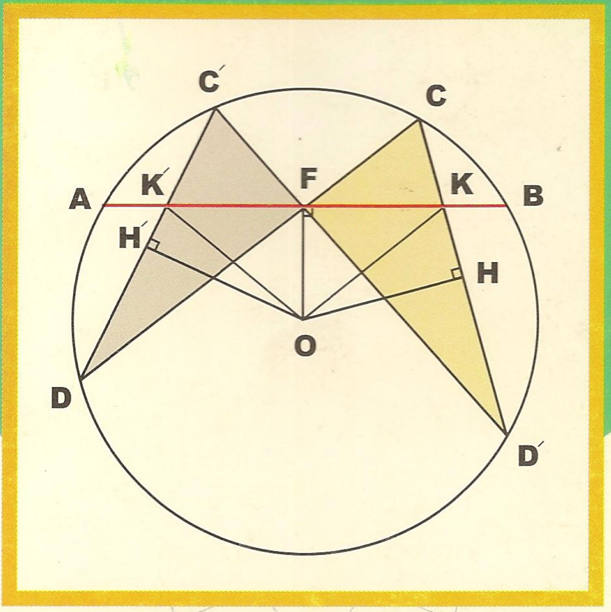
دایرة المعارف هندسه

۴

رابطه های متری در دایره

(ربع دایره، نیمدایره، یک دایره، دودایره، ...)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرة‌المعارف هندسه

«جلد چهارم»

رابطه‌های متری در دایره

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ ـ
دایرةالمعارف هندسه / مؤلف محمدهاشم رستمی.ـ تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴ـ
ج.: مصور، جدول، نمودار.
ISBN 964-353-128-7 (ج. ۴)
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
کتابنامه.
مندرجات: ج.۱. خواص توصیفی اشکال هندسه... ج. ۴. رابطه‌های متری در دایره.
ج. ۴ (چاپ دوم: زمستان ۱۳۷۹).
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

QA ۵۰۱/۵ / ر ۵ د ۴
۵۱۶/۰۰۷۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
دایرةالمعارف هندسه
(جلد چهارم)
رابطه‌های متری در دایره
مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: ۷۸/ چاپ دوم: زمستان ۱۳۷۹
تیراژ چاپ اوّل: ۵۰۰۰/ تیراژ چاپ دوم: ۳۰۰۰ نسخه
چاپ و صحافی از: مؤسسه انتشاراتی سوره

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹، ۸۸۲۰۵۹۹
شابک ۷ ـ ۱۲۸ ـ ۳۵۳ ـ ۹۶۴
ISBN-964-353-128-7

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.
از سالها پیش، نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقمندان به این شاخه از ریاضی، با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند، و یا قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند.

به این جهت از حدود سی‌وپنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب، براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. خاصیتهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلات هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس،...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه‌های نااقلیدسی
...

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند مجلد از این دایرةالمعارف را دربرمی‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج مجلد به شرح زیر است :

۱. نسبت پاره‌خطها (نسبت و تناسب، قضیه تالس و...)
۲. رابطه‌های متری در دایره
۳. رابطه‌های متری در مثلث مختلف الاضلاع
۴. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه و ...)
۵. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهار ضلعیهای ویژه، چهار ضلعیهای دیگر، پنج ضلعیها و ...)

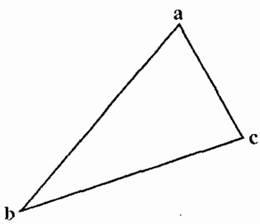
برای استفاده بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقمند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها، در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و تنها یک یا دو راه‌حل از آنها مطرح شده است. زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر در مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای ریاضی بین‌المللی، و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، ازجمله المپیادهای ریاضی ایران و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای ریاضی بین‌المللی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac، ...



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها و تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است؛ به عنوان مثال همه جا، نقطه‌ها با حروف بزرگ لاتین، مانند نقطه‌های A، B، C و ... و پاره خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این مجلد از دایرةالمعارف شامل قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به رابطه‌های متری در دایره است، که شامل ۵ بخش زیر است:

بخش ۱. رابطه‌های متری در ربع دایره

بخش ۲. رابطه‌های متری در نیمدایره

بخش ۳. رابطه‌های متری در یک دایره

بخش ۴. رابطه‌های متری در دو دایره

بخش ۵. رابطه‌های متری در سه دایره و بیشتر

هر یک از این بخشها، شامل چند زیربخش است. به عنوان مثال، بخش ۳ شامل ۱۵ زیربخش زیر است:

۳. ۱. تعریف و قضیه
۳. ۲. شعاع و قطر دایره
۳. ۳. طول قوس و محیط دایره
۳. ۴. π
۳. ۵. مساحت دایره
۳. ۶. قطاع دایره
۳. ۷. قطعهٔ دایره
۳. ۸. سطحهای ایجاد شده در دایره
۳. ۹. زاویه در دایره
۳. ۱۰. پاره‌خط
۳. ۱۱. رابطه‌های متری
۳. ۱۲. قوت نقطه نسبت به دایره
۳. ۱۳. نقطه‌ها روی یک دایره‌اند (نقطه‌های همدایره)
۳. ۱۴. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش
۳. ۱۵. مسأله‌های ترکیبی

هر یک از زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای دیگری تقسیم گردیده‌اند مانند زیربخش ۳. ۱۰، مسأله‌های مربوط به پاره‌خط که شامل زیربخشهای زیر است:

۳. ۱۰. ۱. وترها و قاطعهای رسم شده در داخل دایره
۳. ۱۰. ۲. قاطعهای رسم شده از خارج دایره
۳. ۱۰. ۳. یک خط مماس و قاطعهای رسم شده از خارج دایره
۳. ۱۰. ۴. مماسها و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

در هریک از این زیربخشها نیز مطالب با نظم و ترتیب مشخصی ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان و دانش‌آموزان و دیگر علاقمندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها، و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. قبلاً از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رابطه‌های متری در دایره

بخش ۱. رابطه‌های متری در ربع دایره
بخش ۲. رابطه‌های متری در نیمدایره
بخش ۳. رابطه‌های متری در یک دایره
بخش ۴. رابطه‌های متری در دو دایره
بخش ۵. رابطه‌های متری در سه دایره و بیشتر

بخش ۱

• رابطه‌های متری در ربع دایره

۱.۱. تعریف

۲.۱. نسبت محیطها و مساحتها

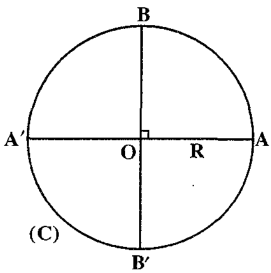
۳.۱. تساوی دو پاره‌خط

۴.۱. رابطه‌های متری

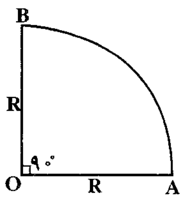
بخش ۱. رابطه‌های متری در ربع دایره

۱.۱. تعریف

دو قطر عمود بر هم هر دایره، آن دایره را به چهار بخش متساوی تقسیم می‌کنند که هر یک را یک ربع دایره می‌نامند؛ مانند ربع دایرهٔ AOB.



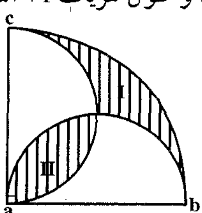
در ربع دایرهٔ AOB، اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر ۹۰° و اندازهٔ کمان AB مساوی ۹۰° است. شعاع ربع دایره، همان شعاع دایره است. بنابراین در دایرهٔ C (O,R)، شعاع هر ربع دایره برابر R است.



محیط ربع دایرهٔ به شعاع R، برابر $\frac{۱}{۴}$ محیط دایرهٔ به شعاع R، یعنی $\frac{۱}{۴}(۲\pi R)$ یا $\frac{۱}{۲}\pi R$؛ و مساحت ربع دایرهٔ به شعاع R، مساوی $\frac{۱}{۴}$ مساحت دایرهٔ به شعاع R یعنی $\frac{۱}{۴}\pi R^۲$ است.

۲.۱. نسبت محیطها و مساحتها

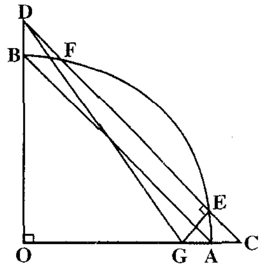
۱. در شکل مقابل، دو پاره خط [ab] و [ac] بر هم عمودند و طول هریک ۲r است. ربع دایرهٔ به مرکز a و به شعاع ۲r و نیمدایره‌های به قطرهای [ab] و [ac]، دو ناحیهٔ I و II را مشخص می‌کنند که در شکل با خطهای پرداز نموده شده‌اند. نسبت مساحت ناحیهٔ I به مساحت ناحیهٔ II، همچنین محیط ناحیهٔ I به محیط ناحیهٔ II چه‌قدر است؟



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

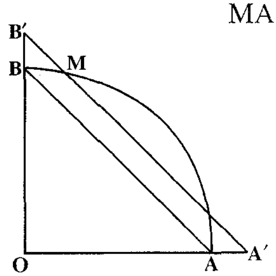
۳.۱. تساوی دو پاره‌خط

۲. ربع دایرهٔ AOB مفروض است. خطی موازی وتر AB رسم می‌کنیم تا ربع دایره را در نقطه‌های E و F و امتداد OA و OB را بترتیب در نقطه‌های C و D قطع کند. از E عمودی بر EF رسم می‌کنیم تا OA را در نقطهٔ G قطع کند، ثابت کنید : $DG = AB$.

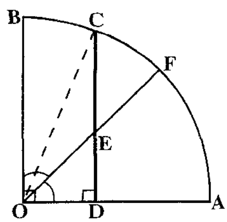


۴.۱. رابطه‌های متری

۳. ربع دایرهٔ AOB به مرکز O مفروض است. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر این ربع دایره، خطی موازی با وتر AB رسم می‌کنیم تا OA را در A' و OB را در B' قطع کند، ثابت کنید: $\overline{MA'}^2 + \overline{MB'}^2 = \overline{AB}^2$



۴. ربع دایرهٔ AOB را در نظر می‌گیریم، و OF نیمساز زاویه AOB را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ دلخواهی مانند C از کمان AB، عمودِ CD را بر OA فرود می‌آوریم تا OF را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید $OA^2 = DC^2 + DE^2$.

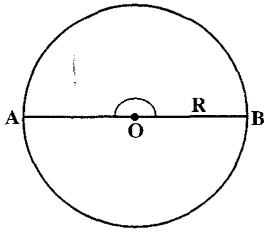


بخش ۲

• رابطه‌های متری در نیمدایره

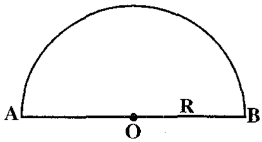
بخش ۲. رابطه‌های متری در نیمدایره

۱.۲. تعریف



هر قطر یک دایره، آن دایره را به دو بخش متساوی تقسیم می‌کند، که هریک را یک نیمدایره می‌نامند ؛ مانند نیمدایرهٔ AOB.

اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر ۱۸۰° و اندازهٔ کمان AB مساوی ۱۸۰° است. شعاع نیمدایره، همان شعاع دایره است. بنابراین در دایرهٔ C (O,R)، شعاع هر نیمدایره برابر R است.



محیط نیمدایرهٔ به شعاع R، مساوی $\frac{۱}{۲}$ محیط دایرهٔ به شعاع R، یعنی $\frac{۱}{۲}(۲\pi R)$ و یا مساوی πR است ؛ و مساحت نیمدایرهٔ به شعاع R، برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت دایرهٔ به شعاع R، یعنی $\frac{۱}{۲}\pi R^۲$ است.

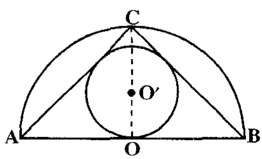
۲.۲. اندازهٔ شعاع

۵. ناحیه‌ای به محیط یک نیمدایره و قطر آن محدود است. عدد محیط این ناحیه (برحسب سانتی‌متر) برابر است با عدد مساحت آن (برحسب سانتی‌متر مربع) ؛ در این صورت، شعاع آن برابر است با :

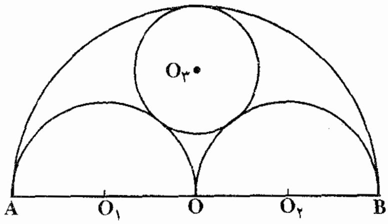
الف) π ب) $\frac{۲}{\pi}$ ج) ۱   د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۴}{\pi}+۲$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

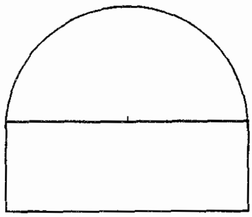
۶. در نیمدایرهٔ به قطر $AB = ۲R$ ، مثلث متساوی الساقین ABC محاط شده است. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث را برحسب R حساب کنید.



۷. نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2R$ و به مرکز O مفروض است. در داخل این نیمدایره، دو نیمدایرهٔ دیگر، یکی به قطر OA و دیگری به قطر OB رسم می‌کنیم. مطلوبست محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که با این سه نیمدایره مماس باشد.

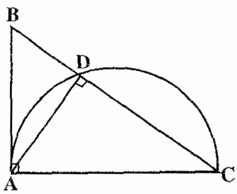


۸. مقطع عرضی تونلی از یک مستطیل و یک نیمدایره بر بالای آن تشکیل شده است. اگر محیط این مقطع برابر P باشد، برای به حداکثر رسیدن مساحت مقطع، شعاع نیمدایره چه‌قدر باید باشد؟



۳.۲. اندازهٔ محیط

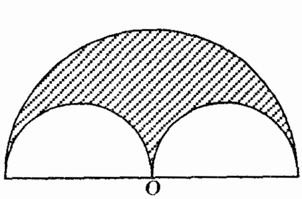
۹. به قطر ضلع بزرگتر مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، نیمدایره‌ای رسم کرده‌ایم. اگر ضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمه ۳۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمه تا نقطهٔ برخورد نیمدایره با وتر، ۲۴ سانتی‌متر باشد، محیط نیمدایره را حساب کنید.

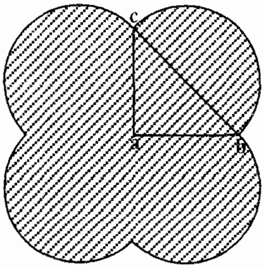


۴.۲. مساحت

۱.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها

۱۰. در این شکل، قطر هریک از نیمدایره‌های کوچک، با شعاع نیمدایرهٔ بزرگ برابر است. اگر شعاع نیمدایرهٔ بزرگ ۲ باشد، مساحت سطح سایه زده را بیابید.





۱۱. شکل روبه‌رو، به چهار نیمدایرهٔ برابر محدود است و در آن $ab = ac = ۱$ ، مساحت این شکل چه قدر است؟

الف) $\pi + ۲$ ب) $\pi^۲ + ۲$ ج) $\pi + \sqrt{۲}$

د) ۲π هـ) $۴\pi + ۲$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست

۱۲. مساحت بزرگترین مثلثی که می‌توان در نیمدایرهٔ به شعاع r محاط کرد، برابر است با :

الف) $r^۲$ ب) $r^۳$ ج) $۲r^۲$ د) $۲r^۳$ هـ) $\frac{۱}{۲}r^۲$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

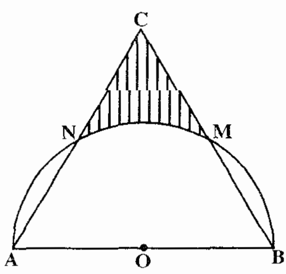
۱۳. مربعی به مساحت ۴۰، در نیمدایره‌ای محاط شده است. مساحت مربعی که می‌توان در دایره‌ای با همان شعاع محاط کرد، برابر است با :

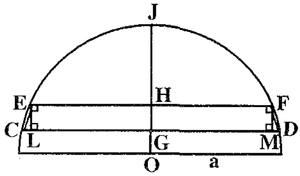
الف) ۸۰ ب) ۱۰۰ ج) ۱۲۰ د) ۱۶۰ هـ) ۲۰۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۳.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها و خطهای راست

۱۴. روی قطر $۲r$ از نیمدایره‌ای، مثلث متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. مساحت قسمتی از مثلث را که در خارج نیمدایره قرار گرفته است، پیدا کنید.





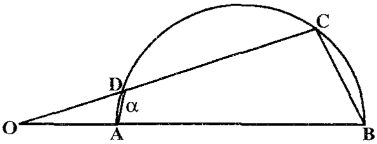
۱۵. در شکل، O مرکز نیمدایرهٔ به شعاع a سانتی‌متر، وتر EF موازی وتر CD، و نقطه‌های O، G، H و J همراستا و G وسط پاره‌خط CD است. اگر K (برحسب سانتی‌متر مربع) مساحت ذوزنقهٔ CDFE و R (برحسب سانتی‌متر مربع) مساحت مستطیل ELMF باشد و CD و EF طوری به طرف بالا انتقال یابند که OG به سمت مقدار a افزایش یابد، در حالی که JH همواره برابر HG باشد، نسبت K:R به کدام یک از مقدارهای زیر نزدیک می‌شود :

الف) ۰   ب) ۱   ج) $\sqrt{۲}$

د) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ هـ) $۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

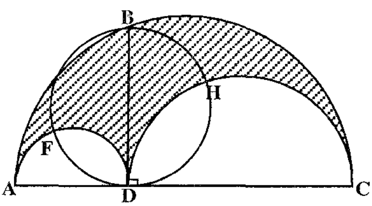
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۱۶. مطابق شکل، از نقطهٔ O روی امتداد قطر AB از نیمدایره، قاطع ODC را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مساحت چهارضلعی ABCD وقتی ماکزیمم است که تصویر عمودی DC روی قطر AB، برابر R شعاع نیمدایره باشد.



۲.۴.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۱۷. نیمدایرهٔ $\overset{\frown}{ABC}$ به قطر AC مفروض است. از نقطهٔ B واقع بر محیط آن، عمود BD را بر AC فرود آورده‌ایم. نیمدایره‌های AFD و DHC را بترتیب، به قطرهای AD و DC رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت AFDHCB ، شکلی که به این ترتیب به دست می‌آید، برابر است با مساحت دایرهٔ به قطر BD (این شکل گزن نام دارد).



از ارشمیدس، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

ارشمیدس

ارشمیدس (Archemides) در ۲۸۷ پ. م در سیراکیوز (یا سیراکوز) سیسیل به دنیا آمد و در ۲۱۲ پ. م همانجا درگذشت. از دوستان اراتوستنس Eratosthenes (متولد کورنه

ارشمیدس

نقش برجسته‌ی خیالی در موزهٔ کاپیتول رم.

تاریخ نامعلوم

در حدود ۲۷۴ پ.م متوفی ح ۱۹۴ پ. م) نخستین جغرافیدان برجستهٔ جهان باستان، و اگر اظهار پلوتارخوس Plutarque (۵۰ ـ ۱۵۰ م) را بپذیریم، از خویشاوندان شاه هرون بود. لایبنیتس Libnitz (۱۶۴۶ ـ ۱۷۱۶) نبوغ او را با اظهار این مطلب می‌ستاید که آنان که با کارهای او و آپولونیوس آشنایی دارند از کارهای بزرگترین فضلای جدید کمتر دچار شگفتی می‌شوند. این مطلب منصفانه است، چون ارشمیدس در مورد برخی افکار، قریب دو هزار سال از نیوتون و معاصرانش پیش بود و از لحاظ استفاده از ریاضیات در جهان باستان، همتایی نداشت. یکی از مورخان ایتالیایی ریاضیات، این عبارت را به کار برده که «او بیشتر نابغه‌ای آسمانی بود تا انسان» و پلینی، او را «خدای ریاضیات» می‌نامد، و یکی از مترجمان فرانسهٔ کتاب پلینی، آن عبارت را به طور مناسبی «هومر هندسه» ترجمه کرده است. روایت شده است که ارشمیدس به کمک آینه‌های مخصوصی، کشتیهای جنگی محاصره‌کنندگان سیراکیوز را آتش زد.

ارشمیدس وعلم مکانیک. پلوتارخوس در حیات مردان نامی، این مطلب را برای نشان دادن نبوغ ارشمیدس روایت می‌کند: ارشمیدس ...، اظهار کرد، با به کار بردن نیرو، هر چیز سنگینی را می‌توان حرکت داد؛ و حتی مدعی شد، اگر دنیای دیگری بود که به آن جا برود، می‌توانست این دنیا را جابه‌جا کند. هیرود از این مطلب برآشفت ...از این رو، ارشمیدس کشتی بزرگی را در نظر گرفت، و آن را از بار و مسافر چنان انباشت که جز با زحمت زیاد و به کمک افراد بسیار، نمی‌شد از جایش حرکت داد؛ او در حالی که بدون فعالیت زیادی در کناری نشسته بود و سر منجنیق را در دست داشت و تدریجاً طنابها را می‌کشید، کشتی را چنان به آسانی در خط مستقیم راند که گویی در وسط دریاست.

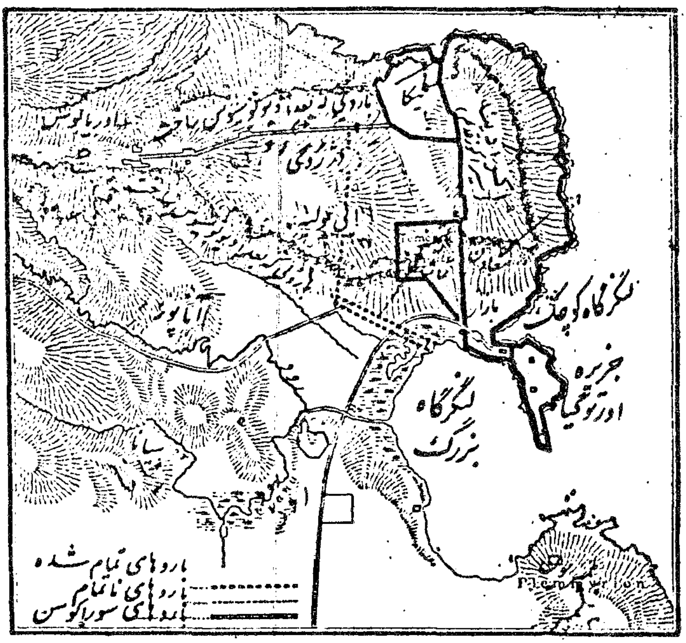
شمارش ریگها. ارشمیدس نقص دستگاه عدد نویسی یونانی را یافت و در رسالهٔ شمارش ریگها، دستگاه عدد شماری جدیدی بر مبنای ده به توان هشت به وجود آورد. او در این رساله دریافته است که $a^m.a^n = a^{m+n}$ و این قانون است که اساس لگاریتم امروزی را تشکیل می‌دهد.

از جملهٔ اقدامات متعدد او، جمع‌بندی $\sum_{1}^{n} n^2$، یعنی نخستین نمونه از حل اصولی سریهای عالی از هر قبیل بود. او می‌توانست با تقطیع مخروطها، معادلات درجهٔ سومی را حل کند که به صورت زیر می‌نویسیم.

$$x^3 \mp ax^2 \pm b^2c = 0$$

همچنین به تربیع سهمی parabola توفیق یافت، یعنی به یافتن مساحت یک قطعه، با نشان دادن این که برابر دو سوم مساحت یک متوازی‌الاضلاع محاطی است.

در مورد اندازه‌گیری دایره ثابت کرد $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. ارشمیدس در رسالهٔ مساحات، مساحت کره، استوانه و مخروط را به دست آورد؛ قواعد مربوط به دوتای آخری را قبلاً منایخموس می‌دانسته است. همچنین ارشمیدس بیضویها Elipsoid و سهمویهای Paraboloid ناشی از چرخش را مورد مطالعه قرار داد. در رسالهٔ مربوط به اندازه‌گیری شکلهای گرد و کروی، از قاعدهٔ افنا، که منایخموس و دیگران به وجود آورده بودند، استفاده کرد. در مطالعهٔ وزن مخصوص و **گرانیگاه** اشکال مسطح و حجم، پیشگام بود، و در مطالعهٔ اصول تعادل مایعات، در عصر یونانی همتایی نداشت. همچنین در مطالعهٔ شکلهای مارپیچ شهرت دارد، که ممکن است دوستش کونون او را هدایت کرده باشد. به طورکلی او در مقام یکی از بزرگترین ریاضیدانان و فیزیک‌دانان سراسر تاریخ قرار دارد.



نقش سیراکوز قدیم

روش ارشمیدس. استاد هیبرگ که به انتشار آثار ارشمیدس اشتغال داشت در ۱۹۰۶ در استانبول رساله‌ای را کشف کرد راجع به حل هندسی برخی مسایل مکانیک. این رساله از آن لحاظ جالب است که روش ارشمیدس را در استخراج حقایق هندسی از اصول مکانیکی نشان می‌دهد. از سطرهای زیر می‌توان آثار فعالیت ذهنی او را دریافت:

پس از آن که دریافتم اگر قاعدهٔ مخروطی برابر دایرهٔ عظیمهٔ یک کره، و ارتفاع آن برابر شعاع باشد، در آن صورت کره سه برابر بزرگتر از مخروط است، در آن هنگام بر من معلوم شد که مساحت سطح کره چهار برابر مساحت دایرهٔ عظیمهٔ آن است، و در این مورد چنین اندیشیدم اگر دایره برابر با مثلثی باشد که قاعدهٔ آن برابر محیط و ارتفاعش برابر شعاع آن باشد، به همان ترتیب کره برابر با مخروطی است که قاعدهٔ آن برابر محیط کره و ارتفاعش برابر شعاع آن باشد.

مرگ ارشمیدس. پلوتارخوس از مرگ ارشمیدس در هنگام سقوط سیراکوز به دست مارکلوس (۲۱۲ پ. م) این گزارش جالب را دارد:

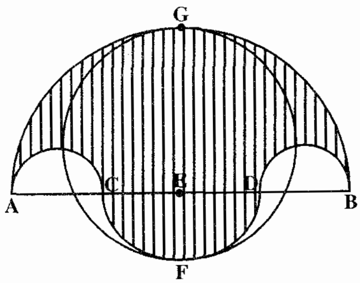
هیچ‌چیز به اندازهٔ مرگ ارشمیدس بر مارکلوس اثر نکرده بود. ارشمیدس در آن هنگام که اجل فرا رسید، سرگرم حل مسأله‌ای در باب یک شکل هندسی بود، و اندیشه و نگاه خود را یکسره بدان معطوف ساخته بود. او نه به ورود سربازان رومی و نه به سقوط شهر توجهی نداشت. در بحبوحهٔ این مطالعه و تفکر، ناگهان سربازی بر او وارد شد و بدو فرمان داد نزد مارکلوس رود. وقتی او حاضر نشد پیش از اتمام حل مسأله این کار را بکند، سرباز خشمگین تیغ برکشید و او را از پای افکند. دیگران گفته‌اند که سربازی رومی بر ارشمیدس وارد شد ... ارشمیدس ملتمسانه از او خواست درنگ کند، چون نمی‌تواند کارش را ناتمام گذارد، ولی سرباز به التماس وی وقعی ننهاد و در حال، او را بکشت. باز جمعی دیگر حکایت می‌کنند که ارشمیدس برخی ابزارهای ریاضی از قبیل شاخص، کره، زاویه‌یاب برای مارکلوس می‌برد که به کمک آنها می‌شد خورشید را اندازه گرفت ... و بعضی سربازان به گمان آنکه طلا می‌برد، او را کشتند. مسلم است که مرگ او مارکلوس را سخت غمگین ساخت. کسی را که ارشمیدس را کشته بود قاتل شمرد، در جستجوی فرزندان ارشمیدس برآمد و آنان را قرین مباهات ساخت.

کشف مقبرهٔ ارشمیدس. سیسرون حکایت می‌کند زمانی که سیراکوزیان چیزی دربارهٔ گور ارشمیدس نمی‌دانستند و منکر وجود چنان چیزی در آن‌جا بودند، آن را کشف کرد. او ماجرا را چنین نقل می‌کند:

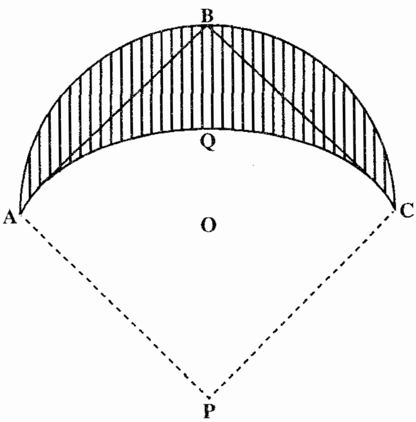
«اشعاری را به یاد آوردم که شنیده بودم بر آرامگاهش نوشته شده، و این مطالب حاکی از آن بود که بر بالای گورش، کره و استوانه‌ای قرار دارد. هنگامی که با دقت همهٔ مقبره‌ها را بررسی کردم ... اندکی بالای نسترنها ستون کوچکی دیدم با تصویر کره و

استوانه‌ای بر آن ... وقتی توانستم بدان جا برسم و در جلو قرار گرفتم کتیبه را یافتم، هر چند، قسمتهای آخر تمام ابیات تقریباً نیمی از میان رفته بود. بدین ترتیب یکی از ممتازترین شهرهای یونان، و شهری که زمانی به خاطر علم مورد تجلیل فراوان قرار گرفته بود، از بنای یادبود بزرگترین نابغهٔ خویش اگر به دست یکی از مردم آرپینوم کشف نشده بود چیزی نمی‌دانست.»

از آثار او که به دست ما رسیده، آنها که در تاریخ ریاضیات اهمیت زیادی دارد، آثار مربوط به تربیع سهمی راجع به کره و استوانه، اندازه‌گیری دایره، راجع به مارپیچها، شبه مخروطها، شبه‌کره‌ها، و راجع به عدد نویسی است. ظاهراً ارشمیدس به نجوم هم علاقه داشت، هر چند هیچ یک از آثارش در این باره در دست نیست.



۱۸. روی یک خط راست چهار نقطهٔ A، C، D و B را طوری اختیار می‌کنیم که AC = DB باشد و در یک طرف این خط راست، سه نیمدایره به قطرهای AB، AC و DB و در طرف دیگر، نیمدایره‌ای به قطر CD رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سطح محصور مابین چهار نیمدایره، معادل است با سطح دایرهٔ به قطر AD = FG .



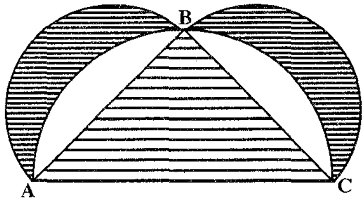
۱۹. حالا که دربارهٔ نیمدایره‌های ارشمیدس صحبت کردیم، یادی هم از **نیمدایرهٔ بقراط** (سدهٔ پنجم پیش از میلاد) بکنیم. در نیمدایرهٔ به مرکز O مثلث متساوی‌الساقین ABC را محاط می‌کنیم. از نقطه‌های A و C عمودهایی بر AB و CB اخراج می‌کنیم تا در نقطهٔ P به هم برسند؛ P را مرکز دایره‌ای می‌گیریم و به شعاع PA قوس AQC را رسم می‌کنیم.

مساحت ABCQA (قسمت هاشور خورده) که بین دو قوس قرار گرفته است، برابر است با مساحت مثلث ABC.

بقراط خیوسی

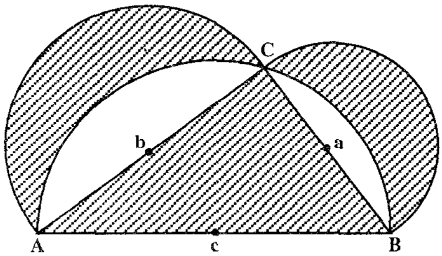
بقراط Hipporatos در حدود ۴۶۰ پ. م در خیوس Chios زاده شد.

دربارهٔ بقراط داستانهای زیادی گفته‌اند، از جمله این که، او بازرگانی ناموفق بود، و بعدها در سلک فیلسوفهای فیثاغوری درآمد و به ریاضیات علاقهٔ زیادی پیدا کرد. ارسطو گوید که او جز مهارت در هندسه، هنری نداشت. نویسندگان قدیم گفته‌اند که او قضیه‌های هندسه را به شیوهٔ علمی مرتب کرد و اسرار فیثاغوریان را در زمینهٔ هندسه منتشر ساخت. وی در ضمن کوششهایش برای تربیع دایره، نخستین مورد تربیع شکل منحنی را کشف کرد، یعنی اثبات این که مجموع دو هلال هاشور خورده که در این جا نشان داده شده برابر است با مثلث هاشور خورده؛ این قضیه در مورد هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای صادق است، اعم از این که متساوی‌الساقین باشد یا نه؛ بقراط فقط در مورد مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین از این مطلب آگاه بود.



پروکلوس (ح ۴۶۰م) روش تحویل، یعنی تبدیل قضیه‌ای به قضیهٔ ساده‌تر، اثبات آن قضیه، و سپس برگرداندن آن به صورت اصلی را به او نسبت می‌دهد. مثلاً، اراتوستنس (ح ۲۵۰ پ. م) می‌گوید که بقراط ثابت کرد، تضعیف مکعب وقتی میسر است که بتوان میان هر دو پاره‌خطی، یک رابطهٔ مشترک پیدا کرد؛ یعنی اگر $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$، در آن صورت $y^2=2ax$، $x^4=a^2y^2$، $x^2=ay$ و بنابراین $x^4=2a^3x$ یا $x^3=2a^3$.

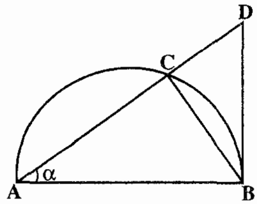
۲۰. نیمدایره‌ای به قطر وتر مثلث قائم‌الزاویه رسم کرده‌ایم. این نیمدایره، از رأس زاویهٔ قائمه می‌گذرد. نیمدایره‌های دیگری به قطر هر کدام از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه همان مثلث و در بیرون مثلث، رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مجموع مساحتهای دو هلالی که به این ترتیب به دست می‌آید، (هلالهای بقراط) برابر است با مساحت خود مثلث.



از بقراط خیوسی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۵.۲. اندازهٔ زاویه

۲۱. نیمدایره‌ای به قطر AB مفروض است. خط مماس در نقطهٔ B را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A قاطعی رسم می‌کنیم تا محیط نیمدایره را در C و مماس مزبور را در D قطع کند. اگر $C\hat{A}B = \alpha$ باشد، α را به طریقی تعیین کنید که $AD = ۴AC$ باشد.



۶.۲. پاره‌خط

۱.۶.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۲. روی پاره‌خط AB به طول ۲، نیمدایره‌ای به قطر AB، و در همان طرف، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم می‌کنیم. نیمدایره با AC و BC بترتیب در D و E برخورد می‌کند. طول پاره‌خط AE چه قدر است؟

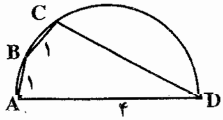
الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۵}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $\sqrt{۳}$ هـ) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۲۳. چهارضلعی ABCD در نیمدایره‌ای به قطر $AD = ۴$ محاط شده است. اگر طول ضلعهای AB و BC هرکدام ۱ باشد، آن گاه طول ضلع CD برابر است با :

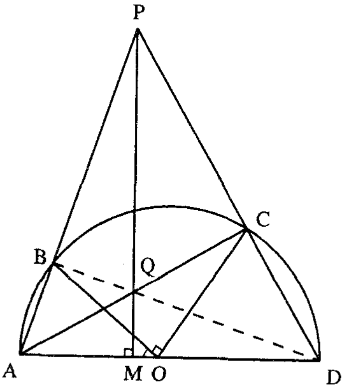
الف) $\frac{۷}{۲}$ ب) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۱۱}$

د) $\sqrt{۱۳}$ هـ) $۲\sqrt{۳}$



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱

۲۴. نیمدایره‌ای به قطر $AD = ۲R$ و به مرکز O مفروض است. اگر زاویهٔ AOB حاده و $B\hat{O}C = ۹۰^\circ$ باشد و AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ P، و AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کنند :

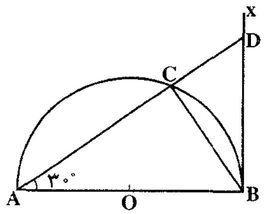


۱. ثابت کنید که مثلثهای ABQ، ACP،DCQ و DBP متساوی‌الساقین هستند.

۲. ثابت کنید که PQ بر AD عمود است.

۳. اگر $AB = R$ باشد، طول پاره‌خطهای BC، BD، BQ و CO را حساب کنید.

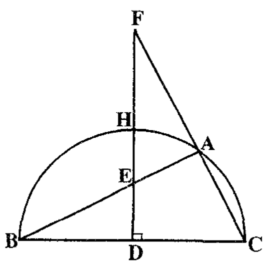
۲.۶.۲. اندازهٔ ضلعهای مثلث



۲۵. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۴cm$ رسم شده است. از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ °۳۰ تشکیل داده و دایره را در نقطهٔ C و مماس Bx را در نقطهٔ D قطع کند. طول ضلعهای مثلث BCD را تعیین کنید.

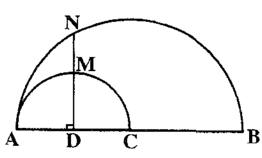
۷.۲. رابطه‌های متری

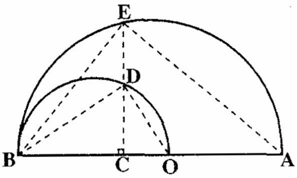
۱.۷.۲. رابطه‌های متری (برابریها)



۲۶. نیمدایره‌ای به قطر BC و مثلث محاطی ABC مفروض است. خطی عمود بر BC در نقطه‌ای مانند D، خطهای AB و AC را بترتیب در E و F و نیمدایره را در H قطع می‌کند. ثابت کنید $DH^2 = DE.DF$.

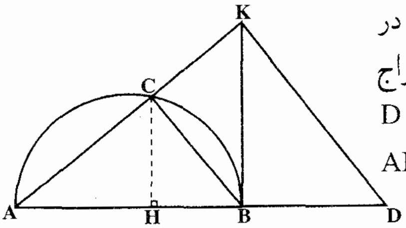
۲۷. بر پاره‌خط AB نقطه‌ای مانند C اختیارکرده و دو نیمدایره یکی به قطر AB و دیگری به قطر AC، در یک طرف AB رسم می‌کنیم. بر قطرAC نقطهٔ D را اختیار کرده و از این نقطه خطی بر خط AB عمود می‌کنیم تا دو نیمدایره را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند. ثابت کنید $\frac{AM^2}{AN^2}$ مقدار ثابتی است، و به موضع نقطهٔ D بر پاره‌خط AC بستگی ندارد.





۲۸. نیمدایره‌ای به قطر AB و به مرکز O و در درون آن، نیمدایره‌ای به قطر OB داده شده است. از نقطهٔ C واقع بر OB، عمود CDE را بر AB اخراج می‌کنیم تا دو نیمدایره را در D و E قطع کند. ثابت کنید $BE^2 = 2BD^2$.

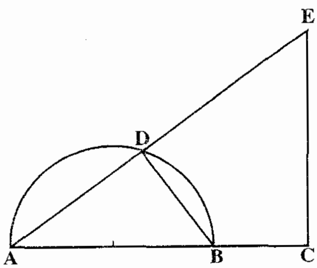
۲۹. نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2R$ مفروض است. وتر AC را به طول $\frac{3R}{2}$ رسم کرده و آن را از طرف C امتداد می‌دهیم تا مماسی را که در نقطهٔ B بر نیمدایره رسم شده است، در K قطع کند. از نقطهٔ K عمودی بر AK اخراج کرده امتداد می‌دهیم تا امتداد AB را در D قطع کند، و H را تصویر نقطهٔ C روی AB می‌نامیم :



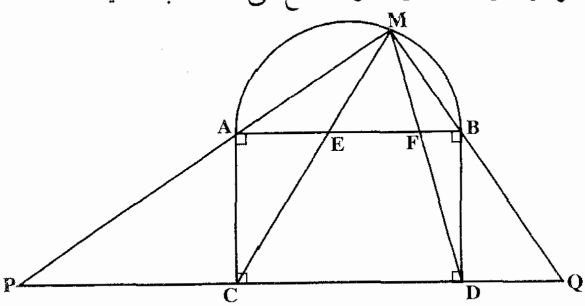
۱. طولهای BC، BH و DK را برحسب R حساب کنید.

۲. ثابت کنید $CH.BK = CA.CK$

۳۰. نیمدایره‌ای به قطر AB را در نظر گرفته و قطر AB را تا نقطهٔ دلخواه C امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ C عمودی بر قطر AB اخراج کرده، امتداد می‌دهیم تا امتداد وتر AD را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید دو مثلث ABD و ACE متشابه‌اند و رابطهٔ $AB.AC = AD.AE$ برقرار است.



۳۱. **(مسألهٔ فرما)**. روی قطر AB از نیمدایرهٔ AMB ، مستطیلی در بیرون نیمدایره ساخته‌ایم به نحوی که ارتفاع AC آن، برابر با ضلع مربع محاط در دایره باشد. اگر رأسهای C و D را به نقطهٔ دلخواه M از محیط نیمدایره وصل کنیم، خطهای راست CM و DM، قطر نیمدایره را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید $AF^2 + BE^2 = AB^2$.



فرما

فرما

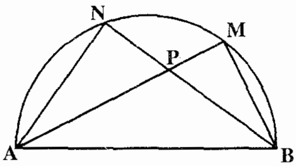
از روی یک چاپ سنگی قدیم

زندگی و آثار پی‌یر فرما P.Fermat (متولد ح ۱۶۰۸ در بومون دو لومانی نزدیک تولوز، متوفی ۱۲ ژانویهٔ ۱۶۷۵ در کاسترا،یا تولوز) حاکی از این مطلب است که در مورد نوابغ نمی‌توان هیچ شرطی قایل شد. چگونه ممکن است بزرگترین نویسنده در زمینهٔ علم اعداد، دست کم از زمان دیوفانتوس به بعد، در وجود یک وکیل محجوب، گوشه‌گیر و دقیق مجلس تولوز جلوه‌گر شود، آن هم در سدهٔ هفدهم؟ چگونه ممکن است این کارمند گمنام بتواند چنان شهرتی برای خود کسب کند، حال آن که از قرار معلوم تا بعد از سی سالگی چندان توجهی به ریاضیات نداشته؟ و چرا با این که باید از قدرت خود آگاه بوده باشد، بدین قانع بود که به جای انتشار نتایج کار خویش برای استفادهٔ همهٔ دانشمندان، آنها را بیشتر در نامه‌هایش به کسانی چون مرسن، روبروال، پاسکال و دکارت اعلام می‌کرد؟ جواب هر یک از این سؤالها این است که نبوغ خرق عادت است.

ممکن است ترجمهٔ باشه، از کتاب حساب دیوفانتوس (۱۶۲۱)، توجه فرما را به علم عدد جلب کرده باشد. چون یک رشته یادداشتها و نامه راجع به این کتاب دارد که به صورت شرح آن، پس از مرگ وی چاپ شده است (تولوز ۱۶۷۰). او اعلام کرد در صورتی که n عدد صحیحی بزرگتر از ۲ باشد، هیچ عددصحیحی وجود ندارد که در مورد x، y و z در معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ صدق کند، و این عموماً، به قضیهٔ آخر فرما معروف است. معلوم نیست که آیا خود فرما، این قضیه را ثابت کرده است یا نه؟ ظاهراً مدعی آن بود که این قضیه را ثابت کرده است. تا سال ۱۹۹۵ هیچ یک از ریاضیدانهای جهان موفق به اثبات این قضیه نشدند تا آن که در این سال آندرووایلز ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی موفق گردید این قضیه را ثابت کند.

نامه‌های فرما حاکی از آن است که فرما پیش از آن که دکارت کتاب خود را دربارهٔ هندسهٔ تحلیلی منتشر کند (۱۶۳۷)، این فکر را نمو بخشیده است. دکارت معرفی یک خط منحنی را با یک معادله مطرح کرد. به بررسی معادله پرداخته، و از این راه خواص خود منحنیها را کشف کرده است. حال آن که فرما با این که اساساً همان کار دکارت را کرده، معادله را «خاصیت ویژه» در نظر گرفته و همهٔ خواص دیگر را از آن به دست آورده است.

فرما در رابطه با بررسی منحنیها در صدد استفاده از مقادیر بی‌نهایت کوچک در مسألهٔ تربیع دایره و ماکزیممها و مینیممها و همچنین ترسیم تانژانتها برآمد. ظاهراً در این زمینه او بر کتاب کاوالیری پیشی جسته، ولی تاریخ اکتشاف او معلوم نیست.



۳۲. در نیمدایره‌ای به قطر AB، دو وتر دلخواه AM و BN را که در نقطهٔ P متقاطعند در نظر می‌گیریم. ثابت کنید: $AP.AM+BP.BN$ مقدار ثابت دارد و با تغییر وترها تغییر نمی‌کند.

۲.۷.۲. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۳۳. اگر مثلث ABC در نیمدایره‌ای به قطر AB محاط باشد، آن گاه $AC+BC$ باید:

الف) برابر با AB باشد. ب) برابر با $AB\sqrt{۲}$ باشد.

ج) ناکوچکتراز $AB\sqrt{۲}$ باشد. د) نابزرگتر از $AB\sqrt{۲}$ باشد.

هـ) برابر با $AB^۲$ باشد.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳۴. ثابت کنید، اگر روی محیط نیمدایرهٔ به شعاع واحد، نقطه‌های A، B، C، D و E را، پشت سر هم قرار دهیم این نابرابری برقرار است:

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+DE^۲+AB.BC.CD+BC.CD.DE<۴$$

هیأت داوران المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۱

۲. ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳۵. کمان نیمدایرهٔ γ بر قطر AB رسم شده است. C نقطه‌ای واقع بر γ غیر از A و B و D پای عمود از C بر AB است. سه دایرهٔ $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ هر سه مماس به خط AB را در نظر می‌گیریم. از این سه، $\gamma_۱$ محاط در ABC است، در حالی که $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ هر دو مماس بر CD و به γ، هریک، یک طرف ضلع CD، می‌باشند، ثابت کنید که $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ مماس مشترک دومی دارند.

یازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۹

۳۶. روی قطر AB از نیمدایره‌ای، نقطه‌های K و L، و روی کمان نیمدایره، نقطه‌های M، N و C را طوری انتخاب کرده‌ایم که چهار ضلعی KLMN مربعی بشود با مساحتی برابر مساحت مثلث ABC. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر نقطهٔ برخورد یکی از ضلعهای مربع، با یکی از خطهای راستی که رأس N یا M را به رأس A یا B وصل می‌کند، منطبق است.

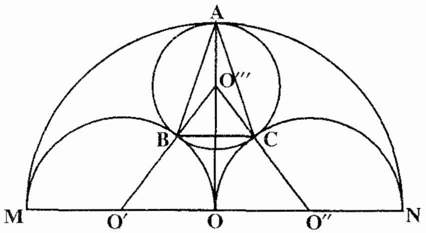
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۸۰

۳۷. نیمدایرهٔ Γ در یک طرف خط راست L رسم شده است و مرکز آن روی این خط واقع است. C و D نقطه‌هایی روی Γ هستند. مماسهای Γ در نقطه‌های C و D، خط L را بترتیب در نقطه‌های B و A قطع می‌کنند و مرکز نیمدایرهٔ Γ بین دو نقطهٔ A و B است. E را محل تقاطع AC و BD، و F را پای عمود وارد از نقطهٔ E بر خط L بگیرید. ثابت کنید که EF نیمساز زاویهٔ CFD است.

مسأله پیشنهادی در المپیاد بین‌المللی ریاضی سال ۱۹۹۴، هنگ کنگ

۹.۲. مسأله‌های ترکیبی

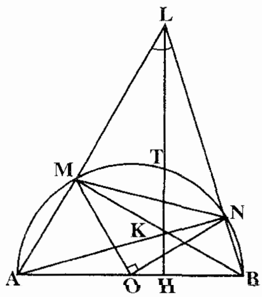
۳۸. به قطر $MN = 4\frac{1}{2}$ نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم . سپس به قطرهای OM و ON (O وسط MN) دو نیمدایره داخل آن رسم می‌نماییم و دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر این سه نیمدایره مماس شود. اگر نقطه‌های تماس را A، B و C فرض کنیم :



۱. شعاع دایرهٔ مماس را پیدا کنید.

۲. طول ضلعها و مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

۳۹. نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2R$ مفروض است. از نقطهٔ O مرکز دایره، دو شعاع اختیاری OM و ON را عمود بر یکدیگر رسم می‌کنیم و خطهای AM و BN را وصل کرده امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در L قطع کنند.



۱. ثابت کنید زاویهٔ ALB مساوی با ۴۵ درجه است.

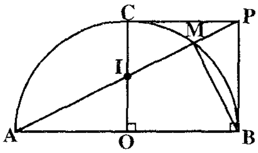
۲. از نقطهٔ L عمود LH را بر AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید این عمود از نقطهٔ K محل برخورد AN و BM می‌گذرد.

۳. اگر محل برخورد این عمود را با نیمدایره، نقطهٔ T بنامیم، ثابت کنید :

$LH.KH = TH^2$

۴. اگر زاویهٔ AOM مساوی با ۶۰ درجه باشد، مطلوب است محاسبهٔ طول ضلعها و قطرهای چهارضلعی AMNB برحسب R و همچنین محاسبهٔ اندازهٔ زاویه‌های این چهارضلعی.

۴۰. نیمدایره‌ای به قطر $AB = 2R$ ، به مرکز O و شعاع OC از این نیمدایره عمود بر قطر AB، مفروض است، و نقطهٔ I وسط پاره‌خط OC است. خط AI نیمدایره را در نقطهٔ M و مماس بر نیمدایره در نقطهٔ B را در نقطهٔ P قطع می‌کند.



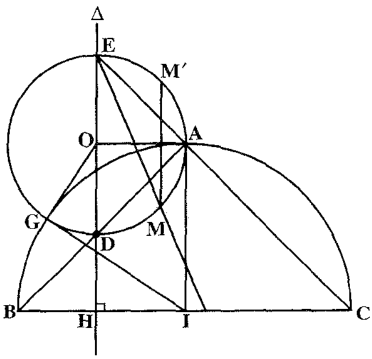
۱. ثابت کنید که خط CP بر نیمدایره مماس است.

۲. ثابت کنید که مثلثهای AOI و ABM متشابه‌اند. اندازهٔ پاره‌خط AI و ضلعهای مثلث ABM را برحسب R حساب کنید.

۳. مساحت چهارضلعی محدب ACMB را برحسب R محاسبه کنید.

۴۱. نیمدایره‌ای به مرکز I و به قطر $BC = 2R$ و شعاع IA عمود بر BC، مفروض است. خط Δ که بر BI در نقطهٔ H (بین B و I) عمود است، خط AB را در نقطهٔ D و امتداد CA را در نقطهٔ E قطع کرده است.

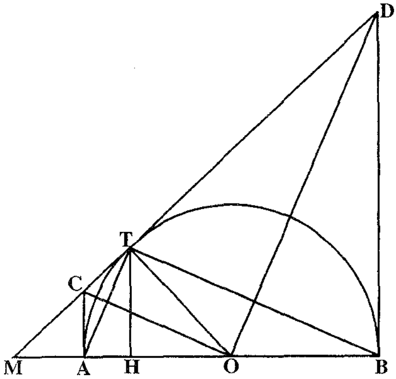
۱. مکان هندسی نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AED را وقتی نقطهٔ H بین دو نقطهٔ I و B جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.



۲. مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی نیمساز زاویهٔ ADE با دایرهٔ (O) را مشخص سازید؛ همچنین مکان هندسی نقطهٔ M′ انتهای دیگر وتر MM′ از دایرهٔ (O) را که موازی وتر DE رسم می‌شود تعیین کنید.

۳. اگر G دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ به مرکز (O) با نیمدایرهٔ (I) باشد، ثابت کنید OG مماس بر نیمدایرهٔ (I) و IG مماس بر دایرهٔ (O) است. مکان هندسی نقطهٔ S مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی IAOG را وقتی نقطهٔ H بین دو نقطهٔ I و B جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۴. در صورتی که $\widehat{AIG} = 60^\circ$ باشد، مساحت سطح بین دایرهٔ (O) و نیمدایرهٔ (I) را برحسب R شعاع دایرهٔ (O) تعیین کنید.



۴۲. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ رسم کرده از B مـــمـــاسی بر آن رسم می‌کنیم و از نقطهٔ غیرمشخص D واقع بر آن، مماس DT را بر نیمدایره رسم کرده (T نقطهٔ تماس)، امتداد می‌دهیم تا مـــمـــاس در نقطهٔ A را در C و امتداد BA را در M قطع کند.

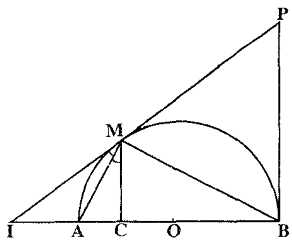
۱. ثابت کنید $AC + BD = CD$.

۲. از O به C و D و از T به A و B وصل می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی‌ای که به این ترتیب به دست می‌آید، مستطیل است.

۳. ثابت کنید : $MO^۲ = MC.MD$.

۴. به شـرطی کـه $BD = \frac{۳}{۲}R$ باشـد، طول ضلعـهـا و قطرهای ذوزنقـهٔ ABDC و ضلعهای مثلث ACM را به دست آورید.

۴۳. نیمدایره‌ای به مرکز O و قطر $AB = ۹cm$ مفروض است. از نقطهٔ C که پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{CA}{CB} = \frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کند، عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطهٔ M قطع کند. خط مماس بر نیمدایره در نقطهٔ M خط AB را در نقطهٔ I قطع می‌کند.

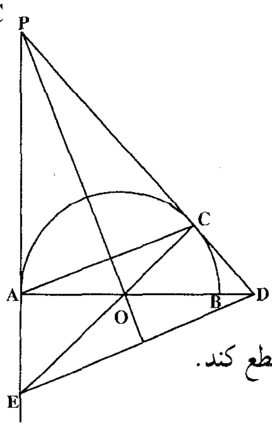


۱. ثابت کنیـد کـه MA نیمـساز زاویهٔ CMI است.

۲. اندازهٔ پاره‌خطهای MC، MA، MB و OI را حساب کنید و نشان دهید که :

$$\frac{AI}{AC} = \frac{MI}{MC}$$

۳. مـــساحت‌ذوزنقـهٔ MCBP (P نقطهٔ برخـورد مـمـاس‌در M و B با نیـمـدایره) را حساب‌کنید.



۴۴. نیمدایره‌ای به مرکز O و به قطر $AB = ۲R$ و نقطهٔ P روی مماس بر نیمدایره در نقطهٔ A مفروض است. از نقطهٔ P مماس PC را بر نیمدایره رسم می‌کنیم که AB را در نقطهٔ D قطع کند.

۱. به فرض $A\hat{P}C = ۶۰^\circ$ ، اندازهٔ پاره‌خطهای PO، PA و OD را برحسب R حساب کنید.

۲. با فرض این که APC زاویهٔ دلخواه حاده‌ای باشد، OC را رسم می‌کنیم تا PA را در E قطع کند، ثابت کنید :

الف ــ PO عمود بر DE است.

ب ــ مثلث PDE متساوی‌الساقین است.

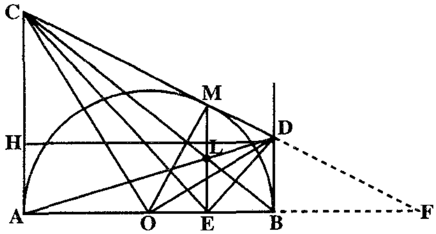
ج ــ مثلثهای PAC و PDE متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{OA}{OD}$ است.

۳. مساحت هریک از مثلثهای PAC و PDE را وقتی $A\hat{P}C = ۶۰^\circ$ باشد تعیین کنید.

۴۵. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ مفروض است. از A و B دو مماس بر آن رسم کرده و در نقطهٔ اختیاری M از نیمدایره نیز مماس دیگری بر آن رسم می‌کنیم تا دو مماس اول را در C و D قطع کند. اگر O مرکز نیمدایره باشد، ثابت کنید :

۱. زاویهٔ COD قائمه است.

۲. $AC.BD = R^۲$



۳. از M عمود ME را بر قطر AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید که این عمود از نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقهٔ ABDC می‌گذرد و در این نقطه نصف می‌شود.

۴. ثابت کنید که : $\frac{۲}{ME} = \frac{۱}{BD} + \frac{۱}{AC}$

۵. هرگاه نقطهٔ M موضع خود را روی نیمدایره تغییر دهد، ثابت کنید که همواره رابطهٔ $ME.CD = R^۲$ برقرار است.

۶. ثابت کنید که خط ME زاویهٔ DEC را نصف می‌کند.

۷. در حالتی که امتداد CD با قطر AB زاویهٔ ۴۵° بسازد، طول ضلعها و قطرهای چهارضلعی ABDC را حساب کنید.

بخش ۳

● رابطه‌های متری در یک دایره

۶.۳. قطاع دایره
۱.۶.۳. شعاع دایره
۱.۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع
۲.۱.۶.۳. رابطهٔ بین شعاعها
۲.۶.۳. طول کمان قطاع
۳.۶.۳. اندازهٔ محیط
۴.۶.۳. مساحت
۱.۴.۶.۳. مساحت قطاع
۲.۴.۶.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در قطاع
۵.۶.۳. اندازهٔ پاره‌خط
۷.۳. قطعهٔ دایره
۱.۷.۳. شعاع دایره
۱.۱.۷.۳. اندازهٔ شعاع
۲.۱.۷.۳. نسبت شعاعهای دو دایره
۲.۷.۳. مساحت
۱.۲.۷.۳. اندازهٔ مساحت قطعه
۲.۲.۷.۳. نسبت مساحت دو قطعه
۳.۲.۷.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در قطعه
۳.۷.۳. ارتفاع قطعه
۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در یک دایره
۱.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها
۲.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست (مثلث، مربع و...)
۳.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست و منحنیها
۴.۸.۳. نسبت مساحتها
۵.۸.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹.۳. زاویه در دایره

۱.۹.۳. اندازهٔ زاویه

۲.۹.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۰.۳. پاره‌خط

۱.۱۰.۳. وترها و قاطعهای رسم شده در داخل دایره

۱.۱.۱۰.۳. اندازهٔ قطعهٔ وتر

۲.۱.۱۰.۳. اندازهٔ وتر

۳.۱.۱۰.۳. اندازهٔ ضلعهای مثلث و چندضلعیهای ایجاد شده در دایره

۴.۱.۱۰.۳. اندازهٔ طول پاره‌خط،نسبت پاره‌خطها

۵.۱.۱۰.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۱۰.۳. قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۱.۲.۱۰.۳. اندازهٔ قطعه خطهای رسم شده از خارج دایره

۲.۲.۱۰.۳. اندازهٔ وتر

۳.۲.۱۰.۳. اندازهٔ پاره‌خطها

۳.۱۰.۳. یک مماس و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۱.۳.۱۰.۳. اندازهٔ قاطع

۲.۳.۱۰.۳. اندازهٔ مماس

۳.۳.۱۰.۳. تساوی دو پاره‌خط

۴.۳.۱۰.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴.۱۰.۳. مماسها و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۱.۴.۱۰.۳. اندازهٔ وتر

۲.۴.۱۰.۳. اندازهٔ مماس

۳.۴.۱۰.۳. اندازهٔ پاره‌خط، تساوی دو پاره‌خط

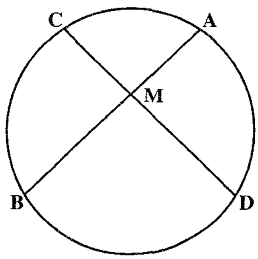
بخش ۳ . رابطه‌های متری در یک دایره

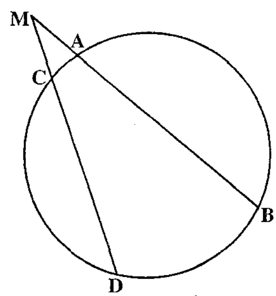
۳. ۱. تعریف و قضیه

۳.۱.۱. قاطع و مماس

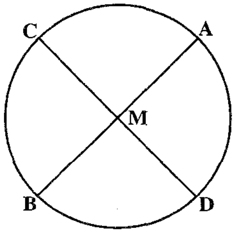
۴۶. قضیه. هرگاه دو وتر از یک دایره متقاطع باشند، حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ یکی، با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعهٔ دیگری برابر است. یعنی در شکلهای زیر داریم :

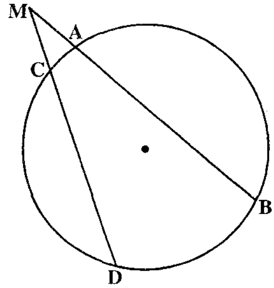
$$MA.MB = MC.MD$$





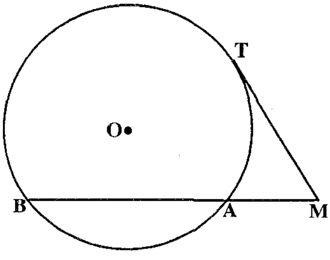
۴۷. قضیهٔ عکس. پنج نقطه متمایز M، A، B، C و D چنانند که نقطهٔ M یا روی هر دو پاره‌خط AB و CD است و یا در خارج این دو پاره‌خط ولی بر امتداد آنها می‌باشد. اگر $MA.MB = MC.MD$ باشد، آن گاه چهارنقطهٔ A، B، C و D بریک دایره‌اند.

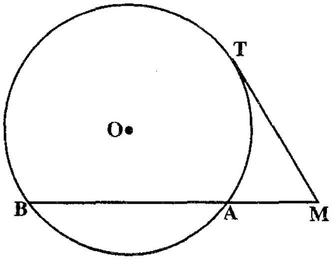




۴۸. قضیه. هرگاه از نقطه‌ای مماس و قاطعی بر یک دایره رسم کنیم، مربع اندازهٔ مماس با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع برابر است.

$$MT^2 = MA.MB$$





۴۹. قضیهٔ عکس. چهار نقطهٔ متمایز M، A، B و T چنانند که نقطهٔ M بر امتداد AB، ولی در خارج پاره‌خط AB است و $MT^2 = MA.MB$ است. آن گاه دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A، B و T می‌گذرد، در نقطهٔ T بر MT مماس است.

۲.۱.۳. محیط دایره

۵۰. قضیه. تنها یک عدد پیدا می‌شود که از همهٔ محیطهای چند ضلعیهای محدب محاط در یک دایرهٔ داده شده بزرگتر، و از همهٔ محیطهای چند ضلعیهای محدب محیطی آن دایره، کوچکتر باشد.

تعریف. محیط دایره برابر است با عددی که از همهٔ محیطهای چند ضلعیهای محدب محاط در آن دایره بزرگتر و از همهٔ محیطهای چند ضلعیهای محدب محیطی آن دایره کوچکتر است. محیط دایره با همان واحدی اندازه گرفته می‌شود که محیط چند ضلعیها اندازه‌گیری شده‌اند.

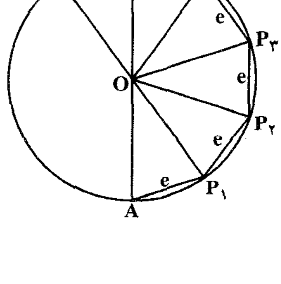
۵۱. قضیه. نسبت محیط هر دایره، به اندازهٔ قطر آن دایره، مقدار ثابتی است؛ یعنی اگر C و C' محیطهای دو دایره به شعاعهای R و R' باشند، داریم:

$$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$$

۵۲. محاسبهٔ محیط دایره. مقدار ثابت نسبت محیط دایره به قطر آن، عدد گنگ π است. پس محیط هر دایره برابر است با:

$$C = 2\pi R$$

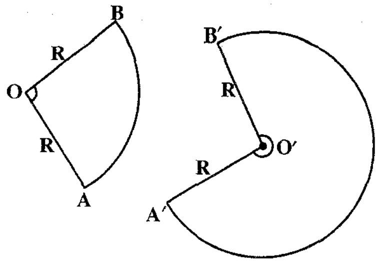
۳.۱.۳. طول کمان



برای تعریف طول کمان همان روشی را به کار می‌بریم که در تعریف محیط دایره به کار بردیم. ابتدا کمان $\overset{\frown}{AB}$ را به n کمان همنهشت متوالی تقسیم می‌کنیم. سپس وترهای متناظر را رسم می‌کنیم. این وترها با هم برابرند. طول یکی از این وترها را e می‌نامیم. مجموع طول این وترها برابر است با: $P = ne$؛ و طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ چنین تعریف می‌شود.

طول $\overset{\frown}{AB}$ حد P است، هنگامی که n بسیار بزرگ شود.

۵۳. قضیه. اگر شعاعهای دو کمان برابر باشند، طولهای آن دو کمان با اندازه‌هایشان متناسبند. یعنی داریم: $\frac{\text{طول}\ \widehat{A'B'}}{m\widehat{A'B'}} = \frac{\text{طول}\ \widehat{AB}}{m\widehat{AB}}$ ($m\widehat{AB}$ و $m\widehat{A'B'}$ اندازه‌های این دو کمان برحسب رادیان می‌باشند). در حالتهای ساده به آسانی می‌توان درستی این قضیه را نشان داد. اگر اندازهٔ کمانی را دو برابر کنیم، طولش نیز دو برابر می‌شود. اگر اندازهٔ آن را بر ۷ تقسیم کنیم، طولش بر ۷ تقسیم می‌شود، و به همین ترتیب. ولی ارائه یک برهان کامل نیاز به بررسی و دقت بیشتری دارد؛ بنابراین قضیه فوق را به صورت یک اصل موضوع می‌پذیریم.

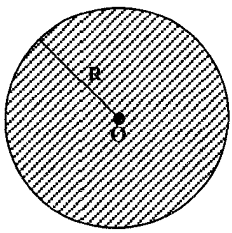


۵۴. اگر اندازهٔ یک کمان α° و شعاع آن R باشد، طول آن کمان، $L = \frac{\alpha}{۱۸۰} \times \pi R$ است.

۳.۱.۴. مساحت دایره

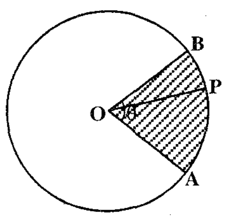
تعریف. اجتماع یک دایره و بخش درونی آن را ناحیهٔ مستدیر می‌نامیم.

۵۵. قضیه. مساحت دایره‌ای به شعاع R، برابر با $\pi R^۲$ است.



۳.۱.۵. قطاع دایره

تعریف. $\widehat{AB}$ را کمانی از یک دایره به مرکز O و به شعاع R فرض کنید. اجتماع تمام پاره‌خطهای OP، که P نقطه‌ای از $\widehat{AB}$ است، قطاع نامیده می‌شود. $\widehat{AB}$ را کمان قطاع و R را شعاع قطاع می‌نامند.

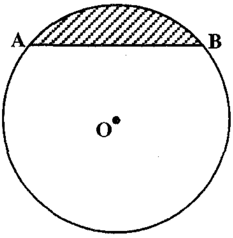


اگر اندازهٔ کمان $\widehat{AB}$ برابر θ رادیان باشد، θ را زاویهٔ قطاع می‌گویند.

تعریف دیگر قطاع. بخشی از یک دایره که محصور بین دو شعاع آن دایره باشد، قطاع نامیده می‌شود.

۵۶. قضیه . مساحت قطاع θ رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $S = \frac{۱}{۲} R^۲ \theta$

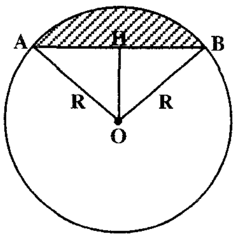
۶.۱.۳. قطعهٔ دایره



تعریف قطعه. قسمتی از سطح دایره، محصور بین یک کمان و وتر نظیر آن کمان را، قطعهٔ دایره می‌نامند. قطعه را بر حسب اندازهٔ کمان آن مشخص می‌کنند، مثلاً اگر کمان AB مساوی $\frac{\pi}{۶}$ رادیان باشد، قطعه را $\frac{\pi}{۶}$ رادیان می‌نامند.

۵۷. قضیه. اندازهٔ مساحت قطعهٔ θ رادیان در دایرهٔ به شعاع R، برابر است با :

$$S=\frac{۱}{۲}R^{۲}(\theta-\sin\theta)$$

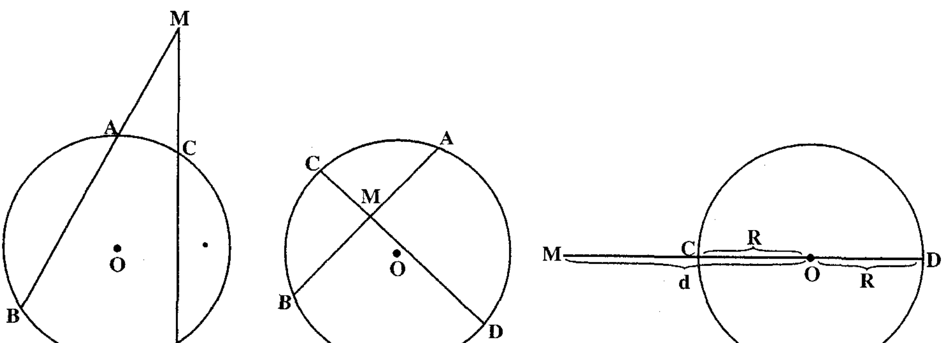


۷.۱.۳. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره

تعریف. قوت یک نقطه نسبت به یک دایره، حاصل ضرب اندازه‌های جبری دو قطعهٔ قاطعی است که از آن نقطه نسبت به آن دایره رسم می‌شود.

اگر از نقطهٔ M قاطع MAB را نسبت به دایره رسم کنیم، داریم :

قوت نقطهٔ M نسبت به دایره $=\overline{MA}.\overline{MB}$



بحث. دایرهٔ C (O,R) و نقطهٔ M را در صفحهٔ این دایره در نظر می‌گیریم. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره را d بنامیم قوت نقطه نسبت به دایره برابر است با : $d^{۲}-R^{۲}$. زیرا اگر دو سر قطر گذرنده از نقطهٔ M را C و D بنامیم، داریم :

قوت نقطهٔ M نسبت به دایره $=\overline{MC}.\overline{MD}=(d-R)(d+R)=d^{۲}-R^{۲}$

قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (C) را به صورت $P_{M(C)}$ نمایش می‌دهند.

$$P_{M(C)}=d^{۲}-R^{۲}$$

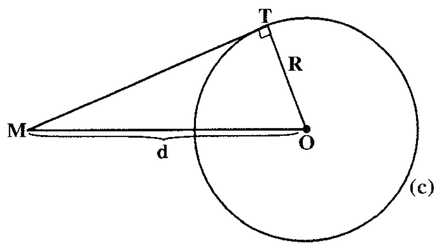
بحث. ۱) اگر نقطهٔ M خارج دایره باشد، $d > R$ ، و در نتیجه قوت نقطه نسبت به دایره، مثبت است.

۲) اگر نقطهٔ M روی دایره باشد، $d = R$ ، و در نتیجه، قوت نقطه نسبت به دایره، صفر است.

۳) اگر نقطهٔ M داخل دایره باشد، $d < R$ ، و در نتیجه، قوت نقطه نسبت به دایره، منفی است.

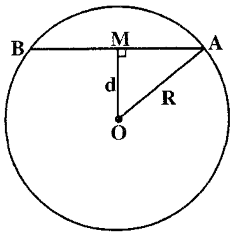
تبصره ۱. قوت نقطه‌ای که خارج یک دایره قرار دارد، مربع طول مماسی است که از آن نقطه بر آن دایره رسم می‌شود، یعنی اگر MT مماسی باشد که از نقطهٔ M بر دایرهٔ $C(O, R)$ رسم شده باشد، داریم :

$$P_{m(c)} = \overline{MT}^2 = d^2 - R^2$$



تبصره ۲. قوت نقطه‌ای که درون یک دایره قرار دارد برابر منهای مربع طول وتر به طول مینیممی است که از آن نقطه در آن دایره رسم می‌شود. یعنی داریم :

$$P_{m(c)} = -\overline{MA}^2$$



زیرا در مثلث قائم‌الزاویه OMA داریم :

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + MA^2 \Rightarrow d^2 - R^2 = -\overline{MA}^2$$

$$\Rightarrow P_{m(c)} = -\overline{MA}^2$$

۳. ۲. شعاع و قطر دایره

۳.۲.۱. اندازهٔ شعاع

۵۸. اندازهٔ شعاع دایره‌ای را بیابید که طول کمان 45° آن، برابر 3π است.

۵۹. اندازهٔ شعاع دایره‌ای را بیابید که طول کمان 72° آن، برابر 4π است.

۶۰. اندازهٔ شعاع دایره‌ای را بیابید که عددهای محیط و مساحت آن برابر باشند.

۶۱. عدد مساحت دایره‌ای ۶ برابر عدد محیط آن است. اندازهٔ شعاع آن چه قدراست؟

۶۲. نقطهٔ P خارج یک دایره و به فاصلهٔ ۱۳ سانتی‌متر از مرکز آن واقع است. خطی از P رسم شده است که دایره را در نقطه‌های Q و R قطع می‌کند، پاره‌خط PQ واقع در خارج دایره برابر ۹ سانتی‌متر و QR برابر ۷ سانتی‌متر است. شعاع دایره چندسانتی‌متر است؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶ هـ) ۷

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۶۳. وتری به طول ۶ سانتی‌متر در یک دایره مفروض است. اگر فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر مساوی ۴ سانتی‌متر باشد، شعاع دایره چه قدر است؟

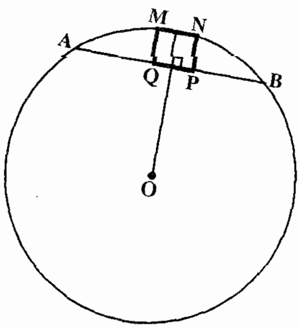
۶۴. در یک دایره، سه وتر C_1، C_2 و C_3 با هم موازی‌اند و هر سه در یک طرف مرکز واقعند. فاصلهٔ بین C_1 و C_2 با فاصلهٔ بین C_2 و C_3 برابر است. طولهای وترها، ۲۰، ۱۶ و ۸ است. شعاع دایره برابر است با :

الف) ۱۲ ب) $۴\sqrt{۷}$ ج) $\frac{۵\sqrt{۶۵}}{۳}$ د) $\frac{۵\sqrt{۲۲}}{۲}$

هـ) مقداری که از روی اطلاعات داده شده یکتا به دست نمی‌آید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰

۶۵. وتری به طول ۶cm دایره‌ای را به دو قسمت تقسیم می‌کند. مربعی با ضلع ۲cm را در داخل قطعهٔ کوچکتر محاط می‌کنیم. اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.



۶۶. اگر مساحت دایره، وقتی R شعاع دایره به اندازهٔ n زیاد می‌شود، دو برابر شود، آن‌گاه R برابر است با :

الف) $n(\sqrt{۲}+۱)$ ب) $n(\sqrt{۲}-۱)$ ج) n د) $n(۲-\sqrt{۲})$ هـ) $\frac{n\pi}{\sqrt{۲}+۱}$

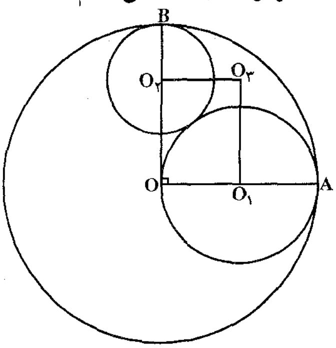
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۶۷. دایره‌ای با کمترین شعاع پیدا کنید که، مثلث مفروض را در درون خود داشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

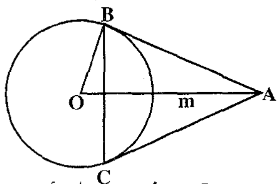
۶۸. از نقطه‌ای واقع بر محیط دایره‌ای دو وتر به طولهای a و b رسم کرده‌ایم، با وصل کردن دو انتهای این وترها به یکدیگر، مثلثی با مساحت S به دست آمده است. شعاع دایره را بیابید.

۶۹. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R مفروض است. دو شعاع OA و OB را عمود برهم رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به قطر OA رسم کرده و مرکز آن را $O_۱$ می‌نامیم.



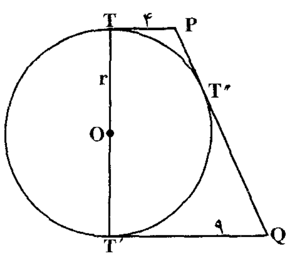
۱. شعاع دایره‌ای را حساب کنید که مرکز آن یعنی نقطهٔ $O_۲$، روی OB واقع بوده و بر دو دایرهٔ مزبور مماس باشد.

۲. مستطیلی به ضلعهای $OO_۱$ و $OO_۲$ رسم می‌کنیم، ثابت کنید نقطهٔ $O_۳$ رأس چهارم این مستطیل، مرکز دایره‌ای است که بر سه دایرهٔ مزبور مماس باشد.



۷۰. از نقطه‌ای به فاصلهٔ m از مرکز دایره، دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ تماس مساوی a شده است. شعاع دایره را به دست آورید.

۷۱. در شکل داده شده، TP و T′Q با هم موازی و بترتیب در T و T′ بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r مماس هستند. PQ نیز در T″ بر دایره مماس است. اگر TP = ۴ و T′Q = ۹، آن‌گاه r برابر است با :



الف) $\frac{۲۵}{۶}$ ب) ۶ ج) $\frac{۲۵}{۴}$

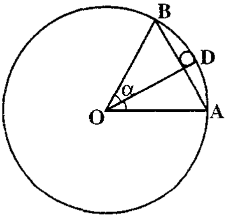
د) عددی غیر از این سه عدد

هـ) مقداری که با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

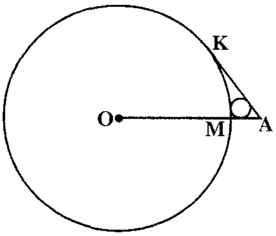
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

۷۲. در دایره‌ای به شعاع R مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم و روی ضلع مثلث مربعی ساخته‌ایم. مطلوب است شعاع دایرهٔ محیطی مربع.

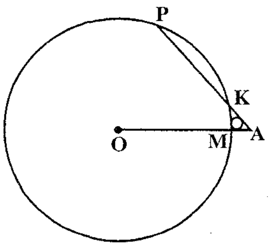
۷۳. در دایره‌ای به شعاع R و مرکز O دو شعاع OA و OB را طوری رسم می‌کنیم که $A\hat{O}B = \alpha$ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$ باشد. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که بر کمان AB از قطاع OAB، وتر AB و نیمساز زاویهٔ AOB مماس است.



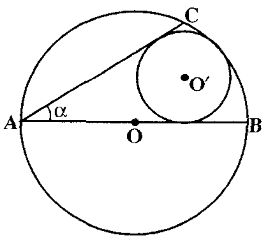
۷۴. از نقطهٔ A مماس AK را بر دایره‌ای به شعاع ۲cm و با مرکز O رسم می‌کنیم. پاره‌خط OA دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند و با خط مماس، زاویهٔ ۶۰° می‌سازد. شعاع دایرهٔ محاط در مثلث خمیده MKA را بیابید.



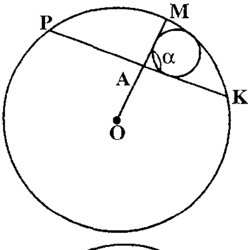
۷۵. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطهٔ A واقع به فاصلهٔ a از مرکز دایره $(a > R)$، قاطعی را بر این دایره رسم می‌کنیم. این قاطع با قاطع AO زاویهٔ ۶۰° می‌سازد و دایره را در نقطه‌های K و P قطع می‌کند (نقطهٔ K بین A و P قرار می‌گیرد). اگر M نقطهٔ برخورد دایره و پاره خط AO باشد، شعاع دایرهٔ محاط در مثلث خمیده MKA را پیدا کنید.



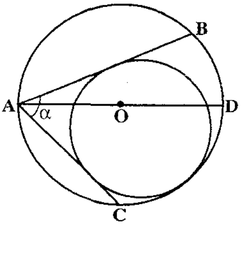
۷۶. در دایره‌ای به شعاع ۲، قطر AB و وتر AC را رسم می‌کنیم. در داخل مثلث خمیده حاصل با ترسیمات فوق، دایره‌ای را محاط می‌کنیم. اگر $C\hat{A}B = \alpha$ باشد، شعاع این دایره را بیابید.

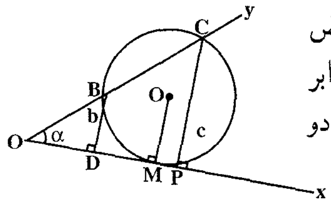


۷۷. در دایره‌ای به مرکز O شعاع OM و وتر KP در نقطهٔ A متقاطع بوده و $M\hat{A}K = \alpha(\alpha < \frac{\pi}{2})$ است. در داخل مثلث خمیده حاصل به طریق فوق، دایره‌ای را محاط می‌کنیم. اگر $OM = R$ و $OA = a$ باشد، شعاع این دایره را بیابید.

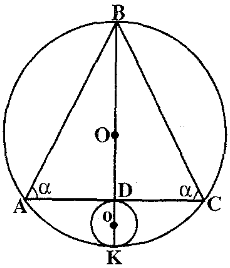


۷۸. از نقطهٔ A واقع بر روی دایره‌ای به شعاع r دو وتر AB و AC و قطر AD را رسم می‌کنیم. اگر $B\hat{A}C = \alpha$، $AB = b$ و $AB > AC$ باشد، آن گاه شعاع دایرهٔ مماس بر کمان $\overset{\frown}{BC}$ و وترهای AB و AC را پیدا کنید.



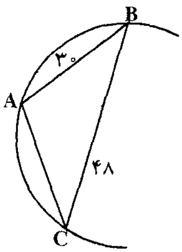


۷۹. روی یک ضلع زاویه‌ای به اندازهٔ α دو نقطه مفروض است، که فاصلهٔ هر یک از آنها از ضلع دیگر زاویه برابر b و c $(b < c)$ است. شعاع دایرهٔ گذرنده از این دو نقطه و مماس بر ضلع دیگر زاویه را پیدا کنید.



۸۰. در دایره‌ای، مثلث متساوی‌الساقین ABC محاط شده است، که طول قاعدهٔ آن $AC = b$ و اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعده در آن برابر α است. دایرهٔ دیگری را بر قاعده مثلث و دایرهٔ اول مماس می‌کنیم. نقطهٔ تماس این دایره با مثلث، بر میانگاه قاعدهٔ آن،یعنی نقطهٔ D منطبق است. شعاع دایرهٔ دوم را محاسبه کنید.

۳.۲.۲. اندازهٔ قطر



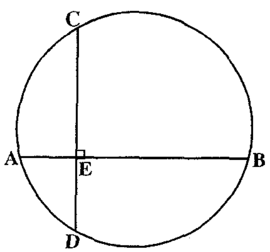
۸۱. باستانشناسی در کاوشهای یک خرابهٔ قدیمی، قطعه‌ای از لبهٔ یک چرخ را یافت. برای یافتن قطر چرخ سه نقطهٔ A، B و C را روی لبهٔ چرخ نشان کرد، به نحوی که $AB = AC$. اگر $AB = ۳۰cm$ و $BC = ۴۸cm$ باشد، قطر چرخ چه‌قدر است؟

۸۲. دو وتر عمود بر هم، در یک دایره، یکدیگر را قطع کرده‌اند. اگر طول دو پاره‌خط یکی از وترها ۳ و ۴ ، و طول دو پاره‌خط وتر دیگر ۶ و ۲ باشد، آن گاه قطر دایره برابر است با :

الف) $\sqrt{۸۹}$ ب) $\sqrt{۵۶}$ ج) $\sqrt{۶۱}$ د) $\sqrt{۷۵}$ هـ) $\sqrt{۶۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۸۳. در دایرهٔ داده شده، وترهای AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده و بر هم عمودند. اگر پاره‌خطهای AE، EB و ED بترتیب طولهای ۲، ۶ و ۳ داشته باشند، آن‌گاه طول قطر دایره برابر است با :



الف) $۴\sqrt{۵}$ ب) $\sqrt{۶۵}$ ج) $۲\sqrt{۱۷}$

د) $۳\sqrt{۷}$ هـ) $۶\sqrt{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۳.۳. طول قوس و محیط دایره

۱.۳.۳. طول قوس

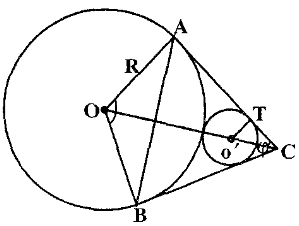
۸۴. عقربه ساعت شمار ساعت، در هر ساعت، چند درجه طی می‌کند؟ هر درجه را در چه مدت طی می‌کند؟ کمانی که در مدت ۲۸ دقیقه طی می‌کند، چه‌قدر است؟ در چه مدت کمان ′۱۲ را طی می‌کند؟

۸۵. شعاع یک دایره ۱۸ است. طول هر یک از کمانهای °۶۰، °۹۰، °۱۲۰، °۱۵۰، °۱۸۰ و °۲۷۰ متعلق به این دایره چه‌قدر است؟

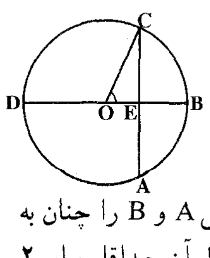
۸۶. عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت، ۲ متر طول دارد. نوک این عقربه در ۵ دقیقه، چه فاصله‌ای را طی می‌کند؟ در ۱ دقیقه چه‌طور؟

۸۷. در طراحی ساختمانهای بلند، مهندسین باید نوسان آسمانخراشها را در نظر بگیرند. ارتفاع طبقهٔ صدودوم ساختمان امپایراستیت ۴۱۵m است. اگر ساختمان $\frac{۱}{۲}^{\circ}$ نوسان کند، این طبقه چند متر جابه‌جا می‌شود؟

۸۸. میل دریایی یک دقیقهٔ نصف‌النهار است. طول آن برحسب شعاع زمین چه‌قدر است؟



۸۹. از نقطهٔ C دو مماس CA و CB را که زاویهٔ بین آنها °۶۰ است بر دایره‌ای رسم می‌کنیم. در درون مثلث خمیده‌ای که با این دو مماس و کمان کوچک $\overset{\frown}{AB}$ تشکیل می‌شود، دایره‌ای را محاط می‌کنیم. ثابت کنید که طول این کمان با محیط دایرهٔ محاطی برابر است.



۹۰. در دایره‌ای وتر عمود بر قطر آن را، به نسبت m:n تقسیم کرده است. مطلوب است اندازهٔ هر یک از قوسهای دایره که به وسیلهٔ قطر و وتر به وجود آمده است (برحسب واحد قوس).

۹۱. دایره‌ای به شعاع واحد، و دو نقطهٔA و B روی آن مفروضند. خمی A و B را چنان به هم وصل می‌کند که مساحت دایره نصف شود. ثابت کنید که طول آن حداقل برابر ۲ است (خم همواره داخل دایره قرار دارد).

اولین المپیاد ریاضی اکو، تهران، ۱۳۷۳

۹۲. قطر دایره‌ای به n تقسیم شده است. بر هر قسمت نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. وقتی n بسیار بزرگ شود، مجموع طول قوسهای نیمدایره‌ها میل می‌کند به طولی که :

الف) برابر نصف محیط دایرهٔ اصلی است.

ب) برابر قطر دایرهٔ اصلی است.

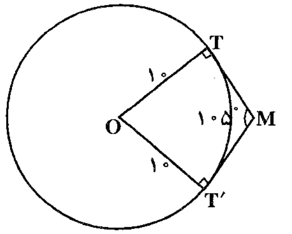
ج) بزرگتر از قطر اما کوچکتر از نصف محیط دایرهٔ اصلی است.

د) بی‌نهایت است.

هـ) بزرگتر از نصف محیط اما متناهی است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۹۳. زاویهٔ بین دو مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، برابر ۱۰۵ درجه است. اندازهٔ کمان کوچکتر بین دو نقطهٔ تماس را تعیین کنید.

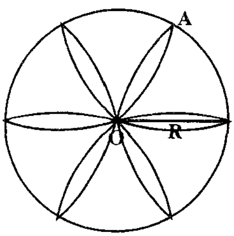


۹۴. فرض کنید s، a و b کمانهای یک هفتم، دو هفتم و دو هفتم محیط یک دایره است. نشان دهید که S نصف واسطهٔ هندسی بین a و b است.

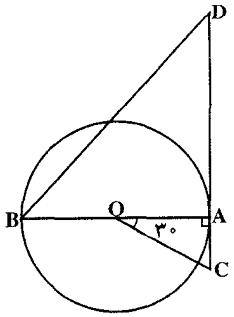
۹۵. تفاوت اندازهٔ کمان و طول کمان را بیان کنید.

۲.۳.۳. اندازهٔ محیط

۹۶. دایره‌ای را به ۶ قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم. هر یک از نقطه‌های تقسیم را مرکز قرار داده و قوسهایی محدود به محیط دایره رسم می‌کنیم. محیط شش برگی حاصل را برحسب R، شعاع دایره به دست آورید.



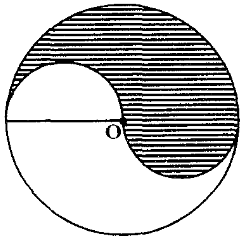
۹۷. ثابت کنید که مجموع طول ضلع مربع محاط در یک دایره و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در همان دایره، اندازه تقریبی طول نیمدایره را نشان می‌دهد.



۹۸. دایرهٔ (O) به قطر $AB = ۲R$ مفروض است. روی مماس در نقطهٔ A، نقطهٔ C را چنان اختیار می‌کنیم که $A\hat{O}C = ۳۰^\circ$ باشد سپس قطعه خط $CAD = ۳R$ را روی مماس مزبور جدا می‌کنیم. ثابت کنید که طول BD اندازهٔ تقریبی طول نیمدایره را نشان می‌دهد.

۹۹. هر گاه D طول قطر یک دایره باشد مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که ضلعهای زاویهٔ قائمه آن $\frac{۳D}{۵}$ و $\frac{۶D}{۵}$ باشد. ثابت کنید که تفاضل مابین محیط این مثلث و طول محیط نیمدایره از یک ده هزارم کمتر است.

۱۰۰. ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شکل روبه‌رو از یک طرف به نیمدایره‌ای به شعاع R و از طرف دیگر به دو نیمدایره با شعاعهای برابر محدود است. محیط این ناحیه چه‌قدر است؟



الف) πR ب) $\frac{۳\pi R}{۲}$ ج) $۲\pi R$

د) $\frac{\pi R^۲}{۲}$ هـ) $\pi R^۲$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۳.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۱. قطر خارجی چرخ اتومبیلی ۲۵ اینچ است. وقتی شعاع به اندازهٔ یک چهارم اینچ کم می‌شود، تعداد دورهای چرخ در یک میل:

الف) حدود ۲٪ افزایش می‌یابد. ب) حدود ۱٪ افزایش می‌یابد.

ج) حدود ۲۰٪ افزایش می‌یابد. د) $\frac{۱}{۲}$٪ افزایش می‌یابد.

هـ) ثابت باقی می‌ماند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۱۰۲. نقطه‌ای بر محیط چرخی با مرکز ثابت و با قطر خارجی ۶ پا قرار دارد. برای این که این نقطه یک میل طی کند، تعداد دورانهای مورد نیاز چرخ برابر است با:

الف) ۸۸۰ ب) $\frac{۴۴۰}{\pi}$ ج) $\frac{۸۸۰}{\pi}$ د) ۴۴۰π هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۱۰۳. هواپیمای اکتشافی روی دایره‌ای به مرکز نقطهٔ A و به شعاع ۱۰ کیلومتر، با سرعت ساعتی ۱۰۰۰ کیلومتر پرواز می‌کند. در لحظه‌ای، از نقطهٔ A موشکی پرتاب می‌شود که دارای همان سرعت هواپیماست و مسیر حرکت آن، همیشه، روی خط راستی قرار دارد که نقطهٔ A را به هواپیما وصل می‌کند. موشک، چه مدتی بعد از پرتاب، به هواپیما می‌رسد؟

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۵

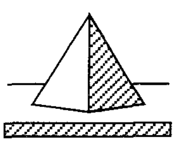
۳. ۴. π

۳.۴.۱. تاریخچهٔ π، نشانهٔ بزرگ هندسی

کمی بیش از دو قرن است که نسبت طول محیط دایره به قطر آن را با نشانهٔ π می‌شناسند. این نشانه، حرف اول یک کلمهٔ یونانی به معنی محیط است.

برای نخستین بار ویلیام جون ریاضیدان انگلیسی در سال ۱۷۰۶ از این نشانه استفاده کرد و از میانهٔ سدهٔ هیجدهم که لئونارد اولر کتاب «آنالیز» خود را چاپ کرد، دیگر در همه جا به کار رفت. ولی خود مفهوم این عدد، البته بدون اینکه نشانه‌ای برای آن در نظر گرفته شده باشد، بیش از ۴۰۰۰ سال سابقه دارد. آنها که هرم مشهور خئوپس را مورد بررسی قرار داده‌اند، در نسبت اندازه‌های آن ردپاهای آشکاری از این نسبت، یعنی نسبت طول محیط دایره به قطر آن دیده‌اند؛ خارج قسمتی که از تقسیم مجموع دو ضلع قاعده بر ارتفاع هرم به دست می‌آید، مساوی ۳/۱۴۱۶ است و این همان مقدار عدد π است که تا سه رقم بعد از ممیز آن دقیق است.

پاپیروس معروف آهمس یا احمس، قدیمی‌ترین «کتاب درسی» ریاضی که در ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد نوشته شده است، روش زیر را برای ساختن مربعی که سطحی مساوی سطح دایره داشته باشد، ذکر می‌کند. «از قطر دایره یک نهم آن را کنار بگذارید و مربعی بسازید که ضلع آن مساوی اندازهٔ بقیهٔ قطر باشد، این مربع هم ارز دایره خواهد بود.» از این مطلب نتیجه می‌شود که مقدار π برای آهمس مساوی ۳/۱۶۰۵ بوده است. ظاهراً سازندگان هرمها از راز این عدد مطلع بوده‌اند.



در جریان ۴۰۰۰ سال بعد، عدد π دچار دگرگونیهای زیادی شده مقدار آن از $\frac{۲۲}{۷}$، که ارشمیدس داده بود و به صورت اعشاری آن تا دو رقم بعد از ممیز درست است، به مقدار دقیق آن در سدهٔ نوزدهم رسید که تا ۷۰۷ رقم درست آن معلوم شد.

سال ۱۸۸۲ را می‌توان در تاریخ عدد π تاریخ دگرگونی مهمی دانست. در این سال لیندمان ریاضیدان آلمانی خصلت اسرارآمیز این عدد را مشخص کرد: عدد π نمی‌تواند ریشهٔ یک معادلهٔ جبری با ضریبهای صحیح باشد.

۲.۴.۳. محاسبهٔ π

مسألهٔ تربیع، پیوند نزدیکی با محاسبهٔ π، نسبت محیط یک دایره به قطر آن دارد. دیده‌ایم که در شرق باستان مقدار π اغلب ۳ گرفته می‌شد و در مورد تربیع دایره توسط مصریان که در پاپیروس رایند داده شده، داریم $\pi = (۴/۳)^۴ = ۳/۱۶۰۴۰۰\cdots$. اما اولین کوشش علمی برای محاسبهٔ π، ظاهراً از آن ارشمیدس است، و ما این گاهشمار را با دستاورد او آغاز می‌کنیم.

حدود ۲۴۰ پ.م. برای سهولت امر، فرض کنید که دایره‌ای به قطر واحد اختیار می‌کنیم. حال (طول) محیط یک دایره بین محیط یک چند ضلعی منتظم محاطی و محیط یک چند ضلعی منتظم محیطی قرار دارد. چون محاسبهٔ محیطهای شش ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی کار ساده‌ای است، به آسانی کرانهایی برای π به دست می‌آوریم. اما فرمولهایی وجود دارند که به ما می‌گویند چگونه می‌توانیم با داشتن محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، محیطهای چند ضلعیهای محیطی و محاطی را به دست آوریم که تعداد اضلاعشان دو برابرند. از کاربرد متوالی این روش، با شروع از شش ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی، می‌توانیم محیطهای چند ضلعیهای منتظم محیطی و محاطی با ۱۲، ۲۴، ۴۸ و ۹۶ ضلع را محاسبه کنیم و بدین ترتیب کرانهای نزدیکتر و نزدیکتری برای π به دست آوریم. این، اساساً همان کاری است که ارشمیدس انجام داد و در نهایت به این حقیقت رسید که π بین ۲۲۳/۷۱ و ۲۲/۷ قرار دارد، یا این که، π با دو رقم اعشار ۳/۱۴ است. این نتیجه در رسالهٔ ارشمیدس به نام اندازه‌گیری دایره، که تنها شامل ۳ قضیه است، دیده می‌شود. این رساله آن گونه که به دست ما رسیده، شکل اولیهٔ آن نیست و ممکن است تنها بخشی از یک بحث طولانی‌تر باشد. با توجه به دستگاه شمار ضعیفی که در آن زمان مورد استفاده بود، به ناگزیر، نتیجه می‌توان گرفت که ارشمیدس محاسبی بسیار توانا بوده است. در این اثر ارشمیدس، تقریبات گویای قابل توجهی برای جذرهای گنگ، یافت می‌شوند.

روش بالا برای محاسبهٔ π با استفاده از چند ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی به روش کلاسیک محاسبهٔ π معروف است.

حدود ۱۵۰ پ.م. اولین مقدار قابل توجه برای π بعد از مقدار ارشمیدس به وسیله کلاودیوس بطلمیوس Claudius ،Ptolemy اسکندرانی در اثر معروفش سونتاکسیس ماتماتیکا Syntaxis mathematica (که به عنوان عربی المجسطی Almagest معروفیت

بیشتری دارد.) بزرگترین اثر یونان باستان در باب نجوم، داده شده است. در این اثر π ، در دستگاه شصتگانی، به صورت ″۳۰,′۳۸ داده می‌شود که عبارت از ۳۷۷/۱۲۰ ، یا ۳/۱۴۱۶ است. این مقدار بدون تردید از جدول وترها که در رساله ظاهر می‌شود، استخراج شده است. این جدول طول وترهای یک دایره را که در مقابل زوایای مرکزی هر درجه و نصف درجه قرار دارند، می‌دهد. اگر طول وتر زاویه مرکزی °۱ در ۳۶۰ ضرب، و نتیجه بر طول قطر دایره تقسیم شود، مقدار فوق برای π حاصل خواهد شد.

حدود ۴۸۰ م. تسوچونگ چی Tsu Ch'ung - Chih از اولین چینیانی که در مکانیک کار می‌کرد، تقریب گویای جالب توجه ...۳/۱۴۱۵۹۲۹ = ۳۵۵/۱۱۳ را داد، که تا شش رقم اعشار صحیح است.

حدود ۵۳۰ م. ریاضیدان قدیم هندی، آریابهاتا Aryabhata ۳/۱۴۱۶ = ۶۲۸۳۲:۲۰۰۰۰ را به عنوان مقدار تقریبی برای π داد. معلوم نیست که این نتیجه چگونه به دست آمده است. ممکن است که این از یک منبع قدیمی‌تر یونانی یا شاید از محاسبهٔ محیط یک چند ضلعی منتظم محاطی با ۳۸۴ ضلع حاصل شده باشد.

حدود ۱۱۵۰ م. ریاضیدان متأخر هندی، بهاسکره Bhaskara تقریبات متعددی برای π عرضه کرد. وی ۳۹۲۷/۱۲۵۰ را به عنوان مقدار دقیق ۲۲/۷ را به عنوان مقدار نادقیق، و $\sqrt{۱۰}$ را برای کارهای معمولی ارائه کرد. اولین مقدار ممکن است از آریابهاتا اخذ شده باشد. مقدار دیگری، ۳/۱۴۱۶ = ۷۵۴/۲۴۰ ، که به وسیلهٔ بهاسکره داده شده، مبدأ نامعلومی دارد ؛ این همان مقداری است که به وسیلهٔ بطلمیوس داده شده است.

۱۴۲۹. غیاث‌الدین جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی و منجم دربار الغ‌بیگ، π را به روش کلاسیک تا ۱۶ رقم اعشار صحیح حساب کرد.

۱۵۷۹. ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی، فرانسواویت Francois Viéte مقدار π را به روش کلاسیک، با استفاده از چند ضلعیهایی که ۳۹۳۲۱۶ = $۶(۲^{۱۶})$ ضلع دارند، تا ۹ رقم اعشار پیدا کرد. وی همچنین معادل حاصلضرب نامتناهی جالب زیر را پیدا کرد :

$$\frac{۲}{\pi}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{(۲+\sqrt{۲})}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{\left(۲+\sqrt{(۲+\sqrt{۲})}\right)}}{۲}\cdot\ldots$$

۱۵۸۵. آدرین آنتونیزون Adriaen Anthoniszoon نسبت چینی باستانی ۳۵۵/۱۱۳ را مجدداً کشف کرد. این آشکارا از حسن تصادف بود، زیرا وی فقط نشان داد که $۳۳۳/۱۰۶ < \pi < ۳۷۷/۱۲۰$. وی سپس متوسط صورتها و مخرجها را پیدا کرد تا مقدار دقیق π را به دست آورد.

شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه والنتین اوتو Valentin Otho یکی از شاگردان جدولساز قدیم رائتیکوس Rhaeticus، ممکن است این نسبت را برای π اندکی پیشتر،

یعنی در سال ۱۵۷۳ ، به دنیای غرب شناسانده باشد.

۱۵۹۳. آدریان وان رومن Adrian Van Roomen که معمولاً به نام آدریانوس رومانوس Adrianus Romanus از وی یاد می‌شود، از اهالی هلند، π را به طور صحیح تا ۱۵ رقم اعشار به روش کلاسیک با استفاده از چند ضلعیهایی با $۲^{۳۰}$ ضلع، پیدا کرد.

۱۶۱۰. لودولف وان کولن Ludolph Van Ceulen از آلمان π را تا ۳۵ رقم اعشار به روش کلاسیک با استفاده از چند ضلعیهایی با $۲^{۶۲}$ ضلع، محاسبه کرد. وی قسمت زیادی از عمر خود را در این مهم صرف کرد و دستاورد وی آن چنان خارق‌العاده تلقی شد که این عدد بر سنگ قبر وی کنده شد، و هنوز هم گاهی در آلمان از آن با عنوان «عدد لودولفی» یاد می‌شود.

۱۶۲۱. ویلبروراسنل Willebrord Snell فیزیکدان هلندی، که به سبب کشف قانون انکسار شهرت دارد، یک پیرایش مثلثاتی از روش کلاسیک محاسبهٔ π را ابداع کرد، به گونه‌ای که از هر زوج کران حاصل شده از روش کلاسیک برای π، وی می‌توانست کرانهایی به دست آورد که به طور قابل ملاحظه‌ای به π نزدیکتر باشند. وی قادر بود که با روش خود ۳۵ رقم اعشار وان کولن را با استفاده از چند ضلعیهایی که تنها $۲^{۳۰}$ ضلع دارند، به دست آورد. روش کلاسیک با این چند ضلعیها تنها ۱۵ رقم اعشار را می‌دهد. برای چند ضلعیهایی با ۹۶ ضلع، روش کلاسیک ۲ رقم اعشار را عاید می‌کند. در حالی که پیرایش اسنل ۷ رقم اعشار را به دست می‌دهد. برهان صحیحی برای تصحیح اسنل در سال ۱۶۵۴ به وسیلهٔ ریاضیدان و فیزیکدان هلندی، کریستیان هویگنس Christiaan Huygens، داده شد.

۱۶۳۰. گرین برگر Grienberger با استفاده از روش بهبود یافتهٔ اسنل، π را تا ۳۹ رقم اعشار محاسبه کرد. این آخرین تلاش عمده برای محاسبهٔ π با استفاده از روش محیطها بود.

۱۶۵۰. ریاضیدان انگلیسی جان والیس John Wallis بسط جالب زیر را به دست آورد.

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times۸\times۸\times\ldots}{۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times۷\times\ldots}$$

لرد برونکر Lord Brouncker اولین رئیس انجمن سلطنتی، نتیجهٔ والیس را به کسر مسلسل تبدیل کرد.

معهذا هیچیک از این عبارات برای محاسبهٔ گستردهٔ π مورد استفاده قرار نگرفته‌اند.

$$\frac{۴}{\pi}=۱+\cfrac{۱^{۲}}{۲+\cfrac{۳^{۲}}{۲+\cfrac{۵^{۲}}{۲+\ldots}}}$$

۱۶۷۱. ریاضیدان اسکاتلندی جیمز گریگوری James Gregory سری نامتناهی

$$\arctan x = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - \frac{x^{۷}}{۷} + \ldots, (-۱ \le x \le ۱)$$

را به دست آورد. گریگوری به این حقیقت توجه نکرد که برای $x = ۱$ سری به صورت

$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \ldots$$

در می‌آید. این سری که همگرایی آن بسیار کند است، در سال ۱۶۷۴ برلایب نیتز معلوم بود. گریگوری تلاش کرد که ثابت کند حل اقلیدسی مسألهٔ تربیع غیرممکن است.

۱۶۹۹. آبراهام شارپ Abraham Sharp، ۷۱ رقم اعشار درست را با استفاده از سری گریگوری با $x = \sqrt{۱/۳}$ پیدا کرد.

۱۷۰۶. جان ماخین John Machin، ۱۰۰ رقم اعشار را با استفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطهٔ زیر به دست آورد.

$$\frac{\pi}{۴} = ۴\arctan(\frac{۱}{۵}) - \arctan(\frac{۱}{۲۳۹})$$

۱۷۱۹. ریاضیدان فرانسوی دلاینی Delagny، ۱۱۲ رقم اعشار را با استفاده از سری گریگوری با $x = \sqrt{۱/۳}$ به دست آورد.

۱۷۳۷. نماد π توسط ریاضیدانان متقدم انگلیسی ویلیام اوترد William Oughtred، آیزک برو Isaac Barrow و دیوید گریگوری برای تعیین محیط، یا پیرامون یک دایره مورد استفاده واقع شد. اولین کسی که این نماد را به نشانهٔ نسبت محیط به قطر به کار برد، نویسندهٔ انگلیسی، ویلیام جونز William Jones دراثری متعلق به سال ۱۷۰۶ بود. معهذا این نماد تا زمان پذیرش آن از طرف اویلر در سال ۱۷۳۷، از طرف عموم با این معنی، مورد استفاده قرار نگرفت.

۱۷۵۴. ژان اتین مونتوکلا Jean Etienne Montucla از تاریخ ریاضی نویسان متقدم فرانسوی، تاریخی در باب مسألهٔ تربیع دایره نگاشت.

۱۷۵۵. آکادمی علوم فرانسه از بررسی هر راه حل دیگری برای مسأله تربیع دایره امتناع ورزید.

۱۷۶۷. یوهان هاینریش لامبرت Johann Heinrich Lambert نشان داد که π گنگ است.

۱۷۷۷. کنت دوبوفون Conte de Buffon مسألهٔ سوزن مشهور خود را ابداع کرد که به وسیلهٔ آن π را می‌توان به روشهای احتمالاتی، تقریب نمود. فرض کنید که تعدادی خط موازی که به فاصلهٔ a از هم قرار دارند، بر یک صفحهٔ افقی رسم شده باشند، و فرض

کنید که میلهٔ همگن یکنواختی به طول $L < a$ به تصادف بر روی صفحه انداخته می‌شود. بوفون نشان داد که احتمال (اگر پیشامد مفروضی، به b طریق امکان وقوع داشته، و به f طریق امکان عدم وقوع داشته باشد و اگر وقوع هر یک از $b + f$ طریق به یک اندازه محتمل باشد، احتمال ریاضی P برای وقوع پیشامد، عبارت است از $(P = b/(b+f))$ این که میله یکی از خطهای صفحه را قطع کند، به وسیلهٔ $P = \frac{2L}{\pi a}$ داده می‌شود. با انجام عملی این آزمایش به تعداد دفعات زیاد مفروض و ثبت تعداد حالات توأم با پیروزی، و بدین ترتیب‌با به‌دست آوردن یک مقدار تجربی برای P، می‌توانیم فرمول بالا را برای محاسبهٔ تقریبی π به کار ببریم. بهترین نتیجه‌ای که بدین طریق به دست آمد به وسیلهٔ لازرینی Lazzerini ایتالیایی در ۱۹۰۱ داده شد. تنها با ۳۴۰۸ بار پرتاب میله، وی مقداری برای π یافت که تا ۶ رقم اعشار درست بود! نتیجهٔ وی از نتیجه‌های به دست آمده به وسیلهٔ دیگران بهتر بود که گاهی با تردید به آن نگریسته می‌شود. روشهای دیگری هم بر اساس احتمال برای محاسبهٔ π وجود دارد. مثلاً در ۱۹۰۴، ر. شارتر R.Chartres گزارشی از کاربرد این حقیقت معلوم ارائه کرد که اگر دو عدد صحیح مثبت به طور تصادفی نوشته شوند، احتمال این که نسبت به هم اول باشند، $6/\pi^2$ است.

۱۷۹۴. آدرین ــ ماری‌لژاندر Adrien_Marie Legendre نشان داد که π^2 گنگ است.

۱۸۴۱. ویلیام راترفورد William Rutherford انگلیسی π را تا ۲۰۸ رقم اعشار، که بعدها معلوم شد از آن بین فقط ۱۵۲ رقم صحیح بوده‌اند، با استفاده از سری گریگوری درارتباط با رابطهٔ $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{70}) + \arctan(\frac{1}{99})$ حساب کرد.

۱۸۴۴. زاخاریاس دازه Zacharias Dase محاسب برق آسا، π را به طور صحیح تا ۲۰۰ رقم اعشار با استفاده از سری گریگوری در ارتباط با رابطهٔ $(\frac{\pi}{4}) = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{8})$ پیدا کرد. دازه‌که در ۱۸۲۴ در هامبورگ متولد شد در ۳۷ سالگی درگذشت. وی شاید خارق‌العاده‌ترین محاسب ذهنی بوده که تاکنون زیسته است. از کارهای وی محاسبهٔ ذهنی حاصلضرب دو عدد ۸ رقمی در ۵۴ ثانیه، دو عدد ۲۰ رقمی در ۶ دقیقه، دو عدد ۴۰ رقمی در ۴۰ دقیقه و دو عدد ۱۰۰ رقمی در ۸ ساعت و۴۵ دقیقه بوده است. وی به طور ذهنی جذر یک عدد ۱۰۰ رقمی را در ۵۲ دقیقه محاسبه می‌کرد. دازه بعدها تواناییهای خود را با تنظیم جدول لگاریتم طبیعی هفت رقمی و جدول سازه‌های همهٔ اعداد بین ۷،۰۰۰،۰۰۰ و ۱۰،۰۰۰،۰۰۰ به نحو شایسته‌تری به کار برد.

۱۸۵۳. راترفورد دوباره به این مسأله روی آورد و π را تا ۴۰۰ رقم اعشار یافت.

۱۸۷۳. ویلیام شنکس William Shanks از انگلستان، با استفاده از فرمول ماخین، π را تا ۷۰۷ رقم محاسبه کرد. برای مدت مدیدی این کار، به صورت افسانه‌ای‌ترین نمونهٔ

کار محاسباتی انجام شده، باقی ماند.

۱۸۸۲. عددی را جبری نامند که ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضریبهای گویا باشد، در غیر این صورت آن را متعالی می‌نامند. ف. لیندمان F. Lindeman نشان داد که π متعالی است. این حقیقت ثابت می کندکه مسألهٔ تربیع را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی حل کرد.

۱۹۰۶. در میان چیزهای جالبی که با π مربوط می‌شوند «یادآور» های مختلفی m.nemonic هستند که به منظور در یاد نگاهداشتن π تا تعداد اعشار زیاد مطرح شده‌اند، آن‌چه در زیر می‌آید، از اور A.C.Orr است که در نشریه لیتری دایجست Literay Digest منتشر شد. کافی است به جای هر کلمه، تعداد حروف آن را قرار دهیم تا π به طور صحیح تا ۳۰ رقم اعشار به دست آید.

Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt, the great
Immortal syracusan , rivaled nevermorc,
Who in his wondrous Lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.

چند سال بعد، در سال ۱۹۱۴ یادآور مشابه زیر در مجلهٔ ساینتیفیک امریکن Scientific American چاپ شده :

"See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks of times resisting"

و یادآور دیگری از این گونه چنین است :

"May I have a large container of coffee?"

در زبان فارسی نیز چنین یادآورهایی ابداع شده‌اند، نمونه‌ای از آن در زیر نقل می‌شود.

گر کسی از تو بپرسد ره آموختن π پاسخی ده که خردمند ترا آموزد

«خرد و بینش و آگاهی دانشمندان   ره سر منزل توفیق ترا آموزد»

این شعر عدد π را با ده رقم اعشار مشخص می کند.

۱۹۴۸. در سال ۱۹۴۶، د.ف. فرگوسن D.F. Ferguson از انگلستان در مقدار یافته شده توسط شنکس برای π خطاهایی را که از رقم ۵۲۸ شروع می‌شوند، کشف کرد و در ژانویهٔ سال ۱۹۴۷ مقدار تصحیح شده‌ای با ۷۱۰ رقم ارائه داد. در همان ماه ج. و. رنچ جونیور J.W. Wen Wernch Junior امریکایی مقداری برای π با ۸۰۸ رقم انتشار داد، ولی فرگوسن به زودی خطایی در رقم ۷۲۳ ام آن پیدا کرد.

در ژانویه ۱۹۴۸، فرگوسن و رنچ مشترکاً مقدار تصحیح و کنترل شده‌ای را برای π با ۸۰۸ رقم اعشار منتشر کردند. رنچ از فرمول ماخین استفاده کرد، درحالی که فرگوسن فرمول $\frac{\pi}{۴}=۳\arctan(\frac{۱}{۴})+\arctan(\frac{۱}{۲۰})+\arctan(\frac{۱}{۱۹۸۵})$ را به کار برد.

۱۹۴۹. کامپیوتر الکترونیکی، ENIAC در آزمایشگاههای تحقیقات بالیستیکی نظامی Army Ballistic Researh Laboratories در آبردین Aberdeen، π را تا ۲۰۳۷ رقم اعشار حساب کرد.

۱۹۵۹. فرانسوا ژنوی Francois Genuys در پاریس، π را با استفاده از آی. بی. ام. ۷۰۴، تا ۱۶,۱۶۷ رقم اعشار، محاسبه کرد.

۱۹۶۱. رنچ و دانیل شنکس، از واشنگتن دی.سی، π را با استفاده از آی.بی.ام ۷۰۹۰، تا ۱۰۰,۲۶۵ رقم اعشار محاسبه کردند.

۱۹۶۵. قطعات ENIAC را، که دیگر متروک شده بود، از هم باز کردند و به عنوان یک اثر عتیقه به انستیتوی اسمیتسونی Smithsonian Institution بنیاد موزه‌ای که در سال ۱۸۴۶ در شهر واشنگتن دی‌سی دایر شده است، انتقال دادند.

۱۹۶۶. در ۲۲ فوریه، م. ژان‌گیو M.Jean Guilloud و همکاران وی در هیأت انرژی اتمی در پاریس، با یک کامپیوتر STRETCH به تقریبی برای π که تعداد ارقام اعشارش تا ۲۵۰,۰۰۰ می‌رسید، دست یافتند.

۱۹۶۷. دقیقاً یک سال بعد، این افراد π را با یک کامپیوتر CDC ۶۶۰۰ تا ۵۰۰,۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۷۴. گیو و همکارانش π را با یک کامپیوتر CDC ۷۶۰۰ تا ۱,۰۰۰,۰۰۰ رقم اعشار پیدا کردند.

۱۹۸۱. دو ریاضیدان ژاپنی کازونوری‌میوشی Kazunori Miyoshi و کازوهیکاناکایاما Kazuhika Nakayama از دانشگاه تسوکوبا Tsukuba، π را با یک کامپیوتر FACOMM ـ ۲۰۰ در ۱۳۷/۳۰ دقیقه تا ۲,۰۰۰,۰۳۸ رقم حساب کردند. آنها از فرمول :

$$\pi = ۳۲\arctan\left(\frac{۱}{۱۰}\right) - ۴\arctan\left(\frac{۱}{۲۳۹}\right) - ۱۶\arctan\left(\frac{۱}{۵۱۵}\right)$$

استفاده کردند و نتیجه را با فرمول ماخین امتحان کردند.

در گاهشمار بالا هیچ موردی از آثار فراوانی را که توسط مبتلایان به بیماری موربوس کوکلومتریکوس Morbus Cyclometricus یا بیماری تربیع دایره، فراهم آمده، نگنجانده‌ایم. این کارها، که اغلب سرگرم‌کننده و در مواردی تقریباً باور نکردنی‌اند، مستلزم انتشار مجموعهٔ جداگانه‌ای هستند. برای آن‌که مفاد آنها روشن شود، موردی را در سال ۱۸۹۲ درنظر بگیرید که در آن نویسنده‌ای در نیویورک تریبون، New York Tribune کشف مجدد راز مدتها گمشده‌ای را اعلام کرد، که به عدد ۳/۲ به‌عنوان مقدار دقیق π منجر می‌گردید.

بحث پرشوری که بعد از این اعلام به میان آمد، هواداران زیادی را برای این مقدار جدید جلب کرد. همچنین، بعد از انتشار در ۱۹۳۱، تعداد زیادی از کتابخانه‌های دانشگاهها و کتابخانه‌های عمومی در سراسر ایالات‌متحده، نسخه‌هایی اهدایی از کتاب قطوری را که به اثبات $\pi = ۳\frac{۱۳}{۸۱}$ اختصاص داده شده از مؤلف آن دریافت داشته‌اند. ضمناً لایحهٔ قانونی شمارهٔ ۲۴۶ مجلس مقننهٔ ایالت ایندیانا را داریم که، در ۱۸۹۷ دست به تعیین مقدار π از طریق قانونگذاری زد. در بخش I این لایحه می‌خوانیم: «به تصویب مجمع عمومی ایالت ایندیانا برسد: معلوم گردیده است که نسبت یک سطح مستدیر به مربعی که برخطی برابر با ربع محیط ساخته شود، برابر است با مساحت یک مستطیل متساوی‌الاضلاع به مساحت مربعی بر یک ضلع آن...» این لایحه از تصویب مجلس گذشت ولی به‌علت برخی استهزاها در روزنامه‌ها، علی‌رغم پشتیبانی شدید ناظر ایالتی تعلیمات عمومی، در سنا بایگانی شد.

از محاسبهٔ π با تعداد زیادی ارقام اعشاری، چیزی بیش از مبارزه‌طلبی متضمن در آن، مورد نظر است. یک علت، تأمین اطلاعات آماری مربوط به «نرمال بودن» π است.

یک عدد حقیقی نرمال ساده نامیده می‌شود، درصورتی که در بسط اعشاری آن همهٔ رقمها با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند، و آن را نرمال می‌نامند هرگاه که هر دسته رقمها با طولهای برابر، با فراوانیهای مساوی ظاهر شوند. معلوم نیست که π (یا از این نظر حتی $\sqrt{۲}$) نرمال یا حتی نرمال ساده باشد. محاسبه‌های مقدار π، که شروع آن‌ها محاسبه با کامپیوتر ENIAC در ۱۹۴۹ بود، برای فراهم آوردن اطلاعات آماری در باب این موضوع صورت گرفته بودند. از شمارشهای انجام شده بر روی این بسطهای گستردهٔ π، به‌نظر می‌رسد که این عدد احتمالاً نرمال است. محاسبهٔ π با اشتباهی در رقم ۷۰۷ام آن که به‌وسیلهٔ شنکس درسال ۱۸۳۷ انجام شد، ظاهراً دلالت بر این می‌کرد که π حتی نرمال ساده هم نیست.

در آخرین محاسبهٔ π، به‌وسیله رایانه (کامپیوتر) در ژاپن، π را تا ۶ میلیون رقم اعشار محاسبه کرده‌اند. به‌طور یقین، زمانی فرامی‌رسد که π، تا ده‌ها و یا صدها میلیون رقم اعشار به‌وسیلهٔ رایانه محاسبه شود.

۱۰۴. موفقترین یادآور جمله‌ای داده شده در متن، برای به یاد نگاهداشتن بسط اعشاری π، ۳۰ رقم اعشار صحیح به‌دست می‌دهد. تاکنون هیچ کس قادر نبوده، یادآور جمله‌ای بسازد که π را با بیش از ۳۱ رقم اعشار صحیح بدهد؛ چرا چنین است؟

۱۰۵. با استفاده از $C_۴$ و $A_۶$ ثابت کنید که: $۳ < \pi < ۴$

۱۰۶. بابلیها برای پیدا کردن محیط دایره، محیط شش ضلعی محاط در آن را به‌دست می‌آوردند. مقدار تقریبی π را به‌نحوی که مورد استفادهٔ بابلیها بود، پیدا کنید.

از مسأله‌های بابلی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

یادداشت تاریخی

پیدایش ریاضیات را در بابل باستان، باید مربوط به ده‌ها سدهٔ پیش از میلاد دانست. خاطرهٔ کار بابلیها، به‌صورت لوحهای پختهٔ گلی، با نوشته‌هایی به خط میخی، در بسیاری از موزه‌های معروف جهان، مثل موزهٔ بریتانیا در لندن، موزهٔ آرمیتاژ در لنینگراد، موزهٔ هنرها در مسکو و غیره نگهداری شده است. از فرهنگ ریاضی بابل قدیم، چهل و شش لوح پیدا شده است.

در این لوحها، روشهای کاملاً ساده‌ای برای حل مسأله‌های عملی (مربوط به تقسیم زمین، ساختمان و بازرگانی) داده شده است.

موفقیتهای علمی مردم باستانی سرزمین بابل را می‌توان، به این ترتیب خلاصه کرد :

الف) بابلیها را باید پایه‌گذار اخترشناسی دانست. آن‌چه آنها در مورد دستگاه سیاره‌ها به‌دست آورده بودند، بسیار دقیق بود. به‌عنوان مثال ماه قمری بابلی، با آن‌چه امروز در اخترشناسی معاصر محاسبه شده است، تنها ۰/۲ ثانیه اختلاف دارد.

ب) بابلیها، دستگاه عددنویسی شصت شصتی را ساختند. مبنای این عددنویسی، عدد ۶۰ بود (به‌جای ۱۰، که مبنای عدد شماری دهدهی است). دستگاههای اندازه‌گیری و توزین آنها، به‌نحوی بود که هر واحد بزرگتر، ۶۰ برابر واحد کوچکتر درنظر گرفته می‌شد، واحدهای شصت شصتی امروز، در اندازه‌گیری زمان (ساعت = ۶۰ دقیقه، دقیقه = ۶۰ ثانیه...) و در اندازه‌گیری زاویه‌ها و کمانهای دایره (محیط دایره = ۳۶۰ درجه، ۱ درجه = ۶۰ دقیقه و...)، براساس همین دستگاه عددنویسی شصت شصتی بابلیها است. بابلیها عددنویسی موضعی را بنیان گذاشتند (درست شبیه عددنویسی امروزی که، مقدار هر رقم بسته به مرتبه یا موضعی که اشغال کرده است معین می‌شود) و در مرحله‌ای از تاریخ خود، نماد صفر (یعنی، علامتی برای مرتبه‌های خالی) را کشف کردند.

پ) بابلیها، معادلهٔ درجهٔ دوم و بعضی از حالتهای معادلهٔ درجهٔ سوم و همچنین، رشته‌ها را به کمک جدولهای خاص، حل می‌کردند.

نشانه‌های زیادی در دست است که ریاضیات بابلیها، در فرهنگ ریاضی ملتهای ماوراء قفقاز به‌خصوص در فرهنگ ریاضی ارمنی تأثیر داشته، و موجب شکوفایی آن شده است.

۱۰۷. یک قاعدهٔ قدیمی هندی می‌گوید : اگر قطر دایره را به ۱۵ بخش برابر تقسیم، و ۱۳ بخش آن را به‌عنوان ضلع یک مربع اختیار کنیم، مساحت مربع (به تقریب) برابر مساحت دایره می‌شود. معلوم کنید، مقدار تقریبی عدد π از این راه چه‌قدر به‌دست می‌آید و درصد اشتباه آن چه‌قدر است؟

از آریابهاتا، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

یادداشت تاریخی

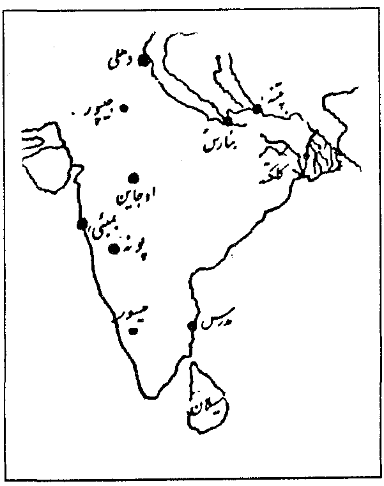
این مسأله، از یک مجموعه قدیمی هندی به‌نام «سولوا ـ سوترا» (قانون طناب) برداشته شده است، و یکی از قدیمی‌ترین یادبودهای هندسهٔ هندی است که به ما رسیده است. در «سولوا ـ سوترا» دستورهای خاصی برای ساختن قربانگاهها داده شده است؛ و ضمن آن، مطلبهای پرارزشی از هندسه و کاربرد آن آمده است. این موضوعها مربوط می‌شود به شکل قربانگاهها، اندازه‌های مختلف آنها و جهت‌گیری نسبت به نور.

تاکنون سه تا از این مجموعه‌ها شناخته شده است. مؤلفان این مجموعه‌ها عبارتند از «بدهایانا» (سدهٔ ششم یا هفتم پیش از میلاد)، «کاتیایانا» و «آناستامبا» (سدهٔ چهارم یا پنجم پیش از میلاد). براساس این مجموعه می‌توان به این نتیجه رسید که، دست‌کم در سدهٔ هشتم پیش از میلاد، دانشمندان هندی از قضیهٔ مربوط به وتر (قضیهٔ فیثاغورس) اطلاع داشتند، و این مدتها پیش از فیثاغورس است. در «سولوا ـ سوترا»، این قضیه، این‌طور تنظیم شده است: «اگر طنابی را به‌طور اریب، در امتداد مربع (مستطیل) قرار دهیم، همان می‌شود که طناب را به‌طور جداگانه روی هر بعد آن بگذاریم و با هم به حساب آوریم.»

اگر دانشمندان قدیم یونانی می‌کوشیدند تا مسألهٔ تبدیل یک دایرهٔ مفروض را به مربع حل کنند (مسألهٔ تربیع دایره)، ریاضیدانان هندی می‌کوشیدند تا مسأله عکس را حل کنند (البته به تقریب)، یعنی مربع را به دایرهٔ هم‌ارز آن تبدیل کنند.

آریابهاتا

آریابهاتا Aryabahata متولد ۴۷۵ یا ۴۷۶ متوفی ح ۵۵۰. نخستین نویسندهٔ بزرگی که نامش به ما رسیده آریابهاتای مهتر است، که در کوسوماپورا Kussumapura یعنی شهر گلها



نقشهٔ ریاضی و تاریخی هند

در دهلی، جیپور، و بنارس بقایای جالبی از رصد خانه‌های محلی باقی است، پتنه تقریباً زادگاه آریابهاتا (ح ۴۷۵ م)، و اوجاین مرکز عمدهٔ ریاضیات در هند باستان بود، و بیشتر به‌خاطر واراها میهیرا (ح ۵۰۵)، برهما گوپتا (۶۲۸)، و بهاسکره (۱۱۵۰) شهرت دارد؛ در فاصلهٔ ۱۲۰ کیلومتری پونه کتیبه‌های ناناگات با اعداد قدیم دیده می‌شود؛ مهاویرا در میسور زندگی می‌کرد (ح ۸۵۰).

زاده شد. این محل از شهر کنونی پتنه Patna، که مسلمانان آن را عظیم‌آباد می‌نامند و در قدیم بوداییان، پاتالی‌پوترا می‌خواندند، و مگاستنس آن را Palibothra خوانده است، چندان دور نیست. به علت این مجاورت جغرافیایی، غالباً گفته می‌شود آریابهاتا در پاتالی‌پوترا زاده شده است.

شاید به‌خاطر این‌که آریابهاتا دور از اوجاین Ujjain مرکز باستانی ریاضیات و نجوم می‌زیست، علمای هندی در چند قرن نزدیک به زمان او، کمتر با کارش آشنایی داشتند.

آثار آریابهاتا. آثار آریابهاتا که غالباً Aryabhatiam یا Aryabhatiya، خوانده می‌شود، عبارت است از Gitika یا Dasagitika، یعنی مجموعه‌ای از جدولهای نجومی، و Aryastasata شامل Ganita، یعنی رساله‌ای در باب حساب Kalakriya راجع به زمان و اندازه‌گیری آن، و Gala راجع به کره.

رسالهٔ حساب راجع است به عددنویسی تا $۱۰^۸$، اعداد مسطحه و مجسمه، و قاعده‌ای برای گرفتن جذر همچنین قاعده‌ای دارد برای جمع سریهای اعداد بعد از جملهٔ Pام، که با علامتهای امروزی می‌توان چنین نوشت:

$$S = n\left[(a + \frac{n-۱}{۲} + P)d\right]$$

و قاعده‌ای که با رابطهٔ زیر نشان می‌دهیم:

$$n = \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{-۲a \pm \sqrt{(d+۲a)^۲ + ۸sd}}{d}\right)$$

در باقی آن، معلوماتی راجع به معادله‌های درجهٔ دو و معادله‌های سیال درجهٔ یک دیده می‌شود. آریابهاتا قاعده‌ای هم برای به‌دست آوردن جیب (سینوس) می‌دهد و در گتیگا جدول مختصری از این توابع وجود دارد. تألیف او از لحاظ یکی از نخستین کوششها برای حل کلی یک معادلهٔ خطی سیال به‌وسیلهٔ کسرهای مسلسل هم، در خور توجه است.

همچنان که در بالا آمد، آریابهاتایی که در این‌جا ذکر شد، به‌عنوان نفر اول از دو ریاضیدان همنام معروف است. این مطلب از کتاب ماللهند ابوریحان بیرونی ریاضیدان ایرانی معلوم می‌شود و موضوع بحث نویسندگان اخیر بوده است. زمان زندگی آریابهاتای کهتر معلوم نیست، همچنین درحال حاضر نمی‌توان آثار این دو تن را از یکدیگر تمیز داد.

۱۰۸. مصریها، به‌جای مساحت دایره، مساحت مربعی را درنظر می‌گرفتند که ضلع آن برابر $\frac{۸}{۹}$ قطر دایره باشد. از این‌جا، مقدار تقریبی عدد π را پیدا کنید.

پاپیروس رایند، از مسأله‌های تاریخی ریاضیات (مسأله‌های مصری)

یادداشت تاریخی

بعد از بابل، مصر را باید دومین مرکز فرهنگی دنیای کهن دانست. در این «کشور هرمها» ساختمانهای عظیمی به‌صورت معبدها و هرمها ساخته شده است که قدمت آنها، به هزاران سال پیش از میلاد می‌رسد. بعضی از این یادگارها، تا روزگار ما هم باقی مانده‌اند. کارهای مختلف ساختمانی و پیشرفت کشاورزی، که براساس آبیاری مصنوعی بود، نیاز به آگاهیهای ریاضی و بخصوص هندسه را به‌وجود آورد. مصریها، قاعده‌های ریاضی را، که برای کشاورزی و اخترشناسی و کارهای ساختمانی لازم داشتند، بر دیوار معبدها و یا بر «پاپیروسها» نوشته‌اند. پاپیروس، به طوماری نوار مانند گویند که از گیاه خاصی به همین نام تهیه می‌شد و برای نوشتن (به‌جای کاغذ) به‌کار می‌رفت.

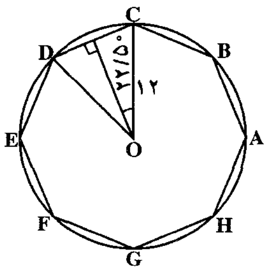
در موزهٔ بریتانیا، پاپیروسی وجود دارد که آن را پاپیروس رایند نامیده‌اند و در سال ۱۸۷۷، به‌وسیلهٔ پروفسور ایزنلور کشف رمز شد. این پاپیروس مربوط به حدود ۱۷۰۰ تا ۲۰۰۰ سال پیش از میلاد است و در آن ۸۴ مسأله وجود دارد که بیشتر خصلت حسابی دارند.

پاپیروس مسکو، مربوط به سال ۱۸۵۰ پیش از میلاد است. این پاپیروس، درسال ۱۸۹۳، به‌وسیلهٔ گوله‌نیشچو، کلکسیونر روسی خریداری شد و از سال ۱۹۱۲، به مالکیت موزهٔ هنرهای زیبای مسکو درآمد. این سند نادر و پرارزش دنیای کهن، به‌وسیلهٔ «و.آ. تورایوف» و «و.و. ستروو» دانشمندان شوروی مورد مطالعه قرار گرفت.

در این پاپیروس، مسأله‌هایی دربارهٔ محاسبهٔ حجم هرم ناقص مربع‌القاعده، حل شده است. به کمک پاپیروسها و مدرکهای دیگری که به‌دست آمده است، روشن می‌شود که، مصریها حتی در چهار هزار سال پیش می‌توانستند مسأله‌های عملی دربارهٔ حساب، جبر و هندسه را حل کنند. در ضمن، در حساب، نه‌تنها از عددهای درست بلکه از عددهای کسری هم، استفاده می‌کردند.

۵.۳. مساحت دایره

۱.۵.۳. اندازهٔ مساحت



۱۰۹. مساحت دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتی‌متر را حساب کنید. اختلاف بین مساحت این دایره را با مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در آن تعیین کنید.
$(\sin ۲۲^\circ, ۳۰' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲-\sqrt{۲}})$

۱۱۰. مساحت دایره را برحسب محیط آن به‌دست آورید.

۱۱۱. نشان دهید اگر قطر دایره‌ای d باشد، مساحت آن $\frac{۱}{۴}\pi d^{۲}$ است.

۱۱۲. محیط و مساحت دایره‌ای به شعاع ۳ ؛ ۵ ؛ $\sqrt{۲}$ و π را بیابید.

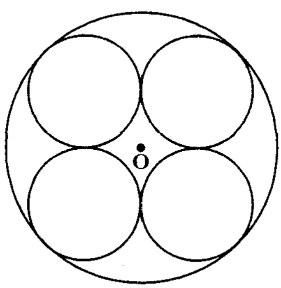
۱۱۳. محیط و مساحت دایره‌ای به قطر ۶ ؛ ۹ ؛ ۲ و $\pi\sqrt{۱۲}$ را بیابید.

۱۱۴. مساحت دایره‌ای را بیابید که اندازهٔ محیط آن ۶π ؛ ۱۶π ؛ ۱۲ و ۲π باشد.

۱۱۵. ارشمیدس ثابت کرد : ۱) هر دایره، هم‌ارز است با مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، برابر شعاع دایره، و ضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمه، برابر محیط باز شدهٔ دایره باشد ؛ ۲) نسبت مساحت دایره به مجذور قطر آن برابر است با نسبت ۱۱ به ۱۴.
ثابت کنید که، طبق این دو گزارهٔ ارشمیدس، مساحت دایرهٔ به شعاع r، برابر است با $\frac{۲۲}{۷}r^{۲}$.

از ارشمیدس، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۱۱۶. در دایره‌ای به شعاع r چهار دایره محاط کرده‌ایم به‌طوری که دو به دو برهم، و هر کدام بر دایرهٔ اول مماس باشد. مساحت یکی از این دایره‌ها را به‌دست آورید.



۱۱۷. اگر شعاع یک دایره عددی گویا باشد، عددی که مساحت آن را بیان می‌کند :

الف) گویا است. ب) اصم است. ج) صحیح است.

د) مجذور کامل است. هـ) هیچ‌یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۱۱۸. اگر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایره برابر P باشد، مساحت دایره برابر است با :

الف) $\frac{\pi P^{۲}}{۳}$ ب) $\frac{\pi P^{۲}}{۹}$ ج) $\frac{\pi P^{۲}}{۲۷}$ د) $\frac{\pi P^{۲}}{۸۱}$ هـ) $\frac{\pi P^{۲}\sqrt{۳}}{۲۷}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۱۱۹. هرگاه طول قطر یک قرص دایره‌ای دو برابر شود، مساحت این قرص چند برابر می‌شود؟

الف) ۲ برابر ب) ۴ برابر ج) π برابر د) π ۲ برابر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۱۲۰. چنانچه شعاع دایره‌ای ۱۰۰٪ افزایش یابد، افزایش مساحت دایره برابر است با :

الف) ۱۰۰٪ ب) ۲۰۰٪ ج) ۳۰۰٪ د) ۴۰۰٪ هـ) هیچ‌یک از اینها

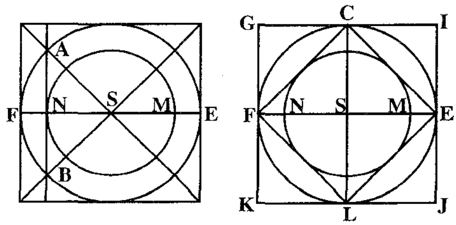
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۲.۵.۳. رابطه‌ای در مساحتها

۱۲۱. مسأله لئوناردو داوینچی

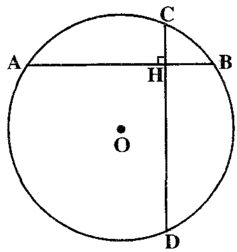
این مسأله‌ها را به‌خاطر شهرت مؤلفان آنها می‌آوریم. دربارهٔ رابطهٔ نقاشی با ریاضیات بررسیهای خاصی انجام گرفته است. از بین نقاشها، آنها که با طراحی و پرسپکتیو بخوبی آشنا هستند، از هندسه خیلی خوب استفاده می‌کنند و این رشتهٔ ریاضی را برای کار خود به‌رسمیت شناخته‌اند.

بین نوشته‌های لئوناردو داوینچی، آفرینندهٔ نابغه و دانشمند جامع، بررسیهای بکری در زمینهٔ ریاضی وجود دارد که از بین آن‌ها به‌طور مثال این مسألهٔ هندسی است :



اگر از نقطه‌های برخورد دایره محاط در مربع با قطرهای همین مربع خط AB را رسم کنیم و از نقطهٔ N، محل برخورد خط AB با محور FE مربع، دایره‌ای به مرکز دایرهٔ قبل بگذرانیم، مساحت این دایرهٔ کوچک برابر می‌شود با مساحت بین دو دایره، و ضمناً برابر می‌شود با نصف مساحت دایرهٔ بزرگتر.

۱۲۲. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R، دو وتر AB و CD را عمود بر هم رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آنها را H می‌نامیم. ثابت کنید مجموع مساحتهای چهار دایره‌ای که به قطرهای AH، BH، CH و DH رسم شوند، برابر مساحت دایرهٔ به شعاع R است.



۱۲۳. مقدار آبی که از سه لوله هر کدام به قطر یک سانتی‌متر می‌تواند بگذرد بیشتر است، یا مقدار آبی که از یک لولهٔ به قطر ۳ سانتی‌متر؟ به چه دلیل؟ (لوله‌ها را برحسب قطر داخلی اندازه می‌گیرند.)

۳.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

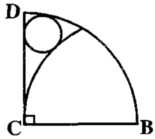
۱۲۴. تولستوی، در داستان خود «آیا آدمی به زمین زیادی نیاز دارد؟» می‌نویسد : به دهقان آن‌قدر زمین داده می‌شود که بتواند در یک روز آن را دور بزند. روی چگونه محیطی حرکت کند، به زمین بیشتری می‌رسد. روی محیط یک مربع، یا یک شش ضلعی منتظم و یا یک دایره؟

از ل ــ ن ــ تولستوی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۶.۳. قطاع دایره

۱.۶.۳. شعاع دایره

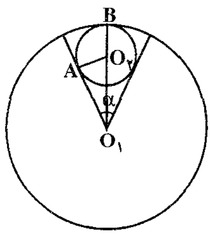
۱.۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع



۱۲۵. قطاع DCB به شعاع R و به زاویهٔ قائمه، با قطاع دیگری که به همان شعاع و به مرکز B رسم می‌شود، به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است.

مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایره‌ای که در قسمت کوچکتر محاط شده است.

۱۲۶. در قطاع به شعاع R و زاویهٔ مرکزی α، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. شعاع آن را به‌دست آورید.

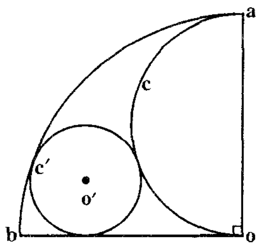


۲.۱.۶.۳. رابطهٔ بین شعاعها

۱۲۷. در قطاع ربع دایرهٔ oab به مرکز o و به شعاع $R = 12$، نیمدایرهٔ c به قطر [oa]، مطابق شکل، رسم می‌شود و سپس دایرهٔ o' چنان رسم می‌شود که بر [ob] و بر نیمدایرهٔ c و بر کمان ab از قطاع oab مماس باشد. اگر r' شعاع دایرهٔ c' باشد، مقدار $R - r'$ برابر است با:

الف) ۷/۵ ب) ۸ ج) $2\sqrt{17}$ د) $5\sqrt{3}$ هـ) ۹

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

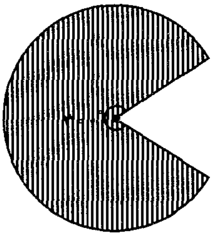


۱۲۸. در داخل قطاع دایره‌ای با زاویهٔ مرکزی 2α، دایره‌ای محاط شده است. نسبت شعاع دایرهٔ محاطی بر شعاع قطاع را بیابید.

۲.۶.۳. طول کمان قطاع

۱۲۹. در دایره‌ای به شعاع ۶، مساحت یک قطاع 15π است. طول کمان این قطاع چه‌قدر است؟

۳.۶.۳. اندازهٔ محیط



۱۳۰. در یک مسابقهٔ تلویزیونی، شکلی که ظاهر می‌شود، قطاعی از دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر و به زاویهٔ مرکزی ۳۰۰ درجه است. محیط این شکل برحسب سانتی‌متر چه‌قدر است؟

الف) $\pi+2$ ب) 2π ج) $\frac{5}{3}\pi$ د) $\frac{5}{6}\pi+2$ هـ) $\frac{5}{3}\pi+2$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۴.۶.۳. مساحت

۱.۴.۶.۳. مساحت قطاع

۱۳۱. شعاع یک دایره ۱۰ است، مساحت قطاعهایی را بیابید که اندازهٔ کمان آن، 90°، 72°، 180°، 216° و 324° باشند.

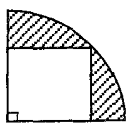
۱۳۲. مساحت یک دایره ۱۸۰ سانتی‌متر مربع است. مساحت قطاع 80° از این دایره را بیابید.

۱۳۳. در دایره‌ای چهارشعاع رسم کنید که مساحت آن را به نسبت۳، ۴، ۸ و ۹ تقسیم کند.

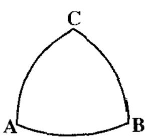
۱۳۴. الف ــ از بین همهٔ قطاعهایی با محیط P، قطاعی را بیابید که دارای بیشترین مساحت ممکنه باشد. ب ــ از بین همهٔ قطاعهایی با مساحت S قطاعی را بیابید که دارای کمترین محیط ممکنه باشد.

۲.۴.۶.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در قطاع

۱۳۵. این مربع در یک قطاع ۹۰ درجه‌ای به شعاع R محاط شده است. دستوری برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ سایه زده بیابید.

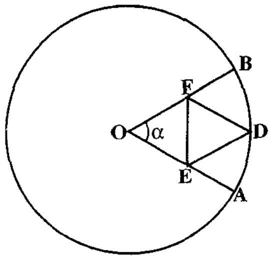


۱۳۶. هر رأس شکل ABC، مرکز کمان روبه‌روی آن است. ویژگی جالبی که این شکل دارد، این است که اگر بین دو خط متوازی و متکی بر آن دو، بغلتد، درست مانند یک دایره همواره بر آن دو خط متکی می‌ماند. (هر شکل که این ویژگی را داشته باشد، با پهنای ثابت می‌نامند). اگر شعاع هر کمان r باشد، دستور محاسبهٔ مساحت و محیط شکل ABC را بیابید.

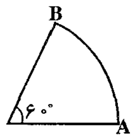


۵.۶.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳۷. در داخل قطاع AOB از دایره‌ای با شعاع R و زاویهٔ مرکزی α، مثلث متساوی‌الاضلاعی را محاط کرده‌ایم. یکی از رأسهای این مثلث، بر میانگاه کمان $\widehat{AB}$ قرار دارد، و دو رأس دیگر آن نیز روی شعاعهای OA و OB واقع است. طول ضلع مثلث را به‌دست آورید.



۱۳۸. طول یک کمان ۶۰ درجه‌ای برابر با ۱cm است. شعاع این کمان و طول وتر آن را به‌دست آورید.



۱۳۹. جاده‌ای مستقیم و سنگفرش به پهنای سه متر، قطعه زمین علفزاری دایره‌ای شکل به قطر ۱۲ متر را به‌گونه‌ای قطع می‌کند که یک کنارهٔ آن بر مرکز دایره می‌گذرد. مساحت قسمت علفزار باقیمانده برحسب مترمربع برابر است با :

الف) $۳۶\pi - ۳۴$ ب) $۳۰\pi - ۱۵$ ج) $۳۶\pi - ۳۳$ د) $۳۵\pi - ۹\sqrt{۳}$

هـ) $۳۰\pi - ۹\sqrt{۳}$ مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

۱۴۰. یک قرص دایره‌ای به ۲n قطاع برابر تقسیم شده است $(n > ۰)$ و یک خط آن را قطع می‌کند. بیشترین تعداد ناحیه‌های مجزا که به‌وسیلهٔ این قاطع ممکن است روی قرص دایره‌ای، به‌وجود آیند، برابر است با :

الف) ۲n+۱ ب) ۲n+۲ ج) ۳n−۱ د) ۳n هـ) ۳n+۱

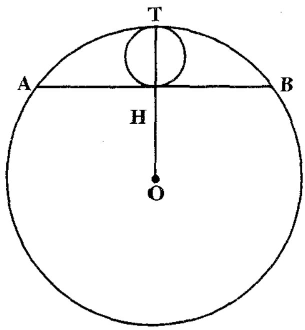
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱

۷.۳. قطعهٔ دایره

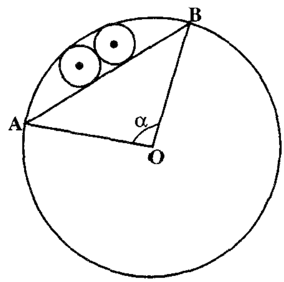
۱.۷.۳. شعاع دایره

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ شعاع

۱۴۱. در دایره‌ای به شعاع R، قطعه‌ای به زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = \alpha$ $(\alpha < \pi)$، داده شده است. شعاع بزرگترین دایرهٔ مماس بر وتر و کمان قطعه را تعیین کنید.

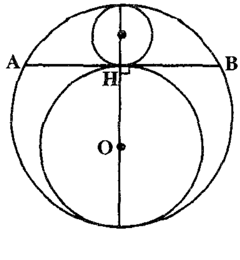


۱۴۲. در درون قطعه‌ای از دایره‌ای با شعاع R و زاویهٔ مرکزی α $(\alpha < \pi)$، دو دایرهٔ مماس بر هم مساوی را محاط کرده‌ایم. شعاع آنها را بیابید.



۲.۱.۷.۳. نسبت شعاعهای دو دایره

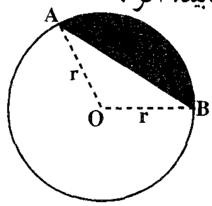
۱۴۳. وتر AB در دایرهٔ C(O,R) مفروض است. دو دایره در نقطهٔ H وسط وتر AB، بر این وتر و دایرهٔ (C) مماسند. نسبت شعاعهای این دو دایره را بیابید؛ در صورتی که $A\hat{O}B = \alpha^\circ$ باشد.



۳.۷.۲. مساحت

۳.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت قطعه

۱۴۴. مساحت قطعه‌ای از دایرهٔ به شعاع r و کمانی به اندازهٔ $\widehat{AB}$ را بیابید، اگر:



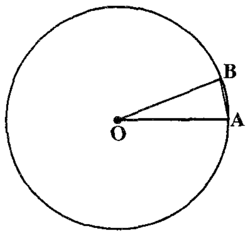
الف) $r=۱۲$ ، $\widehat{AB}=۶۰^\circ$

ب) $r=۶$ ، $\widehat{AB}=۱۲۰^\circ$

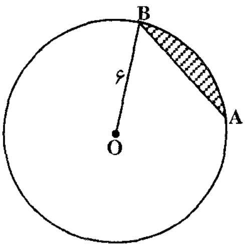
پ) $r=۸۰$ ، $\widehat{AB}=۴۵^\circ$

ت) $r=۱۰$ ، $\widehat{AB}=۳۰^\circ$

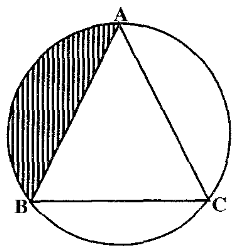
۱۴۵. در دایره‌ای به شعاع ۴، قوس $\widehat{AB}$ را برابر ۲۴ درجه روی محیط آن جدا می‌کنیم. مطلوب است، مساحت قطعهٔ حاصل.



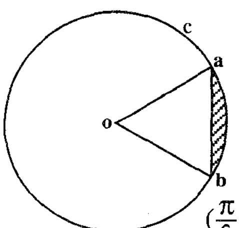
۱۴۶. مساحت سطح قطعه‌ای را که در دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی‌متر به‌وسیلهٔ وتری به طول ۶ سانتی‌متر ایجاد می‌شود، تعیین کنید.



۱۴۷. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی ۶ سانتی‌متر است. مطلوب است مساحت قطعه‌ای از دایره، که وترش یکی از ضلعهای مثلث باشد.



۱۴۸. مثلث oab متساوی‌الاضلاع و طول هر ضلع آن r است. به مرکز o دایره‌ای رسم شده که بر a و b گذشته است. مساحت قطعه‌ای به وتر ab چه‌قدر است؟

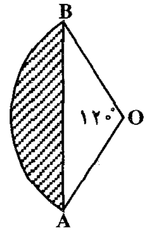


الف) $(\frac{\pi}{۶}-\frac{۱}{۴})r^۲$ ب) $(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۴})r^۲$

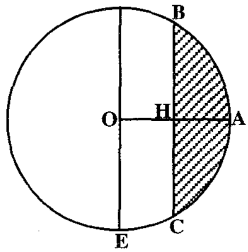
ج) $(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۲})r^۲$ د) $(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۲}}{۲})r^۲$ هـ) $(\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۲}}{۴})r^۲$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۴۹. مطلوب است سطح قطعهٔ دایره‌ای که محیط آن مساوی P و قوس آن ۱۲۰ درجه باشد.

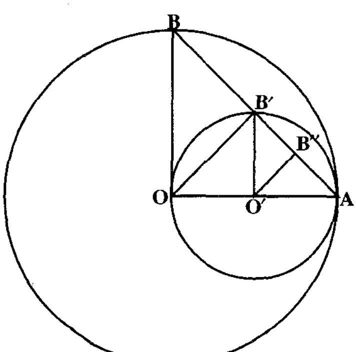


۱۵۰. در دایره‌ای به مرکز O، شعاع OA را رسم کرده و وتر BC را بر وسط OA عمود می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ سطح قطعهٔ دایرهٔ ABC.



۲.۲.۷.۳. نسبت مساحت دو قطعه

۱۵۱. در دایره‌ای به مرکز O وتر غیرمشخص AB را رسم کرده، به قطر OA دایره‌ای رسم می‌کنیم، تا وتر AB را در B′ قطع کند. ثابت کنید که نسبت مساحت دو قطعه دایرهٔ AB و AB′، مثل نسبت ۴ است به ۱.

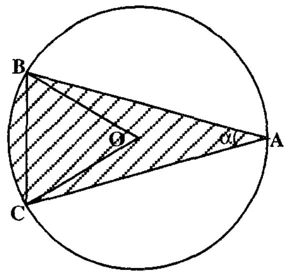


۱۵۲. ثابت کنید، نسبت مساحتهای دو قطعهٔ متشابه در دو دایره، برابر است با نسبت مربع وترهایی که قاعدهٔ این دو قطعه را تشکیل می‌دهند.

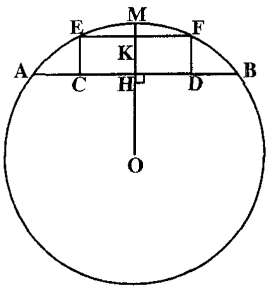
از پاپوس اسکندرانی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۳.۲.۷.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در قطعه

۱۵۳. از نقطه‌ای واقع بر روی دایره‌ای به شعاع R دو وتر مساوی که زاویه بین آنها برابر α است، رسم می‌کنیم. مساحت قسمتی از دایره را پیدا کنید، که بین این دو وتر محصور است.

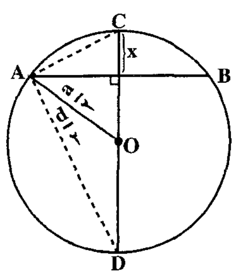


۱۵۴. در قطعهٔ مفروضی، مستطیلی محاط کنید که مساحتش ماکزیمم باشد.



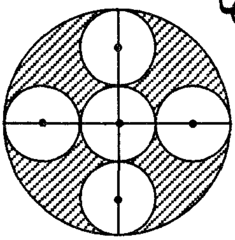
۳.۷.۳. ارتفاع قطعه

۱۵۵. مطلوب است ارتفاع قطعه‌ای از دایره، به شرطی که اندازهٔ قطر دایره و قاعدهٔ قطعه معلوم باشد.



۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در یک دایره

۱.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها

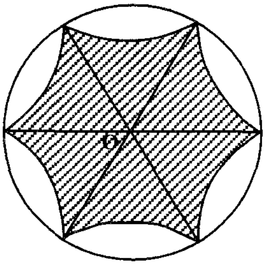


۱۵۶. در شکل روبه‌رو، قطر دایره بزرگ یک متر است و دایره‌های کوچک همه با هم برابرند. مساحت قسمت هاشور خورده برحسب مترمربع، برابر است با :

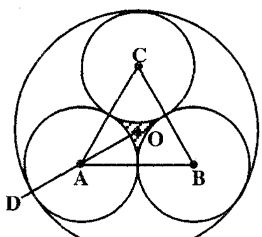
الف) $\frac{\pi}{۹}$ ب) $\frac{۴\pi}{۹}$ ج) $\frac{۵\pi}{۶}$ د) $\frac{۱۱\pi}{۳}$ هـ) $\frac{۵\pi}{۳۶}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۱۵۷. محیط دایره‌ای به شعاع R را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم، سپس از هر دو نقطهٔ مجاور، قوسی چنان عبور داده‌ایم که هر دو قوس مجاور، روی محیط دایرهٔ اول بر هم مماس باشند.
مطلوب است، مساحت قسمت داخلی دایرهٔ مفروض، که بین قوسهای رسم شده قرار گرفته است.



۱۵۸. در دایره‌ای به شعاع R، سه دایرهٔ مساوی، مماس بر دایرهٔ اول و دو به دو مماس بر هم، رسم کرده‌ایم.
مطلوب است، مساحت مثلث منحنی‌الخطی که بین سه دایره قرار گرفته است.

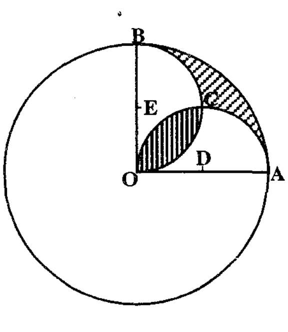


۱۵۹. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R، دو شعاع OA و OB را عمود بر هم رسم می‌کنیم، سپس دو نیمدایره یکی به قطر OA و دیگری به قطر OB می‌کشیم تا یکدیگر را در C قطع کنند.

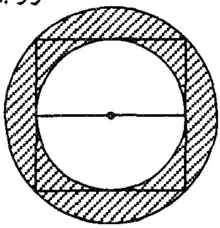
۱. ثابت‌کنید سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامتند.

۲. مساحت ODCE محصور بین قوسهای دو دایره را محاسبه کنید.

۳. مساحت ABC محصور بین قوسهای سه دایره را حساب کنید.



۱۶۰. طول ضلع یک مربع ۱۰ است، مساحت محصور بین دایره‌های محیطی و محاطی این مربع را بیابید.

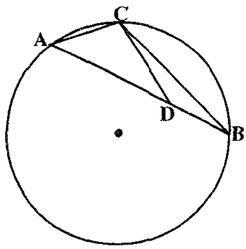


۱۶۱. سکه‌ای به شعاع r روی صفحه طوری جابه‌جا می‌شود که مرکز آن، محیط یک چندضلعی محیط بر دایره‌ای به شعاع R>r را می‌پیماید. اگر محیط این چندضلعی، برابر P باشد، مساحت شکلی را پیدا کنید که در اثر حرکت سکه به‌دست می‌آید (یک حلقهٔ چند زاویه‌ای).

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۸۴

۲.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست

۱۶۲. وتر AB به کمانی از یک دایره نگاه می‌کند که طول آن یک سوم کمان محیط دایره است. نقطهٔ C را روی این کمان و نقطهٔ D را روی وتر AB اختیار می‌کنیم. اگر $AD = 2cm$ ، $BD = 1cm$ و $CD = \sqrt{2}cm$ باشد، مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.



۱۶۳. در یک دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r، وتر AB را به طول r (واحد) رسم می‌کنیم. از O عمود OM را بر AB، و از M عمود MD را بر OA فرود می‌آوریم. مساحت مثلث MDA برحسب r با یک واحد مربع مناسب برابر است با :

الف) $\frac{3r^2}{16}$ ب) $\frac{\pi r^2}{16}$ ج) $\frac{\pi r^2\sqrt{2}}{8}$ د) $\frac{r^2\sqrt{3}}{32}$ هـ) $\frac{r^2\sqrt{6}}{48}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۹

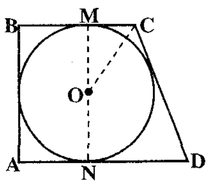
۱۶۴. بین مستطیلهای محاط در دایره، مستطیلی مساحتش ماکزیمم است که مربع باشد.

۱۶۵. در دایره‌ای به شعاع ۱۶ سانتی‌متر با رسم دو شعاع و دو وتر، یک لوزی بنا می‌شود. مساحت لوزی برحسب سانتی‌متر مربع برابر است با :

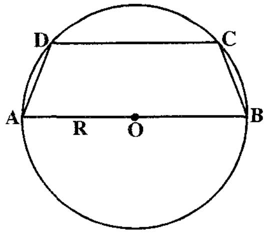
الف) ۱۲۸ ب) $128\sqrt{3}$ ج) ۲۵۶ د) ۵۱۲ هـ) $512\sqrt{3}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

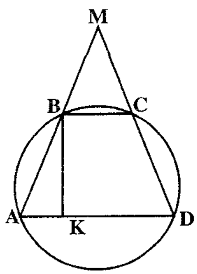
۱۶۶. بر دایره‌ای به شعاع r، ذوزنقه‌ای قائم‌الزاویه محیط کرده‌ایم. اگر کوچکترین ضلع ذوزنقه مساوی $\frac{3}{2}r$ باشد، مساحت ذوزنقه را معین کنید.



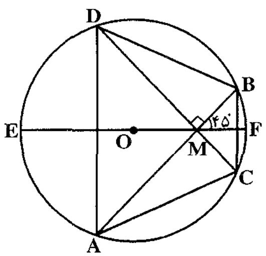
۱۶۷. در دایره‌ای به شعاع R، ذوزنقه‌ای محاط شده است. یکی از قاعده‌های این ذوزنقه با قطر دایره مساوی است. حداکثر مساحت ممکن برای چنین ذوزنقه‌ای را پیدا کنید.



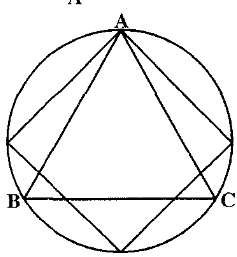
۱۶۸. از نقطه‌ای واقع در خارج دایره، دو قاطع نسبت به دایره رسم کرده‌ایم ؛ هریک از قطعه‌های خارجی این دو قاطع مساوی ۲ متر است. مطلوب است مساحت چهارضلعی که رأسهای آن نقطهٔ تلاقی دو قاطع با دایره است، درصورتی که بدانیم دو ضلع مقابل این چهارضلعی بترتیب مساوی با ۶ متر و ۲/۴ متر است.



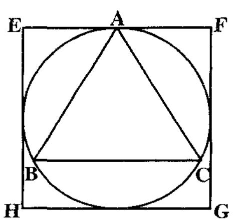
۱۶۹. نقطهٔ M در داخل دایره‌ای به شعاع R، به فاصلهٔ a از مرکز قرار گرفته است. قطری که از M می‌گذرد رسم می‌کنیم، و سپس دو وتر عمود بر هم از نقطهٔ M عبور می‌دهیم به‌طوری که یکی از آنها با قطر رسم شده، زاویهٔ $\alpha = 45^\circ$ بسازد.
مساحت چهارضلعی محاطی را به‌دست آورید که این وترها، قطرهای آن باشند.



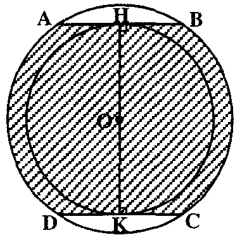
۱۷۰. در درون دایره‌ای به شعاع R، یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع را که دارای یک رأس مشترک هستند، محاط کرده‌ایم. مساحت مقطع این دو شکل را محاسبه کنید.



۱۷۱. یک مربع بر دایره‌ای به شعاع ۸ محیط، و یک مثلث متساوی الاضلاع در این دایره محاط شده است. تفاضل مساحتهای مربع و مثلث را بیابید.

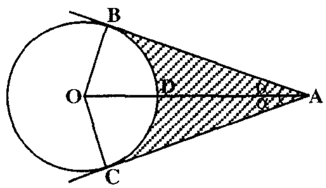


۱۷۲. در دایره‌ای دو وتر موازی یکی برابر C_6 و دیگری برابر C_{10} رسم می کنیم. مطلوب است :
الف. مساحت دایره‌ای که بر این دو وتر مماس باشد (دو حالت).
ب. مساحت قسمتی از دایره که محصور بین این دو وتر باشد (دو حالت).

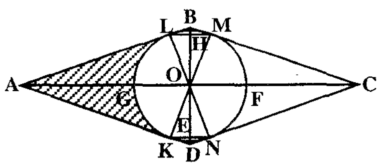


۳.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست و منحنیها

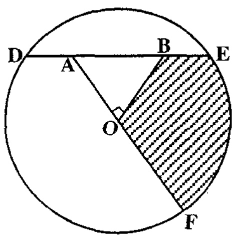
۱۷۳. از نقطهٔ واقع در خارج دایره به شعاع R، دو مماس بر آن رسم کرده‌ایم. اگر زاویهٔ بین دو مماس مساوی 2α باشد، مساحت بین دو مماس و قوس دایره را پیدا کنید.



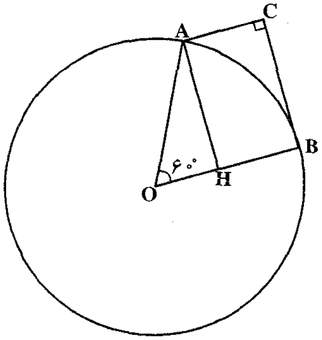
۱۷۴. بر دایره‌ای به شعاع R یک لوزی محیط کرده‌ایم. قطر بزرگ لوزی مساوی 4R شده است، مطلوب است سطح هر یک از شکلهایی که به‌وسیلهٔ دو مماس متقاطع و قوس کوچکتر دایره که بین نقطه‌های تماس واقع است، محدود شده باشد.



۱۷۵. در شکل مقابل، DABE خط راست است. زاویهٔ AOB برابر 90° است، OF در امتداد OA و $OF = 20$ و $AO = BO = 10\sqrt{2}$.
مساحت قسمت سایه زده شکل را تعیین کنید.



۱۷۶. شعاعهای OA و OB زاویهٔ 60° می‌سازند. از A عمود AC را بر مماس در B فرود می‌آوریم ؛ سطح محدود بین AC و BC و قوس $\overset{\frown}{AB}$ را حساب کنید.



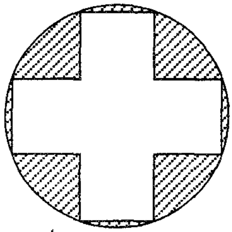
۱۷۷. در دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر، دو وتر مساوی و موازی به فاصلهٔ ۸ سانتی‌متر از هم رسم شده‌اند. مساحت قسمتی از دایره که بین وترها قرار دارد برابر است با :

الف) $۲۱\frac{۱}{۳}\pi - ۳۲\sqrt{۳}$ ب) $۳۲\sqrt{۳} + ۲۱\frac{۱}{۳}\pi$

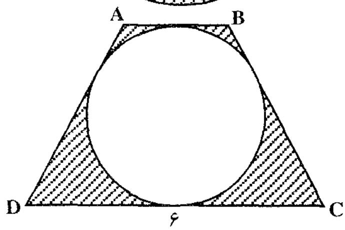
ج) $۳۲\sqrt{۳} + ۴۲\frac{۲}{۳}$ د) $۱۶\sqrt{۳} + ۴۲\frac{۲}{۳}\pi$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۱۷۸. ۸ رأس این ۱۲ ضلعی روی دایره قرار دارند. تمام ضلعهای این ۱۲ ضلعی همنهشت و تمام زاویه‌های آن قائمه‌اند. اگر طول هر ضلع ۴ باشد، مساحت ناحیه‌ای را که درون دایره و بیرون ۱۲ ضلعی است بیابید.

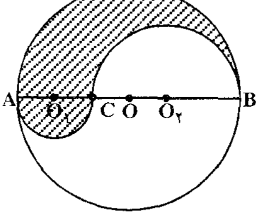


۱۷۹. یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۲cm و ۶cm بر یک دایره محیط شده است. مساحت آن بخش از ناحیهٔ ذوزنقه‌ای را که بیرون از دایره قرار دارد، پیدا کنید.

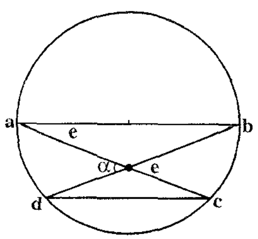


۴.۸.۳. نسبت مساحتها

۱۸۰. دایره‌ای به قطر AB و روی قطر AB بین نقطه‌های A و B نقطه‌ای مانند C مفروض است، به‌طوری که AC مساوی است با $\frac{AB}{۳}$. در دو طرف خط راست AB، دو نیمدایره یکی به قطر AC و یکی به قطر BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که به این ترتیب، سطح دایرهٔ مفروض به دو قسمت تقسیم می‌شود که مساحت یکی از آنها، دو برابر مساحت دیگری است.

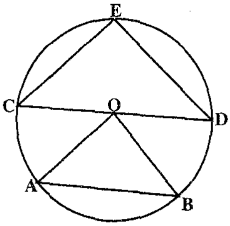


۱۸۱. در شکل روبه‌رو، ab قطر دایره و cd وتری موازی با ab است. دو وتر ac و bd در e برخورد می‌کنند، و با یکدیگر زاویهٔ حادهٔ α می‌سازند. نسبت مساحت مثلث cde به مساحت مثلث abe برابر است با :



الف) $\cos\alpha$ ب) $\sin\alpha$ ج) $\cos^۲\alpha$ د) $\sin^۲\alpha$ هـ) $۱-\sin\alpha$

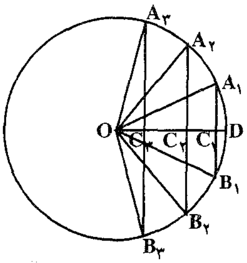
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۱۸۲. در دایره‌ای به مرکز O، دو وتر با هم برابر CE و DE را مطابق شکل رسم می‌کنیم. کمان $\overset{\frown}{AB}$، یک ربع دایره است. آن‌گاه نسبت مساحت مثلث CED به مساحت مثلث AOB برابر است با :

الف) $\sqrt{۲}:۱$ ب) $\sqrt{۳}:۱$ ج) ۴:۱ د) ۳:۱ هـ) ۲:۱

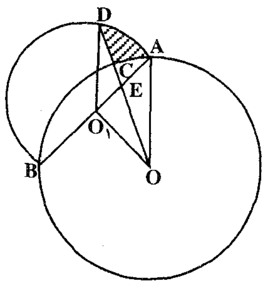
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸



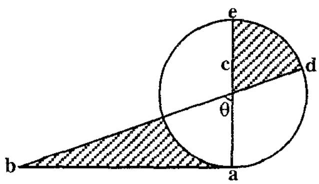
۱۸۳. در دایره‌ای به شعاع R و در یک طرف مرکز، سه وتر موازی، یکی مساوی با ضلع ۶ ضلعی منتظم محاطی، دومی مساوی ضلع مربع محاطی، و سومی مساوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی رسم کرده‌ایم. مطلوب است نسبت مساحت بین دو وتر دوم و سوم، به مساحت بین دو وتر اول و دوم.

۵.۸.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۸۴. AB را ضلعی از مربع محاط در دایرهٔ به مرکز O فرض می‌کنیم و نیمدایرهٔ ADB را به قطر AB و در خارج مربع رسم می‌کنیم. پاره‌خط OD این نیمدایره را در نقطهٔ D و دایرهٔ اول را در نقطهٔ C قطع می‌کند.



ثابت کنید مثلث منحنی الضلعی که ضلعهای آن بترتیب پاره‌خط CD، و قوسهای $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ هستند، قابل تربیع است؛ یعنی می‌توان با کمک خط‌کش و پرگار ضلع مربع هم‌ارز آن‌را به‌دست آورد.

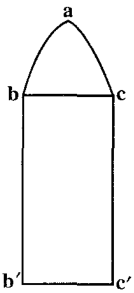


۱۸۵. در شکل روبه‌رو، c مرکز دایره، ab در a مماس بر دایرهٔ θ و خطهای bd و ae بر c گذشته‌اند. به فرض $\frac{\pi}{۲} > \theta > ۰$، شرط لازم و کافی برای آن‌که دو ناحیهٔ هاشور خورده مساحتهای برابر داشته باشند، آن است که :

الف) $tg\theta = \theta$ ب) $tg\theta = ۲\theta$ ج) $tg\theta = ۴\theta$

د) $tg۲\theta = \theta$ هـ) $tg\frac{\theta}{۲} = \theta$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۱۸۶. شکل روبه‌رو نمایی از یک پنجره به سبک گوتیک است و ab و ac کمانهایی از دو دایرهٔ به شعاع $r=|bc|$ هستند که یکی به مرکز b و دیگری به مرکز c است. به فرض $h=|bb'|$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر به‌ازای هر مقدار r و h درست است؟

الف) اگر r دو برابر شود، مساحت شکل نیز دو برابر می‌شود.

ب) اگر b دو برابر شود، مساحت شکل نیز دو برابر می‌شود.

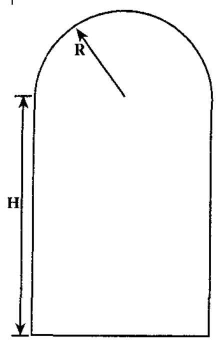
ج) اگر r و b هرکدام دو برابر شوند، مساحت شکل چهار برابر می‌شود.

د) اگر r به اندازهٔ یک واحد زیاد شود، محیط شکل نیز به اندازهٔ یک واحد زیاد می‌شود.

هـ) اگر b به اندازهٔ یک واحد زیاد شود، محیط شکل نیز به اندازهٔ یک واحد زیاد می‌شود.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۸۷. برای چهار برابر کردن مساحت شکل روبه‌رو، بدون آن‌که فرم شکل تغییر کند، لازم است که:



الف) H و R هر دو، دو برابر شوند.

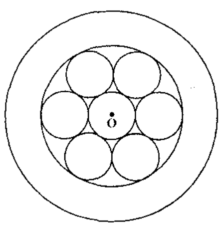
ب) بدون تغییر H فقط R دو برابر شود.

ج) بدون تغییر R فقط H دو برابر شود.

د) بدون تغییر R فقط H چهار برابر شود.

هـ) R دو برابر و H چهار برابر شود.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷



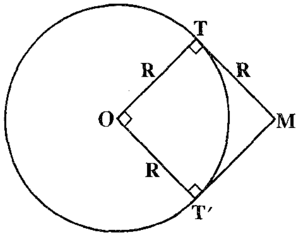
۱۸۸. در بیرون دایرهٔ مفروض، شش دایره به همان شعاع رسم کرده‌ایم. به‌طوری‌که دو به دو بر هم و بر دایره اول مماس باشند. بر این ۷ دایرهٔ مساوی، حلقه‌ای که با دایرهٔ اول هم‌مرکز است محیط می‌کنیم به‌نحوی که مساحت آن مساوی ۷ دایره باشد. ثابت کنید عرض این حلقه، برابر ارتفاع دایرهٔ مفروض است.

۱۸۹. یک n ضلعی بر دایره‌ای محیط شده است. از نقطهٔ دلخواهی واقع در درون دایره، به همهٔ رأسها و نقطه‌های تماس وصل کرده‌ایم. مثلثهای حاصل را، پشت سر هم، از ۱ تا ۲n شماره‌گذاری کرده‌ایم. ثابت کنید، حاصل‌ضرب مساحتهای مثلثهای ردیف زوج برابر است با حاصل‌ضرب مساحتهای مثلثهای ردیف فرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

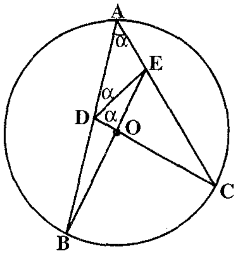
۹.۳. زاویه در دایره

۱.۹.۳. اندازهٔ زاویه



۱۹۰. مجموع طولهای دو پاره‌خط مماس از یک نقطه بیرون یک دایره به آن دایره برابر با قطر دایره است. زاویهٔ بین دو مماس را بیابید.

۱۹۱. در شکل زیر، نقطهٔ O مرکز دایره است. زاویهٔ α چند درجه است؟



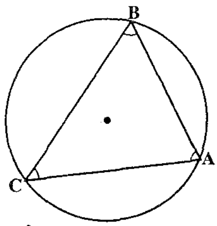
مرحلهٔ نهایی دوازدهمین دوره المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۳

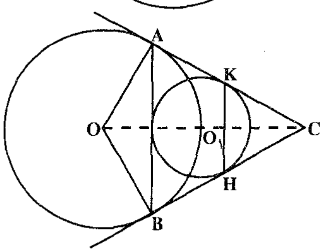
۱۹۲. مثلث ABC در یک دایره محاط است. اندازهٔ کمانهای کوچکتر $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{CA}$ بترتیب $x+75^\circ$ ، $2x+25^\circ$ و $3x-22^\circ$ است. اندازهٔ یکی از زاویه‌های داخلی مثلث برحسب درجه برابر است با :

الف) ۵۷/۵ ب) ۵۹ ج) ۶۰ د) ۶۱ هـ) ۱۲۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۹

۱۹۳. دردایرهٔ به‌مرکز O و به شعاع R، وتر AB را برابرضلع مربع محاطی، و وتر AC را برابر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی رسم می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ زاویه‌ها و ضلعهای مثلث ABC.





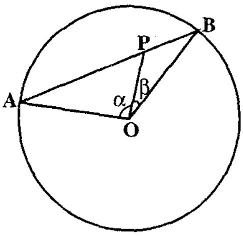
۱۹۴. از نقطهٔ C دو مماس AC و BC را بر دایره‌ای به شعاع ۱۲cm و با مرکز O رسم می‌کنیم. در مثلث ABC دایره‌ای را با مرکز O_1 محاط می‌کنیم. این دایره بر ضلعهای AC و BC در نقطه‌های K و H مماس می‌شود. اگر فاصلهٔ O_1 تا خط مستقیم KH برابر ۳cm باشد، آن‌گاه زاویهٔ AOB را بیابید.

۲.۹.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۹۵. ثابت کنید اندازهٔ یک زاویه (برحسب رادیان)، از واسطهٔ حسابی سینوس و تانژانت آن کوچکتر است.

مسابقه‌های ریاضی مجارستان، ۱۹۰۹

۱۹۶. نقطهٔ ثابت P در داخل دایره C (O,R) اختیار نموده و از آن نقطه قاطع AB را رسم می‌کنیم و از نقطه‌های A و B به مرکز دایره وصل می‌کنیم. درصورتی‌که $A\hat{O}P=\alpha$ و $B\hat{O}P=\beta$ و $OP=d$ باشد، ثابت کنید:



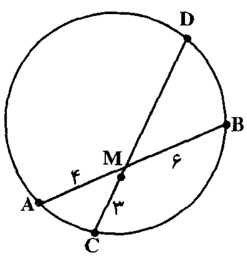
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{۲}=\frac{R-d}{R+d}$$

۱۹۷. وتر AB در دایره‌ای برابر شعاع آن است. وتر CD را موازی وتر AB طوری رسم می‌کنیم که ذوزنقهٔ ABCD حداکثر مساحت ممکنه را دارا شود.
اندازهٔ زاویهٔ کمان کوچک مقابل به وتر CD را بیابید.

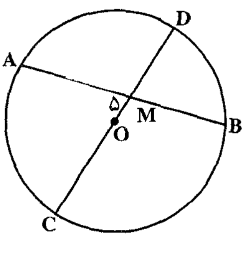
۳.۱۰. پاره خط

۳.۱۰.۱. وترها و قاطعهای رسم شده در داخل دایره

۳.۱۰.۱.۱. اندازهٔ قطعهٔ وتر

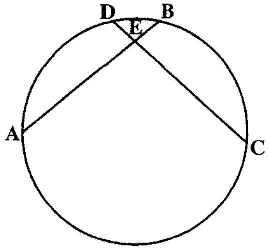


۱۹۸. دو وتر یک دایره متقاطعند. طول پاره‌خطهای یک وتر ۴ و ۶ است. اگر طول یکی از پاره‌خطهای وتر دیگر ۳ باشد، طول پاره‌خط دیگر چه‌قدر است؟



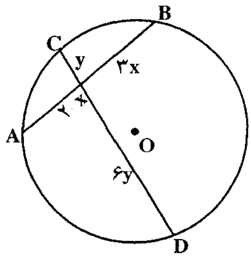
۱۹۹. در داخل دایره‌ای به شعاع ۱۳ سانتی‌متر، نقطهٔ M به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از مرکز داده شده، از نقطهٔ M وتر AB را به طول ۲۵ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. طول قطعه‌هایی که به وسیلهٔ M روی AB ایجاد شده پیدا کنید.

۲۰۰. در این شکل، AB = ۲۵، AE = ۱۸ و DC = ۲۷ است. EB، DE و EC را بیابید.

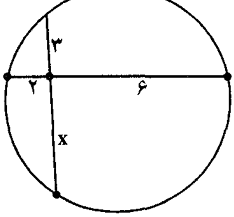


۲۰۱. ثابت کنید که طول پاره‌خطهای حاصل از دو وتر متقاطع یک دایره، نمی‌توانند چهار عدد صحیح متوالی باشند.

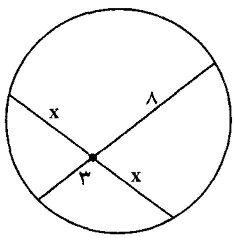
۲۰۲. دو وتر در داخل دایره‌ای به مرکز O متقاطعند. اندازه دو قطعه یکی ۲x و ۳x و اندازهٔ دو قطعهٔ دیگری y و ۶y است. اندازهٔ هریک از دو وتر را تعیین کنید؛ درصورتی که یکی از این وترها ۸ سانتی‌متر بیشتر از دیگری باشد.



۲۰۳. مقدار x را در هریک از شکلهای زیر به‌دست آورید.



(الف)



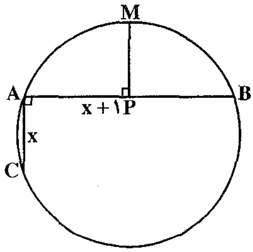
(ب)

۲۰۴. در دایره‌ای به شعاع ۵ واحد، CD و AB دو قطر عمود بر هم هستند. وتر CH به طول ۸ واحد AB را در K قطع و آن‌را به دو پاره‌خط تقسیم می‌کند. که طولهای آنها برابرند با :

الف) ۸/۷۵ و ۱/۲۵ ب) ۷/۲۵و۲/۷۵ ج) ۸ و ۲ د) ۶ و ۴ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲۰۵. در دایرهٔ داده شده، نقطهٔ M وسط $\widehat{CAB}$ و پاره‌خط MP در نقطهٔ P بر وتر AB عمود است. اگر اندازهٔ وتر AC برابر x و اندازهٔ پاره‌خط AP برابر $(x + ۱)$ باشد. آن‌گاه طول پاره‌خط PB برابر است با :

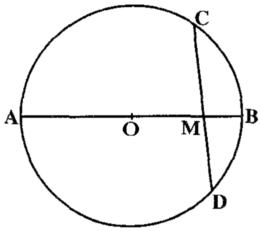


الف) $۳x + ۲$ ب) $۳x + ۱$ ج) $۲x + ۳$ د) $۲x + ۲$ هـ) $۲x + ۱$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۲.۱.۱۰.۳. اندازهٔ وتر

۲۰۶. قطری از یک دایره، در فاصلهٔ ۱ سانتی‌متری یکسرش، وتری ازدایره را قطع می‌کند و پاره‌خطی به طول ۴سانتی‌متر روی آن وتر به‌وجود می‌آورد. طول قطر ۳۷سانتی‌متر است. طول وتر را بیابید.



۲۰۷. روی دایرهٔ به قطر AB و به مرکز O نقطهٔ C طوری قرار دارد که زاویهٔ BOC برابر ۶۰° است. اگر قطر دایره ۵ سانتی‌متر باشد، طول وتر AC برحسب سانتی‌متر برابر است با :

الف) ۳ ب) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ د) $۳\sqrt{۳}$ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۲۰۸. در دایره‌ای با شعاع به طول ۱۲، وتری که عمود منصف یک شعاع باشد، دارای طولی است برابر با :

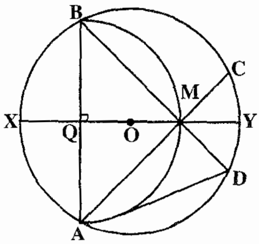
الف) $۳\sqrt{۳}$ ب) ۲۷ ج) $۶\sqrt{۳}$ د) $۱۲\sqrt{۳}$ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

۲۰۹. در دایره‌ای به مرکز O، وتر AB با وتر AC برابر است و وتر AD با BC در E برخورد می‌کند. اگر $AC = ۲$ و $AE = ۸$، آن‌گاه $\overline{AD}$ برابر است با :

الف) ۲۷ ب) ۲۴ ج) ۲۱ د) ۲۰ هـ) ۱۸

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

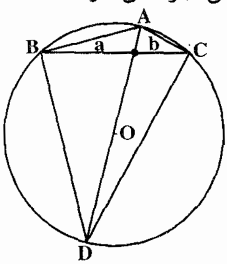


۲۱۰. در دایرهٔ (O) نقطهٔ Q، نقطهٔ میانی شعاع OX از قطر XY است. وتر AB در Q بر XY عمود است. نیمدایره‌ای به قطر AB با XY در M برخورد می‌کند. خط AM دایرهٔ (O) را در C و خط BM دایرهٔ (O) را در D قطع می‌کند خط AD را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایرهٔ (O) برابر r باشد، آن‌گاه AD برابر است با:

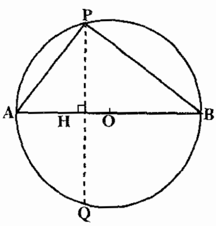
الف) $r\sqrt{2}$ ب) r ج) وتری که ضلع چندضلعی منتظم محاطی نیست.

د) $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ هـ) $r\sqrt{3}$

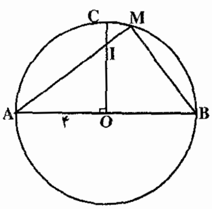
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱



۲۱۱. در دایره‌ای به شعاع R، طول دو وتر $AB = a$ و $AC = b$ معلوم است. مطلوب است تعیین طول وتر BC که کمان آن روی دایره، مساوی با مجموع کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ است.

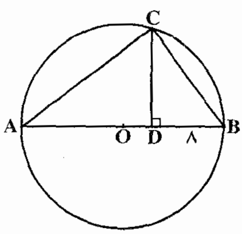


۲۱۲. دردایره‌ای به‌قطر ($AB = ۳۵$)، وتر PQ را عمود برآن رسم می‌کنیم. درصورتی که ($OH = ۴/۹$) باشد، اندازهٔ پاره‌خطهای AP، BP و PH را حساب کنید.

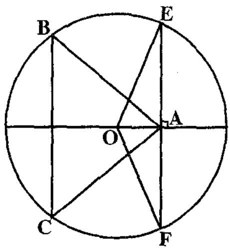


۲۱۳. دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر مفروض است. قطر AB و شعاع OC عمود بر AB را دراین دایره رسم می‌کنیم و نقطهٔ A را به نقطه‌ای مانند I از OC وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند. اگر $OI = ۳$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ MA و MB.

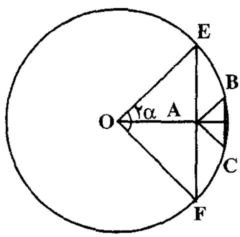
۲۱۴. طول قطر AB از دایره‌ای به مرکز O مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. نقطهٔ D روی این قطر چنان قرار دارد که DB برابر ۸ سانتی‌متر است. عمودی که از نقطهٔ D برقطر AB اخراج می‌شود، دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. طول پاره‌خطهای AC، CD و BC را محاسبه کنید.



۳.۱.۱۰.۳. اندازهٔ ضلعهای مثلث، و چندضلعیهای ایجاد شده در دایره

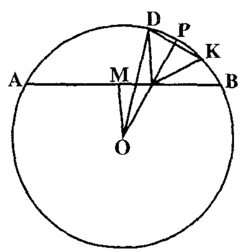


۲۱۵. کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویهٔ مرکزی $2\alpha(\alpha<\frac{\pi}{2})$ نگاه می‌کند. وتر این کمان دایره را به دو قطعه تقسیم می‌کند. در قطعهٔ بزرگتر مثلث متساوی‌الاضلاعی را طوری محاط کرده‌ایم که یک رأس آن بر میانگاه وتر، و دو رأس دیگر، روی کمان واقع است. طول ضلع مثلث را به‌دست آورید.



۲۱۶. کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویهٔ مرکزی $2\alpha(\alpha<\frac{\pi}{2})$ نگاه می‌کند. وتر این کمان مزبور را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در داخل قسمت کوچکتر مثلث متساوی‌الاضلاعی را طوری محاط کرده‌ایم که یک رأس آن بر میانگاه کمان، و دو رأس دیگر روی وتر همین قطعه واقع شده است. طول ضلع مثلث را بیابید.

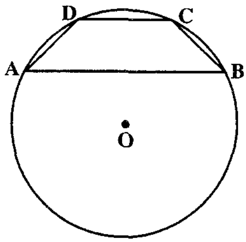
۲۱۷. از مرکز O دایره‌ای به شعاع R، دو شعاع OA و OB را با شرط $A\hat{O}B=\alpha\,(\alpha<\pi)$ رسم می‌کنیم. دایره، با وتر AB به دو قطعه تقسیم می‌شود. در داخل قطعهٔ کوچکتر، مثلث متساوی‌الاضلاعی را محاط می‌کنیم به‌طوری که یکی از ضلعهای آن، بر وتر AB عمود شود. طول ضلع مثلث را محاسبه کنید.



۲۱۸. کمانی از دایره‌ای به شعاع R به زاویهٔ مرکزی $2\alpha(\alpha<\frac{\pi}{2})$ نگاه می‌کند. وتر این کمان دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند. در قسمت کوچکتر، مربعی را محاط می‌کنیم. طول ضلع مربع را به‌دست آورید.

۲۱۹. در دایره‌ای به شعاع R، همهٔ ذوزنقه‌های محاطی مورد نظر هستند. طول ضلع جانبی (ساق) ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که دارای بیشترین مساحت باشد؛ با این شرط که طول یکی از قاعده‌های آن برابر $R\sqrt{3}$ باشد.

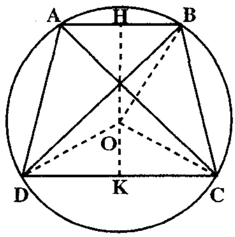
۲۲۰. در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R، دو وتر متوازی AB و CD را در یک طرف O و به فاصله‌های $\frac{۳R}{۵}$ و $\frac{۴R}{۵}$ از مرکز آن مفروضند. طول قاعده‌ها و زاویه‌های ذوزنقهٔ ABCD را حساب کنید.



۲۲۱. در دو طرف مرکز دایره، دو وترمتوازی یکی مساوی $C_{۶}$ و دیگری مساوی $C_{۳}$ رسم می‌کنیم ؛ مطلوب است :

۱. محاسبهٔ ساق و قطر و ارتفاع ذوزنقه‌ای که این دو وتر دو قاعدهٔ آن باشند ؛

۲. زاویه‌های بین قطرهای ذوزنقهٔ مزبور را پیدا کنید.



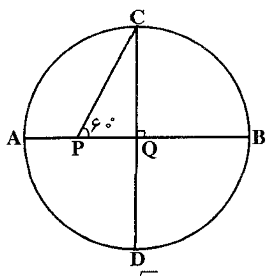
۳.۱۰.۱.۴. اندازهٔ طول پاره خط نسبت پاره‌خطها

۲۲۲. با اثبات معین کنید که آیا شخصی می‌تواند بر محیط دایره‌ای به شعاع واحد، ۱۹۷۵ نقطه چنان بیابد که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آنها، عددی گویا باشد یا نه؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۵

۲۲۳. در دایره‌ای به شعاع ۳۴ سانتی‌متر، وتری به طول ۳۰ سانتی‌متر مفروض است. فاصلهٔ این وتر از مرکز دایره را پیدا کنید.

۲۲۴. اگر AB و CD دو قطر عمود بر هم دایرهٔ Q باشند و اندازهٔ زاویهٔ QPC برابر ۶۰ درجه باشد، آن‌گاه خارج قسمت طول پاره‌خط PQ به طول پاره‌خط AQ برابر است با :



الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{۲}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰

۲۲۵. قطرهای AB و CD را، عمود بر هم، در دایره‌ای رسم کرده‌ایم. روی کمان $\overparen{BD}$، نقطهٔ X را انتخاب کرده‌ایم؛ درضمن، AX و CX، با CD و AB، بترتیب، در نقطه‌های E و F برخورده‌اند. ثابت کنید، اگر نسبت $\left|\frac{CE}{ED}\right|$ عددی گویا باشد، آن وقت نسبت $\left|\frac{AF}{FB}\right|$ هم عددی گویا است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۳.۱۰.۱.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۲۲۶. ثابت کنید، اگر ۱۰ نقطه را روی سطح دایره‌ای به قطر ۵ انتخاب کنیم، فاصلهٔ بین دو نقطه (از این ده نقطه)، از ۲ کمتر است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۸۳

۲۲۷. قطر AB از دایره‌ای به مرکز O برابر ۱۰ واحد است. نقطهٔ C واقع بر AB و به فاصلهٔ ۴ واحد از A است. نقطهٔ D واقع بر AB و به فاصلهٔ ۴ واحد از B است.P نقطهٔ دلخواهی بر دایره است.دراین صورت مسیرخط شکسته‌از C به P و از P به D :

الف) برای هر موضع P طول ثابتی دارد.

ب) برای هر موضع P از ۱۰ بیشتر است.

ج) نمی‌تواند از ۱۰ بیشتر باشد.

د) وقتی CPD مثلث قائم‌الزاویه باشد، کوتاهترین طول را دارد.

هـ) وقتی P از C و D به یک فاصله باشد، بلندترین طول را دارد.

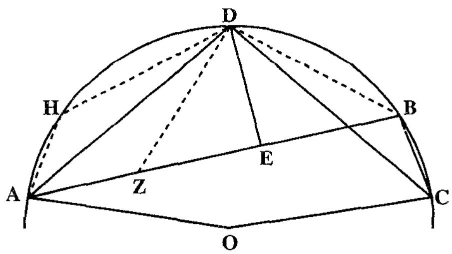
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

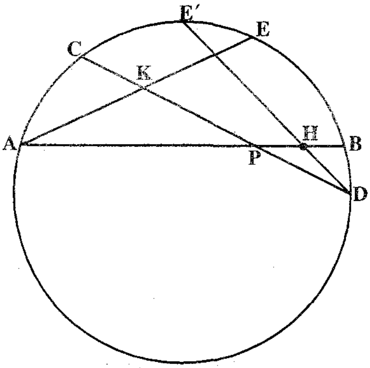
۲۲۸. از نقطه‌ای به فاصلهٔ $K<1$ از مرکز دایرهٔ به شعاع واحد، دو وتر عمود بر هم گذرانده‌ایم. حداکثر و حداقل مجموع طولهای این دو وتر را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران امریکا، ۱۹۷۷

۲۲۹. مسأله‌ای از ارشمیدس، ابوریحان بیرونی ریاضیدان ایرانی (سدهٔ دهم) قضیهٔ زیر را که منسوب به ارشمیدس است می آورد:

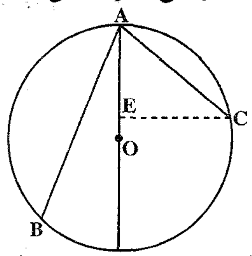
«اگر در قوس $\overparen{ABC}$ خط شکسته‌ای که از دو وتر AB و BC تشکیل شده است محاط کنیم، سپس از نقطهٔ D وسط قوس $\overparen{AC}$ عمودی بر وتر AB رسم کنیم، نقطهٔ D خط شکستهٔ ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی: $AE = EB + BC$





۲۳۰. در دایره‌ای به مرکز O دو وتر متقاطع AB و CD را رسم کرده، محل تلاقی آنها را P می‌نامیم. سپس از A به وسط CP وصل کرده امتداد می‌دهیم، تا دایره را در E قطع کند. همچنین از D به وسط PB وصل کرده امتداد می‌دهیم، تا دایره را در E′ قطع کند.
ثابت کنید دو قوس $\widehat{CE}$ و $\widehat{BE'}$ (یا دو وتر CE و BE′) با هم برابرند.

۲۳۱. روی دیوار قائم، دایره‌ای رسم شده است. از نقطهٔ فوقانی دایره، یعنی از نقطهٔ A، در طول وترهای AB و AC، دو ناودان قرار داده‌ایم. از نقطهٔ A، در یک لحظه، سه گلوله را رها کرده‌ایم که یکی به‌صورت سقوط آزادپایین می‌آید،ودو تای دیگر در ناودانهای صیقلی شده، بدون اصطکاک می‌غلتند. کدام یک ازاین سه گلوله، زودتر به محیط دایره می‌رسند؟



از گالیله

گالیله

کسی که مشهورتر از کاوالیری و به‌طور مسلم مشهورتر از اغلب مردان عصر خویش است، یعنی گالیلئوگالیلی Galileo Galilei (متولد ۱۸ فوریهٔ ۱۵۶۴ در پیزا، متوفی ۸ ژانویه ۱۶۴۲ در فلورانس)، مقدر بود که به‌طورکلی ایتالیا، و مخصوصاً فلورانس را قرین افتخار سازد.او در روز وفات میکل آنژ زاده شد و در سال تولد نیوتن درگذشت، و ظاهراً شکاف میان زندگی این دو بزرگمرد را پر کرد، که در هنر، ادبیات ، و علوم سیاسی، و افکار دینی،

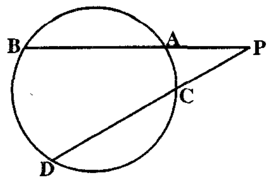
عصری مهیج بود، و در منازعات متعدد مربوط به همهٔ این رشته‌ها نقش بزرگی داشت.

او فرزند نجیب‌زادهٔ فلورانسی بود که به موسیقی و ریاضیات علاقه داشت، و دارایی او چنان کاهش یافته بود که برای گالیله کاری مناسب اصلاح حال خانواده در نظر گرفت، یعنی شغل تجارت پارچه. با این همه، بخت با گالیله یاری کرد و او را برای تحصیل به دیر والومبروزا Vallombrosa فرستادند. او در آن جا چنان استعداد فراوانی نشان داد که پدرش تصمیم خود را عوض کرد و بر آن شد تا پسرش طبیب شود. او در ۱۵۸۱ یعنی زمانی که دورهٔ تعالی فکری بود، وارد دانشگاه پیزا شد ولی براثر یک حادثه که موجب تغییر اندیشهٔ علمی جهانیان شد، تحصیلات طبی او ناتمام ماند. چلچراغ زیبایی را که هنوز در کلیسای جامع پیزا آویزان است، از حالت قائم درآورده بودند تا آسانتر روشن شود، و گالیله متوجه شد نوسان آن که در ابتدا شدید بود، تدریجاً کمتر و کمتر می‌شود. با این همه، به نظر می‌رسید که این نوسانها در فاصلهٔ زمانی برابری صورت می‌گیرد، و گالیله وقتی فاصلهٔ نوسانها را با فاصلهٔ ضربان نبض خود مقایسه کرد، در این مورد مطمئن شد. بدین ترتیب او می‌توانست برابری زمان نوسانها را تخمین بزند (موضوعی که مسلمانان اظهار کرده بودند)، و با اندازه‌گیری دقیق فاصلهٔ ضربان نبض، نشانه‌شناسی تازه‌ای در طب آغاز گردید. باز در این زمینه، براثر تصادف و برخلاف میل پدر، گالیله به مطالعهٔ هندسه روی آورد. موفقیتش چنان بود که توانست رضایت پدر را جلب کند و خود را یکباره وقف علم سازد. او بزودی در سراسر ایتالیا معروف شد، و در ۱۵۸۹ دانشگاه پیزا او را به استادی ریاضیات برگزید. مقام ناچیز ریاضیات را در آن هنگام از این جا می‌توان دریافت که استاد پزشکی سالی ۱۵,۰۰۰ تومان می‌گرفت و گالیله سالی ۴۵۵ تومان. در این هنگام بود که کارهای تجربی خود را در زمینهٔ فیزیک آغاز کرد، ولی براثر منازعات محلی در ۱۵۹۱ کرسی استادی خود را از دست داد. سال بعد او را به استادی ریاضیات دانشگاه پادوا دعوت کردند. و در آن‌جا، او توانست برخی از بهترین کارهای علمیش را انجام دهد. در این جا مجال آن نیست که از مجادلاتش در زمینهٔ نجوم، ساختن نخستین تلسکوپ کارآمد، اختراع نوع جدید میکروسکوپ و کارهایش در زمینهٔ فیزیک بحث شود. با این همه می‌توان گفت که علاقه‌اش را به ریاضیات در سراسر زندگی طوفانیش حفظ کرد. هنگامی که در پادوا بود پرگار تناسبی را اختراع کرد، و این ابزار بیش ازیک قرن مورد استقبال قرار گرفت، ولی پس از آن بکلی فراموش شد.

۳.۱۰.۲. قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳.۱۰.۲.۱. اندازهٔ قطعه خطهای رسم شده از خارج دایره

۲۳۲. در این شکل :

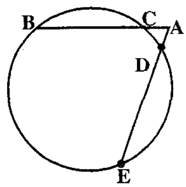


الف . اگر $PA=6$ ، $PB=15$ و $PC=8$ ؛ PD چه‌قدر است؟

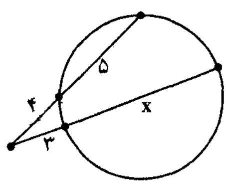
ب . اگر $PB=24$ ، $AB=16$ و $PD=16$ ؛ PC چه‌قدر است؟

پ . اگر $PD=20$ ، $CD=12$ و $AB=27$ ؛ PB چه‌قدر است؟

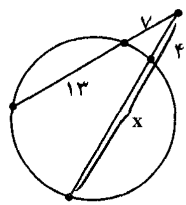
۲۳۳. از نقطه‌ای واقع در خارج یک دایره دو قاطع رسم کرده‌ایم. قطعهٔ داخلی قاطع اول، مساوی ۴۷ میلی‌متر و قطعهٔ خارجی آن، مساوی ۹ میلی‌متر است، و قطعهٔ داخلی قاطع دوم، ۷۲ میلی‌متر بزرگتر از قطعهٔ خارجی آن است. مطلوب است طول قاطع دوم.



۲۳۴. مقدار x را در هریک از شکلهای زیر تعیین کنید.

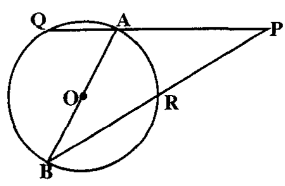


(الف)

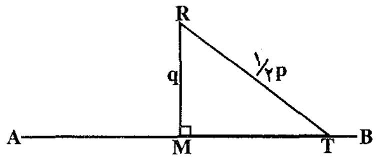


(ب)

۲۳۵. در این شکل، AB قطر دایره است. اگر $AB=8$ ، $AQ=4$ و $PQ=12$ ؛ PB و PR را بیابید.



۲۳۶. در نقطهٔ میانی پاره‌خط AB به طول P واحد، عمود MR به طول q واحد، بر آن اخراج می‌شود. T یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌ای به مرکز R و شعاع $\frac{1}{2}AB$ با AB است. AT و TB عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ :



الف) $x^2+px+q^2=0$ ب) $x^2-px+q^2=0$ ج) $x^2+px-q^2=0$

د) $x^2-px-q^2=0$ هـ) $x^2-px+q=0$

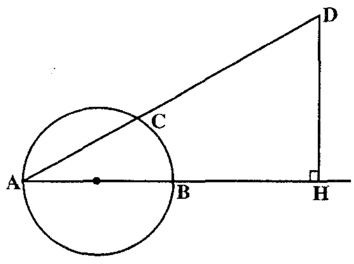
۳.۱۰.۲.۲. اندازهٔ وتر

۲۳۷. نقطهٔ P را بیرون دایرهٔ C (O,R) در نظر گرفته، از آن نقطه خطی رسم کنید، که دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند و PA = AB باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟ مجموعهٔ نقطه‌های P را چنان معین کنید که مسأله جواب داشته باشد.

اگر $R=8/5cm$ و $OP=16/5cm$ باشد، اندازهٔ وتر AB را تعیین کنید.

۳.۱۰.۲.۳. اندازهٔ پاره‌خطها

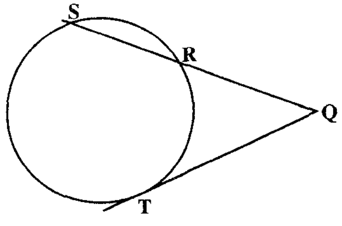
۲۳۸. دایرهٔ (O) به قطر $AB=2a$ مفروض است. از A خطی چنان بگذرانید که بار دیگر دایره را در نقطهٔ C قطع کند و $AC=a\sqrt{3}$ باشد. AC را به اندازهٔ دو برابر خود تا D امتداد دهید. از D عمود DH را بر AB فرود آورید و اندازهٔ قطعه‌های DH، AH و BH را به‌دست آورید.



۳.۱۰.۳. یک مماس و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳.۱۰.۳.۱. اندازهٔ قاطع

۲۳۹. در این شکل، QS را بیابید، اگر :



الف) $QR=5$ و $QT=10$

ب) $QT=8$ و $QR=7$

پ) $QT=16$ و $RS=24$

۲۴۰. نقطه‌های A، B و C بر دایرهٔ O واقعند. خط مماس در A، امتداد وتر BC را در P قطع می‌کند که B، بین C و P قرار دارد. اگر $BC = 20$ و $PA = 10\sqrt{3}$؛ آن‌گاه PB برابر است با:

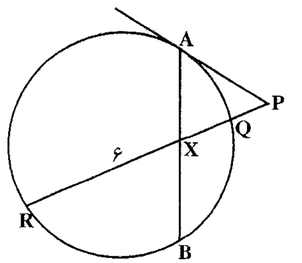
الف) ۵ ب) ۱۰ ج) $10\sqrt{3}$ د) ۲۰ هـ) ۳۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

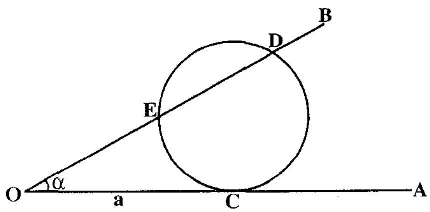
۲۴۱. از نقطهٔ A در خارج دایره‌ای به شعاع r مماسی بر دایره رسم شده که L طول مماس $4/3$ ($\frac{4}{3}$) شعاع r است. (کوتاهترین) فاصلهٔ نقطهٔ A از دایره برابر است با:

الف) $\frac{1}{2}r$ ب) r ج) $\frac{1}{2}L$ د) $\frac{2}{3}L$ هـ) مقداری بین r و L

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹



۲۴۲. در شکل، PA در A بر دایره مماس است. $AP = PX = XB$.
اگر $PQ = 1$ و $QR = 8$؛ AX چه‌قدر است؟

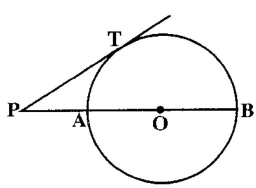


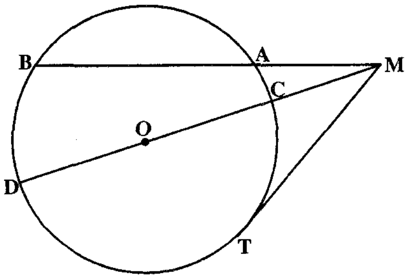
۲۴۳. اندازهٔ زاویهٔ AOB برابر α است. دایره‌ای بر ضلع AO درنقطهٔ C مماس بوده و ضلع OB را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. اگر $OC = a$ و $OD = b$ $(b > a)$ باشد، آن‌گاه DE و شعاع دایره را پیدا کنید.

۳.۱۰.۳.۲. اندازهٔ مماس

۲۴۴. فاصلهٔ نقطهٔ P از مرکز دایره‌ای به قطر ۱۰cm برابر ۱۳cm است. طول پاره‌خط مماس از P بر دایره چه‌قدر است؟

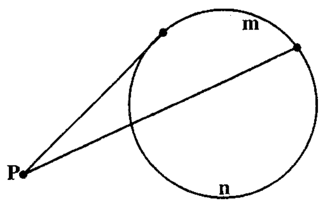
۲۴۵. دایرهٔ C (O,R) و نقطهٔ P در بیرون آن مفروضند. می‌دانیم که فاصله‌های نزدیکترین و دورترین نقطه‌های دایره به نقطهٔ P، بترتیب ۶ و ۱۸ سانتی‌مترند. اندازهٔ شعاع دایره و اندازهٔ مماسی را که از نقطهٔ P بر دایره رسم می‌شود، تعیین کنید.





۲۴۶. از نقطهٔ M خارج دایرهٔ به مرکز O و شعاع R، قاطع MAB و قطر MCD را رسم می‌کنیم. اگر $MB = R$ و $AB = \frac{3R}{2}$ باشند، طولهای MC و MD و طول مماس MT را حساب کنید.

۲۴۷. از نقطهٔ P واقع در خارج دایره‌ای به محیط ۱۰ واحد، مماسی بر آن دایره رسم شده است. همچنین، از P قاطعی رسم شده است که دایره را به دو قوس نابرابر به طولهای m و n تقسیم کرده است. می‌دانیم که t، طول مماس، واسطهٔ هندسی بین m و n است. اگر m و t عددهای صحیح باشند، آن‌گاه تعداد جوابهای t عبارت است از :

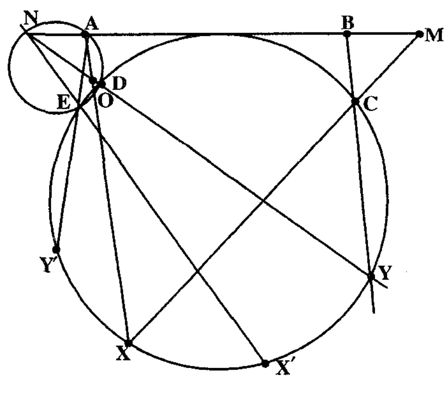


الف) صفر   ب) یک   ج) دو   د) سه   هـ) بی نهایت

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

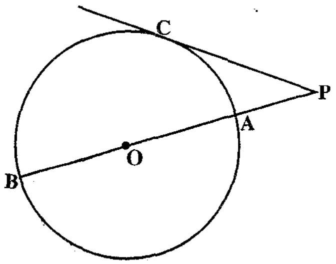
۳.۳.۳.۱۰.۳. تساوی دو پاره‌خط

۲۴۸. C و D دو نقطهٔ دلخواه از محیط دایره‌ای هستند که بر نقطهٔ وسط پاره‌خط راست AB مماس است. AD و BC، بترتیب محیط دایره را در نقطه‌های X و Y قطع کرده‌اند. CX و DY هم، AB را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کرده‌اند. ثابت کنید : $|AM| = |BN|$.



۳.۱۰.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۴۹. دایره‌ای به قطر AB معلوم است. بر امتداد قطر AB نقطهٔ P را چنان معین کنید، که اگر از آن، مماس PC را بر دایره رسم کنیم، قطعه خط PC (C نقطهٔ تماس است)، دو برابر قطعه خط PA باشد.



۳.۱۰.۴. مماسها و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳.۱۰.۴.۱. اندازهٔ وتر

۲۵۰. در یک صفحه، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۶ سانتی‌متر داده شده است. از نقطهٔ P، به فاصلهٔ ۱۰ سانتی متر از O، دو مماس Pa و Pb بر دایره رسم می‌شود. اندازهٔ پاره‌خط [ab] برحسب سانتی‌متر چه‌قدر است؟

الف) $۶\sqrt{۲}$ ب) ۴/۸ ج) $۲\sqrt{۱۰}$ د) ۹/۶

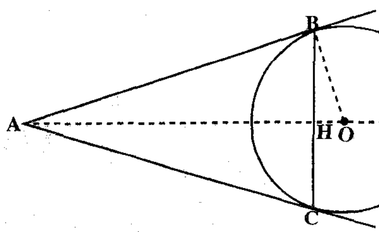
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۳.۱۰.۴.۲. اندازهٔ مماس

۲۵۱. دو پاره‌خطی که از یک نقطه، بیرون دایره بر آن مماس کرده‌ایم، زاویهٔ ۶۰° می‌سازند. اگر قطر دایره ۱۰ باشد، طول هریک از پاره‌خطهای مماس چه‌قدر است؟

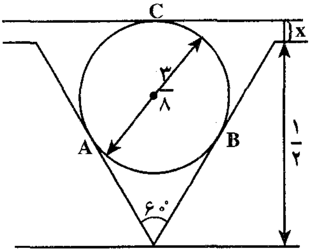
۲۵۲. اگر پاره‌خطهای مماس بر یک دایره، که از یک نقطه خارج آن دایره رسم شده‌اند، با هم زاویهٔ ۱۲۰° بسازند، و قطر دایره ۱۰ باشد، طول هریک از پاره‌خطهای مماس چه‌قدر است؟

۲۵۳. از نقطه‌ای به فاصلهٔ $\frac{۷R}{۲}$ از مرکز دایره‌ای به شعاع R دو مماس بر آن رسم می‌کنیم. مطلوب است طول هر مماس و طول وتر بین نقطه‌های تماس.



۳.۴.۱۰.۳. اندازهٔ پاره خط، تساوی دو پاره‌خط

۲۵۴. در شکل روبه‌رو، اگر نقطه‌های A، B و C نقطه‌های تماس دایره با خطها باشند، آن‌گاه x (برحسب اینچ) برابر است با:

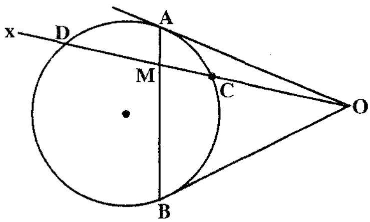


الف) $\frac{۳}{۱۶}$ ب) $\frac{۱}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۳۲}$

د) $\frac{۳}{۳۲}$ هـ) $\frac{۱}{۱۶}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

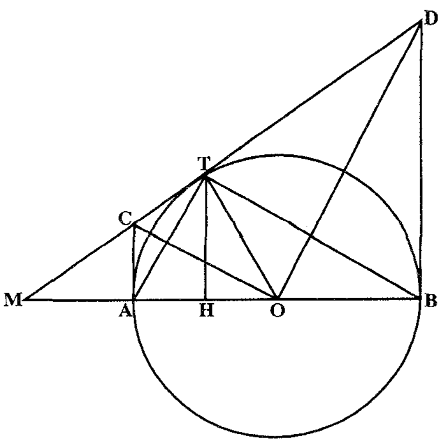
۲۵۵. دایره‌ای در یک زاویهٔ به رأس O محاط شده، و در نقطه‌های A و B بر ضلعهای زاویه مماس است. نیمخط راست Ox، این دایره را در نقطه‌های C و D طوری قطع کرده است که $|OC| = |CD| = ۱$.



اگر M، نقطه برخورد نیمخط راست Ox با پاره‌خط راست AB باشد، طول پاره‌خط راست OM چه‌قدر است؟

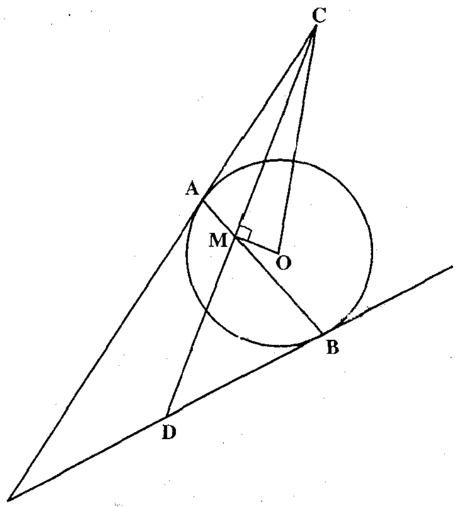
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۲۵۶. از نقطهٔ M واقع در خارج دایرهٔ (O)، مماس MT را رسم کرده و فرض می‌کنیم که MO دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند. از A و B دو عمود بر MO اخراج می‌کنیم، تا MT را در C و D قطع کند. اگر $AC = \frac{R}{۲}$ باشد، طولهای BD، MA، MT و CD را برحسب R حساب کنید.

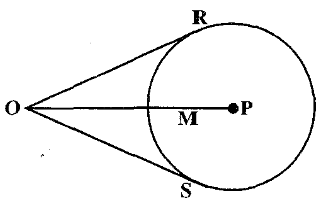


۲۵۷. دایره‌ای به مرکز O، بر ضلعهای زاویه‌ای، درنقطه‌های A و B مماس است. از نقطهٔ دلخواه M عمودی بر پاره‌خط راست OM رسم کرده‌ایم. این عمود، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های C و D قطع کرده است. ثابت کنید: $|MC|=|MD|$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

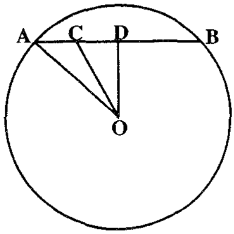


۲۵۸. در این شکل، QR و QS پاره‌خطهای مماس بر دایرهٔ به مرکز P هستند. QP دایره را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که M از دو پاره‌خط مماس، به یک فاصله است.



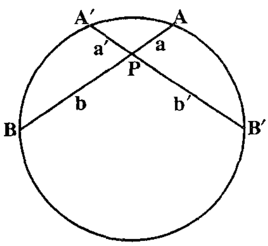
۳.۱۱. رابطه‌های متری مربوط به یک دایره

۳.۱۱.۱. رابطه‌های متری مربوط به وتر و قطر و قاطعهای رسم شده در داخل دایره

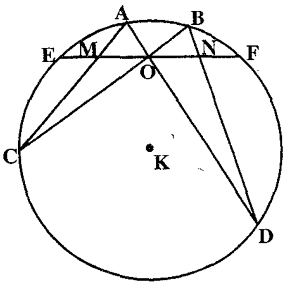


۲۵۹. هرگاه مرکز دایره‌ای را به یک نقطه از وتری از آن دایره وصل کنیم. مجذور قطعه خط حاصل، به‌اضافهٔ حاصل ضرب قطعه خطهایی که نقطهٔ مزبور بر وتر جدا می‌کند، مساوی است با مجذور شعاع، یعنی:

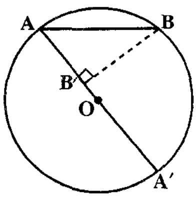
$OC^۲ + AC.CB = R^۲$



۲۶۰. اگر دو وتر در دایره‌ای متقاطع باشند به طوری که نسبت دو قطعهٔ یکی، با نسبت دو قطعهٔ دیگری مساوی باشد، این دو وتر مساوی‌اند.

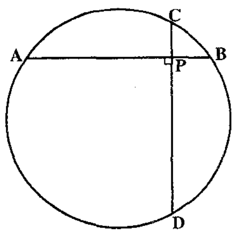


۲۶۱. قضیهٔ پروانه ــ دو وتر AD و BC در نقطهٔ O وسط وتر EF متقاطعند. ثابت کنید قطعات OM و ON که به وسیلهٔ AC و BD از EF جدا می‌شوند برابرند.



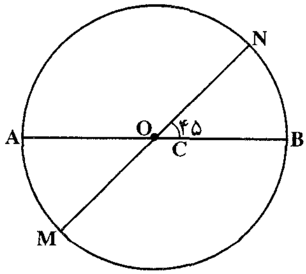
۲۶۲. در هر دایره، هر وتر، واسطهٔ هندسی است بین قطر دایره، و تصویر آن وتر روی قطری که از یک سر آن می‌گذرد.

$AB^۲ = AB'.AA'$



۲۶۳. در دایره‌ای دو وتر عمود بر هم AB و CD، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. اگر شعاع دایره R باشد، ثابت کنید:

$PA^۲ + PB^۲ + PC^۲ + PD^۲ = ۴R^۲$



۲۶۴. در دایرهٔ مفروض، قطر AB را رسم کرده و از نقطهٔ C واقع بر این قطر، قاطعی رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهد و دایره را در M و N قطع کند. ثابت کنید که :

$$CM^۲ + CN^۲ = ۲R^۲$$

۲۶۵. ثابت کنید، اگر مجذور وتری را که بر قطر دایره عمود است، بر چهار برابر یکی از دو بخش قطر تقسیم و خارج قسمت را با همان بخش قطر جمع کنیم، طول قطر دایره به‌دست می‌آید.

از برهما گوپتا، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

برهما گوپتا

برجسته‌ترین ریاضیدان هند در سدهٔ هفتم، برهما گوپتا Brahmagopta بود. (بیرونی او را «پسر جشن Jishno از شهرک بهلمال Bhilamala» می‌داند و نامش را به‌صورت برهمکوپت نوشته است. سوریاداسا از شارحان کتاب بهاسکره هم او را پسر چیشنو، می‌داند.)، که دوران فعالیت او را، هم از روی مدرک نجومی، و هم به‌خاطر اظهارات نویسندگان متعدد هندی، در ح ۶۲۸ می‌دانند. او در مرکز بزرگ علم نجوم هند، یعنی اوجاین زندگی و کار کرد، که شهرکی است در ایالت گوالیور Gwalior در مرکز هند، و گفته می‌شود مقر آشوکا در زمان ولیعهدیش بود.

برهما گوپتا هنگامی که فقط سی سال داشت، کتابی راجع به نجوم در بیست و یک فصل نوشت، به نام برهما سیدهانتا، که شامل گانیتادایا Ganitadhaya (بیانات در باب حساب) و کوتاکادایاکا Kutakhadayaka، به‌صورت دو فصل مخصوص است. فصل اولی با توصیف ganaka شروع می‌شود، یعنی محاسبی که صلاحیت تحصیل نجوم را دارد. «آن کس که دقیقاً یکایک جمع و باقی بیست عمل حساب و هشت قاعده، از جمله اندازه‌گیری با سایه را بداند، او محاسب ganita است.»

ماهیت حساب برهما گوپتا. حساب او شامل اعمال عدد صحیح و کسری، دادوستد، قاعدهٔ طرفین وسطین، ربح ساده، اندازه‌گیری شکلهای مسطح، و مسأله‌هایی در باب حجم و محاسبهٔ سایه است. (نوع ابتدایی مثلثات مسطحه که او برای ساعت آفتابی، مورد استفاده قرار داد.)

محاسبهٔ مساحت غالباً غلط است، از قبیل اینکه قاعدهٔ به‌دست آوردن مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلعهای به طول ۱۲ را به صورت ۱۲×۶، یا ۷۲ می دهد ؛ و مثلث با

ضلعهای ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را $(۵+۱۳)\times\frac{۱}{۲}\times۷$، یا ۹۸ می‌دهد. همچنین اظهار می‌کند مساحت هر چهار ضلعی با ضلعهای d، c، b و a می‌شود.

$$\sqrt{(S-a)(S-b)(S-d)}$$

که در آن $S=\frac{۱}{۲}(a+b+c+d)$ است. این قاعده فقط در مورد چهارضلعیهای دایره‌ای (محاطی، Cyclic) صادق است. او ۳ را، «مقدار عملی» و $\sqrt{۱۰}$ را «مقدار دقیق» عدد پی (π) معرفی می‌کند.

جبر برهما گوپتا. کوتاکادایاکا، جبر را در محاسبه‌های نجومی به‌کار می‌گیرد. به‌عنوان مثال، «کسی که می‌گوید وقتی سیارات در موضع معینی قرار می‌گیرند، که روزهای معینی از ماه یا سال باشد، و این اتفاق، در فلان روز هفته واقع می‌شود، او در آسیاب (جبر) متبحر شده است».

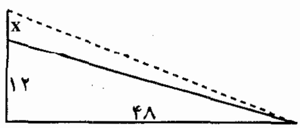
برهما گوپتا در فصل مربوط به محاسبه، قواعد معمول برای اعداد منفی را عرضه می‌کند. همچنین فصلی دارد راجع به معادله‌های درجهٔ دو، قاعده‌ای برای حل معادله از نوع $x^۲+px-q=۰$ که اساساً بیان این رابطه است.

$$x=\frac{\sqrt{p^۲+۴q}-p}{۲}$$

که به محاسبهٔ یکی از ریشه‌های معادله منجر می‌شود.

در مورد معادلات چند مجهولی درجهٔ اول، از مقدارهای مجهول به صورت «رنگ» صحبت می‌شود و مسأله‌ها بیشتر نجومی است. به‌طور مسلّم، تا جایی که می‌دانیم، برهماگوپتا نخستین مؤلف هندی بود که جبر را تا حدود زیادی در نجوم مورد استفاده قرار داد. از آن جا که مسأله‌های خیالی در آثار هندی فراوان است، برای توضیح هریک از قاعده‌ها، نمونه‌های متعددی ذکر شده، دو تا از این مسأله‌ها چنین است:

بر بالای کوهی دو مرتاض زندگی می‌کنند. یکی از آنان جادوگری است، که در هوا می‌پرد. او از قلهٔ کوه می‌پرد و در مسیری مورب به شهر مجاور فرود می‌آید. مرتاض دیگر ازکوه فرود می‌آید و از راه زمین بدان شهر می‌رود. مسیر آنان برابر است. می‌خواهم فاصلهٔ شهر را از کوه بدانم و این را که جادوگر در چه ارتفاعی پرواز می‌کرده است؟ شارح کتاب مسأله را به‌صورتی که در این جا نشان داده شده بیان می‌کند و x را مساوی ۸ درمی‌آورد.



خیزرانی به بلندی ۱۸ وجب را باد شکست. نوک آن در ۶ وجبی ریشه، به زمین رسید. طول هر قطعهٔ خیزران چه‌قدر است؟

معادله‌های سیال

یکی از دلیلهای اعتبار جبر در این دوره، این است که برهما گوپتا به حل معادلهٔ سیال علاقه نشان داد. قبلاً آریابهاتا به مسأله به‌دست آوردن جواب صحیح $ax \pm by = c$ پرداخته بود، ولی برهما گوپتا عملاً جواب را بدین صورت به‌دست آورد:

$$x = \pm cq - bt$$

$$y = \mp cp + at$$

که در آن، c صفر یا عدد صحیح دیگر، و $\frac{p}{q}$ همگرایی ماقبل آخر $\frac{a}{b}$ است. همچنین معادلهٔ موسوم به پل pel را بدین صورت مورد بررسی قرار داد: $Du^۲ + ۱ = t^۲$

ولی تا جایی که می‌دانیم، اول بار در سدهٔ ۱۲ توسط بهاسکره حل شد.

برهما گوپتا برای ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه، دو مقدار به‌دست می‌دهد:

$$۲mn, m^۲ - n^۲, m^۲ + n^۲$$

و

$$\sqrt{m}, \frac{۱}{۲}(\frac{m}{n} - n), \frac{۱}{۲}(\frac{m}{n} + n)$$

مقدارهایی که شاید از مأخذ یونانی به‌دست آورده است.

برهما گوپتا متهم شده است که برای خوشامد روحانیان متعصب و تودهٔ جاهل کشورش و برای این که به سرنوشت شوم سقراط دچار نشود، دربارهٔ علم دروغهایی منتشر می‌کرد، و همهٔ اینها نشان می‌دهد که او در زمان خویش از اعتبار چشمگیری برخوردار بوده است.

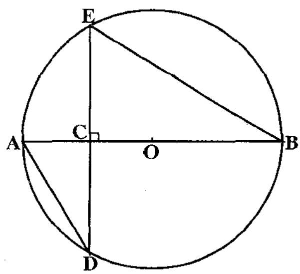
۲۶۶. ثابت کنید بخش کوچکتر قطر دایره، که به وسیلهٔ وتری عمود بر آن تقسیم شده است، برابر است با نصف تفاضل قطر از جذر تفاضل مجذورهای قطر و وتر.

از برهما گوپتا، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۲۶۷. در دایره‌ای قطر AB را رسم کرده و از نقطهٔ واقع بر قطر AB، عمودی بر آن اخراج می‌کنیم، تا دایره را در نقطه‌های D و E قطع کند. ثابت کنید:

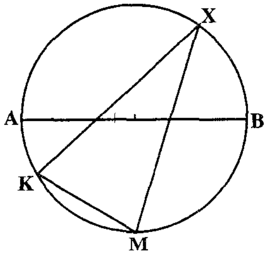
۱. دو مثلث ACD و BEC متشابه‌اند.

۲. ثابت کنید $ED^۲ = ۲CA.CB$.



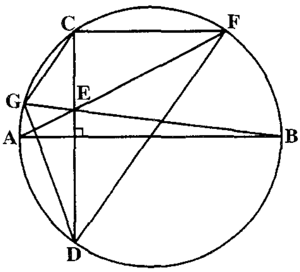
۲۶۸. وترهای XK و XM، قطر AB از دایره را به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید:

$$۵KM = ۳AB$$



المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

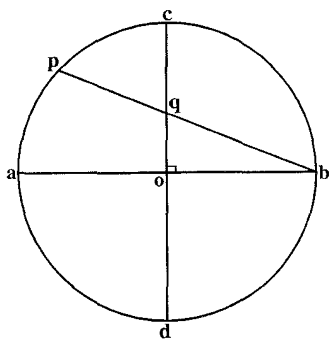
۲۶۹. دایره‌ای به قطر AB و وتر CD از آن عمود بر AB مفروض است. اگر E نقطهٔ اختیاری از CD باشد و AE و BE دایره را در F و G قطع کنند، ثابت کنید که در چهارضلعی CFDG، نسبت دو ضلع متوالی، مساوی است با نسبت دو ضلع دیگر.



۲۷۰. در دایره‌ای به مرکز O دو قطر ab و cd بر هم عمودند. وتر دلخواه bp با cd در q برخورد می‌کند. حاصلضرب $|bp|.|bq|$ برابر است با:

الف) $|ao|.|ob|$ ب) $|ab|.|ao|$ ج) $|cd|.|cq|$ د) $|cq|.|qd|$ هـ) $|cq|:|od|$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



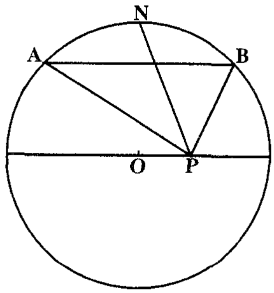
۲۷۱. در دایرهٔ O، قطرهای AB و CD بر یکدیگر عمودند. اگر وتر AM قطر CD را در P قطع کند، آن‌گاه $\overline{AP}\times\overline{AM}$ برابر است با:

الف) $\overline{AO}\times\overline{OB}$ ب) $\overline{AO}\times\overline{AB}$ ج) $\overline{CP}\times\overline{CD}$

د) $\overline{CP}\times\overline{PD}$ هـ) $\overline{CO}\times\overline{OP}$

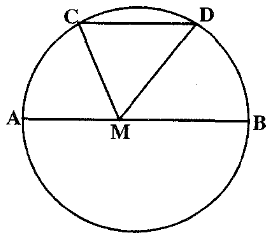
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۲۷۲. وتر متغیر AB از دایرهٔ O موازی با قطری که از نقطهٔ معلوم P می‌گذرد، می‌باشد. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ P از B و A مقداری ثابت، و دو برابر مربع فاصلهٔ P از وسط کمان $\widehat{AB}$ است.



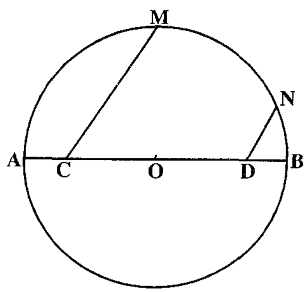
۲۷۳. اگر AB قطری از دایره و CD وتری موازی با آن، و M نقطه‌ای اختیاری از قطر AB باشد، رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$$



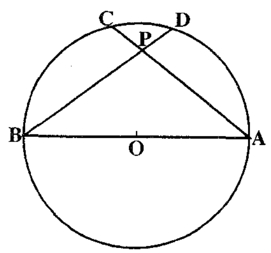
۲۷۴. روی قطر AB از دایرهٔ O، دو نقطهٔ C و D را به یک فاصله از O اختیار می‌کنیم؛ و از این دو نقطه و در یک طرف AB،دو خط متوازی رسم می‌کنیم تا دایره را درنقطه‌های M و N قطع کنند. ثابت کنید:

$$CM.DN = CA.CB = DA.DB$$



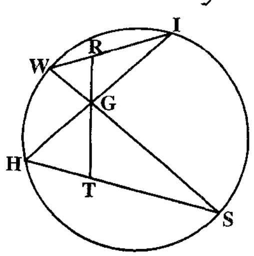
۲۷۵. از نقطه‌های A و B دو انتهای قطری از یک دایره، دو وتر AC و BD را رسم می‌کنیم. این دو وتر یکدیگر را در نقطهٔ P در داخل دایره قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

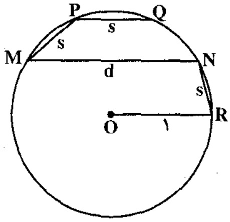
$$AB^2 = AC \times AP + BD \times BP$$



۲۷۶. IH و SW دو وتر متقاطع، و GR نیمساز دو زاویهٔ WGI و HGS است. ثابت کنید:

$$\frac{WR}{RI} = \frac{HT}{TS}$$





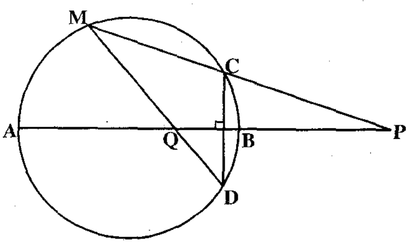
۲۷۷. در شکل داده شده، دایرهٔ به مرکز O و به شعاع واحد، وترهای PQ و MN موازی با شعاع OR می‌باشند. وترهای MP، PQ و NR هرکدام به طول s و وتر MN به طول dاست. از سه معادلهٔ :

I. $d-s=1$ II. $ds=1$ III. $d^2-s^2=\sqrt{5}$ ، کدامها الزاماً صحیح است؟

الف) فقط I ب) فقط II ج) فقط III د) فقط I و II هـ) I و II و III

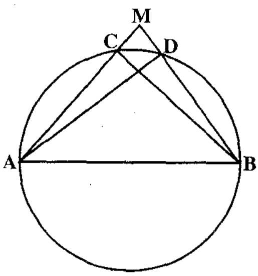
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

۲.۱۱.۳. رابطه‌های متری مربوط به قاطعهای رسم شده از خارج دایره



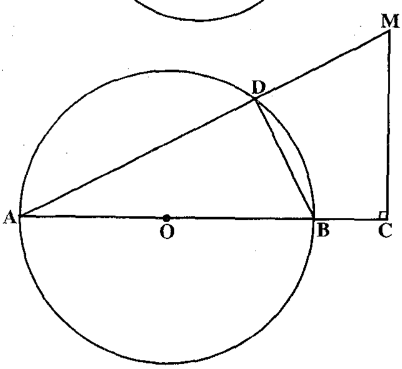
۲۷۸. دایره‌ای به قطر AB و وتر CD عمود بر AB مفروض است. نقطهٔ M را روی دایره اختیارکرده، خطهای MC و MD را رسم می‌کنیم، تا خط AB را بترتیب درنقطه‌های P و Q قطع کند. ثابت کنید

$$\frac{PA}{PB}=\frac{QA}{QB}$$



۲۷۹. نقطهٔ اختیاری M را به طرفین قطر AB از دایره‌ای وصل می‌کنیم. تا خطهای MA و MB، بترتیب دایره را بار دیگر در نقطه‌های C و D قطع کنند. ثابت کنید :

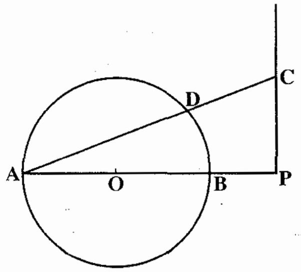
$$AM\times AC+BM\times BD=AB^2$$



۲۸۰. در دایره‌ای قطر AB را به اندازهٔ $BC=\frac{R}{2}$ امتداد می‌دهیم ؛ سپس از A قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در D، و عمود بر CA در نقطهٔ C را در M قطع کند. ثابت کنید :

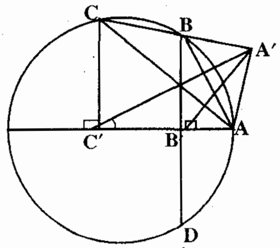
۱. $AD.AM=5R^2$.

۲. چهارضلعی DMBC محاطی است.



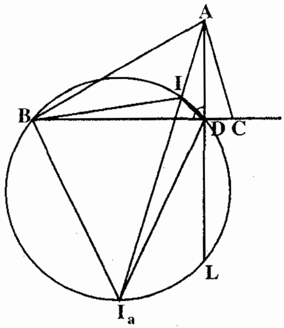
۲۸۱. از نقطهٔ P واقع بر امتداد قطر AB از دایرهٔ O، عمودی بر این قطر اخراج کرده روی آن نقطهٔ دلخواه C را اختیار می‌کنیم. خط CA، دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$AB.AP = AD.AC$$



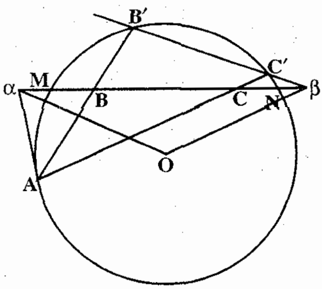
۲۸۲. سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره مفروضند. A' تصویر A روی BC است. B' و C' نیزتصویرهای B و C روی قطری که از A می‌گذرد می‌باشند. ثابت کنید:

$$AA'^{2} = AB' \times AC'$$



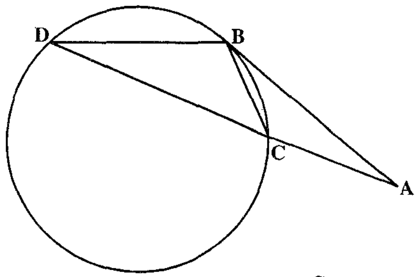
۲۸۳. دایره‌ای که با سه نقطهٔ D پای ارتفاع AD و I و I_a از مثلث ABC تعریف می‌شود، AD را دوباره در L قطع می‌کند. ثابت کنید AL برابر قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. مطلب بالا را برای I_b و I_c شرح داده، ثابت کنید.

نکته. I ، I_a، I_b و I_c بترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس بر ضلعهای a، b و c می‌باشند.



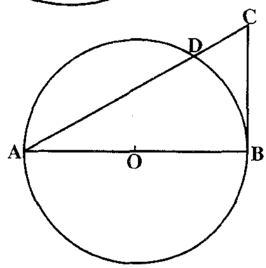
۲۸۴. در دایرهٔ O وتر MN و دو نقطهٔ B و C را روی MN که به یک فاصله از O قرار گرفته‌اند، اختیار کرده، B و C را به نقطهٔ اختیاری A از دایره وصل می‌کنیم تا خطهای حاصل، دایره را دوباره در B' و C' قطع کنند. ثابت کنید که وتر $B'C'$ و مماس در نقطهٔ A بر دایره، وتر MN را بترتیب در دو نقطهٔ α و β قطع می‌کنند، که از O به یک فاصله قرار دارند.

۳.۱۱.۳. رابطه‌های متری مربوط به یک مماس و قاطعهای رسم شده از خارج یا داخل دایره

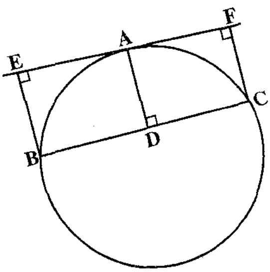


۲۸۵. از نقطهٔ A مماس AB و قاطع ACD به دایره‌ای رسم شده است. ثابت کنید:

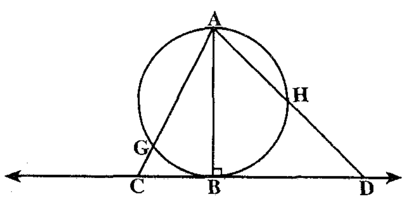
$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC^{2}}{BD^{2}}$$



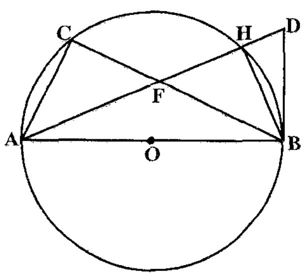
۲۸۶. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. مماس بر دایره در نقطهٔ B، قاطع AD از این دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید: $AB=\sqrt{AD.AC}$



۲۸۷. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ تماس تا وتر در هر دایره، واسطهٔ هندسی است بین فاصله‌های دو سر وتر تا خط مماس.

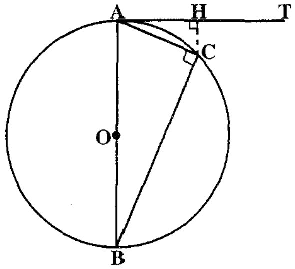


۲۸۸. در شکل، AB قطر دایره و CD درنقطهٔ B بر دایره مماس است. ثابت کنید:
$AC.AG=AD.AH$



۲۸۹. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. وتر دلخواه AC و نیمساز زاویهٔ CAB را رسم می‌کنیم. این نیمساز، وتر BC را در نقطهٔ F، و دایره را درنقطهٔ H، و مماسی را که بر دایره در نقطهٔ B رسم می‌شود، در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید $DF^{2}=DA.DH$.

۲۹۰. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R مفروض است. از نقطهٔ A واقع بر محیط این دایره، قطر AB و وتر AC و مماس AT را رسم کرده، از C عمود CH را بر این مماس رسم می‌کنیم.



۱. ثابت کنید : $AC^2 = AB \times HC$

۲. در حالتی که مساحت مثلث ABC چهار برابر مساحت مثلث ACH باشد، طول ضلعهای دو مثلث را حساب کنید.

۲۹۱. در این شکل، O مرکز دایره است، AB⊥BC و ADOE خطی است راست، $\overline{AP} = \overline{AD}$ و طول AB، دو برابر شعاع است. در این صورت :

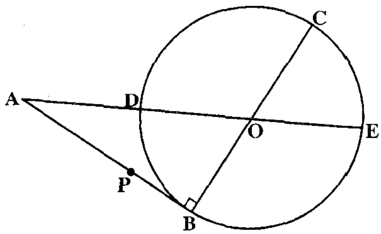
الف) $\overline{AP}^2 = \overline{PB}.\overline{AB}$

ب) $\overline{AP}.\overline{DO} = \overline{PB}.\overline{AD}$

ج) $\overline{AB}^2 = \overline{AD}.\overline{DE}$

د) $\overline{AB}.\overline{AD} = \overline{OB}.\overline{AO}$

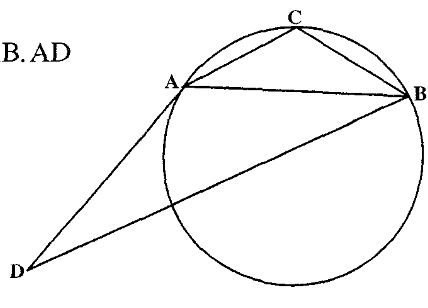
هـ) هیچ‌یک از اینها



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۲۹۲. در دایره‌ای وتر AB را رسم نموده، از نقطهٔ C وسط کمان $\overset{\frown}{ABC}$، به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. سپس روی مماس در A، طول AD را برابر AB جدا کرده، پاره‌خط BD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

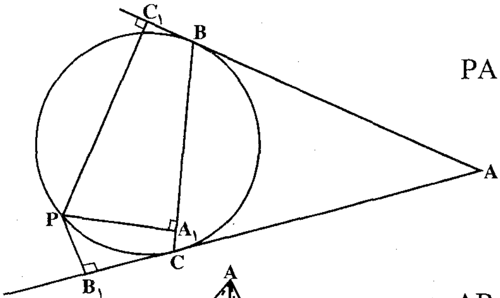
$$AC.BD = AB.AD$$



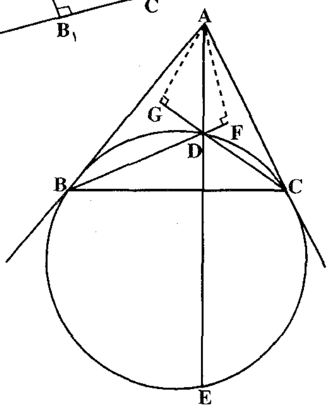
۴.۱۱.۳. رابطه‌های متری مربوط به دو یا چند مماس و قاطعهای رسم شده نسبت به دایره

۲۹۳. از نقطهٔ A مماسهای AB و AC بر دایره‌ای رسم شده است؛ و از نقطهٔ P واقع بر دایره عمودهای PA_1، PB_1 و PC_1 بر خطهای BC، CA و AB رسم شده است. ثابت کنید که:

$$PA_1^2 = PB_1 . PC_1$$

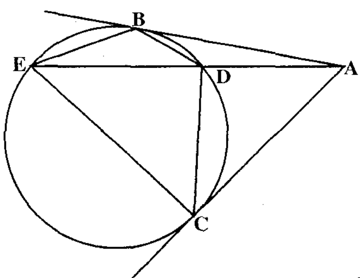


۲۹۴. از نقطهٔ A خارج دایره، دو مماس AB و AC و قاطع ADE را بر آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید فاصله‌های نقطهٔ A از دو وتر DB و DC، متناسب با این دو وتر می‌باشد.

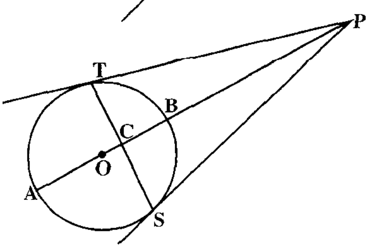


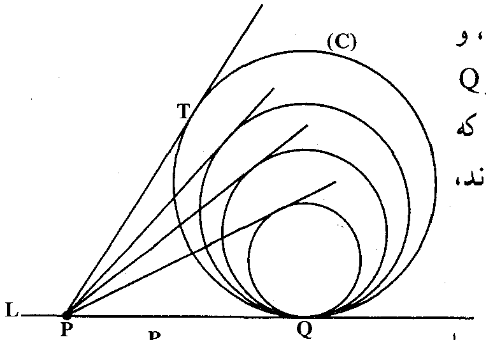
۲۹۵. از نقطهٔ A مماسهای AB و AC و قاطع ADE نسبت به یک دایره رسم شده‌اند، ثابت کنید:

$$BD.CE = BE.CD$$

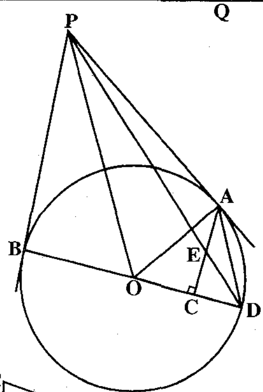


۲۹۶. فرض کنید، PT و PS مماسهای رسم شده بر دایره مفروض از یک نقطهٔ خارجی مانند P باشند. و فرض کنید، TS، قاطع قطری PBA را در C قطع کند، نشان دهید که PC میانگین همساز PA و PB است.

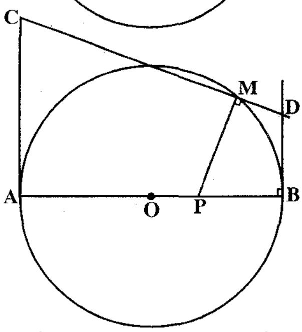




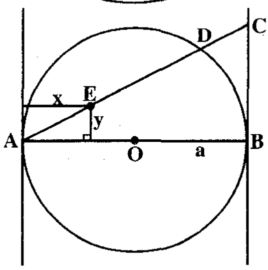
۲۹۷. خط L، دو نقطهٔ P و Q روی آن، و تمام دایره‌های مماس بر L در Q مفروضند. ثابت کنید که پاره‌خطهایی که از P براین دایره مماس می‌شوند، همنهشتند.



۲۹۸. مماسهای PA و PB از نقطهٔ P بر دایره‌ای رسم شده است. از نقطهٔ B قطر BD را کشیده، و از A عمود AC را بر قطر فرود می‌آوریم. ثابت کنید، خط AC به وسیلهٔ PD نصف می‌شود.



۲۹۹. دایره‌ای به قطر AB را در نظر گرفته، نقطهٔ P را روی قطر و نقطهٔ M را روی دایره اختیار می‌کنیم و از M عمودی بر MP اخراج می‌کنیم تا مماسهای در A و B بر دایره را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید $MP^2 = MC.MD$.



۳۰۰. مطابق شکل، AB قطر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع a، و AD وتری از آن است. امتداد این وتر، مماس بر دایره در نقطهٔ B را در C قطع کرده است. نقطهٔ E روی AC طوری انتخاب شده که $AE = DC$. اگر فاصله‌های E را از مماس در نقطهٔ A و از قطر AB بترتیب با x و y نشان دهیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

الف) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ ب) $y^2 = \frac{x^3}{2a + x}$ ج) $y^4 = \frac{x^2}{2a - x}$ د) $x^2 = \frac{y^2}{2a - x}$

هـ) $x^2 = \frac{y^2}{2a + x}$

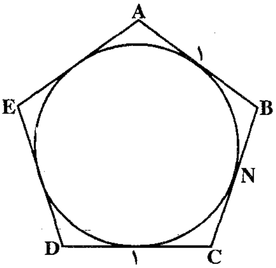
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۳۰۱. بر دایرهٔ به قطر AB مماسهای AD و BC طوری رسم شده‌اند که خطهای AC و BD یکدیگر را در روی دایره قطع می‌کنند. اگر $AD = a$ و $BC = b$ و $a \neq b$، آن‌گاه قطر دایره برابر است با:

الف) $|a-b|$ ب) $\frac{a+b}{2}$ ج) $\sqrt{ab}$ د) $\frac{ab}{a+b}$ هـ) $\frac{ab}{2(a+b)}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

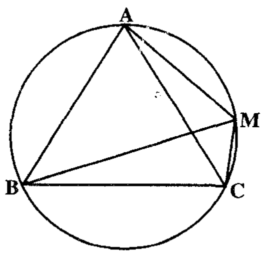
۳۰۲. بردایره‌ای یک پنج‌ضلعی محیط کرده‌ایم که طول همهٔ ضلعهای آن عددهای درستند. در ضمن طول ضلعهای اول و سوم برابر واحد است. ضلع دوم، در نقطهٔ تماس خود با دایره، به چه پاره‌خطهای راستی تقسیم می‌شود.



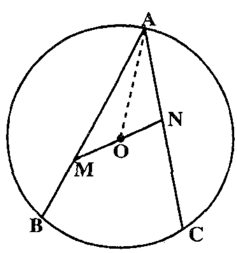
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

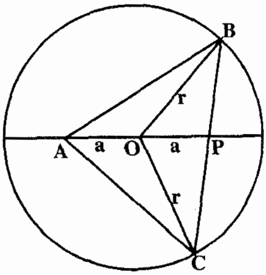
۳.۱۱.۵. رابطه‌های متری مقدار ثابت

۳۰۳. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ دلخواه از دایره‌ای، تا رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره، مقدار ثابتی است که مستقل از موقعیت نقطه است.

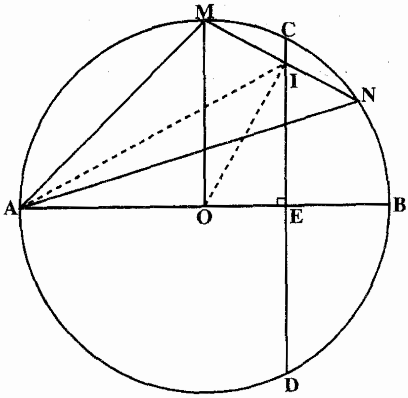


۳۰۴. از نقطهٔ A که روی دایره‌ای متحرک است، دو قاطع AMB و ANC را رسم می‌کنیم، تا از دو نقطهٔ ثابت M و N که نسبت به مرکز دایره قرینهٔ یکدیگرند، بگذرند و دایره را قطع کنند. ثابت کنید که $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC}$ همواره مقدار ثابتی است.

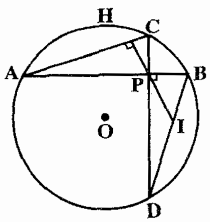




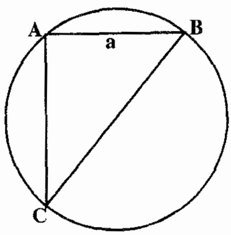
۳۰۵. روی یک قطر از دایرهٔ به مرکز O، دو نقطهٔ A و P، متساوی‌الفاصله از O قرار دارند. از P وتر PBC را با راستای متغیر رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع مجذورهای ضلعهای مثلث ABC، مقدار ثابتی است.



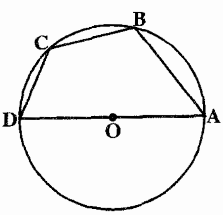
۳۰۶. دایره‌ای به مرکز (O) و به قطر AB و وتر CD از آن را که عمود منصف OB است، در نظر می‌گیریم. وترهای MN در این دایره طوری تغییر می‌کنند که وسطهایشان، همواره بر CD واقع است. ثابت کنید $\overline{AM}^2+\overline{AN}^2$ مقداری است ثابت.



۳۰۷. از نقطهٔ P واقع در داخل دایرهٔ O دو وتر عمود بر هم AB و CD رسم شده است و از نقطهٔ P عمود PH را بر AC رسم می‌کنیم تا BD را در I قطع کند. ثابت کنید $PI\times PH$ مقداری است ثابت.



۳۰۸. روی دایره‌ای به شعاع R نقطه‌های A و B مفروضند. فاصلهٔ بین آنها برابر a است. غیر از این دو، نقطهٔ دلخواه C نیز روی این دایره در نظر گرفته شده است. بزرگترین مقدار ممکنه برای عبارت AC^2+BC^2 را بیابید.

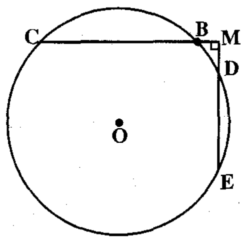


۳۰۹. اگر a، b و c وترهایی از دایرهٔ به شعاع x باشند که مجموع کمانهای آنها برابر π باشد، ثابت کنید:

$$4x^2-x(a^2+b^2+c^2)-abc=0$$

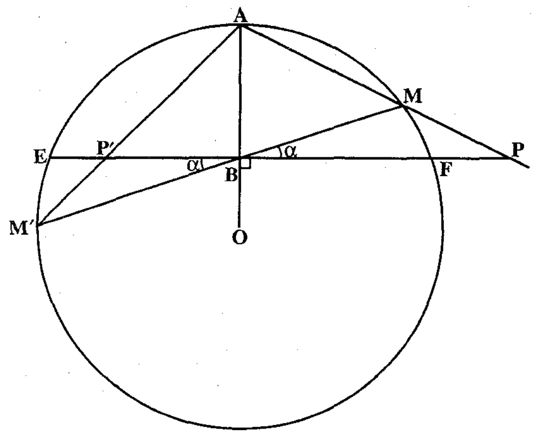
است.

۳۱۰. از نقطه‌ای مفروض، دو قاطع عمود برهم نسبت به دایرهٔ مفروض رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع مجذورهای وترهای حاصل، مقداری است ثابت. (قضیهٔ ارشمیدس)

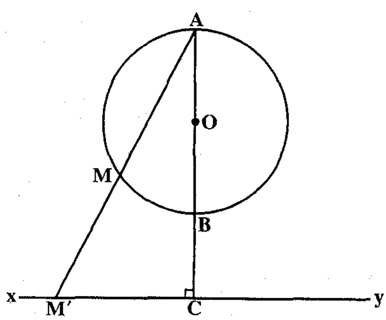


نکته. نقطهٔ M می‌تواند روی دایره و یا داخل دایره نیز باشد.

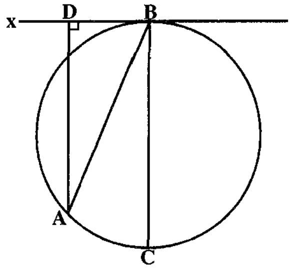
۳۱۱. دایرهٔ O و نقطهٔ A بر دایره و B نقطه‌ای از شعاع OA مفروضند، قاطع متحرکی که بر B می‌گذرد، دایره را در M و ′M قطع می‌کند. دو خط AM و ′AM عمودی را که از B بر AB اخراج شود، در P و ′P قطع می‌کنند. ثابت کنید که $BP \times BP'$ مقداری است ثابت.



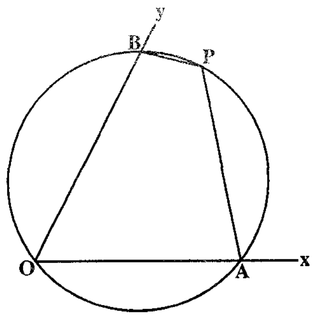
۳۱۲. دایرهٔ O و خط xy مفروض است. از نقطهٔ O خط عمودی بر xy فرود می‌آوریم، تا دایرهٔ O را در نقطه‌های A و B قطع کند؛ و از نقطهٔ A قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ دیگری مانند M، و خط xy را در نقطهٔ ′M قطع کند. ثابت کنید که وقتی خط قاطع حول A دوران کند، مقدار حاصلضرب $AM.AM'$ ثابت است.



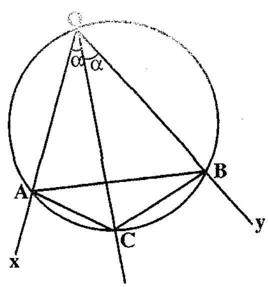
۳۱۳. نقطهٔ ثابت A و وتر متغیر BC در دایره‌ای مفروضند. از نقطهٔ A عمود AD را بر مماس رسم شده بر دایره از نقطهٔ B رسم می‌کنیم. ثابت کنید $AB^2 : AD$ مقدار ثابتی است.



۳۱۴. زاویهٔ xOy و نقطهٔ P مفروض است. از دو نقطهٔ O و P دایره‌ای به شعاع متغیر رسم می‌کنیم، تا Ox را در نقطهٔ A و Oy را در نقطهٔ B قطع کند. ثابت کنید که نسبت $\frac{PA}{PB}$ همیشه ثابت است.



۳۱۵. زاویهٔ $x\hat{O}y = ۲\alpha$ مفروض است. دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم به‌طوری که از O بگذرد، و نقطه‌های تلاقی این دایره با Ox و Oy و نیمساز xOy را بترتیب A، B و C می‌نامیم. ثابت کنید اگر شعاع دایرهٔ مزبور تغییر کند، $\frac{OA+OB}{OC}$ همواره ثابت می‌ماند.



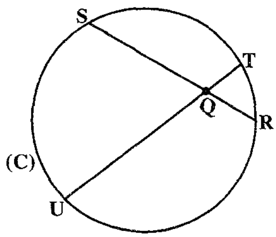
۳. ۱۲. قوت نقطه نسبت به دایره

۳. ۱۲. ۱. محاسبهٔ قوت نقطه نسبت به دایره

۳۱۶. قوت مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را، نسبت به دایرهٔ محیطی آن، برحسب r و R به‌دست آورید.

۳۱۷. کمترین مقدار جبری قوت یک نقطه نسبت به یک دایره چه‌قدر است؟ نقطهٔ نظیر این کمترین مقدار، کدام است؟

۳۱۸. قوت نقطهٔ Q نسبت به دایرهٔ (C) را (با توجه به شکل) بیابید، اگر :



الف) QS = ۹ و QR = ۵

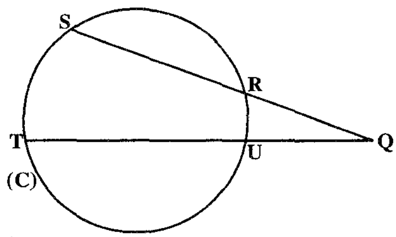
ب) QS = ۳ و SR = ۱۲

پ) QU = ۷ و QT = ۵

ت) QT = ۱ و TU = ۱۳

ث) QR = ۴ و SR = ۱۴

۳۱۹. قوت نقطهٔ Q نسبت به دایره را با توجه به شکل، بیابید، اگر :



الف) QR = ۴ و QS = ۱۳

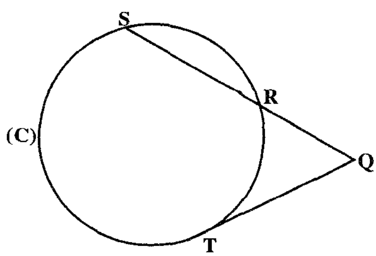
ب) QR = ۶ و RS = ۸

پ) QT = ۱۷ و UT = ۹

ت) $QU = \sqrt{۱۴}$ و $QT = \sqrt{۵۶}$

ث) QS = ۲۳ و RS = ۱۷

۳۲۰. در این شکل QT پاره‌خط مماس است. قوت نقطهٔ Q نسبت به (C) را بیابید، اگر :



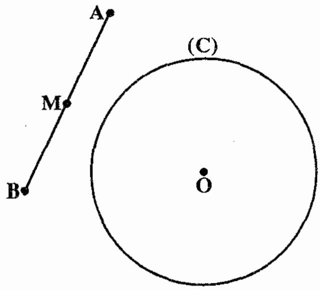
الف) QR = ۴ و QS = ۹ و QT = ۶

ب) QS = ۱۳ و RS = ۹

پ) QT = ۸ و RS = ۱۲

ت) $QR = \sqrt{۶}$ و $QS = \sqrt{۵۴}$

ث) $QS = \sqrt{۱۷}$ و $QT = \sqrt{۱۳}$

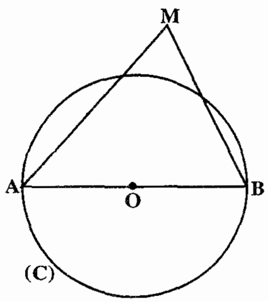


۳۲۱. دایرهٔ $C(O,R)$ و دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ آن مفروضند. اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، ثابت کنید :

۱. $P_{M(C)} < \frac{P_{A(C)} + P_{B(C)}}{۲}$

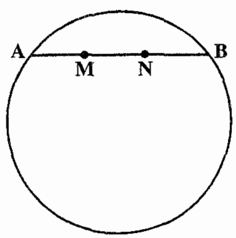
۲. اگر مجموع قوتهای دو نقطهٔ A و B نسبت به دایرهٔ (C) برابر صفر باشد، نقطهٔ M درون دایرهٔ (C) قرار دارد.

۳. اگر دو نقطهٔ A و B ثابت، و دایرهٔ (C) تغییر کند به طوری که همواره M روی آن باشد، لازم و کافی است که $P_{A(C)} + P_{B(C)} = \frac{AB^۲}{۲}$ باشد.



۳۲۲. دایرهٔ (C) و نقطهٔ ثابت M مفروضند. فرض می‌کنیم AB قطر متغیری از دایرهٔ (C) باشد. ثابت کنید، حاصل ضرب $MA.MB\cos A\hat{M}B$ به وضع قطر AB بستگی نداشته و برابر است با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (C).

۳۲۳. اگر قدر مطلق قوت نقطه نسبت به دایره، برابر $l^۲$ باشد، تعبیر هندسی طول l چیست؟



۳۲۴. وتر AB از دایرهٔ مفروض (C) را به nقسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. نسبت قوتهای نقطهٔ تقسیم kام، به نقطهٔ تقسیم mام را پیدا کنید. $(۱ \le k < m < n)$

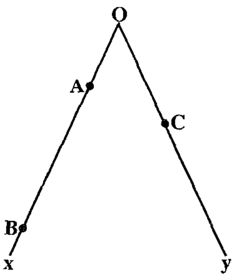
۳ . ۱۲ . ۲. سایر مسأله‌های مربوط به قوت نقطه

۳۲۵. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای که قوتش نسبت به دایره مفروضی، مقدار معلوم l باشد.

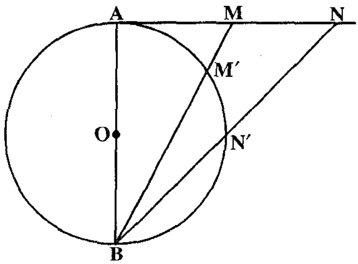
۳۲۶. بر روی خط، یا دایره مفروضی، نقطه‌ای به‌دست آورید، که قوت آن نسبت به دایرهٔ مفروضی، مساوی مقدار معین P باشد.

۳. ۱۳. ثابت کنید نقطه‌ها روی یک دایره‌اند

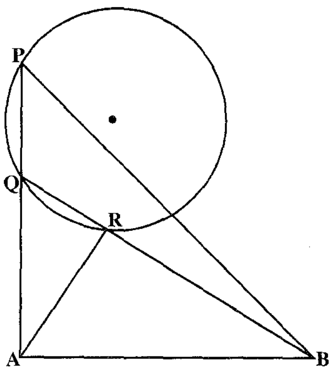
۳۲۷. زاویهٔ xOy مفروض است. روی Ox نقطه‌های A و B و روی Oy نقطهٔ C را چنان اختیار می‌کنیم که $OA = ۴$ ، $AB = ۵$ و $OC = ۶$ باشد. ثابت کنید که نقطه‌های A، B و C روی یک دایره‌اند.



۳۲۸. دایره‌ای به قطر AB را در نظر گرفته، روی مماس در نقطهٔ A بر دایره، نقطه‌های دلخواه M و N را اختیار کرده، فصل مشترک BM و BN را با دایره بترتیب M' و N' می‌نامیم. ثابت کنید نقطه‌های M، N، M' و N' روی یک دایره‌اند.



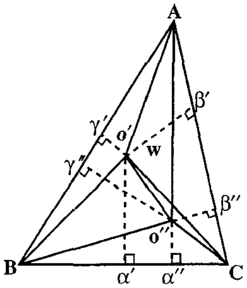
۳۲۹. شش مثلث PAB، QAB، RAB، $P'AB$، $Q'AB$ و $R'AB$ با هم متشابه‌اند و همه در ضلع AB مشترکند. در شکل، فقط سه تا از این مثلثها رسم شده است، که سه تای دیگر، از تقارن نسبت به عمودمنصف AB به‌دست می‌آیند. ثابت کنید که رأسهای این مثلثها که روی AB نیستند، یعنی نقطه‌های P، Q، R، P' ، Q' و R' روی یک دایره واقعند.



۳۳۰. دایره‌ای به شعاع واحد، و چهار نقطه روی محیط آن داده شده است. از هر دو نقطهٔ مجاور، دایره‌ای به شعاع واحد گذرانده‌ایم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ برخورد دیگر دایره‌های اخیر، روی محیط یک دایره قرار دارند.

المپیاد ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۳۳۱. در مثلث ABC اگر AA'، BB' و CC' در نقطهٔ O' همرس باشند :



۱. هم زاویهٔ آنها، خطهای AA''، BB'' و CC'' در نقطهٔ O'' همرس خواهند بود.

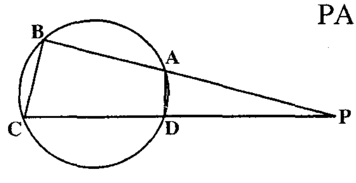
۲. تصویرهای O' و O'' روی ضلعهای مثلث، شش نقطه واقع بر محیط یک دایره‌اند.

۳. ۱۴. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳۳۲. پاره‌خطهای قاطع PB و PC، دایره را بترتیب در دو نقطهٔ A و D قطع می‌کنند. ثابت کنید :

۱. $\Delta PAD \sim \Delta PCB$

۲. $PA.PB = PC.PD$

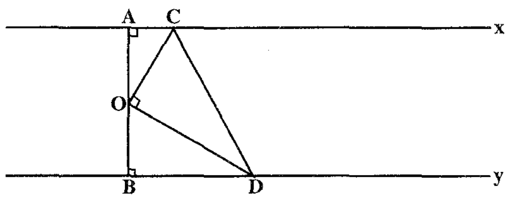


۳۳۳. خط L دایرهٔ W به مرکز O را قطع نمی‌کند. E نقطه‌ای روی خط L است. به‌طوری که OE بر L عمود است. M نقطهٔ دیگری روی L است. $(M \neq E)$. A، و B نقطه‌های تماس مماسهای وارد بر دایرهٔ W از نقطهٔ M با این دایره است، C نقطه‌ای روی MA است ؛ به گونه‌ای که EC بر MA عمود است، و D نقطه‌ای روی MB است ؛ به‌گونه‌ای که ED بر MB عمود است. خط CD، خط OE را در F قطع می‌کند. ثابت کنید که موقعیت F ثابت است و با تغییر نقطهٔ M، نقطهٔ F تغییر نمی‌کند.

مسألهٔ پیشنهادی المپیاد ریاضی هنگ‌کنگ، ۱۹۹۴

۳۳۴. بر دایرهٔ (C) به مرکز O، سه کمان $\overparen{AB}$ و $\overparen{CD}$ و $\overparen{EF}$ هم‌جهت بوده و اندازه هر یک 60° است. اگر B' وسط OB و E' وسط OE و M ، N و P وسطهای وترهای BC ، DE و AF باشند، ثابت کنید هر یک از مثلثهای $PB'E'$ و PMN متساوی‌الاضلاع هستند.

۳۳۵. دو خط متوازی مفروضند. از نقطهٔ اختیاری A واقع روی x، عمودی بر y فرود می‌آوریم تا آن را در نقطهٔ B قطع کند، و در یک طرف AB نقطهٔ C را روی x و نقطهٔ D را روی y طوری اختیار می‌کنیم که اگر O وسط AB باشد، زاویهٔ COD قائمه شود. ثابت کنید که CD با دایرهٔ به قطر AB مماس است.



۳۳۶. دایرهٔ فیثاغورسی. فیثاغورس، آن‌طور که شاگرد او پروکلس می‌گوید، با دلبستگی زیادی روی تصاعدها، چه حسابی و چه هندسی، کار می‌کرد. به همین مناسبت ممکن است فکر دایرهٔ فیثاغورسی، که در کتاب یامولی شاگرد فیثاغورس آمده است، مربوط به خود فیثاغورس باشد.

دایرهٔ فیثاغورسی براساس بعضی مقابله‌های جالب عددی، درست شده است ؛ یعنی ؛ اگر در طول محیط دایره رشتهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا n را بنویسیم و سپس در جهت مخالف، از n تا ۱، در این صورت، مجموع تمام این عددها مساوی n^2 می‌شود.

در حقیقت، دایرهٔ فیثاغورسی عبارت است از مجموع دو تصاعد :

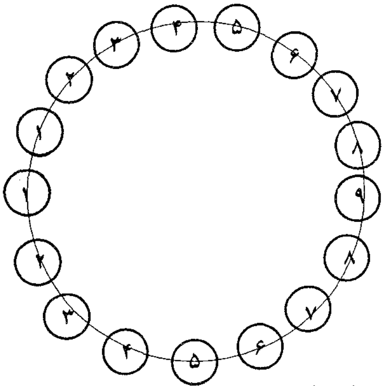
$$1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$$

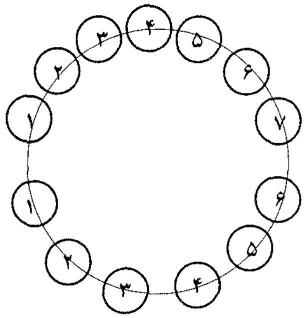
و عدد n .

مجموع $n-1$ عدد از رشتهٔ طبیعی عددها، که از واحد شروع شده باشد، برابر است با :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین مجموع دو تا از این تصاعدها، مساوی $n(n-1)$، یعنی n^2-n، که اگر عدد n را به این مجموع اضافه کنیم، به دست می‌آید: $n^2-n+n=n^2$





این مسأله را می‌توان به صورت کلی‌تری مطرح کرد:

مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا n را به S_n نشان می‌دهیم:

در این صورت تساوی یامولی چنین می‌شود:

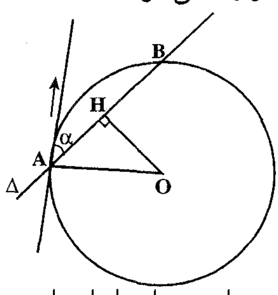
$$2S_{n-1}+n=n^2$$

وقتی که رشتهٔ عددهای طبیعی را مطالعه می‌کنیم، متذکر می‌شویم که برای $n=2$ داریم $S_{n-1}<n$، برای $n=3$ داریم $S_{n-1}=n$ و برای $n>3$ داریم $S_{n-1}>n$.

بنابراین می‌توان این قضیه را بیان کرد:

اگر مربع عدد صحیح $n>3$ را بر مجموع همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $n-1$ تقسیم کنیم، خارج‌قسمت مساوی ۲ و باقیماندهٔ تقسیم مساوی n می‌شود.

۳۳۷. ثابت کنید تمام خطهایی که با دایرهٔ $C(O,R)$ زاویهٔ معلوم α می‌سازند، بر دایرهٔ به مرکز O و شعاع $R\cos\alpha$ مماسند. $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$



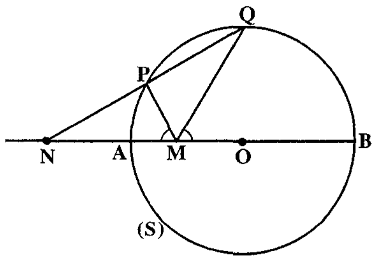
۳۳۸. ثابت کنید، خط شکستهٔ بستهٔ با پیرامون برابر واحد را، می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر $\frac{1}{4}$، پوشاند (خط شکسته روی یک صفحه قرار دارد).

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۳۳۹. دست‌کم، چند دایره به شعاع واحد لازم است تا بتوان با آنها، دایرهٔ به شعاع ۱/۵ را به طور کامل پوشاند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۳۴۰. نقطهٔ M روی قطر AB از دایرهٔ S (و غیر از مرکز دایره) قرار دارد. دو نقطهٔ مختلف P و Q را در یک طرف قطر AB، روی محیط دایره، طوری انتخاب کرده‌ایم که دو زاویه‌ای که PM و QM با قطر AB می‌سازند، با هم برابر باشند. ثابت کنید همهٔ خطهای راست PQ از یک نقطه می‌گذرند.



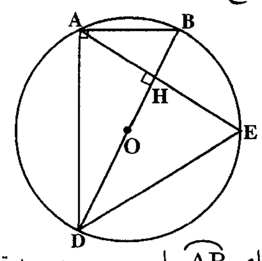
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۳۴۱. دایرهٔ C در نقطه‌های A و B بترتیب بر ضلعهای Ox و Oy از زاویهٔ xOy مماس است. از A خطی به موازات Oy رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ P قطع کند. اگر پاره‌خطی که وسط OB را به A وصل می‌کند دایره را در نقطهٔ E قطع کند، ثابت کنید نقطه‌های P، E و O بر یک خط راست واقعند.

سومین المپیاد آزمایشی ایران، ۱۳۷۲

۳. ۱۵. مسأله‌های ترکیبی

۳۴۲. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R مفروض است. وتر AB به طول R را در این دایره در نظر می‌گیریم :



۱. اندازهٔ هر یک از کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ را برحسب درجه تعیین کنید.

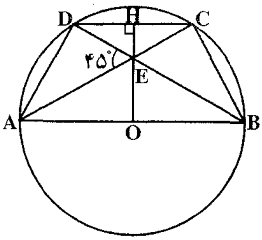
۲. عمودی که در نقطهٔ A بر AB اخراج می‌شود دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. از D به B وصل می‌کنیم. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ADB را بیابید.

۳. اندازهٔ وترهای DB و DA، همچنین مساحت مثلث ABD را برحسب R به‌دست آورید.

۴. عمودی که از نقطهٔ A بر BD رسم می‌شود، دایره را در نقطهٔ E و BD را در نقطهٔ H قطع می‌کند. ثابت کنید که مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است ؛ و اندازهٔ پاره‌خطهای DH و AH را برحسب R حساب کنید.

در حالتی که $R=10$ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ADE را تعیین کنید.

۳۴۳. در دایره‌ای به شعاع R، ذوزنقهٔ محدب ABCD محاط است به قسمی که قاعدهٔ بزرگ آن AB قطر دایره، و زاویهٔ AED ایجاد شده بین قطرها، برابر 45° است.

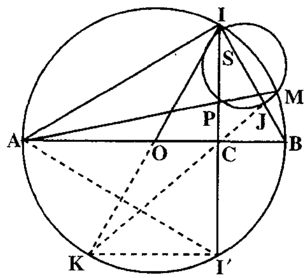


۱. اندازهٔ کمان $\widehat{DC}$ و زاویه‌های ذوزنقه را برحسب درجه بیابید.

۲. اندازهٔ ضلعهای ذوزنقه، همچنین اندازهٔ مساحت آن را برحسب R تعیین کنید.

۳. مساحت قسمتی از دایره، محصور بین وترهای AD، CB و DC را برحسب R به‌دست آورید.

۳۴۴. دایرهٔ به مرکز O و به قطر $AB=2R$ مفروض است. نقطهٔ ثابت C را روی AB و نقطهٔ متحرک M را روی دایره در نظر گرفته، روی AM نقطهٔ P را چنان تعیین می‌کنیم که $AP \times AM = AB \times AC$ باشد. ثابت کنید:



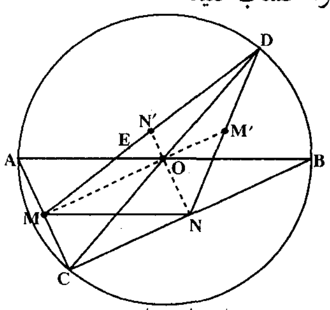
۱. دو مثلث APC و AMB متشابه‌اند و نقطه‌های B، M، C و P روی یک دایره قراردارند و مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی نقطهٔ M روی دایره حرکت کند، تعیین کنید.

۲. فرض کنیم I و I′ دو نقطهٔ برخورد خط عمود وارد از C بر AB، با دایره باشند. ثابت کنید $\overline{AI}^2 = AP.AM$ و به کمک آن، مکان هندسی نقطهٔ S مرکز دایرهٔ محیطی مثلث IPM را به دست آورید.

۳. اگر J سر دیگر قطری از دایرهٔ S باشد که از I می‌گذرد، ثابت کنید که خط MJ همواره از نقطهٔ ثابتی عبور می‌کند.

۴. اگر $AC=\frac{18R}{25}$ باشد و نقطهٔ P را بر وسط IC اختیار کنند، طولهای AI، BI، AP، AM و MI و شعاع دایرهٔ به مرکز S را حساب کنید.

۳۴۵. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R مفروض است. قطر ثابت AB و قطر متغیر CD از آن را در نظر گرفته، نقطهٔ D را به نقطه‌های M و N وسطهای وترهای CA و CB وصل می‌کنیم تا AB را در E و F قطع کنند. ثابت کنید که:



۱. مجموع مجذورهای طول ضلعهای مثلث DMN مقدار ثابتی است.

۲. مجذور طول یکی از میانه‌های این مثلث، مساوی است با مجموع مجذورهای طول دو میانهٔ دیگر.

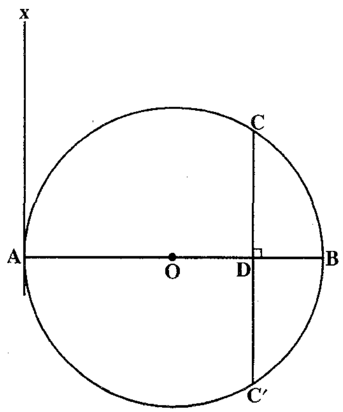
۳. در چهارضلعی MNFE مجذور طول ضلع MN مساوی است با مجموع مجذورهای طولهای سه ضلع دیگر.

۴. مطلوب است تعیین مکان هندسی وسطهای ضلعهای مثلث MDN .

۵. مطلوب است تعیین مکان هندسی تصویرهای نقطه‌های A و B روی DM و DN .

۶. مطلوب است تعیین نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقهٔ MEFN .

۳۴۶. دایره‌ای به قطر $AB = 2R$ و نقطهٔ D وسط شعاع OB مفروض است. از نقطهٔ A خط Ax را مماس بر دایره رسم کرده و از نقطهٔ D وتر CC' را بر قطر AB عمود می‌کنیم و نقطهٔ غیرمشخص K را روی Ax در نظر می‌گیریم :



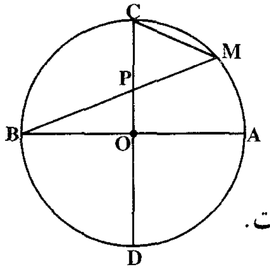
۱. از نقطهٔ K خطی مرور دهید تا دایره را در M و N، و وتر CC' را در نقطهٔ F قطع نماید، چنان که نقطهٔ F وسط MN باشد. به علاوه حدودی را که نقطهٔ K باید روی Ax حرکت کند تا مسأله ممکن باشد، تعیین کنید.

۲. اگر K روی Ax حرکت کند، مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث AMN ؛ به علاوه ثابت کنید که $AM^2 + LN^2$ همواره مقداری است ثابت که مقدار آن را تعیین خواهید کرد.

۳. مطلوب است محاسبهٔ ضلعهای مثلث AMN برحسب R و a، در صورتی که فاصلهٔ نقطهٔ A از خط KMN برابر a باشد.

۴. اگر از نقطهٔ K' واقع بر روی Ax خط $K'M'N'$ را به روش بالا مانند KMN رسم کنیم و F' محل تلاقی آن با وتر CC' باشد، مطلوب است تعیین مکان هندسی محل برخورد ارتفاعهای مثلث PFF' (P محل برخورد MN و $M'N'$ است).

۳۴۷. دایرهٔ به مرکز O و دو قطر عمود بر هم AB و CD از آن را در نظر می‌گیریم. M را نقطهٔ وسط کمان $\widehat{AC}$ و P را نقطهٔ برخورد MB با OC می‌نامیم :



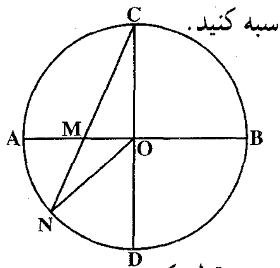
۱. ثابت کنید که مثلث PMC متساوی‌الساقین است.

۲. ثابت کنید که پاره‌خط CM واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط CP و CO است.

۳. اندازهٔ پاره‌خطهای PC، CM و مساحت مثلث PMC را برحسب شعاع دایره $R = ۲cm$ تعیین کنید.

۴. تانژانت زاویهٔ $۲۲°, ۳۰'$ را تا $\frac{۱}{۱۰۰}$ تقریب محاسبه کنید.

۳۴۸. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R مفروض است. دو قطر عمود برهم AB و CD از این دایره را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ C وتری رسم می‌کنیم که دایره را در نقطهٔ N و قطر AB را در نقطهٔ M که بین دو نقطهٔ A و B واقع است، قطع کند.

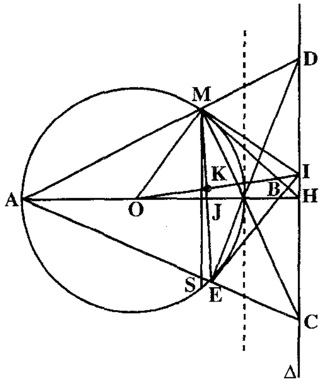


۱. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که بر دایرهٔ (O) در نقطهٔ N مماس داخل، و بر قطر AB در نقطهٔ M مماس است. مرکز این دایره را بیابید.

۲. ثابت کنید که CM.CN مقدار ثابتی است و اندازهٔ این مقدار ثابت را تعیین کنید.

۳. نقطهٔ N روی دایرهٔ (O) چه وضعی باید داشته باشد تا دایرهٔ (I) بر قطر CD نیز مماس باشد؟ در این حالت اندازهٔ زاویه‌های مثلث OCN، همچنین اندازهٔ شعاع دایرهٔ (I) را تعیین کنید.

۳۴۹. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و قطر AB از این دایره عمود بر خط مفروض Δ را در نظر می‌گیریم (نقطهٔ B بین دو نقطهٔ O و H واقع است). M نقطه‌ای دلخواه از دایره است. خطهای AM، BM و خط مماس بر دایره در نقطهٔ M، خط Δ را بترتیب در نقطه‌های D، C و I و خط AC دایره را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند :



۱. ثابت کنید که خط DB از نقطهٔ E می‌گذرد.

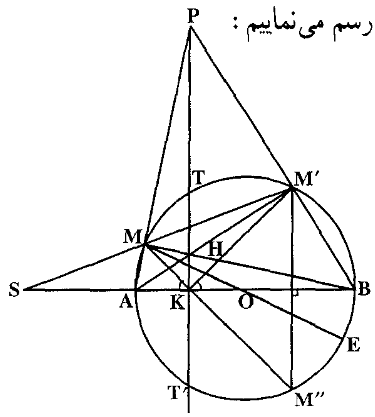
۲. ثابت کنید که مثلث ICM متساوی‌الساقین است (نقطهٔ I وسط پاره‌خط DC است).

۳. دوپاره خط IE و IM را با هم مقایسه کنید و ثابت کنید که IE مماس بر دایره است.

۴. ثابت کنید که چهارضلعی AMHC قابل محاط شدن در یک دایره است. مکان هندسی مرکز این دایره را وقتی نقطهٔ M روی دایرهٔ به مرکز O تغییر مکان می‌دهد، تعیین کنید.

۵. اگر K نقطهٔ برخورد OI و ME و J نقطهٔ برخورد ME با AB باشد، ثابت کنید که $\overline{OJ}.\overline{OH}=\overline{OI}.\overline{OK}=R^2$ ؛ سپس از روی این رابطه ثابت کنید که ME از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد، هنگامی که نقطهٔ M روی دایره تغییر مکان می‌دهد.

۳۵۰. دایرهٔ به مرکز O و قطر AB مفروض است. نقطهٔ S را روی امتداد این قطر و در خارج دایره (نقطهٔ A بین S و B است) اختیار می‌کنیم. از نقطهٔ S قاطعی رسم می‌کنیم که دایره را در دو نقطهٔ M و 'M قطع کند (M بین S و 'M). و بالاخره وتر ''M'M را عمود بر AB رسم می‌نماییم:



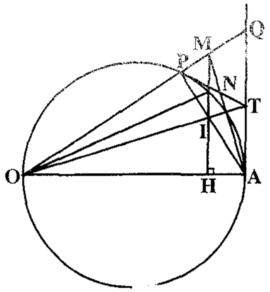
۱. ثابت کنید که KM و 'KM با AB زاویه‌های مساوی می‌سازند (K نقطهٔ برخورد ''MM با AB است).

۲. ثابت کنید که دو مثلث OKM و OMS متشابه‌اند ؛ رابطهٔ $\overline{OK}.\overline{OS}=R^2$ ، (R شعاع دایرهٔ O) برقرار است ؛ خط 'MM از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۳. BM و 'AM در نقطهٔ H متقاطعند. ثابت کنید که چهارضلعی MHKA در یک دایره قابل محاط شدن است، و HK عمود بر AB است.

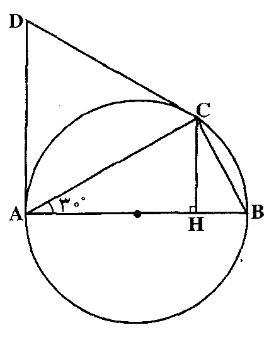
۴. AM و 'BM در نقطهٔ P متقاطعند. مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی 'SMM حول نقطهٔ S می‌چرخد، تعیین کنید.

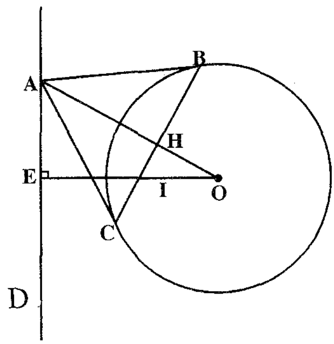
۳۵۱. دایره‌ای به قطر $AO = 2R$ مفروض است. از نقطهٔ A مماسی بر آن دایره رسم کرده از O قاطعی مرور می‌دهیم که دایره را در P و خط مماس را در نقطهٔ Q قطع کند و فرض می‌کنیم نقطهٔ M مزدوج توافقی O نسبت به P و Q باشد. از M عمودی بر AO فرود می‌آوریم تا دایره را در N و OA را در H و AP را در I قطع کند.



۱. ثابت کنید که OI بر AM عمود است.
۲. ثابت کنید که خطهای OI و AQ و مماس در نقطهٔ P بر دایره، همرس هستند.
۳. ثابت کنید که: $\overline{HM}^2 = 2\overline{HN}^2$ و $\overline{OM}^2 + \overline{OI}^2 = 2\overline{ON}^2$
۴. در حالتی که $A\hat{O}Q = 30^\circ$ باشد، طولهای AP و AQ و طول ضلعهای مثلث OAN و طول MH را حساب کنید.

۳۵۲. دایرهٔ به قطر $AB = 2R$ مفروض است. وتر AC را چنان رسم می‌کنیم که $B\hat{A}C = 30^\circ$ باشد.
۱. ضلعهای مثلث ABC را برحسب R حساب کنید.
۲. روی خط مماس در نقطهٔ A بر دایره، در همان طرفی از دایره که نقطهٔ C واقع است، نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $AD = 2CH$ (H پای ارتفاع رأس C از مثلث ABC است) باشد. ثابت کنید که خط DC بر دایره مماس است.
۳. مساحت چهارضلعی محدب $ABCD$ را برحسب R به دست آورید. همچنین مساحت قسمتی از مثلث ADC را که در خارج دایره واقع است، تعیین کنید.





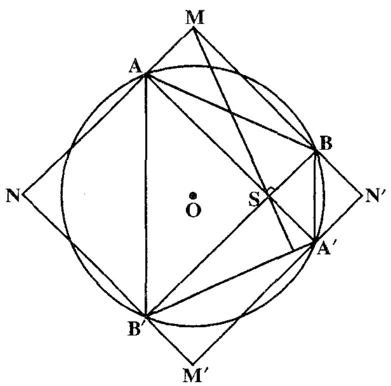
۳۵۳. دایرهٔ (O) و خط D در خارج آن مفروضند. از نقطهٔ A واقع بر خط D مماسهای AB و AC را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. خط OE که از نقطهٔ O عمود بر خط D رسم می‌شود، BC را در نقطهٔ I و OA وتر BC را در نقطهٔ H قطع می‌کند:

۱. مثلثهای OIH و OEA را با هم مقایسه کنید و ثابت کنید $OI.OE = OH.OA$.

۲. ثابت کنید که $OH.OA = OB^2$، و هنگامی که نقطهٔ A روی خط D حرکت می‌کند، خط BC از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳. شعاع دایرهٔ (O) را R و $OE = d$ فرض می‌کنیم. طول پاره‌خط OI را برحسب d و R حساب کنید.

۴. مکان هندسی نقطهٔ H را وقتی نقطهٔ A روی خط D تغییر مکان می‌دهد، همچنین مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC را بیابید.



۳۵۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R، نقطهٔ ثابت S داخل این دایره و دو وتر عمود بر هم AA' و BB' از این دایره را که از نقطهٔ S می‌گذرند، در نظر می‌گیریم. مستطیلهای SAMB، $SBN'A'$، $SA'M'B'$ و $SB'NA$ را می‌سازیم، ثابت کنید که:

۱. چهارضلعی $MN'M'N$ یک مستطیل به مرکز O است.

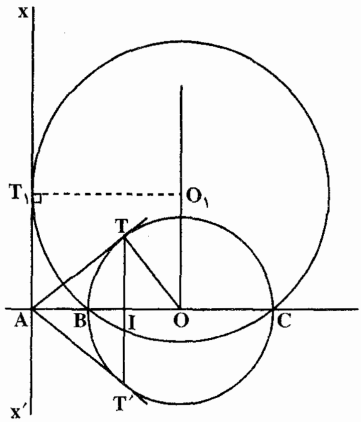
۲. خط MS بر $A'B'$ عمود است.

۳. در چهارضلعی محدب $ABA'B'$، مجموع مربعهای ضلعهای روبه‌رو با هم برابر است و $AB^2 + A'B'^2 = 4R^2$ است.

۴. $\overline{MN'}^2 + \overline{N'M'}^2$ مقدار ثابتی است.

۵. مکان هندسی رأسهای مستطیل $MN'M'N$ را وقتی خطهای AA' و BB' حول نقطهٔ S دوران کند، تعیین کنید.

۳۵۵. سه نقطهٔ A، B و C را روی یک خط راست چنان اختیار کرده‌ایم که $AB = ۱۶cm$ ، $BC = ۴۸cm$ و $AC = ۶۴cm$ است:

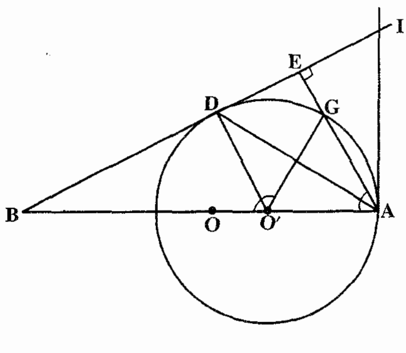


۱. پاره‌خط واسطهٔ هندسی بین دوپاره‌خط AB و AC را رسم، و اندازهٔ آن را تعیین کنید.

۲. از نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) به قطر BC، مماسهای AT و AT′ را رسم می‌کنیم. وتر TT′، BC را در نقطهٔ I قطع می‌کند، اندازهٔ AT، AT′، AI و TI را تعیین کنید.

۳. از نقطهٔ A عمود xAx′ را بر خط ABC رسم می‌کنیم. شعاع دایره‌ای را بیابید که بر دو نقطهٔ B و C می‌گذرد و بر خط xAx′ مماس است. یکی از این دایره‌ها را رسم کنید. چند تا از این دایره‌ها وجود دارد؟

۳۵۶. پاره‌خط AB مفروض است. نقطهٔ O وسط این پاره‌خط و O′ نقطه‌ای واقع بر OA است. دایره‌ای به مرکز O′ و به شعاع O′A رسم می‌کنیم؛ سپس مماس BD را بر این دایره رسم می‌کنیم و خط AE را عمود بر این خط مماس رسم می‌نماییم:



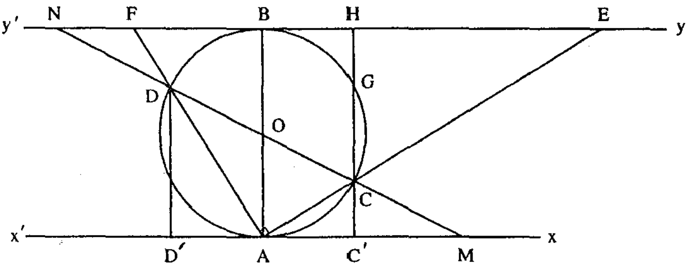
۱. مکان هندسی نقطهٔ E را وقتی نقطهٔ O′ روی پاره‌خط OA جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۲. ثابت کنید که AD نیمساز زاویهٔ BAE است.

۳. ثابت کنید که O′D نیمساز زاویهٔ BO′G است (G نقطهٔ برخورد AE با دایرهٔ O′ است).

۴. فرض می‌کنیم $OA = ۹cm$ و $O'A = ۵cm$ باشد. اندازهٔ پاره‌خطهای BD، BE، EA و AG را تا ۰/۰۰۱ (۱ mm) تقریب به دست آورید.

۳۵۷. دو خط متوازی $x'x$ و $y'y$ را در نظر می‌گیریم. AB یک عمود مشترک این دو خط است (نقطهٔ A روی $x'x$ و نقطهٔ B روی $y'y$ است). دایرهٔ (O) به قطر پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. یک زاویهٔ قائمه حول رأسش نقطهٔ A می‌چرخد. یکی از ضلعهای این زاویه، دایرهٔ (O) را در نقطهٔ C و $y'y$ را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ضلع دیگر این زاویه، دایرهٔ (O) را در نقطهٔ D و $y'y$ را در نقطهٔ F قطع کرده است. خط DC، $x'x$ را در نقطهٔ M و $y'y$ را در نقطهٔ N قطع می‌کند ؛ بالاخره C' و D' بترتیب تصویرهای قائم نقطه‌های C و D روی $x'x$ می‌باشند. ثابت کنید :



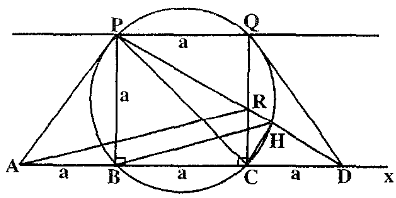
۱. مقدار $CC'+DD'$ ثابت است و $CC'.DD'=AC'^2$ است.

۲. رابطهٔ $AD.AF=AC.AE$ برقرار است.

۳. پاره‌خط NB واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط NE و NF است.

۴. فرض می‌کنیم $OM=2R$ و نقطهٔ C بین دو نقطهٔ O و M باشد. مساحت مثلثهای CAM و CEN را برحسب R شعاع دایرهٔ (O) تعیین کنید ؛ در حالتی از شکل که نقطهٔ M فقط روی نیمخط Ax و نقطهٔ N روی نیمخط By' جابه‌جا شوند.

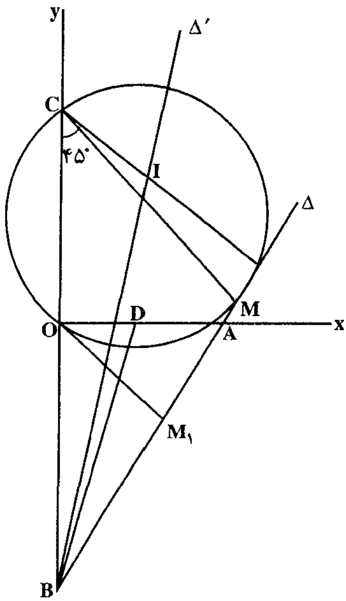
۳۵۸. روی نیمخط Ax سه نقطهٔ B، C و D چنان اختیار شده است که $AB=a$ ، $AC=2a$ و $AD=3a$ باشد. از نقطهٔ B خطی عمود بر Ax رسم نموده و روی آن نقطهٔ P را چنان اختیار می‌کنیم که $BP=a$ باشد، عمودی که از نقطهٔ C بر خط PD رسم می‌شود. این خط را در نقطهٔ H قطع می‌کند :



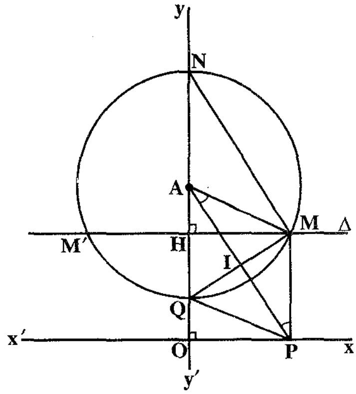
۱. ثابت کنید که نقطه‌های P، B، C و H روی یک دایرهٔ (O) واقعند که خط AP بر این دایره مماس است و خط HB نیمساز زاویهٔ H از مثلث PHC است.

۲. اندازهٔ پاره‌خطهای PD، HC و HD را بر حسب a تعیین کنید.
۳. از نقطهٔ P خطی موازی Ax رسم می‌کنیم که دایرهٔ (O) را در نقطهٔ Q قطع کند و نقطهٔ برخورد PD و QC را R می‌نامیم. ثابت کنید که خطهای QD و PC با هم موازی‌اند. اندازهٔ مساحت چهارضلعی PARQ را برحسب a تعیین کنید.

۳۵۹. زاویهٔ قائمهٔ xOy را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ ثابت A را روی Ox با فرض $OA = a$ و نقطهٔ متغیر C را روی Oy اختیار می‌کنیم. دایرهٔ محیطی مثلث OAC را رسم می‌کنیم و زاویهٔ OCM را مساوی °۴۵ محاط در این دایره رسم می‌نماییم. CM و Ox در یک طرف Oy واقعند.



۱. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی نقطهٔ C تغییر مکان می‌دهد، پیدا کنید.
۲. B را نقطهٔ برخورد مکان هندسی بالا با خط Oy در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که مثلثهای BOA و BMC متشابه‌اند؛ همچنین دو مثلث BOD و BMI متشابه‌اند (D وسط پاره‌خط OA و I وسط پاره‌خط CM است).
۳. مکان هندسی نقطهٔ I را وقتی نقطهٔ C تغییر مکان می‌دهد، پیدا کنید.
۴. فرض می‌کنیم $OA = ۲cm$ و $OC = ۶cm$ باشد. شکل را در این حالت رسم کنید. اندازهٔ پاره‌خط AM و مساحت چهارضلعی OAMC را تعیین کنید.



۳۶۰. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $Y'OY$ و نقطهٔ ثابت A روی OY مفروضند. خط Δ که موازی $x'x$ است، در نقطهٔ H که بین دو نقطهٔ O و A واقع است، Oy را قطع نموده است:

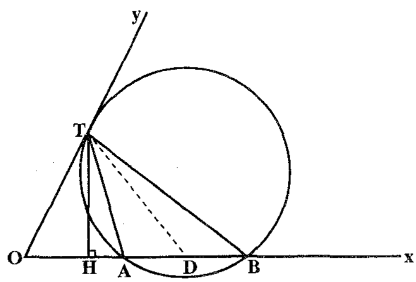
۱. روی خط Δ نقطهٔ M را چنان بیابید که از نقطهٔ A و از خط Δ به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره ممکن است؟

۲. اگر M نقطه‌ای با شرایط داده شده در بالا باشد، تصویر نقطهٔ M روی $x'x$ را P می‌نامیم و از نقطهٔ M خطی بر AP عمود می‌کنیم که خط AP را در نقطهٔ I و Oy را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید که چهارضلعی AMPQ لوزی است.

۳. از نقطهٔ M عمودی بر MQ رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید که وقتی نقطهٔ H روی Oy بین O و A تغییر مکان می‌دهد، اندازهٔ پاره‌خط HN ثابت می‌ماند.

۴. اگر x و y طول و عرض نقطهٔ M باشند، با فرض $\overline{OA} = a$، y را برحسب x و a حساب کنید.

۳۶۱. زاویهٔ xOy مساوی با ۶۰ درجه مفروض است. روی ضلع Ox دو نقطهٔ A و B را طوری اختیار می‌کنیم که $OA = ۴a$ و $OB = ۹a$ باشد.



۱. دایره‌ای رسم کنید که از نقطه‌های A و B بگذرد و با Oy مماس باشد.

۲. اگر نقطهٔ تماس را T بنامیم، طول ضلعهای مثلث ATB و شعاع دایره را برحسب a به‌دست آورید.

۳. نیمساز زاویهٔ ATB را رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در D قطع کند. ثابت کنید مثلث TDO متساوی‌الاضلاع است.

بخش ۴

● رابطه‌های متری در دو دایره

۴ . ۱ . رابطه‌های متری در دو دایره، در حالت کلی

۴ . ۱ . ۱. تعریف و قضیه

۴ . ۱ . ۲. نسبت مساحتها

۴ . ۱ . ۳. قوت نقطه نسبت به دایره

۴ . ۱ . ۴. محور اصلی دو دایره

۴ . ۱ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴ . ۲. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ برون هم (متخارج)

۴ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

۴ . ۲ . ۲. اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره

۴ . ۲ . ۳. اندازهٔ مماس مشترک دو دایره

۴ . ۲ . ۴. طول تسمه و محیط دایره

۴ . ۲ . ۵. مساحت شکلها

۴ . ۲ . ۶. رابطه‌های متری

۴ . ۲ . ۷. محور اصلی دو دایره

۴ . ۲ . ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴ . ۵. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ مماس درون

۴.۵.۱. تعریف و قضیه

۴.۵.۲. اندازهٔ شعاع

۴.۵.۳. اندازهٔ مساحت

۴.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۴.۵.۵. رابطه‌های متری

۴.۵.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴ . ۶. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۴.۶.۱. تعریف

۴.۶.۲. محور اصلی

۴ . ۷. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ هم مرکز

۴.۷.۱. تعریف

۴.۷.۲. اندازهٔ شعاع

۴.۷.۳. اندازهٔ محیط

۴.۷.۴. اندازهٔ مساحت

۴.۷.۵. رابطه‌های متری

۴.۷.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴.۷.۷. مسأله‌های ترکیبی

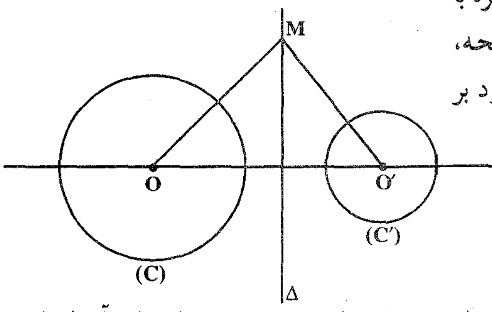
بخش ۴. رابطه‌های متری در دو دایره

۴. ۱. رابطه‌های متری در دو دایره، در حالت کلی

۴. ۱. ۱. تعریف و قضیه

تعریف محور اصلی دو دایره. مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت به دو دایره با مرکزهای متمایز و واقع در یک صفحه، قوتهای مساوی داشته باشد، **محور اصلی دو دایره** می‌نامند. قضیهٔ زیر این مکان هندسی را مشخص می‌کند.

۳۶۲. **قضیه.** محور اصلی دو دایره با مرکزهای متمایز واقع در یک صفحه، خط مستقیمی است عمود بر خط‌المرکزین آن دو دایره.



۳۶۳. **قضیه.** ثابت کنید نسبت مساحتهای دو دایره با مربع نسبت شعاعهای آنها برابر است.

۴. ۱. ۲. نسبت مساحتها

۳۶۴. قطرهای دو دایره بترتیب ۸ و ۱۲ سانتی‌مترند. نسبت مساحت دایرهٔ کوچکتر به مساحت دایرهٔ بزرگتر برابر است با:

الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $\frac{۴}{۹}$ ج) $\frac{۹}{۴}$

د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۳۶۵. شعاع دو دایره ۳ و ۱۲ سانتی‌متر است. نسبت مساحتهایشان چه‌قدر است؟

۳۶۶. نسبت مساحت دو دایره را که قطر یکی ۵ سانتی‌متر و شعاع دیگری ۲ سانتی‌متر است، تعیین کنید.

۳۶۷. محیطهای دو دایره ۶π و ۱۰π هستند. نسبت مساحتهای این دو دایره چه‌قدر است؟

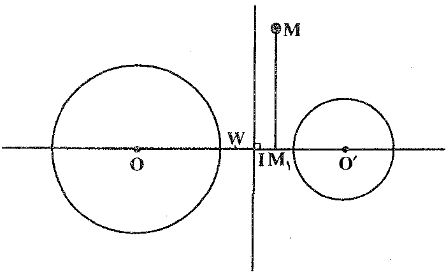
۳۶۸. اگر شعاع دایره‌ای ۴ برابر شعاع دایرهٔ دیگر باشد، نسبت قطرهایشان چه‌قدر است؟ نسبت محیطها و نسبت مساحتهای این دو دایره را بیابید.

۳۶۹. اگر طول یک کمان ۶۰ درجه از دایرهٔ I، با طول کمان ۴۵ درجه از دایرهٔ II برابر باشد، آن‌گاه نسبت مساحت دایرهٔ I به مساحت دایرهٔ II برابر است با :

الف) ۱۶:۹ ب) ۹:۱۶ ج) ۴:۳ د) ۳:۴ هـ) هیچ یک از اینها

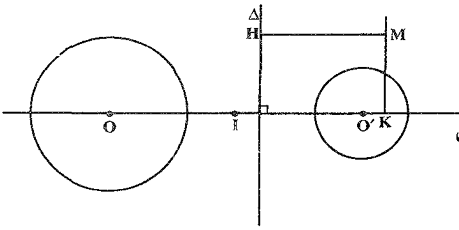
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۴ . ۱ . ۳. قوت نقطه نسبت به دایره



۳۷۰. دو دایرهٔ (O) و (O′) به شعاعهای r و r′ مفروضند. اگر I پای محور اصلی و M_1 تصویر نقطهٔ غیر مشخص M روی OO′ و P و P′ قوتهای نقطهٔ M نسبت به این دو دایره باشند، داریم :

$p - p' = ۲\overline{OO'}.\overline{IM_1}$



۳۷۱. دو دایرهٔ (O) و O′(OO′ = d) و به شعاعهای R و R′ و نقطهٔ اختیاری M در صفحهٔ آنها مفروض است. قوت نقطهٔ M را نسبت به دو دایره بترتیب P و P′ می‌نامیم.

تصویر قائم نقطهٔ M را روی Δ که محور اصلی آنهاست H و وسط OO′ را I می‌نامیم :

الف ــ درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید :

$$p + p' = ۲\overline{MI}^۲ + \frac{d^۲}{۲} - (R^۲ + R'^۲) \qquad (۱)$$

$$۴p.p' = (۲\overline{MI}^۲ + \frac{d^۲}{۲} - R^۲ - R'^۲)^۲ - ۴d^۲.\overline{HM}^۲$$

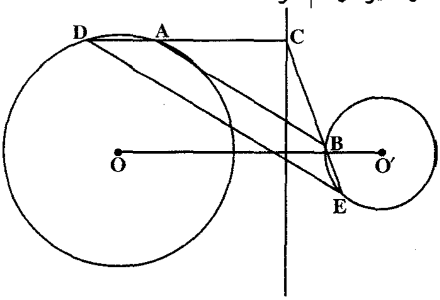
ب ــ با فرض R = R′ مکان هندسی نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که $P.P' = d^۲.\overline{MK}^۲$ باشد (K تصویر M روی OO′ است).

۴ . ۱ . ۴. محور اصلی دو دایره

۳۷۲. دو دایره با مرکزهای متفاوت داده شده است. برای ترسیم محور اصلی آنها روشی بیابید که دو دایره در هر وضعی نسبت به هم باشند، آن روش قابل انجام باشد.

۳۷۳. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از آن نقطه، دو مماس برابر بر دو دایرهٔ داده شده می‌توان رسم کرد.

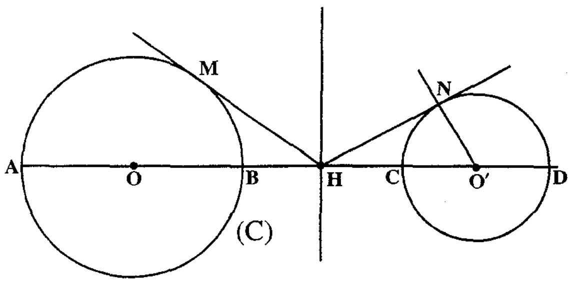
۳۷۴. خط Δ و دو دایرهٔ (C) و (C') مفروضند. بر روی Δ نقطه‌ای به دست آورید که بتوان از آن، دو مماس به طول مساوی بر دو دایره رسم کرد.



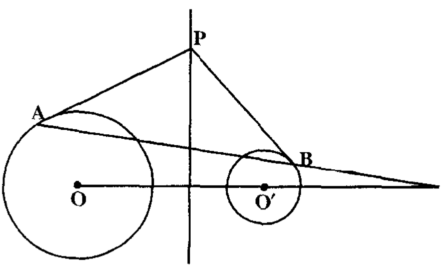
۳۷۵. دو دایرهٔ (O) و (O') و نقطهٔ A بر اولی و نقطهٔ B بر دومی مفروض است. روی محور اصلی دو دایره نقطهٔ C را چنان اختیار کنید که اگر دو خط قاطع CAD و CBE را رسم کنیم، خط DE با AB موازی باشد.

۳۷۶. چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یک استقامتند. بر A و B یک دایرهٔ متغیر و بر C و D دایرهٔ متغیر دیگری می‌گذرانیم.

الف. ثابت کنید که محورهای اصلی این دو دایره پیوسته از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

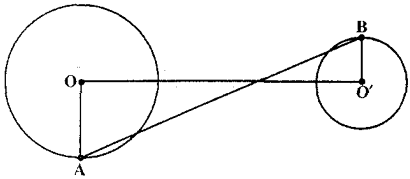


ب. به ازای هر دایره مانند (C) گذرنده بر A و B، می‌توان دایره‌ای مانند (C') گذرنده بر C و D و مماس بر (C) رسم کرد. مطلوب است مکان هندسی T نقطهٔ تماس دایره‌های (C) و (C') وقتی دایرهٔ (C)گذرنده بر A و B تغییر می‌نماید.



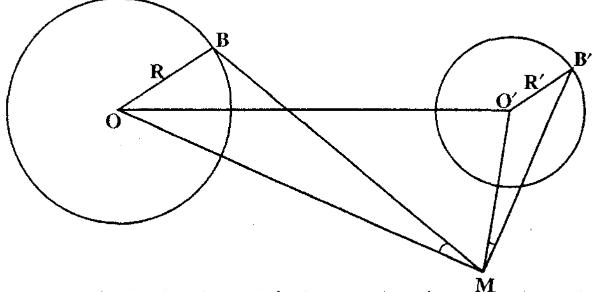
۳۷۷. از نقطهٔ P واقع بر محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O') و به شعاعهای R و R' مماسهایی را بر این دو دایره رسم می‌کنیم. اگر A و B نقطه‌های تماس باشند، ثابت کنید هرگاه P بر محور اصلی حرکت کند، خط AB از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴ . ۱ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۷۸. اگر از مرکزهای دو دایره دو شعاع موازی (هر دو، در یک جهت، یا در دو جهت مخالف) رسم کنیم، خطی که انتهای این دو شعاع را به هم وصل می‌کند، بر محل نقطهٔ برخورد خط‌المرکزین دو دایره با مماس مشترک (خارجی یا داخلی) می‌گذرد؛ و این نقطه خط‌المرکزین را به نسبت شعاعهای دو دایره تقسیم می‌کند.

۳۷۹. دو دایره به مرکزهای O و O′ مفروضند. در این دو دایره، دو شعاع موازی چنان رسم کنید که از نقطهٔ M واقع در خارج دو دایره، به یک زاویه دیده شوند.



۳۸۰. اگر طول پاره‌خطی که مرکزهای دو دایرهٔ (O,R) و (I,r) را به هم وصل می‌کند در رابطهٔ $\overline{OI}^2 = d^2 = R(R-2r)$ صدق کند، بینهایت مثلث وجود دارد که در اولی محاط و بر دومی محیط شود.

۳۸۱. در زاویهٔ ABC دو دایره محاط کرده‌ایم، به نحوی که یکی از آنها در نقطهٔ A بر ضلع BA و دیگری در نقطهٔ C بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، روی خط راست AC، پاره‌خطهایی با طول برابر، جدا می‌کنند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۳۸۲. لاستیکهای جلوی اتومبیل، بعد از ۲۵۰۰۰ کیلومتر و لاستیکهای عقب، بعد از ۱۵۰۰۰ کیلومتر ساییده می‌شوند، چه موقع جای لاستیکهای جلو و عقب را با هم عوض کنیم تا اتومبیل بتواند بیشترین فاصله را با همین لاستیکها بپیماید؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۳۸۳. دایره‌های C_1 و C_2 و مستطیل R داده شده‌اند. تعداد نقطه‌هایی را که حداقل بین دو شکل از این سه شکل مشترک باشند با $n(C_1, C_2, R)$ نشان می‌دهیم. ماکزیمم $n(C_1, C_2, R)$ چه‌قدر است؟

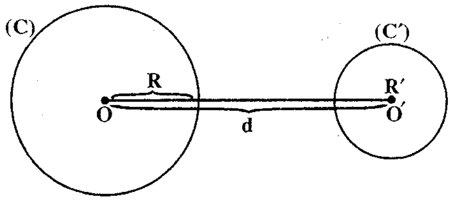
الف) ۱۰　　ب) ۱۴　　ج) ۱۶　　د) ۱۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۴ . ۲. دو دایرهٔ برون‌هم (متخارج)

۴ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

تعریف . شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره، برون‌هم (متخارج) باشند، آن است که طول خط‌المرکزین آنها از مجموع شعاعهایشان بیشتر باشد. یعنی در دو دایرهٔ $C(O,R)$، $C'(O',R')$ با فرض $OO'=d$ داشته باشیم: $d>R+R'$



۴ . ۲ . ۲. اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره

۳۸۴. شعاعهای دو دایره ۵ و ۱۷ و طول پاره‌خط مماس مشترک برونی آنها ۱۶ است. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره چه‌قدر است؟

۳۸۵. دو دایرهٔ برون هم به شعاعهای ۵ سانتی‌متر و ۲ سانتی‌متر داده شده است. مماس مشترک خارجی این دو دایره ۱/۵ برابر مماس مشترک داخلی آنها شده است. مطلوب است فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره.

۳۸۶. تسمه‌ای دور دو قرقره به شعاعهای ۱۴ و ۴ سانتی‌متر به‌طور کشیده جا افتاده است. اگر فاصلهٔ بین نقطه‌های تماس تسمه با قرقره‌ها ۲۴ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین مرکزهای قرقره‌ها برحسب سانتی‌متر برابر است با :

الف) ۲۴ ب) $۲\sqrt{۱۱۹}$ ج) ۲۵ د) ۲۶ هـ) $۴\sqrt{۳۵}$

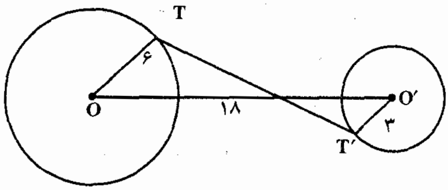
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱

۴ . ۲ . ۳. اندازهٔ مماس مشترک دو دایره

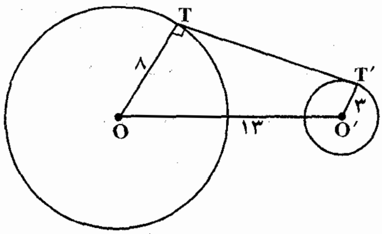
۳۸۷. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره ۴۱ سانتی‌متر، شعاع دایرهٔ کوچکتر ۴ سانتی‌متر و شعاع دایرهٔ بزرگتر ۵ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره چند سانتی‌متر است؟

الف) ۴۱ ب) ۳۹ ج) ۳۹/۸ د) ۴۰/۱ هـ) ۴۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

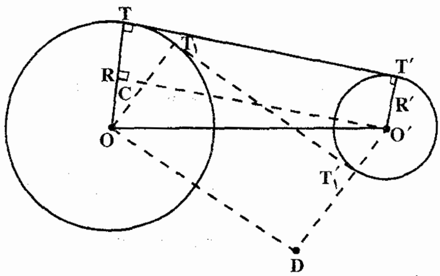


۳۸۸. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایرهٔ شکل داده شده برابر ۱۸ سانتی‌متر و شعاعهای آن دو، ۳ سانتی متر و ۶ سانتی‌متر هستند. طول مماس مشترک درونی آنها را بیابید.



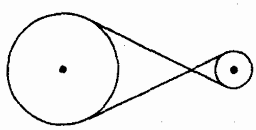
۳۸۹. شعاعهای دو دایره ۳ و ۸ و فاصلهٔ بین دو مرکز آنها ۱۳ است. طول مماس مشترک برونی آنها را به دست آورید.

۳۹۰. دو دایره به شعاعهای ۶ و ۱۲ سانتی‌متر مفروضند. در صورتی که خط‌المرکزین این دو دایره ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول مماس مشترکهای برونی و درونی این دو دایره را حساب کنید.

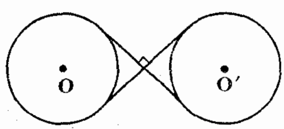


۳۹۱. در دو دایرهٔ برون هم به شعاعهای R و R' و خط‌المرکزین d، طول مماسهای مشترک برونی و درونی را به دست آورید.

۴ . ۲ . ۴. طول تسمه و محیط دایره



۳۹۲. مطابق شکل، تسمه‌ای را به دور دو چرخ انداخته‌اند. به نحوی که چرخها در دو جهت مختلف بچرخند. شعاع چرخها ۳ و ۹ و فاصلهٔ دو مرکزشان ۲۴ است. طول تسمه چه‌قدر است؟



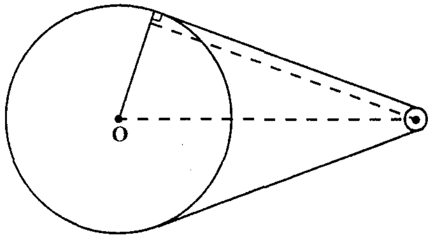
۳۹۳. تسمه‌ای به صورت ضربدری دور دو چرخ می‌چرخد. اگر قطر هر چرخ ۱۶ و تسمه در عبور از کنار خود زاویهٔ قائمه بسازد، طول تسمه چه‌قدر است؟

الف) $16+12\pi$ ب) $32+24\pi$ ج) $24+32\pi$

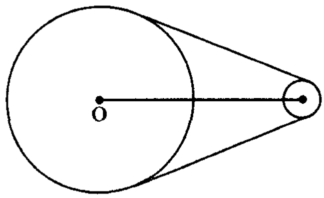
د) $16(4+3\pi)$ هـ) $16(3+4\pi)$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۳۹۴. مطابق شکل تسمه‌ای را به دور دو چرخ انداخته‌اند. اگر شعاع چرخها ۳ و ۱۵ و فاصلهٔ بین دو مرکزشان ۲۴ باشد، طول تسمه چه‌قدر است؟

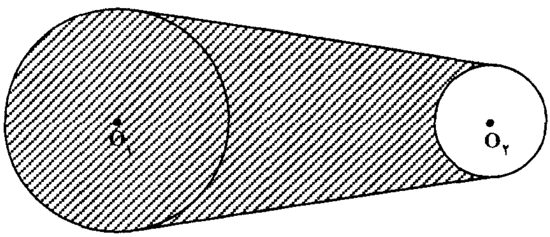


۳۹۵. در دو دایرهٔ برون هم، شعاع دایرهٔ بزرگتر ۷ برابر و فاصلهٔ دو مرکز ۱۲ برابر شعاع دایرهٔ کوچکتر است. اگر مماسهای مشترک برونی این دو دایره را رسم کنیم، محیط شکل حاصل را به دست آورید.



۴ . ۲ . ۵. مساحت شکلها

۳۹۶. دو دایره با شعاعهای R ، $2R$ و با مرکزهای O_1 و O_2 طوری قرار دارند که طول خط‌المرکزین آنها $2R\sqrt{3}$ است. مساحت شکلی را پیدا کنید که با پاره‌خطهای مماس و کمانهای بزرگتر دایره‌ها که نقطه‌های تماس را در آن دایره‌ها به هم وصل می‌کنند، محدود شده است.

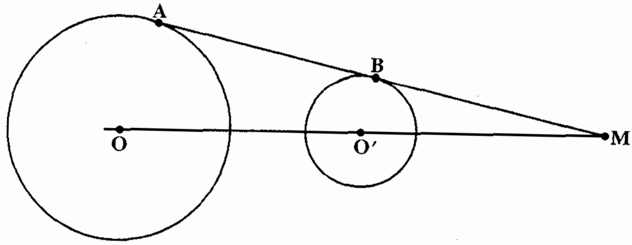


۳۹۷. دایره‌های $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ دارای مماس مشترکهای داخلی عمود بر هم در نقطهٔ S می‌باشند. محل تلاقی این دو مماس مشترک با یکی از مماس مشترکهای خارجی، K و L و نقاط تماس دایره‌ها با مماس مشترکهای داخلی روی پاره‌خطهای SL و SK، بترتیب M و N می‌باشند. ثابت کنید : $S_{KLMN} = \frac{1}{2}RR'$

اولین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، ۱۳۷۰

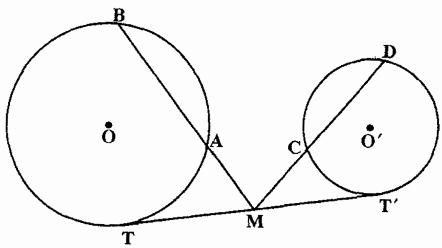
۴ . ۲ . ۶. رابطه‌های متری

۳۹۸. مماس مشترک (درونی یا بیرونی) دو دایره، خط‌المرکزین آن دو دایره را به‌نسبت شعاعهای دو دایره تقسیم می‌کند.



۳۹۹. از نقطهٔ M وسط یکی از مماسهای مشترک دو دایرهٔ برون هم (وسط پاره‌خط واصل بین نقطه‌های تماس) دو قاطع رسم می‌کنیم که دایرهٔ اولی را در نقطه‌های A و B، و دایرهٔ دومی را در نقطه‌های C و D قطع کنند. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

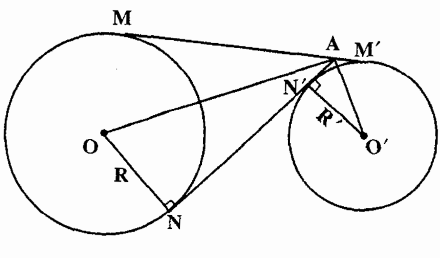
$MA.MB = MC.MD$



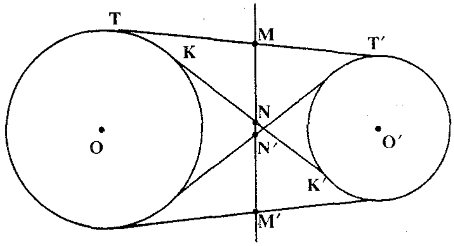
۴۰۰. دو دایرهٔ برون هم O و O′ به شعاعهای R و R′ مفروضند. مماس مشترک برونی MM′ (M روی دایرهٔ O و M′ روی دایرهٔ O′) مماس مشترک درونی NN′ (N روی دایـرهٔ O و N′ روی دایره‌ٔ O′) را در نقطهٔ A قطع می‌کند. ثابت کنید:

الف. دو مثلث AON و AO′N′ متشابه‌اند.

ب. $AM.AM' = R.R'$

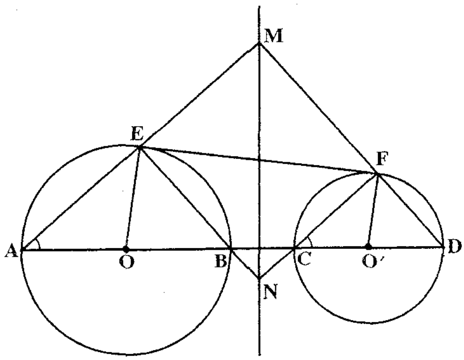


۴ . ۲ . ۷. محور اصلی دو دایره



۴۰۱. دو دایرهٔ برون هم چهار مماس مشترک دارند. ثابت کنید که وسطهای این چهار مماس مشترک بر یک خط راست قرار دارند، که این خط محور اصلی دو دایره است.

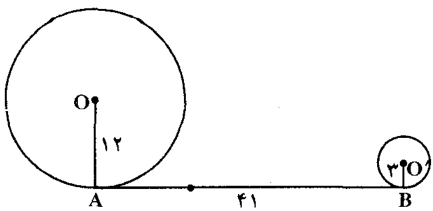
۴۰۲. دو دایرهٔ برون هم مفروضند، خط‌المرکزین این دو دایره، اولی را در نقطه‌های A و B و دومی را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. مماس مشترک برونی EF را که با اولی در نقطهٔ E و با دومی در نقطهٔ F مماس می‌شود رسم کرده، خطهای AE، BE، CF وCF را وصل می‌کنیم تـا یکدیگررا در نقطه‌های M و N قطع کنند، ثابت کنید که :



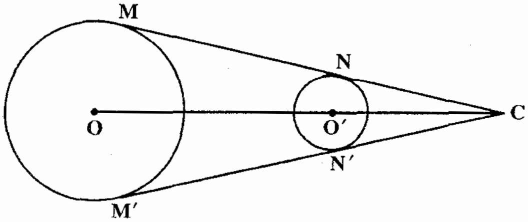
الف. چهار نقطهٔ E، M، N و F رأسهای یک مستطیل می‌باشند.
ب. خط MN محور اصلی دو دایرهٔ داده شده می‌باشد.

۴ . ۲ . ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۰۳. دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱۲ و با خط‌المرکزین ۴۱ متر که هر دو بر یک خط مماسند، داده شده‌اند. در یک لحظه هر دو دایره با سرعتی معادل یک متر در دقیقه به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. تعیین کنید که پس از چند دقیقه به هم می‌رسند.



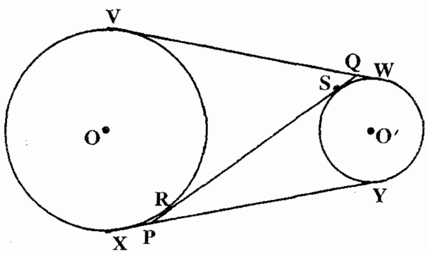
۴۰۴. دو دایره به مرکزهای O و O′ و شعاعهای R و R′ که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها d است، مفروضند. MN و M′N′، مماسهای مشترک آنها را رسم کرده امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند:



۱. طولهای MN، MC و CO را برحسب R و R′ و d حساب کنید.

۲. سینوس نصف زاویهٔ C ($\sin\frac{\hat{C}}{2}$) را به‌دست آورید.

۴۰۵. دایره‌های (O) و(O′) متخارجند. P و Q نقطه‌های برخورد یک مماس مشترک داخلی دو دایره با مماسهای مشترک خارجی آنها هستند. طول PQ برابر است با:



الف) میانگین طولهای مماسهای مشترک داخلی و خارجی.

ب) طول یکی از مماسهای مشترک خارجی اگر و فقط اگر دو دایرهٔ (O)و(O′) شعاعهای برابر داشته باشند.

ج) طول یک مماس مشترک خارجی در همهٔ حالتها.

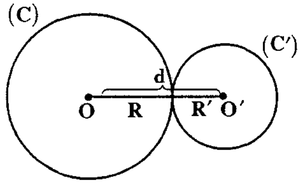
د) عددی بزرگتر از طول مماس مشترک خارجی.

هـ) واسطهٔ هندسی طولهای مماسهای مشترک خارجی و داخلی.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

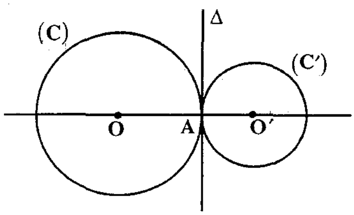
۳.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ مماس برون

۱.۳.۴. تعریف و قضیه



تعریف. شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایره مماس برون باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها، برابر مجموع شعاعهای آن دو دایره باشد. یعنی در دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO'=d$ داشته باشیم: $d=R+R'$

نکته. اگر A نقطهٔ تماس دو دایرهٔ بالا باشد، نسبت به این دو دایره، قوت برابردارد: ($P_{A(C)}=P_{A(C')}=0$)، پس یک نقطه از محور اصلی دو دایره است. بنابراین مماس مشترک داخلی دو دایره که در نقطهٔ A بر خط‌المرکزین آنها عمود است، محور اصلی دو دایره می‌باشد. واضح است که این خط از وسط مماسهای مشترک خارجی دو دایره نیز می‌گذرد.

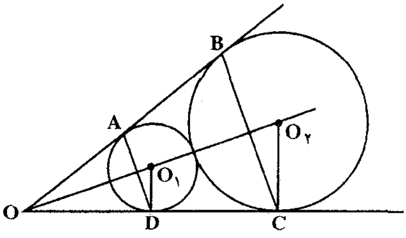


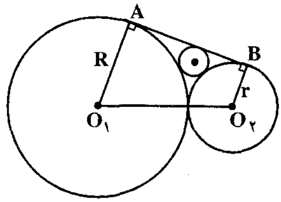
۲.۳.۴. اندازهٔ شعاع

۴۰۶. دو دایره در نقطهٔ C بر یکدیگر مماس برون بوده و AB مماس مشترک آنهاست. اگر $AC=8cm$ و $BC=6cm$ باشد، شعاع دایره‌ها را بیابید.

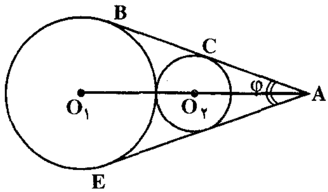
۴۰۷. دو دایره با شعاعهای $16cm$ و $9cm$ برهم مماس برون هستند. شعاع دایرهٔ محاط در داخل مثلث خمیده‌ای را که با کمانهایی از دو دایرهٔ مزبور و مماس مشترک برونی آنها به‌وجود می‌آید، به‌دست آورید.

۴۰۸. دو دایره به شعاعهای r و R مماس برون هستند و AB و CD مماسهای مشترک برونی آنها می‌باشند. ثابت کنید که در چهارضلعی $ABCD$، می‌توان یک دایره را محاط کرد. شعاع این دایره را پیدا کنید.

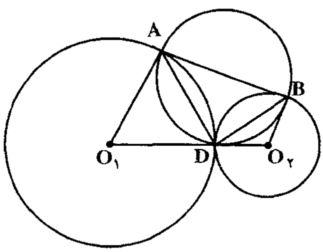




۴۰۹. دو دایره مماس برون به شعاعهای R و r مفروض است. مماس مشترک خارجی این دو دایره را رسم کرده‌ایم و سپس دایرهٔ محاطی مثلث منحني‌الضلعی را که به‌دست آمده است کشیده‌ایم. شعاع این دایره را پیدا کنید.

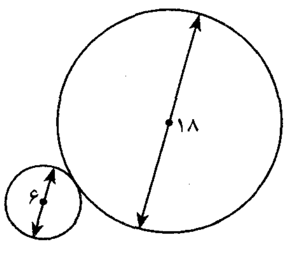


۴۱۰. شعاعهای دو دایرهٔ مماس برون را که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر d و زاویهٔ بین دو مماس مشترک بیرونی آنها φ باشد، تعیین کنید.



۴۱۱. دو دایره مماس برون به شعاعهای R و r مفروضند. مماس مشترک برونی این دو دایره را رسم کرده‌ایم و سپس دایرهٔ محیطی مثلث منحنی‌الضلعی که به‌دست می‌آید کشیده‌ایم. شعاع این دایره را تعیین کنید.

۳.۳.۴. اندازهٔ محیط



۴۱۲. دو تیر، به قطرهای ۶ و ۱۸ سانتی‌متر مطابق شکل، کنار یکدیگر قرار گرفته و با سیمی به هم بسته شده‌اند. طول کوتاهترین سیمی که دور آنها می‌پیچد برابر است با :

الف) $12\sqrt{3}+16\pi$ ب) $12\sqrt{3}+7\pi$ ج) $12\sqrt{3}+14\pi$

د) $12+15\pi$ هـ) 24π

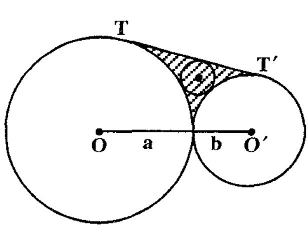
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

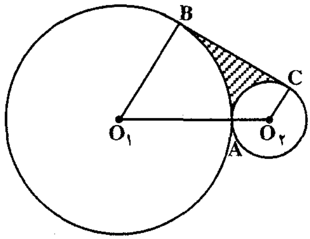
۴.۳.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۱۳. دو دایره با شعاعهای a و b‏(a >b) برهم مماس برون هستند. مماس مشترک برونی آنها را رسم می‌کنیم. مطلوب است :

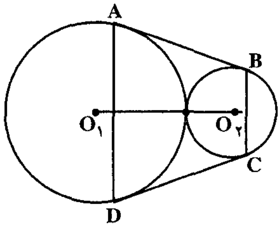
الف ــ محاسبهٔ مساحت مثلث خمیده حاصل.

ب ــ مساحت دایرهٔ محاط در این مثلث.



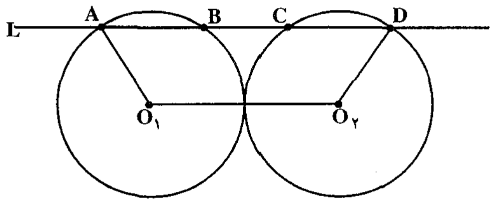


۴۱۴. دو دایره با شعاعهای R و ´R که $\frac{R}{R'}=\frac{۳}{۱}$ می‌باشد، در نقطهٔ A مماس برون هستند. اگر BC مماس مشترک برونی دو دایره باشد، سطح محصور بین دو دایره و مماس BC را پیدا کنید.

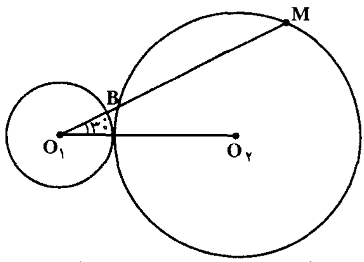


۴۱۵. دو دایرهٔ مماس خارج به شعاعهای R و r مفروضند. دومماس مشترک خارجی این دو دایره را رسم کرده‌ایم و نقطه‌های تماس را در هر دایره به هم وصل نموده‌ایم. مساحت ذوزنقه‌ای راکه به این ترتیب به‌دست می‌آید، به دست‌آورید.

۴۱۶. دو دایره با شعاع R و مرکزهای O_1 و O_2 بر هم مماس برون هستند. خط مستقیم L دو دایره را در نقطه‌های A، B ، C و D با شرط $AB = BC = CD$ قطع می‌کند. مساحت چهارضلعی O_1ADO_2 را به‌دست آورید.



۵.۳.۴. اندازهٔ پاره‌خط



۴۱۷. دو دایره با شعاعهای R و $\frac{R}{۲}$ بر هم مماس برون هستند. از مرکز دایرهٔ کوچکتر، پاره‌خطی به طول ۲R و با زاویهٔ °۳۰ با خط‌المرکزین رسم می‌کنیم. طول قسمتهایی از این پاره‌خط را بیابید، که در خارج دو دایره قرار دارند.

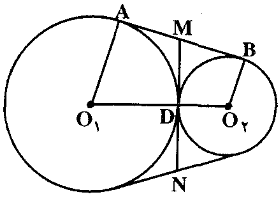
۴۱۸. نقطهٔ C را بر خط مستقیم AB چنان انتخاب می‌کنیم که $AC = ۳CB$. دو دایره به قطرهای AC و CB رسم می‌کنیم. یکی از مماسهای مشترک خارجی دو دایره، امتداد AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. BD برابر است با :

الف) قطر دایرهٔ کوچکتر ب) شعاع دایرهٔ کوچکتر ج) شعاع دایرهٔ بزرگتر

د) $CB\sqrt{۳}$ هـ) تفاضل شعاعهای دو دایره

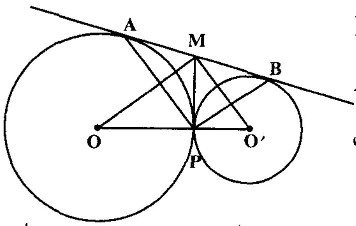
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۴۱۹. دو دایرهٔ مماس برون به شعاعهای R و r مفروضند.



مماس مشترک داخلی و مماس مشترکهای برونی آنها را رسم کرده‌ایم. طول قطعه‌ای از مماس مشترک داخلی را که به مماس مشترکهای برونی محدود شده است، به‌دست آورید.

۴۲۰. دو دایره به شعاعهای ۲۰ سانتی‌متر و ۱۰ سانتی‌متر مماس برون هستند. اندازهٔ مماس مشترک برونی این دو دایره را بیابید.



۴۲۱. دودایره به مرکزهای O و O´ وشعاعهای R و R´ در نقطهٔ P مماس برون می‌باشند. خط AB مماس مشترک برونی آنها، مماس مشترک درونی را در نقطهٔ M قطع می‌کند:

۱. ثابت کنید مثلث APB قائم‌الزاویه است و دایرهٔ به قطر AB بر OO´ مماس است.

۲. ثابت کنید مثلث OMO´ قائم‌الزاویه است و دایرهٔ به قطر OO´ برخط AB مماس است.

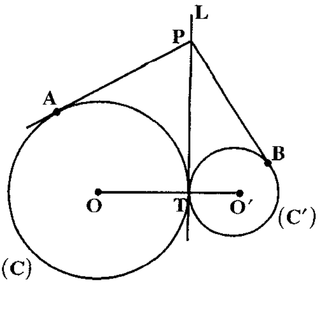
۳. طولهای MP، OM ، O´M و AB را بر حسب R و R´ حساب کنید.

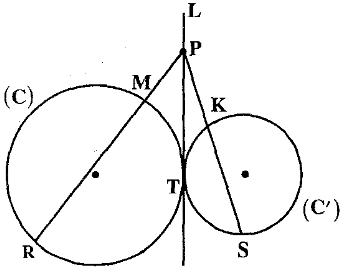
۴۲۲. دو دایره به شعاعهای R و r مماس برون هستند.
ذوزنقه‌های مختلف ABCD را طوری می‌سازیم که هریک از دایره‌ها، بر هر دو ساق و یکی از قاعده‌های ذوزنقه مماس باشد. حداقل طول ساق AB چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۴

۶.۳.۴. رابطه‌های متری

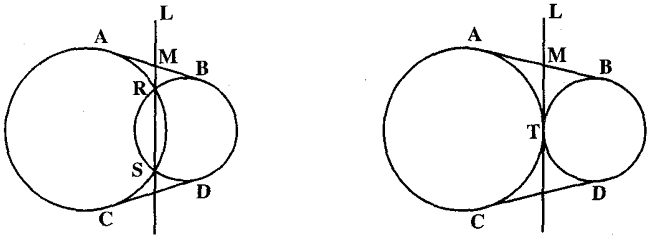
۴۲۳. دایره‌های (C) و (C´) هر دو در نقطهٔ T بر خط L مماسند. P نقطه‌ای از L(غیراز T) است. PA و PB پاره‌خطهای مماسند. ثابت کنید PA=PB.

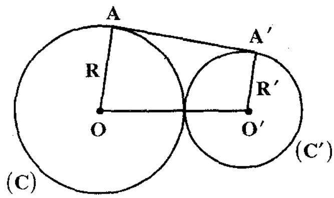




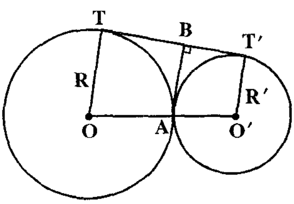
۴۲۴. دو دایرهٔ (C) و (C′) در نقطهٔ T بر خط L مماسند. P نقطه‌ای غیر از T روی خط L است. ثابت کنید $PM \cdot PR = PK \cdot PS$ (M و R، K و S نقطه‌های برخورد قاطعهای رسم شده از نقطهٔ P بترتیب با دایره‌های (C) و (C′) می‌باشند).

۴۲۵. به کمک رابطه‌های طولی در دایره، ثابت کنید اگر دو دایره و یک خط، در یک نقطه یا دو نقطه مشترک باشند، آن خط، پاره‌خطهای مماس مشترک برونی دو دایره را نصف می‌کند.



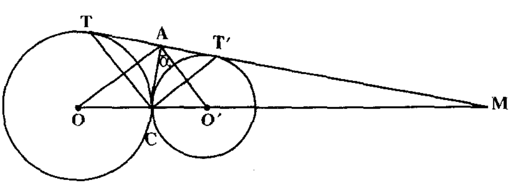


۴۲۶. دو دایره مماس برون هستند. ثابت کنید که قطعه خطی از مماس مشترک آنها که محدود به نقطه‌های تماس باشد، واسطهٔ هندسی بین قطرهای این دو دایره است.



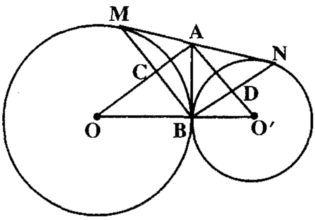
۴۲۷. دو دایره مماس برون هستند. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ تماس آنها از یک مماس مشترک، جزء چهارم تناسبی است که سه جزء دیگر آن، نصف مجموع شعاعهای آنها، و خود این دو شعاع می‌باشند.

۴۲۸. TT′ مماس مشترک برونی دو دایرهٔ مماس برونی در نقطهٔ M، امتداد خط‌المرکزین OO′ را قطع کرده است. وسط TT′ را A و محل تماس دو دایره را C می‌نامیم. ثابت کنید:



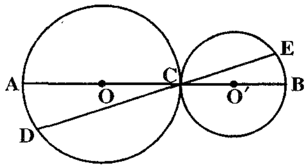
۱. $MC^2 = MT.MT'$

۲. $MA^2 = MO.MO'$



۴۲۹. دو دایرهٔ (O) و (O′) درنقطهٔ B مماس برون هستند. یکی از دو مماس مشترک برونی آنها،MN و مماس مشترک درونی آنها را نیز رسم می‌کنیم تا یکدیگر رادر نقطهٔ A قطع کنند؛ OA و O′A را رسم می‌کنیم تا بترتیب MB و NB را در C و D قطع کنند. ثابت‌کنید:

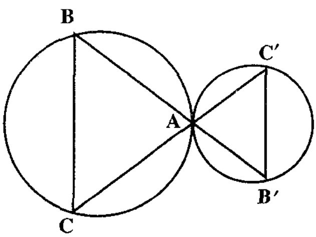
$$\frac{BC}{BM}=\frac{BD}{BN}$$



۴۳۰. دو دایره به مرکزهای (O) و (O′)در نقطهٔ C مماس‌برون هستند. خط دلخواهی که از نقطهٔ C می‌گذرد، دو دایره را بترتیب در D و E قطع می‌کند. اگر A و B نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین این دو دایره، با این دو دایره باشند، ثابت کنید:

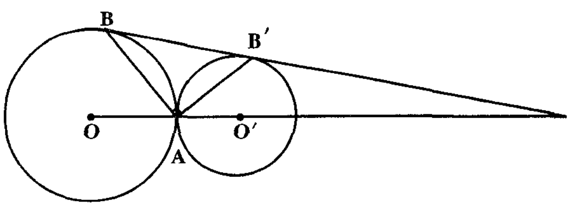
$$CE:CD=CB:CA$$

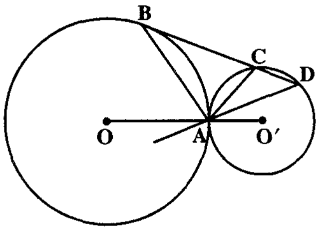
۷.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۳۱. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنید. دایرهٔ دیگری که در A بر آن دایره مماس شود دو ضلع دیگر یا امتدادشان را در B′ و C′ قطع می‌کند. ثابت کنید که دو مثلث ABC و AB′C′ متشابه‌اند.

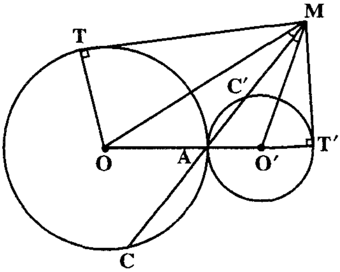
۴۳۲. دو دایره در نقطهٔ A مماس برون هستند. در یکی از این دو دایره وتر AB را رسم و در دایرهٔ دیگر وتر AB′ را بر آن عمود می‌کنیم. ثابت کنید که اگر نقطهٔ B روی دایرهٔ اول حرکت کند، خط BB′ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.





۴۳۳. دو دایره در نقطهٔ A مماس برون هستند. خطی در نقطهٔ B بریکی از آنها مماس است، و دیگری را در C و D قطع می‌کند. ثابت کنید AB یکی از نیمسازهای زاویهٔ CAD است.

۸.۳.۴. مسأله‌های ترکیبی



۴۳۴. دو دایره یکی به شعاع R و دیگری به شعاع R′ در نقطهٔ A مماس برون هستند. نقطه‌ای مانند M از صفحهٔ آنها را درنظر می‌گیریم به‌طوری که اگر از آن نقطه مماسهای MT و MT′ را بر دو دایره رسم کنیم، $\frac{MT}{MT'}=\frac{R}{R'}$ باشد :

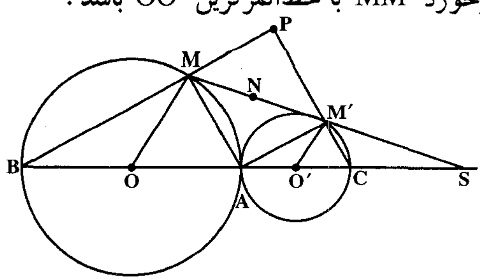
۱. ثابت کنید که MA نیمساز زاویهٔ OMO′ است (O و O′ مرکزهای دو دایره هستند).

۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است و شعاع این دایره را حساب کنید.

۳. خط MA را وصل می‌کنیم تا دو دایره را در C′ و C قطع کند، ثابت کنید :
$\overline{MA}^2 = MC.MC' = MT.MT'$

۴. ثابت کنید در حالتی که شعاع یکی از دو دایره سه برابر دیگری باشد، مماسهای مشترک آنها با یکدیگر زاویهٔ ۶۰درجه تشکیل می‌دهند. دراین‌صورت طول ضلعها و مساحت ذوزنقه‌ای را که رأسهای آن نقطه‌های تماس مماسهای مشترک با دو دایره است، بر حسب R حساب کنید.

۴۳۵. دو دایرهٔ (O) و (O′) به شعاعهای R = ۴cm و R′ = ۲cm در نقطهٔ A مماس برون هستند. دو شعاع موازی و هم‌جهت OM و O′M′ را در دو دایره رسم می‌کنیم. اگر S نقطهٔ برخورد MM′ با خط‌المرکزین OO′ باشد :



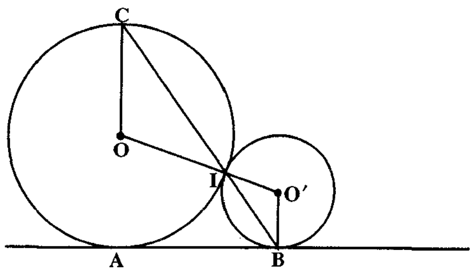
۱. طول پاره‌خط SO را تعیین کنید ؛در صورتی که شعاعهای OM و $O'M'$ بترتیب حول نقطه‌های O و O' به موازات یکدیگر دوران کنند،درمورد نقطهٔ S چه می‌توان گفت؟

۲. چهارضلعی $AMPM'$ که در آن P نقطهٔ برخورد BM و CM' (B و C بترتیب انتهای دیگر قطرهایی از دو دایرهٔ O و O' می‌باشند که از نقطهٔ A می‌گذرند) است. چگونه است؟

۳. مکان هندسی نقطهٔ P، همچنین مکان هندسی نقطهٔ N وسط پاره‌خط MM' را وقتی دو شعاع OM و $O'M'$ بترتیب حول نقطه‌های O و O' و به موازات هم دوران می‌کنند، تعیین کنید.

۴. اندازهٔ قطرهای چهارضلعی $AMPM'$ را درصورتی که $A\hat{O}M = ۶۰^\circ$ باشد، همچنین مساحت این چهارضلعی را تعیین کنید.

۴۳۶. دایره‌ای به مرکز O مماس بر خط xy در نقطهٔ A، و دایرهٔ دیگری به مرکز O' و مماس بر خط xy در نقطهٔ B متمایز با نقطهٔ A و مماس خارج بر دایرهٔ (O) در نقطهٔ I، مفروضند. خط BI دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگری مانند C قطع می‌کند.



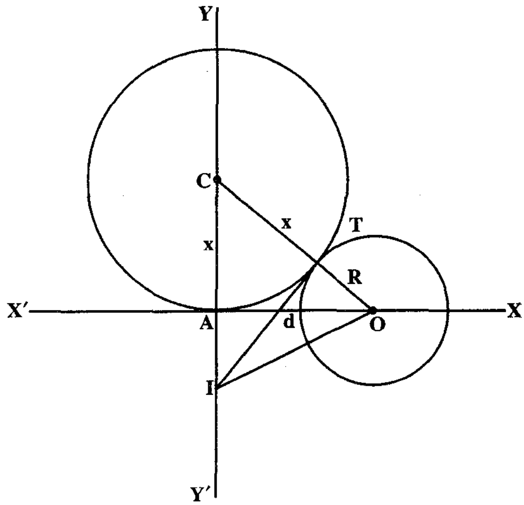
۱. زاویه‌های دو مثلث OCI و $O'BI$ را با هم مقایسه کنید، ثابت کنید که سه نقطهٔ A و O و C روی یک خط راست واقعند.

۲. اگر $AB = ۲cm$ و $AC = ۳cm$ باشد، شکل را رسم کنید و نحوهٔ رسم شکل را بیان کنید.

۳. ثابت کنید که $\frac{IC}{IB} = \frac{R}{R'}$ (R اندازهٔ شعاع دایرهٔ (O) و R' اندازهٔ شعاع دایرهٔ (O') است) و $\overline{IC}.\overline{IB} = \overline{IA}^۲$.

۴. با فرض این‌که $AB = ۲cm$ و $AC = ۳cm$ باشد، پاره‌خطهای BC، IC، IB و اندازهٔ R را به‌دست آورید.

۴۳۷. دو خط عمود برهم $X'X$ و $Y'Y$ درنقطهٔ A متقاطعند. نقطهٔ O مرکز یک دایره با شعاع ثابت، روی نیمخط AX جابه‌جا می‌شود. دایرهٔ دیگری به شعاع AC که نقطهٔ C مرکز آن روی نیمخط AY است، در نقطهٔ T با دایرهٔ (O) مماس است.



۱. ثابت کنید که مماس مشترک دو دایره در نقطهٔ T خط $Y'Y$ را در نقطهٔ ثابت I قطع می‌کند.

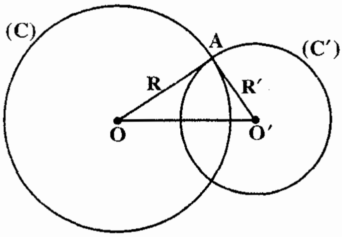
۲. اگر طول پاره‌خط AO برابر d، شعاع دایرهٔ (O) مساوی R و شعاع AC مساوی x باشد، اندازهٔ x را برحسب d و R تعیین کنید.

۳. برای چه مقداری از d، دایره‌های (O) و (C) شعاع برابر دارند؟ دراین حالت اندازهٔ $\cos O\hat{C}A$، و از روی آن اندازهٔ زاویهٔ OCA را تعیین کنید.

۴. اندازهٔ مساحت مثلث منحنی‌الخط تشکیل شده با دو دایره و خط AX را درحالت $R = x = ۱/۵cm$، تا ۰/۰۱ تقریب تعیین کنید.

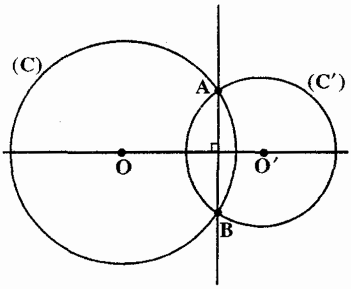
۴.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ متقاطع

۱.۴.۴. تعریف و قضیه



تعریف. شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند، آن است که طول خط‌المرکزین آنها از مجموع شعاعهای آن دو دایره کمتر، و از قدر مطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشد. یعنی در دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO'=d$ داشته باشیم:

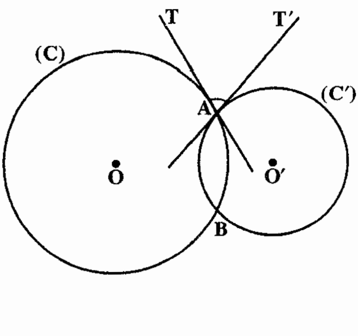
$$|R-R'|<d<R+R'$$

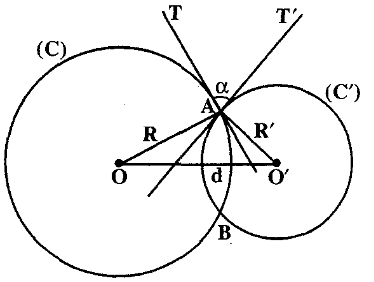


نکته. پاره‌خطی که نقطه‌های مشترک دو دایرهٔ متقاطع را به‌هم وصل می‌کند وتر مشترک دو دایره نامیده می‌شود. با مسامحه، خط گذرنده بر دو نقطهٔ تقاطع را نیز وتر مشترک دو دایره می‌نامند. وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع، محور اصلی آنهاست؛ زیرا اگر دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطع باشند، قوت هر دو نقطهٔ A و B نسبت به هردو دایره، برابر صفر است.

زاویهٔ بین دو دایره

تعریف. زاویهٔ حاده یا قائمه بین خطهای مماس بر دو دایره در هر نقطهٔ تقاطع، زاویهٔ بین دو دایره نامیده می‌شود. بنابراین اگر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع باشند و مماسهای AT و AT′ را بر دو دایره رسم کنیم، زاویهٔ حاده یاقائمه ایجاد شده بین خطهای AT و AT′ را زاویهٔ بین دو دایره می‌نامند. درصورتی که این زاویه 90° باشد، دو دایره را عمود برهم می‌نامند.

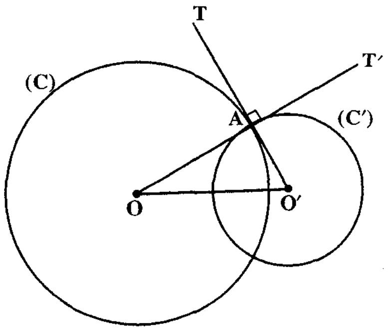




۴۳۸. قضیه. اگر d اندازهٔ خط المرکزین دو دایره متقاطع $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ و α زاویهٔ بین این دو دایره باشد، ثابت کنید :

$$\cos\alpha = \frac{|d^2 - (R^2 + R'^2)|}{2RR'}$$

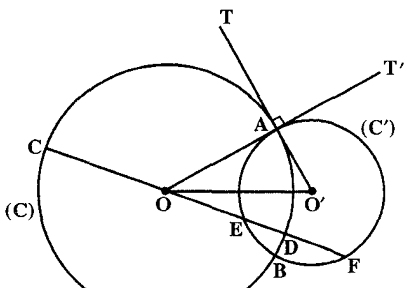
دو دایرهٔ عمود برهم



تعریف. دو دایره را عمود برهم می‌نامیم، در صورتی که با هم زاویهٔ $90°$ بسازند، یعنی زاویهٔ بین مماسهای رسم شده بر دو دایره درهریک از نقطه‌های برخوردشان، برابر $90°$ باشد $(\hat{TAT'} = 90°)$.

۴۳۹. قضیه. در دو دایرهٔ عمود برهم :

۱. هرخط مماس بر یک دایره در هر نقطهٔ تقاطع،ازمرکز دایرهٔ دیگرمی گذرد و بعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع خط مماس بر هر دایره در نقطهٔ تقاطع از مرکز دایرهٔ دیگر بگذرد، دو دایره برهم عمودند.



۲. هرشعاع از یک‌دایره که از نقطهٔ برخورد دو دایره می گذرد، بر دایرهٔ دیگر مماس است و بعکس،اگر در دو دایرهٔ متقاطع، شعاعی از یک دایره که از نقطهٔ تقاطع دودایره می گذرد، مماس بر دایرهٔ دیگر باشد، دو دایره برهم عمودند.

۳. شعاعهای وصل شده به هر نقطهٔ تقاطع دو دایره، برهم عمودند و بعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع شعاعهای دو دایره که به هر نقطهٔ تقاطع وصل می‌شوند برهم عمود باشند، آن دو دایره برهم عمودند.

۴. مربع اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایرهٔ مساوی مجموع مربعهای شعاعهای دو دایره است و بعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع مربع طول خط‌المرکزین، مساوی مجموع مربعهای شعاعهای آن دو دایره باشد، آن دو دایره برهم عمودند.

۵. قوت مرکز هردایره نسبت به دایرهٔ دیگر، مساوی مربع شعاع همان دایره است و بعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع قوت مرکز هر دایره نسبت به دایرهٔ دیگر، مساوی مربع شعاع همان دایره باشد، آن دو دایره برهم عمودند.

۶. هرقطر یک دایره به وسیلهٔ دایرهٔ دیگر به‌نسبت توافقی تقسیم می‌شود و بعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع، هر قطر از یک دایره به‌وسیلهٔ دایرهٔ دیگر به نسبت توافقی تقسیم شود، دو دایره برهم عمودند.

نکته. اگر دو دایرهٔ C و C' به معادله‌های $C(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ و $C'(x,y)=x^۲+y^۲+a'x+by'+c'=۰$ باشند شرط لازم و کافی برای عمود بودن آنها آن است که $aa'+bb'-۲c-۲c'=۰$ باشد.

تعریف. اگر وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ قطر دایرهٔ (C') باشد، می‌گوییم که دایرهٔ (C') به وسیلهٔ دایرهٔ (C) نصف شده است یا تحت قطر قطع گردیده است. در این صورت قوت مرکز دایرهٔ (C') نسبت به دایرهٔ (C) برابر $-R'^۲$ است.

۲.۴.۴. اندازهٔ خط‌المرکزین

۴۴۰. طول وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع ۱۶ سانتی‌متر است. اگر شعاعها ۱۰ سانتی‌متر و ۱۷ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه یک مقدار ممکن برای طول خط‌المرکزین برحسب سانتی‌متر برابر است با :

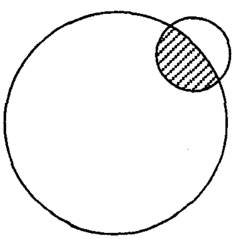
الف) ۲۷ ب) ۲۱ ج) $\sqrt{۳۸۹}$

د) ۱۵ هـ) مقداری نامشخص

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۳.۴.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

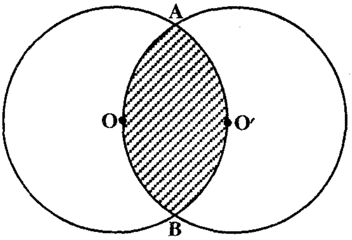
۴۴۱. دو دایره، یکی به شعاع ۱ و دیگری به شعاع ۳، با یکدیگر متقاطعند. مساحت ناحیهٔ مشترک بین این دو دایره $\frac{\pi}{۲}$ است. مساحت ناحیه‌ای از صفحه که دو دایره آن را پوشانده‌اند چه‌قدر است؟



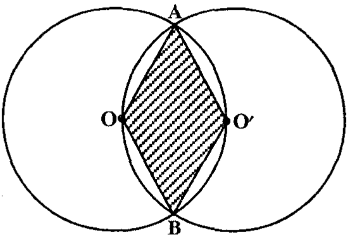
الف) ۸π ب) $\frac{۱۷\pi}{۲}$ ج) $\frac{۱۹\pi}{۲}$

د) ۱۰π هـ) محاسبهٔ آن ممکن نیست.

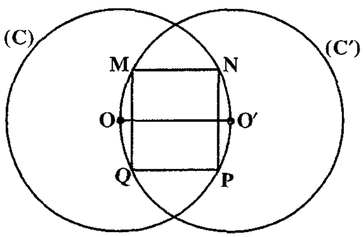
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



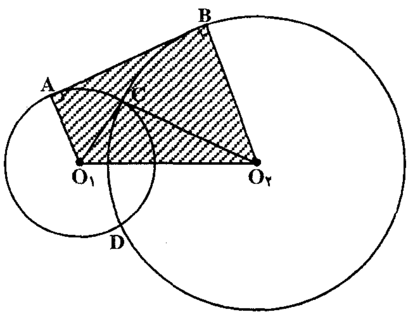
۴۴۲. دو دایرهٔ مساوی به شعاع R، چنان رسم شده‌اند که مرکز هر یک، روی دیگری قرار دارد. اندازهٔ سطح محصور بین آنها را برحسب R به‌دست آورید.



۴۴۳. دو دایرهٔ مساوی به مرکزهای O و O′ به شعاع ۶ هریک از مرکز دیگری می‌گذرند. اگر A و B نقطه‌های برخورد این دو دایره باشد، مساحت لوزی AOBO′ را بیابید.



۴۴۴. دو دایرهٔ هم‌شعاع طوری قرار دارند که طول خط‌المرکزین آنها برابر شعاع یکی از آنهاست. نسبت مساحت مقطع دو دایره را به مساحت مربع محاط دراین مقطع بیابید.



۴۴۵. دو دایره با شعاعهای ۴cm و ۸cm و با مرکزهای O_1 و O_2، همدیگر را در نقطه‌های C و D قطع کرده و AB مماس مشترک برونی آنهاست. اگر مماسهای رسم شده بر دو دایره در نقطهٔ C عمود برهم باشند، مساحت چهارضلعی O_1ABO_2 را تعیین کنید.

۴.۴.۴. زاویهٔ بین دو دایره

۴۴۶. دو دایره از مرکزهای یکدیگر می‌گذرند. از نقطهٔ K محل برخورد آنها خطی می‌گذرانیم که دایره‌ها را در M و N قطع کند. دراین نقطه‌ها مماسهایی بر دایره‌ها رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین این مماسها را تعیین کنید.

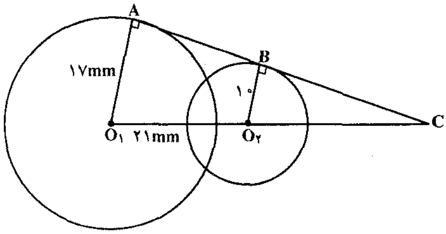
دومین دورهٔ مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزان ممتاز استان چهارمحال و بختیاری ، مرحله نخست، ۱۳۶۳

۴۴۷. دو دایرهٔ C(O,۴) و C′(O′,۳) مفروضند. اگر ۶ = OO′ باشد، زاویهٔ بین این دو دایره را تعیین کنید.

۴۴۸. دو دایرهٔ متقاطع $C(O,R)$ و $C'(O',5)$ داده شده‌اند. اگر طول خط‌المرکزین این دو دایره برابر ۷ باشد، به‌ازاء چه مقداری از R، زاویهٔ بین این دو دایره مساوی 60° است.

۵.۴.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۴۴۹. اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره به شعاعهای ۱۷سانتی‌متر و ۱۰ سانتی‌متر، مساوی با ۲۱ سانتی‌متر است. فاصلهٔ مرکزهای دو دایره از محل برخورد مماس مشترکهای دو دایره را حساب کنید.



۴۵۰. دو دایره با شعاع R چنان قرار گرفته‌اند که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر R است. مربعی در قسمت مشترک دو دایره محاط شده است. طول ضلع مربع را به‌دست آورید.

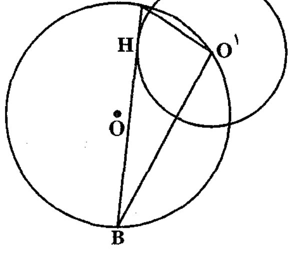
۴۵۱. دو دایرهٔ مساوی با شعاع a طوری درکنار هم قرار گرفته‌اند که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر a است. مقطع این دو دایره با خط‌المرکزین، به‌دو مثلث خمیده تقسیم می‌شود. دریکی از این مثلثها دایره‌ای را محاط می‌کنیم. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی و دو دایرهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کند.

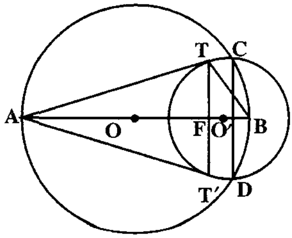
۴۵۲. دو وتر AB و CD از یک دایره یکدیگر را در نقطهٔ Eدرون دایره قطع می‌کنند. فرض کنیم M یک نقطه داخلی پاره‌خط EB (غیراز E وB) باشد. مماس در نقطهٔ E بر دایره‌ای که از سه نقطهٔ D، E وM می‌گذرد، خطهایBC و AC را بترتیب در نقطه‌های F و G قطع می‌کند. اگر $\frac{AM}{AB}=t$، مقدار $\frac{EG}{EF}$ را برحسب t پیدا کنید.

سی‌و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، پکن، ۱۹۹۰

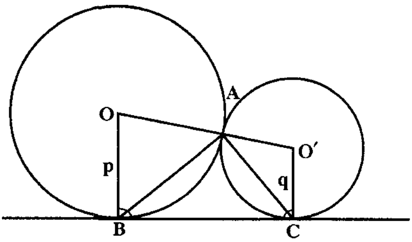
۶.۴.۴. رابطه‌های متری

۴۵۳. دو دایره به مرکزهایO و O' به قسمی داده شده‌اند که مرکز دایرهٔ (O')روی دایرهٔ (O) است. در نقطهٔ اختیاری H از دایرهٔ(O') مماسی برآن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطه‌های A و B قطع کند. ثابت کنید که $O'A.O'B$ همواره مقدار ثابتی است.

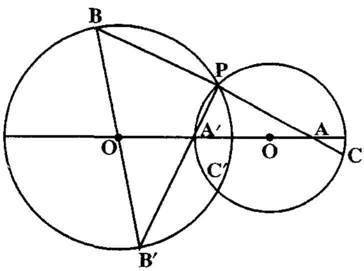




۴۵۴. در دایرهٔ (O) وتر CD را رسم نموده به قطر CD دایرهٔ دیگر (O') را رسم می‌کنیم. خط‌المرکزین OO' دایرهٔ (O) را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. از نقطهٔ A مماسهای AT و AT' را بر دایرهٔ (O') رسم می‌کنیم. وتر TT' خط OO' را در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید که O' وسط BF است ($O'B = O'F$).



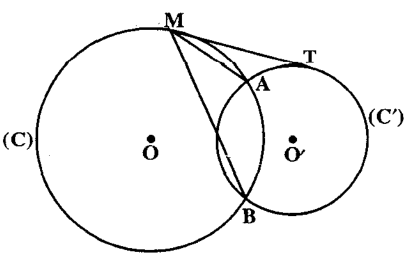
۴۵۵. دو دایره به شعاعهای p و q بر نقطهٔ A می‌گذرند و بترتیب در نقطه‌های B و C بر خط BC مماسند. هرگاه R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، ثابت کنید که $pq = R^2$.



۴۵۶. دو دایرهٔ متقاطع O و O' داده شده‌اند. در نقطهٔ P یک نقطهٔ برخورد این دو دایره، دو خط عمود برهم رسم می‌کنیم تا خط‌المرکزین دو دایره را در نقطه‌های A و A' و دو دایره را در نقطه‌های B و C، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$.

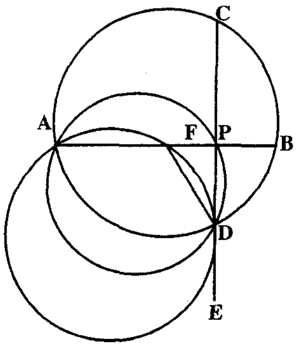
۴۵۷. دو دایره به مرکزهای O_1 و O_2، یکدیگر را در نقطه‌های A و D قطع کرده‌اند. از نقطهٔ A، مماسهایی بر دو دایره رسم کرده‌ایم تا دایره‌های دیگر را در B و C قطع کنند. ثابت کنید: $|AB|^2 : |AC|^2 = |BD| : |CD|$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷



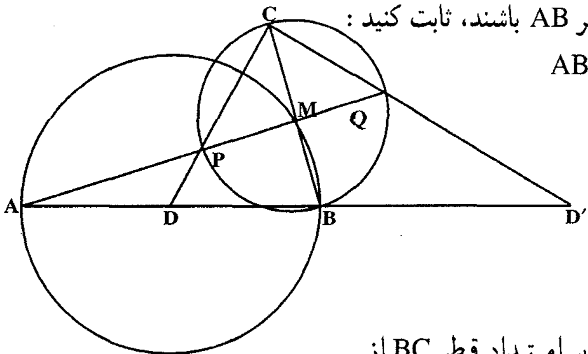
۴۵۸. دو دایرهٔ (C) و (C') در دو نقطهٔ A و B متقاطعند، از نقطهٔ M روی دایرهٔ (C) و در برون دایرهٔ (C') مماس MT را بر دایرهٔ (C') رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نسبت $\frac{MT^2}{MA.MB}$ به‌جای نقطهٔ M روی دایرهٔ (C) بستگی ندارد.

۴۵۹. در دایرهٔ (O) دو وتر دلخواه AB و CD را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. روی خط AB قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ P، نقطهٔ F می‌نامیم و بر نقطه‌های D، A و F یک دایره می‌گذرانیم. این دایره CD را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید $PC.PD = PE.PD$ و نوع چهارضلعی ACBE را مشخص کنید.



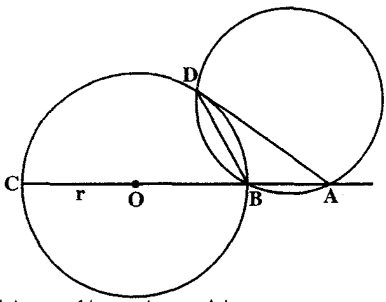
۴۶۰. از نقطهٔ M واقع بر محیط دایره‌ای به قطر AB دایره‌ای به شعاع MB رسم می‌کنیم تا MA را در P و Q، و MB را در نقطهٔ C قطع کند. اگر D و D′ نقطه‌های برخورد CP و CQ با قطر AB باشند، ثابت کنید:

$$AB^2 = AD.AD'$$

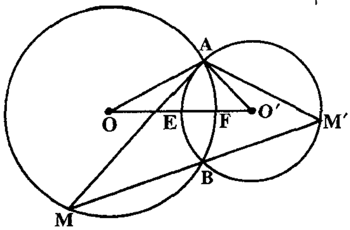


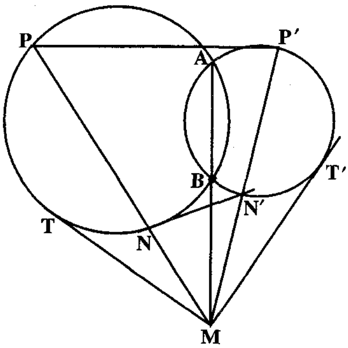
۴۶۱. از نقطهٔ A واقع بر امتداد قطر BC از دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r، مماس AD را برآن رسم می‌کنیم. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABD باشد، ثابت کنید:

$$\frac{R}{r} = \frac{AB}{BD}$$



۴۶۲. دو دایره به مرکزهای O و O′ در نقطه‌های A و B متقاطعند. از نقطهٔ B قاطع BMM′ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید دو مثلث AMM′ و AOO′ متشابه‌اند.

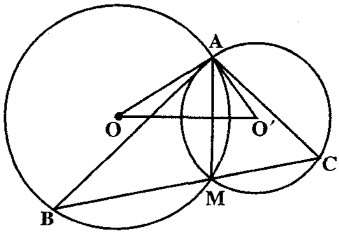




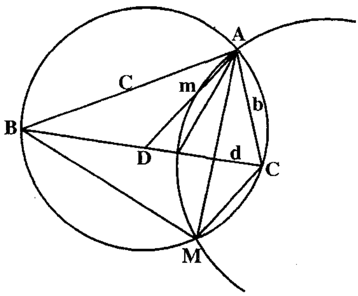
۴۶۳. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. روی امتداد وتر مشترک AB نقطهٔ M را اختیار می‌کنیم.

۱. اگر مماس MT را بر یکی از آنها، و مماس MT′ را بر دیگری رسم کنیم، ثابت کنید MT = MT′ .

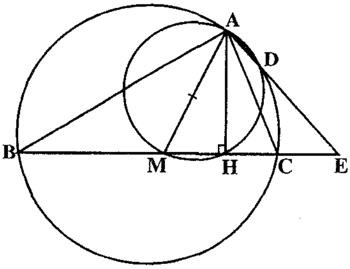
۲. اگر دو قاطع MNP و MN′P′ را نسبت به دو دایره رسم کنیم، ثابت کنید چهارضلعی PNN′P′ محاطی است.



۴۶۴. روی ضلع BC از مثلث ABC نقطه‌ای مانند M اختیار می‌کنیم و دو دایره یکی از سه نقطهٔ B، A و M و یکی از سه نقطهٔ C، A و M می‌گذرانیم. ثابت کنید که شعاعهای این دو دایره بترتیب با ضلعهای ABو AC متناسبند.



۴۶۵. طول ضلعهای مثلث ABC را a، b و c می‌نامیم. هرگاه مکان هندسی نقطه‌ای مانند M را که برای آن $\frac{MB}{MC}=\frac{c}{b}$ است رسم کرده وتر مشترک آن را با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض d و طول میانهٔ رسم شده از A را m بنامیم، داریم $b.c = d.m$.

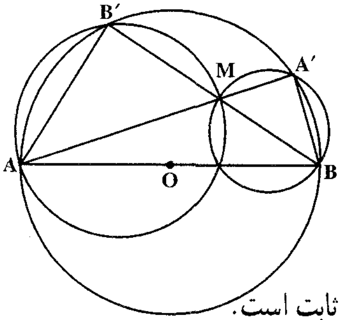


۴۶۶. در مثلث ABC، ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم کرده، دایره‌های محیطی مثلثهای ABCو AHM را رسم می‌کنیم. این دو دایره در نقطه‌های A و D یکدیگر را قطع می‌کنند. از نقطهٔ A به نقطهٔ D وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطهٔ E قطع کند:

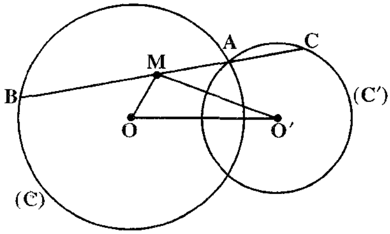
۱. ثابت کنید که $EH.EM=EB.EC$.

۲. ثابت کنید $MH.EM = MB^2$.

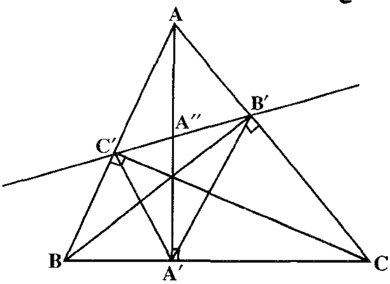
۷.۴.۴. قوت نقطه



۴۶۷. از دو انتهای قطر AB از دایرهٔ (O)، دو وتر غیرمشخص AA′ و BB′ را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. ثابت کنید مجموع قوتهای A نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث MBA′ ، و B نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث MAB′ مقداری ثابت است.

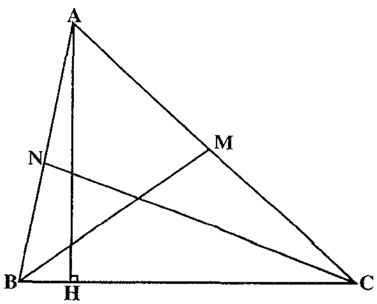


۴۶۸. از یک نقطهٔ برخورد دو دایره، یک قاطع در دو دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع قوتهای وسط این قاطع نسبت به دو دایره، مساوی صفر است. به کمک این خاصیت مکان هندسی وسط قاطعی را که از یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد، تعیین کنید.



۴۶۹. نقطه‌های A′ ، B′ و C′ پای ارتفاعهای مثلث ABC و A″ ، B″ و C″ وسطهای ضلعهای B′C′ ، C′A′ و A′B′ از مثلث A′B′C′ است. نشان دهید که قوت نقطهٔ A″ نسبت به دایرهٔ (B) به مرکز B و به شعاع BB′ ، مساوی است با قوت نقطهٔ A″ نسبت به دایرهٔ (C) به مرکز C و به شعاع CC′ .

۸.۴.۴. محور اصلی دو دایره

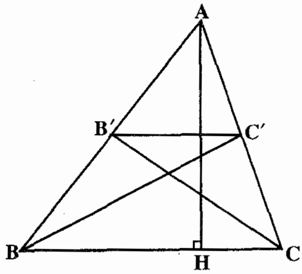


۴۷۰. مثلث ABC مفروض است. میانه‌های BM و CN و ارتفاع AH از این مثلث را رسم کنید و ثابت کنید اگر دایره‌هایی به قطر BM و CN رسم کنیم، خط AH محور اصلی این دو دایره است.

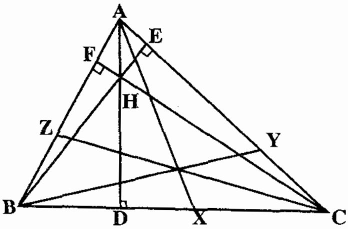
به‌عبارت دیگر:

ثابت کنید هر ارتفاع یک مثلث، محور اصلی دو دایره‌ای است که به قطر دو میانهٔ نظیر ضلعهای دیگر مثلث رسم می‌شوند.

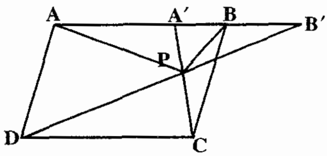
مرحلهٔ اول دومین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۱



۴۷۱. در مثلث ABC، خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در B′ و C′ قطع کند. ثابت کنید AH ارتفاع وارد بر BC از مثلث ABC، محور اصلی دایره‌های به‌قطرهای BC′ و CB′ است.



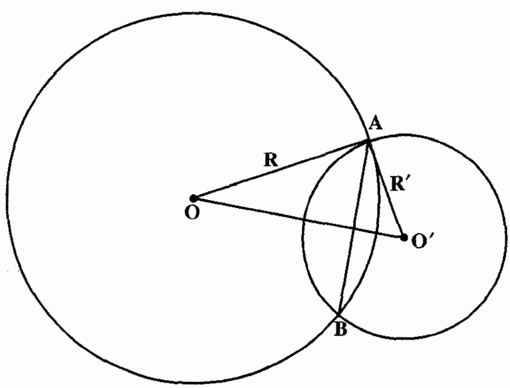
۴۷۲. هرگاه دوخط سوایی از مثلثی را قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم، محور اصلی دو دایرهٔ رسم شده بر نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.

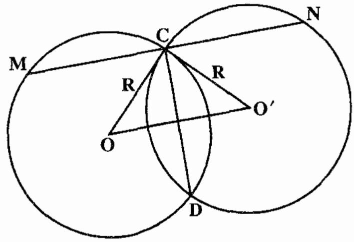


۴۷۳. روی ضلع AB از متوازی‌الاضلاع ABCD دو نقطهٔ متغیر A′ و B′ مفروضند و CA′ و DB′ یکدیگر را درنقطهٔ P قطع می‌کنند. ثابت کنید محور اصلی دایره‌های محیطی مثلثهای PAA′ و PBB′ همواره با BC موازی است.

۹.۴.۴. دو دایرهٔ عمود برهم

۴۷۴. فاصلهٔ مرکزهای دو دایرهٔ عمود بر یکدیگر، مساوی با دو برابر شعاع یکی از دو دایره است. معین کنید که وتر مشترک در هر یک از دایره‌ها چه می‌باشد؟





۴۷۵. دو دایرهٔ مساوی و عمود برهم به شعاع R یکدیگر را در وتر مشترک CD قطع کرده‌اند. قاطع غیرمشخص MCN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

$CM^{2} + CN^{2} = 4R^{2}$

۴۷۶. دو دایرهٔ عمود برهم به مرکزهای O و O′ و شعاعهای R و R′ در نقطه‌های A و B متقاطعند به قسمی که $OO' = d$ است. اگر MN یکی از مماس مشترکهای این دو دایره باشد (M و N نقطه‌های تماس هستند). ثابت کنید :

۱. طول تصویر پاره‌خط NM بر OO′ برابر است با طول پاره‌خط AB .

۲. حاصل‌ضرب فاصله‌های نقطه‌های A و B از مماس مشترک MN برابراست با $(\frac{AB}{2})^{2}$.

کنکور دانشکده صنعتی پلی‌تکنیک، ۱۳۴۶

۴۷۷. دو دایره برهم عمودند. ثابت کنید :

الف ــ طول مماس مشترک آنها واسطهٔ هندسی است مابین طول خط‌المرکزین و طول وترمشترک آنها.

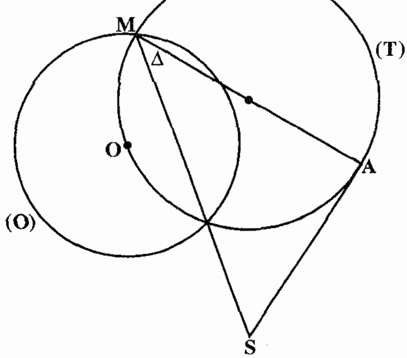
ب ــ دایره‌ای رسم می‌کنیم که قطر آن شعاع وصل شده مابین مرکز یک دایره و نقطهٔ تماس‌آن با مماس مشترک‌باشد. ثابت کنید این دایره بردایرهٔ دیگرمماس است.

۴۷۸. دایرهٔ $C(O,R)$ و قطر AB از آن مفروض است. چند دایره می‌توان از نقطه‌های A و B مرور داد که بر دایرهٔ C عمود باشد؟

الف) یک ب) دو ج) حداقل یک د) هیچکدام

مرحلهٔ اول دومین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۳

۴.۴.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۷۹. نقطهٔ A درخارج دایرهٔ به مرکز O واقع است و M نقطهٔ اختیاری از دایرهٔ (O) است. دایرهٔ به قطر AM را T می‌نامیم و محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (T) را Δ فرض می‌کنیم.

مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ S محل تلاقی Δ با مماسی که از A بر دایرهٔ (T) رسم شود، وقتی که نقطهٔ M دایرهٔ (O) را بپیماید.

۴۸۰. وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع قطر یکی از آنها محسوب می‌شود. از یکی از دو انتهای این قطر مماسهایی را بر دو دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که انتهای دیگر قطر و میانگاههای قطعه‌هایی از مماسها که در داخل دایره‌ها قرار دارند، رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

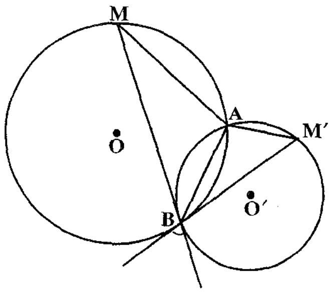
۴۸۱. دو دایرهٔ (C_1) و (C_2) مفروضند به‌طوری که نقطهٔ A مرکز دایرهٔ (C_1) روی دایرهٔ (C_2) قرار می‌گیرد و BC را وتر مشترک دو دایره می‌گیریم. وتر AD، BC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. از نقطهٔ D، مماسهای DF و DG را بر O_1 رسم می‌کنیم. ثابت کنید F، E و G روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

دومین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، ۱۳۷۴

۴۸۲. وتر AB از دایرهٔ (C) را درنظر می‌گیریم. دایرهٔ دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطهٔ P قطع کند، ثابت کنید عمودمنصف BP از وسط کمان $\overset{\frown}{MB}$ می‌گذرد.

مرحلهٔ اول هشتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹

۱۱.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

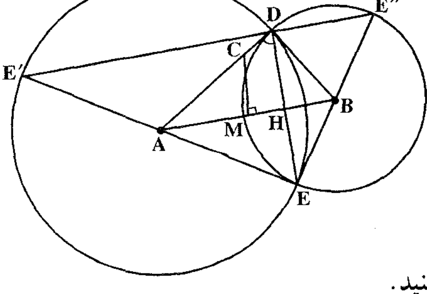


۴۸۳. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. درنقطهٔ B مماسهایی بر هر یک از دو دایره رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ دیگر را قطع کنند، و نقطه‌های برخورد را M و M' می‌نامیم:

۱. ثابت کنید مثلث AMB با مثلث $AM'B'$ متشابه‌است.

۲. ثابت کنید $AB^2 = AM.AM'$.

۳. ثابت کنید AB نیمساز زاویهٔ MAM' است.



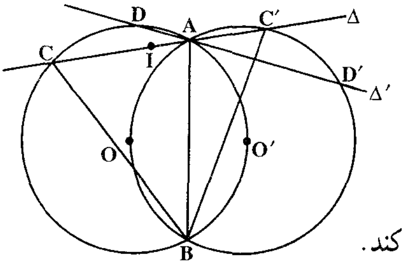
۴۸۴. پاره‌خط $AB = 2a$ مفروض است. از نقطهٔ M وسط AB عمودی بر آن اخراج کرده و طول $MC = \frac{a}{2}$ را روی این عمود جدا می‌کنیم. از نقطهٔ B عمودی بر امتداد AC فرود می‌آوریم و پای عمود را D می‌نامیم.

۱. طولهای AC، AD و BD را حساب کنید.

۲. به مرکزهای A و B دو دایره رسم می‌کنیم که هردو از نقطهٔ D بگذرند. اگر نقطهٔ

دیگر برخورد این دو دایره E باشد، طول DE را حساب کنید.

۳. قطرهای 'EAE و "EBE را رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطه‌های E، D و "E بر یک استقامتند.



۴۸۵. دو دایرهٔ متساوی به مرکزهای O و 'O و به شعاع R مفروضند. نقطهٔ 'O روی دایرهٔ (O) است؛ AB وتر مشترک دو دایره است. از نقطهٔ A خط Δ را چنان رسم می‌کنیم که دایرهٔ (O) را در نقطهٔ C و دایرهٔ ('O) را در نقطهٔ 'C قطع کند.

۱. ثابت کنید که مثلث 'BCC متساوی‌الاضلاع است.

۲. خط Δ را حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم. مکان هندسی نقطهٔ I وسط پاره‌خط 'CC را بیابید.

۳. اگر 'Δ وضع دیگری از خط Δ باشد، 'Δ دایرهٔ (O) را در نقطهٔ D و دایرهٔ ('O) را در نقطهٔ 'D قطع می‌کند. ثابت کنید که وترهای CD و 'C'D برابرند.

۴. فرض می‌کنیم که Δ بر AB عمود باشد، مساحت مثلث 'BCC را برحسب R تعیین کنید. همچنین مساحت سطح واقع بین دو دایره را بر حسب R به‌دست آورید.

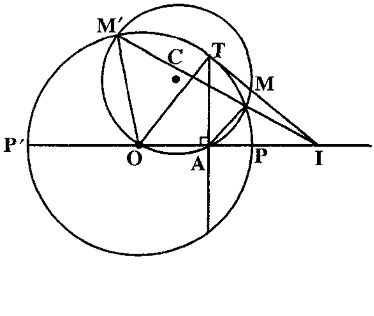
۴۸۶. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ A داخل این دایره مفروض است. دایرهٔ دیگری با شعاع متغیر از دو نقطهٔ O و A می‌گذرد. نقطهٔ C مرکز این دایره و M و 'M نقطه‌های برخورد آن با دایرهٔ (O) است. خط 'MM، خط OA را در نقطهٔ I قطع می‌کند (فرض می‌کنیم M بین I و 'M است). ثابت کنید که:

۱. $\overline{IM}.\overline{IM'} = \overline{IO}.\overline{IA}$

۲. $\overline{IO}.\overline{IA} = \overline{IO}^۲ - R^۲$

۳. $\overline{OA}.\overline{OI} = R^۲$، در مورد نقطهٔ I چه می‌توان گفت؟

۴. اگر T یکی از نقطه‌های برخورد عمود مرسوم بر OA در نقطهٔ A، با دایرهٔ (O) باشد، ثابت کنید که خط مماس بر دایرهٔ (O) در نقطهٔ T از نقطهٔ I می‌گذرد.



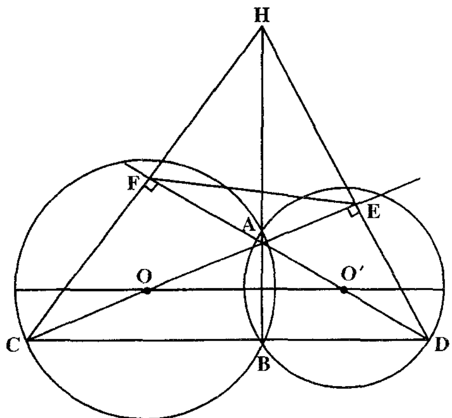
۴۸۷. دو دایرهٔ (O) و (O') به مرکزهای O و O' در دو نقطهٔ A و B متقاطعند. نقطهٔ O' خارج دایرهٔ (O) است وتری که از نقطهٔ B به موازات OO' رسم می‌شود دایرهٔ (O) را در نقطهٔ C و دایرهٔ (O') را در نقطهٔ D قطع می‌کند:

۱. ثابت کنید خطهای CO، DO' و AB همرسند.

۲. نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث ACD را پیدا می‌کنیم و پای ارتفاعهای رأسهای C و D را بترتیب E و F می‌نامیم. ثابت کنید که چهارضلعی $CDEF$ قابل محاط شدن در یک دایره است.

۳. ثابت کنید که رابطهٔ $HE.HD = HF.HC$ برقرار است.

۴. اگر وتر AB برابر ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ (O) و در دایرهٔ (O') برابر ضلع مربع محاطی باشد، R شعاع دایرهٔ (O) و R' شعاع دایرهٔ (O') و مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

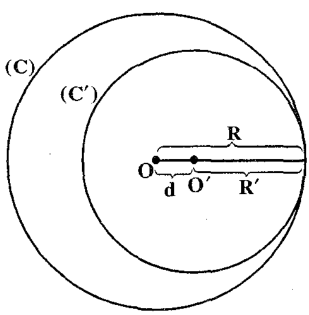


۵.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ مماس درون

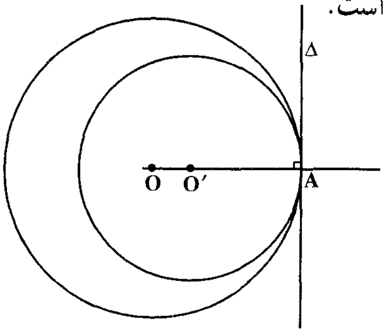
۱.۵.۴. تعریف و قضیه

تعریف. شرط لازم و کافی برای آن که دو دایرهٔ مماس‌درون (مماس داخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزینشان مساوی قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره باشد؛ یعنی در دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO' = d$ داشته‌باشیم:

$$d = |R - R'|$$

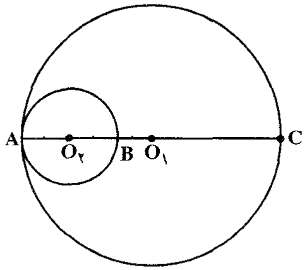


نکته. دو دایرهٔ مماس درون تنها یک مماس مشترک دارند و این مماس مشترک، محور اصلی آن دو دایره است.

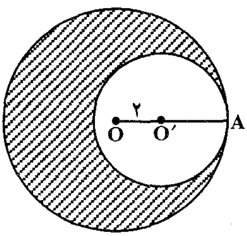


۲.۵.۴. اندازهٔ شعاع

۴۸۸. نقطهٔ B روی پاره‌خط AC با طول ۱۲cm طوری انتخاب شده است که AB = ۴cm است. روی AC و AB به‌عنوان قطر دو دایره، دایره‌هایی را رسم کرده‌ایم. شعاع دایرهٔ مماس بر این دو دایره و پاره‌خط AC را بیابید.

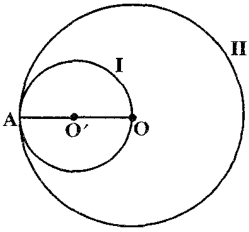


۴۸۹. مساحت سطح بین دو دایرهٔ مماس درون برابر 16π و اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $d = 2$ است. R و R'، شعاعهای این دو دایره را تعیین کنید.



۳.۵.۴. اندازهٔ مساحت

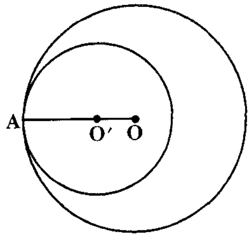
۴۹۰. دایرهٔ I، از مرکز دایرهٔ II گذشته و بر آن مماس است. اگر مساحت دایرهٔ I، ۴ سانتی‌متر مربع باشد، آن‌گاه مساحت دایرهٔ II، برحسب سانتی‌متر مربع برابر است با:



الف) ۸   ب) $8\sqrt{2}$ ج) $8\sqrt{\pi}$ د) ۱۶   هـ) $16\sqrt{2}$

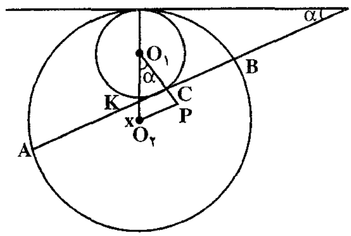
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۴۹۱. دو دایرهٔ مماس درون مفروضند. اگر قطرهای این دو دایره برابر ۲ و ۳ سانتی‌متر باشد، اندازهٔ مساحت بین این دو دایره را تعیین کنید.

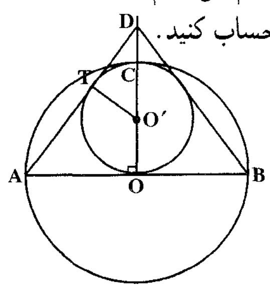


۴.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۴۹۲. دو دایره با شعاعهای a و b $(a<b)$ برهم مماس درونی بوده و مرکز دایرهٔ بزرگتر در خارج دایرهٔ کوچکتر قراردارد. وتر AB از دایرهٔ بزرگتر بر دایرهٔ کوچکتر مماس بوده و با مماس مشترک آنها زاویهٔ α می‌سازد. طول پاره‌خط AB را تعیین کنید.

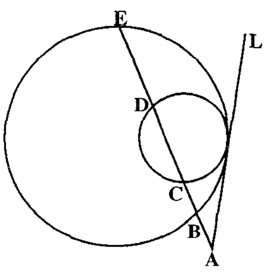


۴۹۳. دایره‌ای به مرکز O و به قطر $AB = 2R$ مفروض است. شعاع OC را عمود بر AB رسم می‌کنیم و به قطر OC دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. سپس از نقطه‌های A و B دو خط مماس براین دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ D یکدیگر را قطع کنند. طول پاره‌خط ODرا برحسب R حساب کنید.



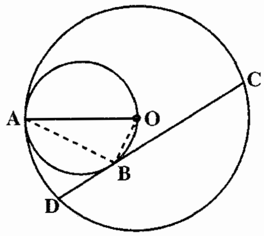
۵.۵.۴. رابطه‌های متری

۴۹۴. در شکل داده شده، خط L مماس مشترک دو دایره و A نقطه‌ای روی آن، غیر از نقطهٔ تماس T است. ثابت کنید $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.



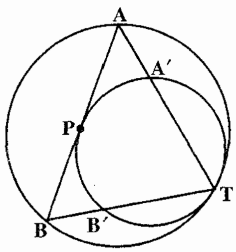
۴۹۵. هرگاه دو دایره مماس درونی باشند، دایرهٔ کوچکتر، وترهای دایرهٔ بزرگتر را که بر نقطهٔ تماس بگذرند، به یک نسبت قطع می‌کند.

۴۹۶. دایره‌ای به قطر OA و دایرهٔ دیگری به مرکز O و به شعاع OA مفروضند. هرگاه CD وتری از دایرهٔ بزرگ مماس بر دایرهٔ کوچک و B نقطهٔ تماس باشد، ثابت کنید که پاره‌خط AB واسطهٔ هندسی بین پاره‌خطهای BC و BD است.



۶.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

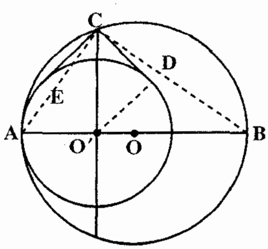
۴۹۷. دو دایره، در نقطهٔ T، مماس درونی می‌باشند. از نقطهٔ P واقع بر محیط دایرهٔ درونی، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم تا دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های A و B قطع کند. اگر A' و B' بترتیب نقطه‌های برخورد $\widehat{TA}$ و $\widehat{TB}$ با دایرهٔ کوچکتر باشند، ثابت کنید که $\widehat{PA'} = \widehat{PB'}$.



۴۹۸. دو دایره در نقطهٔ A مماس درون می‌باشند. از نقطهٔ B واقع بر محیط دایرهٔ درونی $(B \neq A)$، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم تا دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید که AB نیمساز زاویهٔ CAD است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

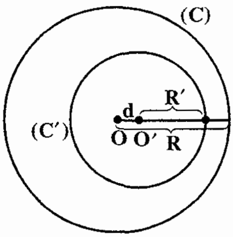
۴۹۹. دو دایره به شعاعهای $2a$ و $3a$ مماس درونند. از مرکز دایرهٔ کوچکتر عمودی بر خط‌المرکزین اخراج می‌کنیم. ثابت کنید که مماسهای رسم شده بر دایرهٔ کوچک از هریک از نقطه‌هایی که این عمود، دایره بزرگ را قطع می‌کند، بر یکدیگر عمودند.



۶.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۱.۶.۴. تعریف

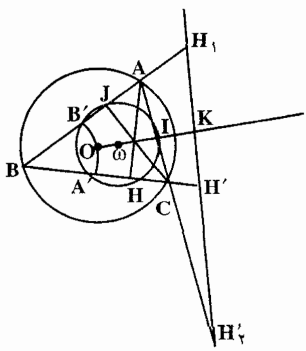
شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$، یکی درون دیگری (متداخل) باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها از قدر مطلق تفاضل شعاع‌هایشان کمتر باشد. یعنی با فرض $OO' = d$ داشته باشیم: $0 < d < |R - R'|$



نکته. محور اصلی دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)، خارج هر دو دایره قرار دارد.

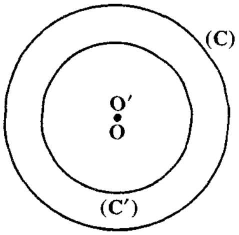
۲.۶.۴. محور اصلی

۵۰۰. ثابت کنید نقطهٔ برخورد محور اصلی دایرهٔ محیطی هر مثلث و دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث با هر ضلع مثلث، مزدوج توافقی پای ارتفاع وارد بر آن ضلع، نسبت به دو رأس مربوط به همان ضلع می‌باشد.



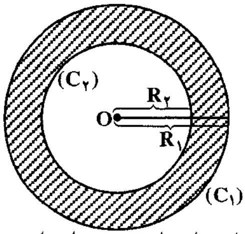
۵۰۱. مطلوب است رسم محور اصلی دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دایرهٔ اولر (دایرهٔ نه نقطه).

۷.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ هم‌مرکز



۱.۷.۴. تعریف

شرط لازم و کافی برای آن‌که دو دایره هم‌مرکز باشند، آن است که اندازهٔ خط‌المرکزین آنها برابر صفر باشد. یعنی برای دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO'=d$ داشته باشیم : $d=0$



طوق دایره یا تاج دایره. سطح به‌وجود آمده بین دو دایرهٔ هم‌مرکز را طوق دایره یا تاج دایره، می‌نامند. اگر شعاع دو دایرهٔ هم‌مرکز R_1 و R_2 $(R_1 > R_2)$ باشد، مساحت طوق دایره ایجاد شده برابر است با :

$$S_{\text{طوق}} = \pi(R_1^2 - R_2^2)$$

۲.۷.۴. اندازه شعاع

۵۰۲. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز ۵ و ۱۳ است. شعاع دایره‌ای را بیابید که مساحت آن با مساحت طوق محصور بین دو دایره برابر باشد.

۵۰۳. نسبت مساحتهای دو دایرهٔ هم‌مرکز ۳ : ۱ است. اگر شعاع دایرهٔ کوچکتر r باشد، آن‌گاه بهترین تقریب برای تفاضل دو شعاع عبارت است از :

الف) ۰/۴۱r   ب) ۰/۷۳   ج) ۰/۷۵
د) ۰/۷۳r   هـ) ۰/۷۵r

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۵۰۴. دایره‌های C_1 و C_2 هم‌مرکزند. شعاع C_1 برابر یک کیلومتر و محیط C_2 به‌اندازهٔ یک متر از محیط C_1 بیشتر است. شعاع C_2 :

الف) کمتر از ۱۰۰۰/۰۰۱ متر است.
ب) بین دو مقدار ۱۰۰۰/۰۰۱ متر و ۱۰۰۰/۰۱ متر واقع است.
ج) بین دو مقدار ۱۰۰۰/۰۰۱ متر و ۱۰۰۰/۱ متر واقع است.
د) بین دو مقدار ۱۰۰۰/۱ متر و ۱۰۰۰۱ متر واقع است.
هـ) بیش از ۱۰۰۱ متر است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۳.۷.۴. اندازهٔ محیط

۵۰۵. یک زمین مسابقهٔ دو به‌صورت حلقه‌ای است که از دو دایرهٔ هم‌مرکز تشکیل شده است. پهنای حلقه ۱۰ متر است. اختلاف محیطهای این دو دایره برحسب متر تقریباً برابر است با:

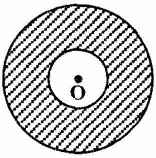
الف) ۱۰ ب) ۳۰

ج) ۶۰ د) ۱۰۰

هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۴.۷.۴. اندازهٔ مساحت



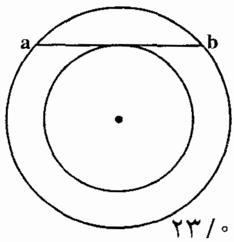
۵۰۶. سطح واشری را بیابید که قطر آن ۵cm و قطر سوراخ آن ۲cm است.

۵۰۷. در دو دایره با یک مرکز، نسبت شعاع دایرهٔ کوچکتر به شعاع دایرهٔ بزرگتر $\frac{۲}{۳}$ است. نسبت مساحت دایرهٔ کوچکتر به مساحت تاج بین دو دایره چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۴}{۹}$ ب) $\frac{۱}{۲}$ ج) $\frac{۲}{۳}$

د) $\frac{۴}{۵}$ هـ) ۱

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

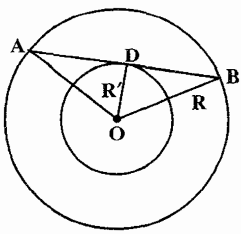


۵۰۸. در شکل داده شده دو دایره هم‌مرکزند. و طول وتر ab برابر ۱۴/۴ است. مساحت نوار محصور بین دو دایره چه‌قدر است؟

الف) $۲۸/۸\pi$ ب) $۲۰۷/۳۶\pi$ ج) $۲۳/۰۴\pi$

د) $۵۱/۸۴\pi$ هـ) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۵۰۹. ثابت کنید سطح محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای R′ وR ، برابر است با سطح دایره‌ای که قطرش وتری از دایرهٔ بزرگتر باشد که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است.

۵.۷.۴. رابطه‌های متری

۵۱۰. دو دایرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای R و r ($R > r$) در صفحه را درنظر بگیرید. فرض کنید P نقطه‌ای ثابت روی دایرهٔ کوچک و B نقطهٔ متغیری روی دایرهٔ بزرگ باشد. پاره‌خط BP دایرهٔ بزرگ را دوباره در C قطع می‌کند. از P عمودی بر BP رسم کنید تا دایرهٔ کوچک را در A قطع کند (اگر این عمود بر دایرهٔ کوچک در P مماس باشد، آن‌گاه $A=P$).

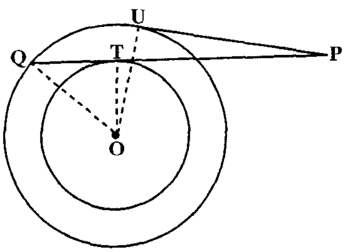
الف. تمام مقادیر ممکن $AB^2 + BC^2 + CA^2$ را زمانی که B روی دایرهٔ بزرگ تغییر نماید، تعیین کنید.

ب. مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را به‌دست آورید.

بیست ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، استرالیا ۱۹۸۸

۵۱۱. دو دایرهٔ هم‌مرکز داده شده‌اند. ثابت کنید مجموع مربعهای فاصله‌های نقطه‌ای واقع بر محیط یک دایره، از دو انتهای قطری از دایرهٔ دیگر، مقداری است ثابت.

۵۱۲. دو دایرهٔ هم‌مرکز داده شده‌اند. از نقطهٔ P مماس PU را بر دایرهٔ بیرونی و مماس PT را بر دایرهٔ درونی رسم می‌کنیم. خط PT با دایرهٔ بیرونی در نقطهٔ Q برخورد می‌کند. ثابت کنید که:
$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2$



۶.۷.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۱۳. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که نسبت قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ هم‌مرکز به مرکز O، برابر با مقدار معلوم K ($K \neq 0$) باشد.

۵۱۴. دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای ۹ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر داده شده‌اند. اندازهٔ وتری از دایرهٔ بزرگتر را که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است، پیدا کنید.

۵۱۵. مساحت ناحیهٔ بین دو دایرهٔ هم‌مرکز $\frac{۲۵\pi}{۲}$ سانتی‌متر مربع است. طول وتری از دایرهٔ بزرگتر که بر دایرهٔ کوچکتر مماس باشد، برحسب سانتی‌متر برابر است با:

الف) $\frac{۵}{\sqrt{۲}}$ ب) ۵   ج) $۵\sqrt{۲}$

د) ۱۰   هـ) $۱۰\sqrt{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۷.۷.۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۱۶. دو دایرهٔ هم‌مرکز مفروضند. قاطعی متغیر، دایرهٔ برونی را در نقطه‌های A و B و دایرهٔ درونی را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که:

۱. AC.CB مقدار ثابتی دارد و با تغییر قاطع تغییر نمی‌کند.

۲. از نقطهٔ معلوم P قاطعی چنان مرور دهید که با تقاطع با دایره‌ها به سه قسمت متساوی تقسیم شود یا به‌طورکلی نسبت قطعه‌های آن نسبت معلومی باشد.

۳. قاطع به موازات قطر ثابتی از دایره باقی می‌ماند. اگر شکل را حول این قطر دوران دهیم، دو استوانهٔ محاط در دو کرهٔ متحدالمرکز به‌دست می‌آیند. اختلاف دو سطح جانبی این استوانه‌ها را با تغییر قاطع بحث کنید.

۴. قاطع را چنان تعیین کنید که اختلاف دو سطح جانبی استوانه‌های مذکور برابر مقدار معلوم $2\pi h^2$ گردد. برای $h = \sqrt{RR'}$ مسأله را بحث کنید.

هندسهٔ دوایر . دکتر محسن هشترودی

بخش ۵

• رابطه‌های متری در سه دایره و بیشتر

۱.۵.رابطه‌های متری در سه دایره

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۱.۵. اندازهٔ شعاع

۳.۱.۵. اندازهٔ مساحت

۴.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۵.۱.۵. رابطه‌های متری

۶.۱.۵. مرکز اصلی سه دایره

۷.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۵. رابطه‌های متری در چهاردایره

۱.۲.۵. اندازهٔ شعاع

۲.۲.۵. اندازهٔ مساحت

۳.۲.۵. رابطه‌های متری

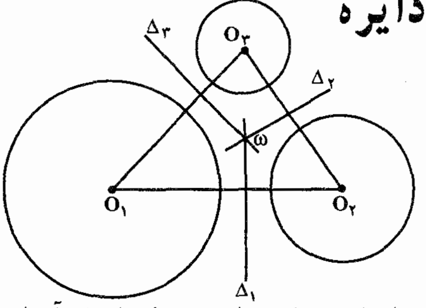
۴.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت.

۳.۵. رابطه‌های متری در پنج دایره

۱.۳.۵. اندازهٔ شعاع

بخش ۵. رابطه‌های متری در سه دایره و بیشتر

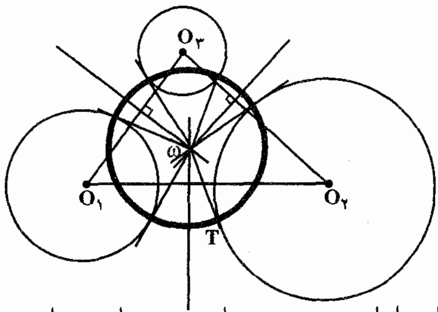
۱.۵. سه دایره



۱.۱.۵. تعریف و قضیه

مرکز اصلی سه دایره. اگر نقطه‌ای نسبت به سه دایره که مرکزهایشان روی یک خط راست نباشند، قوت برابر داشته باشد، آن نقطه را مرکز اصلی آن سه دایره می‌نامند.

۵۱۷. **قضیه.** هرگاه مرکزهای سه دایره بر یک خط راست واقع نباشند، مرکز اصلی آنها وجود دارد و محور اصلی هر دو دایره از آن سه دایره، از مرکز اصلی می‌گذرد.



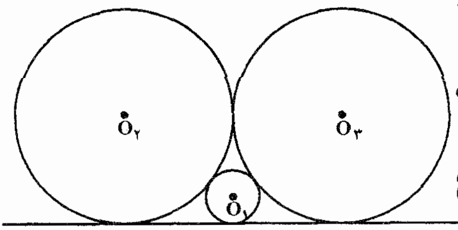
دایرهٔ اصلی سه دایره

تعریف. اگر مرکز اصلی سه دایره، خارج آن سه دایره قرار داشته باشد، اندازهٔ مماسهای رسم شده از این نقطه بر سه دایره با هم برابر است و دایره‌ای که مرکزش مرکز اصلی سه دایره و شعاعش مساوی اندازهٔ یکی از این مماسها باشد، برهر سه دایره عمود است. این دایره را دایرهٔ اصلی سه دایره می‌نامند.

۲.۱.۵. اندازهٔ شعاع

۵۱۸. در مثلث ABC به مرکزهای A، B و C سه دایره چنان رسم شده‌اند که دوبه‌دو بریکدیگر مماس برونی هستند. ثابت کنید شعاعهای این دایره‌ها برابرند با $p-a$، $p-b$ و $p-c$ (P نصف محیط مثلث است).

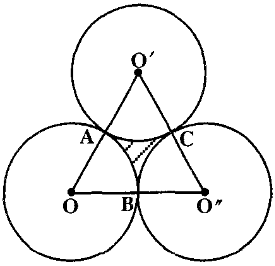
۵۱۹. در یک طرف خط راستی، سه دایره مطابق شکل رسم شده‌اند ؛ یک دایره به شعاع ۴ سانتی‌متر بر خط مماس است. دو دایرهٔ دیگر مساوی‌اند و هر یک برخط و بر دو دایرهٔ دیگر مماس است. شعاع دو دایرهٔ مساوی، برابر است با :



الف)۲۴ ب) ۲۰ ج) ۱۸ د) ۱۶ هـ) ۱۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۳.۱.۵. اندازهٔ مساحت

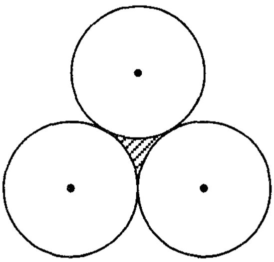


۵۲۰. مساحت سطح مشترک مابین سه دایرهٔ متساوی به شعاع r را که دوبه‌دو با یکدیگر مماس باشند، تعیین کنید.

۵۲۱. سه دایره، هرکدام به شعاع ۱، دوبه‌دو با هم مماس برونی هستند. مساحت ناحیهٔ محصور بین این سه دایره چه‌قدر است؟

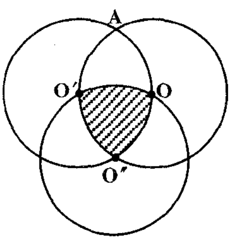
الف) $۲\sqrt{۳}-\pi$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\pi}{۲}$ ج) $۲\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}$

د) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\pi}{۲}$ هـ) $\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲}$

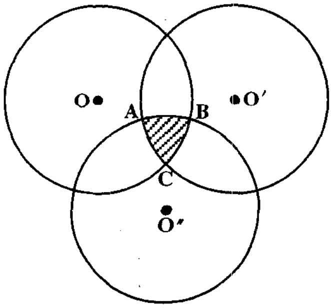


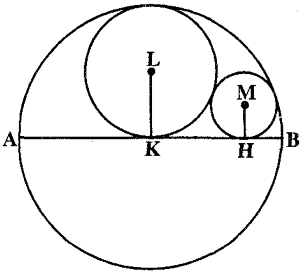
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۲۲. مطلوب است تعیین مساحت سطح مشترک مابین سه دایرهٔ متساوی، به‌قسمی که هر یک از آنها از مرکز دو دایرهٔ دیگر بگذرند.



۵۲۳. مطلوب است مساحت سطح مشترک مابین سه دایرهٔ مساوی به شعاع R، که دوبه‌دو یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.





۵۲۴. مطابق با شکل داده شـــده، AB قطر دایرهٔ K است. دایرهٔ L بر دایرهٔ K و در مرکز K بر قطر AB مماس است. دایرهٔ M بر دایرهٔ K، بر دایرهٔ L و بر قطر AB مماس است. نسبت مساحت دایرهٔ K به مساحت دایرهٔ M برابر است با:

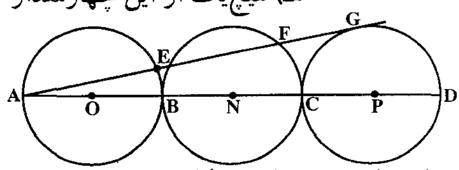
الف) ۱۲ ب) ۱۴
ج) ۱۶ د) ۱۸ هـ) عددی غیرصحیح

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۴.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

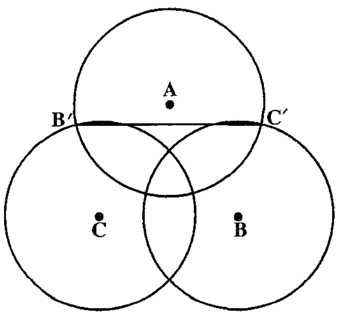
۵۲۵. مطابق شکل، پاره‌خط AD به سه پارهٔ برابر AB،BC و CD تقسیم و به قطر هریک از این پاره‌خطها، دایره‌ای رسم شده است. خط AG بر دایرهٔ به قطر CD مماس است و دایرهٔ به قطر BC را در E و F قطع می‌کند. هرگاه شعاع هر یک از دایره‌ها ۱۵ باشد، طول وتر EF چه‌قدر می‌شود؟

الف) ۲۰ ب) $۱۵\sqrt{۲}$ ج) ۲۴
د) ۲۵ هـ) هیچ‌یک از این چهارمقدار



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲ ـ المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

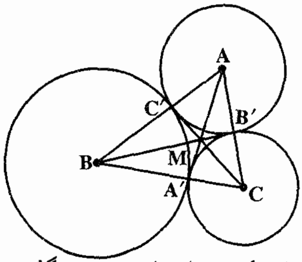
۵۲۶. دایره‌های به مرکزهای A، B وC هرکدام به شعاع r هستند و ۱ < r < ۲، و فاصلهٔ بین هر دو مرکز ۲ است. اگر ′B نقطهٔ برخورد دایره‌های A و C واقع درخارج دایرهٔ B باشد، و اگر ′C نقطهٔ برخورد دایره‌های A و B واقع درخارج دایرهٔ C باشد، آن‌گاه طول پاره‌خط ′B′C برابر است با:



الف) $۳r - ۲$ ب) $r^۲$
ج) $r + \sqrt{۳(r - ۱)}$ د) $۱ + \sqrt{۳(r^۲ - ۱)}$
هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۵۲۷. سه دایره به مرکزهای A، B و C را که دوبه‌دو مماس برونی هستند، درنظر می‌گیریم. نقطه‌های تماس دایره‌های $(B و C)$، $(C و A)$ و $(A و B)$ را بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم.

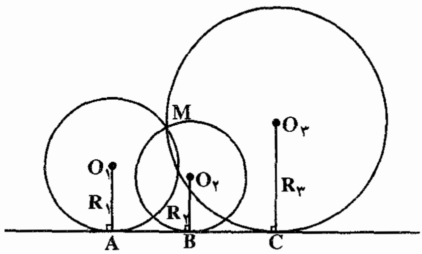


۱. ثابت کنید که خطهای AA'، BB' و CC' از یک نقطه مانند M می‌گذرند.

۲. طول پاره‌خطهای AA'، MA و MA' را بر حسب a، b و c به‌دست آورید.

۵.۱.۵. رابطه‌های متری

۵۲۸. سه دایره به مرکزهای O_1، O_2 و O_3 و شعاعهای R_1، R_2 و R_3 در نقطهٔ M متقاطعند. اگر خطی بر هر سه دایره درنقطه‌های A، B و C مماس باشد، رابطه‌ای بین R_1، R_2 و R_3 و زاویه‌های O_1MO_2، O_2MO و OMO_1 به‌دست آورید.



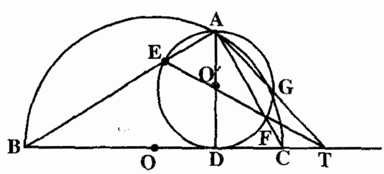
۶.۱.۵. مرکز اصلی سه دایره

۵۲۹. مرکز اصلی دایره‌های محاطی برونی مثلث ABC را تعیین کنید.

۵۳۰. مرکز اصلی سه دایره را که قطرهای آنها ضلعهای مثلث مفروضی باشند به‌دست آورید.

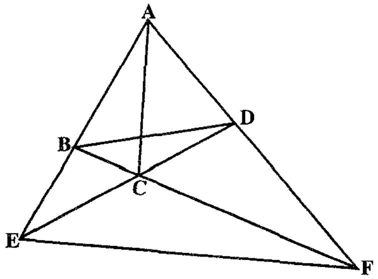
۵۳۱. هرگاه سه خط سوایی از مثلثی را قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم که به یک دسته دایره متعلق نباشند، مرکز اصلی این سه دایره همان مرکز ارتفاعی مثلث مفروض است.

۵۳۲. از نقطهٔ A واقع بر نیمدایرهٔ (O) عمود AD را بر قطر BC فرود می‌آوریم. سپس دایرهٔ O' به قطر AD را رسم می‌کنیم تا AB را در E و AC را در F و دایرهٔ (O) را در A و G قطع کند. ثابت کنید خطهای BC، EF و AG از یک نقطه می‌گذرند که مرکز اصلی سه دایره است.



۷.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۳۳. در هر چهارضلعی کامل :



۱. دایره‌هایی که قطرهای آنها سه قطر چهارضلعی باشند، دارای یک محور اصلی هستند.

۲. وسطهای سه قطر چهارضلعی کامل، روی یک خط راست قرار دارند.

۳. نقطه‌های برخورد ارتفاعهای چهار مثلثی که از برخورد ضلعهای چهارضلعی حاصل می‌شوند، روی یک خط راست واقعند.

نکته. هرگاه ضلعهای روبه‌روی یک چهارضلعی را امتداد دهیم تا یکدیگر را قطع کنند، شکل حاصل را چهارضلعی کامل ؛ و خط وصل شده بین هر دو رأس غیرواقع بر یک ضلع را قطر آن می‌نامند.

۵۳۴. مثلث ABC مفروض است، دو نقطهٔ A' و A'' را روی BC و دو نقطهٔ B' و B'' را روی CA و دو نقطهٔ C' و C'' را روی AB درنظر می‌گیریم. اگر از نقطه‌های (A',A'',B',B'')، (B',B'',C',C'') و (C',C'',A',A'') سه دایره گذشته باشند، ثابت کنید ۶ نقطهٔ مفروض بر محیط یک دایره واقعند.

۵۳۵. سه دایرهٔ آپولونیوس یک مثلث در یک وتر مشترکند. (دایرهٔ آپولونیوس نظیر به ضلع BC از مثلث ABC، دایره‌ای است که به قطر DD' رسم می‌شود. D پای نیمساز زاویهٔ داخلی و D' پای نیمساز زاویهٔ خارجی A است. هر مثلث دارای سه دایرهٔ آپولونیوس است.)

۵۳۶. دایرهٔ (W) بر دوخط موازی با نامهای L_1 و L_2 مماس است. دایرهٔ (W_1) بر L_1 درنقطهٔ A مماس و بر W در نقطهٔ C مماس برونی است. دایرهٔ (W_2) نیز بر L_2 در نقطهٔ B مماس و بر W و W_1 بترتیب درنقطه‌های D و E مماس برونی است. AD و BC در نقطهٔ Q متقاطعند. ثابت کنید که Q مرکز دایرهٔ محیطی مثلث CDE است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، هنگ‌کنگ، ۱۹۹۴

۵۳۷. سه دایره دوبه‌دو برون هم هستند و نقطهٔ O مرکز اصلی آنهاست. از O شش مماس بر این دایره‌ها رسم می‌شود. ثابت کنید که شش نقطهٔ تماس بر یک دایره واقعند.

۵۳۸. سه دایره با شعاعهای برابر، در یک نقطه برخورد دارند. ثابت کنید سه نقطهٔ دیگر برخورد، روی محیط دایره‌ای به همان شعاع واقع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۵۳۹. دایره‌های (O_1) و (O_2)، بر دایرهٔ (O)، از درون و در نقطه‌های A و B مماسند. M نقطهٔ دلخواهی از محیط دایرهٔ (O) و C و D، نقطه‌های برخورد خطهای راست AM و BM بترتیب با دایره‌های (O_1) و (O_2) است. ثابت کنید خطهای راست AB و CD، باهم موازی‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۵۴۰. ثابت کنید بیش از سه دایرهٔ دوبه‌دو عمود برهم، وجود ندارد.

۲.۵. رابطه‌های متری در چهار دایره

۱.۲.۵. اندازهٔ شعاع

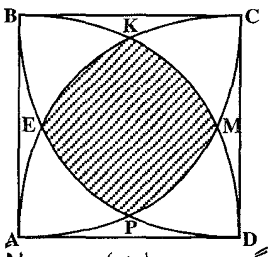
۵۴۱. چهار دایره درنظر می‌گیریم که هرکدام از آن‌ها، بر سه خط راست منطبق بر ضلعهای مثلث ABC، مماس باشند. فرض کنید نقطه‌های تماس دایره‌های K و K_c با ضلع AB، بین دو نقطهٔ A و B واقع باشند. ثابت کنید:
واسطهٔ هندسی طول شعاعهای دو دایرهٔ K و K_c، از نصف طول AB تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۷

۵۴۲. سه دایره به شعاع r از نقطهٔ O می‌گذرند و دوبه‌دو یکدیگر را در نقطه‌های A، B و C قطع می‌کنند. ثابت کنید شعاع دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد نیز برابر r است.

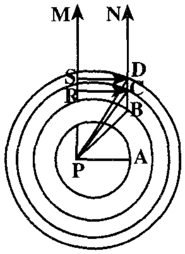
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۳

۲.۲.۵. اندازهٔ مساحت



۵۴۳. مرکز چهار دایره با شعاعهای مساوی a، روی رأسهای مربعی به ضلع a قرار دارند. مساحت سطح مشترک این دایره‌ها را محاسبه کنید.

۵۴۴. برای ساختن سیبل (تخته‌هایی که برای هدفگیری می‌سازند)، معمولاً چند دایرهٔ هم‌مرکز رسم می‌کنند. برای این‌که احتمال برخورد تیر به داخل هر یک از حلقه‌ها با احتمال برخورد به داخل دایرهٔ وسط برای آماتورها یکسان باشد، دایره‌ها را به‌طریق صفحه بعد رسم می‌کنند. اگر r فاصلهٔ بین دو نیمخط متوازی PM و AN باشد، دایره‌ای به مرکز P و به شعاع r رسم می‌کنند. این دایره PM را در Q قطع می‌کند.

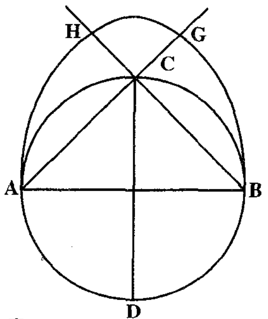


خط مرکز P و به شعاع r رسم می‌کنند. این دایره PM را در Q قطع می‌کند. خط عمود بر PM در نقطهٔ AN ،Q را در B قطع می‌کند. دایره‌ای به مرکز P و به شعاع $PB = r_1$ را رسم می‌کنند. این کار را با رسم عمودهایی در R و S و دایره‌های هم‌مرکز به شعاعهای $PC = r_2$ و $PD = r_3$ تکرار می‌کنند. به‌این ترتیب می‌توان به تعداد دلخواه دایره رسم کرد.

الف ــ r_1 ، r_2 و r_3 را بر حسب r به‌دست آورید.

ب ــ نشان دهید که مساحت‌دایرهٔ‌وسط با‌مساحت‌هریک‌از‌سه‌حلقهٔ دور آن برابر است.

۵۴۵. فرمولی برای یافتن مساحت این شکل که شبیه تخم‌مرغ است بیابید. رسم شکل به این‌ترتیب است. AB و CD را دوقطر عمود برهم از دایره‌ای به شعاع r فرض کنید. به مرکز A و به شعاع AB کمانی رسم کنید که از B بگذرد و AC را در G قطع کند. به نحوی مشابه به مرکز B و به شعاع AB کمانی رسم کنید تا BC را در H قطع کند. سرانجام به مرکز C و به شعاع CG کمان $\overparen{GH}$ را رسم کنید. مساحت ADBGH را بیابید.



۳.۲.۵. رابطه‌های متری

۵۴۶. سه دایره با شعاعهای برابر دوبه‌دو با هم مماس برونی هستند و هر سه، در دایره‌ای محاط و با آن مماسند. نقطه‌های تماس سه دایرهٔ مفروض، محیط آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. از نقطهٔ مفروض روی دایرهٔ بزرگتر سه مماس به سه دایرهٔ مساوی رسم می‌کنیم. ثابت کنید اندازهٔ یکی از این مماسها، مساوی مجموع اندازه‌های دو مماس دیگر است.

۴.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۴۷. سه دایرهٔ C_1 ، C_2 و C_3 و سه نقطهٔ A_1 ، A_2 و A_3 مفروضند. دایرهٔ (C) را چنان رسم کنید که محور اصلی دوبه‌دو دایره‌های (C و C_1) ، (C و C_2) و (C و C_3) بترتیب از نقطه‌های A_1 ، A_2 و A_3 بگذرند.

۵۴۸. دایره‌های محاطی درونی و محاطی برونی مثلث ABC، دوبه‌دو دارای شش محور اصلی می‌باشند. ثابت کنید که این خطها عبارتند از نیمسازهای مثلثی که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث مفروض باشد.

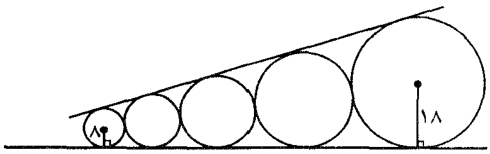
۵۴۹. چهار دایره روی یک صفحه چنان قرار دارند که هردایره بر دو دایرهٔ دیگر، از بیرون مماس است. ثابت کنید نقطه‌های تماس، روی محیط یک دایره‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۳.۵. رابطه‌های متری درپنج دایره

۱.۳.۵. اندازهٔ شعاع

۵۵۰. پنج دایره مطابق شکل به گونه‌ای رسم شده‌اند که هریک با دایرهٔ بعدی مماس برونی و همه بر دو خط D_1 و D_2 مماس هستند. اگر شعاع بزرگترین دایره ۱۸ و شعاع کوچکترین دایره ۸ باشد، شعاع دایرهٔ وسط چه‌قدر است؟

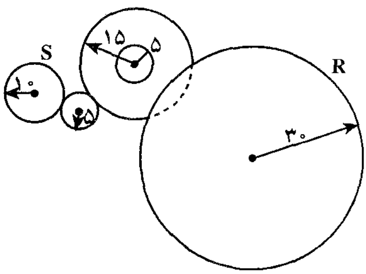


الف) ۱۲ ب) ۱۲/۵ ج) ۱۳ د) ۱۳/۵ هـ) ۱۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۵۱. دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث، بر هر چهار دایرهٔ محاطی آن مماس است (قضیهٔ فوئرباخ).

۵۵۲. شکل داده شده، نمایی از مجموعه چرخهایی دندانه‌دار در اتصال با یکدیگر است. هرگاه چرخ R یک دور بچرخد، چرخ S چند دور خواهد چرخید؟



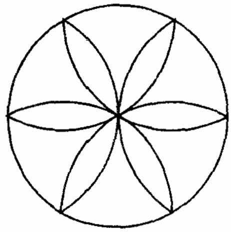
الف)۳ ب) ۶ ج) ۹ د) ۲۷

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۴.۵. رابطه‌های متری در شش دایره

۱.۴.۵. اندازهٔ مساحت

۵۵۳. شعاع هریک از کمانهایی که این گل شش‌برگ را تشکیل می‌دهند، با شعاع دایره‌ای که از نوک برگها می‌گذرد برابر است. اگر این شعاع ۱ باشد، مساحت این شکل را بیابید.



۵.۵. رابطه‌های متری در n دایره (n>۶)

۱.۵.۵. اندازهٔ مساحت

۵۵۴. در دنباله‌ای نامتناهی از دایره‌ها، شعاع دایرهٔ اول ۱ سانتی‌متر، شعاع دایرهٔ دوم ۱/۲ سانتی‌متر، شعاع دایرهٔ سوم ۱/۴ سانتی‌متر است و این ترتیب تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. مجموع مساحتهای دایره‌ها برابر است با :

الف) $\frac{۳\pi}{۴}$ ب) ۱/۳π

ج) ۲π د) $\frac{۴\pi}{۳}$

هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۵۵۵. n دایرهٔ مساوی را کنار هم طوری قرار می‌دهیم، که درکنارهٔ هریک از آنها، دو دایره به صورت مماس قرار گیرند. هریک از دایره‌ها از طریق نقطه‌های تماس به دو کمان تقسیم می‌شوند. کمانهای نزدیک به‌هم این دایره شکلی را به‌وجود می‌آورند، که محاسبهٔ مساحت آن درهریک از حالتهای زیر با درنظر گرفتن شعاع هریک از دایره‌ها برابر R، موردنظر است :

الف) n = ۳   ب) n = ۴

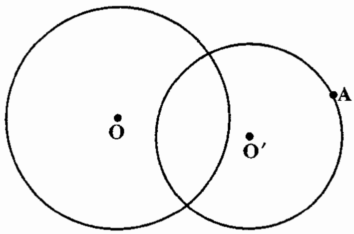
ج) n = ۶

۵۵۶. n دایره در روی صفحه، مساحتی برابر ۱ واحد مربع را اشغال کرده‌اند. ثابت کنید که می‌توان از بین آنها، چند دایرهٔ غیر متقاطع انتخاب کرد، که مجموع مساحتهای آنها بیشتر از $\frac{1}{9}$ واحد مربع باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲.۵.۵. دایره‌ها از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند

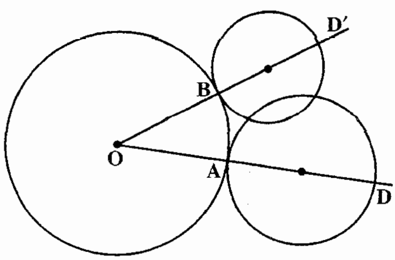
۵۵۷. دایرهٔ ثابت (O) و نقطهٔ ثابت A داده شده است. ثابت کنید که دایره‌هایی که بر A بگذرند و بر دایرهٔ (O) عمود باشند، بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.



۵۵۸. کلیهٔ دایره‌هایی که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشند، از دو نقطهٔ ثابت واقع بر خط‌المرکزین آنها، می‌گذرند.

۳.۵.۵. محور اصلی

۵۵۹. دو خط راست D و D′ که در نقطهٔ O متقاطعند، مفروضند. نقطه‌های A و B را روی این خط چنان اختیار می‌کنیم که OA=OB باشد. ثابت کنید محور اصلی کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر A که مرکزشان بر D و کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر B، که مرکزشان بر D′ واقع است؛ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

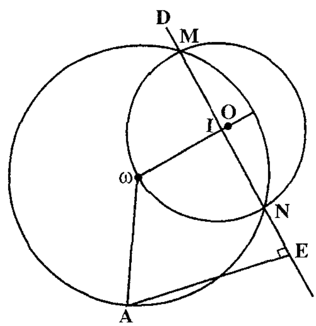


۵۶۰. مکان هندسی نقطهٔ M به قسمی که بین قوت آن نسبت به دایرهٔ (O)، و قوت آن نسبت به دایرهٔ (O′) رابطهٔ خطی متجانس برقرار باشد، یعنی اگر M_O قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (O) و $M_{O'}$ قوت نقطهٔ M نسبت به دایره (O′) باشد، دایره‌ای است که با دو دایرهٔ (O) و (O′) دارای یک محور اصلی می‌باشند.

هندسهٔ دوایر، دکتر محسن هشترودی

۵۶۱. دوخط Δ و Δ′ در نقطهٔ O متقاطعند. نقطه‌های A و A′ را بترتیب در روی Δ و Δ′ درنظر می‌گیریم. دایره‌های متغیر (ω) و (ω′) که اولی در A بر Δ و دومی در A′ بر Δ′ مماسند، مفروضند. نشان دهید محور اصلی دو دایرهٔ ω و ω′ بریک یا دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۵۶۲. دایرهٔ (O) و نقطهٔ A مفروضند. مطلوب است تعیین پوش محورهای اصلی دایرهٔ (O) و دایره‌های گذرنده بر A که مرکزشان بر دایرهٔ (O) واقع است.



۴.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

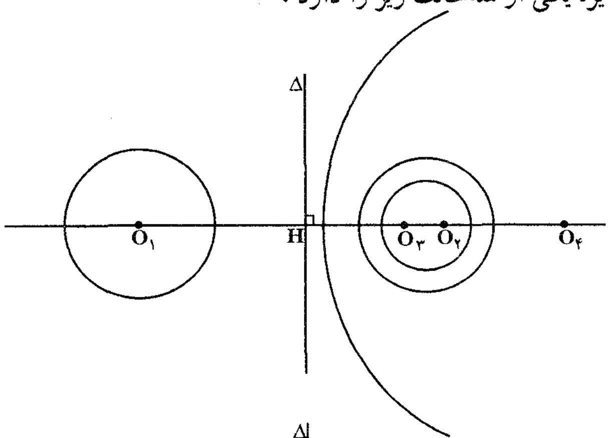
۵۶۳. دو دایرهٔ (C) و (C′) به شعاعهای R و R′ مفروضند. مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی را تعیین کنید که محیط دایرهٔ (C) را نصف می‌کنند و بر دایرهٔ (C′) عمودند.

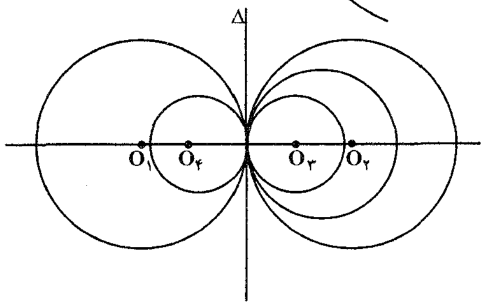
۶.۵. دسته دایره

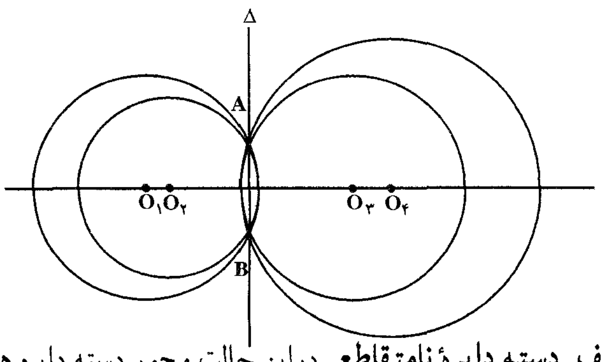
۱.۶.۵. تعریف و قضیه

دسته دایره. مجموعهٔ همهٔ دایره‌هایی که خط ثابت Δ برای هر جفت از آنها، محور اصلی باشد، یک دسته دایره با محور Δ یا دسته دایرهٔ هم محور یا به‌طور خلاصه دسته دایره نامیده می‌شود. مرکزهای این دایره‌ها، همه روی خط ثابتی قرار دارند که بر Δ عمود است که این خط ثابت را، پایه دسته دایره می‌نامند.

دسته دایره یکی از سه‌حالت زیر را دارد :





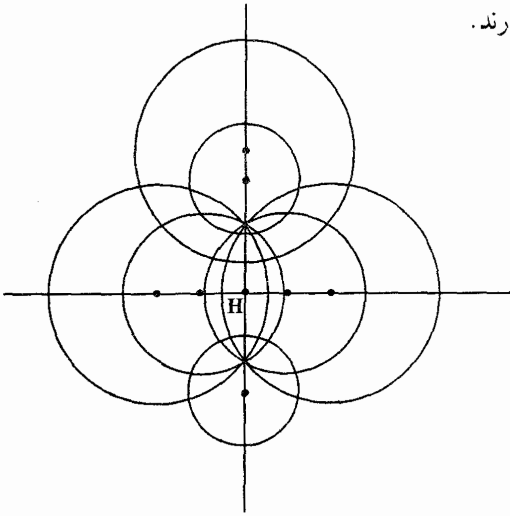


الف. دسته دایرهٔ نامتقاطع. دراین حالت محور دسته دایره هیچ‌یک از دایره‌ها را

قطع نمی‌کند و دایره‌های دسته دایره، برون هم (متخارج) و یا یکی درون دیگری (متداخل) هستند. در این حالت دو دایرهٔ به شعاع صفر در دسته دایره وجود دارد که آنها را دایره‌های حدی یا دایره‌های تک نقطه‌ای دسته دایره می‌نامند.

ب. دسته‌دایرهٔ مماس. دراین حالت همهٔ دایره‌ها در نقطهٔ ثابتی بر محور دسته دایره مماسند و دایره‌های دسته دایره، مماس برونی یا مماس درونی هستند. بنابر آن‌که در دوطرف یا دریک طرف محور دسته دایره باشند، در این حالت یک دایرهٔ حدی در دسته دایره وجود دارد که همان نقطهٔ تماس دایره‌های دسته دایره است. این نقطه را نقطهٔ اساسی دسته دایره نیز می‌نامند.

پ. دسته دایرهٔ متقاطع. دراین حالت محور دسته دایره در دو نقطهٔ ثابت (نقطه‌های اساسی) دایره‌ها را قطع می‌کند. به عبارت دیگر همهٔ دایره‌های دسته دایره، از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند.



مزدوج یک دسته دایره. مجموعهٔ دایره‌هایی که بر همهٔ دایره‌های یک دسته دایره عمود باشند، دسته دایرهٔ مزدوج آن دسته دایره نامیده می‌شوند.

نکته ۱. در دو دسته دایرهٔ مزدوج، محور یکی، پایهٔ دیگری و پایهٔ یک دسته دایره، محور دسته دایرهٔ دیگر است.

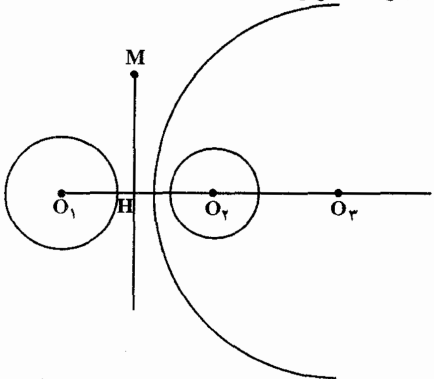
نکته ۲. الف. اگر یک دسته‌دایره متقاطع باشد، دستهٔ دایره مزدوج آن نامتقاطع است و بعکس.

ب. اگر یک دسته دایره مماس باشد، دستهٔ مزدوج آن دسته دایره نیز مماس یا سایا است و بعکس.

پ. اگر یک دسته دایره نامتقاطع باشد، دستهٔ مزدوج آن، متقاطع است و بعکس.

۵۶۴. از یک دسته دایره، یک دایره و محور اصلی دسته دایره معلوم است. سایر دایره‌های دسته دایره را مشخص کنید.

۲.۶.۵. دایره‌هایی از یک دسته دایره مفروضند، ...

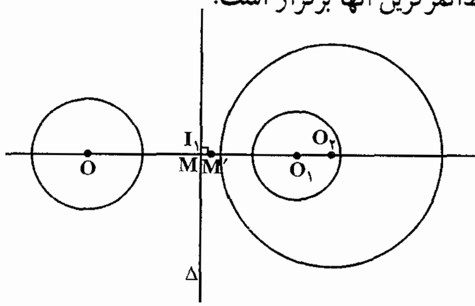


۵۶۵. سه دایرهٔ (O_1)، (O_2) و (O_3) که جزء یک دسته دایره‌اند، چنانند که O_2 وسط پاره‌خط O_1O_3 است. اگر M یک نقطه واقع در صفحهٔ آنها باشد، ثابت کنید که :

$$2P_{M(O_2)} = P_{M(O_1)} + P_{M(O_3)}$$

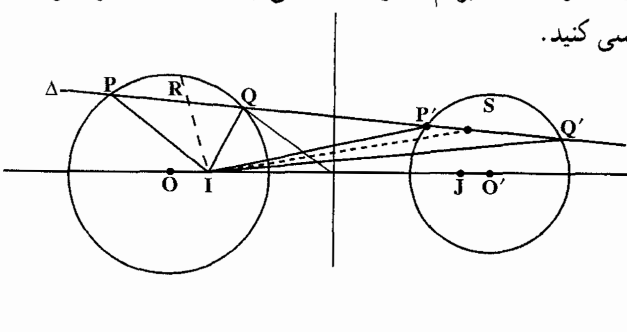
۵۶۶. یک دسته دایره مفروض است. ثابت کنید نسبت قوتهای یک نقطهٔ متغیر روی یک دایرهٔ این دسته دایره، نسبت به دو دایرهٔ دیگر این دسته دایره، مقداری ثابت است و بعکس، مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض با درنظرگرفتن اندازه و علامت مقدار ثابتی باشد، دایره‌ای هم‌محور با دایره‌های مفروض است.

۵۶۷. اگر سه دایرهٔ (O) و (O_1) و (O_2) جزء یک دسته دایره باشند، چه رابطه‌ای بین شعاعها و خط‌المرکزین آنها برقرار است؟

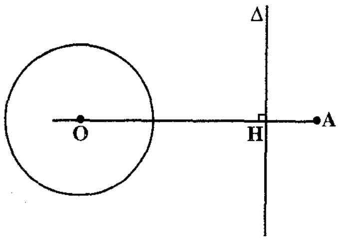


مرحلهٔ اول دومین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۳

۵۶۸. دو دایرهٔ (O) و (O') متعلق به یک دسته‌دایره و I و J نقطه‌های حد می‌باشند. خط Δ دو دایره را بترتیب در P، Q، P′ و Q′ قطع می‌کند : نشان دهید نیمسازهای زاویه‌های PIQ و P′IQ′ برهم عمودند. حالتی را که Δ در P بر دایرهٔ (O) مماس است، بررسی کنید.



۵۶۹. شعاع دایرهٔ متعلق به یک دسته دایرهٔ مفروض را به دست‌آورید، درصورتی که مرکزش معلوم باشد.



۵۷۰. دسته دایرهٔ (Δ و O) و نقطهٔ A مفروضند. ثابت کنید که از نقطهٔ A یک دایره متعلق به دسته دایره می‌گذرد.

۵۷۱. دسته دایرهٔ (Δ و O) مفروض است. دایره‌ای متعلق به دستگاه و مماس بر خط ′Δ رسم کنید.

۵۷۲. دسته دایرهٔ (Δ و O) مفروض است. دایره‌ای متعلق به این دستگاه را مشخص سازید، که بر دایرهٔ مفروض (C) مماس باشد.

۵۷۳. دایره‌ای متعلق به یک دسته دایرهٔ هم محور رسم کنیدکه نقطهٔ مفروضی مرکز آن باشد.

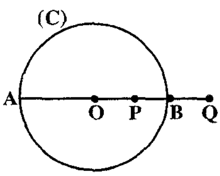
۵۷۴. ۱. قوت هر نقطه روی محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم محور، نسبت به همهٔ دایره‌های این دسته مقدار ثابتی است.

۲. بعکس، اگر قوت یک نقطه نسبت به همهٔ دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور یکسان باشد، آن نقطه روی محور این دسته دایره است.

۵۷۵. ۱. نقطه‌های حدی یک دسته دایرهٔ هم محور، نسبت به هریک از دایره‌های دسته، وارون یکدیگرند.

۲. بعکس، اگر دو نقطه نسبت به همهٔ دایره‌های یک مجموعه از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

تعریف. دو نقطهٔ هم‌خط با مرکز دایره را که حاصل ضرب فاصله‌شان از مرکز دایره با مربع شعاع دایره برابر باشد نقطه‌های وارون نسبت به آن دایره، یا برای آن دایره می‌نامند. در شکل دو نقطهٔ P و Q نسبت به دایرهٔ به مرکز O وارون یکدیگرند و داریم: $\overline{OP}.\overline{OQ}=R^2$. دو نقطهٔ وارون در یک طرف مرکز دایره قرار دارند. از دو نقطهٔ وارون یکی درون دایره و دیگری برون دایره است. اگر نقطه‌ای روی دایره باشد، وارون آن برخودش منطبق است.



دو نقطهٔ وارون قطر متناظر را به طور همساز تقسیم می‌کنند و بعکس.

۵۷۶. یک دسته دایرهٔ هم محور نمی‌تواند بیش از دو نقطهٔ حدی داشته باشد.

۵۷۷. نشان دهید که مماس مشترک دو دایرهٔ یک دسته دایرهٔ هم محور غیر متقاطع، از یک نقطهٔ حدی دسته دایره با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود.

۵۷۸. P نقطه‌ای روی محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور است؛ و PH مماسی است که از P بر یکی از دایره‌های دسته رسم شده است. ثابت کنید که PH = PL ، که L یک نقطهٔ حدی دسته دایرهٔ مفروض است.

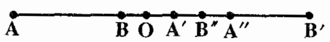
۵۷۹. نشان دهید مماسی که از یک نقطهٔ حدی بر دایرهٔ دلخواهی از یک دسته دایرهٔ هم محور رسم می‌شود توسط محور اصلی دسته دایره نصف می‌شود.

۵۸۰. نشان دهید خط مماسی که از یک نقطهٔ حدی بر دایره‌ای از یک دسته دایرهٔ هم‌محور رسم می‌شود، توسط هر دایره‌ای از دسته، به‌طور همساز تقسیم می‌شود.

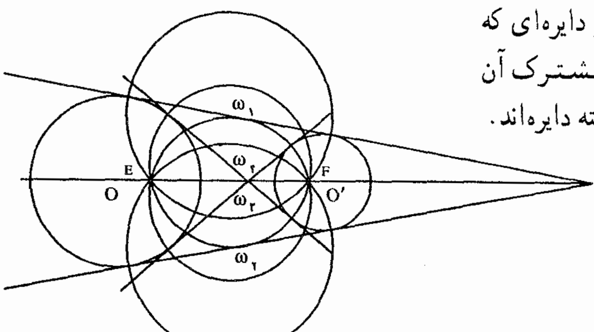
۳.۶.۵. ثابت کنید دایره‌ها به یک دسته تعلق دارند

۵۸۱. دسته دایرهٔ با محور اصلی (D) و خط Δ غیر مواردی با D را درنظر می‌گیریم. دایرهٔ متغیری از دسته دایره، Δ را در M و ′M قطع می‌کند. نشان دهید دایره‌های به قطر ′MM ، دسته دایرهٔ دیگری تشکیل می‌دهند.

۵۸۲. روی خطی چهار نقطهٔ A ،B ،′A ،′B و نقطه‌های ″A ، ″B مزدوج توافقی A ،B نسبت به ′A ، ′B مفروضند. ثابت کنید دایره‌های به قطر AB ،′A′B و ″A″B به یک دسته دایره تعلق دارند.



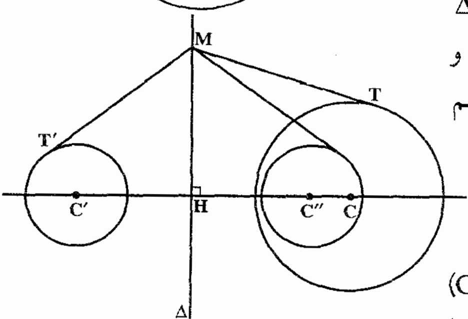
۵۸۳. در دو دایرهٔ برون هم، چهار دایره‌ای که قطرهایشان مماسهای مشترک آن دایره‌ها باشند، جزء یک دسته دایره‌اند.

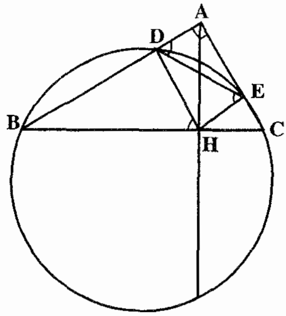


۵۸۴. دو دایرهٔ (C) و (′C) مفروضند. Δ محور اصلی آنها را به‌دست می‌آوریم و ″C قرینهٔ ′C را نسبت به آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

۱. هر سه دایره جزء یک دسته دایره‌اند.

۲. اگردایرهٔ (′C) خارج دایرهٔ (C) باشد، یکی از دایره‌های (′C) و یا (″C) داخل دیگری است.



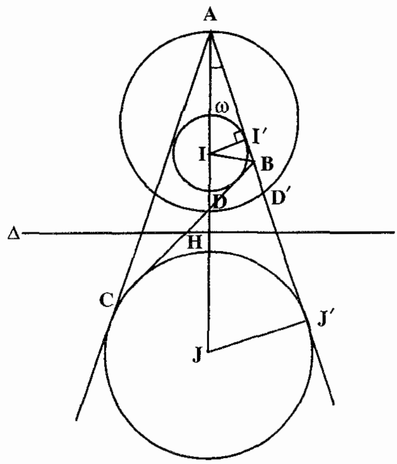


۵۸۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. در این مثلث ارتفاع AH ثابت و رأسهای B و C متغیرند و D و E بترتیب تصویرهای H بر ضلعهای AB و AC می‌باشند. ثابت کنید:

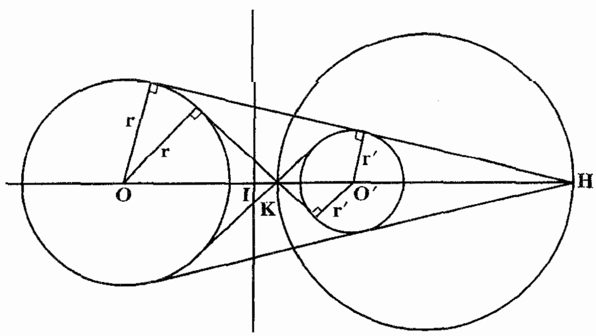
۱. پیوسته، چهار ضلعی BDEC محاط در یک دایره است.

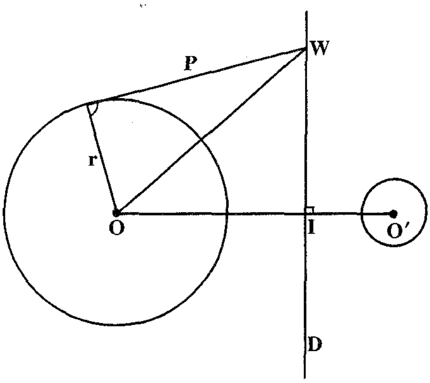
۲. دایره‌های محیطی چهار ضلعیهای BDEC جزء یک دسته دایره‌اند.

۵۸۶. در هر مثلث دایره‌های محاطی درونی و بیرونی و دایره‌ای که قطرش نیمسازی باشد که بر مرکز آن دو دایره بگذرد، جزء یک دسته دایره‌اند.



۵۸۷. دایرهٔ به قطر فاصلهٔ دو مرکز تجانس دو دایرهٔ مفروض، متعلق به دسته دایره‌ای است که از دو دایرهٔ مفروض تشکیل می‌گردد.





۵۸۸. ۱. دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ مفروض، تشکیل یک دسته دایرهٔ مزدوج ، نسبت به دسته دایرهٔ تشکیل شده از دو دایرهٔ مفروض را می‌دهند.

۲. هرگاه دو دسته دایره مزدوج یکدیگر باشند، هر دایره از یک دسته، بر هر دایره از دستهٔ دیگر عمود است.

۵۸۹. نشان دهید که :

الف. اگر یک نقطه وجود داشته باشد که قوتهایش نسبت به گروهی از دایره‌ها که مرکزهای آنها همخطند مقدار ثابتی باشد، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

ب. اگر دو نقطه وجود داشته باشد که قوت هرکدام نسبت به گروهی از دایره‌ها مقدار ثابتی باشد، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۵۹۰. نشان دهید اگر دایره‌هایی با یک دایرهٔ مفروض متعامد، و مرکزهایشان روی یک قطر دایرهٔ مفروض واقع باشند، آن دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۵۹۱. اگر دو نقطهٔ متغیر P و P′ نسبت به دایرهٔ مفروضی مزدوج، و روی خط ثابتی قرار داشته باشند، نشان دهید دایره‌هایی که PP′ قطر آنهاست یک دسته دایرهٔ هم‌محور تشکیل می‌دهند.

۵۹۲. نشان دهید دایره‌هایی که مرکزهایشان روی یک خط ثابت واقع است و دایرهٔ مفروضی را نصف می‌کنند، یک دسته دایرهٔ هم محور تشکیل می‌دهند.

۵۹۳. برای هر رأس مثلثی دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از آن رأس بگذرد. با دایرهٔ محیطی متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد، نشان دهید که این سه دایره هم محورند.

۵۹۴. مماسهایی را که در رأسهای A، B و C از یک مثلث حاده‌الزاویه بر دایرهٔ محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب ضلعهای BC، CA و AB را در U، V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU، BV و CW قطرهایشان هستند، هم‌محورند و محور اصلی آنها خط اویلر مثلث است.

۵۹۵. نشان دهید دایره‌ای که دو انتهای یک قطرش مرکز ثقل و مرکز ارتفاعی یک مثلث است، با دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث هم‌محور است.

۴.۶.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۹۶. اگر وتری از یک دایرهٔ متعلق به دسته دایرهٔ هم‌محوری از یک نقطهٔ حدی دسته بگذرد، نشان دهید که تصویر این وتر روی پایه دسته دایره، قطر یکی از دایره‌های دسته دایره است.

۵۹۷. اگر مرکز دایره‌ای روی محور اصلی یک دسته دایرهٔ هم‌محور باشد، و این دایره با یکی از دایره‌های دسته متعامد باشد، آن‌گاه با همهٔ دایره‌های دسته متعامد است.

۵۹۸. اگر دایره‌ای با دو دایره از یک دسته دایرهٔ هم‌محور متعامد باشد، آن‌گاه با همهٔ دایره‌های آن دسته دایره، متعامد است.

۵۹۹. خطی بر دایره‌های (A) و (B) درنقطه‌های T و T' مماس است و دایرهٔ (C) که با (A) و (B) هم‌محور است، TT' را در E و F قطع می‌کند، نشان دهید که $(EFTT') = -۱$ است.

۶۰۰. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به دسته دایرهٔ هم‌محور مفروضی باشد و دایرهٔ مفروض دیگری را که متعلق به این دسته دایره نیست، نصف کند.

راهنمایی، حل قضیه‌ها و مسأله‌ها

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.PoIya استاد بزرگ آموزش ریاضی «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهده دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف نیز بتواند نقش وسهمی‌در تقویت قوهٔ تفکر وخلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که حل مسأله‌ها، و راهنماییهای ارائه شده برای حل، در تمام موارد، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نیستند، و این امکان وجود دارد که ذهنهای خلاق و جستجوگر دانش‌پژوهان محترم، به راه‌حلهای ساده‌تر، یا جالبتری دست یابند؛ و یا بتوانند قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشد، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشد؛ بدین‌جهت از دانش‌آموزان، استادان، ریاضیدانان و دیگر صاحبنظران ارجمند درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر، یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند، تا برای پربارترکردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن، مورد استفاده قرار گیرد. ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری و به منظور ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین، تعمیم قضیه‌ها و مسأله‌ها، به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱

۲.۱. نسبت محیطها و مساحتها

۱. شعاع ربع دایره برابر ۲r و شعاع هر نیمدایره برابر r است. اگر نقطهٔ برخورد دو نیمدایره را به a وصل کنیم، قطعه‌های ایجاد شده از برخورد این دو نیمدایره، هر یک برابر $\theta = \frac{\pi}{۲}$ است. بنابراین با توجه به این‌که در دایره‌ای به شعاع r، $S = \frac{۱}{۲}r^۲(\theta - \sin\theta)$ قطعهٔ θ رادیان و $r\theta =$ طول قوس θ رادیان، است، داریم:

$$S_{II} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times r^۲(\frac{\pi}{۲} - \sin\frac{\pi}{۲}) = r^۲(\frac{\pi}{۲} - ۱)$$

$$S_I = \pi r^۲ - ۲(\frac{\pi r^۲}{۲}) + S_{II} = r^۲(\frac{\pi}{۲} - ۱)$$

$$\Rightarrow \ S_I = S_{II} \ \Rightarrow \ S_I : S_{II} = ۱$$

$$P_{II} = ۲(r \times \frac{\pi}{۲}) = \pi r \quad , \quad P_I = \frac{۱}{۴}(۲\pi \times ۲r) + \pi r = ۲\pi r$$

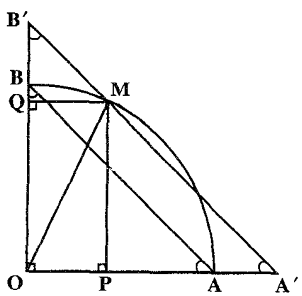
$$\Rightarrow \ P_I : P_{II} = ۲\pi r : \pi r = ۲$$

۳.۱. تساوی دو پاره‌خط

۲. اندازهٔ پاره‌خط $AB = R\sqrt{۲}$ است، و از مثلث قائم‌الزاویهٔ DEG با توجه به تساوی EG=EC=DF، اندازهٔ $DG = R\sqrt{۲}$ به‌دست می‌آید.

۴.۱. رابطه‌های متری

۳. از نقطهٔ M عمودهای MP و MQ را بترتیب بر OA و OB فرود می‌آوریم و از M به O وصل می‌کنیم.



چون $\hat{A}=\hat{B}=\hat{A}'=\hat{B}'=۴۵°$ است، پس $P\hat{M}A'=Q\hat{M}B'=۴۵°$ و درنتیجه، مثلثهای $MB'Q$ و MPA'، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند. بنابراین $QM=QB'$ و $PM=PA'$ است. از طرفی داریم :

$$MA'^۲=MP^۲+PA'^۲=۲MP^۲$$

$$MB'^۲=MQ^۲+B'Q^۲=۲MQ^۲$$

از جمع کردن طرفهای نظیر دو رابطهٔ بالا، با توجه به این که چهار ضلعی OPMQ مستطیل و OA=OB=OM=R است، داریم :

$$MA'^۲+MB'^۲=۲(MP^۲+MQ^۲)=۲(MP^۲+OP^۲)$$

$$=۲OM^۲=OA^۲+OB^۲=AB^۲$$

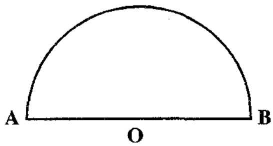
۴. $F\hat{O}A=۴۵°$ است، پس مثلث DOE قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و OC=OA=R است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲

۲.۲. اندازهٔ شعاع

۵. گزینهٔ (هـ) درست است، زیرا داریم :

$$\pi R + 2R = \frac{1}{2}\pi R^2$$
$$\Rightarrow \pi R^2 = 2\pi R + 4R \;\Rightarrow\; R = 2 + \frac{4}{\pi}$$



۶. داریم :

$$r = \frac{S}{P} \;،\; S = R^2 \;\text{و}\; P = R(\sqrt{2}+1)$$
$$\Rightarrow r = \frac{S}{P} = \frac{R^2}{R(\sqrt{2}+1)} = R(\sqrt{2}-1)$$

۷. $\frac{R}{3} =$ شعاع دایره

۸. $\frac{P}{\pi+4} =$ شعاع نیمدایره

۳.۲. اندازهٔ محیط

۹. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم :

$$BD = \sqrt{BA^2 - AD^2} = 18\text{cm}$$

اکنون با توجه به رابطهٔ $BC.BD = BA^2$ داریم :

$$BC = \frac{BA^2}{BD} = 50\text{cm}$$

بنابراین :

$$AC = \sqrt{BC^2 - BA^2} = 40\text{cm}$$

درنتیجه :

$20\pi =$ طول محیط نیمدایره

۴.۲. مساحت

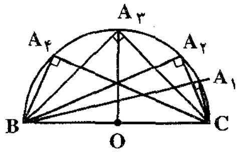
۱.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها

۱۰. $\pi =$ مساحت سطح سایه زده

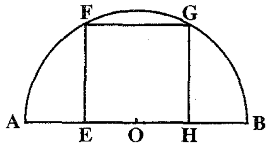
۱۱. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا این مساحت، برابر مجموع مساحت مربعی به ضلع $\sqrt{2}$ ، و چهار نیمدایره هر یک به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۲.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست

۱۲. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا بین تمام مثلثهای محاط در یک نیمدایره که یک ضلع مثلث قطر نیمدایره است، مثلثی بیشترین مساحت را داراست که بزرگترین ارتفاع نظیر را داشته باشد و بزرگترین ارتفاع نظیر این قاعده، شعاع نیمدایره است. پس بیشترین مساحت برابر است با : $\frac{1}{2} 2r.r = r^2$



۱۳. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا اگر ضلع مربع به مساحت ۴۰ را ۲d و شعاع دایره را r فرض کنیم، داریم :



$$\frac{BH}{GH} = \frac{GH}{AH} \Rightarrow \frac{r-d}{2d} = \frac{2d}{r+d} \Rightarrow r = \sqrt{50}$$

حال اگر طول ضلع مربع بزرگتر را a بنامیم، خواهیم داشت :

$$a = r\sqrt{2} = 10 \Rightarrow S_{\text{مربع}} = 100$$

۳.۴.۲. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها و خطهای راست

۱۴. مساحت مورد نظر برابر است با مساحت لوزی ONCM، منهای مساحت قطاع MON . لوزی ONCM از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع r تشکیل شده است و مساحت قطاع برابر با $\frac{1}{6}$ مساحت دایره است. از آن‌جا، مساحت مورد نظر برابر است با :

$$S = \frac{1}{2}r^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi r^2 \Rightarrow S = \frac{r^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$$

۱۵. گزینهٔ (د) درست است، زیرا با مشاهدهٔ شکل و با استفاده از دستورهای مساحت ذوزنقه و مستطیل می‌نویسیم :

$$\frac{K}{R} = \frac{\frac{1}{2}(HG)(EF+CD)}{HG.EF} = \frac{1}{2}(1+\frac{CD}{EF}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{CD}{EF}$$

حال با استفاده از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OGD و OHF داریم :

$$\frac{CD}{EF} = \frac{2GD}{2HF} = \frac{GD}{HF} = \frac{\sqrt{OD^2 - OG^2}}{\sqrt{OF^2 - OH^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - OG^2}}{\sqrt{a^2 - OH^2}}$$

۱۶. اگر $JH = z$ اختیار شود، $JG = 2z$، $OH = a - z$ و $OG = a - 2z$ و

$$\frac{CD}{EF} = \frac{\sqrt{a^2 - (a-2z)^2}}{\sqrt{a^2 - (a-z)^2}} = \frac{\sqrt{4az - 4z^2}}{\sqrt{2az - z^2}} = \frac{2\sqrt{a-z}}{\sqrt{2a-z}}$$

حال اگر OG به سمت a میل کند، z به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین CD/EF به سمت $\sqrt{4a/2a} = \sqrt{2}$ میل می‌کند. از این‌رو $\frac{K}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(CD/EF)$ به سمت $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ میل می‌کند.

۲.۴.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۱۷. با توجه به شکل، داریم:

$$S_{AFDHCB} = \frac{1}{2}\pi(\frac{AC}{2})^2 - \frac{1}{2}\pi(\frac{AD}{2})^2 - \frac{1}{2}\pi(\frac{DC}{2})^2$$

$$= \frac{\pi}{8}(AC^2 - AD^2 - DC^2) = \frac{\pi}{8}\left[(AD+DC)^2 - AD^2 - DC^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}(2AD.DC) = \frac{\pi}{4}BD^2 = \pi(\frac{BD}{2})^2$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نکته. از این مسأله نتیجه می‌شود که نسبت مساحت شکل AFDHCB به مساحت دایره‌ای به قطر BD، برابر ۱، و نسبت مساحت این شکل به مساحت دایره‌ای به شعاع BD، برابر ۴ : ۱ است.

۱۸. اگر مساحت مورد نظر را S بگیریم، داریم:

$$S = \frac{\pi}{8}(AB^2 + CD^2 - AC^2 - DB^2)$$

که اگر تساویهای $AB = AD + DB$، $AC = DB$ و $AD = AC + CD$ را درنظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{\pi}{4}(CD + DB)^2$$

از طرف دیگر داریم:

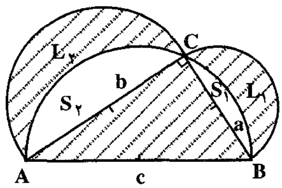
$$CD + DB = CE + ED + DB = CE + EB \quad \text{و} \quad CE = EF \quad \text{و} \quad EB = EG$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$S = \frac{\pi}{4}(FE + EG)^2 = \frac{\pi}{4}.FG^2$$

۱۹. مساحت مورد نظر برابر است با، مساحت مثلث APC، به‌اضافهٔ مساحت نیمدایرهٔ ABC، منهای مساحت $\frac{۱}{۴}$ دایرهٔ به مرکز P، یعنی PAQC.
ولی $\frac{۱}{۲}$ دایرهٔ ABC و $\frac{۱}{۴}$ دایرهٔ PAQC، مساحتهای مساوی دارند، زیرا $AO^۲ = \frac{۱}{۲}AP^۲$، درنتیجه با توجه به تساوی دو مثلث ABC و APC، نتیجه می‌شود که مساحت مورد نظر برابر است با مساحت مثلث ABC.

۲۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر می‌گیریم، که a و b طول ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه و c، طول وتر آن باشد. نیمدایره‌هایی به قطر ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم. برای روشن‌تر بودن شکلها مثلث ABC و هلالهای $L_۱$ و $L_۲$ را هاشور زده‌ایم. باید ثابت کرد که مجموع مساحتهای $L_۱$ و $L_۲$، برابر با مساحت مثلث ABC است.



بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$a^۲ + b^۲ = c^۲$$

از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\pi(\frac{a}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲}(\frac{b}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}\pi(\frac{c}{۲})^۲$$

یعنی مجموع مساحتهای دو نیمدایره‌ای که روی ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ساخته شده‌اند، برابر است با مساحت نیمدایره ساخته شده روی وتر.
اکنون اگر مساحت قطعه‌هایی را که بین نیمدایره بزرگ و ضلعهای a و b قرار دارند، به‌ترتیب $S_۱$ و $S_۲$ بنامیم، و مجموع آنها را از دو طرف برابری بالا کم کنیم، به همان نتیجهٔ مورد نظر می‌رسیم.

۵.۲. اندازهٔ زاویه

۲۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، BC ارتفاع وارد بر وتر است و داریم:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$$

امّا $AD = ۴AC$، پس $\frac{AD}{AB} = \frac{۴AC}{AB}$، درنتیجه:

$$\frac{۱}{\cos\alpha} = ۴\cos\alpha \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos\alpha = +\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳}$$

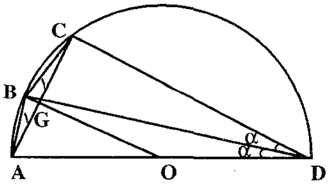
$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۳}$$

۶.۲. پاره‌خط

۱.۶.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۲. گزینهٔ (د) درست است.

۲۳. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا :



راه اول. اگر $\hat{ADB}=\alpha$ اختیار شود، $\hat{ADC}=۲\alpha$ است و در مثلثهای ABD و ACD داریم :

$$\sin\alpha=\frac{۱}{۴}\ ,\ \cos ۲\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha=\frac{۷}{۸}\ ,\ \cos ۲\alpha=\frac{CD}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{۴}=\frac{۷}{۸}\ \Rightarrow CD=\frac{۷}{۲}$$

راه دوم. نقطهٔ برخورد OB با وتر AC را G می‌نامیم. OG عمودمنصف AC است، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AGB و ABD متشابه‌اند و داریم : $\frac{BG}{AB}=\frac{AB}{AD}=\frac{۱}{۴}$، پس $BG=\frac{۱}{۴}$ و $OG=\frac{۷}{۴}$، چون $CD\|GO$ است، پس $\frac{CD}{GO}=\frac{AD}{AO}=۲$، بنابراین :

$$CD=۲\times\frac{۷}{۴}=\frac{۷}{۲}$$

۲۴. ۱.دو مثلث ABQ و DCQ متساوی‌الساقین می‌باشند، زیرا :

$$\hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲=\frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲}\ \Rightarrow \hat{Q}_۱=\hat{Q}_۲=۴۵^\circ\ ،\ \hat{D}_۱=\hat{A}_۱=\frac{\widehat{BC}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_۱=\hat{A}_۱=۴۵^\circ$$

از طرفی، $\hat{P}=\frac{\widehat{AD}-\widehat{BC}}{۲}\Rightarrow \hat{P}=۴۵^\circ$، پس $\hat{P}=\hat{D}_۱=\hat{A}_۱$، درنتیجه دو مثلث BDP و ACP نیز متساوی‌الساقین هستند.

۲. چون $\hat{ACD}=\hat{ABD}=۹۰^\circ$ است، پس در مثلث APD، AC و BD ارتفاعند. درنتیجه اگر از P به نقطهٔ برخورد این ارتفاعها، یعنی نقطهٔ Q وصل کنیم، PQ بر AD عمود است.

۳. در مثلث ABQ، AB=BQ است، پس BQ=R، و در مثلث ABD،

$$AB^{۲}+BD^{۲}=AD^{۲}\Rightarrow BD^{۲}=۳R^{۲}\Rightarrow BD=R\sqrt{۳}$$

$$QD=BD-BQ\Rightarrow QD=R(\sqrt{۳}-۱)$$

در مثلث CQD داریم :

$$۲CD^{۲}=QD^{۲}\Rightarrow CD=\frac{QD}{\sqrt{۲}}\Rightarrow CD=\frac{R(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۲}}\Rightarrow CD=\frac{R(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۴}$$

از طرفی داریم :

$$\Delta BCQ \sim \Delta AQD \Rightarrow \frac{BQ}{AQ}=\frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{R}{R\sqrt{۲}}=\frac{BC}{۲R} \Rightarrow BC=R\sqrt{۲}$$

۲.۶.۲. اندازهٔ ضلعهای مثلث

۲۵. داریم :

$$CB=\frac{AB}{۲}=۲cm \text{ ، } CD=۲\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times\frac{۱}{۲} \Rightarrow CD=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \text{ ، } BD=\frac{۴\sqrt{۳}}{۲}$$

۷.۲. رابطه‌های متری

۱.۷.۲. رابطه های متری (برابریها)

۲۶. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DBE و FDC متشابه‌اند، و HD ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC است.

۲۷. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMC و ANB داریم :

$AM^۲=AD.AC \quad (۱)$ و $AN^۲=AD.AB \quad (۲)$

از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$\frac{AM^۲}{AN^۲}=\frac{AC}{AB}=C^{te}$$ (مقدار ثابت)

۲۸. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BEA و BDO داریم :

$BE^۲=BC.AB$ و $BD^۲=BC.OB$

از تقسیم عضوهای این دو رابطه، نظیر به نظیر، داریم :

$$\frac{BE^۲}{BD^۲}=\frac{۲OB}{OB}=۲ \Rightarrow BE^۲=۲BD^۲$$

۲۹. ۱. داریم :

$$BC^۲=AB^۲-AC^۲=۴R^۲-\frac{۹R^۲}{۴}=\frac{۷R^۲}{۴} \Rightarrow BC=\frac{R}{۲}\sqrt{۷}$$

$$BC^۲=BH.AB \Rightarrow \frac{۷R^۲}{۴}=۲R\times BH \Rightarrow BH=\frac{۷R}{۸}$$

$$BC^۲=AC.CK \Rightarrow \frac{۷R^۲}{۴}=\frac{۳R^۲}{۲}.CK \Rightarrow CK=\frac{۷}{۶}R$$

$$\Rightarrow AK=\frac{۷}{۶}R+\frac{۳}{۲}R=\frac{۸}{۳}R$$

$$\Delta ACB \sim \Delta AKD \Rightarrow \frac{AC}{AK}=\frac{BC}{DK} \Rightarrow DK=\frac{۸}{۹}R\sqrt{۷}$$

۲. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و BCK متشابه‌اند، و رابطهٔ $\frac{CK}{BK}=\frac{CH}{CA}$ و یا $CH.BK=CA.CK$ برقرار است.

۳۰. این دو مثلث قائم‌الزاویه، در زاویهٔ حاده A مشترکند، پس متشابه‌اند. درنتیجه داریم :

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$$

۳۱. قبل از هر چیز، توجه می‌کنیم که، $P\hat{A}C=\hat{Q}$ و $\hat{P}=D\hat{B}Q$. زیرا ضلعهای آنها بر هم عمودند ($P\hat{M}Q=۹۰^\circ$) . از تشابه دو مثلث ACP و BDQ داریم :

$$\frac{PC}{DB}=\frac{AC}{DQ}$$

و چون داریم $DB=AC$ ، بنابراین :

$$PC.DQ=AC^۲$$

از آن‌جا که طول AC، برابر طول ضلع مربع محاطی، و AB برابر قطر دایره است :

$$AB^۲=۲AC^۲$$

و بنابراین :

$$۲PC.DQ=۲AC^۲=AB^۲$$

یا :

$$۲PC.DQ=CD^۲ \qquad (۱)$$

سپس به سادگی دیده می‌شود :

$$\frac{PC}{AE}=\frac{CD}{EF}=\frac{DQ}{FB} \qquad (۲)$$

برابری (۱) را، براساس برابریهای (۲)، می‌توان این‌طور نوشت :

$$۲AE.FB=EF^۲ \qquad (۳)$$

اگر برابری $AF+EB=AB+EF$ را مجذور کنیم، به‌دست می‌آید :

$$AF^۲+EB^۲+۲AF.EB=AB^۲+EF^۲+۲AB.EF$$

که از آن‌جا، با درنظر گرفتن (۳)، خواهیم داشت :

$$AF^۲+EB^۲+۲AF.EB=AB^۲+۲AE.FB+۲AB.EF$$

و یا :

$$AF^۲+EB^۲+۲AF.EB=AB^۲+۲(AE.FB+AB.EF) \qquad (۴)$$

این اتحاد را درنظر می‌گیریم :

$$(AE+EF)(EF+FB)=AE.FB+(AE+EF+FB)EF$$

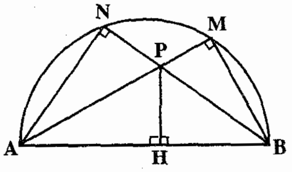
یا :

$$AF.EB=AE.FB+AB.EF \qquad (۵)$$

و بالاخره، از (۴)، با توجه به (۵)، نتیجه می‌شود :

$$AF^۲ + EB^۲ = AB^۲$$

۳۲. از نقطهٔ P عمود PH را بر قطر AB فرود می‌آوریم و از M به B و از N به A وصل می‌کنیم. چهار ضلعیهای PMBH و PNAH محاطی‌اند، پس داریم :



$$AP.AM = AH.AB \qquad (۱)$$

$$BP.BN = BH.AB \qquad (۲)$$

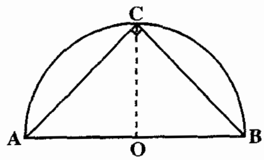
از جمع عضو به عضو رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$AP.AM + BP.BN = AB(AH + BH) = AB.AB = AB^۲$$

$$\Rightarrow \quad AP.AM + BP.BN = ۴R^۲ = \text{مقدار ثابت}$$

۲.۷.۲. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۳۳. مثلث محاطی قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، دارای بیشترین محیط است. در این حالت، $AC + BC = AB\sqrt{۲}$ است، بنابراین در حالت کلی $AC + BC \le AB\sqrt{۲}$ است، پس گزینهٔ (د) درست است.

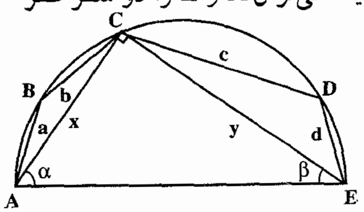


۳۴. قرار می‌گذاریم :

$AB = a \ , \ BC = b \ , \ CD = c \ , \ DE = d \ , \ AC = x \ , \ CE = y,$

$C\hat{A}E = \alpha \ , \ A\hat{E}C = \beta$

بدون این‌که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد آید، می‌توان A و E را دو سر قطر نیمدایره به حساب آورد، زیرا وقتی که این دو نقطه را، دو سر قطر نیمدایره به حساب آوریم، تنها ممکن است عبارت $a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + abc + bcd$ را بزرگترکرده باشیم. چون $A\hat{C}E = ۹۰^\circ$، پس $x^۲ + y^۲ = ۴$. سپس :



$A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - A\hat{E}C = ۱۸۰^\circ - \beta,$

$C\hat{D}E = ۱۸۰^\circ - C\hat{A}E = ۱۸۰^\circ - \alpha$

در نتیجه، بنابر قضیهٔ کسینوسها :

$x^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos(A\hat{B}C) = a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos\beta,$

$y^۲ = c^۲ + d^۲ - ۲cd\cos(C\hat{D}E) = c^۲ + d^۲ + ۲cd\cos\alpha$

و سرانجام، از رابطه‌های $2\cos\alpha = x > b$ و $2\cos\beta = y > c$ به‌دست می‌آید :

$$4 = x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + aby + c^2 + d^2 + cdx > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd$$

۸.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۵. نشان می‌دهیم که : O_1، O_2 و O_3 که بترتیب مرکزهای γ_1، γ_2 و γ_3 اند، بر یک استقامت قرار دارند. از این مطلب بلافاصله نتیجه می‌گیریم که مماس مشترک دوم، قرینهٔ AB نسبت به خط گذرنده از O_1، O_2 و O_3 می‌باشد.

فرض می‌کنیم γ_1 دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC به AB در P، به BC در Q، و به CA در R مماس باشد ؛ شکل (الف) را ملاحظه کنید. در این صورت داریم :

$$AR = AP \;,\quad BQ = BP \;,\quad CR = CQ$$

با نمایش دادن طولهای ضلعهای مثلث ABC به a، b و c، و نصف محیط آن : $(a+b+c)/2$ به s، درمی‌یابیم که :

$$s - a = AP + BQ + CQ - (BQ + CQ) = AP$$

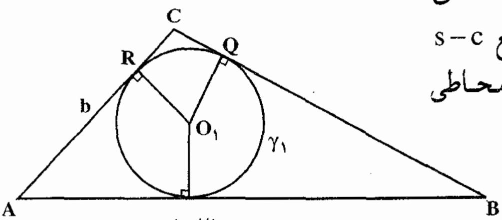
به همین ترتیب : $s - c = CQ = CR \;,\; s - b = BP$

بنابراین :

$$AP = s - a \;,\; BP = s - b \;,\; CR = CQ = s - c \qquad (1)$$

از آن‌جا که $\hat{C} = 90^\circ$ است، نقطه‌های Q، C، R و O_1 مربعی به ضلع $s-c$ تشکیل می‌دهند، و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی عبارت است از :

$$r_1 = s - c \qquad (2)$$



(الف)

شکل (ب) دایره‌های γ_2 و γ_3 با مرکزهای O_2 و O_3 و شعاعهای r_2 و r_3 را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم H_2 و H_3 پاهای عمودهای رسم شده از O_2 و O_3 به AB باشند، و O مرکز γ باشد. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه : ABC، CBD و ACD، به‌دست می‌آوریم :

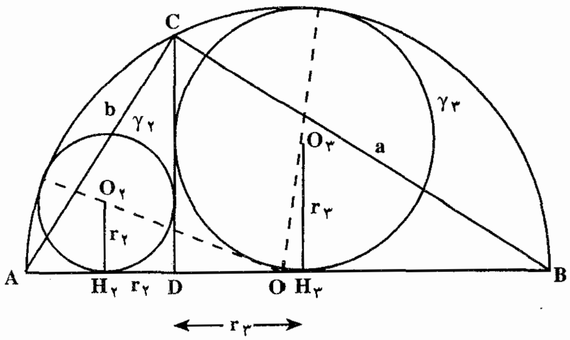
$$\overline{AC}^2 = AB.AD \quad \text{و} \quad \overline{BC}^2 = AB.BD$$

درنتیجه :

$$AD = \frac{b^2}{c} \quad \text{و} \quad BD = \frac{a^2}{c} \qquad (3)$$

برای بیان r_2 برحسب a، b و c، از مثلث قائم‌الزاویهٔ O_2H_2O، که در آن: $H_2O = r_2 + DO$ و $O_2O = r - r_2$ است، استفاده می‌کنیم. در این صورت بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$r_2^2 + (r_2 + DO)^2 = (r - r_2)^2$$



(ب)

که معادل با:

$$r_2^2 + 2r_2(r + DO) = r^2 - (DO)^2 = (r + DO)(r - DO)$$

یا:

$$r_2^2 + 2r_2BD = BD.AD$$

است، شکل (ب) را ملاحظه کنید. رابطهٔ اخیر نظر به (۳)، به‌صورت:

$$r_2^2 + 2r_2\frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}$$

درمی‌آید. افزودن a^4/c^2 به دو طرف آن:

$$(r_2 + \frac{a^2}{c})^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{c^2} = a^2$$

را می‌دهد که از آن:

$$r_2 + \frac{a^2}{c} = H_2B = a \qquad (۴)$$

به‌دست می‌آید. به همین ترتیب، می‌توانیم رابطهٔ مشابهی برای r_3، شعاع دایرهٔ γ_3، به‌دست آوریم. شکل (ب) را ملاحظه کنید. از مثلث قائم‌الزاویهٔ O_3H_3O، که در آن:

$$H_3O = r_3 - DO \quad \text{و} \quad O_3O = r - r_3$$

است، نتیجه می‌شود:

$$r_3^2 + (r_3 - DO)^2 = (r - r_3)^2$$

$$r_3^2 + 2r_3(r - DO) = (r + DO)(r - DO)$$

$$r_3^2 + 2r_3(AD) = (BD)(AD)$$

بار دیگر (۳) را به‌کار برده، مربع را کامل می‌کنیم، و به‌دست می‌آوریم:

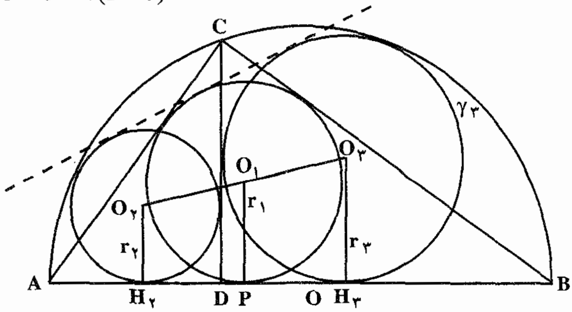
$$r_3 + \frac{b^2}{c} = AH_3 = b \qquad (۵)$$

با جمع (۴) و (۵)، درمی‌یابیم که:

$$r_2 + r_3 + (a^2 + b^2)/c = a + b$$

یا :

$$r_2 + r_3 = a + b - c = 2(s-c) \qquad (6)$$



(پ)

در شکل (پ)، γ_1 نیز رسم شده است. در این صورت ملاحظه می‌کنیم که :

$$H_2P = H_2B - PB$$

که بنا به (۱) و (۴) :

$$H_2P = a - (s-b) = a + b - s = s - c$$

و :

$$H_3P = H_3A - AP = b - (s-a) = a + b - s = s - c$$

را به‌دست می‌دهد. به‌این ترتیب :

$$H_2P = H_3P = s - c = r_1 = \frac{1}{2}(r_2 + r_3) \qquad (7)$$

در این‌صورت نتیجه می‌شود که : O_1P خط میانهٔ ذوزنقهٔ $H_2H_3O_3O_2$ است. بنابراین O_1 بر وسط پاره‌خط O_2O_3 واقع است. به این ترتیب اثبات بر یک استقامت قرار داشتن O_3 ، O_2 و O_1 تکمیل می‌شود.

۳۶. a را ضلع مربع، R را شعاع نیمدایرهٔ به مرکز O و r را شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گیریم ؛ همچنین فرض می‌کنیم :

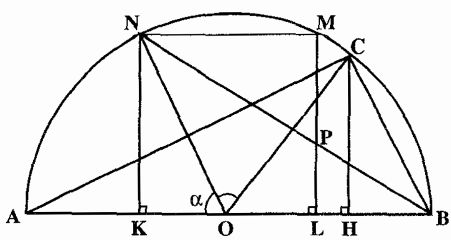
$$\alpha = A\hat{O}N < 90^\circ \quad و \quad C\hat{O}B \le 90^\circ$$

در این‌صورت، داریم :

$$a^2 = NK^2 = ON^2 - KO^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید :

$$a = \frac{2R}{\sqrt{5}}$$



از برابری مساحت مربع با مساحت مثلث ABC و با توجه به مقدار a، که به‌دست آوردیم، معلوم می‌شود که ارتفاع CH، در مثلث ABC، باید برابر $\frac{۴R}{۵}$ باشد. ثابت می‌کنیم که ON، نیمساز زاویهٔ AOC است. در واقع، چون $\sin\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ (یعنی $\alpha>۴۵^\circ$)، داریم:

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\times\frac{۲}{\sqrt{۵}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\frac{۴}{۵}=\sin(C\hat{O}B)=\sin(A\hat{O}C)$$

که در آن، $۲\alpha>۹۰^\circ$ و $A\hat{O}C>۹۰^\circ$. بنابراین $A\hat{O}N=C\hat{O}N$ و $A\hat{O}C=۲\alpha$ چون زاویه‌های محاطی ABN و CBN، روبه‌رو به کمانهای برابرند، بنابراین BN، نیمساز زاویهٔ ABC (برابر α) است و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC روی آن قرار دارد؛ شعاع این دایرهٔ محاطی برابر است با:

$$r=\frac{۱}{۲}(AC+BC-AB)=\frac{۱}{۲}.۲R(\sin\alpha+\cos\alpha-۱)=R(\frac{۳}{\sqrt{۵}}-۱)$$

ولی در این صورت، نقطهٔ P، محل برخورد خطهای راست BN و LM، مرکز این دایرهٔ محاطی است، زیرا از تشابه دو مثلث NKB و PLB، به‌دست می‌آید:

$$PL=\frac{NK.LB}{KB}=R\frac{\frac{۲}{\sqrt{۵}}(۱-\frac{۱}{\sqrt{۵}})}{۱+\frac{۱}{\sqrt{۵}}}=R\cdot\frac{۲}{\sqrt{۵}}\cdot\frac{(\sqrt{۵}-۱)^۲}{۴}=R(\frac{۳}{\sqrt{۵}}-۱)=r$$

۹.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳۸. ۱. شعاع دایرهٔ مورد نظر را x فرض می‌کنیم. داریم:

$$O'''A=O'''B=O'''C=x$$

$$MN=\frac{۹}{۲}\Rightarrow OM=ON=\frac{۹}{۴}=OA\ ,\ OO'=OO''=\frac{۹}{۸}$$

$$OO'''=\frac{۹}{۴}-x\qquad \Delta\ \ OO'O''':O'O'''^{۲}=O'O^{۲}+OO'''^{۲}$$

$$\Rightarrow(\frac{۹}{۸}+x)^{۲}=\frac{۸۱}{۶۴}+(\frac{۹-۴x}{۴})^{۲}\ \Rightarrow\ O'''O=x=\frac{۳}{۴}$$

۲. در مثلث $O'''O''O'$ خط BC موازی $O''O'$ است، پس داریم:

$$\frac{BC}{O'O''}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۸}}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow BC=\frac{۹}{۱۰}\Rightarrow O'''O=\frac{۳}{۲۰}\ ,\ AD=\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۴}$$

$$S_{ABC}=\frac{۸۱}{۱۰۰}\ \ ,\ \ AB=\frac{۹\sqrt{۵}}{۲۰}$$

۳۹. ۱. زاویهٔ AMB و در نتیجه زاویهٔ BML قائمه است. در مثلث BML اندازهٔ زاویهٔ LBM نصف اندازهٔ کمان $\widehat{MN}$، یعنی ۴۵ درجه است. پس زاویهٔ BLM هم ۴۵درجه است.

۲. هر یک از دو خط AN و BM ارتفاع مثلث LAB می‌باشند. پس ارتفاع سوم AH نیز از نقطهٔ K محل برخورد دو ارتفاع مزبور می‌گذرد.

۳. دو مثلث LHB و AHK متشابه‌اند (ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمودند) از تشابه آنها نتیجه می‌شود :

$$\frac{AH}{LH}=\frac{HK}{HB}$$

و یا : $AH.HB = HL.HK$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ATB داریم : $\overline{HT}^{۲} = HA.HB$

پس : $\overline{HT}^{۲} = HK.HL$

۴. اگر زاویهٔ AOM مساوی با °۶۰ باشد، داریم :

$AM = C_{۶} = R$ و $MN = C_{۴} = R\sqrt{۲}$

$AB = ۲R$ و $BM = C_{۳} = R\sqrt{۳}$

برای محاسبهٔ AN و BN ملاحظه می‌کنیم که مثلث AMK قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. پس : $MK = AM = R$ و $AK = R\sqrt{۲}$

پس : $KB = R\sqrt{۳} - R = R(\sqrt{۳}-۱)$

اما مثلث KBN نیز قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و برای تعیین طول ضلعهای آن، کافی است وتر را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم کنیم. بنابراین :

$$NB = NK = \frac{R(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۲}} = \frac{R(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۲}$$

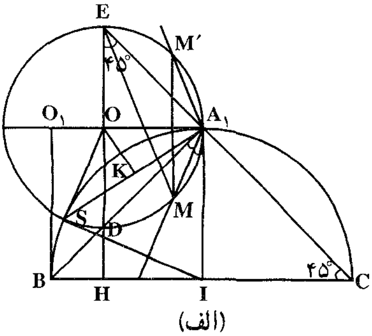
$$AN = AK + NK = R\sqrt{۲} + \frac{R(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۲} = \frac{R(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{۲}$$

زاویهٔ A مساوی با ۶۰ درجه و زاویهٔ B مساوی با ۷۵ درجه و زاویه‌های N و M مکمل آنها یعنی ۱۲۰ درجه و ۱۰۵ درجه هستند.

۴۰. ۱. ثابت کنید $PC = PB$.

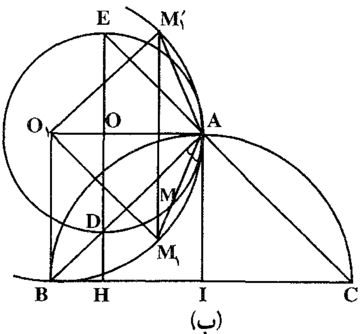
۲. دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۳. محاسبه آسان است.



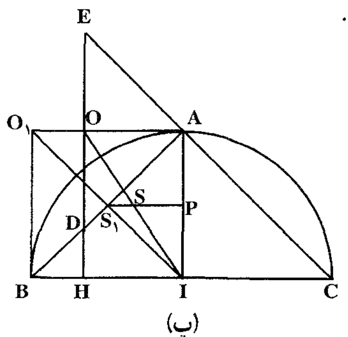
(الف)

۴۱. ۱. مثلث ABC که در دایره‌ای به قطر BC محاط است، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. مثلث EAD قائم‌الزاویه در رأس A است و زاویهٔ E از آن که متمم زاویهٔ C است، برابر °۴۵ است. نقطهٔ O وسط پاره‌خط DE، AO عمود بر DE و مماس بر (I) در نقطهٔ A است (شکل الف).
نقطهٔ O این خط مماس را در فاصلهٔ A و $O_۱$ می‌پیماید، زیرا $AO_۱ = IB$.



(ب)

۲. $D\hat{A}M = D\hat{E}M$ است و EM نیمساز زاویهٔ $D\hat{E}A$ است پس ′۳۰ و $D\hat{A}M = ۲۲°$. AM نیمساز زاویهٔ BAI است، پس نقطهٔ M روی این خط (نیمساز) تغییر مکان می‌دهد. خط پیموده شده به‌وسیلهٔ M محدود بین دو نقطهٔ A و $M_۱$ است، جایی که دایرهٔ $(O_۱)$ به شعاع $O_۱A$ ، این نیمساز را قطع می‌کند (شکل ب).
نقطهٔ ′M قرینه نقطهٔ M نسبت به خط AO، قطعه‌ای از خط $AM'_۱$ را که قرینهٔ $AM_۱$ نسبت به خط AO می‌باشد، طی می‌کند.



(پ)

۳. OI یک محور تقارن دو دایرهٔ (I) و (O) است. OG قرینهٔ OA و IG قرینهٔ IA است. از آن‌جا، IG مماس بر دایرهٔ (O) و OG مماس بر دایرهٔ (I) است (شکل الف). چهار ضلعی IAOG قابل محاط شدن در دایره‌ای به قطر OI است، مرکز آن نقطهٔ S وسط OI می‌باشد. این نقطه، بخشی از خط راستی را می‌پیماید که از نقطهٔ P وسط AI موازی AO رسم می‌شود و محدود بین دو نقطهٔ P و $S_۱$ است که $S_۱$ نقطهٔ برخورد قطرهای مربع $AIBO_۱$ می‌باشد (شکل پ).

۴. داریم: $A\hat{I}D = ۶۰°$ و $A\hat{I}O = ۳۰°$ و $A\hat{I}G = ۶۰°$

$AO = AI\text{tg}۳۰° = \frac{R\sqrt{۳}}{۳} = R'$

$S_{\Delta AOG} -$ مساحت قطاع $AOG + S_{\Delta AIG} -$ مساحت قطاع $AIG =$ مساحت بین دو قوس $\widehat{AG}$

$\hat{AOG} = ۱۲۰^\circ (= ۲AOI)$; قطاع AIG $S = \frac{\pi R^۲}{۶}$ و قطاع AOG $S = \frac{\pi OA^۲}{۳} = \frac{\pi R^۲}{۹}$

$S_{\Delta AIG} = \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴}$ (مثلث متساوی‌الاضلاع AIG به ضلع R است). $S_{\Delta AOG} = \frac{۱}{۲} AG.OK$

$$AG = R \ , \ OK = \frac{R'}{۲} = \frac{R\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow S_{\Delta AOG} = \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۱۲}$$

$\Rightarrow$ بین دو قوس $\widehat{AG}$ $S = \frac{\pi R^۲}{۶} - \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴} + \frac{\pi R^۲}{۹} - \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۱۲} = \frac{۵\pi R^۲}{۱۸} - \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۳}$

۴۲. ۱. داریم:

$$\begin{cases} BD = DT \\ AC = CT \end{cases} \Rightarrow AC + BD = CT + TD \Rightarrow AC + BD = CD$$

۲. چهار زاویهٔ آن قائمه است.

۳. $\Delta OCM \sim \Delta ODM (C\hat{D}O = C\hat{O}T = C\hat{O}M)$

$$\Rightarrow \frac{OM}{DM} = \frac{MC}{OM} \Rightarrow OM^۲ = MC.MD$$

و چون $\frac{KH}{CA} = \frac{KT}{CA}$، نتیجه می‌شود K وسط TH است.

۴. $BD = \frac{۳}{۲}R \ , \ AB = ۲R \ , \ DT = AC = \frac{۳}{۲}R \ , \ DT.TC = R^۲$

$$\Rightarrow TC = AC = \frac{R^۲}{DT} = \frac{۲}{۳}R$$

$$CB = \frac{۲R\sqrt{۱۰}}{۳} \ , \ AD = \frac{۵R}{۲} \ , \ CD = \frac{۱۳R}{۶} \ , \ \frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD} = \frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow MA = \frac{۸R}{۵} \ , \ MC = \frac{۲۶R}{۱۵}$$

۴۳. ۱. زاویه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ نیمساز را با زاویهٔ سومی مقایسه کنید.
۲. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره.
۳. آسان است.

۴۴. ۱. از ویژگی مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده کنید.

۲. a) به سه خط قابل توجه در مثلث DEP فکر کنید.

b) تساوی دو مثلث.

c) آسان است.

۳. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع.

۴۵. ۱. چون از نقطه‌های D و C هرکدام دو مماس بر دایره رسم شده است. پس OD و OC بترتیب نیمسازهای زاویه‌های مکمل MOB و MOA می‌باشند و بنابراین بر هم عمودند.

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ COD داریم:

$$MC = AC \quad \text{و} \quad MD = DB \quad \text{امّا} \quad \overline{MO}^{2} = MD.MC$$

پس:

$$AC.DB = R^{2}$$

می‌توان این نتیجه را از تشابه دو مثلث ODB و OAD که ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمودند، به‌دست آورد.

۳. نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه را L می‌نامیم و خط ML را وصل کرده ثابت می‌کنیم که این خط با دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی است؛ یعنی بر عمود ME منطبق است. از تشابه دو مثلث LDB و LAC حاصل می‌شود: $\frac{LD}{LA} = \frac{DB}{AC}$ ویا $\frac{LD}{LA} = \frac{MD}{MC}$ یعنی خط ML با AC موازی است. برای اثبات آن که L وسط پاره‌خط ME است، ملاحظه می‌کنیم که دو مثلث MDL و CDA متشابه‌اند و نیز دو مثلث BEL و BAC متشابه‌اند، پس: $\frac{LE}{CA} = \frac{BE}{BA}$. امّا به موجب قضیهٔ تالس $\frac{DM}{DC} = \frac{BE}{BA}$. پس: $\frac{ML}{AC} = \frac{LE}{AC}$ و از آنجا $ML = LE$

۴. دیدیم که:

$$\frac{ML}{AC} = \frac{DM}{DC} = \frac{DB}{DC}$$

و یا:

$$ML = \frac{DB.AC}{DB+AC}$$

و یا:

$$\frac{1}{LM} = \frac{DB+AC}{DB.AC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{DB}$$

و با ملاحظهٔ آن که $LM = \frac{ME}{2}$، نتیجه می‌شود:

$$\frac{2}{ME} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BD}$$

۵. از D خط DH را محدود به AC و موازی با AB می‌کشیم. دو مثلث MOE و DCH که ضلعهای آنها نظیر به نظیر بر هم عمود هستند، متشابه‌اند؛

پس داریم : $\frac{ME}{DH}=\frac{MO}{DC}$ و یا $\frac{ME}{2R}=\frac{R}{CD}$ و یا بالاخره $ME.CD=2R^2$.

۶. نظر به حکم قضیهٔ تالس داریم : $\frac{BE}{DM}=\frac{EA}{MC}$

و یا $\frac{BE}{BD}=\frac{AE}{AC}$. از این رابطه با ملاحظهٔ آن که :

$D\hat{B}E=C\hat{A}E=90^\circ$ ، معلوم می‌شود که دو مثلث CAE و DBE متشابه‌اند و داریم : $D\hat{E}B=C\hat{E}A$ و در نتیجه $C\hat{E}M=M\hat{E}D$ ، یعنی ME نیمساز زاویهٔ CED است.

۷. اگر امتداد CD امتداد AB را در F قطع کند و با AB زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد :

$BF=BD$ و $AF=AC$

پس دو رابطهٔ زیر در دست است :

$DB.AC=R^2$ و $AC-DB=2R$ (قسمت دوم)

از رابطهٔ اول حاصل می‌شود : $(AC-DB)^2=4R^2$ و اگر چهار برابر حاصل‌ضرب را بر آن بیفزاییم، نتیجه می‌شود : $(AC+DB)^2=8R^2$ و یا : $AC+DB=2R\sqrt{2}$ پس : $AC=R(1+\sqrt{2})$ و $BD=R(\sqrt{2}-1)$.

و از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB و ABC ، بترتیب نتیجه می‌شود :

$$AD^2=AB^2+BD^2=4R^2+R^2(3-2\sqrt{2})$$

و یا : $$AD=R\sqrt{7-2\sqrt{2}}$$

و $$BC^2=AB^2+AC^2=R^2(7+2\sqrt{2})$$

و یا : $$BC=R\sqrt{7+2\sqrt{2}}$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳

۳.۱.۳. طول کمان

۵۴. C را محیط دایره‌ای به شعاع r در نظر بگیرید. طبق قضیه داریم : $\frac{L}{\alpha}=\frac{C}{۳۶۰}$

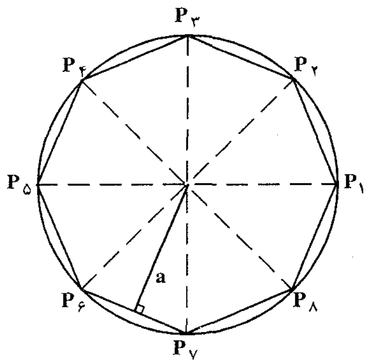
چون $C=۲\pi r$، پس $\frac{L}{\alpha}=\frac{۲\pi R}{۳۶۰}$ و $L=\frac{\alpha}{۱۸۰}\times\pi R$

نکته. اگر اندازهٔ کمان برابر θ رادیان باشد، طول کمان برابر است با : $L=R\theta$

۴.۱.۳. مساحت دایره

هنگامی که از مساحت دایره سخن می‌گوییم، منظورمان مساحت ناحیهٔ مستدیر متناظر با آن است. (هنگام صحبت از مساحت مثلث نیز منظورمان مساحت ناحیهٔ مثلثی متناظر با آن مثلث است.) اکنون فرمولی برای محاسبهٔ مساحت دایره به دست می‌آوریم.

در دایرهٔ مفروضی به شعاع r یک n ضلعی منتظم محاط می‌کنیم. طبق معمول، مساحت n ضلعی را با A_n، محیط آن را با p و سهم آن را با a نشان می‌دهیم. می‌دانیم که $A_n=\frac{۱}{۲}ap$.



در اینجا سه کمّیت داریم که همگی به n وابسته‌اند. این سه کمّیت p، a و A_n هستند. برای به دست آوردن مساحت دایره باید دریابیم که این سه کمّیت وقتی n بزرگ شود، به چه مقداری میل می‌کنند.

چه بر سر A_n می‌آید؟ A_n همواره از A، مساحت دایره کوچکتر است، زیرا همواره می‌توان نقطه‌هایی یافت که درون دایره و بیرون n ضلعی باشند. ولی اگر n خیلی بزرگ شود، تفاوت A_n و A بسیار کم می‌شود و n ضلعی تقریباً تمام دایره را می‌پوشاند. بنابراین انتظار داریم که (۱) $A_n\to A$. اثبات این مطلب مانند محیط دایره، ناممکن است، زیرا هنوز مساحت دایره را تعریف نکرده‌ایم. اما در اینجا هم رفع مشکل آسان است.

تعریف. مساحت دایره، حد مساحتهای n ضلعیهای محاط در آن است، پس طبق تعریف $A_n\to A$. چه بر سر a می‌آید؟ سهم چند ضلعی همواره کمی از r کوچکتر است،

زیرا هر ساق مثلث قائم‌الزاویه از وتر آن کوچکتر است. ولی اگر n خیلی بزرگ شود، تفاوت شعاع و a خیلی کوچک می‌شود. بنابراین (۲) $a \to r$ چه بر سر p می‌آید؟ طبق تعریف C داریم : (۳) $p \to C$

از ترکیب نتیجه‌های (۲) و (۳) به دست می‌آوریم $\frac{1}{2}ap \to \frac{1}{2}rC$ و چون $A_n = \frac{1}{2}ap$ داریم $A_n \to \frac{1}{2}rC$. ولی با توجه به (۱) داریم $A_n \to A$ ، بنابراین $A = \frac{1}{2}rC$. با توجه به $C = 2\pi r$ نتیجه می‌شود که : $A = \frac{1}{2}r.2\pi r = \pi r^2$. پس این فرمول آشنا در نهایت یک قضیه می‌شود.

۳.۱.۵. قطاع دایره

۵۶. دایره را می‌توان قطاع 2π رادیان در نظر گرفت ؛ پس :

2π رادیان $\qquad \pi R^2$

$\theta \qquad x = \frac{\pi R^2 \times \theta}{2\pi} = \frac{1}{2}R^2\theta$

۳.۱.۶. قطعهٔ دایره

۵۷. زیرا اگر $\widehat{AB} = \theta$ رادیان باشد و از O به A و B وصل کنیم، داریم :

$$S_{\text{قطعه}} = S_{OAB_{\text{قطاع}}} - S_{\Delta ABC}$$

امّا $S_{ABC} = \frac{R^2 \sin\theta}{2}, S_{\text{قطاع } OAB} = \frac{1}{2}R^2\theta$

است ؛ پس : $S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin\theta$

$$\Rightarrow S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$

۳.۲. شعاع و قطر

۳.۲.۱. اندازهٔ شعاع

۵۸. داریم : $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ رادیان ، $l = R\alpha \Rightarrow 3\pi = R \times \frac{\pi}{4}$

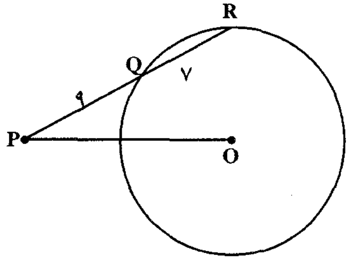
$\Rightarrow R = 12$

۶۰. داریم :

$\pi R^2 = 2\pi R \Rightarrow R = 2$

۶۱. $R=۱۲$.

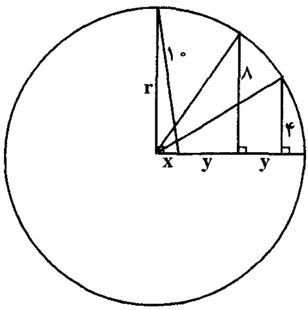
۶۲. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا اگر شعاع دایره را R بگیریم، داریم :



$$PR=۹+۷=۱۶ \text{ ،} \overline{PQ}.\overline{PR}=d^۲-R^۲ \Rightarrow ۹\times ۱۶=۱۳^۲-R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲=۲۵ \Rightarrow R=۵$$

۶۳. ۵ سانتی‌متر.

۶۴. گزینهٔ (د) جواب است، زیرا اگر شعاع دایره را r، فاصلهٔ مرکز دایره تا نزدیکترین وتر را x و فاصلهٔ برابر بین وترها را y بنامیم، داریم :



$$r^۲=x^۲+۱۰^۲$$
$$r^۲=(x+y)^۲+۸^۲$$
$$r^۲=(x+۲y)^۲+۴^۲$$

از حل معادله‌های بالا نتیجه می‌شود :

$$r=\frac{۵\sqrt{۲۲}}{۲}, \quad y=\sqrt{۶}, \quad x=\frac{۱۵}{\sqrt{۶}}$$

۶۵. $\sqrt{۱۰}$ سانتی‌متر.

۶۶. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا داریم :

$$S=\pi R^۲ \text{ ،} ۲S=\pi(R+n)^۲ \Rightarrow ۲\pi R^۲=\pi(R^۲+۲Rn+n^۲)$$
$$\Rightarrow R=n(۱+\sqrt{۲})$$

مقدار منفی $n(۱-\sqrt{۲})$ قابل قبول نیست.

۶۸. می‌دانیم : $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}$ (که در آن C زاویهٔ بین وترها می‌باشد) و بنابراین اگر $S>\frac{۱}{۲}ab$ باشد، مسأله دارای جواب نیست. با فرض $S<\frac{۱}{۲}ab$ خواهیم داشت $\sin\hat{C}=\frac{۲S}{ab}$ و بنابراین، دو مثلث با ضلعهای b و a و مساحت S وجود خواهد داشت، یکی با زاویهٔ حادهٔ C و دیگری با زاویهٔ منفرجهٔ C (این دو زاویه مکمل یکدیگرند). در حالت حاده بودن زاویهٔ C داریم :

$$\cos\hat{C}=\sqrt{۱-\frac{۴s^۲}{a^۲b^۲}}$$

و در حالت منفرجه بودن :

$$\cos\hat{C}=-\sqrt{۱-\frac{۴s^۲}{a^۲b^۲}}$$

بنابراین داریم : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} = a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4s^2}$

(علامت منفی برای موقعی که زاویهٔ C حاده است و علامت مثبت برای حالتی که زاویهٔ C منفرجه است.) در حالت $S = \frac{1}{2}ab$، مثلث مفروض قائم‌الزاویه شده و خواهیم داشت : $c^2 = a^2 + b^2$. شعاع دایره‌ای که بر این مثلث محیط شده، از رابطهٔ $R = \frac{c}{2\sin\hat{C}}$ به دست می‌آید.

جواب :

$$R = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2\sqrt{a^2b^2 - 4s^2}}}{4s}$$

اگر $S > \frac{1}{2}ab$ باشد، مسأله جواب ندارد.

اگر $S < \frac{1}{2}ab$ باشد، مسأله دارای دو جواب است.

اگر $S = \frac{1}{2}ab$ باشد، مسأله تنها یک جواب دارد.

۶۹. ۱. از O_1 به O_2 وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم $O_2B = x$ باشد. داریم :

$$OO_2 = R - x \ ,\ OO_2^2 = O_1O_2^2 - OO_1^2$$

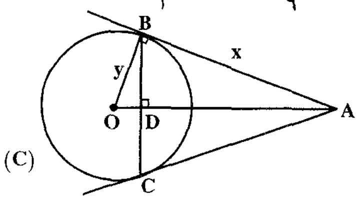
$$\Rightarrow (R-x)^2 = (\frac{R}{2} + x)^2 - \frac{R^2}{4} \Rightarrow x = \frac{R}{3}$$

۲. شعاع دایرهٔ O_3 را y فرض کرده از O به O_3 وصل می‌کنیم. داریم :

$$O_1O_3 = OO_3 = R - y \ ,\ O_1O_3^2 = OO_1^2 + OO_3^2$$

$$\Rightarrow (R-y)^2 = (\frac{R}{3} + y)^2 + \frac{4R^2}{9} \Rightarrow y = \frac{R}{6}$$

۷۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، $OA = m$ و $BD = \frac{a}{2}$ است. فرض می‌کنیم، $AB = x$ و $OB = y$ باشد. دو معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :



$$\begin{cases} x.y = \frac{a.m}{2} \\ x^2 + y^2 = m^2 \end{cases}$$

و این دستگاه هم معادل با دستگاه زیر است :

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{m^2 + am} \\ x - y = \sqrt{m^2 - am} \end{cases}$$

هم x و هم y می‌توانند شعاع دایره باشند و بنابراین جواب چنین خواهد بود :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} + \sqrt{m^2 - am}\right) \text{ و } \frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2 + am} - \sqrt{m^2 - am}\right)$$

۷۱. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا اگر از O به P و Q وصل کنیم، مثلث POQ در رأس O قائم‌الزاویه و OT'' ارتفاع وارد بر وتر آن است. پس داریم $OT''^{۲} = PT''.QT''$ ، امّا $OT = r$ ، $PT'' = PT = ۴$ و $QT'' = QT' = ۹$، در نتیجه :

$$r^{۲} = ۴\times ۹ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶$$

۷۲. داریم :

$$AB = C_{۳} = R\sqrt{۳} = a$$

$$d = a\sqrt{۲} = R\sqrt{۶}$$

$$R' = \frac{d}{۲} = \frac{R\sqrt{۶}}{۲}$$

۷۳. $۴R\sin^{۲}\frac{\alpha}{۸}\cos\frac{\alpha}{۴}$

۷۴. $\frac{۶-۴\sqrt{۲}}{۳}cm$

۷۵. $\frac{a\sqrt{۳}+r-\sqrt{۴r^{۲}+۲ar\sqrt{۳}}}{۳}$ ، $r \ge \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

۷۶. $۲r\tan\frac{\alpha}{۲}(۱-\tan\frac{\alpha}{۲})$. قانون کسینوسها را در مورد مثلث $OAO_{۱}$ به کار برید، به‌طوری که در آن O و $O_{۱}$ مرکزهای دایره‌هاست.

۷۷. $\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}\left(\frac{۱}{\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{r^{۲}+a r\sin\alpha}-r-a\cot\frac{\alpha}{۲}\right)$.

۷۸. $\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}\left(b\cos\frac{\alpha}{۲}-\sqrt{۴r^{۲}-b^{۲}}\sin\frac{\alpha}{۲}-۲r\sin\frac{\alpha}{۲}\right)}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}$. کسینوس زاویهٔ $OAO_{۱}$ را پیدا کرده و قانون کسینوسها را در مورد زاویهٔ $OAO_{۱}$ به کار برید. (O و $O_{۱}$ مرکزهای دایره‌ها هستند.)

۷۹. $\frac{b+c-۲\sqrt{bc}\cos\alpha}{۲\sin^{۲}\alpha}$. از رابطه‌های $AM^{۲} = AC.AB$ و $AM = AD+DM$ استفاده کنید.

۸۰. از تساوی $AD.DC = BD.DK$ استفاده می‌کنیم. به دلیل $BD = \frac{b}{۲}\tan\alpha$ ، $AD = DC = \frac{b}{۲}$ و $DK = ۲r$ ، رابطهٔ $\frac{b^{۲}}{۴} = \frac{b}{۲}\tan\alpha.۲r$ به دست می‌آید، که از آن نیز $r = \frac{b}{۴}\text{cotg}\alpha$ نتیجه می‌شود.

۲.۲.۳. اندازهٔ قطر

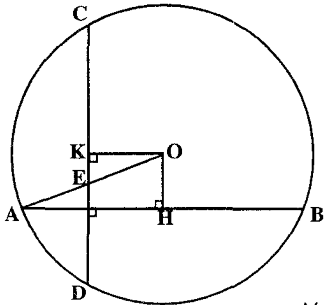
۸۱. ۵۰ سانتی‌متر.

۸۲. اگر d قطر دایره باشد، داریم:

$$PA^{۲}+PB^{۲}+PC^{۲}+PD^{۲}=۴R^{۲}=d^{۲} \Rightarrow d^{۲}=۹+۱۶+۳۶+۴=۶۵$$

پس گزینهٔ (هـ) درست است. $\Rightarrow d=\sqrt{۶۵}$

۸۳. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا با توجه به رابطه‌های طولی در دایره، داریم:



$$EA.EB=ED.EC$$
$$\Rightarrow ۲\times۶=۳\times EC$$
$$\Rightarrow EC=۴ \Rightarrow CD=۷$$

حال اگر از O عمودهای OH و OK را بترتیب بر AB و CD فرود آوریم، داریم:

$$OH=EK=EC-KC=۴-\frac{۷}{۲}=\frac{۱}{۲} \text{ و } AH=\frac{AB}{۲}=۴$$

$$\Rightarrow r=OA=\sqrt{OH^{۲}+AH^{۲}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱۶}=\frac{\sqrt{۶۵}}{۲} \Rightarrow \text{قطر دایره}=\sqrt{۶۵}$$

۳.۳. طول قوس و محیط دایره

۱.۳.۳. طول قوس

۸۴. بترتیب، جوابها برابرند با: ۳۰° و ۲ دقیقه و ۱۴° و $\frac{۲}{۵}$ دقیقه.

۸۸. محیط دایره بر حسب دقیقه $۳۶۰\times۶۰=۲۱۶۰۰$.

از طرفی محیط زمین ۴۰,۰۰۰,۰۰۰ کیلومتر است. پس:

میل دریایی برحسب کیلومتر $\frac{۴۰,۰۰۰,۰۰۰}{۲۱۶۰۰}=۱۸۵۱$

۸۹. شعاع دایرهٔ محاطی را R' فرض می‌کنیم. داریم:

$$\frac{O'T}{OA}=\frac{CO'}{CO} \Rightarrow \frac{R'}{R}=\frac{۲R-(R+R')}{۲R} \Rightarrow ۲R'=R-R' \Rightarrow R'=\frac{R}{۳}$$

$$\text{محیط دایرهٔ } (O')=۲\pi R'=۲\pi\times\frac{R}{۳}=\frac{۲\pi R}{۳}$$

$$\text{محیط دایرهٔ } (O')=\text{طول کمان } \widehat{AB} \Rightarrow \frac{۲\pi R}{۳}=\frac{۲\pi R\times\frac{۲\pi}{۳}}{۲\pi}=\text{طول کمان AB}$$

۹۰. دایره به چهار قوس دو به دو مساوی تقسیم شده است، $\widehat{AB}=\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}=\widehat{DA}$. قوس $\widehat{BC}$ را کوچکتر از ۹۰ درجه فرض می‌کنیم (در حالتی که $m:n=1$ باشد، هریک از چهار قوس مساوی ۹۰ درجه می‌شود.) : $B\hat{O}C=\alpha$

می‌دانیم $DE:EB=m:n$. اگر $\frac{DE}{m}$ را واحد انتخاب کنیم، خواهیم داشت :

$DE=m$ و $EB=n$. یعنی : $\frac{DB}{2}=\frac{m+n}{2}$

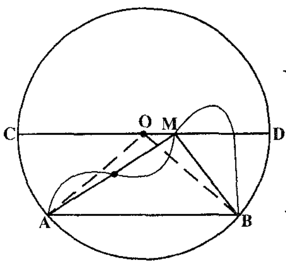
$$OE=DE-DO=m-\frac{m+n}{2}=\frac{m-n}{2}$$

بنابراین : $\cos\alpha=\frac{OE}{OC}=\frac{m-n}{m+n}$

یا : $\alpha=\operatorname{Arc}\cos\frac{m-n}{m+n}$ (رادیان)

$$\widehat{CD}=\pi-\operatorname{Arc}\cos\frac{m-n}{m+n}\ (\text{رادیان})$$

۹۱. اگر A و B دو انتهای قطر باشند، مسأله واضح است ؛ وگرنه در یک طرف یک قطر دایره مانند CD (موازی AB) هستند. خم کاملاً داخل این قسمت از دایره نمی‌تواند باشد، چون در این صورت مساحت یک قسمت از آن، از نصف مساحت دایره کمتر می‌شود پس قطر CD را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. و طول خم حداقل برابر $MA+MB$ است. ولی حداقل مقدار $MA+MB$ وقتی است که M وسط CD ؛ یعنی مرکز دایره باشد و این مقدار برابر ۲ است، پس طول خم حداقل ۲ است.



۹۲. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا قطر هر نیمدایره $\frac{2R}{n}$ و طول قوس آن $\frac{\pi R}{n}$ است. پس مجموع n عدد از این قوسها، برابر است با : نصف پیرامون دایره $=\pi R=n\cdot\frac{\pi R}{n}$

۹۳. داریم :

$$\hat{M}+\hat{O}=180^\circ \Rightarrow \hat{O}=75^\circ=\frac{5\pi}{12}\Rightarrow \widehat{TT'}\ \text{طول کمان}=10\times\frac{5\pi}{12}=\frac{25\pi}{6}\text{cm}$$

۹۴. اندازهٔ کمانها را به دست می‌آوریم. بین آنها باید رابطهٔ $S=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ برقرار باشد.

$$S=360\times\frac{1}{7}=\frac{360}{7}\ ،a=360\times\frac{2}{7}\ \text{و}\ b=360\times\frac{2}{7}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{360}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{(360)^2\times(\frac{2}{7})^2}\Rightarrow\frac{360}{7}=\frac{360}{7}$$

پس S نصف واسطهٔ هندسی بین a و b است.

۲.۳.۳. اندازهٔ محیط

۹۶. کمان $\widehat{AO}$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت :

$$\text{محیط شش برگی} = ۱۲\widehat{AO} = ۱۲ \times \frac{۱}{۶} \times ۲\pi R = ۴\pi R$$

۹۷. می‌دانیم که $C_۴ = R\sqrt{۲}$ و $C_۳ = R\sqrt{۳}$ است ؛ امّا $\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱ \cdots$ و $\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۰۵ \cdots$ ، پس : $\sqrt{۲} + \sqrt{۳} = ۳/۱۴۶۲۶ \cdots$. در نتیجه

$$R(\sqrt{۲} + \sqrt{۳}) = R \times ۳/۱۴۶۲۶ \cdots$$

امّا طول نیمدایره عبارت است از : $\pi R = R \times ۳/۱۴۱۵ \cdots$

بنابراین تفاضل مابین این دو مقدار عبارت است از $R \times ۰/۰۰۵$ و به ازای $R = ۱$متر ، این تفاضل از ۵ میلی‌متر کمتر است.

۹۸. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOC که در آن $AC = \frac{OC}{۲}$ است، داریم :

$$OC^۲ - AC^۲ = R^۲ \Rightarrow ۴AC^۲ - AC^۲ = R^۲ \Rightarrow AC^۲ = \frac{R^۲}{۳} \Rightarrow AC = \frac{R}{\sqrt{۳}}$$

در نتیجه $AD = R(۳ - \frac{۱}{\sqrt{۳}})$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم :

$$BD^۲ = ۴R^۲ + R^۲(۳ - \frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲$$

بنابراین :

$$BD = R\sqrt{۴ + (۳ - \frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲} = R\sqrt{\frac{۲}{۳}(۲۰ - ۳\sqrt{۳})} = R \times ۳/۴۱۵$$

که اندازهٔ تقریبی طول نیمدایرهٔ به شعاع R است.

۹۹. وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض برابر است با :

$$\sqrt{\frac{۹D^۲}{۲۵} + \frac{۳۶D^۲}{۲۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}D$$

بنابراین محیط این مثلث عبارت است از :

$$\frac{۳D}{۵} + \frac{۶D}{۵} + \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}D = \frac{۳}{۵}D(۳ + \sqrt{۵}) = ۳/۱۴۱۶۴ \cdots D$$

امّا طول محیط دایره برابر است با $۳/۱۴۱۵۹ \cdots D$. بنابراین تفاضل مابین دو مقدار برابر است با :

$$۰/۰۰۰۰۵ \cdots D < \frac{D}{۱۰۰۰۰}$$

۱۰۰. گزینهٔ (الف) درست است.

۳.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۱. گزینهٔ (الف) درست است، زیرا :

$$N_1 = \frac{\text{۱ میل}}{\pi D} \text{ و } N_2 = \frac{\text{۱ میل}}{\pi(D-\frac{1}{2})} \Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{\text{۱ میل}}{\pi} \times \frac{\frac{1}{2}}{D(D-\frac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2 - N_1}{N_1} = \frac{\frac{1}{2}}{D-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{24-\frac{1}{2}} = \frac{1}{49} \Rightarrow \text{٪ افزایش} = 100 \times \frac{1}{49} \# \%2$$

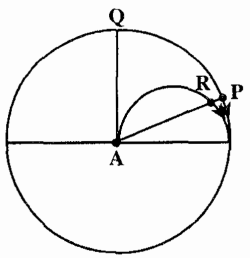
۱۰۲. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا محیط چرخ 6π و هر میل ۵۲۸۰ پا است.

درنتیجه :

$$N = \frac{5280}{6\pi} = \frac{880}{\pi}$$

۱۰۳. بعد از $\frac{\pi}{200}$ ساعت.

یادآوری می‌کنیم که، مسیر موشک ؛ با توجه به شرطهای مسأله، دایره‌ای با شعاعی برابر نصف شعاع مسیر هواپیماست. مقدار کمان $\overset{\frown}{AR}$، از نظر اندازه، دو برابر مقدار زاویهٔ QAP است (زاویهٔ بین مماس و وتر) ؛ یعنی اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{QP}$، برحسب درجه، برابر نصف کمان AR، بر حسب درجه است. بنابراین، طول این دو کمان (برای هر وضع R) با هم برابرند. برای رسیدن موشک به هواپیما، باید هواپیما ربع دایره و موشک نیمی از محیط دایرهٔ مسیر خود را طی کنند.



البته، باید منحصر به فرد بودن مسیر موشک را، با توجه به شرطهای مسأله، ثابت کرد (از شرکت کنندگان در المپیاد این اثبات را نخواسته بودند). این اثبات، نتیجه‌ای از حکم کلی است که : اگر تابعی در نقطهٔ $t=0$ مفروض و مشتق آن معلوم باشد، خود تابع منحصر به فرد است. اگر موشک، در زمان t، فاصلهٔ $AR = AQf(t)$ از نقطهٔ A را طی کند (در ضمن $f(0)=0$) ؛ آن وقت برای سرعت آن، در جهت عمود بر شعاع داریم :

$$v\sqrt{1-f^2(t)} = f'(t) \Rightarrow \frac{f'(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} = v \Rightarrow$$

$$(\operatorname{Arc}\sin f(t))' = v \Rightarrow f(t) = \sin vt$$

۳.۴. π

۳.۴.۲. محاسبهٔ π

۱۰۴. سی و دومین رقم اعشاری در بسط π، صفر است.

۱۰۵. داریم :

الف ــ

$$C_4 = R\sqrt{2}\ ,\ P_4 = 4R\sqrt{2}$$

$$A_6 = \frac{2RC_n}{\sqrt{4R^2 - C_n^2}} = \frac{2R.R}{\sqrt{4R^2 - R^2}} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow P_6 = 4R\sqrt{3}\ ،\ 4R\sqrt{2} < 2\pi R < 4R\sqrt{3} \Rightarrow 3 < \pi < 4$$

ب ــ با استفاده از چهار ضلعی محیطی و شش‌ضلعی محاطی داریم :

$$C_6 = R\ ,\ P_6 = 6R\ ,\ A_4 = 2R\ ,\ P_4 = 8R$$

$$6R < 2\pi R < 8R \Rightarrow 3 < \pi < 4$$

۱۰۶. طول ضلع شش ضلعی محاط در دایره، برابر است با طول شعاع دایره، و بنابراین $2\pi R = 6R$، و از آن جا $\pi = \frac{6R}{2R} = 3$.

۱۰۷. قطر دایره را d می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$\frac{\pi d^2}{4} = (\frac{13}{15}d)^2 \Rightarrow \pi = \frac{676}{225}$$

و یا $\pi = 3/00\overline{4}$. اشتباه در حدود ۳ / ۴٪ است.

۱۰۸. بنا بر شرط مسأله، باید داشته باشیم :

$$(\frac{8}{9}d)^2 = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \pi = \frac{256}{81} = 3/16$$

۳.۵. مساحت دایره

۳.۵.۱. اندازهٔ مساحت دایره

۱۰۹. با فرض $\pi = 3/1415$ داریم :

$$S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = \pi(12)^2 = 144\pi = 144 \times 3/1415 = 452/376$$

از طرفی $S_n = \frac{1}{2}nR^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$، پس :

$$S_8 = \frac{1}{2} \times 8 \times (12)^2 \times \sin 45^\circ = 288\sqrt{2} = 288(1/4142) = 407/2896$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره}} - S_8 = 452/376 - 407/2896 = 45/0864$$

۱۱۰. داریم :

$$C = ۲\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{۲\pi}$$ محیط دایره

$$S = \pi R^۲ = \pi(\frac{C}{۲\pi})^۲ = \frac{C^۲}{۴\pi}$$ دایره

۱۱۵. ۱. $\frac{۱}{۲}.۲\pi r.r = \pi r^۲$

۲. $\frac{\pi r^۲}{۴r^۲} = \frac{۱۱}{۱۴}$ ، از آن جا :

$$\frac{\pi}{۴} = \frac{۱۱}{۱۴} \Rightarrow \pi = \frac{۴۴}{۱۴} = \frac{۲۲}{۷}$$

به این ترتیب، مساحت دایره طبق محاسبهٔ ارشمیدس، و شبیه محاسبهٔ امروزی، برابر است با $\frac{۲۲}{۷}r^۲$.

این مسأله، از رسالهٔ «اندازه‌گیری دایره»، متعلق به ارشمیدس، برداشته شده است.

۱۱۶. شعاع دایرهٔ مورد نظر را R فرض می‌کنیم. روشن است که مرکزهای چهار دایرهٔ محاطی، رأسهای مربعی به ضلع ۲R و قطر $۲(r-R)$ هستند. پس داریم :

$$۴R^۲ = ۲(r-R)^۲ \Rightarrow R = (\sqrt{۲}-۱)r$$

و مساحت مورد نظر برابر است با :

$$S = \pi(۳-۲\sqrt{۲})r^۲$$

۱۱۷. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا از آن جا که $S = \pi R^۲$ است و π عددی گنگ و R عددی گویا است. پس S عددی گنگ است (حاصل‌ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است).

۱۱۸. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا داریم :

$$C_۳ = R\sqrt{۳} \Rightarrow P_۳ = ۳R\sqrt{۳} \Rightarrow R = \frac{P}{۳\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \text{دایره } S = \pi R^۲ = \pi(\frac{P^۲}{۲۷}) = \frac{\pi P^۲}{۲۷}$$

۱۱۹. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۲۰. گزینهٔ (ج) درست است ؛ زیرا :

$$R \rightarrow ۲R \Rightarrow S_۱ = \pi R^۲ \text{ ، } S_۲ = ۴\pi R^۲$$

$$\Rightarrow S_۲ - S_۱ = ۳\pi R^۲ \Rightarrow \frac{S_۲ - S_۱}{S_۱} = \frac{۳\pi R^۲}{\pi R^۲} = ۳ \Rightarrow \text{درصد افزایش} = ٪۳۰۰$$

۲.۵.۳. رابطه‌ای در مساحتها

۱۲۱. در شکل، نقطه‌ها را با حرفهای بزرگ نشان داده‌ایم. پاره‌خط SA عبارت است از نصف قطر مربعی که بر دایرهٔ به قطر NM محیط شده است و برابر است با SF، یعنی نصف ضلع مربعی که بر دایرهٔ به قطر EF محیط است.

نصف قطر مربع FCEL که رأسهای آن بر وسط ضلعهای مربع KGIJ قرار دارد، مساوی FS می‌شود، یعنی FCEL مربع محیطی دایرهٔ به قطر NM است. ولی مساحت FCEL مساوی نصف مساحت KGIJ است. زیرا اولی شامل چهار مثلث و دومی شامل ۸ مثلث یکسان هستند. از این جا نتیجه می‌شود که مساحت دایرهٔ به قطر NM برابر است با نصف مساحت دایرهٔ به قطر EF.

۱۲۲. داریم :

دایرهٔ به قطر AH $S=\pi\cdot\frac{AH^{۲}}{۴}$ ، دایرهٔ به قطر HB $S=\pi\cdot\frac{BH^{۲}}{۴}$

دایرهٔ به قطر CH $S=\pi\cdot\frac{CH^{۲}}{۴}$ ، دایرهٔ به قطر DH $S=\pi\cdot\frac{DH^{۲}}{۴}$

چهار دایره $S=\frac{\pi}{۴}(AH^{۲}+BH^{۲}+CH^{۲}+DH^{۲})$

امّا $AH^{۲}+BH^{۲}+CH^{۲}+DH^{۲}=۴R^{۲}$ است. پس :

چهار دایره $S=\frac{\pi}{۴}(۴R^{۲})=\pi R^{۲}=$ مساحت دایرهٔ به شعاع R

۱۲۳. از یک لولهٔ ۳ سانتی‌متری ؛ زیرا اگر شعاع لوله‌های ۱ سانتی‌متری را $R_{۱}$ و شعاع لولهٔ ۳ سانتی‌متری را $R_{۲}$ بنامیم، داریم :

$$۲R_{۱}=۱\Rightarrow R_{۱}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow S_{۱}=\pi R_{۱}^{۲}=\pi(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}\pi\Rightarrow ۳S_{۱}=\frac{۳\pi}{۴}cm^{۲}$$

$$۲R_{۲}=۳\Rightarrow R_{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow S_{۲}=\pi R_{۲}^{۲}=\pi(\frac{۳}{۲})^{۲}=\frac{۹\pi}{۴}cm^{۲}$$

$$\Rightarrow S_{۲}>۳S_{۱}$$

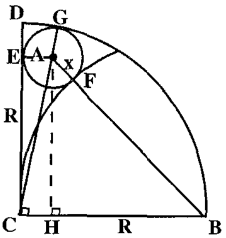
۳.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲۴. ببینید، وقتی محیط این شکلها برابر باشند، سطح کدام‌یک بیشتر است؟

۶.۳. قطاع دایره

۱.۶.۳. شعاع دایره

۱.۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع



۱۲۵. مرکز دایرهٔ مورد نظر را A، و شعاع آن را x فرض می‌کنیم ؛ در این صورت داریم :

$\Delta ABC\ : AC = CG - AG = R - x,$

$AB = BF + AF = R + x\ ,\ CH = AE = x$

$\Delta ABC: AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲BC.CH$

$\Rightarrow (R+x)^۲ = (R-x)^۲ + R^۲ - ۲Rx \Rightarrow x = \frac{R}{۶}$

۱۲۶. شعاع دایرهٔ مفروض را x فرض می‌کنیم، یعنی : $O_۲A = O_۲B = x$ ($O_۱$ مرکز دایرهٔ بزرگ و $O_۲$ مرکز دایرهٔ کوچکتر است).

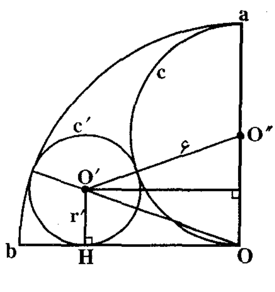
در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O_۱O_۲A$ داریم :

$O_۲A = O_۱O_۲ \sin\frac{\alpha}{۲}$

که در آن $O_۱O_۲ = O_۱B - O_۲B = R - x$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت :

$$x = (R-x)\sin\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow x = \frac{R\sin\frac{\alpha}{۲}}{۱+\sin\frac{\alpha}{۲}} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}$$

۲.۱.۶.۳. رابطهٔ بین شعاعها



۱۲۷. گزینهٔ (هـ) درست است ؛ زیرا اگر وسط پاره‌خط Oa را O″ بنامیم و از O′ عمود O′H را بر Od فرود آوریم، داریم :

$(۱۲-r')^۲ - r'^۲ = (۶+r')^۲ - (۶-r')^۲ \Rightarrow$

$r' = ۳ \Rightarrow R - r' = ۱۲ - ۳ = ۹$

۱۲۸. نسبت خواسته شده $\frac{\sin\alpha}{۱+\sin\alpha}$ است.

۲.۶.۳. طول کمان قطاع

۱۲۹. داریم:

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2}R^2\theta \Rightarrow 15\pi = \frac{1}{2}(6)^2\theta \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{طول کمان} = R\theta = 6 \times \frac{5\pi}{6} = 5\pi$$

۳.۶.۳. اندازهٔ محیط

۱۳۰. گزینهٔ (هـ) درست است.

۴.۶.۳. مساحت

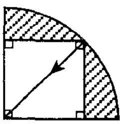
۱.۴.۶.۳. مساحت قطاع

۱۳۱. بترتیب، 25π، 20π، 50π، 60π و 90π

۱۳۲. 40cm^2

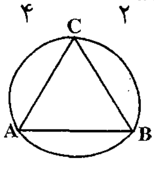
۱۳۴. (a)، (b) زاویهٔ مرکزی قطاع برابر ۲ است.

۲.۴.۶.۳. مساحت شکلهای ایجادشده در قطاع



۱۳۵. اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، قطر مربع محاط در ربع دایره، $d = R = a\sqrt{2}$ است. پس $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$. از آن جا مساحت مربع $S = \frac{R^2}{2}$ است، و چون مساحت ربع دایره $\frac{1}{4}\pi R^2$ است. بنابراین مساحت قسمت سایه زده برابر است با:

$$\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$$



۱۳۶. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. طول ضلع این مثلث را R فرض می‌کنیم. در این صورت، مساحت شکل مورد نظر برابر است با، مجموع مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و مساحت سه قطعهٔ 60° از این دایره‌ها؛ و محیط آن، مساوی ۳ برابر طول کمان 60° در دایره‌ای به شعاع R است. مساحت شکل را می‌توان به صورت تفاضل مساحت سه قطاع 60° در دایره‌ای به شعاع R و ۲ برابر مساحت مثلث ABC در نظر گرفت.

$$S_{\text{شکل}} = 3 \times (60^\circ\ S_{\text{قطاع}}) - 2S_{\Delta ABC} = 3\left(\frac{\pi R^2}{6}\right) - 2\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{شکل}} = \frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{3})$$

$$\text{محیط شکل} = 3\left(\frac{\pi R}{3}\right) = \pi R$$

۳.۶.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳۷. $\dfrac{R\sin\frac{\alpha}{۲}}{\sin(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\pi}{۶})}$

۱۳۸. داریم :

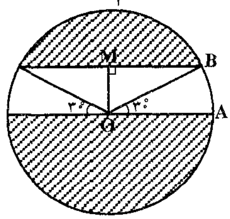
$$l=R\theta \Rightarrow ۱=R\times\frac{\pi}{۳}\Rightarrow R=\frac{۳}{\pi}$$ شعاع دایره

مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است ؛ پس، $AB=R=\frac{۳}{\pi}$.

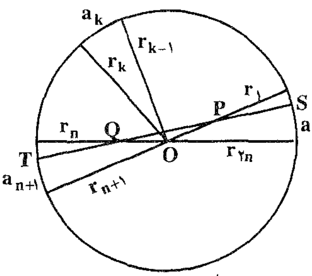
۱۳۹. گزینهٔ (هـ) درست است،زیرا داریم : مساحت گذرگاه − مساحت‌دایره= مساحت باقی‌مانده

$\Rightarrow$ مساحت باقی مانده $= ۳۶\pi - (۲S_{\text{قطاع}\,OAB}+۲S_{\Delta OBM})$

$\Rightarrow$ باقی مانده $S=۳۶\pi-(\frac{۱}{۱۲}\times\pi\times۶^۲+\frac{۱}{۲}\times۳\times\sqrt{۳})=۳۰\pi-۹\sqrt{۳}$



۱۴۰. گزینهٔ (هـ) درست است. مرکز قطاع دایره‌ای را با O، شعاعهایی که قرص را به $۲n$ قطاع برابر تقسیم می‌کنند، به ترتیب و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت با $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$، ... و $r_{۲n}$، و کمانهایی که اندازهٔ این شعاعها روی محیط دایره



پدید می‌آورند، ابتدا از شعاع $r_{۲n}$، بترتیب و در همان جهت با $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ... و $a_{۲n}$ نشان می‌دهیم. اگر P و Q دو نقطه بترتیب روی شعاعهای $r_۱$ و r_n باشند، قاعدهٔ PQ از مثلث POQ قطعه‌ای از قاطع ST است که کمان $a_۱$ را در $S_۱$ و کمان $a_{n+۱}$ را در T قطع می‌کند. پاره‌خط PQ هر یک از $n-۱$ قطاع روبه‌رو به کمانهای $a_۲$، $a_۳$، ...، a_n را به دو قسمت تقسیم می‌کند. پاره‌خطهای PS و QT هریک از دو قطاع روبه‌رو به کمانهای $a_۱$ و $a_{n+۱}$ را به دو قسمت تقسیم می‌کند. روی‌هم تعداد $(n-۱)+۲=n+۱$ قطاع از $۲n$ قطاع مجزا به دو قسمت تقسیم شده‌اند. که جمع همهٔ ناحیه‌های مجزا $۲n+(n+۱)=۳n+۱$ می‌شود. این بیشترین تعداد است، زیرا شعاعها دو به دو در یک امتدادند و $۲n$ شعاع، n خط را تشکیل می‌دهند که یک قاطع (خط) حداکثر در n نقطه می‌تواند آنها را قطع کند.

۷.۳. قطعهٔ دایره

۱.۷.۳. شعاع دایره

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ شعاع

۱۴۱. دایرهٔ مورد نظر، در نقطهٔ H وسط وتر AB بر این وترها، و در نقطهٔ T، نقطهٔ تقاطع OH با دایره، بر قوس AB مماس است.

۱۴۲. $۴R\cos\frac{\alpha}{۴}\sin^۲\frac{\alpha}{۸}$

۲.۱.۷.۳. نسبت شعاعهای دو دایره

۱۴۳. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB را d بنامیم، شعاعهای دو دایرهٔ مورد نظر $\frac{R-d}{۲}$ و $\frac{R+d}{۲}$ می‌باشند.

۲.۷.۳. مساحت

۱.۲.۷.۳. مساحت قطعه

۱۴۴. از دستور $S=\frac{۱}{۲}R^۲(\theta-\sin\theta)$ قطعه، (θ برحسب رادیان)، استفاده کنید.

۱۴۶. کمان قطعهٔ مورد محاسبه، $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است، پس:

$$S_{\text{قطعه}}=\frac{۱}{۲}R^۲(\theta-\sin\theta)=\frac{۱}{۲}(۶)^۲(\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

$$S_{\text{قطعه}}=۱۸(\frac{\pi}{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=(۶\pi-۹\sqrt{۳})cm^۲$$

۱۴۷. **راه اول.** می‌دانیم که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع R، برابر است با $C_۳=R\sqrt{۳}$ ؛ پس داریم:

$$۶=R\sqrt{۳}\Rightarrow R=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{دایره}}=\pi R^۲=\pi(۲\sqrt{۳})^۲=۱۲\pi$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴}=۹\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۱}{۳}(S_{\text{دایره}}-S_{\text{مثلث}})=\frac{۱}{۳}(۱۲\pi-۹\sqrt{۳})=(۴\pi-۳\sqrt{۳})cm^۲$$

راه دوم. کمان قطاع مورد نظر $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$ و اندازهٔ شعاع دایره، $R=۲\sqrt{۳}$ است. پس :

$$S_{\text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}R^{۲}(\theta-\sin\theta)$$

$$\Rightarrow S_{\text{قطاع}}=\frac{۱}{۲}\times ۱۲(\frac{۲\pi}{۳}-\sin\frac{۲\pi}{۳})=(۴\pi-۳\sqrt{۳})\text{cm}^{۲}$$

۱۴۸. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۴۹. ابتدا شعاع دایره را پیدا می‌کنیم. محیط قطعه برابر است با مجموع طول قوس $\overset{\frown}{ACB}$ و وتر AB، یعنی داریم :

$$\frac{۲}{۳}\pi R+R\sqrt{۳}=P$$

$$R=\frac{۳P}{۲\pi+۳\sqrt{۳}}$$

مساحت (S) قطعه برابر است با مساحت قطاع، منهای مساحت مثلث OAB :

$$S=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}-\frac{R^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow S=\frac{۳P^{۲}(۴\pi-۳\sqrt{۳})}{۴(\pi+۳\sqrt{۳})^{۲}}$$ جواب :

۱۵۰. $S=\frac{۱}{۱۲}(۴\pi-۳\sqrt{۳})R^{۲}$

۳.۷.۲.۲. نسبت مساحت دو قطعه

۱۵۱. داریم :

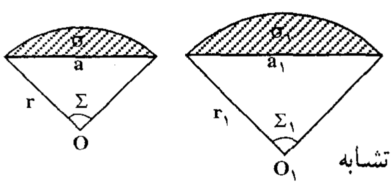
$$O'B\perp AB\Rightarrow B'A=B'B$$

$$\text{مساحت قطعهٔ } AB=\pi R^{۲}.\frac{\alpha}{۳۶۰}-OB'.AB'$$

$$\text{مساحت قطعهٔ } AB'=\frac{\pi R^{۲}}{۴}.\frac{\alpha}{۳۶۰}-O'B''.AB''=\frac{\pi R^{۲}}{۴}.\frac{\alpha}{۳۶۰}-\frac{OB'.AB'}{۴}$$

$$\frac{S_{\text{قطعهٔ } AB}}{S_{\text{قطعهٔ } AB'}}=\frac{\pi R^{۲}.\frac{\alpha}{۳۶۰}-OB'.AB'}{\frac{۱}{۴}\pi R^{۲}.\frac{\alpha}{۳۶۰}-\frac{۱}{۴}OB'.AB'}=\frac{۱}{۴}$$

۱۵۲. مساحت قطعه‌ها را σ و $\sigma_{۱}$، مساحت قطاعها را S و $S_{۱}$ و مساحت مثلث‌ها را Σ و $\Sigma_{۱}$ می‌گیریم و a و $a_{۱}$ را قاعده‌های دو قطعه و r و $r_{۱}$ را شعاعهای دو دایره فرض می‌کنیم. در این صورت داریم :



$\sigma=S-\Sigma\ ,\ \sigma_{۱}=S_{۱}-\Sigma_{۱}$. با توجه به تشابه

مثلثها، خواهیم داشت :

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2} \text{ ، } \frac{S}{S_1} = \frac{r^2}{r_1^2} \Rightarrow \frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{S}{S_1} \text{ یا } \frac{\Sigma}{S} = \frac{\Sigma_1}{S_1} \Rightarrow \frac{S}{\Sigma} = \frac{S_1}{\Sigma_1}$$

$$\Rightarrow \frac{S-\Sigma}{\Sigma} = \frac{S_1-\Sigma_1}{\Sigma_1} \text{ یا } \frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\sigma_1}{\Sigma_1} \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\Sigma}{\Sigma_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

۳.۲.۷.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در قطعه

۱۵۳. $R^2(\alpha + \sin\alpha)$

۱۵۴. با فرض $OF = r$، $OH = a$، $OK = x$ و $KF = y$ ، در مثلث OKF داریم : $KF^2 = OF^2 - OK^2$ یا $y^2 = r^2 - x^2$. از آن جا نتیجه می‌شود :

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$, مستطیل $S = 2KF$

$KH = 2KF(OK - OH) = 2y(r^2 - x^2) = 2(x-a)\sqrt{r^2 - x^2}$

$\Rightarrow S^2 = 4(x-a)(x-a)(r-x)(r+x)$

ثابت می‌شود، این عبارت وقتی ماکزیمم است که $x = \frac{1}{4}(a \pm \sqrt{a^2 + 8r^2})$ باشد و مسأله همواره جواب دارد. در حالت خاص اگر $a = 0$ باشد، $x = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$ خواهد بود. یعنی اگر به جای قطعه، نیمدایره باشد، مستطیل به مساحت ماکزیمم، مربع خواهدبود.

۳.۷.۳. ارتفاع قطعه

۱۵۵. اگر طول قطر CD را به d و قاعدهٔ AB از قطعهٔ دایره را به a و طول مجهول CE را به x نشان دهیم، داریم :

$$\frac{a^2}{4} = x(d-x) = dx - x^2 \text{ یا } x^2 - dx + \frac{a^2}{4} = 0$$

که از آن جا به دست می‌آید :

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - a^2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - a^2}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{d - \sqrt{d^2 - a^2}}{2}$$

۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده در یک دایره

۱.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با منحنیها

۱۵۶. گزینهٔ (الف) درست است.

۱۵۷. $Q=\frac{۲}{۳}R^۲(۳\sqrt{۳}-\pi)$

۱۵۸. با فرض $AB=۲r$ و $S=Q$ مورد نظر، داریم:

$$Q=S_{ABC}-۳S_{\text{قطاع } Anm} \Rightarrow Q=\frac{۱}{۴}(۲r)^۲\sqrt{۳}-۳\times\frac{۱}{۶}\pi r^۲$$

$$\Rightarrow Q=r^۲(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$$

حال r را بر حسب R محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم که $a_۳=OA\sqrt{۳}$ ؛ از طرف دیگر:

$$OA=OD-AD=R-r \Rightarrow ۲r=(R-r)\sqrt{۳} \Rightarrow r=R(۲\sqrt{۳}-۳)$$

در نتیجه خواهیم داشت: $Q=۳R^۲(۷-۴\sqrt{۳})(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$

۱۵۹. ۱. داریم:

$O\hat{C}A=O\hat{C}B=۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}B=۱۸۰^\circ \Rightarrow$ A و C و B بر یک استقامتند

۲. چون $\hat{A}=\hat{B}=۴۵^\circ$ است، پس $\widehat{ODC}=\widehat{OEC}=۹۰^\circ$ می‌باشد و دو قطعهٔ ODC و OEC برابرند، پس:

$$S_{ODCE}=۲\times S_{\text{قطعهٔ } ODC}=۲\times\frac{۱}{۲}(\frac{R}{۲})^۲(\frac{\pi}{۲}-۱)=\frac{R^۲}{۸}(\pi-۲)$$

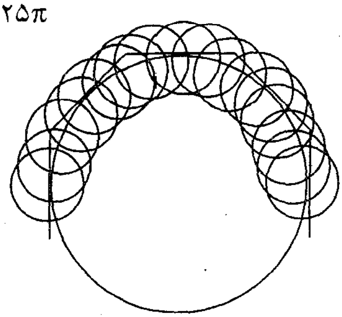
۳. $$S_{\widehat{ABC}}=\frac{\pi R^۲}{۴}-۲\times\frac{\pi R^۲}{۸}+\frac{R^۲}{۸}(\pi-۲) \Rightarrow S_{\widehat{ABC}}=\frac{R^۲}{۸}(\pi-۲)$$

۱۶۰. شعاع دایرهٔ محاطی مربع $r=۵$ و مساحت آن، $S_۱=\pi r^۲=۲۵\pi$ است. شعاع دایرهٔ محیطی مربع $R=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲}=۵\sqrt{۲}$ و مساحت آن $S_۲=\pi(۵\sqrt{۲})^۲=۵۰\pi$ است.

بنابراین مساحت محصور بین این دو دایره برابر است با:

$$S_۲-S_۱=۵۰\pi-۲۵\pi=۲۵\pi$$

۱۶۱. $\pi r^۲+۲Pr-\frac{Pr^۲}{۲R}$

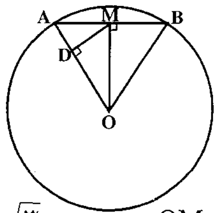


۲.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست

۱۶۲. $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$. عبارتهای $AC=b$ و $BC=a$ را در نظر بگیرید. با به کار بردن قانون کسینوسها در مورد مثلثهای ABC ، ACD و BCD، دستگاه زیر حاصل می‌شود :

$$\begin{cases} ۲a^۲+b^۲=۱۲ \\ a^۲+b^۲+ab=۹ \end{cases}$$

۱۶۳. گزینهٔ (د) درست است، زیرا مثلث OAB که در آن $OA=OB=AB=r$ است، متساوی‌الاضلاع و در نتیجه :



$$OM=\frac{AB\sqrt{۳}}{۲}=\frac{r\sqrt{۳}}{۲} \ , \ MD=\frac{OM}{۲}=\frac{r\sqrt{۳}}{۴}$$

$$AD=\frac{AM}{۲}=\frac{AB}{۴}=\frac{r}{۴}\Rightarrow S_{ADM}=\frac{۱}{۲}AD\times DM$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{r}{۴}\times\frac{r\sqrt{۳}}{۴}=\frac{r^۲\sqrt{۳}}{۳۲}$$

۱۶۴. راه اول. شعاع دایره را R و یک ضلع مستطیل را x فرض می‌کنیم، در این صورت، ضلع دیگر مستطیل $\sqrt{۴R^۲-x^۲}$ است. از آن جا :

$$S=x\sqrt{۴R^۲-x^۲}\Rightarrow S^۲=x^۲(۴R^۲-x^۲)$$

چون $x^۲+(۴R^۲-x^۲)=۴R^۲$ مقدار ثابتی است، پس $S^۲$ و در نتیجه S وقتی ماکزیمم است، که این دو مقدار با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم :

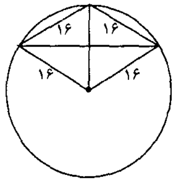
$$x^۲=۴R^۲-x^۲\Rightarrow x^۲=۲R^۲\Rightarrow x=R\sqrt{۲}$$

اما $R\sqrt{۲}$ ضلع مربع محاط در دایرهٔ به شعاع R است ؛ پس حکم ثابت است.

راه دوم. فرض می‌کنیم $B\hat{A}C=\alpha$ باشد. در این صورت $AB=۲R\cos\alpha$ و $BC=۲R\sin\alpha$ است در نتیجه :

$$S=AB.BC=۴R^۲\sin\alpha\cos\alpha=۲R^۲\sin۲\alpha$$ مستطیل

$\sin۲\alpha$ حداکثر برابر ۱ است. پس : $۲\alpha=۹۰^\circ$ و در نتیجه $\alpha=۴۵^\circ$ و از آن جا $AB=BC=R\sqrt{۲}$ است، یعنی مساحت وقتی حداکثر است که مستطیل به مربع تبدیل شود.



۱۶۵. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا داریم:
$S = ۱۶ \times ۸\sqrt{۳} = ۱۲۸\sqrt{۳}$

۱۶۶. چون ساق قائم AB برابر با $۲r$ و ساق مایل CD بزرگتر از $۲r$ می‌باشد، کوچکترین ضلع ذوزنقه، قاعدهٔ کوچکتر آن است. یعنی: $BC = \frac{۳r}{۲}$؛ برای محاسبهٔ قاعدهٔ بزرگتر AD، خطهای OC و OD را رسم می‌کنیم، OC و OD نیمسازهای دو زاویهٔ C و D هستند پس $M\hat{C}O + O\hat{D}N = ۹۰^\circ$ می‌شود، بنابراین دو زاویهٔ NOD و MCO برابر می‌شوند و در نتیجه، دو مثلث ODN و OCM متشابه‌اند، و داریم:

$ND : ON = OM : MC$

که در آن $ON = OM = r$ و $MC = \frac{r}{۲}$ از آن جا خواهیم داشت:

$ND = ۲r$ و $AD = AN + ND = r + ۲r = ۳r$ جواب: $S = \frac{۹r^۲}{۲}$

۱۶۷. $\frac{۳}{۴}R^۲\sqrt{۳}$

۱۶۸. از آن جا که: $MB.MA = MC.MD$ و $MB = MC$ می‌باشد، بنابراین $MA = MD$ می‌شود. دو ضلع مقابل AB و CD برابرند و بنابراین طولهای ۶ متر و ۲/۴ متر متعلق به ضلعهای AD و BC می‌باشد ($AD = ۶m$ و $BC = ۲/۴m$). به سادگی روشن می‌شود که BC و AD موازی‌اند، و بنابراین چهارضلعی ABCD یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. از تشابه دو مثلث BMC و AMD نتیجه می‌شود $BM : AM = BC : AD$ و از آن جا $AM = \frac{BM.AD}{BC} = \frac{۲ \times ۶}{۲/۴} = ۵m$، یعنی $AB = ۳m$ می‌شود. اکنون ارتفاع ذوزنقه را محاسبه می‌کنیم.

$h = BK = \sqrt{AB^۲ - AK^۲} = ۲/۴m$ جواب: $S = ۱۰/۰۸m^۲$

۱۶۹. $S = ۲(R^۲ - \frac{a^۲}{۲})$

۱۷۰. $\frac{R^۲}{۴}(۸\sqrt{۳} - ۹)$

۱۷۱. داریم:

$\text{ضلع مربع} = a_۴ = ۱۶ \Rightarrow S_{\text{مربع}} = ۲۵۶$

ضلع مثلث $\frac{۲}{۳}h_a = ۸ \Rightarrow h_a = ۱۲ \Rightarrow \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ \Rightarrow a = ۸\sqrt{۳}$

$S_{\text{مثلث}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱۹۲\sqrt{۳}}{۴} = ۴۸\sqrt{۳}$

$S_{\text{خواسته شده}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{مثلث}} = ۲۵۶ - ۴۸\sqrt{۳}$

۱۷۲. دو حالت وجود دارد :

حالت اول. AB و CD در دو طرف مرکز دایره‌اند.

حالت دوم. AB و CD در یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

مسأله را در حالت اول حل می‌کنیم. داریم :

الف.
$$۲R' = HK = OH + OK = \frac{R}{۲}\sqrt{۳} + \frac{R}{۴}\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow R' = \frac{R}{۸}\left(۲\sqrt{۳} + \sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}\right)$$

$$S' = \pi R'^{۲} = \frac{\pi R^{۲}}{۳۲}\left(۱۱ + \sqrt{۵} + ۲\sqrt{۶(۵ + \sqrt{۵})}\right)$$

ب. داریم $D\hat{M}B = ۱۳۲^{\circ}$ و :

$$S = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OCD} + ۲S_{\text{قطاع } BOC}$$ خواسته شده

$$\Rightarrow S = \frac{R^{۲}}{۱۶}(\sqrt{۵} - ۱)\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}} + \frac{R^{۲}\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱۱\pi R^{۲}}{۱۵}$$

۳.۸.۳. مساحت شکلهای ایجاد شده با خطهای راست و منحنیها

۱۷۳. مساحت $S_۱$ چهارضلعی ABOC مساوی $۲ \times \frac{۱}{۲} OB \times AB = R^{۲} \operatorname{cotg}\alpha$ می‌باشد.

از این سطح باید $S_۲$، مساحت قطاع COBD را کم کرد. داریم :

$$S_۲ = \pi R^{۲} \times \frac{۱۸۰ - ۲\alpha}{۳۶۰} = \pi R^{۲} \times \frac{۹۰ - \alpha}{۱۸۰}$$ (α برحسب درجه بیان شده است)

جواب :
$$S = S_۱ - S_۲ = R^{۲}\left(\operatorname{cotg}\alpha - \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi\alpha}{۱۸۰}\right) = R^{۲}\left(\operatorname{cotg}\alpha' - \frac{\pi}{۲} + \alpha'\right)$$

که در آن α بر حسب درجه و α' برحسب رادیان بیان شده است.

۱۷۴. با فرض $S_{KALG} = S_۱$ و $S_{LBMH} = S_۲$ داریم :

$$AC = ۴R \text{ و } OC = ۲OM \text{ و } O\hat{C}M = ۳۰^{\circ} \Rightarrow M\hat{O}N = ۱۲۰^{\circ} \text{ و } K\hat{O}N = ۶۰^{\circ}$$

$$S_{CMON} = R^{۲}\sqrt{۳} \text{ و } S_{\text{قطاع } MONF} = \frac{۱}{۳}\pi R^{۲} \Rightarrow S_۱ = \frac{R^{۲}(۳\sqrt{۳} - \pi)}{۳}$$ و

$$S_۲ = \frac{۲R^{۲}(\sqrt{۳} - \pi)}{۶}$$

۱۷۶. داریم:

$$S_{\text{شکل}} = S_{ACBO} - S_{\text{قطاع } ۶۰^\circ}$$

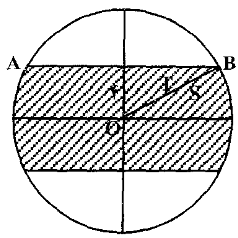
$$OH = \frac{R}{۲} \text{ و } HB = R - \frac{R}{۲} = \frac{R}{۲} \text{ و } AC = \frac{R}{۲} \text{ و } AH = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{ABOC} = \frac{۳R}{۲} . \frac{R\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۸} \qquad S_{\text{قطاع } ۶۰^\circ} = \frac{\pi R^۲}{۶}$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۸} - \frac{\pi R^۲}{۶} = \frac{۹R^۲\sqrt{۳} - ۴\pi R^۲}{۲۴}$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{R^۲}{۲۴}(۹\sqrt{۳} - ۴\pi)$$

۱۷۷. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا با استفاده از تقارن دیده می‌شود که مساحت مورد نظر $۴(T+S)$ است.



$$T = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳} \quad , \quad S = (\frac{۳۰}{۳۶۰}) \times \pi \times ۸^۲ = ۵\frac{۱}{۳}\pi$$

$$\Rightarrow \text{خواسته شده } S = ۳۲\sqrt{۳} + ۲۱\frac{۱}{۳}\pi$$

۴.۸.۳. نسبت مساحتها

۱۸۰. فرض می‌کنیم $AB = ۳r$ باشد؛ در این صورت $AC = r$ و $CB = ۲r$ و از آن جا:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) + \frac{۱}{۲}\pi(۳r)^۲ - \frac{۱}{۲}\pi \times (۲r)^۲ = ۳\pi r^۲$$

$$\text{دایره به قطر } AB \; S = \pi(۳r)^۲ = ۹\pi r^۲ \Rightarrow S_۲ = ۹\pi r^۲ - ۳\pi r^۲ = ۶\pi r^۲ \Rightarrow S_۲ = ۲S_۱$$

۱۸۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۸۲. حالت خاصی را که A بر C منطبق است در نظر بگیرید، جواب مشخص است.

$$S_{\Delta CED} = R^۲ \text{ و } S_{\Delta AOB} = \frac{۱}{۲}R^۲$$

پس نسبت مساحت ۱ : ۲ است و گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۸۳. طبق فرض داریم :

$$A_1B_1 = a_6 = R$$
$$A_2B_2 = a_4 = R\sqrt{2}$$
$$A_3B_3 = a_3 = R\sqrt{3}$$

و ارتفاعهای مثلثهای OA_1B_1 و OA_2B_2 و OA_3B_3 بترتیب عبارتند از :

$$OC_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ و } OC_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ و } OC_3 = \frac{R}{2}$$

بنابراین می‌توان مساحت هر یک از این مثلثها را به دست آورد. سپس مساحت قطاع OA_1DB_1 را به دست می‌آوریم.

$$S_{OA_1DB_1} = \frac{1}{6}\pi R^2$$
$$S_{OA_2DB_2} = \frac{1}{4}\pi R^2$$
$$S_{OA_3DB_3} = \frac{1}{3}\pi R^2$$

اگر از مساحت قطاع، مساحت مثلث نظیر را کم کنیم، مساحتهای قطعه‌ها به دست می‌آید.

$$S_1 = R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$S_2 = R^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$
$$S_3 = R^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

اکنون می‌توان مساحت بین دو وتر A_1B_1 و A_2B_2 را به دست آورد.

$$S_2 - S_1 = \frac{R^2}{12}(\pi + 3\sqrt{3} - 6)$$

و مساحت بین دو وتر A_2B_2 و A_3B_3 نیز چنین می‌شود :

$$S_3 - S_2 = \frac{R^2}{12}(\pi - 3\sqrt{3} + 6)$$

جواب : $\frac{\pi + 3(2-\sqrt{3})}{\pi - 3(2-\sqrt{3})} =$ نسبت مساحتها

۵.۸.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۸۴. داریم : $A\hat{O}C=\frac{۱}{۲}A\hat{O}_۱D$ و $AO_۱=\frac{۱}{۲}AB$ و $AO=AO_۱\sqrt{۲}$. مساحت قطاع OAC برابر است با مساحت قطاع $O_۱AD$:

$$S_{\Delta OAE}+S_{AEC}=S_{\Delta O_۱ED}+S_{AEC}+S_{ACD}\Rightarrow S_{ACD}=S_{\Delta AOE}-S_{\Delta O_۱ED}$$

تفاضل مساحت دو مثلث ؛ و بنابراین مساحت مربع برابر با این تفاضل را، همیشه می‌توان به کمک خط کش و پرگار ساخت. مساحت مربع به دست آمده هم مساحت مثلث منحنی‌الخطی است که می‌بایستی ثابت کنیم.

۱۸۵. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۸۶. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۸۷. گزینهٔ (الف) درست است.

۱۸۸. عرض حلقه را z و شعاع دایرهٔ مفروض را r می‌گیریم، ثابت می‌کنیم $z=r$ است.

مساحت حلقه چنین است : $\pi(۳r+z)^۲-\pi(۳r)^۲=۷\pi r^۲$

و یا $\Rightarrow z^۲+۶rz-۷r^۲=۰\Rightarrow z=r$

۱۸۹. این مثلثها را می‌توان به n گروه تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه، دو مثلث با مساحتهای برابر وجود داشته باشد.

۹.۳. زاویه در دایره

۱.۹.۳. اندازهٔ زاویه

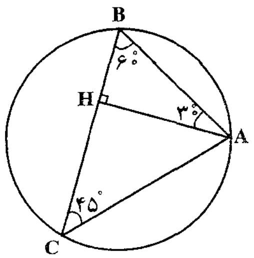
۱۹۰. ۹۰ درجه.

۱۹۱. از B به C وصل کنید و ثابت کنید که مثلث BCE در رأس B متساوی‌الساقین است. یعنی $B\hat{C}E=B\hat{E}C$ ، آن گاه با توجه به این که $B\hat{C}E=۲۷۰^\circ-۴\alpha$ و $B\hat{E}C=۵\alpha-۱۸۰^\circ$ است، ثابت می‌شود که $\alpha=۵۰^\circ$ است.

۱۹۲. گزینهٔ (د) درست است.

۱۹۳. مسأله را در یک حالت حل می‌کنیم.

حالت اول. دو ضلع AB و AC در دو طرف مرکز دایره واقعند. در این حالت داریم :



$$\widehat{AB}=90^\circ \text{ و } \widehat{AC}=120^\circ \Rightarrow \widehat{BPC}=150^\circ \Rightarrow \hat{A}=75^\circ \text{ و } \hat{B}=60^\circ \text{ و } \hat{C}=45^\circ$$

$$AB=R\sqrt{2}\ ,\ AC=R\sqrt{3}\ ,\ BH=\frac{AB}{2}=\frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ و } CH=\frac{AC}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow CH=\frac{R\sqrt{6}}{2}\ ,\ BC=BH+CH=\frac{R\sqrt{2}}{2}+\frac{R\sqrt{6}}{2}=\frac{R}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

حل مسأله در حالت دوم که دو ضلع AB و AC در یک طرف مرکز دایره واقعند، شبیه راه حل بالاست.

۱۹۴. 120°. شعاع دایرهٔ محاطی را به عنوان عنصر مرجع بر حسب عنصرهای خطی معلوم و $A\hat{O}B=2x$ از دو مثلث O_1PH و O_1BM بیان کنید. P میانگاه KH و M میانگاه AB است.

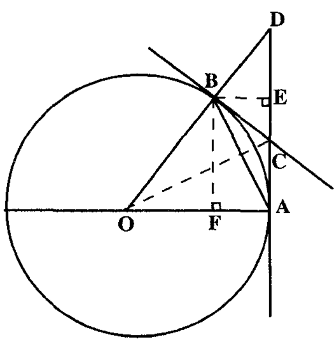
۲.۹.۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۹۵. راه اول. باید ثابت کنیم:

$$\varphi<\frac{1}{2}(\sin\varphi+\mathrm{tg}\varphi)$$

AOB را زاویه‌ای حاده در دایره‌ای به شعاع واحد می‌گیریم:

$$\widehat{AB}<\frac{\pi}{2}$$



C را نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و B، و D را نقطهٔ برخورد امتدادهای خطهای راست AC و OB فرض می‌کنیم. اگر کمان AB را بر حسب رادیان برابر φ فرض کنیم، مساحت قطاع AOB برابر $\frac{1}{2}\varphi$ و مساحت مثلثهای AOB و AOD بترتیب برابر $\frac{1}{2}\sin\varphi$ و $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\varphi$ می‌شوند. اگر بتوانیم ثابت کنیم:

$$S_{AOB\ \text{قطاع}}<\frac{1}{2}(S_{\Delta OAB}+S_{\Delta AOD}) \qquad (1)$$

در این صورت، مسأله حل شده است.

به جای نابرابری (۱)، نابرابری زیر را ، که قوی‌تر از آن است، ثابت می‌کنیم:

$$S_{OACB}<\frac{1}{2}(S_{AOB}+S_{AOD}) \qquad (2)$$

(مساحت چهارضلعی OACB از مساحت قطاع AOB بیشتر است.)

نابرابری (۲)، به سادگی، به این نابرابری تبدیل می‌شود :

$$S_{OACB} - S_{AOB} < S_{AOD} - S_{OACB}$$

که با توجه به شکل بالا، با نابرابری زیر هم ارز است :

$$S_{ACB} < S_{CDB} \qquad (۳)$$

اگر E را پای عمود وارد از نقطهٔ B بر خط راست AD بگیریم، پاره خط راست BE، ارتفاع مشترک دو مثلث می‌شود. بنابراین، نابرابری (۳)، هم ارز است با نابرابری $AC < CD$. این نابرابری همیشه برقرار است، زیرا CD وتر، و BC ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویهٔ CDB هستند و در ضمن $BC = AC$.

راه دوم. در این راه حل، نابرابری قوی‌تر از نابرابری صورت مسأله را ثابت می‌کنیم؛ اندازهٔ هر زاویهٔ حاده به رادیان، از واسطهٔ توافقی سینوس و تانژانت آن کوچکتر است. واسطهٔ توافقی دو عدد مثبت، همیشه، از واسطهٔ حسابی آنها کوچکتر است، و به همین مناسبت، اگر بتوانیم ثابت کنیم :

$$\varphi < \frac{۱}{\frac{۱}{\sin\varphi} + \frac{۱}{tg\varphi}}$$

به خودی خود، نابرابری مورد نظر مسأله، ثابت می‌شود، داریم :

$$\frac{۲}{\frac{۱}{\sin\varphi} + \frac{۱}{tg\varphi}} = \frac{۲\sin\varphi}{۱+\cos\varphi} = \frac{۴\sin\frac{\varphi}{۲}\cos\frac{\varphi}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\varphi}{۲}} = ۲tg\frac{\varphi}{۲}$$

بنابراین باید ثابت کنیم : $\varphi < ۲tg\frac{\varphi}{۲}$.

در راه حل اول مسأله دیدیم که مساحت قطاع AOB از مساحت چهارضلعی OACB کوچکتر است و اگر توجه کنیم که مساحت چهارضلعی OACB دو برابر مساحت مثلث AOC است، به سادگی به دست می‌آید :

$$\frac{\varphi}{۲} < ۲\times\frac{۱}{۲}tg\frac{\varphi}{۲} = tg\frac{\varphi}{۲}$$

و یا $\varphi < ۲tg\frac{\varphi}{۲}$.

۱۹۶. در مثلث BPO داریم $\hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha+\beta}{۲}$ و $B\hat{P}O = ۹۰^\circ - \frac{\beta-\alpha}{۲}$. از آن جا :

$$\frac{OB}{\sin\hat{P}} = \frac{OP}{\sin B} \Rightarrow \frac{R}{\sin(۹۰-\frac{\beta-\alpha}{۲})} = \frac{d}{\sin(۹۰-\frac{\alpha+\beta}{۲})} \Rightarrow \frac{R}{d} = \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{۲}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{R-d}{R+d} = \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{۲} - \cos\frac{\beta+\alpha}{۲}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{۲} + \cos\frac{\beta+\alpha}{۲}} = \frac{۲\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}} = tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}$$

۱۹۷. ۱۰۰ درجه.

۳.۱۰. پاره‌خط

۳.۱۰.۱. وترها و قاطعهای رسم شده در داخل دایره

۳.۱۰.۱.۱.۱. اندازهٔ قطعهٔ وتر

۱۹۸. $MD = ۸$

۱۹۹. $MA = ۱۶$ و $MB = ۹$

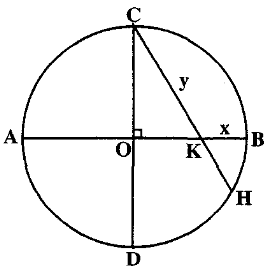
۲۰۰. $EB = ۷$، $DE = ۶$ و $EC = ۲۱$

۲۰۱.
$$a(a+۳) = (a+۱)(a+۲)$$
$$\Rightarrow a^۲ + ۳a = a^۲ + ۳a + ۲ \Rightarrow ۰ = ۲ \quad \text{غیر ممکن}$$

۲۰۲.
$$۲x.۳x = y.۶y \Rightarrow ۶x^۲ = ۶y^۲ \Rightarrow x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = y$$
$$۵x = ۷y - ۸ \Rightarrow ۵x = ۷x - ۸ \Rightarrow x = y = ۴ \Rightarrow AB = ۲۰\ ,\ CD = ۲۸$$

۲۰۳. الف) ۴،   ب) $۲\sqrt{۶}$

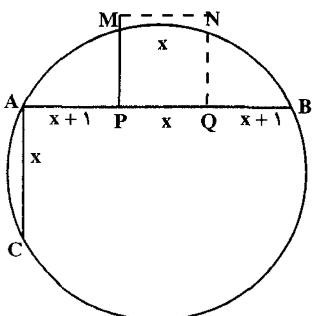
۲۰۴. اگر $KB = x$ و $CK = y$ اختیار شود، آن گاه :



$$y(۸-y) = x(۱۰-x) \text{ و}$$
$$y^۲ = (۵-x)^۲ + ۵^۲$$
$$\Rightarrow ۸y - y^۲ = ۵۰ - y^۲ \Rightarrow y = \frac{۲۵}{۴}$$
$$\Rightarrow x = \frac{۵}{۴}\ ,\ ۱۰ - x = \frac{۳۵}{۴}$$

بنابراین گزارهٔ (الف) درست است. جواب دیگر، $x = \frac{۳۵}{۴}$ و $۱۰ - x = \frac{۵}{۴}$ نیز، درست بودن گزارهٔ (الف) را تأیید می‌کند.

۲۰۵. گزینهٔ (هـ) درست است. نقطهٔ N را روی کمان $\widehat{AMB}$، بین M و B طوری انتخاب می‌کنیم که کمانهای $\widehat{CA}$ و $\widehat{MN}$ برابر باشند. بنابراین کمانهای $\widehat{AM}$ و $\widehat{BN}$ برابرند و در نتیجه پاره خط NQ که در Q بر AB عمود شده است موازی و مساوی MP است. حال، در مستطیل MNPQ دو ضلع MN و PQ روبه‌رو، و برابرند و اندازهٔ هر کدام x است. از طرف دیگر، $QB = AP = x+۱$. بنابراین اندازهٔ پاره‌خط PB برابر است با :



$$PQ + QB = x + (x+۱) = ۲x + ۱$$

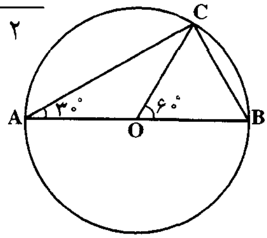
۳.۱۰.۱.۲. اندازهٔ وتر

۲۰۶. داریم: $MA = 36$ ، $MB = 1$ ، از آن جا با توجه به این که $MC.MD = MA.MB$ است، می‌توان نوشت: $4MD = 1 \times 36 \Rightarrow MD = 9$

۲۰۷. گزینهٔ (ج) درست است؛ زیرا در مثلث قائم ABC داریم: $\hat{A} = 30^\circ$ از آن جا:

$$AB = 2R = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

$$AC = AB\frac{\sqrt{3}}{2} = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

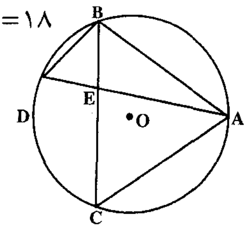


۲۰۸. گزینهٔ (د) درست است؛ زیرا اگر وتر AB عمود منصف شعاع OR باشد، و پای عمود را M بنامیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM داریم:

$$OA = 12 ، OM = 6 \Rightarrow AM = \frac{AB}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow AB = 12\sqrt{3}$$

۲۰۹. گزارهٔ (هـ) درست است؛ زیرا:

$$\Delta AEB \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AD}{12} = \frac{12}{8} \Rightarrow AD = 18$$



۲۱۰. گزارهٔ (الف) درست است؛ زیرا، XY عمود منصف AB است. در نتیجه MB=MA. اندازهٔ زاویهٔ BMA که در یک نیمدایره محاط است، قائمه است:

$$A\hat{B}M = 45^\circ \;،\; \overset{\frown}{AD} = 90^\circ \;،\; AD = r\sqrt{2}$$

۲۱۱. قطر AD را رسم کرده، ملاحظه می‌کنیم که دو مثلث ABD و ACD قائم‌الزاویه‌اند. پس داریم:

$$BD^2 = 4R^2 - a^2 \quad \text{و} \quad CD^2 = 4R^2 - b^2 \Rightarrow CD = \sqrt{4R^2 - b^2} \quad \text{و}$$

$$BD = \sqrt{4R^2 - a^2}$$

حال در چهار ضلعی محاطی ABDC، رابطهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم:

$$AD.BC = AB.CD + AC.BD$$

$$\Rightarrow 2R.BC = a\sqrt{4R^2 - b^2} + b\sqrt{4R^2 - a^2}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{a\sqrt{۴R^۲-b^۲}+b\sqrt{۴R^۲-a^۲}}{۲R}$$

به همین ترتیب، برای تفاضل دو کمان خواهیم داشت:

$$BC=\frac{a\sqrt{۴R^۲-b^۲}-b\sqrt{۴R^۲-a^۲}}{۲R}$$

۲۱۲. داریم:

$$۲R=۳۵\Rightarrow R=۱۷/۵ \ ،\ AH=۱۲/۶ \ ،\ HB=۲۲/۴ \ ،\ PH^۲=AH.HB$$

$$\Rightarrow PH^۲=۱۲/۶\times ۲۲/۴\Rightarrow PH=۱۶/۸$$

$$AP^۲=AB.AH\Rightarrow AP=۲۱ \ ،\ BP^۲=BH.AB=۲۲/۴\times ۳۵\Rightarrow BP=۲۸$$

۲۱۳. $MB=۴/۸cm$ ، $MA=۶/۴cm$

۲۱۴. $CD=۱۲$ ، $AC=۶\sqrt{۱۳}$ و $BC=۴\sqrt{۱۳}$ سانتی‌متر.

۳.۱.۱۰.۳. اندازهٔ ضلعهای مثلث و چند ضلعیهای ایجاد شده در دایره

۲۱۵. $\frac{R}{۲}(\sqrt{۳}\cos\alpha+\sqrt{۳+\sin^۲\alpha})$

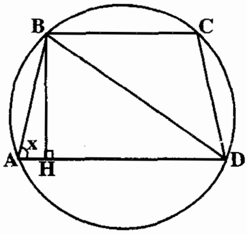
۲۱۶. $\frac{۱}{۳}(۴\sqrt{۳}R\sin^۲\frac{\alpha}{۲})$

۲۱۷. $R\left(\sqrt{۱-\frac{۱}{۳}\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}-\cos\frac{\alpha}{۲}\right)$ ، اگر $\alpha\geq\frac{\pi}{۳}$ باشد، OC را بر حسب R و α بیان کنید و قانون کسینوسها را در مورد مثلث ODC بنویسید. در این مثلث $CD=x$ ، $OD=R$ و $O\hat{C}D=۱۵۰^\circ$ است.

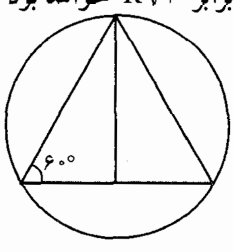
۲۱۸. $\frac{۲}{۵}R\sqrt{۴+\sin^۲\alpha}-\frac{۴}{۵}R\cos\alpha$

۲۱۹. ۱. کمّیت مورد بهینه را که مساحت ذوزنقه است، با S نشان می‌دهیم.

۲. زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ معلوم را با x نشان می‌دهیم. حداقل مقدار ممکنه برای این زاویه عبارت از ۶۰° بوده و در این صورت ذوزنقه به یک مثلث منتظم محاطی تبدیل می‌شود که طول ضلع آن برابر $R\sqrt{۳}$ خواهد بود (شکل الف).



(ب)



(الف)

از طرف دیگر چون کمان مقابل به زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ذوزنقه از ۲۴۰° کمتر است، (شکل ب) از این رو، x نیز باید کمتر از ۱۲۰° باشد. بدین ترتیب کرانه‌های حقیقی متغیر مستقل کمکی عبارت‌از: $۶۰^\circ\leq x<۱۲۰^\circ$ خواهد بود.

۳. مساحت S ذوزنقهٔ ABCD را بر حسب x و R بیان می‌کنیم. چنین داریم :

$AD = R\sqrt{3}$، $BD = 2R\sin x$ ، $A\hat{B}D = \frac{1}{2}O\hat{A}D = 60^\circ$ ، $B\hat{D}A = 120^\circ - x$

ارتفاع ذوزنقه $BH = BD\sin(120^\circ - x) = 2R\sin x \times \sin(120^\circ - x)$

$$HD = \frac{AD+BC}{2} = BD\cos(120^\circ - x) = 2R\sin x\cos(120^\circ - x)$$

$$S = HD.BH = 2R\sin x\cos(120^\circ - x).2R\sin x.\sin(120^\circ - x)$$

$$\Rightarrow S = 2R^2\sin^2 x.\sin(240^\circ - 2x)$$

۴. بزرگترین مقدار تابع $S = 2R^2\sin^2 x.\sin(240^\circ - 2x)$ را در بازهٔ نیمباز $[60^\circ$ و $120^\circ)$ به دست می‌آوریم.

(۱) $S' = 2R^2(2\sin x\cos x\sin(240^\circ - 2x) - 2\sin^2 x.\cos(240^\circ - 2x))$

$= 4R^2\sin x(\sin(240^\circ - 2x)\cos x - \sin x.\cos(240^\circ - 2x))$

$= 4R^2\sin x\sin(240^\circ - 2x - x) = 4R^2\sin x.\sin(240^\circ - 3x)$

(۲) در بازهٔ نیمباز $[60^\circ$ و $120^\circ)$، مقدار S' فقط در نقطهٔ $x = 80^\circ$ صفر می‌شود.

(۳)

x	60°	80°	120°
S	$\frac{4R^2\sqrt{3}}{4}$	$4R^2\sin^3 80^\circ$	0

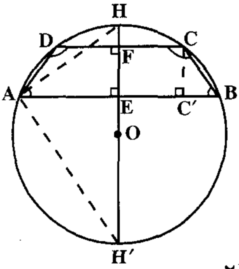
در این جدول $S(120^\circ)$ به عنوان $\lim\limits_{x\to 120^\circ} S$ است.

مقدارهای $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ و $2R^2\sin^3 80^\circ$ را مقایسه می‌کنیم. با فرض $2R^2\sin^3 80^\circ > \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$، به رابطهٔ $\sin^3 80^\circ > \frac{3\sqrt{3}}{8}$ می‌رسیم که از آن نیز $\sin^3 80^\circ > (\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ ؛ یعنی $\sin 80^\circ > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، یا $\sin 80^\circ > \sin 60^\circ$ استنتاج می‌شود ؛ نامساوی اخیر و در نتیجه فرض ما، درست می‌باشد. از این رو ، تابع S در $x = 80^\circ$ به بزرگترین مقدار خود می‌رسد.

۵. بدین ترتیب ذوزنقه‌ای دارای بیشترین مساحت می‌شود که زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن 80° باشد. پیدا کردن ضلع جانبی چنین ذوزنقه‌ای خواسته شده است.

از مثلث ABD در شکل (ب) به $AB = 2R\sin(120^\circ - x)$ می‌رسیم. به ازای $x = 80^\circ$ ، تساوی $AB = 2R\sin 80^\circ$ حاصل می‌شود.

نکته. راه حل مسألهٔ بالا، روشی برای پیدا کردن ماکزیمم یا مینیمم، برخی کمّیتها است.



۲۲۰. دو سر قطر عمود بر این وترها را H و H′ می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ HAH′ داریم:

$$AE^۲ = HE.H'E \Rightarrow AE^۲ = \frac{۲R}{۵} \times \frac{۸R}{۵} = \frac{۱۶R^۲}{۲۵}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{۴R}{۵} \Rightarrow AB = \frac{۸R}{۵}$$

$$OF = \frac{۴R}{۵}\ ,\ \ DF = \sqrt{R^۲ - \frac{۱۶R^۲}{۲۵}} = \frac{۳R}{۵} \Rightarrow CD = \frac{۶R}{۵}$$

$$C'B = EB - EC' = \frac{AB}{۲} - \frac{CD}{۲} = \frac{۴R}{۵} - \frac{۳R}{۵} = \frac{R}{۵}$$

$$EC' = EF = \frac{۴R}{۵} - \frac{۳R}{۵} = \frac{R}{۵} \Rightarrow EC' = C'B$$

$$\Rightarrow C\hat{B}C' = D\hat{A}B = ۴۵^\circ \Rightarrow B\hat{C}D = A\hat{D}C = ۱۳۵^\circ$$

۱.۲۲۱. کمان نظیر $C_۶$ برابر ۶۰° و کمان نظیر $C_۳$ برابر ۱۲۰° است. بنابراین:

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC داریم:

$$\widehat{AD} + \widehat{BC} = ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۱۸۰^\circ\ ,\ \ \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = ۹۰^\circ$$

$$BC^۲ = OB^۲ + OC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۲R^۲ \Rightarrow BC = R\sqrt{۲}$$

از طرفی ارتفاع ذوزنقه برابر است با:

$$HK = OH + OK\text{، } OH = \text{سهم شش ضلعی} = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}\ \text{و}$$

$$OK = \text{سهم سه ضلعی} = \frac{R}{۲} \Rightarrow HK = \frac{R(۱+\sqrt{۳})}{۲}$$

برای محاسبهٔ قطر ذوزنقه، از قضیهٔ بطلمیوس برای چهار ضلعی محاطی استفاده می‌کنیم.

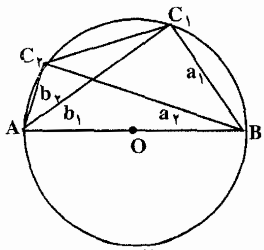
$$AB.DC + AD.BC = AC.BD \Rightarrow AB.DC + BC^۲ = AC^۲$$

$$\Rightarrow R.R\sqrt{۳} + (R\sqrt{۲})^۲ = AC^۲ \Rightarrow AC^۲ = R^۲(۲+\sqrt{۳}) \Rightarrow AC = R\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

۲. اگر O′ نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه باشد، چون $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $\widehat{DC} = ۱۲۰^\circ$،

پس $A\hat{O'}D = \frac{۳۶۰^\circ - (۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ)}{۲} = ۹۰^\circ$ است.

۳.۱۰.۱.۴. اندازهٔ طول پاره خط، نسبت پاره خطها



(الف)

۲۲۲. راه اول. ثابت می‌کنیم که در واقع، بی‌نهایت نقطه بر دایرهٔ واحد چنان موجود است که فاصله‌های بین هر دو نقطه از آنها گویا باشد. (به این ترتیب این مسأله کاری با سال ۱۹۷۵ ندارد.) این نقطه‌ها را به عنوان رأسهای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC، با قطر AB از دایرهٔ واحد به عنوان وتر مشترکشان، بنا می‌کنیم؛ (شکل الف را ببینید.) امّا یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای گویای a، b و c در رابطهٔ $a^2+b^2=c^2$ صدق می‌کند. چون a، b و c را در مخرج مشترکشان d ضرب کنیم، اعداد صحیح به دست آمده نیز در رابطهٔ فیثاغورس $(ad)^2+(bd)^2=(cd)^2$ صدق می‌کنند.

مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت α، β و γ، چنانچه: $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ باشد، سه تایی فیثاغورسی نامیده می‌شوند. می‌توان بی‌نهایت از چنین سه تاییهایی با در نظر گرفتن عددهای طبیعی دلخواه m و n و قرار دادن:

$$\alpha=2mn\ ,\ \beta=m^2-n^2 \tag{1}$$

و سپس $\gamma=m^2+n^2$، $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=(m^2+n^2)^2$، تولید کرد.

وتر مثلثها در مسألهٔ ما، قطر دایرهٔ واحد است و بنابراین طول ۲ دارد. در این صورت α، β و γ را با تقسیم هر یک بر $\frac{1}{2(m^2+n^2)}$ و به دست آوردن طولهای گویای:

$$a=\frac{4mn}{m^2+n^2}\ ،\ b=\frac{2(m^2-n^2)}{m^2+n^2}\ و\ c=2 \tag{2}$$

به «حالت طبیعی» در می‌آوریم. به این ترتیب هر زوج عدد طبیعی نسبت به هم اول m و n، سه تایی متفاوت a، b و ۲ یی را به دست می‌دهد؛ و از آن جا که اعمال گویای $(+,-,\times,\div)$ انجام شده بر عددهای گویا، عددهای گویا به دست می‌دهند، می‌توانیم بی‌نهایت مثلث قائم‌الزاویه که ضلعهای زاویهٔ قائمه‌شان a و b ی داده شده با (۲) و ترشان دارای طول ۲ باشد، بنا کنیم. رأسهای این مثلثها بر دایرهٔ واحدمان واقعند.

بعد نشان می‌دهیم که، اگر ABC_1 و ABC_2 دو مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای زاویهٔ قائمه به طولهای گویا و وتر AB ی به طول ۲ باشند، در این صورت C_1C_2 فاصلهٔ بین رأسهایشان نیز گویاست. برای رسیدن به این مقصود، C_1C_2 را بر حسب عددهای گویای ترکیب شده با عملهای گویا، بیان می‌کنیم، و این کار را به دو طریق انجام می‌دهیم.

(a) چهارضلعی محاطی ABC_1C_2، در شکل (الف) را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ بطلمیوس، اگر چهارضلعی‌ای محاط در دایره‌ای باشد، مجموع حاصل ضربهای

ضلعهای مقابلش، مساوی حاصل‌ضرب قطرهای آن است. بنابراین داریم:

$$C_1C_2.AB + AC_2.BC_1 = AC_1.BC_2$$

یا

$$C_1C_2.2 + b_2.a_1 = a_2.b_1$$

که در آن a_1، b_1، BC_1 و AC_1، ضلعهای زاویه‌های قائمهٔ مثلثهای ABC_1 را نمایش می‌دهند. در این صورت نتیجه می‌شود که: C_1C_2 دارای مقدار گویای: $C_1C_2 = \frac{1}{2}(a_2b_1 - a_1b_2)$ است.

(b) مرکز دایرهٔ واحد را بر مبداء یک دستگاه مختصات چنان قرار می‌دهیم که AB بر محور xها واقع شود؛ و پای عمود از C بر AB را با D نمایش می‌دهیم، شکل (ب) را ملاحظه کنید. اگر a و b گویا باشند، رأس C مختصات (x,y) گویا دارد زیرا، بنا به مثلثهای متشابه ADC، ACB و CDB داریم:

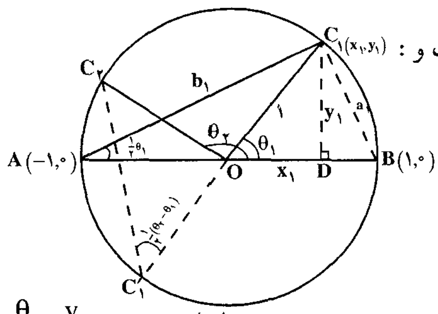
$$\frac{1+x}{b} = \frac{b}{2}$$

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{2}$$

بنابراین: $x = \frac{b^2}{2} - 1$ گویاست، و:

و بنابراین: $y = \frac{ab}{2}$ گویاست.

فرض می‌کنیم θ زاویه‌ای که CO با BO می‌سازد، باشد؛ در این صورت: $C\hat{A}B = \frac{\theta}{2}$ است و:



(ب)

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1+x}{b}\ ,\ \sin\frac{\theta}{2} = \frac{y}{b} \qquad (3)$$

گویا می‌باشند. مانند قبل، فرض می‌کنیم C_1 و C_2 رأسهای مثلثهای «گویا» باشند، و فرض می‌کنیم:

$$\theta_1 = C_1\hat{O}B\ ,\ \theta_2 = C_2\hat{O}B$$

قطر $C_1OC'_1$ و وتر $C_2C'_1$ را رسم کرده، توجه می‌کنیم که: $C_1\hat{O}C_2 = \theta_2 - \theta_1$ است، در این صورت نتیجه می‌شود که: $C_1\hat{C}'_1C_2 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ $C_1C_2C'_1$ داریم:

$$C_1C_2 = 2\sin(\frac{\theta_2}{2} - \frac{\theta_1}{2}) = 2\left[\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\right]$$

که نظر به (۳)، گویاست.

راه دوم. مختصات یک نقطهٔ واقع بر دایرهٔ واحد عبارتند از : $(\cos\theta, \sin\theta)$ ؛ فاصلهٔ بین دو نقطهٔ : $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ و $Q = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ از چنین نقطه‌هایی عبارت است از : $۲\left|\sin\frac{۱}{۲}(\theta-\varphi)\right|$

شکل (ب) را ملاحظه کنید. برای حل مسأله، باید ۱۹۷۵ زاویهٔ : $\theta_۱$، $\theta_۲$ ، ... را چنان بیابیم که : (۱) $\sin\frac{۱}{۲}(\theta_k-\theta_j)$ گویا باشد. از قضیهٔ موآور داریم :

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

در این صورت نتیجه می‌شود که اگر $\cos\theta$ و $\sin\theta$ هر دو گویا باشند، $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ نیز به ازای :... , ۲ , ۱ = n چنینند. به این ترتیب جمیع نقطه‌ها :

$$\cos ۲K\theta + i\sin ۲K\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^{۲K} ، K = ۰،۱ ،... ، N \qquad (۲)$$

دارای مختصات گویا هستند. این نقطه‌ها، از آن جا که :

$$\sin\frac{۱}{۲}(۲K\theta - ۲j\theta) = \sin(K-j)\theta$$

گویاست، دارای فاصله‌های گویا از یکدیگر نیز هستند. در این صورت باقی می‌ماند که نشان دهیم که به ازاء هر N می‌توانیم θ را طوری انتخاب کنیم که (a) ؛ $\cos\theta$ و $\sin\theta$ گویا باشند.

(b) ؛ نقطه‌های (۲) متمایز باشند.

(a) ؛ فرض می‌کنیم a، b و c سه‌تایی فیثاغورسی دلخواهی به عنوان مثال، ۳، ۴ و ۵ باشند ؛ در این صورت : $\cos\theta = \frac{a}{c} = ۳/۵$ ، $\sin\theta = \frac{b}{c} = ۴/۵$ گویا می‌باشند.

(b) ؛ برای نشان دادن این که نقطه‌های (۲) به ازاء $\theta = \arccos\frac{a}{c}$ متمایزند، از لم زیر کمک می‌گیریم.

لم. اگر $\cos\theta$ و $\sin\theta$ عددهای گویای : $\frac{a}{c}$، $\frac{b}{c}$ با مقدارهای متفاوت از ۰، ۱ و ۱- باشند، در این صورت θ مضرب گویایی از π نیست.

اثبات: فرض می‌کنیم بر خلاف این مطلب داشته باشیم :

$$\cos ۲l\theta + i\sin ۲l\theta = \cos ۲m\theta + i\sin ۲m\theta \ , \ l \neq m$$

یعنی، دو مضرب متمایز θ یک نقطه را بر دایرهٔ واحد به دست دهند، در این صورت تفاضل آنها، $(m-l)\theta$ مضربی از ۲π، مثلاً : $(m-l)\theta = ۲n\pi$ است، و $\theta = \frac{۲n\pi}{(m-l)}$ برخلاف لم‌مان مضرب گویایی از π می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم که به ازاء N دلخواه، و در حالت خاص به ازاء $N = ۱۹۷۵$ ، جمیع نقطه‌های (۲) با یکدیگر متفاوتند.

تبصره. ملاحظه کنید که در راه حل اولمان، ۱۹۷۵ سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ متفاوت را به کار می‌بریم. و در راه حل دوم، تنها از یک سه‌تایی فیثاغورسی a، b و c استفاده و ثابت می‌کنیم که مضربهای صحیح زاویهٔ : $2\theta = 2\text{Arc}\cos(\frac{a}{c})$ را می‌توانیم برای تولید هر تعداد نقطه که بخواهیم به کار بریم. از لم قسمت دوم می‌توان صرفنظرکرد، زیرا می‌توانیم، با نشان دادن این که θ را می‌توان چنان انتخاب کرد که : $\cos\theta + i\sin\theta$ به ازای هر $K \leq N$ ریشهٔ $2K$ام نباشد، ثابت کنیم که نقطه‌های (۲) متمایزند. در این مورد صرفاً ملاحظه می‌کنیم که تعداد ریشه‌های $2K$ام :

$$\sum_{K=1}^{N} 2K = N(N+1)$$

است. اما بی‌نهایت سه‌تایی فیثاغورسی اولیهٔ a، b و c، هریک متناظر با زاویهٔ θ ای، موجود است، بنابراین می‌توانیم از : $N^2 + N$ زاویه‌ای که منجر به ریشه‌های واحد می‌شوند، صرفنظر کنیم.

۲۲۳. $\sqrt{931}$

۲۲۴. گزینهٔ (ب) جواب است ؛ زیرا PQC یک مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ است و $AQ = CQ$، پس :

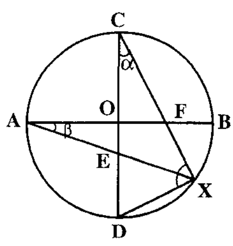
$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{PQ}{CQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۲۵. چون XE نیمساز زاویهٔ CXD است، پس :

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{|CX|}{|DX|} = \text{cotg}\alpha$$

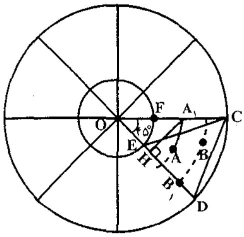
که در آن $\alpha = D\hat{C}X$. به همین ترتیب :

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AX|}{|XB|} = \text{cotg}\beta = \text{cotg}(45^\circ - \alpha)$$



که در آن $\beta = X\hat{A}B$. اگر نسبت اول را با t نشان دهیم، آن وقت، نسبت دوم برابر $\frac{1+t}{1-t}$ می‌شود، که حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳.۱۰.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۲۶. دایره‌ای به مرکز O (مرکز دایرهٔ مفروض) و به شعاع ۲ رسم می‌کنیم. در این صورت، اگر دو نقطه از نقطه‌های مفروض، در درون این دایره واقع باشد، آن وقت، فاصلهٔ بین آنها، از ۲ کمتر می‌شود و حکم مسأله درست است. اگر نتوان دو نقطه از نقطه‌های مفروض در این دایره پیدا کرد، دست کم ۹ نقطه در داخل حلقهٔ بین دو دایره وجود دارد. با رسم شعاعهای دایرهٔ بزرگتر، این حلقه را به A بخش برابر تقسیم می‌کنیم (زاویهٔ بین هر دو شعاع مجاور، برابر ۴۵ درجه است). در این صورت، دست کم، دو نقطهٔ A و B، از نقطه‌های مفروض در درون یکی از این بخشها، و مثلاً در درون بخش CDEF قرار دارند. روی شعاعهای OC و OD، نقطه‌های $A_۱$ و $B_۱$ را بترتیب، انتخاب می‌کنیم، به نحوی که داشته باشیم:

$$OA_۱ = OA \;,\; OB_۱ = OB$$

یعنی $AB \le A_۱B_۱$ (بنابر قضیهٔ کسینوسها، زیرا زاویهٔ AOB از زاویهٔ $A_۱OB_۱$ تجاوز نمی‌کند)، توجه می‌کنیم که:

$$A_۱B_۱ \le Max(A_۱D, A_۱E)$$

در واقع، نقطهٔ $B_۱$ روی خط راست DE و بین نقطهٔ H (تصویر $A_۱$ بر DE) و یکی از دو نقطهٔ D یا E، و مثلاً D، قرار دارد. بنابراین HD، تصویر $A_۱D$، از $HB_۱$، تصویر $A_۱B_۱$ کوچکتر نیست، یعنی:

$$A_۱B_۱ \le A_۱D$$

به همین علت داریم:

$$DA_۱ \le Max(DF, DC) \;;\; EA_۱ \le Max(EF, EC)$$

از نابرابریهای:

$$EF^۲ < CD^۲ = OC^۲ + OD^۲ - ۲OC.OD\cos ۴۵^\circ =$$

$$۲\times\frac{۲۵}{۴} - \frac{۴۵\sqrt{۲}}{۲} < \frac{۲۵}{۲} - \frac{۲۵\times ۱/۴}{۲} = ۳/۷۵ < ۴,$$

$$EC^۲ = FD^۲ = OF^۲ + OD^۲ - ۲OF.OD.\cos ۴۵^\circ =$$

$$۱ + \frac{۲۵}{۴} - \frac{۵\sqrt{۲}}{۲} < ۷/۲۵ - \frac{۵\times ۱/۴}{۲} = ۳/۷۵ < ۴$$

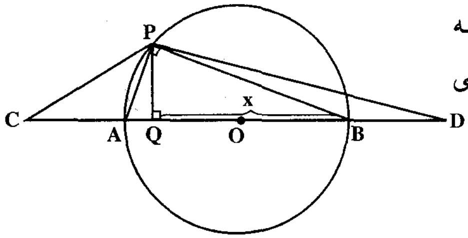
به دست می‌آید:

$$AB \le A_۱B_۱ \le Max\{DF, DC, EF, EC\} < ۲$$

۲۲۷. گزینهٔ (هـ) انتخاب درست است؛ زیرا فرض می‌کنیم Q پای عمود مرسوم از P بر AB و $QB = x$ باشد، آن گاه:

$$PQ^۲ = x(۱۰ - x) \; CP = \sqrt{x(۱۰-x) + (۶-x)^۲}, DP = \sqrt{x(۱۰-x) + (۴-x)}$$

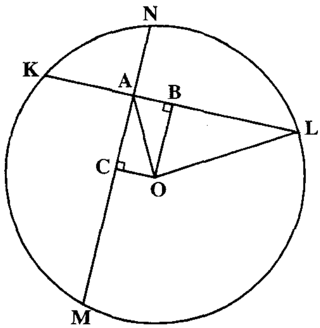
$$\Rightarrow CD + DP = \sqrt{۳۶ - ۲x} + \sqrt{۱۶ + ۲x}$$



این مجموع وقتی ماکزیمم است که $\sqrt{۳۶-۲x}=\sqrt{۱۶+۲x}$، یعنی $x=۵$ باشد.

نکته. از اتحاد $(a+b)^۲=۲(a^۲+b^۲)-(a-b)^۲$ نتیجه می‌شود که اگر a و b مثبت و $a^۲+b^۲$ ثابت باشد، آن گاه $a+b$ وقتی Max است که $a=b$ باشد.

راه حل دیگر. یک بیضی به کانونهای C و D که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، مکان نقطهٔ P' است به طوری که $P'C+P'D=۱۰$. چون همهٔ این بیضی داخل دایرهٔ مفروض واقع است (جز نقطه‌های تماس A و B)، می‌بینیم که به ازای تمام نقطه‌های P واقع بر دایره، $CP+PD\geq ۱۰$ است. برابری وقتی برقرار است که P بر A یا B منطبق باشد.



۲۲۸. فرض می‌کنیم از نقطهٔ A، به فاصلهٔ k از نقطهٔ O مرکز دایره، دو وتر عمود بر هم KL و MN را رسم کرده باشیم. عمودهای OB و OC را، بترتیب بر وترهای KL و MN رسم می‌کنیم و زاویهٔ AOB را α می‌گیریم (شکل) در این صورت:

$$KL=۲BL=۲\sqrt{۱-k^۲\cos^۲\alpha}$$

و

$$MN=۲MC=۲\sqrt{۱-k^۲\sin^۲\alpha}$$

و از آن جا:

$$(KL+MN)^۲=۸-۴k^۲(\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha)+$$

$$۸\sqrt{۱-k^۲(\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha)+k^۴\cos^۲\alpha\sin^۲\alpha}$$

$$=۸-۴k^۲+۴\sqrt{۴-۴k^۲+k^۴\sin^۲ ۲\alpha}$$

عبارت اخیر، به ازای $\sin ۲\alpha=۱$، یعنی به ازای $\alpha=۴۵^\circ$ به حداکثر عبارت خود؛ و به ازای $\sin ۲\alpha=۰$، یعنی $\alpha=۰^\circ$ به حداقل مقدار خود می‌رسد. بنابراین، حداکثر مقدار $KL+MN$ برابر است با $\sqrt{۸-۴k^۲+۴(۲-k^۲)}=۲\sqrt{۴-۲k^۲}$؛ و حداقل آن $\sqrt{۸-۴k^۲+۸\sqrt{۱-k^۲}}=۲(۱+\sqrt{۱-k^۲})$.

۲۲۹. قریب‌ده روش مختلف برای اثبات این قضیه وجود دارد. ما روشی را ذکر می‌کنیم که منسوب به خود ارشمیدس است. پاره‌خطهای $DH = DZ = DB$ را انتخاب می‌کنیم چون $DH = DB$، بنابراین $H\hat{A}D = Z\hat{A}D$ و از آن جا دو مثلث HAD و ZAD برابر می‌شوند، یعنی $AZ = AH$، سپس: $\overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{DH} = \overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DB}$. از آن جا $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BC}$، و در نتیجه $AH = BC$، یعنی $AZ + ZE = BC + EB$، و بالاخره $AE = EB + BC$.

برای بسیاری این پرسش پیش می‌آید که: چرا ارشمیدس و تفسیرنویسهای بعد از او تا این حد به قضیه‌ای که در این جا آوردیم، اهمیت می‌دادند و دائماً در پی روشهای اثبات جدیدی برای آن بودند؟ این قضیه در بسیاری از مسأله‌های هندسی مورد نیاز است و حل آنها را به طور محسوس ساده می‌کند.

برای این که این مطلب را بهتر بفهمید، به حل این مسأله که به وسیلهٔ ابوریحان بیرونی مطرح شده است فکر کنید: مثلثی بسازید که هر سه رأس آن روی دایرهٔ مفروض، و مجموع دو ضلع آن معلوم باشد. نوع جدیدتر بیان این مسأله را می‌توان چنین نوشت:

از مثلث ABC ضلع $AB = c$ و مجموع دو ضلع دیگر آن $BC + CA = a + b = m$ معلوم است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث هم داده شده است، چگونه می‌توان این مثلث را رسم کرد؟

۲۳۰. مثلثهای PAC و PBD، همچنین دو مثلث PKA و PHD متشابه‌اند. $E\hat{A}B = C\hat{D}E'$، در نتیجه ...

۲۳۱. فرض می‌کنیم، گلوله در زمان t، مسیر قائم AD ــ سقوط آزاد ــ را طی کند. در ضمن از مقاومت هوا صرفنظر می‌کنیم (شکل)، در این صورت داریم:

$$AD = \frac{۱}{۲} g t^{۲}$$

که در آن g، شتاب سقوط آزاد است، در نتیجه:

$$t = \sqrt{\frac{۲AD}{g}}$$

$t_۱$ را برابر زمانی می‌گیریم که برای حرکت گلوله در طول وتر AC لازم است (از مقاومت هوا و اصطکاک صرفنظر می‌کنیم)، باید داشته باشیم:

$$AC = \frac{۱}{۲} a t_۱^{۲}$$

که در آن a عبارت است از شتاب حرکت در طول خط مایل AC. از آن جا:

$$t_۱ = \sqrt{\frac{۲AC}{a}}$$

از نقطهٔ C، عمود CE را بر AD فرود می‌آوریم (روی شکل با خط‌چین نشان داده شده است) از مکانیک می‌دانیم که باید داشته باشیم: $\frac{a}{g}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow a=\frac{AE.g}{AC}$

بعد، داریم (شکل را ببینید) $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$ یا $AC^۲=AE.AD$

و بنابراین $a=\frac{AC}{AD}.g$ ؛ و سرانجام خواهیم داشت:

$$t_۱=\sqrt{\frac{۲AC}{a}}=\sqrt{\frac{۲AD.AD}{AC.g}}=\sqrt{\frac{۲AD}{g}}=t$$

یعنی، زمان حرکت در طول هر وتر، برابر است با زمان حرکت در طول قطر آن.

۳. ۱۰. ۲. قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳. ۱۰. ۲. ۱. اندازهٔ قطعه خطهای رسم شده از خارج دایره

۲۳۲. الف) ۱۱/۲۵ ب) ۱۲ پ) ۶۴

۲۳۳. طبق فرض داریم: $CA=۹$، $BC=۴۷$ و بنابراین $BA=۵۶$. در این صورت خواهیم داشت:
$AD.AE=۹\times ۵۶=۵۰۴$ اگر $AD=x$ باشد، $AE=۲x+۷۲$ خواهد شد، وداریم:

$$x(۲x+۷۲)=۵۰۴\Rightarrow x=۶$$

یعنی $AE=۸۴$

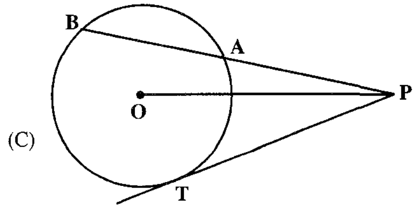
۲۳۴. الف) ۹ ب) ۳۵

۲۳۵. $PB=۸\sqrt{۳}$ و $PR=۴\sqrt{۳}$

۲۳۶. از آن جا که $MT=\frac{\sqrt{p^۲-۲q^۲}}{۲}$ و $AT=AM+MT=\frac{p+\sqrt{p^۲-۴q^۲}}{۲}$ و $TB=AB-AT=\frac{p-\sqrt{p^۲-۴q^۲}}{۲}$ ، معادلهٔ مطلوب عبارت است از: $x^۲-px+q^۲=۰$ ، پس گزینهٔ (ب) درست است.

۳. ۱۰. ۲. ۲. اندازهٔ وتر

۲۳۷. از نقطهٔ P مماس PT و قاطع PAB را نسبت به دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم، داریم :



$PT^{۲} = PA.PB$

$\Rightarrow PT^{۲} = PA(PA+AB) = PA(PA+PA)$

$\Rightarrow PT^{۲} = ۲PA^{۲} \Rightarrow PA = \frac{\sqrt{۲}}{۲}PT$

پس به مرکز P و به شعاع $\frac{\sqrt{۲}}{۲}PT$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ A قطع کند. خط PA دایره رادر B قطع می‌کند و $PA = AB$ است. به تعداد نقطه‌های برخورد این دو دایره، مسأله جواب دارد. چون نقطهٔ P خارج دایره است، پس $OP > R$ است. از طرفی وتر AB، حداکثر برابر ۲R است. پس حداکثر $PA = ۲R$ و حداکثر $PO = ۳R$ است. یعنی نقطهٔ P روی تاج دایره، بین دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O,۳R)$ واقع است. در حالت خاص $R = ۸/۵cm$ و $OP = ۱۶/۵cm$، داریم :

$$PT = \sqrt{d^{۲} - R^{۲}} = \sqrt{(۱۶/۵)^{۲} - (۸/۵)^{۲}} = ۱۰\sqrt{۲}$$

$$AB = PA = \frac{\sqrt{۲}}{۲}PT = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱۰\sqrt{۲} = ۱۰cm$$

۳. ۱۰. ۲. ۳. اندازهٔ پاره‌خطها

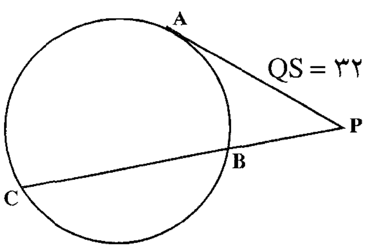
۲۳۸. $BH = \frac{۵a}{۲}$ و $AH = \frac{۹a}{۲}$ و $DH = \frac{۳\sqrt{۳}a}{۲}$

۳. ۱۰. ۳. یک مماس و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳. ۱۰. ۳. ۱. اندازهٔ قاطع

۲۳۹. الف) $QS = ۲۰$ ب) $QS = \frac{۶۴}{۷}$ پ) $QS = ۳۲$

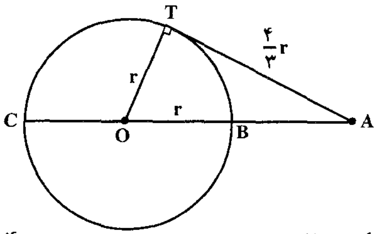
۲۴۰. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا :



$\overline{PB} \times \overline{PC} = \overline{PA}^{۲} \Rightarrow \overline{PB}(\overline{PB}+۲۰) = ۳۰۰$

$\Rightarrow \overline{PB} = ۱۰$

۲۴۱. اگر نقطهٔ تماس مماس رسم شده از نقطهٔ A بردایره را T، و مرکز دایره را O و AB = x باشد، مثلث OAT در رأسT قائم‌الزاویه است و داریم :



$$\left(\frac{4r}{3}\right)^2 + r^2 = (r+x)^2 \Rightarrow x = \frac{2r}{3} = \frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ (ج) درست است.

۲۴۲.

$$PR = PQ + QR = 1 + 8 = 9$$

$$PA^2 = PQ.PR = 1 \times 9 = 9 \Rightarrow PA = 3 = PX = XB$$

$$QX = PX - PQ = 3 - 1 = 2 \Rightarrow XR = 8 - 2 = 6$$

$$AX.XB = XQ.XR \Rightarrow AX \times 3 = 2 \times 6 \Rightarrow AX = \frac{12}{3} = 4$$

۲۴۳. $DE = \frac{b^2 - a^2}{b}$ ، $R = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}{2b\sin\alpha}$. از رابطهٔ $OC^2 = OD.OE$ استفاده کنید. قانون سینوسها و کسینوسها را در مورد مثلثهای ODC ، OEC و CED به‌کار برید.

۳. ۱۰. ۳. ۲. اندازهٔ مماس

۲۴۴. ۱۲ سانتی‌متر.

۲۴۵. داریم :

$$PA = 6 \text{ و } PB = 18$$

$$\Rightarrow AB = 2R = 18 - 6 = 12 \Rightarrow R = 6$$

$$PT^2 = PA.PB = 6 \times 18 = 108 \Rightarrow PT = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$ طول مماس

۲۴۶. می‌دانیم که $MA = R$ و $AB = \frac{3R}{2}$ است، پس $MB = \frac{5R}{2}$ ، از طرفی داریم :

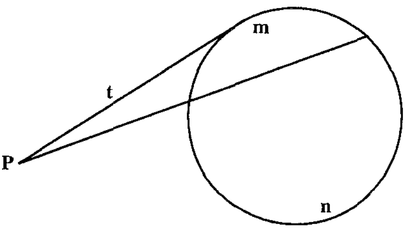
$$MT^2 = MB \times MA$$

$$\Rightarrow MT^2 = \frac{5R}{2} \times R \Rightarrow MT = R\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{cases} MD - MC = 2R \\ MD \times MC = MA \times MB = \frac{5R^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow MD = R\left(\sqrt{\frac{7}{2}} + 1\right) \text{ و } MC = R\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - 1\right)$$

۲۴۷. گزینهٔ (ج) درست است زیرا :



$$\frac{m}{t}=\frac{t}{n} \Rightarrow mn=t^{۲} \text{ و } m+n=۱۰$$

$$\Rightarrow t^{۲}=m(۱۰-m) \Rightarrow t=\sqrt{m(۱۰-m)}$$

چون m، $۱۰-m$ و t عددهای صحیح‌اند، داریم : $t=۳$، وقتی $m=۱$ ؛ و $t=۴$ وقتی $m=۲$. مقدارهای صحیح دیگر m یعنی ۷، ۶، ۴ و ۳، مقدارهای ناصحیحی برای t مشخص می‌کنند. مقدار $m=۵$ قابل قبول نیست، زیرا m و n نابرابرند.

۳. ۱۰. ۳. ۳. تساوی دو پاره‌خط

۲۴۸. دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که از نقطه‌های A، D و N می‌گذرد. این دایره، دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ دوم E قطع می‌کند. خط راست NE، دایرهٔ اصلی را در نقطهٔ X' و خط راست AX، همان دایره را در نقطهٔ O قطع می‌کند. با توجه به زاویه‌های محاطی، مثلثهای ODE و ONA، همچنین مثلثهای ODE و $OX'X$ متشابه‌اند.

در نتیجه دو مثلث ONA و $OX'X$ متشابه می‌شوند، یعنی خطهای راست NA و $X'X$ موازی‌اند.

خط راست AE را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ اصلی را در Y' قطع کند. شبیه استدلال بالا، به این نتیجه می‌رسیم که NA با $Y'Y$ موازی است. بنابراین، خطهای راست AY' و BY، نسبت به قطر دایره، قرینهٔ یکدیگر و برخط راست AB عمودند. به این ترتیب نقطه‌های C و E قرینهٔ یکدیگرند ؛ سپس خطهای راست EX' و CX قرینهٔ هم و در نتیجه، نقطه‌های N و M قرینهٔ یکدیگرند.

۳. ۱۰. ۳. ۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۴۹. بنابه رابطهٔ طولی در دایره، داریم :

$$PC^{۲}=PA.PB \text{ و } PC=۲PA \Rightarrow ۴PA^{۲}=PA.(PA+۲R)$$

$$\Rightarrow PA=\frac{۲R}{۳}$$

۳. ۱۰. ۴. دو مماس و قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۳. ۱۰. ۴. ۱. اندازهٔ وتر

۲۵۰. گزینهٔ (د) درست است.

۳. ۱۰. ۴. ۲. اندازهٔ مماس

۲۵۱. $5\sqrt{3}$

۲۵۲. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۲۵۳. داریم :

$$AB^2 = AC^2 = d^2 - R^2 = \frac{49R^2}{4} - R^2 = \frac{45R^2}{4} \Rightarrow AB = AC = \frac{3\sqrt{5}}{2}R$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABO داریم :

$$AB.OB = AO.BH \Rightarrow \frac{3\sqrt{5}}{2}R.R = \frac{7R}{2}.BH$$

$$\Rightarrow BH = \frac{3\sqrt{5}}{7}R \Rightarrow BC = 2BH = \frac{6\sqrt{5}}{7}R$$

۳. ۱۰. ۴. ۳. اندازهٔ پاره‌خط، تساوی دو پاره‌خط

۲۵۴. گزینهٔ (هـ) درست است ؛ زیرا فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطهٔ تقاطع مماسها ۳/۸ است. در نتیجه :

$$CD = \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

۲۵۵. $OM = \frac{4}{3}$. ثابت کنید $OD.CM = OC.MD$.

۲۵۶. داریم :

$$BD = DT \;,\; CT = AC \;,\; D\hat{O}C = 90^\circ \;,\; OT^2 = DT.TC$$

$$\Rightarrow R^2 = DT.\frac{R}{2} \Rightarrow DT = DB = 2R \Rightarrow CD = \frac{5R}{2}$$

$$AC \parallel BD \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD} = \frac{MA}{MB} \;,\; \frac{MA}{MB} = \frac{\frac{R}{2}}{2R} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB - MA} = \frac{1}{4-1} \Rightarrow \frac{MA}{AB = 2R} = \frac{1}{3} \Rightarrow MA = \frac{2R}{3} \;,\; MB = \frac{8R}{3}$$

$$MT^2 = MA.MB \Rightarrow MT = \frac{4R}{3}$$

۲۵۷. ثابت کنید چهار ضلعی ACOM قابل محاط شدن در دایرهٔ به قطر OC است.

۲۵۸. مثلثهای MQR و MQS برابرند. پس ارتفاعهای نظیر رأس M در این دو مثلث برابرند.

۳. ۱۱. رابطه‌های متری در یک دایره

۳. ۱۱. ۱. رابطه‌های متری مربوط به وتر و قطر و قاطعهای رسم شده در داخل دایره

۲۵۹. در مثلث OAC، زاویهٔ C منفرجه است. بنابراین :

$$OA^2 = OC^2 + AC^2 + 2AC.CD \Rightarrow OA^2 = OC^2 + AC(AC + 2CD)$$

اما چون نقطهٔ D وسط وتر AB است، پس :

$$AC + 2CD = AC + CD + CD = AD + CD = BD + CD = BC$$

در نتیجه داریم :

$$OA^2 = OC^2 + AC.CB$$

۲۶۰. بنا به فرض داریم :

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PA'}{PB'} \text{ یا } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a^2}{ab} = \frac{a'^2}{a'b'} \;,\; ab = a'b'$$
$$\Rightarrow a^2 = a'^2 \Rightarrow a = a'$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $b = b'$ است، پس دو وتر برابرند.

۲۶۱. این قضیه در جلدهای قبلی دایرةالمعارف، بااستفاده از خاصیتهای توصیفی شکلهای هندسی، ثابت شده است و اینک آن را به کمک رابطه‌های طولی در دایره ثابت می‌کنیم :

راه اول. نقطهٔ برخورد AC و BD را G می‌نامیم. مثلث MGN را موربهای BC و AD قطع کرده‌اند. پس داریم :

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{BN}{BG} \cdot \frac{CG}{CM} = 1$$

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{DN}{DG} \cdot \frac{AG}{AM} = 1$$

از ضرب کردن طرفهای نظیر دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت :

$$\frac{OM^2}{ON^2} \cdot \frac{BN.ND}{CM.AM} \cdot \frac{CG.AG}{BG.DG} = 1$$

ولی $GA.GC = GB.GD$ است، پس : (۱) $\frac{OM^2}{ON^2} = \frac{AM.CM}{BN.DN}$ و قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (K) برابر است با :

$$KM^2 = OM^2 + OK^2 \;,\; AM.CM = KM^2 - R^2$$

پس $AM.CM = OM^2 + OK^2 - R^2$ و به همین ترتیب داریم :

$$BN.ND = ON^2 + OK^2 - R^2$$

بنابراین رابطهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

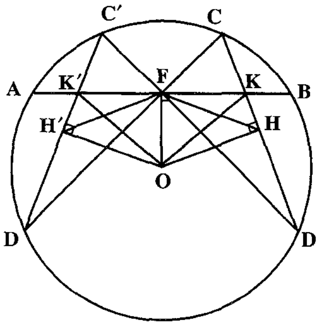
$$\frac{OM^{۲}}{ON^{۲}}=\frac{OM^{۲}+OK^{۲}-R^{۲}}{ON^{۲}+OK^{۲}-R^{۲}}$$

با فرض $OK^{۲}-R^{۲}=-d^{۲}$، خواهیم داشت :

$$\frac{OM^{۲}}{ON^{۲}}=\frac{OM^{۲}-d^{۲}}{ON^{۲}-d^{۲}}=\frac{OM^{۲}-OM^{۲}+d^{۲}}{ON^{۲}-ON^{۲}+d^{۲}}=\frac{d^{۲}}{d^{۲}}=۱$$

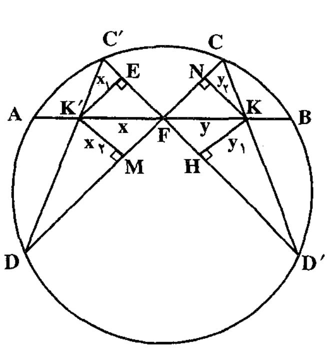
$$\Rightarrow OM^{۲}=ON^{۲}\Rightarrow OM=ON$$

راه دوم. با بیان قضیهٔ پروانه (از نظر نامگذاری حرفها) به صورت :



وتر غیر مشخص AB را در دایرهٔ (O) در نظر می‌گیریم و از نقطهٔ F وسط آن دو وتر غیرمشخص CD و C′D′ را رسم می‌کنیم. از C′ به D و از C به D′ وصل می‌کنیم و نقطه‌های برخورد C′D و CD′ با وتر AB را به‌ترتیب K′ و K می‌نامیم. ثابت کنید FK = FK′، راه حل زیر را داریم :

از نقطهٔ O مرکز دایره، عمودهای OH و OH′ را بر وترهای CD′ و C′D فرود می‌آوریم و از O به F وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای OFKH و OF′K′H′ محاطی‌اند. زیرا : $O\hat{F}K=O\hat{F}K'=\hat{H}=\hat{H}'=۹۰^\circ$ است. از F به H و H′ وصل می‌کنیم. می‌دانیم که FH′ میانهٔ ضلع DC′ و FH میانهٔ ضلع CD′ از مثلثهای FDC′ و FCD′ است. چون دو مثلث CFD′ و C′FD متشابه‌اند، پس میانه‌های متناظر آنها نیز مثلثهای متشابه پدید می‌آورند. یعنی دو مثلث FCH و FC′H′ متشابه‌اند، بنابراین $F\hat{H}K=F\hat{H}'K'$، از طرفی $F\hat{O}K=F\hat{H}K=\frac{\overset{\frown}{FK}}{۲}$ و $F\hat{O}K'=F\hat{H}'K'=\frac{\overset{\frown}{FK'}}{۲}$، در نتیجه $F\hat{O}K=F\hat{O}K'$ و چون OF بر KK′ عمود است، پس مثلث OK′K متساوی‌الساقین است و OF عمودمنصف KK′ است، در نتیجه FK = FK′.



راه سوم. مطابق با شکل، عمودهای $K'E=x_۱$ و $KH=y_۱$ را بر C′D′ و عمودهای $K'M=x_۲$ و $KN=y_۲$ را بر CD رسم می‌کنیم. از تشابه مثلثهای FK′E با FKH و FK′M با FKN و C′K′E با CKN و DK′M با D′KH و با فرض FA = FB = a و FK′ = x و FK = y داریم :

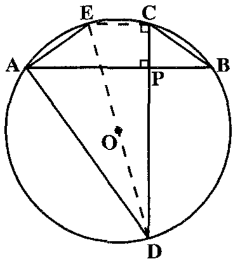
$$\frac{x}{y}=\frac{x_۱}{y_۱}\ ,\ \frac{x}{y}=\frac{x_۲}{y_۲}\ ,\ \frac{x_۱}{y_۲}=\frac{C'K'}{CK}\ ,\ \frac{x_۲}{y_۱}=\frac{K'D}{KD'}$$

از رابطه‌های بالا داریم :

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x_1}{y_1}\cdot\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_2}{y_1}\cdot\frac{x_1}{y_2}=\frac{C'K'.K'D}{CK.KD'}=\frac{AK'.K'B}{AK.KB}$$
$$=\frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

بنابراین $x=y$ ، یعنی F وسط پاره‌خط KK' است.

۲۶۲. مثلث ABA' در رأس B قائم‌الزاویه است.



۲۶۳. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PAD و PBC داریم :

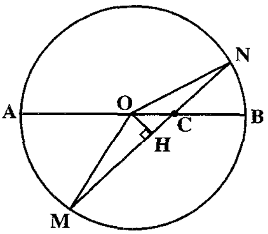
$$PA^2+PD^2=AD^2$$
$$PB^2+PC^2=BC^2$$

از جمع طرفین این دو رابطهٔ نظیر به نظیر، داریم :

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=BC^2+AD^2 \qquad (1)$$

اگر از D به مرکز دایره وصل کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند و از C به E وصل کنیم، زاویهٔ C چون محاطی و روبه‌روی قطر است $90°$ می‌باشد و چون زاویهٔ P نیز بنابه فرض $90°$ است، پس دو وتر AB و CE با هم موازی‌اند و کمانهای محصور بین آنها، و در نتیجه وترهای این کمانها، یعنی BC و AE برابرند. اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AED قضیهٔ فیثاغورس را بنویسیم و به‌جای AE مساویش BC را قرار دهیم و با رابطهٔ (۱) مقایسه کنیم، حکم ثابت می‌شود.

$$AD^2+AE^2=DE^2\ ,\ AE=BC\ ,DE=2R$$
$$\Rightarrow AD^2+BC^2=4R^2 \qquad (2)$$
$$(1)\ \text{و}\ (2)\Rightarrow PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4R^2$$



۲۶۴. از O به M و N وصل می‌کنیم و ارتفاع OH از مثلث OMN را نیز رسم می‌کنیم.

در دو مثلث CON و COM داریم :

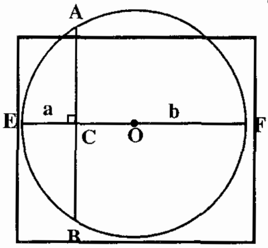
$$ON^2=OC^2+CN^2+2CH.CN=R^2$$
$$OM^2=OC^2+CM^2-2CH.CM=R^2$$

از جمع کردن عضوهای نظیر این دو رابطه داریم :

$$CM^2+CN^2+2OC^2-2CH(CM-CN)=2R^2\ ,\ CM-CN=2CH$$
$$\Rightarrow CM^2+CN^2+2OC^2-4CH^2=2R^2$$

چون مثلث OCH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس $OC^۲ = ۲CH^۲$. بنابراین :
$CM^۲ + CN^۲ = ۲R^۲$

۲۶۵. قطر EF عمود بر وتر AB از دایرهٔ (O) را در نظر می‌گیریم.

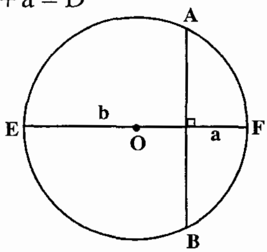


با فرض $CE = a$ و $CF = b$ و $EF = D$ باید ثابت کنیم
$\frac{AB^۲}{۴a} + a = D$ ، در واقع داریم :
$AC^۲ = a.b\ (۱)$ ، $AC = \frac{AB}{۲}\ (۲)$ ، $b = D - a\ (۳)$
برابری (۱)، با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳) به شکل زیر درمی‌آید.

$$\frac{AB^۲}{۴} = a(D-a) \Rightarrow \frac{AB^۲}{۴} + a^۲ = D.a \quad (۴)$$

اگر دو طرف رابطهٔ (۴) را بر a تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید :

$$\frac{AB^۲}{۴a} + a = D$$



۲۶۶. باید ثابت کنیم :

$$a = \frac{۱}{۲}(D - \sqrt{D^۲ - AB^۲})$$

با توجه به مسألهٔ قبل داریم :

$$AB^۲ = ۴aD - ۴a^۲$$

اکنون به سادگی دیده می‌شود :

$$D^۲ - AB^۲ = D^۲ - ۴aD + ۴a^۲ = (D - ۲a)^۲;$$

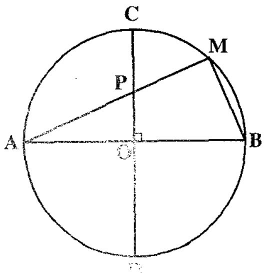
$$\frac{۱}{۲}(D - \sqrt{D^۲ - AB^۲}) = \frac{۱}{۲}[D - (D - ۲a)] = a$$

۲۶۷. ۱. دو زاویهٔ D و B از این دو مثلث قائم‌الزاویه با هم برابرند، پس این دو مثلث متشابه‌اند و داریم : $\frac{CA}{CD} = \frac{CE}{CB}$.

۲. از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود $CD.CE = CA.CB$ و چون $CD = CE = \frac{DE}{۲}$ است، پس $\frac{DE^۲}{۲} = CA.CB$ و یا $ED^۲ = ۲CA.CB$.

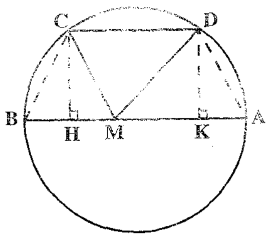
۲۶۹. نقطهٔ A وسط کمان CAD است. پس FA نیمساز زاویهٔ F است و در مثلث CFD داریم $\frac{EC}{ED} = \frac{FC}{FD}$. نقطهٔ B وسط کمان $\overset{\frown}{CBD}$ است و GB نیمساز زاویهٔ CGD است، پس $\frac{EC}{ED} = \frac{GC}{GD}$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود : $\frac{FC}{FD} = \frac{GC}{GD}$.

۲۷۰. گزینهٔ (ب) درست است.



۲۷۱. گزینهٔ (ب) درست است؛ زیرا ABM مثلثی قائم‌الزاویه و با مثلث AOP، متشابه است؛ پس:

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AO}{AM}\Rightarrow AP.AM=AO.AB$$



۲۷۳. دو زاویهٔ A و B حاده هستند، زیرا محاطی و روبه‌رو به کمانی کمتر از ۱۸۰° می‌باشند. قضیهٔ مربوط به زاویهٔ حاده را برای دو مثلث CAM و MBD می‌نویسیم:

$$MC^{۲}=AC^{۲}+AM^{۲}-۲AM.AH$$
$$MD^{۲}=BD^{۲}+BM^{۲}-۲BM.MK$$

ذوزنقهٔ ACDB متساوی‌الساقین است؛ در نتیجه $AC=BD$ و تصویرهای ساقها روی قاعده یعنی AH و BK مساوی می‌باشند. طرفین دو رابطهٔ بالا را جمع کرده، به‌جای BD مساویش AC و به‌جای MK مساویش AH را قرار می‌دهیم.

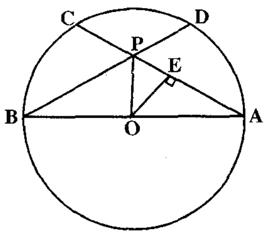
$$MC^{۲}+MD^{۲}=AM^{۲}+BM^{۲}+\left[۲AC^{۲}-۲AH(AM+MB)\right]$$

امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB داریم:

$$AC^{۲}=AH.AB=AH(AM+MB)$$

پس، عبارت $۲AC^{۲}-۲AH(AM+MB)=۰$ و $MC^{۲}+MD^{۲}=MA^{۲}+MB^{۲}$ است.

۲۷۴. اگر نقطهٔ برخورد CM با دایره را E بنامیم، $CE=DN$ و $N\hat{M}E=۹۰^\circ$ است.



۲۷۵. اگر E وسط وتر AC باشد، این نقطه، تصویر نقطهٔ O مرکز دایره روی AC است. در مثلث POA می‌توان نوشت:

$$OP^{۲}=OA^{۲}+AP^{۲}-۲AP.AE\ ;$$
$$OP^{۲}=OA^{۲}+AP^{۲}-AP.AC$$

به همین ترتیب: $OP^{۲}=OB^{۲}+BP^{۲}-BP.BD$ از جمع دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$۲OP^{۲}=۲OA^{۲}+AP^{۲}+BP^{۲}-AP.AC-BP.BD \qquad (۱)$$

اما به موجب رابطهٔ میانه‌ها در مثلث PAB، داریم:

$$AP^{۲}+BP^{۲}=۲OP^{۲}+۲OA^{۲}$$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$۴OA^۲ = AP.AC + BP.BD = ۴R^۲ = AB^۲$$

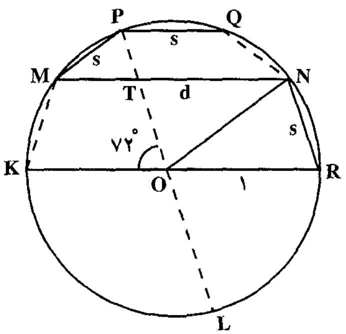
۲۷۶. بنا به خاصیت نیمساز در دو مثلث WGI و HGS، داریم :

$$\frac{WR}{RI} = \frac{WG}{GI} \quad (۱) \quad و \quad \frac{HT}{TS} = \frac{HG}{GS} \quad (۲)$$

از طرفی دو مثلث WGI و HGS متشابه‌اند، پس : $\frac{WG}{GI} = \frac{HG}{GS}$ (۳)

از سه رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود : $\frac{WR}{RI} = \frac{HT}{TS}$

۲۷۷. گزینهٔ (هـ) درست است. نشان خواهیم داد که I ، II و III هر سه صحیح هستند. از راه هندسی ثابت می‌کنیم که I و II صحیح هستند و درستی III را از راه جبری، از I و II نتیجه می‌گیریم.



وترهای QN و KM هرکدام به طول s هستند. چون پنج وتر متوالی در نیمدایرهٔ به قطر KR با هم برابرند، زاویهٔ مرکزی هر یک از آنها برابر است با $۱۸۰°:۵ = ۳۶°$. در پنج مثلث متساوی‌الساقین با رأس مشترک O که طول قاعدهٔ هر یک s است، اندازهٔ هر زاویهٔ مجاور به قاعده برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}(۱۸۰° - ۳۶°) = ۷۲°$$

اکنون شکل کامل را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ $۷۲°$ وحول O دوران می‌دهیم. وتر PQ که موازی با KR است بر NR منطبق می‌شود که موازی PL است. نقطهٔ برخورد MN با PL را T می‌نامیم. در متوازی الاضلاع ORNT داریم :

$TO = NR = s$ و $TN = OR = ۱$

دیدیم کـه $M\hat{P}O = ۷۲°$ ، همـچنین $M\hat{T}P = ۷۲°$ ، زیرا $MT \parallel KO$. بنابراین مـثلث PMT متساوی‌الساقین است و $MT = MP = s$ ، در نتیجه $d = MT + TN = s + ۱$ و

(I) $\quad d - s = ۱$

پاره‌خطهای PT، TL و MT ، TN که از برخورد دو وتر MN و PL به‌دست آمده‌اند، در رابطهٔ $PT.TL = MT.TN$ صدق می‌کنند، امّا :

$PT = OP - OT = ۱ - s$ و $TL = OL + OT = ۱ + s$

و رابطهٔ بالا به شکل زیر درمی‌آید :

$$(۱ - s)(۱ + s) = s \times ۱ \Rightarrow ۱ - s^۲ = s$$

اگر دو طرف رابطهٔ (I) را در s ضرب کنیم، نتیجه می‌شود $ds - s^2 = s$، پس :

$$(II) \quad ds = s^2 + s = 1$$

معادلهٔ $s^2 + s = 1$ معادل است با $s^2 + s - 1 = 0$، و جواب مثبت آن $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ است. بنابراین :

$$d = s + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

و در نتیجه :

$$(III) \quad d^2 - s^2 = (d+s)(d-s) = d + s = \sqrt{5}$$

راه دیگر. چون s طول وتری است که زاویهٔ مرکزی آن 36° و d طول وتری است که زاویهٔ مرکزی آن $3 \times 36^\circ = 108^\circ$ است :

$$s = 2\sin 18^\circ \text{ و } d = 2\sin 54^\circ = 2\cos 36^\circ = 2(1 - 2\sin^2 18^\circ) = 2 - s^2$$

و

$$s = 2\sin 18^\circ = 2\cos 72^\circ = 2(2\cos^2 36^\circ - 1) = d^2 - 2$$

از جمع دو تساوی بالا به‌دست می‌آید :

$$d + s = d^2 - s^2 = (d-s)(d+s) \Rightarrow d - s = 1 \quad (I)$$

در $d = 2 - s^2$ به‌جای d، مقدار $s+1$ را می‌گذاریم، نتیجه می‌شود :

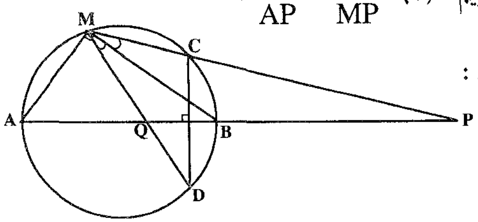
$$s^2 + s - 1 = 0\,, \quad s = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\,, \quad d = s + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,, \quad ds = 1\,, \quad d + s = \sqrt{5}$$

و

$$d^2 - s^2 = \sqrt{5}$$

۳. ۱۱. ۲. رابطه‌های متری مربوط به قاطعهای رسم شده از خارج دایره

۲۷۸. قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند، پس $\overparen{CB} = \overparen{BD}$. و از آن جا $C\hat{M}B = D\hat{M}B$، یعنی MB نیمساز زاویهٔ PMQ از مثلث PMQ است، پس $(1)\ \frac{MQ}{MP} = \frac{BQ}{BP}$. از طرفی AM عمود بر MB است. پس MA نیمساز زاویهٔ خارجی QMP است، و در نتیجه داریم : $(2)\ \frac{MQ}{MP} = \frac{AQ}{AP}$.



از مقایسهٔ این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$\frac{AQ}{AP} = \frac{BQ}{BP}$ و یا $\frac{QA}{QB} = \frac{PA}{PB}$.

۲۷۹. نخست فرض می‌کنیم زاویه‌های A و B از مثلث MAB حاده باشند در مثلث MAB برای ضلعهای MA و MB داریم :

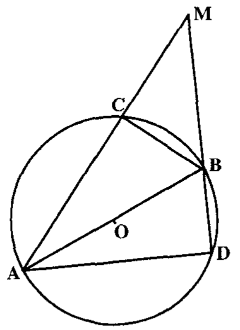
$$MA^{۲} = MB^{۲} + AB^{۲} - ۲MB.BD$$
$$MB^{۲} = MA^{۲} + AB^{۲} - ۲MA.AC$$

از جمع این دو رابطه داریم :

$$MA^{۲} + MB^{۲} = MA^{۲} + MB^{۲} + ۲AB^{۲} - ۲MB.BD - ۲MA.AC$$

و یا :

$$AM.AC + BM.BD = AB^{۲}$$



ممکن است یکی از زاویه‌های A یا B منفرجه باشد و این در صورتی است که نقطه‌های C و D در طرفین قطر AB قرار گیرند. در این صورت در مسأله، رابطهٔ زیر را داریم :

$$AB^{۲} = AM.AC - BM.BD$$

۲۸۰. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACM و ABD متشابه‌اند.

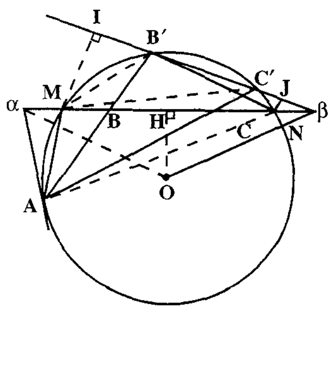
۲۸۱. چهار ضلعی BPCD محاطی است.

۲۸۲. دو مثلث A′AB′ و C′AA′ متشابه‌اند، زیرا این دو مثلث در زاویهٔ A مشترکند. و داریم :

$$A\hat{C'}A' = A\hat{C}A' = D\hat{B}A = A\hat{A'}B$$

از تشابه این دو مثلث می‌توان نوشت :

$$\frac{AA'}{AB'} = \frac{AC'}{AA'} \Rightarrow AA'^{۲} = AB'.AC'$$



۲۸۴. فرض کنیم R شعاع دایره باشد ؛ دو مثلث αAM و αNA متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{\alpha M}{\alpha A} = \frac{\alpha A}{\alpha N} = \frac{AM}{AN}$$

که چون دو نسبت اولی را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\frac{\alpha M}{\alpha N} = \frac{AM^{۲}}{AN^{۲}}$$

حال M و N را روی $B'C'$ تصویر کرده، این تصویرها را I و J می‌نامیم. داریم :

$$\frac{\beta M}{\beta N}=\frac{MI}{NJ}=\frac{۲R.MI}{۲R.NJ}=\frac{MB'.MC'}{NB'.NC'}$$

لیکن در چهار ضلعی محاطی $AMB'N$ ، دو مثلث AMB' و ANB' یک زاویهٔ مکمل دارند، پس نسبت مساحتهای آنها برابر نسبت حاصلضرب ضلعهای این زاویه است و داریم :

$$\frac{S_{AMB'}}{S_{ANB'}}=\frac{MA.MB'}{NA.NB'}$$

و با توجه به این که، این دو مثلث در قاعده شریکند، حاصل می‌شود :

$$\frac{MB}{BN}=\frac{MA.MB'}{NA.NB'} \quad \text{پس} \quad (۲) \quad \frac{MB'}{NB'}=\frac{MB.NA}{BN.MA}$$

با همین استدلال معلوم می‌شود که در چهار ضلعی $AMC'N$ داریم :

$$\frac{MC}{CN}=\frac{MA.MC'}{NA.NC'} \quad \text{و یا} \quad (۳) \quad \frac{MC'}{NC'}=\frac{MC.NA}{CN.MA}$$

چون رابطه‌های (۲) و (۳) را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، با ملاحظهٔ آن که $MC=BN$ و $MB=CN$ ، خواهیم داشت : $\frac{\beta M}{\beta N}=\frac{NA^۲}{MA^۲}$. از مقایسهٔ رابطهٔ اخیر با رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید : $\frac{\beta M}{\beta N}=\frac{\alpha N}{\alpha M}$ و $\frac{\beta N+NM}{\beta N}=\frac{\alpha M+MN}{\alpha M}$ ، از آن‌جا نتیجه می‌شود $\beta N=M\alpha$ ، یعنی β و α از نقطهٔ H وسط پاره‌خط NM، و در نتیجه از نقطهٔ O به یک فاصله‌اند.

۳. ۱۱. ۳. رابطه‌های متری مربوط به یک مماس و قاطعهای رسم شده نسبت به دایره

۲۸۵. دو مثلث ABC و ADB متشابه‌اند.

۲۸۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، BD ارتفاع نظیر وتر است.

۲۸۷. اگر از A به B و C وصل کنیم، از تشابه مثلثهای ABD با ACF و ACD با ABE نتیجه می‌شود که دو چهار ضلعی BEAD و ADCF متشابه‌اند. در نتیجه داریم :

$$\frac{BE}{AD}=\frac{AD}{CF}\Rightarrow AD^۲=BE.CF$$

۲۸۸. چهار ضلعی CGHD محاطی است.

۲۸۹. مثلث BFD متساوی‌الساقین است، زیرا $\hat{F}=\hat{D}=\frac{\widehat{ACH}}{۲}$، پس $BF=BD$ است و DH تصویر ضلع DB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD روی وتر AD است، بنابراین $BD^۲=DH.DA$ و در نتیجه: $BF^۲=DA.DH$.

۲۹۰. ۱. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و AHC متشابه‌اند زیرا: $\hat{B}=C\hat{A}H$. از تشابه آنها نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{HC}$ و یا $AC^۲=AB.HC$.

۲. چون نسبت مساحتهای دو مثلث متشابه، مساوی با مجذور نسبت ضلعهای متناظر آنهاست، پس نسبت تشابه دو مثلث ۲ می‌باشد و داریم: $\frac{AB}{AC}=۲$ و یا $AC=R$ بنابراین $BC=R\sqrt{۳}$، از این‌جا نتیجه می‌شود:

$$AH=\frac{BC}{۲}=\frac{R\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } HC=\frac{AC}{۲}=\frac{R}{۲}$$

۲۹۱. پاسخ درست گزینهٔ (الف) است. زیرا به‌دلیل مماس بودن AB بر دایره داریم:

$$AB^۲=AD.AE\ ,\ \ AE=AD+۲r=AD+AB$$
$$\Rightarrow AB^۲=AD(AD+AB)=AD^۲+AD.AB$$
$$\Rightarrow AD^۲=AB^۲-AD.AB=AB(AB-AD),\ \ AP=AD$$
$$\Rightarrow AP^۲=AB(AB-AP)=AB.PB$$

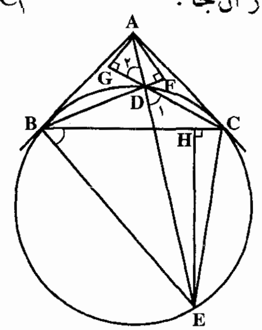
۲۹۲. دو مثلث متساوی‌الساقین ACB و ADB متشابه‌اند.

۴.۱۱.۳. رابطه‌های متری مربوط به دو یا چند مماس و قاطعهای رسم شده نسبت به دایره

۲۹۳. خطهای PB، PC، $C_۱A_۱$ و $A_۱B_۱$ را رسم کنید. چهار ضلعیهای $A_۱PB_۱C$ و $A_۱BC_۱P$ محاطی‌اند و:

$$A_۱\hat{B}_۱P=A_۱\hat{C}P=B\hat{C}P=C_۱\hat{B}P=C_۱\hat{A}_۱P$$
$$P\hat{A}_۱B_۱=P\hat{C}B_۱=P\hat{B}C=P\hat{B}A_۱=P\hat{C}_۱A_۱$$

دو مثلث $PA_۱B_۱$ و $PC_۱A_۱$ متشابه‌اند و از آن‌جا: $PA_۱^۲=PB_۱.PC_۱$



۲۹۴. پاره‌خطهای EB و EC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ADC و AEC متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ A در هر دو مثلث مشترک، و $\hat{C}=\hat{E}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{DC}{EC}=\frac{AD}{AC}$$

همین‌طور، برای دو مثلث ABD و ABE خواهیم داشت :

$$\frac{BD}{BE}=\frac{AD}{AB}$$

با توجه به برابری AC و AB و دو تناسب بالا، داریم :

$$\frac{DC}{EC}=\frac{BD}{BE} \qquad (۱)$$

از E عمود EH را بر BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AGD و BHE متشابه‌اند ($\hat{D}_۱=\hat{D}_۲$ و $E\hat{B}C=\hat{D}_۱$ محاطی و روبه‌رو به یک کمان، پس $E\hat{B}C=\hat{D}_۲$) و داریم :

$$\frac{AG}{EH}=\frac{AD}{BE}$$

همچنین، برای دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF و EHC داریم :

$$\frac{AF}{EH}=\frac{AD}{EC}$$

از تقسیم کردن طرفهای نظیر دو رابطهٔ اخیر داریم :

$$\frac{AG}{AF}=\frac{EC}{BE}$$

و از رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{DC}{BD}=\frac{EC}{BE}$$

پس داریم :

$$\frac{AG}{AF}=\frac{DC}{BD}$$

۲۹۵. دو مثلث ABD و ABE متشابه‌اند و می‌توان نوشت :

$$\frac{BD}{BE}=\frac{AB}{AE}$$

همچنین، دو مثلث ACD و AEC متشابه‌اند، پس $\frac{CD}{CE}=\frac{AC}{AE}$. چون $AB=AC$ است، از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود $\frac{CD}{CE}=\frac{BD}{BE}$ و از آن‌جا :

$$BD.CE=BE.CD$$

۲۹۶. ثابت کنید که $\frac{۲}{PC}=\frac{۱}{PA}+\frac{۱}{PB}$.

۲۹۷. اگر از نقطهٔ P، مماس PT را بر دایرهٔ دلخواه (C) که در نقطهٔ Q بر خط L مماس است، رسم کنیم، داریم :

$$PT^{۲}=PQ^{۲}\Rightarrow PT=PQ=C^{te}$$

۲۹۸. نقطهٔ برخورد AC و PD را E می‌نامیم ؛ داریم :

$$\Delta CDE \sim \Delta BDP \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{BP}{BD} \qquad (۱)$$

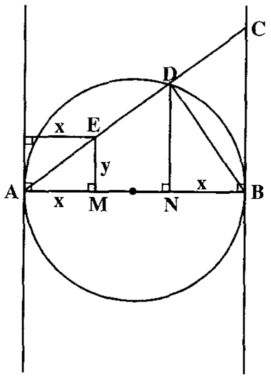
$$\Delta ACD \sim \Delta PBO \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{OB}{PB} \qquad (۲)$$

از ضرب رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

$$\frac{CE}{AC} = \frac{OB}{BD} = \frac{۱}{۲}$$

۲۹۹. از ویژگیهای چهارضلعی محاطی استفاده کرده، ثابت کنید زاویهٔ CPD قائمه است.

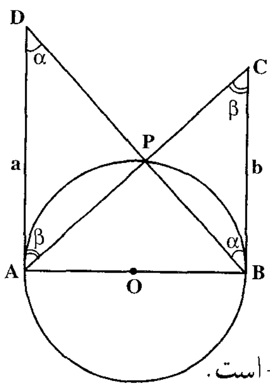
۳۰۰. گزینهٔ (الف) درست است. از نقطه‌های E و D عمودهای EM و DN را بر AB فرود می‌آوریم. با توجه به این که AE = DC است، AM = BN = x است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD و با استفاده از تشابه مثلثهای AME و AND داریم :



$$\frac{ND}{۲a-x} = \frac{y}{x} \Rightarrow ND = \frac{y(۲a-x)}{x} \text{ ،} ND^۲ = AN.NB$$

$$\Rightarrow \frac{y^۲(۲a-x)^۲}{x^۲} = (۲a-x)x \Rightarrow y^۲ = \frac{x^۳}{۲a-x}$$

۳۰۱. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا با توجه به این که زاویه‌های C و D متمم یکدیگرند، داریم :



$$tgB.tgC = ۱ \Rightarrow \frac{d}{b}.\frac{d}{a} = ۱$$

$$\Rightarrow d^۲ = ab \Rightarrow d = \sqrt{ab}$$

۳۰۲. طول هریک از دو بخش پاره‌خط راست، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۵.۱۱.۳. رابطه‌های متری مقدار ثابت

۳۰۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R و نقطهٔ دلخواه M روی این دایره را در نظر می‌گیریم و از M به A، B و C وصل می‌کنیم. با توجه به شکل داریم:

$$MB = MA + MC$$

از این رابطه و $AB = R\sqrt{3}$ خواهیم داشت:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2AB^2 = 6R^2 = C^{te}$$

۳۰۴. فرض کنیم R شعاع دایره و $OM = ON = a$ باشد، داریم:

$$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AM^2}{AM.MB} + \frac{AN^2}{AN.NC}$$

امّا $AM.MB = AN.NC = R^2 - a^2$ و نیز بنا به قضیهٔ میانه‌ها در مثلث AMN داریم:

$$AM^2 + AN^2 = 2AO^2 + 2OM^2 = 2(R^2 + a^2)$$

پس:

$$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AM^2 + AN^2}{AM.MB} = \frac{2(R^2 + a^2)}{R^2 - a^2} = \text{مقدار ثابت}$$

۳۰۵. فرض کنیم که $OA = OP = a$ و r شعاع دایره باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم که مقدار عبارت $AB^2 + AC^2 + BC^2$ وقتی که قاطع BPC حول P دوران کند، همواره ثابت است. می‌دانیم که:

$$BC^2 = (BP + PC)^2 = BP^2 + PC^2 + 2BP.PC$$

پس:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = AB^2 + AC^2 + BP^2 + PC^2 + 2PB.PC$$

هرگاه قضیهٔ میانه‌ها را در مورد مثلثهای ABP و ACP بنویسیم، حاصل می‌شود:

$$AC^2 + CP^2 = 2r^2 + 2a^2 \quad \text{و} \quad AB^2 + BP^2 = 2r^2 + 2a^2$$

از طرف دیگر $PB.PC = r^2 - a^2$ است. درنتیجه داریم:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 2r^2 + 2a^2 + 2r^2 + 2a^2 + 2r^2 - 2a^2$$
$$= 6r^2 + 2a^2 = \text{مقدار ثابت}$$

۳۰۶. پاره‌خط AI میانهٔ مثلث AMN است و درنتیجه، می‌توان نوشت:

$$AM^2 + AN^2 = \frac{1}{2}MN^2 + 2AI^2 = \frac{1}{2}(2NI)^2 + 2AI^2$$
$$= 2(NI^2 + AI^2) = 2(R^2 - OI^2 + AE^2 + EI^2)$$

$$\Rightarrow AM^۲+AN^۲=۲(R^۲-OI^۲-EI^۲+AE^۲+EI^۲)$$

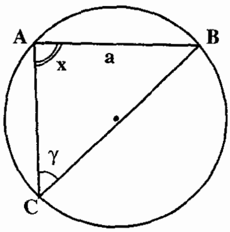
و یا :

$$AM^۲+AN^۲=۲(R^۲-\frac{R^۲}{۴}+\frac{۹R^۲}{۴})=۶R^۲=\text{مقدار ثابت}$$

۳۰۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BPD، پاره خط PI میانهٔ نظیر وتر است، یعنی، $PI=\frac{BD}{۲}$. از طرفی داریم : $PH.PI=\frac{PH.BD}{۲}$.

چون دومثلث PCH و PBD متشابه‌اند، پس $\frac{PC}{BD}=\frac{PH}{PD}$ و یا، $PH.BD=PC.PD$، درنتیجه $PH.PI=\frac{PC.PD}{۲}$. امّا PC.PD قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) است که برابر است با $R^۲-OP^۲$ و مقدار ثابتی است. پس PH.PI مقداری است ثابت.

۳۰۸. ۱. عبارت $AC^۲+BC^۲$ کمیتی است که بایستی بهینهٔ آن را بیابیم. تساوی $AC^۲+BC^۲=y$ را درنظر می‌گیریم.



۲. متغیر مستقلی را به‌صورت $x=C\hat{A}B$ اختیار می‌کنیم حدود حقیقی این متغیر عبارت از $۰<x<\pi-\gamma$ است که در آن $\gamma=A\hat{C}B$ است. (این زاویه مستقل از انتخاب نقطهٔ C است زیرا همیشه برابر نصف کمان کوچک AB است.) به‌خاطر ماهیت مسأله، بدیهی است که نقطهٔ C باید روی کمان بزرگ AB انتخاب شود.

۳. کمیت y یعنی $AC^۲+BC^۲$ را برحسب x، a و R بیان می‌کنیم.

بنابر قانون سینوسها،

$$AC=۲R\sin(\pi-x-\gamma)=۲R\times\sin(x+\gamma) \text{ ،} BC=۲R\sin x$$

است. به دلیل $AB=۲R\sin\gamma$، رابطهٔ $a=۲R\sin\gamma$ را داریم که از آن نیز $\sin\gamma=\frac{a}{۲R}$ به‌دست می‌آید. درنتیجه رابطهٔ زیر که در آن $\sin\gamma=\frac{a}{۲R}$ است حاصل می‌شود :

$$y=AC^۲+BC^۲=(۲R\sin x)^۲+(۲R\sin(x+\gamma))^۲$$
$$=۴R^۲(\sin^۲x+\sin^۲(x+\gamma))$$

(به این ترتیب مدل ریاضی مسأله تشکیل شده است).

۴. تابع $y=۴R^۲(\sin^۲x+\sin^۲(x+\gamma))$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. بایستی بزرگترین مقدار آن را در بازهٔ $(۰,\pi-\gamma)$ بیابیم. در عبارت تابع تبدیلهایی را انجام

می‌دهیم، چنین داریم :

$$y = 4R^2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos(2x+2\gamma)}{2}\right)=2R^2(\cos 2x+\cos(2x+2\gamma))$$

$$\Rightarrow y = 4R^2(1-\cos(2x+\gamma)\cos\gamma)$$

بزرگترین مقدار عبارت بالا را می‌توان بدون استفاده از مشتق به‌دست آورد. بدیهی است که تابع بزرگترین مقدار خود را وقتی پیدا می‌کند که $\cos(2x+\gamma)$ کوچکترین مقدار خود را داشته باشد، یعنی وقتی که $\cos(2x+\gamma)=-1$ باشد. این تساوی به‌ازای $2x+\gamma=\pi$ یعنی به ازای $x=\frac{\pi-\gamma}{2}$ به‌وجود می‌آید. توجه دارید که نقطهٔ $\frac{\pi-\gamma}{2}$ به بازهٔ $(0,\pi-\gamma)$ تعلق دارد. حال بزرگترین مقدار ممکن برای تابع y را محاسبه می‌کنیم :

$$y = 4R^2(1-(-1)\cos\gamma)=4R^2(1+\cos\gamma)=4R^2(1+\sqrt{1-\sin^2\gamma})$$

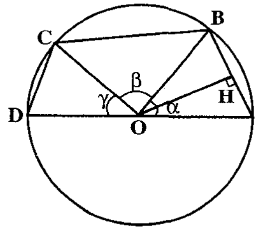
$$=4R^2\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}\right)=2R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})$$

(در این‌جا آخرین مرحلهٔ مسأله، در چهارچوب تشکیل مدل، انجام گرفته است).

۵. با مراجعه به اصل مسأله، نتیجهٔ زیر را بیان می‌کنیم :

بزرگترین مقدار ممکن برای عبارت AC^2+BC^2 با $2R(2R+\sqrt{4R^2-a^2})$ برابر است، این مقدار وقتی حاصل می‌شود که $C\hat{A}B=\frac{\pi-\gamma}{2}$، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد ($CA=CB$).

۳۰۹. در مثلثهای OAB، OBC و OCD که در آنها، $AB=a$ و $BC=b$ و $CD=c$ است، رابطه‌های زیر را می‌توان نوشت :



$$\begin{cases} a^2=x^2+x^2-2x^2\cos\alpha \\ b^2=x^2+x^2-2x^2\cos\beta \\ c^2=x^2+x^2-2x^2\cos\gamma \end{cases}$$

از جمع رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود :

$$a^2+b^2+c^2=6x^2-2x^2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

از طرفی بنا به فرض $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ است، پس $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$.

و از آن‌جا :

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)$$

$$=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}-۲\cos^{۲}\frac{\alpha+\beta}{۲}+۱$$

$$=۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}-\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)+۱$$

$$\Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=۴\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}+۱$$

$$\frac{\alpha+\beta}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\gamma}{۲}\Rightarrow\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}=\cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{\gamma}{۲})=\sin\frac{\gamma}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=۴\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}+۱$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ OAH می‌توان نوشت :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{a}{۲x}$$

و به‌طور مشابه :

$$\sin\frac{\beta}{۲}=\frac{b}{۲x},\ \sin\frac{\gamma}{۲}=\frac{c}{۲x}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}=\frac{a.b.c}{۸x^{۳}}$$

پس :

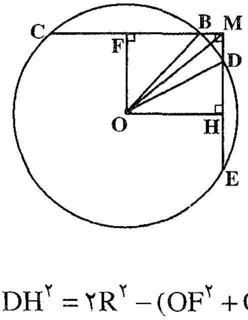
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{a.b.c}{۲x^{۳}}+۱$$

درنتیجه، خواهیم داشت :

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=۶x^{۲}-۲x^{۲}\left(\frac{abc}{۲x^{۳}}+۱\right)$$

$$\Rightarrow ۴x^{۳}-x(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})-abc=۰$$

۳۱۰. از نقطهٔ M دو وتر عمود بر هم MBC و MDE را نسبت به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم، و عمودهای OF و OH را بر وترهای BC و DE فرود می‌آوریم.



می‌دانیم که $BF=\frac{BC}{۲}$ و $DH=\frac{DE}{۲}$ و OHMF مربع است. از آن‌جا داریم :

$$BF^{۲}+DH^{۲}=۲R^{۲}-(OF^{۲}+OH^{۲})=۲R^{۲}-OM^{۲}$$

$$\Rightarrow BC^{۲}+DE^{۲}=۸R^{۲}-۴OM^{۲}=\text{مقدار ثابت}$$

۳۱۱. دو سر وتری را که در نقطهٔ B بر OA عمود رسم می‌شود، E و F می‌نامیم. دو مثلث PMB و P′M′B متشابه‌اند، زیرا :

$$\hat{B}_1=\hat{B}_2 \text{ و } \hat{M}'=\frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \text{ ، } \hat{P}=\frac{\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{MF}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{MF}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AM}}{2}$$
$$\Rightarrow \hat{P}=\hat{M}'$$

بنابراین می‌توان نوشت :

$$\frac{BP}{BM'}=\frac{BM}{BP'}\Rightarrow BM.BM'=BP.BP'$$

از طرفی، داریم :

$$BF.BE=BM.BM'$$

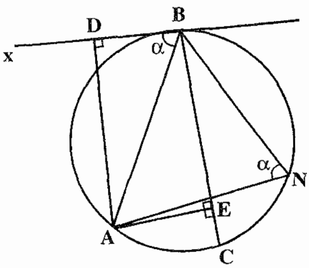
درنتیجه خواهیم داشت :

$$BP.BP'=BF.BE=BF^2=\text{مقدار ثابت}$$

۳۱۲. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB و AM′C متشابه‌اند.

۳۱۳. نقطهٔ دلخواه N از کمان $\overset{\frown}{ACB}$ را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم. با فرض $A\hat{B}D=A\hat{N}B=\alpha$ داریم :

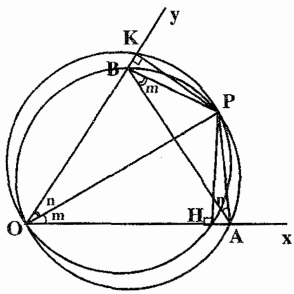
و $AB=2R\sin\alpha$



$$\frac{AB}{AD}=\frac{1}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{AB^2}{AD}=2R=C^{te}$$ ۱-

نکته. اگر N روی کمان دیگر $\overset{\frown}{AB}$ اختیار شود، $A\hat{N}B=\pi-\alpha$ و $\sin A\hat{N}B=\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ است.

۳۱۴. OP و AB را رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ m و دو زاویهٔ n برابرند و اندازه‌های این دو زاویه همواره ثابت می‌باشند، پس تمام مثلثهای PAB که به این طریق به‌دست می‌آیند، دارای زاویه‌های متناظر مساوی با اندازهٔ ثابت هستند، پس این مثلثها متشابه و ضلعهای نظیر این زاویه‌ها متناسبند. و این نسبت برابر است با :



$$\frac{PA}{PB}=\frac{PA'}{PB'}=\frac{PH}{PK}=C^{te}$$

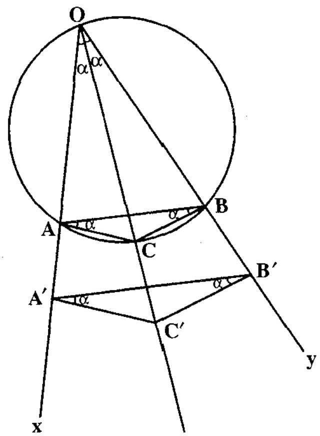
۳۱۵. بنا به قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی OACB می‌توان نوشت :

$$OC.AB = OB.AC + BC.OA$$

چون نقطهٔ C وسط کمان $\overset{\frown}{AB}$ است، $AC = CB$ است، پس :

$$OC.AB = AC(OB + OA)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{OB + OA}{OC}$$



بنابراین کافی است ثابت کنیم که $\frac{AB}{AC}$ همواره مقدار ثابتی است. اگر دایرهٔ دیگری را در نظر بگیریم که Ox و Oy و نیمساز زاویهٔ O را بترتیب در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کند، دو مثلث متساوی‌الساقین ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، چون

$$\hat{A} = \hat{A}' = \hat{O}_۲ = \hat{B} = \hat{B}' = \hat{O}_۱$$

پس داریم :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = K$$

راه دیگر. در مثلث ABC داریم :

$$A\hat{C}B = \pi - ۲\alpha \Rightarrow \frac{AB}{\sin(\pi - ۲\alpha)} = \frac{AC}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{AB}{\sin ۲\alpha} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha} = ۲\cos\alpha = C^{te}$$

۱۲.۳. قوت نقطه نسبت به دایره

۱.۱۲.۳. محاسبهٔ قوت نقطه نسبت به دایره

۳۱۶. قوت مورد نظر برابر است با :

$$d^2 - R^2 = -2rR$$

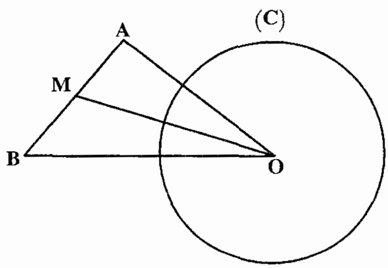
۳۱۷. کمترین مقدار قوت یک نقطه نسبت به دایرهٔ به شعاع R، برابر $-R^2$ است، و نقطهٔ نظیر آن، مرکز دایره است.

۳۱۸. الف) $-3\sqrt{5}$ ب) $-3\sqrt{3}$ پ) $-\sqrt{35}$ ت) $-2\sqrt{3}$ ث) $-2\sqrt{10}$

۳۱۹. الف) $2\sqrt{13}$ ب) $2\sqrt{21}$ پ) $2\sqrt{34}$ ت) ۲۸ ث) $\sqrt{138}$

۳۲۰. الف) ۳۶ ب) $2\sqrt{13}$ پ) ۶۴ ت) ۱۸ ث) ۱۳

۳۲۱. ۱. از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطه‌های A، B و M وصل می‌کنیم. داریم :



$$\begin{cases} P_{A(C)} = OA^2 - R^2 \\ P_{B(C)} = OB^2 - R^2 \end{cases}$$

از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$P_{A(C)} + P_{B(C)} = OA^2 + OB^2 - 2R^2$$

امّا در مثلث OAB، $OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{AB^2}{2}$، پس :

$$P_{A(C)} + P_{B(C)} = 2OM^2 + \frac{AB^2}{2} - 2R^2 = 2(OM^2 - R^2) + \frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow P_{A(C)} + P_{B(C)} = 2P_{M(C)} + \frac{AB^2}{2}$$

۲. اگر $P_{A(C)} + P_{B(C)} = 0$ باشد، داریم $P_{M(C)} = -\frac{AB^2}{2} < 0$. یعنی نقطهٔ M داخل دایره است.

۳. اگر نقطهٔ M روی دایره باشد، $P_{M(C)} = 0$ و درنتیجه همواره داریم :

$$P_{A(C)} + P_{B(C)} = \frac{AB^2}{2}$$

و بعکس اگر این رابطه برقرار باشد $P_{M(C)} = 0$، و نقطهٔ M روی دایره است.

۳۲۲. راه اول. از M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. با توجه به این که $\vec{OA}=-\vec{OB}$ است، با فرض $OM=d$ در مثلثهای MAO و MBO داریم:

$$\vec{MA}=\vec{MO}+\vec{OA} \qquad (۱)$$

$$\vec{MB}=\vec{MO}+\vec{OB}\Rightarrow \vec{MB}=\vec{MO}-\vec{OA} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \vec{MA}.\vec{MB}=(\vec{MO}+\vec{OA}).(\vec{MO}-\vec{OA})=|\vec{MO}|^۲-|\vec{OA}|^۲$$

$$\Rightarrow \vec{MA}.\vec{MB}=d^۲-R^۲=P_{M(C)}$$

امّا $\vec{MA}.\vec{MB}=MA.MB\cos A\hat{M}B$، پس:

$$MA.MB.\cos A\hat{M}B=d^۲-R^۲=P_{M(C)}=C^{te}$$

راه دوم. بنا به رابطهٔ کسینوسها در مثلث MAB داریم:

$$AB^۲=MA^۲+MB^۲-۲MA.MB\cos A\hat{M}B \qquad (۱)$$

امّا بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث MAB،

$$MA^۲+MB^۲=۲MO^۲+\frac{AB^۲}{۲} \qquad (۲)$$

است از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$AB^۲=۲OM^۲+\frac{AB^۲}{۲}-۲MA.MB\cos A\hat{M}B$$

$$\Rightarrow ۲MA.MB\cos A\hat{M}B=۲OM^۲-\frac{AB^۲}{۲}=۲OM^۲-۲R^۲$$

$$\Rightarrow MA.MB.\cos A\hat{M}B=OM^۲-R^۲=P_{M(C)}= \text{مقدار ثابت}$$

۳۲۳. 1. برابر است با طول مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شود.

۳۲۴. با فرض $AB=a$، اندازهٔ هر قسمت از پاره‌خط AB وقتی به n قسمت برابر تقسیم شود، برابر $\frac{a}{n}=\frac{AB}{n}$ است. پس اگر M نقطهٔ تقسیم kام و N نقطهٔ تقسیم mام باشد، داریم:

$$MA=\frac{ka}{n}\Rightarrow MB=\frac{(n-k)a}{n}$$

$$NA=\frac{ma}{n}\Rightarrow NB=\frac{(n-m)a}{n}$$

$$\frac{P_{M(C)}}{P_{N(C)}}=\frac{\overline{MA}.\overline{MB}}{\overline{NA}.\overline{NB}}=\frac{MA.MB}{NA.NB}=\frac{\frac{ka}{n}.\frac{(n-k)a}{n}}{\frac{ma}{n}.\frac{(n-m)a}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{M(C)}}{P_{N(C)}}=\frac{k(n-k)}{m(n-m)}$$

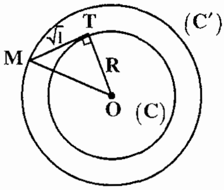
۲.۱۲.۳. سایر مسأله های مربوط به قوت نقطه

۳۲۵. دایرهٔ $C\,(O,R)$ و نقطهٔ M را که یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر است در نظر می‌گیریم. قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (C) برابر است با :

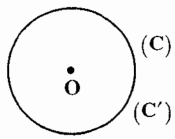
$$d^2 - R^2 = l$$

از آن‌جا، $OM = d = \sqrt{R^2 + l}$ ، عکس این مطلب نیز درست است. پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2 + l}$ است که اگر :

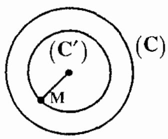
الف. $l > 0$ باشد، شعاع دایرهٔ مکان از R بیشتر است، یعنی دایرهٔ (C) درون دایرهٔ مکان واقع است.



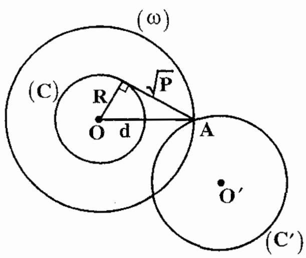
ب. $l = 0$ باشد، شعاع دایرهٔ مکان برابر R است، یعنی دایرهٔ مکان بر دایرهٔ (C) منطبق است.



پ. $l < 0$ باشد، شعاع دایرهٔ مکان از R کمتر است، یعنی دایرهٔ مکان در درون دایرهٔ (C) قرار می‌گیرد.

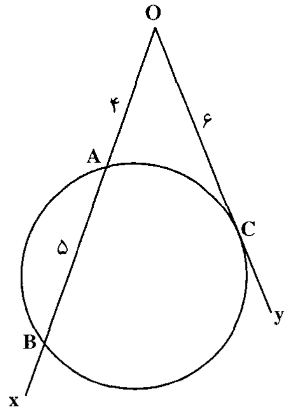


۳۲۶. دایرهٔ $C\,(O,R)$، و خط D یا دایرهٔ $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت به دایرهٔ $C\,(O,R)$ قوت P دارد، دایرهٔ (ω) به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2 + P}$ است. بنابراین، نقطهٔ خواسته شده، محل برخورد دایرهٔ (ω)، با دایرهٔ (C')، یا خط D است.



بحث. اگر دایرهٔ (ω) به مرکز O و به شعاع $d = \sqrt{R^2 + P}$ با خط D، یا دایرهٔ (C') دارای یک یا دو نقطهٔ برخورد باشد، مسأله دارای یک یا دو جواب است ؛ و چنانچه نقطهٔ برخورد نداشته باشد، مسأله جواب ندارد.

۱۳.۳. ثابت کنید نقطه‌ها روی یک دایره‌اند



۳۲۷. با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$OB = OA + AB = ۴ + ۵ = ۹$

$OA.OB = ۴ \times ۹ = ۳۶ = (۶)^۲ = OC^۲$

پس سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره قرار دارند که درنقطهٔ C بر OC مماس است.

۳۲۸. ثابت کنید: $BM.BM' = BN.BN'$.

۳۲۹. از تشابه دو مثلث PAB و AQB نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ PBA و AQB با هم برابرند، نقطهٔ Q بر BP قرار دارد، و داریم:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{AB}{QB}$$

همچنین، از تشابه دو مثلث AQB و ABR تساوی دو زاویهٔ BAQ و ARB نتیجه شده و R بر AQ واقع بوده و داریم:

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AR}$$

از دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$AB^۲ = PB.QB = AQ.AR$$

دو نقطهٔ A و B ازمرکز دایرهٔ PQR به یک فاصله‌اند، و عمودمنصف AB محور تقارن این دایره است. بنابراین نقطه‌های P'، Q' و R' به دایرهٔ PQR تعلق دارند و نقطه‌های برخورد این دایره، با خطهای BR، AP' و AP می‌باشند.

۳۳۱. ۱. بنا به ویژگیهای خطهای همزاویه داریم:

$$\frac{\sin(AA',AB)}{\sin(AA',AC)} \cdot \frac{\sin(BB',BC)}{\sin(BB',BA)} \cdot \frac{\sin(CC',CA)}{\sin(CC',CB)}$$

$$= \frac{\sin(AA'',AC)}{\sin(AA'',AB)} \cdot \frac{\sin(BB'',BA)}{\sin(BB'',BC)} \cdot \frac{\sin(CC'',CB)}{\sin(CC'',CA)}$$

امّا بنا به فرض، حاصل طرف اول رابطهٔ بالا برابر ۱- است، پس طرف دوم نیز برابر ۱- می‌باشد. بنابراین بنا به عکس قضیهٔ سوا، خطهای AA''، BB'' و CC'' همرسند.

۲. فرض کنیم α'، β' و γ'، α''، β'' و γ'' تصویرهای نقطه‌های O' و O'' روی ضلعهای مثلث ABC باشند. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $A'O'\beta'$ و $AO''\gamma''$ که در زاویهٔ A مشترکند، متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{A\beta'}{A\gamma''}=\frac{AO'}{AO''}$$

و به همین ترتیب در دو مثلث $AO'\gamma'$ و $AO''\beta''$ خواهیم داشت:

$$\frac{A\gamma'}{A\beta''}=\frac{AO'}{AO''}$$

پس $\frac{A\beta'}{A\gamma''}=\frac{A\gamma'}{A\beta''}$ و یا $A\beta'.A\beta''=A\gamma'.A\gamma''$.

ازاین رابطه نتیجه می‌گیریم که چهار نقطهٔ β'، β''، γ' و γ'' بر یک دایره واقعند. مرکز این دایره نقطهٔ ω وسط $O'O''$ است، زیرا این نقطه محل برخورد عمودمنصفهای $\beta'\beta''$ و $\gamma'\gamma''$ می‌باشد. پس: $\omega\beta'=\omega\beta''=\omega\gamma'=\omega\gamma''$

و به همین ترتیب: $\omega\gamma'=\omega\alpha'=\omega\alpha''$

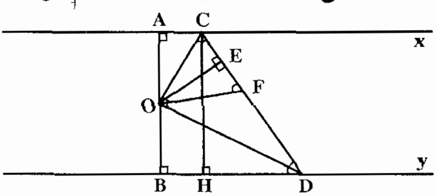
بنابراین تصویرهای O' و O'' روی ضلعهای مثلث، بر محیط دایره‌ای به مرکز ω قرار دارند.

۱۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به رابطه‌های متری در یک دایره

۳۳۲. ۱. $\hat{P}=\hat{P}$ و $P\hat{A}D=P\hat{C}B$.

۲. نسبت تشابه دو مثلث PAD و PBC را بنویسید.

۳۳۵. از نقطهٔ O خط OF (F روی CD) را موازی با x و y و از نقطهٔ C خط CH را عمود بر y رسم می‌کنیم. در ذوزنقهٔ ABDC چون OF موازی قاعده‌ها و O وسط ساق AB است، پس F وسط ساق CD می‌باشد، و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD، $CD=۲OF$ است. حال از O عمود OE را بر CD فرود می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که $OE=OA$ است. دو مثلث CHD و OEF متشابه‌اند. پس



$\frac{OF}{CD}=\frac{OE}{CH}$ و چون $CH=AB=۲OA$، پس $\frac{OF}{۲OF}=\frac{OE}{۲OA}$؛ یعنی $OE=OA$، بنابراین دایرهٔ به قطر AB (به مرکز O و به شعاع OA) درنقطهٔ E بر CD مماس است.

۳۳۶. تساویهای زیر را می‌نویسیم :

$$2S_{n-1} + n = n^2$$
$$2S_{n-2} + n - 1 = (n-1)^2$$
$$2S_{n-3} + n - 2 = (n-2)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2S_2 + 3 = 3^2$$
$$2S_1 + 2 = 2^2$$
$$1 = 1^2$$

تساویها را با هم جمع می‌کنیم، با توجه به تساوی :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = S_n^2$$

به‌دست می‌آید :

$$2(S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-1}) + S_n = S_n^2$$

که آن‌را می‌توان به‌صورت دایرهٔ فیثاغورسی نوشت :

$$\begin{array}{l} \quad S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-1} \\ + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + S_n \\ \quad S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{n-1} \end{array}$$

که مجموع همهٔ جمله‌های آن مساوی S_n^2 است.

مثال عددی را برای $n = 6$ می‌دهیم :

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 2 = 3$$
$$S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$
$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

محاسبه می‌کنیم :

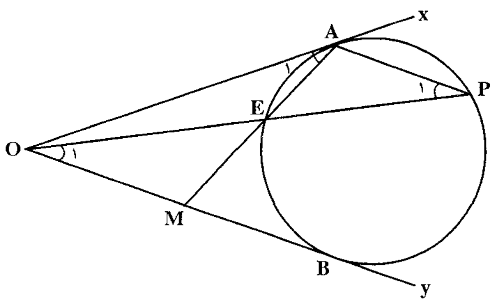
$$2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) + S_6 = 2(1 + 3 + 6 + 10 + 15) + 21$$
$$= 2 \times 35 + 21 = 91$$
$$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$$

۳۳۷. اگر Δ یکی از این خطها باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از خط Δ مقدارثابت $R\cos\alpha$ است.

۳۳۸. چون محیط خط شکستهٔ بسته برابر واحد است، فاصلهٔ دورترین نقطه‌های آن از یکدیگر، نمی‌تواند از $\frac{۱}{۲}$ تجاوز کند. اگر دو نقطهٔ A و B را روی خط شکسته، با بیشترین فاصلهٔ ممکن در نظر بگیریم، دایره‌ای که مرکز آن وسط پاره‌خط راست AB و شعاع آن برابر $\frac{۱}{۴}$ باشد، خط شکسته را به‌طور کامل می‌پوشاند.

۳۴۰. اگر O مرکز دایره باشد، ثابت کنید چهارضلعی PQOM محاطی است.

۳۴۱. از نقطهٔ E به نقطه‌های O و P وصل می‌کنیم. وسط پاره‌خط OB را M می‌نامیم. قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ مفروض، از طرفی برابر $MB^۲$ و ازطرفی برابر ME.MA می‌باشد؛ بنابراین داریم:



$$ME.MA = MB^۲ = OM^۲ \Rightarrow \frac{OM}{ME} = \frac{MA}{OM} \Rightarrow \Delta OME \sim \Delta OMA \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{O}_۱$$

وچون $\hat{A}_۱ = \hat{P}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}$ است، بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{P}_۱$. و با توجه به موازی بودن AP وOy نتیجه می‌گیریم نقطه‌های E و O و P بر یک استقامتند.

۱۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۴۲. ۱. کمان کوچک $\overset{\frown}{AB}$ برابر ۶۰° و کمان بزرگ $\overset{\frown}{AB}$ برابر ۳۰۰° است.

۲. $D\hat{A}B = ۹۰^\circ$ ، $A\hat{D}B = ۳۰^\circ$ و $A\hat{B}D = ۶۰^\circ$

۳. $DB = ۲R$ ، $AD = R\sqrt{۳}$ ، $S_{ABD} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R^۲$

۴. $AH = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ ، $DH = \frac{۳R}{۲}$ ، $D\hat{A}B = A\hat{C}D = ۶۰^\circ$ و

$$S_{ADE} = \frac{AD^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۴} = ۲۵\sqrt{۳}cm^۲$$

۳۴۳. ۱. کمان $\widehat{DC}$ برابر ۹۰° است. هریک از دو کمان متساوی $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ برابر ۴۵° است و $D\hat{A}B = A\hat{B}C = \frac{۳\pi}{۸}$ و $A\hat{D}C = D\hat{C}B = \frac{۵\pi}{۸}$.

۲. قاعدهٔ CD برابر ضلع مربع محاطی در دایره است؛ یعنی، $CD = R\sqrt{۲}$ و $AB = ۲R$ و $OH = \frac{C_۴}{۲} = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$ می‌باشد. پس:

$$S_{\text{ذوزنقه}} = (AB + CD) \times \frac{OH}{۲} = \frac{(۲R + R\sqrt{۲})}{۲} . \frac{R\sqrt{۲}}{۲} = \frac{R^۲(\sqrt{۲}+۱)}{۲}$$

۳. سطح مورد نظر برابر است با:

$$S_۱ = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ - \frac{R^۲}{۲}(\sqrt{۲}+۱) = \frac{R^۲}{۲}(\pi - \sqrt{۲} - ۱)$$

۳۴۴. ۱. رابطهٔ داده شده چنین نوشته می‌شود: $\frac{AC}{AM} = \frac{AP}{AB}$. پس مثلثهای ACP و AMB که دارای زاویهٔ مشترک A، و ضلعهای متناسب در طرفین این زاویه می‌باشند، متشابه‌اند و چون زاویهٔ AMB قائمه است، زاویهٔ ACP نیز قائمه می‌باشد، و نقطهٔ P روی خط عمودی که از C بر AB اخراج می‌شود واقع است. چهار ضلعی PCBM که در آن زاویه‌های M و C قائمه‌اند، محاطی است و چهار نقطهٔ P، C، B و M بر دایره‌ای به قطر PB واقع هستند. به سادگی واضح است که اگر نقطهٔ M تمام دایره را بپیماید، نقطهٔ P نیز تمام خط (D) مکان هندسی خود را خواهد پیمود و اگر نقطهٔ M فقط بر کمان $\widehat{IBI'}$ حرکت کند، نقطهٔ P نیز قطعه خط II' را خواهد پیمود.

۲. چون مثلث AIB قائم‌الزاویه است، داریم:

$AI^۲ = AB.AC$ و از طرف دیگر $AB.AC = AP.AM$.

پس: $AI^۲ = AP.AM$

ازاین رابطه معلوم می‌شود که دایرهٔ محیطی مثلث PIM درنقطهٔ I بر خط AI مماس است. بنابراین مرکز آن S روی خط عمود بر AI در نقطهٔ I واقع است. اگر نقطهٔ M بر I قرار گیرد، نقطهٔ S نیز بر I واقع می‌شود. اگر M روی B واقع شود، S بر وسط قطعه خط IB قرار خواهد داشت؛ و بالاخره، اگر M کمان $\widehat{BI'}$ را بپیماید، S نیمهٔ دیگر قطعه خط IB را خواهد پیمود؛ اگر M تمام دایره را طی کند، S تمام خط BI را طی خواهد کرد.

۳. زاویهٔ IMJ که در نیمدایرهٔ به مرکز S محاط است، قائمه است. همچنین اگر KI قطر دایرهٔ به مرکز O باشد، زاویهٔ IMK نیز قائمه است، پس خط MJ همواره از نقطهٔ ثابت K مرور می‌کند.

۴. اگر $AC=\frac{۱۸R}{۲۵}$ باشد، داریم : $BC=\frac{۳۲R}{۲۵}$ و در مثلث AIB داریم :

$$\overline{AI}^۲=AC\times AB=\frac{۳۶R^۲}{۲۵}$$

$$\overline{BI}^۲=BC\times AB=\frac{۶۴R^۲}{۲۵}$$

پس : $AI=\frac{۶R}{۵}$ و $BI=\frac{۸R}{۵}$

و نیز داریم : $\overline{IC}^۲=AC\times BC=\frac{۵۷۶R^۲}{۶۲۵}$

پس : $PC=\frac{۱۲R}{۲۵}$ و $IC=\frac{۲۴R}{۲۵}$

و از مثلث قائم‌الزاویهٔ APC به دست می‌آید :

$$\overline{AP}^۲=\overline{AC}^۲+\overline{PC}^۲=\frac{۳۲۴R^۲}{۶۲۵}+\frac{۱۴۴R^۲}{۶۲۵}=\frac{۴۶۸R^۲}{۲۵}$$

پس : $AP=\frac{۶R}{۵}\sqrt{۱۳}$

از رابطهٔ $AC\times AB=AP\times AM$ نتیجه می‌شود :

$$AM=\frac{AB\times AC}{AP}=\frac{۳۶R^۲\times ۵}{۲۵\times ۶R\sqrt{۱۳}}=\frac{۶R\sqrt{۱۳}}{۶۵}$$

برای محاسبهٔ MI، از تشابه دو مثلث IPM و API′ استفاده می‌کنیم. (دو زاویهٔ روبه‌رو و $A\hat{I}'P=I\hat{M}A$)

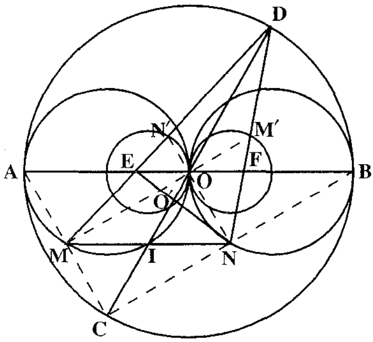
و داریم : $\frac{IM}{IP}=\frac{AI'}{AP}$

اما : $AI'=AI=\frac{۶R}{۵}$

پس : $IM=\frac{AI'\times IP}{AP}=\frac{۷۲R^۲\times ۵}{۱۲۵\times ۶R\sqrt{۱۳}}=\frac{۱۲R\sqrt{۱۳}}{۳۲۵}$

چهارضلعی IMJP محاطی است، بنابراین PJ در وسط IC برآن عمود است ؛ و بنابراین با BC موازی است ؛ پس نقطهٔ J نیز وسط IB است و درنتیجه $IJ=\frac{IB}{۲}$

و چون S مرکز دایره است، $IS=\frac{IB}{۴}=\frac{۲R}{۵}$.



۳۴۵. ۱. قطعه خط MN که وسطهای AC و BC را به هم متصل می‌کند، مساوی با نصف AB یعنی R است و از وسط OC می‌گذرد، به‌طوری که چهارضلعی OMCN یک مستطیل است. از این‌جا معلوم می‌شود که $DO = ۲OI$ ؛ یعنی، O محل تلاقی سه میانهٔ مثلث DMN است. اکنون قضیهٔ میانه‌ها را برای مثلث DMN می‌نویسیم :

$$\overline{DM}^۲ + \overline{DN}^۲ = \overline{۲DI}^۲ + \overline{۲IM}^۲ = ۲(\frac{۳R}{۲})^۲ + ۲(\frac{R}{۲})^۲ = ۵R^۲$$

و یا

$$\overline{DM}^۲ + \overline{DN}^۲ = \overline{MN}^۲ = ۶R^۲ = \text{مقدار ثابت}$$

۲. درمثلث قائم‌الزاویهٔ MON داریم :

$$MN^۲ = \overline{OM}^۲ + \overline{ON}^۲$$

اما ON مساوی با $\frac{۲}{۳}$ میانهٔ NN′ و OMمساوی با $\frac{۲}{۳}$ میانهٔ MM′ و بالاخره $MN = DO = R = \frac{۲}{۳}DI$. چون این مقدارها را در رابطهٔ بالا منظور کنیم، حکم ثابت می‌شود.

۳. چون داریم :

$$\frac{OD}{OI} = \frac{DE}{DM} = \frac{DF}{DN} = \frac{EF}{MN} = \frac{۲}{۳}$$

پس : $EF = \frac{۲}{۳}R$. اکنون تساوی

$$\overline{DM}^۲ + \overline{DN}^۲ = ۵R^۲$$

را که در قسمت اول ثابت کردیم، چنین می‌نویسیم :

$$\overline{DM}^۲ + \overline{DN}^۲ = ۹R^۲ - ۴R^۲$$

و پس از تقسیم طرفین بر ۹ و بردن جملهٔ $\frac{۴R^۲}{۹}$ به طرف اول، حاصل می‌شود :

$$(\frac{۲R}{۳})^۲ + (\frac{DM}{۳})^۲ + (\frac{DN}{۳})^۲ = R^۲$$

ویا :

$$\overline{EF}^۲ + \overline{ME}^۲ + \overline{FN}^۲ = \overline{MN}^۲$$

۴. چون $OI = \frac{R}{۲}$ است، مکان I دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع $\frac{R}{۲}$، و واضح است که I تمام این مکان را طی می‌کند. نقطه‌های M و N تصویرهای O روی

AC و BC، دو دایره به قطرهای OA و OB را می‌پیمایند و از نسبتهای $\frac{OM'}{OM}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{ON'}{ON}=\frac{۱}{۲}$، معلوم می‌شود که مکان M' و N' عبارت است از مجانسهای مکان M و N در تجانس به مرکز O و قوت $-\frac{۱}{۲}$؛ یعنی، دو دایره که قطرهای آنها نصف OB و نصف OA است و این دایره‌ها کاملاً پیموده می‌شوند.

۵. چون $EF=\frac{۲}{۳}R$، پس: $EO=OF=\frac{R}{۳}$ و نقطه‌های E و F ثابت هستند و تصویرهای A و B روی خطهای DM و DN بر دایره‌هایی که قطرهای آنها بترتیب AE و AF و BE و BF است، حرکت می‌کنند و تمام این دایره‌ها را می‌پیمایند.

۶. می‌دانیم که نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه، روی خطی واقع است که وسطهای دو قاعده را به‌هم وصل می‌کند، و این قطعه خط را به نسبت دو قاعده تقسیم می‌کنند. پس اگر نقطهٔ مزبور را O' بنامیم، داریم:

$$\frac{OO'}{O'I}=\frac{OE}{IN}=\frac{۱}{۳}:\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}$$

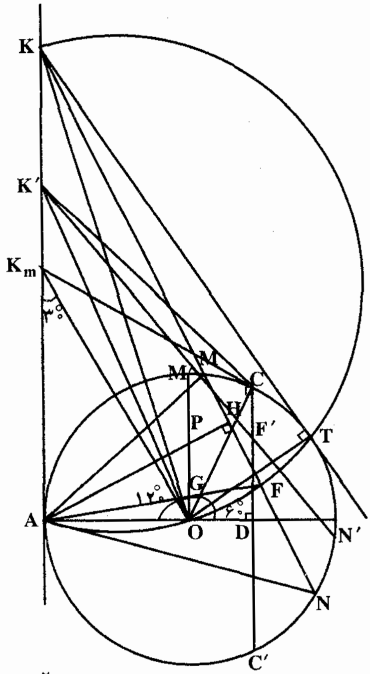
پس:

$$\frac{OO'}{۲}=\frac{O'I}{۳}=\frac{OI}{۵}=\frac{R}{۱۰}$$

و مکان O' دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع $\frac{R}{۵}$، و چون OD یک دور کامل دوران کند، این مکان نیز یک دور کامل پیموده می‌شود.

۳۴۶. ۱. نقطه‌ای مانند K روی Ax انتخاب می‌کنیم و مماس KT را بر دایره رسم می‌کنیم. واضح است که مثلث KOT قائم‌الزاویه است. به‌قطر OK دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با CC' را نقطهٔ F می‌نامیم، مثلث KOF هم در رأس F قائمه است، لذا FO بر KF عمود است و قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، لذا قسمتی از KF که بین دایرهٔ (O) محصور است (وتر) در نقطهٔ F واقع روی CC' نصف می‌شود. نقطهٔ F وسط وتر MN باید روی CC' قرار گیرد. اگر نقطهٔ F منطبق بر D شود دراین صورت MN به‌صورت CC' تبدیل می‌شود، لذا نقطهٔ K_M در بینهایت می‌افتد؛ ولی اگر نقطهٔ F بترتیب نقطه‌های واقع روی DC را طی کند، نقطه‌های K روی Ax به‌دست می‌آید. اگر نقطهٔ F بر C منطبق شود، OC همان OF خواهد بود، و عمود بر OF مماس بر دایره در نقطهٔ C می‌شود. محل برخورد این مماس با Ax نقطهٔ K_m می‌باشد، و می‌توان طول AK_m را حساب کرد. در مثلث OCD چون وتر OC دو برابر OD است، لذا $C\hat{O}D=۶۰^\circ$؛ و درنتیجه $A\hat{O}C=۱۲۰^\circ$ می‌شود و چون OK_m نیمساز است، لذا در مثلث AOK_m یکی از زاویه‌ها ۳۰° است؛ پس $OK_m=۲R$ می‌شود و

درنتیجه $AK_m = R\sqrt{۳}$. پس حدود نقطهٔ K از فاصلهٔ $AK_m = R\sqrt{۳}$ تا $+\infty$ می‌باشد.



۲. یکی ازمیانه‌های مثلث AMN خط AF می‌باشد و نقطهٔ G محل برخورد میانه‌ها در ثلث میانه واقع است، پس : $AG = ۲GF$ و چون $AO = ۲OD$ بوده است، لذا OG موازی خط CC' می‌شود ؛ یعنی، نقطهٔ G واقع بر قطر عمود بر AB می‌باشد. می‌دانیم در هر مثلث مجموع مربعین دوضلع، دو برابر مجموع مربعین میانه و نصف ضلع سوم می‌باشد، پس :

$$\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۲(\overline{AF}^۲ + \overline{MF}^۲)$$

و
$$\overline{AF}^۲ = \overline{AD}^۲ + \overline{DF}^۲$$

$$\overline{MF}^۲ = MF.NF = CF.C'F = (CD - DF)(CD + DF) = \overline{CD}^۲ - \overline{DE}^۲$$

پس خواهیم داشت :

$$\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۲(\overline{AD}^۲ + \overline{DF}^۲ + \overline{CD}^۲ - \overline{DF}^۲) = ۲(\overline{AD}^۲ + \overline{CD}^۲)$$

اما : $AD = \frac{۳R}{۲}$ و $\overline{CD}^۲ = \overline{OC}^۲ - \overline{OD}^۲$ یا :

یا : $\overline{CD}^۲ = \frac{۳R}{۴}$ پس : $CD = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$

$$\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۲(\frac{۹R^۲}{۴} + \frac{۳R^۲}{۴}) = ۶R^۲$$

۳. با استفاده از رابطهٔ $\overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ = ۶R^۲$ ، می‌گوییم : $AM.AN = ۲a.R$ ، پس عملیات جبری زیر را انجام می‌دهیم :

$$\begin{cases} \overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ + ۲AM.AN = ۶R^۲ + ۴aR \\ \overline{AM}^۲ + \overline{AN}^۲ - ۲AM.AN = ۶R^۲ - ۴aR \end{cases}$$

$$\begin{cases} AM + AN = \sqrt{۶R^۲ + ۴aR} \\ AM - AN = \sqrt{۶R^۲ - ۴aR} \end{cases}$$

$$AM = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۶R^۲ + ۴aR} + \sqrt{۶R^۲ - ۴aR}\right)$$

$$AN=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۶R^{۲}+۴aR}-\sqrt{۶R^{۲}-۴aR}\right)$$

$$\overline{HN}^{۲}=\overline{AN}^{۲}-\overline{AH}^{۲}=-\frac{۱}{۴}(۱۲R^{۲}-۲\sqrt{۳۶R^{۴}-۱۶a^{۲}R^{۲}})-a^{۲}$$

$$\Rightarrow HN=\sqrt{۳R^{۲}-\sqrt{۹R^{۴}-۴a^{۲}R^{۲}}-a^{۲}}$$

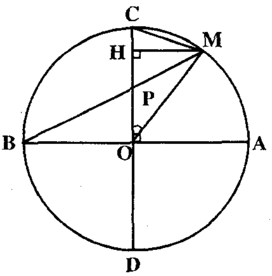
$$\overline{HM}^{۲}=\overline{AM}^{۲}-\overline{AH}^{۲}=\frac{۱}{۴}(۱۲R^{۲}+۲\sqrt{۳۶R^{۴}-۱۶a^{۲}R^{۲}})-a^{۲}$$

$$HM=\sqrt{۳R^{۲}-a^{۲}+\sqrt{۹R^{۴}-۴a^{۲}R^{۲}}}$$

$$MN=\sqrt{(۳R^{۲}-a^{۲})-R\sqrt{۹R^{۲}-۴a^{۲}}}+\sqrt{(۳R^{۲}-a^{۲})+R\sqrt{۹R^{۲}-۴a^{۲}}}$$

۴. مکان هندسی محل برخورد ارتفاعهای مثلث PFF' خط راستی موازی قطر AB است.

۳۴۷. ۱. داریم:



$$P\hat{C}M=C\hat{P}M=\frac{۱۳۵^{\circ}}{۲}=۶۷^{\circ},۳۰'$$

۲. مثلثهای متساوی‌الساقین CMP و COM که هرکدام یک زاویهٔ ۴۵° دارند، متشابه‌اند. پس $CM^{۲}=CP.CO$

۳. $CM=۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}cm$ و $PC=۲(۲-\sqrt{۲})cm$

۴. $tgP\hat{M}H=tg۲۲^{\circ},۳۰'=\sqrt{۲}-۱$

۳۴۸. ۱. برای نقطهٔ I دو مکان هندسی جستجو کنید.

۲. دو مثلث متشابه بیابید که شامل ضلعهای CM و CN باشند.

۳. شکل را رسم کنید و ازاین ویژگی استفاده کنید که I از دو خط OA و OD به یک فاصله است.

۳۴۹. ۱. DE ارتفاع سوم مثلث ADC است که دو ارتفاع دیگرش AH و CM می‌باشند، و $B\hat{E}A=۹۰^{\circ}$ است.

۲. ثابت کنید $ID=IM=IC$ است.

۳. DEC مثلثی قائم‌الزاویه در رأس E است، و داریم $IE=\frac{DC}{۲}$. پس $IM=IE$ و از آن‌جا IE مماس بر دایرهٔ (O) است.

۴. مثلثهای AMC و AHC که بترتیب در رأسهای M و H قائم‌الزاویه‌اند، در دایره‌ای به قطر AC محاطند. نقطهٔ S مرکز این دایره وسط AC است. نقطهٔ C روی

خط Δ تغییر می‌کند. نقطهٔ S روی خط Δ' که از وسط AH موازی Δ رسم شده است، جابه‌جا می‌شود و همهٔ نقطه‌های این خط به مکان هندسی نقطهٔ S تعلق دارند.

۵. مثلثهای OHI و OKJ متشابه‌اند و داریم $\frac{OH}{OK}=\frac{OI}{OJ}=\frac{HI}{HJ}$. از دو نسبت اول، رابطهٔ $OJ.OH = OI.OK$ به‌دست می‌آید.

مثلث OMI دررأس M قائم‌الزاویه است و MK ارتفاع آن است.از آن‌جا :

$$OK.OI = OM^{2} = R^{2} = \overline{OJ}.\overline{OH} \Rightarrow OJ = \frac{R^{2}}{OH} = C^{te}$$

درنتیجه نقطهٔ J روی خط OH ثابت است، و خط ME ازاین نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۳۵۰. ۱. نقطه‌های M' و M'' نسبت به قطر AB قرینهٔ یکدیگرند، پس $\hat{K}_2 = \hat{K}_3$ و $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ چون متقابل به رأسند، درنتیجه $\hat{K}_1 = \hat{K}_3$.

۲. این دو مثلث دو زاویهٔ مساوی دارند، پس متشابه‌اند، زیرا :

$$K\hat{M}O = O\hat{S}M \ , \quad K\hat{O}M = M\hat{O}S$$

پس داریم :

$$\frac{OM}{OK} = \frac{OS}{OM} = \frac{MS}{KM}$$

$$\Rightarrow OM^{2} = OK.OS \Rightarrow OK.OS = R^{2} \Rightarrow OK = \frac{R^{2}}{OS} = C^{te}$$

پس MM' همواره از نقطهٔ ثابت K می‌گذرد.

۳. داریم $M\hat{H}A = M\hat{K}A$ ، پس چهارضلعی MHKA محاطی است. درنتیجه $H\hat{K}A = A\hat{M}H = 90^\circ$ ؛ یعنی، $HK \perp AB$ است.

۴. نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث PAB است. ازآن‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ P خط $x'x$ است که در نقطهٔ K بر AB عمود شده است.

۳۵۱. ۱. در مثلث OMA دو خط MH و AP دو ارتفاع هستند، پس OI ارتفاع سوم مثلث است و بنابراین بر AM عمود است.

۲. دستگاه شعاعهای A(OPMQ) توافقی است و قطعه خط MH که از M به موازات شعاع AQ رسم شده و به دو شعاع AM و AO محدود است، در نقطهٔ برخورد خود با AP (مزدوج AQ) نصف می‌شود ؛ یعنی، MI=IH، بنابراین OI از وسط AQ که با HM موازی است نیز خواهد گذشت. از طرف دیگر اگر مماس PT را بر دایره رسم کنیم، TP=TA، و مثلث PQT نیز که در آن زاویه‌های P و Q متمم زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین ATP هستند نیز متساوی‌الساقین است ؛ یعنی، PT= QT ، پس نقطهٔ T وسط AQ است، و سه خط AQ و PT و OI همرسند.

۳. دو مثلث OHI و MHA که ضلعهای آنها نظیر به نظیر برهم عمودند، متشابه‌اند، پس داریم:
$$\frac{OH}{MH}=\frac{HI}{HA}$$
ویا:
$$HI\times MH=OH\times HA$$
اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ ONA داریم:
$$OH\times HA=\overline{HN}^{۲}$$
وچون I وسط قطعه خط MH است:
$$HI\times MH=\frac{\overline{HM}^{۲}}{۲}$$
بنابراین:
$$\overline{HM}^{۲}=۲\overline{HN}^{۲}\qquad(۱)$$
برای اثبات رابطهٔ دیگر بر دوطرف رابطهٔ (۱) مقدار $۲\overline{HO}^{۲}$ را می‌افزاییم؛ نتیجه می‌شود:
$$(\overline{OH}^{۲}+\overline{HM}^{۲})+\overline{OH}^{۲}=۲(\overline{OH}^{۲}+\overline{HN}^{۲})$$
و یا:
$$\overline{OM}^{۲}+\overline{OH}^{۲}=۲\overline{ON}^{۲}$$

۴. درحالتی که زاویهٔ AOQ مساوی با ۳۰ درجه باشد، درمثلث OAP، ضلع AP مقابل به زاویهٔ ۳۰ درجه مساوی با R، و $OP=R\sqrt{۳}$ است. درمثلث قائم‌الزاویهٔ OAQ داریم:
$$\overline{AP}^{۲}=PO\times PQ$$
پس:
$$R^{۲}=R\sqrt{۳}\times PQ \text{ و } PQ=\frac{R\sqrt{۳}}{۳}$$
به‌طوری که:
$$OQ=\frac{۴R\sqrt{۳}}{۳}$$
برای محاسبهٔ MH، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تقسیم OPMQ توافقی است، پس داریم:
$$\frac{۲}{OM}=\frac{۱}{OP}+\frac{۱}{OQ}=\frac{۱}{R\sqrt{۳}}+\frac{۳}{۴R\sqrt{۳}}=\frac{۷}{۴R\sqrt{۳}}$$
و یا: $OM=\frac{۸R\sqrt{۳}}{۷}$ و چون MH نصف OM است، پس $MH=\frac{۴R\sqrt{۳}}{۷}$.

برای محاسبهٔ طول ضلعهای مثلث AON، ابتدا از رابطهٔ $۲\overline{HN}^{۲}=\overline{HM}^{۲}$ نتیجه می‌گیریم:
$$۲\overline{HN}^{۲}=\frac{۴۸R^{۲}}{۴۹}$$
و یا:
$$HN=\frac{۲}{۷}R\sqrt{۶}$$
اکنون از دو رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:
$$\overline{AN}^{۲}+\overline{ON}^{۲}=۴R^{۲}$$
$$AN\times ON=OA\times HN=\frac{۴R^{۲}}{۷}\sqrt{۶}$$

دو برابر طرفین رابطهٔ دوم را یک‌بار با طرفین رابطهٔ اول عضو به عضو جمع کرده و یک بار از آن تفریق می‌کنیم، حاصل می‌شود :

$$(AN+ON)^۲ = ۴R^۲(۱+\frac{۲\sqrt{۶}}{۷})$$

$$(AN-ON)^۲ = ۴R^۲(۱-\frac{۲\sqrt{۶}}{۷})$$

پس :

$$AN+ON = ۲R\sqrt{\frac{۷-۲\sqrt{۶}}{۷}}$$

$$ON-AN = ۲R\sqrt{\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۷}}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$ON = R(\sqrt{\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۷}}+\sqrt{\frac{۷-۲\sqrt{۶}}{۷}})$$

و

$$AN = R(\sqrt{\frac{۷+۲\sqrt{۶}}{۷}}-\sqrt{\frac{۷-۲\sqrt{۶}}{۷}})$$

۳۵۲. از ویژگی نصف مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده کنید.

۳۵۳. ۱ و ۲ . رابطه‌های متری در مثلثهای قائم‌الزاویه و مثلثهای متشابه.

۳. ساده است.

۴. نقطهٔ H را به دو نقطهٔ ثابت وابسته کنید. مرکز دایرهٔ محاطی یک مثلث چه نقطه‌ای است؟

۳۵۴. ۱. چهارضلعیهای SAMB، SBN′A′ ، SA′M′B′ و SB′NA مستطیل می‌باشند، پس چهارضلعی MNM′N′ نیز مستطیل است که مرکز آن نقطهٔ O است.

۲. مثلث A′SB′ در رأس S قائم‌الزاویه و $H\hat{S}A' = S\hat{B}'A'$ است. پس SH ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث است، یعنی، $SH \perp A'B'$.

۳. بنابه قضیهٔ فیثاغورس :

$$AB^۲ + A'B'^۲ = (SA^۲ + SB^۲) + (SA'^۲ + SB'^۲) \qquad (۱)$$

$$A'B^۲ + B'A^۲ = (SA'^۲ + SB^۲) + (SB'^۲ + SA^۲) \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow AB^۲ + A'B'^۲ = A'B^۲ + B'A^۲$$

پس $AB^۲ + A'B'^۲ = ۴R^۲$ است.

۴. ثابت می‌شود که :

$MN'^۲ + N'M'^۲ = MM'^۲ = ۴OM^۲ = ۸R^۲ - ۴OS^۲ = C^{te}$

۵. مکان هندسی نقطه‌های M،N،M' و N' ، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $OM = \sqrt{۲R^۲ - OS^۲}$ است.

۳۵۵. ۱. دایره‌ای به قطر BC (یا دایره‌ای دلخواه که بر دو نقطهٔ B و C بگذرد) رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A مماس AT (T نقطهٔ تماس) را بر این دایره رسم می‌نماییم. $AT^۲ = AB.AC$ است. پس، AT واسطهٔ هندسی بین AB و AC است، و اندازهٔ آن برابر است با : $AT^۲ = ۱۶ \times ۶۴ \Rightarrow AT = ۳۲cm$

۲. دیدیم که $AT = AT' = ۳۲cm$ است و $OT = \frac{BC}{۲} = ۲۴cm$ ، در نتیجه $AO = \sqrt{۳۲^۲ + ۲۴^۲}$ و یا $AO = ۴۰cm$. از طرفی :

$AT^۲ = AI.AO \Rightarrow ۳۲^۲ = AI \times ۴۰ \Rightarrow AI = ۲۵/۶cm$

$AO.IT = AT.OT \Rightarrow ۴۰ \times IT = ۳۲ \times ۲۴ \Rightarrow IT = ۱۹/۲cm$

۳. به مرکز A و به شعاع AT قوسی می‌زنیم تا Oy را در نقطه‌های $T_۱$ و $T_۲$ قطع کند. دایرهٔ گذرنده بر Cو B و $T_۱$ ، در $T_۱$ (و دایرهٔ گذرنده بر B و C و $T_۲$ در $T_۲$) بر Oy مماس است. شعاع این دایره‌ها برابر است با $O_۱T_۱ = OA = ۴۰cm$.

۳۵۶. ۱. $B\hat{E}A = ۹۰^\circ$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ E نیمی از دایرهٔ به قطر AB است که در طرف نقطهٔ D واقع است.

۲. مثلث OAD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$ است، از طرفی $\hat{A}_۲ = \hat{D}_۱$ (خاصیت دو خط موازی)، پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ است.

۳. ثابت کنید $\widehat{CD} = \widehat{DG}$ است. از آن جا دو زاویهٔ مرکزی $C\hat{O'}D$ و $D\hat{O'}G$ که روبه‌رو به کمانهای برابرند با هم مساوی‌اند.

۴. داریم :

$BD = ۱۲cm$

$BE = \frac{۲۱۶}{۱۳} = ۱۶/۶cm$

$EA = \frac{۹۰}{۱۳} = ۶/۹cm$

$AG = \frac{۵۰}{۱۳} = ۳/۸cm$

۳۵۷. ۱. در ذوزنقهٔ محدب $CC'D'D$، OA خط میانه‌ای است، پس :

$CC' + DD' = ۲OA = ۲R$

$C'C.C'G = C'A^۲ \ , \ C'G = D'D \Rightarrow CC'.D'D = C'A^۲$

۲. مثلثهای ADC و AEF متشابه‌اند، پس داریم :

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{DC}$$

از آن‌جا رابطه‌های مورد نظر محاسبه می‌شوند.

۳. رابطهٔ $AD.AF = AC.AE$ نشان می‌دهد که چهار ضلعی $CDFE$ محاط در یک دایره است، و NFE دو قاطع از دایرهٔ محیطی هستند. پس $NC.ND = NE.NF$ اما $NB^۲ = NE.NF$.

۴. در این حالت $OM = ۲R = ۲OA$ و $AM = R\sqrt{۳}$ از آن‌جا :

$S_{\Delta ACM} = S_{\Delta OAM} = \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴}$. دو مثلث ECN و ACM متشابه با نسبت تشابه $\frac{CC'}{CH}$ می‌باشند، پس داریم :

$$S_{\Delta CEN} = \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴} \times ۹ = \frac{۹R^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

۳۵۸. ۱. چهار ضلعی $PHCB$ محاط در دایرهٔ (O) است، زیرا دو زاویهٔ روبه‌روی ۹۰° دارد $(\hat{H} = \hat{B} = ۹۰^\circ)$. مثلث PAC در رأس P قائم الزاویه است، زیرا از دو مثلث‌قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین PBA و PBC تشکیل شده است، $A\hat{P}B + B\hat{P}C = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$. خط PC قطر دایرهٔ (O) است ؛ در نتیجه PA بر این دایره مماس است.

$B\hat{H}C = B\hat{P}C = ۴۵^\circ$ است، پس $B\hat{H}C = \frac{۱}{۲}P\hat{H}C$ و HB نیمساز زاویهٔ PHC است.

۲. داریم :

$PD^۲ = PB^۲ + BD^۲ = a^۲ + ۴a^۲ = ۵a^۲ \Rightarrow PD = a\sqrt{۵}$

دو مثلث HCD و BPD متشابه‌اند، پس :

$$\frac{HC}{BP} = \frac{HD}{BD} = \frac{CD}{PD} \Rightarrow \frac{HC}{a} = \frac{HD}{۲a} = \frac{a}{a\sqrt{۵}} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{۵}}{۵} \ , \ HD = \frac{۲a\sqrt{۵}}{۵}$$

۳. خطهای QD و PC موازی‌اند، زیرا PQCB مربع است.

$S_{PARQ} = S_{PACQ} - S_{ARC} \Rightarrow S_{PARQ} = a^۲$

۳۵۹. ۱. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ AOC به قطر AC است. درچهارضلعی OAMC که محاط در این دایره است، $O\hat{C}M = ۴۵^\circ$ ؛در نتیجه $O\hat{A}M = ۱۳۵^\circ$ یا ۴۵° چون نقطهٔ A ثابت است، پس نقطهٔ M روی خط راستی مانند Δ که از A می‌گذرد و با Ox زاویهٔ ۴۵° یا ۱۳۵° می‌سازد جابه‌جا می‌شود. این خط امتداد Oy را در نقطهٔ B قطع می‌کند به قسمی که $OB = OA = a$ است. مثلث ACM در یک نیمدایره محاط است و CM به طور ثابت بر Δ عمود است ؛ لذا CM به موازات خودش جابه‌جا می‌شود. این وضعیت تا وضع $OM_۱$ ادامه می‌یابد، یعنی هنگامی که C بر نقطهٔ O منطبق می‌شود ؛ پس وقتی C، Oy را می‌پیماید مکان هندسی نقطهٔ M، نیمخط $M_۱\Delta$ است.

۲. مثلثهای OBA و MBC قائم‌الزاویه و متشابه‌اند، پس داریم :

$$\frac{OB}{MB} = \frac{BA}{BC} = \frac{OA}{MC}$$

میانه‌های متناظر این دو مثلث نیز نسبتی برابر با نسبتهای بالا دارند، یعنی $\frac{BD}{BI} = \frac{BO}{BM}$. پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BOD و BMI که دارای وتر و یک ضلع متناسبند، متشابه‌اند.

۳. داریم که $I\hat{B}M = D\hat{B}O = C^{te}$ ؛ پس نقطهٔ I روی نیمخط $BI\Delta'$ تغییر مکان می‌دهد. وقتی نقطهٔ C روی نقطهٔ O واقع شود، نقطهٔ I بر $I_۱$ (محل برخورد $B\Delta'$ و $OM_۱$) واقع است ؛ پس مکان هندسی نقطهٔI نیمخط $I_۱\Delta'$ است.

۴. داریم : $AM = ۲\sqrt{۲}cm \;,\; S_{OAMC} = ۱۴cm^۲$

۳۶۰. ۱. نقطهٔ M محل برخورد Δ با دایره‌ای به مرکز A و با شعاعی برابر OH است. درصورتی که $OH < \frac{OA}{۲}$ باشد، مسأله جواب ندارد.

۲. داریم :

$AQ = HO \;,\; QO = AH \;,\; \Delta AHM = \Delta QOP \Rightarrow PQ = MA$

$\Rightarrow MA = MP = AQ \Rightarrow$ AMPQ لوزی است

۳. ثابت می‌شود که $HN = OA$ ، پس مقدار ثابتی است.

۴. داریم : $y = \frac{x^۲ + a^۲}{۲a}$ (از مثلث قائم الزاویهٔ AHM استفاده کنید).

۳۶۱. ۱. اگر مسأله را حل شده بینگاریم، داریم : $OT^۲ = OA.OB$ و یا $OT^۲ = ۳۶a^۲$ و از آن جا $OT = ۶a$ پس روی Oy طول $OT = ۶a$ را جدا می‌کنیم. دایرهٔ

محیطی مثلث ATB جواب مسأله است.

۲. از T عمود TH را بر Ox فرود می‌آوریم. زاویهٔ OTH مساوی ۳۰ درجه است، پس:

$$TH = OT.\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}a \ , \ OH = \frac{OT}{۲} = ۳a$$

در دو مثلث OTA و OTB داریم:

$$TA^{۲} = OT^{۲} + OA^{۲} - ۲OA.OH \ , \ TB^{۲} = OT^{۲} + OB^{۲} - ۲OB.OH$$

$$\Rightarrow TA^{۲} = ۳۶a^{۲} + ۱۶a^{۲} - ۲۴a^{۲} = ۲۸a^{۲} \Rightarrow TA = ۲\sqrt{۷}a \ ,$$

$$TB^{۲} = ۳۶a^{۲} + ۸۱a^{۲} - ۵۴a^{۲} \Rightarrow TB = ۳\sqrt{۷}a$$

اگر R شعاع دایرهٔ محیطی باشد، داریم:

$$۲R.TH = TA.TB \Rightarrow R = \frac{۷\sqrt{۳}}{۳}a$$

۳. در مثلث ATB داریم:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{TA}{TB} = \frac{۲\sqrt{۷}a}{۳\sqrt{۷}a} = \frac{۲}{۳} \ , \ DA + DB = AB = ۵a \Rightarrow DA = ۲a \ ,$$

$$DB = ۳a \Rightarrow OD = ۶a$$

پس مثلث OTD متساوی‌الساقین است و چون زاویهٔ رأس آن °۶۰ است، پس متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

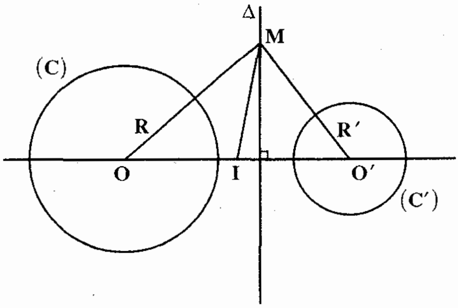
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴

رابطه‌های متری در دو دایره

۱.۴. رابطه‌های متری در دو دایره، در حالت کلی

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

۳۶۲. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با مرکزهای متمایز واقع در یک صفحه را در نظر می‌گیریم و خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم. اگر M یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت به دو دایره قوتهای مساوی داشته باشد، داریم:



$$\begin{cases} P_{M(O)} = d^2 - R^2 = OM^2 - R^2 \\ P_{M(O')} = d'^2 - R'^2 = O'M^2 - R'^2 \end{cases}$$

$$P_{M(O)} = P_{M(O')} \Rightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$
$$\Rightarrow MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 \qquad (1)$$

از طرفی در مثلث OMO' اگر I وسط پاره خط OO' و نقطهٔ H تصویر نقطهٔ M روی خط OO' باشد، داریم:

$$MO^2 - MO'^2 = 2\overline{OO'}.\overline{IH} \qquad (2)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$2\overline{OO'}.\overline{IH} = R^2 - R'^2 \Rightarrow \overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}} = C^{te}$$

چون I نقطهٔ ثابتی است پس H نقطهٔ ثابتی می‌باشد، یعنی همهٔ نقطه‌هایی که نسبت به دو دایرهٔ بالا قوت برابر دارند، تصویرشان روی خط‌المرکزین، نقطهٔ H است. پس این نقطه‌ها روی خط راستی مانند Δ قرار دارند که در نقطهٔ H بر خط‌المرکزین دو دایره عمود است که این خط را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

بعکس واضح است که هر نقطه‌ای از این خط، نسبت به دو دایره قوت برابر دارد.

بنابراین می‌توان گفت:

محور اصلی دو دایره مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت به دو دایره با مرکزهای متمایز، قوت مساوی دارد.

نکته. در حالت کلی برای رسم محور اصلی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با

مرکزهای متمایز، اگر I وسط OO' باشد، نقطهٔ H را روی OO' چنان تعیین می‌کنیم که $\overline{IH}=\frac{R^{2}-R'^{2}}{2\overline{OO'}}$ باشد. آنگاه خط Δ را در نقطهٔ H عمود بر خط OO' رسم می‌نماییم. امّا باید توجه داشت که رسم محور اصلی دو دایره، بنابر وضع نسبی آن دو دایره روشهای دیگری نیز دارد.

۳۶۳. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. مساحت دایرهٔ (C) را S و مساحت دایرهٔ (C') را S' می‌نامیم. داریم:

$$S=\pi R^{2}\ ,\ \ S'=\pi R'^{2}\Rightarrow\frac{S'}{S}=\frac{\pi R'^{2}}{\pi R^{2}}\Rightarrow\frac{S'}{S}=\frac{R'^{2}}{R^{2}}=\left(\frac{R'}{R}\right)^{2}$$

۴.۱.۲. نسبت مساحتها

۳۶۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۳۶۵. $\frac{1}{16}$

۳۶۶. $\frac{16}{25}$

۳۶۷. $\frac{9}{25}$

۳۶۸. نسبت قطرها و نسبت محیطها ۴، نسبت مساحتها ۱۶.

۳۶۹. گزینهٔ (ب) درست است؛ زیرا اگر شعاع دایرهٔ اول را R و شعاع دایرهٔ دوم را R' فرض کنیم، داریم:

$$\frac{60}{360}\times 2\pi R=\frac{45}{360}\times 2\pi R'\Rightarrow\frac{R}{R'}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}$$

۴.۱.۳. قوت نقطه نسبت به دایره

۳۷۰. در شکل داریم:

$$P-P'=(\overline{MO}^{2}-r^{2})-(\overline{MO'}^{2}-r'^{2})=(\overline{MO}^{2}-\overline{MO'}^{2})-(r^{2}-r'^{2})\qquad(1)$$

اما اگر ω وسط OO' باشد، داریم:

$$\overline{MO}^{2}-\overline{MO'}^{2}=2\overline{OO'}\times\overline{\omega M_1}$$

و اگر I پای محور اصلی فرض شود، داریم:

$$r^{2}-r'^{2}=2\overline{OO'}\times\overline{\omega I}$$

و رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$P-P'=2\overline{OO'}\times\overline{\omega M_1}-2\overline{OO'}\times\overline{\omega I}$$

یا

$$P-P'=2\overline{OO'}\times\overline{IM_1}$$

نکته: اگر M نقطه‌ای از (O') باشد، $P'=0$ بوده و $P=2\overline{OO'}\times\overline{IM_1}$ است.

۳۷۱. الف. ۱.

$$P+P'=MO^{2}+MO'^{2}-(R^{2}+R'^{2})$$

چون:

$$MO^{2}+MO'^{2}=\frac{OO'^{2}}{2}+2\overline{MI}^{2}=\frac{d^{2}}{2}+2\overline{MI}^{2}$$

پس :
$$P+P'=2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-(R^2+R'^2)$$

۲. داریم :
$$P-P'=2\overline{OO'}\times\overline{HM}=2d.\overline{HM}$$
$$4P.P'=(P+P')^2-(P-P')^2$$
$$4P.P'=(2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-R^2-R'^2)^2-4d^2.\overline{HM}^2$$

ب. با فرض $R=R'$ ، رابطهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت :

$$(2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-2R^2)^2-4d^2.\overline{HM}^2=4d^2.MK^2$$

و یا (۳)
$$4P.P'=(2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-2R^2)^2-4d^2.\overline{HM}^2$$

و یا :
$$(2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-2R^2)^2-4d^2(\overline{HM}^2+\overline{MK}^2)=0$$

چون محور اصلی دو دایره عمود منصف OO' است، پس داریم :

$$\overline{HM}^2+\overline{MK}^2=\overline{IM}^2$$

از آن جا :
$$(2MI^2+\frac{d^2}{2}-2R^2)^2-4d^2.MI^2=0$$

این رابطه را به ترتیب زیر می‌نویسیم :

$$(2MI^2+\frac{d^2}{2}-2R^2+2d.MI)(2MI^2+\frac{d^2}{2}-2R^2-2d.MI)=0$$

و یا :
$$\left[(2MI+d)^2-4R^2\right]\left[(2MI-d)^2-4R^2\right]=0$$

بالاخره :
$$[2MI+(d+2R)]\,[2MI+(d-2R)]\times$$

$$[2MI-(d-2R)]\,[2MI-(d+2R)]=0 \qquad (5)$$

دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اول، $d>2R$. در این حالت دو عامل اولیهٔ رابطهٔ (۵) نمی‌تواند صفر باشد از دو عامل آخر داریم :

$$2MI-(d-2R)=0$$
$$MI=\frac{d}{2}+R$$
$$2MI-(d+2R)=0$$
$$MI=\frac{d}{2}-R$$

مکان مطلوب از دو دایره تشکیل شده است که بر دو دایرهٔ (O) و(O′) مماسند.

(حالت دوم را مورد بحث قرار دهید.)

۴ . ۱ . ۴. محور اصلی دو دایره

۳۷۲. دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم که مرکزش در خارج خط‌المرکزین دو دایره واقع باشد و اولی را در A و B و دومی را در C و D قطع کند. محور اصلی دو دایره از نقطهٔ برخورد AB و CD می‌گذرد و بر خط‌المرکزین دو دایره عمود است.

۳۷۳. بخشی از محور اصلی دو دایره که در بیرون آنها واقع است، مکان هندسی مورد نظر است.

۳۷۴. چون بخشی از محور اصلی دو دایره که بیرون دو دایره است مکان هندسی نقطه‌ای است که می‌توان از آن‌جا دو مماس مساوی بر دو دایره رسم کرد، لذا، نقطهٔ برخورد این بخش از محور اصلی دو دایره با خط Δ نقطهٔ جواب مسأله است.

بحث. اگر Δ با محور اصلی دو دایره موازی باشد، مسأله جواب ندارد و چنانچه متقاطع باشد. مسأله دارای جواب است و چنانچه Δ بر محور اصلی دو دایره منطبق باشد، مسأله دارای بیشمار جواب است.

نکته. ممکن است به جای خط Δ دایره‌ای مانند (ω) باشد. در این صورت محل برخورد محور اصلی دو دایره با دایرهٔ (ω)، نقطهٔ مطلوب است.

۳۷۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. چون نقطهٔ C روی محور اصلی دو دایره واقع است، داریم : $CA \times CD = CB \times CE$ و چون دو خط ABو DE متوازی‌اند، بنابراین داریم : $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$، چون این دو تساوی را عضو به عضو درهم ضرب کنیم حاصل می‌شود : $\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2$ و یا $CA = CB$. بنابراین نقطهٔ C در محل تقاطع محور اصلی، با عمود منصف قطعه خط AB واقع است. مسأله عموماً یک جواب دارد.

۳۷۶. الف ـ بر (B و A) و (Dو C) بی‌نهایت دایره می‌گذرند که دوبه‌دو، دارای یک محور اصلی می‌باشند و قوت تمام نقطه‌هایشان نسبت به دو دایره مساوی است. از بین تمام دایره‌های گذرنده بر (Bو A) و (Dو C) یکی به قطر (AB) و(CD) است که محور اصلی آنها Δ بر OO' عمود است و چنانچه H پای عمود باشد، داریم :

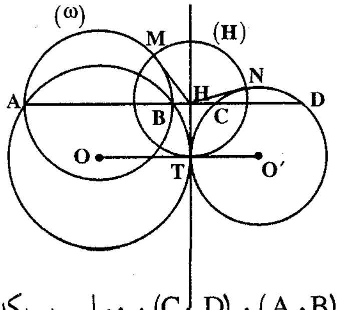
$$P_{H(O')} = \overline{HN}^2 = \overline{HC}.\overline{HD} \quad , \quad P_{H(O)} = \overline{HM}^2 = \overline{HB}.\overline{HA}$$

و در نتیجه :

$$\overline{HN}^2 = \overline{HM}^2 = \overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HC}.\overline{HD}$$

و از طرفی می‌دانیم قوت H نسبت به کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر B و A و همچنین دایره‌های گذرنده بر D و C مقداری است ثابت برابر :

$$P_{H(A,B)} = P_{H(C,D)} = \overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HC}.\overline{HD}$$



یعنی، قوت H نسبت به کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر (A و B) و (C و D) مساوی است. و یا این که H بر محور اصلی دوبه‌دوی آنها واقع است و یا به عبارت دیگر محور اصلی آنها از نقطهٔ ثابت H می‌گذرد.

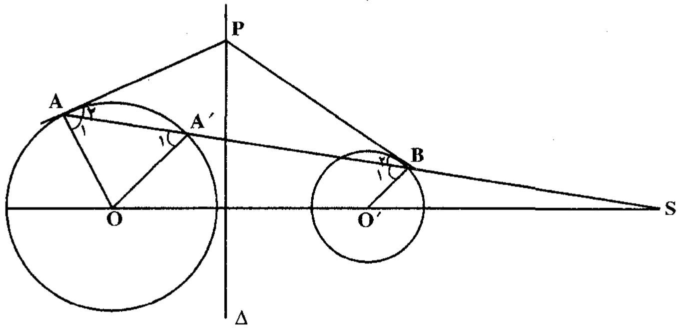
ب. اگر O و ′O دایره‌های دلخواه گذرنده بر (A و B) و (C و D) و مماس بر یکدیگر در نقطهٔ T باشند، مماس مشترک داخلی آنها محور اصلیشان بوده و بنا به قسمت الف، از نقطهٔ ثابت H می‌گذرد و در نتیجه :

$P_{H(O)} = P_{H(O')} = P_{H(\omega)} = \overline{HT}^2 = \overline{HM}^2 = \overline{HN}^2$

و یا : مقدار ثابت= $HT = HM = HN$. از آن‌جا مکان T نقطهٔ تماس، دایره‌ای است به مرکز H و شعاع $R = HM = HT = HN$ ، که از H مماس بر دایرهٔ به قطر AB یا CD رسم شده است ؛ و این دایره که از نقطه‌های تماس دایره‌های (O) و (′O) می‌گذرد، بر دو دایرهٔ (O) و (′O) که به قطرهای AB و CD رسم شده‌اند، عمود است.

۳۷۷. اگر P نقطهٔ دلخواهی از محور اصلی باشد، داریم $PA = PB$ و درصورتی که AB را رسم کنیم تا خط‌المرکزین دو دایره را در S قطع کند، داریم $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ و چون $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$ است (شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است)، لذا $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ و همچنین $\hat{A'}_1 = \hat{B}_1$ است، که در نتیجه $O'B \parallel OA'$ بوده و داریم :

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{SA'}{SB} = \frac{R}{R'} = K$$



یعنی وقتی P تغییر کند، B پیوسته مجانس ′A بوده و در نتیجه AB از S مرکز تجانس که ثابت است، می‌گذرد.

۵.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۸. داریم : $\Delta MHO \sim \Delta MH'O' \Rightarrow \frac{OH}{O'H'} = \frac{OM}{O'M}$

اگر AB خط ′OO رادر M قطع نکند، پس بنابراین در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند و

خواهیم داشت $\Delta BO'E \sim \Delta AOE$ و $\frac{OA}{O'B}=\frac{OE}{O'E}$. از طرفی چون $OA=OH$ و $O'B=O'H'$ ، پس طرفین دو تساوی با هم برابرند، یعنی :

$$\frac{OM}{O'M}=\frac{OE}{O'E}\Rightarrow\frac{OM}{O'M+OM}=\frac{OE}{O'E+OE}\Rightarrow\frac{OM}{OO'}=\frac{OE}{OO'}$$

در نتیجه : $OM=OE$ ؛ یعنی، نقطهٔ E همان نقطهٔ M است.

۳۷۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از B' خطی به موازات BM و از O' خطی به موازات OM رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M' قطع کنند. چون ضلعهای دو زاویه موازی یکدیگرند، پس $\hat{M}_2=\hat{M}'$ ، اما $\hat{M}_2=\hat{M}_1$ ، بنابراین $\hat{M}_1=\hat{M}'$.
در نتیجه چهار ضلعی $O'B'M'M$ محاطی می‌شود و دایرهٔ محاطی این چهارضلعی، دایرهٔ محیطی مثلث $O'MM'$ نیز می‌باشد، و از آن جا $\Delta OBM \sim \Delta O'B'M'$ ، و در نتیجه :

$$\frac{OB}{O'B'}=\frac{OM}{O'M'}\Rightarrow\frac{R}{R'}=\frac{OM}{O'M'}$$

بنابراین : مقدار معلوم $= \frac{R'.OM}{R} = O'M'$.
پس برای حل مسأله، M را به O وصل می‌کنیم، و از O' خطی به موازات OM رسم می‌کنیم و به طول $O'M'=\frac{R'.OM}{R}$ روی آن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ M' به دست آید. از M و M' دو مماس بر دو دایره رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقطه‌های B و B' قطع کند، O و O' را به B و B' وصل می‌کنیم. OB و $O'B'$ دو شعاع مورد نظر می‌باشند.

۳۸۰. از نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ (O,R) دو مماس AB و AC را بر دایرهٔ (r و I) رسم می‌کنیم. خط AI زاویهٔ BAC را نصف می‌کند (دایرهٔ محیطی را در K قطع می‌کند). قوت نقطهٔ I را نسبت به دایرهٔ (O,R) می‌نویسیم و با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت : $AI.IK=2Rr$.

از تشابه دو مثلث AIZ و $KK'C$ نتیجه می‌شود : $AI.CK=2Rr$ ، در نتیجه $IK=KC$ می‌شود و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و حکم ثابت است.

۳۸۱. نقطه‌های دیگر تماس واقع بر ضلعهای AB و BC را به ترتیب D و E می‌نامیم. نقطهٔ دوم برخورد دایره‌های اول و دوم را با پاره خط راست، به ترتیب X و Y می‌گیریم. در این صورت، بنابر ویژگی خط راستی که دایره را قطع می‌کند، داریم :

$|CX|\,.\,|CA|=|CE|^2$;

$|AY|.|AC|=|AD|^2$

ولی چون $|CE|=|AD|$ ، بنابراین به دست می‌آید :

$|CX|=|AY|\Rightarrow|AX|=|CY|$

۳۸۳. گزینهٔ (د) درست است.

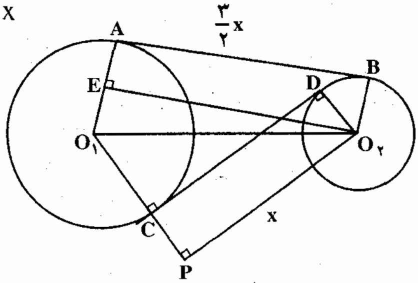
۲.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ برون هم (متخارج)

۴. ۲.۲. اندازهٔ خط المرکزین دو دایره

۳۸۴. $OO' = ۴\sqrt{۷}$

۳۸۵. $O_۲E$ را موازی AB و $O_۲P$ را موازی CD رسم می‌کنیم. طبق فرض داریم: $AB = \frac{۳}{۲}CD$. اگر CD را مساوی x فرض کنیم، داریم:

$O_۲P = x$ ، $O_۲E = \frac{۳}{۲}x$



از مثلثهای $O_۱EO_۲$ و $O_۱PO_۲$ داریم:

$$O_۱O_۲^۲ = O_۱E^۲ + \frac{۹}{۴}x^۲ \quad , \quad O_۱O_۲^۲ = O_۱P^۲ + x^۲$$

اکنون با توجه به رابطه‌های:

$$O_۱E = O_۱A - EA = O_۱A - O_۲B = ۵ - ۲ = ۳cm$$

$$O_۱P = O_۱C + CP = O_۱C + O_۲D = ۵ + ۲ = ۷cm$$

خواهیم داشت: $۹ + \frac{۹}{۴}x^۲ = ۴۹ + x^۲$

و از آن‌جا $x^۲ = ۳۲$

بنابراین $O_۱O_۲^۲ = ۴۹ + ۳۲ = ۸۱$

جواب: $O_۱O_۲ = ۹cm$

۳۸۶. گزینهٔ (د) درست است، زیرا اگر شعاعهای دو دایره را R و r $(r < R)$، و طول مماس مشترک خارجی دو دایره را t فرض کنیم، داریم:

$$t = \sqrt{d^۲ - (R - r)^۲} \Rightarrow ۲۴ = \sqrt{d^۲ - (۱۴ - ۴)^۲} \Rightarrow d = ۲۶$$

۴. ۳.۲. اندازهٔ مماس مشترک دو دایره

۳۸۷. گزینهٔ (هـ) درست است، زیرا: $TT' = \sqrt{۴۱^۲ - ۹^۲} = ۴۰$

۳۸۸. $۹\sqrt{۳}$

۳۸۹. ۱۲

۳۹۰. اندازهٔ مماس مشترک خارجی $۶\sqrt{۱۵}$ ، و اندازهٔ مماس مشترک داخلی $۶\sqrt{۷}$.

۳۹۱. داریم:

$$OD^{۲} = OO'^{۲} - O'D^{۲}$$

$$T_۱T_۱'^{۲} = OD^{۲} = d^{۲} - (R+R')^{۲} \Rightarrow T_۱T_۱' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}}$$

اندازهٔ مماس مشترک داخلی

$$O'C^{۲} = OO'^{۲} - OC^{۲}$$

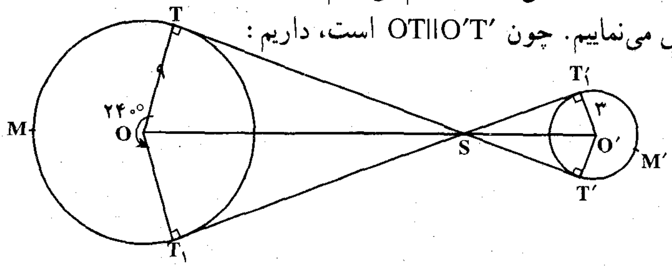
$$O'C^{۲} = d^{۲} - (R-R')^{۲}$$

$$O'C = TT' \Rightarrow TT' = \sqrt{d^{۲} - (R-R')^{۲}}$$

اندازهٔ مماس مشترک خارجی

۴.۲.۴. طول تسمه و محیط دایره

۳۹۲. نقطهٔ برخورد دو مماس مشترک داخلی دایره‌ها را S می‌نامیم و خط‌المرکزین دو دایره را که از نقطهٔ S می‌گذرد، رسم می‌کنیم، و از O و O′ به نقطه‌های تماس T و T′ وصل می‌نماییم. چون $OT \parallel O'T'$ است، داریم:



$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{SO'}{SO} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{SO'+SO}{SO} = \frac{۱+۳}{۳} \Rightarrow \frac{OO'}{SO} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴}{SO} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow SO = ۱۸\ ,\ \ OT = ۹ \Rightarrow T\hat{S}O = ۳۰^\circ \Rightarrow T\hat{O}S = ۶۰^\circ$$

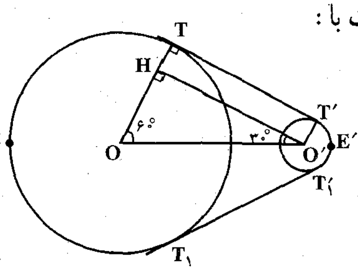
$$\Rightarrow T\hat{O}T_۱ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \widehat{TMT_۱} = \frac{۲}{۳} \times ۲\pi R = \frac{۲}{۳} \times ۲\pi \times ۹ = ۱۲\pi$$

$$\widehat{T'M'T_۱'} = \frac{۲}{۳} \times ۲\pi \times ۳ = ۴\pi\ ,\ \ TT' = \sqrt{OO'^{۲} - (R-R')^{۲}} = \sqrt{۵۷۶ - (۹-۳)^{۲}}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{۵۴۰} = ۶\sqrt{۱۵} \Rightarrow ۲TT' = ۱۲\sqrt{۱۵} \Rightarrow \text{طول تسمه} = ۱۶\pi + ۱۲\sqrt{۱۵}$$

۳۹۳. گزینهٔ (ب) درست است.

۳۹۴. طول تسمه برابر است با:



$$\widehat{TET_۱} + ۲\widehat{TT'} + \widehat{T'E'T_۱'}$$

اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'H$، $H\hat{O'}O = ۳۰^\circ$ است. زیرا $OH = ۱۵ - ۳ = ۱۲$ و $OO' = ۲۴$ است. در نتیجه $T\hat{O}O' = ۶۰^\circ$، و از آن جا $\widehat{TET_۱} = ۲۴۰^\circ$ و

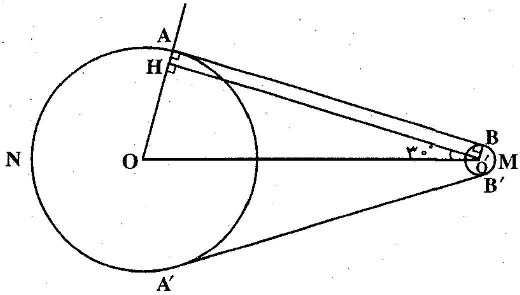
$\widehat{T'E'T'_1}=120^\circ$ است. بنابراین :

و $\widehat{TT_1}=15\times\frac{4\pi}{3}=20\pi$, $\widehat{T'T'_1}=3\times\frac{2\pi}{3}=2\pi$

$TT'=\sqrt{576-144}=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ طول تسمه $=20\pi+24\sqrt{3}+2\pi=22\pi+24\sqrt{3}$

۳۹۵. شعاع دایرهٔ کوچکتر را R فرض می‌کنیم، داریم :



$O'H \parallel AB \Rightarrow OA=7R$, $AH=R,$

$OO'=12R$, $OH=6R$, $H\hat{O}'O=30^\circ$

$B\hat{O}'O=120^\circ$, $\widehat{BMB'}=120^\circ \Rightarrow A'B'=AB=O'H=\sqrt{OO'^2-OH^2}$

$=\sqrt{144R^2-36R^2}=6\sqrt{3}R$, طول $\widehat{BMB'}=\frac{2\pi R}{3}$ و طول $\widehat{ANA'}=\frac{28\pi R}{3}$

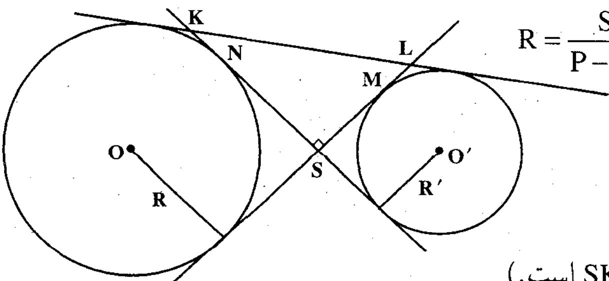
$\Rightarrow$ محیط شکل $=10\pi R+12\sqrt{3}R$

۴ .۲ .۵. مساحت شکلها

۳۹۶. $10R^2(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3})$

۳۹۷. محیط مثلث SKL را با $2p$ نشان می‌دهیم. طبق رابطهٔ $r_a=\frac{S}{p-a}$ خواهیم داشت :

$R=\frac{S_\circ}{P-SK}$, $R'=\frac{S_\circ}{P-SL}$



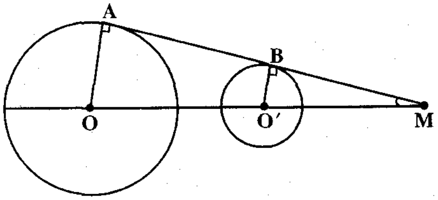
($S_\circ$ مساحت مثلث SKL است.)

$\Rightarrow R.R'=\frac{S_\circ^2}{(P-SK)(P-SL)}$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ رابطهٔ $S=(p-b)(p-c)$ برقرار است. لذا داریم:

$$R.R'=S_{\circ} \Rightarrow S_{KLMN}=S_{\circ}-S_{SMN}=RR'-\frac{۱}{۲}RR'$$
$$\Rightarrow S_{KLMN}=\frac{۱}{۲}RR'$$

۴ . ۲ . ۶. رابطه‌های متری



۳۹۸. اگر M نقطهٔ برخورد مماس مشترک AB با خط‌المرکزین دو دایره باشد و پاره‌خطهای OA و O′B را وصل کنیم، دو مثلث MAO و MBO′ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{MO}{MO'}=\frac{OA}{O'B}=\frac{R}{R'}$$

۳۹۹. از قوت نقطه نسبت به دایره استفاده کنید.

۴۰۰. الف . در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AON و AO′N′ $(\hat{N}=\hat{N'}=۹۰^\circ)$، زاویه‌های OAN و AO′N′ با هم برابرند، زیرا هر دو، متمم زاویهٔ O′AN′ می‌باشند، پس این دو مثلث متشابه‌اند.

ب. از تشابه این دو مثلث با توجه به این که AM = AN و AM′ = AN′ است، داریم:

$$\frac{AN}{O'N'}=\frac{ON}{AN'}\Rightarrow\frac{AM}{R'}=\frac{R}{AM'}\Rightarrow AM.AM'=R.R'$$

۴ . ۲ . ۷. محور اصلی دو دایره

۴۰۱. وسطهای مماسهای مشترک دو دایره، نقطه‌هایی هستند که از آنها مماسهای برابر بر دو دایره رسم شده است؛ پس بر محور اصلی دو دایرهٔ واقعند.

نکته. از این ویژگی برای رسم محور اصلی دو دایره متخارج می‌توان استفاده نمود. بدین ترتیب که اگر TT′ و $T_۱T'_۱$ دو مماس مشترک دو دایرهٔ متخارج باشند، نقطه‌های M و M′ وسطهای این دو مماس مشترک را پیدا کرده به هم وصل می‌کنیم. خط MM′ محور اصلی دو دایره است و یا می‌توان وسط یک مماس مشترک مثلاً نقطهٔ M را مشخص، و از این نقطه خطی عمود بر خط‌المرکزین دو دایره رسم نمود، که این خط محور اصلی دو دایره است.

۴۰۲. الف. چهار ضلعی EMFN دارای دو زاویهٔ قائمهٔ E و F است؛ بنابراین برای اثبات قسمت اول مسأله، کافی است ثابت کنیم که زاویهٔ M قائمه است و یا ضلع NF با

ضلع EM موازی است. در واقع چون زاویه‌های $FO'D$ و EOB که زاویه‌های خارجی دو مثلث متساوی‌الساقین FCO' و EAO می‌باشند، متساوی‌اند، پس زاویه‌های این دو مثلث نظیر به نظیر برابر یکدیگرند، و $E\hat{A}O = F\hat{C}O'$ ، پس NF با EM موازی و حکم اول ثابت است.

ب. چون خط MN از وسط مماس مشترک EF می‌گذرد، برای اثبات قسمت دوم کافی است ثابت کنیم که قوت نقطهٔ M نسبت به دو دایره مساوی است. از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MFE و MAD($\hat{E}_2 = \hat{A}\ ,\ \hat{E}_1+\hat{E}_2 = 90^\circ$) حاصل می‌شود :

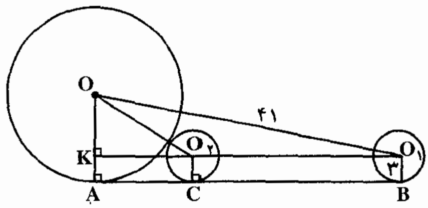
$$\frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MA} \Rightarrow ME.MA = MF.MD$$

یعنی قوت نقطهٔ M نسبت به دو دایره یکی است و حکم مسأله ثابت است.

۴ . ۲ . ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

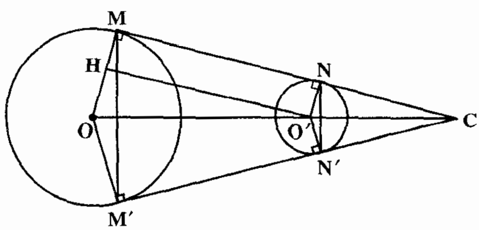
۴۰۳. اگر دایرهٔ (O) ثابت ودایرهٔ (O_1) به وضع O_2 بر دایرهٔ (O) مماس شود، می‌دانیم که :

$$O_1K = \sqrt{OO_1^2 - OK^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$$
$$O_2K = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \Rightarrow BC = O_1O_2 = O_1K - O_2K = 28$$



پس دایرهٔ (O_1) باید مسافت ۲۸ متر را طی کند، بنابراین ۲۸ دقیقه طول می‌کشد. بنابراین هر دایره ۱۴ دقیقه باید حرکت کند تا به هم برسند.

۴۰۴ . ۱. از نقطهٔ O' خط $O'H$ را موازی با MN و محدود به شعاع OM رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم: $OH = R - R'$ و $OO' = d$ پس :



$$O'H^2 = OO'^2 - OH^2 = d^2 - (R-R')^2 \Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} \qquad (1)$$

و چون چهارضلعی $O'HMN$ مستطیل است، $O'H = MN$ و رابطهٔ (۱) طول MN

را مشخص می‌کند. حال از تشابه دو مثلث OHO' و OMC داریم :

$$\frac{OH}{OM}=\frac{OO'}{OC}=\frac{O'H}{MC}\Rightarrow\frac{R-R'}{R}=\frac{d}{OC}=\frac{\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}}{MC}$$

$$\Rightarrow OC=\frac{Rd}{R-R'}\ ,\ \ MC=\frac{R\times\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}}{R-R'}$$

۲. نصف زاویهٔ C مساوی با زاویهٔ $OO'H$ است، پس :

$$\sin\frac{\hat{C}}{۲}=\sin O\hat{O'}H=\frac{OH}{OO'}=\frac{R-R'}{d}$$

۴۰۵. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا با توجه به مساوی بودن طول دو مماس رسم شده از یک نقطه بردایره، داریم :

$$PR=PX\ ,\ \ PS=PY\ ,\ \ QR=QV\ ,\ \ QS=QW$$

$$\Rightarrow PR+PS+QR+QS=XY+VW=۲XY$$

$$\Rightarrow ۲PQ=۲XY\Rightarrow PQ=XY$$

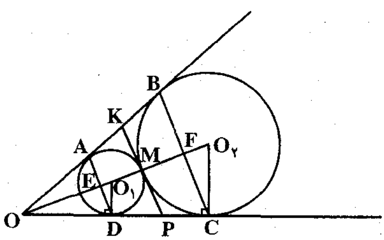
۳.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ مماس برون

۴.۳.۲. اندازهٔ شعاع

۴۰۶. $\frac{۲۰}{۳}cm$ و $\frac{۱۵}{۴}cm$. ثابت کنید که $B\hat{A}C=۹۰^\circ$ است. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم کنید.

۴۰۷. $۲\frac{۴۶}{۴۹}$ سانتی‌متر.

۴۰۸. همهٔ ترسیمهای کمکی ضروری را انجام می‌دهیم. خطهای مماس را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده و خط‌المرکزین $OO_۱O_۲$ را رسم می‌کنیم، سپس شعاعهای $O_۱D$ و $O_۲C$ را بر نقطه‌های تماس رسم می‌کنیم $O_۱D\perp CD$ و $O_۲C\perp CD$. از آن‌جا که خط‌المرکزین محور تقارن شکل، محسوب می‌شود از این‌رو نقطه‌های A و D و نقطه‌های B و C نسبت به محور $OO_۲$ دوبه‌دو متقارن خواهند بود. این نکته بدین معنی است که



ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. برای محاط کردن دایره‌ای در ذوزنقهٔ ABCD لازم و کافی است که تساوی $AD+BC=AB+CD$ یا به دلیل $AB=CD$ تساوی $AB=\frac{AD+BC}{2}$ برقرار باشد. از این رو کافی است که ثابت کنیم پاره‌خط AB میانهٔ ذوزنقهٔ مزبور به حساب می‌آید. اگر مماس مشترک داخلی KP را رسم کنیم، آن‌گاه:

$AK=KM$، $BK=KM$، $DP=PM$ و $CP=PM$ خواهد بود که به این معنی است که KP میانهٔ ذوزنقهٔ ABCD بوده و $KP=AB$ است. بدین ترتیب می‌توان در ذوزنقه دایره‌ای را محاط کرد که EF قطر آن باشد. اگر $O_1E=x$ و $O_2F=y$ را منظور کنیم، آن‌گاه از تساوی $MF=ME$ (میانهٔ KP پاره خط EF را نصف می‌کند) نتیجه می‌شود که $R-y=r+x$ است. از تشابه مثلث‌های O_1DE و O_2CF به $\frac{O_1D}{O_2C}=\frac{O_1E}{O_2F}$ یعنی $\frac{r}{R}=\frac{x}{y}$ دست می‌یابیم. از دستگاه معادلات

$\begin{cases} R-y=r+x \\ \frac{x}{y}=\frac{r}{R} \end{cases}$ درمی‌یابیم که $y=\frac{R^2-rR}{R-r}$ بوده و آن‌گاه شعاع دایرهٔ محاطی برابر

$R-y=\frac{2Rr}{R+r}$ خواهد بود.

۴۰۹. شعاع دایرهٔ مورد نظر را x فرض می‌کنیم: از O_3 مرکز این دایره خط MN را موازی AB رسم می‌کنیم، چون MN بر O_1A و O_2B و O_3D عمود است،

بنابراین داریم: $AM=BN=x$

و از آن‌جا: $O_1M=R-x\ ,\ O_1N=r-x$

از طرف دیگر داریم: $O_1O_3=R+x\ ,\ O_2O_3=r+x$

بنابراین خواهیم داشت: $MO_3=\sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2}=2\sqrt{Rx}$

و به همین ترتیب: $NO_3=2\sqrt{rx}$

و چون داشتیم: $MN=2\sqrt{Rr}$، نتیجه خواهد شد:

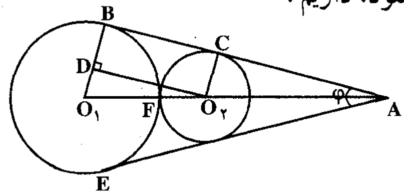
$$2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}=2\sqrt{Rr}$$

و از آن‌جا:

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}$$

$$x=\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$$

۴۱۰. طبق فرض داریم $B\hat{A}E=\varphi$، بنابراین $B\hat{A}O_1=\frac{\varphi}{2}$ می‌شود. اگر $O_1B=R$ و $O_2C=r$ فرض شود، داریم:



$$R+r=O_1F+FO_2=O_1O_2=d$$
$$R-r=O_1B-O_2C=O_1D$$

از طرف دیگر داریم $O_1D=O_1O_2\sin\frac{\varphi}{2}$، یعنی $R-r=d\sin\frac{\varphi}{2}$. از دو معادلهٔ به‌دست آمده، R و r محاسبه می‌شود:

$$R=\frac{d(1+\sin\frac{\varphi}{2})}{2}\ ,\ r=\frac{d(1-\sin\frac{\varphi}{2})}{2}$$

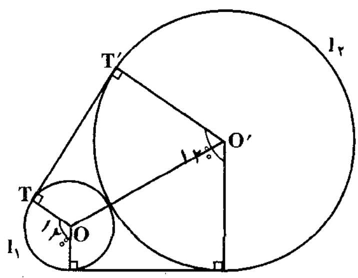
که می‌توان در صورت لزوم آنها را قابل محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم نمود.

$$R=d\cos^2(45^\circ-\frac{\varphi}{4})\ ,\ r=d\sin^2(45^\circ-\frac{\varphi}{4})$$

۴۱۱. نقطهٔ تماس دو دایره را D می‌نامیم. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABD را می‌خواهیم تعیین کنیم. این مثلث در رأس D قائم‌الزاویه است؛ بنابراین شعاع دایرهٔ محیطی آن برابر با نصف طول مماس مشترک AB است، یعنی، $R'=\frac{AB}{2}$.

۴.۳.۳. اندازهٔ محیط

۴۱۲. گزینهٔ (ج) درست است؛ زیرا کوتاهترین طول سیم، تشکیل شده از دو مماس مشترک خارجی، و دو قوس l_1 و l_2 از دو دایره. پس داریم:

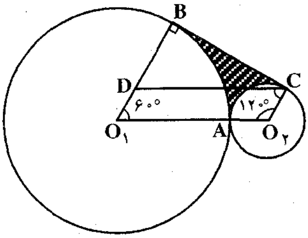


$$TT'=6\sqrt{3}\Rightarrow 2TT'=12\sqrt{3}\ ,\ l_1=\frac{120}{360}\times2\pi\times3=2\pi$$
$$l_2=\frac{240}{360}\times2\pi\times9=12\pi\Rightarrow \text{طول سیم}=12\sqrt{3}+14\pi$$

۴.۳.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۱۳. الف. $(a+b)\sqrt{ab}-\frac{\pi b^{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}(a^{۲}-b^{۲})\mathrm{Arc}\cos\frac{a-b}{a+b}$

ب. $\frac{\pi a^{۲}b^{۲}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۴}}$



۴۱۴. از C خطی موازی $O_۱O_۲$ رسم می‌کنیم تا $O_۱B$ را در نقطهٔ D قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD داریم:

$$CD=O_۱O_۲=۴\ ,\ BD=۲\ ,\ BD=\frac{CD}{۲}$$

$$\Rightarrow B\hat{C}D=۳۰^\circ\ ,\ B\hat{D}C=B\hat{O_۱}A=۶۰^\circ\ ,$$

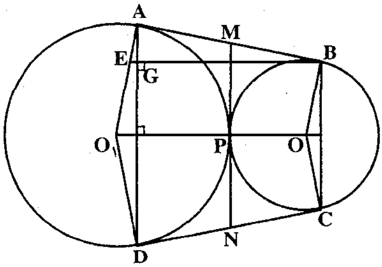
$$C\hat{O_۲}O_۱=۱۲۰^\circ \Rightarrow \text{مطلوب}\ S=S_{O_۱O_۲CB}-(S_{\text{قطاع}\ AoB}+S_{\text{قطاع}\ AO_۲C})$$

$$BC=\sqrt{CD^{۲}-BD^{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S=\left(\frac{۳+۱}{۲}\times ۲\sqrt{۳}\right)-\left(\frac{\pi\times ۳^{۲}\times ۶۰}{۳۶۰}+\frac{\pi\times ۱^{۲}\times ۱۲۰}{۳۶۰}\right)$$

۴۱۵. MN را مماس مشترک درونی دو دایره فرض می‌کنیم، چون داریم: $AM=MP=MB$ پس MN خطی است که وسطهای دو ساق ذوزنقهٔ ABCD را به هم وصل کرده است و بنابراین برابر با نصف مجموع دو قاعده است؛ در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{۲}(AD+BC)=MN=۲\sqrt{Rr}$$



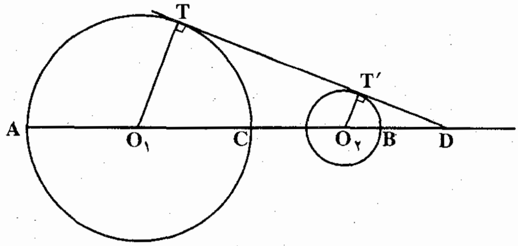
اکنون ارتفاع ذوزنقه یعنی BG را محاسبه می‌کنیم، داریم $BG=\frac{AB^{۲}}{BE}$. از طرف دیگر $BE=OO_۱=R+r$؛ و بنابراین $BG=\frac{۴Rr}{R+r}$، پس:

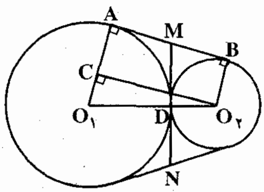
$$S=\frac{۸(Rr)^{\frac{۳}{۲}}}{R+r}$$

۴۱۶. $\frac{۵R^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$

۴. ۳. ۵. اندازهٔ پاره‌خط

۴۱۷. $\frac{R}{4}(8-3\sqrt{3}-\sqrt{7})$ و $\frac{R}{4}(3\sqrt{3}-\sqrt{7}-2)$، با قرار دادن $O_1B=x$ قانون کسینوسها را در مورد O_2B در مثلث O_2O_1B به کار بگیرید.





۴۱۸. اگر $BD=x$ و r شعاع دایرهٔ کوچک اختیار شود، با وصل کردن مرکز دایره‌ها به نقطه‌های تماس و استفاده از مثلثهای متشابه داریم:

$$\frac{x+r}{r}=\frac{x+5r}{3r}\Rightarrow x=r$$

پس گزینهٔ (ب) درست است.

۴۱۹. به سادگی ثابت می‌شود که: $MN=2MD=AB$.

اگر از O_2 به موازات AB رسم کنیم تا O_1A را در C قطع کند، از مثلث O_1O_2C که در آن داریم:

$$O_1O_2=R+r\ ,\ O_1C=R-r\ ,\ O_2C=AB$$

خواهیم داشت:

$$AB=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{R.r}\Rightarrow MN=2\sqrt{Rr}$$

۴۲۰. $20\sqrt{2}$

۴۲۱. ۱. داریم:

$$MA=MP\ ,\ MB=MP\Rightarrow MA=MB$$

یعنی M وسط پاره‌خط AB است و در مثلث APB، PM میانهٔ نظیر ضلع AB است. پس این مثلث قائم الزاویه در رأس P است، و دایره‌ای به قطر AB بر OO' در نقطهٔ P مماس است، زیرا مماس مشترک داخلی بر خط‌المرکزین عمود است.

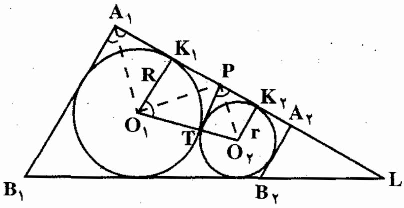
۲. در چهارضلعی حاصل، سه زاویهٔ قائمه است، پس زاویهٔ چهارم آن نیز قائمه است؛ یعنی، مثلث OMO' قائم‌الزاویه است.

۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMO' داریم :

$$MP^2 = R.R' \Rightarrow MP = \sqrt{R.R'} \Rightarrow AB = 2MP = 2\sqrt{RR'}$$

$$OM^2 = MP^2 + OP^2 = RR' + R^2 \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 + RR'}$$

۴۲۲. از تشابه مثلثهای O_1K_1P و PK_2O_2 به‌دست می‌آید $K_1P.PK_2 = Rr$. همچنین از تشابه مثلثهای $A_1K_1O_1$ و $A_2K_2O_2$ نتیجه می‌شود : $A_1K_1.K_2A_2 = Rr$. اکنون بدون زحمت به‌دست می‌آید :



$$K_1P = PK_2 = \sqrt{Rr} \;,\; A_1K_1 + K_2A_2 \geq 2\sqrt{Rr}$$

(واسطهٔ حسابی از واسطهٔ هندسی کمتر نیست.) بنابراین، اگر نقطهٔ A_2 ، که برای آن $K_2A_2 = \sqrt{Rr}$ ، بین K_2 و L واقع باشد آن وقت طول کوچکترین ساق ذوزنقه برابر می‌شود با :

$$A_1K_1 + K_1K_2 + K_2A_2 = 4\sqrt{Rr}$$

و اگر $A_2K_2 \geq K_2L$ ، یعنی :

$$\sqrt{Rr} \geq \sqrt{Rr}.\frac{2r}{R-r} = q \;,\; R \geq 3r$$

آن وقت :

$$A_1A_2 > 2\sqrt{Rr} + q + \frac{Rr}{q} = \sqrt{Rr}.\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$$

به این ترتیب به ازای $3r > R$ ، حداقل طول ساق برابر $4\sqrt{Rr}$ می‌شود. اگر هم $3r \leq R$ ، آن وقت ذوزنقه با کوچکترین ساق وجود ندارد.

در ضمن، می‌توان حکم کرد که طول ساق، از $\sqrt{Rr}.\frac{(R+r)^2}{2r(R-r)}$ بیشتر است (این ارزیابی دقیق است).

۴ . ۳ . ۶ . رابطه‌های متری

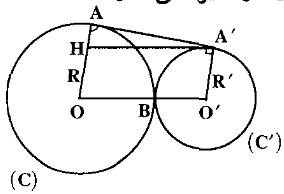
۴۲۳. T نقطه‌ای روی محور اصلی دو دایره و در خارج دو دایره است، پس مماسهای رسم شده از این نقطه بر دو دایره با هم مساوی‌اند.

۴۲۴. از قوت نقطه نسبت به دو دایره استفاده کنید.

۴۲۵. نقطهٔ تقاطع مماس مشترک داخلی دو دایره با مماس مشترک خارجی AB را M می‌نامیم. بنابه رابطهٔ طولی در دایره داریم :

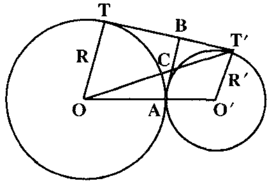
$$\begin{cases} MT^2 = MA^2 \\ MT^2 = MB^2 \end{cases} \Rightarrow MA^2 = MB^2 \Rightarrow MA = MB$$

راه دیگر. خط داده شده با شرایط بالا، محور اصلی دو دایره است و می‌دانیم که محور اصلی دو دایره از وسط مماسهای مشترک آن دو دایره می‌گذرد.



۴۲۶. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. و $A'H$ را موازی OO' رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'H$ داریم:

$$AA'^{2} = A'H^{2} - AH^{2}\ ,\ \ A'H = R+R'\ ,\ \ AH = R-R'$$
$$\Rightarrow AA'^{2} = (R+R')^{2} - (R-R')^{2} = 4RR' \Rightarrow AA'^{2} = 2R.2R'$$



۴۲۷. TT' مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد OT' و AB را C می‌نامیم. در مثلث $OT'O'$ خط AC موازی $O'T'$ است، پس:

$$\frac{AC}{OA} = \frac{O'T'}{OO'} \Rightarrow \frac{AC}{R} = \frac{R'}{R+R'} \Rightarrow AC = \frac{RR'}{R+R'}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'TT'$، $BC \parallel OT$ است، پس:

$$\frac{BC}{R} = \frac{T'C}{T'O} = \frac{R'}{R+R'} \Rightarrow CB = \frac{RR'}{R+R'}$$

$$AB = AC + CB = \frac{2RR'}{R+R'} \Rightarrow \frac{\frac{R+R'}{2}}{R} = \frac{R'}{AB}$$

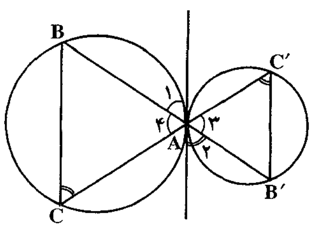
۴۲۸. با توجه به شکل داریم:

$$\Delta AOM \sim \Delta MAO' \Rightarrow MA^{2} = MO.MO'$$
$$\Delta MTC \sim \Delta MT'C \Rightarrow MC^{2} = MT.MT'$$

۴۲۹. ثابت کنید $CD \parallel MN$ است.

۴۳۰. دو مثلث CBE و CAD متشابه‌اند.

۴ .۳ .۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۳۱. مماس مشترک داخلی دو دایره را رسم می‌کنیم، داریم:

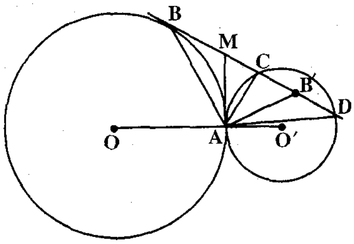
$$\hat{A}_4 = \hat{A}_3\ ,\ \ \hat{A}_2 = \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_1 = \hat{C}\ ,\ \ \hat{A}_2 = \hat{C'} \Rightarrow \hat{C} = \hat{C'}$$

پس دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند.

۴۳۲. نقطهٔ برخورد BB' با خط‌المرکزین دو دایره را M بنامید و ثابت کنید که $\frac{MO'}{MO}$ مقدار ثابتی است.

۴۳۳. مماس مشترک نقطهٔ A را رسم می‌کنیم تا BCD را در نقطهٔ M قطع کند، داریم:



$$MB = MA\ ,$$
$$MB^2 = MA^2 = MC.MD$$

MB' را به اندازهٔ MB جدا می‌کنیم. پس:

$$MB^2 = MB'^2 = MC.MD$$

بنابراین چهار نقطهٔ B و B' و C و D تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و مثلث BAB' در رأس A قائمه است، زیرا $MB = MA = MB'$، بنابراین AB و AB' نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی CAD می‌باشند.

۴. ۳. ۸. مسأله‌های ترکیبی

۴۳۴. ۱. دو مثلث MTO و $MT'O'$ متشابه‌اند، زیرا داریم:

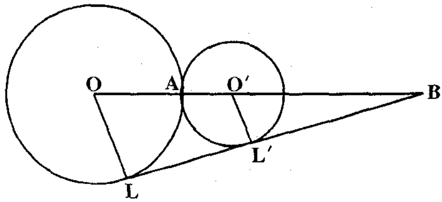
$$\frac{MT}{MT'} = \frac{R}{R'} = \frac{OT}{OT'}$$

و زاویه‌های T و T' قائمه‌اند. پس:

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'} = \frac{OA}{O'A}$$

در مثلث MOO' خط MA ضلع OO' را به دو قطعهٔ متناسب با دو ضلع مجاور تقسیم کرده است، بنابراین نیمساز زاویهٔ OMO' است.

۲. دیدیم که $\frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'}$، بنابراین نقطهٔM به وضعی است که نسبت فاصله‌های آن از دو نقطهٔ ثابت O و O' مساوی با مقدار ثابتی است. پس مکان هندسی آن، دایره‌ای است که دو انتهای قطرش، قطعه خط OO' را به نسبت $\frac{R}{R'}$ تقسیم می‌کنند. یکی از این دو نقطه A و دیگری محل برخورد مماسهای مشترک خارجی دو دایره است که آن را B می‌نامیم و می‌دانیم که تمام نقطه‌های این دایره جزو مکان است. برای محاسبهٔ قطر AB از تشابه دو مثلث BOL



و $BO'L'$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{BO}{R}=\frac{BO'}{R'}=\frac{OO'}{R-R'}=\frac{R+R'}{R-R'}$$

پس :

$$BO'=\frac{R'(R+R')}{R-R'}\ ,\ BA=R'+\frac{R'(R+R')}{R-R'}=\frac{۲RR'}{R-R'}$$

و شعاع دایرهٔ مکان هندسی، عبارت است از $\frac{RR'}{R-R'}$.

۳. قضیهٔ مربوط به طول نیمساز زاویهٔ داخلی را در مورد مثلث MOO' می‌نویسیم.

$$MA^۲=MO.MO'-OA.O'A=MO.MO'-RR'$$

امّا داریم $MO'=MO.\frac{R'}{R}$. بنابراین :

$$MA^۲=MO^۲.\frac{R'}{R}-RR'=\frac{R'}{R}(MO^۲-R^۲)$$

امّا $MO^۲-R^۲=MT^۲$ و $\frac{R'}{R}=\frac{MT'}{MT}$. پس :

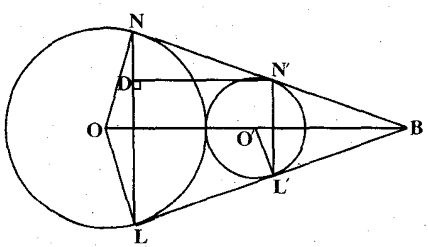
$$MA^۲=MT^۲.\frac{MT'}{MT}=MT.MT'$$

از طرف دیگر داریم :

$$MT^۲=MC.MA\ ,\ MT'^۲=MC'.MA$$
$$\Rightarrow MT^۲.MT'^۲=MC.MC'.MA^۲$$
$$\Rightarrow MT^۲.MT'^۲=MC.MC'.MT.MT'$$
$$\Rightarrow MT.MT'=MC.MC'$$

۴. دیدیم که $BO'=\frac{R'(R+R')}{R-R'}$. اگر $R=۳R'$ باشد، خواهیم داشت :

$$BO'=\frac{R'(۴R')}{۲R'}=۲R'=۲O'L'$$



پس در مثلث $BO'L'$ زاویهٔ $O'BL'$ مساوی با ۳۰ درجه و زاویهٔ بین دو مماس ۶۰ درجه است. چون زاویهٔ B مساوی با ۶۰ درجه است، زاویهٔ NOL مساوی با ۱۲۰ درجه و NL ضلع مثلث منتظم محاطی در دایرهٔ (O) است، یعنی $NL=R\sqrt{۳}$ و با همین استدلال $N'L'=\frac{R\sqrt{۳}}{۳}$. حال از N' عمود $N'D$ را بر NL فرود می‌آوریم ND نصف تفاضل دو قاعدهٔ ذوزنقه یعنی $\frac{R\sqrt{۳}}{۳}$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ

NDN' که زاویهٔ N' از آن ۳۰ درجه است، داریم:

$$NN' = ۲ND = \frac{۲R\sqrt{۳}}{۳} = LL'$$

و

$$N'D = \frac{\sqrt{۳}}{۲}ND = \frac{R}{۲}$$

و مساحت ذوزنقهٔ $NN'LL'$ عبارت است از:

$$S = (R\sqrt{۳} + \frac{R\sqrt{۳}}{۳})\frac{R}{۴} = \frac{R^{۲}\sqrt{۳}}{۳}$$

۴۳۵. ۱. داریم:

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow SO = ۲SO' = ۲(SO - OO')$$
$$\Rightarrow SO = ۲(SO - ۶) \Rightarrow SO = ۱۲$$

پس هنگامی که OM و $O'M'$ به موازات یکدیگر تغییر می‌کنند، نقطهٔ S ثابت می‌ماند.

۲. چهارضلعی $AMPM'$ مستطیل و $\hat{P} = ۹۰^\circ$ است.

۳. $B\hat{P}C = ۹۰^\circ$ است و ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت B و C می‌گذرند، پس مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به قطر BC و به مرکز نقطهٔ I وسط BC است. هنگامی که OM حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۳۶۰ درجه می‌چرخد، IP نیز حول نقطهٔ I به اندازهٔ ۳۶۰ درجه دوران می‌کند.

مکان هندسی نقطهٔ N وسط MM'، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ J وسط AI و به شعاع ۳ سانتی‌متر است.

۴. داریم:

$$AM' = ۲\sqrt{۳}cm \Rightarrow MM' = ۲\sqrt{۷}cm \quad , \quad S = ۸\sqrt{۳}cm^{۲}$$

۴۳۶. ۱. ثابت کنید $A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ$ یا $AC = AO + OC$.

۲. از قسمت اول استفاده کنید و از موقعیت نقطهٔ I در مثلث ABC.

۳ و ۴. از مثلثهای متشابه و رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید.

۴۳۷. ۱. ثابت کنید که $AI = OT$ است.

۲. از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOC داریم $x = \frac{d^{۲} - R^{۲}}{۲R}$.

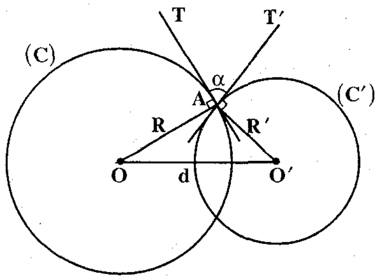
۳. اگر $x = R$ باشد، در آن صورت $d = R\sqrt{۳}$، $\cos O\hat{C}A = \frac{۱}{۲}$ و $O\hat{C}A = ۶۰^\circ$ است.

۴. داریم:

$$S = S_{\Delta OAC} - (S_{\text{قطاع } CAT} + S_{\text{قطاع } OTD})$$
$$\Rightarrow S = \frac{۲/۲۵\sqrt{۳}}{۲} - \left(\frac{\pi \times ۲/۲۵}{۶} + \frac{\pi \times ۲/۲۲۵}{۱۲}\right)$$

۴ . ۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ متقاطع

۴ . ۴ . ۱. تعریف و قضیه



۴۳۸. اگر A یک نقطهٔ تقاطع دو دایره باشد، در مثلث OAO'، زاویهٔ OAO' مکمل زاویهٔ بین دو دایره، یعنی مکمل $T\hat{A}T'=\alpha$ است. در این مثلث بنا به رابطهٔ کسینوسها داریم:

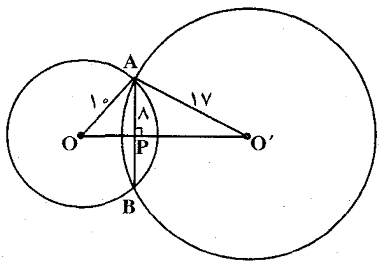
$$OO'^{۲}=OA^{۲}+O'A^{۲}-۲OA.O'A\cos O\hat{A}O'$$
$$\Rightarrow d^{۲}=R^{۲}+R'^{۲}-۲RR'\cos(\pi-\alpha)=R^{۲}+R'^{۲}+۲RR'\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{d^{۲}-(R^{۲}+R'^{۲})}{۲RR'}$$

۴۳۹. دو دایرهٔ عمود بر هم $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. اگر A یک نقطهٔ تقاطع دو دایره و AT و AT' مماسهای بر این دو دایره در نقطهٔ A باشند، بنا به فرض $T\hat{A}T'=۹۰^\circ$ است، و چون $O\hat{A}T=O'\hat{A}T=۹۰^\circ$ است، پس $O\hat{A}O'=۹۰^\circ$ و در نتیجه حکمهای ۱) و ۲) و ۳) و ۴) و ۵) ثابت می‌شود. در مورد حکم ۶) اگر قطر CD از دایرهٔ (C)، دایرهٔ (C′) را در نقطه‌های E و F قطع کند، داریم:

$$P_{O(C')}=\overline{OA}^{۲}=\overline{OE}.\overline{OF}\ ,\ \ OA=OC=OD$$
$$\Rightarrow OC^{۲}=OD^{۲}=\overline{OE}.\overline{OF}$$

پس (CDEF) تقسیم توافقی است. عکس موردهای بالا نیز درست است.

۴ . ۴ . ۲. اندازهٔ خط‌المرکزین



۴۴۰. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا اگر نقطهٔ برخورد خط‌المرکزین دو دایره با وتر مشترک AB را P بنامیم، با توجه به این که OO' عمودمنصف AB است، $AP=۸$ است. و در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP و $AO'P$ داریم:

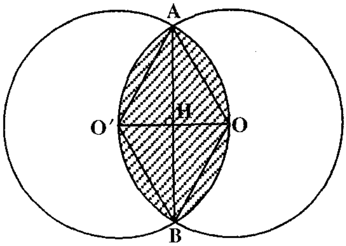
$$OP=\sqrt{۱۰^{۲}-۸^{۲}}=۶ \text{ و } O'P=\sqrt{۱۷^{۲}-۸^{۲}}=۱۵$$

و اگر O خارج دایرهٔ بزرگ باشد $\quad OO'=OP+PO'=۶+۱۵=۲۱$

و اگر O داخل دایرهٔ بزرگ باشد $\quad OO'=PO'-PO=۱۵-۶=۹$

۴. ۴. ۳. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۴۱. گزینهٔ (ج) درست است.



۴۴۲. وتر مشترک دو دایره را AB می‌نامیم و از O' عمود $O'H$ را بر AB فرود می‌آوریم.

$O'H = R$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'AH$، $O'H = \frac{R}{۲} = \frac{O'A}{۲}$ است، پس $O'\hat{A}H = ۳۰^\circ$ و در نتیجه $A\hat{O'}H = ۶۰^\circ$، پس $A\hat{O'}B = ۱۲۰^\circ$ است. از آن‌جا داریم:

$$\frac{S_{\text{شکل}}}{۲} = S_{\text{قطاع } O'AB} - S_{\Delta AO'B}$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰} = \frac{\pi R^۲}{۳}$$

$$\frac{S_{\text{شکل}}}{۲} = \frac{\pi R^۲}{۳} - \frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴\pi R^۲ - ۳R^۲\sqrt{۳}}{۱۲} = \frac{R^۲(۴\pi - ۳\sqrt{۳})}{۱۲}$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{R^۲(۴\pi - ۳\sqrt{۳})}{۶}$$

۴۴۴. $\frac{(۴\pi - ۳\sqrt{۳})(۴+\sqrt{۷})}{۲۷}$

۴۴۵. $۴۸cm^۲$

۴. ۴. ۴. زاویهٔ بین دو دایره

۴۴۶. ۲۴۰ درجه.

۴۴۷. چون $|R-R'| = ۱ < OO' = ۶ < R+R' = ۷$ است، پس دو دایره متقاطعند و داریم:

$$\cos\alpha = \frac{d^۲ - (R^۲ + R'^۲)}{۲RR'} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۳۶ - (۱۶+۹)}{۲\times۴\times۳} = \frac{۱۱}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctg}\frac{۱۱}{۲۴}$$

۴۴۸. داریم:

$$\cos\alpha = \frac{d^۲ - (R^۲ + R'^۲)}{۲RR'}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۴۹ - (R^۲ + ۲۵)}{۲\times۵\times R} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲۴ - R^۲}{۱۰R}$$

$$\Rightarrow R^۲ + ۵R - ۲۴ = ۰ \Rightarrow R = -۸ < ۰ \text{ و } R = ۳$$

پس شعاع دایرهٔ (C) برابر ۳ است.

۴. ۴. ۵. اندازهٔ پاره‌خط

۴۴۹. چون اندازهٔ خط‌المرکزین از مجموع دو شعاع کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر

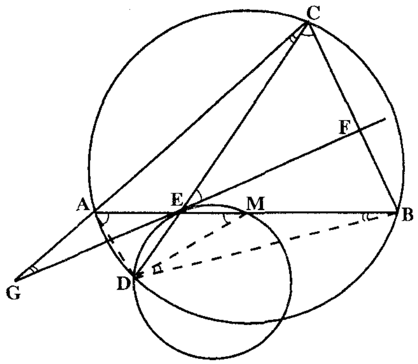
است، بنابراین دو دایره متقاطعند و مماس مشترک داخلی ندارند. اگر $O_1C = x$ و $O_2C = y$ فرض کنیم، داریم:

$$x - y = O_1O_2 = 21cm$$
$$x : y = O_1A : O_2B = 17 : 10$$

جواب: $O_2C = 30cm$ و $O_1C = 51cm$

۴۵۰. $\frac{R}{2}(\sqrt{7} - 1)$

۴۵۱. $0/6a$



۴۵۲. D را به A، B و M وصل می‌کنیم. چون $C\hat{E}F = D\hat{E}G = E\hat{M}D$ و $E\hat{C}F = M\hat{A}D$، $\Delta CEF \sim \Delta AMD$. بنابراین: $CE.MD = AM.EF$ از طرف دیگر، چون $E\hat{C}G = M\hat{B}D$ و

$C\hat{G}E = C\hat{E}F - G\hat{C}E = E\hat{M}D - M\hat{B}D = B\hat{D}M$،

$\Delta CGE \sim \Delta BDM$، لذا $GE.MB = CE.MD$ یعنی $GE.MB = AM.EF$

$$\frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{tAB}{(1-t)AB} = \frac{t}{1-t}$$

تذکر: در اثبات بالا، ما این واقعیت را به کار برده‌ایم که A بین G و C واقع است که آن، می‌تواند به صورت زیر ثابت شود. چنان که در شکل نشان داده شده، چون M (غیر از B) روی پاره‌خط BE واقع است، $M\hat{D}E < B\hat{D}E$. توجه کنید که $B\hat{E}F = M\hat{D}E$ و $B\hat{A}C = B\hat{D}E$. داریم $B\hat{E}F < B\hat{A}C$، بنابراین نقطهٔ A بین C و G قرار دارد.

۴. ۴. ۶. رابطه‌های متری

۴۵۳. اگر r و 'r بترتیب شعاعهای دو دایرهٔ (O) و ('O) باشند، می‌دانیم که در هر مثلث قطر دایرهٔ محیطی ضربدر ارتفاع وارد بر یک ضلع، مساوی است با حاصلضرب دو ضلع دیگر، بنابراین چون دایرهٔ (O) بر مثلث $O'AB$ محیط است، و ارتفاع وارد بر ضلع AB آن مساوی با 'r است، پس:

$$O'A \times O'B = 2r \times r'$$

۴۵۴. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C} = 90°)$ و $O'AT$ $(\hat{T} = 90°)$ داریم:

$$\overline{O'C}^2 = \overline{O'B}.\overline{O'A} \Rightarrow \overline{O'B} = \frac{\overline{O'C}^2}{\overline{O'A}} \quad (1)$$

$$\overline{O'T}^{2} = \overline{OF}.\overline{O'A} \Rightarrow \overline{O'F} = \frac{\overline{O'T}^{2}}{\overline{O'A}} \qquad (2)$$

از طرفی $O'T = O'C$ (۳)، پس :

$$(1)\ ,\ (2)\ ,\ (3)\ \Rightarrow\ O'B = O'F$$

۴۵۵. رابطه‌های زیر را ضرب کرده و ساده کنید :

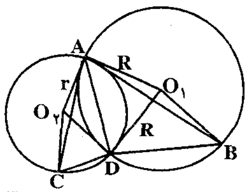
$$C = 2P\sin\hat{B} = \frac{pb}{R} \quad , \quad b = 2q\sin\hat{C} = \frac{qc}{R}$$

۴۵۶. چون زاویهٔ P قائمه است، پس BB' قطری از دایرهٔ (O) است و CC' قطری از دایرهٔ (O'). مثلثهای PBB' و PCC' به وسیلهٔ مورب OO' قطع شده‌اند، پس رابطه‌های زیر را داریم :

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}\cdot\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'P}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 \qquad \frac{\overline{O'C}}{\overline{O'C'}}\cdot\frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'P}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = 1$$

با قرار دادن $\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} = -1$، و از تقسیم عضو به عضو دو رابطهٔ بالا رابطهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

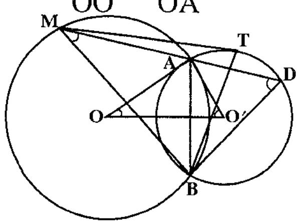
۴۵۷. به سادگی می‌توان تشابه دو مثلث O_1BD و O_2AD (و همچنین تشابه دو مثلث O_2CD و O_1AD) را ثابت کرد. از آن‌جا به دست می‌آید :



$$\frac{R}{|AD|} = \frac{r}{|BD|} \quad , \quad \frac{R}{|CD|} = \frac{r}{|AD|}$$

که در آنها، R و r، طول شعاعهای دو دایره‌اند. اگر این دو برابری را در هم ضرب کنیم، و به حساب آوریم که $r^2 : R^2 = |AB|^2 : |AC|^2$ به نتیجهٔ مطلوب می‌رسیم.

۴۵۸. نقطهٔ تقاطع دیگر دایرهٔ (C') با MA را D می‌نامیم و از D به B وصل می‌کنیم. دو مثلث MBD و AOO' متشابه‌اند زیرا در دایرهٔ (O')، $\hat{D} = \hat{O}' = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$، و در دایرهٔ (O)، $\hat{M} = \hat{O} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. پس : $\frac{MD}{OO'} = \frac{MB}{OA}$، درنتیجه :



$$\frac{MD}{MB} = \frac{OO'}{OA} = \frac{d}{R} \qquad (1)$$

از طرفی

$$MT^2 = MA.MD \Rightarrow \frac{MT^2}{MA.MB} = \frac{MA.MD}{MA.MB} = \frac{MD}{MB} \qquad (2)$$

$$(1)\ ,\ (2)\ \Rightarrow\ \frac{MT^2}{MA.MB} = \frac{d}{R} = C^{te}$$

۴۵۹. از قوت نقطهٔ P نسبت به دو دایره و برابری $PB = PF$ استفاده کنید. چهار ضلعی ACBE شبه لوزی است.

۴۶۰. چهارضلعی PBQC مربع است. در مثلث AQB، $QB \| DC$ است، پس داریم :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AD}{AB}$$

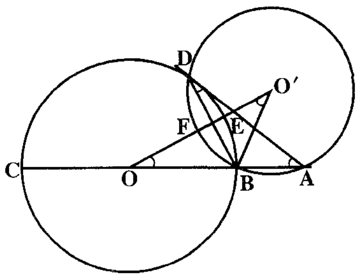
و در مثلث AQD ، چون $PB \| QD'$ است، پس داریم :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AD'}$$

در نتیجه :

$$\frac{AB}{AD'} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^۲ = AD.AD'$$

۴۶۱. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABD را O' می‌نامیم. دو مثلث ABD و $OO'B$ متشابه‌اند، زیرا :



$$\hat{O} = \widehat{EB} = \frac{\widehat{DEB}}{۲}$$ و

$$\hat{A} = \frac{\widehat{DFB}}{۲} = \hat{O'} = \widehat{FB} = \frac{\widehat{DFB}}{۲}$$

و چون AD مماس بر دایره است، $\hat{D} = \frac{DEB}{۲}$. پس $\hat{O} = \hat{D}$.

بنابراین :

$$\frac{DB}{OB} = \frac{AB}{O'B} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{O'B}{OB} \Rightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{R}{r}$$

۴۶۲. این دو مثلث به دلیل برابری دو زاویه متشابه‌اند، زیرا داریم :

$$A\hat{O'}O = \frac{\widehat{AEB}}{۲} = A\hat{M'}M \quad , \quad A\hat{O}O' = \frac{\widehat{AFB}}{۲} = A\hat{M}M'$$

۴۶۳. ۱. می‌دانیم که $MT^۲ = MA.MB$ و $MT'^۲ = MA.MB$ ، بنابراین $MT^۲ = MT'^۲$ و از آن جا $MT = MT'$.

۲. داریم :

$$MT^۲ = MN.MP \quad , \quad MT'^۲ = MN'.MP' \quad , \quad MT = MT'$$

درنتیجه :

$$MN.MP = MN'.MP'$$

پس چهارضلعی $NPP'N'$ محاطی است.

۴۶۴. اگر مرکزهای این دو دایره را O و O' بنامیم، دو مثلث AOO' و ABC متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{OA}{O'A} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{AB}{AC}$$

۴۶۵. مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است که اگر وتر مشترک آن با دایرهٔ محیطی مثلث را AM بنامیم و از M به B و C وصل کنیم. در چهارضلعی محاطی ABMC بنا به قضیهٔ بطلمیوس داریم:

$$b.MB + c.MC = a.AM$$

امّا بنا به فرض $b.MB = c.MC$ و $BC = ۲BD$ است. پس داریم:

$$c.MC = BD.AM \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{BD}{AB}$$

از این تناسب با توجه به برابری $A\hat{B}D = A\hat{M}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$، نتیجه می‌شود که دو مثلث AMC و ABD متشابه می‌باشند؛ بنابراین $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AD}$ و یا $b.c = m.d$.

۴۶۶. ۱. داریم:

$$EC.EB = ED.EA = EM.EH$$

۲. می‌دانیم: $EB = EM + MC$ و $EC = EM - MC$ و $MB = MC$ است، پس:

$$EM.EH = EB.EC = (EM + MC).(EM - MC) = EM^۲ - MC^۲$$

$$\Rightarrow MC^۲ = MB^۲ = EM^۲ - EM.EH = EM(EM - EH) = EM.MH$$

$$\Rightarrow MB^۲ = EM.MH$$

۴. ۴. ۷. قوت نقطه

۴۶۷. چون $M\hat{A'}B = M\hat{B'}A = ۹۰^\circ$ است، پس دایره‌های به قطرهای MB و MA از A′ و B′ می‌گذرند و این دو دایره در نقطهٔ دیگر C واقع بر AB متقاطعند، زیرا $M\hat{C}B + M\hat{C}A = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$، یعنی BC و AC در یک امتدادند و از آن‌جا:

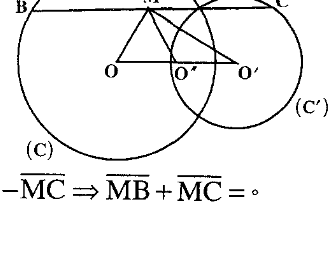
$$P_{A(\text{دایره به قطر } MB)} = \overline{AC}.\overline{AB}$$

$$P_{B(\text{دایره به قطر } MA)} = \overline{BC}.\overline{BA} = \overline{AB}.\overline{CB}$$

از جمع طرفهای نظیر دو رابطهٔ بالا داریم:

$$P_{A(\text{دایره به قطر } MB)} + P_{B(\text{دایره به قطر } MA)} = \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{CB}) = \overline{AB}.\overline{AB}$$
$$= \overline{AB}^۲ = C^{te}$$

۴۶۸. قاطع BAC را که از نقطهٔ A محل تقاطع دو دایره رسم شده است، در نظر می‌گیریم، و وسط پاره‌خط BC را M می‌نامیم. داریم:



$$\overline{MB} = -\overline{MC} \Rightarrow \overline{MB} + \overline{MC} = ۰$$

$$P_{M(C)} = \overline{MA}.\overline{MB} \quad , \quad P_{M(C')} = \overline{MA}.\overline{MC}$$

$$\Rightarrow P_{M(C)} + P_{M(C')} = \overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MA}.\overline{MC} = \overline{MA}(\overline{MB} + \overline{MC}) = \overline{MA} \times ۰ = ۰$$

برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ M، وسط پاره‌خط OO' را O'' می‌نامیم و از M به O و O' و O'' وصل می‌کنیم. در مثلث MOO' بنا به قضیهٔ میانه‌ها داریم :

$$MO^۲ + MO'^۲ = ۲MO''^۲ + \frac{OO'^۲}{۲}$$

امّا بنا به فرض :

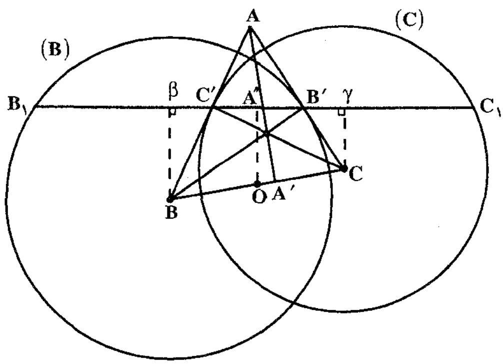
$$P_{M(C)} + P_{M(C')} = ۰ \Rightarrow OM^۲ - R^۲ + O'M^۲ - R'^۲ = ۰$$
$$\Rightarrow OM^۲ + OM'^۲ = R^۲ + R'^۲$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$۲MO''^۲ + \frac{OO'^۲}{۲} = R^۲ + R'^۲ \Rightarrow MO'' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(R^۲ + R'^۲) - OO'^۲}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M وقتی قاطع حول نقطهٔ تقاطع A دوران کند، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O'' وسط OO' و به شعاع ثابت $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(R^۲ + R'^۲) - OO'^۲}$ است.

۴۶۹. تصویرهای B و C را روی $B'C'$ بترتیب α و β می‌نامیم و فرض می‌کنیم $B_۱$ و $C_۱$ نقطه‌های برخورد $B'C'$ با دایره‌های به مرکزهای B و C باشد. چهارضلعی $BC'B'C$ قابل محاط شدن در دایرهٔ به قطر BC است و نقطهٔ A'' وسط وتر $B'C'$، وسط $\beta\gamma$ و نیز وسط $B_۱C_۱$ است، داریم :



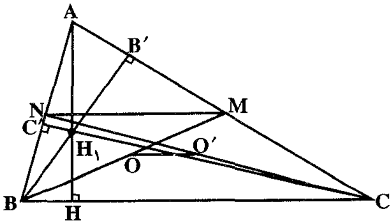
$$P_{A''(B)} = \overline{A''B'}.\overline{A''B_۱}$$
$$P_{A''(C)} = \overline{A''C'}.\overline{A''C_۱}$$

چون :

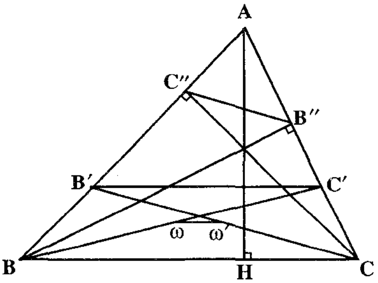
$$\overline{A''C'_۱} = -\overline{A''B'} \quad , \quad \overline{A''B_۱} = -\overline{A''C_۱}$$

پس نتیجه می‌شود که قوت نقطهٔ A'' نسبت به دایرهٔ (C)، برابر است با قوت نقطهٔ A'' نسبت به دایرهٔ (B).

۴ . ۴ . ۸. محور اصلی دو دایره



۴۷۰. ارتفاعهای BB' و CC' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را H_1 می‌نامیم. وسط پاره‌خطهای BM و CN را بترتیب O و O' نامیده، از M به N و از O به O' وصل می‌کنیم. در ذوزنقهٔ $MNBC$ خط OO' که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند، موازی قاعده‌هاست. دایرهٔ به قطر BM از نقطهٔ B' و دایرهٔ به قطر CN از نقطهٔ C' می‌گذرد و نقطهٔ H_1 نسبت به این دو دایره قوت برابر دارد، زیرا $H_1B.H_1B' = H_1C.H_1C'$ است. بنابراین H_1 یک نقطه از محور اصلی دو دایرهٔ بالاست. پس محور اصلی این دو دایره خطی است که از نقطهٔ H_1 بر OO' یا موازی آن، BC عمود می‌شود، و می‌دانیم که این خط ارتفاع رأس A یعنی AH است.



۴۷۱. دایره‌های به قطرهای BC' و CB' بترتیب از نقطه‌های B'' و C'' پاهای ارتفاعهای دیگر مثلث می‌گذرند. و $\omega\omega'$ خط‌المرکزین آنها موازی BC و $B'C'$ است. از آن‌جا AH ارتفاع وارد بر BC بر موازیش $\omega\omega'$ خط‌المرکزین دو دایره عمود می‌باشد، و کافی است ثابت کنیم که A یک نقطه از AH روی محور اصلی دو دایره است.

چهارضلعی $BCC''B''$ محاطی است، زیرا دایرهٔ به قطر BC از B'' و C'' می‌گذرد. پس:

$$P_{A(\text{دایرهٔ به قطر } BC)} = \overline{AB''}.\overline{AC} = \overline{AC''}.\overline{AB} \Rightarrow \frac{AB''}{AC''} = \frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

و چون $B'C' \| BC$ است، پس: (۲) $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC}$.

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB''}{AC''} \quad \text{و یا} \quad AB''.AC' = AB'.AC''$$

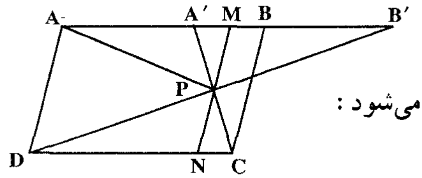
از این رابطه معلوم می‌شود که $P_{A(\text{دایرهٔ به قطر } B'C)} = P_{A(\text{دایرهٔ به قطر } B'C)}$ ؛ یعنی، نقطهٔ A روی محور اصلی دو دایره به قطرهای CB' و BC' است؛ یا به عبارت دیگر، AH محور اصلی دایره‌های به قطرهای BC' و CB' می‌باشد.

۴۷۲. اگر AD، BE و CF ارتفاعهای مثلث ABC و H نقطهٔ برخورد آنها باشد، داریم:

$$HA.HD = HB.HE = HC.HF$$

حال اگر خطهای سوایی AX و BY و CZ را در این مثلث قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم، این دایره‌ها بترتیب بر نقطه‌های D، E و F می‌گذرند، و چون سه حاصل‌ضرب بالا، قوتهای نقطهٔ H نسبت به این سه دایره می‌باشند، پس نقطهٔ H مرکز اصلی این سه دایره است و بنابراین برای هر دو دایره‌ای که به قطر دو خط سوایی از مثلث رسم شوند، نقطهٔ H روی محور اصلی آنها قرار دارد.

۴۷۳. از نقطهٔ P خطی به موازات BC رسم می‌کنیم که AB را در M و CD را در N قطع کند. داریم:



$$AM = DN \ , \ MB = NC$$

از تشابه دو مثلث PND و PMB′ نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MB'} = \frac{PN}{PM} \quad \text{یا} \quad \frac{ND}{MB'} = \frac{PN}{PM} \qquad (۱)$$

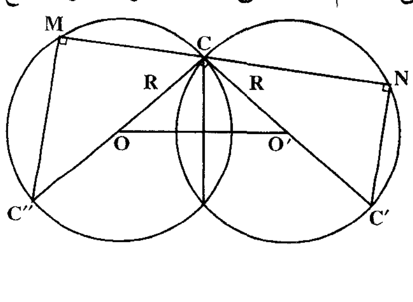
همچنین از تشابه دو مثلث PNC و PMA′ خواهیم داشت:

$$\frac{MB}{MA'} = \frac{PN}{PM} \quad \text{یا} \quad \frac{NC}{MA'} = \frac{PN}{PM} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB'} = \frac{MB}{MA'}$ و یا $MA.MA' = MB.MB'$. از این رابطه نتیجه می‌گیریم که M روی محور اصلی دو دایرهٔ PAA′ و PBB′ واقع است؛ و چون P نیز روی محور اصلی دو دایره است، پس PM که موازی BC است محور اصلی دو دایره می‌باشد.

۴ . ۴ . ۹ . دو دایرهٔ عمود بر هم

۴۷۴. مثلث AOO′ بنا به فرض قائم‌الزاویه است و داریم $OO' = ۲R'$، پس زاویهٔ AOO′ مساوی ۳۰ درجه و زاویهٔ AO′O مساوی ۶۰ درجه است. بنابراین وتر مشترک AB در یکی از دو دایره، ضلع شش ضلعی منتظم محاطی، و در دایرهٔ دیگر، ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی است.

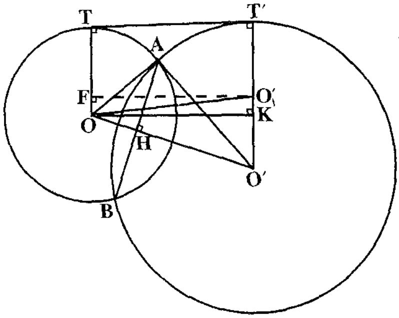


۴۷۵. CO و CO′ را امتداد می‌دهیم تا دو دایره را در C′ و C″ قطع کنند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CNC′ و CMC″ با هم برابرند، زیرا $CC' = CC''$ و چون

دو دایره برهم عمودند، CC' بر CC'' عمود است : بنابراین ضلعهای دو زاویهٔ $C'CN$ و $C''CM$ بر هم عمودند. پس با هم برابرند. از آن‌جا $CM = C'N$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ CNC' داریم :

$$CN^۲ + C'N^۲ = CC'^۲ \Rightarrow CN^۲ + CM^۲ = ۴R^۲$$

۴۷۷ . الف . فرض کنیم TT' مماس مشترک دو دایرهٔ (O) و (O') و AB وتر مشترک آنها باشد. نقطهٔ برخورد AB را با OO' نقطهٔ H می‌نامیم. داریم :



$$AO.\,AO' = AH.OO'$$
$$AB.OO' = ۲RR'$$

و یا :

از طرف دیگر اگر از O خط OK را موازی با TT' رسم کنیم تا $O'T'$ را در K قطع کند. در مثلث KOO' داریم :

$$TT'^۲ = OK^۲ = OO'^۲ - KO'^۲ = OO'^۲ - (R - R')^۲$$

و چون $OO'^۲ = R^۲ + R'^۲$ است، پس :

$$TT'^۲ = R^۲ + R'^۲ - (R - R')^۲ = ۲RR' \Rightarrow TT'^۲ = AB.OO'$$

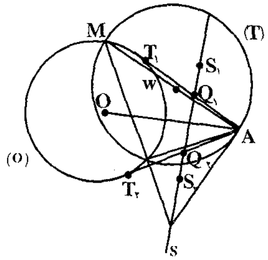
ب. اگر $O'_۱$ مرکز دایرهٔ به قطر $O'T'$ باشد، خط TT' مماس مشترک دو دایرهٔ (O) و $(O'_۱)$ است و شعاع دایرهٔ اخیر $R'_۱ = \frac{R'}{۲}$ است. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه $OFO'_۱$ داریم :

$$OO_۱'^۲ = FO_۱'^۲ + OF^۲ \Rightarrow OO_۱'^۲ = TT'^۲ + (R - R'_۱)^۲ = ۲RR' + (R - \frac{R'}{۲})^۲$$
$$= (R + \frac{R'}{۲})^۲ \Rightarrow OO'_۱ = R + \frac{R'}{۲} = R + R'_۱$$

از این رابطه معلوم می‌شود که دو دایرهٔ (O) و $(O'_۱)$ مماس برون هستند.

۴ . ۴ . ۱۰ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۷۹. دومین نقطهٔ برخورد (O) و (T) را نقطهٔ M' می‌نامیم. چون SA بر (T) مماس است، داریم :

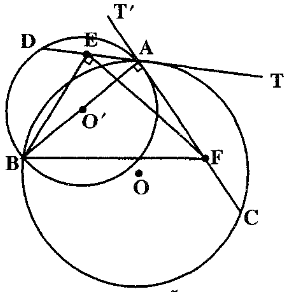


$$SM.SM' = SA^۲$$

پس قوت نقطهٔ S نسبت به دایرهٔ (O) و نسبت به دایره‌ای که نقطهٔ A روی آن واقع است، یکی

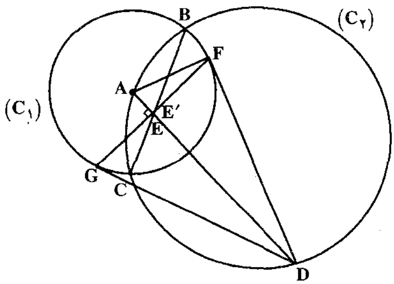
است. پس روی محور اصلی آنها واقع است، یعنی روی خط Q_1Q_2، خطی که وسط مماس AT_1 را به وسط مماس AT_2 وصل می‌کند. AT_1 و AT_2 مماسهایی هستند که از نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) رسم شده‌اند.

اگر نقطه‌های برخورد Q_1Q_2 با عمودهایی که از A بر AT_1 و AT_2 اخراج می‌شوند را S_1 و S_2 بنامیم. داخل قطعه خط S_1S_2 جزو مکان S نیست.



۴۸۰. اگر نقطه‌های E و F وسط قطعه‌های مماسها محصور در دو دایره، و AB وتر مشترک دو دایره باشد، چهارضلعی AEBF محاطی است.

۴۸۱. می‌دانیم که اگر نقطه‌ای واقع در داخل دو دایره نسبت به آن دو دایره، قوت برابر داشته باشد، آن نقطه بر وتر مشترک آن دو دایره واقع است. با توجه به این نکته، F و G را به هم وصل می‌کنیم تا AD را در E′ قطع کند، می‌دانیم $AD \perp FG$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AFD می‌توان نوشت:



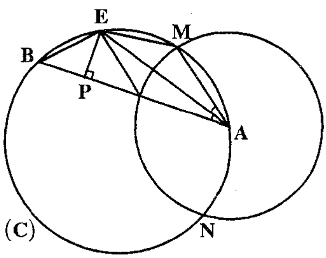
$$DF^2 = DE'.DA = DE'.(DE' + E'A) = DE'^2 + DE'.E'A$$

$$\Rightarrow DF^2 - DE'^2 = DE'.AE' \Rightarrow FE'^2 = DE'.AE'$$

$$\Rightarrow AF^2 - AE'^2 = DE'.AE' \Rightarrow \left|d_1^2 - R_1^2\right| = DE'.AE'$$

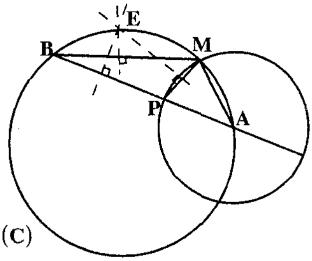
$$\Rightarrow P_{E'(C_1)} = P_{E'(C_2)}$$

یعنی E′ بر وتر مشترک دو دایره قرار دارد. به عبارت دیگر E′ نقطهٔ برخورد AD با وتر مشترک دو دایره یعنی نقطهٔ E می‌باشد. پس $E' = E$ یعنی سه نقطهٔ F و E و G بر یک امتدادند.



۴۸۲. راه اول. نیمساز زاویهٔ MAB از وسط کمان $\widehat{MB}$ می‌گذرد. یعنی $\widehat{ME} = \widehat{EB}$ و لذا (۱) $ME = EB$. اما دو مثلث MAE و PAE با هم برابرند ($AE = AE$ و $E\hat{A}P = M\hat{A}E$ و $MA = AP$) پس (۲) $ME = EP$. از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $EP = EB$. بنابراین

عمود منصف پاره‌خط PB از نقطهٔ E می‌گذرد ؛ و به عبارت دیگر نقطهٔ E وسط کمان $\widehat{MB}$ روی عمودمنصف PB قرار دارد.



راه دوم. در مثلث متساوی‌الساقین MAP ، نیمساز زاویهٔ A عمودمنصف قاعده، یعنی عمودمنصف MP می‌باشد که از وسط کمان MB می‌گذرد. از طرفی عمودمنصف وتر MB نیز از وسط کمان MB می‌گذرد. پس وسط کمان MB محل همرسی عمودمنصفهای ضلعهای مثلث MPB است ؛ درنتیجه عمودمنصف BP نیز از وسط کمان MB می‌گذرد.

۴ . ۴ . ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۸۳. ۱. چون $B\hat{M}A = A\hat{B}M'$ و $M\hat{B}A = A\hat{M}'B$ ، پس دو مثلث مورد نظر متشابه‌اند.

۲. از تشابه دو مثلث AMB و AM′B نتیجه می‌شود :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AB} = \frac{M'B}{MB} \Rightarrow AB^{2} = AM.AM'$$

۳. چون دو زاویهٔ BAM′ و BAM برابرند، پس AB نیمساز زاویهٔ $M\hat{A}M'$ است.

۴۸۴. ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC داریم :

$$AC^{2} = CM^{2} + AM^{2} = \frac{a^{2}}{4} + a^{2} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

چون دو مثلث ADB و ACM متشابه‌اند، پس :

$$\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{a} = \frac{4a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow AD = \frac{4\sqrt{5}}{5}a$$

$$\frac{CM}{DB} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{a}{2DB} = \frac{a\sqrt{5}}{4a} \Rightarrow DB = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

۲. چون $\Delta ACM \sim \Delta ADH$ است، پس :

$$\frac{DH}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{2DH}{a} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} \Rightarrow DH = \frac{4a}{5} \Rightarrow DE = 2DH = \frac{8a}{5}$$

۳. زاویه‌های E′DE و E″DE محاطی روبه‌رو به قطر در دو دایره‌اند، پس زاویهٔ E′DE″ برابر 180° است، یعنی سه نقطهٔ E′ ، D و E″ روی یک خط راست واقعند.

۴۸۵ . ۱. به اندازهٔ زاویه‌ها توجه کنید.
۲. به نقطه‌های ثابت مسأله توجه کنید.
۳. دو مثلث را مقایسه کنید.
۴. از مساحت قطعه استفاده کنید.

۴۸۶ . ۱. مثلثهای IAM و IOM′ متشابه‌اند، پس $\frac{IA}{IM_۱}=\frac{IM}{IO}=\frac{AM}{M'O}$ ، از آنجا داریم :

$$\overline{IM}.\overline{IM'}=\overline{IO}.\overline{IA}$$

۲. داریم :

$$\overline{IM}.\overline{IM'}=\overline{IP'}.\overline{IP}=(\overline{IO}+R)(\overline{IO}-R)=\overline{IO}^۲-R^۲\Rightarrow\overline{IO}.\overline{IA}=\overline{IO}^۲-R^۲$$

۳. با قرار دادن $\overline{IA}=\overline{IO}+\overline{OA}$ در رابطهٔ بالا داریم :

$$\overline{OA}.\overline{OI}=R^۲\Rightarrow\overline{OI}=\frac{R^۲}{\overline{OA}}=C^{te}$$

پس I نقطهٔ ثابتی است.

۴. فرض می‌کنیم که خط مماس در نقطهٔ T بر دایرهٔ (O)، خط OA را در نقطهٔ I′ قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTI′ داریم $\overline{OA}.\overline{OI'}=OT^۲$. امّا $\overline{OA}.\overline{OI}=R^۲=\overline{OT}^۲$ است، پس $\overline{OI}=\overline{OI'}$ ؛ یعنی، نقطهٔ I′ بر I منطبق است.

۴۸۷ . ۱. به خطهای همرس در یک مثلث و محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ ABC توجه کنید.
۲، ۳ و ۴. ساده است.

۵.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ مماس درون

۲.۵.۴. اندازهٔ شعاع

۴۸۸ . ۳ سانتی‌متر.

۴۸۹ . به فرض $R>R'$ ، $R=۵$ و $R'=۳$.

۳.۵.۴. اندازهٔ مساحت

۴۹۰ . گزینهٔ (د) درست است، زیرا :

$$\frac{\text{مساحت II}}{\text{مساحت I}}=\frac{\pi R^۲}{\pi r^۲}=\frac{(۲r)^۲}{r^۲}=۴\Rightarrow \text{مساحت II}=۴\,(\text{مساحت I})$$

$$\Rightarrow \text{مساحت II}=۴\times۴=۱۶$$

۴۹۱ . $\frac{۵\pi}{۴}$

۴.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۴۹۲. $2\sqrt{b^2-((b-a)\cos\alpha-a)^2}$. با فرض $O_2K=x$، خط O_2P را موازی AB رسم کرده و در مثلث O_2O_1P که در آن $O_2\hat{O}_1P=\alpha$ است، x را برحسب a، b و α بیان کنید.

۴۹۳. فرض می‌کنیم $OD=x$ باشد. مرکز دایرهٔ به قطر OC را O' می‌نامیم و از O' به T نقطهٔ تماس AD با این دایره، وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD و $DO'T$ متشابه‌اند؛ پس داریم:

$$\frac{AO}{AD}=\frac{OO'}{O'D}\Rightarrow\frac{R}{AD}=\frac{\frac{R}{2}}{x-\frac{R}{2}}\Rightarrow AD=2x-R$$

در مثلث ADO داریم:

$$AD^2=AO^2+OD^2=R^2+x^2\Rightarrow(2x-R)^2=R^2+x^2\Rightarrow x=0\ ,\ \ x=\frac{4R}{3}$$
$$\Rightarrow OD=\frac{4R}{3}$$

۵.۵.۴. رابطه‌های متری

۴۹۴. با استفاده از تعریف قوت نقطه نسبت به دایره، داریم:

$$\overline{AT}^2=\overline{AB}.\overline{AE}\ \ (1)\quad و\quad \overline{AT}^2=\overline{AC}.\overline{AD}\ \ (2)$$

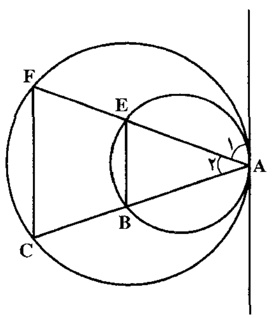
$$(1)\ ,\ (2)\ \Rightarrow\ \overline{AB}.\overline{AE}=\overline{AC}.\overline{AD}\Rightarrow\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

۴۹۵. مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABE و AFC متشابه‌اند زیرا:

$$\hat{A}_2=\hat{A}_2\quad و\quad \hat{A}_1=\hat{B}=\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AE}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AF}}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$$



۴۹۶. نقطهٔ O را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر r شعاع دایرهٔ بزرگ و d طول OB باشد، داریم :

$BD.BC = r^۲ - d^۲ = OA^۲ - OB^۲$

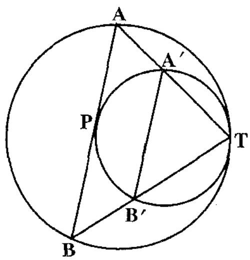
امّا مثلث OAB قائم‌الزاویه است و بنابراین داریم : $OA^۲ - OB^۲ = AB^۲$

درنتیجه خواهیم داشت :

$DB.BC = AB^۲$

۶.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

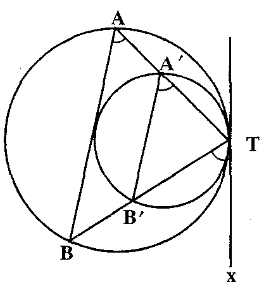
۴۹۷. راه‌اول. از A' به B' وصل می‌کنیم. اگر شعاعهای این دو دایره R و R' $(R > R')$ باشد، این دو دایره نسبت به مرکز تجانس T و با نسبت تجانس $\frac{R'}{R}$ مجانس یکدیگرند. بنابراین داریم :



$$\frac{TA'}{TA} = \frac{R'}{R} , \frac{TB'}{TB} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{TA'}{TA} = \frac{TB'}{TB} \Rightarrow A'B' \| AB$$

درنتیجه $\overset{\frown}{PA'} = \overset{\frown}{PB'}$ است.

راه دوم. اگر خط Tx مماس مشترک این دو دایره را رسم کنیم، داریم :

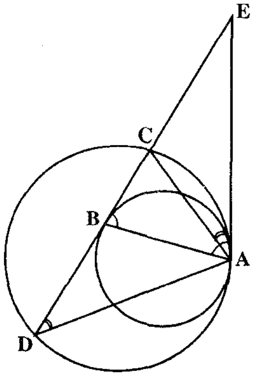


$$B\hat{A}T = B\hat{T}x = \frac{\overset{\frown}{BT}}{۲} \qquad (۱)$$

$$B'\hat{A}'T = B'\hat{T}x = \frac{\overset{\frown}{B'T}}{۲} \qquad (۲)$$

$(۱) , (۲) \Rightarrow B\hat{A}T = B'\hat{A}'T \Rightarrow A'B' \| AB \Rightarrow \overset{\frown}{PA'} = \overset{\frown}{PB'}$

۴۹۸. نقطهٔ برخورد مماس مشترک دو دایره با خط CD را نقطهٔ E می‌نامیم. دو مثلث ABE و ADE متشابه و مثلث ABE متساوی‌الساقین است. پس داریم :



$$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{DE}=\frac{CE}{EB}$$

$$\Rightarrow\frac{AC}{AD}=\frac{BE}{DE}=\frac{CE}{EB}$$

$$=\frac{BE-CE}{DE-EB}=\frac{BC}{BD}$$

در نتیجه AB نیمساز زاویهٔ CAD است.

۴۹۹. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACB و O′DC داریم :

$O'C^{۲}=O'A.O'B=۲a.۴a=۸a^{۲}$

$CD^{۲}=O'C^{۲}-O'D^{۲}=۸a^{۲}-۴a^{۲}=۴a^{۲}\Rightarrow CD=۲a=O'D$

پس مثلث O′CD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، بنابراین $O'\hat{C}D=۴۵^{\circ}$ و چون O′C نیمساز است، پس $E\hat{C}D=۹۰^{\circ}$ و در نتیجه دو مماس CD و CE بر هم عمودند.

۶.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ یکی درون دیگری

۲.۶.۴. محور اصلی

۵۰۰. اگر (O) دایرهٔ محیطی و (ω) دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC و خط Δ محور اصلی آنها باشد که بترتیب BC، AB و AC را در H'، $H'_۱$ و $H'_۲$ قطع نموده، و H، J و I نیز پاهای ارتفاعهای مثلث باشند، می‌خواهیم ثابت کنیم :

$(H'_۲IAC)$ و $(H'_۱JAB)$ و $(H'HBC)$

هر دسته تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند. برای این منظور کافی است H' را مزدوج توافقی H نسبت به BC فرض کرده و ثابت کنیم H' روی Δ محور اصلی دایره‌های (O) و (ω) است؛ که در این صورت بایستی ثابت کنیم :

$P_{H'(O)}=P_{H'(\omega)}$

لیکن با توجه به تعریف قوت یک نقطه نسبت به دایره و از روی شکل داریم :

$P_{H'(O)}=\overline{H'B}.\overline{H'C}=\overline{H'A'}^{۲}-\overline{A'C}^{۲}$ (۱)

و همچنین :

$$P_{H'(\omega)} = \overline{H'H}.\overline{H'A'} \qquad (۲)$$

و چون می‌توان نوشت :

$$\overline{A'C}^{۲} = \overline{A'H}.\overline{A'H'} = -\overline{H'A'}.\overline{A'H} \qquad (۳)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$P_{H'(O)} = \overline{H'A'}^{۲} + \overline{H'A'}.\overline{A'H} = \overline{H'A'}(\overline{H'A'} + \overline{A'H}) = \overline{H'A'}.\overline{H'H} \qquad (۴)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۴) و (۲) نتیجه می‌شود که :

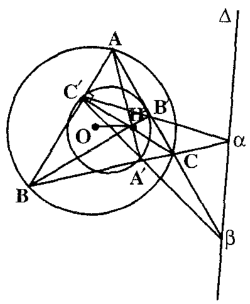
$$P_{H'(O)} = P_{H'(\omega)} = \overline{H'A'}.\overline{H'H}$$

یعنی H' بر محور اصلی دایره‌های (O) و (ω) واقع است.

به همین ترتیب برای سایر نقطه‌های $(H'_۱JAB)$ و $(H'_۲IAC)$ اثبات می‌شود.

۵۰۱. فرض می‌کنیم A' ، B' و C' پای ارتفاعهای مثلث ABC باشند، این نقطه‌ها روی دایرهٔ اولر واقعند. چهار نقطهٔ B، C، B' و C' روی یک دایره‌اند. اگر α محل تلاقی خطهای BC و $B'C'$ باشد، داریم :

$$\alpha B.\alpha C = \alpha B'.\alpha C'$$



پس α روی محور اصلی دایره‌های فوق واقع است. اگر β محل برخورد CA و $C'A'$، و γ محل برخورد AB و $A'B'$ (نقطهٔ اخیر روی شکل رسم نشده) β و γ نیز متعلق به محور اصلی دو دایره‌اند. پس $\alpha\beta\gamma$ محور اصلی خواسته شده است.

۷.۴. رابطه‌های متری در دو دایرهٔ هم‌مرکز

۲.۷.۴. اندازهٔ شعاع

۵۰۲. $R = ۱۲$

۵۰۳. گزینهٔ (د) درست است.

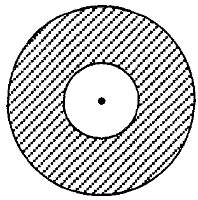
۵۰۴. گزینهٔ (د) درست است.

۳.۷.۴. اندازهٔ محیط

۵۰۵. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا : $R_۲ - R_۱ = ۱۰ \Rightarrow ۲\pi R_۲ - ۲\pi R_۱ = ۲۰\pi \# ۶۲/۸$

۴.۷.۴. اندازهٔ مساحت

۵۰۶. $۵/۲۵\pi$



۵۰۷. گزینهٔ (د) درست است.

۵۰۸. گزینهٔ (د) درست است.

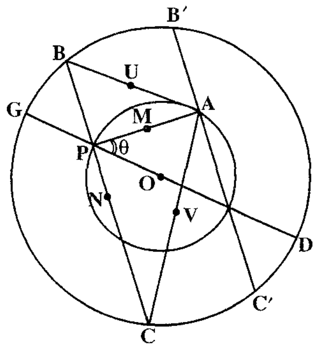
۵۰۹. داریم :

$$AD^۲ = R^۲ - R'^۲ \Rightarrow \pi AD^۲ = \pi R^۲ - \pi R'^۲$$

$$R'' = AD \Rightarrow ۲R'' = AB$$

۵.۷.۴. رابطه‌های متری

۵۱۰. راه اول. فرض می‌کنیم $O\hat{P}A = \theta$، GD قطری است که از P می‌گذرد که M وسط PA و N وسط BC می‌باشد. مجموع مورد نظر را S می‌نامیم. داریم :



$$S = BC^۲ + CA^۲ + AB^۲ = (BP + PC)^۲ + PC^۲ + PA^۲ + BP^۲ + PA^۲$$
$$= ۲(PA^۲ + PB^۲ + PC^۲ + BP.PC) \qquad (۱)$$

$PA = ۲r\cos\theta$,

$BP = BN - PN = \sqrt{R^۲ - r^۲\cos^۲\theta} - r\sin\theta$,

$PC = PN + NC = PN + BN = \sqrt{R^۲ - r^۲\cos^۲\theta} + r\sin\theta$,

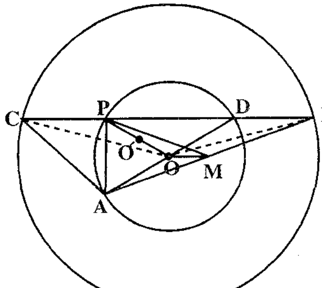
$BP.PC = GP.PD = R^۲ - r^۲$

با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید :

$$S = r\left[۴r^۲\cos^۲\theta + ۲(R^۲ - r^۲\cos^۲\theta + r^۲\sin^۲\theta) + R^۲ - r^۲\right]$$
$$= ۶R^۲ + ۲r^۲$$

این مجموع مقداری ثابت است و بنابراین به P بستگی ندارد. برای قسمت دوم از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا دایره بزرگ را در نقطه‌های C' و B' قطع کند. این نقطه‌ها، رأسهایی از مستطیلهای $BPAB'$ و $CPAC'$ هستند. U وسط قطر AB، PB' نیز می‌باشد و $\vec{PU}=\frac{1}{2}\vec{PB'}$. به طریق مشابه $\vec{PV}=\frac{1}{2}\vec{PC'}$ (V وسط AC است). چون B' و C' همان دایرهٔ (O,R) را تعریف می‌کنند، پس U و V بر تصویر دایرهٔ (O,R) تحت تجانس $H(P,\frac{1}{2})$ قرار دارند.

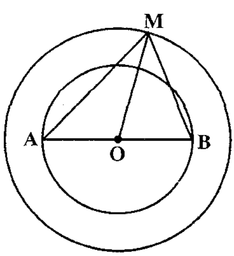
راه دوم. AD را رسم می‌کنیم با توجه به قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلثهای ABD و ADC داریم:



$$AB^2+AC^2+BC^2=AB^2+AC^2+(DC+DB)^2$$
$$=(AB^2+DB^2)+(AC^2+DC^2)+2DC.DB$$
$$=2R^2+\frac{4r^2}{2}+2R^2+\frac{4r^2}{2}+2(R^2-r^2)$$
$$=6R^2+2r^2$$

برای قسمت دوم، اگر M وسط AB باشد، $PM=\frac{AB}{2}$، و در مثلث OAB، OM میانه، و درنتیجه $OM^2=\frac{R^2+r^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$، لذا $MO^2+MP^2=\frac{R^2+r^2}{2}$. و مقداری ثابت است و چون O و P نیز ثابتند، پس مکان M دایره‌ای به مرکز O' وسط OP و شعاع $\frac{R}{2}$ است، زیرا $MO'=\frac{R}{2}$.

۵۱۱. دو دایره به مرکز O و به شعاع R و R' $(R>R')$ را در نظر می‌گیریم. قطر AB از دایرهٔ کوچکتر و نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ بزرگتر را اختیار می‌کنیم. از M به O مرکز مشترک دو دایره وصل می‌کنیم. در مثلث MAB داریم:



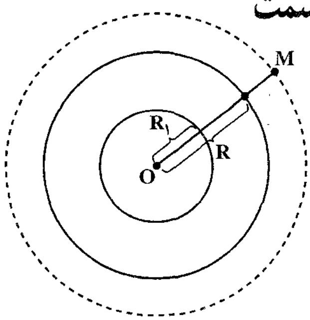
$$MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{AB^2}{2}=2R^2+\frac{4R'^2}{2}=2(R^2+R'^2)=C^{te}$$

۵۱۲. داریم :

$$\overline{PT}^{۲}-\overline{PU}^{۲}=\overline{OU}^{۲}-\overline{OT}^{۲}=\overline{OQ}^{۲}-\overline{OT}^{۲}=\overline{QT}^{۲}$$

۶.۷.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۱۳. اگـــر M یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برابر K باشد، داریم :



$$P_{M(C)}=OM^{۲}-R^{۲}\ ،\ P_{M(C')}=OM^{۲}-R'^{۲}\ ,\ P_{M(C)}=KP_{M(C')}$$
$$\Rightarrow OM^{۲}-R^{۲}=K(OM^{۲}-R'^{۲})\Rightarrow (K-۱)OM^{۲}=KR'^{۲}-R^{۲}$$

$$\Rightarrow OM^{۲}=\frac{KR'^{۲}-R^{۲}}{K-۱}\Rightarrow OM=\sqrt{\frac{KR'^{۲}-R^{۲}}{K-۱}}=\text{مقدار ثابت}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{\frac{KR'^{۲}-R^{۲}}{K-۱}}$ است.

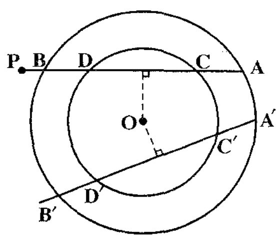
۵۱۴. ۲۴ سانتی متر.

۵۱۵. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا مساحت ناحیهٔ بین دو دایرهٔ هم‌مرکز به شعاعهای R و R' برابر است با : مساحت دایرهٔ به قطر وتری از دایرهٔ بزرگتر، که بر دایرهٔ کوچکتر مماس است. پس اگر این وتر را AB بنامیم، داریم :

$$\pi(\frac{AB}{۲})^{۲}=\frac{۲۵\pi}{۲}\Rightarrow\ \frac{AB}{۲}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\ AB=۵\sqrt{۲}$$

۷.۷.۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۱۶. ۱. AC.CB قـدرمطلق قـوت نقطهٔ C نسـبت به دایرهٔ بیـرونی است و این قـدرمطلق قـوت مـسـاوی است با $\overline{OA}^{۲}-\overline{OC}^{۲}$، پس‌مـقـداری‌است ثابت. زیرا برابر اختـلاف مربعـهای شعاعهای دایره‌هاست.



۲. اگر از نقطهٔ P قاطعی رسم کنیم که نسبت $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ معلوم باشد، بدیهی است که هر قاطعی دیگر که به فاصلهٔ همین قاطع از مرکز مشترک O رسم شود، دارای همین

نسبت خواهد بود؛ پس حل مسأله به ترسیم مماسی از نقطهٔ P به دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OI منجر می‌شود (البته پس از تعیین OI). پس اگر فرض کنیم که از نقطهٔ دلخواه A' قاطعی چنان رسم شده است که $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ همان نسبت معلوم است، به سهولت می‌شود دید که $\frac{\overline{I'A'}}{\overline{I'C'}}$ نیز همان نسبت است، مثلاً $\frac{\overline{I'A'}}{\overline{I'C'}} = K$ می‌باشد. پس:

$$\frac{\overline{OA'}^{۲} - \overline{OI'}^{۲}}{\overline{OC'}^{۲} - \overline{OI'}^{۲}} = K^{۲} \quad \text{و یا} \quad \overline{OI'}^{۲} = \frac{\overline{OA'}^{۲} - K^{۲}\overline{OC'}^{۲}}{(K^{۲} - ۱)}$$

تعیین OI' با یک ترسیم ساده میسر است. پس از نقطهٔ P مماسی بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OI' رسم می‌کنیم تا قاطع مطلوب به‌دست آید. در موردی که قاطع به‌وسیلهٔ دایره‌ها ثلث می‌شود، یعنی $BD = DC = CA$، پس:

$$\overline{BA} = \overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CA} = ۳\overline{DC}$$

و عدد $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ برابر $K = ۳$ می‌باشد.

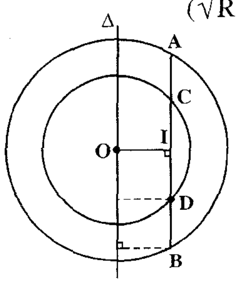
۳. اگر قاطع AB به موازات قطر ثابت Δ باقی بماند ملاحظه می‌شود که اگر $\overline{OI} = x$ انتخاب شود، سطح جانبی استوانه‌ای که از AB به‌دست می‌آید برابر است با $۲\pi x\sqrt{R^{۲} - x^{۲}}$ و سطح جانبی استوانه‌ای که از CD پدید می‌آید مساوی است با $۲\pi x\sqrt{R'^{۲} - x^{۲}}$ که R و R' بترتیب شعاع دایرهٔ بیرونی و شعاع دایرهٔ درونی می‌باشند. پس این اختلاف برابر است با:

$$۲\pi x(\sqrt{R^{۲} - x^{۲}} - \sqrt{R'^{۲} - x^{۲}})$$

این عبارت همواره مثبت است، زیرا $۰ < x < R'$ می‌باشد.

مشتق این عبارت مساوی است با:

$$(\sqrt{R^{۲} - x^{۲}} - \sqrt{R'^{۲} - x^{۲}}) \times \left(۱ + \frac{x^{۲}}{\sqrt{(R^{۲} - x^{۲})(R'^{۲} - x^{۲})}}\right)$$



و مشتق همواره مثبت است. پس تابع همواره صعودی است. به‌ازاء $x = ۰$ این اختلاف سطحهای جانبی صفر است و به‌ازاء $x = R'$ اختلاف سطحهای جانبی به سطح جانبی استوانه که بزرگتر است، بدل می‌شود و روشن است که

این، حد اعلای این اختلاف است که مساوی است با $2\pi R'\sqrt{R^2-R'^2}$.

۴. اگر $2\pi h^2 = 2\pi x(\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{R'^2-x^2})$ باشد، معادلهٔ :

$$x(\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{R'^2-x^2})=h^2$$

به‌دست می‌آید. با ملاحظهٔ این که :

$$(\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{R'^2-x^2})(\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R'^2-x^2})=R^2-R'^2$$

پس :

$$\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{R'^2-x^2}=\frac{h^2}{x}$$

و

$$\sqrt{R^2-x^2}+\sqrt{R'^2-x^2}=\frac{R^2-R'^2}{h^2}x$$

و با جمع کردن دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$2\sqrt{R^2-x^2}=\frac{(R^2-R'^2)x}{h^2}+\frac{h^2}{x}$$

و یا :

$$4(R^2-x^2)=\frac{\left[(R^2-R'^2)x^2+h^4\right]^2}{h^4x^2}$$

و سرانجام معادلهٔ

$$4h^4(R^2-x^2)x^2=\left[(R^2-R'^2)x^2+h^4\right]^2$$

به‌دست می‌آید که معادله‌ای است دو مجذوری که چون ساده شود، معادلهٔ :

$$\left[(R^2-R'^2)^2+4h^4\right]x^4-2h^4(R^2+R'^2)x^2+h^8=0$$

حاصل می‌شود. پس :

$$x^2=\frac{h^4(R^2+R'^2)\pm 2h^4\sqrt{R^2R'^2-h^4}}{(R^2-R'^2)^2+4h^4}$$

مسأله وقتی ممکن است که اولاً $h^2<RR'$ باشد، در این صورت معادلهٔ دو مجذوری، چهار جواب حقیقی دارد که منفیهای آنها همان جوابهای مثبت‌اند که قرینهٔ x از طرف چپ به‌دست می‌آید، یعنی مسأله دو جواب دارد. زیرا :

$$x'^2+x''^2=\frac{2h^4(R^2+R'^2)}{(R^2-R'^2)^2+4h^4}>0$$

و :

$$x'^2x''^2=\frac{h^8}{(R^2-R'^2)^2+4h^4}>0$$

پس x'^2 و x''^2 هر دو مثبتند.

مقدار x^2 باید کمتر از R'^2 درآید. برای این امر لازم است که اگر معادلهٔ دو مجذوری $f(x^2)$ فرض شود. برای قابل قبول بودن فقط یک جواب

$f(R'^2)<0$ باشد ولی :

$$f(R'^2)=(R^2-R'^2)R'^4+2h^4R'^4-2h^4R^2R'^2+h$$

طرف دوم مجذور کامل است یعنی :

$f(R'^2)=\left[(R^2-R'^2)R'^2-h^4\right]^2$، پس $f(R'^2)<0$

ممکن نیست، و ممکن نیست یک جواب تنها قابل قبول باشد. پس هر دو جواب قابل قبول‌اند و در این صورت شرایط $f(R'^2)>0$ و $h^2<RR'$ و

$$\frac{h^4(R^2+R'^2)}{(R^2-R'^2)^2+4^{h^4}}<R'^2$$

لازمند. دو شرط اول، قبلاً مسلم شده‌اند. شرط اخیر به‌صورت :

$$R'^2R^4-(2R'^4+h^4)R^2+R'^2(R'^4+3h^4)>0$$

نوشته می‌شود و وقتی همواره محقق است که مبین آن برحسب R^2 منفی باشد. این مبین $h^4(h^4-8R'^4)$ می‌باشد. پس اگر $h^2<2R'^2\sqrt{2}$ باشد، مسأله همواره دارای دو جواب است ولی اگر $2R'^2\sqrt{2}<h^2<RR'$ باشد، در این‌صورت مسأله دارای جواب نیست. اما شرط اخیر که امتناع مسأله را متضمن است به‌صورت $2R'\sqrt{2}<R$ می‌باشد و قرار گرفتن $\frac{h^2}{R'}$ بین این دو مقدار، شرایط امکان مسأله (یا دو جواب) عبارتند از $h^2<2R'^2\sqrt{2}$ و $h^2<RR'$. ولی باید $2R'\sqrt{2}>R$ باشد وگرنه مسأله نشدنی خواهد بود. در این‌صورت شرط امکان مسأله فقط $h^2<RR'$ می‌باشد.

درصورتی که $h^2=RR'$ باشد، تنها جواب مسأله عبارت است از :

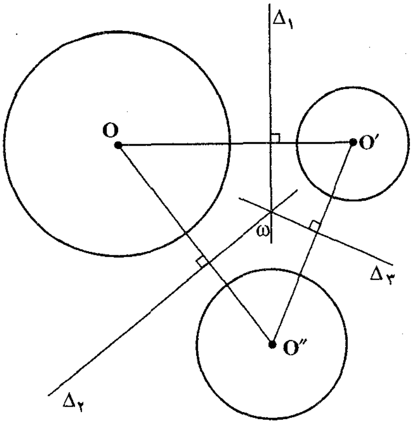
$$x=\frac{RR'}{\sqrt{R^2+R'^2}}$$

که قابل قبول است. زیرا $\sqrt{R^2+R'^2}$ از R بیشتر است، پس $x<R'$ می‌باشد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵
سه دایره و بیشتر

۱.۵. رابطه‌های متری در سه دایره

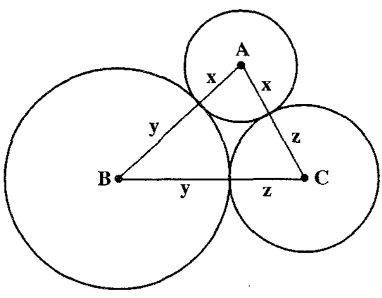
۱.۱.۵. تعریف و قضیه



۵۱۷. سه دایرهٔ متمایز به مرکزهای O، O' و O'' که این مرکزها روی یک خط راست قرار ندارند، درنظر می‌گیریم. خط Δ_1 محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O')، همچنین خط Δ_2 محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O'') را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را ω می‌نامیم.

می‌دانیم که $P_{\omega(O)} = P_{\omega(O')}$ و $P_{\omega(O)} = P_{\omega(O'')}$. پس $P_{\omega(O')} = P_{\omega(O'')}$
بنابراین خط Δ_3 محور اصلی دو دایرهٔ (O') و (O'') نیز از نقطهٔ ω می‌گذرد. بنابراین سه محور اصلی دایره‌ها همرسند و این نقطهٔ همرسی را مرکز اصلی سه دایره می‌نامند.

۲.۱.۵. اندازهٔ شعاع



۵۱۸. اگر شعاع دایره‌ها را x و y و z بگیریم داریم:

$$\begin{cases} y+z=a \\ z+x=b \\ x+y=c \\ x+y+z=P \end{cases}$$

۵۱۹. گزینهٔ (د) درست است، زیرا طبق شکل داریم:

$$x^۲+(x-۴)^۲=(x+۴)^۲ \Rightarrow x=۱۶$$

۳.۱.۵. اندازهٔ مساحت

۵۲۰. اگر r شعاع مشترک سه دایره باشد، هر یک از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع $OO'O''$ مساوی با $۲r$ و بنابراین مساحت آن $r^۲\sqrt{۳}$ است. هرگاه از مساحت این مثلث، مساحت سه قطاع متساوی AOB و $AO'C$ و $BO''C$ را کم کنیم، مساحت مطلوب به‌دست می‌آید. مساحت هر یک از این سه قطاع $\frac{\pi r^۲}{۶}$ است.

پس $$\text{مساحت خواسته شده} = r^۲\sqrt{۳}-\frac{\pi R^۲}{۲}=r^۲(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$$

۵۲۱. گزینهٔ (هـ) درست است.

۵۲۲. می‌خواهیم مساحت قسمت $OO'O''$ را حساب کنیم. شعاع مشترک سه دایره را r فرض کرده، ابتدا مساحت مشترک مابین دو دایره را حساب می‌کنیم. چهارضلعی $AOO''O'$ یک لوزی است که زاویه‌های آن ۶۰ درجه و ۱۲۰ درجه‌اند. بنابراین مساحت مشترک مابین دو دایره، مجموع دو قطعه دایره است که وتر هر یک از آنها، ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاطی یعنی $r\sqrt{3}$ است. مساحت قطاع AOO'' مساوی با $\frac{\pi r^2}{3}$ و مساحت مثلث AOO'' مساوی با $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$ است، پس مساحت قطعهٔ $AO'O''$ مساوی با $r^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$ است و :

$$\text{مساحت مابین دو دایره} = 2r^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})$$

حال مساحت مابین سه دایره را حساب می‌کنیم. این مقدار مساوی با نصف مساحت مابین دو دایره به‌علاوهٔ مساحت قطعهٔ دایره‌ای با وتر OO' است اما :

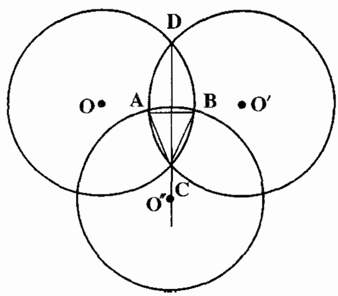
$$\text{مساحت قطعهٔ } OO' = \text{مساحت قطاع } O''OO' - \text{مساحت مثلث } O''OO' = \frac{\pi r^2}{6}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

بنابراین :

$$\text{مساحت مورد نظر} = \frac{\pi r^2}{3}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi r^2}{6}-\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{\pi r^2}{2}-\frac{r^2\sqrt{3}}{2}=r^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

۵۲۳. فرض کنیم O، O' و O'' مرکزهای سه دایره و سطح منحنی $ABCA$ سطح مشترک باشد. وتر مشترک CD مابین دو دایرهٔ (O) و (O') از نقطهٔ O'' مرکز دایرهٔ سوم می‌گذرد و چون سه دایره متساوی‌اند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و CD ارتفاع وارد بر ضلع AB است، پس کمان $\widehat{DB}$ مساوی با ۶۰ درجه است و چون چهارضلعی $ODO'O''$ مربع می‌باشد، کمان DC مساوی 90° و کمان BC مساوی با 30° است. یعنی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع عبارت است از ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R.



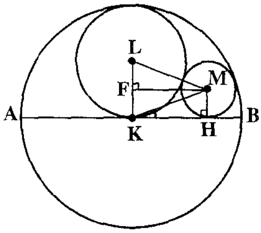
می‌دانیم که $C_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$، پس داریم :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}(2-\sqrt{3})=\frac{R^2}{4}(2\sqrt{3}-3)$$

هرگاه بر مساحت این مثلث، مساحت سه قطعهٔ دایره را که وتر آنها $C_{۱۲}$ است اضافه کنیم، مساحت مورد نظر به‌دست می‌آید. با به‌کار بردن دستور مساحت قطعه دایره، به سهولت معلوم می‌شود که مساحت هر یک از قطعه‌ها برابر $\frac{R^۲}{۱۲}(\pi-۳)$ است. پس :

$$\text{مساحت خواسته شده} = \frac{R^۲}{۴}(\pi+۲\sqrt{۳}-۶)$$

۵۲۴. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا اگر در مثلث MKL از نقطهٔ M خط MF را موازی AB رسم کنیم، با فرض $AK = r$ ، $LK = \frac{r}{۲}$ و $MH = t$ در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ MFL و MFK داریم :

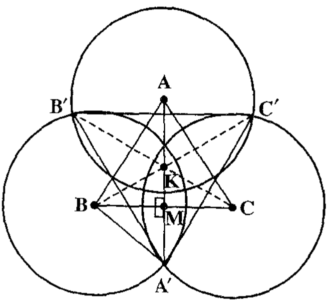


$$\begin{cases} MF^۲ = (\frac{r}{۲}+t)^۲ - (\frac{r}{۲}-t)^۲ \\ MF^۲ = (r-t)^۲ - t^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{t} = ۴ \Rightarrow \frac{S'}{S} = ۱۶$$

۴.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۵۲۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۲۶. گزینهٔ (د) جواب است، زیرا اگر نقطهٔ برخورد دو دایره به مرکزهای B و C را A' بنامیم، به‌دلیل تقارن، مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاعند و یک مرکز دایرهٔ محاطی دارند که آن را K می‌نامیم. وسط پاره‌خط BC را M نامیده از A' به A وصل می‌کنیم. خط AA' از M و K می‌گذرد و داریم :



$$A'M = \sqrt{r^۲-۱}\ ,\ \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'K}{AK}\ ,\ AB = AC = BC \Rightarrow B'C' = ۲\times\frac{A'K}{AK}\ ,$$

$$AM = \sqrt{۳} \Rightarrow AK = \frac{۲}{۳}AM = \frac{۲}{۳}\sqrt{۳}\ ,\ MK = \frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\ A'K = A'M + MK = \sqrt{r^۲-۱} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow B'C' = \sqrt{۳(r^۲-۱)}+۱$$

۵۲۷. ۱. داریم :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = -\frac{b}{c}\ ,\ \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = -\frac{c}{a}\ ,\ \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -\frac{a}{b}$$

از ضرب عضوهای نظیر این سه رابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=-۱$$

و این رابطه نشان می‌دهد که سه خط AA' ، BB' و CC' همرسند.

۲. با استفاده از قضیهٔ استیوارت برای سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست، A' ، B و C، و نقطهٔ A داریم :

$$\overline{AA'}^{۲}.\overline{BC}+\overline{AB}^{۲}.\overline{CA'}+\overline{AC}^{۲}.\overline{A'B}+\overline{BC}.\overline{CA'}.\overline{A'B}=۰$$

و درصورتی که جهت مثبت روی BC را از طرف نقطهٔ B به سمت نقطهٔ C درنظر بگیریم، خواهیم داشت :

$$\overline{AA'}^{۲}(b+c)-(a+b)^{۲}c-(a+c)^{۲}b+bc(b+c)=۰$$

از آن‌جا :

$$\overline{AA'}^{۲}=\frac{a^{۲}(b+c)+۴abc}{b+c}$$

حال برای محاسبهٔ MA و MA' از قضیهٔ منلائوس در مثلث ACA' که به‌وسیلهٔ مورب BMB' قطع شده است، استفاده می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}}\cdot\frac{\overline{BA'}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=۱$$

$$\Rightarrow\ \frac{\overline{MA}}{\overline{MA'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}\cdot\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}=\frac{b+c}{a}\cdot(-\frac{a}{c})=-\frac{a(b+c)}{bc}$$

و از نظر قدرمطلق می‌توان نوشت :

$$\frac{MA}{a(b+c)}=\frac{MA'}{bc}=\frac{AA'}{bc+ca+ab}$$

با قرار دادن مقدار به‌جای AA' داریم :

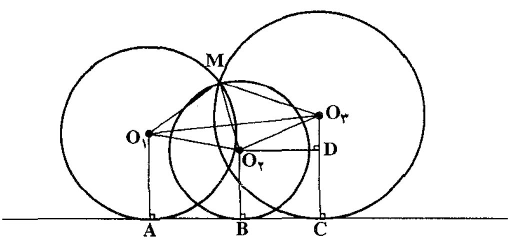
$$MA=\frac{a(b+c)}{bc+ca+ab}\sqrt{\frac{a^{۲}(b+c)+۴abc}{b+c}}$$

و

$$MA'=\frac{bc}{bc+ac+ab}\sqrt{\frac{a^{۲}(b+c)+۴abc}{b+c}}$$

۵.۱.۵. رابطه‌های متری

۵۲۸. در مثلث $O_۲MO_۳$ با فرض $O_۲\hat{M}O_۳=\alpha$ داریم :



$$O_۲O_۳=\sqrt{R_۲^۲+R_۳^۲-۲R_۲R_۳\cos\alpha}$$

حال O_2D را موازی خط ABC رسم می‌کنیم (نقطهٔ D روی O_3C است). در مثلث قائم‌الزاویهٔ O_2O_3D داریم:

$$O_2D^2 = O_2O_3^2 - O_3D^2 \Rightarrow O_2D = BC = \sqrt{O_2O_3^2 - O_3D^2}$$

$$\Rightarrow O_2D = BC = \sqrt{R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3\cos\alpha - (R_3 - R_2)^2}$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{R_2R_3}\sin\frac{\alpha}{2}$$

و به روش مشابه، با فرض $O_1\hat{M}O_3 = \beta$ و $O_1\hat{M}O_2 = \gamma$ داریم:

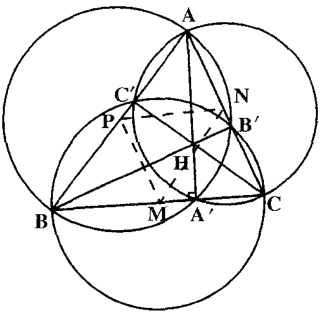
$$AB = 2\sqrt{R_1R_2}\sin\frac{\gamma}{2} \quad \text{و} \quad AC = 2\sqrt{R_1R_3}\sin\frac{\beta}{2}$$

درنتیجه با توجه به رابطهٔ $AC = AB + BC$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{R_2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{R_1}} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sqrt{R_3}}$$

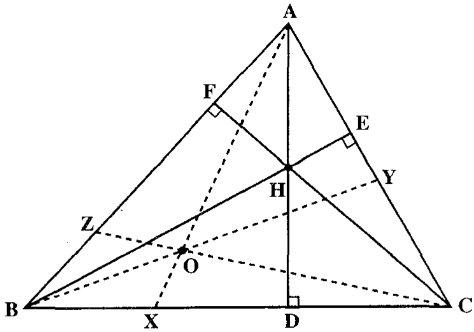
۶.۱.۵. مرکز اصلی سه دایره

۵۲۹. محور اصلی دایره‌های محاطی خارجی زاویه‌های B و C، موازی با نیمساز زاویهٔ داخلی A و درنتیجه بر وسط ضلع BC می‌گذرد. از آن‌جا نتیجه بگیرید که مرکز اصلی خواسته شده مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلثی است که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث ABC است.



۵۳۰. دایره‌هایی که به قطرهای ضلعهای مثلث رسم شوند، مرکزشان وسطهای ضلعهاست. این دایره‌ها دوبه‌دو متقاطع بوده و نقطه‌های برخوردشان همان رأسهای مثلث می‌باشند. خط‌المرکزین این دایره‌ها خط واصل بین وسطهای ضلعهای مثلث است که هریک، با یک ضلع مثلث موازی‌اند. بنا به تعریف، محور اصلی دو دایرهٔ متقاطع خطی است که از یک نقطهٔ تقاطع بر خط‌المرکزین آن دو دایره عمود شود. بنابراین محور اصلی این دایره‌ها (دوبه‌دو)، خطهایی هستند که از یک رأس بر ضلع مقابل به آن رأس عمود می‌گردند، یعنی ارتفاعهای مثلث. پس ارتفاعهای مثلث، محورهای اصلی سه دایره‌ای هستند که به قطر ضلعهای مثلث رسم می‌شوند. درنتیجه مرکز اصلی این سه دایره، نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث است.

۵۳۱. ارتفاعهای AD، BE و CF از مثلث ABC را رسم می‌کنیم، اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث باشد، $HA.HD = HB.HE = HC.HF$.

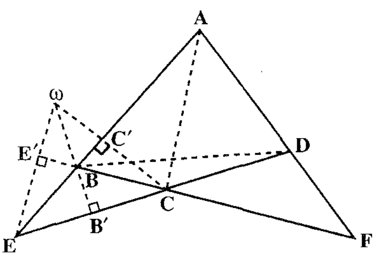


حال اگر خطهای سوایی AX، BY و CZ را در مثلث ABC قطر قرار دهیم و دایره‌هایی رسم کنیم، این دایره‌ها بترتیب بر D، E و F پاهای ارتفاعهای مثلث می‌گذرند؛ لذا سه حاصل‌ضرب بالا، بترتیب قوتهای نقطهٔ H نسبت به این دایره‌ها می‌باشند. چون این سه حاصل‌ضرب با هم برابرند، پس H نسبت به سه دایرهٔ مزبور یک قوت دارد و بنابراین مرکز اصلی سه دایرهٔ مزبور است.

۵۳۲. چهارضلعی BEFC قابل محاط شدن در دایره است، زیرا داریم: $\hat{B} = \hat{A}_1 = \hat{F}_1$، بنابراین زاویهٔ $\hat{B}$ با $E\hat{F}C$ مکمل است. پس سه خط BC و EF و AG عبارتند از، محور اصلیهای سه دایرهٔ (O) و (BEFC) و (O′) دو به دو، بنابراین سه خط مزبور از یک نقطه که مرکز اصلی این سه دایره است می‌گذرند.

۷.۱.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۵۳۳. ۱ و ۲ و ۳. چهارضلعی کامل ABCDEF را که قطرهای آن AC، BD و EF می‌باشند درنظر می‌گیریم و ارتفاعهای مثلث BEC را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ ω متقاطع شوند. دایرهٔ به قطر EC از E′ و C′ می‌گذرد و بنابراین داریم:



$$\omega E'.\omega E = \omega C'.\omega C$$

و نیز دایرهٔ به قطر BC از B′ و C′ می‌گذرد و داریم:

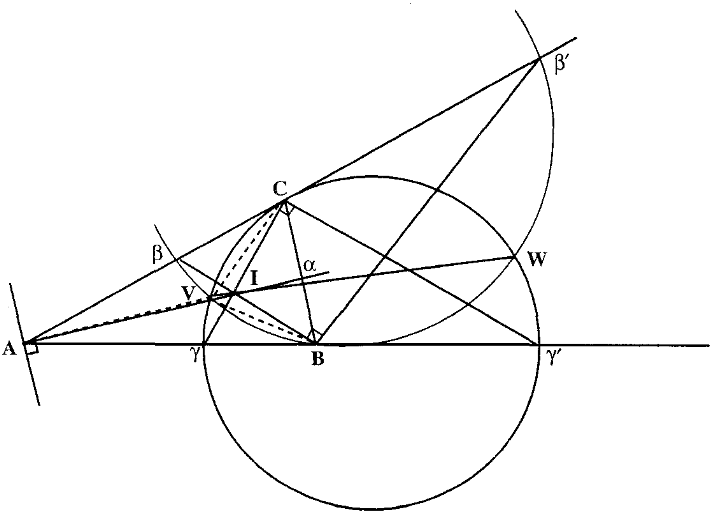
$$\omega B.\omega B' = \omega C.\omega C'$$

به عبارت دیگر، از این رابطه‌ها معلوم می‌شود که نقطهٔ ω نسبت به دایره‌هایی که به قطرهای BD، AC و EF می‌گذرند، دارای قوتهای مساوی است؛ پس روی محور اصلی این دایره‌ها واقع است. اما به همین دلیل معلوم می‌شود که نقطهٔ تلاقی سه

ارتفاع هر یک از مثلثهای ABF و ADE و CDF نیز واجد همین خاصیتند و چون چند نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت نمی‌توانند در عین حال نسبت به دایره متحدالقوه باشند، پس معلوم می‌شود که این نقطه‌ها روی محور اصلی مشترک دایره‌های مفروض واقعند. پس مرکزهای این سه دایره یعنی وسط سه قطر هم، بر یک خط راست قرار دارند.

۵۳۴. ضلعهای AB، BC و CA محورهای اصلی دایره‌های (B′B″C′C″)، (C′C″A′A″) و (A′A″B′B″) می‌باشند. پس نقطه‌های A، B و C نسبت به دایره‌های مزبور دارای قوتهای متساوی‌اند و این دو دایره بر هم منطبقند.

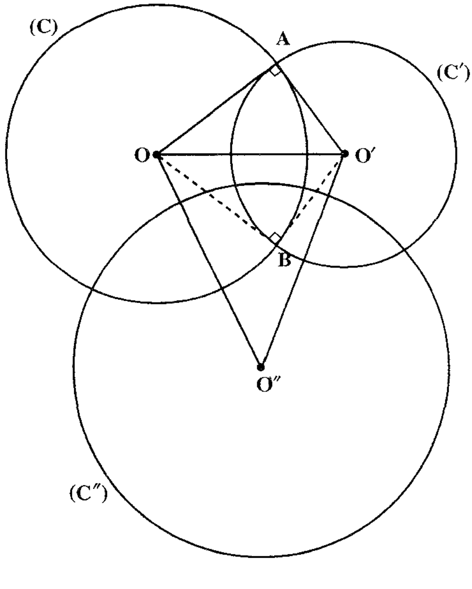
۵۳۵. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های γ و γ' پای نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی C روی AB و β و β' پای نیمسازهای زاویهٔ B روی AC و α و α' پای نیمسازهای زاویهٔ A روی BC می‌باشند. دایرهٔ به قطر $\beta\beta'$ با دایرهٔ به قطر $\gamma\gamma'$، در وتر مشترک VW متقاطعند. اگر $AB=c$ و $BC=a$ و $CA=b$ باشند داریم: $\frac{AV}{BV}=\frac{b}{a}$ و $\frac{BV}{CV}=\frac{c}{b}$. از ضرب طرفین این دو رابطه نتیجه می‌شود: $\frac{AV}{CV}=\frac{c}{a}$؛ یعنی نقطهٔ V روی دایرهٔ به قطر $\alpha\alpha'$ واقع است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که نقطهٔ W نیز روی این دایره قرار دارد. پس VW وتر مشترک سه دایرهٔ آپولونیوس می‌باشد.



۵۳۷. شش مماسی که از O مرکز اصلی سه دایره بر آنها رسم می‌شوند، دارای طولهای برابرند. پس نقطه‌های تماس آنها با دایره‌ها روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند.

۵۴۰. اگر سه دایرهٔ C(O,R)، C′(O′,R′) و C″(O″,R″) دو به دو بر هم عمود باشند، ثابت می‌کنیم که همهٔ زاویه‌های مثلث OO′O″ حاده‌اند. درصورتی که نقطه‌های

برخـــورد دو دایرهٔ(C) و (C') را A و B بنامـــیم، زاویه‌های OAO' و OBO' قـــائمـــه‌اند ؛ زیرا نقطهٔ O'' خـــارج دو دایرهٔ (C) و (C') واقع است ؛ لذا زاویهٔ $OO''O'$ حـاده است. (زیرا مثلثهـای OBO' و OAO' قائم‌الزاویه‌اند). به همـین ترتیب، ثابت می‌شـود کـه زاویه‌های O و O'' از مـثلث $OO'O''$ نیز حـاده است. درصورتی که دایرهٔ چهارمی مانند $C_1(O_1, R_1)$ بر هر سه دایرهٔ فوق عمود باشد، قوت مرکز آن نسبت به این سه دایره برابر است با R_1^2 . پس مرکز آن، یعنی نقطهٔ O_1 ، مرکز اصلی سه دایره است و باید خارج سه دایره باشد. اما مرکز اصلی این سه دایره، محل برخورد ارتفاعهای مثلث $OO'O''$ است که چون این مثلث حاده‌الزاویه است، نقطهٔ برخورد ارتفاعهایش درون این مثلث قرار دارد و درنتیجه درون هر سه دایره است. امـا این خلاف نتیـجهٔ بالا است یعنی بیش از سه دایرهٔ دوبه‌دو عـمـود بر هم وجـود ندارد.



۲.۵. رابطه‌های متری در چهار دایره

۱.۲.۵. اندازهٔ شعاع

۵۴۱. راه اول. $AB = c$ فرض می‌کنیم ؛ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی K را r و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی K_c را r_c می‌گیریم. باید ثابت کنیم :

$$\sqrt{r.r_c} \le \frac{c}{2}$$

و این همان شرط لازم و کافی، برای وجود جواب است.

راه دوم. مساحت مثلث ABC را S و اندازهٔ نصف محیط آن را p می‌نامیم. داریم :

$$S = rp = r_c(p-c)$$

و از آنجا $r = \frac{S}{p}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$ و

$$r.r_c = \frac{S^2}{p(p-c)} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)} = (p-a)(p-b);$$

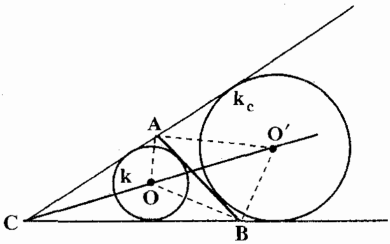
$$\sqrt{r.r_c} = \sqrt{(p-a)(p-b)}$$

می‌دانیم، واسطهٔ هندسی دو مقدار مثبت از واسطهٔ حسابی آنها تجاوز نمی‌کند، بنابراین :

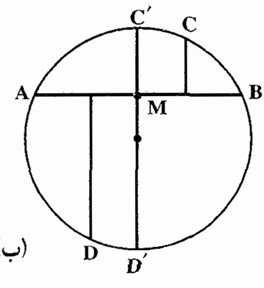
$$\sqrt{r.r_c} \le \frac{(p-a)+(p-b)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)-a+\frac{1}{2}(a+b+c)-b}{2} = \frac{c}{2}$$

به این ترتیب $\sqrt{r.r_c} \le \frac{c}{2}$.

راه سوم. اگر مرکزهای دو دایرهٔ K و K_c را O و O′ بگیریم، ثابت می‌کنیم، چهار نقطهٔ A، B، O و O′ روی یک دایره واقعند و دو نقطهٔ O و O′ در دو طرف خط راست AB قرار دارند (شکل الف) دو زاویهٔ OAO′ و OBO′ قائمه‌اند، زیرا نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب بر هم عمودند. بنابراین، دایرهٔ به قطر OO′ از A و B می‌گذرد و در ضمن، چون AB، دو دایرهٔ K و K_c را از هم جدا می‌کند، به ناچار، مرکزهای O و O′ را از هم جدا خواهد کرد. با این توضیح، مسأله را می‌توان حالت خاصی از قضیهٔ زیر دانست (شکل ب) اگر دو نقطهٔ C و D روی محیط دایره‌ای در دو طرف وتر AB از دایره واقع باشند، واسطهٔ هندسی فاصله‌های C و D از AB، حداکثر برابر است با $\frac{1}{2}AB$. در ضمن در حالتی که C و D دو انتهای قطری از دایره باشند، این واسطهٔ هندسی، برابر $\frac{1}{2}AB$ می‌شود.

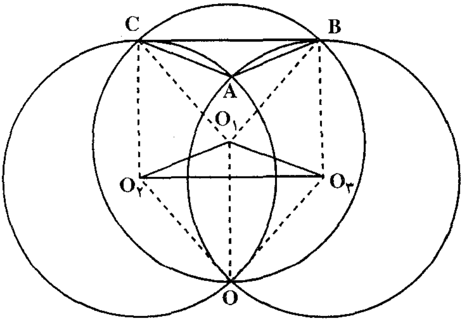


(الف)



(ب)

۵۴۲. فاصلهٔ O_1 و O_2 و O_3 ، مرکزهای دایره‌های داده شدهٔ OBC، OCA و OAB از



O، و از این رو، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $O_1O_2O_3$، برابر با r است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که دو مثلث ABC و $O_1O_2O_3$ با هم برابرند، آنگاه می‌توانیم نتیجه بگیریم، شعاع دایره‌ای که بر A، B و C می‌گذرد نیز r است.

برای اثبات برابری این دو مثلث، ملاحظه می‌کنیم که چهار ضلعیهای BO_3OO_1 و CO_2OO_1 لوزی هستند، زیرا اندازهٔ هر ضلع آنها r است. از این رو O_3B و O_2C که با OO_1 موازی و برابرند، با یکدیگر نیز موازی و برابرند. بنابراین BCO_2O_3 متوازی‌الاضلاع است و $BC = O_2O_3$. با استفاده از لوزیهای AO_3OO_2 و BO_1OO_3، به نحو مشابه، می‌توان ثابت کرد که $AB = O_1O_2$ و $AC = O_1O_3$، پس مثلثهای ABC و $O_1O_2O_3$ با هم برابرند.

۲.۲.۵. اندازهٔ مساحت

۵۴۳. به دلیل تقارن نتیجه می‌شود که چهار ضلعی EKMP یک مربع است. شکل خواسته شده از یک مربع و چهار قطعه مساوی ترکیب شده است. برای محاسبهٔ مساحت یکی از این قطعه‌ها قبل از هر چیزی بایستی زاویهٔ مرکزی متناظر به آن را بیابیم. از آن جا که مثلث AKD متساوی‌الاضلاع است از این‌رو $K\hat{A}D = 60°$ بوده و در نتیجه $B\hat{A}K = 30°$ خواهد بود. به طریق مشابه $M\hat{A}D = 30°$ و در نتیجه $K\hat{A}M = 30°$ حاصل می‌شود. مساحت یکی از این قطعات به صورت $S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2}a^2(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2})$ می‌باشد. برای محاسبهٔ طول ضلع مربع EKMP قانون کسینوسها را در مورد مثلث AKM به کار می‌گیریم:

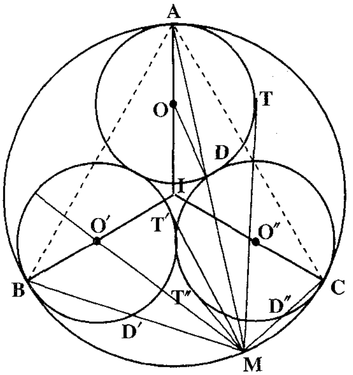
$$KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK.AM.\cos 30°$$

یعنی: $KM^2 = a^2 + a^2 - 2a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2(2-\sqrt{3})$، سرانجام چنین حاصل می‌شود:

$$S = S_{\text{مربع}} + 4S_{\text{قطعه}} = a^2(2-\sqrt{3}) + 2a^2(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}) = a^2(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3})$$

۳.۲.۵. رابطه‌های متری

۵۴۶. ابتدا با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس ثابت می‌شود که $MA = MB + MC$ (در چهار ضلعی محاطی ABMC قضیهٔ بطلمیوس را بنویسید)



$AM.BC = AB.MC + AC.MB$ و

$$MA = MB + MC \qquad (۱)$$

چون دایرهٔ بزرگ با هر یک از دایره‌های کوچک مماس داخل است، هر دایرهٔ کوچک با دایرهٔ بزرگ متجانس یکدیگرند. در تجانس به مرکز نقطهٔ تماس و نسبت $\frac{R}{R-r}$ در دو مثلث AOD و AIM چون OD موازی با IM است، داریم:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{IA}{IO} = \frac{R}{R-r} \Rightarrow MD = \frac{R-r}{R} MA$$

$$MT^{۲} = MA.MD = MA.\frac{R-r}{R}.MA = \frac{R-r}{R}.MA^{۲} \Rightarrow MT = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MA$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود: $MT' = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MB$ و $MT'' = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MC$

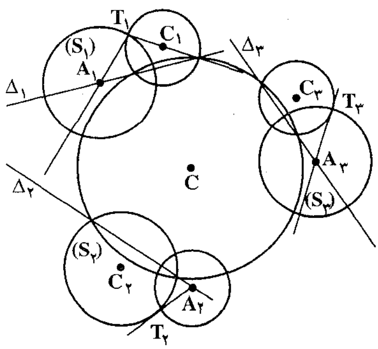
پس:

$$MT = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MA ، \ MT' = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MB , \ MT'' = \sqrt{\frac{R-r}{R}}.MC$$

از سه تساوی اخیر و تساوی (۱) نتیجه می‌گیریم: $MT = MT' + MT''$

نکته. سه دایره با شعاعهای مساوی داخل دایرهٔ بزرگتر و مماس با آن، با هم هر وضعی داشته باشند (مماس یا متقاطع یا متخارج) مانعی ندارد.

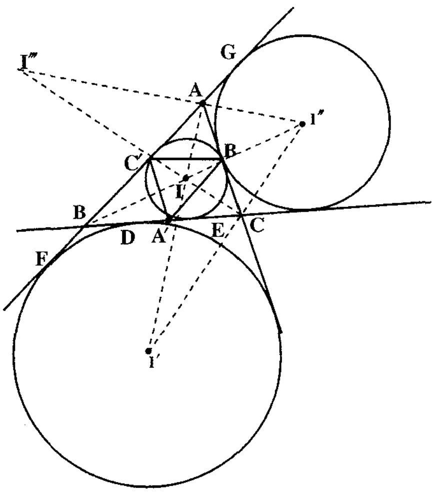
۴.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۵۴۷. اگر C دایرهٔ خواسته شده باشد به نحوی که $\Delta_۱$ محور اصلی دایره‌های $(C, C_۱)$ از نقطهٔ A گذشته باشد، در این صورت $\Delta_۱$ مکان هندسی نقاطی است که می‌توان از آن نقاط دایره‌هایی عمود بر دایره‌های C و $C_۱$ رسم کرد. پس می‌توان به مرکز $A_۱$ و شعاع $A_۱T_۱$ دایرهٔ $(S_۱)$ عمود بر دایره‌های $(C_۱, C)$ رسم کرد. و به همین دلیل دایرهٔ $(S_۲)$ به مرکز $A_۲$ و شعاع $A_۲T_۲$ بر دایره‌های $(C, C_۲)$ و دایرهٔ $(S_۳)$ به مرکز $A_۳$ و شعاع $A_۳T_۳$ بر دایره‌های $(C, C_۳)$ عمود است. از آن‌جا حل مسأله چنین است: به مرکز $A_۱$ دایرهٔ $(S_۱)$ عمود بر $C_۱$ و به مرکز $A_۲$ دایرهٔ $(S_۲)$ عمود بر $C_۲$ و به

مرکز A_3 دایرهٔ (S_3) را بر دایرهٔ C_3 عمود کرده و دایرهٔ (C) عمود بر دایره‌های (S_1) و (S_2) و (S_3) را رسم می‌نماییم (دایرهٔ C مرکزش مرکز اصلی S_1 و S_2 و S_3 و شعاع آن طول مماس مرسوم از C بر آنها می‌باشد) محور اصلی (C,C_1) از A_1 و محور اصلی (C,C_2) از A_2 و محور اصلی (C,C_3) از A_3 می‌گذرد و این دایره، دایرهٔ خواسته شده است.

۵۴۸. فرض کنیم A'، B' و C' وسطهای سه ضلع و I و I' و I'' و I''' مرکزهای دایره‌های محاطی و محاطی خارج مثلث ABC باشند. محور اصلی دو دایرهٔ (I) و (I') از نقطهٔ وسط مماس مشترک داخلی DE می‌گذرد ؛ و این نقطه همان A' است، زیرا داریم : $CE = P - c$ و $DB = P - c$. از طرف دیگر این محور اصلی بر خط‌المرکزین II' عمود است، یعنی با نیمساز زاویهٔ خارجی BAC موازی است، پس نیمساز زاویهٔ خارجی $B'A'C'$ می‌باشد، زیرا چون دو زاویهٔ BAC و $B'A'C'$ ضلعهایشان نظیر به نظیر متوازی و در خلاف جهت هستند، پس نیمسازهای آنها نیز متوازی هستند ؛ بنابراین نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث $A'B'C'$، محور اصلیهای دایرهٔ (I) با هر یک از دایره‌های (I') و (I'') و (I''') است. حال دو دایرهٔ (I') و (I'') را در نظر می‌گیریم. محور اصلی از نقطهٔ وسط مماس مشترک FG عبور می‌کند و این نقطه همان C' است، زیرا داریم : $AF = BG = P$



و از طرف دیگر این محور اصلی که بر خط‌المرکزین $I'I''$ عمود است، موازی با نیمساز داخلی زاویهٔ BCA است. پس همان نیمساز زاویهٔ داخلی $A'C'B'$ است. زیرا ضلعهای دو زاویهٔ BCA و $B'C'A'$ نظیر به نظیر متوازی و مختلف‌الجهت هستند.

۵۴۹. مرکزهای دایره‌ها را A، B، C و D می‌نامیم. K، L، M و N نقطه‌های تماس دایره‌ها بترتیب روی پاره‌خطهای راست AB، BC، CD و DA واقعند و داریم:

$$N\hat{K}L = 180^\circ - (90^\circ - \frac{N\hat{A}K}{2}) - (90^\circ - \frac{K\hat{B}L}{2}) = \frac{1}{2}(D\hat{A}B + A\hat{B}C)$$

به همین ترتیب به دست می‌آید:

$$M\hat{N}L = \frac{1}{2}(A\hat{D}C + D\hat{C}B)$$

بنابراین، مجموع دو زاویهٔ NKL + NML، برابر با نصف مجموع زاویه‌های چهارضلعی ABCD، یعنی برابر ۱۸۰ درجه می‌شود؛ و این، به معنای آن است که‌چهار ضلعی KLMN، قابل محاط شدن در دایره است.

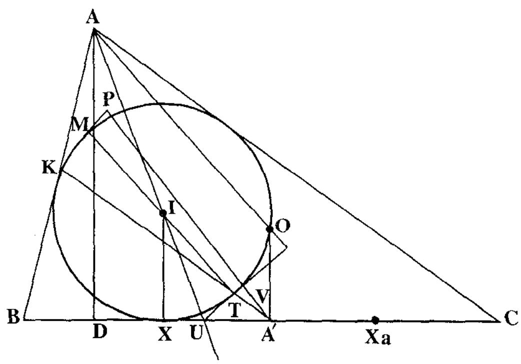
۵.۳. رابطه‌های متری در پنج دایره

۵.۳.۱. اندازهٔ شعاع

۵۵۰. گزینهٔ (الف) درست است.

۵۵۱. در مثلث ABC، I و I_a مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع BC، مزدوج توافقی نسبت به رأس A و نقطهٔ U محل برخورد نیمساز داخلی رأس A با ضلع BC می‌باشند. بنابراین نقطه‌های تماس (X_a, X) دایره‌های I و I_a با ضلع BC، مزدوج توافقی نسبت به U و D پای ارتفاع AD از مثلث ABC خواهند بود. وسط XX_a بر وسط BC، (A′) منطبق است؛ در نتیجه داریم:

$$A'U.A'D = A'X^2$$



اگر T نقطهٔ تماس دومین مماسی باشد که از U بر دایرهٔ J رسم می‌شود، خطهای UT و UX قرینهٔ یکدیگر نسبت به AU هستند. همین طور قطر AO از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و ارتفاع AD. بنابراین UT بر AO عمود است همچنین بر قطر A′P

از دایرهٔ نه نقطهٔ (N) مثلث ABC که در آن P نقطهٔ اولر ارتفاع AD است.
اگر K دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ (I) با A′T و $V=(A'P, UT)$ باشد، از تشابه مثلثهای قائم الزاویهٔ A′DP و A′UV خواهیم داشت:

$$A'V.A'P = A'D.A'U = A'X^{۲} = A'T.A'K$$

بنابراین دو جفت نقطه‌های P، V و K، T واقع بر یک دایره‌اند و $P\hat{K}T = T\hat{V}A'$ است. PK عمود بر KTA′ است و بنابراین K بر دایرهٔ نه نقطهٔ (N) قرار می‌گیرد. PA′ قطری از (N) است، به علاوه دومین نقطهٔ برخورد PK با دایرهٔ (I) نقطهٔ (M) انتهای قطری از I است که از T می‌گذرد. خطهای TM و A′VP موازی‌اند، زیرا هر دو عمود بر UTV هستند. بنابراین $K=(PM, A'T)$ بر یک استقامت با وسطهای قطعه‌های TM و A′P خواهد بود. اکنون TM و A′P به ترتیب قطرهای دایره‌های (I) و (N)اند و K نقطهٔ مشترک این دو دایره است و در نتیجه (I) و (N) بر یکدیگر در نقطهٔ K مماسند. نقطهٔ K نقطهٔ فوئرباخ دایرهٔ (I) نامیده می‌شود.
نتیجهٔ ۱. از مطالب بالا نتیجه می‌شود که اگر T قرینهٔ X نسبت به نیمساز AU باشد، پای عمودی که از نقطهٔ اولر P روی خط A′T فرود می‌آید، نقطهٔ فوئرباخ دایرهٔ (I) است.
نتیجهٔ ۲. به طریقی مشابه با طریق فوق می‌توان ثابت کرد که اگر T_a قرینهٔ X_a نسبت به AU باشد، K_a پای عمودی که از P بر خط $A'T_a$ فرود می‌آید، نقطهٔ فوئر باخ دایرهٔ (I_a) است. همین طور برای دو دایرهٔ محاطی خارجی دیگر.
۵۵۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۴.۵. رابطه‌های متری در شش دایره

۴.۵.۱. اندازهٔ مساحت

۵۵۳. مساحت شکل برابر با مساحت ۱۲ قطعهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان در دایره‌ای به شعاع ۱ است.

پس:

$$S_{\text{قطعهٔ } \theta \text{ رادیان}} = \frac{۱}{۲}R^{۲}(\theta - \sin\theta), \quad R=۱, \quad \theta = \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow S_{\text{شکل}} = ۱۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۱^{۲}\left(\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۳}\right) = ۶\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{شکل}} = ۲\pi - ۳\sqrt{۳}$$

۵.۵. رابطه‌های متری در n دایره (n > ۶)

۵.۵. ۱. اندازهٔ مساحت

۵۵۴. گزینهٔ (د) درست است، زیرا :

$$S = \pi + \frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶} + \cdots \Rightarrow S = \frac{\pi}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۴\pi}{۳}$$

۵۵۵. الف. $\frac{R^{۲}}{۶}(۷-۴\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-\pi)$

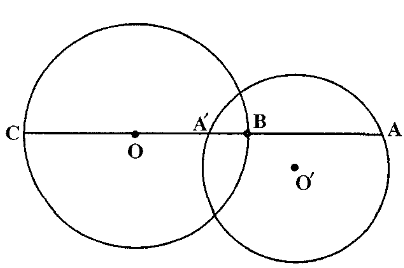
ب. $R^{۲}(۳-۲\sqrt{۲})(۴-\pi)$

پ. $(۳\sqrt{۳}-\pi)$

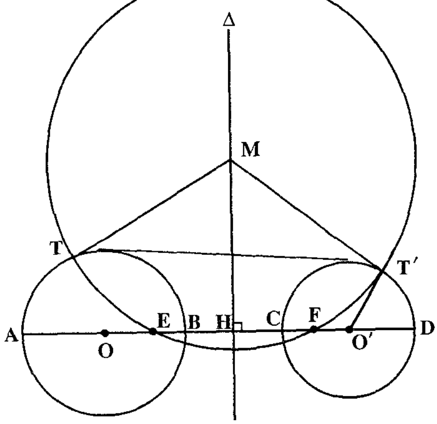
۵۵۶. مرکز دایره‌ها را حفظ، ولی شعاع همهٔ آنها را، سه برابر می‌کنیم. در ضمن، اگر دو تا از دایره‌های اولیه، متقاطع باشند، دایرهٔ کوچکتر را کنار می‌گذاریم (حذف می‌کنیم). در نتیجه، این ویژگی حفظ می‌شود : دایره‌هایی که سه برابر شده‌اند، مثل قبل، مجموعه‌ای را که به وسیلهٔ دایرهٔ کوچکتر پوشیده می‌شد، می‌پوشانند. به این ترتیب چند دایره حذف می‌شوند و چند دایره غیر متقاطع می‌مانند که سه برابر شدهٔ آنها، مجموعه‌ای به مساحت واحد را پوشانده‌اند. بنابراین، مجموع مساحتهای آنها کمتر از $\frac{۱}{۹} = (\frac{۱}{۳})^{۲}$ نخواهد بود.

۵.۵. ۲. دایره‌ها از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند

۵۵۷. A را به مرکز دایرهٔ (O) وصل می‌کنیم. و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (O) را در B و C قطع کند. چون دایرهٔ (O′) بر دایرهٔ (O) عمود است، پس چهار نقطهٔ C و B و A′ و A تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند و سه نقطهٔ A و B و C ثابت‌اند ؛ پس A′ ثابت است. در نتیجه دایره‌هایی که بر دایرهٔ (O) عمود باشند، بر نقطهٔ ثابت A′ می‌گذرند.



۵۵۸. می‌دانیم مکان هندسی مرکزهای کلیهٔ دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ مفروض، محور اصلی آنهاست. اگر از نقطهٔ دلخواه M واقع بر Δ محور اصلی دایره‌های مفروض (O) و (O′) مماسهای MT و MT′ را بر آنها رسم کنیم، MT = MT′ بوده و دایرهٔ



به مرکز M و شعاع $MT=MT'$ بر دو دایرهٔ (O) و(O′) عمود است. (چرا؟)

در نتیجه این دایره خط‌المرکزین OO′ را در دو نقطهٔ E و F که نسبت به H قرینه‌اند، قطع می‌کند (چرا؟). و چون دایرهٔ (M) بر دایرهٔ (O) عمود است، Q و P مزدوجهای توافقی AB بوده و می‌توان نوشت :

$R^2 = OB^2 = OA^2 = OE.OF = (OH - HE)(OH + HF)$ یا

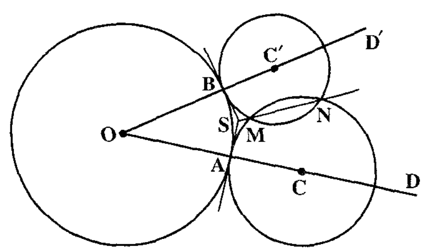
$R^2 = (OH - HE)(OH + HE) = OH^2 - HE^2$ و یا

$HE^2 = OH^2 - R^2 =$ مقداری ثابت است

و از آن‌جا : چون H ثابت است، E و در نتیجه F ثابت خواهد بود.

یادآوری مهم. کلیهٔ دایره‌های عمود بر یک دستگاه دایره از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرند و این نقطه‌های ثابت همان E و F مسألهٔ فوق است، که این نقطه‌ها را نقطه‌های حد می‌نامند. و از آن جا می‌توان نتیجه گرفت دایره به قطر پاره‌خط واصل بین نقطه‌های حد یک دستگاه دایره‌ها بر کلیهٔ دایره‌های دستگاه عمود است.

۳.۵.۵. محور اصلی



۵۵۹. کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر B که مرکزشان بر D′ واقعند بر خط عمود بر D′ در نقطهٔ B و کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر A که مرکزشان بر D واقع است بر خط عمود بر D در نقطهٔ A مماسند. اگر C و C′ دو دایره از دایره‌های فوق باشند که در نقطه‌های M و N متقاطعند، در این صورت MN محور اصلی آنها از نقطهٔ S محل تلاقی عمودهای مرسوم از A و B و عمود بر D و D′ می‌گذرد ؛ زیرا دایرهٔ به مرکز O و شعاع $OA=OB$ با دایره‌های(C) و(C′) مماس‌بوده و SA و SB نیزمحوراصلیشان‌بوده ودرنتیجه S مرکز اصلی آنهاست و از آن‌جا $P_{s(c)} = P_{s(c')} = P_{s(o)} = \overline{SB}^2 = \overline{SA}^2 = SM.SN$ یعنی

S یک نقطه از محوراصلی دایره‌های C و ′C است و چون با تغییر C و ′C دایرهٔ (O) و در نتیجه SA و SB ثابت می‌مانند، لذا S ثابت بوده و یا محور اصلی تمام آنها از نقطهٔ ثابت S می‌گذرند.

۵۶۱. بردارهای AW و ′A′W نسبت به دو دوران که مرکزهای دوران عبارت است از محل تلاقی عمود منصف ′AA با دایرهٔ محیطی مثلث ′OAA تبدیل یافته یکدیگرند و محور اصلی دو دایرهٔ W و ′W عمود منصف ′WW است.

۵۶۲. اگر D محور اصلی دایرهٔ (O) و (δ) یکی از دایره‌های گذرنده بر A که مرکزش (W) بر دایرهٔ (O) واقع است باشد و از A عمود AE را بر D فرود آوریم، داریم،

$P_{A(O)} - P_{A(W)} = 2\overline{WO}.EA$ (۱) و همچنین داریم :

$P_{A(W)} = 0$ (۳) و $P_{A(O)} = \overline{OA}^2 - R^2$ (۲)

و از طرفی می‌دانیم $d = WO = R$ (d طول خط‌المرکزین است)، لذا می‌شود :

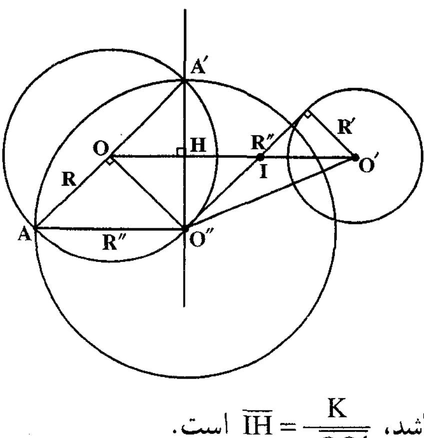
$$AE = \frac{\overline{OA}^2 - R^2}{2R} \qquad (4)$$

که چون طرف دوم رابطهٔ (۴) ثابت است، طرف اول یعنی AE ثابت خواهد بود ؛ یعنی وقتی دایرهٔ (δ) مرکزش بر محیط دایرهٔ (O) تغییر کند و بر A گذشته باشد، فاصلهٔ A از محور اصلی ثابت مانده و یا محور اصلی بر دایره‌ای به مرکز A و شعاع $R' = AE = \frac{OA^2 - R^2}{2R}$ مماس است ؛ یا به عبارت دیگر، پوش محورهای اصلی دایره‌ای است، به مرکز A و شعاع $R' = AE = \frac{\overline{OA}^2 - R^2}{2R}$.

۴.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶۳. اگر دایرهٔ $C''(O'',R'')$ یکی از دایره‌های جواب مسأله باشد، چون دایرهٔ ″C دایرهٔ (C) را نصف کرده است. پس داریم :

$O''O^2 = R''^2 - R^2$ (۱)



و چون دایرهٔ (″C) بر دایرهٔ (C) عمود است، بنابراین داریم :

$O''O'^2 = R''^2 + R'^2$ (۲)

از تفاضل این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$O''O'^2 - O''O^2 = R'^2 + R^2 = K$

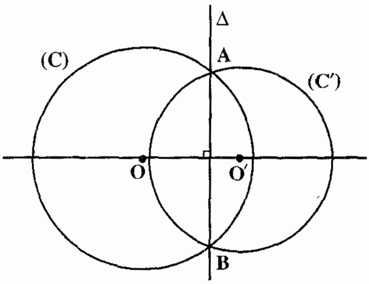
بنابراین مکان هندسی نقطهٔ ″O خطی است مستقیم عمود بر ′OO در نقطه‌ای مانند H، به قسمی که اگر I وسط ′OO باشد، $\overline{IH} = \frac{K}{2OO'}$ است.

۶.۵. دسته دایره

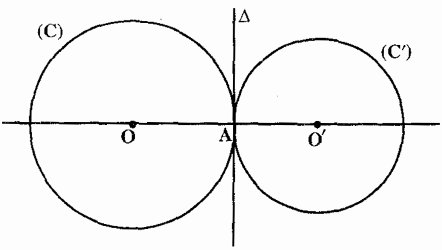
۵. ۶. ۱. تعریف و قضیه

۵۶۴. فرض می‌کنیم دایرهٔ C(O,R) یک دایره از دسته دایره، و خط Δ محور اصلی دسته دایره باشد. یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید:

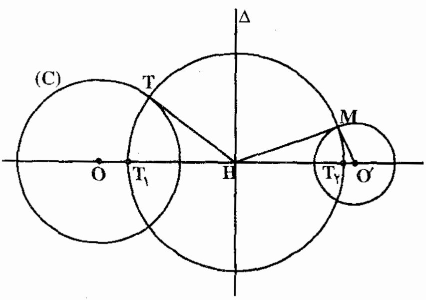
الف. خط Δ و دایرهٔ (C) در دو نقطهٔ A و B متقاطعند. در این صورت همهٔ دایره‌های این دسته دایره از دو نقطهٔ A و B باید بگذرند، پس مکان هندسی مرکز این دایره‌ها (پایهٔ دسته دایره) خطی است که از نقطهٔ O بر پاره‌خط AB عمود می‌شود (عمودمنصف پاره‌خط AB). در این حالت کوچکترین دایرهٔ دسته دایره، دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.



ب. دایرهٔ (C) و خط Δ در یک نقطه مانند A برهم مماسند. در این حالت مرکز دایره‌های دسته‌دایره، روی‌خط OA واقع است. (خطی که از مرکز دایرهٔ (C) بر Δ عمود شده است). در این حالت دسته دایره یک دایره به شعاع صفر دارد که همان نقطهٔ A می‌باشد. دایره‌های این دسته دوبه‌دو در نقطهٔ A برهم و بر خط Δ مماسند.



ج. دایرهٔ (C) و خط Δ متخارجند. در این حالت نیز مرکز دایره‌های دسته، روی خطی قرار دارد که از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (C) بر خط Δ عمود می‌شود. پای این عمود را H می‌نامیم و از H مماس HT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم. به مرکز H و به شعاع HT یک دایره رسم می‌کنیم. این

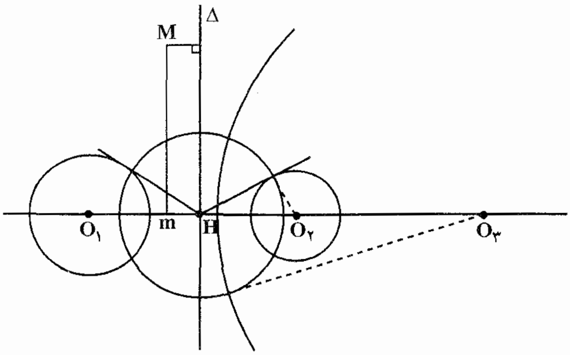


دایره خط OH را در دو نقطهٔ T_1 و T_2 قطع می‌کند که دایره‌های به شعاع صفر دسته دایره‌اند. حال اگر نقطهٔ دلخواه M را روی دایرهٔ (H,HT) در نظر بگیریم و مماسی بر دایرهٔ (H) در این نقطه رسم کنیم تا خط OH را در نقطهٔ O' قطع کند، دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'M$ یکی از دایره‌های دسته دایره است؛ زیرا قوت نقطهٔ H نسبت به این دایره و دایرهٔ(C) برابر است. $P_{H(O)} = P_{H(O')} = HT^2 = HM^2$. با تغییر جای نقطهٔ M دایره‌های دیگر دستگاه را می‌توان رسم نمود. در این حالت دو دایره به شعاع صفر وجود دارد که این دایره‌ها را دایره‌های حد دسته دایره می‌نامند.

۵. ۶. ۲. دایره‌هایی از یک دسته دایره مفروضند، ...

۵۶۵. چنانچه Δ محور اصلی دایره‌های (O_1) و (O_2) باشد، می‌توان نوشت:

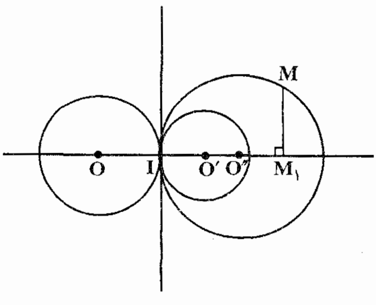
$$P_{M(O_1)} - P_{M(O_2)} = 2(\overline{O_1O_2}).(\overline{MH})$$
$$P_{M(O_2)} - P_{M(O_3)} = 2\overline{O_2O_3}.\overline{MH}$$



از کم کردن رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$P_{M(O_1)} + P_{M(O_3)} - 2P_{M(O_2)} = 2MH(\overline{O_1O_2} - \overline{O_2O_3}) = 0$$ یا
$$P_{M(O_1)} + P_{M(O_3)} = 2P_{M(O_2)}$$

۵۶۶. فرض کنیم (O)، (O') و (O'') سه دایرهٔ متعلق به یک دستگاه باشند، اگر M نقطهٔ متغیری از (O'')، P و P' قوتهای آن نسبت به (O) و (O') و I پای محور اصلی و M_1 تصویر M روی خط المرکزین باشند، داریم:



$$P = 2\overline{OO''} \times \overline{IM_1} \;;$$
$$P' = 2\overline{O'O''} \times \overline{IM_1} \;;$$

پس : $\frac{P}{P'} = \frac{\overline{OO''}}{\overline{O'O''}}$، بنابراین $\frac{P}{P'}$ مستقل از وضع M در روی دایرهٔ (O'') است.

۵۶۷. اگر I پای محور اصلی دایره‌های (O) و (O_1) و (O_2) و M وسط OO_1 باشد، داریم :

$$\overline{OI} = \overline{OM} + \overline{MI} = \frac{\overline{OO_1}}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO_1}} \quad (1) \quad \text{و} \quad MI = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO_1}}$$

و همچنین اگر M' وسط $\overline{OO_2}$ باشد، داریم :

$$\overline{M'I} = \frac{R^2 - R''^2}{2\overline{OO_2}}$$

همچنین می‌توان نوشت :

$$\overline{OI} = \frac{\overline{OO_2}}{2} + \frac{R^2 - R''^2}{2\overline{OO_2}} \quad (2)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{OO_1}}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO_1}} = \frac{\overline{OO_2}}{2} + \frac{R^2 - R''^2}{2\overline{OO_2}}$$

و یا :

$$\frac{\overline{OO_1}}{2} - \frac{\overline{OO_2}}{2} = -\frac{\overline{O_2O_1}}{2} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO_1}} - \frac{R^2 - R''^2}{2\overline{OO_2}}$$

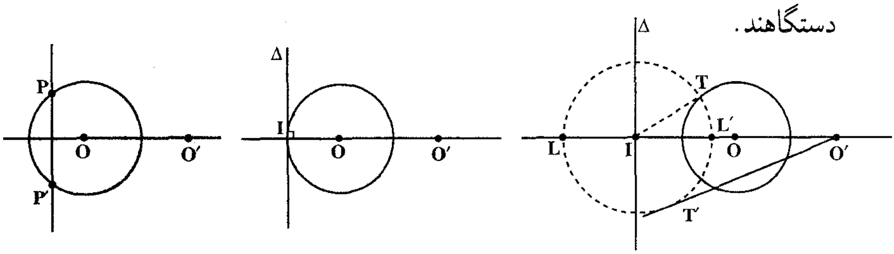
که پس از ساده کردن نتیجه می‌شود :

$$\overline{OO_1}.\overline{O_1O_2}.\overline{OO_2} = R^2\overline{O_1O_2} + R'^2\overline{OO_2} + R''^2\overline{OO_1}$$

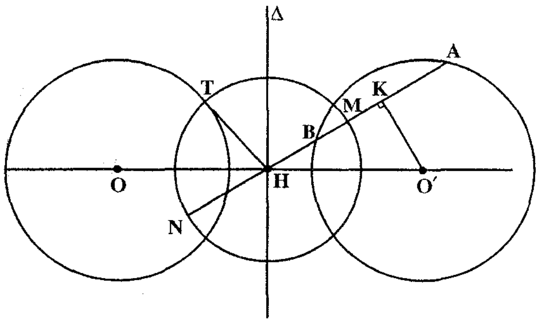
۵۶۸. دایرهٔ گذرنده بر نقطه‌های حد را دایرهٔ (T) می‌نامیم. مرکز این دایره روی Δ و محل تلاقی آن را با Δ نقطه‌های R و S فرض می‌کنیم. دایرهٔ (T) بر دو دایرهٔ (O) و (O') عمود است و نقطه‌های (P,Q,R,S) و (P',Q',R,S) تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند. پس دستگاههای (IP,IQ,IR,IS) و (IP',IQ',IR,IS) توافقی‌اند. چون دو شعاع IR و IS بر هم عمودند، پس این دو خط نیمسازهای مشترک زاویه‌های PIQ و $P'IQ'$ می‌باشند. اگر Δ در P بر دایرهٔ (O) مماس باشد، خط IP یکی از نیمسازهای زاویهٔ $P'IQ'$ است.

۵۶۹. دستگاه دایره‌ای به محور اصلی Δ و دایرهٔ (O) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم شعاع دایره‌ای از دستگاه را به مرکز O' و پایهٔ IO رسم کنیم. اگر (O) خط Δ را در نقطه‌های P و P' قطع کند، شعاع مطلوب $O'P$ است. اگر (O) بر Δ مماس باشد، شعاع مطلوب $O'I$ است. اکنون فرض کنیم (O) با Δ نقطهٔ مشترکی نداشته باشد. IT را مماس بر (O) رسم می‌کنیم. نقطهٔ I قوتهای متساوی برابر با IT^2 نسبت به دایره‌های دستگاه دارد. به عبارت دیگر، تمام دایره‌های دستگاه بردایرهٔ به

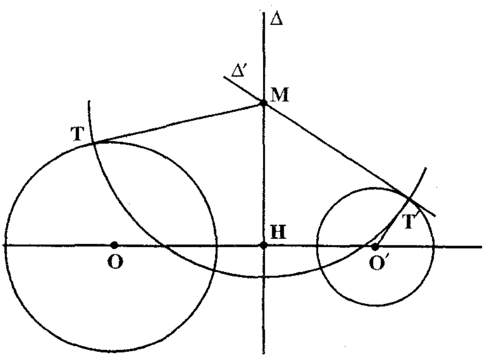
مرکز I و به شعاع IT عمودند و شعاع دایرهٔ مطلوب، با رسم مماس از O' بر دایرهٔ (I) به‌دست می‌آید که آن را $O'T'$ می‌نامیم. در این حالت برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است که O' بین قطر LL' قرار نگیرد. L و L' نقطه‌های حد دستگاهند.

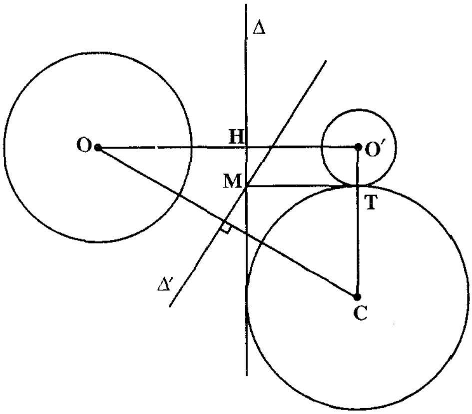


۵۷۰. نقطه A و دسته دایرهٔ (O,Δ) مفروضند. به مرکز H و به شعاع HT دایره‌ای رسم می‌کنیم. خط AH این دایره را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به M و N نقطهٔ B است. محل برخورد عمودمنصف AB با خط OH مرکز دایره‌ای است که متعلق به دسته دایرهٔ مفروض بوده و از نقطهٔ A می‌گذرد، زیرا تمام دایره‌های متعلق به دستگاه باید بر دایرهٔ (H) عمود باشند.



۵۷۱. دسته دایرهٔ (O,Δ) و خط Δ' مفروضند. محل برخورد Δ' را با Δ نقطهٔ M می‌نامیم. از M مماس MT را به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. به مرکز M و به شعاع MT دایره‌ای می‌کشیم که Δ' را در T' قطع می‌کند. از T' عمودی بر Δ' اخراج می‌کنیم تا OH را در O' تلاقی کند. دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'T'$ جواب مسأله است؛ زیرا اولاً، متعلق به دسته دایره است، ثانیاً بر خط Δ' مماس است.





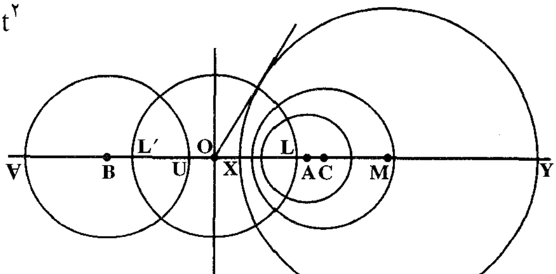
۵۷۲. دسته دایرهٔ (O,Δ) و دایرهٔ (C) را در نظر می‌گیریم. Δ' محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (C) را رسم می‌کنیم که Δ را در M قطع می‌کند. این نقطه، مرکز اصلی دایرهٔ (C) و دایرهٔ (O) و دایرهٔ جواب مسأله است. بنابراین از M مماس MT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم. محل برخورد CT با OH نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ جواب می‌باشد که شعاعش $O'T$ است؛ زیرا اولاً، دایرهٔ (O') متعلق به دستگاه دایره است و ثانیاً بر دایرهٔ (C) مماس است.

۵۷۳. الف. در حالت دسته دایرهٔ متقاطع، شعاع دایرهٔ مطلوب (M) برابر طول پاره‌خطی است که M را به یکی از نقطه‌های اساسی E و F وصل می‌کند. اگر M بر نقطهٔ برخورد محور اصلی r و خط مرکزی c منطبق باشد، شعاع دایرهٔ مطلوب کمترین مقدار ممکن را دارد، و EF قطر دایرهٔ مطلوب است.

به ازای هر M مفروض روی خط c، مسأله یک و تنها یک جواب دارد.

ب. در حالت دسته دایرهٔ غیرمتقاطع (شکل)، محور r، و در نتیجه نقطهٔ O که نقطهٔ برخورد r با پایهٔ c است، در خارج دایره‌های دستهٔ زیر، قرار دارد؛ پس می‌توان از O بر هر یک از دایره‌های دسته، مانند (A)، مماسی رسم کرد. چون O روی r است، طول این مماس با طول مماسی که از O بر هر دایرهٔ دسته، از جمله دایرهٔ مطلوب (M)، رسم می‌شود، برابر است. پس اگر m شعاع (M) و t طول مماس رسم شده از O بر هر دایرهٔ دسته باشد، داریم:

$$m^{2} = OM^{2} - t^{2}$$

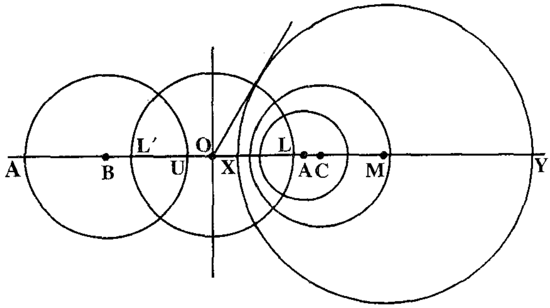


پس اگر فاصلهٔ مرکز مفروض، M، از نقطهٔ O بزرگتر از t باشد، مسأله یک و تنها یک جواب خواهد داشت.

۵۷۵. ۱. اگر X و Y نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین (پایه) دسته دایره با هر دایرهٔ دسته باشد، داریم :

$OL^{2} = t^{2} = OX.OY$

پس $(LL'XY) = -1$ و قضیه ثابت شده است.

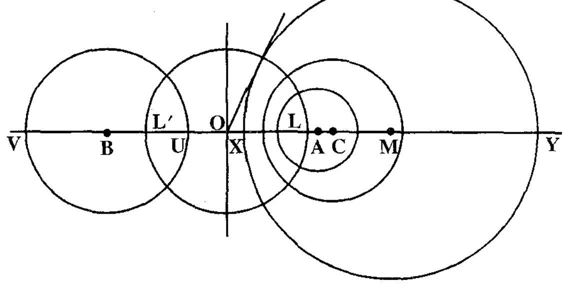


۲. اگر دو نقطهٔ L و L′ نسبت به دایره‌های متعلق به گروهی از دایره‌ها وارون یکدیگر باشند، مرکز همهٔ دایره‌های این گروه روی خط LL′ قرار خواهند داشت و اگر X و Y نقطه‌های برخورد LL′ با یک دایرهٔ دلخواه گروه دایره‌ها باشند، بنابه فرض برای نقطهٔ وسط LL′ یعنی O، داریم :

$OX.OY = OL^{2}$

پس قوت نقطهٔ O نسبت به همهٔ دایره‌های این گروه یکسان است. پس دایره‌ها یک دسته دایرهٔ هم محور تشکیل می‌دهند، و محور اصلی آنها در نقطهٔ O بر خط LL′ عمود است.

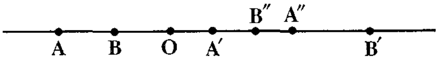
۵۷۶. فرض کنید (A) و (B) دو دایرهٔ تعیین‌کنندهٔ یک دسته دایرهٔ هم محور باشند، و فرض کنید که خط AB این دو دایره را به‌ترتیب در X، Y و U و V قطع کند، اگر L و L′ دو نقطهٔ حدی دسته دایره باشند، باید داشته باشیم : $(UVLL') = -1$ و $(XYLL') = -1$ پس دو نقطهٔ L و L′ تنها نقطه‌های حدی دسته دایره‌اند.



۳.۶.۵. ثابت کنید دایره‌ها به یک دسته تعلق دارند

۵۸۱. محل برخورد D را با Δ نقطهٔ I بنامید و نشان دهید که قوت I نسبت به کلیهٔ دایره‌های به قطر MM' یکی است.

۵۸۲. نقطهٔ O پای محور اصلی دو دایره به قطرهای AB و $A'B'$ است. O را مبدأ انتخاب می‌کنیم. a، b، a'، b'، a'' و b'' طولهای نقطه‌های A، B، A'، B'، A'' و B'' می‌باشند و داریم:



$ab = a'b' = p$

و بنا به فرض داریم:

$$۲(aa'' + a'b') = (a + a'')(a' + b')$$
$$۲(bb'' + a'b') = (b + b'')(a' + b')$$

از تقسیم دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{aa'' + a'b'}{bb'' + a'b'} = \frac{a + a''}{b + b''} \Rightarrow (a - b)a''b'' = p(a - b) \Rightarrow a''b'' = P$$

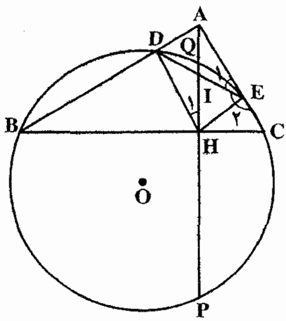
این رابطه نشان می‌دهد که دایرهٔ به قطر $A''B''$ متعلق به دستگاه دایرهٔ تشکیل شده از دایره‌های (AB) و $(A'B')$ است.

۵۸۳. اگر (O) و (O') دایره‌های مفروض؛ $(\omega_۱)$، $(\omega_۲)$، $(\omega_۳)$ و $(\omega_۴)$ دایره‌های به قطرهای مماس مشترکهای دو دایرهٔ (O) و (O') باشند، هر چهار دایرهٔ $(\omega_۱)$، $(\omega_۲)$، $(\omega_۳)$ و $(\omega_۴)$ بر دو دایرهٔ (O) و (O') عمودند. زیرا اولاً، متقاطعند؛ ثانیاً، مماسهای نقطهٔ تقاطع هر یک از آنها از مرکز دایرهٔ دیگری می‌گذرد.
از طرفی می‌دانیم کلیهٔ دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ مفروض از دو نقطهٔ ثابت E و F واقع بر خط‌المرکزین دو دایره می‌گذرند. پس دایره‌های $(\omega_۱)$، $(\omega_۲)$، $(\omega_۳)$ و $(\omega_۴)$ از دو نقطهٔ ثابت E و F واقع بر خط‌المرکزین دو دایرهٔ (O) و (O') گذشته، EF یا وتر مشترک آنها و یا محور اصلیشان بوده و در نتیجه جزء یک دستگاه دایره‌اند به محور اصلی خط‌المرکزین (OO').

۵۸۴. ۱. برای اثبات این که دایره‌های (C)، (C') و (C'') جزو یک دسته‌اند، باید ثابت کنیم اگر Δ محور اصلی دایره‌های (C) و (C') است، Δ نیز محور اصلی دایره‌های (C' و C'') و (C'' و C) نیز می‌باشد. بنابه خاصیت محور اصلی، از هر نقطه واقع بر محور اصلی (و در خارج دو دایره) می‌توان مماسهایی به طول مساوی بر آنها رسم کرد.
اگر M نقطهٔ دلخواهی از Δ باشد، $MT = MT''$ است؛ و چنانچه C'' قرینهٔ

C' نسبت به Δ باشد، قرینهٔ MT' نسبت به Δ در نقطهٔ T'' بر دایرهٔ (C'') مماس بوده و داریم $MT' = MT''$ و همچنین C و C' و C'' مرکزهای سه دایرهٔ فوق بر یک استقامت است و چون $MT = MT' = MT''$ است، می‌توان گفت : $P_{M(C)} = P_{M(C')} = P_{M(C'')} \Rightarrow MT^۲ = MT'^۲ = MT''^۲$. یعنی قوت نقطهٔ M نسبت به دایره‌های (C'' و C') و (C'' و C) مساوی است و از آن جا Δ محور اصلی دایره‌های (C)، (C') و (C'') است.

۲. اگر C' و C دو دایرهٔ برون هم (متخارج) باشند، محور اصلی آنها بین دو دایره بوده و با هیچ‌یک از آنها متقاطع یا مماس نیست، و C'' قرینه C' نسبت به Δ در همان طرفی است که دایرهٔ (C) است. و چون C'' و C در یک طرف محور اصلی واقعند ، پس دایره‌های (C'') و (C) متداخلند.



۵۸۵. ۱. چهار ضلعی $ADHE$ که ضلعهایش نظیر به نظیر و دوبه‌دو بر هم عمودند، مستطیل است. لذا $\hat{H}_۱ = \hat{E}_۱$ (۱) و همچنین چون ضلعهای دو زاویهٔ AHD و ABH نظیر به نظیر برهم عمودند، $\hat{B} = \hat{H}_۱$ (۲). از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{E}_۱ = \hat{B}$ و چون $\hat{E}_۱ + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ$ است، پس $\hat{B} + \hat{E}_۲ = ۱۸۰^\circ$ بوده و چهارضلعی $DBEC$ محاطی است.

۲. اگر (O) یکی از دایره‌های محیطی چهار ضلعی $BDEC$ در یک حالت غیرمشخص باشد، در مستطیل $ADHE$ قطر AH ثابت و قطر DE متغیر و حول I وسط AH تغییر می‌نماید و داریم :

$$P_{I(O)} = \overline{ID}.\overline{IE} = \overline{IA}.\overline{IH} = -IH^۲ = \overline{IP}.\overline{IQ}$$

و چون I و طول IA ثابت است، در نتیجه نقطهٔ I نسبت به تمام دایره‌های محیطی چهار ضلعیهای $BDEC$ دارای یک قوت است.

همچنین : $\qquad P_{A(O)} = \overline{AE}.\overline{AC} = \overline{AQ}.\overline{AP} \qquad (۱)$

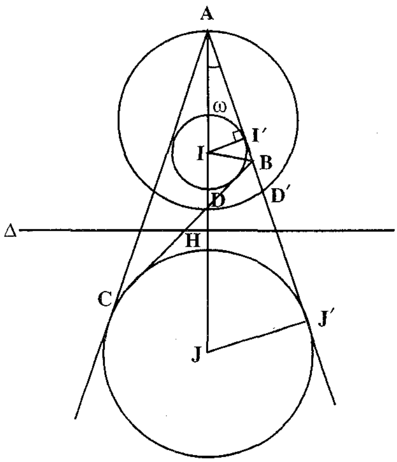
و چون مثلث AHC قائم‌الزاویه و HE ارتفاع وارد بر وتر آن است، در نتیجه $AH^۲ = AE.AC$ (۲) . از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که :

$$P_{A(O)} = AC.AE = AH^۲$$

و چون AH ثابت است، پس نقطهٔ A نسبت به تمام دایره‌های محیطی چهار ضلعیهای $BDEC$ دارای یک قوت بوده و از آن‌جا AI محور اصلی تمام دایره‌های محیطی چهار ضلعیهای $BDEC$ است و به‌عبارت دیگر تمام این دایره‌ها جزء یک دسته دایره‌اند.

۵۸۶. اگر I و J بترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مماس بر ضلع BC باشند، I و J پای نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی B از مثلث ABD نیز می‌باشند، پس (ADIJ) یک تقسیم توافقی است و تصویرهای آنها بر ضلع AB نیز تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند؛ یعنی $(AD'I'J')$ نیز یک تقسیم توافقی است، و چنانچه Δ محور اصلی دایره‌های (I) و (J) باشد، خط Δ مماس مشترک آنها را نصف می‌کند؛ یعنی، نقطهٔ M وسط $I'J'$ است و داریم:

$$P_{M(I)} = P_{M(J)} = MI'^{2} = MJ'^{2} \qquad (1)$$



و چون M وسط $I'J'$ است، پس:

$$MI'^{2} = MD'.MA \qquad (2)$$

و همچنین داریم:

$$P_{M(DA)} = MD'.MA \qquad (3)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$P_{M(I)} = P_{M(J)} = P_{M(AD)}$$

یعنی M روی محور اصلی دایره‌های (J) و (I) و (ω) (ω مرکز دایرهٔ به قطر نیمساز AD است) و چون ω مرکز دایرهٔ به قطر AD روی AJ است، در نتیجه Δ محور اصلی هر سه دایره بوده و یا سه دایره جزء یک دسته دایره‌اند.

۵۸۷. O، O'، r و r' مرکزها و شعاعهای دو دایره‌اند و I پای محور اصلی آنهاست و H و K مرکزهای تجانس دو دایره و P قوت مشترک I نسبت به دو دایره می‌باشد. باید ثابت کنیم:

$$IH \times IK = P \;;$$

H مرکز تجانس مستقیم است، پس:

$$\frac{HO}{HO'} = \frac{r}{r'} \;,$$

و یا

$$\frac{HI + IO}{HI + IO'} = \frac{r}{r'}$$

و از آن‌جا:

$$IH = \frac{r.IO' - r'.IO}{r - r'}$$

و به همین ترتیب:

$$IK = \frac{r.IO' + r'.IO}{r + r'}$$

پس (۱)

$$IH \times KI = \frac{r^{2}.IO'^{2} - r'^{2}.IO^{2}}{r^{2} - r'^{2}}$$

اما : $\overline{IO}^{2} - r^{2} = \overline{IO'}^{2} - r'^{2} = P$

از آن‌جا : $\overline{IO}^{2} = r^{2} + P$; $\overline{IO'}^{2} = r'^{2} + P$;

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود : $HI \times IK = P$;

۵۸۸. ۱. دو دایره به مرکزهای O و O' و به شعاع r و r' را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم I پای محور اصلی آنها، D و ω و ρ مرکز و شعاع دایرهٔ عمود بر آنها باشد می‌دانیم که ω روی D واقع است. داریم : $\overline{O\omega}^{2} = r^{2} + \rho^{2}$ (۱)

یا $\overline{IO}^{2} + \overline{I\omega}^{2} = r^{2} + \rho^{2}$

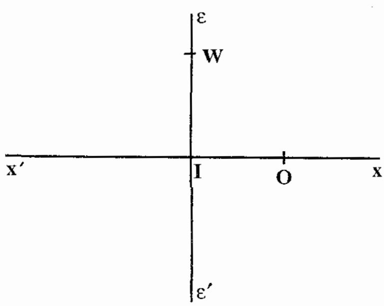
و از آن‌جا : $\overline{I\omega}^{2} - \rho^{2} = -(\overline{IO}^{2} - r^{2})$ (۲)

این رابطه نشان می‌دهد که قوت نقطهٔ I نسبت به (ω) قرینهٔ قوت I نسبت به (O) است. و در نتیجه دایرهٔ (ω) یکی از دایره‌های دستگاه مزدوج تشکیل شده از دستگاه (O) و (O') است. بعکس اگر (ω) دایرهٔ غیر مشخصی از این دستگاه باشد، رابطهٔ (۲) و در نتیجه رابطهٔ (۱) را می‌توان به‌دست آورد. پس (ω) بر (O) و (O') عمود است.

۲. دو دسته دایرهٔ مزدوج را رسم می‌کنیم که به مرکز اصلی I و به محورهای $x'x$ و $\varepsilon'\varepsilon$ و قوتهای P،$-P$ باشند. اگر O، ω، r و ρ مرکزها و شعاعهای دو دایره متعلق به این دو دسته باشند، داریم :

$P = \overline{IO}^{2} - r^{2}$;

$-P = \overline{I\omega}^{2} - \rho^{2}$



و از آن‌جا : $\overline{IO}^{2} + \overline{I\omega}^{2} = r^{2} + \rho^{2}$

یا $O\omega^{2} = r^{2} + \rho^{2}$. این رابطه نشان می‌دهد که دو دایره برهم عمودند.

۴.۶.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۹۷. فرض کنید (A) دایره‌ای از دسته دایرهٔ هم‌محور (U) و (P و p) دایره‌ای متعامد با (A) باشد که مرکزش یعنی نقطهٔ P روی محور اصلی (U) خط r است. قوت P نسبت به هر (A) برابر p^2 است و چون P روی r است، قوت P نسبت به هر دایره‌ای از (U) برابر p^2 است. پس (P و p) با هر دایره‌ای از (U) **متعامد** است.

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. تألیف : واسیلیف. گوتن ماخر. رابوت. توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۵. المپیادهای ریاضی بلژیک. مؤلف انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. مؤلف ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور نشر ماس ــ نشر نام.
۷. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مؤلف مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ماس ــ نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی لنینگراد. مؤلف د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۹. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری، ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۰. بازآموزی و باز شناخت هندسه. مؤلف هـ. س. م. کوکس تیر ــ س. ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۱. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.
۱۲. تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۳. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۴. تاریخ هندسه. مؤلف. پی‌یر، مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۵. تئوری مقدماتی اعداد. جلد اول. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۶. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۱۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۱۸. حل مسائل ریاضیات. مؤلف محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۱۹. حل مسائل متمم هندسه. مؤلف دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۰. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. مؤلف حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. تألیف : محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۲۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. مؤلف. عباس ذوالقدر.
۲۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. مؤلف. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. مؤلف. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. تألیف : غلامعلی ریاضی. علی‌حسن‌زاده. محمد حسین پرتوی. محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستانها. تألیف : محمدباقر ازگمی. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۲۹. خلاقیت ریاضی. مؤلف جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۰. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو و.ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۱. در پس فیثاغورس. شه‌پان ــ النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۲. دورهٔ حل‌المسائل هندسه. جلدهای اول و دوم. تألیف : ابوالقاسم قربانی. حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۳. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۴. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۵. دورهٔ مجلهٔ ریاضی رشد. وزارت آموزش و پرورش.
۳۶. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.

۳۷. روش حل مسائل هندسه. تألیف : دکتر حسن صفاری. ابوالقاسم قربانی. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۳۸. ریاضیات زنده. مؤلف ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۳۹. ریاضیدانان نامی. مؤلف دکتراریک تمپل‌بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۰. سرگرمیهای هندسه‌ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۱. قضایا و مسائل هندسه. تألیف غلامرضا یاسی‌پور.
۴۲. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. مؤلف : جی. ال. بِرگرِن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مؤلف مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. تألیف : واسیلیف. یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۴۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. تألیف جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۴۶. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. مؤلف و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۴۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. مؤلف. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۴۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. مؤلف. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۴۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. مؤلف ای. خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. مؤلف چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور. محمدقزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد دوم. مؤلف چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد سوم. مؤلف چارلز. ت. سالکیند. جیمز. م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. مؤلف آرتینو. گاگلیون. شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.

۵۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی). مؤلف و.س.کوشچنکو ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. جلد اول. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. جلد دوم. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. تألیف : محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۵۸. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. مؤلف ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۵۹. نابرابریها. مؤلف پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۰. نابرابریهای هندسی. مؤلف نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. نه مقالهٔ هندسه. تألیف : ابوالقاسم قربانی. دکتر حسن صفاری.
۶۲. هندسهٔ ایرانی. مؤلف. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۶۳. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. مؤلف ماروین جی گرینبرگ. ترجمهٔ. م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۴. هندسهٔ تحلیلی. تألیف : حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۶۵. هندسه‌های جدید. تألیف : جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۶۶. هندسه درگذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۶۷. هندسهٔ دوایر. مؤلف. دکتر محسن هشترودی از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۶۸. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). تألیف : محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا. پرویز شهریاری. علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۹. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم نظام قدیم وزارت آموزش و پرورش.
۷۰. هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۷۱. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش‌وپرورش (نظام اسبق).

۷۲. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته مؤلف ادوین.ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیرخسروی. محمود نصیری. انتشارات مبتکران.

۷۳. هندسهٔ موئیز. دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.

۷۴. هندسه‌های ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

75. COLLEGE GEOMETRY. NATHAN ALTSHILLER. COURT. BRANES NOBLE. NEW YORK.

76. COLLEGE BOARDS. EXAMINATION, M. MCDONOUGH, A. HANSEN.

77. EXERCICES. DE GÉOMÉTRIE PAR, F.G.M.

78. EXERCICES DE GEOMTRIE PAR TH, CARONNET.

79. ÉXÉRCICES DE GÉOMETRIE MODERNE. PAR G. PAPELIER. LIBRAIRIE. VUIBERT. PARIS.

80. GEOMETRY A HIGH SCHOOL. COURSE, Serge Lange, Gene Murrow.

81. GIANT COLOUR BOOK. OF MATHEMATICS by IRVING ADLER.

82. GUIDES PRATIQUES BORDAS.II.GEOMETRIE PAR. ROBERT ARDRE´.

83. JACUB GEOMETRY.

84. LES NOMBRES ET LEURS MYSTÈRES PAR. ANDRÉWARUSFEL.

85. MATHEMATICS AROUND US.

86. MÉMENTO DE MATHEMATIOUES USUELLES PAR , A.PONT.

87. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS A.M. WELCHONS, W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.

88. PRECIS DE GÉOME´TRIE PAR.ANDRE´ VIEILLEFOND ETP. TURMEL.

89. PRENTICE HALL GEOMETRY. BY, ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

90. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.

91. RÉSOLUTION DES PROBLÉMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE. PAR E. J. HONNET.