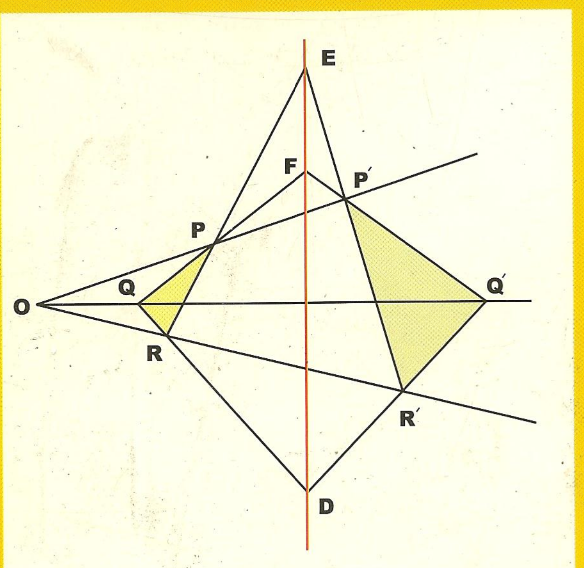
دایرة المعارف هندسه

۳

نسبت پاره خطها در هندسهٔ مسطحه

(نسبت وتناسب ، قضیهٔ تالس ، نیمسازهای زاویه های مثلث وچندضلعیها،تشابه ،...)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرة‌المعارف هندسه

«جلد سوم»

رابطه‌های متری مربوط
به
نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ـ
دایرةالمعارف مسائل هندسه / مؤلف محمدهاشم رستمی. ـ تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴ ـ
ج.: مصور، جدول، نمودار.
۷۰۰۰ ریال (ج. ۱)

ISBN 964-436-567-4 (ج. ۳)
ISBN 964-436-560-7 (ج. ۴)
ISBN 964-436-565-8 (ج. ۵)

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
از جلد چهارم به بعد، عنوان کتاب به «دایرةالمعارف هندسه» تغییر یافته است.
کتابنامه.
مندرجات: ج. ۱. خواص توصیفی اشکال هندسه (نقطه، خط، زاویه، مثلث، چهارضلعی و دایره. ـ ـ) ج. ۲. ـ ـ ج. ۳. رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه. ـ ـ ج. ۴. رابطه‌های متری در دایره. ـ ـ ج. ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی و دایره‌های دیگر.
ج. ۳ (چاپ اول: تابستان ۱۳۷۸).
۱. هندسه ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

QA ۵۰۱ / ۵ / ر ۵ د ۴ ۵۱۶/۰۰۷۶

کتابخانهٔ ملی ایران ۱۴۰۰ـ۷۴ م*

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه

(جلد سوم)

رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اول: تابستان ۱۳۷۸
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
شابک ۴ ـ ۵۶۷ ـ ۴۳۶ ـ ۹۶۴
ISBN 964-436-567-4

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.

از سالها پیش، نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد تا علاقمندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند و یا قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند.

به این جهت از حدود سی و پنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه اقدام و تمام این مطالب، براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه

۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

۴. تبدیلات هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، ...)

۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)

۶. هندسهٔ تحلیلی

۷. هندسهٔ فضایی

۸. هندسه‌های نااقلیدسی

....

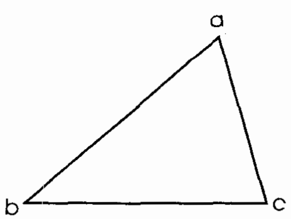
هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را در برمی‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج مجلد به شرح زیر است:

۱. نسبت پاره‌خطها (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، ...)
۲. رابطه‌های متری در دایره
۳. رابطه‌های متری در مثلث مختلف‌الاضلاع
۴. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه)
۵. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای دیگر، پنج‌ضلعیها و ...)

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

- در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقمند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

- قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه‌حلهای آنها، در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و تنها یک یا دو راه‌حل از آنها مطرح شده است. زیرا برخی از این قضیه‌ها تا کنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه: $a^2=b^2+c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.
- مسأله‌های المپیادهای ریاضی بین‌المللی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف از جمله المپیادهای ریاضی و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.
- علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای ریاضی بین‌المللی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac ...



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها و تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است؛ به عنوان مثال همه‌جا، نقطه‌ها با حروف بزرگ لاتین، مانند نقطه‌های A ، B ، C و ... و پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این مجلد از دایرةالمعارف، رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه است، که شامل ۸ بخش زیر است:

۱. نسبت و تناسب
۲. قضیهٔ تالس
۳. نیمسازهای زاویه‌های مثلث و چندضلعیها
۴. موربها و نقطه‌های همخط
۵. خطهای همرس
۶. تشابه
۷. تقسیم توافقی (نسبت همساز)
۸. نسبت ناهمساز

هریک از بخشهای بالا نیز به چند زیر بخش تقسیم شده است. به عنوان مثال بخش ۶ شامل زیر بخشهای زیر است:

۶.۱. تعریف و قضیه
۶.۲. تشابه مثلثهای مختلف‌الاضلاع
۶.۳. تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه
۶.۴. تشابه مثلثهای متساوی‌الساقین
۶.۵. تشابه چندضلعیها
۶.۶. سایر مسأله‌های مربوط به تشابه مثلثها و چندضلعیها

هریک از این زیربخشها نیز به زیربخشهای دیگری تقسیم گردیده‌اند مانند زیربخش ۶.۵. تشابه چند ضلعیها، که خود شامل ۸ زیربخش زیر است:

۶.۵.۱. متوازی‌الاضلاع
۶.۵.۲. مستطیل
۶.۵.۳.مربع
۶.۵.۴. لوزی
۶.۵.۵. ذوزنقه
۶.۵.۶. چهارضلعیهای دیگر
۶.۵.۷. چندضلعیها
۶.۵.۸. سایر شکلها

در هریک از این زیربخشها نیز مطالب با نظم و ترتیب مشخصی ارائه گردیده‌اند.

امید است که این مجموعه مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان و دانش‌آموزان و دیگر علاقمندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. قبلاً از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رابطه‌های متری مربوط
به
نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه

بخش ۱. نسبت و تناسب

بخش ۲. قضیهٔ تالس

بخش ۳. نیمسازهای زاویه‌های مثلث و چندضلعیها

بخش ۴. موربها، نقطه‌های واقع بر یک خط راست

بخش ۵. خطهای همرس

بخش ۶. تشابه

بخش ۷. تقسیم توافقی (نسبت همساز)

بخش ۸. نسبت ناهمساز

بخش ۱.

نسبت و تناسب

بخش ۱. نسبت و تناسب

تاریخچه

در تاریخ ریاضیات، به درستی مشخص نیست، که نسبت بین دو کمیت، و نسبت بین دو پاره خط، به وسیلهٔ کدام تمدن باستانی پایه گذاری شده است. این فکر، که عدّه افراد قبیله‌ای، دوبار، بزرگتر از عدّه افراد قبیلهٔ دیگر است، و این فکر که طول یک تسمهٔ چرمی، نصف طول تسمهٔ چرمی دیگر است، هر دو، مفهوم نسبت را دربردارند، و می‌توانسته‌اند، در آغاز تاریخ هر قومی پدید آیند، با توجه به این نکته، که اولی نسبت بین دو عدد، و دومی نسبت بین دو پاره خط را بیان می‌کند. البته با توجه به شواهد موجود، هنگامی که به ریاضیدانهای یونان باستان می‌رسیم، می‌بینیم که تالس، Thales (ح ۶۴۰ – ح ۵۴۶ پ م) در حدود شش قرن پیش از میلاد مسیح (ع)، قضیه‌هایی را که به نام قضیه‌های تالس مشهور است، با استفاده از نسبت پاره خطها و تناسب، بیان نموده و ثابت کرده است. اودوکسوس کنیدوسی Eudoxos of chios (۴۲۸ - ۳۵۰ پ م) (یائودوکسوس)، در هندسه‌اش، و نیکوماخوس Nicomachos جیراشی (ح ۱۰۰ م) در حساب، وتاون (تیون) ازمیری Theon of Smyrna (ح۱۲۵م) در موسیقی، از نسبت استفاده کرده‌اند.

به خاطر یادداشتی که احتمالاً از پروکلوس Proculus (ح ۴۱۲ - ۴۸۵ م) است، اغلب اودموس رودسی Eudemos (ح ۳۲۵ پ م) را مؤلف اثری در مورد تناسب دانسته‌اند، که این اثر، سرانجام به صورت کتاب پنجم اصول اقلیدس در آمد، ولی در این مورد سند معتبری در دست نیست. اسپیوسیپوس (ح ۳۵۰ پ م) خواهرزادهٔ افلاطون (ح ۴۷۲ - ۳۴۷ پ م) که پس از مرگ افلاطون در سالهای ۳۴۷ تا ۳۳۹ پیش از میلاد رییس آکادمی علوم افلاطون شد، دربارهٔ تناسب، مطالبی نوشت، از کتابی مجهول و مربوط به زمانی نامعلوم، به نام گفتارهای خدایی، که همنام اثر گمشده نیکوماخوس (ح ۱۰۰ م)

است.

اقسام کلی نسبت. از زمان یونانیان تا سدهٔ هفدهم، نویسندگاندر زمینه حساب نظری، مجموعه‌ای از اصطلاحها را در ارتباط با نسبت به کار بردند که از نظر ریاضیدانان امروزی بیش از حد پیچیده بودند. چندتایی از این اصطلاحها، هنوز در جبر باقی مانده‌اند، ولی بیشترشان از بین رفته‌اند. از آنهایی که هنوز در برخی کتابهای درسی می‌توان یافت، سه نوع نسبت: نسبت تساوی، مانند $a:a$، نسبت بزرگتری، مانند نسبت $a:b$ وقتی $a > b$ است؛ نسبت کوچکتری مانند $a:b$ وقتی $b > a$ است که از دوتای آخری نوعهای دیگری نیز پیدا شده است مانند: نسبت مضرب، $ma:a$ وقتی m عدد صحیح باشد، نسبت اَبَرویژه Super particular، مانند $(m+۱):m$ که خود چندین نوع داشت، مثل نسبت سه دویی Sesquialteran، ۳ : ۲ و سه چهاری Sesquitertiant، ۴ : ۳؛ نسبت اَبروَند Super partient مانند $(m+n):n$ وقتی $m>n>۱$ باشد؛ نسبت مضرب ابرویژه مانند $(mn+۱):m$ مانند ۷ : ۳ و ۱۵ : ۷ و نسبت مضرب ابروند مانند $(mn+k):m$ وقتی $m>k>۱$ باشد، مانند ۱۴ : ۳ و ۱۹ : ۵ و ..... (صفحه‌های ۴۱۶، ۴۱۷ و ... جلد دوم تاریخ ریاضیات دیوید اسمیت).

این اصطلاحها می‌توانست ترکیبهای بسیاری پیدا کند که امروزه از نظر ما، تلاشی بوده است برای توسعهٔ دانش کسرهای عمومی، در زمانی که، جهان، نشانه‌گذاری خوبی برای آن نداشت.

با معرفی عدد نویسی رایج، و ابداع نشانه‌گذاری جبری مناسب، اکثر اصطلاحهای فوق از بین رفته است.

تناسب به صورت سریها. نویسندگان قدیم، اغلب، واژه تناسب را برای سریها به کار می‌بردند، و این کاربرد تا سدهٔ هیجدهم وجودداشت، ولی کاربرد متداول آن به ۴ جمله محدود می‌شد؛ مثلاً" نویسندگان قدیم از تناسب عددی، یعنی $b-a=d-c$ به صورت ۵، ۴، ۳، ۲ و از تناسب هندسی یعنی $a:b=c:d$ به صورت: ۱۰، ۵، ۴، ۲ نام برده، و از آنها استفاده کرده‌اند. یونانیان، تناسب هماهنگ، یعنی $\frac{۱}{c}-\frac{۱}{d}=\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c}$ مانند $a=\frac{۱}{۵}$، $b=\frac{۱}{۴}$، $c=\frac{۱}{۳}$، $d=\frac{۱}{۲}$ و چند نوع تناسب دیگر را نیز به آنها افزودند. ریاضیدانان عصر نوزایی (رنسانس) به حذف اکثر اصطلاحهای بالا پرداختند، و اینک فقط، تناسب هندسی باقیمانده است، بنابراین وقتی از تناسب گفتگو می‌شود، مراد،

تناسب هندسی است.

ریاضیدانان مسلمان، تناسب را به صورت $\begin{array}{|c|c|}\hline ۲ & ۴ \\ \hline ۳ & ۶ \\ \hline\end{array}$ یا $\begin{array}{c|c} ۱ & ۵ \\ ۳ & ۱۵ \end{array}$ نشان داده‌اند.

باید توجه داشت که مأخذ اصلی نویسندگان تاریخ ریاضیات، نوشته‌ها و کتیبه‌هایی است که تاکنون به دست آمده است؛ بنابراین این امکان وجود دارد که با کشف کتیبه‌ها و یا لوحه‌های جدید در مکانهای باستانی جهان، و تکمیل اطلاعات مربوط به تمدنهای باستانی ایران، هند، چین، بابل و مصر، آگاهیهای جدیدی در مورد تاریخ ریاضی به دست آید، و چه بسا مشخص شود که اولین نوشته در مورد نسبت و تناسب، متعلق به تمدن دیگری غیر از یونان است. در تاریخ ریاضی آمده است که فیثاغورس برای کسب دانش و تکمیل دانش خویش به مصر، بابل، ایران و حتی هند، مسافرت کرده است. بنابراین تردیدی وجود ندارد که قبل از تولد فیثاغورس، در این سرزمینها، تمدنهای درخشانی وجود داشته است.

هر یک از این تمدنهای باستانی، با استناد به مدارک و شواهدی، مدعی هستند که پایه گذار ریاضی، و رشد دهندهٔ آن در جهان بوده‌اند.

هندیها در چاپ اول اثر معروف مربوط به نجوم، سوریاسیدهانتا، که در بیروت منتشر شده است می‌گویند که این کتاب در ۲۱۶۵۰۰۰ سال پیش تألیف شده است، یعنی ۴ برابر زمانی که برای پیدایش بشر روی کره زمین فرض شده است (تاریخ نشان می دهد که بشر در حدود ۵۰۰۰۰ سال و یا ۷۵۰۰۰ سال پیش روی زمین زندگی کرده است)، اما مورخین ریاضی می‌گویند که این کتاب در سدهٔ چهارم یا پنجم میلادی نوشته شده است.

کلدانیان که در شمال خاوری عربستان و بخشی از جنوب بین‌النهرین حکومت می‌کرده‌اند. گفته‌اند که رصدهای نجومی خود را در ۷۲۰۰۰۰ سال پیش آغاز کرده‌اند.

لوحه‌های گلی به دست آمده از سومریان که در شمال خلیج فارس، یعنی در بخشی از ایران می‌زیسته‌اند، نشان می‌دهند که، بازرگانان سومری، با حواله، قبض رسید، یادداشت، حسابداری و دستگاههای اندازه گیری، آشنایی داشته اند.

عیلامیها که از هزارهٔ چهارم پیش از میلاد تا نیمهٔ هزارهٔ اول پیش از میلاد، از مرکز خود شهر شوش، بر جنوب غربی ایران حکومت می‌کردند، با سومریها و بابلیها همسایه بودند. تعداد معدودی از لوحه‌های ریاضی که تاکنون در شوش به دست آمده است،

نشان می‌دهد که ریاضیدانان عیلامی از قضیهٔ فیثاغورس اطلاع داشته اند، گونه‌های مختلف مثلث را می‌شناختند، عدد π را به کمک چند ضلعیهای منتظم محاط در دایره به دست آورده، آن را مساوی ۳/۲۵ می‌گرفته‌اند؛ در عددنویسی، هم از مبنای دهدهی، و هم از مبنای شصت شصتی، استفاده می‌کرده‌اند.

در سرزمین بابل در حوالی سال ۲۷۵۰ پیش از میلاد، در زمان حکومت سارگون، کسوفی را رصد و ثبت کرده‌اند، و برای این پادشاه، کتاب بزرگ احکام نجوم نوشته شد، که قطعه‌هایی از آن کتاب هم اکنون در دست است. پس از آن، در عصر درخشان حمورابی در ۲۱۰۰ پ م قوانین بزرگ جهان نوشته شد، تقویم اصلاح گردید، و قدیمی ترین مدرسهٔ جهان بنیاد نهاده شد. بیش از ۵۰۰۰ لوحه در شهر نیپور در عراق کنونی مربوط به ۲۲۵۰ سال پیش از میلاد و کمی پیشتر از آن به دست آمده است، که این مجموعه، مفصل‌ترین مجموعهٔ مطالب ریاضی قدیم است که تاکنون کشف شده است. این لوحه‌ها شامل ضرب، تقسیم، مجذور و جذر، تصاعد هندسی و برخی محاسبه‌ها و آثاری در اندازه‌گیری است، و گفته می‌شود که متعلق به شاگردان مدرسه‌ای است که در آن شهر به تحصیل دانش مشغول بوده‌اند. برخی از لوحه‌ها نشان می‌دهد که بابلیان می‌توانسته‌اند برخی معادله‌های درجه یک، دو، سه و چهار را حل کنند، و دربارهٔ عددهای منفی نیز اطلاعاتی داشته‌اند. در زمینه هندسه، بابلیان قادر به تعیین مساحت ۴ ضلعی، از جمله مساحت مربع؛ مساحت مثلث قائم الزاویه، مساحت ذوزنقه، و احتمالاً مساحت دایره، حجم مکعب، متوازی السطوح و استوانه، بوده‌اند و قانون بسط $(a+b)^2$ را می‌دانسته‌اند.

قدیمی ترین حادثه مکتوب در تاریخ بشر که تاکنون شناخته شده، پیدایش تقویم دوازده ماهه در مصر است، که هر ماه شامل ۳۰ روز، و ۵ روز مقدس است. این تقویم در سال ۴۲۴۱ پ‌م معمول شده که بهتر از تقویم اروپاییان تا زمان اصلاح گریگور سیزدهم (۱۵۸۲) بود، و در حال حاضر نیز در مواردی از تقویم کنونی بهتر است. در حدود ۲۹۰۰ سال پیش از میلاد، هرمهای بزرگ مصر از جمله هرم جیزه ساخته شد، که همهٔ ریاضیدانان معترفند که، ساختن چنین بناهایی بدون اطلاع کافی از ریاضی، امکان پذیر نبوده است. حداکثر اشتباه در تعیین طول ضلعهای هرم ۱۵ میلی‌متر و خطاهای زاویه در گوشه‌ها، تاً ۱۲ یا $\frac{۱}{۲۷۰۰۰}$ زاویهٔ قائمه است. پاپیروس احمس Ahmes یا (رایند) (شامل

۸۴ و به قولی ۸۵ مسأله ریاضی) مربوط به سال ۱۶۵۰ پ م، پاپیروس رولن (سال ۱۳۵۰ پ م)، پاپیروس هریس حدود سال ۱۱۶۷ پ م، همگی، حاوی مسأله‌های ریاضی، و اطلاعاتی در مورد عددهای بزرگ هستند.

چینیها می‌گویند، که در سالهای ۲۸۵۲-۲۷۳۸ پیش از میلاد، در زمان امپراطوری فوهی، رصدهای نجومی انجام گرفته و دستگاه عدد شماری دهدهی وضع شده است، و در حدود ۲۷۰۴ پ م در زمان امپراطوری هوانگ - تی، کسوفی را رصد و ثبت کرده‌اند.

بنابه شواهد به دست آمده، اصل کتاب حساب در نُه باب، k'iu - ch'ang , suan'shu در حدود سال ۱۱۰۵ پ م نوشته شده است و در باب دوم این کتاب، درصدگیری، و تسهیم به نسبت آمده است.

در مورد نجوم در چین، استاد شلگل Schlegel اهل لاهۀ هلند می‌گوید که چینیها در ۱۷۰۰۰ پ م صورتهای فلکی را می‌شناخته اند، و در حدود ۱۴۷۰۰ سال پیش از میلاد، برجهای دوازده‌گانه را وضع کرده‌اند. البته همه، این گفته را قبول ندارند، برخی ۱۳۰۰۰ پ م و عده‌ای نیز ۴۰۰۰ پ م را درست می‌دانند.

۱. ۱. نسبت

۱. ۱. ۱. نسبت دو کمیت

خارج قسمت اندازه‌های دو کمیت هم جنس، وقتی با یک واحد اندازه گرفته شده باشند. نسبت بین آن دو کمیت نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، نسبت دو کمیت هم‌جنس نشان می‌دهد که یکی چند برابر دیگری است.

نسبت دو کمیت a و b ($b \neq ۰$) که یک عدد مطلق است، به یکی از صورتهای زیر نشان داده می‌شود:

الف. به وسیلهٔ (:)، a: b ، مانند ۳:۴

ب. به کمک «به»، a به b ، مانند ۳ به ۴

پ. به کمک یک کسر، $\frac{a}{b}$ ، مانند $\frac{۳}{۴}$

ت. به وسیلهٔ یک عدد اعشاری ۰/۰۰۰، مانند ۰/۷۵

ث. به کمک درصد ۰۰۰٪، مانند ۷۵٪

۱. عبارتهای زیر را به صورت یک نسبت ساده از عددها یا متغیّرها بنویسید:

الف) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}$ ، ب) $\frac{۷}{۵}+\frac{۶}{۳۵}$ ، پ) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ ، ت) $\frac{۲}{۳x}+\frac{۵}{۶x}$

۲. سه عدد a ، b و c مفروضند، به قسمی که $\frac{a}{b}=\frac{۵}{۷}$ و $\frac{b}{c}=\frac{۲}{۳}$ است.

الف. نسبت $\frac{a}{c}$ را پیدا کنید.

ب. اگر c به عنوان واحد طول اختیار شود، اندازهٔ a چه قدر است؟

۱. ۱. ۲. نسبت دو پاره خط

نسبت دو پاره خط، خارج قسمت اندازهٔ آن دو پاره خط است، در صورتی که با یک واحد، اندازه گرفته شده باشند.

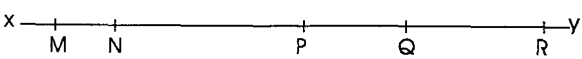
نسبت پاره‌خط AB به پاره خط CD را به صورت $\frac{AB}{CD}$ یا AB:CD نشان می‌دهند.

۳. اگر پاره خط AB به طول ۱۸۰ سانتی‌متر، و پاره خط CD به طول ۶ متر باشد، نسبت AB به CD را بیابید.

۴. پاره خط AB را به ۵ قسمت متساوی تقسیم کرده و نقطه C را به فاصلهٔ ۳ واحد از نقطه A اختیار می‌کنیم. نسبتهای $\frac{CA}{CB}$، $\frac{CB}{CA}$، $\frac{CA}{AB}$ و $\frac{CB}{AB}$ را تعیین کنید.

۵. سه پاره خط AB ، CD و EF مفروضند، به قسمی که طول پاره خط AB برابر $\frac{۳}{۷}$ متر و طول پاره خط CD، $\frac{۱۱}{۴}$ دسی متر و طول پاره خط EF برابر $\frac{۷۵}{۲۸}$ سانتی‌متر است. نسبتهای $\frac{AB}{CD}$، $\frac{CD}{EF}$ و $\frac{AB}{EF}$ را بیابید.

۶. نقطه‌های M ، N ، P ، Q و R به همین ترتیب روی خط راست xy واقعند، به قسمی که MN = ۱۰ ، NP = ۳۵ ، PQ = ۱۷ و QR = ۲۳ است. نسبتهای زیر را پیدا کنید:



$$\frac{MP}{MQ}, \frac{NQ}{NR}, \frac{PR}{PM}, \frac{QM}{QN}, \frac{RN}{RP}$$

۷. درازای یک زمین ۱۴ متر و ۴ دسی‌متر، و پهنای آن ۵ متر و ۴ دسی‌متر است. نسبت درازای زمین به پهنای آن را تعیین کنید. نسبت پهنای زمین به درازای آن چیست؟ پهنای زمین چه جزیی از درازای آن است؟

۸. نقطه‌های A ، C ، B و D روی خط xy با همین ترتیب، قرار دارند. در صورتی که $AC = ۲۱$ ، $CB = ۱۵$ و $BD = ۹۰$ باشد:

الف. ثابت کنید دو نسبت $\frac{CA}{CB}$ و $\frac{DA}{DB}$ برابرند.

ب. اگر نقطهٔ O وسط پاره خط AB ، و نقطهٔ M وسط پاره خط CD باشد، ثابت کنید که: $OA^۲ = OC.OD$, $MC^۲ = MA.MB$

پ. نشان دهید که :

$$\frac{۲}{AB} = \frac{۱}{AC} + \frac{۱}{AD} = \frac{۱}{CB} - \frac{۱}{BD} \text{ و } \frac{۲}{CD} = \frac{۱}{DA} + \frac{۱}{DB} = \frac{۱}{CB} - \frac{۱}{CA}$$

۹. روی خط xy ، ابتدا پاره خط OB و نطقهٔ P واقع بر این پاره خط که این پاره‌خط را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند؛ سپس پاره خط OC و نقطه Q روی OC که این پاره خط را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند، اختیار می‌کنیم. اگر بدانیم که $\frac{۲}{۳} = \frac{OB}{OC}$ است، ثابت کنید که نقطه‌های P و Q پاره‌خط BC را به یک نسبت تقسیم می‌کنند.

۱۰. دو پاره خط متوالی و متساوی AB و BC روی خط xy مفروضند. نقطهٔ M را روی پاره خط AB ، و نقطه P را روی پاره خط BC چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خطها را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کنند، همچنین نقطهٔ Q را روی پاره خط MP به قسمی در نظر می‌گیریم که این پاره خط را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نماید. در این صورت، نقطهٔ Q پاره خط AC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱۱. محیط زمین مستطیل شکلی ۳۶۰ متر، و نسبت درازا به پهنای آن مثل نسبت ۷ به ۵ است . اندازه هر یک از ابعاد زمین را تعیین کنید.

۱۲. نسبت دو پاره خط برابر ۱/۲۵ و اندازه یکی از این دو پاره‌خط، برابر ۵۷۰ متر است. اندازه پاره خط دیگر را بر حسب متر پیدا کنید.

۱. ۱. ۳. تقسیم پاره خط به نسبت معین

۱۳. بر پاره خط $AB = 5cm$، نقطهٔ M را چنان اختیار کرده‌ایم که نسبت فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B مساوی $\frac{3}{8}$ است. اندازهٔ هر یک از دو پاره خط MA و MB را تعیین کنید.

۱۴. بر پاره خط مفروض AB به طول a، نقطه‌های M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $n = \frac{NB}{NA} = \frac{MA}{MB}$ باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطه N را تعیین کنید.

۱۵. اندازهٔ پاره خط AB برابر ۱۰/۵ سانتی متر است. روی پاره خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ M و ´M را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{2}{5}$ باشد.

اندازهٔ پاره خطهای MA , MB , M´A و M´B را تعیین کنید.

۱۶. پاره خط AB به طول ۱۲cm مفروض است. نقطه‌های M و ´M را روی این پاره خط چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{5}{3}$ باشد، اندازهٔ MA، MB، M´A و M´B را حساب کنید.

۱۷. بر پاره خط مفروض AB به طول a و بر امتداد آن، دو نقطهٔ M و N را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت فاصله‌های آنها از A و B مساوی n باشد. فاصله این دو نقطه را برحسب a و n تعیین کنید.

۱۸. پاره خطی را به دو قسمت (داخلی و خارجی) طوری تقسیم کنید که متناسب با مربعهای دو پاره خط به اندازه‌های P و q باشد.

۱۹. پاره خط AB را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعاتشان K^2 باشد.

۲۰. پاره خط AB را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاضل مربعاتشان K^2 باشد.

۱. ۱. ۴. نسبت طلایی

یونانیان قدیم، برخی شکلها را خوشایندتر از شکلهای دیگر می‌دانستند، و در ساختن بناها و مجسمه‌ها و نقاشیها، این شکلها را به کار برده‌اند. مشهورترین این شکلها، مستطیل طلایی است که اضلاعش به نسبت طلایی می‌باشند (مستطیلی که خوشایندترین مستطیل بین مستطیلهای با محیط ثابت است). معماران یونان باستان در ۵۰۰ سال پیش از میلاد حضرت مسیح (ع) از مستطیل طلایی و نسبت طلایی اطلاع داشتند و در ساختن معبد پارتنون Parthenon در آتن، که بنای آن در سال ۴۴۳ پ م آغاز شده بود و بر ساختن مجموعهٔ بنا و بخصوص مجسمه‌های آن، فیدیاس Phidias مجسمه ساز مشهور یونان باستان نظارت داشت، از نسبت طلایی و مستطیل طلایی استفاده کرده‌اند. نسبت طلایی و مستطیل طلایی در کارهای فیدیاس نیز دیده می‌شود.

همچنین لئوناردو داوینچی عدد طلایی را در نقاشی و مجسمه سازی به کار برده است. هنرمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در هنرهای سنتی، از جمله، خط نستعلیق و خط شکستهٔ نستعلیق استفاده کرده‌اند.

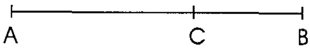
لئوناردو داوینچی

هیچ فهرستی از ریاضیدانان ایتالیا در سدهٔ شانزدهم، بدون ذکری از لئوناردو داوینچی Leonardo da vinci (۱۴۵۲-۱۵۱۹) کامل نمی شود. کامیابیهای این شخص با استعداد چنان بود که نام او را پیش از همه باید ذکر کرد.

او در وینچی، نزدیک فلورانس زاده شد. در فلورانس، میلان، و رم اقامت گزید، به دعوت شاه در ۱۵۱۶ به فرانسه رفت، و در ۱۵۱۹ در نزدیکی آمبواز وفات یافت. علاوه بر شهرتش در مقام نقاش، مجسمه ساز، زرگر، پژوهشگر گردش خون، دانشمند عمومی، معمار، و نویسنده مکانیک، اوپتیک، و مناظر و مرایا، ریاضیدانی بزرگ هم بود و استعدادهایش در این زمینه تحت‌الشعاع کارهای خارق العاده‌اش در زمینه‌های دیگر قرار نگرفته است. در زمینهٔ ریاضیات کاربردی او را می‌توان از بنیانگذاران اصول اپتیک جدید دانست. در زمینهٔ هندسه، میان منحنیهای انحنای منفرد و مضاعف فرق گذاشت، به کثیرالاضلاعهای ستاره‌ای توجه خاصی کرد، به ترسیم اشکال با یک گشادگی پرگار، علاقه خاصی نشان داد، و ترسیمهای دقیق یا تقریبی از کثیرالاضلاعهای منتظم فراهم

ساخت . در فیزیک، از اصول سطح شیب دار اطلاع داشت، گرانیگاه هرم را بدست آورد، در زمینه موییکی و شکست نور کارکرد، اتاق تاریک بدون عدسی را می‌شناخت. از مقاومت هوا و اثر اصطکاک خبر داشت. جهان کمتر یک چنین نابغهٔ جامع‌الاطرافی پرورده است.

تعریف نسبت طلایی · اگر نقطه‌ای مانند C روی پاره خط AB چنان اختیار شود که $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$ یا $AC^۲ = AB \, . \, BC$،



یعنی قطعهٔ بزرگتر، واسطه هندسی بین قطعهٔ کوچکتر و تمام پاره خط باشد، در این صورت گفته می‌شود که نقطهٔ C پاره خط AB را به نسبت ذات وسط و طرفین، یا به نسبت طلایی تقسیم کرده است. اگر طول پاره خط BC برابر ۱ باشد، طول پاره خط AC برابر با نسبت طلایی است. فرض می‌کنیم φ مقدار عددی نسبت طلایی را نمایش دهد، در این صورت با فرض $BC = ۱$ از تناسب قبل داریم:

$$\frac{\varphi}{۱} = \frac{\varphi + ۱}{\varphi} \Rightarrow \varphi^۲ = \varphi + ۱ \Rightarrow \varphi^۲ - \varphi - ۱ = ۰ \Rightarrow \varphi = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

مقدار مثبت φ یعنی $\varphi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$، مقدار عددی نسبت طلایی است، که آن را عدد طلایی (Golden Namber) نیز می‌نامند. البته این عدد گنگ است و یکی از مقدارهای اعشاری تقریبی آن ۱/۶۲ می‌باشد. اقلیدس در کتاب پنجم خود به این نسبت اشاره کرده است.

نکته ۱ · اگر نقطهٔ C پاره خط AB را به نسبت طلایی تقسیم کند، یعنی $\frac{AB}{AC} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} = \varphi \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$$

نکته ۲ · مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی ...، ۳۴، ۲۱، ۱۳، ۸، ۵، ۳، ۲، ۱، ۱ را می‌توان با استفاده از این قاعده که، عدد بعدی، مجموع آخرین دو عدد قبلی آن باشد $(F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱})$، بسط داد. ریاضیدانان نشان داده‌اند که حد نسبت جملهٔ $(n + ۱)$ام به جمله n ام مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی وقتی $n \to +\infty$، به نسبت طلایی می‌گراید. $\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+۱}}{F_n} = ۱/۶۱۸ \ldots$

$\frac{۱}{۱}$، $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۵}{۳}$، $\frac{۸}{۵}$، $\frac{۱۳}{۸}$، $\frac{۲۱}{۸}$، $\frac{۲۱}{۱۳}$، $\frac{۳۴}{۲۱}$، $\frac{۵۵}{۳۴}$، $\frac{۸۹}{۵۵}$، $\frac{۱۴۴}{۸۹}$، ...

۱، ۲، ۱/۵، ۱/۶۶، ۱/۶، ۱/۶۲۵، ۱/۶۱۵، ۱/۶۱۹، ۱/۶۱۷، ۱/۶۱۸۱، ...

ثابت می‌شود که جملهٔ عمومی رشته اعداد فیبوناتچی به صورت $F_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left(\varphi^n - \frac{(-۱)^n}{\varphi^n}\right)$ است که در آن $\varphi = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ است.

لئوناردو فیبوناتچی

لئوناردوفیبوناتچی Leonardo Fibonacci در حدود سال ۱۱۷۰ در پیزا متولد شد، و در ۱۲۵۰ درگذشت. نخستین ریاضیدان بزرگ سدهٔ سیزدهم، و بی‌شک بزرگترین و خلاقترین ریاضیدان سراسر قرون وسطی، لئوناردو فیبوناتچی بود، که او را لئوناردوی پیزایی هم می‌نامند.

هنگام ولادت فیبوناتچی، پیزا همراه با ونیز و جنوا، در شمار بزرگترین مراکز بازرگانی ایتالیا به شمار می‌رفتند. در این شهرها انبارهای بزرگی برای نگهداری کالا وجود داشت، در همهٔ بندرهای مهم مدیترانه عوارض گمرکی دریافت می‌شد، و در رأس هر یک از گمرکخانه‌ها شخصیت ممتازی قرار داشت. پدر لئوناردو در بجایه واقع در ساحل شمالی افریقا چنین مقامی داشت. لئوناردو نخستین تحصیلات خود را در این شهر نزد معلمی مسلمان آغاز کرد. در جوانی بر روی مدیترانه به مسافرت پرداخت. مصر، شام، یونان، سیسیل و جنوب فرانسه را سیاحت کرد، به دیدار دانشمندان نایل شد و با اقسام روشهای محاسبه، که در میان بازرگانان نقاط مختلف معمول بود، آشنایی یافت. با این همه، تمام دستگاههای محاسبه را در برابر ارقام جدید، ناقص یافت، از این رو در ۱۲۰۲ کتابی تألیف کرد به نام کتاب حساب، و در آن به بحث کافی در زمینهٔ حساب و جبر مقدماتی پرداخت. این کتاب

فیبوناتچی

در پانزده فصل است، که اظهارات مختصر زیر، می‌تواند تصویری کلّی از آن به دست دهد: ۱ - خواندن و نوشتن ارقام در دستگاه هند و عربی؛ ۲ - ضرب اعداد صحیح؛ ۳ - جمع اعداد صحیح؛ ۴ - تفریق اعداد صحیح؛ ۵ - تقسیم اعداد صحیح؛ ۶ - ضرب عدد صحیح در عدد کسری؛ ۷ - سایر عملیات کسری؛ ۸ - قیمت کالاها؛ ۹ - داد و ستد؛ ۱۰- مشارکت؛ ۱۱- اختلاط و امتزاج؛ ۱۲- حل مسأله‌ها؛ ۱۳- قاعده خطایین؛ ۱۴- جذر و کعب؛ ۱۵ - هندسه و جبر، که دومی در حل مسأله‌های مربوط به مساحت به کار رفته است.

شاید به خاطر تمایلش به مسافرت بوده که گاه نام خود را لئوناردوی سیاح L.Bigollo نوشته است.

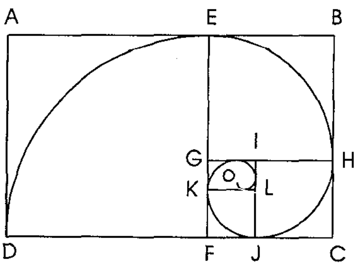
سایر آثار فیبوناتچی. فیبوناتچی سه کتاب دیگر هم نوشت به نامهای، اعمال هندسه (۱۲۲۰)، کتاب هنرهای چهارگانه (۱۲۳۵) و شکوفه‌ها؛ علاوه بر آنها نامه‌ای از او خطاب به تیودوروس حکیم فردریک دوم، راجع به آنالیزسیال و هندسه در دست است. در این آثار از علم عدد (نظریه اعداد) به طریقی بحث شده که نشان می‌دهد لئوناردو با توجه به زمان خویش، ریاضیدانی ماهر بوده است. نام او با سری: ... ، ۱۳ ، ۸ ، ۵ ، ۳ ، ۲ ، ۱ ، ۱ ، ۰ مربوط است که در آن $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ است، و ضمناً :

$$u_{n-1} : u_n \to \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

اگر به مدارس آن زمان توجه کنیم، آوای لئوناردو، در حکم فریادی در تاریکی بود. شاید مقرون به حقیقت باشد اگر بگوییم، در دانشگاه پاریس، جایی که بزودی بزرگترین مرکز فکری جهان می‌شد، استادی نبود تا بتواند کاری مشابه با استدلال سادهٔ کتاب هنرهای چهارگانه فیبوناتچی بکند، یا قادر به درک تمام مطالب کتاب شکوفه‌ها باشد.

از آن‌جا که در دوره‌های درس مدارس ایتالیا کمتر به علوم توجه می‌شد، ریاضیات در آنها جایی نداشت.

نکته ۳. در شکل مقابل، ABCD مستطیل طلایی است که در آن $AB = \varphi$ و $BC = 1$ است. اگر از این شکل مربع AEFD را حذف کنیم، مستطیل باقیمانده EBCF نیز مستطیل طلایی است. برای اثبات این مطلب، باید ثابت کنیم که



$\varphi = \frac{CB}{EB}$ است . از آن جا که $BC = ۱$ و $EB = \varphi - ۱$ است، داریم : $\frac{CB}{BH} = \frac{۱}{\varphi - ۱}$ از طرفی $EB = BH$ است. پس تناسب بالا را می‌توان چنین نوشت:

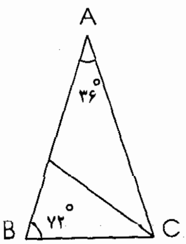
$$\frac{CB}{EB} = \frac{۱}{\varphi - ۱} = \frac{۱}{\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} - ۱} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} = \varphi$$

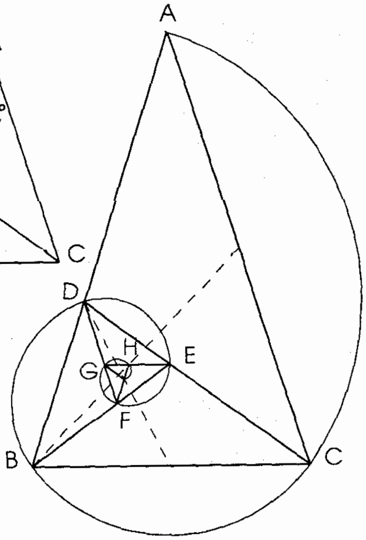
جریان حذف مربعها را می‌توان ادامه داد و نتیجه، هربار، مستطیل طلایی کوچکتری است. نمونه کار چنان که در شکل نشان داده شده است، مارپیچی را مطرح می کند که به مارپیچ طلایی (Golden spiral)، یا مارپیچ همزاویه، یا مارپیچ لگاریتمی موسوم است، و معادله اش در دستگاه مختصات قطبی $\rho = \varphi^{\frac{۲\theta}{\pi}}$ است، که در آن φ عدد طلایی است.

محل برخورد قطرهای مستطیل طلایی مرکز مارپیچ است، و شعاع هر قسمت از مارپیچ برابر ضلع مربع جدا شده در مستطیل طلایی، با روش بالا است. هر خط مماس بر نقطه‌ای از این مارپیچ، زاویه‌ای با شعاع واصل به آن نقطه می‌سازد که این زاویه‌ها با هم برابرند. از این رو مارپیچ را همزاویه می‌نامند.

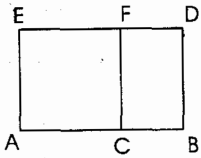
در طبیعت می‌توان مستطیل طلایی و مارپیچ همزاویه را در صدفها، ستاره دریایی، میوهٔ کاج، آناناس، گل آفتابگردان و حتی در شکل یک تخم مرغ یافت. علاوه بر این که مستطیل طلایی را در هنر، معماری و طبیعت می‌توان یافت، در بازرگانی نیز دیده می شود. بسیاری از ظروف به شکل مستطیل طلایی است . حتی بعضی از کارتهای معتبر نیز به شکل مستطیل طلایی هستند.

مثلث طلایی . مثلث متساوی‌الساقینی که زاویهٔ رأس آن °۳۶ باشد به مثلث طلایی معروف است، زیرا در این مثلث، نسبت اندازهٔ هر ساق به اندازه قاعده، برابر عدد طلایی است یعنی $\frac{AB}{BC} = \varphi = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$. اگر نیمساز یک زاویهٔ مجاور به قاعده، مثلاً نیمساز زاویهٔ C را رسم کنیم تا ساق AB را در نقطهٔ D قطع کند. مثلث BCD نیز مثلث طلایی است زیرا مثلث متساوی‌الساقینی

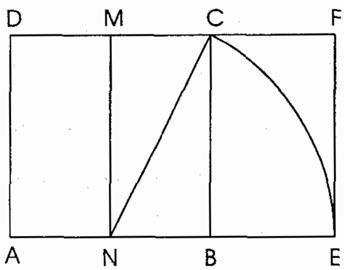




است که زاویهٔ رأسش °۳۶ است و اگر عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم مثلثهای طلایی دیگری به دست می‌آیند. نکته جالب آن است که رأسهای این مثلثهای طلایی روی مارپیچ لگاریتمی قرار دارند. قطب این پیچ لگاریتمی از محل برخورد میانه‌هایی که با خط چین مشخص شده‌اند، می‌گذرند.



روش رسم مستطیل طلایی. اگر پاره خط AB به وسیلهٔ نقطهٔ C به نسبت طلایی تقسیم شده باشد، یعنی $AC^۲ = AB . BC$ باشد، مستطیل ABDE که درازای آن پاره خط AB ، و پهنای آن مساوی پاره خط AC است، مستطیل طلایی است.



راه دیگر رسم مستطیل طلایی. مربع دلخواه ABCD را رسم می‌کنیم و سپس نقطه‌های M و N وسطهای ضلعهای AB و CD را به هم وصل می‌نماییم. پاره خط NC را رسم کرده به مرکز N و به شعاع NC قوسی می‌زنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

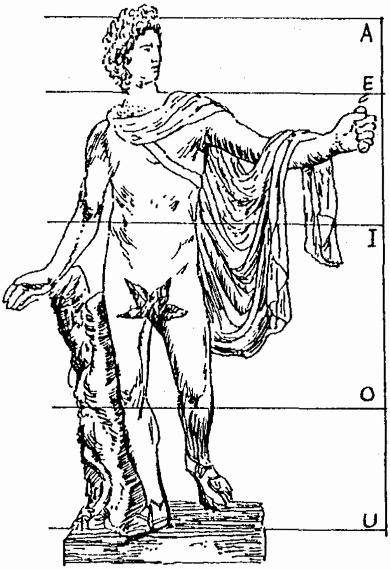
از E خطی عمود بر AE اخراج می‌کنیم تا امتداد DC را در نقطهٔ F قطع نماید؛ مستطیل AEFD مستطیلی طلایی است یعنی داریم $\frac{AE}{AD} = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} = \varphi$، زیرا اگر ضلع مربع ABCD را a فرض کنیم داریم :

$$NB = \frac{a}{۲}, BC = a \Rightarrow NE = NC = \sqrt{NB^۲ + BC^۲} = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} + a^۲}$$

$$\Rightarrow NE = NC = \frac{a\sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow AE = AN + NE = \frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۵}}{۲} = a(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲})$$

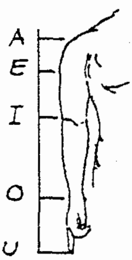
$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = \varphi$$

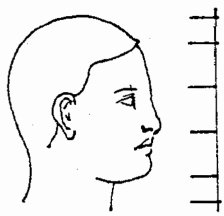
نکاتی بیشتر در مورد نسبت طلایی. تقسیم‌طلایی، با همهٔ پیچیدگی که در بیان عددی آن وجود دارد، تناسبی است که اغلب در طبیعت و در ساخته‌های دست بشر به آن برخورد می‌کنیم. بدن آدمی، چه در کل بدن و چه در بعضی از قسمتهای جداگانهٔ آن، اغلب از قانون تقسیم طلایی پیروی کرده است. در شکل مقابل مجسمهٔ معروف آپولون



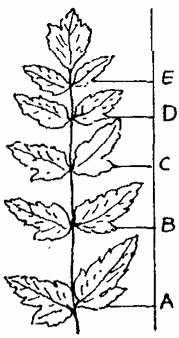
در بلودیر (APOLLO IN BELVÉDERE) به نسبت تقسیم طلایی تقسیم شده است. خط I تمام تصویر را به دو قسمت به نسبت طلایی تقسیم می‌کند. خط E همین نسبت را بین سر و قسمت بالای تنه نشان می‌دهد. بالاخره خط O تقسیم پاها را در زانوها به نسبت طلایی مشخص می‌کند.

این را هم باید اضافه کرد که اگر تن آدمی را به همین نسبت تقسیم کنیم، به نحوی که قسمت کوچکتر پایین و قسمت بزرگتر بالا قرار گیرد، خط تقسیم از انتهای انگشتهای دستها، در صورتی که دستها آویزان باشند، می‌گذرد.





تقسیم سر به قسمتهای اختصاصی هم، یک رشته نسبت به دست می‌دهد که خیلی به نسبت طلایی نزدیکند؛ همین وضع در مورد دست و کف دست هم وجود دارد.



اگر از عالم انسان، به عالم گیاه برویم، در آنجاهم کاربرد شگفت آور نسبت طلایی را پیدا می‌کنیم.

وضع قرار گرفتن برگها را روی یک ساقه بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که بین هر دو زوج برگ، سومی در جای تقسیم طلایی قرار گرفته است.

اگر وضع قرارگرفتن برگها را روی شاخه‌ها، و شاخه‌های جداگانه را روی ساقه مطالعه کنیم، باز هم به نتیجه‌های جالب‌تری می‌رسیم. به سادگی می‌توان متوجه شد که همهٔ برگها، یکی، روی دیگری قرار نگرفته است، برگهای مجاور، اغلب روی یک خط راست نیستند، بلکه شاخه را دور می‌زنند. اگر نخی از پایهٔ یک برگ به پایهٔ برگ دوم، و از آن‌جا به پایهٔ برگ سوم و غیره به نوبت ببندیم، دیده می‌شود که نخ دور شاخه می‌پیچد و یک مارپیچ واقعی درست می‌کند.

در گیاه‌شناسی استقرار برگها را در رستنیهای مختلف، با تعداد دورهای خط مارپیچ، و تعداد برگهایی که در یک دور وجود دارد. مشخص می‌کنند. دور، به فاصلهٔ بین برگهایی گفته می‌شود که درست یکی، روی دیگری، در طول شاخه یا ساقه قرارگرفته باشند. به خاطر سهولت کار، وضع درخت را با این نسبت مشخص می‌کنند که صورت آن تعداد دورها، و مخرج آن تعداد فاصله‌های بین برگها را نشان می‌دهد.

مثلاً" اگر برای رسیدن از یک برگ به برگی که درست روی آن (روی خط راستی که از برگ اول در امتداد شاخه یا ساقه رسم می‌شود) قرارگرفته است، باید سه بار دور شاخه پیچید و ضمناً" در فضا به هشت فاصله برخورد شود، گویند وضع استقرار برگها با کسر $\frac{۳}{۸}$ مشخص می‌شود.

به سادگی فهمیده می‌شود که این کسر ضمناً" زاویهٔ انحراف بین دو برگ مجاور را هم بیان می‌کند؛ مثلاً" $\frac{۳}{۸}$دور، به معنای $\frac{۳}{۸} \times ۳۶۰ = ۱۳۵$ درجه است. از این جا روشن می‌شود که کسرهای $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۵}{۸}$ یک وضع را برای استقرار برگها مشخص می‌کنند، زیرا زاویه‌ای که مساوی $\frac{۳}{۸}$ دور باشد، به اندازهٔ $\frac{۵}{۸}$ دور با ۳۶۰ درجه اختلاف دارد. اختلاف عددها به این معناست که در یک حالت، خط مارپیچ از راست به چپ حرکت کرده است. و در حالت دیگر از چپ به راست. گیاه شناسان در محاسبه‌های خود که به کرات

انجام داده‌اند، به وضع زیر برای استقرار برگها برخورده‌اند:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۸},\frac{۵}{۱۳},\frac{۸}{۲۱},\ldots$$

و ضمناً متذکر شده‌اند که این رشته، خصوصیت جالب و غیر منتظره‌ای هم دارد، هر کسر (با شروع از کسر سوم) از دو کسر قبل به این ترتیب به دست می‌آید که صورتها را با هم، و مخرجها را با هم جمع می‌کنیم. در حقیقت :

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۱+۱}{۲+۳},\frac{۳}{۸}=\frac{۱+۲}{۳+۵},\frac{۵}{۱۳}=\frac{۲+۳}{۵+۸},\ldots$$

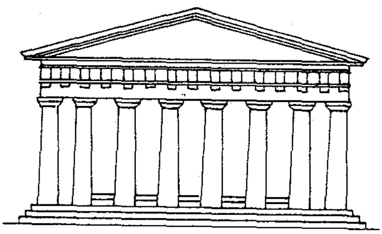
بنابراین کافی است دو کسر اول را پیدا کنیم، تا بتوانیم تمام رشتهٔ کسرها را بنویسیم. چرا این خصوصیت غیر منتظره است؟

اگر در این رشته به جای کسرهای $\frac{۲}{۵}$، $\frac{۳}{۸}$.... معادلهای آنها را از لحاظ گیاه شناسی قرار دهیم (یعنی کسرهای $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۵}{۸}$، ...)، دوباره در صورت و مخرج کسرها به رشتهٔ فیبوناتچی می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۵},\frac{۵}{۸},\frac{۸}{۱۳},\frac{۱۳}{۲۱},\ldots$$

و این به معنای آن است که وضع استقرار برگها خیلی نزدیک به نسبت طلایی است. دانشمندانی بوده‌اند که بررسی خود را روی قسمتهای دیگری از رستنیها انجام داده‌اند، و همه جا توانسته‌اند ارتباط بین دنیای گیاهان را با نسبت طلایی پیدا کنند.

در جهان هنر، بخصوص در معماری هم، نسبتِ طلایی برای چشم، خیلی خوش آیند و دلپسند است.



طول تیر بزرگ پارتنون مشهور یونانی، نسبت به ارتفاع تمام ساختمان مساوی ۰/۶۱۸ : ۱ است که نسبت طلایی را به خاطر می‌آورد. در بسیاری از قسمتهای دیگر این شاهکار معماری کلاسیک هم، می‌توان به نسبت طلایی برخورد کرد.

نسبت طلایی نه تنها بر طبیعت حکومت می‌کند، بلکه بر چشم آدمی و حتی گوش آدمی هم تسلط دارد، زیرا در موسیقی هم می‌توان رد پای مشخص نسبت طلایی را پیدا کرد.

۲۱. ثابت کنید که کسر مسلسل $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$ برابر عدد طلایی است.

۲۲. ثابت کنید که $A=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$ مساوی عدد طلایی است.

۲۳. ثابت کنید که یکی از ریشه‌های معادله $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$ عدد طلایی است.

۲۴. پاره خطی را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مساحت مستطیلی که با خود پاره‌خط و یکی از بخشهای آن ساخته می‌شود، هم ارز مربعی باشد که با بخش دیگر پاره خط ساخته شده است (مسأله تقسیم طلایی از اقلیدس).

مکتب اسکندریه

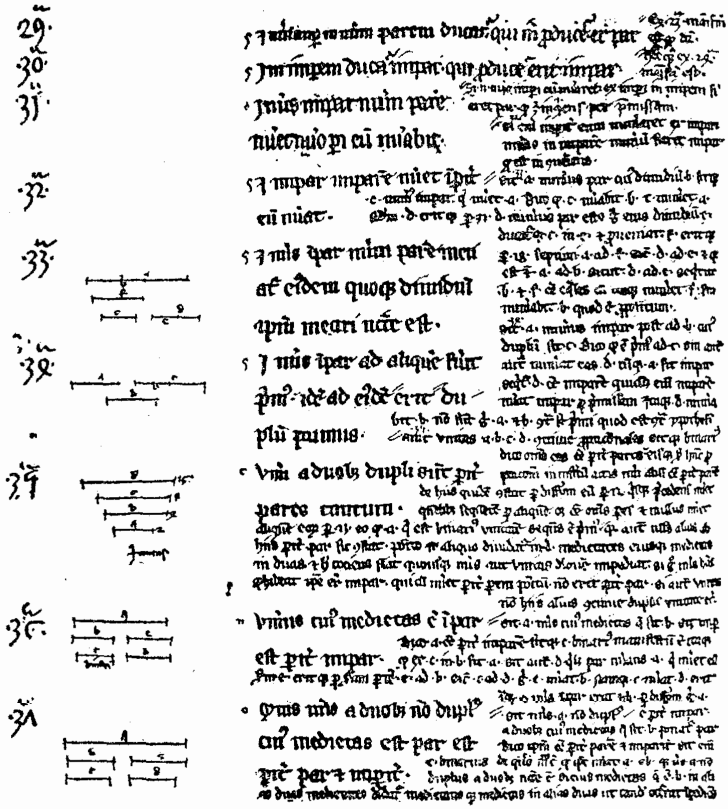
بزرگترین مرکز ریاضیات قدیم نه کروتون بود و نه آتن. این مرکز، در جای شهر کهن راکوتیس، بر کرانهٔ رود نیل جای داشت و آن را اسکندر کبیر به نام خود ساخته بود. با مرگ جهانگشای بزرگ مقدونی (۳۲۳ پ م) قلمرو پهناوری که به زیر فرمان خویش درآورده بود از هم پاشید. پس از مرگ لایقترین سردارش آنتیگونوس، امپراطوری سه قسمت شد. بطلمیوس ناجی، دوست، مشاور و احتمالاً" خویشاوند همخون اسکندر، مصر را مالک شد، آنتیگونوس کهتر مقدونیه را خواست، و سلوکوس ممالک آسیا را برای خود برداشت. در دوران پادشاهی پر خیر و برکت بطلمیوس (۳۲۳ - ۲۸۳ پ م) اسکندریه نه فقط مرکز بازرگانی، بلکه مرکز فعالیت ادبی و علمی جهان هم شد. او در آن‌جا بزرگترین کتابخانه جهان باستان و نخستین دانشگاه بین‌المللی را بنیان نهاد. کاردینال نیومن Jehn Henry Newman (۱۸۰۱ - ۱۸۹۰) کاردینال کاتولیک و محقق انگلیسی، هنگام بحث از این دو سازمان با احساسی شاعرانه می‌گوید:

«اولی همچون مومیایی کردن نبوغ مرده بود، و دومی در حکم جان بخشیدن بدان».

در این جا بیش از هر مرکز علمی جهان باستان ریاضیدانان بزرگ تربیت شدند. نام اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، اراتوستنس، بطلمیوس منجم، هرون، منلائوس، پاپوس، هوپاتیا، دیوفانتوس، (ولوغیرمستقیم) نیکوماخوس با اسکندریه مربوط است. با این همه، امروز کمترین نشانه‌ای از آثار کتابخانه و موزهٔ بزرگ در دست نیست، و حتی جای دقیق آنها را هم نمی‌توان حدس زد.

اقلیدس

از نامهای بزرگی که با اسکندریه مربوط می‌شود نام اقلیدس Euclid برآمدنش ح ۳۰۰ پ م از همه معروفتر است. او موفقترین نویسندهٔ کتابهای درسی است که جهان تاکنون به خود دیده، از سال ۱۴۸۲ تاکنون بیش از هزار بار کتاب هندسه‌اش چاپ شده، و نسخه‌های خطی این اثر، آموزش هندسه را از هیجده قرن پیش از آن تحت سلطهٔ خود درآورده است. او تنها کسی است و تنها کسی خواهد بود که این افتخار نصیبش شده تا همهٔ اجزای اساسی معلومات ریاضی گردآمده در عصر خویش را در تألیف خود بگنجاند.



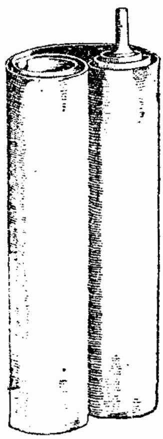
یک صفحه از ترجمهٔ اصول اقلیدس

این نسخه در ح ۱۲۹۴ م نوشته شده . این صفحه راجع به احکام مربوط به خواص اعداد است، به صورتی که در مقالهٔ نهم کتاب اصول آمده، سطر اول حکمی است که در چاپهای اخیر تحت شمارهٔ ۲۸ می‌آید.

از زندگی اقلیدس هیچ خبر مشخصی نمی‌دانیم. یکی از نویسندگان متأخر بر این عقیده است که بنابر شواهد، او پیش از ۳۶۵ پ م متولد شده و کتاب اصول را مقارن چهل سالگی خویش نوشته است، ولی اطلاع موثقی از زادگاه او، زمان تولد و وفاتش، یا حتی ملّیتش نداریم. قبلاً اظهار می‌شد که او در مگارا از شهرهای یونان زاده شده، ولی اینک معلوم گردیده اقلیدس مگارایی فیلسوفی بوده که یک قرن پیش از اقلیدس اسکندرانی می‌زیسته است. اقلیدسی که مورد نظر ماست ممکن است یونانی بوده یا از مصریانی بوده که برای تحصیل و تدریس به مستعمرهٔ یونانی اسکندریه رفته بوده است. دلایلی برای قبول این مطلب در دست است که او در آتن تحصیل کرده، ولی از لحاظ اطلاعات دقیق چیزی راجع به او نمی دانیم. به هر صورت دوران تأثیر واقعی او بر ریاضیات مقارن سال ۳۰۰ پ م، آغاز شده است.

کتابهای اقلیدس

بنابر رسم آن روزگار که همهٔ رسالات بر طومارهای دراز چرم، یا پاپیروس نوشته می‌شد، هر قسمت از تألیف او بر طوماری نوشته شده بود که آن را کتاب (Volum به معنی طومار یا لوله که برای سهولت حمل به قطعات کوچکتر تقسیم می‌شد به نام Biblia به معنی کتاب) می‌نامیدند.



طومار چرمی

مقاله‌ای از اصول اقلیدس بر یک چنین طوماری نوشته شده بود.

از این قبیل است کتابهای هومر، کتابهای هندسه، و غیره . مهمترین تألیف اقلیدس اصول نام دارد (شهرت اقلیدس چندان بود که او را «معلم اصول» می‌خواندند) و در آن از مطالب مربوط به دایره، شکلهای چهارضلعی و نسبتهایی که در طی دو قرن بعد از فیثاغورس در کتابهای راجع به هندسه، گردآمده بود بحث می‌شود . بی شک قضیه‌های زیادی هم وجود دارد که کار خود اقلیدس است، ولی جنبه‌ای که رسالهٔ او را عظمت می‌بخشد و این واقعیت را توضیح می‌دهد که تألیف او قدیمی‌ترین کتاب درسی علمی است که هنوز عملاً مورد

استفاده قرار می‌گیرد، مربوط به توالی ساده و منطقی قضیه‌ها و مسأله‌های آن است. درباره شکسپیر گفته شده که او «مغزهای مردهٔ افراد حقیر را گرفت و در آنها نفخهٔ زندگی دمید» و اقلیدس هم چنین بوده.

محتوای اصول اقلیدس

مقاله‌های اصول اقلیدس بترتیب از مطالب زیر بحث می‌کند: ۱ – همنهشتی، خطهای موازی، قضیه فیثاغورس؛ ۲ – اتحادهایی که اینک به طریق جبری حل می‌کنیم از قبیل:

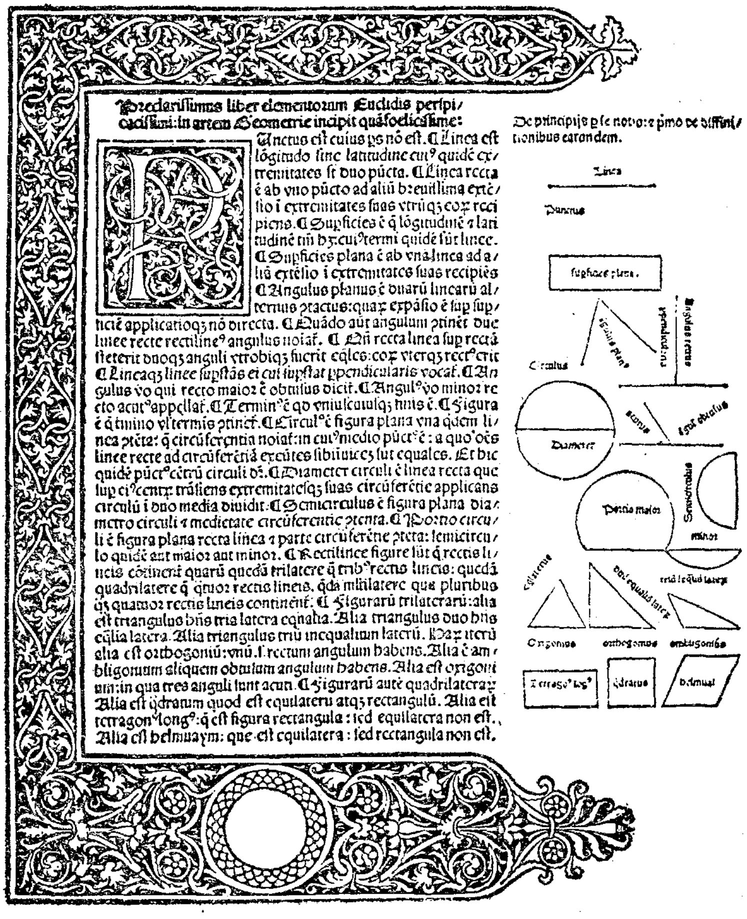
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ولی در آن زمان به طریق هندسی حل می‌شد؛ مساحت، تقسیم طلایی؛ ۳ – دایره؛ ۴ – کثیرالاضلاعهای محاطی و محیطی، تناسب به طریق هندسی، روش هندسی ناقصی برای حل معادله‌های جبری کسری؛ ۶ – همانندی کثیرالاضلاعها؛ ۷ تا ۹ – حساب (نظریهٔ اعداد قدیم) از طریق بحث هندسی؛ ۱۰ – مقدارهای بی نهایت بزرگ؛ ۱۱ تا ۱۳ – هندسهٔ فضایی.

در این اثر قدیمیترین نمونهٔ موجود از یک ترتیب اصولی‌تعریفها، مقدمه‌ها، مصادره‌ها و قضیه‌ها را می‌بینیم. اقلیدس از لحاظ اهمیت هدف، تمایل بیشتر به صراحت، و علاقه به بحث در جزئیات، با بسیاری از نویسندگان امروزی ما فرق کلی دارد: او قصد نداشت هندسهٔ شهودی را مقدمهٔ هندسهٔ استدلالی قرار دهد؛ از هیچ روش جبری استفاده نکرده است؛ پیش از مورد استفاده قرار دادن ترسیمهایش، به اثبات درستی آنها می‌پرداخت، حال آن که ما معمولاً امکان شکلهای ترسیم شده را می‌پذیریم و برهانهای خود را در مورد ترسیمها، تا وقتی که قضیه‌هایی در دست داشته باشیم به تعویق می‌اندازیم؛ از بحث راجع به مقدارهای بی نهایت بزرگ به طریق کاملاً منطقی نمی‌هراسید؛ و کتابش دارای هیچ تمرینی نیست.

سایر اثرهای اقلیدس

اقلیدس تعدادی اثر دیگر هم نوشت، از جملهٔ آنهاست: کتاب الظاهرات Phaenomena راجع به کرهٔ سماوی و حاوی بیست و پنج قضیهٔ هندسی، «مفروضات» Data، احتمالاً رساله‌ای در موسیقی و اثرهایی راجع به بصائر Optic، اختلاف مناظر

Catoptrics، و اثبات قضایا Porism. او کتابی هم نوشت راجع به تقسیمات شکلها، و در آن به بحث در مسأله‌هایی پرداخت که از جمله، در مساحی پیش می‌آید.



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

Punctus est cuius ps nō est. Linea est lōgitudo sine latitudine cui⁹ quidē extremitates sūt duo pūcta. Linea recta ē ab vno pūcto ad aliū brevissima extēsio i extremitates suas vtrūqʒ eorū recipiens. Superficies ē q̄ lōgitudinē ⁊ latitudinē tm̄ hz: cui⁹ termi quidē sūt linee. Superficies plana ē ab vna linea ad aliā extēsio i extremitates suas recipiēs. Angulus planus ē duarū linearū alternus contactus: quarū expāsio ē sup superficiē applicatioqʒ nō directa. Quādo aūt angulum ptinēt due linee recte rectiline⁹ angulus noiat. Qn̄ recta linea sup rectā steterit duoqʒ anguli vtrobiqʒ fuerit eq̄les: eorū vterqʒ rect⁹ erit. Lineaqʒ linee supstās ei cui supstat ppendicularis vocat. Angulus vo qui recto maior ē obtusus dicit. Angul⁹ vo minor recto acut⁹ appellat. Termin⁹ ē qd vniuscuiusqʒ finis ē. Figura ē q̄ tmino vl terminis ptinet. Circul⁹ ē figura plana vna q̄dem linea ptēta: q̄ circūferentia noiat: in cui⁹ medio pūct⁹ ē: a quo oēs linee recte ad circūferētiā exeūtes sibiinuicē sūt equales. Et hic quidē pūct⁹ cētrū circuli dr̄. Diameter circuli ē linea recta que sup ei⁹ centrū trāsiens extremitatesqʒ suas circūferētie applicans circulū i duo media diuidit. Semicirculus ē figura plana diametro circuli ⁊ medietate circūferentie ptenta. Portio circuli ē figura plana recta linea ⁊ parte circūferētie ptēta: semicirculo quidē aut maior aut minor. Rectilinee figure sūt q̄ rectis lineis cōtinent: quarū queda trilatere q̄ trib⁹ rectis lineis: queda quadrilatere q̄ q̄tuor rectis lineis. q̄da mltilatere que pluribus q̄ quatuor rectis lineis continēt. Figurarū trilaterarū: alia est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs eq̄lia latera. Alia triangulus triū inequalium laterū. Harū iterū alia est orthogoniū: vnū. s. rectum angulum habens. Alia ē ambligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigonium: in qua tres anguli sunt acuti. Figurarū autē quadrilaterarū Alia est q̄dratum quod est equilaterū atqʒ rectangulū. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̄ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs p se notis: ⁊ pmo de diffinitionibus earundem.

چاپ اول اصول اقلیدس ۱۴۸۲

صفحه اول از چاپ ونیز ۱۴۸۲

تأثیر آنی کتاب اقلیدس

اثر طبیعی کار اقلیدس در زمینهٔ هندسی پیدایش این احساس بود که هندسهٔ مقدماتی به حد کمال رسیده و این که، قدم بعدی در پیشرفت ریاضیات، باید در جهت نوعی هندسهٔ عالی، یا این که در زمینهٔ اندازه گیری باشد. در نتیجه، ریاضیات، دو مرحله را دنبال کرد، نخست مانند دورهٔ پیشینیان اقلیدس با اثری کمتر، و سپس با ظهور نابغه‌ای دیگر، با سرعتی بیشتر.

نویسندگان کوچک

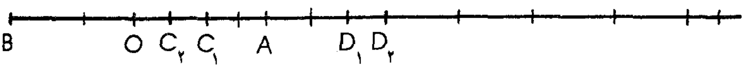
مثلاً در ابتدا نویسندگان کوچکی وجود داشتند، از قبیل کونون ساموسی Conon of Samos برآمدنش حدود ۲۶۰ پ م که با مشاهدهٔ سبدهای حلقه حلقهٔ مصریان، ممکن است پیچی را ابداع کرده باشد که ارشمیدس به تکمیل ویژگیهای آن پرداخت . آپولونیوس (ح ۲۲۶ پ م) هم، از او در مقام مطالعهٔ تقاطع دو مخروط نام برده است. باز از آن جمله بود نیکوتلس کورنه‌ای Nicoteles of Cyrene (برآمدنش ح ۲۵۰ پ م) احتمالاً از دانشجویان اسکندرانی، که آپولونیوس از وی در مقام پیشینیان خود در مطالعهٔ مخروطات نام می‌برد. باز نویسندهٔ متنفذ دیگری در وجود آریستارخوس Aristarchos (متولد ۳۱۰ پ م؛ متوفی ح ۲۳۰ پ م)، از اهالی ساموس نمایان شد، که در اسکندریه معلم بود. این او بود که اول بار نشان داد چگونه می‌توان به وسیلهٔ مثلث فیثاغورس فاصله‌های نسبی خورشید و ماه را از زمین محاسبه کرد، و تا دو هزار سال وسیله‌ای بهتر از این شناخته نشد. وسیله‌های رصد او طوری بود که حاصل کار، حتی به طور تقریبی هم نمی‌توانست درست باشد. با این همه، بزرگترین افتخارش در این است که اول بار خورشید را در مرکز عالم قرار داد و اظهار کرد که زمین و سیارات دیگر به گرد خورشید می‌گردند، و از این لحاظ هفده قرن بر کپرنیکوس پیشی گرفت. در زمینه حساب، احتمالاً $\sqrt{۲}$ را با روشی شبیه کسرهای مسلسل به دست آورد.

پاپیروسهای متعددی هم از زمان اقلیدس در دست است، راجع به مسأله‌های مالی مصر. این مسأله‌ها مربوط است به مالیات و بهای کالاهای مختلف . ولی اینها از لحاظ روش محاسبهٔ عصرهای قدیم، چیزی بر معلومات ما نمی افزایند.

۱. ۱. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به نسبت

۲۵. پاره خطی به طول تقریبی ۱۹cm رسم می‌کنیم. یک سر این پاره خط را نقطهٔ B می‌نامیم و پاره خط BA را به طول ۶/۸cm جدا می‌کنیم. نقطه‌های $C_{۱}$ و $D_{۱}$ ($C_{۱}$ بین A و B) را چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{۱}{۴}=\frac{D_{۱}A}{D_{۱}B}=\frac{C_{۱}A}{C_{۱}B}$ باشد.

موقعیت نقطه‌های $C_{۱}$ و $D_{۱}$ را به وسیله محاسبه تعیین کنید؛ همچنین نقطه‌های زیر را با توجه به شرط داده شده، بیابید:



نقطه‌های $C_{۲}$ و $D_{۲}$ به قسمی که، $\frac{۱}{۳}=\frac{D_{۲}A}{D_{۲}B}=\frac{C_{۲}A}{C_{۲}B}$ باشد.

نقطه‌های $C_{۳}$ و $D_{۳}$ به قسمی که، $\frac{۲}{۵}=\frac{D_{۳}A}{D_{۳}B}=\frac{C_{۳}A}{C_{۳}B}$ باشد.

نقطه‌های $C_{۴}$ و $D_{۴}$ به قسمی که، $\frac{۳}{۷}=\frac{D_{۴}A}{D_{۴}B}=\frac{C_{۴}A}{C_{۴}B}$ باشد.

نقطه‌های $C_{۵}$ و $D_{۵}$ به قسمی که، $\frac{۱}{۲}=\frac{D_{۵}A}{D_{۵}B}=\frac{C_{۵}A}{C_{۵}B}$ باشد.

نقطه‌های $C_{۶}$ و $D_{۶}$ به قسمی که، $\frac{۷}{۱۱}=\frac{D_{۶}A}{D_{۶}B}=\frac{C_{۶}A}{C_{۶}B}$ باشد.

به وسیلهٔ محاسبه، وضع نقطه‌های $C_{۱}$، $C_{۲}$، ... و $C_{۶}$ و $D_{۱}$، $D_{۲}$ ... و $D_{۶}$ را تعیین کنید. ثابت کنید نقطه‌های C_n و D_n نیز در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند؛ همچنین همواره نقطهٔ A بین دو نقطهٔ C_n و D_n و یا خارج دایرهٔ به قطر C_nD_n واقع است.

۲۶. برهر پاره خط چند نقطه وجود دارد، که نسبت فاصله‌های آنها از دو سرپاره خط مزبور، مساوی ۴ باشد؟

۲۷. دو نقطه A و B مفروضند. مجموعهٔ خطهایی از صفحه را مشخص کنید که نسبت فاصله‌های این دو نقطه از هر یک از آنها، مساوی عدد مفروض m باشد.

۲۸. سه نقطه معلوم است. نقطهٔ چهارمی را در همان صفحه طوری پیدا کنید که نسبت فاصله‌های آن از سه نقطه معلوم به نسبتهای مشخص باشد.

۲۹. طول یک پاره خط برابر ۴۵/۷۵cm است. و طول همین پاره خط با واحد جدیدی برابر ۴/۸۵ می‌باشد. اندازه واحد جدید برحسب متر را تا دو رقم اعشار بیابید.

۱. ۲. تناسب

۱. ۲. ۱. دنباله‌های متناسب، تناسب

دو دنباله ...، a , b , c و ... ، a' , b' , c' از عددهای مثبت مفروضند. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots$ باشد، می‌گوییم که دو دنبالهٔ بالا متناسبند، مانند دو دنبالهٔ ۳ ، ۸، ۱۲، ۱۷ و ۹، ۲۴، ۳۶، ۵۱ که داریم: $\frac{۱۷}{۵۱} = \frac{۱۲}{۳۶} = \frac{۸}{۲۴} = \frac{۳}{۹}$. این رابطه یک تناسب را نشان می‌دهد. ساده‌ترین تناسب، تناسبی است که در آن، تنها چهار عدد مطرح است، مانند تناسب $\frac{۲۰}{۲۴} = \frac{۵}{۶}$. در حالت کلی این تناسب به صورت $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ نشان داده می‌شود.

۳۰. کدام دو دنباله متناسبند؟

الف. ۵، ۷، ۹ ب. ۱، ۲، ۳ پ. $۲\frac{۱}{۲}$ ، $۳\frac{۱}{۲}$ ، $۴\frac{۱}{۲}$

ت. ۸، ۱۵، ۱۷ ث. ۱۵، ۳۰، ۴۵ ج. ۱۶، ۳۰، ۳۴

چ. $\frac{۱}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، ۱

۳۱. در هر قسمت مقدارهای خواسته شده را بیابید.

الف. داریم: $\frac{۳۰}{۲۰} = \frac{y}{۵۰} = \frac{x}{۴۰}$ ، x و y را به دست آورید.

ب. داریم: $\frac{q}{۲۰} = \frac{r}{۲۶} = \frac{۵}{q} = \frac{۳}{p}$ ؛ p ؛ q و r را به دست آورید.

پ. داریم: $\frac{۹}{b} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{c} = \frac{b}{۲۷} = \frac{۵}{a}$ ؛ a ، b و c را بیابید.

ت. فرض کنید: $\frac{h}{۲۴} = \frac{m}{۳} = \frac{n}{h + ۴} = \frac{۱}{m + ۷}$؛ مقدارهای m و n و h را بیابید.

ث. اگر $K = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، ثابت کنید: $K = \frac{a}{a'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'}$

ج. اگر $\frac{۲۱}{y} = \frac{x}{۲۰} = \frac{۹}{۱۲}$ باشد، x و y را بیابید.

چ. اگر $y = \frac{۲۰}{x} = \frac{x}{۵}$ باشد، x و y را بیابید.

ح. اگر $\frac{d}{۵} = \frac{c}{۴} = \frac{b}{۳} = \frac{a}{۲}$، آن گاه $\frac{a}{\square} = \frac{a + b + c + d}{\square}$

۳۲. طول چهار پاره خط با عددهای زیر متناسبند، ۱۵ دکامتر ۵/۱۲۵ متر، ۸۵ سانتی متر و ۳۵ دسی متر. اندازهٔ کوچکترین پاره خط برابر ۱۷ سانتی متر است. طول سه پاره خط دیگر را بیابید (تا دو رقم اعشار).

۳۳. مقدار x را در هر یک از تناسبهای زیر پیدا کنید.

۱) $\frac{۴}{۵} = \frac{۲۴}{x}$ ۲) $\frac{۶}{۱۷} = \frac{۲x}{۵۱}$ ۳) $\frac{۴}{x} = \frac{x}{۹}$ ۴) $\frac{x}{x+۲} = \frac{۳}{۴}$

۵) $\frac{x}{۱۸۰-x} = \frac{۳}{۷}$ ۶) $\frac{۴}{x+۱} = \frac{x+۱}{۳x-۲}$

۳۴. این گزاره‌ها را کامل کنید:

الف. اگر $\frac{x}{۳} = \frac{۵}{۷}$، آن گاه، $x = ... \times \frac{۵}{۷}$

ب. اگر $\frac{۱}{۲} = \frac{x}{y}$، آن گاه ــــــ $= \frac{x + ۱}{y + ۲}$ و ــــــ $= \frac{x - ۱}{y - ۲}$

پ. اگر $\frac{۷c}{۵d} = \frac{۲a}{۳b}$، آن گاه ــــــ $= \frac{a}{b}$ و ــــــ $= \frac{b}{a}$

ت. اگر $\frac{۶}{۵} = \frac{a}{b}$، آن گاه ــــــ $= \frac{a + b}{b}$ و ــــــ $= \frac{a - b}{b}$

ث. اگر $\frac{۱۱}{۷} = \frac{a + c}{c}$، آن گاه ــــــ $= \frac{a}{c}$ و ــــــ $= \frac{c}{a}$

ج. اگر $\frac{۵}{۱۲} = \frac{a + b}{a}$، آن گاه ــــــ $= \frac{b}{a}$ و ــــــ $= \frac{a}{b}$

چ. اگر $۱۶K = ۴۸$، آن گاه ــــــ $= \frac{K}{۳}$ و ــــــ $= \frac{K}{۱۲}$

ح. اگر $\frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۲}{x}$، آن گاه $\frac{۱۲}{۳} =$ ———

۳۵. سه پاره خط به اندازه‌های ۳ ، ۴ و ۵ سانتی متر مفروضند اندازهٔ پاره خطی را که با این سه پاره خط یک تناسب تشکیل می‌دهد، تعیین کنید. مسأله چند جواب دارد؟

۱. ۲. ۲. میانگینها

برای دو عدد حقیقی مثبت a و b میانگینهای زیر تعریف شده‌اند:

$A = (a+b)/۲$: میانگین حسابی

$G = (a+b)^{\frac{۱}{۲}}$: میانگین هندسی

$H = ۲ab/(a+b)$: میانگین همساز (توافقی)

$h = [a+(ab)^{\frac{۱}{۲}} + b]/۳$: میانگین هرونی

$C = (a^۲ + b^۲)/(a + b)$: میانگین پادهمساز

$r = [(a^۲ + b^۲) / ۲]^{\frac{۱}{۲}}$: جذر میانگین مربعات (مربعی)

$g = ۲(a^۲ + ab + b^۲) / ۳(a + b)$: میانگین مرکز ثقلی

برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b داریم :

الف. $H \le G \le h \le A \le g \le r \le C$

ب. با فرض $a>b$:

$$b \le \frac{۲ab}{a + b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a + \sqrt{ab} + b}{+۳} \le \frac{a + b}{۲} \le \frac{۲(a^۲ + ab + b^۲)}{۳(a + b)}$$
$$\le \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲}{۲}} \le \frac{a^۲+b^۲}{a+b} \le a$$

در نامساویهای بالا، تساوی تنها وقتی برقرار است که $a=b$ باشد.

نکته ۱ . نامساویهای بالا برای هر تعداد متناهی از عددهای مثبت نیز برقرار است. مثلاً" برای سه عدد مثبت a ، b و c داریم:

$$\frac{۳}{\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}} \le \sqrt[۳]{abc} \le \frac{a + b + c}{۳}$$

در این جا نیز تساوی وقتی برقرار است که $a = b = c$ باشد.

نکته ۲ . اگر a و b اندازهٔ دو پاره خط باشند: پاره خطی به طول یکی از مقدارهای

$A = \frac{a+b}{۲}$ ، $G = \sqrt{ab}$ و $H = \frac{۲ab}{a+b}$ ، $h = \frac{a+\sqrt{ab}+b}{۳}$ ، $C = \frac{a^۲+b^۲}{a+b}$ ،

$r = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$ و $g = \frac{۲(a^۲+ab+b^۲)}{۳(a+b)}$ را بترتیب، واسطهٔ حسابی، هندسی، همساز، هرونی، پادهمساز، مربعی و مرکز ثقلی بین دو پاره خط به طولهای a و b می‌نامند.

۳۶. اگر A ، g ، H و C به ترتیب میانگینهای حسابی، مرکز ثقلی، همساز و پادهمساز بین دو عدد a و b باشند ثابت کنید:

الف. $g = (H + ۲C)/۳ = (۲A + C)/۳$

ب. $a : A = H : b$ (تناسب موسیقی)

پ. نشان دهید که $۱/(H-a) + ۱/(H-b) = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$

۳۷. سه عدد a , b و c را در نظر می‌گیریم، ثابت کنید:

الف. اگر $a^۲$, $b^۲$ و $c^۲$ تصاعد حسابی تشکیل دهند، آن گاه $b+c$ ، $c+a$ و $a+b$ تصاعد همساز تشکیل می‌دهند.

ب. اگر a , b و c تصاعد همساز تشکیل دهند، $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$ و $\frac{c}{a+b}$ نیز تصاعد همساز تشکیل می‌دهند.

۳۸. اگر a و b دو عدد حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید که :

الف. میانگین مرکز ثقلی a و b برابر است با میانگین هرونی $a^۲$ و $b^۲$ تقسیم بر میانگین حسابی a و b.

ب. اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو میانگین حسابی و $G_۱$ و $G_۲$ دو میانگین هندسی و $H_۱$ و $H_۲$ دو میانگین همساز بین a و b باشند، آن گاه داریم :

$$G_۱ . G_۲ : H_۱ H_۲ = A_۱ + A_۲ : H_۱ + H_۲$$

۳۹. عدد $a + Wb/۱ + W$ را که در آن $W > ۰$ است، میانگین وزندار a و b برای وزن W نامیده می‌شود. نشان دهید که میانگینهای زیر دارای وزنهای ذکر شده‌اند:

۱. حسابی : $W = ۱$

۲. هندسی : $W = \sqrt{a/b}$

۳. همساز : $W = a/b$

۴. هرونی : $w = -(\sqrt{ab} + b - 2a)(\sqrt{ab} + a - 2b)$

۵. پادهمساز : $w = \dfrac{b}{a}$

۶. جذر میانگین مربعات : $W = -(\sqrt{a^2 + b^2} - a\sqrt{2})(\sqrt{a^2 + b^2} - b\sqrt{2})$

۷. مرکز ثقلی : $W = -(a^2 + ab - 2b^2)(b^2 + ab - 2a^2)$

۴۰. فیثاغوریان ده میانگین b از a و c را که به ترتیب زیر تعریف می‌شوند، در نظر گرفتند.

۱) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{a}$ ۲) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{b}$

۳) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{c}$ ۴) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}$

۵) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}$ ۶) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b}$

۷) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a}$ ۸) $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}$

۹) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{b}{a}, \ a<b$ ۱۰) $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{b}{a}, \ (a<b)$

الف. با فرض این که $0 < a < c$ ، نشان دهید که در هر ده حالت $a < b < c$ است.

ب. نشان دهید که (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب میانگین حسابی، هندسی و توافقی بین a و c را به دست می‌دهند.

۴۱. واسطهٔ هندسی، واسطهٔ حسابی، واسطهٔ مربعی و واسطهٔ توافقی بین هر جفت عددهای زیر را پیدا کنید.

الف. ۴ و ۲۵   ب. $3\sqrt{2}$ و $6\sqrt{2}$ پ. ۷ و ۲۱

۴۲. هر جفت از عددهای زیر طول دو پاره خط می‌باشند. طول پاره خطهای میانگین هندسی، میانگین حسابی، میانگین مربعی و میانگین توافقی بین آن دو پاره خط را به دست آورید.

الف. ۲ و ۸   ب. ۳ و ۱۲   پ. ۵ و ۴۵

ت. ۱۲ و ۱۵   ث. ۹ و ۱۶   ج. ۴ و ۹

۴۳. طول دو پاره خط به ترتیب a واحد و b واحد است. کدام یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

الف) $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ ب) $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$ ج) $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

د) $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{ab}$ ه) $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

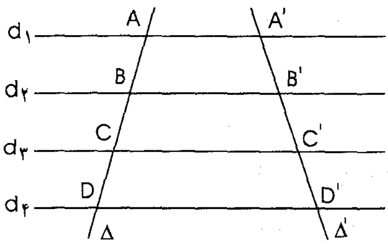
بخش ۲.

قضیه تالس

بخش ۲. قضیهٔ تالس

۱.۲. تعریف و قضیه

۴۴. **قضیه** . اگر چند خط متوازی یک خط را قطع کنند، و بر آن، پاره خطهای متساوی پدید آورند، بر هر خط دیگری که آنها را قطع کند، پاره خطهای متساوی پدید می‌آورند.



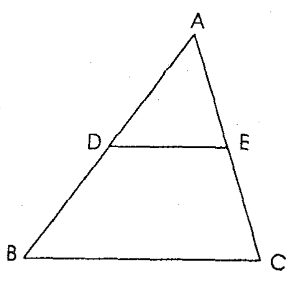
فرض $\begin{cases} d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel \ldots \\ AB = BC = CD = \ldots \end{cases}$

نتیجه : $A'B' = B'C' = C'D' = \ldots$

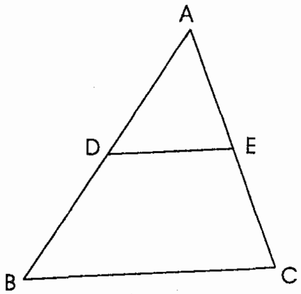
۴۵. **قضیه** . در هر صفحه خطهای متوازی که بر یک خط پاره خطهای متساوی پدید آورند، دو به دو به طور متوالی، متساوی الفاصله‌اند.

۴۶. **قضیه** . در هر صفحه خطهای متوازی که دو به دو به طور متوالی به یک فاصله باشند، بر هر خط که آنها را قطع کند، پاره‌خطهای متساوی پدید می‌آورند.

۴۷. **قضیهٔ اصلی تناسب (قضیهٔ تالس)**. اگر یک خط، با یک ضلع مثلثی موازی باشد و دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، روی این ضلعها، پاره خطهایی جدا می‌شود که با این دو ضلع متناسبند.



۴۸. **عکس قضیهٔ تالس.** اگر یک خط، دو ضلع مثلثی را قطع کند، و روی این دو ضلع پاره خطهایی متناسب با این دو ضلع ایجاد کند، آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



تالس

تالس Thales در حدود ۶۴۰ پیش از میلاد در ملطیه زاده شد و در حدود ۵۴۶ پیش از میلاد درگذشت.

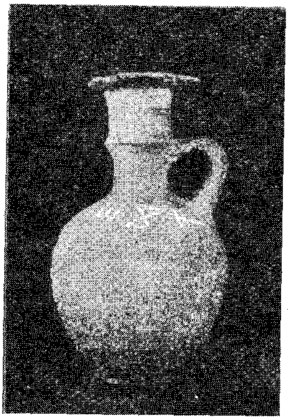
نخستین یونانی که به طور کلی و در مجموعهٔ: نجوم، هندسه و نظریهٔ اعداد به ریاضیات علاقهٔ علمی نشان داد، تالس بود، و پیش از آن، علاقهٔ معمولی مردمان اولیه، به اسرار آسمانها بود، وگواه آن گفتهٔ آرخیلوخوس Archilochos (۷۱۴-۶۷۶پ‌م) شاعر است که مدتی پیش از تولد تالس کسوفی را مشاهده کرده بود، با این حال، تا زمان تالس، علم ریاضیات در تمدن یونان ظاهر نشده بود. در آن زمان ملطیه مرکز بازرگانی و مهاجرنشینی بود، و شهری پرثروت و اعتبار به شمار می‌رفت. هرودوتوس (ح ۴۵۰ پ م) می‌گوید تالس دارای تباری فینیقی بود، ولی مادرش کلیوبولینه Cleobuline نامی یونانی داشت. حال آن که نام پدرش اکزامیوس Examios از نامهای مردم کاریه بود. احتمالاً نام خود تالس، یک نام معمول و متداول بوده است. درموزهٔ متروپولیتن نیویورک یک تنگ قبرسی مربوط به زمان وی وجوددارد که روی آن از راست به چپ حروف Ta + le + se دیده می‌شود که ظاهراً نام صاحب

تالس

مجسمه نیم تنه در موزهٔ کاپیتولین شهر رم.

تنگ است. با توجه به استعدادهای گوناگون تالس، غیر ممکن نیست که حتی در زمان حیات وی تنگی را در قبرس به نام او موسوم کرده باشند، ولی هیچ دلیل دیگری در این مورد در دست نیست.

داستانهای مربوط به تالس



کوزه قبرسی با نام طالس
به صورتی‌که‌در عکس نشان داده شده، وقتی از بالانگاه کنیم نام Ta - le - se دیده می‌شود. این کوزه تقریبا" معاصر تالس ملطی بوده است.

تالس در جوانی بازرگان بود، در میانسالی رجل دولتی، و در پیری فیلسوف. ظاهرا" در دوران سوداگری همیشه موفق بود، حتی در مقایسه با زیرکترین سوداگران یونانی. ارسطو (ح ۳۴۰ پ م) گوید، چگونه او در سالی که امید می‌رفت محصول زیتون فراوان باشد، تمام روغن کشیهای ملطیه و خیوس را به مقاطعه گرفت و در فصل روغن کشی آنها را به مستأجران دیگر به اجاره داد.

در آن هنگام تجارت پیشهٔ محترمی بود، و ظاهراً تالس در هنگام اشتغال به تجارت مصر سفر کرده بود، و نویسندگان قدیم از سفر او به کرت و آسیا هم سخن گفته‌اند. او تنها ریاضیدانی نبود که از تجارت تحصیل درآمد می‌کرد، چون پلوتارخوس در این‌باره می‌گوید: «برخی گفته‌اند که تالس و بقراط ریاضیدان تجارت می‌کردند. و افلاطون هم هزینهٔ مسافرت خود را با فروش روغن در مصر تأمین کرد.» ممکن است تالس از این راه ثروتی اندوخته باشد که بدو امکان دهد تا شوق خویش را به آموختن، سیراب سازد و مکتب یونیه را بنیان نهد. از این راه که او خود را وقف دانش ساخته بود، توانست نخستین فرد از حکمای هفتگانه به شمار آید و پدر نجوم، هندسه و حساب یونان لقب گیرد.

تالس و علم حساب

از ماهیت علم حسابی که تالس از مصر به ارمغان آورد، اطلاع مستقیم ناچیزی داریم. یامبلیخوس خالکیسی (ح ۳۲۵ م) گوید او عددها را به صورت سلسله‌ای از واحدها تعریف کرد و می‌افزاید که این تعریف و آن وحدت از مصر آمده بود. این چندان چیزی نیست، ولی کافی است تا نشان دهد که تالس به چیزی جز جنبهٔ عملی ریاضیات توجه داشته است . احتمال دارد که او بسیاری دیگر از رابطه‌های عددها را می شناخته است ؛ چون پاپیروس احمس حاوی مطالبی است دربارهٔ تصاعد، و چنین چیزی کمتر از چشم بینندهٔ دقیقی چون تالس مخفی می‌ماند. با این حال، کار تالس از لحاظ ایجاد هندسهٔ شهودی و وجود او به عنوان معلم فیثاغورس بیش از کشف موضوعها، او را در معرض توجه ما قرار می‌دهد.

علاقه به نجوم

او علاقهٔ زیادی به نجوم داشت و هردوتوس (کتاب اول، بند ۷۴) گوید که حتی او توانست کسوفی را پیشگویی کند. برخی مأخذها این کسوف را در ۲۸ ماه مه سال ۵۸۵ پ م می‌دانند ؛ و برخی دیگر آن را بیست و پنج سال پیش از آن. ممکن است او اطلاعاتی در این باره از برخی اسناد کلدانی به دست آورده باشد، ولی نمی‌توانیم بگوییم مأخذ اطلاع او کدام سند بوده است .

در حال حاضر تعداد زیادی لوحه‌های میخی از سدهٔ هفتم پ م در دست داریم که چنین پیشگوییهایی را ثبت کرده‌اند. یکی از آنها چنین است : «به خدایگان پادشاه خویش نوشته بودم که کسوفی در پیش است . اینک کسوف رخ داده . این برای خدایگان پادشاه من نشانهٔ برکت است.» مردی چون تالس که دارای ذهنی جستجوگر بود و خواه در ضمن سفرهایش یا در مرکز تجاری ملطیه، با فضلای ممالک دیگر تماس داشت؛ فرصت را برای کسب اطلاعاتی از این قبیل از دست نمی داد و از آنها برای تکمیل دانش خویش استفاده می‌کرد.

هندسهٔ تالس

در زمینهٔ هندسه، چندتا از ساده ترین قضیه‌های مربوط به شکلهای مسطح به نام او ثبت شده است. بنابر قول معتبرترین نویسندگان قدیم، دست کم قضیه‌های زیر از اوست:

۱. هر دایره به وسیلهٔ قطر آن نصف می‌شود.

۲. دو زاویهٔ پهلوی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند.

۳. وقتی خطی خط دیگر را قطع کند، زاویه‌های متقابل به رأس برابرند.

۴. زاویهٔ محاط در نیمدایره، راست گوشه است.

۵. ضلعهای مثلثهای مشابه متناسبند.

۶. هرگاه دو ضلع و یک زاویهٔ مثلثی با دو ضلع و یک زاویهٔ مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث با هم برابرند (اصول اقلیدس، کتاب ۱، قضیه ۲۶).

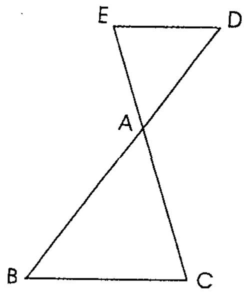
اهمیت هندسهٔ تالس

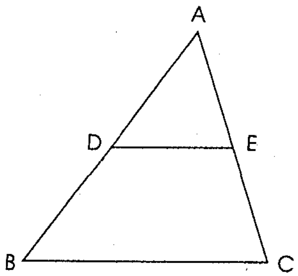
از آن جا که این مطالب اظهاراتی شهودی هستند، به عنوان قضیه‌های هندسی ممکن است ناچیز جلوه کنند، ولی همین سادگی آنها سبب می‌شود تا قبول کنیم که تالس اول بار آنها را اثبات کرده و سبب شده تا اودموس (ح ۳۳۵ پ م) و سایر نویسندگان قدیم بدان اشاره کنند. تا آن زمان هندسه، تقریباً" منحصر به اندازه‌گیری سطوح و حجمها بوده، و اقدام مهم تالس عبارت است از مطرح کردن هندسهٔ خطها و به صورت مجرد درآوردن موضوع. اول بار با اوست که می‌بینیم استدلال منطقی در هندسه به کار می‌رود و به همین علت است که به حق او را از بنیانگذاران علم ریاضی می‌دانند. در تاریخ ریاضیات، و به طور کلی در تاریخ علم، این اظهار عقیدهٔ مهمی است که مطرح می‌شود. بدون تالس فیثاغورس پدید نمی آمد، و بدون فیثاغورس افلاطون – یا امثال افلاطون – ظهور نمی کرد.

پس از مرگ تالس ریاست مکتب یونیه به آناکزیماندروس (ح ۶۱۱ – ح ۵۴۷ پ م) رسید، که عموما" او را شاگرد تالس می‌دانند. آناکزیماندروس یا یکی از معاصرانش اول کسی بوده که شاخص را به عنوان ساعت آفتابی (در واقع عقربه‌ای که سایه را در ساعت آفتابی نشان می‌دهد) در یونان به کار برده و آن را برای تعیین نیمروز، انقلابین، و

اعتدالین مورد استفاده قرار داده است . ظاهراً آناکزیماندروس جز این توجهی به ریاضیات نداشته. مقارن همین زمان بوده که ساعت آبی (پنگان) Clepsydra که قبلاً آشوریان آن را می‌شناختند، به یونان راه یافت، و مانند شاخص آناکزیماندروس برای تعیین اوقات شبانه روز به کار رفت.

۴۹. قضیه . خطی که موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، با دو ضلع دیگر مثلث، یا با امتداد آنها، مثلثی پدید می‌آورد که ضلعهای آن، نظیر به نظیر با ضلعهای آن مثلث، متناسبند.

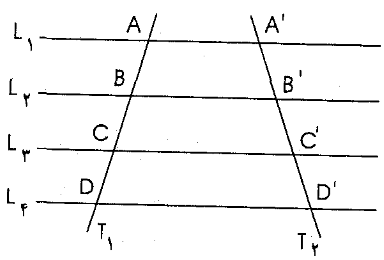




۵۰. قضیه . اگر دو مورب بیش از دو خط متوازی را قطع کنند، روی موربها پاره خطهای متناسب جدا می‌شود.

بیان ریاضی . اگر موربهای T_1 و T_2 خطهای متوازی L_1، L_2، L_3 و L_4 را بترتیب در A، B، C، D و A'، B'، C' و D' قطع‌کنند آنگاه:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

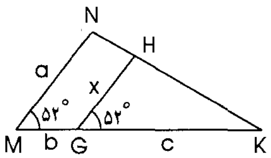


۲.۲. ضلعها و قطعه‌های ضلعهای مثلث

۲.۲.۱. اندازهٔ ضلع مثلث

۵۱. اندازه‌های سه ضلع مثلثی ۸، ۶ و ۴ سانتی‌مترند، از نقطه‌ای واقع بر ضلع کوچکتر که به فاصلهٔ ۳ سانتی متر از رأس مقابل به ضلع بزرگتر واقع است، خطی موازی ضلع بزرگتر رسم می‌کنیم تا ضلع سوم را قطع کند. اندازه‌های ضلعهای مثلث حاصل را حساب کنید.

۵۲. در شکل مقابل :

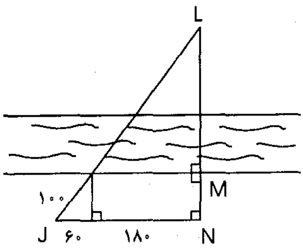


الف. اگر $a = ۸$، $b = ۴$ و $c = ۱۲$؛ x را بیابید.

ب. اگر $a = ۷$، $b = \sqrt{۳}$ و $c = ۵\sqrt{۳}$؛ x را بیابید.

پ. x را برحسب a، b و c تعیین کنید.

۵۳. دهکده‌ای در یک سوی رودخانه (نقطهٔ L) و دکل انتقال نیرو (نقطهٔ J) در سوی دیگر این رودخانه واقع است. با توجه به فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم لازم برای برق رسانی به دهکده یعنی اندازهٔ JL را حساب کنید.

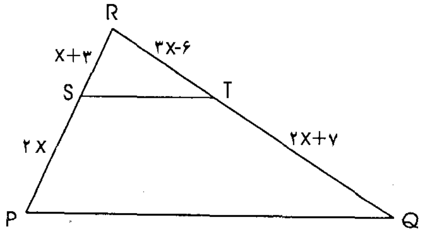


۵۴. در مثلثی به رأسهای a، b و c، نقطهٔ ´b بر پاره خط [ab] و نقطهٔ ´c بر پاره خط [ac] انتخاب می‌شود. هر گاه پاره خطهای [´bb]، [´cc] و [ac] به ترتیب به اندازه‌های ۱۲ سانتی متر، ۱۶ سانتی متر، ۳۶ سانتی‌متر و ´b´c با bc موازی باشد، اندازه پاره خط [ab] برحسب سانتی متر چقدر است؟

الف) ۳۲ ب) ۲۷ ج) ۳۰ د) ۲۴

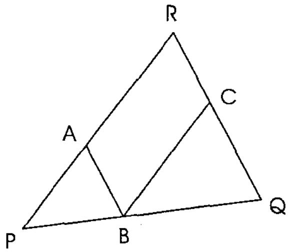
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۵۵. در شکل روبه‌رو، طولها مشخص شده‌اند و $ST \parallel PQ$، تمام مقدارهای RP را بیابید.



۲. ۲. ۲. اندازهٔ قطعه‌های ضلعهای مثلث

۵۶. در ΔPQR , $AB \parallel QR$ و $BC \parallel PR$.



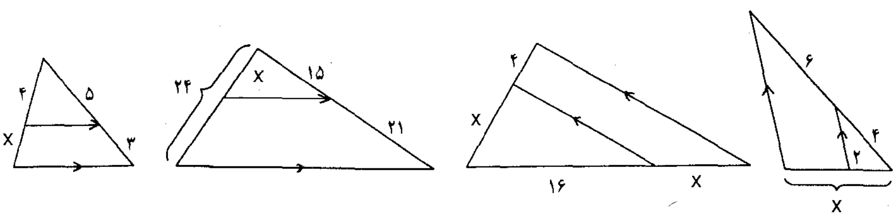
الف. اگر PA = ۴، AR = ۶، و PQ = ۲۵؛ BQ چه قدر است؟

ب. اگر RC = ۳، CQ = ۵، و PQ = ۲۴؛ PB چه قدر است؟

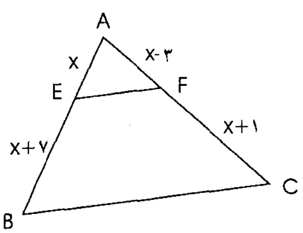
پ. اگر PA = ۲، AR = ۸، و RC = ۳؛ CQ چه قدر است؟

ت. اگر PB = ۴، BQ = ۵، و PR = ۱۵، و RQ = ۱۸؛ PA و CQ را بیابید.

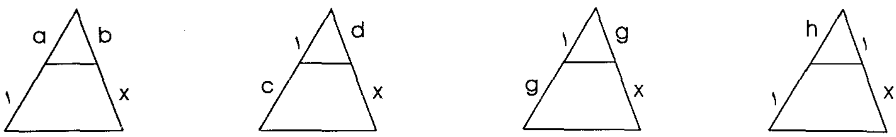
۵۷. در هر کدام از شکلهای زیر خطهای مشخص شده با هم موازی‌اند. اندازه مجهول x را به دست آورید.



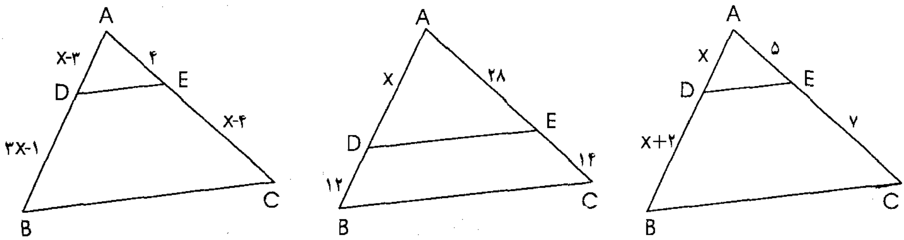
۵۸. در شکل روبه رو EF با BC موازی است. به کمک قضیهٔ تالس، اندازهٔ x را حساب کنید.



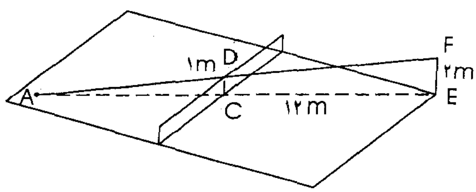
۵۹. در هر یک از مثلثهای زیر، پاره خطی به موازات قاعده رسم شده است، طول بعضی پاره خطها مشخص شده‌اند، در هر مورد، x را برحسب حرفهای دیگر بیابید.



۶۰. در هر یک از شکلهای الف، ب و پ مقدار x را چنان بیابید که AB ∥ DE باشد.



۶۱. یک توپ تنیس از ارتفاع ۲ متری زده می‌شود و درست از لبهٔ تور که به ارتفاع ۱ متر است می‌گذرد. اگر فاصله بازیکن تا تور ۱۲ متر باشد، و توپ مسیری مستقیم بپیماید، در چه فاصله‌ای از تور به میز حریف مقابل برخورد می‌کند؟



۲.۲.۳. اندازهٔ ضلعها و قطعه‌های ضلعهای مثلث

۶۲. در ΔABC ، $DE \parallel AB$

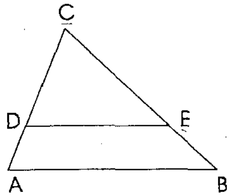
الف. اگر $AC = ۱۲$ ، $CD = ۴$ ، و $BC = ۲۴$ ؛ CE را بیابید.

ب. اگر $AC = ۱۵$ ، $AD = ۳$ ، و $BC = ۲۵$ ؛ BE را بیابید.

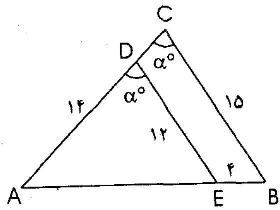
پ. اگر $AD = ۶$ ، $CD = ۴$ ، و $CE = ۷$ ؛ BC را بیابید.

ت. اگر $CD = ۸$ ، $AC = ۱۸$ ، و $BE = ۶$ ؛ CE را بیابید.

ث. اگر $AD = CE$ ، $CD = ۴$ ، و $EB = ۹$ ؛ AC را بیابید.



۶۳. در شکل $AD = ۱۴$ ، $ED = ۱۲$ ، $BC = ۱۵$ و $EB = ۴$ است. AE ، AC و AB را بیابید.



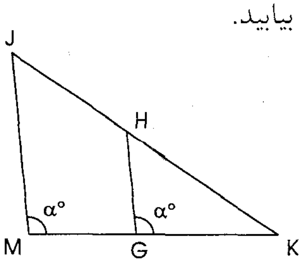
۶۴. در ΔJMK ، $M = HGK = \alpha^\circ$

الف. $JH = ۷$ ، $JK = ۲۱$ و $GK = ۱۰$ ؛ MG را بیابید.

ب. $HK = MG$ ، $MK = ۶$ و $JH = ۸$ ؛ GK را بیابید.

پ. $GK=۷$ ، $HK=۲MG$ و $JH=۱۴$ ؛ JK را بیابید.

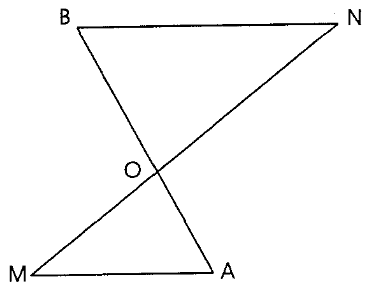
ت. $KJ = ۲۴$ ، $HK=MK$ و $KG=۴$ ؛ MK را بیابید.



۲.۳. پاره خط

۲.۳.۱. تقسیم پاره خط به نسبت معین به کمک قضیهٔ تالس

۶۵. از دو انتهای قطعه خط AB، قطعه خطهای متوازی AM و BN را در دو جهت مخالف می‌کشیم. ثابت کنید که MN پاره خط AB را به نسبت $\frac{AM}{BN}$ تقسیم می‌کند.



۶۶. بر پاره خط AB یا بر امتداد آن نقطه‌ای تعیین کنید که این پاره خط‌را به نسبت عدد معلوم K تقسیم کند.

۶۷. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ O را در داخل آن چنان اختیار کنید که مساحت مثلثهای OAB، OAC و OBC، متناسب با سه عدد m، n و P باشند.

۶۸. پاره خط مفروضی را به ۵ پاره خط متساوی تقسیم کنید.

۶۹. به کمک قضیهٔ تالس پاره خط مفروضی را به چند جزء که اندازه‌های آنها با عددهای معین l , m و n متناسب باشند، تقسیم کنید.

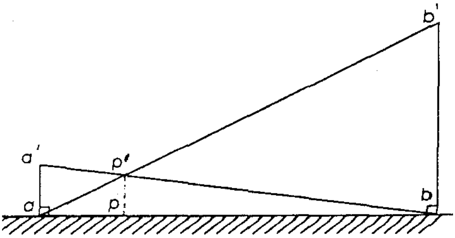
۲.۳.۲. اندازهٔ پاره خط

۷۰. اگر دو میلهٔ قائم ۲۰ سانتی متری و ۸۰ سانتی متری به فاصلهٔ ۱۰۰ سانتی متر از یکدیگر قرار داشته باشند، آن گاه بلندی نقطهٔ مشترک خطهای واصل بین نوک هر میله با پایهٔ میلهٔ مقابل، چند سانتی متر است؟

الف) ۵۰　　ب) ۴۰　　ج) ۱۶　　د) ۶۰　　ه) ۲۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۷۱. در دامنهٔ شیبدار یک تپه، دو دیرک قائم ´aa و ´bb نصب شده‌اند. دو ریسمان، که یکی از ´a به b و دیگری از ´b به a وصل شده‌اند، در ´P برخورد کرده‌اند و P تصویر قائم ´P بر سطح دامنه است.



هرگاه $|aa'|$ برابر ۴ متر، $|bb'|$ برابر ۱۶ متر، $|ab|$ برابر ۳۰ متر باشد، $|PP'|$ چند متر است؟

الف) ۳ متر ب) ۳/۱ متر ج) ۳/۲ متر د) ۳/۳ متر ه) ۳/۵ متر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۷۲. دو چوب خیزران به طولهای m , n را، به فاصله‌ای معلوم و به طور قائم روی زمین نگاه داشته‌ایم. مطلوب است، طول عمودی که از محل برخورد خطهای راستی که انتهای هر چوب را به پای دیگری وصل کرده است، بر زمین فرودآید. همچنین، فاصلهٔ پای این عمود را تا پای هر یک از دو خیزران پیدا کنید.

از بهاسکارا یا بهاسکره، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

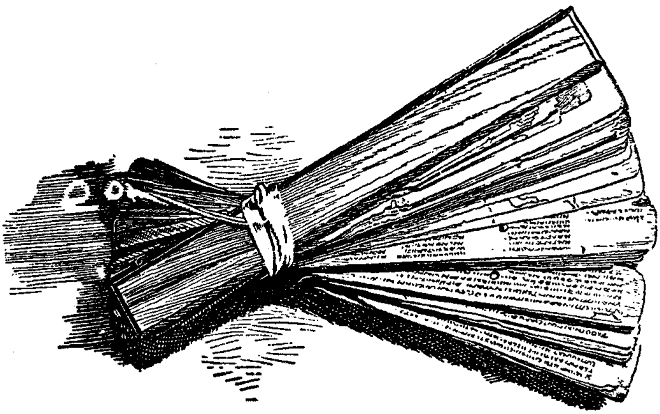
بهاسکره

غیر از شریدارا Shridara ریاضیدان هندی و نویسندهٔ کتاب تریساتیکا که در حدود سال ۹۹۱ زاده شده است. تنها یک تن دیگر در تاریخ ریاضیات هند از سال ۱۰۰۰ تا ۱۵۰۰ شخصیت چشمگیری دارد، و او بهاسکره Bhaskara (۱۱۱۴-۱۱۸۵ م) از مردم بیدور Biddor در ایالت دکن است، که در اوجاین به کار پرداخت. در کتیبه‌ای متعلق به یک معبد قدیم، از او چنین یاد شده: «درود بر بهاسکرهٔ دانا که در راه فرزانگی گام نهاد، دانشمندی بزرگ .... شاعر ... معروف به نیکنامی و مردی دیندار بود و ...»

لیلاواتی تألیف بهاسکره

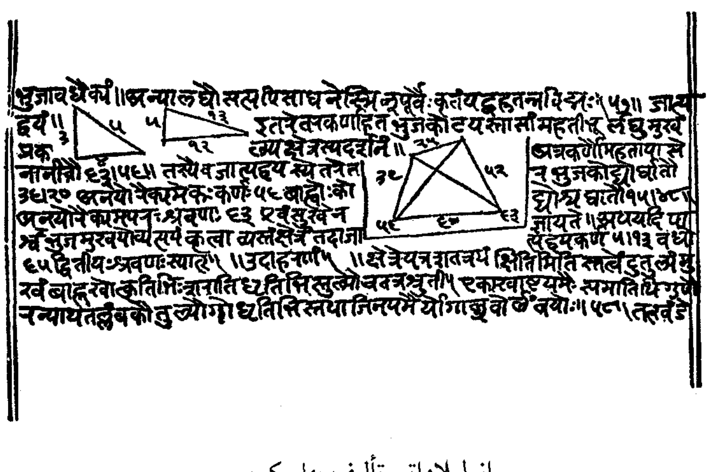
بهاسکره بیشتر در زمینهٔ نجوم، حساب، مساحی، و جبر نوشت. معروفترین کتابش لیلاواتی نام دارد، که بر اساس تریساتیکای شریدارا نوشته شده و مربوط به حساب و مساحی است. در ۱۵۸۷ فیضی دکنی آن را به فرمان اکبر شاه هندی به فارسی ترجمه کرد. فیضی گوید (البته او مأخذ استناد خود را ذکر نکرده است.) : لیلاواتی نام دختر بهاسکره بود و منجمان پیشگویی کرده بودند که او هرگز ازدواج نخواهد کرد، ولی بهاسکره ساعت سعدی برای ازدواج او پیدا کرد و پنگانی را در یک ظرف آب شناور

ساخت، این پنگان سوراخ کوچکی در ته خود داشت و طوری درست شده بود که آب تدریجاً در آن نفوذ می‌کرد و سر ساعت آن را در آب فرو می‌برد.



نسخه‌ای از لیلاواتی بر روی برگهای نخل

شکل کتابهای خطی هندی را پیش از رواج کاغذ نشان می‌دهد. این نسخه در ح ۴۰ نوشته شده.



از لیلاواتی تألیف بهاسکره

از نسخه‌ای مربوط به ح ۱۶۰ . کتاب اصلی در ح ۱۱۵۰ نوشته شده. این تصویر شکل نسخه‌های خطی هندی را نشان می‌دهد، که درست شبیه صفحاتی بود که بر روی نخل نوشته می‌شد. در این صفحه مطلب زیر بیان شده : « دو مثلث قایم‌الزاویه (مانند این تصویر) فرض می‌کنیم. عمود و ضلع یکی را بر وتر دیگری ضرب می‌کنیم . بزرگترین حاصلضرب را برای قاعده و کوچکترین را برای ارتفاع در نظر می‌گیریم و دو تای دیگری را برای دو ضلع دیگر.

با این همه، لیلاواتی با شگفتی بسیار دید وقتی مرواریدی از جامهٔ او به داخل پنگان افتاد، جریان آب متوقف شد. بدین ترتیب یک ساعت بدون فرورفتن پنگان در آب سپری شد و لیلاواتی دیگر نتوانست ازدواج کند. بهاسکره برای دلداری او کتابی به نامش نوشت، و گفت: «به نام تو کتابی می‌نویسم که تا ابد باقی بماند؛ چون نام نیک همچون عمر دوباره است و کار بزرگ در حکم حیات ابدی.»

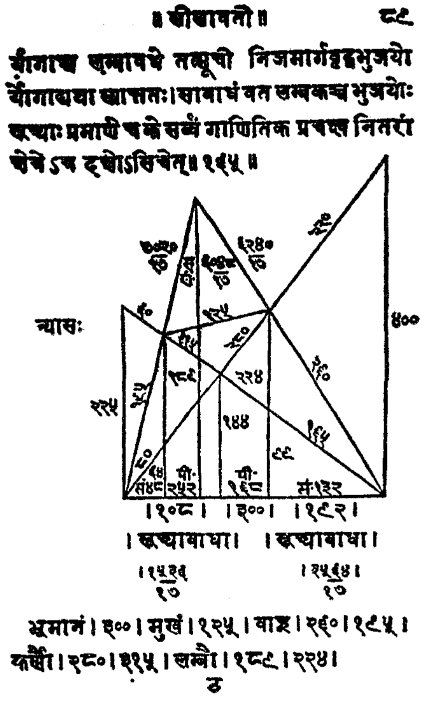
کتاب طبق معمول شرق، با ستایش خداوند آغاز می‌شود: «سپاس بر وجود پیلسر که خاطر ستایندگانش را شادمانی ارزان داشت، و مدد خواهانش را از سختیها رهایی داد، و خدایان مقدمش را گرامی داشتند.» کتاب شامل عدد نویسی، اعمال عدد صحیح و کسری و تناسب، قواعد اساسی حساب بازرگانی، بهره، سریها، اختلاط و امتزاج، مبادله، مساحی، و اندکی جبر است. قاعدهٔ مربوط به صفرهم داده شده، بدین صورت: $a + 0 = 0$ ، مجذور صفر صفر است، و $a \times 0 = 0$. از این مطلب $a : 0 = 0$ که شارحان کتابش افزوده‌اند، ظاهراً بی‌خبر بوده، چون اظهار می‌کند «مقدار معلومی که بر صفر تقسیم شود دارای مضرب صفر است» حال آن که مطلب را به صورت $10 : 0 = \frac{10}{0}$ نشان داده است، و $3 : 0 \equiv \frac{3}{0}$ را چنین توضیح داده: «این کسر که مخرج آن صفر است یک مقدار بی نهایت شمرده می‌شود.»

بجه‌گانیتا

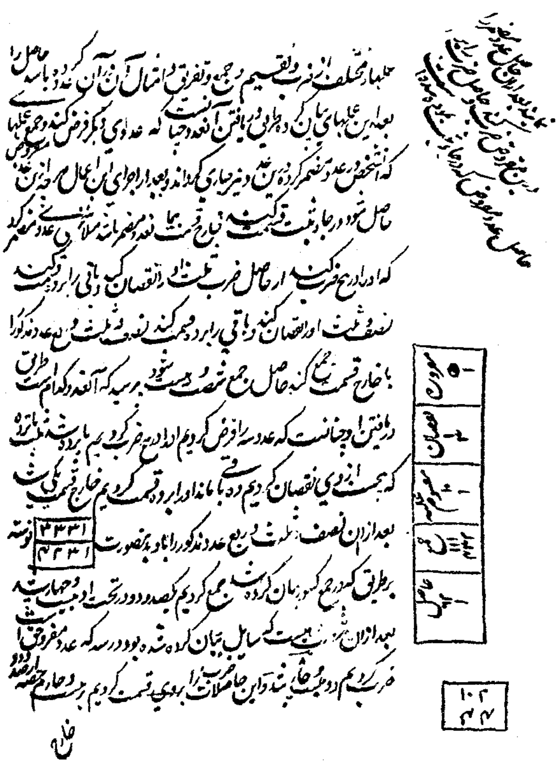
بهاسکره کتابی هم تحت عنوان بجه‌گانیتا Bija Ganita (یعنی حساب دانه‌ها) راجع به جبر نوشت. در آن از عددهای متوالی بحث کرده و اعداد منفی را به صورت «قرض» یا «زیان» نشان داده است و روی هر عدد منفی یک نقطه گذاشته، مثل 3° برای -3 و قواعد معمول آنها را به درستی بیان کرده است. مطلب را چنین مطرح کرده «کمیت منفی دارای جذر نیست: چون مجذور نیست .» مقدارهای مجهول زیادی به کار برده شده که برای نشان دادن آنها رنگهای دیگر به کار رفته «چندان که رنگهایی از قبیل سیاه، آبی، زرد و سرخ و غیره را استادان معروف برای نامیدن مقدارهای مجهول مختلف مورد استفاده قرار داده‌اند.» اعداد گنگ، مانند بسیاری آثار قرون وسطی در زمینه جبر، مفصلاً مورد بحث قرار گرفته، چون در عصر فقر علائم جبری، کارکردن با چنین عددهایی بسیار مشکل می‌شد او هم مانند آریابهاتا و برهماگوپتا مفصلاً از «ساینده»

بحث کرده است. به معادله‌های ساده و درجهٔ دو توجه زیادی شده و دقیقتر از سایر نویسندگان هندی آنها را مورد بحث قرار داده. از این گذشته مسأله‌های هندسی متعددی از نوع منظوم درآن دیده می‌شود، که در اینجا نمونه‌ای را ذکر می‌کنیم:

«پسر پریتها در جنگ به خشم آمد و ترکشی از تیر به سوی کرنا، رها ساخت. با نیمی از تیرهایش دشمنانش را به خاک افکند ؛ با چهار برابر مجذور تیرهای ترکشش اسبانشان را از پای درآورد. با شش تیر سلیه Salya را بکشت، با سه تیر چتر، کمان و پرچمش را بینداخت؛ و با یک تیر سر دشمن را از تن جدا کرد. او (ارجونه Arjuna) چند تیر پرتاب کرده است؟»



صفحه‌ای از نخستین چاپ سانسکریتی لیلاواتی تألیف بهاسکره که در ۱۸۳۲ در کلکته منتشر شد.این دنبالهٔ صفحه‌ای است که پیش از این نشان داده شده. مطلب آن بدین شرح است. «طول قاعده ۳۰۰،ارتفاع ۱۲۵، ساقها ۲۶۰ و ۱۹۵، خطهای عمود ۱۸۹ و ۲۲۴ است.» سایر قسمتها از اینها به‌دست آمده است.



صفحه‌ای از یک نسخه لیلاواتی که فیضی آن را به فارسی ترجمه کرده

فیضی، مشاور اکبرشاه این ترجمه را در ۱۵۸۷ انجام داد. این نسخه مورد ۱۱۴۳ هجری برابر با ۱۷۳۱ میلادی است. نسخه فارسی به صورت کتابهای معمولی امروزی نوشته شده.

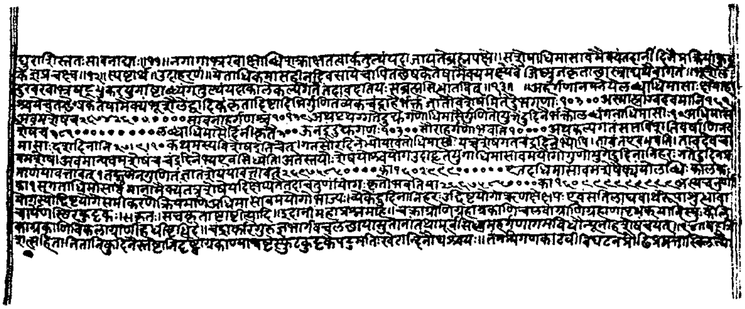
نوشتهٔ فوق چنین است: عددی در پنج ضرب شده، یک ثلث از حاصلضرب را برداشته ایم، و باقی را بر ۱۰ قسمت کرده ایم. نصف و ثلث آن را برداشتیم و باقی را بر ده قسمت کردیم؛ نصف و ثلث و ربع عدد مذکور را با خارج قسمت جمع کردیم، حاصلضرب شصت و هشت شد. آن عدد کدام است؟

سیدهانتاسیرومانی، تألیف بهاسکره

سومین تألیف مهم بهاسکره گوهر درستی Sidhanta Siromani نام دارد، که در مقالهٔ افلاک آن، از نجوم بحث می‌کند و مانند بسیاری از دانشمندان یونان باستان، کروی بودن زمین را اظهار می‌دارد. در کتیبهٔ قدیم که قبلاً ذکر شد، گفته شده نوهٔ بهاسکره به نام چنگادوا، رئیس منجمان شاه سیمگهانی بود، و در زمان او مدرسه‌ای برای ترویج آموزشهای بهاسکره تأسیس شد. بهاسکره برای ساختن مثلث فیثاغورس از رابطه‌های

برهماگوپتا پیروی می‌کند:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{m}{n} + n\right) \text{ و } \frac{۱}{۲}\left(\frac{m}{n} - n\right) \text{ و } \sqrt{m}$$



از گلادیا تألیف بهاسکره

از نسخه خطی باب نجوم کتاب بهاسکره که آخرین فصل سیدهانتا سیرومانی را تشکیل می‌دهد. این کتاب در ح ۱۱۵۰ تألیف شده؛ در این تصویر صفحه اصلی را خیلی کوچک کرده‌ایم.

و دو رابطه دیگر بدان می‌افزاید :

$$\frac{m(n^۲ + ۱)}{n^۲ - ۱}, \frac{۲mn}{n^۲ - ۱}، m \text{ و } m، \frac{۲mn}{n^۲ + ۱}, \frac{m(n^۲ - ۱)}{n^۲ + ۱}$$

۷۳. ضلع AC از مثلث قائم الزاویهٔ ABC، به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌شود. از این نقطه‌های تقسیم، هفت پاره خط، موازی BC و متکی بر AB رسم می‌شوند.

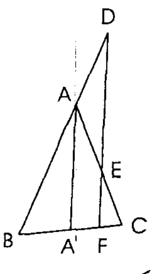
اگر $BC = ۱۰$، آن‌گاه مجموع طولهای هفت پاره خط :

الف) بااطلاعات داده شده، تعیین پذیر نیست.

ب) ۳۳ است. ج) ۳۴ است. د) ۳۵ است. ه) ۴۵ است.

المپیادهای بین المللی ریاضی، ۱۹۵۷ - المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

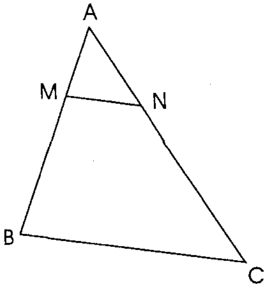
۳.۳.۲. نسبت دو پاره خط



۷۴. در مثلث ABC خطی که از نقطهٔ F واقع بر ضلع BC به موازات میانهٔ AA' رسم شده، روی ضلعهای AB و AC دو قطعه خط AD و AE به وجود آورده است.

نسبتهای $\frac{AD}{AE}$، $\frac{AE}{A'F}$ و $\frac{AD}{A'F}$ را برحسب ضلعهای مثلث حساب کنید.

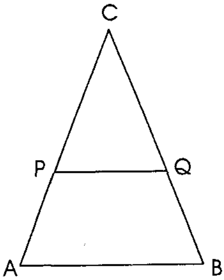
۴.۲. کاربرد عکس قضیه تالس (اثبات موازی بودن خطها)



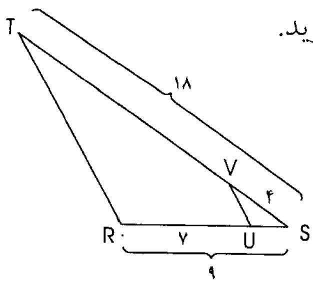
۱.۴.۲. ثابت کنید دو خط موازی‌اند

۷۵. در مثلث ABC بر دو ضلع AB و AC دو نقطه M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $AM = \frac{۱}{۳} AB$ و $AN = \frac{۱}{۳} AC$ باشد. ثابت کنید $MN \parallel BC$.

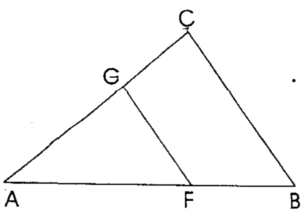
۷۶. در شکل مقابل $PA=QB$ و $AC=BC$ و $\hat{A}=\hat{B}$. ثابت کنید: $PQ \parallel AB$



۷۷. اگر طول پاره خطها مطابق شکل باشد، آیا $RT \parallel UV$؟ دلیل بیاورید.



۷۸. بـه ازای کـدام مـجموعه طـولهای زیـر، داریـم $FG \parallel BC$؟



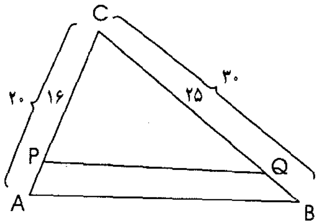
الف. $AB = ۱۴$، $AF = ۶$، $AC = ۷$ و $AG = ۳$.

ب. $AB = ۱۲$، $FB = ۳$، $AC = ۸$ و $AG = ۶$.

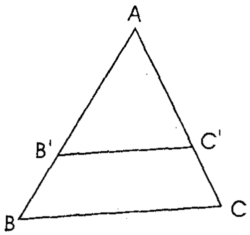
پ. $AF = ۶$، $FB = ۵$، $AG = ۹$ و $GC = ۸$.

ت. $AC = ۲۱$، $GC = ۹$، $AB = ۱۴$ و $AF = ۵$.

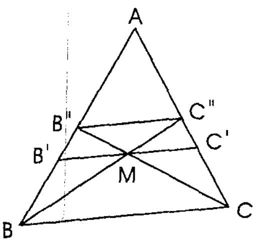
۷۹. در شکل روبه‌رو، طول پاره‌خطها را داده‌اند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که $PQ \parallel AB$؟ دلیل بیاورید.



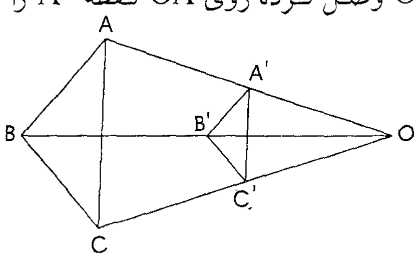
۸۰. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC نقطه‌های B' و C' را چنان انتخاب کرده‌ایم که $AB' = \sqrt{۵}$، $BB' = \sqrt{۲}$، $AC' = \sqrt{۲}$ و $AC = \frac{۲\sqrt{۵} + ۵\sqrt{۲}}{۵}$ می‌باشد، آیا $B'C'$ با BC موازی است؟



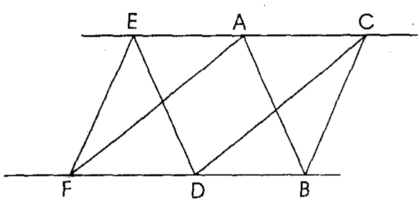
۸۱. مثلث ABC مفروض است. خطی به موازات BC ضلع AB را در نقطهٔ B' و ضلع AC را در C' قطع کرده است، اگر M وسط پاره خط $B'C'$ فرض شود، خط MB ضلع AC را در C'' و خط CM ضلع AB را در B'' قطع می‌کند. ثابت کنید $B''C''$ موازی BC است.



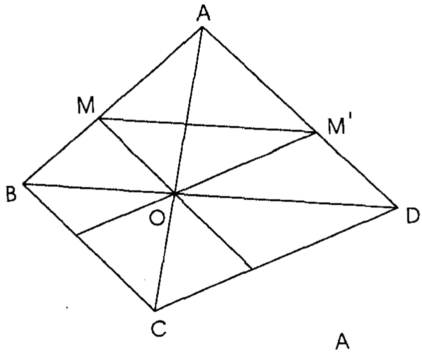
۸۲. سه رأس مثلث ABC را به نقطهٔ دلخواه O وصل کرده روی OA نقطهٔ A' را اختیار می‌کنیم و از A' خط $A'B'$ را به موازات AB و خط $A'C'$ را به موازات AC رسم می‌کنیم. نقطه‌های B' و C' روی OB و OC واقعند؛ ثابت کنید که $B'C' \parallel BC$ است.



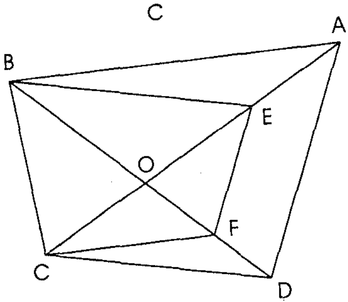
۸۳. سه نقطه A ، C و E بر یک خط راست، و سه نقطهٔ B ، D و F برخط راست دیگر واقعند. هرگاه خطهای AB و CD به ترتیب، با خطهای DE



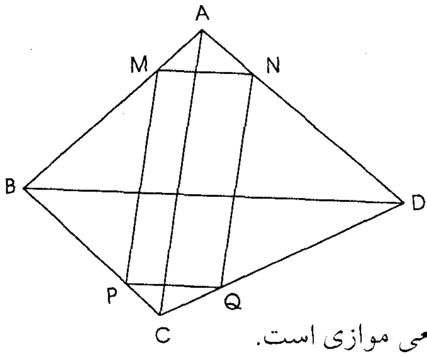
و FA موازی باشند، ثابت کنید که EF نیز با BC موازی است.



۸۴. از نقطهٔ تلاقی دو قطر چهارضلعی ABCD، خط OM را موازی BC، و خط ´OM را موازی CD رسم می‌کنیم. تا بترتیب AB و AD را در نقطه‌های M و ´M قطع کنند. ثابت کنید ´MM موازی BD است.

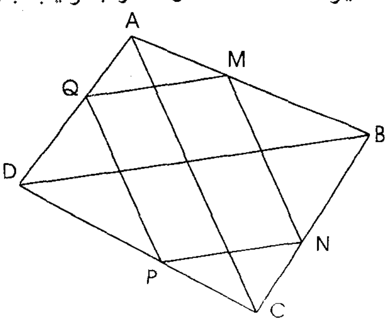


۸۵. چهارضلعی ABCD را در نظر گرفته از نقطهٔ B خطی به موازات CD رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ E قطع کند، و از C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا BD را در نقطه F قطع نماید. ثابت کنید EF با AD موازی است.



۸۶. روی ضلعهای چهارضلعی ABCD طولهای AM و AN را بترتیب مساوی با یک چهارم AB و AD، طولهای CP و CQ را بترتیب مساوی با یک چهارم CB و CD جدا می‌کنیم. ثابت کنید خطی که دو نقطه مجاور را به هم وصل می‌کنند، با یکی از دو قطر چهار ضلعی موازی است.

۸۷. در چهارضلعی کوژ ABCD، نقطه‌های متمایز M، N، P و Q را بترتیب بر ضلعهای AB، BC، CD و DA، چنان اختیار می‌کنیم که $AC \parallel MN \parallel PQ$ و $BD \parallel NP$ باشد، نشان دهید که $MQ \parallel BD$ است. چهارضلعی ABCD چه شرطی داشته باشد تا MNPQ مستطیل باشد؟



۲. ۵. رابطه‌های متری در مثلث

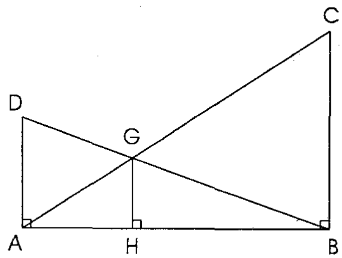
۲. ۵. ۱. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاع

۸۸. در شکل روبه‌رو AD ، HG و BC هر یک بر AB عمودند. ثابت کنید:

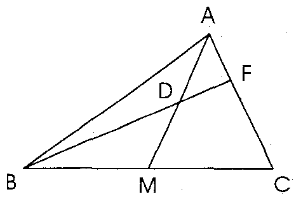
الف. $AH.GB = HB.DG$

ب. $AH.GC = HB.AG$

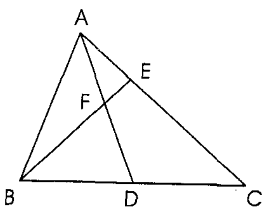
پ. $AH.BC = HB.AD$



۲. ۵. ۲. رابطه‌های متری مربوط به میانه

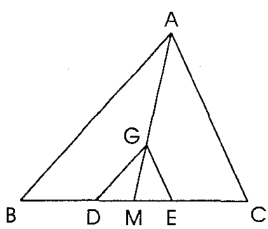


۸۹. اگر D وسط میانهٔ AM از مثلث ABC باشد، خط BD ضلع AC را در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید $AF = \frac{1}{2} FC$.



۹۰. در مثلث ABC خطی که از رأس B می‌گذرد، میانهٔ AD را در نقطهٔ F و ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند، ثابت کنید $\frac{AE}{AC} = \frac{FE}{FB}$.

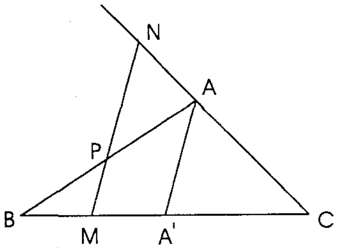
۹۱. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم کرده و نقطهٔ G را روی AM طوری اختیار می‌کنیم که $AG = 2GM$ باشد. از نقطهٔ G دو خط به موازات ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم تا بترتیب BC را در نقطه‌های D و E قطع کنند.



۱. ثابت کنید: $\frac{MD}{DB} = \frac{ME}{EC}$.

۲. ثابت کنید: $BD = DE = EC$.

۹۲. در مثلث ABC نقطهٔ M روی ضلع BC (بین B و C) قرار دارد. از نقطهٔ M خطی موازی میانهٔ AA' رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ N و ضلع AB را در نقطهٔ P قطع کند. ثابت کنید:

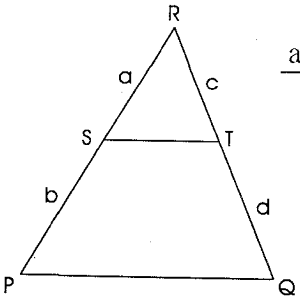


الف. $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AN}$

ب. $۲MP + PN = ۲AA'$

۲. ۵. ۳. رابطه‌های متری مربوط به خطهای موازی

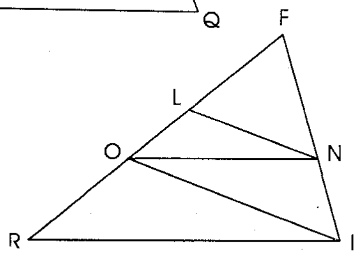
۹۳. در ΔPQR داریم $ST \parallel PQ$. طولهای ضلعها، روی شکل مشخص شده‌اند. کدام یک از تناسبهای زیر برقرار است؟



الف) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ب) $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{d}$

پ) $\frac{c}{d+c} = \frac{a}{b+a}$ ت) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

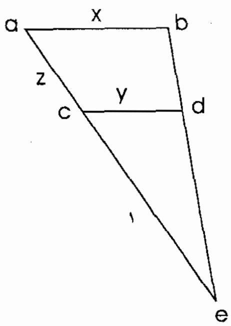
۹۴. در مثلث FRI , LN با OI و ON با RI موازی است . با دوبار استفاده از قضیهٔ تالس، ثابت کنید $\frac{FL}{LO} = \frac{FO}{OR}$.



۹۵. از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی و اختیاری AA'، BB' و CC' محدود به ضلعهای مقابل را رسم می‌کنیم. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{۱}{AA'} = \frac{۱}{BB'} + \frac{۱}{CC'}$$

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۵



۹۶. در شکل روبه‌رو، خطهای ab و cd موازی‌اند و

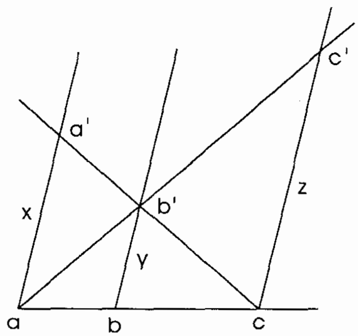
$$|ab| = x\ ,\ |cd| = y$$
$$|ac| = z\ ,\ |ae| = 1$$

در این صورت،

الف) $x - y = xz$ ب) $\frac{x}{y} = z$

ج) $y = \frac{x}{1 - z}$ د) $x = \frac{y}{1 - z}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

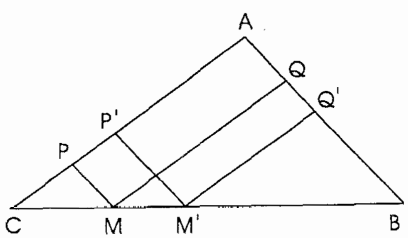


۹۷. در شکل روبه رو سه خط ´aa، ´bb و ´cc با هم موازی‌اند و $|aa'| = x$، $|bb'| = y$ و $|cc'| = z$. معکوس مقدار y برحسب x و z کدام عبارت زیر است؟

الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ ب) $\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{z})$ ج) $\frac{1}{3}(\frac{x}{z} + \frac{z}{x})$

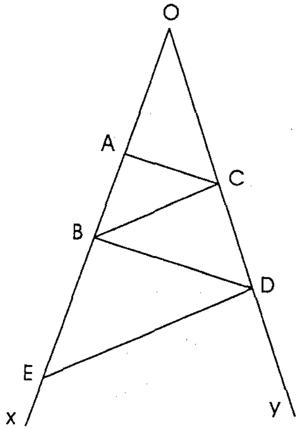
د) $\frac{xz}{x + z}$ هـ) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



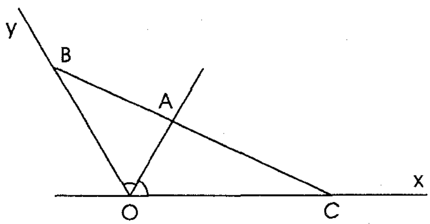
۹۸. از نقطه‌های دلخواه M و ´M واقع روی ضلع BC از مثلث ABC، دو خط به موازات AB رسم می‌کنیم تا AC را بترتیب در نقطه‌های P و ´P قطع کند و بعد دو خط به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را بترتیب در نقطه‌های Q و ´Q قطع نمایند، ثابت کنید: $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AC}{AB}$

۲. ۵. ۴. رابطه‌های متری مربوط به زاویه



۹۹. زاویهٔ xoy مفروض است. روی ضلع ox دو نقطهٔ A و B $(OB > OA)$ را اختیار کرده از این نقطه‌ها دو خط متوازی رسم می‌کنیم تا oy را بترتیب در نقطه‌های C و D قطع کنند، سپس BC را وصل کرده، از نقطهٔ D خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا ox را در نقطه E قطع کند. ثابت کنید OB واسطهٔ هندسی مابین OA و OE است، یعنی: $\overline{OB}^2 = OA \,.\, OE$.

۱۰۰. زاویهٔ xoy مساوی 120° مفروض است. نقطهٔ دلخواه A را برنیمساز آن اختیار کرده، از A خطی به اختیار رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند، ثابت کنید که:

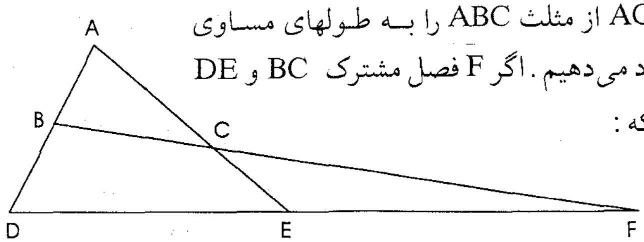


$$\frac{1}{OA} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC}.$$

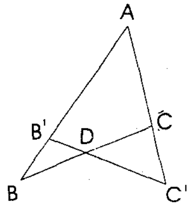
۲. ۵. ۵. سایر رابطه‌های متری مربوط به این قسمت

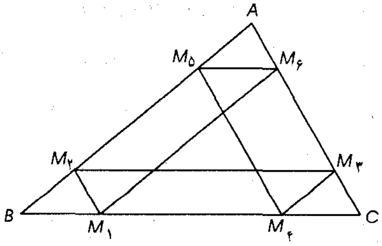
۱۰۱. ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را بــه طولهای مساوی BD و CE امتداد می‌دهیم. اگر F فصل مشترک BC و DE باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{DF}.$$



۱۰۲. مثلث ABC مفروض است. از نقطهٔ D وسط ضلع BC خطی رسم می‌کنیم تا AB را در B' و AC را در C' قطع کند، ثابت کنید: $\frac{B'A}{B'B} = \frac{C'A}{C'C}$

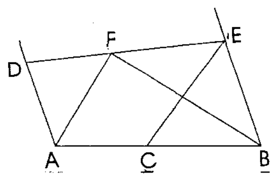




۱۰۳. در مثلث ABC نقطه‌ای مانند M_1 بر ضلع BC اختیار کرده و از آن نقطه، خطی موازی ضلع CA رسم می‌کنیم تا ضلع BA را در نقطهٔ M_2 قطع کند؛ از نقطهٔ M_2 خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا CA را در نقطهٔ M_3 قطع کند و این عمل را مرتباً ادامه می‌دهیم. ثابت کنید پس از دورهٔ معینی، یکی از خطهای مرسوم، بر نقطهٔ M_1 مرور می‌کند. در چه صورت پس از ترسیم سه پاره خط (یک دورهٔ موازی ضلعهای مثلث) به نقطهٔ M_1 خواهیم رسید؟

۱۰۴. پاره خط AB و نقطهٔ دلخواه C روی آن مفروض است. از دو سر این پاره خط دو خط دلخواه موازی و همجهت رسم می کنیم و روی آنها AD را مساوی AC و BE را مساوی BC جدا می‌کنیم، و وسط پاره‌خط DE را F می نامیم. رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$\frac{DA}{BE} = \frac{۲FA}{CE} - ۱$$



۲. ۶. قضیهٔ تالس در چند ضلعیها

۲. ۶. ۱. اندازهٔ ضلع چند ضلعی

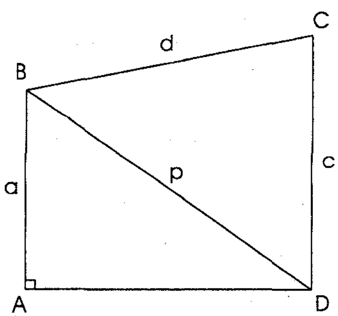
۱۰۵. در ذوزنقهٔ قائم الزاویه ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = ۹۰°$):

الف. d را بیابید، در صورتی که: ۱۱ = a، ۳ = b و ۱۵ = c

ب. a را بیابید، در صورتی که: ۲۰ = d، ۱۲ = b و ۳۶ = c

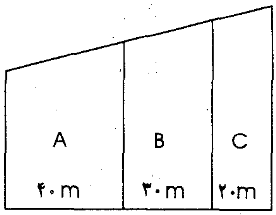
پ. d را بیابید، در صورتی که: ۵ = a، ۱۳ = p و ۱۴ = c

ت. b را تعیین کنید، در صورتی که: ۲۰ = a، ۲۸ = c و ۱۷ = d

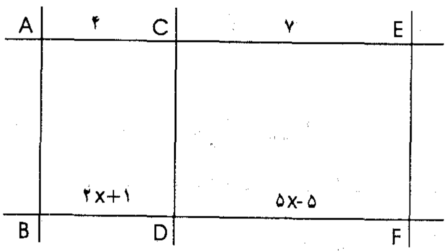


۲.۶.۲. اندازهٔ پاره خط

۱۰۶. سه قطعه زمین A ، B و C مطابق شکل بین یک خیابان و یک کوچه واقع شده‌اند. به طوری که مرزهای دیگر، بر کوچه عمودند. اگر برِ هر سه قطعه به خیابان کلاً ۱۲۰ متر باشد؛ بر هر قطعه چه قدر است؟

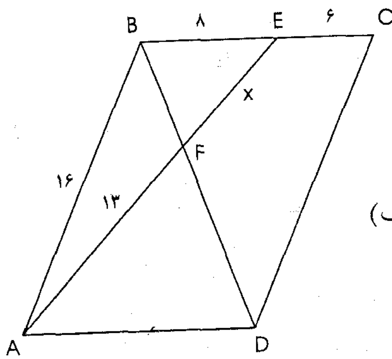


۱۰۷. مقدار x را تعیین کنید در صورتی که $AB \parallel CD \parallel EF$ باشد.

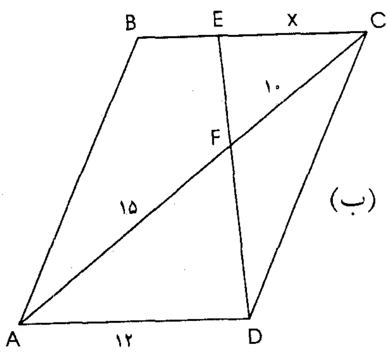


۱۰۸. در متوازی الاضلاعهای زیر، مقدار x را تعیین کنید.

(الف)



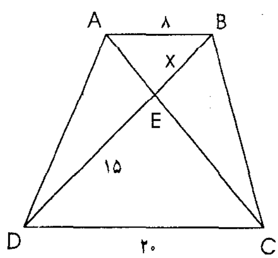
(ب)



۱۰۹. در هر ذوزنقه، مقدار x را تعیین کنید.

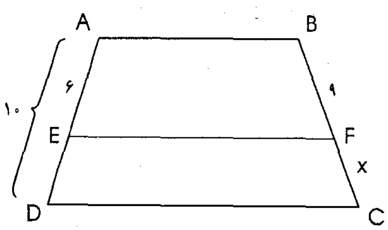
(الف)

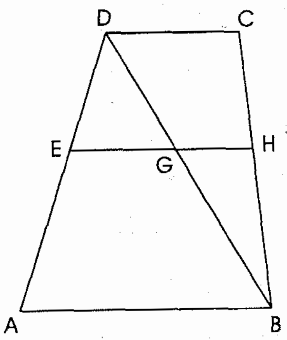
$AB \parallel CD$



(ب)

$EF \parallel AB$





۱۱۰. در ذوزنقهٔ مقابل $AB \parallel EH \parallel DC$ است:

الف. $DE = ۳$ ، $EA = ۴$ و $DG = ۵$; GB را بیابید؛

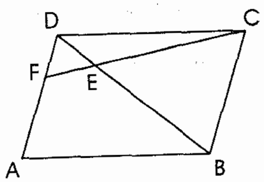
ب. $BH = ۶$ ، $CB = ۱۶$ و $DB = ۲۰$; DG را بیابید؛

پ. $DA = ۳۶$ ، $EA = ۲۲$ و $DG = ۱۵$; DB را بیابید؛

ت. $DE = ۲۰$ ، $EA = ۲۵$ و $HB = ۲۲$; GH را بیابید.

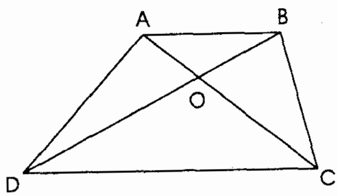
۲. ۶. ۳. نسبت پاره خطها

۱۱۱. در متوازی الاضلاع ABCD از نقطهٔ C خطی چنان رسم شده است که قطر BD را به نسبت ۴ و ۱ تقسیم نموده است؛ ثابت کنید همین خط، ضلع AD را به نسبت ۳ و ۱ تقسیم می‌کند.

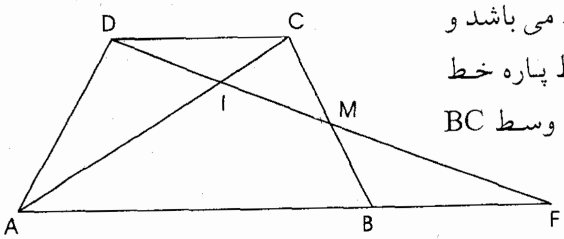


۲. ۶. ۴. رابطه‌های متری در چهار ضلعیها

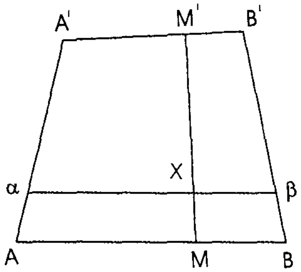
۱۱۲. از برخورد دو قطر ذوزنقه چهار پاره‌خط به دست می‌آید. ثابت کنید طولهای دو پاره خط حاصل بر یک قطر، با طولهای دو پاره خط قطر دیگر، متناسبند.



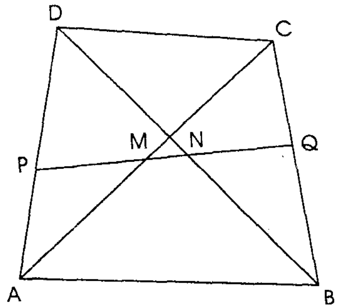
۱۱۳. در ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ کوچکتر DC و قاعدهٔ بزرگتر AB می باشد و قطر AC از نقطهٔ I وسط پاره خط DM که رأس D را به وسط BC وصل می‌کند، می گذرد و خط DM،



خط AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید که : $\frac{CD}{AB} = \frac{DI}{MF}$



۱۱۴. هرگاه در یک چهار ضلعی، دو دسته خط، دو زوج ضلعهای مقابل را به قطعه‌های متناسب تقسیم کنند، خطهای هر دسته، به وسیلهٔ دستهٔ دیگر، به همان نسبت تقسیم می‌شوند.



۱۱۵. در هر چهار ضلعی خطی که وسطهای قطرها را به هم وصل می‌کند، روی دو ضلع رو به رو، قطعه خطهای متناسب پدید می‌آورد.

بخش ۳.

نیمسازهای زاویه‌های مثلث و چندضلعیها

۳. ۱. تعریف و قضیه

۳. ۲. اندازهٔ ضلع مثلث

۳. ۳. پاره خط

۳.۳.۱. اندازهٔ پاره خط

۳.۳.۲. نسبت دو پاره خط

۳.۳.۳. تساوی دو پاره خط

۳. ۴. رابطه‌های متری

۳. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به نیمساز

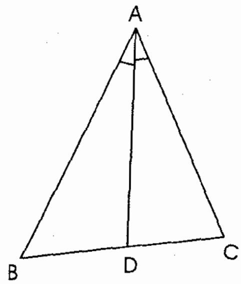
۳.۵.۱. نقطه روی خط راست است

۳.۵.۲. دو خط موازی‌اند

بخش ۳. نیمسازهای زاویه‌های مثلث و چند ضلعیها

۱.۳. تعریف و قضیه

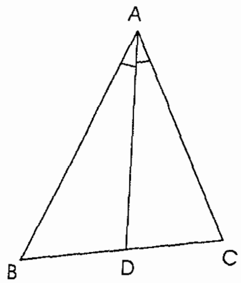
۱۱۶. **قضیه** . در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ درونی، ضلع مقابل به آن زاویه را به دو پاره خط، که نظیر به نظیر با دو ضلع آن زاویه متناسبند، تقسیم می‌کند. یعنی در مثلث ABC :



$$D \in BC \ , \ D\hat{A}B = D\hat{A}C \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

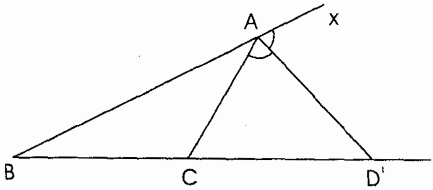
نتیجه : $DC = \frac{ab}{b + c}$ و $DB = \frac{ac}{b + c}$

۱۱۷. **عکس قضیه** . در هر مثلث خطی که از یک رأس می‌گذرد و بر ضلع مقابل آن، دو پاره خط پدید می‌آورد که نظیر به نظیر با دو ضلع دیگر مثلث متناسبند، نیمساز زاویهٔ درونی آن مثلث است؛ یعنی:



$$\Delta ABC : D \in BC \text{ و } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow D\hat{A}B = D\hat{A}C$$

۱۱۸. **قضیه** . نیمساز هر زاویهٔ بیرونی از یک مثلث، برامتداد ضلع مقابل، دو پاره خط پدید می‌آورد که نظیر به نظیر با دو ضلع دیگر مثلث متناسبند.

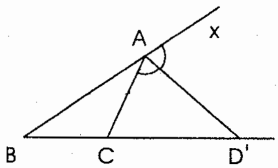


یعنی در مثلث ABC :

$$D' \in BC \,,\, D'\hat{A}C = D'\hat{A}x \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

نتیجه : $D'C = \dfrac{ab}{|b-c|} \qquad D'B = \dfrac{ac}{|b-c|}$

۱۱۹. **عکس قضیه** . در هر مثلث خطی که از یک رأس بگذرد و بر امتداد ضلع مقابل، دو پاره خط پدید آورد که نظیر به نظیر با دو ضلع دیگر مثلث متناسب باشند، نیمساز زاویهٔ برونی آن رأس از مثلث است.

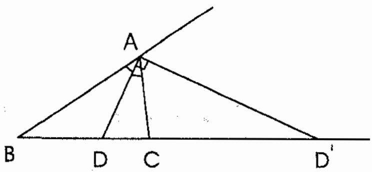


یعنی :

$$\Delta ABC : D' \in BC \,,\, D'\hat{A}C = D'\hat{A}x \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{c}{b}$$

۱۲۰. **قضیه** . در مثلث دلخواه ABC اگر نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A ضلع BC را بترتیب در D و D' قطع کنند، آن گاه :

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'}$$

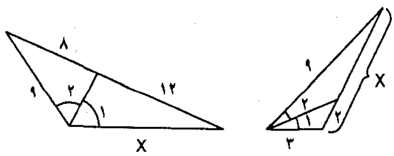


الف. در قضیهٔ بالا، اگر $AC = ۹$، $AB = ۱۵$ و $BC = ۱۶$؛ BD، DC و CD' را بیابید.

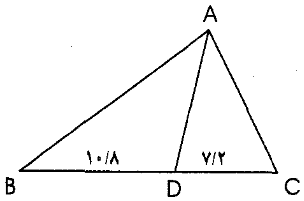
ب. در قضیهٔ بالا، اگر $B\hat{A}C = ۹۰^\circ$، $AC = ۶$ و $AB = ۸$؛ BD، DC و CD' را بیابید.

آیا اگر $AB < AC$، قضیهٔ بالا باز هم درست است؟ شکلی رسم کنید و توضیح دهید. در صورتی که $AB = AC$ باشد، قضیه چه تغییری می‌کند؟

۳. ۲. اندازه ضلع مثلث



۱۲۱. در هر یک از مثلثهای داده شده، $\hat{۲} = \hat{۱}$ است. اندازهٔ x را به دست آورید.



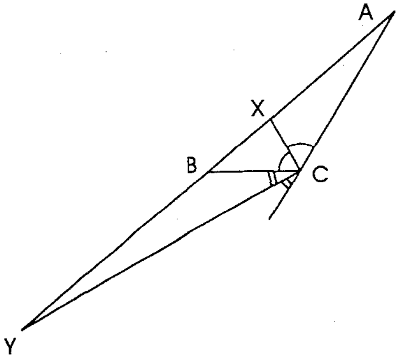
۱۲۲. محیط مثلثی ۴۳ سانتی متر و اندازه‌های پاره خطهایی که نیمساز یک زاویه درونی آن بر ضلع مقابلش پدید می‌آورد، بترتیب ۷/۲ و ۱۰/۸ سانتی‌مترند. سه ضلع مثلث را حساب کنید.

۳. ۳. پاره خط

۳. ۳. ۱. اندازهٔ پاره خط.

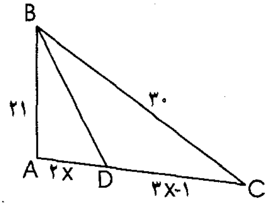
۱۲۳. ضلعهای یک مثلث ۱۵ ، ۲۰ و ۲۸ است. طول هر یک از پاره خطهایی که نیمساز بزرگترین زاویه، روی ضلع مقابلش جدا می‌کند، چه قدر است؟

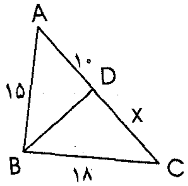
۱۲۴. در مثلث ABC اندازهٔ ضلعها ۱۲ ، ۱۸ و ۲۴ است. طول هر یک از پاره خطهایی را که هر یک از نیمسازهای زاویه‌ها، روی ضلع مقابلشان جدا می‌کنند، به‌دست آورید.

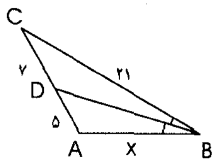


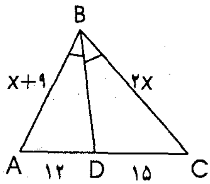
۱۲۵. ضلعهای یک مثلث ۶، ۱۲ و ۱۶ است، نیمسازهای بزرگترین زاویهٔ درونی و کوچکترین زاویهٔ برونی، خط شامل ضلع روبه رو را بترتیب در دو نقطهٔ x و y قطع می‌کنند. فاصلهٔ x و y را از رأس کوچکترین زاویهٔ دورنی مثلث به دست آورید.

۱۲۶. در مثلثهای زیر BD نیمساز زاویهٔ درونی B است. مقدار x را بیابید.



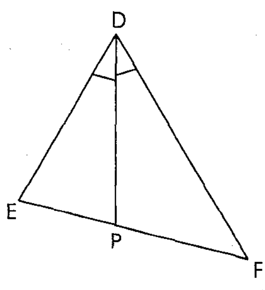


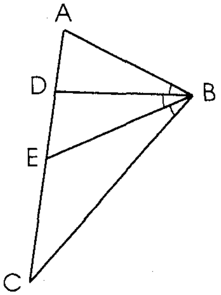




۱۲۷. در مثلث DEF، DP نیمساز زاویهٔ D و PF = DP است. جدول زیر را کامل کنید.

DE	DF	EP	PF	EF
۶	۲۱	؟	۱۴	؟
؟	۲۱	۱۰	۱۲	؟
۳	۵	؟	؟	۱۶
؟	$۳\sqrt{۵}$	$۲\sqrt{۵}$	۵	؟



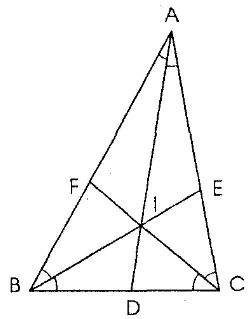


۳. ۳. ۲. نسبت دو پاره خط

۱۲۸. در مثلث ABC، خطهای BD و BE که AC را بترتیب در D و E تلاقی می‌کنند، زاویهٔ B را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. آن گاه AD/EC برابر است با:

الف) $\frac{AE}{DC}$ ب) $\frac{AB}{BC}$ ج) $\frac{BD}{BE}$ د) $\frac{(AB)(BD)}{(BE)(BC)}$ ه) $\frac{(AE)(BD)}{(DC)(BE)}$

مسابقه های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۲



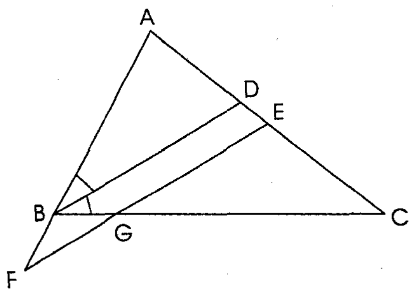
۱۲۹. ثابت کنید که در هر مثلث ، نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی، هر یک از آنها را به دو قطعه خط تقسیم می‌کند که نسبت آنها مساوی با نسبت ضلع نظیر آن نیمساز، به مجموع دو ضلع دیگر است.

۱۳۰. در مثلث ABC ، AL نیمساز زاویهٔ A و CM نیمساز زاویهٔ C است. نقطه‌های L و M بترتیب بر BC و AB قرار دارند. ضلعهای مثلث ABC، عبارتند از a ، b و c . در این صورت $\frac{AM}{MB} = K\frac{CL}{LD}$ که در آن K، برابر است با :

الف) ۱ ب) $\frac{bc}{a^2}$ ج) $\frac{a^2}{bc}$ د) $\frac{c}{b}$ ه) $\frac{c}{a}$

مسابقه های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۹

۳. ۳. ۳. تساوی دو پاره خط



۱۳۱. در مثلث ABC ، از نقطهٔ E وسط ضلع AC خطی به موازات نیمساز BD رسم می‌کنیم تا AB و BC را در نقطه‌های F و G قطع کند، ثابت‌کنید AF = CG.

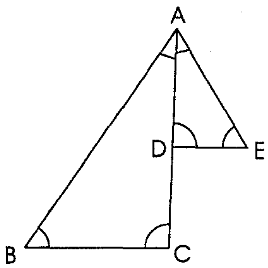
۳. ۴. رابطه‌های متری

۱۳۲. در مثلث ABC ضلعهای a ، b و c بترتیب مقابل به زاویه های A ، B و C می‌باشند. AD نیمساز زاویهٔ A با BC در D برخورد می‌کند. اگر $x = CD$ و $y = BD$ باشد، آنگاه کدام یک از تناسبهای زیر درست است؟

الف) $x/a = a/(b + c)$
ب) $x/b = a/(a + c)$
ج) $y/c = c/(b + c)$
د) $y/c = a/(b + c)$
ه) $x/y = c/b$

مسابقه های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۳

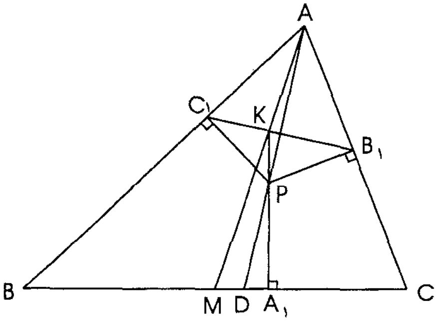
۱۳۳. اگر دو مثلث دارای دو زاویهٔ متساوی و دو زاویهٔ مکمل باشند، ثابت کنید ضلعهای مقابل به زاویه‌های مساوی، متناسبند با ضلعهای مقابل به زاویه‌های مکمل.



۳. ۵. سایر مسأله های مربوط به نیمساز

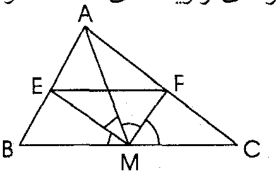
۳. ۵. ۱. نقطه روی خط راست است

۱۳۴. نقطهٔ P را روی نیمساز داخلی AD از مثلث ABC اختیار کرده عمودهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 را بر ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم. اگر امتداد PA_1 خط B_1C_1 را در K قطع کند. ثابت کنید K روی میانهٔ AM است.

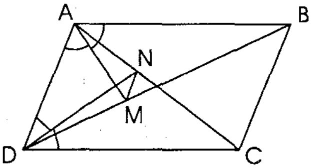


۳. ۵. ۲. دو خط موازی‌اند

۱۳۵. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. نیمسازهای زاویه‌های AMB و AMC ضلعهای AB و AC را بترتیب در E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید EF موازی BC است.



۱۳۶. نیمسازهای زاویه های A و D از متوازی الاضلاع ABCD را رسم می‌کنیم تا قطرهای DB و AC را بترتیب در نقطه های M و N قطع کنند. ثابت کنید که $AD \parallel MN$.



بخش ۴.

موربها، نقطه‌های واقع بر یک خــط راست (همخط)

۴. ۱. تعریف و قضیه

۴. ۲. ثابت کنید نقطه ها بر یک استقامتند

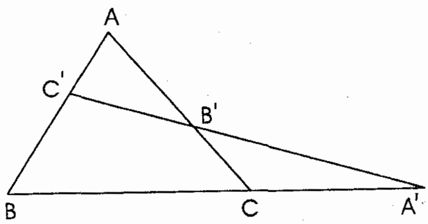
۴.۲.۱. در مثلث

۴.۲.۲. در چندضلعیها

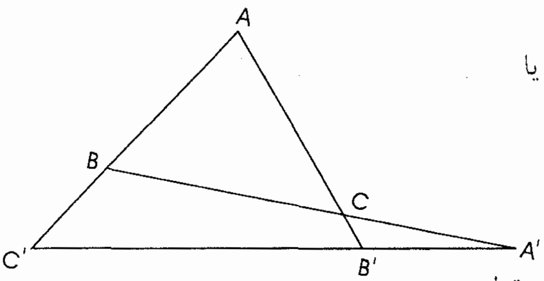
۴.۲.۳. در سایر شکلها

بخش ۴. موربها، نقطه های واقع بر یک خط راست

۴. ۱. تعریف و قضیه



۱۳۷. **قضیهٔ منلائوس** . هرگاه سه نقطهٔ A' ، B' و C' بترتیب واقع بر ضلعهای BC،CA و AB (یا واقع بر امتداد آنها) از مثلث ABC بر یک خط راست واقع باشند، خواهیم داشت:



$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱$$ و یا

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}} = ۱$$

و بعکس ، اگر چنین رابطه‌ای برای سه نقطه A' ، B' و C' واقع بر ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC برقرار باشد، این سه نقطه، بر یک خط راست واقعند.

صورت دیگر قضیهٔ منلائوس . هر گاه خطی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC یا امتداد آنها را بترتیب در نقطه‌های A' , B' و C' قطع کند، داریم : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱$؛ بعکس، اگر رابطهٔ فوق برقرار باشد، نقطه‌های A' ، B' و C' بر یک استقامتند.

تبصرهٔ ۱ . رابطهٔ بالا با رابطهٔ زیر معادل است :

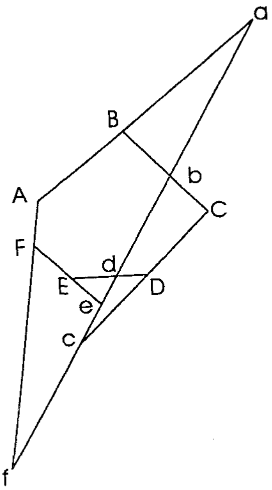
$$\frac{\sin(\widehat{AA', AB})}{\sin(\widehat{AA', AC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{BB', BC})}{\sin(\widehat{BB', BA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CC',CA})}{\sin(\widehat{CC',CB})} = ۱$$

تبصرهٔ ۲ . رابطه منلائوس را به صورت وارون هم می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = ۱$$

تبصرهٔ ۳ . هیچ قاطعی نمی‌تواند یک ضلع مثلث و امتداد دو ضلع دیگر را قطع کند.

نکته مهم . تعمیم قضیهٔ منلائوس



الف. قضیهٔ منلائوس را می‌توان در چند ضلعیها نیز به کاربرد. مثلاً" اگر ضلعها یا امتداد ضلعهای AB ، BC ، CD ، DE ، EF و FA از شش ضلعی ABCDEF را مورب Δ بترتیب در نقطه های a، b، c، d، e و f قطع کند، داریم :

$$\frac{\overline{aA}}{\overline{aB}} \cdot \frac{\overline{bB}}{\overline{bC}} \cdot \frac{\overline{cC}}{\overline{cD}} \cdot \frac{\overline{dD}}{\overline{dE}} \cdot \frac{\overline{eE}}{\overline{eF}} \cdot \frac{\overline{fF}}{\overline{fA}} = ۱ \quad (۱)$$

اثبات این قضیه در بخش رابطه‌های متری در چند ضلعیها خواهد آمد.

ب. قضیهٔ منلائوس را در شکلهای فضایی نیز می‌توان به کاربرد.

اگر یک چند ضلعی چپ با ضلعهای متفاوت، مثلاً" یک شش ضلعی چپ ABCDEF و یک صفحه مانند P داشته باشیم که اضلاع متوالی AB ، BC ، CD ، EF و FA را در نقطه های a ، b ، c ، d ، e و f قطع کند، رابطه (۱) برقرار است. (اثبات این قضیه در بخش هندسهٔ فضایی خواهد آمد).

منلائوس

از کسانی که در دورهٔ زوال ریاضیات یونانی از خود نبوغی نشان دادند، یکی منلائوس Ménélaos (برآمدنش ح ۱۰۰م) بود. او که از جمله برجسته ترین ریاضیدانان به شمار می‌رفت، از مردم اسکندریه بود و رساله‌ای در باب کره نوشت، با توجه خاص به خواص هندسی مثلثهای کروی به نام Sphoerica ؛ معروف است که در سال ۹۸م در شهر رم به رصدهای نجومی پرداخت. علاوه بر کتاب کره، شش مقاله در باب محاسبهٔ قوسها نوشت. یکی از مهمترین قضیه های او حاکی است که اگر سه خط تشکیل دهندهٔ مثلث را با خطی قطع کنیم، حاصلضرب طول سه پاره خطی که دارای نقطه مشترکی نباشند، برابر است با حاصلضرب سه پاره خط دیگر . این قضیه شبیه قضیهٔ مربوط به مثلثهای کروی است، که به جای «سه پاره خط» گفته شود. «سه قوس». این قضیه در قرون وسطی تحت عنوان «قاعدهٔ شش کمیت» معروف بود، چون شامل شش پاره خط است. او خاصیت نامتغیربودن نسبت هماهنگ پاره خطهای حاصل از قطع چهارخط برابر به وسیلهٔ یک پاره خط قاطع را می‌شناخت، خاصیتی که قبلاً شناخت آن را به پاپوس نسبت دادند که در قرن بعد از آن برآمد.

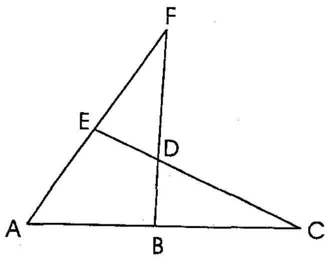
۱۳۸. با استفاده از شکل داده شده رابطهٔ منلائوس را برای هر مثلث و قاطع داده شده بنویسید.

الف. مثلث ABF و قاطع (C,D,E)

ب. مثلث BCDو قاطع (F , E, A)

پ. مثلث EFD و قاطع (C , B, A)

ت. مثلث AFC و قاطع (B , D, F)

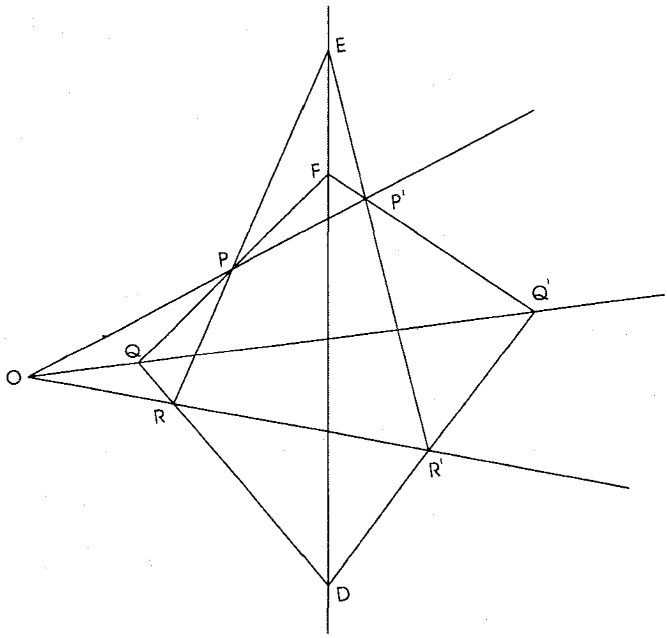


مثلثهای همسان Homologous - قضیهٔ دزارگ، Désargues

نظریهٔ هندسی پرسپکتیو (= مناظر و مرایا) نخستین بار توسط آرشیتکت ایتالیایی فیلیپوبرونله‌چی Filippo Brunelleschi (۱۴۴۶-۱۳۷۷) به میان آمده است. باید گفت که طرح گنبد هشت ترک کلیسای اعظم فلورانس و همچنین کاخ پیتی از این آرشیتکت است. آرشیتکت دیگر، ژرار دزارگ (۱۶۶۱-۱۵۹۱) نظریه را دنبال کرد و روی آن تحقیق کامل انجام داد. دیری نپایید که قضیهٔ معروف «دو مثلث» که توسط دزارگ بیان

شده بود اهمیتی همچون قضیهٔ پاپوس به دست آورد. در حقیقت می‌توان قضیهٔ دزارگ را با دشواریهایی از قضیهٔ پاپوس نتیجه گرفت، اما با استفاده از قضیهٔ منلائوس اثبات آن به سادگی انجام می‌گیرد.

هرگاه بین دو شکل پدید آمده از نقطه ها و خطها، چنان تناظری وجود داشته باشد که هر جفت نقطهٔ نظیر هم، بر خطهای متقارب واقع باشند، می‌گوییم آن دو شکل مرکز همسانی دارند.



هرگاه تناظر بین دو شکل چنان باشد که هر جفت خط نظیر هم ، در نقطه های واقع بر یک خط ، متقاطع باشند، می‌گوییم که آن دو شکل محور همسانی دارند. از نظر هندسهٔ تصویری ، بیان قضیهٔ دو مثلث دزارگ چنین است : هر گاه دو مثلث، مرکز همسانی داشته باشند، محور همسانی نیز خواهند داشت، اما برای پرهیز از پیچیدگیهایی که در حالت توازی خطها به وجود می‌آید. قضیهٔ مزبور را چنین بیان می‌کنیم:

۱۳۹. قضیهٔ دزارگ . هرگاه دو مثلث همسان باشند و ضلعهای متناظر آنها متقاطع باشند، نقطه‌های تقاطع ضلعها، بر یک خط راست واقعند.

دزارگ

در سدهٔ هفدهم خلاقترین فعالیت در زمینهٔ هندسهٔ ناب، به وسیلهٔ ژرار دزارگ Gerard Désargues (متولد ۱۵۹۳ در لیون، متوفی ۱۶۶۲ در همان جا) صورت گرفت، ولی دربارهٔ زندگی او جز این نمی‌دانیم که مدتی افسر ارتش بود، پس از آن، در پاریس می‌زیست. (۱۶۲۶)، و برخی جلسات سخنرانی داشت، مهندس بود، و سالهای آخر عمرش را در ملک خویش واقع در نزدیک کوندریو Condrieu گذراند. او اثرهای متعددی چاپ کرد، ولی بیشتر به خاطر رسالهٔ مخروطاتش معروف است.

شاید به خاطر این که این رساله همزمان با اثر مهم دکارت منتشر شد، یا شاید به خاطر این که بیشتر علاقهٔ دزارگ در ریاضیات به کاربرد آن در مطالعهٔ پرسپکتیو بود، ظاهراً" این رساله کمتر توجه عمومی را جلب کرد، هر چند پاسکال و دکارت هر دو آن را تحسین کردند. به هر حال این اثر خیلی زود فراموش شد و تا سال ۱۸۴۵ که شال، نسخه‌ای از آن را یافت، تقریباً" ناشناس ماند، و از آن به بعد است که به آن به چشم یکی از نخستین اثرهای کلاسیک در زمینهٔ تکوین هندسهٔ ناب می‌نگرند. او در این کتاب مفاهیم نقطه در بی نهایت، خط راست به عنوان دایره‌ای از بی نهایت شعاع، نامتغیر هندسی، تانژانت به عنوان مورد محدودی از سکانت، مجانب به عنوان یک تانژانت بی نهایت، قطبها و قطبیها، همگویی و پرسپکتیو را معرفی کرد؛ بدین ترتیب اساسی محکم برای اصول نوین هندسهٔ ترسیمی بنیان نهاد.

۱۴۰. **قضیه** – هرگاه دو مثلث محور همسانی داشته باشند و راسهای متناظر آنها بر خطهای همرس واقع باشند، نقطهٔ همرسی خطها، مرکز همسانی دو مثلث است (**عکس قضیهٔ دزارگ**).

۱۴۱. قضیهٔ پاپوس – سه نقطهٔ A ، C و E بر یک خط راست و سه نقطهٔ دیگر B ، D و F بر خط راست دیگر واقعند، هرگاه خطهای AB، CD و EF با خطهای DE ، FA و BC بترتیب در L , M و N برخورد کنند، این سه نقطه بر یک خط راست واقعند.

پاپوس

پاپوس اسکندرانی Pappus ، از آخرین هندسه دانان یونانی است، که احتمالاً" در

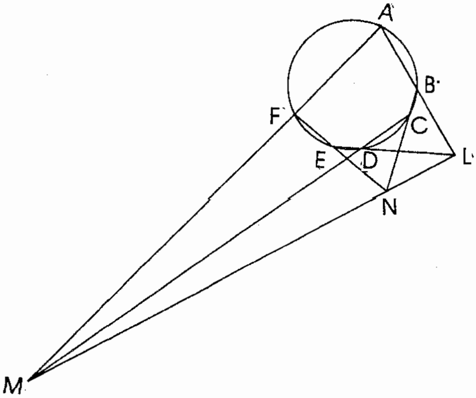
سدهٔ سوم برآمد، با وجود این، زمان زندگی او مسلم نیست. سویداس (ح سدهٔ ۱۰ م) که نویسندهٔ دقیقی نبوده، او را از دوران پادشاهی تیودوسیوس (۳۷۹ - ۳۹۵ م) می‌داند، ولی دیگران معتقدند که او دو قرن پیش از آن می‌زیسته است. مهمترین کتابش به نام مجموعهٔ ریاضیات است، که فقط شش باب آن به دست ما رسیده . باب سوم مربوط است به سهم، اجسام محاطی و تضعیف مکعب ؛ باب چهارم راجع به منحنی حلزونی و سایر منحنیهای مسطح عالی از قبیل کوادراتریکس؛ باب پنجم راجع به حداکثر و شکلهای همپیرامون Isoperimetric؛ باب ششم راجع به کره؛ باب هفتم راجع به آنالیز و تاریخ آن در میان یونانیان؛ باب هشتم راجع به مکانیک است. دو نظریهٔ معروف به نام اوست، یکی راجع به ایجاد حجمی به وسیلهٔ دوران یک شکل مسطح در حول محور خود، که بعدها به قضیهٔ گولدین Guldin معروف شد، و دیگری تعمیم قضیهٔ فیثاغورس. او اصل پیچیدگی نقطه‌ها involution of points و اثبات نسبتهای غیر توافقی را در مورد قطع متقاطع یک دسته خط می‌شناخت و این آخری بر منلائوس هم معلوم بود.

۱۴۲. اگر نامگذاری نقطه‌های قضیهٔ پاپوس را به ترتیب زیر قرار دهیم، صورت قضیه و برهان آن بیشتر قابل فهم و جالبتر می‌شود.

قضیه: سه نقطهٔ A ، B و C بر یک خط راست و سه نقطهٔ ´A ، ´B و ´C برخط راست دیگر واقعند. اگر L ، M و N بترتیب نقطهٔ برخورد (´AC , CA) ، (´AB , BA) و (´BC , CB) باشند، این سه نقطه بر یک خط راست واقعند.

۱۴۳. **قضیه پاسکال** - فیلسوف و ریاضیدان مشهور، بلز پاسکال قضیهٔ زیر را در شانزده سالگی ثابت کرده است.

قضیه - در هر شش ضلعی محاطی، نقطه های تقاطع ضلعهای روبه رو، بر یک خط راست واقعند.



پاسکال

بلز پاسکال Blaise Pascal (متولد ۱۹ ژوئن ۱۶۲۳ در کلرمون فرای اوورنی، متوفی ۱۹ اوت ۱۶۶۲ در پاریس) که بیلی در ستایش او می‌گوید «از پاکترین موجودات جهان» از این نعمت برخوردار بود که پدرش او را در مسیر درستی قرار داد. پدر پاسکال ریاضیدان قابلی بود و چون می‌خواست یگانه پسر خود را از بهترین معلومات برخوردار سازد، از شغل خود دست کشید و به پاریس رفت (۱۶۳۱). بلز پاسکال که تحت نظر پدر تحصیل می‌کرد، در همان خردسالی استعداد شایانی در ریاضیات نمایان ساخت، و با این که پدرش می‌خواست ابتدا او اطلاعات خوبی در زمینه زبانهای خارجی کسب کند و بنابراین تمام کتابهای ریاضی را از دستش گرفت. او توانست هندسه را نزد خود شروع کند و پیش از این که پرده از روی کارش بیفتد پیشرفتهای نمایانی کرد. خواهرش خانم پریه Perier که شرح حال او را نوشته، حکایتهای زیادی از دورهٔ جوانیش در زمینهٔ کارهای ریاضی، نقل کرده است. او می‌گوید که برادرش شخصاً، بیشتر مقالهٔ اول اصول اقلیدس را کشف کرد، کشف و شهود او در ریاضیات معجزآسا بود، و هندسه تنها سرگرمی او بود. او با مخروطات چنان بازی می‌کرد که کودکان با اسباب‌بازیهایشان، ولی بازی او با لذت آسمانی کشف حقایق ازلی همراه بود. وقتی دستنویسی را که پاسکال در شانزده سالگی نوشته بود به دکارت نشان داده‌اند، او به سختی می‌توانست قانع شود که این کار پدرش نیست. در نوزده سالگی یک ماشین حساب اختراع کرد که در حکم نخستین گام در تکوین ماشینهای محاسبه مهم روزگار ما به شمار می‌رود. این که او اجازه یافت یکی از ماشینها را به شاه عرضه کند، حاکی از اعتباری است که در آن هنگام کسب کرده بود. در بیست و سه سالگی به کار توریچلی در زمینهٔ فشار جو علاقه‌مند شد، و بزودی در مقام فیزیکدان برای خود شهرتی کسب کرد. از جملهٔ کشفهایش قضیهٔ معروف پاسکال است: سه نقطه‌ای که بر

بلز پاسکال

روی سه ضلع متقابل یک شش گوشه باشد و در یک مخروط محاط گردد، همخط است؛ قضیه‌ای که از آن چهارصد نتیجه گرفت. راجع به آرایش مثلثی همنهشتهای توانهای یک دو جمله‌ای که قبلاً مورد توجه نویسندگان مختلف قرار گرفته بود، چنان شرح مبسوطی نوشت که هنوز این آرایش به مثلث پاسکال معروف است. در رابطه با فرما نظریهٔ احتمالات را بنیان نهاد. همچنین نظریهٔ سیکلوئید را تکمیل کرد و موفق به حل مسأله تربیع کلی آن شد.

آثار علمی و ادبی او اغلب با نام مستعار لوئی دو مونتالت L. de Montalte (از قبیل نامه های ولایتی) یا تحریف همان نام یعنی آموس دوتونویل A. Detonville منتشر می‌شد (از قبیل مسأله‌های مختلف) بدین خاطر است که لایبنیتس اغلب از او با نام دو تونویل یاد می‌کند.

هنگامی که قریب بیست و پنج سال داشت و در ریاضیات و فیزیک شهرتی خلل ناپذیر کسب کرده بود، ناگهان تصمیم گرفت این دو موضوع را یکباره ترک گوید و عمر خود را صرف مطالعهٔ فلسفه و دین کند.

زندگی توبه کارانه‌ای که از آن پس گذراند عجیب به نظر می‌رسد، چون همه فکر می کنند او از آنچه توبه کرده ، چندان بهره‌ای نداشته ، ولی به هر صورت از قدرت ایمان همین بس ، که او در اعتقادش صمیمی ، و در رفتارش غیر قابل اعتراض بود.

۱۴۴. حالتهای خاص قضیهٔ پاسکال:

۱. فرض می‌کنیم که نقطه های A ، B ، C ، D و E از شش ضلعی ABCDEF ثابت بماند و نقطهٔ F روی دایره به سمت نقطهٔ A حرکت کند به قسمی که بسیار به نقطهٔ A نزدیک شود، در این صورت ضلع AF به مماس بر دایرهٔ محیطی شش ضلعی در نقطهٔ A ، و شش ضلعی به ۵ ضلعی تبدیل می‌شود. بنابراین قضیهٔ پاسکال را در مورد پنج ضلعی محاطی می‌توان بیان نمود، بدین ترتیب که اگر مماس در رأس A را به عنوان ضلع ششم فرض کنیم ، می‌توان گفت که نقطه های برخورد خطهای (۴ و ۱) و (۵ و ۲) ، (۶ و ۳) روی یک خط راست واقعند.

به طور کلی قضیه پاسکال در مورد هر پنج ضلعی محاط در یک دایره و یک خط مماس بر دایره در یکی از رأسهای ۵ ضلعی ، درست است.

۲. همچنین می‌توان قضیه پاسکال را در مورد هر چهار ضلعی محاطی و دو خط

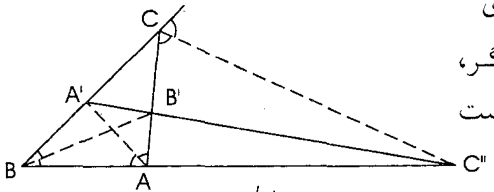
مماس بر دایرهٔ محیطی آن در دو رأس از چهار ضلعی ، تعمیم داد.

۳. قضیهٔ پاسکال برای هر مثلث و خطهای مماس بر دایره محیطی مثلث در رأسهای آن نیز ، درست است.

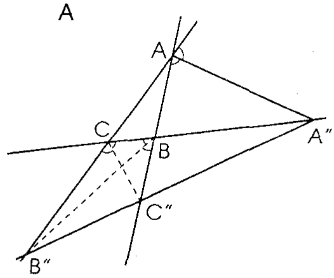
۴. ۲. ثابت کنید نقطه‌ها بر یک استقامتند

۴. ۲. ۱. ثابت کنید نقطه‌ها بر یک استقامتند (در مثلث)

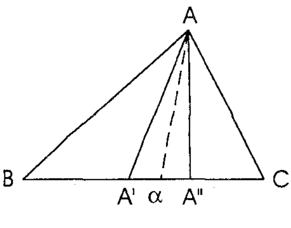
۱۴۵. ثابت کنید که در هر مثلث، پاهای نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی و پای نیمساز زاویهٔ خارجی رأس دیگر، سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست می‌باشند.



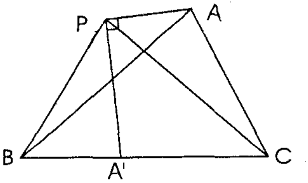
۱۴۶. ثابت کنید که در هر مثلث، نیمسازهای زاویه‌های خارجی، امتدادهای ضلعهای مقابل را در سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند.



۱۴۷. در هر مثلث خطهای همزاویه Isogonales, چنین به‌دست می‌آیند که قرینهٔ هر خط گذرنده بر هر رأس را نسبت به نیمساز زاویهٔ نظیر همین رأس رسم کنیم. در مثلث ABC خطهای AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم. خطهای AA''، BB'' و CC'' همزاویه با آنها می‌باشند. اگر A'، B' و C' بر یک استقامت باشند ، ثابت کنید A'' ، B'' و C'' نیز بر یک استقامت خواهند بود.

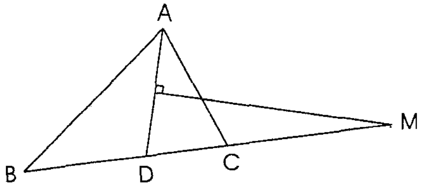


۱۴۸. مثلث ABC و نقطه P در صفحهٔ آن مفروض است. عمودهای رسم شده

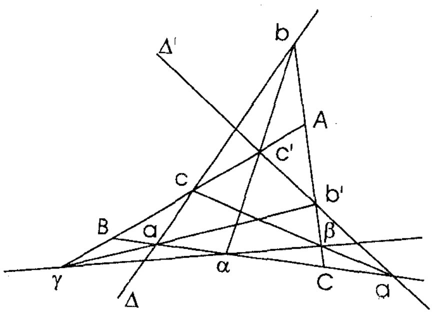


از P بر خطهای PA ، PB و PC ضلعهای BC، CA و AB را در A' ، B' و C' که بر یک استقامتند، قطع می‌کنند.

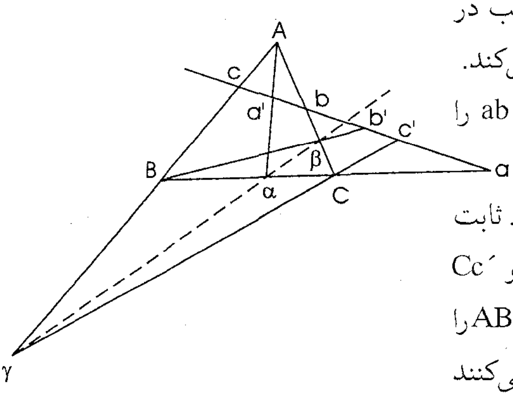
۱۴۹. عمودهایی که از وسط نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مثلث براین نیمسازها اخراج می‌شوند، ضلعهای مقابل به رأسهای نظیر این نیمسازها را، در سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند.



۱۵۰. دو مورب Δ و Δ' ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC را بترتیب در $(a$ و $a')$ ، $(b$ و $b')$ و $(c$ و $c')$ قطع می‌کنند. خطهای bc' ، ca' و ab' که ضلعهای BC ، CA و AB مثلث را بترتیب در نقطه‌های α ، β و γ قطع کنند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این سه نقطه ، روی یک خط راست واقعند.

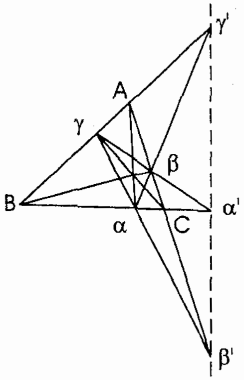


۱۵۱. مورب Δ ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب در نقطه‌های a ، b و c قطع می‌کند. وسط پاره خطهای bc , ca و ab را

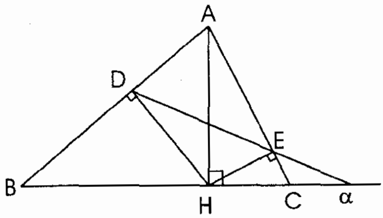


بترتیب a' ، b' و c' می‌نامیم. ثابت کنید. که خطهای Aa' ، Bb' و Cc' بترتیب ضلعهای BC، CA و AB را در نقطه‌های α ، β و γ قطع می‌کنند که این سه نقطه بر یک استقامتند.

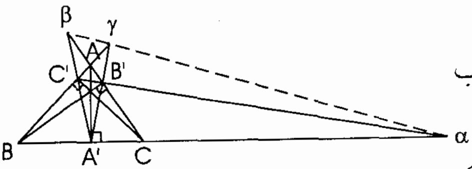
۱۵۲. از رأسهای مثلث ABC سه خط همرس $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ را رسم می‌کنیم (α



روی BC، β روی AC و γ روی ضلع AB واقعند) و نقطه‌های برخورد ($\beta\gamma$ و BC)، ($\gamma\alpha$ و CA) و ($\alpha\beta$ و AB) را بترتیب α'، β' و γ' می‌نامیم. ثابت کنید که نقطه‌های α'، β' و γ' بر یک خط راست واقعند.

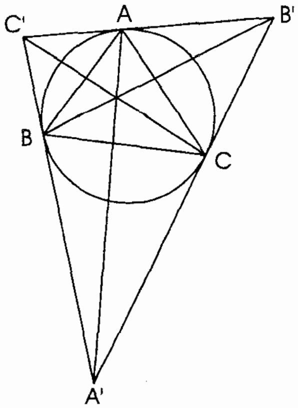


۱۵۳. ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و از نقطه H عمودهای HD و HE را بترتیب بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم و نقطهٔ برخورد BC و DE را α می‌نامیم، سپس به همین روش نقطه‌های β و γ را روی ضلعهای CA و AB مشخص می‌سازیم. ثابت کنید که نقطه‌های α، β و γ بر یک استقامتند.

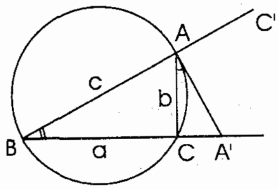


۱۵۴. از قضیهٔ دزارگ برای اثبات مطالب زیر استفاده کنید:

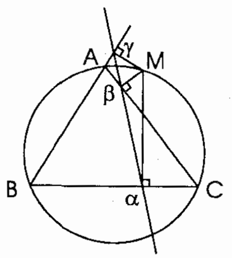
الف. ضلعهای مثلث ارتفاعیهٔ یک مثلث، ضلعهای آن مثلث را در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت قطع می‌کنند.



ب. خطهایی که رأسهای مثلث را به رأسهای مقابل مثلثی که از مماس کردن سه خط از سه رأس مثلث بر دایرهٔ محیطی آن به‌وجود می‌آید وصل می‌کنند، همرسند و خاصیتهایی دیگر نظیر این خاصیتها را بیان و اثبات کنید.



۱۵۵. مماسهای مرسوم بر دایرهٔ محیطی مثلث در سه رأس آن، ضلعهای مقابل به این رأسها را در سه نقطه قطع می‌کنند که بر یک استقامتند.



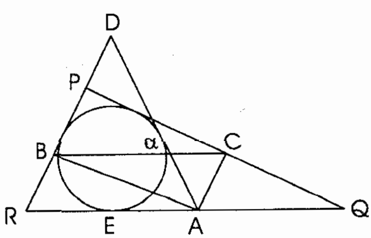
۱۵۶. به کمک موربها ثابت کنید تصویر هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث روی ضلعها، و یا امتداد ضلعهای آن مثلث، سه نقطه‌اند واقع بر یک خط راست. (خط سیمسون یا سنسون).

رابرت سیمسون

همهٔ دانشجویان تاریخ هندسه با نام رابرت سیمسون (یا سنسون) Robert simson (متولد ۱۴ اکتبر ۱۶۸۷ در کیوکتونهال آیرسایر، متوفی اول اکتبر ۱۷۶۸ در گلاسکو) آشنایند. او با این که درس طب خوانده بود، استاد ریاضیات دانشگاه گلاسکو شد (۱۷۱۱). به مطالعهٔ ریاضیات یونانی شوق زیادی داشت و بیشتر چاپهای انگلیسی اصول اقلیدس براساس چاپ اوست.

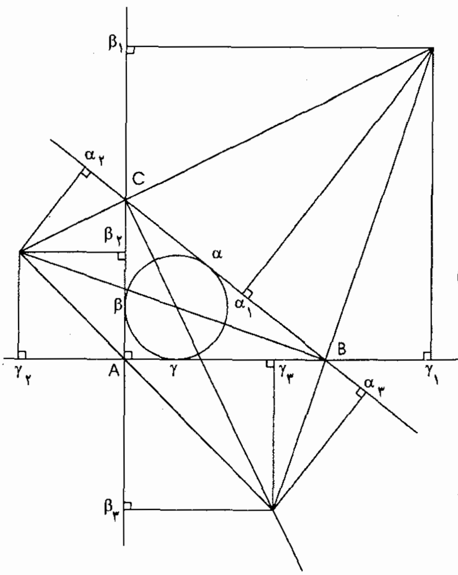
سیمسون از به کاربردن آنالیز جبری در هندسه بیزار بود، و روش او شبیه یونانیان است.

۱۵۷. مثلث PQR محیط بر یک دایره مفروض است. وسطهای ضلعهای این مثلث را A ، B و C نامیده از این نقطه‌ها مماسهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ را بر دایره رسم می کنیم . نقطه‌های برخورد این مماسها با ضلعهای روبه رو به رأسهای A ، B و C از مثلث ABC را بترتیب α ، β و γ می‌نامیم. ثابت کنید که این سه نقطه روی یک خط راست واقعند.



۱۵۸. دایره‌ای در مثلث ABC محاط و نقطه‌های D و E ، نقطه‌های تماس این دایره با ضلعهای BC و AC است. بر نیمساز زاویهٔ BAC ، عمود BK را رسم کرده ایم. اگر K پای این عمود باشد، ثابت کنید سه نقطهٔ D ، E و K بر یک استقامتند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۸۲



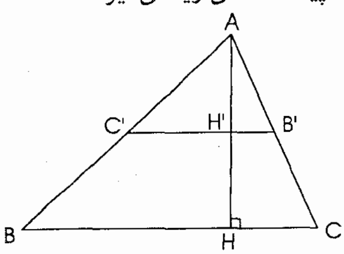
۱۵۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلعهای BC ، CA و AB را بترتیب $(\gamma , \beta , \alpha)$ ، $(\gamma_1 , \beta_1 , \alpha_1)$ ، $(\gamma_2 , \beta_2 , \alpha_2)$ و $(\gamma_3 , \beta_3 , \alpha_3)$ می‌نامیم ثابت کنید که دسته نقطه‌های (α,β,γ_2) ، (α,β_3,γ) ، $(\alpha_3 , \beta , \gamma_3)$ ، $(\alpha_2 , \beta_2 , \gamma)$ ، $(\alpha_3, \beta_3 , \gamma_1)$ ، $(\alpha_1, \beta_2 , \gamma_1)$ و $(\alpha_1, \beta_1 , \gamma_3)$ روی یک خط راست واقعند.

۱۶۰. فرض کنیم در مثلث ABC نقطه‌های M ، N و P بترتیب نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلعهای AB ، AC و BC باشند، ثابت کنید: مرکز ارتفاعی مثلث MNP ، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

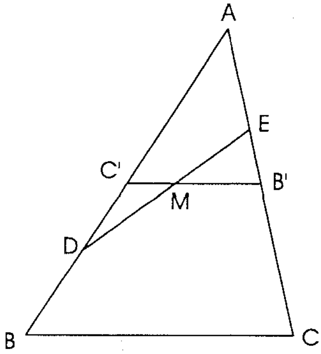
مرحله نهایی دوازدهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۱۶۱. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث غیر متساوی‌الساقین ABC باشد و A_1 ، B_1 و C_1 نقطه‌های تماس این دایره بترتیب با ضلعهای BC ، AC و AB باشند، ثابت کنید مراکز دایره‌های محیطی مثلثهای AIA_1 ، BIB_1 و CIC_1 روی یک خط راست واقعند.

دومین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، ۱۳۷۳

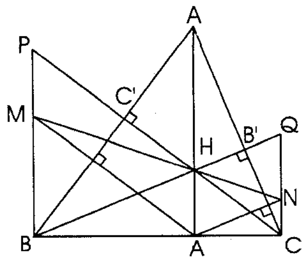


۱۶۲. در مثلث ABC نقطهٔ ´B وسط ضلع AC و ´C وسط ضلع AB و ´H وسط ارتفاع AH است. ثابت کنید سه نقطهٔ ´B ، ´C و ´H بر یک استقامت واقعند.



۱۶۳. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ D را روی AB در نظر گرفته نقطهٔ E را روی AC چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$ باشد. ثابت کنید که وسطهای دو ضلع ABو AC و وسط قطعه خط DE روی یک خط راست واقعند.

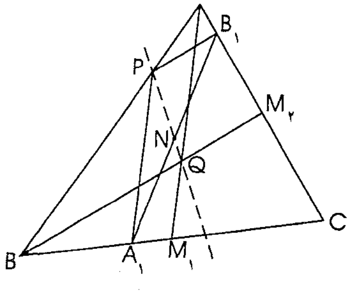
۱۶۴. ارتفاعهای ´AA ، ´BB و ´CC از مثلث ABC در نقطهٔ H متقاطعند. از B عمودی بر BC اخراج می‌کنیم و فصل مشترک این عمود را با عمودی که از ´A بر AB رسم شود، نقطهٔ M و با خط CH نقطهٔ P می‌نامیم. همچنین از C عمودی بر BC رسم کرده، فصل مشترک این عمود را با عمودی که از ´A بر AC رسم می‌شود نقطهٔ N وبا خط BH نقطهٔ Q می‌نامیم.



۱. ثابت کنید $\frac{BA'}{A'C} = \frac{A'H}{CN} = \frac{BM}{A'H}$

۲. ثابت کنید که نقطه‌های M ، H و N بر یک استقامتند.

۱۶۵. روی ضلع AB از مثلث ABC نقطهٔ P مفروض است. از این نقطه خطهایی را به موازات میانه‌های AM_1 و BM_2 رسم می‌کنیم تا ضلعهای مثلث را در نقطه‌های A_1 و B_1 قطع کنند. ثابت کنید: میانگاه پاره خط A_1B_1، نقطهٔ P ، و نقطهٔ Q محلّ تلاقی میانه‌های مثلث مفروض، بر روی یک خط راست واقعند.



۴. ۲. ۲. ثابت کنید نقطه ها بر یک استقامتند (در چندضلعیها)

۱۶۶. ثابت کنید که در هر چهارضلعی کامل وسطهای قطرها سه نقطه واقع بر یک خط راست می‌باشند. (خط نیوتن).

نیوتن

ایزاک نیوتن I. Newton (متولد ۲۵ دسامبر ۱۶۴۲ در وولستورپ نزدیک گرانتهام، متوفی ۲۰ مارس ۱۷۲۷ در کنزینگتون) در ایام بحرانی قیام کرامول به دنیا آمد، و پدرش که کشاورزی در لینکلنشایر بود، پیش از تولد فرزند درگذشت. او کودکی کوچک اندام و ضعیف بود، و در ایام کودکی در مبارزهٔ زندگی طالع درخشانی نداشت. در دوازده سالگی او را از مدرسهٔ محلی بیرون آوردند و به مدرسه‌ای در گرانتهام فرستادند. بنابه اظهار خودش در ابتدا به درسهایش توجه زیادی داشت و در شمار محبوبترین شاگردان بود. ظاهراً بیشتر علاقه‌اش به نجاری، مکانیک، سرودن شعر، و نقاشی بود. با این همه، بعدها شایستگی بیشتری نشان داد و به ترینیتی کالج کمبریج فرستاده شد (۱۶۶۰). حتی در آن هنگام هم استعداد خاصی در او دیده نمی‌شد و تا مدتی پس از دریافت درجه لیسانس در ۱۶۶۵ مطلب فوق‌العاده‌ای از او ننوشته‌اند. با این حال هنگامی که در ۱۶۶۸ درجهٔ فوق لیسانس می‌گرفت، نبوغ او طوری نمایان شد که به او به چشم بزرگترین ریاضیدان و فیزیکدان انگلیس می‌نگریستند. در ۱۶۶۴ سریهای بی‌نهایت را مورد تحقیق قرار داد، و مقارن همین زمان ثابت کرد که قاعدهٔ معمولی بسط $(a + b)^n$ در مورد تمام مقادیر n ، همچنان که امروز به طور حکم معلوم شده، از لحاظ همگرایی معتبر است. در ۱۶۶۵ نوشتن کتاب حساب انتگرال و دیفرانسیل را آغاز کرد، موضوعی که آن را اصول حساب فاصله (Floxion . برای Flux واژهٔ شار به کار رفته است. شاید حساب فاصله زیاد جامع نباشد، چون منظور نیوتن از این واژه نرخ تغییر یا سیلان یک تابع است) می‌نامید، و برای تعیین تانژانت و شعاع خمیدگی در هر نقطه از منحنی به کار می‌برد. در ۱۶۶۶ بر روی نظریهٔ نور کارکرد، به پژوهشهای مهم در زمینهٔ اصول گرانش پرداخت و اصول حساب فاصله را برای بررسی معادله‌ها به کار برد. کار نیوتن چنان مورد استقبال قرار گرفت که مقارن این زمان (۱۶۶۸) استاد سابقش بارو I - Barrow از

او دعوت کرد تا سخنرانیهایش را اصلاح کند. در ۱۶۶۹ بارو از استادی کرسی لوکاس در دانشگاه کمبریج کناره گرفت و نیوتن به جایش نشست. بدین ترتیب او در بیست و هفت سالگی کار بزرگش را در زمینهٔ حساب انتگرال و دیفرانسیل و فیزیک ریاضی آغاز کرد و یکی از بزرگترین افتخارات دانشگاهی جهان را به‌دست آورد.

تقریباً تا شصت سال پس از استادی به او به چشم یکی از رهبران، در زمینهٔ فیزیک و ریاضیات می‌نگریستند و او همهٔ افتخاراتی را که ممکن بود کسی در کار دانشگاهی انتظار داشته باشد، به‌دست آورده بود.

نیوتن

در ۱۶۷۲ او را به عضویت انجمن همایونی برگزیدند، در ۱۶۸۹ نمایندهٔ دانشگاه در مجلس نمایندگان ، شد ولی وی علاقه‌ای به سیاست نداشت. در ۱۷۰۵ ملکه آن، به او

لقب شوالیه داد. اواخر عمرش در لندن گذشت و در زمینهٔ ریاضیات بی‌حاصل بود.

نیوتن همیشه در انتشار کشفیاتش تردید داشت. تألیف مهمترین کتابش به نام مبادی Principo در ۱۶۸۵ آغاز شد، ولی تا ۱۶۸۷ چاپ نشد، تا در این زمان بنابه اصرار دوستش هالی منجم ، بدان رضایت داد. او در این کتاب اصول گرانش را بیان کرد که «بی‌شک بزرگترین کشف علمی تا آن زمان بود که همتایی نداشت» و برای بیان مطالب از روشهای هندسهٔ یونانی استفاده کرده بود تا دانشجویان آن زمان به آسانی قادر به فهم آن باشند. این سومین کشف بزرگ در زمینهٔ نجوم ریاضی بود. نظریه خورشید مرکزی، که سرانجام کپرنیکوس آن را تثبیت کرد؛ مدارهای بیضوی سیارات و قانونهای مربوط بدان. که کپلر تدوین کرد؛ و قانون جاذبهٔ عمومی که همیشه با نام نیوتن قرین خواهد بود. مطلبی که لاگرانژ در مورد نیوتن می‌گوید در عین درست بودن حکم لطیفه را دارد، و آن این است که نیوتن بزرگترین نابغه‌ای بود که جهان به خود دیده، و در عین حال خوشبخت‌ترین نوابغ بود، چون بیش از یک دستگاه برای جهان نمی‌توان تعیین کرد. این که نظریهٔ نسبیت اینشتین آن را باطل خواهد کرد یا نه؟ بعد معلوم می‌شود.

مدال نیوتن کارکراکر

مدالی که بنابه اظهار بریوستر در آغاز سال ۱۷۳۱ به افتخار سر ایزاک نیوتن ضرب شد. بریک روی آن تصویر این دانشمند است و بر روی دیگرش عبارت «خوشبخت آنکه علتها را دانست». تصویر، فرشتهٔ علم را نشان می‌دهد با لوحه‌ای که در آن منظومهٔ شمسی نقش شده. تاریخ ۱۷۲۶ سال وفات نیوتن برحسب تقویم قدیم است. مدال را جان کراکر ساخته.

ریاضیات عمومی نیوتن

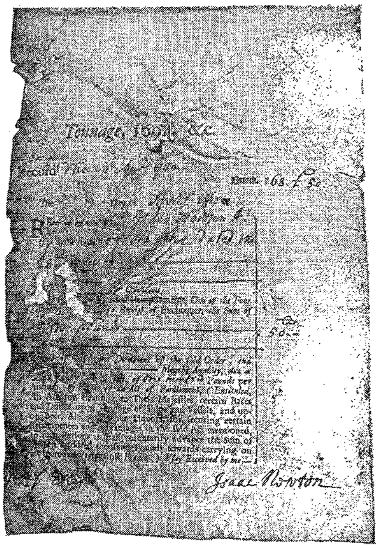
نیوتن در سالهای ۱۶۷۳ تا ۱۶۸۳ کتابی راجع به جبر و اصول معادله‌ها به صورت یک سلسله سخنرانی درسی نوشت که تا ۱۷۰۷ چاپ نشد. همچنین در ۱۶۶۹ اکتابی راجع به آنالیز سریها تألیف کرد که در ۱۷۱۱ انتشار یافت . در ۱۶۷۱ کتاب تربیع منحنیها را نوشت که در ۱۷۰۴ منتشر شد، و به همین ترتیب سایر اثرهایش هم تا وقتی نیوتن در دانشگاه درس می داد از دسترس عامه خارج بود. حساب فاضله از موضوعی بحث می‌کرد که شاید بیش از همه او بدان شهرت دارد، و با این همه تا نه سال پس از مرگش منتشر نشد؛ البته در آن هنگام این نظریه با اثرهای کسانی چون شارل هازکاملا" شناخته شده بود (۱۷۰۴). این ستایشی سخاوتمندانه ونجیبانه بود که لایبنیتس گفت «اگر ریاضیات جهان را از ابتدا تاکنون در نظر بگیریم، کار نیوتن به تنهایی با تمام آن برابری می‌کند». نیوتن غرابت نوابغ را داشت، و همیشه چنان در کارخود غرق بود که از پیرامون خویش غافل می‌ماند. داستانهای زیادی دربارهٔ فراموشکاری او نقل می‌کنند، که برخی از آنها را دربارهٔ سایر ریاضیدانان هم گفته‌اند و احتمالا" اغلبشان جعلی است.

در یکی از این داستانها گفته شده، هنگامی که یکی از دوستانش نزد او مهمان

مدال نیوتن کار روتیر

از مدالهای متعددی که نقش نیوتن را دارند، مدالهای کراکر و روتیر (که اول بار در ۱۷۳۹ ضرب شده) بهتر از همه است. این مدال مخصوص در ۱۷۷۴ ضرب شده عبارت روی آن جمله‌ای از ویرژیل است «در پی همتای اویند» که متن کامل آن چنین است «در پی همتای اویند، در میان این گروه انبوه کسی را دل آن نیست که به مرد نزدیک شود و دعوی هماوردی کند.»

بود از سرمیز برخاست تا شیشه‌ای شربت بیاورد، ولی در ضمن راه موضوع را به کلی فراموش کرد، به اطاقش رفت، پالتویش را پوشید و عازم عبادت شد. همچنین حکایت می‌کنند که روزی هنگام سواری از اسب پیاده شد و در حالی که فکرش جای دیگری بود دهنهٔ اسب را گرفت و روانهٔ بالای تپه شد، ولی وقتی دوباره خواست سوار شود، دید که اسب فرار کرده، و فقط دهنه‌اش در دست او مانده است. نیوتن در ۱۷۲۷ درگذشت و در کلیسای وستمینستر به خاک سپرده شد، هنوز آرامگاهش در آن‌جا دیده می‌شود. ولتر در تشییع جنازهٔ او شرکت

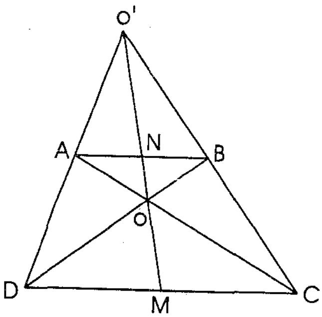


دستخط نیوتن
سندی که پس از بازنشسته شدنش در کمبریج نوشته شده و ارزش سیاسی دارد.

کرد، و خواهیم دید که در سن پیری سعی زیادی کرد تا فلسفه نیوتن را در فرانسه معرفی کند. گویند وقتی گفت زمانی در کشوری می‌زیسته که «یک استاد ریاضی را فقط به خاطر این که در کار خودش مهم بود، همچون شاهی که به رعایایش خدمت کرده باشد، دفن کرده بودند». چشمانش می‌درخشید و گونه هایش گل انداخته بود.

۱۶۷. نقطهٔ دلخواه P را روی ضلع BC از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم؛ دایره‌ای که از سه نقطه A، B و P می‌گذرد، قطر BD را در نقطهٔ دیگر Q قطع می‌کند. دایره‌ای که از سه نقطهٔ C ، P و Q می گذرد، BD را در نقطهٔ دیگر R قطع می‌کند. ثابت کنید، نقطه‌های A ، R و P بر یک امتدادند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۹۰



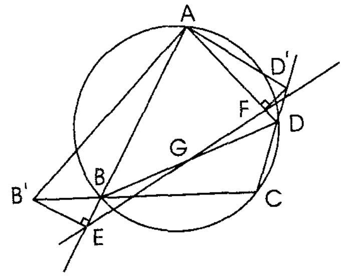
۱۶۸. در ذوزنقهٔ ABCD وسطهای دو قاعده را M و N و نقطهٔ تلاقی دو قطر را O و نقطهٔ برخورد دو ساق را ´O می‌نامیم.

۱. ثابت کنید چهار نقطه M ، N ، O

و ´O روی یک خط راست قرار دارند.

۲. ثابت کنید $\frac{OM}{ON}=\frac{O'M}{O'N}$ است.

۱۶۹. از رأس A از چهارضلعی محاطی ABCD خطهای ´AB و ´AD را قرینه یکدیگر نسبت به نیمساز زاویه BAD و بترتیب محدود به ضلعهای BC و CD رسم می‌کنیم. ثابت کنید که پای عمودهای رسم شد، از نقطه‌های ´B و ´D بر AB و AD که آنها را E و F می‌نامیم، با نقطهٔ G وسط قطر BD روی یک خط راست واقعند.

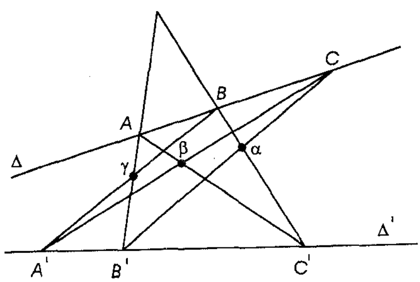


۱۷۰. اگر در چهارضلعی محیطی ABCD، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقطه‌های I، J و O بر یک استقامتند.

مرحله نهایی ششمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۴. ۲. ۳. ثابت کنید نقطه‌ها بر یک استقامتند (در سایر شکلها)

۱۷۱. نقطه‌های A، B و C روی خط راست Δ و نقطه‌های ´A، ´B و ´C روی خط راست ´Δ مفروضند. اگر α نقطهٔ تقاطع ´BC، ´CB و β نقطهٔ برخورد ´CA، ´AC و γ نقطهٔ تقاطع ´AB و ´BA باشد، ثابت کنید که نقطه‌های α، β و γ روی یک خط راست واقعند.



۱۷۲. ثابت کنید اگر n نقطه بر صفحه، طوری قرار گرفته باشند که، هر خط راستی که از دو تا از آنها بگذرد، دست کم شامل یکی دیگر از نقطه‌ها باشد، آن وقت همهٔ نقطه‌ها روی یک خط راست واقعند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، جمهوری آلمان، ۱۹۷۲

۱۷۳. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد. نقطه‌های M و N را بترتیب، روی ضلعهای AB و AC انتخاب کرده ایم. دو دایره، یکی به قطر BN و دیگری به قطر CN رسم کرده‌ایم؛ این دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع کرده‌اند. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، ثابت کنید سه نقطهٔ P ، Q و H روی یک خط راستند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۸۸

۱۷۴. دو قطر AB و CD در دایره‌ای رسم شده‌اند، ثابت کنید برای هر دو نقطهٔ دلخواه E و F واقع بر محیط دایره، نقطهٔ برخورد خطهای راست AE و DF ، مرکز دایره، و نقطهٔ برخورد خطهای راست CE و BF ، در یک امتدادند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۷۹

۱۷۵. دو دایره به مرکزهای O_1 و O_2، در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. دایرهٔ (O_1BO_2) ، دایرهٔ دوم را، در نقطهٔ دیگر P قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه‌های O_1 ، A و P روی یک خط راستند.

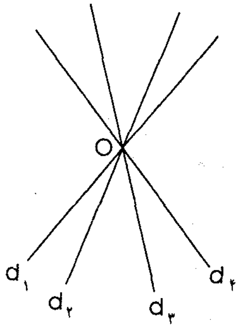
المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۹۱

بخش ۵.

خطهای همرس

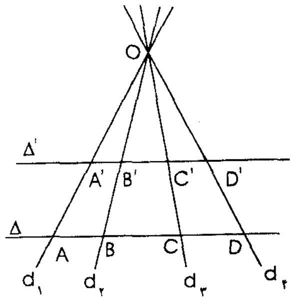
بخش ۵. خطهای همرس

۱.۵. تعریف و قضیه



تعریف . n خط راست ($n \geq ۳$ و $n \in N$) که از یک نقطه مانند O بگذرند، همرس نامیده می‌شوند. O را نقطهٔ همرسی این خطها می‌نامند.

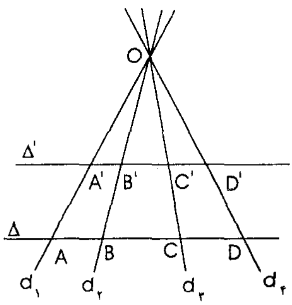
۱۷۶. **قضیه** . پاره‌خطهایی که چند خط همرس بر دو خط متوازی پدید می‌آورند، نظیر به نظیر متناسبند.



فرض . $d_۱$، $d_۲$، $d_۳$، و $d_۴$ و... همرسند، و $\Delta \parallel \Delta'$.

حکم . $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots$

۱۷۷. **عکس قضیه** . در هر صفحه، خطهای نامتوازی که دو خط متوازی را قطع کنند و بر آنها پاره خطهای متناظر متناسب پدید آورند، همرسند.



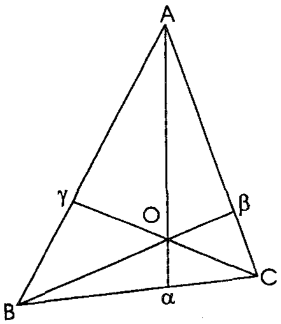
فرض . $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \dots$ و $\Delta \parallel \Delta'$.

حکم . خطهای $d_۱$ ، $d_۲$ ، $d_۳$ ، $d_۴$ و ... همرسند.

قضیهٔ سوا

هر خط که یک رأس مثلث را به نقطه‌ای از ضلع روبه‌روی آن وصل کند، خط سوایی نامیده می‌شود. اگر α نقطه‌ای از ضلع BC (روی پاره خط BC یا در امتداد آن)، β نقطه‌ای از ضلع CA و γ نقطه‌ای از ضلع AB باشد، هر یک از خطهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ یک خط سوایی است. این نامگذاری از آن جا ناشی می‌شود که ژان دوسوا Jean de céva ریاضیدان ایتالیایی (در بعضی منابع جی یو وانو سوا)، برای نخستین بار در سال ۱۶۷۸ قضیهٔ بسیار سودمند زیر را بیان داشته است.

۱۷۸. **قضیه** . اگر در مثلث ABC سه خط سوایی $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ در نقطهٔ O همرس باشند، داریم :



$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$$ یا

$$\frac{B\alpha}{\alpha C}\cdot\frac{C\beta}{\beta A}\cdot\frac{A\gamma}{\gamma B} = ۱$$

جی‌یووانو سوا

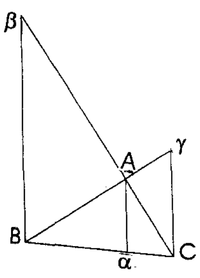
جی‌یووانو سوا j. C'eva (۱۶۴۸ - ۱۷۳۴) هندسه دان ایتالیایی، به حرفهٔ مهندسی هیدرولیک اشتغال داشت. مسألهٔ سوا را، از رسالهٔ او به نام «دربارهٔ خطهای راست» (۱۶۷۸) برداشته‌ایم. خود سوا، مسأله را با روش خالص هندسی و با تکیه بر قانونهای استاتیک، یعنی بر مبنای ملاحظه‌های مکانیکی حل کرده است.

۱۷۹. عکس قضیهٔ سوا، نیز صحیح است، و چنین بیان می‌شود:

قضیه . اگر در مثلث ABC برای سه خط سوایی $A\alpha$, $B\beta$ و $C\gamma$ داشته باشیم :

$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$ یا $\frac{B\alpha}{\alpha C}\cdot\frac{C\beta}{\beta A}\cdot\frac{A\gamma}{\gamma B} = ۱$ ، در این صورت، سه خط مزبور همرسند.

۱۸۰. در قضیهٔ سوا، اگر نقطهٔ همرسی سه خط، در فاصلهٔ بی نهایت دور قرار داشته باشد، یعنی خطهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ موازی باشند، باز هم رابطهٔ



سوا برقرار است. یعنی قضیهٔ زیر را داریم:

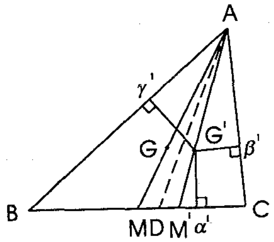
قضیه . اگر سه خط متوازی، ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب در نقطه‌های α ، β و γ قطع کنند، داریم:

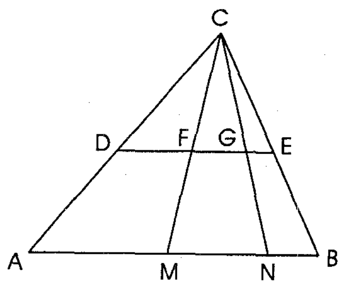
$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma C}} = -۱$$

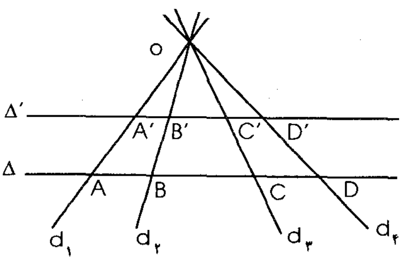
۱۸۱. **عکس قضیه** . عکس این قضیه نیز درست است، یعنی اگر نقطه های α ، β و γ روی ضلعها، یا امتداد ضلعهای مثلث چنان باشد که رابطهٔ $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$ برقرار باشد، و دو خط $A\alpha$ و $B\beta$ موازی باشند، خط $C\gamma$ نیز با آنها موازی است.

۱۸۲. دو قضیهٔ سوا و مِنلائوس را با استفاده از اندازهٔ جبری بردارها ثابت کنید.

۵.۲. خطها همرسند، مطلوب است ...







۵.۲.۱. محاسبهٔ اندازهٔ پاره‌خطها

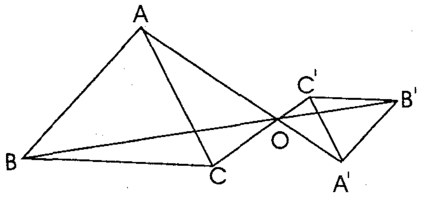
۱۸۳. در هر مثلثی قرینه‌های سه میانه، نسبت به نیمسازهای متناظر، خود همرسند. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ همرسی آنها از سه ضلع مثلث.

۱۸۴. در ΔABC ، $DE \parallel AB$ و ΔCMN متساوی‌الساقین است. اگر $CD = ۱۲$ ، $DA = ۹$ ، $CE = ۱۰$ و $CG = CF = EB$ ، CM را محاسبه کنید.

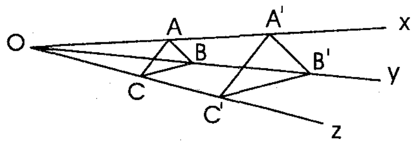
۱۸۵. دو خط متوازی Δ و Δ' خطهای $d_۱$ ، $d_۲$ ، $d_۳$ و $d_۴$ را که در نقطهٔ O همرسند. بترتیب در نقطه‌های A ، B ، C ، D و A´ ، B´ ، C´ ، D´

قطع کرده‌اند، در صورتی که $OA = \frac{۲}{۳} OA'$ و $B'C' = ۸$ باشد، اندازهٔ پاره خط BC را پیدا کنید.

۵. ۲. ۲. بررسی موازی بودن خطها



۱۸۶. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ طوری قرار دارند که خطهای AA'، BB' و CC' همرسند و AB و BC بترتیب، موازی $A'B'$ و $B'C'$ می‌باشند، ثابت کنید AC و $A'C'$ نیز با هم موازی‌اند.

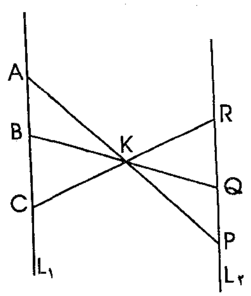


۱۸۷. سه نیم خط ox، oy و oz مفروضند. روی ox دو نقطهٔ A و A' را اختیار کرده و دو خط موازی رسم می‌کنیم تا oy را در نقطه‌های B و B' قطع کنند، همچنین از نقطه‌های B و B' دو خط موازی رسم می‌کنیم تا oz را در نقطه‌های C و C' قطع نمایند.

۱. ثابت کنید $\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC}$.

۲. ثابت کنید خطهای AC و $A'C'$ موازی‌اند.

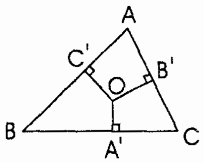
۵. ۲. ۳. بررسی درستی رابطه های متری



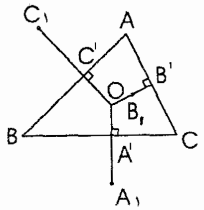
۱۸۸. در شکل روبه‌رو $L_۱ \parallel L_۲$ و AP، BQ و CR یکدیگر را در K قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}$$

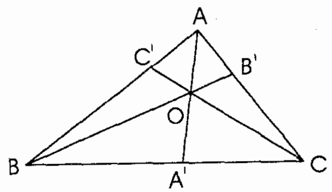
۱۸۹. روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC نقطه‌های A' ، B' و C' را در نظر می‌گیریم. اگر عمودهای مرسوم از A'، B' و C' بر ضلعهای مثلث همرس باشند، ثابت کنید: $(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0$ و بعکس.



۱۹۰. مثلث ABC و در صفحهٔ آن، نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 مفروضند. اگر عمودهای مرسوم از این نقطه‌ها بر ضلعهای BC ، CA و AB همرس باشند داریم:
$(A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0$ و بعکس.



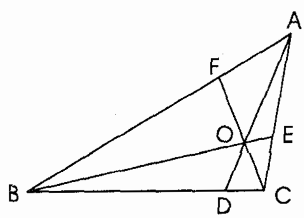
۱۹۱. مثلث ABC و سه خط همرس AA' ، BB' و CC' در نقطهٔ O مفروضند، ثابت کنید:
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B}$$



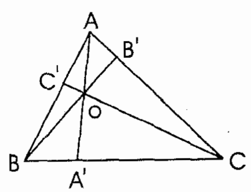
۱۹۲. از سه رأس مثلث ABC ، سه خط رسم شده است که یکدیگر را در نقطهٔ O ، و ضلعهای مثلث را در D ، E و F قطع کرده‌اند ثابت کنید:

الف. $\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

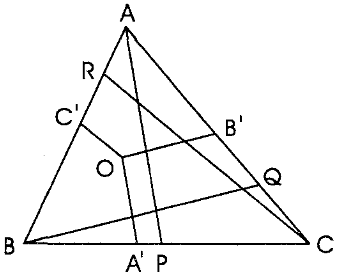
ب. $\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$



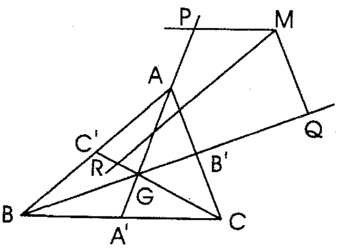
۱۹۳. مثلث ABC و نقطهٔ O در صفحهٔ این مثلث مفروضند. خطهای OA ، OB و OC بترتیب ضلعهای BC ، CA و AB را در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع می‌کنند. فرض می‌کنیم



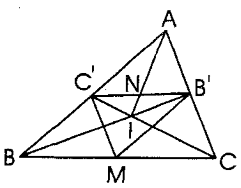
$x = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$، $y = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$ و $z = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}$ باشد؛ ثابت کنید $xyz - (x + y + z) + ۲ = ۰$.



۱۹۴. از نقطهٔ O واقع در داخل مثلث ABC به سه نقطهٔ ´A ، ´B و ´C که بترتیب روی ضلعهای BC ، AC و AB از این مثلث قرار دارند وصل می‌کنیم، و از رأسهای A ، B و C خطهایی بترتیب به موازات ´OA ، ´OB و ´OC رسم می‌کنیم تا ضلعهای روبه رو به این رأسها را بترتیب در نقطه‌های P ، Q و R قطع کنند، ثابت کنید: $\frac{OA'}{AP} + \frac{OB'}{BQ} + \frac{OC'}{CR} = ۱$



۱۹۵. خطهایی که از یک نقطه مانند M به موازات ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC رسم می‌شوند، میانه‌های ´AA ، ´BB و ´CC را بترتیب در نقطه‌های P، Q و R قطع می‌کنند؛ اگر G محل تلاقی میانه‌های مثلث باشد، ثابت کنید داریم: $\frac{\overline{GP}}{\overline{GA}} + \frac{\overline{GQ}}{\overline{GB}} + \frac{\overline{GR}}{\overline{GC}} = ۰$

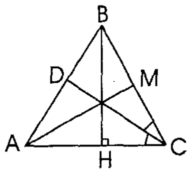


۱۹۶. از نقطهٔ دلخواه M روی ضلع BC از مثلث ABC ، دو خط موازی ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم که بترتیب ضلعهای AC و AB را در نقطه‌های ´B و ´C قطع کنند. اگر I نقطهٔ برخورد ´BB و ´CC و N نقطهٔ تقاطع AI و ´B´C باشد، رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

الف. $\frac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ ب. $\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} \cdot \frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}} = -\frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2}$

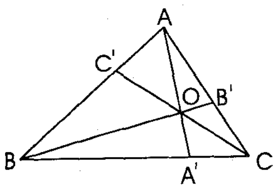
پ. $\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} \cdot \frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IN}}$

۱۹۷. اگـر در مـثلث ABC مـیانهٔ AM ، ارتـفاع BH و نـیمساز CD دریک نقطه همرس باشند، رابطهٔ بین طول ضلعهای a ، b و c آن مـثلث را بـه دست آورید.

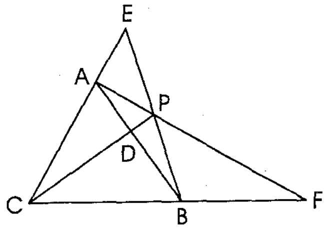


۱۹۸. اگر سـه پـاره خـط ´AA ، ´BB و ´CC در نقطهٔ O درون مثلث ABC همرس باشند، ثابت کنید:

$$\frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} \geq 6$$

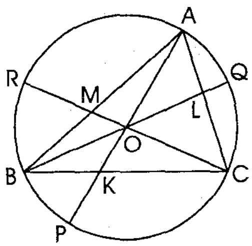


۱۹۹. در شکل روبه‌رو، سه خـط سـوایـی رسم شده از رأسهای مثلث ABC ، در نـقطهٔ P هـمرس مـی‌باشند. بـا استفاده از قضیهٔ سوا، سه نسـبتی را که حاصل ضـربشان بـرابـر ۱ است بنویسید.

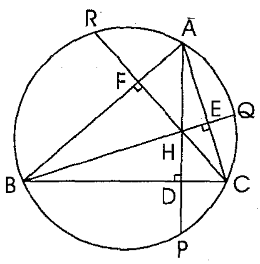


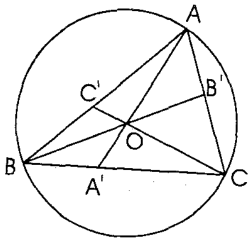
۲۰۰. قطرهای AP ، BQ و CR از دایرهٔ مـحیطی مـثلث ABC ، ضـلعهای BC ، CA و AB را در K ، L و M قطع می‌کنند، ثابت کنید:

$$(KP:AK)+(LQ:AQ)+(MR:AM)=1$$



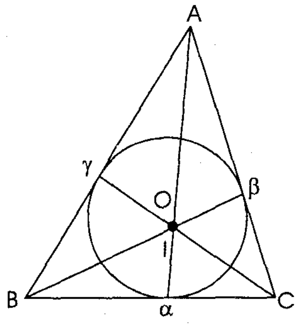
۲۰۱. نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای AD ، BE و CF از مثلث حاده الزوایای ABC را H ، و نقطه‌های تلاقی این ارتفاعها با دایرهٔ محیطی مثلث را بترتیب P ، Q و R مـی‌نامیم. صـحت رابـطه‌های $\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF}=1$ و $2\left(\frac{a}{AH}+\frac{b}{BH}+\frac{c}{CH}\right)=\frac{a}{DP}+\frac{b}{EQ}+\frac{c}{FR}$ را ثابت کنید.





۲۰۲. ثابت کنید که مجموع معکوسهای پاره خطهایی که (خط سوا) از مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث گذشته و محدود به رأس و ضلع مقابل آن است، برابر است با، دو برابر معکوس شعاع این دایره.

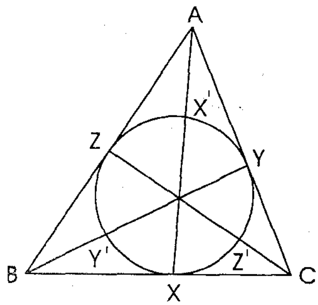
$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{2}{R}$$



۲۰۳. اگر I محل تلاقی خطهای واصل بین رأسهای مثلث ABC با نقطه‌های تماس ضلع مقابل به آن رأس، با دایرهٔ محاطی داخلی آن مثلث باشد، ثابت کنید:

$$\frac{\overline{I\alpha}}{\overline{IA}} \cdot \frac{\overline{I\beta}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{I\gamma}}{\overline{IC}} = -\frac{r}{4R}$$

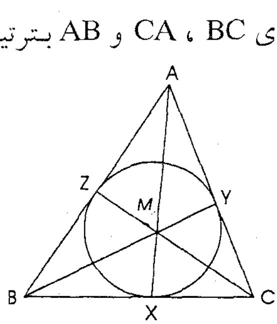
(r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است).

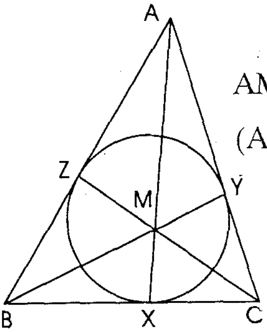


۲۰۴. اگر AX ، BY و CZ خطهایی باشند که رأسهای مثلث را به Y, X و Z محل تماس ضلعهای BC ، CA و AB با دایرهٔ محاطی داخلی آن وصل می‌کنند، و این دایره را دوباره بترتیب در X´ ، Y´ و Z´ قطع کنند، ثابت کنید که:

$AX \cdot XX' \cdot BC = BY \cdot YY' \cdot CA = CZ \cdot ZZ' \cdot AB = 4rs$ که r و S شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و مساحت مثلثند. نظیر این مطلب را برای مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی بیان و اثبات کنید.

۲۰۵. اگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلعهای BC ، CA و AB بترتیب در X ، Y و Z مماس باشد و M نقطهٔ تلاقی خطهایی باشد که رأسها را به این نقطه‌های تماس وصل می‌کنند، ثابت کنید:



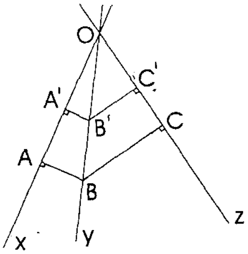


$$AM : MX = a(P-a) : (P-b)(P-c)$$

$$(AM : MX) - (BM : MY) - (CM : MZ) = ۴R : r$$

نظیر این رابطه‌ها را برای دایره‌های محاطی خارجی مثلث پیدا کنید.

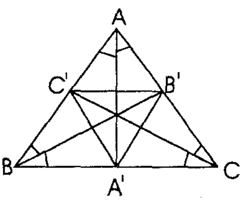
۵.۲.۴. سایر مسأله های مربوط به این قسمت



۲۰۶. سه خط همرس مفروضند. ثابت کنید که اگر نقطه‌ای روی یکی از آنها حرکت کند، نسبت فاصله‌های آن از دو خط دیگر، ثابت می‌ماند.

۲۰۷. مثلث $P_۱P_۲P_۳$ و نقطهٔ P داخل آن را در نظر می‌گیریم. خطهای $P_۱P$ ، $P_۲P$ و $P_۳P$ ضلعهای مقابلشان را بترتیب در نقطه‌های $Q_۱$ ، $Q_۲$ و $Q_۳$ قطع می‌کنند. ثابت کنید از عددهای $\frac{P_۱P}{PQ_۱}$ ، $\frac{P_۲P}{PQ_۲}$ ، $\frac{P_۳P}{Q_۳}$ حداقل یکی کوچکتر از، یا مساوی با ۲، و حداقل یکی بزرگتر از یا مساوی با است.

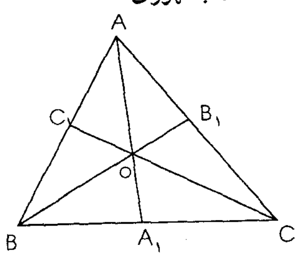
المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۱



۲۰۸. ضلعهای مثلثی برابر 55cm، 55cm و 66cm است. مساحت مثلثی را پیدا کنید که رأسهای آن پای نیمسازهای مثلث بالا باشند.

۲۰۹. ثابت کنید، اگر AD ، BE و CF نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشند، مساحت مثلث DEF ، از یک چهارم مساحت مثلث ABC تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف ، جمهوری آلمان، ۱۹۸۱



۲۱۰. اگر از سه رأس یک مثلث سه خط به ضلعهای مقابل طوری رسم شوند که از نقطه‌ای در داخل آن مثلث بگذرند، آن گاه شش ناحیهٔ مثلثی

شکل تشکیل می‌شود، به‌طوری که:

الف. مثلثهای متقابل دو به دو متشابه‌اند.

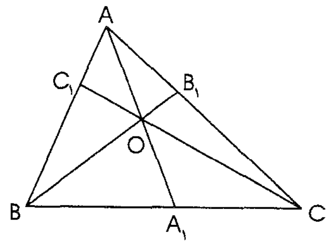
ب. مثلثهای متقابل دو به دو همنهشتند.

پ. مثلثهای متقابل دو به دو مساحتهای مساوی دارند.

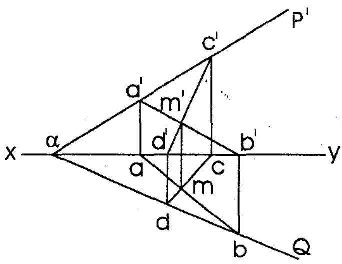
ت. سه چهار ضلعی متشابه تشکیل می‌شود.

ث. هیچ یک از چهار رابطهٔ بالا صحیح نیست.

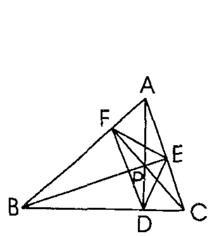
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱



۲۱۱. سه خط همرس xy ، $\alpha P'$ و αQ که در نقطهٔ α مشترکند، مفروضند. دو نقطه a' و c' را روی $\alpha P'$ اختیار کرده، تصویر این دو نقطه روی αy را a و c می‌نامیم؛ و بالاخره دو نقطهٔ b و d را روی αQ اختیار نموده، تصویر این دو نقطه روی xy را b' و d' می‌نامیم. خطهای ab و cd در نقطهٔ m و خطهای $a'b'$ و $c'd'$ در نقطهٔ m' یکدیگر را قطع می‌کنند، ثابت کنید که خط mm' بر خط xy عمود است.



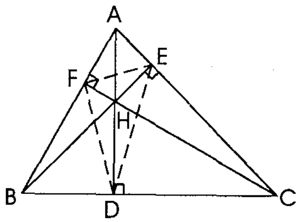
۲۱۲. اگر یکی از سه خط سوایی ارتفاع مثلث باشد، این خط نیمساز زاویهٔ مثلث P است. (مثلث P مثلثی است که رأسهایش نقطه‌های برخورد خطهای سوایی مربوط به نقطهٔ P با ضلعهای مثلث است).



۵.۳. ثابت کنید خطها همرسند

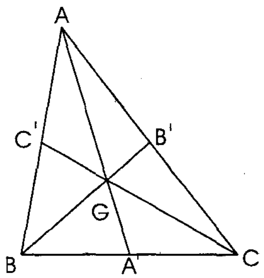
۵.۳.۱. ثابت کنید خطها همرسند (در مثلث)

۲۱۳. قضیه . سه ارتفاع هر مثلث همرسند. نقطهٔ همرسی ارتفاعهای مثلث، مرکز ارتفاعی آن نامیده می‌شود، و معمولاً آن را با H نشان می‌دهند.

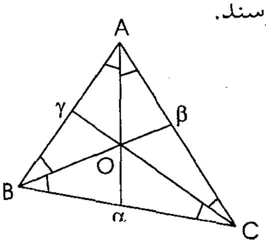


همچنین مثلث DEF راکه رأسهایش پاهای ارتفاعهای مثلث می‌باشند، مثلث ارتفاعی نظیر مثلث ABC می نامند.

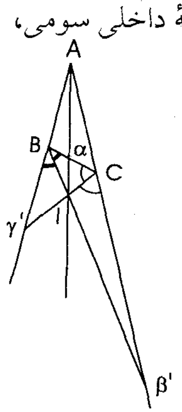
۲۱۴. در هر مثلث سه میانه همرسند.



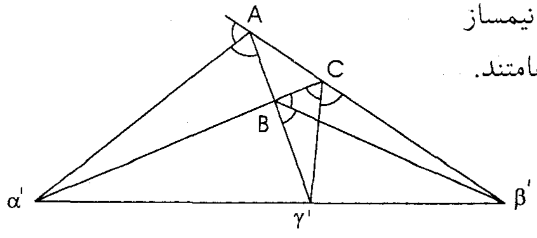
۲۱۵. قضیه . در هر مثلث سه نیمساز زاویه‌های داخلی، همرسند.



۲۱۶. قضیه . در هر مثلث نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی و نیمساز زاویهٔ داخلی سومی، همرسند.

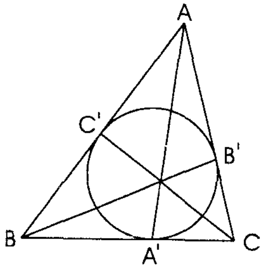


۲۱۷. قضیه . در هر مثلث، پای سه نیمساز زاویه‌های خارجی بریک استقامتند.

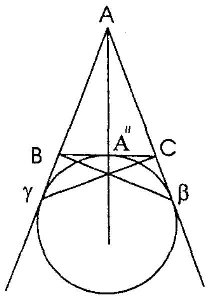


۲۱۸. ثابت کنید:

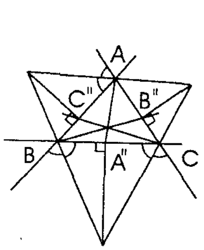
۱. خطهایی که هر رأس مثلث را بـه نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی بـا ضلع مقابل وصل می‌کنند، همرسند **(قضیهٔ ژرگون).**



۲. خطهایی که هر رأس مثلث را بـه نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع مقابل وصل می‌کنند، همرسند.



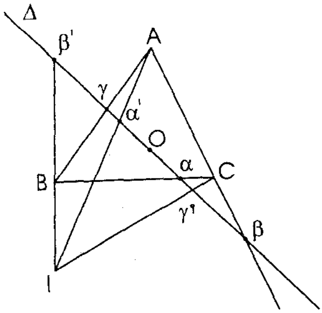
۳. خطهای گذرنده بـر رأس و نـقطهٔ تماس ضلع مقابل به آن رأس با دایرهٔ محاطی خارجـی واقـع در زاویـه بـه همان رأس ، همرسند.



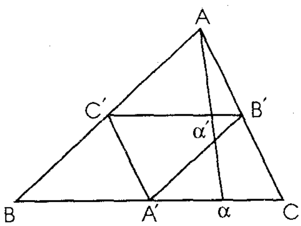
ژوزف دیازژرگون

نام ژوزف دیازژرگون J. D. Gergonne (متولد ۱۹ ژوئن ۱۷۷۱ در نانسی متوفی ۴ مه ۱۸۵۹ در مونپلیه) با مسألهٔ بالا مربوط است. او در جوانی ستوان تـوپخانه بـود، بعدهادر نیمس معلم و در مونپلیه استاد ریاضیات شد. با ایـن هـمه، مـهمترین کـارش سردبیری مجلهٔ ریاضیات بود (۱۸۱۰–۱۸۳۱) که عموماً نام او را به خاطر می‌آورد. در اواخر عمر از کار دست کشید و به مطالعه و تحقیق پرداخت . ژرگون نویسندهٔ پرکاری بود

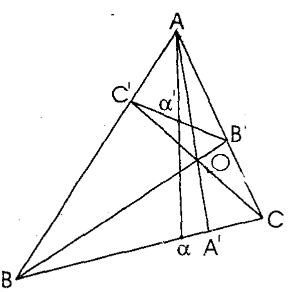
و بیشتر در زمینهٔ هندسه می‌نوشت. دو اصطلاح قطبی Polar (۱۸۱۰) و رده منحنی Classe of Curve (۱۸۲۷) را، او ایجاد کرد.



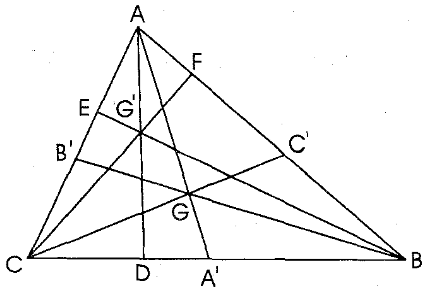
۲۱۹. مورب Δ ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC را بترتیب در نقطه‌های α، β و γ قطع کرده است. قرینهٔ نقطه‌های α، β و γ نسبت به نقطهٔ دلخواه O از خط Δ را α'، β' و γ' می‌نامیم. ثابت کنید که سه خط $A\alpha'$، $B\beta'$ و $C\gamma'$ همرسند.



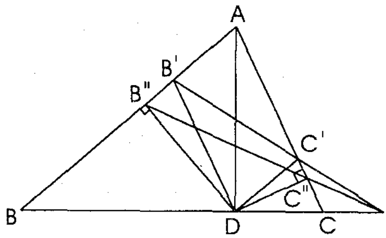
۲۲۰. از نقطه‌های A، B و C رأسهای مثلث ABC، خطهای همرس $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ را که ضلعهای مقابل به این رأسها را در α، β و γ قطع می‌کنند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید خطهایی که وسط پاره خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ را بترتیب به وسط ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC وصل می‌کنند، همرس، یا موازی‌اند.



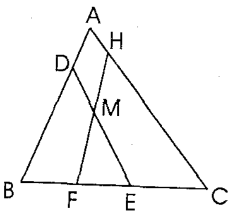
۲۲۱. در مثلث ABC سه خط AA'، BB' و CC' که از رأسهای مثلث گذشته و محدود به ضلعهای روبه‌رو می‌باشند، در نقطهٔ O همرسند. اگر α'، β' و γ' بترتیب وسط پاره خطهای $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ باشند، ثابت کنید که خطهای $A\alpha'$، $B\beta'$ و $C\gamma'$ همرسند.



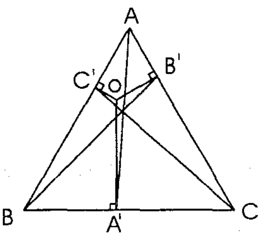
۲۲۲. قضیه . مزدوجهای هم زاویهٔ یک مجموعه قطعه خط همرس از رأسها به ضلعهای مقابل مثلث، خود نیز همرسند.



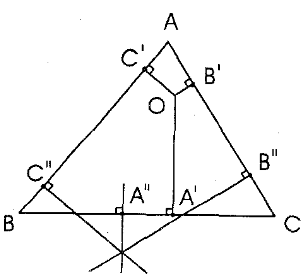
۲۲۳. در مثلث ABC از نقطهٔ D پای ارتفاع AD ، دو خط ´DC و ´DB را بترتیب موازی ضلعهای AB و AC و دو خط ″DB و ″DC را بترتیب عمود بر این ضلعها رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه خط BC ، ´B´C و ″B″C همرسند.



۲۲۴. اگر دو خط ضد موازی دو ضلع یک مثلث، رسم شده از یک نقطه، طولهای برابر داشته باشند، نقطهٔ تقاطعشان روی شبه میانهٔ نظیر ضلع سوم مثلث است.

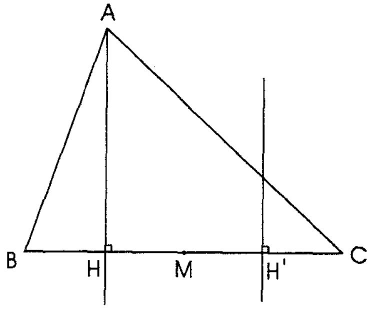


۲۲۵. ثابت کنید خطهایی که رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به تصویر یک نقطه روی ضلعهای مقابل به آن رأسها وصل می‌کنند، همرسند.

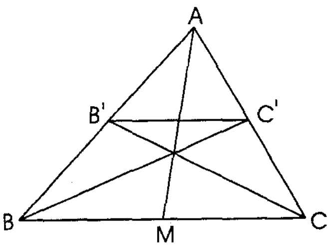


۲۲۶. از نقطهٔ O عمودهای ´OA ، ´OC و ´OB را به ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC فرود می‌آوریم . اگر ″A ، ″B و ″C قرینه‌های ´A ، ´B و ´C نسبت به وسط ضلعها باشند. عمودهای رسم شده از ″A ،

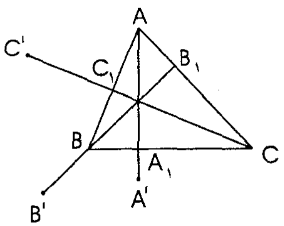
″B و ″C بر ضلعها، همرسند.



۲۲۷. در مثلث ABC ، قرینهٔ پای ارتفاع AH را نسبت به وسط ضلع BC به‌دست می‌آوریم و از آن، بر BC عمود اخراج می‌کنیم. همین عمل را برای پاهای دو ارتفاع دیگر انجام می‌دهیم. ثابت کنید سه عمود حاصل همرسند.



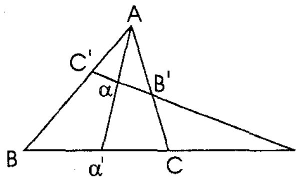
۲۲۸. خط موازی ضلع BC از مثلث ABC ضلعهای AB و AC را در ´B و ´C قطع می‌کند. ثابت کنید که ´BC ، ´B´C را روی میانهٔ نظیر رأس A قطع می‌کند.



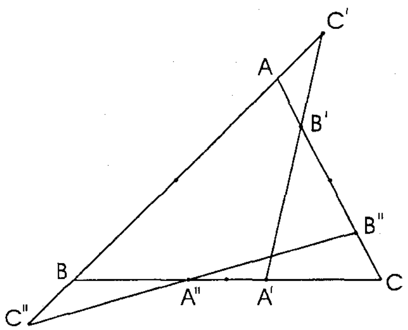
۲۲۹. در مثلث ABC نقطه‌های ´A ، ´B و ´C باری سانترهای رأسهای مثلث متناظر با ضریبهای $(-\alpha, \beta, \gamma)$ ، $(\alpha, -\beta, \gamma)$ و $(\alpha, \beta, -\gamma)$ می‌باشند. ثابت کنید ´AA ، ´BB و ´CC همرسند.

باری سانتر (Bary Center)

ضریبهای a_1 ، a_2 ، ... a_n را بترتیب متناظر با نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... A_n در نظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ M در رابطهٔ $a_1MA_1 + a_2MA_2 + ... + a_nMA_n = 0$ یا $\sum a_i MA_i = 0$ صدق کند، نقطهٔ M را باری سانتر یا مرکز فاصله‌های متناسب نقطه‌های A_1 ، A_2 و ... و A_n می‌نامند.



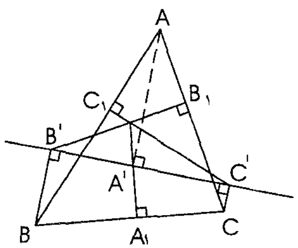
۲۳۰. روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC بترتیب نقطه‌های A' ، B' و C' را چنان اختیار می‌کنیم که خطهای AA' ، BB' و CC' همرس باشند. روی ضلعهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ از مثلث $A'B'C'$ بترتیب نقطه‌های α، β و γ را به قسمی اختیار می‌کنیم که خطهای $A'\alpha$ ، $B'\beta$ و $C'\gamma$ همرس باشند. ثابت کنید که خطهای $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ نیز همرسند.



۲۳۱. اگر A' ، B' و C' سه نقطه روی خطهای BC ، CA و AB از مثلث ABC، A'' ، B'' و C'' قرینه‌های این نقطه‌ها نسبت به وسطهای ضلعهای متناظر مثلث باشد:

۱. اگر A' ، B' و C' بر یک استقامت باشند، ثابت کنید. A'' ، B'' و C'' نیز بر یک استقامت خواهند بود.

۲. اگر AA' ، BB' و CC' همرس باشند، خطهای AA'' ، BB'' و CC'' همرس خواهند بود.

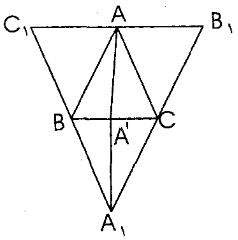


۲۳۲. اگر A' ، B' و C' تصویرهای رأسهای مثلث ABC روی خطی واقع در صفحهٔ آن باشند، عمودهای $A'A_1$ ، $B'B_1$ و $C'C_1$ که از نقطه‌های A' ، B' و C' بترتیب بر BC ، CA و AB رسم می‌شوند، همرسند.

۲۳۳. از رأس A در مثلث ABC ، خط راست دلخواهی رسم کرده ایم، B_1 و C_1 ، تصویرهای نقطه‌های B و C روی این خط راست؛ B_2 تصویر B_1 روی AC

و C_2 تصویر C_1 روی AB است. ثابت کنید، نقطهٔ برخورد خطهای راست B_1B_2 و C_1C_2 ، روی یکی از ارتفاعهای مثلث ABC یا روی امتداد آن واقع است.

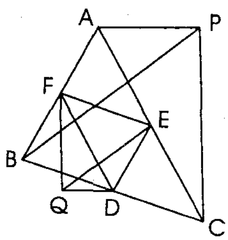
المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۷۱



۲۳۴. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. از سه رأس مثلث سه خط به موازات ضلعهای آن رسم می‌کنیم تا از آنها، مثلث $A_1B_1C_1$ به‌وجود آید. نقطه‌های A' ، B' و C' بترتیب روی BC ، CA و AB قرار دارند. اگر AA' ، BB' و CC' همرس باشند، ثابت کنید خطهای A_1A' ، B_1B' و C_1C' همرسند.

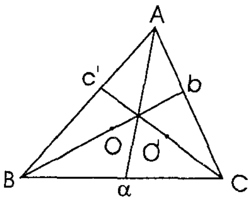
۲۳۵. ثابت کنید در هر مثلث، خطهایی که وسطهای ضلعها را به وسطهای ارتفاعهای متناظر وصل می‌کنند، همرسند. آیا می‌توان به جای ارتفاعها، هر سه خط همرس دیگر را در نظر گرفت؟ چگونه؟ ثابت کنید.

مرحلهٔ اول هشتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹

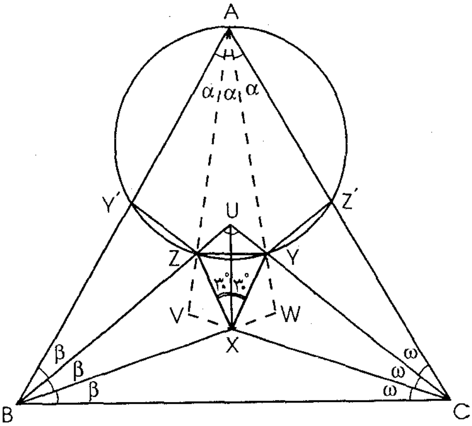


۲۳۶. مثلث ABC و نقطهٔ P داده شده است. از D ، E و F وسطهای ضلعهای BC ، CA و AB سه خط موازی با AP ، BP و CP رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این سه خط همرسند.

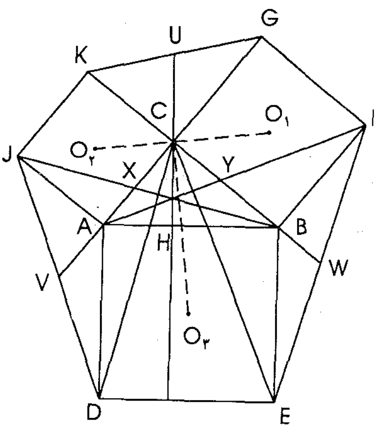
۲۳۷. مثلث ABC و دو نقطه P و P' مفروضند. خطهایی که از P' موازی PA ، PB و PC رسم می‌شوند بترتیب BC ، CA و AB را در نقطه‌های D' ، $É$ و F' قطع می‌کنند و خطهایی که از P موازی $P'A$ ، $P'B$ و $P'C$ رسم می‌شوند همان ضلعها را در D ، E و F قطع می‌نمایند، ثابت کنید خطهای AD' ، BE' و CF' همرسند؛ همین‌طور خطهای AD ، BE و CF.



۲۳۸. مثلث ABC و دو نقطهٔ O و ´O در یک صفحه مفروضند. ثابت کنید خطهایی که رأسهای A ، B و C از مثلث ABC را بترتیب به نقطه‌های تقاطع (OB , O´C)و (OC , O´A) و (OA , O´B) وصل می‌کنند، همرسند.



۲۳۹. در شکل روبرو خطهای AZ و CX را امتداد می‌دهیم تا در نقطه V برخورد کنند، همچنین خطهای BX و AY را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ W یکدیگر را قطع کنند، ثابت کنید که سه خط UX ، VY و WZ همرسند. (از نظر هندسهٔ تصویری، مثلثهای UVW و XYZ همسانند. اما در حالت کلی، مثلث UVW متساوی‌الاضلاع نمی‌باشد).

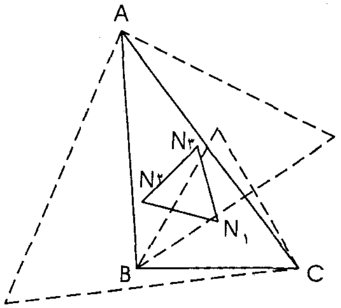


۲۴۰. با توجه به شکل روبه‌رو، ثابت کنید که:

الف. سه خط AI ، Bj و CH همرسند.

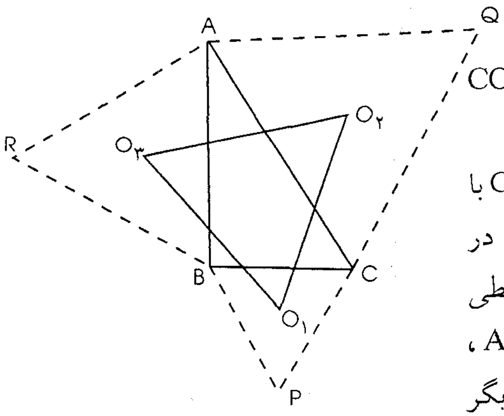
ب. پاره خطهای O_1O_2 و CO_3 با هم برابر و برهم عمودند.

پ. نقطه های U ، V و W بترتیب وسطهای GK ، ID و EI می‌باشند.



۲۴۱. با در نظر گرفتن شکل روبه‌رو ثابت کنید که سه خط AN_1 ، BN_2 و CN_3 همرسند. (نقطه‌های N_1 ، N_2 و N_3 مرکزهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده روی ضلعهای مثلثند).

۲۴۲. با در نظر گرفتن شکل داده شده، ثابت کنید که :



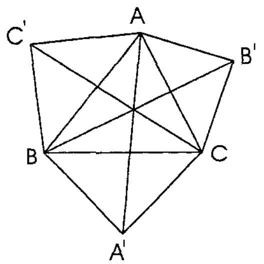
الف. سه خط PO_1 ، QO_2 و RO_3 در O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC همرسند؛

ب. سه خط AO_1 ، BO_2 و CO_3 همرسند؛

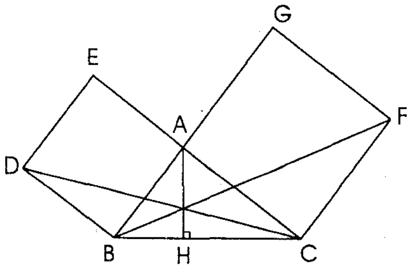
ج. پاره خطهای AP ، BQ و CR با هم برابرند؛ بعلاوه این سه خط در F ، نقطهٔ مشترک دایره‌های محیطی مثلثهای ACQ ، BPC و ABR ، همرسند؛ و دو به دو با یکدیگر زاویهٔ 60° می‌سازند.

(فرما برای نخستین بار ثابت کرده است که مجموع فاصله‌های FA ، FB و FC وقتی مینیمم است ،که هیچ یک از زاویه‌های مثلث ABC از 120° بیشتر نباشد).

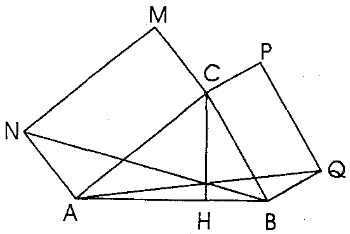
۲۴۳. روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج این مثلث ، سه مثلث متساوی‌الساقین متشابه BCA' ، ACB' و ABC' را می‌سازیم. ثابت کنید که خطهای AA' ، BB' و CC' همرسند.



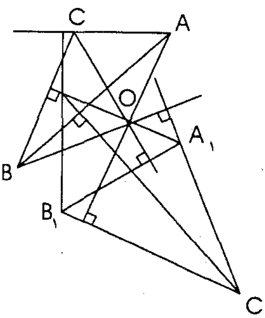
۲۴۴. روی ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و در خارج آن دو مربع $ABDE$ و $ACFG$ را می‌سازیم. ثابت کنید، CD و BF روی ارتفاع AH یکدیگر را قطع می‌کنند.



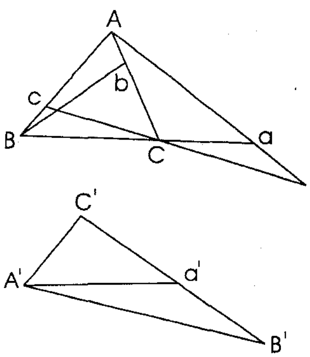
۲۴۵. روی ضلعهای AC و BC از مثلث ABC مستطیلهای متشابه $ACMN$ و $BCPQ$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطهٔ تلاقی خطهای NB و QA روی ارتفاع رسم شده از رأس C مثلث، یا بر امتداد آن واقع است.



۲۴۶. اگر عمودهای مرسوم از A ، B و C رأسهای مثلث ABC بر ضلعهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ همرس باشند، ثابت کنید عمودهای رسم شده از نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بر BC ، CA و AB نیز همرس خواهند بود. (این دو مثلث را ارتولژیک Orthologiques می‌نامند).



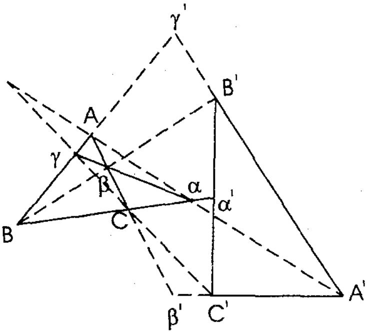
۲۴۷. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروضند. از نقطه‌های A ، B و C خطهایی به موازات $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ رسم می‌کنیم تا بترتیب ضلعهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ را در نقطه‌های a ، b و c قطع کنند. همچنین از نقطه‌های A' ، B' و



C' بترتیب خطهایی به موازات BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا ضلعهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ را در نقطه‌های a' ، b' و c' قطع نمایند. ثابت کنید:

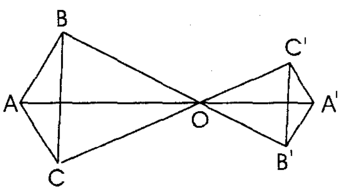
۱. اگر نقطه‌های a ، b و c روی یک خط راست باشند نقطه‌های a' ، b' و c' نیز بر یک استقامتند.

۲. اگر خطهای Aa ، Bb و Cc همرس باشند، خطهای $A'a'$ ، $B'b'$ و $C'c'$ نیز همرسند.



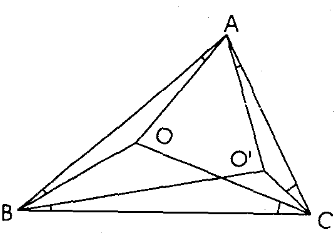
۲۴۸. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مفروضند. فرض می‌کنیم که خطهای AA' ، BB' و CC' ضلعهای BC، CA و AB را بترتیب در نقطه‌های α ، β و γ واقع بر یک خط راست قطع کنند. اگر α' ، β' و γ' بترتیب نقطه‌های تقاطع $(BC,B'C')$ ، $(CA,C'A')$ و $(AB,\ A'B')$ باشند؛ ثابت کنید که خطهای $A'\alpha'$ ، $B'\beta'$ و $C'\gamma'$ همرسند.

۲۴۹. اگر ضلعهای دو مثلث یکدیگر را دو به دو در سه نقطه واقع بر یک خط راست قطع کنند، خطهایی که رأسهای متناظر آنها را وصل می‌کنند، همرسند.



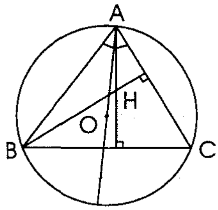
۲۵۰. دو مثلث نابرابر ABC و $A'B'C'$ چنانند که ضلعهای آنها نظیر به نظیر با هم موازی‌اند. ثابت کنید که سه خط AA' ، BB' و CC' همرسند.

نقطه‌های متقابل در مثلث

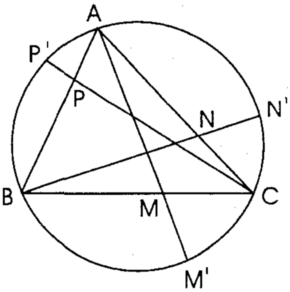


تعریف. مثلث ABC و نقطهٔ O را در صفحهٔ این مثلث در نظر می‌گیریم. قرینهٔ خطهای AO ، BO و CO، بترتیب نسبت به نیمسازهای زاویه‌های داخلی A ، B و C

در یک نقطه مانند O' همرسند، که این نقطه را نقطهٔ معکوس یا نقطهٔ متقابل نقطهٔ O می‌نامند. برای هر نقطه مانند O از صفحهٔ مثلث ABC، یک نقطه مانند O' با خاصیت بالا وجود دارد و بعکس، نظیر هر نقطه مانند O' یک نقطه مانند O در صفحهٔ مثلث با شرایط بالا، یافت می‌شود. بدین جهت دو نقطهٔ O و O' را دو نقطهٔ معکوس یا متقابل نسبت به مثلث ABC می‌نامند.



۲۵۱. ثابت کنید در هر مثلث، نقطهٔ تلاقی ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی آن مثلث، دو نقطهٔ متقابلند.

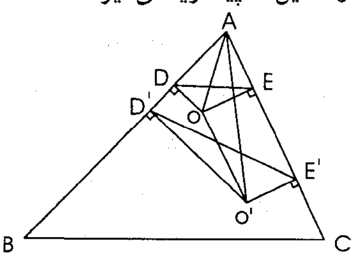


۲۵۲. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌های A، B و C خطهای دلخواهی رسم می‌کنیم تا ضلعها و کمانهای روبه رو را بترتیب در M' و M، N' و N و P' و P قطع کنند. ثابت کنید اگر حاصل عبارت:

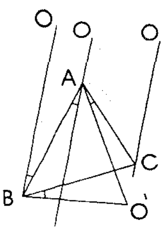
$$T = \frac{AM'}{MM'} + \frac{BN'}{NN'} + \frac{CP'}{PP'}$$

مینیمم شود، آن‌گاه سه خط مزبور همرسند. سپس نشان دهید $T \geq 12$.

مرحلهٔ اول یازدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۲



۲۵۳. تصویرهای دو نقطهٔ معکوس O و O' روی ضلعهای مثلث ABC، شش نقطه‌اند واقع بر یک دایره که مرکزش وسط پاره خط OO' است.



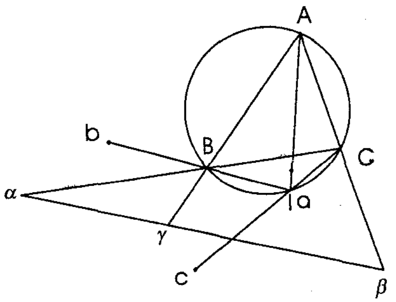
۲۵۴. اگر O و O' دو نقطهٔ معکوس، در مثلث ABC باشند:

۱. اگر نقطهٔ O در فاصلهٔ بی‌نهایت دور قرار داشته باشد، یعنی خطهای AO، BO و CO موازی باشند،

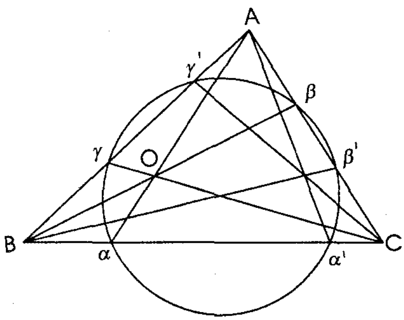
نقطهٔ معکوس O' روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد.

۲. بعکس، اگر نقطهٔ O' روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد، نقطهٔ O در فاصلهٔ بی‌نهایت دور واقع است.

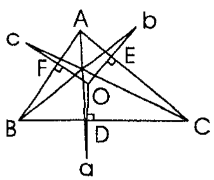
۲۵۵. مورب Δ خطهای BC ، CA و AB را بترتیب در نقطه‌های α ، β و γ قطع می‌کند. رأسهای A ، B و C را به نقطه‌های a ، b و c مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای $A\beta\gamma$ ، $B\gamma\alpha$ و $C\alpha\beta$ وصل می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای Aa ، Bb و Cc از یک نقطه مانند I می‌گذرند که این نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است.



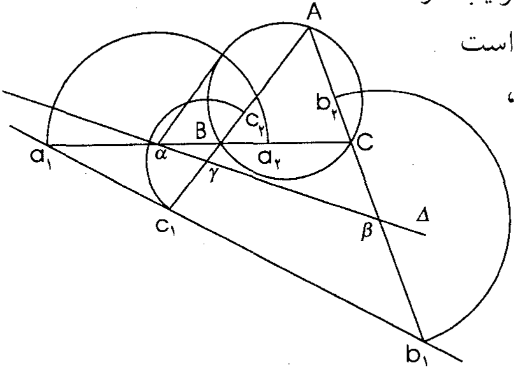
۲۵۶. مثلث ABC و نقطهٔ اختیاری (O) واقع در صفحهٔ مثلث مفروضند. از O به رأسهای مثلث وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا ضلعهای BC ، AC و AB را بترتیب در α ، β و γ قطع نمایند؛ دایرهٔ محیطی مثلث $\alpha\beta\gamma$ ضلعهای BC ، AC و AB را به ترتیب در نقطه‌های دیگر α' ، β' و γ' قطع می‌نماید. ثابت کنید $A\alpha'$ ، $B\beta'$ و $C\gamma'$ همرسند.



۲۵۷. از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC عمودهای OD، OE و OF را بترتیب بر ضلعهای BC ، AC و AB فرود می‌آوریم. سپس روی نیمخطهای به مبدأ Oی OD ، OE و OF و به طرف خارج مثلث ، پاره‌خطهای Da=Eb=Fc را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که خطهای Aa ، Bb و Cc همرسند.



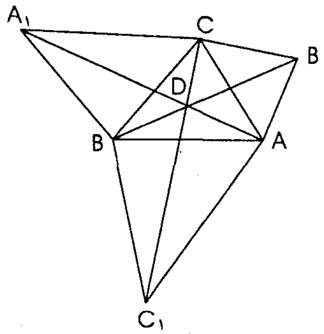
۲۵۸. مثلث ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است. مورب Δ ضلعهای BC ، CA و AB از این مثلث را بترتیب در نقطه‌های α ، β و γ قطع کرده است به قسمی که هر سه نقطهٔ تقاطع، خارج دایرهٔ O واقعند. به مرکز این نقطه‌ها و به شعاع طول مماسهایی که از این نقطه‌ها بر دایره رسم می‌شوند، سه دایره رسم می‌کنیم. این دایره‌ها ضلعهای BC ،CA و AB را بترتیب در نقطه‌های (a_1, a_2) ، (b_1, b_2) و (c_1, c_2) قطع می‌کنند به قسمی که a_1 ، b_1 و c_1 خارج دایرهٔ O و نقطه‌های a_2 ، b_2 و c_2 داخل این دایره واقعند:



۱. ثابت کنید که مجموعهٔ نقطه‌های (a_1, b_1, c_1) ، (a_1, b_2, c_2) ، (a_2, b_1, c_2) و (a_2, b_2, c_1) بر یک استقامتند.

۲. نشان دهید که مجموعهٔ خطهای (Aa_2, Bb_2, Cc_2)،(Aa_2, Bb_1, Cc_1) ، (Aa_1, Bb_2, Cc_1) و (Aa_1, Bb_1, Cc_2) همرسند.

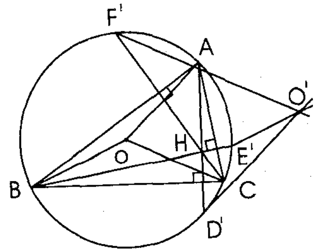
۲۵۹. روی ضلعهای مثلث ABC ، که زاویه‌هایی حاده دارد، سه مثلث متشابه با هم AC_1B ، BA_1C و CB_1A را در بیرون مثلث و با زاویه‌هاي حاده ساخته‌ایم؛ در ضمن، $\widehat{BA_1C} = \widehat{BAC_1} = \widehat{B_1AC}$ و $\widehat{AB_1C} = \widehat{ABC_1} = \widehat{A_1BC}$



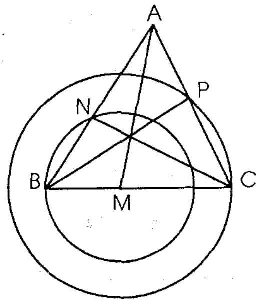
الف. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای AC_1B ، BA_1C و CB_1A در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

ب. ثابت کنید، خطهای راست AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم در همین نقطه، همرسند.

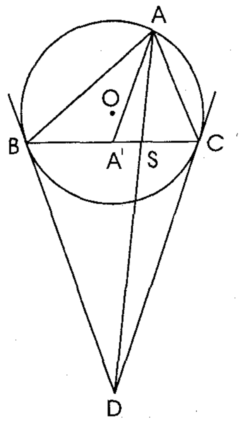
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۳



۲۶۰. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و ´D، ´E و ´F نقطه‌های برخورد AH ، BH و CH با دایرهٔ محیطی باشند، ثابت کنید خطهایی که از نقطه‌های ´D ، ´E و ´F بترتیب موازی OA ، OB و OC رسم می‌شوند، همرسند.

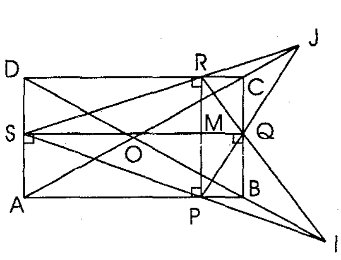


۲۶۱. به مرکز نقطهٔ M واقع بر ضلع BC از مثلث ABC دو دایره به طوری که از نقطه‌های B و C بگذرند، رسم کرده‌ایم که بترتیب AB و AC را دوباره در نقطه‌های N و P قطع می‌کنند. نقطهٔ M در کجای BC قرار گیرد تا خطهای AM ، BP و CN همرس باشند؟



۲۶۲. شبه میانهٔ رسم شده از یک رأس یک مثلث، از نقطهٔ برخورد مماسهایی که در دو رأس دیگر مثلث بر دایرهٔ محیطی آن رسم می‌شوند، می‌گذرد.

۵. ۳. ۲. ثابت کنید خطها همرسند (در چند ضلعیها)



۲۶۳. مستطیل ABCD به مرکز O و نقطهٔ M در صفحهٔ آن مفروضند. تصویر نقطهٔ M را بر روی ضلعهای AB ، BC، CD و DA بترتیب P ، Q ، R و S می‌نامیم. نشان دهید که خطهای QR ، PS و BD ، همچنین

سه خط QP ، RS و AC همرسند.

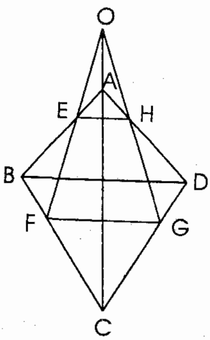
۲۶۴. نقطهٔ K را در درون مربع ABCD انتخاب کنید. از رأسهای A ، B ، C و D بترتیب بر خطهای راست BK ، CK ، DK و AK عمودهایی رسم کنید. ثابت کنید، این خطهای راست عمود، از یک نقطه می‌گذرند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۷۱

۲۶۵. نقطهٔ دلخواهی در درون مربع انتخاب، و آن را به همهٔ رأسهای مربع وصل کرده‌ایم. سپس، از هر رأس مربع، عمودی بر پاره خط راستی رسم کرده‌ایم که از رأس مجاور آن، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، گذشته است، ثابت کنید این چهار خط راست عمود، از یک نقطه می‌گذرند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۷۸

۲۶۶. چهار ضلعی ABCD را در نظر گرفته، دو خط به موازات قطر BD طوری رسم می‌کنیم که اولی AB را در E و AD را در H و دومی BC را در F و CD را در G قطع کند. ثابت کنید خطهای EF و HG و قطر AC همرسند.

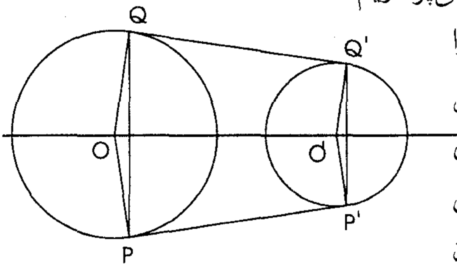


۲۶۷. در هر چهار ضلعی محیطی، قطرها و خطهایی که نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، در یک نقطه همرسند.

۲۶۸. ثابت کنید چهار خطی که از وصل کردن دو رأس یک چهار ضلعی محاطی به مرکز دایره نه نقطهٔ مثلثی که توسط سه رأس دیگر تعریف می‌شود به‌وجود می‌آیند، همرسند.

۲۶۹. **قضیه بریانشون**. ش. ژ. بریانشون قضیهٔ مهمی مربوط به شش ضلعی محیطی را ثابت کرده است که رابطه‌ای ظریف با قضیهٔ پاسکال دارد. روشی که او برای اثبات قضیه به کار برده، متکی بر «اصل دوگانگی» است که از جملهٔ اصول هندسه تصویری است. جستجوی اثبات اقلیدسی قضیه، برای حالتی که مقطع مخروطی به صورت دایره باشد، به مسألهٔ جالبی منجر شد که راه حل آن توسط ا. س. اسموگورزوسکی A.S.Smogorzhevskii ارائه گردید. اما قبل از بیان این راه

حل به بیان و اثبات لم به شرح زیر می‌پردازیم:



بـــر دایـــره‌ای دو نــقطهٔ P و Q را انتخاب و در این دو نقطه مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم. هر گـاه روی مماس در نقطهٔ P، نقطهٔ ´P و روی مماس در نقطهٔ Q نقطهٔ ´Q را چنان بـــرگزینیم کـــه ´PP´=QQ، و هر دو نقطهٔ ´P و ´Q در یک طرف خط PQ باشند، در این صورت دایـره‌ای وجود خواهد داشت که در ´P بر خط ´PP و در ´Q بر خط ´QQ مماس باشد. عمود منصف PQ که از مرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد، محور تقارن شکل است. پس عمود منصف ´P´Q نیز می‌باشد. عمودهایی که در ´P و ´Q بترتیب بر ´PP و ´QQ رسم شوند، روی محور تقارن شکل برخورد می‌کنند که این نقطه، مرکز دایرهٔ مطلوب است.

اکنون قضیهٔ اسموگورزوسکی را بیان می‌کنیم:

قضیه . هر گاه ضلعهای یک شش ضلعی بر دایره‌ای مماس باشند، سه قـطر ایـن شش ضلعی یا همرسند و یا متوازی‌اند.

۲۷۰. **عکس قضیه** . عکس قضیه چنین بیان می‌شود:

هرگاه سه قطر یک شش ضلعی همرس باشند، ضلعهای این شش ضلعی بر یک مقطع مخروطی مماس می‌باشند.

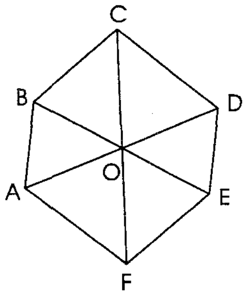
۲۷۱. ثابت کنید در هر پنج ضلعی محیطی، دو خط راستی که رأسهای غیر مـجاور را به‌هم وصل می‌کنند، با خطی که از رأس پنجم به نقطهٔ تماس ضلع مجاور وصل می‌شود، از یک نقطه می‌گذرند.

از بریانشون ، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

شارل ژولین بریانشون

در تاریخ ریاضیات، موارد متعددی وجود دارد که نام شخصی تنها به خاطر کشفی مشهور شده، که خود آن کشف جالب نبوده، بلکه انگیزهٔ خاص آن اهمیت داشته است. کار شارل ژولین بریانشون Ch. Julien Brianchon (متولد ۱۹ دسامبر ۱۷۸۳ در

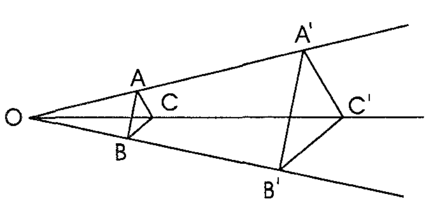
سورا، متوفی ۲۹ آوریل ۱۸۶۴ در ورسای) از این قبیل موارد است. او دانشجوی مدرسهٔ پلی تکنیک (۱۸۰۴) و بعدها (۱۸۰۸) افسر سواره نظام بود. بریانشون هنگامی که فقط ۲۲ سال داشت توانست دوال Dual قضیهٔ پاسکال را دربارهٔ هشت ضلعی محاط در مخروط، حل کند، که حاصل آن قضیهٔ بریانشون راجع به تلاقی خطهای متصل به نقطه‌های متقابل یک هشت ضلعی محیطی است. او استاد مدرسهٔ توپخانه شد، و مقاله‌های متعددی در زمینهٔ هندسه، مخصوصاً" منحنیهای درجهٔ دوم (۱۸۰۶) و خطهای درجهٔ سوم نوشت (۱۸۱۷).



۲۷۲. اگر در یک شش ضلعی، چهار ضلع دو به دو متقابل با هم مساوی و موازی باشند، ثابت کنید سه قطری که رأسهای مقابل را به‌هم وصل می‌کند، همرسند.

۲۷۳. یک شش ضلعی کوژ داده شده است و می‌دانیم. هر قطر بزرگ آن، شش ضلعی را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می‌کند. ثابت کنید، این قطرها همرسند.

المپیادهای ریاضی لنین‌گراد، ۱۹۷۸



۲۷۴. در دو چند ضلعی متشابه که هر دو ضلع متناظرشان موازی باشد، خطهایی که رأسهای متناظر را به هم وصل می‌کنند، همرسند.

۵.۳.۳. ثابت کنید خطها همرسند، (در شکلهای دیگر)

۲۷۵. سه خط راست موازی l ، m و n مفروضند. نیمخطهای راست SA ، SB و SC خط راست l را در نقطه‌های A ، B و C و خط راست m را در نقطه‌های E ، F و H قطع کرده‌اند. از نقطه‌های E ، F و H سه خط راست به موازات نیم خط راست SP رسم می‌کنیم تا خط راست n را در نقطه‌های L ، M و N قطع کند. ثابت کنید، خطهای راست LA ، MB ، NC و SP در یک نقطه به‌هم می‌رسند.

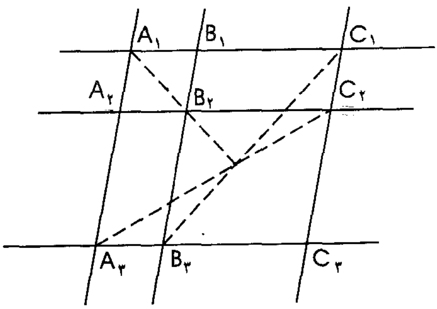
از کپلر ، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

کپلر

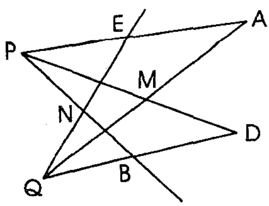
یوهان کپلر J. Kepler (متولد ۲۷ دسامبر ۱۵۷۱ در ویل در اشتات در ایالت وورتمبرگ آلمان، متوفی ۱۵ نوامبر ۱۶۳۰ در گنسبرگ)، هر چند به خاطر کارش در زمینهٔ نجوم معروف است، از ریاضیدانان بزرگ به شمار می‌رود. او در مدرسهٔ کلیسایی مولبرون، و در دانشگاه توبینگن درس خواند. در بیست و دو سالگی به تدریس ریاضیات و فلسفه و اخلاق در دبیرستان گراتس در اشتیرمارک پرداخت. دو سال (۱۵۹۹ - ۱۶۰۱) دستیار توگوبرائه بود، و در ۱۶۰۱ منجم دربار قیصر رودولف دوم و پس از آن منجم جانشینانش ماتیاس (۱۶۱۲) و فردیناند سوم (۱۶۱۵) شد. با این همه زندگیش بر اثر ناملایمات خانوادگی، کارهای درباری، و مشکلات مالی دستخوش تزلزل بود. او در تألیف ریاضیش خود را هندسه‌دانی عالی نشان می‌دهد و به جبر هم علاقهٔ زیادی داشت.

فکر پیوستگی را در هندسهٔ مقدماتی عرضه کرد (۱۶۰۴)، در استفاده از حساب مقادیر بی نهایت کوچک، به موفقیتهایی دست یافت (۱۶۱۵)، و برای توسعهٔ کاربرد لگاریتم کارکرد.

۲۷۶. سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقطه‌های ($C_۱$، $B_۱$و $A_۱$)، ($C_۲$، $B_۲$ و $A_۲$) و ($C_۳$، $B_۳$ و $A_۳$) بریده شده‌اند. ثابت کنید که خطهای $B_۳C_۱$، $C_۲A_۳$ و $A_۱B_۲$ همرسند.



۲۷۷. هرگاه نقطه‌های A، B، D، E، N و M چنان باشند که خطهای AE، DM و NB در P و خطهای AM، DB و NE در Q همرس باشند، خطهای AB، DE و NM نسبت به هم چه وضعی خواهند داشت؟



بخش ۶.

تشابه

بخش ۶. تشابه

۱.۶. تعریف تشابه

با کمی مسامحه می‌توان گفت، دو شکل هندسی در صورتی متشابه‌اند که دقیقاً" همشکل باشند، ولی لزوماً" هم اندازه نباشند. مثلاً" دو دایره همواره متشابه‌اند؛ هر دو مربع متشابه‌اند؛ هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند، و هر دو پاره خط متشابه‌اند.

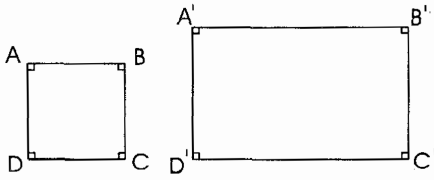
به بیان دیگر دو شکل در صورتی متشابه‌اند که یکی با تغییر مقیاس دیگری به‌دست آمده باشد. در تعریف دیگری برای تشابه می‌توان گفت: دو شکل در صورتی متشابه‌اند که اجزای خطی متناظر آنها متناسب، و زاویه‌های متناظرشان همنهشت باشند.

برای متشابه بودن دو چند ضلعی لازم است:

۱) زاویه‌های متناظر، متساوی باشند.

۲) ضلعهای متناظر، متناسب باشند.

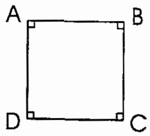
بدیهی است که برقراری یکی از این دو شرط به تنهایی، برای تشابه دو شکل کافی نیست؛ برای مثال، یک مربع و یک مستطیل را در نظر می‌گیریم:

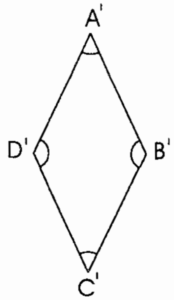


تحت تناظر $ABCD \Leftrightarrow A'B'C'D'$، زاویه‌های متناظر همنهشتند، زیرا تمام زاویه‌ها قائمه‌اند، ولی ضلعهای متناظر متناسب نیستند، یقیناً هیچ کدام از این دو شکل از تغییر مقیاس دیگری به‌دست نمی‌آید.

برای یک مربع و یک لوزی مشکل برعکس است. تحت تناظر $ABCD \Leftrightarrow A'B'C'D'$، ضلعهای متناظر متناسبند، ولی زاویه‌های متناظر متساوی نیستند؛ بنابراین یک مربع و یک لوزی متشابه نیستند. اما هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع

همواره متشابه‌اند؛ زیرا:
اولاً. زاویه‌های برابر دارند (همهٔ زاویه‌ها ۶۰° هستند). ثانیاً. ضلعهای دو مثلث متناسبند.





همچنین هر دو مربع همواره متشابه می‌باشند؛ اما هر دو لوزی همواره متشابه نیستند؛ زیرا ضلعهای متناظرشان متناسبند، اما زاویه‌های متناظر، همواره برابر نیستند.

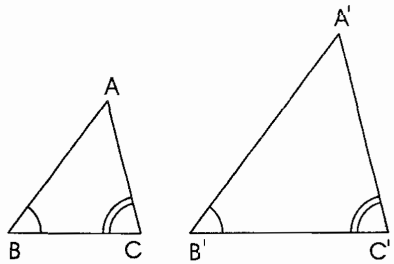
۶.۲. تشابه در مثلث

۶.۲.۱. تعریف و قضیه (تشابه دو مثلث مختلف الاضلاع)

دیدیم که برای تشابه دو چند ضلعی باید: ۱. زاویه‌های متناظر متساوی باشند ۲. ضلعهای متناظر متناسب باشند. اما، در دو مثلث با برقراری شرایط کمتری، ثابت می‌شود که بقیهٔ شرطهای تشابه برقرار است، یعنی دو مثلث متشابه‌اند. حالتهای تشابه دو مثلث مختلف‌الاضلاع عبارتند از:

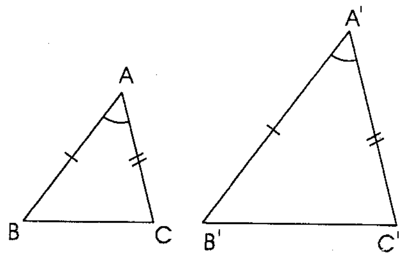
۲۷۸. حالت اول . قضیه: هرگاه دو زاویه از یک مثلث ، نظیر به نظیر با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{B}' = \hat{B} \\ \hat{C}' = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



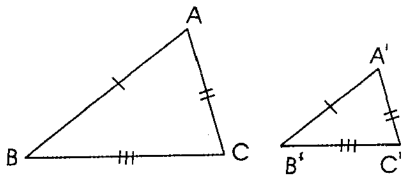
۲۷۹. حالت دوم . قضیه . اگر یک زاویه از مثلثی، با یک زاویه از مثلث دیگر مساوی، و ضلعهای این زاویه‌ها در دو مثلث، نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A'} \\ \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC} \end{cases} \Rightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$



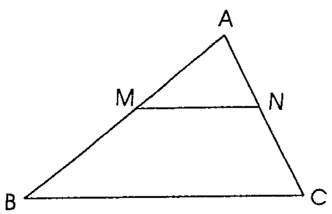
۲۸۰. حالت سوم . قضیه : هرگاه سه ضلع از یک مثلث، با سه ضلع از مثلثی دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

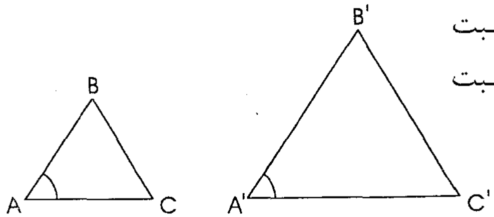
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta\ A'B'C' \sim \Delta\ ABC$$



۲۸۱. **قضیه اصلی تشابه.** اگر خطی موازی با یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطهٔ متمایز قطع کند، مثلثی متشابه با مثلث اول به وجود می‌آید.

$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta\ AMN \sim \Delta\ ABC$$





۲۸۲. اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحتهایشان برابر مجذور نسبت دو ضلع متناظر آنهاست.

۶.۲.۲. ثابت کنید دو مثلث متشابه‌اند

۲۸۳. مثلث ABC که اندازه‌های دو زاویهٔ آن 45° و 60° هستند، باکدام یک از مثلثهای زیر می‌تواند متشابه باشد؟

الف. مثلثی که اندازه‌های دو زاویهٔ آن 75° و 60° باشد.

ب. مثلثی که در آن $\hat{A}' = 75^\circ$، $A'B' = 18$ و $B'C' = 18$ سانتی‌متر باشد.

۲۸۴. در مثلث ABC زاویهٔ A مساوی 60° و دو ضلع این زاویه ۶ و ۴ سانتی‌مترند و از مثلث $A'B'C'$، زاویهٔ $\hat{A}'$ مساوی 60° و دوضلع آن ۱۸ و ۱۲ سانتی‌مترند. آیا این دو مثلث متشابه‌اند؟

۲۸۵. طول ضلعهای مثلثی ۱۲ ، ۱۸ و ۲۷ سانتی‌متر و طول ضلعهای مثلث دیگر ۱۲ ، ۱۸ و ۸ سانتی‌متر است. ثابت کنید این دو مثلث متشابه‌اند.

۲۸۶. مثلث ABC که اندازه‌های ضلعهای آن ۸، ۱۲ و ۱۶ سانتی مترند، باکدام یک از مثلثهایی که اندازهٔ ضلعهای آنها داده شده‌اند متشابه‌اند؟

الف. مثلثی به ضلعهای ۹ ، ۱۲ و ۶ سانتی‌متر.

ب. مثلثی به ضلعهای ۶ ، ۸ و ۱۲ سانتی‌متر.

پ. مثلثی به ضلعهای ۸ ، ۹ و ۱۲ سانتی‌متر.

ت. مثلثی به ضلعهای ۶ ، ۱۰ و ۱۲ سانتی‌متر.

۲۸۷. اگر در دو مثلث دو ضلع متناسب و زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگتر از یک مثلث، با زاویهٔ نظیرش برابر باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند (ضلع بزرگتر یکی از دو ضلع متناسب است). مسأله را برای زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچکتر مطالعه کنید.

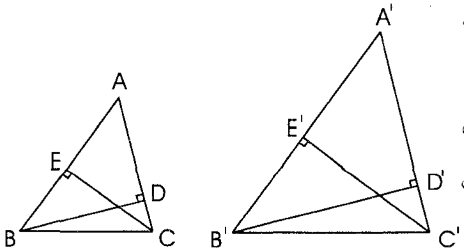
۲۸۸. ثابت کنید :

۱. اگر ضلعهای متقابل دو مثلث برهم عمود باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

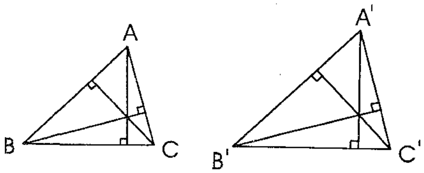
۲. اگر ضلعهای متناظر دو مثلث متوازی باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۲۸۹. ثابت کنید دو مثلث که با مثلث دیگری متشابه باشند، خود متشابه‌اند.

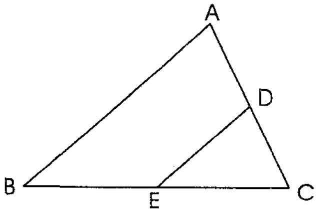
۲۹۰. هرگاه یک زاویه از مثلثی با یک زاویه از مثلث دیگر برابر بوده، ارتفاعهای نظیر دو ضلع این زاویه در دو مثلث نیز متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



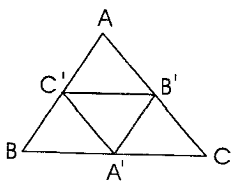
۲۹۱. ثابت کنید هرگاه در دو مثلث سه ارتفاع، نظیر به نظیر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



۲۹۲. ثابت کنید : اگر D و E در ΔABC بترتیب وسطهای AC و BC باشند، $\Delta CDE \sim \Delta\ CAB$.



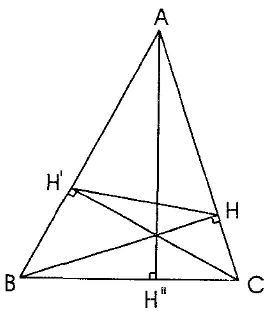
۲۹۳. نقطه های ´A ، ´B و ´C بترتیب وسطهای ضلعهای BC ، AC و AB هستند. ثابت کنید دو مثلث ABC و ´A´B´C متشابه‌اند.



۲۹۴. در مثلث ABC ارتفاعهای BH و ´CH را رسم می‌کنیم:

۱. ثابت کنید که دو مثلث ABH و ´ACH متشابه‌اند و رابطهٔ $AH.AC = AH' \times AB$ برقرار است.

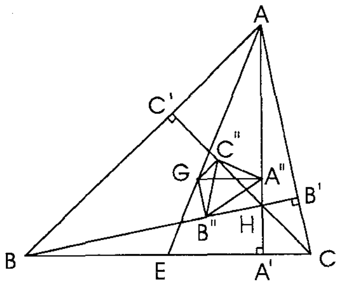
۲. ثابت کنید مثلث ´AHH با مثلث ABC متشابه است.



۳. مثلثهای دیگری را که از رسم سه ارتفاع مثلث پدید می‌آیند و با مثلث A B C

متشابه‌اند، نام ببرید.

۲۹۵. در مثلث ABC نقطه‌های A'' ، B'' و C'' را بر ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' در یک سوم هر یک از آنها، ابتدا از پایشان، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که:

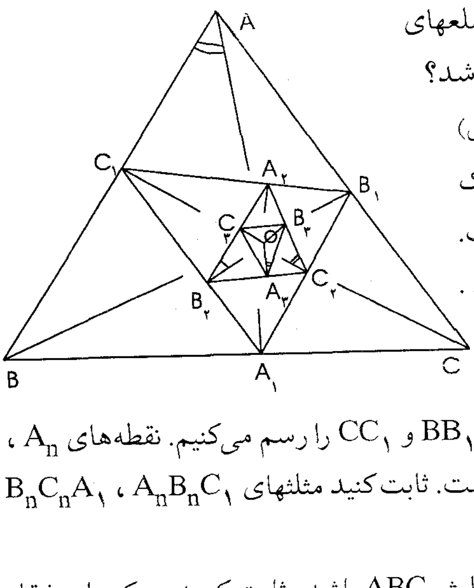


۱. این سه نقطه و H محل تلاقی ارتفاعها و نقطهٔ G محل برخورد سه میانهٔ مثلث ABC بر یک دایره واقعند.

۲. مثلث $A''B''C''$ با مثلث ABC ، متشابه است.

۲۹۶. در مثلثی، ضلع a واسطهٔ هندسی بین دو ضلع دیگر است. ثابت کنید که این مثلث با مثلثی که با ارتفاعهای آن تشکیل می‌شود، متشابه است و برای این چنین تشابهی ، حالت دیگری وجود ندارد. همچنین اگر در مثلثی $b^۲ + c^۲ = ۲a^۲$ باشد، این مثلث ، با مثلثی که با میانه‌هایش ساخته می‌شود، متشابه است و حالت دیگری برای چنین تشابهی وجود ندارد. آیا برای نیمسازها نیز می‌توان مثلثی یافت که خاصیت تشابه مثلث با ضلعهای نیمسازها، با مثلث اصلی، برقرار باشد؟

(هندسه دوایر، دکتر هشترودی)

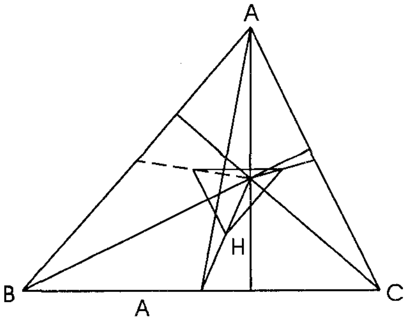


۲۹۷. قضیه . مثلث عمودی سوم نظیر یک نقطه، با مثلث مفروض متشابه است.

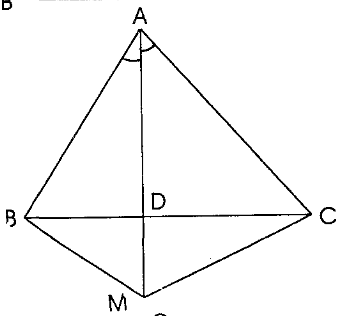
. $\Delta\ A_۳B_۳C_۳ \sim \Delta\ ABC$

۲۹۸. در مثلث ABC ارتفاعهای $AA_۱$ ، $BB_۱$ و $CC_۱$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های A_n ، B_n و C_n میانگاههای این ارتفاعهاست. ثابت کنید مثلثهای $A_nB_nC_۱$ ، $B_nC_nA_۱$ و $A_nC_nB_۱$ متشابه‌اند.

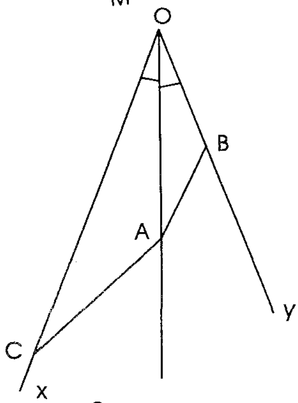
۲۹۹. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، ثابت کنید مرکزهای ثقل مثلثهای HBC ، HCA و HAB مثلثی می‌سازند، که با مثلث ABC متشابه است



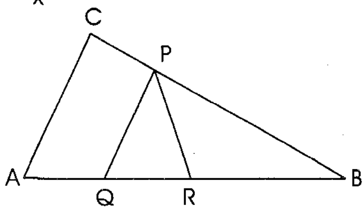
(H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC است). ضلعهای این مثلث با مثلث ABC موازی‌اند و محل برخورد ارتفاعهای مثلث جدید منطبق بر مرکز ثقل مثلث ABC است.



۳۰۰. در مثلث ABC روی نیمساز زاویهٔ A ، نقطهٔ M طوری قرار دارد که رابطهٔ $AM^{۲} = AC \, . \, AB$ برقرار است. ثابت کنید دو مثلث AMB و AMC متشابه‌اند.



۳۰۱. نقطهٔ A را روی نیمساز زاویهٔ xoy اختیار کرده، روی ضلع ox نقطهٔ B را طوری اختیار می‌کنیم که $OB=\frac{۳}{۵}OA$ باشد، همچنین روی ضلع oy نقطهٔ C را طوری تعیین می‌نماییم که $OC=\frac{۵}{۳}OA$ باشد، ثابت کنید دو مثلث OAB و OAC متشابه‌اند.



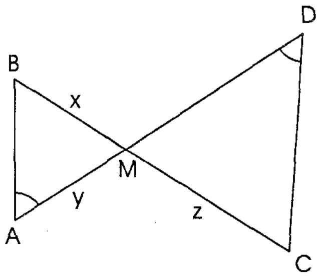
۳۰۲. در شکل $PQ = PR$ و $PQ \parallel AC$ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف. $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}$

ب. $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}$

پ. $\frac{BP}{BC} = \frac{PQ}{AC}, \angle PBQ \cong \angle CBA, \Delta PBQ \sim \Delta CBA$

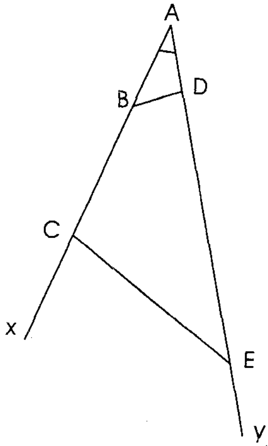
ت. $\frac{BP}{BC} = \frac{PR}{AC}, \angle PBQ \cong \angle CBA, \Delta PBR \sim \Delta CBA$



۳۰۳. در شکل روبه رو x ، y و z طولهای MB ، MA و MC می باشند:

الف. برای تشابه دو مثلث، طول MD باید چقدر باشد؟

ب. اگر z = ۲x ، آیا $\hat{D} = ۲\hat{A}$ ؟



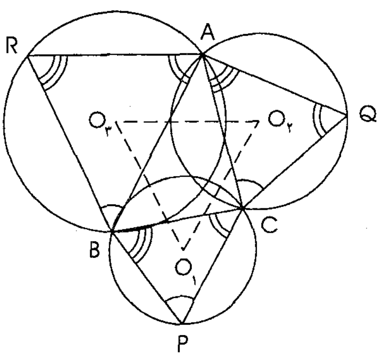
۳۰۴. زاویهٔ xAy مفروض است. روی Ax طولهای AB = ۲۸ و BC = ۴۴ و روی Ay طولهای AD = ۲۱ و DE = ۷۵ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید:

۱. دو مثلث ABD و ACE متشابه‌اند؛

۲. چهارضلعی BDEC محاطی است؛

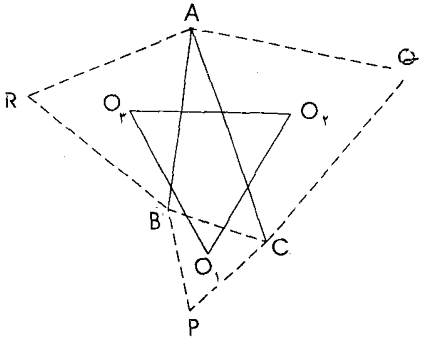
۳. اگر طول BD = ۳۵ باشد، طول CE را حساب کنید.

۳۰۵. ثابت کنید مثلثی که رأسهایش پای ارتفاع وارد بر قاعدهٔ یک مثلث، و وسطهای دو ارتفاع وارد بر دو ضلع دیگر آن باشد، با مثلث اصلی متشابه است و دایرهٔ محیطی آن از محل برخورد ارتفاعها و وسط قاعدهٔ این مثلث می‌گذرد.



۳۰۶. **قضیه** . هرگاه روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه PCB، CQA و BAR را بسازیم (زاویه‌های متناظر بترتیب نامگذاری مثلثهاست)، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها، مثلثی تشکیل می‌دهند که با آن مثلثها، متشابه است.

حالت خاص این قضیه را به این صورت بیان می‌کنیم.



۳۰۷. قضیه . هرگاه روی ضلعهای یک مثلث و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع بسازیم، مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها نیز یک مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند.

از قرار معلوم، ناپلئون بناپارت تا اندازه‌ای ریاضیدان بوده، به ویژه علاقه‌ای وافر به هندسه داشته است. می‌گویند پیش از آن که حکومت فرانسه را در دست گیرد با ریاضیدانان نامی، لاگرانژ و لاپلاس جلسه‌های بحث و گفتگو داشته است. حتی این که ریاضیدان اخیر، یک بار به طور جدی به او چنین گفته است : «ژنرال ، درسی از هندسه، آخرین چیزی است که از شما مورد تمناست»

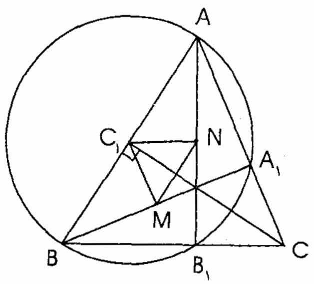
لاپلاس

پی‌یرسیمون مارکی دولاپلاس P. S. Marquis de Laplace (متولد ۲۳ مارس ۱۷۳۹ در بومون آن اوژ درکالوادو، متوفی ۵ مارس ۱۸۲۷ در پاریس)، در خانواده‌ای فقیر زاده شد، و آموزش اولیه‌اش مرهون کسانی بود که در وجود او آیندهٔ درخشانی را می‌دیدند. او هرگز از این دوران سختی، سخنی به‌میان نیاورد. تقریباً نخستین گزارشهای موثقی که از زندگیش داریم او را هنگام تحصیل و سپس در اشتغال به‌تدریس ریاضی در مدرسهٔ نظامی بومون نشان می‌دهد و او چنان شهرتی کسب کرده، که برای جانشینی بزو در امتحان رشتهٔ توپخانه دعوت می‌شود (۱۷۸۴). بعدها در ایجاد مدرسهٔ پلی‌تکنیک، و اکول نرمال، شرکت داشت. ناپلئون به او لقب کنت داد و او را به وزارت کشور منصوب کرد (۱۷۹۹). پس از آن‌که ناپلئون شش ماه خوی غریب او را تحمل کرد، سرانجام اظهار داشت او حساب مقادیر بی‌نهایت کوچک را در کار خود دنبال می‌کند، و از کار معزولش ساخت. پس از آن لاپلاس سناتور شد.

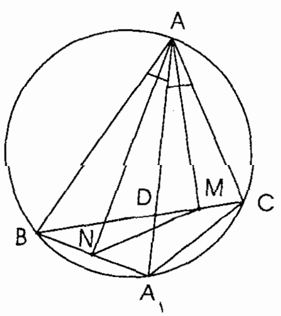
پی‌یر سیمون لاپلاس

وقتی لویی هیجدهم به سلطنت رسید، لاپلاس را به مقام اشراف ارتقا داد و به او لقب مارکی بخشید (۱۸۱۷).

نام او با نجوم و مکانیک آسمانی پیوند محکمی دارد، ولی در زمینهٔ احتمالات، حساب انتگرال و دیفرانسیل ، معادلات دیفرانسیلی و زمین سنجی هم اثرهایی نوشت . در مقام استاد اصول مکانیک آسمانی، اعتباری جهانی دارد. ناتانیل باوديچ (۱۸۳۸-۱۷۷۳) منجم خودساختهٔ امریکایی، در مورد سبک بیان لاپلاس می‌گوید: «هرگز در اظهارات لاپلاس به موضوع بدیهی برنخورده‌ام. مثلاً" پس از آن که ساعتها زحمت کشیده‌ام و توانسته‌ام شکاف موجود را پر کنم ، آن گاه دریافته‌ام که موضوع تا چه حد بدیهی است».



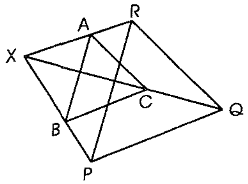
۳۰۸. به عنوان قطر روی ضلع AB از مثلث ABC دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره خطهای AC و BC را بترتیب در نقطه‌های A_1 و B_1 قطع می‌کند. ثابت کنید میانگاههای وترهای AB_1 و BA_1 و پای ارتفاع مرسوم از رأس C در مثلث مفروض مثلثی به‌وجود می‌آورند، که با مثلث اولیه متشابه است.



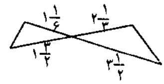
۳۰۹. نیمساز AD رسم شده از رأس A در مثلث ABC ، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ A_1 قطع می‌کند. M و N بترتیب میانگاههای پاره خطهای CD و A_1B هستند. ثابت کنید، مثلثهای ACA_1 و AMN متشابه هستند.

۳۱۰. ارتفاعهای مثلث را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی آن را قطع کنند. سه نقطهٔ تلاقی، مثلثی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که این مثلث ، با مثلث ارتفاعی مثلث مفروض، متشابه است.

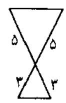
۳۱۱. از چهار نقطهٔ P ، Q ، R و X هیچ سه نقطه‌ای همخط نیستند و X بیرون $\Delta\ PQR$ قرار دارد. پاره خطهای XP ، XQ و XR را رسم کنید. A را نقطه‌ای از XR بگیرید و از آن، خطی به موازات PR رسم کنید که XP را در B قطع کند. از B خطی به موازات PQ رسم کنید تا XQ را در نقطه C قطع کند، AC را رسم کنید. ثابت کنید $\Delta\ ABC \sim \Delta\ PQR$.



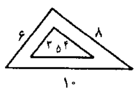
۳۱۲. در هر قسمت مثلثها را بررسی کنید، و تعیین کنید کدام مثلثها متشابه‌اند؟ آنهایی که متشابه‌اند، طبق چه قضیه یا چه تعریفی؟



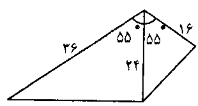
(الف)



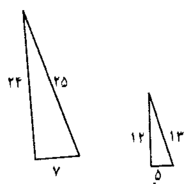
(ب)



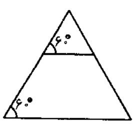
(پ)



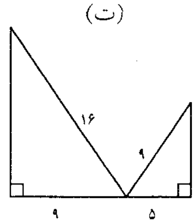
(ت)



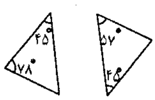
(ث)



(ج)



(چ)



(ح)

۳۱۳. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف. دو مثلث متشابه لزوماً متساوی‌اند.

ب. هر دو مثلث متساوی متشابه‌اند.

پ. هر دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند.

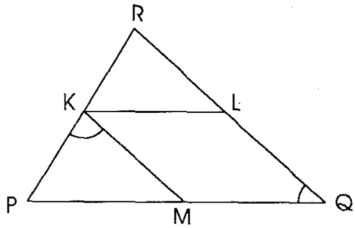
ت. هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع متشابه‌اند.

ث. اگر دو مثلث متشابه باشند سه زاویه آنها نظیر به نظیر متساوی‌اند.

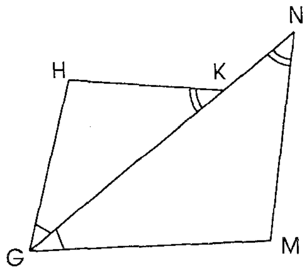
ج. اگر سه ضلع دو مثلث نظیر به نظیر متساوی باشند دو مثلث متشابه‌اند.

۶. ۲. ۳. دو مثلث متشابه‌اند، مطلوب است:

۶. ۲. ۳. ۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۳۱۴. در شکل رو به رو:
$\Delta PMK \sim \Delta KLR$ ، ثابت کنید :
$\hat{Q} = M\hat{K}L$

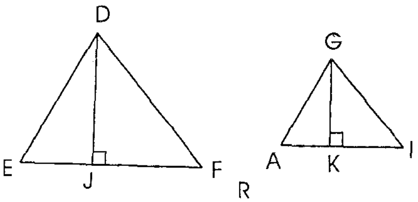


۳۱۵. در شکل روبه رو
$\angle MGN \cong \angle HGK$ ، $GH = ۸$ ،
$GK = ۱۲$، $GM = ۱۰$ و $KN = ۳$،
ثابت کنید: $\angle HKG \cong \angle N$

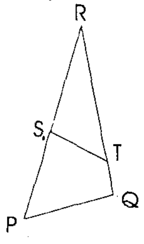
۶. ۲. ۳. ۲. اندازهٔ ضلع مثلث

۳۱۶. دو مثلث متشابه داریم ، مساحت مثلث بزرگتر ۹ برابر مساحت مثلث کوچکتر است. اگر طول یک ضلع مثلث کوچکتر ۵ سانتی‌متر باشد، طول ضلع متناظر مثلث بزرگتر چه‌قدر است؟

۳۱۷. در دو مثلث متشابه ، مساحت یکی ۱۱ برابر دیگری است. اگر طول یک ضلع از مثلث کوچکتر ۷ سانتی‌متر باشد، طول ضلع متناظر در مثلث بزرگتر را بیابید.

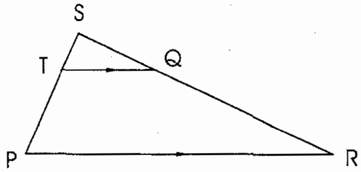


۳۱۸. در شکل روبه رو دو مثلث DEF و GHI با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$ متشابه‌اند، و $GK = \frac{۳}{۲} DJ$؛ اگر $HI = ۲۰$ باشد، طول EF را حساب کنید.



۳۱۹. در شکل رو به رو $\Delta RST \sim \Delta RQP$.
اگر $RT = ۱۲$ ، $TQ = ۳$ ، و PR به اندازه ۸ واحد از RS بزرگتر باشد، RS چه قدر است؟

۳۲۰. در شکل $\Delta STQ \sim \Delta SPR$.

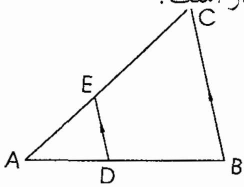


الف. اگر $ST = ۳$، $TQ = ۷$ و $SP = ۱۰$؛ PR چه قدر است؟

ب. اگر $ST = ۴$، $TP = ۶$ و $TQ = ۸$؛ PR چه قدر است؟

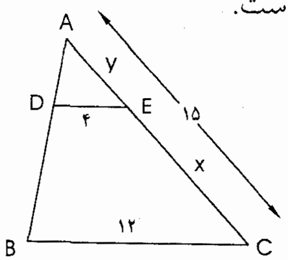
پ. اگر $TQ = ۵$، $PR = ۱۵$، و $SQ = ۴$؛ QR چه قدر است؟

۳۲۱. در شکل $\Delta ABC \sim \Delta ADE$. اگر $AD = ۵$، $AE = ۶$، $BC = ۱۲$ و $AB = ۱۵$؛ AC و DE را بیابید.

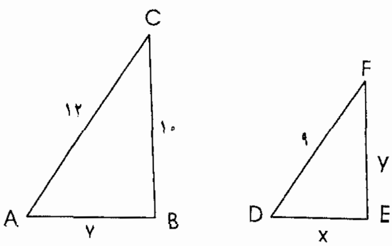


۳۲۲. اگر $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$. آیا می‌توان نتیجه گرفت $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ؟ چرا؟

۳۲۳. در شکل زیر $\Delta\, ADE \sim \Delta\, ABC$ یا $DE \parallel BC$ است.
اندازه‌های x و y را بیابید.



۳۲۴. داریم $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ و طولهای ضلعها در شکل مشخص شده‌اند. x و y را بیابید.

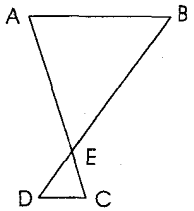


۳۲۵. طول ضلعهای مثلث ABC عبارتند از: $AC = ۴$، $BC = ۵$ و $AB = ۶$. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلعهای مثلثی که با مثلث ABC متشابه و طول محیطش ۲۰ سانتیمتر است.

۳۲۶. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. اگر طول ضلعهای مثلث ABC ، ۵، ۸ و ۱۱ سانتیمتر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۶۰ سانتی مترباشد، طول ضلعهای مثلث $A'B'C'$ را به دست آورید.

۳۲۷. مثلث ABC که طول ضلعهای آن ۳ ، ۴ و ۵ است مفروض می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلعهای مثلثی متشابه با آن که محیط و مساحت آن با یک عدد نمایش داده شوند.

۳۲۸. AC و BD در E متقاطعند به نحوی که $AB \parallel CD$ و $AB = ۳CD$. اگر $AC = ۲۰$ ، AE و EC چه‌قدر می‌باشند؟



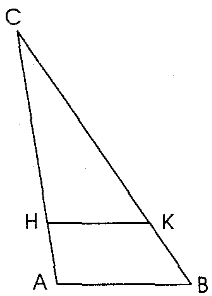
۳۲۹. در $\triangle ABC$ ، $HK \parallel AB$ ($\triangle CAB \sim \triangle CHK$).

الف. اگر $AH = ۳$ ، $BK = ۵$ ، $CK = ۱۲$ ؛ $CH = ?$

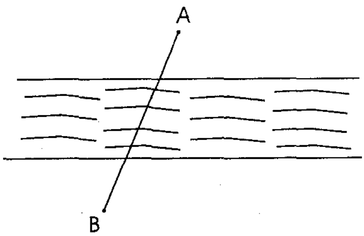
ب. اگر $AC = ۱۴$ ، $AH = ۶$ ، $CK = ۱۲$ ؛ $BC = ?$

پ. اگر $CH = ۹$ ، $AH = ۴$ ، $HK = ۳$ ؛ $AB = ?$

ت. اگر $AH = ۴$ ، $CH = BK$ ، $BC = ۴۸$ ؛ $CH = ?$



۳۳۰. دو نقطهٔ A و B در طرفین یک رودخانه واقعند. می‌خواهیم فاصلهٔ نقطهٔ B را از نقطهٔ A بدون گذشتن از عرض رودخانه به‌دست آوریم.



۶. ۲. ۳. ۳. اندازهٔ پاره خط

۳۳۱. قاعدهٔ یک مثلث ۱۵ سانتی‌متر است. دو پاره‌خط موازی با قاعده، متکی بر دو ضلع دیگر رسم می‌شود و مثلث را به سه قسمت با مساحتهای متساوی تقسیم می‌کنند. طول پاره‌خط موازی و نزدیکتر به قاعدهٔ مثلث چند سانتی‌متر است؟

الف. $۵\sqrt{۶}$ ب. ۱۰ ج. $۴\sqrt{۳}$ د. ۷/۵ هـ. هیچ یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

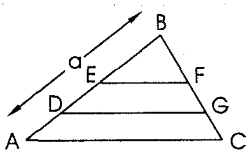
۳۳۲. از نقطهٔ P واقع در داخل مثلث ABC ، خطی موازی قاعده AB رسم شده است که مثلث را به دو قسمت با مساحتهای متساوی تقسیم کرده است. اگر طول ارتفاع وارد بر AB برابر ۱ باشد، آنگاه فاصله P از AB برابر است با:

الف. $\frac{۱}{۲}$ ب. $\frac{۱}{۴}$ ج. $۲-\sqrt{۲}$ د. $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$ هـ. $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۸}$

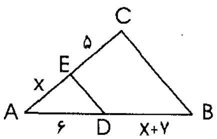
مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۳۳۳. در ΔABC ، CD ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB است. می‌خواهیم خط L را به موازات AB رسم کنیم که مثلثی متشابه با ΔABC ایجاد کند، ولی مساحت آن نصف مساحت ΔABC باشد. اگر L، CD را در نقطهٔ M قطع کند و $CD = ۱$؛ CM چه قدر است؟

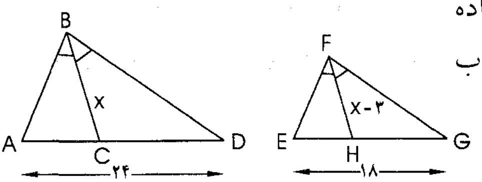
۳۳۴. مثلث ABC به وسیلهٔ خطهای موازی ضلع AC به سه شکل معادل تقسیم شده است. اگر $AB = a$ باشد، قسمتهایی را که خطهای مزبور روی AB جدا می‌کنند، پیدا کنید.



۳۳۵. در شکل $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ $(DE \parallel BC)$ و طولهای پاره خطها در شکل مشخص شده‌اند. مقدار x را تعیین کنید.

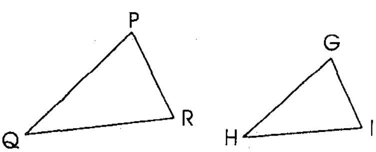


۳۳۶. در شکل روبه رو دو مثلث متشابه‌اند و BC نیمساز زاویهٔ B و متناظر با FH نیمساز زاویهٔ F است. با استفاده از مقادیر داده شده، x را حساب کنید.



۶. ۲. ۳. ۴. اندازهٔ محیط مثلث، نسبت محیطها

۳۳۷. داریم $\Delta PQR \sim \Delta GHI$. اگر $PQ = ۸$، $QR = ۶$، $PR = ۱۱$، و $HI = ۲۴$ محیط GHI چه‌قدر است؟



۳۳۸. اندازهٔ ضلعهای یک مثلث ۷ ، ۹ و ۱۴ است. محیط مثلث متشابهی را بیابید که بزرگترین ضلع آن ۲۱ باشد.

۳۳۹. نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۱۶}{۲۵}$ است. نسبت محیطهای آنها را بیابید.

۶. ۲. ۳. ۵. نسبت تشابه

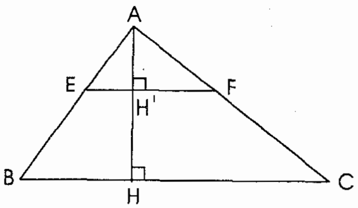
۳۴۰. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت اندازهٔ نیمسازهای دو زاویهٔ متناظر، با نسبت دو ضلع متناظر برابر است.

۳۴۱. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاعهای متناظر، برابر با نسبت ضلعهای متناظر است.

۳۴۲. ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های متناظر، با نسبت دو ضلع متناظر برابر است.

۳۴۳. مساحتهای دو مثلث متشابه ۸۱ و ۴۹ سانتی‌متر مربع است. نسبت ضلعهای متناظر این دو مثلث چقدر است؟

۳۴۴. در شکل، $EF \parallel BC$ است. اگر نسبت مساحتهای مثلثهای AEF و ABC برابر $\frac{۱}{۶}$ باشد، نسبت ارتفاعهای متناظر را به دست آورید.



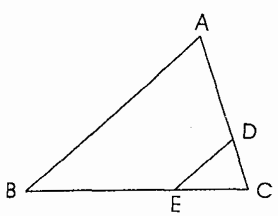
نکته. به طور کلی در دو شکل متشابه، نسبت اجزاء خطی متناظر ، مساوی نسبت تشابه آن دو شکل است.

۶. ۲. ۳. ۶. اندازهٔ مساحت مثلث

۳۴۵. در دو مثلث متشابه، طول یک ضلع اولی ۵ برابر طول ضلع متناظرش از مثلث دوم است. اگر مساحت مثلث کوچکتر $۶cm^۲$ باشد، مساحت مثلث بزرگتر چه‌قدر است؟

۳۴۶. محیطهای دو مثلث ۲۵ و ۴۵ است. مساحت مثلث کوچکتر ۵۰ است. اگر مثلثها متشابه باشند، مساحت مثلث بزرگتر چه‌قدر است؟

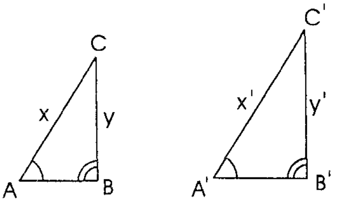
۳۴۷. در ΔABC، D بین A و C است به نحوی که $AD = ۲CD$ و E روی BC است به نحوی که $DE \parallel AB$ مساحت ΔCDE و مساحت مثلث ABC چه نسبتی با هم دارند؟ اگر $a\square ABED = ۴۰$ ، $a\Delta ABC$ چه‌قدر است؟



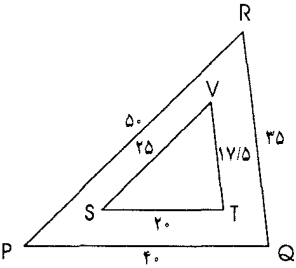
۶. ۲. ۳. ۷. نسبت مساحتها

۳۴۸. ضلعهای بزرگتر دو مثلث متشابه، بترتیب ۵ سانتی‌متر و ۶ سانتی‌مترند. نسبت مساحتهای آنها چه‌قدر است؟

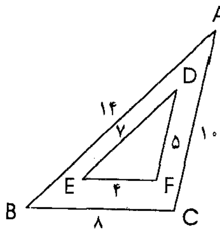
۳۴۹. در شکل $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ است. نسبت مساحتهای دو مثلث چه‌قدر است؛ اگر $x = ۵$ و $x' = ۷$؟؛ اگر $y = ۴$، $y' = ۳\sqrt{۳}$؟؛ اگر $x = ۶$، $y = ۲\sqrt{۵}$، و $y' = x$.



۳۵۰. مثلثهای PQR و STV به‌صورت شکل روبه‌رو مفروضند. نسبت مساحتهای آنها را بیابید.



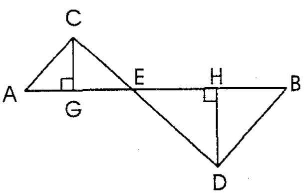
۳۵۱. نسبت مساحتهای دو مثلث ABC و DEF را بیابید.



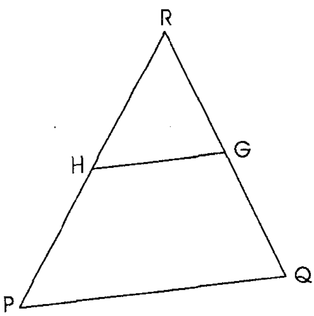
۳۵۲. درشکل $DH \perp AB, AB \cap CD = \{E\}$ و $\frac{EB}{ED} = \frac{EA}{EC}$. اگر $CG = ۶$، $DH = ۸$ و $AB = ۳۵$؛ تعیین کنید:

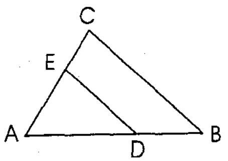
الف. $\frac{a\Delta ACE}{a\Delta BDE}$

ب. $a\Delta BDE$



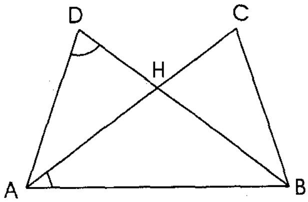
۳۵۳. در مثلث G,PQR وسط QR و H وسط PR است.نسبت $a\Delta GHR$ به $a\Delta PQR$ چه‌قدر است؟ نسبت $a\Delta GHR$ به $a\square PQGH$ چه‌قدر است؟





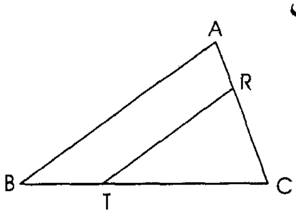
۳۵۴. درشکل $BC \parallel DE$ و $\frac{a\Delta ADE}{a\Delta ABC}=\frac{۲}{۵}$
نشان دهید که:
الف. $a\Delta ADE = \frac{۲}{۵}\, a\Delta ABC$
ب. $a\Delta ADE = \frac{۲}{۳}\, a\square DBCE$

۶. ۲. ۳. ۸. بررسی رابطه‌های متری



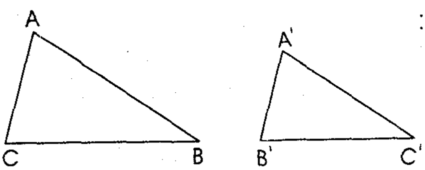
۳۵۵. در شکل روبه‌رو $\Delta ABC \sim \Delta DAB$ است؛
الف. ثابت کنید AB واسطهٔ هندسی بین AD و BC است.
ب. اگر $(AB,AC,BC)\sim(AH,AB,BH)$
ثابت کنید $\Delta\ AHB \sim \Delta\ DAB$

۶. ۲. ۳. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۵۶. در ΔABC دو نقطهٔ R و T بترتیبی هستند که $A-R-C$ و $B-T-C$. اگر دو مثلث RTC و ABC متشابه باشند، ثابت کنید $RT \parallel AB$.

۳۵۷. اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند، هر یک از عبارتهای زیر را کامل کنید:



الف. $\frac{AC}{\square} = \frac{CB}{C'B'}$ ب. $\hat{B} = \square$
پ. $\frac{B'A'}{\square} = \frac{A'C'}{AC}$ ت. $\hat{C} = \square$

۳۵۸. ثابت کنید:
الف. اگر یک مثلث با زاویه‌های حاده، با مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای این مثلث می‌باشند، متشابه باشد، دو مثلث متساوی‌الاضلاعند.
ب. اگر یک مثلث منفرجه‌الزاویه، با مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای آنند، متشابه باشد. زاویه‌های آن : (۷ : ۱۸۰) ، (۷ : ۳۶۰) و (۷ : ۷۲۰) است.

۳۵۹. اگر مثلث S در مثلث T محاط باشد و دو مثلث متشابه باشند، ثابت کنید محل برخورد ارتفاعهای مثلث S بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث T منطبق است.

۳.۶. تشابه در مثلثهای قائم‌الزاویه

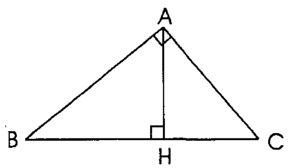
۳.۶. ۱. تعریف و قضیه

۳۶۰. **قضیه** . اگر یک زاویهٔ حاده از مثلث قائم الزاویه‌ای، با یک زاویهٔ حاده از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۳۶۱. **قضیه** . اگر دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از یک مثلث قائم الزاویه، با دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۳۶۲. **قضیه** . اگر وتر و یک ضلع دیگر از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با وتر و یک ضلع دیگر از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۳۶۳. **قضیه** . در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، مثلث را به دو مثلث بخش می‌کند که با هم، و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



$\hat{A} = ۹۰^\circ , AH \perp BC \Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta ACH \sim \Delta ABC$

۳۶۴. **قضیه** . در هر مثلث قائم الزاویه، هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ، واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر.

$\hat{A} = ۹۰^\circ , AH \perp BC \Rightarrow AB^۲ = BC.BH , AC^۲ = BC.CH$

نتیجه. از جمع دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که در هر مثلث قائم الزاویه مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ، برابر است با مربع اندازهٔ وتر، زیرا داریم :

$$\begin{cases} AB^۲= BC.BH \Rightarrow AB^۲+AC^۲= BC.BH + BC.CH \Rightarrow AC^۲=BC.CH \\ AB^۲+AC^۲=BC(BH+CH)=BC.BC=BC^۲ \Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲ \end{cases}$$

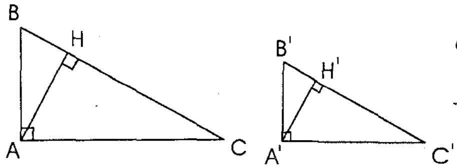
این قضیه که در قسمتهای بعد بیشتر به آن خواهیم پرداخت، به قضیهٔ فیثاغورس مشهور است و عکس آن نیز درست است؛ یعنی اگر در مثلثی، مربع اندازهٔ یک ضلع، مساوی مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

۳۶۵. **قضیه** . در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی است بین دو قطعه‌ای که ارتفاع بر وتر جدا می‌کند.

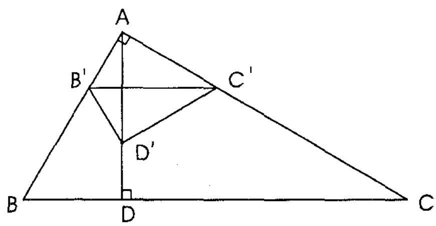
$\hat{A} = ۹۰^\circ , AH \perp BC \; AH^۲ = BH . CH$

۶.۳.۲. ثابت کنید دو مثلث قائم الزاویه متشابه‌اند

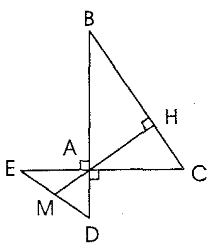
۳۶۶. هرگاه در دو مثلث قائم‌الزاویه، نسبت وترها با نسبت ارتفاعهای نظیر وترها مساوی باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.



۳۶۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ مفروض است. ارتفاع AD را رسم کرده روی AB ، AC و DA ، طولهای $AB'=\frac{AB}{۳}$، $AC'=\frac{AC}{۳}$ و $DD'=\frac{DA}{۳}$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنیددو مثلثABCو$D'B'C'$متشابه‌اند.



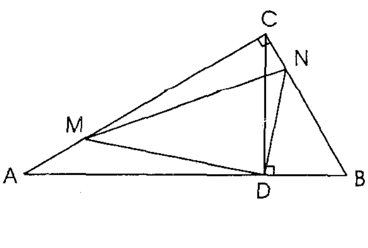
۳۶۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AD=\frac{AC}{۲}$ امتداد می‌دهیم و ضلع AC را از طرف A به اندازهٔ $AE=\frac{AB}{۲}$ امتداد می‌دهیم:

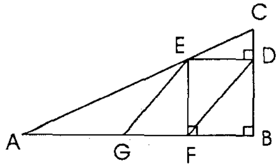


۱. ثابت کنید: دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند.

۲. ثابت کنید ارتفاع AH را اگر از طرف A امتداد دهیم، ضلع DE را نصف می‌کند.

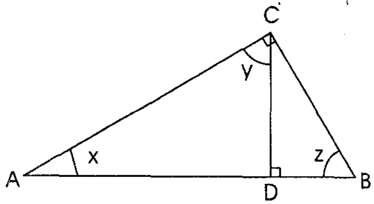
۳۶۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، ارتفاع CD را از رأس قائمهٔ مثلث رسم می‌کنیم. نقطه‌های M و N ضلعهای AC و CB را بترتیب با نسبتهای یکسانی تقسیم می‌کنند (این نسبتها از سوی نقطه‌های A و C حساب می‌شوند). ثابت کنید. مثلث DMN مشابه مثلث مفروض است.





۳۷۰. در شکل $\angle ABC$ قائمه است، $ED \perp BC$، $EF \perp AB$ و $EG \parallel DF$.
تمام مثلثهای متشابه را نام ببرید.

۳۷۱. در ΔABC . $\angle C$ قائمه و CD ارتفاع وارد بر وتر است.
الف. حداقل یک زاویهٔ همنهشت با $\angle ACB$ نام ببرید.
ب. یک زاویهٔ همنهشت با $\angle Z$ نام ببرید.
پ. یک مثلث متشابه با ΔABC نام ببرید.
تشابه بین این دو مثلث را بنویسید.



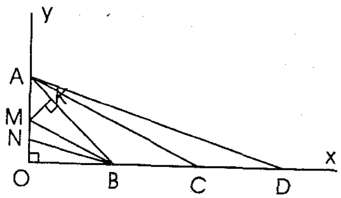
۶. ۳. ۳. دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند، مطلوب است:

۶. ۳. ۳. ۱. اندازهٔ زاویه، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۷۲. روی ضلع ox از زاویهٔ قائمهٔ xoy بترتیب طولهای: $OB=BC=CD=a$ و روی ضلع oy از آن، طول $OA = a$ را جدا، می‌کنیم. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط OA و $MK \perp AB$ باشد، ثابت کنید:

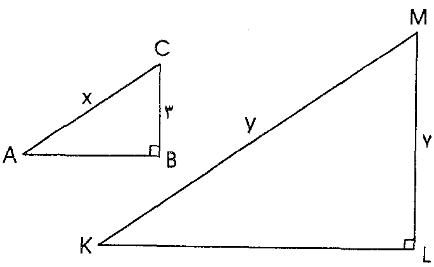
الف. $\Delta OBN \sim \Delta BMK$

ب. $A\hat{B}O = A\hat{C}O + A\hat{D}O$

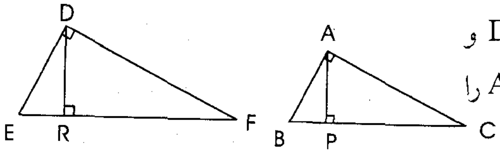


۶. ۳. ۳. ۲. اندازهٔ ضلع مثلث

۳۷۳. داریم $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ و زاویه‌های B و L قائمه‌اند، و طولهای ضلعها در شکل نشان داده شده‌اند، y را برحسب x بیابید.



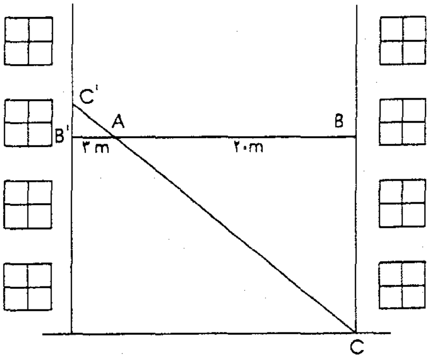
۳۷۴. در مثلثهای متشابه قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ و DEF $(\hat{D}=90^\circ)$ $\hat{C}=\hat{F}$ است:



الف. اگـر $DF=39$، $DR=36$ و $AP=12$ بـاشند، انـدازهٔ AC را بیابید.

ب. اگر $BC=15$، $EF=21$ و $AP=10$ باشد، اندازهٔ DR چه‌قدر است؟

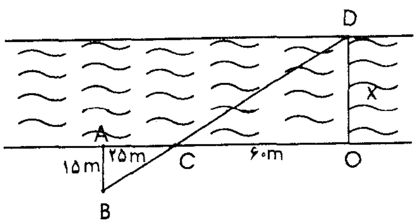
۳۷۵. دو قسمت مختلف یک بیمارستان به‌وسیلهٔ یک پل هوایی به‌هم مرتبط شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل، در یک انتهای آن ایستاد و شعاع دید خود را بر رأس زاویهٔ بین سطح زمین و ساختمان قرار داد.



الف. چرا دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند؟

ب. با توجه به‌اندازه‌های مشخص شده در شکل، و طول قد محسن که ۱/۸ متر است، ارتفاع پل ، یعنی اندازهٔ پاره خط BC را به‌دست آورید.

۳۷۶. شکل زیر به‌وسیلهٔ یک نقشه بردار برای محاسبهٔ عرض رودخانه رسم شده است. به کمک اندازه‌های مشخص شده در شکل، عرض رودخانه را حساب کنید.

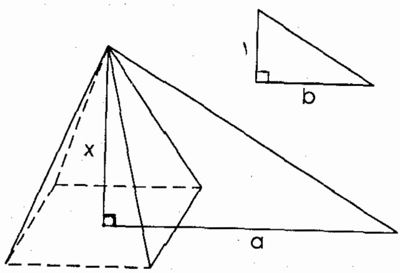


۳۷۷. **مسأله مشهور تالس**

در این جا، ضمن پی جویی مسأله‌های زیادی که حل آنهاقرنها طول کشیده است،

به چند مسأله می‌پردازیم که با وجود سادگی آنها، به اندازهٔ کافی وقت ریاضیدانهای بزرگ را گرفته است. در حالی که امروز تقریباً جزو مسأله‌های بچه‌گانه به‌حساب می‌آیند.

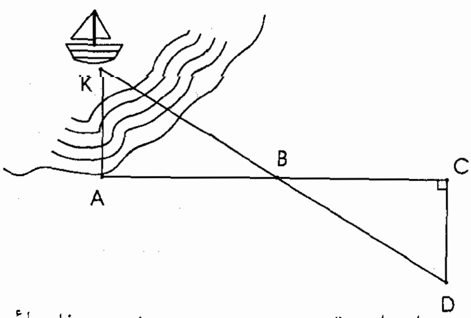
یکی از مسأله‌ها که به‌وسیلهٔ تالس (سده های هفتم تا ششم قبل از میلاد) طرح و حل شد، محاسبهٔ ارتفاع یک هرم به کمک سایهٔ آن بود. به احتمال زیاد این محاسبه در لحظه‌ای از روز انجام گرفت که ارتفاع یک شیئی با طول سایهٔ آن برابر می‌شود. شاید هم شاگرد نابغهٔ کاهنان مصری، حتی در آن زمان می‌توانسته است از خاصیت مثلثهای متشابه استفاده کند.



اگر ارتفاع مجهول هرم را x ، طول سایهٔ آن را a ، ارتفاع یک تیر قائم را ۱ و طول سایهٔ آن را b بنامیم . خواهیم داشت: $x : a = ۱ : b$

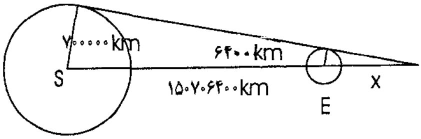
و از آن‌جا: $x = \frac{a}{b}$

این مسأله که امروز این قدر ساده به نظر می‌رسد، در آن زمان کشف فوق العاده‌ای بود. همین تالس، وقتی که به یونان برگشت ، مسألهٔ معروف مربوط به تعیین فاصلهٔ کشتی از ساحل را حل کرد.

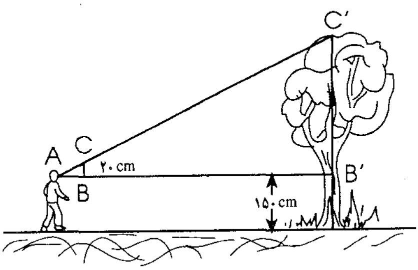


۳۷۸. در شکل زیر، شعاعهای تقریبی زمین و خورشید و فاصلهٔ تقریبی مرکز زمین از مرکز خورشید داده شده است، به کمک یک ماشین حساب، طول تقریبی سایهٔ

زمین (x) را حساب کنید.



۳۷۹. احمد برای اندازه‌گیری ارتفاع یک درخت بلند به این ترتیب عمل می‌کند. ابتدا کنار درخت می‌ایستد و نقطه‌ای را روی درخت نشان می‌کند که از زمین ۱۵۰cm فاصله دارد. سپس ۴۰ قدم از درخت دور می‌شود (حدود ۳۰m)، عقب‌گرد می‌کند و یک خط‌کش ۲۰ سانتیمتری را به طور قائم جلوی چشم خود می‌گیرد و آن را طوری تنظیم می‌کند که درخت را، از جای علامتگذاری شده تا نوک درخت، بپوشاند. سپس به کمک نخی که به انتهای خط‌کش وصل کرده است، فاصلهٔ خط‌کش تا چشم خود را بر حسب سانتی‌متر اندازه می‌گیرد سپس ارتفاع درخت را محاسبه می‌کند.

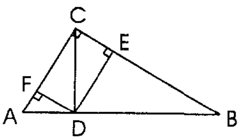


الف. احمد از چه خاصیتی برای تعیین طول درخت استفاده می‌کند؟

ب. اگر AB برابر با ۲۵cm باشد، ارتفاع درخت چه قدر است؟

۶. ۳. ۳. ۳. اندازهٔ پاره خط، نسبت بین دو پاره‌خط

۳۸۰. در این شکل $CD \perp AB$ و CFDE □ مستطیل است.



۱. تمام نسبت تشابه‌های مثلثهای متشابه با ΔABC را بنویسید. دقت کنید که تناظر درست نوشته شود.

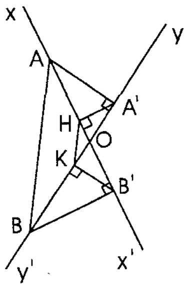
۲. اندازه پاره خط واسطهٔ هندسی بین ضلعهای زیر را بیابید.

الف. AD و DB   ب. FC و AF   پ. CE و EB

ت. CE و CB   ث. AD و AB   ج. AC و FC

۶. ۳. ۳. ۴. رابطه‌های متری

۳۸۱. دو خط متقاطع $x'ox$ و $y'oy$ مفروضند. از نقطهٔ A واقع بر $x'ox$ عمود AA' را بر oy فرود آورده و عمود $A'H$ را بر ox فرود می‌آوریم، همچنین از نقطه B روی $y'oy$ عمود BB' را بر $x'ox$ و از نقطهٔ B' عمود $B'K$ را بر oy' فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

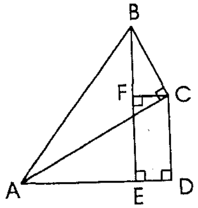


۱. دو مثلث $BB'K$ و $AA'H$ متشابه‌اند.

۲. رابطهٔ $OH.OB=OA.OK$ برقرار است.

۳. دو خط HK و AB متوازی‌اند.

۳۸۲. در شکل زیر خطهای عمود مشخص شده‌اند. ثابت کنید:



الف. $\Delta BFC \sim \Delta ADC$ ب. $BF = \dfrac{AD.BC}{AC}$

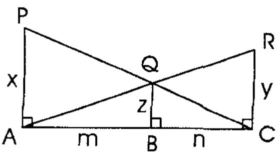
پ. $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CD}{AC}.\dfrac{AC}{AB}+\dfrac{AD}{AC}.\dfrac{BC}{AB}$

ت. اگر $AB = ۸$ ، $AD = ۶$ و $BC = ۴$ ، نسبت $\dfrac{BE}{AB}$ را محاسبه کنید و اندازهٔ زاویهٔ DAB را به‌دست آورید.

۳۸۳. در شکل PA ، QB و RC هر سه بر AC عمودند؛

الف. کامل کنید : $\Delta ABQ \sim \Delta ...$ و $\Delta PAC \sim \Delta ...$

ب. کدام صحیح است، $\dfrac{z}{x} = \dfrac{n}{m}$ یا $\dfrac{z}{x} = \dfrac{n}{m+n}$؟



پ. کدام صحیح است، $\dfrac{z}{y}=\dfrac{m}{n}$ یا $\dfrac{z}{y} = \dfrac{m}{m+n}$؟

ت. نشان دهید که: $\dfrac{۱}{x} + \dfrac{۱}{y} = \dfrac{۱}{z}$

۶.۴. تشابه از مثلثهای متساوی‌الساقین

۶. ۴. ۱. تعریف و قضیه

۳۸۴. قضیه . اگر زاویهٔ رأس یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین دیگری برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۳۸۵. قضیه . اگر یک زاویهٔ مجاور به قاعده از مثلث متساوی‌الساقینی با یک زاویهٔ مجاور به قاعده از مثلث متساوی‌الساقین دیگر برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

۳۸۶. قضیه . اگر ساق و قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین با ساق و قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین دیگری نظیر به نظیر متناسب باشد، آن دو مثلث متشابه‌اند.

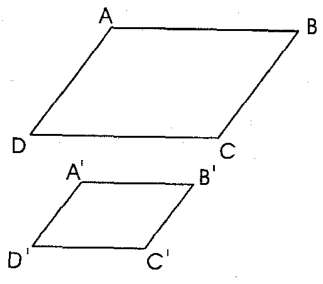
۶. ۴. ۲. ثابت کنید دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند

۳۸۷. دو مثلث متساوی‌الساقین هر کدام زاویه‌ای 40° دارند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو مثلث متشابه‌اند؟

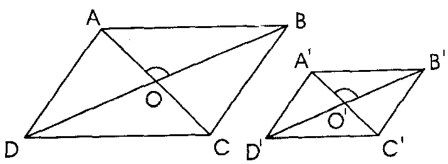
۳۸۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعده مساوی $4cm$ و اندازهٔ هر ساق $8cm$ است و در مثلث متساوی‌الساقین $A'B'C'$، اندازهٔ زاویهٔ رأس ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید این دو مثلث متشابه‌اند.

۶. ۵. تشابه در چند ضلعیها

۶. ۵. ۱. تشابه در متوازی الاضلاع

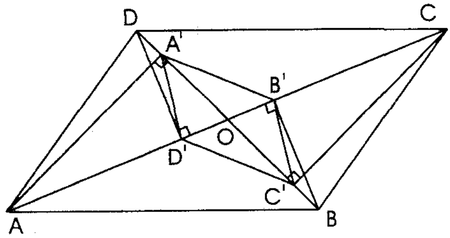


۳۸۹. هرگاه در دو متوازی‌الاضلاع، دو ضلع متوالی نظیر به نظیر متناسب، و زاویهٔ بین آنها برابر باشد، آن دو متوازی‌الاضلاع متشابه‌اند.



۳۹۰. قطرهای دو متوازی‌الاضلاع با یکدیگر متناسب و زاویهٔ بین این قطرها باهم برابرند؛ ثابت کنید که دو متوازی‌الاضلاع متشابه‌اند.

۳۹۱. ثابت کنید که تصویرهای رأسهای هر متوازی‌الاضلاع روی قطرهای آن، رأسهای متوازی‌الاضلاع دیگری هستند که با اولی متشابه است.



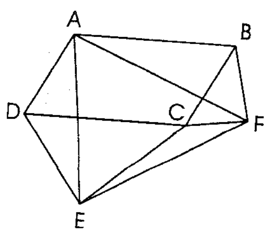
۳۹۲. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف. دو متوازی‌الاضلاع که نسبت درازا به پهنای هر یک از آنها مثل نسبت ۳ به ۲ باشد، متشابه‌اند.

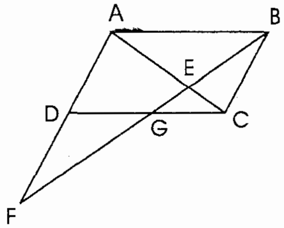
ب. دو متوازی‌الاضلاع که اندازهٔ یک زاویه از هر یک، ۵۰° باشد، متشابه‌اند.

پ. دو متوازی‌الاضلاع که هر کدام یک زاویهٔ ۶۰° داشته باشند و درازای هر یک ۴ برابر پهنای آن باشد، متشابه‌اند.

۳۹۳. متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. روی ضلعهای CD و BC و در خارج این متوازی‌الاضلاع ، مثلثهای متشابه CDE و FBC را هم‌جهت رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مثلث FAE با این مثلثها متشابه و هم‌جهت است.



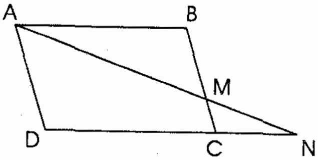
۳۹۴. متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. یک خط که از B می‌گذرد، AC را در E ، DC را در G و امتداد AD را در F قطع می‌کند. ثابت کنید:



الف. $\Delta\, AEF \sim \Delta\, CEB$

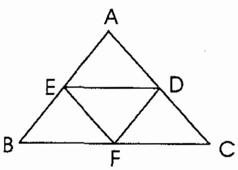
ب. EB واسطهٔ هندسی بین EG و EF است.

۳۹۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD از رأس A خطی رسم می‌کنیم تا ضلعهای BC و CD یا امتداد آنها را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند. ثابت کنید، دو مثلث AMB و AND متشابه و رابطهٔ $AM \,.\, AD = AN.\, BM$ برقرار است.



۳۹۶. در شکل، □AEFD و □BEDF متوازی‌الاضلاعند. تمام تشابه‌های بین مثلثها را بنویسید، و نشان دهید که :

$$\frac{AE \,.\, AD}{BE \,.\, CD} = ۱$$



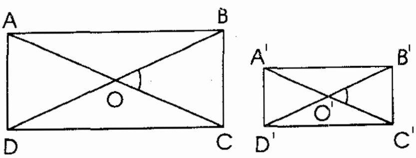
۶. ۵. ۲. تشابه در مستطیل

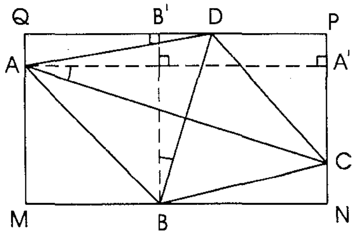
۳۹۷. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

الف. دو مستطیل در هر حال متشابه‌اند.

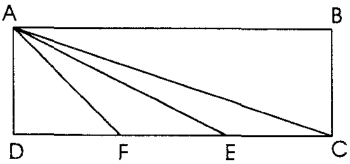
ب. دو مستطیل که درازای هر یک، دو برابر پهنای آن باشد، متشابه‌اند.

۳۹۸. دو مستطیل که زاویهٔ بین قطرهایشان برابر باشد، متشابه‌اند.





۳۹۹. ثابت کنید که تمام مستطیلهای محیط بر یک چهار ضلعی که قطرهایشان بر یکدیگر عمود می‌باشند، متشابه‌اند.



۴۰۰. در مستطیل ABCD طول، سه برابر عرض است. نقطه‌های E و F را به قسمی انتخاب می‌کنیم که $CE = EF = FD$ باشد. ثابت کنید دو مثلث AEF و ACF متشابه‌اند.

۴۰۱. از روی یک فیلم دو تصویر، یکی بزرگ و یکی کوچک تهیه شده است. در تصویر کوچک عرض یک جسم ۲cm ، و طول آن ۲/۳cm است. طول همان جسم در تصویر بزرگ ۷/۵cm است. عرض این جسم در تصویر بزرگ چه‌قدر است؟

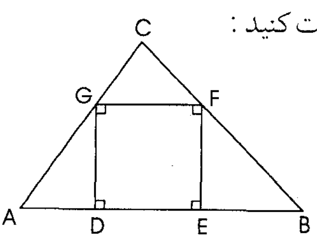
۴۰۲. دو ضلع مستطیلی مساوی a و b هستند. مطلوب است محاسبهٔ ضلعهای مستطیلی که با آن مشابه بوده، مساحت و محیط آن با اعداد متساوی نموده شده باشد.

۴۰۳. یک دستگاه فتوکپی به گونه‌ای تنظیم شده است که اگر از یک صفحهٔ مستطیل شکل فتوکپی گرفته شود، مساحت صفحهٔ فتوکپی، نصف مساحت آن صفحه خواهد بود. هرگاه با این دستگاه از دایره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر فتوکپی گرفته شود، قطر دایرهٔ فتوکپی شده چند سانتی‌متر می‌شود؟

الف. $\sqrt{۱۰}$ ب. ۵ پ. $۵\sqrt{۲}$ ت. $\sqrt{۵}$ ث. ۲/۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۶. ۵. ۳. تشابه در مربع



۴۰۴. در شکل، $\square DEFG$ مربع و $\angle C$ قائمه است. ثابت کنید :

۱. $\Delta ADG \sim \Delta GCF$

۲. $\Delta ADG \sim \Delta FEB$

۳. $AD.EB = DG.FE$

۴. $DE = \sqrt{AD.EB}$

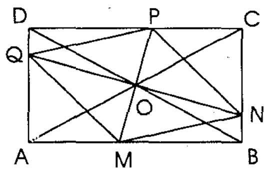
۶. ۵. ۴. تشابه در لوزی

۴۰۵. کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

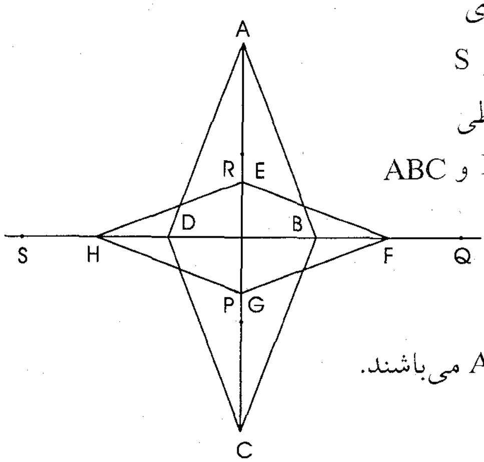
الف. دو لوزی در هر حال متشابه هستند.

ب. دو لوزی که هر یک، یک زاویهٔ 45° داشته باشند متشابه‌اند.

۴۰۶. ثابت کنید که لوزی‌های محاط در یک مستطیل مفروض متشابه‌اند.

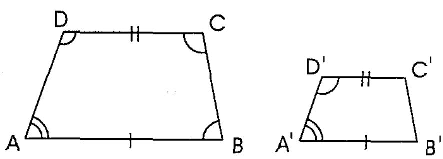


۴۰۷. چهار ضلعی ABCD یک لوزی است و نقطه‌های P ، Q ، R و S بترتیب مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCD ، CDA ، DAB و ABC می‌باشند. ثابت کنید که وسطهای قطعه خطهای AP ، BQ ، CR و DS رأسهای یک لوزی متشابه با لوزی ABCD می‌باشند.



۶. ۵. ۵. تشابه در ذوزنقه

۴۰۸. هرگاه در دو ذوزنقه، دو قاعده نظیر به نظیر متناسب بوده، زاویه‌های مجاور آنها برابر باشند، آن دو ذوزنقه متشابه‌اند.

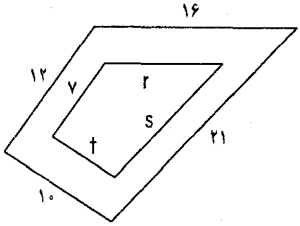


۶. ۵. ۶. تشابه در چهارضلعیهای غیرمشخص

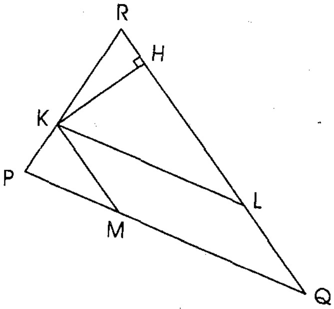
۴۰۹. از رأسهای چهارضلعی محدب ABCD ، عمودهایی برقطرهای آن رسم کرده‌ایم. ثابت کنید. چهارضلعی که رأسهای آن، بر پای این عمودها منطبق باشد، با چهار ضلعی اصلی متشابه است.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۴

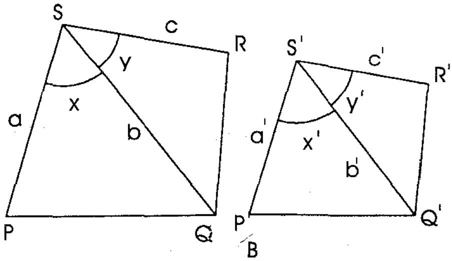
۴۱۰. یک مقوا مطابق شکل روبه‌رو بریده شده است . مرز درونی و مرز برونی، دو چهارضلعی متشابه‌اند. طولهای ضلعها، در شکل داده شده‌اند، r ، s و t را بیابید.



۴۱۱. در شکل، $\Delta PMK \sim \Delta KLR$ ، اگر $KR=$ ۸ ، $KP=$ ۴ ، $RL=$ ۱۵ و ارتفاع از K بر RL برابر با ۶ باشد، مساحت چهارضلعی $KMQR$ چه‌قدر است؟

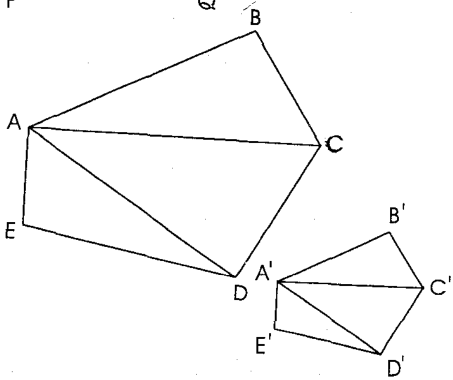


۴۱۲. در این چهارضلعیها داریم : $x=x'$ ، $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=K\ ;\ y=y'$ ثابت کنید نسبت مساحت چهارضلعی $P'Q'R'S'$ به مساحت چهارضلعی $PQRS$ برابر K^2 است.



۶. ۵. ۷. تشابه در چندضلعیها

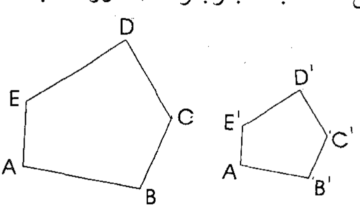
۴۱۳. ثابت کنید اگر دو n ضلعی متشابه باشند، و از دو رأس نظیر آنها به سایر رأسهای آنها وصل کنیم، مثلثهایی که پدید می‌آیند، نظیر به نظیر متشابه‌اند و بعکس، اگر مثلثها متشابه باشند، دو n ضلعی متشابه‌اند.

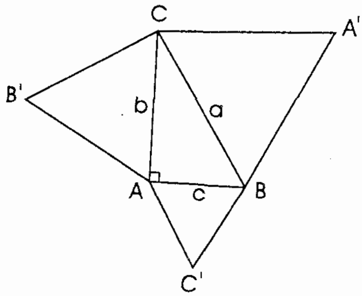


۴۱۴. **قضیه** . نسبت مساحتهای دو چند ضلعی متشابه ، برابر مجذور نسبت تشابه آنها است. یعنی فرض :

$$ABCDE...\sim A'B'C'D'E'...,\ \frac{A'B'}{AB}=K$$

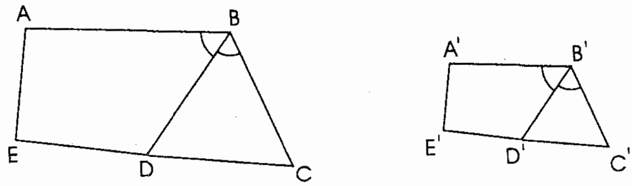
حکم : $\frac{S'}{S}=K^2$





۴۱۵. ثابت کنید هرگاه سه کثیرالاضلاع متشابه بر روی وتر و دو ضلع زاویهٔ قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه بنا کنیم، مساحت‌کثیرالاضلاع رسم شده بر وتر، برابر مجموع مساحتهای دو کثیرالاضلاع دیگر است.

۴۱۶. در چند ضلعیهای متشابه، نیمسازهای زاویه‌های داخلی که به ضلعها محدود شوند، بر نسبت ضلعها می‌باشند.



۴۱۷. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف. بین اجزای دو چند ضلعی متشابه، تناظر یک به یک وجود دارد.

ب. در دو چند ضلعی متشابه، زاویه‌های متناظر، مساوی یکدیگرند.

پ. در دو چند ضلعی متشابه، پاره خطهای متناظر، متناسبند.

ت. در دو چند ضلعی متشابه، نسبت تشابه مساوی نسبت اندازه‌های دو زاویهٔ متناظر است.

ث. در دو چند ضلعی متشابه، زاویه‌های متناظر متشابه‌اند.

۴۱۸. دو ضلع متناظر از دو چند ضلعی متشابه ۱۵ و ۱۸ سانتی‌متر است. نسبت محیطها و نسبت مساحتهای این دو چند ضلعی را تعیین کنید.

۴۱۹. ضلعهای متناظر دو چند ضلعی متشابه برابر ۶ سانتی‌متر و ۹ سانتی‌متر است. در صورتی که مساحت چند ضلعی اولی، ۴۸ سانتی‌متر مربع باشد، اندازه مساحت دومی چه‌قدر است؟

بخش ۷.

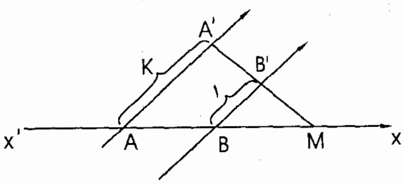
تقسیم توافقی (نسبت همساز)

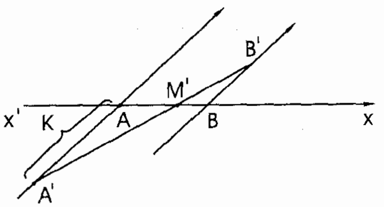
بخش ۷. تقسیم توافقی

۷.۱. تعریف و قضیه

۷.۱.۱. تعریف تقسیم توافقی (نسبت همساز)

نخست این مسأله را بررسی می‌کنیم که روی پاره خط AB یا بر امتداد آن چند نقطه مانند M وجود دارد به قسمی که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=K$ باشد.



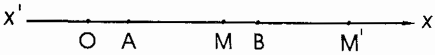


برای این کار از نقطه‌های A و B دو محور موازی و هم جهت به مبدأهای A و B رسم می‌کنیم و روی این دو محور، دو نقطه ´A و ´B را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}=K$ باشد؛ (به طور مثال $\overline{AA'}=K$ و $\overline{BB'}=1$). نقطهٔ M محل برخورد ´A´B و AB جواب مسأله است. اگر K=۱ باشد، ´A´B و AB متوازی خواهند شد، که M نقطهٔ بی‌نهایت دور امتداد AB خواهد بود.

بنابراین می‌توان گفت که تنها یک نقطه روی پاره خط AB و یا بر امتداد آن وجود دارد که این پاره‌خط را به نسبت عدد جبری K تقسیم می‌کند، که اگر $K>0$ باشد، نقطهٔ M خارج پاره‌خط AB است، و اگر $K<0$ باشد، نقطهٔ M روی پاره خط AB واقع است.

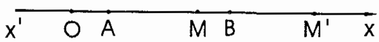
تعریف . اگر بر امتداد جهت دار AB ، دو نقطهٔ M و ´M را چنان اختیار کنیم که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=K$ و $\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=-K$ و یا $K=\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=-\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ باشد، گفته می‌شود که

نقطه‌های M و ´M، پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند؛ و یا نقطه‌های M و ´M مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به دو نقطهٔ A و B می‌باشند؛ و یا چهار نقطهٔ A ، B ، M و ´M تشکیل یک تقسیم توافقی داده‌اند که این تقسیم توافقی را به صورت (´ABMM) نمایش می‌دهند.



رابطه‌های بین طولهای نقطه‌های یک تقسیم توافقی

چهار نقطهٔ A ، B ، M و ´M که تقسیم توافقی (´ABMM) را تشکیل داده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر $\overline{OA}=x_A=a$ ، $\overline{OB}=x_B=b$ ، $\overline{OM}=x_m=m$ و $\overline{OM'}=x_{M'}=m'$ فرض شوند، رابطه‌های زیر بین طولهای این چهار نقطه برقرارند:



۱. رابطهٔ بین طولهای چهار نقطه در حالت کلی:

$$2(ab+mm') = (a+b)(m+m') \quad (1)$$

۲. اگر مبدأ محور بر یکی از چهار نقطهٔ تقسیم توافقی منطبق باشد، رابطهٔ (۱) به یکی از صورتهای زیر در می‌آید، که این رابطه‌ها را، رابطه‌های دکارت در تقسیم توافقی می‌نامند.

الف - اگر A مبدأ محور باشد $\Rightarrow a = 0 \Rightarrow 2mm' = b(m + m') \Rightarrow$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AM}} + \frac{1}{\overline{AM'}}$$

ب - اگر B مبدأ باشد $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow 2mm' = a(m + m') \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m'}$

$$\text{یا} \quad \frac{2}{\overline{BA}} = \frac{1}{\overline{BM}} + \frac{1}{\overline{BM'}}$$

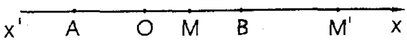
پ - اگر M مبدأ باشد $\Rightarrow m = 0 \Rightarrow 2ab = m'(a + b) \Rightarrow \frac{2}{m'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\text{یا} \quad \frac{2}{\overline{M'M}} = \frac{1}{\overline{MA}} + \frac{1}{\overline{MB}}$$

ت - اگر M' مبدأ باشد $\Rightarrow m' = 0 \Rightarrow 2ab = m(a+b) \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

یا $\frac{2}{\overline{M'M}} = \frac{1}{\overline{M'A}} + \frac{1}{\overline{M'B}}$

۳. اگر مبدأ محور نقطهٔ O وسط پاره خط AB اختیار شود، خواهیم داشت $a = -b$ ؛ در این صورت رابطهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید:



$$a = -b \Rightarrow a^2 = b^2 = m.m' \Rightarrow \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM}\,.\,\overline{OM'}$$

در صورتی که نقطهٔ O' وسط پاره خط MM' مبدأ محور اختیار شود، خواهیم داشت:

$$m = -m' \Rightarrow m^2 = m'^2 = a.b \Rightarrow \overline{O'M}^2 = \overline{O'M'}^2 = \overline{O'A}\,.\,\overline{O'B}$$

که دو رابطه اخیر را رابطه‌های نیوتن در تقسیم توافقی می‌نامند.

تبصره . از رابطه‌های نیوتن در تقسیم توافقی نتیجه می‌شود که نقطه‌های M و M' در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره خط AB ، و نقطه‌های A و B نیز در یک طرف نقطهٔ O' وسط پاره خط MM' قرار دارند.

دکارت

اگر بنا باشد مؤثرترین فرد را در انقلاب ریاضی سدهٔ هفدهم نام ببریم مسلماً پاسخ آن مشکل خواهد بود. شاید فضلا، در مورد نام نیوتن متفق‌القول باشند. اظهار صادقانهٔ نیوتن که فقط با ایستادن بر دوش غولان، توانسته دورتر را ببیند، در مورد اغلب مردان بزرگ کاملا" صدق می‌کند. هرچند، این نوابغ هستند که می‌توانند غولهایشان را پیدا کنند.

مسلما" در میان کسانی که نیوتن یا تقدیر برگزیده بود، رنه دکارت René Descartes (متولد ۳۱ مارس ۱۵۹۶ در لاآی تورن، متوفی ۱۱ فوریهٔ ۱۶۵۰ در استکهلم) را می‌توان نام برد که نبوغ متنوعش سبب شد تا فیلسوفان او را در زمرهٔ خود بشمارند، فیزیکدانان از صنف خود بدانند، و ریاضیدانان او را به چشم یکی از بزرگترین نوابغ در حوزهٔ کار خود ببینند، و همهٔ گروهها، از لحاظ خود، کاملا" محق باشند.

دکارت از خانوادهٔ مرفهی بود، پدرش یواکیم (متوفی ۱۶۴۰) از مشاوران مجلس برتانی (از ۱۵۸۵) بود و امکانات کافی داشت تا پیشرفتهای اولیهٔ پسرش را فراهم سازد. هنگامی که دکارت هنوز بچه بود، در یک مدرسهٔ یسوعی که تازه در لافلش، ایالت من، دایر شده بود وارد شد و مدت هشت سال (۱۶۰۴-۱۶۱۲) را در آنجا گذراند، و در همانجا با مرسن آشنا شد که مدت هفت یا هشت سال ارشد او بود. در میان آن دو، چنان دوستی پدید آمد که تا آخر عمر دوام داشت. هنگامی که مدرسهٔ لافلش را تمام کرد، شانزده سال داشت و «مبهوت از دعاها و تحسینهای معلمانش» به خانه بازگشت. یک سال در آن جا ماند و سپس پدرش تصمیم گرفت او را برای تکمیل تحصیلاتش به پاریس بفرستد. در این‌جا با مرسن که حالا راهب شده بود، دوستی خود را تجدید کرد، ولی مرسن بزودی از او جدا شد و به ناوار رفت.

رنه دکارت
از روی نقاشی فرانتس هالس که اینک در موزهٔ لوور است.

او اینک به مطالعهٔ هندسه پرداخته بود. در این موقع با میدورژ آشنا شد و با بهترین متفکران ریاضی زمان ارتباط یافت. با این همه دیری نپایید که احساس کرد لازم است اطلاعات وسیعتری دربارهٔ جهان کسب کند و بنابراین تصمیم گرفت در ارتش اسم بنویسد. او که علاقهٔ زیادی به هدفهای اشراف فرانسه نداشت، وارد سپاه موریس، امیر اورانژ شد؛ و موریس کسی بود که قبلاً جمعی از علما را گرد خود فراهم ساخته بود، و او در این راه با استوین آشنا شد.

با این همه، بزودی از زندگی نظامی ملول شد و در ۱۶۱۱ از آن‌جا بیرون آمد. اکنون

Monsieur

iay receu le contenu de la lettre de change quil vous a plû menuoyer et vous en remercie. ie lauroys gardé vn peu plus long temps pour tascher de vous le remettre auecquelque proffit, mais ie ne doute point quil ne profite dauantage estant entre vos mains quil ne pourroit faire entre les miennes, et ie suis sur le point de partir dicy. Je ne scay que respondre a la courtoisie de Monsieur Huguens sinon que ie cheris lhonneur de sa connoissance comme lune de mes meilleures fortunes, et que ie ne serays iamais en lieu ou ie puisse auoir le bien de le voir que ie nen recherche les occasions, ainsy que ie feray de celles de vous tesmoigner que ie suis tousiours

Monsieur

Damsterdam ce 23 May 1632

Vostre treshumble et tresaffectionné seruiteur
DESCARTES.

نامه‌ای به خط دکارت

این نامه را زمانی نوشته که کتاب هندسه را تألیف می‌کرد. M. Hoguens که در این نامه ذکر شده، پدر هویگنس است که در آن هنگام کودکی سه ساله بود.

مدت چهار سال را با سفر و دیدار از کشورهای آلمان، دانمارک، هلند، سویس و ایتالیا گذراند و در ۱۶۲۵ به پاریس بازگشت. دوست قدیمش مرسن هم بازگشته بود ، میدورژ

هنوز آن‌جا بود و دزارگ هم به این گروه پیوست. علاوه بر این گروه ریاضی، با بالزاک و به طور کلی با دنیای ادب هم آشنا شد، و او را به ریشیلو صدراعظم آلمان معرفی کردند. با این حال پاریس برای تفکرات او جای مناسبی نبود، و در ۱۶۲۸ تصمیم گرفت در هلند مقیم شود، و تا ۱۶۴۹ در آن‌جا ماند، تا به دعوت کریستینا ملکهٔ سوئد به استکهلم رفت، و چند ماه باقی عمرش را در آن‌جا گذراند (۱۶۵۰). نخستین سالهای اقامتش در هلند (۱۶۲۹ - ۱۶۳۳)، صرف تدوین کتابی فلسفی شد. هنگام اتمام این کتاب، از تکفیر گالیله به خاطر اظهار حقیقت آگاه شد، و بنابراین او کاملاً بر خلاف معاصر ایتالیاییش بدین نتیجه رسید که احتیاط، بالاترین شجاعت است.در نتیجه این کتاب در زمان حیاتش منتشر نشد. سپس اوقات خود را به نوشتن رسالهٔ بزرگش دربارهٔ روش علوم گذراند، که شامل سه ضمیمه بود و یکی از آنها هندسه نام داشت.

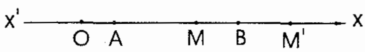
هندسه دکارت

در این ضمیمه، که رسالهٔ کوچکی در حدود صد صفحه بود، نخستین بار هندسهٔ تحلیلی انتشار یافت . فکر اساسی دکارت ، ایجاد انقلاب در هندسه نبود، بلکه بیشتر می‌خواست شواهد و مفاهیم هندسی را توضیح دهد؛ مختصر آن که حل ترسیمی معادله‌ها بود. با این همه، نقشهٔ او از این فراتر رفت و به ایجاد ریاضیاتی جامع منجر شد که در آن جبر، هندسه و حساب، اجزای پیوسته‌ای بودند. او با توسعهٔ فکر قدیمی طول و عرض شروع کرد، و نشان داد که هر نقطه‌ای بر روی صفحه، منحصراً با دو محور مختصات x و y مشخص شده، و معادلهٔ $F(x , y)=0$ مبیّن خاصیتی است که در مورد هر نقطه‌ای از صفحه صدق می‌کند. بنابراین با مطالعهٔ معادله، توانست از طریق اصل مطابقت یک به یک، نتیجه‌های خود را، در هر موقعی، بر روی خود منحنی منتقل سازد. این همان کاری بود که جان استوارت میل گوید :«بزرگترین قدمی که در راه پیشرفت علوم محض برداشته شد». در مقالهٔ اول هندسه عملهای اصلی حساب را در هندسه شرح می‌دهد، و در این مورد استفادهٔ او از یک واحد طول معین تنها ابتکار اوست؛ در مقالهٔ دوم، منحنیها را طبقه‌بندی می‌کند، و روش به‌دست آوردن تانژانتها و نورمها را شرح می‌دهد، و در مقالهٔ سوم به بحث در ریشهٔ معادله‌ها می‌پردازد؛ و از جمله، قاعدهٔ علامتها را توضیح می‌دهد که هنوز به نام او معروف است. قبلاً فرما بر روی فکر هندسهٔ تحلیلی کار کرده بود یا دست کم، او و دکارت تقریباً در زمان واحدی به فکر آن افتاده

بودند؛ ولی فرما تنها فکر کرد، حال آن که دکارت نه تنها فکر کرد، بلکه در آن زمینه نوشت . شاید برخی مفاهیم آن به فکر هاریوت هم رسیده بود و دکارت با آثار هاریوت آشنایی داشت؛ ولی به هر صورت فکر واقعی تابع‌پذیری به صورت استفاده از محور مختصات را، اول بار دکارت به طور دقیق و برای همگان تعریف کرد.

تصوری از وسعت معلومات و علاقه‌های او را می‌توان از کارش در زمینهٔ کالبدشناسی به‌دست آورد، که در ۱۶۳۵ آغاز کرد و متن لاتینی آن در ۱۶۶۴ در لیدن چاپ شد.

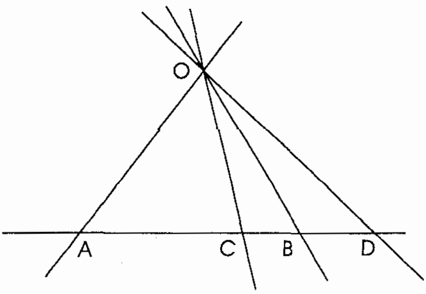
۴۲۰. **قضیه** . اگر دو نقطهٔ M و ´M پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کرده باشند، دو نقطهٔ A و B هم پاره خط ´MM را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند؛ زیرا با فرض $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$ داریم :



$$\frac{\overline{MA}}{\overline{M'A}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{M'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AM'}} = -\frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}}$$

۷. ۱. ۲. دستگاه توافقی

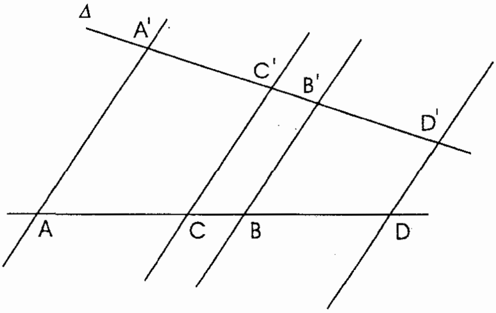
دستگاه توافقی . چهار خط از یک دسته خط راکه بر چهار نقطهٔ یک تقسیم توافقی گذشته باشند، یک دستگاه توافقی می‌نامند. نقطهٔ همرسی خطها را، رأس دستگاه، و هر یک از چهارخط را یک شعاع دستگاه توافقی می‌نامند. دستگاه توافقی را که رأسش نقطهٔ O و شعاعهایش : OA، OB، OC و OD بر چهار نقطهٔ تقسیم توافقی (ABCD) گذشته باشند، به صورت (O − ABCD) یا (O و ABCD) یا (O . ABCD) یا (OA و OB ،OC ،OD) نمایش می‌دهند. شعاعهای OA و OB مزدوجهای توافقی یکدیگر نسبت به دو شعاع



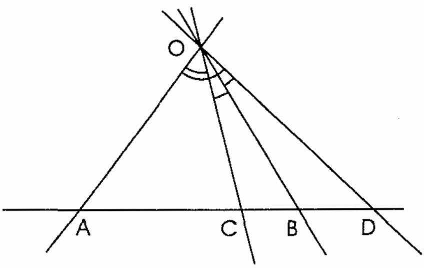
OC و OD می‌باشند. همچنین دو شعاع OC و CD مزدوجهای توافقی یکدیگر نسبت به دو شعاع OA و OB هستند.

دستگاه توافقی خطهای موازی

اگر (ABCD) یک تقسیم توافقی باشد، و از نقطه‌های A، B، C و D چهارخط متوازی رسم کنیم، این چهار خط موازی را دستگاه توافقی خطهای موازی می‌نامند. رأس این دستگاه نقطهٔ بینهایت دور امتداد این چهار خط موازی است. واضح است که اگر خطی مانند Δ، شعاعهای این دستگاه را در نقطه‌های ´A، ´B، ´C و ´D قطع کند، (´A´B´C´D) یک تقسیم توافقی است.



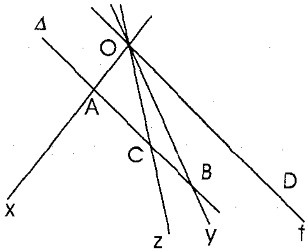
۴۲۱. قضیه. هرگاه در یک صفحهٔ جهت‌دار دستگاه توافقی (O - ABCD) مفروض باشد، بین زاویه‌های شعاعهای توافقی رابطهٔ زیر همواره برقرار است:



$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{\sin(OA\hat{,}OC)}{\sin(OB\hat{,}OC)} = -\frac{\sin(OA\hat{,}OD)}{\sin(OB\hat{,}OD)}$$

۴۲۲. قضیهٔ عکس. هرگاه خطی، شعاعهای یک دسته خط به رأس O و شامل چهار شعاع را بترتیب در نقطه‌های A ، C ، B و D قطع کند، و زاویه‌های بین شعاعهای چهارگانه در رابطه $\frac{\sin(OA\hat{,}OC)}{\sin(OB\hat{,}OC)} = -\frac{\sin(OA\hat{,}OD)}{\sin(OB\hat{,}OD)}$ صدق کنند، (ABCD) یک تقسیم توافقی است.

نتیجه. در یک دستگاه توافقی (O − xyzt)، هر خطی چهارشعاع دستگاه را قطع کند، چهار نقطهٔ تقاطع، تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.



۴۲۳. قضیه . هر سه شعاع متوالی از یک دستگاه توافقی، بر هر خط موازی با چهارمین شعاع، دو پاره‌خط متساوی پدید می‌آورند و بعکس.

فرض . (O−ABCD) دستگاه توافقی و $\Delta \parallel OD$ و $C \in d$ و B و A

حکم. AC=CB

۴۲۴. عکس قضیه . هرگاه خطی موازی یکی از چهارخط همرس رسم شود، و سه خط دیگر روی آن دو پاره خط متساوی پدید آورند، آن چهارخط همرس، یک دستگاه توافقی تشکیل می‌دهند.

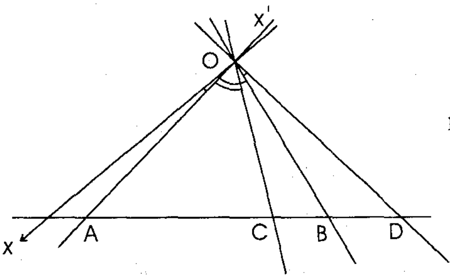
فرض . $ACB \parallel OD$ و AC=CB

حکم . (O−ABCD) دستگاه توافقی است.

۴۲۵. عکس قضیه . هرگاه سه شعاع متوالی از یک دستگاه توافقی بر یک خط، دو پاره خط متساوی پدید آورده باشند، آن خط با چهارمین شعاع دستگاه موازی است.

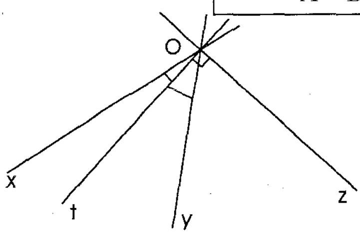
فرض . (O−ABCD) دستگاه توافقی و AC=CB.

حکم . $ABC \parallel OD$



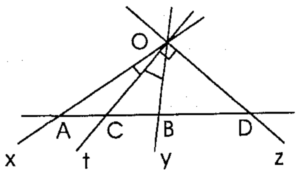
۴۲۶. قضیه . در هر دستگاه توافقی (O - ABCD) بین m_A ، m_B ، m_C و m_D ، ضریبهای زاویه‌ای شعاعها نسبت به‌یک محور ، همواره رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\boxed{۲(m_A.m_B+m_C.m_D) = (m_A+m_B) . (m_C+m_D)} \qquad (۱)$$



۴۲۷. قضیه . ثابت کنید که نیمسازهای دو زاویهٔ به‌وجود آمده بین دو خط متقاطع با این دو خط ، یک دستگاه توافقی به‌وجود می‌آورند.

۴۲۸. عکس قضیه . ثابت کنید که هرگاه در یک دستگاه توافقی دو شعاع غیر مجاور بر هم عمود باشند، این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های بین دو شعاع دیگرند.



۴۲۹. قضیه . مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در این صفحه مقدار ثابت K ($K\neq1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند. (دایرهٔ آپولونیوس).

آپولونیوس

آپولونیوس برغه‌ای Apolonius. of . Perga برآمدنش ح ۲۲۵ پیش از میلاد : متولد در برغه دریامفیلیه بر کرانهٔ جنوبی آسیای صغیر، به خاطر کتاب مخروطاتش به «هندسه دان بزرگ» معروف بود. او در اسکندریه تحصیل کرد، و از آن‌جا که در زمان بطلمیوس چهارم (ملقب به پدر دولت ، سلطنتش از ۲۲۲ تا ۲۰۵ پ. م) وفات یافت، به احتمال زیاد اراتوستنس را می‌شناخت . با به کاربردن 10^4 به عنوان پایه، دستگاه عدد نویسی ارشمیدس را اصلاح کرد .این عدد یعنی ۱۰۰۰۰ از دیرباز در شرق معمول بود، و برای قرنهای متمادی مبنای همهٔ دستگاههای بزرگ شمارش در خاورزمین و در اروپا بود (در فارسی بیور Bivar و در ترکی، تومان به معنی ده هزار ،گواه آن است). مهمترین تألیف او راجع به مقطعهای مخروطی بوده، که او آنها را بیضی، سهمی (قطع مکافی) و هذلولی (قطع زاید) می‌نامید.

این تألیف در هشت کتاب (مقاله) است، که چهارتای اولی به زبان یونانی، و سه تای بعدی به عربی به‌دست ما رسیده، و آخری گم شده است. آپولونیوس در کتاب اول بیان کرده است که چگونه می‌توان از یک مخروط سه مقطع مخروطی استخراج کرد؛ از نوعی دستگاه مختصات استفاده می‌کند، که در آن قطر دایره به جای محور x و خط عمود بر رأس به جای محور y به کار می‌رود.

کتابهای اول تا چهارم احتمالاً کمتر چیزی داشت که معلوم نباشد، ولی او مطالب را بترتیب تازه‌ای مرتب کرد، همچنان که اقلیدس بسیاری از قضیه‌هایی را که پیشینیانش می‌دانستند، به صورت اصولی مرتب کرد. کتاب پنجم از خطهای منحنی بحث می‌کند،

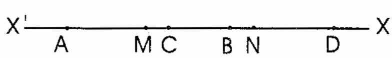
کتاب ششم از برابری و تشابه مقطعهای مخروطی، کتاب هفتم از قطرها و شکلهای چهار ضلعی که براساس این قطرها توصیف شده‌اند. به‌طور کلی، قضیه‌های او همان است که اینک از طریق هندسهٔ تحلیلی مورد بحث قرار می‌دهیم؛ روش او در مورد چهارضلعیها و دایره، استنتاجی و مشابه روش اقلیدس است.

آپولونیوس اثرهای متعدد دیگری راجع به هندسه نوشت، از جمله رساله‌ای راجع به مکانهای مسطح (نقاط صفحه) (قطع‌السطوح علی نسبة). بطلمیوس طوری از او سخن می‌گوید که گویا، کارهایی هم در زمینهٔ نجوم کرده بود، ولی ممکن است او را با آپولونیوس دیگری که مدتی پیش از او زندگی می‌کرد، اشتباه کرده باشد.

ریاضیات یونانی در آثار آپولونیوس به نقطهٔ اوج خود رسید. بدون راهنمایی اقلیدس، آپولونیوس هرگز بدین اوج نمی‌رسید. آنان با هم برای دو هزار سال بر هندسه حکومت کردند.

۴۳۰. **قضیه**. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو خط ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد، دو خط راست است که از نقطهٔ برخورد دو خط ثابت می‌گذرند و با این دو خط یک دستگاه توافقی پدید می‌آورند.

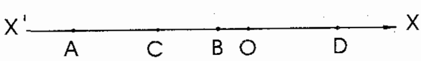
۴۳۱. روی خط x´x دو قطعه خط AB و CD مفروضند، و وسطهای آنها بترتیب M و N می‌باشند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این که چهار نقطهٔ A، B، C و D تشکیل یک تقسیم توافقی بدهند، آن است که داشته باشیم:



$$\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$$

۲.۷. ثابت کنید چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی داده‌اند

۴۳۲. اگر چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یک خط راست واقع باشند و نقطهٔ O وسط



پاره خط CD باشد، شرط لازم و کافی برای این که (ABCD) یک تقسیم توافقی تشکیل دهند، آن است که داشته باشیم: $\overline{AC}.\overline{AD}=\overline{AB}.\overline{AO}$

۴۳۳. فرض می‌کنیم I و j وسط پاره خطهای AB و CD از یک خط راست Δ و M نقطهٔ غیر مشخصی از Δ باشد:

الف) ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که (ABCD) یک تقسیم توافقی باشد، این است که داشته باشیم: $\overline{MA}.\overline{MB}+\overline{MC}.\overline{MD}=۲\overline{MI}\ .\ \overline{Mj}$

ب) تحقیق کنید اگر نقطهٔ M بر A یا I منطبق گرفته شود، از تساوی قبل چه دستورهایی به‌دست می‌آید.

۴۳۴. فرض می‌کنیم A، B، C و D چهار نقطه از یک خط ثابت Δ باشند؛ ثابت کنید، شرط لازم و کافی برای آن که (ABCD) یک تقسیم توافقی باشد، این است که یکی از تساویهای زیر برقرار باشد:

الف. $\overline{AB}.\overline{CD}=۲\overline{BC}.\overline{DA}$

ب. $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CA}}+\dfrac{\overline{DM}}{\overline{DA}}=۲\times\dfrac{\overline{BM}}{\overline{BA}}$ (M نقطهٔ دلخواهی از خط Δ است)

۴۳۵. ۱. ثابت کنید اگر (ABCD) یک تقسیم توافقی و j وسط پاره خط CD باشد، تساوی زیر برقرار است:

$$\overline{jA}\ .\ \overline{BC}\ .\ \overline{BD}+\overline{jB}\ .\ \overline{AC}\ .\ \overline{AD}=\circ\ ,\ (E)$$

۲. بعکس، فرض می‌کنیم A، B، C و D چهارنقطه از یک خط Δ و نقطهٔ j وسط پاره خط CD بوده و به علاوه تساوی (E) نیز برقرار باشد، ثابت کنید اگر وسطهای دو پاره خط AB و CD یکی نباشند، (ABCD) یک تقسیم توافقی است.

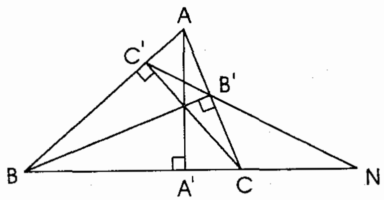
۳. تساوی زیر را به صورت تساوی (E) درآورید:

$$\frac{۱}{AC}+\frac{۱}{BC}+\frac{۱}{AD}+\frac{۱}{BD}=\circ$$

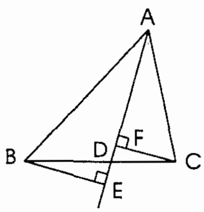
۴۳۶. سه نقطه A، B و C بر خط مستقیمی واقعند. A´، B´ و C´ مزدوج توافقی هر یک از نقطه‌های A، B و C نسبت به دو نقطهٔ دیگر است. نشان دهید A، B و C نیز مزدوج توافقی هر یک از نقطه‌های A´، B´ و C´ نسبت به دو نقطهٔ دیگرند.

۴۳۷. (AB) و (CD) مزدوج توافقی یکدیگرند. اگر ´A و ´B بترتیب مزدوجهای توافقی D نسبت به قطعه‌های AC و BC باشند، ثابت کنید CD مزدوج توافقی ´A´B است.

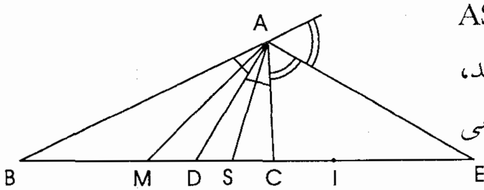
۴۳۸. نقطه‌های ´A، ´B و ´C بترتیب پای ارتفاعهای رأسهای A، B و C از مثلث ABC می‌باشند، اگر نقطهٔ تقاطع خط ´B´C با امتداد ضلع BC را N بنامیم. ثابت کنید که نقطهٔ N مزدوج توافقی نقطهٔ ´A نسبت به دو رأس B و C است.



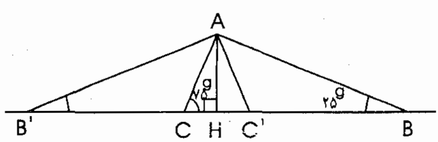
۴۳۹. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. اگر D پای این نیمساز باشد، نقطه‌های E و F تصویرهای B و C روی AD با دو نقطهٔ A و D، تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

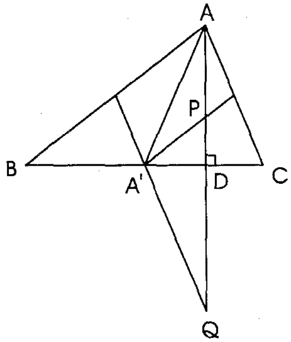


۴۴۰. مثلث ABC و دو نیمساز داخلی و خارجی AD و AE از آن را در نظر می‌گیریم. اگر I وسط DE و AM میانهٔ رسم شده از رأس A و AS قرینهٔ این میانه نسبت به AD باشد، ثابت کنید که I و S مزدوج توافقی نسبت به B و C هستند.

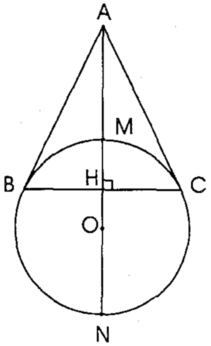


۴۴۱. مثلث ABC که زاویه‌های آن $\hat{B}=۲۵^g$ و $\hat{C}=۷۵^g$ است، مفروض است. اگر ´B و ´C قرینه‌های B و C نسبت به ارتفاع AH باشند، ثابت کنید چهار نقطهٔ B، C، ´B و ´C تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.



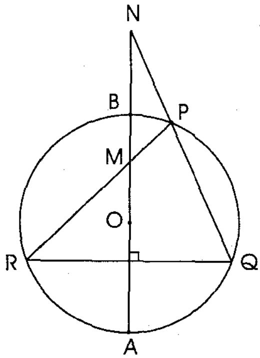


۴۴۲. AD و AA' بترتیب ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس A از مثلث ABC می‌باشند. خطهایی که از نقطهٔ A' بترتیب موازی AB و AC رسم می‌شوند، AD را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که $(ADPQ) = -۱$ است.

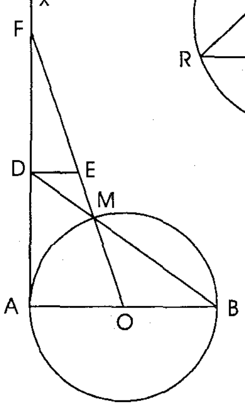


۴۴۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع رأس A قاعدهٔ BC را در H و دایره‌ای را که در B و C بر ساقها مماس است در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید چهارنقطهٔ A، H، M و N یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۴۴۴. بر خط اولر، نشان دهید که مرکز ثقل و نقطهٔ همرسی ارتفاعها، قطعه خطی را که دو سر آن مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ آن است، به طور داخلی و خارجی به یک نسبت تقسیم می‌کنند.



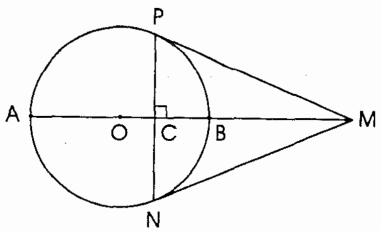
۴۴۵. قطر AB و وتر RQ عمود بر AB در دایره‌ای مفروضند. از نقطهٔ P واقع بر محیط دایره به P و Q وصل می‌کنیم تا AB را در M و N قطع کنند. چرا M و N نسبت به A و B مزدوج توافقی یکدیگرند.



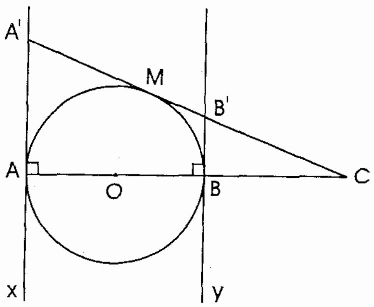
۴۴۶. دایرهٔ $C(O,R)$ و قطر AB از آن مفروض است. از A مماس Ax و از B قاطعی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در M و مماس Ax را در D قطع کند. از D خطی موازی AB

رسم می‌کنیم تا OM را در نقطهٔ E و Axرا در نقطهٔ F قطع کند، ثابت کنید(OEMF) یک تقسیم توافقی است.

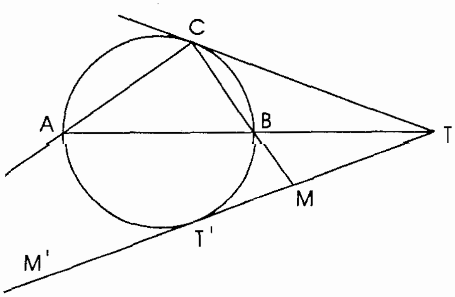
۴۴۷. دایره‌ای به قطر AB و نقطهٔ M روی خط AB و در خارج دایره مفروض است. از نقطهٔ M دو مماس MN و MP را بر دایره رسم کرده، N را به P وصل می‌کنیم تا AB را در C قطع کند. ثابت کنید (ABCM) تقسیم توافقی است.



۴۴۸. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. خطهای x و y در A و B بر دایره مماسند و M نقطه‌ای از محیط دایره است. مماس نقطهٔ M خطهای x و y و AB را بترتیب در ´A ، ´B و C قطع می‌کند. ثابت کنید نقطه‌های C و M نسبت به ´A و ´B مزدوج توافقی می‌باشند.



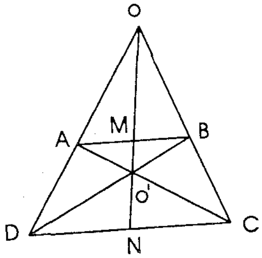
۴۴۹. خط مماس در نقطهٔ C بر یک دایره، امتداد قطر AB از این دایره را در نقطهٔ T قطع می کند. ثابت کنید اگر خط مماس دیگری از نقطهٔ T بر دایره رسم کنیم، پاره خط واصل بین نقطهٔ T و نقطهٔ تماس به‌وسیلهٔ خطهای CA و CB به نسبت توافقی تقسیم می‌شود.



۴۵۰. ثابت کنید که در دو دایرهٔ برون هم نقطهٔ برخورد خط‌المرکزین با مماسهای مشترک داخلی و خارجی نسبت به دو مرکز، مزدوج توافقی یکدیگرند.

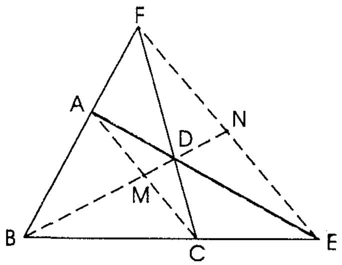
۴۵۱. مربعی بر دایره محیط است. مماس دلخواهی بر دایره رسم می‌کنیم تا چهارضلع مربع را در چهار نقطه قطع کند. ثابت کنید که چهار نقطهٔ تقاطع یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۴۵۲. ثابت کنید که در هر ذوزنقه وسطهای دو قاعده و نقطهٔ برخورد دو قطر و نقطهٔ تلاقی دو ساق، تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.

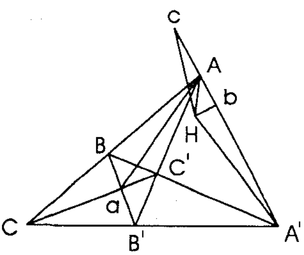


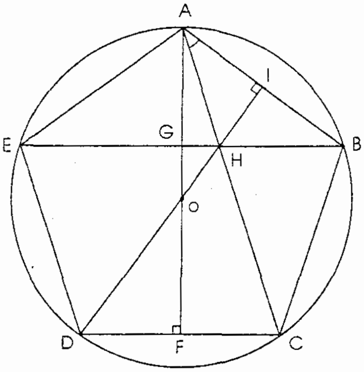
۴۵۳. ثابت کنید که در هر چهارضلعی کامل، قطرها یکدیگر را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

تعریف چهارضلعی کامل . اگر ضلعهای مقابل چهارضلعی ABCD را امتداد دهیم تا در دو نقطهٔ E و F یکدیگر را قطع کنند ABCDEF را چهارضلعی کامل می‌نامند. چهارضلعی کامل دارای شش رأس (A ، B ، C ، D ، E و F)، چهارضلع (FAB ، FDC ، EDA و ECB) و سه قطر (BD ، AC و EF) است.

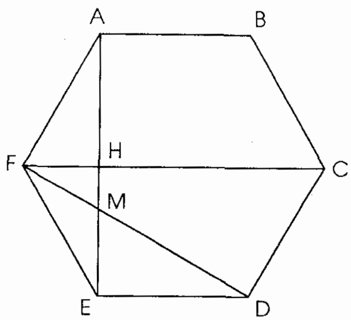


۴۵۴. در چهارضلعی کاملی به قطرهای ´AA ، ´BB و ´CC مثلثی به رأسهای A ، ´A ، a (a نقطه برخورد ´BB و ´CC) را در نظر می‌گیریم، از نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای این مثلث، عمودهایی بر ´BB و ´CC رسم می‌کنیم، این عمودها ´AA را در b و c قطع می‌کنند. نشان دهید b و c نسبت به A و ´A مزدوج توافقی یکدیگرند.





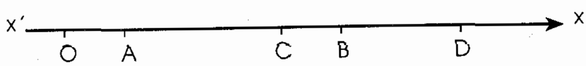
۴۵۵. پنج ضلعی منتظمی داده شده از مرکز، به یکی از رأسها وصل می‌کنیم. اگر این خط بر ضلع مقابل به آن رأس و بر یکی از قطرهای پنج ضلعی عمود باشد، ثابت کنید که دو نقطهٔ برخورد آن با ضلع و قطر مذکور، و دو نقطه مرکز و رأس پنج ضلعی، چهارنقطه‌ای هستند که یک تقسیم توافقی می‌سازند.



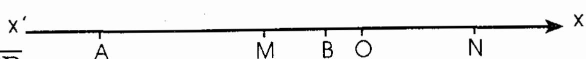
۴۵۶. در شش ضلعی منتظم محاطی ABCDEF قطرهای FC و FD، به‌ترتیب قطر AE را H و M قطع کرده‌اند. ثابت کنید نقطه‌های A ، M ، H و E یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۳.۷. چهار نقطهٔ تشکیل تقسیم توافقی داده‌اند، ثابت کنید ...

۴۵۷. اگر $K = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ باشد، $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ و $\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$ را برحسب K حساب کنید.

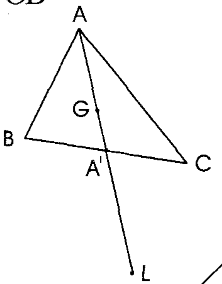


۴۵۸. اگر چهار نقطهٔ A ، B ، M و N تشکیل یک تقسیم توافقی دهند، و نقطهٔ O وسط پاره خط MN باشد، ثابت کنید :

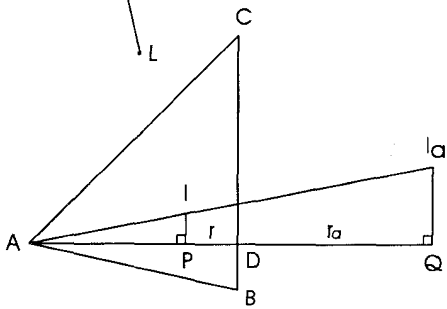


$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}.\overline{AN}} + \frac{\overline{OB}}{\overline{BM}.\overline{BN}} = 0$$

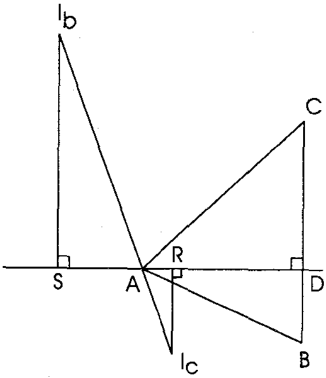
۴۵۹. هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بر روی یک خط چنان باشند که رابطهٔ $K = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ برقرار و O وسط CD باشد، ثابت کنید که: $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = K^2$



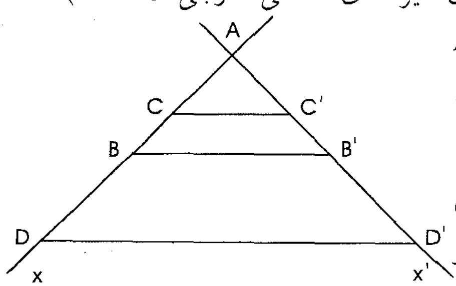
۴۶۰. اگر L مزدوج توافقی G مرکز ثقل مثلث ABC نسبت به A و ´A دو انتهای میانهٔ ´AA از همان مثلث باشد، ثابت کنید $LA' = A'A$.



۴۶۱. اگر روی خط دلخواهی دو طول $DP = r$ و $DQ = r_a$ را در دو جهت جدا کنیم و مزدوج توافقی D را نسبت به دو نقطهٔ P و Q، نقطهٔ A بنامیم، AD برابر ارتفاع نظیر ضلعی از مثلث است که r_a شعاع دایرهٔ محاطی نظیر آن ضلع، و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن است.



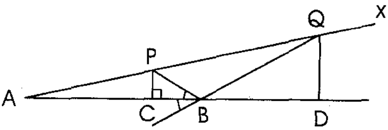
۴۶۲. اگر روی یک خط دلخواه دو طول: $DR = r_b$ و $DS = r_c$ را در یک جهت جدا کرده، مزدوج توافقی D را نسبت به نقطه‌های R و S، نقطهٔ A بنامیم، پاره خط AD برابر است با ارتفاع نظیر ضلعی، که دو رأس ضلعهای b و c را به هم وصل می‌کند.
(از مثلث ABC که r_b و r_c شعاعهای دایره های محاطی خارجی آن هستند).



۴۶۳. دو خط Ax و ´Ax که در نقطهٔ A مشترکند، مفروضند. روی Ax ، سه نقطهٔ B ، C و D ، و روی ´Ax سه نقطهٔ ´B ، ´C و ´D را طوری اختیار می‌کنیم که (ABCD) و

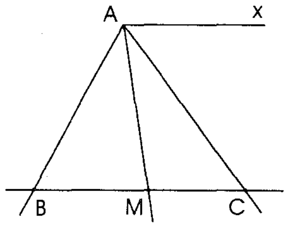
$(A'B'C'D')$ دو تقسیم توافقی باشند. ثابت کنید که سه خط BB' ، CC' و DD' بر یک نقطه می‌گذرند و یا آن که متوازی‌اند.

۴۶۴. تقسیم توافقی $(ABCD)=-1$ مفروض است. عمودهایی که از نقطه‌های C و D برخط CD اخراج می‌شوند، موربی را که از نقطهٔ A می‌گذرد بترتیب در نقطه‌های P و Q قطع می‌کند. ثابت کنید که AB نیمساز زاویهٔ PBQ است.

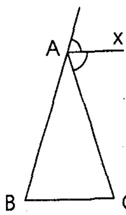


۴۶۵. اگر ریشه‌های حقیقی معادله‌های $ax^2+a'x+a''=0$ و $bx^2+b'x+b''=0$ نسبت به‌هم مزدوج توافقی باشند، هر معادلهٔ درجهٔ دوم که ترکیبی از دو معادلهٔ فوق باشد، ریشهٔ حقیقی ندارد، یعنی معادله‌های $(ma+b)x^2+(ma'+b')x+ma''+b''=0$ همواره دارای ریشه‌های موهومی می‌باشند.

۷ . ۴. ثابت کنید دستگاه توافقی است

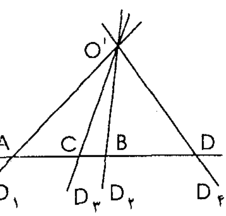


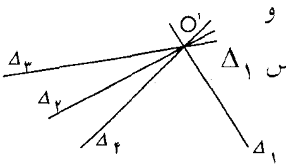
۴۶۶. اگر از یک رأس مثلثی خطی موازی ضلع مقابل رسم شود، این خط و دو ضلع مجاور به همان زاویه، و میانهٔ وارد بر ضلع سوم، تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.



۴۶۷. چرا نیمساز زاویهٔ خارجی رأس مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ آن مثلث موازی است؟

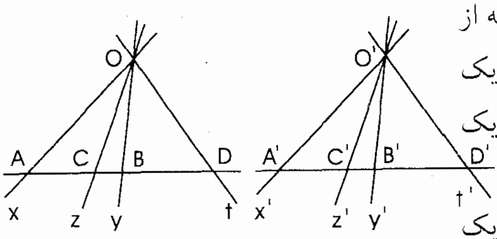
۴۶۸. خطهای همرس D_1، D_2، D_3 و D_4 به‌ترتیب بر خطهای همرس Δ_1



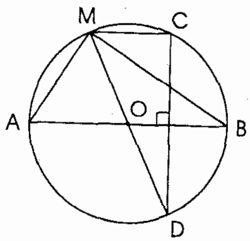


$\Delta_{۲}$ ، $\Delta_{۳}$ و $\Delta_{۴}$ عمودند. ثابت کنید اگر دستگاه $(O-D_{۱}D_{۲}D_{۳}D_{۴})$ توافقی باشد، دستگاه $(O'-\Delta_{۱}\Delta_{۲}\Delta_{۳}\Delta_{۴})$ توافقی است.

۴۶۹. ثابت کنید که چهارخط همرس که از یک نقطه موازی شعاعهای یک دستگاه توافقی رسم شود، یک دستگاه توافقی است.

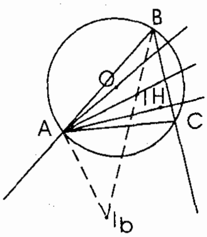


۴۷۰. ۱. فرض می‌کنیم AB قطری از یک دایرهٔ Γ و CD وتری از Γ است که بر AB عمود است. نقطهٔ دلخواه M را بر دایرهٔ Γ اختیار کرده، ثابت کنید دستگاه $(M-ABCD)$ توافقی است.

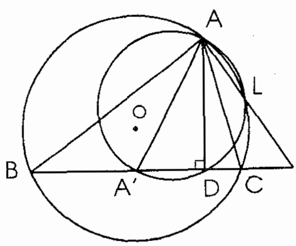


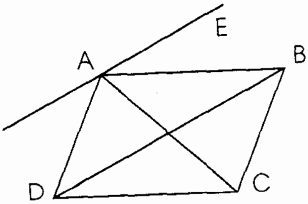
۲. مربع ABCD را که قطرهایش AB و CD می باشند در نظر می‌گیریم . مکان هندسی نقطهٔ M از صفحهٔ این مربع را تعیین کنید به قسمی که $(M-ABDC)$ دستگاه توافقی باشد.

۴۷۱. در مثلث ABC، ثابت کنید $A\ (OHII_b) = -۱$ است یعنی دستگاه $A-OHII_b$ که در آن I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، I_b مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع O,b مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعات مثلث است.

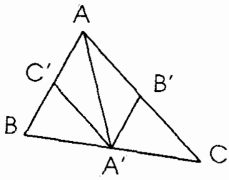


۴۷۲. دایرهٔ به قطر AA' که میانهٔ مثلث ABC است، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ L قطع می‌کند. ثابت کنید $(A-LDBC)=-۱$ که در آن AD ارتفاع رأس A است.

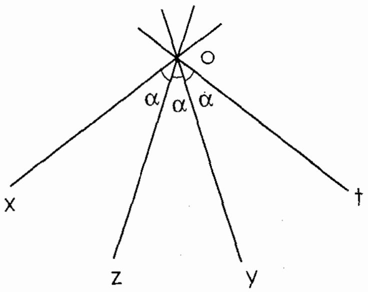




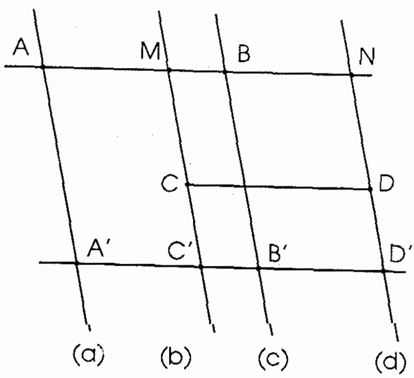
۴۷۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD خط AE به موازات قطر BD رسم شده است. ثابت کنید (A−ECBD) یک دستگاه توافقی است.



۴۷۴. اگر A' ، B' و C' وسطهای ضلعهای مثلث ABC باشند، ثابت کنید AA' شعاع مزدوج $A'C$ نسبت به دو شعاع $A'B'$ و $A'C'$ است.



۴۷۵. از نقطه‌ای مفروض چهارخط چنان رسم می‌کنیم که بین آنها سه زاویهٔ مساوی α پدید آید. زاویهٔ α را چنان تعیین کنید که چهار شعاع مزبور یک دستگاه توافقی باشد.

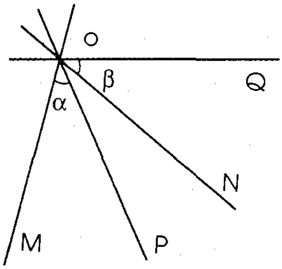


۴۷۶. دو جفت نقطهٔ (A , B) و (C , D) به قسمی داده شده‌اند که خطهای AB و CD متوازی باشند. بر چهار نقطهٔ A ، B ، C و D چهارخط متوازی a ، b ، c و d را به قسمی مرور دهید که چهار نقطهٔ تلاقی هر مورب غیر مشخص با خطهای a ، b ، c و d یک تقسیم توافقی تشکیل دهند.

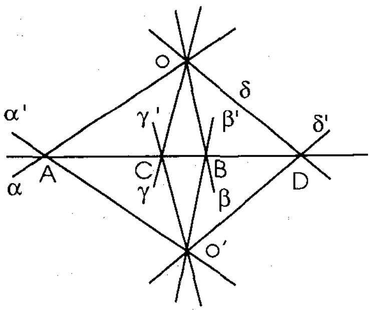
۴۷۷. زاویه β را داخل زاویه α $(\beta<\alpha)$ چنان قرار دهید که ضلعهای دو زاویه با هم دستگاه توافقی تشکیل دهند.

۷.۵. اگر دستگاه توافقی باشد، ...

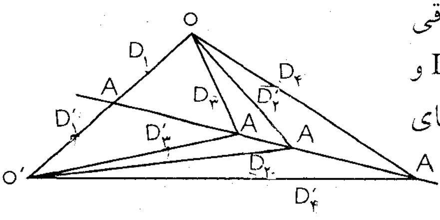
۴۷۸. اگر دستگاه $(O-MNPQ)$ توافقی باشد، آن را با داشتن زاویه‌های $M\hat{O}P=\alpha$ و $N\hat{O}Q=\beta$ رسم کنید.

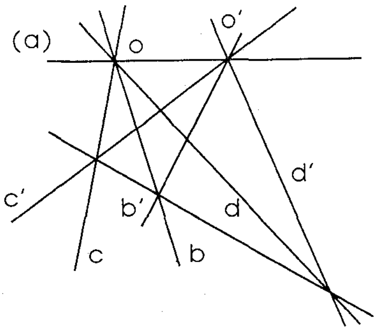


۴۷۹. در دو دستگاه توافقی $(O-\alpha\beta\gamma\delta)$ و $(O' - \alpha'\beta'\gamma'\delta')$ که در یک صفحه‌اند، شعاعهای مزدوج (α,α') , (β,β') , (γ,γ') نسبت به خط L قرینه‌اند. نشان دهید که شعاعهای (δ و δ') نیز نسبت به L قرینه‌اند یا به عبارت دیگر، قرینهٔ یک دستگاه توافقی نسبت به یک خط، دستگاه توافقی است.

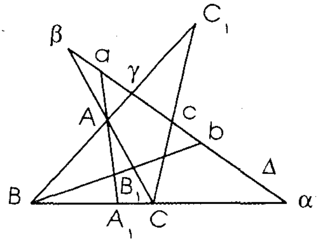


۴۸۰. دو دستگاه توافقی $(O-D_1D_2D_3D_4)$ و $(O'-D_1D'_2D'_3D'_4)$ در شعاع D_1 مشترکند. نشان دهید محل تلاقی D_1 خطهای (D_4 و D'_4)، (D_3 و D'_3) و (D_2 و D'_2) یعنی نقطه‌های A_2، A_3 و A_4 بر یک استقامتند.



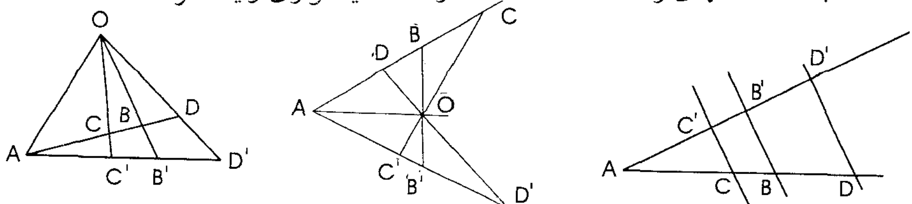


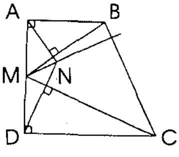
۴۸۱. نقطه‌ها و ضلعهای زیر در یک صفحه داده شده‌اند:
دو نقطهٔ O و ´O که یک خط a را مشخص می‌سازند، سه خط b ، c و d که بر نقطهٔ O می‌گذرند، و سه خط ´b ، ´c و ´d که بر نقطهٔ ´O می‌گذرند.
فرض می‌کنیم که دستگاههای (O−abcd) و (Ó−ab´c´d´) توافقی باشند، ثابت کنید نقطه‌های مشترک سه جفت خط (b و ´b) ، (c و ´c) و (d و ´d) بر یک استقامتند.



۴۸۲. مورب Δ ضلعهای AB ، CA و BC (یا امتداد آنها) از مثلث ABC را در α ، β و γ قطع می‌کند. وسطهای $\beta\gamma$، $\gamma\alpha$ و $\alpha\beta$ را بترتیب a ، b و c نامیده، به نقطه‌های A ، B و C وصل می‌کنیم. خطهای Aa ، Bb و Cc خطهای BC ، CA و AB را در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع می‌کنند. نشان دهید که این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار دارند.

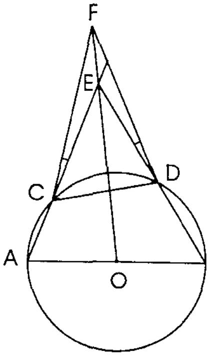
۴۸۳. اگر دو تقسیم توافقی (ABCD) و (AB´C´D´) یک نقطهٔ مشترک داشته باشند، خطهای راست ´BB ، ´CC و ´DD یا موازی و یا همرسند.



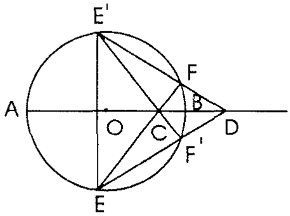


۴۸۴. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه ABCD $(\hat{A}=\hat{D}=90^\circ)$ رأسهای B و C را به نقطهٔ M وسط AD وصل

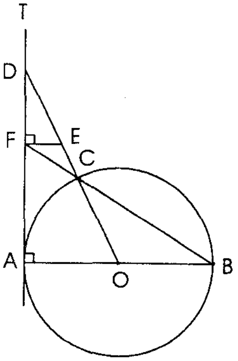
می‌کنیم. از D عمودی بر CM و از A عمودی بر BM رسم می‌کنیم تا همدیگر را در N قطع کنند. نشان دهید، MN بر BC عمود است.



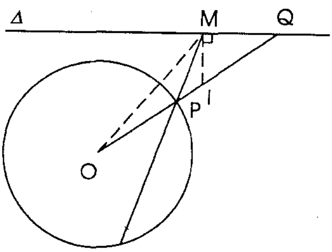
۴۸۵. دایرهٔ O به قطر AB و وتر DC از آن مفروضند. خط اختیاری که بر O گذشته، AC را در E و BD را در F قطع می‌کند. نشان دهید زاویه‌های $(\hat{CE,CF})$ و $(\hat{DE,DF})$ متساوی و مختلف‌العلامه‌اند.



۴۸۶. دایرهٔ (O) به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ ثابت C واقع بر قطر AB وتر EF را در دایرهٔ (O) رسم کرده و ´E و ´F، قرینه‌های E و F را نسبت به AB تعیین می‌کنیم. ثابت کنید D نقطهٔ تقاطع ´FE و ´EF ، وقتی EF حول نقطهٔ C دوران نماید، ثابت است.



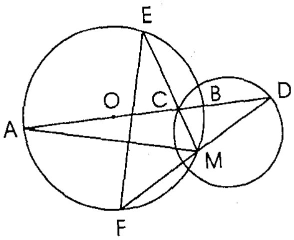
۴۸۷. بر دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB مماس AT را از A رسم می‌کنیم. بر O خط متغیری می‌گذرانیم تا AT را در D و دایره را در C قطع کند. مزدوج توافقی نقطهٔ O را نسبت به نقطه‌های C و D نقطهٔ E می‌نامیم. از E عمود EF را بر AT رسم می‌کنیم. نشان دهید، FC بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۴۸۸. دایرهٔ (C) به مرکز O و خط Δ در یک صفحه مفروضند. نقطهٔ P روی دایرهٔ (C) جابه جا می‌شود، خط OP خط Δ را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. فرض می‌کنیم نقطهٔ I مزدوج

توافقی نقطهٔ O نسبت به نقطه‌های P و Q بوده و M تصویر قائم I بر خط Δ باشد، ثابت کنید خط MP از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

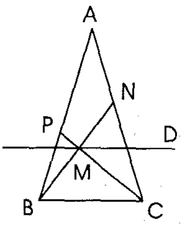
۴۸۹. در دو دایرهٔ O و ´O، قطر AB از دایرهٔ O دایرهٔ ´O را در C و D قطع می‌کند نقطهٔ اختیاری M از دایرهٔ O را به C و D وصل می‌کنیم. خطهای MC و MD دایرهٔ O را در E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید، EF بر AB عمود است.



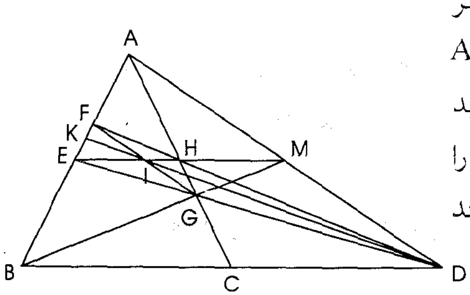
۷. ۶. رابطه‌های متری

۴۹۰. در مثلث متساوی الساقین ABC خط D را موازی با قاعدهٔ BC رسم می‌کنیم. نقطهٔ اختیاری M را روی D در نظر گرفته، خطهای BM و CM را رسم می‌کنیم تا AC و AB را در N و P قطع کنند. ثابت کنید:

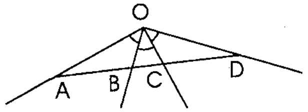
$$\frac{۱}{BP}+\frac{۱}{CN} = C^{te}$$



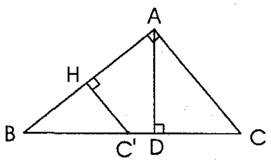
۴۹۱. در مثلث متساوی‌الساقین ABC قاعدهٔ BC را تا نقطهٔ D به اندازهٔ خود امتداد دهید. (BC=CD) بر AB طولهای $AE=\frac{AB}{۲}$ و $AF=\frac{AB}{۳}$ را جدا کنید. DE و DF را رسم کنید و محل تلاقی آنها را I بنامید، DI را رسم کنید تا AB را در K قطع کند ثابت کنید: $EK=\frac{AB}{۱۰}$



۴۹۲. چهار نیم خط OA ، OB ، OC و OD با یکدیگر زاویه‌های 45° می‌سازند؛ و خط ABCD آنها را چنان قطع کرده است که مثلث OAD متساوی‌الساقین است. ثابت کنید: $\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

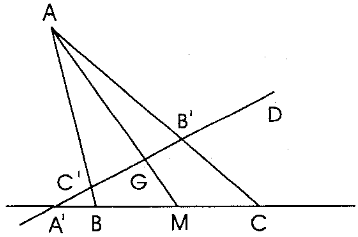


۴۹۳. مثلث ABC قائمه در رأس A مفروض است. ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. اگر C' مزدوج توافقی C نسبت به B و D باشد، و H تصویر C' روی AB فرض شود، ثابت کنید: $CH^2=C'B.C'D$

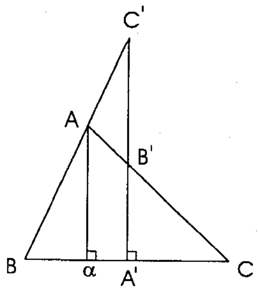


۴۹۴. اگر از G مرکز ثقل مثلث ABC خط دلخواه D را رسم نماییم تا ضلعهای BC ، AC و AB را بترتیب در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کند، ثابت کنید:

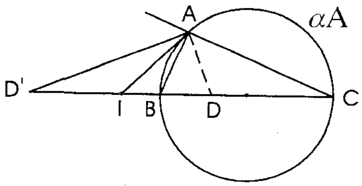
$$\frac{1}{\overline{GA'}} + \frac{1}{\overline{GB'}} + \frac{1}{\overline{GC'}} = 0$$



۴۹۵. در نقطهٔ A' وسط ضلع BC از مثلث ABC عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در B' و ضلع AB را در C' قطع کند. ثابت کنید اگر α پای ارتفاع رسم شده از رأس A در مثلث ABC باشد، رابطهٔ زیر برقرار است: $\frac{1}{\overline{A'C'}} + \frac{1}{\overline{A'B'}} = \frac{2}{\overline{\alpha A}}$



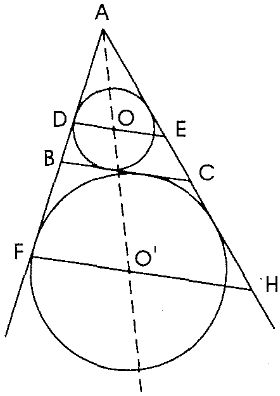
۴۹۶. در مثلث ABC دو نیمساز داخلی و خارجی AD و AD' متعلق به زاویهٔ A را رسم کرده، فرض می‌کنیم I



وسط DD' باشد:

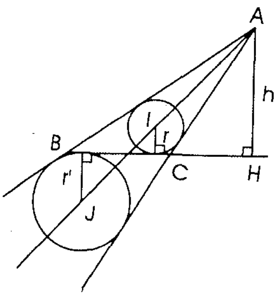
۱. ثابت کنید $\overline{IA}^{۲} = \overline{IB} . \overline{IC}$.

۲. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر خط AI مماس است.

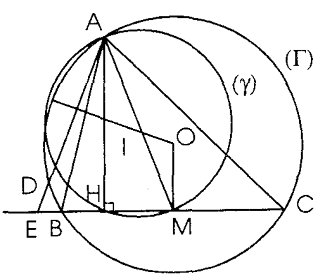


۴۹۷. اگر O و O' مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس به ضلع BC باشند از این دو نقطه، دو خط DE و FH را به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را قطع کنند ثابت کنید:

$$\frac{۲}{\overline{BC}} = \frac{۱}{\overline{DE}} + \frac{۱}{\overline{FH}}$$



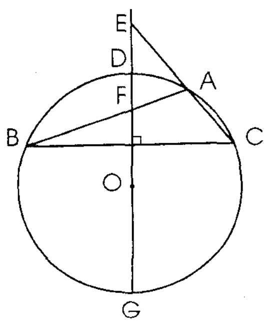
۴۹۸. اگر h ارتفاع وارد بر ضلع BC و r و r' بترتیب شعاعهای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC از مثلث ABC باشند، ثابت کنید: $\frac{۲}{h} = \frac{۱}{r} - \frac{۱}{r'}$



۴۹۹. در مثلث ABC ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. دایره‌های محیطی مثلثهای AHM و ABC خطهای AD و BC را در D و E قطع می‌کنند:

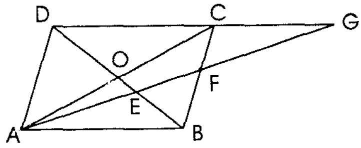
۱. ثابت کنید $\overline{EH} . \overline{EM} = \overline{EB} . \overline{EC}$

۲. نشان دهید، تقسیم (BCHE) توافقی است.



۵۰۰. دو وتر AB و AC از یک دایرهٔ O را در نظر می‌گیریم. قطر DG را عمود بر وتر BC رسم می‌کنیم تا AB را در F و AC را در E قطع کند؛ اگر O مرکز دایره باشد،

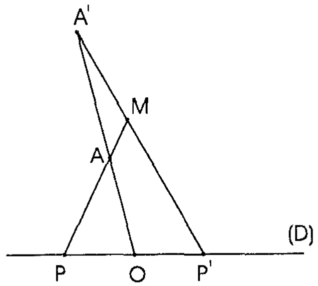
ثابت کنید: $\overline{OF} \cdot \overline{OE} = R^{2}$



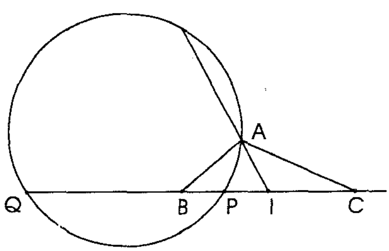
۵۰۱. بر رأس A از متوازی‌الاضلاع ABCD قاطعی مرور می‌دهیم تا قطر BD را در E و ضلعهای BC و CD را در F و G قطع کند. ثابت کنید که:

$$\frac{1}{AE} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AG}$$

۷.۷. تعیین مکان هندسی

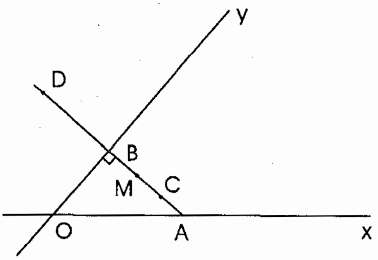


۵۰۲. دو نقطهٔ متغیر P و P' برخط ثابت D به قسمی تغییر می‌کنندکه همواره نسبت به نقطهٔ ثابت O از خط D قرینهٔ یکدیگرند. فرض می‌کنیم A و A' دو نقطهٔ ثابت غیر واقع بر D و با نقطهٔ O بر یک استقامت باشند. مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دو خط AP و $A'P'$ چیست؟

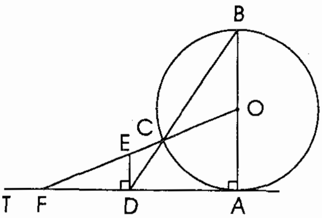


۵۰۳. بر روی ضلعهای BC از مثلث ABC و بر امتداد آن نقطه‌های P و Q را مزدوج یکدیگر نسبت به B و C اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث APQ از نقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرد، سپس مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ را بیابید.

۵۰۴. دو خط ox و oy مفروضند، از نقطهٔ A واقع بر ox خط متغیری رسم می‌کنیم تا oy را در B قطع کند. بر روی این خط دو نقطهٔ C و D را طوری می‌گیریم که BC=BD=BO باشد. مکان هندسی نقطهٔ M مزدوج نقطهٔ A نسبت به دو نقطهٔ C و D را تعیین کنید.



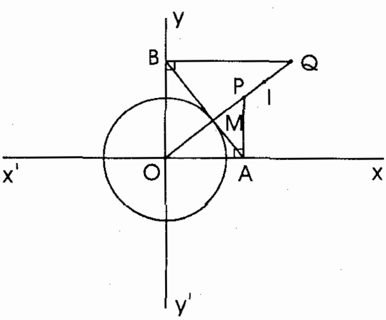
۵۰۵. دایرهٔ (O) به قطر AB مفروض است. از A مماس AT و از B قاطع BC بر دایره را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ D محل تلاقی BC با AT خطی موازی AB رسم می‌نماییم تا OC را در نقطهٔ E قطع کند:



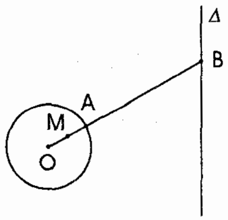
۱. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ F مزدوج توافقی نقطهٔ C نسبت به نقطه‌های O و E.

۲. قاطع BC را چنان رسم کنید تا DF=DA باشد.

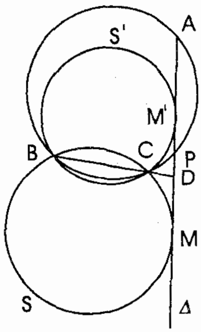
۵۰۶. دایرهٔ O به شعاع R مفروض است. دو قطر عمود برهم ́yoy و ́xox رسم کرده و از نقطهٔ M واقع بر محیط دایره مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا ox‌ ́x و oy‌ ́y را بترتیب در A و B قطع کند. چنانچه نقطه‌های A و B بترتیب تصویرهای نقطه‌های P و Q واقع بر OM باشند، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ I مزدوج توافقی (O) نسبت به P و Q وقتی که M بر محیط دایرهٔ (O) تغییر می‌نماید.



۵۰۷. دایرهٔ (O) و خط Δ مفروضند. از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطهٔ غیر مشخص A واقع بر محیط دایره وصل کرده امتداد می‌دهیم تا خط Δ را در نقطهٔ B قطع کند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M مزدوج توافقی B نسبت به نقطه‌های O و A ، وقتی که نقطهٔ A محیط دایرهٔ (O) را طی می کند.

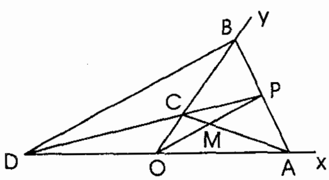


۵۰۸. سه نقطهٔ A ، B و C داده شده‌اند. بر نقطهٔ A خط متغیر Δ و بر نقطه‌های B و C دو دایرهٔ S و ´S را می‌گذرانیم که بر خط Δ مماس باشند. فرض می‌کنیم M و ´M نقطه‌های تماس باشند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P مزدوج توافقی A نسبت به دو نقطهٔ M و ´M.



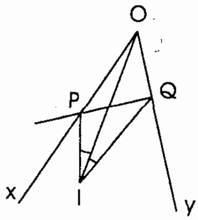
۵۰۹. دو دایرهٔ متقاطع به مرکزهای O و ´O و به شعاعهای R و ´R مفروضند. قاطعهایی در نظر می‌گیریم که نقطه‌های تقاطع آنها با دایره‌های O و ´O نسبت به هم مزدوج باشند؛ ثابت کنید که اوضاع مختلف این قاطعها، بر مقطع مخروطی ثابتی مماس می‌باشند.

۸.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

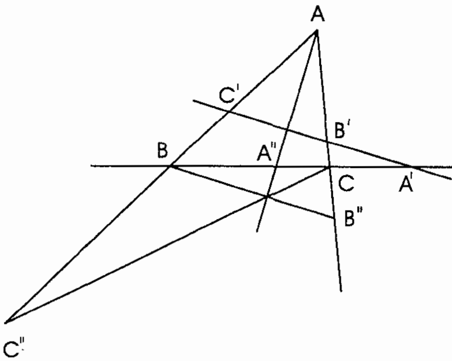


۵۱۰. زاویهٔ XOY و نقطهٔ P در داخل آن مفروض است . بر این نقطه، قاطعی مرور می‌دهیم که OX را در A و Oy را در B قطع کند. A را به M وسط OP وصل می‌کنیم. خط AM نیمخط Oy

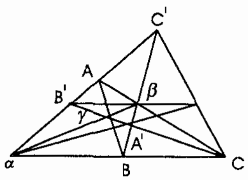
را در C و PC (C روی محور oy)، محور Ox را در D قطع می‌کند. نشان دهید BD موازی با OP است.



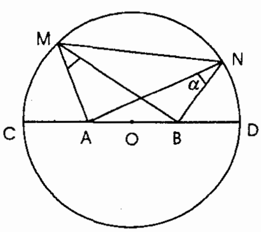
۵۱۱. دو خط OX و OY و نقطهٔ ثابت I در یک صفحه مفروضند. P نقطهٔ متغیری از OX است، و Q نقطه‌ای است از OY به قسمی که دو امتداد IP و IQ نسبت به خط OI قرینه یکدیگرند.
ثابت کنید خط PQ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۵۱۲. اگر ´A ، ´B و ´C سه نقطه روی ضلعهای BC ، CA و AB از یک مثلث و ″A، ″B و ″C مزدوج توافقی آنها نسبت به دو انتهای ضلعهای متناظر باشند، ثابت کنید اگر ´A ، ´B و ´C بر یک استقامت باشند ″AA ، ″BB و ″CC همرسند.



۵۱۳. موربی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC را بترتیب در α ، β و γ قطع می کند. اگر ´A محل برخورد $B\beta$ و $C\gamma$ و ´B محل برخورد $C\gamma$ و $A\alpha$ و ´C محل تلاقی $A\alpha$ و $B\beta$ باشد، آیا خطهای $A'\alpha$ ، $B'\beta$ و $C'\gamma$ همرسند؟

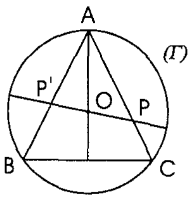


۵۱۴. دایره‌ای به مرکز O و دو نقطهٔ A و B داخل این دایره روی قطر CD واقعند. نقطه‌های M و N روی این دایره طوری واقعند که:

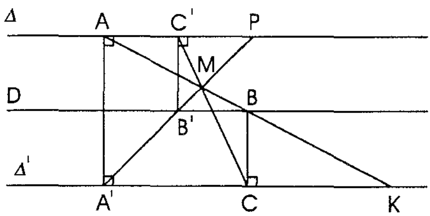
$$\hat{AMB} = \hat{ANB} = C^{te}$$

نشان دهید که MN بر یک و یا دو نقطه ثابت می‌گذرد.

۵۱۵. دایرهٔ (Γ) به مرکز O و دو نقطهٔ P و P' را که با نقطه O بر یک استقامتند، در نظر می‌گیریم، مثلث متساوی الساقین ABC $(AB=AC)$ را به قسمی در دایره Γ محاط کنید که خطهای AB و AC بترتیب بر نقطه‌های P و P' بگذرند.

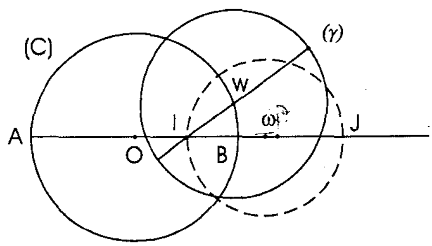


۵۱۶. در یک صفحه دو خط متوازی Δ و Δ' و خط D را که با Δ و Δ' موازی و از این دو خط به یک فاصله است در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم یک عمود مشترک دو خط Δ و Δ'، این دو خط را در نقطه‌های A و A' قطع کند. خطهایی که از یک نقطهٔ دلخواه M از صفحه، به نقطه‌های A و A' وصل می‌شوند، بترتیب خط D را در نقطه‌های B و B' قطع می‌کنند. اگر C و C' بترتیب تصویرهای B و B' بر Δ' و Δ باشند، ثابت کنید که سه نقطهٔ M، C و C' بر یک استقامتند.



۵۱۷. دایرهٔ C به مرکز O و به قطر $AB = 2R$ مفروض است.

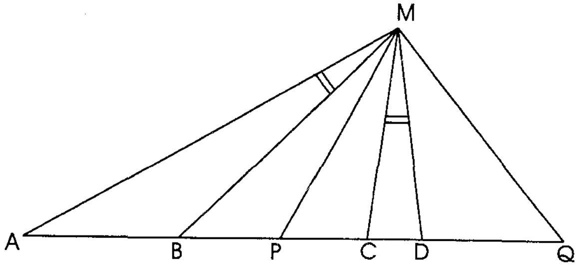
الف. به فرض آن که نقطهٔ I وسط OB باشد، مطلوب است تعیین نقطهٔ J به قسمی که تقسیم (ABIJ) توافقی باشد.



ب. نقطه‌های واقع بر دایرهٔ به قطر IJ چه خاصیت مشترکی دارند؟

پ. هر نقطهٔ ω واقع بر دایرهٔ (C) را مرکز یک دایرهٔ γ قرار می‌دهیم که شعاعش $2\omega I$ باشد. ثابت کنید همهٔ دایره‌های γ بر یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵۱۸. چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بر خط مستقیمی واقعند، مطلوب است تعیین نقطه‌ای مانند A به‌طوری که زاویه‌های $(M\hat{A},MB)$ و $(M\hat{C},MD)$ با هم مساوی و بزرگترین مقدار ممکن را دارا باشند.

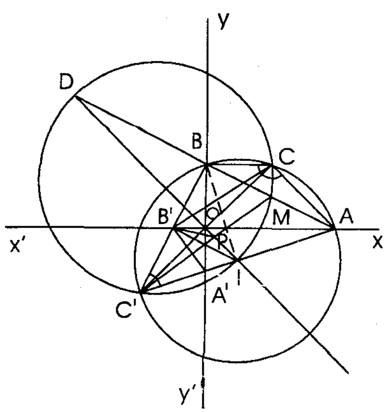


۵۱۹. دو معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a'x^2+b'x+c'=0$ مفروضند. بر روی محوری جهت‌دار، طولهای A و B ریشه‌های معادلهٔ اول و طولهای A' و B' ریشه‌های معادلهٔ دوم می‌باشند، رابطهٔ بین ضرایب دو معادله را طوری بیابید که تقسیم $(ABA'B')$ توافقی باشد.

۷. ۹. مسأله‌های ترکیبی

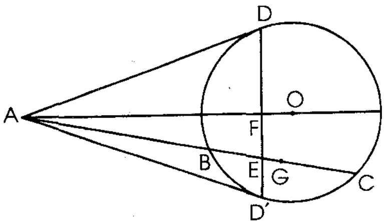
۵۲۰. زاویهٔ قائمهٔ xOy و نقطهٔ C واقع بر نیمساز آن، و نقطهٔ C' قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به نقطهٔ O مفروض است. روی نیمخطهای Ox و Oy بترتیب دو نقطهٔ A و B را طوری اختیار می‌کنیم که $OA.OB=OC^2$ باشد. ثابت کنید

۱. چهار ضلعی $ACBC'$ محاطی است.



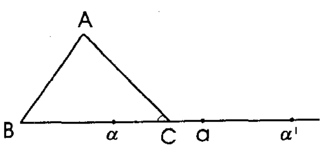
۲. زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{C'}$ این چهار ضلعی و زاویه‌ای را که قطعه خط AB از نقطهٔ I مرکز چهارضلعی تحت آن دیده می‌شود، حساب کنید.
۳. ضلعهای $C'A$ و $C'B$ امتداد OX و OY را در نقطه‌های A' و B' قطع می‌کنند. ثابت کنید که $A'B'$ بر دایرهٔ ثابتی مماس است.
۴. فرض کنید D نقطهٔ برخورد خط AB با خط OI باشد. ثابت کنید که دایرهٔ به قطر DI از نقطه‌های C و C' می‌گذرد.
۵. هرگاه M وسط AB باشد ثابت کنید $B'P$ نیمساز زاویهٔ CMC' است.
۶. اگر P نقطهٔ برخورد AC' و DI باشد، ثابت کنید $B'P$ نیمساز زاویهٔ $A'B'A$ است.

۵۲۱. سه نقطهٔ A ، B و C روی یک خط راست داده شده‌اند. از C و B دایره‌ای اختیاری مرور داده از A مماسهای AD و AD' را بر آن رسم می‌کنیم. اگر O مرکز دایره باشد، خط DD' خط AO را در F و BC را در E قطع می‌کند. وسط BC را نقطهٔ G می‌نامیم.



۱. ثابت کنید چهار نقطهٔ A ، B ، E و C تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند از آن جا نتیجه بگیرید که نقطهٔ E با تغییر دایره تغییر نمی‌کند.
۲. ثابت کنید: $\overline{AE}\,.\,\overline{AG} = \overline{AD}^2$
۳. در حالتی که $AB = 3a$ و $BC = 2a$ و شعاع دایره $\frac{5a}{4}$ باشد، طولهای AE و OG و مساحت چهارضلعی OGEF را حساب کنید.

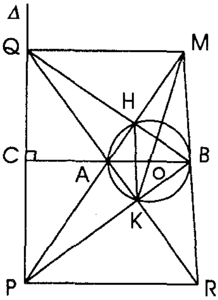
۵۲۲. مثلث ABC مفروض است. بر ضلعهای BC ، AC و AB نقطه‌های $(\alpha\,,\,\alpha')$ ، $(\beta\,,\beta')$ و $(\gamma\,,\gamma')$ را چنان در نظر می‌گیریم که $(\alpha\,,\alpha')$ مزدوجهای توافقی BC و $(\beta\,,\beta')$ مزدوجهای توافقی AC و $(\gamma\,,\gamma')$ مزدوجهای توافقی AB باشند. و اگر a ، b و c بترتیب وسطهای $\overline{\alpha\alpha'}$ ، $\overline{\beta\beta'}$ و $\overline{\gamma\gamma'}$ باشند،



۱. اگر α ، β و γ بر یک خط راست واقع باشند خطهای $A\alpha'$ ، $B\beta'$ و $C\gamma'$ همرس، یا متوازی‌اند و نقطه‌های a ، b و c بر یک استقامت می‌باشند.

۲. اگر $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ همرس یا متوازی باشند، نقطه‌های α' ، β' و γ' و همچنین a ، b و c هر دسته بر یک خط راست قرار دارند.

۵۲۳. دایرهٔ (O) به قطر AB و زوی قطر AB نقطهٔ C قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ A مفروضند. خط Δ را عمودبر AB رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A خط متغیری رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ P و دایره را در نقطهٔ دیگر H قطع کند. خط BH نیز Δ را در نقطهٔ Q و همچنین خط AQ ، دایره را در نقطهٔ K تلاقی می‌نماید. از نقطه‌های P و Q خطهایی موازی AB رسم می‌کنیم تا AQ و PA را بترتیب در نقطه‌های R و M قطع کنند. ثابت کنید:



۱. نقطه‌های P و H مزدوجهای توافقی نقطه‌های A و M هستند.

۲. نقطه‌های P ، K و B بر یک استقامتند.

۳. نقطه‌های R ، B و M بر یک استقامت هستند.

۴. خطهای KH و MK هر یک از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

بخش ۸.

نسبت ناهمساز

بخش ۸. نسبت ناهمساز

۸. ۱. تعریف و قضیه

نسبت ناهمساز (نسبت غیر توافقی)

در تقسیم توافقی دیدیم که اگر دو نقطهٔ A و B روی یک محور قرار داشته باشند، به ازای هر عدد حقیقی K ، تنها یک نقطه مانند C روی این محور وجود دارد به قسمی که $K=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ باشد. زیرا:

به ازای هر عدد حقیقی $K\neq ۱$ یک نقطه و تنها یک نقطه مانند C وجود دارد چنان‌که، $K=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ باشد. به ازای $K=۰$ ، C بر A منطبق است. C نمی‌تواند روی B واقع شود، زیرا K عدد معینی اختیار شده ، ولی هر قدر به B نزدیک شود، $|K|$ افزایش می یابد.

در صورتی که K به عدد ۱ نزدیک شود، C از A و B دورتر می‌گردد.

برای آن که مسأله به ازای $K=۱$ نیز دارای جواب باشد، اصل دزارگ desargues را که به‌صورت زیر بیان می‌شود می‌پذیریم :

اصل دزارگ . هر خط یک نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد. همهٔ خطهای موازی، یک نقطهٔ بی‌نهایت دور مشترک دارند، به گفتهٔ دیگر خطهایی که یک راستا را تشکیل می‌دهند، یک دسته خطند. که نقطهٔ همرسی آنها در بی نهایت دور است.

مکان هندسی نقطه‌های بی‌نهایت دور خطهای یک صفحه، یک خط است که آن را خط بی‌نهایت دور آن صفحه گویند. معادلهٔ این خط در مختصات همگن که برای هر نقطه (x , y) سه مختص (X,Y,T) قائل می‌شوند، $T=۰$ است.

اصل دزارگ برای مطالعهٔ منطقی بی‌نهایت دور، مانند خطهای مجانب، در هندسه ضرورت دارد. با توجه به نکته‌های بالا اگر A،B،C و D چهار نقطهٔ واقع بر یک محورباشند، از تساوی $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ نتیجه می‌شود که C و D هر دو یک نقطه‌اند (بر هم منطبقند).

نسبت ناهمساز

تعریف . نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ غیر مشخص A ، B ، C و D که جدا از هم و به همین ترتیب مفروضند، عبارت است از عدد (ABCD) که بر حسب فاصله‌های دو به دوی این نقطه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

الف. اگر چهار نقطه روی یک خط راست نباشند، $(ABCD)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$

ب . اگر چهار نقطه روی یک خط راست باشند، $(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$

بنابراین در صورتی که چهار نقطهٔ A ، B ، C و D روی یک خط راست باشند، نسبت ناهمساز بین این چهار نقطه عددی است جبری که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف . چهار نقطهٔ A ، B ، C و D روی محوری مفروضند. عدد جبری $K=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ را نسبت ناهمساز یا نسبت غیر توافقی این چهار نقطه می‌نامند؛ و آن را به صورت $(ABCD)=K$ نمایش می‌دهند. $(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=K$

نسبت ناهمساز چهار عدد جبری

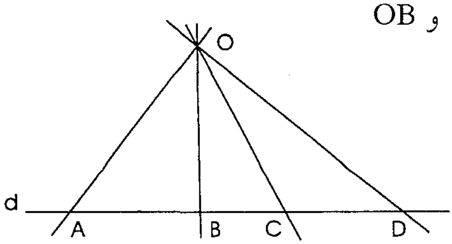
تعریف . نسبت ناهمساز چهار عدد جبری a ، b ، c و d عبارت است از نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A ، B ، C و D که عددهای بالا بترتیب، طولهای این نقطه‌ها باشند؛ یعنی : $(a,b,c,d)=(A,B,C,D)$

نکتهٔ مهم. در حالت خاصی که دو نقطهٔ A و B مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به نقطه‌های C و D باشند، نسبت ناهمسازی، مساوی (۱−) می‌شود، و چهارنقطه باهم بخش همساز (تقسیم توافقی) تشکیل می‌دهند.

۵۲۴. **مسأله اصلی.** سه نقطهٔ متمایز A ، B و C واقع بر یک محور و عدد حقیقی K مفروضند. نقطهٔ D را روی این محور چنان بیابید که : $(ABCD)=K$

دستگاه ناهمساز . از وصل یک نقطهٔ O به نقطه‌های یک بخش ناهمساز با نسبت K ، $(ABCD)=K$ ، چهار خط همرس پدید می‌آید، که دستگاه ناهمساز K نامیده می‌شود و آن را با نماد (O, ABCD) نشان می‌دهند. در حالت خاص $K=-1$ دستگاه همساز نامیده می‌شود و OC و OD را شعاعهای

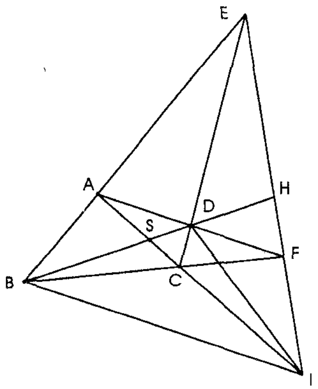
مـــزدوج نســـبت بــه OA و OB می‌نامند.



۵۲۵. قضیه . دستگاه ناهمساز K ، روی هر خط قاطع، نسبت ناهمساز K پدید می‌آورد.

۵۲۶. قضیه . در دو بخش ناهمساز که نسبت ناهمسازی آنها برابر و یک جفت نقطهٔ نظیر آنها بر هم منطبق است، سه خطی که سه جفت نقطه‌های نظیر دیگر را به هم وصل می‌کنند، همرسند.

۵۲۷. قضیه . در دو دستگاه ناهمساز K (یعنی دو دستگاه ناهمساز با نسبت ناهمسازی مشترک K) که در یک جفت شعاع نظیر مشترکند، سه جفت شعاعهای نظیر دیگر، یکدیگر را در سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند.



۵۲۸. قضیه . در چهارضلعی کامل هر قطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت همساز (توافقی) تقسیم می‌شود.

۵۲۹. قضیه . هرگاه سه خطی که رأسهای دو مثلث را دو به دو به هم وصل می‌کنند همرس باشند. سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل به این راسها، بر یک خط راست واقع می شوند.

۵۳۰. عکس قضیه . هرگاه ضلعهای دو مثلث دو به دو یکدیگر را در سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست قطع کنند، خطهای واصل بین رأسهای مقابل به این ضلعها، در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۵۳۱. نسبت ناهمساز چهار نقطه از دایره. اگر چهار نقطهٔ ثابت از دایرهٔ مفروض را به نقطهٔ متغیری از همان دایره وصل کنیم، دستگاه ناهمساز متغیری پدید می‌آید، که نسبت ناهمسازی آن ثابت است.

۵۳۲. **قضیه**. مماسهای چهار نقطهٔ ثابت از دایرهٔ مفروض روی مماس متغیری از دایره، بخش ناهمسازی پدید می‌آورند که نسبت ناهمسازی آن، مساوی نسبت ناهمسازی چهارنقطه نسبت به دایره است.

۵۳۳. **قضیه پاسکال**. در شش ضلعی محاطی، سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل (دو در میان)، بر یک خط راست قرار دارند.

۵۳۴. **قضیه بریانشون**. در شش ضلعی محیطی، سه خط که رأسهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، همرسند.

۲.۸. ویژگیهای نسبت ناهمساز

۵۳۵. نسبت ناهمساز $(ABCD)=K$ مفروض است. ثابت کنید اگر دو نقطهٔ اول و دوم، یا دو نقطهٔ سوم و چهارم را جابه‌جا کنیم، نسبت ناهمساز معکوس می‌شود.

۵۳۶. نسبت ناهمسازی $(ABCD)=K$ مفروض است. ثابت کنید اگر جای نقطه‌های اول و دوم و نقطه‌های سوم و چهارم را با هم عوض کنیم، نسبت ناهمسازی تغییر نمی‌کند.

۵۳۷. ثابت کنید در نسبت ناهمسازی $(ABCD)=K$، اگر دو نقطهٔ وسط را جابه‌جا کنیم، نسبت ناهمساز $(ACBD)=1-K$ به‌دست می‌آید.

۵۳۸. در نسبت ناهمسازی $(ABCD)=K$ اگر وضع نسبی چهار نقطه را دو به دو تغییر دهیم، نسبت ناهمساز تغییر نمی‌کند.

۵۳۹. در نسبت ناهمساز $(ABCD)=K$، اگر دو نقطهٔ اول و چهارم جابه‌جا شوند، نسبت ناهمساز K، به نسبت ناهمساز $1-K$ تبدیل می‌شود.

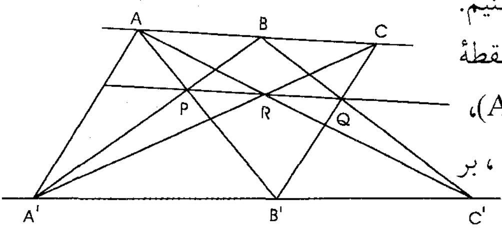
$$(ACBD)=(BDAC)=(DBCA)=1-K$$

۵۴۰. با فرض $(ABCD)=K$، هر یک از نسبتهای ناهمسازی زیر را برحسب K حساب کنید: $(BACD)$, $(ACBD)$, $(CABD)$, $(BCAD)$, $(CBAD)$

۳.۸. دستگاه ناهمساز

۵۴۱. ثابت کنید روی خط موازی با یکی از شعاعهای دستگاه ناهمساز، به وسیلهٔ سه شعاع دیگر نسبت ناهمسازی ظاهر می‌شود.

۵۴۲. روی خط Δ سه نقطهٔ A ، B و C و روی خط Δ' سه نقطهٔ A' ، B' و C' را بدون هیچ شرطی اختیار می‌کنیم.



ثابت کنید P ، Q و R سه نقطهٔ برخورد (AB', BA')، (BC', CB') و (CA', AC') ، بر یک خط راست واقعند.

۵۴۳. اگر $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ ، $C(x_3, y_3)$ و $D(x_4, y_4)$ و معادلهٔ دسته خط گذرنده بر رأس دستگاه ناهمساز $(O, ABCD)$ به صورت $D(x, y) + \lambda D'(x, y) = 0$ و λ_1 ، λ_2 ، λ_3 و λ_4 بترتیب عددهایی باشند که به ازای آنها شعاعهای OA ، OB ، OC و OD مشخص می‌شوند، ثابت کنید که

$$K=(ABCD)=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

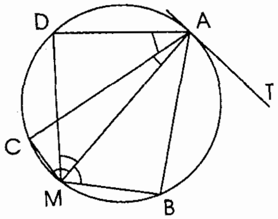
۵۴۴. ثابت کنید نسبت ناهمساز چهار خط، برابر است با، نسبت ناهمساز ضریب زاویه‌ایهای آنها.

تعریف . اگر چهارخط همرس را با خط غیر مشخص قطع کنیم، نسبت ناهمساز ثابتی را که این چهارخط روی خط غیر مشخص پدید می‌آورند، نسبت ناهمساز چهارخط می‌نامند.

۵۴۵. مسأله Laguerre . نسبت غیر توافقی دو ضلع یک زاویهٔ مفروض را با دو خط ایزوترپ Isotrope که از رأس زاویه می‌گذرند، تعیین کنید. (خطهای ایزوترپ یک نقطه دو خط هستند که از آن نقطه می‌گذرند و ضریب زاویه‌ایشان با فرض $i=\sqrt{-1}$ ، برابر i و $-i$ است).

۸. ۴. نسبت ناهمساز چهار نقطه از دایره

۵۴۶. چهار نقطهٔ A ، B ، C و D بر دایره‌ای مفروضند. از A مماس AT را براین دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید نسبت ناهمسازی دستگاه (A ,TBCD) مساوی نسبت ناهمسازی چهار نقطه نسبت به دایره است.



۵۴۷. نسبت ناهمساز چهارنقطه از دایره را از روی پاره خطهایی که چهارنقطه پدید می‌آورند، حساب کنید.

۵۴۸. هرگاه چهار نقطهٔ A ، B ، C و D روی یک دایره، نسبت همساز پدید آورند، یعنی $(ABCD) = -1$، و P و P´ بترتیب نقطه‌های برخورد دو مماسی باشد که از (B , A) و (C , D) بر دایره رسم می‌شوند. ثابت کنید خط CD از نقطهٔ P و خط AB از نقطهٔ P´ می‌گذرد.

راهنمایی و حل

در این مجموعه برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند، و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش پژوهان واگذار شده است، تا این دایرةالمعارف بتواند نقش و سهم بیشتری در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راهنماییهای ارایه شده برای حل ، و حل مسأله‌ها، در تمام موارد، بهترین و یا ساده‌ترین راهنمایی یا راه حل نیستند، و ممکن است ذهنهای خلاق و جستجوگر دانش پژوهان محترم بتوانند به راه حلهای ساده‌تر و یا جالبتری دست یابند، و یا، قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشد، اما ممکن است بازهم اشکالهاو نادرستیهایی وجود داشته باشد؛ بدین جهت از دانش‌پژوهان ، استادان و ریاضیدانان بزرگوار و محترم درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هر چه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن، مورد استفاده قرار گیرد.

ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری و به منظور ارج نهادن به زحمتها و تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه حل برای هر مسأله ، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها، به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

بخش ۱. نسبت و تناسب

۱.۱.۱. نسبت دو کمیت

۱. الف) $\frac{۵}{۶}$ ب) $\frac{۱۱}{۷}$ پ) $\frac{x+y}{xy}$ ت) $\frac{۳}{۲x}$

۲. داریم:

$$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{۵}{۷} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

اگر c واحد طول اختیار شود، اندازه a برابر $\frac{a}{c}$ است. پس:

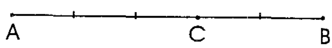
واحد اختیار شده $a = \frac{۱۰}{۲۱}$

۲.۱.۱. نسبت دو پاره خط

۳. داریم: طول پاره خط CD برحسب سانتی‌متر $۶\times۱۰۰=۶۰۰$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{۱۸۰}{۶۰۰} = \frac{۳}{۱۰}, \frac{CD}{AB} = \frac{۶۰۰}{۱۸۰} = \frac{۱۰}{۳}$$

۴. داریم:



$$\frac{CA}{CB} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \text{ و } \frac{CB}{CA} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \frac{CA}{AB} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

۶. داریم:

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MN + NP}{MN + NP + PQ} = \frac{۱۰+۳۵}{۱۰+۳۵+۱۷} = \frac{۴۵}{۶۲}$$

$$\frac{NQ}{NR} = \frac{۵۲}{۷۵} , \frac{PR}{PM} = \frac{۸}{۹} , \frac{QM}{QN} = \frac{۳۱}{۳۶} , \frac{RN}{RP} = \frac{۱۵}{۸}$$

۷. درازا و پهنای زمین را بر حسب یک واحد محاسبه می‌کنیم و خارج قسمت آنها را به دست می‌آوریم.

۱۴ متر برحسب دسیمتر $۱۴ \times ۱۰ = ۱۴۰$

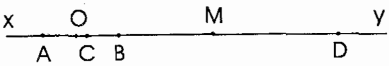
درازا برحسب دسیمتر $۱۴۰ + ۴ = ۱۴۴$

۵ متر برحسب دسیمتر $۵ \times ۱۰ = ۵۰$

پهنا برحسب دسیمتر $۵۰ + ۴ = ۵۴$

$$\frac{\text{درازا}}{\text{پهنا}} = \frac{۱۴۴}{۵۴} = \frac{۷۲}{۲۷} = \frac{۸}{۳}$$

۸. داریم : الف .



$$\frac{CA}{CB} = \frac{۲۱}{۱۵} = \frac{۷}{۵} \text{ و } \frac{DA}{DB} = \frac{DB+BC+CA}{DB} = \frac{۹۰+۱۵+۲۱}{۹۰} = \frac{۱۲۶}{۹۰} = \frac{۷}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{۷}{۵}$$

ب . $AB = AC + CB = ۲۱ + ۱۵ = ۳۶ \Rightarrow OA = \frac{۱}{۲} AB = ۱۸$ و

$OC = AC - AO = ۲۱ - ۱۸ = ۳$ ، $OD = OB + BD = ۱۸ + ۹۰ = ۱۰۸$

$\overline{OA}^{۲} = ۱۸^{۲} = ۳۲۴$ و $OC . OD = ۳ \times ۱۰۸ = ۳۲۴ \Rightarrow OA^{۲} = OC . OD$

پ . $CD = CB + BD = ۱۵ + ۹۰ = ۱۰۵ \Rightarrow MC = MD = ۵۲/۵$

$\Rightarrow MA = ۷۳/۵$ و $MB = ۳۷/۵ \Rightarrow ۵۲/۵^{۲} = ۷۳/۵ \times ۳۷/۵$ و ...

۹. داریم : $\frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC} = \frac{۲}{۳}$

۱۰. داریم : $\frac{QA}{QC} = \frac{m}{n}$

۱۱. مجموع یک طول و یک عرض $۳۶۰ : ۲ = ۱۸۰$

$$\frac{a}{b} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow \frac{a}{۱۸۰} = \frac{۷}{۱۱} \Rightarrow$$

$a = ۱۰۵$ طول زمین $\Rightarrow b = ۱۸۰ - ۱۰۵ = ۷۵$ عرض زمین

۱۲. ۷۱۲/۵ متر، یا ۴۵۶ متر .بنابرآن که ۵۷۰ طول پاره خط کوچکتر و یا طول پاره‌خط بزرگتر باشد.

۳.۱.۱. تقسیم پاره خط به نسبت معین

۱۳. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{MA}{AB}=\frac{۳}{۱۱} \Rightarrow MA=\frac{۳AB}{۱۱}=\frac{۳\times ۵}{۱۱}=\frac{۱۵}{۱۱}$$

$$MB = AB - MA = ۵-\frac{۱۵}{۱۱}=\frac{۴۰}{۱۱}$$

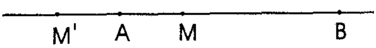
۱۴.
$$\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NA}=\frac{n}{۱} \Rightarrow MA = BN$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{n}{۱} \Rightarrow \frac{MA}{AB}=\frac{n}{n+۱} \Rightarrow MA=\frac{nAB}{n+۱}=\frac{na}{n+۱}$$

$$MN = AB - ۲AM = a-\frac{۲na}{n+۱}=\frac{an+a-۲na}{n+۱}=\frac{a(۱-n)}{n+۱}$$

$$MN=\frac{a(۱-n)}{۱+n}$$

۱۵. **راه اول.** الف. پاره خط AB را به ۷ قسمت برابر تقسیم می‌کنیم و نقطهٔ M را در دومین قسمت از طرف نقطهٔ A اختیار می‌نماییم.



ب. پاره خط AB را به ۳ پاره خط برابر تقسیم می‌کنیم؛ به اندازهٔ ۲ پاره خط، مساوی هر یک از این پاره خطها، در امتداد BA جدا می‌کنیم، نقطه ´M به دست می‌آید.

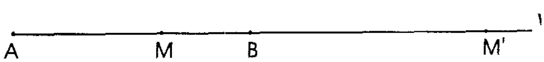
راه دوم. محاسبهٔ طول پاره خطها.

$$MA = ۱۰/۵\times\frac{۲}{۷}=۳cm\ ,\ MB = ۱۰/۵\times\frac{۵}{۷}=۷/۵\ cm$$

$$M'A = ۱۰/۱۵\times\frac{۲}{۳}=۷\ cm\ ,\ M'B = ۱۰/۵\times\frac{۵}{۳}=۱۷/۵cm$$

۱۶. راه اول .

الف. پاره خط AB را به ۸ پاره خط برابر تقسیم می‌کنیم، و نقطهٔ M را پنجمین قسمت تقسیم از نقطهٔ A می‌گیریم.

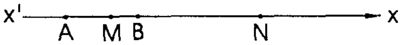


ب. پاره خط AB را به دو پاره خط متساوی تقسیم کرده ، درامتداد AB سه پاره خط دیگر به اندازهٔ همین پاره‌خطها رسم می‌کنیم. آخرین نقطه، نقطهٔ ´M است.

راه دوم. محاسبهٔ طول پاره خطها.

$M'B = ۱۸\ cm$ و $M'A = ۳۰\ cm$ و $MB = ۴/۵\ cm$ و $MA = ۷/۵\ cm$

۱۷. داریم :



$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = n \,,\ \frac{MA}{MB} = \frac{n}{۱} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB} = \frac{n}{n+۱}$$

$$\frac{MA}{AB} = \frac{n}{n+۱} \Rightarrow MA = \frac{nAB}{n+۱} \Rightarrow MA = \frac{na}{n+۱}$$

$$\frac{NA}{NB} = \frac{n}{۱} \Rightarrow \frac{NA}{NA-NB} = \frac{n}{n-۱} \Rightarrow \frac{NA}{a} = \frac{n}{n-۱} \Rightarrow NA = \frac{na}{n-۱}$$

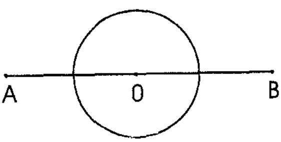
$$MN = AN - AM = \frac{na}{n-۱} - \frac{na}{n+۱} = an\left(\frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n+۱}\right) = an\left(\frac{n+۱-n+۱}{n^۲-۱}\right)$$

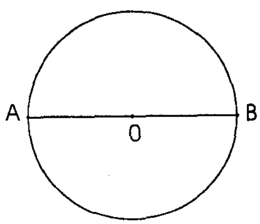
$$\Rightarrow MN = \frac{۲an}{n^۲-۱}$$

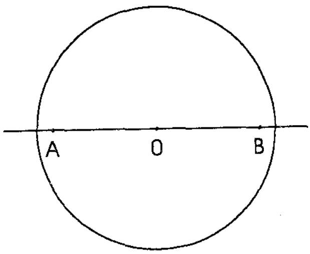
۱۸. اگر پاره خط AB پاره خط مفروض و $K = \frac{p^۲}{q^۲}$ اختیار شود، نقطه‌های M و M´ را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = K$ باشد.

این دو نقطه جواب مسأله‌اند. (اگر نسبت فاصله از نقطه‌های B و A هم مورد نظر باشد، یعنی $\frac{M_۱B}{M_۱A} = \frac{M'_۱B}{M'_۱A} = K$ مسأله دو جواب دیگر $M_۱$ و $M'_۱$ هم خواهد داشت).

۱۹. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت $K^۲$ است، دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و شعاعش $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲K^۲ - a^۲}$ است.
در صورتی که این دایره پاره خط AB را قطع کند، نقطه‌های تقاطع جواب مسأله‌اند.





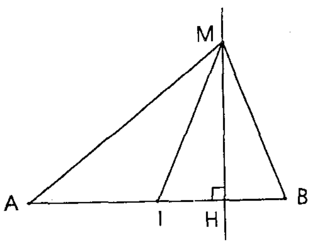


بحث. ۱. اگر $K^۲<\frac{a^۲}{۲}$ باشد، مسأله جواب ندارد.

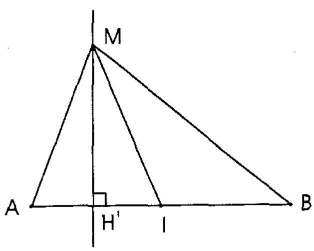
۲. اگر $K^۲=\frac{a^۲}{۲}$ باشد، مسأله یک جواب دارد (نقطهٔ M وسط پاره خط AB).

۳. اگر $K^۲=a^۲$ باشد، دو نقطهٔ A و B جواب مسأله‌اند.

۴. اگر $K^۲>a^۲$ باشد، دو نقطهٔ جواب مسأله در امتداد پاره‌خط AB می‌باشند.



۲۰. با فرض $MA^۲-MB^۲=K^۲$ و با توجه به این که، مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت $K^۲$ است، خطی است عمود بر AB به قسمی که اگر H پای عمود و نقطهٔ I وسط پاره خط AB باشد، $\overline{IH}=\frac{K^۲}{۲\overline{AB}}$ است. بنابراین، نقطهٔ برخورد این مکان هندسی با خط AB ، یعنی نقطهٔ H جواب مسأله است.



نکته. اگر $MB^۲-MA^۲=K^۲$ باشد، نقطهٔ ´H قرینهٔ نقطهٔ Hنسبت به نقطهٔ I، جواب مسأله است.

۴.۱.۱. نسبت طلایی

۲۱. فرض می‌کنیم $x=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+...}}$ باشد، در این صورت خواهیم داشت :

$$x=۱+\frac{۱}{x}\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$ عدد طلایی

$x=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$. مزدوج منفی عدد طلایی

نکته. مزدوجهای عدد طلایی : عدد $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ را مزدوج مثبت عدد طلایی و $\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ را

مزدوج منفی عدد طلایی می‌نامند، زیرا داریم :

$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}=\frac{۴}{۴}=۱$$

و
$$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\times\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{-۴}{۴}=-۱$$

۲۲. از مجذور کردن $A=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+...}}}$ داریم :

$$A^۲=۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱+...}}} \qquad \Rightarrow A^۲=۱+A\Rightarrow$$

$$A^۲-A-۱=۰\Rightarrow A=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow A=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$ عدد طلایی

و $A=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ مزدوج منفی عدد طلایی .

۲۳. با فرض $y=\frac{۱}{x+۱}$ معادله را حل می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۱}{x+۱}=y\Rightarrow\frac{۱}{y}-۱=x$$

$$(I)\Rightarrow(\frac{۱}{y}-۱)^۲+(\frac{۱}{y}-۱)^۲\times y^۲=۳\Rightarrow(\frac{۱}{y^۲}+y^۲)-۲(\frac{۱}{y}+y)-۱=۰$$

حال با اختیار کردن $\frac{۱}{y}+y=z$ داریم :

$$\frac{۱}{y}+y=z\Rightarrow\frac{۱}{y^۲}+y^۲=z^۲-۲\Rightarrow z^۲-۲-۲z-۱=۰\Rightarrow$$

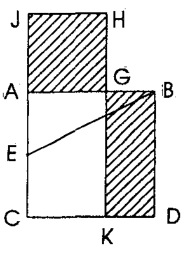
$$z^۲-۲z-۳=۰\Rightarrow z_۱=۳، z_۲=-۱ ، z_۱=۳\Rightarrow\frac{۱}{y}+y=۳$$

$$\Rightarrow y^۲-۳y+۱=۰\Rightarrow y_۱=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \text{ و } y_۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

$z_۲=-۱$ و $\frac{۱}{y}+y=z\Rightarrow y^۲+y+۱=۰\ ,\ \Delta<۰$ معادله جواب ندارد.

$$y_۱=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x+۱}=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$ مزدوج مثبت عدد طلایی

$$y_۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{x+۱}=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$ عدد طلایی



۲۴. استدلال اقلیدس . «پاره‌خط مفروض را AB فرض کنید. باید AB را طوری تقسم کنیم که مستطیل حاصل از تمامی پاره خط و یکی از قطعه‌های آن، با

مربع روی قطعهٔ دیگر، برابر باشد.
مربع ABDC را روی AB می‌سازیم. از نقطهٔ E وسط AC به B وصل می‌کنیم. CA را امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ J برسد، به نحوی که EJ برابر با BE باشد. روی A J ، مربع JG را می‌سازیم و HG را تا نقطهٔ K امتداد می‌دهیم. من حکم می‌کنم که AB در نقطهٔ G طوری تقسیم شده است که مستطیل حاصل از AB و BG ، برابر است با مربعی که روی ضلع AG ساخته می‌شود».
مسألهٔ اقلیدس ، که نام «تقسیم طلایی» یا «تقسیم به نسبت ذات وسط و طرفین» را برخود دارد، در کتابهای درسی امروز، این طور تنظیم شده است: پاره خط مفروض را به دو قسمت نابرابر طوری تقسیم کنید که قسمت بزرگتر، واسطهٔ هندسی بین تمام پاره خط و قسمت کوچکتر باشد.
طول پاره خط را a و طول قسمت بزرگتر را x می‌گیریم، در نتیجه، طول قسمت کوچکتر برابر $a-x$ می‌شود. (روی شکل داریم $AB=a$, $AC=x$, $CB= a-x$)
در این صورت x از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x^{۲}=a(a-x) \Rightarrow x^{۲}+ax-a^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x_{۱}=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a\,,x_{۲}=-\frac{(\sqrt{۵}+۱)}{۲}a\,,x=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}a \Rightarrow \frac{a}{x}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}=\varphi$$

مثال . پاره خطی به طول ۸ سانتی‌متر به نسبت طلایی تقسیم شده است. اندازهٔ هر یک از دو پاره خط ایجاد شده را تعیین کنید.
حل . پاره خط AB به طول ۸ سانتی‌متر را اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم C نقطه‌ای باشد که پاره خط AB را به نسبت طلایی تقسیم کرده باشد. در این صورت فرض می‌کنیم $AC=x$ باشد، خواهیم داشت :

$$AB = ۸\ , AC=x \Rightarrow CB=۸-x\ , AC^{۲} = AB\ .\ BC \Rightarrow x^{۲} = ۸(۸-x)$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۸x - ۶۴ = ۰ \Rightarrow x \# ۴/۹۴ = AC \Rightarrow CB \# ۳/۰۶$$

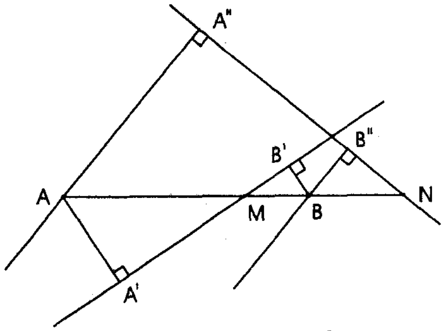
۵.۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به نسبت

۲۵. داریم :

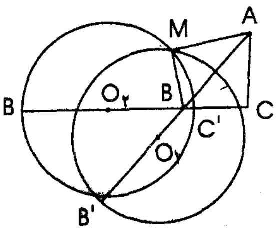
$$\frac{C_{۱}A}{C_{۱}B}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{C_{۱}A}{C_{۱}A+C_{۱}B}=\frac{۱}{۱+۴}\Rightarrow\frac{C_{۱}A}{AB}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow$$

$$\frac{C_{۱}A}{۶/۸}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow C_{۱}A=۱/۳۶\ ,\ \frac{D_{۱}A}{D_{۱}B}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{D_{۱}A}{D_{۱}B-D_{۱}A}=\frac{۱}{۴-۱}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D_۱A}{AB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow D_۱A = \frac{۶/۸}{۳}$$



۲۷. نقطه‌های M و N را روی پاره خط AB و در امتداد آن چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = m$ باشد، مجموعهٔ خطهای گذرنده از M و N جواب مسأله‌اند. در صورتی که برای نسبت پاره‌خطها ترتیبی در نظر نگرفته باشیم، اگر نقطه‌های ´M و ´N را چنان بیابیم که $\frac{M'B}{M'A} = \frac{N'B}{N'A} = m$ باشد، دو دسته خط گذرنده از نقطه‌های ´M و ´N نیز جواب مسأله‌اند.



۲۸. نقطه‌های معلوم را A ، B و C و نقطهٔ مورد نظر را M می‌نامیم. نقطهٔ M را چنان باید بیابیم که: $\frac{MA}{a} = \frac{MB}{b} = \frac{MC}{c}$ از این رابطه نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$ ، پس یک مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت $K_۱ = \frac{a}{b}$ تقسیم می‌کند.

این دایره را رسم می‌کنیم؛ از طرفی $\frac{MB}{MC} = \frac{b}{c} = K_۲$. پس مکان هندسی دیگر نقطهٔ M دایره‌ای است که پاره خط BC را به نسبت $K_۲ = \frac{b}{c}$ تقسیم می‌کند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی یعنی نقطهٔ M جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد مسأله جواب دارد.

۲۹. داریم: $x = \frac{۴۵/۷۵}{۴/۸۵} = ۹/۴۳$

۱.۲.۱. دنباله‌های متناسب - تناسب

۳۰. دنباله‌های : الف و پ ، ب و ث و چ ، ت و ج

۳۲. داریم :

$$\frac{x}{۱۵۰۰۰۰}=\frac{y}{۵۱۲۵}=\frac{z}{۳۵۰۰}=\frac{۱۷۰}{۸۵۰}$$

$$x=۳۰۰۰۰ \; , \; y=۱۰۲۵ \; , \; z=۷۰۰$$

۳۵. سه جواب وجود دارد:

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{x} \Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۳}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۵}{۴}$$

$$\frac{۵}{۴}=\frac{۳}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۲}{۵}$$

۲.۲.۱. میانگینها

۳۶. داریم:

$$A=\frac{a+b}{۲} \quad , \quad g=\frac{۲(a^۲+ab+b^۲)}{۳(a+b)} \quad , H=\frac{۲ab}{a+b}$$

$$C=\frac{a^۲+b^۲}{a+b} \Rightarrow \frac{۲(a^۲+ab+b^۲)}{۳(a+b)}=\frac{\frac{۲ab}{a+b}+\frac{۲(a^۲+b^۲)}{a+b}}{۳}=\frac{۲(a^۲+ab+b^۲)}{۳(a+b)}$$

$$a:A=H:b \Rightarrow \frac{a}{\frac{a+b}{۲}}=\frac{\frac{۲ab}{a+b}}{b} \Rightarrow \frac{۲a}{a+b}=\frac{۲a}{a+b}$$

۴۱. الف. ۱۰ = واسطه هندسی، $\frac{۲۹}{۲}$ = واسطهٔ حسابی، $\sqrt{\frac{۲۴۱}{۲}}$ = واسطهٔ مربعی،
$\frac{۲۰۰}{۲۹}$ = واسطه توافقی .

ب. ۶ = واسطهٔ هندسی، $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ = واسطهٔ حسابی، $۳\sqrt{۵}$ = واسطهٔ مربعی،
$۴\sqrt{۲}$ = واسطه توافقی .

پ. $۷\sqrt{۳}$ = واسطهٔ هندسی، ۱۴ = واسطهٔ حسابی، $۷\sqrt{۵}$ = واسطهٔ مربعی،
$\frac{۲۱}{۲}$ = واسطه توافقی .

۴۳. گزینهٔ (ه) درست است.

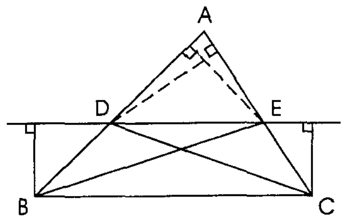
بخش ۲. قضیهٔ تالس

۴۷. در ΔADE و ΔBDE و $AD,$ و BD را بـه عـنوان قـاعده در نـظر مـی‌گیریم. در این صورت، دو مثلث یک ارتفاع دارند. (چرا؟) پس نسبت مساحتهای دو مثلث با نسبت قاعده‌های آنها برابر است و داریم :

$$\frac{a\Delta BDE}{a\Delta ADE}=\frac{BD}{AD} \qquad (۱)$$

($a\Delta BDE$, یعنی مساحت مثلث BD ، $a=area$)

به همین نحو در ΔADE و ΔCDE ،AE و CE را قاعده فرض می‌کنیم. چون این دو مثلث یک ارتفاع دارند، داریم :



$$\frac{a\Delta CDE}{a\Delta ADE}=\frac{CE}{AE} \qquad (۲)$$

دو مثلث ΔBDE و ΔCDE دارای قاعدهٔ مشـترک DE هسـتند و ارتـفاعهایشان مساوی است. زیرا DE و BC متوازی‌اند (شکل اول را ببینید).

$$a\Delta BDE = a\Delta CDE \qquad (۳)$$

از مقایسهٔ تساویهای (۱)، (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم که :

$$\frac{BD}{AD}=\frac{CE}{AE} \qquad (۴)$$

اگر به دو طرف (۴) عدد ۱ را بیفزاییم، خواهیم داشت :

$$\frac{BD+AD}{AD}=\frac{CE+AE}{AE} \text{ یا، } \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \text{ و یا } , \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \qquad (۵)$$

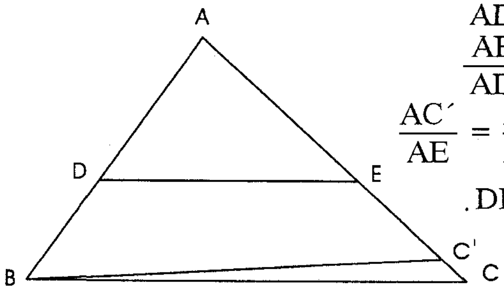
۴۸. BC' را خطی فرض می‌کنیم که از B بگذرد و به موازات DE باشد. این خط AC را در C' قطع می‌کند.

طبق قضیهٔ قبل داریم: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE}$

اما بنابه فرض: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

در نتیجه: $\frac{AC'}{AE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AC = AC'$

بنابراین $\{C\} = \{C'\}$ و $DE \parallel BC$.

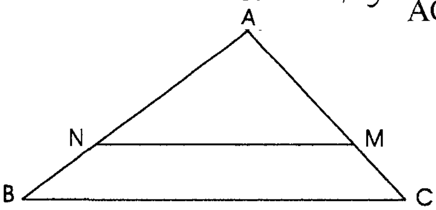


۲.۲.۱. اندازهٔ ضلع مثلث

۵۱. داریم:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{AN}{۶} = \frac{MN}{۸} \quad \text{و} \quad AM = ۳$$

$$\Rightarrow AN = \frac{۹}{۲} \quad \text{و} \quad MN = ۶$$



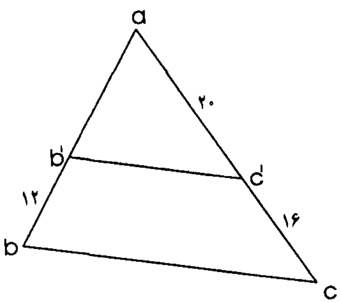
۵۳. ۴۰۰ متر

۵۴. گزینهٔ (ب) درست است زیرا:

$ac' = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \text{ cm}$

$$\frac{cc'}{ac} = \frac{bb'}{ab} \Rightarrow \frac{۱۶}{۳۶} = \frac{۱۲}{ab} \Rightarrow$$

$ab = ۲۷ \text{ cm}$



۵۵. $ST \parallel PQ \Rightarrow \frac{x+۳}{۲x} = \frac{۳x-۶}{۲x+۷} \Rightarrow ۶x^۲ - ۱۲x = ۲x^۲ + ۱۳x + ۲۱$

$$\Rightarrow ۴x^۲ - ۲۵x - ۲۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲۵ \pm \sqrt{۶۲۵+۳۳۶}}{۸} = \frac{۲۵ \pm ۳۱}{۸} \Rightarrow$$

$x = ۷$ و $x = \frac{-۳}{۴}$ $\quad x = ۷ \Rightarrow RP = RS + SP = ۳x + ۳ = ۲۴$

$x = -\frac{۳}{۴} < ۰$ غیر قابل قبول

۲.۲.۲. اندازهٔ قطعه‌های ضلعهای مثلث

۵۶. الف. $BQ = ۱۵$ ب. $PB = ۹$

پ. $QC = ۱۲$ ت. $PA = \frac{۲۰}{۳}$ و $CQ = ۱۰$

۵۷. الف. ۵ ب. ۸ پ. ۱۰ ت. ۲/۴

۵۸. $x = ۷$

۵۹. الف. $\frac{۱}{h}$ ب. $g^۲$ پ. cd ت. $\frac{b}{a}$

۶۰. الف. ۵ ب. ۲۴ پ. ۸و۱۱

۶۱. $AC = ۱۲m$

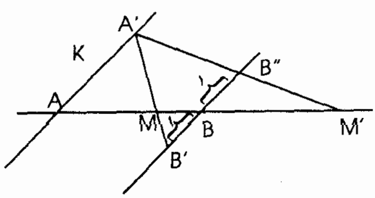
۳.۲.۲. اندازهٔ ضلعها و قطعه‌های ضلعهای مثلث

۶۲. الف. $CE=۸$ ب. $BE=۵$ پ. $BC=۱۷/۵$ ت. $CE=۴/۸$ ث. $AC=۱۰$

۱.۳.۲. تقسیم پاره‌خط به نسبت معین به کمک قضیهٔ تالس

۶۵. از M به N وصل می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع MN با AB را O می‌نامیم. چون $AM \parallel BN$ است. بنابه قضیهٔ تالس داریم : $\frac{OA}{OB} = \frac{AM}{NB}$

۶۶. از نقطه‌های A و B دو خط موازی دلخواه رسم می‌کنیم . روی خط رسم شده از نقطهٔ A ، پاره خط ´AA را به طول K و روی خط رسم شده از نقطهٔ B و در دو طرف نقطهٔ B پاره خطهای $BB' = BB''$ را به طول واحد، جدا می‌کنیم. از ´A به ´B و از ´A به ″B وصل می‌کنیم تا خط AB را در نقطه‌های M و ´M قطع نمایند؛ این دو نقطه جوابهای مسأله‌اند؛ زیرا داریم :



$$AA' \parallel BB' \Rightarrow \Delta MAA' \sim \Delta MBB' \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{K}{۱} = K \Rightarrow \frac{MA}{MB} = K$$

$$AA' \parallel BB'' \Rightarrow \Delta M'AA' \sim \Delta M'BB'' \Rightarrow \frac{M'A}{M'B} = \frac{AA'}{BB''} = \frac{K}{۱} = K \Rightarrow \frac{M'A}{M'B} = K$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = K$$

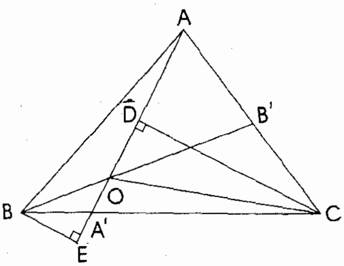
بحث . ۱) اگر $K > ۱$ باشد، دو نقطهٔ M و ´M به نقطهٔ B نزدیکترند.

۲) اگر $K < ۱$ باشد، نقطه‌های M و ´M به نقطهٔ A نزدیکترند.

۳) اگر $K = ۱$ باشد، نقطهٔ M وسط پاره خط AB است، و نقطهٔ ´M بنابه اصل دزارگ، نقطهٔ بی‌نهایت دور امتداد AB است.

اصل دزارگ . هر خط راست نامحدود، فقط یک نقطهٔ بی‌نهایت دور دارد، و تمام خطهای متوازی که یک امتداد را مشخص می‌کنند، در آن نقطهٔ بی‌نهایت دور مشترکند.

۶۷. اگر O نقطهٔ مطلوب باشد، باید :



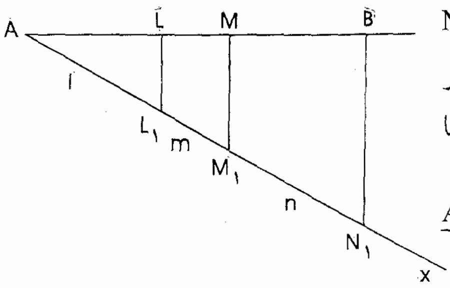
$$\frac{\text{مساحت} OAB}{p} = \frac{\text{مساحت} OCA}{n} = \frac{\text{مساحت} OBC}{m}$$

AO را امتداد می‌دهیم تا BC را در ´A قطع کند، BE و CD را به ´AA عمود می‌کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\text{مساحت} OAB}{\text{مساحت} OAC} = \frac{BE}{CD} = \frac{BA'}{CA'}$$

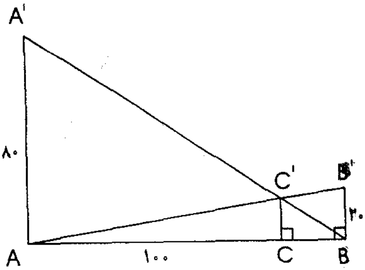
و چون به فرض $\frac{\text{مساحت} OAB}{\text{مساحت} OAC} = \frac{p}{n}$، پس $\frac{BA'}{CA'} = \frac{p}{n}$، بنابراین بایستی نقطهٔ ´A را روی BC چنان اختیار کرد، که $\frac{BA'}{CA'} = \frac{p}{n} = K_۱$ و به‌همین ترتیب روی AC نقطهٔ ´B را باید چنان تعیین نمود که $\frac{CB'}{AB'} = \frac{m}{p} = K_۲$ باشد. محل تلاقی ´AA و ´BB نقطهٔ O، نقطهٔ خواسته شده است.

۶۹. از نقطهٔ A نیمخط Ax را رسم می‌کنیم وروی آن پاره خطهای $AL_۱ = l$ و $L_۱M_۱ = m$ و $M_۱N_۱ = n$ را جدا می‌کنیم. از $N_۱$ به B وصل می‌کنیم و از نقطه‌های $M_۱$ و $C_۱$ خطهایی به موازات $N_۱B$ رسم می‌کنیم تا پاره خط AB را در نقطه‌های L و M قطع کند، این نقطه‌ها جواب مسأله‌اند، زیرا داریم :



$$\frac{AL}{l} = \frac{LM}{m} = \frac{MB}{n}$$

۲.۳.۲. اندازهٔ پاره خط



۷۰. گزینه (ج) درست است زیرا :

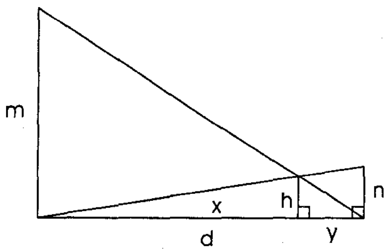
$$AA' \parallel BB' \Rightarrow \frac{AC'}{C'B'} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{۸۰}{۲۰} = ۴$$

$$\Rightarrow \frac{AC'}{AB'} = \frac{۴}{۴+۱} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Delta ABB' : CC' \parallel BB' \Rightarrow \frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB'} \Rightarrow \frac{CC'}{۲۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow CC' = ۱۶\text{cm}$$

۷۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۷۲. طول عمود را h فاصلهٔ بین پای دو چوب خیزران را d و پاره خطهای روی d را x و y می‌نامیم. قاعدهٔ بهاسکارا را می‌توان این طور نوشت :



$$h = \frac{m.n}{m+n} , x = \frac{dm}{m+n} , y = \frac{dn}{m+n}$$

در واقع داریم :

$$\frac{m}{h} = \frac{d}{y} , \frac{n}{h} = \frac{d}{x} , x + y = d$$

که با حل این دستگاه، نسبت به مجهولهای h، x و y مقدارهای مورد نظر به دست می‌آید.

۷۳. گزینه (د) درست است.

۲.۳.۲. نسبت دو پاره خط

۷۴.

$$\frac{AE}{A'F} = \frac{AC}{A'C} = \frac{b}{\frac{a}{۲}} = \frac{۲b}{a}$$

$$\frac{AD}{A'F} = \frac{AB}{A'B} = \frac{c}{\frac{a}{۲}} = \frac{۲c}{a}$$

نکته . از تقسیم دو رابطهٔ فوق نیز ثابت می‌شود که :

$$\frac{AD}{AE} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}$$

۱.۴.۲. ثابت کنید دو خط موازی‌اند

۷۵. داریم :

بنابه عکس قضیهٔ تالس،

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MN\parallel BC$$

۸۰. نسبتهای $\frac{AB'}{B'B}$ ، $\frac{AC'}{C'C}$ را محاسبه و با هم مقایسه می‌کنیم.

$$CC'=AC-AC'=\frac{۲\sqrt{۵}+۵\sqrt{۲}}{۵}-\sqrt{۲}=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\frac{AB'}{BB'}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}},\ \frac{AC'}{CC'}=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{AB'}{BB'}=\frac{AC'}{CC'}\Rightarrow B'C'\parallel BC$$

۸۱. در مثلث $B''BC$ داریم : $\frac{B''B'}{B''B}=\frac{B'M}{BC}$

در مثلث BCC'' داریم : $\frac{C'C''}{C''C}=\frac{C'M}{BC}$

چون M به فرض، وسط $B'C'$ است، پس $B'M = C'M$ و خواهیم داشت :

$\frac{C''C'}{C''C}=\frac{B''B'}{B''B}$ ؛ و از این تناسب نتیجه می‌گیریم که $B''C''$ با BC موازی است.

۸۳. اگر AC و BD با هم موازی باشند، چهارضلعیهای ABDE و CDFA متوازی‌الاضلاعند و نتیجه می‌شود که $BD = AE$ و $DF = CA$ و از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود که $BF = CE$. بنابراین BFEC نیز متوازی‌الاضلاع است و EF با BC موازی است. اگر AC و BD در یک نقطهٔ O مشترک باشند، چون داریم:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OD}\ \text{و}\ \frac{OC}{OD}=\frac{OA}{OF}$$

خواهیم داشت :

$$OB\,.\,OE=OA\,.\,OD=OC\,.\,OF$$

$$\Rightarrow\frac{OE}{OF}=\frac{OC}{OB}\Rightarrow EF\parallel BC$$

۸۴. می‌دانیم $\frac{AM}{AB}=\frac{AO}{AC}=\frac{AM'}{AD}$ پس بنابه عکس قضیهٔ تالس، دو خط DB و MM' با هم موازی‌اند.

۸۵. ثابت کنید $\frac{OF}{OD}=\frac{OE}{AO}$.

۸۶. چهار نقطهٔ M ، N ، Q و P را بترتیب به هم وصل می‌کنیم داریم :

$$\frac{MA}{AB}=\frac{CP}{CB}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow MP \parallel AC$$

و به همین ترتیب $NQ \parallel AC$ است.

همچنین داریم:

$$\frac{MA}{AB}=\frac{NA}{AD}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow MN \parallel BD$$

به همین ترتیب، $PQ \parallel BD$ است.

۲.۵.۱. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاع

۸۸. الف. در مثلث ABD ، $HG \parallel AD$ است. پس:

$$\frac{HA}{HB}=\frac{DG}{GC}\Rightarrow HA.GB=HB.DG$$

ب. در مثلث ABC ، $GH \parallel BC$ است. پس:

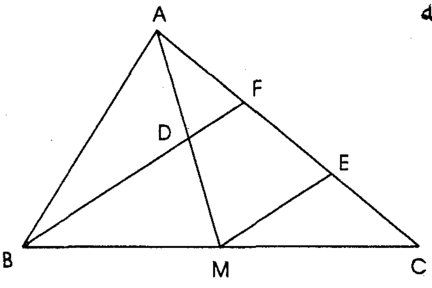
$$\frac{HA}{HB}=\frac{AG}{GC}\Rightarrow HA.GC=HB.AG$$

پ. در دو مثلث ABD و ABC داریم:

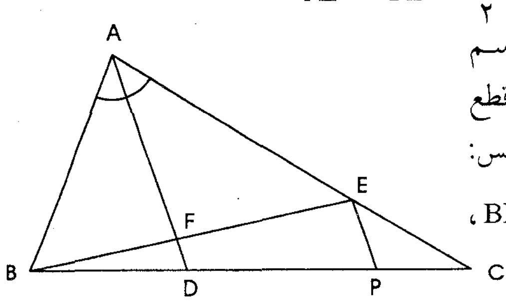
$$GH \parallel AD \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{GH}{BC} \quad (۱) \quad , \quad GH \parallel BC \Rightarrow \frac{BH}{AB}=\frac{GH}{AD} \quad (۲)$$

$$\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow \frac{AH}{HB}=\frac{AD}{BC}\Rightarrow AH.BC=HB.AD$$

۲.۵.۲. رابطه‌های متری مربوط به میانه



۸۹. از نقطهٔ M خطی به موازات BF رسم می‌کنیم. تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. چون M وسط BC است، پس $FE=\frac{۱}{۲}FC$ و در مثلث AME خط DF به موازات ME رسم شده است. چون $AD=DM$ است پس: $AF=FE=\frac{۱}{۲}FC$



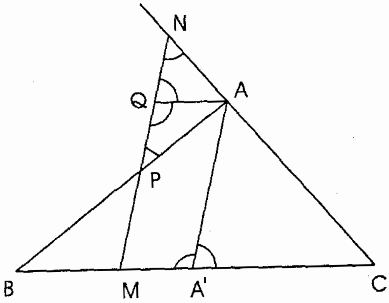
۹۰. از نقطهٔ E خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ P قطع کند، در مثلث ADC ، $EP \parallel AD$ پس:

$\frac{AE}{AC}=\frac{DP}{DC}$ (۱) و در مثلث BEP ،

$EP \parallel FD$ ، $DC=DB$ ، پس

(۲) $\frac{EF}{BF} = \frac{DP}{BD} = \frac{DP}{DC}$. در نتیجه داریم: $\frac{FE}{FB} = \frac{AE}{AC}$

۹۲. الف. در مثلث $AA'B$ خط MP موازی
AA' رسم شده است. پس داریم :



$\frac{A'B}{A'M} = \frac{AB}{AP}$ و یا (۱) $\frac{A'C}{A'M} = \frac{AB}{AP}$

در مثلث NCM خط AA' موازی قاعده MN رسم شده است.

پس داریم: (۲) $\frac{AC}{AN} = \frac{A'C}{A'M}$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AN}$

ب. خط AQ را موازی BC رسم می‌کنیم. دو مثلث PAQ و BAA' متشابه‌اند ($\hat{BA'A}=\hat{PQA}$ و $\hat{QPA}=\hat{PAA'}$). در نتیجه: $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{AA'} = \frac{AQ}{A'B}$. همچنین مثلثهای ANQ و $AA'C$ متشابه می‌باشند ($\hat{NQA} = \hat{AA'C}$, $\hat{A'AC} = \hat{N}$).

در نتیجه $\frac{QA}{A'C}=\frac{QN}{A'A}=\frac{AN}{AC}$ و چون $A'C = A'B$ است، از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که $\frac{QN}{AA'}=\frac{PQ}{AA'}$ و از آن‌جا $PQ = QN$.

پس می‌توان نوشت $PN = ۲PQ = ۲QN$ و چون $AA'MQ$ متوازی‌الاضلاع است، $MQ=AA'$ و یا $MP + QN = AA'$ پس $۲MP + PN = ۲AA'$.

۳.۵.۲. رابطه‌های متری مربوط به خطهای موازی

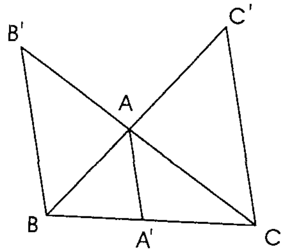
۹۳. تناسبهای الف، پ و ت برقرارند.

۹۴. در مثلث OFI داریم :

$LN \parallel OI \Rightarrow \frac{FL}{LO}=\frac{FN}{NI}$ (۱)

و در مثلث FRI داریم : (۲) $ON \parallel RI \Rightarrow \frac{FO}{OR}=\frac{FN}{NI}$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{FL}{LO} = \frac{FO}{OR}$.



۹۵. در مثلثهای BCC' و BCB' داریم:

$$AA' \parallel CC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'}=\frac{BA'}{BC} \quad (۱)$$

$$AA' \parallel BB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'}=\frac{A'C}{BC} \quad (۲)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AA'}{CC'}+\frac{AA'}{BB'}=\frac{A'C+A'B}{BC}=\frac{BC}{BC}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{CC'}+\frac{۱}{BB'}=\frac{۱}{AA'}$$

یا

$$\frac{۱}{AA'}=\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{CC'}$$

۹۶. گزینه‌های (الف) و (د) درست است.

۹۷. گزینهٔ (الف) درست است زیرا:

$$\Delta aca' : \frac{y}{x}=\frac{bc}{ac} \quad (۱)$$

$$\Delta acc' : \frac{y}{z}=\frac{ab}{ac} \quad (۲)$$

$$(۱)+(۲) \Rightarrow y(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{z})=\frac{ab+bc}{ac}=\frac{ac}{ac}=۱ \Rightarrow \frac{۱}{y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}$$

۹۸. داریم:

$$PM \parallel P'M' \parallel AB \Rightarrow \frac{PP'}{AC}=\frac{MM'}{BC} \Rightarrow \frac{PP'}{MM'}=\frac{AC}{BC} \quad (۱)$$

$$M'Q' \parallel MQ \parallel AC \Rightarrow \frac{QQ'}{MM'}=\frac{AB}{BC} \quad (۲)$$

از تقسیم دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{PP'}{QQ'}=\frac{AC}{AB}$$

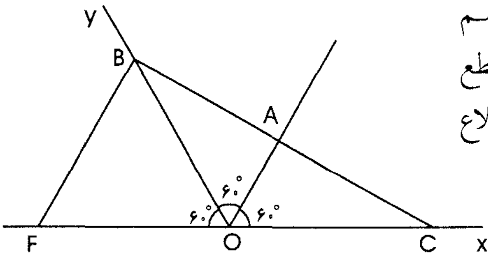
۲.۵.۴. رابطه‌های متری مربوط به زاویه

۹۹. از مثلثهای OBD و OED داریم:

$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \quad (۱) \quad، \quad BC \parallel ED \Rightarrow \frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OD} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{OA}{OB}=\frac{OB}{OE} \Rightarrow OB^۲=OA \,.\, OE$$

۱۰۰. از B خطی به موازات AO رسم می‌کنیم تا ادامهٔ CO را در F قطع کند. مثلث Δ OBF متساوی‌الاضلاع است یعنی OB=OF.
پس باید ثابت کنیم که:

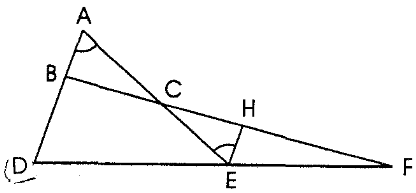


$$\frac{1}{OA}=\frac{1}{OF}+\frac{1}{OC} \Rightarrow \frac{1}{OA}=\frac{CF}{OF.OC} \Rightarrow OA=OF.\frac{OC}{CF} \Rightarrow OA=FB.\frac{OC}{CF}$$

در مثلث FBC، FB ∥ AO ، پس: $\frac{AO}{FB}=\frac{CO}{CF} \Rightarrow OA=FB\ .\ \frac{CO}{CF}$

۵.۵.۲. سایر رابطه‌های متری مربوط به این قسمت

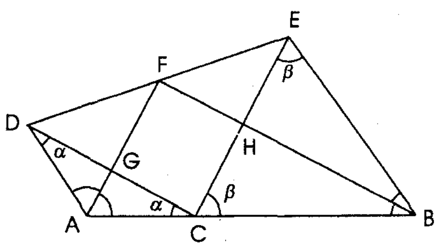
۱۰۱. خط EH را موازی AB رسم می‌کنیم. داریم $\frac{EF}{DF}=\frac{FH}{DB}$ اما DB=EC پس $\frac{EF}{DF}=\frac{EH}{EC}$ و از طرف دیگر $\frac{EH}{EC}=\frac{AB}{AC}$ پس: $\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{AC}$



۱۰۲. از رأس B خطی به موازات ضلع AC رسم کنید. تا B´C´ را در نقطهٔ E قطع کند.

۱۰۳. اگر نقطهٔ برخورد خطی که از M_6 موازی AB رسم می‌شود M_7 باشد، در صورتی که $\frac{M_1B}{M_1C}=\frac{M_7B}{M_7C}$ باشد، نقطهٔ M_7 بر نقطهٔ M_1 منطبق است. در صورتی که نقطهٔ M_1 وسط ضلع BC باشد، پس از یک دور رسم خط موازی، به M_1 می‌رسیم.

۱۰۴. محل تلاقی FA و DC را G و محل تلاقی EC و FB را H می‌نامیم و ثابت می‌کنیم FGCH مستطیل است. در دو مثلث متساوی‌الساقین ADC و BCE داریم:



$$۲\alpha + \hat{A} = ۱۸۰^\circ , ۲\beta + \hat{B} = ۱۸۰^\circ$$

اگر طرفین دو رابطه را با هم جمع کنیم و به جای $\hat{A}+\hat{B}$ مساویش ۱۸۰° را قرار دهیم خواهیم داشت : $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ یعنی $\hat{DCE}=۹۰^\circ$

و CF میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم الزاویهٔ DCE است و نصف وتر، پس FC=FE و چون BC=BE بود، پس B و F روی عمود منصف EC هستند و $\hat{H}=۹۰^\circ$ و $CH=HE=\frac{CE}{۲}$ به همین دلیل $\hat{G}=۹۰^\circ$ است و FGCH که سه زاویه‌اش ۹۰° شده است، مستطیل است؛ در نتیجه $AF \parallel CH$ و می‌توان نوشت:

$$\frac{FA}{CH}=\frac{AB}{CB}$$

در رابطه به جای CH مساویش $\frac{CE}{۲}$ و به جای AB مساویش AC+CB و یا AD+BE و به جای CB مساویش را قرار می‌دهیم، خواهیم داشت :

$$\frac{۲FA}{CE} = \frac{AD+BE}{BE} = \frac{AD}{BE} + ۱ \Rightarrow \frac{AD}{BE} = \frac{۲FA}{CE} - ۱$$

۲.۶.۱. اندازهٔ ضلع چند ضلعی

۱۰۵. الف. $d = ۵$، ب. $a = ۲۰$، پ. $d = ۱۵$، ت. $b = ۱۵$

۲.۶.۲. اندازهٔ پاره خط

۱۰۶. بر سه قطعه به خیابان را b, a و c می‌نامیم. داریم :

$$\frac{a}{۴۰} = \frac{b}{۳۰} = \frac{c}{۲۰} = \frac{a+b+c}{۴۰+۳۰+۲۰} = \frac{a+b+c}{۹۰}$$

اما $a+b+c=۱۲۰$ است ، پس :

$$\frac{a}{۴۰} = \frac{b}{۳۰} = \frac{c}{۲۰}=\frac{۱۲۰}{۹۰}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow a = \frac{۱۶۰}{۳} m , b=۴۰m , c=\frac{۸۰}{۳} m$$

۱۰۷. $x=\frac{۹}{۲}$

۱۰۸. الف. $x = \frac{۵۲}{۷}$ ب. $x = ۸$

۱۰۹. الف. $x = ۶$ ب. $x = ۶$

۲.۶.۳. نسبت پاره خطها

۱۱۱. چون $DF \parallel BC$ است پس :

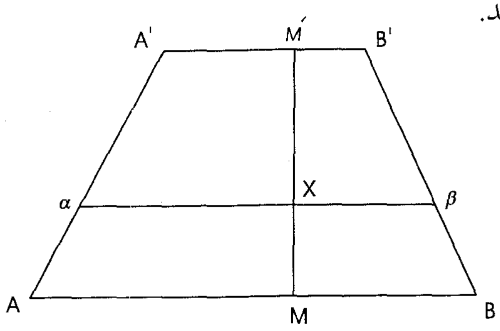
$$\frac{BC}{DF}=\frac{BE}{DE}=۴ \Rightarrow BC=۴DF$$ یا $$AB=۴DF \Rightarrow AF=۳DF$$ یا $$\frac{FA}{FD}=\frac{۳}{۱}$$

۴.۶.۲. رابطه‌های متری در چهارضلعیها

۱۱۲. چون $DC \parallel AB$ است، بنابه قضیهٔ تالس داریم: $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$

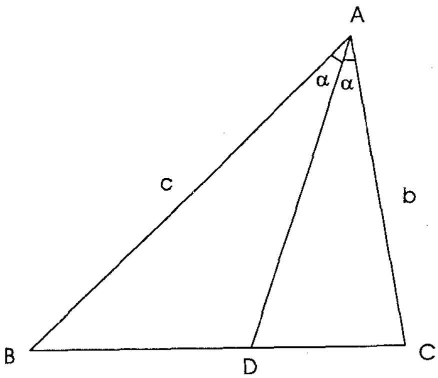
۱۱۳. از نقطهٔ D خطی به موازات ساق BC رسم کنید.

۱۱۴. چهارضلعی $ABB'A'$ را اختیار می‌کنیم، و خط MM' که AB را در M و $A'B'$ را در M' چنان قطع کرده است که $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A'}{M'B'}=K$، می‌باشد؛ سپس خط دیگر $\alpha\beta$ را چنان رسم می‌کنیم که AA' را در α و BB' را در β به قسمی قطع کند که $\lambda=\frac{\alpha A}{\alpha A'}=\frac{\beta B}{\beta B'}$ باشد، خطهای مطلوب از دو دسته خط MM' و $\alpha\beta$ وقتی K و λ تغییر کنند، تشکیل می‌شود. فرض کنیم λ ثابت بوده و K تغییر کند. مکان هندسی نقطهٔ X از MM' که $\lambda=\frac{XM}{XM'}$ باشد، همان خط $\alpha\beta$ است.
پس خط $\alpha\beta$ از یک دسته، هر خط مانند MM' از دستهٔ دیگر را، به یک نسبت تقسیم می‌کند.



۱۱۵. اگر نقطه‌های M و N وسطهای قطرهای چهارضلعی باشند، از رأسهای B و D خطهایی رسم کنید تا خط MN را بترتیب در نقطه‌های B' و D' قطع کنند.

بخش ۳. نیمسازهای زاویه‌های مثلث و چند ضلعیها



۱۱۶. خط AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC است که زاویهٔ A را به دو زاویهٔ برابر با هم بخش کرده است. اندازهٔ هریک از این دو زاویه را α می‌نامیم. دو زاویه‌ای که AD با ضلع BC می‌سازد مکمل یکدیگرند، پس سینوسهای آنها با هم برابرند؛ از این رو بنا به قانون سینوسها در دو مثلث ABD و ADC داریم:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin D} \text{ و } \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin D}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$$

برای نیمسازهای زاویه‌های B و C نیز به همین روش، رابطه‌های مشابه به‌دست می‌آید.

نتیجه: قطعه‌هایی که نیمساز زاویهٔ داخلی روی ضلع BC جدا می‌کند، برحسب ضلعهای مثلث برابرند با:

$$DC = \frac{ab}{b+c} \text{ و } DB = \frac{ac}{b+c}$$

۱۱۸. از نقطهٔ C خطی به موازات ´AD رسم کنید تا AB را در نقطه E قطع کند. مثلثAEC متساوی الساقین است. آن گاه از قضیهٔ تالس استفاده کنید.

نتیجه: قطعه‌هایی که نیمساز زاویهٔ خارجی رأس A بر ضلع BC جدا می‌کند برابر است با:

$$D'C = \frac{ab}{|b-c|} \text{ و } D'B = \frac{ac}{|b-c|}$$

۱۲۰. خط CE را به موازات ´AD رسم کنید.

۲.۳. اندازهٔ ضلع مثلث

۱۲۱. الف. $x = ۸$ ، ب. $x = ۱۳/۵$

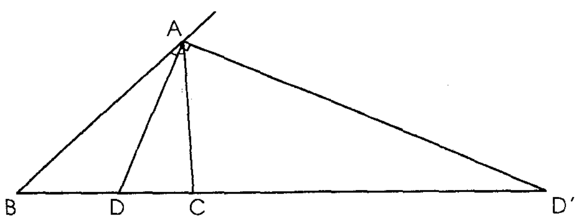
۱۲۲. داریم:

$$a=BC=BD+DC=۱۰/۸+۷/۲=۱۸ \Rightarrow a=۱۸cm\ ,\ a+b+c=۲p \Rightarrow$$
$$۱۸+b+c=۴۳ \Rightarrow b+c=۲۵ \quad و \quad DB=\frac{ac}{b+c} \Rightarrow$$
$$۱۰/۸ = \frac{۱۸\times c}{۲۵} \Rightarrow c=۱۵cm \quad ۱۵+b=۲۵ \Rightarrow b=۱۰cm$$

۱.۳.۳. اندازهٔ پاره خط

۱۲۳. بزرگترین ضلع مثلث را $a = ۲۸$ فرض می‌کنیم. در این صورت دو ضلع مجاور به بزرگترین زاویه، $b=۱۵$ و $c=۲۰$ است. اگر پای نیمساز زاویهٔ درونی A را نقطهٔ D بنامیم، داریم:

$$DB = \frac{ac}{b+c} = \frac{۲۸\times۳۰}{۲۰+۱۵} = ۱۶$$
$$DC = \frac{ab}{b+c} = \frac{۲۸\times۱۵}{۲۰+۱۵} = ۱۲$$



۱۲۵. محاسبهٔ طولهای AX و AY مورد نظر است. از رابطه‌های $AX = \frac{ca}{a+b}$ و $AY = \frac{ca}{|a-b|}$ استفاده کنید.

۱۲۶. الف. $x = ۷$ ب. $x = ۱۲$ پ. $x = ۱۵$ ت. $x = ۱۵$

۱۲۷. از رابطهٔ $\frac{DE}{DF} = \frac{PE}{PF}$ استفاده کنید.

۲.۳.۳. نسبت دو پاره خط

۱۲۸. گزینهٔ (د) درست است، زیرا داریم :

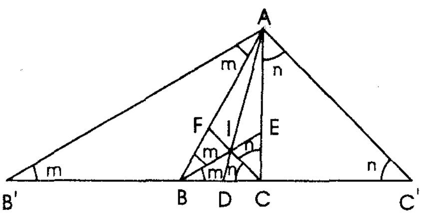
$$\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BE} \quad (۱)$$

$$\hat{B}_۲ = \hat{B}_۳ \Rightarrow \frac{EC}{DE} = \frac{BC}{BD} \quad (۲)$$

از تقسیم دو رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\frac{AD}{EC} = \frac{AB.BD}{BE.BC}$$

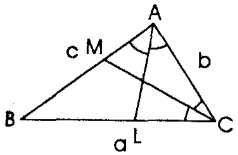
۱۲۹. برای اثبات، ´AB و ´AC را موازی BE و CF رسم می‌کنیم. در مثلث ABC زاویه‌های m و n مساوی‌اند. پس در مثلثهای متساوی‌الساقین ´ABB و ´ACC، $BB'=AB=c$ و $CC'=AC=b$ است.



بنابراین داریم :

$$\frac{ID}{IA} = \frac{DB}{BB'} = \frac{DC}{CC'} = \frac{DB+DC}{BB'+CC'} = \frac{a}{b+c}$$

۱۳۰. گزینهٔ (هـ) درست است، زیرا:

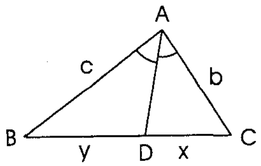


$$\begin{cases} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{b}{a} \ (۱) \\ \\ \dfrac{CL}{LB} = \dfrac{b}{c} \quad (۲) \qquad \dfrac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{CL}{LB} \Rightarrow K = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

۳.۳.۳. تساوی دو پاره خط

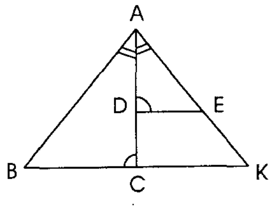
۱۳۱. از خاصیت نیمساز و تشابه دو مثلث ABD و AFE از یک طرف، و تشابه دو مثلث CGE و CBD از طرف دیگر، استفاده کنید.

۱۳۲. گزینه (د) درست است، زیرا داریم :



$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}=\frac{x+y}{b+c}=\frac{a}{b+c}$$

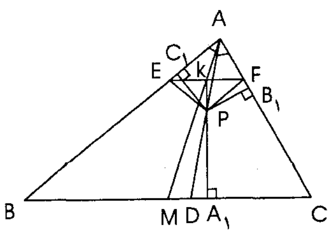
۱۳۳. دو مثلث ADE و ACB را در نظر می‌گیریم که در آنها $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ و $\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰°$ است. آنها را طبق شکل پهلوی هم قرار می‌دهیم. اگر امتداد BC و AE را در K قطع کند، $DE \parallel BK$ است و داریم : $\frac{DG}{CK}=\frac{AE}{AK}$ از طرفی AC نیمساز زاویهٔ BAK است، پس $\frac{BC}{CK}=\frac{AB}{AP}$. مقدار CK را از این تناسب پیدا کرده در تناسب قبل می‌گذاریم، داریم :



$$CK=\frac{AK\,.\,BC}{AB}\Rightarrow\frac{DE\,.\,AB}{AK\,.\,BC}=\frac{AE}{AK}\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}$$

۳.۵.۱. نقطه روی خط راست است

۱۳۴. از K خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع کند، با فرض $B\hat{A}C=۲\alpha$ داریم :



$$P\hat{B_۱}K=F\hat{A}P=\alpha, P\hat{C_۱}K=E\hat{A}P=\alpha$$

$\Rightarrow PEC_۱K\,,\,PKFB_۱$ محاطی‌اند $\Rightarrow$

$$P\hat{E}K=P\hat{C_۱}K=\alpha\ (۱)$$

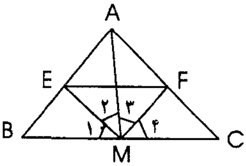
و $P\hat{F}K=P\hat{B_۱}K=\alpha\ (۲)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow P\hat{E}K=P\hat{F}K=\alpha\Rightarrow \Delta\ EFP: PE=PF\,,\,PK\perp EF$

$\Rightarrow EK = KF$ (۳)

$BC \parallel EF \Rightarrow \frac{BM}{EK} = \frac{MC}{KF}$(۴)، (۳) و (۴) $\Rightarrow MB=MC \Rightarrow$ K روی میانهٔ AM است

۲.۵.۳. دو خط موازی اند



۱۳۵. چون $M_1=M_2$ پس : $\frac{BM}{MA} = \frac{EB}{EA}$

و چون $M_3=M_4$ پس : $\frac{MC}{MA}=\frac{FC}{FA}$

۱۳۶. AM نیمساز زاویهٔ A از مثلث ADB است. پس : $\frac{MD}{MB}=\frac{AD}{AB}$ (۱)

و DN نیمساز زاویهٔ D از مثلث ADC است. پس : $\frac{NA}{NC}=\frac{AD}{DC}$ (۲)

و با توجه به این که $AB=CD$ است از رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

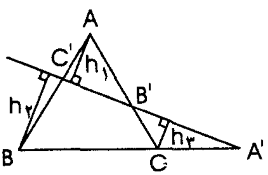
$\frac{MD}{MB}=\frac{NA}{NC}$

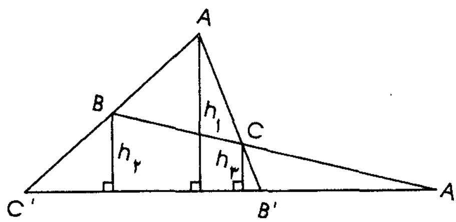
از طرفی $BC \parallel AD$ است . پس نتیجه می‌شود که $MN \parallel AD$ است.

بخش ۴. موربها، نقطه‌های واقع بر یک خط راست

۱۳۷. اثبات قضیه منلائوس . راه اول . فرض می‌کنیم سه نقطهٔ A' ، B' و C' بر یک خط راست واقع باشند.بنابه قرارداد، فاصله‌های همهٔ نقطه‌های واقع در یکی از دو نیم‌صفحهٔ خط $A'B'C'$ (مثلاً بالای آن) را از خط مزبور،مثبت اختیار می‌کنیم و فاصله‌های نقطه‌های واقع در نیمصفحهٔ دیگر آن (پایین آن)، را از آن ، منفی می‌گیریم.

با این قرارداد، برای هر یک از شکلهای رسم شده، داریم:





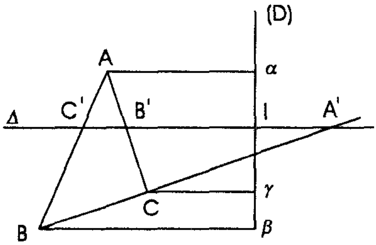
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{h_2}{h_3}\,,\,\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{h_3}{h_1}\,,\,\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{h_1}{h_2}$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین این تساویها در یکدیگر، رابطهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

بعکس، اگر برای سه نقطهٔ A' ، B' و C' واقع بر ضلعهای مثلث یا واقع بر امتداد آنها داشته باشیم: $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$ ، سه نقطهٔ A' ، B' و C'

روی یک خط راست واقعند. زیرا اگر خط $A'B'$ از نقطهٔ C' نگذرد، فرض می‌کنیم C'' نقطهٔ برخورد AB با $A'B'$ باشد، در این صورت بنابه قضیهٔ منلائوس داریم : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = 1$ از مقایسهٔ این دو رابطه نتیجه می‌شود: $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$. بنابراین C'' بر C' منطبق است، یعنی سه نقطهٔ A'، B' و C' بر یک خط راست واقعند.

راه دوم . اثبات قضیهٔ منلائوس به کمک قضیهٔ تالس . خط D را غیر موازی با خط Δ رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با Δ را I می‌نامیم . از رأسهای A، B و C خطهایی موازی خط Δ رسم می‌کنیم تا خط D را بترتیب در نقطه‌های α، β و γ قطع کنند؛ بنابه قضیهٔ تالس داریم :



$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{I\alpha}}{\overline{I\beta}}, \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{I\gamma}}{\overline{I\alpha}}, \quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{I\beta}}{\overline{I\gamma}}$$

از ضرب این رابطه‌ها داریم :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

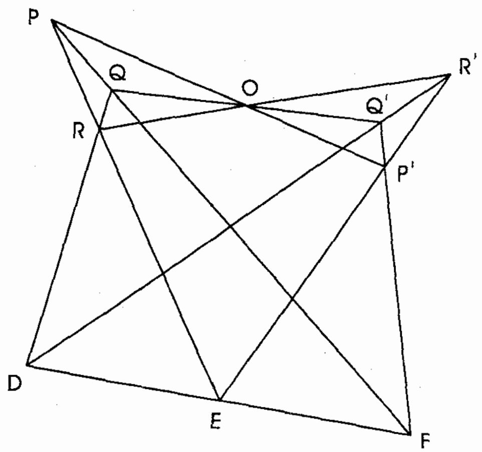
نکته . قضیهٔ منلائوس برای اثبات این که چند نقطه بر یک خط راست واقعند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

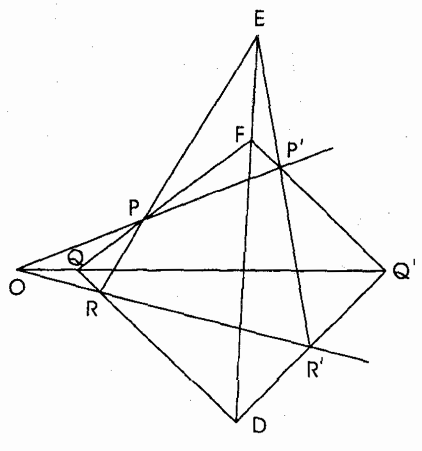
۱۳۸. الف. $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{EA}} = 1$ ب. $\frac{\overline{FB}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1$

پ. $\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = 1$ ت. $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{FE}}{\overline{FA}} = 1$

۱۳۹. در این قضیه نیز منحصراً وضع نقطه‌ها و خطها دخالت دارد و برای آن شکلهای مختلف می‌توان رسم کرد. شکلهای زیر دو حالت از شکلهای ممکن را نشان می‌دهد. دو مثلث PQR و $P'Q'R'$ در همسانی به مرکز O متناظرند و

ضلعهای متناظر آنها در D ، E و F متقاطعند. با استفاده از قضیهٔ منلائوس برای مجموعه‌های سه نقطه‌ای $DR'Q'$ ، $EP'R'$ و $FQ'P'$ که روی ضلعهای مثلثهای OQR ، ORP و OPQ واقعند، خواهیم داشت :





$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} = +۱$$

$$\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}} = +۱$$

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}} = +۱$$

از ضرب نظیر به نظیر طرفین این تساویها و پس از ساده کردن خواهیم داشت :

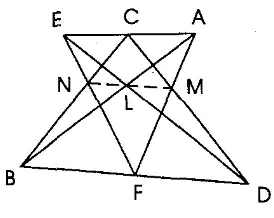
$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = +۱$$

بنا بعکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ D ، E و F بر یک خط

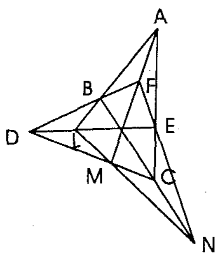
راست واقعند.

۱۴۰. همان‌گونه که در شکلهای قبلی مشاهده می‌شود، دو مثلث PQR و $P'Q'R'$ دارای محور همسانی می‌باشند و ضلعهای QR و $Q'R'$ در D، ضلعهای RP و $R'P'$ در E، ضلعهای PQ و $P'Q'$ در F برخورد می‌کنند و سه نقطهٔ D، E و F بر یک خط راست واقعند. هرگاه O نقطهٔ برخورد خطهای PP' و RR' باشد، باید ثابت کنیم که Q، O و Q' بر یک خط راست واقعند. اما دو مثلث FPP' و DRR' دارای مرکز همسانی E می‌باشند، پس بنابه قضیهٔ دزارگ نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر آنها، یعنی O (خطهای PP' و RR')، Q' (خطهای $P'F$ و $R'D$) و Q (خطهای FP و DR)، سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست می‌باشند.

۱۴۱. در این قضیه که فقط موضع هندسی مطرح است و اندازه‌های پاره خطها یا زاویه‌ها دخالتی ندارد، همچنین رعایت ترتیب در میان نیست، یعنی در هر یک از مجموعه‌های سه نقطه، مهم نیست که کدام بین دو تای دیگر واقع است، ویژگی تصویر عرض وجود می‌کند.



(الف)



(ب)

شکلهای (الف) و (ب)، دو وضع ممکن از نقطه‌های مفروض را نشان می‌دهد، و البته شکلهای دیگری نیز می‌توان در نظر گرفت. می‌توان جایگشتهای مختلف نقطه‌های A، B، C، D و F را اختیار کرد و در هر حالت نقطه‌های L، M و N را تعیین کرد.

برای پرهیز از حالتهایی که نقطه‌ها در بینهایت واقع شوند، که این چنین حالتهایی

را بعدها در زمینهٔ هندسهٔ تصویری بررسی خواهیم کرد، فعلاً فرض می‌کنیم که مطابق شکل (پ) سه خط AB ، CD و EF مثلث UVW را تشکیل می‌دهند. با به کار بردن قضیهٔ منلائوس برای هر یک از پنج مجموعهٔ سه نقطه‌ای: BDF ، ACE ، BCN ، AMF و LDE که هر کدام از آنها بر ضلعهای مثلث UVW واقعند، خواهیم داشت :

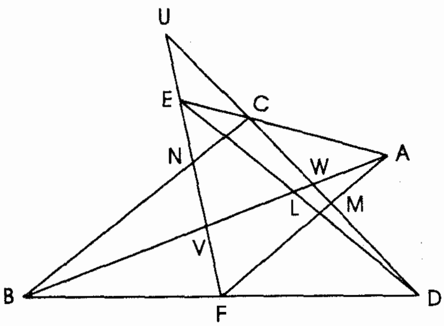
$$\frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} = -1$$

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} = -1$$

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{EV}} = -1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{CU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{BW}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{DU}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{FV}} = -1$$



(پ)

حاصل‌ضرب طرفین سه تساوی اول را بر حاصلضرب طرفین دو تساوی دیگر تقسیم می‌کنیم. پس از ساده کردن حاصل، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{NV}} = -1$$

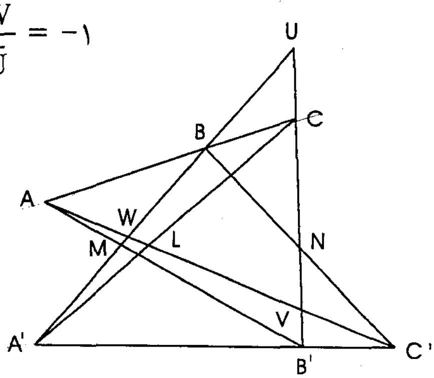
از این رابطه بنابعکس قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ L ، M و N بر یک خط راست واقعند.

۱۴۲. از تقاطع دو به دوی AB' ، BA' و CB' مثلث UVW پدید می‌آید. نسبت به این مثلث برای موربهای $LA'C$ ، $MB'A$ و $NC'B$ بترتیب داریم:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{A'W}}{\overline{A'U}} \cdot \frac{\overline{CU}}{\overline{CV}} = -1$$

$$\frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{B'U}}{\overline{B'V}} \cdot \frac{\overline{AV}}{\overline{AW}} = -1$$

$$\frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} \cdot \frac{\overline{C'V}}{\overline{C'W}} \cdot \frac{\overline{BW}}{\overline{BU}} = -1$$



از ضرب دو طرف تساویهای بالا در هم به دست می‌آید:

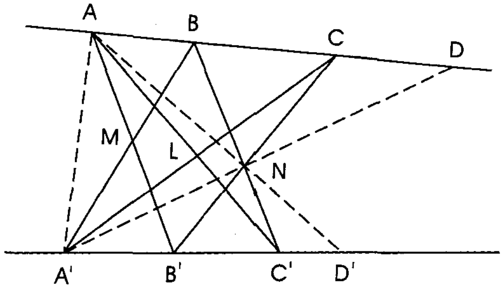
$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{NU}{NV} \cdot \frac{\overline{A'W}}{\overline{A'U}} \cdot \frac{\overline{CU}}{\overline{CV}} \cdot \frac{\overline{B'U}}{\overline{B'V}} \cdot \frac{\overline{AV}}{\overline{AW}} \cdot \frac{\overline{C'V}}{\overline{C'W}} \cdot \frac{\overline{BW}}{\overline{BU}} = 1$$

دو رابطهٔ منلائوس برای موربهای ABC و $A'B'C'$ را نیز نوشته، و دو طرف آنها را در هم ضرب می‌کنیم. از مقایسهٔ رابطه‌ای که به دست می‌آید با رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{LV}}{\overline{LW}} \cdot \frac{\overline{MW}}{\overline{MU}} \cdot \frac{\overline{NU}}{\overline{NV}} = -1$$

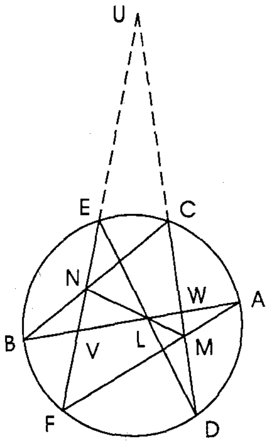
(بدیهی است که برای اثبات قضیه، شکل دیگر لازم نیست، زیرا نقطه‌ها و خطها به هر ترتیب واقع باشند به شرط این که نامهای نقطه‌های نظیر تغییر نکند، اثبات همان است که نوشته شده است. آقای حسین غیور، از معلمان خوب ریاضی ایران به کمک نسبت ناهمسازی، برهان زیر را برای اثبات قضیهٔ پاپوس پیدا

کرده‌اند : از A به ´A و به N وصل می‌کنیم تا دستگاه ناهمساز (A−A´B´C´D´) پدید آید.
دستگاه ناهمساز (N−A´B´C´D´) را در نظر می‌گیریم و آن را با خط AB قطع می‌کنیم : (A´B´C´D´) = (DCBA) = (ABCD) در دو دستگاه ناهمساز با



نسبت برابر (A−ABCD) و (A−A´B´C´D´) چون دو شعاع نظیر ´AA و A´A برهم منطبق است، L ، M و N نقطه‌های برخورد شعاعهای نظیر (A´B و ´AB) و (A´C و ´AC) و (A´D و ´AD) بر یک خط راست قرار دارند.

۱۴۳. چگونگی اثبات این قضیه توسط پاسکال بر هیچ کس معلوم نیست، زیرا راه حل وی به دست نیامده است؛ فقط ژ. و. لایب نیتز G.W.Leibniz (که همزمان با نیوتن حساب دیفرانسیل و انتگرال را وضع کرده است) آن را دیده و از آن با ستایش یاد کرده است. این موضوع می‌تواند انگیزه‌ای باشد تا با توجه به روشهای متداول زمان پاسکال و معلومات آن دوره در جستجوی روش اثبات وی برآییم. چنان که فوردر Forder به چنین کاری دست زد و کوشید تا فقط با استفاده از سه مقالهٔ اول هندسهٔ اقلیدسی، قضیه را ثابت کند. اما روش اثبات بسیار پیچیده و دشوار بود و مشخص شد که پاسکال بایستی با استفاده از قضیه منلائوس ، با روشی مشابه روش زیر، به اثبات قضیه نایل آمده باشد. در پیش دیدیم که یک شش ضلعی محاطی را به ۶۰ شکل گوناگون می‌توان رسم کرد. قضیه را برای شکل زیر ثابت می‌کنیم . خواننده می‌تواند چگونگی تطبیق اثبات را با ۵۹ گونه شکل دیگر، خود انجام دهد.



در شش ضلعی محاطی ABCDEF ضلعهای روبه‌روی AB و DE در L ، ضلعهای روبه‌روی CD و FA در M ضلعهای روبه‌روی BC و EF در N برخورد می‌کنند، باید ثابت کنیم که سه نقطهٔ L ، M و N بر یک خط راست واقعند. خطهای AB ، CD و EF مثلث UVW را تشکیل می‌دهند.

نسبت به موربهای LDE ، AMF و BCN برای مثلث نامبرده بنابه قضیهٔ منلائوس داریم :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \cdot \frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} = +1 \qquad \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} = +1$$

$$\frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{VE}} = +1$$

طرفین این تساویها را در هم ضرب می‌کنیم و چون می‌دانیم :

$$\frac{\overline{WD}}{\overline{UD}} \cdot \frac{\overline{UE}}{\overline{VE}} \cdot \frac{\overline{VA}}{\overline{WA}} \cdot \frac{\overline{UF}}{\overline{VF}} \cdot \frac{\overline{VB}}{\overline{WB}} \cdot \frac{\overline{WC}}{\overline{UC}}$$

$$= \frac{\overline{UE} \times \overline{UF}}{\overline{UC} \times \overline{UD}} \cdot \frac{\overline{VA} \times \overline{VB}}{\overline{VE} \times \overline{VF}} \cdot \frac{\overline{WC} \times \overline{WD}}{\overline{WA} \times \overline{WB}} = +1$$

نتیجه خواهد شد که :

$$\frac{\overline{VL}}{\overline{WL}} \cdot \frac{\overline{WM}}{\overline{UM}} \cdot \frac{\overline{UN}}{\overline{VE}} = +1$$

بنابراین سه نقطهٔ L ، M و N بر یک خط راست واقعند.

(این راه اثبات که در نتیجهٔ جستجو برای تعیین راه اثبات پاسکال انجام گرفته در چاپ هیجدهم کتاب هندسه تألیف تئودوراسپیکر (Theodor Spicker) چاپ

۱۸۸۸ در پوتسدام مشاهده شده است. همچنین در کتاب «شش ضلعی پاسکال» تألیف مؤلفان این کتاب نیز مندرج است. بالاخره کتاب «کوششی برای نوسازی این کشف» اثر دانشمند جوان ژولیت کبک (Joliette Québec) چاپ ۱۹۶۳ نیز این برهان را شامل است).

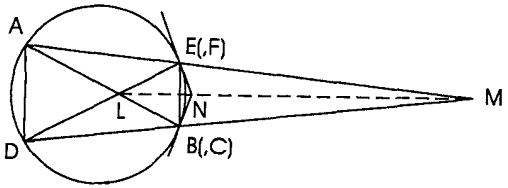
خط شامل سه نقطهٔ L ، M و N را خط پاسکال نظیر شش ضلعی ABCDEF می‌نامند، و چون با شش نقطه شصت نوع شش ضلعی مشخص می‌شود پس برای شش نقطهٔ واقع بر یک دایره تعداد شصت خط پاسکال وجود خواهد داشت. مجموعهٔ این خطها خود وضع جالبی دارد؛ برخی از آنها همرسند و نقطه‌های همرسی بر یک خط راست واقعند، و ویژگیهای دیگر.

پاسکال با بررسیهای مختصری که دربارهٔ مقطعهای مخروطی انجام داده، به این نکته توجه داشته است که قضیهٔ گفته شده دربارهٔ شش ضلعی محاط در یک مقطع مخروطی نیز صادق است.

عکس قضیهٔ پاسکال که توسط ویلیام بره‌کینویج William Braikenridge و کلین مک لورن Colin Maclaurin جداگانه و مستقلاً به اثبات رسیده و در کتابهای مربوط به هندسهٔ تصویری مندرج است، به شرح زیر می‌باشد:

هرگاه سه نقطهٔ برخورد ضلعهای روبه‌رو از یک شش ضلعی بر یک خط راست واقع باشند آن شش ضلعی در یک مقطع مخروطی محاط است. این شش ضلعی در حالت خاص به دو خط تبدیل می‌شود.

هرگاه برخی از رأسهای شش ضلعی را بر هم منطبق کنیم، در این صورت با استفاده از قضیهٔ پاسکال ، قضیه‌های جالبی برای پنج ضلعیها و چهارضلعیهای محاطی نتیجه می‌شود. وقتی دو رأس شش ضلعی محاطی به سمت هم میل کنند، ضلع بین آنها به یک نقطه و خط محمل این ضلع، به مماس بر دایره در این نقطه تبدیل می‌شود. مثلاً هرگاه رأسهای B و C و همچنین رأسهای E و F از شش ضلعی ABCDEF بر هم منطبق باشند، مطابق شکل ، چهارضلعی محاطی ADBE را خواهیم داشت. هرگاه مماسهای بر دایرهٔ محیطی این چهارضلعی در نقطه‌های E و B با هم در N برخورد کنند، و L نقطهٔ برخورد قطرهای AB و DE و M نقطهٔ برخورد ضلعهای AE و DB باشد، بنابه قضیهٔ



پاسکال نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ L ، M و N بر یک خط راست واقعند.

۴.۲.۱. ثابت کنید نقطه ها بر یک استقامتند

۱۴۵. اگر ´AA و ´BB دو نیمساز دو زاویه داخلی و ″CC نیمساز زاویهٔ خارجی دیگر باشد، داریم:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \left(-\frac{c}{b}\right)\left(-\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = +۱$$

پس بنابه عکس قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ ´A ، ´B و ″C روی یک خط راست واقعند.

۱۴۶. اگر ″AA ، ″BB و ″CC نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث ABC باشند، داریم:

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = +۱$$

پس بنابه عکس قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ ″A ، ″B و ″C روی یک خط راست واقعند.

۱۴۷. اگر ´A ، ´B و ´C بر یک استقامت باشند، داریم:

$$\frac{\sin(AA', AB)}{\sin(AA', AC)} \cdot \frac{\sin(BB', BC)}{\sin(BB', BA)} \cdot \frac{\sin(CC', CA)}{\sin(CC', CB)} = ۱ \qquad (۱)$$

اما، ´AA و ″AA نسبت به نیمساز زاویهٔ A قرینه‌اند (Isogonal) و داریم:

$$(AA', AC) = -(AA'', AB) \; ; \; (AA', AB) = -(AA'', AC) \; ;$$

پس: $\frac{\sin(AA', AB)}{\sin(AA', AC)} = \frac{\sin(AA'', AC)}{\sin(AA'', AB)}$ و به همین ترتیب:

$$\frac{\sin(BB', BC)}{\sin(BB', BA)} = \frac{\sin(BB'', BA)}{\sin(BB'', BC)} \text{ و } \frac{\sin(CC', CA)}{\sin(CC', CB)} = \frac{\sin(CC'', CB)}{\sin(CC'', CA)} \; ;$$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{\sin(AA'', AC)}{\sin(AA'', AB)} \cdot \frac{\sin(BB'', BA)}{\sin(BB'', BC)} \cdot \frac{\sin(CC'', CB)}{\sin(CC'', CA)} = ۱\ ;$$

این رابطه نشان می‌دهد که A''، B'' و C'' بر یک استقامت واقعند.

۱۴۸. دو مثلث $A'PB$ و $A'PC$ در ارتفاع PA' مشترکند، پس داریم:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{PA'B \text{ مساحت}}{PA'C \text{ مساحت}} = \frac{\frac{۱}{۲}\, PA' \times PB \times \sin(PA', PB)}{\frac{۱}{۲}\, PA' \times PC \times \sin(PA', PC)}$$

اما: $(PA', PB) = (PA', PA)+(PA, PB) = \frac{\pi}{۲} + (PA, PB)\ ;$

و $(PA', PC) = \frac{\pi}{۲} + (PA, PC)$ پس: $\frac{A'B}{A'C} = \frac{PB \,.\, \cos(PA, PB)}{PC \,.\, \cos(PA, PC)}$

و به همین ترتیب:

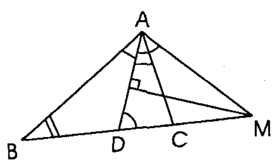
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{PC \,.\, \cos(PB, PC)}{PA \,.\, \cos(PB, PA)}\ ,\quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{PA \,.\, \cos(PC, PA)}{PB \,.\, \cos(PB, PC)}$$

از ضرب طرفین سه رابطه نتیجه می‌شود:

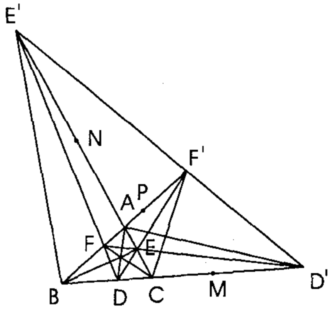
$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = ۱\ ;$$

پس A'، B' و C' بر یک استقامتند.

۱۴۹. راه اول ـ مثلث ABC و خط AD نیمساز زاویهٔ A را در نظر می‌گیریم. عمودی که از وسط پاره خط AD برآن اخراج می‌شود امتداد ضلع BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. از M به A وصل می‌کنیم، چون مثلث MAD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{MAD} = \hat{MDA}$. اما زاویهٔ MDA که زاویهٔ خارجی مثلث DAB است برابر $\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}$ است و همچنین $\hat{MAD}=\hat{B}+\frac{\hat{A}}{۲}$ و این نشان می‌دهد که خط AM در خارج مثلث است و داریم $\hat{MAC}=\hat{B}$.



از طرفی خط AM در نقطهٔ A بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است. برای خطهای نظیر دیگر نیز این ویژگی وجود دارد. اما می‌دانیم که مماسهای بر دایرهٔ محیطی یک مثلث، ضلعهای مقابل به رأسهای نظیر آن مثلث را در سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند. بنابراین قضیه ثابت است.



راه دوم. اگر ´AD نیمساز زاویهٔ خارجی A باشد، دیده می‌شود که نقطهٔ M وسط پاره خط ´DD است. همچنین اگر نیمسازهای BE و ´BE از زاویهٔ B، ´CF و CF از زاویهٔ C رسم شوند، نقطه‌های N و P مانند نقطهٔ M بترتیب وسط پاره‌خطهای ´EE و ´FF می‌باشند، اما می‌دانیم که مجموعه‌های متشکل از سه نقطهٔ (´D , E , F)، (D , E´ , F)، (D´, E , F) و (´D´ , E´ , F) هر کدام روی یک خط راست می‌باشند. این چهار خط، یک چهارضلعی کامل می‌سازند که خطهای ´DD، ´EE و ´FF قطرهای آن و نقطه‌های M، N و P وسطهای قطرهای آن می‌باشند که می‌دانیم این سه نقطه بر یک خط راست واقعند.

۱۵۰. نقطه‌های b، ´c و α روی یک خط راست واقعند پس داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1$$

به همین ترتیب نقطه‌های β، c و ´a و همچنین سه نقطهٔ γ، a و ´b بر یک استقامتند، پس: $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \cdot \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} = 1$ و $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} = 1$ است.

از ضرب این سه رابطه عضو به عضو در یکدیگر و توجه به این که دو مقدار $\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}$ و $\frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{a'C}} \cdot \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}}$ با هم برابر و مساوی ۱ می‌باشند، زیرا نقطه‌های (a,b,c) و (á,b´,c´) هر کدام روی یک خط راست قرار دارند، پس داریم: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$ و این رابطه نشان می‌دهد که سه نقطهٔ α، β و γ روی یک خط راست می‌باشند.

۱۵۱. موربهای $B\beta b'$ و $C\gamma c'$ ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث Abc را قطع کرده‌اند، پس داریم:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{Bc}}\cdot\frac{\overline{\beta b}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{b'c}}{\overline{b'b}}=۱\ ,\ \frac{\overline{Cb}}{\overline{CA}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma c}}\cdot\frac{\overline{c'c}}{\overline{c'b}}=۱$$

همچنین موربهای $A\,\alpha a'$ و $C\gamma c'$ ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث B ca را قطع کرده‌اند پس داریم:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{Ca}}\cdot\frac{\overline{\gamma c}}{\overline{\gamma B}}\cdot\frac{\overline{c''a}}{\overline{c''c}}=۱\ ,\ \frac{\overline{Ac}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha a}}\cdot\frac{\overline{a'a}}{\overline{a'c}}=۱$$

و برای مثلث Cab با موربهای $A\,\alpha a'$ و $B\beta b'$ داریم:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{Ab}}\cdot\frac{\overline{\alpha a}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'a}}=۱\ ,\ \frac{\overline{Ba}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta b}}\cdot\frac{\overline{b'b}}{\overline{b'a}}=۱$$

از ضرب عضوهای این ۶ رابطه نظیر به نظیر در یکدیگر، با توجه به این که عضوهای $\overline{\alpha a}$، $\overline{\beta b}$، $\overline{\gamma c}$، $\overline{a'a}$، $\overline{b'b}$ و $\overline{c'c}$ که هر کدام، هم در صورت و هم در مخرج کسرها قرار دارند، حذف می‌شوند، و نسبتهای: $\frac{\overline{BA}}{\overline{AB}}$، $\frac{\overline{CB}}{\overline{BC}}$ و $\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}}$ هر کدام برابر ۱ − است، و نسبتهای $\frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$، $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}}$ و $\frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}}$ نیز برابر ۱ − می‌باشد زیرا نقطه‌های a'، b' و c' وسط bc ، ab و ac می‌باشند، پس خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\overline{Ba}}{\overline{Ca}}\cdot\frac{\overline{Cb}}{\overline{Ab}}\cdot\frac{\overline{Ac}}{\overline{Bc}}\right)\cdot\left(\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}\right)=۱$$

اما $\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}}\cdot\frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}\cdot\frac{\overline{cA}}{\overline{cB}}=۱$. پس داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=۱$$

؛ و این رابطه نشان می‌دهد که سه نقطهٔ α، β و γ روی یک خط راست قرار دارند.

۱۵۲. چون خطهای $B\beta$, $A\alpha$ و $C\gamma$ از یک نقطه مانند O می‌گذرند، مثلثهای ABC و $\alpha\beta\gamma$، Homologique می‌باشند و ضلعهای متناظر $(BC\ ,\beta\gamma)$, $(CA\ ,\gamma\alpha)$ و $(AB\ ,\alpha\beta)$ دو به دو در نقطه‌های α'، β' و γ' که روی یک خط راست واقعند، متقاطع می‌باشند.

۱۵۳. باید رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=۱$ را ثابت کنیم. پای ارتفاعهای رأسهای B و C را به‌ترتیب H' و H'' می‌نامیم. مورب αDE مثلث ABC را قطع کرده است. پس

داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=۱ \Rightarrow \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$$

اما در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC داریم:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}=-\frac{\overline{HA}^۲}{\overline{HC}^۲}\ ,\ \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=-\frac{\overline{HB}^۲}{\overline{HA}^۲}$$

در نتیجه $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{HB}^۲}{\overline{HC}^۲}$ به‌همین ترتیب: $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\frac{\overline{H'C}^۲}{\overline{H'A}^۲}\ ,\ \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{H''A}^۲}{\overline{H''B}^۲}$ پس:

$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{HB}^۲}{\overline{HC}^۲}\cdot\frac{\overline{H'C}^۲}{\overline{H'A}^۲}\cdot\frac{\overline{H''A}^۲}{\overline{H''B}^۲}$ اما چون سه ارتفاع مثلث همرسند،

پس $\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}\cdot\frac{\overline{H'C}}{\overline{H'A}}\cdot\frac{\overline{H''A}}{\overline{H''B}}=-۱$ است، در نتیجه $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=۱$ و حکم ثابت است.

۱۵۵. فرض کنیم A' ، B' و C' محل برخورد مماسهای در رأسهای A ، B و C با ضلعهای BC ، CA و AB باشند.

مثلثهای ABA' و CAA' متشابه‌اند، زیرا دو زاویهٔ متساوی دارند: $\hat{A'}=\hat{A'}$ و $A\hat{B}A'=C\hat{A}A'$ پس داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B}{A'A}=\frac{A'A}{A'C}$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AB}^۲}{\overline{CA}^۲}=\frac{A'B\ .\ AA'}{A'A\ .\ A'C}=\frac{A'B}{A'C}$$

پس: $\frac{A'B}{A'C}=\frac{c^۲}{b^۲}$; و به همین ترتیب ; $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{a^۲}{c^۲}$; $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{b^۲}{a^۲}$

و از آن جا:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=۱$$

و A'، B' و C' بر یک خط راست واقعند.

۱۵۷. نسبت $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ را بر حسب a ، b و c ضلعهای مثلث PQR محاسبه می‌کنیم.
$(RQ = a$ و $PR = b$ ، $PQ = c)$.

مماس $A\alpha$ ضلع PR را در نقطهٔ D قطع می‌کند و ضلعهای مثلث RAD را با a' ،

b' و c' نشان می‌دهیم. ($RA = a' = \frac{a}{۲}$، $DA = c'$ و $\underline{RD} = b'$).

دو مثلث $BD\alpha$ و $CA\alpha$ متشابه‌اند. از آن جا داریم: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{BD}{CA}$. اما،

$BD = RD - BR = b' - \frac{b}{۲}$ و (۱) $CA = \frac{b}{۲}$ پس، $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{b - ۲b'}{b}$

نقطهٔ تماس دایره با ضلع QR را E می‌نامیم. در مثلث PQR داریم $RE = \frac{a + b - c}{۲}$،

و در مثلث DRA، $RE = \frac{a' + b' - c'}{۲}$. از آن جا خواهیم داشت:

(۲) $a' + b' - c' = a + b - c$ از طرفی چون دو مثلث PQR و DRA هر دو، محیط بر یک دایره می‌باشند، نسبت مساحتشان متناسب با نسبت محیطهایشان است، و چون این دو مثلث در زاویهٔ R مشترکند، نسبت مساحتشان مساوی نسبت حاصلضرب ضلعهای این زاویه در دو مثلث می‌باشد. از آن جا خواهیم داشت $\frac{a'b'}{ab} = \frac{a' + b' + c'}{a + b + c}$ حال اگر در طرف دوم این رابطه به جای a' مقدار مساویش $\frac{a}{۲}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

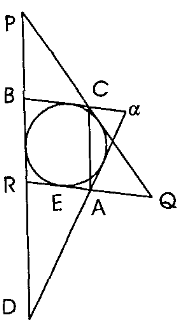
$$a' + b' + c' = \frac{b'}{۲b}(a + b + c) \quad (۳)$$

از جمع رابطه‌های (۲) و (۳) داریم: $۲b' = \frac{b'}{۲b}(a + b + c) + b - c$

اگر از این رابطه b' را محاسبه کنیم خواهیم داشت: $b' = \frac{۲b(c - b)}{a + c - ۳b}$

حال به جای b' در رابطهٔ (۱) مقدار بالا را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{a + b - ۳c}{a + c - ۳b}$$



اگر $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ مثبت باشد، همان طوری که در این شکل دیده می‌شود، در این حالت خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{BD}{CA} = \frac{b + ۲b'}{b}.$$

از طرفی رابطه‌های (۲) و (۳) به

صورت زیر در می‌آید، زیرا دایره در این حالت، دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع RA است.

$a' + c' - b' = a + b - c$ و $b' + c' - a' = \frac{b'}{2b}(a + b + c)$، از آن جا داریم: $b' = \frac{2b\,(b - c)}{a + c - 3b}$ و در نتیجه برای $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ همان مقدار قبلی به دست می‌آید، یعنی: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{a + b - 3c}{a + c - 3b}$ و به روش مشابه داریم :

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{b + c - 3a}{a + c - 3b}, \quad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{c + a - 3b}{c + b - 3a}$$

از ضرب عضوهای نظیر سه رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$، و این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های α، β و γ روی یک خط راست واقعند.

این راه حل از : J. A. SERRET . Nouvelles Annales de Mathématique است و این سؤال جزء کنکور عمومی سال ۱۸۴۷ کشور فرانسه بوده است.

۱۵۹. فرض می‌کنیم $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ و $a + b + c = 2p$ باشد، در این صورت، در هر مثلث مختلف‌الاضلاع خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{p - b}{p - c}, \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = -\frac{p - c}{p - a}, \quad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{p - a}{p - b}$$

$$\frac{\overline{\alpha_1 B}}{\overline{\alpha_1 C}} = -\frac{p - c}{p - b}, \quad \frac{\overline{\beta_1 C}}{\overline{\beta_1 A}} = -\frac{p - b}{p}, \quad \frac{\overline{\gamma_1 A}}{\overline{\gamma_1 B}} = \frac{p}{p - c}$$

$$\frac{\overline{\alpha_2 B}}{\overline{\alpha_2 C}} = \frac{p}{p - a}, \quad \frac{\overline{\beta_2 C}}{\overline{\beta_2 A}} = -\frac{p - a}{p - c}, \quad \frac{\overline{\gamma_2 A}}{\overline{\gamma_2 B}} = \frac{p - c}{p}$$

$$\frac{\overline{\alpha_3 B}}{\overline{\alpha_3 C}} = \frac{p - a}{p}, \quad \frac{\overline{\beta_3 C}}{\overline{\beta_3 A}} = \frac{p}{p - b}, \quad \frac{\overline{\gamma_3 A}}{\overline{\gamma_3 B}} = -\frac{p - b}{p - a}$$

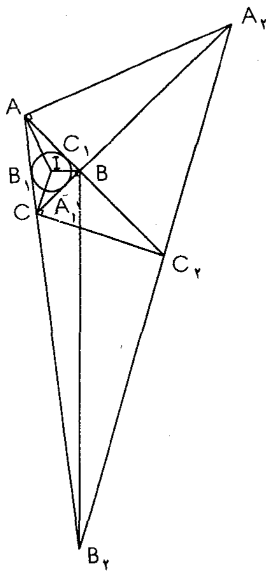
از آن جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta_3 C}}{\overline{\beta_3 A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{p(p - a)}{(p - b)(p - c)}$$

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma_2 A}}{\overline{\gamma_2 B}} = \frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}, \ldots$$

محاسبهٔ این رابطه‌ها برای دسته‌های سه تایی نقطه‌های دیگر، نشان می‌دهد که رابطه‌های نظیر برابر است با $\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}$، یا $\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$. در نتیجه برای اثبات مسأله کافی است ثابت کنیم: $p(p-a) = (p-b)(p-c)$ و یا $(a+b+c)(b+c-a) = (a+c-b)(a+b-c)$ و یا $a^۲ = b^۲ + c^۲$، و این رابطه نیز درست است زیرا مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

تبصره ـ بعکس می‌توان گفت که اگر سه نقطه از دسته‌های سه تایی مشخص شده نقطه، بر یک خط راست باشند، مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است. زیرا در این صورت داریم $\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)} = ۱$ یا $a^۲ = b^۲ + c^۲$.



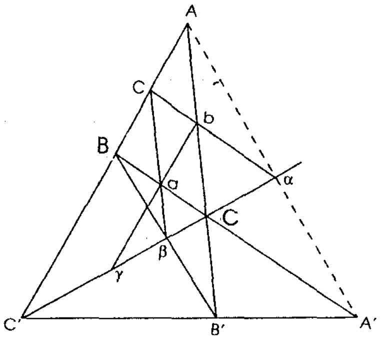
۱۶۱. از C بر CI عمود می‌کنیم تا AB را در $C_۲$ قطع کند. $A_۲$ و $B_۲$ را به طور مشابه در نظر می‌گیریم؛ مرکز دایرهٔ محیطی $CIC_۱$ وسط $IC_۲$ است. پس کافی است نشان دهیم که $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ روی یک خط راست هستند؛ امّا بنابر قضیهٔ نیمسازها:

$$\frac{\overline{A_۲B}}{\overline{A_۲C}} = \frac{AB}{AC} \text{ ، } \frac{\overline{B_۲A}}{\overline{B_۲C}} = \frac{BA}{BC} \text{ و } \frac{\overline{C_۲A}}{\overline{C_۲B}} = \frac{CA}{CB}$$

در نتیجه : $\frac{\overline{B_۲C}}{\overline{B_۲A}} \cdot \frac{\overline{C_۲A}}{\overline{C_۲B}} \cdot \frac{\overline{A_۲B}}{\overline{A_۲C}} = ۱$ پس طبق قضیهٔ منلائوس، سه نقطه در یک امتداد هستند.

۱۶۳. از نقطهٔ E خطی موازی ضلع BC رسم کنید تا ضلع AB را در نقطهٔ F قطع کند. سپس ثابت کنید که $DB = FA$ است. در نتیجه نقطهٔ ´C وسط AB، وسط ضلع DF از مثلث DEF نیز هست. از آن جا ...

۲.۲.۴. ثابت کنید نقطه‌ها بر یک استقامتند (در چند ضلعیها)



۱۶۶. چهار ضلعی کامل شکلی است که از برخورد چهار خط که دو به دو یکدیگر را قطع کرده‌اند تشکیل شده است. چهار ضلعی کامل، چهار ضلع، شش رأس و سه قطر دارد.

چهار ضلعی کامل $ABCA'B'C'$ را در نظر می‌گیریم. قطرهای AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم و وسط این قطرها را بترتیب α، β و γ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند. مثلث ABC را که از برخورد سه ضلع چهار ضلعی به وجود آمده است در نظر می‌گیریم، و از نقطه‌های α، β و γ خطهایی بترتیب به موازات ضلعهای BC، CA و AB رسم می‌کنیم. این سه خط موازی، مثلث abc را به وجود می‌آورند و نقطه‌های a، b و c بترتیب وسطهای ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC می‌باشند. نقطه‌های α، β و γ روی ضلعهای مثلث abc می‌باشند. برای این که این نقطه‌ها روی یک خط راست باشند، لازم و کافی است که رابطهٔ $\frac{\overline{\alpha b}}{\overline{\alpha c}} \cdot \frac{\overline{\beta c}}{\overline{\beta a}} \cdot \frac{\overline{\gamma a}}{\overline{\gamma b}} = 1$ برقرار باشد.

امّا داریم: $$\frac{\overline{\alpha b}}{\overline{\alpha c}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}, \quad \frac{\overline{\beta c}}{\overline{\beta a}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}, \quad \frac{\overline{\gamma a}}{\overline{\gamma b}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه داریم:

$$\frac{\overline{\alpha b}}{\overline{\alpha c}} \cdot \frac{\overline{\beta c}}{\overline{\beta a}} \cdot \frac{\overline{\gamma a}}{\overline{\gamma b}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

امّا با توجه به این که مورب $A'B'C'$ امتداد ضلعهای مثلث ABC را در سه نقطهٔ A'، B' و C' قطع کرده است، طرف دوم رابطهٔ بالا برابر ۱ است. در نتیجه داریم: $\frac{\overline{\alpha b}}{\overline{\alpha c}} \cdot \frac{\overline{\beta c}}{\overline{\beta a}} \cdot \frac{\overline{\gamma a}}{\overline{\gamma b}} = 1$. بنابراین بنا به عکس قضیهٔ منلائوس سه نقطهٔ α، β و

γ بر یک خط راست واقعند.

۱۶۷. نقطهٔ برخورد خطهای AP و BD را R' در نظر بگیرید و ثابت کنید چهار ضلعی $CPR'Q$ محاطی است.

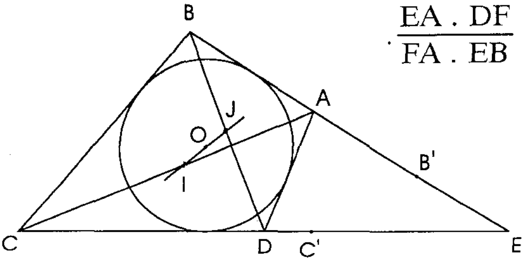
۱۶۸. ۱. چون $\frac{AN}{MC} = \frac{NB}{DM}$ و $CD \parallel AB$ است. پس خطهای BD ، AC و MN همرسند. و در نتیجه سه نقطهٔ M ، N و O روی یک خط راست قرار دارند. از طرفی $\frac{NB}{MC} = \frac{AN}{DM}$ و $CD \parallel AB$ است، پس خطهای DA ، CB و MN همرسند، یعنی سه نقطهٔ O' ، M و N روی یک خط راست واقعند. در نتیجه چهار نقطهٔ M ، N ، O و O' روی یک خط راست می‌باشند.

۲. با توجه به این که $DM = MC$ ، و $\frac{MC}{AN} = \frac{OM}{ON}$ و $\frac{DM}{AN} = \frac{O'M}{O'N}$ است، نتیجه می‌شود $\frac{O'M}{O'N} = \frac{OM}{ON}$

۱۶۹. نقطه‌های E ، F و G در صورتی روی یک خط راست قرار دارند که رابطهٔ $\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{GB}}{\overline{GD}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = ۱$ درست باشد؛ و با توجه به این که $\overline{GD} = -\overline{GB}$ است، پس باید رابطهٔ $\frac{\overline{FD}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = ۱$ درست باشد.

در این رابطه یکی از نسبتها همواره علامت منفی دارد، زیرا زاویه‌های ABC و ADC مکمل یکدیگرند، و دو زاویهٔ ABB' و ADD' که مکمل این دو زاویه می‌باشند، یکی حاده و دیگری منفرجه است، بنابراین یکی از دونقطهٔ E و F روی پاره‌خطهای BA یا DA، و دیگری در امتداد آنها قرار می‌گیرد. پس کافی است ثابت کنیم که، $\frac{FD}{FA} \times \frac{EA}{EB} = ۱$ است.

از تشابه مثلثهای $AB'E$ و $AD'F$ داریم: $\frac{EB'}{FD'} = \frac{AE}{AF}$ و همچنین دو مثلث $BB'E$ و $DD'F$ متشابه‌اند و داریم: $\frac{EB'}{FD'} = \frac{BE}{DF}$. از تقسیم عضو به عضو این دو رابطه نتیجه می‌شود: $\frac{EA \, . \, DF}{FA \, . \, EB} = ۱$.



۱۷۰. مساحت چهارضلعی ABCD را به S ، و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB}، نمایش می‌دهیم.

واضح است که:

$$(۱)\ S_{IDC} + S_{IBA} = \frac{۱}{۲} S$$

$$(۲)\ S_{JDC} + S_{JBA} = \frac{۱}{۲} S$$

$$(۳)\ S_{ODC} + S_{OBA} = \frac{۱}{۲} S$$

می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی ABCD، $AB + DC = AD + BC$

AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند؛ آنگاه روی خط AB نقطهٔ ´B و روی خط CD نقطهٔ ´C را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB' = AB$ و $EC' = DC$ باشد، داریم: $S_{IC'EB'} = S_{IC'B'} + S_{EC'B'}$ و $S_{IEC'} + S_{IEB'} = \frac{۱}{۲} S$

در نتیجه،

$$(۱')\ S_{IB'C'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'}$$

چون نظیر عملیات بالا را نسبت به J انجام دهیم، تساوی (´۲) و (´۳) زیر به دست می‌آید، یعنی،

$$(۲')\ S_{JC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'}$$

$$(۳')\ S_{OC'B'} = \frac{۱}{۲} S - S_{EC'B'}$$

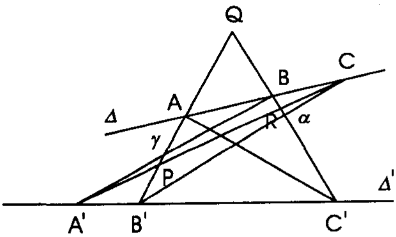
از (´۱)، (´۲) و (´۳) نتیجه می‌شود:

$$S_{IC'B'} = S_{JC'B'} = S_{OC'B'}$$

از این رو، سه نقطهٔ I، O و J بر یک استقامتند.

۳.۲.۴. ثابت کنید نقطه‌ها بر یک استقامتند (در سایر شکلها)

۱۷۱. اگر PQR مثلث تشکیل شده به وسیلهٔ خطهای ´BC، ´CA و ´AB باشد، این مثلث را متوالیاً با موربهای $CB'\alpha$، $AC'\beta$ و $BA'\gamma$ قطع می‌دهیم. خواهیم داشت:



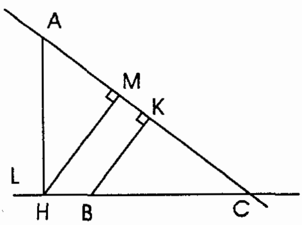
$$\frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma Q}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{A'R}}{\overline{A'P}} = ۱ \text{ و } \frac{\overline{\beta R}}{\overline{\beta P}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{C'Q}}{\overline{C'R}} = ۱ \ , \ \frac{\overline{\alpha Q}}{\overline{\alpha R}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{B'P}}{\overline{B'Q}} = ۱$$

از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{\overline{\alpha Q}}{\overline{\alpha R}} \cdot \frac{\overline{\beta R}}{\overline{\beta P}} \cdot \frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma Q}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{CR}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{B'P}}{\overline{B'Q}} \cdot \frac{\overline{C'Q}}{\overline{C'R}} \cdot \frac{\overline{A'R}}{\overline{A'P}}\right) = ۱$$

امّا حاصل پرانتزهای دوم وسوم، هر کدام برابر ۱ است، زیرا نقطه‌های A، B و C، و از طرف دیگر نقطه‌های ´A، ´B و ´C، هر دسته، روی یک خط راست می‌باشند، پس $۱ = \frac{\overline{\alpha Q}}{\overline{\alpha R}} \cdot \frac{\overline{\beta R}}{\overline{\beta P}} \cdot \frac{\overline{\gamma P}}{\overline{\gamma Q}}$ و از آن جا نتیجه می‌گردد که سه نقطهٔ α، β و γ روی یک خط راست قرار دارند.

۱۷۲. فرض می‌کنیم، همهٔ نقطه‌ها، روی یک خط راست نباشند. همهٔ خطهای راست ممکن را، از دو به دوی نقطه‌ها می‌گذرانیم و همهٔ فاصله‌های غیر صفر بین نقطه‌ها و خطهای راست را در نظر می‌گیریم.



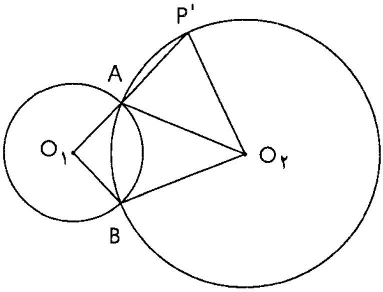
چون تعداد این فاصله‌ها، محدود است، می‌توان نقطهٔ A و خط L را طوری پیدا کرد که، فاصلهٔ بین آنها، کمترین مقدار باشد. عمود AH را بر خط راست L فرود می‌آوریم. چون خط راست L، دست کم شامل سه نقطه از نقطه‌های مفروض است، بنابراین، دست کم دو تا از آنها، در یک طرف نقطهٔ H قرار دارند. آنها را B و C می‌گیریم و، در ضمن، B را بین H و C فرض می‌کنیم. در این صورت، اگر BK و HM را بر خط راست AC عمود کنیم، از تشابه دو مثلث BKC و HMC به دست می‌آید:

$$BK = \frac{HM \cdot BC}{HC} \leq HM < HA$$

(اگر A = M، آن وقت HC ∥ AC، که درست نیست)؛ یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط راست L، کمترین مقدار نیست. تناقض حاصل، نشان می‌دهد که همهٔ نقطه‌ها، روی یک خط راستند.

۱۷۴. کوتاهترین روش اثبات، که البته روش مقدماتی نیست، با استفاده از تبدیلهای

تصویری به دست می‌آید. با دور کردن نقطهٔ برخورد خطهای راست EA و BF به بی‌نهایت، شکلی به دست می‌آید که نسبت به مرکز دایره متقارن است، و از همین جا، درستی حکم مسأله نتیجه می‌شود.

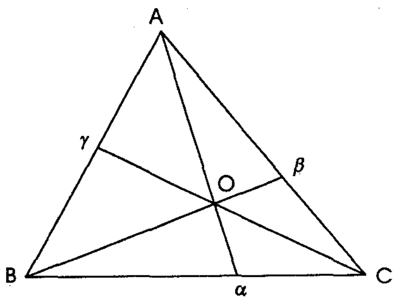


۱۷۵. چند حالت، برای استقرار دایره‌ها و نقطه‌های روی آنها، نسبت به هم وجود دارد. حالتی را در نظر می‌گیریم که در شکل نشان داده شده است. فرض می‌کنیم، خط راست O_1A ، دایرهٔ دوم را در نقطهٔ P' قطع کرده باشد. در این صورت:

$$A\hat{P'}O_2 = P'\hat{A}O_2 = 180^\circ - O_1\hat{A}O_2 = 180^\circ - O_1\hat{B}O_2$$

یعنی چهار ضلعی O_1BO_2P' محاطی است و این، به معنای آن است که نقطه‌های P و P' بر هم منطبقند.

بخش ۵. خطهای همرس



۱۷۸. اثبات. راه اول . برای اثبات قضیه، قبلاً یادآوری می‌کنیم که اگر دو مثلث دارای ارتفاعهای برابر باشند، نسبت مساحتهای آنها بر نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاعهاست، یعنی:

$$\frac{B\alpha}{\alpha C} = \frac{S(AB\alpha)}{S(A\alpha C)} = \frac{S(OB\alpha)}{S(O\alpha C)} = \frac{S(AB\alpha) - S(OB\alpha)}{S(A\alpha C) - S(O\alpha C)} = \frac{S(ABO)}{S(CAO)}$$

همچنین خواهیم داشت: $\frac{C\beta}{\beta A} = \frac{S(BCO)}{S(ABO)}$ و: $\frac{A\gamma}{\gamma B} = \frac{S(CAO)}{S(BCO)}$ از ضرب نظیر به نظیر طرفهای رابطه‌های بالا به دست می‌آید:

$$\frac{B\alpha}{\alpha C} \cdot \frac{C\beta}{\beta A} \cdot \frac{A\gamma}{\gamma B} = \frac{S(ABO)}{S(CAO)} \cdot \frac{S(BCO)}{S(ABO)} \cdot \frac{S(CAO)}{S(BCO)} = ۱$$

راه دوم . اثبات به کمک قضیهٔ منلائوس

رابطهٔ منلائوس را برای مورب $BO\beta$ که مثلث $A\alpha C$ را قطع کرده است می‌نویسیم؛ داریم:

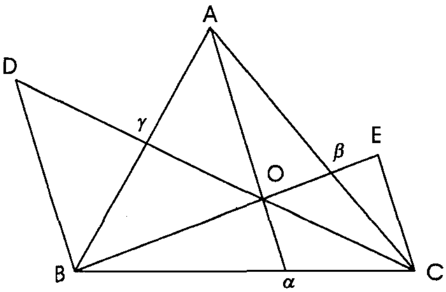
$$\frac{\overline{B\alpha}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}} = ۱ \qquad (۱)$$

همچنین رابطهٔ منلائوس را برای مورب $CO\gamma$ که مثلث $A\alpha B$ را قطع کرده است،

می‌نویسیم. $\frac{\overline{C\alpha}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}\cdot\frac{\overline{OA}}{\overline{O\alpha}}=1$ (۲). رابطه‌های (۱) و (۲) را عضو به عضو بر هم تقسیم می‌کنیم، با توجه به این که $\overline{BC} = -\overline{CB}$ است. خواهیم داشت:

$$-\frac{\overline{B\alpha}}{\overline{C\alpha}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1 \Rightarrow \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

راه سوم . اثبات به کمک قضیهٔ تالس



از نقطه‌های B و C خطهایی به موازات $A\alpha$ رسم می‌کنیم تا خطهای $C\gamma$ و $B\beta$ را بترتیب در نقطه‌های D و E قطع کنند. بنا به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}}\ (1) \text{ و } \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AO}}\ (2) \text{ و } \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{BD}}\quad (3)$$

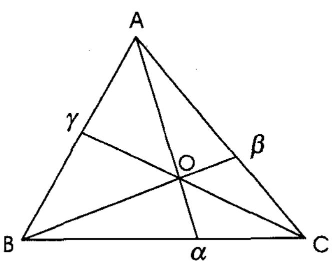
از ضرب عضوهای متناظر سه رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}$$

امّا $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{EC}}=-\frac{\overline{BD}}{\overline{CE}}$ پس $\frac{\overline{OB}}{\overline{OE}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}}=-1$ و از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

۱۷۹. **اثبات.** برای اثبات فرض می‌کنیم که O نقطهٔ برخورد $A\alpha$ با $B\beta$ باشد، و خطی که از C به O وصل می‌شود با AB در γ' برخورد کند. در این صورت بنا به قضیهٔ سوا داریم:



$$\frac{\overline{B\alpha}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{C\beta}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{A\gamma'}}{\overline{\gamma' B}}=1$$

از مقایسهٔ این رابطه، با رابطهٔ فرض به دست می‌آید: $\frac{\overline{A\gamma}}{\overline{\gamma B}}=\frac{\overline{A\gamma'}}{\overline{\gamma' B}}$. در نتیجه دو نقطهٔ γ و γ' بر هم منطبقند. پس خط

$C\gamma$ نیز از O می‌گذرد.

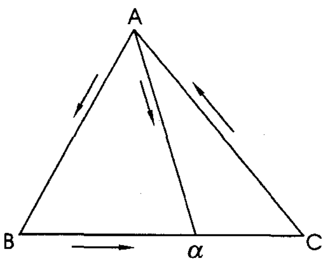
۱۸۰. بنا به رابطهٔ تالس داریم:
$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{C\alpha}}{\overline{CB}}$$

از ضرب این دو رابطه نتیجه می‌شود:
$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{\overline{C\alpha}}{\overline{B\alpha}} = -\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}$$

از ضرب طرفین این رابطه در $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$ خواهیم داشت:
$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$$

۱۸۱. اگر $C\gamma$ موازی $A\alpha$ نباشد، از نقطهٔ C خطی موازی $A\alpha$ رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ γ' قطع کند؛ در این صورت داریم: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta\gamma}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = -۱$ از مقایسهٔ این رابطه با فرض قضیه داریم: $\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$. پس γ' بر γ منطبق است، یعنی $C\gamma$ هم با $A\alpha$ و $B\beta$ موازی است.

۱۸۲. **اثبات** . دو قضیهٔ سوا و منلائوس را می‌توان در صفحه‌ای جهت‌دار و با استفاده از اندازهٔ جبری بردارها، ثابت نمود. به این ترتیب که فرض می‌کنیم مثلث ABC در صفحه‌ای جهت‌دار باشد (در این صورت



زاویه‌ها اندازهٔ جبری خواهند داشت)، و روی هر ضلع مثلث جهتی به عنوان جهت مثبت اختیار کرده باشیم، به عنوان مثال روی ضلع BC جهت از B به C، و روی ضلع CA جهت از C به A، و روی ضلع AB جهت از A به B. آن گاه نقطه‌های α، β و γ را بترتیب روی BC، AC و AB اختیار نموده و روی خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ نیز جهتی به عنوان جهت مثبت اختیار می‌کنیم؛ مثلاً روی $A\alpha$ جهت از A به α، روی $B\beta$ جهت از B به β، و روی $C\gamma$ جهت از C به طرف γ.

اینک در مثلث $AB\alpha$ می‌توان نوشت: $\frac{\overline{AB}}{\sin(BC\,,\,A\alpha)} = \frac{\overline{\alpha B}}{\sin(AB\,,\,A\alpha)}$ و در مثلث

$AC\alpha$ داریم: $\frac{\overline{CA}}{\sin(A\alpha\ ,\ BC)} = \frac{\overline{\alpha C}}{\sin\ (CA\ ,\ A\alpha)}$. از تقسیم این دو رابطه با توجه به این که $(BC\ ,\ A\alpha) = -(A\alpha\ ,\ BC)$ و لذا $\sin(BC\ ,\ A\alpha) = -\sin(A\alpha\ ,\ BC)$ خواهیم داشت: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\sin(AB\ ,\ A\alpha)}{\sin(CA\ ,\ A\alpha)}$ که با توجه به جهت انتخاب شده روی AB و CA به جای $\overline{AB}$ و $\overline{CA}$ می‌توان AB و CA را قرار داد.

از طرف دیگر:

$$(CA\ ,\ A\alpha) = (CA\ ,\ AC) + (AC\ ,\ A\alpha) = \pi + (AC\ ,\ A\alpha) \Rightarrow$$

$$\sin(CA\ ,\ A\alpha) = -\sin(AC\ ,\ A\alpha)$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(AB\ ,\ A\alpha)}{\sin(AC\ ,\ A\alpha)} \Rightarrow \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(A\alpha\ ,\ AB)}{\sin(A\alpha\ ,\ AC)}$$

به روش مشابهی می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{\sin(B\beta\ ,\ BC)}{\sin(B\beta\ ,\ BA)}, \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{\sin(C\gamma\ ,\ CA)}{\sin(C\gamma\ ,\ CB)}$$

از ضرب این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\sin(A\alpha\ ,\ AB)}{\sin(A\alpha\ ,\ AC)} \cdot \frac{\sin(B\beta\ ,\ BC)}{\sin(B\beta\ ,\ BA)} \times \frac{\sin(C\gamma\ ,\ CA)}{\sin(C\gamma\ ,\ CB)}$$

حال به صورت زیر قضیه‌های منلائوس و سوا را می‌توان بیان کرد:

مثلث ABC را در یک صفحه جهت‌دار در نظر می‌گیریم و نقطه‌های α، β و γ رابترتیب روی BC، AC و AB اختیار می‌کنیم.

الف. قضیهٔ منلائوس. شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌های α، β و γ روی یک خط راست باشند، آن است که داشته باشیم:

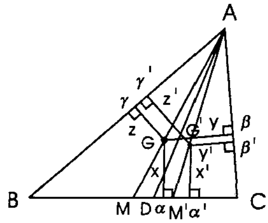
$$\frac{\sin(A\alpha\ ,\ AB)}{\sin(A\alpha\ ,\ AC)} \cdot \frac{\sin(B\beta\ ,\ BC)}{\sin(B\beta\ ,\ BA)} \cdot \frac{\sin(C\gamma\ ,\ CA)}{\sin(C\gamma\ ,\ CB)} = ۱$$

ب. قضیهٔ سوا. شرط لازم و کافی برای آن که خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ همرس، یا موازی باشند، آن است که داشته باشیم:

$$\frac{\sin(A\alpha , AB)}{\sin(A\alpha , AC)} \times \frac{\sin(B\beta , BC)}{\sin(B\beta , BA)} \times \frac{\sin(C\gamma , CA)}{\sin(C\gamma , CB)} = -۱$$

۵.۲.۱. محاسبه اندازه پاره‌خطها

۱۸۳. قرینه‌های میانه‌ها، نسبت به نیمسازها، خود همزاویه‌اند. فرض کنیم G محل تلاقی میانه‌ها و G' محل تلاقی قرینه‌های آنها نسبت به نیمسازها باشد. x ، y ، z و x' ، y' ، z' را بترتیب فاصله‌های نقطه‌های G و G' از ضلعهای BC ، CA و AB اختیار می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $AG\gamma$ و $AG'\beta'$ متشابه‌اند و داریم:



$\frac{AG}{AG'} = \frac{z}{y'}$. به همین ترتیب $\frac{AG}{AG'} = \frac{y}{z'}$؛ پس $\frac{y}{z'} = \frac{z}{y'}$؛ یا $yy' = zz'$؛ به همین ترتیب $xx' = yy'$؛ پس $zz' = yy' = xx'$. امّا x ، y و z ثلث ارتفاعهای مثلث می‌باشند، پس: $xh=yh'=zh''$؛ از طرفی $ah = bh' = ch''$. از تقسیم این رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax + by + cz}{a^۲ + b^۲ + c^۲} = \frac{۲s}{a^۲ + b^۲ + c^۲};$$

s مساحت مثلث است، و از آن جا:

$$x = \frac{۲as}{a^۲ + b^۲ + c^۲};\quad y = \frac{۲bs}{a^۲ + b^۲ + c^۲} \text{ و } z = \frac{۲cs}{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

۱۸۴. $CM = \frac{۱۰۵}{۸}$

۱۸۵. داریم:

$$۳OA' = ۲OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{۲}{۳}$$

امّا:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{۳} = \frac{۸}{BC} \Rightarrow BC = ۱۲$$

۵.۲.۲. بررسی موازی بودن خطها

۱۸۶. چون $AB \parallel A'B'$ است، پس (۱) $\frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$. از طرفی $BC \parallel B'C'$

است، بنابراین (۲) $\frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'}$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{OC}{OC'} = \frac{OA}{OA'}$؛ و این رابطه نشان می‌دهد که بنا به عکس قضیهٔ تالس $AC \parallel A'C'$ است.

۱۸۷. ۱. داریم: $\frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA}$

۲. چون $\frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA}$ است، پس $AC \parallel A'C'$.

۳.۲.۵. رابطه‌های متری

۱۸۸. بنا به قضیهٔ خطهای همرس داریم: $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$

از آن جا بنابه خاصیت نسبتهای مساوی می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB + BC}{PQ + QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{RQ}$$

۱۸۹. فرض می‌کنیم که O، نقطهٔ تلاقی عمودهای مرسوم بر ضلعهای مثلث در نقطه‌های A'، B' و C' باشد، داریم:

$$\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{A'B}^2 - \overline{A'C}^2 ; \overline{OC}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{B'C}^2 - \overline{B'A}^2 ;$$

$$\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{C'A}^2 - \overline{C'B}^2$$

با جمع سه رابطه، نتیجه می‌شود:

$$(\overline{A'B}^2 - \overline{A'C}^2) + (\overline{B'C}^2 - \overline{B'A}^2) + (\overline{C'A}^2 - \overline{C'B}^2) = 0 ; \qquad (1)$$

بعکس، فرض می‌کنیم رابطهٔ (۱) برقرار است، باید ثابت کنیم که عمودهای رسم شده از A'، B' و C' بر ضلعها، همرسند. فرض کنیم O فصل مشترک عمودهای اخراج شده بر BC و CA در نقطه‌های A' و B' باشد، OC'' را بر AB عمود رسم می‌کنیم، داریم:

$$(\overline{A'B}^2 - \overline{A'C}^2) + (\overline{B'C}^2 - \overline{B'A}^2) + (\overline{C''A}^2 - \overline{C''B}^2) = 0 \qquad (2)$$

از تفریق دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\overline{C'A}^2 - \overline{C''A}^2 + \overline{C''B}^2 - \overline{C'B}^2 = 0 ;$$

یا: $(C'A - C''A)(C'A + C''A) + (C''B - C'B)(C''B + C'B) = 0$;

و از آن جا: $\overline{C'C''}(\overline{C'A} - \overline{C'B} + \overline{C''A} - \overline{C''B}) = 0 \Rightarrow \overline{C'C''} \times 2\overline{BA} = 0$

چون $\overline{BA}$ صفر نیست پس $\overline{C'C''} = 0$ پس C' بر C'' یا OC' بر OC'' منطبق

است.

۱۹۰. فرض کنیم A_1A'، B_1B' و C_1C' عمودهای رسم شده بر ضلعهای BC، CA و AB باشند، داریم:

$$(\overline{A_1B^2} - \overline{A_1C^2}) + ((\overline{B_1C^2} - \overline{B_1A^2}) + (\overline{C_1A^2} - \overline{C_1B^2}) =$$
$$(\overline{A'B^2} - \overline{A'C^2}) + (\overline{B'C^2} - \overline{B'A^2}) + (\overline{C'A^2} - \overline{C'B^2});$$

همچنان که قبلاً دیدیم، برای آن که A_1A' و B_1B' و C_1C' همرس باشند، لازم و کافی است که طرف دوم این رابطه برابر صفر باشد، در نتیجه:

$$(\overline{A_1B^2} - \overline{A_1C^2}) + (\overline{B_1C^2} - \overline{B_1A^2}) + (\overline{C_1A^2} - \overline{C_1B^2}) = 0;$$

۱۹۱. مثلثهای ABA' و ACA' به وسیلهٔ موربهای $C'OC$ و $B'OB$ قطع شده‌اند، پس بنا به قضیهٔ منلائوس داریم:

$$\frac{OA}{OA'} \cdot \frac{CA'}{CB} \cdot \frac{C'B}{C'A} = 1 \text{ و } \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{B'C}{B'A} = 1;$$

و از آن جا: $\frac{OA}{OA'} \times \frac{CA'}{CB} = \frac{C'A}{C'B}$ و $\frac{OA}{OA'} \times \frac{BA'}{BC} = \frac{B'A}{B'C}$.

از جمع عضو به عضو دو رابطهٔ اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{OA}{OA'}\left(\frac{BA'}{BC} + \frac{CA'}{CB}\right) = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C};$$

امّا: $\frac{BA'}{BC} + \frac{CA'}{CB} = \frac{BA' + A'C}{BC} = 1;$

پس $\frac{OA}{OA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}$

۱۹۲. الف. $\frac{\text{مساحت } BOC}{\text{مساحت } ABC} = \frac{OD}{AD}$

$$\frac{OF}{CF} = \frac{\text{مساحت } AOB}{\text{مساحت } ABC} \text{ و } \frac{OE}{BE} = \frac{\text{مساحت } AOC}{\text{مساحت } ABC} \text{ و}$$

از جمع رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$1 = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ABC} = \frac{\text{مساحت } BOC + \text{مساحت } AOC + \text{مساحت } AOB}{\text{مساحت } ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = ۱$$

ب. $\frac{OA}{AD} = \frac{AD - OD}{AD} = ۱ - \frac{OD}{AD}, \frac{OB}{BE} = ۱ - \frac{OE}{BE}, \frac{OC}{CF} = ۱ - \frac{OF}{CF}$

از جمع رابطه‌های بالا خواهیم داشت:

$$\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = ۳-۱ = ۲$$

۱۹۳. فرض می‌کنیم $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \alpha$ ، $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \beta$ ، $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \gamma$ باشد؛ خواهیم داشت $\alpha\beta\gamma = -۱$. از طرف دیگر مثلث ABA' به وسیلهٔ مورب COC' قطع شده است، پس داریم:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{CA'} + \overline{A'B}}{\overline{CA'}} \text{ یا } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA'}} = ۱$$

که می‌توان نوشت:

(۱) ; $x= \gamma(۱-\alpha)$. به همین ترتیب داریم: (۲)$y= \alpha(۱-\beta)$ و (۳)$z= \beta(۱-\gamma)$

از ضرب عضوهای نظیر رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$xyz = \alpha\beta\gamma\ [۱ - (\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - \alpha\beta\gamma]$$

امّا $\alpha\beta\gamma = -۱$ است، پس: (۴) $xyz = - [۲ - (\alpha + \beta + \gamma) + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta]$

حال اگر رابطهٔ (۱) و (۲) و (۳) را عضو به عضو با هم جمع کنیم، داریم:

$$x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) \quad (۵)$$

از رابطه‌های (۴) و (۵) نتیجه می‌شود: $xyz = - [۲ - (x + y + z)]$ و یا $xyz = -۲ + x + y + z$ و این رابطهٔ خواسته شده است.

نکته: این مسأله‌ای است از:

ED. Colin . Journalde Matematiques élémentaire , Jun ۱۸۹۷

۱۹۶. از قضیهٔ سوا در مورد مثلث $AB'C'$ و نقطهٔ I استفاده می‌کنیم. خطهای AI، $B'I$ و $C'I$ بترتیب ضلعهای مقابلشان را در نقطه‌های N، B و C قطع می‌کنند و داریم:

$\frac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} = -۱$. امّا چون خطهای AC و $C'M$ با هم موازی‌اند، پس

داریم: $\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}}$. و به دلیل مشابه، $\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}$. رابطهٔ قبلی را اینک می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-1 = \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}}$$

که این، رابطهٔ (الف) است.

حال قضیهٔ منلائوس را در مثلثهای ABB' و ACC' که بترتیب به وسیلهٔ موربهای CC' و BB' قطع گردیده‌اند می‌نویسیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} = 1$$

یا هنوز به دلیل موازی بودن خطهای (MB', AB)، همچنین $(AC$ و $MC')$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MB}} = 1 \\ \frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = 1 \end{cases}$$

از تقسیم کردن عضوهای متناظر این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}} \cdot \frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}} \cdot \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MB}^2} = -1$$

که این رابطهٔ (ب) است.

دوباره به رابطهٔ (۱) برمی‌گردیم و عضوهای متناظر دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{IB} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB'} \cdot \overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{MB} \cdot \overline{MC}}{\overline{BC}^2} = -1 \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{IB} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB'} \cdot \overline{IC'}} = -\frac{\overline{BC}^2}{\overline{MB} \cdot \overline{MC}} \quad (2)$$

رابطهٔ منلائوس را در مثلث $AC'N$ که به وسیلهٔ مورب BB' قطع نشده است به کار می‌بریم خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IN}} \cdot \frac{\overline{B'N}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA}} = 1 \quad \text{یا} \quad , \frac{\overline{IA}}{\overline{IN}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'N}} \quad (3).$$

امّا: $\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC'}}$ و $\frac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}}-1=\frac{\overline{B'N}+\overline{NC'}}{\overline{B'N}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'N}}$ یا به کمک رابطهٔ (۱)،

$\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{MC}-\overline{MB}}{\overline{MC}}=1-\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'N}}$.

اینک رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت: $-\frac{\overline{BC}^2}{\overline{MB}.\overline{MC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IN}}$ و

رابطهٔ (۲) به صورت: $\frac{\overline{IA}}{\overline{IN}}=\frac{\overline{IC}}{\overline{IC'}}.\frac{\overline{IB}}{\overline{IB'}}$ در می‌آید که همان رابطهٔ خواسته شدهٔ (پ) است.

۱۹۷. طبق قضیهٔ سوا چنین داریم: $1=\frac{CH}{AH}.\frac{BM}{CM}.\frac{AD}{BD}$.

از آن جا که AM میانهٔ مثلث است، از این رو $BM = CM$ و $1=\frac{BM}{CM}$ خواهد بود.

به دلیل نیمساز بودن CD نیز، $\frac{b}{a}=\frac{AD}{BD}$ خواهد بود. بدین ترتیب رابطهٔ مفروض به شکل $1=\frac{CH}{AH}.\frac{b}{a}$ یعنی $\frac{a}{b}=\frac{CH}{AH}$ در می‌آید.

با قرار دادن $CH = at$ و $AH=bt$، و از طرف دیگر $at+bt=b$ یعنی $t=\frac{b}{a+b}$ را خواهیم داشت. همچنین با استفاده از BH به عنوان عنصر مرجع از ΔABH به $\overline{BH}^2=c^2-b^2t^2$ و از ΔBHC به $\overline{BH}^2=a^2-a^2t^2$ دست می‌یابیم.

از این رو $c^2-b^2t^2=a^2-a^2t^2$ نتیجه می‌شود که از آن نیز $t^2=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$ به دست می‌آید. با جاگذاری $t=\frac{b}{a+b}$ در تساوی اخیر، رابطهٔ مطلوب بین ضلعهای a، b و c به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{b^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}\Rightarrow\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-c^2}{a-b}$$

۲۰۳. چون خط $CI\gamma$ موربی برای مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است، بنابه قضیهٔ منلائوس می‌توان نوشت:

$$(1)\ \frac{\overline{I\alpha}.\overline{CB}.\overline{\gamma A}}{\overline{IA}.\overline{C\alpha}.\overline{\gamma A}}=1 \text{ و } (2)\ \frac{\overline{I\beta}.\overline{AC}.\overline{\alpha B}}{\overline{IB}.\overline{A\beta}.\overline{\alpha C}}=1 \text{ و } (3)\ \frac{\overline{I\gamma}.\overline{BA}.\overline{\beta C}}{\overline{IC}.\overline{B\gamma}.\overline{\beta A}}=1$$

از ضرب کردن طرفین رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{I\alpha}\cdot\overline{I\beta}\cdot\overline{I\gamma}}{\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IC}}\cdot\frac{\overline{CB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BA}}{\overline{C\alpha}\cdot\overline{A\beta}\cdot\overline{B\gamma}}\cdot\left(\frac{\overline{\alpha B}\cdot\overline{\beta C}\cdot\overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C}\cdot\overline{\beta A}\cdot\overline{\gamma B}}\right)=۱ \quad (۴)$$

اما می‌دانیم که مقدار داخل پرانتز مساوی (۱−) است، در نتیجه رابطهٔ (۴) چنین

می‌شود:

$$\frac{\overline{I\alpha}\cdot\overline{I\beta}\cdot\overline{I\gamma}}{\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IC}}=-\frac{\overline{C\alpha}\cdot\overline{A\beta}\cdot\overline{B\gamma}}{\overline{CB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BA}} \quad (۵)$$

و بالاخره می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{C\alpha}}{\overline{CB}}=\frac{C\alpha}{CB}=\frac{p-c}{a}$$

(P نصف محیط مثلث است)

$$\frac{\overline{A\beta}}{\overline{AC}}=\frac{A\beta}{AC}=\frac{p-a}{b}$$

$$\frac{\overline{B\gamma}}{\overline{BA}}=\frac{B\gamma}{BA}=\frac{p-b}{c}$$

در نتیجه رابطهٔ (۵) به صورت زیر در می‌آید.

$$\frac{\overline{I\alpha}\cdot\overline{I\beta}\cdot\overline{I\gamma}}{\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IC}}=-\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=-\frac{\frac{S^۲}{p}}{۴RS}\Rightarrow\frac{\overline{I\alpha}\cdot\overline{I\beta}\cdot\overline{I\gamma}}{\overline{IA}\cdot\overline{IB}\cdot\overline{IC}}=$$

$$-\frac{S}{۴PR}=-\frac{pr}{۴PR}=-\frac{r}{۴R}$$

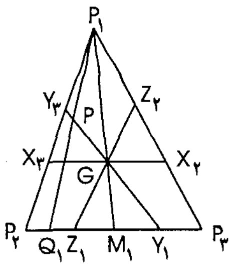
۴.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

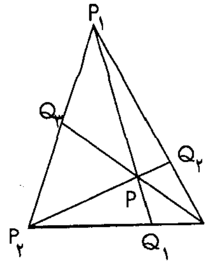
۲۰۶. نقطه‌های دلخواه B و ´B را روی oy اختیار می‌کنیم و از این نقطه‌ها عمودهای BA، BC، ´B´A و ´B´C را بر خطهای ox و oy فرود می‌آوریم داریم:

$$B'A' \parallel BA \Rightarrow \frac{BA}{B'A'}=\frac{OB}{OB'}\ (۱)\quad B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{BC}{B'C'}=\frac{OB}{OB'}\ (۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\Rightarrow\frac{BA}{B'A'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'}$$

بنابراین نسبت فاصله‌های هر نقطه واقع بر oy از ox ، مقداری ثابت است و نقطه‌های واقع بر خطهای دیگر نیز همین ویژگی را دارند.





۲۰۷. راه حل اول. با توجه به شکل (الف) و نمایش مساحت ΔXYZ با (XYZ)، فرض می‌کنیم:

$$A = (P\,P_2\,P_3)\,,\; B = (P\,P_1\,P_3)\,,\; C = (P\,P_1\,P_2)$$

در این صورت: $A + B + C = (P_1P_2\,P_3)$. امّا مثلثهای $P\,P_2\,P_3$ و $P_1\,P_2\,P_3$ دارای قاعدهٔ یکسان $P_2\,P_3$ می‌باشند و ارتفاعشان به نسبت $PQ_1 : P_1Q_1$ است. در نتیجه مساحتهایشان به همین نسبت می‌باشد، یعنی: $PQ_1 / P_1Q_1 = A / (A + B + C)$ و به همین ترتیب:

$$\frac{PQ_2}{P_2Q_2} = \frac{B}{(A + B + C)}\,,\; \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = \frac{C}{(A + B + C)}$$

در نتیجه :
$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1} + \frac{PQ_2}{P_2Q_2} + \frac{PQ_3}{P_3Q_3} = 1$$

که مستلزم این است که حداقل یکی از نسبتهای PQ_i / P_iQ_i کوچکتر از یا مساوی با $\frac{1}{3}$، و یکی بزرگتر از یا مساوی با $\frac{1}{3}$ باشد، و این معادل نامساویهای مطرح شده در صورت مسأله است؛ زیرا: $PQ_i / P_iQ_i \le \frac{1}{3}$ اگر و فقط اگر:

$$\frac{P_iQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP + PQ_i}{PQ_i} = \frac{P_iP}{PQ_i} + 1 \ge 3$$

باشد؛ و این نامساوی اگر و فقط اگر $P_iP / PQ_i \ge 2$ باشد، برقرار است. به همین ترتیب $PQ_i / P_iQ_i \ge \frac{1}{3}$ اگر و فقط اگر $P_iP / PQ_i \le 2$ باشد.

راه حل دوم. از نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث $P_1P_2P_3$ خطهای X_2X_3، Y_1Y_3 و Z_1Z_2 را بترتیب موازی P_2P_3، P_1P_3 و P_1P_2 رسم می‌کنیم (شکل «ب»). از آن‌جا که:

$\frac{P_1G}{GM_1} = 2$ است، نامساوی: $P_1P/PQ_1 \le 2$ برقرار است اگر و فقط اگر P داخل مثلث $P_1X_2X_3$ باشد. به همین ترتیب $P_2P / PQ_2 \le 2$ اگر و فقط اگر P داخل مثلث $P_2Y_1Y_3$ باشد، و $P_3P/PQ_3 \le 2$ اگر و فقط اگر P داخل مثلث $P_3Z_1Z_2$ قرار داشته باشد. از آن جا که اجتماع این مثلثها تمام مثلث $P_1P_2P_3$ است، باید

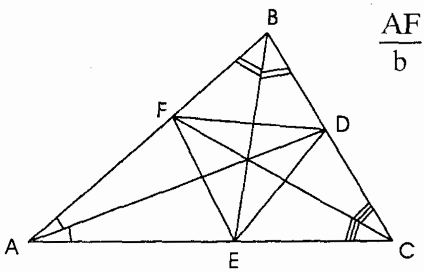
حداقل یکی از این نامساویها برقرار باشد. به طریقی یکسان ملاحظه می‌کنیم که یکی از نامساویهای مخالف این نامساویها باید برقرار باشد، زیرا مثلث $P_۱P_۲P_۳$ اجتماع ذوزنقه‌های $P_۲P_۳X_۲X_۳$، $P_۱P_۳Y_۱Y_۳$ و $P_۱P_۲Z_۱Z_۲$ است.

۲۰۸. $۳۶۰\ cm^۲$

۲۰۹. فرض می‌کنیم:

$$a = BC\ ,\ b = AC\ ,\ c = AB\ ,\ S = S_{ABC}\ ,\ S_۰ = S_{DEF}$$

با توجه به ویژگی نیمسازهای مثلث داریم:



$$\frac{AF}{b} = \frac{BF}{a} = \frac{AF + BF}{a + b} = \frac{c}{a + b}$$

از آن جا: $AF = \dfrac{bc}{a + b}$.

به همین ترتیب $AE = \dfrac{bc}{a + c}$؛

بنابراین:

$$S_{ABF} = \frac{۱}{۲} AF \,.\, AE \sin B\hat{A}C = \frac{bc\sin B\hat{A}C}{۲} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \,.\, S$$

به همین ترتیب می‌توان بدست آورد:

$$S_{BDF} = \frac{ac}{(a + b)\,(b + c)} \,.\, S\ ,\ S_{CDE} = \frac{ab}{(a + c)\,(b + c)} \,.\, S$$

و ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، نتیجه می‌شود:

$$S - S_۰ = S_{ABF} + S_{BDF} + S_{CDE} =$$

$$= \left(\frac{bc}{(a + b)\,(a + c)} + \frac{ac}{(b + a)\,(b + c)} + \frac{ab}{(c + a)\,(c + b)}\right) . S =$$

$$= \frac{a^۲b+b^۲c+a^۲c+c^۲a+b^۲a+a^۲b}{(a+b)(b+c)(c+a)} \,.\, S \ \geq \frac{۶abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \,.S=$$

$$= ۳\left(۱ - \frac{bc}{(a + b)\,(a + c)} - \frac{ac}{(a + b)\,(c + b)} - \frac{ab}{(c + a)\,(c + b)}\right) . S =$$

$$= ۳\,(S - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}) = ۳S_۰$$

به این ترتیب: $S - S_\circ \geq ۳S_\circ \Rightarrow S_\circ \leq \frac{۱}{۴}S$

۲۱۰. گزینهٔ (ه) درست است.

۲۱۱. کافی است ثابت کنیم $\frac{\overline{m'c'}}{\overline{m'd'}} = \frac{\overline{mc}}{\overline{md}}$ قضیهٔ منلائوس را در مورد دو مثلث αcd و $\alpha c'd'$ و موربهای amb و $a'm'b'$ به کار می‌بریم. خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{mc}}{\overline{md}} \cdot \frac{\overline{bd}}{\overline{b\alpha}} \cdot \frac{\overline{a\alpha}}{\overline{ac}} = ۱ \text{ و } \frac{\overline{m'c'}}{\overline{m'd'}} \cdot \frac{\overline{b'd'}}{\overline{b'\alpha}} \cdot \frac{\overline{a'\alpha}}{\overline{a'c'}} = ۱$$

چون خطهای aa' ، bb' و cc' متوازی‌اند داریم: $\frac{\overline{bd}}{\overline{b\alpha}} = \frac{\overline{b'd'}}{\overline{b'\alpha}}, \frac{\overline{a\alpha}}{\overline{ac}} = \frac{\overline{\alpha a'}}{\overline{a'c'}}$

از آن جا نتیجه می‌شود: $\frac{\overline{mc}}{\overline{md}} = \frac{\overline{m'c'}}{\overline{m'd'}}$

۲۱۲. اگر AD (خط سوا) ارتفاع مثلث ABC و P نقطهٔ سوا باشد، ثابت می‌کنیم که AD نیمساز زاویهٔ D از مثلث DEF است.

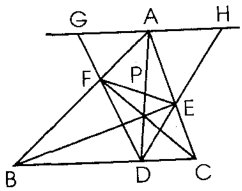
از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا امتدادهای DF و DE را بترتیب در G و H قطع کند، واضح است که مثلث GDH متساوی‌الساقین است، اگر ارتفاع AD، نیمساز زاویهٔ D باشد، و این در صورتی است که $AG = AH$ باشد و بعکس.

طبق قضیهٔ سوا داریم:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = ۱$$

همچنین داریم:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AH} \text{ و } \frac{AF}{FB} = \frac{AG}{BD}$$



(نظر به تشابه مثلثها) به جای دو نسبت، مساویشان را در رابطهٔ سوا قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AG}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{AH} = ۱ \text{ و یا } AG = AH$$

بنابراین DA عمودمنصف GH و یا نیمساز زاویهٔ FDE خواهد بود.

تبصره. اگر دو خط سوا دو ارتفاع مثلثی باشند، خط سوم نیز ارتفاع است و در نتیجه، سه ارتفاع مثلث، نیمسازهای مثلثی هستند که رأسهایش پای ارتفاعهای

مثلث است (راه دیگر).

۵.۳.۱. ثابت کنید خطها همرسند (در مثلث)

۲۱۳. راه اول. در مثلث ABC خطهای AD ، BE و CF را که بترتیب بر ضلعهای BC ، CA و AB عمود می‌باشند، ارتفاعهای مثلث می‌نامیم، خواهیم داشت:

$BD = c\cos\hat{B}$ و $DC = b\cos\hat{C}$

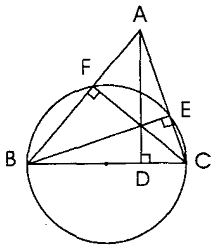
$CE = a\,.\cos\hat{C}$ و $EA = c\,.\cos\hat{A}$

$AF = b\,.\cos\hat{A}$ و $FB = a\,.\cos\hat{B}$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود: $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = ۱$

و بنا به عکس قضیهٔ سوا، سه خط AD ، BF و CF ، همرسند. یعنی:

سه ارتفاع هر مثلث همرسند.



راه دوم . ارتفاعهای AD ، BE و CF از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. دایرهٔ به قطر BC از نقطه‌های E و F می‌گذرد. پس داریم:

$$\overline{AF}\,.\,\overline{AB} = \overline{AE}\,.\,\overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{FA}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

به همین ترتیب داریم: $\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{FB}}$ و $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{DC}}$ از ضرب این رابطه‌ها

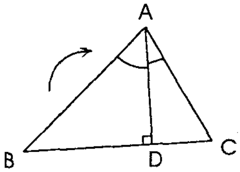
داریم:

$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -۱$. بنابراین بنا به قضیهٔ سوا، سه ارتفاع همرسند.

راه سوم. با درنظر گرفتن جهت مثبتی برای صفحهٔ مثلث ABC ، اگر نقطهٔ D بین دو نقطهٔ B و C باشد، داریم:

$D\hat{A}B=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$ و $D\hat{A}C=\frac{\pi}{2}-\hat{C}$ پس

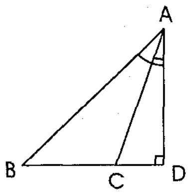
$(AD \text{ و } AB)=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$ و $(AD \text{ و } AC)=-(\frac{\pi}{2}-\hat{C})$



از آن جا:

$$\frac{\sin(AD \text{ و } AB)}{\sin(AD \text{ و } AC)}=-\frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}}$$

و در صورتی که نقطهٔ D خارج پاره خط BC باشد، داریم:



$(AD \text{ و } AB)=\frac{\pi}{2}-\hat{B}$ و $(AD \text{ و } AC)=\hat{C}-\frac{\pi}{2}$

و باز هم رابطهٔ بالا را خواهیم داشت.

به همین ترتیب داریم:

$$\frac{\sin(BE \text{ و } BC)}{\sin(BE \text{ و } BA)}=-\frac{\cos\hat{C}}{\cos\hat{A}} \quad \text{و} \quad \frac{\sin(CF \text{ و } CA)}{\sin(CF \text{ و } CB)}=-\frac{\cos\hat{A}}{\cos\hat{B}}$$

از ضرب این رابطه‌ها داریم:

$$\frac{\sin(AD \text{ و } AC)}{\sin(AD \text{ و } AB)}\cdot\frac{\sin(BE \text{ و } BC)}{\sin(BE \text{ و } BA)}\cdot\frac{\sin(CF \text{ و } CA)}{\sin(CF \text{ و } CB)}=-۱$$

پس سه ارتفاع همرسند.

۲۱۴. اگر AA'، BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC باشند می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=-۱ \quad \text{و} \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=-۱ \quad \text{و} \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-۱$$

از ضرب طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که: $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-۱$

از این رابطه و بنا به عکس قضیهٔ سوا نتیجه می‌شود، میانه‌های AA'، BB'

و ´CC همرسند.

۲۱۵. راه اول. بنا به خاصیت نیمسازها می‌توان نوشت (با توجه به جهت خطها)

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{c}{a} \text{ و } \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = -\frac{a}{c} \text{ و } \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{b}{a}$$

از ضرب طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{\alpha B} \cdot \overline{\beta C} \cdot \overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C} \cdot \overline{\beta A} \cdot \overline{\gamma B}} = -1$$

از ملاحظهٔ این رابطه، بنا به عکس قضیهٔ سوا، نتیجه می‌شود که نیمسازهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ همرسند.

راه دوم. می‌دانیم که $(AC \text{ و } A\alpha) - = (AB \text{ و } A\alpha)$. از آن جا:

$\sin(A\alpha \text{ و } AB) = -\sin(A\alpha \text{ و } AC)$ و در نتیجه $\frac{\sin(A\alpha \text{ و } AB)}{\sin(A\alpha \text{ و } AC)} = -1$

به همین ترتیب داریم: $\frac{\sin(C\gamma \text{ و } CA)}{\sin(C\gamma \text{ و } CB)} = -1$ و $\frac{\sin(B\beta \text{ و } BC)}{\sin(B\beta \text{ و } BA)} = -1$

از ضرب این رابطه‌ها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin(A\alpha \text{ و } AB)}{\sin(A\alpha \text{ و } AC)} \cdot \frac{\sin(B\beta \text{ و } BC)}{\sin(B\beta \text{ و } BA)} \cdot \frac{\sin(C\gamma \text{ و } CA)}{\sin(C\gamma \text{ و } CB)} = -1$$

و این رابطه نشان می‌دهد (بنا به عکس قضیهٔ سوا)، که نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث، همرسند.

۲۱۶. بنا به خاصیت نیمسازها، می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{c}{b}, \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} = +\frac{a}{c}, \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = +\frac{b}{a}$$

از ضرب طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{\alpha B} \cdot \overline{\beta' C} \cdot \overline{\gamma' A}}{\overline{\alpha C} \cdot \overline{\beta' A} \cdot \overline{\gamma' B}} = -1$$

از این رابطه، با توجه به عکس قضیهٔ سوا، نتیجه می‌شود که $A\alpha$، $B\beta'$ و $C\gamma'$، همرسند.

۲۱۷. اگر D، D' و D'' پای نیمسازهای خارجی باشند، داریم:

$$\frac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}} = \frac{a}{c}, \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{c}{b}, \frac{\overline{D''A}}{\overline{D''B}} = \frac{b}{a}$$

از ضرب رابطه‌های بالا خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{D'C}}{\overline{D'A}}\cdot\frac{\overline{D''A}}{\overline{D''B}}=1$$

به موجب عکس قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ D ، ´D و "D بر یک استقامتند.

۲۱۸. ۱. رابطهٔ زیر صحیح است:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-1$$

زیرا نسبتها منفی می‌باشند و حاصل ضرب آنها منفی است، از طرفی داریم:

$C'A = B'A$ و $B'C = A'C$ و $A'B = C'B$

۲. فرض می‌کنیم "A ، β و γ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی خارجی زاویهٔ A هستند. داریم:

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

در واقع دو نسبت از سه نسبت بالا مثبت، و سومی منفی است. در ضمن $A''B = \gamma B$ ، $\beta C = A''C$ و $\gamma A = \beta A$ پس خطهای AA'' ، $B\beta$ و $C\gamma$ ، همرسند.

۳. فرض کنیم "A ، "B و "C نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی خارجی مثلث واقع در زاویه‌های A ، B و C با ضلعهای مثلث باشند. می‌دانیم این نقطه‌ها قرینه‌های ´A ، ´B و ´C نسبت به وسطهای ضلعهای مربوط می‌باشند. بنابراین، چون ´AA ، ´BB و ´CC همرسند، پس "AA ، "BB و "CC نیز همرس خواهند بود.

این قضیه در اوایل قرن نوزدهم توسط جی. دی . ژرگون ریاضیدان فرانسوی، اثبات شده، و نقطهٔ همرسی به نقطهٔ ژرگونی موسوم است Gergonne Point

۲۱۹. اگر نقطهٔ برخورد خطهای $A\alpha'$ و $B\beta'$ را I بنامیم. ثابت می‌کنیم که خط $C\gamma'$ از نقطهٔ I می‌گذرد و یا سه نقطهٔ I ، γ' و C روی یک خط راست قرار دارند.

مثلث $A\gamma\beta$ به وسیلهٔ مورب $B\alpha C$ قطع شده است، پس داریم:

$$\frac{\overline{B\gamma}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{\alpha\beta}}{\overline{\alpha\gamma}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{C\beta}}=1\ ؛$$

همچنین مورب $\beta'BI$ مثلث $A\gamma\alpha'$ را قطع کرده است، پس داریم:

$\frac{\overline{BA}}{\overline{B\gamma}}\cdot\frac{\overline{I\alpha'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{\beta'\gamma}}{\overline{\beta'\alpha'}}=1$. عضوهای نظیر این دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم؛ با

توجه به این که به دلیل تقارن، $\overline{\beta'\alpha'} = \overline{\alpha\beta}$ است، خواهیم داشت:

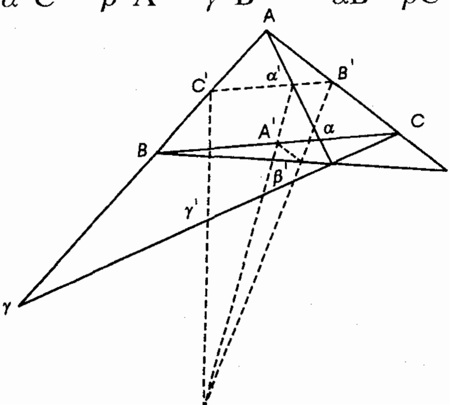
$$\frac{\overline{\beta'\gamma}}{\overline{\alpha\gamma}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{C\beta}} \cdot \frac{\overline{I\alpha'}}{\overline{IA}} = ۱.$$

در این رابطه به جای $\frac{\overline{\beta'\gamma}}{\overline{\alpha\gamma}}$ مقدار مساویش $\frac{\overline{\gamma'\beta}}{\overline{\gamma'\alpha'}}$ را قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود:

$\frac{\overline{\gamma'\beta}}{\overline{\gamma'\alpha'}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{C\beta}} \cdot \frac{\overline{I\alpha'}}{\overline{IA}} = ۱$؛ و این رابطه نشان می‌دهد که سه نقطهٔ γ'، C و I که روی ضلعهای مثلث $A\alpha'\beta$ می‌باشند، روی یک خط راست قرار دارند.

۲۲۰. نقطه‌های α'، β' و γ' را وسط پاره‌خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$، و A'، B' و C' را وسط ضلعهای BC، CA و AB اختیار می‌کنیم. نقطهٔ α' روی ضلع $B'C'$ است و داریم: $\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} = \frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}}$ رابطه‌های نظیر رابطهٔ بالا، برای نقطه‌های β' و γ' را نوشته، و سه رابطه را در هم عضو به عضو ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}} \cdot \frac{\overline{\beta'C'}}{\overline{\beta'A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma'A'}}{\overline{\gamma'B'}} = \frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}} \cdot \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} \cdot \frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}$$



طرف دوم این رابطه برابر ۱− است، زیرا خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ همرسند. بنابراین خطهای $A'\alpha'$، $B'\beta'$ و $C'\gamma'$ همرس یا موازی می‌باشند.

تبصره. به سادگی می‌توان شکل را برای حالتی رسم کرده که خطهای $A'\alpha'$، $B'\beta'$ و $C'\gamma'$ موازی باشند. $A\alpha$ را به دلخواه رسم می‌کنیم، سپس خط $A'\alpha'$ را رسم کرده و از نقطهٔ B' خطی موازی با $A'\alpha'$ رسم می‌کنیم. و بر روی این خط نقطهٔ β' را چنان اختیار می‌کنیم که $B\beta'$ ضلع AC را در نقطه β قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ β' قطع کند. دیده می‌شود که نقطهٔ β' روی خطی است که از نقطهٔ A' موازی AC رسم شده است. $B\beta$ خط $A\alpha$ را در نقطهٔ O قطع می‌کند. با رسم CO خط $C\gamma$ مشخص می‌شود و از آن جا $C'\gamma'$ که با $A'\alpha'$ و $B'\beta'$ موازی

است به دست می‌آید.

۲۲۱. اگر نقطه‌های برخورد این خطها با ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC را α، β و γ بنامیم، باید ثابت کنیم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$$

چون بردارهای $\overrightarrow{B\alpha}$ و $\overrightarrow{C\alpha}$ روی یک محور واقعند، با فرض $\overline{AB\alpha}$ و $\overline{AC\alpha}$ به عنوان اندازه‌های جبری مساحت دو مثلث $AB\alpha$ و $AC\alpha$ داریم:

$$\frac{\overline{AB\alpha}}{\overline{AC\alpha}} = \frac{\overline{B\alpha}}{\overline{C\alpha}} = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$$

از طرفی دو مثلث $AB\alpha$ و $AC'\alpha'$ در زاویهٔ $\hat{A}$ مشترکند، پس داریم:

$$\frac{\overline{AB\alpha}}{\overline{AC'\alpha'}} = \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{A\alpha}}{\overline{AC'}\,.\,\overline{A\alpha'}}$$

و به همین ترتیب $\frac{\overline{AC\alpha}}{\overline{AB'\alpha'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{A\alpha'}}$. از تقسیم عضوهای نظیر دو رابطهٔ اخیر با توجه به این که $\overline{AC'\alpha'} = -\overline{A\beta'\alpha'}$ است، زیرا α' وسط پاره‌خط $B'C'$ می‌باشد، خواهیم داشت: $\frac{\overline{AB\alpha}}{\overline{AC\alpha}} = \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{AB'}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AC'}}$ و در نتیجه $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{AB'}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AC'}}$ به روش مشابه داریم:

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{\overline{CA}\,.\,\overline{CA'}}{\overline{CB}\,.\,\overline{CB'}} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = -\frac{\overline{BC}\,.\,\overline{BC'}}{\overline{BA}\,.\,\overline{BA'}}$$

عضوهای سه رابطهٔ اخیر را نظیر به نظیر در هم ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{AB'}\,.\overline{BC'}\,.\overline{CA'}}{\overline{AC'}\,.\overline{BA'}\,.\overline{CB'}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}$$

چون خطهای AA'، BB' و CC' همرسند، سومین عضو رابطهٔ بالا برابر ۱− می‌باشد. همچنین دومین رابطه، برابر ۱− است، پس $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$ یعنی خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ همرسند.

۲۲۲. ابتدا فرض می‌کنیم که G نقطهٔ همرسی سه پاره خط AA'، BB' و CC'، و AD، BE و CF مزدوجهای همزاویهٔ این پاره‌خطها باشد. در این اثبات

نقطه‌های A'، B' و C' وسطهای ضلعهای مثلث فرض نشده‌اند.

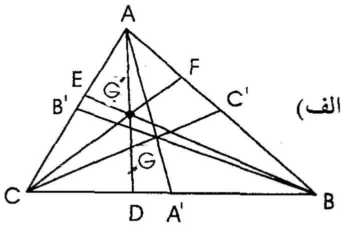
مثلثهای $AA'C$ و $AA'B$ را در نظر می‌گیریم. بنا به رابطهٔ سینوسها، $\frac{CA}{\sin C\hat{A'}A} = \frac{CA'}{\sin C\hat{A}A'}$ بنابراین $CA' = \frac{CA \sin C\hat{A}A'}{\sin C\hat{A'}A}$. به همین ترتیب، $A'B = \frac{AB \sin B\hat{A}A'}{\sin B\hat{A'}A}$. از آن جا که سینوسهای زاویه‌های مکمل در A' مساوی‌اند، از تقسیم دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CA \sin C\hat{A}A'}{AB \sin B\hat{A}A'} \quad (۱)$$

به روش مشابه داریم:

$$(۲) \quad \frac{C'B}{C'A} = \frac{CB \sin B\hat{C}C'}{CA \sin A\hat{C}C'} \quad و$$

$$(۳) \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = \frac{BA \sin A\hat{B}B'}{BC \sin C\hat{B}B'}$$



(الف)

از ضرب رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳)، عضو به عضو، با توجه به این که $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \times \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} \times \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = ۱$ است، داریم:

$$۱ = \frac{\sin A\hat{B}B'}{\sin C\hat{B}B'} \times \frac{\sin B\hat{C}C'}{\sin A\hat{C}C'} \times \frac{\sin C\hat{A}A'}{\sin B\hat{A}A'}$$

امّا چون پاره‌خطهای AD، BE و CF مزدوجهای همزاویهٔ سه قطعه خط اصلی‌اند، با جانشینی زاویه‌های مساوی، به طور مثال، $\angle BAA' \cong \angle CAD$، و غیره، نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin B\hat{A}D}{\sin C\hat{A}D} \times \frac{\sin A\hat{C}F}{\sin B\hat{C}F} \times \frac{\sin C\hat{B}E}{\sin A\hat{B}E} = ۱$$

پس بنا به عکس قضیهٔ سوا، سه پاره‌خط AD، BE و CF همرسند.

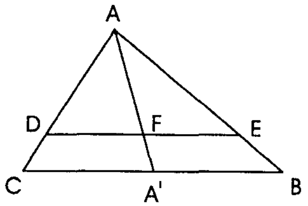
اگر پاره‌خطهای AA'، BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC باشند، در این صورت مزدوجهای هم زاویه‌شان، هم میانه‌اند، و به این ترتیب نتیجه‌ای از قضیهٔ

بالا عبارت است از:

قضیه . هم میانه‌های مثلث، همرسند.

تعریف . نقطهٔ همرسی هم میانه‌های مثلث، نقطهٔ هم میانه‌ای Symmedian Point یا نقطهٔ لموینی Lemoine Point نامیده می‌شود. در شکل (الف) پاره‌خطهای AA'، BB' و CC' میانه‌اند و پاره‌خطهای AD، BE و CF، هم میانه‌اند، و نقطهٔ S، نقطهٔ هم میانهٔ آنهاست.

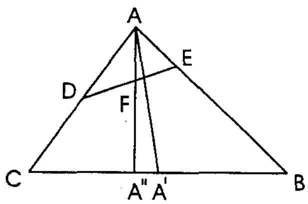
میانهٔ نظیر یک رأس، منصف پاره‌خطی است که دو سرش بر دو ضلع مجاور آن رأس و موازی ضلع مقابل به آن رأس از مثلث است.



(ب)

به طور مثال، در شکل (ب) اگر پاره‌خط DE موازی CB و AA' میانه باشد، در این صورت $DF = FE$ است. خاصیت مشابه این خاصیت در مورد هم میانه را، در قضیهٔ بعدی داده‌ایم:

قضیه . هم میانهٔ از یک رأس مثلث، هر پاره‌خط ضد موازی با ضلع مقابل آن رأس مثلث را، نصف می‌کند.



(پ)

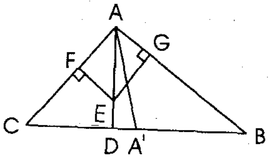
به خاطر بیاورید که پاره‌خطهای ضدموازی، ضلعهای مقابل چهارضلعی محاط در یک دایره‌اند.

اثبات . در شکل (پ) فرض می‌کنیم پاره‌خط AA'' هم میانه و DE قطعه‌ای ضدموازی با BC چنان که چهار ضلعی DEBC بتواند در دایره‌ای محاط شود، باشد، در این صورت: $AD \cdot AC = AE \cdot AB$ است. نیز قبلاً دیدیم که

$$\frac{CA'}{A'B} = \frac{CA \sin C\hat{A}A'}{AB \sin B\hat{A}A'}.$$

اگر A' وسط BC باشد، در این صورت :

$$\frac{\sin C\hat{A}A'}{\sin A'\hat{A}B} = \frac{BA}{CA}$$



بنابراین:

$$\frac{DF}{FE} = \frac{AD\sin D\hat{A}F}{EA\sin E\hat{A}F} = \frac{AB\ .\ CA}{AC\ .\ BA} = ۱$$

و F وسط $\overline{DE}$ است.

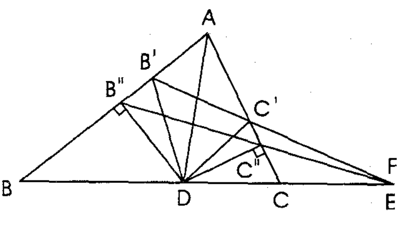
در قسمت بعد خاصیت به نوع متفاوتی، خاصیتی که می‌تواند در توصیف هم میانه به صورت مجموعه‌ای از نقطه‌ها صادق در شرطی معین به کار رود، مورد بررسی قرار گرفته است. مجموعهٔ نقطه‌های متساوی الفاصله از دو ضلع یک مثلث بر نیمساز زاویهٔ آن دو ضلع قرار دارد. در این مورد نیز نسبت ثابتی از فاصله‌های نقطه‌های واقع بر هم میانهٔ مثلث، از ضلعهای آن موجود است.

قضیه . نسبت فاصله‌های نقطه‌ای واقع بر هم میانهٔ یک مثلث از ضلعهای مجاور به آن هم میانه از آن مثلث، مساوی نسبت اندازه‌های آن ضلعها است.

اثبات . علامتهای شکل (ت) را با هم میانهٔ AD و میانهٔ AA' به کار می‌بریم. از قانون سینوسها و با توجه به این که A' وسط BC است، داریم:

$$\frac{EF}{EG} = \frac{\sin C\hat{A}D}{\sin B\hat{A}D} = \frac{\sin B\hat{A}A'}{\sin C\hat{A}A'} = \frac{AC}{AB}$$

۲۲۳. فرض کنیم خط $B''C''$ امتداد BC را در نقطهٔ E قطع کند. چهار ضلعی $AB''DC''$ محاطی است و داریم:



$$\overline{DE}^۲ = \overline{EB''} \times \overline{EC''}$$

در این چهار ضلعی زاویهٔ $AC''B''$ با زاویهٔ ADB'' و در نتیجه با زاویهٔ $\hat{B}$ که مساوی آن است مساوی می‌باشد. پس چهارضلعی $BB''C''C$ نیز محاطی است و داریم:

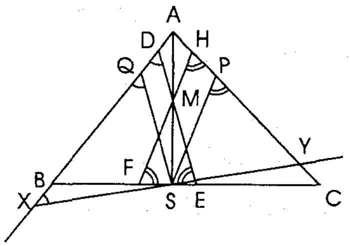
$\overline{EB} \times \overline{EC} = \overline{EB''} \times \overline{EC''}$ به طوری که $\overline{ED}^۲ = \overline{EB}\ .\ \overline{EC}$ (۱)

حال فرض می‌کنیم خط $B'C'$ امتداد BC را در نقطهٔ F قطع کند. از تشابه دو مثلث FDB' و ECC' حاصل می‌شود. $\frac{FC}{FD} = \frac{FC'}{FB'}$ و نیز از تشابه دو مثلث $FC'D$ و $FB'B$ نتیجه می‌شود $\frac{FD}{FB} = \frac{FC'}{FB'}$ و از مقایسهٔ این دو تناسب نتیجه می‌گردد $\frac{FC}{FD} = \frac{FD}{FB}$ و یا:

$\overline{FD}^۲ = \overline{FC}\ .\ \overline{FB}$ (۲)

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) معلوم می‌شود که نقطهٔ E بر نقطهٔ F منطبق است.

۲۲۴. فرض می‌کنیم DE و FH بترتیب ضد موازی با ضلعهای AC و AB از مثلث ABC و M نقطهٔ برخوردشان باشد، داریم: $\hat{HFC} = \hat{DEB} = \hat{A}$. پس مثلث FME متساوی‌الساقین است.



بنابراین:

$$FM = EM \text{ و } ED = FH ; \Rightarrow DM = HM$$

نقطهٔ برخورد AM با ضلع BC را S می‌نامیم و خطهای SQ و SP را از نقطهٔ S بترتیب موازی DE و FH رسم می‌کنیم. از مثلثهای متشابه خواهیم داشت: $\frac{SP}{MH} = \frac{AS}{AM} = \frac{SQ}{MD}$؛ و چون می‌دانیم $MD = MH$، پس داریم: $SQ = SP$.

حال مثلثهای BSQ و CSP هر دو، با مثلث ABC متشابه‌اند. در نتیجه: $\frac{c}{b} = \frac{SP}{SC}$ و $\frac{c}{b} = \frac{BS}{SQ}$. از ضرب این دو رابطه داریم: $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$؛ و چون $SQ = SP$ است، پس نقطهٔ S پای شبه میانهٔ مثلث است.

۲۲۶. خطهای OA'، OB' و OC' همرسند، پس داریم:

$$(A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0 \qquad (1)$$

امّا: $\overline{A'B} = -\overline{A''C}\,,\ \overline{A'C} = -\overline{A''B}\,,\ \overline{B'C} = -\overline{B''A}$

و $\overline{B'A} = -\overline{B''C}\,,\ \overline{C'A} = -\overline{C''B}\,,\ \overline{C'B} = -\overline{C''A}$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$(A''C^2 - A''B^2) + (B''A^2 - B''C^2) + (C''B^2 - C''A^2) = 0$$

پس، عمودهای مرسوم در A''، B'' و C'' بر ضلعهای مثلث، همرسند.

۲۲۹. A' باری سانتر A، B و C با ضریبهای $-\alpha$ و β و γ روی خط AA_1 که نقطهٔ A را به نقطهٔ A_1، باری سانتر نقطه‌های B و C با ضریبهای β و γ وصل می‌کند، قرار دارد و داریم: $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{\gamma}{\beta}$;

به همین ترتیب، باری سانترهای B' و C'، بترتیب روی BB_1 و CC_1 واقعند، به قسمی که: $\frac{\alpha}{\gamma} - = \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}$ و $\frac{\beta}{\alpha} - = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$؛ و از ضرب طرفین سه رابطهٔ مزبور خواهیم داشت:

$-1 = \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$ و به موجب عکس قضیهٔ سوا، خطّهای AA'، BB' و CC' همرسند.

۲۳۰. اگر α'، β' و γ' نقطه‌های برخورد $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ بترتیب با خطهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند، باید ثابت کنیم که (۱) $-1 = \frac{\overline{\gamma'A}}{\overline{\gamma'B}} \cdot \frac{\overline{\beta'C}}{\overline{\beta'A}} \cdot \frac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}}$ است.

اگر D نقطهٔ برخورد BC و $B'C'$ باشد، با استفاده از قضیهٔ منلائوس در مورد مثلثهای DBC' و $DB'C$ که بترتیب مورب $A\alpha\alpha'$ آنها را قطع کرده است، داریم:

$1 = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{\alpha D}}{\overline{\alpha C'}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' D}}$ و $1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha D}} \cdot \frac{\overline{\alpha' D}}{\overline{\alpha' C}}$. از ضرب عضوهای نظیر این دو رابطه، و ساده کردن آن نتیجه می‌شود:

$1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} \cdot \frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}$. به روش مشابه، رابطه‌های زیر را داریم:

$$1 = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} \cdot \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}}$$

$$1 = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}$$

از ضرب عضوهای نظیر سه رابطهٔ اخیر و جایگزینی هر یک از مقدارهای $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ و $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{BC'}} \cdot \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$ و $\frac{\overline{\gamma A'}}{\overline{\gamma B'}} \cdot \frac{\overline{\beta C'}}{\overline{\beta A'}} \cdot \frac{\overline{\alpha B'}}{\overline{\alpha C'}}$ با (۱−) رابطهٔ (۱) به دست می‌آید.

۲۳۱. فرض کنیم: $P' = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ و $P'' = \frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$.

نقطه‌های A' و A'' نسبت به وسط پاره‌خط BC قرینه‌اند و داریم:
$\overline{A''B} = -\overline{A'C}$ و $\overline{A''C} = -\overline{A'B}$ و به همین ترتیب: $\overline{B''A} = -\overline{B'C}$، $\overline{B''C} = -\overline{B'A}$، $\overline{C''B} = -\overline{C'A}$ و $\overline{C''A} = -\overline{C'B}$ در نتیجه $P'' = \frac{1}{P'}$. اگر A'، B' و C' بر یک خط راست واقع باشند، $P' = 1$، بنابراین: $P = 1$، و در نتیجه نقطه‌های A''، B'' و C'' بر یک خط راست واقع خواهند شد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر AA'، BB' و CC' همرس باشند، خطهای AA''، BB'' و CC'' نیز همرس خواهند بود.

۲۳۲. در شکل داده شده داریم:

$$\overline{A'B}^2 - \overline{A'C}^2 = (\overline{A'B'}^2 + \overline{B'B}^2) - (\overline{A'C'}^2 + \overline{C'C}^2)$$

و به همین ترتیب

$$\overline{B'C}^2 - \overline{B'A}^2 = (\overline{B'C'}^2 + \overline{C'C}^2) - (\overline{B'A'}^2 + \overline{A'A}^2)\ ;$$

$$\overline{C'A}^2 - \overline{C'B}^2 = (\overline{C'A'}^2 + \overline{A'A}^2) - (\overline{C'B'}^2 + \overline{B'B}^2).$$

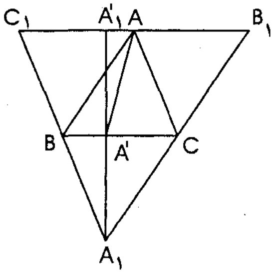
از جمع رابطه‌های بالا خواهیم داشت:

$$(\overline{A'B}^2 - \overline{A'C}^2) + (\overline{B'C}^2 - \overline{B'A}^2) + (\overline{C'A}^2 - \overline{C'B}^2) = 0$$

یا:

$$(\overline{A_1B}^2 - \overline{A_1C}^2) + (\overline{B_1C}^2 - \overline{B_1A}^2) + (\overline{C_1A}^2 - \overline{C_1B}^2) = 0$$

پس خطهای $A'A_1$، $B'B_1$ و $C'C_1$ همرسند.



۲۳۴. بنا به فرض داریم:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1\ ;\ (1)$$

A_1A' را که در A'_1 ضلع B_1C_1 را قطع می‌کند، رسم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{A'_1C_1}}{\overline{A'_1B_1}}$$ و به همین ترتیب ؛ $$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{B'_1A_1}}{\overline{B'_1C_1}}$$ و $$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{C'_1B_1}}{\overline{C'_1A_1}}$$

و با قرار دادن رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{\overline{A'_1C_1}}{\overline{A'_1B_1}} \cdot \frac{\overline{B'_1A_1}}{\overline{B'_1C_1}} \cdot \frac{\overline{C'_1B_1}}{\overline{C'_1A_1}} = -1$$

پس $A_1A'_1$ ، $B_1B'_1$ و $C_1C'_1$ همرسند؛ و به همین ترتیب ثابت می‌شود که اگر A' ، B' و C' بر یک استقامت باشند؛ A'_1 ، B'_1 و C'_1 بر یک خط راست قرار دارند.

۲۳۶. برای اثبات این که خطهای رسم شده از D ، E و F و موازی با: AP ، BP و CP همرسند، نقطهٔ برخورد خطهایی را که از نقطه‌های D و E بترتیب موازی AP و BP رسم شده‌اند، Q می‌نامیم، و نقطهٔ Q را به F وصل نموده، ثابت می‌کنیم که $FQ \parallel CP$ است.

مثلثهای ABC و DEF مجانس یکدیگرند. با مرکز تجانس G مرکز ثقل مشترک دو مثلث و نسبت تجانس $|K| = ۲$.

پس $-۲ = \frac{BC}{FE} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$ (۱). چون ضلعهای دو مثلث APB و DEQ نظیر به نظیر موازی‌اند، متشابه بوده و داریم: $۲ = \frac{AB}{DF} = \frac{BP}{QE} = \frac{AP}{QD}$ (۲). و همچنین دو مثلث APC و QDE که در آنها دو ضلع نظیر به نظیر موازی است، با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) متشابه‌اند و داریم: $۲ = \frac{PC}{FQ} = \frac{AP}{QD} = \frac{AC}{DE}$. از این رابطه نتیجه می‌شود که دو مثلث بالا که در آنها دو ضلع موازی‌اند، ضلع سومشان نیز موازی خواهد بود.

۲۳۸. اگر نقطه‌های برخورد سه خطی که از رأسها رسم می‌شوند، با ضلعهای مقابلشان یعنی BC ، CA و AB را بترتیب α ، β و γ؛ و $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ و $(a'\ ,\ b',\ c')$ را نقطه‌های برخورد خطهای $(OA\ ,\ OB\ ,\ OC)$ و $(O'A\ ,\ O'B\ ,\ O'C)$ بترتیب با ضلعهای BC ، CA و AB بنامیم، چون خطهای $A\alpha$ ، Bb و Cc' همرس هستند. پس:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = -۱$$

و به همین ترتیب داریم: $-۱ = \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ و $-۱ = \frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$

از ضرب عضوهای نظیر سه رابطه اخیر و با توجه به این که $\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}}$ و

$\frac{\overline{b'C}}{\overline{b'A}} \cdot \frac{\overline{a'B}}{\overline{a'C}} \cdot \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}}$ هر کدام برابر ۱ـ می‌باشند، زیرا مجموعهٔ خطهای (Aa , Bb , Cc) و (Aa', Bb', Cc') همرسند، داریم: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$؛ و این رابطه نشان می‌دهد که خطهای $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ همرسند.

۲۳۹. خطهای UX ، VY و WZ نیمسازهای زاویه‌های مثلث متساوی الاضلاع XYZ می‌باشند.

۲۴۰. الف. از برابری $\frac{CX}{b} = \frac{a}{a+b}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{CX}{XA} = \frac{CX}{b - CX} = \frac{a}{a+b-a} = \frac{a}{b}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\frac{BY}{YC} = \frac{a}{b} \text{ و } \frac{AH}{HB} = \frac{S(CAH)}{S(CHB)} = \frac{b^۲}{a^۲}$$

$$\frac{CX}{XA} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{AH}{HB} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b^۲}{a^۲} = ۱$$

بنابراین بنا به عکس قضیهٔ سوا، سه خط AI ، BI و CH همرسند.

ب. روی مثلث ABC متوازی‌الاضلاع ABFC را می‌سازیم که M وسط BC مرکز آن می‌باشد. با توجه به مسأله‌های قبل، نتیجه خواهد شد که $MO_۲ = MO_۳$ و خطهای حامل این دو پاره‌خط برهم عمودند. دو پاره‌خط $MO_۱$ و MC نیز با هم برابر و برهم عمودند. دوران به مرکز M و به زاویهٔ °۹۰ مثلث $MO_۱O_۲$ را بر مثلث $MCO_۳$ منطبق می‌سازد.

پ. مستطیل ´KCGC و متوازی‌الاضلاعهای ´DA JA و ´IBEB را در نظر بگیرید. با توجه به دورانهای به زاویه‌های °۹۰+ و °۹۰− و حول نقطه‌های $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$، نتیجه می‌شود که شش مثلث B´IB ، C´CG ، CC´K ، JA´A ، ´DAA و ´BEB با مثلث ABC مستقیماً برابرند. از این جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های U، V و W بترتیب مرکزهای مستطیل و دو متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

۲۴۱. از عکس قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۲۴۲. الف. خطهای $PO_۱$ ، $QO_۲$ و $RO_۳$ عمودمنصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند.

ب. هرگاه X ، Y و Z نقطه‌های برخورد خطهای $AO_۱$ ، $BO_۲$ و $CO_۳$ با ضلعهای

مثلث ABC باشند، داریم:
$$\frac{BX}{XC} = \frac{S(ABO_۱)}{S(CAO_۱)} = \frac{c \sin(\hat{B} + ۳۰^\circ)}{b \sin(\hat{C} + ۳۰^\circ)}$$
برای نسبتهای $\frac{CY}{YA}$ و $\frac{AZ}{ZB}$ نیز مقدارهای مشابه به دست می‌آید و از آن جا، از عکس قضیهٔ سوا استفاده می‌شود.

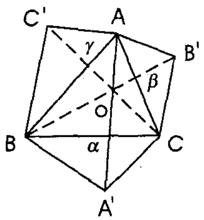
پ. از تساوی دو مثلث $\hat{PCA}$ و $\hat{BCQ}$ تساوی $PA = BQ$ نتیجه می‌شود.

همچنین داریم: $PFC = PBC = ۶۰^\circ$ و $BQ = CR$

به روش مشابه خواهیم داشت: $\hat{PFC} = ۶۰^\circ$ و $\hat{CFQ} = ۶۰^\circ$

از جمع طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که زاویهٔ PFA برابر با ۱۸۰° است، یعنی نقطهٔ F بر خط PA قرار دارد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطهٔ F بر خطهای BQ و CR نیز قرار دارد. یعنی سه خط AP ، BQ و CR در F همرسند و شش زاویه ۶۰° می‌سازند.

۲۴۳. از تشابه مثلثهای ABC' و ACB' داریم:
$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB}{AC}$$
یا $AB \,.\, AB' = AC \,.\, AC'$.



از طرف دیگر زاویه‌های BAC' و CAB' متساوی‌اند، که اگر به آنها زاویه A از مثلث ABC را اضافه کنیم، دو زاویه CAC' و BAB' با هم برابر می‌شوند.

در نتیجه دو مثلث ABB' و ACC' معادل یکدیگرند، زیرا دو زاویهٔ متساوی دارند و حاصل ضرب ضلعهای این دو زاویه در دو مثلث، نیز برابر می‌باشد، یعنی:

$S_{ABB'} = S_{ACC'}$.

به همین ترتیب داریم، $S_{CAA'} = S_{CBB'}$ و $S_{BCC'} = S_{BAA'}$.

نقطه‌های برخورد AA' ، BB' و CC' با ضلعهای BC ، CA و AB را بترتیب α ، β و γ می‌نامیم. دو مثلث BAA' و CAA' در قاعدهٔ AA' مشترکند، پس نسبت مساحتهایشان به نسبت ارتفاعهای نظیر این قاعده مشترک است، که این نسبت برابر $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ است. از آن جا $\frac{S_{BAA'}}{S_{CAA'}} = \frac{\alpha B}{\alpha C}$ و چون نقطهٔ α بین دو نقطهٔ B و C

است. پس: $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{S_{BAA'}}{S_{CAA'}}$. به همین روش رابطه‌های زیر را داریم:

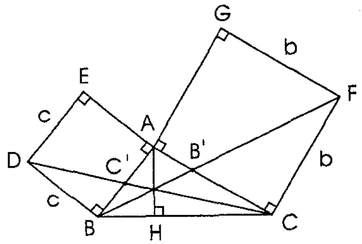
$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = -\frac{S_{CBB'}}{S_{ABB'}} \text{ و } \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{S_{ACC'}}{S_{BCC'}}$$

از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1$$

و در نتیجه قضیه ثابت است.

۲۴۴. نقطهٔ برخورد BF با AC را B' و نقطهٔ برخورد CD با AB را C' می‌نامیم. $FC \parallel AB$ و $BD \parallel AC$ است پس داریم:



$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AB}} = -\frac{b}{c} \text{ و } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = -\frac{b}{c}$$

از طرف دیگر AH ارتفاع مثلث است، پس: $\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = -\frac{AB^2}{AC^2} = -\frac{c^2}{b^2}$

بنابراین: $\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} \times \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = -1$

و به موجب عکس قضیه سوا، CD ،BF و AH همرسند.

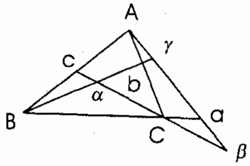
۲۴۶. اگر عمودهای رسم شده در A ،B و C برضلعهای B_1C_1 ،C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ همرس باشند، داریم:

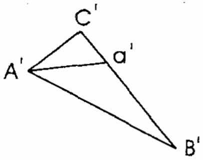
$$(\overline{AB_1}^2 - \overline{AC_1}^2) + (\overline{BC_1}^2 - \overline{BA_1}^2) + (\overline{CA_1}^2 - \overline{CB_1}^2) = 0$$

اما رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$(\overline{A_1C}^2 - \overline{A_1B}^2) + (\overline{B_1A}^2 - \overline{B_1C}^2) + (\overline{C_1B}^2 - \overline{C_1A}^2) = 0$$

یعنی عمودهای رسم شده در A_1 ،B_1 و C_1 بر CA ،BC و AB همرسند.





۲۴۷. نقطه‌های برخورد خطهای (Cc و Bb)، (Cc و Aa) و (Aa و Bb) را بترتیب α، β و γ می‌نامیم. دو مثلث $Ca\beta$ و $A'\alpha'B'$ ضلعهای متوازی دارند. از آن جا می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{a'B'}}{\overline{a\beta}} = \frac{\overline{a'A'}}{\overline{aC}}$$

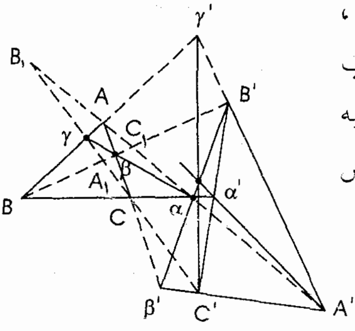
به همین ترتیب داریم:
$$\frac{\overline{a'C'}}{\overline{a\gamma}} = \frac{\overline{a'A'}}{\overline{aB}}$$

از تقسیم عضوهای نظیر دو رابطه خواهیم داشت: $\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \frac{\overline{a\gamma}}{\overline{a\beta}} \cdot \frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}}$ ؛ و همچنین: $\frac{\overline{a\beta}}{\overline{a\gamma}} \cdot \frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}}$. به روش مشابه خواهیم داشت: $\frac{\overline{b\gamma}}{\overline{b\alpha}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} = \frac{\overline{b'C'}}{\overline{b'A'}}$ و $\frac{\overline{c\alpha}}{\overline{c\beta}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = \frac{\overline{c'A'}}{\overline{c'B'}}$. از ضرب عضوهای نظیر سه رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{a'B'}}{\overline{a'C'}} \cdot \frac{\overline{b'C'}}{\overline{b'A'}} \cdot \frac{\overline{c'A'}}{\overline{c'B'}} = \left(\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} \cdot \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} \cdot \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{a\beta}}{\overline{a\gamma}} \cdot \frac{\overline{b\gamma}}{\overline{b\alpha}} \cdot \frac{\overline{c\alpha}}{\overline{c\beta}}\right)$$

۱. اگر نقطه‌های a ، b و c روی خط راست قرار داشته باشند، دو پرانتز سمت راست هر کدام برابر ۱ می‌باشند و در نتیجه پرانتز اول برابر ۱ است و در این صورت نقطه‌های ´a ، ´b و ´c روی یک خط راست واقعند.

۲. اگر خطهای Aa ، Bb و Cc همرس باشند، اولین پرانتز طرف دوم رابطهٔ بالا برابر ۱− است و دومین پرانتز برابر ۱ می‌باشد. در نتیجه اولین پرانتز برابر ۱− است. و این نشان می‌دهد که خطهای ´A´B ، ´B´b و ´C´c همرسند.



۲۴۸. نقطه‌های برخورد خطهای (´BB´ , CC)، (´CC´ , AA) و (´AA´ , BB) را بترتیب A_1، B_1 و C_1 می‌نامیم. مثلث $A_1B'C'$ به وسیلهٔ مورب α' BC قطع شده است، پس رابطهٔ
$$\frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BB'}} = 1$$
نتیجه می‌شود.

به همین ترتیب رابطه‌های زیر را داریم:

$$\frac{\overline{\beta'C'}}{\overline{\beta'A'}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CC'}} = 1 \text{ و } \frac{\overline{\gamma'A'}}{\overline{\gamma'B'}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AA'}} = 1$$

عضوهای متناظر سه رابطهٔ بالا را در هم ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

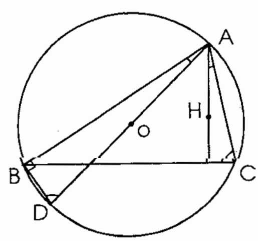
$$(1)\ \left(\frac{\overline{\alpha'B'}}{\overline{\alpha'C'}} \cdot \frac{\overline{\beta'C'}}{\overline{\beta'A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma'A'}}{\overline{\gamma'B'}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}}\right) = 1$$

اما مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ همسان هستند، زیرا ضلعهای متناظرشان (BC, B_1C_1)، (CA, C_1A_1) و (AB, A_1B_1)، دو به دو در سه نقطهٔ α، β و γ که روی یک خط راستند، یکدیگر را قطع کرده‌اند. از آن جا، خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 که رأسهای متناظر این دو مثلث را به هم وصل می‌کند، همرس می‌باشند. با به کارگیری قضیهٔ سوا در مثلث $A_1B_1C_1$، دومین پرانتز رابطهٔ (۱) مساوی ۱ـ می‌باشد. از آنجا اولین پرانتز نیز مساوی ۱− خواهد بود، و این نشان می‌دهد که خطهای $A'\alpha'$، $B'\beta'$ و $C'\gamma'$ همرسند.

۲۵۰. هرگاه O نقطهٔ برخورد BB' با CC' و A_1 نقطهٔ برخورد OA با $A'B'$ باشد، مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A_1B'}{AB}$$

که نتیجهٔ آن، همانی بودن A_1 با A' است.

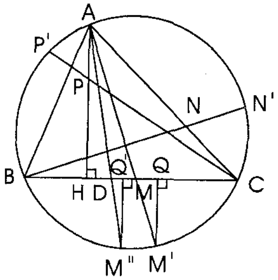


۲۵۱. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ برخورد ارتفاعها را H و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را O می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که خطهای AH و AO نسبت به نیمساز زاویهٔ درونی A قرینهٔ یکدیگرند. یعنی هم از نظر اندازه و هم از نظر علامت داریم:

$$(AO \text{ و } AB) = -(AH \text{ و } AC)$$

اگر D نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، از D به B وصل می‌کنیم؛ $A\hat{B}D = 90^\circ$ است و $B\hat{D}A = B\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ پس $H\hat{A}C = B\hat{A}D$؛ در نتیجه:

(AC و AH) − = (AB و AO). به همین ترتیب ثابت می‌شود که BO و ارتفاع رأس B نیز نسبت به نیمساز زاویهٔ درونی B قرینهٔ یکدیگرند و برای CO و ارتفاع رأس C نیز همین مطلب درست است. پس دو نقطهٔ H و O در مثلث ABC متقابل یکدیگرند.



۲۵۲. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$T=\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}+۳$$

پس T مینیمم است هرگاه:

$$\frac{AM}{MM'}+\frac{BN}{NN'}+\frac{CP}{PP'}$$

مینیمم شود. حال اگر Q پای عمود از M' به BC، و M'' وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ و Q' پای عمود از M'' به BC، و H پای ارتفاع وارد از A به BC باشد، داریم:

$\frac{AD}{DM''}=\frac{AH}{M''Q'}\geq\frac{AH}{M'Q}=\frac{AM}{MM'}$ پس نتیجه می‌گیریم که T وقتی می‌نیمم است که خطهای ذکر شده در بالا، نیمسازهای زاویه‌های مثلث باشند، اما وقتی این خطها نیمسازها باشند (یعنی در واقع از این جا به بعد M پای نیمساز است)، داریم:

$$\frac{AM}{MM'}=\frac{AM^۲}{MM'.AM}=\frac{AM^۲}{BM\,.\,MC}=\frac{AM^۲(b+c)^۲}{a^۲bc}$$

و می‌دانیم: $AM^۲=bc-BM\,.\,MC=bc-\frac{a^۲bc}{(b+c)^۲}$. پس خواهیم داشت: $\frac{AM}{MM'}=(\frac{b+c}{a})^۲-۱$

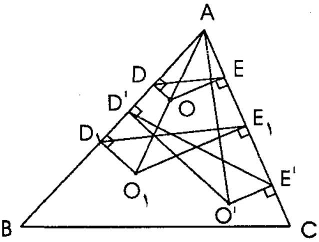
به همین ترتیب:

$$\frac{BN}{NN'}=(\frac{a+c}{b})^۲-۱ \quad و \quad \frac{CP}{PP'}=(\frac{a+b}{c})^۲-۱$$

پس:

$$T=\frac{(b+c)^۲}{a^۲}+\frac{(a+c)^۲}{b^۲}+\frac{(a+b)^۲}{c^۲}\geq ۳\sqrt[۳]{\frac{(a+b)^۲(a+c)^۲(b+c)^۲}{a^۲b^۲c^۲}}$$

$$\geq ۳\sqrt[۳]{\frac{۴ab \times ۴ac \times ۴bc}{a^۲b^۲c^۲}} = ۱۲$$



۲۵۳. از نقطه‌های O و ´O عمودهای OD و ´O´D را بر ضلع AB و عمودهای OE و ´O´E را بر ضلع AC فرود می‌آوریم و خطهای DE و ´D´E را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که این چهار نقطه روی یک دایره واقعند. برای اثبات، قرینهٔ نقطهٔ ´O نسبت به نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC را نقطهٔ $O_۱$ می‌نامیم، و از این نقطه عمودهای $O_۱D_۱$ و $O_۱E_۱$ را بترتیب بر ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم و پاره‌خط $D_۱E_۱$ را وصل می‌نماییم.

مثلث $O_۱D_۱E_۱$ مجانس مثلث ODE نسبت به مرکز تجانس A است. بنابراین $D_۱E_۱$ موازی DE است. از طرف دیگر پاره‌خط $D_۱E_۱$ قرینهٔ پاره خط ´D´E نسبت به نیمساز زاویهٔ درونی A می‌باشد. از آن‌جا داریم:

$$(D_۱E_۱ \text{ و } AB) = -(D'E' \text{ و } AC) \text{ و } (DE \text{ و } DD') = -(D'E' \text{ و } EE')\ ;$$

و یا:

$$(DE \text{ و } DD') = (E'E \text{ و } E'D')$$

و این مطلب نشان می‌دهد که چهار نقطهٔ D، ´D، E و ´E روی یک دایره واقعند. مرکز این دایره، نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای پاره‌خطهای ´DD و ´EE است که این نقطه، ω وسط پاره‌خط ´OO می‌باشد. حال اگر نقطه‌های O و ´O را روی BC در نقطه‌های F و ´F تصویر کنیم، به همین ترتیب می‌توان نشان داد که نقطه‌های D، ´D، F و ´F نیز روی دایرهٔ به مرکز ω قرار دارند.

این دایره بر دایرهٔ قبلی منطبق است زیرا مرکز هر دو دایره ω، و شعاع هر دو دایره برابر ωD است. پس نتیجه می‌گردد که شش نقطهٔ D، ´D، E، ´E، F و ´F روی یک دایره به مرکز ω واقعند.

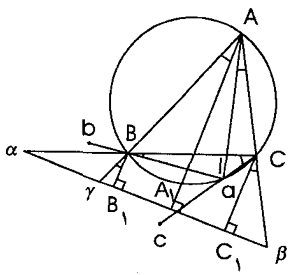
۲۵۴. ۱. نقطهٔ ´O را با استفاده از خطهای ´AO و ´BO قرینه‌های خطهای AO و BO نسبت به نیمساز زاویه‌های درونی A و B پیدا می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} (AO' \text{ و } AC) = -(AO \text{ و } AB) \\ (BO' \text{ و } BC) = -(BO \text{ و } AB) \end{cases} \quad .(۱)$$

چون AO موازی BO است، پس بقیهٔ عاملهایشان برابر است.
بنابراین: (۲) (BC و ´BO) = (AC و ´AO). و این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های A، B، C و ´O بر روی یک دایره واقعند.

۲. بعکس اگر ۴ نقطهٔ A، B، C و ´O روی یک دایره باشند، تساوی (۲) برقرار است، پس تساوی (۱) برقرار می‌باشد، و از این تساوی داریم: (AB و BO) = (AB و AO)، و این رابطه نشان می‌دهد که AO و BO موازی‌اند.

۲۵۵. خطهای Aa و ارتفاع AA_1 از مثلث $A\beta\gamma$ نسبت به نیمساز زاویهٔ A از مثلث $A\beta\gamma$ یا زاویهٔ A از مثلث ABC قرینهٔ یکدیگرند. همچنین Bb و ارتفاع BB_1 از مثلث $B\gamma\alpha$ نسبت به نیمساز زاویهٔ B از مثلث ABC، قرینهٔ یکدیگرند؛ و بالاخره Cc و ارتفاع CC_1 از مثلث $C\alpha\beta$ نسبت به نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC قرینهٔ یکدیگر می‌باشند.



چون خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 متوازی‌اند، خطهای Aa، Bb و Cc از یک نقطه مانند I می‌گذرند که معکوس نقطهٔ بی‌نهایت دور امتداد عمود بر $\alpha\beta\gamma$ است. و این نقطهٔ معکوس، روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

۲۵۶. بنا به قضیهٔ سوا، چون $A\alpha$، $B\beta$ و $C\gamma$ در نقطهٔ (O) همرسند. لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{\alpha B}\,.\,\overline{\beta C}\,.\,\overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C}\,.\,\overline{\beta A}\,.\,\overline{\gamma B}} = -1$$

و از طرفی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} P_A(\omega) = \overline{A\beta}\,.\,\overline{A\beta'} = \overline{A\gamma}\,.\,\overline{A\gamma'} & (2) \\ P_B(\omega) = \overline{B\gamma}\,.\,\overline{B\gamma'} = \overline{B\alpha}\,.\,\overline{B\alpha'} & (3) \\ P_C(\omega) = \overline{C\alpha}\,.\,\overline{C\alpha'} = \overline{C\beta}\,.\,\overline{C\beta'} & (4) \end{cases}$$

رابطه‌های (۲) و (۳) و (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

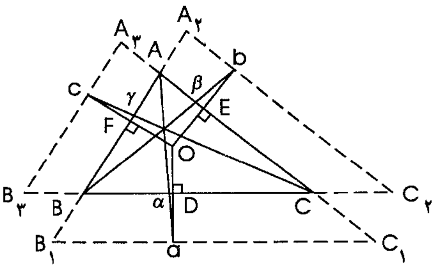
$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\beta A}} = \frac{\overline{\beta' A}}{\overline{\gamma' A}} \text{ و } \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\overline{\gamma' B}}{\overline{\alpha' B}} \text{ و } \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\overline{\alpha' C}}{\overline{\beta' C}}$$

از رابطه‌های اخیر و رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{\alpha' B} \,.\, \overline{\beta' C} \,.\, \overline{\gamma' A}}{\overline{\alpha' C} \,.\, \overline{\beta' A} \,.\, \overline{\gamma' B}} = -۱$$

و از ملاحظهٔ این رابطه بنا به عکس قضیهٔ سوا، نتیجه می‌شود که $A\alpha'$ ، $B\beta'$ و $C\gamma'$ همرسند.

۲۵۷. نقطه‌های برخورد Aa ، Bb و Cc با ضلعهای BC ، CA و AB را بترتیب α ، β و γ می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -۱$ است.



نخست ثابت می‌کنیم قدر مطلق حاصل ضرب طرف اول برابر ۱ است و سپس ثابت می‌نماییم که تعداد نسبتهای منفی، فرد می‌باشد.

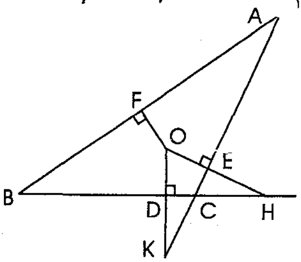
۱. از نقطه‌های a ، b و c خطهایی بترتیب به موازات BC ، CA و AB رسم می‌کنیم تا خطهای $B_۱C_۱$ موازی BC و $A_۲C_۲$ موازی AC و $A_۳B_۳$ موازی AB به دست آیند.

تساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{aB_۱}{aC_۱}, \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{bC_۲}{bA_۲}, \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{cA_۳}{cB_۳}$$

از ضرب عضو به عضو این رابطه‌ها داریم:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{aB_۱}{aC_۱} \cdot \frac{bC_۲}{bA_۲} \cdot \frac{cA_۳}{cB_۳}$$



اما پاره‌خطهای $aB_۱$ و $cB_۳$ نسبت به نیمساز زاویهٔ B قرینهٔ یکدیگرند. لذا $aB_۱ = cB_۳$؛ و به طریق مشابه $bC_۲ = aC_۱$ و $cA_۳ = bA_۲$. در نتیجه طرف دوم رابطهٔ بالا برابر ۱ است.

۲. اگر مثلث ABC زاویهٔ منفرجه نداشته باشد، دیده می‌شود که هر سه نسبت $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$، $\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ و $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ منفی می‌باشند. اما اگر فرض کنیم زاویهٔ C از مثلث ABC منفرجه باشد ونقطه‌های برخورد OE و BC را H و نقطهٔ برخورد AC و OD را K بنامیم، پاره‌خطهای EH و DK برابرند، زیرا قرینهٔ یکدیگر نسبت به نیمساز زاویهٔ E می‌باشند. همواره نقطهٔ γ بین دو نقطهٔ A و B واقع است و در نتیجه $\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$ منفی است. از طرف دیگر اگر طول پاره‌خطهای مشترک با Da، Eb و Fc کمتر از EH یا DK یعنی $Da<DK$، نسبتهای $\frac{\alpha B}{\alpha C}$ و $\frac{\beta C}{\beta A}$ هر دو منفی‌اند و اگر بیشتر از EH یا DK باشد $Da>Dk$، این نسبتها مثبتند. در نتیجه، حاصلضرب سه نسبت برابر ۱− می‌گردد.

۲۵۸. چون سه نقطهٔ α، β و γ روی یک خط راست واقعند. پس داریم:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1$$

حال جهت محورها روی ضلعهای مثلث را چنان اختیار می‌کنیم که اندازهٔ جبری هر یک از بردارهای رابطهٔ (۱) مثبت باشند، در این صورت می‌توانیم به جای $\overline{\alpha B}$ و $\overline{\alpha C}$ مقدارهای αB و αC را قرار دهیم. اگر αt مماسی باشد که از نقطهٔ α بر دایرهٔ به مرکز O رسم می‌شود، خواهیم داشت:

$$\overline{\alpha a_1}^2=\overline{\alpha a_2}^2=\overline{\alpha t}^2=\alpha B\,.\,\alpha C$$

از آن جا چون $\overline{\alpha a_1}$ و $\overline{\alpha a_2}$ مختلف‌العلامه‌اند، نتیجه می‌شود:

$$\overline{\alpha a_1}=-\overline{\alpha a_2}=-\sqrt{\alpha B.\alpha C}$$

و به همین ترتیب: $\overline{\beta b_1}=-\overline{\beta b_2}=-\sqrt{\beta C.\beta A}$; $\overline{\gamma c_1}=-\overline{\gamma c_2}=-\sqrt{\gamma A\,.\,\gamma B}$

از آن جا نتیجه می‌شود:

$$\overline{a_1B}=\overline{a_1\alpha}+\overline{\alpha B}=\sqrt{\alpha B\,.\,\alpha C}+\alpha B=\sqrt{\alpha B}\,(\sqrt{\alpha C}+\sqrt{\alpha B})$$

$$\overline{a_1C}=\overline{a_1\alpha}+\overline{\alpha C}=\sqrt{\alpha B\,.\,\alpha C}+\alpha C=\sqrt{\alpha C}\,(\sqrt{\alpha B}+\sqrt{\alpha C})$$

پس: $\frac{\overline{a_1B}}{\overline{a_1C}}=\sqrt{\frac{\alpha B}{\alpha C}}$

به همین ترتیب داریم:

$$\overline{a_2B} = \overline{a_2\alpha} + \overline{\alpha B} = -\sqrt{\alpha B \,.\, \alpha C} + \alpha B = \sqrt{\alpha B}\,(\sqrt{\alpha B} - \sqrt{\alpha C})$$

$$\overline{a_2C} = \overline{a_2\alpha} + \overline{\alpha C} = -\sqrt{\alpha B \,.\, \alpha C} + \alpha C = \sqrt{\alpha C}\,(\sqrt{\alpha C} - \sqrt{\alpha B})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\overline{a_2B}}{\overline{a_2C}} = -\sqrt{\frac{\alpha B}{\alpha C}}$$

و به روش مشابه داریم:

$$\frac{\overline{c_2A}}{\overline{c_2B}} = -\sqrt{\frac{\gamma A}{\gamma B}} \text{ و } \frac{\overline{c_1A}}{\overline{c_1B}} = \sqrt{\frac{\gamma A}{\gamma B}} \text{ و } \frac{\overline{b_2C}}{\overline{b_2A}} = -\sqrt{\frac{\beta C}{\beta A}} \text{ و } \frac{\overline{b_1C}}{\overline{b_1A}} = \sqrt{\frac{\beta C}{\beta A}}$$

حال داریم:

۱. از تساویهای بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{a_1B}}{\overline{a_1C}} \cdot \frac{\overline{b_1C}}{\overline{b_1A}} \cdot \frac{\overline{c_1A}}{\overline{c_1B}} = \sqrt{\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}} = 1$$

$$\frac{\overline{a_1B}}{\overline{a_1C}} \cdot \frac{\overline{b_2C}}{\overline{b_2A}} \cdot \frac{\overline{c_2A}}{\overline{c_2B}} = \sqrt{\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}} = 1 \text{ و } \ldots$$

و از آن جا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ نقطه‌های (c_1 و b_1 و a_1)، (c_2 و b_2 و a_1) و ... هر کدام روی یک خط راستند.

۲. همچنین داریم:

$$\frac{\overline{a_2B}}{\overline{a_2C}} \cdot \frac{\overline{b_1C}}{\overline{b_1A}} \cdot \frac{\overline{c_1A}}{\overline{c_1B}} = -1 \text{ و } \frac{\overline{a_2B}}{\overline{a_2C}} \cdot \frac{\overline{b_2C}}{\overline{b_2A}} \cdot \frac{\overline{c_2A}}{\overline{c_2B}} = -1$$

و این رابطه‌ها نشان می‌دهد که مجموعهٔ خطهای (Cc_1 ، Bb_1 و Aa_2) و (Cc_2 ، Bb_2 و Aa_2) و ... همرسند.

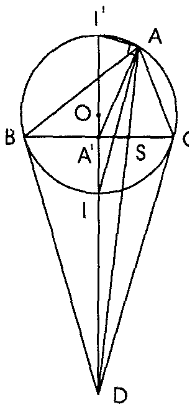
۲۵۹. D را نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1 می‌گیریم. چون دو زاویهٔ A_1CA و B_1CB با هم برابرند، و $A_1C : BC = AC : B_1C$ ؛ دو مثلث A_1CA و B_1CB با هم متشابه‌اند و بنابراین زاویه‌های DBC و DA_1C با هم برابر می‌شوند. به این ترتیب، نقطه‌های B ، D ، C و A_1 روی محیط یک دایره‌اند. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که نقطه‌های A ، D ، C و B_1 هم روی محیط یک دایره واقعند، یعنی D نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای A_1BC و AB_1C است. اکنون

توجه می‌کنیم که:

$$A\hat{D}B = ۱۸۰^\circ - A\hat{D}B_۱ = ۱۸۰^\circ - A\hat{C}_۱B$$

بنابراین نقطه‌های A، D، B و $C_۱$ روی محیط یک دایره‌اند. به این ترتیب، D، نقطهٔ برخورد هر سه دایرهٔ محیط بر مثلثهاست و، طبق آن چه قبلاً ثابت شد، خط راست $CC_۱$ هم از نقطهٔ D می‌گذرد.

۲۶۲. میانهٔ ´AA از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خطهای مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث در رأسهای B و C را D می‌نامیم. از D به رأس A وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد DA با ضلع BC را S می‌نامیم. قطر ´II از دایرهٔ محیطی مثلث را که از نقطهٔ D می‌گذرد رسم می‌کنیم. این قطر از نقطهٔ ´A وسط BC می‌گذرد. (´DA´II) تقسیم توافقی و (´A − DA´II) دستگاهی توافقی است. در این دستگاه توافقی دو شعاع AI و ´AI بر هم عمودند زیرا $I\hat{A}I' = ۹۰^\circ$ است. پس AI نیمساز زاویهٔ ´DAA است. اما AI نیمساز زاویهٔ BAC از مثلث ABC نیز می‌باشد. و چون ´AA میانهٔ نظیر رأس A است، پس AD و یا AS شبه میانهٔ رسم شده از رأس A است، و حکم ثابت است.



۲.۳.۵. ثابت کنید خطها همرسند. (در چند ضلعیها)

۲۶۳. فرض می‌کنیم نقطهٔ I محل برخورد PS و BD باشد. رابطهٔ منلائوس را در مثلث ABD که با مورب IPS ضلعهای آن قطع شده‌اند، می‌نویسیم:

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{SD}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = ۱$$

به همین ترتیب:

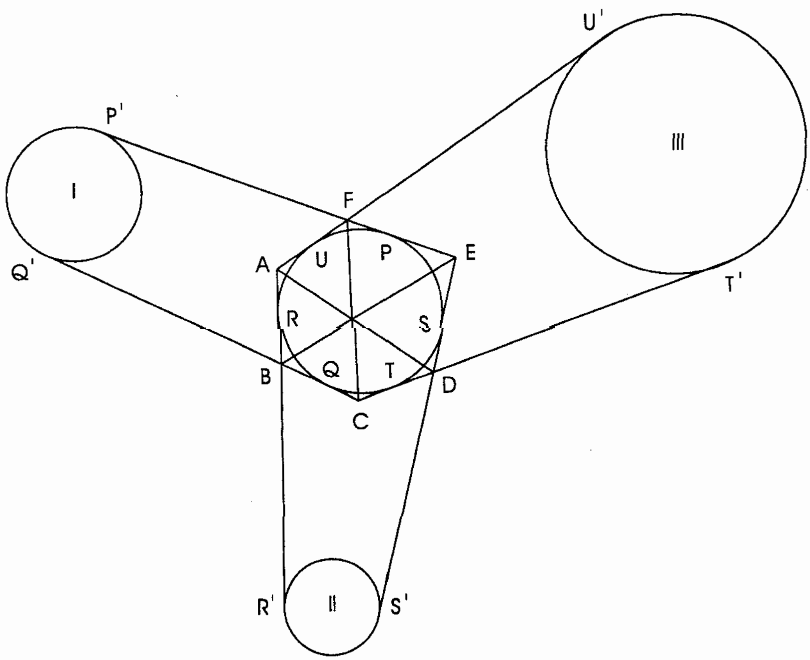
$$\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RS}}{\overline{RD}} = ۱$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که نقطهٔ I روی QR است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که خطهای QP و RS همدیگر را در نقطهٔ J روی AC قطع می‌کنند.

۲۶۵. دورانی به زاویهٔ ۹۰ درجه را در نظر می‌گیریم که مربع را به خودش تبدیل کند؛ در این صورت خطهای راست AK، BK، CK و DK درست روی عمودهایی قرار می‌گیرند که رسم کرده بودیم. در نتیجه، نقطهٔ K به نقطهٔ مشترک این عمودها می‌رود.

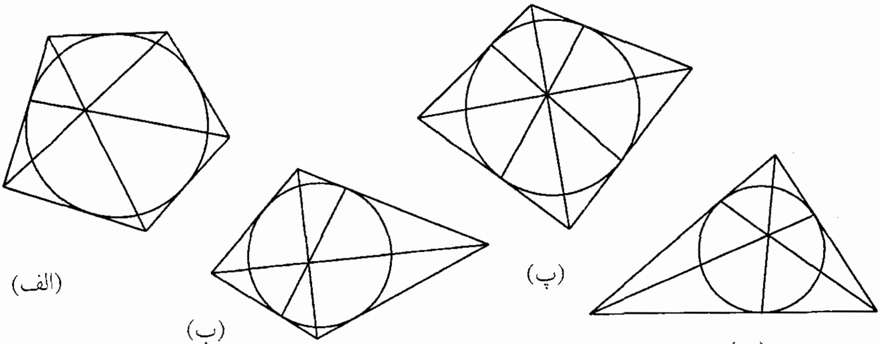
۲۶۶. اگر نقطه‌های برخورد EH و FG با قطر AC را بترتیب M و N بنامیم، ثابت کنید $\frac{EM}{MH} = \frac{FN}{NG}$.

۲۶۹. نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC، CD، DE، EF و FA را با دایرهٔ به ترتیب R، Q، T، S، P و U می‌نامیم و برای سادگی، شش ضلعی ABCDEF را محدب برمی‌گزینیم، که در نتیجه، قطرهای AD، BE، و CF نمی‌توانند متوازی باشند. مطابق شکل روی امتدادهای ضلعهای شش ضلعی



نقطه‌های P'، Q'، R'، S'، T' و U' را چنان انتخاب می‌کنیم که: $PP' = QQ' = RR' = TT' = UU'$ بنابر لم یاد شده در صورت مسأله، سه دایرهٔ I (مماس بر PP' و QQ' در P' و Q')، II (مماس بر RR' و SS' در R' و S') و III (مماس بر TT' و UU' در T' و U') را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که مماسهایی که از یک نقطه بر دایره‌ای رسم شوند، با هم برابرند، یعنی $AR = AU$ و چون داشتیم $RR' = UU'$، پس نتیجه می‌شود که $AR' = AU'$. همچنین داریم: $DS = DT$ و $SS' = TT'$ که نتیجه می‌شود $DS' = DT'$. هر یک از دو نقطهٔ A و D نسبت به دو دایرهٔ II و III دارای یک قوتند. پس خطی که بر این دو نقطه می‌گذرد یعنی خط AD، محور اصلی این دو دایره است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که BE محور اصلی دو دایرهٔ I و II، و CF محور اصلی دو دایرهٔ III و I است. (چنان که پیش از این دیده‌ایم، محورهای اصلی دو به دوی سه دایره غیر متعلق به یک دسته دایره همرسند، یا این که متوازی‌اند). باید توجه داشت که دایره‌های I و II و III نمی‌توانند به یک دسته دایره متعلق باشند، و همچنین قطرهای شش ضلعی نمی‌توانند منطبق باشند. بنابراین برهان گفته شده بدون ایراد است.

۲۷۱. یک شش ضلعی محیط بر دایره را در نظر می‌گیریم. بنابه قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم، در این شش ضلعی، خطهای راستی که رأسهای رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند (نقطهٔ بریانشون). اگر در این شش ضلعی دو نقطهٔ تماس دو ضلع مجاور را روی محیط دایره به هم نزدیک کنیم تا بر هم منطبق شوند، شش ضلعی به پنج ضلعی تبدیل می‌شود (یکی از ضلعهای آن مضاعف است و نقطهٔ تماس آن با دایره را می‌توان یک رأس به حساب آورد). بنابراین، حکم مسأله بریانشون در مورد این شکل هم درست است، یعنی، در هر پنج ضلعی محیط بر دایره، خطهای راستی که دو زوج رأسهای غیر مجاور را به هم وصل می‌کنند، با خط راستی که از رأس پنجم و نقطهٔ تماس ضلع رو به رو می‌گذرد، در یک نقطه به هم می‌رسند. (ش الف)



(الف) (ب) (پ) (ت)

اکنون چهار ضلعی محیط بر یک دایره را، به عنوان شش ضلعی در نظر می‌گیریم، که در آن، دو ضلع مضاعف وجود دارد و نقطه‌های تماس آنها با دایره را می‌توان رأس به حساب آورد. در نتیجه، این حکم را خواهیم داشت: در هر چهار ضلعی قابل محیط بر دایره، دو قطر و خط راستی که نقطه‌های تماس دو ضلع رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند (ش ب).

با توجه به همین حکم، می‌توان به سادگی، حکم کلی زیر را نتیجه گرفت (دلیل آن را خودتان پیدا کنید): در هر چهارضلعی قابل محیط بر دایره، دو قطر و دو خط راستی که نقطه‌های تماس ضلعهای رو به رو را به هم وصل می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند (ش پ).

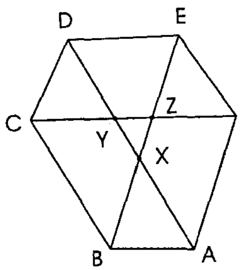
اگر مثلث محیط بر دایره را به عنوان یک شش ضلعی در نظر بگیریم، هر سه ضلع آن مضاعف می‌شوند. رأسهای این شش ضلعی عبارتند از سه رأس مثلث و سه نقطهٔ تماس ضلعهای آن با دایره (روی هم، شش رأس). بنابراین حکم زیر درست است:

در هر مثلث، خطهای راستی که هر رأس را به نقطهٔ تماس ضلع رو به رو با دایرهٔ محاطی وصل می‌کنند، همرسند (ش ت).

۲۷۲. اگر بنا به فرض AB و DE مساوی و موازی باشند، چهار ضلعی ABDE متوازی‌الاضلاع است، و قطرهایش در نقطهٔ O منصف یکدیگرند، چون AF و CD نیز مساوی و موازی‌اند، پس AFDC نیز متوازی‌الاضلاع است، یعنی، AD و FC نیز منصف یکدیگرند، یعنی سه قطر AD ، BE و FC در نقطهٔ O همرسند.

۲۷۳. فرض می‌کنیم، در شش ضلعی ABCDEF ، قطرهای AD ، BE و CF در یک نقطه یکدیگر را قطع نکرده باشند، در این صورت، چون باید داشته باشیم:

$S_{ABX} = S_{XDE}$ و $S_{BCZ} = S_{ZEF}$ ، $S_{CDY} = S_{YAF}$



به این نابرابریها می‌رسیم:

$|AX| . |BX| > |DY| . |EZ|$, $|FZ| . |EZ| > |BX| . |CY|$ و

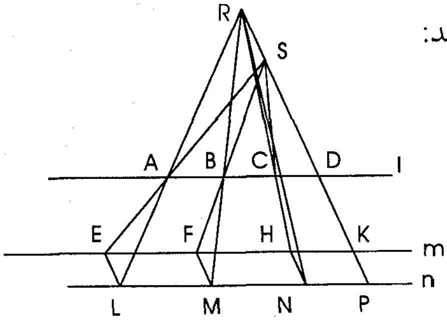
$|CY| . |DY| > |AX| . |FZ|$

که از ضرب آنها در یکدیگر، به یک نابرابری نادرست می‌رسیم؛ یعنی قطرها، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۲۷۴. دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را در نظر می‌گیریم. چون دو مثلث متشابه‌اند، داریم: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$، اگر نقطهٔ برخورد AA' و BB' را O و نقطهٔ تقاطع BB' و CC' را O' بنامیم داریم: $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = k$ و $\frac{O'B}{O'B'} = \frac{O'C}{O'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$، پس: $\frac{OA}{OA'} = \frac{O'A}{O'A'} = k$، بنابراین نقطهٔ O' بر نقطهٔ O منطبق و خطهای AA' ، BB' و CC' همرسند. به همین ترتیب خطهای دیگر که رأسهای متناظر را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ O می‌گذرند.

۳.۳.۵. ثابت کنید خطها همرسند. (در شکلهای دیگر)

۲۷۵. فرض می‌کنیم خطهای راست PS و NC یکدیگر را در نقطهٔ R قطع کنند، در این صورت داریم: $DC : PN = DR : PR$. با توجه به خطهای راست SAE، SBF، SCH و SDK، به دست می‌آید:



$DA:KE=DB : KF=DC: KH$.

و با در نظر گرفتن

$EL \parallel FM \parallel HN \parallel KP$

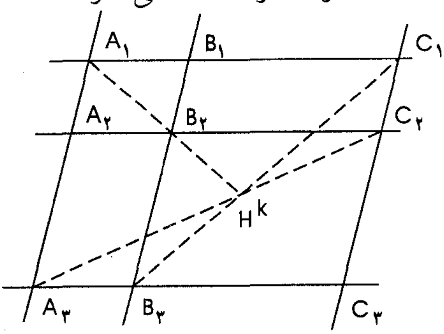
خواهیم داشت:

$KE : PL = KF : PM = KH : PN$

از آن جا: $DA : PL = DB : PM = DC : PN = RD : KP$

و به این ترتیب، خطهای راست AL، BM، CN و SP از نقطهٔ R می‌گذرند.

۲۷۶. خطهای B_3C_1 و C_2A_3، خط A_1B_2 را بترتیب در نقطه‌های H و K قطع می‌کنند. حال ثابت می‌کنیم که این دو نقطه بر هم منطبقند. برای اثبات از قضیهٔ منلائوس در مثلث $A_1B_1B_2$ که به وسیلهٔ مورب B_3HC_1 قطع شده است، و در مثلث $A_1A_2B_2$ که مورب A_3KC_2 آن را قطع کرده است، استفاده می‌کنیم. داریم:



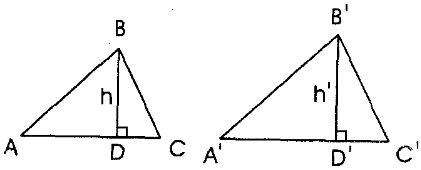
$$\frac{\overline{HB_2}}{\overline{HA_1}} \cdot \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}} \cdot \frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{\overline{KB_2}}{\overline{KA_1}} \cdot \frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} \cdot \frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}} = 1$$

اما: $\frac{\overline{C_2A_2}}{\overline{C_2B_2}} = \frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}}$ و $\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}}$؛ در نتیجه $\frac{\overline{KB_2}}{\overline{KA_1}} = \frac{\overline{HB_2}}{\overline{HA_1}}$.

و این رابطه نشان می‌دهد که دو نقطهٔ H و K بر هم منطبقند.

۲۷۷. هرگاه R نقطهٔ برخورد AB و DE باشد، بنابه قضیهٔ پاپوس، سه نقطهٔ M، N و R بر یک خط راست واقعند؛ یعنی سه خط AB، DE و MN همرسند.

بخش ۶. تشابه



۲۸۲. داریم $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
مساحتهای دو مثلث را A_1 و A_2
می‌نامیم. داریم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

اگر هر یک از کسرهای فوق برابر با k باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم: $\frac{A_2}{A_1} = k^2$.
BD و $B'D'$ را ارتفاعهای رسم شده از رأسهای B و B'، و طولهای آنها را h و h' فرض‌کنیم، داریم: $\hat{A}=\hat{A}'$، زیرا $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. و $A\hat{D}B = A'\hat{D}'B'$، زیرا هر دو قائمه‌اند. پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و $A'B'D'$ متشابه‌اند؛ بنابراین $\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k$ زیرا ضلعهای متناظر، متناسبند.
از این جا نتیجه می‌شود: $h' = kh$ و $b' = kb$؛ اما: $A_1 = \frac{1}{2}bh$ و $A_2 = \frac{1}{2}b'h'$.
پس:

$A_2 = \frac{1}{2}b'h' = \frac{1}{2}(kb)(kh) = \frac{1}{2}k^2bh = k^2A_1$ و در نتیجه $\frac{A_2}{A_1} = k^2$ که نتیجهٔ مطلوب است.

۶.۲.۲. ثابت کنید دو مثلث متشابه‌اند

۲۸۳. با مثلث (الف)، زیرا در این دو مثلث، اندازهٔ زاویه‌ها $45°$، $60°$ و $75°$ می‌باشند.

۲۸۶. با مثلث (الف)، زیرا داریم: $\frac{۸}{۶} = \frac{۱۲}{۹} = \frac{۱۶}{۱۲}$

۲۹۱. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} ah_a = b.h_b = c\,.\,h_c \\ a'.h_{a'} = b'h_{b'} = c'\,.\,h_{c'} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{a'}\,.\,\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{b}{b'}\,.\,\frac{h_b}{h_{b'}} = \frac{c}{c'}\,.\,\frac{h_c}{h_{c'}} \Rightarrow$$

اما بنابه فرض $\frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{h_b}{h_{b'}} = \frac{h_c}{h_{c'}}$ است. پس داریم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ و در نتیجه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

۲۹۴. ۱. این دو مثلث قائم‌الزاویه، در زاویهٔ BAC نیز مشترکند، پس:

$$\frac{AH}{AH'} = \frac{AB}{AC} = \frac{BH}{CH'} \Rightarrow AH\,.\,AC = AH'\,.\,AB$$

۲. چون $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AH'}$ و زاویهٔ A در هر دو مثلث ABC و AHH' مشترک است. پس دو مثلث AHH' و ABC متشابه‌اند.

۳. اگر پای ارتفاع رأس A را H'' بنامیم، مثلثهای $BH'H''$ و CHH'' نیز با مثلث ABC متشابه‌اند.

۲۹۵. ۱. چون $\frac{AG}{AE} = \frac{۲}{۳}$ و $\frac{AA''}{AA'} = \frac{۲}{۳}$ پس $GA'' \parallel A'E$ یعنی $\hat{A}'' = ۹۰^\circ$. به همین ترتیب ثابت می‌گردد که $\hat{A}'' = \hat{B}'' = \hat{C}'' = ۹۰^\circ$ یعنی A''، B'' و C'' بر دایره‌ای به قطر GH قرار گرفته‌اند.

۲. چون پنج ضلعی $B''HA''C''G$ محاطی است، پس: $B''\hat{A}''C'' = B''\hat{H}C'' = \frac{\overset{\frown}{C''GB''}}{۲}$؛ ولی $B''\hat{H}C'' = B\hat{A}C$ چون $HC'' \perp AB$، $B''H \perp AC$. پس به همین ترتیب ثابت می‌گردد که زاویه‌های مثلث ABC با زاویه‌های مثلث $A''B''C''$ برابرند، یعنی دو مثلث متشابه‌اند.

۲۹۶. اگر در مثلثی $a^۲ = bc$ باشد، رابطهٔ $\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_c} = \frac{c}{h_b}$ محرز است، زیرا از تساوی مضاعف $ah_a = bh_b = ch_c$، رابطهٔ $a^۲ = bc$ به دست می‌آید. چون داریم: $a^۲ = \frac{b^۲h_b^۲}{h_a^۲}$

یعنی: $bc = \frac{b^۲.h_b^۲}{h_a^۲}$ یا $c.\,h_a^۲ = b.h_b^۲$ و همچنین $a^۲ = \frac{c^۲h_c^۲}{h_a^۲}$ یعنی: $bc = \frac{c^۲h_c^۲}{h_a^۲}$

یا $c.h_c^2 = b.\ h_a^2$. از رابطه‌های $bh_a^2 = ch_c^2$ و $bh_b^2 = ch_a^2$ نتیجه می‌شود که: $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}$ و یا $\frac{c}{h_b} = \frac{b}{h_c}$ و بنابراین هر دو مقدار با $\frac{a}{h_a}$ برابر می‌باشند، حالت تشابه دیگری وجود ندارد، زیرا برای جمیع امکانات دیگر، مثلث متساوی‌الاضلاع می‌گردد، که حالت بدیهی است. مثلاً اگر $\frac{c}{h_a} = \frac{b}{h_c} = \frac{a}{h_b}$ باشد، می‌شود نشان داد که در این صورت لازم است که $a = b = c$ باشد، زیرا اگر هر جملهٔ تساوی فوق را در دو برابر سطح مثلث ضرب کنیم، یعنی جملهٔ اول را در bh_b و جملهٔ دوم را در ch_c و جمله سوم را در ah_a، خواهیم داشت: $ab = bc = ac$ یعنی $a = b = c$.

اگر در مثلثی $b^۲ + c^۲ = ۲a^۲$ باشد، ملاحظه می‌شود که: $b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲}$ پس: $۲m_a^۲ = \frac{۳}{۲}a^۲$ و یا $m_a = a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و همچنین $a^۲ + b^۲ = ۲m_c^۲ + \frac{c^۲}{۲}$ پس $\frac{c^۲}{۲} + b^۲ = ۲m_c^۲ + \frac{b^۲ + c^۲}{۲}$ و یا $m_c = b\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. و همچنین برای میانهٔ دیگر $m_b = c\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ پس: $\frac{c}{m_b} = \frac{b}{m_c} = \frac{a}{m_a}$؛ و نسبت تجانس یا تشابه $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. حالت دیگری وجود ندارد و می‌توان مانند مسأله قبل ثابت کرد که رابطهٔ: $\frac{c}{m_a} = \frac{b}{m_c} = \frac{a}{m_b}$ به تساوی $a = b = c$ منجر می‌شود، و حالت بدیهی، مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید.

برای نیمسازها اگر حالت تشابهی بین مثلث و مثلث نیمسازها وجود داشته باشد، رابطه‌های $\frac{c}{V_\beta} = \frac{b}{V_\gamma} = \frac{a}{V_\alpha}$، دو رابطهٔ زیر را به دست می‌دهد: ($b - c = ۰$ یا $a^۲=b^۲+c^۲-bc$) و $(b+c)^۲b^۴c^۴=(b^۴+b^۳c-۲b^۲c^۲+bc^۳+c^۴)^۲(b^۲+c^۲-bc)$.

$b - c = ۰$ حالت بدیهی مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌دهد. از: $a^۲ - b^۲ + c^۲ - bc$ معلوم می‌شود که زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰°$ می‌باشد. ولی عبارت دوم که نسبت به b و c متقارن است رابطه‌ای معکوس بین b و c می‌باشد. پس اگر $\lambda = \frac{b}{c}$ فرض کنیم معادلهٔ معکوسهٔ:

$$(\lambda^۴ + \lambda^۳ - ۲\lambda^۲ + \lambda + ۱)^۲(\lambda^۲ - \lambda + ۱) - \lambda^۴(\lambda + ۱)^۲ = ۰$$

را به دست می‌دهد. این معادلهٔ معکوسه به فرض $\lambda + \frac{۱}{\lambda} = z$ به معادلهٔ:

$z^5+z^4-9z^3-z^2+23z-18=0$ تبدیل می‌شود. این معادله دارای ریشهٔ ۲ = λ می‌باشد؛ و ریشه‌های دیگر آن از معادلهٔ $z^4+3z^3-3z^2-7z+9=0$ به دست می‌آید. معادلهٔ اخیر دارای ریشهٔ مثبت نمی‌باشد. (بدیهی است که $\lambda=\frac{a}{c}$ عددی است مثبت)، پس تنها ریشهٔ قابل قبول $z=2$، یعنی $\lambda=1$ می‌باشد. پس $b=c$ و $\hat{A}=60^\circ$، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع خواهد بود. برای نیمسازها حالت تشابهی بین مثلث و مثلث نیمسازها وجود ندارد.

۲۹۷. **اثبات**. این قضیه از سادگی شگفت‌انگیزی برخوردار است؛ چون P بر دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1، $A_2B_1C_2$، $A_3B_3C_2$، $A_2B_2C_1$ و $A_3B_2C_3$ واقع است پس:

$$C_1\hat{A}P=C_1\hat{B}_1P=A_2\hat{B}_1P=A_2\hat{C}_2P=B_3\hat{C}_2P=P\hat{A}_3P$$

و
$$P\hat{A}B_1=P\hat{C}_1B_1=P\hat{C}_1A_2=P\hat{B}_2A_2=P\hat{B}_2C_3=P\hat{A}_3C_3$$

نتیجه می‌شود. دو جزیی که از زاویهٔ A پدید آمده است، با دو جزیی که از زاویهٔ A_3 پدید آمده است، با هم برابرند؛ پس دو زاویهٔ A و A_3 با هم برابرند. همچنین ثابت می‌شود که $\hat{B}$ با $\hat{B}_3$ و $\hat{C}$ با $\hat{C}_3$ برابر است، بنابراین دو مثلث ABC و $A_3B_3C_3$ متشابه‌اند.

اثبات تساوی دو زاویهٔ A و A_3 از راه تساوی اجزای A با اجزایی از B_1 و C_1. سپس با اجزایی از C_2 و B_2 انجام گرفت. این اجزای متساوی در روی شکل با کمانکها نموده شده‌اند. دنبال کردن رشتهٔ این برابریها در روی شکل، و چگونگی رسیدن از A به A_3 بسیار جالب است و همانند حرکت بالهٔ یک دستهٔ به هم پیوسته به نظر می‌آید.

دکتر اوپن‌هیم A. Oppenheim معاون دانشگاه مالزی در سنگاپور، خاصیت بالا را برای مثلثهای عمودی متوالی، تعمیم داده است. وی به جای مثلث یک n ضلعی در نظر گرفته و به این نتیجه رسیده است که n ضلعی عمودی مرتبهٔ nام با آن متشابه است. اثبات این خاصیت در حالت ۴ = n بسیار جالب است.

۳۰۰. از رابطهٔ مفروض نتیجه می‌گیریم $\frac{AM}{AB}=\frac{AC}{AM}$. بنابراین دو مثلث مورد نظر که دارای دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین این دو ضلع مساوی می‌باشند، متشابه‌اند.

۳۰۱. چون در دو مثلث OAC و OAB رابطهٔ $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OA}$ برقرار است و $A\hat{O}C=B\hat{O}A$ می‌باشد، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

۳۰۲. الف، ب و پ

۳۰۳. الف. $MD = \frac{yz}{x}$، ب. خیر

۳۰۴. داریم: ۱. $AB = ۲۸$ ، $AC = ۷۲$ ، $AD = ۲۱$ ، $AE = ۹۶$

$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$ ، $\frac{۲۸}{۹۶} = \frac{۲۱}{۷۲}$ یا $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ و $B\hat{A}D = C\hat{A}E$

۲. از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود که $A\hat{B}D = A\hat{E}C$ پس چهار ضلعی DBCE محاطی است.

۳. $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۳۵}{CE} = \frac{۲۸}{۹۶} \Rightarrow CE = ۱۲۰$

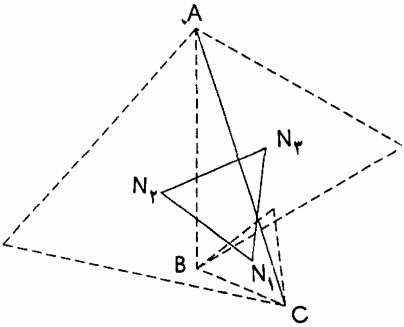
۳۰۶. مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای PCB ، CQA و BAR را بترتیب $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ می‌نامیم. ضلعهای $O_۲O_۳$ ، $O_۳O_۱$ و $O_۱O_۲$ از مثلث $O_۱O_۲O_۳$ بترتیب بر وترهای مشترک (محورهای اصلی) دو به دو از دایره‌ها عمودند و زاویه‌های $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ از این مثلث بترتیب با زاویه‌های P ، Q و R برابرند. با توجه به این که این زاویه‌ها، زاویه‌های غیر متناظر از سه مثلث متشابه‌اند، پس مثلث $O_۱O_۲O_۳$ با سه مثلث بالا، متشابه است.

۳۰۷. می‌دانیم که اگر روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج (یا داخل) مثلث، سه مثلث متشابه PBC ، CQA و BAR را بسازیم، نقطه‌های $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها، مثلث $O_۱O_۲O_۳$ متشابه با مثلثهای فوق را تشکیل می‌دهند. حال اگر مثلثهای ساخته شده روی ضلعها، مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند، مثلث $O_۱O_۲O_۳$ نیز متساوی‌الاضلاع خواهد بود. این مثلث را بنابر آن که مثلثهای متساوی‌الاضلاع در خارج مثلث، یا داخل مثلث ساخته شده باشند، مثلث ناپلئون خارجی و مثلث ناپلئون داخلی مثلث ABC می‌نامند. بنابراین این قضیه را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

قضیه . مثلث ناپلئون خارجی نظیر هر مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

برای اثبات قضیهٔ بالا، غیر از راه ذکر شده، برهانی توسط یاگلوم Yaglom ارائه شده است که در ضمن، اثبات قضیهٔ مشابه زیر را نیز دربر دارد:

قضیه . مثلث ناپلئون داخلی هر مثلث، متساوی‌الاضلاع است.



برهان. با فرض $CB = a$ ، $AC = b$ و $BA = c$ داریم $AO_۲ = \frac{b}{\sqrt{۳}}$ و $AO_۳ = \frac{c}{\sqrt{۳}}$ ، و چون اندازهٔ زاویهٔ $O_۳\hat{A}O_۲$ برابر $\hat{A} + ۶۰^\circ$ است، بنابه قانون کسینوسها در مثلث $AO_۳O_۲$ داریم:

$$\overline{O_۳O_۲^۲} = \frac{۱}{۳} b^۲ + \frac{۱}{۳} c^۲ - \frac{۲}{۳} bc \cos (\hat{A} + ۶۰^\circ)$$

رأسهای $N_۲$ و $N_۳$ از مثلث ناپلئون داخلی به ترتیب، قرینه‌های $O_۲$ و $O_۳$ نسبت به CA و CB می‌باشند و به علاوه زاویهٔ $N_۳AN_۲$ برابر است با $\hat{A} - ۶۰^\circ$ و نتیجه می‌شود:

$$\overline{N_۳N_۲^۲} = \frac{۱}{۳} b^۲ + \frac{۱}{۳} c^۲ - \frac{۲}{۳} bc \cos (\hat{A} - ۶۰^\circ)$$

از دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\overline{O_۳O_۲^۲} - \overline{N_۳N_۲^۲} = \frac{۲}{۳} bc [\cos (\hat{A} - ۶۰^\circ) - \cos(\hat{A} + ۶۰^\circ)]$$

$$= \frac{۴}{۳} bc \sin A \sin ۶۰^\circ = \frac{۲}{\sqrt{۳}} bc \sin \hat{A}$$

$$= \frac{۴}{\sqrt{۳}} S (ABC)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\overline{O_۱O_۲^۲} - \overline{N_۱N_۲^۲} = \overline{O_۳O_۱^۲} - \overline{N_۳N_۱^۲} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} S (ABC)$$

و چون $O_۱O_۲ = O_۳O_۱ = O_۲O_۳$ پس: $N_۱N_۲ = N_۳N_۱ = N_۲N_۳$ بالاخره

چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ برابر مربع یک ضلع آن، پس می‌توانیم نتیجهٔ مهم زیر را بیان کنیم:

قضیه. تفاضل مساحتهای دو مثلث ناپلئون خارجی و داخلی نظیر هر مثلث، برابر است با مساحت آن مثلث.

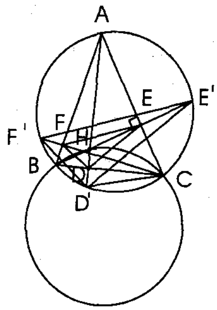
دستور صحیح مربوط به این قضیه با در نظر گرفتن جهت نامگذاری مثلثها به صورت زیر است:

$$S(O_1O_2O_3) - S(N_3N_2N_1) = S(ABC)$$

به عبارت دیگر:

$$S(O_1O_2O_3) + S(N_1N_2N_3) = S(ABC)$$

۳۱۰. نقطه‌های D، E و F بترتیب وسطهای پاره‌خطهای HD'، HE' و HF' می‌باشند. در نتیجه ضلعهای مثلث $D'E'F'$ با ضلعهای مثلث ارتفاعی موازی‌اند و دو مثلث متشابه‌اند.



۶.۲.۳. دو مثلث متشابه‌اند، مطلوب است:

۶.۲.۳.۱. رابطه بین زاویه‌ها

۳۱۴. چهار ضلعی MKLQ متوازی‌الاضلاع است.

۶.۲.۳.۲. اندازهٔ ضلع مثلث

۳۱۶. ۱۵cm

۳۱۷. $۷\sqrt{۱۱}$

۳۱۸. $EF = \frac{۴۰}{۳}$

۳۲۳. $x = ۱۰$ و $y = ۵$

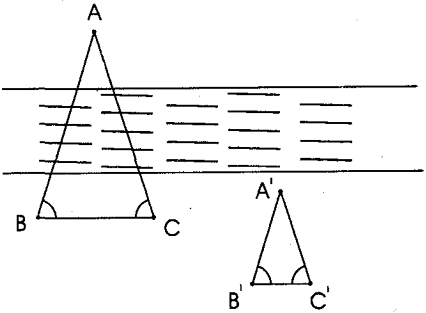
۳۲۵. داریم: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} \Rightarrow \frac{۵}{a'} = \frac{۴}{b'} = \frac{۶}{c'} = \frac{۱۵}{۲۰} = \frac{۳}{۴}$

$$\Rightarrow a' = \frac{۲۰}{۳} \quad , \quad b' = \frac{۱۶}{۳} \quad , \quad c' = ۸$$

۳۲۶. ۵، ۱۹/۲ و ۲۸/۸ سانتیمتر.

۳۲۷. مثلث داده شده قائم‌الزاویه است و مثلث متشابه با آن، ضلعهایش ۳k، ۴k و ۵k است.

۳۲۸. $AE = ۱۵$ و $EC = ۵$



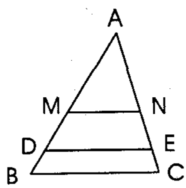
۳۳۰. برای این کار نقطهٔ C را به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از نقطهٔ B اختیار می‌کنیم و اندازهٔ زاویه‌های BAC و ABC را تعیین می‌کنیم؛ سپس مثلث $A'B'C'$ را متشابه با مثلث ABC می‌سازیم به قسمی که $\hat{B}' = \hat{B}$ و $\hat{C}' = \hat{C}$ باشد. آن‌گاه با اندازه‌گیری پاره‌خطهای $B'C'$ و $A'B'$، طول پاره خط AB یعنی فاصلهٔ نقطهٔ B از A را به‌دست می‌آوریم.

با شرایط بالا در صورتی که $B'C' = ۸$ و $A'B' = ۱۵/۵$ باشند، فاصلهٔ نقطهٔ B از نقطهٔ A را تعیین کنید.

نکته . برای ساده‌تر شدن محاسبه، می‌توان BC را در امتداد عمود بر AB اختیار نمود.

۶.۲.۳.۳. اندازهٔ پاره‌خط

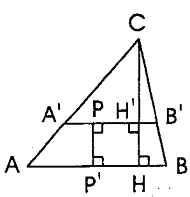
۳۳۱. گزینهٔ (الف) درست است زیرا داریم:



$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۲}{۳}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{DE}{۱۵}$$

$$\Rightarrow\ DE=\frac{۱۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=۵\sqrt{۶}$$

۳۳۲. گزینهٔ (د) جواب است، زیرا اگر نقطه‌های برخورد خطی که از نقطهٔ P موازی ضلع AB رسم می‌شود با ضلعهای AC و BC را، بترتیب A' و B' بنامیم داریم:



$$\left(\frac{CH'}{CH}\right)^{۲}=\frac{S_{CA'B'}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{CH'}{۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow CH'=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ H'H = PP' = ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow PP' = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۳۳. $CM = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳۳۴. چون داریم: $S_{EBF} = S_{DEFG} = S_{ADGC}$، بنابراین مساحت مثلث EBF نصف مساحت مثلث DBG و ثلث مساحت مثلث ABC می‌باشد، از آن جا با توجه به متشابه بودن این مثلثها، می‌توان نوشت: $EB^۲ : DB^۲ : AB^۲ = ۱:۲:۳$ و با فرض $AB = a$ به سادگی جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$EB = \frac{a}{\sqrt{۳}}\ ,\ DE = \frac{a}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۲}-۱)\ \text{و}\ AD = \frac{a}{\sqrt{۳}}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

۳۳۶. $\frac{BC}{FH} = \frac{AD}{EG} \Rightarrow \frac{x}{x-۳} = \frac{۲۴}{۱۸} \Rightarrow x = ۱۲$

۴.۳.۲.۶. اندازهٔ محیط مثلث، نسبت محیطها

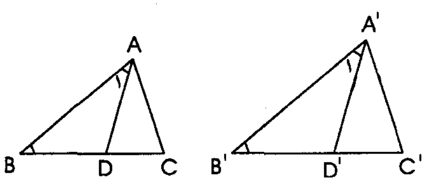
۳۳۷. محیط مثلث GHI، برابر ۱۰۰ است.

۳۳۸. محیط = ۴۵

۳۳۹. نسبت محیطهای این دو مثلث $\frac{۴}{۵}$ است.

۵.۳.۲.۶. نسبت تشابه

۳۴۰. اگر AD و $A'D'$ نیمسازهای زاویهٔ داخلی A و A' از مثلثهای متشابه ABC و $A'B'C'$ باشند، دو مثلث ABD و $A'B'D'$ متشابه‌اند، زیرا $\hat{A}_۱ = \hat{A'}_۱$ و $\hat{B} = \hat{B'}$ پس: $\frac{d_a'}{d_a} = \frac{c'}{c}$ یا $\frac{A'D'}{AD} = \frac{A'B'}{AB}$



۳۴۴. $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۶.۳.۲.۶. اندازهٔ مساحت مثلث

۳۴۵. داریم:

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^۲\ \text{و}\ a = ۵a'\ \text{و}\ \frac{S}{۶} = \left(\frac{۵a'}{a'}\right)^۲ \Rightarrow S = ۱۵۰cm^۲$$

۳۴۶. $S = ۱۶۲$

۳۴۷. $S_{ABC} = ۹S_{CDE}$ و $S_{ABC} = ۴۵$

۷.۳.۲.۶. نسبت مساحتها

۳۴۸. $\frac{S}{S'} = (\frac{۵}{۶})^۲ = \frac{۲۵}{۳۶}$

۳۵۰. دو مثلث متشابه‌اند، زیرا داریم: $\frac{۱}{۲} = \frac{۲۵}{۴۰} = \frac{۱۷/۵}{۳۵} = \frac{۲۵}{۵۰}$ پس $\frac{S'}{S} = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$

۳۵۱. دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس نسبت مساحتها مساوی $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

۳۵۳. چون $HG \parallel PQ$ و $HG = \frac{۱}{۲} PQ$ است، پس: $\Delta HRG \sim \Delta RPQ$ و داریم:

$$\frac{S_{GHR}}{S_{PQR}} = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{GHR}}{S_{HGPQ}} = \frac{۱}{۳}$$

۸.۳.۲.۶. رابطه‌های متری

۳۵۵. الف. داریم: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^۲ = AD \,.\, BC$

ب. ضلعهای متناظر دو مثلث متناسبند، پس این دو مثلث متشابه می‌باشند.

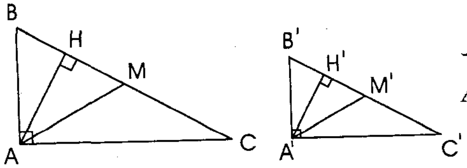
۹.۳.۲.۶. سایر موارد مربوط به این قسمت

۳۵۶. از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود $\hat{R} = \hat{A}$، پس $RT \parallel AB$ است.

۲.۳.۶. ثابت کنید دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند.

۳۶۶. دو مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ و $A'B'C'$ $(\hat{A'} = ۹۰^\circ)$ را در نظر می‌گیریم ارتفاعهای AH و $A'H'$ را رسم کرده از A و A' بترتیب به نقطه‌های M وسط BC و M' وسط $B'C'$ وصل می‌کنیم. می‌دانیم که $AM = \frac{۱}{۲} BC$ و $A'M' = \frac{۱}{۲} B'C'$. دو مثلث قائم‌الزاویه AMH و $A'M'H'$ متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ ،\ \frac{AH}{A'H'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{۲AM}{۲A'M'}$$



در نتیجه $A'\hat{M}'H' = A\hat{M}H$ و یا $\hat{B} = \hat{B}'$ و یا $۲B' = ۲\hat{B}$ پس دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند.

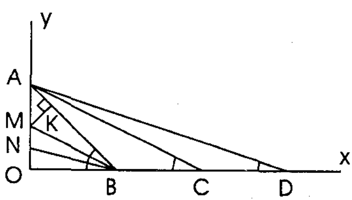
۳۶۷. ثابت کنید $B'C'$ موازی BC و عمودمنصف پاره‌خط AD' است.

۳۶۸. ۱. ضلعهای مجاور به زاویه‌های قائمه در این دو مثلث، متناسبند، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

۲. چون $B\hat{A}H = H\hat{A}C = E\hat{A}M$ است، $EM = MA$ است و به دلیل مشابه $DM = MA$ است پس $EM = MA = MD$ ، یعنی نقطهٔ M وسط پاره‌خط DE است.

۶.۳.۳. دو مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند، مطلوب است:

۶.۳.۳.۱. اندازهٔ زاویه، رابطهٔ بین زاویه‌ها



۳۷۲. از نقطهٔ B خطی موازی خط AD رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ N قطع کند. خط BM نیز با خط AC موازی است زیرا وسطهای دو ضلع OC و OA از مثلث OAC را به هم وصل کرده است:

۱. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ NOB و BMK متشابه‌اند زیرا:

$$MK = AK = \frac{a}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a\sqrt{۲}}{۴} \quad \text{و} \quad MB^۲ = OB^۲ + OM^۲ = a^۲ + \frac{a^۲}{۴} = \frac{۵a^۲}{۴} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MB = \frac{a\sqrt{۵}}{۲}$$

$$ON = \frac{OA}{۳} = \frac{a}{۳} \Rightarrow NB^۲ = OB^۲ + ON^۲ = a^۲ + \frac{a^۲}{۹} = \frac{۱۰a^۲}{۹} \Rightarrow NB = \frac{a\sqrt{۱۰}}{۳},$$

$$\frac{NO}{MK} = \frac{a}{۳} : \frac{a\sqrt{۲}}{۴} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \quad NB : MB = a\sqrt{۱۰} : \frac{a\sqrt{۵}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow \frac{NO}{MK} = \frac{NB}{MB}$$

$$\hat{K} = \hat{O} = ۹۰^\circ \Rightarrow \Delta NOB \sim \Delta MBK$$

۲. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ بالا و $AD \parallel NB$ داریم: $M\hat{B}K=N\hat{B}O=A\hat{D}O$.

از طرفی $M\hat{B}O = A\hat{C}O$. پس:

$$A\hat{B}O = A\hat{B}M + M\hat{B}O \Rightarrow A\hat{B}O = A\hat{D}O + A\hat{C}O$$

۶.۳.۳.۲. اندازهٔ ضلع

۳۷۳. $y = \frac{۷}{۳} x$

۳۷۴. $AC = ۱۳$ ، $DR = ۱۴$

۳۷۵. $BC = ۱۲m$

۳۷۶. عرض رودخانه ۳۶ متر است.

۳۷۸. داریم: $\frac{x}{x + ۱۵۰۷۰۶۴۰۰} = \frac{۶۴۰۰}{۷۰۰۰۰۰۰} \Rightarrow x = \frac{۱۲۰۵۶۵۱۲۰۰}{۸۶۷}$

۳۷۹. الف. از تشابه مثلثها. اگر ارتفاع درخت را h بنامیم، اندازهٔ h بر حسب سانتیمتر از دستور $h = ۱۰۰ \times \frac{۶۰۰}{AB} + ۱۵۰$ که در آن AB بر حسب سانتی‌متر است به دست می‌آید.

ب. $h = ۲۵۵۰\ cm$ یا ۲۵/۵ متر

۶.۳.۳.۳. اندازهٔ پاره خط، نسبت بین دو پاره‌خط

۳۸۰. ۱. داریم:

$$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta BCD \sim \Delta DBE \sim \Delta DCE \sim \Delta DCF \sim \Delta ADF$$

۲. الف. CD، ب. FD، پ. DE، ت. CD ، ث. AC، ج. CD

۶.۳.۳.۴. رابطه‌های متری

۳۸۱. ۱. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'K$ و $AA'H$، $\hat{K} = \hat{H} = ۹۰^\circ$ و $O\hat{B}B' = O\hat{A}A'$، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

۲. داریم:

$$\Delta OAA' \sim \Delta OBB' \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad (۱)$$

$$\Delta OHA' \sim \Delta OKB' \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{OA'}{OB'} \quad (۲)$$

$$(1) و (2) \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OH}{OK} \Rightarrow OB \,.\, OH = OA \,.\, OK$$

۳. در مثلث OAB، از رابطهٔ $\frac{OK}{OB} = \frac{OH}{OA}$ نتیجه می‌شود که $AB \parallel KH$ است.

۶.۴.۲. ثابت کنید دو مثلث متساوی‌الساقین متشابه‌اند

۳۸۷. خیر، زیرا متناظر بودن این دو زاویه مشخص نشده است. ممکن است که در یک مثلث، زاویهٔ رأس 40° باشد، ولی در مثلث دیگر هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعده 40° باشند؛ در صورتی که در هر دو مثلث زاویهٔ رأس 40° باشد، و یا در هر دو مثلث زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ 40° باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

۶.۵.۱. تشابه در متوازی‌الاضلاع

۳۸۹. فرض می‌کنیم در دو متوازی‌الاضلاع ABCD و $A'B'C'D'$ داشته باشیم، $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$؛ از این فرض نتیجه می‌شود: $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ و $\hat{D} = \hat{D}'$ و $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'}$. پس، در این دو متوازی‌الاضلاع، زاویه‌ها متساوی، و ضلعهای متناظر آنها، متناسب می‌باشند، لذا متشابه‌اند.

۳۹۱. دو مثلث قائم‌الزاویه OAA' و OCC' با هم برابرند. ($\hat{A}' = \hat{B}' = 90^\circ$ و $OA = OC$) پس $OA' = OC'$ و به همین ترتیب $OB' = OD'$ است. پس $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.

از طرفی مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAA' و ODD' متشابه‌اند، پس $\frac{OA}{OD} = \frac{OA'}{OD'}$ یا $\frac{AC}{DB} = \frac{A'C'}{D'B'}$، پس دو متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ و ABCD که قطرهایشان متناسب و زاویهٔ بین دو قطرشان برابر است، متشابه‌اند.

۳۹۵. در این دو مثلث داریم: $\hat{D} = \hat{B}$ و $A\hat{N}D = M\hat{A}B$. بنابراین متشابه می‌باشند و داریم: $\frac{BM}{AD} = \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{DN}$. از آن جا: $AM . AD = AN . BM$.

۳۹۶. ثابت کنید $AE = EB$ و $AD = DC$ است.

۲.۵.۶. تشابه در مستطیل

۳۹۷. الف. خیر، ب. بلی، ج. خیر، زیرا: $\frac{۲۷}{۱۸} \neq \frac{۵۶}{۲۴}$ یا $\frac{۳}{۲} \neq \frac{۷}{۳}$

۳۹۹. چهار ضلعی $ABCD$ را که قطرهایش بر هم عمودند، در نظر می‌گیریم.
اگر مستطیل $MNPQ$ یکی از مستطیلهایی باشد که محیط بر چهارضلعی $ABCD$ است، کافی است ثابت کنیم که نسبت $\frac{MN}{MQ}$ مقداری ثابت است. برای این کار AA' و BB' را عمود بر NP و PQ رسم می‌کنیم. زاویه‌های حادهٔ CAA' و DBB' برابرند (ضلعهایشان بر هم عمودند). لذا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CAA' و DBB' متشابه‌اند و داریم $\frac{AC}{BD} = \frac{AA'}{BB'}$ یا $\frac{AC}{BD} = \frac{MN}{PQ}$؛ پس $\frac{MN}{PQ}$ مقداری است ثابت.

۴۰۲. اگر ضلعهای مستطیل مورد نظر را a' و b' بنامیم با فرض، $a' = ak$ و $b' = bk$ داریم: $k = \frac{۲(a + b)}{ab}$

۴۰۳. گزینهٔ (پ) درست است، زیرا:

$$\frac{S'}{S} = \frac{۱}{۲} = k^۲ \Rightarrow k = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow d' = k . d = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۰ = ۵\sqrt{۲}\,cm$$

۳.۵.۶. تشابه در مربع

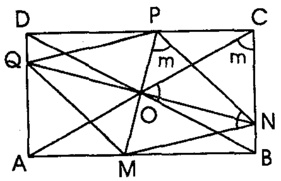
۴۰۴. زاویه‌های حادهٔ AGD و CFG و EBF برابرند.

۴.۵.۶. تشابه در لوزی

۴۰۵. گزینهٔ (الف) نادرست، و گزارهٔ (ب) درست است.

۴۰۶. نقطهٔ برخورد قطرهای همه لوزیهای محاط در یک مستطیل، بر مرکز مستطیل منطبق است. زیرا اگر قطر PM لوزی با قطر AC مستطیل در O متقاطع باشند، از تساوی دو مثلث POC و MOA نتیجه می‌شود $OP = OM$ و $OA = OC$؛

یعنی O وسط هر یک از دو قطر AC و PM است.



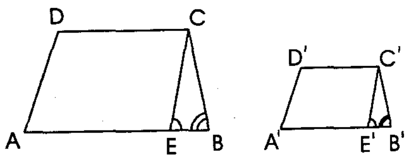
حال گوییم چهارضلعی ONCP محاطی است؛ پس دو زاویهٔ m برابرند و در دو مثلث متساوی‌الساقین MNP و BOC داریم $M\hat{N}P = B\hat{O}C$.

پس زاویه‌های لوزی مساوی با زاویه‌های بین قطرهای مستطیل هستند. از آن جا لوزیهای محاط در یک مستطیل دارای زاویه‌های متساوی‌اند، پس همواره متشابه‌اند.

۶.۵.۵. تشابه در ذوزنقه

۴۰۸. بنابه فرض داریم:

$\hat{B} = \hat{B}'$ و $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$

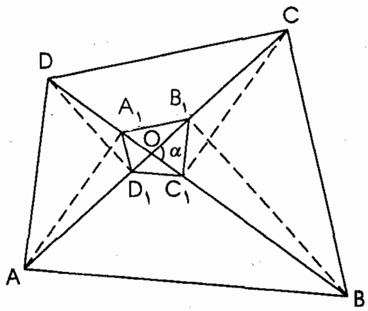


و $\hat{A} = \hat{A}'$ پس زاویه‌های متناظر دو ذوزنقه با هم برابرند. از C و C' خطهای CE و C'E' را موازی DA و D'A' رسم می‌کنیم. دو مثلث EBC و E'B'C' متشابه‌اند، زیرا: $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{E} = \hat{E}'$. پس داریم:

$\frac{CE}{C'E'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{EB}{E'B'}$. از طرفی $AD = CE$ و $C'E' = A'D'$ و $\frac{EB}{E'B'} = \frac{AB - CD}{A'B' - C'D'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AB}{A'B'}$ است. پس:

$\frac{DA}{D'A'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$؛ و چون زاویه‌های متناظر دو ذوزنقه نیز برابرند، بنابراین این دو ذوزنقه متشابه می‌باشند.

۶.۵.۶ تشابه در چهارضلعیهای غیرمشخص



۴۰۹. A_1، B_1، C_1 و D_1 را پای عمودهایی می‌گیریم که بترتیب، از رأسهای A، B، C و D بر قطرهای BD و AC رسم شده‌اند. فرض می‌کنیم، دو قطر، در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند و زاویهٔ حاده بین دو قطر برابر α باشد، در این صورت داریم:

$OA_1 = OA.\cos\alpha$ و $OB_1 = OB.\cos\alpha$ و

$OC_1 = OC\ .\ \cos\alpha$ و $OD_1 = OD.\cos\alpha$

بنابراین، مثلثهای A_1OB_1، B_1OC_1، C_1OD_1 و D_1OA_1 با مثلثهای AOB، BOC، COD و DOA متشابه‌اند و، ضریب تشابه، برابر است با $\cos\alpha$؛ از این جا، نتیجه می‌گیریم که چهارضلعیهای ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ هم، متشابه با یکدیگرند.

تبصره ـ یادآوری می‌کنیم که می‌توان چهارضلعی دوم را، از چهارضلعی اول، با تبدیلهای زیر به دست آورد: تقارن نسبت به نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر و، سپس تجانس به مرکز O و ضریب $\cos\alpha$.

۴۱۲. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که در دو چهارضلعی داده شده، ضلعهای متناظر متناسبند یعنی:

$$\frac{a}{a'} = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{c}{c'} = k$$

و زاویه‌های متناظر همنهشتند یعنی:

$\hat{P} = \hat{P}'$ و $P\hat{Q}R = P'\hat{Q}'R'$ و $\hat{R} = \hat{R}'$ و $P\hat{S}R = P'\hat{S}'R'$.

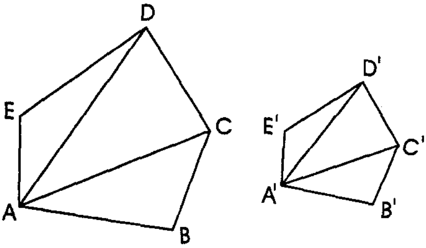
پس دو چهار ضلعی با هم متشابه‌اند و بنابراین نسبت مساحتهای آنها برابر مجذور نسبت تشابه دو چهارضلعی است.

۷.۵.۶. تشابه در چندضلعیها

۴۱۳. اگر دو چندضلعی متشابه باشند، در این صورت، مثلثهای پدید آمده ضلعهای

متناظرشان متناسب و زاویه‌های نظیرشان با هم برابر است؛ پس متشابه‌اند؛ و بعکس، اگر این مثلثها متشابه باشند ضلعهای دو چندضلعی متناسب و زاویه‌های نظیرشان برابرند؛ پس دو چندضلعی متشابه‌اند.

۴۱۴. با رسم قطرهایی از دو چندضلعی که از یک رأس رسم می‌شوند، چند ضلعی به مثلثهای متشابهی با نسبت تشابه k تبدیل می‌شود که اگر مساحت این مثلثها را $S_{۱}$ ، $S_{۲}$ ، $S_{۳}$ ، ... و S_{n} ، و $S'_{۱}$ ، $S'_{۲}$ ، $S'_{۳}$ ، ... و S'_{n} ، بنامیم داریم:



$$\frac{S'_{۱}}{S_{۱}} = \frac{S'_{۲}}{S_{۲}} = \frac{S'_{۳}}{S_{۳}} = \dots = \frac{S'_{n}}{S_{n}} = \frac{S'_{۱} + S'_{۲} + S'_{۳} + \dots + S'_{n}}{S_{۱} + S_{۲} + S_{۳} + \dots + S_{n}} =$$
$$= \frac{S'}{S} = k^{۲}$$

۴۱۵. اگر a ، b و c بترتیب وتر و ضلعهای زاویهٔ قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه، و S ، S' و S'' بترتیب مساحتهای چند ضلعیهای رسم شده بر آنها باشند، چون این چندضلعیها متشابه‌اند داریم:

$$\frac{S}{a^{۲}} = \frac{S'}{b^{۲}} = \frac{S''}{c^{۲}} = \frac{S' + S''}{b^{۲} + c^{۲}}$$

و با توجه به رابطهٔ $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$ داریم: $S = S' + S''$

۴۱۶. دو مثلث BDC و B´D´C´ به دلیل برابری دو زاویه، متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{C} = \hat{C}' \quad , \quad \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{B}'}{۲}$$

بنابراین:

$$\frac{DB}{D'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{EC}{E'C'}$$

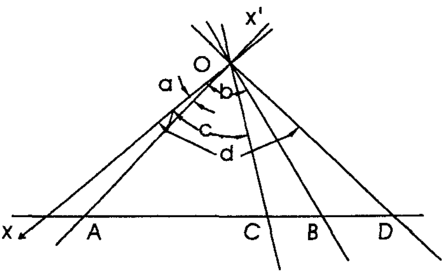
۴۱۸. داریم:

$$\text{نسبت محیطها} = \frac{۱۵}{۱۸} = \frac{۵}{۶} ،$$
$$\text{نسبت مساحتها} = \left(\frac{۱۵}{۱۸}\right)^{۲} = \left(\frac{۵}{۶}\right)^{۲} = \frac{۲۵}{۳۶}$$

۴۱۹. ۱۰۸ سانتیمترمربع.

بخش ۷. تقسیم توافقی (نسبت همساز)

۴۲۶. دستگاه توافقی $(O - ABCD)$ را در نظر می‌گیریم. محور دلخواه $x'ox$ را رسم می‌کنیم و زاویهٔ خطهای OA، OB، OC و OD با این محور را بترتیب a، b، c و d می‌نامیم.



بنابه خاصیت دستگاه توافقی داریم:

$$\frac{\sin(OA \text{ و } OC)}{\sin(OB \text{ و } OC)} = -\frac{\sin(OA \text{ و } OD)}{\sin(OB \text{ و } OD)} \quad (۱)$$

اما: $(OA \text{ و } OC) = (Ox \text{ و } OC) - (Ox \text{ و } OA) = c - a$ به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$(OB \text{ و } OD) = d - b$ و $(OA \text{ و } OD) = d - a$ و $(OB \text{ و } OC) = c - b$

با جایگزینی مقدارهای فوق در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\frac{\sin(c-a)}{\sin(c-b)} = -\frac{\sin(d-a)}{\sin(d-b)} \Rightarrow \frac{\sin c \cos a - \cos c \sin a}{\sin c \cos b - \cos c \sin b} =$$

$$= \frac{\sin d \cos a - \cos d \sin a}{\sin d \cos b - \cos d \sin b} \Rightarrow \frac{\cos a \cos c\,(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a)}{\cos b \cos c\,(\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b)} =$$

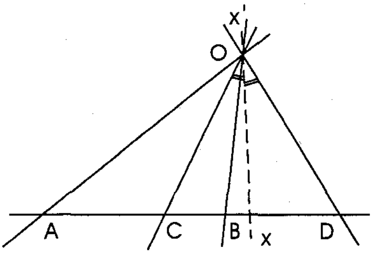
$$= \frac{\cos a \cos d\,(\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} a)}{\cos d \cos b\,(\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} b)}$$

اما $tga = m_A$، $tgb = m_B$، $tgc = m_C$ و $tgd = m_D$ است پس:

$$\frac{m_C - m_A}{m_C - m_B} = -\frac{m_D - m_A}{m_D - m_B} \Rightarrow ۲(m_A \cdot m_B + m_C \cdot m_D) =$$

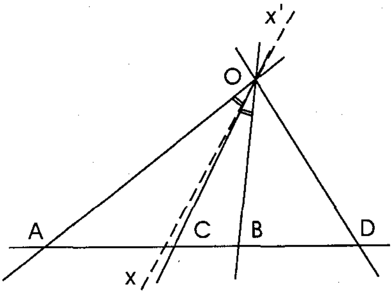
$$(m_A+m_B)(m_C+ m_D). \qquad (۱)$$

حالتهای خاص



الف . اگر نیمساز زاویهٔ دو شعاع مزدوج، مثلاً نیمساز زاویهٔ COD را محور ox اختیار کنیم خواهیم داشت: $m_C = - m_D$. پس رابطهٔ (۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$m_C^۲ = m_D^۲ = m_A \cdot m_B$$



ب. اگر نیمساز زاویهٔ بین دو شعاع مزدوج OA و OB، یعنی نیمساز زاویهٔ AOB را محور ox اختیار کنیم، خواهیم داشت: $m_A = - m_B$ و رابطهٔ (۱) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$m_A{}^۲ = m_B{}^۲ = m_C \cdot m_D$$

پ . اگر محور ox را منطبق بر یکی از شعاعهای دستگاه توافقی اختیار کنیم یکی از حالتهای زیر را خواهیم داشت:

۱) ox منطبق بر OA باشد. $\Rightarrow m_A = ۰ \Rightarrow ۲m_C \cdot m_D = m_B \cdot (m_C + m_D)$

$$\Rightarrow \frac{۲}{m_B} = \frac{۱}{m_C} + \frac{۱}{m_D}$$

۲) ox منطبق بر OB باشد. $\Rightarrow m_B = ۰ \Rightarrow ۲m_C \cdot m_D = m_A \cdot (m_C + m_D)$

$$\Rightarrow \frac{۲}{m_A} = \frac{۱}{m_C} + \frac{۱}{m_D}$$

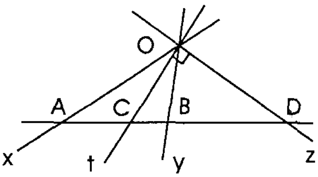
۳) باشد ox منطبق بر OC $\Rightarrow m_C = 0 \Rightarrow 2m_A \cdot m_B = m_D \cdot (m_A + m_B)$

$$\Rightarrow \frac{2}{m_D} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}$$

۴) باشد ox منطبق بر OD $\Rightarrow m_D = 0 \Rightarrow 2m_A \cdot m_B = m_C \cdot (m_A + m_B)$

$$\Rightarrow \frac{2}{m_C} = \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}$$

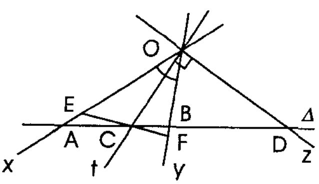
۴۲۷. اگر ox و oy دو خط متقاطع، و Ot و oz نیمسازهای زاویه‌های بین آنها باشند، خط دلخواه Δ را چنان رسم می‌کنیم تا ox ، oy ، ot و oz را بترتیب در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کند. چون OC و OD نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط می‌باشند، بنابه خاصیت نیمسازها داریم:



$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \ (1) \quad \text{و} \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \ (2)$$

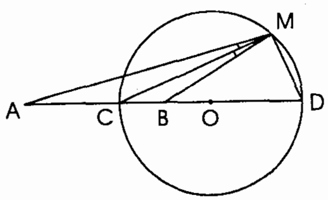
از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به جهت آنها نتیجه می‌شود: $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ ، (۳). یعنی (ABCD) یک تقسیم توافقی است و در نتیجه (O . ABCD) دستگاه توافقی است.

۴۲۸. دستگاه توافقی o - xytz را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه توافقی دو شعاع ot و oz بر هم عمودند. می‌خواهیم ثابت کنیم که این دو خط نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ xoy می‌باشند. فرض می‌کنیم خط Δ شعاعهای



این دستگاه را در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کرده باشد، یعنی (ABCD) یک تقسیم توافقی باشد. از نقطهٔ C خطی موازی شعاع oz رسم می‌کنیم تا شعاعهای ox و oy را بترتیب در E و F قطع کند، می‌دانیم که $CE = CF$ است؛ از طرفی $OD \parallel EF$ ؛ پس EF عمود بر OC است. بنابراین در مثلث OEF ، خط OC عمود منصف ضلع EF است، پس نیمساز زاویهٔ EOF یا xoy می‌باشد. از آن جا OD نیمساز زاویهٔ خارجی xoy است.

۴۲۹. دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم و خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، یعنی: $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ (۱) باشد؛ دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است زیرا:

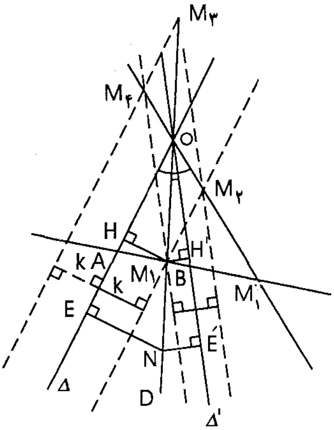


۱. هر نقطه مانند M ، که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k یعنی $\frac{MA}{MB} = k$ (۲) باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A ، B ، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ ؛ اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند، که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $\widehat{CMD} = 90^\circ$ ، در نتیجه نقطهٔ M روی دایره‌ای به قطر CD واقع است.

۲. هر نقطه مانند M که روی این دایره باشد، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A ، B ، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) تقسیم توافقی است،سپس دستگاه $(M - ABCD)$ توافقی می‌باشد، که چون دو شعاع غیر مجاورش یعنی MC و MD بر هم عمودند. پس این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی بین دو شعاع دیگر است. یعنی

MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم که نیمسازهای هر زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند، پس داریم $k = \frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند. Apollonian Circle

۴۳۰. دو خط Δ و Δ' را که در نقطهٔ O متقاطعند، در نظر می‌گیریم. خطهای Δ_1، Δ_2 را که به فاصلهٔ k از خط Δ قرار دارند، و خطهای Δ'_1 و Δ'_2 را که به فاصلهٔ ۱ از خط Δ' می‌باشند، رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد این خطها را M_1، M_2، M_3 و M_4 می‌نامیم. خطهای M_1M_3 یا D و M_2M_4 یا D'، قطرهای متوازی‌الاضلاع $M_1M_2M_3M_4$ را که از نقطهٔ O می‌گذرند رسم می‌کنیم. این خطها، مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای هستند که نسبت فاصله‌اش از دو خط Δ و Δ' برابر k است. زیرا اگر N نقطهٔ دلخواهی واقع بر یکی از این خطها مثلاً روی OM_1 باشد، و از این نقطه عمودهای NE و NE' را بر Δ و Δ' فرود آوریم، داریم:



$$\Delta ONE : NE \parallel M_1H \Rightarrow \frac{OM_1}{ON} = \frac{M_1H}{NE} \quad (۱)$$

$$\Delta ONE' : NE' \parallel M_1H' \Rightarrow \frac{OM_1}{ON} = \frac{M_1H'}{NE'} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{M_1H}{NE} = \frac{M_1H'}{NE'} \Rightarrow \frac{NE}{NE'} = \frac{M_1H}{M_1H'} = K$$

یعنی نسبت فاصلهٔ نقطهٔ N از دو خط Δ و Δ' برابر k است. بعکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو خط Δ و Δ' برابر k باشد، روی

خط OM_1 و یا روی خط OM_2 واقع است. اینک ثابت می‌کنیم که دستگاه $(O - \Delta\Delta' DD')$ توافقی است. برای این کار از نقطهٔ M_1 خطی رسم می‌کنیم تا خطهای Δ، Δ' و D' را بترتیب در نقطه‌های A، B و M'_1 قطع کند، $(ABM_1M'_1)$ یک تقسیم توافقی است زیرا داریم:

$$\frac{\sin(OA \text{ و } OM_1)}{\sin(OB \text{ و } OM_1)} = \frac{M_1H}{OM_1} : \frac{M_1H'}{OM_1} = \frac{M_1H}{M_1H'} = k$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{\sin(OA \text{ و } OM'_1)}{\sin(OB \text{ و } OM'_1)} = k$$

بنابراین با توجه به جهت زاویه‌ها داریم:

$$\frac{\sin(OA \text{ و } OM_1)}{\sin(OB \text{ و } OM_1)} = -\frac{\sin(OA \text{ و } OM'_1)}{\sin(OB \text{ و } OM'_1)}$$

پس دستگاه $(O - ABM_1M'_1)$ یا $(O - \Delta\Delta' DD')$ توافقی است.

۴۳۱. ۱. شرط لازم است: یعنی اگر $(ABCD)$ یک تقسیم توافقی باشد، $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$ است.

برهان ـ نقطه‌های A و B مزدوج توافقی نقطه‌های C و D می‌باشند، و نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB است، پس داریم: $\overline{MA}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ (۱) و اما بنا به رابطهٔ شال داریم:

$$\begin{cases} \overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} \\ \overline{MD} = \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{MN} - \overline{NC} \end{cases}$$

از ضرب طرفین این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$(۲)\ \overline{MC} \cdot \overline{MD} = \overline{MN}^2 - \overline{NC}^2$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\overline{MA}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{NC}^2$ و یا $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$ که می‌توان این چنین نیز نوشت: $4\overline{MN}^2 = 4\overline{MA}^2 + 4\overline{NC}^2$ و یا $4\overline{MN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$.

۲. شرط کافی است یعنی اگر $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$ باشد، $(ABCD)$ یک تقسیم توافقی است.

برهان ـ $\overline{MN}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{NC}^2$ و یا $\overline{MA}^2 = \overline{MN}^2 - \overline{NC}^2$ و یا:

$\overline{MA}^{۲} = (\overline{MN} + \overline{NC})(\overline{MN} - \overline{NC})$ (۳)

و چون $\overline{MN} + \overline{NC} = \overline{MC}$ و $\overline{MN} - \overline{NC} = \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{MD}$

در نتیجه، رابطهٔ (۳) چنین می‌شود: $\overline{MA}^{۲} = \overline{MC}\,.\,\overline{MD}$، و این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های A و B مزدوجهای توافقی نقطه‌های C و D می‌باشند.

۴۳۲. ۱. شرط لازم است: اگر (ABCD) تقسیم توافقی باشد، داریم:

$$(۱)\quad \frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} \quad \text{و یا} \quad \frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AC}} + \frac{۱}{\overline{AD}}$$

و چون نقطهٔ O وسط پاره‌خط CD است، لذا می‌توان نوشت:

$$(۲)\quad \overline{AD} + \overline{AC} = ۲\overline{AO}$$

از ملاحظه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{۲\overline{AO}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} = \frac{۲}{\overline{AB}} \text{ و یا، } \frac{\overline{AO}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} \text{ و یا، } \overline{AB}\,.\,\overline{AO} = \overline{AC}\,.\,\overline{AD}$$

۲. شرط کافی است: رابطهٔ $\overline{AB}\,.\,\overline{AO} = \overline{AC}\,.\,\overline{AD}$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AB}} \text{ و یا } \frac{۲\overline{AO}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} = \frac{۲}{\overline{AB}} \text{ و یا، } \frac{\overline{AD} + \overline{AC}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}} = \frac{۲}{\overline{AB}} \text{ و یا، }$$

$$\frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AD}} + \frac{۱}{\overline{AC}}$$

۴۳۳. الف. شرط لازم و کافی است، زیرا اگر نقطهٔ M را مبداء فرض کنیم، داریم:

$$(\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MC} + \overline{MD}) = ۲(\overline{MA}\,.\,\overline{MB} + \overline{MC}\,.\,\overline{MD}) \quad (۱)$$

چون نقطه‌های I و J وسط پاره‌خطهای AB و CD می‌باشند، پس:

$$\overline{MA} + \overline{MB} = ۲\overline{MI} \text{ و } \overline{MC} + \overline{MD} = ۲\overline{MJ} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Leftrightarrow \overline{MA}\,.\,\overline{MB} + \overline{MC}\,.\,\overline{MD} = ۲\overline{MI}\,.\,\overline{MJ}$$

ب. اگر M بر A منطبق باشد، رابطهٔ دکارت در تقسیم توافقی به دست می‌آید.

$$\{M\} = \{A\} \Rightarrow \frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AC}} + \frac{۱}{\overline{AD}}$$

اگر M بر I منطبق باشد، رابطهٔ نیوتن به دست می‌آید $\overline{IA}^۲ = \overline{IB}^۲ = \overline{IC} \,.\, \overline{ID}$

۴۳۴. الف. ۱. شرط لازم است، زیرا اگر (ABCD) تقسیم توافقی باشد، داریم:

$$\frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AC}} + \frac{۱}{\overline{AD}} \ (۱) \quad و \quad \frac{۲}{\overline{CD}} = \frac{۱}{\overline{CA}} + \frac{۱}{\overline{CB}} \ (۲)$$

$$(۱)+(۲) \Rightarrow \frac{۲}{\overline{AB}} + \frac{۲}{\overline{CD}} = \frac{۱}{\overline{AD}} + \frac{۱}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{۲(\overline{AB} + \overline{CD})}{\overline{AB}\,.\overline{CD}} = \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{\overline{AD}\,.\overline{CB}} \ (۳)$$

$$و \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = ۰ \Rightarrow \overline{CD} + \overline{AB} = \overline{CB} + \overline{AD} \ (۴)$$

$$(۳) و (۴) \Rightarrow \frac{۲}{(\overline{AB}\,.\,\overline{CD})} = \frac{۱}{\overline{AD}\,.\,\overline{CB}} \Rightarrow ۲\overline{AD}\,.\,\overline{CB} = \overline{AB}\,.\,\overline{CD}$$

$$\Rightarrow ۲\overline{DA}\,.\,\overline{BC} = \overline{AB}\,.\,\overline{CD}$$

۲. شرط کافی است، زیرا:

$$\overline{AB}\,.\,\overline{CD} = ۲\overline{BC}\,.\,\overline{DA} \Rightarrow \overline{AB}\,(\overline{AD} - \overline{AC}) = ۲(\overline{AC} - \overline{AB})\,(-\overline{AD})$$

$$\Rightarrow \overline{AB}\,.\,\overline{AD} - \overline{AB}\,.\,\overline{AC} = -۲\overline{AC}\,.\,\overline{AD} + ۲\overline{AB}\,.\,\overline{AD} \Rightarrow ۲\overline{AC}\,.\,\overline{AD} =$$

$$\Rightarrow \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{AD}) \Rightarrow \frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AC}} + \frac{۱}{\overline{AD}} \Rightarrow$$ (ABCD) تقسیم توافقی است

ب. ۱. شرط لازم است، زیرا اگر (ABCD) تقسیم توافقی باشد، داریم:

$$\frac{۲}{\overline{AB}} = \frac{۱}{\overline{AC}} + \frac{۱}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{۲\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC} + \overline{CM}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{BD} + \overline{DM}}{\overline{AD}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} \quad و \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{AC}} - \frac{\overline{DM}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{۲\overline{BM}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}$$

۲. شرط کافی است، زیرا:

$$\frac{۲\overline{BM}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{DM}}{\overline{DA}}\Rightarrow\frac{۲(\overline{BA}+\overline{AM})}{\overline{BA}}=\frac{\overline{CA}+\overline{AM}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{DA}+\overline{AM}}{\overline{DA}}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\overline{AM}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{AM}}{\overline{DA}}\Rightarrow\frac{۲}{\overline{BA}}=\frac{۱}{\overline{CA}}+\frac{۱}{\overline{DA}} \text{ یا } \frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AD}}$$

پس (ABCD) تقسیم توافقی است.

۴۳۵. ۱. چون (ABCD) تقسیم توافقیٔ و نقطهٔ J وسط پاره خط CD است، بنا به رابطهٔ نیوتن داریم:

$$\overline{JC}^۲=\overline{JA}\,.\,\overline{JB} \quad (۱)$$

$$\overline{JA}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}=\overline{JA}\,.\,(\overline{JC}-\overline{JB})(\overline{JD}-\overline{JB})=\overline{JA}\,.\,\overline{JB}^۲-\overline{JC}^۲.\,\overline{JA} \quad (۲)$$

$$\overline{JB}\,.\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}=\overline{JB}\,.\,(\overline{JC}-\overline{JA})(\overline{JD}-\overline{JA})=\overline{JB}\,.\,\overline{JA}^۲-\overline{JC}^۲\,.\,\overline{JB} \quad (۳)$$

$$(۲)+(۳)\Rightarrow\overline{JA}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}+\overline{JB}\,.\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}=\overline{JA}\,.\,\overline{JB}\,(\overline{JB}+\overline{JA})$$

$$-\overline{JC}\,(\overline{JB}+\overline{JA})=(\overline{JB}+\overline{JA})\,(\overline{JA}\,.\,\overline{JB}-\overline{JC}^۲)=۰$$

۲. بنابه قسمت اول:

$$\overline{JA}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}+\overline{JB}\,.\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}=\overline{JA}\,.\,\overline{JB}(\overline{JB}+\overline{JA})-\overline{JC}\,(\overline{JB}+\overline{JA})$$

چون $\overline{JB}+\overline{JA}\neq ۰ \Rightarrow \overline{JC}^۲=\overline{JA}\,.\,\overline{JB} \Rightarrow$ (ABCD) تقسیم توافقی است

۳. $$\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{BC}}+\frac{۱}{\overline{AD}}+\frac{۱}{\overline{BD}}=۰\Rightarrow\frac{\overline{AD}+\overline{AC}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}}=-\frac{\overline{BD}+\overline{BC}}{\overline{BC}\,.\,\overline{BD}}$$

و چون J وسط CD است، پس $\overline{AD}+\overline{AC}=۲\overline{AJ}$ و $\overline{BD}+\overline{BC}=۲\overline{BJ}$. و داریم:

$$\frac{۲\overline{AJ}}{\overline{AC}\,.\,\overline{AD}}=-\frac{۲\overline{BJ}}{\overline{BC}\,.\,\overline{BD}}\quad\Rightarrow\quad\overline{JA}\,.\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}+\overline{JB}\,.\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}\,.$$

۴۳۶. بنا به قضیه‌های تقسیم توافقی، رابطه‌های زیر را می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{AC}+\frac{۱}{AB}=\frac{۲}{AA'} \quad و \quad \frac{۱}{AB'}+\frac{۱}{AB}=\frac{۲}{AC} \quad و \quad \frac{۱}{AC'}+\frac{۱}{AC}=\frac{۲}{AB}$$

طرفین تساویهای فوق را با هم جمع می‌کنیم، داریم: $\frac{۱}{AC'}+\frac{۱}{AB'}=\frac{۲}{AA'}$

این رابطه نشان می‌دهد که A و A' مزدوج توافقی نسبت به دو نقطهٔ B' و C' هستند؛ به همین ترتیب نشان می‌دهیم B و B' مزدوج هم، نسبت به دو نقطهٔ C' و A'، همچنین، C و C' نسبت به دو نقطهٔ A' و B' مزدوج هم هستند.

۴۳۷. برای DA' و AC داریم: $\frac{۲}{DA'}=\frac{۱}{DA}+\frac{۱}{DC}$

برای DB' و BC داریم: $\frac{۲}{DB'}=\frac{۱}{DB}+\frac{۱}{DC}$

طرفین آنها را جمع می‌کنیم:

$$\frac{۲}{DA'}+\frac{۲}{DB'}=\frac{۱}{DA}+\frac{۱}{DB}+\frac{۲}{DC} \qquad (۱)$$

از طرفی برای DC و AB داریم: $\frac{۲}{DC}=\frac{۱}{DA}+\frac{۱}{DB}$

پس رابطهٔ (۱) به صورت $\frac{۱}{DA'}+\frac{۱}{DB'}=\frac{۲}{DC}$ در می‌آید که شرط لازم وکافی برای این است که CD مزدوج توافقی $A'B'$ باشد.

۴۳۸. خط $B'C'$ را رسم کنید. دستگاه $(B' - BCA'N)$ توافقی است، زیرا BB' نیمساز زاویهٔ درونی $C'B'A'$ است و چون $B'C \perp BB'$ است، پس $B'C$ نیمساز زاویهٔ خارجی این زاویه می‌باشد. بنابراین، $(BCA'N)$ یک تقسیم توافقی است.

۴۳۹. داریم: $\frac{DC}{DB}=\frac{CA}{BA}$ و $\frac{DF}{DE}=\frac{DC}{DB}$ پس $\frac{DF}{DE}=\frac{CA}{BA}$، و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFC و AEB متشابه‌اند و می‌نویسیم: $\frac{AF}{AE}=\frac{CA}{BA}$. بنابراین با رعایت جهت داریم: $\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=-\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}}$، پس چهار نقطهٔ A، D، E و F یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۴۴۰. DE مزدوج توافقی BC است و چون نقطهٔ I وسط پاره خط DE است، داریم:

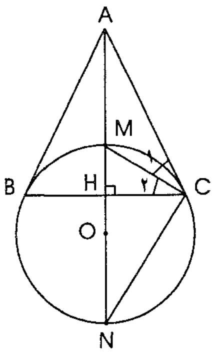
$$\overline{ID}^۲=\overline{IB}\,.\,\overline{IC}$$

چون AM و AS نسبت به AD قرینه‌اند، پس AD نیمساز زاویهٔ MAS می‌باشد و AE نیمساز زاویهٔ خارجی آن. پس داریم: $\overline{ID}^2 = \overline{IM}\,.\,\overline{IS}$ و در نتیجه $\overline{IM}\,.\,\overline{IS} = \overline{IB}\,.\,\overline{IC}$ از طرفی، اگر M را مبداء فرض کنیم، و به جای هر قطعه، طول انتهای منهای طول ابتدایش را در رابطه قرار دهیم، با توجه به این که $b = -c$ می‌باشد، خواهیم داشت:

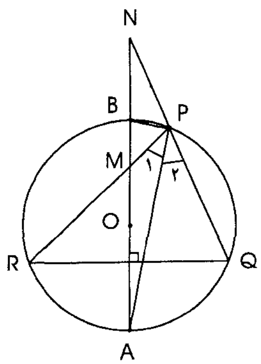
$$(-i)\,(s-i) = (b-i)\,(c-i) \Rightarrow b^2 = is \Rightarrow \overline{MB}^2 = \overline{MI}\,.\,\overline{MS}$$

و این رابطه شرط لازم و کافی برای آن است که I و S مزدوج توافقی نسبت به BC باشد.

۴۴۱. چون زاویه‌های $B'\hat{A}C = C\hat{A}C' = C'\hat{A}B = 45^\circ$. پس دستگاه $(A - BCC'B')$ توافقی و در نتیجه $(BCB'C')$ تقسیم توافقی است.



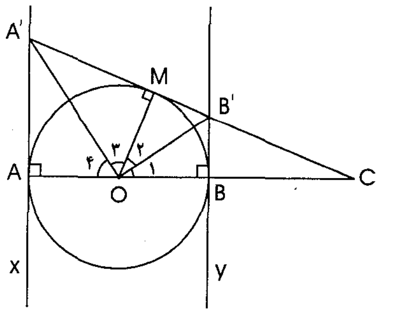
۴۴۳. داریم: $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{MC}$ پس $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، یعنی CM نیمساز زاویهٔ ACB است و چون $M\hat{C}N = 90^\circ$ است (زاویهٔ محاطی رو به رو به قطر)، پس CN نیمساز زاویهٔ خارجی C از مثلث ACH است. بنابراین $(C - MNAH)$ دستگاهی توافقی است. در نتیجه نقطه‌های N، M، H و A تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.



۴۴۵. از P به A وصل می‌کنیم.

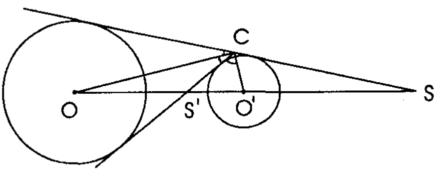
$\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = \dfrac{\overset{\frown}{RA}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AQ}}{2}$ پس، PA نیمساز زاویهٔ داخلی P است و چون AP بر PB عمود است، BP نیمساز زاویهٔ خارجی P خواهد بود؛ در نتیجه، دستگاه $(P - BARQ)$، توافقی است و نقطه‌های بالا، تقسیم

توافقی تشکیل می‌دهند.



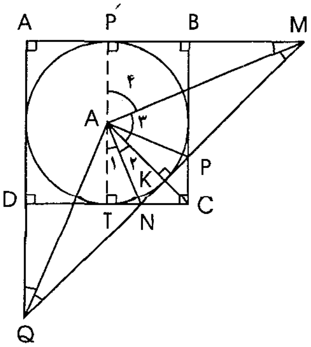
۴۴۸. ´A ، ´B و M را به نقطهٔ O وصل می‌کنیم. $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$ است، پس در مثلث MOC ، ´OB نیمساز زاویهٔ داخلی و ´OA نیمساز خارجی است. و چهار نقطهٔ ´B ، ´A ، M و C تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۴۵۰. از نقطهٔ (C) دو مماس بر دایرهٔ O رسم شده، پس OC نیمساز زاویهٔ داخلی C است و نیز از C دو مماس بر دایرهٔ ´O رسم شده، پس ´O´C نیمساز زاویهٔ خارجی C است. بنابراین در مثلث ´CSS پاهای دو نیمساز داخلی و خارجی با دو رأس دیگر مثلث، تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.



یعنی داریم:

$$\frac{\overline{SO}}{\overline{SO'}} = -\frac{\overline{S'O}}{\overline{S'O'}} = \frac{R}{R'}$$

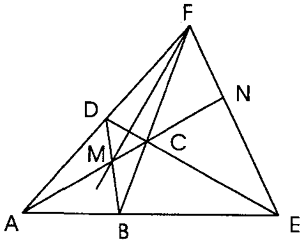


۴۵۱. خطهای NT و NK بر دایره مماسند، پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ و همچنین MK و ´MP بر دایره مماسند، پس $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$ و چون $\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ = ۱۸۰^\circ$ است، پس $\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۹۰^\circ$، یعنی MO بر ON عمود است. AQ و NQ بر دایره مماسند، پس OQ نیمساز Q است، به همین دلیل OM نیمساز M است و چون $\hat{M} + \hat{Q} = ۹۰^\circ$ پس $Q\hat{O}M = ۱۳۵^\circ$ است؛ در نتیجه $N\hat{O}Q = ۴۵^\circ$ (زیرا زاویهٔ NOM قائمه است). به

همین ترتیب $M\hat{O}P$ و $N\hat{O}P$ نیز ۴۵° هستند، پس OP نیمساز زاویهٔ NOM و ON نیمساز زاویهٔ QOP است. پس دستگاه (O − MNPQ) توافقی بوده و نقطه‌های Q ، P ، N و M یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

۴۵۲. اگر از C به M وصل کنیم دستگاه (C − NMO´O) توافقی است.

۴۵۳. چهار ضلعی کامل ABCDEF را در نظر می‌گیریم ونقطه‌های برخورد قطر AC با دو قطر BD و EF را بترتیب M و N می‌نامیم. از F به M وصل می‌کنیم. خط FM قطبی نقطهٔ E نسبت به دو خط متقاطع FA و FB است. پس دستگاه (F − ABME) توافقی و در نتیجه، (ACMN) تقسیم توافقی است.



۴۵۴. شعاعهای دستگاه (H − AA´bc) بر شعاعهای دستگاه $(\alpha$ − AA´BC´) عمود است. اما دستگاه $(\alpha$ − AA´BC´) توافقی است زیرا خط $A\alpha$ قطبی نقطهٔ A´ نسبت به زاویهٔ $B\alpha C'$ است. در نتیجه، دستگاه (H − A´Abc) توافقی است و از آن جا b و c مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به A و A´ می‌باشند.

تعریف . قطبی یک نقطه نسبت به دو خط، خط راستی است که از نقطهٔ برخورد آن دو خط می‌گذرد و این خط، مکان هندسی مزدوج توافقی آن نقطه است نسبت به نقطه‌های برخورد آن دو خط با خطهایی که از آن نقطه می‌گذرند.

۴۵۵. راه اول . اگر O مرکز دایرهٔ محیطی پنج ضلعی منتظم ABCDE و R شعاع آن، و F و G بترتیب نقطه‌های برخورد شعاع OA با ضلع CD و قطر EB باشند، در این صورت داریم:

$$OF = \frac{R}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$$

(OF سهم پنج ضلعی منتظم است) و در نتیجه:

$$\frac{۱}{OF} = \frac{۴}{R(\sqrt{۵}+۱)} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{R} \quad \text{و} \quad OG = \frac{R}{۴}(\sqrt{۵}-۱)$$

و یا
$$\frac{۱}{OG} = \frac{۴}{R(\sqrt{۵}-۱)} = \frac{(\sqrt{۵}+۱)}{R}.$$

با توجه به جهت، $\overline{OG}$ و $\overline{OF}$ ، مختلف‌العلامه هستند، می‌توان یکی را مثبت و دیگری را منفی اختیارکرد. یعنی $-\frac{\sqrt{۵}-۱}{R}=\frac{۱}{\overline{OF}}$ و $\frac{\sqrt{۵}+۱}{R}=\frac{۱}{\overline{OG}}$؛ و لذا می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\overline{OF}}+\frac{۱}{\overline{OG}}=\frac{۲}{R}=\frac{۲}{\overline{OA}}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ O ، مزدوج توافقی A است، نسبت به نقطه‌های G و F .

راه دوم . برای اثبات این که A ، O ، F و G تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، باید ثابت کنیم:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GO}}=-\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}$$

در مثلثهای متشابه AGH و AFC می‌توان نوشت:

(۱) $\frac{\overline{GH}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{GA}}{\overline{FA}}$. اگر از D به I وسط AB وصل کنیم، چون مثلث ADB متساوی‌الساقین است، ID بر AB عمود بوده و از O مرکز دایره می‌گذرد، و یا می‌توان گفت DI عمودمنصف AB است. همچنین $\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{EA}}{۲}=A\hat{B}E=C\hat{A}B$ ، یعنی $\overset{\Delta}{AH}=\overset{\Delta}{HB}$ و در نتیجه H روی عمودمنصف AB ، یعنی روی DI واقع می‌باشد و از آن جا، دو مثلث OGH و ODF متشابه‌اند و می‌توان نوشت:

(۲) $\frac{\overline{GO}}{\overline{FO}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{FD}}$. از رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به جهت آنها داریم: $\frac{\overline{GA}}{\overline{FA}}=-\frac{\overline{GO}}{\overline{FO}}$ و یا $\frac{\overline{GA}}{\overline{GO}}=-\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}}$.

۴۵۷. می‌دانیم که اگر دو نقطهٔ M و N پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کنند، نقطه‌های A و B نیز پاره‌خط MN را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند. یعنی داریم: $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=-\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}$ بنابراین کافی است نسبت $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ را بر حسب k به دست آوریم.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{k}{۱}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{-k}{۱}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AM}+\overline{MB}}=\frac{-k}{-k+۱}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{k}{k-۱}\quad(۱)$$

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-\frac{k}{۱}\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=\frac{+k}{۱}\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{AN}+\overline{NB}}=\frac{k}{k+۱}\Rightarrow\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}=\frac{k}{k+۱}\quad(۲)$$

$$\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{k+۱}{k-۱}\Rightarrow\frac{\overline{BM}}{\overline{BN}}=-\frac{k+۱}{k-۱}=\frac{۱+k}{۱-k}$$

۴۵۸. اگر A مبداء فرض شود داریم:

$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۱}{\overline{AM}}+\frac{۱}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AM}+\overline{AN}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}}$$ و یا

$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۲\overline{AO}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}}\quad(۱)$$. و در صورتی که B را مبداء فرض کنیم داریم:

$$\frac{۲}{\overline{BA}}=\frac{۱}{\overline{BM}}+\frac{۱}{\overline{BN}}=\frac{\overline{BN}+\overline{BM}}{\overline{BM}\,.\,\overline{BN}}=\frac{۲\overline{BO}}{\overline{BM}\,.\,\overline{BN}}\quad(۲)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) با توجه به این که $\overline{AB}=-\overline{BA}$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{۲}{\overline{AB}}+\frac{۲}{\overline{BA}}=\frac{۲\overline{AO}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}}+\frac{۲\overline{BO}}{\overline{BM}\,.\,\overline{BN}}$$

و یا:
$$\frac{(۲\overline{BA}+\overline{AB})}{\overline{AB}\,.\,\overline{BA}}=\frac{۲\overline{AO}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}}+\frac{۲\overline{BO}}{\overline{BM}\,.\,\overline{BN}}=۰$$

و یا:
$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AM}\,.\,\overline{AN}}+\frac{\overline{BO}}{\overline{BM}\,.\,\overline{BN}}=۰$$

۴۵۹. راه اول . رابطهٔ داده شده نشان می‌دهد که چهار نقطه، تشکیل تقسیم توافقی داده‌اند و چون O وسط پاره‌خط CD است، می‌توان نوشت:

$$\overline{OD}=-\overline{OC}\quad و\quad k=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$$\Rightarrow k=\frac{\overline{OA}-\overline{OC}}{\overline{OB}-\overline{OC}}=-\frac{\overline{OA}-\overline{OD}}{\overline{OB}-\overline{OD}}=\frac{-\overline{OC}-\overline{OA}}{\overline{OB}+\overline{OC}}$$

$$\Rightarrow k=\frac{\overline{OA}-\overline{OC}-\overline{OC}-\overline{OA}}{\overline{OB}-\overline{OC}+\overline{OB}+\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}-\overline{OC}+\overline{OC}+\overline{OA}}{\overline{OB}-\overline{OC}-\overline{OB}-\overline{OC}}\Rightarrow$$

$$k = \frac{-۲\overline{OC}}{۲\overline{OB}} = \frac{۲\overline{OA}}{-۲\overline{OC}} \Rightarrow k = -\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \\ k = -\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \end{cases} \Rightarrow k^۲ = \frac{\overline{OC}\,.\,\overline{OA}}{\overline{OC}\,.\,\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

راه دوم . اگر نقطهٔ O را مبداء فرض کنیم، رابطهٔ $ab = c^۲$ را داریم:

همچنین به جای $\overline{CA} = a - c$ و $\overline{CB} = b - c$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$\frac{a - c}{b - c} = k \Rightarrow a - bk = c(۱ - k) \Rightarrow (a - bk)^۲ = c^۲\,(۱ - k)^۲$$
$$(a - bk)^۲ = ab\,(۱ - k^۲) \Rightarrow a^۲ + k^۲b^۲ - ab - abk^۲ = ۰$$

داریم: $a - b \neq ۰$ و $(a - b)\,(a - bk^۲) = ۰$ پس $a - bk^۲ = ۰$ و یا $\frac{a}{b} = k^۲$

۴۶۱. اگر I و I_a مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع a باشند و از آنها دو عمود IP و I_aQ را بر ارتفاع AD فرود آوریم، $DP = r$ و $DQ = r_a$ می‌باشد. ولی نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی C با ضلعهای CA و CB تشکیل دستگاه توافقی داده‌اند، در نتیجه، نقطه‌های روی AII_a مزدوج توافقی‌اند و چون از این نقطه‌ها عمودهایی بر خط AQ رسم شده است، پای این عمودها نیز مزدوج توافقی یکدیگرند. با توجه به نکته‌های بالا به سادگی ثابت می‌شود که AD برابر h_a است.

۴۶۲. در مثلث ABC نقطه‌های R و S پای عمودهایی هستند که از I_b و I_c بر ارتفاع AD فرود می‌آیند. SR مزدوج توافقی AD است، و داریم: $DR = r_b$ و $DS = r_c$. در نتیجه حکم به سادگی اثبات می‌شود.

تبصره ۱ . نقطهٔ D، پاره خط $DS = r_b - r_c$ را به نسبت: $DR : DS = r_b - r_c$، تقسیم می‌کند، و در نتیجه داریم:

$$AD = ۲RS.DR.DS = (\overline{DR}^۲ - \overline{DS}^۲) \quad \text{و یا} \quad h_a = ۲(r_b - r_c)r_br_c : (r_b^۲ - r_c^۲)$$

و یا $h_a = ۲r_br_c : (r_b + r_c)$

اثبات رابطهٔ بالا به روش دیگر:

داریم: $۲S = ah_a = (a + c - b)r_b$ و $۲S = ah_a = (a + c - b)\,r_c$

از دو رابطه به دست می‌آوریم:

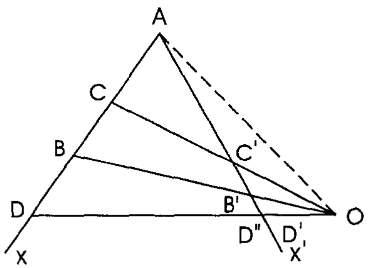
$a(h_a - r_b) = (c - b)r_b$ و $a(r_c - h_a) = (c - b)r_c$.

اگر دو طرف نظیر این دو رابطه را به هم تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$(h_a - r_b) : (r_c - h_a) = r_b : r_c$ و h_a را که از رابطه به دست آوریم، حکم ثابت می‌شود.

تبصره ۲. R و S ارتفاع AD را به نسبت داخلی و خارجی $(r_b + r_c) : (r_b - r_c)$ تقسیم می‌کنند.

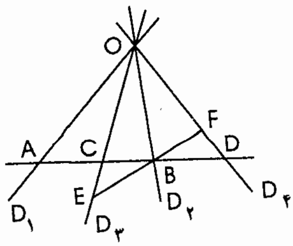
۴۶۳. اگر CC' موازی BB' باشد، چون $\frac{CB}{BD} = \frac{C'B'}{B'D'}$ است، لذا بنابه عکس قضیهٔ تالس، DD' هم موازی آنهاست.

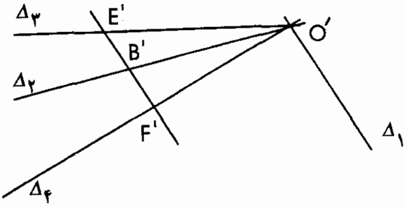


اگر CC' موازی BB' نباشد، فرض می‌کنیم در O متقاطع باشند. از O به D وصل کرده، نقطهٔ تقاطع OD با نیم‌خط Ax' را D'' می‌نامیم و ثابت می‌کنیم D'' بر D' منطبق است. چون (ABCD) تقسیم توافقی است، پس دستگاه (O - ABCD) توافقی، و در نتیجه $(A'B'C'D'')$ تقسیم توافقی است، و چون $(A'B'C'D')$ نیز تقسیم توافقی است، پس، D'' بر D' منطبق است، یعنی BB'، CC' و DD' از یک نقطه می‌گذرند.

۴۶۶. چون خط BC موازی AX رسم شده و به وسیلهٔ خطهای AC ، AM و AB پاره خطهای مساوی BM و MC را به وجود آورده، لذا دستگاه (A - BCMX) توافقی است.

۴۶۷. می‌دانیم که نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی نظیر یک رأس مثلث با دو ضلع زاویهٔ آن رأس، دستگاهی توافقی تشکیل می‌دهند، و چون قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین به وسیلهٔ نیمساز زاویهٔ داخلی رأس مثلث و دو ساق آن به دو قسمت مساوی تقسیم شده، لذا موازی شعاع چهارم، یعنی نیمساز زاویهٔ خارجی رأس مثلث است.



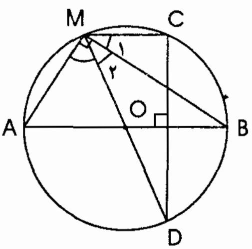


۴۶۸. چون دستگاه $(O \,.\, D_1D_2D_3D_4)$ توافقی است، لذا چنانچه از نقطهٔ دلخواه B واقع بر D_2 خط EF موازی D_1 رسم کنیم $BE = BF$ (۱) خواهد بود. و چون Δ_1، Δ_2، Δ_3 و Δ_4 بترتیب بر D_1، D_2، D_3 و D_4 عمودند، در نتیجه اگر خط $E'F'$ را موازی Δ_1 رسم کنیم تا Δ_2، Δ_3 و Δ_4 را قطع کند. دو مثلث OEF و $O'E'F'$ که ضلعهایشان نظیر به نظیر بر هم عمودند، متشابه می‌باشند و می‌توان نوشت: $\dfrac{O'B'}{OB} = \dfrac{B'F'}{BF}$ (۲)

و همچنین از تشابه دو مثلث OBE و $O'B'E'$ می‌توان نوشت:

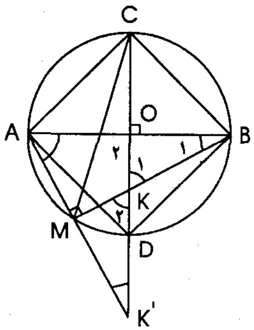
$$\dfrac{O'B'}{OB} = \dfrac{B'E'}{BE} \quad (۳)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $B'F' = B'E'$؛ و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که دستگاه $(O' \,.\, \Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4)$ توافقی است.



۴۷۰. ۱. خطهای MB و MA نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی DMC می‌باشند، زیرا $\widehat{DB} = \widehat{DC}$ است. پس دستگاه (MC، MD، MB و MA) توافقی است.

۲. اگر M نقطه‌ای از صفحهٔ دایره و دستگاه $(M - ABCD)$ توافقی باشند، $(CDKK')$ نیز توافقی است و چون O وسط CD است، پس: $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 = \overline{OK}\,.\,\overline{OK'}$ و چون $OA=OB=OC=OD$ پس: $OA\,.\,OB = OK\,.\,OK' \Rightarrow \dfrac{OA}{OK'} = \dfrac{OK}{OB}$ و چون $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ$، پس مثلثهای OKB و OAK' متشابه‌اند، لذا، $\hat{B}_1 = \hat{K}'$ است. از طرفی $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$، پس مثلثهای OBK و MKK' نیز



متشابه‌اند و در نتیجه $K\hat{M}K' =$ °۹۰ و چون زاویهٔ AMB محاطی رو به رو به قطر و برابر °۹۰ است. پس نقطهٔ M به ناچار روی دایره است. توجه داشته باشید که وقتی M روی یک رأس مربع واقع شود، شعاع چهارم دستگاه بر قطر گذرنده از آن، عمود است.

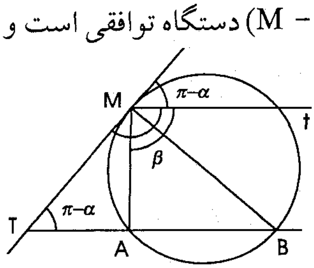
۴۷۵. چون oz نیمساز زاویهٔ xoy است، پس وقتی این دستگاه توافقی است که $oy \perp ox$ باشد، یعنی: $\alpha + \alpha = ۹۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$.

۴۷۶. پاره‌خط $CD = MN$ را روی AB چنان قرار می‌دهیم که (ABMN) یک تقسیم توافقی باشد آنگاه از M به C، و از D به N وصل می‌کنیم. و از A و B به موازات MC یا ND رسم می‌نماییم. خطهای (a)، (b)، (c) و (d) جواب مسأله‌اند؛ زیرا اگر خط دلخواهی را در نقطه‌های A´، B´، C´ و D´ قطع کنند داریم:

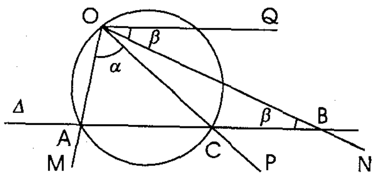
$$\left.\begin{array}{l} \frac{A'C'}{AM}=\frac{A'D'}{AN} \Rightarrow \frac{A'C'}{A'D'}=\frac{AM}{AN}\\ \frac{B'C'}{BM}=\frac{B'D'}{BN}\Rightarrow \frac{B'C'}{B'D'}=\frac{BM}{BN}\\ \text{تقسیم (ABMN) توافقی است} \Rightarrow \frac{AM}{AN}=\frac{BM}{BN}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} = -\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} \Rightarrow$$

(A´B´C´D´) تقسیم توافقی است.

۴۷۷. پاره‌خط دلخواه AB را رسم کرده، روی آن کمان حاوی زاویهٔ β را رسم می‌کنیم؛ آن گاه روی AB نقطهٔ T را طوری اختیار می‌کنیم که $TA = AB$ باشد. از نقطهٔ T خطی رسم می‌کنیم که با TA زاویهٔ $\pi - \alpha$ بسازد، این خط دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند. از M نیم خط Mt را موازی AB رسم می‌کنیم، چون $TA = AB$ و $Mt \parallel TB$، پس $(M - TBAt)$ دستگاه توافقی است و $A\hat{M}B = \beta$ و $T\hat{M}t = \alpha$ است.



۴۷۸. اگر $(O\ .\ MNPQ)$ دستگاه توافقی باشد، چنانچه خط Δ را به دلخواه و موازی شعاع OQ رسم کنیم تا شعاعهای OM ، ON و OP را بترتیب در A ، B و C قطع کند، $AC = CB$ بوده و $\hat{BOQ} = \hat{OBC} = \beta$ است و همچنین نقطهٔ O بر کمان درخور زاویهٔ $\hat{MOP} = \alpha$ گذرنده بر AC است و از آن جا رسم دستگاه چنین است، خط Δ را به دلخواه رسم کرده و بر آن نقطه‌های A ، B و C را چنان اختیار می‌کنیم که $AC=CB$ باشد و کمان درخور زاویهٔ $\hat{MOP}=\hat{AOC}=\alpha$ گذرنده بر A و C رسم می‌کنیم و از B خطی رسم می‌کنیم که با BA زاویه‌ای برابر با β بسازد. O نقطهٔ برخورد آن با دایره، مرکز دستگاه توافقی بوده و خطی که از O موازی Δ رسم شود OQ است و $(O\ .\ MNPQ)$ دستگاه مورد نظر است.

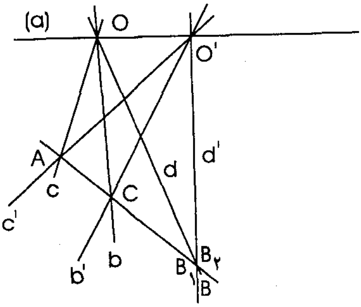


بحث . اگر خطی که از B رسم می‌کنیم تا با BA زاویه‌ای برابر $\hat{NOQ} = \beta$ بسازد، دایرهٔ بالا را در یک یا دو نقطه قطع کند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۴۷۹. فرض می‌کنیم δ_1 قرینهٔ δ نسبت به L باشد، پس دستگاههای $(O - \alpha'\beta'\gamma\delta_1)$ و $(O' - \alpha'\beta'\gamma'\delta')$ توافقی‌اند. از آن جا، خطهای δ' و δ_1 بر هم منطبقند، زیرا هر یک مزدوج توافقی γ' نسبت به α' و β' اند.

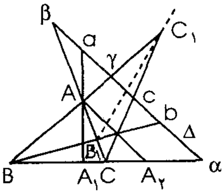
۴۸۰. خط A_2A_3 خط D_1 را در A_1 قطع می‌کند و فرض می‌کنیم این خط D_4 و D'_4 را در دو نقطهٔ مختلف B_4 و B'_4 قطع کند، چون دو دستگاه توافقی‌اند، پس تقسیمهای $(A_1A_2A_3A_4)$ و $(A_1A_2A_3B'_4)$ توافقی می‌باشند، یعنی B_4 و B'_4 بر هم منطبقند و خط A_2A_3 بر A_4 محل تلاقی D_4 و D'_4 می‌گذرد.

۴۸۱. نقطه‌های برخورد (b و b') را C ، (c و c') را A و (d و d') را B می‌نامیم. از A به C وصل می‌کنیم، اگر AC از B بگذرد، حکم ثابت است، ولی اگر از B نگذرد فرض



می‌کنیم خط (d) را در B_1 و خط (d') را در B_2 قطع نماید. ثابت می‌کنیم که B_1 و B_2 بر هم منطبق و همان نقطهٔ برخورد (d) و (d') یعنی نقطهٔ B می‌باشند. اگر نقطهٔ تقاطع AC با خط $(\bar{a})$ را نقطهٔ D بنامیم داریم: (AB_1CD) و (AB_2CD) تقسیم توافقی است پس B_1 بر B_2 منطبق و همان نقطهٔ B هستند، پس A، B و C بر یک استقامتند.

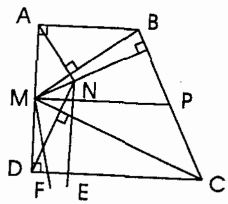
۴۸۲. از نقطهٔ A خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم تا BC را در نقطهٔ A_2 قطع کند. دستگاه $(A - \beta\gamma\alpha A_2)$ توافقی است اگر این دستگاه را با BC قطع کنیم، می‌بینیم که نقطه‌های A_1 و A_2 نسبت به نقطه‌های B و C مزدوج توافقی یکدیگرند. به همین ترتیب BB_2 و CC_2 را به موازات Δ رسم می‌کنیم تا CA را در نقطهٔ B_1 و AB را در نقطهٔ C_2 قطع کنند، نقطه‌های B_1 و B_2 نسبت به C و A و نقطه‌های C_1 و C_2 نسبت به A و B مزدوج یکدیگرند. چون خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 موازی‌اند، پس A_1، B_1 و C_1 بر روی یک خط راست واقعند.



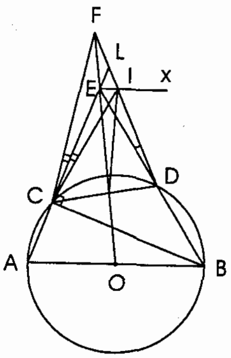
۴۸۳. بنابه فرض داریم $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (۱)، و $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} = -\frac{\overline{D'A}}{\overline{D'B'}}$ (۲).

در صورتی که BB' و CC' در نقطهٔ O متقاطع باشند، نقطهٔ O را به A و D وصل کرده امتداد می‌دهیم؛ اگر OD از D' بگذرد، نتیجه می‌گیریم که BB'، CC' و DD' همرسند، و در صورتی که اگر OD از D' بگذرد، نتیجه می‌گیریم که BB'، CC' و DD' همرسند، و در صورتی که OD خط AB' را در نقطهٔ D'' قطع کند، چون دستگاه $(O \,.\, ABCD)$ توافقی است لازم است که $(AB'C'D'')$ تشکیل تقسیم توافقی دهند، یعنی $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} = -\frac{\overline{D''A}}{\overline{D''B'}}$ (۳).

از رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $\overline{D''B'}=\overline{D'B'}$ یعنی D'' و D' بر هم منطبق و یا خطهای BB'، CC' و DD' همرسند، و در صورتی که BB' و CC' موازی باشند، داریم $\frac{CA}{CB}=\frac{C'A'}{C'B'}$ (۴). از رابطه‌های (۱) و (۲) و (۴) نتیجه می‌شود که $\frac{DA}{DB}=\frac{D'A}{D'B'}$، و از این رابطه نتیجه می‌شود که DD' موازی BB' است و یا به عبارت دیگر، خطهای BB'، CC' و DD' موازی‌اند.



۴۸۴. از نقطهٔ P وسط ساق BC به نقطهٔ M وصل می‌کنیم. خط NE را موازی AD، و MF را موازی BC رسم می‌نماییم، دستگاههای (M−BCPF) و (N−ADEM) توافقی‌اند، پس شعاعهای آنها دو به دو بر هم عمودند، (MP و NE)، (MC و ND) و (MB و NA). از آن جا MN بر MF عمود است.



۴۸۵. از نقطهٔ E خط Ex را به موازات AB رسم می‌کنیم تا BF را در نقطهٔ I قطع کند. چون نقطهٔ O وسط AB است، پس دستگاه (E − ABOI) توافقی است و نیز (LBFI) تقسیم توافقی است. C را به I وصل می‌کنیم دستگاه توافقی (C − LBFI) حاصل می‌شود که چون دو شعاع مزدوج CB و CL بر هم عمودند، نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده با دو شعاع CF و CI‌اند، داریم:

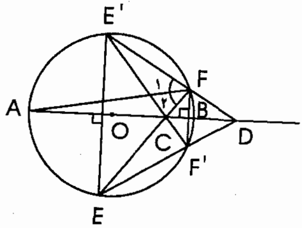
(CE و CF) = − (CE و CI)

نشان می‌دهیم: (CI و CE) = (DI و DE) و یا (CI و CE) = (DF و DE)

از طرفی چهار نقطهٔ C، D، E و I روی یک دایره‌اند و چون EI موازی با AB

است، می‌توان نوشت: (AC و AB) = (EC و EL)
از طرفی: (DB و DC) = (DI و DC). اما چون چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره‌اند. داریم: (DB و DC) = (AC و AB). نتیجه می‌شود: (DI و DC) = (EC و EI). این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های C، D، E و I روی یک دایره‌اند.

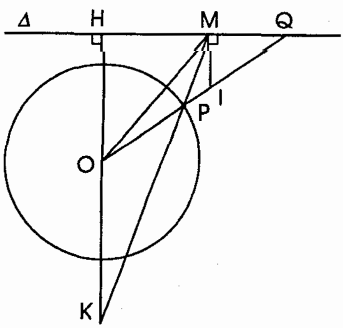
۴۸۶. چون ´F و ´E قرینه‌های F و E نسبت به قطر AB می‌باشند، پس وترهای E´F و EF´ نسبت به محور تقارن AB قرینه بوده و نقطهٔ برخوردشان روی محور تقارن، یعنی روی AB واقع است و در نتیجه E´F´ از نقطهٔ C می‌گذرد.



همچنین چون AB بر ´EE عمود است، لذا $\widehat{AE} = \widehat{AE'}$ و $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ بوده و خط FA نیمساز داخلی زاویهٔ E´FE است و از طرف دیگر FA بر FB عمود است (زیرا زاویهٔ AFB محاط در نیم‌دایره است)؛ پس FB نیمساز خارجی زاویهٔ E´FE می‌باشد، و از آن جا، دستگاه (F . AEBD) توافقی و (ABCD) یک تقسیم توافقی است که در آن سه نقطهٔ A، B و C ثابت می‌باشند، پس نقطهٔ چهارم یعنی D ثابت است.

۴۸۷. از نقطهٔ F به نقطهٔ O وصل می‌کنیم، دستگاه (F - CDEO) توافقی است. این دستگاه را خط AB به موازات FE قطع کرده است این قاطع FC را در نقطه‌ای قطع می‌کند که قرینهٔ A نسبت به O است، یعنی در B، بنابراین FC بر B می‌گذرد.

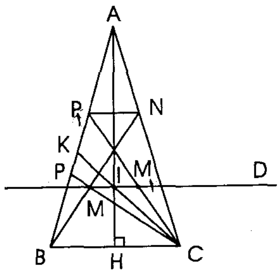
۴۸۸. دستگاه (M - OIPQ) توافقی است. از O عمود OH را بر Δ فرود می‌آوریم و نقطهٔ برخورد MP و OH را R می‌نامیم. چون HK موازی شعاع MI است، پس سه شعاع دیگر روی آن دو پاره‌خط متساوی OK = OH را



جدا می‌کنند. چون امتداد Δ ثابت است، امتداد OH نیز ثابت است، و چون OH ثابت است، پس OK ، و در نتیجه نقطهٔ K نقطه ثابتی است که همواره MP از آن نقطه می‌گذرد.

۴۸۹. نقطه‌های C و D نسبت به A و B مزدوج توافقی یکدیگرند. از آن جا MC و MD مزدوج MA و MB می‌شوند و MA عمود بر MB است. در نتیجه نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده بین MC و MD می‌باشد، پس A و B در وسط کمانهایی از دایرهٔ O که به E و F محدود می‌شوند، واقعند. از آن جا AB بر EF عمود است.

۴۹۰. NP_1 را موازی با BC رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم M_1 و I محل برخورد CP_1 و خط D با ارتفاع AH باشند. خطهای CP_1 و BN نسبت به AH قرینه یکدیگرند. از آن جا، M و M_1 نسبت به نقطهٔ I قرینه‌اند. در نتیجه CM و CM_1 نسبت به CI و CB مزدوج یکدیگرند. این دستگاه را با AB قطع می‌کنیم، می‌بینیم که P_1 و P نسبت به B و K مزدوج همدیگرند (K محل تلاقی CI با AB است) بنابراین داریم: $\frac{1}{BP} + \frac{1}{BP_1} = \frac{2}{BK}$ چون $BP_1 = CN$ است در نتیجه: $\frac{1}{BP} + \frac{1}{CN} = \frac{2}{BK} = cte$



۴۹۱. راه اول. نقطه‌های A ، E ، F و B تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند زیرا:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{a}{\frac{a}{3}} = 3 \quad \text{و} \quad \frac{\overline{EB}}{\overline{EF}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EA} - \overline{FA}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{3} - \frac{a}{2}} = -3$$

و در نتیجه $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EF}}$ یعنی دستگاه (D − BFEA) توافقی است و هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه‌های برخورد تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.

پس: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{GC}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{GH}} = ۳$ و یا $\dfrac{\overline{GC}}{\overline{GH}} = \left| - \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AH}} \right|$

(زیرا G محل تلاقی میانه‌های مثلث ABD است). اگر رابطهٔ $\dfrac{AH}{GH} = \dfrac{۳}{۱}$ را ترکیب به نسبت در مخرج نماییم، داریم $\dfrac{AH}{AG} = \dfrac{۳}{۴}$، و همچنین این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{AH}{\frac{۲}{۳}AC} = \frac{۳}{۴} \quad \text{و یا} \quad \frac{۳AH}{۲AC} = \frac{۳}{۴} \quad \text{و یا} \quad \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲}$$

و یا $AC = ۲AH$ یعنی EH خط وصل شده بین وسطهای دو ضلع مثلث ABC است و با BC موازی است، و از آن جا از نقطهٔ M وسط AD می‌گذرد.

همچنین $GD = ۲EG$ و $AF = ۲EF$ بوده و می‌توان نوشت: $\dfrac{EF}{AF} = \dfrac{EG}{GD} = \dfrac{۱}{۲}$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که AD موازی FG است و چون EM از وسط AD گذشته، از I وسط FG خواهد گذشت. و از طرفی چون پاره خط FG موازی با AD و به وسیله سه خط DF، DC و DE به دو قسمت مساوی تقسیم شده، لذا دستگاه (D − AKFE) توافقی است و خط AE که شعاعهای این دستگاه را قطع کرده است نقطه‌های برخورد تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند: یعنی $\dfrac{\overline{KE}}{\overline{KF}} = \left| - \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \right|$

$$\text{و یا} \quad \frac{\overline{KE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}+\overline{AF}} \quad \text{و یا} \quad \frac{KE}{\frac{a}{۶}} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{a}{۳} + \frac{a}{۲}} \quad \text{و یا} \quad EK = \frac{a}{۱۰}.$$

راه دوم. در چهار ضلعی کامل EGDHFI قطر EF، به وسیلهٔ قطرهای DI و HG که بترتیب آن را در K و A تلاقی نموده‌اند به نسبت توافقی تقسیم شده و لذا داریم:

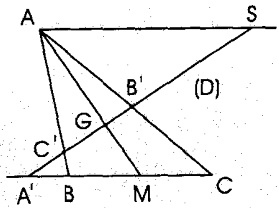
$$\frac{۲}{AK} = \frac{۱}{AE} + \frac{۱}{AF} \quad \text{و یا} \quad \frac{۲}{AK} = \frac{۲}{a} + \frac{۳}{a} \quad \text{و یا} \quad AK = \frac{۲a}{۵}$$

و همچنین می‌توان نوشت: $EK = AE - AK = \dfrac{a}{۲} - \dfrac{۲a}{۵} = \dfrac{a}{۱۰}$

۴۹۲. در مثلث OAC، خط OB نیمساز زاویهٔ AOC، و خط OD نیمساز زاویهٔ خارجی AOC می‌باشد، پس چهار نقطهٔ A، B، C و D تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، و داریم $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC}$. دو مثلث OAB و ODC با هم مساوی‌اند (چرا؟) و

$DC = AB$. بنابراین خواهیم داشت: $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{AB}$ یا $\overline{AB}^۲ = \overline{AD} \times \overline{BC}$

۴۹۴. اگر S نقطهٔ برخورد خط رسم شده از نقطهٔ A موازی BC، با خط D باشد، دستگاه $(A - BCMS)$ توافقی است و در نتیجه هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند. نقطه‌های تقاطع تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند؛ لذا $(GSC'B')$ یک تقسیم‌توافقی است و بنابه رابطه دکارت داریم: $\frac{۱}{\overline{GC'}} + \frac{۱}{\overline{GB'}} = \frac{۲}{\overline{GS}}$ (۱)



از طرفی دو مثلث GAS و GMA متشابه‌اند و داریم:

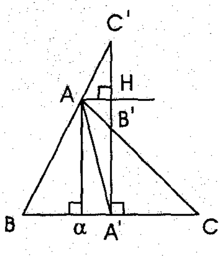
$$-\frac{۱}{۲} = \frac{\overline{GM}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GA'}}{\overline{GS}}$$ و یا

$$\frac{-۱}{\overline{GA'}} = \frac{۲}{\overline{GS}} \quad (۲)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$-\frac{۱}{\overline{GA'}} = \frac{۱}{\overline{GC'}} + \frac{۱}{\overline{GB'}} \quad \text{و یا} \quad \frac{۱}{\overline{GC'}} + \frac{۱}{\overline{GB'}} + \frac{۱}{\overline{GA'}} = ۰$$

۴۹۵. از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا $A'C'$ را در نقطهٔ H قطع کند. دستگاه $(A - BA'CH)$ توافقی است، چون ضلع BC که موازی شعاع AH رسم شده است، به وسیلهٔ سه شعاع دیگر دو پاره‌خط مساوی $A'B = A'C$ روی آن جدا شده است؛ پس $(A'HB'C')$ یک تقسیم توافقی است و داریم:



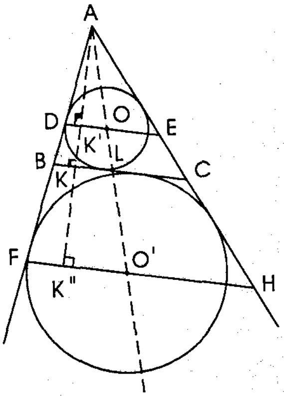
$$\frac{۱}{\overline{A'C'}} + \frac{۱}{\overline{A'B'}} = \frac{۲}{\overline{A'H}}$$ اما، $\overline{\alpha A} = \overline{A'H}$ پس $\frac{۱}{\overline{A'C'}} + \frac{۱}{\overline{A'B'}} = \frac{۲}{\overline{\alpha A}}$

۴۹۶. ۱. می‌دانیم که چهار نقطهٔ C، D، B و D' تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، پس چون I وسط DD' است، داریم: $\overline{ID}^۲ = \overline{IB} \times \overline{IC}$. امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ

ADD' میانهٔ وارد بر وتر (AI) نصف وتر DD' است یعنی $IA = ID$ پس داریم:
$\overline{IA}^2 = \overline{IB}\,.\overline{IC}$

۲. از رابطهٔ $\overline{IA}^2 = \overline{IB}\,.\overline{IC}$ نتیجه می‌شود که دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ A بر IA مماس است.

۴۹۷. می‌دانیم چهار نقطهٔ A، L، O و O' تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند (نقطه‌های A و L مرکزهای تجانس دو دایره است). پس چهار نقطهٔ A، B، D و F و همچنین چهار نقطهٔ A، C، E و H تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند. ارتفاع AK را رسم می‌کنیم که DE را در K' و FH را در K'' قطع می‌کند. نقطه‌های A، K، K' و K'' نیز تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و خواهیم داشت:



$$\frac{۲}{AK} = \frac{۱}{AK'} + \frac{۱}{AK''} \quad (۱)$$

از تشابه دو مثلث ADE و ABC نتیجه می‌شود $\frac{AK'}{AK} = \frac{DE}{BC}$ و یا $AK' = \frac{DE}{BC}\,.AK$

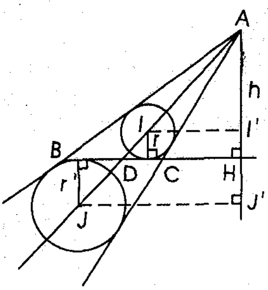
همچنین داریم:

$$\frac{AK''}{AK} = \frac{FH}{BC} \text{ یا } AK'' = \frac{FH}{BC}\,.AK.$$

به جای AK' و AK'' در رابطهٔ (۱) مقدارهایشان را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲}{AK} = \frac{BC}{DE\,.\,AK} + \frac{BC}{FH\,.\,AK} \Rightarrow \frac{۲}{BC} = \frac{۱}{DE} + \frac{۱}{FH}$$

۴۹۸. چون BI و BJ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی ABD در مثلث ABD می‌باشند، در نتیجه $(ADIJ)$ یک تقسیم توافقی بوده و تصویرهایشان بر هر محور تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند. یعنی



($AHI'J'$) تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. چنانچه نقطهٔ H مبدأ محور منطبق بر ارتفاع h فرض شود، می‌توان نوشت:

(۱) $\frac{1}{\overline{HJ'}}+\frac{1}{\overline{HI'}}=\frac{2}{\overline{HA}}$ و چون $\overline{HJ'} = -r'$ و $\overline{HI'} = r$ و $\overline{HA} = h$، در نتیجه رابطه (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$$

۴۹۹. ۱. فرض می‌کنیم مرکز دایره‌های Γ و γ بترتیب O و I باشد. OI خط‌المرکزین دو دایره بر وتر مشترک عمود است. چون از نقطهٔ E دو قاطع EHM و EDA بر دایرهٔ (γ) رسم شده، می‌توان نوشت: $\overline{EH}\,.\,\overline{EM} = \overline{ED}\,.\,\overline{EA}$. و نیز دو قاطع EBC، EDA بر دایرهٔ Γ رسم شده می‌توان نوشت: $\overline{EB}\,.\,\overline{EM} = \overline{ED}\,.\,\overline{EA}$. از مقایسهٔ دو رابطه نتیجه می‌شود: $\overline{EH}\,.\,\overline{EC} = \overline{ED}\,.\,\overline{EA}$

۲. M وسط BC است، پس $\overline{EM} = \frac{\overline{EB} + \overline{EC}}{2}$؛

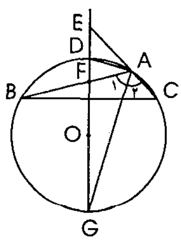
از آن جا رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت: $\overline{EH}\,.\,(\overline{EB} + \overline{EC}) = 2\overline{EB}\,.\,\overline{EC}$

دو طرف رابطه را بر $\overline{EB}\,.\,\overline{EC}\,.\,\overline{EH}$ بخش می‌کنیم، داریم:

$$\frac{1}{\overline{EC}} + \frac{1}{\overline{EB}} = \frac{2}{\overline{EH}}$$

این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های B و C مزدوج توافقی E و H هستند، یعنی تقسیم (BCHE) توافقی است.

۵۰۰. چون OD بر BC عمود است، کمان آن را نصف می‌کند. پس: $\overset{\frown}{BG} = \overset{\frown}{GC}$، و درنتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. از طرفی زاویهٔ GAD محاطی و رو به رو به قطر است، پس $DA \perp AG$ و به عبارت دیگر، DA و AG نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی BAC می‌باشند. در نتیجه دستگاه



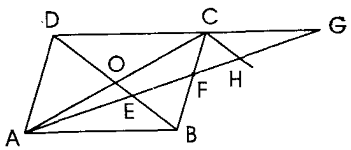
($A - DGBC$) توافقی است، چون قطر DG شعاعهای این دستگاه را در G، F، D و E قطع کرده است، این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند؛ و چون O

وسط DG است، بنابه رابطهٔ نیوتن داریم:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OF}\,.\,\overline{OE}$$

و یا:
$$R^2 = \overline{OF}\,.\,\overline{OE}$$

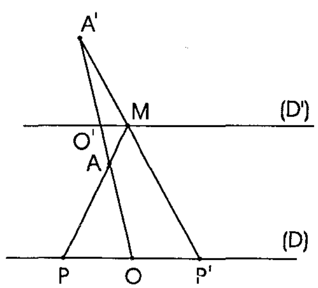
۵۰۱. از نقطهٔ C خط CH را به موازات BD رسم می‌کنیم تا قاطع را در نقطهٔ H قطع کند. قطر CA را رسم می‌کنیم، O محل تلاقی قطرهاست. خطهای CO و CH نسبت به دو خط CB و CD مزدوج یکدیگرند. این دستگاه را، AE قطع کرده، پس A و H نسبت به F و G مزدوجند.



بنابراین:

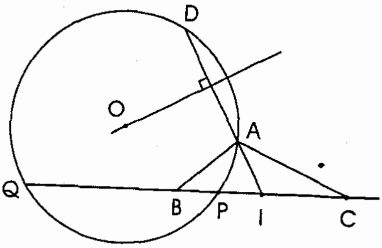
$\frac{1}{\overline{AG}} + \frac{1}{\overline{AF}} = \frac{2}{\overline{AH}}$. چون O وسط AC و E وسط AH است، داریم: $AH = 2AH$.
اگر به جای AH در رابطهٔ بالا قرار دهیم حکم ثابت است.

۵۰۲. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. از نقطهٔ M خطی موازی خط D رسم می‌کنیم تا AA' را در نقطهٔ O' قطع کند. دستگاه $(M - AA'OO')$ توافقی است، زیرا روی خط D که موازی (D') یا شعاع MO' رسم شده است، به وسیلهٔ سه شعاع MO و MA و MA' دو پاره خط مساوی جدا شده است $(OP = OP')$.



پس $(OO'A'A)$ یک تقسیم توافقی است که چون A و A' و O نقطه‌هایی ثابتند، پس O' هم نقطهٔ ثابتی است، لذا مکان نقطهٔ M خط راستی است که از نقطهٔ O' به موازات خط D رسم می‌شود.

۵۰۳. فرض می‌کنیم I وسط BC باشد داریم: $\overline{IB}^2 = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ} = cte$.



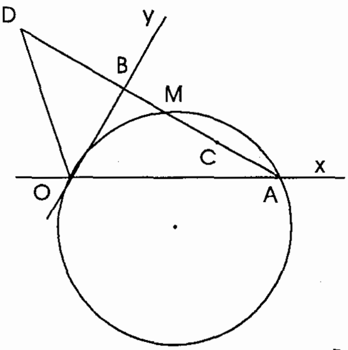
اگر میانهٔ AI دایره را در D قطع کند، داریم:

$\overline{IA}\,.\,\overline{ID} = \overline{IP}\,.\,\overline{IQ} = \overline{IB}^2 = cte$.

پس D نقطهٔ ثابتی است، و مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ عمودمنصف پاره خط ثابت AD است.

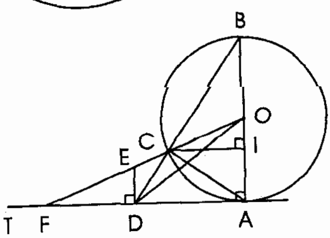
۵۰۴. چون دو نقطهٔ A و M نسبت به نقطه‌های C و D مزدوج توافقی یکدیگرند و نقطهٔ B وسط پاره‌خط CD است، پس داریم:

$BO^2 = BM.BA$ و یا $BC^2 = BM.BA$



این رابطه نشان می‌دهد دایره‌ای که بر سه نقطهٔ M و A و O می‌گذرد، در نقطهٔ O بر OB مماس است. در نتیجه مکان هندسی M دایره‌ای است که بر A بگذرد و در O بر Oy مماس شود.

۵۰۵. ۱. اگر OC مماس AT را در F قطع کند نقطهٔ F همواره مزدوج توافقی نقطه C نسبت به نقطه‌های E و O است، زیرا دستگاه $(D - EOBA)$ که در آن قطر AB موازی DE رسم شده و به وسیلهٔ شعاعهای DA، DO و DB به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود، توافقی است. در نتیجه هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه‌های برخورد تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند؛

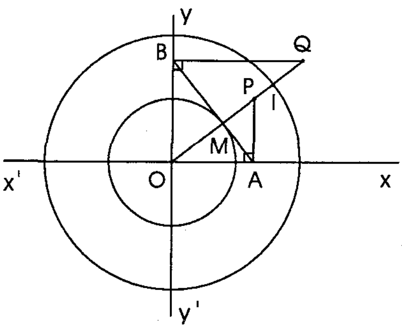


پس (OECF) یک تقسیم توافقی است و با تغییر قاطع BC، نقطهٔ F پیوسته بر مماس AT تغییر می‌نماید؛ یعنی: AT مکان هندسی نقطهٔ F مزدوج توافقی C است نسبت به OE.

۲. برای رسم قاطع BC به نحوی که FD= DA باشد، بایستی نقطهٔ C را تعیین کنیم. برای این منظور چنانچه پاره خط CI را موازی AT، رسم نماییم، چون FD = DA است، دستگاه (C . BIOA) توافقی خواهد بود، زیرا پاره‌خط FDA که موازی شعاع CI رسم شده به وسیلهٔ سه شعاع دیگر به دو قسمت مساوی تقسیم شده و از آن‌جا، ابتدا نقطهٔ I مزدوج توافقی B نسبت به OA را تعیین نموده و از I موازی مماس AT رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ خواسته شدهٔ C قطع کند.

۵۰۶. اگر M نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ (O) و AMB مماس رسم شده از M بر دایرهٔ (O) باشد. در صورتی که از A و B بترتیب عمودهایی بر ´xx و ´yy اخراج نماییم تا OM را در P و Q قطع نمایند، A و B، تصویرهای P و Q بر ´xx و ´yy خواهد بود، و اگر در این حالت I مزدوج (O) نسبت به PQ باشد، بنابه رابطهٔ دکارت داریم:

$$\frac{۲}{\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OP}} + \frac{۱}{\overline{OQ}} \text{ ، و یا } \frac{۲}{\overline{OM}\,.\,\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OM}\,.\,\overline{OP}} + \frac{۱}{\overline{OM}\,.\,\overline{OQ}} \quad (۱).$$



در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAP و OBQ

داریم: $\overline{OA}^۲ = \overline{OM}\,.\,\overline{OP}$ (۲)

و $\overline{OB}^۲ = \overline{OM}\,.\,\overline{OQ}$ (۳).

در نتیجه رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{۲}{\overline{OM}\,.\,\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OA}^۲} + \frac{۱}{\overline{OB}^۲} \quad (۴).$$

و چون در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعهای عکس ضلعهای آن برابر عکس مربع ارتفاع وارد بر وترش می‌باشد، پس رابطهٔ (۴) چنین می‌شود:

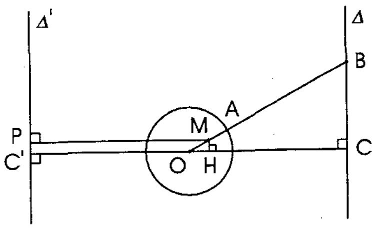
$$\frac{۲}{\overline{OM}\,.\,\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OA}^۲} + \frac{۱}{\overline{OB}^۲} = \frac{۱}{\overline{OM}^۲}$$

و در نتیجه $\overline{OM}\,.\,\overline{OI} = ۲\overline{OM}^۲$ یا $\overline{OI} = ۲\overline{OM}$، یعنی مکان I مزدوج نقطهٔ O

نسبت به PQ، دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع $\overline{OI} = ۲\overline{OM} = ۲R$.

یادآوری . اگر M روی xx' یا yy' باشد، P روی M ، و Q در بی‌نهایت است. و اگر M روی Q باشد، P در بی‌نهایت است، و در این دو حالت نیز باز داریم:
$\overline{OI} = ۲\overline{OM}$.

۵۰۷. اگر A نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ به مرکز O و M مزدوج B نسبت به OA باشد، بنابه رابطهٔ دکارت داریم: $\frac{۱}{\overline{OB}} + \frac{۱}{\overline{OM}} = \frac{۲}{\overline{OA}}$ (۱)، و اگر C پای عمود وارد از O بر خط Δ، و نقطهٔ H تصویر M بر OC باشد، می‌توان نوشت: $\frac{\overline{OH}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}$ و یا $\overline{OB} = \frac{\overline{OM}\,.\,\overline{OC}}{\overline{OH}}$ و یا $\frac{۱}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}\,.\,\overline{OC}}$. و در نتیجه رابطه (۱) چنین نوشته می‌شود: $\frac{۲}{\overline{OA}} = \frac{۱}{\overline{OM}} + \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}\,.\,\overline{OC}} = \frac{\overline{OC} + \overline{OH}}{\overline{OM}\,.\,\overline{OC}}$ (۲)؛



و اگر Δ' قرینهٔ Δ نسبت به مرکز دایـرهٔ (O) و MP عمود وارد از M بر Δ' باشد، داریم:

$$\overline{OC} + \overline{OH} = -\overline{MP}$$

و در نـتیجه رابـطهٔ (۲) را مـی‌توان بـه صـورت زیـر نوشت:

$$\frac{۲}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{MP}}{\overline{OM}\,.\,\overline{OC}}$$

چنانچه فاصلهٔ مرکز دایره از Δ را a و $OA = R$ فرض کنیم چنین می‌شود:

$\frac{MP}{OM\,.\,a} = \left|\frac{-\overline{MP}}{\overline{OM}\,.\,a}\right| = \frac{۲}{R}$ و یا، مقدار ثابت $= \frac{R}{۲a} = \frac{MO}{MP}$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که چون نسبت فاصله‌های نـقطه M از نـقطهٔ ثـابت O و خـط ثـابت Δ' مقداری است ثابت، پس مکان هندسی نقطهٔ M بیضی، یا هذلولی، و یـا سـهمی است به کانون O و خط هادی Δ'، برحسب آن‌که $\frac{R}{۲a} < ۱$ یا $\frac{R}{۲a} > ۱$ و یا $\frac{R}{۲a} = ۱$ باشد.

۵۰۸. نقطهٔ برخورد BC با خط Δ را نقطهٔ D می‌نامیم داریم:

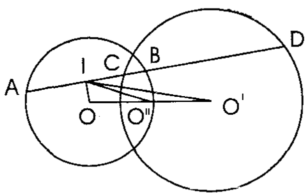
$\overline{DM}^۲ = \overline{DM'}^۲ = \overline{DB} \times \overline{DC}$ چون D وسط MM' و نقطه‌های P و A مزدوج

هم نسبت به دو نقطهٔ M و ´M هستند، می‌توان نوشت:

$\overline{DB}\,.\,\overline{DC} = \overline{DA}\,.\,\overline{DP}$ و $\overline{DM}^2 = \overline{DA}\,.\,\overline{DP}$

این رابطه نشان می‌دهد که چهار نقطهٔ A، B، C و P روی یک دایره‌اند، و یا نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است. چون Δ نمی‌تواند CB را بین B و C قطع کند، مکان نقطهٔ M در داخل کمان $\overset{\frown}{BAC}$ است.

۵۰۹. اگر نقطه‌های A و B نقطه‌های برخورد قاطع با دایرهٔ (O)، C و D نقطه‌های تلاقی آن با دایرهٔ (´O) باشد، نقطه‌های C و D نسبت به A و B مزدوجند.
پس اگر عمودی از O بر قاطع فرود آوریم بر وسط AB وارد می‌شود و خواهیم داشت:

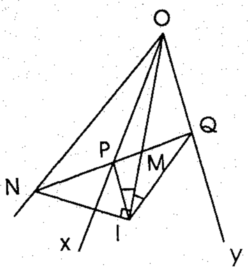


خواهیم داشت: $\overline{IB}^2 = \overline{IC}\,.\,\overline{ID}$ (I نقطهٔ وسط AB است) ولی $\overline{IC}\,.\,\overline{ID}$ قوت نقطهٔ I نسبت به دایرهٔ (´O) می‌باشد، پس: $\overline{IB}^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$ ولی $\overline{IB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OI}^2$ یعنی $R^2 - \overline{OI}^2$، پس: $R^2 - \overline{OI}^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$، و یا $\overline{IO}^2 + \overline{IO'}^2 = R^2 + R'^2$. چون مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ I از دو نقطهٔ ثابت O و ´O مقداری است ثابت، پس مکان I دایره‌ای است که مرکز آن وسط ´OO می‌باشد. اکنون مسأله به مسأله دیگری برمی‌گردد: زاویهٔ قائمهٔ OID چنان حرکت می‌کند که رأس I آن دایرهٔ ثابتی را می‌پیماید، و ضلع اول، OI بر نقطهٔ ثابت O می‌گذرد، ضلع دوم، ID آن بر مقطعی مخروطی مماس است که O و ´O کانونهای آن، و دایرهٔ مکان I، دایرهٔ اصلی آن می‌باشد.

۵۱۰. در چهارضلعی کامل ABCDOP قطر OP به وسیلهٔ دو قطر دیگر یعنی AC و BD به نسبت توافقی تقسیم می‌شود؛ اما قطر CA بر نقطهٔ M وسط OP

می‌گذرد، بنابراین BD خط OP را در نقطه‌ای قطع خواهد کرد که آن نقطه، مزدوج M نسبت O و P است، که این نقطه در بی‌نهایت می‌باشد، بنابراین BD با OP موازی است.

۵۱۱. از نقطهٔ I خطی عمود بر IO رسم می‌کنیم تا امتداد PQ را در نقطهٔ N قطع کند. اگر نقطهٔ برخورد PQ ، IO را M بنامیم، (MNPQ) یک تقسیم توافقی است، زیرا (I - PQMN) یک دستگاه توافقی می‌باشد (IM نیمساز داخلی و IN نیمساز خارجی زاویهٔ PIQ هستند)، و چون سه شعاع Ox، OI و Oy ثابتند، پس شعاع ON ثابت می‌باشد، و چون OI ثابت است، عمود مرسوم بر آن، یعنی IN ثابت است؛ پس N نقطه‌ای ثابت است؛ لذا PQ همواره از نقطهٔ ثابت N می‌گذرد.



۵۱۲. بنابه فرض داریم:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \text{ و } \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} \text{ و } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}$$

پس:

$$\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}} \cdot \frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}} \cdot \frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}} = -1 \quad ;$$

بنابراین ″AA ، ″BB و ″CC همرسند.

۵۱۴. برای حل مسأله دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول . M و N در یک طرف CA واقعند. چهار ضلعی ABNM محاطی است. محل تلاقی MN با CD را نقطهٔ I می‌نامیم. می‌توان نوشت:

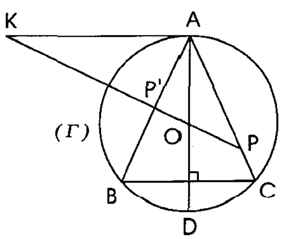
$$\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IC} \cdot \overline{ID} \text{ و } \overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$$

و یا $\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$. این رابطه نشان می‌دهد که I نقطه‌ای است ثابت.

(I وقتی موجود است که $OA = OC$ نباشد، اگر، $OB = OA$ نباشد. اگر $OA = OB$ باشد، نقطهٔ I در بینهایت است.)

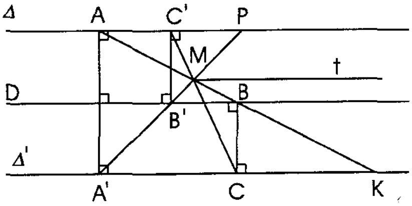
حالت دوم . نقطه‌های M و N در طرفین CD واقعند. قرینهٔ N را نسبت به CD نقطهٔ N' می‌نامیم. چون N' و M در یک طرف CD قرار دارند. پس MN' بر نقطهٔ I می‌گذرد (یا موازی با CD است). خطهای MC و MD نیمسازهای زاویهٔ NMN' می‌باشند، پس MN بر نقطه J می‌گذرد که مزدوج توافقی I نسبت به دو نقطهٔ C و D است. (اگر $OA = OB$ باشد نقطهٔ I در بینهایت و J روی O است).

۵۱۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. اگر از A عمودی بر قطر AD اخراج کنیم (خطی در نقطهٔ A بر دایره مماس رسم می‌کنیم) تا امتداد PP' را در K قطع کند، $(OKP'P)$ تقسیم توافقی است، زیرا دستگاه $(A - BCOK)$ توافقی است (AO و AK نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A می‌باشند). پس برای حل مسأله، مزدوج توافقی نقطه O نسبت به نقطه‌های P و P' را پیدا کرده K می‌نامیم. از K خطی بر دایره مماس می‌کنیم. نقطهٔ تماس، نقطهٔ A رأس مثلث جواب مسأله است. از A به P و P' وصل می‌کنیم تا دایره را در B و C قطع کنند، مثلث ABC جواب مسأله می‌باشد.



۵۱۶. نقطهٔ B' وسط PA' و $B'C' \parallel AA'$ پس نتیجه می‌شود که C' وسط AP است، یعنی $C'A = C'P$. اگر از نقطهٔ M نیمخط Mt را موازی Δ رسم کنیم. دستگاه (Mt و MP و MC' و MA) توافقی است، و به همین ترتیب ثابت می‌شود که

دستگاه (Mt و MK و MC و ´MA) نیز توافقی است. از دو دستگاه فوق شعاعهای (MK و MA) و (´MA و MP) بر یک امتداد هستند و Mt در هر دو مشترک است پس دو شعاع دیگر یعنی MC و ´MC باید بر یک امتداد باشند، یعنی M و C و ´C بر یک امتدادند.



۵۱۷. الف.
$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{jA}}{\overline{jB}} = -۳ \Rightarrow \frac{\overline{jA}}{\overline{jB}} = ۳ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\overline{jA} - \overline{jB}}{\overline{jB}} = \frac{۳-۱}{۱} \Rightarrow \frac{AB}{jB} = ۲ \Rightarrow jB = \frac{AB}{۲}$$

ب. چون $۲ = \frac{\overline{Bj}}{\overline{BI}} = -\frac{\overline{Aj}}{\overline{AI}}$ است. یعنی نقطه‌های A و B پاره‌خط Ij را به نسبت توافقی ۲ تقسیم کرده‌اند، پس دایرهٔ به قطر Ij مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌شان از A و B برابر ۲ باشد.

پ. در قسمت قبل دیدیم که هر نقطه روی دایره‌ای به قطر Ij، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ I و j برابر ۲ است، یا $\frac{\omega j}{\omega I}$، یا $\omega j = ۲\omega I$، پس، هر دایره به مرکز ω و شعاع $۲\omega I$ از نقطهٔ j می‌گذرد.

۵۱۸. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر باشد. MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی (MC و MB) را رسم می‌کنیم تا خط ABCD را در P و Q قطع کنند. تقسیم (BCPQ) توافقی است. چون زاویه‌های (MB و MA) و (MC و MD)برابرند، پس MP و MQ نیمسازهای زاویهٔ (MD و MA) نیز می‌باشند، در نتیجه داریم: (MB و MP) = (MP و MC) و یا:

(MP و MC) + (MC و MD) = (MA و MB) + (MB و MP)

و یا:
$$(MA, MP) = (MP, MD)$$
در نتیجه تقسیم (ADPQ) نیز توافقی است. پس نقطه‌های P و Q پاره‌خطهای BC و AB را به نسبت توافقی، بخش می‌کنند. برای تعیین این نقطه‌ها گوییم، چون زاویهٔ PMQ قائمه است، کلیهٔ نقطه‌های مکان، روی دایرهٔ به قطر PQ واقعند.

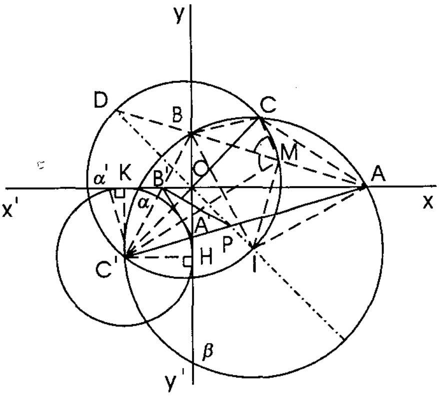
۵۱۹. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ اول و α' و β' ریشه‌های معادلهٔ دوم باشند، داریم:

$$2(\alpha\beta + \alpha'\beta') - (\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') = 0$$
$$\alpha' + \beta' = -\frac{b'}{a'}, \alpha'\beta' = \frac{c'}{a'}, \alpha\beta = \frac{c}{a}, \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\left(\frac{c}{a} + \frac{c'}{a'}\right) - \frac{bb'}{aa'} = 0$$

۵۲۰. ۱. هر دایره که از دو نقطهٔ C و C' بگذرد، مرکز آن روی خط OI عمود منصف CC' واقع می‌باشد. حال دایرهٔ محیطی مثلث ACC' را در نظر می‌گیریم؛ آن دایره خط Ox را در یک نقطهٔ دیگر α و خط Oy را در دو نقطه قطع می‌کند که بترتیب قرینهٔ A و α نسبت به OI می‌باشند (نقطه‌های β و B) و داریم:
$$OA \cdot O\alpha = OC \cdot OC' = \overline{OC}^2 = OA \cdot OB$$
پس $O\alpha = OB$، بنابراین نقطهٔ B که روی Oy واقع است، قرینهٔ نقطهٔ α نسبت به OI می‌باشد، یعنی نقطهٔ برخورد دایره با Oy، همان نقطهٔ B است، به عبارت دیگر دایرهٔ ACC' از نقطهٔ B می‌گذرد.

۲. در چهار ضلعی محاطی $ACBC'$ که از نقطهٔ α نیز می‌گذرد، داریم: $B\hat{C'}A = B\hat{\alpha}A = 45$ و چون زاویه‌های C و C' مکمل یکدیگرند، پس: $B\hat{C}A = 135°$، و زاویهٔ مرکزی AIB دو برابر زاویهٔ محاطی $AC'B$، یعنی ۹۰ درجه است.

۳. از نقطهٔ C' عمود $C'H$ را بر $y'y$ و عمود $C'K$ را بر $x'x$ فرود آورده، $C'\alpha'$ را عمود بر $C'A'$ رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم الزاویهٔ $A'C'H$ و $\alpha'C'K$ متساوی‌اند،



زیرا ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمودند و $C'H = C'K$؛ پس $C'\alpha' = C'A'$؛ و دو مثلث $\alpha'C'B'$ و $A'C'B'$ متساوی‌اند، زیرا $C'B'$ در هر دو مشترک و $C'A' = C'\alpha'$ است و زاویه‌های آنها در رأس C' که هر کدام ۴۵° است متساوی‌اند. پس ارتفاعهای این دو مثلث نظیر به نظیر برابرند و $A'B'$ مماس است بر دایرهٔ به مرکز C' و به شعاع $C'H$ یا $C'K$، که بر Ox و Oy مماس است.

۴. دو مثلث ODA و OBI متشابه‌اند، زیرا $\hat{POI} = \hat{DOA} = ۱۳۵^\circ$، و زاویهٔ محاطی DAO و زاویهٔ مرکزی $\widehat{BIO}$ که اندازهٔ هر دو آنها نصف اندازهٔ کمان $B\alpha$ است متساوی هستند. از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود: $\frac{OI}{OA} = \frac{OB}{OD}$. پس $OI \cdot OD = OA \cdot OB = OC^۲$؛ از این جا نتیجه می‌شود که مثلث DIC قائم‌الزاویه است و دایرهٔ به قطر DI از نقطه‌های C و C' می‌گذرد.

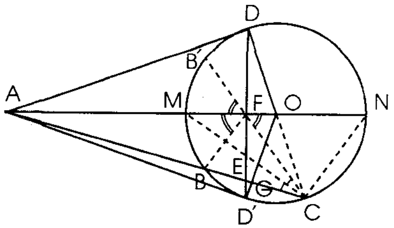
۵. قطر IM بر وتر AB عمود است، پس دایرهٔ به قطر DI از M نیز می‌گذرد و از طرفی، در این دایره، D وسط کمان $\widehat{CC'}$ است. پس زاویه‌های CMD و $C'MD$ که کمانهای روبه روی آنها برابر است، متساوی می‌باشند.

۶. چون OP و OC' نیمسازهای زاویهٔ $AO\beta$ هستند، پس چهار نقطهٔ A، P، A' و C' تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، و دستگاه $(B' - C'A'PA)$ توافقی است. امّا چهار ضلعی $C'B'\beta P$ محاطی است. زیرا زاویهٔ C' مساوی با ۴۵ درجه، و $B'OP$ مساوی با ۱۳۵ درجه است، و چون زاویهٔ $C'OP$ قائمه است، زاویهٔ $C'B'P$ نیز قائمه می‌باشد، و چون در دستگاه توافقی، **دو شعاع عمود بر هم**، نیمسازهای زاویهٔ دو شعاع یکدیگرند، پس $B'P$ زاویهٔ $A'B'A$ را نصف کرده است.

۵۲۱. فصل مشترک خط AO را با دایره، M و N می‌نامیم (M بین A و O):

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ODA داریم:

$\overline{OD}^۲ = OF.OA$ و یا $\overline{OM}^۲ = OF \cdot OA$



از این رابطه معلوم می‌شود که چهار نقطهٔ A، M، F و N تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

بنابراین دستگاه شعاعهای (C - AMFN) توافقی است و چون دو شعاع CN و CM برهم عمودند، این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های بین دو شعاع دیگر هستند ($\widehat{BCM} = \widehat{MCF}$). پس CF از نقطهٔ B´ قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به قطر MN می‌گذرد و چون F روی قطر، و MB و MB´ نسبت به آن متقارن هستند، داریم: $\widehat{BFM} = \widehat{B'FM} = \widehat{CFN}$؛ پس خط FD´ عمود بر MN نیمساز زاویهٔ BFC است، و چهار نقطهٔ A، B، E و C تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۲. در مثلث قائم الزاویهٔ ADO داریم: $\overline{AD}^۲ = \overline{AF}\,.\,\overline{AO}$؛ از طرف دیگر، چهار ضلعی OGEF که دو زاویهٔ روبه روی آن قائمه هستند، محاطی است و داریم: $AF\,.\,AO = AE\,.\,AG$ پس: $\overline{AD}^۲ = AE\,.\,AG$

۳. داریم: $AB\,.\,AC = \overline{AD}^۲$ پس: $AB\,.\,AC = AE\,.\,AG$ و $AE = \frac{AB\ AC}{AG}$.

و چون G وسط BC است، پس:
$$AG = \frac{AB + AC}{۲}$$

بنابراین:
$$AE = \frac{۲AB\,.\,AC}{AB + AC} = \frac{۳۰a^۲}{۸a} = \frac{۱۵a}{۴}$$

از مثلث قائم الزاویهٔ OGC حاصل می‌شود:
$$\overline{OG}^۲ = \overline{OC}^۲ - \overline{GC}^۲ = \frac{۲۵a^۲}{۱۶} - a^۲ = \frac{۹a^۲}{۱۶}$$
پس: $OG = \frac{۳a}{۴}$

برای محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی داریم:
$$\overline{AO}^۲ = \overline{AG}^۲ + \overline{OG}^۲ = ۱۶a^۲ + \frac{۹a^۲}{۱۶} = \frac{۲۶۵a^۲}{۱۶}$$
پس: $AO = \frac{a}{۴}\sqrt{۲۶۵}$ و نیز $\overline{AD}^۲ = AB\,.\,AC = ۱۵a^۲$، در نتیجه $AD = a\sqrt{۱۵}$.

از مثلث ADO حاصل می‌شود: $\overline{AD}^۲ = AF\,.\,AO$ و یا $۱۰a^۲ = AF \times \frac{a}{۴}\sqrt{۲۶۵}$

و $AF = \frac{۶۰a\sqrt{۲۶۵}}{۲۶۵}$.

از تشابه دو مثلث AFE و AGO حاصل می‌شود: $\frac{EF}{OG} = \frac{AF}{AG}$

و یا $FE = \frac{AF \,.\, OG}{AG} = \frac{۶۰a\sqrt{۲۶۵} \times ۳a}{۲۶۵ \times ۴ \times ۴a} = \frac{۴۵a\sqrt{۲۶۵}}{۴ \times ۲۶۵}$

$$\text{مساحت چهارضلعی} = \frac{AG \,.\, GO}{۲} - \frac{AF \,.\, FB}{۲} = \frac{۳a^۲}{۲} - \frac{۶۰a\sqrt{۲۶۵} \times ۴۵a\sqrt{۲۶۵}}{۲۶۵ \times ۴ \times ۲۶۵ \times ۲} =$$

$$= \frac{۳a^۲}{۲} - \frac{۱۳۵a^۲}{۱۰۶} = \frac{۱۲a^۲}{۵۳}$$

۵۲۲. چون α و α' مزدوجهای توافقی B و C هستند، داریم: $\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} = -\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$

وبه همین دلیل: $\frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} = -\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ و $\frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = -\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}$

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} = \left|\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\right|^۲ \text{ و } \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} = \left|\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\right|^۲ \text{ و } \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = \left|\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}\right|^۲$$

و از آن جا نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}} \cdot \frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}} = -\frac{\overline{\alpha B} \,.\, \overline{\beta C} \,.\, \overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C} \,.\, \overline{\beta A} \,.\, \overline{\gamma B}} \quad (۱)$$

$$\frac{\overline{aB} \,.\, \overline{bC} \,.\, \overline{cA}}{\overline{aC} \,.\, \overline{bA} \,.\, \overline{cB}} = \left(\frac{\overline{\alpha B} \,.\, \overline{\beta C} \,.\, \overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C} \,.\, \overline{\beta A} \,.\, \overline{\gamma B}}\right)^۲ \quad (۲)$$

۱. اگر α و β و γ بر یک خط راست باشند، در این صورت داریم: $\frac{\overline{\alpha B} \,.\, \overline{\beta C} \,.\, \overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C} \,.\, \overline{\beta A} \,.\, \overline{\gamma B}} = ۱$ که در نتیجه رابطه‌های (۱) و (۲) به صورتهای زیر در می‌آیند:

$$(۳)\ \frac{\overline{\alpha' B} \,.\, \overline{\beta' C} \,.\, \overline{\gamma' A}}{\overline{\alpha' C} \,.\, \overline{\beta' A} \,.\, \overline{\gamma' B}} = -۱ \text{ و } \frac{\overline{aB} \,.\, \overline{bC} \,.\, \overline{cA}}{\overline{aC} \,.\, \overline{bA} \,.\, \overline{cB}} = ۱\ (۴)$$

از رابطهٔ (۳) بنابه قضیهٔ سوا نتیجه می‌شود که $C\gamma'$ ، $B\beta'$ و $A\alpha'$ همرسند، و از

رابطهٔ (۴) بنابه قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که a ، b و c بر یک استقامت می‌باشند.

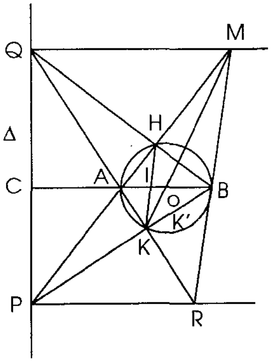
۲. اگر $\overline{A\alpha}$، $\overline{B\beta}$ و $\overline{C\gamma}$ همرس باشند، بنابه قضیهٔ سوا داریم: $\frac{\overline{\alpha B}.\overline{\beta C}.\overline{\gamma A}}{\overline{\alpha C}.\overline{\beta A}.\overline{\gamma B}}=-1$ ،

و در نتیجه رابطه‌های (۱) و (۲) به صورتهای زیر در می‌آیند:

(۵) $\frac{\overline{\alpha' B}.\overline{\beta' C}.\overline{\gamma' A}}{\overline{\alpha' C}.\overline{\beta' A}.\overline{\gamma' B}}=1$ و $\frac{\overline{aB}.\overline{bC}.\overline{cA}}{\overline{aC}.\overline{bA}.\overline{cB}}=1$ (۶)

این رابطه‌ها نشان می‌دهند که نقطه‌های $(\alpha', \beta', \gamma')$ و (a , b , c) هر دسته، روی یک خط راست قرار دارند.

۵۲۳. ۱. دستگاه (Q − CBAM) توافقی است زیرا روی خطی موازی شعاع QM ، دوپاره‌خط مساوی CA = AB جدا شده است و هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه‌های برخورد یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند پس (PHAM) یک تقسیم توافقی است.



۲. اگر P ، K و B بر یک استقامت باشند، حکم ثابت است. و در غیر این صورت چنانچه PB را وصل کنیم در مثلث PBQ خطهای PH و BC دو ارتفاع آن بوده و QA ارتفاع دیگرش می‌باشد. چنانچه QA از K بگذرد، حکم ثابت است؛ و اگر QA خط BP را در نقطهٔ دیگر ´K قطع کند، داریم $A\hat{K'}B = A\hat{K}B = 90°$ ، یعنی K و ´K برهم منطبق، و یا QK بر BP عمود بوده، و در نتیجه B ، P و K بر یک استقامت قرار دارند.

۳. دو دستگاه (Q − PHAM) و (P − QBHR) توافقی بوده و دارای یک شعاع مشترک می‌باشند و سه شعاع دیگرشان (PR و OR) و (QM و PM) و (OB و PB) در سه نقطه واقع بر یک استقامت متقاطعند.

۴. در چهارضلعی کامل OHBKPA، قطر AB به وسیلهٔ قطرهای OP و HK به نسبت توافقی تقسیم شده، یعنی I مزدوج C است نسبت به BA ، و چون در این

تقسیم توافقی A، B و C ثابت هستند I نیز ثابت است. یعنی HK از نقطهٔ ثابت I می‌گذرد.

و همچنین در ذوزنقه ABRO، وسطهای دو قاعده، محل تلاقی قطرها و ساقها، چهار نقطه هستند که بر یک استقامت می‌باشند، یعنی MK خط وصل شده بین نقطه‌های برخورد قطرها و ساقها، از وسط قاعده AB یعنی نقطهٔ O مرکز دایره که ثابت است می‌گذرد.

بخش ۸. نسبت ناهمساز

۵۲۴. داریم:

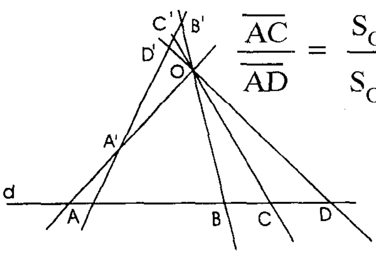
$$(ABCD) = K \Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = K \Rightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = K \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \text{مقدار ثابت}$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که D نقطهٔ ثابت و منحصر به فردی می‌باشد که روی محور مفروض می‌توان آن را مشخص کرد.

در حالتهای خاص: $K = ۱$، $K = ۰$ و $K \to \pm\infty$، نقطهٔ D بترتیب بر C، B و A منطبق است و در حالت ۱ $= \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$ که $K = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ است، ۱ $= \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$ می‌شود و به موجب اصل دزارگ، نقطهٔ D به فاصلهٔ بی‌نهایت دور می‌رود.

نتیجه . از تساوی $(ABCD) = (ABCM)$ نتیجه می‌شود که نقطهٔ M بر نقطهٔ D منطبق است.

۵۲۵. در دستگاه ناهمساز $(O - ABCD)$ داریم:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{S^{\Delta}_{OAC}}{S^{\Delta}_{OAD}} = \frac{\frac{۱}{۲} OA \cdot OC \sin (OA \text{ و } OC)}{\frac{۱}{۲} OA \cdot OD \sin (OA \text{ و } OD)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{\sin (OA \text{ و } OC)}{\sin (OA \text{ و } OD)}$$

و به همین ترتیب: $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{\sin (OB \text{ و } OC)}{\sin (OB \text{ و } OD)}$

پس داریم:

$$K = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin(OA \text{ و } OC)}{\sin(OA \text{ و } OD)} : \frac{\sin(OB \text{ و } OC)}{\sin(OB \text{ و } OD)}$$

از طرفی:

$$(A'B'C'D') = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'D'}} : \frac{\overline{B'C'}}{\overline{B'D'}} = \frac{\sin(OA' \text{ و } OC')}{\sin(OA' \text{ و } OD')} : \frac{\sin(OB' \text{ و } OC')}{\sin(OB' \text{ و } OD')}$$

امّا داریم:

$$(OA' \text{ و } OC') = -\pi + (OA \text{ و } OC)$$

$$(OB' \text{ و } OC') = (OB \text{ و } OC)$$

$$(OA' \text{ و } OD') = -\pi + (OA \text{ و } OD)$$

$$(OB' \text{ و } OD') = (OB \text{ و } OD)$$

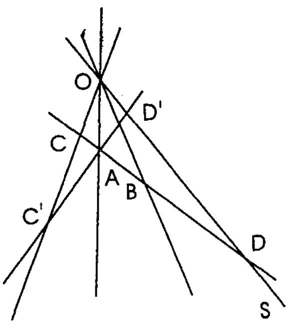
بنابراین از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که:

$$(A'B'C'D') = (ABCD) = K$$

نتیجه . در دستگاه همساز $(O - ABCD)$ داریم:

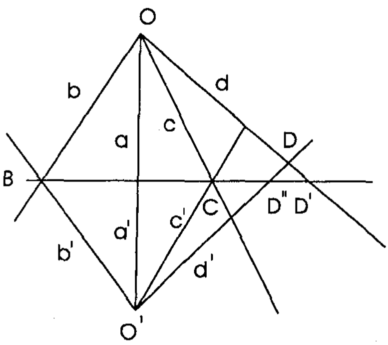
$$\frac{\sin(OA \text{ و } OC)}{\sin(OA \text{ و } OD)} = -\frac{\sin(OB \text{ و } OC)}{\sin(OB \text{ و } OD)}$$

۵۲۶. دو بخش ناهمساز $(ABCD)$ و $(A'B'C'D')$ که در آنها A بر A' منطبق است و نسبت ناهمسازی هر دو برابر K، است، در نظر می‌گیریم. BB' و CC' را رسم کرده و O نقطهٔ برخورد آنها را تعیین می‌کنیم. بدیهی است چون $(A'B'C'D') = (ABCD) = K$ است، $(O - AB'C'D')$ یک دستگاه با نسبت ناهمسازی K است؛ که چون آن را با خط AB قطع کنیم، روی این خط، بخش ناهمساز $(ABCS)$ با نسبت ناهمسازی K پدید می‌آید و داریم:



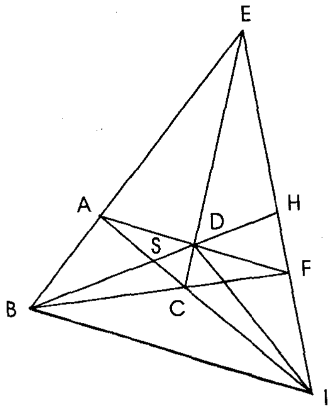
$(ABCD) = (ABCS)$، و به موجب این تساوی، D بر S منطبق است.

۵۲۷. دو دستگاه $(o - abcd)$ و $(o' - a'b'c'd')$ که دارای نسبت ناهمساز k می‌باشند، و دو شعاع متناظر oa و $o'a'$ از آنها برهم منطبق است، در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم B، C و D بترتیب نقطه‌های برخورد دو شعاع



(ob و o´b´) و (oc و o´c´) و (od و o´d´) باشند. B را به C وصل می‌کنیم تا شعاعهای مشترک را در A و شعاعهای od و od´ را در D´ و D″ قطع کند، چون نسبت ناهمساز مشترک دو دستگاه برابر k است، پس داریم:
.(ABCD´) = (ABCD″)

به موجب این تساوی D´ و D″ بر D منطبق و قضیه ثابت است.

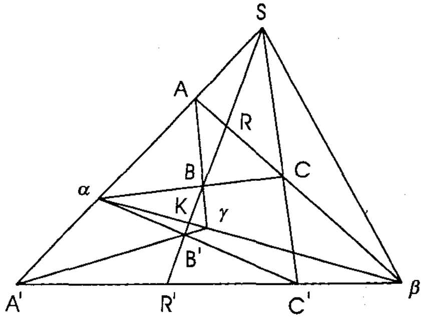


۵۲۸. دستهٔ چهار خطی (B − IHEF) با دو خط EF و AC قطع شده است.
بنابراین داریم:
(IHEF) = (ISAC) (۱)

دستهٔ چهارخطی (D − ISAC) با دو خط AC و EF قطع شده است،

پس: (۲) (ISAC) = (IHFE) از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:
$(IHEF) = (IHFE) \Rightarrow \frac{\overline{IE}}{\overline{IF}} = \pm\frac{\overline{HE}}{\overline{HF}}$ در این تساوی، در طرف دوم علامت (−) صحیح است، زیرا اگر + باشد، I بر H منطبق می‌شود و چهارضلعی که فرض قضیه است، از بین می‌رود. بنابراین:
(IHEF) = −۱
و در نتیجه:
(ISAC) = −۱
دستگاه (E − ISAC) به موجب تساوی اخیر همساز است، که چون آن را با BD قطع کنیم نتیجه می‌شود: (HSBD) = −۱ .

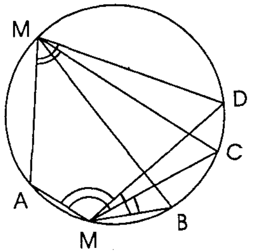
۵۲۹. در دستگاه $(S - ABC\beta)$ داریم: $(ACR\beta) = (A'C'R'\beta)$ پس دو دستگاه $(B - ACR\beta)$ و $(B' - A'C'R'\beta)$ دارای یک نسبتند و در شعاع (SR و SR´) مشترکند. بنابراین به موجب قضیه‌های قبلی، سه نقطهٔ برخورد شعاعهای نظیر (BA و B´A´) یعنی γ و (BC و B´C´)، یعنی α و ($B\beta$ و $B'\beta$) یعنی β، بریک خط راست واقعند.



۵۳۰. K نقطهٔ برخورد BB´ با $\alpha\beta$ است. دو دستگاه $(B - \alpha\gamma K\beta)$ و $(B' - \alpha\gamma R\beta)$ را که دارای نسبت ناهمساز مشترک می‌باشند، بترتیب با AC و A´C´ قطع می‌کنیم، دو بخش توافقی $(CAR\beta)$ و $(C'A'R'\beta)$ حاصل می‌شود که نسبت ناهمساز آنها با هم مساوی است. $(CAR\beta) = (C'A'R'\beta)$

این دو بخش ناهمساز در β یک نقطه نظیر، مشترکند؛ بنابراین خطهای CC´، AA´ و RR´ (که همان BB´ است) از یک نقطه می‌گذرند، و قضیه ثابت است.

۵۳۱. به موجب قضیه‌های قبلی، نسبت ناهمسازی دستگاه $(M - ABCD)$ چنین است:



$$\frac{\sin(MA \text{ و } MC)}{\sin(MA \text{ و } MD)} : \frac{\sin(MB \text{ و } MC)}{\sin(MB \text{ و } MD)}$$

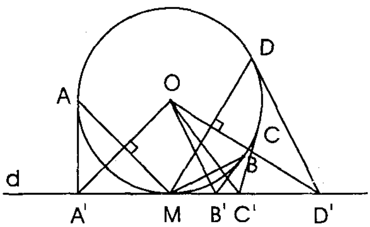
در صورتی که نقطهٔ M روی کمان $\overset{\frown}{AD}$ تغییر کند، وضع نسبی و اندازهٔ زاویه‌های دستگاه $(M - ABCD)$ تغییر نمی‌کند، و در نتیجه نسبت ناهمساز آن هم ثابت است.

در حالتی که M روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ باشد، به اندازهٔ اصلی زاویه‌های (MC و MA) و (MD و MA)، $-\pi$ اضافه می‌شود و اندازه‌های (MC و MB) و (MB , MD)، تغییر نمی‌کند. بنابراین نسبت ناهمساز ثابت می‌ماند.

به همین ترتیب، اگر M روی کمانهای $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ باشد، می‌توان دید که نسبت ناهمسازی دستگاه تغییر نمی‌کند. بنابر آن چه گفته شد، تعریف زیر مطرح می‌شود:

تعریف . نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A ، B ، C و D از دایرهٔ مفروض نسبت به آن دایره، نسبت ناهمسازی دستگاه (M − ABCD) است که M نقطهٔ متغیری از دایره باشد.

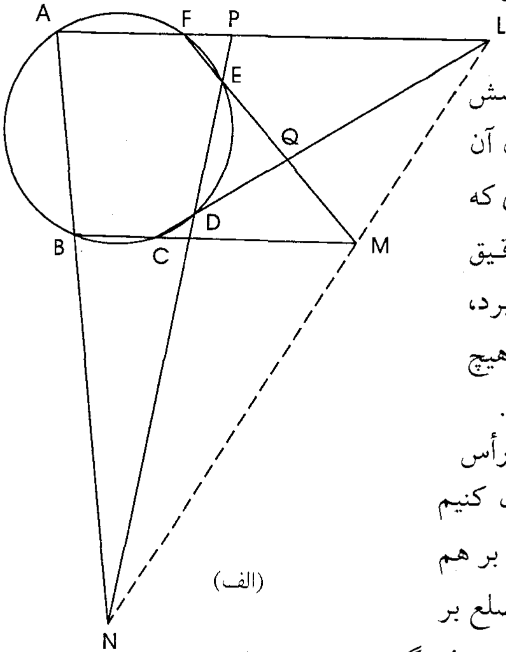
۵۳۲. نقطهٔ M را که از آن خط d مماس بر دایره رسم شده است، به چهار نقطهٔ A ، B ، C و D وصل می‌کنیم. نقطه‌های ´A ، ´B ، ´C و ´D نقطه‌های برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های A ، B ، C و D با



خط Δ را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. این خطها بترتیب بر MA ، MB ، MC و MD عمودند؛ بنابراین دو دستگاه (M − ABCD) و (O - A´B´C´D´) دارای نسبت ناهمسازی برابرند؛ و در نتیجه نسبت ناهمسازی (A´B´C´D´) مساوی نسبت ناهمسازی چهار نقطه A ، B ، C و D نسبت به دایره است.

۵۳۳. دو دستگاه ناهمساز به مرکزهای C (یک در میان) که شعاعهای هر دو از رأسهای B ، E و F بگذرند، در نظر می‌گیریم. دستگاه (A − BDEF) را با خط DE ، و دستگاه (C − BDEF) را با خط EF قطع می‌کنیم تا بترتیب دو بخش ناهمساز (NDEP) و (MQEF) پدید آید. چون دو دستگاه به موجب قضیه‌های قبلی دارای یک نسبت ناهمسازی می‌باشند، دو بخش ناهمساز نامبرده نیز یک نسبت ناهمسازی دارند، یعنی (NDEP) = (MQEF) ؛ و چون این دو بخش در نقطهٔ E مشترکند، بنابراین سه خط MN ، DQ و FP از یک نقطه مانند L می‌گذرند،

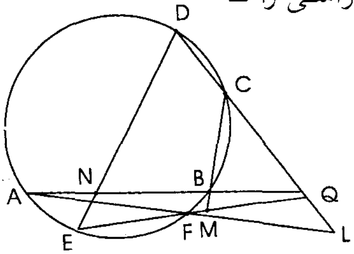
یا به عبارت دیگر سه نقطهٔ M ، N و L روی یک خط راست قرار دارند. شکل (الف).



(الف)

نکتهٔ ۱. قضیهٔ پاسکال برای شش ضلعیهای کاو نیز صادق، و برهان آن همان است که گفته شد تا حدی که اگر نامگذاری نقطه‌ها به طور دقیق مانند شکل (ب) انجام پذیرد، برهانی که شرح داده شد، بدون هیچ کم و کاستی در آن صدق می‌کند.

نکته ۲. اگر در قضیهٔ پاسکال دورأس مجاور را بی‌نهایت به هم نزدیک کنیم و حالت حدّی آن را که دو رأس بر هم منطبق می‌شوند، و راستای ضلع بر دایرهٔ محیطی مماس می‌گردد در نظر بگیریم، و این عمل را برای هر دو رأس مجاور که بخواهیم انجام دهیم، حکم قضیهٔ پاسکال دربارهٔ آن شکل صادق، و برای اثبات آن کافی است رأسی را که جانشین دو رأس می‌شود، به دو حرف همان دو رأس نامگذاری کنیم، و به شرحی که در یادآوری (۱) ذکر شد، برهان قضیهٔ پاسکال را عیناً به کار ببریم، با این عمل می‌توان قضیه‌های جالبی در مثلث و چهارضلعی و پنج ضلعی محاطی به دست آورد.

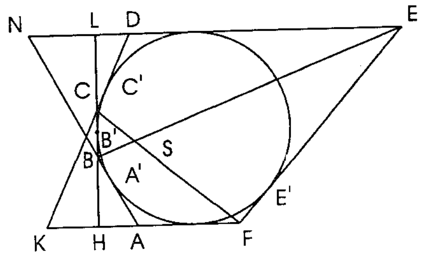


(ب)

نکته ۳ . قضیهٔ پاسکال، برای چند ضلعی‌های محاط در مقطعهای مخروطی، و منحنی‌های درجهٔ دوم نیز صادق است.

۵۳۴. دو ضلع یک در میان DE و AF از شش ضلعی را که دو مماس بر یک دایره‌اند، با ضلع دیگر که خطهای مماس با آن دایره در نقطه‌های ´A ، ´B ، ´C و É

می‌باشند، قطع می‌کنیم.
چهار مماس، روی دو ضلع DE و AF، دو بخش ناهمساز (AHKF) و (NLDE) را پدید می‌آورند که نسبت ناهمساز آنها مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ ´A، ´B، ´C و ´E نسبت به دایره است؛ و داریم:



(NLDE)=(AHKF) حال دو دستگاه ناهمساز (C − AHKF) و (B − NLDE) را در نظر می‌گیریم.
این دو دستگاه بنابه تساوی اخیر دارای یک نسبت ناهمسازی‌اند، و دو شعاع نظیر CH و BL از آنها، برهم منطبق می‌باشند؛ بنابراین سه نقطهٔ تقاطع: (CA با BN)، یعنی A و (CK با BD) یعنی D و (BE با CF) یعنی S بر یک خط راست واقع می‌باشند؛ و قضیه ثابت است.
نکتهٔ (۱) که دربارهٔ قضیهٔ پاسکال گفته شد، دربارهٔ قضیهٔ بریانشون صادق است.

۵۳۵. داریم:

$$(ABCD) = K \Rightarrow \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}} = K$$

$$(BACD) = \frac{\overline{BC}\,.\,\overline{AD}}{\overline{BD}\,.\,\overline{AC}} = \frac{1}{K} \Rightarrow (BACD) = \frac{1}{K}$$

$$(ABDC) = \frac{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}}{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}} = \frac{1}{K} \Rightarrow (ABDC) = \frac{1}{K}$$

۵۳۶. داریم:

$$(ABCD) = K \Rightarrow \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}} = K$$

$$(BADC) = \frac{\overline{BD}\,.\,\overline{AC}}{\overline{BC}\,.\,\overline{AD}} = K \Rightarrow (ABCD) = (BADC)$$

۵۳۷. به فرض این که $(ABCD) = K$، باید ثابت کنیم $(ABCD) + (ACBD) = ۱$.

داریم:

$$(ABCD) + (ACBD) = \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}} + \frac{\overline{AB}\,.\,\overline{CD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{CB}} = \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD} - \overline{AB}\,.\,\overline{CD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}}$$

$$\overline{AC}.\,\overline{BD}-\overline{AB}.\,\overline{CD}=\overline{AC}\,(\overline{BC}+\overline{CD})-\overline{AB}.\,\overline{CD}=(\overline{AC}-\overline{AB})\,\overline{CD}+\overline{AC}\,.\,\overline{BC}=$$

$$\overline{BC}.\,\overline{AD} \Rightarrow (ABCD) + (ACBD) = ۱ \Rightarrow (ACBD) = ۱ - K$$

۵۳۸. داریم:

$$(ABCD) = ۱ - (ACBD) = ۱ - (CADB)$$

$$(ABCD) = ۱ - [۱ - (CDAB)] = (CDAB)$$

۵۴۰. داریم:

$$(ABCD) = K \Rightarrow (BACD) = \frac{۱}{K},\ (ACBD) = ۱ - K$$

$$(CABD) = \frac{۱}{۱ - K},\ (BCAD) = ۱ - \frac{۱}{K},\ (CBAD) = \frac{K}{K - ۱}$$

هر نسبت ناهمساز را به چهار صورت می‌توان نوشت؛ بنابراین از ۶ نسبت بالا، ۲۴ نسبت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = K$$

$$(BACD) = (ABDC) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{۱}{K}$$

$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = ۱ - K$$

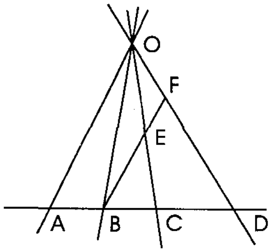
$$(CABD) = (ACDB) = (BDCA) = (DBAC) = \frac{۱}{۱ - K}$$

$$(BCAD) = (CBDA) = (ADBC) = (DACB) = ۱ - \frac{۱}{K}$$

$$(CBAD) = (BCDA) = (ADCB) = (DABC) = \frac{K}{K - ۱}$$

نکته. چهار نقطه را با ۲۴ = !۴ حالت، می‌توان کنار هم قرار داد. پس چهار نقطه ۲۴ نسبت ناهمساز تشکیل می‌دهند. چون هر نسبت ناهمساز را به چهار شکل می‌توان نوشت، از این ۲۴ نسبت ناهمساز ۶ نسبت با عددهای مختلف به دست می‌آید، که با معلوم بودن یکی، ۵ تای دیگر معلوم می‌شوند.

۵۴۱. دستگاه ناهمساز $(O - ABCD)$ را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ B خطی موازی شعاع OA رسم می‌کنیم تا سه شعاع دیگر دستگاه ناهمساز را در نقطه‌های E و F قطع کند. در دو مثلث DOA و COA داریم:



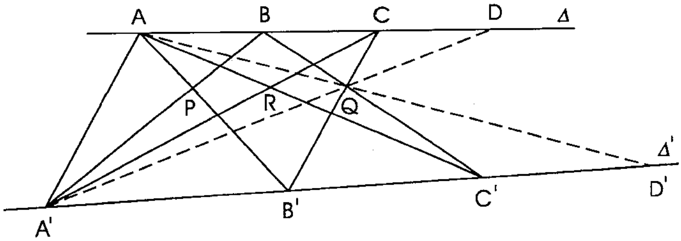
$$BF \parallel OA \Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}} \quad (۱)$$

$$BE \parallel OA \Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} \quad (۲)$$

$$\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DB}\,.\,\overline{CA}}{\overline{DA}\,.\,\overline{CB}} = \frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{AD}.\,\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = (ABCD)$$

۵۴۲. دو نقطهٔ A و ´A را به نقطهٔ Q وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا بترتیب Δ و ´Δ را در D و ´D قطع کنند.

دستگاه ناهمساز $(Q . ABCD)$ را با دو خط Δ و ´Δ قطع می‌کنیم، تا



روی این دو خط، دو بخش ناهمساز با نسبتهای ناهمساز برابر، پدید آید.

$(۱)\,(ABCD) = (D'C'B'A')$

به موجب ویژگیهای نسبت ناهمساز داریم:

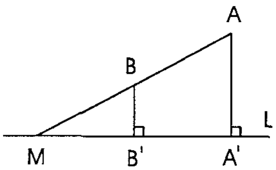
$(D'C'B'A') = (B'A'D'C') = (A'B'C'D')$

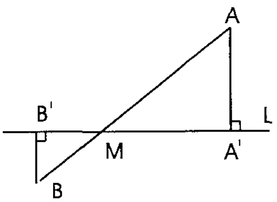
پس تساوی (۱) چنین نوشته می‌شود:

$(۲)\,(ABCD) = (A'B'C'D')$

دو دستگاه ناهمسازی $(A' - ABCD)$ و $(A - A'B'C'D')$ را در نظر

می‌گیریم. این دو دستگاه دارای یک نسبت ناهمسازی و یک زوج شعاع منطبق نظیر هم می‌باشند، بنابراین سه نقطهٔ برخورد سه جفت شعاعهای نظیر، یعنی ($A'B$ و AB') و ($C'A$ و AC') و (AD' و $A'D$)، یعنی نقطه‌های P ، R و Q بر یک خط راست قرار دارند.





۵۴۳. نخست ثابت می‌کنیم اگر خطی که دو نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ را به هم وصل می‌کند خط $L(x,y)=ax+by+c=0$ را در نقطهٔ M قطع کند، داریم: $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{L(x_1 , y_1)}{L(x_2 , y_2)}$. برای این کار از نقطه‌های A و B عمودهای AA' و BB' را بر خط L فرود می‌آوریم. می‌دانیم که:

$$\overline{AA'} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{L(x_1 , y_1)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\overline{BB'} = \frac{ax_2 + by_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{L(x_2 , y_2)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

از طرفی بنابه تشابه دو مثلث MAA' و MBB' داریم:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{L(x_1 , y_1)}{L(x_2 , y_2)}$$

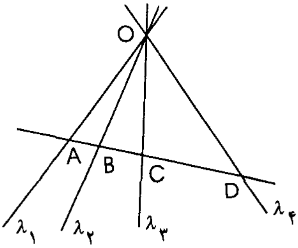
با توجه به نکته بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{D(x_3 , y_3) + \lambda_1 D'(x_3 , y_3)}{D(x_4 , y_4) + \lambda_1 D'(x_4 , y_4)}$$

امّا: $D(x_3 , y_3) + \lambda_3 D'(x_3 , y_3) = 0$ و $D(x_4, y_4) + \lambda_4 D'(x_4, y_4) = 0$ است؛

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3) D'(x_3 , y_3)}{(\lambda_1 - \lambda_4) D'(x_4 , y_4)}$$



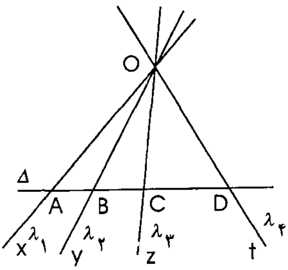
و به همین ترتیب داریم:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{(\lambda_۲ - \lambda_۳)\, D'(x_۳ , y_۳)}{(\lambda_۲ - \lambda_۴)\, D'(x_۴ , y_۴)}$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$K = (ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\lambda_۱ - \lambda_۳}{\lambda_۱ - \lambda_۴} : \frac{\lambda_۲ - \lambda_۳}{\lambda_۲ - \lambda_۴} = (\lambda_۱ , \lambda_۲ , \lambda_۳ , \lambda_۴)$$

۵۴۴. دستگاه ناهمساز $(O - xyzt)$ که خط Δ را در نقطه‌های A ، B ، C و D قطع کرده است، در نظر می‌گیریم.



اگر $K = (ABCD)$ و ضریب زاویهٔ شعاعهای Ox ، Oy ، Oz و Ot را بترتیب $m_۱$ ، $m_۲$ ، $m_۳$ و $m_۴$ فرض کنیم و معادلهٔ دسته خطی را که شامل شعاعهای این دستگاه است به صورت $(ax + by + c) + \lambda(a'x + b'y + c') = ۰$ اختیار نماییم، می‌توانیم ضریب زاویه‌ایهای شعاعهای دستگاه را بر حسب $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\lambda_۳$ و $\lambda_۴$ (عددهایی که به ازای آنها بترتیب شعاعهای Ox ، Oy ، Oz و Ot از روی معادلهٔ دسته خط به دست می‌آیند)، به صورت زیر محاسبه کنیم؛ با توجه به این که داریم: $K = (ABCD) = (\lambda_۱$ و $\lambda_۲$، $\lambda_۳$، $\lambda_۴)$. اگر m ضریب زاویهٔ دسته خط باشد، داریم:

$$m = -\frac{a + \lambda a'}{b + \lambda b'} \Rightarrow (m_۱ , m_۲ , m_۳ , m_۴) = \frac{m_۳ - m_۱}{m_۴ - m_۱} : \frac{m_۳ - m_۲}{m_۴ - m_۲}$$

امّا:

$$\frac{m_۳ - m_۱}{m_۴ - m_۱} = \frac{-\dfrac{a + \lambda_۳ a'}{b + \lambda_۳ b'} + \dfrac{a + \lambda_۱ a'}{b + \lambda_۱ b'}}{-\dfrac{a + \lambda_۴ a'}{b + \lambda_۴ b'} + \dfrac{a + \lambda_۱ a'}{b + \lambda_۱ b'}} = \frac{\lambda_۳ - \lambda_۱}{\lambda_۴ - \lambda_۱}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که

$$\frac{m_۳ - m_۲}{m_۴ - m_۲} = \frac{\lambda_۳ - \lambda_۲}{\lambda_۴ - \lambda_۲}$$

در نتیجه: $(m_۱ , m_۲ , m_۳ , m_۴) = (\lambda_۱ , \lambda_۲ , \lambda_۳ , \lambda_۴) = K = (ABCD)$

۵۴۵. فرض می‌کنیم $(OX , OY) = \alpha$ و ضریب زاویه‌ایهای OX و OY بترتیب m و m´ و نسبت غیر توافقی ضلعهای زاویه با دو خط ایزوترپ، مساوی K باشد، در این صورت داریم: $K = (m , m´, i , -i)$

$$K = \frac{i - m}{-i - m} : \frac{i - m´}{-i - m´} = \frac{۱ + mm´ - i (m´ - m)}{۱ + mm´ + i (m´ - m)}$$

امّا: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{m´ - m}{۱ + mm´}$، پس:

$$K = \frac{(m´ - m)\,\text{cotg}\,\alpha - i\,(m´ - m)}{(m´ - m)\,\text{cotg}\,\alpha + i(m´ - m)} = \frac{\cos\alpha - i \sin \alpha}{\cos \alpha + i \sin \alpha}$$

با توجه به این که $\sin \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{۲}$ و $\cos \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{۲}$ است،خواهیم داشت:

$$K = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{۲i\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{i}{۲} \log k$$

در حالت خاص که $\alpha = \dfrac{\pi}{۲}$ باشد، $K = e^{-\pi i} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$ یعنی $K = -۱$ است؛ و در این حالت ضلعهای زاویهٔ قائمه، با دو خط ایزوترپ که از رأس زاویه می‌گذرند، تشکیل دستگاه توافقی می‌دهند.

۵۴۶. ثابت کنید: $\dfrac{\sin (AT \text{ و } AB)}{\sin (AT \text{ و } AC)} = \dfrac{\sin (AD \text{ و } AB)}{\sin (AD \text{ و } AC)}$

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. تألیف : واسیلیف. گوتن ماخر. رابوت. توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۵. المپیادهای ریاضی بلژیک. مؤلف انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. مؤلف ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور نشر ماس ــ نشر نام.
۷. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مؤلف مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ماس ــ نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی لنینگراد. مؤلف د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۹. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری، ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۰. بازآموزی و باز شناخت هندسه. مؤلف هـ. س. م. کوکس تیر ــ س. ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۱. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.
۱۲. تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۳. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۴. تاریخ هندسه. مؤلف. پی‌یر، مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۵. تئوری مقدماتی اعداد. جلد اول. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۶. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۱۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۱۸. حل مسائل ریاضیات. مؤلف محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۱۹. حل مسائل متمم هندسه. مؤلف دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۰. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. مؤلف حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. تألیف :

محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۲۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. مؤلف. عباس ذوالقدر.
۲۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. مؤلف. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. مؤلف. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. تألیف : غلامعلی ریاضی. علی‌حسن‌زاده. محمد حسین پرتوی. محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستانها. تألیف : محمدباقر ازگمی. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۲۹. خلاقیت ریاضی. مؤلف جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۰. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو و.ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۱. در پس فیثاغورس. شه‌پان ــ النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۲. دورهٔ حل‌المسائل هندسه. جلدهای اول و دوم. تألیف : ابوالقاسم قربانی. حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۳. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۴. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۵. دورهٔ مجلهٔ ریاضی رشد. وزارت آموزش و پرورش.
۳۶. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.
۳۷. روش حل مسائل هندسه. تألیف : دکتر حسن صفاری. ابوالقاسم قربانی. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۳۸. ریاضیات زنده. مؤلف ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۳۹. ریاضیدانان نامی. مؤلف دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۰. سرگرمیهای هندسه ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۱. قضایا و مسائل هندسه. تألیف غلامرضا یاسی‌پور.
۴۲. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. مؤلف : جی.ال.برگرن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مؤلف مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. تألیف : واسیلیف. یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۴۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. تألیف جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۴۶. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. مؤلف و.د.چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۴۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. مؤلف. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۴۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. مؤلف. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۴۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. مؤلف ای. خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستان امریکا. جلد اول. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور. محمدقزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد دوم. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد سوم. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. جیمز. م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. مؤلف آرتینو. گاگلیون. شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی). مؤلف و.س.کوشچنکو ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. جلد اول. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. جلد دوم. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. تألیف : محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۵۸. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. مؤلف ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۵۹. نابرابریها. مؤلف پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۰. نابرابریهای هندسی. مؤلف نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. نه مقالهٔ هندسه. تألیف : ابوالقاسم قربانی. دکتر حسن صفاری.
۶۲. هندسهٔ ایرانی. مؤلف. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۶۳. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. مؤلف ماروین جی گرینبرگ. ترجمهٔ. م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۴. هندسهٔ تحلیلی. تألیف : حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۶۵. هندسه‌های جدید. تألیف : جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.

۶۶. هندسه درگذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۶۷. هندسهٔ دوایر. مؤلف. دکتر محسن هشترودی از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۶۸. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). تألیف : محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا. پرویز شهریاری. علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۹. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم نظام قدیم وزارت آموزش و پرورش.
۷۰. هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۷۱. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش‌وپرورش (نظام اسبق).
۷۲. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته مؤلف اِدوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیرخسروی. محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۷۳. هندسهٔ موئیز. دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۷۴. هندسه‌های ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
75. COLLEGE GEOMETRY. NATHAN ALTSHILLER. COURT. BRANES NOBLE. NEW YORK.
76. COLLEGE BOARDS. EXAMINATION, M. MCDONOUGH, A. HANSEN.
77. EXERCICES. DE GÉOMÉTRIE PAR, F.G.M.
78. EXERCICES DE GEOMTRIE PAR TH, CARONNET.
79. ÉXÉRCICES DE GÉOMETRIE MODERNE. PAR G. PAPELIER. LIBRAIRIE VUIBERT. PARIS.
80. GEOMETRY A HIGH SCHOOL. COURSE, Serge Lange, Gene Murrow.
81. GIANT COLOUR BOOK. OF MATHEMATICS by IRVING ADLER.
82. GUIDES PRATIQUES BORDAS.II.GEOMETRIE PAR. ROBERT ARDRE´.
83. JACUB GEOMETRY.
84. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR. ANDRÉWARUSFEL.
85. MATHEMATICS AROUND US.
86. MÉMENTO DE MATHEMATIOUES USUELLES PAR . A.PONT.
87. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS A.M. WELCHONS, W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.
88. PRECIS DE GÉOME´TRIE PAR.ANDRE´ VIEILLEFOND ETP. TURMEL.
89. PRENTICE HALL GEOMETRY. BY, ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.
90. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.
91. RÉSOLUTION DES PROBLÉMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE. PAR E. J. HONNET.