر
۴.۱.۶. قطر
۴.۱.۷. پاره‌خط
۴.۱.۸. خط و دایره
۴.۱.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴.۲.چهار دایره
۴.۲.۱.تعریف و قضیه
۴.۲.۲.شعاع
۴.۲.۳. نقطه و دایره
۴.۲.۴. خط و دایره
۴.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴.۳.پنج دایره و بیشتر
۴.۳.۱.تعریف و قضیه
۴.۳.۲.شعاع
۴.۳.۳. نقطه و دایره

۴.۳.۴. کمان

۵.۳.۴ . قطر

۶.۳.۴.سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

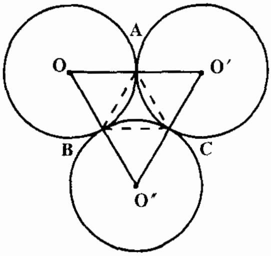
بخش ۴. سه دایره و بیشتر

۱.۴. سه دایره

۱.۱.۴.تعریف و قضیه

در این بخش به بررسی قضیه‌ها و مسأله‌هایی که به سه دایرهٔ متمایز مربوط می‌شوند، می‌پردازیم. مرکزهای سه دایره ممکن است روی یک خط راست قرار داشته باشند و یا غیرواقع بر یک خط راست باشند. همچنین شعاعهای سه دایره ممکن است مساوی و یا نابرابر باشند.

۲.۱.۴. شعاع



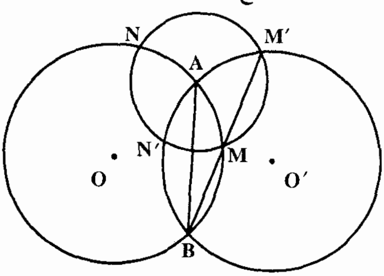
۳۵۴. سه دایرهٔ مساوی به شعاع ۲ سانتیمتر، دوبه دو مماس برون هستند. شعاع دایره‌ای را که از نقطه‌های تماس این دایره‌ها می‌گذرد را پیدا کنید.

۳۵۵. دو دایرهٔ مساوی، با یک دایره دو به دو مماس هستند. شعاع دایرهٔ سوم برابر ۸ cm است. طول خط واصل نقطه‌های تماس دایرهٔ سوم با دو دایرهٔ مساوی برابر ۱۲ cm است. شعاع دایره‌های مساوی را بیابید.

۳۵۶. سه دایره به شعاعهای ۱، ۲ و۳ بر یکدیگر مماس بیرونی‌اند. شعاع دایره‌ای را که از نقطه‌های تماس این دایره‌ها می‌گذرد، مشخص سازید.

۳.۱.۴. نقطه و دایره

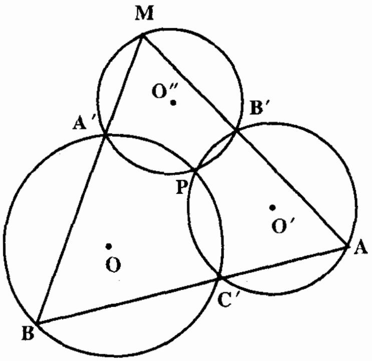
۳۵۷. دو دایرهٔ متساوی O و O′ یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. به مرکز A دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم که هریک از دو دایرهٔ O و O′ را در دو نقطه قطع کند. ثابت کنید که نقطهٔ B با دو نقطه از نقطه‌های مزبور که در یک طرف AB واقع هستند (مانند M و M′) بر یک استقامت می‌باشند.



۳۵۸. ثابت کنید، اگر سه دایره در یک نقطه و دوبه‌دو در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت نیز متقاطع باشند، آن نقطهٔ مشترک با مرکزهای این سه دایره واقع بر یک دایره‌اند.

۳۵۹. سه دایرهٔ $(PA'B')$، $(PB'C')$ و $(PC'A')$ که در نقطهٔ P مشترکند، یکدیگر را دوبه‌دو در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کرده‌اند.

از نقطهٔ C' خط غیر مشخصی رسم شده است که دایره‌های $(PB'C')$ و $(PC'A')$ را در نقطه‌های A و B قطع کرده است. ثابت کنید، AB' و BA' روی دایرهٔ $(PA'B')$ یکدیگر را قطع می‌کنند.



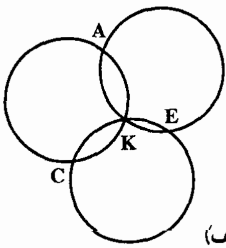
۴.۱.۴. کمان

۳۶۰. سه دایره با شعاعهای برابر روی یک صفحه داده شده است.

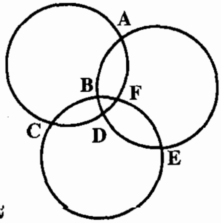
a) ثابت کنید، اگر این سه دایره، مثل شکل (الف) از یک نقطه بگذرند، مجموع کمانهای مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AK}$، $\overset{\frown}{CK}$ و $\overset{\frown}{EK}$ برابر است با ۱۸۰درجه.

b) ثابت کنید، اگر سه دایره در وضع شکل (ب) باشند، مجموع کمانهای مشخص شدهٔ $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ برابر است با ۱۸۰ درجه.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۶



شکل (الف)

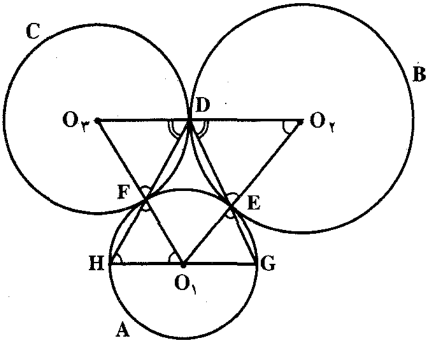


شکل (ب)

۵.۱.۴. وتر

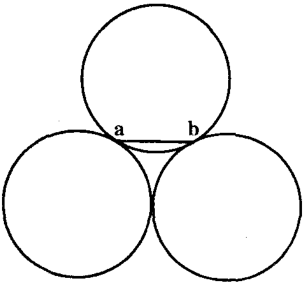
۳۶۱. ثابت کنید، دایره‌های دلخواه گذرنده بر دو رأس A و B از مثلث ABC، دو ضلع CA و CB را در وترهایی موازی یکدیگرقطع می‌کنند.

۶.۱.۴. قطر



۳۶۲. سه دایرهٔ A، B و C دوبه‌دو مماس به یکدیگر در نقطه‌های D، E و F می‌باشند و خطهای DE و DF دایرهٔ A را در G و H قطع می‌کنند. نشان دهید که GH از مرکز A عبور می‌کند و موازی خط‌المرکزین دو دایرهٔ B و C است.

۷.۱.۴. پاره‌خط



۳۶۳. مطابق شکل، سه دایره به شعاع یک، دوبه‌دو بر یکدیگر مماس هستند. طول پاره‌خط [ab] برابر است با :

الف) ۱ ب) $\sqrt{۲}$

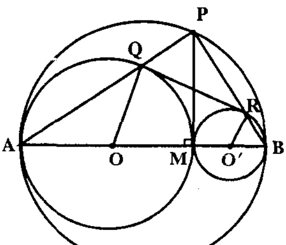
ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۸.۱.۴. خط و دایره

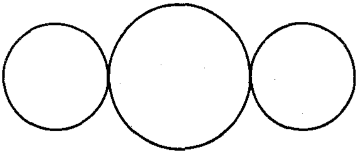
۳۶۴. سه دایرهٔ α، β و γ داده شده‌اند. فرض کنید l_1 و l_2 معرف مماسهای مشترک درونی دایره‌های α و β، و m_1 و m_2 مماسهای مشترک درونی دایره‌های β و γ، و n_1 و n_2 مماسهای مشترک درونی دایره‌های γ و α باشند. ثابت کنید که اگر خطهای l_1، m_1 و n_1 همرس باشند، آن وقت خطهای l_2 ، m_2 و n_2 نیز همرسند.

نکته. اگر یک مماس مشترک درونی α و β و یک مماس مشترک برونی α و γ و یک مماس مشترک برونی β و γ همرس باشند، مماس مشترکهای متناظر دیگر نیز همرسند.



۳۶۵. نقطهٔ P را روی دایره‌ای به قطر AB اختیار، و از آن عمود PM را بر AB رسم می‌کنیم. دو دایره که به قطرهای AM و BM رسم شوند، خطهای AP و BP را بترتیب در نقطه‌های Q و R قطع می‌کنند. ثابت کنید که خط QR

مماس مشترک دو دایرهٔ مزبور است.



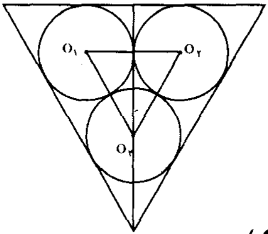
۳۶۶. منحنی شکل زیر اجتماعی است از سه دایره، یک دایرهٔ بزرگ و دو دایرهٔ کوچکتر که بر دایرهٔ بزرگتر مماس بیرونی‌اند. تعداد نقطه‌های برخورد یک خط با این منحنی در اوضاع مختلف، کدام مجموعهٔ زیر را مشخص می‌کنند؟

الف) {۱,۲,۴,۶}　　ب) {۰,۲,۴,۶}　　ج) {۰,۱,۲,۴,۶}

د) {۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶}　　هـ) {۰,۱,۲,۳,۴,۶,۸}

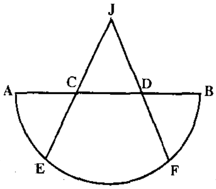
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۶۷. سه دایرهٔ دوبه‌دو مماس به شعاع r مفروضند. مساحت مثلث تشکیل شده با سه خط را که هریک از آنها بر دو دایره مماس است و دایرهٔ سوم را قطع نمی‌کند، پیدا کنید.

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی



۳۶۸. پاره‌خط ABرا به سه قسمت متساوی AC = CD = DB تقسیم کرده‌ایم. سپس روی ضلع CD مثلث متساوی‌الاضلاع CDJ را ساخته‌ایم. به مرکز D و شعاع DB قوسی رسم نموده‌ایم تا امتداد DJ را در F قطع کند و به مرکز C و شعاع CA قوس دیگری رسم نموده‌ایم تا امتداد $\overset{\frown}{CJ}$ را در E قطع کند. آن‌گاه با قوسی به مرکز J و شعاع JF دو قوس اوّل را به هم وصل کرده‌ایم. قــوس $\overset{\frown}{AEFB}$ که به این ترتیب به دست می‌آید، قوس سه مرکزی یا شبه بیضی نامیده می‌شود.

۱. ثابت کنید، قوس $\overset{\frown}{EF}$ بر دو قوس $\overset{\frown}{FB}$ و $\overset{\frown}{EA}$ مماس است.

۲. آیا اگر روی پاره‌خط AB فقط دو پاره‌خط AC و DC برابر باشند، باز هم خاصیت بالا وجود دارد؟

۳۶۹. سه جفت دایره (B) ، (C) ؛ (C) ، (A) ؛ (A) ، (B)، در D ، E و F برهم مماسند. خطهای DE و DF دایرهٔ (A) را در G و H نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که :

۱. GH از مرکز (A) می‌گذرد.

۲. GH با خط‌المرکزین (B) و (C) موازی است.

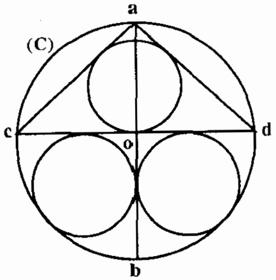
۲.۴.چهار دایره

۱.۲.۴.تعریف و قضیه

در این قسمت مسأله‌های مربوط به چهار دایرهٔ متمایز مورد بررسی قرار می‌گیرد. دایره‌ها ممکن است دارای شعاع برابر باشند و یا شعاعهایشان متفاوت باشند. همچنین مرکزهای دایره‌ها ممکن است همخط باشند و یا همخط نباشند.

۲.۲.۴. شعاع

۳۷۰. در دایرهٔ C دو قطر ab و cd عمود برهم و وترهای ac و ad رسم شده‌اند. ثابت کنید، سه دایرهٔ زیر باهم برابرند:



الف. دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی acd .

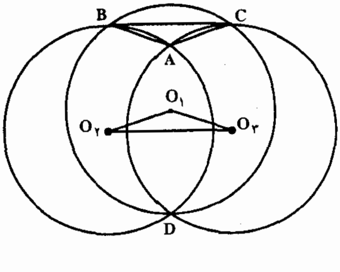
ب.دایره‌ای که بر C و بر ab و od مماس است.

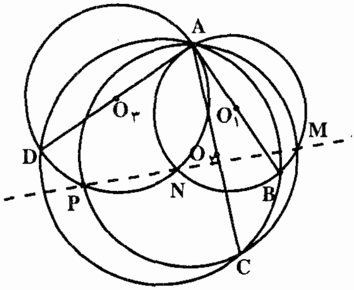
ج .دایره‌ای که بر C و بر ab و oc مماس است.

المپیادهای ریاضی بلژیک،۱۹۸۱

۳۷۱. سه دایره، هرکدام به شعاع R از نقطهٔ O می‌گذرند و یکدیگر را در نقطه‌های A ، B و C قطع می‌کنند. ثابت کنید، دایره‌ای که از سه نقطهٔ A و B و C بگذرد، شعاعی برابر R دارد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۳





۳.۲.۴. نقطه و دایره

۳۷۲. قضیهٔ سالمون salmon. اگر از نقطه‌ای واقع بر محیط یک دایره، سه وتر رسم، و سه دایره به قطرهای این سه وتر رسم کنیم، ثابت کنید که این سه دایره دوبه‌دو بر سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت متقاطع می‌شوند.

۳۷۳. دو دایرهٔ Δ و Δ' در نقطه‌های M و M' متقاطعند. سه وتر MA، MB و MC از دایرهٔ Δ دایرهٔ Δ' را بترتیب در نقطه‌های A'، B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید که دایره‌های محیطی مثلثهای $AA'M'$، $BB'M'$ و $CC'M'$ دوبه‌دو یکدیگر را روی سه نقطهٔ همخط قطع می‌کنند.

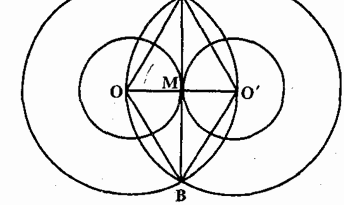
۳۷۴. ثابت کنید که هرگاه A، B، C و D نقطه‌های دلخواهی در صفحه باشند آن وقت چهار دایره که هرکدام از وسط پاره‌خطهای AB، AC و AD ؛ یا BA، BC و BD ؛ یا CA، CB و CD ؛ یا DA، DB و DC می‌گذرند، یک نقطهٔ مشترک دارند.

۳۷۵. چهار نقطه در صفحه که هیچ سه‌تایی همخط نیستند، درنظر بگیرید. ثابت کنید، چهار دایرهٔ پایی که هریک نظیر یکی از نقطه‌ها نسبت به مثلثی است که رأسهایش سه نقطهٔ باقیمانده هستند، یک نقطهٔ مشترک دارند.

۴.۲.۴. خط و دایره

۳۷۶. چهار دایره به شعاعهای برابر از نقطهٔ A می‌گذرند. ثابت کنید که سه پاره‌خط که دو انتهای آنها از A متمایز هستند (دوسر هر پاره‌خط به یک دایره متعلق نیستند) ؛ در یک نقطه به هم می‌رسند.

۵.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی



۳۷۷. دو دایرهٔ متساوی (O) و (O′) در نقطهٔ M مماس خارج هستند. به مرکزهای O و O′ و به شعاع OO′ دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کنند.

۱. ثابت کنید، AB از نقطهٔ M می‌گذرد.

۲. ثابت کنید که چهارضلعی AOBO′ لوزی است.

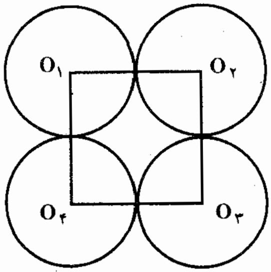
۳.۴. پنج دایره و بیشتر

۱.۳.۴. تعریف و قضیه

در این قسمت مسأله‌های مربوط به پنج دایره و یا بیشتر از پنج دایره مورد بررسی قرار می‌گیرد. دایره‌ها ممکن است شعاع برابر داشته باشند و یا شعاعهایشان برابر نباشند. همچنین مرکز دایره‌ها می‌توانند همخط و یا ناهمخط باشند.

۲.۳.۴. شعاع

۳۷۸. چهار دایره به شعاع ۴ سانتیمتر دوبه‌دو برهم مماسند. شعاع دایره‌ای را بیابید که بر این چهار دایره مماس است.



۳.۳.۴. نقطه و دایره

۳۷۹. از پنج دایرهٔ مفروض، هر چهار دایره، از یک نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۳

۳۸۰. پنج دایره، روی یک صفحه، دوبه‌دو متقاطعند. ثابت کنید، سه تا از آنها، در یک نقطه مشترکند.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۳۸۱. شش دایره روی یک صفحه چنان رسم شده‌اند که، مرکز هرکدام، بیرون از سایر دایره‌ها قرار دارد. ثابت کنید، همهٔ این شش دایره، نقطهٔ مشترکی ندارند. (یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که در درون یا روی محیط هر شش دایره باشد.)

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چین، ۱۹۶۳

۳۸۲. $2k + 3$ نقطه روی صفحه‌ای داده شده‌اند، به نحوی که هیچ چهار نقطه‌ای روی محیط دایره نیستند. ثابت کنید، می‌توان سه نقطه پیدا کرد که، اگر دایره‌ای از آنها بگذرانیم، درست k نقطه در درون آن قرار می‌گیرد.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۳۸۳. چند دایره به شعاع واحد، روی صفحه‌ای واقعند. آیا درست است اگر بگوییم، همیشه می‌توانیم چند نقطه را طوری نشان کرد که، در درون هر دایره، درست یک نقطهٔ نشان‌دار واقع باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۳۸۴. روی یک صفحه، دایره‌های غیرمتقاطعی قرار دارند، به نحوی که هریک از آنها، دست‌کم، بر شش دایرهٔ دیگر مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، لهستان، ۱۹۷۸

۳۸۵. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند و شعاع ثابتی دارند، تعیین کنید.

۴.۳.۴. کمان

۳۸۶. n دایرهٔ مختلف، و هرکدام به شعاع واحد، روی صفحه‌ای رسم شده‌اند. ثابت کنید، دست‌کم روی محیط یکی از دایره‌ها، می‌توان کمانی پیدا کرد که طولی کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نداشته باشد و درضمن، شامل هیچ نقطه‌ای از محیط دایره‌های دیگر نباشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۲

۵.۳.۴. قطر

۳۸۷. ۱۰۰ نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند. ثابت کنید، مجموعه‌ای متناهی از دایره‌ها وجود دارد که با سه شرط زیر سازگار باشد.

۱. هریک از نقطه‌های داده شده در داخل یکی از دایره‌ها باشد.

۲. هردو نقطه از سطح دایره‌های مختلف، فاصله‌ای بیش از واحد داشته باشند.

۳. مجموع قطرهای همهٔ دایره‌ها، کمتر از ۱۰۰ باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۷

۳۸۸. ۱۰۰ نقطه روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، این نقطه‌ها را می‌توان با چند دایرهٔ غیرمتقاطع پوشاند، به نحوی که مجموع قطرهای این دایره‌ها، کوچکتر از ۱۰۰ و فاصلهٔ بین هر دو دایره بیشتر از واحد باشد (فاصلهٔ بین دو دایرهٔ غیرمتقاطع، به فاصلهٔ بین نزدیکترین نقطه‌های آنها گفته می‌شود).

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۶

۶.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۹. شش دایره روی صفحه رسم شده است. درضمن دایرهٔ اوّل بر دایرهٔ ششم و دوم مماس است. دایرهٔ دوم بر دایرهٔ اوّل و سوم، دایرهٔ سوم بر دایرهٔ دوم و چهارم مماس است و غیره. ثابت کنید، دایرهٔ تازه‌ای وجود دارد که هر شش دایرهٔ داده شده را قطع می‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۳۹۰. دایره‌ای به شعاع R مفروض است. در دیسکهایی به شعاع $\frac{r}{۳}$ مماس درونی بر این دایره درنظر می‌گیریم. ثابت کنید، تعدادی از این دیسکها را می‌توان جابه جا کرد به قسمی که بر دایره مماس درون بمانند و بر یکدیگر مماس برون گردند. تعداد این دیسکها چند است؟

۳۹۱. ثابت کنید، با ۷ دایرهٔ به شعاع واحد، می‌توان دایره‌ای به شعاع ۲ را به‌طور کامل پوشاند، ولی با این ۷ دایره، نمی‌توان دایره‌ای به شعاع بزرگتر از ۲ را پوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۳۹۲. صفحه را به چند دایره تقسیم کرده‌ایم که، در بین آنها، دایره‌های متقاطع هم وجود دارد، ولی یکی در درون دیگری نیست. ثابت کنید، قطعه‌هایی را که، به این ترتیب، از کاغذ جدا شده‌اند، نمی‌توان به صورت چند دایرهٔ غیرمتقاطع درآورد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۳۹۳. n نقطه در روی صفحه داده شده است، به طوری که فاصلهٔ بین هر دو نقطه ازآنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید، تعداد جفتهایی از این نقطه‌ها که فاصلهٔ آنها دقیقاً مساوی یک باشد، از ۳n تجاوز نمی‌کند.

مرحلهٔ اوّل هفتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

بخش ۵

• دایره و مثلث

۵.۴.۴.۱.تعریف و قضیه

۵.۴.۵. دایرهٔ آدامس

۵.۴.۵.۱.تعریف و قضیه

۵.۴.۶. دایرهٔ آپولونیوس

۵.۴.۶.۱.تعریف و قضیه

۵.۵. دایره‌های دیگر و مثلث

۵.۵.۱. تعریف و قضیه

۵.۵.۲. شعاع

۵.۵.۳. نقطه و دایره

۵.۵.۳.۱. نقطه درون دایره

۵.۵.۳.۲. نقطه روی دایره

۵.۵.۳.۳. نقطه‌های همدایره

۵.۵.۳.۴. نقطه‌های همخط

۵.۵.۴. زاویه

۵.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۵.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵.۵.۵. پاره‌خط

۵.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵.۵.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵.۵.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز،...

۵.۵.۶.۱. خطها برهم عمودند

۵.۵.۶.۲. خط نیمساز است

۵.۵.۶.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵.۵.۶.۴. خطها همرسند

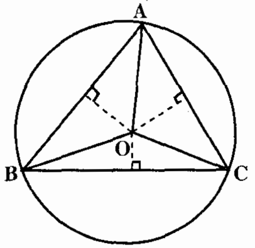
۵.۵.۶.۵. خط مماس بر دایره است

۵.۵.۷. شکلهای ایجاد شده
۵.۵.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۵.۵.۹. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۵. دایره و مثلث

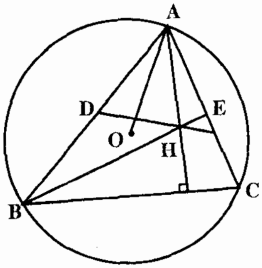
۱.۵. دایرهٔ محیطی مثلث

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

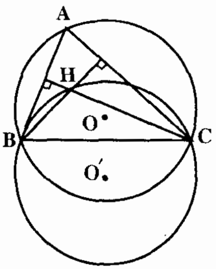


در این قسمت مطالب مربوط به دایرهٔ محیطی مثلث داده شده، و دایرهٔ محیطی مثلثهای دیگر ایجاد شده در مسأله مورد بررسی قرار می‌گیرد. می‌دانیم که دایرهٔ محیطی هر مثلث منحصر به فرد است. مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصفهای ضلعهای مثلث است.

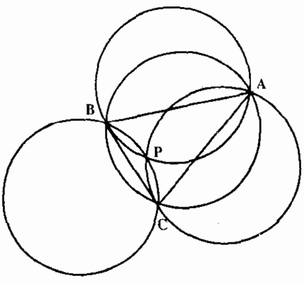
۲.۱.۵. شعاع



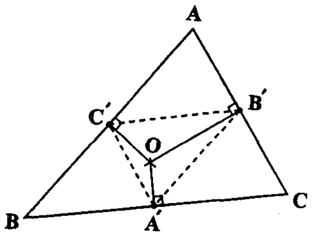
۳۹۴. اگر H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و O مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد، روی AB و روی AC، بترتیب $AD = AH$ و $AE = AO$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید، DE مساوی شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.



۳۹۵. ثابت کنید، دایرهٔ گذرنده بر دو رأس، و نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای مثلث، با دایرهٔ محیطی همان مثلث همنهشت است.



۳۹۶. سه دایره با هم برابر و در نقطهٔ P مشترکند و دوبه‌دو در سه نقطهٔ A ، B و C یکدیگر را قطع نموده‌اند. ثابت کنید که نقطهٔ P مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.



۳۹۷. اگر A' ، B' و C' بترتیب، وسطهای ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$ ، $BA'C'$ و $CA'B'$ مساوی‌اند و از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می گذرند.

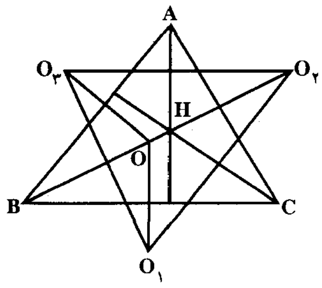
۳.۱.۵. نقطه و دایره

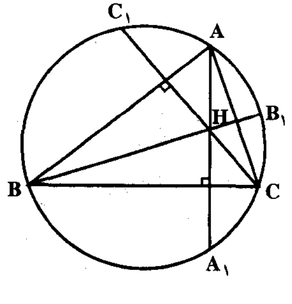
۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره

۳۹۸. روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC ، بترتیب نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 طوری اختیار می‌شوند که $A\hat{A_1}C = B\hat{B_1}A = C\hat{C_1}B$ (زاویه‌ها در یک جهت سنجیده می‌شوند). ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث محدود به خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، بر نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC منطبق است.

۳۹۹. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث اصلی است.

۴۰۰. مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلثی که از چهار نقطهٔ A، B، C و H (H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث) می گذرند ، چهار مثلث می سازند که هر مرکز، محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که از سه مرکز دیگر ساخته شده است.

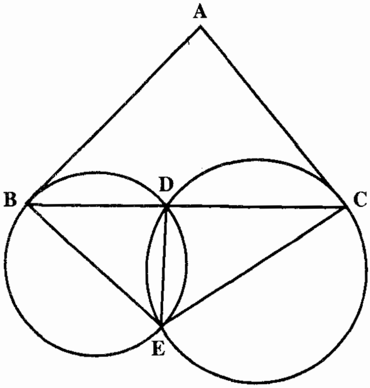




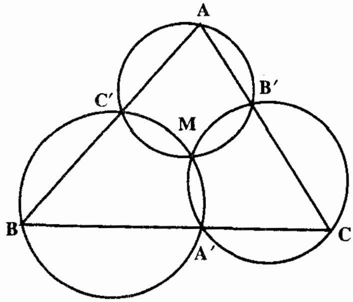
۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره

۴۰۱. ثابت کنید، قرینه‌های نقطهٔ برخورد ارتفاعهای هر مثلث نسبت به ضلعهای آن، روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند.

۴۰۲. مثلث ABC و نقطهٔ D روی ضلع BC مفروض است. دایره‌ای از D مرور می‌دهیم که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس شود، و همچنین دایرهٔ دیگری از D مرور می‌دهیم که در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس شود. ثابت کنید، نقطهٔ Eمحل برخورد این دو دایره روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.



۴۰۳. نقطه‌های اختیاری ′A ، ′B و ′C را بترتیب روی ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای ′AB′C ، ′BC′A و ′CA′B از یک نقطه می‌گذرند.

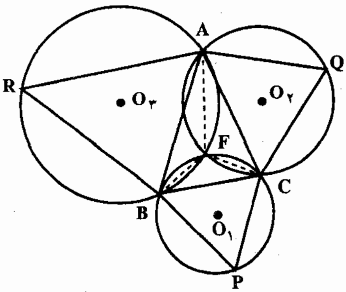


۴۰۴. چهار دایرهٔ محیطی چهار مثلثی که توسط ترکیبهای سه به سه از چهار خط راست داده شده تعیین می‌شوند، یک نقطهٔ مشترک دارند. (نقطهٔ میکوئل یا میکل Miquel)

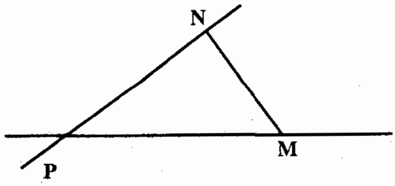
میکوئل

آگوست میکوئل Auguste Miquel، ریاضیدان فرانسوی، این قضیه را در سال ۱۸۳۸ در مجلهٔ Theorems de Geometrieمنتشر کرد.

۴۰۵. هرگاه روی هریک از ضلعهای مثلث و در بیرون آن سه مثلث چنان بسازیم که مجموع زاویه‌های رأسهای غیرمجاور آنها با مثلث داده شده برابر ۱۸۰ درجه باشد، دایره‌های محیطی این مثلثها در یک نقطه مشترکند.



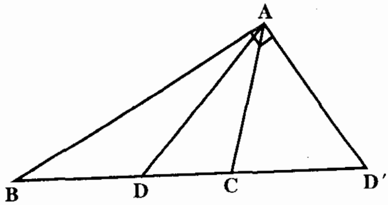
۴۰۶. ثابت کنید که اگر یکی از ضلعهای مثلثی برخط ثابتی در صفحه قرار گیرد و محل برخورد ارتفاعهای آن بر نقطه‌ای ثابت منطبق باشد، آن وقت دایرهٔ محیطی این مثلث هم، از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.



۴۰۷. روی دو خط راستی که در نقطهٔ P به هم رسیده‌اند، دو متحرک به طور یکنواخت و با سرعتهای برابر حرکت می‌کنند. متحرکها را نقطه‌های M و N می‌نامیم. آنها در یک لحظه از نقطهٔ P عبور نکرده‌اند. ثابت کنید، دایرهٔ محیطی مثلث MNP همیشه از نقطهٔ ثابت دیگری (به جز P) می‌گذرد.

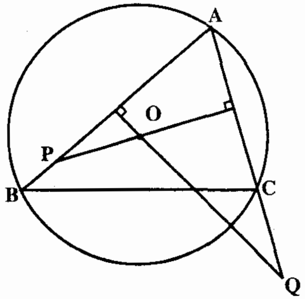
۴۰۸. ثابت کنید، نقطهٔ میکل (میکوئل) مثلث، نقطه‌ای بر دایرهٔ محیطی آن است، در صورتی که، سه نقطهٔ واقع بر ضلعهای مثلث مربوطه، واقع بر یک استقامت باشند.

۵.۱.۳.۳. نقطه برون دایره

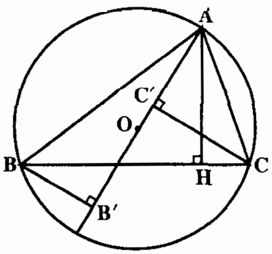


۴۰۹. نقطه‌های D و ′D، بترتیب، پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس A از مثلث ABC می‌باشند. کدام یک از این دو نقطه برون دایرهٔ محیطی مثلث واقع است؟

۵.۱.۳.۴. نقطه‌های همدایره



۴۱۰. عمودمنصفهای ضلعهای AC و AB از مثلث ABC، ضلعهای AB و AC را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطه‌های B، C، P و Qروی دایره‌ای قرار دارند که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABCمی‌گذرد.



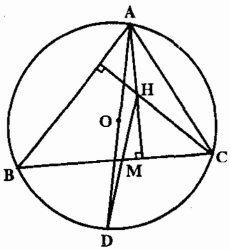
۴۱۱. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را درنظر می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محیطی را O و پای ارتفاع وارد از A را H می‌نامیم و تصویرهای نقطه‌های B و C را روی خط AO بترتیب ′B و ′C می‌نامیم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ A، H، B و ′B روی یک دایره، و چهار نقطهٔ A، H، ′C و C نیز روی یک دایره واقعند.

۴۱۲. در مثلث ABC ، نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب، روی ضلعهای BC ، CA و AB اختیار شده‌اند. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. خط راست BM ، دایره‌ای را که از A_1 ، B و C_1 می‌گذرد، برای بار دوم، در نقطهٔ B_2 قطع می‌کند. CM، دایره‌ای را که از A_1 ، B_1 و C می‌گذرد، در نقطهٔ C_2 و AM، دایره ای را که از A، B_1 و C_1 می‌گذرد، در نقطهٔ A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های A_2 ، B_2 ، C_2 و M بر یک دایره‌اند.

۴۱۳. مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلث حاصل از برخورد چهار خط که دوبه‌دو یکدیگر را قطع کرده‌اند، روی یک دایره‌اند.

۵.۳.۱.۵. نقطه‌های همخط

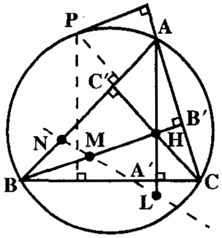
۴۱۴. مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن را H می‌نامیم و A را به O وصل می‌کنیم تا امتداد آن، دایره را در D قطع کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید نقطه‌های D، M و H بر یک استقامتند.



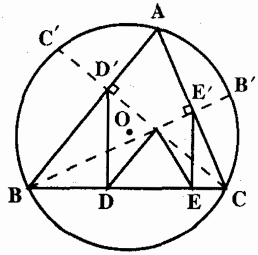
۴۱۵. نشان دهید که نقطهٔ متقارن مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به یک رأس مثلث، و نقطهٔ متقارن آن رأس نسبت به نقطهٔ وسط ضلع مقابل، با مرکز دایرهٔ محیطی مثلث همخطند.

۴۱۶. ثابت کنید هرگاه نقطهٔ میکل (میکوئل) بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، در این صورت سه نقطهٔ واقع بر ضلعهای مثلث مربوطه، واقع بر یک استقامتند.

۴۱۷. روی ارتفاعهای 'AA' ، 'BB و 'CC از مثلث ABC پاره‌خطهای AL، BM و CN را بترتیب مساوی عمودهای رسم شده از نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث بر ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC ، اختیار می‌کنیم (با رعایت حالت پاره‌خط و عمود). نشان دهید که نقطه‌های L ، M و N همخطند.



۴۱۸. نشان دهید که نقطه‌های متقارن نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به ضلعهای مثلث، روی خطی قرار دارند که از مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.



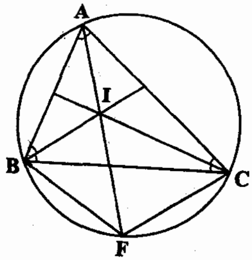
۴۱۹. از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC خطهایی موازی AB وAC رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D و E قطع کنند. دو عمودی که از D و E بر BC اخراج می‌شوند، AB و AC را در ′D و ′E قطع می‌کنند که با دو انتهای دوقطری از دایرهٔ محیطی مثلث که از B و C می‌گذرند، واقع بر یک استقامتند (B و C مبدأ قطرها فرض می‌شوند).

۴.۱.۵. کمان

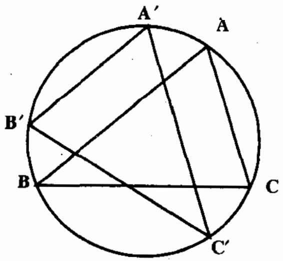
۴۲۰. ارتفاعهای مثلثی را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی آن را قطع کند. رأسهای این مثلث وسط کمانهایی هستند که به وسیلهٔ امتداد ارتفاعهای روی دایرهٔ محیطی به‌وجود می‌آید.

۵.۱.۵. وتر

۴۲۱. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی یکدیگر را در نقطهٔ I قطع می‌کنند و نیمساز زاویهٔ Aدایرهٔ محیطی را در نقطهٔ F تلاقی می‌نماید. ثابت کنید : $FB = FC = FI$.



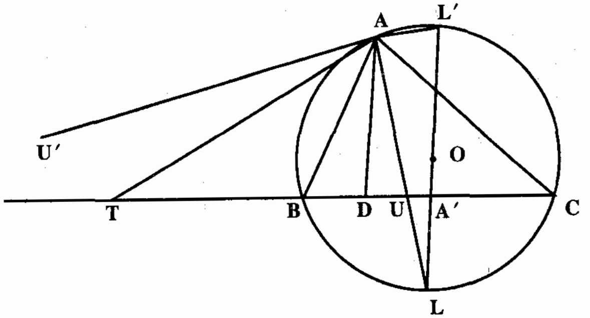
۴۲۲. دو مثلث ABC و ′A′B′C در یک دایره محاطند. ثابت کنید، هرگاه ضلعهای زاویه‌های A و ′A نظیر به نظیر متوازی باشند، ضلعهای BC و ′B′C متساوی‌اند.



۴۲۳. فرض کنید M و N معرف تصویرهای نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC روی نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی B باشند. با استفاده از دایرهٔ محیطی مثلث، ثابت کنید که خط MN، ضلع AC را نصف می‌کند.

۶.۱.۵. قطر

۴۲۴. نیمساز زاویهٔ داخلی و خارجی هر مثلث از دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی مثلث عبور می‌کنند که بر ضلع مقابل آن زاویه عمود باشد.



۴۲۵. اگر H محل تلاقی ارتفاعها و A′ وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، ثابت کنید HA′ از انتهای قطر دایرهٔ محیطی گذرنده از رأس A می‌گذرد.

۴۲۶. دایره‌ای که از D، پای ارتفاع AD و نقطه‌های I و I_a از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است. گزارهٔ متناظری را در مورد دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و آن را اثبات کنید.

۷.۱.۵. زاویه

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ زاویه

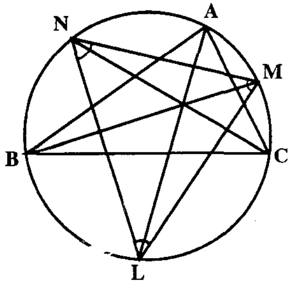
۴۲۷. اندازهٔ زاویه‌های مثلثی را پیدا کنید، در صورتی که فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محیطی و محل برخورد ارتفاعهایش، نصف طول بزرگترین ضلع مثلث و برابر با کوچکترین ضلع آن باشد.

۴۲۸. زاویهٔ بین قطری از دایرهٔ محیطی یک مثلث که از یکی از رأسهای آن مثلث می‌گذرد و ارتفاعی که از همان رأس مثلث رسم می‌شود:

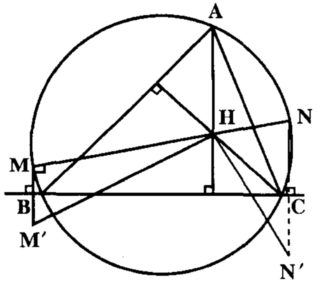
الف) با تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث برابر است.

ب) توسط نیمساز زاویهٔ آن رأس مثلث نصف می‌شود.

۴۲۹. تفاضل زاویه‌هایی که نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل به آن زاویه می‌سازد، با تفاضل زاویه‌های مجاور این ضلع برابر است.

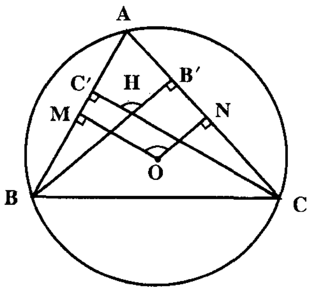


۴۳۰. نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی، مثلث را در L، M و N قطع کنند. اندازه‌های زاویه‌های مثلث LMN را برحسب اندازه‌های زاویه‌های مثلث ABC حساب کنید.



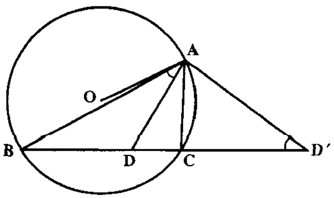
۴۳۱. مثلث ABC در دایرهٔ O محاط است. قطر MN از دایرهٔ O را که از نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث می‌گذرد، رسم می‌کنیم. اگر M′ قرینهٔ نقطهٔ M و N′ قرینهٔ نقطهٔ N نسبت به خط BC باشند، ثابت کنید زاویهٔ M′HN′ قائمه است.

۵.۱.۷.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

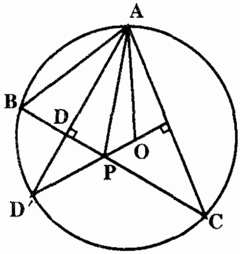


۴۳۲. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را درنظر گرفته، ارتفاعهای BB′ و CC′ را رسم می‌کنیم و محل برخورد آنها را H می‌نامیم و از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی عمودهای OM و ON را بترتیب بر AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید: $B'\hat{H}C' = M\hat{O}N$.

۴۳۳. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O داده شده‌اند. نیمسازهای AD و AD′ زاویه‌های داخلی و خارجی A را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، زاویهٔ AD′B با زاویهٔ OAD مساوی است.

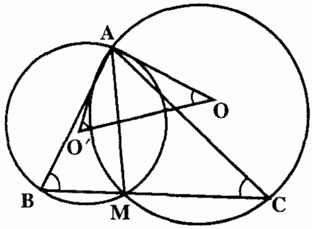


۴۳۴. زاویه‌ای که نیمساز خارجی هر زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد، برابر است با نصف تفاضل دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع.



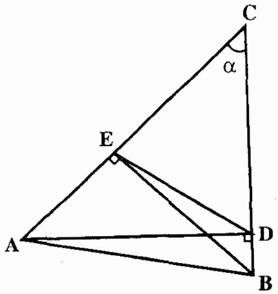
۴۳۵. اگر D' دومین نقطهٔ برخورد ارتفاع ADD' از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی، به مرکز O و P نقطهٔ برخورد BC با خطی که از D' بر AC عمود می‌شود باشند، نشان دهید که خطهای AP و AO با نیمساز زاویهٔ DAC زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۴۳۶. نشان دهید که هر ضلع مثلث و میانهٔ متقارن وارد بر آن، نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث مزدوجند.



۴۳۷. مثلث ABC و نقطهٔ غیرمشخص M واقع بر روی ضلع BC مفروضند. O و O' مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای AMB و AMC می‌باشند. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث ABC و AOO' برابرند.

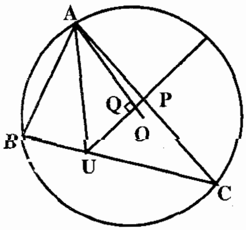
۸.۱.۵. پاره‌خط



۱.۸.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۴۳۸. روی پاره‌خط AB مثلث متغیر ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ زاویهٔ C ثابت باشد. ثابت کنید که پاره‌خط DE که پای دو ارتفاع نظیر رأسهای A و B را به هم وصل می‌کند، طول ثابتی دارد.

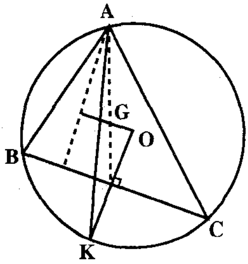
۴۳۹. از U ، پای نیمساز AU از مثلث ABC، عمود UQ را بر شعاع AO از دایرهٔ محیطی ABC رسم می‌کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید که AP با AB برابر است.



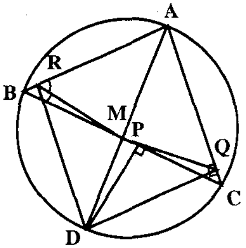
۲.۸.۱.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۴۰. فاصلهٔ هر ضلع مثلث از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث برابر است با نصف فاصلهٔ رأس مقابل آن ضلع از مرکز ارتفاعی مثلث.

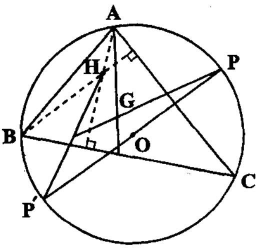
۴۴۱. فرض کنید Kمعرف نقطهٔ قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BCی آن باشد. ثابت کنید که خط اویلر مثلث ABC، پاره‌خط AK را نصف می‌کند.



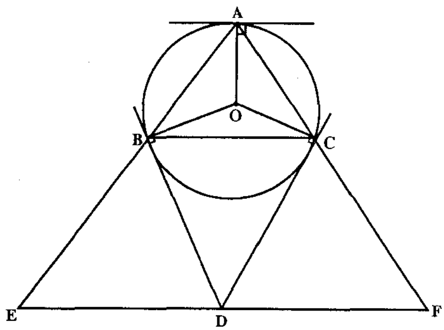
۴۴۲. میانهٔ متقارنی که در مثلث ABC از رأس A می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث را در D قطع می‌کند، و P، Q و R تصویرهای نقطهٔ D روی ضلعهای BC، CA و AB هستند، نشان دهید که PQ = PR .



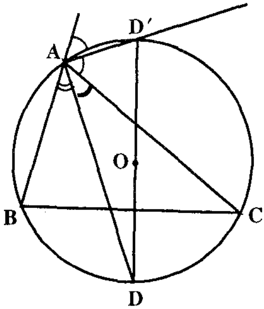
۴۴۳. ثابت کنید، خطی که مرکز ثقل یک مثلث را به نقطهٔ P از دایرهٔ محیطی آن وصل می‌کند پاره‌خطی را که انتهای دیگر قطر گذرنده از P از دایرهٔ محیطی مثلث را به محل برخورد ارتفاعهای مثلث وصل می‌کند نصف می‌نماید.



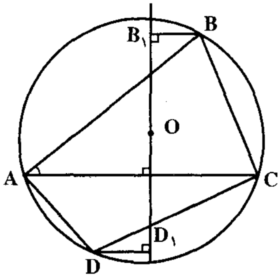
۴۴۴. DB و DC مماسهایی بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC هستند. از نقطهٔ برخورد این دو مماس خطی به موازات خطی که از A بر (O) مماس است رسم می‌کنیم. نشان دهید که اگر این خط AB و AC را در E وF قطع کند، D وسط EF است.



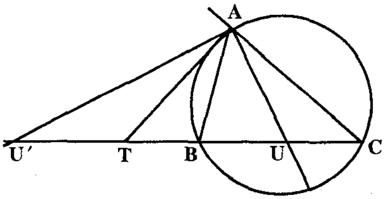
۴۴۵. نشان دهید که اگر خطی که رأس یک مثلث را به مرکز دایرهٔ محیطی آن وصل می‌کند، با ضلع مقابل موازی باشد، طول نیمساز داخلی زاویهٔ متناظر با این رأس برابر است با طول نیمساز خارجی این زاویه و بعکس.



۴۴۶. دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دو نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی A را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های D و D′ قطع کنند. ثابت کنید که DD′ عمود منصف ضلع BC است.



۴۴۷. در مثلث ABC از نقطه‌های A و C دو عمود بر ضلعهای AB و BC اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند. ثابت کنید، نقطه‌های D و B از عمودمنصف پاره‌خط AC به یک فاصله‌اند.

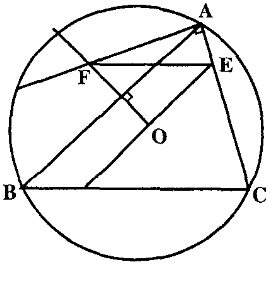


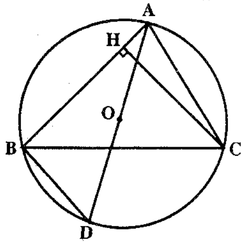
۴۴۸. اگر از A مماسی بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم کنیم تا BC را در T قطع کند و نقطه‌های U و U′، بترتیب، پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و بیرونی رأس A باشند، خواهیم داشت: $TA = TU = TU'$.

۹.۱.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

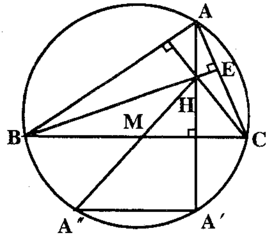
۱.۹.۱.۵. خطها موازی اند

۴۴۹. از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، خطی به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند و از O عمودی بر AB فرود می‌آوریم تا عمود رسم شده از رأس A بر ضلع AC را در نقطهٔ F تلاقی نماید. ثابت کنید، EF با BC موازی است.





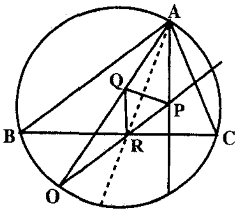
۴۵۰. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را درنظر می گیریم. ارتفاع CH و قطر AD از دایرهٔ محیطی آن را رسم می کنیم. ثابت کنید، DB با CH موازی است.



۴۵۱. در مثلث ABC نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعها است. ارتفاع AH دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ A′ و خط MH که نقطهٔ H را به نقطهٔ M وسط ضلع BC وصل می کند، در نقطهٔ A″ مجاور A′ قطع می کند. ثابت کنید: $A'A'' \parallel BC$.

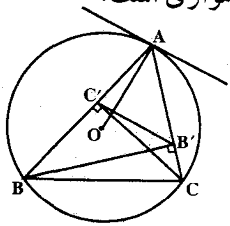
۴۵۲. نقطه های برخورد یک میانه و میانهٔ متقارن متناظرش با دایرهٔ محیطی مثلث، خطی موازی با ضلع روبه‌روی رأس در نظر گرفته شده را تعیین می کنند.

۴۵۳. خطی که نقطه های برخورد دو خط همزاویه با دایرهٔ محیطی مثلث را به هم وصل می کند، با ضلع روبه‌رو به رأس در نظر گرفته شده، موازی است.

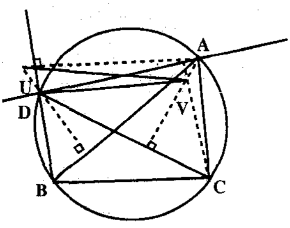


۴۵۴. P و Q دو نقطهٔ مزدوج همزاویهٔ دلخواه نسبت به مثلث ABC هستند. اگر AQ دایرهٔ محیطی را در O و OP ضلع BC را در R قطع کند، نشان دهید که QR با AP موازی است.

۴۵۵. نشان دهید که نیمساز هر زاویهٔ برونی مثلث با خط واصل بین دو نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی با نیمسازهای دو زاویهٔ برونی (درونی) دیگر مثلث، موازی است.

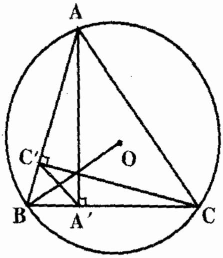


۴۵۶. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید که مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ محیطی این مثلث با خط B′C′ که B′ و C′ پای ارتفاعهای رأسهای B و C می باشند، موازی است.



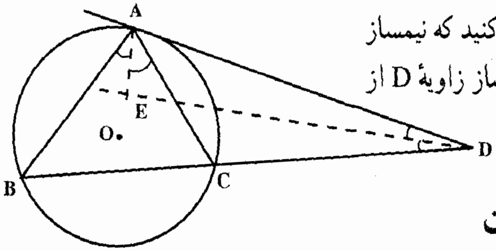
۴۵۷. خط AD که از رأس A می گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در D قطع می کند. اگر U و V بترتیب مرکزهای ارتفاعی مثلثهای ABD و ACD باشند، ثابت کنید که UV با BC موازی و مساوی است.

۲.۹.۱.۵. خطها بر هم عمودند

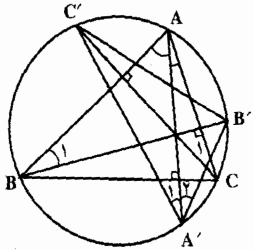


۴۵۸. ثابت کنید که در هر مثلث، خطی که پای ارتفاعهای وارد از دو رأس را به هم وصل می‌کند، بر شعاع دایرهٔ محیطی که از رأس سوم رسم شود، عمود است.

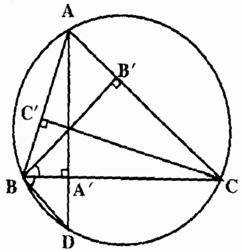
۴۵۹. مثلث ABC محاط در دایرهٔ O و خط مماس بر دایره در نقطهٔ A که خط BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند داده شده‌اند. زاویه‌های مثلث ACD را محاسبه کنید و ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC بر نیمساز زاویهٔ D از مثلث ACD عمود است.



۳.۹.۱.۵. خط نیمساز است

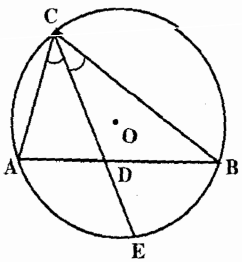


۴۶۰. امتداد ارتفاعهای مثلث ABC، دایرهٔ محیطی آن را در نقطه‌های A'، B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید ارتفاعها، نیمسازهای زاویه‌های مثلث $A'B'C'$ می‌باشند.



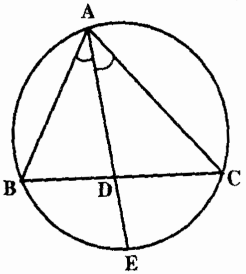
۴۶۱. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. ارتفاعهای AA'، BB' و CC' مثلث ABC را رسم می‌کنیم و AA' را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید BC نیمساز زاویهٔ DBB' است.

۴.۹.۱.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

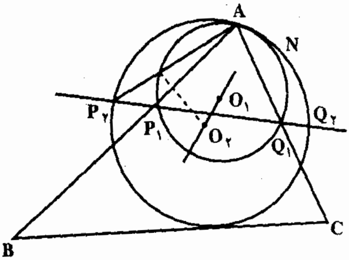


۴۶۲. در مثلث ABC که در دایرهٔ Oمحاط است، ضلع AB ثابت و رأس C در یکی از دو طرف AB حرکت می‌کند. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ ACB همیشه از نقطهٔ ثابتی واقع بر روی محیط دایره می‌گذرد.

۴۶۳. در مثلث ABC دو رأس B و C ثابت می‌باشند و اندازهٔ زاویهٔ A نیز ثابت است. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ A از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

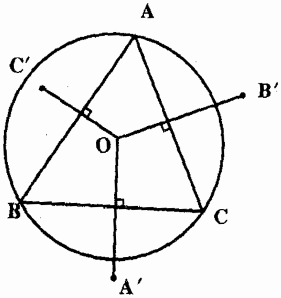


۴۶۴. قاطع متغیری ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را در نقطه‌های P_1 و Q_1 قطع می‌کند. فرض کنید O_1 مرکز دایرهٔ محیطی AP_1Q_1 و O_2 مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی باشد که رأسهای آن A و نقطه‌های همنوای P_1 و Q_1 هستند. نشان دهید که خط O_1O_2 از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد و دومین نقطهٔ مشترک دو دایره‌ای که در نظر گرفته شد، روی دایرهٔ ثابتی قرار دارد.

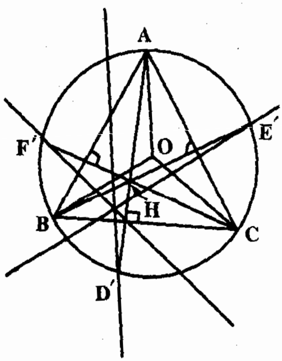


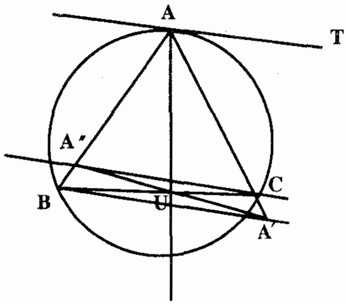
۵.۱.۹.۵. خطها همرسند

۴۶۵. مثلث ABC را در نظر گرفته، مرکز دایرهٔ محیطی آن را O و قرینه‌های نقطهٔ O نسبت به ضلعهای BC، AC و AB را بترتیب A′، B′ و C′ می‌نامیم. ثابت کنید پاره‌خطهای AA′، BB′ و CC′ در نقطه‌ای که در وسط هر یک از آنها واقع است، همرسند.



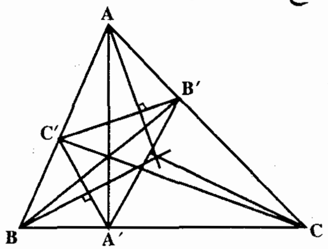
۴۶۶. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد و AH، BH و CH دایرهٔ محیطی را بترتیب در نقطه‌های D′، E′ و F′ قطع کنند، ثابت کنید خطهایی که از D′، E′ و F′ بترتیب به موازات OA، OB و OC رسم می‌شوند، همرسند.





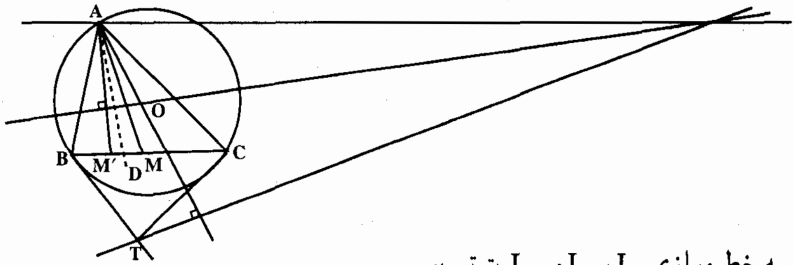
۴۶۷. از رأسهای B و C در مثلث ABC خطهایی به موازات مماسی که در A بر دایرهٔ محیطی (O) رسم شده است، رسم می‌کنیم، تا ضلعهای AC و AB را در ′A و ″A قطع کند. خط ″A′A ضلع BC را در U قطع می‌کند. نشان دهید که AU و خطهای BV و CW، که متناظر AUهستند، همرسند.

۴۶۸. با استفاده از دایرهٔ محیطی مثلث، ثابت کنید، سه ارتفاع مثلث همرسند.

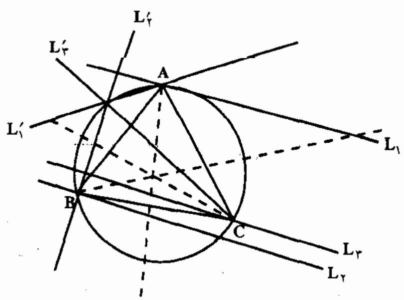


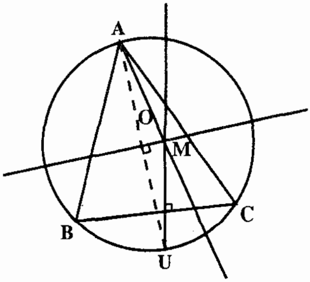
۴۶۹. مثلث ABC را در نظر گرفته، ارتفاعهای ′AA، ′BB و ′CC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید عمودهایی که از A بر ′C′B و از B بر ′C′A و از C بر ′B′A فرود می‌آیند از یک نقطه می‌گذرند.

۴۷۰. نشان دهید که این خطها همرسند: خطی که از رأس A در مثلث ABC به موازات ضلع BC رسم می‌شود، خطی که از مرکز دایرهٔ محیطی (O) بر میانهٔ متقارن گذرنده از رأس A عمود می‌شود، و خطی که از T، محل برخورد مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی مثلث در B و C، بر AO رسم می‌شود.

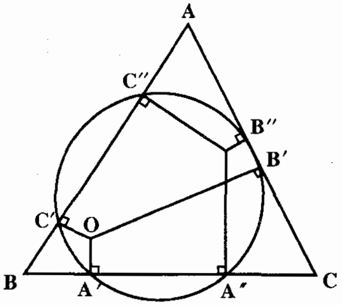


۴۷۱. سه خط موازی L_1، L_2 و L_3 بترتیب، از رأسهای A و B و Cی مثلث ABC رسم شده‌اند. ثابت کنید که خطهای قرینهٔ L_1، L_2 و L_3، بترتیب، نسبت به نیمساز زاویه‌های A، B و C، در یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC همرسند.



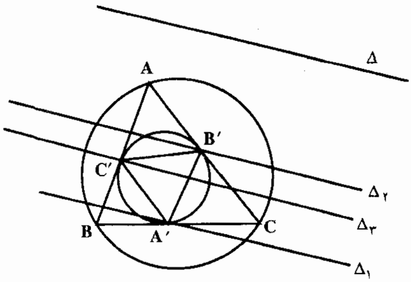


۴۷۲. نشان دهید که عمود منصف نیمساز AU از مثلث ABC، خطی که در نقطهٔ U بر ضلع BC عمود است و قطری از دایرهٔ محیطی که از رأس A می‌گذرد، همرسند.



۴۷۳. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای OA'، OB' و OC' را بترتیب بر ضلعهای BC، AC و AB فرود می‌آوریم و دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم. اگر نقطه‌های دیگر برخورد این دایره با ضلعهای مثلث ABC را A'' ، B'' و C'' بنامیم، ثابت کنید عمودهایی که از نقطه‌های A'' ، B'' و C'' بر ضلعهای مثلث ABC اخراج می‌شوند از یک نقطه می‌گذرند.

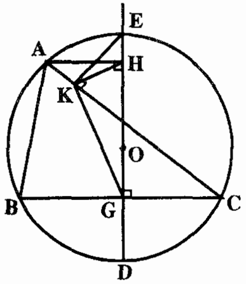
۴۷۴. وسطهای ضلعهای مثلث ABC را A' ، B' و C' می‌نامیم. از این نقطه‌ها، سه خط به موازات خط مفروض Δ رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌های ضلعها را نسبت به این موازیها به دست می‌آوریم. ثابت کنید که آنها روی دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ همرس خواهند بود.



۴۷۵. ثابت کنید خطهای اولر چهار مثلثی که از رأسها و نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای یک مثلث پدید می‌آیند، همرسند.

۵.۱.۹.۶. خط مماس بر دایره است

۴۷۶. اگر مثلثی محاط در دایره‌ای مفروض، زاویه‌ای ثابت داشته باشد، ضلع روبه‌روی زاویهٔ ثابت بر دایرهٔ ثابتی هم مرکز با دایرهٔ مفروض مماس خواهد بود.



۴۷۷. ABC مثلثی محاط شده در یک دایره است؛ DE قطری از دایره است که BC را در G نصف می‌کند؛ از E عمود EK را بر یکی از ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم و عمودی که از رأس A بر DE رسم می‌کنیم، DE را در H قطع می‌کند. نشان دهید که EK بر دایرهٔ GHK مماس است.

۵.۱.۱۰. خط سیمسون

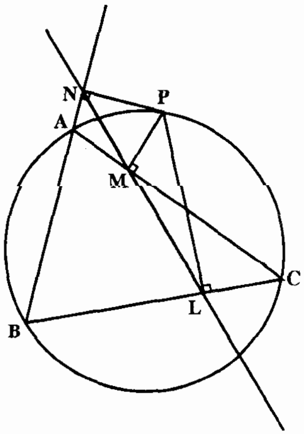
۵.۱.۱۰.۱. تعریف و قضیه

۴۷۸. **قضیه.** الف. پاهای سه عمودی که از نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی یک مثلث بر سه ضلع مثلث رسم می‌شوند، همخطند.

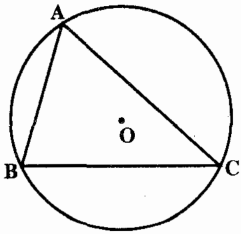
ب. بر عکس، اگر پاهای سه عمودی که از یک نقطه بر سه ضلع یک مثلث رسم می‌شوند، همخط باشند، آن نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

رابرت سیمسون

رابرت سیمسون Robert Simson (۱۶۷۸ ـ ۱۷۶۸) در هندسه کارهای زیادی انجام داده است. خط سیمسون یا سمسن از این جهت به او منسوب است که با ادراکات هندسی وی مطابقت دارد. اما به نظر مؤلفان کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه جستجوی این مسأله در آثار سیمسون کار بیهوده‌ای است. در حقیقت کشف این خاصیت در سال ۱۷۹۷ توسط ویلیام والاس William Wallace انجام گرفته است.



تعریف. اگر تصویر نقطهٔ P از دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی ضلعهای BC ، AC و AB را بترتیب L، M و N بنامیم، خط LMN را خط سیمسون، یا به اختصار سیمسون نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC یا برای مثلث ABC می‌نامند؛ گاهی LMN را خط پادک نقطهٔ P می‌نامند. خط LMN را گاهی با نماد P(ABC) نشان می‌دهند. نقطهٔ P را قطب خط LMN برای مثلث ABC می‌نامند.



۲.۱۰.۱.۵. نقطه و دایره

۴۷۹. کدام نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث ABC است که خط سیمسون نظیر آن بر ضلع AC منطبق می‌گردد؟

۴۸۰. نقطه‌ای پیدا کنید که خط سیمسون آن برای یک مثلث معلوم دارای امتدادی معلوم باشد.

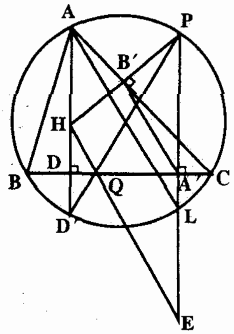
۴۸۱. فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC باشند. خطهای AA_1، BB_1 و CC_1، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را، برای بار دوم، بترتیب، در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند. خطهای سیمسون نظیر نقطه‌های A_2، B_2 و C_2، مثلث $A_3B_3C_3$ را تشکیل می‌دهند (A_3 نقطهٔ برخورد خطهای سیمسون نظیر نقطه‌های B_2 و C_2 است، و غیره). ثابت کنید در صورتی که خطهای A_2A_3، B_2B_3 و C_2C_3 در یک نقطه به هم برسند، مرکز ثقل مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_3B_3C_3$ بر هم منطبقند.

۴۸۲. ثابت کنید خطهایی که از P و P′ واقع بر دایرهٔ محیطی یک مثلث موازی خطهای سیمسون این دو نقطه برای مثلث، یا عمود بر آنها رسم می‌شود، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴۸۳. از دو نقطهٔ انتهایی قطری از یک دایره، خطهایی به موازات خطهای سیمسون این نقطه‌ها نسبت به مثلث مفروض محاط در این دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید که نقطه‌های وسط پاره‌خطهایی که ضلعهای این مثلث روی این خطهای موازی جدا می‌کنند، همخطند.

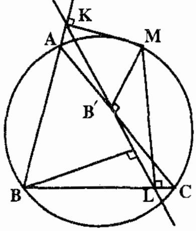
۳.۱۰.۱.۵. زاویه

۴۸۴. اندازهٔ زاویه‌ای که توسط دو خط سیمسون یک نقطه بر یک دایره برای دو مثلث محاط در آن دایره تشکیل می‌شود، بستگی به جای آن نقطه ندارد.



۴.۱۰.۱.۵. پاره‌خط

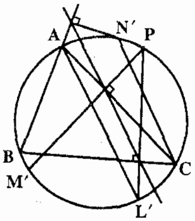
۴۸۵. خط سمسن نظیر هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث، منصف پاره‌خطی است که این نقطه را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کند.



۴۸۶. ثابت کنید که طول تصویر ضلع AB از مثلث ABC بر خط سیمسون نظیر نقطهٔ M، برابر است با فاصلهٔ میان تصویرهای نقطهٔ M روی ضلعهای AC و BC.

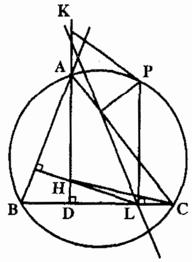
۴۸۷. دو خط سیمسون عمود بر هم، یکی از ضلعهای مثلث را در دو نقطه که نسبت به وسط آن ضلع قرینه‌اند (دو نقطهٔ همنوا) قطع می‌نمایند.

۵.۱.۱۰.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم و ...

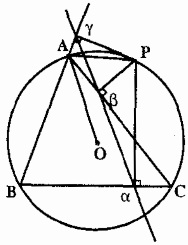


۵.۱.۱۰.۵.۱. خطها موازی‌اند

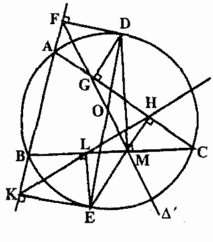
۴۸۸. اگر از نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC سه عمود بر ضلعهای BC ، CA و AB رسم کنیم تا دوباره دایرهٔ محیطی را در نقطه‌های ′L ، ′M و ′N قطع کنند، ثابت کنید که سه خط ′AL ، ′BM و ′CN موازی خط سیمسون نظیر نقطهٔ P می‌باشند.



۴۸۹. ۱. اگر خط سیمسون یک نقطه مثل P برای مثلث ABC ضلع BC را در L و ارتفاع AD را در K قطع کند، ثابت کنید که خط PK موازی LH است که در آن H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC است.

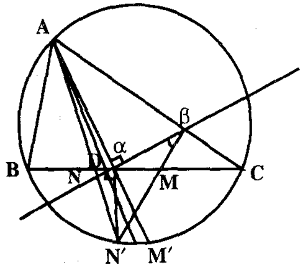


۲. اگر خط سیمسون نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC موازی شعاع AO از دایرهٔ محیطی آن باشد، ثابت کنید که PA موازی BC است.



۵.۱.۱۰.۵.۲. خطها بر هم عمودند

۴۹۰. ثابت کنید که در هر مثلث خطهای سیمسون مربوط به دو سر یک قطر دایرهٔ محیطی، بر یکدیگر عمودند.



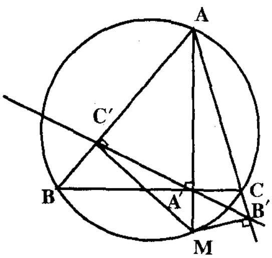
۴۹۱. میانه و میانهٔ متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC ، دایرهٔ محیطی مثلث را در M′ و N′ قطع می‌کنند. نشان دهید که خطهای سیمسون M′ و N′ بترتیب بر AN′ و AM′ عمودند.

۴۹۲. هرگاه دو مثلث محاط در یک دایره و قرینهٔ یکدیگر نسبت به مرکز آن دایرهٔ باشند، ثابت کنید که دو خط سیمسون هر نقطه واقع بر دایره برای این دو مثلث، بر هم عمودند.

۵.۱.۱۰.۵.۳. خط نیمساز است

۴۹۳. اگر P، Q و R محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن باشد ثابت کنید که خطهای سیمسون نقطه‌های P، Q و R برای مثلث ABC نیمسازهای خارجی مثلث T′ که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث ABC اند، می‌باشد. خطهای سیمسون نقطه‌های P′ ، Q′ و R′ محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث را با دایرهٔ محیطی آن برای مثلث، مطالعه کنید. همچنین مسأله را برای سه نیمساز همرس مثلث، یا سه نیمسازی که یک مثلث می‌سازند، مطالعه کنید.

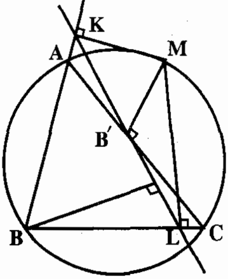
۵.۱.۱۰.۵.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۴۹۴. ثابت کنید که خط سیمسون نقطه‌ای که ادامهٔ یک ارتفاع مثلث روی دایرهٔ محیطی آن به‌وجود می‌آورد برای این مثلث از پای ارتفاع می‌گذرد و آنتی‌پارالل ضلع نظیر آن ارتفاع نسبت به دو ضلع دیگر مثلث می‌باشد.

۴۹۵. یک مثلث متغیر، دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل ثابت دارد. ثابت کنید خط سیمسون یک نقطه واقع بر این دایره برای مثلث، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴۹۶. ثابت کنید اگر خط سیمسون یک نقطه برای یک مثلث، از انتهای دیگر قطری که از آن نقطه می‌گذرد، بگذرد، از مرکز ثقل مثلث نیز می‌گذرد و برعکس.

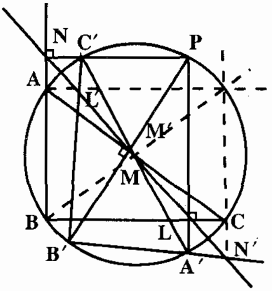


۴۹۷. مثلث متغیر ABC محاط در یک دایرهٔ ثابت است. رأس A و امتداد نیمساز داخلی زاویهٔ A ثابتند. ثابت کنید که خط سیمسون نقطهٔ P واقع بر دایره برای مثلث ABC امتدادی ثابت دارد.

۵.۱.۱۰.۵.۵. خطها همرسند

۴۹۸. فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 نقطه‌هایی روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، به طوری که $\widehat{AA_1}+\widehat{BB_1}+\widehat{CC_1}=2k\pi$ (همهٔ کمانها در یک جهت سنجیده می‌شوند و k عددی درست است)، ثابت کنید که خطهای سیمسون مثلث ABC، نظیر نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۴۹۹. چهار خط سیمسون هر نقطه از چهار نقطهٔ واقع بر یک دایره برای مثلث ساخته شده از سه نقطهٔ دیگر، از یک نقطه می‌گذرند.

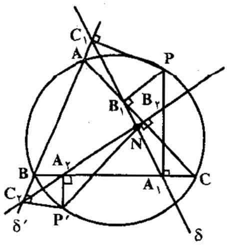


۵۰۰. عمودهایی که از یک نقطه واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر ضلعهای BC، CA و AB از آن فرود می‌آیند بترتیب آنها را در L، M و N و دایرهٔ محیطی را در A' ، B' و C' قطع می‌کنند، خط سیمسون LMN خطهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ را بترتیب در L' ، M' و N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای AL' ، BM' و CN' همرسند.

۶.۱۰.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت (خط سیمسون)

۵۰۱. آیا ممکن است که نقطه‌ای بر خط سمسن نظیر خود واقع باشد؟ در این صورت این خط کدام است؟

۵۰۲. ثابت کنید اگر سه مثلث در یک دایره محاط شده باشند، سه خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایره نسبت به این مثلثها، مثلثی از نوع معین می‌سازند. چند حالت خاص را بررسی کنید.

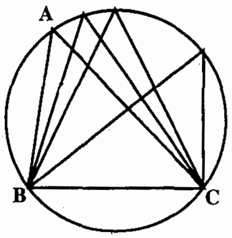


۵۰۳. رأسهای B و C و دایرهٔ محیطی O از مثلث متغیر ABC ثابت است و P و P' در نقطهٔ ثابت از دایرهٔ O می‌باشند. ثابت کنید محل تقاطع دو خط سیمسون دو نقطهٔ P و P' نسبت به مثلث یک دایره رسم می‌نماید.

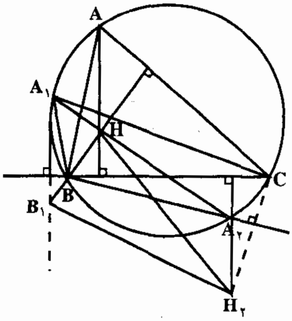
۱۱.۱.۵. شکلهای ایجاد شده

۵۰۴. در مثلث ABC، دو نیمسازی را رسم کرده‌ایم که از رأسهای A و B گذشته‌اند؛ سپس از رأس C، خطهای راستی موازی با این دو نیمساز کشیده‌ایم. محل برخورد این خطهای راست با نیمسازها را، بترتیب، D و E می‌نامیم. معلوم شد دو خط راست DE و AB با هم موازی‌اند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

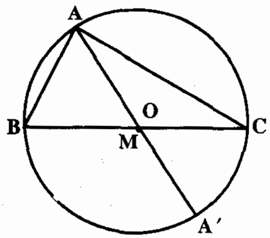
المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۳



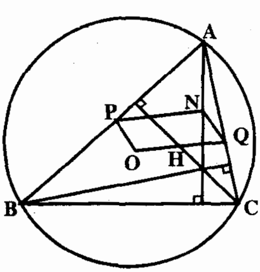
۵۰۵. بین همهٔ مثلثهایی که قاعده و اندازهٔ زاویهٔ رأس آنها ثابت است، مطلوب است تعیین مثلثی که بیشترین مساحت را داراست.



۵۰۶. خط واصل بین مرکز ارتفاعی مثلث ABC و وسط ضلع BC، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. نشان دهید که مرکزهای ارتفاعی سه مثلث ABC، A_1BC و A_2BC رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.



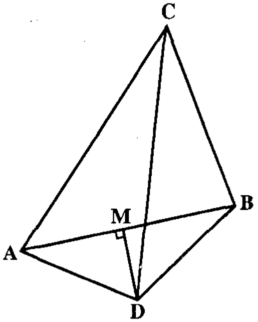
۵۰۷. هرگاه در مثلث مختلف‌الاضلاعی، میانهٔ نظیر یک رأس از مرکز دایرهٔ محیطی آن مثلث بگذرد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



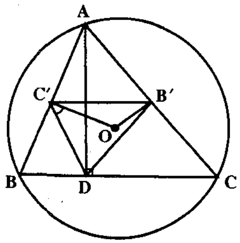
۵۰۸. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم و محل برخورد ارتفاعهای آن را H می‌نامیم. ثابت کنید خطی که نقطهٔ N وسط AH را به نقطهٔ P وسط AB وصل می‌کند، با خطی که مرکز دایرهٔ محیطی را به نقطهٔ Q وسط AC وصل می‌نماید، موازی است و چهار ضلعی OPNQ متوازی‌الاضلاع است.

۵۰۹. خطی که در H، مرکز ارتفاعی مثلث ABC، بر ارتفاع HC از مثلث عمود می‌شود، دایرهٔ محیطی HBC را در P قطع می‌کند. نشان دهید که ABPH متوازی‌الاضلاع است.

۵۱۰. نیمساز زاویهٔ درونی C از مثلث ABC عمود منصف AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی ADBC محاطی است.

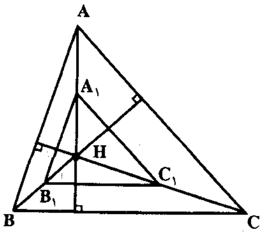


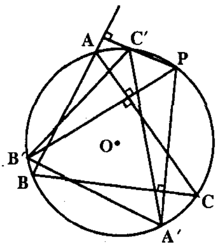
۵.۱.۱۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



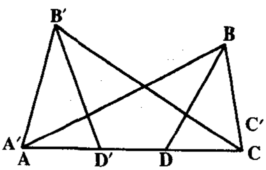
۵۱۱. اگر D پای ارتفاع نظیر ضلع BC و نقطه‌های C' و B' تصویرهای مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی ضلعهای AB و AC باشند، ثابت کنید مثلث $DB'C'$ با مثلث اولر برابر است.

نقطه‌های اولر و مثلث اولر. وسطهای پاره خطهایی که نقطهٔ H برخورد ارتفاعهای مثلث را به A، B و C رأسهای مثلث ABC وصل می‌کنند، نقطه‌های اولر (A_1، B_1 و C_1 که بترتیب، وسطهای HA، HB و HC می‌باشند) و مثلثی را که این سه نقطه رأسهای آن می‌باشند، مثلث اولر (مثلث $A_1B_1C_1$) می‌نامند.





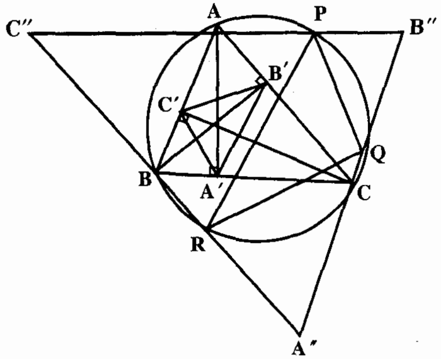
۵۱۲. از نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC عمودهایی بر ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم تا (O) را مجدداً در نقطه‌های A'، B' و C' قطع کنند. نشان دهید که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشتند و نسبت به یک محور متقارنند.



۵۱۳. ثابت کنید هرگاه در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ضلعهای AC و $A'C'$ و زاویه‌های B و B' و نیمسازهای BD و $B'D'$ برابر باشند، دو مثلث همنهشتند.

۵۱۴. ثابت کنید که نقطه‌های قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به وسط میانه‌های آن، روی ارتفاعهای مثلث قرار دارند.

۵۱۵. بین مثلثهایی که قاعده و زاویهٔ روبه‌روی آن قاعده ثابت است، کدام مثلث ماکزیمم محیط را دارد؟



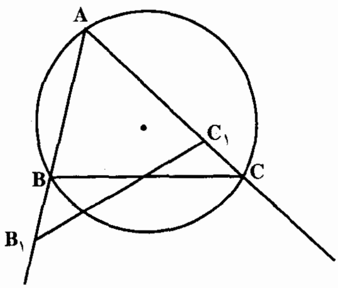
۵۱۶. ضلعهای مثلث پادمکمل مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطه‌های P، Q و R قطع می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث PQR چهار برابر مساحت مثلث پادک مثلث ABC است.

مثلث پادمکمل. مثلثی است که از برخورد سه خط که از رأسهای مثلث موازی ضلعهای روبه‌رویشان رسم می‌شوند، به وجود می‌آید.

مثلث پادک یا مثلث ارتفاعی. مثلثی است که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلثند.

۵۱۷. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و مرکز دایرهٔ محیطی آن را O و پای ارتفاع نظیر ضلع BC را H می‌نامیم. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های BAC و HAO بر هم منطبق هستند.

۵۱۸. نشان دهید که نقطه‌های برخورد سه میانهٔ متقارن (شبه میانه) یک مثلث با دایرهٔ محیطی مثلث، رأسهای مثلثی هستند که میانه‌های متقارنش همان میانه‌های متقارن مثلث داده شده هستند.



۵۱۹. پاره‌خط BC با طول ثابت طوری حرکت می‌کند که دو سرش روی دو خط ثابت AB و AC می‌مانند. نشان دهید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۱۳.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

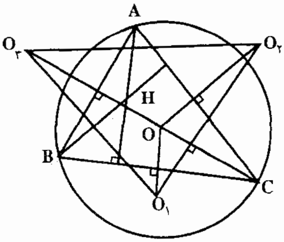
۵۲۰. اگر نقطهٔ M (نقطهٔ میکل) روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار داشته باشد، آن گاه خطهای همزاویهٔ AM، BM و CM موازی‌اند و بر عکس، اگر مزدوجهای همزاویهٔ خطهای AM، BM و CM موازی باشند، آن گاه نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

۵۲۱. فرض کنید نقطه‌های A_1، B_1 و C_1، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید که:

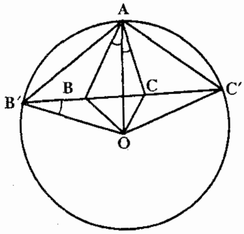
الف. دایره‌های محیطی مثلثهای A_1BC، AB_1C و ABC_1 در یک نقطه مشترکند؛

ب. دایره‌های محیطی مثلثهای A_1B_1C، A_1BC_1 و AB_1C_1 در یک نقطه مشترکند.

۵۲۲. نشان دهید که مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای HBC، HAB و HCA از یک گروه مرکز ارتفاعی HABC، مثلثی همنهشت با مثلث ABC تشکیل می‌دهند؛ ضلعهای دو مثلث موازی‌اند، و نقطهٔ H مرکز دایرهٔ محیطی مثلث جدید است؛ همچنین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث جدید است.



۵۲۳. در مثلث ABC ضلع BC را از طرف C به اندازهٔ $CC' = AB$ و از طرف B به اندازهٔ $BB' = AC$ امتداد می‌دهیم. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ باشد:



۱. ثابت کنید $O\hat{A}B = O\hat{B'}B$ است.

۲. ثابت کنید خط AO نیمساز زاویهٔ BAC است.

۵۲۴. a. مثلثهای T_1 و T_2 در دایره‌ای محاطند. در ضمن، رأسهای مثلث T_1 در وسط کمانهایی از دایره قرار دارند که به وسیلهٔ رأسهای مثلث T_2 به وجود آمده‌اند. ثابت کنید، در شش ضلعی $T_1 \cap T_2$، قطرهایی که رأسهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، با ضلعهای مثلث T_1 موازی‌اند و در یک نقطه به هم می‌رسند.

b. پاره خط راستی که وسط کمانهای AB و AC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به هم وصل می‌کند، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های D و K قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های A، D، K و O (مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC)، رأسهای یک لوزی‌اند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۷

۵۲۵. همهٔ مثلثهای محاط در دایرهٔ داده شده را در نظر بگیرید که یک ضلع آنها قطر دایره باشد. از ویژگیهای زیر که دربارهٔ این مثلثها بیان شده یکی و تنها یکی صحیح است. کدام یک؟

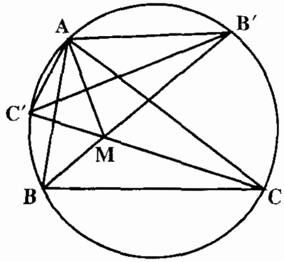
الف. هیچ یک از این مثلثها قائم الزاویه نیست.

ب. همهٔ این مثلثها مساحتهای برابر دارند.

ج. همهٔ این مثلثها محیطهای برابر دارند.

د. از این مثلثها آن که بیشترین مساحت را دارد، متساوی‌الساقین است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۵۲۶. مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است. نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ M و دایره را در نقطه‌های B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید:

۱. مثلث $AB'C'$ با مثلث $MB'C'$ همنهشت است.

۲. $B'C'$ عمود منصف پاره‌خط AM می‌باشد.

۵ . ۲ . دایره‌های محاطی مثلث

۵ . ۲ . ۱ . تعریف و قضیه

می‌دانیم که هر مثلث چهار دایرهٔ محاطی دارد. یکی دایرهٔ محاطی درونی مثلث و سه دایرهٔ دیگر، دایره‌های محاطی برونی مثلث می‌باشند. مرکزهای این دایره‌ها، نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی مثلث می‌باشند. عموماً I، I_a، I_b و I_c را بترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی درونی و مماس بر ضلعهای a، b و c می‌نامند.

قطعه‌های ضلعهای مثلث محصور بین رأسها و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی

۵۲۷. نمادگذاری. نقطه‌های تماس چهار دایرهٔ سه مماس (I)، (I_a)، (I_b)، (I_c) از مثلث ABC با ضلع BC را X، X_a، X_b و X_c می‌نامیم مگر این‌که خلاف آن را ذکر کنیم. برای ضلعهای CA و AB بترتیب حرفهای Y و Z را به‌کار می‌بریم.

قضیه. فاصلهٔ هر رأس مثلث از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد برابر است با نصف محیط مثلث منهای طول ضلع مقابل آن رأس.

۵۲۸. قضیه. فاصلهٔ هر رأس مثلث از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن رأس با ضلعی که از آن رأس می‌گذرد، برابر نصف محیط مثلث است.

۵۲۹. شعاعهای سه مماس

نمادگذاری. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یا به اختصار، شعاع داخلی مثلث را با r و شعاع دایره‌های محاطی خارجی، یا به اختصار، شعاعهای خارجی نسبت به رأسهای A، B و C از مثلث ABC را بترتیب با r_a، r_b و r_c نشان می‌دهیم، مگر این‌که خلاف آن را ذکر کنیم. این چهار شعاع را شعاعهای سه مماس مثلث ABC می‌نامیم.

قضیه. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با مساحت مثلث، تقسیم بر نصف محیط مثلث.

۵۳۰. قضیه. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مثلث برابر است با مساحت مثلث، تقسیم بر تفاضل نصف محیط و ضلعی از مثلث که دایرهٔ محاطی خارجی بر آن مماس است.

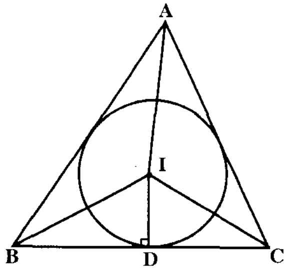
۵ . ۲ . ۲. شعاع

۵ . ۲ . ۲ . ۱. اندازهٔ شعاع

۵۳۱. مساحت مثلث ABC برابر $2\sqrt{14}$ سانتیمتر مربع و محیط آن ۱۴ سانتیمتر است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث را تعیین کنید.

۵ . ۲ . ۲ . ۲. رابطهٔ بین شعاعها

۵۳۲. معکوس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث برابر است با مجموع معکوس ارتفاعهای مثلث.

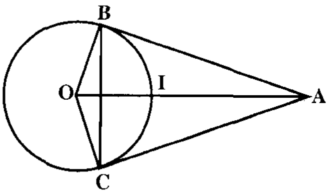


۵۳۳. نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC به فاصلهٔ ۶ سانتیمتر از رأس B واقع است. اگر $A\hat{I}C = 120°$ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را تعیین کنید.

۵ . ۲ . ۳. نقطه و دایره

۵ . ۲ . ۳ . ۱. نقطه روی دایره

۵۳۴. یک دایره به مرکز O و نقطهٔ A واقع در بیرون این دایره داده شده‌اند. خطهای راست AB و AC بر دایره مماسند (B و C نقطه های تماسند). ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر دایرهٔ داده شده، قرار دارد.



۵ . ۲ . ۳ . ۲. نقطه‌های همخط

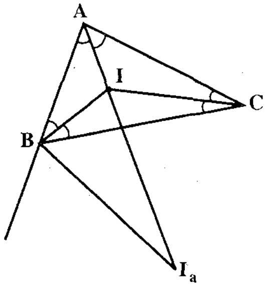
۵۳۵. نشان دهید که نقطهٔ وسط یک ارتفاع مثلث، نقطهٔ تماس ضلع متناظر با آن ارتفاع و دایرهٔ

محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث همخطند.

۵ . ۲ . ۳ . ۳ . نقطه‌های همدایره

۵۳۶. دو رأس B و C از مثلث ABC، مرکز دایرهٔ محاطی درونی و مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a روی یک دایره قرار دارند.

۵ . ۲ . ۴ . قطر



۵۳۷. مرکز دو دایرهٔ محاطی یک مثلث، دو انتهای قطری از دایره‌ای هستند، که از دو رأسی که با مرکزها بر یک استقامت نیستند، می‌گذرد.

۵ . ۲ . ۵ . زاویه

۵ . ۲ . ۵ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۵۳۸. اگر سه نقطهٔ تماس ضلعهای مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی آن به هم وصل شوند، زاویه‌های مثلث حاصل همواره :

الف. مساوی ۶۰ درجه‌اند.

ب. عبارتند از یک زاویهٔ منفرجه و دو زاویهٔ حادهٔ نابرابر.

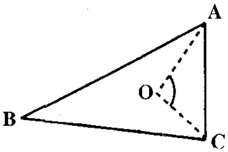
ج. عبارتند از یک زاویهٔ منفرجه و دو زاویهٔ حادهٔ برابر.

د. زاویه‌های حاده‌اند.

هـ. زاویه‌های نابرابرند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

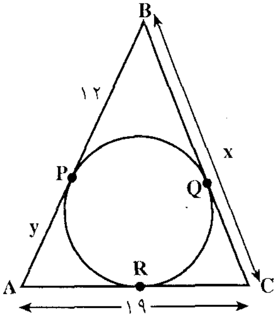
۵۳۹. در مثلث ABC، زاویهٔ ABC برابر با α است. اندازهٔ زاویهٔ AOC را، که در آن O مرکز دایرهٔ محاطی است، پیدا کنید.



۵۴۰. از نقطهٔ برخورد قاعدهٔ یک مثلث و نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل آن مماسی بر دایرهٔ محاطی داخلی رسم می‌کنیم. ثابت کنید زاویه‌ای که این مماس با قاعده می‌سازد با تفاضل دو زاویهٔ مجاور به قاعده برابر است.

۵ . ۲ . ۶ . پاره‌خط

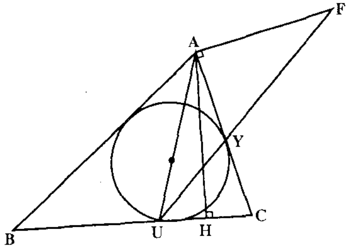
۵ . ۲ . ۶ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط



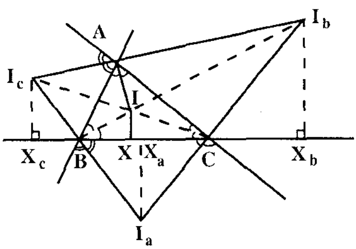
۵۴۱. با توجه به شکل داده شده :

الف. اگر ۹ = y ، x را بیابید.

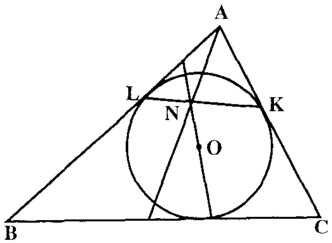
ب. اگر ۲۵ = x ، y را بیابید.



۵۴۲. خطی که نقطهٔ U پای نیمساز AU متعلق به زاویهٔ A از مثلث ABC را به Y نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلع CA وصل می‌کند، عمودی را که از A بر AC اخراج می‌شود در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید $AF = h_a$.



۵۴۳. شش نقطهٔ B، C، X، X_a ، X_b و X_c روی ضلع BC، $۱۵ = \frac{۵}{۲} \times ۶$ پاره خط را تعیین می‌کنند. این ۱۵ پاره‌خط را همراه اندازهٔ هرکدام، بر حسب ضلعهای مثلث بنویسید. برای پاره‌خطهای روی ضلعهای دیگر مثلث ABC نیز می‌توان کار مشابهی را انجام داد. X نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی، X_a ، X_b و X_c ، نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی به مرکزهای I_a ، I_b و I_c با ضلع BC می‌باشند.



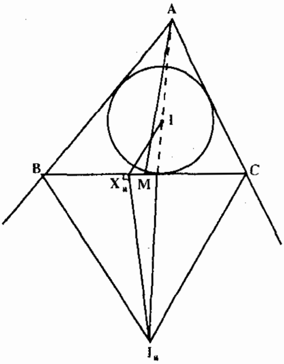
۵ . ۲ . ۶ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۴۴. دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده است. قطری از این دایره، از نقطهٔ تماس دایره با ضلع BC می‌گذرد و وتری را که دو نقطهٔ دیگر تماس را به هم وصل می‌کند، در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که AN، BC را نصف می‌کند.

۵۴۵. در هر مثلث پاره‌خطی که نقطهٔ اولر یک ارتفاع را به نقطهٔ وسط یکی از ضلعهای مجاور به آن ارتفاع وصل می‌کند، موازی و مساوی با عمودی است که از مرکز دایرهٔ محیطی

مثلث بر ضلع دیگر مجاور به آن ارتفاع فرود می‌آید.

۵۴۶. اگر در مثلث ABC نقطه‌های E و F ، بترتیب، محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC باشند، ثابت کنید، وسط پاره‌خط EF بر وسط ضلع BC منطبق است.



اولین المپیاد مقدماتی آزمایشی ایران، ۱۳۷۳

۵۴۷. ثابت کنید، پاره‌خطی که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را به وسط قطعه خطی که A را به نقطهٔ تلاقی خطهایی که از هر رأس به نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر آن رأس وصل می‌کند، وصل می‌نماید توسط میانهٔ مرسوم از A نصف می‌شود.

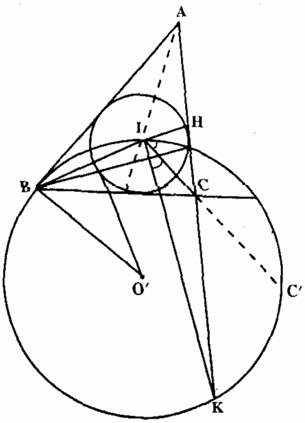
۵۴۸. نقطه‌های تماس هر ضلع مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع دو نقطهٔ همنوا هستند.

۵۴۹. دو نقطهٔ تماس هر ضلع مثلث با دو دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر دو نقطهٔ همنوا هستند. فاصلهٔ بین این دو نقطهٔ تماس با مجموع دو ضلع دیگر برابر است.

۵۵۰. نشان دهید، طول پاره‌خطی که از یک مرکز سه مماس به موازات یک ضلع مثلث رسم می‌شود، برابر است با مجموع (یا تفاضل) دو پاره‌خطی که بین این دو خط موازی روی دو ضلع دیگر مثلث ایجاد می‌شود.

۵ . ۲ . ۷ . خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵ . ۲ . ۷ . ۱ . خط نیمساز است



۵۵۱. دایره‌ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویهٔ HIK است.

۵ . ۲ . ۷ . ۲ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵۵۲. a . ثابت کنید، خط راستی که مثلث داده شده را به دو چند ضلعی با محیطها و مساحتهای برابر تقسیم کند، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد.

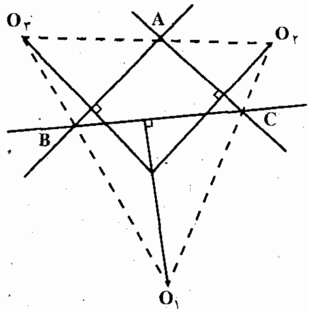
b. همین حکم را در مورد چندضلعی دلخواهی ثابت کنید که بتوان یک دایره را در آن محاط کرد.

c. ثابت کنید، همهٔ خطهای راستی که، هم مساحت و هم‌محیط مثلث را نصف می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۵۵۳. خط متغیری که از رأس مثلث مفروضی می‌گذرد، آن مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. این خط یک مماس مشترک داخلی دو دایرهٔ محاطی داخلی آن دو مثلث است. نشان دهید که مماس مشترک داخلی دوم این دو دایره از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث مفروض با ضلع مقابل رأس مذکور می‌گذرد. خاصیت مشابهی را برای دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس مذکور بیان و آن را ثابت کنید.

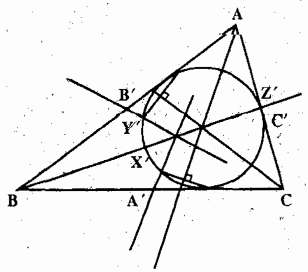
۵ . ۲ . ۷ . ۳ . خطها همرسند



۵۵۴. اگر از نقطه‌های O_1، O_2 و O_3 مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC، بترتیب، عمودهایی بر ضلعهای BC، AC و AB فرود آوریم، ثابت کنید که این سه عمود همرسند.

۵۵۵. خطهایی که از رأسهای یک مثلث به نقطه‌های تماس ضلع مقابل هر رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع رسم می‌شوند، همرسند.

تعریف. نقطهٔ مشترک سه خط مذکور را غالباً نقطهٔ ناگل مثلث می‌نامند.



۵۵۶. X' نقطهٔ متقارن نقطهٔ تماس ضلع BC از مثلث ABC با دایرهٔ محاطی داخلی، نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A و A' وسط ضلع BC است. نشان دهید که خط $A'X'$ و دو خط مشابه آن، $B'Y'$ و $C'Z'$، یک نقطهٔ مشترک

دارند. آیا این مطلب برای یک دایرهٔ محاطی خارجی نیز صادق است.

۵۵۷. دایرهٔ به مرکز O، در مثلث ABC محاط شده است و نقطه‌های تماس آن با ضلعهای BC، AC و AB، بترتیب، عبارتند از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1. پاره‌خطهای راست AO، BO و CO، بترتیب، محیط دایره را در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خطهای راست A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 از یک نقطه می‌گذرند.

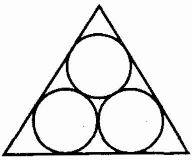
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۴

۵۵۸. ثابت کنید که در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A، میانخط موازی با AC و خط راست واصل نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی با ضلعهای CB و CA، در یک نقطه همرسند.

۵ . ۲ . ۷ . ۴ . خط مماس بر دایره است

۵۵۹. خطی که از یک رأس مثلث به نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی (دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن رأس) با ضلع مقابل آن رأس رسم می‌شود، مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. نشان دهید که دایره‌های محاطی داخلی (خارجی) این دو مثلث در همان نقطه بر این خط مماسند.

۵ . ۲ . ۸ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



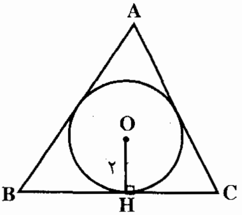
۵۶۰. در شکل زیر سه دایره دو به دو با هم مماس خارجند و هر ضلع مثلث بر دو دایره مماس است. اگر شعاع هریک از این دایره‌ها برابر سه باشد، محیط مثلث برابر است با :

الف) $۳۶+۹\sqrt{۲}$ ب) $۳۶+۶\sqrt{۳}$ ج) $۳۶+۹\sqrt{۳}$

د) $۱۸+۱۸\sqrt{۳}$ هـ) ۴۵

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

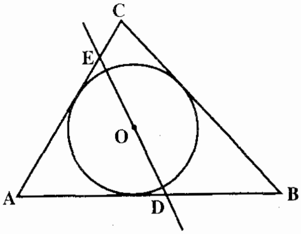
۵۶۱. نشان دهید خطی که یک رأس مثلث را به نقطهٔ تماس ضلع مقابل آن رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به آن ضلع وصل می‌کند، محیط مثلث را نصف می‌کند.



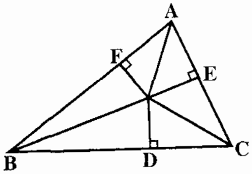
۵۶۲. اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی برابر ۲ باشد، اندازه‌های محیط و مساحت مثلث با یک عدد بیان می‌شوند.

۵۶۳. بین تمام مثلثهایی که یک قاعدهٔ ثابت دارند و بر دایرهٔ ثابتی

محیطند، کدام مثلث کمترین محیط را دارد؟

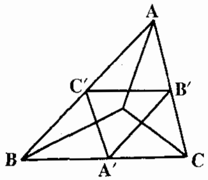


۵۶۴. ثابت کنید، هر قاطعی که ازمرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بگذرد، مساحت و محیط مثلث را به دو قسمت متناسب باهم تقسیم می کند.



۵۶۵. دایره هایی که مرکزهایشان سه رأس مثلث باشند و بر نقطه های تماس ضلعهای مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی بگذرند، بر یکدیگر مماس خواهند بود. همچنین دایره هایی که مرکزهایشان رأسهای مثلث باشند و بر نقطه های تماس ضلعها با یکی از دایره های محاطی خارجی بگذرند بر یکدیگر مماس خواهند بود. نوع تماس هر دو دایره را مشخص کنید.

۵۶۶. اگر در مثلثی محیط بر یک دایره، مجموع دو زاویه ثابت باشد، رأس سوم آن مثلث روی دایره ای هم مرکز با دایره اوّلی قرار دارد.



۵۶۷. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاط در یک مثلث در درون مثلث تشکیل شده به وسیلهٔ خطهای واصل بین میانگاههای ضلعهای مثلث قرار دارد.

۵ . ۲ . ۹ . مسأله های ترکیبی

۵۶۸. زاویهٔ A محیط بر دایرهٔ (O) است. مماس بر دایره را رسم می کنیم که ضلعهای زاویه را در C و B قطع می کند.

۱. ثابت کنید، محیط مثلث ABC مقداری است ثابت.

۲. زاویهٔ $B\hat{O}C$ مقداری است ثابت. از ویکتور پونسله

۵۶۹. دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه های D، E و F، بترتیب، بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است ؛ I مرکز این دایره است ؛ L، M و N، بترتیب، مرکز ارتفاعی مثلثهای IBC، ICA و IAB هستند. ثابت کنید که :

الف. DL، EM و FN با شعاعهای دایره های محاطی خارجی مثلث ABC برابرند ؛

ب. MN، NL و LM بترتیب از نقطه های D، E و F می گذرند ؛

پ. مثلثهای LMN و ABC هم ارزند ؛

ت. اگر دایره های محاطی خارجی نسبت به رأسهای A، B و C بترتیب در نقطه های D_1، E_1 و F_1 بر BC، CA و AB مماس باشند، خطهای MN ، NL و LM بترتیب بر AD_1 ، BE_1 و CF_1 عمودند ؛ و خطهای MN ، NL و LM، بترتیب، خطهای

AD_1، BE_1 و CF_1 را روی دایرهٔ محاطی داخلی قطع می‌کنند.

۵۷۰. الف. دایرهٔ (P) در نقطه‌های E و F بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC مماس است. نشان دهید خط EF عمودی که از P، مرکز دایرهٔ (P)، بر BC رسم می‌شود، و میانه‌ای از مثلث ABC که از رأس A می‌گذرد، همرسند؛

ب. X، Y، Z و X_a، Y_a، Z_a نقطه‌های تماس ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بترتیب با دایرهٔ محاطی داخلی (I) و دایرهٔ محاطی خارجی (I_a) هستند. نشان دهید که نقطه‌های برخورد YZ با دو شعاع IX و I_aX_a و رأس A و همچنین نقطه‌های برخورد Y_aZ_a با دو شعاع IX و I_aX_a و وسط ضلع BC، همخطند.

۵ . ۳ . دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

۵ . ۳ . ۱ . تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره‌های محیطی و محاطی مثلث داده شده، یا مثلثهای دیگر ایجاد شده در مسأله، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۵ . ۳ . ۲ . شعاع

۵ . ۳ . ۲ . ۱ . اندازهٔ شعاع

۵۷۱. در مثلث ABC، $\hat{A} = \alpha$، $\hat{B} = \beta$ و $BC = a$ است. شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث را مشخص کنید. آیا تنها با معلوم بودن $\hat{A} = \alpha$ و $BC = a$، شعاعهای این دو دایره مشخص می‌شود؟

۵ . ۳ . ۲ . ۲ . رابطهٔ بین شعاعها

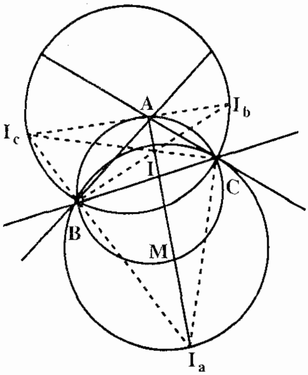
۵۷۲. در هر مثلث فاصلهٔ هر رأس تا مرکز ارتفاعی به اضافهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با آن رأس، مقداری ثابت است.

۵ . ۳ . ۳ . نقطه و دایره

۵ . ۳ . ۳ . ۱ . نقطه درون دایره

۵۷۳. ثابت کنید که اگر M نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد و خطهای AM، BM و CM، بترتیب، از مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BMC، CMA و AMB بگذرند، آن وقت

M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.



۵ . ۳ . ۳ . ۲. نقطه روی دایره

۵۷۴. چهار مرکز دایره‌های محاطی یک مثلث، روی شش دایره‌ای هستند که هریک از دو رأس مثلث عبور می‌کند، و مرکز آنها وسط کمانی از دایرهٔ محیطی مثلثی است که از آن دو رأس می‌گذرد.

۵ . ۳ . ۳ . ۳. نقطه برون دایره

۵۷۵. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث نمی‌تواند از مرکز یک دایرهٔ محاطی خارجی آن بگذرد.

۵ . ۳ . ۳ . ۴. نقطه‌های همدایره

۵۷۶. دایرهٔ مانسیون M.J. Mention

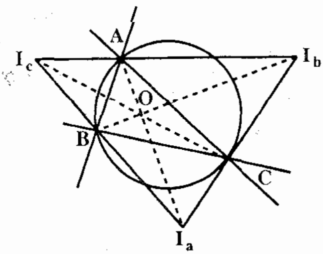
مرکزهای دایره‌های محاطی یک مثلث را دو به دو به هم وصل کرده‌ایم، شش پاره‌خط ایجاد شده است. ثابت کنید نقطه‌های وسط این شش پاره‌خط روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند.

۵ . ۳ . ۳ . ۵. نقطه‌های همخط

۵۷۷. قضیهٔ ناگل. مرکز دایرهٔ محاطی، مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ همرسی عمودهای رسم شده از مرکزهای دایره‌های محاطی برونی روی ضلعهای یک مثلث، سه نقطه واقع بر یک خط راستند. و مرکز دایرهٔ محیطی به یک فاصله از دو نقطهٔ دیگر است.

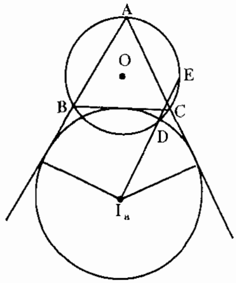
۵۷۸. نشان دهید، عمودهایی که در مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می‌شوند، ضلعهای متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث عمود است، قطع می‌کنند.

۵ . ۳ . ۴. قطر



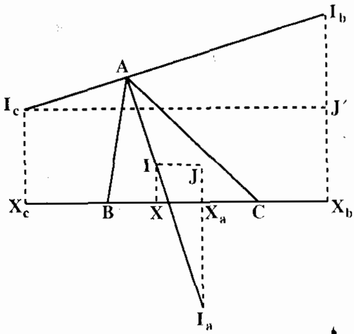
۵۷۹. اگر در یک مثلث متغیر، قاعده و دایرهٔ محیطی ثابت باشد، مرکزهای دایره‌های محاطی آن، دو دایره رسم می‌کنند که از دو رأس ثابت می‌گذرند و مرکزهایشان دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی است که بر ضلع

ثابت عمود باشد.



۵۸۰. دایرهٔ محاطی خارجی (I_a) از مثلث ABC، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را که مرکز آن نقطهٔ O است در D و I_aD دایرهٔ (O) را در E قطع می‌کند. نشان دهید که I_aE با قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است.

۵.۳.۵. زاویه

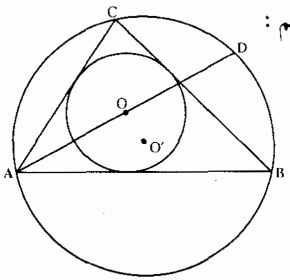


۵۸۱. ثابت کنید: $I\hat{I}_a X_a = \frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. I_a مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس ضلع a، X_a نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a و I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث است.

۵.۳.۶. پاره‌خط

۵.۳.۶.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۸۲. مثلث ABC در دایرهٔ به مرکز O' محاط و بر دایرهٔ به مرکز O محیط است. امتداد AO دایرهٔ بزرگتر را در نقطهٔ D قطع می‌کند. باید داشته باشیم:



الف. $CD = BD = O'D$

ب. $AO = CO = OD$

ج. $CD = CO = BD$

د. $CD = OD = BD$

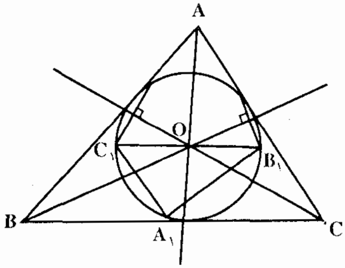
هـ. $O'B = O'C = OD$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۵۸۳. دایرهٔ محیطی هر مثلث خط‌المرکزین هر دو دایره از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث را نصف می‌کند.

۵ . ۳ . ۷ . خطهای: موازی، عمودبرهم، نیمساز، همرس، ...

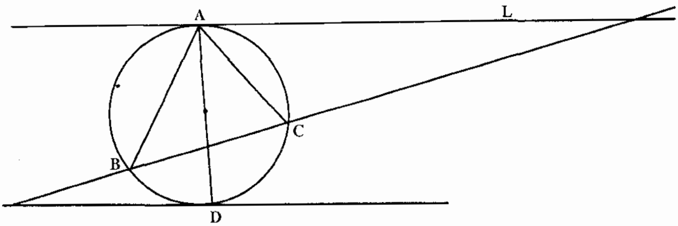
۵ . ۳ . ۷ . ۱ . خطها همرسند



۵۸۴. فرض کنید، A_1 نقطهٔ قرینهٔ محل تماس دایرهٔ محاطی مثلث ABC با ضلع BC نسبت به نیمساز زاویهٔ A باشد. نقطه‌های B_1 و C_1 به همین منوال تعیین می‌شوند. ثابت کنید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 و خطی که از مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث ABC می‌گذرد، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۵ . ۳ . ۷ . ۲ . خط مماس بر دایره است

۵۸۵. نیمساز ADی زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC، رسم شده است. در نقطهٔ A، مماس L را بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط راست رسم شده از D به موازات L، بر دایرهٔ محاطی مثلث ABCمماس است.



۵ . ۳ . ۸ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۶. مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث روی خط اولر مثلثی است که رأسهایش محل برخورد ضلعهای مثلث اصلی با دایرهٔ محاطی داخلی آن می‌باشد.

۵ . ۳ . ۹ . مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. الف. O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D را نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم $(D \neq A)$. ثابت کنید: $DB = DC = DO$.

ب. ثابت کنید، اگر ABCD، یک چهارضلعی محاطی باشد، آن وقت، نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1، بترتیب، مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC، رأسهای یک مستطیل هستند. المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۷۰

۵۸۸. طول ضلع BC از مثلث متغیر ABC و محل نقطه‌های I_b و I_c از آن مفروض است. نشان دهید که:

الف. رأس A روی یک خط راست حرکت می‌کند.

ب. راستاهای AB و AC ثابتند.

پ. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ثابت است.

ت. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی یک دایره حرکت می‌کند.

۵۸۹. ثابت کنید:

۱. مرکز دایره‌ای که از مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث می‌گذرد نقطهٔ برخورد سه شعاع دایره‌های مزبور است که از نقطه‌های تماس ضلعهای نظیر می‌گذرند.

۲. مرکز این دایره، قرینهٔ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی آن.

۳. شعاع این دایره، دو برابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

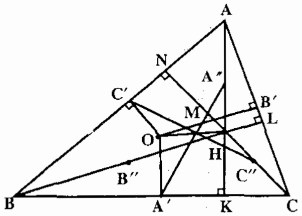
۵ . ۴ . دایره‌های نه نقطه، بروکارد، لوموان، ...

۵ . ۴ . ۱ . دایرهٔ نه نقطه

در این بخش دایره‌های مهم دیگر مربوط به مثلث را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نخست به بررسی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث می‌پردازیم.

۵ . ۴ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه

۵۹۰. **قضیه.** در مثلث ABC اگر O محل تلاقی سه عمود منصف ضلعها و H نقطهٔ برخورد ارتفاعها و A' ، B' و C' ، بترتیب، وسطهای ضلعهای BC، CA و AB، و A'' ، B'' و C'' ، بترتیب، وسطهای قطعه خطهای HA، HB و HC، و K، L و N پای ارتفاعها باشند، ثابت کنید:



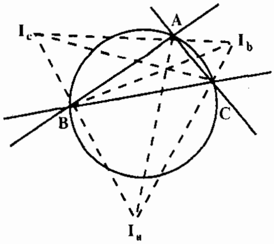
۱. طول قطعه خطهای OA' ، OB' و OC' ، بترتیب، مساوی با نصف طولهای HA، HB و HC می‌باشند.

۲. چهار پاره خط $A'A''$ ، $B'B''$ ، $C'C''$ و OH از نقطهٔ M که وسط هریک از آنهاست می‌گذرند.

۳. نقطهٔ M از نه نقطهٔ A' ، B' ، C' ، A'' ، B'' ، C'' ، K، L و N به یک فاصله است، یا به عبارت دیگر در هر مثلث، وسطهای ضلعها، پای ارتفاعها و وسطهای

پاره‌خطهایی که نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث را به رأسهای آن وصل می‌کنند، نه نقطه‌اند واقع بر یک دایره که ژان ویکتور پونسله آن را دایرهٔ نه‌نقطه نامیده است. این دایره را دایرهٔ اولر و برخی دایرهٔ فوئرباخ نیز می‌نامند.

۵ . ۴ . ۱ . ۲. شعاع



۵۹۱. اگر I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۵۹۲. از وسط هر ضلع یک مثلث خطی موازی با نیمساز خارجی زاویهٔ رو به روی آن ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید که دایرهٔ نه نقطهٔ مثلثی که از این سه خط تشکیل می شود، همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض است.

۵۹۳. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی، دایرهٔ نه‌نقطهٔ یکسانی دارند.

۵۹۴. شعاع دایره‌های محیطی چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی برابرند.

۵۹۵. مرکزهای دایره‌های محیطی یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، یک گروه نقطه‌های مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

۵۹۶. یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی و گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکزهای دایره‌های محیطی آنها، دایرهٔ نه نقطهٔ مشترکی دارند.

۵۹۷. چهار رأس یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی مفروض را می‌توان مرکزهای دایره‌های محیطی یک گروه مثلث مرکز ارتفاعی دیگر دانست.

۵۹۸. ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ یک مثلث، بر دایرهٔ محاطی مثلث و کلیهٔ دایره‌های محاطی خارجی آن مماس است. یعنی خط‌المرکزین دایرهٔ نه نقطه و هر یک از دایره‌های محاطی مثلث برابر است با تفاضل یا مجموع شعاعهای دایرهٔ نه نقطه و هریک از دایره‌های محاطی. (قضیهٔ فوئرباخ)

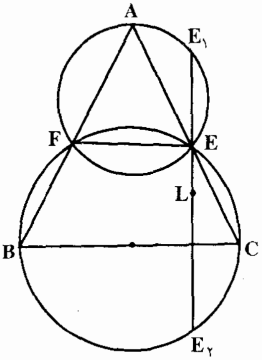
نکته. نقطهٔ تماس دایرهٔ نه نقطه و دایرهٔ محاطی درونی مثلث را نقطهٔ فوئرباخ می‌نامند.

۵ . ۴ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۵ . ۴ـ ۱ . ۳ . ۱. نقطه روی دایره

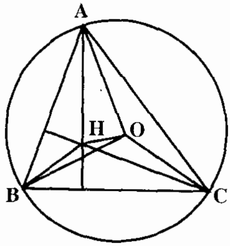
۵۹۹. در حالت کلی، هر مثلث و دایرهٔ نه نقطه‌اش چند نقطهٔ مشترک دارند؟

۶۰۰. بیشترین و کمترین تعداد نقطه‌هایی را که مثلث و دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ممکن است مشترک داشته باشند، به‌دست دهید.



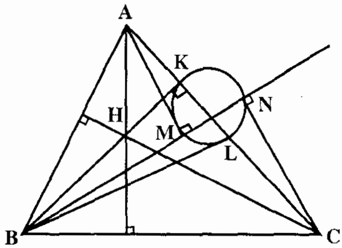
۶۰۱. ضلع BC از مثلث ABC قطر دایرهٔ (BC) است و این دایره ضلعهای CA و AB را بترتیب در E و F قطع می‌کند. دایره‌های (BC) و (AEF) روی هر خطی که از E (یا F) می‌گذرد یک وتر مضاعف جدا می‌کنند. نشان دهید که وسط این وتر روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۶۰۲. نشان دهید که خطهای اویلر سه مثلثی که از یک مثلث مفروض، توسط ضلعهای مثلث پادک آن، جدا می‌شوند، یک نقطهٔ مشترک دارند و این نقطه روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض قرار دارد.



۶۰۳. اگر O و H، بترتیب، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید که دایره‌های نه نقطهٔ سه مثلث OHA، OHB و OHC دو نقطهٔ مشترک دارند.

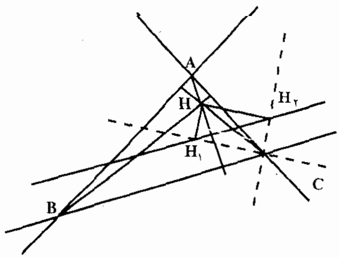
۵.۴.۱.۳.۲. نقطه‌های همدایره



۶۰۴. در مثلث ABC، BK ارتفاع رسم شده از رأس B بر ضلع AC، و BL میانهٔ رسم شده از همان رأس است، و M و N تصویر نقطه‌های A و C روی نیمساز زاویهٔ B هستند. ثابت کنید که نقطه‌های K، L، M و N همگی بر دایره‌ای که مرکزش بر دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد، واقعند.

۶۰۵. دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث از مرکز ۲۴ دایره‌ای که مستقیماً در ارتباط با مثلث وجود دارند، می‌گذرد.

۵.۴.۱.۳.۳. نقطه‌های همخط

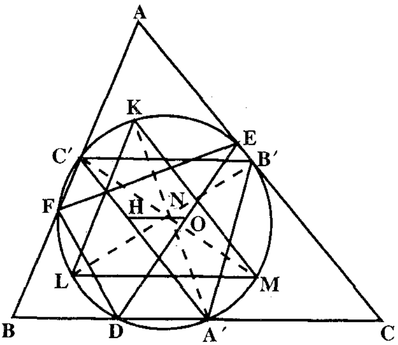


۶۰۶. تصویرهای محل برخورد ارتفاعهای مثلث روی نیمسازهای یک زاویهٔ داخلی و خارجی نظیر آن، روی خطی که وسط ضلع مقابل به آن زاویه را به مرکز دایرهٔ نه نقطه وصل می‌کند، قرار دارد.

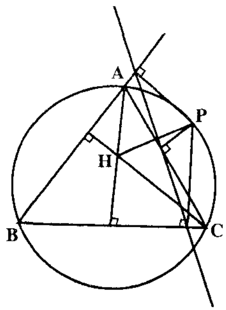
۶۰۷. نشان دهید که پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث، وسط پاره‌خطی روی قطر دایرهٔ محیطی که بین این ضلع و رأس مقابل آن است، و مرکز دایرهٔ نه نقطه، همخطند.

۴.۱.۴.۵. کمان

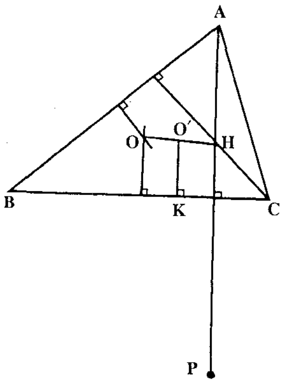
۶۰۸. ثابت کنید که روی دایرهٔ نه نقطه، سه نقطهٔ K، L و M، بترتیب، در وسطهای کمانهای $\widehat{DE}$، $\widehat{EF}$ و $\widehat{FD}$ واقعند.



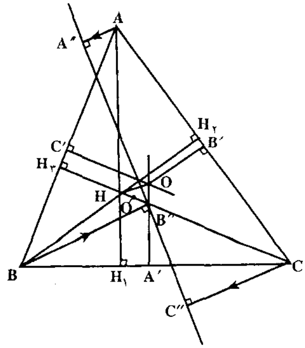
۵.۱.۴.۵. پاره‌خط



۶۰۹. نقطهٔ P را روی دایرهٔ محیطی مثلثی درنظر می‌گیریم و خط سیمسون آن را برای مثلث به‌دست می‌آوریم. ثابت کنید که این خط پاره‌خطی را که نقطهٔ P را به محل برخورد ارتفاعهای مثلث وصل می‌کند، نصف می‌نماید.

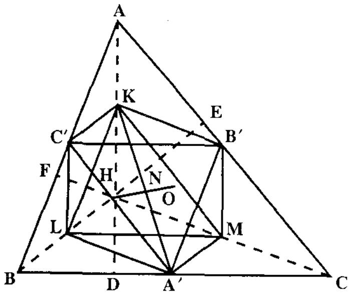


۶۱۰. اگر P نقطهٔ متقارن رأس A نسبت به ضلع مقابل این رأس، یعنی BC باشد، نشان دهید که اندازهٔ HP چهار برابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ نه نقطه از ضلع BC است.



۶۱۱. ثابت کنید، مجموع جبری فاصله‌های چهار نقطهٔ A، B، C و H از هر خط که از مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این گروه عبور کند، برابر صفر است.

۶.۱.۴.۵. زاویه

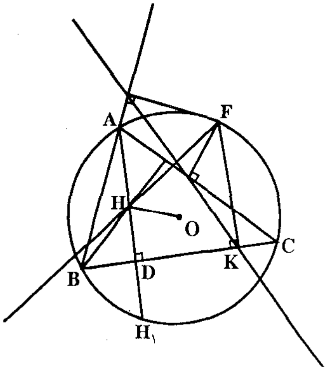


۶۱۲. ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، ضلعهای آن را تحت زاویه‌های $|\hat{B}-\hat{C}|$، $|\hat{C}-\hat{A}|$ و $|\hat{A}-\hat{B}|$ قطع می‌کند.

۷.۱.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۷.۱.۴.۵. خطها بر هم عمودند

۶۱۳. روی دایرهٔ محیطی مثلث، دو نقطهٔ واقع بر دو سر یک قطر را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که خطهای سمسن نظیر این دو نقطهٔ بر هم عمودند و یکدیگر را روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث تلاقی می‌کنند.



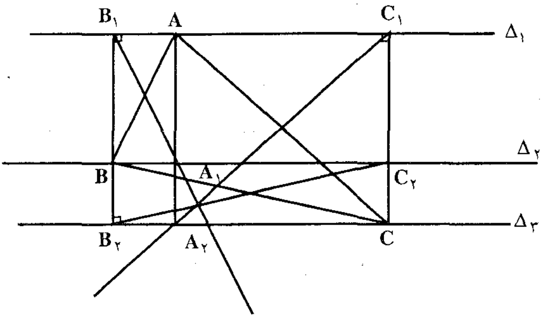
۲.۷.۱.۴.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۱۴. فرض کنید، H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای یک مثلث و F نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیطی آن باشد. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر نقطهٔ F، از یکی از نقطه‌های برخورد خط FH و دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث می‌گذرد.

۳.۷.۱.۴.۵. خطها همرسند

۶۱۵. فرض کنید، l معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد، و فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 تصویر نقطه‌های A، B و C روی l باشند. سه خط راست رسم شده‌اند : از A_1 یک خط عمود بر BC، از B_1 یک خط عمود بر AC و از C_1 یک خط عمود بر AB، ثابت کنید که این سه خط در یک نقطه، روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC، به هم می‌رسند.

۶۱۶. از رأسهای مثلث ABC سه خط موازی با امتداد دلخواه رسم می‌کنیم و از این رأسها بر این خطها عمودهایی فرود می‌آوریم. سه مستطیل به‌وجود می‌آید که ضلعهای BC، AC و AB قطرهای آنها هستند. ثابت کنید، سه قطر دیگر این سه مستطیل یکدیگر را روی دایرهٔ نه نقطه مثلث قطع می‌کنند.



۶۱۷. از رأسهای یک مثلث مفروض متقارنهای ضلعهای متناظر مثلث پاد مکمل نسبت به یک راستای مفروض رسم شده‌اند. نشان دهید، سه خطی که به این ترتیب به‌دست می‌آیند، روی نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این گزاره را نسبت به مثلث میانک و دایرهٔ نه نقطه بیان کنید.

۶۱۸. خطهای سیمسون نظیر دو سر قطر OI (O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و I مرکز دایرهٔ محاطی آن است) در نقطهٔ فوئرباخ متقاطعند.

۴.۷.۱.۴.۵. خطها پادموازی‌اند

۶۱۹. ثابت کنید، خطی که در وسط یک ضلع مثلثی داده شده بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث مماس است و ضلع درنظر گرفته شده، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث پادموازی‌اند.

۸.۱.۴.۵. شکلهای ایجاد شده

۶۲۰. چهار مرکز سه مماس، یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

۶۲۱. هر مثلث و دایرهٔ محیطی آن، بترتیب، مثلث پادک و دایرهٔ نه نقطهٔ گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکزهای سه مماس مثلث مفروض هستند.

نکته ۱. می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ ویژگیهای یک گروه نقطه‌های مرکز ارتفاعی را می‌توان به مرکزهای دایره‌های محاطی یک مثلث نیز نسبت داد. به این ترتیب یک دسته گزاره به‌دست می‌آوریم که گزاره‌های زیر نمونه‌ای از آنها هستند.

الف. شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن هر سه‌تایی از چهار مرکز سه مماس مثلث مفروضی باشند، با قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث مفروض برابر است.

ب. نقطهٔ متقارن هر مرکز سه مماس یک مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی آن مثلث، مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی است که رأسهای آن سه مرکز سه مماس دیگر مثلث مفروض هستند.

ج. مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلثی که توسط چهار مرکز سه مماس یک مثلث مفروض تعیین می‌شوند، مرکزهای سه مماس مثلث متقارن با مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث، هستند.

۹.۱.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۲۲. هر مثلث چند :

a. دایرهٔ نه نقطه

b. خط اولر

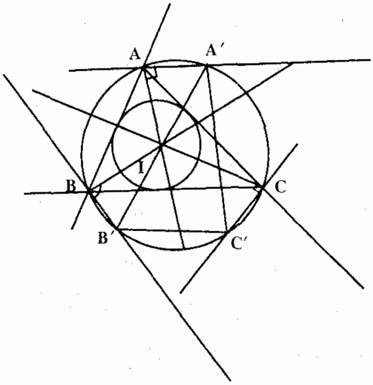
c. نقطهٔ میکوئل دارد؟

۶۲۳. اگر نقطهٔ دلخواه P واقع بر OI (O مرکز دایرهٔ محیطی و I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC می‌باشند) را روی ضلعهای مثلث ABC در نقطه‌های S، R و Q تصویر کنیم. ثابت کنید، دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ Q، R و S از نقطهٔ فوئرباخ می‌گذرد.

۶۲۴. اگر مثلث متغیری قاعدهٔ ثابت داشته باشد و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی آن نیز ثابت باشد، نشان دهید که دایرهٔ نه نقطهٔ آن بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

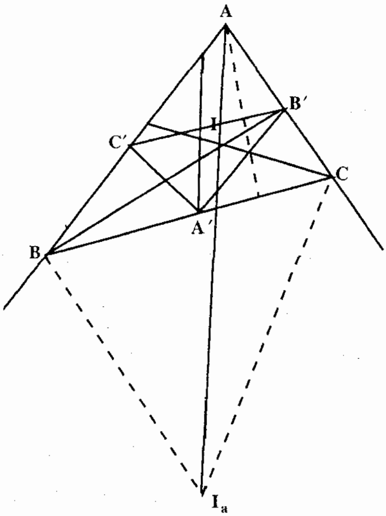
۶۲۵. مثلث متغیری یک رأس ثابت و دایرهٔ نه نقطهٔ ثابت دارد. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی این مثلث یک دایره است.

۶۲۶. مرکز ارتفاعی، نقطهٔ وسط قاعده و راستای قاعدهٔ مثلث متغیری ثابت است. مکان هندسی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این مثلث را بیابید.



۶۲۷. مثلث متغیر ABC دارای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محیطی ثابتی است. نشان دهید که مثلث $A'B'C'$ که رأسهای آن نقطه‌های برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC و دایرهٔ محیطی ABC هستند، دارای مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ ثابتی است.

۶۲۸. نشان دهید که مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث IBC روی نیمساز داخلی زاویهٔ A' از مثلث $A'B'C'$، یعنی مثلث مکمل مثلث مفروض ABC قرار دارد. گزاره‌های مشابهی را در مورد مثلثهای I_aBC ، I_bBC و I_cBC بیان و آنها را ثابت کنید. (I، I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی درونی و برونی مثلث ABC می‌باشند.)



۶۲۹. ثابت کنید، قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث نسبت به یک ضلع بر قرینهٔ رأس مقابل به این ضلع نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطه منطبق است.

۵.۴.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۶۳۰. در مثلث متغیر ABC قاعدهٔ BC و A، زاویهٔ روبه‌روی قاعده ثابتند. نشان دهید که :

الف. خط $B'Q$ راستای ثابتی دارد ؛
ب. دایرهٔ نه نقطه بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۶۳۱. یک رأس مثلثی متغیری که در دایرهٔ ثابتی محاط است، ثابت است و ضلع مقابل آن رأس از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.
الف. نشان دهید که مرکز ارتفاعی یک دایره را می‌پیماید.
ب. نشان دهید که دایرهٔ نه نقطهٔ بر دو دایرهٔ ثابت هم‌مرکز مماس است.

۶۳۲. ثابت کنید خطهایی که از نقطه‌های اولر، بترتیب، موازی نیمسازهای داخلی یک مثلث رسم می‌شوند، در یک نقطه همرسند و خطی که نقطهٔ مشترک آنها را به مرکز دایرهٔ نه‌ـنقطهٔ مثلث وصل می‌کند، موازی خطی است که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را به مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن وصل می‌کند. نظیر این قضیه‌ها را برای نیمساز زاویه‌های داخلی و نیمساز زاویه‌های خارجی شرح داده، اثبات کنید (نقطهٔ اولر وسط پاره‌خط محدود به محل تلاقی ارتفاعها و رأس است).

۲.۴.۵. دایرهٔ بروکارد

۱.۲.۴.۵. تعریف و قضیه

نقطه‌های بروکارد

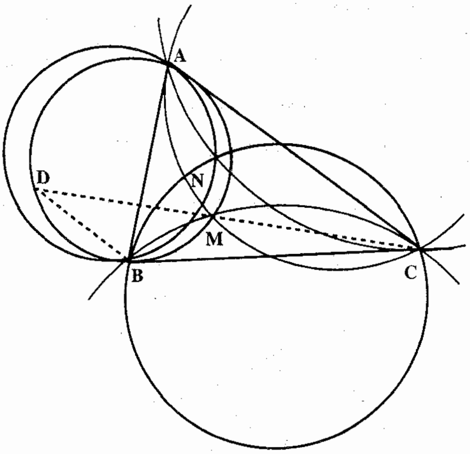
تعریف. دایرهٔ (AB) را که از رأسهای A و B از مثلث ABC می‌گذرد و در B بر ضلع BC مماس است، درنظر بگیرید. همچنین می‌توان دایرهٔ (BC) را که از B و C می‌گذرد و در C بر AC مماس است، و دایرهٔ (CA) را که از C و A می‌گذرد و در A بر AB مماس است، درنظر گرفت. این دایره‌ها را گروه مستقیم دایره‌های الحاقی می‌نامیم.

اگر رأسهای A، B و C را دو تا دو تا در جایگشت دایره‌ای BAC درنظر بگیریم، گروه غیرمستقیم دایره‌های الحاقی (BA)، (AC) و (CB) را به‌دست می‌آوریم. دایرهٔ (BA) دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد و در A بر ضلع AC مماس است ؛ برای دو دایرهٔ دیگر نیز تعریف مشابهی وجود دارد. (هنری بروکارد Henri Brocard (۱۸۴۵ـ۱۹۲۲) ریاضیدان فرانسوی این قضیه را در حدود سال ۱۸۷۵ اثبات کرده است.)

۶۳۳. قضیه. سه دایرهٔ الحاقی گروه مستقیم، یک نقطهٔ مشترک دارند.

۶۳۴. قضیه. سه دایرهٔ الحاقی گروه غیرمستقیم، یک نقطهٔ مشترک، مانند N دارند.

۶۳۵. تعریف. دو نقطهٔ M و N در قضیه‌های قبلی را نقطه‌های بروکار مثلث می‌نامند. این نقطه‌ها را معمولاً با Ω و Ω' نشان می‌دهند.

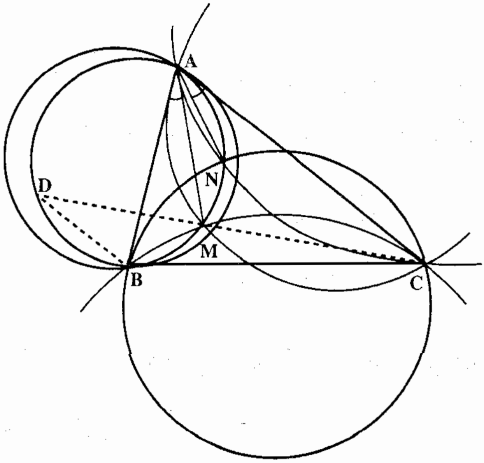


قضیه. ثابت کنید :

الف. $M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A$ ، ونقطهٔ M تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد.

ب. $N\hat{A}C = N\hat{C}B = N\hat{B}A$ ، و نقطهٔ N تنها نقطه‌ای است که این ویژگی را دارد.

۶۳۶. قضیه. نقطه‌های بروکار، دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث هستند.



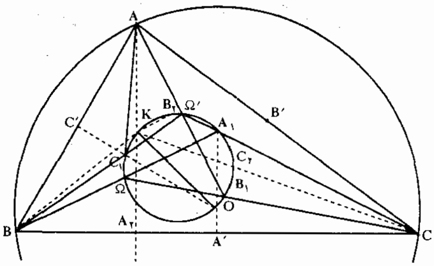
۶۳۷. قضیه. نقطه‌های برخورد دایرهٔ محیطی یک مثلث با خطهایی که از رأسهای مثلث به یک نقطهٔ بروکار رسم می‌شوند، رأسهای مثلثی همنهشت با مثلث مفروض هستند.

دایرهٔ بروکار

۶۳۸. **تعریف.** دایرهٔ (OK) که پاره‌خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی O و نقطهٔ لوموان K از مثلث ABC قطر آن است، دایرهٔ بروکار ABC نامیده می‌شود (شکل).

عمودمنصفهای اضلاع BC، CA و AB دایرهٔ بروکار (OK) را در رأسهای A_1، B_1 و C_1 از مثلث اوّل بروکار برای مثلث ABC قطع می‌کنند.

میانه‌های AK، BK و CK از مثلث ABC دایرهٔ (OK) را در A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند، که مثلث $A_2B_2C_2$ مثلث دوم بروکار برای مثلث ABC است.



قضیه. نقطه‌های بروکار یک مثلث روی دایرهٔ بروکار آن مثلث قرار دارد.

۶۳۹. **قضیه.** خطهایی که از رأسهای یک مثلث به موازات ضلعهای متناظر مثلث اوّل بروکار رسم می‌شوند، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۶۴۰. **قضیه.** خطهایی که از رأسهای یک مثلث بر ضلعهای متناظر مثلث اوّل بروکار عمود می‌شوند، از یک نقطه می‌گذرند.

۶۴۱. **قضیه.** دایرهٔ محیطی مثلث روی میانه‌های متقارن (امتداد داده شده) مثلث پاره‌خطهایی جدا می‌کند، که نقطه‌های وسط آنها رأسهای مثلث دوم بروکار هستند.

۲.۲.۴.۵. نقطه و دایره

۶۴۲. چهار نقطهٔ مهم واقع بر دایرهٔ بروکارد را نام ببرید.

۳.۲.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم،...

۱.۳.۲.۴.۵. خطها موازی اند

۶۴۳. نشان دهید که خط سیمسون یک نقطهٔ برخورد قطر بروکار و دایرهٔ محیطی مثلث، با نیمساز زاویهٔ متشکل از یک ضلع مثلث و ضلع متناظر مثلث اوّل بروکار، یا موازی است یا بر آن عمود است.

۵.۴.۲.۳.۲. خطها همرسند

۶۴۴. نشان دهید، خطهایی که رأسهای متناظر دو مثلث بروکار مثلث مفروض را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در مرکز ثقل مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۵.۴.۲.۴. سایر مسألههای مربوط به این قسمت

۶۴۵. آیا نقطهٔ بروکارد، همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد؟

۵.۴.۳. دایره لوموان

۵.۴.۳.۱. تعریف و قضیه

تعریف. نقطهٔ همرسی میانه‌های متقارن هر مثلث (شبه میانه‌های مثلث) را نقطهٔ لوموان Lemoine آن مثلث می‌نامند.

نکته. در هر مثلث مرکز ثقل و نقطهٔ لوموان دو نقطهٔ مزدوج همزاویه نسبت به مثلث هستند.

دایرهٔ لوموان

۶۴۶. **قضیه.** خطهایی که از نقطهٔ لوموان یک مثلث موازی با ضلعهای مثلث رسم می‌شوند، ضلعهای مثلث را در شش نقطهٔ همدایره قطع می‌کنند.

۶۴۷. **قضیه.** مرکز دایرهٔ اوّل لوموان مثلث نقطهٔ وسط پاره‌خطی است که مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان مثلث را به هم وصل می‌کند.

۶۴۸. **قضیه.** سه خط پاد موازی با ضلعهای یک مثلث که از نقطهٔ لوموان می‌گذرند، روی جفت ضلعهای غیرمتناظرشان شش نقطه تعیین می‌کنند؛ این شش نقطه روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش نقطهٔ لوموان است.

۶۴۹. **قضیه.** پاره‌خطهایی که دایرهٔ دوم لوموان روی ضلعهای یک مثلث جدا می‌کنند با کسینوسهای زاویه‌های مقابل ضلعها متناسبند.

۶۵۰. دایرهٔ اوّل لوموان، دایرهٔ دوم لوموان را نصف می‌کند.

نکته. دو دایره‌ای که اکنون به‌نام دایره‌های لوموان نامیده می‌شوند، حالتهای خاص گروه دایره‌های توکر Tucker می‌باشند که درسال ۱۸۷۳ توسط لوموان در کنگرهٔ لیون معرفی گردیدند.

۶۵۱. دایرهٔ بروکارد با دایرهٔ اوّل لوموان مثلث، هم مرکز است.

۲.۳.۴.۵. نقطه و دایره

۱.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همدایره

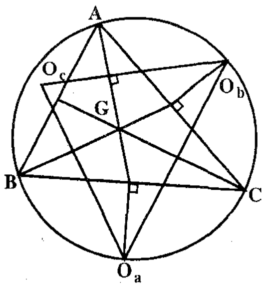
۶۵۲. خطی که از نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC می‌گذرد، ضلعهای BC و BA را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند، به‌طوری که DK=KE، و Q نقطهٔ دوم برخورد دایرهٔ محیطی مثلث DBE با دایره‌ای است که AB قطر آن است. ثابت کنید که نقطه‌های B، C، Q و یکی از نقطه‌های بروکار مثلث ABC همدایره‌اند.

۲.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همخط

۶۵۳. نشان دهید که مزدوج همزاویهٔ نقطهٔ ناگل با مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی همخط است.

۳.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های دیگر

۶۵۴. نقطهٔ همنوای مرکز ارتفاعی مثلث، نقطهٔ لوموان مثلث پادمکمل است.



۶۵۵. اگر O و G مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل مثلث ABC، و O_a، O_b و O_c مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای GBC، GCA و GAB باشند، نشان دهید که نقطه‌های O و G، بترتیب، مرکز ثقل و نقطهٔ لوموان مثلث $O_aO_bO_c$ هستند.

۶۵۶. DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC، و X، Y و Z تصویرهای نقطهٔ لوموان K روی ضلعهای BC، CA، و AB، و X'، Y' و Z' متقارنهای X، Y و Z نسبت به K هستند، نشان دهید که X'، Y' و Z' نقطه‌های لوموان مثلثهای AEF، BFD و CDE هستند.

۶۵۷. از رأسهای یک مثلث عمودهایی بر میانه‌ها رسم می‌کنیم، نشان دهید نقطهٔ لوموان مثلث تشکیل شده بر مرکز ثقل مثلث مفروض منطبق است.

۶۵۸. نشان دهید که مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، مرکز ثقل مثلث پادپادک نقطهٔ لوموان مثلث مفروض است.

۶۵۹. نشان دهید که نقطهٔ لوموان و مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث، نقطهٔ اشتاینر و نقطهٔ تاری مثلث اول بروکار هستند.

۳.۳.۴.۵. پاره‌خط

۶۶۰. نشان دهید، پاره‌خطهای واصل بین نقطهٔ لوموان و رأسهای مثلث اوّل بروکار توسط میانه‌های متناظر مثلث مفروض نصف می‌شوند.

۴.۳.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم،...

۱.۴.۳.۴.۵. خطها همرسند

۶۶۱. مثلث ABC مفروض است، نشان دهید که سه مثلث A′BC ، B′CA و C′BA وجود دارند، به‌طوری که هر کدام یک ضلع مشترک با مثلث ABC دارند و نقطهٔ لوموان آنها همان نقطهٔ لوموان K از مثلث ABC است. ثابت کنید که خطهای AA′ ، BB′ و CC′ همرسند.

۲.۴.۳.۴.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

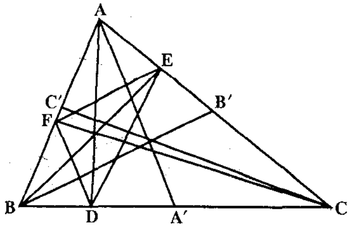
۶۶۲. خطهایی که از نقطه‌های بروکار مثلث ABC به رأسهای آن وصل می‌شوند، دایرهٔ محیطی را در A′ ، A″ ، B′ ، B″ ، C′ و C″ قطع می‌کنند، و K، K′ و K″ نقطه‌های لوموان مثلثهای ABC، A′B′C′ و A″B″C″ هستند. ثابت کنید که خطهای KK′ و KK″ هر کدام از یک نقطهٔ بروکار مثلث ABC می‌گذرند.

۵.۳.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۶۳. دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز ثقل مثلث یک دایره است.

۶۶۴. دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی نقطهٔ لوموان مثلث یک دایره است.

۶۶۵. اگر DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC باشد، نشان دهید که نقطه‌های لوموان مثلثهای AEF، BFD و CDE روی میانه‌های ABC قرار دارند.



۶.۳.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۶. نشان دهید که :

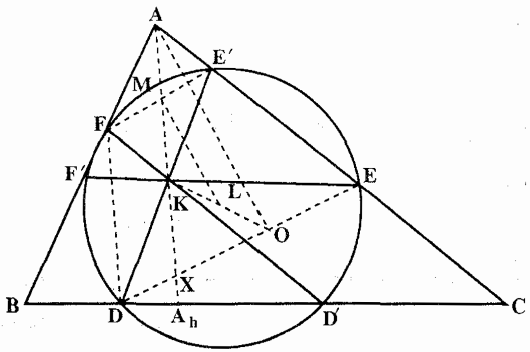
الف. خط واصل بین نقطهٔ لوموان و مرکز ارتفاعی مثلث از نقطهٔ لوموانِ مثلث ارتفاعی آن مثلث نیز می‌گذرد ؛

ب. در یک گروه مرکز ارتفاعی، چهار خطی که هر کدام از نقطهٔ لوموان و مرکز ارتفاعی یک مثلث می‌گذرد، همرسند.

۶۶۷. نشان دهید، در هر مثلث خطی که از نقطهٔ لوموان K به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ O' ، وصل می‌شود از مرکز دایرهٔ بروکار مثلث پاد مکمل، Z' ، می‌گذرد و $KO' = O'Z'$.

۶۶۸. نشان دهید که مرکز دایرهٔ محیطی O در مثلث ABC، نقطهٔ لوموان K_1 مثلث میانک $A_1B_1C_1$ و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث پاد مکمل $A'B'C'$ ، نقطهٔ Z' ، همخطند، و $OK_1 = K_1Z'$.

۶۶۹. K نقطهٔ لوموان مثلث ABC، O مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث است. خطهای DE' ، FD' و EF' از نقطهٔ K موازی ضلعهای مثلث رسم شده‌اند و انتهای این شش پاره‌خط روی دایرهٔ اوّل لوموان قرار دارند :



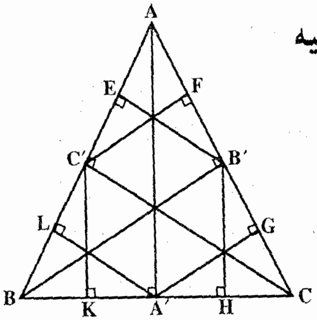
۱. نشان دهید که پاره‌خطهای $E'F$ ، $F'D$ و $D'E$ برابرند.

۲. نشان دهید که اگر خطهای $E'F$ ، $F'D$ و $D'E$ را امتداد دهیم، مثلثی تشکیل می‌شود، که دایرهٔ محاطی داخلی‌اش بر دایرهٔ اول لوموان مثلث ABC منطبق و با دایرهٔ نه نقطهٔ آن برابر است.

۳. نشان دهید که مجموع مساحتهای $AE'F$ ، $BF'D$ و $CD'E$ با مساحت DEF برابر است.

۴.۴.۵. دایرهٔ تیلور

۱.۴.۴.۵. تعریف و قضیه



۶۷۰. قضیه. ثابت کنید که تصویرهای پای ارتفاعهای مثلث روی ضلعهای مثلث، شش نقطه‌اند واقع بر محیط یک دایره. (دایرهٔ تیلور)

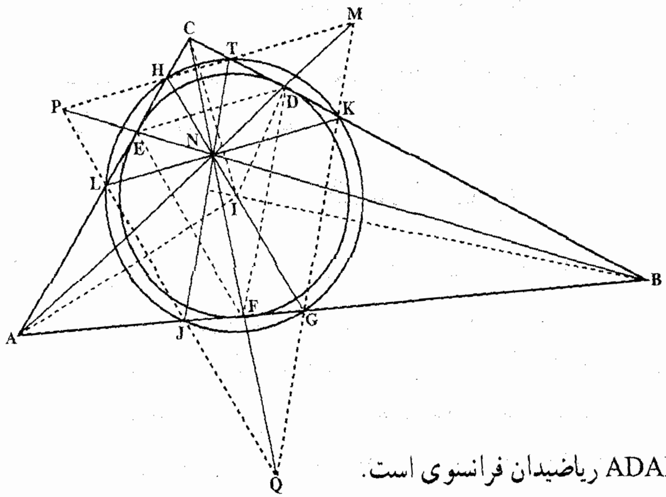
تیلور

بروک تیلور Bruk Taylor (۱۷۳۱ـ۱۶۸۵) ریاضیدان انگلیسی بیشتر شهرتش به‌خاطر روش او در بسط توابع به‌صورت رشته‌های نامتناهی است. او کتابی در مورد مناظر و مرایای خطی نیز دارد.

۵.۴.۵. دایرهٔ آدامس

۱.۵.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۱. دایرهٔ آدامس. (Cercle d’ Adams) اگر از نقطهٔ ژرگون N در مثلث ABC، عمودهایی بر نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث رسم کنید، شش نقطهٔ حاصل روی محیط مثلث ABC، روی یک دایره‌اند که مرکز این دایره نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC است.

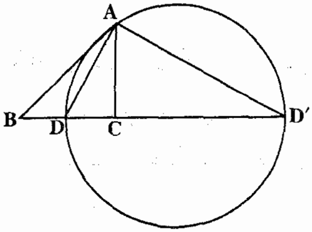


آدامس

آدامس ADAMS ریاضیدان فرانسوی است.

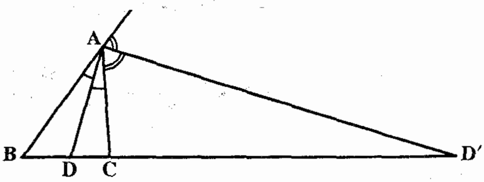
۵.۴.۶. دایرهٔ آپولونیوس

۵.۴.۶.۱. تعریف و قضیه



تعریف. نیمسازهای درونی و برونی زاویهٔ A از مثلث ABC ضلع BC را در دو نقطهٔ D و ′D قطع می‌کنند. دایرهٔ به قطر ′DD ، یک دایرهٔ آپولونیوسی مثلث ABC نامیده می‌شود. هر مثلث مختلف‌الاضلاع سه دایرهٔ آپولونیوسی دارد. مثلث متساوی‌الساقین دو دایرهٔ آپولونیوسی دارد و مثلث متساوی الاضلاع دایرهٔ آپولونیوسی ندارد، مگر آن که خط را به‌عنوان دایرهٔ به شعاع بی‌نهایت بزرگ بپذیریم.

۶۷۲. قضیه. دایرهٔ بروکار یک مثلث بر دایره‌های آپولونیوسی آن عمود است.



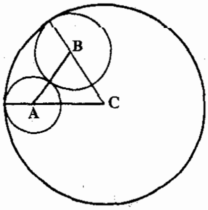
۶۷۳. در مثلث ABC، رأسهای B و C ثابت و نقطهٔ D پای نیمساز داخلی زاویهٔ A است. ثابت کنید، نقطهٔ ′D پای نیمساز خارجی زاویهٔ A وقتی رأس A حرکت کند، ثابت می‌ماند.

۵.۵. دایره‌های دیگرو مثلث

۵.۵.۱. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره‌های دیگری غیر از دایره‌های محیطی و محاطی مثلث و دایره‌های ویژه مانند دایرهٔ نه نقطه، دایرهٔ لوموان و... را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۵.۵.۲. شعاع

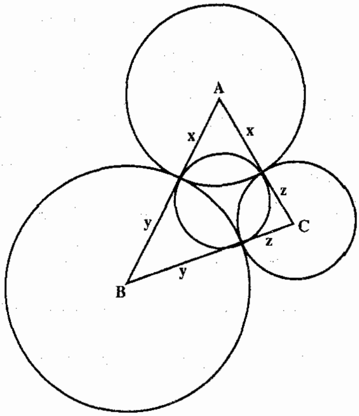


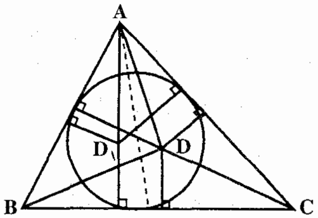
۶۷۴. ضلعهای مثلثی برابر ۶ سانتیمتر و ۷ سانتیمتر و ۹ سانتیمتر است. دایره‌هایی به مرکزهای هر یک از رأسهای مثلث رسم کرده‌ایم، به‌طوری که دایره‌هایی که به مرکزهای دو انتهای ضلع کوچکتر رسم کرده‌ایم، با یکدیگر مماس خارج بوده و نسبت به دایرهٔ سوم مماس داخل باشند. مطلوب است، محاسبهٔ شعاع هر یک از سه دایره.

۶۷۵. در مثلث ABC، به مرکزهای A، B و C سه دایره چنان رسم شده‌اند که دو به دو بر یکدیگر مماس خارجند. ثابت کنید، شعاعهای این دایره‌ها برابرند با:

$P-a$ و $P-b$ و $P-c$

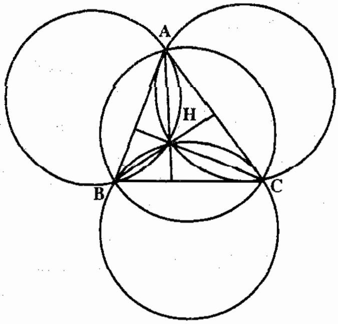
که در آن P نصف محیط مثلث است.





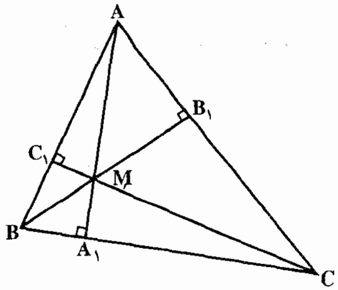
۶۷۶. مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه D در صفحه داده شده است. مثلث تشکیل شده با پای عمودهای وارد از نقطهٔ D بر ضلعهای مثلث ABC، مثلث پایی نقطهٔ D نسبت به مثلث ABC، و دایرهٔ محیطی مثلث پایی، دایرهٔ پایی نامیده می‌شوند. فرض کنید، D_1 معرف نقطهٔ برخورد خطهای قرینهٔ خطهای AD، BD و CD، بترتیب، نسبت به نیمساز زاویه‌های A، B و Cی مثلث ABC، باشد. ثابت کنید که دایره‌های پایی نقطه‌های D و D_1 بر هم منطبقند.

۶۷۷. شعاع دایرهٔ محیطی هر چهار مثلثی که از چهار نقطهٔ A، B، C و H (H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث) می‌گذرند، با هم برابر است.



۳.۵.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۵.۵. نقطه درون دایره

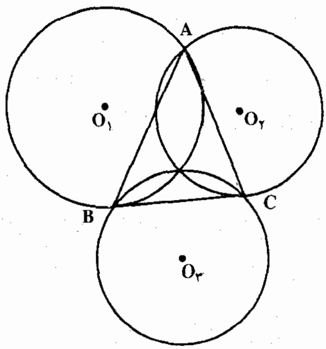


۶۷۸. A_1 ، B_1 و C_1 را بترتیب پای ارتفاعهای وارد از رأسهای A، B و C در مثلث ABC، و M را مرکز ارتفاعی مثلث می‌گیریم. فرض کنید مثلث ارتفاعی (پادک) $A_1B_1C_1$ وجود دارد. ثابت کنید : هر یک از نقطه‌های M، A، B و C مرکز دایره‌ای است که بر سه ضلع مثلث $A_1B_1C_1$ (یا در صورت لزوم، بر امتداد آنها) مماس است. اگر یکی از زاویه‌های مثلث ABC منفرجه باشد، چه تفاوتی با حالتی دارد که هر سه زاویهٔ مثلث حاده‌اند.

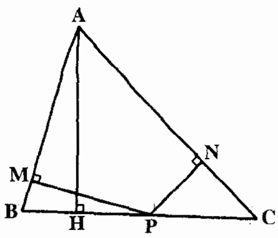
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۹

۲.۳.۵.۵. نقطه روی دایره

۶۷۹. از رأسهای (B و A)، (C و B) و (A و C) از مثلث ABC دایره‌هایی می‌گذرد که کمانهای واقع در داخل مثلث مجموعاً ۱۸۰ درجه است. ثابت کنید، این سه دایره از یک نقطه می‌گذرند.



۳.۳.۵.۵. نقطه‌های همدایره



۶۸۰. مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از آن درنظر گرفته، تصویرهای P روی AB و AC را بترتیب M و N و پای ارتفاع نظیر رأس A را H می‌نامیم. ثابت کنید، نقطه‌های A، M، H، P و N روی یک دایره هستند.

۶۸۱. سه خط راست، موازی ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. هر یک از این خطهای راست، از ضلعی که با آن موازی است، به فاصله‌ای برابر طول همان ضلع قرار دارد. درضمن، برای هر ضلع مثلث، خط راست موازی با آن و رأس مقابل به این ضلع، در دو طرف مختلف ضلع قرار گرفته‌اند. ضلعهای مثلث را امتداد داده‌ایم تا سه خط راستی را که رسم کرده‌ایم، قطع کنند. ثابت کنید، این نقطه‌های برخورد، روی محیط یک دایره واقعند.

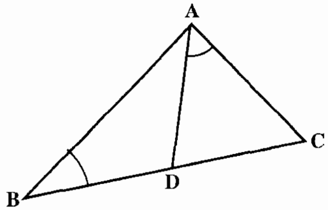
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

۴.۳.۵.۵. نقطه‌های همخط

۶۸۲. اگر سه دایره، از یک نقطه واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث حاصل از مرکزهای آن سه دایره مرور کند، این دایره‌ها دو به دو یکدیگر را در سه نقطه واقع بر یک خط راست قطع می کنند.

۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. اندازهٔ زاویه



۶۸۳. در مثلث ABC، میانهٔ AD رسم شده و $D\hat{A}C + A\hat{B}C = 90^\circ$. اگر $|AB| \neq |AC|$، $B\hat{A}C$ را پیدا کنید.

۶۸۴. در مثلث ABC، $\hat{C} = \theta$ ، $\hat{B} = 2\theta$ و $0^\circ < \theta < 60^\circ$. دایره به مرکز A و به شعاع AB با AC در D و با BC، یا با امتداد آن، در B و E برخورد می کند (E ممکن است بر B منطبق باشد). در این صورت چه موقع EC=AD؟

الف. به‌ازای هیچ مقدار θ

ب. فقط وقتی که $\theta = 45^\circ$

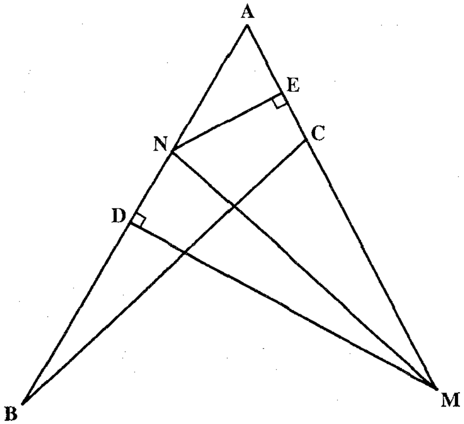
ج. فقط وقتی که $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$

د. فقط وقتی که $45^\circ \leq \theta < 60^\circ$

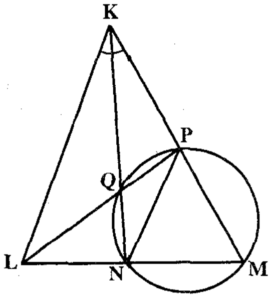
هـ. به‌ازای هر مقدار θ با شرط $0^\circ < \theta < 60^\circ$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

۶۸۵. در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع AB، خط AC را در M، و عمودمنصف ضلع AC، خط AB را در N قطع می‌کند. می‌دانیم که MN=BC و خط MN بر خط BC عمود است. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را تعیین کنید.

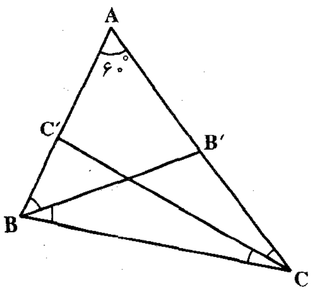


۶۸۶. در مثلث KLM، دو نیمساز KN و LP که یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع می‌کند، رسم شده‌اند. پاره‌خط PN طولی برابر ۱ دارد و رأس M، بر دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های N، P و Q می‌گذرد. طول ضلعها و اندازهٔ زاویه‌های مثلث PNQ را پیدا کنید.



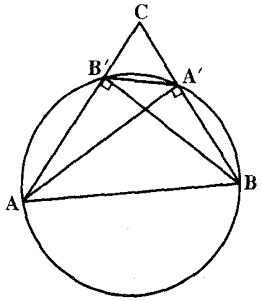
۲.۴.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۸۷. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A} = 60°$ است. خطهای BB' و CC' نیمسازهای دو زاویهٔ B و C را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، این نیمسازها با ضلعهای AC و AB زاویه‌های مساوی می‌سازند.



۵.۵.۵. پاره‌خط

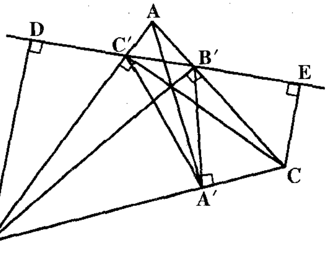
۱.۵.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط



۶۸۸. اگر AA' و BB' دو ارتفاع از یک مثلث باشند، در صورتی که نقطه‌های A و B ثابت باشند ولی رأس C طوری تغییر کند که زاویهٔ ACB ثابت باشد، ثابت کنید که طول پاره‌خط $A'B'$ ثابت می‌ماند.

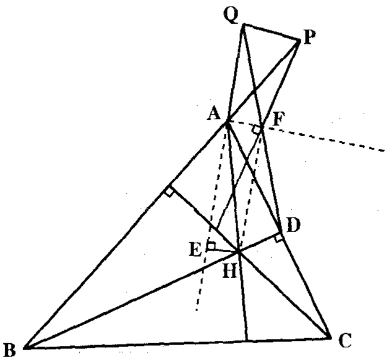
۲.۵.۵.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶۸۹. در مثلث ABC اگر A' ، B' و C' پای ارتفاعها باشند و از رأسهای B و C عمودهای BD و CE را بر خط $B'C'$ فرود آوریم، ثابت کنید: $DE = A'B' + A'C'$ و $DC' = B'E$.



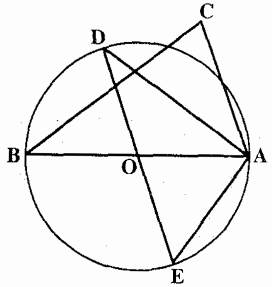
۶.۵.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۶.۵.۵. خطها بر هم عمودند



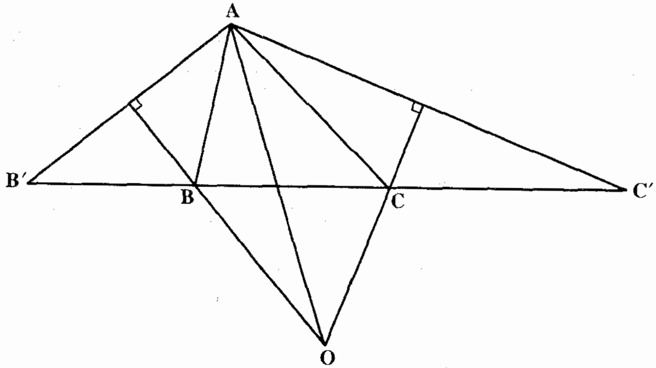
۶۹۰. در مثلث ABC از نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای عمودهای HD، HE و HF را بترتیب بر ضلع AC و نیمسازهای زاویهٔ A رسم می‌کنیم. FE ضلع AB را در نقطهٔ P و خط FD نیمساز AE را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید، PQ بر EF عمود است.

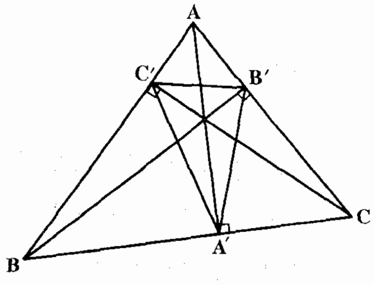
۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است



۶۹۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و دایره‌ای به قطر ضلع AB و قطری از این دایره را که با AC موازی است رسم می‌کنیم و دو سر آن را D و E می‌نامیم. ثابت کنید که AD و AE نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی BAC هستند.

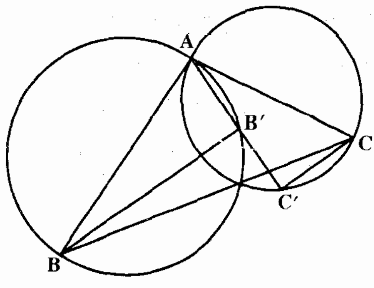
۶۹۲. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و روی امتدادهای ضلع BC دو قطعه خط $BB' = BA$ و $CC' = CA$ را جدا می‌کنیم و از سه نقطهٔ A، B' و C' دایره‌ای می‌گذرانیم و مرکز این دایره را O می‌نامیم. ثابت کنید که AO نیمساز زاویهٔ BAC است.





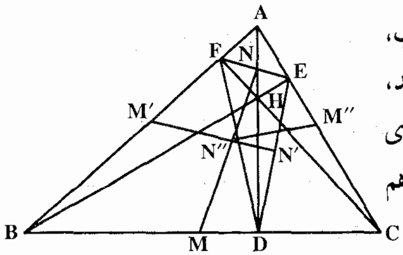
۶۹۳. با استفاده از ویژگی‌های ضلعهای محاطی ثابت کنید که ارتفاعهای هر مثلث نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعیه می‌باشند.

۳.۶.۵.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۶۹۴. مثلث ABC را در نظر گرفته، دو دایره یکی به قطر AB و دیگری به قطر AC رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B و C دو وتر متوازی BB' و CC' را بترتیب در دو دایره می‌کشیم. ثابت کنید که $B'C'$ از رأس A می‌گذرد.

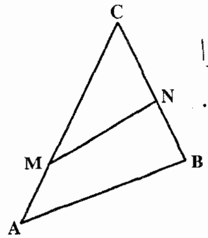
۴.۶.۵.۵. خطها همرسند



۶۹۵. اگر در مثلث ABC نقطه‌های D، E و F، بترتیب، پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C باشند، خطهای MN، M′N′ و M″N″ که وسطهای ضلعهای مقابل دو مثلث ABC و DEF را به هم متصل می‌سازند، از یک نقطه می‌گذرند.

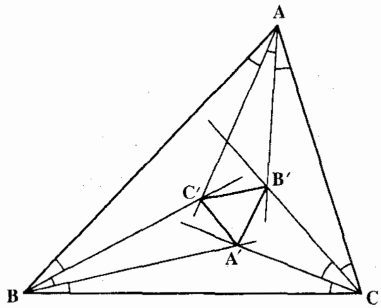
۶۹۶. A′ وسط ضلع BC از مثلث ABC، نقطهٔ وسط پاره خط MN، که دو خط همزاویهٔ AM و AN روی خطی که از A′ می‌گذرد جدا می‌کنند، نیز هست. اگر خطهای BN و CN، خط AM را در E و F قطع کنند، نشان دهید مماسهایی که در B و C بر دایره‌های ABE و ACF رسم می‌شوند، یکدیگر را روی خط AN قطع می‌کنند.

۵.۶.۵.۵. خط مماس بر دایره است



۶۹۷. خط راستی در مثلث ABC رسم می‌شود تا ضلعهای AC و BC را در نقطه‌های M و N طوری قطع کند که $MN = AM + BN$. ثابت کنید که تمام چنین خطهایی بر یک دایره مماسند.

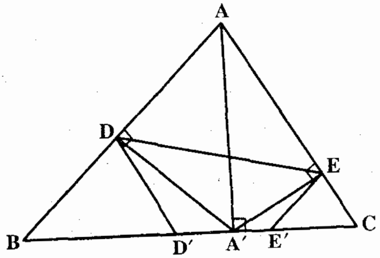
۷.۵.۵. شکلهای ایجاد شده



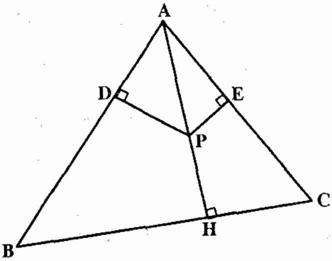
۶۹۸. قضیهٔ مورلی. هرگاه در داخل مثلث از هر رأس دو نیمخط چنان رسم کنیم که زاویهٔ آن رأس را به سه قسمت برابر تقسیم کنند، نقطه‌هایی که از برخورد هر دو نیمخط مجاور به هر ضلع پدید می‌آید، مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.

این قضیهٔ بسیار زیبای هندسهٔ مقدماتی توسط فرانک مورلی Frank Morley (۱۸۶۰ـ۱۹۳۷) ریاضی‌دان انگلیسی در حدود سال ۱۹۰۴ ثابت شد. وی ابتدا این قضیه را برای دوستان انگلیسی خود در کامبریج شرح داد ولی بیست سال پس از آن در سال ۱۹۲۴ حل آن را در یک مجلهٔ ریاضی ژاپنی به چاپ رسانید. در این مدت این قضیه مجدداً کشف شده و در مجلهٔ تریبتی تایمز تحت عنوان مسأله، درج شده بود، که دو راه حل برای آن فرستاده شده بود. یکی از این راه حلها از طرف م.ت. نارانینگار M.T.Naraniengar ارائه شده بود که از بسیاری از راه حلهایی که بعداً این مسأله ارائه شد زیباتر است.

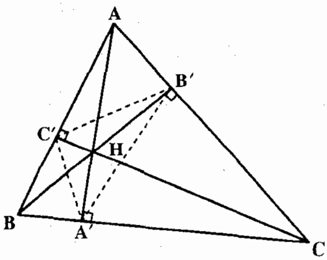
۶۹۹. مثلث ABC مفروض است. ارتفاع ′AA را رسم کرده، تصویر ′A روی ضلعهای AB و AC را بترتیب D و E می‌نامیم. از D خطی به موازات AC و از E خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا بترتیب ضلع BC را در ′D و ′E قطع کنند. ثابت کنید، چهارضلعیهای BDEC و ′DEE′D محاطی هستند.



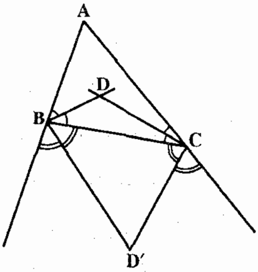
۷۰۰. در مثلث ABC از نقطهٔ P واقع بر ارتفاع AH دو عمود PD و PE را بترتیب بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید، چهارضلعیهای BDEC و PDAE محاطی است.



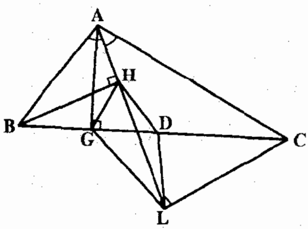
۷۰۱. ثابت کنید که هفت نقطهٔ حاصل از رأسها و پای ارتفاعها و محل برخورد سه ارتفاع هر مثلث را اگر چهار به چهار به هم وصل کنیم، شش چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



۷۰۲. در مثلث ABC، نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را D و نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را ′D می‌نامیم. ثابت کنید، چهارضلعی DBD′C محاطی است.



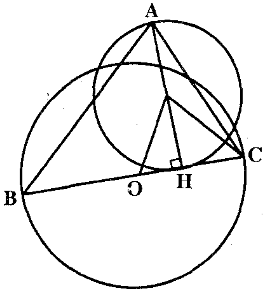
۷۰۳. اگر نیمساز AL از مثلث ABC را رسم کنیم و عمودهای BH و CL را بر این نیمساز رسم نماییم، ثابت کنید، چهارضلعی DHGL محاطی است. D وسط ضلع BC و G پای ارتفاع رأس A است.



۸.۵.۵. سایرمسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۰۴. ثابت کنید که تصویرهای پای یک ارتفاع مثلث روی ضلعهایی که این ارتفاع را دربردارند و روی دو ارتفاع دیگر بر یک خط راست واقعند.

۷۰۵. **قضیه**. اگر دو پاد موازی دو ضلع یک مثلث طولهایی برابر داشته باشند، یکدیگر را روی میانهٔ متقارن وارد بر ضلع سوم قطع می‌کنند.



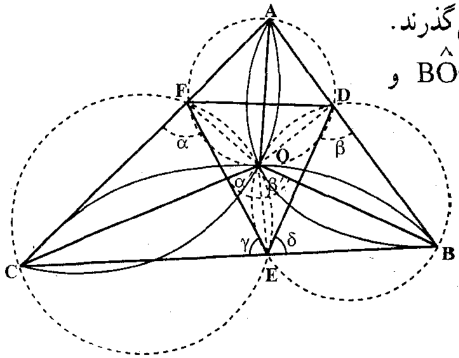
۷۰۶. نشان دهید که در مثلث ABC :

الف. دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند، متعامدند.

ب. دایرهٔ IBC با دایره‌ای که به قطر I_bI_c رسم می‌شوند، متعامد است.

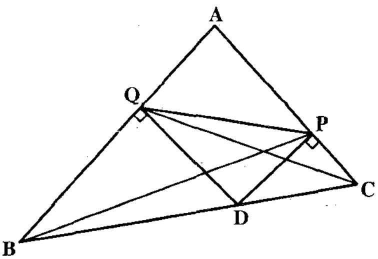
۹.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۷۰۷. از سه رأس مثلث ABC سه دایره می‌گذرند که دوبه‌دو یکدیگر را روی ضلعهای مثلث در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید :

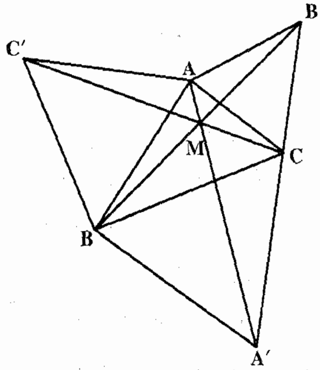


۱. این سه دایره از یک نقطه مانند O می‌گذرند.

۲. $A\hat{O}B = \hat{C}+\hat{D}$ و $B\hat{O}C = \hat{A}+\hat{E}$ و $C\hat{O}A = \hat{B}+\hat{F}$.



۷۰۸. DP و DQ عمودهایی هستند که از پای ارتفاع AD از مثلث ABC بر ضلعهای AC و AB رسم شده‌اند. ثابت کنید که نقطه‌های B، C، P و Q همدایره‌اند (روی یک دایره هستند) و $D\hat{P}B = C\hat{Q}D$.



۷۰۹. روی هر یک از ضلعهای مثلث غیرمشخص ABC مثلثهای متساوی‌الاضلاعی می‌سازیم و رأس سوم مثلثهای جدید را ′A ، ′B و ′C می‌نامیم (′A رأس سوم مثلثی است که روی BC ساخته شده است).

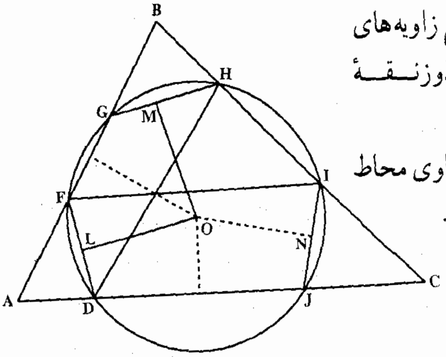
ثابت کنید:

۱. $AA' = BB' = CC'$.

۲. ′AA ، ′BB و ′CC از یک نقطه مانند M می‌گذرند.

۳. هر یک از چهارضلعیهای ′AMCB و ′AMBC و ′BMCA محاطی‌اند.

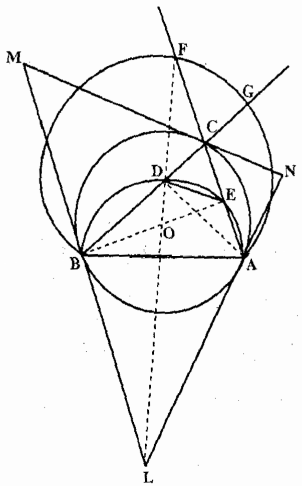
۴. هر یک از زاویه‌هایی که حول نقطهٔ M تشکیل شده است برابر است با ۶۰ درجه.



۷۱۰. ۱. آنتی‌پارالل‌های مساوی نظیر دو ضلع زاویه‌های A و C از مثلث ABC یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌سازند.

۲. نقطه‌های انتهایی سه آنتی‌پارالل مساوی محاط شده در یک مثلث، روی یک دایره‌اند.

۷۱۱. ثابت کنید:



۱. تمام دایره‌هایی که بر دو انتهای یک ضلع مثلث می‌گذرند، دو ضلع دیگر مثلث را در خطی قطع می‌کنند که آنتی‌پارالل (پاد موازی) آن ضلع نسبت به دو ضلع دیگر است.

۲. خطهایی که پای دو ارتفاع یک مثلث را به هم وصل می‌کنند، آنتی پارالل ضلع سوم مثلث نسبت به دو ضلع دیگر می‌باشند.

۳. مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی مثلث در رأسهای مثلث، آنتی پارالل ضلعهای روبه‌رویشان از مثلث داده شده می‌باشند.

۴. آنتی‌پارالل هر یک از ضلعهای مثلث عمود بر شعاع دایرهٔ محیطی نظیر رأس مقابل به ضلع آن است.

بخش ۶

• دایره و مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، ...)

۱.۶.دایره و مثلث متساوی الاضلاع

۱.۱.۶. تعریف و قضیه

۲.۱.۶. شعاع

۳.۱.۶. نقطه و دایره

۴.۱.۶. زاویه

۵.۱.۶. پاره‌خط

۶.۱.۶. شکلهای ایجاد شده

۷.۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی

۲.۶. دایره و مثلث متساوی الساقین

۱.۲.۶. تعریف و قضیه

۲.۲.۶. شعاع

۳.۲.۶. نقطه و دایره

۴.۲.۶. زاویه

۱.۴.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۲.۴.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵.۲.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۵.۲.۶. خطها بر هم عمودند

۲.۵.۲.۶. خط مماس بر دایره است

۶.۲.۶. شکلهای ایجاد شده

۳.۶. دایره و مثلث قائم‌الزاویه

۱.۳.۶. تعریف و قضیه

۲.۳.۶. شعاع

۱.۲.۳.۶. اندازهٔ شعاع

۲.۲.۳.۶. رابطهٔ بین شعاعها

۳.۳.۶. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۶. نقطه درون دایره

۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره

۴.۳.۶. قطر

۵.۳.۶. زاویه

۶.۳.۶. پاره خط

۷.۳.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم ، ...

۱.۷.۳.۶. خطها بر هم عمودند

۲.۷.۳.۶. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است

۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده

۹.۳.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۳.۶. مسأله‌های ترکیبی

۴.۶. دایره و مثلثهای حاده‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه

۱.۴.۶. تعریف و قضیه

۲.۴.۶. شعاع

۳.۴.۶. نقطه و دایره

۱.۳.۴.۶. نقطه درون دایره

۲.۳.۴.۶. نقطه برون دایره

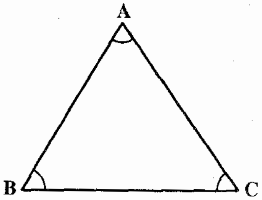
۴.۴.۶. زاویه

۵.۴.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع و متساوی‌الساقین، ...)

۱.۶. دایره و مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۱.۶. تعریف و قضیه

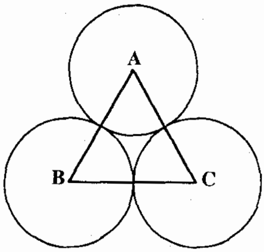


در این بخش مطالب مربوط به دایره و مثلثهای ویژه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در قسمت نخست این بخش دایره و مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بررسی قرار می‌گیرد. می‌دانیم مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی است که سه ضلع آن با هم برابرند مانند مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که در آن:

۱. $AB = AC = BC$.

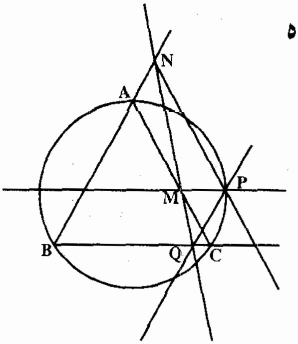
۲. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه با هم برابر و هر کدام ۶۰ درجه می‌باشد.

۲.۱.۶. شعاع



۷۱۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a داده شده است. به مرکزهای A، B و C و به شعاع $\frac{a}{2}$ سه دایره رسم می‌کنیم. مطلوب است، محاسبهٔ شعاعهای دو دایره‌ای که بر این سه دایره مماس باشند.

۳.۱.۶. نقطه و دایره



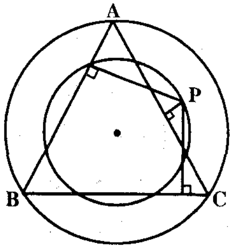
۷۱۳. از نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، خطهایی راست موازی با BC، CA و AB رسم شده‌اند که CA، AB و BC را بترتیب در نقطه‌های M، N و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که M، N و Q بر یک خط راست واقعند.

۴.۱.۶. زاویه

۷۱۴. مرکز دایره به شعاع ۱۰ سانتیمتر رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است، و دایره از دو رأس دیگر مثلث می‌گذرد. امتداد ضلع AC، دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ ADB برحسب درجه برابر است با :

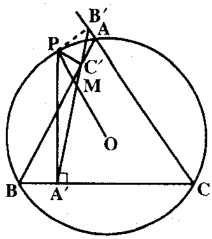
الف) ۱۵ ب) ۳۰ ج) ۶۰ د) ۹۰ هـ) ۱۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

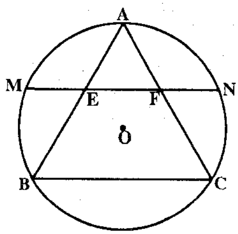


۷۱۵. نقطهٔ متغیر P روی دایره‌ای هم مرکز با مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. نشان دهید که زاویهٔ بروکار مثلث پادک P نسبت به ABC ثابت است.

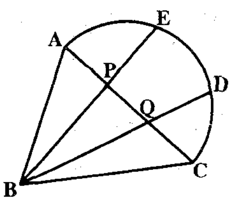
۵.۱.۶. پاره‌خط



۷۱۶. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در دایرهٔ به مرکز O محاط است و P نقطه‌ای از این دایره است. ثابت کنید که خط سمسن نظیر نقطهٔ P از وسط شعاع OP می‌گذرد.

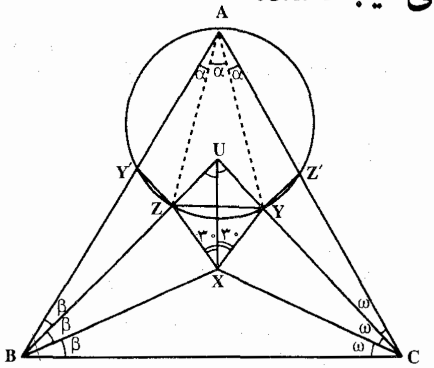


۷۱۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط در دایرهٔ O داده شده است. اگر M و N وسطهای کمانهای AB و BC باشند، ثابت کنید وتر MN به وسیلهٔ ضلعهای مثلث به سه قسمت متساوی تقسیم می‌شود.



۷۱۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. به قطر AC در بیرون مثلث نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. از رأس B دو خط چنان می‌کشیم که این نیمدایره را به سه کمان برابر با هم بخش کنند. ثابت کنید که این دو خط، پاره‌خط AC را نیز به سه پاره‌خط برابر با هم بخش می‌کنند.

۶.۱.۶. شکلهای ایجاد شده



۷۱۹. هرگاه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، ثابت کنید که نقطه‌های Y' ، Z ، Y و Z' چهار رأس از یک چند ضلعی منتظم می‌باشند و نقطهٔ A رأس دیگری از این چند ضلعی و روبه‌روی ضلع AY است.

۷۲۰. نشان دهید اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۷۲۱. نشان دهید که اگر مرکز ارتفاعی یک مثلث روی دایرهٔ بروکار باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۷۲۲. نیمسازهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 از مثلث ABC، در نقطهٔ M به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، اگر شعاعهای دایره‌های محاط در مثلثهای MB_1A ، MC_1A ، MC_1B ، MA_1B ، MA_1C و MB_1C با هم برابر باشند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

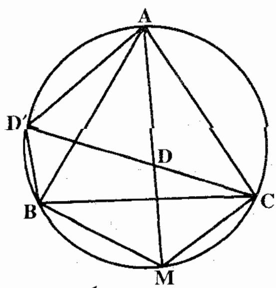
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران بلژیک، ۱۹۷۶

۷.۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۲۳. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الاضلاع دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس می‌باشد.

۸.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی

۷۲۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ M را روی کمان $\overset{\frown}{BC}$ اختیار کرده و روی پاره‌خط AM پاره‌خط $MD = MC$ را جدا می‌کنیم.



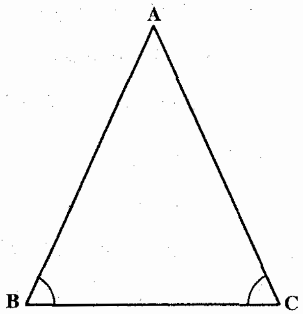
۱. ثابت کنید مثلث MDC متساوی‌الاضلاع است و CD موازی MB می‌باشد.

۲. CD دایره را در نقطهٔ D' قطع می‌کند. نوع چهارضلعی $MBD'D$ را تعیین کنید.

۳. ثابت کنید مثلث ADD' متساوی‌الاضلاع است و نتیجه بگیرید که $MA = MB + MC$ می‌باشد.

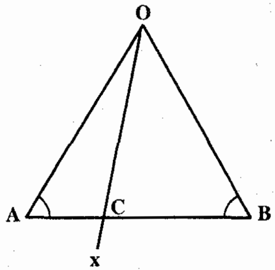
۲.۶. دایره و مثلث متساوی‌الساقین

۱.۲.۶. تعریف و قضیه



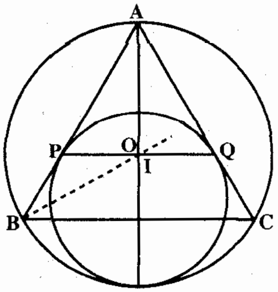
در این قسمت قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به دایره و مثلث متساوی‌الساقین را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم مثلث متساوی‌الساقین مثلثی است که دو ضلع آن با هم برابرند. این دو ضلع برابر را ساقها و ضلع سوم را قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین می‌نامند. مانند مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AB = AC$ است. زاویه‌های مجاور به قاعده در هر مثلث متساوی‌الساقین با هم برابر هستند.

۲.۲.۶. شعاع



۷۲۵. مثلث متساوی‌الساقین $(OA = OB)OAB$ را در نظر می‌گیریم و نیمخط دلخواه Ox را از نقطهٔ O رسم می‌کنیم تا خط راست AB را در نقطهٔ C قطع کند. ثابت کنید که دو دایرهٔ OAC و OBC متساوی‌اند.

۳.۲.۶. نقطه و دایره



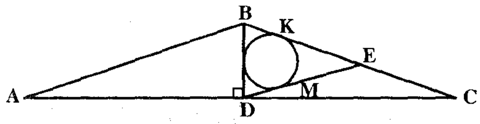
۷۲۶. در مثلث ABC، $AB = AC$ است. دایره‌ای به دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس داخلی، همچنین به ضلعهای AB و AC بترتیب در نقطه‌های P و Q مماس است. ثابت کنید که وسط پاره‌خط PQ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸

۴.۲.۶. زاویه

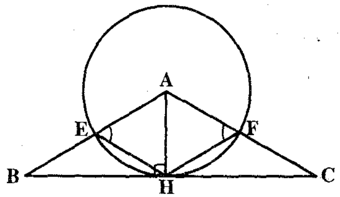
۱.۴.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۷۲۷. پاره‌خط BD ارتفاعی از مثلث ABC و DE میانهٔ مثلث BCD است. دایرهٔ محاط در مثلث BDE بر ضلع BE در نقطهٔ K و بر ضلع DE در نقطهٔ M مماس است. اگر $AB = BC = ۸cm$ و $KM = ۲cm$ باشد، زاویه‌های مثلث داده شده را به‌دست آورید.

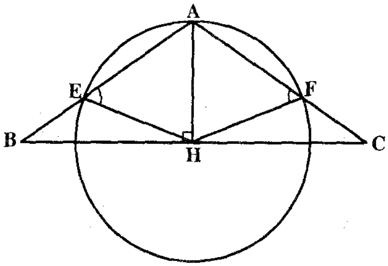


۲.۴.۲.۶. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۲۸. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را در نظر گرفته، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید: $A\hat{E}H = A\hat{F}H$.

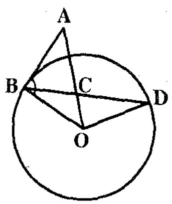


۷۲۹. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را در نظر گرفته ارتفاع AH آن را رسم می‌کنیم. به مرکز H و به شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع کند. ثابت کنید: $A\hat{E}H = A\hat{F}H$.



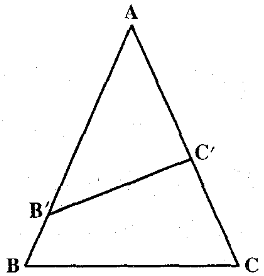
۵.۲.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۵.۲.۶. خطها بر هم عمودند



۷۳۰. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را در نظر گرفته، از رأس B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا امتداد AC را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید OD عمود بر OA است.

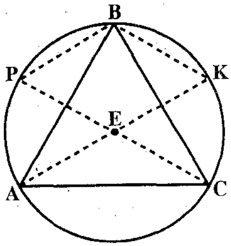
۶.۲.۵.۲. خط مماس بر دایره است



۷۳۱. مثلث متساوی‌الساقین ABC داده شده است. روی ضلع AB نقطهٔ B' و روی ضلع AC نقطهٔ C' را چنان اختیار می‌کنیم که: $B'C' = BB' + CC'$ باشد. ثابت کنید که دایرهٔ مماس به ضلعهای AB و AC در نقطه‌های B و C، بر خط $B'C'$ مماس است.

۶.۲.۶. شکلهای ایجاد شده

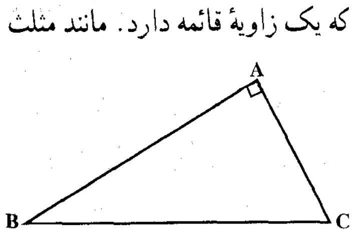
۷۳۲. دایره‌ای را بر مثلث $ABC(AB = BC)$ محیط کرده‌ایم. امتداد نیمسازهای زاویه‌های A و C دایره را در نقطه‌های K و P و همدیگر را در E قطع می‌کنند. ثابت کنید که چهارضلعی BKEP یک لوزی است.



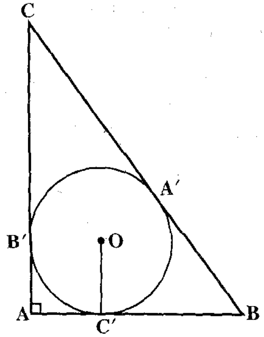
۶.۳. دایره و مثلث قائم‌الزاویه

۶.۳.۱. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره و مثلث قائم‌الزاویه را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم مثلث قائم‌الزاویه مثلثی است که یک زاویهٔ قائمه دارد. مانند مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A} = 90^\circ$ می‌باشد.



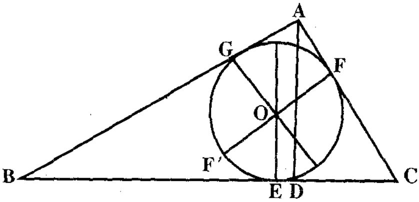
۲.۳.۶. شعاع



۱.۲.۳.۶. اندازهٔ شعاع

۷۳۳. طول ضلعهای a، b و c در یک مثلث قائم‌الزاویه را می‌دانیم. شعاع دایرهٔ محاطی آن را برحسب ضلعها به‌دست آورید.

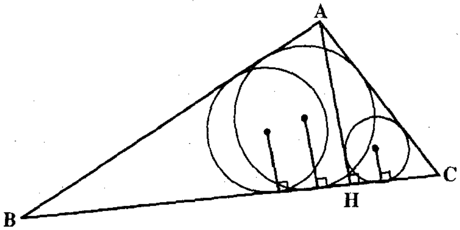
۷۳۴. r را شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌گیریم. ثابت کنید: r از نصف هر یک از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه و همچنین از $\frac{1}{4}$ طول وتر مثلث ABC کوچکتر است.



المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۵

۲.۲.۳.۶. رابطهٔ بین شعاعها

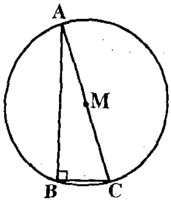
۷۳۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی سه مثلث ABC، ABH و ACH، مساوی است با ارتفاع AH.



۳.۳.۶. نقطه و دایره

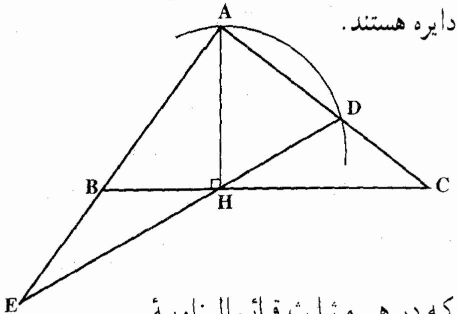
۱.۳.۳.۶. نقطه درون دایره

۷۳۶. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه، وسط وتر آن است.

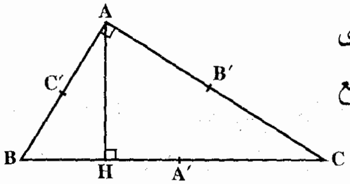


۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره

۷۳۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر گرفته، ارتفاع AH آن را رسم می‌کنیم و به مرکز H و به شعاع HA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ دیگری مانند D قطع کند. خط DH خط AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه‌های D، C، B و E روی یک دایره هستند.

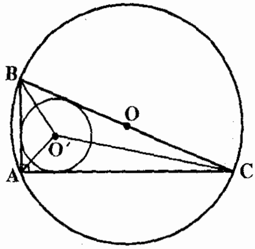


۷۳۸. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ رأس زاویهٔ قائمه و نقطهٔ H پای ارتفاع AH و وسطهای سه ضلع، پنج نقطه واقع بر یک دایره هستند.



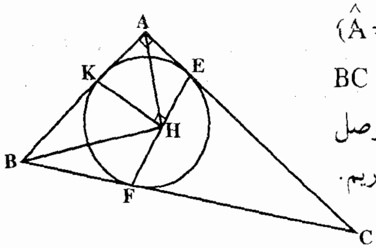
۴.۳.۶. قطر

۷۳۹. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع ضلعهای زاویهٔ قائمه مساوی است با مجموع قطرهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث.

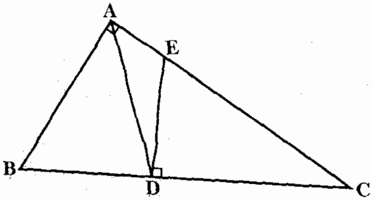


۵.۳.۶. زاویه

۷۴۰. دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ در نقطه‌های E، F و K بترتیب بر ضلعهای AC، BC و AB مثلث مماس است. نقطه‌های E و F را وصل کرده از نقطهٔ K عمود KH را بر آن فرود می‌آوریم. ثابت کنید، $A\hat{H}B=۹۰^\circ$ است.



۶.۳.۶. پاره خط

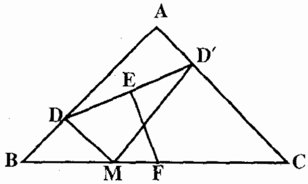


۷۴۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = 90°)$ نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا وتر BC را در نقطهٔ D قطع کند و از D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E تلاقی نماید. ثابت کنید : $BD = DE$.

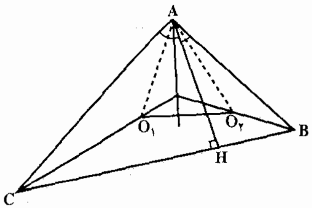
۷۴۲. ثابت کنید خط المرکزین دو دایرهٔ محاطی دو مثلث قائم‌الزاویه که به‌وسیلهٔ ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ معلوم به‌وجود می‌آیند، مساوی فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی این مثلث از رأس زاویهٔ قائمه‌اش می‌باشد.

۷.۳.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۷.۳.۶. خطها بر هم عمودند



۷۴۳. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = 90° \quad AB = AC)$ داده شده است. از نقطهٔ M واقع بر وتر BC عمودهای MD و MD′ را بترتیب بر AB و AC فرود آورده، وسط DD′ را E و وسط BC را F می‌نامیم. ثابت کنید EF بر DD′ عمود است.



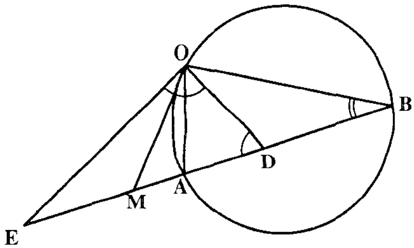
۷۴۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = 90°)$ ارتفاع AH رسم شده است. ثابت کنید خط‌المرکزین دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث حاصل، بر نیمساز زاویهٔ A عمود است.

۲.۷.۳.۶. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷۴۵. روی قطعه خط ثابت AB مثلث متغیر و قائم‌الزاویهٔ ABC را می‌سازیم. اگر B′ و C′ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث با ضلعهای AB و AC باشند، ثابت کنید که B′C′ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

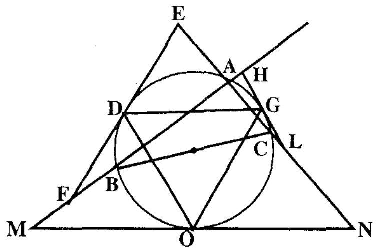
۷۴۶. ثابت کنید خط اولر هر مثلث از یک رأس آن می‌گذرد، در صورتی که مثلث، متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه باشد.

۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است

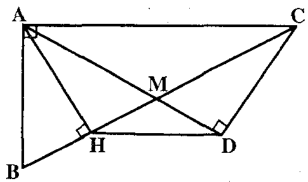


۷۴۷. در مثلث ODE ضلع OD کوچکتر از OE می‌باشد و زاویهٔ O، ۹۰ درجه است. A و B هر دو، دو نقطه از وتر DE می‌باشند. به‌طوری که زاویه‌های AOD و BOD هر یک ۴۵ درجه هستند. نشان دهید خط MO که نقطهٔ O را به وسط DE یعنی M وصل می‌کند به دایرهٔ OAB مماس است.

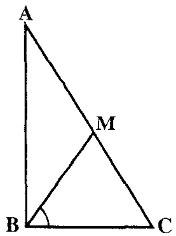
۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده



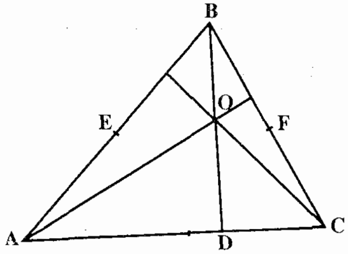
۷۴۸. قضیهٔ پُلاک **POLLOCK**. رأسهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دایرهٔ محیطی آن را به سه کمان تقسیم می‌کند، یکی $\widehat{BC}$، برابر نصف محیط دایره و دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ که مکمل یکدیگرند. نقطه‌های O و D و G روی قوسهای $\widehat{BC}$، $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ را چنان اختیار می‌کنیم که مماسهای رسم شده بر دایره در این نقطه‌ها امتداد ضلعهای زاویهٔ قائم را چنان قطع کنند که $OM = ON$ و $DE = DF$ و $GH = GL$ باشد. ثابت کنید که مثلث ODG متساوی‌الاضلاع است.



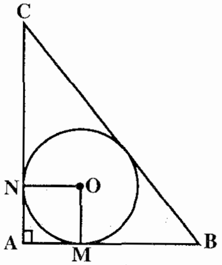
۷۴۹. زاویهٔ C از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = 90°$) برابر $30°$ است. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و از C عمود CD را بر میانهٔ AM فرود می‌آوریم. ثابت کنید AHDC ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی است که قاعدهٔ کوچکتر آن با ساق آن برابر است.



۷۵۰. ثابت کنید اگر در مثلث ABC میانهٔ AM نصف BC باشد، این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

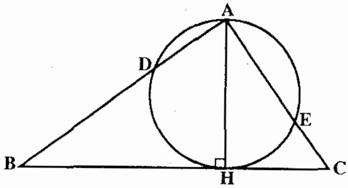


۷۵۱. ثابت کنید اگر نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث و وسطهای ضلعهای آن روی یک دایره واقع باشند، مثلث قائم‌الزاویه است.



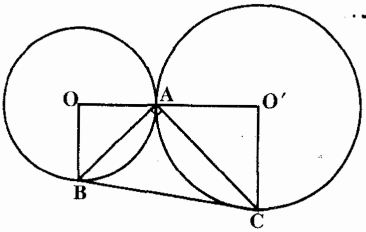
۷۵۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90^\circ)$ نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعهای زاویهٔ قائمه را M و N و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی را O می‌نامیم، ثابت کنید چهارضلعی AMON مربع است.

۷۵۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به قطر AH رسم می‌نماییم. این دایره ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. ثابت کنید، چهارضلعی BCED محاطی است.

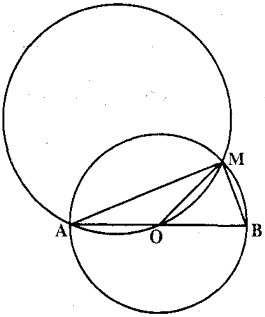


۶.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۵۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90^\circ)$ دایره‌ای بر A و B می‌گذرانیم به قسمی که در B بر وتر مماس باشد و دایره‌ای هم بر C و A مرور می‌دهیم که در C بر وتر مماس شود. ثابت کنید که این دو دایره بر یکدیگر مماسند.



۷۵۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB را در نظر می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث را O می‌نامیم و سپس دایره‌های محیطی مثلثهای AMO و BMO را رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دو دایره بر هم عمودند.



۷۵۶. کدام ترکیب از اجزایی که در زیر داده شده‌اند، مثلث مورد نظر را مشخص نمی‌کند؟

الف) زاویهٔ مجاور به قاعده و زاویهٔ رأس ؛ مثلث متساوی‌الساقین

ب) قاعده و زاویهٔ رأس ؛ مثلث متساوی‌الساقین

ج) شعاع دایرهٔ محیطی ؛ مثلث متساوی‌الاضلاع

د) یک ضلع و شعاع دایرهٔ محاطی ؛ مثلث قائم‌الزاویه

هـ) دو زاویه و ضلع روبه‌رو به یکی از آن دو ؛ مثلث مختلف‌الاضلاع

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۶.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۷. دو دایره به قطر ضلعهای قائم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر می‌گیریم :

الف) نشان دهید خطهایی که از یک سر یک قطر دایره‌ای به سر قطر دایره‌ای دیگر رسم شود از نقطهٔ مشترک دو دایره می‌گذرند ؛

ب) نشان دهید که چهار نقطهٔ انتهایی دو قطر عمود بر هم از این دو دایره یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند و برعکس.

۷۵۸. مثلث ABC زاویه‌ای قائمه در رأس A دارد و AD ارتفاع آن است. نیمساز زاویه‌های BAD و CAD ضلع BC را در S و S′ قطع می‌کنند و نیمساز زاویه‌های ABD و ACD ارتفاع AD را در T و T′، اگر U، V و W مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABD، ABC و ACD باشند، ثابت کنید :

الف) نقطه‌های B، C، V و W چهارنقطه‌ای هستند که هر یک محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که از سه نقطهٔ دیگر تشکیل شده است.

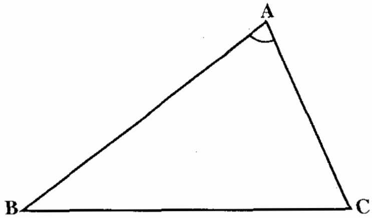
ب) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AVW روی خط AD است.

ج) نقطه‌های B، C، V و W روی یک دایره‌اند.

د) نقطه‌های S، S′، T و T′ خاصیت نقطه‌های مذکور در الف را دارند. خاصیتهای دیگر شکل را بیان کنید.

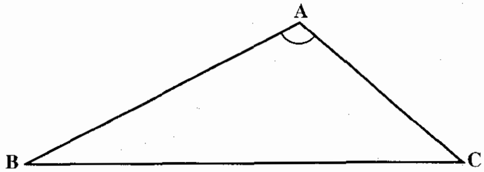
۶ . ۴. دایره و مثلثهای حاده الزاویه و منفرجه الزاویه

۶ . ۴ . ۱. تعریف و قضیه



در این قسمت به بررسی مطالب مربوط به دایره و مثلثهایی که هر سه زاویه‌شان حاده است و مثلثی که زاویهٔ منفرجه دارد، می‌پردازیم.

مثلثی را که هر سه زاویه‌اش حاده است، مثلث با زاویه‌های حاده، یا مثلث حاده‌الزاویه و یا بطور خلاصه مثلث حاده می‌نامند، مانند مثلث ABC.



مثلثی را که زاویه‌ای منفرجه دارد، مثلث منفرجه الزاویه و یا بطور خلاصه مثلث منفرجه می‌نامند. مانند مثلث ABC.

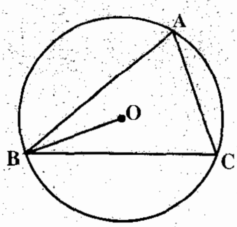
۶ . ۴ . ۲. شعاع

۷۵۹. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد و در ضمن، متساوی الساقین نیست. AD، BE و CF، ارتفاعهای این مثلثند. نقطه‌های X، Y و Z چنانند که نقطه‌های D، E و F بترتیب وسط پاره‌خطهای راست BX، CY و AZ هستند. ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای ACX، ABY و BCZ رأسهای مثلثی‌اند که با مثلث ABC برابر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۶ . ۴ . ۳. نقطه و دایره

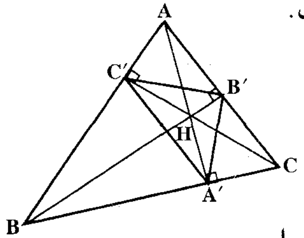
۶ . ۴ . ۳ . ۱. نقطه درون دایره



۷۶۰. بنابر آن که یک مثلث دارای سه زاویهٔ حاده باشد، ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی آن داخل مثلث واقع است.

۷۶۱. **قضیه**. در هر مثلث حاده خطهای متقارن ضلعهای مثلث پادک نسبت به ضلعهای متناظر مثلث داده شده، مثلثی تشکیل می‌دهند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث داده شده منطبق است.

۷۶۲. ثابت کنید در هر مثلث با زاویه‌های حاده، مرکز ارتفاعی بر مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ارتفاعی منطبق است.



۶. ۴. ۳. ۲. نقطه برون دایره

۷۶۳. ثابت کنید که اگر یک زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز دایرهٔ محیطی و همچنین مرکز ارتفاعی این مثلث در خارج آن واقع است.

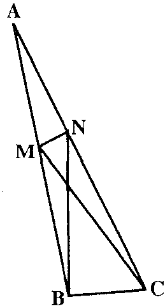
مرکز ارتفاعی. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای هر مثلث را مرکز ارتفاعی آن مثلث می‌نامند.

مثلث ارتفاعی یا مثلث ارتفاعیه. مثلثی را که رأسهای آن پای ارتفاعهای یک مثلث باشند، مثلث ارتفاعی یا مثلث ارتفاعیهٔ آن مثلث می‌نامند.

۷۶۴. ثابت کنید که اگر یک زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز ارتفاعی آن بر مرکز یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ارتفاعی منطبق است.

۶. ۴. ۴. زاویه

۷۶۵. در مثلث ABC، $\hat{B}=100^\circ$ و $\hat{C}=65^\circ$ ؛ نقطهٔ M روی AB طوری اختیار می‌شود که $M\hat{C}B=55^\circ$ و نقطهٔ N بر AC طوری اختیار می‌شود که $N\hat{B}C=80^\circ$ باشد. اندازهٔ $N\hat{M}C$ را پیدا کنید.



۷۶۶. در مثلث حاده الزاویهٔ ABC داریم $B\hat{A}C=60^\circ$.

اگر H، I و O بترتیب، محل تلاقی ارتفاعها، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند و $BH=OI$، زاویه‌های مثلث ABC را پیدا کنید.

مرحلهٔ سوم دوازدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۴

۶ . ۴ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۶۷. در مثلثی که زاویه‌هایی حاده دارد، از وسط هر ضلع، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۷۶۸. قضیه. مساحت مثلثی که رأسهای آن مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث حادهٔ مفروضی هستند، با حاصلضرب محیط و شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث برابر است.

۷۶۹. محیط مثلث پادک مثلثی که زاویه‌های حاده دارد برابر است با دو برابر مساحت مثلث داده شده تقسیم بر شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث.

بخش ۷

• دایره و چهارضلعی

۷ . ۱ . چهارضلعی محاطی

۷ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه

۷ . ۱ . ۲. شعاع

۷ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۷ . ۱ . ۳ . ۱. نقطه روی دایره

۷ . ۱ . ۳ . ۲. نقطه‌های همخط

۷ . ۱ . ۳ . ۳. نقطه‌های همدایره

۷ . ۱ . ۴. کمان

۷ . ۱ . ۵. زاویه

۷ . ۱ . ۵ . ۱. اندازهٔ زاویه

۷ . ۱ . ۵ . ۲. رابطه بین زاویه‌ها

۷ . ۱ . ۶. پاره‌خط

۷ . ۱ . ۷. خطهای: موازی، عمود برهم،...

۷ . ۱ . ۷ . ۱. خطها موازی اند

۷ . ۱ . ۷ . ۲. خطها برهم عمود ند

۷ . ۱ . ۷ . ۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۷ . ۱ . ۷ . ۴. خطها همرسند

۷ . ۱ . ۸. شکلهای ایجاد شده

۷ . ۱ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷ . ۱ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۷. ۲. چهارضلعی محاطی عمود قطر

۷. ۲. ۱. تعریف و قضیه

۷. ۲. ۲. نقطه و دایره

۷. ۲. ۲. ۱. نقطه درون دایره

۷. ۲. ۲. ۲. نقطه‌های همدایره

۷. ۲. ۳. پاره‌خط

۷. ۲. ۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷. ۳. چهارضلعی محیطی

۷. ۳. ۱. تعریف و قضیه

۷. ۳. ۲. شعاع

۷. ۳. ۲. ۱. اندازهٔ شعاع

۷. ۳. ۳. نقطه و دایره

۷. ۳. ۳. ۱. نقطه‌های همخط

۷. ۳. ۴. ضلع

۷. ۳. ۵. قطر

۷. ۳. ۶. محیط

۷. ۳. ۷. زاویه

۷. ۳. ۸. پاره‌خط

۷. ۳. ۹. شکلهای ایجاد شده

۷. ۳. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷. ۳. ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۷. ۴. دایره و چهارضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

۷. ۴. ۱. تعریف و قضیه

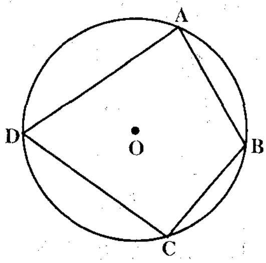
۷. ۴. ۲. نقطه و دایره

۷. ۴. ۳. پاره‌خط

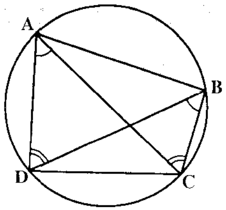
بخش ۷ . دایره و چهار ضلعی

۷ . ۱. چهار ضلعی محاطی

۷ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه



همان طوری که می‌دانیم هر چهارضلعی که رأسهای آن روی یک دایره قرار داشته باشد، چهارضلعی محاطی یا محاط شدنی نامیده می‌شود. مانند چهارضلعی محاطی ABCD در شکل.



۷۷۰. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی هر دو زاویهٔ روبه‌رو به یک ضلع برابرند و بعکس.

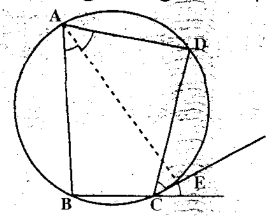
۷ . ۱ . ۲. شعاع

۷۷۱. قضیهٔ ژاپنی. ثابت کنید که اگر ABCD چهارضلعیی محاطی باشد، آن‌وقت مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD، برابر است با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD و BDA.

۷ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۷ . ۱ . ۳ . ۱. نقطه روی دایره

۷۷۲. دایره‌های نه نقطهٔ چهارمثلثی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، از یاد مرکز چهارضلعی می گذرند.



۷۷۳. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، نیمساز هر زاویه با نیمساز زاویهٔ برونی نظیر رأس مقابل آن، در نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ محیطی تلاقی می کنند.

۷ . ۱ . ۳ . ۲. نقطه‌های همخط

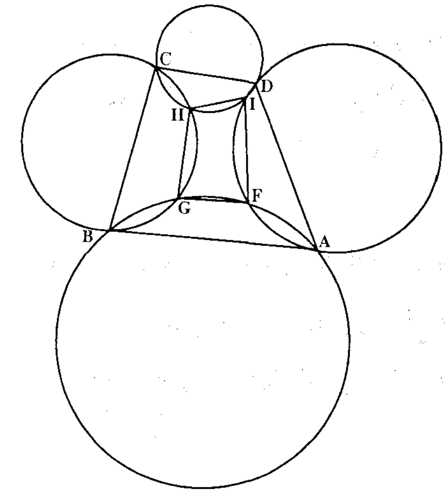
۷۷۴. فرض کنید ABCD معرف چهارضلعیی محاطی و M نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ محیطی آن باشد. ثابت کنید که تصویرهای نقطهٔ M روی خطهای سیمسون نظیر نقطهٔ M نسبت به مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB، بر یک خط راست (خط سیمسون چهارضلعی) قرار دارند.

به علاوه با دانستن خط سیمسون n ضلعی، خط سیمسون ۱+n ضلعی را به استقرا پیدا می‌کنیم. برای مثال برای ۱+n ضلعی دلخواه محاطی و نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی آن، تصویرهای این نقطه روی کلیهٔ خطهای سیمسون ممکن این نقطه نسبت به تمام n ضلعیهای ممکن تشکیل شده با n رأس از این ۱+n ضلعی، روی یک خط راست، که خط سیمسون ۱+n ضلعی است، قرار دارند.

۷۷۵. قضیه. مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی که توسط چهار خط تعیین می‌شوند هم‌خطند.

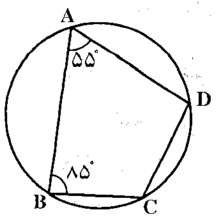
۷ . ۱ . ۳ . ۳. نقطه‌های همدایره

۷۷۶. چهارضلعی ABCD محاط در یک دایره داده شده است. چهار دایره رسم می‌کنیم که هر ضلع از این چهارضلعی یک وتر برای آن دایره باشد. ثابت کنید این دایره‌ها دوبه‌دو یکدیگر را در ۴ نقطهٔ همدایره قطع می‌کنند.



۷ . ۱ . ۴. کمان

۷۷۷. دو زاویهٔ مجاور از یک چهارضلعی محاطی °۵۵ و °۸۵ می‌باشند. دو زاویهٔ دیگر چهارضلعی را تعیین کنید. آیا می‌توان چهار کمان دایرهٔ محیطی آن را تعیین کرد؟ چرا؟

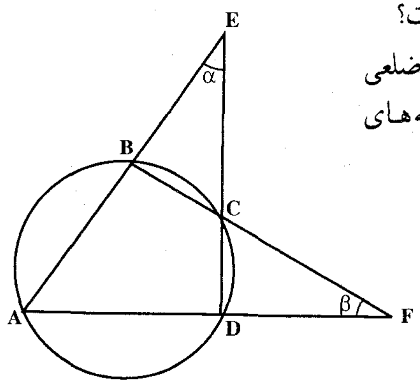


۷ . ۱ . ۵. زاویه

۷ . ۱ . ۵ . ۱. اندازهٔ زاویه

۷۷۸. یک چهارضلعی در یک دایره محاط شده است. اگر اندازهٔ دو زاویهٔ آن 68° و 143° باشد، اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر آن چه‌قدر است؟

۷۷۹. از برخورد ضلعهای دو زاویهٔ α و β چهارضلعی محاطی ABCD ایجاد می‌شود. زاویه‌های چهارضلعی را حساب کنید.



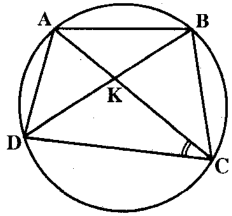
۷۸۰. چهارضلعی محاطی ABCD مفروض است. ضلع AB از طرف B تا نقطهٔ E امتداد دارد. اگر $B\hat{A}D = 90^\circ$ و $A\hat{D}C = 68^\circ$، آن‌گاه $E\hat{B}C$ برابر است با:

الف) 66° ب) 68° ج) 70°

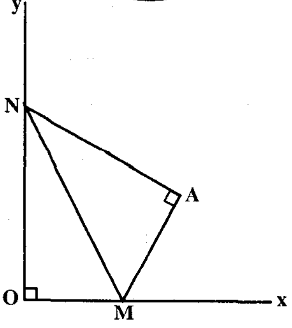
د) 88° هـ) 92°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

۷۸۱. در چهارضلعی محاطی ABCD : $D\hat{A}B = \alpha$، $A\hat{B}C = \beta$ و $B\hat{K}C = \gamma$ که در آن K نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی است. اندازهٔ زاویهٔ ACD را پیدا کنید.

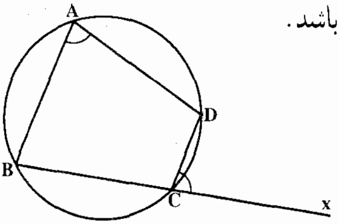


۷۸۲. زاویهٔ قائمه xOy و نقطهٔ A در داخل آن داده شده است. نقطه‌های M و N بترتیب روی Ox و Oy قرار دارند به‌طوری که $M\hat{A}N = 90^\circ$ می‌باشند. ثابت کنید وقتی که نقطه‌های M و N بترتیب روی Ox و Oy تغییر مکان دهند، اندازهٔ زاویه‌های مثلث AMN ثابت می‌ماند.



۷ . ۱ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۸۳. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی هر زاویهٔ داخلی چهارضلعی مساوی زاویهٔ خارجی غیرمجاورش می‌باشد.



۷۸۴. یک چهارضلعی محاط در یک دایره آن را به چهار کمان دوبه‌دو مجزا تقسیم می‌کند. در هر یک از این کمانها زاویه‌ای محاط می‌شود که رأس آن روی کمان و دو ضلعش بر دو سر آن کمان متکی است. مجموع این چهار زاویه برابر است با :

الف) 180° ب) 540° ج) 360°

د) 450° هـ) 1080°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

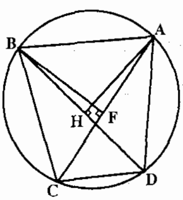
۷۸۵. در دایره‌ای، یک چهارضلعی محاط می‌شود. اگر مقابل هر یک از ضلعهای چهارضلعی و در خارج چهارضلعی زاویه‌ای محاطی رسم شود، مجموع این چهار زاویه برحسب درجه برابر است با :

الف) ۱۰۸۰   ب) ۹۰۰   ج) ۷۲۰

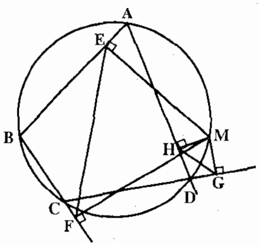
د) ۵۴۰   هـ) ۳۶۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

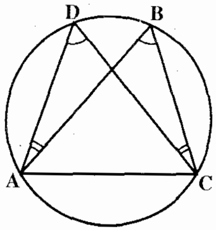
۷۸۶. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است. از نقطه‌های A و B عمودهای AH و BF را بر دو قطر آن فرود می‌آوریم. ثابت کنید : $D\hat{A}H = C\hat{B}F$.



۷۸۷. چهارضلعی ABCD محاط در دایره‌ای مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر این دایره عمودهای ME ، MF ، MG و MH را بترتیب بر ضلعهای AB ، BC، CD و DA فرود می‌آوریم. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث MGH با زاویه‌های مثلث MFE نظیر به نظیر برابرند.



۷۸۸. زاویه‌های روبه‌رو در یک چهارضلعی غیرمحدب محاطی برابرند و بعکس.



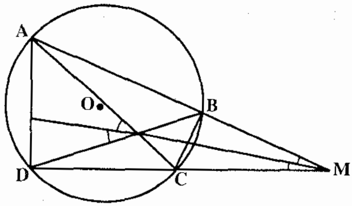
۷ . ۱ . ۶. پاره خط

۷۸۹. ثابت کنید تصویرهای ضلعهای روبه‌روی یک چهارضلعی محاطی که یک قطرش قطر دایرهٔ محیطی آن است، روی قطر دیگر چهارضلعی، دو پاره‌خط مساوی‌اند.

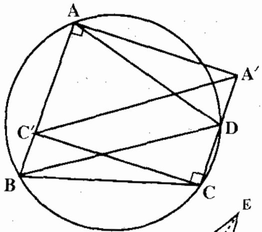
۷ . ۱ . ۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۷ . ۱ . ۷ . ۱. خطها موازی‌اند

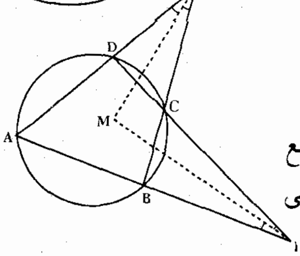
۷۹۰. شرط این که یک چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره باشد، لازم و کافی است که نیمسازهای زاویه‌های بین ضلعهای غیرمتوالی، خطهای موازی باشند.



۷۹۱. چهارضلعی ABCD در دایرهٔ O محاط است و امتداد ضلعهای متقابل AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. ثابت کنید، نیمساز زاویهٔ M با نیمساز یکی از زاویه‌های دو قطر چهارضلعی موازی است.

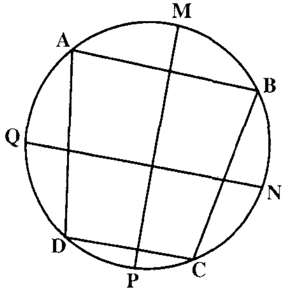


۷۹۲. در چهارضلعی محاطی ABCD عمودی که در A بر BA رسم می‌شود، CD را در A′ قطع می‌کند، و عمودی که در C بر CD رسم می‌شود، AB را در C′ قطع می‌کند، نشان دهید که خط A′C′ با قطر BD موازی است.

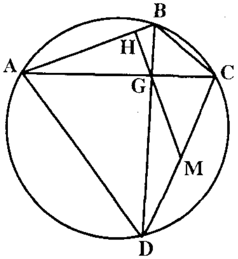


۷ . ۱ . ۷ . ۲. خطها بر هم عمودند

۷۹۳. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌هایی که از تقاطع امتداد ضلعهای متقابل یک چهارضلعی محاطی تشکیل می‌شوند، برهم عمودند.



۷۹۴. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، خطهایی که وسطهای کمانهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، برهم عمودند.



۷۹۵. چهارضلعی ABCD که قطرهایش در نقطهٔ G بر هم عمودند، در دایرهٔ O محاط است. اگر M وسط ضلع CD باشد، ثابت کنید خط MG در نقطه‌ای مانند H بر AB عمود است.

۷ . ۱ . ۷ . ۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷۹۶. چهارضلعی محاطی ABCD را در نظر گرفته، محل تلاقی قطرهای آن را O می‌نامیم. اگر نقطه‌های L و K بترتیب پای عمودهای وارد از نقطهٔ O برضلعهای AD و BC بوده و نقطه‌های M و N بترتیب وسطهای ضلعهای AB و CD باشند، ثابت کنید عمود منصف KL از نقطه‌های M و N می‌گذرد.

سومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، پاییز ۱۳۷۲

۷۹۷. نشان دهید که اگر از نقطهٔ برخورد امتداد دو ضلع روبه‌روی هم در یک چهارضلعی محاطی عمودی بر خطی که وسط آن دو ضلع را به هم وصل می‌کند، رسم کنیم این خط از پاد مرکز چهارضلعی می‌گذرد.

۷ . ۱ . ۷ . ۴. خطها همرسند

۷۹۸. قضیه. عمودهایی که از وسط هر ضلع چهارضلعی محاطی بر ضلع مقابل رسم می‌شوند، همرسند.

۷۹۹. چهارخطی که از هر رأس چهارضلعی محاطی به مرکز ارتفاعی مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند رسم می‌شوند، از وسط هم می‌گذرند.

۸۰۰. نشان دهید چهار خطی که هر کدام از یک رأس چهارضلعی محاطی به مرکز نه نقطهٔ مثلثی رسم می‌شوند که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند، همرسند.

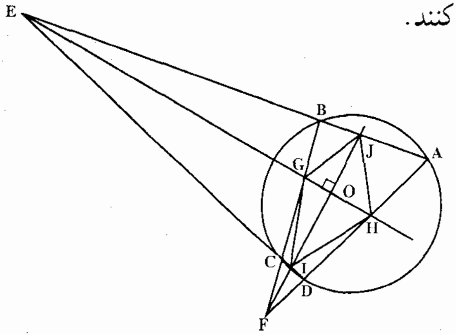
۸۰۱. قضیه. چهار خط سیمسون چهار نقطهٔ یک دایره، که هر کدام نسبت به مثلثی که سه نقطهٔ دیگر رأسهای آن هستند، در نظر گرفته می‌شوند، همرسند.

۷ . ۱ . ۸. شکلهای ایجاد شده

۸۰۲. **قضیه.** مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی چهار مثلثی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

۸۰۳. اگر از چهار مثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، سه مثلث را که رأس مشترکی دارند در نظر بگیریم، سه مرکز دایره‌های محاطی خارجی نسبت به این رأس در این سه مثلث، سه رأس مستطیلی هستند که رأس چهارمش مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث چهارم است.

۸۰۴. چهارضلعی محاطی ABCD مفروض است. نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده از امتداد ضلعهای روبه‌رو، ضلعهای چهارضلعی را در چهار نقطه که رأسهای یک لوزی می‌باشند، قطع می‌کنند.



۸۰۵. نشان دهید که مرکزهای دایره‌های نه نقطهٔ چهار مثلثی که چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌کنند، یک چهارضلعی محاطی تشکیل می‌دهند.

۸۰۶. نشان دهید اگر نقطه‌های برخورد و مرکزهای دو دایره، رأسهای یک چهارضلعی محاطی باشند، آن‌گاه دو دایره برهم عمودند.

۷ . ۱ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۰۷. نشان دهید که پاد مرکز چهار ضلعی محاطی مرکز ارتفاعی مثلثی است که رأسهای آن نقطه‌های وسط قطرهای چهارضلعی و نقطهٔ برخورد قطرها هستند.

۸۰۸. اگر H_a ، H_b ، H_c و H_d مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی باشند که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاطی ABCD تعیین می‌شوند، نشان دهید که رأسهای ABCD مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی هستند که توسط نقطه‌های H_a ، H_b ، H_c و H_d تعیین می‌شوند.

۸۰۹. قضیه. چهار خط سیمسون نقطه‌ای از یک دایره را نسبت به چهار مثلثی که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاط شده در این دایره تعیین می‌شود در نظر گرفته شده، نقطهٔ میکل این چهار خط است.

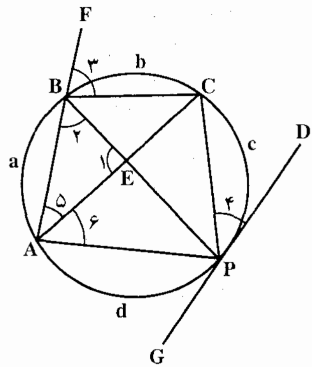
۸۱۰. سه رأس از چهارضلعی محاطی متغیری ثابتند. مکان هندسی

الف. مرکز ثقل چهارضلعی ؛

ب. پاد مرکز چهارضلعی را به‌دست آورید.

۸۱۱. می‌دانیم در هر مثلث، شبه میانه (Symedian) خطی است که قرینهٔ میانهٔ یک رأس نسبت به نیمساز زاویه همان رأس است. زاویهٔ XOY و دو خط متباین (پاد موازی) AB و $A'B'$ نسبت به OX و OY را در نظر می گیریم. ثابت کنید میانهٔ رأس O از هر یک از دو مثلث OAB و $OA'B'$ شبهٔ میانه مثلث دیگر است.

۷. ۱. ۱۰. مسأله‌های ترکیبی



۸۱۲. چهارضلعی ABCP محاطی است. PD مماس بر دایره و AF قاطع دایره است. حساب کنید :

الف. اندازهٔ زاویهٔ ۱، اگر $a = ۹۴$ و $c = ۵۴$.

ب. اندازهٔ زاویهٔ ۲، اگر AP قطر دایره باشد.

پ. اندازهٔ زاویهٔ ۳، اگر $\widehat{CPA} = ۲۵۰^\circ$.

ت. اندازهٔ زاویهٔ ۳، اگر $\widehat{ABC} = ۱۲۰^\circ$.

ث. اندازهٔ زاویهٔ ۴، اگر $\widehat{BCP} = ۱۳۰^\circ$ و $b = ۵۰^\circ$.

ج. اندازهٔ زاویهٔ ۴، اگر $BC \| AP$ و $a = ۷۴^\circ$.

چ. اندازهٔ $\widehat{a}$، اگر $BC \| AP$ و $\hat{۶} = ۴۲^\circ$.

ح. اندازهٔ $\widehat{a}$، اگر AC قطر و $\hat{۵} = ۳۵^\circ$.

خ. اندازهٔ $\widehat{b}$، اگر $AC \perp BP$ و $\hat{۲} = ۵۷^\circ$.

د. اندازهٔ $\widehat{c}$، اگر AC و BP قطر باشند و $\hat{۵} = ۴۱^\circ$.

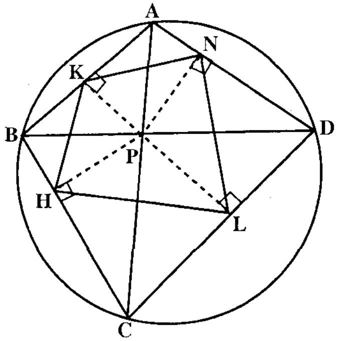
ذ. اندازهٔ $\widehat{d}$، اگر $\hat{۱} = ۹۵^\circ$ و $\widehat{b} = ۹۵^\circ$.

ر. اندازهٔ زاویهٔ CPA، اگر $\hat{۳} = ۷۹^\circ$.

۸۱۳. چهارضلعی محاطی ABCD که قطرهایش بر هم عمودند داده شده است. نقطهٔ P محل تلاقی قطرها را در نقطهٔ H روی BC و در نقطهٔ N روی AD و در نقطهٔ K روی AB و در نقطهٔ L روی CD تصویر می‌کنیم. ثابت کنید :

۱. چهارضلعی NKHL محیطی و محاطی است.

۲. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی چهارضلعی NKHL از وسطهای ضلعهای چهارضلعی ABCD می‌گذرد.



۸۱۴. ثابت کنید که اگر دایره‌ای قابل محاط در یک چهارضلعی باشد، آن‌وقت :

الف. دایره‌های محاطی دو مثلث که یک قطر چهارضلعی داده شده، آن را به آنها تقسیم می‌کند، برهم مماسند ؛

ب. نقطه‌های تماس این دایره‌ها با ضلعهای چهارضلعی، رأسهای چهارضلعیی محاطی هستند.

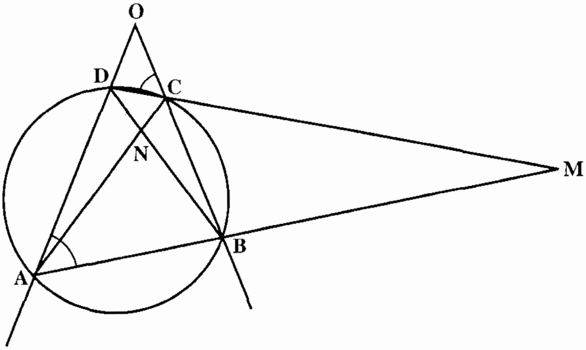
۸۱۵. الف. نقطهٔ M روی دایرهٔ (O) قرار دارد و چهارضلعی (q) در (O) محاط شده است. ترکیبهای سه به سه از رأسهای چهارضلعی (q)، چهار مثلث را تعیین می‌کنند. چهار خط سیمسون (M) نسبت به این چهار مثلث را به دست می‌آوریم و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم. نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون (M) نسبت به چهارضلعی (q) نامید.

ب. اگر یک پنج ضلعی داده شده در دایرهٔ (O) محاط شده باشد، ترکیبهای چهاربه‌چهار از پنج رأس آن پنج چهارضلعی را تعیین می‌کنند. پنج خط سیمسون (M) نسبت به این پنج چهارضلعی را به دست می‌آوریم، و (M) را روی آنها تصویر می‌کنیم، نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می‌توان خط سیمسون (M) نسبت به این پنج ضلعی نامید.

ج. اگر یک شش ضلعی داده شده در دایرهٔ (O) محاط شده باشد......... این فرآیند را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد.

خطهای پادموازی (آنتی‌پارالل)

۸۱۶. تعریف. دو خط AB و CP نسبت به دو ضلع Ox و Oy از زاویهٔ xOy آنتی‌پارالل نامیده می‌شوند در صورتی که $O\hat{A}B = O\hat{C}D$ باشد، از تعریف فوق نتیجه می‌شود :



۱. خطهای AD و BC نسبت به ضلعهای زاویهٔ M پاد موازی‌اند.
۲. چهار ضلعی ABCD محاطی است.
۳. قطرهای AC و BD آنتی‌پارالل نسبت به ضلعهای زاویهٔ O و زاویهٔ M هستند.
۴. ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی محاطی آنتی‌پارالل نسبت به قطرهای این چهارضلعی هستند.

نامگذاری خطهای آنتی‌پارالل نخستین بار در سال ۱۶۶۷ در کتاب Nouveaux Elements de Geometry توسط ARNAULD (۱۶۱۲ـ۱۶۹۴) آورده شد.

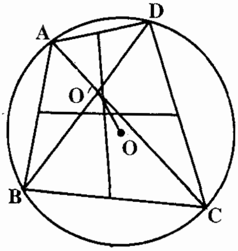
۷ . ۲. چهارضلعی محاطی عمود قطر

۷ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

تعریف. هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، چهارضلعی عمود قطر نامیده می‌شود. در این بخش چهارضلعی محاطی را که قطرهای آن برهم عمود باشند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این چهارضلعی را چهارضلعی محاطی عمود قطر می‌نامند.

۷ . ۲ . ۲. نقطه و دایره

۷ . ۲ . ۲ . ۱. نقطه درون دایره



۸۱۷. اگر در یک چهارضلعی محاطی قطرها برهم عمود باشند، محل برخورد قطرها نیز بر قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی نسبت به نقطهٔ تقاطع خطهایی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، منطبق است.

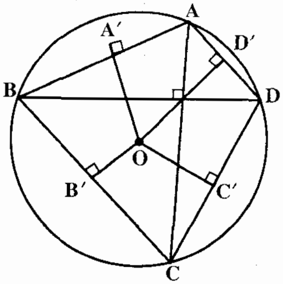
تعریف. نقطهٔ برخورد خطهایی که وسطهای ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی را به هم وصل می‌کنند، مرکز ثقل چهارضلعی نامیده می‌شود.

قضیه. اگر یک چهارضلعی عمود قطر، محاطی باشد، پاد مرکز آن (قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی نسبت به مرکز ثقل چهارضلعی) بر نقطهٔ برخورد قطرهایش منطبق است.

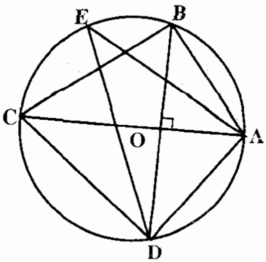
۷ . ۲ . ۲ . ۲. نقطه‌های همدایره

۸۱۸. در چهارضلعی محاطی عمود قطر تصویرهای نقطهٔ برخورد دو قطر بر روی چهار ضلع، روی دایره‌ای قرار دارند که از وسط ضلعها می‌گذرد و بعکس.

۷ . ۲ . ۳. پاره‌خط



۸۱۹. در هر چهار ضلعی محاطی که قطرهایش بر هم عمود باشند، فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی از هر ضلع، برابر نصف ضلع روبه‌رو به آن ضلع است.



۸۲۰. اگر ABCD یک چهارضلعی محاطی که قطرهایش برهم عمودند، باشد و E انتهای قطری از دایرهٔ محیطی آن که از D می‌گذرد باشد، ثابت کنید :

AE = CB

۷ . ۲ . ۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۲۱. هرگاه دو قطر یک چهار گوشهٔ محاطی برهم عمود باشند، هر خط که از نقطهٔ برخورد دو قطر بر یک ضلع چهار گوشه عمود شود، از وسط ضلع مقابل به این ضلع می‌گذرد. (از برهماگوپتا)

۷ . ۳. چهارضلعی محیطی

۷ . ۳ . ۱. تعریف و قضیه

می‌دانیم چهارضلعی محیطی است، در صورتی که همهٔ ضلعهای آن بر یک دایره مماس باشند. دایره را دایرهٔ محاطی چهارضلعی می‌نامند.

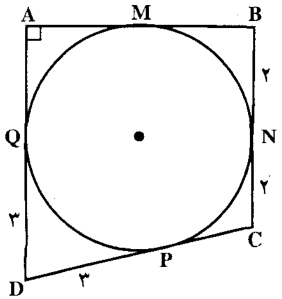
در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلعهای رو به رو با هم برابرند و بعکس.

۸۲۲. **قضیه**. اگر قطرهای یک چهارضلعی محاطی برهم عمود باشند، تصویر محل برخورد قطرهای این چهارضلعی روی چهارضلع آن چهار رأس یک چهارضلعی محاطی و محیطی هستند.

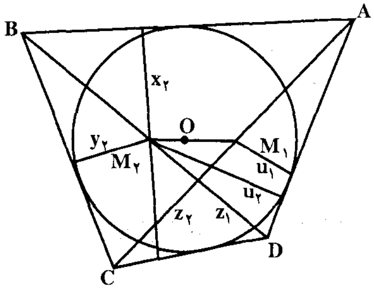
۷ . ۳ . ۲. شعاع

۷ . ۳ . ۲ . ۱. اندازهٔ شعاع

۸۲۳. در چهارضلعی محیطی ABCD (شکل روبه‌رو)، با توجه به این که $\hat{A} = ۹۰^\circ$ ، $BN = NC = ۲$ ، $DP = DQ = ۳$ است، شعاع دایرهٔ محاطی چهارضلعی را بیابید.



۳.۳.۷. نقطه و دایره



۱.۳.۳.۷. نقطه‌های همخط

۸۲۴. ثابت کنید که اگر دایره‌ای مماس بر خطهای AB، BC، CD، DA وجود داشته باشد، آن وقت مرکز آن و وسطهای AC و BD همخطند.

۸۲۵. نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی با متقارنهای مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی، نسبت به دو ضلع روبه روی هم، همخط است.

۴.۳.۷. ضلع

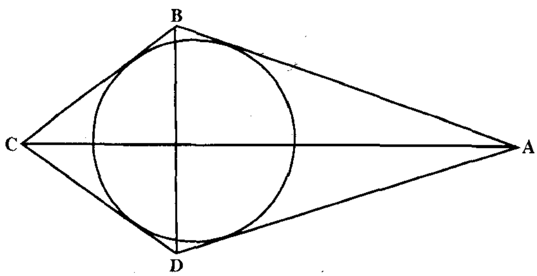
۸۲۶. اندازه‌های سه ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی، بترتیب، ۷، ۱۱ و ۱۶ سانتیمتر است. اندازهٔ ضلع چهارم آن‌را تعیین کنید.

۸۲۷. اگر $AB = a + ۱$، $BC = ۴a - ۳$، $CD = ۳a + ۲$ و $DA = a + ۳$ ضلعهای متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند، اندازهٔ ضلع CD چه‌قدر است؟

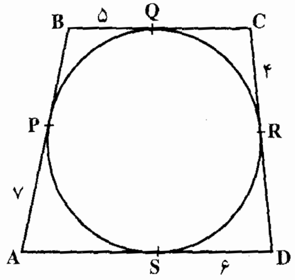
۸۲۸. محیط یک چهارضلعی محیطی برابر ۳۶ سانتیمتر است. اگر اندازهٔ یک ضلع این چهارضلعی ۸ سانتیمتر باشد، اندازهٔ ضلع روبه‌روی آن را تعیین کنید.

۵.۳.۷. قطر

۸۲۹. ثابت کنید، اگر دو ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهارضلعی بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف هم می‌کنند.



۶.۳.۷. محیط



۸۳۰. محیط چهارضلعی محیطی ABCD را به‌دست آورید ، P، Q، R و S، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی با دایره‌اند.

۸۳۱. مجموع دو ضلع روبه‌روی یک چهارضلعی محیطی برابر ۲۷ سانتیمتر است. اندازهٔ محیط این چهارضلعی را بیابید.

۷.۳.۷. زاویه

۸۳۲. چهارضلعی ABCD را بر دایرهٔ به مرکز O محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع دو زاویهٔ AOB و COD برابر ۱۸۰ درجه است.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۴

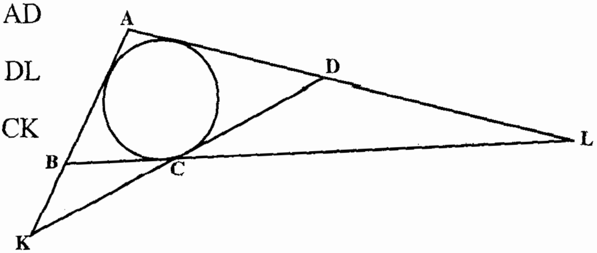
۸.۳.۷. پاره‌خط

۸۳۳. امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب ABCD، درنقطهٔ K و امتداد ضلعهای AD و BCی آن در نقطهٔ L متقاطعند. پاره‌خط BL، DK را قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر یکی از سه رابطهٔ

$$AB + CD = BC + AD$$

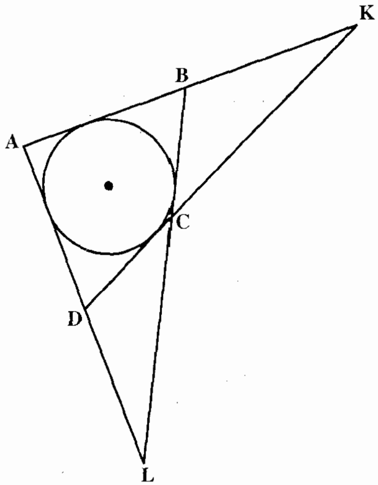
$$BK + BL = DK + DL$$

$$AK + CL = AL + CK$$



برقرار باشد، آن وقت دوتای دیگر هم برقرارند.

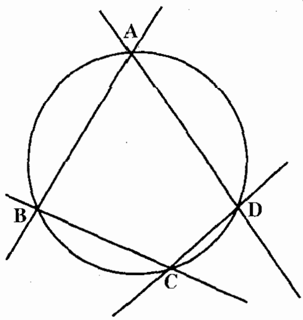
۸۳۴. امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب ABCD، در نقطهٔ K و امتداد ضلعهای AD و BCی آن در نقطهٔ L متقاطعند، پاره‌خط BL و DK را قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر یکی از سه رابطهٔ $AD + DC = AB + CB$ ، $AK + CK = AL + CL$ ، و $BK + DK = BL + DL$ برقرار باشد، آن‌گاه دو تای دیگر هم برقرارند.



۹.۳.۷. شکلهای ایجاد شده

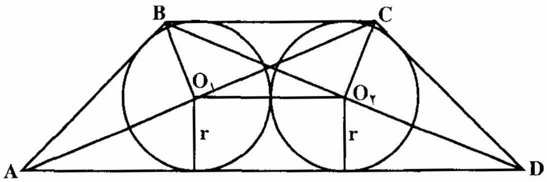
۸۳۵. ثابت کنید، اگر $n \geq ۴$ باشد، هر چهارضلعی محاطی را می‌توان به n چهارضلعی محاطی تجزیه کرد.

المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۲



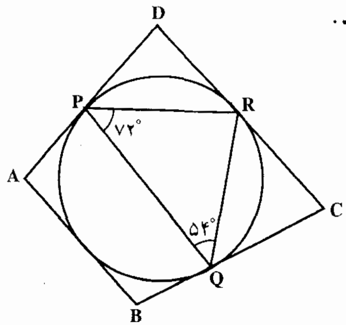
۱۰.۳.۷ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۳۶. مرکز دایره‌ای به شعاع r، که بر ضلعهای AB، AD و BC از چهارضلعی محدب ABCD مماس است، روی قطر AC ی آن قرار دارد. مرکز دایره‌ای به همان شعاع r، که بر ضلعهای BC، CD و AD مماس است، بر قطر BD واقع است. اگر این دو دایره بر هم مماس بیرونی باشند، مساحت چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.



۱۱.۳.۷ . مسأله‌های ترکیبی

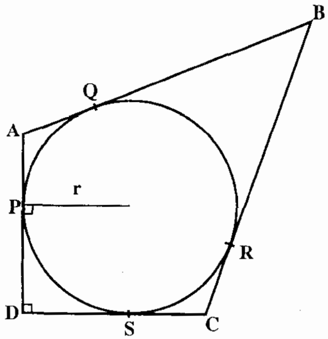
۸۳۷. در شکل □ABCD بر دایره محیط است. رأسهای ΔPQR نقطه‌های تماس □ABCD است. $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. اگر $R\hat{P}Q = ۷۲^\circ$ و $R\hat{Q}P = ۵۴^\circ$ ، اندازهٔ تمام کمانها و زاویه‌های شکل را بیابید.



۸۳۸. چهارضلعی محیطی ABCD داده شده است. اگر $DC = x$ ، $BC = ۳۸$ ، $QB = ۲۷$ و $\hat{D} = ۹۰^\circ$ ، باشد، مطلوب است محاسبهٔ :

الف. r، اگر $x = ۲۵$ باشد ؛

ب. x، اگر $r = ۱۰$ باشد.



۴.۷. دایره و چهارضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

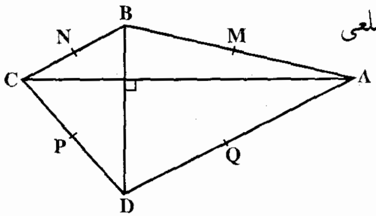
۱.۴.۷. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره و چهارضلعی کوژ یا کاو را بررسی می‌کنیم.

۲.۴.۷. نقطه و دایره

۸۳۹. یک چهارضلعی داده شده است. چهار دایره رسم می‌کنیم که هریک بر سه ضلع چهارضلعی مماس باشند. ثابت کنید، مرکزهای این چهار دایره رأسهای یک چهارضلعی محاطی‌اند.

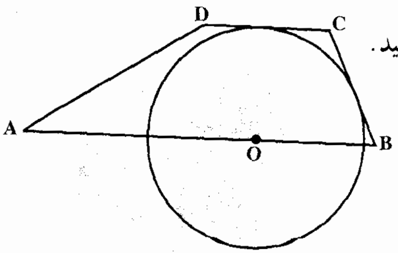
۸۴۰. ثابت کنید، اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، وسطهای ضلعهای آن چهارضلعی روی یک دایره واقع هستند.



۳.۴.۷. پاره‌خط

۱.۳.۴.۷. اندازهٔ پاره‌خط

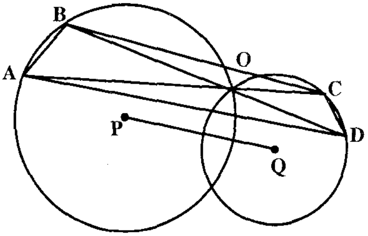
۸۴۱. درچهارضلعی ABCD: $AB = a$ ، $AD = b$ $(a > b)$. اگر BC، CD و AD بر دایره‌ای که مرکزش روی AB قرار دارد، مماس باشند،اندازهٔ پاره‌خط BCرا پیدا کنید.



۲.۳.۴.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۸۴۲. اگر دایرهٔ مماس بر چهار ضلع یک چهارضلعی در خارج آن چهارضلعی قرار بگیرد (بر امتداد ضلعهای چهارضلعی مماس باشد)، تفاضل ضلعهای روبه‌رو با هم برابرند.

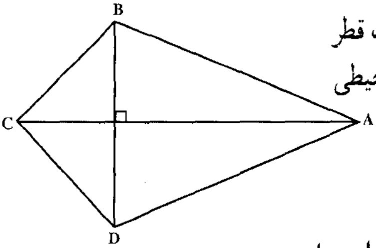
۸۴۳. در چهارضلعی کوژ ABCD، نقطهٔ O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند، آن گاه ثابت کنید که $PQ \geq \frac{AB+CD}{۲}$.



مرحلهٔ اوّل دهمین دورهٔ المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۱

۴.۴.۷. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است

۸۴۴. ثابت کنید، اگر در یک چهارضلعی محدب، یک قطر عمود منصف قطر دیگر باشد، چهار ضلعی محیطی است.



۵.۴.۷. شکلهای ایجاد شده

۸۴۵. در چهارضلعی محدب ABCD، نقطهٔ تلاقی قطرها را E، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABE، BCE،CDE و ADE را بترتیب P، Q، R و S می‌گیریم. آن‌گاه،

الف. PQRS یک متوازی‌الاضلاع است.

ب. PQRS اگر و تنها اگر متوازی‌الاضلاع است که ABCD یک لوزی باشد.

ج. PQRS اگر و تنها اگر متوازی‌الاضلاع است که ABCD یک مستطیل باشد.

د. PQRS اگر و تنها اگر متوازی‌الاضلاع است که ABCD یک متوازی‌الاضلاع باشد.

هـ. هیچ یک از گزاره‌های بالا صحیح نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

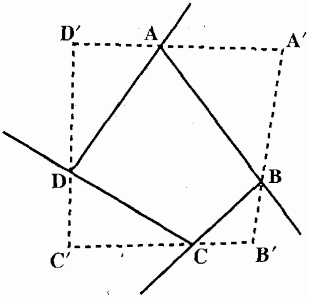
۸۴۶. در چهارضلعی ABCD، دایره‌های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB شعاعهای برابر دارند. ثابت کنید که چهارضلعی داده شده مستطیل است.

۸۴۷. چهارضلعی محدب ABCD را، به وسیلهٔ قطرهای آن، به چهار مثلث تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر شعاعهای چهار دایرهٔ محاطی این مثلثها، با هم برابر باشند، چهارضلعی ABCD یک لوزی است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۹

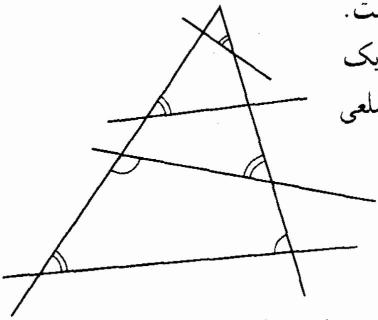
۸۴۸. نیمسازهای زاویه‌های درونی چهارضلعی یک چهارضلعی محاطی می‌سازند.

۸۴۹. ثابت کنید که از برخورد نیمسازهای زاویه‌های برونی یک چهارضلعی غیرمشخص یکُ چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



۸۵۰. چهار محور X_1 ، X_2 ، X_3 و X_4 ، بترتیب معینی در یک صفحه قرار دارند. اگر نیمسازهای زاویه‌های محورهای متوالی، تشکیل یک چهارضلعی دهند، ثابت کنید، این چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است.

۸۵۱. دو زوج خطهای متباین (پادموازی) نسبت به یک زوج خطهای متباین دیگر، متباینند. (چهارضلعی محاطی تشکیل می‌دهند.)



۶.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۲. در چهارضلعی محدب ABCD دو زاویهٔ روبه‌روی B و D قائمه هستند. از رأسهای A و C عمودهای AE و CF را بر قطر BD فرود می‌آوریم. ثابت کنید که وسطهای قطعه خطهای BD و EF بر هم منطبقند.

۷.۴.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۵۳. چهارضلعی ABCD داده شده است.

۱. ثابت کنید، چهار دایره‌ای که از وسطهای هر دو ضلع متوالی و وسط قطر گذرنده بر نقطهٔ برخورد آنها بگذرند، از یک نقطه خواهند گذشت.

۲. چهار دایره‌ای که از وسطهای ضلعهای مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB می‌گذرد، از یک نقطه خواهند گذشت.

۵.۷. دایره و چهارضلعیهای ویژه

۱.۵.۷. دایره ومتوازی‌الاضلاع

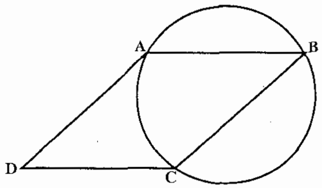
۱.۱.۵.۷. تعریف و قضیه

در این بخش به بررسی مطالب مربوط به دایره و چندضلعیهای ویژه (متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی، ذوزنقه) می‌پردازیم. در قسمت نخست این بخش، دایره و متوازی‌الاضلاع را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲.۱.۵.۷. شعاع

۸۵۴. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. دایره‌ای به شعاع R از نقطه‌های A و B می‌گذرد. دایرهٔ دیگری به همان شعاع از B و C می‌گذرد. فرض کنید M معرف دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها باشد. ثابت کنید که شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای AMD و CMD برابر با R است.

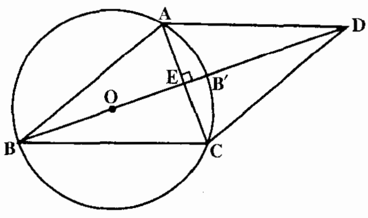
۸۵۵. P نقطهٔ دلخواهی از درون متوازی‌الاضلاع ABCD و R شعاع دایره‌ای است که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد. ثابت کنید، فاصلهٔ نقطهٔ P ازنزدیکترین رأس متوازی‌الاضلاع، بزرگتر از R است.



المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۷

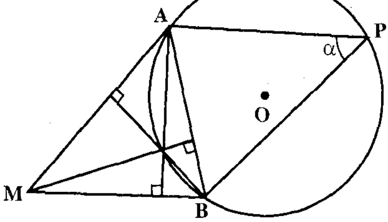
۳.۱.۵.۷. قطر

۸۵۶. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. قطر BOB' از این دایره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط DB' بر قطر AC عمود است.



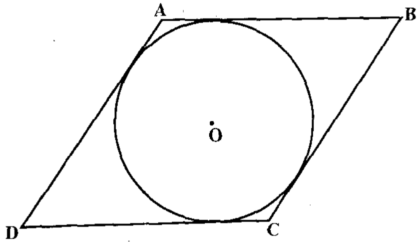
۴.۱.۵.۷. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۵۷. نقطهٔ ثابت P روی دایره‌ای به مرکز O واقع است. رأس زاویهٔ ثابت α در نقطهٔ P بوده این زاویه حول نقطهٔ P دوران می‌کند و ضلعهای آن، دایره را در نقطه‌های A و B قطع می‌نمایند. متوازی‌الاضلاع MAPB را می‌سازیم. ثابت کنید ارتفاعهای مثلث ABM از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.



۵.۱.۵.۷. شکلهای ایجاد شده

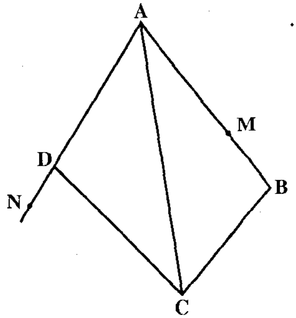
۸۵۸. ثابت کنید هر متوازی‌الاضلاع محیط بر یک دایره، لوزی است.



۶.۱.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۹. دو دایره به شعاع ۱ در یک متوازی‌الاضلاع واقعند. هر دایره بر دیگری و سه ضلع از متوازی‌الاضلاع مماس است. طول یکی از قطعه‌های ضلعها، از رأس تا نقطهٔ تماس، برابر با $\sqrt{3}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۸۶۰. متوازی‌الاضلاع ABCD با بزرگی ثابت در صفحهٔ خود چنان تغییر مکان می‌دهد که دو ضلع مجاور AB و AD از آن همواره بترتیب از دو نقطهٔ ثابت M و N می‌گذرند. ثابت کنید که قطر AC نیز همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۲.۵.۷. دایره و مستطیل

۱.۲.۵.۷. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره و مستطیل را بررسی می کنیم.

۲.۲.۵.۷. نقطه و دایره

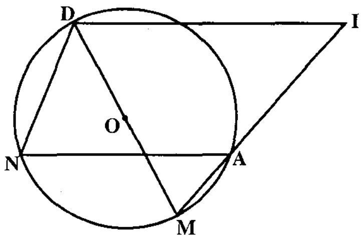
۸۶۱. یک دایره و یک مستطیل حداکثر چند نقطهٔ برخورد می توانند داشته باشند؟
الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۸۶۲. ثابت کنید که از چهار رأس هر مستطیل یک دایره می گذرد.

۳.۲.۵.۷. پاره خط

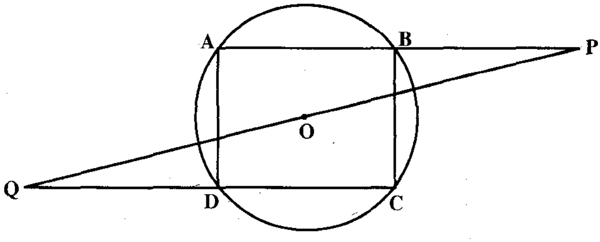
۸۶۳. در شکل چهارضلعی DIAN یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید : $DM = DI$



۴.۲.۵.۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

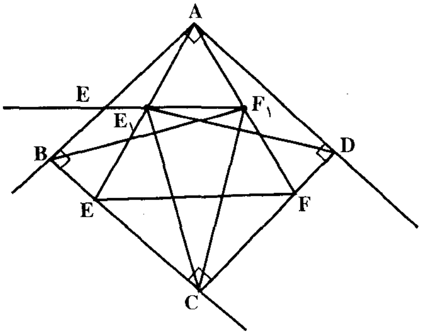
۱.۴.۲.۵.۷. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۶۴. ثابت کنید، تمام مستطیلهایی که در یک دایره محاطند و یک ضلع یا امتداد یک ضلعشان از نقطهٔ ثابتی می گذرد، ضلع روبه روی آن ضلع نیز از یک نقطهٔ ثابت می گذرد.

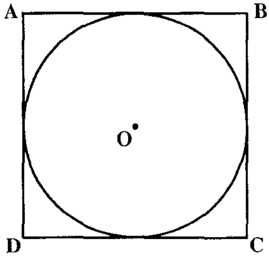


۵.۲.۵.۷. شکلهای ایجاد شده

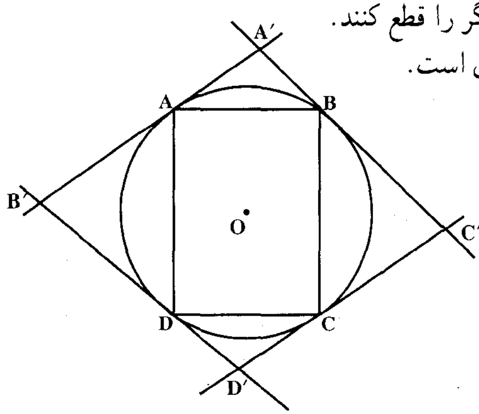
۸۶۵. فرض کنید ABCD مستطیل، E نقطه‌ای روی BC، F نقطه‌ای روی DC، E_1 وسط AE و F_1 وسط AF باشد. ثابت کنید که اگر مثلث AEF متساوی‌الاضلاع باشد، آن وقت مثلثهای DE_1C و BF_1C هم، متساوی‌الاضلاعند.



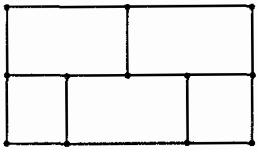
۸۶۶. ثابت کنید هر مستطیل محیط بر یک دایره مربع است.



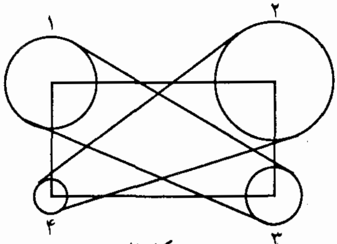
۸۶۷. مستطیل ABCD محاط در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. از رأسهای این مستطیل مماسهایی بر دایره می‌کشیم تا یکدیگر را قطع کنند. ثابت کنید چهارضلعی حاصل لوزی است.



۸۶۸. چهار دایرهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ را، بترتیب، به مرکز رأسهای مستطیل و به شعاع r_1، r_2، r_3 و r_4 رسم کرده‌ایم؛ در ضمن $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 < d$ (d، طول قطر مستطیل است؛ شکل ۲). مماسهای مشترک بیرونی را برای دو دایرهٔ ۱ و ۳ و برای دو دایرهٔ ۲ و ۴ رسم



شکل ۱



شکل ۲

کرده‌ایم. ثابت کنید، در چهارضلعی که از برخورد این مماسها به‌دست می‌آید، می‌توان دایره‌ای محاط کرد.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۱

۷.۵.۳. دایره و مربع

۷.۵.۳.۱. تعریف و قضیه

در این قسمت دایره و مربع مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۸۶۹. قضیه. هر مربع محاط در یک دایره و محیط بر دایرهٔ دیگری است.

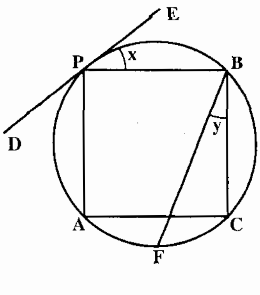
۷.۵.۳.۲. نقطه و دایره

۸۷۰. صفحه‌ای شطرنجی که طول ضلع هر خانهٔ آن برابر یک سانتیمتر است، در اختیار داریم. دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ سانتیمتر رسم کرده‌ایم، به نحوی که محیط آن، از هیچ رأسی از خانه‌ها نمی‌گذرد و بر هیچ ضلعی از خانه‌ها مماس نیست. محیط این دایره، چند خانه را می‌تواند قطع کند؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۷.۵.۳.۳. زاویه

۸۷۱. ACBP مربع محاط در دایره، DE مماس و F وسط کمان AC است. اندازهٔ x و y را بیابید.



۴.۳.۵.۷ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۷۲. دایرهٔ I بر مربع داده شده محیط و دایرهٔ II در همان مربع محاط است. نسبت مساحت دایرهٔ I به مساحت دایرهٔ II برابر است با :

الف) $\sqrt{۲}$ ب) ۲ ج) $\sqrt{۳}$ د) $۲\sqrt{۲}$ هـ) $۲\sqrt{۳}$

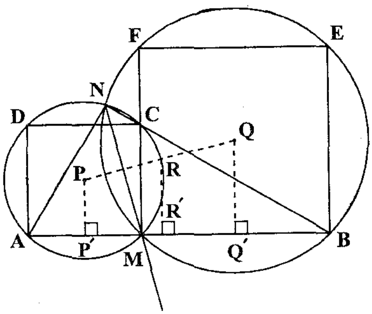
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۸۷۳. در یک مربع به ضلع واحد، چند دایره رسم کرده‌ایم که، شعاع هرکدام از آنها از ۰/۰۰۱ کوچکتر است. فاصلهٔ بین هردو نقطه از هر دو دایره، برابر ۰/۰۰۱ نیست. ثابت کنید، مساحتی که به وسیلهٔ دایره‌ها پوشیده می‌شود، از ۰/۳۴ تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۵.۳.۵.۷ . مسأله‌های ترکیبی

۸۷۴. نقطهٔ دلخواه M را بر پاره‌خط AB در نظر گرفته، مربعهای AMCD و MBEF را در یک طرف AB و درحالی که قطعه‌های AM و MB بترتیب قاعده‌هایشان می‌باشند رسم کرده‌ایم.



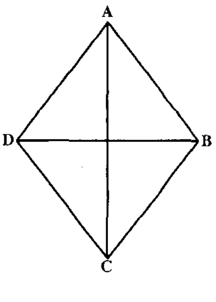
دایره‌های محیطی این مربعها به مرکزهای P و Q در M نیز در نقطهٔ دیگر N متقاطع می‌شوند. فرض می‌کنیم که نمایشگر نقطهٔ دیگر برخورد خطهای راست AF و BC باشد.

۱. ثابت کنید نقطه‌های N و N′ بر هم منطبقند.

۲. ثابت کنید خطهای راست MN بی‌توجه به اختیار نقطهٔ M از نقطهٔ ثابت S می‌گذرند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۵۹

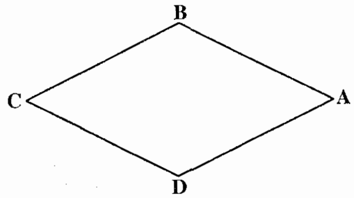
۴.۵.۷ .دایره و لوزی



۱.۴.۵.۷ . تعریف و قضیه

می‌دانیم که لوزی چهارضلعیی است که چهار ضلع آن با هم برابرند. در این قسمت مطالب مربوط به دایره و لوزی را بررسی می‌کنیم.

۸۷۵. قضیه. ثابت کنید که ضلعهای هر لوزی، بر یک دایره مماسند.



۲.۴.۵.۷. زاویه

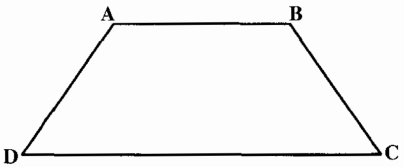
۸۷۶. A، B، C و D را رأسهای یک لوزی فرض می‌کنیم. K_1 دایره‌ای است که از سه نقطهٔ B، C و D گذشته است. همچنین دایرهٔ K_2 ازنقطه‌های A، C و D ؛ دایرهٔ K_3 از نقطه‌های A، B و D و سرانجام، دایرهٔ K_4 از نقطه‌های A، B و C گذشته‌اند. ثابت کنید، زاویهٔ بین مماسهای بر دو دایرهٔ K_1 و K_3 در نقطهٔ B، برابر است با زاویهٔ بین مماسهای بر دو دایرهٔ K_2 و K_4 در نقطهٔ A.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۳

۵.۵.۷.دایره وذوزنقه

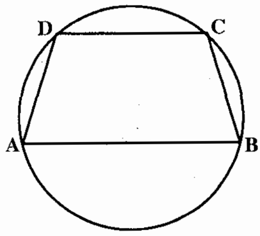
۱.۵.۵.۷. تعریف و قضیه

می‌دانیم ذوزنقه چهارضلعیی است که تنها دوضلع آن موازی یکدیگرند، که این دو ضلع را قاعده ها و دو ضلع ناموازی را ساقهای ذوزنقه می‌نامند.

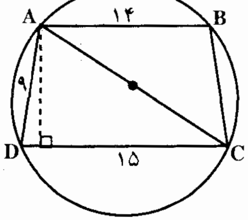


در این قسمت مطالب مربوط به دایره و ذوزنقه را بررسی می‌کنیم.

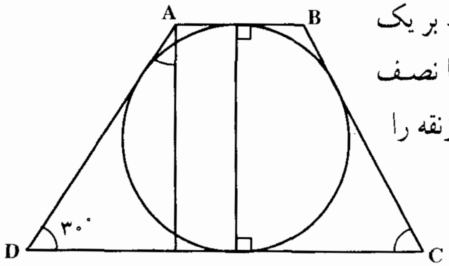
۸۷۷. قضیه. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن‌که ذوزنقه‌ای محاطی باشد آن است که متساوی‌الساقین باشد.



۲.۵.۵.۷. شعاع

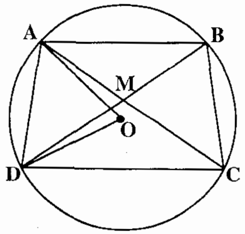


۸۷۸. شعاع کوچکترین دایره‌ای را پیدا کنید که ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را با قاعده‌های ۱۵ و۱۴ و ضلع جانبی ۹ در برگیرد.



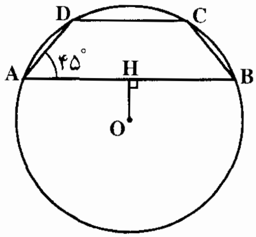
۸۷۹. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط بر یک دایره ، برابر با S و ارتفاع ذوزنقه برابر با نصف ساق آن است. شعاع دایرهٔ محاط در ذوزنقه را پیدا کنید.

۳.۵.۵.۷. زاویه



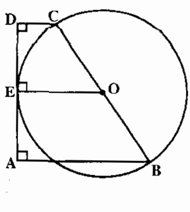
۸۸۰. ذوزنقهٔ ABCD در دایرهٔ به مرکز O محاط است. (AB و CD دو قاعدهٔ آن هستند.) محل برخورد دوقطر آن را M می‌نامیم. ثابت کنید : $A\hat{M}D = A\hat{O}D$.

۴.۵.۵.۷. پاره‌خط



۸۸۱. ذوزنقهٔ ABCD در دایره‌ای محاط است. زاویهٔ $\hat{A}$ از آن که مجاور به قاعدهٔ بزرگتر است مساوی °۴۵ است. ثابت کنید که قاعدهٔ کوچکتر مساوی است با دو برابر فاصلهٔ مرکز دایره از قاعدهٔ بزرگتر.

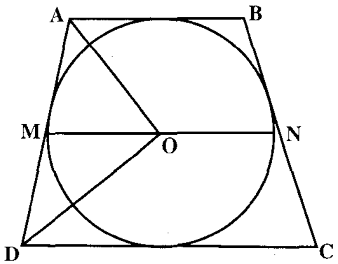
۵.۵.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۸۲. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای به ارتفاع h، به قطر ساق مایل دایره‌ای رسم کرده‌ایم ودیده‌ایم که این دایره بر ساق قائم مماس شده است. مطلوب است، مساحت مثلث

قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه اش مساوی دو قاعدهٔ این ذوزنقه باشد.

۸۸۳. بر دایره‌ای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط کرده‌ایم، خط واصل بین وسطهای دوساق آن مساوی m شده است، محیط و طول ساق ذوزنقه را به‌دست آورید.

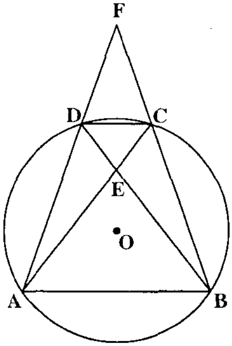


۶.۵.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۴. ذوزنقهٔ ABCD دریک دایره به مرکزO محاط است. قطرهای AC و BD یکدیگر رادر نقطهٔ E و امتداد ضلعهای AD وBC یکدیگر را در نقطهٔ F قطع می‌کنند. ثابت کنید که،

۱. چهار نقطهٔ A، D، E و O روی یک دایره واقعند.

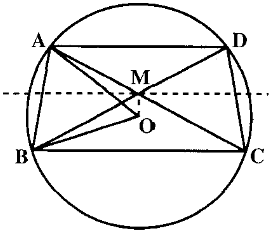
۲. چهار نقطهٔA، O، C و F روی یک دایره قرار دارند.

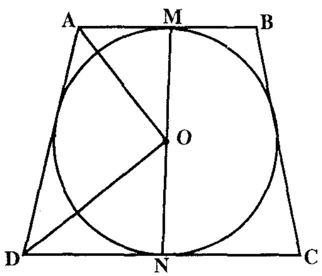


۸۸۵. ذوزنقهٔ متساوی الساقین ABCD در دایرهٔ O محاط است. ساق AB ثابت و ساق CD متحرک است وقطرهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند.

۱. ثابت کنید نقطهٔ M همواره روی دایرهٔ محیطی مثلث AOB واقع است.

۲. ثابت کنید خطی که از نقطهٔ M به موازات‌دوقاعدهٔ ذوزنقه رسم می‌شود از نقطهٔ ثابتی مانند I می‌گذرد.





۸۸۶. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD محیط بر دایرهٔ به مرکز O داده شده است. نقطه‌های تماس دو قاعدهٔ AB و CD با دایره را M و N می‌نامیم.

ثابت کنید:

۱. نقطه‌های M و N وسطهای دو قاعده بوده و سه نقطهٔ M، O و N بر یک استقامتند.

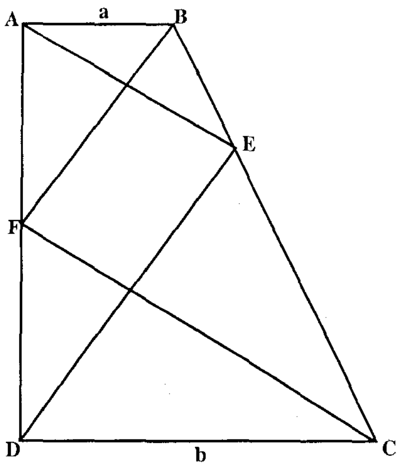
۲. ثابت کنید مثلث AOD قائم‌الزاویه است.

۳. ثابت کنید اندازهٔ ساق ذوزنقه، مساوی نصف مجموع دو قاعدهٔ آن است.

۸۸۷. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ$) قاعده‌های $AB = a$ و $CD = b$ و ساق $BC = a + b$ می‌باشند. نقطهٔ E را روی BC به قسمی اختیار می‌کنیم که $BE = a$ باشد و وسط AD را F می‌نامیم؛

۱. ثابت کنید که مثلثهای AED و BFC قائم‌الزاویه می‌باشند.

۲. طول خط‌المرکزین دایره‌های محیطی مثلثهای ABE و DCF را تعیین کنید.



بخش ۸

• دایره و n ضلعی $(n \geq 5)$

بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq ۵$)

۱.۸. تعریف و قضیه

در این بخش مطالب مربوط به چندضلعیهای محاطی و محیطی (پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی و ...) و دایره و چندضلعیهای دیگر ($n \geq ۵$) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۸. شعاع

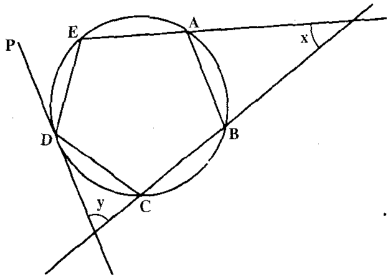
۸۸۸. در چندضلعیی محاطی، قطرهای نامتقاطع رسم می‌شوند و چندضلعی را به مثلثهایی تقسیم می‌کنند. ثابت کنید که مجموع شعاعهای دایره‌های محاط در این مثلثها، مستقل از طریقی است که قطرها رسم شده‌اند.

۸۸۹. فرض کنید $A_۱A_۲...A_n$ چندضلعیی محاطی باشد؛ مرکز دایره، در درون چندضلعی قرار دارد. مجموعه‌ای از دایره‌ها، بر دایرهٔ داده شده در نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، مماس درونی‌اند و یکی از نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ مجاور، روی ضلعی از چندضلعی قرار دارد. ثابت کنید، اگر n فرد باشد، آن‌وقت شعاع همهٔ دایره‌ها یکی است. طول مرز بیرونی اجتماع دایره‌های محاطی، برابر با محیط دایرهٔ داده شده است.

۳.۸. نقطه و دایره

۸۹۰. پنج‌ضلعی میکل Miqucl دایره‌های محیطی پنج مثلث حاصل از ضلعها و امتداد ضلعهای یک پنج‌ضلعی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطه‌های برخورد این دایره‌ها روی یک دایره‌اند.

۴.۸. زاویه



۱.۴.۸. اندازهٔ زاویه

۸۹۱. ABCDE پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره و DP مماس بر دایره در نقطهٔ D است. اندازهٔ x و y را بیابید.

۲.۴.۸. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۸۹۲. در هر ۲n ضلعی محاطی، مجموع زاویه‌های با شمارهٔ فرد مساوی مجموع زاویه‌های با شمارهٔ زوج است.

۸۹۳. هفت‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$، در یک دایره محاط شده است. ثابت کنید، اگر مرکز این دایره، در درون هفت‌ضلعی باشد، آن‌وقت، مجموع زاویه‌های رأسهای A_1، A_3 و A_5، از ۴۵۰ درجه کمتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۲

۵.۸. پاره‌خط

۱.۵.۸. اندازهٔ پاره‌خط

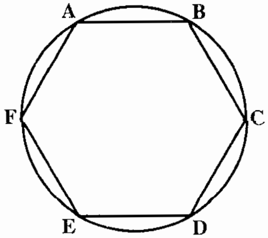
۸۹۴. قضیهٔ پونسله (Poncelet). اگر یک ۲n + ۱ ضلعی محاط در یک دایره باشد و ۲n ضلع آن به موازات خود تغییر کنند، آخرین ضلع طول ثابتی دارد.

۲.۵.۸. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۸۹۵. پنج‌ضلعی منتظم ABCDE در یک دایره محاط است. اگر M نقطهٔ دلخواهی از کمان $\widehat{AE}$ باشد، ثابت کنید: $MB + MD = MA + MC + ME$.

۶.۸. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۶.۸. خطها موازی‌اند



۸۹۶. شش‌ضلعی محدب و محاطی ABCDEF را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر AB با DE و BC با EF موازی باشند، ضلعهای CD و FA نیز متوازی هستند.

۸۹۷. قضیهٔ پونسله (Poncelet). اگر دو چندضلعی محاطی با ۳n ضلع دارای (۲n − ۱) ضلع موازی باشند، ضلع آخری آنها نیز باهم موازی‌اند.

۲.۶.۸. خطها همرسند

۸۹۸. برای آن که یک چندضلعی محدب قابل محاط شدن در یک دایره باشد، کافی است که :

الف) همهٔ ضلعهایش با هم برابر باشند.

ب) همهٔ زاویه‌هایش با هم برابر باشند.

ج) عمود منصفهای ضلعهای آن همرس باشند.

د) محور تقارن داشته باشد.

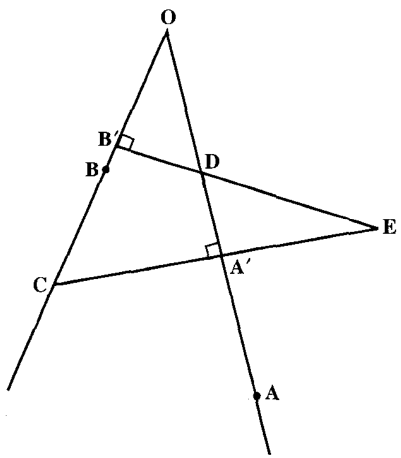
هـ) مرکز تقارن داشته باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۷.۸. شکلهای ایجاد شده

۸۹۹. فرض کنید ABCDEF شش‌ضلعیی محاطی باشد که در آن $AB = CD = EF = R$ ، که R شعاع دایرهٔ محیطی است و O مرکز آن. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد دو به دو دایره‌های محیطی مثلثهای BOC، DOE و FOA، متمایز از O، رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع R به حساب می‌آیند.

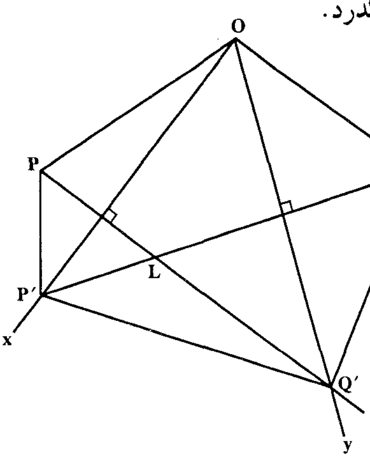
۹۰۰. بر ضلعهای زاویهٔ O دو طول اختیاری OA و OB را جدا می‌کنیم و از A' وسط OA عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تا ضلع OB را در نقطهٔ C قطع کند و از B' وسط OB عمودی بر OB اخراج می‌کنیم تا ضلع OA را در نقطهٔ D قطع کند. خطهای $A'C$ و $B'D$ یکدیگر را در نقطهٔ E قطع می‌کنند. ثابت کنید پنج‌ضلعی ACBDE محاطی است.



۹۰۱. ثابت کنید P و Q قرینه‌های یک نقطه مثل L نسبت به ضلعهای Ox و Oy از یک زاویه و نقطه‌های :

$$Q' = (LP, Oy) \ , \ \ P' = (LQ, Ox)$$

روی دایره‌ای قرار دارند که از نقطهٔ O می‌گذرد.



۹۰۲. قطرهای یک شش‌ضلعی با هم برابرند و ضلعهای آن دو به دو موازی می‌باشند. ثابت کنید که این شش‌ضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است. مسألهٔ کاتالان (CATALAN)

۸.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۹۰۳. ثابت کنید که مساحت چندضلعی محیطی برابر است با rp، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی و p نصف محیط چندضلعی است. (به‌ویژه این دستور برای مثلث هم درست است).

۹۰۴. خطی که تصویرهای یک نقطهٔ دلخواه بر ضلعهای یک زاویه را به هم وصل می‌کند، بر مزدوج همزاویهٔ خطی که از آن نقطه به رأس زاویه وصل می‌شود، عمود است.

۹.۸. مسأله‌های ترکیبی

۹۰۵. در یک پنج‌ضلعی محدب همهٔ ضلعها با هم برابرند.

۱. ثابت کنید : در درون این پنج‌ضلعی و روی قطر بزرگتر، نقطه‌ای وجود دارد که، از آن‌جا، هر ضلع پنج‌ضلعی به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند.

۲. ثابت کنید، دایره‌هایی که به قطر ضلعها رسم شوند، پنج‌ضلعی را نمی‌پوشانند.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد».

در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهناییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل، یا راهنمایی نمی‌باشند؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هرچند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضی‌دانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

می‌گیرند ؛ در نتیجه نقطه‌های A و C برهم و نقطه‌های B و D نیز برهم واقع شده و کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ برهم منطبق می‌شوند ؛ یعنی دو کمان متساوی‌اند.

۵ . یک قوس را ثابت نگاه می‌داریم و دایره را آن‌قدر در حول مرکزش می‌چرخانیم تا قوس دیگر بر قوس ثابت منطبق شود ؛ درنتیجه دو زاویهٔ مرکزی بر یکدیگر منطبق می‌شوند، یعنی متساوی‌اند.

نتیجه. هر قطر دایره را به دو کمان برابر تقسیم می‌کند که هر یک از آنها رو به رو به یک زاویهٔ نیمصفحه است.

۶ . اگر دایره را آن‌قدر بچرخانیم که OC بر OA قرار گیرد و دو زاویه در یک طرف OA واقع شوند، ضلع OD در درون زاویهٔ AOB می‌افتد و نقطهٔ D بین A و B واقع می‌شود، یعنی :

$$\widehat{AB} > \widehat{CD}$$

۷ . اگر $A\hat{O}B$ از $C\hat{O}D$ بزرگتر نباشد، یا با آن مساوی است یا از آن کوچکتر است ؛ هرگاه $A\hat{O}B = C\hat{O}D$ باشد، $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ و این خلاف فرض است و اگر $A\hat{O}B < C\hat{O}D$ باشد، $\widehat{AB} < \widehat{CD}$ و این نیز خلاف فرض است ؛ پس در نتیجه $A\hat{O}B > C\hat{O}D$ است.

۸ . در دو مثلث AOB و A′OB′ (شکل)

$$\left.\begin{matrix} OA = OA' \\ AB = A'B' \\ OB = OB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AOB = \Delta A'OB'$$

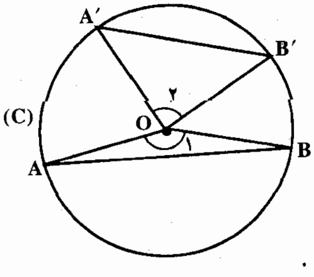
بنابراین $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ و در نتیجه : $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. بترتیب عکس می‌توان دید که :

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$$

و در این صورت دو مثلث AOB و A′OB′ به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها مساوی یکدیگر می‌شوند، و در نتیجه $AB = A'B'$.

۹ . در شکل داریم :

$$\left.\begin{matrix} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AB > A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ > \hat{O}_۲$$

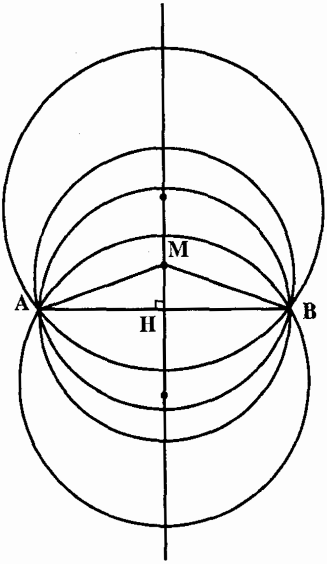


بنابراین $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$.

عکس قضیه را با برهان خلف یا با روش مستقیم ثابت کنید.

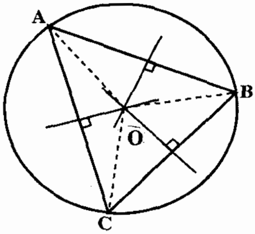
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. در صفحهٔ P پاره‌خط AB را درنظر می‌گیریم. چنان که می‌دانیم اگر نقطهٔ M روی عمودمنصف این پاره‌خط واقع باشد، دایرهٔ به مرکز M و شعاع MA از هر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. بنابراین دایره‌های بیشماری می‌توان رسم کرد که همهٔ آنها بردو نقطهٔ A و B بگذرند. مرکزهای همهٔ این دایره‌ها بر عمودمنصف پاره‌خط AB واقعند. شعاع این دایره‌ها بزرگتر یا مساوی $\frac{AB}{۲}$ است. بنابر این کوچکترین دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ A و B دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.

۲. اگر سه نقطهٔ A، B و C بر یک خط راست واقع باشند، عمودمنصفهای سه پاره‌خط AB، BC و AC متوازی هستند و نقطه‌ای نمی‌توان داشت که از سه نقطهٔ مزبور به یک فاصله باشد. بنابراین در این حالت دایره‌ای نمی‌توان رسم کرد که آن سه نقطه را شامل باشد.

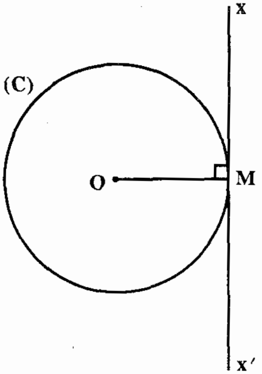


۳. سه نقطهٔ A، B و C را که بر یک خط راست واقع نیستند درنظر می‌گیریم (شکل)، عمودمنصفهای ضلعهای مثلث ABC در یک نقطه و فقط در یک نقطه مانند O همرسند و $OA = OB = OC$، بنابراین دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA، (یا OB یا OC) بر سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد. نقطهٔ O تنها نقطه‌ای است که از نقطه‌های A، B و C به یک فاصله است، پس دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA تنها دایره‌ای است که بر سه نقطهٔ مذکور می‌گذرد.

۴. یکی از دو زاویه را ثابت نگاه می‌داریم و دایره را حول مرکزش آن‌قدر می‌چرخانیم تا یک ضلع زاویهٔ دیگر بر یک ضلع زاویهٔ ثابت قرار گیرد و دو زاویه در یک طرف آن ضلع واقع شوند ؛ بدیهی است که چون دو زاویه متساوی‌اند، اضلاع دیگرشان نیز بر روی هم قرار

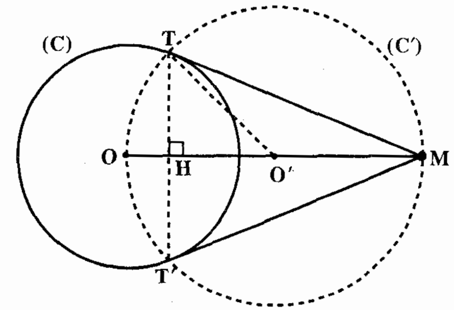
۱۴. اگر $AB > A'B'$ باشد، وتر AM را مساوی وتر $A'B'$ و در طرف قوس AB رسم کنید.

۱۵. اگر نقطهٔ M بر دایره واقع باشد، خط $x'Mx$ که در آن نقطه بر شعاع OM عمود رسم شود، در نقطهٔ M بر دایره مماس و بنابراین جواب مسأله است و مسأله فقط یک جواب دارد(چرا؟) (شکل الف).



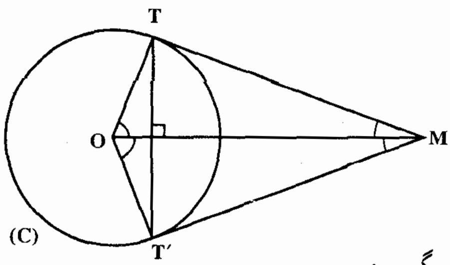
(الف)

در حالتی که نقطهٔ M در برون دایره باشد، برای پی بردن به روش رسم مماس، ملاحظه می کنیم که اگر MT بر دایرهٔ (C) مماس و نقطهٔ O' وسط پاره‌خط OM باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM، $O'T = \frac{1}{2}OM$، یعنی خطی که از نقطهٔ M می گذرد و بر دایرهٔ (C) مماس است با آن دایره در نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{1}{2}OM$ از نقطهٔ O' مماس می‌شود. بنابراین اگر به مرکز O' و به شعاع $\frac{1}{2}OM$ دایره‌ای رسم کنیم، دایرهٔ (C) را در نقطه‌ای مانند T قطع می کند و از وصل کردن آن نقطه به نقطهٔ M خط مماس رسم می‌شود (شکل ب).



(ب)

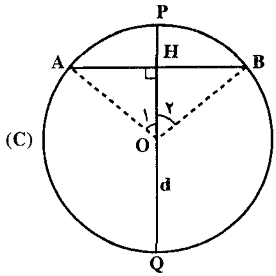
۱۶. از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' بر دایرهٔ (C) رسم شده‌اند. دو مثلث TOM و $T'OM$ همنهشتند. در نتیجه $MT = MT'$ و $T\hat{M}O = T'\hat{M}O$ و $T\hat{O}M = T'\hat{O}M$؛ و در مثلث متساوی‌الساقین MTT'، $MH \perp TT'$ است.



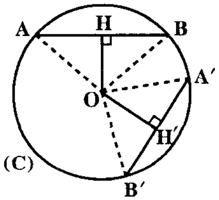
۱۷. برای اثبات این قضیه سه حالت درنظر می گیریم :

حالت اوّل. یکی از ضلعهای زاویهٔ محاطی قطری از دایره است (شکل الف). اگر از A

۱۰. اگر در دایرهٔ $C(O,R)$، قطر PQ بر وتر AB عمود باشد، در مثلث AOB که متساوی‌الساقین است، پاره‌خط OH ارتفاع نظیر قاعده است و بنابراین زاویهٔ رأس و قاعدهٔ مثلث را نصف می‌کند، پس: $AH = HB$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.
از تساوی این دو زاویهٔ مرکزی، تساوی کمانهای AP و PB نتیجه می‌شود. اما PQ قطر دایره است و بنابراین کمانهای $\widehat{PAQ}$ و $\widehat{PBQ}$ متساوی‌اند، در نتیجه: $\widehat{AQ} = \widehat{QB}$.

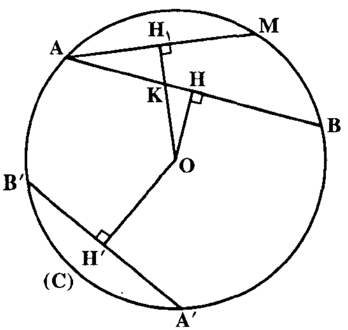


۱۲. از تساوی دو وتر AB و $A'B'$ تساوی دو مثلث AOB و $A'OB'$ را به حالت برابری سه‌ضلع نتیجه می‌گیریم. لازمهٔ تساوی این دو مثلث آن است که همهٔ اجزای نظیر آنها، و از جمله ارتفاعهای نظیر دو قاعده، متساوی باشند، پس $OH = OH'$.



به عکس، بسادگی ثابت می‌شود که در هر دایره وترهایی که از مرکز دایره به یک فاصله‌اند، متساوی‌اند.

۱۳. بر دایرهٔ (C) ابتدا از نقطهٔ A، کمان $\widehat{AM}$ را مساوی با کمان $\widehat{A'B'}$ جدا می‌کنیم، چون $A'B' < AB$، نقطهٔ M بر کمان $\widehat{AB}$ بین A و B و در آن طرفی از وتر AB قرار می‌گیرد که مرکز دایره در آن طرف قرار ندارد، پس اگر عمودی که از مرکز دایره بر وتر AM فرود می‌آید، آن وتر را در نقطهٔ H_1 و وتر AB را در نقطهٔ K قطع کند:



$AM = A'B' \Rightarrow OH_1 = OH'$

اما $\widehat{AB} > \widehat{AM}$، پس وترهای AB و AM در یک امتداد نیستند و پاره‌خط OH_1 که بر وتر AM عمود است، بر وتر AB عمود نیست، پس:

$$\left.\begin{array}{l} OH < OK \\ OK < OH_1 \ , \ OH_1 = OH' \end{array}\right\} \Rightarrow OH < OH'$$

به مرکز دایره وصل کنیم، زاویهٔ مرکزی AOC به دست می‌آید که زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقینOAB است، بنابراین مساوی مجموع دو زاویهٔ غیرمجاور آن است.

$$A\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B} = ۲\hat{B}$$

یعنی زاویهٔ محاطی ABC مساوی نصف زاویهٔ مرکزی AOC می‌باشد،

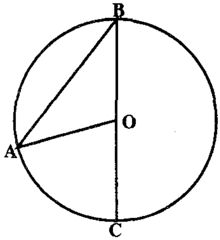
$$A\hat{B}C = \frac{۱}{۲} A\hat{O}C$$

چون اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC برابر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ می‌باشد، نتیجه می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ ABC مساوی نصف اندازهٔ کمان روبه‌روی آن می‌باشد.

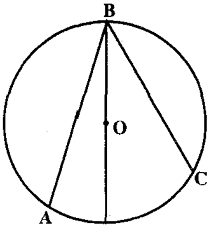
حالت دوم. دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره قرار دارند. شکل (ب)

حالت سوم. دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز دایره واقعند. شکل (پ)

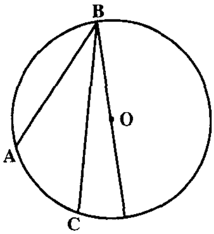
اثبات حالتهای (ب) و (پ) با توجه به شکل آسان است.



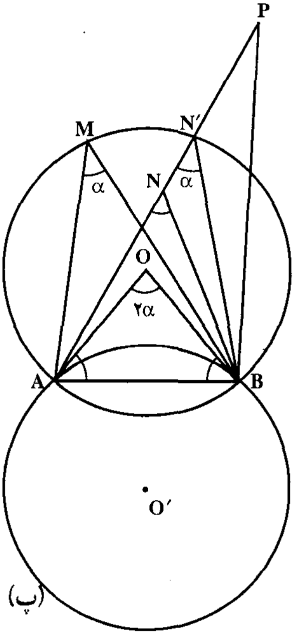
(الف)



(ب)



۱۸. نقطه‌های ثابت A و B و زاویهٔ حادهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل). در نقطه‌های مذکور بر خط AB و در یک طرف آن خط، دو زاویه به اندازهٔ $۹۰° - α$ می‌سازیم. ضلعهای این دو زاویه در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع می‌کنند. دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA یا OB رسم می‌کنیم از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. اگر نقطهٔ M را بر کمان بزرگتر نظیر وتر AB از این دایره، ($\overset{\frown}{ACB} > ۱۸۰°$)، که با مرکز آن در یک طرف پاره‌خط AB قرار دارد اختیار کنیم، $A\hat{M}B = \frac{۱}{۲} A\hat{O}B = α$ (چرا؟)، یعنی هر نقطهٔ واقع بر کمان $\overset{\frown}{ACB}$ رأس زاویه‌ای است، مساوی α که ضلعهای آن از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند. اکنون ثابت می‌کنیم که رأس هر زاویهٔ مساوی α که ضلعهایش بر دو نقطهٔ A و B بگذرند، بر



(پ)

$\overset{\frown}{ACB}$ از دایرهٔ O قرار دارد. در حقیقت اگر فرض شود که نقطه‌ای مانند N مثلاً در درون دایره واقع باشد، یکی از دو خط NA یا NB و مثلاً NA، دایره را در نقطه‌ای مانند N' قطع می‌کند و در مثلث $NN'B$:

$$\hat{N}_1 > \hat{N}' \,,\ \ \hat{N}' = \alpha \Rightarrow \hat{N}_1 > \alpha$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر P نقطه‌ای در برون دایره باشد، $A\hat{P}B < \alpha$ است.

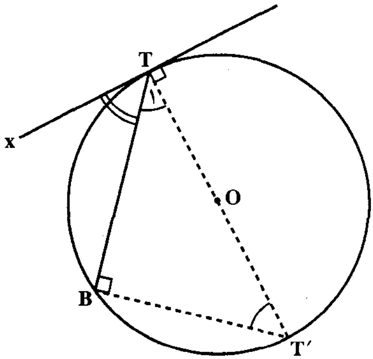
پس هر نقطهٔ M از صفحهٔ دایره با شرط آن که $A\hat{M}B = \alpha$ باشد، بر $\overset{\frown}{ACB}$ واقع است. کمان $\overset{\frown}{ACB}$ را که با مرکز دایره در یک طرف وتر AB قرار دارد و دارای خاصیت بالا است، کمان حاوی زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB می‌نامیم. این کمان را کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB نیز می‌گویند.

اگر بر خط AB در دو نقطهٔ A و B و در طرف دیگر این پاره‌خط زاویه‌هایی مساوی $۹۰^\circ - \alpha$ بنا کنیم به همان ترتیب دایرهٔ دیگر O' از صفحهٔ P حاصل می‌شود که عیناً دارای همین خاصیت است.

بدیهی است کمان کوچکتر $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ $C(O,R)$ نیز حاوی زاویهٔ منفرجهٔ $۱۸۰^\circ - \alpha$ وابسته به پاره‌خط AB است و همچنین کمان مشابه آن از دایرهٔ دیگر نیز همین خاصیت را دارد.

۱۹. قطر TT' را که از نقطهٔ تماس می‌گذرد، رسم می‌کنیم (شکل). در مثلث TBT' :

$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{TT'} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}' = ۹۰^\circ$$



از طرفی، $OT \perp Tx \Rightarrow \hat{T}_1 + x\hat{T}B = ۹۰^\circ$

و از آن‌جا :

$$x\hat{T}B = \hat{T}'$$

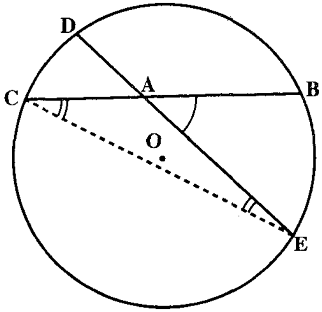
اما زاویهٔ T' زاویه‌ای محاطی و مقابل به $\overset{\frown}{TB}$ و در نتیجه مساوی نصف این کمان است. پس $x\hat{T}B = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{TB}$.

۲۰. در مثلث EAC از شکل داریم :

$$B\hat{A}E = A\hat{C}E + C\hat{E}A$$

اما دو زاویهٔ طرف دوم، زاویه‌های محاطی هستند. بنابراین :

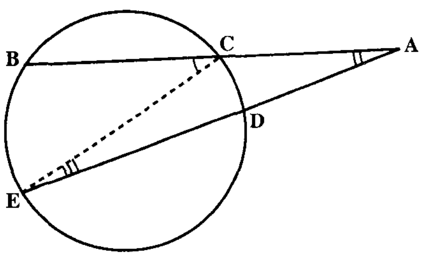
$$B\hat{A}E = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BE} + \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DC}$$



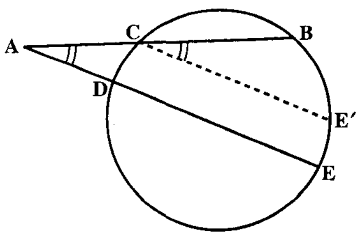
یا

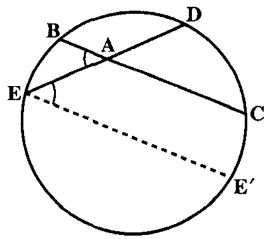
$$B\hat{A}E=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{DC})$$

۲۱. قضیه را باتوجه به شکل به صورت $C\hat{A}E=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BE}-\overset{\frown}{CD})$ ثابت کنید.



نکته. آیا با توجه به شکلهای زیر می‌توانید قضیه‌های بالا را به صورت دیگر ثابت کنید؟



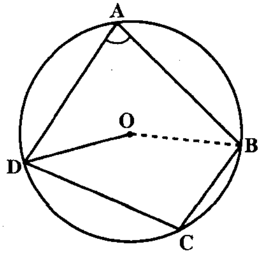


۲۲. در شکل، اندازهٔ هریک از دو زاویهٔ BAD و BCD نصف کمان مقابل به آن است، اما مجموع دو کمان مقابل آن زاویه‌ها شامل تمام دایره و مساوی چهار قائمه است، پس :

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=۱۸۰^\circ$$

و به همین دلیل

$$C\hat{D}A+C\hat{B}A=۱۸۰^\circ$$



۲۳. اگر دایرهٔ محیطی مثلث BAD را رسم کنیم و M نقطهٔ دلخواهی از کمان روبه روی $\hat{A}$

باشد :

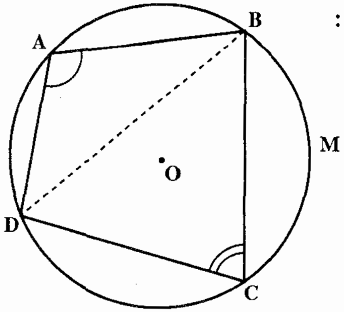
$$\hat{A} = \frac{۱}{۲}\widehat{BMD} = \frac{۱}{۲}\left(۳۶۰^\circ - \widehat{BAD}\right) = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}\widehat{BAD}$$

اما بنا به فرض :

$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - \hat{C}$$

از مقایسهٔ این دو رابطه :

$$\hat{C} = \frac{۱}{۲}\widehat{BAD}$$



می‌دانیم که مکان هندسی رأسهای زاویه‌هایی که ضلعهای آنها از دو نقطهٔ B و D می‌گذرند و اندازهٔ آنها $\frac{۱}{۲}\widehat{BAD}$ است، کمان $\widehat{BMD}$ از دایرهٔ مزبور است، پس نقطهٔ C بر دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ B، A و D واقع است. یعنی چهارضلعی مفروض محاطی است.

۲۴. اگر چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی محیطی باشد و ضلعهای آن در نقطه‌های M ، N، P و Q بر دایرهٔ محاطی آن مماس باشند (شکل)، می‌توان نوشت :

$AM = AQ$ (چرا؟)

$MB = BN$

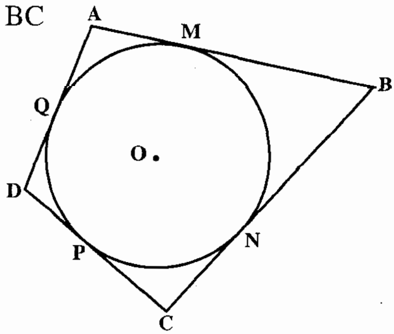
$CP = NC$

$PD = QD$

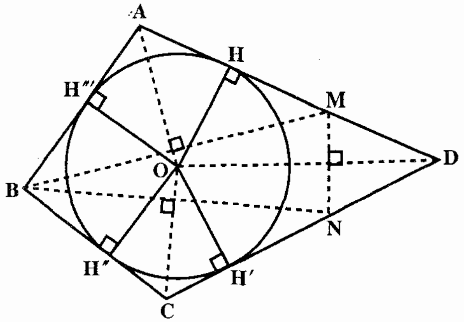
و چون این چهار رابطه را عضو به عضو با هم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$(AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + QD) + (BN + NC)$$

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$$



۲۵. اثبات در حالت لوزی ساده است، پس فرض می کنیم چهارضلعی ABCD در شکل لوزی نیست و $AB + CD = BC + AD$. با توجه به شکل دیده می‌شود که $AD > AB$ و $CD > CB$ و $CD - BC = AD - AB$، اکنون $AM = AB$ را بر AD و $CN = CB$ را بر CD جدا می کنیم. با توجه به رابطهٔ بالا خواهیم داشت: $ND = MD$.



چون نقطه‌های M ،B و N را دو به دو به هم وصل کنیم، مثلث BMN پدید می‌آید. (چرا؟) می‌توان ملاحظه نمود که نیمسازهای سه زاویهٔ C ،A و D، عمود منصفهای ضلعهای مثلث MBN هستند (چرا؟) و بنابراین در نقطه‌ای مانند O همرسند. نقطهٔ O از ضلعهای سه زاویهٔ نامبرده به یک فاصله است، پس اگر به مرکز O و شعاعی مساوی OH (یا هریک از پاره‌خطهای ′OH، ″OH و ‴OH) دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر ضلعهای زاویه‌های مزبور، یعنی بر همهٔ ضلعهای چهارضلعی مماس می‌شود. بنابراین چهارضلعی محیطی است.

۱ . ۲ . شعاع

۲۶. مثلثهای OAB و OMN متساوی‌الساقین و OC نیمساز زاویهٔ AOB و MON است، پس عمودمنصف پاره‌خطهای AB و MN می‌باشد.

۱ . ۳ . نقطه و نیمدایره

۲۷. در چهارضلعی AEBF ، $B\hat{A}F = F\hat{E}B = 90^\circ$ است، پس دایرهٔ به قطر BF از نقطه‌های A و E می‌گذرد، یعنی چهار نقطهٔ A ،E ،B و F همدایره‌اند.

۱ . ۴ . کمان

۲۸. گزینهٔ (ج) درست است.

۱ . ۵. وتر

۲۹. چهارضلعی PFEA محاطی است، زیرا $\frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = F\hat{A}E = \frac{\overset{\frown}{CB}}{۲} = F\hat{P}E$ است، پس:

$$E\hat{F}A = B\hat{P}A = ۹۰^\circ \Rightarrow AD \perp EF$$

۱ . ۶. قطر

۳۰. مثلث AMB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و $AB = MA\sqrt{۲}$ است. پس:

$$AB = ۶\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۱۲cm$$

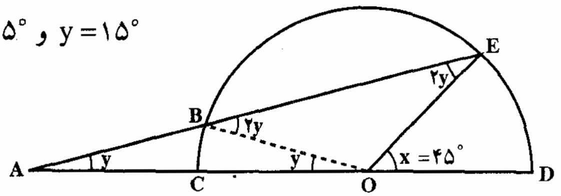
۱ . ۷. زاویه

۳۱. گزینهٔ (ب) درست است. پاره‌خط BO را رسم می‌کنیم و اندازه‌های زاویه‌های EOD و BAO را بترتیب با x و y نشان می‌دهیم. توجه کنید که $AB = OD = OE = OB$ و قضیهٔ زاویهٔ خارجی مثلث را در مثلثهای ABO و AEO به‌کار ببرید. نتیجه می‌شود:

$$E\hat{B}O = B\hat{E}O = ۲y \text{ و } x = ۳y$$

پس:

$$۳y = ۴۵^\circ \text{ و } y = ۱۵^\circ$$



راه دیگر. با توجه به این که اندازهٔ زاویهٔ برونی دایره برابر است با نصف تفاضل کمانهای نظیر آن، داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}(x - y)\ ,\ y = \frac{x}{۳} = \frac{۴۵^\circ}{۳} = ۱۵^\circ$$

۳۲. هریک از کمانهای $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{NB}$ برابر ۶۰° است. از آنجا:

$$M\hat{D}N = \frac{۶۰ + ۱۸۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

۱ . ۸. پاره‌خط

۳۳. فرض کنید B_1 ، B_2 ، ... و B_{n+1} معرف نقطه‌های قرینهٔ نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... و A_{n+1} نسبت به قطر $A_\circ A_{2n+1}$ و C_k و C'_k نقطه‌های برخورد خط راست A_kA_{2n+1-k} با OA_n و OA_{n+1} باشند. فرض کنید، D_{k-1} و D_k نقطه‌های برخورد خط راست A_kB_{k-1} و A_kB_{k+1} با قطر باشند. به روشنی، همین نقطه‌ها، نقطه‌های برخورد خطهای راست B_kA_{k-1} و B_kA_{k+1} با قطر هستند. همچنین، روشن است که مثلث $D_{k-1}A_kD_k$ بر مثلث $C_kOC'_k$ قابل انطباق است. بنابراین، مجموع طول پاره‌خطهای $C_kC'_k$ ، برابر است با مجموع طول پاره‌خطهای $D_{k-1}D_k$ $(k=1,\cdots,n)$ ، اما، $D_\circ = A_\circ$ و $D_n = O$. یعنی این مجموع برابر با شعاع نیمدایره است.

۳۴. قرینهٔ نقطه‌های B، D و C نسبت به قطر AB را B' ، C' و D' می‌نامیم و خطهای ED' ، DC' ، CB' ، BC' ، CD' و DO را رسم می‌کنیم.

داریم : $DE = OP$ و $KL = PQ$ ، $MN = AQ$

پس : $DE + KL + MN = r$

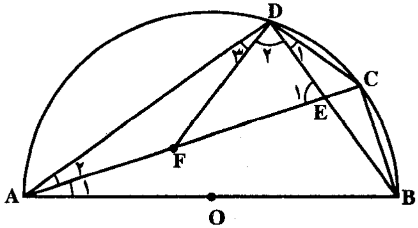
۳۵. مثلث ADE قائم‌الزاویه در رأس D و DF میانهٔ وارد بر وتر است، زیرا :

$$A\hat{D}B = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 90^\circ \qquad (1)$$

$$C\hat{D}F = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

از طرفی $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است، پس $\hat{D}_3 = \hat{A}_2$ و از آن‌جا $\hat{D}_2 = \hat{E}_1$ ، در نتیجه $DF = AF = FE$ است، پس نقطهٔ F وسط پاره‌خط AE می‌باشد.



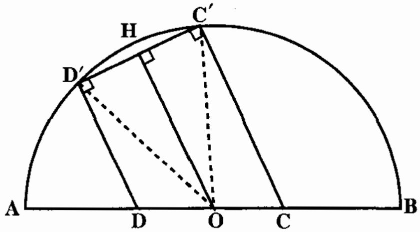
۱ . ۹ . خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱ . ۹ . ۱ . خطها موازی‌اند

۳۶. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMG و NOH باهم برابرند، پس شعاعهای دایره‌های محاطی درونی این دو مثلث نیز با هم برابرند، یعنی نقطه‌های I و I' از AB به یک فاصله‌اند.

۱ . ۹ . ۲ . خطها برهم عمودند

۳۷. از نقطهٔ O خطی به موازات CC' یا DD' رسم می‌کنیم تا $D'C'$ را در نقطهٔ H قطع کند. چون $OD' = OC' = R$ است، پس OH روی عمود منصف $D'C'$ است، یعنی $\hat{H} = ۹۰°$، پس $\hat{D'} = ۹۰°$. یعنی $D'C'$ بر DD' یا CC' عمود است.



۳۸. نقطه‌های $E_۱$ و $F_۱$ را قرینهٔ نقطه‌های E و F نسبت به AB بگیرید.

۱ . ۱۰ . شکلهای ایجاد شده

۳۹. داریم:

$$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB}$$

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AF}}{۲} = \frac{۱۸۰° - \overset{\frown}{AC}}{۲} = ۹۰° - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad (۱)$$

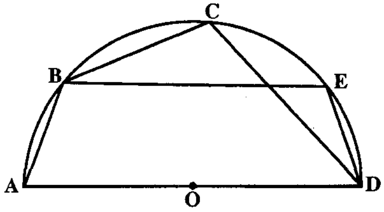
$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BF} + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۱۸۰° - \overset{\frown}{CD}}{۲} \Rightarrow \hat{E} = ۹۰° - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}$$

۱ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۰. چون $\overset{\frown}{EB} = 30^\circ$ است، پس نزدیکترین وتر به مرکز دایره DE و دورترین وتر EB است.

۴۱. چهارضلعی که ضلع به طول l آن، موازی قطر نیمدایره باشد، در شکل چهارضلعی ABED جواب است. واضح است مسأله وقتی جواب دارد که l کوچکتر از قطر دایره باشد.



۱ . ۱۲ . مسأله‌های ترکیبی

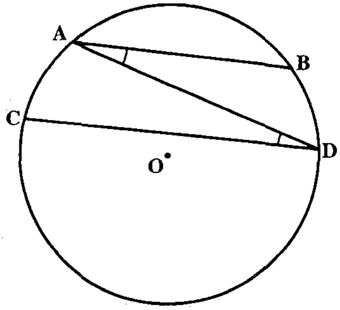
۴۲. ۱. چون $AC = CM$ و $BD = MD$ است، پس: $AC + DB = CM + MD = CD$.

۲. تمام زاویه‌های چهارضلعی حاصل قائمه‌اند.

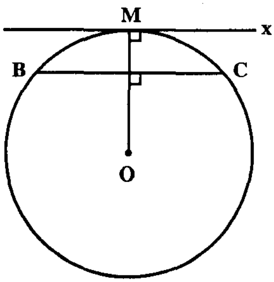
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲. یک دایره

۲. ۱. تعریف و قضیه

۴۳. در دایرهٔ (C) اگر $AB \| CD$ باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم، $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ است. از A به D وصل می‌کنیم. داریم: $B\hat{A}D = A\hat{D}C$ و با توجه به این که $B\hat{A}D = \frac{\widehat{BD}}{۲}$ و $A\hat{D}C = \frac{\widehat{AC}}{۲}$ است. پس: $\frac{\widehat{BD}}{۲} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$.

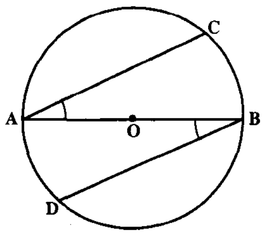


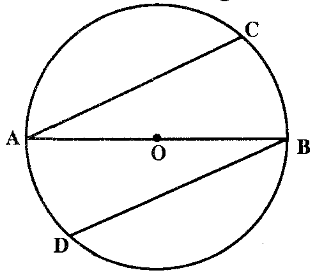
۴۴. وسط قوس BC از دایرهٔ به مرکز O را M می‌نامیم و خط Mx را مماس بر دایره در نقطهٔ M رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم، $Mx \| CD$ است. از O به M وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OM بر Mx و BC عمود است، پس $BC \| Mx$ است.



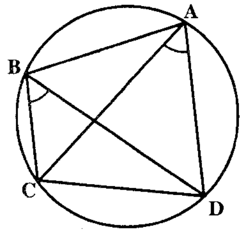
نکته. این قضیه حالت ویژه‌ای از قضیهٔ قبلی است.

۴۵. قطر AB از دایرهٔ به مرکز O را درنظر می‌گیریم. اگر AC و BD دو وتر متوازی از دایره باشند، داریم: $C\hat{A}B = A\hat{B}D$ و از آن‌جا $\widehat{CB} = \widehat{AD}$، پس: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و در نتیجه $AC = BD$ است.



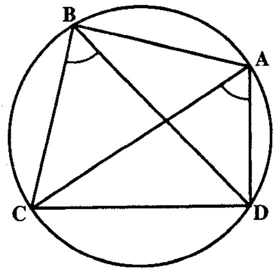


۴۶. اگر AC و BD دو وتر متساوی باشند که بر دو نقطهٔ A و B، دو انتهای قطر AB از دایرهٔ O گذشته باشند، $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB}$ خواهد بود و از آن‌جا $C\hat{A}B = A\hat{B}D$ ؛ پس $AC \parallel BD$ است.

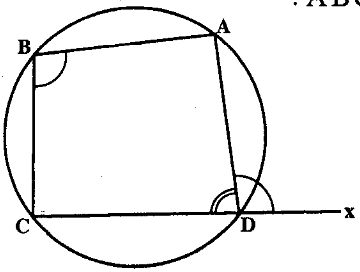


۴۷. در چهارضلعی محاطی ABCD قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم. زاویه‌های روبه رو به هر ضلع، به عنوان مثال زاویه‌های روبه رو به ضلع CD باهم برابرند، زیرا زاویه‌های محاطی رو به رو به کمان $\overset{\frown}{CD}$ می‌باشند.

۴۸. اگر در چهارضلعی ABCD، $C\hat{A}D = C\hat{B}D$ باشد، این چهارضلعی محاطی است، زیرا کمان درخور زاویهٔ $C\hat{A}D$ از نقطهٔ B نیز می‌گذرد.



۴۹. در چهارضلعی محاطی ABCD، امتداد ضلع CD را Dx می‌نامیم. داریم : $A\hat{D}x = A\hat{B}C$ ، زیرا هر دو زاویهٔ مکمل زاویهٔ ADC می‌باشند. بعکس اگر $A\hat{B}C = A\hat{D}x$ باشد، چهارضلعی ABCD محاطی است، زیرا خواهیم داشت : $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$.

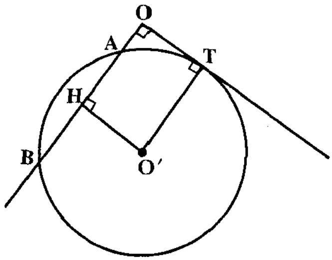


۲ . ۲ . شعاع

۵۰. محیط دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم می کنیم و شش نقطهٔ تقسیم پشت سرهم را، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 و A_6 می‌نامیم. در این صورت، خط راست A_2A_5 موازی با قطر A_1A_6 و خط راست A_3A_4 و همچنین، خط راست A_3A_6 موازی با خط راست A_4A_5 است. محل برخورد خط راست A_2A_5 را با خط راست A_3A_6 ، با حرف P نشان می دهیم. چهارضلعی $PA_3A_4A_5$ ، متوازی‌الاضلاع است. بنابراین باید ثابت کنیم، طول پاره‌خط راست A_2P ، برابر است با طول شعاع دایره. ولی، چون چهارضلعی A_2OA_6P هم متوازی‌الاضلاع است (O، مرکز دایره است)، پس $|A_2P|=|OA_6|$ و حکم ثابت است.

۵۱. اگر نقطهٔ تماس دایره با ضلع دیگر زاویهٔ قائمه را T و مرکز دایره را O' و وسط پاره‌خط AB را H بنامیم، چهارضلعی $OTO'H$ مستطیل است و داریم :

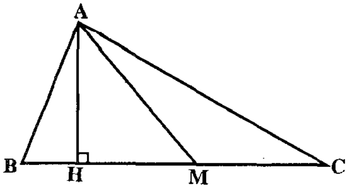
$$R=O'T=OH=\frac{OA+OB}{۲}=\frac{a+b}{۲}$$



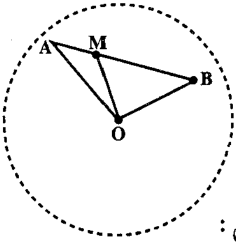
۲ . ۳ . نقطه و دایره

۲ . ۳ . ۱ . نقطه درون دایره

۵۲. می‌دانیم در مثلث ABC، اگر M نقطهٔ دلخواهی از ضلع BC باشد $AM \le Max\{AB, AC\}$ (براساس قضیه‌های عمود و مایل).



حال اگر A و B نقطهٔ دلخواهی از نقطه‌های درونی دایره باشند، بر اساس مطلب بالا



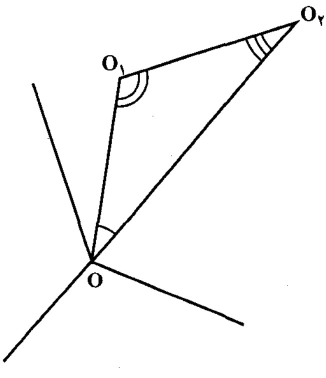
پس : $OM \le Max\{OA, OB\}$

$$Max\{OA, OB\} < R \Rightarrow OM < R$$

همهٔ نقطه‌های پاره‌خط AB درون دایره است ⇐ M یک نقطهٔ درونی دایره است⇐ پس دایره مجموعه‌ای محدب است.

۵۳. مربعهای به ضلع واحد را درنظر می‌گیریم که مرکزهای آنها روی همهٔ گرههایی از شبکه باشند که در درون دایرهٔ به شعاع ۱۰ قرار گرفته‌اند (ضلعهای این مربعها را موازی خطهای راست شبکه می‌گیریم). چون طول قطر هریک از این مربعها، برابر است با $\sqrt{۲} < ۲$ ، بنابراین، همهٔ این مربعها سطح دایرهٔ به شعاع ۹ و هم‌مرکز با دایرهٔ داده شده را می‌پوشانند. در نتیجه، مجموع مساحتهای آنها (که از نظر عددی با تعداد گرههای شبکه برابر است)، از ۸۱π (مساحت دایرهٔ به شعاع ۹) بیشتر است و در ضمن $۸۱\pi > ۲۵۱$.

نکته. می‌توان مسأله‌ای کلی‌تر را تنظیم کرد : تعداد جوابهای x و y را در مجموعهٔ عددهای درست، برای نامعادلهٔ $x^۲ + y^۲ < n$ ارزیابی کنید (در مسألهٔ ما $n = ۱۰۰$). از حل مسأله، می‌توان نتیجه گرفت که این تعداد، از $\pi(\sqrt{n} - ۱)^۲$ کمتر نیست.



۵۴. برخلاف حکم مسأله، فرض می کنیم هیچ کدام از نقطه‌های $O_۱$ ، ...، $O_۷$ که به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور مرکز O از دایرهٔ مفروض قرار گرفته‌اند، بر O واقع نباشد.

چون مجموع زاویه‌های $O_۱OO_۲$ ، $O_۲OO_۳$ ، ...، $O_۷OO_۱$ برابر با ۳۶۰ درجه است، بنابراین، دست‌کم یکی از آنها، از ۶۰ درجه کوچکتر است. مثلاً فرض کنید، زاویهٔ $O_۱OO_۲$ از ۶۰درجه کمتر باشد ؛ از دو زاویهٔ باقی‌مانده در مثلث $OO_۱O_۲$ ، زاویهٔ $OO_۱O_۲$ را بزرگتر می‌گیریم (اگر زاویهٔ $O_۱OO_۲$ برابر صفر باشد، به معنای آن است که فاصلهٔ $O_۱O_۲$ از واحد کوچکتر است). دراین صورت داریم :

$$O\hat{O}_۱O_۲ > ۶۰^\circ > O_۱\hat{O}O_۲$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود : $1 \leq O_2O < O_1O_2$ ، که با فرض مسأله متناقض است.

۲ . ۳ . ۲. نقطه روی دایره

۵۵. همهٔ نقطه‌های محیط دایره را به زوج نقطه‌هایی تقسیم می کنیم به نحوی که هر زوج، دو سر یک قطر دایره را تشکیل دهند. در هر زوج یکی از نقطه‌ها را (به دلخواه) در مجموعهٔ اوّل و نقطهٔ دیگر را در مجموعهٔ دوم، قرار می‌دهیم. از آن‌جا، که وتر هر مثلث قائم‌الزاویهٔ محاط در دایره، قطری از این دایره است، بنابراین، رأسهای زاویه‌های حادهٔ این مثلث، متعلق به دو مجموعهٔ مختلف خواهند بود.

۵۶. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطهٔ P به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر واقعند، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع ۳ سانتیمتر است. این دایره، دایرهٔ (C) را حداکثر در دو نقطه می تواند قطع کند.

۵۷. A، B و C را، سه نقطهٔ متوالی در ساحل دریاچه می گیریم. از شرط مسأله معلوم می‌شود که، تنها وقتی A و B به هم مربوطند که B و C به هم مربوط نباشند. بنابراین، همهٔ نقطه‌ها، به زوج نقطه‌های مجاوری تقسیم می‌شوند که با کشتی به هم مربوطند. در ضمن هردوتا از این زوج‌نقطه‌ها هم با یکدیگر ارتباط دارند. یعنی یکی از نقطه‌های زوج اوّل، با یکی از نقطه‌های زوج دوم مربوط است.

۵۸. با روش استقرای ریاضی روی n. فرض کنید، همهٔ نقطه‌ها به جز یکی (نقطهٔ X)، روی کمان $\widehat{AB}$ باشند که از ۱۲۰ درجه کمتر است (A و B، دو نقطه از نقطه‌های مفروضند). اگر X روی کمان $\widehat{AB}$ باشد، حکم مسأله درست است. اگر X روی کمان $\widehat{AB}$ نباشد، آن وقت یکی از دو کمان $\widehat{XA}$ یا $\widehat{XB}$ شامل کمان $\widehat{AB}$ می‌شود و اندازهٔ بزرگتر از ۱۲۰درجه پیدا می کند.

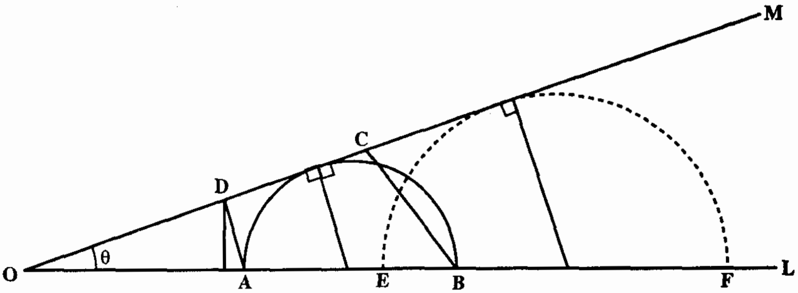
۵۹. فرض می کنیم، هر نقطه از صفحه با یکی از n رنگ متفاوت رنگ شده باشد، در این صورت ممکن است که بر هر زیر مجموعه از نقطه‌ها، $k \leq n$ رنگ ظاهر شود و روی‌هم‌رفته :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} = 2^n - 1$$

ترکیب رنگی متفاوت موجود است که می توانند بر یک مجموعهٔ نقطه ظاهر شوند.

اکنون مجموعهٔ جمیع دایره‌های متحدالمرکز به مرکز O، که شعاعهایشان کمتر از ۱ است، را درنظر می گیریم. در میان هر 2^n عضو این دسته دایره‌ها، حداقل دو دایره، که آنها را R و S می‌نامیم، موجودند که حامل مجموعهٔ یکسانی از رنگها می‌باشد. آنها را طوری نامگذاری می کنیم که شعاعهای r و s شان در : $1 > s > r > 0$ صدق کنند. ادعا می کنیم که نقطهٔ Y بر R چنان موجود است که دایرهٔ $C(Y)$ ، که شعاعش : $r + \frac{a(Y)}{r}$ است بر S

منطبق است ؛ و به عبارت دیگر چنان که : $a(Y)=r(s-r)$ یا $r+\frac{a(Y)}{r}=s$ باشد. واضح است که : $۱>r(s-r)>۰$ می‌باشد، و چون نقطهٔ X در امتداد R در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت (با شروع از خط OA) حرکت کند، اندازهٔ زاویهٔ AOX هر نقطه در فاصلهٔ : (۰،۱) را می‌پوشاند. چون این زاویه اندازهٔ $r(s-r)$ داشته باشد، X موقع مطلوب Y واقع بر R را خواهد داشت، بنابراین : $C(Y)=S$ است. از این گذشته رنگ Y جایی بر دایرهٔ S ظاهر می‌شود.



۶۰. به عنوان نمونه، حشره هرگز روی نقطه‌ای که مجاور نقطهٔ آغاز حرکت او، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است قرار نمی‌گیرد.

۶۱. دو نقطهٔ دو سر قطر دایره را در نظر بگیرید و از این قضیه استفاده کنید که، میانهٔ هر مثلث از نصف مجموع دو ضلع دو طرف میانه، کوچکتر است.

۶۲. دو نقطه «وابسته» نامیده می‌شود، اگر دقیقاً n نقطه از F روی یکی از دو کمان منتهی به این دو نقطه وجود داشته باشند. ما نیاز به این داریم که کمترین مقدار k را با این خاصیت که هر k نقطه از E شامل حداقل یک زوج از نقطه‌های وابسته باشند را تعیین کنیم، با وصل هر زوج از نقطه‌های وابسته یک گراف G با درجه ۲ در هر رأس به دست می‌آید. G از دورهای مجزا تشکیل شده است. دو حالت در نظر می‌گیریم :

الف. اگر $۳\nmid ۲n-۱$ ، آن‌گاه $۱=(۲n-۱,۳)=(۲n-۱,n+۱)$ ، G و خود G یک دور است.

ب. اگر $۳|۲n-۱$ ، آن‌گاه، $۳=(۲n-۱,n+۱)$ و ۳ دور در G وجود دارد، هر کدام شامل $\frac{۲n-۱}{۳}$ رأس می‌باشد.

در حالت الف، آشکارا کمترین مقدار k برابر است با : $n=۱+\left[\frac{۲n-۱}{۲}\right]$.

در حالت ب، کمترین مقدار k برابر است با $3\left[\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}\right]+1=3\frac{\frac{2n-1}{3}}{2}+1=n-1$

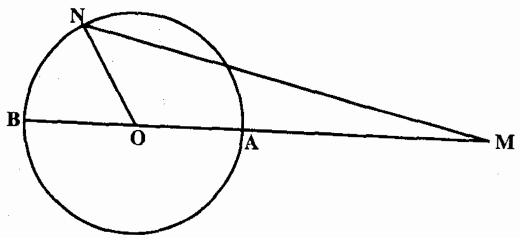
به‌طور خلاصه، کمترین مقدار k برابر است با:

$$\begin{cases} n, 3\nmid 2n-1 & \text{اگر} \\ n-1, 3\nmid 2n-1 & \text{اگر} \end{cases}$$

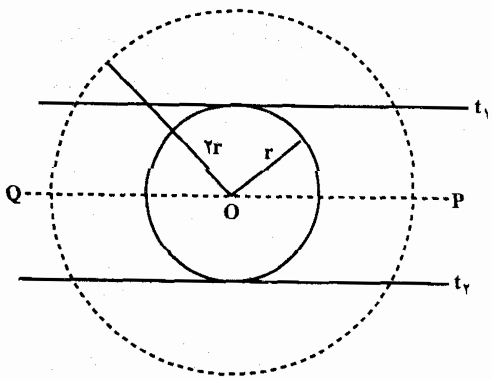
۲. ۳. ۳. نقطه برون دایره

۶۳. نقطهٔ M را در امتداد قطر AB اختیار می‌کنیم. اگر N نقطه‌ای دلخواه از محیط دایره باشد، از N به M و O وصل می‌کنیم. در مثلث MON داریم:

$$OM-ON<NM<OM+ON \Rightarrow OM-OA<NM<OM+OB$$
$$\Rightarrow MA<MN<MB$$



به همین ترتیب اگر نقطهٔ M را روی قطر AB و بین A و O یا بین O و B اختیار کنیم، ثابت می‌شود که: $MA<MN<MB$.



۶۴. فرض کنید O مرکز، r شعاع و t_1 و t_2 دو مماس موازی بر دایرهٔ مفروض باشند (شکل). مکان هندسی نقطه‌های هم‌فاصله از t_1 و t_2 خط QOP است که موازی آنهاست و در وسط آنها قرار دارد (و بنابراین از O می‌گذرد). P و Q نقطه‌های برخورد این

مکان با دایره‌های به مرکز O و به شعاع ۲r (در شکل به صورت نقطه‌چین) به همراه O، مرکز دایره، تنها سه نقطه‌ای هستند که از دایره و از دو خط مماس موازی t_1 و t_2 به یک فاصله‌اند. تعداد این نقطه‌ها ۳ است.

۲ . ۳ . ۴. نقطه‌های همخط

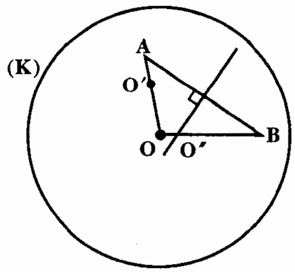
۶۶. اگر انتهای قطر گذرنده از B را E بنامیم، $B\hat{O}D+D\hat{O}E=180^\circ$ و $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{DE}$ است، پس $A\hat{O}B=D\hat{O}E$ و از آن‌جا $B\hat{O}D+A\hat{O}B=180^\circ$ یا $A\hat{O}D=180^\circ$ ، یعنی A ، O و D بر یک خط راست قرار دارند.

۶۷. از نقطهٔ P به نقطهٔ M وصل کرده، ثابت کنید: $B\hat{P}M=D\hat{P}K$.

۶۸. زاویه‌های $E\hat{B}A$ و $A\hat{B}D$ قائمه‌اند.

۲ . ۳ . ۵. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۶۹. گزینهٔ (ج) نادرست است.



۷۰. نقطه‌های A و B را به نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (K) وصل می‌کنیم. اگر O′ نقطه‌ای دلخواه از پاره‌خط OA (یا OB) باشد، دایرهٔ به مرکز O′ و به شعاع O′A (یا O′B) در داخل دایرهٔ (K) واقع می‌شود. عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا پاره‌خط OA یا OB را در نقطهٔ O″ قطع کند. دایرهٔ به مرکز O″ و به شعاع O″A = O″B در داخل دایرهٔ (K) قرار دارد، بعلاوه تمام نقطه‌های مجاور به نقطهٔ O″ که روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند نیز مرکز دایره‌هایی هستند که از نقطه‌های A و B می‌گذرند و در داخل دایرهٔ (K) واقعند. پس بی‌شمار دایره وجود دارد که از نقطه‌های A و B بگذرند و در درون دایرهٔ (K) باشند.

۷۱. خط راستی در نظر می‌گیریم، که همهٔ نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیمصفحه قرار گیرند؛ سپس، این خط راست را به موازات خود، آن‌قدر جابجا می‌کنیم تا از اوّلین نقطهٔ A_1 بگذرد. بعد، همین خط راست را، دور نقطهٔ A_1 ، آن‌قدر دوران می‌دهیم، تا برای نخستین‌بار، بر نقطهٔ دیگر A_2 بگذرد. در این صورت، همهٔ بقیهٔ نقطه‌ها، در یک نیمصفحه، نسبت به خط راست A_1A_2 واقع می‌شوند. این نقطه‌ها را، به صورت A_3 ، .... ، A_{2n+3} ، طوری شماره‌گذاری می کنیم که، برای آنها، داشته باشیم :

$$A_۱A_iA_۲ \le A_۱\, A_{i+۱}\, A_۲ \ , \ (i = ۳,\dots,۲n+۲)$$

در ضمن، برابری دو زاویهٔ $A_۱A_iA_۲$ و $A_۱\, A_{i+۱}\, A_۲$، برای هیچ مقداری از i، ممکن نیست. (زیرا، نقطه‌های $A_۱$، A_i، $A_{i+۱}$، $A_۲$، بر محیط یک دایره واقع نیستند).

بنابراین، نابرابری $A_۱\, \hat{A}_{n+۳}\, A_۲ < A_۱\hat{A}_iA_۲$ درست برای n نقطهٔ $A_{n+۴}$، ...، $A_{۲n+۳}$ برقرار است و همین نقطه‌ها (و تنها همین نقطه‌ها) هستند که در درون دایره‌ای قرار گرفته‌اند که از $A_۱$، $A_{n+۳}$، $A_۲$ می‌گذرد.

۲ . ۴. کمان

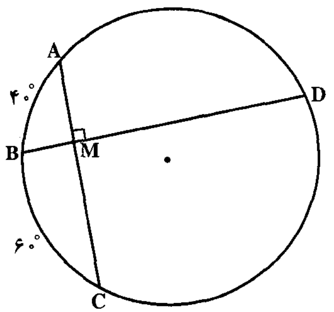
۲ . ۴ . ۱. اندازهٔ کمان

۷۲. با توجه به این که $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA} = ۳۶۰^\circ$ است، اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ برابر ۱۴۹° است.

۷۳. $\overset{\frown}{BQ} = ۵۵^\circ$ و $\overset{\frown}{AD} = ۷۰^\circ$.

۷۴. $\overset{\frown}{CD} = ۱۴۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AD} = ۱۲۰^\circ$.

نکته. دو کمان داده شده نمی‌توانند دو کمان روبه‌روی هم باشند، زیرا $\frac{۴۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$ است، حال آن که $A\hat{M}D = ۹۰^\circ$ می‌باشد. پس این دو کمان، دو کمان مجاور هم می‌باشند.



۷۵. الف. $y = ۱۳۰^\circ$ ب. $y = ۴۰^\circ$ پ. $y = ۸۰^\circ$

ت. $y = ۱۲۰^\circ$ ث. $y = ۹۴^\circ$ ج. $x = ۹۵^\circ$ و $y = ۴۵^\circ$

چ. $x = ۱۱۸^\circ$ و $y = ۲۴۲^\circ$ ح. $x = ۱۹۰^\circ$ و $y = ۷۰^\circ$ خ. $x = ۱۵۰^\circ$ و $y = ۴۰^\circ$

۲ . ۴ . ۲. رابطهٔ بین کمانها

۷۶. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases}\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{CA}-\overset{\frown}{AP}\\ \overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{CB}+\overset{\frown}{PB}\end{cases}\Rightarrow ۲\overset{\frown}{CP}=\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{CB}\Rightarrow \overset{\frown}{CP}=\frac{\overset{\frown}{CA}+\overset{\frown}{CB}}{۲}$$

اگر نقطهٔ C' بین نقطه‌های A و B اختیار شود، رابطهٔ بالا به‌صورت $\overset{\frown}{C'P}=\dfrac{|\overset{\frown}{C'A}-\overset{\frown}{C'B}|}{۲}$ درمی‌آید.

۷۷. راه اوّل. داریم:

$$A\hat{C}I=N\hat{O}I\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AI}}{۲}=\overset{\frown}{NI}\Rightarrow \overset{\frown}{AI}=۲\overset{\frown}{NI}\Rightarrow \overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NI}$$

راه دوم. NO را امتداد دهید تا دایره را در N' قطع کند، سپس از ویژگی وترهای موازی و زاویهٔ مرکزی استفاده کنید.

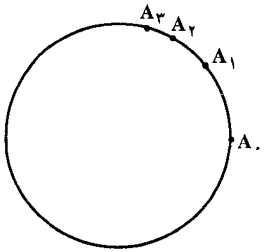
۲ . ۴ . ۳. تعداد کمانها

۷۸. به‌ازای $n=۱۰$ یا $n=۱۱$.

۷۹. برای هر k که از ۱۰۰ کوچکتر باشد، و در ضمن هر عدد $k+۱$ بر ۸ بخش‌پذیر نباشد.

۸۰. الف. اگر دو نقطهٔ A_i و A_j به فرض $j>i$ بر هم منطبق باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{i+۱}+\frac{۱}{i+۲}+\dots+\frac{۱}{j}=۲k\pi$$



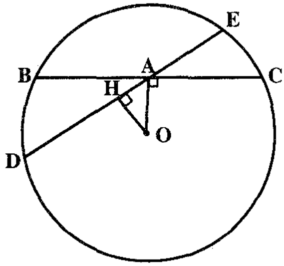
طرف اوّل گویا و طرف دوم گنگ است، پس تساوی نمی‌تواند برقرار باشد.

ب. چون هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است. اقلاً در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد، زیرا تعداد فاصله‌های یک میلیمتری که می‌توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.

۲ . ۵. وتر

۲ . ۵ . ۱. اندازهٔ وتر

۸۱. وتر BC را که در نقطهٔ A بر OA عمود است و وتر DE را که از نقطهٔ A می‌گذرد ولی



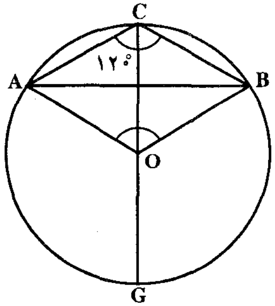
عمود بر OA نیست، در نظر می‌گیریم و از نقطهٔ O عمود OH را بر وتر DE فرود می‌آوریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH وتر OA از هر ضلع مثلث و از جمله از OH بزرگتر است. بنابراین $BC < DE$ می‌باشد. پس بین وترهایی از دایرهٔ O که از نقطهٔ A می‌گذرند، وتر BC که در نقطهٔ A بر OA عمود است، کمترین طول را دارد. به عبارت دیگر وتر به طول مینیممی که از یک نقطه در یک دایره می‌توان رسم کرد وتری است که بر قطر گذرندهٔ آن نقطه عمود است.

۸۲. وتر AB را باید عمود بر خط راست OX رسم کرد.

۲ . ۵ . ۲. برابری وترها

۸۳. داریم: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $A\hat{D}E = \hat{A}_1$، پس $A\hat{D}E = \hat{A}_2$. از آن‌جا $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC}$، درنتیجه $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DE}$ است، پس $AC = DE$ می‌باشد.

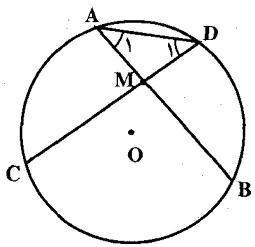
۸۴. این دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.

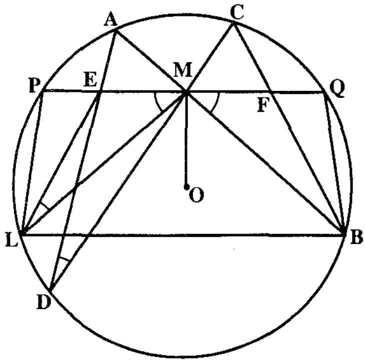


۸۵. اگر $A\hat{C}B = ۱۲۰°$ باشد، پاره‌خط AB وتر نظیر کمان ۱۲۰° است، زیرا $\overset{\frown}{AGB} = ۲۴۰°$ خواهد بود و در این صورت AB وتر زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = ۱۲۰°$ نیز هست.

۲ . ۵ . ۳. برابری قطعه‌های وترها

۸۶. چون $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ است، پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$. درنتیجه $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$، یعنی مثلث MAD متساوی‌الساقین است، پس $MA = MD$ و از آن‌جا $MC = MB$ است.





۸۷. راه‌حلی که در این جلد از دایرةالمعارف برای قضیهٔ پروانه ارائه می‌شود، توسط ا. ایلبرگ Arthur. Eilberg در SSM (School Sci, and Math) ژانویهٔ سال ۱۹۵۵ ارائه گردیده است. در جلدهای دیگر، راه‌حلهای دیگری از قضیهٔ پروانه براساس موضوع هر جلد ارائه خواهد شد و اینک راه‌حل: از نقطهٔ B خطی موازی وتر PQ رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ L قطع کند. از L به E، M و D وصل می‌کنیم. مثلث MLB متساوی‌الساقین و OM عمودمنصف وتر PQ است و PL = QB (۱) می‌باشد. دو زاویهٔ MED و MLD با هم برابرند؛ زیرا:

$$M\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{QB} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AP}}{۲} \qquad (۲)$$

$$M\hat{L}D = M\hat{L}B + B\hat{L}D = M\hat{B}L + B\hat{L}D = \frac{\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PL} + \overset{\frown}{BD}}{۲} \qquad (۳)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow M\hat{E}D = M\hat{L}D$$

درنتیجه چهارضلعی MELD محاطی و $M\hat{L}E = M\hat{D}E = M\hat{B}F$ است. لذا دو مثلث MLE و MBF با هم برابرند، زیرا: MB = ML و $M\hat{L}E = M\hat{B}F$ و $F\hat{M}B = E\hat{M}L$.
بنابراین ME = MF است.

لذت ما از حل مسألهٔ پروانه مدیون ریاضیدانان نامداری چون شاسلس Chasles، کارنو Carnot، پونسله Poncelet، ژرگون Gergonne، ون‌استادت Von Staudt، مونژ Monge و دیگران که در قرن نوزدهم هندسهٔ تصویری را توسعه داده‌اند و همچنین دزارگ، پاپوس و اقلیدس است.

۸۸. اثبات این قضیه راههای مختلفی دارد که یک راه‌حل آن به صورت زیر است:

فرض می‌کنیم: $S_۱ = S_{MAE}$ ، $S_۲ = S_{MCF}$ ، $S_۳ = S_{MED}$ ، $S_۴ = S_{MBF}$

با توجه به این که $\hat{C} = \hat{A}$ و $\hat{D} = \hat{B}$ است، داریم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{MA.EA}{MC.CF} \ (۱) \ , \quad \frac{S_۳}{S_۴} = \frac{DM.DE}{BM.BF} \ (۲) \ ,$$

$$\frac{S_۱}{S_۴} = \frac{MA.ME}{MB.MF} \ (۳) \ , \quad \frac{S_۳}{S_۲} = \frac{MD.ME}{MF.MC} \ (۴)$$

اما (۴).(۳) = (۲).(۱)، پس:

$$\frac{MA.EA.DM.DE}{MC.CF.BM.BF}=\frac{MA.ME.MD.ME}{MB.MF.MF.MC}$$

و یا :

$$\frac{EA.ED}{FC.FB}=\frac{ME^{۲}}{MF^{۲}}\Rightarrow\frac{EP.EQ}{FP.FQ}=\frac{ME^{۲}}{MF^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{(p-m)(q+m)}{(p+n)(q-n)}=\frac{m^{۲}}{n^{۲}}\Rightarrow pq(m-n)=mn(p-q)\Rightarrow\frac{pq}{mn}=\frac{p-q}{m-n}$$

$$\Rightarrow\frac{m-n}{mn}=\frac{p-q}{pq}\Rightarrow\frac{۱}{n}-\frac{۱}{m}=\frac{۱}{q}-\frac{۱}{p}\Rightarrow\frac{۱}{m}-\frac{۱}{n}=\frac{۱}{p}-\frac{۱}{q}$$

۸۹. ثابت کنید : $N\hat{C}D=N\hat{D}C$.

۹۰. مثلث AMN متساوی‌الاضلاع و مثلثهای AMD و ANE متساوی‌الساقین هستند.

۲ . ۵ . ۴ . نابرابری وترها

۹۱. زاویهٔ محاطی ACB را در نظر گرفته، قطر CG را رسم می‌کنیم. داریم :

$$A\hat{O}G=G\hat{O}B=A\hat{C}B\Rightarrow AG<AB$$

و در مثلث متساوی‌الساقین AGB،

$$AG<AB\ ,\ \ AG+GB>AB\ \ \text{یا}\ \ ۲AG>AB\Rightarrow AG>\frac{AB}{۲}$$

نکته. اگر اندازهٔ زاویهٔ محاطی ACB بیشتر از $\frac{۴}{۳}$ زاویهٔ قائمه باشد :

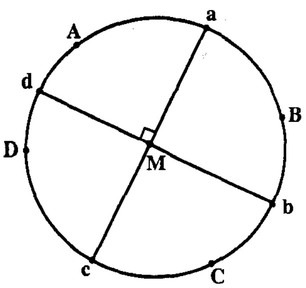
$AG>AB$ و $AG<۲AB$ ، هنگامی که زاویهٔ مرکزی از ۱۵۱° و $۲'$ و $۴۰''$ کمتر باشد.

اگر زاویهٔ مرکزی این مقدار را داشته باشد، $AG=۲AB$.

اگر زاویهٔ مرکزی از ۱۵۱° و $۲'$ و $۴۰''$ بیشتر باشد، $AG>۲AB$.

و بالاخره برای زاویهٔ مرکزی ۱۸۰°، اندازهٔ وتر زاویهٔ مرکزی برابر قطر دایره است و برای زاویهٔ محاطی نظیر این مقدار تهی است.

۹۲. وتر AB بزرگتر است زیرا به مرکز دایره نزدیکتر است.



۲ . ۵ . ۵ . ثابت کنید وترها برهم عمودند

۹۳. اگر نقطهٔ برخورد ac و bd را M بنامیم، داریم :

$$a\hat{M}b = \frac{aB + Bb + cD + Dd}{۲} \Rightarrow a\hat{M}b = \frac{\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DA}}{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\frac{۳۶۰^\circ}{۲}}{۲} = ۹۰^\circ$$

پس ac و bd برهم عمودند.

۲ . ۵ . ۶. تعداد وترها

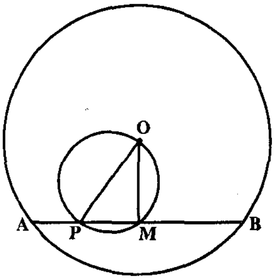
۹۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۹۵. ۲۵ پاره‌خط راست.

۲ . ۵ . ۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۶. (هـ). اگر P نقطهٔ مفروض، O مرکز دایره، AB یکی از وترهای گذرنده بر P و M وسط AB باشد، زاویهٔ OMP قائمه است و درنتیجه M بر دایرهٔ C به قطر OP واقع است. برعکس اگر M یک نقطهٔ دلخواه دایرهٔ C باشد، وتر دایرهٔ k که بر P و M می‌گذرد (در حالتی که P و M منطبق باشند، آن وتر بر دایرهٔ C مماس خواهد بود)، در M بر OM عمود است. بنابراین M وسط وتر و متعلق به مکان هندسی است.

۹۷. فرض می‌کنیم، هر دو پاره‌خط راست AB و CD از یک رنگ، متقاطع باشند. آنها را با پاره‌خطهای راست AC و BD از همان رنگ عوض می‌کنیم. در ضمن، تعداد نقطه‌های برخورد پاره‌خطهای راست آبی با پاره‌خطهای راست قرمز، تغییر نمی‌کند. این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که هیچ دو پاره‌خط راست همرنگ، یکدیگر را قطع نکنند. اکنون کافی است توجه کنیم که، روی هر پاره‌خط راست قرمز، دست‌کم، یک نقطهٔ برخورد با پاره‌خط راست آبی وجود دارد.



۹۸. فرض کنید P نقطهٔ مفروض، و M نقطهٔ وسط وتر AB از دایرهٔ مفروض (O) باشد ؛ AB وتری از دایره است که از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد. پاره‌خط OP از نقطهٔ M با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود ؛ پس M روی دایره‌ای به قطر OP قرار دارد. از طرف دیگر، هر نقطهٔ M واقع بر این دایره در صورتی که به P وصل شود، وتری از دایرهٔ (O) را مشخص می‌سازد که OM در نقطهٔ M بر آن عمود است، پس M نقطهٔ وسط این وتر است و بنابراین به مکان هندسی

تعلق دارد و اگر نقطهٔ P خارج از (O) باشد، هر نقطهٔ M از مکان هندسی باید روی دایره‌ای به قطر OP قرار داشته باشد، ولی تمامی نقطه‌های این دایره متعلق به مکان هندسی نیستند.
مکان هندسی بخشی از دایرهٔ (OP) است که درون دایرهٔ مفروض (O) قرار دارد.

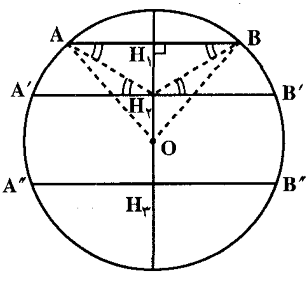
۹۹. همهٔ وترها در نقطهٔ وسط خود بر این دایره مماسند.

۲ . ۶. قطر

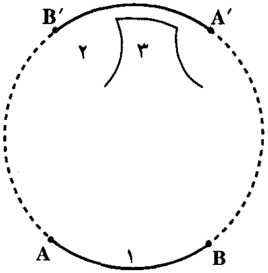
۱۰۰. زاویهٔ محاطی BAC قائمه است، پس $\widehat{BC}=180^\circ$ و در نتیجه BC قطر دایره است.

۱۰۲. فرض می‌کنیم، حکم درست نباشد. انتهای کمانها را با سیاه رنگ می‌کنیم. تمامی محیط دایره را، به کمانهای به طول واحد تقسیم و نقطه‌های تقسیم را با قرمز رنگ می‌کنیم. کمانی مثل $\widehat{AC}$ به طول ۲ را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن سیاه و B' وسط آن قرمز باشد. نقطهٔ B، انتهای دیگری که از B' می‌گذرد، سیاه است. فرض کنید، روی کمان $\widehat{AB}$ به طول $3k-1$ ، n_1 کمان به طول ۱، n_2 کمان به طول ۲ و n_3 کمان به طول ۳ وجود داشته باشد. روی کمان $\widehat{BC}$، n_1 کمان به طول ۳ وجود خواهد داشت (انتهای دیگر قطرهایی که از انتهای کمانهای به طول واحد می‌گذرند، قرمزند). بنابراین $n_3=k-n_1$ ، که با برابری $3k-1=n_1+2n_2+3n_3$ متناقض است.

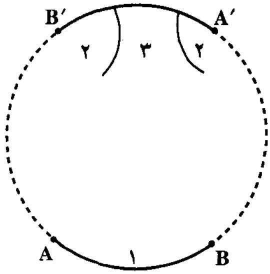
۱۰۳. خطی که وسط یک وتر را به مرکز دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



۱۰۴. انتهای منحنیهایی که مرز بخشها را مشخص می‌کنند، محیط دایره را به چند کمان تقسیم می‌کنند. یکی از آنها، برای مثال کمان $\widehat{AB}$، را در نظر می‌گیریم که به رنگ اوّل درآمده باشد. کمان روبه‌روی آن $\widehat{A'B'}$ (A و A′ و، همچنین B و B′، دو سر یک قطرند)، ممکن است شامل ۰ ، ۱ یا چند نقطهٔ تقسیم باشد. اگر نقطه‌های تقسیم، بیش از دو تا باشند، نقشهٔ (ب)، چیزی شبیه شکل (الف) درمی‌آید. در این صورت، می‌توانیم بخشهای دایره را آن‌طور که در شکل (ب) دیده می‌شود، تغییر دهیم که درنتیجه، تعداد نقطه‌های تقسیم کاهش می‌یابد. اگر روی کمان $\widehat{A'B'}$ ، نقطهٔ تقسیمی وجود نداشته



(ب)



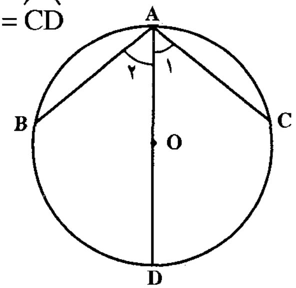
(الف)

باشد، آن‌وقت این کمان، به‌طور کامل، در درون کمان $\overset{\frown}{CD}$ قرار دارد که، در آن C و D، دو نقطهٔ تقسیم هستند. در این صورت، A و B در درون کمان $\overset{\frown}{C'D'}$ قرار می‌گیرند و می‌توان همان عمل بالا را دربارهٔ آنها انجام داد. با کم کردن تعداد نقطه‌های تقسیم روی محیط دایره، می‌توان سرانجام به تقسیمی از بخشها رسید که، برای هر کمان $\overset{\frown}{AB}$ (هر یک از دو نقطهٔ A و B، انتهای یکی از مرزهای بخشهاست)، روی کمان $\overset{\frown}{A'B'}$، درست انتهای یک منحنی مرزی وجود داشته باشد. از این‌جا، بسادگی نتیجه می‌شود که، تعداد کل انتهای منحنیها، عددی فرد است که ممکن نیست.

۱۰۶. اگر AB و AC دو وتر مساوی در دایرهٔ به مرکز O باشند، قطر AD از دایره را رسم می‌کنیم، داریم :

$$\overset{\frown}{ABD}=\overset{\frown}{ACD}\ ,\ \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}\Rightarrow\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$



۲ . ۷. زاویه

۲ . ۷ . ۱. زاویهٔ مرکزی

۱۰۷. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۰۸. الف. $\hat{x}=۱۳۶^\circ$، ب. $\overset{\frown}{y}=۱۱۱^\circ$.

۱۰۹. گزینهٔ (هـ) درست است. زیرا :

$$\hat{P}=۴۰^\circ \Rightarrow P\hat{A}B+P\hat{B}A=۱۸۰^\circ-۴۰^\circ=۱۴۰^\circ$$

$$T\hat{A}S = ۱۸۰^\circ - P\hat{A}B\ ,\ \ R\hat{B}S = ۱۸۰^\circ - P\hat{B}A$$

$$\Rightarrow T\hat{A}S + R\hat{B}S = ۳۶۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۲۲۰^\circ$$

چون OA و OB، بترتیب، نیمساز زاویه‌های TAS و RBS هستند ؛

$$O\hat{A}S + O\hat{B}S = \frac{۱}{۲}(۲۲۰^\circ) = ۱۱۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

اندازهٔ زاویهٔ AOB برحسب درجه، مستقل از وضعیت مماس ASB است.

۱۱۰. داریم :

$$AB + AC - BC = ۲AP = ۲AQ \quad B\hat{O}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} = C^{te}$$

۱۱۲. چهارضلعی ABDC ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه و OD و OC نیمسازهای زاویه‌های D و C از این ذوزنقه‌اند.

۲ . ۷ . ۲. زاویهٔ محاطی

۱۱۳. این زاویه، محاطی روبه‌رو به قطر است.

۱۱۴. داریم :

$$\hat{A} = ۶۰^\circ\ ,\ \hat{B} = ۹۰^\circ\ ,\ \hat{C} = ۳۰^\circ$$

۱۱۵. مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ $۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ$ است.

۱۱۶. $A\hat{O}B = A\hat{M}B = ۱۲۰^\circ$

۱۱۷. گزینهٔ (ب) درست است. به فرض $\overset{\frown}{AB} = x^\circ$ و $\overset{\frown}{AD} = y^\circ$، داریم :

$$۳x + y = ۳۶۰^\circ$$

$$\frac{۱}{۲}(x - y) = ۴۰^\circ$$

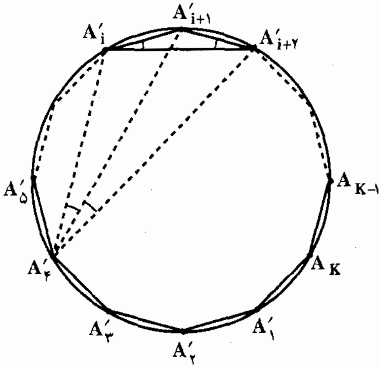
دستگاه این دو معادله که نسبت به y حل شود، $y = ۳۰^\circ$ به دست می‌آید، درنتیجه :

$$\hat{C} = \frac{۱}{۲}y = ۱۵^\circ$$

۱۱۸. گزینهٔ (الف) درست است.

۱۱۹. الف. $x = ۴۰^\circ$ ، $y = ۹۵^\circ$ ب. $x = ۵۰^\circ$ ، $y = ۴۰^\circ$

۱۲۰. الف. ۲۵° ب. ۳۹° پ. ۵۰° ت. ۳۰° ث. ۴۰°
ج. ۷۶° چ. ۴۵° ح. ۹۵° خ. ۷۵° د. ۱۲۰°



۱۲۱. ثابت می‌کنیم، حداکثر مقدار α، برابر $\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است. فرض کنید، وضعی از نقطه‌ها در صفحه، متناظر با مقدار α باشد. خط راستی را، برای مثال $A'_۱A'_۲$، طوری در نظر می‌گیریم که همهٔ نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیمصفحه واقع باشند و نقطهٔ $A'_۳$ را به نحوی انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویهٔ $A'_۱A'_۲A'_۳$ ماکزیمم باشد (شکل). در این صورت همهٔ نقطه‌های دیگر، در درون این زاویه قرار می‌گیرند و

$$A'_۱\hat{A'_۲}A'_۳ \ge \alpha(n-۲)$$

زیرا، هر یک از $(n-۲)$ زاویهٔ بین نیمخطهای راست مجاور $A'_۲A_i$ $(A_i \ne A'_۲)$، از α کمتر نیستند. سپس نقطهٔ $A'_۴$ را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویهٔ $A'_۲A'_۳A'_۴$ ماکزیمم باشد. در این صورت همهٔ نقطه‌های

$$A_i \in \{A'_۲, A'_۳, A'_۴\}$$

در داخل این زاویه‌اند و

$$A'_۲\hat{A'_۳}A'_۴ \ge \alpha(n-۲)$$

اگر $A'_۱ \ne A'_۴$ و $A'_۲ \ne A'_۴$، آن‌وقت، به همین ترتیب، نقطهٔ $A'_۵$ را انتخاب می‌کنیم و غیره. چون تعداد نقطه‌ها برابر n است، بنابراین، یکی از نقطه‌های $A'_۱$، $A'_۲$، $A'_۳$، ...، به‌ناچار، برای نخستین بار تکرار می‌شود. فرض کنید، این وضع، بعد از انتخاب نقطهٔ A'_k اتفاق بیفتد، یعنی زاویهٔ $A'_{k-۱}A'_kA_j$، برای نقطه‌ای مثل

$$A_j = A'_i \in \{A'_۱, \ldots, A'_{k-۲}\}$$

به حداکثر خود می‌رسد. در این صورت اگر $i \ne ۱$، آن‌وقت نقطهٔ $A'_۱$ در درون زاویهٔ $A_{k-۱}A'_kA'_i$، یعنی در درون چندضلعی محدب $A'_iA'_{i+۱}\ldots A'_{k-۱}A'_k$ قرار می‌گیرد که نوع انتخاب آن را نقض می‌کند. درنتیجه $i=۱$ و k ضلعی محدب $A'_۱A'_۲\ldots A'_k$، زاویه‌هایی به مجموع زیر دارد:

$$۱۸۰^\circ(k-۲) \ge k.\alpha(n-۲)$$

از آن‌جا:

$$\alpha \le \frac{۱۸۰^\circ(k-۲)}{(n-۲)k} = \frac{۱۸۰^\circ}{n-۲}(۱-\frac{۲}{k}) \le \frac{۱۸۰^\circ}{n-۲}(۱-\frac{۲}{n}) = \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که $k=n$ و

$$A'_1\hat{A}'_2A'_3 = A'_2\hat{A}'_3A'_4 = \ldots = A'_k\hat{A}'_1A'_2 = \alpha(n-2)$$

و همهٔ قطرهایی که از یک رأس دلخواه n ضلعی $A'_1 \ldots A'_n$ رسم می‌شوند، این زاویه را به زاویه‌های برابر α تقسیم می‌کنند. چنین n ضلعی، تنها می‌تواند منتظم باشد، زیرا برای هر مقدار $l=1,\ldots,n$ ، داریم :

$$A'_l\hat{A}'_{l+2}A'_{l+1} = A'_{l+2}\hat{A}'_lA'_{l-1} \Rightarrow A'_lA'_{l+1} = A'_{l+1}A'_{l+2}$$

($A'_{n+1}=A'_1$ و $A'_{n+2}=A'_2$ به حساب آورده‌ایم) (شکل). بنابراین، چندضلعی باید نه تنها زاویه‌هایی برابر، بلکه ضلعهای برابر هم داشته باشد.

سرانجام، رأسهای n ضلعی منتظم، در شرط $\alpha=\frac{180^\circ}{n}$ صدق می‌کنند. این مطلب، وقتی روشن می‌شود که دایرهٔ محیطی n ضلعی را رسم کنیم و به این نکته توجه کنیم که، زاویهٔ بین قطرهای مجاوری که از یک رأس رسم شوند، مقابل به زاویهٔ $\frac{360^\circ}{n}$ یعنی برابر $\frac{180^\circ}{n}$ می‌باشد.

۲ . ۷ . ۳. زاویهٔ ظلی

۱۲۲. ضلعهای دو زاویه بر هم عمودند.

۱۲۳. الف. $x=62^\circ$ ، $y=28^\circ$ ب. $x=70^\circ$

پ. $x=55^\circ$ ت. $x=46^\circ$ ، $y=58^\circ$

۲ . ۷ . ۴. زاویهٔ درونی (زاویهٔ بین دو وتر)

۱۲۴. زاویهٔ P رأسش داخل دایره است، پس :

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow 7x+11 = \frac{2x+x+88}{2} \Rightarrow x=6 \Rightarrow \hat{P}=53^\circ$$

۱۲۵. با توجه به داده‌های مسأله داریم :

$$\overset{\frown}{MR}=\overset{\frown}{MK}=140^\circ, \overset{\frown}{MQ}=26^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{RK}=80^\circ, \overset{\frown}{RQ}=140^\circ-26^\circ=114^\circ$$

$$R\hat{P}K = \frac{\overset{\frown}{RK}+\overset{\frown}{MQ}}{2} = \frac{80^\circ+26^\circ}{2} = 53^\circ$$

۱۲۶. الف. $x=50^\circ$ ، y قابل محاسبه نیست، زیرا تنها مجموع دو کمان $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ را داریم.

ب. $x=100^\circ$ ، $y=95^\circ$

۲ . ۷ . ۵. زاویهٔ برونی (زاویهٔ بین امتداد دو وتر، دو مماس یا یک وتر و یک مماس)

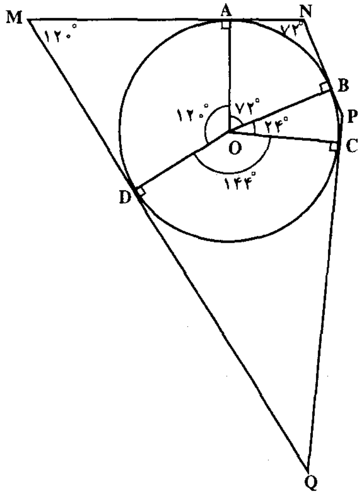
۱۲۷. داریم : $\hat{A} = \hat{B} = ۳۰^\circ$ و $A\hat{P}B = ۱۲۰^\circ$.

۱۲۸. الف. $x = ۶۰^\circ$ ، $y = ۸۰^\circ$ ب. $x = y = ۵۵^\circ$

۱۲۹. الف. ۳۰° ب. ۳۷° پ. ۲۰° ت. ۳۶°

ث. ۱۲۰° ج. ۱۳۰° چ. ۹۴° ح. ۲۵°

۱۳۰. کمانهای ایجاد شده روی دایره ۱۴۴°، ۱۲۰°، ۷۲° و ۲۴° و زاویه‌های مورد نظر ۳۶°، ۶۰°، ۱۰۸° و ۱۵۶° می‌باشند.



۲ . ۷ . ۶. زاویه‌های مختلف

۱۳۱. داریم :

$$\hat{B}_1 = ۶۴^\circ \ , \ \hat{B}_2 = ۱۱۶^\circ \ , \ \hat{D} = ۴۵^\circ \ , \ \hat{C}_1 = ۱۹^\circ \ , \ \hat{A} = ۳۸^\circ \ , \ \hat{C}_2 = ۱۶۱^\circ$$

۱۳۲. الف. ۳۵° ب. ۳۵° پ. ۶۰°

ت. ۱۲۰° ث. ۶۰° ج. ۹۰°

۱۳۳. داریم :

$$\hat{۱} = ۷۰^\circ \ , \ \hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۸} = ۳۵^\circ \ , \ \hat{۳} = ۱۱۰^\circ \ , \ \hat{۵} = \hat{۶} = ۵۵^\circ \ , \ \hat{۷} = ۹۰^\circ$$

۱۳۴. الف. $x = y = ۶۵^\circ$ ب. $x = ۱۲۵^\circ$ پ. $x = ۷۵^\circ$

ت. $x = ۷۰^\circ$ ث. $x = ۴۰^\circ$ ، $y = ۸۰^\circ$ ج. $x = ۹۰^\circ$ ، $y = ۵۵^\circ$

۱۳۵. الف. $x = ۱۴۰^\circ$ ، $y = ۴۰^\circ$ ب. $x = ۱۹۰^\circ$ ، $y = ۵۵^\circ$

پ. $x = y = ۴۳^\circ$ ت. $x = ۳۴^\circ$ ، $y = ۶۸^\circ$

۱۳۶. داریم : $x=۷^\circ$ و $y=۷۰^\circ$.

۱۳۷. داریم : $x=۲۸۲^\circ$ و $y=۷۸^\circ$.

۱۳۸. داریم :

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{EF}}{۲}\ ,\ \hat{E}=\frac{\overset{\frown}{FD}}{۲}\ ,\ \hat{F}=\frac{\overset{\frown}{DE}}{۲}$$

$$\hat{D}+\hat{E}+\hat{F}=\frac{\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{FD}+\overset{\frown}{DE}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

.۱۳۹

$$\overset{\frown}{DH}=۶۰^\circ\ ,\ \overset{\frown}{FG}=\overset{\frown}{ED}=۹۶^\circ\ ,\ \overset{\frown}{EF}=۱۸۰^\circ-(۹۶^\circ+۶۰^\circ)=۲۴^\circ$$

$$\overset{\frown}{GH}=۱۸۰^\circ-۹۶^\circ=۸۴^\circ\ ,\ B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{DG}-\overset{\frown}{EF}}{۲}=\frac{۸۴^\circ+۶۰^\circ-۲۴^\circ}{۲}=۶۰^\circ\ ,\ \ldots$$

.۱۴۰

$$\hat{A}=۶۵^\circ\ ,\ \hat{B}=۹۵^\circ\ ,\ \hat{C}=۱۱۵^\circ\ ,\ \hat{D}=۵۸^\circ\ ,\ \hat{E}=۳۰^\circ\ ,\ \hat{F}=۲۰^\circ$$

۲ . ۷ . ۷ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲ . ۷ . ۷ . ۱ . رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۱۴۱. اگر از C به A وصل کنیم و نقطهٔ برخورد PA و BC را D بنامیم، CD میانه و ارتفاع مثلث PAC است.

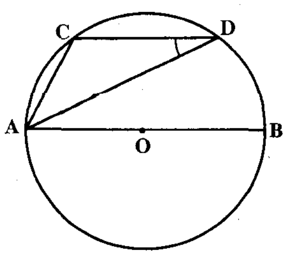
۱۴۴. $M\hat{O}P=A\hat{B}C$ و $N\hat{O}P=A\hat{C}B$.

۱۴۵. اگر نقطهٔ M روی یکی از دو کمان $\overset{\frown}{AA'}$ یا $\overset{\frown}{BB'}$ باشد، $A\hat{M}B=A'\hat{M}B'$ است و اگر نقطهٔ M روی یکی از کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ یا $\overset{\frown}{A'B'}$ واقع باشد، $A\hat{M}B+A'\hat{M}B'=۱۸۰^\circ$ است.

۱۴۶. می‌دانیم که قوسهای محصور بین دو وتر متوازی در یک دایره برابرند. پس :

$$AB\parallel CD\Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

$$A\hat{C}D-A\hat{D}C=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{BD}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=۹۰^\circ$$



۱۴۷. دو کمان $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{CD}$ برابرند و $\overset{\frown}{AB}=۱۸۰°$ است، پس :

$$\hat{C}-\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{DBA}-(\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{DB})}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=۹۰°$$

اگر H نقطهٔ برخورد مماس بر دایره در نقطهٔ D با AC باشد، با توجه به این که $D\hat{A}C=C\hat{D}H$ است. داریم :

$$\hat{H}=\hat{C}-\hat{D}=\hat{C}-D\hat{A}C=۹۰°$$

بنابراین : $D\hat{H}C=۹۰°$ یعنی DH ارتفاع است.

۱۴۸. ضلعهای دو زاویهٔ BOC و DAE برهم عمودند.

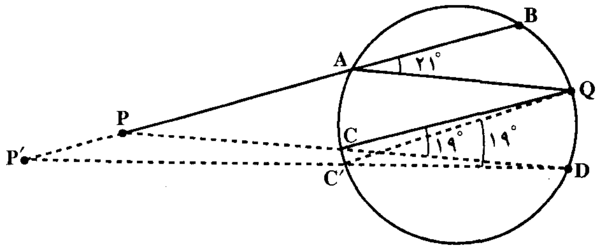
۱۴۹. ضلعهای دو زاویه برهم عمودند.

۱۵۰. (ج). داریم :

$$\hat{P}=\frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC})\ ,\ \ \hat{Q}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC}$$

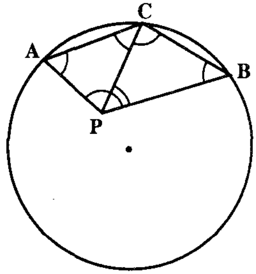
$$\hat{P}+\hat{Q}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=\frac{۱}{۲}(۴۲°+۳۸°)=۴۰°$$

در این مسأله، مجموع اندازه‌های زاویه‌های P و Q مقدار ثابتی است، هرچند که اندازهٔ هر کدام از آنها می‌تواند تغییر کند (شکل).



۱۵۱. ثابت کنید : $A\hat{M}O=O\hat{M}B=B\hat{M}C$.

۱۵۴. گزینهٔ (الف) درست است زیرا زاویهٔ DOA، زاویهٔ خارجی مثلث OAC است و (۱) $x=\hat{A}+y$ است. از طرفی اگر شعاع OB را رسم کنیم، مثلثهای AOB و BOC متساوی‌الساقین و OBA زاویهٔ خارجی مثلث OBC است. بنابراین داریم : (۲) $\hat{A}=O\hat{B}A=۲y$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $x=۳y$.

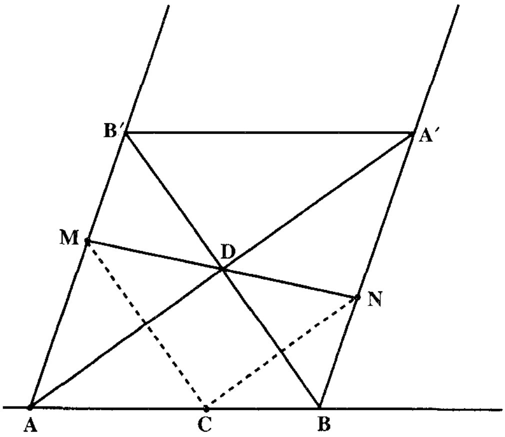


۲ . ۷ . ۷ . ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۱۵۵. در دو مثلث APC و PBC، $AC = CB$ و $PC = PC$ است. ثابت کنید: $P\hat{A}C + A\hat{C}P < P\hat{C}B + C\hat{B}P$.

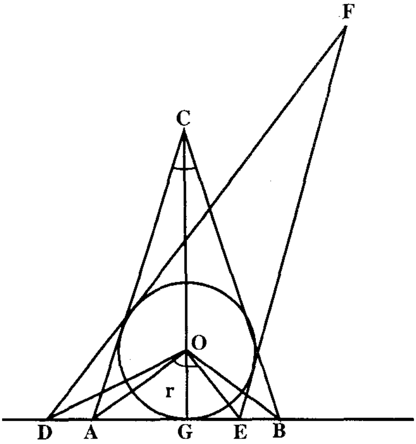
۲ . ۷ . ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۵۶. نقطهٔ برخورد AD و BD با دو خط متوازی را A' و B' نامیده، از A' به B' وصل کنید و ثابت کنید که چهارضلعی $ABA'B'$ لوزی است. در این صورت دایرهٔ به قطر AB از نقطهٔ D خواهد گذشت.



۱۵۷. دایره‌ای را رسم می‌کنیم که همهٔ نقطه‌های برخورد خطهای راست را، در درون خود داشته باشد. این خطهای راست، ۴n کمان روی محیط دایره جدا می‌کنند؛ در ضمن، از دو کمان مجاور، هر دو کمان با هم متعلق به دو زاویه نیستند (دلیل آن را بگویید). بنابراین، تعداد زاویه‌ها نمی‌تواند از ۲n بیشتر باشد و تنها وقتی برابر ۲n است که، از هر دو کمان مجاور، یکی متعلق به زاویه باشد. ولی در این حالت، چون تعداد خطهای راست، عددی زوج است، دو کمان روبه‌رو، هر دو متعلق به زاویه‌ای می‌شوند که ممکن نیست.

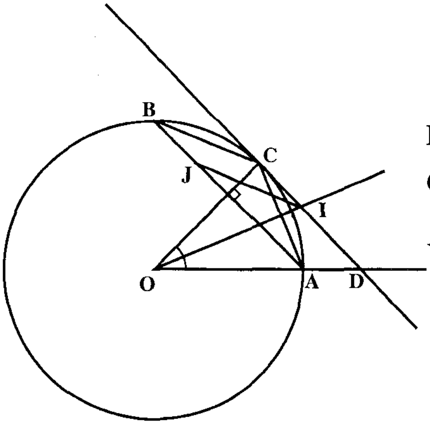
۱۵۸. مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ ثابت و مماس بر دایره داده شده، جواب مسأله است. مثلث متساوی‌الساقین ABC محاط بر دایرهٔ به شعاع r و مثلث مختلف‌الاضلاع DEF با قاعدهٔ $DE = AB$ و مماس بر دایرهٔ به شعاع r را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم $A\hat{C}B > D\hat{F}E$. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی مثلثهای بالا باشد، داریم $A\hat{O}B = ۹۰^\circ + \frac{\hat{C}}{۲}$



و $D\hat{O}E = 90^\circ + \frac{\hat{F}}{2}$، بنابراین کافی است ثابت کنیم $A\hat{O}B > D\hat{O}E$ است.
برای مثلث AOB، عمود OG حداکثر نوک ارتفاع قطعهٔ حاوی زاویهٔ AOB است، حال آن که برای قطعهٔ حاوی زاویهٔ EOD، عمودی دلخواه است که از یک نقطهٔ دلخواه این کمان رسم شده است.
پس قطعهٔ BOA کوچکتر از قطعهٔ EOD است؛ درنتیجه زاویهٔ AOB بزرگتر از زاویهٔ DOE می‌باشد.

۲ . ۸. پاره‌خط

۲ . ۸ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط



۱۵۹. گزینهٔ (د) درست است.

۱۶۱. اگر نقطهٔ برخورد OA با مماس CI را D بنامیم و از A به C وصل کنیم، مثلث OCD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و دو مثلث AIJ و ACD با هم برابرند.

۱۶۲. $MN = PQ = \frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$.

۲ . ۸ . ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲ . ۸ . ۲ . ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۱۶۳. مثلثهای A_2MN، A_2A_3N و NA_3O متساوی‌الساقینند.

۱۶۴. اگر OM و ON تصویرهای OC و OD روی OA باشند:

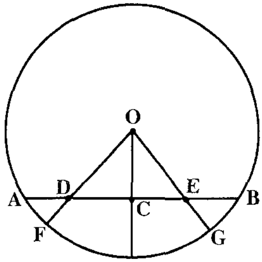
۱. تصویر نقطهٔ G، مرکز دایره، روی OA را H بنامید. H وسط OA است و داریم $OM = NA$، درنتیجه: $OM + ON = OA$.

۲. CM را ادامه دهید تا دایره را در L قطع کند و از L به D وصل کنید.

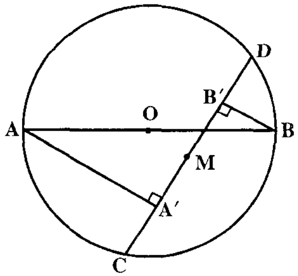
به دلیل برابری OM و AN، وتر LD موازی و مساوی MN است، از آن‌جا :

$$\overset{\frown}{OL} = \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{LD} \Rightarrow OB = ED = MN$$

۱۶۵. فرض می‌کنیم $AB > AC$ و پای عمود را H می‌نامیم. روی امتداد پاره‌خط راست BA، نقطهٔ C را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $AC = AC'$. بسادگی و با در نظر گرفتن زاویه‌ها روشن می‌شود که خط راست MA، نیمساز زاویهٔ CAC' است. چون مثلث ACC' متساوی‌الساقین است، خط راست MA بر خط راست CC' عمود می‌شود و $|MC| = |MC'|$ و یا $|MB| = |MC'|$. یعنی MH میانهٔ مثلث MBC' و نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست BC' است.

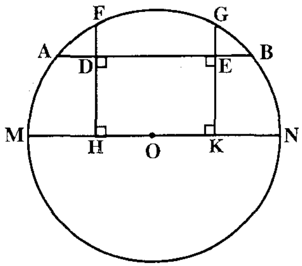


۱۶۶. وتر AB را در دایرهٔ به مرکز O در نظر می‌گیریم و دو نقطهٔ D و E را به یک فاصله از نقطهٔ C وسط این وتر اختیار می‌کنیم. شعاعهای OD و OE دایره را بترتیب در F و G قطع می‌کنند. $EG = DF$ است، زیرا مثلث ODE متساوی‌الساقین و $OF = OG$ است.

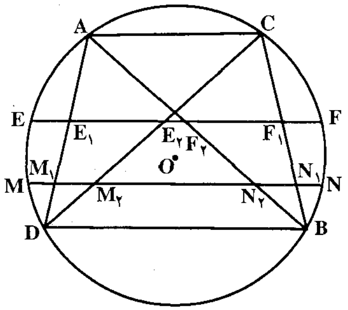


۱۶۷. قطر AB و وتر CD از دایرهٔ به مرکز O را در نظر می‌گیریم. تصویرهای دو سر قطر A و B روی وتر CD را A' و B' و وسط وتر CD را M می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $MA' = MB'$ است.

۱۶۸. اگر از نقطهٔ O، مرکز دایره، قطر MN را موازی وتر AB رسم کنیم و نقطهٔ برخورد DF و EG با این قطر را بترتیب H و K بنامیم، $HF = KG$ است و DEKH مستطیل است.



۱۶۹. نقطه‌های برخورد DF و CG با قطری از دایره را که موازی DE است، بترتیب H و L می‌نامیم و از F به G وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای DELH و FGLH مستطیل می‌باشند، پس $DH = EL$ و $FH = GL$ است، از آن‌جا $DF = EG$ است.



۱۷۰. دو وتر مساوی AB و CD را در نظر می‌گیریم. اگر EF پاره‌خطی باشد که وسطهای دو کمان مساوی AD و BC را به هم وصل کرده است، با توجه به شکل $EE_1 = FF_1$ ، $E_1E_2 = F_1F_2$ است. حال اگر خط MN را موازی EF رسم کنیم، پاره‌خطهای متناظر مساوی روی MN ایجاد می‌شود.

۱۷۱. اگر از نقطهٔ M به نقطهٔ N و از نقطهٔ O به نقطه‌های N و G وصل کنیم، چهارضلعی MNOG متوازی‌الاضلاع است.

۱۷۲. ثابت کنید مثلثهای MBD و MAC متساوی‌الساقین می‌باشند.

۱۷۳. چهارضلعی ABPC محاطی و مرکز دایرهٔ محیطی آن نقطهٔ I وسط پاره‌خط AP است. خط المرکزین دو دایره یعنی OI عمودمنصف وتر مشترک BC است و لذا با PA' موازی است.

۱۷۴. فرض کنید O معرف مرکز دایره باشد و N_1 ، M_1 ، P_1 و R_1 بترتیب نقطه‌های قرینهٔ نقطه‌های N، M، R و P نسبت به خط راست OA، باشند و K نقطهٔ برخورد خطهای راست N_1R_1 و QS باشد. باید ثابت کنیم که نقطه‌های R_1 ، S و K بر هم منطبقند. نقطه‌های N_1 ، M_1 و B روی یک خط راست قرینه با خط راست NMC واقعند. نقطه‌های N_1 ، P_1 و R_1 هم روی یک خط راست، قرینه با خط راست NPR واقعند (شکل). نقطه‌های B، N_1 ، Q و K روی یک دایره واقعند. زیرا :

$$B\hat{N_1}K = M_1\hat{N_1}P = M\hat{N}P = P\hat{Q}M = B\hat{Q}K$$

نقطه‌های B، N_1 ، Q و R هم، روی یک دایره قرار دارند، زیرا :

$$N_1\hat{R_1}B = N_1\hat{P_1}P = N_1\hat{Q}P = N\hat{Q}B$$

در نتیجه پنج نقطهٔ B، N_1، Q، R_1 و K همخطند، بنابراین R_1 و K بر هم منطبقند.

۱۷۵. دو مثلث قائم‌الزاویه ATB و OTC با هم برابرند.

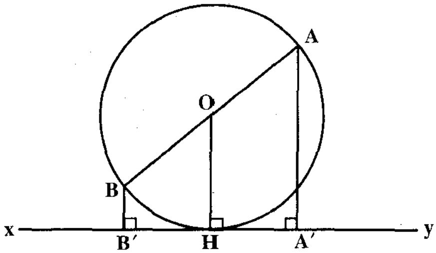
۱۷۶. الف. اگر $AD = BC$ باشد، آن‌گاه، $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ و در نتیجه $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AB}$ و یا $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$ است پس، $BD = AC$ است.

ب. اگر $AC = BD$ باشد، آن‌گاه $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ و از آن‌جا $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$، در نتیجه $AD = BC$ است.

۱۷۷. از B به R وصل کنید، $L\hat{R}B = R\hat{B}E$ است، پس $BE \parallel LR$ است.

۱۷۸. چهارضلعی $BB'CC'$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه و نقطهٔ O وسط ساق BC است.

۱۷۹. اگر H نقطهٔ تماس خط xy با دایره باشد، پاره خط OH به طول R، وسطهای ساقهای ذوزنقه $AA'B'B$ را به هم وصل کرده است.



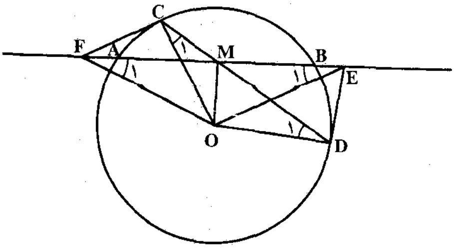
۱۸۰. با توجه به برابری $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AE}$، ثابت کنید: $C\hat{B}P = C\hat{P}B$.

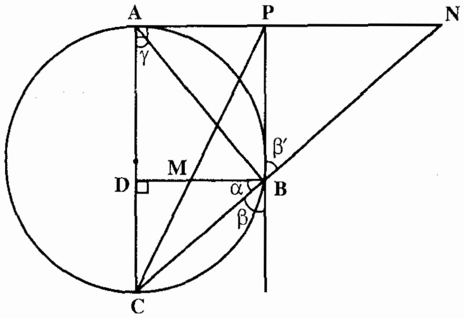
۱۸۱. دایرهٔ به قطر OP را رسم کنید.

۱۸۲. اگر از B به H وصل کنیم، $F\hat{B}H = D\hat{B}H$ و $A\hat{H}B = 90^\circ$ است.

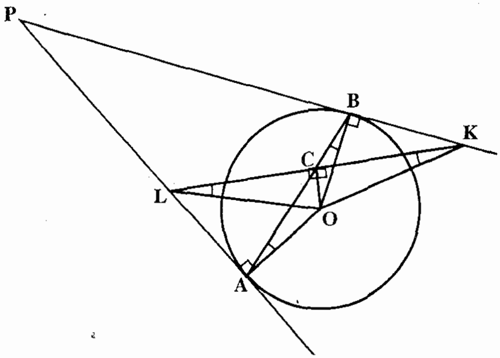
۱۸۳. $Q\hat{M}P = M\hat{P}Q$ و $Q\hat{M}N = M\hat{N}Q$ است.

۱۸۴. چهارضلعی DMCF محاطی است زیرا $OC \perp FC$ و چون M وسط وتر AB است، $OM \perp EF$ ؛ در نتیجه $\hat{C}_1 = \hat{F}_1$. به همین علت $\hat{E}_1 = \hat{D}_1$ و چون $OC = OD$ است، مثلث OCD متساوی‌الساقین است یعنی، $D_1 = C_1$. پس $\hat{F}_1 = \hat{E}_1$ یعنی، در مثلث متساوی‌الساقین OFE، چون OM ارتفاع است، میانه نیز می‌باشد. یعنی $FM = ME$ ولی $MA = MB$، پس: $AF = BE$.



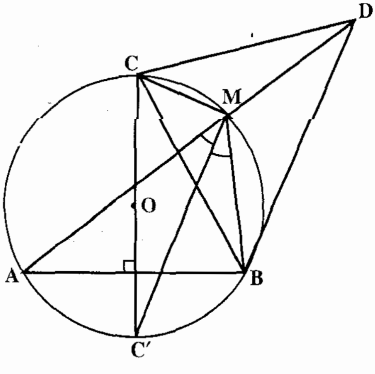


۱۸۵. مماس AP را امتداد می‌دهیم و B را به C وصل می‌کنیم. BC مماس AP را در N قطع می‌کند. اگر B را به A وصل کنیم، دو زاویهٔ γ و α با هم برابرند، زیرا ضلعهایشان بر هم عمودند و $\hat{\gamma}$ با $\hat{\beta}$ نیز با هم برابرند زیرا مقابل به کمان $\overset{\frown}{BC}$ می‌باشند. پس $\alpha = \beta$. همچنین $\beta = \beta'$ و $\hat{\alpha} = \hat{N}$ زیرا BD با AN موازی است، پس $\hat{\beta'} = \hat{N}$ و مثلث PNB متساوی‌الساقین است پس $PN = PB$ و چون $PB = PA$ ، بنابراین P وسط AN است و از آن‌جا نتیجه می‌شود که M وسط BD می‌باشد.



۱۸۶. دایرهٔ به قطر OK از نقطه‌های B و C می‌گذرد. پس $O\hat{K}L = O\hat{B}C$ و همچنین دایرهٔ به قطر OL از A و C می‌گذرد یعنی، $O\hat{L}K = O\hat{A}C$. اما مثلث OAB متساوی‌الساقین است پس، $O\hat{B}C = O\hat{A}C$. در نتیجه $O\hat{K}L = O\hat{L}K$ و $OK = OL$ است. در مثلث متساوی‌الساقین OKL، ارتفاع OC میانه نیز هست. پس $CK = CL$ یعنی C وسط KL است.

۱۸۷. مثلث MAB متساوی‌الاضلاع است و دو مثلث ABA' و BCB' با هم برابرند.



۲.۲.۸.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۱۸۹. ۱. نیمساز زاویهٔ AMB از نقطهٔ C' وسط کمان AB می‌گذرد و نیمساز زاویهٔ مکمل آن یعنی نیمساز زاویهٔ BMD از نقطهٔ C وسط کمان دیگر $\overset{\frown}{AB}$ می‌گذرد که C و C' دو سر یک قطر از دایره‌اند. دو مثلث BMC و

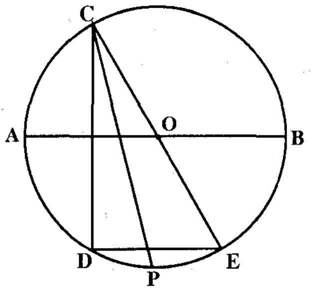
CMD با هم برابرند. زیرا $MB = MD$ و MC در هر دو مثلث مشترک و $C\hat{M}D = C\hat{M}B$ است پس، $CB = CD$ می‌باشد.

۲. در مثلث ACD می‌توان نوشت: $AD < AC + CD \Rightarrow AM + MD < AC + CD$

و با توجه به این که $MD = MB$ و $CD = CB$ است. پس داریم:

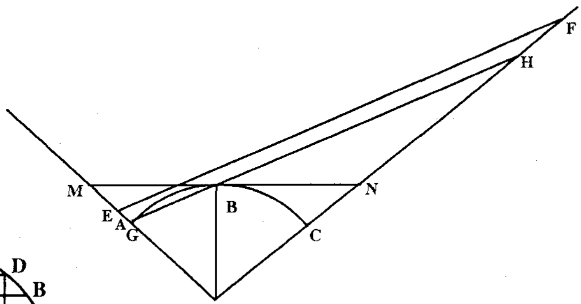
$$AM + MB < AC + CB$$

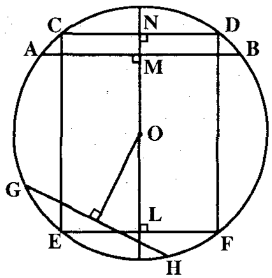
۳.۸.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۱۹۰. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا: امتداد CO دایره را در E قطع می‌کند. چون CE قطر دایره است، $CD \perp DE$. نیمساز زاویهٔ OCD، قوس مقابل، DE را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی $\overset{\frown}{DP} = \overset{\frown}{PE}$. صرف‌نظر از وضعیت C، وتر متناظر آن، DE همواره موازی AB است ($\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{EB}$). بنابراین P همواره قوس $\overset{\frown}{AB}$ را نصف می‌کند.

۱۹۱. اگر نقطهٔ B وسط کمان $\overset{\frown}{ABC}$ باشد، پاره‌خط MN، مماس بر این نقطه جواب مسأله است، زیرا اگر مماس دلخواه EF بر این کمان را رسم کنیم و از B خط GH را موازی EF رسم کنیم، $GH < EF$ است اما $MN < GH$، پس: $MN < EF$.

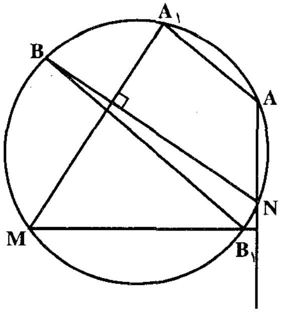




۱۹۲. وترهای AB و GH را بترتیب به طولهای l و l' در نظر می‌گیریم. اگر $EF = CD = GH$ و CD موازی EF باشد، MN کوتاهترین فاصله و ML بیشترین فاصله است.

۹.۲. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۹.۲. خطها موازی‌اند



۱۹۳. کافی است ثابت کنیم :

$$B_1\hat{M}A = A\hat{A}_1B_1 = A_1\hat{B}_1B$$

۱۹۴. در شکل (الف) از A به D وصل کنید. $B\hat{A}D = A\hat{D}C$ است، پس ... در شکل (ب) PP' از مرکز دایره می‌گذرد و بر هر دو مماس عمود است.

۱۹۵. چهارضلعی PFMG متوازی‌الاضلاع است.

۱۹۶. $A\hat{O}M = A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.

۲.۹.۲. خطها بر هم عمودند

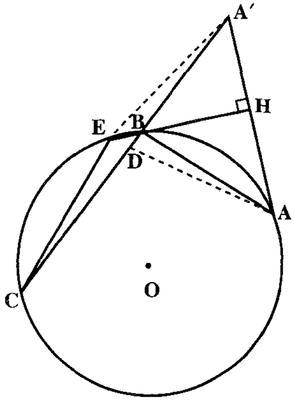
۱۹۸. ثابت کنید $\overset{\frown}{A'D'} + \overset{\frown}{B'C'} = ۱۸۰^\circ$ است.

۱۹۹. مثلث OMN متساوی‌الساقین است.

۲۰۰. ثابت کنید : $O\hat{C}P = C\hat{P}P'$.

۲۰۱. نقطهٔ M از نقطه‌های D، A و C به یک فاصله است.

۲۰۲. نقطهٔ Y وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.



۲۰۳. فرض می‌کنیم $BC > AB$ باشد. پاره‌خط CB را از طرف B به اندازهٔ $BA' = BA$ امتداد می‌دهیم و از A' به A وصل می‌کنیم. خط EB، نیمساز زاویهٔ ABA' از مثلث متساوی‌الساقین ABA' است، زیرا اگر H پای این نیمساز باشد، داریم :

$A'\hat{B}H = E\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{EC}}{۲}$ و $A\hat{B}H = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC}$. بنابراین EH عمود منصف پاره‌خط AA' می‌باشد. از آن‌جا $EA = EA'$ اما $EA = EC$ (کمانهای نظیر آنها برابرند) پس $EC = EA'$ یعنی مثلث ECA' متساوی‌الساقین است. در این مثلث ED میانهٔ نظیر قاعده است پس عمود منصف قاعده می‌باشد.

۲۰۴. چهارضلعی $CC'DD'$ ذوزنقه‌ای است که قاعده‌های آن عمود بر قطر AB است و MM' موازی قاعده‌ها است.

۲۰۵. اگر نقطهٔ تقاطع AM و BN را D بنامیم و از A به N وصل کنیم، مثلث $\hat{A}ND$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۲۰۶. $A\hat{P}O = B\hat{P}O = C\hat{O}B$ و $P\hat{O}B + O\hat{P}B = ۹۰^\circ$ است.

۲۰۸. چهارضلعی MQNP لوزی است.

۳.۹.۲. خط نیمساز است

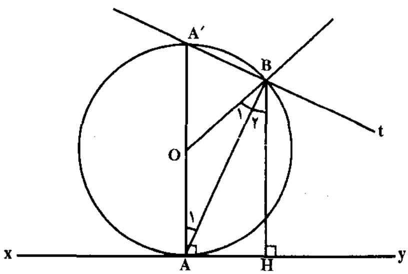
۲۰۹. مثلث AOB متساوی‌الاضلاع و مثلث AEO متساوی‌الساقین است.

۲۱۰. مثلث OAB متساوی‌الساقین و OA موازی BH است.

۲۱۱. خط CO، نیمساز زاویهٔ ACB است و دو مثلث ADC و BDC، همچنین مثلثهای ACE و CEB همنهشتند.

۴.۹.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

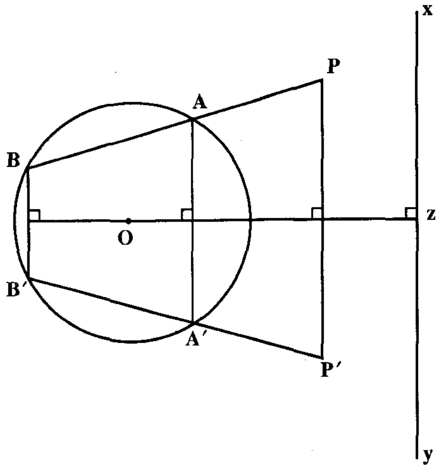
۲۱۳. مثلث OAB متساوی‌الساقین و $OA \| BH$ است، پس $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ و $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۲$ است. در نتیجه $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ یعنی AB نیمساز زاویهٔ OBH می‌باشد، پس بر Bt نیمساز خارجی این زاویه عمود است، یعنی زاویهٔ $A\hat{B}t = ۹۰^\circ$ است.



اگر نقطهٔ دیگر برخورد Bt با دایره را A' بنامیم، زاویهٔ $A'\hat{B}A = ۹۰^\circ$ می‌باشد. لذا $A'A$ از O مرکز دایره می‌گذرد. یعنی نقطهٔ A' انتهای دیگر قطری از دایره است که از نقطهٔ ثابت A مرور می‌کند. پس A'

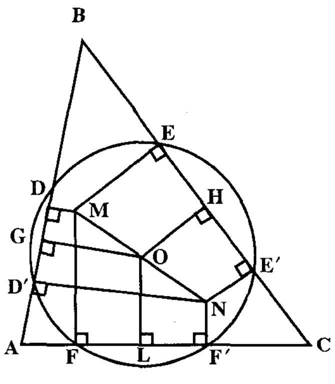
نقطهٔ ثابتی است.

۲۱۵. اگر از نقطهٔ O، مرکز دایره، عمود OZ را بر خط xy فرود آوریم، خط A′B′ از نقطهٔ P′، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط OZ، می‌گذرد.



۲.۹.۵. خطها همرسند

۲۱۶. نقطه را M و پای عمودهای رسم شده بر سه خط را D، E و F و مثلث حاصل از برخورد سه خط را ABC و نقطه‌های دیگر برخورد دایرهٔ گذرنده بر D، E و F با خطها را D′، E′ و F′ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که عمودهای اخراج شده بر سه خط در این نقطه‌ها، در نقطه‌ای مانند N همرسند. نقطهٔ M را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. فرض کنیم ON = OM. خط NF′ عمود بر AC است زیرا LF′ = LF، در نتیجه NF′ موازی MF است. همین نکته برای NE′ و ND′ درست است. از آن‌جا ... .

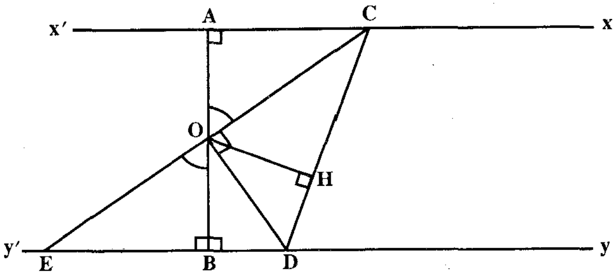


۲.۹.۶. وضع نسبی خط و دایره

۲.۹.۶.۱. خط مماس بر دایره است

۲۱۷. از O عمود OH را بر CD فرود می‌آوریم و OC را امتداد می‌دهیم تا yy′ را در نقطهٔ

E قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویه OAC و OEB، به حالت تساوی یک ضلع و یک زاویهٔ حاده با هم برابرند. زیرا $OA = OB$ و $A\hat{O}C = B\hat{O}E$ و $\hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ$، پس $OE = OC$ و چون $OD \perp EC$ است، پس مثلث DEC که در آن میانه و ارتفاع نظیر ضلع CE است، متساوی‌الساقین است. در نتیجه OD نیمساز زاویهٔ EDC و از آن‌جا $OH = OB$ است. پس دایرهٔ به قطر AB یعنی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OB از نقطهٔ H می‌گذرد و چون CD در نقطهٔ H بر OH عمود است، پس این دایره بر خط CD در نقطهٔ H مماس می‌باشد.

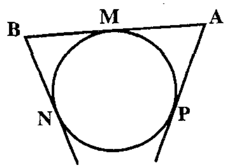


۲۱۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOC با مثلث OCB برابر است. پس $O\hat{B}C = ۹۰^\circ$ یعنی CB بر دایره مماس است.

۲۱۹. ثابت کنید $C\hat{T}G = ۹۰^\circ$ است.

۲۲۰. اگر پاره‌خط AB برابر مجموع دو مماس AP و BN باشد که از نقطه‌های A و B بر دایره رسم شده‌اند. AB خود از نقطه‌ای مانند M بر دایره مماس است و این نقطهٔ M چنان است که $MB = BN$ و $AM = AP$ است. زیرا اگر نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B را O بنامیم، این نقطه که از سه خط AB، AP و BN به یک فاصله است $(OM = ON = OP)$، مرکز دایرهٔ داده شده است. یعنی این دایره در نقطهٔ M بر AB مماس است.

نکته. اگر پاره خط AB برابر تفاضل اندازه‌های دو مماس رسم شده از A و B بر دایره باشد، امتداد پاره‌خط AB بر دایره مماس است.



۲.۶.۹.۲. خط متقاطع با دایره است.

۲۲۱. در حالت اوّل (شکل الف):

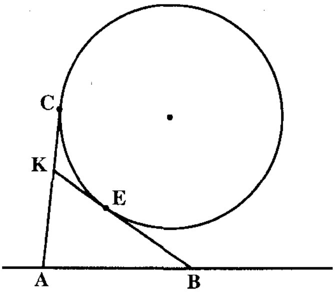
$$AB < AA_1 + A_1B_1 + B_1B = AA_1 + A_1C + B_1D + BB_1$$

$$l = AC + BD$$

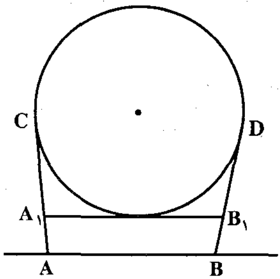
در حالت دوم (شکل ب):

$$AB > BK - AK > BE - AC$$

عکس مسأله هم بسادگی، بارسیدن به تناقض ثابت می‌شود.



(ب)



(الف)

۲.۱۰. شکلهای ایجاد شده

۲.۱۰.۱. شکلهای ایجاد شده (مثلث)

۲۲۲. مثلث پدید آمده متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۶۰ درجه است. پس متساوی‌الاضلاع است.

۲۲۳. CH عمودمنصف پاره‌خط AB است.

۲۲۴. دو وتر AB و CD با هم مساوی‌اند.

۲۲۵. داریم:

$$AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \qquad (۱)$$

$$\hat{B} = D\hat{A}C \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow AD = AC$$

پس مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

۲۲۶. با توجه به این که $\overset{\frown}{CB} = 60^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = 120^\circ$ است، ثابت کنید $A\hat{D}C = 30^\circ$ است.

۲۲۷. ثابت کنید: $P\hat{C}D = P\hat{D}C$.

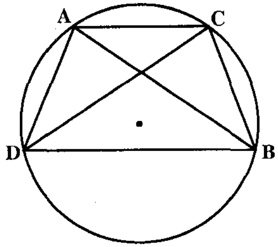
۲۲۸. میانه بودن OM در مثلث OCD، و یا برابری $OD = OC$ را ثابت کنید.

۲.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (چندضلعیها $n \geq 4$)

۲۳۰. کمانهای محصور بین دو وتر متوازی با هم برابرند، پس $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ و از آن‌جا :
$AD = BC$.

۲۳۱. وترهای متساوی، کمانهای برابر دارند. پس در شکل با فرض $AB = CD$ داریم :
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AC \| BD$

پس چهارضلعی ABCD ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



۲۳۲. ثابت کنید : $E\hat{D}F + F\hat{G}E = 180^\circ$.

۱۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۳۳. در این دو مثلث $OA = OB$ ، $AC = DB$ و $\hat{A} = \hat{B}$ است، پس همنهشتند.

۲۳۴. قبل از هر چیز، ثابت کنید، قورباغه‌ها، دیر یا زود، در همهٔ قطاعها خواهند بود. اکنون تنها کافی است به یک نکته توجه کنید :

اگر در یکی از دو قطاع مجاور، قورباغه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت، یکی از این دو قطاع، در آینده هم، مهمان قورباغه خواهد بود.

۲۳۸. ۴۹۵۱ . از این مطلب استفاده کنید که از هر دو حلقه‌ای که یکی دیگری را تکمیل می‌کند (یعنی روی هم شامل ۱۰۰ عدد باشند)، یکی از آنها مجموعی مثبت دارد.

۲۳۹. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا :

$$\frac{\text{فاصله (برحسب مایل)}}{\text{زمان (برحسب ساعت)}} = \text{سرعت (برحسب } \frac{\text{مایل}}{\text{ساعت}}) = r$$

بنابراین

$$\frac{\text{فاصله (بر حسب فوت)}}{\text{زمان (برحسب ثانیه)}} = r \times \frac{۵۲۸۰}{۳۶۰۰} = \frac{۲۲}{۱۵} r$$

و از آن‌جا:

$$\frac{۱۵}{۲۲} \times \frac{\text{فاصله (برحسب فوت)}}{r} = \text{زمان (برحسب ثانیه)}$$

$$\text{ثانیه } t = \frac{۱۵}{۲r} = \frac{۱۱\times ۱۵}{۲۲r} = \text{زمان برای یک دور}$$

اگر ۵ به r اضافه شود، $\frac{۱}{۴}$ از t کم می‌شود، بنابراین:

$$\frac{۱۵}{۲(r+۵)} = t - \frac{۱}{۴}$$

و از آن‌جا:

$$\frac{۱۵}{۲(r+۵)} = \frac{۱۵}{۲r} - \frac{۱}{۴} = \frac{۳۰-r}{۴r}$$

$$۳۰r = (r+۵)(۳۰-r) = ۳۰r - r^۲ + ۱۵۰ - ۵r$$

بنابراین: $r^۲ + ۵r - ۱۵۰ = ۰ \Rightarrow (r-۱۰)(r+۱۵) = ۰$. سرعت منفی را نمی‌پذیریم.

پس: $r = ۱۰$.

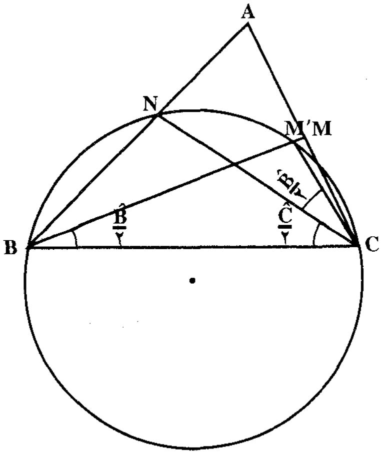
۲۴۰. برای اثبات برابری زاویه‌های مثلثها، از A به B و از A′ به B′ وصل کنید. برای همدایره بودن نقطه‌ها بر سه نقطه یک دایره بگذرانید و ثابت کنید این دایره بر نقطهٔ چهارم مورد نظر در هر قسمت نیز می‌گذرد.

۲۴۱. نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB و خط عمود مرسوم بر xy در نقطهٔ A، مرکز تنها دایرهٔ جواب مسأله است.

۲۴۲. یکی از روشهای سادهٔ حل این مسأله بر مبنای دو لم زیر بیان می‌شود.

لم ۱. اگر در یک دایره دو وتر روبه‌رو به دو زاویهٔ حادهٔ محاطی نابرابر باشند، آن وتر که بزرگتر است، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر است.

از دو وتر نابرابر آن که بزرگتر است به مرکز نزدیکتر است و در نتیجه زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن بزرگتر است. هر زاویهٔ محاطی نیمهٔ زاویهٔ مرکزی است که با آن روبه‌رو به



یک وتر واقع است. بنابراین زاویهٔ محاطی روبه‌رو به وتر بزرگتر از زاویهٔ محاطی روبه‌رو به وتر کوچکتر، بزرگتر است.

لم ۲. اگر دو زاویه از مثلثی نابرابر باشند، نیمساز زاویهٔ کوچکتر از نیمساز زاویهٔ دیگر، بزرگتر است. در مثلث ABC، زاویهٔ B از زاویهٔ C کوچکتر است و BM و CN نیمسازهای زاویه‌های B و C می‌باشند. بر BM نقطهٔ M' را چنان می‌یابیم که زاویهٔ NCM' با نیمهٔ زاویهٔ B برابر باشد. از برابری دو زاویهٔ NBM' و NCM' برمی‌آید که چهار گوشهٔ $BNM'C$ محاطی است. اما داریم :

$$\hat{B} < \frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C}) < \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})$$

$$C\hat{B}N < M'\hat{C}B < ۹۰^\circ$$

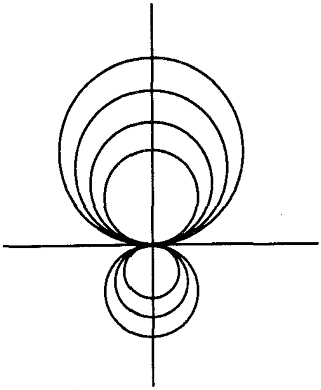
بنا به لم قبلی داریم : $CN < BM'$ و نتیجه می‌شود :

$$BM > BM' > CN$$

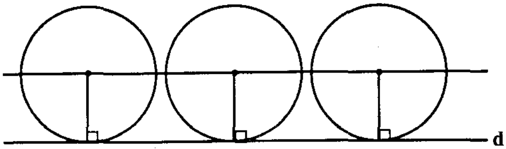
اثبات قضیه. روش برهان خلف را به کار می‌بریم : اگر $B \neq C$ باشد، بنا به لم بالا نتیجه می‌شود $BM \neq CN$ ، اما داریم $BM = CN$ بنابراین گزارهٔ $B \neq C$ غلط است یعنی $B = C$. سرگذشت راه حل بالا نیز جالب است. این راه حل به نام دو مهندس انگلیسی G.Gilbert و D.Mac Donnell در شمارهٔ ۷، سال ۱۹۶۳ مجلهٔ «ماهنامهٔ ریاضی امریکا» چاپ شده و از طرف سردبیر مجله یادداشت زیر به آن اضافه شده است.

«مارتین گاردنر نویسندهٔ معروف مقاله‌های بازیهای ریاضی در مجلهٔ American Scientific در شمارهٔ ۲۰۴، سال ۱۹۶۱ این مجله، مسأله را به گونه‌ای بسیار جالب عرضه کرده و صدها نفر از خوانندگان مجله راه‌حلهایی برای آن مجله فرستاده‌اند. گاردنر این تودهٔ پاسخها را با تلاش زیاد غربال کرده و در آخر راه حل بالا را به عنوان بهترین آنها برگزیده است.»

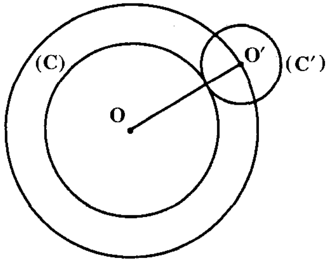
۲۴۳. خطی است که در آن نقطه بر خط داده شده عمود است.



۲۴۴. خطی موازی آن خط و به فاصله‌ای برابر شعاع آن توپ است.



۲۴۵. دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ داده شده و با شعاعی برابر مجموع شعاعهای دو دایره.
زیرا اگر $C(O,R)$ دایرهٔ مفروض و $C'(O',R')$ یک دایرهٔ مماس باشد، داریم:
$OO' = R + R' = C^{te}$



۲۴۶. معما را با راه ساده‌ای حل می‌کنیم: ابتدا یک علامت را در محیط دایره قرار می‌دهیم، فقط یک ناحیه خواهیم داشت. سپس دو علامت قرار می‌دهیم. با مربوط کردن آنها به یکدیگر، دایره به ۲ ناحیهٔ جدا از هم، مساوی یا نامساوی با یکدیگر، تقسیم می‌شود. سپس ۳ علامت را در محیط دایره می‌گذاریم و به همان ترتیب عمل می‌کنیم تا دایره ۴ ناحیهٔ مستقل از هم داشته باشد. به همین روش با گذاشتن ۴ علامت، ۸ ناحیه خواهیم داشت (نمونهٔ مطرح شده در صورت مسأله) و در ۵ علامت، ۱۶ ناحیه (حتماً امتحان کنید) و ... . به‌طوری که ملاحظه می‌کنید، هر بار با اضافه شدن یک علامت، شمار

ناحیه‌ها دو برابر می‌شود و اگر به همین ترتیب پیش برویم، با ۱۰ علامت در محیط دایره ۵۱۲ ناحیهٔ مستقل خواهیم داشت.

این پاسخ از فرمول زیر هم حاصل می‌شود :

$$۲^{۱۰-۱} = ۵۱۲$$

۱۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۴۷ . ۱. مثلث ABC، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۲. زاویهٔ $B\hat{A}C' = ۹۰^\circ$ است.

۲۴۸ . ۱. از ویژگی مماسهای رسم شده از یک نقطه بر دایره استفاده کنید.

۲. اندازهٔ این زاویه برابر $۱۸۰^\circ - \hat{A}$ است.

۲۴۹ . ۱. ضلعهای این دو زاویه بر هم عمودند.

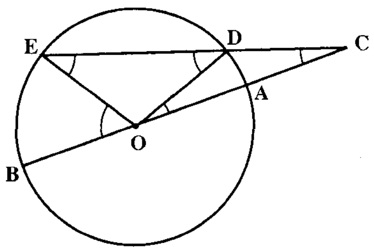
۲. $M\hat{O}A = ۲A\hat{B}M$ است.

۲۵۰ . ۱. زاویهٔ ODE، زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین ODC است. پس : $O\hat{D}E = O\hat{E}D = ۲D\hat{O}A$.

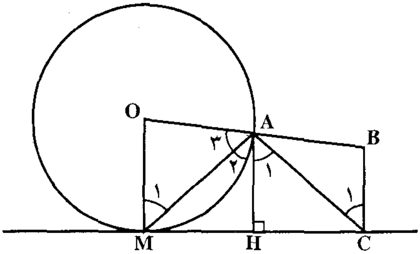
۲. زاویهٔ BOE، زاویهٔ خارجی مثلث OEC است. پس داریم :

$$B\hat{O}E = O\hat{E}D + O\hat{C}E \Rightarrow B\hat{O}E = O\hat{D}E + D\hat{O}A \Rightarrow$$

$$B\hat{O}E = ۲D\hat{O}A + D\hat{O}A = ۳D\hat{O}A \Rightarrow B\hat{O}E - ۳D\hat{O}A = ۰$$



۲۵۱ . ۱ و ۲. از نقطهٔ A عمود AH را بر خط مماس در نقطهٔ M فرود می‌آوریم. نقطهٔ H وسط پاره‌خط MC است. زیرا در ذوزنقهٔ OBCM خطی که از نقطهٔ A وسط ساق OB به موازات قاعده‌ها رسم شده است، از وسط ساق MC می گذرد پس AH عمودمنصف MC می‌باشد. لذا مثلث AMC متساوی‌الساقین و AH نیمساز زاویهٔ MAC است.



یعنی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. از طرفی مثلث OAM متساوی‌الساقین و $AH \| OM$ و $AH \| BC$ است، پس بترتیب $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و $\hat{A}_2 = \hat{M}_1$ و $\hat{A}_3 = \hat{M}_1$ است. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{C}_1$ و در نتیجه $O\hat{A}C = 3A\hat{C}B$.

۲۵۲. ۱. چون $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ است، پس $G\hat{A}C = G\hat{C}A$ و در نتیجه $AG = GC$.

۲. ثابت کنید: $G\hat{F}C = G\hat{C}F$.

۲۵۳. ۱. دو وتر AB و AC از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. پس $OH = OK$ است.

۲. خط OA نیمساز زاویهٔ KOH است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. دو دایره

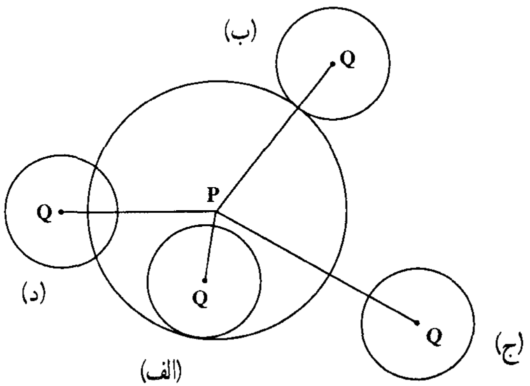
۱.۳. دو دایره درحالت کلی

۲.۱.۳. وضع نسبی دو دایره

۲۵۴. الف. مماس برون
ب. یکی درون دیگری (متداخل)
پ. برون هم (متخارج)
ت. متقاطع
ث. مماس درون

۲۵۵. الف. متقاطع
ب. مماس درون
پ. مماس برون
ت. یکی درون دیگری
ث. برون هم (متخارج)

۲۵۶. گزینهٔ (هـ)، زیرا هر یک از حکمهای چهارگانه در شکل داده شده تحقق می‌یابد. بنابراین هیچ یک از آنها غلط نیست.

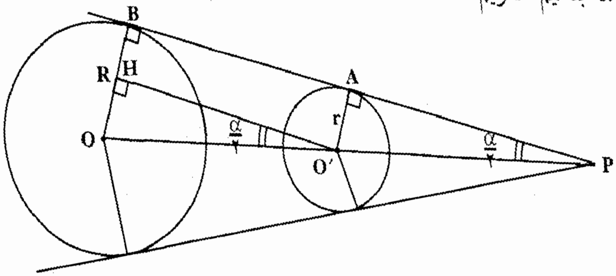


۳.۱.۳. نقطه و دایره

۲۵۷. مماس مشترکهای دو دایره را رسم کنید.

۴.۱.۳. زاویه

۲۵۸. اگر زاویهٔ بین دو مماس مشترک درونی را α و زاویهٔ بین دو مماس مشترک برونی را α' بنامیم، داریم :



$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{R-r}{\sqrt{۲(R^۲+r^۲)}}\Rightarrow\cos\alpha=۱-۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲}=۱-۲\times\frac{(R-r)^۲}{۲(R^۲+r^۲)}$$

$$=\frac{۲Rr}{R^۲+r^۲}\Rightarrow\alpha=\operatorname{Arc}\cos\frac{۲Rr}{R^۲+r^۲}$$

$$\sin\frac{\alpha'}{۲}=\frac{R+r}{\sqrt{۲(R^۲+r^۲)}}\Rightarrow\cos\alpha'=۱-۲\sin^۲\frac{\alpha'}{۲}=۱-۲\times\frac{(R+r)^۲}{۲(R^۲+r^۲)}$$

$$=\frac{-۲Rr}{R^۲+r^۲}\Rightarrow\alpha'=\operatorname{Arc}\cos\frac{-۲Rr}{R^۲+r^۲}$$

۵.۱.۳. پاره خط

۱.۵.۱.۳. اندازهٔ پاره خط

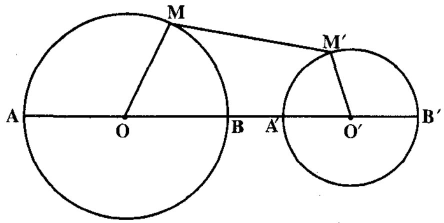
۲۵۹. خط المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقطه‌های A و B و دایرهٔ O' را در نقطه‌های A' و B' قطع کند. $A'B$ کوچکترین و AB' بزرگترین قطعه خط متکی بر دو دایره است. زیرا اگر MM' پاره خط دلخواهی باشد که دو سرش روی دو دایره باشد، داریم :

چهارضلعی $OMM'O' \Rightarrow MM'\le MO+OO'+O'M'\Rightarrow MM'\le d+R+R'$

$\Rightarrow MM'<AB'$ و $OO'\le OM+MM'+O'M'\Rightarrow d\le R+MM'+R'$

$\Rightarrow MM'\ge d-R-R'\Rightarrow MM'\ge A'B$

در حالتی که دو دایره مماس داخل یا مماس خارج باشند، $A'B$ مساوی صفر است.



۳.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره خطها

۲۶۰. در نقطهٔ A مماسی بر دایرهٔ O رسم کنید تا BC را در نقطهٔ D قطع کند. در این‌صورت $\hat{A}' = \hat{A} = \hat{B}$ است.

۲۶۱. با توجه به این که قطعه‌های مماسهای رسم شده، از یک نقطه بر یک دایره، محصور بین آن نقطه و نقطه‌های تماس متساوی‌اند، می‌توان نوشت:

$ab = ae$ و $dc = dh$ (۱)

$af = ac \Rightarrow af = ab + bc$ (۲)

$db = dg \Rightarrow dc + bc = dg$ (۳)

از طرفی ef و gh مماس مشترکهای خارجی دو دایرهٔ C و C' با هم برابرند پس:

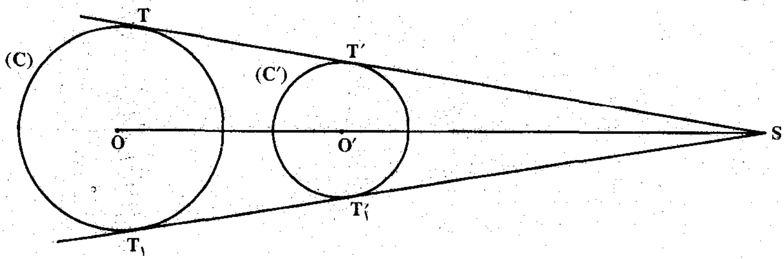
$gh = ef \Rightarrow gd + dh = ea + af$ (۴)

از جمع کردن رابطه‌های (۲) و (۳) و (۴) با توجه به رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$2ae = 2cd \Rightarrow ae = cd$

۳.۱.۶. مماس مشترک دو دایره

۲۶۲. نقطهٔ برخورد دو مماس مشترک برونی TT' و $T_1T'_1$ را S می‌نامیم و از S به O و از S به O' وصل می‌کنیم. SO بر SO' منطبق است، زیرا هر دو نیمساز زاویهٔ TST_1 می‌باشند. به روش مشابه برای مماس مشترکهای درونی دو دایره، مسأله حل می‌شود.

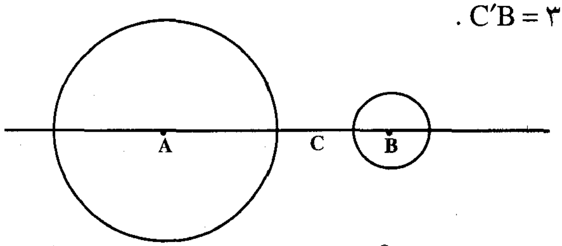


۲۶۳. گزینهٔ (الف) درست است. زیرا دو دایره در صورتی تنها یک مماس مشترک دارند که مماس درون (مماس داخل) باشند، امّا دو دایرهٔ مساوی، نمی‌توانند مماس درون باشند زیرا اگر مماس درون باشند، بر هم منطبق می‌شوند و به یک دایره تبدیل می‌شوند.

۲.۳. دو دایرهٔ برون هم (متخارج)

۲.۲.۳. شعاع

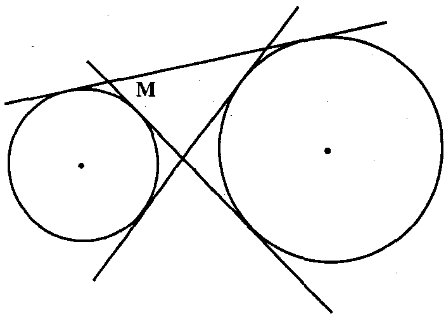
۲۶۴. اگر مرکز دایره‌های داده شده A و B، و مرکز دایرهٔ جواب، C باشد، دو دایره جواب مسأله است. یکی مماس برون با دو دایرهٔ A و B و به شعاع ۰/۵ سانتیمتر که $CA = ۳/۵cm$ و $CB = ۱/۵cm$ است. دیگری مماس درون با هر یک از این دو دایره و به شعاع ۴/۵cm که فاصلهٔ مرکز آن ′C از A و B برابر است با $C'A = ۱/۵cm$ و $C'B = ۳/۵cm$.



۲۶۵. شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر $\frac{a}{۲}$ است.

۳.۲.۳. نقطه و دایره

۲۶۶. بله، چنین نقطه‌ای وجود دارد: برای مثال نقطهٔ M روی شکل.



۴.۲.۳. وتر

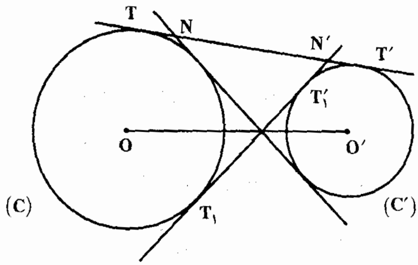
۲۶۷. ثابت کنید چهارضلعی $BCC'B'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۶۸. در شکل ثابت کنید:

$NN' = T_۱T'_۱$.



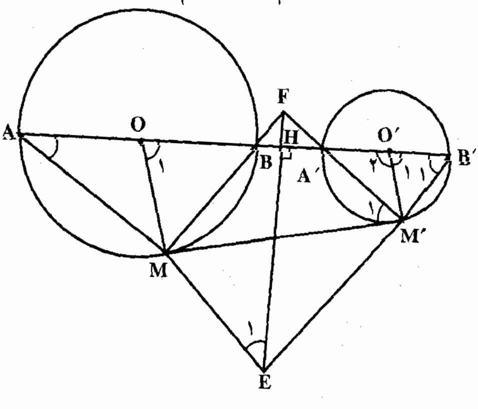
۶.۲.۳. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۶.۲.۳. خطها بر هم عمودند

۲۶۹. از O به M و از O' به M' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $OMM'O'$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است. پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}'_۱$ است. در نتیجه $\hat{O}_۱ + \hat{O}'_۲ = ۱۸۰^\circ$ است. از طرفی:

$$\hat{A} = \frac{\hat{O}_۱}{۲} \text{ و } \hat{B}' = \frac{\hat{O}'_۲}{۲}$$

$$\hat{A} + \hat{B}' = \frac{\hat{O}_۱ + \hat{O}'_۲}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow \Delta AEB: A\hat{E}B' = ۹۰^\circ \Rightarrow AM \perp B'M'$$



به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که دو خط $A'M'$ و MB نیز بر هم عمودند. زاویه‌های AMB و $A'M'B'$ نیز قائمه‌اند. پس چهارضلعی $MEM'A'$ مستطیل است. اگر نقطهٔ برخورد EF با AB' را H بنامیم زاویهٔ $A\hat{H}E = ۹۰^\circ$

است، زیرا :

$$\hat{E}_1 = \hat{M}'_1 = \hat{B}' \text{ و } \hat{A}+\hat{B}' = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{E}_1 = 90^\circ \Rightarrow A\hat{H}E = 90^\circ$$

پس EF بر خط المرکزین دو دایره عمود است.

۲۷۰. $O'M$ و OM، همچنین $O'N$ و ON نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور و مکملند.

۳.۲.۷. مماس مشترک دو دایره

۲۷۱. چهار مماس مشترک دارند چون این دو دایره برون هم هستند، زیرا :

$6 < 2+3$

۳.۳. دو دایرهٔ مماس برون

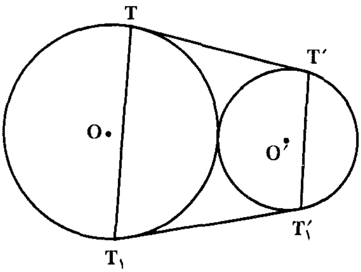
۳.۳.۲. شعاع

۲۷۲. دو زاویهٔ MOA و $M'O'A$ مکمل یکدیگرند.

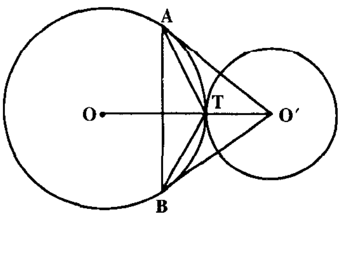
۲۷۳. $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

۳.۳.۳. نقطه و دایره

۲۷۴. شکل حاصل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

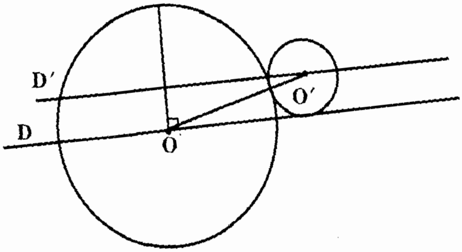


۲۷۵. اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه روی دایرهٔ O و به یک فاصله از نقطهٔ تماس T باشند، OT یا OO' عمودمنصف پاره خط AB است. در نتیجه دو نقطهٔ A و B از مرکزِ دایرهٔ دوم یعنی از نقطهٔ O' و در نتیجه از این دایره به یک فاصله‌اند.



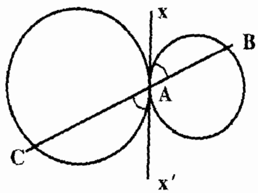
۲۷۶. مرکز دایرهٔ مطلوب به فاصلهٔ ۲cm از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۳cm از نقطهٔ O (اگر دو دایره مماس خارج باشند) و یا به فاصله ۱cm از نقطهٔ O (اگر دو دایره مماس داخل باشند) قرار دارد.

۲۷۷. نقطهٔ برخورد دو دایره به مرکز O و به شعاع ۱۲cm = ۴ − ۱۶ یا ۲۰cm = ۴ + ۱۶ با دو خط موازی D و به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر از آن، جوابهای مسأله‌اند.



۴.۳.۳. کمان

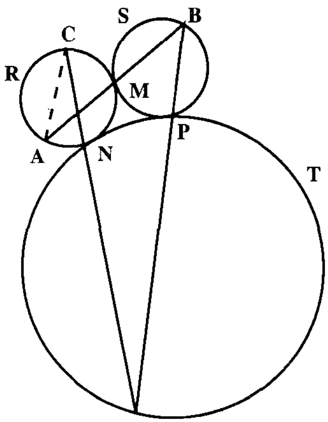
۲۷۸. اگر خـط x′Ax مماس مشترک درونی دو دایـره را رسم کنیم (A نقطهٔ تماس دو دایره است). دو زاویهٔ محاطی BAx و CAx′ با هم برابرند. پس کمانهای مقابل آنها از نظر عدهٔ درجه‌ها یکی هستند.



۵.۳.۳. وتر

۲۷۹. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید و ثابت کنید، $\hat{B} = \hat{B}'$ است.

۶.۳.۳. قطر



۲۸۰. ابتدا سه دایرهٔ R، S و T را در نظر می‌گیریم که R و S در M مماس بیرونی‌اند، S و T در P، و T و R در N (شکل). همچنین فرض می‌کنیم که شعاع T خیلی بزرگتر از شعاعهای R و S است. اگر شعاع T به طور نامحدود بزرگ شود، شکل رفته رفته به شکل داده شده در مسأله شبیه‌تر می‌شود. در حالت حدی این شکل به صورت شکل صورت مسأله درمی‌آید و حکم ثابت می‌شود.

۷.۳.۳. زاویه

۱.۷.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۲۸۱. گزینهٔ (هـ) درست است. نخست باید توجه کنید که دو قوس MR و NR از نظرعدد درجه با هم برابرند. حال داریم:

$$A\hat{P}R = \frac{۱}{۲}(c + a + c - x) = \frac{۱}{۲}(۲c - x)\ ;$$

$$B\hat{P}R = \frac{۱}{۲}\big(b + d + d - (b - x)\big) = \frac{۱}{۲}(۲d + x)\ ;$$

مجموع زاویه‌های APR و BPR عبارت است از: $B\hat{P}A = c + d$

و زاویهٔ خواسته شده برابر است با:

$$۳۶۰^\circ - B\hat{P}A = ۳۶۰^\circ - (c + d) = (۱۸۰^\circ - c) + (۱۸۰^\circ - d) = a + b$$

۲۸۲. این زاویه مکمل زاویهٔ بین دو دایره است.

۸.۳.۳. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۸.۳.۳. خطها موازی‌اند

۲۸۳. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم کنید.

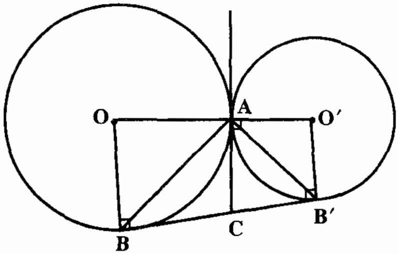
۲.۸.۳.۳. خطها بر هم عمودند

۲۸۴. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید تا MM' را در E قطع کند. در مثلث CMM'، CE میانه و نصف ضلع MM' است پس این مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است. یعنی MCM' برابر $90°$ است. حال اگر نقطهٔ برخورد دو خط AM، BM' را D بنامیم، چهارضلعی $CMDM'$ مستطیل است. زیرا زاویه‌های AMC، $BM'C$ و MCM' قائمه‌اند. پس زاویهٔ چهارم نیز قائمه است. یعنی، AM عمود بر BM' است.

۳.۸.۳.۳. خط نیمساز است

۲۸۵. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید و ثابت کنید که: $D\hat{A}C = \hat{D} + \hat{B}$.

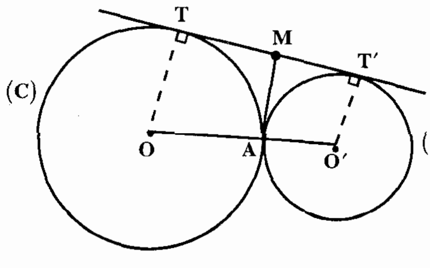
۴.۸.۳.۳. خط مماس بر دایره است



۲۸۶. اگر C نقطهٔ برخورد مماس مشترک درونی دو دایره با مماس مشترک خارجی باشد، AC عمود بر OO' و AC میانهٔ نظیر وتر از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB' است.

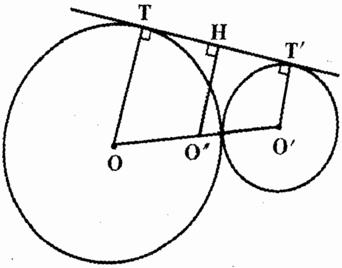
۹.۳.۳. مماس مشترک دو دایره

۲۸۷. نقطهٔ برخورد مماس مشترک درونی دو دایرهٔ (C) و (C′) با مماس مشترک برونی TT' را M و نقطهٔ تماس دو دایره را A می‌نامیم. داریم: $MA = MT = MT'$.



۲۸۸. TT' مماس مشترک برونی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم، OT و $O'T'$ را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $OTT'O'$ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است. حال از

نقطهٔ O'' وسط خط المرکزین دو دایره عمود $O''H$ را بر TT' فرود می‌آوریم. $O''H \| OT \| O'P'$ و $O''H = \frac{OT + O'T'}{۲} = \frac{R+R'}{۲}$ می‌باشد، پس دایرهٔ به قطر OO' یا به شعاع $O''H$ در نقطهٔ H بر TT' مماس است.



۱۰.۳.۳. شکلهای ایجاد شده

۲۸۹. خط المرکزین OO' موازی و مساوی AD است، زیرا $OADO'$ متوازی‌الاضلاع است، پس $ABCD$ لوزی است.

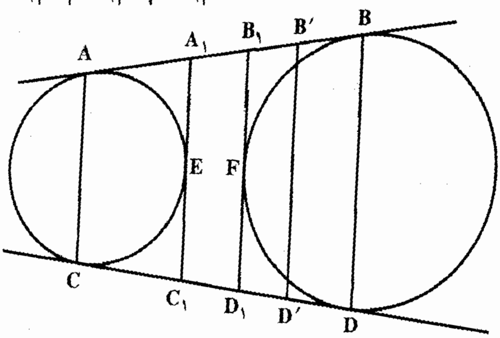
۱۱.۳.۳. دو دایره بر هم مماسند

۲۹۰. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم شعاع دایرهٔ $K_۱$، از شعاع دایرهٔ $K_۲$ بزرگتر نباشد. نقطه‌های تماس دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$ را با خطهای راست $l_۱$ و $l_۲$، با A، B، C و D نشان می‌دهیم (شکل). روشن است که دو خط راست AC و BD موازی‌اند. خطهای راست $A_۱C_۱$ و $B_۱D_۱$ را موازی با خط راست AC و مماس بر دایره‌های $K_۱$ و $K_۲$ بترتیب در نقطه‌های E و F رسم می‌کنیم. در این صورت

$$|AA_۱| = |A_۱E| \text{ و } |CC_۱| = |C_۱E| \text{ و } |BB_۱| = |B_۱F| \text{ و } |FD_۱| = |DD_۱|$$

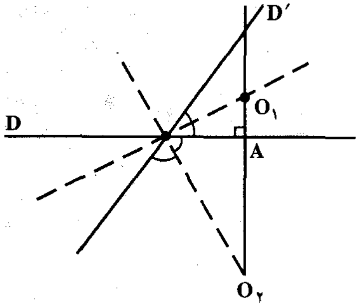
روشن است که بشرط منطبق نبودن نقطه‌های E و F، باید داشته باشیم:

$$|AA_۱| = |CC_۱| < |BB_۱| = |DD_۱|$$



نقطه‌های B' و D' را طوری در نظر می‌گیریم که A_1، وسط پاره خط راست AB' و B_1، وسط پاره خط راست CD' باشد. روشن است که خط راست $B'D'$ با خط راست BD موازی است، ولی بر آن منطبق نیست. ذوزنقهٔ $AB'D'C$، یک چهارضلعی محیطی است و بنابراین، در ذوزنقهٔ $ABCD$، نمی‌توان دایره‌ای محاط کرد. تناقض.

۲۹۱. خطی که در نقطهٔ A بر خط D عمود می‌گردد. نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' را در دو نقطهٔ O_1 و O_2 قطع می‌کند که این دو نقطه مرکزهای دایره‌های جواب مسأله می‌باشند.



۱۲.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۹۲. ۱. $MA = MB = MC$ است.

۲. $OM \perp AB$ و $O'M \perp AC$.

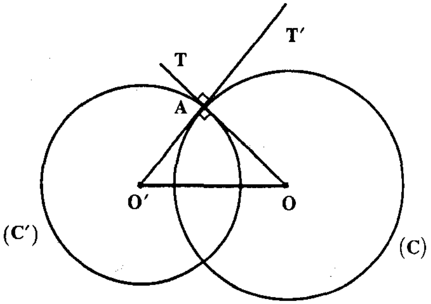
۲۹۳. ۱. زاویهٔ بین دو مماس مشترک برونی برابر ۶۰° است.

۲. اندازهٔ خط المرکزین دو دایره $d = ۱۲$ سانتیمتر است.

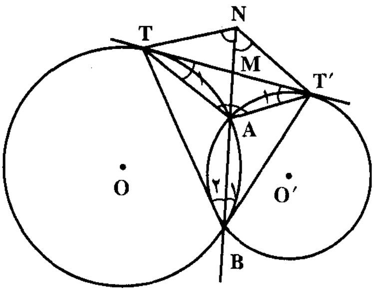
۴.۳. دو دایرهٔ متقاطع

۱.۴.۳. تعریف و قضیه

۲۹۵. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را که بر هم عمودند درنظر می‌گیریم. مماسهای AT و AT' در نقطهٔ تقاطع A را بر دو دایره رسم می‌کنیم در هر قضیه یا عکس آن، حول نقطهٔ A سه زاویهٔ قائمه پدید می‌آید، بنابراین زاویهٔ چهارمی نیز قائمه است و حکم هر قضیه و عکس قضیه درست است.



۲.۴.۳. شعاع



۲۹۶. از B به A وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا TT' را در نقطهٔ M قطع کند. سپس AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ N امتداد می‌دهیم. از N به T و T' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $NTAT'$ متوازی‌الاضلاع است، پس $T\hat{N}T' = T\hat{A}T'$. از طرفی در مثلث TAT' داریم:

$T\hat{A}T' + \hat{T}_1 + \hat{T}'_1 = 180°$ اما، $\hat{T}'_1 = \hat{B}_1$ و $\hat{T}_1 = \hat{B}_2$ پس خواهیم داشت:

$$T\hat{N}T' + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180° \Rightarrow T\hat{N}T' + T\hat{B}T' = 180°$$

پس چهارضلعی $BTNT'$ محاطی است و دایرهٔ محیطی دو مثلث BTT' و TNT' با هم برابر می‌باشند. اما دو مثلث NTT' و ATT' متساوی‌اند، پس دایرهٔ محیطی مثلث ATT' با دایرهٔ محیطی مثلث BTT' برابر می‌باشد.

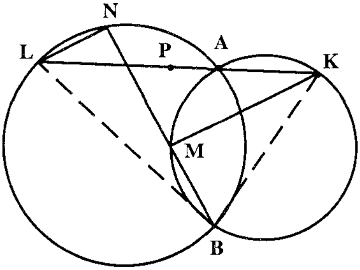
۳.۴.۳. نقطه و دایره

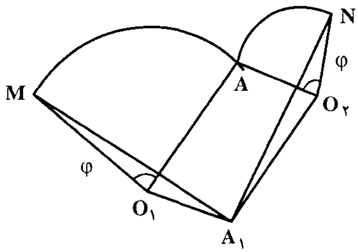
۲۹۷. الف. فرض کنید، A و B معرف نقطه‌های برخورد دایره‌ها، A نقطهٔ شروع دوچرخه‌سوارها، M و N جای دوچرخه‌سوارها در لحظه‌ای معین از زمان باشند. اگر M و N در یک طرف AB باشند، آن‌وقت $A\hat{B}M = A\hat{B}N$، و اگر در دو طرف آن باشند، آن وقت $A\hat{B}M + A\hat{B}N = 180°$، یعنی، نقطه‌های M، B و N روی یک خط راست قرار دارند. اگر L و K دو نقطه از دایره‌ها و مقابل قطری نقطهٔ B باشند (L و K ثابتند)، آن‌وقت، چون $L\hat{N}M = N\hat{M}K = 90°$، نقطهٔ P، وسط LK، از N و M به فاصلهٔ برابر است. قانع می‌شویم که P، قرینهٔ B نسبت به وسط خط‌المرکزین دایره‌هاست (شکل الف).

ب. فرض کنید، O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌ها باشند. نقطهٔ A_1 را طوری می‌گیریم که $O_1AO_2A_1$ متوازی‌الاضلاع باشد. بسادگی می‌توان دید که مثلث MO_1A_1 با مثلث NO_2A_1 قابل انطباق است، زیرا $MO_1 = O_1A = O_2A_1$، $O_1A_1 = O_2A = NO_2$ و $M\hat{O}_1A_1 = \varphi + A\hat{O}_1A_1 = \varphi + A\hat{O}_2A_1 = N\hat{O}_2A_1$، که در آن، φ، زاویهٔ متناظر با کمانهای طی شده توسط دوچرخه‌سوارهاست (شکل ب). بنابراین، نقطه‌های مطلوب،

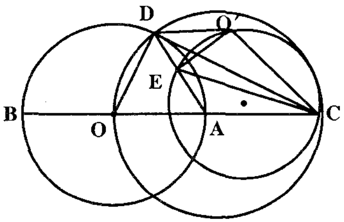
قرینهٔ نقطه‌های برخورد دایره‌ها، نسبت به وسط پاره‌خط O_1O_2 ، هستند.

تبصره. در قسمت (الف) می‌توانستیم درست به همان روش قسمت (ب) عمل کنیم. برای مثال، با گرفتن نقطهٔ P به‌طوری که $\Delta O_1PO_2 = \Delta O_1AO_2$ (A و P در یک طرف O_1O_2 و نامنطبقند)، بسادگی می‌توان ثابت کرد که مثلثهای متناظر، قابل انطباقند.





۲۹۸. اگر O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ACD باشد، زاویهٔ $EO'D$ با زاویهٔ محاطی ACD برابرند و چهارضلعی $ODO'C$ در دایره‌ای به قطر OC محاط است.

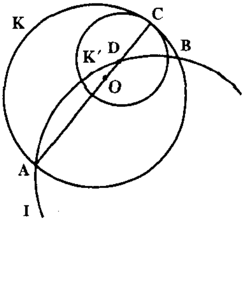


۲۹۹. مسأله ۵ جواب دارد.

۴.۴.۳. کمان

۳۰۰. چهارضلعی $OAO'B$ لوزی است، پس دو زاویهٔ مرکزی AOB و $AO'B$ در این دو دایره با هم برابرند، پس $\overset{\frown}{AE'B} = \overset{\frown}{AEB}$.

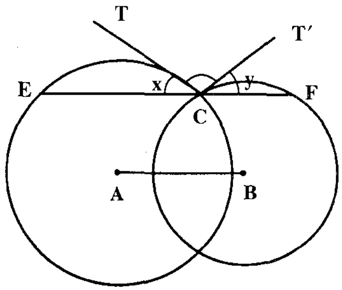
۳۰۱. چون کمان K' از دایرهٔ I مساحت دایرهٔ K را نصف می‌کند، پس کمان K' به‌طور کامل نمی‌تواند در یک طرف قطر دایرهٔ K قرار گیرد. یعنی هر قطر دلخواه از دایرهٔ K، کمان K' را قطع می‌کند و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ K در داخل دایرهٔ I قرار می‌گیرد. به این ترتیب شعاع OA از دایرهٔ K، در داخل دایرهٔ I قرار دارد و نقطهٔ برخورد قطر AC با کمان K' ، یعنی نقطهٔ D، روی شعاع OC واقع است.



چون طول کمان K' از طول AD+BD بزرگتر است، کافی است ثابت کنیم BD>DC، ولی این نابرابری درست است زیرا، دایرهٔ به مرکز D و شعاع برابر DC، در داخل دایرهٔ K قرار دارد.

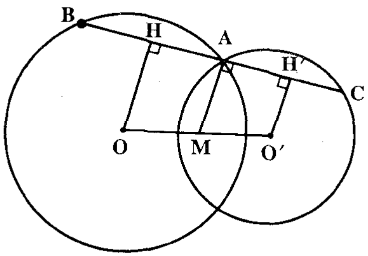
۳۰۲. نیمساز زاویهٔ MAP عمودمنصف پاره‌خط MP است که از وسط کمان $\overset{\frown}{MB}$ می‌گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویهٔ MNB و عمودمنصف ضلع MB یکدیگر را بر دایرهٔ محیطی مثلث MNB قطع می‌کنند که وسط قوس $\overset{\frown}{MB}$ است، پس عمودمنصفهای دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس $\overset{\frown}{MB}$ قطع می‌کنند، درنتیجه عمودمنصف ضلع سوم BP نیز از این نقطه می‌گذرد.

۳۰۳. خطهای CT و CT′ مماس بر دو دایره در نقطهٔ C را رسم می‌کنیم. زاویهٔ TCT′ مقدار ثابتی دارد، پس مجموع دو زاویهٔ x و y ثابت است و درنتیجه $\overset{\frown}{CE}+\overset{\frown}{CF}$ مقدار ثابتی است.



۳.۴.۵. وتر

۳۰۴. اگر از O و O′، بترتیب، عمودهای OH و O′H′ را بر قاطع BAC فرود آوریم، چهارضلعی OHH′O′ ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای است که نقطهٔ M وسط ساق مایل آن و MA موازی دو قاعده است، پس نقطهٔ A وسط HH′ است، یعنی $AH = AH'$. امّا $AH=\frac{AB}{۲}$ و $AH'=\frac{AC}{۲}$، پس AB=AC می‌باشد.



۳۰۵. ثابت کنید: $\hat{D}=\hat{C}$.

۳.۴.۶. قطر

۳۰۶. این برابری روشن است:

$$M\hat{A}B+M\hat{B}A=\frac{۱}{۲}A\hat{O'}B$$

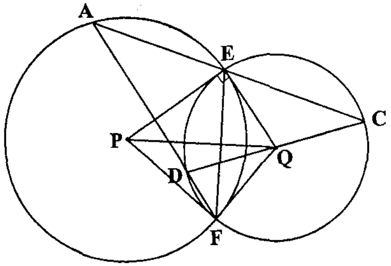
چون OA بر O′A و OB بر O′B عمود است، پس

$$A\hat{O'}B=۱۸۰^\circ - A\hat{O}B$$

(در این‌جا، O و O′ مرکزهای دو دایره‌اند)، یعنی

$$X\hat{A}B+Y\hat{B}A+\frac{۱}{۲}A\hat{O}B=۹۰^\circ$$

بنابراین کمان XBAY برابر °۱۸۰ و پاره‌خط راست XY، قطر دایره است.



۳۰۷. فرض کنید، خطهای EA و FA خطهایی باشند که از E و F، نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ متعامد (P) و (Q)، به نقطهٔ A از (P) رسم شده‌اند و (Q) را مجدداً در C و D قطع کنند (شکل)؛ داریم :

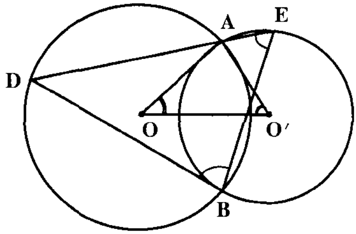
$$E\hat{A}F = \frac{۱}{۲} E\hat{P}F = E\hat{P}Q \quad \text{و} \quad E\hat{C}F = \frac{۱}{۲} E\hat{Q}F = E\hat{Q}P$$

۷.۴.۳. زاویه

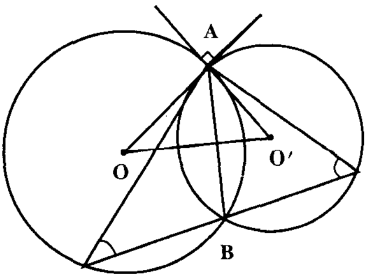
۱.۷.۴.۳. اندازهٔ زاویه

۳۰۸. اگر M نقطهٔ برخورد CD و C′D′ باشد و از نقطهٔ A دو مماس AT و AT′ را بر دو دایره رسم کنیم، $D\hat{M}D' = T\hat{A}T'$ است.

۳۰۹. از تساویهای $P\hat{M}B = T\hat{B}M$ ، $P\hat{M'}B = T'\hat{B}M'$ و این ویژگی که مجموع زاویه‌های مثلث PMM′ برابر °۱۸۰ و MBM′ زاویهٔ نیمصفحه است، استفاده کنید.



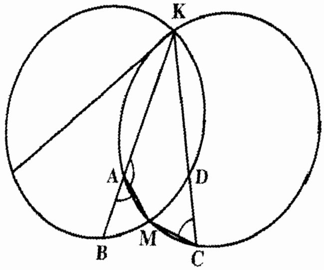
۳۱۰. دو دایرهٔ O و O′ متقاطع در نقطه‌های A و B را درنظر گرفته، قاطع DAE را رسم می‌کنیم و از B به D و E وصل می‌کنیم. زاویهٔ DBE مقدار ثابتی دارد. زیرا به دلیل برابری دو زاویهٔ $\hat{O} = \hat{D}$ و $\hat{E} = \hat{O'}$ زاویهٔ سوم دو مثلث OAO′ و DBE برابرند، یعنی $D\hat{B}E = O\hat{A}O' = C^{te}$.



۳۱۱. زاویهٔ بین مماسهای بر دو دایره در هر نقطهٔ برخورد °۹۰ است. پس دو دایره بر هم عمودند.

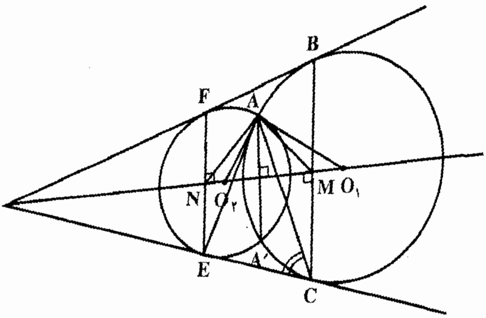
۲.۷.۴.۳ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۱۲. چون چهارضلعی AKCM، محاطی است، پس $K\hat{A}M = 180^\circ - M\hat{C}D$ ولی چون $M\hat{A}B = 180^\circ - K\hat{A}M$، بنابراین $M\hat{A}B = M\hat{C}D$.



۳۱۳. وتر مشترک دو دایره را رسم کنید. مجموع زاویه‌های مثلث CAM برابر 180° است. امّا...

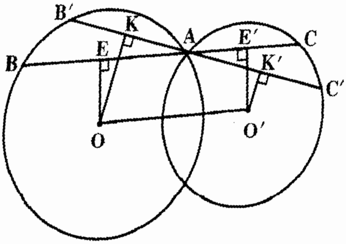
۳۱۴. نقطهٔ دیگر برخورد دو دایره را A' می‌نامیم. خط‌المرکزین O_1O_2 عمودمنصف پاره‌خطهای BC، AA' و EF است.



۸.۴.۳ . پاره‌خط

۱.۸.۴.۳ . اندازهٔ پاره‌خط

۳۱۵. از نقطه‌های O و O' مرکزهای دو دایره عمودهای OE و $O'E'$ را بر وتر BC که موازی OO' است، فرود می‌آوریم. چهارضلعی $OO'E'E$ مستطیل است، پس $OO' = EE' = \frac{BC}{2}$. اگر $B'C'$ قاطع دلخواه دیگری باشد که از نقطهٔ A در دو دایره رسم شده باشد و از نقطه‌های O و O' عمودهای OK و $O'K'$ را بر $B'C'$ فرود آوریم، چهارضلعی $OKK'O'$ ذوزنقهٔ

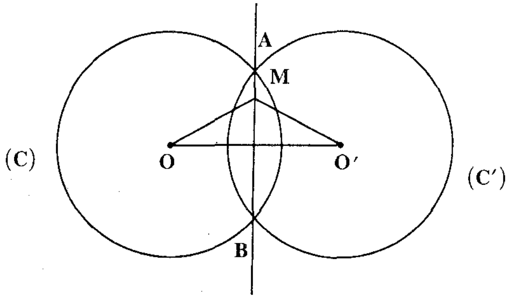


قائم‌الزاویه است، یعنی $OO' > KK' = \frac{B'C'}{۲}$ ، پس $EE' > KK'$ و درنتیجه $BC > B'C'$ است.

۲.۸.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳۱۶. راه اول. نقطهٔ C مرکز تقارن شکل حاصل از دو دایره است.

راه دوم. چون AB عمودمنصف OO' و دو دایره برابرند. دو مثلث OCM و $O'CM'$ همنهشتند.



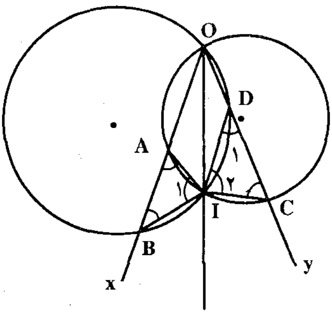
۳۱۷. وتر مشترک دو دایرهٔ متساوی، عمودمنصف خط‌المرکزین آن دو دایره است و هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

۳۱۸. از D به F وصل کنید و برابری $E\hat{F}D = E\hat{D}F$ را ثابت کنید.

۳۱۹. چهارضلعی MBDC متوازی‌الاضلاع است.

۳۲۰. از B به A وصل کنید، $A\hat{B}D = A\hat{B}C = ۹۰^\circ$ است، پس $C\hat{B}D = ۱۸۰^\circ$ یعنی CD از B می‌گذرد و در مثلث ACD، O و O' وسطهای دو ضلع AC و AD می‌باشند.

۳۲۱. فرض کنید. خط راست AM، دایره‌ای را که از B، C و M می‌گذرد، برای بار دوم، در نقطه‌ای مانند D قطع کند. در این‌صورت، $M\hat{D}B = M\hat{B}A = M\hat{A}C$ و $M\hat{D}C = M\hat{B}C = M\hat{A}B$ درنتیجه، ABCD متوازی‌الاضلاع است.



۳۲۳. چون I وسط کمانهای $\overset{\frown}{DIB}$ و $\overset{\frown}{AIC}$ است، پس DI=IB و IA=IC. چون ODIB محاطی است، پس $\hat{B} = \hat{D}_۱$ و به همین علت $\hat{C} = \hat{A}_۱$، پس $\hat{I}_۱ = \hat{I}_۲$ و بنابراین دو مثلث DIC و AIB بنا به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین با یکدیگر برابرند، پس: AB=CD.

۳۲۴. دایرهٔ به قطر AB را رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آن با دو ضلع را F و G بنامید، داریم: AF=AG. ثابت کنید که $AC + AD = ۲AF$ است. قرینهٔ C نسبت به نیمساز را E بنامید. حال کافی است، ثابت کنید که AE=FD است.

۹.۴.۳. خطهای: موازی، عمود برهم،...

۱.۹.۴.۳. خطها موازی‌اند

۳۲۵. ثابت کنید : $T\hat{B}C = B\hat{C}P$.

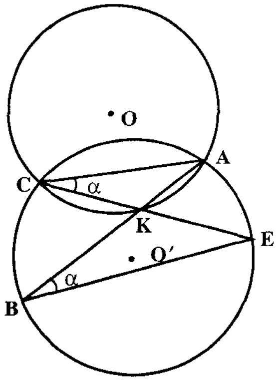
۳۲۶. امتداد CC' را $C'x$ بنامید و به کمک ویژگی چهارضلعیهای محاطی ثابت کنید که $D\hat{C}C' = D'\hat{C}'x$.

۳۲۷. اگر از A به B وصل کنیم چهارضلعیهای ABPM و ABQN ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند.

۲.۹.۴.۳. خطها بر هم عمودند

۳۲۸. از نقطهٔ O خطی موازی MM' رسم کنید تا $M'C$ را در نقطهٔ H قطع کند. دو مثلث OHC و $M'AC$ همنهشتند.

۳.۹.۴.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



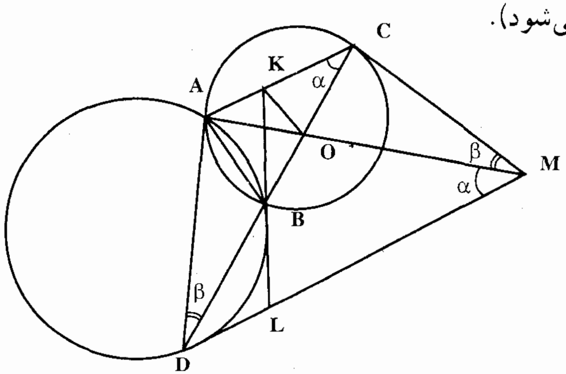
۳۲۹. از A به نقطه‌های B و C وصل می‌کنیم. در دایرهٔ O' دو زاویهٔ محاطی $A\hat{B}E$ و $A\hat{C}E$ با هم برابرند که چون $A\hat{B}E = \alpha$ زاویهٔ ثابتی است، پس زاویهٔ $A\hat{C}E$ نیز مقدار ثابتی دارد. اما رأس این زاویه روی دایرهٔ ثابت O واقع است و یک ضلع آن نیز از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد، پس ضلع دیگرش یعنی CE نیز از نقطهٔ ثابت K واقع بر دایرهٔ ثابت O می‌گذرد.

۳۳۰. از P به Q وصل می‌کنیم. چهارضلعی PQSR محاطی است، پس $T\hat{R}P = P\hat{Q}S = \alpha = C^{te}$ ، زیرا زاویهٔ PQS مقدار ثابتی دارد. درنتیجه کمان $\overset{\frown}{PT} = ۲\alpha$ از دایرهٔ O مقدار ثابتی خواهد داشت و چون نقطهٔ P ثابت است، نقطهٔ T نیز ثابت می‌باشد، یعنی خط RS همواره از نقطهٔ ثابت T واقع بر دایرهٔ O می‌گذرد.

۴.۹.۴.۳. خط مماس بر دایره است

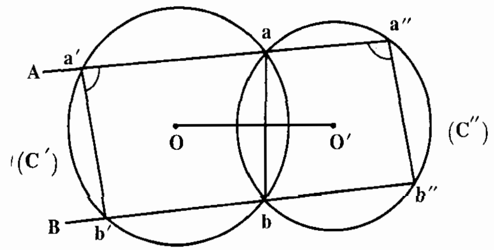
۳۳۱. فرض کنید، O معرف نقطهٔ برخورد AM و DC باشد (شکل). از نقطهٔ B، مماسی بر دایرهٔ دوم رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AC را به K نشان می‌دهیم (مثل فرض مسأله). به روشنی، حکم مسأله معادل این ادعاست که KO با CM موازی است. فرض کنید، زاویهٔ مقابل به کمان AB، دردایرهٔ اوّل برابر با α و

در دایرهٔ دوم برابر با β باشد، در این صورت $B\hat{C}M = B\hat{A}C$ ، $B\hat{D}M = B\hat{A}D$ و $D\hat{M}C = 180^\circ - B\hat{D}M - B\hat{C}M = 180^\circ - B\hat{A}D - B\hat{A}C = 180^\circ - D\hat{A}C$.
درنتیجه، ADMC چهارضلعیی محاطی است و $A\hat{M}C = \beta$ ؛ بعلاوه، اگر مماس BK، DM را در نقطهٔ L قطع کند، آن‌وقت $K\hat{B}O = L\hat{B}D = B\hat{D}L = C\hat{A}M$ ؛ بنابراین KABO هم، چهارضلعیی محاطی است، و $K\hat{O}A = K\hat{B}A = \beta$ ، یعنی KO با CM موازی است (حالتهای دیگر جای نقطه‌های D، B و C نسبت به هم، به رُوش مشابه بررسی می‌شود).



۳.۴.۱۰. شکلهای ایجاد شده

۳۳۲. وتر مشترک ab را رسم کنید و از ویژگی چهارضلعیهای محاطی استفاده کنید و ثابت کنید که $\hat{a'} + \hat{a''} = 180^\circ$ است.



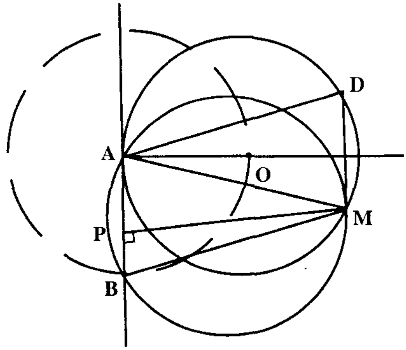
۳۳۳. خط‌المرکزین، عمودمنصف وتر مشترک دو دایره است و BAD متساوی‌الساقین در رأس A است.

۳۳۴. با فرض $B\hat{C}E = \alpha$ ، ثابت کنید : $E\hat{D}B = 180^\circ - \alpha$.

۱۱.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۵. گزینه‌های (ب) و (د) درست است.

۳۳۶. وتر MD موازی با AB را رسم کرده، از تساوی دو مثلث MAD و AMB نتیجه بگیرید که دایرهٔ محیطی مزبور با دایرهٔ O مساوی است و مکان هندسی مرکز آن دایره‌ای است به مرکز A و به شعاع OA. این دایره همواره با دایرهٔ ثابتی که مرکزش A و شعاعش ۲OA می‌باشد مماس است.



۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۷. ۱. دو دایره شعاعهای برابر دارند.

۲. دو زاویهٔ C و C′ برابرند.

۳۳۸. الف. خط‌المرکزین دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن دو دایره است.

ب. مثلثهای ACD و BCD در رأسهای A و B متساوی‌الساقین هستند.

۵.۳. دو دایرهٔ مماس درون

۲.۵.۳. زاویه

۱.۲.۵.۳. اندازهٔ زاویه

۳۳۹. اگر O_1 مرکز دایرهٔ کوچکتر باشد و $B\hat{O}A = \varphi$، آن‌گاه $B\hat{A}O = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$،

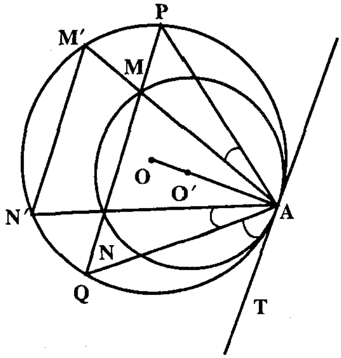
$C\hat{O_1}A = 90^\circ + \varphi$ و $C\hat{A}O_1 = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. بنابراین

$$B\hat{A}C = B\hat{A}O - C\hat{A}O_1 = 45^\circ$$

۲.۲.۵.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۴۰. مماس مشترک دو دایره را رسم کنید.

۳۴۱. ۱. اگر خطهای AM و AN دایرهٔ O را در نقطه‌های M′ و N′ قطع کنند، $M'N' \parallel MN$ است. زیرا اگر AT مماس مشترک دو دایرهٔ O و O′ را رسم کنیم، داریم :



$$N\hat{M}A = \frac{\overset{\frown}{NA}}{۲} = N\hat{A}T \text{ و } N'\hat{M}'A = \frac{\overset{\frown}{N'A}}{۲} = N'\hat{A}T = N\hat{A}T$$

پس $\overset{\frown}{M'P} = \overset{\frown}{N'Q}$ و درنتیجه $P\hat{A}M = \frac{\overset{\frown}{PM'}}{۲} = N\hat{A}Q = \frac{\overset{\frown}{N'Q}}{۲}$.

۲. اگر زاویهٔ $M\hat{A}N$ را به زاویه‌های متساوی $P\hat{A}M$ و $N\hat{A}Q$ اضافه کنیم، داریم: $P\hat{A}N = M\hat{A}Q$.

۳.۵.۳. پاره‌خط

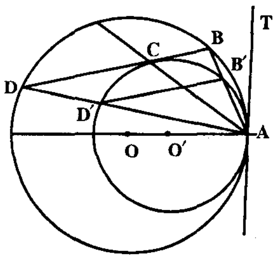
۳۴۲. از نقطهٔ O به نقطه‌های C و ′C وصل کنید و از ویژگی مثلث متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۴.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۴۳. ۱. خط AT مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. داریم:

$$T\hat{A}B' = B'\hat{O}'A = T\hat{A}B = B\hat{D}A \Rightarrow B'D' \| BD$$

۲. چون مماس BD با وتر ′B′D از دایرهٔ O موازی است، پس $\overset{\frown}{D'C} = \overset{\frown}{CB'}$، بنابراین $C\hat{A}D = C\hat{A}B$، یعنی AC نیمساز زاویهٔ BAD است.



۳۴۴. اگر از نقطهٔ N به نقطهٔ C وصل کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ONC و OMH همنهشتند.

۶.۳. دو دایرهٔ یکی درون دیگری

۲.۶.۳. شعاع

۳۴۵. اگر نقطه را دایرهٔ به شعاع صفر فرض کنیم و شعاع دایره‌های مورد نظر را R' بنامیم، $0 \le R' < 2$ است.

۳۴۶. گزینهٔ (هـ) درست است. چون A_1 ، A_2 و $A_1 + A_2$ یک تصاعد حسابی است، پس:

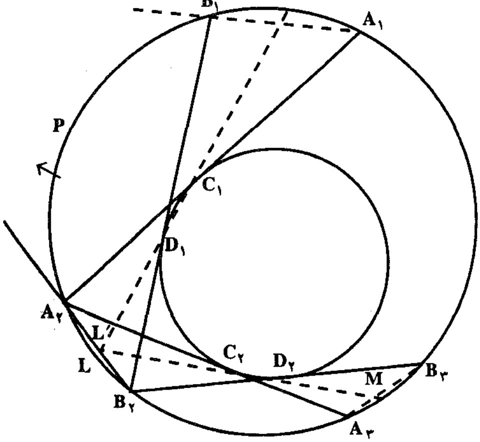
$$A_2 - A_1 = (A_1 + A_2) - A_2 \;\; ; \;\; 2A_1 = A_2$$

اگر r شعاع دایرهٔ کوچکتر باشد، آن‌گاه،

$$9\pi = A_1 + A_2 = 3A_1 = 3\pi r^2 \;\; ; \;\; r = \sqrt{3}$$

۳.۶.۳. خط و دایره

۳۴۷. برای روشنی وضع، فرض کنید B_1 روی کمان $\widehat{A_1A_2}$، که دور قطعه‌ای است که دایرهٔ β را دربر ندارد، قرار دارد. فرض کنید C_1 ، C_2 ،... بترتیب، نقطه‌های تماس A_1A_2 ، A_2A_3 ،... با دایرهٔ β و D_1 ، D_2 ،... نقطه‌های تماس B_1B_2 ، B_2B_3 ،... با همین دایره باشند (شکل)؛ K، L و P نقطه‌های برخورد D_1C_1 و A_1B_1 ، D_1C_1 و A_2B_2 و A_1B_1 و A_2B_2 هستند. در مثلثهای A_1KC_1 و D_1LB_2 داریم: $K\hat{C_1}A_1 = L\hat{D_1}B_2$ و $C_1\hat{A_1}K = D_1\hat{B_2}L$. به این ترتیب، $C_1\hat{K}A_1 = D_1\hat{L}B_2$ ، یعنی، KPL مثلثی متساوی‌الساقین است و KP=PL.



دایرهٔ γ ، مماس بر KP و PL، بترتیب، در نقطه های K و L، را درنظر بگیرید. مرکز این دایره روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می گذرد.

فرض کنید خط $D_۲C_۲$ ، $A_۲B_۲$ و $A_۳B_۳$ را، بترتیب، در نقطه های L' و M قطع کند. مثل حالت قبل، ثابت می کنیم که دایره‌ای مانند γ' با مرکز واقع بر خط راست گذرنده از مرکز دایره‌های α و β و مماس بر $A_۲B_۲$ و $A_۳B_۳$ ، بترتیب، در نقطه های L' و M، وجود دارد. ثابت می‌کنیم که γ و γ' برهم منطبقند. برای این کار، کافی است ثابت کنیم که L و L' برهم منطبقند. داریم :

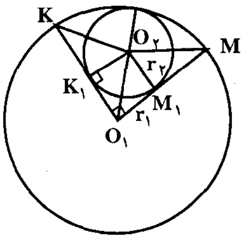
$$\frac{A_۲L}{LB_۲}=\frac{S_{A_۲C_۱D_۱}}{S_{B_۲C_۱D_۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}D_۱C_۱.A_۲C_۱.\sin A_۲\hat{C}_۱D_۱}{\frac{۱}{۲}D_۱C_۱.B_۲D_۱.\sin B_۲\hat{D}_۱C_۱}=\frac{A_۲C_۱}{B_۲D_۱}$$

به همین ترتیب، $\frac{A_۲L'}{L'B_۲}=\frac{A_۲C_۲}{B_۲D_۲}=\frac{A_۲C_۱}{B_۲D_۱}$ ، یعنی L و L' برهم منطبقند.

تبصره. از نحوه استدلال معلوم می‌شود که در حالت ما، نقطه‌های تماس γ با خطهای راست $A_۱B_۱$ ، $A_۲B_۲$ ، ... در درون پاره‌خطهای $A_۱B_۱$ ، $A_۲B_۲$ ،... واقعند.

۴.۶.۳ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۴۸.



$$S_{MO_۱KO_۲}=۲S_{O_۱O_۲M}=۲\left(\frac{۱}{۲}r_۱r_۲\right)$$
$$=r_۱r_۲$$

۷.۳ . دو دایرهٔ هم مرکز

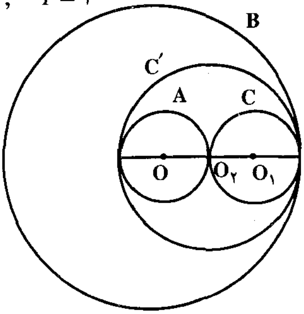
۲.۷.۳ . شعاع

۳۴۹. اگر دایرهٔ C با دایرهٔ B مماس درون و با دایرهٔ A مماس برون باشد و شعاع دایرهٔ c را r و فاصلهٔ مرکز آن از نقطهٔ O مرکز مشترک دو دایره را d بنامیم، داریم :

$$\begin{cases}d=۳-r\\ d=۱+r\end{cases}\Rightarrow d=۲\quad,\quad r=۱$$

و در صورتی که دایرهٔ C با دایرهٔ B مماس درون و با دایرهٔ A نیز مماس درون باشد، داریم :

$$\begin{cases} d = ۳ - r \\ d = r - ۱ \end{cases} \Rightarrow d = ۱ \quad , \quad r = ۲$$



۳.۷.۳. وتر

۳۵۰. این وترها از مرکز مشترک دو دایره به یک فاصله‌اند.

۳۵۱. این وترها از مرکز مشترک دو دایره به یک فاصله‌اند.

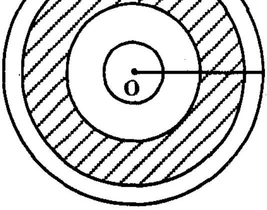
۴.۷.۳. پاره‌خط

۳۵۲. اگر از O مرکز مشترک دو دایره عمود OH را بر وتر AD فرود آوریم، نقطهٔ H وسط پاره‌خطهای AD و BC است، پس AB=CD.

۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره

۳۵۳. اگر خط‌المرکزین دایرهٔ (C) با دایره‌های A و B را d بنامیم، شرط آن که دو دایرهٔ C و A متقاطع باشند آن است که :

$$۲ - ۱ < d < ۲ + ۱ \Rightarrow ۱ < d < ۳$$



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴. سه دایره و بیشتر

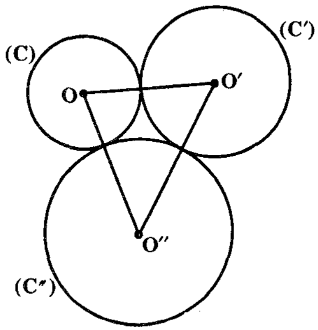
۱.۴. سه دایره

۲.۱.۴. شعاع

۳۵۴. نقطه‌های تماس دایره‌ها، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ سانتیمتر را می‌سازند و شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ است.

۳۵۵. ۲۴ سانتیمتر.

۳۵۶. اگر O، O' و O'' مرکزهای سه دایره باشند، مثلث $OO'O''$ مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۳، ۴ و ۵ است. نقطه‌های تماس دایره‌ها، مثلثی با ضلعهای مشخص می‌سازند و دایرهٔ محیطی آن قابل رسم و شعاع آن قابل محاسبه است.



۳.۱.۴. نقطه و دایره

۳۵۷. اگر از نقطهٔ B به نقطه‌های M و M' وصل کنیم، $A\hat{B}M' = A\hat{B}M$ است.

۳۵۹. نقطهٔ برخورد AB' و BA' را M بنامید و وتر مشترکهای PA' و PB' و PC' را رسم کنید. با توجه به محاطی بودن چهارضلعیهای $PA'BC'$ و $PB'AC'$، ثابت کنید، چهارضلعی $PA'MB'$ محاطی است.

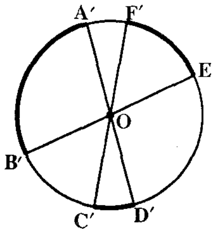
۴.۱.۴. کمان

۳۶۰. مسأله a) حالت خاصی از مسأله b) است و شبیه آن حل می‌شود، پس اندیشهٔ مسأله (b) را می‌دهیم:

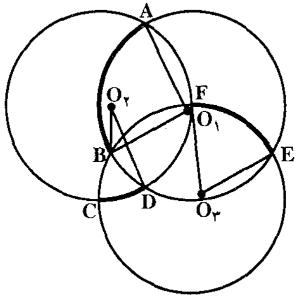
$O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ را مرکزهای دایره‌هایی می‌گیریم که بترتیب شامل کمانهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{EF}$ هستند (شکل الف). در این صورت داریم:

$$\overline{O_۱A} = -\overline{O_۲D} \;,\; \overline{O_۱B} = -\overline{O_۳E} \;,\; \overline{O_۳F} = -\overline{O_۲C}$$

(به‌عنوان ضلعهای روبه‌روی لوزیها). بنابراین اگر قطاعهای O_1AB ، O_3EF و O_2CD را به مرکز مشترک O منتقل کنیم، سه قطاع به‌دست می‌آید که، همراه با قرینه‌های آنها نسبت به O، دایره را به‌طور کامل پر می‌کنند (شکل ب).



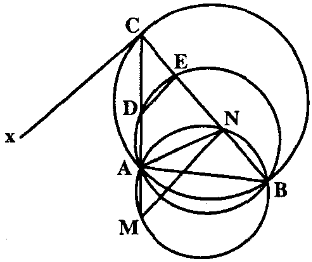
(ب)



(الف)

۵.۱.۴. وتر

۳۶۱. دو دایرهٔ دلخواه رسم می‌کنیم که دایرهٔ اوّل CA و CB را بترتیب در M و N و دایرهٔ دوم این دو ضلع را در D و E قطع کند. $MN \| DE$ است، برای اثبات مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC در رأس C را رسم کنید و ثابت کنید:



$$x\hat{C}A = C\hat{D}E = C\hat{M}N$$

۶.۱.۴. قطر

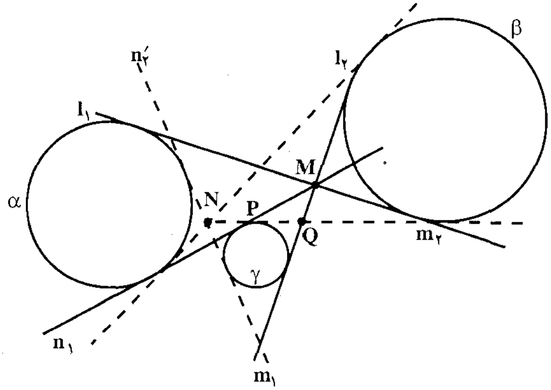
۳۶۲. اگر از O_1 مرکز دایرهٔ A به نقطه‌های H و G وصل کنیم، $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، $H\hat{O}_1F = \hat{O}_2$ و $G\hat{O}_1E = \hat{O}_3$ است.

۷.۱.۴. پاره‌خط

۳۶۳. گزینهٔ (الف) درست است.

۸.۱.۴. خط و دایره

۳۶۴. فرض کنید، M نقطهٔ برخورد مماسهای l_1 ، m_1 و n_1 ، و N نقطهٔ برخورد l_2 و m_2 باشد (شکل از N، خط راست n_2 را، مماس بر α و متمایز از l_2 ، رسم می‌کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای m_1 ، n_1 ، m_2 و n_2 بر یک دایره مماس‌اند. این دایره، در مثلث PMQ محاطی خارجی است (این دایره بر ضلع PQ مماس است)، یعنی بر γ منطبق است.



نکته. شکل متناظر با حالت کلی ترتیب دایره‌هایی است که در شرطهای مسأله صادقند.

۳۶۵. مرکزهای دو دایره به قطرهای AM و BM را بترتیب O و O′ بنامید. از Q و R به M وصل کنید. ثابت کنید، OQ و O′R بر QR عمودند.

۳۶۶. گزینهٔ (د) درست است.

۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۶۷. $۲r^۲(۲\sqrt{۳}+۳)$

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۸. ۱. چون خط‌المرکزین دو دایره به مرکزهای D و J مساوی تفاضل شعاع این دو دایره است، پس این دو دایره مماس درونی می‌باشند. یعنی کمان $\overset{\frown}{EF}$ با کمان $\overset{\frown}{FB}$ مماس

است و به همین دلیل کمان $\widehat{EA}$ با کمان $\widehat{EF}$ مماس می‌باشد.

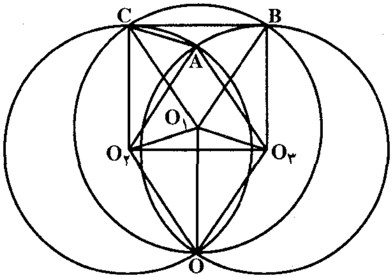
۲. اگر فقط AC=CD باشد، E و F روی یک قوس دایرهٔ به مرکز J قرار نمی‌گیرند و خاصیت بالا برقرار نیست. ولی اگر تنها AC=DB باشد، باز هم این خاصیت برقرار است.

۲.۴. چهاردایره

۲.۲.۴. شعاع

۳۷۰. گزینهٔ (ج) درست است.

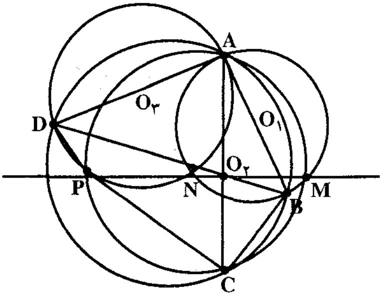
۳۷۱. دایره‌های داده شده، دایره‌های محیطی مثلثهای OBC، OCA و OAB می‌باشند که شعاعی برابر R دارند. بنابراین نقطه‌های O_1، O_2 و O_3 مرکزهای این دایره‌ها از نقطهٔ O به فاصلهٔ R می‌باشند، یعنی $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R$ است. لذا دایرهٔ محیطی مثلث $O_1O_2O_3$ شعاعش مساوی R می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم که مثلث ABC با مثلث $O_1O_2O_3$ برابر است. چهارضلعیهای BO_3OO_1 و CO_2OO_1 لوزی می‌باشند. زیرا چهارضلعشان مساوی R است. بنابراین O_3B و O_2C با O_1O_2 موازی و مساویند. پس چهارضلعی BCO_2O_3 متوازی‌الاضلاع است و $BC = O_2O_3$ می‌باشد. به همین ترتیب با استفاده از لوزیهای AO_3OO_2 و BO_1OO_3 ثابت می‌شود که $AB = O_1O_2$ و $AC = O_1O_3$ است. درنتیجه مثلث $O_1O_2O_3$ مساوی با مثلث ABC است. درنتیجه شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R است.



۳.۲.۴. نقطه و دایره

۳۷۲. اگر AB، AC و AD سه وتر از دایرهٔ O باشند، دایره‌هایی که این سه وتر قطرهای آنها هستند، از پای عمودهایی که از نقطهٔ A بر BC، CD و DB فرود می‌آیند می‌گذرند. لذا بنا به قضیهٔ خط سمسن بر سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت متقاطع می‌شوند. بعکس اگر

سه دایرهٔ دو به دو متقاطع که سه وتر AB، AC و AD قطرهای آنها هستند، در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت متقاطع باشند، نقطهٔ A روی دایره‌ای است که از سه نقطهٔ B، C و D می‌گذرد. زیرا این سه دایره دو به دو از پای عمودهایی که از A بر خطهای BC، CD و DB فرود می‌آیند می‌گذرند و چون این سه نقطه بر یک استقامت می‌باشند، بنا به عکس قضیهٔ خط سمسن، چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره قرار دارند.



۳۷۳. اثبات شبیه قضیهٔ سالمون است.

۳۷۴. حکم از نتیجهٔ کلی‌تری به‌دست می‌آید : اگر روی ضلعهای مثلث، دایره‌هایی رسم شوند، به‌طوری که، کمانهای آنها که بیرون مثلث قرار گرفته‌اند جمعاً برابر با 4π یا 2π باشند، آن‌وقت این دایره‌ها در یک نقطه مشترکند (در حالت ما، برای مثلثی مناسب، می‌توانیم مثلث با رأسهای وسط ضلعهای مثلث ABC را بگیریم، و ثابت کنیم که سه دایره که از وسطهای AB، AC و AD ؛ BA، BC و BD ؛ CA، CB و CD می‌گذرند، در یک نقطه مشترکند).

۳۷۵. فرض کنید، A، B، C و D نقطه‌های داده شده باشند و D_1 نقطهٔ برخورد خطهای راست قرینه با AD، BD و CD، نسبت به نیمسازهای متناظر از مثلث ABC باشد. می‌دانیم که دایره‌های پایی نقطه‌های D و D_1 نسبت به مثلث ABC، بر هم منطبقند. فرض کنید خطهای راست قرینه با BA، CA و DA، نسبت به نیمسازهای متناظر از مثلث BCD، در نقطه‌ای مانند A_1 متقاطع باشند. بسادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A_1 و D_1، نسبت به خط راست CB قرینه‌اند. درنتیجه، دایره‌های پایی نقطهٔ D (یا D_1) نسبت به مثلث ABC و نیز نقطهٔ A (یا A_1) نسبت به مثلث BCD، از وسط D_1A_1 می‌گذرند. با پیدا کردن نقطه‌های B_1 و C_1 به روش مشابه، مشاهده می‌کنیم که هر یک از دایره‌های پایی مورد بحث، از وسط پاره‌خطهایی که نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 را به هم وصل می‌کنند، متناظر با آن، می‌گذرد.

۴.۲.۴. خط و دایره

۳۷۶. ثابت کنید که هر دو پاره‌خط را نقطهٔ برخوردشان نصف می‌کند.

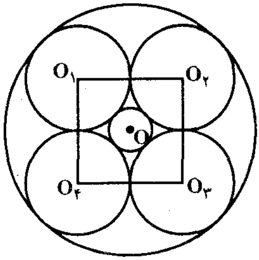
۵.۲.۴. مسأله های ترکیبی

۳۷۷. ۱. خط AB عمودمنصف پاره‌خط OO' و نقطهٔ M وسط پاره‌خط OO' است.
۲. داریم : $AO = AO' = BO' = BO$.

۳.۴. پنج دایره و بیشتر

۲.۳.۴. شعاع

۳۷۸. دو دایره جواب مسأله است. یکی به شعاع $۴\sqrt{۲} - ۴$ سانتیمتر و دیگری به شعاع $۴\sqrt{۲} + ۴$ سانتیمتر.



۳.۳.۴. نقطه و دایره

۳۷۹. نقطهٔ برخورد دایره‌های اوّل، دوم، چهارم و پنجم را A، نقطهٔ برخورد دایره‌های اوّل، سوم، چهارم و پنجم را B و نقطهٔ برخورد دایره‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم را C می‌نامیم. هر سه نقطهٔ A، B و C نمی‌توانند جدا از هم باشند. زیرا این سه نقطه بر محیط دایره‌های چهارم و پنجم قرار دارند و دو دایره نمی‌توانند بیش از دو نقطهٔ برخورد داشته باشند. بنابراین از سه نقطهٔ A، B و C دو تا بر هم منطبقند. مثلاً فرض کنید A=B، در این‌صورت، همهٔ دایره‌ها، از نقطهٔ A می‌گذرند.

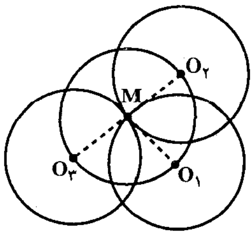
۳۸۱. فرض کنید، برخلاف حکم مسأله، نقطه‌ای مانند O، متعلق به هر شش دایره وجود داشته باشد، مرکز دایره‌ها را بترتیب و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور نقطهٔ O، با $O_۱$، ...، $O_۶$ نشان می‌دهیم. (شکل را ببینید ؛ بنابر شرط مسأله، نقطهٔ O نمی‌تواند مرکز هیچ کدام از دایره‌ها باشد.) چون مجموع زاویه‌های $O_۱OO_۲$ ، $O_۲OO_۳$ ،...، $O_۶OO_۱$ برابر است با ۳۶۰ درجه، دست‌کم یکی از آنها، از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کند. مثلاً،

فرض کنید : $O_1\hat{O}O_2 \leq 60^\circ$ ؛ و از بین دو زاویهٔ باقی مانده در مثلث OO_1O_2 ، زاویهٔ OO_1O_2 بزرگتر باشد (اگر زاویهٔ O_1OO_2 برابر صفر باشد، بلافاصله نتیجه می‌شود : $O_2O \geq O_2O_1$). در این‌صورت داریم : $O\hat{O}_1O_2 \geq 60^\circ \geq O_1\hat{O}O_2$. از آن‌جا $O_2O \geq O_2O_1$. به این‌ترتیب، دایرهٔ به مرکز O_2 ، که شامل نقطهٔ O است، شامل نقطهٔ O_1 ، مرکز دایرهٔ دیگر هم می‌شود، که شرط مسأله را نقض می‌کند.

۳۸۳. خیر، درست نیست. دسته‌ای از دایره‌ها را درنظر بگیرید که مرکز آنها، همهٔ گره‌های شبکه‌های با گام $\frac{1}{1000}$ در درون مربع 10×10 باشد.

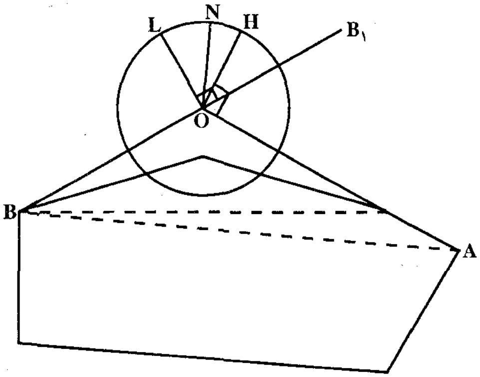
۳۸۴. مجموعهٔ دایره‌ها را متناهی فرض می‌کنیم. در این‌صورت، دایرهٔ به مرکز O با کمترین شعاع r، بر شش دایره به مرکزهای O_1 ،...، O_6 (که دور نقطهٔ O، به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دارند ؛ شکل را ببینید) و شعاعهای r_1 ،...، r_6 مماس است. در مثلث O_1OO_2 ، ضلع $O_1O_2 = r_1 + r_2$ ، بزرگترین ضلع است، از آن‌جا زاویهٔ O_1OO_2 از ۶۰ درجه کمتر نیست. به همین ترتیب، به‌دست می‌آید : $O_2\hat{O}O_3 \geq 60^\circ$ و ...، $O_6\hat{O}O_1 \geq 60^\circ$. ولی مجموع این شش زاویهٔ غیرمتقاطع، برابر ۳۶۰ درجه است، بنابراین، هر یک از آنها برابر ۶۰ درجه و هر یک از زاویه‌های دیگر مثلثهای O_1OO_2 ، O_2OO_3 ، ...، O_6OO_1 (که از ۶۰ درجه تجاوز نمی‌کنند)، برابر ۶۰ درجه می‌شود، یعنی همهٔ این مثلثها متساوی‌الاضلاعند و : $r = r_1 = \cdots = r_6$. چون دایرهٔ به مرکز O_1 ؛ مثلاً کوچکترین شعاع را دارد، اگر همین استدلال را در مورد آن به‌کار بریم، نتیجه می‌شود که بر دایره‌ای به همین شعاع و مرکز $O_7 \neq O$ مماس است، که بر خط راست OO_1 قرار دارد. به همین ترتیب دایرهٔ اخیر هم، بر دایره‌ای به همین شعاع و به مرکز $O_8 \neq O_1$ مماس می‌شود که بر همان خط راست قرار دارد و غیره. بنابراین مجموعهٔ دایره‌ها، نامتناهی، و حکم مسأله درست است.

۳۸۵. دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ ثابت داده شده و به شعاع عدد ثابت داده شده در مسأله.



۴.۳.۴. کمان

۳۸۶. به‌ازای $n = ۱$ ، محیط دایرهٔ به شعاع واحد، طولی برابر $۲n \geq \frac{۲\pi}{n}$ دارد، یعنی حکم مسأله، برای $n = ۱$ ، درست است. اکنون $n \geq ۲$ می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم، مرکزهای همهٔ دایره‌ها روی یک خط راست باشند. مرکزی را درنظر می‌گیریم که، همهٔ مرکزهای دیگر، نسبت به آن روی یک نیمخط راست واقع باشند. در این‌صورت، عمودی که از این مرکز انتخابی، بر خط راست داده شده رسم کنیم، کمانی از دایرهٔ متناظر را جدا می‌کند که، برای طول آن داریم: $n \geq \frac{۲\pi}{n}$ و



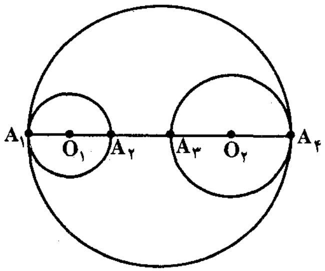
روشن است که، این کمان با هیچ کدام از دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد.

اکنون به حالتی می‌پردازیم که مرکزهای دایره‌ها روی یک خط راست نباشند. از بین همهٔ چندضلعیهای محدبی که رأسهای آن بر مرکزهای دایره‌ها منطبق باشند (مجموعهٔ این‌گونه چندضلعیها، تهی نیست، زیرا دست‌کم می‌توان یک مثلث پیدا کرد)، آن را درنظر می‌گیریم که در خارج آن، حداقل تعداد این نقطه‌ها، واقع باشند. ثابت می‌کنیم که، در بیرون این چندضلعی، هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. در واقع، اگر نقطه‌ای مثل D، در خارج این چندضلعی باشد، از این نقطه، خط راستی می‌گذرانیم که چندضلعی را قطع نکند و آن را، دور نقطهٔ O دوران می‌دهیم تا ابتدا از رأس اوّل A و سپس از رأس آخر B (از چندضلعی) بگذرد (شکل). سرانجام، همه رأسهایی از چندضلعی را که در مثلث AOB قرار دارند، تنها با سه رأس A، O و B عوض می‌کنیم. در این‌صورت، چندضلعی جدیدی به‌دست می‌آید که، در بیرون آن، تعداد کمتری نقطه، نسبت به چندضلعی انتخابی، واقع شده‌اند. تناقض حاصل نشان می‌دهد که می‌توان k ضلعی محدبی پیدا کرد، $(k \leq n)$ که رأسهای آن بر مرکزها منطبق باشد و در ضمن همهٔ مرکزها را دربر گرفته باشد. چون مجموع زاویه‌های خارجی k ضلعی، برابر ۳۶۰ درجه است، بنابراین دست‌کم یکی از زاویه‌های خارجی، اندازه‌ای دارد که از $\frac{۳۶۰^\circ}{n} \geq \frac{۳۶۰^\circ}{k}$ کمتر

نیست. این زاویه را زاویهٔ B_1OA از زاویهٔ O مربوط به k ضلعی فرض می‌کنیم (شکل را ببینید). در این‌صورت، اگر عمودهای OL و OM را بترتیب بر ضلعهای OB و OA رسم کنیم، کمان $\widehat{LM}$ را از دایرهٔ به مرکز O جدا می‌کنند که طول آن کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نیست، زیرا زاویهٔ LOM با زاویهٔ B_1OA برابر است. ثابت می‌کنیم، این کمان، با دایره‌های دیگر، برخوردی ندارد. N را نقطهٔ دلخواهی از کمان $\widehat{LM}$ می‌گیریم: چون $N\hat{O}B > 90^\circ$ و $N\hat{O}A > 90^\circ$، بنابراین، دایرهٔ به مرکز N و شعاع واحد با k ضلعی، تنها در نقطهٔ O مشترک است. و این، به معنای آن است که، مرکز هر دایره‌ای که از نقطهٔ N گذشته باشد، باید بر نقطهٔ O منطبق باشد. حکم ثابت شد.

۵.۳.۴. قطر

۳۸۷. فرآیند زیر را که شامل چند گام است، درنظر می‌گیریم. در گام اوّل هر یک از نقطه‌های داده شده را با دایره‌ای به قطر $\frac{1}{200}$ می‌پوشانیم. فرض کنید، بعد از kامین گام $(k \in N)$ دو دایره وجود داشته باشد که فاصلهٔ بین آنها، بیشتر از واحد نباشد. O_1 و O_2 را مرکزهای این دو دایره و A_1، A_2، A_3 و A_4 را، نقطه‌های برخورد خط راست O_1O_2 با محیط این دایره‌ها می‌گیریم. (نقطه‌های A_2 و A_3، بین دو نقطهٔ A_1 و A_4 قرار دارند و، درضمن $A_2A_3 \le 1$؛ شکل). در این صورت گام $(k+1)$ام را به این ترتیب برمی‌داریم که، به‌جای دو دایرهٔ داده شده، دایرهٔ به قطر A_1A_4 را درنظر می‌گیریم و این روند را تا آن‌جا که ممکن است، یعنی تا آن‌جا که شرط ۲ بطور کامل برقرار شود، ادامه می‌دهیم. چون بعد از نخستین گام، تعداد دایره‌ها برابر ۱۰۰ بود و در هر گام از تعداد دایره‌ها، یکی کم می‌شود، بنابراین، تعداد گامها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، روند کار در جایی به پایان می‌رسد و با شرط (۱)، که در هر گام برقرار شده است، در پایان روند هم برقرار خواهد بود. از طرف دیگر، با برداشتن گام نخست، مجموع قطر دایره‌ها برابر $\frac{100}{200}$ یعنی $\frac{1}{2}$ می‌شود و با برداشتن هر گام بعدی، این مجموع به اندازه‌ای



که بیشتر از واحد نیست، بزرگ می‌شود. بنابراین مجموع قطرها در پایان همهٔ گامها از $99 + \frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی از ۱۰۰ کوچکتر است؛ به این ترتیب شرط (۳) هم برقرار است.

۳۸۸. هر یک از نقطه‌های داده شده را به‌وسیلهٔ دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ دور می‌زنیم. مجموع قطرهای این دایره‌ها برابر است با ۱۰۰.

هر جا دو دایره با هم متقاطع درآیند، به جای آنها، دایره‌ای قرار می‌دهیم که شامل این دو دایره شود و کوچکترین قطر ممکن را داشته باشد. به این ترتیب مقدار مجموع قطرها افزایش پیدا نمی‌کند ولی تعداد دایره‌ها کمتر می‌شود.

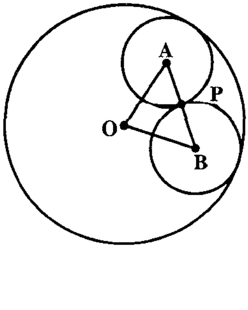
اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام به دستگاهی از دایره‌ها می‌رسیم که دو به دو نسبت به هم غیرمتقاطعند و مجموع قطرهای آنها از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. یادآوری می‌کنیم که فاصلهٔ هر نقطه تا محیط دایره از $\frac{1}{2}$ کمتر نیست.

r را کوچکترین فاصلهٔ بین دایره‌ها می‌گیریم. اگر $1 < r$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر $r \leq 1$، آن‌وقت هر دایره را با دایره‌ای هم مرکز آن عوض می‌کنیم، به‌نحوی که شعاع آن به اندازهٔ $\frac{1}{2} - \frac{r}{3}$ کمتر باشد. دستگاه دایره‌هایی که به این ترتیب به‌دست می‌آید، با شرطهای مسأله سازگار است.

۶.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۹. دایره‌ای را از نقطه‌های تماس این جفت دایره‌ها بگذرانید. اوّل و دوم، سوم و چهارم، پنجم و ششم.

۳۹۰. اگر A و B مرکز دو تا از این دیسکها باشند، مثلث OAB متساوی الاضلاع خواهد بود. زیرا: $AB = OA = OB = \frac{2R}{3}$، پس $A\hat{O}B = 60^\circ$ است. درنتیجه تعداد دیسکهای مورد نظر $6 = \frac{360}{60}$ خواهد بود.



۳۹۱. برای این‌که سطح دایره به شعاع ۲ را بپوشانیم، محیط آن را به شش کمان برابر تقسیم می‌کنیم و نقطه‌های تقسیم را A، B، C، D، E و F می‌نامیم. سپس، شش دایره به شعاع واحد و بترتیب به قطرهای AB، BC، CD، DE، EF و FA رسم می‌کنیم. اکنون، اگر دایرهٔ هفتم را، به مرکز نقطهٔ مرکز دایره بزرگتر رسم کنیم، تمامی سطح دایرهٔ به شعاع ۲، با هفت دایرهٔ به شعاع واحد پوشیده می‌شود.

دایره‌ای به شعاع بزرگتر از ۲ را نمی‌توان پوشاند، زیرا یکی از دایره‌ها، باید مرکز دایرهٔ بزرگتر را دربر گرفته باشد و بنابراین نمی‌تواند محیط دایرهٔ بزرگتر را قطع کند. دایرهٔ به شعاع بزرگتر از ۲، به‌وسیلهٔ شش دایره پوشانده شده است که هر کدام از آنها، کمانی کوچکتر از $\frac{1}{6}$ محیط دایرهٔ بزرگتر را جدا می‌کنند و این به معنای آن است که بخشی از محیط دایرهٔ بزرگتر (هر قدر هم که کوچک باشد)، زیر پوشش قرار نمی‌گیرد.

۳۹۳. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آنها با d مساوی یک باشد. زیرا تمام نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها با A مساوی یک باشد روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله‌شان حداقل یک باشد باید در دو سر کمانی به اندازهٔ حداقل ۶۰ درجه واقع باشند. درنتیجه بیشتر از ۶ نقطه ممکن نیست.

به این ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت بالا باشند، نمی‌توان تشکیل داد و چون تعداد این نقطه‌ها n است، پس کلاً ۶n جفت به‌دست می‌آید. امّا جفت (B و A) با جفت (A و B) فرقی ندارد. پس $\frac{6n}{2} = 3n$ جفت به‌دست می‌آید، یعنی بیش از ۳n جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

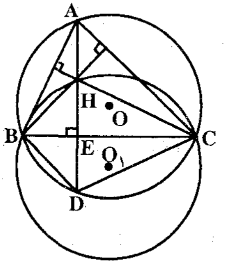
راهنمایی و حل قضیه ها و مسأله های بخش ۵. دایره و مثلث

۱.۵. دایرهٔ محیطی مثلث

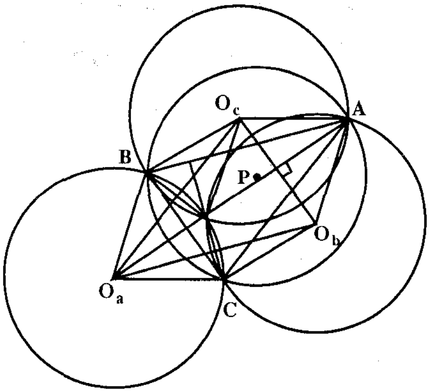
۲.۱.۵. شعاع

۳۹۴. ثابت کنید که $DE = AO$ است.

۳۹۵. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعها و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و O_1 مرکز دایرهٔ گذرنده بر رأسهای مثلث HBC باشد، ارتفاع AH را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ O را در نقطهٔ D قطع کند. می‌دانیم که نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به ضلع BC است، پس اگر از D به B و C وصل کنیم، دو مثلث HBC و DBC برابرند. لذا دایره‌های محیطی این دو مثلث برابرند، یعنی دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ H، B و C با دایرهٔ محیطی مثلث مساوی است. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که دایره‌های محیطی مثلثهای ACH و ABH نیز با دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابرند.



۳۹۶. مرکزهای دایره‌های متساوی PBC، PCA و PAB را بترتیب O_a ، O_b و O_c می‌نامیم. هریک از چهارضلعیهای PO_bAO_c و PO_aCO_b لوزی است. خط AP بر O_bO_c که با خط BC موازی است، عمود است و $BP \perp O_aO_c$ و $CP \perp O_aO_b$. پس AP، BP و CP ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند و P همان نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.



۳۹۷. نقطهٔ برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC را O می‌نامیم (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC). چهارضلعیهای $OA'CB'$، $OB'AC'$ و $OC'BA'$ محاطی‌اند و قطر دایره‌های محیطی این چهارضلعیها $OC = OA = OB$ است، پس این دایره‌ها مساوی‌اند

و نقطهٔ برخورد آنها نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

۳.۱.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره

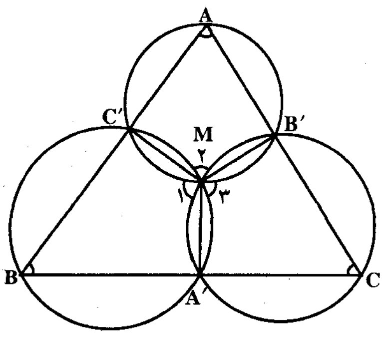
۳۹۸. فرض کنید، K نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1 و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. نقطه‌های A، K، H و B بر یک دایره واقعند (زاویه‌های AKB و AHB یا با یکدیگر برابرند و یا مجموعشان برابر ۱۸۰ درجه است، برحسب آن‌که نقطه‌های K و H در یک طرف یا دو طرف خط راست AB واقع باشند). شعاع این دایره برابر است با R، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC. اگر φ زاویهٔ بین AA_1 و AH باشد، آن‌وقت $KH = 2R\sin\varphi$.

۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره

۴۰۱. اگر A_1 نقطهٔ برخورد AH با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، از A_1 به C وصل کنید و ثابت کنید که $CH = CA_1$ است.

۴۰۲. زاویه‌های $B\hat{E}D = A\hat{B}C$ و $D\hat{E}C = A\hat{C}B$ است.

۴۰۳. نقطهٔ تقاطع دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$ و $BA'C'$ را M می‌نامیم. چهارضلعیهای $MC'BA'$ و $MC'AB'$ محاطی‌اند، پس: $\hat{M}_1+\hat{B}=180^\circ$ و $\hat{M}_2+\hat{A}=180^\circ$. از طرفی داریم: $\hat{M}_1+\hat{M}_2+\hat{M}_3+\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=540^\circ$. در نتیجه $\hat{M}_3+\hat{C}=180^\circ$، یعنی چهارضلعی $CA'MB'$ نیز محاطی است و دایرهٔ محیطی مثلث $CA'B'$ نیز از نقطهٔ M می‌گذرد.



۴۰۴. فرض کنید p، q، r و s چهار خط راست داده شده باشند. دایره‌های محیطی (pqr) و (pqs) مربوط به دو مثلث pqr و pqs در نقطهٔ تلاقی P و Q اشتراک دارند؛ پس در نقطهٔ دیگری، مانند M، هم یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر p،q، r و s تصویرهای M بترتیب بر روی خطهای p، q، r و s باشند، نقطه‌های P، Q، R باهم و نقطه‌های P،Q و S با هم همخطند. پس چهار نقطهٔ P، Q، R و S همخطند.

پس تصویرهای نقطهٔ M روی ضلعهای مثلث qrs نیز همخطند، یعنی M روی دایرهٔ محیطی این مثلث، و به دلیلی مشابه روی دایرهٔ محیطی prs نیز قرار دارد.

تعریف. نقطهٔ M را نقطهٔ میکل برای چهار خط p، q، r و s می‌نامند.

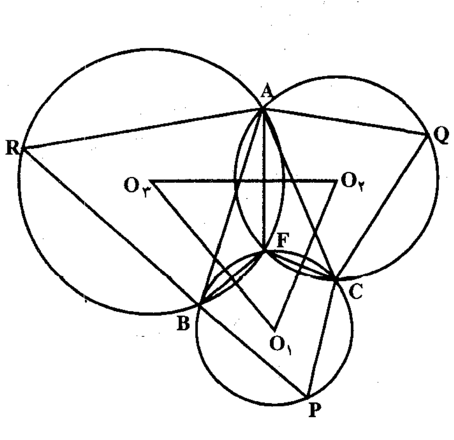
ملاحظه. چهار خط (که هیچ دوتایی از آنها موازی و هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند) مفروضند. یک و تنها یک نقطه وجود دارد که تصویرهایش بر این خطها همخط باشند.

نتیجه. مرکزهای چهار دایرهٔ (pqr)، (qrs)، (rsp) و (spq) و نقطهٔ M روی یک دایره قرار دارند. در واقع چهار نقطهٔ P، Q، R و S همخطند و نقطهٔ M با هر سه‌تایی از این چهار مرکز همدایره است، پس این پنج نقطه همدایره‌اند.

۴۰۵. روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آنها سه مثلث CBP، ABR و ACQ را چنان رسم کرده‌ایم که: $\hat{P}+\hat{Q}+\hat{R}=۱۸۰^\circ$ است. دایره‌های محیطی دو مثلث CBP و ACQ که در نقطهٔ C مشترکند، در نقطهٔ دیگری مانند F نیز متقاطعند. از F به نقطه‌های A، B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای FBPC و FAQC محاطی‌اند. پس داریم:

$$A\hat{F}B = ۳۶۰^\circ - (B\hat{F}C + C\hat{F}A) = ۳۶۰^\circ - [(۱۸۰^\circ - \hat{P}) + (۱۸۰^\circ - \hat{Q})]$$

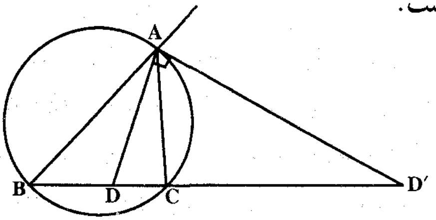
$$= \hat{P}+\hat{Q} = ۱۸۰^\circ - \hat{R}$$



پس چهارضلعی ARBF نیز محاطی است و دایرهٔ محیطی مثلث ABR از نقطهٔ P می‌گذرد.

۳.۳.۱.۵. نقطه برون دایره

۴۰۹. نقطهٔ D' پای نیمساز زاویهٔ برونی A روی امتداد پاره خط BC است، پس این نقطه در برون دایرهٔ محیطی مثلث واقع است.



۴.۳.۱.۵. نقطه‌های همدایره

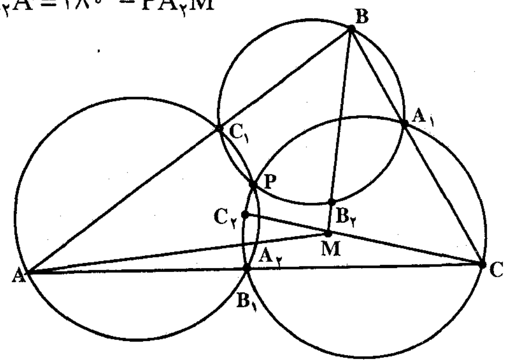
۴۱۰. ثابت کنید، چهارضلعیهای BPCQ و BPOC محاطی‌اند.

۴۱۱. ثابت کنید، چهارضلعیهای $AHB'B$ و $ACHC'$ محاطی‌اند.

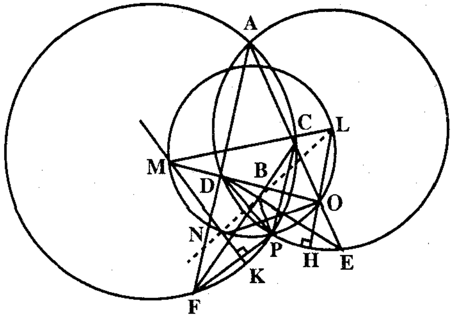
۴۱۲. بسادگی می‌توان ثابت کرد که دایره‌های مورد بحث، در یک نقطه متقاطعند. این نقطه را با P نشان می‌دهیم. اگر نقطه‌ها مطابق شکل قرار گرفته باشند، آن وقت:

$$P\hat{B_2}M = 180^\circ - B\hat{B_2}P = P\hat{C_1}B = 180^\circ - P\hat{C_1}A = P\hat{B_1}A$$

$$= P\hat{A_2}A = 180^\circ - P\hat{A_2}M$$



یعنی نقطه‌های P، B_2، M و A_2 بر یک دایره واقعند. به طریق مشابه، ثابت می‌کنیم نقطه‌های P، B_2، M و C_2 بر یک دایره واقعند، درنتیجه، پنج نقطهٔ M، P، A_2، B_2 و C_2 بر یک دایره واقعند.



۴۱۳. چهارضلعی حاصل از برخورد چهار خط را ACBD و نقطهٔ برخورد ضلعهای روبه‌روی این چهارضلعی را E و F می‌نامیم. می‌دانیم که چهار دایرهٔ محیطی چهار مثلث حاصل، در یک نقطه متقاطعند. چهارضلعیهای ACPF، ADPE، BCEP و BDFP محاطی می‌باشند و دو به دو یک وتر مشترک دارند. برای تعیین مرکز دایره‌های محیطی این چهارضلعیها، عمودمنصف وتر مشترکها را رسم می‌کنیم.

برای چهارضلعیهای ADPE، BCEP، مرکزها روی خط HOL قرار دارند.

برای چهارضلعیهای ADPE و DBPF مرکزهای L و N روی عمودمنصف DP می‌باشند و .... اما کمانهای $\overset{\frown}{CPF}$ و $\overset{\frown}{DPE}$ برابرند، زیرا مقابل به زاویهٔ A می‌باشند و امّا:

$$N\hat{L}O = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DPE} \ , \ \ O\hat{M}N = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CPF} \Rightarrow N\hat{L}O = O\hat{M}N$$

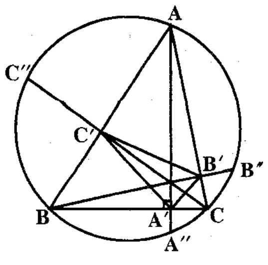
پس چهارضلعی LMNO که از مرکزهای ۴ دایره به‌دست آمده است، محاطی است.

۵.۳.۱.۵. نقطه‌های همخط

۴۱۴. چهارضلعی BDCH متوازی‌الاضلاع است.

۴.۱.۵. کمان

۴۲۰. نقطه‌های برخورد ارتفاعهای AA'، BB' و CC' از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن را بترتیب A''، B'' و C'' می‌نامیم. رأس A از مثلث ABC وسط کمان $B''C''$ است، زیرا دو زاویهٔ ABB'' و ACC'' که ضلعهایشان دو به دو بر هم عمودند، با هم برابرند. از طرفی $A\hat{C}C'' = \frac{\overset{\frown}{AC''}}{۲}$ و $A\hat{B}B'' = \frac{\overset{\frown}{AB''}}{۲}$. بنابراین $\overset{\frown}{AB''} = \overset{\frown}{AC''}$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که



رأس B وسط کمان $\widehat{A''C''}$ و رأس C وسط کمان $\widehat{A''B''}$ است.

۵.۱.۵. وتر

۴۲۱. کمانهای $\widehat{FB}$ و $\widehat{FC}$ برابرند و مثلث FBI در رأس F متساوی‌الساقین است.

۴۲۲. زاویه‌های محاطی A و A' برابرند، پس کمانهای روبه روی آنها و درنتیجه وترهای نظیر این کمانها برابرند.

۴۲۳. فرض کنید، H نقطهٔ برخورد ارتفاعها، مرکز O دایرهٔ محیطی و B_1 وسط CA باشد. خط راست MN از K، وسط BH ، می‌گذرد و $BK = B_1O$. ثابت کنید که خط MN با OB موازی است (اگر $\hat{C} > \hat{A}$ ، آن‌وقت $M\hat{K}N = ۲M\hat{B}N = \hat{C} - \hat{A} = O\hat{B}H$).

۶.۱.۵. قطر

۴۲۴. اگر AU نیمساز داخلی زاویهٔ A باشد و آن را ادامه دهیم $\widehat{BC}$ را در L که، وسط آن است قطع می‌کند. OL در A' بر BC عمود است و دایره را در L' قطع می‌کند. AL' بر AL عمود است (زیرا $L\hat{A}L' = ۹۰°$ درنتیجه AL' نیمساز خارجی زاویهٔ A می‌باشد).

تبصره. زاویه‌ای که نیمساز خارجی یک زاویه با ضلع مقابلش می‌سازد، مساوی نصف تفاضل دو زاویهٔ مجاور به این ضلع از مثلث است.

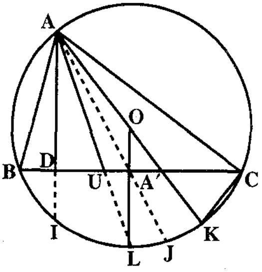
زاویهٔ $AU'B$ ، ضلعهایش عمود بر ضلعهای زاویهٔ DAU می‌باشد و قبلاً ثابت کردیم : زاویه‌ای که ارتفاع A و قطر گذرنده از A می‌سازند، برابر $\hat{B} - \hat{C}$ و نیمساز زاویهٔ A نیمساز این زاویه نیز هست، پس زاویهٔ نیمساز و ارتفاع برابر $\frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$ است.

۷.۱.۵. زاویه

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ زاویه

۴۲۷. ثابت کنید، مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است. برحسب آن‌که فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث، کمتر از، برابر با و یا بیشتر از نصف طول بزرگترین ضلع آن باشد.

جواب : ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° .



۴۲۸. (الف) فرض کنید، AD ارتفاع و AK قطری از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند که از رأس A می‌گذرند. زاویه‌های B و K برابرند. زیرا هر دو روبه‌روی یک کمان دایرهٔ محیطی هستند؛ پس در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABD و ACK داریم:

$$B\hat{A}D = K\hat{A}C = ۹۰^\circ - \hat{B},$$

$$D\hat{A}K = \hat{A} - ۲(۹۰^\circ - \hat{B}) = \hat{A} + ۲\hat{B} - ۱۸۰^\circ = \hat{A} + ۲\hat{B} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = \hat{B} - \hat{C}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که در صورت منفرجه بودن یکی از زاویه‌های B یا C نیز قضیه صادق است.

(ب) AU را نیمساز زاویهٔ A فرض کنید. چون $B\hat{A}D = C\hat{A}O$، داریم $D\hat{A}U = O\hat{A}U$.

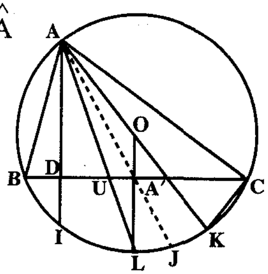
نتیجه. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADU داریم: $AD = h_a$، $AU = t_a$ و $D\hat{A}U = \frac{۱}{۲}(\hat{B} - \hat{C})$، پس $\hat{B} - \hat{C}$، t_a و h_a یک دسته معلومات مثلث است.

۴۲۹. با توجه به دو مثلث AUB و AUC داریم:

$$A\hat{U}C = \hat{B} + \frac{۱}{۲}\hat{A}, \quad A\hat{U}B = \hat{C} + \frac{۱}{۲}\hat{A}$$

پس:

$$A\hat{U}C - A\hat{U}B = \hat{B} - \hat{C}$$



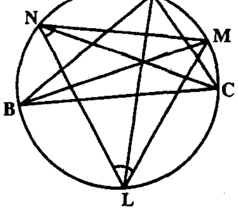
۴۳۰. نیمساز هر زاویهٔ داخلی کمان مقابل به آن زاویه از دایره محیطی مثلث را نصف می‌کند، پس داریم:

$$M\hat{L}N = M\hat{L}A + A\hat{L}N = M\hat{B}A + A\hat{C}N = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

و

$$N\hat{M}L = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}$$

$$L\hat{N}M = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}$$

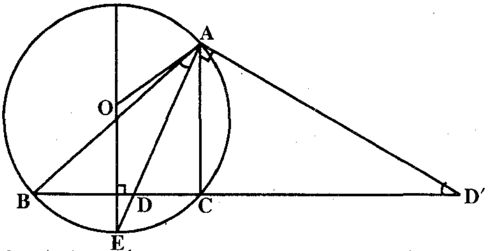


۴۳۱. از M' به N' وصل کنید.

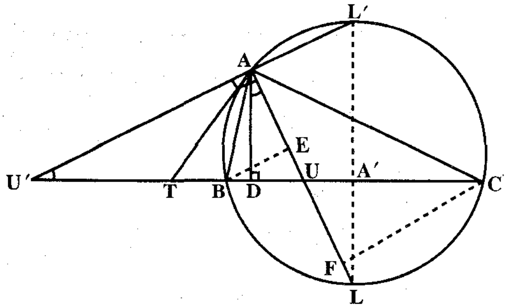
۲.۷.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۳۲. چهارضلعیهای OMAN و $HC'AB'$ محاطی‌اند.

۴۳۳. امتداد نیمساز AD از نقطهٔ E وسط کمان $\widehat{BC}$ می‌گذرد، و OE عمودمنصف BC است.



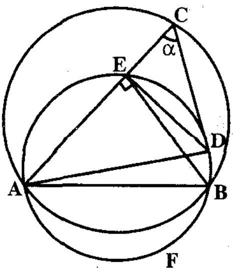
۴۳۴. دو ضلع زاویه‌ای که نیمساز خارجی AU' (شکل) با قاعدهٔ BC می‌سازد، بترتیب بر نیمساز داخلی AU و ارتفاع AD عمودند. بنابراین اثبات قضیه کامل است.



۴۳۷. خط‌المرکزین دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن دو دایره است، و قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان مقابلش رانصف می‌کند.

۸.۱.۵. پاره‌خط

۱.۸.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

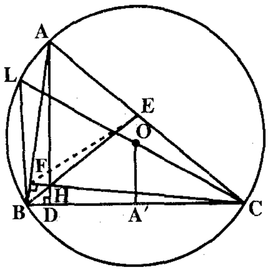


۴۳۸. رأس زاویهٔ ثابت $\hat{C} = \alpha$ روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB واقع است. یکی از این مثلثها را در نظر می‌گیریم و ارتفاعهای AD و BE را رسم می‌کنیم، چهارضلعی AEDB محاطی است و AB قطر دایرهٔ محیطی آن است.

برای زاویهٔ C از مثلث ABC داریم: $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AFB} - \overset{\frown}{DE}}{2}$. امّا اندازهٔ زاویهٔ C ثابت است و $\overset{\frown}{AFB} = 180^\circ$ است، پس کمان $\overset{\frown}{DE}$ و درنتیجه وتر DE طول ثابتی دارند.

۵.۱.۸.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۴۰. فرض کنید، L انتهای دیگر قطری از دایرهٔ محیطی باشد که از رأس C می‌گذرد (شکل). در این صورت می‌گوییم L روبه‌روی قطری C در دایرهٔ محیطی است. پاره‌خط OA' وسط دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه BCL را به هم وصل می‌کند؛ پس $OA' = \frac{1}{2}BL$. از طرف دیگر هر جفت از ضلعهای روبه روی هم در چهارضلعی ALBH بترتیب بر خطهای AC و BC عمودند، پس ALBH ، متوازی‌الاضلاع است و $BL = AH$ ؛ و قضیه ثابت می‌شود.



۴۴۶. زاویهٔ DAD' قائمه و محاطی است، پس DD' قطر دایره است که چون D وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ است، پس DD' عمودمنصف ضلع BC است.

۴۴۷. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد و پای عمودهای مرسوم از نقطه‌های B و D بر عمودمنصف AC را بترتیب B_1 و D_1 بنامیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OBB_1 و ODD_1 با هم برابرند.

۴۴۸. داریم: $T\hat{U}A = U\hat{C}A + U\hat{A}C\ ,\ \ T\hat{A}U = T\hat{A}B + B\hat{A}U$

ولی: $B\hat{A}U = U\hat{A}C\ ,\ \ T\hat{A}B = U\hat{C}A$

(محاطی و روبه رو به دو کمان مساوی) درنتیجه مثلث TUA متساوی‌الساقین است و $TA = TU$. دایره‌ای به مرکز T و شعاع TA از U می‌گذرد. (زیرا $TA = TU$ است) و چون مثلث UAU' قائم‌الزاویه است، پس این دایره از U' نیز می‌گذرد و درنتیجه $TA = TU'$.

۹.۱.۵ . خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

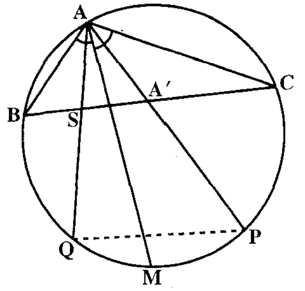
۱.۹.۱.۵ . خطها موازی‌اند

۴۴۹. چهارضلعی AFOE محاطی است و زاویه‌های AOF و FEA با زاویهٔ C برابرند.

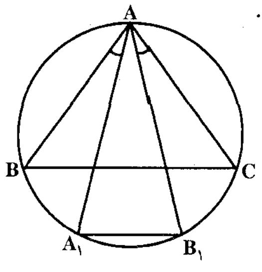
۴۵۰. زاویهٔ $D\hat{B}A = 90°$ است.

۴۵۱. از A به A'' وصل کنید و ثابت کنید : $A'\hat{A}C = A''\hat{A}B$.

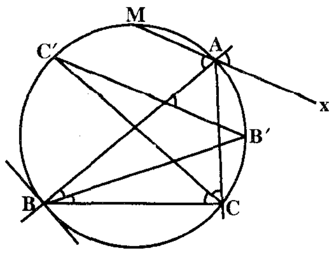
۴۵۲. وسط کمان $\widehat{PQ}$ (شکل) که توسط میانهٔ AP و میانهٔ متقارن AQ روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC جدا می‌شود، بر وسط کمان $\widehat{BC}$ از این دایره منطبق است ؛ پس دو وتر BC و QP موازی‌اند. این گزاره راه ساده‌ای برای رسم میانه‌های متقارن یک مثلث در اختیارمان می‌گذارد.



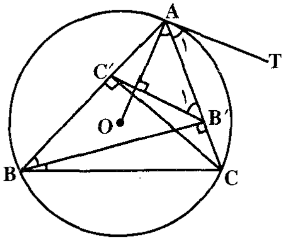
۴۵۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دو خط همزاویه AA_1 و BB_1 که این دایره را در A_1 و B_1 قطع کرده‌اند، در نظر می‌گیریم. چون $C\hat{A}B_1 = B\hat{A}A_1$ است، پس $\widehat{BA_1} = \widehat{B_1C}$ درنتیجه $A_1B_1 \| BC$ است.



۴۵۵. نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی B و C از مثلث ABC با دایرهٔ محیطی مثلث را بترتیب B' و C' و نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ برونی A با این دایره را M می‌نامیم. ثابت کنید $AM \| B'C'$ است.



۴۵۶. خط AT مماس بر دایره در نقطه A را رسم می‌کنیم. $B'C' \| AT$ است. زیرا: $\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \hat{A}_۱ = \hat{B}$ و $\hat{B} = \hat{B'}_۱$ است. چون چهارضلعی $BC'B'C$ محاطی است، پس $\hat{A}_۱ = \hat{B'}_۱$ و درنتیجه $B'C' \| AT$ است. از طرفی $OA \perp AT$ می‌باشد، پس OA بر $B'C'$ نیز عمود است.



۵.۱.۹.۲. خطها بر هم عمودند

۴۵۸. ثابت کنید که $A'C'$ با خط مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در نقطهٔ B موازی است.

۴۵۹. با توجه به این که زاویه CAD ظلی و زاویهٔ ABC محاطی است داریم: $C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \hat{B}$. زاویهٔ ACD زاویهٔ خارجی مثلث ABC است، پس: $A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$ و برای زاویهٔ ADC می‌توان نوشت:

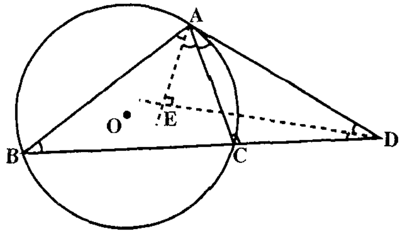
$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \hat{C} - \hat{B}$$

نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ BAC و ADC را E می‌نامیم. داریم:

$$\Delta AED:\ A\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - (E\hat{D}A + D\hat{A}C + C\hat{A}E) \Rightarrow$$

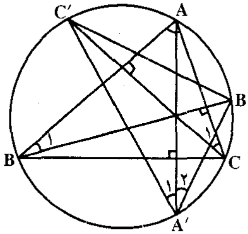
$$A\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{C} - \hat{B}}{۲} + \hat{B} + \frac{\hat{A}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{۲} = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow AE \perp DE$$



۳.۹.۱.۵. خط نیمساز است

۴۶۰. زاویه‌های B_1 و C_1 که هر دو متمم زاویهٔ BAC می‌باشند، با هم برابرند. درنتیجه $\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{AC'}$ است. از آن جا $\hat{A'}_1 = \hat{A'}_2$ یعنی AA' نیمساز زاویهٔ $B'A'C'$ از مثلث $A'B'C'$ می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که BB' و CC'، بترتیب، نیمساز زاویه‌های B' و C' از مثلث $A'B'C'$ می‌باشند.



۴۶۱. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به ضلع BC است.

۴.۹.۱.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴۶۲. این نقطهٔ ثابت، نقطهٔ E وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.

۴۶۳. به دلیل ثابت بودن پاره‌خط BC و زاویهٔ BAC، مکان هندسی رأس A از مثلث ABC کمان درخور زاویهٔ معلوم A مقابل به پاره‌خط BC است و چون وتر BC ثابت است، کمان BC ثابت می‌باشد و درنتیجه نقطهٔ E وسط آن نیز نقطهٔ ثابتی است و نیمساز زاویهٔ A همواره از نقطهٔ ثابت E می‌گذرد.

۴۶۴. دو نقطه را نسبت به یک ضلع مثلث همنوا می‌نامند، درصورتی که از وسط آن ضلع به یک فاصله باشند. بنابراین $P_1P_2 = Q_1Q_2$ است.

۵.۹.۱.۵. خطها همرسند

۴۶۵. چهارضلعیهای $BCB'C'$ و $ACA'C'$ و $ABA'B'$ متوازی‌الاضلاعند.

۴۶۷. از رأسهای A و C دو خط موازی خط مماس بر دایره در رأس B رسم کنید و نقطه‌های برخورد آنها با AB و AC را B' و B'' بنامید. نقطهٔ برخورد $B'B''$ با AC نقطهٔ V است. خط AV را رسم کنید. سپس به‌روش مشابه خط CW را رسم نمایید. آن‌گاه همرس بودن AU، BV و CW را ثابت کنید.

۴۶۸. H را نقطهٔ برخورد دو ارتفاع BE و CF از مثلث ABC فرض کنید (شکل)، و فرض کنید خط AH ضلع BC را در D قطع کند. نقطه‌های E و F روی دایره‌ای قرار دارند

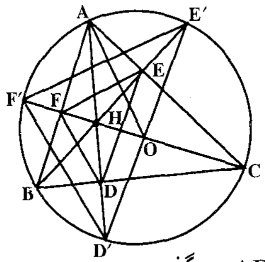
که BC قطر آن است و در چهارضلعی محاطی BCEF داریم: $F\hat{C}B = F\hat{E}B$. به‌طور مشابه، در چهارضلعی محاطی AEHF داریم $F\hat{E}H = F\hat{A}H$ ؛ بنابراین،

$$B\hat{A}D = F\hat{A}H = F\hat{E}H = F\hat{E}B = F\hat{C}B$$

پس دو مثلث ABD و BCF که در زاویهٔ B مشترکند و دو زاویهٔ دیگرشان هم دو به دو برابرند، همنهشتند و داریم:

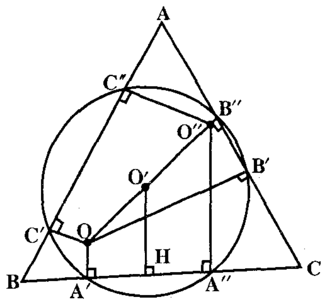
$$A\hat{D}B = B\hat{F}C = 90^\circ$$

یعنی AHD ارتفاع سوم مثلث ABC است.



۴۶۹. همهٔ این عمودها از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند.

۴۷۳. از نقطهٔ O به نقطهٔ O′ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع عمود مرسوم بر BC در نقطهٔ A″ با OO′ را نقطهٔ O″ می‌نامیم. چهارضلعی OA′A″O″ ذوزنقه است (OA‖O″A″). از O′ مرکز دایره عمود O′H را بر وتر A′A″ فرود می‌آوریم، O′H عمودمنصف A′A″ است، پس نقطهٔ O′ وسط OO″ می‌باشد، یعنی نقطهٔ O″ قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به نقطهٔ O′ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ می‌باشد، لذا نقطه‌ای است ثابت، یعنی عمودی که در نقطهٔ A″ بر ضلع BC اخراج می‌شود از نقطهٔ ثابت O″ می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودهای رسم شده از B″ و C″ بر ضلعهای مثلث نیز از نقطهٔ O″ می‌گذرند. بنابراین عمودهای رسم شده بر ضلعهای مثلث ABC در نقطه‌های A″، B″ و C″ همرسند.



۶.۹.۱.۵. خط مماس بر دایره است

۴۷۶. ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ثابت، اندازهٔ ثابتی دارد و وترهای به‌طول ثابت در یک دایره از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. بنابراین بردایرهٔ ثابتی هم مرکز با دایرهٔ داده شده و به شعاع فاصلهٔ مرکز دایره از ضلع ثابت، مماس است.

۴۷۷. ثابت کنید، زاویهٔ EKH با زاویهٔ KGH برابر است.

۱۰.۱.۵. خط سیمسون

۱.۱۰.۱.۵. تعریف و قضیه

۴۷۸. فرض کنید، P نقطه‌ای داخل زاویهٔ ABC از مثلث ABC باشد و L، M و N تصویرهای نقطهٔ P بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB باشند (شکل). دایره‌های (PA) و (PC) که PA و PC قطر آنها هستند، بترتیب از نقطه های M و N، و M و L می‌گذرند، و داریم:

$$A\hat{P}N = A\hat{M}N\ ,\ \ C\hat{P}L = C\hat{M}L\ ,\ \ \hat{B} + N\hat{P}L = 180^\circ \qquad (1)$$

حال فرض کنید که P روی دایرهٔ ABC قرار داشته باشد. در این صورت، $A\hat{P}C$ مکمل زاویهٔ B است و داریم:

$$A\hat{P}C = N\hat{P}L \qquad (2)$$

با کم کردن این دو زاویهٔ مساوی از زاویهٔ $N\hat{P}C$ خواهیم داشت:

$$A\hat{P}N = C\hat{P}L \qquad (3)$$

با توجه به (۱)،

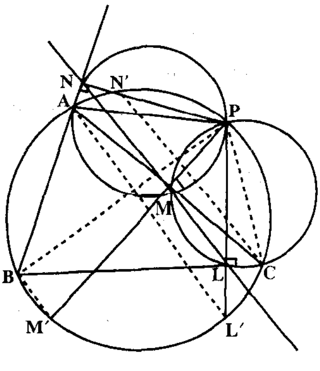
$$A\hat{M}N = C\hat{M}L \qquad (4)$$

پس سه نقطهٔ L، M و N همخطند.

برعکس، اگر L، M و N همخط باشند، (۴) برقرار است، و از (۴) و (۱) معادلهٔ (۳)، و درنتیجه (۲) را به‌دست می‌آوریم، یعنی $N\hat{P}L$ مکمل زاویهٔ B است و P با نقطه‌های A، B و C همدایره است.

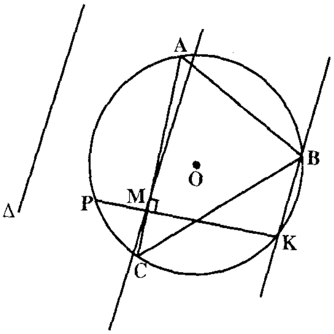
نکته. نقطهٔ P چه آن‌طور که فرض کردیم داخل زاویهٔ B باشد،و چه داخل هریک از دو زاویهٔ دیگر مثلث ABC باشد، اثبات حکم مستقیم قضیه معتبر خواهد بود. اثبات عکس قضیه نیز در این حالتها معتبر است. ولی در مورد عکس قضیه، اگر فرض شود که P داخل زاویهٔ متقابل به رأس یکی از زاویه‌های مثلث ABC است، واضح است که نقطه‌های L، M و N نمی‌توانند همخط باشند.

می‌توان ملاحظه کرد که خط LMN دایرهٔ محیطی را قطع می‌کند، زیرا از نقطهٔ M که داخل دایرهٔ محیطی است می‌گذرد.



۵.۱.۱۰.۲. نقطه و دایره

۴۷۹. نقطه‌ای که در سر دیگر قطر رسم شده از رأس B واقع است.



۴۸۰. از یک رأس دلخواه مثلث مفروض ABC مثلاً رأس B خطی در راستای مفروض رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی (O) را مجدداً در K قطع کند (شکل). عمود KM که از K بر ضلع روبه‌روی رأس B، یعنی AC، رسم می‌شود، دایرهٔ (O) را در نقطهٔ مطلوب P قطع می‌کند و خطی که از M به موازات KB رسم شود، خط سیمسون نقطهٔ P است.

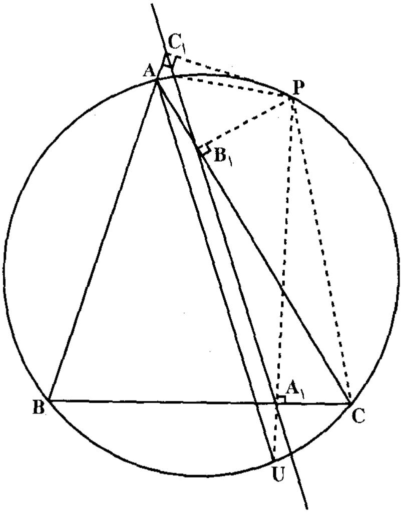
۴۸۱. ثابت کنید که ضلعهای مثلثهای $A_1B_1C_1$ ، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ متناظراً موازی‌اند.

۵.۱.۱۰.۳. زاویه

۴۸۴. خط سمسن خاصیتهای جالب بسیار دارد که برخی از آنها شایستهٔ بررسی است، مطابق با شکل (الف)، که در آن عمود PA_1 را امتداد داده‌ایم تا با دایرهٔ محیطی مثلث در U برخورد کرده است و AU را رسم کرده‌ایم. در چهارضلعیهای محاطی PAUC و PB_1A_1C داریم:

$$P\hat{U}A = P\hat{C}A = P\hat{C}B_1 = P\hat{A_1}B_1$$

بنابراین خط AU با خط سمسن $A_1B_1C_1$ موازی است.



(شکل الف)

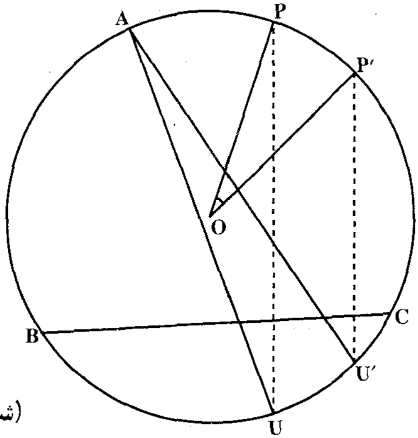
اکنون علاوه بر نقطهٔ P، نقطهٔ دیگر P′ از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و خطهای سمسن نظیر آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. با توجه به این که خطهای سمسن نظیر نقطه‌های P و P′ بترتیب با خطهای AU و AU′ موازی‌اند. پس زاویهٔ بین این خطهای سمسن با زاویهٔ UAU′ برابر است، اما کمان $\overset{\frown}{UU'}$ با کمان $\overset{\frown}{PP'}$ برابر

است زیرا دو وتر PU و P′U′ با هم موازی‌اند، (شکل ب) بنابراین :

$$U\hat{A}U' = \frac{1}{2}\widehat{UU'} = \frac{1}{2}\widehat{PP'} = \frac{1}{2}P\hat{O}P'$$

و هرگاه صفحه را جهت‌دار گرفته و اندازهٔ جبری زاویه‌ها را به کار ببریم :

$$U\hat{A}U' = \frac{1}{2}\widehat{UU'} = -\frac{1}{2}\widehat{PP'} = -\frac{1}{2}P\hat{O}P' = \text{مقدار ثابت}$$



(شکل ب)

هرگاه P دایرهٔ محیطی مثلث را با سرعتی ثابت بپیماید، در این صورت خط AU حول نقطهٔ A با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد به‌قسمی که U دایره را در جهت عکس حرکت P می‌پیماید، و وقتی که P یک دور کامل محیط دایره را بپیماید، خط AU در امتداد نخستین خود اما در جهت عکس قرار خواهد گرفت. در این ضمن خط سمسن نیز حول مرکزی متغیر دوران می‌کند و پوش آن منحنی متقارنی است که دلتوئید یا هیپوسیکلوئید اشتینر نام دارد. بسادگی و به‌گونهٔ نقاشیهای متحرک که به فیلم تبدیل می‌شوند می‌توان این تغییر مکانها را دنبال کرد.

۴.۱۰.۱.۵. پاره‌خط

۴۸۵. اگر نقطهٔ E قرینهٔ نقطهٔ P از دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، خط سمسن نظیر نقطهٔ P(A′B′) با خط EH موازی است، پس B′ وسط PH است.

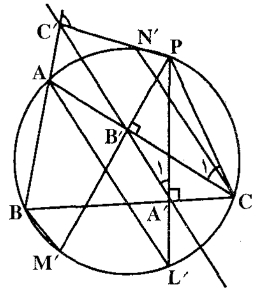
۴۸۶. فاصلهٔ میان تصویرهای M روی AC و BC، برابر $CM\sin\hat{C}$ است. اگر K و L تصویرهای M روی AB و BC باشند، آن وقت تصویر AB روی خط راست KL (این

همان خط سیمسون است)، برابر است با :

$$AB.|\cos B\hat{K}L| = AB.|\cos B\hat{M}L| = AB\sin C\hat{B}M = CM\sin\hat{C}$$

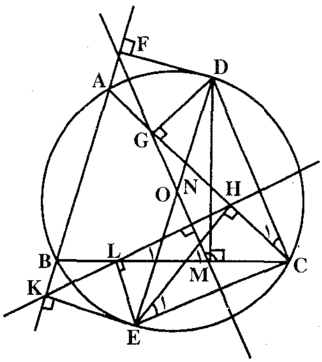
۵.۱۰.۱.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۵.۱۰.۱.۵. خطها موازی‌اند



۴۸۸. چهارضلعی $PCA'B'$ محاطی است، پس $\hat{A}'_1 = \hat{C}_1$ است. از طرفی $L' = \hat{C}_1 = \frac{\overset{\frown}{AP}}{۲}$، در نتیجه $L' = \hat{A}'_1$ است، پس خط AL' موازی خط $A'B'C'$ است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که خطهای BM' و CN' نیز موازی خط سمسن نظیر نقطهٔ P می‌باشند.

۲.۵.۱۰.۱.۵. خطها بر هم عمودند



۴۹۰. قطر DE از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و تصویرهای نقطه‌های D و E روی ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC را M ، F ، G ، H ، L ، K می‌نامیم. چهارضلعی GDCM محاطی است. چون دایرهٔ به قطر DC، هم از M می‌گذرد و هم از C، پس $G\hat{M}D = \hat{C}_1$ از طرفی $\hat{E}_1 = \hat{C}_1$، چون ضلعهایشان دو به دو بر هم عمودند. درنتیجه $G\hat{M}D = \hat{E}_1$. چهارضلعی LHCE نیز محاطی می‌باشد، پس $\hat{L}_1 = \hat{E}_1$، لذا $\hat{L}_1 = G\hat{M}D$. چون $G\hat{M}D + \hat{M}_1 = ۹۰^\circ$ پس $\hat{L}_1 + \hat{M}_1 = ۹۰^\circ$، بنابراین در مثلث NLM که مجموع دو زاویه ۹۰° است، زاویهٔ سومش برابر ۹۰° می‌باشد، یعنی $FM \perp NL$ است.

۴۹۱. مسأله را در مورد یکی از خطها ثابت کنید.

۳.۵.۱۰.۱.۵. خط نیمساز است

۴۹۳. وسطهای ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را A_1 ، B_1 و C_1 بنامید. خط سمسن نظیر نقطهٔ P را نسبت به دایره رسم کنید و ثابت کنید که این خط نیمساز یکی از زاویه‌های خارجی مثلث $A_1B_1C_1$ است. به همین ترتیب مسأله برای نقطه‌های Q و R برقرار است. مسأله را برای خطهای سمسن نظیر نقطه های P' ، Q' و R' بررسی کنید.

۵.۱.۱۰.۵.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴۹۴. اگر M نقطهٔ برخورد ارتفاع AA' با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، نقطهٔ A' تصویر M روی ضلع BC، پای ارتفاع رأس A است. که خط سیمسون نظیر نقطهٔ M از A' می‌گذرد و . . . .

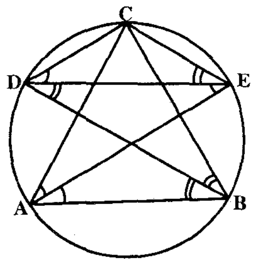
۵.۱.۱۰.۵.۵. خطها همرسند

۴۹۸. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر A_1، بر B_1C_1 عمود است (همین‌طور برای نقطه‌های دیگر). بعلاوه، می‌توان ثابت کرد که خط سیمسون نظیر A_1، از وسط A_1H می‌گذرد، که در آن H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است. درنتیجه، خطهای سیمسون، ارتفاعهای مثلثی‌اند که رأسهایش وسط پاره‌خطهای A_1H، B_1H و C_1H هستند.

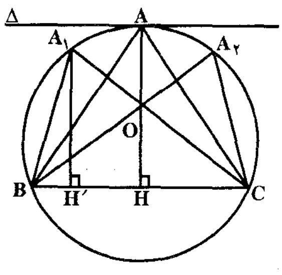
۵.۱.۱۰.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۰۱. رأسهای مثلث، ارتفاعهای مثلث

۵.۱.۱۱. شکلهای ایجاد شده



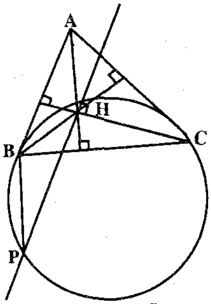
۵۰۴. از زاویه‌های برابر (شکل)، نتیجه می‌شود که، نقطهٔ A، روی محیط دایره‌ای است که از نقطه‌های C، D و E گذشته است؛ نقطهٔ B هم روی محیط همین دایره قرار دارد و در ضمن $DE \| AB$.



۵۰۵. چون BC و زاویهٔ مقابل به آن همواره ثابت هستند، بنابراین رأس A روی کمان درخور زاویهٔ ثابت A مقابل به پاره‌خط BC واقع است. بنابراین بین مثلثهای بالا مساحت مثلثی بیشتر است که ارتفاع آن بیشتر باشد. اما بین تمام این ارتفاعها، بزرگترین ارتفاع مربوط به مثلثی است که مماس در رأس Aی آن بر دایره، موازی ضلع BC باشد، پس اگر خط Δ را مماس بر دایره به موازات BC رسم کنیم و نقطهٔ تماس آن با دایره را A بنامیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۵۰۷. در مثلث ABC میانهٔ نظیر ضلع BC نصف این ضلع است. پس، این مثلث قائم‌الزاویه است.

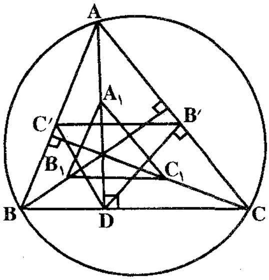
۵۰۸. PN و OQ هردو موازی ارتفاع BH، OP و QN موازی ارتفاع CH می‌باشند.



۵۰۹. چون $AB \| HP$ است، پس کافی است، ثابت کنید که $AB = HP$ نیز هست.

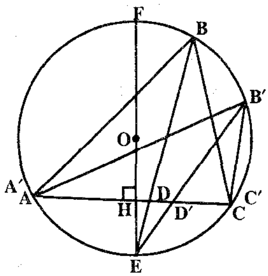
۵۱۰. عمودمنصف هر ضلع از مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۱۲.۱.۵ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



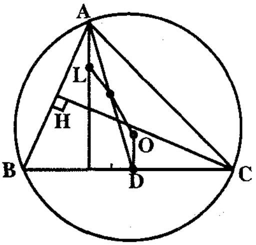
۵۱۱. اندازهٔ ضلعهای مثلث اولر نظیر مثلث ABC، $A_1B_1 = \frac{c}{۲}$، $A_1C_1 = \frac{b}{۲}$ و $B_1C_1 = \frac{a}{۲}$ است. در این مسأله نقطه‌های B' و C'، بترتیب، وسطهای ضلعهای AC و AB می‌باشند. پس $B'C' = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$ است. از طرفی در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADB و ADC پاره‌خطهای DC' و DB' میانهٔ وارد بر وترند، پس $DC' = \frac{AB}{۲} = \frac{c}{۲}$ و $DB' = \frac{AC}{۲} = \frac{b}{۲}$ می‌باشند. بنابراین مثلث $DB'C'$ با مثلث اولر نظیر مثلث ABC به حالت تساوی سه ضلع همنهشت است.

۵۱۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. قطر EF از دایره که عمودمنصف ضلع AC است در نقطهٔ H بر AC عمود است. مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC قرار می‌دهیم که $A'C'$ بر مساویش AC منطبق گردد و دو نقطهٔ B و B' در یک طرف ضلع AC واقع شوند. چون $\hat{B} = \hat{B'}$ است پس B' روی کمان درخور زاویهٔ B مقابل به AC، یعنی روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد و نیمسازهای زاویه‌های B و B' از نقطهٔ E وسط کمان $\overset{\frown}{AC}$ می‌گذرند. حال ثابت می‌کنیم که B' بر B منطبق است. اگر B' بر B منطبق نباشد، فرض می‌کنیم



$EB' < EB$ باشد، در این صورت $ED' > ED$ است. پس $B'D' < BD$ خواهد بود و این خلاف فرض است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $EB' > EB$ نیست، پس $EB' = EB$ و درنتیجه نقطهٔ B' بر نقطهٔ B منطبق است.

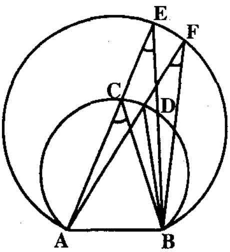
لذا دو مثلث $A'B'C'$ و ABC همنهشتند.



۵۱۴. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، D وسط CB، H نقطهٔ برخورد ارتفاعها و L وسط AH باشد، آن‌وقت، $AL = OD$ و چون AL با OD موازی است، OL، AD را نصف می‌کند، یعنی، L قرینهٔ O نسبت به وسط AD است.

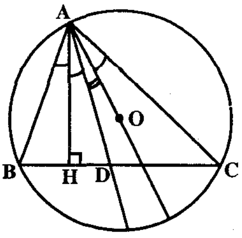
۵۱۵. مثلث متساوی الساقین ABC به قاعدهٔ ثابت AB و زاویهٔ رأس ثابت $B\hat{C}A = \alpha$. زیرا اگر مثلث نامتساوی‌الساقین ADB را رسم کنیم، نقطه‌های D و C روی کمان درخور زاویهٔ α روبه رو به پاره‌خط ثابت BC قرار دارند. AC را به اندازهٔ $CE = CB$ و AD را به اندازهٔ $DF = DB$ امتداد می‌دهیم و از E و F به B وصل می‌کنیم. در دو مثلث متساوی‌الساقین CBE و DBF داریم:

$$\hat{E} = \frac{A\hat{C}B}{۲} \text{ و } \hat{F} = \frac{A\hat{D}B}{۲} \text{ و } A\hat{D}B = A\hat{C}B = \alpha \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = \frac{\alpha}{۲}$$



بنابراین نقطه‌های E و F به کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ روبه رو به پاره‌خط ثابت BC تعلق دارند. اما مرکز دایرهٔ مربوط به این کمان درخور نقطهٔ C است، زیرا $CA = CB = CE$ است. بنابراین قطر ACE از وتر ADF در این دایره، بزرگتر است. درنتیجه محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC ازمحیط هر مثلث نامتساوی‌الساقین به قاعدهٔ ثابت AB و زاویهٔ رأس ثابت $A\hat{C}B = \alpha$ بزرگتر می‌باشد.

۵۱۷. اگر AD نیمساز زاویهٔ BAC باشد، می‌دانیم که $B\hat{A}H = O\hat{A}C$ است. بنابراین $O\hat{A}D = H\hat{A}D$ ، یعنی AD نیمساز زاویهٔ HAO نیز هست.



۵ . ۱ . ۱۳ . مسأله‌های ترکیبی

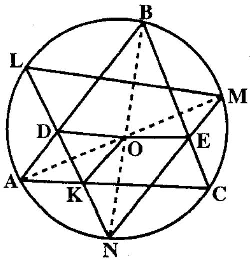
۵۲۰. اگر X، Y، Z تصاویر M بر روی ضلعهای ABC باشند، مزدوجهای همزاویهٔ AM، BM، و CM یعنی خطهای p ، q، r بر خطهای YZ ، ZX و XY عمودند. اگر M روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC باشد، نقطه‌های X، Y ، Z همخطند، پس p ، q و r موازی‌اند. بر عکس، اگر p ، q و r موازی باشند، YZ ، ZX و XY نیز موازی‌اند، یعنی نقطه‌های X ، Y و Z همخطند و M روی (O) قرار دارد.

۵۲۱. حکم مسأله از این حقیقت نتیجه می‌شود که : اگر بر هر ضلع مثلث یک دایره طوری رسم شود که مجموع مقدارهای زاویه‌ای کمانهای آنها (واقع در یک طرف با مثلث) برابر با 2π باشد، آن وقت این دایره‌ها در یک نقطه مشترکند.

۵۲۳. ۱. دو مثلث OBB' و OAB متساوی‌اند.

۲. $O\hat{B'}B = B\hat{A}O$ و $O\hat{C'}C = C\hat{A}O$.

۵۲۴. L، M و N را، رأسهای مثلث T_1 ، وسط ضلعهای AB، BC و CA از مثلث T_2 و O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، D و K را نقطه‌های برخورد LN با ضلعهای AB و AC می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که چهار ضلعی ADOK لوزی است. در واقع $AM \perp LN$ زیرا $\widehat{LB} + \widehat{BM} + \widehat{AN} = 180°$ ، بنابراین نقطه‌های D و K نسبت به خط راست AM قرینهٔ یکدیگرند (AM نیمساز زاویهٔ BAC است). همچنین نقطه‌های A و O نسبت به خط راست LN قرینهٔ یکدیگرند (LN نیمساز زاویهٔ ANB است). از این جا نتیجه می‌شود که $DO \parallel AC$. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $EO \parallel AC$ که در آن E را نقطهٔ برخورد پاره خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب نقطه‌های D، O و E روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است، یعنی DE موازی AC است. برای بقیهٔ نقطه‌های متناظر نیز مطلب به روش مشابه ثابت می‌شود. هر دو حکم a و b را شامل می‌شود.

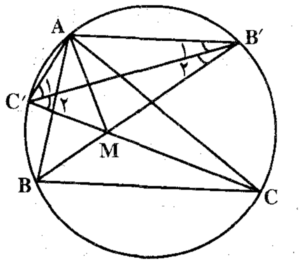


۵۲۵. گزینهٔ (د) درست است.

۵۲۶. دو مثلث $AB'C'$ و $MB'C'$ به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین همنهشت می‌باشند.

زیرا :

$$\begin{cases} \hat{B}'_1 = \hat{B}'_2 = \dfrac{\widehat{AC'}}{2} = \dfrac{\widehat{BC'}}{2} \\ \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2 = \dfrac{\widehat{AB'}}{2} = \dfrac{\widehat{B'C}}{2} . \\ B'C' = B'C' \end{cases}$$



از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $AB' = MB'$ و $AC' = MC'$. پس $B'C'$ عمود منصف AM است.

۲.۵. دایره‌های محاطی مثلث

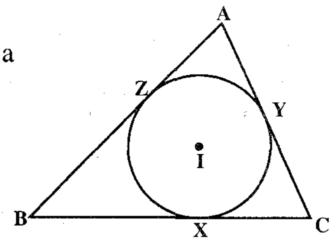
۱.۲.۵. تعریف و قضیه

۵۲۷. داریم :

$$AZ = AY \ , \ BZ = BX \ , \ CX = CY$$

و

$$\begin{aligned} AZ + AY &= AB + AC - BZ - CY \\ &= AB + AC - BX - CX \\ &= AB + AC - BC = 2p - 2a \end{aligned}$$



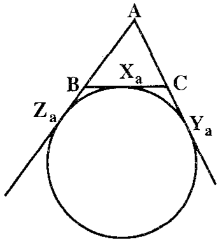
پس،
$$AZ = AY = p - a$$

به طور مشابه،
$$BZ = BX = p - b \ , \ CX = CY = p - c$$

۵۲۸. داریم :
$$AZ_a = AY_a \ , \ BX_a = BZ_a \ , \ CX_a = CY_a$$

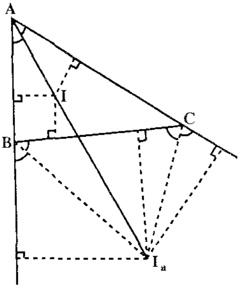
و

$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \\ &= AB + AC + BC = ۲p \end{aligned}$$



۵۲۹. اگر S مساحت مثلث ABC باشد، داریم (شکل) :

$S = ABI$ مساحت $+ BCI$ مساحت $+ CAI$ مساحت



$$= \frac{۱}{۲} rc + \frac{۱}{۲} ra + \frac{۱}{۲} rb = \frac{۱}{۲} r(a+b+c) = pr$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

۵۳۰. داریم : (شکل)

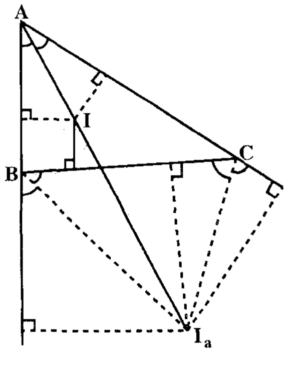
$S = ABI_a$ مساحت $+ACI_a$ مساحت $-BCI_a$ مساحت

$$= \frac{۱}{۲} cr_a + \frac{۱}{۲} br_a - \frac{۱}{۲} ar_a = \frac{۱}{۲} r_a (b+c-a) = r_a (p-a)$$

نتیجهٔ ۱. حاصلضرب چهار شعاع سه مماس مثلث، با مربع مساحت آن مثلث برابر است.

$$rr_a r_b r_c = S^۴ : p(p-a)(p-b)(p-c) = S^۴ : S^۲ = S^۲$$

نتیجهٔ ۲. معکوس شعاع داخلی برابر است با مجموع معکوس شعاعهای سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث.



$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

۲.۲.۵. شعاع

۱.۲.۲.۵. اندازهٔ شعاع

۵۳۱. با توجه به این که $r=\frac{S}{p}$ ، $S=۲\sqrt{۱۴}$ و $۲p=۱۴$ است، داریم :

$$p=۷ \Rightarrow r=\frac{۲\sqrt{۱۴}}{۷}$$

۲.۲.۲.۵. رابطهٔ بین شعاعها

۵۳۲. داریم :

$$۲S=۲pr=ah_a=bh_b=ch_c$$

$$۲p:\frac{۱}{r}=a:\frac{۱}{h_a}=b:\frac{۱}{h_b}=c:\frac{۱}{h_c}$$

$$=(a+b+c):(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c})$$

و چون $۲p=a+b+c$, قضیه اثبات می‌شود.

نتیجه. مجموع معکوسهای شعاعهای خارجی مثلث برابر است با مجموع معکوسهای ارتفاعهای مثلث.

۵۳۳. چون $A\hat{I}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$ است، پس $۱۲۰^\circ=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$ و از آن جا $\hat{B}=۶۰^\circ$ می‌باشد.

با توجه به این که $IB=۶cm$ و $I\hat{B}D=۳۰^\circ$ است، اگر نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی مثلث با ضلع BC را D بنامیم، $ID=r=۳cm$ است. (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است).

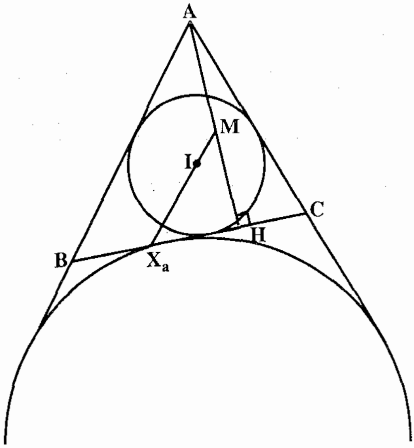
۳.۲.۵ نقطه و دایره

۱.۳.۲.۵. نقطه روی دایره

۵۳۴. اگر I نقطهٔ برخورد OA با دایره باشد، IA، IB و IC نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC می‌باشند.

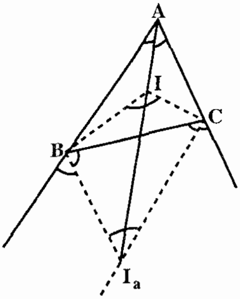
۲.۳.۲.۵. نقطه‌های همخط

۵۳۵. ثابت کنید، نقطهٔ M وسط ارتفاع AH، نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی درونی و X_a نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a همخطند.



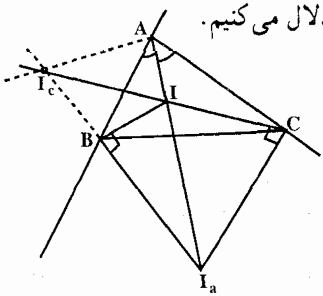
۳.۳.۲.۵. نقطه‌های همدایره

۵۳۶. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث و I_a مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث مماس بر ضلع a باشد، چهار ضلعی $BICI_a$ محاطی است، زیرا $B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ و $B\hat{I_a}C = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ است، پس $B\hat{I}C + B\hat{I_a}C = 180^\circ$ و در نتیجه نقطه‌های I، I_a ، B و C روی یک دایره واقعند.



۴.۲.۵. قطر

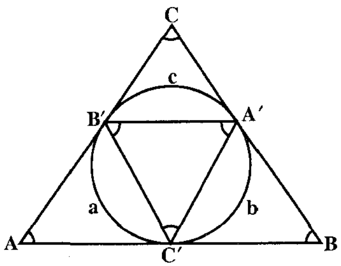
۵۳۷. اگر I_a و I_c، بترتیب، مرکزهای دایره های محاطی خارجی نظیر دو ضلع BC و AB از مثلث ABC باشند، واضح است که زاویه‌های I_cCI_a و I_cAI_a قائمه‌اند. در نتیجه دایره‌ای به قطر I_cI_a از این دو نقطه می‌گذرد. برای مرکزهای دایره‌های محاطی دیگر نیز، به همین ترتیب استدلال می‌کنیم.



۵.۲.۵.زاویه

۵.۲.۵.۱.اندازهٔ زاویه

۵۳۸. گزینهٔ (د) درست است. زیرا اگر نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی درونی با ضلعهای BC ، CA و AB، بترتیب، A' ، B' و C' بنامیم، با فرض $\overset{\frown}{B'C'} = a$ ، $\overset{\frown}{C'A'} = b$ و $\overset{\frown}{A'B'} = c$ داریم:



$$\hat{A}' = \frac{a}{۲} ، \hat{A} = ۱۸۰^\circ - a \Rightarrow a = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{A}' = \frac{a}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \hat{A}' < ۹۰^\circ$$

به همین روش: $\hat{B}' < ۹۰^\circ$ و $\hat{C}' < ۹۰^\circ$ است.

۵۳۹. $۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$

۵.۲.۶. پاره خط

۵.۲.۶.۱. اندازهٔ پاره خط

۵۴۱. الف. $x = ۲۲$ ، زیرا:

$$AR = y = ۹ \Rightarrow RC = ۱۹ - ۹ = ۱۰ = QC \ , \ QB = BP = ۱۲$$

$$\Rightarrow x = BQ + QC = ۱۲ + ۱۰ = ۲۲$$

ب. $y = ۶$ ، زیرا:

$$BQ = BP = ۱۲ \Rightarrow QC = ۲۵ - ۱۲ = ۱۳$$

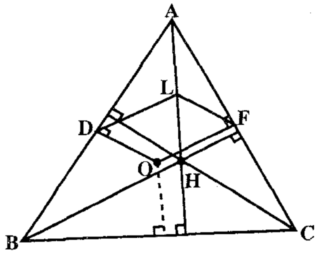
$$\Rightarrow RC = ۱۳ \Rightarrow AR = ۱۹ - ۱۳ = ۶ \Rightarrow y = AP = AR = ۶$$

۵۴۲. ثابت کنید مثلث AHF در رأس A متساوی الساقین است.

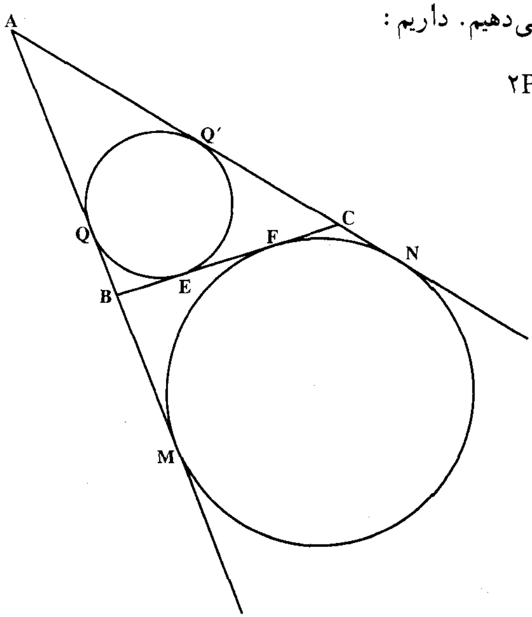
۵.۲.۶.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۴۴. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محاطی باشد، و K و L نقطه‌های تماس این دایره با ضلعهای AC و AB باشند. خط راستی که از N به موازات BC می‌گذرد، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های R و M قطع می‌کند. چهار ضلعی OKMNچهار ضلعی محاطی است. ($O\hat{N}M = O\hat{K}M = 90^\circ$) ؛ در نتیجه، $O\hat{M}N = O\hat{K}N$ ، به همین ترتیب، $O\hat{R}N = O\hat{L}N$ ، اما $O\hat{L}N = O\hat{K}N$ ، بنابراین، $O\hat{R}N = O\hat{M}N$ ، مثلث ORM متساوی‌الساقین است و ON ارتفاع آن است ؛ بنابراین $RN = NM$.

۵۴۵. اگر H نقطهٔ اولر نظیر ارتفاع AH، O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و D و E بترتیب وسط ضلعهای AB و AC باشند، چهارضلعی ODLF متوازی‌الاضلاع است، زیرا $FL \parallel HC$ و $FL = \frac{HC}{۲}$ ، همچنین $OD \parallel HC$ و $OD = \frac{HC}{۲}$ است. بنابراین OF و DL موازی و مساوی‌اند.



۵۴۶. محل تماس دایرهٔ محاطی خارجی با امتداد ضلعهای AB و AC را، M و N نامیده و محیط مثلث را با ۲P نشان می‌دهیم. داریم :



$$
\begin{aligned}
۲P &= AB + BC + AC \\
&= AB + BF + FC + AC \\
&= AB + BM + CN + AC \\
&= AM + AN = ۲AM \\
&\Rightarrow AM = AN = P
\end{aligned}
$$

از طرفی داریم:

$$FC = CN = AN - AC = p - b$$

$$BE + BQ + EC + CQ' + AQ' + AQ = ۲P$$

$$\Rightarrow ۲BE + ۲CQ' + ۲AQ' = ۲P \Rightarrow BE + AC = P \Rightarrow BE = p - b$$

بنابراین $CF = BE$. پس وسط EF بر وسط BC منطبق است.

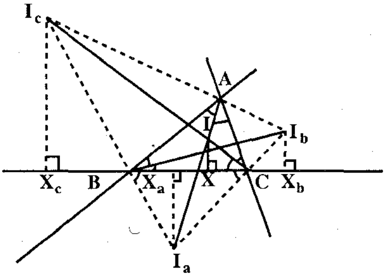
۵۴۸. در واقع، داریم:

$$BX = p - b \ , \ CX_a = p - b$$

نتیجه. داریم:

$$XX_a = BC - BX - CX_a = a - ۲(p - b) = b - c$$

به طور مشابه، $YY_b = a - c \ , \ ZZ_c = a - b$



۵۴۹. داریم (شکل):

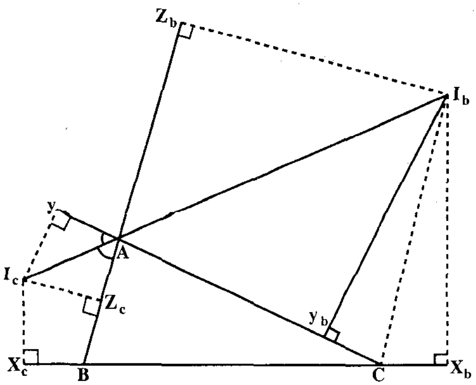
$$BX_c = CX_c - CB = p - a \ ,$$

$$CX_b = BX_b - BC = p - a$$

پس نقطه‌های X_b و X_c همنوا هستند.

$$X_bX_c = X_bC + BC + BX_c = (p - a) + a + (p - a) = b + c$$

که اثبات بخش دوم قضیه به حساب می‌آید. برای دو ضلع دیگر مثلث ABC نیز نتیجهٔ مشابهی صادق است.



۵.۲.۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵.۲.۷.۱. خط نیمساز است

۵۵۱. با توجه به شرطهای داده شده در مسأله و این که IC نیمساز زاویهٔ ACB است، نقطهٔ برخورد IC با دایرهٔ O' را C' بنامید و ثابت کنید که $\overset{\frown}{C'K} = \overset{\frown}{C'H}$ است.

۵.۲.۷.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵۵۲. مسألهٔ کلی b) را حل می‌کنیم. فرض کنید، خط راست l محیط چند ضلعی محیطی را در دو نقطهٔ R و Q قطع و این محیط را به دو بخش برابر تقسیم کند. در این صورت، اگر O را مرکز دایرهٔ محاطی چند ضلعی بگیریم، خط شکستهٔ شامل پاره‌خطهای راست OR و OQ، مساحت چند ضلعی را به دو بخش برابر تقسیم خواهد کرد (این مطلب، شبیه دستور $S = \frac{1}{2}Pr$ برای مساحت یک چند ضلعی محیطی به محیط P ثابت می‌شود).

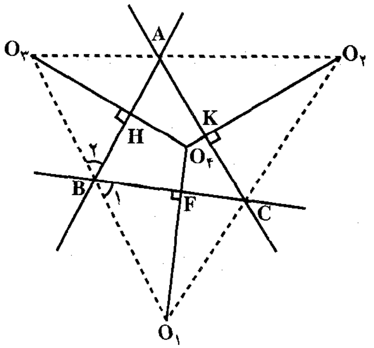
ولی می‌دانیم، خط راست PQ هم، مساحت چند ضلعی را نصف می‌کند، بنابراین نقطهٔ O بر خط راست PQ واقع است.

∇ حل این مسأله جالب است که : برای مثلث و برای n ضلعی محیطی، چند خط راست از این گونه وجود دارد؟

۵.۲.۷.۳. خطها همرسند

۵۵۴. نقطهٔ برخورد O_1F و O_3H را O_4 می‌نامیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ O_1BF و O_3BH داریم :

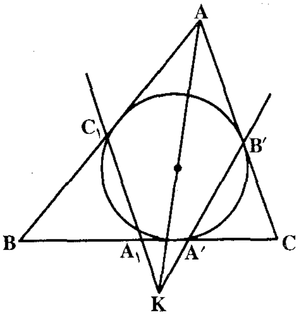
$$\hat{O}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ, \hat{O}_3 + \hat{B}_2 = 90^\circ, \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$



بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$ است. یعنی نقطهٔ O_4 روی عمودمنصف O_1O_3 است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطهٔ برخورد O_1F و O_2K روی عمودمنصف O_1O_2 و نقطهٔ برخورد O_2K و O_3H روی عمودمنصف O_2O_3 قرار دارند. چون عمودمنصفهای ضلعهای هر مثلث همرسند، پس خطهای O_1F، O_2K و O_3H از یک نقطه می‌گذرند.

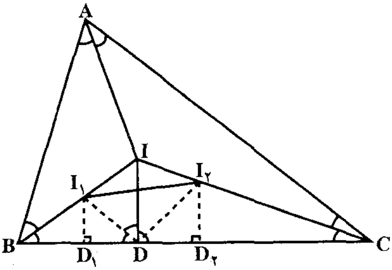
۵۵۷. A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 ، نیمسازهای زاویه‌های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۵۵۸. وسطهای AB و BC را با C_1 و A_1 و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث با AC و BC را با B' و A' نشان دهید. برای روشنی وضع، فرض کنید b و c طول ضلعهای مثلثند، ($c \geq b$) در این صورت، نیمساز زاویهٔ A، امتداد C_1A_1 را در نقطه‌ای مانند K طوری قطع می‌کند که $A_1K = \frac{c-b}{2}$. خط راست $B'A'$ باید از همین نقطهٔ K بگذرد، زیرا مثلثهای KA_1A' و $A'B'C'$ متساوی‌الساقیند $A'C = B'C$ ، $A_1K = A_1A'$ و $A'\hat{A}_1K = A'\hat{C}B'$.



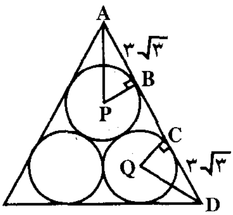
۵.۲.۷.۴. خط مماس بر دایره است

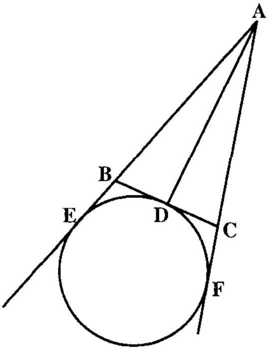
۵۵۹. اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلع BC باشد، خط AD را رسم می‌کنیم و نقطه‌های I_1 و I_2 مرکزهای دایره‌های محاطی دو مثلث ADB و ADC را مشخص می‌سازیم. کافی است ثابت کنیم I_1I_2 بر AD عمود است.



۵.۲.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶۰. (د) مطابق با شکل، PB و QC شعاعهایی هستند که بر مماس مشترک دایره‌های P و Q فرود آمده‌اند. چون $P\hat{A}B = Q\hat{D}C = 30^\circ$ ، $AB = CD = 3\sqrt{3}$ ، از طرف دیگر $BC = PQ = 6$، بنابراین $AD = 6 + 6\sqrt{3}$ و در نتیجه محیط مثلث برابر $18 + 18\sqrt{3}$ است.





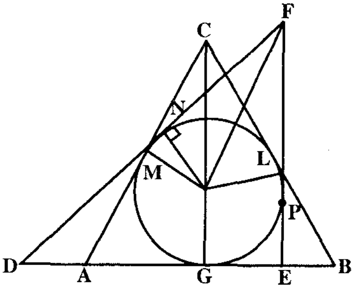
۵۶۱. نقطه‌های تماس ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC با دایرهٔ محاطی برونی واقع در درون زاویهٔ A را بترتیب D، E و F می‌نامیم. با فرض $۲P =$ محیط مثلث، می‌دانیم که $AE = AF = P$ است اما $BD = BE$ و $CF = CD$ است، پس $AB + BD = AC + CD = P$، یعنی خط AD محیط مثلث ABC را نصف کرده است.

۵۶۲. از O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث به رأسهای A، B و C وصل می‌کنیم. داریم :

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAB}$$

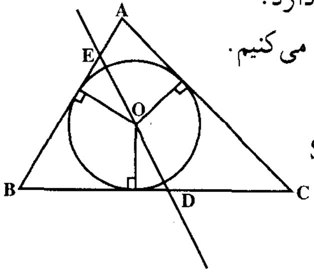
$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}BC.r + \frac{۱}{۲}AC.r + \frac{۱}{۲}AB.r$$

$$S = \frac{۱}{۲}r(BC + AC + AB) \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۲(۲P) \Rightarrow S = ۲P$$



۵۶۳. اگر قاعدهٔ BC از مثلث ABC و شعاع دایرهٔ محاطی آن ثابت باشد، مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ BC کمترین محیط را دارد، زیرا $\hat{C} > \hat{F}$ است.

مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OMC و ONF یک ضلع مساوی دارند. از آن جا که، به زاویهٔ NFO که کوچکتر از زاویهٔ MCO است، مایل OF را که از مایل OC بزرگتر است نظیر می‌کند. در نتیجه فاصلهٔ NF از پای عمود بیشتر از MC است. همچنین $MC + CL < FN + FP$. اما $DN + EP = DE$ ؛ و $AM + BL = AB = DE$. بنابراین تغییرات محیط تنها به تغییرات MC و NF وابسته است، پس مثلث متساوی‌الساقین کمترین محیط را دارد.



۵۶۴. از O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، قاطع DOE را رسم می‌کنیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم :

$$S_{BDE} : S_{ACDE} = (BE + BD) : (EA + AC + CD)$$

می‌دانیم که :

$$S_{BDE} = S_{BOE} + S_{BOD} = \frac{r}{۲}(BE + BD)$$ و

$$S_{ACDE} = S_{OAE} + S_{OAC} + S_{OCD} = \frac{r}{۲}(EA + AC + CD)$$

از تقسیم این دو رابطه حکم ثابت می‌شود.

۵۶۵. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع $AE = AF = p - a$ و دایرهٔ به مرکز B و شعاع $BD = BF = p - b$ در نقطهٔ F بر هم مماسند. زیرا خط المرکزین این دو دایره برابر مجموع شعاعهای آنهاست.

$$AB = AF + BF = p - a + p - b = ۲p - a - b = a + b + c - a - b = c$$

همچنین است برای دایره‌های (A, AE) و (C, CE) ؛ و (B, BD) و (C, CD). این دایره‌ها دو به دو مماس برونی‌اند. در مورد دایره‌هایی که بر نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی می‌گذرند، برخی دایره‌ها مماس برون و برخی مماس درون هستند.

۵۶۶. زاویهٔ سوم مثلث مقدار ثابتی دارد و رأس آن همواره از مرکز دایره به یک فاصله است.

۹.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی

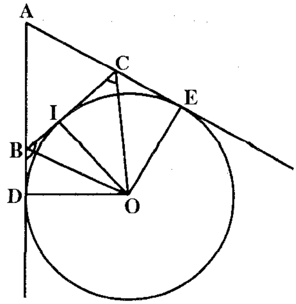
۵۶۸. داریم : $BI = BD$ و $CI = DE$ است، پس :

$$AB + BC + AC = AB + BD + AC + CE = ۲AD = ۲AE = \text{مقدار ثابت}$$

و $\hat{COI} = \frac{۱}{۲}\hat{EOI}$ و $\hat{BOI} = \frac{۱}{۲}\hat{DOI}$ از جمع این دو رابطه داریم :

$$\hat{BOI} + \hat{COI} = \hat{BOC} = \frac{۱}{۲}(\hat{DOI} + \hat{EOI})$$

$$\hat{BOC} = \frac{۱}{۲}(\hat{EOD}) = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{A}) = \text{مقدار ثابت}$$



۳.۵. دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

۲.۳.۵. شعاع

۱.۲.۳.۵. اندازهٔ شعاع

۵۷۱. با معلوم بودن دو زاویه و یک ضلع، مثلث ABC را رسم می‌کنیم. آن گاه با رسم دایره‌های محیطی و محاطی آن، شعاعهای این دایره‌ها مشخص می‌شود. اگر تنها ضلع BC و زاویهٔ A معلوم باشند، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مشخص می‌شود ولی شعاع دایرهٔ محاطی آن مشخص نیست.

۲.۲.۳.۵. رابطهٔ بین شعاعها

۵۷۲. داریم:

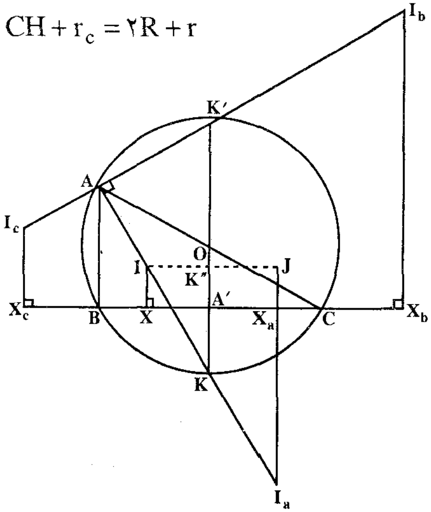
$$r_a - r = ۲KA' = ۲(KO - OA')$$

پس

$$۲OA' + r_a = AH + r_a = ۲KO + r = ۲R + r$$

و به طور مشابه،

$$BH + r_b = CH + r_c = ۲R + r$$



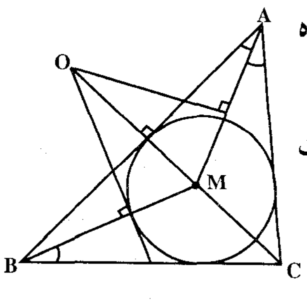
۳.۳.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۵. نقطه درون دایره

۵۷۳. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB باشد، آن وقت

$$M\hat{A}B = ۹۰^\circ - O\hat{M}B = B\hat{M}C - ۱۸۰^\circ$$

زاویهٔ MAC به همین اندازه است.



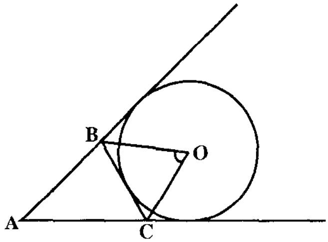
۲.۳.۳.۵. نقطه روی دایره

۵۷۴. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم و وسطهای کمانهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BC}$ را بترتیب M، L و K می‌نامیم. اگر از رأسهای مثلث به نقطه‌ای از این نقطه‌ها که مقابلشان می‌باشد وصل کنیم، خطهای حاصل نیمسازهای داخلی زاویه‌ها هستند و در نتیجه در نقطه‌ای مانند I همرسند. اگر به مرکز M و شعاع MI دایره‌ای رسم کنیم تا امتداد MI را در I_c قطع کند، زاویهٔ IBI_c محاطی و روبه‌رو به قطر است، پس BI_c نیمساز خارجی زاویهٔ B و در نتیجه I_c مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع ABاست.

۳.۳.۳.۵. نقطه برون دایره

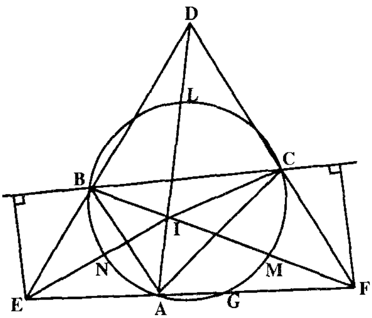
۵۷۵. اگر دایرهٔ محاطی خارجی، بر امتداد ضلعهای AB و AC ی مثلث مماس و O مرکز آن باشد، آن وقت بسادگی معلوم می‌شود که

$$B\hat{O}C+\hat{A}=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}\neq 180^\circ \,.$$



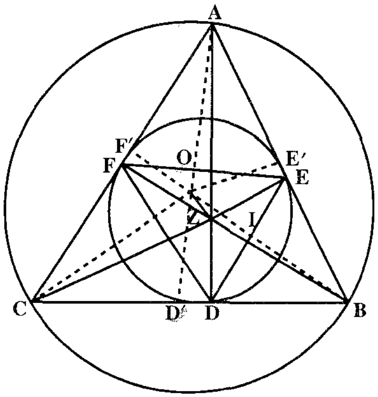
۴.۳.۳.۵. نقطه‌های همدایره

۵۷۶. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و مرکز دایره‌های محاطی آن را I، D ، E و F می‌نامیم. نیمسازهای زاویه‌های درونی AD ، BE و CF بر نیمسازهای زاویه‌های برونی عمودند و این نیمسازها ارتفاعهای مثلث ارتفاعی DEF می‌باشند. در نتیجه دایرهٔ محاطی مثلث ABC دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث DEF است و این دایره از نقطهٔ L وسط ID ، و از نقطهٔ G وسط FE و ...



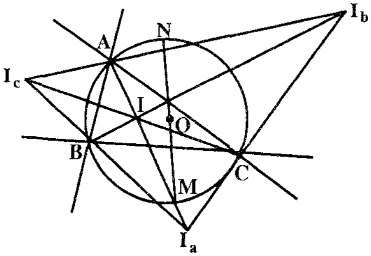
۵.۳.۳.۵. نقطه‌های همخط

۵۷۷. مثلث داده شده را DEF فرض می‌کنیم و نقطهٔ برخورد نیمسازهای آن را I می‌نامیم. در این صورت نیمسازهای خارجی مثلث ABC را خواهند ساخت، یعنی A، B و C



مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مثلث خواهند بود. می‌دانیم که عمودهای رسم شده از A ، B و C بر ضلعهای مثلث DEF در یک نقطه مانند O همرسند و این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. زیرا این عمودها عمود منصفهای ضلعهای این مثلثند. نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث DEF است. چون دایرهٔ محیطی همین مثلث DEF، در ضمن دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC خواهد بود، زیرا می‌دانیم که AD ، BF و CE ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند و نقطهٔ I محل برخورد آنهاست. از آن جا نقطهٔ Z مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC روی IO واقع است و به فاصلهٔ مساوی از I نقطهٔ برخورد ارتفاعها و از O مرکز دایرهٔ محیطی قرار دارد.

۵.۳.۴. قطر



۵۷۹. اگر BC ضلع ثابت مثلث ABC و I، I_a و I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی آن باشند، II_a و I_bI_c قطرهای دایره‌هایی هستند که از دو رأس B و C می‌گذرند. نقطهٔ M وسط پاره خط II_a وسط کمان ثابت $\overset{\frown}{BC}$ و نقطهٔ N وسط پاره خط I_bI_c وسط کمان $\overset{\frown}{CAB}$ است، پس خط MN قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC و بر وتر BC عمود است. لذا مرکزهای دو دایره، انتهای دو قطری هستند که بر BC عمود می‌باشد.

۵۸۰. اگر E' نقطهٔ برخورد EO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، ثابت کنید، مثلث $E'EI_a$ متساوی‌الساقین است.

۵.۳.۵. زاویه

۵۸۱. فرض کنید، خطی که از I_c به موازات BC رسم می‌شود، I_bX_b را در J' قطع کند (شکل). داریم :

$$I_b\hat{I_c}J' = \frac{۱}{۲}(\hat{B}-\hat{C})$$

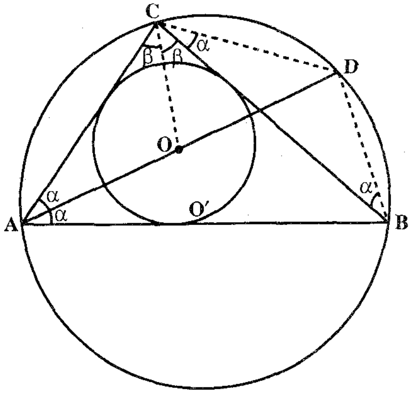
۶.۳.۵. پاره خط

۱.۶.۳.۵. رابطهٔ بین پاره خطها

۵۸۲. (د) چون AB و AC بر دایرهٔ کوچک مماسند و AD از مرکز آن می گذرد، داریم:

(شکل را ملاحظه کنید) $\widehat{CAD} = \widehat{BAD} = \alpha$

همچنین $\widehat{ACO} = \widehat{BCO} = \beta$



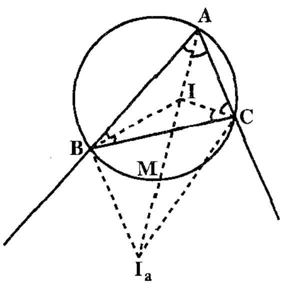
بنابراین کمانهای $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{BD}$ مساوی و در نتیجه وترهای آنها نیز برابرند: $CD = BD$.

حال با اثبات $\widehat{OCD} = \widehat{COD}$ نشان می‌دهیم که $CD = OD$ زیرا:

$$\widehat{OCD} = \widehat{OCB} + \widehat{BCD} = \beta + \alpha$$

و زاویهٔ COD یک زاویهٔ خارجی مثلث AOC و برابر مجموع زاویه‌های داخلی غیرمجاورش یعنی $\alpha + \beta$ است. بنابراین $CD = OD$ و (د) گزینهٔ درست است.

۵۸۳. اگر I و I_a بترتیب مرکز دایرهٔ محاطی درونی و دایرهٔ برونی مماس بر ضلع a و M نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی مثلث ABC با II_a باشد، باید ثابت کنید که $MI = MI_a$ است.



۵ . ۳ . ۷ . خطهای : موازی، عمود بر هم، نیمساز، همرس، ...

۵ . ۳ . ۷ . ۱ . خطها همرسند

۵۸۴. ثابت کنید که ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ با ضلعهای متناظر از مثلث ABC موازی‌اند.

۵ . ۳ . ۷ . ۲ . خط مماس بر دایره است

۵۸۵. ثابت کنید که با AD ، L همان زاویه‌هایی را تشکیل می‌دهد که خط راست BCمماس بر دایرهٔ محاطی مثلث. بنابراین، نتیجه می‌شود که مماس دیگر بر دایرهٔ محاطی که از D می‌گذرد، با L موازی است.

۵ . ۳ . ۸ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۶. زیرا مثلث اصلی، مثلث T (مثلث حاصل از برخورد مماسهایی که بر دایرهٔ محیطی مثلث در رأسهای مثلث رسم می‌شوند) برای مثلث دوم خواهد بود و حکم ثابت است. حکم برای دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است.

۵ . ۳ . ۹ . مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. الف) $B\hat{A}C = \alpha$ ، $A\hat{B}C = \beta$ و $B\hat{C}A = \gamma$ می‌نامیم (شکل)، در این صورت، داریم :

$D\hat{A}B = D\hat{A}C = \frac{\alpha}{2}$ که از آن جا، به دست می‌آید : $BD = DC$.

چون $O\hat{D}C = A\hat{B}C = \beta$

$$C\hat{O}D = O\hat{C}B + B\hat{C}D = \frac{1}{2}A\hat{C}B + B\hat{A}D = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

بنابراین :
$$C\hat{O}D = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \alpha+\gamma - \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\alpha+\gamma}{2} = O\hat{C}D$$

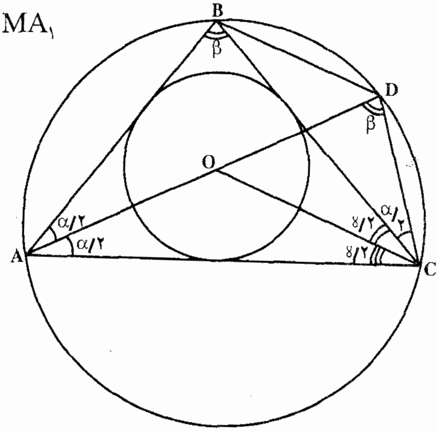
به نحوی که $DO = DC$.

ب) $\overset{\frown}{AD} = 2\alpha$ ، $\overset{\frown}{AB} = 2\beta$ ، $\overset{\frown}{BC} = 2\gamma$ و $\overset{\frown}{CD} = 2\delta$ می‌نامیم و وسط کمانهای BC و CD را به ترتیب، M و N می‌گذاریم (شکل). در این صورت، نقطه‌های D_1 و B_1 ، بترتیب، بر پاره‌خطهای راست AM و AN، و A_1 در نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای BN و

DM واقع می‌شوند.

با توجه به بخش الف) داریم :

$$MD_{۱} = MB = MC = MA_{۱}$$



بنابراین، مثلث $D_{۱}MA_{۱}$ متساوی‌الساقین است و

$$D_{۱}\hat{A}_{۱}M = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - A\hat{M}D) = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

به همین ترتیب، به دست می‌آید :

$$B_{۱}\hat{A}_{۱}N = ۹۰^\circ - \frac{\beta}{۲}$$

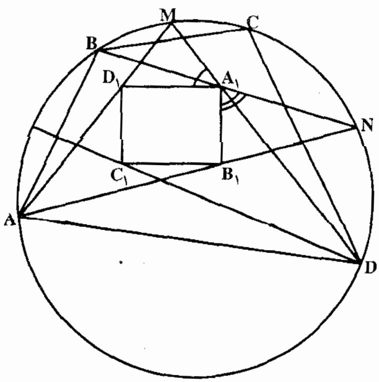
از آن جا که

$$D\hat{A}_{۱}N = B\hat{A}_{۱}M = \frac{\gamma + \delta}{۲}$$

بنابراین

$$D_{۱}\hat{A}_{۱}B_{۱} = ۱۸۰^\circ - D_{۱}\hat{A}_{۱}M - (B_{۱}\hat{A}_{۱}N - D\hat{A}_{۱}N)$$
$$= ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) - (۹۰^\circ - \frac{\beta}{۲}) + \frac{\gamma + \delta}{۲}$$
$$= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{۲} = ۹۰^\circ$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، سه زاویهٔ دیگر چهارضلعی $A_{۱}B_{۱}C_{۱}D_{۱}$ هم، قائمه‌اند.

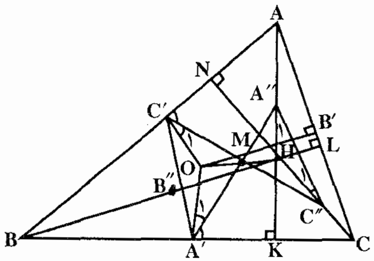


۴.۵. دایره‌های نه نقطه، بروکارد، لوموان، ...

۱.۴.۵. دایرهٔ نه نقطه

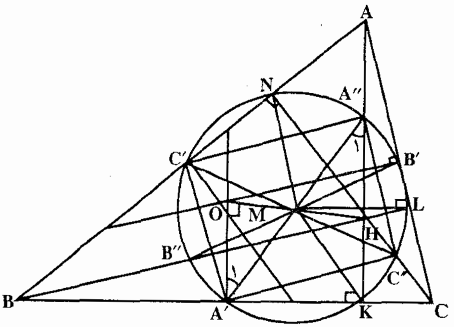
۱.۱.۴.۵. تعریف و قضیه

۵۹۰. اوّلاً. از A' به C' وصل می‌کنیم. دو مثلث $OC'A'$ و $HA''C''$ به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین همنهشتند. چون در مثلث



AHC داریم: $A''C''\|AC$ و $A''C''=\frac{AC}{2}$. از طرفی در مثلث ABC چون A' و B' وسطهای BC و AC هستند $A'C'\|AC$ و $A'C'=\frac{AC}{2}$، پس $A''C''=A'C'$ و $A''C''\|A'C'$ است.

از طرفی چون ضلعهای دو زاویهٔ $\hat{C}''_1$ و $\hat{C}'_1$، همین طور ضلعهای زاویه‌های $\hat{A}'_1$ و $\hat{A}''_1$ با یکدیگر موازی‌اند، این چهار زاویه نیز دو به دو با هم مساوی‌اند و بنابراین دو مثلث $OC'A'$ و $HC''A''$ همنهشتند. از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $A'O=A''H$ و $OC'=C''H$ اما $A''H=\frac{AH}{2}$ و $C''H=\frac{CH}{2}$، پس $OC'=\frac{CH}{2}$ و $OA'=\frac{AH}{2}$ به همین ترتیب ثابت می‌شود که $OB'=\frac{BH}{2}$.



ثانیاً. دو مثلث OMA' و $A''HM$ بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین همنهشتند چون $\hat{A}'_1=\hat{A}''_1$ زیرا $AK\|OA'$ و $A'A''$ قاطع از طرفی $OA'=A''H$ چون $M\hat{H}A''=M\hat{O}A'$، لذا نتیجه می‌شود که $MO=MH$

و $MA'' = MA'$ یعنی $A'A''$ از نقطهٔ M وسط OH می‌گذرد. حال از C' به C'' وصل می‌کنیم تا خط OH را در نقطهٔ F قطع کند. دو مثلث $C'FO$ و $C''HF$ همنهشتند. یعنی $FO = FH$ و $FC' = FC''$ است. یعنی F وسط OH است در نتیجه F بر M منطبق است، پس $MC' = MC''$ است، پس $C'C''$ از نقطهٔ M وسط OH می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $B''B'$ نیز از M وسط OH می‌گذرد. پس چهار پاره خط $A'A''$ ، $B'B''$ ، $C'C''$ و OH از یک نقطه مانند M ، که وسط هر یک از آنهاست می‌گذرند.

ثالثاً. چهار ضلعی $C'A''C''A'$ مستطیل است، زیرا $AC \parallel A'C' \parallel A''C''$ و $BL \parallel A'C'' \parallel A''C'$ و $BC \perp AC$ است. پس دو قطر آن با هم برابرند. لذا $MC'' = MC' = MA'' = MA'$ است، در مثلث $C'A'C''$ چون $A'M$ میانه است، پس $MA' = MC' = MC''$ به همین ترتیب ثابت می‌شود که $MA'' = MC' = MC''$ و $MB' = MB'' = ML$ ، پس :

$$MK = MB' = MB'' = ML = MN = MC' = MC'' = MA'' = MA'$$

بنابراین نقطهٔ M از نه نقطهٔ A' ، B' ، C' ، A'' ، B'' ، C'' ، K ، L و N به یک فاصله است. دایرهٔ به مرکز M و به شعاع یکی از پاره‌خطهای بالا، دایرهٔ اولر یا دایرهٔ نه نقطه یا دایرهٔ فوئرباخ نامیده می‌شود.

دایرهٔ نه نقطه، در هر مثلث، وسطهای سه ضلع، پاهای ارتفاعها و وسطهای پاره‌خطهایی که رأسها را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کنند نه نقطه‌اند واقع بر یک دایره، که شعاع این دایره که همان شعاع دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای است (مثلثی که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث است). نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث یعنی برابر $\frac{R}{۲}$ است و مرکز آن روی خط اولر واقع است و از مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به یک فاصله است.

این مسأله را اغلب اروپاییان به اولر نسبت می‌دهند، زیرا اولر در سال ۱۷۶۵ ثابت کرده است که دایرهٔ محیطی مثلث ارتفاعیه بر دایرهٔ محیطی مثلث میانه‌ای منطبق است اما اثبات کامل قضیه برای نخستین بار در سال ۱۸۲۱ توسط ژان ویکتور پونسله Jean Victor Poncelet (۱۸۰۰ ــ ۱۸۳۴) منتشر شده است. خیلی دیرتر از آن فوئر باخ K. Feuerbach (۱۸۰۰ ــ ۱۸۳۴) همان استنباط جزئی اولر را از نو به دست آورد و علاوه بر آن این خاصیت مهم را که دایرهٔ نه نقطه بر دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس است نیز ثابت نمود. از این رو بسیاری از نویسندگان دایرهٔ نه نقطه را دایرهٔ فوئرباخ می‌نامند.

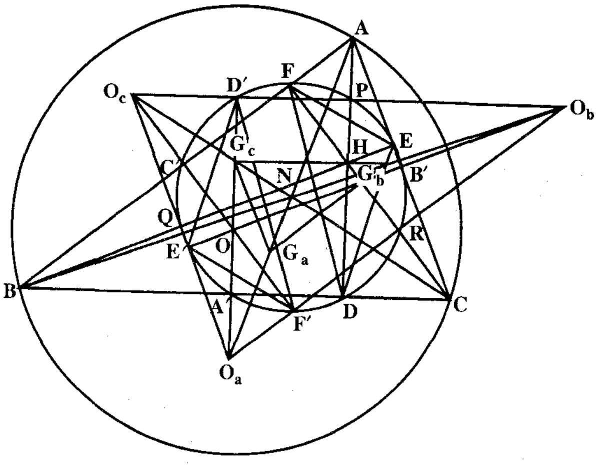
۲.۱.۴.۵. شعاع

۵۹۱. مثلث ABC، مثلث ارتفاعیه مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۵۹۳. در واقع، این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث پادک (ارتفاعی) مشترک آنهاست.

۵۹۴. در واقع، شعاع دایره‌های محیطی این مثلثها با قطر دایرهٔ محیطی دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها برابرند.

۵۹۵. O، O_a ، O_b و O_c مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلث ABC، BCH ، CHA و HAB از یک گروه مرکز ارتفاعی (شکل)، نقطه‌های متقارن H، A، B و C یعنی مرکزهای ارتفاعی این مثلثها، نسبت به N ، مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها هستند ؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



۵۹۶. دو چهارضلعی مرکز ارتفاعی HABC و $OO_aO_bO_c$ نسبت به N مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ گروه HABC متقارنند. پس دایرهٔ نه نقطهٔ $OO_aO_bO_c$ نسبت به (N)، یعنی دایرهٔ نه نقطهٔ HABC متقارن است. چون متقارن هر دایره نسبت به مرکز آن دایره خود آن دایره است، قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۷. در واقع، دو گروه HABC و $OO_aO_bO_c$ نسبت به (N) ، یعنی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترکشان متقارنند ؛ پس گروه اوّل را می‌توان از گروه دوم، دقیقاً به همان صورتی که گروه دوم از گروه اوّل به دست آمده است، به دست آورد.

۵.۴.۱.۳. نقطه و دایره

۵.۴.۱.۳.۱. نقطه روی دایره

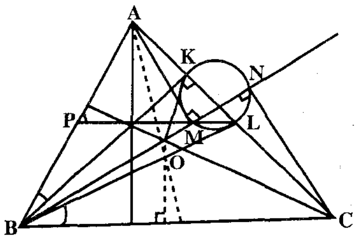
۵۹۹. ۶ نقطه.

۶۰۰. بیشترین تعداد نقطهٔ برخورد، ۶ نقطه و کمترین تعداد نقطهٔ برخورد ۳ نقطه است.

۶۰۳. وتر مشترک دایره‌های نه نقطهٔ مثلثهای OHA و OHB را تعیین کنید و ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث OHC نیز از دو سر این وتر مشترک می‌گذرد.

۵.۴.۱.۳.۲. نقطه‌های همدایره

۶۰۴. ثابت می‌کنیم که M و N روی میانخطهای مثلث ABC، متناظر با آنها، واقعند. اگر P وسط AB باشد، آن وقت $M\hat{P}A = 2A\hat{B}M = A\hat{B}C = A\hat{P}L$. برای روشنی وضع، فرض کنید، ABC مثلثی حاده باشد و $\hat{C} \geq \hat{A}$، در این صورت،



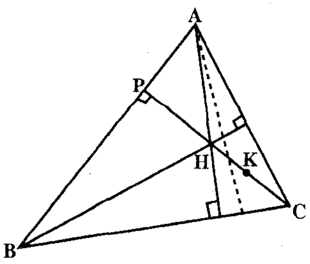
$M\hat{N}K = 180^\circ - K\hat{N}B = K\hat{C}B = M\hat{L}K$ (از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که نقطه‌های K ، N، B و C بر روی یک دایره واقعند و ML با BC موازی است). بنابراین، نقطه‌های M ، L ، N و K بر روی یک دایره واقعند. بعلاوه

$$L\hat{M}K = P\hat{M}B + N\hat{M}K = \frac{1}{2}\hat{B} + B\hat{M}K = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{A}$$

اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث LMK باشد، آن وقت

$$L\hat{O}K = 2L\hat{M}K = \hat{B} + 2\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ - L\hat{P}K$$

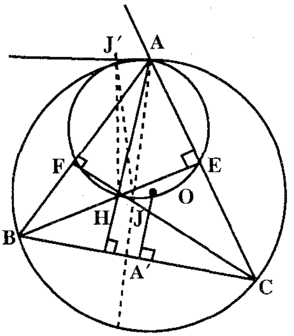
$(L\hat{P}K = A\hat{P}K - A\hat{P}L = 180^\circ - 2\hat{A} - \hat{B} = \hat{C} - \hat{A})$ یعنی، O بر دایره‌ای واقع است که از نقطه‌های L، P و K می‌گذرد، و این درست همان دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است.



۶۰۵. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، مثلثهای ABC و AHB، AHC و BHC یک دایرهٔ نه نقطه دارند و هر یک از ۴ مثلث بالا شش دایره از دایره‌های جواب مسأله را مشخص می‌کند. به عنوان مثال نیمساز زاویهٔ CAH دو دایرهٔ O و O′ را مشخص می‌کند. دایرهٔ O از نقطهٔ K وسط CH و از پای عمود AP

که از A بر CH رسم شده و از L و M تصویرهای رأسهای C و H روی نیمساز AML می‌گذرد.

۵.۴.۱.۳.۳. نقطه‌های همخط



۶۰۶. اگر J و J′ پای عمودهایی باشند که از نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC بر نیمسازهای زاویهٔ داخلی و خارجی A فرود آمده‌اند، این دو نقطه روی دایره‌ای به قطر AH قرار دارند. همچنین این نقطه‌ها از دو انتهای قطری از دایرهٔ محیطی مثلث AFE که بر ضلع EF عمود است واقعند. دایره‌ای به قطر BC از نقطه‌های E و F می‌گذرد. همچنین دایرهٔ نه نقطه، از این دو نقطه می‌گذرد. پس مرکزهای A′ و N از این دایره‌ها روی عمود بر EF یعنی JJ′ قرار دارند.

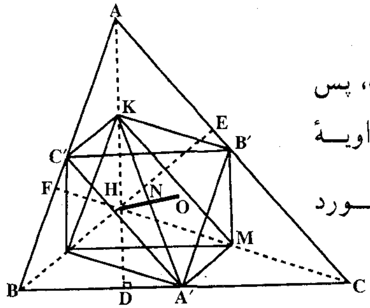
۵.۴.۱.۴. کمان

۶۰۸. EF بر OA و بر موازی آن A′K عمود است. بنابراین قطر A′K وتر EF و کمان EF را در وسط آنها قطع می‌کند.

۵.۴.۱.۵. پاره خط

۶۰۹. اگر H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث باشد وسط HP روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است.

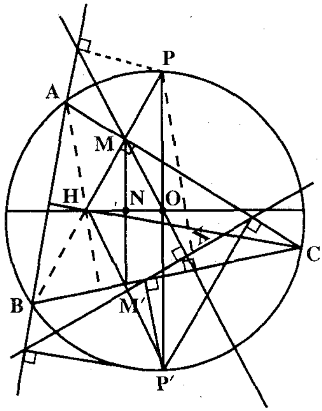
۵.۴.۱.۶. زاویه



۶۱۲. KD⊥BC و KA′ قطر دایرهٔ نه نقطه است، پس این دایره با ضلع BC تحت زاویهٔ $D\hat{K}A' = H\hat{K}N = H\hat{A}O = |\hat{B} - \hat{C}|$ برخورد می‌کند.

۷.۱.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۷.۱.۴.۵. خطها برهم عمودند

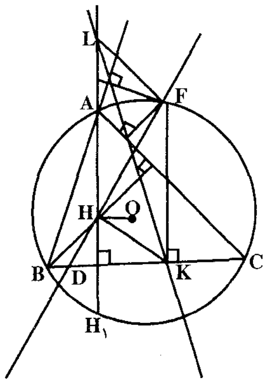


۶۱۳. اگر OH خط اولر نظیر مثلث ABC و ′PP قطری از دایرهٔ محیطی این مثلث باشد، خط سمسن نقطه‌های P و ′P با HP و ′HP در M و ′M وسطهای آنها برخورد می‌کند. نقطه‌های O، M ، ′M و N وسطهای ′PP ، HP، ′HP و OH می‌باشند. نقطهٔ N همچنین وسط ′MM است. همچنین شعاع دایرهٔ نه نقطه برابر است با :

$$NM = \frac{۱}{۲}OP = \frac{۱}{۲}R$$

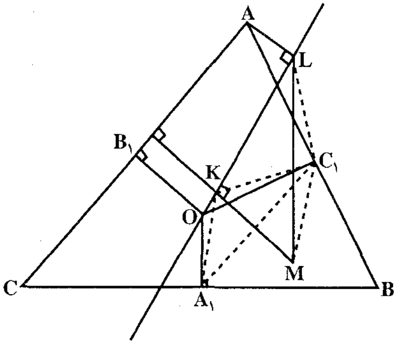
پس M′M قطری از دایرهٔ نه نقطه است. هرگاه X نقطهٔ برخورد خطهای سیمسون باشد، زاویهٔ ′MXM قائمه است و بنابراین X روی دایرهٔ نه نقطه واقع است.

۲.۷.۱.۴.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۶۱۴. چون وسط FH بر دایرهٔ نه نقطه قرار دارد، کافی است نشان دهیم که خط سیمسون نظیر نقطهٔ F هم، FH را نصف می‌کند. فرض کنید K تصویر F بر یک ضلع مثلث، D پای ارتفاع وارد بر همین ضلع و $H_۱$ نقطهٔ برخورد این ارتفاع و دایرهٔ محیطی مثلث باشد، $H_۱D = HD$ ، L نقطهٔ برخورد خط سیمسون با همین ارتفاع باشد، و بالاخره، M نقطه‌ای روی خط راست $HH_۱$ باشد که برای آن $FM \| KD$ ؛ در این صورت، $(FM = KD)\Delta FMH_۱ = \Delta KDL = \Delta KDL$ ، هر دو آنها قائم‌الزاویه‌اند و $D\hat{L}K = M\hat{H_۱}F$ ، زیرا ارتفاع مثلث، خط سیمسون نظیر رأسی است که از آن خارج می‌شود. همچنین، بسادگی می‌توان نشان داد که جهتهای $\overrightarrow{H_۱M}$ و $\overrightarrow{DL}$ یکی‌اند، یعنی، FKHL متوازی‌الاضلاع است، که از آن‌جا حکم ما نتیجه می‌شود.

۳.۷.۱.۴.۵. خطها همرسند



۶۱۵. در شکل، O مرکز دایرهٔ محیطی است، A_1 ، B_1 و C_1 وسط ضلعها و L و K، بترتیب، تصویر A و B روی L هستند، M نقطهٔ برخورد خطهای راستی است که از نقطه‌های L و K عمود بر BC و CA می‌گذرند. برای روشنی وضع، فرض کنید، مثلث ABC با زاویه‌های حاده باشد.
نخست، ثابت می‌کنیم که C_1، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLM است. نقطه‌های A_1 ، O، K، C_1 و B بر یک دایره واقعند. در نتیجه $C_1\hat{K}L = O\hat{A_1}C_1 = 90^\circ - \hat{C}$ ؛ به‌روش مشابه، $C_1\hat{L}K = 90^\circ - \hat{C}$. بنابراین $|KC_1| = |C_1L|$ و $L\hat{C_1}K = 2\hat{C}$ ، و چون $K\hat{M}L = \hat{C}$ ، حکم ما اثبات شده است. بعلاوه، KM بر A_1C_1 عمود است و $KC_1 = C_1M$ ، بنابراین $C_1\hat{M}A_1 = C_1\hat{K}A_1 = 180^\circ - \hat{B}$ ، یعنی، M بر دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ واقع است.

۶۱۸. این مسأله حالت خاصی از این مسأله است. خطهای سیمسون نظیر دو سر قطر دایرهٔ محیطی یک مثلث برهم عمودند. حال باید ثابت کنید که این نقطهٔ برخورد نقطهٔ فوئرباخ است.

۴.۷.۱.۴.۵. خطها پادموازی‌اند

۶۱۹. ثابت کنید، چهارضلعی حاصل بین خط مماس، آن ضلع و دو ضلع دیگر محاطی است.

۸.۱.۴.۵. شکلهای ایجاد شده

۶۲۰. در واقع ارتفاعهای مثلث $I_aI_bI_c$ که از نیمسازهای خارجی مثلث ABC تشکیل شده است، نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC هستند، پس I، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، مرکز ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۶۲۱. در واقع، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای گروه مرکز ارتفاعی $II_aI_bI_c$ حتماً متقارن این نقطه‌ها نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این گروه هستند، و این مرکز نه نقطه بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نقطهٔ O، منطبق است.

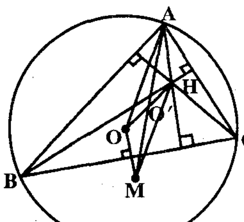
نکته. گزاره‌های بالا با در نظر گرفتن مثلث ABC به‌عنوان مثلث پادک مثلثی که رأسهای آن مرکزهای سه مماس مثلث ABC هستند به دست آمده‌اند. حال آن که در بررسی مرکز ارتفاعی و دایرهٔ نه نقطه، مثلث ABC مثلث اصلی با مرکز ارتفاعی و دایرهٔ نه نقطهٔ مستقل

در نظر گرفته شده بود. به این ترتیب، یک مثلث می‌تواند نقش دوگانه‌ای در رابطه با مرکز ارتفاعی از یک طرف و مرکزهای سه مماس از طرف دیگر بازی کند. این نقش دوگانه «ترجمه» یا «تبدیل» ویژگیهای به‌دست آمده برای مرکز ارتفاعی به ویژگیهای مرکزهای سه مماس و برعکس را، بدون نیاز به اثبات مجدد ویژگیهای حاصل، امکانپذیر می‌سازد. مثلاً با در نظر گرفتن مثلث ABC به‌عنوان مثلث اصلی، متوجه شدیم که دایره‌ای که AH قطر آن است از نقطه‌های E و F می‌گذرد و مرکزش، P، روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد. ولی A و H مرکزهای سه مماس مثلث پادک DEF از مثلث ABC هستند. پس اگر ABC را مثلث پادک گروه مرکزهای سه مماس آن، یعنی I، I_a، I_b و I_c در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم دایره‌ای که II_a قطر آن است از رأسهای B و C از مثلث ABC می‌گذرد و مرکز آن روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد. ولی این گزاره را به‌طور مستقل نیز اثبات کردیم. دایره‌ای که I_bI_c قطر آن است، با دایره‌ای که BC قطر آن است، متناظر است. هر دو این دایره‌ها را قبلاً به‌طور مستقل در نظر گرفتیم. خواننده خود می‌تواند نمونه‌هایی دیگر از این نوع پیدا کند.

۹.۱.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

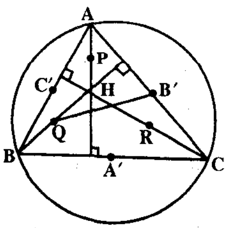
۶۲۲. a. یک b. یک c. بینهایت عدد

۶۲۹. اگر H مرکز ارتفاعی و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد نقطهٔ O′ وسط OH مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این مثلث است. قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به ضلع BC را M می‌نامیم.



چون OM = AH و OM‖AH است، چهارضلعی OAHM متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه قطرهای آن یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی نقطهٔ M قرینهٔ رأس A نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث می‌باشد.

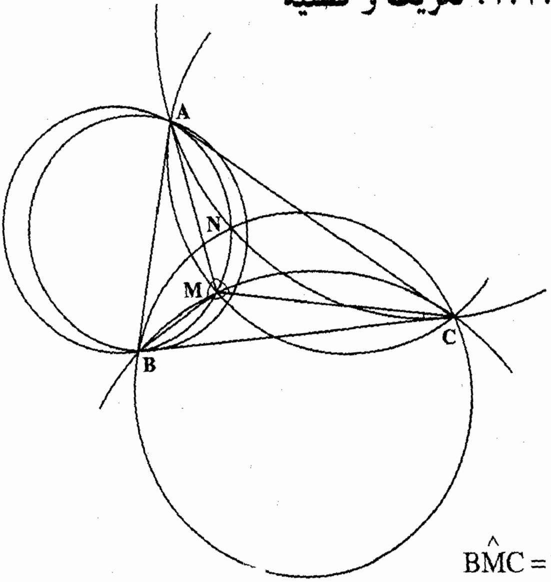
۱۰.۱.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی



۶۳۰. از شکل داده شده استفاده کنید. با توجه به این که نقطهٔ B′ وسط ضلع AC و نقطهٔ Q وسط پاره‌خط BH است (H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است). دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC نیز دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A′، B′ و C′ است.

۲.۴.۵. دایرهٔ بروکارد

۱.۲.۴.۵. تعریف و قضیه

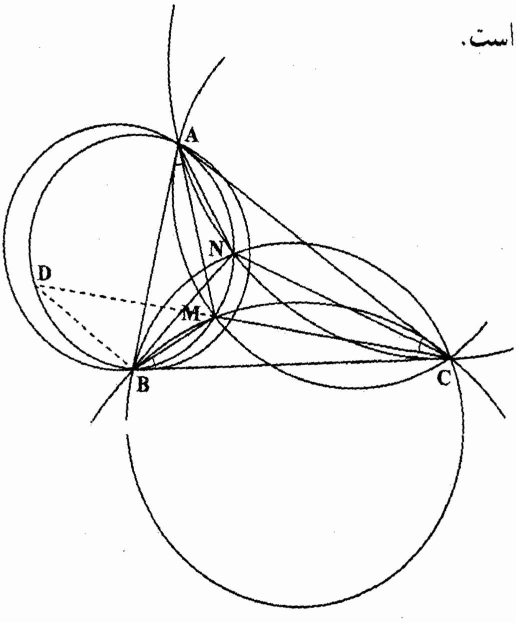


۶۳۳. دو دایرهٔ (AB) و (BC) در نقطهٔ B مشترکند (شکل)؛ پس در نقطهٔ دیگری داخل مثلث ABC نیز مشترکند که آن را M می‌نامیم. دایرهٔ (AB) در B بر BC مماس است، پس $A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ - \hat{B}$ و همچنین؛ پس، $B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - \hat{C}$

$$A\hat{M}C = ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \hat{B}) - (۱۸۰^\circ - \hat{C}) = \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

پس نقطهٔ M روی کمانی از دایرهٔ (AC) که داخل ABC است قرار دارد؛ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

۶۳۴. اثبات، شبیه اثبات قضیه قبل است.

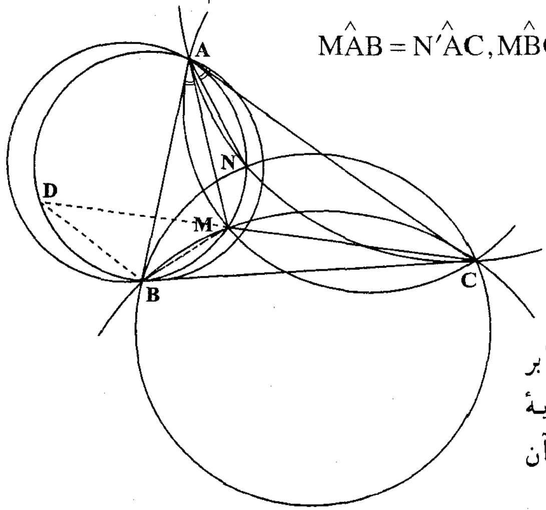


۶۳۵. زاویهٔ MAB در دایرهٔ (AB) محاط است و برابر نصف $\overset{\frown}{BM}$ است؛ $M\hat{B}C$ که از وتر BM و مماس BC تشکیل می‌شود نیز نصف $\overset{\frown}{BM}$ است؛ پس این دو زاویه برابرند. به همین ترتیب $M\hat{B}C$ با $M\hat{C}A$ برابر است.

حال اگر M' نقطهٔ دیگری باشد، به‌طوری که

$M'\hat{A}B = M'\hat{B}C$ ، آن‌گاه دایره‌ای که از M' ، A و B می‌گذرد بر BC در B مماس است، یعنی M' نقطه‌ای از دایرهٔ (AB) است. به‌طور مشابه، برای این که داشته‌باشیم $M'\hat{B}C = M'\hat{C}A$ ، نقطهٔ M' باید روی (BC) باشد ؛ پس M' بر M منطبق است. قسمت (ب) هم به‌همین ترتیب ثابت می‌شود.

۶۳۶. اگر N' مزدوج هم زاویهٔ نقطهٔ بروکار M باشد (شکل)، آن‌گاه داریم :



$$M\hat{A}B = N'\hat{A}C, M\hat{B}C = N'\hat{B}A, M\hat{C}A = N'\hat{C}B$$

و چون

$$M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A$$

پس،

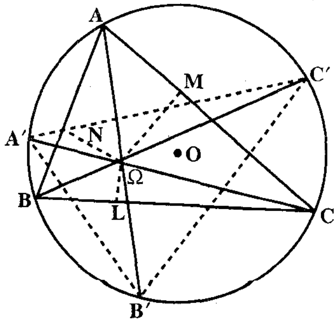
$$N'\hat{A}C = N'\hat{B}A = N'\hat{C}B$$

یعنی N' بر N منطبق است.

تعریف. زاویهٔ MAB را که برابر زاویهٔ NAC نیز هست، زاویهٔ بروکار مثلث می‌نامند و معمولاً آن را با ω نشان می‌دهند.

۶۳۷. فرض کنید خطهای $A\Omega$ ، $B\Omega$ و $C\Omega$ دایرهٔ محیطی(O) از مثلث ABC را در B' ، C' و A' قطع کنند. در مثلث $A'B'C'$ داریم :

$$\hat{A}' = B'\hat{A}'C + C'\hat{A}'C = B'\hat{A}C + C'\hat{B}C = B'\hat{A}C + B\hat{A}B' = \hat{A}$$



برای زاویه‌های B' و C' نیز مطلب مشابهی صادق است، پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و در یک دایره محاطند ؛ پس با هم همنهشتند.

برای نقطهٔ بروکار دوم نیز وضعیت مشابهی برقرار است.

توجه کنیدکه مثلث $A'B'C'$ را می‌توان از مثلث ABC،با دورانی حول مرکز دایرهٔ محیطی(O) برابر زاویهٔ2ω در جهت پادساعتگرد به دست آورد، زیرا

$$A\hat{O}A' = 2A\hat{C}A' = 2\omega$$

نکته. نقطهٔ Ω نقطهٔ بروکار دوم مثلث $A'B'C'$ است، زیرا

$$\Omega\hat{A'}C' = C\hat{A'}C' = C\hat{B}C' = \omega$$

به‌طور مشابه،

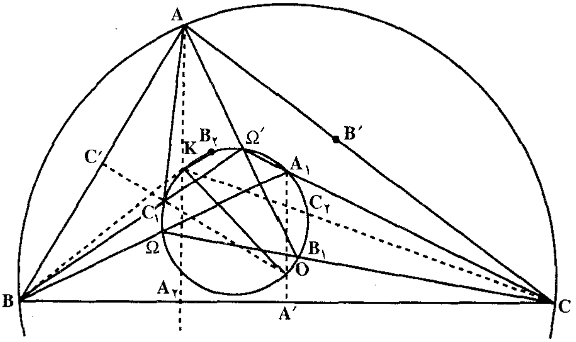
$$\Omega\hat{C'}B' = B\hat{C'}B' = B\hat{A}B' = \omega$$

نتیجه. دو نقطهٔ بروکار یک مثلث از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث همفاصله‌اند.

در دو مثلث همنهشت ABC و $A'B'C'$، نقطهٔ Ω از مثلث $A'B'C'$ با نقطهٔ Ω' از مثلث ABC متناظر است، پس دو نقطهٔ Ω و Ω' از مرکز مشترک دایرهٔ محیطی‌شان همفاصله‌اند.

۶۳۸. زاویهٔ KA_1O قائمه است؛ پس KA_1 با BC موازی است و در نتیجه A_1A' با فاصلهٔ K از BC برابر است. پس:

$$A_1A' : BC = B_1B' : CA = C_1C' : AB \qquad (۱)$$



۶۳۹. فرض کنید، خطهایی که از رأسهای B و C در مثلث ABC به موازات ضلعهای A_1C_1 و A_1B_1 از مثلث اوّل بروکار $A_1B_1C_1$ رسم می‌شوند (شکل)، یکدیگر را در R قطع کنند؛ در این صورت داریم:

$$B\hat{R}C = B_1\hat{A_1}C_1 = B\hat{A}C$$

پس R روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC قرار دارد، و R و A در یک طرف ضلع BC قرار دارند.

پس می‌بینیم که خط BR، خطهایی را که از C و A به موازات ضلعهای متناظر مثلث $A_1B_1C_1$ رسم می‌شوند، در نقطهٔ R واقع بر (O) قطع می‌کند.

تعریف. نقطهٔ R را نقطهٔ اشتاینر مثلث می‌نامند.

۶۴۰. در واقع این عمودها از نقطهٔ N، روبه‌روی قطری R در دایرهٔ (O)، می‌گذرند.

تعریف. نقطهٔ N را نقطهٔ تاری مثلث مفروض می‌نامند.

۶۴۱. زاویهٔ OA_2K که در دایرهٔ (OK) محاط است، قائمه است؛ پس OA_2 **عمودی است که از مرکز دایرهٔ محیطی O بر میانهٔ متقارن AK از مثلث ABC رسم شده است؛ و قضیه** ثابت می‌شود.

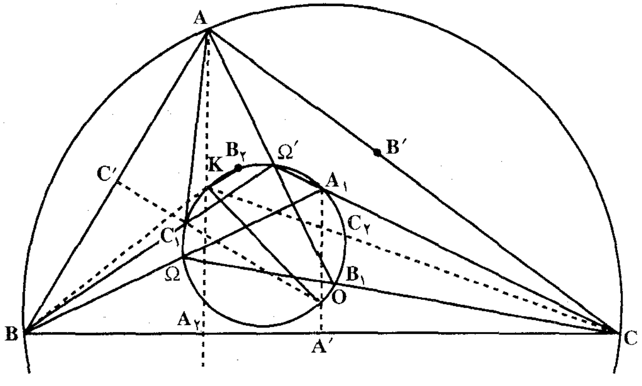
۲.۲.۴.۵. نقطه و دایره

۶۴۲. دو نقطهٔ بروکار، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و نقطهٔ لوموان (**نقطهٔ همرسی شبه میانه‌ها**) مثلث.

۳.۲.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۳.۲.۴.۵. خطها موازی‌اند

۶۴۳. در شکل، $A_1B_1C_1$ مثلث اوّل بروکار است. نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع متناظر از مثلث ABC و مثلث $A_1B_1C_1$ به‌عنوان مثال نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع BC و B_1C_1 را رسم کنید. سپس خط سیمسون نظیر یک نقطهٔ برخورد OK با دایرهٔ محیطی مثلث ABC را نیز رسم کنید و ثابت کنید که این دو خط با هم موازی و یا برهم عمودند.



۲.۳.۲.۴.۵. خطها همرسند

۶۴۴. در شکل، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ بترتیب مثلثهای اوّل و دوم بروکار است. ثابت کنید خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 همگی از نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرند.

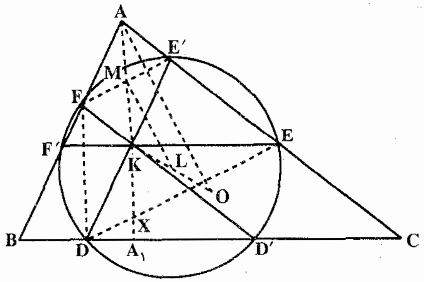
۴.۲.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۴۵. بلی

۳.۴.۵. دایرهٔ لوموان

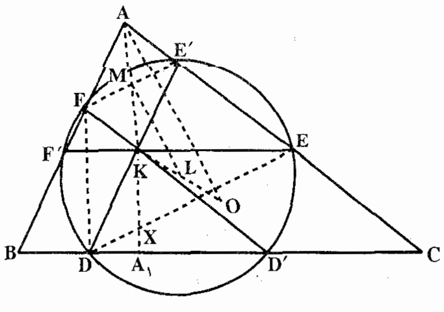
۱.۳.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۴۶. فرض کنید، نقطهٔ K نقطهٔ لوموان مثلث ABC باشد و خطهای رسم شده از K به موازات ضلعهای BC، CA و AB بترتیب D′KF ، EKF′ و DKE′ باشند (شکل) که این ضلعها را در نقطه‌های D، D′ ؛ E، E′ ؛ و F، F′ قطع می‌کنند. چون AFKE′ متوازی‌الاضلاع است، خط E′F توسط میانهٔ متقارن AK نصف می‌شود و بنابراین، با BC پادموازی است، پس با EF′ نیز پادموازی است، یعنی چهار نقطهٔ E، E′، F و F′ همدایره‌اند. به دلایل مشابه، گروههای چهارتایی F، F′، D، D′ و D، D′، E، E′ نیز همدایره‌اند. اگر این سه دایره متمایز باشند محورهای اصلی آنها DD′ = BC ، EE′ = CA و FF′ = AB باید همرس باشند، و مسلماً این طور نیست. از طرف دیگر اگر دو دایره منطبق باشند، دایرهٔ سوم هم بر آنها منطبق است، پس نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های D، D′ ، E، E′ ، F و F′ همدایره‌اند.



چند تعریف. دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد دایرهٔ اوّل لوموان نامیده می‌شود. خطهای موازی در نظر گرفته شده را غالباً موازیهای لوموان می‌خوانند و شش ضلعی DD′EE′FF′ شش ضلعی لوموان نامیده می‌شود.

۶۴۷. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC (شکل)، L وسط OK، و M وسط پاره‌خطهای AK و E′F باشد. پاره‌خط LM نقطه‌های وسط دو ضلع مثلث KOA را به هم وصل می‌کند، پس با ضلع سوم آن، یعنی OA، موازی است : شعاع OA از دایرهٔ محیطی بر E′F عمود است، زیرا E′F با BC پادموازی است ؛



پس ML عمودمنصف $E'F$ است. به‌طور مشابه، عمودمنصفهای DF' و $D'E$ نیز از L می‌گذرند. پس قضیه ثابت می‌شود.

نکته. مثلثهای DEF و $D'E'F'$ همنهشتند.

در دایرهٔ اوّل لوموان داریم:

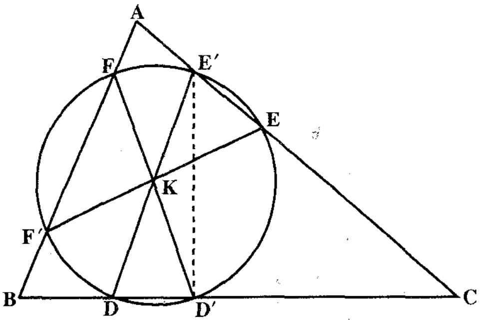
$$F\hat{D}E = F\hat{F'}E = \hat{B} \text{ و } D\hat{E}F = D\hat{D'}F = \hat{C}$$

پس مثلث DEF با مثلث ABC متشابه است، این مطلب در مورد مثلث $F'D'E'$ نیز صادق است، پس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ متشابه‌اند و در یک دایره محاط شده‌اند؛ پس همنهشتند.

۶۴۸. سه پادموازی رسم شده برابرند و توسط نقطهٔ لوموان K نصف می‌شوند؛ پس K از سرهای این سه پاره‌خط همفاصله است و بنابراین مرکز دایره‌ای است که از شش نقطهٔ در نظر گرفته شده می‌گذرد (شکل).

تعریف. سه پادموازی در نظر گرفته شده را غالباً پادموازیهای لوموان می‌نامند.

دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد، دایرهٔ دوم لوموان، یا دایرهٔ کسینوس مثلث نام دارد. نام دوم به سبب ویژگی دیگری به آن داده شده است که در قضیهٔ بعدی خواهیم دید.



۶۴۹. فرض کنید سه پادموازی $D'KF$ ، EKF' و DKE' (شکل بالا) که از نقطهٔ لوموان K نسبت به ضلعهای BC، CA و AB رسم شده‌اند، این ضلعها را در D، D' ؛ E، E' ؛ و F، F' قطع کنند. پادموازی DE' قطری از دایرهٔ (K) است، پس در مثلث قائم‌الزاویهٔ $D'DE'$ داریم:

$$DD' = DE'\cos D'\hat{D}E' = DE'\cos A$$

به‌طور مشابه، $FF' = FD'\cos C$ و $EE' = EF'\cos B$

و چون $DE' = EF' = FD'$ ، قضیه ثابت می‌شود.

۶۵۰. از نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC، خط $B'C'$ را موازی با BC و خط $B''C''$ را

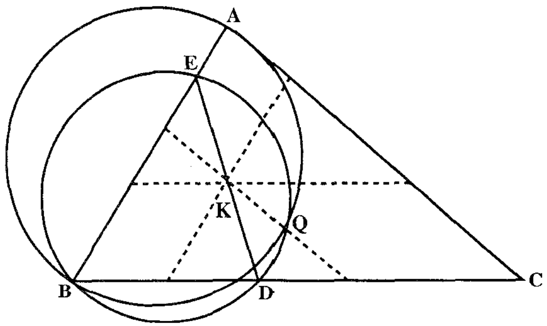
پادموازی با BC رسم می‌کنیم. چهارنقطهٔ B'، C'، B'' و C'' همدایره‌اند.

۶۵۱. در واقع، مرکز هر دو دایره، نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان مثلث است.

۲.۳.۴.۵. نقطه و دایره

۱.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همدایره

۶۵۲. با توجه به تعریف نقطه‌های بروکار دایرهٔ گذرنده بر سه نقطه را در نظر بگیرید و ثابت کنید که نقطهٔ چهارم نیز روی این دایره است و یا از ویژگی چهارضلعی محاطی استفاده کنید.



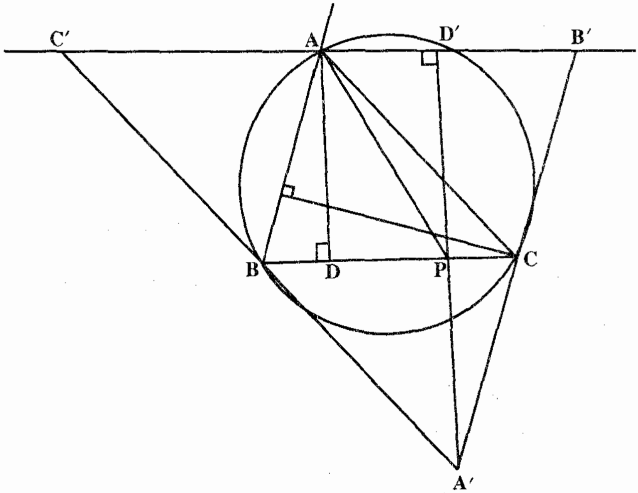
۲.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همخط

۶۵۳. نقطهٔ ناگل یک مثلث نقطهٔ همرسی خطهایی است که رأسهای مثلث را به نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی مثلث با ضلع روبه‌روی آن رأسها وصل می‌کنند.

۳.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های دیگر

۶۵۴. ارتفاع $A'D'$ از مثلث پادمکمل $A'B'C'$ برای مثلث ABC، ضلع BC را در نقطهٔ همنوای پای ارتفاع AD از مثلث ABC، یعنی نقطهٔ P، قطع می‌کند و P نقطهٔ وسط ارتفاع $A'D'$ است. از طرف دیگر، A نقطهٔ وسط $B'C'$ است، پس در مثلث ABC خط AP خط همنوای AD است، و در مثلث $A'B'C'$ خط AP نقطهٔ وسط ضلع $B'C'$، یعنی نقطهٔ A، را به وسط ارتفاع $A'D'$، یعنی نقطهٔ P، وصل می‌کند. برای BQ و CR نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین،

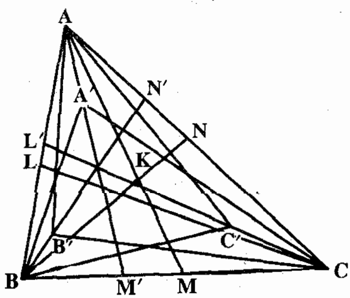
قضیه ثابت می‌شود.



۳.۳.۴.۵. پاره‌خط

۶۶۰. عمودمنصفهای ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC دایرهٔ بروکار (OK) را در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع می‌کنند که $A_1B_1C_1$ مثلث اول بروکار است. نقطهٔ لوموان نیز نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های مثلث ABC است.

۴.۳.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم،...



۱.۴.۳.۴.۵. خطها همرسند

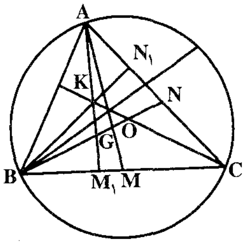
۶۶۱. نقطهٔ لوموان مثلث ABC نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های مثلث است (نقطهٔ K در شکل).

۲.۴.۳.۴.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۶۲. نقطهٔ مشترک سه دایرهٔ الحاقی گروه مستقیم (M) و نقطهٔ مشترک سه دایرهٔ الحاقی گروه غیرمستقیم (N)، هر کدام یک نقطهٔ بروکار مثلث ABC می‌باشند.

۵.۴.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۶۳. نقطه‌های O و K و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ثابتند.
مکان هندسی G موردنظر است.



۶۶۵. نقطهٔ لوموان مثلث AEF روی میانهٔ AA' از مثلث ABC است.

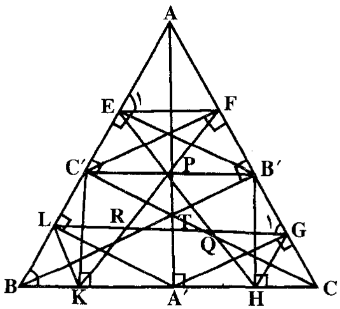
۶.۴.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۶. با توجه به نکته‌های زیر مسأله را حل کنید.
۱. نقطهٔ لوموان هر مثلث نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های آن مثلث است.
۲. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، (ABCH) یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

۴.۴.۵. دایرهٔ تیلور

۱.۴.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۰. چهارضلعی BCGL محاطی است، پس (۱) $\hat{G}_1 = \hat{B}$ و چون $EF\|BC$ است (زیرا چهارضلعی $B'C'EF$ محاطی می‌باشد در نتیجه $\hat{E}_1 = F\hat{B'}C'$ و چهارضلعی $BCB'C'$ نیز محاطی است پس $\hat{B} = F\hat{B'}C'$ لذا $\hat{E}_1 = \hat{B}$ و از آن جا $EF\|BC$)، بنابراین (۲) $\hat{E}_1 = \hat{B}$. از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{E}_1 = \hat{G}_1$ یعنی چهارضلعی EFGL محاطی است، همچنین چهارضلعی ELKF نیز محاطی می‌باشد یعنی



دایرهٔ محیطی چهارضلعی EFGL از نقطهٔ K نیز می‌گذرد و چهارضلعی HKLG نیز محاطی می‌باشد یعنی دایرهٔ بالا از نقطهٔ H نیز مرور می‌کند. پس شش نقطهٔ H، K، L، E، F و G که تصویرهای پای ارتفاعهای مثلث ABC روی ضلعهای مثلث می‌باشند، روی یک دایره قرار دارند که به دایرهٔ تیلور مشهور است.

نکته ۱. قطرهای شش ضلعی محاطی EFGHKL با هم برابرند، زیرا ذوزنقهٔ EFHK محاطی و متقارن است؛ مثلث PQR مثلث میانه‌ای مثلث ارتفاعی A′B′C′ از مثلث ABC است.

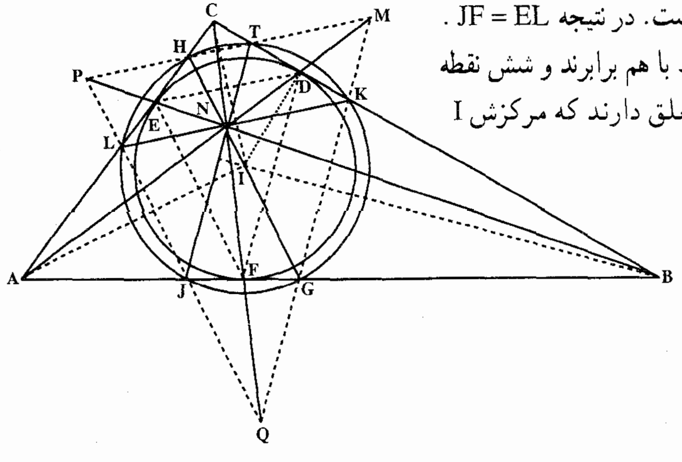
دایرهٔ محاطی مثلث PQR (مثلث حاصل از برخورد سه قطر) با دایرهٔ محاطی چهارضلعی EFGL هم مرکز است که این مرکز به T نشان داده شده است.

نکته ۲. دایرهٔ تیلور به گروه عمومی دایره‌های لوموان یا توکر تعلق دارد. زیرا شش نقطهٔ همدایره در حقیقت به‌وسیلهٔ سه آنتی پارالل مساوی GL، FK و EH در مثلث ABC ایجاد شده‌اند.

۵.۴.۵. دایرهٔ آدامس

۵.۴.۵.۱. تعریف و قضیه

۶۷۱. خط JT که موازی وتر DF است، روی مماسها پاره‌خطهای مساوی DT و FJ را به‌وجود می‌آورد. همچنین DK = EL و FG = EH. نقطه‌های A، N و D روی یک خط راستند. امّا NL و FJ موازی با DE و DF هستند. از آن جا نتیجه می‌شود که LJ موازی EF است. در نتیجه JF = EL. شش پاره‌خط با هم برابرند و شش نقطه به دایره‌ای تعلق دارند که مرکزش I است.



۶.۴.۵. دایرهٔ آپولونیوس

۱.۶.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۲. نقطهٔ لوموان K مزدوج مرکز دایرهٔ محیطی O، نسبت به هر یک از دایره‌های آپولونیوسی مثلث است؛ پس قضیه برقرار است.

۵.۵. دایره‌های دیگر و مثلث

۲.۵.۵. شعاع

۶۷۴. اگر شعاع دایره‌ها به مرکزهای A، B و C را بترتیب R_1، R_2 و R_3 بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 6 \\ R_3 - R_1 = 9 \\ R_3 - R_2 = 7 \end{cases}$$

و از آن جا نتیجه می‌شود: $R_3 = 11cm$ ، $R_2 = 4cm$ و $R_1 = 2cm$.

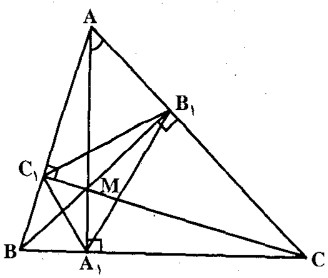
۶۷۵. با توجه به شکل شعاعهای سه دایره X، Y و Z است و داریم:

$Y + Z = a$ و $Z + X = b$ و $X + Y = c$

و $X + Y + Z = p$ ...

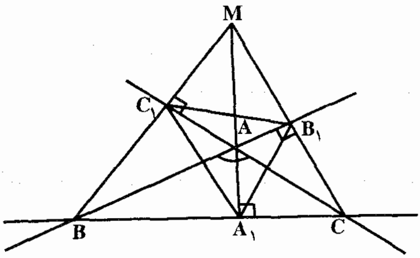
۳.۵.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۵.۵. نقطه درون دایره



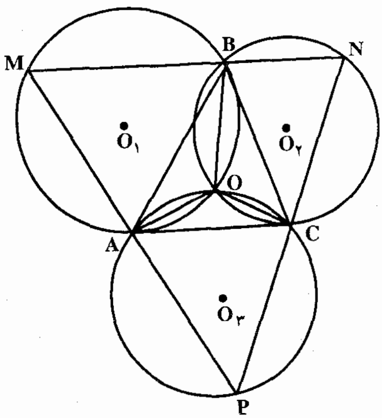
۶۷۸. اگر زاویه‌های مثلث ABC حاده باشند، ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ارتفاعیه‌اند و ضلعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث ارتفاعیه می‌باشند. بنابراین نقطه‌های M، A، B و C که محل تلاقی نیمسازهای مثلث $A_1B_1C_1$ می‌باشند، مرکزهای دایره‌های

محاطی این مثلث می‌باشند. یعنی چهار دایره به مرکزهای M، A، B و C وجود دارد که بر ضلعها یا بر امتداد ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ مماسند. در این حالت با معلوم بودن نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 مثلث ABC را می‌توان رسم کرد و مسأله فقط یک جواب دارد.



اگر یک زاویهٔ مثلث منفرجه باشد، ارتفاع وارد از رأس این زاویه نیمساز زاویهٔ داخلی مثلث ارتفاعیه است ولی دو ارتفاع دیگر نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث ارتفاعیه می‌باشند. بنابراین اگر مثلث مطلوب بتواند با زاویهٔ منفرجه باشد، علاوه بر مثلث ABC، مثلثهای BCM و CAM و ABM هم جوابهایی از مسأله‌اند. ارتفاعهای مربوط به این مثلثها بترتیب در نقطه‌های A، B و C به هم می‌رسند. به زبان دیگر، مرکزهای ارتفاعی مثلثهای BCM و CAM و ABM (و ABC) بترتیب عبارتند از نقطه‌های A، B و C (و M). برای هر چهار جواب مسأله این ویژگی وجود دارد. رأسها و مرکزهای ارتفاعی هر یک از مثلثهای جواب، مرکزهای دایره‌هایی هستند که بر ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ (و یا امتداد آنها) مماسند.

۲.۳.۵.۵. نقطه روی دایره



۶۷۹. فرض می‌کنیم دایره‌های O_1 ، O_2 و O_3 بترتیب از رأسهای (A,B)، (B,C) و (C,A) گذشته باشند. نقطهٔ اختیاری M واقع بر محیط دایرهٔ O_1 را به رأسهای A و B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌های O_2 و O_3 را در نقطه‌های N و P قطع کند. نقطهٔ C را به این دو نقطه وصل می‌کنیم. بنا به فرض داریم:

$$\hat{M}+\hat{N}+\hat{P}=180^\circ$$

$$\Rightarrow N\hat{C}P=180^\circ \Rightarrow$$ خط راست است NCP

اگر دایره‌های O_1 و O_2 را در نقطهٔ O متقاطع فرض کنیم و O را به رأسهای مثلث وصل نماییم، چون چهارضلعیهای AOBM و BOCN محاطی‌اند پس

$\hat{AOB}+\hat{BOC}+\hat{AOC}=90^\circ$ همچنین $\hat{AOB}+\hat{AMB}=180^\circ$ و $\hat{BNC}+\hat{BOC}=180^\circ$. پس $\hat{AOC}+\hat{P}=180^\circ$ یعنی چهارضلعی AOCP محاطی است. لذا دایرهٔ گذرنده بر A، P و C همان دایرهٔ O_3 است که از نقطهٔ O می‌گذرد.

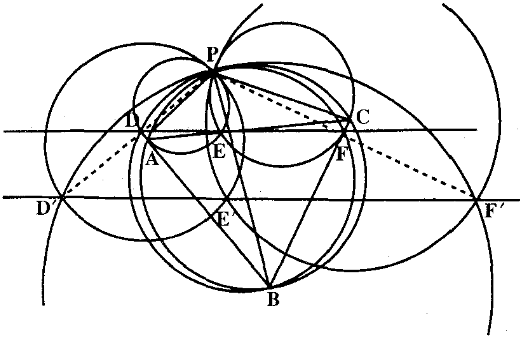
۵.۵.۳.۳. نقطه‌های همدایره

۶۸۰. چهارضلعیهای AMHC و AMPN و AHPN محاطی‌اند.

۶۸۱. A_1، A_2، B_1، B_2، C_1 و C_2 را نقطه‌های برخورد امتداد ضلعها، با خطهای راست موازی با آنها فرض می‌کنیم. نقطه‌های B_1 و B_2 روی محیط دایره‌ای واقعند که بر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $A_1A_2C_1C_2$ محیط است.

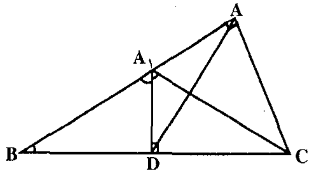
۵.۵.۳.۴. نقطه‌های همخط

۶۸۲. اگر A، B و C مرکزها و نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC اختیار شود، باید ثابت کنیم که D'، E' و F' روی خط راست قرار دارند. دایره‌های با شعاع نصف یعنی دایره‌های به قطرهای PA، PB و PC همدیگر را در سه نقطهٔ همخط D، E و F قطع می‌کنند (قضیهٔ سالمون). و این نقطه‌ها تصویرهای نقطهٔ P روی ضلعهای مثلث می‌باشند. زیرا زاویه‌های AEP و CEP قائمه می‌باشند (محاط در نیمدایره) از آن جا DEF خط سیمسون است. امّا $PF'=2PF$ و $PD'=2PD$ ؛ $PE'=2PE$ است. در نتیجه D'، E' و F' روی خط راست هستند.



۵.۵.۴. زاویه

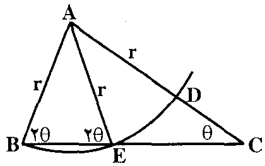
۵.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه



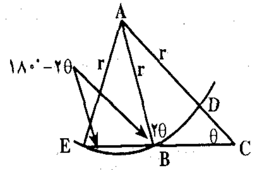
۶۸۳. روی خط BA، نقطهٔ A_1 را طوری اختیار کنید که $A_1B=A_1C$. نقطه‌های A_1، A، D و C بر یک

دایره واقعند $(D\hat{A}_1C = 90^\circ - A\hat{B}C = D\hat{A}C)$. در نتیجه $A_1\hat{A}C = A_1\hat{D}C = 90^\circ$
و بنابراین $B\hat{A}C = 90^\circ$.

۶۸۴. (هـ) اگر $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ، آن‌گاه (مطابق شکل ۱) و بنابر یک قضیهٔ مربوط به زاویه‌های خارجی مثلثها، در مثلث EAC، $2\theta = E\hat{A}C + \theta$ بنابراین $E\hat{A}C = \theta$ و مثلث EAC متساوی‌الساقین است. یعنی $EC = AE = AD$. اگر $\theta = 45^\circ$ ، آن‌گاه مثلث ABC یک مثلث $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$ است و $E = B$ [یعنی E بر B منطبق است] و بنابراین $EC = BC = AB = AD$.



شکل ۱



شکل ۲

اگر $45^\circ < \theta < 60^\circ$ آن‌گاه (مطابق شکل ۲) داریم

$$\begin{aligned} E\hat{A}C &= 180^\circ - A\hat{E}C - \hat{C} \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\theta) - \theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

مثلث EAC متساوی‌الساقین است و $EC = EA = AD$.

۶۸۵. فرض کنید، $BC = a$ ، $\hat{C} > \hat{B}$ و D و E وسطهای AB و AC باشند چهارضلعی EMDN چهارضلعیی محاطی است (زیرا، $M\hat{E}N = M\hat{D}N = 90^\circ$).

$MN = a$ ، $ED = \frac{a}{2}$ و MN قطر دایرهٔ محیط بر MEND است. در نتیجه

$D\hat{M}E = 30^\circ$ و $C\hat{A}B = 90^\circ - E\hat{M}D = 60^\circ$

$A\hat{C}B = 105^\circ$ و $C\hat{B}A = E\hat{D}N = E\hat{M}N = \dfrac{E\hat{M}D}{2} = 15^\circ$

جواب : $\hat{A} = 60^\circ$ ، $\hat{B} = 15^\circ$ ، $\hat{C} = 105^\circ$ یا $\hat{A} = 60^\circ$ ، $\hat{B} = 105^\circ$ ، $\hat{C} = 15^\circ$

۶۸۶. با نوشتن زاویهٔ PQN برحسب زاویه‌های مثلث و در نظر داشتن این که

$P\hat{M}N + P\hat{Q}N = 180^\circ$

به‌دست می‌آوریم : $P\hat{M}N = 60^\circ$ ؛ بنابراین، $N\hat{P}Q = Q\hat{M}N = 30^\circ$ و

$P\hat{N}Q = P\hat{M}Q = 30^\circ$

یعنی، PQN مثلثی متساوی‌الساقین با زاویه‌های 30°، مجاور به ضلع PN، است و

$$PQ = QN = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۵.۵.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۸۷. اگر نقطهٔ برخورد نیمسازهای BB' و CC' را M بنامیم، چون

$$A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

پس $M\hat{B}C + M\hat{C}B = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ و در نتیجه $B\hat{M}C = 120^\circ$ است، پس چهارضلعی $AC'MB'$ که در آن $\hat{A} + B'\hat{M}C' = 180^\circ$ است، محاطی است. در نتیجه $B\hat{B'}A = C\hat{C'}B$.

۵.۵.۵. پاره‌خط

۵.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶۸۸. فرض می‌کنیم زاویهٔ C حاده باشد. نقطه‌های A' و B' روی دایره‌ای به قطر ثابت AB واقعند و نقطهٔ C خارج این دایره است، پس: $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{2}$، چون $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$ و $\hat{C} = \alpha$ مقدار ثابتی است، پس کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ مقدار ثابتی خواهد داشت و در نتیجه وتر $A'B'$ اندازهٔ ثابتی دارد.

۵.۵.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶۸۹. $A'B'C'$ مثلث ارتفاعی مثلث ABC است.

۵.۵.۶. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز،...

۵.۵.۶.۱. خطها برهم عمودند

۶۹۰. نقطه‌های A، H، D، E و F روی دایره‌ای به قطر AH قرار دارند و زاویه‌های $D\hat{F}E$، $B\hat{A}E$ و $D\hat{A}E$ برابرند، یعنی چهارضلعی AFPQ محاطی است و $F\hat{P}Q$ که مقابل به زاویهٔ $F\hat{A}Q$ است نیز قائمه است.

۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است

۶۹۱. نقطهٔ برخورد AC با دایره را F می‌نامیم.

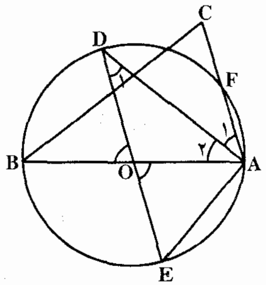
چون $AF \| DE$ ، پس $\widehat{DF} = \widehat{AE}$ است،بنابراین داریم :

$$\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ \text{ و } \hat{D}_۱ = \frac{\widehat{AE}}{۲} = \frac{\widehat{BD}}{۲}$$

از طرفی

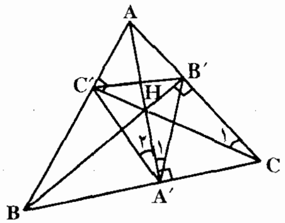
$$\hat{A}_۲ = \frac{\widehat{BD}}{۲}$$

در نتیجه $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ ، یعنی AD نیمساز زاویهٔ درونی BAC است. بنابراین خط عمود بر آن یعنی AE، نیمساز زاویهٔ برونی BAC می‌باشد.



۶۹۳. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، چهارضلعی $HA'CB'$ محاطی است، پس (۱) $\hat{A}'_۱ = \hat{C}_۱$.

همچنین چهارضلعی $ACA'C'$ محاطی می‌باشد، پس (۲) $\hat{A}'_۲ = \hat{C}_۱$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{A}'_۱ = \hat{A}'_۲$ ، یعنی ارتفاع AA' از مثلث ABC نیمساز زاویهٔ $B'A'C'$ از مثلث ارتفاعیه $A'B'C'$ است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که ارتفاعهای BB' و CC' نیز نیمسازهای زاویه‌های B' و C' از مثلث ارتفاعیه می‌باشند.



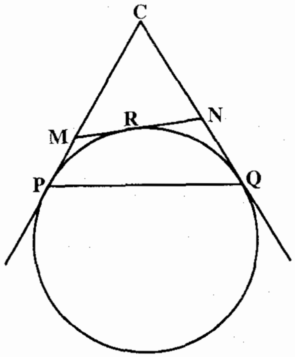
۵ . ۵ . ۶ . ۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۹۴. $A\hat{B'}B = A\hat{C'}C = 90^\circ$ و $BB' \| CC'$ است.

۵ . ۵ . ۶ . ۴. خطها همرسند

۶۹۵. نقطهٔ M وسط ضلع BC از مثلث ABC، مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی BCEF است، پس MN عمودمنصف EF می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $M'N'$ عمودمنصف DE، و $M''N''$ عمودمنصف DF است.

۵ . ۵ . ۶ . ۵. خط مماس بر دایره است



۶۹۷. دایره‌ای رسم می‌کنیم که برخطهای راست MN، AC و BC طوری مماس است که P و Q نقطه‌های تماس آن با خطهای AC و BC، بیرون پاره‌خطهای CM و CN قرار دارند (یعنی، یک دایرهٔ محاطی خارجی مثلث MCN). اگر R نقطهٔ تماس MN با دایره باشد، آن‌وقت $MP = MR$ و $NQ = NR$، درنتیجه، $MN = MP + NQ$؛ امّا داریم $MN = MA + NB$. بنابراین، یکی از نقطه‌های P یا Q، روی ضلع متناظر با آن واقع است، در حالی که دیگری روی امتداد ضلع متناظرش قرار دارد. داریم:

$$CP = CQ = \frac{1}{2}(CP + CQ) = \frac{1}{2}(AC + CB)$$

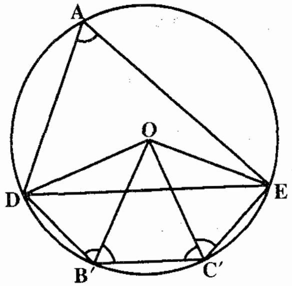
یعنی، دایرهٔ رسم شده، برای کلیهٔ خطهای راست ثابت است.

۵ . ۵ . ۷. شکلهای ایجاد شده

۶۹۸. قبل از بیان راه‌حل نارانینگار لازم است لم زیر ثابت شود:

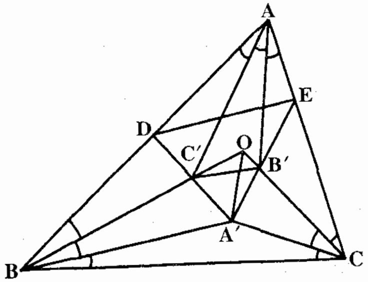
لم. چهار نقطهٔ D، B'، C' و E که در شرطهای $B'D = B'C' = C'E$ و $D\hat{B'}C' = E\hat{C'}B' = 180^\circ - 2\alpha^\circ > \frac{\pi}{3}$ صدق می‌کنند، روی یک دایره واقعند. علاوه بر آن نقطهٔ A که با نقطهٔ C' در یک طرف خط DE قرار ندارد و $D\hat{A}E = 3\alpha$ باشد، نیز بر همان دایره واقع است.

حل. نیمسازهای دو زاویهٔ متساوی $DB'C'$ و $EC'B'$ را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند. از O به D و E وصل می‌کنیم. مثلثهای متساوی‌الساقین ODB'،



$OB'C'$ و $OC'E$ با هم برابرند، پس $OD = OB' = OC' = OE$ یعنی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع یکی از این مقدارها از نقطه‌های D، B' ، C' و E می‌گذرد. پس چهارضلعی $DB'C'E$ محاطی است که چون $DB' = B'C' = C'E$ است، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. از طرفی زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین بالا $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ است. پس زاویه‌های $D\hat{O}B' = B'\hat{O}C' = C'\hat{O}E = ۲\alpha$ و درنتیجه کمان $\widehat{DB'E} = ۶\alpha$ است و چون $D\hat{A}E = ۳\alpha$ می‌باشد، پس نقطهٔ A نیز روی دایرهٔ محیطی چهارضلعی $DB'C'E$ قرار دارد.

حل قضیه مورلی. فرض می‌کنیم $\hat{A} = ۳\alpha$ و $\hat{B} = ۳\beta$ و $\hat{C} = ۳\gamma$ باشد. در این صورت $۳\alpha + ۳\beta + ۳\gamma = ۱۸۰^\circ$ و درنتیجه $\alpha + \beta + \gamma = ۶۰^\circ$ است. زاویه‌های B و C را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دو خط تقسیم مجاور با BC را A' و نقطهٔ برخورد دو خط دیگر را O می‌نامیم. نقطهٔ A' را به O وصل می‌کنیم. OA' نیمساز زاویهٔ BOC از مثلث OBC می‌شود. از A' دو خط رسم می‌کنیم تا با OA' زاویهٔ ۳۰° بسازند و نقطهٔ برخورد این دو خط با OB و OC را بترتیب C' و B' می‌نامیم. از B' به C' وصل می‌کنیم؛ دو مثلث $OA'C'$ و $OA'B'$ به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند، پس $A'B' = A'C'$ و چون $B'\hat{A'}C' = ۶۰^\circ$ است، پس $A'B' = B'C' = A'C'$ یعنی مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع می‌باشد و OA' عمودمنصف $B'C'$ است. حال باید ثابت کنیم که خطهای $B'A$ و $C'A$ زاویهٔ BAC را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند، یعنی: $B\hat{A}C' = C'\hat{A}B' = B'\hat{A}C = \alpha$. برای اثبات پاره‌خط $BD = BA'$ را روی BA و پاره‌خط $CE = CA'$ را روی CA جدا می‌کنیم و از D به E وصل می‌کنیم. دو مثلث $BA'C'$ و BDC' همچنین مثلثهای $CA'B'$ و CEB' به حالت



تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند. لذا $B'E = A'B'$ و $DC' = A'C'$ است و چون مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است، پس:

$$DC' = B'C' = B'E \qquad (1)$$

از طرفی داریم:

$$B\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - (۲\beta + ۲\gamma) = ۱۸۰^\circ - ۲(\beta + \gamma) = ۱۸۰^\circ - ۲(۶۰^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۶۰^\circ + ۲\alpha \Rightarrow C'\hat{O}A' = A'\hat{O}B' = \frac{B'\hat{O}C'}{۲} = ۳۰^\circ + \alpha$$

$$\Delta OC'A' : O\hat{C'}A' = ۱۸۰^\circ - (۳۰^\circ + ۳۰^\circ + \alpha) = ۱۲۰^\circ - \alpha$$

$$\Delta OC'H : O\hat{C'}H = ۹۰^\circ - C'\hat{O}A' = ۹۰^\circ - (۳۰^\circ + \alpha) = ۶۰^\circ - \alpha$$

پس:

$$D\hat{C'}B' = D\hat{C'}O + O\hat{C'}B' = O\hat{C'}A' + O\hat{C'}B' = ۱۲۰^\circ - \alpha + ۶۰^\circ - \alpha = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha \qquad (۲)$$

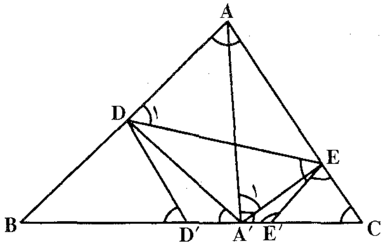
به همین ترتیب ثابت می‌شود که $E\hat{B'}C' = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ (۳) است. بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که چهارضلعی $DC'B'E$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و درنتیجه محاطی است. در این صورت اندازهٔ زاویه‌های $C'\hat{D}E = B'\hat{E}D = ۲\alpha$ خواهد بود و $B'D$ نیمساز زاویهٔ $C'DE$ است، یعنی $C'\hat{D}B' = B'\hat{D}E = \alpha$ می‌باشد. حال اگر از D به B' وصل کنیم، داریم:

$$D\hat{B'}E = C'\hat{B'}E - C'\hat{B'}D = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha - \alpha = ۱۸۰^\circ - ۳\alpha$$

و چون $\overset{\frown}{BAC} = ۳\alpha$ است، پس چهارضلعی $ADB'E$ نیز محاطی است. یعنی دایرهٔ محیطی ذوزنقهٔ $DC'B'E$ از نقطهٔ A نیز می‌گذرد. درنتیجه پنج ضلعی $ADC'B'E$ محاطی می‌باشد لذا $D\hat{A}C' = C'\hat{A}B' = B'\hat{A}E = \alpha$ است، یعنی خطهای $B'A$ و $C'A$ زاویهٔ A از مثلث ABC را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند. بنابراین حکم ثابت است.

تعمیم قضیه مورلی. اگر زاویه‌های خارجی مثلث را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم از برخورد دوبه‌دوی خطهای تقسیم که مجاور ضلعهای مثلث قرار دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌شود. راه‌حل این قضیه نیز مشابه راه‌حل مربوط به نیمسازهای داخلی است.

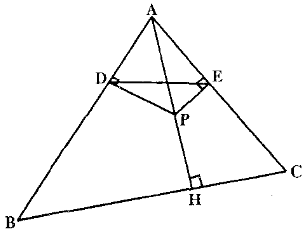
۶۹۹. چهارضلعی $ADA'E$ محاطی است، پس $\hat{A'}_1 = \hat{D}_1$ (۱). و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'C$ ، $A'E$ ارتفاع وارد بر وتر است، پس $\hat{A'}_1 = \hat{C}$ (۲). از مقایسهٔ رابطه‌های (۱)



و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{D}_1 = \hat{C}$، یعنی چهارضلعی BDEC محاطی می‌باشد.

درنتیجه $A\hat{E}D = \hat{B}$ و چون $EE' \| AB$ و $DD' \| AC$، پس $E'\hat{E}C = \hat{A}$ و $\hat{D}' = \hat{C}$ است. لذا $D\hat{E}E' = \hat{C} = \hat{D}'$ است و درنتیجه چهارضلعی $DED'E'$ محاطی است.

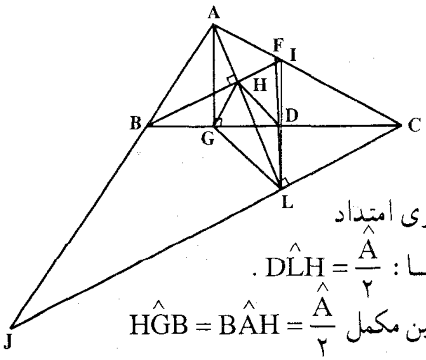
۷۰۰. از D به E وصل می‌کنیم. چهارضلعی ADPE محاطی است، پس (۱) $A\hat{E}D = A\hat{P}D$ از طرفی (۲) $A\hat{P}D = A\hat{B}H$ است. زیرا چهارضلعی PDBH نیز محاطی است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $A\hat{E}D = A\hat{B}C$ یعنی چهارضلعی BDEC نیز محاطی است.



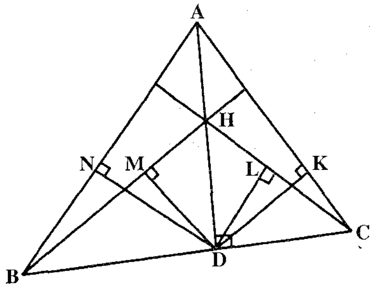
۷۰۱. دایره‌ای به قطر BC از نقطه‌های B' و C' می‌گذرد. زیرا $B\hat{B}'C = C\hat{C}'B = ۹۰°$ است. یعنی چهارضلعی $BCB'C'$ محاطی است. به دلیل مشابه چهارضلعیهای $ABA'B'$ و $ACA'C'$ نیز محاطی می‌باشند. حال اگر نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث، H باشد، چهارضلعیهای $HA'BC'$، $HA'CB'$ و $HB'AC'$ که هر کدام دو زاویهٔ مقابلشان ۹۰° است نیز محاطی‌اند.

۷۰۲. داریم: $B\hat{D}C = ۹۰° + \frac{\hat{A}}{۲}$, $B\hat{D}'C = ۹۰° - \frac{\hat{A}}{۲}$

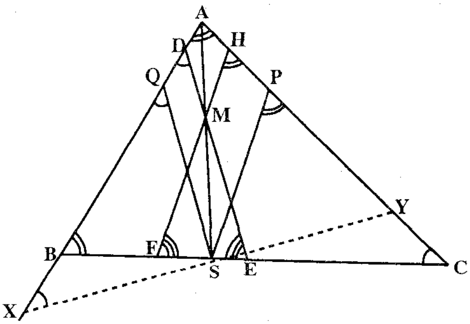
۷۰۳. نقطهٔ برخورد BH و CL با ضلعهای روبه‌رویشان را بترتیب I و J می‌نامیم. مثلثهای ABI و ACJ متساوی‌الساقین هستند. خط DL که وسطهای CB و CJ را به هم وصل می‌کند، موازی AB و روی امتداد DF است (F وسط AC). از آن‌جا: $D\hat{L}H = \frac{\hat{A}}{۲}$.
چهارضلعی ABGH محاطی است. همچنین مکمل $H\hat{G}B = B\hat{A}H = \frac{\hat{A}}{۲}$
لذا زاویه‌های DLH و DGH برابرند و چهارضلعی DHGL محاطی است.



۵ . ۵ . ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۷۰۴. فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و AD ارتفاع مثلث باشد و K، L، M و N، تصویرهای D، بترتیب روی AC، CH، HB و BA باشند. از این مطلب استفاده کنید که K و L بر دایرهٔ به قطر CD، L و M بر دایره به قطر HD و M و N بر دایرهٔ به قطر DB قرار دارند.



۷۰۵. فرض کنید، DE و FH بترتیب با ضلعهای AC و AB از مثلث ABC پاد موازی باشند و M نقطهٔ برخورد آنها باشد، داریم: $H\hat{F}C = D\hat{E}B = \hat{A}$، پس مثلث FME متساوی‌الساقین است، و $FM = EM$ و $ED = FH$، پس: $DM = HM$.

۵ . ۵ . ۹. مسأله‌های ترکیبی

۷۰۷. ۱. نقطه‌های برخورد دایره‌های گذرنده بر A و B را O می‌نامیم. به دلیل محاطی بودن چهارضلعیها زاویهٔ FOD مکمل زاویهٔ A و زاویهٔ DOE مکمل زاویهٔ B است. امّا سه زاویهٔ به رأس نقطهٔ O و زاویه‌های A، B و C روی هم ۶ قائمه‌اند. از طرفی زاویه‌های A، B و مکملهایشان روی هم ۴ قائمه‌اند. بنابراین دو زاویهٔ FOE و C روی هم ۲ قائمه می‌باشند. درنتیجه چهارضلعی CFOE محاطی است و دایرهٔ محیطی مثلث FCE از نقطهٔ O می‌گذرد.

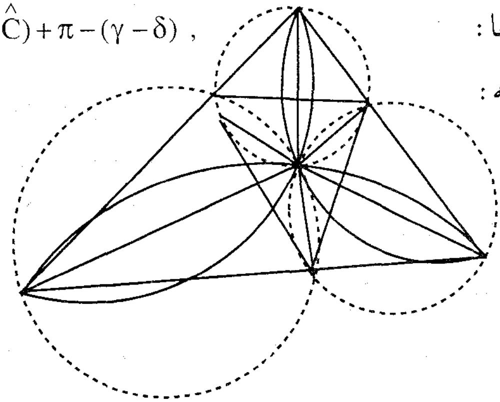
۲. ثابت می‌کنیم که $B\hat{O}C = \hat{A} + \hat{E}$ و .... دو قائمه را با π نشان می‌دهیم. از آن‌جا داریم:

$$B\hat{O}C = \alpha' + \beta' = \alpha + \beta$$

$$\alpha = \pi - (\hat{C} + \gamma), \quad \beta = \pi - (\hat{B} + \delta) \; ;$$

از آن‌جا : $B\hat{O}C = \pi - (\hat{B}+\hat{C}) + \pi - (\gamma - \delta)$,

درنتیجه : $B\hat{O}C = \hat{A}+\hat{E}$



۷۰۹. داریم :

۱.

$$\Delta ACC' = \Delta ABB' , (AC' = AB , AB' = AC' , C'\hat{A}C = \hat{A}+۶۰^\circ = B\hat{A}B')$$

$$\Rightarrow BB' = CC' = AA'$$

۲. $A\hat{C}C' = A\hat{B}B' \Rightarrow$ محاطی است $AC'BM$

و $A\hat{M}B + A\hat{C'}B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۲۰^\circ \Rightarrow B\hat{M}A' = B\hat{C}A' = ۶۰^\circ$

$A\hat{M}B + B\hat{M}A' = ۱۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}A'$ خط راست است

۷۱۰. ۱. زاویه‌های حادهٔ D و J با زاویهٔ B برابرند. ذوزنقهٔ DFIJ متقارن است. زیرا : DF = IJ . قاعدهٔ FI موازی AC و همچنین DH موازی AB است.

۲. هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین از جمله DFGH قابل محاط شدن در یک دایره است. همچنین ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین DFIJ، برای این که نشان دهیم که شش نقطهٔ انتهایی سه آنتی‌پارالل مساوی همدایره‌اند، کافی است ثابت کنیم که دایرهٔ محیطی چهارضلعی DFGH از نقطهٔ I می‌گذرد. چهارضلعی FGHI محاطی است، زیرا ضلعهای روبه‌رویش FI و GH آنتی‌پارالل می‌باشند. پس نقطه‌های انتهایی سه آنتی‌پارالل مساوی محاط شده در یک مثلث، روی یک دایره‌اند.

۷۱۱. ۱. چهارضلعی BCDE محاطی است.

۲. نیمدایره به قطر AB از پای ارتفاعهای دو رأس A و B می‌گذرد و همچنین برای ارتفاعهای دیگر.

۳. داریم : $A\hat{C}N = \hat{B}$.

۴. زیرا شعاع OC عمود بر مماس CN است و درنتیجه بر موازیهایش، DE و FG، عمود است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، ...)

۶. ۱. دایره و مثلث متساوی‌الاضلاع

۶. ۱. ۲. شعاع

۷۱۲. مرکز مشترک دو دایرهٔ جواب مسأله، محل برخورد ارتفاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است؛ که اگر این نقطه را H بنامیم. داریم:

$$AH = \frac{۲}{۳}h_a = \frac{۲}{۳} \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow r_۱ = AH - \frac{a}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} - \frac{a}{۲} = a(\frac{\sqrt{۳}}{۳} - \frac{۱}{۲})$$

$$r_۲ = AH + \frac{a}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} + \frac{a}{۲} = a(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{۱}{۲})$$

۶. ۱. ۳. نقطه و دایره

۷۱۳. برای روشنی وضع، فرض کنید P روی کمان AC واقع باشد. نقطه‌های A، M، P و N روی یک دایره واقعند. بنابراین: $N\hat{M}P = N\hat{A}P$ به همین ترتیب نقطه‌های P، M، Q و C روی یک دایره قرار دارند و

$$P\hat{M}Q = ۱۸۰^\circ - P\hat{C}Q = ۱۸۰^\circ - P\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - P\hat{M}N$$

۶. ۱. ۴. زاویه

۷۱۴. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا:

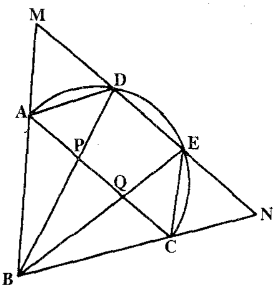
$$A\hat{D}B = \frac{۱}{۲}A\hat{C}B = ۳۰^\circ$$

۶ . ۱ . ۵. پاره‌خط

۷۱۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع، مرکزهای دایره‌های محیطی و نه نقطه، بر هم منطبقند.

۷۱۷. مثلثهای AEM و AFN متساوی‌الساقین دو رأسهای E و F با زاویهٔ رأس 120° و مثلث AEF متساوی‌الاضلاع است.

۷۱۸. اگر نقطه‌های D و E نیمدایره به قطر AC را به سه قسمت برابر بخش نمایند، $AD = DE = EC$ ضلعهای شش‌ضلعی منتظم محاطی می‌باشند و $DE \| AC$ است. نقطه‌های برخورد AB و BC با امتداد DE را M و N می‌نامیم. دو مثلث متساوی‌الاضلاع AMD و CEN با هم برابرند، پس: $MD = DE = EN$ خواهد بود. یعنی ضلع MN از مثلث متساوی‌الاضلاع BMN به‌وسیلهٔ BD و BE به سه قسمت مساوی تقسیم گردیده است، پس خط موازی آن یعنی AC نیز به‌وسیلهٔ این خطها به سه قسمت برابر تقسیم می‌شود، یعنی: $AP = PQ = QC$.



۶ . ۱ . ۶. شکلهای ایجاد شده

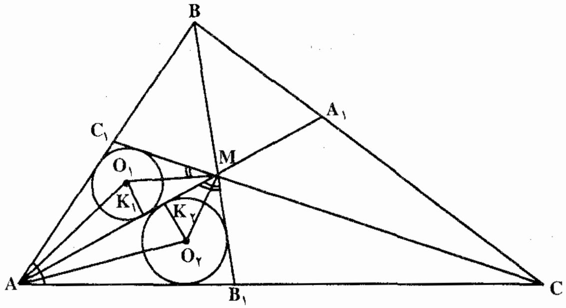
۷۱۹. نقطه‌های A، Y' و Z' دایره را به سه کمان برابر تقسیم می‌کنند. همچنین Z و Y کمان $Y'Z'$ را به سه بخش برابر تقسیم می‌کند.

۷۲۲. دایره‌های برابر به مرکزهای O_1 و O_2، محاط در مثلثهای AC_1M و AB_1M را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های تماس این دایره‌ها را با پاره‌خط راست AM، با K_1 و K_2 نشان می‌دهیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AO_1K_1 و AO_2K_2 با هم برابرند. زیرا:

$$O_1K_1 = O_2K_2 \ , \ O_1\hat{A}K_1 = \frac{1}{2}C_1\hat{A}M = \frac{1}{2}B_1\hat{A}M = O_2\hat{A}K_2$$

پس $K_1 = K_2$ و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ O_1K_1M و O_2K_2M هم با یکدیگر برابر می‌شوند (در دو ضلع مجاور به زاویهٔ مجاور به زاویهٔ قائمه)، از آن جا: $C_1\hat{M}A = B_1\hat{M}A$ و $O_1\hat{M}K_1 = O_2\hat{M}K_2$، بنابراین با توجه به دو مثلث AC_1M و AB_1M (که دو زاویهٔ

متناظر برابر دارند)، به‌دست می‌آید : $A\hat{C_1}C = A\hat{B_1}B$ ؛ و با توجه به مثلثهای ABB_1 و ACC_1 : $A\hat{C}C_1 = A\hat{B}B_1$ که از آنها نتیجه می‌شود : $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. به همین ترتیب، می‌توان برابری دو زاویهٔ ACB و BAC را هم ثابت کرد.

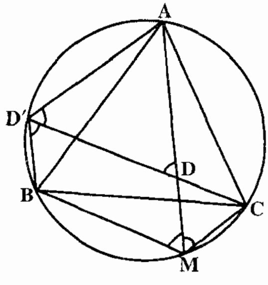


۶ . ۱ . ۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۲۳. شرط این که دو دایرهٔ مماس خارج باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره مساوی مجموع دو شعاع باشد. بنابراین مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی مثلث را پیدا کنید و از شرط بالا استفاده کنید.

۶ . ۱ . ۸. مسأله‌های ترکیبی

۷۲۴. ۱. $A\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$ و $MD = MC$ ، پس مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است و چون $B\hat{M}D = D'\hat{D}A = ۶۰^\circ$ است، لذا $MB \| CD$ است.



۲. چهارضلعی $MBD'D$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا $MD \| BD'$ و $MB \| DD'$ می‌باشد.

۳. در مثلث ADD' داریم : $A\hat{D'}D = A\hat{D}D' = ۶۰^\circ$ ، پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع

$MBD'D$ داریم : $BM = DD' = AD$ و در مثلث متساوی‌الاضلاع DMC داریم : $DM = MC = DC$، پس :

$$AM = AD + DM = BM + MC \Rightarrow MA = MB + MC$$

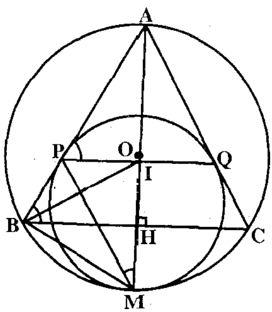
۶. ۲. دایره و مثلث متساوی‌الساقین

۶. ۲. ۲. شعاع

۷۲۵. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلث OAC و OBC باشند، ثابت کنید : $OO_1 = OO_2$.

۶. ۲. ۳. نقطه و دایره

۷۲۶. نیمساز زاویهٔ A از مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطهٔ M قطع کند. اگر $A\hat{P}Q = 2\alpha$ فرض کنیم، چون $PQ \parallel BC$ است، $A\hat{B}C = 2\alpha$ خواهد شد. از آن جا $P\hat{M}I = \frac{1}{2} P\hat{M}Q = \alpha$ است. لذا $M\hat{I}P = A\hat{B}M = 90°$ می‌باشند و چهارضلعی $BMIP$ می‌تواند در دایره‌ای که در آن زاویه‌های PBI و PMI روبه‌روی به یک کمان قرار می‌گیرند، محاط شود. درنتیجه نیمسازهای زاویه‌های A و B از مثلث ABC در I متقاطع می‌شوند. بنابراین نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.



۶ . ۲ . ۴ . زاویه

۶ . ۲ . ۴ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۷۲۷. 30°، 30°، 120°.

۶ . ۲ . ۴ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۲۸. مثلثهای AEH و AFH همنهشتند.

۷۲۹. مثلثهای AEH و AFH همنهشتند.

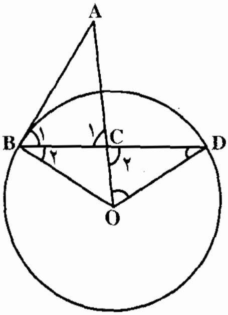
۶ . ۲ . ۵ . خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۶ . ۲ . ۵ . ۱ . خطها برهم عمودند

۷۳۰. در مثلثهای متساوی‌الساقین OBD و ABC، $\hat{B}_2 = \hat{D}$ و $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ است. در مثلث OCD می‌توان نوشت:

$$\hat{C}_2 + \hat{D} = \hat{C}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = A\hat{B}O = 90^\circ$$

پس مثلث OCD در رأس O قائم‌الزاویه است، یعنی $AO \perp OD$ است.



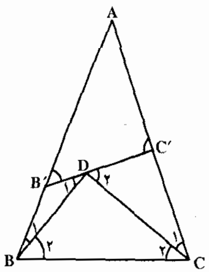
۶ . ۲ . ۵ . ۲ . خط مماس بر دایره است

۷۳۱. روی $B'C'$ پاره‌خط $B'D = B'B$ را جدا می‌کنیم. در این صورت $C'D = C'C$ خواهد بود. یعنی مثلثهای $BB'D$ و $CC'D$ متساوی‌الساقین و $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{C}_1 = \hat{D}_2$ است، پس $\hat{B'} = 2\hat{B}_1 = 2\hat{D}_1$ و $\hat{C'} = 2\hat{D}_2 = 2\hat{C}_1$ است. از طرفی

$$\hat{B} + \hat{C'} = \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{B}$$

و

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \frac{\hat{B'}}{2} = \hat{B} - \frac{2\hat{B} - \hat{C'}}{2} = \frac{\hat{C'}}{2} = \hat{D}_2$$



در نتیجه $\hat{B}_2 = \hat{D}_2 = \hat{C}_1$ است، پس دایرهٔ محیطی مثلث BDC در نقطهٔ D بر $B'C'$ و در نقطهٔ C بر AC مماس است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\hat{C}_2 = \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است، یعنی دایرهٔ محیطی مثلث BDC در نقطهٔ B بر AB مماس است.

۶. ۲. ۶. شکلهای ایجاد شده

۷۳۲. چهارضلعی BKEP متوازی‌الاضلاعی است که ضلعهای مجاور و مساوی دارد، $(BP = BK)$ پس لوزی است.

۶. ۳. دایره و مثلث قائم‌الزاویه

۶. ۳. ۲. شعاع

۶. ۳. ۲. ۱. اندازهٔ شعاع

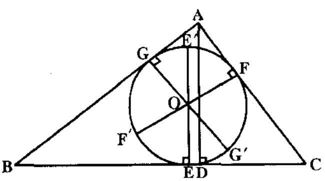
۷۳۳. $$r = AB' = AC' = p - a = \frac{b+c-a}{۲} = \frac{AC+AB-BC}{۲}$$

۷۳۴. نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ با ضلعهای مثلث را E، F و G و پای ارتفاع وارد بر وتر را D می‌نامیم و انتهای دیگر قطرهای گذرنده از E، F و G را بترتیب E'، F' و G' می‌نامیم. می‌دانیم که بین همهٔ نقطه‌های واقع در داخل یا روی محیط مثلث، دورترین نقطه به یک ضلع، رأس روبه‌روی به آن ضلع است. به عنوان مثال بین نقطه‌های واقع در داخل یا روی مثلث ABC نقطهٔ A بیشترین فاصله را تا ضلع BC دارد. بنابراین داریم: $GG' < AB$ و $FF' < AC$ و $EE' < BC$. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$۲r < AB \Rightarrow r < \frac{۱}{۲}AB \;,\; ۲r < AC \Rightarrow r < \frac{۱}{۲}AC$$

از طرفی: $AD \le \frac{BC}{۲}$ و $EE' < AD$،

پس:



$$EE' < \frac{1}{2}BC \Rightarrow 2r < \frac{1}{2}BC \Rightarrow r < \frac{1}{4}BC$$

۶. ۳. ۲. ۲. رابطهٔ بین شعاعها

۷۳۵. در مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ داریم :

$$r = \frac{AB + AC - BC}{2}\ ,\ r' = \frac{AH + BH - AB}{2}\ ,$$

$$r'' = \frac{AH + CH - AC}{2} \Rightarrow r + r' + r'' = AH$$

۶. ۳. ۳. نقطه و دایره

۶. ۳. ۳. ۱. نقطه درون دایره

۷۳۶. دایره به قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه از رأسْ زاویهٔ قائمه می‌گذرد.

۶. ۳. ۳. ۲. نقطه روی دایره

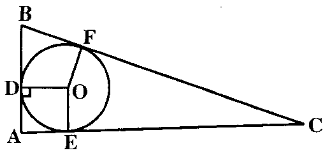
۷۳۷. کمان درخور زاویهٔ C نظیر پاره‌خط BD را در نظر بگیرید.

۷۳۸. با توجه به این که $A'B' \| AB$ و $A'C' \| AC$ ، یعنی $A\hat{B'}A' = A\hat{C'}A' = 90^\circ$ است.
چهارضلعیهای $AHA'B'$ ، $AA'HC'$ و $AC'A'B'$ محاطی‌اند.

۶. ۳. ۴. قطر

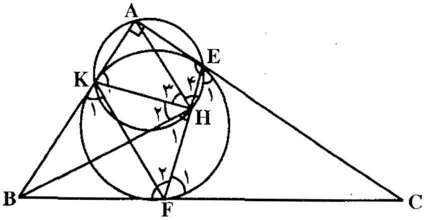
۷۳۹. می‌دانیم $BC = 2R$ است. نقطه‌های تماس ضلعهای AB، AC و BC با دایرهٔ محاطی مثلث را D ، E و F می‌نامیم. چهارضلعی ODAE مربع است و $AE = AD = OD = r$ می‌باشد. از طرفی داریم، $AD = BF$ و $EC = FC$. حال می‌توان نوشت :

$$AC + AB = AE + EC + AD + DB = r + FC + r + BF = 2r + BC$$
$$= 2r + 2R \Rightarrow b + c = 2r + 2R$$



۶. ۳. ۵. زاویه

۷۴۰. می‌دانیم که $EC = FC$، پس $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ و بنابراین $\hat{E}_2 = \hat{F}_2$ است. از طرفی چهارضلعی AEHK محاطی است، پس $\hat{K}_1 = \hat{E}_2$ و یا $\hat{K}_1 = \hat{F}_2$ امّا $B\hat{K}F = B\hat{F}K = \frac{\overset{\frown}{KF}}{2}$. درنتیجه $H\hat{K}F = H\hat{F}K$، یعنی مثلث KHF متساوی‌الساقین است و $FH = KH$ می‌باشد و $BK = BF$ است، پس دو مثلث BKH و BFH به حالت تساوی سه ضلع با هم برابرند.



لذا $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ و اما $AK = AE$، پس کمانهای $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{AE}$ و بنابراین $\hat{H}_3 = \hat{H}_4$ است. از طرفی داریم:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 = 180^\circ \Rightarrow 2(\hat{H}_3 + \hat{H}_2) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = 90^\circ \Rightarrow A\hat{H}B = 90^\circ$$

۶. ۳. ۶. پاره‌خط

۷۴۱. چهارضلعی ABDF محاطی است.

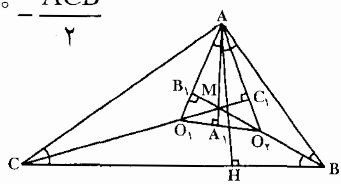
۶. ۳. ۷. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۶. ۳. ۷. ۱. خطها برهم عمودند

۷۴۳. نقطه‌های A، D، M، F و D' روی یک دایره واقعند.

۷۴۴. اگر نقطه‌های O_1 و O_2، بترتیب، نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلثهای AHC و AHB باشند با توجه به این که $\hat{A} = 90^\circ$ است، داریم:

$$H\hat{A}B = A\hat{C}B\,,\ \ C\hat{A}C_1 = 90^\circ - \frac{B\hat{A}H}{2} = 90^\circ - \frac{A\hat{C}B}{2}$$



$$\Rightarrow A\hat{C}C_1 + C\hat{A}C_1 = 90^\circ \Rightarrow A\hat{C_1}C = 90^\circ \Rightarrow C_1C \perp AO_2$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $BB_1 = AO_1$ و $AA_1 \perp O_1O_2$ است، پس نقطهٔ M محل برخورد ارتفاعهای مثلث AO_1O_2 است.

۶ . ۳ . ۷ . ۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷۴۵. با رسم چند شکل موقعیت نقطهٔ ثابت را بیابید.

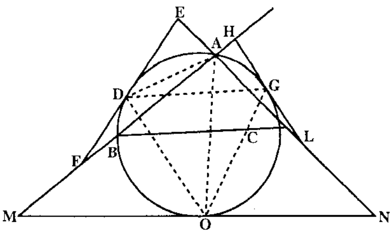
۷۴۶. خط اولر هر مثلث خطی است که سه نقطهٔ محل برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) محل برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل) و مرکز دایرهٔ محیطی را به هم وصل می‌کند.
در مثلث متساوی‌الساقین مرکز ارتفاعی روی ارتفاع وارد بر قاعده و مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نیز روی همین خط قرار دارند. بنابراین ارتفاع وارد بر قاعده که از رأس روبه‌رو به قاعده می‌گذرد، خط اولر نظیر مثلث متساوی‌الساقین است. در مثلث قائم‌الزاویه رأس زاویهٔ قائمه مرکز ارتفاعی مثلث است که خط اولر مثلث از این نقطه می‌گذرد.

۶ . ۳ . ۷ . ۳. خط مماس بر دایره است

۷۴۷. مثلث OAB نیز قائم‌الزاویه است، ثابت کنید : $M\hat{O}A = O\hat{B}A$.

۶ . ۳ . ۸. شکلهای ایجاد شده

۷۴۸. باید ثابت کنیم که کمانهای $\overset{\frown}{DAG}$ و $\overset{\frown}{DBO}$ هر کدام ثلث دایره‌اند. A را به D و O وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ EAF میانهٔ AD نصف وتر است، پس: $AD = DE = DF$. از آن‌جا: $D\hat{A}F = D\hat{F}A$ ، امّا $D\hat{A}F = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$ و $\hat{F} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DB}}{2}$. از آن‌جا کمان $\overset{\frown}{DB}$ نصف کمان $\overset{\frown}{AD}$ به این معنی که $\overset{\frown}{AD} = \frac{2}{3}ADB$. به همین ترتیب $\overset{\frown}{AG} = \frac{2}{3}\overset{\frown}{AGC}$ ، درنتیجه



$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{DAG}=\frac{۲}{۳}(\overset{\frown}{BAC}\ \text{نیمدایره})=\frac{۱}{۳}(۳۶۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$

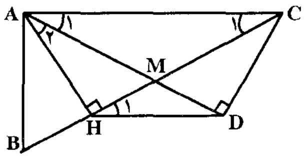
به این ترتیب کمان $\overset{\frown}{DAG}$ برابر ۱۲۰° و DG برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی است. همچنین داریم:

$$M\hat{A}O=A\hat{M}O\Rightarrow \overset{\frown}{BO}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{ACO}\ ,\ \ \overset{\frown}{BD}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AD}\Rightarrow O\hat{B}D=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DACO}$$

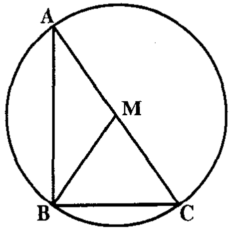
$$\Rightarrow \overset{\frown}{OBD}=\frac{۱}{۳}(۳۶۰^\circ)=۱۲۰^\circ$$

پس BD برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است، درنتیجه $\overset{\frown}{OG}=۱۲۰^\circ$ و مثلث ODG متساوی‌الاضلاع است.

۷۴۹. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM و MDC برابرند، پس D و H روی دایره‌ای به قطر AC قرار دارند. مثلث AMC متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$ و چون $\hat{A}_۱=\hat{H}_۱$ است، $\hat{C}_۱=\hat{H}_۱$ و درنتیجه $AC\parallel HD$ و چهارضلعی AHDC ذوزنقه است. ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس $B\hat{A}M=۶۰^\circ$ و $MA=MB=AB$ و چون ارتفاع AH در مثلث ABM نیمساز هم هست، پس $\hat{C}_۱=\hat{A}_۱=۳۰^\circ$ و درنتیجه $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$ است. لذا $\overset{\frown}{HD}=\overset{\frown}{DC}$ و درنتیجه $HD=DC$ است، پس: $AH=HD=DC$.

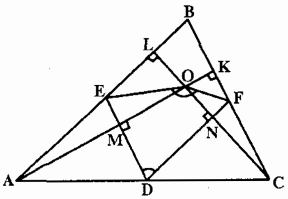


۷۵۰. دایرهٔ به مرکز M وسط وتر AC است و به شعاع $MC=MA=MB$ از سه رأس مثلث می‌گذرد و زاویهٔ $A\hat{B}C$ محاطی روبه روبه قطر است، پس ۹۰° است.



۷۵۱. فرض می‌کنیم O نقطهٔ تقاطع ارتفاعها باشد. طبق فرض چهارضلعی EDFO محاطی است، یعنی (۱) $E\hat{O}F+E\hat{D}F=۱۸۰^\circ$ از طرفی $AB\parallel DF$ و $ED\parallel BC$ پس $DF\perp CL$

و از آن جا: $M\hat{O}N+M\hat{D}N=180^\circ$ (۲) .از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $E\hat{O}F=M\hat{O}N$، یعنی باید OF روی BC و OE روی AB قرار گیرد. چون OE و OF در نقطهٔ O (محل تلاقی ارتفاعها) مشترکند، پس باید O بر B منطبق شود، یعنی زاویهٔ B باید قائمه باشد.

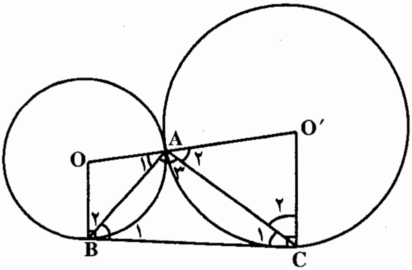


۷۵۲. سه زاویهٔ A، M و N قائمه‌اند و $AM=AN$ است.

۷۵۳. زاویهٔ ADE با زاویهٔ C برابر است.

۶ . ۳ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۵۴. مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های A و B بگذرد و در نقطهٔ B بر BC مماس باشد، نقطهٔ O محل برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خطی است که در نقطهٔ C بر BC عمود می‌شود و مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های A و C بگذرد و در نقطهٔ C بر خط BC مماس باشد، نقطهٔ O' محل برخورد عمودمنصف AC و خط عمود در نقطهٔ C بر BC است. اگر $OA=R$ و $O'A=R'$ باشد، کافی است ثابت کنیم که $OO'=OA+O'A$، یعنی نقطه‌های O، A و O' بر یک استقامتند. داریم:



$$\hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ\ ,\ \ O\hat{B}C=O\hat{C'}B=90^\circ\Rightarrow\hat{B}_2+\hat{C}_2=90^\circ\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ,$$

$$\hat{A}_3=90^\circ\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180^\circ\Rightarrow O\hat{A}O'=180^\circ$$

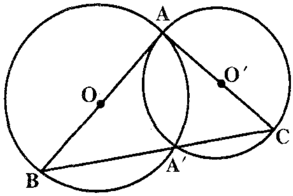
پس دو دایره در نقطهٔ A برهم مماسند.

۷۵۶. ترکیب (الف) شکل مثلث را مشخص می‌کند، اما اندازهٔ آن را معین نمی‌کند. همهٔ ترکیبهای دیگر، اندازه و شکل مثلث را مشخص می‌کند.

۶ . ۳ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۷. (الف) $B\hat{A'}A=C\hat{A'}A=90^\circ$، یعنی $B\hat{A'}C=180^\circ$ است. (ب) دو قطر عمود برهم

در دو دایره رسم کنید و ثابت کنید هر نقطه از ۴ نقطهٔ دو سر این قطرها، مرکز ارتفاعی مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر است.



۶. ۴. دایره و مثلث حاده‌الزاویه و منفرجه الزاویه

۶. ۴. ۲. شعاع

۷۵۹. روشن سازید که مرکزهای این سه دایره، عبارتند از قرینه‌های مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلعهای آن.

۶. ۴. ۳. نقطه و دایره

۶. ۴. ۳. ۱. نقطه درون دایره

۷۶۰. هر یک از کمانهای ایجاد شده در دایره از 180° کمتر می‌باشند.

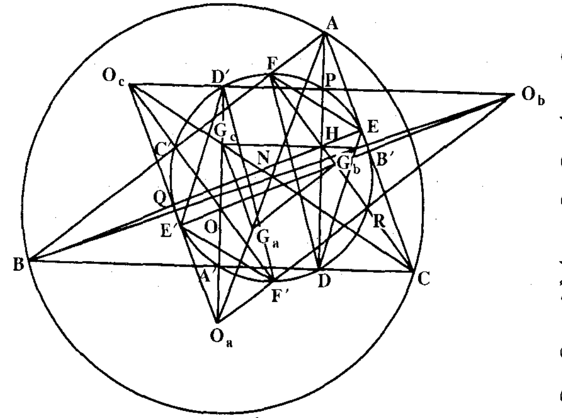
۷۶۱. فرض کنید O_a نقطهٔ متقارن O، یعنی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض ABC، نسبت به ضلع BC باشد. پاره‌خطهای OO_a و AH (شکل) مساوی و موازی‌اند. پس OA و HO_a مساوی و موازی‌اند. شعاع $OA = R$ بر ضلع $d = EF$ از مثلث پادک DEF عمود است، پس HO_a نیز بر d عمود است. یعنی اگر HO_a خط d را در نقطهٔ L قطع کند، پاره‌خط $HL = m$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث DEF است.

حال اگر d' متقارن d نسبت به BC باشد، فاصلهٔ O از d' با فاصله O_aL از d برابر است، زیرا O و O_a نیز نسبت به BC متقارنند. بعلاوه فاصلهٔ $O_aL = R + m$ به انتخاب ضلع d از مثلث DEF بستگی ندارد ؛ پس O از ضلعهای d'، e' و f' از مثلث $d'e'f'$ که از d' و دو ضلع مشابه‌اش e' و f' تشکیل می‌شود، همفاصله است.

نکته۱. ضمن اثبات بالا ثابت کردیم که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $d'e'f'$ با مجموع شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث پادک آن برابر است.

نکته ۲. مثلث ABC مثلث حادهٔ گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی ABCH است، که DEF مثلث پادک مشترک آنهاست. گزاره‌های قبلی را می‌توان طوری تغییر داد که در مورد مثلثهای دیگر گروه مرکز ارتفاعی نیز صادق باشند. این کار را به عهدهٔ خواننده می گذاریم.

نکته ۳. اگر در گزاره‌های قبل DEF را مثلث داده شده فرض کنیم، نقطه‌های B و C دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی آن خواهند بود ؛ خط d بر دایره‌های محاطی خارجی متناظر مماس است ؛



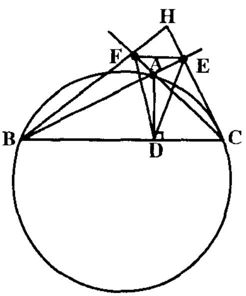
بنابراین، ′d ، متقارن d نسبت به خط‌المرکزین BC نیز بر (B) و (C) مماس است ؛ یعنی ′d چهارمین مماس مشترک این دو دایره (علاوه بر ضلعهای DEF) است. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی است که رأسهای آن مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض DEF هستند، پس گزاره‌های بالا را می‌توان به صورت زیر «ترجمه» کرد.

اگر دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث حاده را دو به دو در نظر بگیریم، چهار مماس مشترک آنها مثلث دیگری می‌سازند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی‌اش بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که رأسهای آن مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث داده شده هستند، منطبق است ؛ و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن با مجموع شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و قطر دایرهٔ محیطی مثلث مفروض برابر است.

۷۶۲. ارتفاعهای هر مثلث نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث ارتفاعیه نظیر آن مثلث می‌باشند.

۶. ۴. ۳. ۲. نقطه برون دایره

۷۶۳. هرگاه یک زاویه از مثلث منفرجه باشد، آن مثلث در کمانی کوچکتر از نیمدایره از دایرهٔ محیطی محاط است و دو ارتفاع مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ منفرجه را در امتداد آن تلاقی می‌کنند.



۷۶۴. وقتی یک زاویه از مثلثی منفرجه است، مرکز ارتفاعی آن در خارج دایرهٔ محیطی آن مثلث واقع می‌شود. از طرفی ارتفاعهای مثلث نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی می‌باشند. پس محل برخورد آنها مرکز یک دایرهٔ محاطی این مثلث می‌باشد که چون در خارج مثلث ارتفاعی قرار دارد، پس مرکز دایرهٔ محاطی خارجی آن است.

۶. ۴. ۴. زاویه

۷۶۵. دایره‌ای بر مثلث MCB محیط کنید و BN را امتداد دهید تا این دایره را در نقطه‌ای مانند M_1 قطع کند؛ $CM_1 = CM$، زیرا مجموع زاویه‌های روبه‌رو به آنها $80°$ و $100°$) برابر $180°$ است؛ $M_1\hat{C}M = M_1\hat{B}M = 20°$، یعنی NC نیمساز زاویهٔ M_1CM است و $\Delta M_1CN = \Delta NCM$ و $N\hat{M}C = N\hat{M_1}C = C\hat{M}B = 25°$.

۷۶۶. M و H' را نقطه‌های برخورد امتدادهای AI و AH با دایره می‌گیریم. از $OI = BH \Rightarrow OI = BH'$ نتیجه می‌شود: $IM = OM = OB = OH'$

$$\Delta OIM = \Delta OBH' \Rightarrow I\hat{M}O = B\hat{O}H' = 2BAH'$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 2(90° - \hat{B}) \Rightarrow \hat{B}-\hat{C} = 360° - 4\hat{B}$$

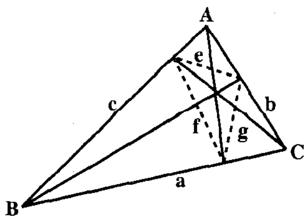
$$\Rightarrow 5\hat{B} = 360° + \hat{C} = 480° - \hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 80°\ ,\ \hat{C} = 40°\ ,\ \hat{A} = 60°$$

۶. ۴. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۶۷. A_1، B_1 و C_1 را وسط ضلعها و O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC فرض کنید. پاره‌خطهای راست OA_1، OC_1 و OB_1، شش ضلعی را به متوازی‌الاضلاعهایی تقسیم می‌کنند. بنابراین مساحت شش ضلعی دو برابر مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۷۶۹. اگر e، f و g ضلعهای مثلث پادک مثلث ABC باشند، داریم: $e + f + g = (a.OA' + b.OB' + c.OC') : R$ و مجموع داخل پرانتز دو برابر مساحت ABC است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



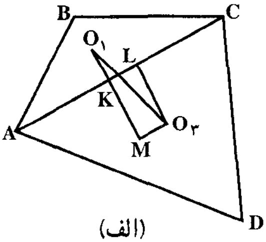
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۷. دایره و چهارضلعی

۷. ۱. چهارضلعی محاطی

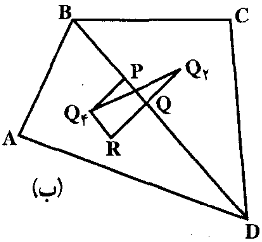
۷. ۱. ۱. تعریف و قضیه

۷۷۰. قطرهای چهارضلعی محاطی ABCD را رسم می‌کنیم. زاویه‌های روبه‌رو به هر ضلع، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان نظیر آن ضلع می‌باشند، پس برابرند. به عنوان مثال داریم: $\hat{ADB} = \hat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{۲}$ و $\hat{DAC} = \hat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{۲}$، بعکس اگر در یک چهارضلعی زاویه‌های روبه‌رو به یک ضلع برابر باشند، آن چهارضلعی بنا به ویژگی کمان درخور یک زاویه، محاطی است.

۷. ۱. ۲. شعاع



(الف)



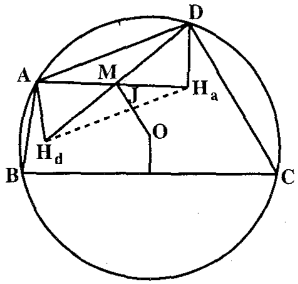
(ب)

۷۷۱. فرض کنید، $O_۱$ ، $O_۲$ ، $O_۳$ و $O_۴$ بترتیب، معرف مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABC ،BCD ،CDA و DAB باشند شکل (الف و ب). چون $O_۱O_۲O_۳O_۴$ مستطیل است، داریم: $O_۱O_۳ = O_۲O_۴$. اگر K و L نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با AC باشند، آن‌وقت، $KL = \frac{۱}{۲}|AB + CD - BC - AD|$. به همین ترتیب، اگر P و Q نقطه‌های تماس دایره‌های متناظر، با BD باشند، آن وقت $PQ = KL$. از $O_۳$ ، خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم تا امتداد $O_۱K$ را قطع کند. مثلث $O_۱O_۳M$ را به دست می‌آوریم؛ سپس مثلث $O_۲O_۴R$ را به روش مشابه می‌سازیم. این دو مثلث قائم‌الزاویه، برهم قابل انطباقند، زیرا در آنها: $O_۱O_۳ = O_۲O_۴$ و $O_۳M = KL = PQ = Q_۴R$. بنابراین، $O_۱M = O_۲R$ ؛ اما، $O_۱M$ برابر است با مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD و $O_۲R$ برابر است با

مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BDA.

۷ . ۱ . ۳. نقطه و دایره

۷ . ۱ . ۳ . ۱ . نقطه روی دایره



۷۷۲. نقطهٔ D روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد؛ پس M، نقطهٔ وسط پاره‌خطی که D را به H_d، مرکز ارتفاعی ABC، وصل می‌کند، روی دایرهٔ نه نقطه ABC قرار دارد. همین مطلب در مورد مثلثهای دیگر گروه نیز صادق است.

۷۷۳. اگر E نقطهٔ تقاطع نیمساز زاویهٔ داخلی A از چهارضلعی محاطی ABCD با دایرهٔ محیطی آن باشد، ثابت کنید CE نیمساز خارجی زاویهٔ C از این چهارضلعی است.

۷ . ۱ . ۳ . ۲ . نقطه‌های همخط

۷۷۴. سه مثلث ABC، ACD و ADB را با رأس مشترک Aدرنظر بگیرید. تصویر M روی AB، AC و AD را بترتیب با B_1 ، C_1 و D_1 نشان دهید. خطهای راست B_1C_1 ، C_1D_1 و D_1B_1 خطهای سیمسون نقطهٔ M نسبت به مثلثهای ABC، ACD و ADB هستند. اما نقطه‌های A، M، B_1 ، C_1 و D_1 بریک دایره واقعند. (AM قطر این دایره است.) در نتیجه، تصویرهای نقطهٔ M روی B_1C_1 ، C_1D_1 و D_1B_1 ، روی خط راستی واقعند که خط سیمسون نقطهٔ M نسبت به مثلث $B_1C_1D_1$ است. با درنظر گرفتن تصویرهای نقطهٔ M روی خطهای سیمسون متناظر سه مثلث با رأس مشترک B، به این نتیجه می‌رسیم که این سه تصویر هم، بر یک خط راست واقعند، بنابراین، چهار تصویر، همخطند. به استقرا، گذر از n به n+۱ ، درست به روش مشابه انجام می‌شود.

۷۷۵. پاره‌خطهایی که نقطهٔ میکل M برای چهار خط p ، q ، r و s را به مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی که توسط این چهار خط تعیین می‌شوند، وصل می‌کنند توسط خط سیمسون مشترک M نسبت به این چهار مثلث، یعنی خط PQRS نصف می‌شوند؛ پس این مرکزهای ارتفاعی روی خطی که در تجانس (M,۲) با خط PQRS متناظر است، قرار دارند.

۳.۳.۱.۷. نقطه‌های همدایره

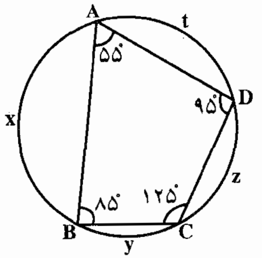
۷۷۶. سه زاویهٔ تشکیل شده در نقطهٔ O برابر ۴ قائمه‌اند و به دلیل محاطی بودن چهارضلعیها زاویهٔ G از چهارضلعی FGHI برابر مجموع مکملهای دو زاویهٔ دیگر تشکیل شده در نقطهٔ G می‌باشند، یعنی زاویهٔ HGF یا $G = B\hat{A}F + B\hat{C}H$ و $F\hat{I}H = \hat{I} = D\hat{C}H + D\hat{A}F$ از آن‌جا: ۲ قائمه $= \hat{A} + \hat{C} = \hat{G} + \hat{I}$. در نتیجه چهارضلعی FGHI محاطی است.

۴.۱.۷. کمان

۷۷۷. در چهارضلعی محاطی ABCD اگر $\hat{A} = ۵۵^\circ$ و $\hat{B} = ۸۵^\circ$ باشد $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - ۵۵^\circ = ۱۲۵^\circ$ و $\hat{D} = ۱۸۰^\circ - ۸۵^\circ = ۹۵^\circ$ است. امّا اندازهٔ کمانها را نمی‌توان مشخص کرد، زیرا با فرض $\widehat{AB} = x$، $\widehat{BC} = y$، $\widehat{CD} = z$ و $\widehat{DA} = t$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} y + z = ۱۱۰^\circ \\ z + t = ۱۷۰^\circ \\ t + x = ۲۵۰^\circ \\ x + y = ۱۹۰^\circ \end{cases}$$

که این دستگاه جواب ندارد.



۵.۱.۷. زاویه

۱.۵.۱.۷. اندازهٔ زاویه

۷۷۸. این دو زاویه، دو زاویهٔ مجاور چهارضلعی محاطی می‌باشند زیرا مجموع آنها ۱۸۰° نیست، پس دو زاویهٔ دیگر $۱۸۰^\circ - ۶۸^\circ = ۱۱۲^\circ$ و $۱۸۰^\circ - ۱۴۳^\circ = ۳۷^\circ$ است.

۷۷۹. با فرض $\hat{A} = x$ و $\hat{B} = y$ و با توجه به اینکه $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$ و $\hat{D} = ۱۸۰^\circ - \hat{B}$ است،

در مثلثهای AED و ABF داریم :

(۱) $\alpha + x + ۱۸۰^\circ - y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y - x = \alpha$

(۲) $\beta + x + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x + y = ۱۸۰^\circ - \beta$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$\hat{B} = y = ۹۰^\circ + \frac{\alpha - \beta}{۲}$ و $\hat{A} = x = ۹۰^\circ - \frac{\alpha + \beta}{۲}$ واز آن‌جا زاویه‌های D و C نیز مشخص می‌شوند.

۷۸۰. (ب) $E\hat{B}C = A\hat{D}C$ زیرا هردو مکمل $A\hat{B}C$ هستند. توجه داشته باشید که دادهٔ $B\hat{A}D = ۹۲^\circ$ برای حل مسأله لازم نیست.

۷۸۱. $\frac{۱}{۲}(\beta + y - \alpha)$

۷۸۲. از O به A وصل کنید در چهارضلعی محاطی AMONقطر OA ثابت است و داریم :

مقدار ثابت = $A\hat{M}N = A\hat{O}N$ و به نتیجهٔ فوق خواهیم رسید.

۷.۱.۵.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

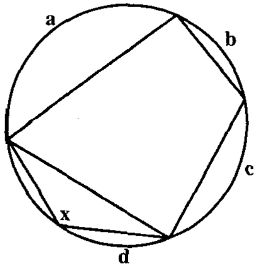
۷۸۳. در چهارضلعی محاطی ABCD زاویهٔ خارجی DCx را درنظر می‌گیریم. داریم :

$\hat{A} = D\hat{C}x$. زیرا هردو زاویه مکمل زاویهٔ BCD می‌باشند.

۷۸۴. گزینهٔ (ب)درست است. زیرا طبق شکل $x = \frac{۱}{۲}(a + b + c)$. بنابراین مجموع چهار زاویه

$$S = \frac{۱}{۲}(a + b + c + b + c + d + c + d + a + d + a + b)$$

$$= \frac{۳}{۲}(a + b + c + d) = \frac{۳}{۲}(۳۶۰^\circ) = ۵۴۰^\circ$$



۷۸۵. گزینهٔ (د) درست است. حالت خاصی را درنظر بگیرید که چهارضلعی مربع است و درنتیجه تمام زاویه‌های محاطی برابرند و هر زاویهٔ محاطی :

$$x = \frac{۱}{۲}(۲۷۰)^{\circ} \quad , \quad ۴x = ۵۴۰^{\circ}$$

۷۸۶. چهارضلعیهای ABCD و ABHF محاطی‌اند.

۷۸۷. از نقطهٔ M به نقطه‌های B و D وصل کنید و از خاصیتهای چهارضلعیهای محاطی استفاده کنید.

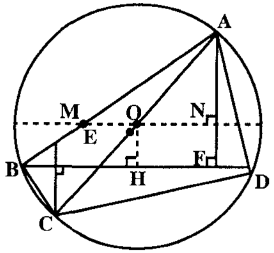
۷۸۸. چهارضلعی غیرمحدب ABCD را درنظر بگیرید. داریم :

$$D\hat{A}B = D\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \quad , \quad A\hat{D}C = A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

بعکس اگر در یک چهارضلعی غیرمحدب زاویه‌های روبه‌رو به یک ضلع برابر باشند، چهارضلعی محاطی است. (ویژگی کمان درخور)

۶.۱.۷. پاره خط

۷۸۹. چهارضلعی محاطی ABCD را که AOC یک قطر آن است، درنظر می‌گیریم. CE و AFعمودهای رسم شده بر قطر BD می‌باشند. باید ثابت کنیم که BE = DF است برای این کار قطری از دایره را که موازی BD است رسم می‌کنیم. و نقطه‌های برخورد آن با AF و CE را بترتیب N وM می‌نامیم و عمود OH را بر BD فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویه OAN و OCM همنهشتند. در نتیجه OM =ON و از آن جا BE = FD و همچنین BF = ED .



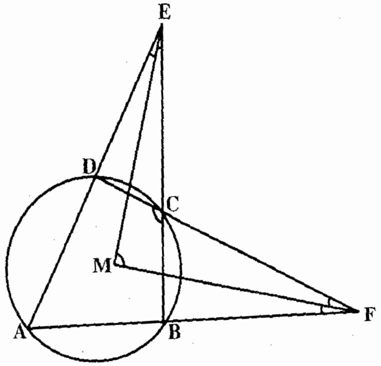
۷.۱.۷. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۷.۱.۷. خطها موازی‌اند

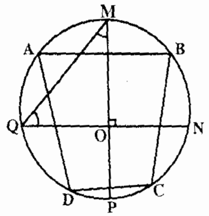
۷۹۰. ثابت کنید که اگر چهارضلعی محاطی باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین ضلعهای غیرمتوالی موازی‌اند و بعکس. اگر این ویژگی در یک چهارضلعی وجود داشته باشد، آن چهارضلعی محاطی است.

۷۹۱. اندازهٔ زاویه‌ای را که نیمساز زاویهٔ M با یکی از دو قطر چهارضلعی می‌سازد و همچنین اندازهٔ نصف زاویهٔ بین دو قطر را برحسب اندازهٔ کمانها بنویسید و ثابت کنید برابرند.

۷.۱.۷.۲. خطها برهم عمودند



۷۹۳. می‌دانیم که اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های حاصل از امتداد ضلعهای مقابل یک چهارضلعی غیرمشخص، برابر نصف مجموع اندازهٔ دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی است. یعنی $E\hat{M}F = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}$. حال چون چهارضلعی ABCD محاطی است پس $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ ودرنتیجه $E\hat{M}F=۹۰^\circ$ ، یعنی، $ME\perp MF$.



۷۹۴. اگر O نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای واصل بین وسطهای کمانهای مقابل در چهارضلعی محاطی ABCD باشد و از M به Q وصل کنیم. داریم:

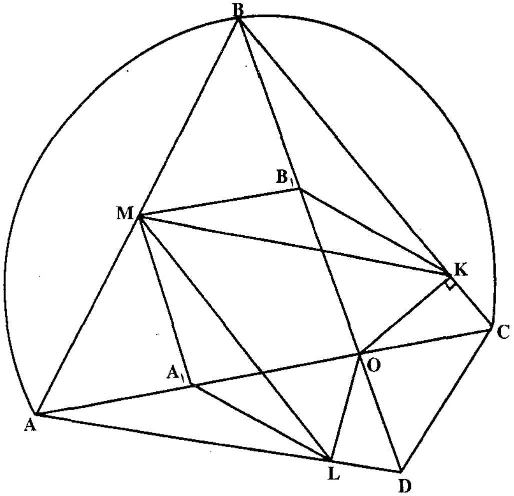
$$M\hat{O}N = O\hat{M}Q + O\hat{Q}M \ .$$

۷۹۵. با توجه به این که مثلث AGB قائم‌الزاویه است، ثابت کنید که دو زاویهٔ $G\hat{A}B$ و $B\hat{G}H$ باهم مساوی‌اند.

۷.۱.۷.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷۹۶. B_1 و A_1 را بترتیب وسطهای OB و OA می‌گیریم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OKB داریم: $KB_1 = \frac{1}{۲}OB$. از طرفی در مثلث OAB نیز داریم: $MA_1 = \frac{1}{۲}OB$. بنابراین از این‌دو تساوی، تساوی $KB_1 = MA_1$ نتیجه خواهد شد. به همین ترتیب تساوی $LA_1 = MB_1$ نیز حاصل خواهد شد. حال ثابت می‌کنیم دو مثلث MKB_1 و LMA_1 برابرند. با توجّه به تساویهای بالا کافی است ثابت کنیم زاویه‌های $M\hat{B_1}K$ و $M\hat{A_1}L$ باهم برابرند. برای این کار خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l} M\hat{B_1}O = M\hat{A_1}O \ (\text{چون } MB_1OA_1 \text{ متوازی‌الاضلاع است}) \\ K\hat{B_1}O = ۲K\hat{B}O = ۲O\hat{A}D = O\hat{A_1}L \end{array}\right\} \Rightarrow M\hat{A_1}L = M\hat{B_1}K$$

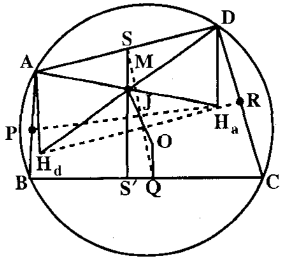


پس تساوی LM = MK حاصل می‌شود. یعنی عمودمنصف KL از M می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودمنصف KL از N نیز می‌گذرد.

۷۹۷. پادمرکز یک چهارضلعی، قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن نسبت به مرکز ثقل چهارضلعی است. مرکز ثقل چهارضلعی نقطهٔ برخورد خطهایی است که وسطهای ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی را به هم وصل می‌کنند.

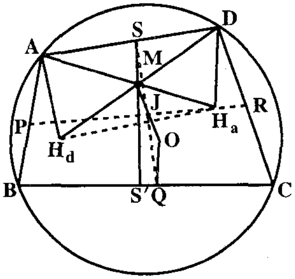
۴.۷.۱.۷. خطها همرسند

۷۹۸. فرض کنید O و J بترتیب مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل چهارضلعی محاطی ABCD و P، Q ، R و S بترتیب نقطه‌های وسط ضلعهای AB ، BC، CD و DA باشند. فرض کنید عمود SS' که از S بر BC رسم می‌شود خط OJ را در M قطع کند. خطهای SS' و OQ موازی‌اند و J خط QS را نصف می‌کند، پس J وسط OM است. پس SS' از M، نقطهٔ متقارن O، مرکز دایرهٔ محیطی، نسبت به J ، مرکز ثقل چهارضلعی، می‌گذرد ؛ یعنی SS' از نقطه‌ای می‌گذرد که به انتخاب اولیهٔ این عمود بستگی ندارد. پس قضیه ثابت می‌شود.



نکته. عمودی که از وسط هر قطر بر قطر دیگر رسم می‌شود نیز از نقطهٔ M می‌گذرد، زیرا مرکز ثقل J وسط خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند نیز هست.

۷۹۹. فرض کنید H_d و H_a بترتیب مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC و DBC باشند. داریم:



$AH_d = ۲OQ = DH_a$. خطهای AH_d و DH_a هردو بر BC عمودند؛ پس ADH_aH_d متوازی الاضلاع است و قطرهای AH_a و DH_d از وسط یکدیگر می‌گذرند.

به‌طور مشابه DH_d از وسط خطهای BH_b و CH_c می‌گذرد، و این خطها نیز از وسط DH_d می‌گذرند، پس قضیه ثابت می‌شود.

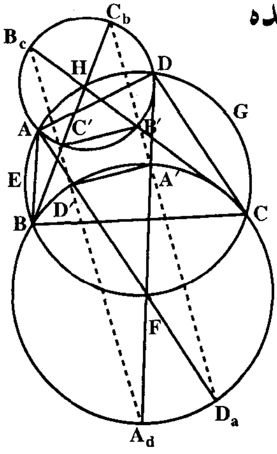
پس نقطهٔ مشترک این چهار خط، یعنی X، مرکز تقارن دو چهار ضلعی $H_aH_bH_cH_d$ و ABCD است.

نکته. نقطهٔ X بر پاد مرکز چهارضلعی یعنی M، منطبق است.

در واقع در مثلث DAH_d خط SX با AH_d موازی، و بنابراین، بر BC عمود است؛ پس SX از M می‌گذرد. برای PX ، QX و RX نیز وضعیت همین‌طور است و گزارهٔ فوق ثابت می‌شود. پس نقطهٔ M مرکز تقارن دو چهارضلعی ABCD و $H_aH_bH_cH_d$ است.

۸۰۱ . فرض کنید ABCD یک چهار ضلعی محاطی باشد، خط سیمسون D(ABC) از نقطهٔ وسط پاره‌خط بین D و مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد، یعنی از پاد مرکز چهارضلعی ABCD می‌گذرد. مطالب مشابهی در مورد خطهای سیمسون A(BCD)، B(CDA) و C(DAB) صادق است.

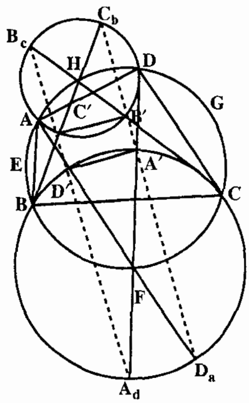
۸.۱.۷. شکلهای ایجاد شده



۸۰۲. فرض کنید E، F، G و H وسط کمانهای AB ، BC ، CD و DA از دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی ABCDباشند. D′ و A′ مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و DBC بترتیب روی AF و DF، یعنی نیمسازهای زاویه‌های BAC و BDC، و همچنین روی دایرهٔ (F,FB)قرار دارند؛ پس مثلث FA′D′ متساوی‌الساقین و قاعدهٔ A′D′ بر FH، نیمساز

زاویهٔ F، عمود است. به‌طور مشابه، خط FH بر $B'C'$ عمود است، که B'و C' بترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CAD و BAD هستند. به‌طور مشابه، خط EG بر خطهای $A'B'$ و $C'D'$ عمود است. خطهای FH و EG برهم عمودند و قضیه ثابت می‌شود.

۸۰۳. فرض کنید D_a ، D_b ، D_c ؛ A_b ، A_c ، A_d ؛ B_a ، B_c ، B_d ؛ C_a ، C_b و C_d بترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای ABC ، BCD، CDA و DAB باشند، به طوری که A_b مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس B از مثلث BCD باشد و...(شکل) دو نقطهٔ D'و D_a دوسر قطری از دایرهٔ (F,FB) و دو نقطهٔ A' و A_d دوسر قطر دیگر از این دایره هستند ؛ پس $D'A'D_aA_d$ یک مستطیل است، و در نتیجه A_d و D_a بترتیب روی خطهای $C'D'$ و $B'A'$ قرار دارند.



با درنظر گرفتن دایرهٔ (H ، HA) می‌توانیم نشان دهیم که نقطه‌های B_c و C_b بترتیب روی خطهای $D'C'$ و $A'B'$ قرار دارند. پس دومجموعهٔ چهارتایی از نقطه‌های همخط داریم که عبارتند از $A'B'C_bD_a$ و $C'D'A_dB_c$.

با درنظر گرفتن دایره‌های (E,EA) و (G,GC) دو نقطهٔ دیگر بر روی هریک از خطهای $A'D'$ و $B'C'$ به دست می‌آوریم.

با درنظر گرفتن ملاحظات مشابه، نتیجهٔ بیان شده به دست می‌آید.

نتیجه. شانزده مرکز سه مماس چهار مثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، چهارتا چهارتا روی هشت خط قرار دارند. این هشت خط از دو گروه چهارتایی تشکیل می‌شوند، به‌طوری که خطهای هرگروه باهم موازی‌اند و بر خطهای گروه دیگر عمودند. این جمعبندی گزاره‌های قبلی است.

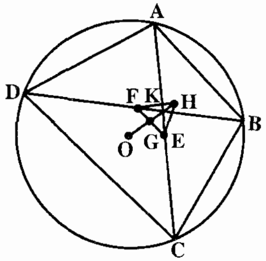
۸۰۴. نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو در چهارضلعی ABCD را E و F می‌نامیم.

نقطه‌های برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ $A\hat{E}D$ و $B\hat{F}A$ با ضلعهای چهارضلعی را G، H، I و J می‌نامیم. برای اثبات این که چهار ضلعی IGJH لوزی است باید ثابت کنیم که GH و IJ عمودمنصف یکدیگرند.

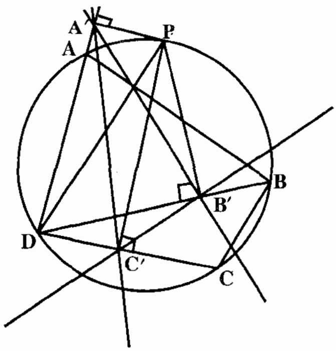
می‌دانیم که نیمسازهای دو زاویهٔ AED و BFA برهم عمودند. امّا می‌توان مستقیماً نشان داد که مثلث FGH متساوی‌الساقین است.

دو مثلث DEH و BEG دو زاویهٔ مساوی CEG و BEG را دارند. همچنین دو زاویهٔ D و GBE برابرند. زیرا هردو مکمل زاویهٔ ABC می‌باشند. در نتیجه زاویهٔ سوم این دو مثلث نیز برابر است، یعنی $D\hat{H}E = B\hat{G}E = C\hat{G}H$. پس مثلث FGH متساوی‌الساقین است. نیمساز FO از زاویهٔ رأس عمودمنصف قاعده است. همچنین $OH = OG$ همین‌طور می‌توان نشان داد که $OI = OJ$ است. پس IGJH لوزی است.

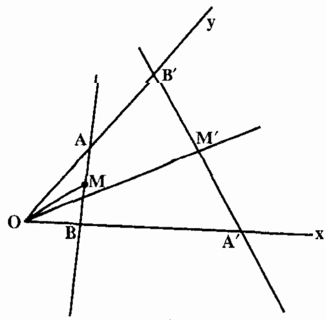
۹.۱.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۰۷. چهارضلعی ABCD محاط در دایرهٔ به مرکز O را درنظر بگیرید. وسط قطرهای AC و BD را بترتیب E و F، نقطهٔ برخورد قطرها را K و مرکز ارتفاعی مثلث KEF را H و مرکز ثقل چهارضلعی محاطی را G بنامید و ثابت کنید که نقطهٔ H قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به نقطهٔ G است.



۸۰۹. فرض کنید ABCD یک چهارضلعی محاطی، P نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی آن، و ′A، ′B و ′C تصویرهای نقطهٔ P روی خطهای DA، DB و DC باشند. خطهای ′A′B، ′B′C و ′C′A خطهای سیمسون P نسبت به مثلثهای DAB، DBC و DCA هستند، و نقطهٔ P با رأسهای مثلث ′A′B′C که توسط این خطهای سیمسون تشکیل می‌شود همدایره است، زیرا نقطه‌های ′A، ′B و ′C روی دایره‌ای به قطر PD قرار دارند. برای هرسه خطی که از این چهار خط درنظر بگیریم، وضعیت مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت شده است.



۸۱۱. نیمساز زاویهٔ ′AOA نیمساز زاویهٔ ′MOM است.

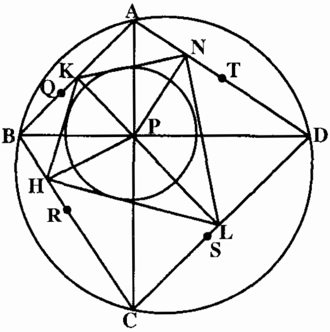
۷.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۸۱۲. الف. $\hat{۱} = ۷۴^\circ$ ب. $\hat{۲} = ۹۰^\circ$ پ. $\hat{۳} = ۵۵^\circ$ ت. $\hat{۳} = ۶۰^\circ$

ث. $\hat{۴} = ۴۰^\circ$ ج. $\hat{۴} = ۳۷^\circ$ چ. $\hat{a} = ۸۴^\circ$ ح. $\hat{a} = ۱۱۰^\circ$

خ. $\hat{b} = ۶۶^\circ$ د. $\hat{c} = ۹۸^\circ$ ذ. $\hat{d} = ۷۵^\circ$ ر. $C\hat{P}A = ۷۹^\circ$

۸۱۳. ۱. با استفاده از چهارضلعیهای محاطی PNDL، PLCH، PHBK و PKAN ثابت کنید که خطهای مصور نقطهٔ P، نیمسازهای داخلی زاویه‌های چهارضلعی HKNL می‌باشند و مجموع زاویه‌های روبه‌رو در این چهارضلعیها دو قائمه است.



۲. وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA را بترتیب Q، R، S و T بنامید. نقطهٔ P را به T وصل کنید و ثابت کنید PT در امتداد PH است و با استفاده از زاویه‌های قائمه THR و TNR ثابت کنید که دایرهٔ به قطر TR از نقطه‌های H و N می‌گذرد. همچنین دایرهٔ به قطر QS از نقطه‌های K و L می‌گذرد. از طرفی چهارضلعی QRST مستطیل و QS = TR است.

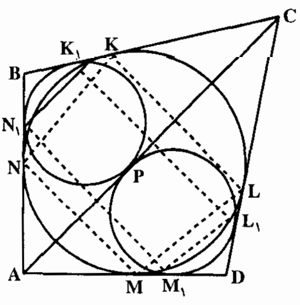
۸۱۴. الف. فرض کنید ABCD چهارضلعی داده شده باشد و R و Q بترتیب، نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با خط راست AC باشند. در این صورت:

$$RQ = |AQ - AR|$$

$$= \frac{۱}{۲}|(AB + AC - BC) - (AD + AC - CD)|$$

$$= \frac{۱}{۲}|AB + CD - AD - BC|$$

چون ABCD چهارضلعیی محیطی است، $AB + CD = AD + BC$ ، یعنی، $RQ = ۰$.



ب. اگر K، L، M و N نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای چهارضلعی، و $K_۱$، $L_۱$، $M_۱$ و $N_۱$ نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با ضلعهای چهارضلعی باشند (شکل)،

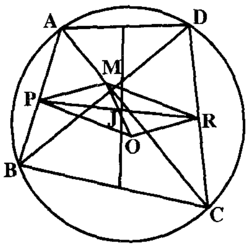
آن وقت $N_1K_1 \| NK$ و $M_1L_1 \| ML$. ثابت می‌کنیم که $K_1L_1 \| KL$ و $N_1M_1 \| NM$. چون دایره‌های محاطی مثلثهای ACB و ACD، روی قطر چهارضلعی، در یک نقطهٔ P برهم مماسند، داریم : $AN_1 = AP = AM$ ، یعنی $N_1M_1 \| NM$. در نتیجه، $K_1L_1M_1N_1$ ، و بعلاوه، $KLMN$، چهارضلعیی محاطی است.

۸۱۶. از ویژگی چهارضلعیهای محاطی استفاده کنید.

۲.۷. چهارضلعی محاطی عمود قطر

۲.۲.۷. نقطه و دایره

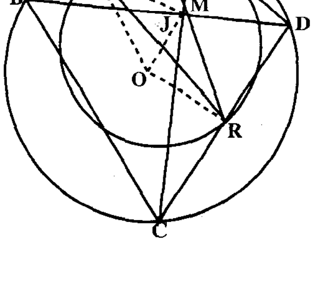
۱.۲.۲.۷. نقطه درون دایره



۸۱۷. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و J نقطهٔ برخورد خطهای واصل بین وسطهای ضلعهای مقابل و وسطهای قطرهای چهارضلعی باشند، H_d محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC بر عمود BD و بر قاعدهٔ AC منطبق است و خط DH_d از نقطهٔ M (قرینهٔ مرکز دایره نسبت به J) می‌گذرد. درنتیجه نقطهٔ M روی قطر BH_dD قرار دارد. به‌همین ترتیب نقطهٔ M روی قطر AC واقع است. پس نقطهٔ M محل برخورد این دو خط است.

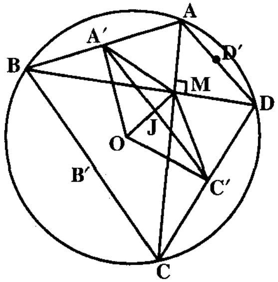
۲.۲.۲.۷. نقطه‌های همدایره

۸۱۸. در واقع اگر P وسط ضلع AB باشد (شکل)، قطر PR از دایرهٔ مذکور از نقطهٔ P' با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. برای بقیهٔ تصویرهای نقطهٔ M هم وضعیت به همین صورت است.



۳.۲.۷. پاره‌خط

۸۱۹. پاره‌خط OMدر نقطهٔ J نصف می‌شود و A′C′ پاره‌خطی است که نقطه‌های A′ و C′ وسطهای ضلعهای مقابل AB و CD را به هم وصل می کند. در نتیجه چهارضلعی A′MC′O متوازی‌الاضلاع است و OA′ = MC′ . ولی OA′ بر AB عمود است پس MC′ بر AB عمود می‌باشد و در نتیجه میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ MCD نصف وتر CD می‌شود. به عبارت دیگر OA′ نصف CD است.



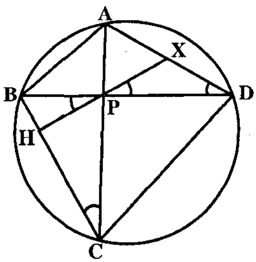
۸۲۰. ثابت کنید $\widehat{AE} = \widehat{BC}$ و یا $\widehat{CE} = \widehat{AB}$.

۴.۲.۷. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۲۱. مطابق با شکل، چهار گوشهٔ ABCD محاطی است و دو قطر AC و BD از آن در P برهم عمودند. خط PH بر BC عمود است و AD را درX تلاقی کرده است. برای اثبات آن که X وسط AD است، ملاحظه می کنیم که زاویه‌های XPD و BPH باهم و زاویه‌های XDP و ACB باهم برابرند. بنابراین دو زاویهٔ XDP و XPDباهم برابرند و در نتیجه XP = XD .

همچنین ثابت می‌شود که XP = XA ، بنابراین : XA = XD.

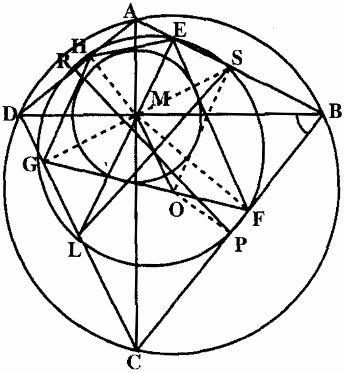
از قضیهٔ بالا، قضیهٔ زیر به سادگی بدست می‌آید :



در چهار گوشهٔ محاط در دایرهٔ به مرکز O که قطرهای آن در P برهم عمودند، وسطهای ضلعها و تصویرهای قائم P روی ضلعها هشت نقطهٔ واقع بر محیط یک دایره‌اند که مرکز آن وسط OP است.

۳.۷. چهارضلعی محیطی

۱.۳.۷. تعریف و قضیه



۸۲۲. محاطی بودن چهارضلعی حاصل در مسأله‌های قبل ثابت شد. محیطی بودن این چهارضلعی را ثابت کنید، یعنی ثابت کنید، مجموع ضلعهای روبه‌روی این چهارضلعی باهم برابرند.

۲.۳.۷. شعاع

۱.۲.۳.۷ . اندازهٔ شعاع

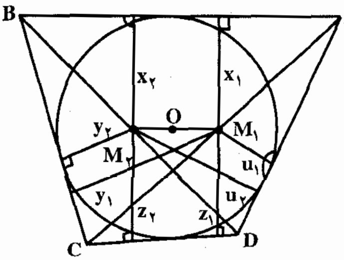
۸۲۳. با توجه به این که $DC=۵$ ، $BC=۴$ است و $AM=MQ=r$ می‌باشد. داریم :

$$AB+DC=BC+AD$$

$$r+۲+۵=۴+۳+r$$

۳.۳.۷. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۷ . نقطه‌های همخط



۸۲۴. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محیطی، O مرکز دایرهٔ محاطی آن M_1 وسط AC، M_2 وسط BD و r شعاع دایره باشد (فاصلهٔ O تا هریک از ضلعها، برابر r است)، x_1 ، y_1، z_1 و u_1 فاصله‌های M_1 بترتیب، تا AB ، BC ، CD، DA ، و x_2 ، y_2 ، z_2 و u_2 فاصله‌های M_2 ، بترتیب تا همین ضلعها هستند. چون $AB+CD=BC+DA$ داریم $AB.r-BC.r+CD.r-DA.r=۰$.

بعلاوه $AB.x_1-BC.y_1+CD.z_1-DA.u_1=۰$ و

$$AB.x_۲ - BC.y_۲ + CD.z_۲ - DA.u_۲ = ۰$$

و این درست بدان معنی است که نقطه‌های O ، $M_۱$ و $M_۲$ روی یک خط راست قرار دارند.

۷.۳.۴. ضلع

۸۲۶. ضلع چهارم را x فرض می‌کنیم، داریم : $۷+۱۶=۱۱+x \Rightarrow x=۱۲$

۸۲۷. داریم : $AB+CD=BC+DA \Rightarrow a+۱+۳a+۲=۴a-۳+a+۳$
$\Rightarrow a=۳ \Rightarrow CD=۱۱$

۸۲۸. مجموع هر دو ضلع روبه‌رو در یک چهارضلعی محیطی، نصف محیط چهارضلعی است. پس داریم : $۳۶ \div ۲ = ۱۸cm \Rightarrow$ ضلع مورد نظر $= ۱۸-۸=۱۰cm$

۷.۳.۵. قطر

۸۲۹. اگر در چهارضلعی محیطی ABCD ، AB = AD باشد، آن‌گاه BC = BD خواهد بود و در نتیجه قطر AC عمودمنصف قطر BD است. واضح است که قطر BD عمودمنصف قطر AC نیست.

۷.۳.۶. محیط

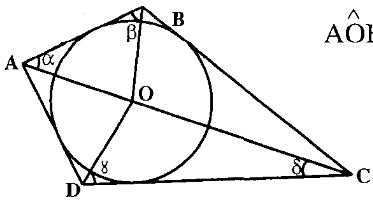
۸۳۰. چون $AD+BC=۷+۶+۴+۵=۲۲$ ، پس محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر ۴۴ است.

۸۳۱. ۵۴ سانتیمتر.

۷.۳.۷. زاویه

۸۳۲. O را مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی ABCD می‌گیریم. داریم :

$$A\hat{O}B = ۱۸۰^\circ - \alpha - \beta \;,\; C\hat{O}D = ۱۸۰^\circ - \gamma - \delta$$



درضمن $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D})=۱۸۰^\circ$.

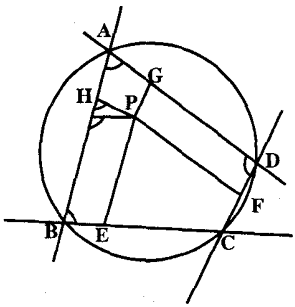
بنابراین، $A\hat{O}B+C\hat{O}D=۳۶۰^\circ-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=۱۸۰^\circ$.

۸.۳.۷. پاره‌خط

۸۳۳. ثابت کنید که هریک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای این که دایره‌ای، محاط در چهارضلعی ABCD وجود داشته باشد.

۸۳۴. نشان دهید که هریک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای این که دایره‌ای، مماس بر خطهای AB، BC ، CD و DA که مرکزش بیرون چهارضلعی ABCD است، وجود داشته باشد.

۹.۳.۷. شکلهای ایجاد شده



۸۳۵. فرض می کنیم ABCD یک چهارضلعی محاطی و زاویهٔ A کوچکترین زاویهٔ آن باشد. از نقطهٔ P واقع در داخل چهارضلعی، خطهایی به موازات AD و AB رسم می‌کنیم. تا بترتیب CD و CB را در نقطه‌های F و E قطع کنند. اگر نقطهٔ P به اندازهٔ کافی به نقطهٔ A نزدیک باشد، در این صورت نقطهٔ E بین B و C و نقطهٔ F بین نقطه‌های C و D قرار می گیرند. همچنین از نقطهٔ P خط PG را چنان رسم می‌کنیم که $P\hat{G}D=\hat{D}$ ، و PH را چنان رسم می‌کنیم که $P\hat{H}B=\hat{B}$ باشد. از آن جا که $\hat{B}>\hat{A}$ است، اگر P به قدر کافی به نقطهٔ A نزدیک باشد، H بین A و B و به همین ترتیب G بین A و D واقع می‌شود. چهارضلعی PECF محاطی است. زیرا دارای همان زاویه‌های ABCD است. چهارضلعی AHPG محاطی است زیرا $A\hat{H}P+A\hat{G}P=۱۸۰^\circ-\hat{B}+۱۸۰^\circ-\hat{D}=۱۸۰^\circ$.

PHBE و PFDG ذوزنقه‌هایی متساوی‌الساقین و در نتیجه محاطی‌اند. به این ترتیب ABCD را به ۴ چهارضلعی محاطی تقسیم کرده‌ایم. برای تقسیم چهارضلعی به

چهارضلعیهای محاطی بیشتر، تنها خطهایی موازی قاعده‌های یکی از ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین حاصل رسم می‌کنیم.

۷.۳.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۳۶. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که ABCD ذوزنقه است، $BC \parallel AD$ و AC نیمساز زاویهٔ BAD است؛ بنابراین $AB = BC$ ، به همین نحو، $BC = CD$. فرض کنید $AB = BC = CD = a$ و $AD = b$. فاصلهٔ بین وسط قطرها، $۲r$ است، در نتیجه $۲r = \frac{b-a}{۲}$. ارتفاع BM را، از نقطهٔ B، بر AD رسم می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$AM = \frac{b-a}{۲} = ۲r \ , \ BM = ۲r$$

در نتیجه، $a = AB = ۲r\sqrt{۲}$ و $b = ۴r + ۲r\sqrt{۲}$.

جواب: $۴r^{۲}(\sqrt{۲}+۱)$.

۷.۳.۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۸۳۷. داریم: $P\hat{R}Q = ۱۸۰^\circ - (۷۲^\circ + ۵۴^\circ) = ۵۴^\circ$.

در نتیجه کمانهای دایره و از روی آنها زاویه‌های چهارضلعی قابل محاسبه‌است.

۸۳۸. الف. $r = ۱۴$ زیرا:

$$BR = BQ = ۲۷ \Rightarrow SC = RC = ۳۸ - ۲۷ = ۱۱$$

$$\Rightarrow r = DS = ۲۵ - ۱۱ = ۱۴$$

ب. $x = ۲۱$ زیرا:

$$r = DS = ۱۰ \ , \ SC = CR = ۱۱ \Rightarrow x = DS + SC = ۱۰ + ۱۱ = ۲۱$$

۷.۴. دایره و چهارضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

۷.۴.۲. نقطه و دایره

۸۳۹. مرکزهای این دایره‌ها، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی چهارضلعی داده شده

می‌باشند و بنابراین در چهارضلعی به دست آمده زاویه‌های روبه‌رو مکمل می‌باشند. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است.

۸۴۰. اگر وسطهای ضلعهای چهارضلعی ABCD را M، N ، P و Q بنامیم. چهارضلعی MNPQ مستطیل است.

۷.۴.۳. پاره‌خط

۷.۴.۳.۱. اندازهٔ پاره‌خط

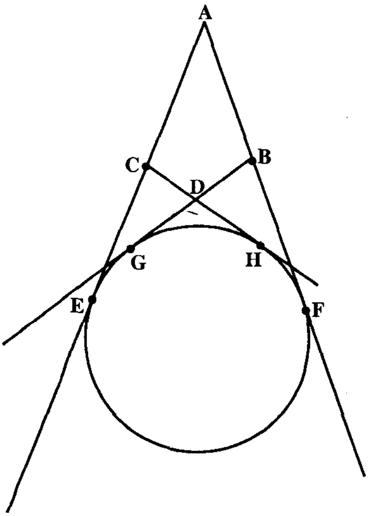
۸۴۱. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که نیمسازهای زاویه‌های C و D ، روی ضلع AB متقاطعند. این نقطهٔ برخورد را با O نشان می‌دهیم. دایره‌ای بر مثلث DOC محیط کنید. فرض کنید K دومین نقطهٔ برخورد این دایره با AB باشد. داریم :

$$D\hat{K}A = D\hat{C}O = \frac{۱}{۲}D\hat{C}B = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - D\hat{A}K) = \frac{۱}{۲}(D\hat{K}A + A\hat{D}K)$$

بنابراین، $D\hat{K}A = A\hat{D}K$ و $AD = AK$. به همین ترتیب، $BC = BK$ ؛ در نتیجه، $AD + CB = AB$.

جواب : $a - b$.

۷.۴.۳.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۸۴۲. چهارضلعی ABCD را که امتداد ضلعهای AC، AB ، BD و CD از آن بترتیب در نقطه‌های E ، F ، G و H بر یک دایره مماسند درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم، $AC - DB = AD - BC$. با توجه به برابری مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک دایره و با فرض $AE = AF = a$ و $BG = BH = b$ و $DF = DG = d$ و $CE = CH = c$ داریم :

$AC = a - c \ , \ DB = d - b \Rightarrow AC - DB = a + b - c - d$

$AD = a - d \ , \ CB = c - b \Rightarrow AD - CB = a + b - c - d$

$\Rightarrow AC - DB = AD - CB$

نکته. در چهارضلعی کاو محیط بر یک دایره (شکل) داریم: $AC + CB = AD + DB$.

۸۴۳. از P و Q دو عمود بر BD رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و 'H می‌نامیم. می‌توان گفت:

$$PQ \geq HH' = OH + OH' = \frac{۱}{۲}OD + \frac{۱}{۲}OB \quad (۱)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که

$$PQ \geq \frac{۱}{۲}OA + \frac{۱}{۲}OC \quad (۲)$$

طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را باهم جمع می‌کنیم.

$$۲PQ \geq \frac{۱}{۲}(OA + OB + OC + OD)$$

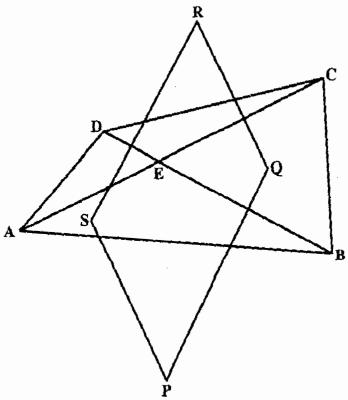
ولی در مثلثهای OAB و OCD می‌دانیم که $OA + OB \geq AB$ و $OC + OD \geq CD$.
بنابراین،

$$۲PQ \geq \frac{۱}{۲}(AB + CD) \Rightarrow PQ \geq \frac{۱}{۴}(AB + CD)$$

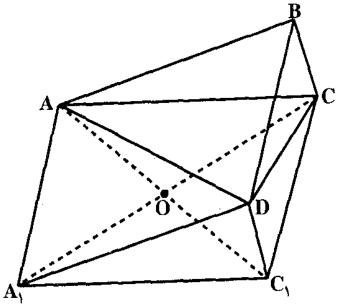
۷.۴.۴. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است

۸۴۴. اگر قطر AC عمودمنصف قطر BD از چهارضلعی ABCD باشد، $CD = CB$ و $AB = AD$ است. از آن‌جا $AB + CD = AD + BC$ ، و در نتیجه چهارضلعی محیطی است.

۷.۴.۵. شکلهای ایجادشده



۸۴۵. الف. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای ضلعهای آن است. بنابراین، P، Q، R و S بترتیب روی عمودمنصفهای پاره‌خطهای AE، BE، CE و DE واقعند. چون هردو خط عمود بر یک خط باهم موازی‌اند، PQRS متوازی‌الاضلاع است.



۸۴۶. فرض مسأله ایجاب می‌کند که ABCD چهارضلعیی محدب باشد. متوازی‌الاضلاع ACC_1A_1 (شکل) را، که در آن ضلعهای AA_1 و CC_1 با یکدیگر برابر و با قطر BDموازی‌اند، درنظر بگیرید. مثلثهای ADA_1 ، CDC_1 و C_1DA_1 ، بترتیب، با مثلثهای ABD ، BCD و ABC قابل انطباقند.
در نتیجه، پاره‌خطهایی که D را به رأسهای A، C، C_1 و A_1 وصل می‌کنند، متوازی‌الاضلاع را به چهار مثلث تقسیم می‌کنند که در آنها شعاع دایره‌های محاطی باهم برابرند. اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع ACC_1A_1 باشد، آن وقت Dباید بر O منطبق باشد (برای مثال، اگر D در درون مثلث COC_1 باشد، آن وقت شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ADA_1 از شعاع دایرهٔ محاطی مثلث AOA_1 بزرگتر است، و همین‌طور در مثلث CDC_1). بنابراین، ABCD متوازی‌الاضلاع است، امّا بعلاوه می‌دانیم که ACC_1A_1 لوزی است، یعنی، ABCD ، مستطیل است.

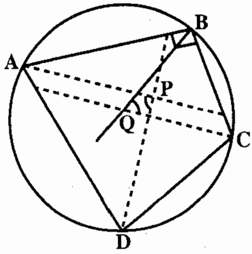
۸۴۷. فرض می‌کنیم، قطرهای چهارضلعی ABCD، که در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند، برهم عمود نباشند و برای مثال، AOB زاویه‌ای حاده باشد. نقطه‌های A' و B' ، قرینهٔ نقطه‌های A و B نسبت به O را پیدا می‌کنیم. شعاعهای دایره‌های محاط در مثلثهای $A'OB$ و $B'OC$ ، از شعاع دایرهٔ محاط در مثلث AOB کوچکترند (مساحت همهٔ این مثلثها، یکی است، ولی محیط مثلث AOB کمتر است) ؛ بنابراین، مماسهایی که از نقطه‌های A و B بر دایره‌های به شعاع r ، محاط در زاویه‌های BOC و AOD رسم شوند، نیمخطهای راست OA' و OB' را در نقطه‌های C و D قطع می‌کنند که، بترتیب، دورتر از نقطه‌های A' و B' نسبت به O قرار دارند، به نحوی که پاره‌خط راست CD، نمی‌تواند بر دایرهٔ به شعاع r محاط در مثلث $OA'B'$ مماس شود. به این ترتیب، خطهای راست AC و BD برهم عمودند و، با توجه به برابری شعاعهای دایره‌های محاطی، این قطرها، محورهای تقارن چهارضلعی ABCD را تشکیل می‌دهند و این به معنای آن است که چهارضلعی ABCD، یک لوزی است.

۸۴۸. فرض کنید که نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و D از چهارضلعی ABCD یکدیگر را در P و نیمسازهای زاویه‌های B و C یکدیگر را در Q قطع کنند. داریم :

$$A\hat{P}D = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{D}) \quad , \quad B\hat{Q}C = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C})$$

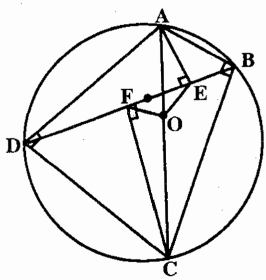
پس، $A\hat{P}D + B\hat{Q}C = ۳۶۰^\circ - \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}) = ۳۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

به عنوان تمرین، گزارهٔ مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را ثابت کنید.



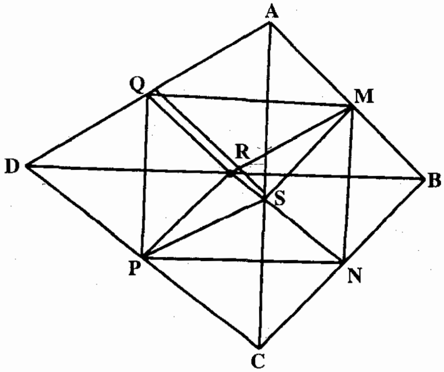
۷.۴.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۲. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD باشد، برابری BF = DE یا OE = OF = OE را ثابت کنید.



۷.۶.۷ . مسأله‌های ترکیبی

۸۵۳. چهارضلعی ABCD را درنظر بگیرید. وسط ضلعهای AB ، BC، CD و DA از این چهارضلعی را M، N ، P و Q بنامید. اگر R وسط قطر BD و S وسط قطر AC باشد. ثابت کنید، دایره‌های محیطی چهار مثلث RMN ، RPQ، SMQ و SNP از یک نقطه می‌گذرند.



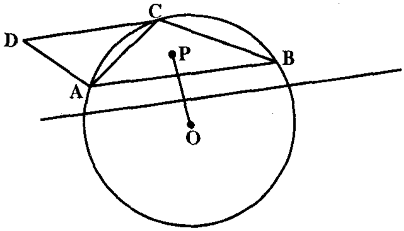
۷ . ۵ . دایره و چهارضلعیهای ویژه

۷ . ۵ . ۱ . دایره و متوازی‌الاضلاع

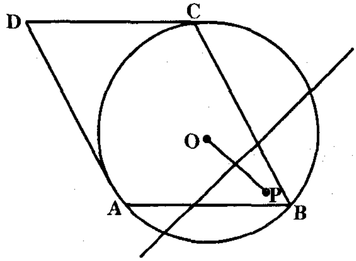
۷ . ۵ . ۱ . ۲ . شعاع

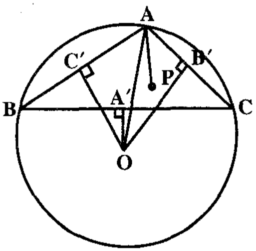
۸۵۴. M_1 را طوری بگیرید که $BCMM_1$ متوازی‌الاضلاع باشد ؛ M_1 روی دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های M، B و A می‌گذرد. چون $AM_1 = DM$ ($ADMM_1$ هم، متوازی‌الاضلاع است)، مثلثهای CDM و BAM_1 قابل انطباقند، یعنی، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث CDM برابر با R است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ADM هم، برابر با R است.

۸۵۵. راه اوّل. نقطهٔ P را داخل یا روی محیط مثلث ABC درنظر می گیریم. هر خط راستی از صفحهٔ مثلث که از نقطهٔ P بگذرد، صفحه را به دو نیمصفحه تقسیم می کند، یکی از این دو نیمصفحه شامل P است و دیگری شامل P نیست. نیمصفحهٔ شامل P دست کم یکی از رأسهای مثلث ABC را دربر می‌گیرد. برای حالتی که نقطهٔ P بر نقطهٔ O منطبق است، مسأله روشن است. فرض می کنیم $P \neq O$ باشد. عمودمنصف پاره‌خط PO را رسم می کنیم. هر نقطه‌ای که در نیمصفحهٔ شامل P باشد به P نزدیکتر است تا به O و روشن است که این حکم در مورد رأسی از مثلث که در این نیمصفحه واقع است، نیز صادق است.



راه دوم . چون متوازی‌الاضلاع نسبت به مرکز خود متقارن است لذا می‌توانیم نقطهٔ P را در داخل یا روی محیط مثلث ABC درنظر بگیریم. درواقع اگر نقطهٔ P در داخل مثلث ADC باشد، به علّت تساوی دو مثلث ADC و ABC می توانیم دایره‌ای با همان شعاع R را بر مثلث ADC محیط کنیم. با تعویض نقطه‌های B و D در مسأله تغییری حاصل نمی‌شود. به این ترتیب مسأله به این صورت درمی‌آید : فاصلهٔ هر نقطهٔ P واقع در داخل





یا روی محیط یک مثلث از نزدیکترین رأس، نمی‌تواند بزرگتر از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد. اثبات بر اساس پیش‌قضیهٔ زیر قرار دارد:
اگر P نقطه‌ای واقع در داخل یا روی محیط یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، آن‌گاه فاصلهٔ هر نقطهٔ P از هر انتهای وتر، از طول وتر تجاوز نمی‌کند. درستی این قضیه برای حالتی که P روی وتر باشد واضح است و برای حالتی که P داخل مثلث باشد، زاویهٔ $A\hat{P}B$ بزرگترین زاویه در مثلث ABP خواهد بود. لذا ضلع AB از هرکدام از دو ضلع PB و AP بزرگتر می‌شود. حال قضیه را می‌توان ثابت نمود. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O گرفته تصویرهای این نقطه روی ضلعهای مثلث ABC را A' ، B' و C' می‌نامیم. وقتی نقطهٔ P داخل یا روی محیط مثلث ABC باشد قطعاً داخل یا روی محیط یکی از مثلثهای AOB' ، $B'OC$ ، COA' ، BOC' و یا $C'OA$ قرار دارد. برای مثال فرض می‌کنیم P داخل یا روی مثلث AOB' باشد. با توجه به پیش‌قضیهٔ بالا داریم: $AP \le AO = R$.

۷. ۵. ۱. ۳. قطر

۸۵۶. نقطهٔ B' محل برخورد ارتفاعهای مثلث ACD است.

۷. ۵. ۱. ۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۵۷. با رسم چند حالت از متوازی‌الاضلاع با توجه به داده‌های مسأله، نقطهٔ ثابت را مشخص و سپس حکم مسأله را ثابت کنید.

۷.۵.۱.۵. شکلهای ایجاد شده

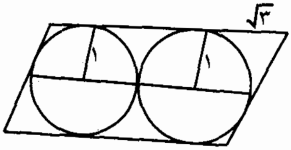
۸۵۸. چون چهارضلعی متوازی‌الاضلاع و محیطی است، پس:

$$2AB = 2BC \Rightarrow AB = BC$$

بنابراین متوازی‌الاضلاع لوزی است.

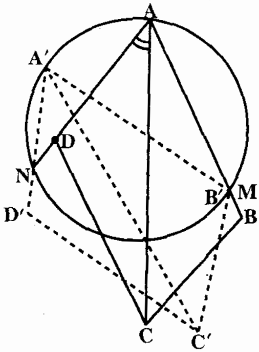
۷ . ۵ . ۱ . ۶ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۹ . $\frac{۴}{۳}\left(۲\sqrt{۳}+۳\right)$



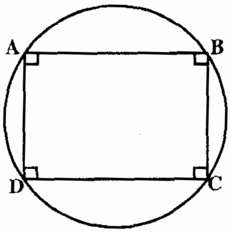
۸۶۰ . زاویهٔ DAB ثابت است، پس رأس A از متوازی‌الاضلاع روی کمان درخور زاویهٔ A مقابل به وتر MAN قرار دارد. دایرهٔ محیطی چهارضلعی MANO را رسم می‌کنیم. زاویهٔ NAO یا D′A′C′ مقدار ثابتی دارد. ضلع A′D′ از این زاویه از نقطهٔ ثابت N می‌گذرد، پس ضلع دیگر آن یعنی A′C′ نیز از نقطهٔ ثابتی مانند O می‌گذرد.

نکته. این مسألهٔ ساده هندسی در استاتیک اهمیت زیادی دارد.



۷ . ۵ . ۲ . دایره و مستطیل

۷ . ۵ . ۲ . ۲ . نقطه و دایره



۸۶۱ . گزینهٔ (د) درست است.

۸۶۲ . مستطیل چهارضلعی محاطی است. زیرا مجموع هر دو زاویهٔ روبه روی آن ۱۸۰ درجه است.

۷ . ۵ . ۲ . ۳ . پاره خط

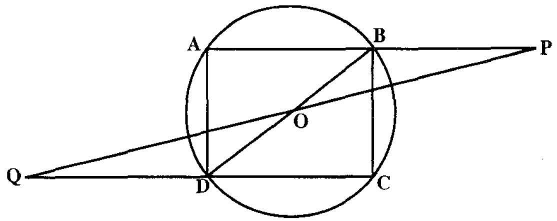
۸۶۳ . چهارضلعی DIAN متوازی‌الاضلاع است، پس (۱) $\hat{N}=\hat{I}$.

از طرفی (۲)$\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$ = $\hat{M}=\hat{N}$. از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{I}=\hat{M}$ و در نتیجه $DI = DM$ است.

۷ . ۵ . ۲ . ۴ . خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۷ . ۵ . ۲ . ۴ . ۱ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۸۶۴. ثابت کنید که اگر ضلع AB از نقطهٔ ثابت P بگذرد، ضلع مقابل به آن یعنی CD از نقطهٔ ثابت Q قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مستطیل می‌گذرد.



۷ . ۵ . ۲ . ۵ . شکلهای ایجاد شده

۸۶۵. چون $F\hat{E_1}E = F\hat{C}E = 90^\circ$ ، FE_1EC چهار ضلعیی محاطی است و $F\hat{C}E_1 = F\hat{E}E_1 = 60^\circ$. به همین ترتیب، FE_1AD چهارضلعیی محاطی است و $E_1\hat{D}F = E_1\hat{A}F = 60^\circ$ ، یعنی، DE_1C مثلثی متساوی‌الاضلاع است. به روش مشابه، ثابت می‌کنیم، BF_1C هم، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۸۶۶. مستطیل ABCD محیط بر دایرهٔ (O) را درنظر می‌گیریم. با توجه به این که $AB + CD = BC + AD$ و $AB = CD$ و $BC = AD$ است، پس $2AB = 2BC$ و از آن جا $AB = BC$ و ABCD مربع است.

۸۶۷. AC و BC قطرهای دایره‌اند، پس $A'B'D'C'$ متوازی‌الاضلاع محیط بر دایره است. بنابراین لوزی است.

۸۶۸. ABCD را مستطیل داده شده و LN را، مماس مشترک دایره‌های ۱ و ۳ (به مرکز نقطه‌های A و C) می‌گیریم. از نقطهٔ O، مرکز مستطیل، عمود OM را بر خط راست LN رسم می‌کنیم. چهارضلعی ALNC یک ذوزنقه، و OM پاره‌خط راستی است که وسط دو ساق آن را به هم وصل کرده است، به نحوی که

$$OM = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$$

فاصلهٔ نقطهٔ O تا مماس مشترک دوم همین دو دایره، بازهم برابر $\frac{1}{2}(r_1 + r_3)$ می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود که، فاصلهٔ O، تا هریک از مماس مشترکهای دو دایرهٔ

دیگر، برابر است با $\frac{1}{2}(r_2+r_4)$. چون بنا به فرض، باید داشته باشیم: $r_1+r_3=r_2+r_4$، بنابراین نقطهٔ O از هر چهار مماس مشترک به یک فاصله است، یعنی مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است که به وسیلهٔ این مماسها تشکیل می‌شود.

۷.۵.۳. دایره و مربع

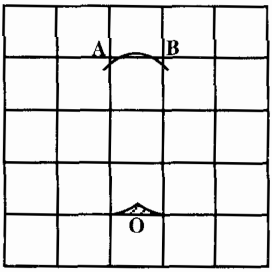
۷.۵.۳.۱. تعریف و قضیه

۸۶۹. چون مجموع زاویه‌های روبه‌رو در هر مربع 180° است، پس هر مربع همواره محاطی است و چون مجموع ضلعهای روبه‌رو با هم برابرند، پس هر مربع همواره محیط بر یک دایره است. شعاع دایرهٔ محاطی مربع به ضلع a، برابر $\frac{a}{2}$ و شعاع دایرهٔ محیطی آن $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است.

۷.۵.۳.۲. نقطه و دایره

۸۷۰. پاسخ: ۸۰۰ یا ۷۹۹.

خطهای راست شبکه را افقی و قائم می‌نامیم. دایرهٔ به قطر ۲۰۰، وقتی که از گره‌های شبکه عبور نکند و بر خطهای راست شبکه مماس نباشد، ۲۰۰ خط راست افقی و ۲۰۰ خط راست قائم را قطع می‌کند و، در ضمن هر کدام از آنها را دوبار. بنابراین، حداکثر تعداد نقطه‌های برخورد برابر است با ۸۰۰. این ۸۰۰ نقطه، محیط دایره را به ۸۰۰ بخش تقسیم می‌کنند. هریک از این بخشها در درون یکی از خانه‌ها قرار دارد. بنابراین، حداکثر ممکن برای تعداد خانه‌ها، ۸۰۰ است. با وجود این، ممکن است، دو بخش از این بخشها متعلق به یک خانه باشند، یعنی محیط دایره خانه‌ای را دوبار قطع کند. ثابت می‌کنیم، از این گونه خانه‌های «خاص» بیش از یکی نمی‌تواند وجود داشته باشد. ببینیم، وقتی محیط دایره ضلع AB از خانه‌ای را دوبار قطع می‌کند، نقطهٔ O، مرکز دایره، در کجا می‌تواند قرار گیرد؟

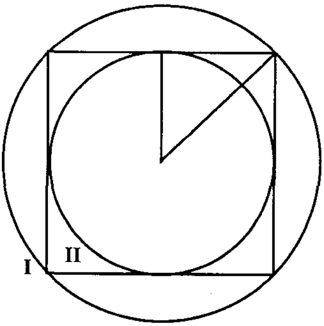


فاصلهٔ مرکز O از دایرهٔ به قطر ۲۰۰، تا هر یک از نقطه‌های A و B، از ۱۰۰ بیشتر، ولی فاصلهٔ آن از خط راست AB از ۱۰۰ کمتر است؛ بنابراین، نقطهٔ O، در بیرون دایره‌های به شعاع ۱۰۰ و به مرکزهای A و B، بین خطهای قائم شبکه که از A و B می‌گذرند و در درون نوار به عرض ۲۰۰ با محور افقی AB واقع است. همهٔ این نقطه‌ها، درون دو مثلث منحنی‌الخط را پر می‌کنند (یکی از این مثلثها را، روی شکل، هاشور زده‌ایم). روشن است که، برای پاره‌خطهای راست متفاوت AB، چنین مجموعه‌هایی، دارای نقطه‌های مشترک نیستند و، بنابراین، بیش از یک خانهٔ «خاص» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۷ . ۵ . ۳ . ۳ . زاویه

۸۷۱. چون $\overset{\frown}{AC} = 90^\circ$ و F وسط این کمان است، پس $\overset{\frown}{FC} = 45^\circ$ و از آن‌جا $F\hat{B}C = y = 22^\circ 30'$. کمان $\overset{\frown}{PB} = 90^\circ$ و BPE زاویه‌ای ظلی است، پس $x = \frac{\overset{\frown}{PB}}{2} = 45^\circ$.

۷ . ۵ . ۳ . ۴ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۷۲. (ب) نسبت شعاع دایرهٔ محیطی به شعاع دایرهٔ محاطی مربع برابر است با نسبت قطر مربع به ضلع آن، یعنی $\sqrt{2}$. نسبت مساحتهای دایره‌ها برابر است با مجذور نسبت شعاعهای آنها یعنی برابر است با $(\sqrt{2})^2 = 2$.

۸۷۳. شکلهای F_1 و F_2 را که شکل مفروض F (اجتماع دایره‌ها) با انتقال به اندازهٔ بردارهای به‌طول ۰/۰۰۱ و با زاویهٔ ۶۰ درجه بین آنها، به دست آمده‌اند، درنظر می‌گیریم. سه شکل F، F_1 و F_2، یکدیگر را نمی‌پوشانند و در درون مربع به ضلع ۱/۰۰۱ قرار دارند. بنابراین، مساحت S هریک از آنها، کمتر است از $\frac{1}{3}(1/001)^3 < 0/34$.

به همین ترتیب، برای مسألهٔ فضایی مشابه این مسأله، می‌توان ارزیابی

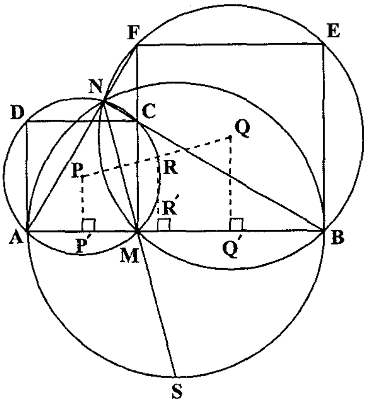
$\frac{۱}{۴}(۱/۰۰۱)^{۲} > ۰/۲۶$ را به‌دست آورد. در روی صفحه، می‌توان ارزیابی را دقیق‌تر کرد و، برای مثال، ثابت کرد که $S < ۰/۲۸۷$.

۷. ۵. ۳. ۵. مسأله‌های ترکیبی

۸۷۴. ۱. از N به A و F، و از C به N و B وصل می‌کنیم ANF و NCB خط راست می‌باشند، زیرا:

$$A\hat{N}M = ۴۵^\circ,\ M\hat{N}F = ۱۳۵^\circ \Rightarrow A\hat{N}F = ۴۵^\circ + ۱۳۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$ و

$$A\hat{N}B = A\hat{N}M + M\hat{N}B = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$



$A\hat{N}C = ۹۰^\circ$ بنابراین خطهای AF و BC در نقطهٔ N یکدیگر را قطع می‌کنند اما نقطهٔ برخورد این دو را N′ نامیده بودیم. پس N′ بر N منطبق است و نقطهٔ N روی دایره به قطر AB واقع است.

۲. چون $A\hat{N}M = M\hat{N}B = ۴۵^\circ$ است، پس MN همواره نیمساز زاویهٔ ANB می‌باشد. حال اگر نقطهٔ برخورد MN با این نیمدایره را S بنامیم، نقطهٔ S وسط نیمدایرهٔ AB است که نقطهٔ ثابتی می‌باشد. پس MN همیشه از نقطهٔ ثابت S وسط نیمدایره به قطر AB می‌گذرد.

۳. از نقطهٔ R وسط PQ و همچنین از نقطه‌های P و Q عمودهای RR′ و PP′ و QQ′ را بر AB فرود می‌آوریم. در ذوزنقهٔ PP′QQ′ داریم: $RR' = \frac{۱}{۲}(PP' + QQ') = \frac{۱}{۲}\left(\frac{AM+MB}{۲}\right) = \frac{AB}{۴}$، یعنی نقطهٔ R از خط AB به فاصلهٔ ثابتی قرار دارد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ R وسط PQ پاره‌خطی موازی AB و به فاصلهٔ $\frac{AB}{۴}$ از آن و به طول $\frac{AB}{۲}$ می‌باشد که عمودمنصف پاره‌خط AB آن را نصف می‌کند.

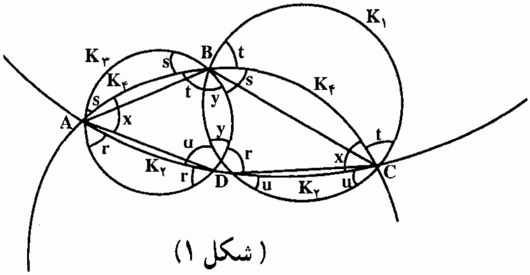
۷ . ۵ . ۴. دایره و لوزی

۷ . ۵ . ۴ . ۱. تعریف و قضیه

۸۷۵ . اگر از نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای لوزی عمودهای OE ، OF ، OG و OH را بر ضلعهای لوزی فرود آوریم، داریم : $OE = OF = OG = OH$.

۷ . ۵ . ۴ . ۲. زاویه

۸۷۶. حکم این قضیه، نه تنها برای لوزی، بلکه برای هر چهارضلعی ABCD درست است.
(در شکل (۱) ABCD یک چهارضلعی محدب و شکل، یک چهارضلعی مقعر است : اثباتی که در اینجا آورده‌ایم، برای هر دو شکل درست است). می‌دانیم : زاویهٔ بین دو منحنی متقاطع، بنابر تعریف، عبارت است از زاویهٔ بین مماسهای بر دو منحنی در نقطهٔ برخورد آنها.



(شکل ۱)

بنابراین، قضیهٔ ما این است :
ثابت کنید، زاویهٔ بین دو دایرهٔ K_2 و K_3 در نقطهٔ B، برابر است با زاویهٔ بین دو دایرهٔ K_2 و K_4 در نقطهٔ A.
ابتدا، به این نکته توجه می‌کنیم که، زاویه، بین دو دایره، در یکی از نقطه‌های برخورد آنها، برابر است با زاویهٔ بین دو دایره، در نقطهٔ برخورد دوم، زیرا اگر خط راستی را در نظر بگیریم که از مرکز دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد، تمامی شکل نسبت به این خط راست، متقارن است و می‌دانیم، دو زاویهٔ متقارن نسبت به یک خط راست، با هم برابرند. بنابراین، زاویه‌هایی که در شکل (۱) و یا در شکل (۲)، با یک حرف نشانه‌گذاری شده‌اند، با هم برابرند. داریم :

در رأس A : $r+x+s=180^\circ$ ؛

در رأس B : $s+y+t=180^\circ$ ؛

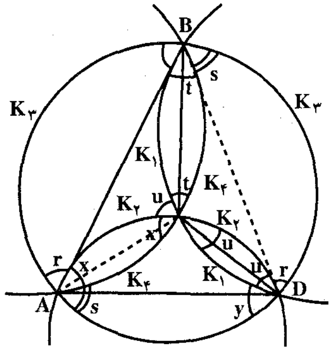
در رأس C : $t+x+u=180^\circ$ ؛

در رأس D : $u+y+r=180^\circ$ ؛

و بنابراین :

$$(r+x+s)-(s+y+t)+(t+x+u)-(u+y+r)=0$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید : $x=y$.



(شکل ۲)

۷ . ۵ . ۵. دایره و ذوزنقه

۷ . ۵ . ۵ . ۱. تعریف و قضیه

۸۷۷. اگر ذوزنقهٔ $ABCD$ متساوی‌الساقین باشد، $\hat{A}=\hat{B}$ و $\hat{C}=\hat{D}$ است. پس، با توجه به این که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$ است ؛ $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ و درنتیجه محاطی است. بعکس، اگر ذوزنقه $ABCD$ محاطی باشد، به دلیل موازی بودن AB و CD، $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$ و درنتیجه $\hat{A}=\hat{B}$ یعنی ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۷ . ۵ . ۵ . ۲. شعاع

۸۷۸. ۵ و ۷

۸۷۹. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$

۷ . ۵ . ۵ . ۳. زاویه

۸۸۰. دو کمان $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BC}$ برابرند.

۷ . ۵ . ۵ . ۴. پاره‌خط

۸۸۱. از O مرکز دایره عمودی بر دو قاعده فرود آورید و از O به A نیز وصل کنید.

۷ . ۵ . ۵ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۸۲. این مساحت برابر $\frac{۱}{۲}ED.EA$ است.

۸۸۳. ذوزنقه ABCD محیط بر دایرهٔ به مرکز O را در نظر می‌گیریم. خط MN میانهٔ ذوزنقه، از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی آن می‌گذرد. در مثلث قائم‌الزاویه OAD، میانهٔ OM نصف وتر AD است. پس $AD = ۲OM$ ، $OM = \frac{MN}{۲} = \frac{m}{۲}$. پس $AD = m$ ، درنتیجه $BC = m$ ، از طرفی $MN = \frac{AB + CD}{۲} = m$ ، در نتیجه $AB + CD = ۲m$ است و اندازهٔ محیط ذوزنقه برابر $۴m$ می‌باشد.

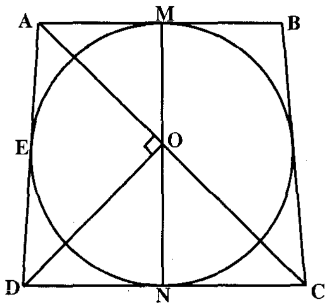
۷ . ۵ . ۵ . ۶. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۴. ۱. ثابت کنید : $A\hat{O}D = A\hat{E}D$.

۲. زاویه $A\hat{O}C$ مکمل زاویهٔ $\hat{F}$ است.

۸۸۵. نقطهٔ I روی دایرهٔ محیطی مثلث AOB قرار دارد.

۸۸۶. ۱. اگر از O به نقطه‌های C و D وصل کنیم، مثلث OCD متساوی‌الساقین است.



درنتیجه ارتفاع ON نیمساز و میانه نیز هست یعنی N وسط CD است. همچنین در مثلث OAB نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AB است. حال اگر M را به O و O را به N وصل کنیم چون OM و ON بر دو خط موازی عمودند پس نقطه‌های M و O و N بر یک استقامتند.

۲. چون AO نیمساز زاویهٔ DAB و OD نیمساز زاویهٔ ADC است و $A\hat{D}C + B\hat{A}D = ۱۸۰°$ می‌باشد. پس $A\hat{O}D = ۹۰°$ می‌شود.

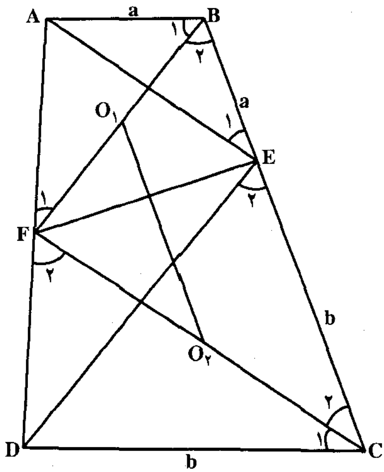
۳. در صورتی که E نقطهٔ تماس ساق با دایرهٔ محاطی ذوزنقه باشد، داریم $DE = DN$ و $AE = AM$ و یا $AE + ED = AM + DN = AD$.

۸۸۷. الف. در مثلث متساوی‌الساقین ABE، $\hat{E}_۱ = \frac{۱۸۰° - \hat{B}}{۲}$ و در مثلث متساوی‌الساقین

CDE نیزداریم $\hat{E}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{C}}{۲}$ ، پس: $\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = \frac{۳۶۰^\circ - (\hat{B}+\hat{C})}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$.

بنابراین $A\hat{E}D = ۹۰^\circ$ یعنی مثلث AED قائم‌الزاویه است. برای اثبات قائم‌الزاویه بودن مثلث BFC ثابت می‌کنیم که $\hat{F}_۲ + \hat{F}_۱ = ۹۰^\circ$ است. اما $\hat{F}_۱ + \hat{B}_۱ = ۹۰^\circ$ و $\hat{F}_۲ + \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ$ ، پس کافی است ثابت کنیم که $\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ$. چون $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ است لذا $\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۹۰^\circ$ و حکم ثابت است.

ب. دو مثلث ABF و BFE با هم مساوی‌اند. چون $EF = AF$ و $AB = BE$ و BF مشترک، پس $F\hat{E}B = ۹۰^\circ$ ، یعنی چهارضلعی ABEF محاطی است و مرکز آن $O_۱$ وسط پاره‌خط BF است. به همین دلیل نقطهٔ $O_۲$ وسط FC مرکز دایره محیطی چهارضلعی FECD است. بنابراین : $O_۱O_۲ = \frac{BC}{۲} = \frac{a+b}{۲}$.



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۸. دایره و n ضلعی $(n\geq 5)$

۸. ۲. شعاع

۸۸۸. حکم مسأله را می‌توان به روش استقرا ثابت کرد. مرحلهٔ شروع برهان، $n=4$، قبلاً بررسی شده است.

با این حال، راه دیگری برای حل، مبتنی بر تساوی زیر، پیشنهاد می‌کنیم. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم که زاویهٔ A بزرگترین زاویه باشد و r و R، بترتیب، شعاع دایرهٔ محاطی و محیطی و d_a ، d_b و d_c فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلعهای متناظر از مثلث باشند. در این صورت به ازای مثلث حاده

$$r+R=d_a+d_b+d_c \qquad (1)$$

و به ازای مثلث منفرجه

$$r+R=-d_a+d_b+d_c \qquad (2)$$

(در مثلث قائم‌الزاویه، $d_a=0$ و در این مثلث هر دو رابطهٔ بالا درست است.)

برهان. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد؛ A_0 ، B_0 و C_0 ، بترتیب، وسط ضلعهای BC و CA و AB باشند؛ و O مرکز دایرهٔ محیطی باشد. بنابر قضیهٔ بطلمیوس، در چهارضلعی AB_0OC_0 داریم: $\frac{b}{2}d_c+\frac{c}{2}d_b=\frac{a}{2}R$. با نوشتن دو رابطهٔ مشابه در چهارضلعیهای BC_0OA_0 و CB_0OA_0، و جمع کردن آنها با هم، به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)d_c+\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}\right)d_b+\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)d_a=\frac{1}{2}(a+b+c)R=pR$$

که از آن‌جا $p(d_a+d_b+d_c)-\frac{1}{2}(cd_c+bd_b+ad_a)=pR$. از آن‌جا که $\frac{1}{2}(cd_c+bd_b+ad_a)=S=pr$، پس از حذف کردن p، به برابری (۱) می‌رسیم.

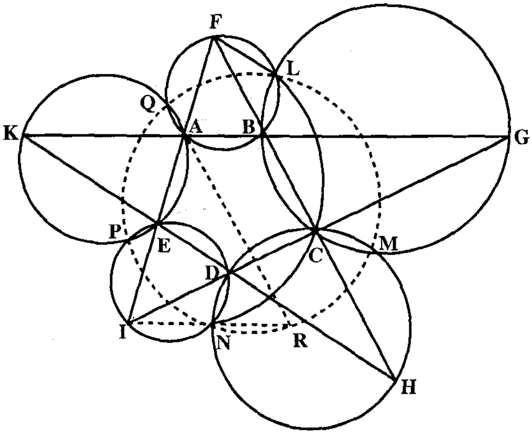
حالت $\hat{A}>90^\circ$، به روش مشابه بررسی می‌شود. حکم مسأله از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. برای این منظور، تساویهای متناظر را به ازای همهٔ مثلثهای افراز می‌نویسیم. توجه کنید که هر قطر، به جای یک ضلع از دو مثلث است. درنتیجه، فاصلهٔ تا قطر انتخاب شده، متناظر با این مثلثها، در رابطه‌ها، با علامتهای مخالف ظاهر می‌شود. از این‌رو، با جمع کردن همهٔ این برابریها (به شرط این که مرکز دایره در درون چند ضلعی قرار گیرد)، به دست می‌آوریم: $\sum r+R=d_1+d_2+...+d_n$ ، که در آن d_1 ، d_2 ،

... و d_n فاصله‌های مرکز دایره تا ضلعهای چندضلعی هستند. اگر مرکز دایره بیرون چندضلعی قرار گیرد، آن‌وقت فاصله تا بزرگترین ضلع، با علامت منها گرفته می‌شود.

۸۸۹. ثابت کنیدکه اگر O_k و O_{k+1} مرکز دایره‌های مماس بر دایرهٔ داده شده در نقطه‌های A_k و A_{k+1} باشند؛ B نقطهٔ برخورد آنها واقع بر کمان A_kA_{k+1} باشد؛ r_k و r_{k+1} شعاعهای آنها باشند، آن وقت $r_k + r_{k+1} = r$ و $A_k\hat{O}_kB = A_{k+1}\hat{O}_{k+1}B = A_k\hat{O}A_{k+1}$ (r شعاع دایرهٔ داده شده و O مرکز آن است). به این ترتیب، برابری، به ازای بقیهٔ شعاعها هم، به‌دست می‌آید، که این برای n فرد، بدان معنی است که همهٔ آنها برابرند با $\frac{r}{2}$. بعلاوه، $\overset{\frown}{A_kB} + \overset{\frown}{BA_{k+1}} = \overset{\frown}{A_kA_{k+1}}$ (کمانهای کوچکتر دایره‌های متناظر در نظر گرفته شده‌اند).

۸. ۳. نقطه و دایره

۸۹۰. پنج ضلعی ABCDE را در نظر گرفته، نقطه‌های برخورد ضلعها را F، G، H، I و K می‌نامیم و دایره‌های محیطی مثلثهای ABF و BCG، CDH، DEI و AEK را رسم می‌کنیم و نقطه‌های دیگر برخورد این دایره‌ها را L، M، N، P و Q می‌نامیم.



می‌خواهیم ثابت کنیم این نقطه‌ها روی یک دایره‌اند. در چهارضلعی کامل ABCIFG دایره‌های محیطی مثلثهای ABF و BCG و FCI در نقطهٔ L یکدیگر را قطع کرده‌اند. همچنین دایره‌های محیطی مثلثهای CDH، EDI و FCI از چهارضلعی کامل CDEFIH در نقطهٔ N متقاطعند. پس دایرهٔ محیطی مثلث FCI از نقطه‌های L و N می‌گذرد. دایره‌های محیطی مثلثهای ABF و FCI با دایره گذرنده از L، N و Q نقطهٔ مشترک L را دارند و با خط FAI نقطهٔ F را که F نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ اولی است. نتیجه می‌شود که اگر نقطه‌های A و I را به نقطهٔ برخورد این دو خط با دایرهٔ سوم وصل کنیم، امتداد

خطهای QA، IN روی همین دایرهٔ سومی متقاطع خواهند بود.
به همین ترتیب، مثلث ARI و نقطه‌های Q، N و E که روی سه ضلع واقعند نشان می‌دهد که دایره‌های محیطی مثلثهای QRN، REI و QEA باید در نقطه متقاطع باشند. از آن‌جا دایرهٔ QLN از P نقطهٔ برخورد دایره‌های DEI و AEK می‌گذرد. به همین روش ثابت می‌شود که این خط نقطهٔ M را نیز در بر دارد. پس پنج نقطهٔ L، M ، N، P و Q روی یک دایره‌اند.

۸. ۴. زاویه

۸. ۴. ۱. اندازهٔ زاویه

۸۹۱. هریک از کمانهای $\widehat{AB}$، $\widehat{BC}$، $\widehat{CD}$، $\widehat{DE}$ و $\widehat{EA}$ برابر $۳۶۰^\circ \div ۵ = ۷۲^\circ$ است.
بنابراین:

$$x = \frac{\widehat{CDE} - \widehat{AB}}{۲} = \frac{۱۴۴^\circ - ۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{DEAB} - \widehat{DC}}{۲} = \frac{۳ \times ۷۲^\circ - ۷۲^\circ}{۲} = ۷۲^\circ$$

۸. ۴. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۸۹۲. هشت ضلعی محدب محاط در یک دایره را در نظر می‌گیریم، با در نظر گرفتن دو برابر هر زاویهٔ محاطی خواهیم داشت:

$$\hat{۱} = b+c+d+e+f+g$$

$$\hat{۳} = d+e+f+g+h+a$$

$$\hat{۵} = f+g+h+a+b+c$$

$$\hat{۷} = h+a+b+c+d+e$$

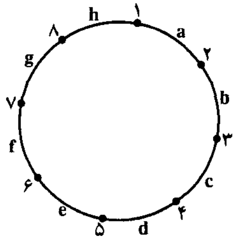
همچنین داریم:

$$\hat{۲} = c+d+e+f+g+h$$

$$\hat{۴} = a+b+e+f+g+h$$

$$\hat{۶} = a+b+c+d+g+h$$

$$\hat{۸} = a+b+c+d+e+f$$



درنتیجه :
$$\hat{۱}+\hat{۳}+\hat{۵}+\hat{۷}=\hat{۲}+\hat{۴}+\hat{۶}+\hat{۸}$$

۸۹۳. با استفاده از قضیهٔ مربوط به زاویه‌های محاطی، مجموع سه زاویهٔ $A_{۱}$ ، $A_{۳}$ و $A_{۵}$ را می‌توان به عنوان نصف مقدار زیر در نظر گرفت :

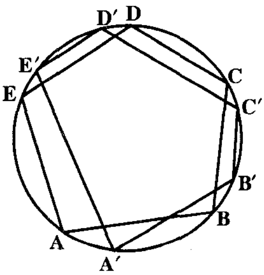
$$(۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{A_{۷}A_{۱}A_{۲}})+(۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{A_{۲}A_{۳}A_{۴}})+(۳۶۰^\circ-\overset{\frown}{A_{۴}A_{۵}A_{۶}})=۷۲۰^\circ+\overset{\frown}{A_{۶}A_{۷}}$$

بنابر شرط مسأله، نقطهٔ O در درون هفت ضلعی است، و بنابراین کمان $\overset{\frown}{A_{۶}A_{۷}}$ نمی‌تواند از ۱۸۰ درجه بیشتر و یا با آن برابر باشد، یعنی

$$\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۳}+\hat{A}_{۵}<۳۶۰^\circ+۹۰^\circ=۴۵۰^\circ$$

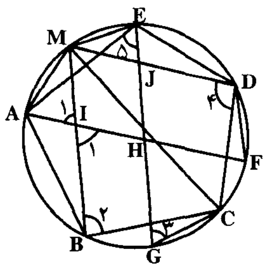
۸. ۵. پاره‌خط

۸. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط



۸۹۴. اگر AB ... EA یک چند ضلعی با تعداد ضلعهای فرد باشد، و همهٔ ضلعها به استثنای AB به موازات خود تغییر جا دهند، تا چند ضلعی A′B′ ... E′A′ ایجاد شود. باید ثابت کنید AB = A′B′ است. برای این کار ثابت کنید زاویه‌های محاطی AEB و A′E′B′ برابرند.

۸. ۵. ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۸۹۵. از رأس A، خط AF را موازی MD رسم می‌کنیم با توجه به شکل داریم :

$$DF = AM = MI$$

زیرا مثلث AMI متساوی‌الساقین است. درنتیجه زاویهٔ MAI برابر $\frac{\overset{\frown}{MEDF}}{۲}$ یا $\frac{\overset{\frown}{AMED}}{۲}$ ، یا یک پنجم محیط دایره است ؛ و $\hat{۱}=\frac{\overset{\frown}{BCF}+\overset{\frown}{AM}}{۲}$ یا یک پنجم محیط دایره. از آن جا IM = AM . به همین ترتیب با کشیدن خط EG موازی MB داریم :

$$BG = ME = MJ \quad و \quad CG = AM = DF$$

همچنین شکلهای HIBG، HIMJ و HFDJ متوازی‌الاضلاعند. از آن می‌توان نشان

داد که $MB + MD = MA + MC + ME$.

باز می‌گردیم به یافتن رابطهٔ $(HJ + HG) + (HI + HF) = MA + MC + ME$ و با ملاحظهٔ مقدارهای مساوی HJ و MA، سپس HI و ME کافی است ثابت کنیم $HG + HF = MC$. مثلث EHF متساوی‌الساقین است زیرا هر یک از کمانهای $\widehat{AE}$ و $\widehat{GF}$ یک پنجم محیط دایره‌اند. از آن‌جا $HG + HF = EG$. پس باید $EG = MC$ باشد و این رابطه نیز برقرار است زیرا دو وترند که تحت کمانهای مساوی $\widehat{EDCG}$ و $\widehat{CBAM}$ می‌باشند ؛ درنتیجه $HG + HF = MC$.

نکته. قضیهٔ بالا حالت کلی دارد و می‌توان گفت : در یک چندضلعی منتظم با تعداد ضلعهای فرد مجموع فاصله‌های یک نقطه از دایرهٔ محیطی از رأسهای ردیف زوج برابر است با مجموع فاصلهٔ این نقطه از رأسهای ردیف فرد. به عنوان مثال مطلب را می‌توان برای هفت ضلعی منتظم ثابت کرد.

۸ . ۶. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۸ . ۶ . ۱. خطها موازی‌اند

۸۹۶. ثابت کنید : $\widehat{AC} = \widehat{DF}$.

۸۹۷. فرض می‌کنیم همهٔ ضلعهای دو چند ضلعی دوبه‌دو با هم موازی باشند. مگر دو ضلع AB و A′B′ ، به عنوان مثال. در این صورتها زاویه‌های متناظر بین ضلعهای موازی برابر خواهند بود. حال ثابت می‌کنیم که $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ است. یک هشت ضلعی را در نظر می‌گیریم. مجموع زاویه‌های ردیف زوج (اگر ضلعها را از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری کنیم)، برابر مجموع زاویه‌های ردیف فرد و هر یک ۶ قائمه است. اگر M مجموع سه زاویه از ردیف زوج باشد که شناخته شده‌اند، و N مجموع سه زاویه از ردیف فرد، خواهیم داشت :

$$\hat{A} = \text{قائمه } ۶ - \hat{M}\ ,\ \hat{B} = \text{قائمه } ۶ - \hat{N}$$

$$\hat{A}' = \text{قائمه } ۶ - \hat{M}\ ,\ \hat{B}' = \text{قائمه } ۶ - \hat{N}$$

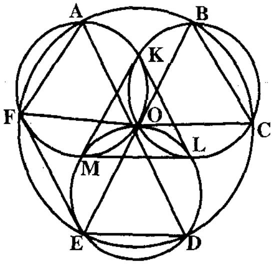
از آن‌جا $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$. پس AB موازی A′B′ است.

۸ . ۶ . ۲. خطها همرسند

۸۹۸. گزینهٔ (ج) درست است.

۸. ۷. شکلهای ایجاد شده

۸۹۹. قرار می‌گذاریم: $B\hat{O}C = ۲\alpha$، $D\hat{O}E = ۲\beta$ و $F\hat{O}A = ۲\gamma$. فرض کنید K، M و L، بترتیب، نقطه‌های برخورد دایره‌های محیطی مثلث BOC و AOF، BOC و DOE، و AOF و DOE باشند. نقطهٔ K در درون مثلث AOB قرار دارد، و



$$B\hat{K}O = ۱۸۰^\circ - B\hat{C}O = ۹۰^\circ + \alpha$$

$$A\hat{K}O = ۹۰^\circ + \gamma$$

چون $\alpha + \beta + \gamma = ۹۰^\circ$، $A\hat{K}B = ۹۰^\circ + \beta$. به همین ترتیب، L در درون مثلث FOE قرار دارد، $O\hat{L}F = ۹۰^\circ + \gamma$ و

$$O\hat{L}E = ۹۰^\circ + \beta$$

$$F\hat{L}E = ۹۰^\circ + \alpha$$

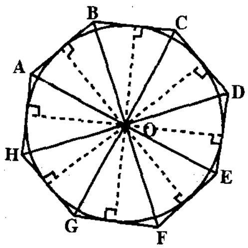
به این ترتیب، $OL = AK$ و

$$K\hat{O}L = ۲\gamma + K\hat{O}A + L\hat{O}F = ۲\gamma + K\hat{O}A + K\hat{A}O = ۹۰^\circ + \gamma = A\hat{K}O$$

بنابراین، مثلثهای KOL و AKO برهم قابل انطباقند، یعنی، $KL = AO = R$. به روش مشابه ثابت می‌کنیم که طول هر کدام از دو ضلع دیگر مثلث KLM، برابر است با R.

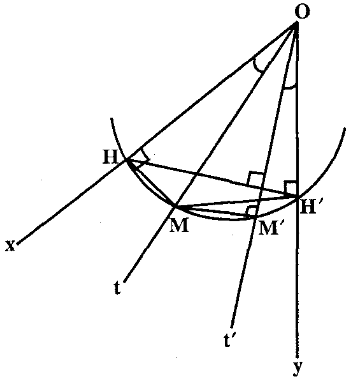
۹۰۰. کمان درخور زاویهٔ O نظیر پاره‌خط CD را در نظر بگیرید.

۸. ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۹۰۳. مرکز دایرهٔ محیطی n ضلعی را که به رأسهای آن وصل کنید، n مثلث به دست می‌آید. مجموع مساحتهای این مثلثها که ارتفاع مشترک را دارند، برابر مساحت چندضلعی است با فرض محیط n ضلعی برابر ۲p، رابطهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

۹۰۴. تصویر نقطهٔ M روی ضلعهای Ox و Oy را H و H′ می‌نامیم و Ot′ خط همزاویهٔ Ot نسبت به زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم.



از M عمود MM′ را بر ot′ فرود می‌آوریم. چهارضلعیهای OH′M′M و OHMM′ محاطی‌اند. پس پنج ضلعی OHMM′H′ محاطی است و چون $H\hat{O}M = H'\hat{O}M'$ است. $\widehat{HM} = \widehat{M'H'}$ و درنتیجه $HH' \parallel MM'$ یعنی چهارضلعی MM′H′H ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. از طرفی $MM' \perp OM'$ می‌باشد پس خط موازی آن یعنی HH′ نیز بر OM′ عمود است.

۸ . ۹. مسأله‌های ترکیبی

۹۰۵. a. ABCDE را پنج ضلعی محدب مفروض به ضلع a، و K را وسط قطر بزرگتر آن AD می‌گیریم؛ در این صورت $A\hat{K}E = E\hat{K}D = ۹۰°$. چون $AC \leq AD$ ، بنابراین $B\hat{A}C > D\hat{A}E$ و درنتیجه $B\hat{A}K > K\hat{A}E$. از این‌جا معلوم می‌شود که، نقطه‌های A و B، در یک طرف خط راست EK قرار دارند. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطه‌های C و D هم در یک طرف خط EK واقعند. از این‌جا، بلافاصله، به‌دست می‌آید: $B\hat{K}A < ۹۰°$ و $C\hat{K}D < ۹۰°$.

فرض می‌کنیم $B\hat{K}C \geq ۹۰°$ ، در این صورت $BK < a$ و $CK < a$ ، و از آن جا که $AK < a$ و $KD < a$ ، بنابراین $A\hat{K}B > ۶۰°$ و $C\hat{K}D > ۶۰°$ (ضلع بزرگتر مثلث، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر آن است)؛ ولی این ممکن نیست، زیرا

$$A\hat{K}B + B\hat{K}C + C\hat{K}D = ۱۸۰°$$

و درنتیجه $B\hat{K}C < ۹۰°$. ثابت کردیم که نقطهٔ K، با شرطهای مسأله سازگار است.

b. اگر روی امتداد پاره‌خط راست EK، نقطهٔ M را خیلی نزدیک به نقطهٔ K انتخاب کنیم، آن‌وقت، همهٔ زاویه‌های AMB، BMC، CMD، DME و EMA حاده می‌شوند. بنابراین نقطهٔ M نمی‌تواند به هیچ کدام از نیمدایره‌های به قطر ضلعهای پنج ضلعی متعلق باشد.

فهرست منابع جلد دوم

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابوت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۶. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۷. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۸. المپیادهای ریاضی بین‌المللی جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی جلد دوم. مورای کلمکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۱۰. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۱. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ.س.م. کوکس‌تیر ـ س. ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۳. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا.
۱۴. تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۷. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اوّل، دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۸. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۱۹. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۰. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی، ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۳. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۴. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌اله قوام‌زاده، ناشر کتابفروشی زوار تهران.

۲۵. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۹. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۳۰. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ‌رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمدعلمی.
۳۱. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۲. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۳. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری، ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۴. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان جلدهای اوّل و دوم. ابوالقاسم قربانی. دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۳۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.
۴۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسین صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۳. ریاضی‌دانان نامی. دکتر اریک تمپل‌بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۵. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۴۶. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۷. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور. مؤسسهٔ انتشارات مدبر.
۴۸. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. موری. اس. کلمکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشربردار.
۴۹. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۵۰. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۵۱. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۵۲. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۵۳. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۴. مسائل ریاضیات مقدماتی ای. خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول، چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، جلد سوم. چارلز. ت. سالکیند ـ جیمز. م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو. گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۹. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و.س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک، ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۲. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۶۳. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۴. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۶۵. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی ـ چنتسوف ـ یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۶۶. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۷. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازاریتوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۶۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۷۱. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۲. هندسهٔ تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۷۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۴. هندسه درگذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۷۵. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.

۷۶. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۷۷. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۷۸. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۷۹. هندسهٔ سالهای اوّل، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۸۰. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۱. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۸۲. هندسهٔ موئیز ـ لانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۳. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان وزارت آموزش و پرورش.
۸۴. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

85. Exercices de Géométrie Par F.G.M.
86. Exercices de Géométrie Par th. Caronnet.
87. Exercices de Géométrie Moderne. Par G. Papelier
88. Geometrya High School Course. Serge Lange, Gene Murrow.
89. Giant Colour Book of Mathematics by Irving Adler.
90. Guides Pratiques Bordas.
II. Geometrie Par Robert Ardré.
91. Jacobs Harold. R. Geometry.
92. Les Nombres et Leurs Mystéres. Par André Warusfel.
93. Mathematics Around us.
94. Mémento de Mathematiques usuelles Par A. Pont.
95. Plane Geometry. With Space Concepts A. M. Welchons, W. R Krickenberger, Heien. R. Pearson.
96. Précis de Géométrie Par André Vieillefond, P. Turmel.
97. Prentice Hall Geometry. by, Robert Kaline, Mary Kay Corbitt.
98. Principles and Problems of Plane Geometry by Barnett Rich.
99. Resolusion des Problemes élémentaires de Géométrie. Par, E. J. Honnet.
100. The College Boards Examination by. Martin Mc Donough, Alvin J. Hansen.