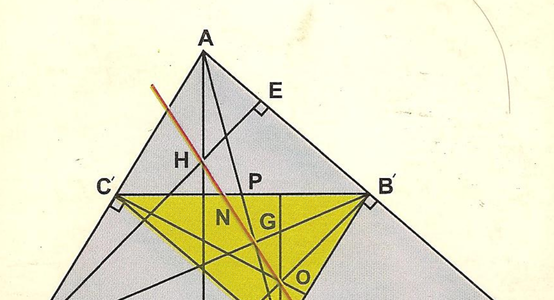
دایرة المعارف هندسه

۵

رابطه های متری در مثلث

(مثلث، مثلث و دایره های: محیطی، محاطی و دایره های دیگر)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرةالمعارف هندسه

«جلد پنجم»

رابطه‌های متری در مثلث
و
دایره‌های محیطی و محاطی و دایره‌های دیگر

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ ـ
دایرةالمعارف هندسه/ مؤلف محمدهاشم رستمی.ـ تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴ـ
ج.: مصور، جدول، نمودار.

ISBN 964-353-127-9 (ج. ۵)

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
کتابنامه.
مندرجات: ج.۱. خواص توصیفی اشکال هندسه... ج. ۵. رابطه‌های متری در مثلث (مثلث، مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر).
ج. ۵ (چاپ دوم: زمستان ۱۳۷۹).
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

QA ۵۰۱/۵ / ۵ر ۴د   ۵۱۶/۰۰۷۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
دایرةالمعارف هندسه
(جلد پنجم)
رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی و دایره‌های دیگر
مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: ۷۸/ چاپ دوم: زمستان ۱۳۷۹
تیراژ چاپ اوّل: ۵۰۰۰/ تیراژ چاپ دوم: ۳۰۰۰ نسخه
چاپ و صحافی از: مؤسسه انتشاراتی سوره

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۹ـ۱۲۷ـ۳۵۳ـ۹۶۴
ISBN-964-353-127-9

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل : تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه از سالها پیش، احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حلّ و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث، دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی و پنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف **دایرةالمعارف هندسه** اقدام، و تمام مطالب براساس موارد زیر، دسته‌بندی گردید :

۱. خاصیتهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلات هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، . . .)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه های نااقلیدسی
. . .

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند مجلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج مجلد به‌شرح زیر است :

۱. نسبت پاره‌خطها (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، ...) ؛

۲. رابطه‌های متری در دایره ؛

۳. رابطه‌های متری در مثلث مختلف الاضلاع ؛

۴. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه، ...) ؛

۵. رابطه‌های متری در چندضلعیها ($n \geq ۴$).

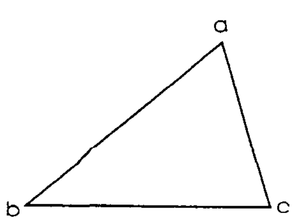
برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته‌ضروری است :

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه باشکل آنهاداده شده است (مگر در موارد خاص) تا دانشجویان علاقه‌مند به حلّ آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حلّ آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه حلهای آنها، در قسمت مربوط به خود آمده‌اند. و تنها یک یا دو راه حل، از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^۲ = b^۲ + c^۲$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران ومسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی آنها آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال، در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است، مثلاً گفته شده : در مثلث abc ضلعهای ab، bc، ac و ...



● در دیگر قضیه‌ها و مسأله‌ها، تعریفها و شکلها ، از حروف و علامتهای یکسان استفاده شده است. به‌عنوان مثال، همه جا نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B، C و پاره‌خط AB به‌صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این مجلد از دایرةالمعارف شامل رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر است که ۵ بخش دارد :

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث

بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی

بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث و دایره های محاطی

بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر

هریک از این بخشها خود به چند زیربخش، تفکیک شده است. به‌عنوان مثال، بخش ۱ شامل زیربخشهای زیر است :

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. زاویه

۳.۱. ضلع

۴.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۵.۱. پاره‌خط

۶.۱ . محیط

۷.۱. مساحت

۸.۱. رابطه‌های متری

۹.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۰.۱. مسأله‌های ترکیبی

هر زیربخش نیز به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده است. مثلاً، زیربخش ۸.۱ به هفت زیربخش به‌صورت زیر تفکیک گردیده است :

۱.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها

۲.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۳.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۴.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۵.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۶.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۷.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به مساحت

زیربخشهای بالا نیز خود دارای زیربخشهای جدیدی هستند و در هریک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب مشخصی ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن‌را کامل کند. لذا تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نقطه نظرها و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رابطه‌های متری در مثلث
و
دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث

بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی

بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محاطی

بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر

بخش ۱
• رابطه‌های متری در مثلث

۱.۱. تعریف و قضیه
۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویهٔ مثلث داده شده

۲.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویهٔ مثلثها و شکلهای دیگر

۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۲.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۳.۱. ضلع

۱. ۳. ۱. اندازهٔ یک ضلع

۱. ۳. ۱. ۱. اندازهٔ ضلع a

۱. ۳. ۱. ۲. اندازهٔ ضلع b

۱. ۳. ۱. ۳. اندازهٔ ضلع c

۱. ۳. ۱. ۴. اندازهٔ یکی از ضلعها

۱. ۳. ۲. اندازهٔ دو ضلع

۱. ۳. ۳. اندازهٔ سه ضلع

۱. ۳. ۴. نسبت ضلعها

۱.۶. محیط

۱. ۶. ۱. اندازهٔ محیط

۱. ۶. ۱. ۱. اندازهٔ محیط مثلث داده شده

۱. ۶. ۱. ۲. اندازهٔ محیط مثلثها یا شکلهای دیگر

۱. ۶. ۲. ماکزیمم و مینیمم محیط، نسبت محیطها

۱.۷. مساحت

۱.۷.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده

۱.۷.۱.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن اجزای اصلی مثلث

۱.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن ارتفاعها

۱.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن میانه‌ها

۱.۷.۱.۴. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن نیمسازها

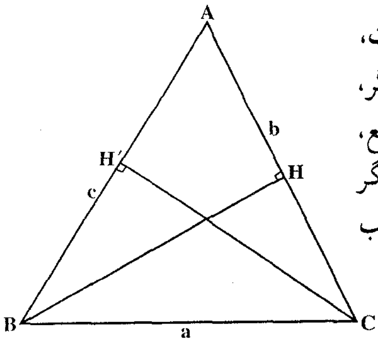
۱.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن سایر اجزای مثلث

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده (مثلثها)

بخش ۱ . رابطه‌های متری در مثلث

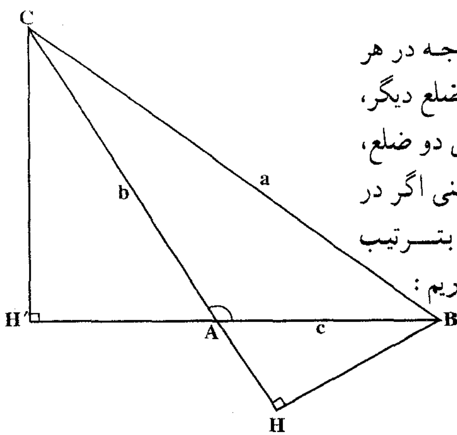
۱.۱. تعریف و قضیه



۱. **قضیه** . مربع ضلع مقابل به زاویهٔ حاده در هر مثلث، برابر است با، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب یکی از این دو ضلع، در تصویر ضلع دیگر بر روی همین ضلع ؛ یعنی اگر در مثلث ABC، $\hat{A} < ۹۰^\circ$ و BH و CH' بترتیب ارتفاعهای نظیر دو رأس B و C باشند، داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b \times AH$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲c \times AH'$$

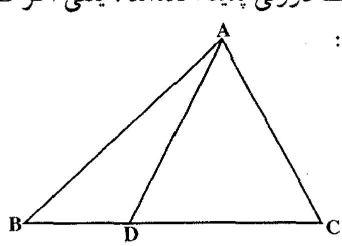


۲. **قضیه** . مربع ضلع مقابل به زاویهٔ منفرجه در هر مثلث، برابر است با، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، به اضافهٔ دو برابر حاصل ضرب یکی از این دو ضلع، در تصویر دیگری بر روی همین ضلع ؛ یعنی اگر در مثلث ABC، $\hat{A} > ۹۰^\circ$ و BH و CH' بترتیب ارتفاعهای نظیر دو رأس B و C باشند، داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ + ۲b.AH$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ + ۲c.AH'$$

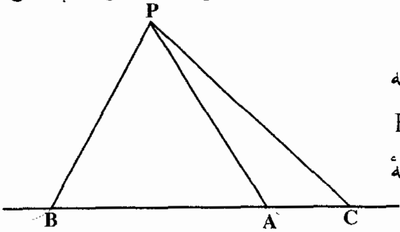
۳. **قضیهٔ استوارت** . نقطه‌ای روی قاعدهٔ مثلث انتخاب و، آن را، به رأس مقابل وصل کرده‌ایم (که از این به بعد، آن را، پاره‌خط درونی می‌نامیم). ثابت کنید، حاصل ضرب مجذور یک ضلع مثلث در قطعهٔ غیرمجاور خود روی قاعده، به اضافه حاصل ضرب مجذور ضلع دیگر مثلث در قطعهٔ غیر مجاور خود روی قاعده، منهای حاصل ضرب مجذور پاره خط درونی در قاعده، برابر است با حاصل ضرب قاعده در دو قطعه‌ای از قاعده که به وسیلهٔ پاره‌خط درونی پدید آمده‌اند ؛ یعنی اگر D نقطه‌ای روی ضلع BC از مثلث ABC باشد، داریم :



$$AB^2.DC+AC^2.BD-AD^2.BC=BC.BD.DC$$

استوارت

متیواستوارت M.Stewart (متولد ۱۷۱۷ در راتسی در جزیرهٔ بیوت، متوفی ۲۳ ژانویه ۱۷۸۵ در ادینبرو) یکی از ریاضیدانان مشهور اسکاتلندی است که در ۱۷۳۴ وارد دانشگاه گلاسکو شد و نزد سیمسون درس خواند. همچنین در ادینبرو از درسهای مکلورین استفاده کرد و در ۱۷۴۷ جانشین او گشت. او مخصوصاً به هندسه و به کار بردن ترسیم ترکیبی یونانیان در ریاضیات عالی جدید، علاقه داشت. همچنین بیشتر نیروی خود را در مطالعهٔ نجوم به کار انداخت، بخصوص به محاسبهٔ فاصلهٔ خورشید از زمین توجه کرد. چندین قضیهٔ هندسهٔ جدید به نام اوست.



۴. با در نظر گرفتن خطهای جهت دار، قضیه استوارت را به شرح زیر ثابت کنید: اگر A و B و C سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست و P نقطهٔ دلخواه باشد، داریم:

$$\overline{PA}^2.\overline{BC}+\overline{PB}^2.\overline{CA}+\overline{PC}^2.\overline{AB}+\overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}=0$$

این مسأله صورت کامل قضیهٔ استوارت است که با تغییر مختصر، یعنی تقسیم دو طرف رابطه بر $\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}$، به صورت زیر درمی‌آید، که از انسجام بیشتری برخوردار است و بهتر در حافظه می ماند:

$$\frac{\overline{PA}^2}{\overline{AB}.\overline{AC}}+\frac{\overline{PB}^2}{\overline{BA}.\overline{BC}}+\frac{\overline{PC}^2}{\overline{CA}.\overline{CB}}=1$$

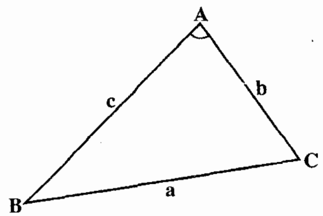
۵. **قضیه (قانون کسینوسها)**. در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازهٔ آن دو ضلع، در کسینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

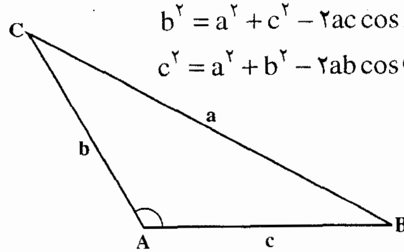
یعنی در مثلث ABC داریم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

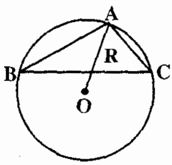
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

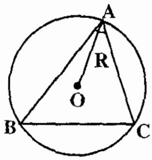
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$





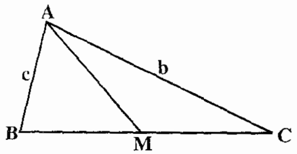
۶. قضیه (قانون سینوسها) . در هر مثلث ABC به فرض آن که R شعاع دایرهٔ محیطی و a، b و c بترتیب اندازه‌های ضلعهای BC، CA و AB باشد، داریم :



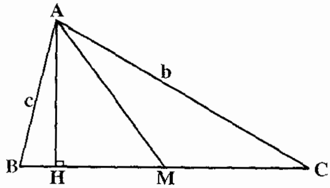


$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=۲R$$

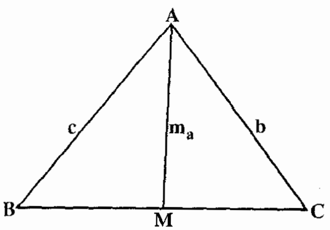
۷. قضیه . در هر مثلث مجموع مربعهای اندازه‌های هر دو ضلع، برابر است با دو برابر مربع اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع سوم، به علاوهٔ نصف مربع اندازهٔ ضلع سوم.



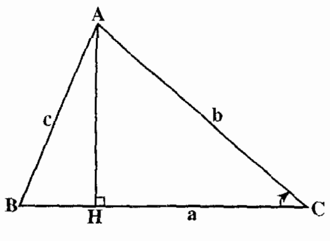
۸. قضیه . در هر مثلث تفاضل مربعهای اندازه‌های هر دو ضلع، برابر است با دو برابر حاصل ضرب اندازهٔ ضلع سوم، در اندازهٔ تصویر میانهٔ نظیر ضلع سوم، بر آن ضلع.



۹. اندازهٔ میانه‌های مثلث ABC را بر حسب اندازهٔ ضلعهای آن، a، b و c تعیین کنید.



۱۰. اندازهٔ ارتفاعهای مثلث را بر حسب اندازهٔ ضلعهای آن به دست آورید.

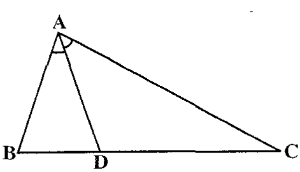


۱۱. اگر P نصف محیط مثلث ABC به ضلعهای a، b و c, و S مساحت این مثلث باشد، ثابت کنید $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (دستور هرون).

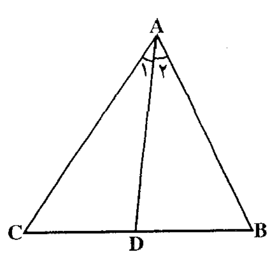
هرون

هرون اسکندرانی Heron، برآمدنش ح ۵۰ م. (در مآخذ اسلامی، ایرن، اهرن) پیش از هر نویسندهٔ دیگری معرف کاربردهای ریاضیات در آغاز تاریخ میلادی است. ظاهراً او مصری بود و سبک انشایش شبیه یونانیان نیست. او یک ابزار بادی اختراع کرد که عموماً به فوارهٔ هرون معروف است. و آن نوع ساده‌ای است از ماشین بخار ؛ و ماشینهای متعدد دیگری ساخت که گواه نبوغ او در زمینه‌های مختلف است. راجع به ابزارهای بادی، نور و رویت، و مکانیک آثاری نوشت، ولی از لحاظ ریاضیات، کتاب او در زمینهٔ اندازه‌گیری، از همه مهمتر است. در این کتاب از مساحی زمین بحث می‌کند و احتمالاً روشهایی را که در مصر معمول بود شرح می‌دهد. برخی از اثرهای او مانند اثرهای سایر فضلای یونانی گم شده است. فرمول او برای مساحت مثلث بسیار معروف است : $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ این فرمول در باب زمین‌سنجی کتاب مساحی Metrica او دیده می‌شود ؛ ولی اثبات آن در کتاب نور و رؤیت Dioptrics آمده است. نخستین قاعدهٔ مثلثاتی را که ما به صورت $c=\frac{n}{۴}\times \cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ نشان می‌دهیم، و در آن، n تعداد ضلعهای کثیرالاضلاع منتظمی با مساحت A، ضلع s، و $c=\frac{A}{s^۲}$ است، در هندسهٔ هرون می‌توان یافت، c را به ازای $n=۳,۴,\cdots,۱۲$ محاسبه کرد، ولی روش او معلوم نیست، می‌توانست معادله‌ای را که ما به صورت $ax^۲+bx=c$ می‌نویسیم حل کند، به طوری که معادلهٔ درجهٔ دومی عمومی به صورتی که ما امروزه می‌شناسیم برای ریاضیدانان یونانی قابل حل باشد.

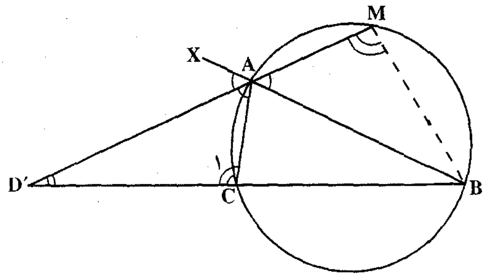
۱۲. به کمک رابطهٔ سینوسها ثابت کنید که نیمسازهای هر زاویه از مثلث ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر آن مثلث تقسیم می‌کنند.



۱۳. **قضیه** . در هر مثلث، مربع اندازهٔ نیمساز هر زاویهٔ درونی برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع آن زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه‌های دو پاره‌خطی که آن نیمساز بر ضلع سوم پدید می‌آورد. یعنی اگر در مثلث ABC، پاره‌خط AD نیمساز زاویهٔ درونی A باشد :



$$AD^۲=AB.AC-DB.DC$$



۱۴. **قضیه** . در هر مثلث، مربع اندازهٔ نیمساز هر زاویهٔ برونی برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو پاره‌خطی که آن نیمساز بر ضلع سوم پدید می‌آورد، منهای حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع آن زاویه.

یعنی اگر $AB > AC$ و AD' نیمساز زاویه XAC باشد :

$$AD'^{۲} = D'B.D'C - AB.AC$$

۱۵. اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های مثلث را بر حسب اندازهٔ ضلعهای آن محاسبه کنید.

۱۶. اندازهٔ نیمسازهای زوایای درونی مثلث را بر حسب ضلعهای مثلث، با استفاده از قضیهٔ استوارت، به دست آورید.

۱۷. اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های برونی مثلث را بر حسب ضلعهای آن، با استفاده از قضیهٔ استوارت محاسبه کنید.

۱.۲. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۲.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ مثلث داده شده

۱۸. زاویهٔ B از مثلث ABC را پیدا کنید، به شرطی که در آن، طول ارتفاع CH برابر نصف طول ضلع AB و زاویهٔ A برابر ۷۵ درجه باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۱۹. ارتفاعهای AH و CP را در مثلث ABC رسم کرده‌ایم. مقدار زاویهٔ B را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم، $|AC| = ۲|PH|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۲۰. نقطهٔ P را روی ضلع BC از مثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $PC = ۲BP$ زاویهٔ ACB را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم :

$$A\hat{B}C = ۴۵^\circ \;,\; A\hat{P}C = ۶۰^\circ$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۶۴

۲۱. در مثلثی که a، b و c طولهای ضلعهای آنند، داریم:

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$$

اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روبه ضلع به طول c برابر است با:

الف) 15° ب) 30° ج) 45° د) 60° هـ) 150°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۲۲. در مثلث ABC، h_a و h_b، بترتیب، طول ارتفاعهای رسم شده از رأسهای A و B، و l طول نیمساز زاویهٔ C، داده شده‌اند. $\hat{C}$ را پیدا کنید.

۲۳. مثلث ABC داده شده است. عمودهای رسم شده بر وسطهای AB و BC، خط AC را در نقطه‌های M و N طوری قطع می‌کنند که $MN=AC$. عمودهای رسم شده بر وسطهای AB و AC، BC را در نقطه‌های K و L طوری قطع می‌کنند که $KL=\frac{1}{2}BC$. اندازهٔ کوچکترین زاویهٔ مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۴. ثابت کنید که اگر مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلثی دیگر، منفرجه باشد، آن وقت کوچکترین زاویهٔ مثلث اولی، کمتر از 45° است.

۲۵. ارتفاع مثلث، زاویه‌ای را که ارتفاع از آن رسم شده است به نسبت ۱ :۲ بخش کرده است. این ارتفاع، قاعده را نیز به پاره‌خطهایی تقسیم کرده است که نسبت آنها $k(k>1)$ می‌باشد. اندازهٔ بزرگترین زاویهٔ مجاور به قاعده را محاسبه کنید.

۲۶. الف. ضلعهای مثلث ABC، ۶، ۷و ۹ سانتی‌مترند. بزرگترین زاویهٔ این مثلث حاده، قائمه یا منفرجه است؟

ب. در مثلثی به ضلعهای ۷، ۲۴ و ۲۵، بزرگترین زاویه، حاده، قائمه یا منفرجه است؟

۲۷. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۶۴ سانتی‌متر مربع، و واسطهٔ هندسی بین ضلعهای AB و AC برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد، آن گاه sinA برابر است با:

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{3}{5}$ ج) $\frac{4}{5}$ د) $\frac{8}{9}$ هـ) $\frac{15}{17}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۲۸. در یک مثلث طول ضلعها، عددهای صحیح متوالی‌اند، و بزرگترین زاویه، دو برابر کوچکترین زاویه است. مقدار کسینوس کوچکترین زاویه برابر است با:

الف) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{7}{10}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{9}{14}$ هـ) هیچ یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

۲۹. زاویهٔB از مثلثABC برابر115°است. ازمیانگاه ضلعAC عمودی را برآن رسم می‌کنیم و این عمود، ضلعBC رادر نقطهٔ D قطع می‌کند. پاره خط AD زاویهٔ A را از طرف ضلع AB به نسبت ۳ :۵ تقسیم می‌کند. زاویه‌های A و C از مثلث ABC را به‌دست آورید.

۳۰. طول یکی از ضلعهای مثلث ABC، دو برابر طول یک ضلع دیگر آن است و $\hat{B} = 2\hat{C}$.
اندازهٔ زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

۳۱. پاره‌خطهای راست AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، ارتفاعهای مثلث ABC هستند. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ با مثلث ABC متشابه باشد، زاویه‌های مثلث ABC را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

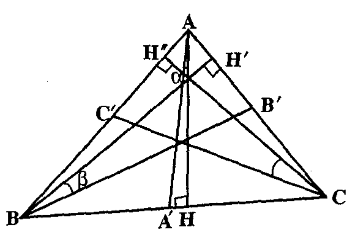
۳۲. ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک زاویه در مثلثی، آن زاویه را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را بیابید.

۲.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویهٔ مثلثها و شکلهای دیگر

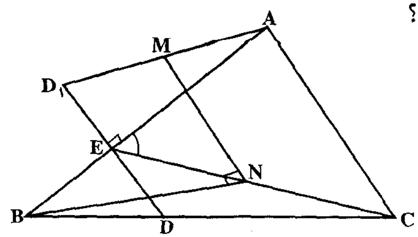
۳۳. طول قاعدهٔ مثلثی برابر ۴ است. طول میانهٔ وارد بر این قاعده برابر $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ بوده و یکی از زاویه‌های مجاور قاعده نیز برابر 15° می‌باشد. زاویهٔ حادهٔ بین میانه و قاعده را به‌دست آورید.

۳۴. زاویه‌های مثلثی معلوم است. مطلوب است محاسبهٔ زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر یک ضلع مثلث.

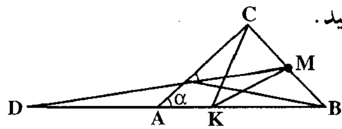
۳۵. در مثلث ABC، زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی که از رأس A خارج می‌شوند، برابر با α و زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی که از رأس B خارج می‌شوند، برابر با β است. زاویهٔ بین میانه و ارتفاعی را که از رأس C خارج می‌شوند، پیدا کنید.



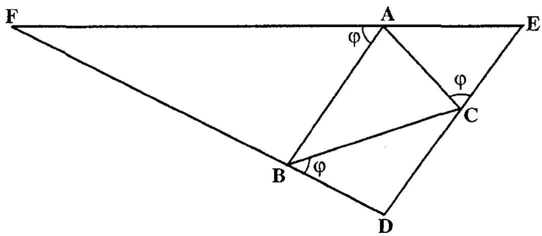
۳۶. در مثلث ABC، نقطهٔ D_1 را متقارن نقطهٔ D از ضلع BC نسبت به محور AB رسم می‌کنیم. نقطهٔ E محل برخورد پاره‌خطهای DD_1 و AB، نقطه‌های M و N بترتیب میانگاههای پاره‌خطهای AD_1 و CE است. آیا $\widehat{MNB} = 90^\circ$ است؟ در چه صورت این زاویه 90° است؟



۳۷. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌ای مانند D، بر نیمخط BA طوری اختیار می‌شود که $BD = BA + AC$. فرض کنید K و M، بترتیب، دو نقطه روی نیمخطهای BA و BC باشند، به طوری که مساحت مثلث BDM با مساحت مثلث BCK برابر شود، اگر $B\hat{A}C = \alpha$، $B\hat{K}M$ را پیدا کنید.



۳۸. مثلث ABC که زاویه‌هایش برابرند با α، β و γ، مفروض است. مثلث DEF بر مثلث ABC طوری محیط می‌شود که رأسهای A، B و C بترتیب، روی ضلعهای EF، FD و DE قرار می‌گیرند، و $E\hat{C}A = D\hat{B}C = F\hat{A}B = \varphi$ مقدار زاویهٔ φ را که به ازای آن مساحت مثلث EFD ماکزیمم خود را به دست می‌آورد، پیدا کنید.



۳۹. در مثلث ABC داریم:

$$\hat{B} = ۲\hat{C} \;,\; \hat{A} \leq ۹۰^\circ$$

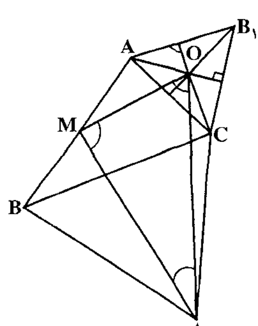
اگر نیمساز درونی زاویهٔ C، میانهٔ AM (M وسط BC است) را در نقطهٔ D قطع کند، آن‌گاه ثابت کنید: $M\hat{D}C \leq ۴۵^\circ$. تحت چه شرطی $M\hat{D}C = ۴۵^\circ$ است؟

دهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۲

۴۰. فرض می‌کنیم M یک نقطه در درون مثلث ABC باشد. ثابت کنید حداقل یکی از زوایای $M\hat{A}B$ یا $M\hat{B}C$ یا $M\hat{C}A$ کوچکتر یا مساوی ۳۰° است.

سی‌ودومین المپیاد بین‌المللی ریاضی، سوئد، ۱۹۹۱

۴۱. روی ضلعهای AC و BC از مثلث ABC و در خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع $ACB_۱$ و $BCA_۱$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M میانگاه ضلع AB و نقطهٔ O مرکز مثلث $ACB_۱$ است. زاویه‌های مثلث $MA_۱O$ را پیدا کنید.

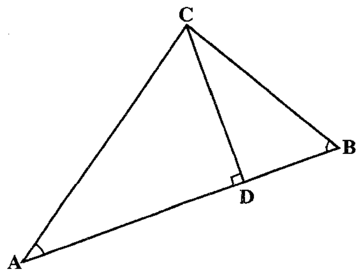


۱.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

۴۲. به طریق هندسی ثابت کنید که اگر ضلعهای مثلث ABC با عددهای ۴، ۵ و ۶ متناسب باشند، زاویهٔ بزرگتر که آن را A می‌نامیم دو برابر زاویهٔ کوچکتر C است.

۴۳. در مثلث ABC، CD ارتفاع است. اگر $CD^2 = AD.DB$ باشد، آن گاه رابطهٔ بین زاویه‌های A و B را بیابید.



۴۴. اگر ضلعهای یک مثلث به نسبت ۹ :۸ :۶ باشد، آن گاه

الف) یک زاویه منفرجه است.

ب) زاویه‌ها به نسبت ۹ :۸ :۶ هستند.

ج) زاویه‌های مثلث حاده هستند.

د) زاویهٔ مقابل به بزرگترین ضلع دو برابر زاویهٔ مقابل به کوچکترین ضلع است.

هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۴۵. در مثلث PQR، RS نیمساز زاویهٔ R، D روی ادامهٔ PQ، و زاویهٔ n قائمه است، آن گاه:

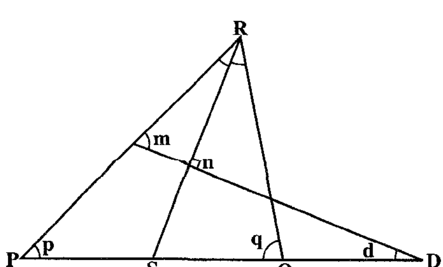
الف) $\hat{m} = \frac{1}{2}(\hat{p} - \hat{q})$

ب) $\hat{m} = \frac{1}{2}(\hat{p} + \hat{q})$

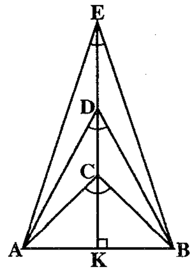
ج) $\hat{d} = \frac{1}{2}(\hat{q} + \hat{p})$

د) $\hat{d} = \frac{1}{2}\hat{m}$

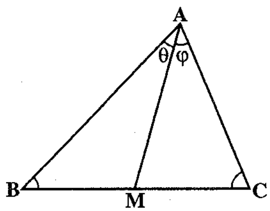
هـ) هیچ یک از اینها



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴



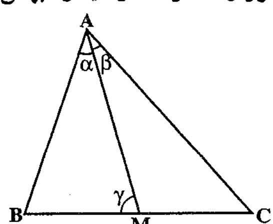
۴۶. پاره خط $AB = a$ مفروض است. از نقطهٔ K وسط AB عمودی اخراج می‌کنیم. روی این عمود منصف، نقطه‌های E، D و C را با فرض $DE = CD = KC$ جدا می‌کنیم. هرگاه $CK = \frac{a}{2}$ باشد، مجموع زاویه‌های ACB ، ADB و AEB را معین سازید.



۴۷. اگر AM میانهٔ مثلث ABC وزاویه‌های $B\hat{A}M = \theta$ و $C\hat{A}M = \varphi$ باشند، ثابت کنید :

$$\cot g\theta - \cot g\varphi = \cot g\hat{B} - \cot g\hat{C}$$

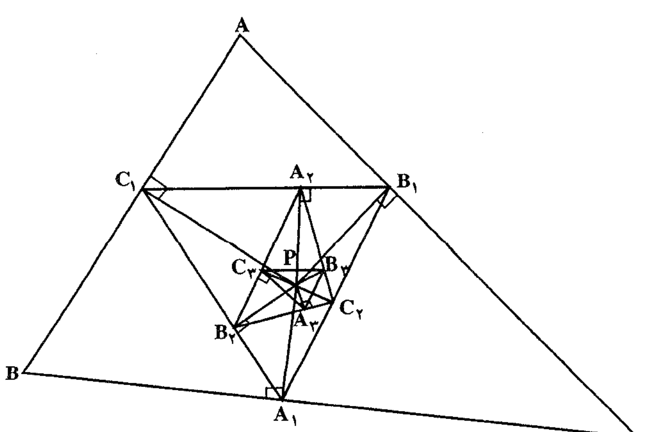
مرحلهٔ اول دومین دوره مسابقه ریاضی دانش‌آموزان ممتاز استان گیلان، بهمن ۱۳۶۳



۴۸. ثابت کنید اگر میانهٔ AM از مثلث ABC با ضلعهای AB و AC زاویه‌های α و β و با ضلع BC زاویهٔ γ تشکیل دهد، در این صورت $\frac{2}{tg\gamma} = \frac{1}{tg\alpha} - \frac{1}{tg\beta}$

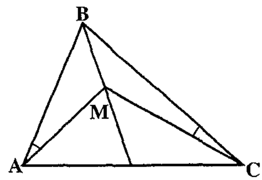
۴۹. نسبت به مثلث ABC دو نقطه P و P′ بترتیب دارای مختصات مثلثی (x, y, z) و (x', y', z') می‌باشند. هرگاه داشته باشیم : $xx' = yy' = zz'$ می‌گوییم که دو نقطهٔ P و P′ مزدوج همزاویه‌ای یکدیگرند. ثابت کنید که در این حالت داریم :

$$P'\hat{A}C = B\hat{A}P\,,\ \ P'\hat{B}A = C\hat{B}P\,,\ \ P'\hat{C}B = A\hat{C}P$$



۲.۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

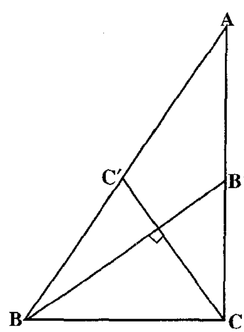
۵۰. مثلث ABC داده شده است، $AB < BC$. ثابت کنید که برای نقطهٔ دلخواه M روی میانهٔ رسم شده از رأس B، $B\hat{A}M > B\hat{C}M$.



۵۱. ثابت کنید که میانهٔ رسم شده بر بزرگترین ضلع مثلث، با ضلعهایی که این میانه را در بر دارند، زاویه‌هایی تشکیل می‌دهند که هر یک، از نصف کوچکترین زاویهٔ مثلث، کمتر نیست.

۵۲. در مثلثی مفروض، میانهٔ بزرگترین ضلع را رسم می‌کنیم. این میانه، مثلث را به دو بخش تقسیم می‌کند، در هر یک از مثلثهای حاصل هم، میانهٔ بزرگترین ضلع را رسم می‌کنیم، و غیره. ثابت کنید تمام مثلثهای ساخته شده را می‌توان به تعداد متناهی رده تقسیم کرد، به این ترتیب که کلیهٔ مثلثهای متعلق به یک رده، متشابه باشند، همچنین، ثابت کنید که هر زاویهٔ مثلث تازه به دست آمده، از نصف کوچکترین زاویهٔ مثلث اصلی، کمتر نیست.

۵۳. ثابت کنید که اگر میانه‌های رسم شده از رأسهای B و C مثلث ABC دو به دو بر هم عمود باشند، آن وقت $\cot g\hat{B} + \cot g\hat{C} \geq ۲/۳$.



۵۴. اگر A، B و C زاویه‌های یک مثلث باشند، ثابت کنید :

$$-۲ \leq \sin ۳\hat{A} + \sin ۳\hat{B} + \sin ۳\hat{C} \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

در چه حالتهایی به برابری می‌رسیم؟

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۸۱

۵۵. این قضیه را ثابت کنید :
اگر دو مثلث، یک زاویهٔ برابر داشته باشند، آن گاه مجموع سینوسهای دو زاویهٔ دیگر از مثلثی که، در آن، این دو زاویه، تفاضل کمتری دارند، از مجموع سینوسهای دو زاویهٔ مثلث دوم، بیشتر است.
بر مبنای این قضیه، شکل مثلثی را مشخص کنید که مجموع سینوسهای سه زاویهٔ آن، حداکثر مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۸

۵۶. ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از هر مثلث، همیشه داریم :
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{۳}{۲}$$
در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۶۵

۵۷. ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از هر مثلث، این نابرابری برقرار است :
$$\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma\ge\frac{۳}{۴}$$
چه موقع، به علامت برابری می‌رسیم؟ ثابت کنید، مقدار $\cos^۲\alpha+\cos^۲\beta+\cos^۲\gamma$، حداکثر مقدار ندارد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف انگلستان، ۱۹۶۷

۵۸. درستی نابرابری زیر را، برای α، β و γ (زاویه‌های یک مثلث غیر مشخص) ثابت کنید :
$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}<\frac{۱}{۴}$$

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۷

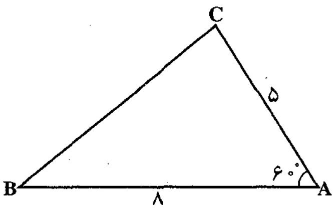
۵۹. ثابت کنید، برای زاویه‌های α، β و γ از مثلثی که زاویهٔ منفرجه ندارد، داریم :
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۶

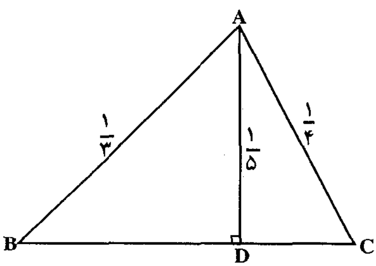
۱. ۳. اندازهٔ ضلع

۱. ۳. ۱. اندازهٔ یک ضلع

۱. ۳. ۱. ۱. ۱. اندازهٔ ضلع a

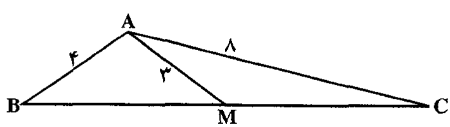


۶۰. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع BC از مثلث ABC بنابر آن که می‌دانیم $AB=۸$ ، $AC=۵$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$



۶۱. در مثلث ABC داریم $AB=\frac{۱}{۳}$ و $AC=\frac{۱}{۴}$ و طول ارتفاع AD نیز مساوی $\frac{۱}{۵}$ است. اندازهٔ ضلع BC را تعیین کنید.

۶۲. در شکل داده شده مثلث ABC چنان است که $AB=۴$ و $AC=۸$. اگر M وسط BC و $AM=۳$ ، طول BC چه‌قدر است؟

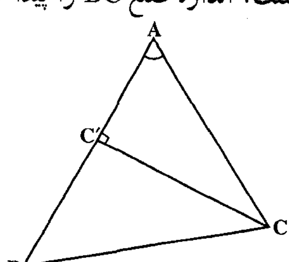


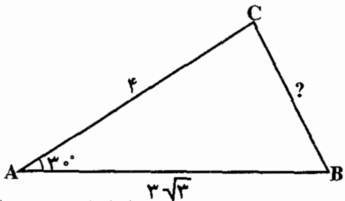
الف) $۲\sqrt{۲۶}$ ب) $۲\sqrt{۳۱}$ ج) ۹ د) $۴+۲\sqrt{۱۳}$

هـ) مفروضات داده شده، برای حل مسأله کافی نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

۶۳. در مثلث ABC، $AC=۱۰$ و $AB=۱۲$ و تصویر ضلع AC روی ضلع AB مساوی $۳\frac{۱}{۳}$ است. زاویهٔ A حاده است. اندازهٔ ضلع BC را پیدا کنید.

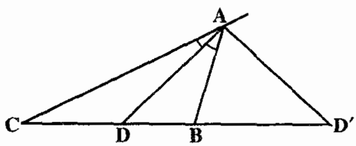




۶۴. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۳۰°$ ، $AC = ۴$ و $AB = ۳\sqrt{۳}$ ؛ BC را بیابید؟ آیا زاویهٔ C قائمه است؟ از کجا فهمیدید؟

۶۵. در مثلثی زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C است. طول ضلع BC را برحسب طولهای ضلعهای دیگر به‌دست آورید.

۶۶. در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم. اگر $AC = b$ ، $AB = a$ و $AD = BD$ باشد، طول BC را پیدا کنید.



۶۷. در مثلث ABC ، $AB = ۱$ و $AC = ۲$. اگر بدانیم نیمساز زاویه‌های خارجی A و C (یعنی، پاره‌خطی از نیمسازها، از رأس تا نقطهٔ برخورد آنها با خطی که شامل ضلع روبه‌رو به آن زاویه است) قابل انطباقند. اندازهٔ BC را پیدا کنید.

۶۸. دو ضلع مثلثی برابر با b و c و مساحت آن $S = \frac{۲}{۵}bc$. مطلوب است محاسبهٔ ضلع a .

۶۹. همهٔ مقدارهای $n \in N$ را پیدا کنید که، برای هرکدام از آنها، عدد $m \in N$ ، مثلث ABC با ضلعهای $AB = ۳۳$ ، $AC = ۲۱$ و $BC = n$ و نقطه‌های D و E، بترتیب روی ضلعهای AB و AC وجود داشته باشند. به‌نحوی که شرط زیر برقرار باشد :

$$AD = DE = EC = m$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، سوئد، ۱۹۸۲

۷۰. روی ضلعهای مثلث ABC، متوازی‌الاضلاعهای $AA'B''B$ ، $BB'C''C$ و $CC'A''A$ را ساخته‌ایم ؛ در ضمن طول ضلعهای جانبی متوازی‌الاضلاعها با هم برابرند :

$$|AA'| = |BB'| = |CC'| = a$$

مقدار a را پیدا کنید، به شرطی که بدانیم :

$$|A'A''| = ۳, |B'B''| = ۴, |C'C''| = ۵$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۱. ۳. ۱. ۲. اندازهٔ ضلع b

۷۱. میانهٔ BK ، نیمساز BE و ارتفاع AD ، در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر بدانیم خطهای BK و BE، پاره‌خط AD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و $AB = ۴$ ، طول ضلع AC را پیدا کنید.

۷۲. با معلوم بودن میانه‌های m_a، m_b و m_c از مثلث ABC، طول ضلع $AC = b$ را به‌دست آورید.

۷۳. مثلثی با مساحت واحد و ضلعهای a، b و c داده شده است. می‌دانیم:

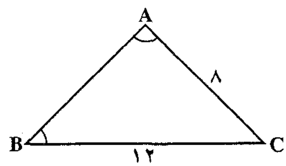
$$a \geq b \geq c$$

ثابت کنید: $b \geq \sqrt{۲}$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۳

۱. ۳. ۱. ۳. اندازهٔ ضلع c

۷۴. در مثلث ABC، $AC = ۸cm$، $BC = ۱۲cm$ است. زاویهٔ A در این مثلث دو برابر زاویهٔ B است. طول ضلع AB را محاسبه کنید.



۷۵. در مثلثی $a = ۱۲$ و $b = ۱۲\sqrt{۳}$ اندازه‌های دو ضلع برحسب واحد طول، و $\hat{A} = \frac{\pi}{۶}$ اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع a برحسب رادیان است. اندازهٔ ضلع دیگر این مثلث برحسب واحد طول چه‌قدر است؟

الف) ۲۴ یا ۱۲ ب) $۱۶\sqrt{۳}$ ج) ۱۲ د) $۸\sqrt{۳}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۷۶. از مثلثی دو ضلع a و b معلوم است و می‌دانیم که $h_a + h_b = h_c$. ضلع c را حساب کنید.

۷۷. درمثلث ABC، میانهٔ نظیر رأس A بر میانهٔ نظیر رأس B عمود است. اگر طول ضلعهای AC و BC بترتیب ۶ و ۷ باشند، آن‌گاه طول ضلع AB برابر است با:

الف) $\sqrt{۱۷}$ ب) ۴ ج) ۴/۵ د) $۲\sqrt{۵}$ هـ) ۴/۲۵

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۷۸. طول دو ضلع از مثلثی برابر a و b بوده و میانه‌های وارد بر این دو ضلع نیز برهم عمود هستند. طول ضلع سوم مثلث را به‌دست آورید.

۷۹. در مثلث ABC، نقطه F بر AB واقع است و CF با میانهٔ BD در E برخورد می‌کند به قسمی که $\overline{BE} = \overline{ED}$. اگر $\overline{BF} = ۵$، آن‌گاه $\overline{BA}$ برابر است با:

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۵ د) ۲۰ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۸۰. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC با مساحت $۶cm^۲$ نقطه‌های K و M را بترتیب طوری انتخاب می‌کنیم که $AK:BK = ۲:۳$ و $AM:CM = ۵:۳$ باشد. خطهای CK و BM همدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. اگر فاصلهٔ P تا خط AB برابر ۱/۵cm باشد، طول AB را محاسبه کنید.

۸۱. در مثلثی، دو ضلع با طولهای a و b $(a > b)$ داده شده‌اند. طول ضلع سوم را پیدا کنید، اگر بدانیم $a + h_a \leq b + h_b$ که در آن h_a و h_b، طول ارتفاعهای وارد بر همین ضلعها هستند.

۸۲. ثابت کنید که اگر ضلعهای مثلثی با نابرابری $a^2 + b^2 > 5c^2$ به‌هم مربوط باشند، آن وقت c طول کوچکترین ضلع است.

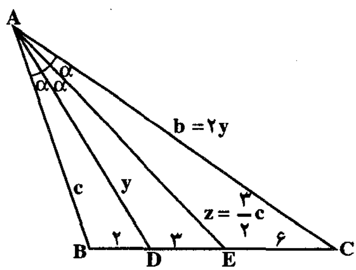
۱. ۳. ۱. ۴. اندازهٔ یکی از ضلعها

۸۳. قاعدهٔ یک مثلث ۸۰cm، یکی از زاویه‌های مجاور قاعده °۶۰ و مجموع طول دو ضلع دیگر ۹۰cm است. کوچکترین ضلع برابر چند سانتی‌متر است؟

الف) ۴۵ ب) ۴۰ ج) ۳۶ د) ۱۷ هـ) ۱۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۸۴. مطابق شکل، در مثلث ABC خطهای AD و AE زاویهٔ BAC را به سه قسمت برابر تقسیم می‌کنند و طولهای BD، DE و EC بترتیب ۲، ۳ و ۶ هستند. طول کوتاهترین ضلع مثلث ABC برابر است با :



الف) $۲\sqrt{۱۰}$ ب) ۱۱ ج) $۶\sqrt{۶}$ د) ۶

هـ) مقداری که از روی اطلاعات مفروض یکتا به‌دست نمی‌آید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۸۵. مطلوب است قاعدهٔ مثلثی که مساحت آن ۳۶ سانتی‌مترمربع و ارتفاع نظیر آن قاعده ۱۲ سانتی‌متر است.

۸۶. ارتفاع مثلثی نصف قاعدهٔ نظیر آن ارتفاع است. طول قاعدهٔ مثلث را بیابید، در صورتی که مساحت مثلث ۳۶ مترمربع باشد.

۸۷. اختلاف مساحتهای دو مثلث متشابه ۱۸ سانتی‌مترمربع، و نسبت مساحت مثلث بزرگتر به مساحت مثلث کوچکتر مجذور یک عدد صحیح است. مساحت مثلث کوچکتر برحسب سانتی‌مترمربع یک عدد صحیح و یکی از ضلعهای آن ۳ سانتی‌متر است. ضلع متناظر این ضلع در مثلث بزرگتر برحسب سانتی‌متر، برابر است با :

الف) ۱۲ ب) ۹ ج) $۶\sqrt{۲}$ د) ۶ هـ) $۳\sqrt{۲}$

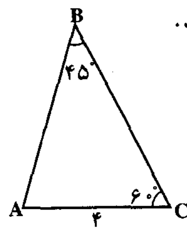
مسابقه‌های ریاضی دبیرستان امریکا، ۱۹۶۷

۱. ۳. ۲. اندازهٔ دو ضلع

۸۸. قاعدهٔ مثلثی برابر ۶، ارتفاع و میانهٔ وارد بر این قاعده بترتیب ۱/۲ و ۱/۳ سانتی‌متر هستند. مطلوب است محاسبهٔ دو ضلع دیگر.

۸۹. در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}$ دو برابر زاویهٔ C، ضلع BC از ضلع AB، ۲cm بیشتر بوده و $AC = ۵cm$ است. AB و BC را پیدا کنید.

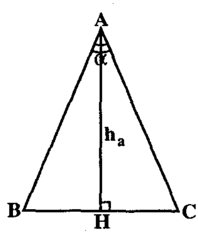
۹۰. در مثلث ABC ضلع $AC = ۴cm$ و زاویهٔ $\hat{B} = ۴۵°$ و زاویهٔ $\hat{C} = ۶۰°$ می‌باشد. طول ضلعهایش را حساب کنید.



۹۱. از مثلثی، مقدار T مساحت آن، و اندازهٔ زاویهٔ γ از آن داده شده است. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلعهای a و b، به‌شرطی که بدانیم، طول ضلع c روبه‌رو به زاویهٔ γ از این مثلث، کمترین مقدار ممکن است.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۲

۹۲. طول قاعدهٔ مثلثی برابر a و ارتفاع آن برابر h است. اگر زاویهٔ بین ضلعهای جانبی آن برابر α باشد، مجموع ضلعهای جانبی را محاسبه کنید.



۱. ۳. ۳. اندازهٔ سه ضلع

۹۳. طول ارتفاع مثلثی برابر ۶cm بوده و ارتفاع، زاویهٔ مربوط به خود را نیز به نسبت ۲:۱ تقسیم کرده است. ارتفاع مزبور قاعده را نیز به دو قسمت تقسیم کرده است که طول کوچکترین آنها ۳cm است. ضلعهای مثلث را به‌دست آورید.

۹۴. طول ضلعهای مثلثی، سه عدد درست پشت سرهمند. طول ضلعهای این مثلث را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم، یکی از میانه‌های آن، بر یکی از نیمسازهای آن عمود است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۹۵. طولهای سه ضلع مثلثی، تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. اگر قدر نسبت این تصاعد برابر d و مساحت مثلث برابر t باشد، طول هر ضلع و اندازهٔ هر زاویه مثلث را پیدا کنید. جواب مسأله را برای حالت $d = ۱$ و $t = ۶$ به‌دست آورید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۴

۹۶. نقطه‌های قرینهٔ رأسهای مثلثی نسبت به ضلعهای روبه‌رو به آنها، رأسهای مثلثی به ضلعهای $\sqrt{۸}$، $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۴}$ هستند. طول ضلعهای مثلث اصلی را، اگر متمایز باشند، تعیین کنید.

۹۷. سه میانهٔ مثلث معلوم است. طول ضلعهایش را حساب کنید.

۹۸. با معلوم بودن سه ارتفاع مثلث، ضلعهای آن را حساب کنید.

۹۹. مثلثهایی را پیدا کنید که مساحت هر کدام از آنها، با عددی درست بیان شود (مثلثهای هرون) و ضمناً طول ضلعهای آنها، عددهایی پشت سرهم باشند.

۱۰۰. قضیه. هرگاه نقطهٔ P به فاصله‌های x، y و z از سه رأس مثلث ABC واقع باشد، اندازه‌های ضلعهای مثلث عمودی نقطه P نسبت به مثلث ABC برابرند با :

$\frac{ax}{۲R}$ ، $\frac{by}{۲R}$ ، $\frac{cz}{۲R}$

۱۰۱. ثابت کنید یک و فقط یک مثلث وجود دارد که طولهای ضلعهایش عددهای صحیح متوالی است، و یکی از زاویه‌هایش دو برابر دیگری است.

دهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۸

۱. ۳. ۴. نسبت ضلعها

۱۰۲. ضلعهای مثلثی تشکیل تصاعد حسابی داده‌اند. مساحت این مثلث $\frac{۳}{۵}$ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی است که محیطش مساوی محیط همین مثلث باشد. نسبت ضلعهای این مثلث را به‌دست آورید.

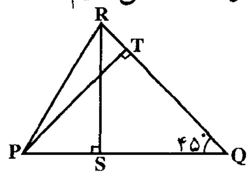
۱. ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱. ۴. ۱. ارتفاع

۱. ۴. ۱. ۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۰۳. اندازهٔ ضلعهای مثلثی ۸، ۱۲و۱۶ سانتی‌متر است. اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع ۱۲ سانتی‌متر را تعیین کنید.

۱۰۴. در ΔPQR، PT و RS ارتفاعند. می‌دانیم که $PR = ۱۳$، $PS = ۵$ و $\hat{Q} = ۴۵^\circ$ ؛ اندازهٔ ارتفاع PT را بیابید.

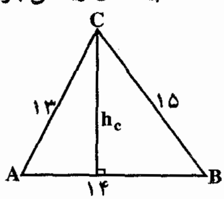


۱۰۵. مساحت S و زاویه‌های α، β و γ مثلثی معلوم هستند. طول ارتفاع رسم شده از رأس α را پیدا کنید.

۱۰۶. در مثلثی که ضلعها اندازه‌های مختلف دارند، یکی از ارتفاعها به اندازهٔ ۴ و ارتفاع دیگر به اندازهٔ ۱۲ است. اگر اندازهٔ ارتفاع سوم عدد صحیح باشد، بزرگترین مقدار ممکن برای آن چه‌قدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) عددی غیر از این چهار عدد

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۱۰۷. در مثلث ABC، $AC=۱۳$، $AB=۱۴$ و $BC=۱۵$.

الف) ارتفاع h_c را بیابید.

ب) h_b، ارتفاع وارد بر AC را بیابید.

۱۰۸. در مثلث RST، $RS=۸$، $ST=۱۰$ و $RT=۱۲$ سانتی‌متر است. اندازهٔ سه ارتفاع این مثلث را تعیین کنید.

۱۰۹. در مثلثی اندازه‌های دو ضلع بترتیب ۱۲ و ۲۴ سانتی‌متر و زاویهٔ بین آنها ۶۰° است. اندازهٔ ضلع سوم و ارتفاعهای مثلث را تعیین کنید.

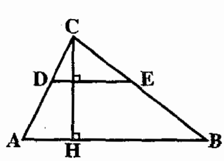
۱۱۰. بین مثلثهایی که در آنها، مجموع طولهای میانه‌ها، یکی است، در کدام‌یک، مجموع طولهای ارتفاعها بیشتر است؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۱. ۴. ۱. ۲. نسبت ارتفاعها

۱۱۱. اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC، $AB=۱۰$، $AC=۱۸$ و $BC=۱۴$ است. نسبت ارتفاعهای این مثلث را تعیین کنید.

۱۱۲. دو ضلع مثلث ABC، $AB=۱۲$ و $BC=۱۵$ است. نسبت $h_a:h_c$ را تعیین کنید.



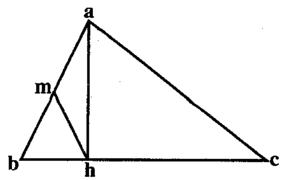
۱۱۳. در شکل، $DE\|AB$ و $CH\perp AB$. اگر $a\Delta CDE=\frac{1}{۶}a\Delta ABC$، نسبت ارتفاع ΔCDE به ارتفاع متناظر ΔABC را بیابید.

۱. ۴. ۲. میانه

۱. ۴. ۲. ۱. اندازهٔ میانه

۱۱۴. ضلعهای مثلثی ۱۸، ۲۴ و ۳۰ سانتی‌مترند. اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع ۲۴ سانتی‌متر را تعیین کنید.

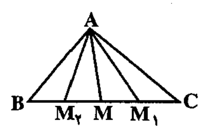
۱۱۵. در مثلث abc، پای ارتفاع رأس a با h، و وسط ضلع ab با m نشان داده می‌شود.
اگر $|ab|=۱۳$, $|bc|=۱۴$, $|ca|=۱۵$،
آن‌گاه $|hm|$ برابر است با :



الف) ۶ ب) ۶/۵ ج) ۷ د) ۷/۵ هـ) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۱۱۶. در مثلث ABC ضلعهای $a=۱۰cm$، $b=۶cm$ و $c=۸cm$ می‌باشد. ضلع BC را به چهار قسمت مساوی تقسیم نموده و از نقطهٔ A به نقطه‌های تقسیم وصل کرده‌ایم. طول پاره‌خطهای حاصل را حساب کنید.



۱۱۷. ضلعهای a، b و c از مثلث ABC در رابطهٔ $b^۲+c^۲=۲a^۲$ صدق می‌کنند.
۱. اندازهٔ میانه‌های این مثلث راتعیین کنید.
۲. ثابت کنید مثلثی که این سه میانه، طول ضلعهای آن باشند، با مثلث مفروض متشابه است.

۱۱۸. در مثلث ABC، میانه‌های AP، CQ در O برخورد می‌کنند. اگرOQ برابر ۳ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه OP برحسب سانتی‌متر برابر است با :
الف) ۳ ب) ۴/۵ ج) ۶ د) ۹ هـ) مقداری نامشخص

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

۱. ۴. ۳. نیمساز

۱. ۴. ۳. ۱. اندازهٔ نیمساز

۱۱۹. مثلث ABC و نقطهٔ D روی ضلع BC داده شده است. اگر $AC=۳$ و $AB=۶$ و هر یک از دو زاویهٔ CAD و DAB به اندازهٔ $۶۰°$ باشند، درازای AD برابر می‌شود با :

الف) ۲ ب) ۲/۵ ج) ۳ د) ۳/۵ هـ) ۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۲۰. ضلعهای مثلثی عبارتند از : $AB = ۴۰$ ، $AC = ۸۱$ و $BC = ۹۹$.

۱. اندازهٔ AD ، نیمساز زاویهٔ داخلی A را پیدا کنید.

۲. ثابت کنید $\hat{A} = ۲\hat{B}$ است.

۱۲۱. مثلثی به ضلعهای ۴، ۶ و ۸ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ نیمساز نظیر بزرگترین زاویهٔ خارجی این مثلث را، تعیین کنید.

۱۲۲. در مثلث ABC، $a = ۸$ ، $b = ۹$ و $c = ۱۰$ است. اندازهٔ نیمساز زاویهٔ برونی رأس B را تعیین کنید.

۱۲۳. a و b را، بترتیب، طول ضلعهای BC و AC از مثلث ABC می‌گیریم. زاویهٔ بین این دو ضلع، برابر است با $\gamma = ۱۲۰^\circ$. طول نیمساز زاویهٔ γ را برحسب a و b محاسبه کنید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۰

۱۲۴. ثابت کنید هرگاه a و b طول دو ضلع از مثلث، α اندازهٔ زاویهٔ بین آنها، و L طول نیمساز این زاویه باشد، آن وقت $L = \dfrac{۲ab\cos\frac{\alpha}{۲}}{a+b}$.

۱۲۵. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. می‌دانیم که $AB - BD = a$ و $AC + CD = b$ ، AD را پیدا کنید.

۱۲۶. BD نیمساز داخلی مثلث ABC است، طول ضلع AB برابر ۱۵ و طول ضلع BC برابر ۱۰ است. ثابت کنید، طول نیمساز BD، از ۱۲ تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۱۲۷. ثابت کنید، طول نیمسازی از مثلث که بر ضلع بزرگتر فرود می‌آید، از طول ارتفاعی که بر ضلع کوچکتر مثلث فرود آمده است، تجاوز نمی‌کند.

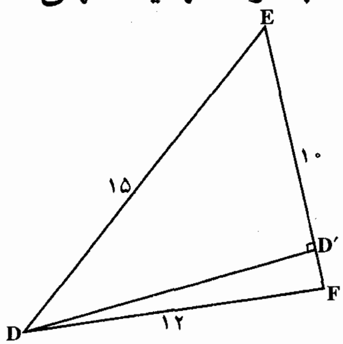
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۱۲۸. در مثلث ABC، $AB = ۱۸$ ، $BC = ۲۰$ و $AC = ۱۶$ سانتی‌متر است. اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی این مثلث را تعیین کنید.

۱. ۵. پاره‌خط

۱. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱. ۵. ۱. ۱. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به ارتفاعها یا خطهای عمود



۱۲۹. در مثلث DEF، $DE = ۱۵$، $DF = ۱۲$ و $EF = ۱۰$ سانتی‌متر است. اندازهٔ تصویر بزرگترین ضلع روی کوچکترین ضلع را تعیین کنید.

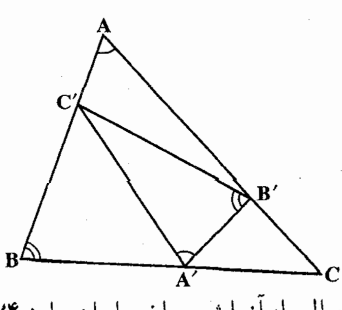
۱۳۰. طول ضلعهای یک مثلث بترتیب برابر ۳۰، ۷۰ و ۸۰ واحد است. اگر ارتفاع وارد بر ضلعی که طول آن ۸۰ است رسم شود، طول پاره‌خط بزرگتر که روی این ضلع جدا می‌شود برابر است با :

الف) ۶۲ ب) ۶۳ ج) ۶۴ د) ۶۵ هـ) ۶۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۱۳۱. در مثلث ABC، نقطهٔ H مرکز ارتفاعی است. اگر $AB = ۱۳cm$، $BC = ۱۴cm$ و $AC = ۱۵cm$ باشد، طول پاره‌خط AH را پیدا کنید.

۱۳۲. اگر ضلعهای مثلثی a، b و c باشند. فاصلهٔ محل تلاقی ارتفاعها را تا سه ضلع پیدا کنید.



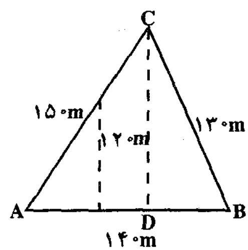
۱۳۳. در مثلث ABC، نقطه‌های A'، B' و C' روی ضلعهای BC، AC و AB را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم :
$\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$
ثابت کنید طول تصویر پاره‌خط $B'C'$ بر BC به اندازهٔ نصف BC است.

پنجمین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، پاییز ۱۳۷۴

۱۳۴. ارتفاع مثلثی قاعده را به قطعه‌های ۳۶ و ۱۴ سانتی‌متری تقسیم کرده است، عمودی بر قاعده چنان رسم کرده‌ایم که مساحت مثلث را به دو قسمت تقسیم کند. مطلوب است طول قطعه‌هایی که این عمود روی قاعده جدا می‌کند.

۱۳۵. ارتفاع مثلثی مساوی ۴ می‌باشد، این ارتفاع قاعده را به نسبت ۱ و ۸ قطع کرده است. مطلوب است طول پاره‌خطی که موازی ارتفاع بوده و مثلث را به دو قسمت معادل تقسیم کرده باشد.

۱۳۶. ضلعهای زمین مثلث شکلی به طولهای ۱۳۰m ، ۱۴۰m و ۱۵۰m می‌باشند (شکل زیر). طول عمود از یک گوشه بر ضلع ۱۴۰ متری، برابر با ۱۲۰m است. می‌خواهیم زمین را با حصاری عمود بر ضلع ۱۴۰ متری به دو بخش مساوی تقسیم کنیم. فاصلهٔ این نرده از A چه‌قدر باید باشد؟



۱. ۵. ۱. ۲. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به میانه‌ها

۱۳۷. از رأسهای مثلث ABC و از نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های آن، عمودهای $AD=10$ ، $BE=6$ ، $CF=24$ و $GH=x$ بر خط راست RS که مثلث را قطع نمی‌کند رسم شده‌اند، مقدار x برابر است با :

الف) $\frac{40}{3}$ ب) ۱۶ ج) $\frac{56}{3}$ د) $\frac{80}{3}$ هـ) نامعین

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

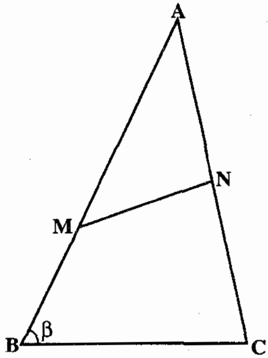
۱۳۸. روی ضلعهای AB و AC در مثلث ABC، مثلثهای متساوی‌الساقین $ADB(AD=AB)$ و $ACE(AC=AE)$ را رسم کرده‌ایم. در ضمن، زاویه DAE برابر است با مجموع دو زاویهٔ ABC وACB. ثابت کنید، پاره‌خط راست DE، طولی دو برابر طول میانهٔ AM از مثلث ABC دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

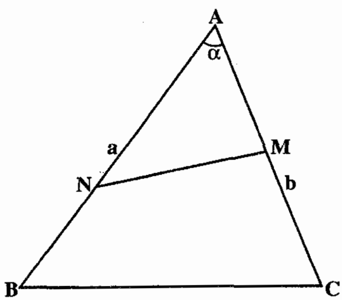
۱۳۹. نقطهٔ A را روی میانه‌ای که از رأس به قاعدهٔ مثلث رسم شده است، انتخاب کرده‌ایم. مجموع فاصله‌های نقطهٔ A تا ضلعهای جانبی مثلث، برابر است با S. فاصلهٔ نقطهٔ A، تا هر یک از ضلعهای جانبی را پیدا کنید، به‌شرطی که طول این ضلعها، برابر x و y باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۱۴۰. در مثلث ABC ؛ AB = c ، BC = a و $\hat{B}=\beta$. بر ضلع AB، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌شود که ۲AM = ۳MB . فاصلهٔ M تا وسط ضلع AC را پیدا کنید.

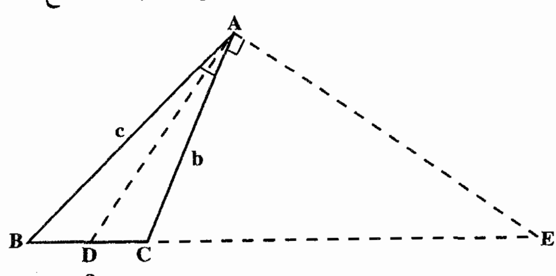


۱۴۱. در مثلث ABC ؛ $\hat{A}=\alpha$ ، BA = a و AC = b . روی ضلعهای AC و AB، نقطه‌های M و N اختیار شده‌اند، M وسط AC است. اگر مساحت مثلث AMN، $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC باشد، طول پاره‌خط MN را پیدا کنید.

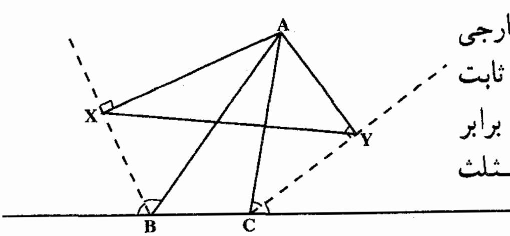


۱. ۵. ۱. ۳. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به نیمسازها

۱۴۲. هرگاه D و E نقطه‌های برخورد یک ضلع مثلث با نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس مقابل به آن باشند، طول DE را بر حسب سه ضلع حساب کنید.



۱۴۳. از رأس A در مثلث ABC، عمودهای AX و AY را بر نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ B و C رسم کرده‌ایم. ثابت کنید طول پاره‌خط راست XY برابر است با نصف اندازهٔ محیط مثلث ABC .



المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۱۴۴. ضلعهای مثلث BAC به نسبت ۲ : ۳ : ۴ هستند. نیمساز BD کوچکترین ضلع، یعنی AC، را به دو پاره‌خط AD و CD تقسیم می‌کند. اگر AC به طول ۱۰ باشد. آن‌گاه طول پاره‌خط بزرگتر AC برابر است با :

الف) $3\frac{1}{2}$ ب) ۵ ج) $5\frac{5}{7}$ د) ۶ هـ) $7\frac{1}{2}$

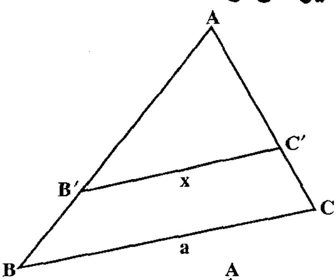
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۱۴۵. در مثلث ABC، ضلع AB به طول ۸ سانتی‌متر است. خط DEF موازی با AB طوری رسم می‌شود که D روی پاره‌خط AC و E روی پاره‌خط BC قرار گیرد و AG، امتداد خط AE، زاویهٔ FEC را نصف کند. اگر DE به طول ۵ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه طول CE برحسب سانتی‌متر برابر است با :

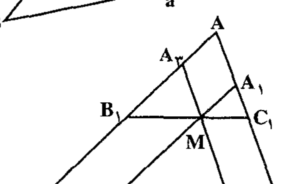
الف) $\frac{51}{4}$ ب) ۱۳ ج) $\frac{53}{4}$ د) $\frac{40}{3}$ هـ) $\frac{27}{2}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۸

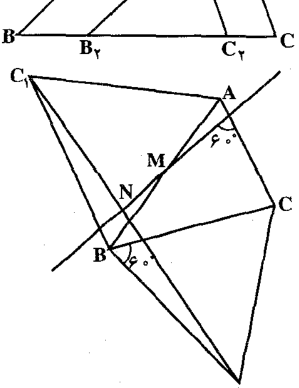
۱. ۵. ۱. ۴. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به سایر موارد



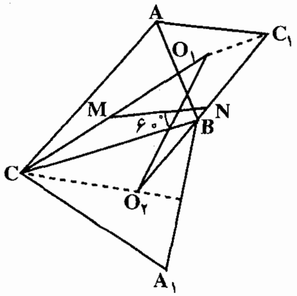
۱۴۶. قاعدهٔ مثلثی برابر a است. مطلوب است طول قطعه خط موازی قاعده که مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند ($a=16cm$).



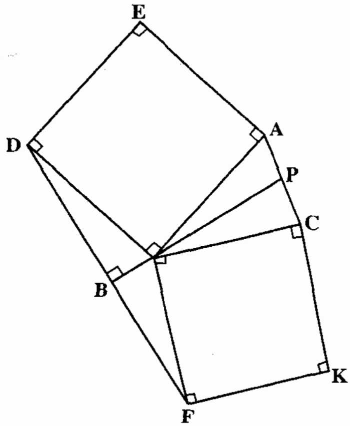
۱۴۷. از نقطهٔ M در درون مثلث ABC، سه خط راست به موازات ضلعهای آن رسم می‌شود. قطعه‌هایی از خطها که در درون مثلث محصورند، با یکدیگر برابرند. اگر طول ضلعهای مثلث، a، b و c باشد، طول قطعه‌ها را پیدا کنید.



۱۴۸. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC، مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC_1 و BCA_1 را در خارج آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط واصل میانگاههای AB و A_1C_1 با نصف طول پاره‌خط AC برابر بوده و با آن زاویهٔ $60°$ می‌سازد.



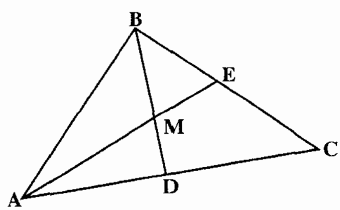
۱۴۹. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC و در خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC_1 و BCA_1 بترتیب با مرکزهای O_1 و O_2 رسم می‌کنیم. ثابت کنید که پاره‌خط O_1O_2 دو برابر پاره‌خطی است که میانگاههای O_1C و C_1O_2 را به هم وصل کرده و با پاره‌خط مزبور زاویهٔ $60°$ می‌سازد.



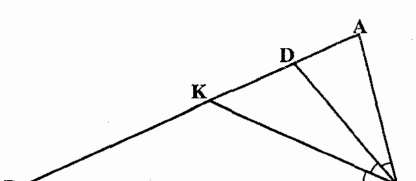
۱۵۰. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC و در خارج آن مربعهای ABDE و BCKF را رسم می‌کنیم. ثابت کنید پاره‌خط DF، دو برابر میانهٔ BP از مثلث ABC بوده، و بر آن عمود است.

۱. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

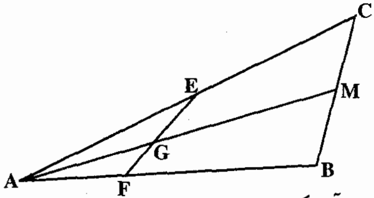
۱۵۱. خط راستی که از رأس A در مثلث ABC می‌گذرد، میانهٔ BDی آن را نصف می‌کند (نقطهٔ D بر ضلع AC قرار دارد). نسبتی که این خط، ضلع BC را تقسیم می‌کند، چیست؟



۱۵۲. پاره‌خط گذرنده از مرکز ثقل مثلثی ضلعهای آن را به پاره‌خطهای مساوی تقسیم می‌کند. رابطهٔ بین نسبت قطعه‌های به‌وجود آمده بر روی یک ضلع،و نسبت قطعه‌های حاصل بر روی ضلع دیگر را بیابید.



۱۵۳. در مثلث ABC می‌دانیم که $BC:AC=3$ و $\hat{C}=\gamma$ است. روی AB نقطه‌های D و K را طوری اختیار می‌کنیم که $A\hat{C}D=D\hat{C}K=K\hat{C}B$ باشد. نسبت $CD:CK$ را محاسبه کنید.

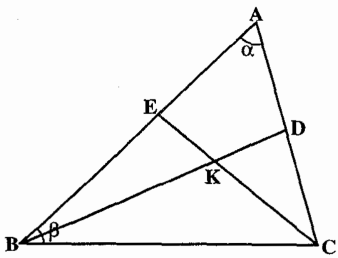


۱۵۴. در مثلث ABC (شکل روبه‌رو)، $AB=۱۲$ ، $AC=۱۶$ و M وسط ضلع BC است. نقطه‌های E و F بترتیب بر AC و AB واقعند و AM و EF در G برخورد کرده‌اند. اگر $AE=۲AF$ ، آن گاه EG/GF برابر است با :

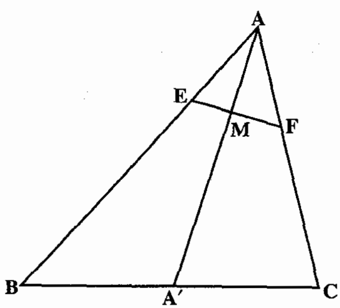
الف) $\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۴}{۳}$ ج) $\frac{۵}{۴}$ د) $\frac{۶}{۵}$ هـ) برای حل مسأله مفروضات مسأله کافی نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

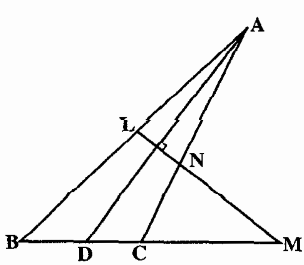
۱۵۵. در مثلث ABC اندازهٔ زاویهٔ A برابر α و اندازهٔ زاویهٔ B برابر β بوده و میانهٔ BD نیمساز CE را در نقطهٔ K قطع می کند، نسبت $CK:KE$ را بیابید.



۱۵۶. دو پاره‌خط متساوی AE و AF را بترتیب روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC اختیار می کنیم. ثابت کنید که میانهٔ رسم شده از رأس A ، پاره‌خط EF را به نسبت دو ضلع AC و AB تقسیم می کند.



۱۵۷. در مثلث ABC که $AB>AC$ می‌باشد، BC را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ M به دست آید. از M عمودی بر نیمساز داخلی زاویهٔ A رسم می کنیم تا AB و AC را بترتیب در L و N قطع کند. ثابت کنید $LB=۲NC$.



۱۵۸. ۶ نقطهٔ مختلف بر یک صفحه قرار دارند. ثابت کنید، نسبت بزرگترین فاصلهٔ بین این نقطه ها، بر کوچکترین فاصلهٔ بین آنها، از $\sqrt{۳}$ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، ۱۹۷۵

۱ . ۵ . ۳. تساوی پاره‌خطها

۱۵۹. بر ضلعهای مثلث دلخواه ABC و در خارج آن، مثلثهای ABR ،BCP و CAQ با $C\hat{B}P = C\hat{A}Q = ۴۵^\circ$ ،$B\hat{C}P = A\hat{C}Q = ۳۰^\circ$ و $A\hat{B}R = B\hat{A}R = ۱۵^\circ$ رسم شده‌اند. ثابت کنید که: $Q\hat{R}P = ۹۰^\circ$ و $RQ = RP$.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۵

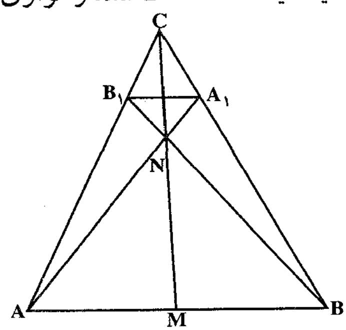
۱۶۰. نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 را روی ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که پاره‌خطهای راست AA_1 ، BB_1 ، و CC_1 در نقطهٔ D به هم رسیده‌اند. پاره‌خطهای راست A_1C_1 و BB_1 در نقطهٔ E یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر $|BD| = ۲|B_1D|$ ، آن وقت $|BE| = |B_1E|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۱۶۱. ارتفاع BD در مثلث ABC رسم شده، AN بر AB ، CM بر BC عمود است، $AN = DC$ و $CM = AD$. ثابت کنید که فاصله‌های M و N از رأس B، با هم برابرند، یعنی $MB = NB$.

۱۶۲. در مثلث ABC، نقطهٔ M بر ضلع BC طوری اختیار می‌شود که فاصلهٔ رأس B تا مرکز ثقل مثلث AMC، برابر است با فاصلهٔ رأس C تا مرکز ثقل مثلث AMB. ثابت کنید، $BM = DC$ ، که در آن D پای ارتفاع وارد از رأس A بر BC است.

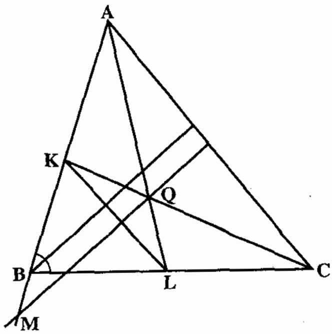
۱۶۳. روی میانهٔ CM از مثلث ABC نقطهٔ N مفروض است، از این نقطه خطهای AN و BN را رسم می‌کنیم تا BC و AC را بترتیب در A_1 و B_1 قطع کنند. ثابت کنید پاره‌خط A_1B_1 به وسیلهٔ میانهٔ CM نصف شده و موازی ضلع AB است.



۱۶۴. دو آنتی‌پارالل دو ضلع یک مثلث که از یک نقطه واقع بر شبه میانهٔ نظیر ضلع سوم آن مثلث رسم شده باشند، طولهای برابر دارند.

۱۶۵. زاویهٔ B از مثلث ABC برابر ۶۰° و AK و CE نیمسازهای زاویه‌های مثلثند. پاره‌خطهای راست AK و CE یکدیگر را در O قطع کرده‌اند. ثابت کنید : $OK = OE$.

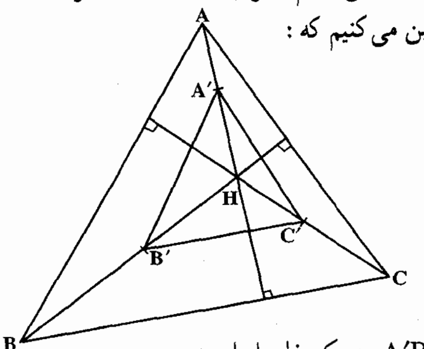
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹



۱۶۶. در مثلث ABC، نقطه‌های K و L بر ضلعهای AB و BC طوری اختیار می‌شوند که AK = KL = LC. از نقطهٔ برخورد خطهای AL و CK، خط راستی به موازات نیمساز زاویهٔ B رسم می‌شود تا خط AB را در نقطه M قطع کند. ثابت کنید که AM = BC.

۱۶۷. نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC را H می‌نامیم و بر روی HA، HB و HC، سه نقطهٔ A′، B′ و C′ را به قسمی تعیین می‌کنیم که:

$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$$



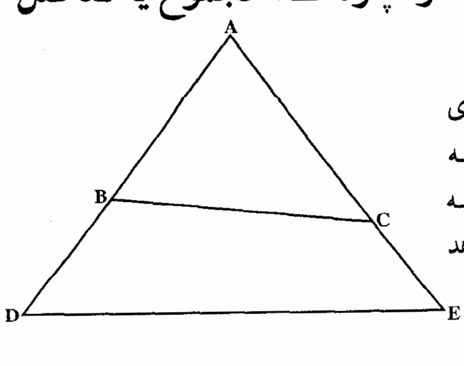
ثابت کنید که H از سه ضلع مثلث A′B′C′ به یک فاصله است.

۱۶۸. ضلعهای مثلث ABC، وترهای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی هستند که در بیرون مثلث ABC ساخته شده‌اند. این مثلثها را ABD، BCE و ACF می‌نامیم. ثابت کنید، پاره‌خطهای راست DE و BF بر هم عمودند و طولهایی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

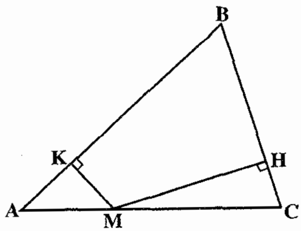
۱۶۹. ثابت کنید که نقطه‌ای مانند P روی خط اویلر مثلث ABC وجود دارد، به طوری که فاصله‌های مرکز ثقل مثلثهای ABP، BCP و CAP، بترتیب، از رأسهای C، A و B، برابرند.

۱. ۵. ۴. ماکزیمم یا مینیمم اندازهٔ پاره‌خط، مجموع یا تفاضل پاره‌خطها، ...

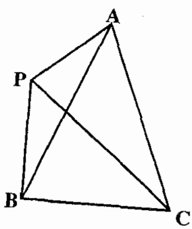


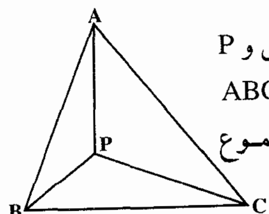
۱۷۰. بر امتداد ضلعهای AB، AC نقطه‌های D و E را چنان اختیار می‌کنیم که BD + CE = BC باشد. در چه صورت DE بزرگترین مقدار را خواهد داشت؟

۱۷۱. در مثلث ABC به ضلعهای a، b و c، ضلعهای AB و AC را از رأسهای B و C آن قدر امتداد می‌دهیم تا این ضلعها به طولهای AD و AE با شرط $BD+CE=AC$ تبدیل شوند. AD و AE را طوری بیابید که پاره‌خط DE کوتاهترین طول را داشته باشد.



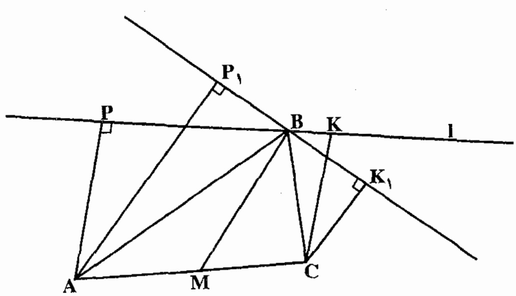
۱۷۲. روی ضلع AC از مثلث ABC نقطهٔ دلخواهی را اختیار کرده و از آن عمودهایی را بر ضلعهای AB و BC رسم می‌کنیم. اگر $AB>BC$ باشد مقادیر مینیمم و ماکزیمم حاصل جمع طول این عمودها را بیابید.





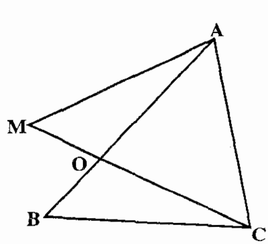
۱۷۳. A، B و C سه نقطهٔ مفروض و P نقطه‌ای متغیر از صفحهٔ ABC می‌باشد. مقدار مینیمم مجموع $PA+PB+PC$ چه‌قدر است؟

۱۷۴. خط مستقیم l را از رأس B مثلث ABC رسم می‌کنیم. از نقطه‌های A و C عمودهایی بر این خط رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع طولهای این عمودها در صورتی به حداقل ممکن می‌رسد که خط l بر میانهٔ BM مثلث ABC عمود باشد.



۱. ۵. ۵. نابرابری پاره‌خطها

۱۷۵. مثلثهای ABC و AMC طوری قرار دارند که MC، AB را در نقطهٔ O قطع می‌کند و $AM+MC=AB+BC$ ثابت کنید که اگر $AB=BC$، آن وقت $OB>OM$.

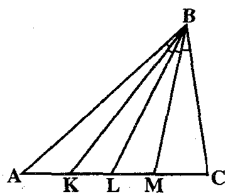


۱۷۶. نقطهٔ D روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد. E، نقطهٔ دلخواهی از ضلع AC، و K، نقطه‌ای از ضلع AB است. خطهای راست AD و BE در نقطهٔ M، خطهای راست BE و CK در نقطهٔ P و خطهـای راست CK و AD در نقطهٔ T برخورد دارند. ثابت کنید، اگر

$$|BM| = |PE| \quad , \quad |AT| = |MD|$$

آن گاه $|CP| > |TK|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷



۱۷۷. در مثلث ABC، زاویه‌ها با نابرابری $3\hat{A} - \hat{C} < \pi$ به هم مربوطند. زاویهٔ B، با خطهای راستی که ضلع AC را قطع می‌کنند، به چهار بخش برابر تقسیم می‌شود. ثابت کنید که پاره‌خط سوم (با شمارش از رأس A) از تقسیمات ضلع AC، از AC / ۴ کوچکتر است.

۱۷۸. برای نقطهٔ T از مثلث مفروض ABC، m(T) و M(T) را بترتیب، کوچکترین و بزرگترین مقدار، از بین سه مقدار TA، TB و TC فرض می‌کنیم.

الف) همهٔ نقطه‌های T از مثلث ABC را طوری پیدا کنید که، برای آنها m(T)، حداکثر مقدار ممکن باشد.

ب) ثابت کنید،اگر زاویهٔ ABC، حاده نباشد، برای هر نقطهٔ T از مثلث ABC داریم:

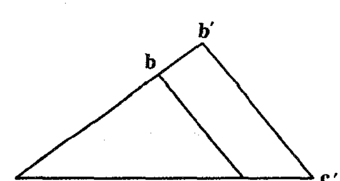
$$m(T) \le \frac{1}{2} BC \le M(T)$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف الف) چکوسلواکی سابق، ۱۹۷۴، ب) رومانی، ۱۹۸۲

۱ . ۶. محیط

۱ . ۶ . ۱ . اندازهٔ محیط

۱ . ۶ . ۱ . ۱ . اندازهٔ محیط مثلث داده شده



۱۷۹. در شکل روبه‌رو، دو خط bc و b′c′ با هم موازی‌اند، مساحت مثلث abc برابر ۹، مساحت مثلث ab′c′ برابر ۱۶، و محیط مثلث ab′c′ برابر ۱۲ است. محیط مثلث abc چه قدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۹ ج) ۹/۷۵ د) ۶ هـ) عددی غیر از این چهار عدد

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

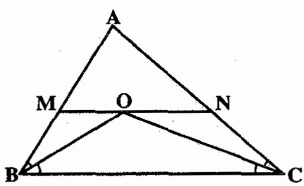
۱۸۰. AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعها و AA_0، BB_0 و CC_0 میانه‌های مثلث ABC هستند. ثابت کنید، طول محیط مثلث ABC، برابر است با طول خط شکستهٔ $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۱۸۱. مساحت مثلث ABC برابر S و $\hat{B}=\beta$ است. حداقل مقدار کمیتهای زیر را بیابید:
الف) مجموع ضلعهای AB و BC؛ ب) ضلع AC؛ ج) محیط مثلث

۱. ۶. ۱. ۲. اندازهٔ محیط مثلثها یا شکلهای دیگر

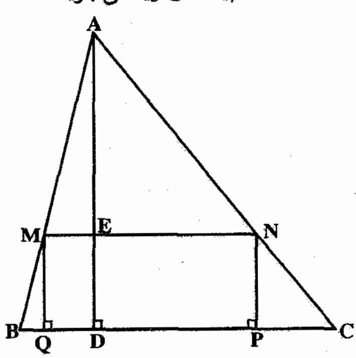
۱۸۲. در مثلث شکل روبه‌رو، $AB=12$ و $BC=24$ و $AC=18$ و BO نیمساز زاویهٔ ABC و CO نیمساز زاویهٔ ACB است و MN بر O می‌گذرد و با BC موازی است. با این داده‌ها، محیط مثلث AMN برابر می‌شود با:



الف) ۳۰ ب) ۳۳ ج) ۳۶ د) ۳۹ هـ) ۴۲

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۱۸۳. در مثلث ABC، ارتفاع AD با ضلع نظیرش BC مساوی است. ثابت کنید تمام مستطیلهایی که در این مثلث محاط باشند و دو رأس آنها روی BC باشد، دارای محیط متساوی می‌باشند.



۱. ۶. ۲. ماکزیمم و مینیمم محیط، نسبت محیطها

۱۸۴. بین مثلثهایی که قاعدهٔ مشترک دارند و مساحت آنها مقدار ثابتی است، محیط کدام یک مینیمم است؟

۱۸۵. بین مثلثهایی که قاعدهٔ مشترک دارند و زاویهٔ رأس آنها مقدار ثابتی است، محیط کدام یک ماکزیمم است؟

۱۸۶. ثابت کنید، خط راستی که مثلث را به دو بخش هم‌ارز (یعنی با مساحتهای برابر) تقسیم می‌کند، محیط آن را به نسبتی تقسیم می‌کند که از نسبت ۱:۳ بزرگتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۷.۱. مساحت

۱.۷.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده

۱.۱.۷.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن اجزای اصلی

۱۸۷. مساحت مثلث با ضلعهای به اندازه‌های زیر را به دست آورید :

۱۵ ، ۱۴ ، ۳

۱۸۸. اندازه‌های دو ضلع از یک مثلث ۸ و ۱۲ سانتی‌متر و زاویهٔ بین آن دو ضلع ۶۰° است. اندازهٔ ضلع سوم و مساحت مثلث را حساب کنید.

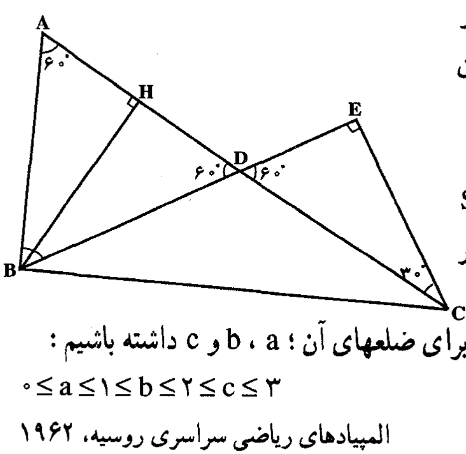
۱۸۹. مطلوب است مساحت مثلثی که طول ضلعهای آن، چنین باشد : $a=۱۳$ ، $b=۱۴$ و $c=۱۵$

از هرون، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۱۹۰. ضلعهای مثلثی ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۴۲x^۲+۵۸۷x-۲۷۳۰=۰$ می‌باشند. بدون حل معادله، مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۱۹۱. در مثلثی اندازهٔ سه زاویهٔ آن برابر مقدارهای معلوم α ، β و γ است. فاصله‌های نقطهٔ اختیاری M در درون مثلث از سه ضلع آن برابر مقدارهای معلوم m ، n و k است. مساحت این مثلث را محاسبه کنید.

۱۹۲. فرض کنیم که ABC مثلث دلخواهی باشد که $\hat{A}=۶۰^\circ$. بدون بهره‌گیری از مثلثات، ثابت کنید که مساحت این مثلث از دستور زیر محاسبه می‌شود :



$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\left[a^۲-(b-c)^۲\right]$$

مسأله را در حالتی که زاویهٔ $\hat{A}$ برابر ۱۲۰ درجه است، حل کنید.

۱۹۳. حداکثر مساحت مثلثی را پیدا کنید که برای ضلعهای آن ؛ a ، b و c داشته باشیم :

$۰\le a\le ۱\le b\le ۲\le c\le ۳$

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۲

۱۹۴. از بین مثلثهای به قاعدهٔ مفروض a و محیط مفروض $۲P$ ، سطح کدام یک ماکزیمم است؟

۱۹۵. ثابت کنید بین تمام مثلثهایی که دو ضلع ثابت دارند، مساحت مثلثی ماکزیمم است که آن دو ضلع ثابت، برهم عمود باشند.

۱۹۶. روش پیدا کردن مساحت مثلثی را که یکی از رأسهای آن، و مثلاً B ، دردسترس نباشد، پیدا کنید.

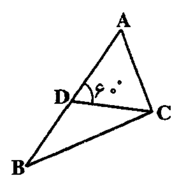
۱.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن ارتفاعها

۱۹۷. با مفروض بودن h_a، h_b و h_c ارتفاعهای یک مثلث، مساحت آن را به‌دست آورید.

۱.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن میانه‌ها

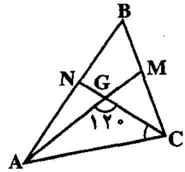
۱۹۸. مطلوب است مساحت مثلثی که دو ضلع آن بترتیب برابر با ۲۷ و ۲۹ سانتی‌متر و میانهٔ نظیر ضلع سوم برابر با ۲۶ سانتی‌متر باشد.

۱۹۹. در مثلث ABC ، $AB=۱۴$ و طول میانهٔ CD برابر با ۸ است و $A\hat{D}C=۶۰^\circ$ ، $a\Delta ABC$ چه‌قدر است؟



۲۰۰. از مثلثی اندازهٔ میانهٔ $AM=m_a$ و زاویه‌های مثلث معلومند. مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۲۰۱. میانه‌های AM و CN با ضلع AC ، دو زاویه به مجموع ۶۰° ساخته‌اند و $AM.CN=\sqrt{۳}$ است. مساحت مثلث را به‌دست آورید.

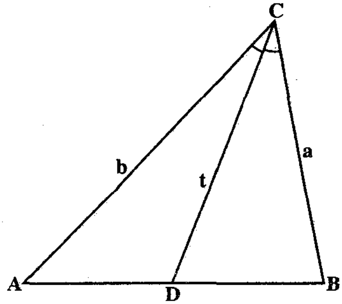


۲۰۲. اگر در مثلثی m_a و m_b میانه و α زاویه بین آنها باشد، ثابت کنید که مساحت مثلث برابر $\frac{۲}{۳}m_a m_b \sin\alpha$ است.

۲۰۳. اندازهٔ مساحت مثلثی را تعیین کنید که اندازهٔ سه میانه‌اش، ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ سانتی‌متر و ۴۸ سانتی‌مترند.

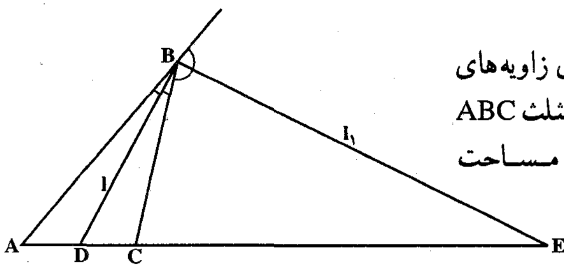
۲۰۴. در مثلثی میانه‌های m_a، m_b و m_c معلوم هستند. مساحت آن را محاسبه کنید.

۴.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن نیمسازها



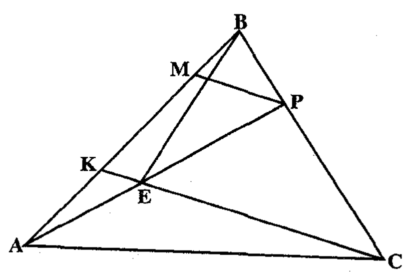
۲۰۵. مطلوب است مساحت مثلثی که طول دو ضلع آن a و b و طول نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع مساوی t باشد.

۲۰۶. ثابت کنید که اگر طول نیمسازهای زاویه‌های مثلثی از ۱ کمتر باشد، آن وقت مساحت آن از $\frac{\sqrt{3}}{3}$ کمتر است.

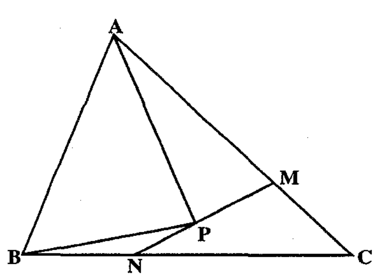


۲۰۷. اگر l و l_1 طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی B از مثلث ABC باشند، با فرض $b.a = k$، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۵.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن سایر اجزای مثلث



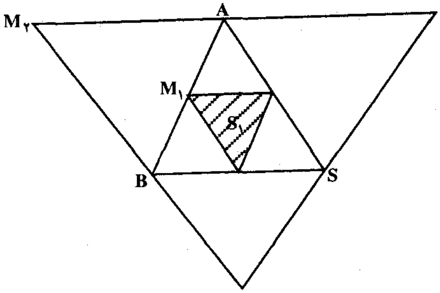
۲۰۸. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC نقطه‌های K و P طوری انتخاب شده‌اند که $AK:BK = 1:2$ و $CP:BP = 2:1$ است. خطهای مستقیم AP و CK در نقطه E همدیگر را قطع می‌کنند. اگر مساحت مثلث BEC برابر $4cm^2$ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.



۲۰۹. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌های M، N و P اختیار می‌شوند: M و N، بترتیب، بر ضلعهای AC و BC، و P روی پاره‌خط MN به طوری که:

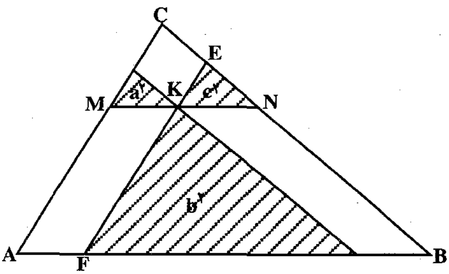
$$AM:MC = CN:NB = MP:PN$$

اگر مساحت مثلثهای AMP و BNP، بترتیب T و Q باشد، مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



۲۱۰. دو مثلث با ضلعهای متناظر موازی و مساحتهای S_1 و S_2 یکی در مثلث ABC محاط و دیگری بر آن محیط شده است. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۱۱. مربعی در داخل مثلثی با قاعدهٔ a محاط شده است. اگر ضلع مربع از نصف قاعده مثلث بزرگتر بوده و مساحت مربع یک چهارم مساحت مثلث باشد، آن‌گاه مساحت مثلث را محاسبه کنید.

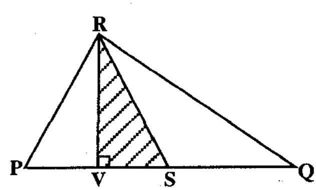


۲۱۲. اگر از نقطهٔ K واقع در داخل مثلث ABC خطهایی موازی ضلعهای مثلث رسم کنیم و مساحت سه مثلث به‌دست آمده، a^2 ، b^2 و c^2 باشد، مساحت مثلث ABC را حساب کنید.

۱. ۷. ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده (مثلثها)

۲۱۳. در ΔPQR ، RV ارتفاع و RS میانه است. اگر $PR = ۱۵$ ، $RQ = ۲۰$ و $RV = ۱۲$ ؛ $a\Delta RVS$ چه‌قدر است؟

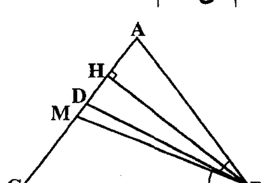


۲۱۴. در مثلث ABC، $AB = ۱۳cm$ و $BC = ۱۵cm$ و $AC = ۱۴cm$ است. در این مثلث ارتفاع BH ، نیمساز BD و میانهٔ BM را رسم می‌کنیم :

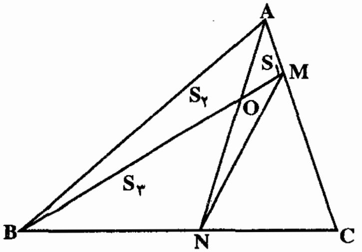
الف) مساحت مثلث BHD را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث BMD را محاسبه کنید.

ج) مساحت مثلث BHM را پیدا کنید.

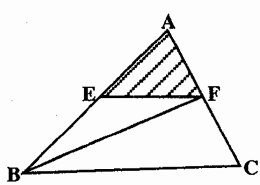


۲۱۵. در مثلث ABC، نقطهٔ M روی ضلع AC و نقطهٔ N روی ضلع BC اختیار شده است. پاره‌خطهای AN و BM در نقطهٔ O متقاطعند. اگر مساحت مثلثهای OMA ، OAB و OBN بترتیب، S_1 ، S_2 و S_3 باشد. مساحت مثلث CMN را پیدا کنید.

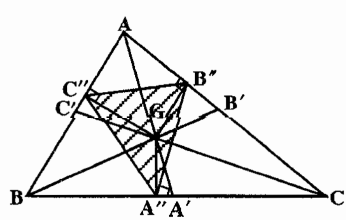


۲۱۶. روی هریک از میانه‌های مثلثی نقطه‌ای اختیار می‌کنیم که آنها را به نسبت ۱ :۵ تقسیم می‌کند. قطعهٔ بزرگتر روی آنها درطرف رأس مثلث قرار دارد. اگر مساحت مثلث مفروض $۶۴cm^2$ باشد، مساحت مثلثی را به دست آورید که رأسهای آن روی نقطه‌های گفته شده در فرض مسأله قرار دارند.

۲۱۷. در مثلث غیرمشخص ABC طول AB = ۱۰ سانتی‌متر است. از نقطهٔ F روی AC، خط EF را به موازات BC رسم می‌کنیم. اگر مساحت مثلث AEF مساوی ۶ سانتی‌مترمربع و طول AF مساوی ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت مثلث ABF را حساب کنید.



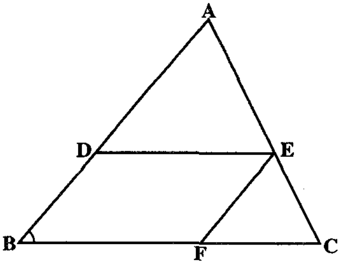
۲۱۸. اگر a ، b و c ضلعها و S مساحت یک مثلث باشد، ثابت کنید که مساحت مثلثی که رأسهایش پای عمودهایی است که از مرکز ثقل مثلث بر ضلعهای آن فرود می‌آید، برابر است با :



$$4S^3(a^2+b^2+c^2):9a^2b^2c^2$$

۲۱۹. مثلثی به ضلعهای a ، b و c مفروض است. مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث مفروض و مساحت کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن را پیدا کنید.

۱.۷.۲.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجادشده (چندضلعیها)



۲۲۰. در داخل مثلث معینی متوازی‌الاضلاعهایی را طوری محاط کرده‌ایم که با مثلث در یک زاویه مشترک هستند. ثابت کنید متوازی‌الاضلاعی دارای بیشترین مساحت است که رأس آن ضلع مقابل به زاویه مشترک را در مثلث نصف کند.

۲۲۱. محیط مثلثی برابر ۱۰۰ سانتی‌متر و مساحت آن برابر ۱۰۰ سانتی‌متر مربع است. خطهای راستی موازی با ضلعها و به فاصلهٔ یک سانتی‌متر از آنهارسم کرده‌ایم ؛ این خطهای راست، مثلث را به ۷ بخش تقسیم می‌کنند که سه تا از آنها، متوازی‌الاضلاعند. ثابت کنید مجموع مساحتهای این سه متوازی‌الاضلاع، از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

۲۲۲. طول قاعدهٔ یک مثلث b ، و طول ارتفاع وارد بر این ضلع h است. مستطیلی به ارتفاع x ، که قاعدهٔ آن بر قاعدهٔ مثلث واقع است، در این مثلث محاط می‌شود. مساحت مستطیل برابر است با :

الف) $\frac{bx(h-x)}{h}$ ب) $\frac{hx}{b}(b-x)$ ج) $\frac{bx}{h}(h-2x)$

د) $x(b-x)$ هـ) $x(h-x)$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۲۲۳. بین مستطیلهای محاط در مثلث مفروض، مستطیلی مساحتش ماکزیمم است که یک ضلع آن موازی با ارتفاع و مساوی نصف آن باشد.

۲۲۴. مستطیلی را در داخل مثلثی محاط کرده‌ایم. ثابت کنید مساحت مستطیل از نصف مساحت مثلث بیشتر نیست.

۲۲۵. ثابت کنید مساحت مربعی که در درون یک مثلث واقع است، از نصف مساحت مثلث تجاوز نمی‌کند.

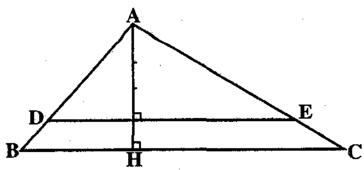
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲۲۶. در مثلث ABC که در آن زاویهٔ A حاده نیست مربع B_1C_1DE را محاط می‌کنیم (DE روی ضلع BC)، و درمثلث AB_1C_1 مربع $B_2C_2D_1E_1$ را محاط کرده‌ایم و غیره، این ساختمان را چند بار انجام داده‌ایم، ثابت کنید، مجموع مساحتهای همهٔ مربعهای محاطی، ازنصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چین، ۱۹۶۴

۲۲۷. در مثلث ABC به ضلعهای a، b و c سه لوزی می‌توانیم محاط کنیم که یک رأس آن بر یک رأس مثلث و سه رأس دیگرش بر سه ضلع مثلث واقع باشد. ازبین این لوزیها کدام یک دارای مساحت بیشتر می‌باشد $(a \le b \le c)$.

۲۲۸. ضلعهای مثلثی برابر ۲۰ cm، ۳۴ cm و ۴۲cm است. یکی از ارتفاعها، از طرف رأس، به نسبت ۱ : ۳ تقسیم شده است. در این نقطه تقسیم، خطی را بر ارتفاع عمود کرده‌ایم. مساحت ذوزنقه حاصله را به‌دست آورید.

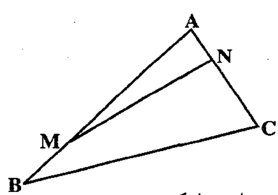


۲۲۹. خطی به موازات قاعده مثلثی به مساحت S چنان رسم شده است که از آن مثلثی به مساحت q جدا می‌کند. مطلوب است مساحت چهارضلعی که سه رأس آن، رأسهای مثلث کوچکتر و رأس چهارم آن روی قاعدهٔ مثلث بزرگتر باشد.

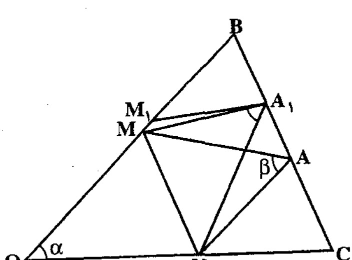
۲۳۰. در مثلث ABC که مساحتی برابر S دارد، میانه‌های AK و BE رارسم کرده‌ایم. اگر این دو میانه در نقطهٔ O باهم برخورد کرده باشند، مساحت چهارضلعی CKOE را پیدا کنید.

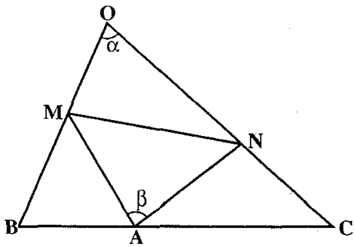
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲۳۱. در مثلث ABC ، نقطه M بر ضلع AB و نقطهٔ N بر ضلع AC طوری اختیار می‌شود که $AM = ۳MB$ و $۲AN = NC$. اگر مساحت مثلث ABC برابر S باشد، مساحت چهارضلعی MBCN را پیدا کنید.



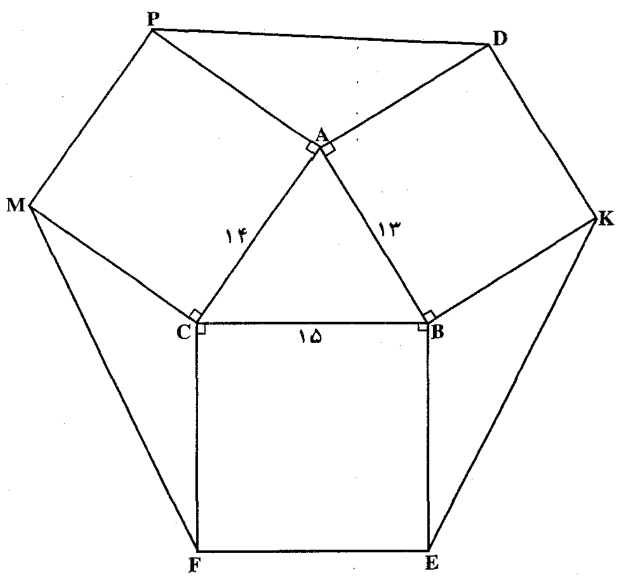
۲۳۲. مثلث OBC $(B\hat{O}C = \alpha)$ داده شده است. برای هر نقطه مانند A روی ضلع BC ، نقطه‌های M و N را بترتیب، روی OB و OC طوری معلوم می‌کنیم که $M\hat{A}N = \beta$ $(\alpha + \beta < \pi)$ و مساحت چهار ضلعی OMAN ماگزیمال باشد. ثابت کنید که این مساحت ماکزیمال، مینیمم خود را به ازای نقطه‌هایی مانند A، M و N که برای آنها MA = AN و خط راست MN با BC موازی است، به دست می‌آورد. (چنین نقطه‌هایی وجود دارند به شرطی که زاویه‌های B و Cی مثلث ABC، از $\frac{\pi}{۲} + \frac{\beta}{۲}$ تجاوز نکنند.)





۲۳۳. مثلث OBC داده شده است، $B\hat{O}C = \alpha$. برای هر نقطه مانند A روی ضلع BC، نقطه‌های M و N را به ترتیب روی OB و OC طوری معلوم می‌کنیم که $M\hat{A}N = \beta$ مساحت چهارضلعی OMAN مینیمال باشد. ثابت کنید که این مساحت مینیمال به ازای نقطه‌هایی چون A، M و N که برای $MA = AN$ و خط راست MN موازی BC است، ماکزیمال است (اگر چنین نقطهٔ A ای وجود نداشته باشد آن وقت، ماکزیمم در انتهای ضلع BC به ازای چهارضلعی تباهیده به دست می‌آید.)

۲۳۴. روی ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC مربعهای BEFC، CMPA و ADKB را رسم می‌کنیم اگر $AB = ۱۳cm$، $AC = ۱۴cm$ و $BC = ۱۵cm$ باشد، مساحت شش‌ضلعی DKEFMP را محاسبه کنید.

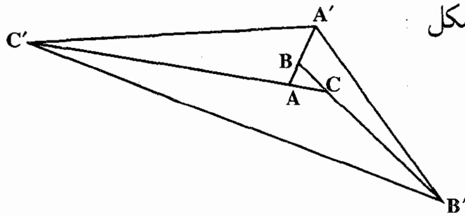


۲۳۵. مثلث ABC و نقطه‌ای در صفحه مثلث داده شده است. قرینه مثلث را نسبت به این نقطه به دست آورده‌ایم. از برخورد مثلث قرینه با مثلث ABC، یک چندضلعی به دست آمده است. ثابت کنید مساحت این چندضلعی از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث ABC تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۳.۷.۱ نسبت مساحتها

۱.۳.۷.۱. نسبت مساحت مثلثها



۲۳۶. ضلعهای مثلث ABC را شبیه شکل روبه‌رو ادامه داده‌ایم و می‌دانیم:

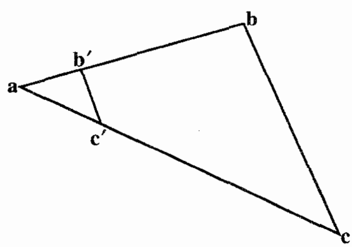
$|AA'| = ۳|AB|$

$|BB'| = ۵|BC|$

$|CC'| = ۸|CA|$

نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت مثلث $A'B'C'$ چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹



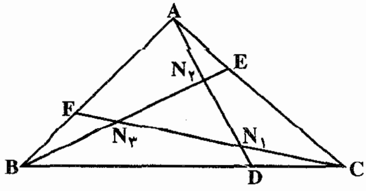
۲۳۷. در شکل روبه‌رو، $b'c'$ با bc موازی است و $|ab'| = ۳$ و $|bb'| = ۷$، مقدار تقریبی نسبت مساحت مثلث $ab'c'$ به مساحت مثلث abc با ۰/۰۱ تقریب برابر است با:

الف) ۰/۳۰ ب) ۰/۴۳ ج) ۰/۰۹ د) ۰/۱۸ هـ) ۰/۷۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۲۳۸. در مثلث ABC ارتفاعهای AD ، BE و CF را رسم می‌کنیم. اگر زاویه‌های مثلث ABC برابر α، β و γ باشد، درآن صورت نسبت مساحت مثلثهای DEF و ABC را بیابید.

۲۳۹. مساحت مثلثی که ضلعهایش میانه‌های یک مثلث است به مساحت این مثلث برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد.

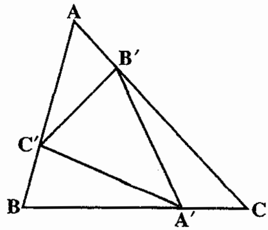


۲۴۰. در شکل CD ، AE و BF یک سوم ضلعهای مربوط هستند. نتیجه می‌شود که $AN_۲:N_۲N_۱:N_۱D = ۳:۳:۱$ و به همین‌نحو است برای BE و CF. آن‌گاه نسبت مساحت مثلث $N_۱N_۲N_۳$ به مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۱۰}$ ب) $\frac{۱}{۹}$ ج) $\frac{۱}{۷}$ د) $\frac{۱}{۶}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲۴۱. نقطه‌های A' ، B' و C' ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را به نسبت داخلی K تقسیم می‌کنند. نشان دهید که سه مثلث $AB'C'$ ، $BC'A'$ و $CA'B'$ معادل یکدیگرند و نسبت سطحهای دو مثلث ABCو $A'B'C'$ را پیدا کنید.



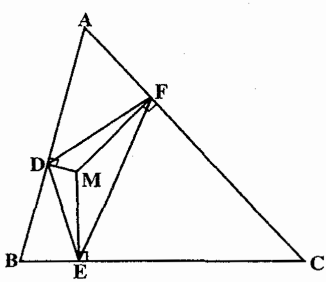
۲۴۲. ضلع BC از مثلث ABC را از نقطهٔ C به اندازهٔ $CA_1 = k.BC$ امتداد داده‌ایم و به همین ترتیب $AB_1 = K.CA$ و $BC_1 = K.AB$. اگر A_2 ، B_2 و C_2 وسطهای قطعه‌های AA_1 ، BB_1 و CC_1 باشند، ثابت کنید :

الف) سه مثلث ABC ، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ دارای یک مرکز ثقلند.

ب) نسبت مساحتهای دو مثلث ABC و $A_2B_2C_2$ برابر $\frac{1}{4}(1+3k+3k^2)$ است.

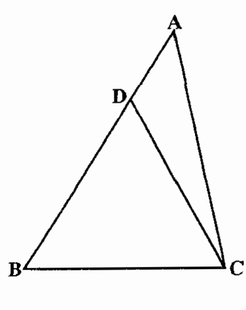
ج) مسأله را در دو حالت خاص $k=\frac{1}{2}$ و $k=1$ مطالعه کنید. خاصیتهای دیگر شکل را پیدا کنید.

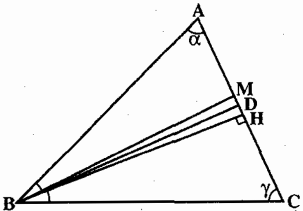
۲۴۳. از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC عمودهای MD ، ME و MF را بترتیب بر ضلعهای AB ، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AB=c$ ، $AC=b$ ، $ME=k$ ، $MF=m$ ، $BC=a$ و $MD=n$ باشد، نسبت مساحت مثلثهای ABC و DEF را به دست آورید.



۲۴۴. در شکل زیر توضیح دهید چرا :

الف) $\frac{a\Delta ADC}{a\Delta BDC}=\frac{AD}{BD}$ ب) $\frac{a\Delta ADC}{a\Delta ABC}=\frac{AD}{AB}$ ج) $\frac{a\Delta DBC}{a\Delta ABC}=\frac{DB}{AB}$





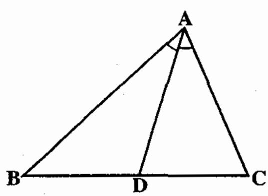
۲۴۵. در مثلث ABC، $\hat{A}=\alpha$ و $\hat{C}=\gamma$ است. نیمساز BD، ارتفاع BH و میانهٔ BM را در این مثلث رسم می‌کنیم. مطلوب است:

الف) نسبت مساحت مثلث BDM به مساحت مثلث ABC.

ب) نسبت مساحت مثلث BHM به مساحت مثلث ABC.

ج) نسبت مساحت مثلث BHD به مساحت مثلث ABC.

۲۴۶. مساحت مثلثی با ضلعهای a و bرا که طول میانه بین این ضلعها برابر $l_c = 1$ است بیابید.

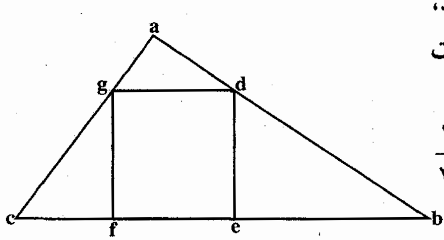


۲۴۷. در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}$$

۲.۳.۷.۱. نسبت مساحت مثلث و شکلهای دیگر

۲۴۸. مستطیل defg در مثلث abc، مطابق شکل، محاط است. اگر نسبت طول [ad] به طول [ab] برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، نسبت مساحت مستطیل به مساحت مثلث abcبرابر است با:

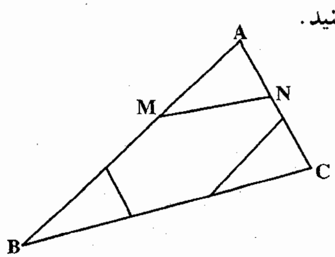


الف) $\frac{۱}{۹}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) $\frac{۱}{۳}$

د) $\frac{۴}{۹}$ هـ) $\frac{۵}{۹}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲۴۹. هریک از ضلعهای مثلثی را به قسمتهایی با نسبت ۳ :۲ :۳ تقسیم کرده‌ایم. از وصل کردن این نقطه‌ها یک شش‌ضلعی بدست می‌آید. نسبت مساحت شش‌ضلعی را بر مساحت مثلث محاسبه کنید.



۲۵۰. نقطه‌های X و Y را بترتیب روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که $C\hat{Y}X = ۲B\hat{A}C$ و $A\hat{X}Y = ۲A\hat{C}B$ درستی این نابرابری را ثابت کنید.

$$\frac{S_{AXYC}}{S_{ABC}} \leq \frac{|AX|^۲ + |XY|^۲ + |YC|^۲}{|AC|^۲}$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۴.۷.۱. رابطه‌ای در مساحتها

۱.۴.۷.۱. رابطه ای در مساحتها (برابریها)

۲۵۱. در مثلث ABC می‌دانیم، $\overline{AB} = ۱۲$ ، $\overline{AC} = ۷$ و $\overline{BC} = ۱۰$ اگر ضلعهای AB و AC دوبرابر شوند اما BC ثابت بماند، آن‌گاه :

الف) مساحت دوبرابر می‌شود.

ب) ارتفاع دو برابر می‌شود.

ج) مساحت چهار برابر مساحت اصلی می‌شود.

د) میانه تغییر نمی‌کند.

هـ) مساحت مثلث صفر می‌شود.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۲۵۲. اگریک زاویهٔ مثلثی ثابت بماند، اما هریک از دو ضلع این زاویه دوبرابر شود، آن‌گاه مساحت در چه عددی ضرب می‌شود؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴

د) ۶ هـ) عددی بیش از ۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۲۵۳. در مثلثی طول یک ضلع به اندازهٔ ۱۰٪ اضافه و طول ارتفاع نظیر این ضلع به اندازهٔ ۱۰٪ کم می‌شود مساحت این مثلث :

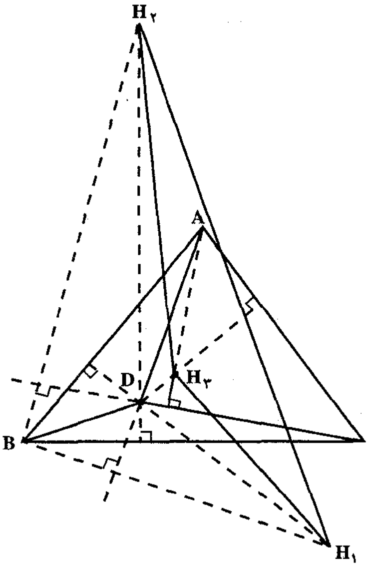
الف) بدون تغییر باقی می‌ماند.

ب) به اندازهٔ ۵٪ اضافه می‌شود.

ج) به اندازهٔ ۰/۵٪ اضافه می‌شود.

د) به اندازه ۱٪ کم می‌شود.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹



۲۵۴. مثلث ABC، نقطه دلخواه D در صفحه داده شده است. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABD ، BCD و CAD رأسهای یک مثلث با مساحتی برابر با مساحت مثلث مفروض هستند

۲۵۵. خط راست P، با میانهٔ CM از مثلث ABC موازی است. خطهای راست AB، BC و AC خط راست P را بترتیب در C_1، A_1 و B_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید مساحت مثلث AA_1C_1 با مساحت مثلث BB_1C_1 برابر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

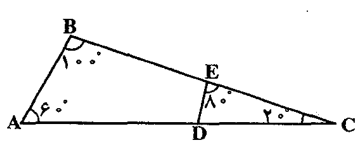
۲۵۶. در مثلث ABC میانهٔ AM را رسم کرده و نقطهٔ وسط آن را I بنامید. پاره‌خط BI را ادامه دهید تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید:

$S_{ABC} = ۱۲S_{AID}$

(منظور از S_{ABC}، مساحت مثلث ABC است).

پنجمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۶

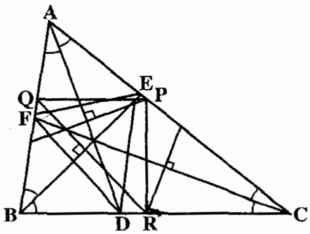
۲۵۷. در مثلث ABC نقطه E وسط BC و نقطهٔ D روی ضلع AC واقع است اگر طول AC برابر ۱ و $A\hat{B}C = ۱۰۰^\circ$ ، $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ ، $A\hat{C}B = ۲۰^\circ$ و $D\hat{E}C = ۸۰^\circ$. آن گاه مساحت مثلث ABC به اضافهٔ دو برابر مساحت مثلث CDE برابر است با :



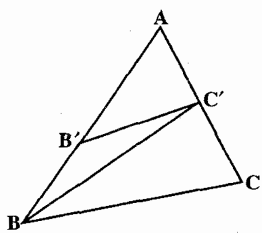
الف) $\frac{۱}{۴}\cos ۱۰^\circ$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ ج) $\frac{۱}{۴}\cos ۴۰^\circ$ د) $\frac{۱}{۴}\cos ۵۰^\circ$

هـ) $\frac{۱}{۸}$

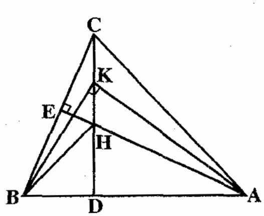
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹



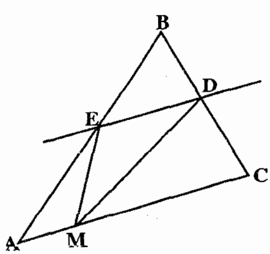
۲۵۸. در مثلث ABC، نیمسازهای AD ، BE و CF رسم شده‌اند. خط راست عمود بر AD که از وسط AD می‌گذرد، AC را در نقطهٔ P قطع می‌کند. خط راست عمود بر BE که از وسط BE می‌گذرد، AB را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. بالاخره، خط راست عمود بر CF که از وسط CF می‌گذرد، CB را در نقطهٔ R قطع می‌کند. ثابت کنید که مساحتهای مثلثهای DEF و PQR برابرند.



۲۵۹. خطی موازی ضلع BC از مثلث ABC، ضلعهای AB و AC را بترتیب در B′ و C′ قطع می‌کند. ثابت کنید مساحت مثلث ABC′ واسطه هندسی بین مساحت دو مثلث ABC و AB′C′ است.



۲۶۰. نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. نقطهٔ K را روی خط مستقیم CH طوری انتخاب می‌کنیم که ABK یک مثلث قائم‌الزاویه باشد. ثابت کنید که مساحت مثلث ABK واسطهٔ هندسی بین مساحتهای مثلثهای ABC و ABH است.



۲۶۱. خط مستقیم l به موازات قاعده AC از مثلث ABC ، مثلث BED را از این مثلث جدا می‌کند. نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع AC اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی BEMD بین مساحت مثلث ABC و مساحت مثلث BED واسطهٔ هندسی است.

۲.۴.۷.۱. رابطه‌ای در مساحتها (نابرابریها)

۲۶۲. بر ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC بترتیب، سه نقطه دلخواه K ، L و M انتخاب شده‌اند. ثابت کنید مساحت حداقل یکی از مثلثهای AML ، BKM و CLK کمتر از، یا مساوی با یک چهارم مثلث ABC است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۶

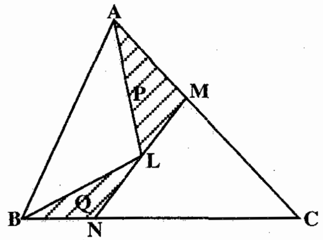
۲۶۳. مثلثهای ABC ، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با مساحتهای S، S_1 و S_2 چنانند که داریم :

$$|AC| = |A_1C_1| + |A_2C_2| \text{ و } |AB| = |A_1B_1| + |A_2B_2| \text{ و } |BC| = |B_1C_1| + |B_2C_2|$$

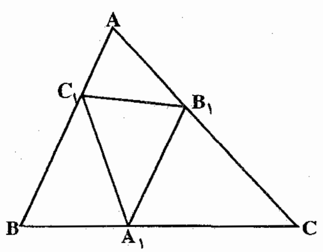
ثابت کنید : $S \geq 4\sqrt{S_1S_2}$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۲۶۴. در مثلث ABC ، روی ضلعهای AC و BC ، بترتیب نقطه‌های M و N و نقطهٔ L روی پاره خط MN ، اختیار می‌شود. فرض کنید مساحت مثلثهای ABC، AML و BNL بترتیب S ، P و Q باشد. ثابت کنید که $\sqrt[3]{S} \geq \sqrt[3]{P} + \sqrt[3]{Q}$.



۲۶۵. در مثلث ABC، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای آن ؛ BC ، CA و AB اختیار شده‌اند. ثابت کنید که مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ از مساحت دست کم یکی از مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1B_1C کمتر نیست.

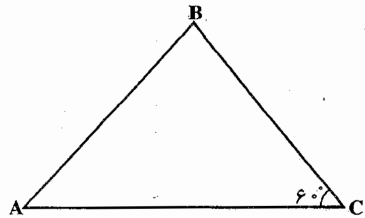


۸.۱. رابطه‌های متری

۱.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها

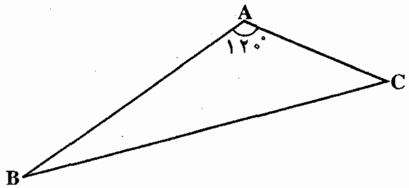
۱.۱.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها (برابریها)

۲۶۶. ثابت کنید که اگر یک زاویهٔ مثلثی $60°$ باشد، مربع ضلع مقابل به آن، مساوی است با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، منهای حاصل ضرب آنها.



۲۶۷. ثابت کنید اگر در مثلث ABC که طول ضلعهایش a، b و c است، $\hat{A}=120^\circ$ باشد داریم:

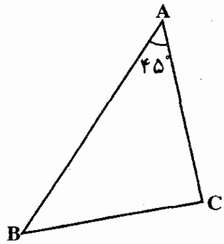
$a^2=b^2+c^2+bc$



۲۶۸. در مثلث ABC، $\hat{A}=45^\circ$ است. ثابت کنید:

$a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}\,bc$

a، b و c اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC می‌باشند.



۲۶۹. درمثلث ABC، زاویهٔ A دوبرابر زاویهٔ B است. ثابت کنید:

$BC^2=(AC+AB).AC$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۲۷۰. در مثلث ABC، اندازهٔ زاویه‌های A، B و C باهم دارای نسبت ۱ :۲ :۴ است. ثابت کنید که بین ضلعهای مثلث تساوی $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$ برقرار است.

۲۷۱. ثابت کنید درهر مثلث ABC، اگر زاویه‌های B و C حاده باشند، داریم:

$a=b\cos\hat{C}+c\cos\hat{B}$

با استفاده از این رابطه و قانون سینوسها، دستور زیر را به‌دست آورید:

$\sin(\hat{B}+\hat{C})=\sin\hat{B}\cos\hat{C}+\sin\hat{C}\cos\hat{B}$

۲۷۲. ثابت کنید که در هر مثلث ABC داریم:

$a(\sin\hat{B}-\sin\hat{C})+b(\sin\hat{C}-\sin\hat{A})+c(\sin\hat{A}-\sin\hat{B})=0$

۲۷۳. ثابت کنید که در هر مثلثی، تفاضل بین مجموع مربعات هر دو ضلع از آن، با دوبرابر حاصل‌ضرب همان دوضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن دوضلع، مقداری است ثابت.

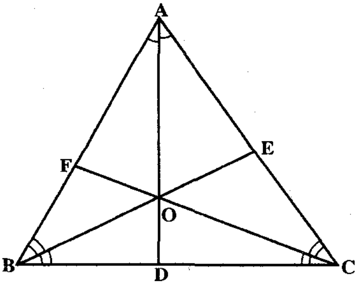
۲۷۴. اندازه‌های ضلعهای مثلثی عددهای صحیح هستند و می‌دانیم که طول محیط مثلث عدد زوجی است. ثابت کنید مجموع مربعهای ضلعها را می‌توان به صورت مجموع چهار مربع کامل غیر صفر نمایش داد.

اولین المپیاد ریاضی اکو، تهران، ۱۳۷۳

۲۷۵. x، y و z طولهای ضلعهای مثلث، عددهایی درستند؛ درضمن، طول یکی از ارتفاعها برابر است با مجموع طولهای دو ارتفاع دیگر. ثابت کنید $x^2+y^2+z^2$، مجذور یک عدد درست است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

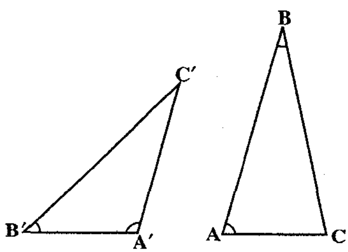
۲۷۶. در مثلثی میانه و ارتفاع و نیمساز یک رأس را رسم کرده‌ایم. اگر پای ارتفاع تا نیمساز سه برابر پای نیمساز تا میانه باشد، ثابت کنید ضلع روبه رو به آن رأس، نصف مجموع دو ضلع دیگر است.



۲۷۷. در مثلث ABC، سه نیمساز زاویه‌های داخلی یکدیگر را در O قطع می‌کنند، و این نقطه نیمساز AD را چنان تقسیم می‌کند که $AO = 2OD$.

ثابت کنید که: $AB + AC = 2BC$

۲۷۸. در طرفین ضلع AB از مثلث ABC، دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC_1 و ABC_2 را رسم می‌کنیم. اگر خطهای CC_1 و CC_2 ($C \neq C_1$ و $C \neq C_2$) عمود بر هم باشند، رابطهٔ بین ضلعهای مثلث مفروض را بیابید.

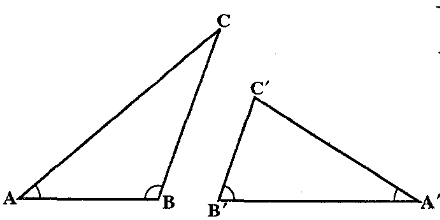


۲۷۹. هرگاه دو زاویهٔ A و A' از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به ضلعهای a، b، c و a'، b' و c'، مکمل یکدیگر و $\hat{B} = \hat{B}'$ باشد، ثابت کنید:

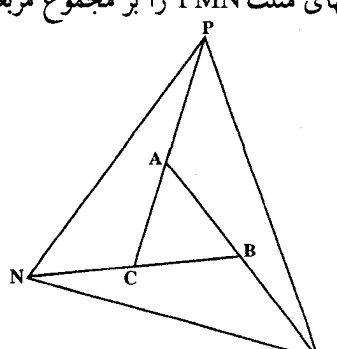
$$aa' = bb' + cc'$$

۲۸۰. در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، دو زاویهٔ A و A' متساوی و دو زاویهٔ B و B' مکمل یکدیگرند. ثابت کنید که:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$



۲۸۱. روی امتدادهای ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC، نقطه‌های M، N و P را بترتیب طوری اختیار می‌کنیم که $CN=BC$، $BM=AB$ و $AP=CA$ باشد. نسبت مجموع مربعهای ضلعهای مثلث PMN را بر مجموع مربعهای ضلعهای مثلث ABC بیابید.



۱.۸.۱.۲. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها (نابرابریها)

۲۸۲. در مثلثی دلخواه، نابرابری $\frac{bc\cos A}{b+c}+a<p<\frac{bc+a^۲}{a}$ را ثابت کنید که در آن a، b و c، طول ضلعهای مثلثند و p نصف محیط آن است.

۲۸۳. طول ضلعهای مثلثی، برابر a، b و c است. ثابت کنید:

$$۲<\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{abc}<۳$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۲۸۴. فرض می‌کنیم a، b و c ضلعهای یک مثلث باشند. ثابت کنید که:

$$a^۲(b+c-a)+b^۲(c+a-b)+c^۲(a+b-c)\le ۳ab$$

المپیادهای بین‌المللی ریاضی،۱۹۶۴

۲۸۵. فرض می‌کنیم a، b و c طولهای ضلعهای یک مثلث باشند. ثابت کنید که:

$$a^۲b(a-b)+b^۲c(b-c)+c^۲a(c-a)\ge ۰$$

است. تعیین کنید چه‌وقت نامساوی رخ می‌دهد؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۳

۲۸۶. اگر a، b و c ضلعها و p محیط مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a^۳+b^۳+c^۳\ge\frac{۱}{۹}p^۳$$

۲۸۷. اگر a، b و c ضلعها و ۲p محیط مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

۱) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\ge\frac{۹}{a+b+c}$

۲) $(a+b+c)^۲\le ۳(a^۲+b^۲+c^۲)$

۳) $۳(ab+bc+ac)\le(a+b+c)^۲$

۲۸۸. اگر a، b و c ضلعها و ۲p محیط مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{p-a}+\frac{۱}{p-b}+\frac{۱}{p-c}\ge ۲(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})$$

۲۸۹. رأسهای مثلث ABC، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی نامتناهی، با خانه‌های به ضلع واحد، قرار دارد. ثابت کنید اگر $AB>AC$، آن‌وقت $AB-AC>\frac{۱}{p}$ که، در آن، p، محیط مثلث ABC است.

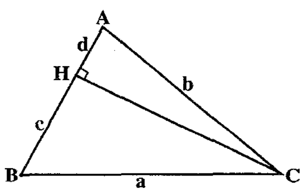
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۲.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۱.۲.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها (برابریها)

۲۹۰. ثابت کنید در هر مثلث، مربع هر ضلع برابر است با حاصلضرب ضلع دوم در تصویر این ضلع به روی آن، به علاوهٔ حاصلضرب ضلع سوم در تصویر این ضلع به روی آن، اگر هر دو زاویهٔ مجاور به این ضلع حاده باشد.

۲۹۱. طول دو ضلع یک مثلث a و b است. ارتفاع وارد بر ضلع سوم، آن ضلع را به دو پاره‌خط به طولهای c و d تقسیم می‌کند. ثابت کنید:



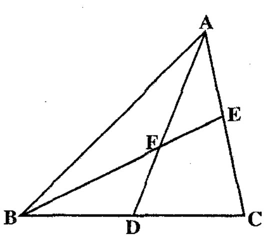
$$(a+b)(a-b)=(c+d)(c-d)$$

۲۹۲. از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC، پاره‌خطهای راست $P_{۱}P_{۲}$، $Q_{۱}Q_{۲}$ و $R_{۱}R_{۲}$ را، بترتیب موازی با ضلعهای BC، AC و AB رسم کرده‌ایم، به نحوی که دو انتهای هر پاره‌خط راست روی دوضلع مثلث باشد. ثابت کنید:

$$\frac{|P_{۱}P_{۲}|}{|BC|}+\frac{|Q_{۱}Q_{۲}|}{|AC|}+\frac{|R_{۱}R_{۲}|}{|AB|}=۲$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

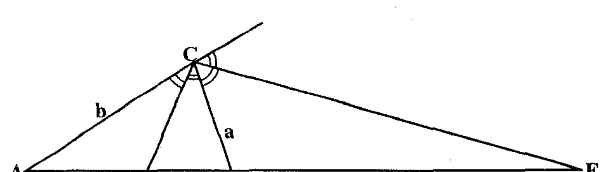
۲۹۳. در مثلث ABC، خطی که از رأس B می‌گذرد میانهٔ AD را در نقطهٔ F و ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید:



$$\frac{AE}{AC}=\frac{EF}{FB}$$

۲۹۴. فرض کنید CD و CE نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی C از مثلث ABC است. نشان دهید که AB میانگین همساز AD و AE است. یعنی:

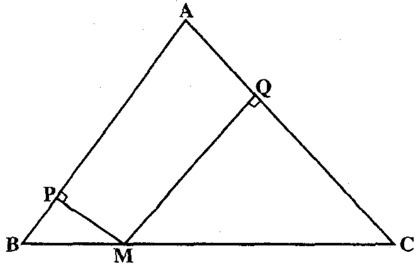
$$\frac{۲}{AB}=\frac{۱}{AD}+\frac{۱}{AE}$$



۲۹۵. از نقطهٔ M واقع بر ضلع BC مثلث ABC عمودهای MP و MQ را بترتیب بر AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید مقدار :

$$AB.MP + AC.MQ$$

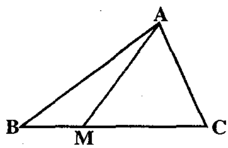
وقتی M روی BC حرکت کند، مقدار ثابتی است.



۱.۸.۲.۲. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها (نابرابریها)

۲۹۶. در مثلث ABC، نقطه M روی ضلع BC قرار دارد. ثابت کنید که :

$$(AM - AC).BC \leq (AB - AC)MC$$



۲۹۷. ثابت کنید اگر نقطهٔ O دردرون مثلث ABC، با نصف محیط P، واقع باشد، این نابرابری برقرار است :

$$OA.\cos\frac{B\hat{A}C}{۲} + OB.\cos\frac{A\hat{B}C}{۲} + OC.\cos\frac{A\hat{C}B}{۲} \geq P$$

در چه حالتی به علامت برابری می‌رسیم؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی، ۱۹۷۵

۲۹۸. برای طولهای ضلعهای مثلث ABC داریم: $AB.BC.AC \leq ۶۰$ روی ضلعهای AB، BC و AC، بترتیب، نقطه‌های C'، A' و B' را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید

$$AC'.C'B.BA'.A'C.CB'.B'A < AB.BC.AC$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲۹۹. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC، بترتیب، نقطه‌های D و F را انتخاب کرده‌ایم. اگر E وسط پاره‌خط راست DF باشد، ثابت کنید :

$$AD + FC \leq AE + EC$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۱.۸.۳. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

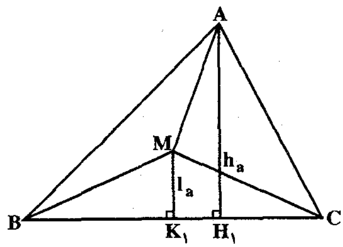
۱.۸.۳.۱. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها (برابریها)

۳۰۰. ثابت کنید که در هر مثلث، حاصلضرب هریک از ضلعها در ارتفاع نظیرشان، باهم مساوی‌اند یعنی در مثلث ABC داریم :

$$a.h_a = b.h_b = c.h_c$$

۳۰۱. ارتفاعهای هر مثلث، به نسبت عکس ضلعهای متناظرشان می‌باشند.

۳۰۲. طول ارتفاعهای مثلثی بترتیب h_a ، h_b و h_c می‌باشد. اگر فاصله نقطهٔ M واقع در داخل مثلث از ضلعهای مثلث ℓ_a و ℓ_b و ℓ_c باشد، ثابت کنید که رابطهٔ زیر برقرار است :

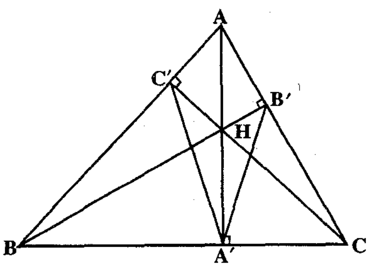


$$\frac{\ell_a}{h_a}+\frac{\ell_b}{h_b}+\frac{\ell_c}{h_c}=۱$$

اگر M در خارج مثلث قرار گیرد، چه تغییری در رابطهٔ بالا حاصل می‌شود؟ (درهر دو حالت M در صفحهٔ مثلث قرار دارد).

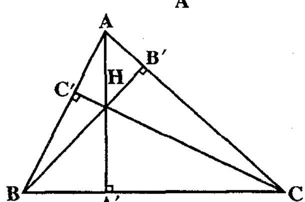
۳۰۳. ثابت کنید که در هر مثلث حاصلضرب فاصله‌های پای هر ارتفاع از دو انتهای ضلع نظیرش، برابر است با حاصلضرب فاصله‌های همین نقطه، از پای دو ارتفاع دیگر. یعنی :

$$A'B.A'C=A'B'.A'C'$$



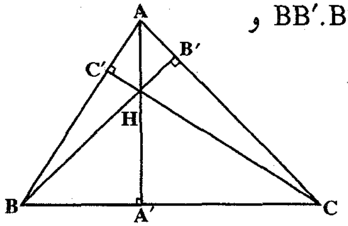
۳۰۴. در مثلث ABC سه ارتفاع AA' ، BB' و CC' در نقطه H همرسند. ثابت کنید :

$$HA.HA'=HB.HB'=HC.HC'$$

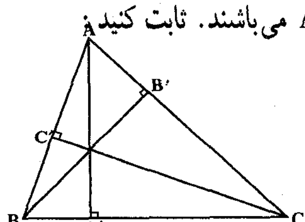


۳۰۵. ارتفاعهای مثلث ABC (AA' ، BB' و CC') یکدیگر را در نقطه H قطع می‌کنند. ثابت کنید

$AA'.A'H=A'C.A'B$ و $BB'.B'H=B'A.B'C$ و $CC'.C'H=C'A.C'B$.

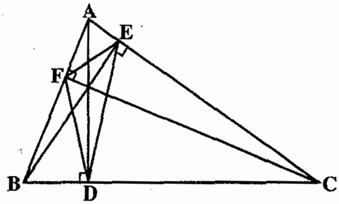


۳۰۶. AA' ، BB' و CC'، سه ارتفاع مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید :

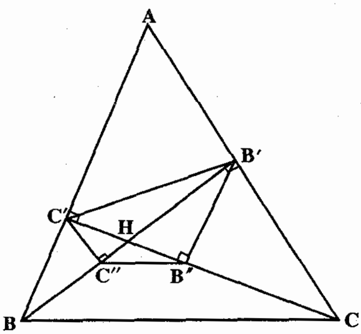


۱. $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB'}{AC'}$

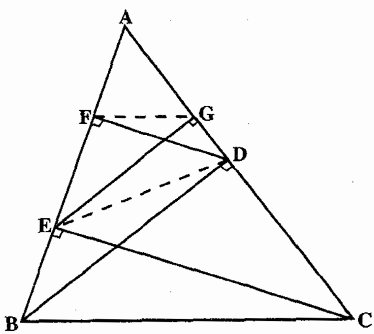
۲. $AB'.BC'.CA'=AC'.BA'.CB'$



۳۰۷. نشان دهید، اگر AD ، BE و CF، سه ارتفاع مثلث ABC باشند، حاصلضرب شش قطعه‌ای که به وسیلهٔ پای ارتفاعها، روی ضلعهای هر مثلث به‌وجود می‌آید، برابر است با مربع حاصل‌ضرب ضلعهای مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلث اولند.



۳۰۸. در مثلث ABC، ارتفاعهای BB' و CC' یکدیگر را در H قطع می‌کنند. اگر B'' و C'' بترتیب تصویرهای B' و C' بر CC' و BB' باشند، ثابت کنید $B'C'^2 = BC.B''C''$.



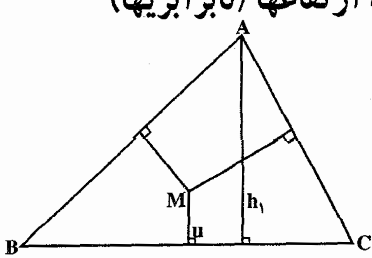
۳۰۹. در مثلث ABC، دو ارتفاع BD و CE را رسم کرده و همچنین در مثلث ADE، دو ارتفاع DF و EG را رسم می‌کنیم.

۱. ثابت کنید: $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$ و $\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE}$

۲. ثابت کنید: $AB.AG = AC.AF$

۳. ثابت کنید FG و BC موازی‌اند.

۱.۸.۳.۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها (نابرابریها)



۳۱۰. فرض کنید، h_1، h_2 و h_3 طول ارتفاعهای مثلث ABC و u، v و w فاصلهٔ ضلعهای متناظر تا نقطهٔ M، واقع دردرون مثلث ABC، باشند. نابرابریهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{h_1}{u} + \frac{h_2}{v} + \frac{h_3}{w} \geq 9$

ب) $h_1 h_2 h_3 \geq 27uvw$

ج) $(h_1 - u)(h_2 - v)(h_3 - w) \geq 8uvw$

۳۱۱. دو ضلع به طولهای a و b از مثلثی، در شرط $a > b$ صدق می کنند.
اگر طول ارتفاعهای وارد بر این دو ضلع، برابر h_a و h_b باشد، ثابت کنید :

$$a + h_a \geq b + h_b$$

در چه حالتی، علامت برابری برقرار است؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۶۷

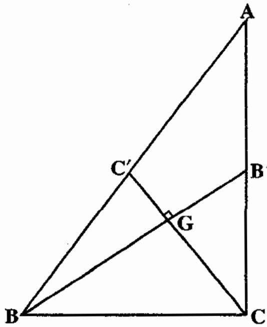
۳۱۲. برای سه نقطهٔ P، Q و R در صفحه، m(PQR) را برابر مینیمم طول ارتفاعهای مثلث PQR تعریف می کنیم (در حالتی که P، Q و R روی یک خط باشند. $m(PQR) = ۰$ می گیریم). فرض کنیم A، B و C نقطه های داده شده در صفحه باشند، ثابت کنید به ازای هر نقطه X در این صفحه داریم :

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

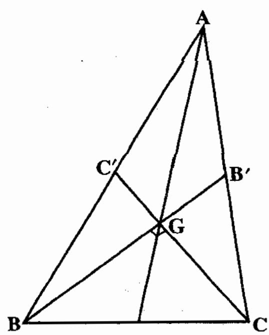
سی و چهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ترکیه، ۱۹۹۳

۴.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۳۱۳. ثابت کنید اگر در مثلثی میانه‌های BB' و CC' بر یکدیگر عمود باشند رابطهٔ $b^۲ + c^۲ = ۵a^۲$ برقرار است.



۳۱۴. اگر در مثلث ABC میانهٔ BB' بر CC' عمود باشد، ثابت کنید میانهٔ AA' وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دو ضلع آن میانه‌های BB' و CC' باشد.

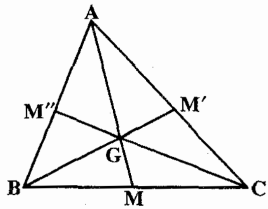


۳۱۵. ثابت کنید که در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است.

$$m_a^۲+m_b^۲+m_c^۲=\frac{۳}{۴}(a^۲+b^۲+c^۲)$$

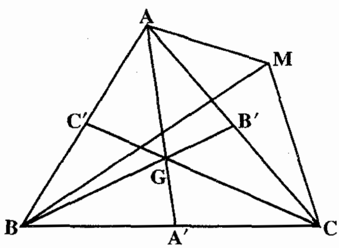
۳۱۶. اگر نقطهٔ G محل تلاقی سه میانهٔ مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

$$a^۲+b^۲+c^۲=۳(GA^۲+GB^۲+GC^۲)$$



۳۱۷. اگر M نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC و G مرکز ثقل آن باشد، ثابت کنید:

$$\overline{MA}^۲+\overline{MB}^۲+\overline{MC}^۲=\overline{GA}^۲+\overline{GB}^۲+\overline{GC}^۲+۳\overline{MG}^۲$$



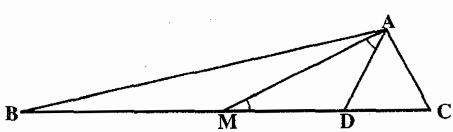
۳۱۸. درهر مثلث اگر G مرکز ثقل و M نقطهٔ دلخواهی باشد،

۱. ثابت کنید $MA^۲+MB^۲+MC^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳}+۳MG^۲$

۲. مطلوب است تعیین مکان هندسی M به‌طوری که $MA^۲+MB^۲+MC^۲=K^۲$ باشد.

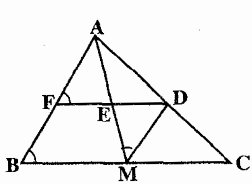
۳۱۹. ثابت کنید که در هر مثلث مجموع قوای چهارم طول سه میانه، مساوی است با $\frac{۹}{۱۶}$ مجموع قوای چهارم طول ضلعها.

۳۲۰. هرگاه میانهٔ AM از مثلث ABC با ضلع BC و نیمساز AD زاویهٔ A زاویه‌های متساوی تشکیل دهد، رابطه‌های زیر برقرارند:



$BM^۲=AB\times AC$ و $AM\sqrt{۲}=|AB-AC|$

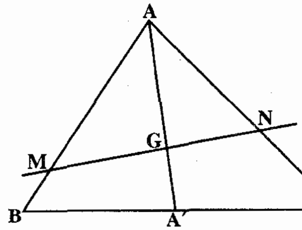
۳۲۱. مثلث ABC و میانهٔ AM مفروض است. از نقطهٔ M قاطعی رسم می‌کنیم که AC را در D قطع کند و با MA زاویه‌ای برابر با زاویهٔ B بسازد واز D خطی موازی BC رسم می‌کنیم که AM را در E قطع کند. ثابت کنید:



$$ED^۲=EA\times EM$$

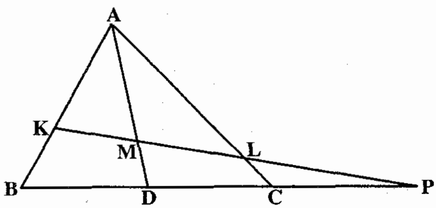
۳۲۲. ثابت کنید اگر خطی که از مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرد، ضلع AB را در نقطهٔ M و ضلع AC را در نقطهٔ N قطع کند، هم ازنظر قدرمطلق و هم ازنظر علامت داریم:

$$\overline{AN}.\overline{MB} + \overline{AM}.\overline{NC} = \overline{AM}.\overline{AN}$$

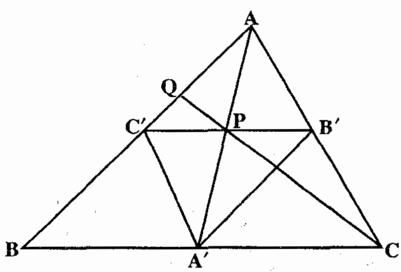


۳۲۳. از M، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، خط راستی رسم می‌شود که ضلعهای AB و AC را بترتیب درنقطه‌های K و L و امتداد ضلع BC را در نقطهٔ P قطع می‌کند (C بین P و B قرار می‌گیرد). ثابت کنید که

$$\frac{۱}{MK} = \frac{۱}{ML} + \frac{۱}{MP}$$

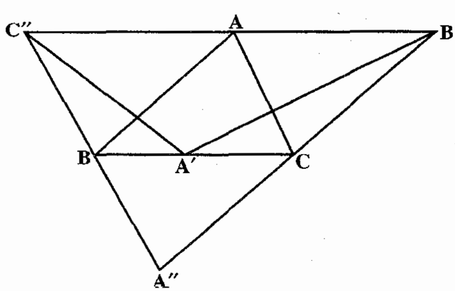


۳۲۴. میانهٔ AA' ازمثلث ABC، ضلع $B'C'$ از مثلث میانه‌ای $A'B'C'$ را در نقطهٔ P و خط CP، ضلع AB را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. ثابت کنید: $AB = ۳AQ$



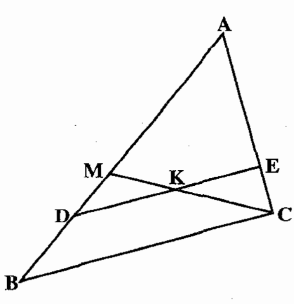
۳۲۵. اگر $A''B''C''$ مثلثی باشد که اگر از رأسهای مثلث ABC موازی ضلع روبه‌روی آن رسم کنیم به‌وجود می‌آید و A' وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

$$A'B''^{۲} - A'C''^{۲} = ۲(AB^{۲} - AC^{۲})$$



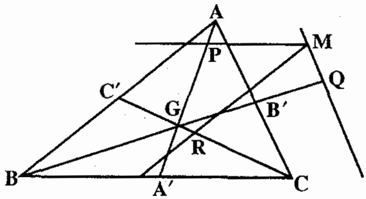
۳۲۶. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC دو نقطهٔ D و E را چنان اختیار می‌کنیم که مساحت مثلث اصلی دوبرابر مساحت مثلث ADE شود. ثابت کنید، اگر DE و میانهٔ CM در نقطهٔ K متقاطع باشند، خواهیم داشت:

$$KM.KD = KE.KC$$

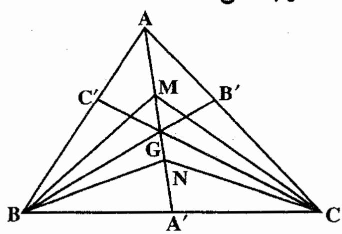


۳۲۷. از نقطهٔ M خطهایی موازی ضلعهای مثلث ABC رسم می‌کنیم تا میانه‌های نظیر هر ضلع را در P، Q و R قطع کنند (شکل) . ثابت کنید که هم ازنظر علامت و هم ازنظر اندازه داریم :

$$(\overline{GP}:\overline{GA})+(\overline{GQ}:\overline{GB})+(\overline{GR}:\overline{GC})=0$$



۳۲۸. اگر دو نقطه به یک فاصله از مرکز ثقل یک مثلث باشند، ثابت کنید، مجموع مربعهای فاصله‌های یکی از آنها از سه رأس مثلث، با مجموع مربعهای فاصله‌های دیگری از سه رأس مثلث برابر است و بعکس.



۳۲۹. قضیه. درهر مثلث، مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی بر یک خط راست واقعند و پاره‌خط بین مرکز ارتفاعی و مرکز دایرهٔ محیطی توسط مرکز ثقل به نسبت ۲ بر ۱ تقسیم می‌شود.(خط اولر)

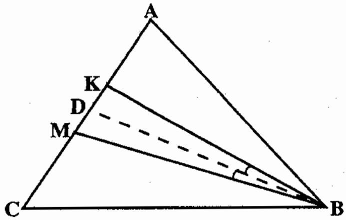
اولر

لئونارد اولر L.Euler در سال ۱۷۰۷ در بال به‌دنیا آمد. در سال ۱۷۲۷ در آکادمی سن‌پترزبورگ پذیرفته شد. در سال ۱۷۴۱ عازم برلین شد تا کرسی ریاضیات آکادمی پروس را به‌عهده گیرد. در سال ۱۷۶۶ به سن‌پترزبورگ بازگشت و تا سال مرگش، ۱۷۸۳ در آن‌جا مقیم بود. اولر به‌طور خستگی‌ناپذیر کار می‌کرد. در پرتو کوششهای او ریاضیات در همهٔ زمینه‌ها توسعه یافت. در هر شاخه‌ای از ریاضیات، یا فرمولی، یا قضیه‌ای، یا اینکه روشی به نام اولر وجود دارد. تعداد یادداشتهایی از وی که در زمان حیاتش چاپ شد ۴۷۳ بود و کمی بعد از مرگش ۲۰۰ یادداشت و بالاخره کمی دیرتر ازآن ۶۱ یادداشت از وی چاپ شد. اما همهٔ کارهای او درشرایطی دشوار انجام می‌گرفت، زیرا در سال ۱۷۳۵ بینایی یک چشمش را ازدست داد و در سال ۱۷۶۶ به‌طور کلی کور شد.

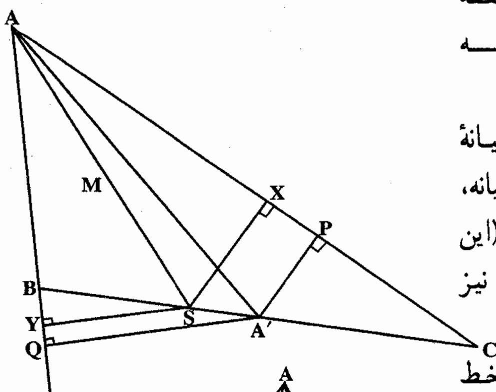
مهارت اولر در محاسبه‌ها شگفت‌انگیز و درک شهودیش در ریاضیات معجزه‌آسا بود.

۳۳۰. ثابت کنید که اگر در مثلثی خط اولر با BC موازی باشد، خواهیم داشت :

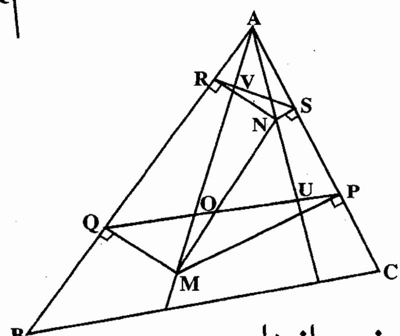
$$\operatorname{tg}B\,\operatorname{tg}C=3$$



۳۳۱. خط راست قرینهٔ یک میانه از مثلث، نسبت به نیمساز زاویهٔ مقابل به پای میانه، هم‌میانه نامیده می‌شود. فرض کنید هم‌میانه‌ای که از رأس B مثلث ABC خارج می‌شود، AC را در نقطهٔ K قطع کند. ثابت کنید که $AK:KC = AB^2:BC^2$



۳۳۲. فاصله‌های هر نقطه واقع بر شبه میانهٔ یک مثلث از دو ضلع مجاور شبه میانه، متناسب با اندازهٔ آن دوضلع است. (این قضیه در مورد شبه‌میانهٔ خارجی نیز درست است).



۳۳۳. فاصله‌های دو نقطه واقع بر دو خط همزاویه، از دو ضلع این زاویه به‌طور معکوس متناسبند.

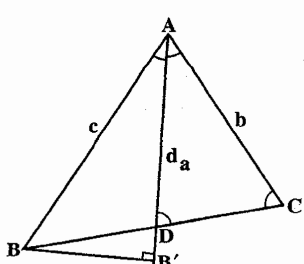
نکته . دو خط را که با نیمساز یک زاویه از مثلث دو زاویهٔ برابر بسازند، دو خط همزاویهٔ آن زاویه می‌نامند.

۱.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۱.۱.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

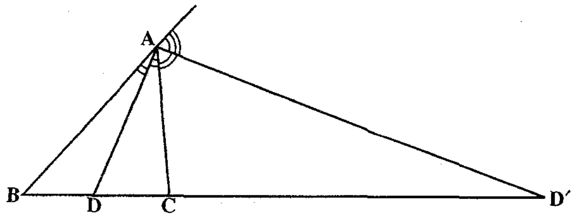
۳۳۴. اگر d_a اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید :

الف) $\frac{2\cos\frac{A}{2}}{d_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ب) $\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right| = \frac{2\sin\frac{A}{2}}{d'_a}$



۳۳۵. اگر نیمساز داخلی یک زاویه از مثلثی با یکی از ضلعهای این زاویه برابر باشد، نشان دهید تصویر ضلع دیگر بر روی این نیمساز مساوی نصف مجموع این دو ضلع می‌باشد.

۳۳۶. ثابت کنید که دو نیمساز هر زاویهٔ مثلث روی ضلع روبه‌رو، سه قطعه خط به‌وجود می‌آورند که معکوس یکی از آنها، برابر مجموع معکوسهای دوتای دیگر است.



۳۳۷. ثابت کنید درهر مثلث، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$d_b = \frac{a\cos B}{1+\cos B}\sqrt{2(1+\cos B)}$$

۱.۸.۵.۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۳۳۸. AD و BE نیمسازهای مثلث ABC هستند. ثابت کنید، اگر $|AC|>|BC|$، آن وقت

$$|AE|>|DE|>|BD|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۳۳۹. درهر مثلث نیمساز زاویهٔ بزرگتر، از نیمساز زاویهٔ کوچکتر، کوچکتر است.

۳۴۰. ثابت کنید که مجموع معکوسهای نیمسازهای داخلی یک مثلث بزرگتر است از مجموع معکوسهای ضلعهای آن.

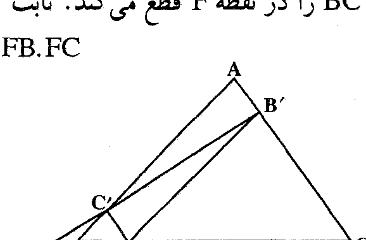
۳۴۱. نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC، ضلع AB را در نقطهٔ P قطع کرده است. ثابت کنید پاره‌خط CD، از واسطهٔ هندسی دوضلع AC و BC کوتاهتر است.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۶

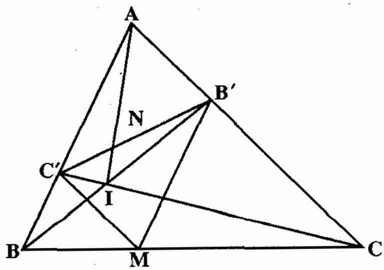
۱.۸.۶. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۳۴۲. مثلث ABC و نقطهٔ E واقع بر ضلع BC مفروضند. از نقطهٔ E، دوخط موازی ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم تا آنها را درنقطه‌های C' و B' قطع کنند. امتداد $B'C'$ امتداد BC را در نقطهٔ F قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$$EF^2 = FB.FC$$



۳۴۳. از نقطهٔ M واقع بر روی ضلع BC از مثلث ABC، خطهایی به موازات ضلعهای ABو AC رسم می‌کنیم که ضلعهای AC و AB را بترتیب در نقطه‌های B' و C' قطع می‌کنند. اگر I نقطهٔ تقاطع BB' و CC' و N نقطهٔ برخورد AI و $B'C'$ باشد، ثابت کنید:

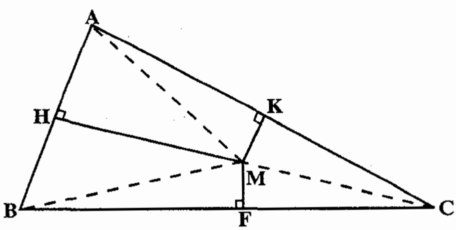


۱) $\dfrac{\overline{NC'}}{\overline{NB'}}=\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$

۲) $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IB'}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=-\dfrac{\overline{MB}^{۲}}{\overline{MC}^{۲}}$

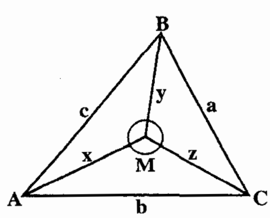
۳) $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IB'}}\cdot\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IC'}}=\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IN}}$

۳۴۴. در مثلث غیر مشخص ABC، نقطهٔ M را به دلخواه در داخل مثلث فرض می‌کنیم و عمودهایی بر ضلعهای AB و BC و AC فرود می‌آوریم. پای آنها را بترتیب H، F و K می‌نامیم. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:



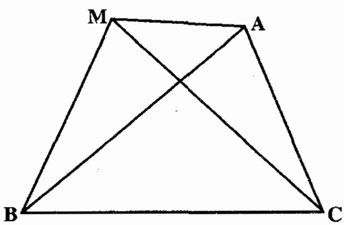
$$AH^{۲}+BF^{۲}+CK^{۲}=BH^{۲}+CF^{۲}+AK^{۲}$$

۳۴۵. نقطهٔ M در داخل مثلث ABC با ضلعهای a، b و c طوری اختیار شده است که اتصال این نقطه به رأسهای مثلث در داخل آن زاویه‌های متساوی تشکیل می دهد. عبارت $AM+BM+CM$ را محاسبه کنید.

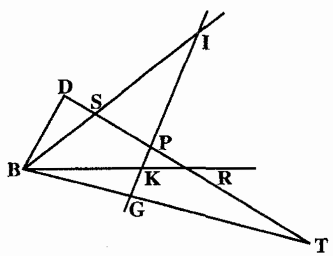


۳۴۶. مثلثی که هریک از زاویه‌هایش از °۱۲۰ کمتر است، مفروض است. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه در درون آن تا رأسهای این مثلث، کمترین مقدار را می‌گیرد، به شرطی که هر ضلع مثلث از آن نقطه به زاویهٔ °۱۲۰ دیده شود (نقطهٔ توریچلی).

۳۴۷. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های نقطه‌ای دلخواه درصفحه تا ضلعهای مثلث، کمترین مقدار را به‌ازای نقطه‌ای در درون مثلث که فاصله‌هایش تا ضلعهای متناظر، با همین ضلعها متناسبند، می‌گیرد. همچنین ثابت کنید که این نقطه، محل برخورد هم‌میانه‌های مثلث مفروض است (نقطهٔ لموان Lemuan).

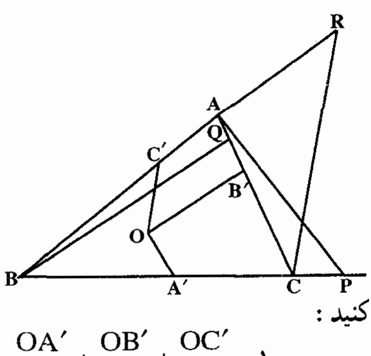


۳۴۸. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC و M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. مینیمم مجموع $MA^2+MB^2+MC^2$ را بیابید.



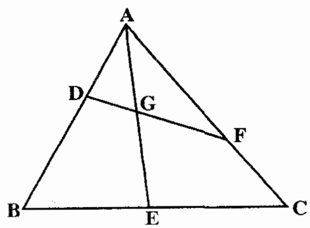
۳۴۹. مثلث BDT مفروض است. از رأس B دو خط مرور می‌دهیم که ضلع DT را در R و S قطع کنند. خطی موازی با BD رسم می‌کنیم که BT را در G و DT را در P قطع کند. اگر PG، خطهای BS و BR را بترتیب در I و K قطع کند، ثابت کنید که:

$$(IG.TD+KI.BD):KG.TD=RD:SD$$



۳۵۰. خطهای AP، BQ و CR از رأسهای مثلث ABC بترتیب موازی ′OA، ′OB و ′OC که یک نقطهٔ دلخواه O را به سه نقطهٔ دلخواه ′A، ′B و ′C بترتیب روی ضلعهای BC، CA و AB وصل می‌کنند، رسم شده و این ضلعها را در P، Q و R قطع کرده است. ثابت کنید:

$$\frac{OA'}{AP}+\frac{OB'}{BQ}+\frac{OC'}{CR}=1$$



۳۵۱. در مثلث ABC، نقطه‌های D، E و F را بترتیب بر ضلعهای AB، CB و CA، انتخاب می‌کنیم. اگر G نقطهٔ تلاقی AE و DF باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{DG}{GF}=\frac{AD.BE.AC}{AF.CE.AB}$$

۷.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به مساحت

۱.۷.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به مساحت (برابریها)

۳۵۲. ثابت کنید درهر مثلث رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{abc\,h_a h_b h_c}$ برقرار است.

۲.۷.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به مساحت (نابرابریها)

۳۵۳. اگر S مساحت و a و b، اندازه‌های دو ضلع از یک مثلث باشند، ثابت کنید، $S\le\frac{a^۲+b^۲}{۴}$ در چه صورت تساوی برقرار است؟

۳۵۴. فرض می‌کنیم a، b و c، ضلعهای یک مثلث باشند، و T مساحت آن باشد. ثابت کنید : $a^۲+b^۲+c^۲\ge ۴\sqrt{۳}T$. تساوی در چه حالتی برقرار است؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۱

۳۵۵. ثابت کنید، برای هر مثلث با ضلعهای a، b و c و مساحت S این نابرابری برقرار است :

$$\frac{ab+ac+bc}{۴S}\ge\sqrt{۳}$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران ویتنام، ۱۹۷۷

۳۵۶. قضیهٔ (فینسلر ـ هادویگر). اگر a، b و c اضلاع و S مساحت مثلث ABC باشند، آن‌گاه $a^۲+b^۲+c^۲\ge ۴\sqrt{۳}S+(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲$ و تساوی تنها و تنها وقتی برقرار است که $a=b=c$ ، یعنی مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳۵۷. a، b و c را طول ضلعها، P را مقدار محیط و S را اندازهٔ مساحت مثلث می‌گیریم. ثابت کنید :

۱) $P^۲\ge ۱۲\sqrt{۳}S$

۲) $a^۳+b^۳+c^۳\ge\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}SP$

۳) $a^۴+b^۴+c^۴\ge ۱۶S^۲$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، نیویورک، ۱۹۷۷ و ۱۹۷۹

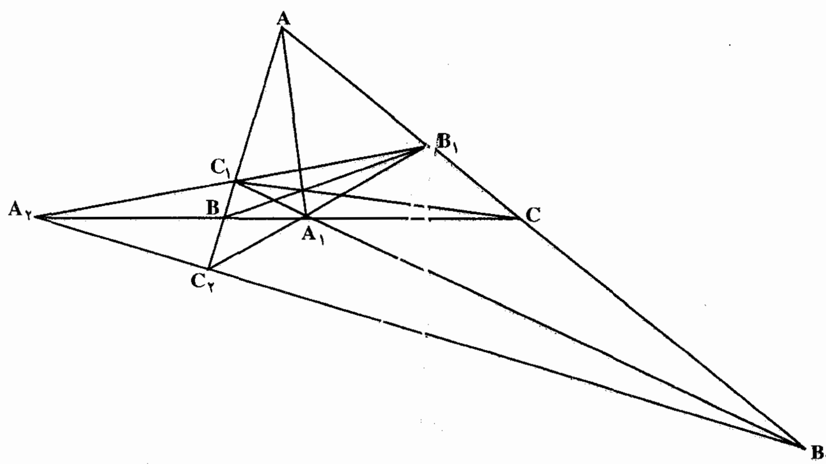
۳۵۸. فرض کنید a، b، c و s بترتیب معرف طول ضلعها و مساحت یک مثلث، و α، β و γ زاویه‌های مثلثی دیگر باشند، ثابت کنید که :

$a^۲\cot g^۲\alpha+b^۲\cot g^۲\beta+c^۲\cot g^۲\gamma\ge ۴s$ ، برابری تنها در حالتی که مثلثها متشابه‌اند رخ می‌دهد.

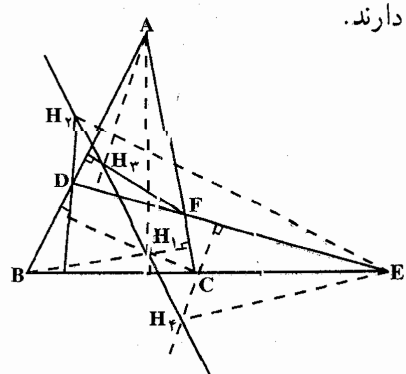
۹.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱.۹.۱. نقطه‌ها همخطند

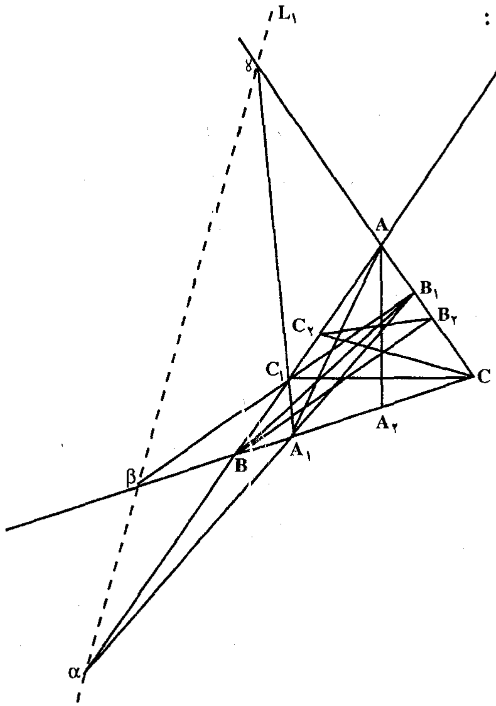
۳۵۹. روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC، نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 اختیار شده‌اند. فرض کنید C_2 نقطهٔ برخورد خطهای AB و A_1B_1، A_2 نقطهٔ برخورد خطهای BC و B_1C_1 و B_2 نقطهٔ برخورد خطهای AC و A_1C_1 باشد. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم برسند، آن‌گاه نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر یک خط راست واقعند.



۳۶۰. مثلث ABC داده شده است. خطی دلخواه خطهای راست AB، BC و CA را، بترتیب، در نقطه‌های D، E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF، بر یک خط، عمود بر خط گاوسی مثلث قرار دارند.



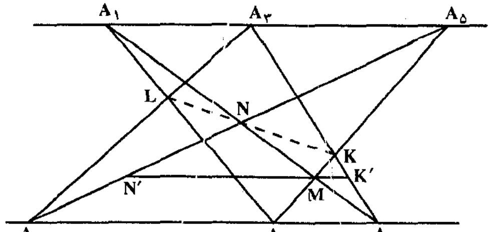
۳۶۱. مثلث ABC داده شده است. زوج نقطه‌های A_1 و A_2، B_1 و B_2، C_1 و C_2 بترتیب بر ضلعهای BC، AC و AB طوری اختیار می‌شوند که AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم می‌رسند و AA_2، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه متقاطعند. ثابت کنید که:



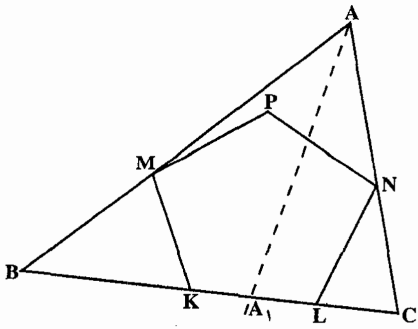
الف) نقطه‌های برخورد خطهای A_1B_1 و AB، B_1C_1 و BC، و C_1A_1 و CA، بر یک خط راست مانند L_1 واقعند.

ب) نقطه‌های برخورد خطهای BC و B_2C_1، و CA و C_2A_2، AB و A_1B_1، همخطند.

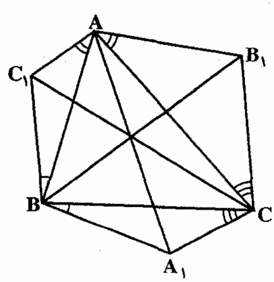
۳۶۲. فرض کنید A_1، A_3 و A_5 سه نقطه واقع بر یک خط راست و A_2، A_4 و A_6 واقع بر خط راست دیگری باشند. ثابت کنید که سه نقطه‌ای که زوج خطهای A_1A_2 و A_4A_5، A_2A_3 و A_5A_6، A_3A_4 و A_6A_1 در آنها یکدیگر را قطع می‌کند، بر یک خط راست واقعند.



۲.۹.۱. خطها همرسند

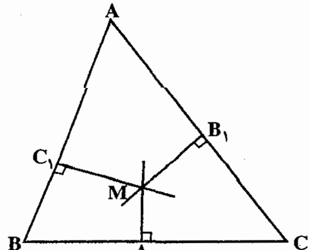


۳۶۳. مثلث ABC داده شده است. نقطهٔ A_1 را روی خط BC به روش زیر تعریف می‌کنیم: A_1 وسط ضلع KL از پنج‌ضلعی منتظم MKLNP است که رأسهای K و L آن بر BC و رأسهای M و N بترتیب روی AB و AC قرار دارند. به همین نحو روی ضلعهای AB و AC، نقطه‌های C_1 و B_1 تعریف می‌شوند. ثابت کنید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه همرسند.



۳۶۴. روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و بیرون آن، مثلثهای A_1BC ، B_1CA و C_1AB طوری رسم شده‌اند که $A_1\hat{B}C = C_1\hat{B}A$ ، $C_1\hat{A}B = B_1\hat{A}C$ و $B_1\hat{C}A = A_1\hat{C}B$. ثابت کنید که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 در یک نقطه همرسند.

۳۶۵. نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC و نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 بر ضلعهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ اختیار می‌شوند. خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم می‌رسند و خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 هم، در یک نقطه متقاطعند. ثابت کنید که خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 یا همرسند و یا موازی.



۳۶۶. ثابت کنید، برای این‌که عمودهای وارد از نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC ، در یک نقطه متقاطع باشند، لازم و کافی است که:

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0$$ (قضیهٔ کارنو)

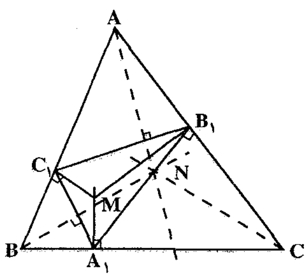
کارنو

لازار کارنو L.N.M.Carnot (۱۷۵۳ـ ۱۸۲۳) ریاضیدان فرانسوی است که دو اثر مهم در هندسه دارد یکی هندسهٔ وضع و دیگری رسالهٔ دربارهٔ نظریهٔ موربهاست. در هندسهٔ وضع، کارنو برای اولین بار در هندسهٔ ترکیبی، کمیتهای سودار را به‌کار می‌گیرد.

به کمک کمیتهای سودار، احکام یا رابطه‌های مجزای چندی را می‌توان در قالب یک حکم کلی یا رابطه کلی واحدی درآورد.

کارنو در رسالهٔ دربارهٔ نظریهٔ موربها، قضیهٔ منولائوس را تعمیم می‌دهد. بدین‌صورت که به‌جای قاطع مورد بحث یک منحنی درجهٔ nام قرار می‌دهد و به‌جای مثلث چندضلعی اختیار می‌کند (صفحه‌های ۱۴۶ و ۱۴۷ آشنایی با تاریخ ریاضیات تألیف هاورد و. ایوز).

۳۶۷. ثابت کنید که اگر عمودهای وارد از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC، در یک نقطه همرس باشند، آن‌گاه عمودهای وارد از نقطه‌های A، B و C بر خطهای B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 هم، در یک نقطه همرسند.



۳۶۸. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 بترتیب وسط ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند. نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بترتیب بر عمودهای وارد از نقطه‌ای مانند M بر ضلعهای BC، CA و AB اختیار می‌شوند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر خطهای B_2C_2، C_2A_2 و A_2B_2 در یک نقطه همرسند.

۳۶۹. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 معرف پای عمودهای وارد از رأسهای A، B و C از مثلث ABC بر خط L باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر BC، CA و AB در یک نقطه همرسند.

۳۷۰. فرض کنید P نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد، به‌طوری‌که هر یک از زاویه‌های APB، BPC و CPA برابر با 120° است (همهٔ زاویه‌های داخلی مثلث ABC کمتر از 120° فرض می‌شود). ثابت کنید که خطهای اویلر مثلثهای APB، BPC و CPA در یک نقطه به هم می‌رسند.

۳۷۱. فرض کنید O معرف نقطه‌ای دلخواه در یک صفحه باشد و M و N پای عمودهای وارد از O بر نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A از مثلث ABC باشند؛ به همین نحو P و Q برای زاویهٔ B، R و T برای زاویهٔ C تعریف می‌شوند. ثابت کنید که خطهای MN، PQ و RT در یک نقطه متقاطع، و یا، موازی‌اند.

۳۷۲. مثلث ABC و نقطهٔ D داده شده است. نقطه‌های E، F و G بترتیب روی خطهای AD، BD و CD واقعند. K نقطهٔ برخورد AF و BE، L نقطهٔ برخورد BG و CF، و M نقطهٔ برخورد CE و AG است. P، Q و R نقطه‌های برخورد DK و AB، DL و BC، و DM و AC هستند. ثابت کنید که هر شش خط AL، EQ، BM، FR، CK و GP در یک نقطه همرسند.

۳۷۳. خط راست دلخواهی، خطهای AB، BC و CA را بترتیب در نقطه‌های K، M و L، و خطهای A_1B_1، B_1C_1 و C_1A_1 را در نقطه‌های K_1، M_1 و L_1 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای A_1M، B_1L و C_1K در یک نقطه به هم برسند، خطهای AM_1، BL_1 و CK_1 نیز همرسند.

۳۷۴. ثابت کنید که اگر سه خط راست که از رأسهای مثلثی می‌گذرد، در یک نقطه به هم برسند، آن‌وقت خطهای قرینه آنها نسبت به نیمسازهای زاویه‌های متناظر از مثلث نیز، در یک نقطه متقاطع و یا موازی‌اند.

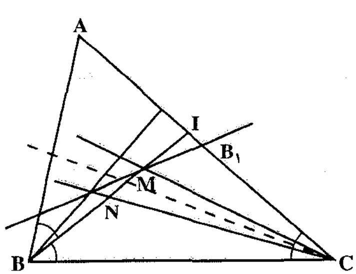
۳۷۵. سه خط راست مفروضند. یکی از آنها از پاهای دو ارتفاع یک مثلث، خط دوم از دو انتهای دو نیمساز آن و سومی از دو نقطه که در آنها دایرهٔ محاطی بر ضلعهای مثلث مماس است، می‌گذرد (همهٔ نقطه‌ها بر دو ضلع از مثلث واقعند). ثابت کنید که این سه خط راست، در یک نقطه همرسند.

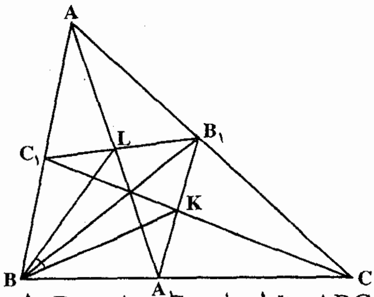
۳۷۶. فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC، و A_2، B_2 و C_2 تصویرهای A، B و C بترتیب روی B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A_2، B_2 و C_2 بترتیب بر BC، CA و AB در یک نقطه همرسند.

۳۷۷. مثلث ABC داده شده است. کلیهٔ زوج نقطه‌های ممکن مانند M_1 و M_2 را درنظر می‌گیریم، به‌طوری‌که $AM_1:BM_1:CM_1 = AM_2:BM_2:CM_2$. ثابت کنید که خطهای M_1M_2 از نقطه‌ای ثابت در صفحه می‌گذرند.

۳.۹.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۸. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ B، خطی را که از وسط AC و وسط ارتفاع مرسوم بر AC می‌گذرد، در نقطهٔ M قطع می‌کند، N وسط نیمساز زاویهٔ B است. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$، نیمساز زاویهٔ $M\hat{C}N$ نیز هست.

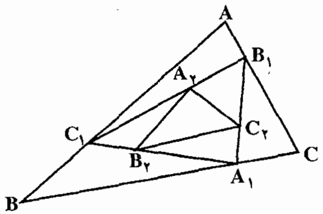




۳۷۹. فرض کنید AA_1، BB_1 و CC_1 نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC باشند، L نقطهٔ برخورد خطهای AA_1، B_1C_1 و K نقطهٔ برخورد خطهای CC_1 و A_1B_1 است. ثابت کنید که BB_1 نیمساز زاویهٔ LBK است.

۳۸۰. بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC، نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 طوری اختیار می‌شوند که $AC_1:C_1B = BA_1:A_1C = CB_1:B_1A = K$. بر ضلعهای A_1B_1، B_1C_1 و C_1A_1 نقطه‌های C_2، B_2 و A_2 طوری اختیار می‌شوند که:

$$A_1C_2:C_2B_1 = B_1A_2:A_2C_1 = C_1B_2:B_2A_1 = \frac{1}{K}$$



ثابت کنید که مثلث $A_2B_2C_2$ با مثلث ABC متشابه است و نسبت تشابه را پیدا کنید.

۳۸۱. مثلثی با کمترین مساحت پیدا کنید که بتواند هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از ۱ را بپوشاند.

۳۸۲. ثابت کنید سطح یک مثلث غیرمشخص (غیرمتساوی‌الاضلاع) را می‌توان به‌طور کامل به‌وسیلهٔ دو مثلث متشابه با آن و کوچکتر از آن پوشاند.

۳۸۳. بین مثلثهایی که در یک مثلث مفروض قرار دارند، نسبت مساحت به محیط کدام‌یک، بیشترین مقدار است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۳۸۴. رأسهای مثلثی، به رنگ آبی‌اند. آیا می‌توان ۱۰ نقطهٔ آبی و ۲۰ نقطهٔ قرمز در درون مثلث طوری قرار داد که، هیچ سه نقطهٔ آبی، روی یک خط راست نباشند و، در ضمن، در درون هر مثلث با رأسهای آبی، دست کم یک نقطهٔ قرمز قرار گرفته باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۳۸۵. صفحه را با ۱۹۹۲ رنگ مختلف، رنگ کرده‌ایم؛ روی این صفحه، مثلث T رسم شده است. ثابت کنید روی صفحه، مثلثی برابر مثلث T پیدا می‌شود که، روی هر دو ضلع آن، نقطه‌هایی از یک رنگ وجود داشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۳۸۶. از نقطه‌ای واقع در درون مثلث، عمودهایی بر ضلعهای مثلث فرود آورده‌ایم. نقطه درونی را در کجا انتخاب کنیم، تا حاصل‌ضرب طولهای این سه عمود، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۳۸۷. اگر فاصلهٔ یک نقطه از دو ضلع یک مثلث متناسب با اندازه‌های این دو ضلع باشد، ثابت کنید که این نقطه روی شبه میانهٔ نظیر ضلع سوم قرار دارد.

۳۸۸. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث نقطهٔ ناگل «Nagel»، مثلث میانه‌ای آن مثلث است.

۳۸۹. ثابت کنید که مثلثهای ناپلئون داخلی و خارجی نظیر هر مثلث هم‌مرکزند. (مرکز ثقل مشترک دارند).

۳۹۰. روی یک صفحه، ۱۹۹۳ مثلث داده شده است؛ در ضمن می‌دانیم هر مثلث دست‌کم شامل چهار رأس از مثلثهای دیگر است. ثابت کنید، سه مثلث وجود دارد که نقطهٔ مشترکی دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۳۹۱. فرض کنید فاصلهٔ نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C از مثلث ABC بترتیب، a، b و c باشد. ثابت کنید که عدد $d \neq 0$ و نقطه‌ای بر صفحه وجود ندارد که فاصله‌هایش تا رأسهای مثلث به همان ترتیب، با عددهای $\sqrt{a^2+d}$، $\sqrt{b^2+d}$ و $\sqrt{c^2+d}$ قابل بیان باشد.

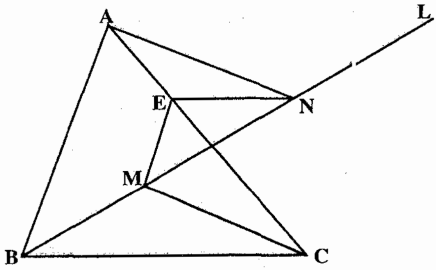
۳۹۲. چه ضلعهایی در مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث منفرجه، خط اویلر را قطع می‌کنند؟

۳۹۳. چهار خط راست دو به دو متقاطع، چهار مثلث تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که اگر یکی از این خطها به موازات خط اویلر مثلث تشکیل شده با سه خط دیگر باشد، آن‌وقت سه خط دیگر نیز همین ویژگی را دارند.

۳۹۴. مساحت مثلثی برابر $16cm^2$ و میانه‌های m_a و m_b بترتیب برابر $16cm$ و $4cm$ است. ثابت کنید که این میانه‌ها بر هم عمودند.

۳۹۵. اگر از یک نقطه واقع بر شبه‌میانه (یا میانه) یک مثلث عمودهایی بر ضلعهای مجاور این شبه میانه رسم کنیم، خطی که پای این عمودها را به هم وصل می‌کند، بر میانهٔ (یا شبه میانه) نظیر، عمود است.

۳۹۶. در مثلث ABC، نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB طوری اختیار می‌شوند که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم می‌رسند. ثابت کنید که اگر AA_1 نیمساز زاویهٔ $B_1A_1C_1$ باشد، AA_1 ارتفاع مثلث ABC است.



۳۹۷. فرض کنید E نقطه‌ای دلخواه بر ضلع AC از مثلث ABC باشد، از رأس B ی مثلث، خط دلخواه L رسم می‌شود، خطی که از نقطهٔ E به موازات BC می‌گذرد، خط L را در نقطهٔ N و خطی که از E به موازات AB می‌گذرد، آن را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که AN با CM موازی است.

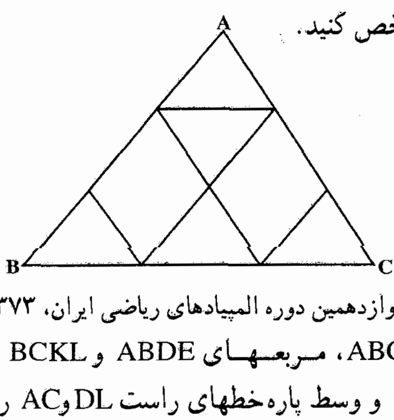
۳۹۸. روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطه‌های C_1 و C_2 ؛ روی ضلع BC، نقطه‌های A_1 و A_2 ؛ روی ضلع CA، نقطه‌های B_1 و B_2 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2B = \frac{1}{3}AB,$$
$$BA_1 = A_1A_2 = A_2C = \frac{1}{3}BC,$$
$$CB_1 = B_1B_2 = B_2A = \frac{1}{3}CA$$

ثابت کنید، از برخورد مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ ، شش مثلث برابر به‌دست می‌آید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۳۹۹. در مثلث دلخواه ABC، هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم $(n \geq 2)$. روی هر ضلع، از نقطه‌های تقسیم، خطهایی به موازات دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم. مثال. برای $n = 3$ شکل روبه‌رو حاصل می‌شود. برای هر $n \geq 2$، تعداد متوازی‌الاضلاعهای به‌وجود آمده را مشخص کنید.



مرحلهٔ دوم دوازدهمین دوره المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۴۰۰. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC، مربعهای ABDE و BCKL را ساخته‌ایم. مرکز این مربعها را O_1 و O_2 و وسط پاره‌خطهای راست DL و AC را، M_1 و M_2 می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $O_1M_1O_2M_2$ مربع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴۰۱. در مثلث ABC می‌دانیم $\hat{C} = 2\hat{B}$ می‌باشد،

۱. ثابت کنید $d_c = \frac{ac}{a+c}$

۲. ثابت کنید $c^2 - b^2 = ab$

۳. اگر P و Q محل برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A با ضلع روبه‌رو باشند، ثابت کنید : $CQ = c + b$ و $CP = c - b$

۴. ثابت کنید تصویرهای ضلعهای c و b روی ضلع a بترتیب برابر $\frac{a+b}{2}$ و $\frac{a-b}{2}$ می‌باشند.

۴۰۲. در مثلث ABC می‌دانیم $\frac{m_b}{m_c} = \frac{c}{b}$ می‌باشد،

۱. ثابت کنید $b^2 + c^2 = 2a^2$

۲. به فرض ثابت بودن ضلع $BC = a$ از این مثلث :الف) مکان هندسی رأس A را بیابید.
ب) ثابت کنید مجموع مربعهای طول میانه‌های مثلث، مقداری ثابت خواهد داشت.

۳. ثابت کنید مثلثی که ضلعهای آن به طول میانه‌های مثلث نامبرده می‌باشد، با مثلث نامبرده متشابه است.

۴. به فرض معلوم بودن ضلع a و مساحت s مثلث را به طریق هندسی رسم کنید.

۴۰۳. در مثلث ABC زاویهٔ B دو برابر زاویهٔ C است،

۱. ثابت کنید $b^2 + c^2 = ac$

۲. ثابت کنید که در چنین مثلثی طول تصویرهای ضلعهای c و b روی ضلع a بترتیب مساوی با $\left|\frac{a-c}{2}\right|$ و $\frac{a+c}{2}$ است.

۳. نیمساز BF را رسم کرده آن را به طول $FD = BF$ امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که DC بر BC عمود است.

۴. طول DC را برحسب ضلعهای مثلث حساب کنید.

۵. نیمساز AE زاویهٔ A را رسم می کنیم تا BF را در نقطهٔ O و BC را در E قطع کند از O عمود OH را بر BC فرود می‌آوریم، ثابت کنید که : $\overline{OH}^2 = HE.HC$

۴۰۴. مثلثی دلخواه داده شده است. روی ضلعها و بیرون آن، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که مرکزهایشان رأسهای مثلث Δ محسوب می‌شوند، رسم شده‌اند. مرکز مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که روی ضلعهای مثلث اصلی و در درون آن رسم شده‌اند، رأسهای مثلث دیگر δ، به حساب می‌آیند. ثابت کنید : (الف) Δ و δ مثلثهایی متساوی‌الاضلاع هستند ؛ (ب) مرکزهای Δ و δ بر مرکز ثقل مثلث اصلی منطبق است ؛ (ج) تفاضل میان مساحتهای Δ و δ ، برابر با مساحت مثلث اصلی است.

بخش ۲

• رابطه‌های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی

۱.۲. تعریف و قضیه

۲.۲. زاویه

۱.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳.۲. ضلع

۱.۳.۲. اندازهٔ ضلع

۴.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۳.۵.۲. تساوی پاره‌خطها

۶.۲. شعاع

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی

۲.۶.۲. اندازهٔ قطر دایرهٔ محیطی

۷.۲. محیط

۱.۷.۲. اندازهٔ محیط

۸.۲. مساحت

۱.۸.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

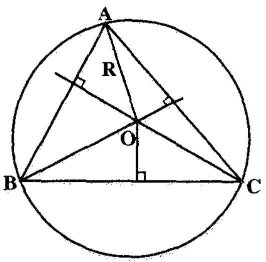
۲.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳.۸.۲. نسبت مساحتها

۴.۸.۲. رابطه‌ای در مساحتها

بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی

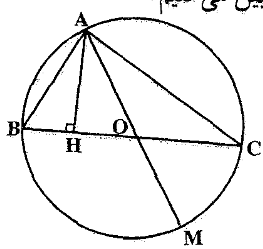
۱.۲. تعریف و قضیه



دایرهٔ محیطی مثلث. دایره‌ای که بر سه رأس مثلث می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود. مرکز این دایره محل برخورد عمودمنصف‌های ضلعهای مثلث است. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و R شعاع این دایره باشد، داریم:

$OA = OB = OC = R$

۴۰۵. **محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث.** اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را برحسب اندازه‌های ضلعهای آن با استفاده از قضیهٔ زیر تعیین می‌کنیم.



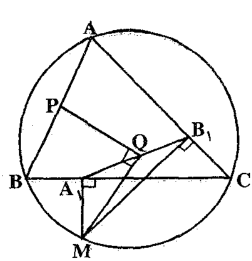
قضیه. حاصل‌ضرب اندازه‌های دو ضلع از هر مثلث برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ قطر دایرهٔ محیطی آن،در اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع سوم.

۲.۲. زاویه

۱.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۴۰۶. اندازهٔ زاویهٔ A از مثلث ABC را تعیین کنید، در صورتی که نیمساز این زاویه، بر خط راستی که از محل برخورد ارتفاعهای این مثلث و مرکز دایرهٔ محیطی آن می‌گذرد، عمود باشد.

۴۰۷. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که یکی از زاویه‌های مثلثی ۶۰° یا ۱۲۰° باشد، آن است که فاصلهٔ رأس این زاویه تا محل تلاقی ارتفاعها، برابر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد.



۴۰۸. عمودهای MA_1 و MB_1 از نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بر ضلعهای BC و AC از این مثلث وارد می‌کنیم، نقطه‌های P و Q بترتیب میانگاههای پاره‌خطهای AB و A_1B_1 هستند. ثابت کنید که: $P\hat{Q}M = ۹۰^\circ$.

۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۰۹. مثلثهای ABC و DEF، در یک دایره محاط شده‌اند. ثابت کنید برابری محیطهای این دو مثلث، هم‌ارز با شرط زیر است:

$$\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=\sin\hat{D}+\sin\hat{E}+\sin\hat{F}$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، نیویورک، ۱۹۷۸

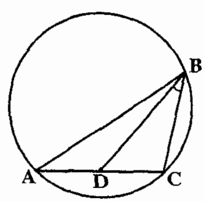
۳.۲. ضلع

۱.۳.۲. اندازهٔ ضلع

۴۱۰. در مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC را به‌دست آورید، در صورتی که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر ۱۲cm و اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰° باشد.

۴۱۱. در مثلث ABC، $\hat{A}=۴۵^\circ$ ، کمان $\widehat{AB}$ از دایرهٔ محیطی که شامل C نیست ۱۲۰° و $b=\sqrt{۳}+۱$ است، اندازهٔ ضلعهای a و c را تعیین کنید.

۴۱۲. در مثلث ABC، نقطهٔ D را روی AC طوری اختیار می‌کنیم که $D\hat{B}C=\dfrac{\widehat{BC}}{۲}$. اگر $AD=۵$ و $DC=۴$. مطلوب است طول ضلع BC.



۴۱۳. شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی برابر R است. اگر طول یکی از ضلعهای مثلث برابر c و نسبت دو ضلع دیگر آن برابر $\dfrac{a}{b}$ باشد، طول هریک از سه ضلع و اندازهٔ هر یک از سه زاویهٔ مثلث را پیدا کنید.

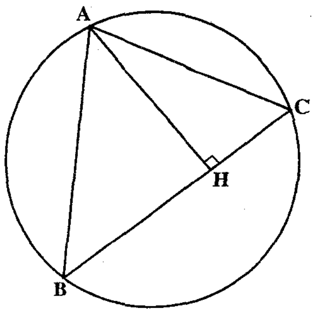
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۵

۴۱۴. همهٔ گروه‌های سه‌تایی از عددهای طبیعی a ، b و c را پیدا کنید که بتوانند ضلعهای مثلثی با دایرهٔ محیطی به قطر ۶/۲۵ باشند.

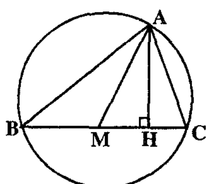
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، ویتنام، ۱۹۷۹

۴.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز



۴۱۵. در مثلث ABC، $AC = ۱۵$ و $AB = ۱۶$ و شعاع دایرهٔ محیطی $R = ۱۰$ است. اندازهٔ ارتفاع رأس A و ضلع BC را تعیین کنید.



۴۱۶. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر ۸cm و $AB.AC = ۱۴۴$ است. در صورتی که تصویر میانهٔ AM روی ضلع BC برابر ۵ باشد، اندازهٔ میانهٔ AM را به‌دست آورید.

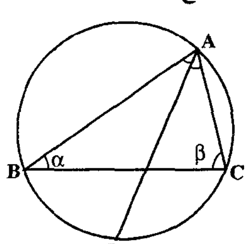
۴۱۷. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر R است. اگر $BC = a$ و $DB.DC = k$ (D پای نیمساز زاویهٔ درونی A) باشد. اندازهٔ نیمساز درونی زاویهٔ A را تعیین کنید.

۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

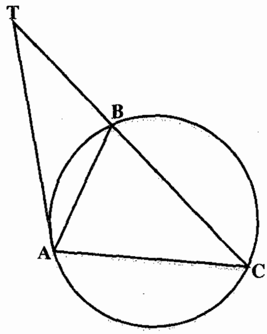
۴۱۸. نقطه‌ای مانند D بر ضلع CB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که $CD = a.AC$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر با R است. فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ADB را پیدا کنید.

۴۱۹. ارتفاع مرسوم بر ضلع BC از مثلث ABC، دایرهٔ محیطی آن را در نقطهٔ A_1 قطع می‌کند. ثابت کنید که فاصلهٔ مرکز دایرهٔ نه نقطه تا ضلع BC، برابر با $\frac{1}{4}AA_1$ است.

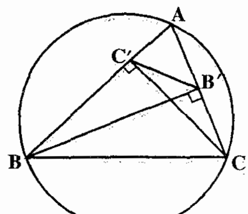


۴۲۰. دایره‌ای بر مثلث ABC که در آن $BC = a$ ، $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$، محیط شده است نیمساز زاویهٔ A در نقطهٔ K با دایره برخورد می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط AK را پیدا کنید.

۴۲۱. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر مماس بر دایرهٔ محیطی در نقطهٔ A امتداد ضلع BC را در نقطهٔ T قطع کند، اندازهٔ AT و BT را برحسب ضلعهای مثلث پیدا کنید.

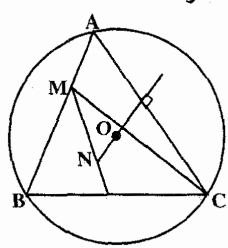


۴۲۲. ثابت کنید در یک مثلث متغیر که از آن قاعده و دایرهٔ محیطی ثابت است، پاره‌خطی که پای ارتفاعهای نظیر دو ضلع متغیر را به هم وصل می‌کند، طول ثابتی دارد.

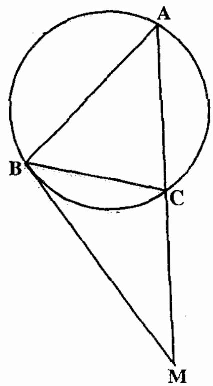


۲.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

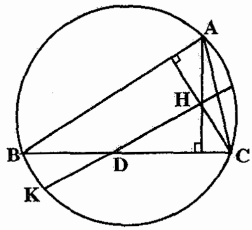
۴۲۳. نقطه‌ای مانند M، بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که خط راستی که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را به نقطهٔ میانه‌ای مثلث BCM وصل می‌کند، بر CM عمود است. اگر BC:BA = K، نسبت BM:BA را پیدا کنید.



۴۲۴. دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است. مماس بر دایره که از نقطهٔ B می‌گذرد، خط AC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر AB:BC = K، نسبت AM:MC را پیدا کنید.



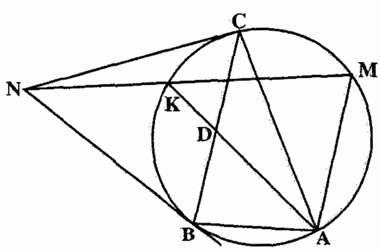
۳.۵.۲. تساوی پاره‌خطها



۴۲۵. فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای یک مثلث، D وسط یک ضلع و K یکی از نقطه‌های برخورد خط HD با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، D بین H و K قرار دارد. ثابت کنید که D وسط پاره‌خط HK است.

۴۲۶. ثابت کنید خطی که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را به وسط قطعه خطی که محل برخورد ارتفاعها را به یک رأس وصل می‌کند، توسط میانهٔ گذرنده از آن رأس نصف می‌شود.

۴۲۷. دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است.



فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره باشد که از B و C می‌گذرند. M نقطه‌ای از دایره است، به‌طوری که AM با BC موازی و K نقطهٔ برخورد MN و دایره است. ثابت کنید که KA، BC را نصف می‌کند.

۶.۲. شعاع

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی

۴۲۸. اندازه‌های ضلعهای مثلثی ۱۴/۵ ، ۱۰/۵ و ۱۰ هستند. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر است با :

الف) ۶/۷۵   ب) ۷   ج) ۷/۲۵   د) ۷/۵۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۴۲۹. در مثلثی با دو ضلع به طولهای a و b که اندازهٔ زاویهٔ بین آنها برابر γ است، شعاع دایرهٔ محیطی را به‌دست آورید.

۴۳۰. سه خط راست، موازی با ضلعهای یک مثلث و مماس بر دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند. این خطها، سه مثلث از مثلث مفروض جدا می‌کند. شعاع دایره‌های محیطی آنها برابرند با R_1، R_2 و R_3 . شعاع دایرهٔ محیطی مثلث مفروض را پیدا کنید.

۲.۶.۲. اندازهٔ قطر دایرهٔ محیطی

۴۳۱. ضلعهای یک مثلث ۲۵، ۳۹ و ۴۰ هستند. قطر دایرهٔ محیطی برابر است با :

الف) $\frac{۱۳۳}{۳}$ ب) $\frac{۱۲۵}{۳}$ ج) ۴۲ د) ۴۱

هـ) ۴۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۴۳۲. اگر یک ضلع مثلثی ۱۲cm و زاویهٔ مقابل به آن ضلع °۳۰ باشد، آن گاه قطر دایرهٔ محیطی مثلث چند سانتیمتر است؟

الف) ۱۸ ب) ۳۰ ج) ۲۴ د) ۲۰

هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۴۳۳. AA' ، BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC، G و H مرکز ثقل و محل برخورد ارتفاعهای آن می‌باشد. روی AA' نقطهٔ U را چنان انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $A'A.A'U = A'B^۲ = A'C^۲$. به همین ترتیب نقطه‌های V و W را روی BB' و CC' . ثابت کنید که ضلعهای مثلث UVW متناسب با میانه‌های مثلث ABC است و GH قطر دایره محیطی آن است.

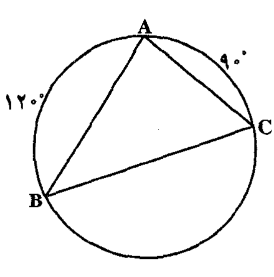
۷.۲. محیط

۱.۷.۲. اندازهٔ محیط

۴۳۴. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده‌ایم. از نقطهٔ B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و این مماس ضلع CA را در نقطهٔ D واقع در بیرون نقطهٔ A قطع می‌کند. اگر $AB + AD = AC$ ، $CD = ۳$ و $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ باشد، محیط مثلث را محاسبه کنید.

۴۳۵. در مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع AH برابر $۲\sqrt{۶}$ و شعاع دایره محیطی مساوی $\frac{۳۵\sqrt{۶}}{۲۴}$ و $AB + AC = ۱۲$ است. اندازهٔ محیط مثلث را به‌دست آورید.

۴۳۶. مثلث ABC در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر محاط است. اگر $\widehat{AB} = ۱۲۰^\circ$ و $\widehat{AC} = ۹۰^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلعها و محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۸.۲. مساحت

۱.۸.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

۴۳۷. مثلث ABC با ضلع $AC = ۲۰cm$ درون دایره‌ای محاط شده است. از نقطهٔ B خطی را بر دایره مماس رسم می‌کنیم. فاصلهٔ نقطه‌های A و C از خط مماس بترتیب برابر ۲۵cm و ۱۶cm است. مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۴۳۸. بر مثلث ABC با زاویهٔ $\hat{B} = ۶۰^\circ$ دایره‌ای به شعاع ۴cm را محیط کرده‌ایم. قطری از دایره بر ضلع BC عمود بوده و AB را با شرط $AM:BM = ۲:۳$ در نقطهٔ M قطع می‌کند. مساحت مثلث را محاسبه کنید.

۴۳۹. در مثلث ABC، زاویهٔ C برابر ۶۰° و شعاع دایرهٔ محیطی برابر $۲\sqrt{۳}cm$ است. روی ضلع AB نقطهٔ D را با شرایط $AD:DB = ۲:۱$ و $CD = ۲\sqrt{۲}cm$ اختیار می‌کنیم. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۴۴۰. میانهٔ AD در مثلث ABC دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $AB + AD = DE$، $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ و $AE = ۶$ باشد، مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۴۴۱. ثابت کنید مساحت هر مثلث برابر است با حاصل ضرب محیط مثلث ارتفاعیه‌اش، در شعاع دایرهٔ محیطی آن.

۴۴۲. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۳۰^\circ$، $AC = ۳cm$ بوده و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر ۲cm است. ثابت کنید که مساحت مثلث ABC از $۳cm^۲$ کمتر است.

۴۴۳. S مساحت یک مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن است. ثابت کنید $S < \frac{۱}{۲}\pi R^۲$ است.

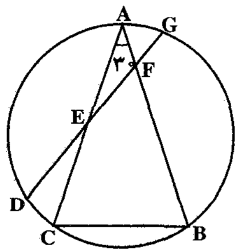
۲.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۴۴. دایره‌ای بر مثلث ABC محیط شده است. در نقطهٔ B بر دایره مماس رسم می‌کنیم و این مماس خط AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. نقطهٔ C بین A و D قرار دارد.

اگر $BD = ۲۹cm$ و $B\hat{D}C = \operatorname{Arc}\cos\frac{۲۱}{۲۹}$ بوده و فاصلهٔ مرکز دایره تا AC برابر ۱۰cm باشد، آن‌گاه مساحت مثلث BCD را به‌دست آورید.

۴۴۵. اندازهٔ مساحت مثلث ارتفاعیه مثلث ABC (مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلث ABC است) را برحسب a، b و c، حساب کنید.

۳.۸.۲. نسبت مساحتها



۴۴۶. در شکل روبه‌رو، مثلث ABC در یک دایره محاط است. نقطهٔ D بر کمان AC واقع است. به‌گونه‌ای که $\widehat{DC} = ۳۰^\circ$ و نقطهٔ G بر کمان BA قرار دارد به‌گونه‌ای که $\widehat{BG} > \widehat{GA}$. طول ضلعهای AB و AC هر کدام با طول وتر DG برابر است و $C\hat{A}B = ۳۰^\circ$. وتر DG با ضلعهای AC و AB بترتیب در E و F برخورد می‌کند. نسبت مساحت ΔAFE به مساحت ΔABC برابر است با:

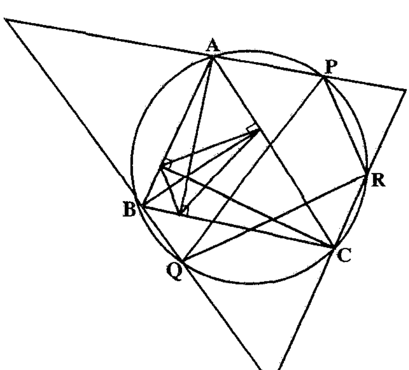
الف) $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۳}$　ب) $\frac{۲\sqrt{۳}-۳}{۳}$　ج) $۷\sqrt{۳}-۱۲$　د) $۳\sqrt{۳}-۵$
هـ) $\frac{۹-۵\sqrt{۳}}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۴.۸.۲. رابطه‌ای در مساحتها

۴۴۷. شعاع دایرهٔ محیط بر مثلثی، برابر با R است. فاصلهٔ مرکز این دایره تا نقطهٔ میانه‌ای مثلث، برابر با d است. حاصلضرب مساحتهای مثلث مفروض و مثلث تشکیل شده با خطهایی را که از رأسهای مثلث مفروض می‌گذرند و بر میانه‌هایی که از این رأسها خارج می‌شوند، عمودند، پیدا کنید.

۴۴۸. فرض کنید S مساحت مثلثی مفروض و R شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث باشد. بعلاوه، فرض کنید $S_۱$ معرف مساحت مثلث تشکیل شده با پای عمودهای وارد از نقطه‌ای واقع در فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض، بر ضلعهای آن، باشد، ثابت کنید که $S_۱ = \frac{S}{۴}\left|۱-\frac{d^۲}{R^۲}\right|$ (قضیهٔ اویلر).



۴۴۹. اضلاع مثلثی که از خطهایی که از رأسهای مثلث ABC موازی ضلعهای مقابل به آن رسم شده است، تشکیل شده. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطه‌های P، Q و R قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت مثلث PQR چهار برابر مساحت مثلثی است که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلث ABC است.

۹.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به زاویه‌ها، ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۴۵۰. ثابت کنید در هر مثلث رابطه‌های زیر برقرارند (P نصف محیط مثلث است):

الف) $\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=\frac{P}{R}$

ب) $\sin\frac{\hat{A}}{۲}\ \sin\frac{\hat{B}}{۲}\ \sin\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{P}{۴}$

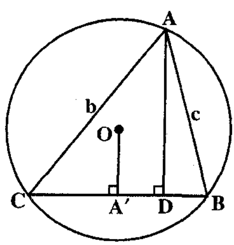
پ) $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}=\frac{P}{R}+۱$

۴۵۱. ثابت کنید در هر مثلث رابطه‌های زیر برقرار است:

الف) $\cos\hat{A}\ \cos\hat{B}\ \cos\hat{C}\le\frac{P^{۲}}{۲R^{۲}}$

ب) $\cos\hat{A}\ \cos\hat{B}\ \cos\hat{C}\le(۱-\cos\hat{A})(۱-\cos\hat{B})$

۴۵۲. ′A تصویر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث روی ضلع BC و D پای ارتفاع رأس A است. ثابت کنید:



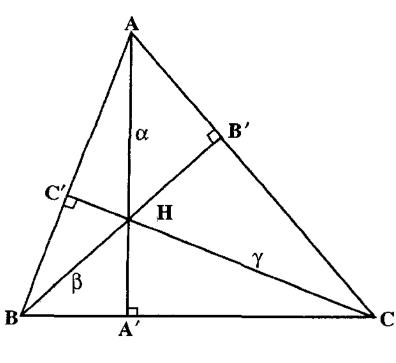
$$DA'=\frac{|b^{۲}-c^{۲}|}{۲a}$$

۲.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

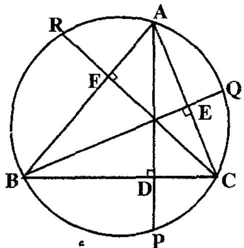
۴۵۳. اگر H محل برخورد سه ارتفاع مثلث ABC باشد، رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$BC^{۲}+HA^{۲}=AC^{۲}+HB^{۲}=AB^{۲}+HC^{۲}=۴R^{۲}$$

۴۵۴. در مثلث ABC به ضلعهای a ، b و c، فاصلهٔ نقطهٔ H، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث از سه رأس مثلث، بترتیب α، β و γ گرفته می‌شود. اگر R شعاع دایره محیطی این مثلث باشد، ثابت کنید:



$$\frac{\alpha}{bc}+\frac{\beta}{ca}+\frac{\gamma}{ab}=\frac{۱}{R}$$



۴۵۵. اگر ارتفاعهای AD ، BE و CF از مثلث ABC ، دایرهٔ محیطی آن را دوباره، در P ، Q و R قطع کنند، خواهیم داشت :

$$(AP:AD)+(BQ:BE)+(CR:CF)=۴$$

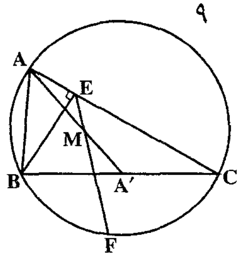
۴۵۶. ثابت کنید که در هر مثلثی مانند ABC، فاصلهٔ مرکز ارتفاعی از رأس B، دو برابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث از ضلع AC است.

۴۵۷. ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

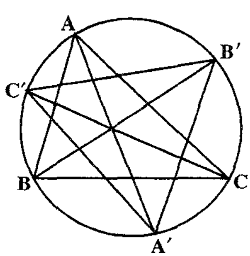
$$S=\sqrt{\frac{h_a . h_b . h_c . R}{۲}}$$

۳.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۴۵۸. a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC و O مرکز دایره محیطی و R شعاع این دایره و G نقطهٔ تلاقی سه میانهٔ آن است. ثابت کنید : $\overline{OG}^۲=R^۲-\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۹}$



۴۵۹. فرض کنید M معرف نقطهٔ میانه‌ای یک مثلث، E پای یک ارتفاع و F یکی از نقطه‌های برخورد خط ME با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، M بین E و F قرار دارد. ثابت کنید که : $FM=۲EM$



۴۶۰. اگر A′ ، B′ و C′ محل برخورد میانه‌های مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن و $B'C'=a'$ ، $C'A'=b'$ و $A'B'=c'$ باشد، ثابت کنید که :

$$am_a:a'=bm_b:b'=cm_c:c'$$

۴۶۱. طول ضلعهای مثلث ABC را a ، b و c می‌نامیم. هرگاه مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را که برای آنها $\frac{MB}{MC}=\frac{c}{b}$ است، رسم کرده و وتر مشترک آن را با دایرهٔ محیطی مثلث مفروض d و طول میانهٔ مرسوم از A را m بنامیم، داریم :

$$b\times c=d\times m$$

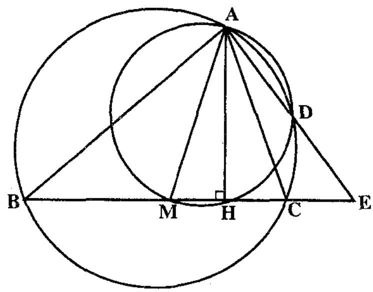
۴۶۲. ثابت کنید در هر مثلث رابطه‌های زیر برقرار است:

$$(۱)\ \overline{OH}^{۲} = ۹R^{۲} - (a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})$$

$$(۲)\ \overline{GH}^{۲} = ۴R^{۲} - \frac{۴}{۹}(a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})$$

$$(۳)\ \overline{HA}^{۲} + \overline{HB}^{۲} + \overline{HC}^{۲} = ۱۲R^{۲} - (a^{۲} + b^{۲} + c^{۲})$$

۴۶۳. در مثلث ABC، ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم کرده، دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و AHM را رسم می‌کنیم. این دو دایره در نقطه‌های A و D یکدیگر را قطع می‌کنند. از نقطهٔ A به نقطهٔ D وصل کرده امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید:



$EH.EM = EB.EC$ (۱)

$MH.ME = MB^{۲}$ (۲)

۴.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

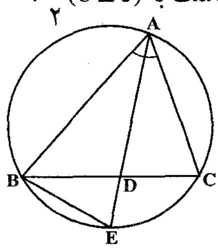
۱.۴.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

۴۶۴. در مثلث ABC، حاصل ضرب دو ضلع AB و AC مساوی است با حاصل ضرب قطعه خطهایی که روی ضلع سوم به وسیلهٔ میانه وارتفاع، و به وسیلهٔ دو نیمساز جدا می‌شود.

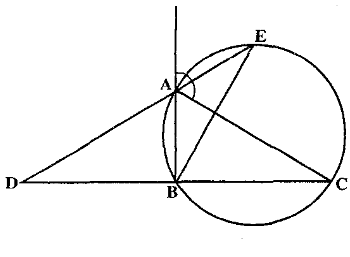
۴۶۵. اگر نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC دایرهٔ محیطی را در D قطع کند، ثابت کنید تصویر پاره‌خط AD روی ضلعهای AB و AC برابر است با $\frac{۱}{۲}(b \pm c)$.

۴۶۶. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ A ضلع BC را در نقطهٔ D و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید که:

$EB^{۲} = EA.ED$



۴۶۷. در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ خارجی A امتداد BC را در نقطهٔ D و دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید: $EB^{۲} = EA.ED$

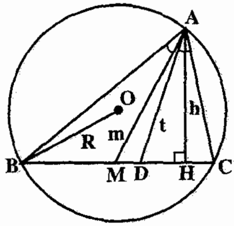


۴۶۸. نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی C از مثلث ABC، خط راست AB را بترتیب در نقطه‌های L و M قطع کرده‌اند، ثابت کنید، به شرط $CL = CM$ ، داریم: $AB^2 + BC^2 = 4R^2$ که در آن، R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۱

۴۶۹. اگر h ، m و t بترتیب ارتفاع، میانه و نیمساز داخلی مرسوم از یک رأس یک مثلث باشد و R شعاع دایرهٔ محیطی آن، ثابت کنید:

$$4R^2h^2(t^2 - h^2) = t^4(m^2 - h^2)$$



۲.۴.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۴۷۰. امتداد نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC، دایرهٔ محیطی مثلث را، بترتیب در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + AC$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، استرالیا، ۱۹۱۲

۴۷۱. مثلث ABC در دایرهٔ (C) محاط است. نیمساز زاویه‌های درونی مثلث مزبور دایرهٔ (C) را مجدداً در A' ، B' و C' قطع می‌کند. اگر I نقطهٔ برخورد نیمسازها باشد، ثابت کنید:

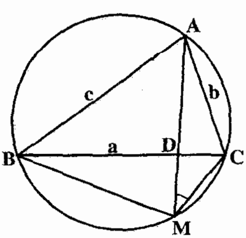
$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq 3 \quad , \quad IA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC.$$

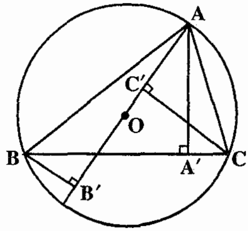
نهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۰

۵.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

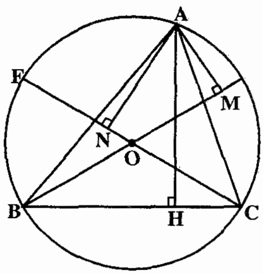
۴۷۲. اگر M نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و D نقطهٔ برخورد MA با ضلع BC باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a.AM.AD = b^2.BD + c^2.CD$$



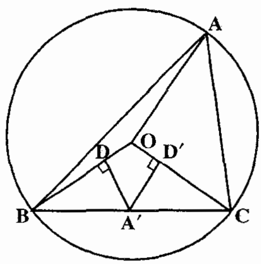


۴۷۳. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن مفروضند. اگر تصویر نقطهٔ A روی BC را نقطهٔ A' بنامیم و B' و C' تصویرهای B و C روی قطری که از A می‌گذرد باشند، ثابت کنید که AA' واسطهٔ هندسی بین AB' و AC' است.



۴۷۴. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و H، M و N بترتیب تصویرهای رأس A روی خطهای BC، OB و OC باشند، ثابت کنید:

$$BM.AN = AH^2$$



۴۷۵. D و D' تصویرهای A' وسط ضلع BC روی شعاعهای OB و OC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC اند و E و E' و F و F' نقطه‌های نظیر D و D'، نسبت به نقطه‌های B' و C' اند. ثابت کنید:

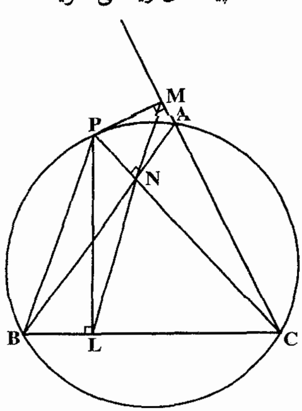
$$\sqrt{DD':a} + \sqrt{EE':b} + \sqrt{FF':c}$$
$$= (R + r):R$$

۴۷۶. از نقطهٔ P واقع بر کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، عمودهای PK، PL و PM را، بترتیب بر خطهای راست BC، AC و AB رسم کرده‌ایم.

ثابت کنید:

$$\frac{BC}{PK} = \frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM}$$

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۹



۴۷۷. اگر L، M و N پای عمودهایی باشد که از نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی ضلعهای BC، CA و AB از آن فرود آیند. ثابت کنید:

الف) مثلثهای PLN و PAC متشابه‌اند.

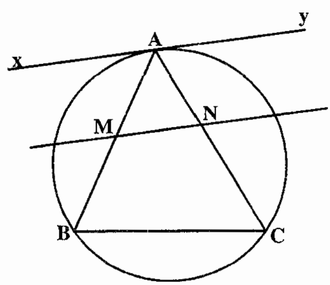
ب) $PL.MN$ ، $PM.NL$ و $PN.LM$ متناسب با BC، CA و AB هستند.

ج) $PA.PL = PB.PM = PC.PN$

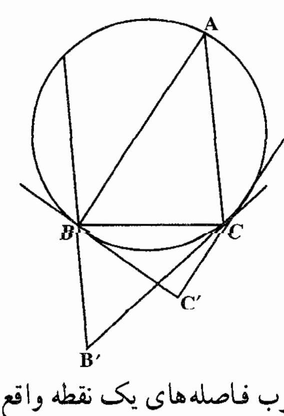
۴۷۸. خط مستقیم l بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ C مماس است. ثابت کنید که مربع ارتفاع CH از مثلث ABC با حاصلضرب فاصله‌های نقطه‌های A و B از خط l برابر است.

۴۷۹. ثابت کنید مماسی که از رأسهای یک مثلث بر دایرهٔ محیطی آن رسم می‌شود، ضلع مقابل را به نسبت (خارجی) مربعات دو ضلع آن رأس تقسیم می‌کند.

۴۸۰. رأسهای مثلث ABC روی دایره واقعند. از رأس A خطی مماس بر دایره رسم کرده و خط دیگری موازی این مماس می‌کشیم تا ضلع AB را در نقطهٔ M و ضلع AC را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید دو مثلث AMN و ABC متشابه‌اند و رابطهٔ $AB.AM = AC.AN$ برقرار است.

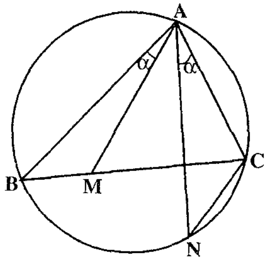


۴۸۱. خطی که از رأس B از مثلث ABC موازی ضلع AC رسم می‌شود، مماسی را که در نقطهٔ C بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم شده است در نقطهٔ B' قطع می‌کند و خط موازی AB از رأس C' مماس بر این دایره در نقطهٔ B را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید : $BC^2 = BC'.B'C$



۴۸۲. ثابت کنید که حاصل ضرب فاصله‌های یک نقطه واقع بر دایرهٔ محیطی یک مثلث از ضلعهای آن برابر است با حاصل ضرب فاصله‌های همان نقطه از ضلعهای مثلثی که از مماس کردن در رأسهای مثلث اول بر دایرهٔ محیطی آن حاصل می‌شود.

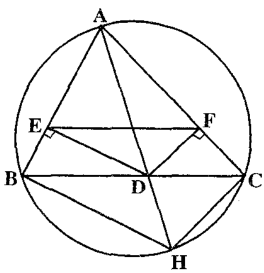
۴۸۳. از رأس A و در داخل مثلث ABC دو خط چنان رسم می‌کنیم که با ضلعهای AB و AC زاویه‌های متساوی تشکیل دهند. اگر یکی از این دو خط ضلع BC را در نقطهٔ M و دیگری دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ N قطع کند، ثابت کنید: $AM.AN = AB.AC$



اگر یکی از این دو خط ارتفاع مثلث باشد، دومین خط در چه وضعی خواهد بود؟ در این حالت رابطهٔ بالا به چه صورتی تبدیل می‌شود؟ از این رابطه چه حکمی دربارهٔ مثلث نتیجه می‌گیرید؟

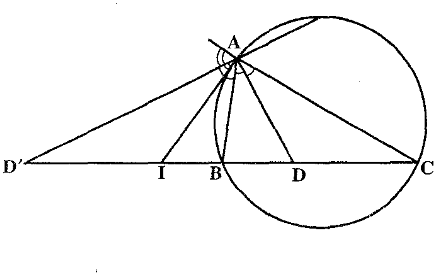
۲. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۸۴. از رأس A از مثلث ABC قطر دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D قطع کند. DE و DF را به ضلعهای AB و AC عمود می‌کنیم. ثابت کنید EF موازی BC است.



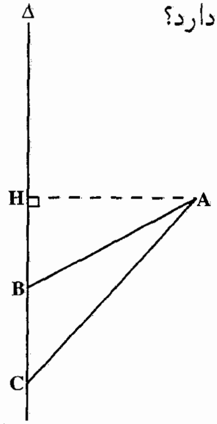
۴۸۵. ضلعهای مثلثی که رأسهای آن محل برخورد امتداد ارتفاعهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن است موازی ضلعهای مثلثی است که از وصل کردن پای ارتفاعها به‌وجود می‌آید.

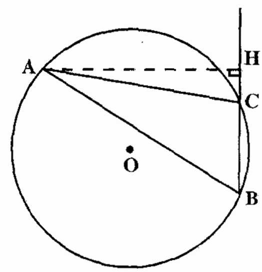
۴۸۶. در مثلث ABC، AD و AD′، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A، را رسم کرده، فرض می‌کنیم I وسط DD′ باشد. نخست ثابت کنید که $IA^2 = IB.IC$ و سپس ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر خط AI مماس است.



۴۸۷. فاصلهٔ نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C از مثلثی، بترتیب، برابر با ۱، ۲ و ۳ و فاصلهٔ نقطهٔ M_1 تا همان رأسها، بترتیب، برابر با ۳، $\sqrt{۱۵}$ و ۵ است. ثابت کنید که خط راست MM_1 از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

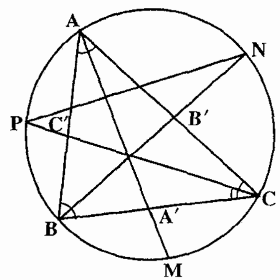
۴۸۸. نقطهٔ ثابت A و خط ثابت Δ مفروضند. مثلثهای ABC را به رأس A که قاعدهٔ آنها بر خط Δ واقع است، چنان رسم می‌کنیم که $AB\times AC$ مقدار ثابتی باشد. دایرهٔ محیطی این مثلثها چه خاصیتی دارد؟ همچنین اگر دایرهٔ ثابت O به شعاع R و نقطهٔ A بر روی آن واقع باشد، قاعدهٔ مثلثهای ABC محاط در این دایره به قسمی که $AB\times AC$ مقدار ثابتی باشد، چه خاصیتی دارد؟



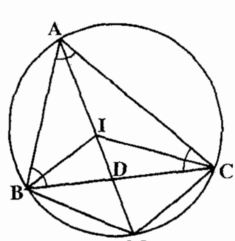


هندسهٔ دوایر، دکتر محسن هشترودی

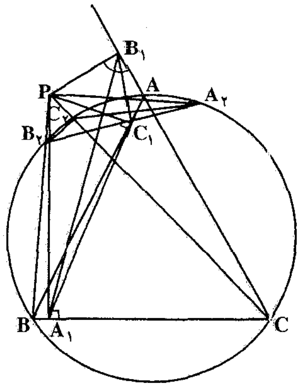
۴۸۹. نیمسازهای AA'، BB' و CC' از مثلث ABC دایرهٔ محیطی این مثلث را بترتیب در M، N و P قطع می‌کنند. ثابت کنید $AM\perp PN$ است.



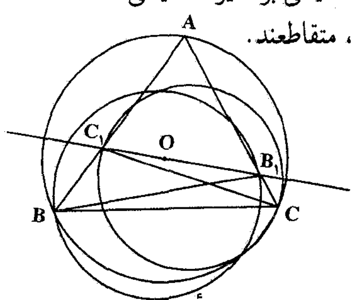
۴۹۰. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A و I نقطهٔ تلاقی سه نیمساز داخلی است. اگر AD دایرهٔ محیطی مثلث را در M قطع کند، ثابت کنید مثلثهای IMB و IMC متساوی‌الساقین می‌باشند.



۴۹۱. مثلث ABC و نقطهٔ دلخواه P داده شده است. پای عمودهای وارد از نقطهٔ P بر ضلعهای مثلث ABC، رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$ به حساب می‌آیند. رأسهای مثلث $A_2B_2C_2$ نقطه‌های برخورد (متمایز از A، B و C) خطهای راست AP، BP و CP با دایرهٔ محیطی مثلث ABC هستند. ثابت کنید که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متشابه‌اند. برای مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، چه تعداد نقطه مانند P وجود دارد، به‌طوری که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ ی نظیر آن، با مثلث ABC متشابه باشند؟



۴۹۲. خط راستی که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد، AB و AC را به ترتیب در نقطه‌های C_1 و B_1 قطع می‌کند. ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر BB_1 و CC_1 رسم می‌شوند، در دو نقطه که یکی بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دیگری بر دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد، متقاطعند.



۴۹۳. سه دایره داده شده است، هر کدام از یک رأس مثلثی و پای ارتفاع رسم شده از این رأس می‌گذرد و بر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث که به این رأس رسم شده، مماس است. ثابت کنید که دایره‌ها در دو نقطه واقع بر خط اویلر مثلث مفروض متقاطعند.

۴۹۴. ثابت کنید که وتر مشترکهای دایرهٔ محیطی مثلث و سه دایرهٔ آپولونیوس آن، هم میانه‌های (شبه میانه‌ها) مثلث هستند.

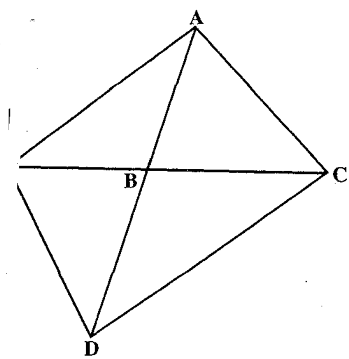
۴۹۵. **قضیه.** هرگاه روی هر یک از ضلعهای مثلث و در بیرون آن سه مثلث چنان رسم کنیم که مجموع زاویه‌های رأسهایی از آنها که غیرمجاور مثلث مفروض است برابر با 180° باشد، دایره‌های محیطی این مثلثها در یک نقطه مشترکند.

۴۹۶. زاویه‌ای با رأس A و دایره‌ای محاط در آن، داده شده است. خط راست دلخواهی مماس بر دایرهٔ مفروض، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرهٔ محیط بر مثلث ABC، بر دایرهٔ محاط در زاویهٔ مفروض مماس است.

۴۹۷. مثلث ABC در دایره‌ای محاط است. A_1 وسط کمان BC، B_1 وسط کمان AC و C_1 وسط کمان AB است. ضلعهای مثلث ABC، روی پاره‌خطهای راست A_1B_1، B_1C_1 و A_1C_1، پاره‌خطهای راست کوچکتری را جدا می‌کنند که وسط آنها را، به ترتیب M_1، M_2 و M_3 می‌نامیم. ثابت کنید، نقطه‌های B_1 و C_1 و نقطه‌های M_1 و M_3 روی محیط یک دایره‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۴۹۸. در مثلث ABC، نقطهٔ D روی امتداد ضلع AB، از طرف نقطهٔ B، طوری اختیار می‌شود که $BD = CB$. به همین نحو، بر امتداد ضلع CB، از طرف B، نقطهٔ F طوری اختیار می‌شود که $BF = AB$. ثابت کنید که نقطه‌های A، C، D و F بر یک دایره که مرکزش روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد، واقعند.

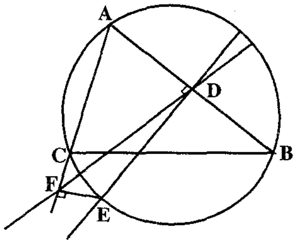


۴۹۹. در مثلث ABC، از رأس A به نقطهٔ D واقع بر ضلع BC وصل کرده‌ایم.
۱. ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABD، ADC و ABC و نقطهٔ A، روی محیط یک دایره‌اند.
۲. نقطهٔ D را طوری پیدا کنید که شعاع این دایره، کمترین مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

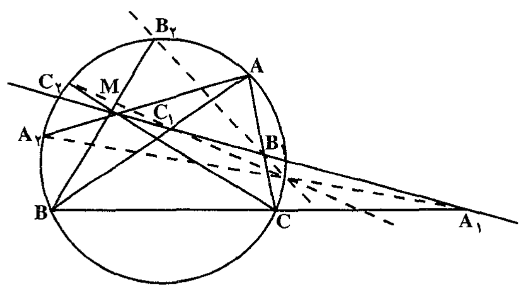
۵۰۰. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن مفروضند. K، نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی B و نیمساز زاویهٔ خارجی C و L، نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی C و نیمساز زاویهٔ خارجی B و نقطهٔ M، وسط پاره خط راست KL است. ثابت کنید، M، نقطهٔ وسط کمان $\widehat{CAB}$ از دایرهٔ محیطی مثلث است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

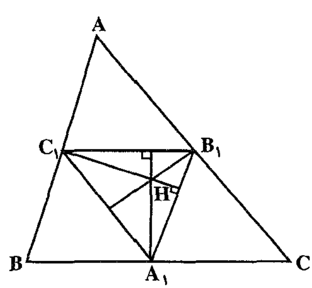


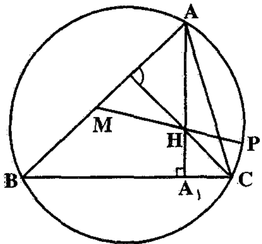
۵۰۱. در مثلث ABC، عمود بر ضلع AB در نقطهٔ وسط آن D، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نقطهٔ E قطع می‌کند (C و E در یک طرف AB واقعند). F تصویر E روی AC است. ثابت کنید که خط DF، محیط مثلث ABC را نصف می‌کند، و سه خطی که بدین گونه برای هر ضلع مثلث رسم می‌شوند، همرسند.

۵۰۲. مثلث ABC و نقطهٔ M داده شده است. خط راستی که از نقطهٔ M می‌گذرد، خطهای AB، BC و CA را بترتیب در نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 قطع می‌کند. خطهای AM، BM و CM، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را، بترتیب، در نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 قطع می‌کنند. ثابت کنید که خطهای A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در نقطه‌ای، واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC، متقاطعند.



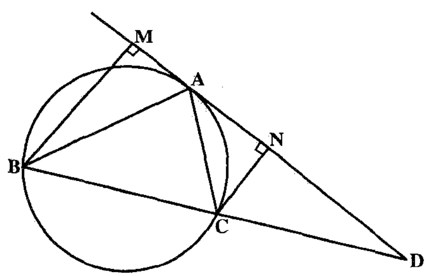
۵۰۳. رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$، بر خطهای راست BC، CA و AB قرار دارند (A_1 بر BC، B_1 بر CA و C_1 بر AB). ثابت کنید که اگر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه باشند (رأسهای A و A_1، B و B_1، و C و C_1 دو به دو متناظرند)، آن وقت نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. آیا عکس آن هم درست است؟





۵۰۴. در مثلث ABC، AA_1 ارتفاع و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست. فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و M نقطه‌ای بر خط HP باشد، به‌طوری که $HP.HM = HA_1.HA$ (H روی پاره خط MP قرار دارد، اگر مثلث ABC با زاویه‌های حاده باشد و خارج آن است، اگر مثلثی منفرجه باشد). ثابت کنید، M روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۵۰۵. مثلث ABC در دایره‌ای محاط شده است. از رأس A مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم تا امتداد ضلع BC را در D قطع کند. از رأسهای B و C عمودهایی بر مماس رسم کرده‌ایم. طول عمود کوچکتر مساوی ۶ سانتیمتر شده است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت ذوزنقه‌ای که از این عمودها و ضلع BC و مماس به‌وجود آمده است. در صورتی که $BC = ۵cm$ و $AD = ۵\sqrt{۶}cm$ باشد.

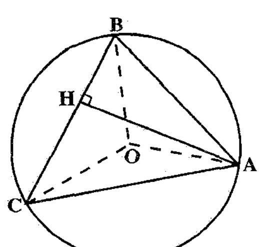


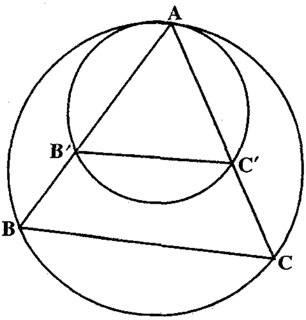
۲. ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۵۰۶. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. در صورتی که $A\hat{O}B = ۹۰^\circ$ ، $A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$ و $R = ۶cm$ باشد:

۱. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را حساب کنید؛

۲. طول ارتفاع AH و طول ضلعهای مثلث ABC را حساب کنید.





۵۰۷. دایرهٔ محیطی مثلث ABC مفروض است. دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ A بر آن دایره مماس داخل شود و دو ضلع مثلث را در نقطه‌های B' و C' قطع کند. ثابت کنید که:

۱. $B'C' \parallel BC$ است.

۲. $AB.B'C' = AB'.BC$

۳. AM میانهٔ مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا $B'C'$ را در N قطع کند. ثابت کنید که نقطهٔ N وسط $B'C'$ است.

۵۰۸. در مثلث ABC زاویهٔ A برابر ۴۵ درجه و ضلع AC برابر a و ضلع BC برابر $a\sqrt{۲}$ اختیار شده است:

۱. طول ضلع AB را برحسب a و همچنین اندازهٔ زاویه‌های B و C را تعیین کنید.

۲. از نقطهٔ H وسط BC عمودی بر آن اخراج کرده روی آن از نقطهٔ H طول HO را برابر HC جدا می‌کنیم و به مرکز O و شعاع OC دایره‌ای رسم می‌کنیم. ثابت کنید این دایره از رأس A نیز می‌گذرد و طول شعاع آن را بر حسب a تعیین کنید.

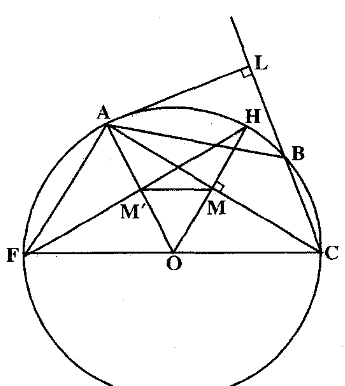
۳. از نقطهٔ A خطی موازی با BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید مثلث AEB متساوی‌الساقین است و اگر OH را امتداد دهیم تا AE را در نقطهٔ F تلاقی کند، این رابطه برقرار است: $AE = ۲HF$.

۴. دو خط AB و HF در نقطهٔ K یکدیگر را تلاقی می‌کنند. طول قطعه خط KB و همچنین مساحت مثلث ABC را برحسب a تعیین کنید.

۵۰۹. مثلث ABC که زاویه‌های آن بترتیب با عددهای ۱، ۸ و ۳ متناسبند و $AB = a\sqrt{۲}$ و $AC = a\sqrt{۳}$ می‌باشد، مفروض است:

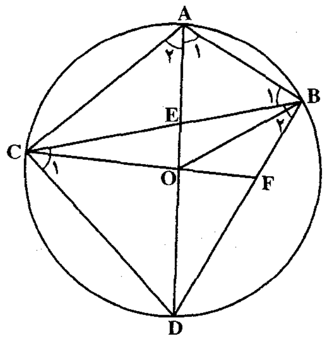
۱. مطلوب است محاسبهٔ زاویه‌ها و طول ضلع BC برحسب a.

۲. از نقطهٔ M وسط ضلع AC عمودی بر آن اخراج کرده و $OM = \frac{a}{۲}$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.



۳. اگر OC را امتداد دهیم تا دایره را در F و امتداد OM، دایره را در H قطع کند، ثابت کنید که $AH = AF$ است.

۴. اگر نقطهٔ M' وسط FH باشد، ثابت کنید که MM' با CF موازی بوده و مساوی $\frac{a}{۲}$ است.



۵۱۰. در مثلث ABC، $AB = a$ و $AC = a\sqrt{۲}$ و زاویهٔ $\hat{B} = ۴۵°$ است:

۱. این مثلث را رسم کنید.

۲. اگر مثلث رسم شده باشد، طول ضلع BC و طول شعاع دایرهٔ محیطی آن را برحسب a و همچنین اندازهٔ زاویه‌های دیگر مثلث را تعیین کرده و دایره را رسم کنید.

۳. قطر AD از دایرهٔ محیطی را رسم می‌کنیم و D را به B و C وصل می‌کنیم. ثابت کنید:

الف) دو مثلث AEB و CBD متشابه‌اند (E نقطه تلاقی AD و CB است).

ب) طولهای DB و CD را برحسب a به دست آورید.

ج) اگر CO را امتداد دهیم تا DB را در F تلاقی کند، خواهیم داشت:

$$DO.DA = DF.DB$$

و از این جا نتیجه بگیرید که $DF = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$.

۵۱۱. چون نقطهٔ M از سطح مثلث را (درون یا بیرون مثلث) بر ضلعهای مثلث تصویر کنیم مثلث abc به دست می‌آید که آن را اصطلاحاً مثلث پدر (Podaire) نقطهٔ M مثلث ABC می‌نامند.

اول. ثابت کنید که سطح مثلث پدر نقطهٔ M نسبت به مثلث ABC با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث متناسب است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M برای این که سطح مثلث پدر آن ثابت بماند، دایره‌ای است متحدالمرکز با دایرهٔ محیطی مثلث (در واقع دو دایره اگر سطح مثلث پدر را بدون علامت در نظر بگیریم) قضیهٔ سنسون حالت خاصی از این قضیه است چه اگر سطح مثلث پدر صفر شود، بایستی نقطه‌های a، b و c بر یک استقامت قرار گیرند و مکان نقطهٔ M دایرهٔ محیطی مثلث است.

دوم. قضیهٔ فوق را نسبت به هر شکل هندسی در صفحه می‌توان تعمیم داد. یعنی اگر M نقطه‌ای از سطح چندضلعی P باشد، تصویرهای M بر روی ضلعهای چندضلعی P، چند ضلعی دیگری تشکیل می‌دهد که چند ضلعی پدر نامیده می‌شود. اگر سطح چندضلعی پدر ثابت بماند، مکان هندسی نقطهٔ M دایره است و تمام این مکانها برای

مقدارهای مختلف سطوح چندضلعی پدر، هم مرکزند. برای چهارضلعی، این نقطه مرکز مشترک مکانهای مختلف،عبارت است از کانون سهمی که بر ضلعهای چهار-ضلعی مفروض مماس است (یعنی نقطهٔ مشترک چهار دایرهٔ محیطی مثلثهایی که با سه ضلع چهار ضلعی ساخته می‌شوند) و به‌طور کلی اگر چند ضلعی بر سهمی معینی محیط باشد، مرکز مشترک مکانهای مذکور کانون این سهمی می‌باشد (این مسأله در مثلث نیز محرز است زیرا کانون سهمیهایی که بر مثلث محاطند، بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع است).

هندسهٔ دوایر، دکتر محسن هشترودی

بخش ۳
● رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محاطی

۳. ۱. تعریف و قضیه

۳. ۲. زاویه

۳. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۳. ۳. ضلع

۳. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۳. ۳. ۲. نسبت ضلعها

۳. ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۳. ۴. ۱. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۳. ۵. پاره‌خط

۳. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۳. ۵. ۳. تساوی پاره‌خطها

۳. ۶. شعاع

۳. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی

۳. ۶. ۲. اندازهٔ شعاع دایره‌های دیگر

۳. ۶. ۳. نسبت شعاعها

۳. ۷. محیط

۳. ۷. ۱. اندازهٔ محیط مثلث

۳. ۸. مساحت

۳. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۳. ۸. ۲. اندازهٔ مساحت مثلثها یا شکلهای دیگر ایجادشده

۳. ۸. ۳. رابطه‌ای در مساحتها

۳. ۹. رابطه‌های متری

۳. ۹. ۱. رابطه‌های متری مربوط به زاویه‌ها، ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۳. ۹. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۳. ۹. ۳. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۳. ۹. ۴. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۳. ۹. ۴. ۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

۳. ۹. ۴. ۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۳. ۹. ۵. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی

۳. ۹. ۵. ۱. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (برابریها)

۳. ۹. ۵. ۲. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (نابرابریها)

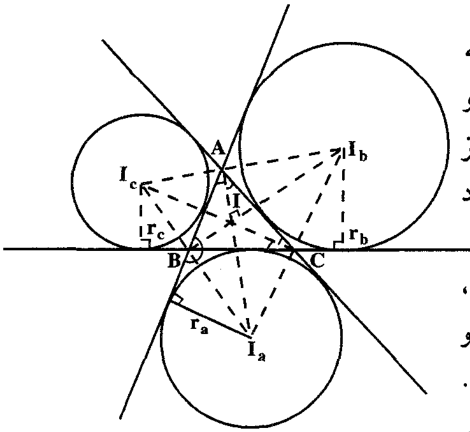
۳. ۹. ۶. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۳. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳. ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محاطی

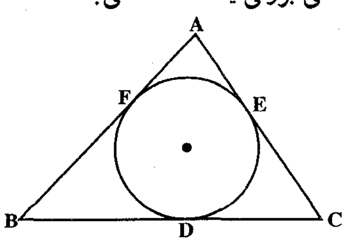
۳. ۱. تعریف و قضیه



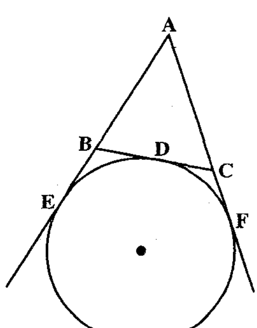
دایره‌های محاطی مثلث. دایره‌هایی هستند که بر سه ضلع آن و یا بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس می‌باشند. مرکز دایره‌های محاطی مثلث محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث است.

دایره‌ای که بر سه ضلع مثلث مماس است، دایرهٔ محاطی درونی مثلث نامیده می‌شود، و شعاع آن را معمولاً با r نمایش می‌دهند. دایره‌های محاطی مماس بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر، دایره‌های محاطی برونی مثلث نام دارند. دایره‌ای را که بر ضلع BC و امتدادهای دو ضلع AB و AC مماس است، دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC یا دایرهٔ محاطی برونی واقع در داخل زاویهٔ A می‌نامند و شعاع آن را با r_a نشان می‌دهند. شعاعهای دایره‌های محاطی برونی مماس بر ضلعهای AC و AB بترتیب با r_b و r_c نشان داده می‌شوند.

مثلثی که رأسهای آن، مرکزهای دایره‌های محاطی برونی یک مثلث می‌باشند، مثلث مرکزیه نام دارد که خود ویژگیهایی دارد.



۵۱۲. قضیه. ثابت کنید در هر مثلث، اندازهٔ هر قطعه که توسط دایرهٔ محاطی درونی روی یک ضلع جدا می‌شود برابر است با تفاضل نصف محیط مثلث بر اندازهٔ ضلع روبه‌روی آن.



۵۱۳. قطعه‌هایی از ضلعهای مثلث، محصور بین رأسهای مثلث و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی آن با ضلعهای مثلث را برحسب ضلعهای مثلث تعیین کنید.

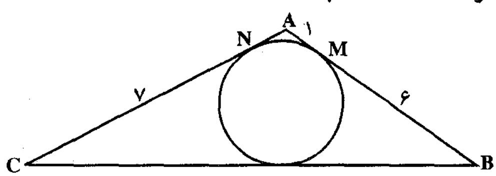
۵۱۴. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث را برحسب ضلعهای مثلث تعیین کنید.

۵۱۵. اندازهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی برونی مثلث را برحسب ضلعهای آن تعیین کنید.

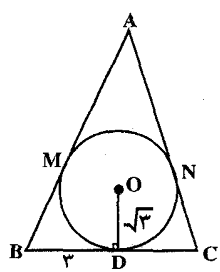
۳. ۲. زاویه

۳. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

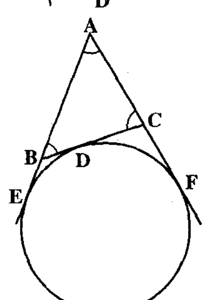
۵۱۶. در مثلث ABC دایره‌ای محاط شده است که بر ضلع AB در نقطهٔ M و بر ضلع AC در نقطهٔ N مماس است. زاویهٔ BAC را پیدا کنید. با این شرط که $AM = 1cm$ ، $BM = 6cm$ و $CN = 7cm$ باشد.



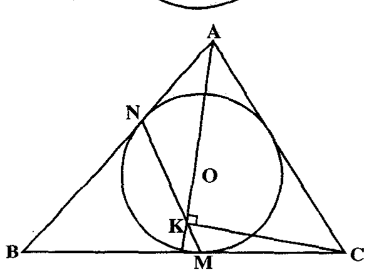
۵۱۷. مثلث ABC بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{3}$ مماس است، اگر D نقطهٔ تماس این دایره با ضلع BC و $DB = 3$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{B}C$ را تعیین کنید.



۵۱۸. ضلعهای BC، AC و AB بترتیب در نقطه‌های D، E و F بر دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a، مماسند. اگر شعاع این دایره $r_a = 1$ و $BD = \sqrt{2} - 1$ و $AE = \sqrt{3}$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های مثلث را به دست آورید.



۵۱۹. فرض کنید M و N معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی با ضلعهای BC و BA از مثلث ABC باشند و K نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ A و خط MN باشد. ثابت کنید که $A\hat{K}C = 90^\circ$.



۳. ۳. ضلع

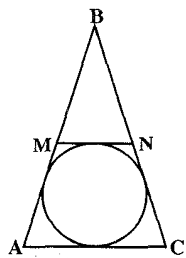
۳. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۵۲۰. دایره‌ای که در مثلث ABC محاط است، ضلع AB را به دو پاره‌خط راست AD و DB بترتیب به طولهای ۵ و ۳ تقسیم کرده است. اندازهٔ زاویهٔ A، برابر ۶۰° است. طول ضلع BC را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۵۲۱. دایره‌ای در درون مثلثی با محیط ۱۸cm محاط شده است. خطی بر این دایره به موازات قاعدهٔ مثلث مماس می‌کنیم. طولی از این خط که بین دو ضلع جانبی مثلث محدود شده است برابر ۲cm می‌باشد. طول قاعدهٔ مثلث را به دست آورید.

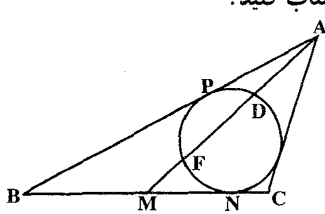
۵۲۲. دایره‌ای به شعاع ۱، در مثلث ABC که در آن $\cos B = ۰/۸$، محاط شده است. این دایره بر میانخط مثلث ABC، موازی با ضلع AC، مماس است. طول AC را پیدا کنید.



۵۲۳. در مثلثی دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر محاط کرده‌ایم. یکی از ضلعهای مثلث به وسیلهٔ نقطهٔ تماس به دو قطعهٔ ۶ و ۸ سانتی‌متری تقسیم شده است. مطلوب است طول دو ضلع دیگر مثلث.

۵۲۴. مرکز دایرهٔ محاطی در مثلثی را به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم. درنتیجه سه مثلث به دست می‌آید که مساحتهای آنها برابر $۴cm^۲$، $۱۳cm^۲$ و $۱۵cm^۲$ می‌باشند. طول ضلعهای مثلث اصلی را بیابید.

۵۲۵. محیط مثلث ABC برابر ۲۸cm است و می‌دانیم که دایرهٔ محاطی مثلث، میانهٔ AM نظیر به ضلع BC را به سه قسمت مساوی: $AD = DF = FM$ تقسیم می‌کند. ضلعهای این مثلث را حساب کنید.



۳. ۳. ۲. نسبت ضلعها

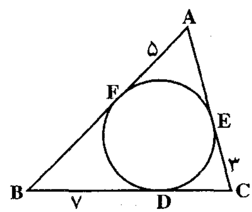
۵۲۶. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، میانهٔ BM آن را به سه بخش برابر تقسیم می‌کند. نسبت $BC:CA:AB$ را پیدا کنید.

۳. ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

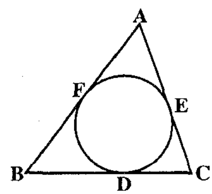
۳. ۴. ۱. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۵۲۷. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC، $r=۱$ و اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}=۴۵^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ است. اندازهٔ ارتفاع رأس C را به دست آورید.

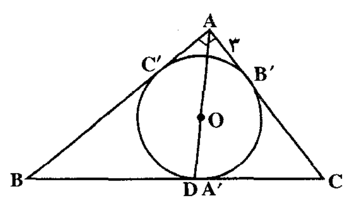
۵۲۸. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، در نقطه‌های D، E و F بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است. اگر $AE=۵$، $BD=۷$ و $CE=۳$ باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس A را بیابید.



۵۲۹. دایرهٔ محاطی مثلث ABC در نقطه‌های D، E و F بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است. اگر $AF=۴$، $DC=۳$ و نصف محیط مثلث $P=۱۲$ باشد، اندازهٔ میانهٔ نظیر رأس B را به‌دست آورید.



۵۳۰. مثلث ABC در نقطه‌های A′، B′ و C′ بر دایرهٔ محاطیش مماس است. نیمساز AD از این مثلث را رسم کرده‌ایم. در صورتی که $AB'=۳$، $DA'=۲$ و شعاع دایرهٔ محاطی $r=۴$ باشد، اندازهٔ AD را بیابید.



۳. ۵. پاره‌خط

۳. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

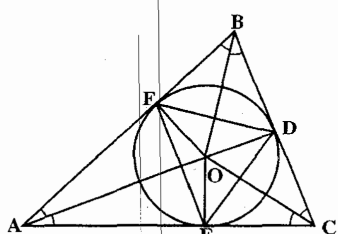
۵۳۱. در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط ضلع BC و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث خط راستی گذرانده‌ایم تا ارتفاع AH را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید طول پاره‌خط راست AE برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۰

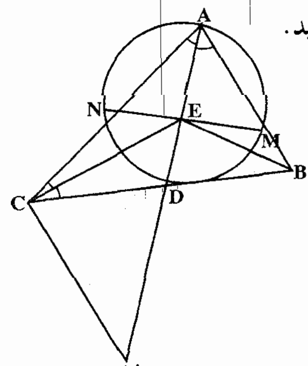
۵۳۲. پاره‌خط راستی، محدود به دو ضلع جانبی مثلث و مماس با دایرهٔ محاطی مثلث، با قاعدهٔ مثلث موازی شده است. اگر محیط مثلث برابر ۲P باشد، حداکثر طول این پاره‌خط راست چه قدر است؟

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۵

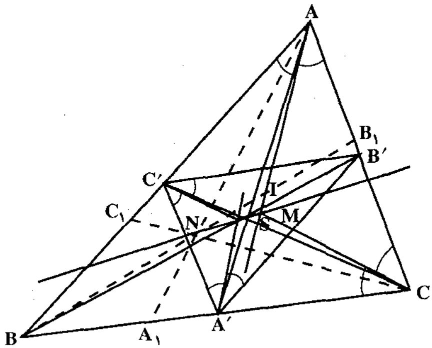
۵۳۳. دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث رسم شده است. فاصلهٔ بین نقطه‌های تماس را برحسب ضلعهای مثلث پیدا کنید.



۵۳۴. مثلث ABC که در آن زاویهٔ A دو برابر زاویهٔ C است، مفروض است. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم که ضلع BC را در D، و خطی را که از C موازی با AB رسم می‌شود در ′A قطع کند. از نقطهٔ E مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، عمودی بر AD اخراج می‌کنیم که دایرهٔ به قطر AD را در N و M قطع کند. طول هر یک از قطعه خطهای DC، BD، DE، AE و MN را برحسب a، b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث حساب کنید.



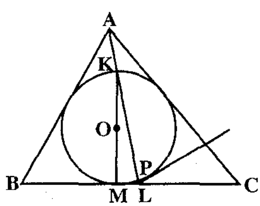
۳ . ۵ . ۲ . نسبت پاره‌خطها



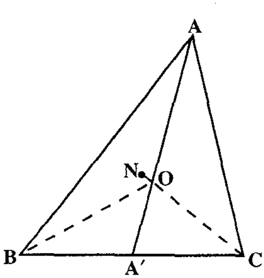
۵۳۵. ثابت کنید، سه خط که از رأسهای مثلثی می‌گذرند و محیط آن را نصف می‌کنند، در یک نقطه (به نام نقطهٔ ناگل، Nagel) متقاطعند. فرض کنید M معرف مرکز ثقل مثلث، I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و S مرکز دایرهٔ محاطی مثلث با رأسهای وسط ضلعهای مثلث مفروض باشد.
ثابت کنید که نقطه‌های N (نقطهٔ ناگل)، M، I و S بر یک خط واقعند و MN = ۲IM و IS = SN است.

۵۳۶. دو مثلث، ضلعی مشترک دارند. ثابت کنید که فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محاطی آنها، از فاصلهٔ بین رأسهای نامنطبق آنها، کمتر است (مسأله زالگالر هندسه‌دان روس).

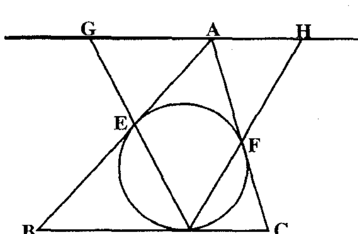
۳ . ۵ . ۳ . تساوی پاره‌خطها



۵۳۷. دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده وبر ضلع BC در نقطهٔM مماس است.MK قطر دایره است. خط AK ، دایره را در نقطهٔP قطع می‌کند. ثابت کنید که مماس بر دایره در نقطهٔ P، ضلع BC را نصف می‌کند.

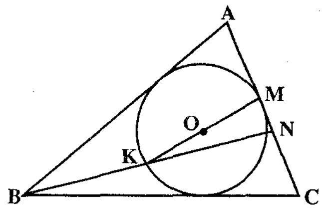


۵۳۸. ثابت کنید پاره‌خطی که مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC را به وسط پاره‌خط واصل بین رأس A و نقطهٔ ناگل Nagel این مثلث وصل می‌کند، به وسیلهٔ میانهٔ رسم شده از رأس A نصف می‌شود.

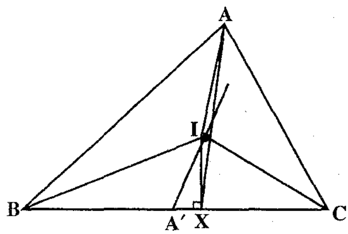


۵۳۹. دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC بترتیب در E، D و F با ضلعهای BC، AB و AC مماس است. اگر DE و DF خط رسم شده از A به موازات BC را در G و H قطع کنند، ثابت کنید AH = AG .
مسأله بالا را برای دایرهٔ محاطی برونی حل کنید.

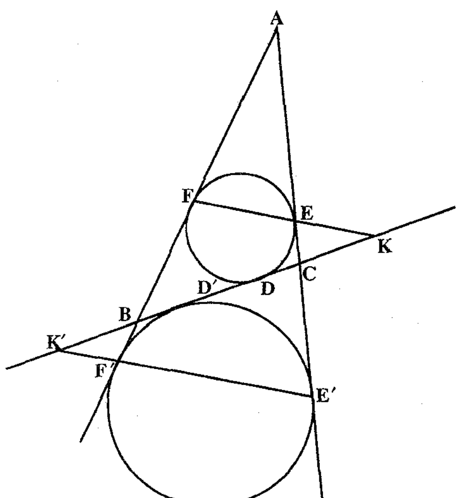
۵۴۰. دایره‌ای در مثلث ABC محاط شده است. فرض کنید M نقطهٔ تماس این دایره با ضلع AC و MK قطر دایره باشد. خط BK، AC را در نقطهٔ N قطع می‌کنند. ثابت کنید که $AM = NC$.



۵۴۱. هرگاه I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و X نقطهٔ تماس BC با این دایره و A' وسط BC باشد، ثابت کنید که خط $A'I$ از وسط AX می‌گذرد.



۵۴۲. در مثلث ABC دایره محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ A بترتیب اولی در D، E و F و دومی در D'، E' و F' بر ضلعهای BC، CA و AB مماسند. خطهای EF و $E'F'$ ضلع BC را در K و K' قطع می‌کنند. ثابت کنید $KD = K'D'$.

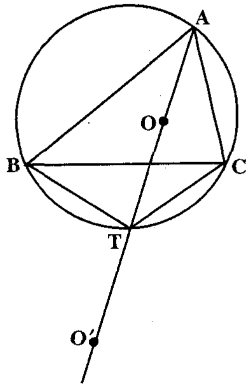


۵۴۳. مثلث ABC مفروض است. دایرهٔ محاطی برونی نظیر رأس A را به مرکزO و شعاع r در نظر گرفته، فرض کنید در نقطهٔ N بر AC مماس باشد، قطر گذرنده از N، دایره را مجدداً در E قطع می‌کند. از B بر NE عمودی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مذکور را در F قطع کند به طوری که M، پای عمود بین B و F قرار گیرد. اگر $AC = ۲r$ باشد، ثابت کنید : $BM = EF$

پنجمین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، ۱۳۷۴

۵۴۴. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی درونی و O' مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a از مثلث ABC و T نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ A با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، ثابت کنید :

$$TB = TC = TO = TO'$$



۶.۳.شعاع

۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی

۵۴۵. در مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC = ۲\sqrt{۳}$ و دو زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $\hat{B} = ۷۵^\circ$ است. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی مثلث را به‌دست آورید.

۵۴۶. در مثلث ABC، $AB = ۶$ ، $AC = ۴$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ است. اندازهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی این مثلث را به‌دست آورید.

۵۴۷. اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC، $a = ۵$ ، $b = ۷$ و $c = ۶$ است. اندازهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی این مثلث را تعیین کنید.

۵۴۸. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را برحسب a، b و c اندازه‌های ضلعها و p نصف مجموع این اندازه‌ها، به‌دست آورید.

۵۴۹. در یک مثلث، مساحت و محیط از نظر عددی با هم برابرند، شعاع دایرهٔ محاطی چه قدر است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۵۵۰. در مثلث ABC داریم : $AC = \frac{۱}{۲}(AB + BC)$

ثابت کنید، طول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، یک سوم طول یکی از ارتفاعهای آن است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۲.۶.۳. اندازهٔ شعاع دایره‌های دیگر

۵۵۱. F نقطهٔ برخورد نیمسازهای AD و CE از مثلث ABC است. می‌دانیم نقطه‌های B، D، E و F روی محیط یک دایره‌اند. ثابت کنید شعاع این دایره از شعاع دایرهٔ محاطی مثلث کوچکتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۵۵۲. ارتفاع کوهی از سطح زمین ۱۶۰۹ متر است. قطر کرهٔ زمین را ۱۲۷۴۳/۳ کیلومتر می‌گیریم. اگر در قلهٔ این کوه باشیم، افق را به چه شعاع می‌بینیم؟

۵۵۳. در مثلث ABC، طول ضلع BC برابر با a و شعاع دایرهٔ محاطی برابر با r است. شعاعهای دو دایرهٔ برابر و مماس بر هم را، که یکی از آنها بر ضلعهای BC و BA و دیگری بر ضلعهای BC و CA مماس است، پیدا کنید.

۳.۶.۳. نسبت شعاعها

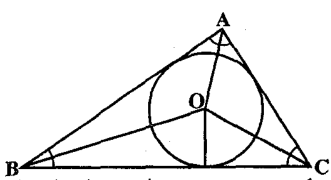
۵۵۴. در مثلث ABC میانهٔ BD رسم شده است. اگر $AB = ۲$ ، $AC = ۶$ و $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ باشد، نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABD را بر شعاع دایره محاطی مثلث ABC محاسبه کنید.

۷.۳. محیط

۱.۷.۳. اندازهٔ محیط مثلث

۵۵۵. شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث ABC برابر ۶ سانتی‌متر و اندازهٔ مساحت این مثلث ۴۸ سانتی‌مترمربع است. اندازهٔ محیط مثلث را تعیین کنید.

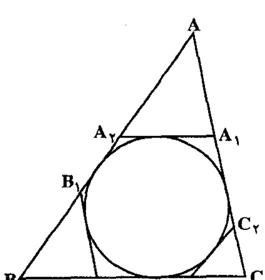
۵۵۶. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ$ ، $\hat{C} = ۶۰^\circ$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r = \sqrt{۲} + ۱$ است. اندازهٔ محیط مثلث را تعیین کنید.



۵۵۷. محیط مثلث ABC را پیدا کنید، درصورتی که $BC = a$ و طول قطعه‌ای از خط راست مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث و موازی با BC که در درون مثلث محصور شده است، برابر با b باشد.

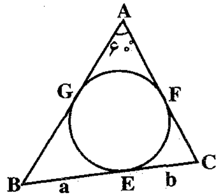
۵۵۸. ثابت کنید خطی که یک رأس مثلث را به نقطهٔ تماس ضلع مقابل به آن رأس با دایرهٔ محاطی خارجی نظیر آن ضلع وصل می‌کند، محیط مثلث را نصف می‌کند.

۵۵۹. ثابت کنید خطهایی که موازی ضلعهای مثلث و مماس به دایرهٔ محاطی داخلی آن رسم می‌شوند، سه مثلث کوچک به‌وجود می‌آورند که مجموع محیط آنها برابر است با محیط مثلث اول.

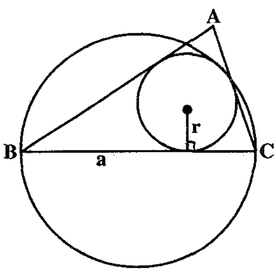


۸.۳. مساحت

۱.۸.۳. اندازهٔ مساحت مثلث



۵۶۰. یکی از زاویه‌های مثلثی برابر $60°$ است. نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی آن، ضلع مقابل به این زاویه را به قطعه‌هایی به طولهای a و b تقسیم می‌کند. مساحت مثلث رامحاسبه کنید.

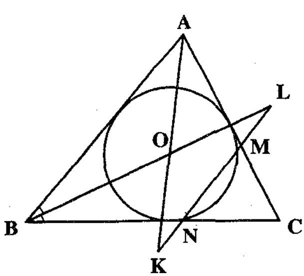


۵۶۱. در مثلث ABC، طول ضلع BC برابر با a و شعاع دایرهٔ محاطی برابر با r است. اگر دایرهٔ محاطی مثلث، بر دایرهٔ رسم شده به قطر BC مماس باشد، مساحت مثلث را پیدا کنید.

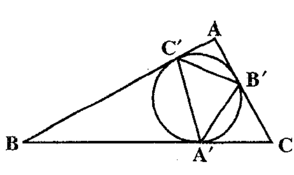
۵۶۲. ثابت کنید که مساحت مثلث برابر است با جذر حاصل ضرب شعاعهای دایره‌های محاطی (یک دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی).
یعنی : $S=\sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$

۲.۸.۳. اندازهٔ مساحت مثلثها یا شکلهای دیگر ایجاد شده

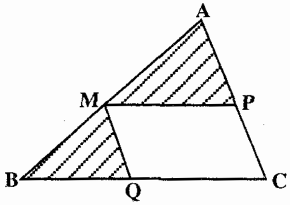
۵۶۳. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، بر ضلع AC در نقطهٔ M و بر ضلع BC در نقطهٔ N مماس است؛ نیمساز زاویهٔ A، خط MN را در K و نیمساز زاویهٔ B، خط MN را در L قطع می‌کند. ثابت کنید که پاره‌خطهای MK، NL و KL می‌توانند مثلثی تشکیل دهند. اگر مساحت مثلث ABC، برابر s و زاویهٔ C برابر با α باشد، مساحت این مثلث را پیدا کنید.



۵۶۴. دایره‌ای درون مثلثی با ضلعهای ۱۶cm، ۳۰cm و ۳۴cm محاط شده است. مساحت مثلثی را پیدا کنید که رأسهای آن بر نقطه‌های تماس دایره و مثلث بالا قرار دارند.



۵۶۵. از نقطهٔ M واقع بر ضلع AB مثلث ABC، خطهایی را به‌صورت $MQ \parallel AC$ و $MP \parallel BC$ رسم می‌کنیم، اگر مساحت مثلث BMQ برابر s_1 و مساحت مثلث ABC برابر s_2 باشد، مساحت مثلث AMP را بیابید.



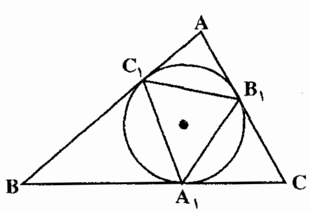
۵۶۶. اندازهٔ مساحت مثلث مرکزیه (مثلثی که رأسهای آن مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث مفروض می‌باشند) به مثلث ABC را تعیین کنید.

۵۶۷. دایره‌ای در مثلث ABC به ضلعهای a، b و c محاط شده است. به دایره مماسهایی موازی ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. هریک از این مماسها مثلثی از ΔABC می‌برد. در هریک از این مثلثها، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. مجموع مساحتهای تمام این دایره‌های محاطی را (برحسب a، b و c) بیابید.

ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۴

۳.۸.۳. رابطه‌ای در مساحتها

۵۶۸. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید، مجموع مساحتهای سه مثلث که رأسهای هریک از آنها، سه نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع نظیر مثلث ABC و امتدادهای دو ضلع دیگر است، برابر با دو برابر مساحت مثلث ABC به اضافهٔ مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاط درΔABC .



۵۶۹. ثابت کنید مثلثی که توسط نقطه‌های تماس هر ضلع مثلث با دایرهٔ محاطی خارجی نظیر همین ضلع از مثلث ساخته می‌شود؛ با مثلثی که رأسهایش نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعهای همین مثلثند، معادل است.

۵۷۰. مثلثی بر دایرهٔ به شعاع r سانتیمتر محیط است. اگر محیط مثلث p سانتیمتر و مساحت آن k سانتیمتر مربع باشد، آن‌گاه p/k برابر است با:

الف) عددی که به مقدار r بستگی ندارد. ب) $\frac{\sqrt{۲}}{r}$ ج) $\frac{۲}{\sqrt{r}}$ د) $\frac{۲}{r}$ هـ) $\frac{r}{۲}$

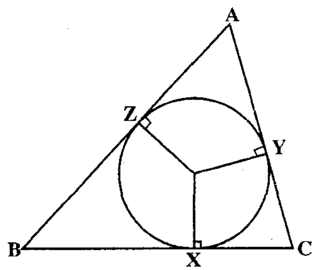
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۹.۳. رابطه‌های متری

۱.۹.۳. رابطه‌های متری مربوط به زاویه‌ها، ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۵۷۱. در هر مثلث رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$AZ.BX.CY = rs$. (X، Y و Z تصویرهای مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث روی ضلعها می‌باشند).



۲.۹.۳. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۵۷۲. اگر h_a، h_b و h_c ارتفاعها و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۵۷۳. ثابت کنید که در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$h_a = ۲rr_a:(r_a - r)$$

۵۷۴. ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$h_a + h_b + h_c \geq ۹r$$

(r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و h_a، h_b و h_c ارتفاعهای مثلث می‌باشند).

۳.۹.۳. رابطه های متری مربوط به میانه‌ها

۵۷۵. ثابت کنید فاصله‌های مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث ازمیانه‌های آن برابر است با:

$$(b-c)r:۲m_a \ , \ (c-a)r:۲m_b \ , \ (a-b)r:۲m_c$$

نظیر این رابطه را برای مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی شرح داده، اثبات کنید.

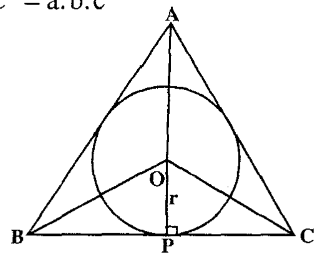
۵۷۶. اگر مرکز ثقل روی محیط دایرهٔ محاطی آن باشد، چه رابطه‌ای میان ضلعهای مثلث، برقرار است.

۳.۹.۴. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۳.۹.۴.۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

۵۷۷. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC باشد، ثابت کنید:

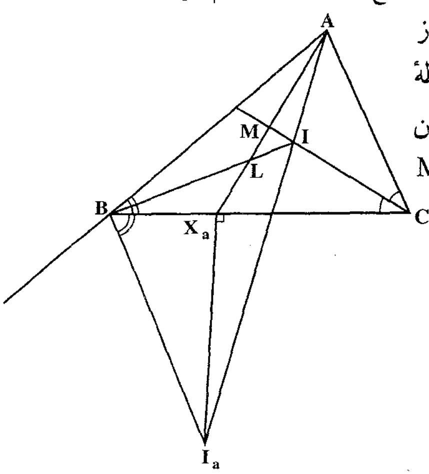
$$a.\overline{OA}^{2}+b.\overline{OB}^{2}+c.\overline{OC}^{2}=a.b.c$$



۵۷۸. در هر مثلث مرکز دایرهٔ محاطی داخلی (یا خارجی) نیمساز داخلی (خارجی) را به نسبت مجموع (تفاضل) دوضلع آن زاویه به ضلع مقابل آن، تقسیم می‌کند.

۵۷۹. نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C از مثلث ABC، AX_a (خطی که A را به نقطهٔ تماس BC با دایرهٔ محاطی خارجی نظیر این ضلع وصل می‌کند) را در نقطه‌های L و M قطع می‌کنند، ثابت کنید:

$$AL:AM=AB:AC$$

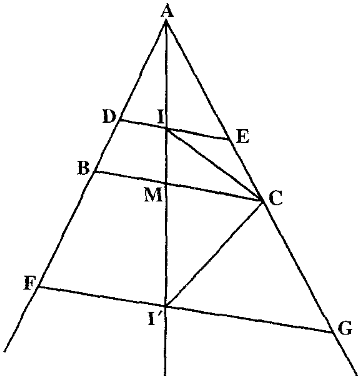


۵۸۰. در مثلث ABC، نقطه‌های I و I′ مرکز دایرهٔ محاطی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس به ضلع BC می‌باشند، ثابت کنید:

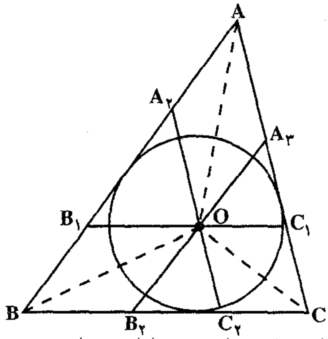
$$IA.I'A=AB.AC$$

۵۸۱. در مثلث ABC از نقطه‌های I و I′ مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی مماس به ضلع BC، خطهای DE و FG را به موازات BC محدود به دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم، ثابت کنید:

$$\frac{2}{BC}=\frac{1}{DE}+\frac{1}{FG}$$



۵۸۲. ضلعهای یک مثلث روی خطهایی که ازمرکز دایرهٔ محاطی آن موازی این ضلعها رسم می‌شوند، قطعه‌های n_a ، n_b و n_c را به وجود می‌آورند، ثابت کنید :

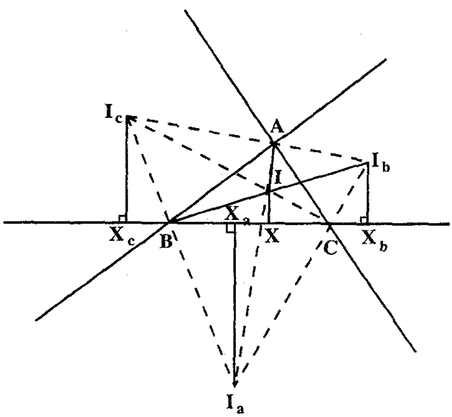


$$(n_a:a)+(n_b:b)+(n_c:c)=۲$$

$$۴s=(n_ah_a+n_bh_b+n_ch_c)$$

رابطه‌هایی نظیر رابطه‌های بالا را برای مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی شرح داده، اثبات کنید.

۵۸۳. اگر X ، X_a ، X_b و X_c تصویرهای مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث ABC روی ضلع a باشد.



الف) نشان دهید :

$$\overline{AX}^۲+\overline{AX}_a^۲+\overline{AX}_b^۲+\overline{AX}_c^۲=۳(b^۲+c^۲)-a^۲$$

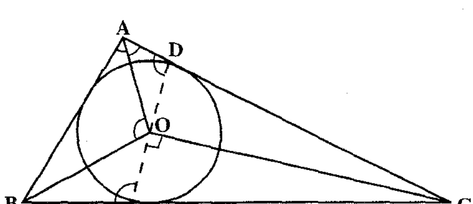
ب) ثابت کنید مجموع مربعهای دوازده فاصلهٔ رأسهای هر مثلث از محل تماس دایره‌های محاطی مثلث با ضلعهای مقابل به هر رأس، برابر است با ۵ برابر مجموع مربعهای این ضلعها.

۵۸۴. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌باشد. خطهای OA، OB و OC را وصل کرده از نقطهٔ O عمودی بر OC اخراج نموده امتداد می‌دهیم تا AC را در D و BC را در E قطع کند.

۱. ثابت کنید مثلثهای AOB و AOD و BOE متشابه‌اند.

۲. ثابت کنید

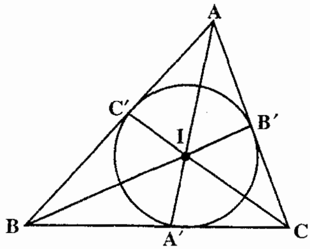
$$\frac{OA^۲}{OB^۲}=\frac{AD}{EB} \quad \text{و} \quad OD^۲=AD.EB$$



۲.۴.۹.۳. رابطه های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۵۸۵. در مثلث ABC، I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است و AA' ، BB' و CC' نیمسازهای درونی مثلث می‌باشند، ثابت کنید :

$$\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{۸}{۲۷}$$



۵۸۶. در مثلث ABC نقطه‌های O، M، N، P و O' به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

O : مرکز دایرهٔ محاطی داخلی

M : محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی باضلع BC

N : محل برخورد امتداد OM با دایرهٔ محاطی داخلی

P : محل برخورد امتداد AN با ضلع BC

O' : مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC

ثابت کنید : $\sqrt{OM.O'P} \leq \frac{BC}{۲}$

چهارمین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۵.۹.۳. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی

۱.۵.۹.۳. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (برابریها)

۵۸۷. ثابت کنید که در هر مثلث :

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

۵۸۸. ثابت کنید در یک مثلث متغیر که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ثابت است، مجموع معکوسهای شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مقداری ثابت است.

۵۸۹. ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\left(\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}\right)\left(\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}-\frac{۱}{r}\right)\left(\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}-\frac{۱}{r}\right)\left(\frac{۱}{r_c}+\frac{۱}{r_a}-\frac{۱}{r}\right)=-\frac{۱}{S^۲}$$

۵۹۰. ثابت کنید در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{۱}{r}-\frac{۱}{r_a}=\frac{۲}{h_a}$$

۵۹۱. در مثلث ABC، شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی واقع در زاویه های A، B و C را بترتیب r_a، r_b و r_c و محیط مثلث را ۲p می‌نامیم. ثابت کنید که:

۱) $p^2 = r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b$

۲) $\frac{2}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$

۵۹۲. ثابت کنید در هرمثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$r_a . r_b . r_c = p . r$

۲.۵.۹.۳. رابطه های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (نابرابریها)

۵۹۳. در روی ضلع AC از مثلث ABC، نقطهٔ D را اختیار می‌کنیم. r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره‌های محاطی مثلث ABD و BDC است. r نیز شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، ABC است. ثابت کنید که: $r < r_1 + r_2$

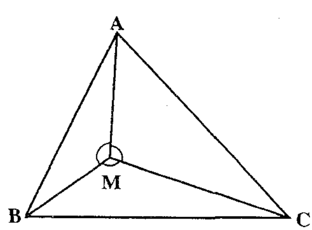
۶.۹.۳. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط درصفحهٔ مثلث

۵۹۴. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های نقطه‌ای در درون مثلث تا رأسهای آن، از ۶r، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است، کمتر نیست.

۵۹۵. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث ABC باشد. ثابت کنید که:

$$AM\sin B\hat{M}C + BM\sin A\hat{M}C + CM\sin A\hat{M}B \le p$$

(p نصف محیط مثلث ABC است) برابری، وقتی که M به مرکز دایرهٔ محاطی مثلث منطبق باشد، رخ می‌دهد.

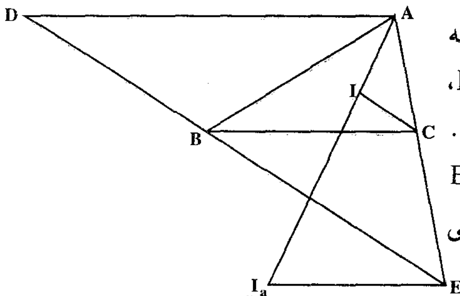


۳. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۵۹۶. خط راستی، مثلث را به دو بخش تقسیم کرده است که هم مساحتها و هم محیطهای این دو بخش، با هم برابر شده‌اند. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، روی این خط راست است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف یوگسلاوی، ۱۹۸۱

۵۹۷. در مثلث ABC، خطی از رأس A به موازات BC رسم شده است. نقطهٔ D بر این خط طوری اختیار می‌شود که $AD = AC + AB$. پاره‌خط DB، ضلع AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط رسم شده از نقطهٔ E به موازات BC، از مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث ABC می‌گذرد.



۵۹۸. اگر طول ضلعهای مثلثی یک تصاعد حسابی تشکیل دهند، آن‌گاه ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاطی این مثلث و مرکز ثقل آن، روی خط مستقیمی قرار دارند، که با ضلع میانی مثلث موازی است.

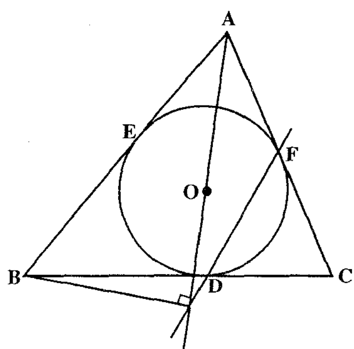
۵۹۹. نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است. نقطه‌های M و K را بترتیب روی ضلعهای AC و BC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم:

$$BK.AB = BC^2 \ , \ AM.AB = AO^2$$

ثابت کنید، نقطه‌های M، O و K روی یک خط راستند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

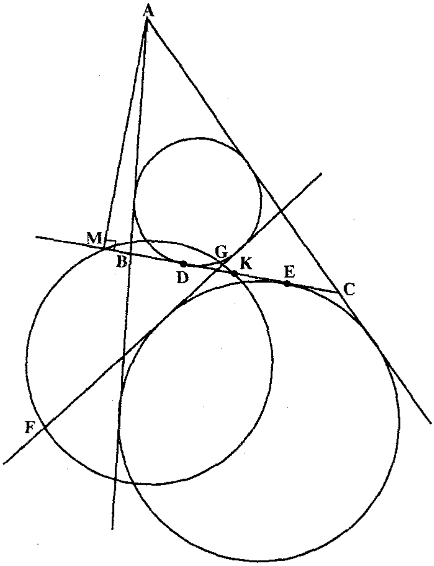
۶۰۰. ثابت کنید تصویر رأس B از مثلث ABC روی نیمساز زاویهٔ داخلی A، روی خطی قرار می‌گیرد که نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلعهای BC و AC را به هم وصل می‌کند.



نظیر مطلب بالا را برای نیمسازهای زاویه‌های خارجی شرح داده، اثبات کنید.

۶۰۱. نقطهٔ X را روی ضلع AC از مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی دو مثلث ABX و BCX بر هم مماس باشند، آن وقت نقطهٔ X روی محیط دایرهٔ محاط در مثلث ABC است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

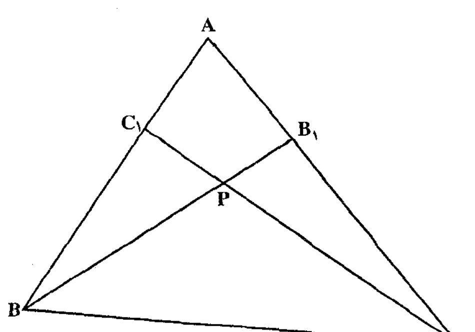


۶۰۲. فرض کنید K معرف وسط ضلع BC از مثلث ABC و M پای ارتفاع وارد بر BC باشد. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، در نقطهٔ D بر ضلع BC مماس است؛ دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر امتداد ضلعهای AB و AC و ضلع BC، در نقطهٔ E بر ضلع BC مماس است. یک مماس مشترک بر این دایره‌ها، متمایز از ضلعهای مثلث، دایره ای را که از M و K می گذرد، در نقطه‌های F و G قطع می کند. ثابت کنید که نقطه‌های D، E، F و G بر یک دایره قرار دارند.

۶۰۳. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد و A_0، B_0 و C_0 نقطه‌های تماس این دایره بترتیب با ضلعهای BC، CA و AB باشند. روی نیمخطهای OA_0، OB_0 و OC_0 بترتیب نقطه‌های L، M و K به فاصله‌های برابر از O، اختیار می‌شوند. (الف) ثابت کنید که خطهای AL، BM و CK در یک نقطه به هم می‌رسند؛ (ب) فرض کنید A_1، B_1 و C_1 بترتیب تصویرهای A، B و C روی خط دلخواه l که از O می‌گذرد، باشند. ثابت کنید که خطهای A_1L، B_1M و C_1K همرسند. (یعنی، در یک نقطهٔ مشترک متقاطعند.)

۶۰۴. در مثلث ABC نقطهٔ P را در درون آن اختیار می کنیم، خطهای راست BP و CP ضلعهای روبه‌رو را به‌ترتیب در B_1 و C_1 قطع می کنند. اگر بدانیم که هم مساحتها و هم محیطهای دو مثلث PBC_1 و PCB_1 با هم برابرند. آن‌گاه ثابت کنید P روی نیمساز درونی زاویهٔ A قرار دارد.

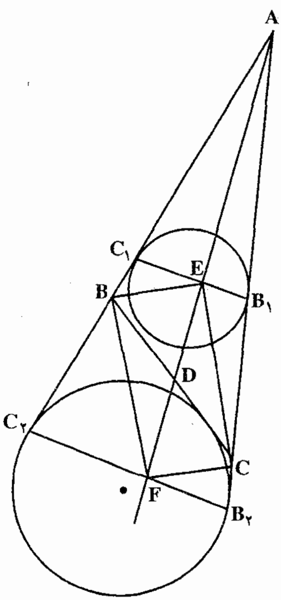
یازدهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۲



۶۰۵. فرض کنید F، F_a، F_b و F_c معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC با دایرهٔ محاطی و سه دایرهٔ محاطی خارجی آن باشند (F_a نقطهٔ تماس با دایرهٔ به مرکز I_a است و غیره). بعلاوه فرض کنید A_1 و A_2 ، B_1 و B_2 ، و C_1 و C_2 ، بترتیب معرف نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی A، Bو C با ضلعهای روبه رو به آنها باشند. ثابت کنید که مثلثهای زیر دو به دو متشابه اند :
$\Delta F_aF_bF_c$ و $\Delta A_1B_1C_1$ ، ΔFF_bF_c و $\Delta A_1B_2C_2$ ، ΔFF_cF_a و $\Delta B_1C_2A_2$ ،
ΔFF_aF_b و $\Delta C_1A_2B_2$ (قضیهٔ تبولت).

تبولت (Thebault) ویکتور، هندسه‌دان معاصر فرانسوی

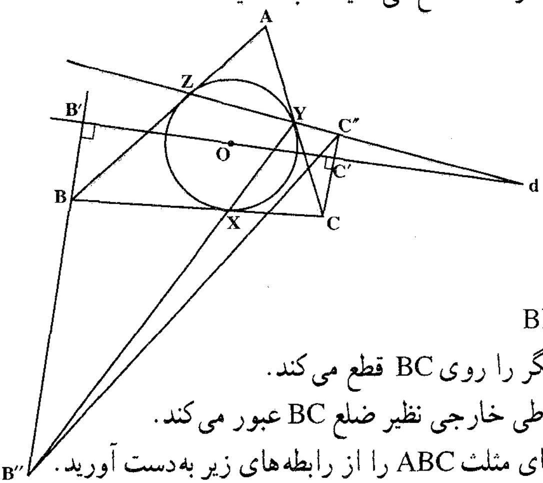
۶۰۶. دایره‌ای که در مثلث ABC محاط شده، در نقطه‌های C_1 و B_1 بر ضلعهای AB و ACی آن مماس است. دایرهٔ مماس بر ضلع BCو امتدادهای AB و AC، در نقطه‌های C_2 و B_2 بر خطهای AB و AC مماس است. فرض کنید D وسط ضلع BC باشد. خط AD، خطهای B_1C_1 و B_2C_2 را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که $BECF$ متوازی‌الاضلاع است.



۱۱.۳.مسأله‌های ترکیبی

۶۰۷. شانزده نقطه، مرکزهای کلیهٔ دایره‌های محاطی و محاطی خارجی چهار مثلث تشکیل شده با چهار خط متقاطع در صفحه، را در نظر بگیرید. ثابت کنید که این شانزده نقطه را می‌توان به چهار تا چهارتایی، به دو طریق چنان دسته‌بندی کرد که هر چهارتایی بر یک دایره قرار بگیرد. درروش اول، مرکزهای این دایره‌ها، روی یک خط راست و در روش دوم، روی خط راست دیگری قرار دارند. این خطها دو به‌دو برهم عمودند و در نقطهٔ میشل، که نقطهٔ مشترک دایره‌های محیطی چهار مثلث است، متقاطعند.

۶۰۸. عمودهای BB' و CC' که از رأسهای B و C ازمثلث ABC روی d قطری دلخواه از دایرهٔ محاطی داخلی آن فرود می‌آیند. خطهای XY و YZ را که نقطه های تماس (X و Y و Z) دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را با ضلعهای BC ، CA و AB به هم وصل می کند، در نقطه‌های B'' و C'' قطع می‌نماید. ثابت کنید :



الف) $BB':BB'' = CC':CC''$

ب) خطهای d و $B''C''$ یکدیگر را روی BC قطع می کند.

ج) $B''C''$ از مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC عبور می کند.

۶۰۹. ۱) a و b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث ABC را از رابطه‌های زیر به‌دست آورید. P نصف محیط است.

$$\begin{cases} ۲bc = a(b+c) \quad (۱) \\ ۲p = ۳۷ \\ a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۴۶۹ \end{cases}$$

۲) مثلث غیرمشخص ABC را در نظر می گیریم، نیمساز داخلی AD را رسم کرده از D خطی دلخواه مرور می‌دهیم تا AB و AC را بترتیب در P و Q قطع کند. درستی رابطهٔ :

$$\frac{۱}{AP} + \frac{۱}{AQ} = \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$$

را تحقیق کرده و ثابت کنید برای این که رابطهٔ (۱) در این مثلث برقرار باشد، باید عمودی که در D بر AD رسم می‌شود،روی هریک از ضلعهای زاویهٔ A طولی برابر با a جدا کند.

۳) روی ضلعهای AB و AC دو طول برابر $AE = AF = a$ را جدا کرده از E به F وصل می کنیم تا BC را در S قطع کند، مقدار نسبت $\frac{SB}{SC}$ و فاصلهٔ SA' را برحسب طول ضلعها حساب کنید. (A' وسط BC است. $b > a > c$ فرض می‌شود.)

۴) اگر S' محل تلاقی ضلع BC یا امتداد آن با IG باشد (I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و G نقطهٔ برخورد میانه‌ها) مقدار نسبتهای $\frac{S'A}{S'D_۲}$ و $\frac{S'B}{S'C}$ و طول $S'A'$ را برحسب طول ضلعها حساب کرده، درستی رابطهٔ $S'A.S'A' = \frac{a}{۴}$ را تحقیق کنید و معلوم کنید چه رابطهٔ هندسی بین S و S' وجود دارد.

بخش ۴

● رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

۴.۱. تعریف و قضیه

۴.۲. زاویه

۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۴.۳. ضلع

۴.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۵. پاره‌خط

۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴.۵.۲. نسبت پاره خطها

۴.۵.۳. تساوی پاره خطها

۴.۶. شعاع

۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۴.۶.۲. نسبت شعاعها

۷.۴. محیط

۱.۷.۴. اندازهٔ محیط مثلث

۸.۴. مساحت

۱.۸.۴. اندازهٔ مساحت

۲.۸.۴. نسبت مساحتها

۹.۴. رابطه‌های متری

۱.۹.۴. رابطه‌های متری (برابریها)

۲.۹.۴. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۱۰.۴. سایر مسأله های مربوط به این بخش

۱۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

۱.۴. تعریف و قضیه

۶۱۰. قضیهٔ اویلر. شرط لازم و کافی برای آن که d خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی مثلث ABC، و R و r بترتیب شعاعهای این دو دایره باشند، آن است که رابطهٔ $d^۲ = R^۲ - ۲Rr$ برقرار باشد.

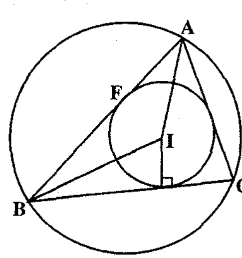
۶۱۱. قضیه. اگر نقطهٔ O و R مرکز و شعاع دایرهٔ محیطی و O' و r_a مرکز و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع a باشد، ثابت کنید این رابطه برقرار است:

$$OO'^۲ = R^۲ + ۲Rr_a$$

۲.۴. زاویه

۱.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۶۱۲. I نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی A از مثلث ABC است. اگر $IA = ۶$، $r = ۳$ و $R = ۸$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های مثلث را بیابید.



۶۱۳. اگر در مثلثی مرکزهای دایره‌های محاطی و محیطی نسبت به یکی از ضلعهای آن متقارن باشند، بزرگترین زاویهٔ مثلث را به‌دست آورید.

۶۱۴. هرگاه در مثلث ABC، ضلعهای a، b و c بترتیب جمله های متوالی یک تصاعد عددی باشند، ثابت کنید $\cos\hat{B} = \frac{R-r}{R}$. ($R$ شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث است).

مرحلهٔ اول دومین دوره المپیادهای ریاضی ایران،

استان آذربایجان غربی، ۱۳۶۳

۳.۴. ضلع

۱.۳.۴. اندازهٔ ضلع

۶۱۵. در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ C، بر میانه‌ای که از رأس B خارج می‌شود، عمود است. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، بر دایره‌ای که از نقطه‌های A و C و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد، قرار دارد. اگر $BC = ۱$، AB را پیدا کنید.

۶۱۶. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر $\frac{۵}{۴}$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن برابر $\frac{۱}{۲}$ است. ضلعهای این مثلث تشکیل تصاعدی عددی داده‌اند. اندازهٔ زاویهٔ این مثلث را که روبه رو به کوچکترین ضلع است، تعیین کنید.

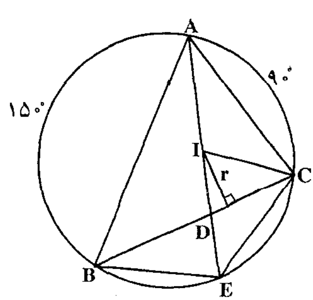
۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۴. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۶۱۷. در مثلث ABC، $\hat{A} = \operatorname{Arc}\cos\frac{۳}{۵}$، $r = ۲$ و $R = ۵$ است. اندازهٔ ارتفاع نظیر رأس A را تعیین کنید.

۶۱۸. مرکزهای دایره‌های محاطی درونی و محیطی مثلث نسبت به یک ضلع مثلث قرینهٔ یکدیگرند. اگر اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث، R باشد، اندازهٔ میانهٔ نظیر ضلع BC را بیابید.

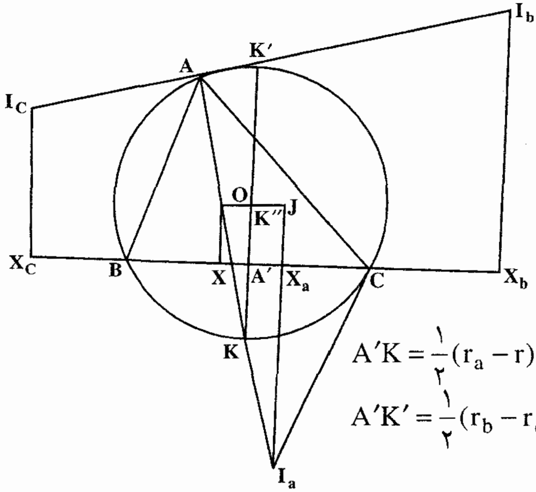
۶۱۹. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، $R = ۶$ است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۱۵۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۹۰^\circ$ باشد، اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A و اندازهٔ وتری از دایرهٔ محیطی را که از رأس A و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد، تعیین کنید.



۵.۴. پاره‌خط

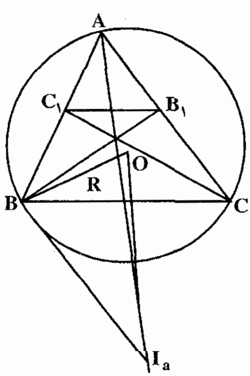
۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۶۲۰. اگر A' وسط BC و X، X_a، X_b و X_c پاهای عمودهایی که از I، I_a، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث ABC بر ضلع BC رسم شده، و K محل برخورد AI با دایرهٔ محیطی مثلث و KK' قطر آن و K'' محل برخورد این قطر با خطی که از I موازی BC رسم شده و J محل برخورد I_aX_a با این خط باشد، داریم:



الف) $A'K = \frac{۱}{۲}(r_a - r)$

ب) $A'K' = \frac{۱}{۲}(r_b - r_c)$



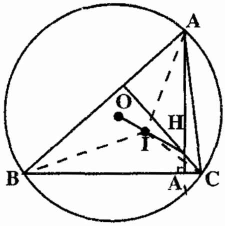
۶۲۱. فرض کنید $BB_۱$ و $CC_۱$ بترتیب معرف نیمساز زاویه‌های B و C از مثلث ABC باشند. ثابت کنید که:

$$B_۱C_۱ = \frac{abc}{(b+a)(c+a)R} OI_a$$

(O مرکز دایرهٔ محیطی و I_a مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع a است.)

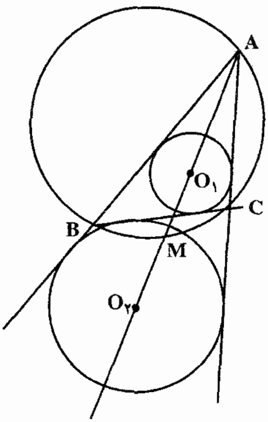
۲.۵.۴. نسبت پاره‌خطها

۶۲۲. در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC اختیار شده است. فرض کنید $O_۱$ مرکز دایره‌ای باشد که بر پاره‌خطهای AD و BD و دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است، و $O_۲$ مرکز دایره‌ای باشد که بر پاره‌خطهای CD و BD و دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است. ثابت کنید که خط $O_۱O_۲$ از O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، می‌گذرد و $O_۱O:OO_۲ = tg^۲\frac{\varphi}{۲}$، که در آن $\varphi = B\hat{D}A$ (قضیهٔ تبولت).



۶۲۳. فرض کنید O، I و H بترتیب معرف مرکز دایره‌های محیطی و محاطی مثلثی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشد. ثابت کنید که $\frac{OH}{IH} \geq \sqrt{2}$.

۳.۵.۴. تساوی پاره‌خطها



۶۲۴. در یک مثلث غیرمشخص، دایرهٔ محاطی داخلی و یکی از دایره‌های محاطی خارجی را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید پاره‌خطی که مرکزهای این دو دایره را به هم وصل می‌کند، به‌وسیلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث، نصف می‌شود.

۶.۴. شعاع

۱.۶.۴. اندازهٔ شعاع

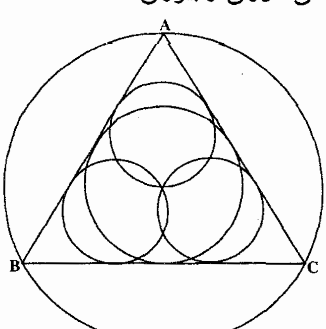
۶۲۵. مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی و شعاعهای دایره های محاطی درونی و برونی واقع در زاویهٔ A از مثلث ABC در هریک از حالتهای زیر :

۱. $a=۴۳$ ، $b=۶۸$ و $c=۶۱$

۲. $a=۸۱$ ، $b=۱۳۰$ و $c=۱۱۳$

۳. $a=۱۲۳$ ، $b=۱۰۶$ و $c=۶۵$

۶۲۶. در مثلث ABC ضلعهای $a=۲۵cm$ ، $b=۲۹cm$ و $c=۳۶cm$ می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ شعاعهای دایره‌های محاطی درونی و بیرونی.



۶۲۷. در درون مثلث ABC، سه دایرهٔ برابر رسم می‌شوند که هریک از آنها بر دو ضلع مثلث مماس است. این سه دایره در یک نقطه مشترکند. اگر شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث بترتیب برابر r و R باشد، شعاع دایره‌ها را پیدا کنید.

۲.۶.۴. نسبت شعاعها

۶۲۸. در مثلث ABC، $AC:BC = ۲:۱$ و $\hat{C} = \operatorname{Arccos}\frac{۳}{۴}$ است. نقطهٔ D را با شرط $CD:AD = ۱:۳$ روی ضلع AC اختیار می‌کنیم. نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABD را به‌دست آورید.

۷.۴. محیط

۱.۷.۴. اندازهٔ محیط مثلث

۶۲۹. در مثلث ABC، شعاع دایرهٔ محیطی $R = \frac{۴۵\sqrt{۱۴}}{۵۶}$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r = \frac{۲\sqrt{۱۴}}{۷}$ و حاصل‌ضرب اندازهٔ سه ضلع برابر ۹۰ است. اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.

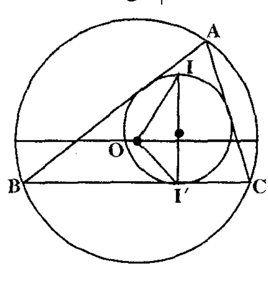
۶۳۰. در مثلث ABC داریم $R = \frac{۴۵}{۱۶}r$ (R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث است). اگر حاصل ضرب ضلعهای مثلث برابر ۷۲۰ و اندازهٔ مساحت آن $۸\sqrt{۱۴}$ باشد، اندازهٔ محیط این مثلث را تعیین کنید.

۶۳۱. اگر II' قطری از دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث که بر قطری از این دایره که از O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد عمود است باشد، ثابت کنید که محیط مثلث OII' برابر قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث است.

۸.۴. مساحت

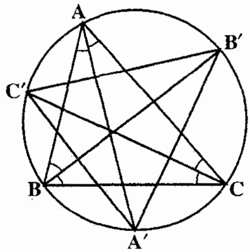
۱.۸.۴. اندازهٔ مساحت

۶۳۲. شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلثی بترتیب برابر r و R است. اگر بدانیم دایره‌ای که از مرکز دایره‌های محاطی و محیطی و محل برخورد ارتفاعهای مثلث می‌گذرد، دست کم از یکی از رأسهای مثلث هم می‌گذرد، مساحت مثلث را پیدا کنید.



۲.۸.۴. نسبت مساحتها

۶۳۳. نسبت مساحت هر مثلث به مثلثی که رأسهایش نقطه های تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلعها است، برابر است با نسبت قطر دایرهٔ محیطی مثلث به شعاع دایرهٔ محاطی آن.



۶۳۴. در مثلث ABC، شعاع دایره‌های محیطی (R) و محاطی (r) داده شده است. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 معرف نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن باشند. نسبت مساحتهای مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را پیدا کنید.

۶۳۵. ضلعهای مثلثی برابر ۲۰cm، ۳۴cm و ۴۲cm است. نسبت مساحت دایرهٔ محاطی مثلث را بر مساحت دایرهٔ محیطی آن محاسبه کنید.

۹.۴. رابطه های متری

۱.۹.۴. رابطه‌های متری (برابریها)

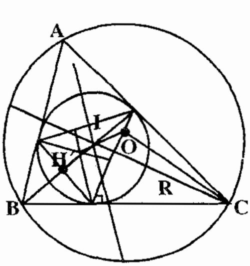
۶۳۶. طولهای ضلعهای مثلثی با اندازه‌های a، b و c یک تصاعد حسابی افزایشی تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که $ac = ۶Rr$ است. در این رابطه R و r بترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی است.

۶۳۷. مجموع مربعهای فاصلهٔ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلثی مفروض با ضلعهای آن، تا مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را پیدا کنید، به شرطی که شعاع دایرهٔ محاطی آن r و شعاع دایرهٔ محیطی آن R باشد.

۶۳۸. ثابت کنید در هر مثلث رابطه‌های زیر برقرار است:

الف) $\frac{abc}{a+b+c} = ۲Rr$ یا $abc = ۴prR$

ب) $ab + ac + bc = p^۲ + r^۲ + ۴rR$



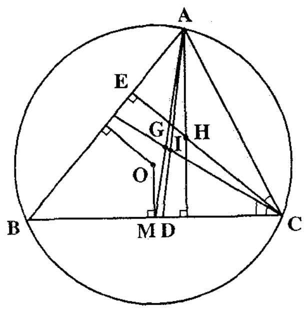
۶۳۹. ثابت کنید: خطی که O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را به I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن وصل می کند، از H′ محل تلاقی ارتفاعهای مثلثی که رأسهایش نقطه‌های تماس مثلث اصلی با دایرهٔ محاطی داخلیش می‌باشد، می گذرد، هم‌چنین داریم:

$$H'I : OI = r : R$$

آیا این رابطه برای مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی صادق است؟

۶۴۰. در هر مثلث فاصلهٔ رأس تا محل برخورد ارتفاعها به علاوهٔ شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع مقابل به آن رأس، مقداری ثابت است.

۶۴۱. اگر H و G و O و I بترتیب محل برخورد ارتفاعها و مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی و محل برخورد نیمسازهای مثلثی باشند. ثابت کنید :



$$HI^2 + 2OI^2 = 3(IG^2 + 2OG^2)$$
$$3(IG^2 + \frac{1}{2}HG^2) - IH^2 = 2R(R - 2r)$$

که در آن R و r، شعاعهای دایرهٔ محیطی و محاطی داخلی مثلثند.

۶۴۲. ثابت کنید که در هر مثلث رابطه‌های زیر برقرار است :

$$\overline{II_a}^2 = 4R(r_a - r)$$
$$\overline{I_bI_c}^2 = 4R(r_b + r_c)$$

(I و I_a و I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث ABC می‌باشند).

۶۴۳. ثابت کنید که درهر مثلث رابطه‌های زیر برقرار است :

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 + \overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2 = 12R^2 \qquad (1)$$
$$\overline{II_a}^2 + \overline{II_b}^2 + \overline{II_c}^2 = 8R(2R - r) \qquad (2)$$
$$\overline{I_aI_b}^2 + \overline{I_bI_c}^2 + \overline{I_cI_a}^2 = 8R(4R + r) \qquad (3)$$

(R شعاع و O مرکز دایرهٔ محیطی و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و I_a، I_b و I_c مرکزهای دایره های محاطی خارجی مثلث ABC می‌باشند).

۶۴۴. مجموع شعاع دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث، برابر است با مجموع فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی از ضلعها. (کارنو)

۶۴۵. در یک مثلث r، r_a ، r_b و r_c شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی، R شعاع دایرهٔ محیطی، s نصف محیط، S مساحت، I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی می‌باشد. ثابت کنید که :

$r_a + r_b + r_c - r = 4R$ و $S(I_aI_bI_c) = 2sR$

۶۴۶. ثابت کنید در یک مثلث متغیر که دایرهٔ محیطی و دایرهٔ محاطی داخلی آن ثابت است مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مقداری ثابت است.

۶۴۷. خط راستی، از یک رأس مثلثی بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به هم وصل می‌کند، عمود رسم می‌شود. ثابت کنید که این خط و ضلعهای مثلث مفروض، دو مثلث تشکیل می‌دهند که تفاضل بین شعاع دایره‌های محیطی آنها، برابر است با فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث اصلی.

۲.۹.۴. رابطه های متری (نابرابریها)

۶۴۸. ثابت کنید که در هر مثلث شعاع دایرهٔ محیطی از دو برابر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی بزرگتر یا اقلاً با آن برابر است.

۶۴۹. فرض کنید h طول بزرگترین ارتفاع مثلثی غیرمنفرجه و R و r، بترتیب، شعاع دایره‌های محیطی و محاطی آن باشند. ثابت کنید که $R+r \le h$ (قضیهٔ اردیش).

پال اردیش (Paul. Erdös) ریاضیدان مجاری (تولد ۱۹۱۳)، شهرتش بیشتر به خاطر طرح و حل مسأله‌های دشوار ریاضی است.

۶۵۰. ثابت کنید، $p \ge \frac{۳}{۲}\sqrt{۶Rr}$ ، که در آن p نصف محیط مثلث است و r و R، بترتیب شعاع دایره‌های محاطی و محیطی آن هستند.

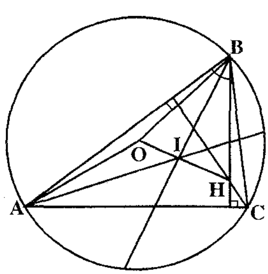
۶۵۱. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث باشد. خط راست AM ، دایرهٔ محیط بر مثلث ABCرا در نقطهٔ $A_۱$ قطع می کند. ثابت کنید،$\frac{BM.CM}{A_۱M} \ge ۲r$ ، که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است. برابری، وقتی که M بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث منطبق باشد، به دست می‌آید.

۴.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۵۲. اگر نقطهٔ M درون مثلث ABC چنان باشد که $B\hat{M}C = ۹۰^\circ + \frac{B\hat{A}C}{۲}$ و AM از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BMC بگذرد، ثابت کنید، M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

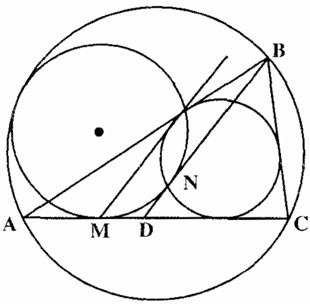
۶۵۳. در مثلث ABC، $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$ ، I مرکز دایرهٔ محاطی ،Oمرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست. ثابت کنید که I در درون مثلث BOH قرار دارد.



۶۵۴. در مثلث ABC، پاره‌خطهایی به طول $AM = CN = P$ ، که در آنها P نصف محیط مثلث است. روی نیمخطهای AB و CB جدا شده‌اند.(B بین A و M و بین C و N قرار دارد). فرض کنید K نقطه‌ای روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC و مقابل قطری نقطهٔ B باشد. ثابت کنید که عمود وارد از K بر MN، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث می گذرد.

۶۵۵. ثابت کنید که اگر طول یک ارتفاع مثلثی، $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد، آن‌وقت خط راست وصل کنندهٔ پای عمودهای وارد از پای این ارتفاع بر ضلعهایی که آن‌را در بر دارند، از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

۶۵۶. ثابت کنید، خط راستی که مرکز دایره‌های محاطی داخلی و محیطی مثلثی مفروض را به هم وصل می‌کند، خط اویلر مثلثی با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی مثلث مفروض با ضلعهای آن است.



۶۵۷. در مثلث ABC، نقطهٔ D روی ضلع AC اختیار شده است. دایرهٔ مماس بر پاره‌خط AD در نقطهٔ M، بر پاره‌خط BD و بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر بگیرید. ثابت کنید، خط راستی که از نقطهٔ M به موازات BD می‌گذرد، بر دایرهٔ محاطی مثلث ABC مماس است.

۶۵۸. مثلث ABC داده شده است. پاره‌خطهای AK و CM، که با AC برابرند بترتیب روی نیمخطهای AB و CB جدا شده‌اند. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BKM، برابر است با فاصلهٔ بین مرکز دایره‌های محیطی و محاطی مثلث ABC و خط راست KM بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به هم وصل می‌کند، عمود است.

۶۵۹. هرگاه در مثلثی یک ضلع مساوی با نصف مجموع دو ضلع دیگر باشد، نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل به این ضلع بر خطی که مرکز دایرهٔ محاطی را به مرکز دایرهٔ محیطی وصل کند، عمود است.

۱۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۰. ثابت کنید که اگر طول ضلعهای مثلثی یک تصاعد عددی تشکیل دهند، آن‌گاه :

الف) شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، برابر است با $\frac{۱}{۳}$ طول ارتفاع وارد بر ضلع با طول میانی ؛

ب) خطی که مرکزثقل و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را به هم وصل می‌کند، موازی ضلع با طول میانی است ؛

ج) نیمساز زاویهٔ درونی روبه‌رو به ضلع با طول میانی، بر خطی که مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث را به هم وصل می‌کند، عمود است ؛

د) برای هر نقطه‌روی این نیمساز، مجموع فاصله‌های آن تاضلعهای مثلث‌ثابت است ؛

هـ) مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، وسطهای بزرگترین و کوچکترین ضلع و رأس زاویهٔ تشکیل شده با آنها، بر یک دایره واقعند.

۶۶۱. ۱. از مثلث ABC طول ضلع BC و ارتفاع AH و شعاع دایرهٔ محیطی در دست است. آن‌را رسم کنید.

۲. از رأسهای B و C عمودهای BM و CN را بر قطر AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

الف) $BM \times CN = BH \times CH$ و $AH^2 = AM \times AN$

ب) دو مثلث BMH و CHN با یکدیگر و دو مثلث ABC و HMN نیز با هم متشابه‌اند.

ج) دایره‌های محیطی دو مثلث BHM و CHN از A می‌گذرد.

۳. اگر مثلث MHN قائم‌الزاویه فرض شود ($\hat{H} = 90^\circ$) و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC مساوی با R و طول ضلع AB مساوی با $\frac{6R}{5}$ باشد، طول ضلعهای مثلث MHN و شعاع دایرهٔ محاطی این مثلث را حساب کنید.

۶۶۲. فرض کنید a، b و c معرف طول ضلعهای مثلثی باشند و $a+b+c=2p$. فرض کنید G نقطهٔ میانه‌ای مثلث باشد و O، I و I_a بترتیب مرکز دایره‌های محیطی، محاطی و محاطی خارجی (دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC) آن باشند، R، r و r_a بترتیب شعاعهای آنها هستند. ثابت کنید، رابطه‌های زیر درستند:

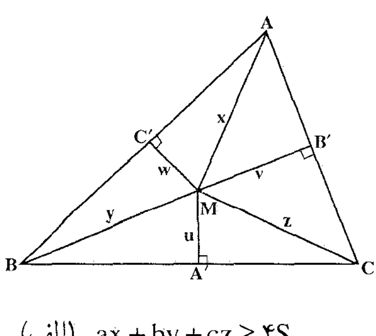
(الف) $a^2+b^2+c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

(ب) $OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$

(پ) $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2+5r^2-16Rr)$

(ت) $II_a^2 = 4R(r_a - r)$

۶۶۳. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث ABC باشد؛ x، y و z فاصله‌های نقطهٔ M تا رأسهای A، B و C؛ u، v و w فاصله‌های نقطهٔ M بترتیب تا ضلعهای BC، CA و AB؛ a، b و c طول ضلعهای مثلث؛ S مساحت آن، R و r بترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی هستند. نابرابریهای زیر را ثابت کنید:



(الف) $ax+by+cz \ge 4S$

(ب) $x+y+z \ge 2(u+v+w)$ (نابرابری اردیش)

(پ) $xu+yv+zw \ge 2(uv+vw+wu)$

(ت) $۲(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}) \le \frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}+\frac{۱}{w}$

(ث) $xyz \ge \frac{R}{۲r}(u+v)(v+w)(w+u)$

(ج) $xyz \ge \frac{۴R}{r}uvw$

(چ) $xy+yz+zx \ge \frac{۲R}{r}(uv+vw+wu)$

۶۶۴. در مثلث ABC داریم: $b+c=۲a$ ، ثابت کنید:

۱. $h_a = ۳r$

۲. $r_a = h_a$

۳. $\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۲}{h_a}$

۴. $\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۲}{r_a}$

۵. $d_a^۲ = \frac{۳}{۴}bc$

۶. $d_a^۲ = \frac{۳}{۲}Rr_a$

۷. $۱۲m_a^۲ + ۱۶d_a^۲ = ۲۱a^۲$

۸. تصویر m_a روی a برابر $b-c$ می‌باشد.

۹. تصویر d_a روی ضلعهای b یا c برابر $\frac{۳}{۴}a$ می‌باشد.

۱۰. اگر O' مرکز دایره به شعاع r_a باشد، ثابت کنید $AO' = ۲d_a$.

۱۱. اگر M وسط BC از دایرهٔ محیطی مثلث باشد، ثابت کنید $MA = MB + MC$ بوده و مرکز دایرهٔ محیطی درونی مثلث بر وسط AM قرار دارد.

۱۲. به فرض معلوم بودن a و m_a از این مثلث، آن‌را رسم کنید.

۶۶۵. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی، AA' ، BB' و CC' یکدیگر را در O قطع کرده‌اند.

۱. OA، OB و OC را بر حسب ضلعها حساب کنید.

۲. ثابت کنید $\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=۲$

۳. ثابت کنید $OA.OB.OC = ۴Rr^۲$

۴. ثابت کنید اگر $OB.OC = a.OA$ باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

۵. ثابت کنید تصویر AA' روی ضلع b برابر $\frac{۲p(p-a)}{b+c}$ باشد.

بخش ۵

● رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر

۱.۵. تعریف
۲.۵. زاویه
۱.۲.۵. اندازهٔ زاویه
۳.۵. ضلع
۱.۳.۵. اندازهٔ ضلع
۴.۵. ارتفاع، میانه، نیمساز
۱.۴.۵. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز
۵.۵. پاره‌خط
۱.۵.۵. اندازهٔ پاره خط
۲.۵.۵. نسبت پاره‌خطها
۳.۵.۵. تساوی پاره‌خطها
۶.۵. شعاع
۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع
۲.۶.۵. نسبت شعاعها
۷.۵. محیط
۱.۷.۵. اندازهٔ محیط مثلث

۸.۵. مساحت

۱.۸.۵. اندازهٔ مساحت مثلث

۲.۸.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

۳.۸.۵. نسبت مساحتها

۹.۵. رابطه‌های متری

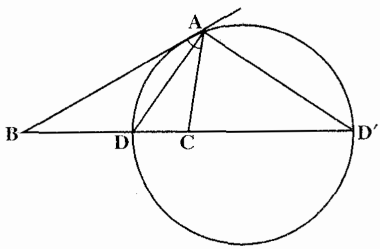
۱۰.۵. سایر مسأله های مربوط به این بخش

۱۱.۵. مسأله های ترکیبی

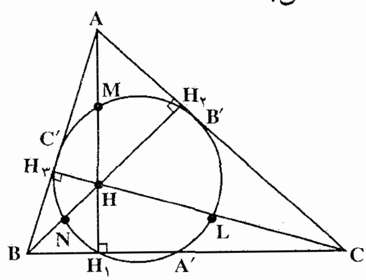
بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر

۱.۵. تعریف

منظور از دایره‌های دیگر، هر دایره‌ای غیر از دایرهٔ محیطی و دایره‌های محاطی مثلث می باشد. از مهمترین این دایره‌ها، دایره‌های آپولونیوس و دایرهٔ نه نقطه یا دایرهٔ اویلر یا دایرهٔ فوئرباخ، و دایرهٔ بروکار و دایرهٔ توکر می‌باشند.



دایره‌های آپولونیوس. مثلث ABC را در نظر می گیریم. پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A را D و D′ می نامیم. دایرهٔ به قطر DD′ را که از رأس A نیز می گذرد، یک دایرهٔ آپولونیوس مثلث ABC می‌نامند. این دایره مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر $\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$ است. نظیر این دایره، دو دایرهٔ دیگر نیز وجود دارد که دو سر قطر این دایره‌ها پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی B و C از مثلث ABC می‌باشند.



دایرهٔ نه نقطه یا دایرهٔ اولر یا دایرهٔ فوئرباخ. در هر مثلث، نه نقطهٔ: وسطهای ضلعهای مثلث، پای ارتفاعها و وسط پاره‌خطهایی که مرکز ارتفاعی مثلث را به رأسها وصل می کنند، روی یک دایره قرار دارند. مرکز این دایره روی خط اولر و شعاع آن برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث یعنی $\frac{R}{۲}$ است.

۲.۵. زاویه

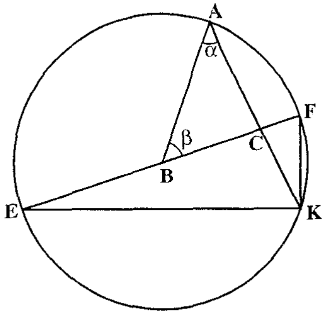
۱.۲.۵. اندازهٔ زاویه

۶۶۶. در مثلث ABC، AD و CE نیمساز زاویه‌ها هستند. دایرهٔ محیط بر مثلث BDE از مرکز دایرهٔ محاط در مثلث ABC می گذرد. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{B}C$ را بیابید.

۶۶۷. مثلث ABC که در آن $B\hat{A}C=\frac{\pi}{۶}$، مفروض است. دایرهٔ به مرکز A و شعاع برابر با ارتفاع وارد بر BC، مثلث را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم می کند. اندازهٔ بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC را پیدا کنید.

۶۶۸. در مثلث ABC، $\hat{B}=۶۰^\circ$ و نیمساز زاویهٔ A، BC را در M قطع می کند. نقطهٔ K بر ضلع AC طوری اختیار می‌شود که $A\hat{M}K=۳۰^\circ$ است. $O\hat{K}C$ را پیدا کنید که در آن O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC است.

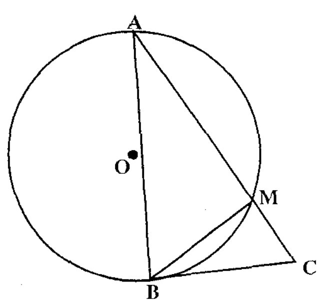
۶۶۹. در مثلث ABC : $B\hat{A}C=\alpha$ و $A\hat{B}C=\beta$. دایره‌ای به مرکز B از A می گذرد و خط AC را در نقطهٔ K متمایز از A، و خط BC را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. اندازهٔ زاویه‌های مثلث EKF را پیدا کنید.



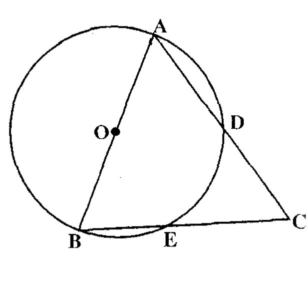
۳.۵. ضلع

۱.۳.۵. اندازهٔ ضلع

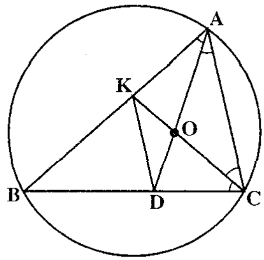
۶۷۰. دایره‌ای از رأسهای A و B مثلث ABC عبور کرده و بر ضلع BC در نقطهٔ B مماس می‌شود. ضلع AC به وسیلهٔ دایره به دو قطعهٔ AM و MC طوری تقسیم می‌شود که $AM=MC+BC$ درمی‌آید. اگر $AC=۴m$ باشد، در آن صورت BC را بیابید.



۶۷۱. ضلع AB از مثلث ABC قطر دایره‌ای محسوب می‌شود که ضلع AC را درنقطهٔ D و ضلع BC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر $AB=۳cm$ ، $AD:DC=۱:۱$ و $BE:EC=۷:۲$ باشد، آن‌گاه AC و BC را به‌دست آورید.



۶۷۲. نیمسازهای AD و CK از مثلث ABC درنقطهٔ O همدیگر را قطع کرده‌اند و $KD=1cm$ است. اگر نقطهٔ B روی دایرهٔ محیطی مثلث KDO قرار داشته باشد، زاویه‌ها و طول دو ضلع دیگر مثلث KDO را به‌دست آورید.

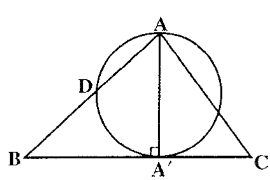


۶۷۳. اگر در مثلث ABC رأس C گرانیگاه M و میانگاههای ضلعهای AC و BC روی یک دایره واقع باشند طول ضلعهای a، b و c را بیابید.

۴.۵. ارتفاع،میانه، نیمساز

۱.۴.۵. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۶۷۴. دایره‌ای به قطر ارتفاع AA' از مثلث ABC رسم کرده‌ایم. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کرده است. درصورتی که $BA'=12$ و $BD=8$ باشد، اندازهٔ ارتفاع AA' را بیابید.

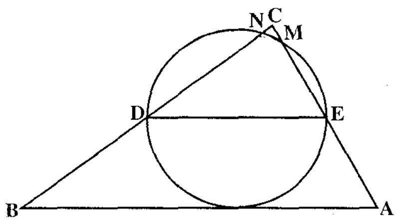


۶۷۵. در مثلث ABC، نقطهٔ D میانگاه AC و E میانگاه ضلع BC است. دایرهٔ محیط بر مثلث CDE از گرانیگاه مثلث ABC عبور می‌کند. اگر $AB=c$ باشد، آن‌گاه طول میانهٔ CK را به‌دست آورید.

۶۷۶. در مثلث ABC، $AB=4$ و $AC=3$ است. وتر مشترک دو دایره به قطرهای AB و AC به طول ۲ است. اندازهٔ ضلع BC و نیمساز زاویهٔ درونی A را بیابید.

۵.۵. پاره خط

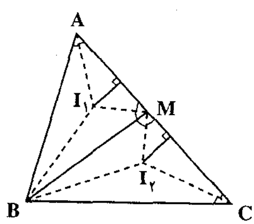
۱.۵.۵. اندازه پاره‌خط



۶۷۷. در مثلث ABC، دایره‌ای که به قطر میانخط DE، موازی با AB، رسم می‌شود، ضلعهای AC و BC را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. اگر $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$، MN را پیدا کنید.

۶۷۸. در مثلث ABC، روی BC بزرگترین ضلع مثلث برابر با b، نقطه‌ای مانند M انتخاب می‌شود. کوتاهترین فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BAM و ACM را پیدا کنید.

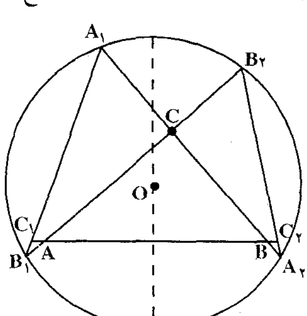
۲.۵.۵. نسبت پاره‌خطها



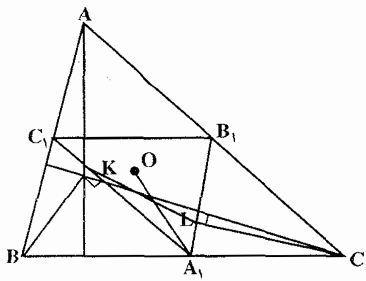
۶۷۹. در مثلث ABC : $AB = ۱۲$، $BC = ۱۳$ و $CA = ۱۵$. بر ضلع AC، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار شده است که شعاعهای دایره‌های محاط در مثلثهای ABM و BCM برابرند. نسبت AM:MC را پیدا کنید.

۳.۵.۵. تساوی پاره‌خطها

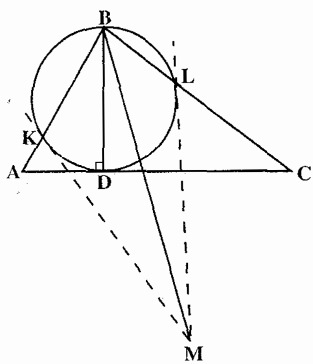
۶۸۰. مثلث ABC و دایرهٔ به مرکز O در یک صفحه مفروضند. نقطهٔ O از دو رأس A و B به یک فاصله است. این دایره ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 و ضلع CA را در نقطه‌های B_1 و B_2 قطع می‌کنند. خطهای A_1B_1 و A_2B_2 ضلع AB را در نقطه‌های C_1 و C_2 قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطه‌های C_1 و C_2 نسبت به وسط پاره‌خط AB قرینهٔ یکدیگرند.



۶۸۱. در مثلث ABC اگر D و E بترتیب پای میانه و پای نیمساز رسم شده از A باشند، دایرهٔ محیطی مثلث ADE ضلع AB را در نقطهٔ B' و AC را در نقطهٔ C' قطع می‌کند. ثابت کنید: $BB' = CC'$



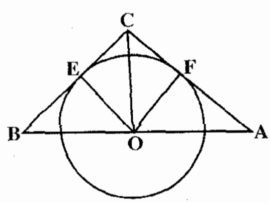
۶۸۲. مثلث ABC داده شده است. A_1، B_1 و C_1 وسط ضلعهای BC، CA و AB هستند؛ K و L بترتیب پای عمودهای وارد از رأسهای B و C بترتیب بر خطهای راست A_1B_1 و A_1C_1 هستند. O مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است. ثابت کنید که خط A_1O، پاره‌خط KL را نصف می‌کند.



۶۸۳. در مثلث ABC، دایره‌ای که به قطر ارتفاع BD رسم شده است. ضلعهای AB و BC را بترتیب در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. خطهای مماس بر دایره در نقطه‌های K و L در نقطهٔ M متقاطعند. ثابت کنید که خط BM، ضلع AC را نصف می‌کند.

۶.۵. شعاع

۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع

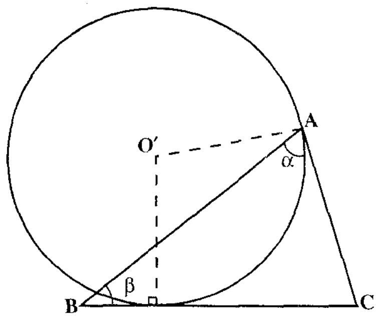


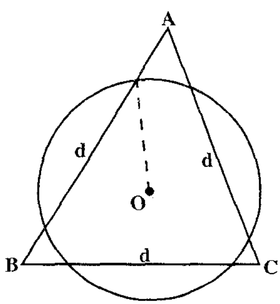
۶۸۴. ضلعهای مثلثی $a = ۱۳$، $b = ۱۴$ و $c = ۱۵$ می‌باشد. دو ضلع a و b بر دایره‌ای مماس هستند که مرکز آن روی ضلع سوم است. شعاع این دایره را تعیین کنید.

۶۸۵. AD و AD' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A از مثلث ABC می‌باشند. (D و D' پای نیمسازها می‌باشند.) مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ADD'.

۶۸۶. دایره‌ای به شعاع r، از رأسهای A و B مثلث ABC می گذرد و ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AB = c$ و $AC = b$، شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های D، A و C می گذرد.

۶۸۷. در مثلث ABC : $BC = a$، $\hat{A} = \alpha$ و $\hat{B} = \beta$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که بر ضلع AC در نقطهٔ A، و بر ضلع BC مماس است.



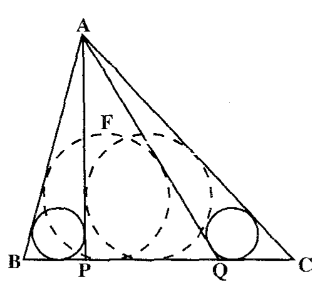


۶۸۸. در مثلث ABC : $BC = a$، $\hat{A} = \alpha$ و $\hat{B} = \beta$. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که همهٔ ضلعهای مثلث را قطع کند و روی هریک از آنها وتری به طول d جدا می‌کند.

۶۸۹. ضلعهای مثلثی برابر با ۶cm و ۷cm و ۹cm است. دایره‌های به مرکزهای هریک از رأسهای مثلث رسم کرده‌ایم، به‌طوری که دایره‌هایی که به مرکزهای دو انتهای ضلع کوچکتر رسم کرده‌ایم با یکدیگر مماس خارج بوده و نسبت به دایرهٔ سوم مماس داخل باشند. مطلوب است محاسبهٔ شعاع هریک از سه دایره.

۲.۶.۵. نسبت شعاعها

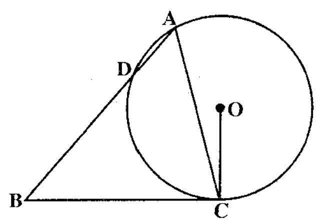
۶۹۰. فرض کنید P و Q دو نقطه روی ضلع BC از مثلث ABC باشند؛ به‌نحوی که به شعاع دایرهٔ محاطی دو مثلث ABP و AQC با هم برابر باشند. ثابت کنید: شعاع دایره‌های محاطی ABQ و APC نیز باهم برابر خواهند شد.



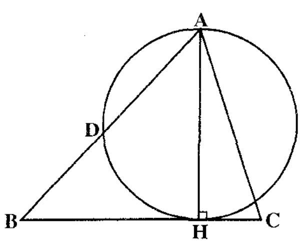
۷.۵. محیط

۱.۷.۵. اندازهٔ محیط مثلث

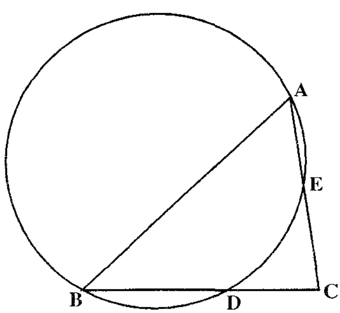
۶۹۱. دایره‌ای که بر دو رأس A و C از مثلث ABC می گذرد، در نقطهٔ C بر ضلع BC مماس است. این دایره ضلع AB را به دو قطعهٔ ۲ و ۶ سانتی‌متری تقسیم می کند. اگر AC = ۶cm باشد، اندازهٔ محیط مثلث را بیابید.



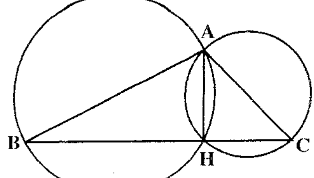
۶۹۲. دایرهٔ به قطر ارتفاع AH ازمثلث ABC ضلعهای AB و AC را بترتیب در D و E قطع کرده است. اگر BH = ۱۲ ، CH = ۴ و BD = ۸ باشد، اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۶۹۳. دایره‌ای که بر دو رأس A و B می گذرد، ضلعهای BC و AC را بترتیب درنقطه‌های D و E قطع می کند. اگر CD = ۳ ، DB = ۵ ، CE = ۴ و AB = ۹ باشد، اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



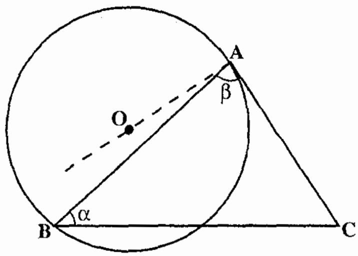
۶۹۴. در مثلث ABC، AB = ۸cm و AC = ۶cm است. دو دایره به قطرهای AB و AC رسم می کنیم. اگر طول وتر مشترک این دو دایره برابر ۴cm باشد، اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۸.۵. مساحت

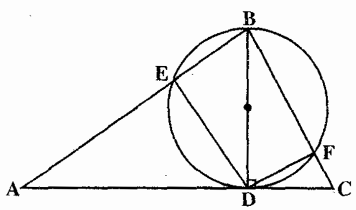
۱.۸.۵. اندازهٔ مساحت مثلث

۶۹۵. دایره‌ای به شعاع R، از رأسهای A و B مثلث ABC می گذرد و بر خط AC در نقطهٔ A مماس است. اگر $\hat{B}=\alpha$ و $\hat{A}=\beta$، مساحت مثلث را پیدا کنید.

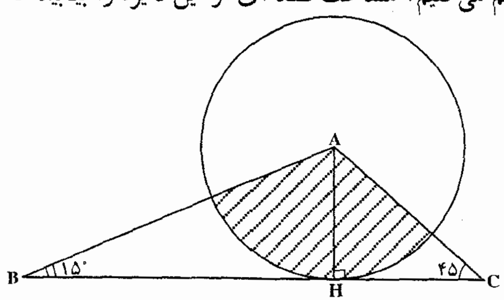


۲.۸.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

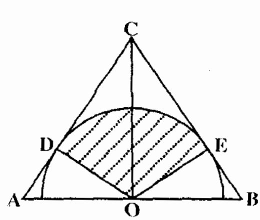
۶۹۶. در مثلث ABC، $\hat{C}=\gamma$، $\hat{B}=\beta$ و $\hat{A}=\alpha$، و ارتفاع $BD=h$ را داریم. روی ضلع BD به‌عنوان قطر، دایره‌ای رسم می کنیم و این دایره ضلعهای AB و BC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع می کند. مساحت چهارضلعی BFDE را محاسبه کنید.



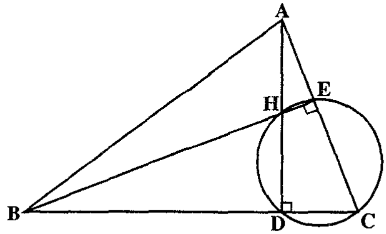
۶۹۷. قاعدهٔ مثلثی برابر a و زاویه های مجاور قاعده برابر 15° و 45° است. رأس مقابل به این قاعده را مرکز دایره‌ای به شعاع ارتفاع مرسوم از این رأس در نظر گرفته و آن دایره را رسم می کنیم. مساحت قطعه‌ای از این دایره را بیابید که در درون مثلث واقع شده است.



۶۹۸. دایره‌ای بر ضلعهای AC و BC از مثلث ABC بترتیب در نقطه های D و E مماس بوده و مرکز آن روی ضلع AB قرار دارد. اگر $BC=13cm$، $AB=14cm$ و $AC=15cm$ باشد، مساحت قطاع DOE را محاسبه کنید.

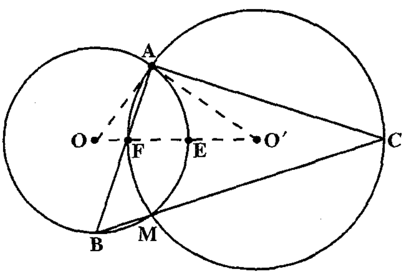


۶۹۹. در مثلث ABC، $\hat{A}=\alpha$ ، $\hat{B}=\beta$ و $AC=b$ است. ارتفاعهای AD و BE همدیگر را در نقطهٔ H قطع می‌کنند. دایره‌ای را بر مثلث HDE محیط می‌کنیم. مساحت مقطع دایره و مثلث را بیابید.



۳.۸.۵. نسبت مساحتها

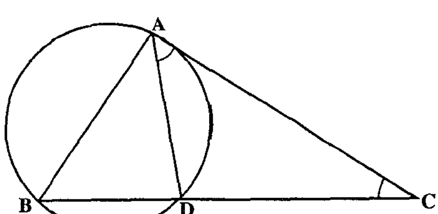
۷۰۰. در مثلث ABC نقطهٔ متغیر M را روی BC اختیار کرده، دایره‌های محیطی مثلثهای MAB و MAC را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید وقتی که M تغییر مکان دهد، نسبت مساحتهای دو دایرهٔ مزبور ثابت می‌ماند.



۷۰۱. در مثلث ABC می‌دانیم که $AC:BC=۱:۲$ و $A\hat{C}B=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ است. روی ضلع AC نقطهٔ D را طوری اختیار می‌کنیم که $AC=CD$ باشد. نسبت مساحت دایرهٔ محیطی مثلث ACD را بر مساحت دایرهٔ محاطی مثلث ABD محاسبه کنید.

۹.۵. رابطه‌های متری

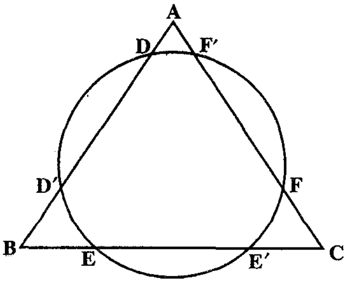
۷۰۲. طول ضلعهای مثلث ABC را a، b و c می‌نامیم و دایره‌ای رسم می‌کنیم که از نقطهٔ B گذشته در نقطهٔ A با خط AC مماس باشد. این دایره ضلع BC را در نقطه ای مانند D قطع می‌کند. ثابت کنید پاره‌خط AD جزء چهارم تناسب مابین a، b و c است.



۷۰۳. دایره‌ای ضلعهای مثلث ABC را بترتیب زیر قطع کرده است. ضلع AB را در D و D'، ضلع BC را در E و E' و ضلع AC را در F و F'.

ثابت کنید:

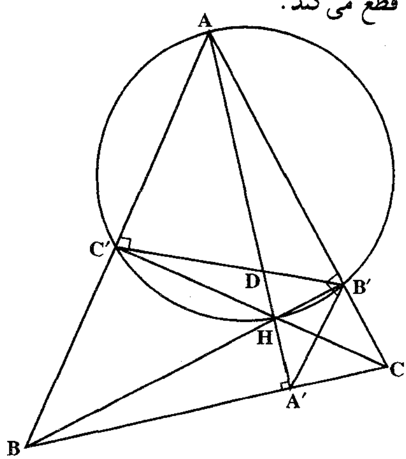
$$\frac{AD.BE.CF}{BD.CE.AF}\times\frac{AD'.BE'.CF'}{BD'.CE'.AF'}=1$$



۷۰۴. ثابت کنید مربع طول مماسی که از یک رأس یک مثلث به دایرهٔ نه نقطهٔ آن رسم می‌شود، برابر است با ارتفاع نظیر آن رأس، ضرب در فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث از ضلع مقابل به آن رأس.

۷۰۵. مثلث ABC داده شده است. AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای آن هستند. ثابت کنید که خطهای اویلر مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C در یک نقطه مانند P از دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث متقاطعند. به‌طوری که طول یکی از پاره‌خطهای PA_1، PB_1 و PC_1 برابر با مجموع طولهای دوتای دیگر است (مسألهٔ تبولت).

۷۰۶. در مثلث ABC سه ارتفاع AA'، BB' و CC' در نقطهٔ H همرسند. خط $B'C'$ ارتفاع AA' را در نقطهٔ D قطع می‌کند.

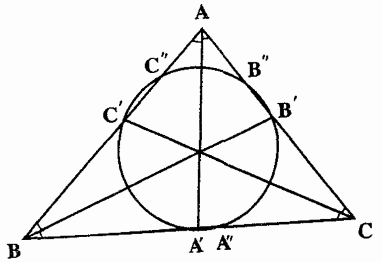


۱. ثابت کنید چهارضلعی‌های $BC'B'C$ و $A'HB'C$ محاطی بوده و نتیجه بگیرید که BB' نیمساز زاویهٔ $A'B'C'$ است.

۲. ثابت کنید $DH.AA' = AD.HA'$

۷۰۷. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و G مرکز ثقل آن و r'، r'' و r'''، شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCG، CAG و ABG و r شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی که از میانه‌های مثلث ABC ساخته می‌شود باشد، ثابت کنید:

$$4Rr^2 = 3r'r''r'''$$



۷۰۸. دایره‌ای از پای نیمسازهای مثلث ABC گذشته است. ثابت کنید که طول یکی از وترهای تشکیل شده با تقاطع این دایره و ضلعهای مثلث، برابر با مجموع طولهای دو وتر دیگر است.

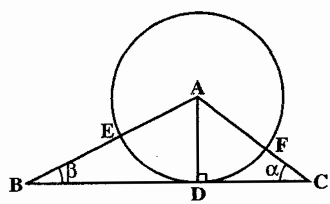
۷۰۹. فرض می‌کنیم M نقطه‌یی واقع بر ضلع AB از ΔABC باشد، فرض می‌کنیم r_1 و r_2 و r بترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای AMC، BMC و ABC باشند، و فرض می‌کنیم q_1، q_2 و q شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی‌ای از همین مثلثها واقع در زاویهٔ ACB باشند. ثابت کنید که:

$$\frac{r_1}{q_1}.\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$$

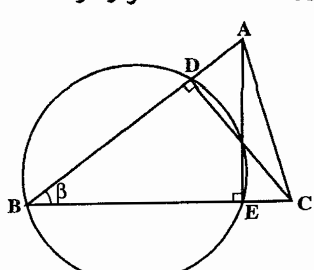
دوازدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۰

۱۰.۵. سایر مسأله های مربوط به این بخش

۷۱۰. در مثلث ABC ارتفاع ADو دایره ای به شعاع AD و مرکز A رسم می‌کنیم. اگر $\hat{B}=\beta$، $BC=a$ و $\hat{C}=\gamma$ باشد، طول کمانی از این دایره را پیدا کنید که در داخل مثلث قرار دارد.



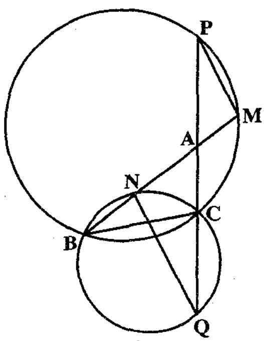
۷۱۱. در مثلث ABC، ارتفاعهای CD و AE را رسم کرده‌ایم. دایره‌ای بر مثلث BDE محیط شده است. اگر $AC=b$ و $A\hat{B}C=\beta$ باشد، آن‌گاه طول کمانی از این دایره را پیدا کنید که در درون مثلث ABC قراردارد.



۷۱۲. روی ضلع AB از مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه M_1 را انتخاب کرده‌ایم. به مرکز نقطهٔ A و به شعاع برابر AM_1، کمان M_1M_2 را در درون مثلث ABC رسم کرده‌ایم $(M_2 \in AC)$. سپس، به مرکز نقطهٔ C و به شعاع برابر CM_2، کمان M_2M_3 را در درون مثلث ABC رسم کرده‌ایم $(M_3 \in BC)$. سرانجام، به مرکز نقطهٔ B و به شعاع برابر BM_3، کمان M_3M_4 را تا برخورد با AB رسم کرده‌ایم و غیره. عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که کمان بسته شود. طول این منحنی بسته را پیدا کنید، به‌شرطی که طول ضلعهای مثلث و اندازهٔ زاویه‌های آن معلوم باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۷۱۳. مثلث ABC را در نظر گرفته، دو دایره رسم می‌کنیم که از نقطه‌های B و C بگذرند. دایرهٔ اول خط AB را در M و خط AC را در P قطع می‌کند و دایرهٔ دوم خط AB را در N و خط AC را در Q تلاقی می‌نماید. ثابت کنید که $MP \parallel NQ$.



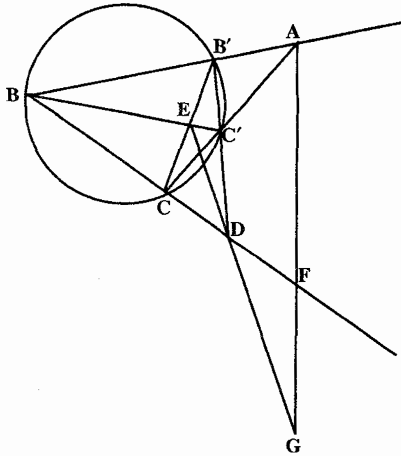
۷۱۴. مثلث ABC مفروض است. به مرکز B دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر ضلع AC مماس باشد. از رأسهای A و C، مماسهای AM و CP را بر این دایره رسم می‌کنیم. خط راست MP، خط راست AB را در نقطهٔ E و خط راست BC را در نقطهٔ H قطع می‌کند. ثابت کنید، AH و CE، ارتفاعهای مثلث ABC هستند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

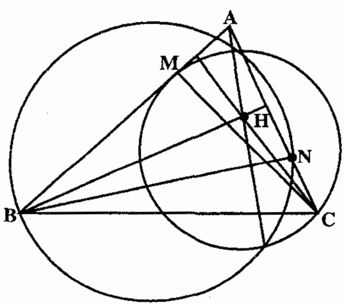
۷۱۵. دایرهٔ K، ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب در نقطه‌های A_1 و A_2 ؛ B_1 و B_2 ؛ C_1 و C_2 قطع کرده است. از نقطه های A_1، B_1 و C_1 عمودهایی بترتیب بر BC، AC و AB وارد می‌کنیم. می‌دانیم، این سه عمود در نقطه‌ای مثل M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید: عمودهای وارد از نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر ضلعهای BC، AC و AB هم، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۴

۷۱۶. دایره‌ای ضلع AB از مثلث ABC را در نقطه‌های C_1 و C_2، ضلع CA را در نقطه‌های B_1 و B_2 و ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم برسند، خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه همرسند.

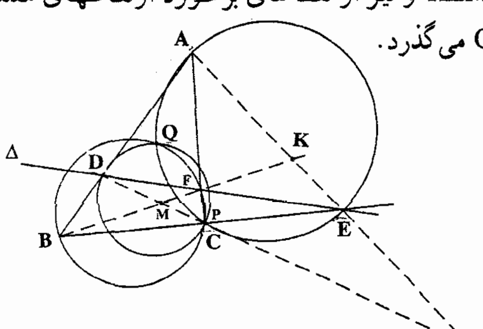


۷۱۷. مثلث ABC مفروض است. دایرهٔ گذرنده بر BC، ضلع AB را در ′B و AC را در ′C قطع می‌کنند. BC و ′B′C همدیگر را در D و ′BC و ′CB همدیگر را در E قطع می‌کنند. نشان دهید DE بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۷۱۸. نقطه‌های M و N بترتیب روی خطهای AB و AC اختیار شده‌اند. ثابت کنید وتر مشترک دو دایره به قطرهای CM و BN، از محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد.

۷۱۹. مثلث ABC داده شده است. خط راستی، خطهای راست BC ،AB و CA را بترتیب در نقطه‌های E ،D و F قطع می‌کند. خطهای AE ،DC و BF، مثلثی مانند KLM تشکیل می‌دهند. ثابت کنید که دایره‌های به قطر AE ،DC و BF، در دو نقطهٔ P و Q متقاطعند. (این دایره‌ها دو به دو متقاطع فرض شده‌اند) و خط PN از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLM و نیز از نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE ،DAF و CEF می‌گذرد.



۷۲۰. فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. ثابت کنید دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، بر کلیهٔ دایره های محاطی و محاطی خارجی مثلثهای BHC ،AHB و CHA مماس است.

۷۲۱. فرض کنید D نقطه ای دلخواه روی ضلع BC از مثلث ABC باشد. فرض کنید E و F نقطه‌هایی بر ضلعهای AC و AB باشند، به‌طوری که DE با AB و DF با AC موازی است. دایره‌ای که از D، E و F می گذرد، BC، CA و AB را برای بار دوم بترتیب در نقطه‌های D_1، E_1 و F_1 قطع می کند. فرض کنید M و N بترتیب معرف نقطه‌های برخورد DE و F_1D_1، و DF و D_1E_1 باشند. ثابت کنید که M و N بر هم‌میانه‌ای که از رأس A خارج می‌شود، قرار دارند. اگر D بر پای این هم میانه منطبق باشد، آن وقت، دایره‌ای که از D، E و F می‌گذرد، بر ضلع AC مماس است. (این دایره، دایرهٔ توکر نامیده می‌شود).

۷۲۲. دو نقطه روی هر ضلع مثلثی طوری اختیار می‌شوند که کلیهٔ شش پاره‌خطی که هر نقطه را به رأس مقابل آن وصل می کنند، قابل انطباقند. ثابت کنید که وسطهای شش پاره‌خط روی یک دایره قرار دارند.

۷۲۳. AC بزرگترین ضلع مثلث ABC است. روی آن $CA_1 = CB$ و $AC_1 = AB$ را جدا کرده ایم. همچنین روی ضلعهای AB و CB پاره خطهای راست، $CC_2 = CC_1$ و $AA_2 = AA_1$ را جدا کرده‌ایم. ثابت کنید نقطه‌های A_1، A_2، C_1 و C_2 روی محیط یک دایره‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۷۲۴. ثابت کنید، برای هر مثلث ABC، سه دایره با شعاعهای برابر وجود دارد که یکی از آنها بر ضلعهای AB و BC، دومی بر ضلعهای BC و AC و سومی بر ضلعهای AC و AB مماس باشند و سه دایره، درست یک نقطهٔ مشترک داشته باشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۴

۷۲۵. دایره‌ای در درون مثلث ABC طوری رسم شده که بر ضلعهای AB و BC مماس است و در ضمن از نقطهٔ P مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می گذرد. دایرهٔ دیگری از نقطه‌های A، P و C گذرانده‌ایم. ثابت کنید این دو دایره بر هم مماسند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۷۲۶. در مثلث ABC ارتفاعهای BB' و CC' یکدیگر را در H قطع می کنند.

۱. ثابت کنید که وسطهای قطعه‌های BH و CH و وسطهای ضلعهای AB و AC رأسهای یک مستطیل هستند.

۲. ثابت کنید که اگر این مستطیل مربع باشد، قوت نقطهٔ H (قدرمطلقش) نسبت به دایره‌یی به قطر AA' دو برابر مساحت مثلث BHC است.

۱۱.۵. مسأله های ترکیبی

۷۲۷. در مثلث ABC قاعدهٔ $BC = a$ از حیث طول و وضع ثابت، و بین ضلعهای آن رابطهٔ روبه رو برقرار است:
$2a^2 = b^2 + c^2$

۱. مطلوب است تعیین مکان هندسی رأس A.
۲. اگر B' ، C' و G بترتیب وسطهای ضلعهای AC و AB و مرکز ثقل مثلث باشند، ثابت کنید که چهارضلعی $ABGC'$ محاطی است.
۳. ثابت کنید که دو دایرهٔ ABG و ACG بر ضلع BC مماس هستند.
۴. ثابت کنید دایره‌یی که از رأس A و از پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A می‌گذرد از G نیز عبور می‌نماید.
۵. ثابت کنید که مجموع مجذورات طول سه میانهٔ مثلث همواره مقدار ثابتی است.
۶. اگر H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث باشد، ثابت کنید:

$$2\overline{AH}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2$$

۷۲۸. در مثلث ABC روی نیمساز داخلی زاویهٔ BAC نقطه‌های P و Q را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = AB \times AC$ باشد:
۱. ثابت کنید که چهار نقطهٔ B، C، P و Q روی یک دایره قرار دارند.
۲. فرض کنیم O مرکز این دایره باشد: خط BC خط OA را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرهٔ به قطر OD از نقطه های P و Q می گذرد.
۳. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید:

$$\overline{MB}^2 = MP \times MQ \quad \text{و} \quad MP + MQ = AB + AC$$

۴. فرض می کنیم رأسهای B و C ثابت بمانند و رأس A روی دایرهٔ ثابتی که از B و C می‌گذرد حرکت کند. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌های P و Q.

۷۲۹. سه دایره در نظر بگیرید که هرکدام از آنها یک رأس مثلثی و پاهای دونیمسازی (داخلی و خارجی) که از این رأس خارج می‌شوند، می‌گذرد (این دایره‌ها، دایره‌های آپولونیوس نامیده می‌شوند). ثابت کنید که: (الف) این سه دایره در دو نقطهٔ (M_1 و M_2) متقاطعند؛ (ب) خط M_1M_2 از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می گذرد؛ (ج) پای عمودهای وارد از نقطه های M_1 و M_2 بر ضلعهای مثلث، رأسهای دو مثلث متساوی‌الاضلاع محسوب می‌شوند.

۷۳۰. روی قاعدهٔ BC از مثلث غیرمشخص ABC نقطهٔ متغیر D را گرفته و دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و ACD را می کشیم.
۱. ثابت کنید نسبت بین شعاعهای این دو دایره همواره برابر مقدار ثابتی است.
۲. جای نقطهٔ D را برای هنگامی که شعاعهای این دایره‌ها کمترین مقدار ممکنه را دارا باشند، تعیین نمایید.
۳. اگر O و O' مرکزهای دو دایره باشند، ثابت کنید مثلثهای AOO' و ABC همواره متشابه‌اند.
۴. مکان هندسی تصویر A را روی OO' پیدا کنید.

راهنمایی، حل

در این مجموعه، برخی از مسأله ها حل شده‌اند، تعدادی، راهنمایی برای حل دارند، و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است تا این مجلد از دایرةالمعارف نیز بتواند، نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که حل مسأله ها و راهنماییهای ارائه شده برای حل، در تمام موارد، بهترین و یا ساده ترین راه حل یا راهنمایی نیستند، و این امکان وجود دارد که ذهنهای خلاق و جستجوگر دانش‌پژوهان محترم، به راه حلهای ساده‌تر، یا جالبتری دست یابند، و یا بتوانند قضیه‌ها و مسأله ها را تعمیم دهند.

هرچند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشد، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشد؛ بدین جهت از دانش‌آموزان، استادان، ریاضیدانان و دیگر صاحبنظران ارجمند درخواست می‌شود، نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد. ضمن سپاسگزاری ازاین لطف و همکاری و به منظور ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین راه حل برای هر مسأله، همچنین، تعمیم قضیه‌ها و مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث

۱.۱. تعریف و قضیه

۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH داریم: $BC^2 = BH^2 + CH^2$ اما $CH = b - AH$ و $BH^2 = c^2 - AH^2$، پس:

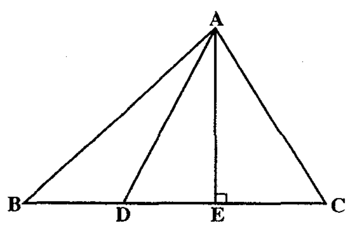
$$BC^2 = a^2 = c^2 - AH^2 + (b - AH)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b.AH$$

به همین ترتیب رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2 - 2c.AH'$ ثابت می‌شود.

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH داریم: $BC^2 = BH^2 + CH^2$، اما $BH^2 = c^2 - AH^2$ و $CH = AC + AH = b + AH$، پس:

$$BC^2 = c^2 - AH^2 + (b + AH)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2b.AH$$

به همین ترتیب رابطهٔ دیگر ثابت می‌شود.



۳. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. روی ضلع BC و بین دو نقطهٔ B و C، نقطهٔ D را انتخاب و آن را به رأس A وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.DC.BD$$

عمود AE را از رأس A برقاعدهٔ BC فرود می‌آوریم. برای مشخص بودن وضع، E را بین D و C فرض می‌کنیم. دراین صورت، زاویهٔ ADC حاده و زاویهٔ ADB منفرجه خواهد بود. با استفاده از دو قضیه‌ای که، یکی مربوط به ضلع روبه‌روی زاویهٔ منفرجه، و دیگری مربوط به ضلع روبه‌روی زاویهٔ حاده در مثلث است، به‌دست می‌آید:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD.DE \qquad (1)$$

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.DE \qquad (2)$$

دو طرف رابطهٔ (۱) را در DC و دوطرف رابطهٔ (۲) را در BD ضرب می‌کنیم.

$$AB^2.DC = BD^2.DC + AD^2.DC + 2BD.DE.DC \qquad (3)$$

$$AC^2.BD = DC^2.BD + AD^2.BD - 2DC.DE.BD \qquad (4)$$

از جمع رابطه‌های (۳) و (۴) به‌دست می‌آید:

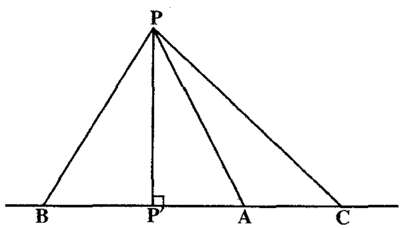
$$AB^2.DC + AC^2.BD = AD^2(BD + DC) + BD.DC(BD + DC)$$

و بالاخره، $AB^2.DC + AC^2.BD - AD^2.BC = BC.DC.BD$

در کتابهای درسی، معمولاً این قضیه را قضیهٔ استوارت می‌گویند و از آن برای محاسبهٔ بعضی خطاها در مثلث استفاده می‌کنند. از قضیه استوارت می‌توان برای محاسبهٔ طول نیمسازها یا میانه‌ها در مثلث، استفاده کرد.

نکته. این قضیه را استوارت در سال ۱۷۴۶ بیان کرد. اما این قضیه احتمالاً نخستین بار توسط ارشمیدس در سال ۳۰۰ پیش از میلاد کشف و نخستین بار توسط سیمسون در سال ۱۷۵۱ ثابت شده است.

۴. این قضیه به این شکل، مورد استفادهٔ گسترده‌ای در هندسه دارد، و یکی از اساسی‌ترین قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی است. این قضیه با روش زیر به کمک دو قضیه اساسی هندسه، یعنی قضیه‌های فیثاغورس و شال (دربارهٔ پاره خطهای جهت‌دار روی محور) ثابت می‌شود: از P عمود PP' را بر راستای AB فرود می‌آوریم و رابطهٔ استوارت را برای P' می‌نویسیم:



$$\frac{\overline{P'A}^{2}}{\overline{AB}.\overline{AC}}+\frac{\overline{P'B}^{2}}{\overline{BA}.\overline{BC}}+\frac{\overline{P'C}^{2}}{\overline{CA}.\overline{CB}}=1$$

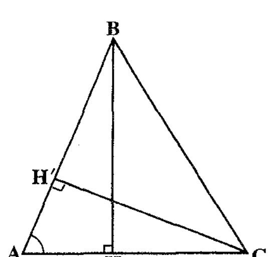
هرگاه اندازه‌های $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ را نسبت به مبدأ P' بنویسیم، این رابطه، به یک اتحاد سادهٔ جبری بدل می‌شود.

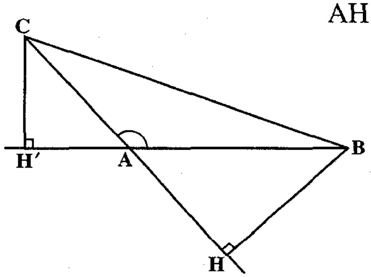
برای اثبات حکم درحالت کلی می‌توان با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\overline{PA}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}+\frac{\overline{PB}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{BA}\,.\,\overline{BC}}+\frac{\overline{PC}^{2}-\overline{PP'}^{2}}{\overline{CA}\,.\,\overline{CB}}=1$$

چون هریک از سه کسر را به دو کسر تفکیک کنیم، و سه کسری را که صورت آنها $\overline{PP'}^{2}$ است به طرف راست ببریم، با استفاده از رابطهٔ شال، رابطهٔ استوارت به‌دست می‌آید.

۵. دیدیم که اگر در مثلث ABC، $\hat{A}<90^\circ$ باشد، $a^2=b^2+c^2-2b.AH$ و اگر $\hat{A}>90^\circ$ باشد، $a^2=b^2+c^2+2b.AH$ است با توجه به این که وقتی $\hat{A}<90^\circ$ است، $AH=c\cos\hat{A}$ و هنگامی که $\hat{A}>90^\circ$ است،





$AH = c\cos B\hat{A}H = c\cos(180 - \hat{A}) = -c\cos\hat{A}$

می‌باشد. با جاگذاری مقدار AH دراین دو رابطه، هر دو رابطه به صورت $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ در می‌آیند؛ و اگر $\hat{A} = 90°$ باشد، $AH = AH' = 0$ است و داریم $a^2 = b^2 + c^2$، پس می‌توان گفت: درهر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصلضرب اندازه‌های آن دوضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن دوضلع.

این رابطه‌ها در مثلث، رابطهٔ کسینوسها یا قانون کسینوسها نامیده می‌شوند. از این رابطه‌ها می‌توان کسینوس زاویه‌های هر مثلث را برحسب ضلعهای آن مثلث، محاسبه نمود

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\ ،\ \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\ ،\ \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

نتیجه. از رابطهٔ کسینوسها می‌توان $\cos\frac{\hat{A}}{2}$، $\cos\frac{\hat{B}}{2}$، $\cos\frac{\hat{C}}{2}$، $\sin\frac{\hat{A}}{2}$، $\sin\frac{\hat{B}}{2}$، $\sin\frac{\hat{C}}{2}$، $tg\frac{\hat{A}}{2}$، $tg\frac{\hat{B}}{2}$ و $tg\frac{\hat{C}}{2}$ را برحسب ضلعهای مثلث به‌صورت رابطه‌هایی قابل محاسبه با لگاریتم به‌دست آورد. بدین ترتیب:

$$\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} \Rightarrow \cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} \Rightarrow$$

$$\cos^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4ba}$$

با فرض $a + b + c = 2p$، $b + c - a = 2(p - a)$ است، پس:

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{4p(p - a)}{4bc} = \frac{p(p - a)}{bc} \Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \qquad (1)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت: $\cos\frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}}$ و $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}}$

همچنین داریم:

$$\sin^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1 - \cos\hat{A}}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\hat{A}}{2} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\hat{A}}{2} =$$

$$\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}$$

با فرض $a+b+c=۲p$ داریم $a-b+c=۲(p-b)$ و $a+b-c=۲(p-c)$. پس :

$$\sin^{۲}\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۴(p-b)(p-c)}{۴bc}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\Rightarrow \sin\frac{\hat{A}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (۲)$$

و به همین ترتیب داریم :

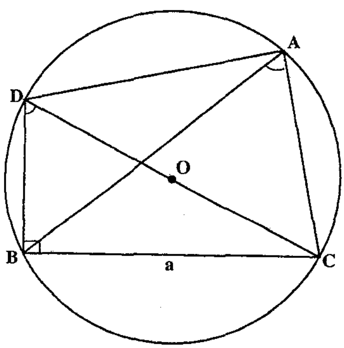
$$\sin\frac{\hat{C}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \text{ و } \sin\frac{\hat{B}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

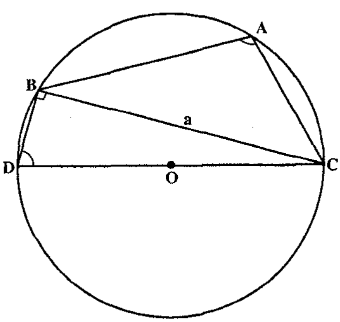
از تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$tg\frac{\hat{A}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (۳)$$

به روش مشابه داریم :

$$tg\frac{\hat{C}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \text{ و } tg\frac{\hat{B}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$





۶. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم که O مرکز دایرهٔ محیطی آن و R شعاع این دایره است. قطر CD از دایرهٔ محیطی، سپس خط BD را رسم می‌کنیم.

زاویهٔ A از مثلث چه حاده و چه منفرجه باشد، زاویهٔ CBD قائمه است و در هر دو حالت داریم : $\sin\hat{D}=\frac{BC}{DC}=\frac{a}{۲R}$

مطابق با شکل، اگر زاویهٔ A حاده باشد، دو زاویه A و D باهم برابرند، و اگر زاویهٔ A منفرجه باشد، دو زاویه A و D مکمل یکدیگرند. در هر دو حال داریم :

$\sin\hat{D}=\sin\hat{A}$

و بنابراین : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R$

در حالتی که زاویه A قائمه باشد، $BC=۲R$ است و بازهم رابطهٔ اخیر برقرار است.

روش بالا را برای دو زاویهٔ دیگر مثلث که به‌کار ببریم، به‌دست می‌آید :

$$\frac{b}{\sin\hat{B}}=۲R \quad , \quad \frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R$$

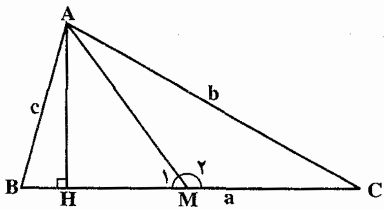
و به‌طور کلی می‌توان نوشت :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R$$

۷. در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم می‌کنیم.

$$A\hat{M}B\le ۹۰^\circ \Rightarrow c^۲=AM^۲+BM^۲-۲BM.MH$$
$$A\hat{M}C\ge ۹۰^\circ \Rightarrow b^۲=AM^۲+BC^۲+۲MC.MH$$

اما $BM=MC=\frac{a}{۲}$ است. بنابراین :



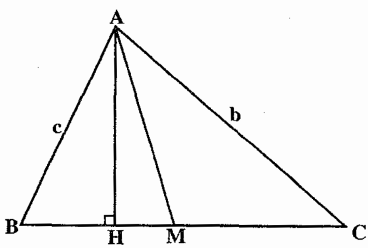
$$(۱)\ c^۲=AM^۲+\frac{a^۲}{۴}-a.MH$$

$$(۲)\ b^۲=AM^۲+\frac{a^۲}{۴}+a.MH$$

وچون این دو تساوی را عضو به عضو با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$۳)\ b^۲+c^۲=۲AM^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

۸. اگر AM میانهٔ نظیر رأس A از مثلث ABC و نقطهٔ H، تصویر نقطهٔ A روی ضلع BC باشد، داریم :

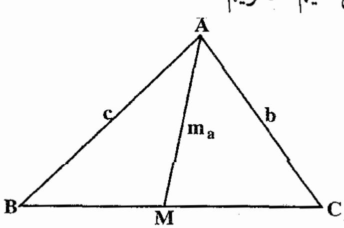


$$(۱)\,b^۲=m_a^۲+\frac{a^۲}{۴}-a.MH$$

$$(۲)\ c^۲=m_a^۲+\frac{a^۲}{۴}+a.MH$$

اگر تساویهای (۱) و (۲) را با فرض $b>c$ عضو به‌عضو از هم کم کنیم، خواهیم داشت : $b^۲-c^۲=۲a.MH$

۹. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. داریم :



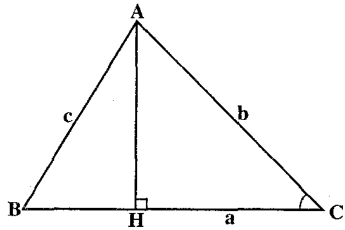
$$b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}$$

از این رابطه، طول میانهٔ AM بر حسب ضلعهای مثلث برابر است با :

$$m_a=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}$$

و به روش مشابه داریم :

$$m_b=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+c^۲)-b^۲}$$
$$m_c=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+b^۲)-c^۲}$$



۱۰. اگر پاره‌خط AH، ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، در مثلث قائم‌الزاویه AHC بنابه قضیهٔ فیثاغورس :

$$(۱)\ AH^۲ = b^۲ - HC^۲$$

از طرفی در ΔABC :

$$\hat{C} < ۹۰^\circ \Rightarrow c^۲ = b^۲ + a^۲ - ۲a.HC$$

و از این تساوی $HC = \frac{b^۲ + a^۲ - c^۲}{۲a}$ به‌دست می‌آید که اگر آن را در تساوی (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$(۲)\ AH^۲ = b^۲ - \frac{(b^۲ + a^۲ - c^۲)^۲}{۴a^۲}$$

از این تساوی اندازهٔ ارتفاع AH برحسب اندازه‌های سه ضلع مثلث به‌دست می‌آید. اما این دستور را می‌توان به‌صورت دیگری که به‌خاطر سپردن آن آسانتر است، تبدیل کرد. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که طرف دوم تساوی (۲) رابه‌صورت زیر می‌توان نوشت :

$$AH^۲ = \frac{۱}{۴a^۲}\left[۴a^۲b^۲ - (b^۲ + a^۲ - c^۲)^۲\right]$$

و چون عبارت داخل کروشه‌ها تفاضل دو مربع است :

$$AH^۲ = \frac{۱}{۴a^۲}\left[۲ab + b^۲ + a^۲ - c^۲\right]\ \left[۲ab - b^۲ - a^۲ + c^۲\right]$$

هنوز هریک از عبارتهای داخل کروشه‌ها را به صورت زیر، به تفاضل دو مربع می‌توان تبدیل کرد :

$$AH^۲ = \frac{۱}{۴a^۲}\left[(a+b)^۲ - c^۲\right]\left[c^۲ - (a-b)^۲\right]$$

یا

$$AH^۲ = \frac{۱}{۴a^۲}[a+b+c][a+b-c][c+(a-b)][c-(a-b)]$$

اگر محیط مثلث را با ۲p نمایش دهیم، $a+b+c = ۲p$ و از آن‌جا :

$$c+b-a = ۲p - ۲a \text{ و } c+a-b = ۲p - ۲b \text{ و } a+b-c = ۲p - ۲c$$

و بنابراین می‌توان نوشت :

$$AH^۲ = \frac{۱}{۴a^۲} \times ۲p(۲p-۲c)(۲p-۲b)(۲p-۲a)$$

یا

$$AH^۲ = \frac{۴}{a^۲}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

هریک ازعبارتهایی که داخل پرانتزهای طرف دوم تساوی اخیر قراردارد، یک عدد مثبت است (چرا؟)، بنابراین حاصل ضرب آنها عدد مثبتی است و ریشهٔ دوم دارد. لذا

ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC را برحسب اندازه‌های سه ضلع آن، از دستور زیر به‌دست می‌آوریم :

$$AH = \frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اندازه‌های ارتفاعهای وارد بر ضلعهای یک مثلث ABC را بترتیب با نمادهای h_c, h_b, h_a نمایش می‌دهیم ؛ اگر در رابطهٔ بالا جای a و b را عوض کنیم، h_b به‌دست می‌آید، و به همین ترتیب اگر در همان دستور جای a و c را عوض کنیم، h_c مشخص می‌شود.

۱۱. **راه اول.** چنان‌که می‌دانیم، اگر مساحت مثلث ABC را با S نمایش دهیم : $S = \frac{۱}{۲}a.h_a$ واگر h_a را از دستور $h_a = \frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$، دراین تساوی قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

تبصره ۱ . درمثلث متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آن a و اندازهٔ هریک از دو ساق آن b باشد، $S = \frac{a}{۴}\sqrt{۴b^۲ - a^۲}$ و اندازه‌های ارتفاعها برحسب ضلعهای مثلث، $h_a = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴b^۲ - a^۲}$ و $h_b = h_c = \frac{a}{۲b}\sqrt{۴b^۲ - a^۲}$ است.

تبصرهٔ ۲ . در مثلث متساوی‌الاضلاعی که اندازهٔ هر ضلع آن a باشد، $p = \frac{۳a}{۲}$ و $p-a = p-b = p-c = \frac{a}{۲}$ ؛ در نتیجه مساحت مثلث برابر است با $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و اندازهٔ هریک از ارتفاعهای آن $h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

راه دوم . داریم :

$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \Rightarrow ۲S = bc\sin\hat{A} \Rightarrow ۴S^۲ = b^۲c^۲\sin^۲\hat{A} \Rightarrow ۴S^۲ =$$

$$b^۲c^۲(۱-\cos^۲\hat{A}) \Rightarrow ۴S^۲ = b^۲c^۲ - b^۲c^۲\cos^۲\hat{A} = b^۲c^۲ - b^۲c^۲\left(\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\right)^۲ \Rightarrow$$

$$۱۶S^۲ = ۴b^۲c^۲ - (b^۲+c^۲-a^۲)^۲ \Rightarrow ۱۶S^۲ = \left[۲bc - (b^۲+c^۲-a^۲)\right]$$

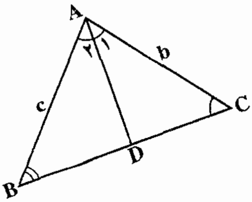
$$\left[۲bc + (b^۲+c^۲-a^۲)\right] = \left[a^۲-(b-c)^۲\right]\left[(b+c)^۲-a^۲\right] =$$

$$(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a) = (۲p-۲b)(۲p-۲c)(۲p-۲a)۲$$

$$= ۱۶p(p-a)(p-b)(p-c) \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

نکته. رابطهٔ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به‌عنوان دستور هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث معروف است.

۱۲. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم. داریم:



$$\frac{c}{\sin\hat{C}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} \qquad (۱)$$

$$\frac{BD}{\sin\hat{A}_۲}=\frac{AD}{\sin\hat{B}}\Rightarrow BD\sin\hat{B}=AD\sin\hat{A}_۲ \qquad (۲)$$

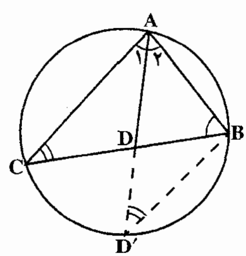
$$\frac{CD}{\sin\hat{A}_۱}=\frac{AD}{\sin\hat{C}}\Rightarrow CD\sin\hat{C}=AD\sin\hat{A}_۱=AD\sin\hat{A}_۲ \qquad (۳)$$

$$(۲),(۳)\Rightarrow BD\sin\hat{B}=CD\sin\hat{C}\Rightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} \qquad (۴)$$

$$(۱),(۴)\Rightarrow\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}$$

برای نیمساز زاویهٔ خارجی A نیز به روش مشابه اثبات انجام می‌شود.

۱۳. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. اگر امتداد AD این دایره را درنقطهٔ D' قطع کند و نقطه‌های B و D' را به هم وصل کنیم، در دو مثلث ABD' و ADC می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{D}'=\hat{C}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta ADC\sim\Delta ABD'\Rightarrow\frac{AB}{AD'}=\frac{AD}{AC}$$

از این تناسب حاصل می‌شود:

$$AB.AC=AD.AD'$$

و چون $AD'=AD+DD'$.

$$AB.AC=AD(AD+DD')$$

یا

$$AB.AC=AD^۲+AD.DD'$$

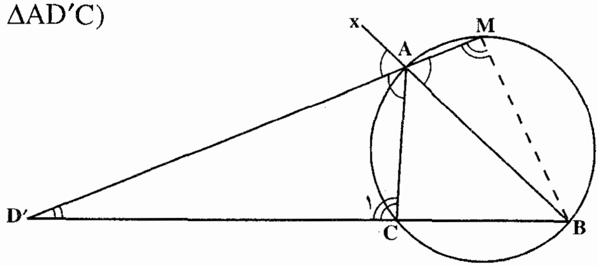
اما $AD.DD'=BD.DC$ (چرا؟). بنابراین:

$$AD^۲=AB.AC-BD.DC$$

۱۴. با توجه به شکل، امتداد نیمساز زاویهٔ XAC دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ M قطع می‌کند (چرا؟)، و ملاحظه می‌کنیم که :

$M\hat{A}B = D'\hat{A}C, \hat{M} = \hat{C}_1 \Rightarrow$

$(\Delta AMB \sim \Delta AD'C)$



در نتیجه خواهیم داشت :

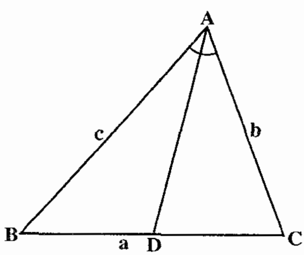
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{D'A} \Rightarrow AB.AC = AM.D'A$$

$$\Rightarrow AB.AC = (D'M - D'A).D'A$$

$$= D'B.D'C - D'A^2 \Rightarrow D'A^2 = D'B.D'C - AB.AC$$

۱۵. الف. محاسبهٔ اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث :

می‌دانیم که نیمساز هر زاویهٔ درونی مثلث بر ضلع مقابل آن زاویه، دو پاره‌خط متناسب با دو ضلع زاویه پدید می‌آورد، پس اگر پاره‌خطAD نیمساز $\hat{A}$ باشد، داریم :



$$\frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CD+DB}{DB} = \frac{AC+AB}{AB}$$

و در نتیجه : $DB = \frac{ac}{b+c}$ و به همین ترتیب $CD = \frac{ab}{b+c}$ به‌دست می‌آید. حال اگر در رابطهٔ $AD^2 = AB.AC - DB.CD$ به‌جای این دو پاره‌خط، اندازه‌های آنها را بر حسب ضلعها قرار دهیم، خواهیم داشت : $AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

از این دستور، اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث بر حسب اندازه‌های سه ضلع آن تعیین می‌شود. اما این دستور را به صورتی که به خاطر سپردن آن ساده‌تر است، می‌توان تبدیل کرد. برای این منظور طرف دوم تساوی بالا را به صورتهای زیر تغییر می‌دهیم :

$$AD^{۲}=bc\left[۱-\frac{a^{۲}}{(b+c)^{۲}}\right]=\frac{bc}{(b+c)^{۲}}\left[(b+c)^{۲}-a^{۲}\right]=$$
$$\frac{bc}{(b+c)^{۲}}(b+c+a)(b+c-a)$$

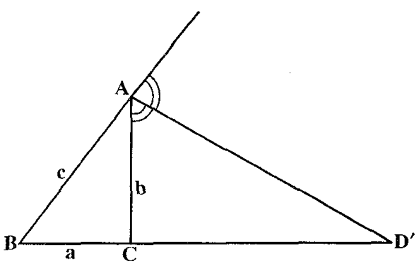
با ملاحظهٔ آن‌که $b+c+a=۲p$ و $b+c-a=۲p-۲a$ است، اگر اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث را با نماد d_a نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

با تبدیل دوری a به b و b به c و c به a، دستورهای محاسبهٔ d_b و d_c حاصل می‌شود.

$$d_b=\frac{۲}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$
$$d_c=\frac{۲}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

ب. محاسبهٔ طول نیمسازهای زاویه‌های برونی مثلث:



برای تعیین اندازهٔ نیمساز زاویهٔ برونی رأس A از مثلث با استفاده از رابطهٔ $AD'^{۲}=D'B.D'C-AB.AC$ و ملاحظهٔ آن که:

$$D'C=\frac{ab}{|b-c|} \quad و \quad D'B=\frac{ac}{|b-c|}$$

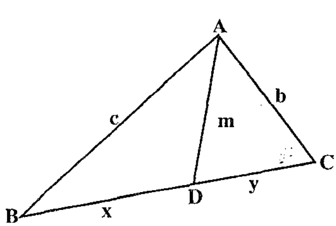
(با فرض $b>c$)، خواهیم داشت:

$$d'_a=\frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

و به روش مشابه داریم:

$$d'_b=\frac{۲}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$
$$d'_c=\frac{۲}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

۱۶. با توجه به شکل طبق قضیه استوارت داریم: $yc^{۲}+xb^{۲}=axy+am^{۲}$ از آن‌جا:



$$DC.c^{۲}+BD.b^{۲}=a.BD.DC+ad_a^{۲}$$

$$\frac{ab}{b+c}.c^{۲}+\frac{ac}{b+c}.b^{۲}=\frac{a^{۳}bc}{(b+c)^{۲}}+ad_a^{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{bc^{۲}}{b+c}+\frac{cb^{۲}}{b+c}=\frac{a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}}+d_a^{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b+c}+\frac{b}{b+c}=\frac{a^۲}{(b+c)^۲}+\frac{d_a^۲}{bc}\Rightarrow \frac{(c+b)^۲-a^۲}{(b+c)^۲}=\frac{da^۲}{bc}\Rightarrow$$

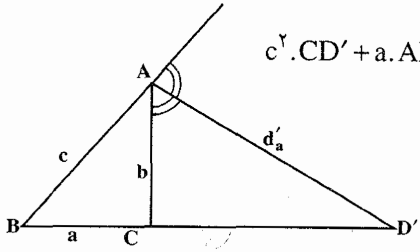
$$\frac{(۲p-۲a)(۲p)}{(b+c)^۲}=\frac{d^۲a}{bc}\Rightarrow \frac{۴pbc(p-a)}{(b+c)^۲}=d_a^۲\Rightarrow d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

و به روش مشابه d_b و d_c محاسبه می‌شود.

۱۷. بنابه قضیهٔ استوارت داریم:

$$c^۲.CD'+a.AD'^۲=a.BD'.CD'+b^۲.BD'$$

از آن‌جا:



$$c^۲\cdot\frac{ab}{|b-c|}-b^۲\cdot\frac{ac}{|b-c|}=a\cdot\frac{ac}{|b-c|}\cdot\frac{ab}{|b-c|}-ad_a'^۲$$

$$\Rightarrow \frac{c}{|b-c|}-\frac{b}{|b-c|}=\frac{a^۲}{(b-c)^۲}-\frac{ad_a'^۲}{abc}\Rightarrow \frac{(c-b)^۲-a^۲}{(c-b)^۲}=-\frac{d_a'^۲}{bc}$$

$$\Rightarrow \frac{d_a'^۲}{bc}=\frac{a^۲-(c-b)^۲}{(b-c)^۲}=\frac{[a-(c-b)][a+(c-b)]}{(b-c)^۲}=$$

$$=\frac{(۲p-۲c)(۲p-۲b)}{(b-c)^۲}=\frac{۴(p-c)(p-b)}{(b-c)^۲}$$

$$d_a'=\frac{۴bc(p-c)(p-b)}{(b-c)^۲}\Rightarrow d_a'=\frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}$$

به روش مشابه d_b' و d_c' به‌دست می‌آیند.

۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه‌های مثلث داده شده

۱۸. اندازهٔ $\hat{B}$ برابر ۳۰° است.

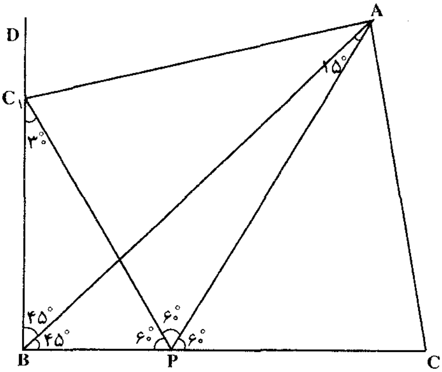
۱۹. ۶۰ درجه؛ زیرا داریم:

$$\Delta ABC \sim \Delta BPH \Rightarrow \frac{BH}{AB}=\frac{BP}{AC}=\frac{PH}{AC}\Rightarrow$$

$$\cos\hat{B}=\frac{PH}{۲PH}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \hat{B}=۶۰^\circ$$

۲۰. نقطهٔ C_1 را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست AP می‌گیریم. داریم:

$C_1P = CP = 2BP$ و $C_1\hat{P}B = 180^\circ - A\hat{P}C - A\hat{P}C_1 = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$



بنابراین $C_1\hat{B}P = 90^\circ$ (زیرا مثلث C_1PB، متشابه با مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه ۱ است)، یعنی BA، نیمساز زاویهٔ C_1BP است. به‌این ترتیب، نقطهٔ A که از خطهای راست C_1P، PC و C_1B به یک فاصله است، بر نیمساز زاویهٔ PC_1D قرار دارد (D، بر امتداد پاره‌خط راست BC_1 و بعد از C_1 قرار گرفته است). بنابراین:

$$A\hat{C}B = A\hat{C}_1P = \frac{1}{2}(180^\circ - B\hat{C}_1P) = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$$

۲۱. (د). اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی ضلع به طول c را θ می‌گیریم. بنابه فرض:

$$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Rightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - ab = c^2$$

اما، $a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2$. از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$ab = 2ab\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

۲۲. $2\arcsin\dfrac{h_a h_b}{l(h_a + h_b)}$.

۲۳. ابتدا حکم زیر را ثابت می‌کنیم. اگر عمودهای بر AB و BC در وسطهایشان، AC را در نقطه‌های M و N طوری قطع کنند که $MN = \lambda AC$، آن‌وقت یا $tg\hat{A}tg\hat{C} = 1 - 2\lambda$ و یا $tg\hat{A}tg\hat{C} = 1 + 2\lambda$. قرار می‌گذاریم: AB=c، BC=a و AC=b. اگر قطعه‌های عمودها، از وسط ضلعها تا نقطه‌های M و N، نامتقاطع باشند، آن‌وقت:

$$MN = b - \frac{c}{2\cos\hat{A}} - \frac{a}{2\cos\hat{C}} = \lambda b$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\sin\hat{B}\cos\hat{A}\cos\hat{C} = \frac{1}{2}(\sin 2\hat{C} + \sin 2\hat{A})$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\sin(\hat{A}+\hat{C})\cos\hat{A}\cos\hat{C} = \sin(\hat{A}+\hat{C})\cos(\hat{A}-\hat{C})$$

$$\Rightarrow 2(1-\lambda)\cos\hat{A}\cos\hat{C} = \cos\hat{A}\cos\hat{C} + \sin\hat{A}\sin\hat{C}$$

$$\Rightarrow tg\hat{A}tg\hat{C} = 1 - 2\lambda$$

و اگر این قطعه‌ها متقاطع باشند، آن‌وقت $tg\hat{A}tg\hat{C}=۱+۲\lambda$. در مسألهٔ ما، $\lambda=۱$ ، یعنی، یا $tg\hat{A}tg\hat{C}=-۱$ و یا $tg\hat{A}tg\hat{C}=۳$. برای زاویه‌های B و C به‌دست می‌آوریم $(\lambda=\frac{۱}{۲})$ و $tg\hat{B}tg\hat{C}=۰$ که این ممکن نیست و یا $tg\hat{B}tg\hat{C}=۲$. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} tg\hat{A}tg\hat{C}=-۱ \\ tg\hat{B}tg\hat{C}=۲ \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi \end{cases}$$

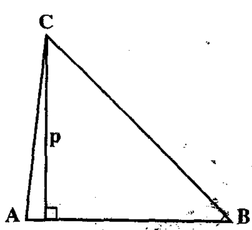
هیچ جوابی ندارد. از این رو، $tg\hat{A}tg\hat{C}=۳$. با حل کردن دستگاه معادله‌های نظیر، به‌دست می‌آوریم:

$tg\hat{A}=۳$ ، $tg\hat{B}=۲$ و $tg\hat{C}=۱$. جواب: $\frac{\pi}{۴}$.

۲۴. فرض کنید m_a طول بزرگترین میانه باشد. اگر از نابرابری $m_a^۲>m_b^۲+m_c^۲$ ، که از فرض مسأله به‌دست می‌آید، استفاده کنیم و طول میانه‌ها را بر حسب طول ضلعها، a ، b و c ، جایگزین کنیم، به‌دست می‌آوریم $۵a^۲<b^۲+c^۲$ ، که از آن‌جا:

$$\cos\hat{A}>\frac{۲(b^۲+c^۲)}{۵bc}=\frac{۲}{۵}(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\geq\frac{۴}{۵}>\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\hat{A}<۴۵^\circ$$

۲۵. $\arcsin\sqrt{\frac{k}{۲(k-۱)}}$ ، اگر $k>۲$ باشد؛ در صورت $۱<k\leq۲$ ، جواب وجود ندارد.



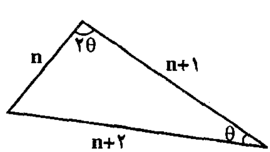
۲۶. الف) حاده ب) قائمه

۲۷. (د). مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع آن در سینوس زاویهٔ بین آنها، زیرا مطابق شکل، اگر p ارتفاع رأس C باشد، آن‌گاه: $p=AC\sin\hat{A}$

$$\Delta ABC\ \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}AB\times p=\frac{۱}{۲}AB\times AC\sin\hat{A}$$

بنابر داده‌های مسأله: $\sqrt{AB\times AC}=۱۲$ و ۶۴=مساحت ΔABC بنابراین:

$$AB\times AC\sin A=۱۲۸ \text{ و } AB\times AC=۱۴۴\Rightarrow\sin A=\frac{۱۲۸}{۱۴۴}=\frac{۸}{۹}$$



۲۸. (الف). در شکل روبه‌رو، n طول کوچکترین ضلع، و θ اندازهٔ کوچکترین زاویه است. از قانون سینوسها و با توجه به $۲\sin\theta\cos\theta=\sin۲\theta$ داریم:

$$\frac{\sin\theta}{n}=\frac{۲\sin\theta\cos\theta}{n+۲}\Rightarrow\cos\theta=\frac{n+۲}{۲n}$$

از قانون کسینوسها، $\cos\theta$ را حساب می‌کنیم و به جایش مقدار اخیر را می‌گذاریم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{n+۲}{۲n}=\frac{(n+۱)^۲+(n+۲)^۲-n^۲}{۲(n+۱)(n+۲)}=\frac{(n+۱)(n+۵)}{۲(n+۱)(n+۲)}=\frac{n+۵}{۲(n+۲)}$$

پس:

$$\cos\theta=\frac{۴+۲}{۴\times۲}=\frac{۳}{۴} \text{ و } n=۴$$

۲۹. ۴۰° و ۲۵°.

۳۰. از شرط $\hat{B}=۲\hat{C}$، رابطهٔ $b^۲=c^۲+ac$ برای ضلعهای مثلث به‌دست می‌آید. با بررسی، $b=۲c$، $a=۲c$، $b=۲a$ و $a=۲b$، $a=۲c$ را انتخاب می‌کنیم، زیرا در بقیه حالتها نابرابری مثلث برقرار نیست.

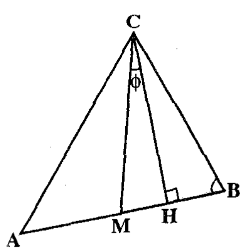
جواب: $\hat{C}=\frac{\pi}{۶}$، $\hat{B}=\frac{\pi}{۳}$ و $\hat{A}=\frac{\pi}{۲}$

۳۲. ۹۰°، $۲۲^\circ,۳۰'$ و $۶۷^\circ,۳۰'$. ارتفاع، نیمساز و میانهٔ مثلث ABC را بترتیب با CH، CD و CM نشان دهید. با قراردادن $\hat{C}=۴x$ و $CH=h$ از $AH+MH=BH-MH$ استفاده کنید. همهٔ عنصرهای این تساوی را بر حسب h و x بیان کنید.

۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ مثلثها و شکلهای دیگر

۳۳. ۴۵°

۳۴. زاویهٔ مجهول را φ و زاویهٔ بزرگتر مثلث را C فرض می‌کنیم:



$$B\hat{C}M=B\hat{C}H+\varphi=۹۰^\circ-\hat{B}+\varphi$$

$$A\hat{C}M+A\hat{C}H-\varphi=۹۰^\circ-\hat{A}-\varphi$$

اگر قضیهٔ سینوسها را در مثلث AMC بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}AB:MC=\sin A\hat{C}M:\sin\hat{A}$$

به همین ترتیب در مثلث BMC داریم:

$$\frac{۱}{۲}AB:MC=\sin B\hat{C}M:\sin\hat{B}$$

اگر طرف دوم رابطه‌های بالا را مساوی قرار دهیم، با توجه به اندازهٔ زاویه‌های ACM و BCM، خواهیم داشت:

$$\frac{\cos(\hat{A}+\varphi)}{\sin\hat{A}}=\frac{\cos(\hat{B}-\varphi)}{\sin\hat{B}}$$

جواب: $\operatorname{tg}\varphi=\frac{۱}{۳}(\operatorname{cotg}\hat{A}-\operatorname{cotg}\hat{B})$ یا $\varphi=\operatorname{Arctg}\frac{a^۲-b^۲}{۴s}$

۳۵. ثابت کنید $tg\alpha = \frac{|b^2 - c^2|}{2S}$ ، که در آن S مساحت مثلث است (به همین نحو، یک چنین برابری را برای زاویه‌های دیگر ثابت کنید).
جواب : $\operatorname{arc\,tg}|tg\alpha \pm tg\beta|$

۳۷. شرط $S_{BDM} = S_{BCK}$ به این معنی است که $BD.BM = BK.BC$ ، یعنی، $(BA + AC)BM = BK.BC$ (۱).

از M خط راستی به موازات AC رسم کنید : فرض کنید L نقطهٔ برخورد این خط با BA باشد. ثابت کنید که $LM = KL$ ، بنابراین زاویهٔ مطلوب، $B\hat{K}M = \frac{1}{2}B\hat{A}C = \frac{\alpha}{2}$ ، به‌دست می‌آید. چون مثلث BLM با مثلث BAC متشابه است، داریم $LM = \frac{BM}{BC}.AC$ و $BL = \frac{BM}{BC}.AB$. اکنون BK را از (۱) به‌دست می‌آوریم و می‌نویسیم :

$$KL = BK - BL = \frac{BA + AC}{BC}.BM - \frac{BM}{BC}.AB = \frac{BM}{BC}.AC$$

که از آن‌جا $LM = KL$.

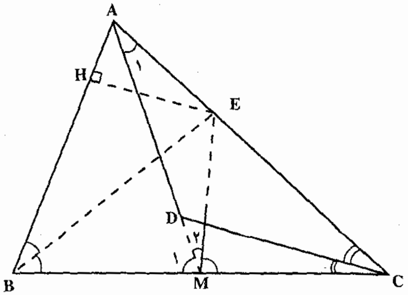
۳۸. دایره‌هایی بر مثلثهای ABF، BCD و CAE محیط کنید. این دایره‌ها در نقطهٔ M مشترکند. از آن جا که زاویه‌های مثلث DEF ثابتند، $\hat{D} = \gamma$ ، $\hat{E} = \alpha$ و $\hat{F} = \beta$ ، دایره‌های رسم شده و نقطهٔ M از φ مستقلند، طول ضلع DF (و در نتیجه، EF و ED) وقتی DF برBM عمود است، کمترین مقدار است. فرض کنید φ_0 زاویهٔ نظیر این وضعیت باشد. دراین صورت، $M\hat{B}C = M\hat{C}A = M\hat{A}B = 90^\circ - \varphi_0$. CM را امتداد دهید تا دایرهٔ محیطی مثلث AMB را در نقطه‌ای مانند F_1 قطع کند. خواهیم داشت : $F_1\hat{B}A = \alpha$ و $F_1\hat{A}B = \beta$ ؛ F_1B با AC موازی می‌شود. از F_1 و B، بترتیب، عمودهای F_1N و BL را بر AC فرود می‌آوریم. از آن جا که $F_1N = BL$ ، داریم :

$$tg\varphi_0 = \cot g(90^\circ - \varphi_0) = \frac{CN}{F_1N} = \frac{AN}{F_1N} + \frac{AL}{BL} + \frac{CL}{BL}$$

$$= \cot g\beta + \cot g\alpha + \cot g\gamma$$

به این ترتیب، $tg\varphi_0 = \cot g\alpha + \cot g\beta + \cot g\gamma$

تبصره. زاویهٔ $\omega = 90^\circ - \varphi_0$ را زاویهٔ بروکار Brocard و نقطهٔ M را نقطهٔ بروکار می‌نامند. درهر مثلث دو نقطهٔ بروکار وجود دارد. جای M_1 ، نقطهٔ دوم، با شرط $M_1\hat{B}A = M_1\hat{A}C = M_1\hat{C}B$ مشخص می‌شود.



۳۹. در مثلث ADC داریم:

$$M\hat{D}C = \hat{A}_۱ + \frac{\hat{C}}{۲}$$

و در نتیجه:

$$۲M\hat{D}C = ۲\hat{A}_۱ + \hat{C}$$

و چون، $\hat{M}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{C}$

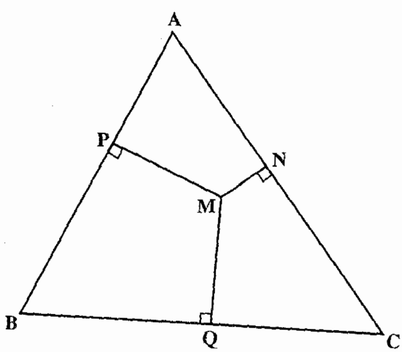
پس: $۲M\hat{D}C = \hat{A}_۱ + \hat{M}_۱$

حال نقطهٔ برخورد نیمساز درونی زاویهٔ B را با AC نقطهٔ E می‌نامیم. بدیهی است که مثلث BEC متساوی‌الساقین است. درنتیجه EM، ارتفاع وارد بر BC است. از E عمود EH را بر AB فرود می‌آوریم. داریم: EH=EM. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEH می‌توان نوشت، $EA \geq EH$ پس در مثلث AEM داریم: $\hat{M}_۲ \geq \hat{A}_۱$

بنابراین، $۹۰^\circ \geq \hat{M}_۱ + \hat{A}_۱ = ۲M\hat{D}C$, $۹۰^\circ - \hat{M}_۱ \geq \hat{A}_۱$

پس: $M\hat{D}C \leq ۴۵^\circ$

تساوی $M\hat{D}C = ۴۵^\circ$ وقتی برقرار است که EH=EA یعنی $\hat{A} = ۹۰^\circ$ که دراین صورت $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۹۰^\circ$ خواهد بود.

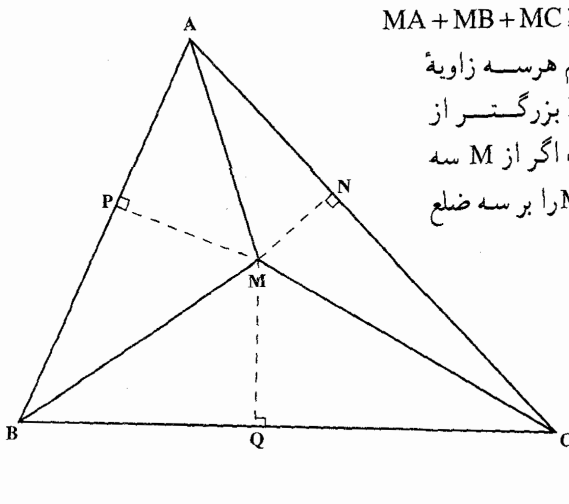


۴۰. قبل از حل مسأله نامساوی زیر را که به نامساوی «اردیش ـ مردل» معروف است، بیان و ثابت می‌کنیم.

هرگاه M نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد و از M سه عمود MP، MN و MQ را بر سه ضلع مثلث رسم کنیم، آن‌گاه:

$$MA + MB + MC \geq ۲(MP + MN + MQ)$$

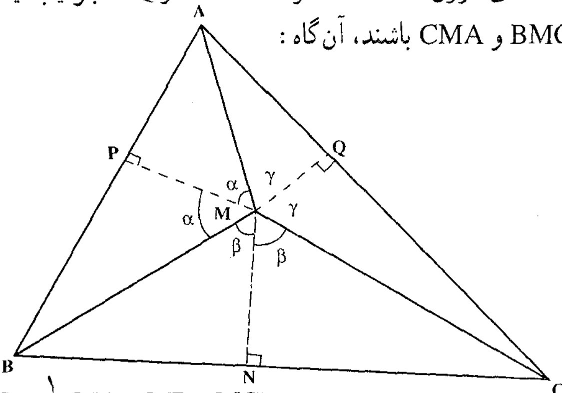
اکنون فرض می‌کنیم هرسه زاویهٔ MAB، MBC و MCA بزرگتر از ۳۰° باشند. در آن‌صورت اگر از M سه عمود MP، MN و MQ را بر سه ضلع رسم کنیم:



یا $MP > \frac{1}{2}MA, MQ > \frac{1}{2}MB, MN > \frac{1}{2}MC$

$2(MP + MQ + MN > (MA + MB + MC)$ که متناقض با نامساوی اردیش ـ مردل است. اکنون نامساوی زیر را که تعمیم نامساوی اردیش ـ مردل است بیان و ثابت می‌کنیم :

هرگاه M نقطه‌ای درون مثلث ABC و MP، MN و MQ بترتیب نیمسازهای زاویه‌های AMB، BMC و CMA باشند، آن‌گاه :



$$MP + MN + MQ \le \frac{1}{2}(MA + MB + MC)$$

(واضح است که نامساوی اردیش ـ مردل از این مسأله نتیجه می‌شود.)

نصف هریک از زوایای AMB، BMC و CMA را به α، β و γ نشان می‌دهیم.

چنین داریم :

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}MA.MB\sin 2\alpha$$
$$= \frac{1}{2}MA.MP\sin\alpha + \frac{1}{2}MB.MP\sin\alpha$$

لذا
$$2MA.MB\cos\alpha = MP(MA + MB)$$

و بنابه نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی :

$$AM + MB \ge 2\sqrt{MA.MB}$$

بنابراین : $\sqrt{MA.MB}\cos\alpha \ge MP$

و به همین ترتیب : $\sqrt{MB.MC}\cos\beta \ge MN$

و $\sqrt{MB.MA}\cos\gamma \ge MQ$

از جمع سه رابطهٔ بالا داریم :

اما : $\frac{1}{2}(MA + MB + MC) \ge \sqrt{MA.MB}\cos\alpha + \sqrt{MB.MC}\cos\beta +$

$\sqrt{MC.MA}\cos\gamma (*)$

و لذا نامساوی ثابت است.

برای اثبات نامساوی (*) از نامساوی زیر استفاده کرده‌ایم.
هرگاه $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ و x، y و z سه عدد مثبت باشند، آن‌گاه :

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2xy\cos\alpha+2yz\cos\beta+2xz\cos\gamma$$

برای اثبات این نامساوی گوییم :

$$(x-y\cos\alpha-z\cos\gamma)^2+(y\sin\alpha-z\sin\gamma)^2 \geq 0$$

یا :

$$x^2+y^2\cos^2\alpha+z^2\cos^2\gamma-2xy\cos\alpha-2xz\cos\gamma+2yz\cos\alpha\cos\gamma+x^2\sin^2\alpha+z^2\sin^2\gamma-2yz\sin\alpha\sin\gamma \geq 0$$

یا :

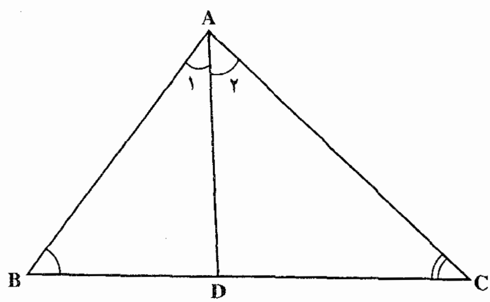
$$x^2+y^2+z^2-2xy\cos\alpha-2xz\cos\gamma+2yz\cos(\alpha+\gamma) \geq 0$$

امّا $\cos(\alpha+\gamma)=-\cos\beta$ و اثبات کامل است.
حال اگر در نامساوی بالا $x=\sqrt{AM}$ و $y=\sqrt{MB}$ و $z=\sqrt{MC}$ اختیار کنیم، نامساوی (*) ثابت می‌شود.

۱. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱. ۲. ۲. ۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها (برابریها)

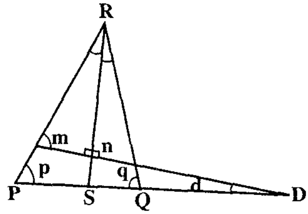
۴۲. نیمساز AD را رسم کرده، تحقیق کنید که مثلث BAD با مثلث BCA متشابه است.



۴۳. $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ$ یا $|A-B|=90^\circ$. AD و BD را برحسب ارتفاع h و زاویه‌های A و B بیان کنید. دو حالت را مورد ملاحظه قرار دهید. A زاویه‌ای حاده یا A یک زاویهٔ منفرجه است.

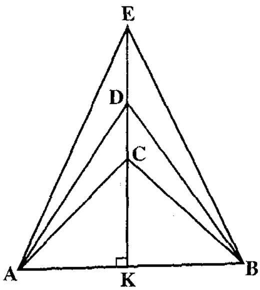
۴۴. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا از آن جا که $9^2<100=8^2+6^2$، زاویه‌های مثلث حاده‌اند. بنابراین (ج) یک انتخاب صحیح است. از قانون سینوسها، یا قانون کسینوسها به‌دست می‌آید که انتخاب (د) نادرست است. بدیهی است که (ب) بنابر قانون سینوسها نادرست است.

۴۵. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا داریم:



$$\hat{m}=\hat{p}+\hat{d}\ ,$$
$$\hat{d}=\hat{q}-\hat{m}\Rightarrow \hat{m}=\hat{p}+\hat{q}-\hat{m}\Rightarrow$$
$$\hat{m}=\frac{1}{2}(\hat{p}+\hat{q})$$

۴۶. داریم:



$$\Delta ACB\ :\ AK=CK=KB\Rightarrow A\hat{C}B=90^\circ$$

$$\Delta ADK\ :\ \mathrm{tg}\,A\hat{D}K=\frac{AK}{DK}=\frac{0/5a}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta AEK\ :\ \mathrm{tg}\,A\hat{E}K=\frac{AK}{EK}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{tg}(A\hat{D}K+A\hat{E}K)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=1\Rightarrow A\hat{D}K+A\hat{E}K=45^\circ\ ,$$

$$A\hat{D}B+A\hat{E}B=90^\circ\Rightarrow A\hat{C}B+A\hat{D}B+A\hat{E}B=180^\circ$$

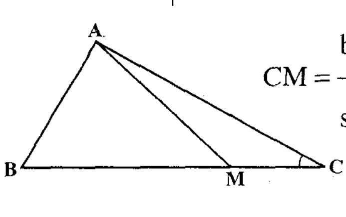
۴۹. اگر برای دو نقطهٔ P و P' مثلثهای پودر را رسم کنیم (در شکل مقابل فقط مثلثهای پودر مربوط به نقطهٔ P رسم شده)، با توجه به داده‌های مسأله، دو چهارضلعی AC_1PB_1 و $AB'_1P'C'_1$ را خواهیم داشت که با هم متشابه‌اند، و از آن‌جا تساوی زاویه‌های مورد نظر نتیجه می‌شود.

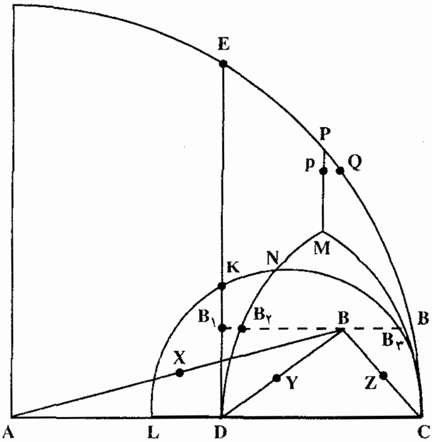
۱. ۲. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۵۰. از این که $S_{BAM}=S_{BCM}$، $BC>BA$ و $CM>MA$، نتیجه می‌شود که $\sin B\hat{A}M>\sin B\hat{C}M$. بنابراین، اگر زاویه‌ها حاده باشند. آن‌وقت $B\hat{A}M>B\hat{C}M$؛ تنها، زاویهٔ BAM می‌تواند منفرجه باشد. به این ترتیب، همواره داریم: $B\hat{A}M>B\hat{C}M$.

۵۱. فرض کنید طول ضلعهای مثلث ABC، در نابرابریهای $c\le b\le a$ صادق باشند. نقطه‌ای مانند M روی CB، طوری اختیار می‌کنیم که $C\hat{A}M=\frac{1}{2}\hat{C}$. اکنون باید ثابت کنیم که $CM\le\frac{a}{2}$. بنابر قانون سینوسها، در مثلث CAM داریم:

$$CM=\frac{b\sin\frac{\hat{C}}{2}}{\sin\frac{3\hat{C}}{2}}=\frac{b}{2\cos\hat{C}+1}=\frac{ab^2}{a^2+ab+b^2-c^2}\le\frac{a}{2}$$





۵۲. ردهٔ مثلثهای متشابه را در نظر بگیرید. یک نمایندهٔ این رده را مثلث ABC انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $AB = v$ ، $BC = u$ ، $AC = ۱$ و $u \le v \le ۱$. به این ترتیب، به هر رده از مثلثهای متشابه، نقطهٔ B در درون مثلث خمیدهٔ CDE نظیر می‌شود. که در آن، D وسط شعاع AC، و کمان EC، کمانی از دایره به مرکز A و شعاع ۱ است و ED بر AC عمود است . مثلث ABD، مثلثی «سمت چپی» و مثلث BDC، مثلثی «سمت راستی» خوانده می‌شود. فرآیند توصیف شده در صورت مسأله را در نظر بگیرید ؛ ضمن انجام این کار، در هر مرحله، تنها مثلثهایی را کنار می‌گذاریم که با مثلثهایی که قبلاً با آنها برخورد کرده‌ایم متشابه‌اند. برای هر مثلث، یک نمایندهٔ رده که در بالا ذکر شد، انتخاب می‌کنیم. فرض کنید X، Y، Z، بترتیب، وسطهای AB، DB و CB باشند ؛ $m = DB$ و h طول ارتفاع مثلث ABC است. برای مثلثهای «سمت راستی»، سه حالت زیر ممکن است رخ دهد.

(۱) ؛ $u \le \frac{۱}{۲}$ و $m \le \frac{۱}{۲}$ یا $u \le m$ و $\frac{۱}{۲} \le m$ ، یعنی، بزرگترین ضلع، DC یا BD است. این حالت وقتی رخ می‌دهد که B در درون شکل DMFC واقع باشد که در آن، DM کمانی از دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ و مرکز نقطهٔ C و FC بخش سمت راست کمان EC است، $DM = MC = \frac{۱}{۲}$ ، DC و FM پاره‌خطند و $FM \perp DC$. در این حالت، کمان MC (به مرکز D)، ناحیه‌ای را که در آن DC بزرگترین ضلع مثلث DBC است، از ناحیه‌ای که بزرگترین ضلع DB است، جدا می‌کند، در این حالت، نمایندهٔ مثلث DBC ارتفاعی برابر با ۲h دارد، به شرط آن که DC بزرگترین ضلع باشد، یا

$$\frac{h}{۲m^۲} \ge \frac{h}{۲|DB_۴|^۲} = \frac{h}{\frac{۵}{۲} - ۲\sqrt{۱-h^۲}} = q_۱(h)h$$

$q_۱(h) > ۱$ ، به شرط آن که $h < \frac{\sqrt{۷}}{۴}$.

(۲) ؛ $u > m$ ، $u > \frac{۱}{۲}$ و $v > ۲m$. توجه کنید که برای دایرهٔ به قطر LC، که در آن، $AL = \frac{۱}{۳}$ ، $v = ۲m$. در درون این دایره $v > ۲m$. این حالت وقتی رخ می‌دهد که نقطهٔ B، در درون مثلث خمیدهٔ DKN (KN و ND کمان و DK پاره‌خط است) باشد. از آن جا که مثلث DZC با مثلث اصلی، ABC ، متشابه است، تنها مثلث DZB را در نظر می‌گیریم. طول بزرگترین ضلعش، DZ ، برابر با $\frac{v}{۲}$ است. نمایندهٔ آن، ارتفاعی برابر با $q_۲(h)h_۱$ و $q_۲(h) > ۱$ دارد.

زیرا $q_2(h)(h_1)=\frac{h}{\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{9}-h^2}}=\frac{h}{|AB_3|^2}\geq\frac{h}{|AB_2|^2}\geq\frac{h}{v^2}=\frac{h}{4(\frac{v}{2})^2}$ و

(۳) ؛ $u\geq\frac{1}{2}$، $u\geq m$ و $v\leq 2m$. در این حالت، بزرگترین ضلع در مثلث BZD ، BD، برابر با m است و احتیاجی به بررسی بخشهای مثلث BDC نیست، زیرا مثلث BYZ با مثلث BDC، و مثلث DYZ با مثلث ABD متشابه است (دیگر مثلث DZC را در نظر نمی‌گیریم).

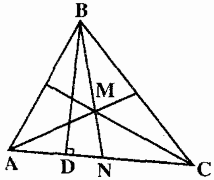
برای مثلثهای «سمت چپی» دو حالت ممکن است رخ دهد که با حالتهای (۲) و (۳) در مثلثهای «سمت راستی» مشابه‌اند.

(′۲) اگر B در درون شکل DKNC باشد، آن وقت مثلث DXB، قابل انطباق بر مثلث DZB، برای ملاحظات بعدی کنار گذاشته می‌شود ؛ طول ارتفاع نمایندهٔ آن، از $q_2(h)h$ کمتر نیست.

(′۳) اگر B بیرون شکل DKNC باشد، بررسی بیشتر بخشهای مثلث ABD متوقف می‌شود. توجه کنید که، با افزایش در h، ضریب $q_2(h)$ افزایش می‌یابد، در حالی که $q_1(h)$ کاهش می‌یابد و در نقطهٔ F برابر با ۱ می‌شود، $h=\frac{\sqrt{7}}{4}$. نقطه‌های P و Q را، بترتیب، بر FM و کمان FC و به اندازهٔ کافی نزدیک F، اختیار می‌کنیم. در درون شکل $B_1KNMPQB_4$ ، نابرابریهای $q_1(h)\geq q_0$ ، $q_2(h)\geq q_0$ و $q_0>1$ برقرارند. درنتیجه در همهٔ حالتها، میزان افزایش h، از q_0 کمتر نیست و در تعداد متناهی مرحله یا برای همهٔ مثلثهای مورد بحث، یا حالت (۳) رخ می‌دهد یا رأس مثلث در درون مثلث PFQ قرار می‌گیرد. حالتی که نقطهٔ B در درون مثلث PFQ است، مشکلی در بر ندارد و جداگانه بررسی می‌شود. در آن حالت، مثلثهای «سمت راستی» بررسی می‌شوند. کافی است در شرط $|FP|\leq|FM|=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$ صادق باشند. در مثلث BDC ، ضلع BD، برابر با m ، بزرگترین ضلع است و $h^2\leq\frac{7}{16}$. می‌توانیم نشان دهیم که نمایندهٔ ردهٔ مثلثهای متشابه با مثلث BDC، نقطهٔ نظیری واقع در بیرون مثلث خمیدهٔ PFQ دارد و چون ارتفاع در این حالت کاهش نمی‌یابد، در هر دو بخش مثلث BDC، حالت (۳) اتفاق می‌افتد. به این طریق، اثبات قسمت اول کامل شده است.

قسمت دوم از این مطلب که همهٔ مثلثهای در نظر گرفته شده، پس از تقسیم اول، دارای نماینده‌ای با ارتفاع ناکمتر از h هستند و در نتیجه، کوچکترین زاویهٔ از $B_4\hat{A}C>\frac{1}{2}B_1\hat{A}C\geq\frac{1}{2}B\hat{A}C$ کمتر نیست، نتیجه می‌شود.

۵۳. اگر AD ارتفاع، AN میانه و M نقطهٔ میانه‌ای باشد،



$$\cot g\hat{B}+\cot g\hat{C}=\frac{DB}{AD}+\frac{CD}{AD}$$
$$=\frac{CB}{AD}\geq\frac{CB}{AN}=\frac{CB}{3MN}=\frac{2}{3}$$

۵۴. بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد : $\hat{A}\leq\hat{B}\leq\hat{C}$.

I) برای اثبات نابرابری سمت چپ، توجه می‌کنیم که $\sin 3\hat{C}\geq -1$ و $\sin 3\hat{B}\geq -1$ و $\sin 3\hat{A}\geq 0$ و $\hat{A}\leq 60^\circ$ از آن جا به دست می‌آید :

$$\sin 3\hat{A}+\sin 3\hat{B}+\sin\hat{C}\geq -2$$

برای رسیدن به برابری، باید داشته باشیم :

$$\sin 3\hat{A}=0\ ,\ \sin 3\hat{B}=\sin 3\hat{C}=-1$$

که از آن جا به دست می‌آید : $\hat{A}=0$ و $\hat{B}=\hat{C}=90^\circ$ (حالت حدی یک مثلث متساوی‌الساقین)

II) به اثبات نابرابری سمت راست می‌پردازیم. روشن است که : $\frac{3\sqrt{3}}{2}>2$. هر کدام از جمله‌های $\sin 3\hat{A}$ ، $\sin 3\hat{B}$ و $\sin 3\hat{C}$ ، حداکثر برابر واحدند. برای این که، مجموع آنها ماگزیمم باشد، باید هر سه جمله مثبت باشند. چون $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ ، باید داشته باشیم :

$$0^\circ<\hat{A}\leq\hat{B}<60^\circ\ ,\ 120^\circ<\hat{C}<180^\circ$$

فرض می‌کنیم : $\hat{D}=\hat{C}-120^\circ$ ، بنابراین.

$$3\hat{A}+3\hat{B}+3\hat{D}=180^\circ$$

و بنابر نابرابری ین‌سن (Jensen) دربارهٔ تابعهای محدب :

$$\sin 3\hat{A}+\sin 3\hat{B}+\sin 3\hat{D}\leq 3\sin\frac{3\hat{A}+3\hat{B}+3\hat{D}}{3}$$

$$=3\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (1)$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$3\hat{A}=3\hat{B}=3\hat{D}=60^\circ$$

یعنی : $\hat{A}=\hat{B}=20^\circ$, $\hat{C}=140^\circ$

رابطهٔ (۱)، مفهوم هندسی جالبی دارد : از بین همهٔ مثلثهای قابل محاط در یک دایرهٔ مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای حداکثر محیط است.

(در این جا، $3\hat{A}$ ، $3\hat{B}$ و $3\hat{D}$ به‌جای زاویه‌های مثلث در نظر گرفته شده‌اند).

نابرابری سمت راست مسأله را، می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

$$\left|qr\sin n\hat{A}+rp\sin n\hat{B}+pq\sin n\hat{C}\right|\le(p^2+q^2+r^2)\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

که در آن $r\ge 0$ و p، q و n عددی درست و مثبت است. برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$p=q=r \quad , \quad \sin n\hat{A}=\sin n\hat{B}=\sin n\hat{C}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

برای اثبات این نابرابری، باید از نابرابری زیر آغاز کرد:

$$x^2+y^2+z^2\ge(-1)^{m+1}(2yz\ \cos m\hat{A}+2zx\ \cos m\hat{B}+2xy\ \cos m\hat{C}) \qquad (3)$$

برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{x}{\sin n\hat{A}}=\frac{y}{\sin n\hat{B}}=\frac{z}{\sin n\hat{C}}$$

در این جا، x، y و z، عددهای حقیقی و $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلثند.

نابرابری (۳)، نتیجه‌ای از نابرابری روشن زیر است:

$$[x+(-1)^m(y\cos m\hat{C}+z\cos m\hat{B})]^2+(y\sin m\hat{C}-z\sin m\hat{B})^2\ge 0$$

به خصوص، وقتی m زوج باشد ($m=2n$)، داریم:

$$\cos m\hat{A}=1-2\sin^2 n\hat{A},\dots$$

و رابطهٔ (۳)، به این صورت درمی‌آید:

$$(x+y+z)^2\ge 4(yz\sin^2 n\hat{A}+zx\sin^2 n\hat{B}+xy\sin^2 n\hat{C}) \qquad (4)$$

اگر x و y و z را، عددهایی غیرمنفی بگیریم و فرض کنیم $\sqrt{x}=p$، $\sqrt{y}=q$ و $\sqrt{z}=r$، آن وقت، با توجه به مجموع دوری، به دست می‌آید:

$$\frac{p^2+q^2+r^2}{12}\ge\sum\frac{a^2r^2\sin^2 n\hat{A}}{3}\ge(\sum\frac{qr\sin n\hat{A}}{3})^2$$

نابرابری سمت چپ از نابرابری (۴) و نابرابری سمت راست، از نابرابری واسطهٔ توانها، نتیجه می‌شود.

۵۵. الف) زاویه‌های مثلثها را بترتیب با α، β، γ و α'، β' و γ' نمایش می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\alpha=\alpha'$. نخست، بررسی می‌کنیم که نابرابری

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma<\sin\alpha'+\sin\beta'+\sin\gamma'$$

یا (چون $\alpha=\alpha'$) نابرابری هم ارز آن (۱) $\sin\beta+\sin\gamma<\sin\beta'+\sin\gamma'$ با چه شرطهایی برقرار است. این نابرابری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2} \qquad (2)$$

چون $\alpha=\alpha'$ ، داریم $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'<۱۸۰^\circ$ ، درنتیجه :

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}=\sin\frac{\beta'+\gamma'}{۲}>۰$$

با تقسیم دو طرف (۲) بر عدد مثبت $\sin(\beta+\gamma)/۲$ ، به دست می‌آوریم :

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{۲}$$

این نابرابری برقرار است، اگر و تنها اگر، قدرمطلق $\beta'-\gamma'$ کوچکتر از $\beta-\gamma$ ، یعنی اگر و تنها اگر تفاضل بین زاویه‌های β' و γ' ، کوچکتر از تفاضل بین β و γ باشد.

ب) بنابر (الف) هرگاه همهٔ سه زاویهٔ یک مثلث Δ مساوی نباشند، مثلاً $\beta\neq\gamma$، آن‌گاه می‌توان یک مثلث Δ' با شکل متفاوت را یافت، به قسمی که مجموع سینوسهای زاویه‌های مثلث Δ' بزرگتر از مجموع متناظر برای Δ باشد. برای این کار، در Δ زاویهٔ αرا تغییر نداده، و β و γ را با میانگین حسابی آنها یعنی با $(\beta+\gamma)/۲$ جانشین می کنیم. پس زاویه‌های عبارت می‌شوند از $\alpha'=\alpha$ ، $\beta'=\gamma'=(\gamma+\beta)/۲$. پس اگر یک مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد، بترتیب بالا می‌توان مجموع سینوسهای زاویه‌های آن را افزایش داد. بنابراین، تنها مثلث متساوی‌الاضلاع است که این مجموع را ماکسیمم می کند.

یادداشت. وجود ماکسیمم. در آن چه گذشت، ثابت شدکه هرگاه مجموع سینوسهای زاویه‌های یک مثلث دارای ماکسیمم باشد، آن گاه این ماکسیمم تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود. امّا، وجود چنین ماکسیممی زیاد واضح نیست. برای این که، مجموع سینوسهای مورد سؤال بینهایت مقدار می‌تواند بگیرد. و در میان بی‌نهایت عدد، ممکن است که بزرگترین عدد وجود نداشته باشد.

واقعیت وجود ماکسیمم در حالت مورد بحث اثبات لازم دارد ؛ باید ثابت کنیم که مجموع سینوسهای زاویه‌ها در یک مثلث متساوی‌الاضلاع Δ_ε بزرگتر از این مجموع در هر مثلث دیگر Δ است.

۱) هرگاه یک زاویهٔ Δ برابر ۶۰° باشد، آن‌گاه Δ_ε و Δ هر دو یک زاویهٔ ۶۰ درجه دارند. تفاضل دو زاویهٔ دیگر از مثلث Δ_ε صفر است، بنابراین از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از تفاضل نظیر در هر مثلث Δ می‌باشد.

۲) هرگاه Δ دارای زاویهٔ ۶۰° نباشد و $\alpha\leq\beta\leq\gamma$ ، آن گاه واضح است که $\alpha<۶۰^\circ<\gamma$ ، درنتیجه $۶۰^\circ-\alpha$ و $\gamma-۶۰^\circ$ عددهایی مثبت هستند.

مثلث Δ' را با زاویه‌های $\alpha'=۶۰^\circ$ ، $\beta'=\beta$ و $\gamma'=\alpha+\gamma-۶۰^\circ$ رسم می کنیم. در این صورت :

$$\gamma'-\alpha'=(\alpha+\gamma-۶۰^\circ)-۶۰^\circ=(\gamma-۶۰^\circ)-(۶۰^\circ-\alpha)$$

درنتیجه $|\gamma'-\alpha'|$ برابر یکی از دو عدد مثبت $(\gamma-60^\circ)-(60^\circ-\alpha)$ یا $(60^\circ-\alpha)-(\gamma-60^\circ)$ است. در هریک از این حالتها :

$$|\gamma'-\alpha'|<(\gamma-60^\circ)+(60^\circ-\alpha)=\gamma-\alpha=|\gamma-\alpha|$$

اینک چون $\alpha'=60^\circ$، بنابر (۱) مجموع سینوسهای زاویه‌ها در Δ' کوچکتر از مجموع نظیر آن در Δ_ε است. به علاوه $\beta'=\beta$ و، همان‌گونه که هم‌اکنون دیدیم، تفاضل دو زاویهٔ دیگر Δ' از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از تفاضل نظیر آن در Δ است، پس بنابر (الف)، مجموع سینوسهای زاویه‌های Δ کوچکتر از مجموع نظیر آن در Δ' است، از این‌رو، این مجموع از مجموع نظیر آن در Δ_ε نیز کوچکتر است.

۵۶. روشن است که، به ازای $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$، نابرابری مطلوب، به برابری تبدیل می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم، دست‌کم دو زاویهٔ α و β از مثلث، برابر نباشند، در این صورت

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)<2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$$

یعنی، نابرابری، به صورت اکید خود، برقرار است. بنابراین علامت برابری، تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع برقرار است.

۵۷. قرار می‌گذاریم :

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

که در آن، α، β و γ، زاویه‌های مثلثند. با توجه به این که مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر 180° است، داریم :

$$4\left[f(\alpha,\beta,\gamma)-\frac{3}{4}\right]=$$

$$=4\left(\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+\frac{1+\cos2\gamma}{2}-\frac{3}{4}\right)=$$
$$=2\cos2\alpha+2\cos2\beta+2\cos2\gamma+3=4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+4\cos^2(\alpha+\beta)+1=\left[2\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]^2+$$
$$+1-\cos^2(\alpha-\beta)\ge0$$

که از آن جا، نابرابری مورد نظر به دست می‌آید :

$$f(\alpha,\beta,\gamma)\ge\frac{3}{4}$$

در ضمن علامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم :

$$\cos(\alpha-\beta)=1\quad,\quad\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$$

مقدار $f(\alpha,\beta,\gamma)$ حداکثر ندارد. زیرا برای هر انتخابی از زاویه‌های α، β و γ، به

ازای هر مقدار مثبت و به دلخواه کوچک ε ، داریم :

$$\varepsilon < \alpha, \beta, \gamma < ۱۸۰^\circ - ۲\varepsilon$$

که از آنها به دست می‌آید :

$$|\cos\alpha| < \cos\varepsilon \ , \ |\cos\beta| < \cos\varepsilon \ , \ |\cos\gamma| < \cos\varepsilon$$

و در نتیجه :

$$f(\alpha, \beta, \gamma) < f(\varepsilon, \varepsilon, ۱۸۰^\circ - ۲\varepsilon)$$

۵۸. راه اول. چون $\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$ ، پس زاویه‌های $\frac{\alpha}{۲}$، $\frac{\beta}{۲}$ و $\frac{\gamma}{۲}$ زاویه‌های حاده هستند، و می‌دانیم که وقتی یک زاویهٔ حاده افزایش می‌یابد، سینوس آن نیز افزایش می‌یابد. از این‌رو از نابرابریهای $\frac{\alpha}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\beta + \gamma}{۲} < ۹۰^\circ - \frac{\beta}{۲} < ۹۰^\circ$ نابرابریهای زیر نتیجه می‌شود :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲} < \sin(۹۰^\circ - \frac{\beta}{۲})\sin\frac{\beta}{۲} = \cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}$$

و چون داریم $\cos\beta \leq ۱$ ، $\sin\beta \leq ۱$ ، $\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\beta}{۲} = \frac{۱}{۲}\sin\beta$ ، نتیجه می‌شود که :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲} < \frac{۱}{۲}\sin\beta \leq \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

هر گاه γ کوچکترین زاویه از این سه زاویه باشد ؛ آن گاه $\gamma \leq ۱۸۰^\circ / ۳$ و $\frac{\gamma}{۲} \leq ۳۰^\circ$ درنتیجه :

$$\sin\frac{\gamma}{۲} \leq \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

سرانجام از (۱) و (۲) داریم :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲} < \frac{۱}{۴} \qquad (۳)$$

راه دوم. الف) می‌دانیم که در هر مثلث با زاویه‌های α، β و γ داریم :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲} = \frac{r}{۴R}$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن است. چون واضح است که $r < R$ پس حاصلضرب در طرف چپ کوچکتر از $\frac{۱}{۴}$ است.

ب) از نابرابری (۳) و از راه اثبات $r \leq \frac{R}{۲}$ نتیجه خواهیم گرفت :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲} \leq \frac{۱}{۸} \qquad (۴)$$

بنابر قضیهٔ اویلر، $d^۲ = R^۲ - ۲Rr$ است که d فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محاطی درونی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. از این‌رو :

$$۲Rr \leq R^۲ \ , \ r \leq \frac{R}{۲}$$

هرگاه مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه $d = ۰$ و مقدار حاصل‌ضرب $\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}$ درست برابر با $\frac{۱}{۸}$ است.

۵۹. برای $\alpha,\beta,\gamma \le ۹۰^\circ$ در مثلث، داریم:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{۲}\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}+$$
$$+\cos\frac{\beta+\gamma}{۲}\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<۲\sin\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}+۲\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}+$$
$$+۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$$

که در آنها، از این نابرابریها استفاده کرده‌ایم:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}<۲\cos\frac{\gamma}{۲}\ ,$$
$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{۲}<۲\cos\frac{\beta}{۲}\ ,$$
$$\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<۲\cos\frac{\alpha}{۲}$$

مثلاً، برای اثبات نابرابری اول از این نابرابریها، کافی است توجه کنیم $\frac{\gamma}{۲}<۶۰^\circ$، از آن‌جا

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}\le ۱=۲\cos ۶۰^\circ<۲\cos\frac{\gamma}{۲}$$

دو نابرابری دیگر هم، به همین ترتیب، ثابت می‌شوند.

۳.۱. ضلع

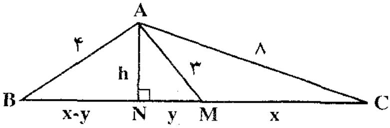
۱.۳.۱. اندازهٔ یک ضلع

۱.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع a

۶۰. ارتفاع CD را رسم می‌کنیم، داریم:

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AD,\ AD=\frac{AC}{۲}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow BC=۷$$

۶۱. اندازهٔ ضلع BC برابر $\frac{۵}{۱۲}$ است.



۶۲. (ب) مطابق شکل، طول ارتفاع AN وارد از A بر BC را h می‌گیریم و فرض می‌کنیم $BM=x$ و $NM=y$. آنگاه:

$$h^۲+(x+y)^۲=۶۴،\ x^۲+y^۲=۹،\ h^۲+(x-y)^۲=۱۶$$

چون دو برابر معادلهٔ دوم از مجموع معادله‌های اول و سوم کم شود، به دست می‌آید:

$$۲x^۲=۶۲\qquad x=\sqrt{۳۱}\qquad BC=۲\sqrt{۳۱}$$

راه دیگر : یادآوری می‌کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مجذورهای ضلعها برابر است با مجموع مجذورهای دو قطر. چون این رابطه را برای متوازی‌الاضلاعی بنویسیم که AB و AC دو ضلع آن هستند، نتیجه خواهد شد :

$$۲(۴^۲+۸^۲)=۶^۲+(۲x)^۲\ ,\ \ x=\sqrt{۳۱}\Rightarrow BC=۲\sqrt{۳۱}$$

.۶۴

$$a^۲=b^۲+c^۲=۲bc\cos\hat{A}$$

$$a^۲=۱۶+۲۷-۲\times۴\times۳\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۷$$

زاویهٔ C قائمه نیست زیرا اندازهٔ ضلع BC (که مقابل به زاویهٔ ۳۰ درجه است) نصف اندازهٔ ضلع AB (که رو به رو به زاویهٔ C است) نمی‌باشد.

.۶۵ از $\hat{B}=۲\hat{C}$ نتیجه می‌شود $\hat{A}=۱۸۰-۳\hat{C}$ و با استفاده از رابطهٔ سینوسها داریم.

$$\frac{a}{\sin(۱۸۰^\circ-۳\hat{C})}=\frac{b}{\sin۲\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{a}{\sin۳\hat{C}}=\frac{b}{\sin۲\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$a=\frac{c\sin۳\hat{C}}{\sin\hat{C}}=\frac{c\sin\hat{C}(۳-۴\sin^۲C)}{\sin\hat{C}}$$

$$a=c(۳-۴\sin^۲\hat{C})=c\left(۳-۴(۱-\cos^۲\hat{C}\right)\Rightarrow$$

$$a=c(۳-۴+۴\cos^۲\hat{C})=c(۴\cos^۲\hat{C}-۱)\qquad(۱)$$

$$\frac{b}{۲\sin\hat{C}\cos\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow b=۲c\cos\hat{C}\Rightarrow$$

$$\cos\hat{C}=\frac{b}{۲c}\qquad(۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$a=c(۴\times\frac{b^۲}{۴c^۲}-۱)$$

$$a=c\times\frac{b^۲-c^۲}{c^۲}=\frac{b^۲-c^۲}{c}$$

.۶۶ $\sqrt{b(b+c)}$

.۶۷ طول نیمساز زاویهٔ خارجی A، با دستور $d'_a=\dfrac{۲bc\sin\frac{\hat{A}}{۲}}{|b-c|}$ (BC = a ،AB = c، CA = b) محاسبه می‌شود. پس، $\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ را پیدا می‌کنیم :

$$\sin\frac{\hat{A}}{۲}=\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱-\cos A)}=\sqrt{\frac{۱}{۲}(۱-\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc})}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{۴bc}}$$

به همین طریق، با محاسبهٔ $\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ و $\sin\frac{\hat{C}}{۲}$ بر حسب ضلعهای مثلث، و محاسبهٔ d'_a و d'_c، به دست می‌آوریم $\frac{\sqrt{a(b+c-a)}}{|b-a|}=\frac{\sqrt{c(a+b-c)}}{|b-c|}$.

بنا به فرض، $b=۲$ و $c=۱$ بنابراین، a باید در معادلهٔ:

$$\sqrt{a+۱}=\sqrt{\frac{a(۳-a)}{|a-۲|}}\Rightarrow(a-۱)(a^۲-a-۴)=۰$$

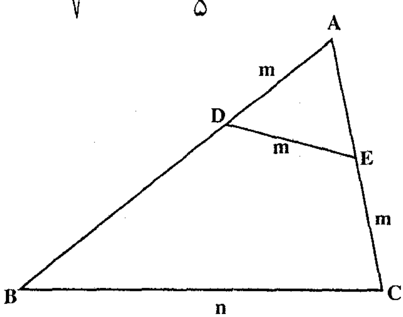
صدق کند، اما $a\neq ۱$ ، در نتیجه، $BC=a=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$.

۶۸. داریم: $S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}$ و بنابراین $\sin\hat{A}=\frac{۴}{۵}$ و $\cos\hat{A}=\pm\frac{۳}{۵}$ ، اکنون با توجه به رابطهٔ کسینوسها:

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos\hat{A}$$

می‌توان a را محاسبه کرد (بر حسب این که زاویهٔ A حاده یا منفرجه باشد، دارای دو جواب خواهیم بود:

$$a=\sqrt{b^۲+c^۲\pm\frac{۶}{۵}bc}$$



۶۹. فرض می‌کنیم، عددهای طبیعی m و n با شرط مسأله سازگار باشند. در این صورت $m=CE<AC=۲۱$ و از مثلث ADE داریم:

$$۲۱-m=AE<AD+DE=۲m$$

یعنی $۷<m<۲۱$.

چون $AD=DE$ ، برای زاویهٔ $\alpha=B\hat{A}C$ داریم:

$$\cos\alpha=\frac{AE}{۲AD}=\frac{۲۱-m}{۲m}$$

سرانجام بنابر قضیهٔ کسینوسها، در مثلث ABC به دست می‌آید:

$$n^۲=BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲Ab.AC\ \cos\alpha=$$

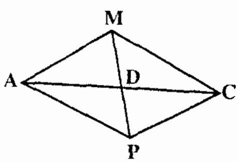
$$۳۳^۲+۲۱^۲-۲\times۳۳\times۲۱\times\frac{۲۱-m}{۲m}=۲۲۲۳-\frac{۲۷\times۴۹\times۱۱}{m}$$

از این جا نتیجه می‌شود که m، باید مقسوم‌علیهایی از عدد $۱۱\times۴۹\times۲۷$ باشد، از دو جواب ممکن $m=۹$ و $m=۱۱$ (با توجه به شرط $۷<m<۲۱$)، جواب اول مناسب نیست (زیرا $n^۲=۶۰۶$ مجذور کامل نمی‌شود). برای $m=۱۱$ به دست می‌آید: $n^۲=۹۰۰$ یعنی $n=۳۰$. آزمایش نشان می‌دهد که، به ازای این مقدار n، همهٔ شرطهای مسأله برقرارند.

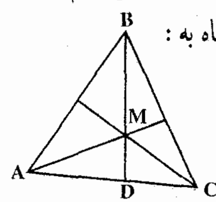
۲.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع b

۷۱. $\sqrt{۱۳}$

۷۲. طبق قضیه، میانه‌های مثلث در نقطه‌ای مانند M همرس هستند. فاصلهٔ این نقطه از رأس مثلث روی هر یک از میانه‌ها برابر دو سوم طول همان میانه است (شکل الف) بنابراین دو ضلع از مثلث AMC یعنی $AM=\frac{۲}{۳}m_a$ ، $MC=\frac{۲}{۳}m_c$ و نیز میانهٔ $MD=\frac{۱}{۳}m_b$ معلوم است. مثلث AMC را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مثلث میانهٔ MD را دو برابر کرده و پاره‌خط MP را به دست می‌آوریم. سپس نقطهٔ P را به نقطه‌های A و C وصل می‌کنیم. در نتیجه متوازی‌الاضلاع AMCP به دست می‌آید (شکل ب). آنگاه به :



(ب)



(الف)

$AC^۲+MP^۲=۲AM^۲+۲MC^۲$ یعنی $b^۲+\frac{۴}{۹}m_b^۲=۲\times\frac{۴}{۹}m_a^۲+\frac{۴}{۹}m_c^۲$ می‌رسیم، که از آن نیز $b=\frac{۲}{۳}\sqrt{۲m_a^۲+۲m_c^۲-m_b^۲}$ به دست می‌آید.

۷۳. چون $۱\le\frac{۱}{۲}bc\le\frac{۱}{۲}b^۲$ پس $b\ge\sqrt{۲}$.

۳.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع c

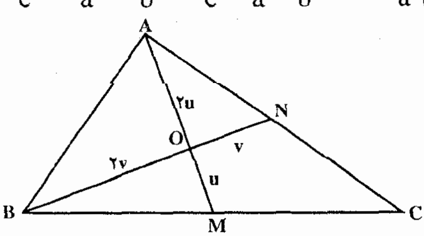
۷۴. $۱۰cm$

۷۵. گزینهٔ (الف) درست است.

۷۶. با توجه به این که $h_a=\frac{۲S}{a}$ و $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$ داریم :

$$\frac{۲S}{c}=\frac{۲S}{a}+\frac{۲S}{b}\Rightarrow\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\Rightarrow c=\frac{ab}{a+b}$$

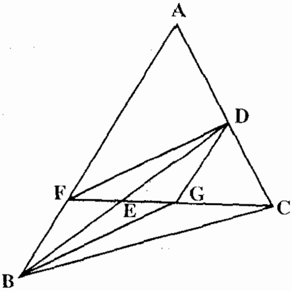
۷۷. (الف)، میانه‌های عمود بر هم را با AM و BN و نقطهٔ برخورد آنها را با O نشان می‌دهیم. بنابراین $AN=۳$ و $BM=۷/۲$ (شکل را ملاحظه کنید) اگر طول پاره خطهای AO و BO به ترتیب ۲u و ۲v باشد، طولهای OM و ON بترتیب u و v خواهد بود. از این رو با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AON و BOM بترتیب داریم :



$$u^۲+۴v^۲=(\frac{۷}{۲})^۲=\frac{۴۹}{۴}\quad,\quad ۴u^۲+v^۲=۳^۲=۹$$

چهار پنجم مجموع این دو معادله می‌رساند که $۴u^۲ + v^۲ = ۱۷$ ، که برابر با مربع وتر AB از مثلث قائم‌الزاویه AOB است. بنابراین طول AB برابر است با $\sqrt{۱۷}$

۷۸. $\sqrt{\frac{a^۲ + b^۲}{۵}}$.



۷۹. گزینهٔ (ج) درست است.

فرض کنید G نقطه‌ای واقع بر EC باشد به طوری که $\overline{FE} = \overline{EG}$. D را به G وصل کنید. در این صورت FDGB متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه :

$\overline{DG} = ۵$, $\overline{AF} = ۱۰$, $\overline{AB} = ۱۵$

۸۰. ۴cm

۸۱. اگر α زاویهٔ بین ضلعهای به طول a و b باشد، آن وقت داریم :

$a + b\sin\alpha \le b + a\sin\alpha$

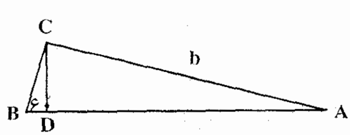
$(a - b)(\sin\alpha - ۱) \ge ۱ \Rightarrow \sin\alpha \ge ۱$

بنابراین $\alpha = ۹۰^\circ$ است، جواب $\sqrt{a^۲ + b^۲}$.

۸۲. فرض می‌کنیم چنین نباشد، مثلاً $c \ge a$ ، در این صورت $۲c \ge c + a > b$ ، با مربع کردن نابرابریها و جمع کردن آنها با یکدیگر، به دست می‌آوریم $۵c^۲ > a^۲ + b^۲$ ، که تناقض است.

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ یکی از ضلعها

۸۳. گزینهٔ (د) درست است. مثلث را ABC فرض کنید. در این مثلث، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ ، $\overline{BC} = a$ ، $\overline{CA} = b = ۹۰ - a$ ، $\overline{AB} = ۸۰$. فرض کنید CD ارتفاع وارد بر AB است، و $x = \overline{BD}$. نتیجه می‌شود :



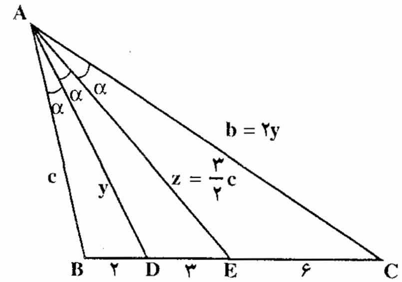
$CD = \sqrt{۳}x$, $a = ۲x$, $b = ۹۰ - ۲x$;

$\Rightarrow ۳x^۲ + (۸۰ - x)^۲ = (۹۰ - ۲x)^۲$

$\Rightarrow x = \frac{۱۷}{۲}$

$\Rightarrow a = ۱۷$, $b = ۷۳$

۸۴. گزینهٔ (الف) درست است زیرا :
مطابق شکل فرض می‌کنیم $B\hat{A}C = 3\alpha$، $c = AB$ و $y = AD$. $z = AE$ و $b = AC$. بنا به قضیهٔ نیمساز زاویه در مثلث داریم :



$$(1)\quad \frac{c}{z} = \frac{2}{3}\ ،\ \frac{y}{b} = \frac{1}{2}\quad \text{یا}\quad z = \frac{3}{2}c\ ,\ b = 2y$$

از قانون کسینوسها در مثلثهای ADB، AED و ACE بترتیب عبارتهای زیر برای $\cos\alpha$ به دست می‌آیند :

$$\frac{c^2 + y^2 - 4}{2cy} = \frac{\frac{9}{4}c^2 + y^2 - 9}{3cy} = \frac{\frac{9}{4}c^2 + 4y^2 - 36}{6cy}$$

از برابری عبارتهای اول و دوم و عبارتهای اول و سوم به ترتیب نتیجه می‌شود :

$$3c^2 - 2y^2 = 12 \qquad 3c^2 - 4y^2 = -96$$

از حل این دو معادله نسبت به c^2 و y^2 نتیجه می‌شود $y^2 = 54$ و $c^2 = 40$ و در نتیجه ضلعهای مثلث برابرند.

$$AB = c = 2\sqrt{10} \simeq 6/3 \quad \text{و}$$
$$AC = b = 2y = 2\sqrt{54} = 6\sqrt{6} \simeq 14/7 \quad BC = 11$$

راه دیگر . از فرمول نیمساز زاویهٔ مثلث و از رابطهٔ (۱) که در بالا به دست آمده داریم :

$$y^2 + 6 = cz = \frac{2}{3}z^2 \quad \text{و} \quad z^2 + 18 = yb = 2y^2$$

از حل این دو معادله نسبت به y^2 و z^2 نتیجه می‌شود $z^2 = 90$ و $y^2 = 54$

$$AB = c = \frac{2}{3}\sqrt{90} = 2\sqrt{10}$$
$$AC = b = 2\sqrt{54} = 6\sqrt{6}$$

۸۵. 6cm

۸۶. 12m

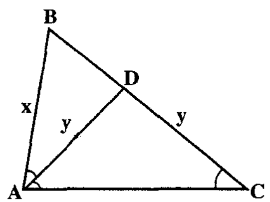
۸۷. (د). مساحتهای مثلثها را بر حسب سانتیمتر مربع T و T + ۱۸ و ضلع متناظر با ضلع ۳ سانتیمتر را x سانتیمتر می‌گیریم. در دو مثلث متشابه نسبت مساحتها برابر با مجذور نسبت ضلعهای متناظر است. پس $\frac{T+18}{T} = \frac{x^2}{3^2} = (\frac{x}{3})^2$ بنا به فرض، $\frac{x}{3}$ عدد صحیح است، در نتیجه x مضرب ۳ است. از حل این معادله نسبت به T نتیجه می‌شود $T = \frac{18}{(\frac{x}{3})^2 - 1}$ و چون T باید عدد صحیح باشد، $(\frac{x}{3})^2 - 1$ یک مقسوم علیه

۱۸ است. بنابراین ۱۹ یا $(\frac{x}{۳})^۲ = ۲,۳,۴,۷,۱۰$ در میان این عددها فقط ۴ مجذور کامل است؛ از این رو $(\frac{x}{۳})^۲ = ۴$، $\frac{x}{۳} = ۲$ و $x = ۶$.

۱. ۲.۳. اندازهٔ دو ضلع

۸۸. از مثلث BDE، طول DE و سپس از مثلثهای ABD و CBD طولهای AB و BC را به دست آورید. $BC = ۳/۷$ و $AB \# ۲/۷۷$.

۸۹. روش اول . با رسم نیمساز AD در زاویهٔ A به $B\hat{A}D = D\hat{A}C = A\hat{C}B$ دست می‌یابیم. در مثلث ADC زاویه‌های مجاور قاعده متساوی بوده و از این رو مثلث مزبور متساوی‌الساقین خواهد بود یعنی تساوی $AD = DC$ را خواهیم داشت.



با قرار دادن $AB = x$ و $AD = DC = y$ در می‌یابیم که $BC = x + ۲$ و $BD = x + ۲ - y$ است. مثلثهای ABD و ABC متشابه هستند. دلیل این امر این است که $B\hat{A}D = B\hat{C}A$ بوده و $\hat{B}$ زاویهٔ مشترک آنهاست. از تشابه این دو مثلث، $\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$ یعنی : $\frac{y}{۵} = \frac{x+۲-y}{x} = \frac{x}{x+۲}$ نتیجه می‌شود برای یافتن x و y به دستگاه دو معادلهٔ دو متغیر $\begin{cases} \frac{x}{x+۲} = \frac{y}{۵} \\ \frac{x+۲-y}{x} = \frac{y}{۵} \end{cases}$ می‌رسیم که از آن نیز $\begin{cases} ۵x = xy + ۲y \\ ۵x + ۱۰ - ۵y = xy \end{cases}$ به دست می‌آید. تفریق معادلهٔ دوم از این دستگاه از معادلهٔ اول آن، به $۵y - ۱۰ = ۲y$ و $y = \frac{۱۰}{۳}$، منتهی می‌شود، بنابراین $\frac{x}{x+۲} = \frac{۲}{۳}$ یعنی $x = ۴$ به دست می‌آید. بدین ترتیب $AB = ۴cm$ و $BC = ۶cm$ خواهد بود.

روش دوم . با قرار دادن $\hat{C} = t$ به $\hat{A} = ۲t$ و $\hat{B} = ۱۸۰° - ۳t$ دست می‌یابیم. همچنین منظور کردن $AB = x$ به $BC = x + ۲$ منتهی می‌شود. طبق قانون سینوسها چنین داریم :

$\frac{۵}{\sin(۱۸۰° - ۳t)} = \frac{x+۲}{\sin ۲t} = \frac{x}{\sin t}$ بدین ترتیب دستگاه دو معادلهٔ دو متغیرهٔ زیر که در

آن از $\sin(180^\circ - 3t) = \sin 3t$ استفاده شده است. بر حسب x و t به دست می‌آید :

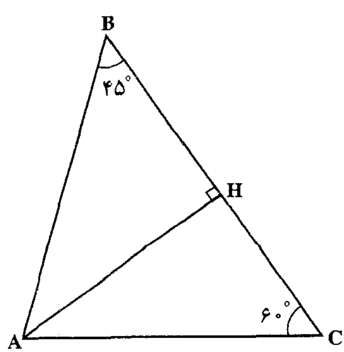
$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin t} = \dfrac{x+2}{\sin 2t} \\ \dfrac{x}{\sin t} = \dfrac{5}{\sin 3t} \end{cases}$$

به حل این دستگاه مبادرت می‌کنیم.

از معادلهٔ دوم دستگاه به $x = \dfrac{5\sin t}{\sin 3t} = \dfrac{5\sin t}{3\sin t - 4\sin^3 t} = \dfrac{5}{3 - 4\sin^2 t}$ و از معادلهٔ اول نیز به $\dfrac{\sin 2t}{\sin t} = \dfrac{x+2}{x}$ یعنی $2\cos t = 1 + \dfrac{2}{x}$ می رسیم. با قرار دادن عبارت معادل x بر حسب t در تساوی آخر به $2\cos t = 1 + \dfrac{6 - 8\sin^2 t}{5}$ می‌رسیم. با منظور کردن $\cos t = z$ در این معادلهٔ مثلثاتی، معادله $2z = 1 + \dfrac{6 - 8(1 - z^2)}{5}$ به دست می‌آید که از آن نیز $z_1 = \dfrac{3}{4}$ یا $z_2 = \dfrac{1}{2}$ یعنی : $\cos t = \dfrac{3}{4}$ یا $\cos t = \dfrac{1}{2}$ نتیجه می‌شود. اگر $\cos t = \dfrac{3}{4}$ باشد، آن گاه از $2\cos t = 1 + \dfrac{2}{x}$ به $x = 4$ دست می‌یابیم. اگر $\cos t = \dfrac{1}{2}$ باشد، آن گاه از $2\cos t = 1 + \dfrac{2}{x}$ به $1 = 1 + \dfrac{2}{x}$ وصول می‌یابیم که ممتنع است. بدین ترتیب $AB = 4cm$ و $BC = 6cm$ خواهد بود.

تذکر. عبارت $\cos t = \dfrac{1}{2}$ به معنی $t = 60^\circ$ است که از آن نیز در مثلث ABC زاویه‌های $\hat{C} = 60^\circ$ و $\hat{A} = 120^\circ$ به دست می‌آید که غیر ممکن است.

۹۰. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. $AH = 2\sqrt{3}$ می‌شود.



$$BH^2 + AH^2 = AB^2 \Rightarrow AB^2 = 24 \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$$

$$CB = CH + BH = 2 + 2\sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3})$$

۹۱. راه اول . از قانون کسینوسها داریم :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma)$$

همچنین می‌دانیم که $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ، یا $2ab = 4T/\sin\gamma$ ، از این رو :

$$c^2 = (a-b)^2 + 4T \times \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = (a-b)^2 + 4T\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

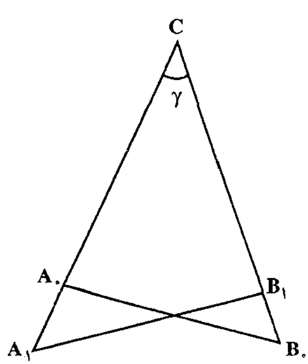
چون T و γ ثابت هستند، دومین جمله در طرف راست ثابت است. اولین جمله، وقتی $a = b$ ، برابر صفر است و در غیر این صورت مثبت است. بنابراین c^2 ، و از اینرو c ، وقتی می‌نیمم می‌باشند که مثلث متساوی‌الساقین است. یعنی، وقتی $a = b$ در این حالت :

$$2ab = 2a^2 = \frac{4T}{\sin\gamma}\ ,\ \ a = b = \sqrt{\frac{2T}{\sin\gamma}}$$

راه دوم . به روش هندسی ثابت می‌کنیم که وقتی مثلث متساوی‌الساقین $(a = b)$ است، که c کوتاهترین باشد. فرض کنیم $A_0B_0C_0$ یک مثلث متساوی‌الساقین با مساحت T و زاویهٔ γ باشد. و A_1B_1C مثلث دیگری باشد با همان مساحت و با زاویهٔ A_1CB_1 برابر با γ و با طول ضلع CA_1 بلندتر از ضلع CB_1 . چون مثلثهای کوچک $A_0A_1B_1$ و $A_0B_0B_1$ دارای مساحتهای برابرند و ضلع A_0B_1 در آنها مشترک است، پس ارتفاعهای آنها مساوی است ؛ یعنی، $A_0A_1B_0B_1$ یک ذوزنقه است. به علاوه $A_0\hat{A}_1B_0 < B_1\hat{B}_0A_1$ زیرا

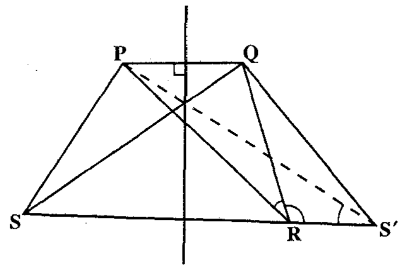
$$A_0\hat{A}_1B_0 < C\hat{A}_0B_0 = B_1\hat{B}_0A_0 < B_1\hat{B}_0A_1$$

برای اثبات $A_0B_0 < A_1B_1$ کافی است که لم زیر را ثابت کنیم.



لم. اگر g یکی از قاعده‌های یک ذوزنقه غیر متساوی‌الساقین باشد، در این صورت قطر بزرگتر از آن نقطهٔ انتهایی g می‌گذرد، که زاویهٔ داخلی آن کوچکتر است.

اثبات . در ذوزنقهٔ $PQRS$ ، فرض می‌کنیم PQ و RS موازی باشند و $S\hat{P}Q > P\hat{Q}R$. اگر S' چنان باشد که $PQS'S$ نسبت به عمود منصف PQ متقارن باشد، در این صورت، S' بر خط گذرنده بر S و R و بعد از R قرار دارد و $R\hat{S}'P = Q\hat{S}R$ ، چون PRS' زاویهٔ خارجی مثلث SPR است پس $P\hat{R}S' > P\hat{S}R$ و $P\hat{S}R = P\hat{S}Q + Q\hat{S}R$ از این رو :



$$P\hat{R}S' > Q\hat{S}R = R\hat{S}'P$$

در یک مثلث، ضلع بزرگتر، مقابل به زاویهٔ بزرگتر است، پس در مثلث PRS' داریم $PS' > PR$ و چون بنابر تقارن $PS' = QS$ ، پس ثابت کرده‌ایم که $QS > PR$. این مطلب لم را ثابت می‌کند. وقتی آن را در مورد ذوزنقهٔ $A_0A_1B_0B_1$ به کار گیریم، ثابت می‌شود که $A_0B_0 = c$ که متعلق به یک مثلث متساوی‌الساقین است، کوچکتر می‌باشد.

راه سوم . همهٔ مثلثهایی را در نظر می‌گیریم که مساحت آنها مقدار داده شدهٔ T و زاویهٔ رأس C از آنها برابر با γ باشد. هرگاه یکی از آنها دارای قاعدهٔ c کوچکتر از قاعده‌های دیگر باشد، همهٔ مثلثهای دیگر را منقبض می‌کنیم تا طول قاعده آنها نیز به اندازهٔ c شود. مساحت شکلهای حاصل کوچکتر از T خواهد بود. به این ترتیب، مسأله را به این مسأله تبدیل کرده‌ایم که در میان همهٔ مثلثهای با قاعدهٔ c و با زاویهٔ رأس داده شدهٔ γ مثلث با بزرگترین مساحت را بیابیم.

رأس C از همهٔ این مثلثها بر کمان با وتر به طول c از دایرهٔ به شعاع $\dfrac{c}{2\sin\gamma}$ قرار دارد، مثلث با بزرگترین ارتفاع وارد بر c ، دارای بزرگترین مساحت می‌باشند ؛ ولی ارتفاع وارد بر c موقعی بزرگترین است که در نقطهٔ وسط وتر c بر آن عمود شود. در نتیجه جواب یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۹۲. $\sqrt{\dfrac{a^2\sin\alpha + 2ah\cos\alpha - 2ah}{\sin\alpha}}$.

۱.۳.۳. اندازهٔ سه ضلع

۹۳. $3\sqrt{5}$cm ، ۱۰cm و ۱۱cm

۹۴. طول ضلعها برابرند با ۲، ۳ و ۴.

۹۵. ضلعهای a ، b و c از مثلث را می‌توان با $a=b-d$ ، b و $c=b+d$ نمایش داد که در آن $b>d>0$ با استفاده از فرمول هرون، داریم :

$$t^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

که در آن $s=(a+b+c)/2$ در این **حالت** داریم :

$$s=\frac{3b}{2}\ ,\ \ s-a=\frac{b}{2}+d\ ,\ \ s-b=\frac{b}{2}\ ,\ \ s-c=\frac{b}{2}-d$$

با جایگذاری این مقدارها در فرمول بالا، به دست می‌آوریم :

$$t^2=\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4}-d^2\right)$$

یا

$$3(b^2)^2-12d^2b^2-16t^2=0$$

این معادله نسبت به b^2 یک معادلهٔ درجه دوم است و می‌توان آن را نسبت به b^2 و بر حسب d و t حل کرد :

$$b^2=2(d^2\pm\sqrt{d^4+4t^2/3})$$

برای به دست آوردن یک مقدار مثبت برای b^2 ، باید ریشهٔ دوم مثبت را انتخاب کنیم ؛ از این رو

$$b=\sqrt{2(d^2+\sqrt{d^4+4t^2/3})}\ ,\ \ a=b-d\ ,\ \ c=b+d$$

زاویه‌های α و β رو به روی a و b ، لزوماً حاده هستند. این زاویه‌ها را می‌توان از فرمولهای زیر به دست آورد :

$$t=\frac{bc\sin\alpha}{2}\ ,\ \ t=\frac{ac\sin\beta}{2}\ ,\ \ \sin\alpha=\frac{2t}{bc}\ ,\ \ \sin\beta=\frac{2t}{ac}$$

سرانجام، $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$

هرگاه $d=1$ و $t=6$ ، آن گاه از فرمول بالا داریم $b=4$ ، بنابراین $a=3$ و $c=5$ بعلاوه :

$$\sin\alpha=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}\ ,\ \ \sin\beta=\frac{4}{5}=\cos\alpha$$

$$\alpha=36^\circ,54'\ ,\ \ \beta=90-\alpha=53^\circ,8'\ ,\ \ \gamma=90^\circ$$

۹۶. اگر C_1 قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به AB، و B_1 قرینهٔ B نسبت به AC باشد، آن وقت (مثل همیشه، a، b و c طول ضلعهای ΔABC هستند و S مساحت آن است).

$$|C_1B_1|^2=b^2+c^2-2bc\cos 3A=a^2+2bc(\cos A-\cos 3A)$$

$$=a^2+8bc\sin^2 A\cos A=a^2+16(b^2+c^2-a^2)\frac{S^2}{b^2c^2}$$

بنابراین، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} a^2b^2c^2+16s^2(b^2+c^2-a^2)=8b^2c^2 \\ a^2b^2c^2+16s^2(a^2+b^2-c^2)=8a^2b^2 \\ a^2b^2c^2+16s^2(c^2+a^2-b^2)=14c^2a^2 \end{cases}$$

با کم کردن معادلهٔ دوم از اولی و در نظر داشتن این که $a \neq c$، به دست می‌آوریم : $4S^2=b^2$. با قرار دادن $\frac{b^2}{4}$ به جای S^2، به دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} a^2c^2+4(b^2-c^2-a^2)=0 \\ a^2b^2c^2+4b^2c^2+4b^2a^2-4b^4-14a^2c^2=0 \\ b^2=4S^2 \end{cases}$$

با فرض $a^2c^2=x$ و $a^2+c^2=y$، داریم :

$$\begin{cases} 4y-x=4b^2 \\ x(b^2-14)+4b^2y=4b^4 \end{cases}$$

با ضرب کردن معادلهٔ اول دستگاه معادله‌های اخیر در b^2، و کم کردن نتیجه از معادلهٔ دوم، به دست می‌آوریم : $x(2b^2-14)=0$، که از آن جا $b=\sqrt{7}$.

جواب : ۱، $\sqrt{7}$ ، $\sqrt{8}$ یا $\sqrt{\frac{21-\sqrt{217}}{2}}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{21+\sqrt{217}}{2}}$.

۹۷. فرض کنیم a ، b و c طول ضلعها، α ، β و γ طول میانه‌های مثلث باشد. باید دستگاه زیر را حل کنیم :

$$\begin{cases} b^2+c^2-\frac{a^2}{2}=2\alpha^2 \quad a>0\ ;\ b>0\ ;\ c>0\ ; \\ c^2+a^2-\frac{b^2}{2}=2\beta^2; \quad (b-c)^2<a^2<(b+c)^2 \\ a^2+b^2-\frac{c^2}{2}=2\gamma^2; \end{cases}$$

از جمع سه رابطه خواهیم داشت :

$$\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2);$$

اگر از طرفین این رابطه، طرفین هر یک از رابطه‌های بالا را کم کنیم، خواهیم داشت :

$$a^2=\frac{4}{9}(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2)\ ;$$

$$b^2=\frac{4}{9}(2\gamma^2+2\alpha^2-\beta^2)\ ;$$

$$c^2=\frac{4}{9}(2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2)\ ;$$

برای این که مقدارهای بالا قابل قبول باشند، باید در نامعادلهٔ (۱) صدق کنند.

$$[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]<0\ ;$$

$$a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2<0\ ;$$

یا :

$$\alpha^4-2(\beta^2+\gamma^2)\alpha^2+(\beta^2-\gamma^2)^2<0\ ;$$

$$(\beta-\gamma)^2<\alpha^2<(\beta+\gamma)^2\ ;$$

یا :

$$|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$$

یعنی α ، β و γ باید سه ضلع یک مثلث باشند.

۹۸. از محاسبهٔ ارتفاع مثلث بر حسب ضلعهایش داریم :

$$2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=ah=bh'=ch''\quad (1)$$

جوابهای دستگاه فوق اگر h ، h' و h'' معلوم باشند، a ، b و c ضلعهای مثلث خواهند بود زیرا a ، b و c مثبت و $(p-a)(p-b)(p-c)>0$ زیرا یا دو عامل از سه عامل منفی است و یا هر سه مثبتند. اما حالت اول نمی‌تواند برقرار باشد، زیرا اگر $p-a<0$ ، $p-b<0$، پس $2p-(a+b)<0$ یا $c<0$، و این نشدنی است، پس $p-a>0$ ، $p-b>0$ و $p-c>0$ یا $a<b+c$، $b<c+a$ و $c<a+b$ و این نامساویها نشان می‌دهند که a ، b و c ضلعهای مثلثند. به این ترتیب با حل دستگاه (۱) a، b و c به دست می‌آیند. فرض کنیم :

$$ah=bh'=ch''=\lambda\ ;$$

خواهیم داشت :

$$a=\frac{\lambda}{h}\ ;\ b=\frac{\lambda}{h'}\ ;\ c=\frac{\lambda}{h''};.(2)$$

پس :

$$2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\lambda;.(3)$$

اگر در رابطهٔ (۳) به جای a ، b و c مقادیرشان را قرار می‌دهیم و فرض کنیم : $\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}=2q$ خواهیم داشت :

$$2\lambda\sqrt{q(q-\frac{1}{h})(q-\frac{1}{h'})(q-\frac{1}{h''})}=1\ ;$$

از آن جا :

$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{q(q-\frac{1}{h})(q-\frac{1}{h'})(q-\frac{1}{h''})}}\ ;$$

شرط امکان مسأله این است که :

$$(q-\frac{1}{h})(q-\frac{1}{h'})(q-\frac{1}{h''})>0\ ;$$

به موجب بخشی که در اول مسأله انجام گرفت، داریم :

$$q-\frac{1}{h}>0\ ;\ q-\frac{1}{h'}>0\ ;\ q-\frac{1}{h''}>0\ ;$$

و یا

$$\frac{1}{h}<\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\ ;\ \frac{1}{h'}<\frac{1}{h''}+\frac{1}{h}\ ;\ \frac{1}{h''}<\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}\ ;$$

۹۹. ضلعهای چنین مثلثی را $x-1$ ، x و $x+1$ می‌گیریم. برای چنین مثلثی، اگر p نصف محیط و a، b و c طول ضلعهای آن باشد، داریم :

$$p=\frac{3x}{2}\ ,\ p-a=\frac{x}{2}+1\ ,\ p-b=\frac{x}{2}\ ,\ p-c=\frac{x}{2}-1$$

و بنابراین اگر مساحت مثلث را S بنامیم :

$$S=\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=\frac{x}{2}\sqrt{3\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$$

که اگر $\frac{x}{2}=m$ و m را عددی درست فرض کنیم :

$$S=m\sqrt{3(m^2-1)}$$

m^2-1 را برابر $3n^2$ و n را عددی درست می‌گیریم، در این صورت $S=3mn$، عددی درست می‌شود. ولی با توجه به این فرض، باید داشته باشیم :

$$m^2-3n^2=1\Rightarrow(m+n\sqrt{3})(m-n\sqrt{3})=1\qquad(1)$$

برابری (۱)، به ازای $m=2$ و $n=1$ برقرار است :

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$$

از آن جا :

$$(2+\sqrt{3})^p.(2-\sqrt{3})^p=1\qquad(p=1,2,\cdots)\qquad(2)$$

از برابریهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$m_p+n_p\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^p$$
$$m_p-n_p\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^p$$

و از آن‌جا :

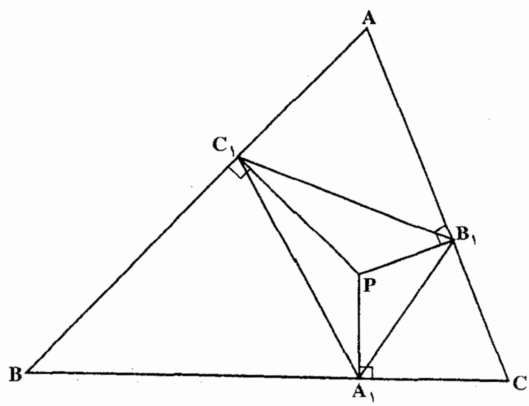
$$x_p=2m_p=(2+\sqrt{3})^p+(2-\sqrt{3})^p$$

و از این رابطه می‌توان مثلثهای هرونی را به دست آورد :

$$p=1\ \Rightarrow\ x_1=4\ ,\ S_1=6\ ;$$
$$p=2\ \Rightarrow\ x_2=14\ ,\ S_2=84\ ;$$
$$p=3\ \Rightarrow\ x_3=52\ ,\ S_3=1170\ ;$$
$$p=4\ \Rightarrow\ x_4=194\ ,\ S_4=16296\ ;$$

و غیره.

۱۰۰. دیدیم که مثلث ارتفاعی یک مثلث، یعنی مثلثی که رأسهایش پاهای ارتفاعهای آن مثلث می‌باشد. مثلث میانه‌ای یعنی مثلثی که رأسهایش پاهای میانه‌های آن مثلث می‌باشد. اکنون مثلثی را در یک مثلث مفروض در نظر می‌گیریم ک رأسهایش پاهای عمودهایی هستندکه از یک نقطهٔ داخلی، بر سه ضلع مثلث رسم شده‌اند. این مثلث را مثلث عمودی، یا مثلث پودر، نظیر آن نقطه نسبت به مثلث مفروض می‌نامیم. در شکل نقطهٔ P در درون مثلث ABC اختیار شده و عمودهای $PA_۱$ ، $PB_۱$ و $PC_۱$ بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB رسم شده‌اند. مثلث $A_۱B_۱C_۱$ مثلث عمودی نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. می‌توان قید بودن نقطهٔ P در درون مثلث را کنار گذاشت به شرط آن که P روی دایرهٔ محیطی مثلث نباشد. اگر P بر مرکز ارتفاعی یا بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، مثلثهای عمودی نظیر آن به ترتیب مثلث ارتفاعی و مثلث میانه‌ای خواهد بود.



اکنون به بررسی شکل بپردازیم. چهار گوشه $AB_۱PC_۱$ در دایرهٔ به قطر AP محاط است. پس P بر دایرهٔ محیطی مثلث $AB_۱C_۱$ واقع است. بنا به قانون سینوسها در دو مثلث ABC و $AB_۱C_۱$ داریم:

$$\frac{B_۱C_۱}{\sin \hat{A}} = AP \ , \ \frac{a}{\sin \hat{A}} = ۲R$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$B_۱C_۱ = \frac{a.AP}{۲R}$$

همچنین خواهیم داشت:

$$C_۱A_۱ = \frac{b.BP}{۲R} \ , \ A_۱B_۱ = \frac{c.CP}{۲R}$$

نکته. در نظر گرفتن مثلثهای عمودی متوالی نظیر یک نقطه برای یک مثلث مفروض، علاوه بر آن که تمرینی جالب است، مثالی دلفریب از تصور در هندسه است. به نظر می‌آید که این موضوع جالب برای نخستین بار توسط نیوبرگ J. Neuberg به عنوان ضمیمه‌ای بر چاپ ششم کتاب دنباله‌ای بر شش مقالهٔ اول تحریرات اقلیدس، تألیف جان

کازی مطرح شده است. اگر، نسبت به مثلث ABC و نظیر نقطهٔ P مثلث $A_۱B_۱C_۱$ عمودی اول، مثلث $A_۲B_۲C_۲$ عمودی دوم و مثلث $A_۳B_۳C_۳$ عمودی سوم می‌باشد.
برای مثلث عمودی سوم خاصیت زیر بیان شده است:
مثلث عمودی سوم با مثلث مفروض متشابه است. $\Delta ABC \sim \Delta A_۳B_۳C_۳$

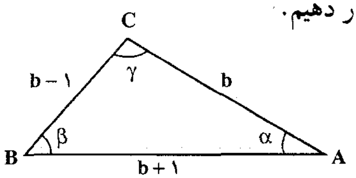
۱۰۱. طولهای ضلعها را با $b-۱$، b و $b+۱$ و زاویه‌های مقابل آنها را به α، β و γ نمایش می‌دهیم. شکل را ملاحظه کنید. واضح است که $b>۲$ و $\alpha<\beta<\gamma$ است. با به کار بردن قانون کسینوسها در می‌یابیم که:

$$\cos\alpha=\frac{b^۲+(b+۱)^۲-(b-۱)^۲}{۲b(b+۱)}=\frac{b+۴}{۲(b+۱)} \qquad (۱)$$

به همین ترتیب:

$$\cos\beta=\frac{b^۲+۲}{۲(b^۲-۱)}\ ,\ \cos\gamma=\frac{b-۴}{۲(b-۱)} \qquad (۲)$$

توجه داشته باشید که کسرهای فوق به ازاء هر عدد صحیح b، اعدادی گویا هستند.
چون b افزایش یابد، $\cos\alpha$ کاهش می‌یابد (مخرج کسر (۱)) دو برابر سریع‌تر از صورت نمو می‌کند)، و بنابراین α زیاد می‌شود. به ازاء: $b\geq ۷$ ملاحظه می‌کنیم که $\cos\alpha\leq ۱۱/۱۶<\sqrt{۲}/۲$ است. بنابراین $\alpha>۴۵^\circ$ می‌شود. اما در این صورت $\beta>۴۵^\circ$ می‌شود، و بنابراین $\gamma<۹۰^\circ$، و هیچ زاویه‌ای دو برابر دیگری نیست. بنابراین نیاز داریم که تنها $b=۳,۴,۵,۶$ را مورد بررسی قرار دهیم.



اکنون اگر $\gamma=۲\alpha$، $\gamma=۲\beta$ و یا $\beta=۲\alpha$ باشد، به ترتیب داریم:

$$\cos\gamma=۲\cos^۲\alpha-۱ \quad \text{یا} \quad \cos\gamma=۲\cos^۲\beta-۱$$

یا:

$$\cos\beta=۲\cos^۲\alpha-۱$$

و بنابراین:

$$\cos\alpha=\sqrt{(۱+\cos\gamma)/۲} \quad \text{یا} \quad \cos\beta=\sqrt{(۱+\cos\gamma)/۲}$$

یا:

$$\cos\alpha=\sqrt{(۱+\cos\beta)/۲}$$

برای این که $\cos\alpha$ یا $\cos\beta$ گویا باشند، باید $(۱+\cos\gamma)/۲$ یا $(۱+\cos\beta)/۲$ مربع یک عدد گویا باشند. اما با توجه به (۲) و به ازاء: $b=۳,۴,۵,۶$، مقادیر $(۱+\cos\beta)/۲$ عبارتند از ۲۷/۳۲ و ۴/۵ و ۲۵/۳۲ و ۲۷/۳۵ و مقادیر $(۱+\cos\gamma)/۲$ عبارتند از: ۳/۸ و ۱/۲ و ۹/۱۶ و ۳/۵. در این صورت تنها مقداری که با مشخصات مسأله می‌خواند، ۹/۱۶، با $b=۵$ و $\cos\alpha=۳/۴$ است.
در نتیجه تنها مثلث از نوع مطلوب دارای ضلعهای ۶ و ۵ و ۴ با $\gamma=۲\alpha$ است.

تبصره . راه حل دیگر سه امکان $\beta=۲\alpha$ ، $\gamma=۲\alpha$ و $\gamma=۲\beta$ را مورد بررسی قرار می‌دهد. سپس از قانون سینوسها (یا کسینوسها) و اتحادهای مثلثاتی، برای استخراج معادلاتی که باید b برقرار کند، استفاده کرده درمی‌یابد که در حالت اول $b=۲$ است (که مناقض $b>۲$ می‌باشد)، در حالت دوم $b=۵$ است (که به مثلث جواب ۴، ۵ و ۶ منجر می‌شد) و در حالت سوم b گنگ است.

۴.۳.۱. نسبت ضلعها

۱۰۲. ضلعهای مثلث داده شده را $۲x-d$ ، $۲x$ و $۲x+d$ فرض می‌کنیم، در این صورت $P=۳x$ خواهد شد. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $a_۳=۲x$ و مساحت آن چنین است :

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a_۳^۲=x^۲\sqrt{۳}$$

از طرفی مساحت مثلث مفروض $S'=\sqrt{۳x^۲(x^۲-d^۲)}$ است و طبق فرض $S'=\frac{۳}{۵}S$. در نتیجه $\sqrt{۳x^۲(x^۲-d^۲)}=\frac{۳}{۵}x^۲\sqrt{۳}$ و از آن جا $۲x=\frac{۵}{۲}d$ ، بنابراین :

$$a=۲x-d=\frac{۳}{۲}d\ ,\ b=۲x=\frac{۵}{۲}d\ ,\ c=۲x+d=\frac{۷}{۲}d\Rightarrow$$
$$a:b:c=۳:۵:۷$$

۴.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱. ارتفاع

۱.۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۰۳. فرض می‌کنیم $a=۱۲cm$ باشد، داریم :

$$۲p=۸+۱۲+۱۶=۳۶\Rightarrow p=۱۸$$

$$h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow$$

$$h_a=\frac{۲}{۱۲}\sqrt{۱۸(۱۸-۱۲)(۱۸-۸)(۱۸-۱۶)}\Rightarrow$$

$$h_a=\frac{۱}{۶}\sqrt{۱۸\times۶\times۱۰\times۲}\Rightarrow h_a=۲\sqrt{۱۵}cm$$

۱۰۴. داریم :

$$RS=\sqrt{13^2-5^2}=12\ ,\ \ RS=SQ=12\Rightarrow$$
$$PQ=PS+SQ=5+12=17$$

$$\Delta PQT: PT=\frac{PQ}{\sqrt{2}}=\frac{17}{\sqrt{2}}\Rightarrow PT=\frac{17\sqrt{2}}{2}$$

۱۰۵. اندازهٔ ارتفاع خواسته شده برابر است با :

$$\frac{\sqrt{2s\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\alpha}$$

۱۰۶. گزینهٔ (ب) جواب است.

۱۰۷. محیط شکل را ۲P فرض می‌کنیم داریم :

$$2p=13+14+15=42\Rightarrow p=21\Rightarrow$$
$$S=\sqrt{21(8)(7)(6)}=84\ ,\ \ h_c=\frac{2}{c}S=\frac{2}{14}\times 84=12$$
$$h_b=\frac{2}{b}S=\frac{2}{13}\times 84=\frac{168}{13}$$

۱۰۸. داریم :

$$2p=8+10+12=30\Rightarrow p=15$$
$$S=\sqrt{15(7)(5)(3)}=15\sqrt{7}\Rightarrow$$
$$h_1=\frac{2}{8}\times 15\sqrt{7}=\frac{15\sqrt{7}}{4}\ ,\ \ h_2=\frac{2}{10}\times 15\sqrt{7}=3\sqrt{7}$$
$$h_3=\frac{2}{12}\times 15\sqrt{7}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$$

۱۰۹. داریم :

$$a^2=b^2+c^2-bc\Rightarrow a^2=144+576-288=432\Rightarrow a=12\sqrt{3}$$

با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع مثلث، اندازهٔ ارتفاعهای آن قابل محاسبه‌اند.

۱.۴.۱.۲. نسبت ارتفاعها

۱۱۱. **راه اول.** اندازهٔ سه ارتفاع مثلث را به دست می‌آوریم و سپس نسبت آنها را تعیین می‌کنیم.

$$2p=14+18+10=42\Rightarrow p=21\Rightarrow h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\Rightarrow h_a=\frac{2}{14}\sqrt{21(7)(3)(11)}=3\sqrt{11}\ ,\ \ h_b=\frac{7}{3}\sqrt{11}\ ,\ \ h_c=\frac{21}{5}\sqrt{11}$$
$$\Rightarrow h_a:h_b=\frac{9}{7}\ ,\ \ h_b:h_a=\frac{5}{9}\ ,\ \ h_c:h_a=\frac{7}{5}$$

راه دوم. با توجه به این که $a.h_a = b.h_b = c.h_c$ ، داریم :

$$۱۴\times h_a = ۱۸\times h_b = ۱۰\times h_c \Rightarrow h_a:h_b = \frac{۹}{۷}\ ,\ \ h_b:h_c = \frac{۵}{۹}$$
$$\frac{h_c}{h_a} = \frac{۷}{۵}$$

۱۱۲. می‌دانیم که $a.h_a = c.h_c$ و از آن جا $h_a:h_c = \frac{c}{a}$. پس :

$$h_a:h_c = c:a = ۱۲:۱۵ = ۴:۵ = ۰/۸$$

۱۱۳. $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۱.۴.۲. میانه

۱.۴.۲.۱. اندازهٔ میانه

۱۱۴. با فرض $a = ۱۸$ ، $b = ۲۴$ و $c = ۳۰$ داریم :

$$m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲ + c^۲) - b^۲} \Rightarrow m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(۱۸^۲ + ۳۰^۲) - ۲۴^۲}$$
$$\Rightarrow m_b = ۹\sqrt{۲}$$

۱۱۵. گزینهٔ (ب) درست است.

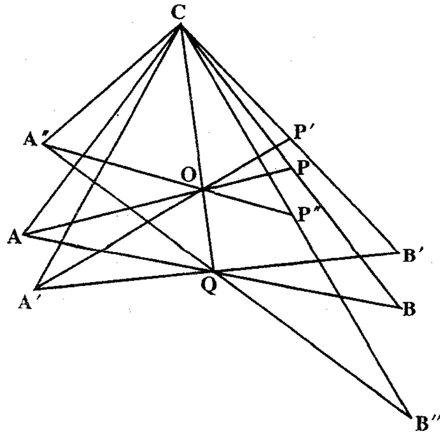
۱۱۶. میانهٔ رأس A را AM می‌نامیم. از دستور محاسبهٔ میانه، اندازهٔ $AM = ۵$ به‌دست می‌آید، $AM_۱$ میانهٔ مثلث AMC و $AM_۲$ میانهٔ مثلث AMB است و داریم :

$$AM_۱ = ۶/۲۵\ ,\ \ AM_۲ = ۴/۹$$

۱۱۷. اندازهٔ میانه‌های نظیر رأسهای A، B و C را به ترتیب m و m' و m'' فرض می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ داده شده داریم :

$$b^۲ + c^۲ = ۲m^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow ۲a^۲ = ۲m^۲ + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow m = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$
$$c^۲ + \frac{b^۲ + c^۲}{۲} \Rightarrow ۲m'^۲ + \frac{b^۲}{۲} \Rightarrow m' = \frac{c\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\frac{b^۲ + c^۲}{۲} + b^۲ = ۲m''^۲ + \frac{c^۲}{۲} \Rightarrow m'' = \frac{b\sqrt{۳}}{۲}$$

چون $\frac{m}{a} = \frac{m'}{c} = \frac{m''}{b} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. دو مثلث ABC و مثلثی که طول ضلعهای آن m، m' و m'' می‌باشند، متشابه‌اند.



۱۱۸. گزینهٔ (هـ) درست است. زیرا برای ملاحظهٔ این که طول OP با داده‌های مفروض محاسبه نمی‌شود، نشان می‌دهیم که پاره‌خط OP را با هر طول (و با هر امتداد) دلخواه می‌توان رسم کرد. شکل چند طول متفاوت را نشان می‌دهد.

فرض کنید پاره‌خط QOC چنان رسم شده است که $QO = ۳cm$ و در نتیجه $OC = ۶$. از نقطهٔ O به نقطهٔ دلخواه P غیرواقع بر روی خط CQ وصل کنید و PO را از طرف O تا نقطهٔ A امتداد دهید به طوری که $OA = ۲OP$، و محل برخورد امتدادهای CP و AQ را B بنامید. اکنون ادعا می‌کنیم که AP و CQ میانه‌های مثلث ABC هستند. زیرا مثلثهای AOC و POQ متشابه‌اند (دو ضلع نظیر به نظیر به نسبت ۲ به ۱ و زاویه‌های بین آنها برابرند). پس $PQ \| AC$ و طول PQ نصف طول AC است. بنابراین PQ دو ضلع BC و BA را نصف می‌کند. در نتیجه AP و CQ میانه‌های مثلث ABC هستند.

۱.۴.۳. نیمساز

۱.۴.۳.۱. اندازهٔ نیمساز

۱۱۹. گزینهٔ (الف) درست است.

۱۲۰. داریم: ۱.

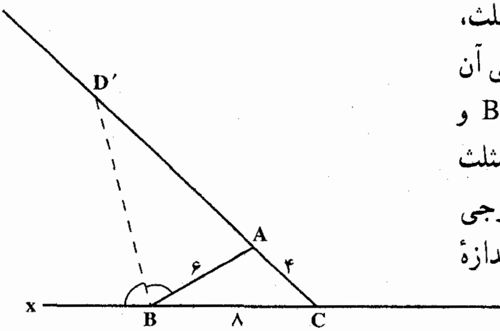
$$a = ۹۹\ ,\ b = ۸۱\ ,\ c = ۴۰ \Rightarrow p = ۱۱۰ \Rightarrow$$

$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)} \Rightarrow d_a = \frac{۲}{۱۲۱}\sqrt{۱۱۰ \times ۸۱ \times ۴۰(۱۱۰-۹۹)}$$

$$\Rightarrow d_a = \frac{۲}{۱۲۱} = ۱۱ \times ۹ \times ۲ \times ۱۰ = \frac{۳۶۰}{۱۱}$$

۲. اندازهٔ پاره‌خط DB را به دست می‌آوریم. اگر $AD = DB$ باشد، $\hat{A} = ۲\hat{B}$ خواهد بود.

$$DB = \frac{ac}{b+c} = \frac{۹۹ \times ۴۰}{۱۲۱} = \frac{۳۶۰}{۱۱} \Rightarrow AD = DB \Rightarrow \hat{A} = ۲\hat{B}$$

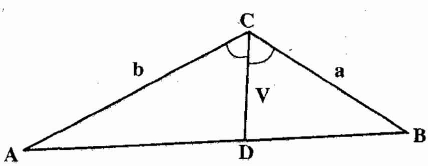


۱۲۱. بزرگترین زاویهٔ خارجی هر مثلث، مکمل کوچکترین زاویهٔ داخلی آن است. اگر $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ و $AC = ۴$ باشد، کوچکترین زاویهٔ مثلث زاویهٔ B است. بنابراین زاویهٔ خارجی مثلث، زاویهٔ ABX است و اندازهٔ نیمساز این زاویه برابر است با :

$$d'_b = \frac{۲}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)} \Rightarrow$$

$$d'_b = \frac{۲}{|۸-۶|}\sqrt{۸\times۶(۱)(۳)} = ۱۲$$

۱۲۲. اندازهٔ d_b از دستور $d_b = \frac{۲}{a+c}\sqrt{Pac(p-b)}$ ، با توجه به این که $p = \frac{۲۷}{۲}$ است، محاسبه می‌شود.



۱۲۳. در مثلث دلخواه ABC ، طول CD ، نیمساز $A\hat{C}B = \gamma$ را با v نمایش می‌دهیم. چون مساحت مثلث ABC ، مجموع مساحتهای مثلثهای ACD و CDB است، داریم :

$$ab\sin\gamma = av\sin\frac{\gamma}{۲} + bv\sin\frac{\gamma}{۲} = v(a+b)\sin\frac{\gamma}{۲},$$

و چون $\sin\gamma = ۲\sin\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}$ ، نتیجه می گیریم که :

$$۲ab\sin\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲} = v(a+b)\sin\frac{\gamma}{۲}$$

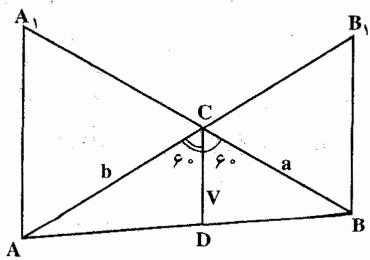
از تقسیم این معادله بر $۲abv\sin\frac{\gamma}{۲}$ ، داریم :

$$\frac{۱}{v}\cos\frac{\gamma}{۲} = \frac{۱}{۲}\times\frac{a+b}{ab} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})$$

اگر $\gamma = ۱۲۰^\circ$ ، آن گاه $\cos\frac{\gamma}{۲} = \cos۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ ، پس :

$$\frac{۱}{v} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}\ ,\ \ v = \frac{ab}{a+b}$$

به عبارت دیگر؛ v نصف میانگین همساز a و b است.



راه دیگر. فرض می‌کنیم D نقطه‌ای بر ضلع AB از مثلث ABC باشد. از A و B دو خط موازی با CD رسم می‌کنیم و نقطه‌های تلاقی آنها را با امتدادهای BC و AC، بترتیب A_1 و B_1 می‌نامیم. آن گاه داریم:

$$\frac{۱}{CD}=\frac{۱}{AA_1}+\frac{۱}{BB_1} \qquad (۱)$$

اگر $A\hat{C}B=۱۲۰^\circ$ و CD آن را نصف کند، آن گاه:

$$B_1\hat{B}C=B\hat{C}D=۶۰^\circ \;,\; B\hat{B_1}C=D\hat{C}A=۶۰^\circ$$

پس مثلث BCB_1 متساوی‌الاضلاع است. به همین نحو می‌توانیم ثابت کنیم که مثلث ACA_1 متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $BB_1=BC$ و $AA_1=AC$ و لذا برابری (۱) به (۲) $\frac{۱}{CD}=\frac{۱}{AC}+\frac{۱}{BC}$ تبدیل می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$\frac{۱}{v}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۱۲۴. این نیمساز، مثلث مفروض را به دو بخش که مساحتهایشان برابرند با $\frac{al}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\frac{bl}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}$، تقسیم می‌کند. مساحت تمام مثلث، $\frac{ab}{۲}\sin\alpha$ است. بنابراین:

$$\left(\frac{al}{۲}+\frac{bl}{۲}\right).\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{ab}{۲}\sin\alpha \Rightarrow l=\frac{۲ab\cos\frac{\alpha}{۲}}{a+b}$$

۱۲۵. روی ضلع AB، نقطه K را به‌طوری که $BK=BD$ و بر امتداد AC، نقطه E را به‌طوری که $CE=CD$، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که مثلث ADK با مثلث ADE متشابه است. اگر A، B و C زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشند، آن وقت:

$$D\hat{K}A=۱۸۰^\circ-D\hat{K}B=۱۸۰^\circ-\left(۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}\right)=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$$

$$A\hat{D}E=۱۸۰^\circ-C\hat{E}D-\frac{A}{۲}=۱۸۰^\circ-\frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{C})=۹۰^\circ+\frac{\hat{B}}{۲}$$

بنابراین $A\hat{K}D=A\hat{D}E$. بعلاوه، بنا به فرض $D\hat{A}E=D\hat{A}K$

جواب: $\sqrt{ab}$.

۱۲۶. نقطهٔ B را روی ضلع BC طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم، $BE = ED$. در این صورت، خطهای راست AB و DE موازی و مثلثهای ABC و DEC متشابه می‌شوند. یعنی :

$$BE = ED = ۶$$

بنابراین، طبق نابرابری مثلثی :

$$BD < BE + ED = ۱۲$$

۱۲۸. داریم :

$$a = ۲۰\ ,\ b = ۱۶\ ,\ c = ۱۸$$

$$۲p = a + b + c = ۲۰ + ۱۶ + ۱۸ = ۵۴ \Rightarrow p = ۲۷$$

$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)} = \frac{۲}{۳۴}\sqrt{۲۷ \times ۱۶ \times ۱۸(۲۷-۲۰)} = \frac{۳۶\sqrt{۴۲}}{۱۷}$$

$$d_b = \frac{۱۸}{۱۹}\sqrt{۳۳۰}\ ,\ d_c = ۴\sqrt{۱۵}$$

$$d'_a = \frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \Rightarrow d'_a = ۳۶\sqrt{۲۲}$$

$$d'_b = ۱۸\sqrt{۷۰} \qquad d'_c = ۴\sqrt{۳۸۵}$$

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به ارتفاعها یا خطهای عمود

۱۲۹. تصویر نقطهٔ D روی EF را D' می‌نامیم. طول پاره‌خط $D'F$ مورد نظر است. داریم :

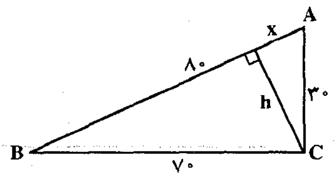
$$DE^۲ = DF^۲ + EF^۲ - ۲EF.FD'$$

$$۱۵^۲ = ۱۰^۲ + ۱۲^۲ - ۲ \times ۱۰ \times FD' \Rightarrow FD' = \frac{۱۹}{۲۰} \Rightarrow ED' = \frac{۱۸۱}{۲۰}$$

۱۳۰. گزینهٔ (د) جواب است. فرض کنید h ارتفاع و x پاره‌خط کوچکتر باشد. داریم :

$$۳۰^۲ - x^۲ = h^۲ = ۷۰^۲ - (۸۰ - x)^۲$$

$$\Rightarrow x = ۱۵ \Rightarrow ۸۰ - x = ۶۵$$



۱۳۱. ۸/۲۵ سانتیمتر

۱۳۲. نقطهٔ برخورد سه ارتفاع را H می‌نامیم. داریم :

$$\Delta MHC \sim \Delta AMB \Rightarrow \frac{CH}{AB}=\frac{MC}{MB}\ ,\ AB=c\ ,\ MB=h_b=\frac{۲S}{b}$$

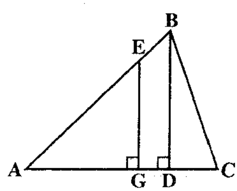
$$MC=\pm\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲b}\Rightarrow CH=c\times\pm\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲b}\times\frac{b}{۲S}$$

$$\Rightarrow CH=\pm\frac{c(a^۲+b^۲-c^۲)}{۴S}\Rightarrow$$

$$HN=CN-HC=\frac{۲S}{c}\mp\frac{c^۲(a^۲+b^۲-c^۲)}{۴S}$$

به همین ترتیب HL و HM محاسبه می‌شود.

۱۳۴. مساحتهای $S_۱$ و $S_۲$ از دو مثلث ADB و CBD که دارای ارتفاع مشترک هستند، بر نسبت قاعده‌های آنها است : $S_۱:S_۲=۳۶:۱۴=۱۸:۷$



اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم، خواهیم داشت :

$$S_۱=\frac{۱۸}{۲۵}S$$

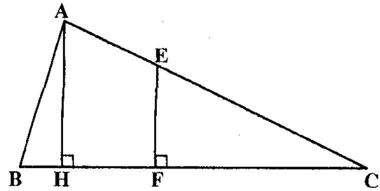
بنا به فرض، خط EG مساحت مثلث ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و بنابراین نقطهٔ G حتماً بین نقطه‌های A و D (ونه بین D و C) قرار می‌گیرد. از یک طرف مساحت مثلث AGE مساوی $\frac{۱}{۲}S$ بوده و از طرف دیگر به مناسبت متشابه بودن دو مثلث AGE و ADB نسبت مساحتهای دو مثلث بر نسبت مجذور AG و AD خواهد بود. یعنی :

$$\frac{۱۸}{۲۵}S:\frac{۱}{۲}S=۳۶^۲:AG^۲$$

و از آن جا :

$$AG=۳۰cm\ ,\ GC=۲۰cm$$

۱۳۵. با توجه به این که $AH = ۴$ و $BH:HC = ۱:۸$ است. داریم :



$$S_{AHC}:S_{AHB} = (\frac{۸}{۱})^۲ = ۶۴ \Rightarrow$$

$$\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} = \frac{۶۴}{۶۵} \ , \ S_{EFC} = \frac{۱}{۲} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AHC}}{S_{EFC}} = \frac{۱۲۸}{۶۵} \Rightarrow$$

$$(\frac{AH}{EF})^۲ = \frac{۳۲}{۶۵} \Rightarrow (\frac{۴}{EF})^۲ = \frac{۱۲۸}{۶۵} \Rightarrow EF = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۳۰}$$

۱۳۶. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BDC داریم :

$$DB = \sqrt{۱۳۰^۲ - ۱۲۰^۲} = ۵۰ \Rightarrow AD = ۱۴۰ - ۵۰ = ۹۰$$

پاره‌خط حصار را EF می‌نامیم. دو مثلث AEF و ACD متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{S_{AEF}}{S_{ADC}} = (\frac{AF}{AD})^۲ \ , \ S_{AEF} = \frac{۱}{۲} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times ۱۴۰ \times ۱۲۰ = ۴۲۰۰$$

$$S_{ADC} = \frac{۱}{۲} \times ۹۰ \times ۱۲۰ = ۵۴۰۰ \ , \ AD = ۹۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۴۲۰۰}{۵۴۰۰} = (\frac{AF}{۹۰})^۲ \Rightarrow AF = ۳۰\sqrt{۷}$$

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به میانه‌ها

۱۳۷. گزینهٔ (الف) درست است. از نقطهٔ M وسط ضلع AC خط MJ را در J بر RS عمود می‌کنیم و BK و GL را موازی RS رسم می‌کنیم. این خطها، MJ را به ترتیب در K و L قطع می‌کنند.

بنابراین :

$$MJ = \frac{۱}{۲}(AD + CF) = \frac{۱}{۲}(۱۰ + ۲۴) = ۱۷ \Rightarrow MK = MJ - KJ \Rightarrow$$

$$MK = MJ - BE = ۱۷ - ۶ = ۱۱$$

از طرفی $MG = \frac{۱}{۳} MB$ است، پس $ML = \frac{۱}{۳} MK$ زیرا خط LG موازی قاعدهٔ KB از مثلث MKB، ضلعها را به یک نسبت تقسیم می‌کند. بنابراین :

$$x = GH = LJ = MJ - ML = MJ - \frac{۱}{۳} MK = ۱۷ - \frac{۱}{۳}(۱۱) = \frac{۴۰}{۳}$$

۱۴۰. $\frac{1}{10}\sqrt{25a^2+c^2+10ac\cos\beta}$

۱۴۱. $\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}ab\cos\alpha}$

۳.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به نیمسازها

۱۴۲. با فرض $c>b$ داریم:

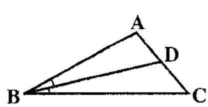
$$\frac{EB}{EC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{a}{EC}=\frac{c-b}{b}\Rightarrow EC=\frac{ab}{c-b}$$

$$\frac{DB}{DC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{a}{DC}=\frac{c+b}{b}\Rightarrow DC=\frac{ab}{c+b}$$

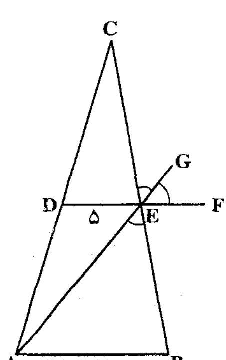
$$DE=DC+CE=\frac{ab}{c+b}+\frac{ab}{c-b}\Rightarrow DE=\frac{2abc}{c^2-b^2}$$

۱۴۳. AX و AY را ادامه دهید تا خط راست BC را در نقطه‌های K و L قطع کنند. ثابت کنید، پاره‌خط راست KL، وسط دو ضلع مثلث AKL را به هم وصل کرده است.

۱۴۴. گزینهٔ (ج) درست است. از آن جا که نیمساز هر زاویهٔ مثلث ضلع روبه‌رو را به نسبت ضلعهای مجاور تقسیم می‌کند، نقطهٔ D کوچکترین ضلع یعنی AC به طول ۱۰ را به نسبت ۳ :۴ تقسیم می‌کند. بنابراین طول قطع بزرگتر AC برابر $\frac{4}{7}$ طول AC یعنی $\frac{4}{7}\times10=\frac{40}{7}$ است.



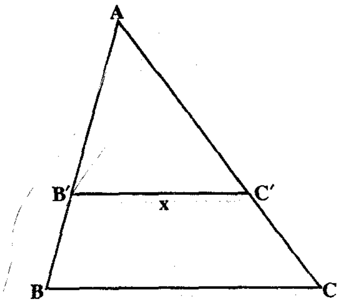
۱۴۵. گزینهٔ (د) درست است. نسبت به خطهای موازی AB و DF و مورب AG، زاویه‌های FEG و BAE برابرند. زاویهٔ اول با زاویهٔ GEC برابر است و این زاویه هم با زاویهٔ BEA مساوی است. از این رو $B\hat{A}E=B\hat{E}A$. در نتیجه مثلث ABE متساوی‌الساقین است. $BE=BA=8$. از آن جا که ضلعهای متناظر مثلثهای متشابه DEC و ABC متناسب هستند، داریم:



$$\frac{EC}{BC}=\frac{DE}{AB}\Rightarrow\frac{EC}{EB+EC}=\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\frac{EC}{8+EC}=\frac{5}{8}\Rightarrow EC=\frac{40}{3}$$

۴.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خطهای مربوط به سایر موارد



۱۴۶. خط موازی قاعده، مثلثی متشابه با مثلث اصلی به‌وجود می‌آورد. نسبت مساحتهای این دو مثلث مساوی مربع نسبت تشابه دو مثلث است. ضلع مجهول را x و مساحت مثلثها را S و S_1 می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\frac{S_1}{S}=\frac{x^2}{a^2}\ ,\ S_1=\frac{1}{2}S\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

۱۴۷. $\frac{2abc}{ab+bc+ca}$. (از نقطه‌ای دلخواه در درون مثلث، سه خط راست به موازات ضلعهای آن رسم می‌کنیم. فرض کنید خط اول با نسبت تشابه برابر λ، خط دوم با نسبت تشابه برابر با μ و خط سوم با نسبت تشابه γ، مثلثی متشابه با مثلث اصلی جدا کند. ثابت کنید $\lambda+\mu+\gamma=2$).

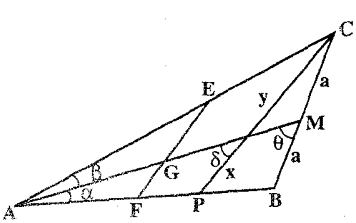
۲.۵.۱. نسبت پاره‌خطها

۱۵۱. نسبت خواسته شده برابر ۲ است.

۱۵۳. $\frac{2\cos\frac{\gamma}{3}+3}{1+6\cos\frac{\gamma}{3}}$. با معرفی پارامتر کمکی $AC=b$، آن گاه $BC=3b$ خواهد بود. روش مساحتها را به صورت $S_{ACD}+S_{DCB}=S_{ACK}+S_{KCB}$ به کار بگیرید.

۱۵۴. گزینهٔ (الف) درست است.

راه اول. CP را موازی با EF رسم می‌کنیم.



آن گاه $AP=8$ ؛ $\frac{AP}{16}=\frac{AF}{2AF}$ ؛ $\frac{AP}{AC}=\frac{AF}{AE}$. اندازه‌های a، x، y، α، β، δ و θ روی شکل دیده می‌شوند. $\frac{y}{x}$ برابر $\frac{EG}{GF}$ است و داریم:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{12}{\sin\theta}\ ,\ \frac{a}{\sin\beta}=\frac{16}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{16}{\sin\theta}$$

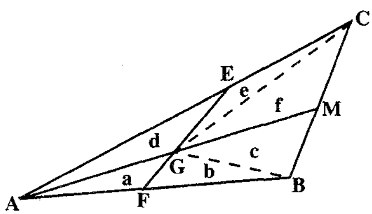
از تقسیم دو رابطهٔ بالا بر هم نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}$$

همچنین داریم :

$$\frac{y}{\sin\beta}=\frac{۱۶}{\sin(۱۸۰^\circ-\delta)}=\frac{۱۶}{\sin\delta}\ ,\ \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{۸}{\sin\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=۲\times\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{۳}{۲}$$



راه دوم. پاره‌خطهای GB و GC را رسم می‌کنیم. مثلث ABC به شش مثلث کوچکتر تقسیم می‌شود که مساحتهای آنها را با a، b، c، d، e و f نشان می‌دهیم. مثلثهای AEG و AFG در رأس A مشترکند. نسبت مساحتهای آنها نسبت EG به GF است. یعنی :

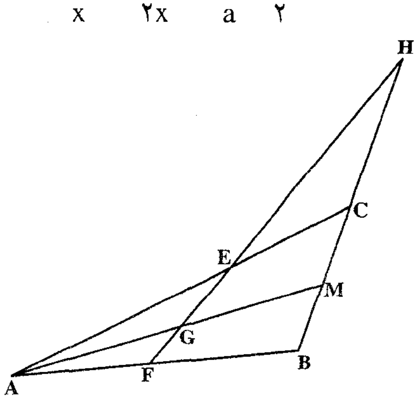
$$\frac{EG}{GF}=\frac{d}{a}$$

که آن را حساب می‌کنیم. دو مثلث ACM و ABM مساحتهای برابر دارند. پس :
$d+e+f=a+b+c$
همچنین $f=c$ است. در نتیجه $d+e=a+b$. طول AF را x می‌گیریم. پس $AE=۲x$ ، $FB=۱۲-x$ ، $EC=۱۶-۲x$. آن گاه :

$$\frac{b}{a}=\frac{FB}{FA}=\frac{۱۲-x}{x}\ ,\ \frac{e}{d}=\frac{EC}{EA}=\frac{۱۶-۲x}{۲x}$$

$$\Rightarrow a+b=a+\frac{۱۲-x}{x}\times a=\frac{۱۲a}{x}\ ,\ d+e=d+\frac{۱۶-۲x}{۲x}\times d=\frac{۱۶d}{۲x}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۲a}{x}=\frac{۱۶d}{۲x}\Rightarrow\frac{d}{a}=\frac{۳}{۲}$$



راه سوم. مطابق شکل BC و FE را امتداد می‌دهیم تا در H برخورد کنند. نقطه‌های A، G و M هم بر یک خط واقعند و هم بترتیب بر ضلعهای (یا بر امتداد ضلعهای) BF، FH و HB مثلث FBH قرار دارند. این نقطه‌ها همچنین بر امتداد ضلعهای CE، EH و HC مثلث ECH واقعند. پس بنابر قضیهٔ

منلائوس داریم:

$$\frac{HG}{FG}\cdot\frac{FA}{BA}\cdot\frac{BM}{HM}=۱\ ,\quad \frac{HG}{EG}\cdot\frac{EA}{CA}\cdot\frac{CM}{HM}=۱$$

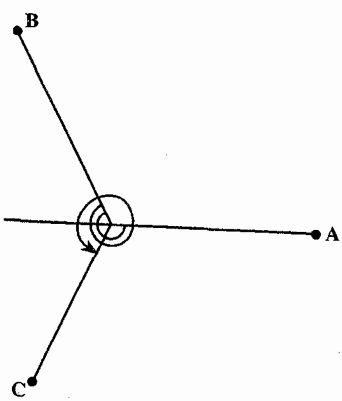
از تقسیم این دو برابری بر هم، و با توجه به $CM=BM$ و $EA=۲FA$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{EG}{FG}=۲\times\frac{BA}{CA}=۲\times\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۲}$$

۱۵۵. $\dfrac{۲\sin\dfrac{\alpha+\beta}{۲}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin\alpha}$. از نقطهٔ K خطی به صورت $MP\|AC$ رسم کنید. (نقطهٔ M روی AB و نقطهٔ P روی BC قرار دارد). عبارت $MK=KP=PC=a$ را منظور کنید. پاره‌خط KC از مثلث PKC را بر حسب a، α و β و پاره‌خط EK از مثلث MEK بیان کنید.

۱۵۶. اگر از نقطهٔ M عمودهای MH و MK را بر ضلعهای AB و AC فرود آوریم، ثابت کنید دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MEH و MFK متشابه‌اند.

۱۵۸. یادآوری می‌کنیم که، اگر بین نقطه‌های مفروض، بتوان سه نقطهٔ A، B و C را طوری پیدا کرد که، برای آنها، $A\hat{B}C\geq ۱۲۰^\circ$، آن وقت، حکم مسأله درست است. در واقع، اگر M را بزرگترین و m را کوچکترین فاصلهٔ بین نقطه‌ها بگیریم، بنابر قضیهٔ کسینوسها (که برای حالت $A\hat{B}C=۱۸۰^\circ$ هم درست است)، داریم:



$$M^۲\geq AC^۲=AB^۲+BC^۲-۲AB.BC\cos(A\hat{B}C)\geq$$
$$\geq m^۲+m^۲+۲m^۲\times\frac{۱}{۲}=۳m^۲$$

که از آن جا به‌دست می‌آید: $M\geq\sqrt{۳}m$.

اگر ۶ نقطه، در رأسهای یک شش ضلعی محدب قرار داشته باشند، آن وقت، دست کم یکی از زاویه‌های داخلی آن از ۱۲۰ درجه کمتر نیست (زیرا، مجموع زاویه‌های داخلی یک شش ضلعی محدب، برابر ۱۲۰×۶ درجه است). اگر هم این طور نباشد، دست کم یک نقطهٔ O، دارای این ویژگی است: نسبت به هر خط راستی که از نقطهٔ O و یکی دیگر از نقطه‌ها بگذرد، همهٔ بقیهٔ نقطه‌ها، در یک نیمصفحه قرار نمی‌گیرند. در این صورت، با در نظر گرفتن نقطهٔ A و هریک از دو نیمصفحه حاصل نسبت به

خط راست OA، نقطه‌های B و C را، در دو نیمصفحهٔ مختلف، طوری انتخاب می‌کنیم که زاویه‌های AOB و AOC، حداکثر باشند (شکل)، آن وقت:

$$A\hat{O}B + A\hat{O}C \geq 180^\circ$$

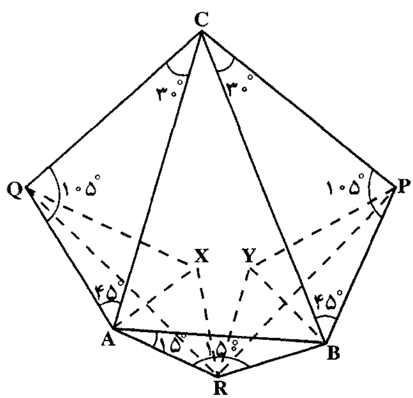
(در غیر این صورت، همهٔ نقطه‌ها، نسبت به خط راست OB، در یک نیمصفحه واقع می‌شوند)؛ بنابراین، سه حالت ممکن است:

$A\hat{O}B \geq 120^\circ$ یا $A\hat{O}C \geq 120^\circ$ یا $B\hat{O}C \geq 360^\circ - A\hat{O}B - A\hat{O}C > 120^\circ$

یعنی، در هر سه حالت، می‌توان سه نقطه را طوری پیدا کرد که زاویه‌ای بزرگتر یا برابر ۱۲۰ درجه بسازند. بنابراین حکم مسأله درست است.

۳.۵.۱. تساوی پاره‌خطها

۱۵۹. راه اول. شکل (الف) ترکیب گفته شده در مسأله را نشان می‌دهد. توجه می‌کنیم که:



$$A\hat{Q}C = B\hat{P}C = 105^\circ,\ A\hat{R}B = 150^\circ$$

RX را مساوی RA و عمود بر RB رسم می‌کنیم و AX و QX را می‌کشیم. از آن جا که:

$$A\hat{R}B = 150^\circ\ ,\ X\hat{R}B = 90^\circ$$

داریم:

$$A\hat{R}X = 60^\circ$$

به این ترتیب مثلث متساوی‌الساقین $(RX = RA)ARX$ دارای زاویهٔ رأس 60° و در نتیجه متساوی‌الاضلاع است.

امّا

$$B\hat{A}Q = \hat{A} + 45^\circ\ ,\ B\hat{A}X = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

بنابراین:

$$X\hat{A}Q = B\hat{A}Q - B\hat{A}X = \hat{A}$$

در مثلث ACQ بنا به قانون سینوسها داریم:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{2\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2\sin 15^\circ$$

و در مثلث ABR:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 150^\circ} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sin 15^\circ$$

در این صورت نتیجه می‌شود که:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AX}{AB} = \frac{AQ}{AC} \quad (1) \Rightarrow \frac{AX}{AQ} = \frac{AB}{AC}$$

و مثلث ABC با مثلث AXQ متشابه است و بنابراین :

$$A\hat{Q}X = \hat{C} \ , \ A\hat{X}Q = \hat{B}$$

از آن جا که :

$$P\hat{B}R = 15^\circ + \hat{B} + 45^\circ = 60^\circ + \hat{B} \ , \ R\hat{X}Q = 60^\circ + \hat{B}$$

داریم :

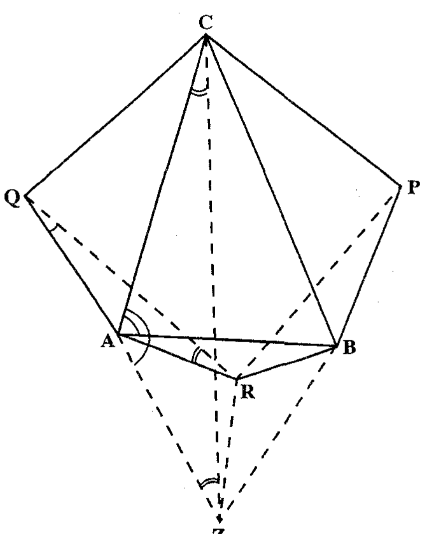
$$R\hat{B}P = R\hat{X}Q$$

مانند قبل، RY را مساوی RB و عمود بر RA رسم می‌کنیم. بار دیگر، بنا به استدلال پیشین، مثلث BRY را متساوی‌الاضلاع داریم و $\Delta YBP \sim \Delta ABC$ است. در این صورت نتیجه می‌گیریم که : $\Delta AXQ \sim \Delta ABP$

و از آن جا که ضلعهای متناظر AX و YBی مثلثهای AXQ و YBP مساوی‌اند، خود مثلثها مساوی می‌شوند. از آن جا که مثلثهای الحاقی ARX و YRB نیز مساوی‌اند، دیده می‌شود که :

چهارضلعی YRBP ≅ چهارضلعی ARXQ

بنابراین نتیجه می‌شود که قطرهای متناظر RQ و RP مساوی‌اند. گذشته از این، از آن‌جا که XR را عمود بر RB بنا کرده‌ایم، دوران RAQX حول R با زاویهٔ °۹۰ و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، آن را منطبق بر RYPB می‌کند. در نتیجه RQ و RP باید متعامد باشند.



راه دوم. بر ضلع AB از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث متساوی‌الاضلاع ABZ را رسم می‌کنیم (شکل (ب) را ملاحظه کنید) و RZ و CZ را می‌کشیم. امّا :

$$Z\hat{A}R = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

است، بنابراین :

$$Q\hat{A}R = C\hat{A}Z$$

است ؛ و چنانچه در راه حل اول، (۱) را ملاحظه کنید، نشان دادیم :

$$AQ/AR = AC/AB$$

است. از آن جا که $AB = AZ$ است، نتیجه می‌شود که :

(۲) $\Delta AQR \sim \Delta ACZ$ به همین ترتیب : $\Delta BPR \sim \Delta BCZ$

گذشته از این، از آن جا که مثلثهای CAQ و CBP متشابه‌اند، داریم :

$$\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{BP} = k$$

بنابراین ثابت بزرگ سازی در هر دو زوج مثلث (۲) یکی است.
اکنون مثلث AQR را حول A به اندازهٔ 45° و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده، نسبت به k بزرگ می‌کنیم ؛ مثلث BPR را حول B به اندازهٔ 45° و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده به نسبت k بزرگ می‌کنیم، تبدیلهای بالا، QR را به CZ و PR را به CZ می‌برد، بنابراین QR و PR با هم مساوی‌اند و با یکدیگر زاویهٔ $2\times45^\circ=90^\circ$ می‌سازند.

۱۶۱. داریم :

$$MB^2=a^2+c^2\cos^2\hat{A}=a^2+c^2-c^2\sin^2\hat{A}=a^2+c^2-a^2\sin^2\hat{C}$$
$$=c^2+a^2\cos^2\hat{C}=NB^2$$

۱۶۴. از اثبات قضیهٔ «اگر دو آنتی پارالل دو ضلع یک مثلث مساوی باشند، یکدیگر را روی شبه میانهٔ نظیر ضلع سوم مثلث قطع می‌کنند» به صورت وارون (از آخر به اول) استفاده کنید.

۱۶۵. محاسبهٔ مستقیم زاویه‌ها نشان می‌دهد که $E\hat{O}K=120^\circ$. بنابراین چهارضلعی BEOK قابل محاط شدن در دایره است. چون BO نیمساز زاویهٔ B است، پس $O\hat{B}E=O\hat{B}K$ ، یعنی وترهای OE و OK طولهای برابر دارند.

۱۶۶. فرض کنید $K\hat{A}L=K\hat{L}A=\varphi$ و $K\hat{C}L=L\hat{K}C=\theta$. در این صورت، $B\hat{K}L=2\varphi$ ، $B\hat{L}K=2\theta$ و $2\varphi+2\theta=180^\circ-\hat{B}$. اگر Q نقطهٔ برخورد AL و KC باشد، آن وقت $A\hat{Q}C=180^\circ-(\varphi+\theta)=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{B}$. از M، خط راستی به موازات BC رسم می‌کنیم تا KC را در نقطه‌ای مانند N قطع کند، در این صورت، MQ نیمساز زاویهٔ AMN است و $A\hat{Q}N=90^\circ+\frac{1}{2}\hat{B}$. بنابراین، نتیجه می‌شود که Q نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث AMN است. به این ترتیب، مثلث AMN با مثلث KBL و مثلث KMN با مثلث KBC متشابه است. فرض کنید $AK=KL=LC=x$ ، $AM=y$ و $MN=z$. در این صورت، $\frac{z}{a-x}=\frac{y}{c-x}$ و $\frac{z}{a}=\frac{y-x}{c-x}$ که از آن جا $y=a$.

۱۶۷. از رابطهٔ $HA.HA'=HB'.HB$ نتیجه می‌شود که چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' روی یک دایره واقعند. به همین ترتیب از رابطه‌های نظیر رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که نقطه‌های C، C' ، A' و A روی یک دایره و نقطه‌های C، C' ، B' و B روی یک دایره دیگرند، داریم : $\hat{A}_1=\hat{B}_1$ ، چون ضلعهایشان بر هم عمودند و نیز داریم :

$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{A'C'C}}{2}$ و $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{B'C'C}}{2}$. پس $\widehat{B'C'C} = \widehat{A'C'C}$. در نتیجه $\hat{C}'_1 = \hat{C}'_2$
یعنی $C'H$ نیمساز زاویهٔ C' از مثلث $A'B'C'$ است. به همین ترتیب، معلوم می‌شود H محل تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث $A'B'C'$ است، یعنی H از سه ضلع این مثلث به یک فاصله است.

۱۶۸. وسط پاره‌خط راست AB را M می‌نامیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که پاره‌خطهای راست MF و ME، طولی برابر دارند و بر هم عمودند. این اثبات از این جا به‌دست می‌آید که مثلثهای CYA و CBU، با دوران به اندازهٔ ۹۰ درجه دور نقطهٔ C، به هم تبدیل می‌شوند (در این جا، Y و U، رأسهای مربعهای $CBXY$ و $ACUV$ هستند که نقطه‌های E و F، مرکزهای آنها را تشکیل می‌دهند). از این جا نتیجه می‌شود که، ضمن دوران به اندازهٔ ۹۰ درجه دور نقطهٔ M، رأس B به نقطهٔ D، و نقطهٔ F به نقطهٔ E می‌رود. یعنی پاره‌خطهای راست BF و DE بر هم عمودند و طولی برابر دارند.

۱۶۹. نشان دهید، نقطه‌ای مانند P، روی خط اویلر، که به ازای آن $PO = OH$ (O مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهاست)، ویژگی مورد نظر را داراست؛ در این صورت، در هر مثلث، فاصلهٔ مرکز ثقل آن تا رأس مقابل مثلث اصلی برابر با $\frac{4}{3}R$ است، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و خط راستی که از مرکز ثقل این مثلث و رأس مقابل از مثلث اصلی می‌گذرد، از نقطهٔ O می‌گذرد.

۴.۵.۱. ماکزیمم یا مینیمم اندازهٔ پاره خط، مجموع یا تفاضل پاره‌خطها، ...

۱۷۰. بنا به فرض باید $BC = BD + CE$ باشد، یعنی $AD + AE = AB + BC + AC$ امّا می‌دانیم بین مثلثهایی که در یک زاویه مشترک و مجموع ضلعهای طرفین این زاویه مقدار ثابتی است، مثلث متساوی‌الساقین به محیط مینیمم خواهد بود. در این صورت خواهیم داشت:

$$AD = AE = \frac{1}{2}(2P) = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

چون دو ضلع ثابت است و محیط مینیمم، لذا ضلع سوم یعنی DE مینیمم خواهد شد.

۱۷۱. $b + \frac{c}{2}$

۱۷۲. h_c = مینیمم،
h_a = ماکزیمم

۱۷۴. فرض کنید که AP و CK بر t عمود باشند. با فرض $P\hat{B}A = x$ بعد از تکمیل محاسبه‌ها، ثابت کنید $PB = BK$ است.

۱.۵.۵. نابرابری پاره خطها

۱۷۵. فرض کنید : $AB = BC = a$ ، $AM = c$ ، $MC = b$ ، $MB = m$ ، $B\hat{M}O = \theta$ و $M\hat{B}O = \varphi$ باید ثابت کنیم که $OB > OM$ یا $\varphi < \theta$ یا $\cos\theta < \cos\varphi$ است. بنا به قانون کسینوسها در مثلثهای MBA و MBC، به‌دست می‌آوریم :

$$\cos\varphi - \cos\theta = \frac{m^2 + a^2 - c^2}{2ma} - \frac{m^2 + b^2 - a^2}{2mb}$$

$$= \frac{m^2(b-a) - a(b^2 - a^2) + b(a^2 - c^2)}{2abm}$$

امّا $a - c = b - a$ ، بنابراین :

$$\cos\varphi - \cos\theta = \frac{(b-a)(m^2 - ab - a^2 + ab + bc)}{2mab}$$

$$= \frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{2mab} > 0$$

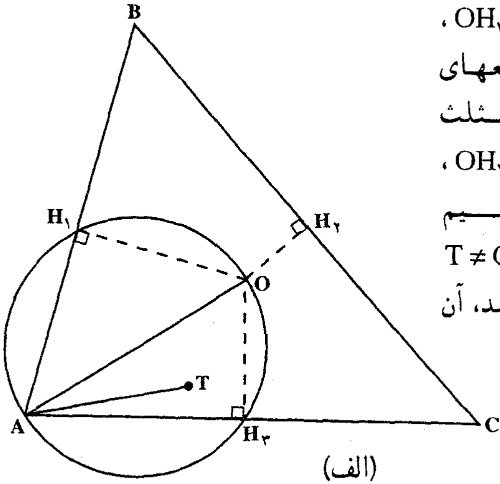
که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۷۷. فرض کنید K، L و M نقطه‌های برخورد خطهای رسم شده با AC باشند، بعلاوه فرض می‌کنیم $AC = b$ ، $BC = a$ ، $AB = c$ و $BL = l$. بنا به قضیهٔ مربوط به نیمساز یک زاویهٔ داخلی، به‌دست می‌آوریم $LC = \frac{ab}{a+c}$ ، با به‌کارگیری دوبارهٔ این قضیه در مثلث BCL، داریم $LM = \frac{ba}{a+c}.\frac{l}{l+a} = \frac{ba}{a+c}(1 - \frac{a}{a+l})$ ؛ امّا چون $\hat{C} > 3\hat{A} - \pi$ ، پس $B\hat{L}A = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi - \hat{A} + \hat{C}}{2} > \hat{A}$. از این رو :

$c > l$ و $LM < \frac{ba}{a+c}(1 - \frac{a}{a+c}) = b.\frac{ac}{(a+c)^2} \le \frac{b}{4}$

۱۷۸. الف) فرض می‌کنیم، مثلث ABC، زاویهٔ منفرجه نداشته باشد. در این صورت، نقطهٔ مجهول T، بر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث (به شعاع R) منطبق است.

اگر از نقطهٔ O، عمودهای OH_1، OH_2 و OH_3 را بترتیب بر ضلعهای AB، BC و AC رسم کنیم، مثلث ABC، به سه چهارضلعی OH_2CH_3، OH_1BH_2 و OH_1AH_3 تقسیم می‌شود. (شکل الف) اگر نقطهٔ $T \neq O$ مثلاً در چهارضلعی اول واقع باشد، آن وقت



(الف)

$$m(T) \le AT < AO = R = m(O)$$

زیرا نقطهٔ T در سطح دایرهٔ به قطر AO قرار دارد (این دایره، از چهار رأس چهارضلعی OH_1AH_3 می‌گذرد، زیرا به دلیل قائمه بودن دو زاویهٔ OH_1A و OH_3A، یک چهارضلعی محاطی است).

اکنون فرض می‌کنیم، زاویهٔ رأس A از مثلث ABC منفرجه باشد و در ضمن داشته باشیم: $\hat{C} \le \hat{B}$. از نقطه‌های D و E، وسط ضلعهای AB و AC، عمودهایی بر این ضلعها رسم می‌کنیم تا ضلع BC را، بترتیب در نقطه‌های F و G قطع کنند و $BF = b$ و $CG = c$ می‌نامیم. توجه می‌کنیم که $b \le c$. در ضمن، برابری $b = c$ تنها وقتی برقرار است که دو زاویهٔ B و C برابر باشند. در واقع، از مثلثهای BDF، CEG و ABC (بنابرقضیهٔ سینوسها) داریم:

$$\frac{b}{c} = \frac{BD}{\cos\hat{B}} \cdot \frac{\cos\hat{C}}{CE} = \frac{AB\cos\hat{C}}{AC\cos\hat{B}} = \frac{\sin\hat{C}\cos\hat{C}}{\sin\hat{B}\cos\hat{B}} = \frac{\sin ۲\hat{C}}{\sin ۲\hat{B}} \le ۱$$

زیرا $۰ < ۲\hat{C} \le ۲\hat{B} < ۱۸۰^\circ - ۲\hat{C}$.

سپس توجه می‌کنیم که $BG > c$ (و همچنین $FC > b$).

چون $\hat{B} + \hat{C} < ۹۰^\circ < B\hat{A}C$ یعنی:

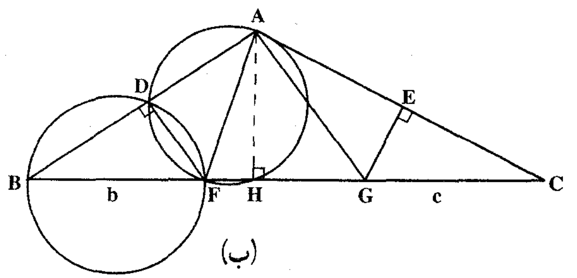
$$\hat{B} < B\hat{A}C - \hat{C} = B\hat{A}G \ , \ BG > AG = GC = c$$

سرانجام، ارتفاع AH از مثلث ABC، آن را به دو مثلث ABH و ACH تقسیم می‌کند. اگر $T \neq F$ ، در مثلث ABH باشد، آن وقت $m(T) < m(F) = b$ زیرا، یا در دایرهٔ به قطر BF و یا در دایرهٔ به قطر AF قرار دارد (شکلهای (ب) و (پ) که در آنها بترتیب، حالتهای $\hat{B} < ۴۵^\circ$ و $\hat{B} > ۴۵^\circ$ نشان داده شده است). به همین ترتیب، اگر نقطهٔ $T \neq G$ ، در مثلث AGH باشد، آن وقت :

$$m(T) < m(G) = c$$

به این ترتیب، اگر مثلث ABC، متساوی الساقین باشد، هر دو نقطهٔ F و G، جواب مسأله‌اند، ولی اگر متساوی‌الساقین نباشد، آن وقت :

$$m(F) < m(G)$$



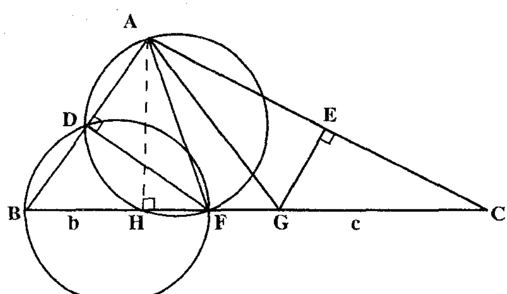
(ب)

و نقطهٔ مجهول، بر نقطهٔ G منطبق است.

ب) برای هر نقطه T از مثلث ABC داریم :

$$m(T) \geq TB \ , \ M(T) \geq TC$$

از آن جا :



(پ)

$$۲M(T) \geq TB + TC \geq BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}BC \leq M(T)$$

سرانجام، بنا بر استدلالی که در بخش الف داشتیم، مقدار $m(T)$ ، در حالت $\hat{A} \geq ۹۰^\circ$ ، در نقطه‌ای مانند G از پاره‌خط BC، به حداکثر خود می‌رسد. در نتیجه، برای هر نقطهٔ T از مثلث ABC داریم :

$$m(T) \leq m(G) \leq Min(GB, GC) \leq \frac{۱}{۲}BC$$

۶.۱. محیط

۱.۶.۱. اندازهٔ محیط

۱.۱.۶.۱. اندازهٔ محیط مثلث داده شده

۱۷۹. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا :

$$\frac{S'}{S}=(\frac{۲P'}{۲P})\Rightarrow\frac{۱۶}{۹}=(\frac{۱۲}{۲P})^۲\Rightarrow\frac{۱۲}{۲P}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲P=۹$$

۱۸۰. هر یک از ضلعهای این خط شکسته، میانه‌ای از یک مثلث قائم‌الزاویه است (مثلاً $A_۰B_۱$، میانهٔ مثلث $BB_۱C$ است) و بنابراین، طول آن برابر است با نصف طول وتر همان مثلث $(A_۰B_۱=\frac{۱}{۲}BC)$. اگر همهٔ این برابریها را با هم جمع کنیم، به نتیجهٔ خواسته شده می‌رسیم.

۱۸۱. (الف) $۲\sqrt{\frac{۲S}{\sin\beta}}$ (ب) $۲\sqrt{S\,tg\frac{\beta}{۲}}$ (پ) $۲(۱+\sin\frac{\beta}{۲})\sqrt{\frac{۲S}{\sin\beta}}$

۲.۱.۶.۱. اندازهٔ محیط مثلثها، یا شکلهای دیگر

۱۸۲. گزینهٔ (الف) درست است. مثلثهای BMO و CON متساوی الساقین می‌باشند پس $BM=MO$ و $CN=ON$ است. در نتیجه محیط مثلث AMN برابر است با :

$$AB+AC=۱۲+۱۸=۳۰$$

۱۸۳. فرض می‌کنیم مستطیل MNPQ یکی از مستطیلهای مورد نظر باشند. محیط آن برابر است با $۲(MN+MQ)$ یا $۲(MN+ED)$. اما داریم :

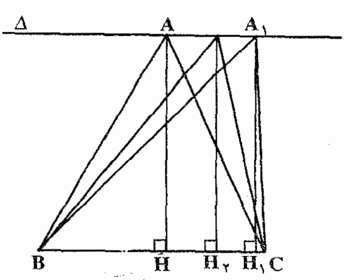
$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AE}{AD}\ ,\ \ AD=BC\Rightarrow MN=AE$$

از آن جا محیط شکل برابر است با :

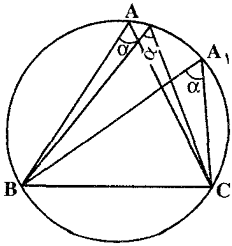
$$۲(MN+ED)=۲(AE+ED)=۲AD=C^{te}$$

بنابراین محیط همهٔ این مستطیلها، مقدار ثابتی است.

۲.۶.۱. ماکزیمم و مینیمم محیط، نسبت محیطها



۱۸۴. اگر قاعدهٔ مشترک را BC فرض کنیم، AH ارتفاع نظیر قاعدهٔ ثابت BC در این مثلثها، مقدار ثابتی است و مکان هندسی رأس A خطی موازی BC و به فاصلهٔ $h_a=\frac{۲S}{BC}$ است (خط Δ). اگر عمود منصف BC را رسم کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ A قطع کند، مثلث ABC جواب مسأله است.



۱۸۵. اگر BC قاعدهٔ مشترک مثلثها و $B\hat{A}C = \alpha$، زاویهٔ رأس آنها باشد، مکان هندسی رأس A کمان در خور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره خط BC است. با تغییر نقطهٔ A اندازهٔ $AB + AC$ تغییر می‌کند و بیشترین مقدار $AB + AC$ وقتی است که $AB = AC$ باشد.

۷.۱. مساحت

۱.۷.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده

۱.۱.۷.۱. اندازه مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن اجزای اصلی مثلث

۱۸۷. مساحت مثلث برابر $۴\sqrt{۲۶}$ است.

۱۸۸. اندازهٔ ضلع سوم مثلث $۴\sqrt{۷}$ سانتی‌متر و اندازهٔ مساحت مثلث برابر $۲۴\sqrt{۳}$ سانتی‌متر مربع است.

۱۸۹. هرون، این مسأله و مسأله‌های شبیه آن را به کمک رابطه‌ای حل می‌کرد که به نام خود او مشهور است. این رابطه $S = \sqrt{\frac{a+b+c}{۲}.\frac{b+c-a}{۲}.\frac{a+c-b}{۲}.\frac{a+b-c}{۲}}$ است با قراردادن $a = ۱۳$، $b = ۱۴$ و $c = ۱۵$ در دستور بالا، داریم $S = ۸۴$.

۱۹۰. داریم:

$$\sum x_۱ = ۴۲ \ , \ \sum x_۱x_۲ = ۵۸۷ \ , \ x_۱x_۲x_۳ = ۲۷۳۰$$

$$S = \sqrt{p(p-x_۱)(p-x_۲)(p-x_۳)} \ , \ p = \frac{۱}{۲}(x_۱ + x_۲ + x_۳) = ۲۱$$

$$\Rightarrow (P-x_۱)(P-x_۲)(P-x_۳) =$$

$$۲۱^۳ - ۴۴۱(\sum x_۱) + ۲۱(\sum x_۱x_۲) - x_۱x_۲x_۳ = ۳۳۶ \Rightarrow S = ۸۴$$

۱۹۱. S مساحت مثلث ABC را می‌توان از طریق فرمول $S = \frac{۱}{۲}AC.BC\sin\gamma$ به دست آورد که در این رابطه نیز باید مقدارهای AC و AB را محاسبه کنیم. با فرض $BC = x$ و با استفاده از رابطهٔ سینوسها داریم $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\gamma}$ که از آن نیز $AC = \frac{x\sin\beta}{\sin\alpha}$ و $AB = \frac{x\sin\gamma}{\sin\alpha}$ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب حل مسأله به یافتن x تبدیل می‌گردد. برای تشکیل معادله از روش مساحتها استفاده کرده و S مساحت مثلث ABC را به عنوان عنصر مرجع منظور می‌کنیم. از یک طرف چنین داریم:

$$S = \frac{۱}{۲}AC.BC.\sin\gamma = \frac{x^۲\sin\beta\sin\gamma}{۲\sin\alpha}$$

و از طرف دیگر نیز تساوی زیر را داریم :

$$S = S_{AMB} + S_{BMC} + S_{AMC} = \frac{1}{2}AB.k + \frac{1}{2}BC.n + \frac{1}{2}AC.m = \frac{x(k\sin\gamma + n\sin\alpha + m\sin\beta)}{2\sin\alpha}$$

اینک تساوی $\frac{x^2 \sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{k\sin\gamma + n\sin\alpha + n\sin\beta}{\sin\beta\sin\gamma}$ به دست می‌آید

با گذاشتن مقدار $x = \frac{k\sin\gamma + n\sin\alpha + m\sin\beta}{2\sin\alpha}$ ، به جای x در فرمول اول در مورد مساحت مثلث ABC، تساوی زیر به دست می‌آید :

$$S = \frac{x^2 \sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{(k\sin\gamma + n\sin\alpha + m\sin\beta)^2}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

۱۹۲. روی ضلع AC طول AD را مساوی AB جدا می‌کنیم و نقطهٔ B را به D وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع ABD پدید می‌آید. CE را بر BD عمود می‌کنیم. از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BEC و DEC تساویهای زیر نتیجه می‌شود :

$$CB^2 - CD^2 = EB^2 - ED^2 \qquad (1)$$

$$DE = \frac{DC}{2} = \frac{b-c}{2} \quad , \quad BE = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2}$$

در نتیجه رابطهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$a^2 - (b-c)^2 = bc \qquad (2)$$

اینک برای محاسبهٔ مساحت مثلث ABC از دستور $S = \frac{1}{2}b.BH$ استفاده می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ، ضلع AH روبه‌روی زاویهٔ ۳۰ درجه است، پس $AH = \frac{c}{2}$ حال BH را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به دست می‌آوریم. عدد $\frac{c\sqrt{3}}{2}$ حاصل می‌شود. بنابراین، $S = bc\frac{\sqrt{3}}{4}$ و با توجه به (۲) $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b-c)^2)$

در حالت $\hat{A} = 120$ ، اگر به روش بالا عمل کنیم، خواهیم داشت :

$$S = \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 - (b-c)^2)$$

۱۹۳. پاسخ، ۱ است. بین مثلثهای با دو ضلع a و b با شرطهای $0 < a \le 1$ و $1 \le b \le 2$، حداکثر مساحت مربوط به مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن $a = 1$ و $b = 2$ باشد. (در واقع $S \le \frac{ab}{2} \le 1$ ، زیرا ارتفاع وارد بر ضلع b از a تجاوز نمی‌کند.) اکنون، وتر این مثلث $c = \sqrt{5}$ با شرط $2 \le c \le 3$ سازگار

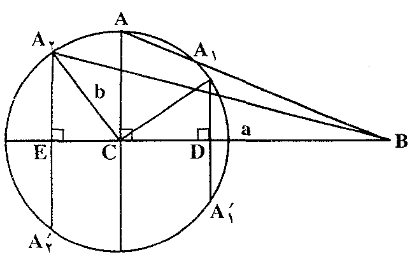
است ؛ بنابراین، بین همهٔ این مثلثها، مثلث قائم‌الزاویهٔ با ضلعهای ۱، ۲ و $\sqrt{5}$ حداکثر مساحت را دارد.

۱۹۴. اگر دو ضلع دیگر مثلث را x و y فرض کنیم، طبق رابطهٔ هرون داریم:

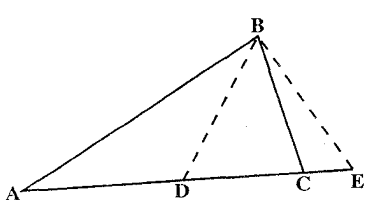
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$$

مساحت مثلث بستگی به ۴ عامل دارد که دو عامل آن ثابتند. پس برای ماکزیمم بودن مساحت، باید $(p-x)(p-y)$ ماکزیمم باشد. امّا مجموع این دو مقدار ثابت است. پس وقتی این حاصل‌ضرب ماکزیمم است که $p-x=p-y$ یعنی $x=y$ و در نتیجه مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۱۹۵. راه اول. با توجه به دستور $S=\frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$ مثلث، اگر a و b دو ضلع ثابت و S مساحت مثلث باشد، مساحت مثلث یعنی S وقتی حداکثر مقدار خود را داراست که $\sin\hat{C}$ حداکثر مقدار خود را داشته باشد، یعنی $\sin\hat{C}=1$ و یا $\hat{C}=90^\circ$ باشد، که در این صورت دو ضلع a و b برهم عمودند.



راه دوم. مثلث ABC را درنظر گرفته، ضلعهای a و b را ثابت درنظر می‌گیریم. به مرکز C و به شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم که این دایره از نقطه A می‌گذرد. سپس با توجه به ارتفاعها از نظر اندازهٔ زاویهٔ C بحث می‌کنیم. مشخص می‌شود که ارتفاع h_a وقتی Max است که $\hat{C}=90^\circ$ یعنی دو ضلع a و b برهم عمود باشند.



۱۹۶. به کمک گونیای با زاویهٔ ۶۰ درجه، دو خط راست DB و BE را چنان رسم می‌کنیم که در نقطه B به هم برسند و با خط AC زاویهٔ ۶۰ درجه بسازند، مثلث DBE متساوی‌الاضلاع خواهد بود.

دو مثلث ABC و DBE دارای یک ارتفاعند و بنابراین نسبت مساحتهای آنها مساوی نسبت قاعده‌های نظیر آنهاست، از آن‌جا: $S_{ABC}=S_{DBE}\cdot\frac{AC}{DE}$

از طرف دیگر $S_{DBE}=\frac{\sqrt{3}}{4}DE^2$ و بنابراین $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC.DE$ یعنی کافی است اندازه‌های AC و DE را پیدا کنیم تا بتوانیم مساحت مثلث مورد نظر را به‌دست آوریم.

۲.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن ارتفاعها

۱۹۷. داریم :

$$S=\frac{a.h_a}{۲}=\frac{b.h_b}{۲}=\frac{c.h_c}{۲}\ (۱)\quad ,\quad S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ (۲)$$

$$p=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$$

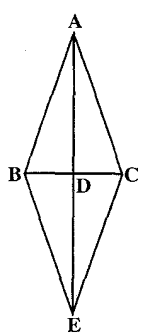
از (۱) ضلعهای مثلث را برحسب S و ارتفاعها محاسبه می‌کنیم و در رابطهٔ (۲) قرار می‌دهیم.

$$a=\frac{۲S}{h_a}\ ,\ b=\frac{۲S}{h_b}\ ,\ c=\frac{۲S}{h_c}\Rightarrow p=S(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c})$$

$$S=S^۲\sqrt{(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c})(\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}-\frac{۱}{h_a})(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_c}-\frac{۱}{h_b})}\times\sqrt{(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c})}$$

$$\cdot S=۱:\sqrt{(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c})(\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}-\frac{۱}{h_a})}\times\sqrt{(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_c}-\frac{۱}{h_b})(\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c})}$$

۳.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن میانه‌ها



۱۹۸. فرض می‌کنیم $AB=۲۷cm$ ، $AC=۲۹cm$ و $AD=۲۶cm$ میانه باشد. بایستی ضلع BC را محاسبه کرد. AD را به اندازهٔ $DE=AD$ امتداد می‌دهیم، چهارضلعی ABEC متوازی‌الاضلاعی است که ضلعهای آن ۲۷ و ۲۹ و قطرهای آن $AE=۵۲$ و $BC=x$ می‌باشد، داریم :

$$x^۲+۵۲^۲=۲(۲۷^۲+۲۹^۲)\Rightarrow x=\sqrt{۴۳۶}cm$$

اکنون می‌توان مساحت مثلث ABC را با کمک ضلعهای آن پیدا کرد.

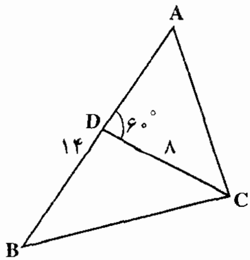
$$AB=۲۷\ ,\ AC=۲۹\ ,\ BC=\sqrt{۴۳۶}\Rightarrow$$

$$p=\frac{۱}{۲}(۲۷+۲۹+\sqrt{۴۳۶})=۲۸+\sqrt{۱۰۹}\Rightarrow$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow$$

$$S=\sqrt{(۲۸+\sqrt{۱۰۹})(۲۸-\sqrt{۱۰۹})(\sqrt{۱۰۹}+۱)(\sqrt{۱۰۹}-۱)}=۲۷۰cm^۲$$

۱۹۹. راه اول. چون AD میانه است، پس $AD = DB = ۷$ است. از آن‌جا:



$$S_{ABC} = ۲S_{ADC} =$$

$$۲\times\frac{۱}{۲}AD.DC.\sin ۶۰° \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times ۷\times ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۸\sqrt{۳}$$

راه دوم. ارتفاع رأس C برابر است با $h_c = ۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$ ، پس:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AB.h_c = \frac{۱}{۲}\times ۱۴\times ۴\sqrt{۳} = ۲۸\sqrt{۳}$$

۲۰۰. داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}\ ,\ \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{C}} \Rightarrow AC = \frac{BC.\sin B}{\sin A}\ ,\ AB = \frac{BC\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

$$AC^۲ + AB^۲ = \frac{BC^۲}{۲} + ۲m^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{\frac{۴m^۲\sin^۲ A}{۲\sin^۲ B + ۲\sin^۲ C - \sin^۲ A}}$$

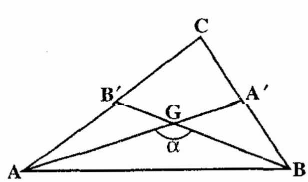
$$S = \frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A \Rightarrow S = \frac{۲m^۲\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{۲\sin^۲ B + ۲\sin^۲ C - \sin^۲ A}$$

۲۰۱. در مثلث AGC داریم:

$$AG = \frac{۲}{۳}AM\ ,\ CG = \frac{۲}{۳}CN\ ,\ A\hat{G}C = ۱۲۰°$$

$$S_{AGC} = \frac{۱}{۲}AG.CG.\sin ۱۲۰° = \frac{۱}{۳}\ ,\ S_{ABC} = ۳S_{AGC} = ۱$$

۲۰۲. اگر G نقطه برخورد میانه‌های AA' و BB' باشد، داریم $AG = \frac{۲}{۳}m_a$ ، $BG = \frac{۲}{۳}m_b$ از آن‌جا:

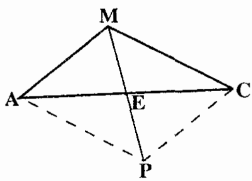


$$S_{AGB} = \frac{۱}{۲}AG.GB.\sin A\hat{G}B = \frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}m_a.\frac{۲}{۳}m_b.\sin\alpha = \frac{۲}{۹}m_a m_b\sin\alpha$$

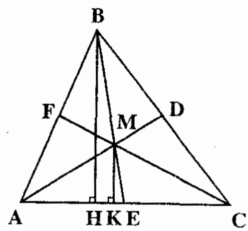
$$\Rightarrow S_{ABC} = ۳S_{AGB} = \frac{۲}{۳}m_a m_b\sin\alpha$$

۲۰۳. با استفاده از دستور میانه‌ها، اندازهٔ سه ضلع مثلث و از روی آنها مساحت مثلث را تعیین کنید.

۲۰۴. قبل از هرچیز $S_{AMC}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}$ را مورد ملاحظه قرار دهید (شکل الف). در حقیقت این مثلثها دارای قاعدهٔ مشترک AC بوده و از این‌رو نسبت مساحتهای آنها با نسبت ارتفاعهای MK و BH برابر خواهد بود. از تشابه مثلثهای MKE و BHE تناسبهای $\frac{MK}{BH}=\frac{ME}{BE}$ و $ME:BE=۱:۳$ نتیجه می‌شوند. بدین ترتیب مساحت مطلوب S عبارت از $۳S_{AMC}$ خواهد بود مثلث AMC (شکل ب) را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در مورد دو ضلع آن $AM=\frac{۲}{۳}m_a$ و $MC=\frac{۲}{۳}m_c$ بوده و میانهٔ $ME=\frac{۱}{۳}m_b$ معلوم است. پاره‌خط EP را مساوی ME جدا کرده و P را به A و C وصل می کنیم تا متوازی‌الاضلاع MCPA به دست آید. چنین استنتاج می‌شود :



(ب)



(الف)

$$S_{AMC}=S_{MCP}=\frac{۱}{۲}S_{AMCP}$$

سه ضلع یعنی $\frac{۲}{۳}m_a$، $\frac{۲}{۳}m_b$ و $\frac{۲}{۳}m_c$ در مثلث MCP معلوم هستند. از این‌رو مساحت مثلث MCP را می‌توان با فرمول هرون به دست آورد. بدین ترتیب داریم :

$$S=۳S_{AMC}=۳S_{MCP}=$$

$$۳\sqrt{\frac{۱}{۳}(m_a+m_b+m_c)\frac{۱}{۳}(m_a+m_b-m_c)\frac{۱}{۳}(m_a+m_c-m_b)\frac{۱}{۳}(m_b+m_c-m_a)}$$

$$=\frac{۱}{۳}\sqrt{(m_a+m_b+m_c)(m_b+m_c-m_a)(m_a+m_c-m_b)(m_a+m_b-m_c)}$$

۴.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن نیمسازها

۲۰۵. با فرض $A\hat{C}B=۲\alpha$، در مثلثهای ACD و BCD داریم :

$$\begin{cases}AD^۲=b^۲+t^۲-۲bt\cos\alpha\\ DB^۲=a^۲+t^۲-۲at\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{AD^۲}{DB^۲}=\frac{b^۲}{a^۲}\Rightarrow\frac{b^۲+t^۲-۲b+\cos\alpha}{a^۲+t^۲-۲at\cos\alpha}=\frac{b^۲}{a^۲}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{(a+b)t}{۲ab}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-\frac{(a+b)^۲t^۲}{۴a^۲b^۲}}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}ab\sin۲\alpha=ab\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow S=\frac{(a+b)t}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-(a+b)^2t^2}$$

۲۰۶. دوحالت درنظر بگیرید:

۱) مثلث مفروض ABC حاده الزاویه باشد. فرض کنید زاویهٔ B بزرگترین زاویه باشد. $60^\circ \le B < 90^\circ$، از آن‌جا که طول نیمسازهای زاویه‌های A و C از ۱ کمترند، طول ارتفاعهای نظیر این زاویه‌ها: h_a و h_c هم از ۱ کمتر است. داریم:

$$S_{ABC}=\frac{h_a h_c}{2\sin B}<\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

۲) اگر یکی از زاویه‌های مثلث، مثلاً B حاده نباشد، آن وقت ضلعهایی که این زاویه را در بردارند، از نیمسازهای نظیر کوچکترند، یعنی از ۱ کمترند و مساحت از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کند.

۲۰۷. راه اول. با فرض $DC=x$، $AD=kx$ و با فرض $CE=y$، $AE=ky$ است.

چون نیمسازها بر هم عمودند، پس:

$$(x+y)^2=l^2+l_1^2 \Rightarrow$$
$$x+y=\sqrt{l^2+l_1^2}$$

همچنین داریم:

$$AE=AD+DC+CE \Rightarrow ky=kx+x+y \Rightarrow y=\frac{x(k+1)}{k-1}$$
$$\Rightarrow x+\frac{x(k+1)}{k-1}=\sqrt{l^2+l_1^2} \Rightarrow x=DC=\frac{1}{2k}(k-1)\sqrt{l^2+l_1^2}$$
$$2S_{BDE}=ll_1=DE.BH \Rightarrow ll_1=(x+y)BH \Rightarrow BH=\frac{ll_1}{\sqrt{l^2+l_1^2}}$$
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BH=\frac{1}{2}BH(AD+DC)=\frac{ll_1(kx+x)}{2\sqrt{l^2+l_1^2}}=\frac{ll_1(k^2-1)}{4k}$$

راه دوم. داریم:

$$\hat{B}=90^\circ \Rightarrow S_{DBE}=\frac{1}{2}ll_1 \;,\; S_{ABC}:S_{DBE}=AC:DE \Rightarrow$$

$$S_{ABC}=\frac{AC}{DE}.S_{DBE}\;(1) \;,\; \frac{AD}{DC}=k \Rightarrow \frac{AD+DC}{DC}=k+1 \Rightarrow$$

$$\frac{DC}{AD+DC}=\frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{AE}{CE}=k \Rightarrow \frac{AD+DC+CE}{CE}=k \Rightarrow$$

$$\frac{AD+DC}{CE}=k-1 \Rightarrow \frac{CE}{AD+DC}=\frac{1}{k-1} \Rightarrow$$

$$\frac{DC+CE}{AD+DC}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k-1}=\frac{2k}{k^2-1}\Rightarrow\frac{DE}{AC}=\frac{2k}{k^2-1}\Rightarrow$$

$$\frac{AC}{DE}=\frac{k^2-1}{2k}\ ,\ (1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{k^2-1}{2k}\times\frac{1}{2}ll_1=\frac{ll_1(k^2-1)}{4k}$$

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت مثلث داده شده با معلوم بودن سایر اجزای مثلث

۲۰۸. تساویهای $BP=y$ ، $CP=2y$ ، $AK=x$ و $BK=2x$ را منظور کرده و $PM\|KC$ را رسم می‌کنیم. بنا به قضیهٔ تالس $\frac{BM}{MK}=\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}$ بوده و از این‌رو $BM=\frac{2x}{3}$ و $KM=\frac{4x}{3}$ است. از این گذشته مثلثهای AKE و AMP متشابه بوده، از این‌رو $\frac{KE}{MP}=\frac{AK}{AM}$ یعنی: $\frac{KE}{MP}=\frac{x}{x+\frac{4x}{3}}=\frac{3}{7}$ را داریم. بنابراین رابطهٔ $KE=\frac{3}{7}MP$ به دست می‌آید.

از طرف دیگر $\frac{MP}{KC}=\frac{BP}{BC}=\frac{1}{3}$ یعنی $MP=\frac{1}{3}KC$ را داریم. بدین ترتیب $KE=\frac{1}{7}KC$ حاصل می‌شود و $EC=\frac{6}{7}KC$ خواهد بود. مثلثهای BEC و BKC را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. آنها دارای ارتفاعهای مشترک (رسم شده از رأس B) بوده و از این‌رو نسبت مساحتهای آنها با نسبت قاعده‌های KC و EC برابر است.

یعنی چنین داریم: $\frac{S_{BKC}}{S_{BEC}}=\frac{KC}{EC}=\frac{7}{6}$. ولی تساوی $S_{BEC}=4cm^2$ را داریم و در نتیجه $S_{BKC}=\frac{7}{6}.4=\frac{14}{3}cm^2$ خواهد بود. سرانجام مثلثهای BKC و ABC را مورد بررسی قرار می‌دهیم. آنها دارای ارتفاع مشترک (مرسوم از رأس C) بوده و از این‌رو نسبت مساحتهای آنها با نسبت قاعده‌هایشان برابر خواهد بود:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BKC}}=\frac{AB}{BK}=\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

بدین ترتیب چنین حاصل می‌شود:

$$S_{ABC}=\frac{3}{2}S_{BKC}=\frac{3}{2}\times\frac{14}{3}=7cm^2$$

۲۰۹. با نامگذاری نسبت $\frac{AM}{MC}=\lambda$ ، داریم: $S_{MCP}=\frac{T}{\lambda}$ و $S_{CPN}=\lambda Q$ و

$S_{MCP} = \lambda S_{CPN}$ ؛ در نتیجه، $\frac{T}{Q} = \lambda^۳$ و

$$S_{ABC} = \frac{AC}{MC} \cdot \frac{BC}{CN} \cdot S_{CMN} = \frac{(\lambda+۱)^۲}{\lambda}(\frac{T}{\lambda} + \lambda Q) =$$

$$\frac{(\lambda+۱)^۲}{\lambda^۲}(T + \lambda^۲ Q) = (\lambda+۱)^۳ Q = (T^{\frac{۱}{۳}} + Q^{\frac{۱}{۳}})^۳$$

۲۱۰. فرض کنید Oمرکز تجانس مثلثهای محاطی و محیطی باشد و $M_۱$ و $M_۲$ دو رأس متجانس باشند ($M_۱$ بر ضلع ABواقع است)، و فرض کنید پاره‌خط OA ، مثلث محاطی را در نقطهٔ K قطع کند دراین صورت $S_{OM_۱K} = \lambda S_۱$ ، $S_{OM_۲A} = \lambda S_۱$ ، $\frac{S_{OM_۱A}}{S_{OM_۲A}} = \frac{OM_۱}{OM_۲} = \sqrt{\frac{S_۱}{S_۲}}$ ، که از آن‌جا $S_{OM_۱A} = \lambda\sqrt{S_۱S_۲}$ ، که در آن $\lambda = \frac{S_{OM_۱K}}{S_۱}$. با درنظر گرفتن شش مثلث از این قبیل و جمع کردن مساحتهای آنها باهم، به دست می‌آوریم : $S_{ABC} = \sqrt{S_۱S_۲}$

۲۱۱. $\frac{a^۲}{۲}(۳+۲\sqrt{۲})$

۲۱۲. فرض می‌کنیم $S_{ABC} = x$ باشد، مثلثهای ایجاد شده، با مثلث ABC متشابه‌اند. پس داریم :

$$\frac{a^۲}{x} = \frac{MK^۲}{AB^۲} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{MK}{AB} \ , \ \frac{b}{\sqrt{x}} = \frac{KN}{AB} \ , \ \frac{c}{\sqrt{x}} = \frac{FR}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sqrt{x}} = \frac{MK+KN+FR}{AB} = \frac{AB}{AB} = ۱ \Rightarrow x = (a+b+c)^۲$$

تبصره. اگر مساحت مثلثهای ایجاد شده را $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ بنامیم، مساحت مثلث ABC برابر است با : $S = (\sqrt{S_۱} + \sqrt{S_۲} + \sqrt{S_۳})^۲$

۱ . ۷ . ۲ . مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

۱.۲.۷.۱ . مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده (مثلثها)

۲۱۳. در مثلثهای قائم الزاویهٔ PRV و RVQ داریم :

$$PV = \sqrt{۲۲۵ - ۱۴۴} = \sqrt{۸۱} = ۹ \ , \ VQ = \sqrt{۴۰۰ - ۱۴۴} = \sqrt{۲۵۶} = ۱۶$$

$$PQ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow VS = PS - PV = \frac{PQ}{۲} - PV = \frac{۲۵}{۲} - ۹ = \frac{۷}{۲}$$

$$S_{RVS} = \frac{۱}{۲} VS.RV = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۲} \times ۱۲ = ۲۱$$

۲۱۴. الف) $9\,cm^2$ ب) $3\,cm^2$ پ) $12\,cm^2$

۲۱۵. فرض کنید x معرف مساحت مثلث OMN و y مساحت مثلث CMN باشد، در این صورت، $\frac{ON}{OA}=\frac{x}{S_1}=\frac{S_3}{S_2}$، $x=\frac{S_1S_3}{S_2}$ و $\frac{AM}{MC}=\frac{S_1+x}{y}=\frac{S_1+S_2}{S_3+x+y}$.
مساحت مطلوب برابر $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_3+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$ است.

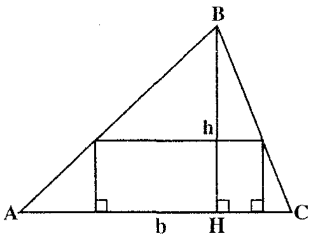
۲۱۶. مساحت مثلث خواسته شده برابر $4\,cm^2$ است.

۲۱۷. مساحت مثلث ABF برابر $\frac{15}{4}$ سانتی‌متر مربع است.

۲۱۹. دو خانواده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث مفروض، وجود دارد. روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای ABC_1، BCA_1 و CAB_1 را رسم و دایره‌هایی بر آنها محیط می‌کنیم. رأسهای مثلثهای خانوادهٔ اول، روی این دایره‌ها قرار دارند (یک رأس روی هر دایره). فرض کنید O_1، O_2 و O_3 معرف مرکز این دایره‌ها باشند ($O_1O_2O_3$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است) مثلثی که ضلعهایش به موازات ضلعهای مثلث $O_1O_2O_3$ است، بیشترین مساحت را دارد (قاطعی که از محل برخورد دو دایره می‌گذرد، وقتی موازی خط‌المرکزین باشد، بیشترین طول را دارد؛ در این حالت، طول قاطع دو برابر فاصلهٔ میان مرکزهاست).
مساحت بزرگترین مثلث $S_0=4S_{O_1O_2O_3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}S)$ است، که در آن، S مساحت مثلث مفروض است.
مساحت بزرگترین مثلث متعلق به خانوادهٔ دوم، از این مقدار کمتر است. از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاط در مثلث مفروض، مثلث با ضلعهای موازی با ضلعهای بزرگترین مثلث محیطی، کمترین مساحت را داراست. مساحت این مثلث برابر است با $S_1=\frac{S^2}{S_0}$، به این ترتیب مساحت بزرگترین مثلث متساوی‌الاضلاع محیطی، $S_0=\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{6}+2S$ و مساحت کوچکترین مثلث محاطی برابر با $S_1=\frac{S^2}{S_0}$ است، که در آنها S مساحت مثلث مفروض است.

۲.۲.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجادشده (چندضلعیها)

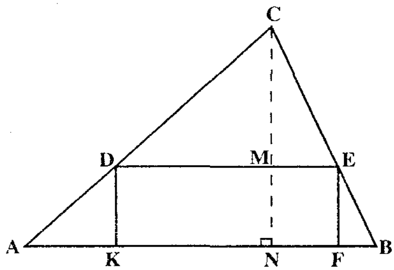
۲۲۰. اگر x و y دو ضلع مجاور و α یک زاویهٔ متوازی الاضلاع باشد، $S=xy\sin\alpha$ مساحت متوازی‌الاضلاع است. با توجه به ثابت بودن زاویه α ثابت کنید ماگزیمم مساحت متوازی‌الاضلاع وقتی است که $x=\frac{b}{2}$ و $y=\frac{c}{2}$ باشد.



۲۲۲. گزینهٔ (الف) درست است. طول قاعدهٔ مستطیل را با y نشان دهید. در این صورت بنا به تشابه مثلثها داریم:

$$\frac{h-x}{y}=\frac{h}{b}\ ,\ \ y=\frac{b}{h}(h-x)\Rightarrow$$

مساحت مستطیل $=xy=\frac{bx}{h}(h-x)$

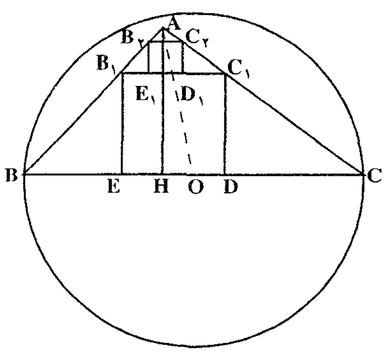


۲۲۳. مستطیل DEFK محاط در مثلث را که ضلعهای EF و DK از آن موازی ارتفاع CN و ضلع DE موازی AB است، درنظر می‌گیریم. با فرض $AB=a$ ، $CN=h$ ، $DK=x$ و $DE=y$ داریم:

$$\Delta CDE\approx\Delta CAB\Rightarrow\frac{CM}{CN}=\frac{DE}{AB}$$ یا $$\frac{CN-DK}{CN}=\frac{DE}{AB}$$

$$\Rightarrow y=\frac{a}{h}(h-x), S=xy\ \Rightarrow S=\frac{a}{h}x(h-x)\ ;$$

$x+(h-x)=h=$ مقدار ثابت $\Rightarrow x=h-x\Rightarrow x=\frac{h}{2}$



۲۲۶. چون $\hat{A}\geq 90^\circ$ ، پس نقطهٔ A در دایرهٔ به قطر BC و یا روی محیط آن قرار می‌گیرد؛ مرکز این دایره را O می‌نامیم. اگر ارتفاع مثلث ABC را AH بگیریم، داریم:

$$AH\leq AO\leq BO=\frac{1}{2}BC$$

یعنی $BC\geq 2AH$ از این‌جا و از تشابه مثلثهای BB_1E و BAH و همچنین دو مثلث CC_1D و CAH به دست می‌آید:

$$\frac{S_{BB_1C_1C}}{S_{B_1C_1DE}}=\frac{S_{B_1C_1DE}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{BB_1E}}{S_{B_1C_1DE}}+\frac{S_{CC_1D}}{S_{B_1C_1DE}}$$

$$=1+\frac{BE}{2B_1E}+\frac{CD}{2C_1D}=$$

$$1+\frac{BH}{2AH}+\frac{CH}{2AH}=1+\frac{BC}{2AH}\geq 2$$

یعنی $S_{BB_1C_1C} \frac{1}{2} \geq S_{B_1C_1DE}$ به همین ترتیب داریم:

$$S_{B_2C_2D_1E_1} \leq \frac{1}{2} S_{B_1B_2C_2C_1} \quad ,\dots,$$

$$S_{B_nC_nD_{n-1}E_{n-1}} \leq \frac{1}{2} S_{B_{n-1}B_nC_nC_{n-1}}$$

که در آن، n عبارت است از تعداد مربعهایی که ساخته‌ایم. از مجموع این نابرابریها، معلوم می‌شود که، مجموع مساحت مربعها، از نصف مساحت چهارضلعی BB_nC_nC تجاوز نمی‌کند، یعنی از نصف مساحت مثلث ABC کمتر است.

۲۲۸. مساحت ذوزنقه برابر ۱۴۷ سانتی‌متر مربع است.

۲۲۹. طبق فرض مساحت مثلث ABC مساوی S و مساحت مثلث KMB مساوی q می‌باشد. سه رأس چهارضلعی روی نقطه‌های K ، M و B و رأس چهارم L در نقطهٔ دلخواهی روی AC قرار گرفته است. در حقیقت مساحت S_1 چهارضلعی برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای KMB و KLM امّا اگر L روی AC حرکت کند، مساحت مثلث KLM تغییر نمی‌کند، پای ارتفاع وارد بر AC را E می‌نامیم، نقطهٔ L را با E عوض می‌کنیم و مساحت چهارضلعی KBME را به دست می‌آوریم.

قطرهای این چهارضلعی برهم عمود بوده و مساحت آن $S_1 = \frac{1}{2} KM.BE$ خواهد بود و چون $q = \frac{1}{2} KM.BD$ می‌باشد، بنابراین $S_1 : q = \frac{BE}{BD}$ اما از تشابه دو مثلث ABC و KMB داریم:

$$S:q = BE^2 : BD^2$$

و در نتیجه

$$S_1 = q.\frac{BE}{BD} = q\sqrt{\frac{s}{q}} = \sqrt{sq}$$

۲۳۰. $\frac{1}{3}S$

۲۳۱. $\frac{3}{4}S$

۲۳۲. A_1 را نقطه‌ای روی BC می‌گیریم. مساحت چهارضلعی OMA_1N با مساحت چهارضلعی OMAN برابر است و $M\hat{A}_1N < M\hat{A}N$ ، در نتیجه اگر روی OB، نقطهٔ M_1 را طوری اختیار کنیم که $M_1\hat{A}_1N = M\hat{A}N$ آن وقت $S_{OM_1A_1N} > S_{OMAN}$، بنابراین مساحت چهارضلعی نظیر نقطهٔ A_1 محاسبه می‌شود.

۲۳۳. نقطه A را که شرطهای مسأله برای آن صادق است، و نقطهٔ دیگر A_1 را اختیار می‌کنیم. با ترسیم خطهای راستی از A_1 به موازات AM و AN که ضلعهای مثلث

را در نقطه‌های M_1 و N_1 قطع می‌کنند، قانع می‌شویم که $S_{OM_1A_1N_1} > S_{OMAN}$، در نتیجه مساحت چهارضلعی مینیمال نظیر نقطه A_1، از مساحت چهارضلعی OMAN که چهارضلعی مینیمال نظیر نقطهٔ A است، کمتر است.

۲۳۴. مساحت شش‌ضلعی برابر ۹۲۶ سانتی‌متر مربع است.

۲۳۵. اگر گرانیگاه مثلث، یعنی نقطهٔ برخورد میانه‌های آن را، مرکز تقارن قرار دهیم، شش‌ضلعی حاصل از برخورد مثلث با قرینهٔ خود، مساحتی برابر $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث پیدا می‌کند.

۳.۷.۱ نسبت مساحتها

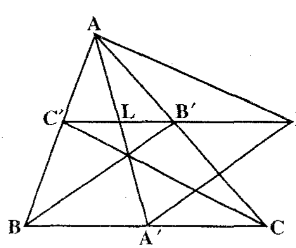
۱.۳.۷.۱. نسبت مساحت مثلثها

۲۳۶. نسبت خواسته شده برابر ۶۴ است.

۲۳۷. گزینهٔ (ج) درست است.

۲۳۸. $۲\cos\alpha\cos\beta$. از تشابه مثلثهای ABCو BFD، $FD = b\cos\beta$ را نتیجه گرفته و به طریق مشابه $DE = c\cos\gamma$ را به دست آورید. رابطهٔ $A\hat{B}E = F\hat{D}A = A\hat{D}E = F\hat{C}A$ را به کار گرفته و زاویهٔ FDE را بر حسب زاویه $B\hat{A}C$ بیان کنید.

۲۳۹. اگر AA' ، BB' و CC' میانه‌های مثلث ABC باشد و L نقطه برخورد AA' با $B'C'$ فرض شود، $C'B'$ را از طرف B' به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم تا به k برسیم. واضح است که $B'K$ مساوی و موازی BA' است. در نتیجه $BB' = A'K$ است. همچنین چون B' وسط ACو $C'K$ است، چهارضلعی $AC'CK$ متوازی الاضلاع و در نتیجه $CC' = A'K$ است. پس مثلث $AA'K$ مثلثی است که ضلعهایش میانه‌های مثلث ABC است و KL میانهٔ آن‌است و چون



$KL = ۳LB' = ۳LC'$ و $LC' = \frac{BC}{۴}$ است. پس $KL = \frac{۳BC}{۴}$ ویا $\frac{KL}{BC} = \frac{۳}{۴}$ است.

۲۴۰. گزینهٔ (ج) درست است. با کاهش مجموع $\Delta ACD + \Delta BAE + \Delta CBF$ از مثلث ABC و افزودن مجموع $\Delta CDN_۱ + \Delta BFN_۳ + \Delta AEN_۲$ به آن، مساحت مثلث $N_۱N_۲N_۳$ به دست می‌آید. امّا داریم:

$$a\Delta CBF = a\Delta BAE = a\Delta ACD = \frac{۱}{۳}a\Delta ABC$$

و از داده‌های مسأله نتیجه می‌شود که :

$$a\Delta CDN_1 = a\Delta BFN_2 = a\Delta AEN_3 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} a\Delta ABC = \frac{1}{21} a\Delta ABC$$

$$\Rightarrow a\Delta N_1N_2N_3 = a\Delta ABC - 3 \times \frac{1}{3} a\Delta ABC + 3 \times \frac{1}{21} a\Delta ABC = \frac{1}{7} a\Delta ABC$$

۲۴۳. $\frac{abc}{mkc + nkb + mna}$. رابطه $S_{DEF} = S_{MDE} + S_{MEF} + S_{MDF}$ را به کار گرفته و S_{DEF} را برحسب m ، n و k و سینوس زاویه‌های مثلث ABC بیان کنید. سپس سینوس زاویه‌های مثلث ABC را برحسب مساحت و ضلعهای آن بیان کنید.

۲۴۶. $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - l^2(a+b)^2}$.

۲۴۷. دو مثلث ABD و ADC در ارتفاع رأس A مشترکند. پس :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{DB}{DC}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$$

۱.۷.۳.۲. نسبت مساحت مثلث و شکلهای دیگر

۲۴۸. گزینهٔ (د) درست است.

۲۴۹. نسبت خواسته شده $\frac{37}{64}$ است.

۲۵۰. نیمسازهای زاویه‌های AXY و XYC را رسم کنید. این دو نیمساز یکدیگر را در نقطهٔ P و ضلع AC را در نقطه‌های R و Q قطع می‌کنند. از این مطلب استفاده کنید که مثلثهای AXR ، QYC و XYP با مثلث ABC متشابه‌اند و آن را می‌پوشانند.

۱.۷.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۱.۷.۴.۱. رابطه ای در مساحتها (برابریها)

۲۵۱. گزینهٔ (هـ) درست است. در مثلث جدید $AB = AC + BC$ ، یعنی C بر خط AB واقع است. در نتیجه ارتفاع وارد از C ، صفر و بنابراین مساحت مثلث صفر است.

۲۵۲. گزینه (ج) درست است. زیرا دو مثلث متشابه‌اند و بنابراین :

$$\frac{\text{مساحت مثلث جدید}}{\text{مساحت مثلث قدیم}} = \frac{(2S)^2}{S^2} = 4$$

۲۵۳. گزینهٔ (د) درست است.

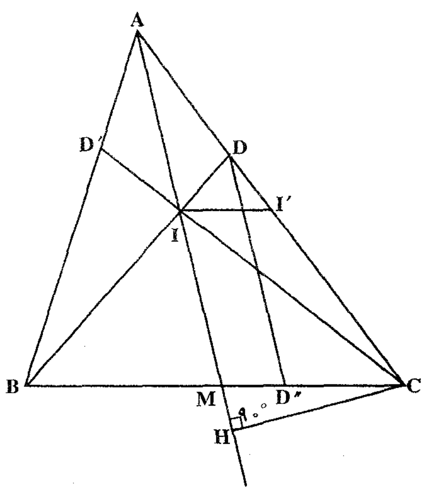
۲۵۴. اگر طول ضلعهای مثلث ABC ، روبه‌رو به رأسهای A ، B و C بترتیب برابر با a ، b و c و زاویه‌های ADB ، BDC و CDA ، بترتیب برابر با α، β و γ باشند (فرض می‌کنیم $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$). آن وقت، فاصله‌های نقطهٔ D تا نقطه‌های برخورد

ارتفاعهای مثلثهای ADB ، BDC و CDA ، بترتیب، برابرند با مقدارهای $c\cot g\alpha$ ، $a\cot g\beta$ و $b\cot g\gamma$. به سادگی قانع می توان شد که مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ADB ، BDC و CDA برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}c\cot g\alpha . a\cot g\beta . \sin\hat{B}+\frac{۱}{۲}a\cot g\beta . b\cot g\gamma . \sin\hat{C}+$$
$$\frac{۱}{۲}b\cot g\gamma . c\cot g\alpha . \sin\hat{A}=$$

$$S_{ABC}(\cot g\alpha\cot g\beta+\cot g\beta\cot g\gamma+\cot g\gamma\cot g\alpha)=S_{ABC}$$

زیرا عبارت داخل پرانتز، برابر با ۱ است (این را با درنظر گرفتن این که $\alpha+\beta+\gamma=۲\pi$ ثابت کنید). به همین ترتیب، حالتهای دیگر جای نقطهٔ D را (وقتی که یکی از زاویه‌های α، β و γ برابر مجموع دوتای دیگر باشد) بررسی می کنیم.



۲۵۶. مساحت مثلث AMC برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت مثلث ABC است و مساحت مثلث AIC نیز برابر $\frac{۱}{۲}$ مساحت AMC است. (زیرا قاعدهٔ آنها AI و IM است که باهم برابرند و CH ارتفاع مشترک آنهاست.) پس مساحت مثلث AIC برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث ABC است. حال ثابت می کنیم که مساحت AID برابر $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث AIC است. اما این دو مثلث دارای ارتفاع مشترک هستند. لذا باید ثابت کنیم $AC=۳AD$ یا $\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}$. برای این منظور II' را موازی BC می کشیم. چون I وسط AM است. پس $\frac{II'}{MC}=\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{II'}{BC}=\frac{۱}{۴}$ از تشابه دو مثلث DII' و DBC داریم :

$$(۱)\qquad \frac{DI}{DB}=\frac{II'}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{DB}{DI}=\frac{۴}{۱}\Rightarrow\frac{DB}{BI}=\frac{۳}{۴}$$

خط DD'' را موازی AM رسم می کنیم. دو مثلث AMC و CDD'' متشابه‌اند پس :

$$(۲)\qquad \frac{DC}{AC}=\frac{DD''}{AM}=\frac{DD''}{۲IM}=\frac{۱}{۲}\times\frac{DD''}{IM}$$

اما دو مثلث BDD'' و BIM متشابه‌اند. لذا، بنا به (۱)

$$\frac{DD''}{IM}=\frac{BD}{BI}\Rightarrow\frac{DD''}{IM}=\frac{۴}{۳}$$

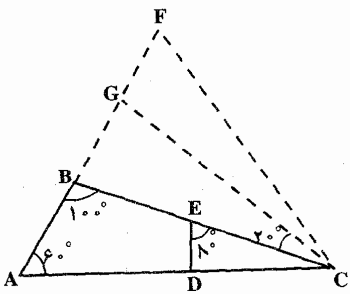
بنا به (۱) و (۲) داریم :

$$\frac{DC}{AC}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AC}{DC}=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی $\frac{AC-DC}{DC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AD}{DC}=\frac{۱}{۲}$. به عبارت دیگر

$$\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow AC=۳AD$$

۲۵۷. گزینهٔ (ب) درست است. بر امتداد AB از طرف B ، نقطهٔ F را به فاصلهٔ ۱ تا A انتخاب می‌کنیم. چون $AF=AC$ و $F\hat{A}C=۶۰^\circ$ پس مثلث ACF متساوی‌الاضلاع است. G نقطه‌ای از پاره‌خط BF است به طوری که $B\hat{C}G=۲۰^\circ$. مثلث BCG با مثلث DCE متشابه است و $BC=۲EC$ همچنین مثلث FGC با مثلث ABC همنهشت است. بنابراین :



$$a\Delta ACF=(a\Delta ABC+a\Delta GCF)+a\Delta BCG$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}=۲(a\Delta ABC)+۴(a\Delta CDE)$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۸}=a\Delta ABC+۲(a\Delta CDE)$$

۲۵۸. طولهای AP ، BQ و CR را می‌توان برحسب طول ضلعهای مثلث نشان داد. به عنوان مثال $AP=\frac{bc}{b+c}$.

۲۵۹. دو مثلث $AB'C'$ و ABC' در ارتفاع رأس C' مشترکند. پس $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC'}}=\frac{AB'}{AB}=K$ و $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=(\frac{AC'}{AC})^۲=K^۲$ (K نسبت تشابه مثلث $AB'C'$ به مثلث ABC است). از این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\frac{S^۲_{AB'C'}}{S^۲_{ABC'}}\Rightarrow S_{ABC}.S_{AB'C'}=S^۲_{ABC'}$$

۲۶۰. نمادهای $S_{ABK}=S$ ، $S_{ABC}=S_۱$ و $S_{ABH}=S_۲$ را در نظر می‌گیریم. آن‌گاه داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}AB.KD\ ,\ S_۱=\frac{۱}{۲}AB.CD\ ,\ S_۲=\frac{۱}{۲}AB.HD$$

باید رابطهٔ $S=\sqrt{S_۱S_۲}$ ، یعنی رابطه‌های زیر را ثابت کنیم.

$$\frac{۱}{۲}AB.KD=\sqrt{\frac{۱}{۲}AB.CD.\frac{۱}{۲}AB.HD}\quad (۱)$$

یا

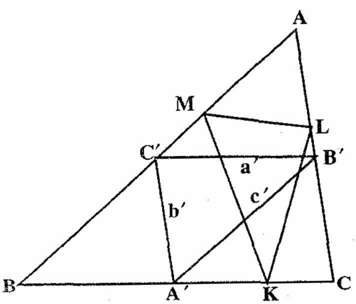
$$KD^{۲}=CD.HD\quad (۲)$$

مثلث ABK قائم‌الزاویه بوده و بنابراین $KD^{۲}=BD.AD$ است. بدین ترتیب تساوی (۲) وقتی برقرار می‌شود که $BD.AD=CD.DH$ یا $\frac{BD}{CD}=\frac{DH}{AD}$ ثابت شود. تساوی آخر از تشابه مثلثهای BCD و HDA (در این مثلثها، زاویه‌های BCD و HAD به علت عمود بودن ضلعهای آنها برهم براساس ارتفاع بودن AE برابر هستند) نتیجه می‌شود. از این‌رو تساوی (۲) و تساوی (۱) اثبات می‌گردند.

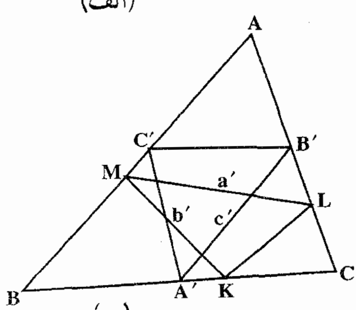
۲۶۱. ارتفاع BH را رسم کرده و نقطهٔ M را بر نقطهٔ H منطبق کنید.

۲.۴.۷.۱. رابطه‌ای در مساحتها (نابرابریها)

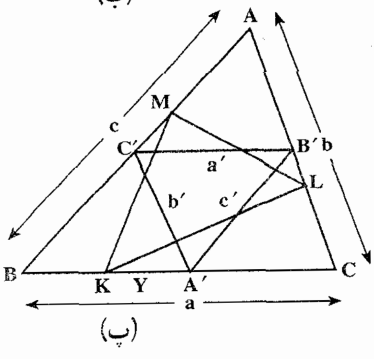
۲۶۲. راه اول. فرض می‌کنیم نقطه‌های A'، B' و C' بترتیب وسطهای ضلعهای BC، CA و AB باشند، و ضلعهای مثلث «درونی» $A'B'C'$ را با a'، b' و c' نمایش می‌دهیم (شکل را ملاحظه کنید).



(الف)



(ب)



(پ)

مثلث ABC به چهار مثلث مساوی، هریک دارای مساحت $\frac{۱}{۴}(aABC)$ تقسیم شده است. اکنون فرض می‌کنیم K، L و M نقطه‌های دلخواهی بترتیب واقع بر BC، CA و AB باشند. ثابت می‌کنیم که مساحت حداقل یکی از مثلثهای «برونی» AML، BKM و CLK کوچکتر از یا مساوی $\frac{۱}{۴}(aABC)$ است، و این کار را ابتدا با بررسی:

A : حالتی که حداقل یکی از پاره‌خطهای LM، MK، KL، a'، b' و c' ضلعهای مثلث درونی را قطع نمی‌کند (شکلهای الف و ب)، و بعد با بررسی:

B : حالتی که در آن ML، a' را قطع می‌کند، MK، b' را قطع می‌کند و KL، c'

را قطع می کند (شکل پ) انجام می دهیم.

A : فرض می کنیم ML ، a' را قطع نکند ؛ در این صورت یا ML خارج مثلث $A'B'C'$ قرار می گیرد و : $(aAML) < (aA'C'B') = \frac{1}{۴}(aABC)$ می‌شود (شکل الف را ببینید)، یا هم b' هم c' را قطع می کند (شکل ب را ببینید). در حالت اخیر KL با MK بسته به این که K روی پاره‌خط $A'C$ یا روی پاره‌خط BA' باشد، خارج مثلث $A'B'C'$ قرار می گیرد. بنابراین یا $(aBKM) < (aBA'C') = \frac{1}{۴}(aABC)$ یا $(aCKL) < (aCA'B') = \frac{1}{۴}(aABC)$

به این ترتیب ادعای مورد بحث در حالت A ثابت می‌شود.

B : شکل (پ) که در آن ML ، a' ؛ KL ، c' ؛و MK، b' را قطع می کند، چنان رسم شده که امتداد ML امتداد BC ؛ امتداد LK ، امتداد AB ؛ و امتداد KM ، امتداد CA را تلاقی می کند. یکی از راههای اثبات نتیجهٔ مطلوب، نشان دادن این است که مساحت مثلث درونی KLM (از آن‌جا که مجموع مساحتهای جمیع چهار مثلث (aABC) است) حداقل $\frac{1}{۴}(a\Delta ABC)$ است و این کار را با اثبات رابطه‌های زیر انجام می‌دهیم :

$$\frac{1}{۴}(aABC) = (aA'B'C') = (aA'B'M) < (aA'LM) < (aKLM)$$

تساوی $(aA'B'C') = (aA'B'M)$ به این علت برقرار است که : $C'M \| A'B'$ و نامساوی $(aA'B'M) < (aA'LM)$ به این علت که ارتفاع از B' به $A'M$ کمتر از ارتفاع از L به $A'M$ است (زیرا امتداد $A'M$ با امتداد CA تلاقی می کند). سرانجام، نامساوی $(aA'LM) < (aKLM)$ به این علت برقرار است که ارتفاع از A' به ML کوتاه‌تر از ارتفاع از K به ML است (زیرا امتداد ML با امتداد BC برخورد می کند).

اثبات دیگر نشان می‌دهد که حاصل ضرب مساحتهای مثلثهای برونی، کوچکتر از یا مساوی با $[(aABC)/۴]^۳$ است، که از آن نتیجه می‌شود که جمیع سه عامل نمی‌توانند از $(aABC)/۴$ تجاوز کنند. این اثبات با نمایش دادن $A'K$ ، $C'M$ و $B'L$ بترتیب با x ، y و z و نوشتن :

$$۲(aAML) = (\frac{c}{۲} - x)(\frac{b}{۲} + z)\sin\hat{A}$$

$$۲(aBKM) = (\frac{a}{۲} - y)(\frac{c}{۲} + x)\sin\hat{B}$$

$$۲(aCKL) = (\frac{a}{۲} + y)(\frac{b}{۲} - z)\sin\hat{C}$$

انجام می‌شود زیرا حاصلضرب این معادله‌ها عبارت است از :

(۱)

$$8(aAML)(aBKM)(aCKL) = (\frac{c^2}{4} - x^2)(\frac{a^2}{4} - y^2)(\frac{b^2}{4} - z^2)\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

در حالی که : $2(aABC) = bc\sin\hat{A} = ac\sin\hat{B} = ab\sin\hat{C}$

می‌باشد. بنابراین داریم :

(۲)

$$8(aABC)^3 = a^2b^2c^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

خارج قسمت رابطه‌های (۱) و (۲) عبارت است از

$$\frac{(aAML)(aBKM)(aCKL)}{(aABC)^3} = (\frac{1}{4} - \frac{x^2}{c^2})(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{a^2})(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{b^2}) \quad (3)$$

امّا :

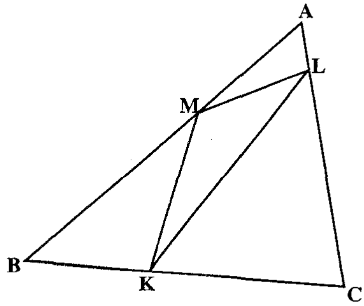
$$0 \le x < \frac{c}{2}\ ,\ 0 \le y < \frac{a}{2}\ ,\ 0 \le z < \frac{b}{2}$$

شکل (پ) را ببینید، بنابراین هریک از عددهای $\frac{x^2}{c^2}$، $\frac{y^2}{a^2}$ و $\frac{z^2}{b^2}$ کمتر از $\frac{1}{4}$ است.
در این صورت نتیجه می‌شود که سمت راست (۳) کوچکتر از یا مساوی $(\frac{1}{4})^3$
است. بنابراین : $(aAML)(aBKM)(aCKL) \le \frac{(aABC)^3}{4} \quad (4)$
و این مستلزم آن است که حداقل یکی از مثلثهای برونی AML ، BKM و CKL مساحتی کوچکتر از یا مساوی با $\frac{(aABC)}{4}$ دارد که همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. اگر K ، L و M وسطهای ′A ، ′B و ′C باشند، در این صورت $x = y = z = 0$ و (۴) به تساوی مذکور در آغاز مسأله تبدیل می‌شود.

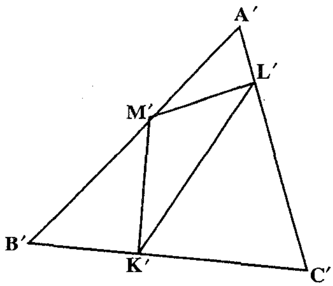
تبصره. در بحث بالا در حقیقت نشان دادیم که در حالت B مساحت مثلث درونی، هنگامی که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث ABC اند، مینیمم است.

راه دوم . با انجام تبدیل آفینی، مثلث ABCرا به مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ تبدیل می‌کنیم (شکل ت). چنین تبدیلی نسبت مساحتها را حفظ می‌کند، به عنوان مثال داریم :

$$\frac{(aAML)}{(aABC)} = \frac{(aA'M'L')}{(aA'B'C')}$$



(ت)



در نتیجه در صورتی که قضیهٔ مورد بحث در مورد مثلث $A'B'C'$ برقرار باشد، در مورد مثلث ABC نیز برقرار است. بنابراین می‌توانیم از آغاز کار فرض کنیم که مثلث ABC مثلث متساوی الاضلاعی با ضلع S است. (شکل پ) را ملاحظه کنید.

در این صورت بدون از دست دادن حالت عام مسأله، فرض می‌کنیم AL کوتاهترین شش‌پاره‌خطی که نقطه‌های K ، L و M ضلعهای مثلث ABC را به آنها تقسیم می‌کنند، باشد. بنابراین $AL \le MB$ ، و در نتیجه $AM.AL \le AM.MB$ می‌شود. با توجه به نامساوی واسطهٔ هندسی واسطهٔ حسابی داریم :

$$AM.MB \le (\frac{AM+MB}{۴})^{۲} = \frac{۱}{۴}S^{۲}$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$(aAML) = \frac{۱}{۲}AM.AL.\sin ۶۰^\circ \le \frac{۱}{۸}S^{۲}\sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۴}(aABC)$$

۲۶۴. نسبتهای $\frac{AM}{MC}$ ، $\frac{CN}{NB}$ و $\frac{ML}{LN}$ را با α، β و γ نشان می‌دهیم. در این صورت $P = Q\alpha\beta\gamma$ و $S = Q(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱)$ بالاخره از نابرابری $(\alpha+۱)(\beta+۱)(\gamma+۱) \ge (\sqrt[۳]{\alpha\beta\gamma}+۱)^{۳}$ استفاده کنید.

۲۶۵. قرار دهید $\frac{AC_۱}{AB} = x$ ، $\frac{BA_۱}{BC} = y$ و $\frac{CB_۱}{CA} = z$.
فرض می‌کنیم $x \le \frac{۱}{۲}$. فرض کنید مساحتهای مثلثهای $AB_۱C_۱$ ، $BC_۱A_۱$ و $CA_۱B_۱$ ، از مساحت مثلث $A_۱B_۱C_۱$ بزرگتر باشد. در این صورت $z \le \frac{۱}{۲}$ (در غیر این صورت، $S_{AC_۱B_۱} \le S_{A_۱C_۱B_۱}$) و $y \le \frac{۱}{۲}$. مساحت مثلثهای مورد بحث را می‌توان به سادگی برحسب S_{ABC} ، x ، y و z نشان داد. مثلاً : $S_{AB_۱C_۱} = x(۱-z)S_{ABC}$. نابرابری $S_{A_۱B_۱C_۱} < S_{AB_۱C_۱}$ ، به شکل : $۱-x(۱-z)-y(۱-x)-z(۱-y) < x(۱-z)$ درمی‌آید. با جمع کردن سه نابرابری از این قبیل باهم، به دست می‌آوریم.

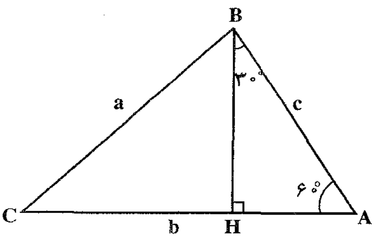
$۳ - ۴x(۱-z) - ۴y(۱-x) - ۴z(۱-y) < ۰$ نابرابری اخیر، نسبت به x ، y و z خطی است، و اگر برای مقدارهای معلوم x ، y و z، بین ۰ و $\frac{۱}{۲}$ برقرار باشد، برای مقدارهای حداکثر این متغیرها هم، درست است، یعنی، وقتی که هریک از متغیرها برابر با ۰ یا $\frac{۱}{۲}$ باشد، امّا می‌توان تحقیق کرد که این طور نیست. تناقص حاصل، حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۸.۱. رابطه‌های متری

۱.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها

۱.۱.۸.۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها (برابریها)

۲۶۶. راه اول . ارتفاع رأس B را رسم می‌کنیم، داریم :



$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{c}{۲}$$

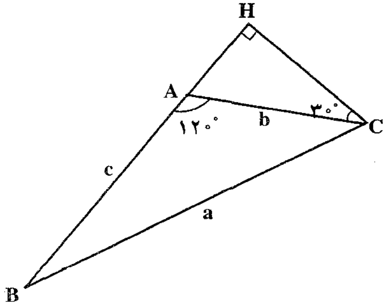
$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.AH$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.\frac{c}{۲} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - bc$$

راه دوم. می‌دانیم که $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$ که برای $\hat{A} = ۶۰°$ داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos ۶۰° \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ - bc$$

۲۶۷. راه اول. ارتفاع CH را رسم می‌کنیم.



چون $A\hat{C}H = ۳۰°$ است، پس $AH = \frac{AC}{۲} = \frac{b}{۲}$ است. از طرفی داریم :

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ + ۲AB.AH$$

پس :

$$a^۲ = c^۲ + b^۲ + ۲c(\frac{b}{۲}) \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$$

راه دوم . می‌دانیم که $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ که اگر $\hat{A}=120^\circ$ را جایگزین کنیم، داریم :

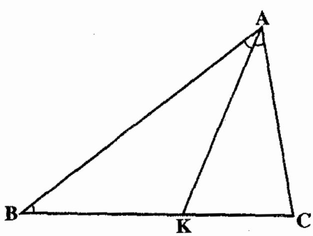
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ \Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc(-\frac{1}{2}) \Rightarrow$$
$$a^2=b^2+c^2+bc$$

۲۶۸. اگر $\hat{A}=45^\circ$ را در رابطهٔ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ قرار دهیم، خواهیم داشت :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 45^\circ = b^2+c^2-2bc(\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow$$

$$a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$$

۲۶۹. اگر AK نیمساز زاویهٔ درونی A باشد،
با توجه به شرطهای مسأله داریم :



$$C\hat{A}K = K\hat{A}B = A\hat{B}K$$

یعنی $AK=BK$ و مثلثهای ACK و ABC متشابه‌اند. از این‌جا نتیجه می‌شود :

$$AC:BC = BK:AB$$

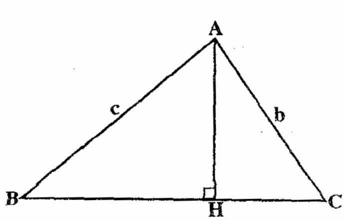
که اگر ویژگی نیمساز را درنظر بگیریم :

$$AC:(BC-BK) = AB:BK$$

و از این دو رابطه به نتیجهٔ خواسته شده می‌رسیم.

۲۷۰. زاویه ها را با x، ۲x و ۴x نشان داده و به وسیلهٔ قانون سینوسها، ضلع بزرگتر مثلث را برحسب ضلع کوچکتر بیان کنید.

۲۷۱. ارتفاع وارد از رأس A روی ضلع BC دو پاره‌خط به طولهای $b\cos\hat{C}$ و $c\cos\hat{B}$ جدا می‌کند. برحسب آن که هر دو زاویهٔ B و C حاده یا این که یکی از آنها منفرجه باشد، این دو مقدار را باهم جمع، یا از هم کم کنید.



۲۷۲. مقدارهای sinA ، sinB و sinC را به صورت $\frac{a}{2R}$ ، $\frac{b}{2R}$ و $\frac{c}{2R}$ نوشته و ساده کنید.

۲۷۳. این مقدار ثابت مساوی مربع ضلع سوم مثلث است. به عنوان مثال :

$$b^2+c^2-2bc\cos A = a^2$$

۲۷۴. ۱. ضلعهای مثلث را x، y و z، و محیط آن را ۲k فرض می کنیم. پس:

$$(k-x)^۲+(k-y)^۲+(k-z)^۲+k^۲=$$
$$x^۲+y^۲+z^۲-۲k(x+y+z)+۴k^۲=$$
$$x^۲+y^۲+z^۲$$

از طرف دیگر بنابر نامساوی مثلث $k-x$، $k-y$ و $k-z$ مخالف صفر هستند.

۲. فرض کنید x بیشترین و y کمترین در بین سه عدد باشد. به‌راحتی با محاسبه دیده می‌شود که:

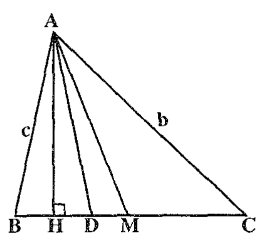
$$۷۳\times ۲۷(x-۶)(y-۶)(z-۶)=۲۷\times ۶(x-۷۳)(y-۷۳)(z-۷۳)$$

طرف چپ مثبت و طرف راست منفی است. پس فقط وقتی درست است که $x=۶$ و $y=۷۳$ باشد. از $x+y+z=۱۰۶$ نتیجه می‌شود $z=۲۷$.

۲۷۵. z را کوچکترین ضلع مثلث بگیرید و ثابت کنید:

$$x^۲+y^۲+z^۲=(x+y-z)^۲$$

۲۷۶. می‌دانیم نیمساز یک رأس، بین ارتفاع و میانهٔ نظیر آن رأس قرار می گیرد و به فرض، $b>c$ است. قضیهٔ میانه‌ها را می‌نویسیم:



$$(۱)\ b^۲-c^۲=۲a.HM$$

طبق فرض $HD=۳DM$ و یا $HM=۴DM$

داریم: $MB=\frac{a}{۲}$ و $DB=\frac{ac}{b+c}$ و $DM=MB-DB$.

در نتیجه

$$DM=MB-DB=\frac{a}{۲}-\frac{ac}{b+c}=\frac{a(b-c)}{۲(b+c)}$$

$$HM=۴DM=\frac{۴a(b-c)}{۲(b+c)}$$

و از آن‌جا:

$$HM=\frac{۲a(b-c)}{b+c}$$

به‌جای HM در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم و چون $b\neq c$ است.

$$b^۲-c^۲=۲a\times\frac{۲a(b-c)}{b+c}\Rightarrow b+c=\frac{۴a^۲}{b+c}\Rightarrow (b+c)^۲=۴a^۲$$

$$\Rightarrow b+c=۲a$$

۲۷۷. در مثلث ABD، BO نیمساز زاویهٔ B است، پس:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{OD}{OA}=\frac{1}{2}\Rightarrow BA=2BD \quad (1)$$

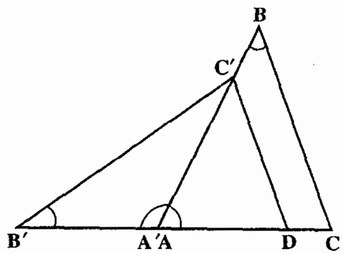
در مثلث ACD نیز CO نیمساز است. پس:

$$\frac{CD}{AC}=\frac{OD}{OA}=\frac{1}{2}\Rightarrow AC=2CD \quad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$AB+AC=2(BD+DC)\Rightarrow AB+AC=2BC \text{ یا } b+c=2a$$

۲۷۹. دو مثلث را چنان در مجاورت هم، قرار می‌دهیم که $B'AA'C$ خط راست شود. از نقطهٔ C' خط $C'D$ را موازی AC رسم می‌کنیم. داریم:

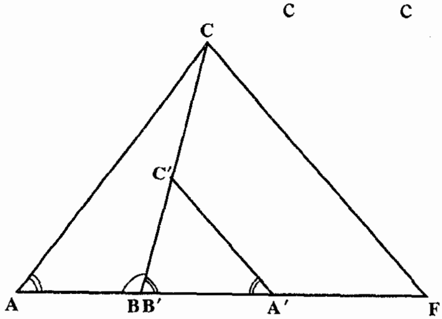


$$\Delta AC'D\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{A'C'}{AB}\Rightarrow\frac{AD}{b}=\frac{b'}{c}\Rightarrow AD=\frac{bb'}{c}$$

$$\Delta B'C'D\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{B'D}{BC}=\frac{B'C'}{AB}\Rightarrow\frac{B'D}{a}=\frac{a'}{c}\Rightarrow B'D=\frac{aa'}{c}$$

$$B'D=A'B'+AD\Rightarrow\frac{aa'}{c}=c'+\frac{bb'}{c}\Rightarrow aa'=cc'+bb'$$

۲۸۰. دو مثلث را در مجاورت هم، طوری قرار می‌دهیم که ABA' خط راست شود و CF را موازی $A'C'$ رسم می‌کنیم. مثلث CAF متساوی‌الساقین است (زیرا $\hat{F}=\hat{A}'$ و $\hat{A}'=\hat{A}$ پس $\hat{F}=\hat{A}$) و داریم $CA=CF$. همچنین:



$$\Delta BCF\sim\Delta BA'C'\Rightarrow\frac{FC}{A'C'}=\frac{BC}{BC'}\Rightarrow\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \text{ یا } \frac{b}{b'}=\frac{a}{a'}$$

۲۸۱. با توجه به این که:

$$PM^2=4c^2+b^2+4bc\ \cos\hat{A}$$
$$PN^2=4b^2+a^2+4ab\ \cos\hat{C}$$
$$MN^2=4a^2+c^2+4ac\ \cos\hat{B}$$

و $2bc\cos\hat{A}=b^2+c^2-a^2$ ، $2ac\cos\hat{B}=a^2+c^2-b^2$ و $2ab\cos\hat{C}=a^2+b^2-c^2$ است، نتیجه می‌شود که $\frac{PM^2+PN^2+MN^2}{a^2+b^2+c^2}=7$ است.

۱. ۸. ۱. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و زاویه‌ها (نابرابریها)

۲۸۲. نابرابری سمت راست را ثابت می‌کنیم. برای روشنی وضع، فرض کنید $b \geq c$.

(۱) اگر $a \leq b$ ، آن وقت :

$$2p = a+b+c = (b-a)+c+2a < 2c+2a \leq 2\frac{bc}{a}+2a = 2\times\frac{bc+a^2}{a}$$
$$\Rightarrow p < \frac{bc+a^2}{a}$$

(۲) اگر $a \geq b \geq c$ ، آن وقت $a < 2b$ و :

$$2p = a+b+c = (b+c-a)+2a \leq c+2a < \frac{2bc}{a}+2a = 2\times\frac{bc+a^2}{a}$$
$$\Rightarrow p < \frac{bc+a^2}{a}$$

نابرابری سمت چپ، از نابرابری سمت راست و اتحاد

$$(b+c)(p-a) - bc\cos\hat{A} = a(\frac{bc+a^2}{a} - p)$$

نتیجه می‌شود.

۲۸۴. راه اول (از : G.Arenstorf و A.Zisook). فرض می‌کنیم :

$x = b+c-a$ و $y = c+a-b$ و $z = a+b-c$

توجه داشته باشید که چون a، b و c ضلعهای یک مثلث می‌باشند، x، y و z مثبت می‌باشند. در این صورت :

$$\frac{x+y}{2} = c \ , \ \frac{y+z}{2} = a \ , \ \frac{z+x}{2} = b$$

بنابه نامساوی واسطهٔ حسابی واسطهٔ هندسی داریم :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \ , \ \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \ , \ \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$$

بنابراین :

$$\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2} \geq xyz$$

که پس از جانشینی، نتیجه می‌شود :

$$abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

در این صورت چون عاملهای سمت راست نامساوی را در هم ضرب کنیم، می‌توانیم جمله‌ها را طوری مرتب کنیم که به‌صورت :

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-2abc \leq abc$$

که از آن، به نامساوی خواسته شده می‌رسیم، در آیند.

راه دوم (از D.Barton). ضلعها را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که :

$$0 \leq a \leq b \leq c$$

باشد، در این صورت :

$$c-a \geq b-a \geq 0$$

و :

$$c(c-b)(c-a) \geq b(c-b)(b-a) \geq 0$$

یا :

$$c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \geq 0$$

به سمت چپ این نامساوی، عبارت نامنفی $a(a-b)(a-c)$ را اضافه کرده، به‌دست می‌آوریم :

$$a(a-b)(a-c) + c(c-b)(c-a) - b(c-b)(b-a) \geq 0$$

یا معادل آن :

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - a^2c - c^2b - c^2a - b^2c - b^2a + 3abc \geq 0$$

که آن را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$a^2(a-b-c) + b^2(b-c-a) + c^2(c-b-a) + 3abc \geq 0$$

با ضرب در ۱- و انتقال آخرین عبارت به‌سمت راست، حاصل می‌شود :

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

تساوی اگر و فقط اگر : $a=b=c$ باشد، برقرار است.

راه سوم (از C.Hornig). سمت چپ نامساوی مورد اثبات را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$a(b^2+c^2-a^2) + b(c^2+a^2-b^2) + c(a^2+b^2-c^2)$$

این عبارت بنابه قانون کسینوسها برابر :

$$a(2bc\cos\hat{A}) + b(2ac\cos\hat{B}) + c(2ab\cos\hat{C}) =$$
$$2abc(\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C})$$

که در آن $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ است، می‌باشد. اکنون اگر $\hat{C}$ را ثابت نگه‌داریم، عبارت $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}$ وقتی بیشترین مقدار را دارد که $\hat{A}=\hat{B}$ باشد، زیرا :

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B} = 2\cos\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}$$

می‌باشد و حاصل‌ضرب اخیر از آن‌جا که : $\hat{A}+\hat{B}$ ثابت است، وقتی بیشترین مقدار را داراست که : $\cos\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})=1$ یا، $\hat{A}=\hat{B}$ باشد. امّا از آن‌جا که $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مسأله به‌طور متقارن وارد شده‌اند، $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}$ وقتی مقدار ماکزیمم خود را داراست که : $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60^\circ$ باشد. در این صورت :

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} = \frac{3}{2}$$

بنابراین :

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 2abc\left(\frac{3}{2}\right) = 3abc$$

۲۸۵. راه اول. در مورد نامساوی مربوط به مثلث، اغلب مفید است که تبدیل:

$$a=y+z \text{ و } b=z+x \text{ و } c=x+y$$

را که در آن x، y و z عددهای نامنفی دلخواهند، به‌کار بریم. بعکس:

$$x=\frac{1}{2}(b+c-a)=s-a, y=s-b, z=s-c$$

که در آن $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ است، برقرار می‌باشد. در این صورت به‌ازاء هر نامساوی مربوط به مثلث $I(a,b,c)\geq 0$، خواهیم داشت:

$$I(a,b,c)\geq 0 \Leftrightarrow I(y+z,z+x,x+y)\geq 0$$

به‌ازاء هر x، y و z و نامساوی: $J(x,y,z)\geq 0$، داریم:

$$J(x,y,z)\geq 0 \Leftrightarrow J(s-a,s-b,s-c)\geq 0$$

یکی از امتیازهای فرمولبندی x، y و z این است که قیدهای مثلثی خسته‌کنندهٔ $b+c>a$، $c+a>b$ و $a+b>c$، به این گزارهٔ ساده که نصف محیط مثلث منهای هر ضلع مثبت است، تبدیل می‌شود. در این صورت، نامساوی مفروض در تنظیم x، y و z به:

$$xy^{3}+yz^{3}+zx^{3}\geq xyz(x+y+z) \quad (1)$$

تحویل می‌شود.

برای اثبات (۱)، از نامساوی کوشی به طریق زیر استفاده می‌کنیم:

$$(xy^{3}+yz^{3}+zx^{3})(z+x+y)\geq(y\sqrt{xyz}+z\sqrt{xyz}+x\sqrt{xyz})^{2}$$
$$=xyz(x+y+z)^{2}$$

تساوی اگر و فقط اگر:

$$(xy^{3},yz^{3},zx^{3})=k(z,x,y)$$

باشد برقرار است. به این ترتیب $x=y=z$ و به عبارت دیگر مثلث متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم (از: BernhardLeeb). بعد از بعضی از اعمال جبری، نامساوی مفروض را می‌توان به‌صورت:

$$a(b-c)^{2}(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq 0 \quad (2)$$

بازنویسی کرد. از آن‌جا که تبدیل دوری: (a و b و c) نامساوی مفروض را بی‌تغییر باقی می‌گذارد، می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنیم که: $a\geq b$ و c، (۲) از آن‌جا که $b+c-a$ (یا x) و $a+b-c$ (یا z) بزرگ‌تر از ۰ می‌باشند برقرار است، تساوی اگر و فقط اگر؛ $a=b=c$ باشد برقرار است.

در هر دو راه‌حل، تساوی موجود در (۱) و (۲) وقتی مثلث از بین می‌رود نیز برقرار است، و این وضعیتی است که در گزارهٔ مسأله کنار گذاشته شده است.

۲۸۶. این نابرابری از زنجیرهٔ نابرابریهای زیر نتیجه می‌شود :

$$p^3=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+6abc+3ab(a+b)+3bc(b+c)$$
$$+3ac(c+a)\le a^3+b^3+c^3+2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2-ab+b^2)$$
$$\times(a+b)+3(a^2-ac+c^2)(a+c)+3(b^2-bc+c^2)(b+c)=$$
$$9(a^3+b^3+c^3)$$

۲۸۷. ۱. بنا بر قضیهٔ مربوط به‌واسطه‌ها داریم :

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b+3abc$$
$$\ge 6abc+3abc=9abc\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{2p}$$

۲. نابرابری $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$ از زنجیره این رابطه‌ها به‌دست می‌آید :

$$p^2=(a+b+c)^2+2ab+2ac+2bc\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+$$
$$(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=3(a^2+b^2+c^2)$$

۳. این رابطه به رابطهٔ $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ تبدیل می‌شود که همواره برقرار است.

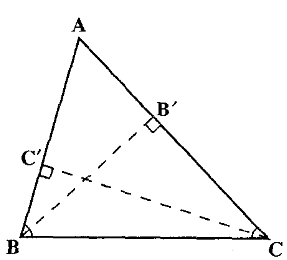
۲۸۹. بترتیب داریم :

$$|AB|-|AC|=\frac{|AB|^2-|AC|^2}{|AB|+|AC|}\ge\frac{1}{|AB|+|AC|}>\frac{1}{|AB|+|AC|+|BC|}=\frac{1}{P}$$

۱. ۸. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۱. ۸. ۲. ۱. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها (برابریها)

۲۹۰. در مثلث ABC قضیهٔ مربوط به زاویهٔ حاده را برای دو زاویهٔ حادهٔ B و C می‌نویسیم و طرفین دو رابطه را جمع می‌کنیم :



$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC'$$
$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC.B'C$$
$$\Rightarrow 0=2BC^2-2AC.B'C-2AB.BC'\Rightarrow BC^2=AB.BC'+AC.B'C$$

تبصره. اگر یکی از دو زاویهٔ مجاور به ضلعی که مربعش را می‌نویسیم منفرجه باشد، مجموع به تفاضل تبدیل می‌شود.

۲۹۱. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC و BHC داریم:

$$a^2 - c^2 = b^2 - d^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2 \Rightarrow$$
$$(a+b)(a-b) = (c+d)(c-d)$$

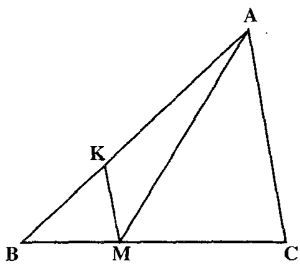
۲۹۴. با فرض $b > a$، می‌دانیم که $AD = \frac{bc}{a+b}$ و $AE = \frac{bc}{b-a}$ و $AB = c$ پس:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{AE} = \frac{a+b}{bc} + \frac{b-a}{bc} = \frac{2b}{bc} = \frac{2}{c} = \frac{2}{AB}$$

۲۹۵. از M به A وصل کنید و مجموع مساحتهای دو مثلث MAB و MAC را به‌دست آورید.

۱. ۸. ۲. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ضلعها و قطعه‌های ضلعها (نابرابریها)

۲۹۶. از نقطهٔ M، خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ K قطع کند. به‌سادگی معلوم می‌شود:



$$.MK = MB.\frac{AC}{CB}, AK = CM.\frac{AB}{CB}$$

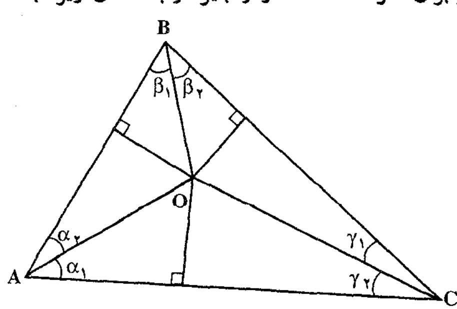
از آن‌جا که $AM \le AK + KM$، با قرار دادن AK و KM، به‌دست می‌آوریم:

$$AM \le \frac{CM.AB}{BC} + \frac{MB.AC}{CB} \Rightarrow (AM - AC):BC \le (AB - AC).MC$$

۲۹۷. فرض می‌کنیم:

$$O\hat{A}C = \alpha_1,\ O\hat{A}B = \alpha_2,\ O\hat{B}A = \beta_1\ ,O\hat{B}C = \beta_2,\ O\hat{C}B = \gamma_1,$$
$$O\hat{A}C = \gamma_2,\ \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2,\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

در این صورت،نابرابری خواسته شده از زنجیرهٔ رابطه‌های زیر، به‌دست می‌آید:



$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(OC\cos\gamma_1 + OC\cos\gamma_2 + OB\cos\beta_1 + OB\cos\beta_2 +$$

$$OA\cos\alpha_۱ + OA\cos\alpha_۲) = OC\cos\frac{\gamma}{۲}\cos\frac{\gamma_۱-\gamma_۲}{۲} + OB\cos\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta_۱-\beta_۲}{۲} +$$

$$OA\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲} \le OA\cos\frac{\alpha}{۲} + OB\cos\frac{\beta}{۲} + OC\cos\frac{\gamma}{۲}$$

در ضمن، علامت برابری، وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$\alpha_۱=\alpha_۲,\ \beta_۱=\beta_۲,\ \gamma_۱=\gamma_۲$$

یعنی، وقتی که نقطهٔ O ، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث ABC باشد.

۱. ۸. ۳. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۱. ۸. ۳. ۱. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها (برابریها)

۳۰۰. هر کدام از مقدارهای $a.h_a$ ، $b.h_b$ و $c.h_c$ دو برابر مساحت مثلث ABC است.

۳۰۱. ارتفاعهای AH ، BH' و CH'' از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. داریم :

$$\Delta ABH \sim \Delta BCH''$$

$$\hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{H}=\hat{H}''=۹۰^\circ$$

پس :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{H'C}{HA} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{h_c}{h_a} \Rightarrow \frac{h_a}{\frac{۱}{a}}=\frac{h_c}{\frac{۱}{c}}$$

به‌طورکلی داریم :

$$\frac{h_a}{\frac{۱}{a}}=\frac{h_b}{\frac{۱}{b}}=\frac{h_c}{\frac{۱}{c}}$$

۳۰۲. دو مثلث ABC و MBC در ضلع BC مشترکند، پس نسبت مساحتهای آنها به نسبت ارتفاعهای نظیر این قاعدهٔ مشترک است ؛ یعنی داریم :

$$\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}=\frac{MK_۱}{AH_۱}=\frac{l_a}{h_a} \quad (۱)$$

همچنین برای مثلثهای ABC و MAC، ABC و MAB داریم :

$$\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}=\frac{l_b}{h_b}\ (۲) \text{ و } \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_c}{h_c} (۳)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم :

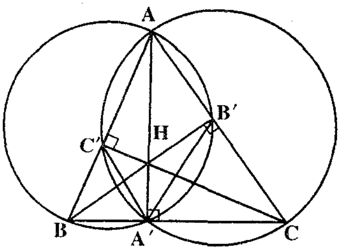
$$\frac{S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}}{S_{ABC}}=\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}$$

$$\Rightarrow \frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}=۱$$

۳۰۳. چهار ضلعیهای $HA'BC'$ و $HA'CB'$ محاطی‌اند. بنابراین $A'\hat{B}B' = A'\hat{C}'C$ و $B\hat{B}'A' = C'\hat{A}'C$. در نتیجه دو مثلث $BA'B'$ و $CA'C'$ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{A'B'}{A'C} = \frac{A'B}{A'C'} \Rightarrow A'B'.A'C' = A'B.A'C$$

۳۰۴. دو چهـــــار ضلـعی $AC'A'C$ و $AB'A'B$ محاطی‌اند بنابراین داریم:



$HA.HA' = HC.HC'$ (۱)

$HA.HA' = HB.HB'$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$

۳۰۵. از تشابه دو مثلث $AA'C$ و $BA'H$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{A'C}{A'H} \Rightarrow AA'.A'H = A'C.A'B$$

با همین روش از تشابه مثلثهای $BB'H$ و ACB'، $CC'H$ و ABC'، رابطه‌های دیگر به‌دست می‌آیند.

۳۰۶. ۱. دو مثلث ABB' و ACC' متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

۲. از تشابه مثلثهای ACA' و BCB' داریم:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C}{B'C}$$

و از تشابه دو مثلث BCC' و BAA' داریم:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BC'}{BA'}$$

از ضرب کردن رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$AB'.BC'.CA' = AC'.BA'.CB'$$

۳۰۸. از تشابه مثلثهای $HB'C'$ و HBC نسبت $\frac{B'C'}{BC}$ و از تشابه دو مثلث $B''C''H$ و $B'C'H$ نسبت $\frac{B''C''}{B'C'}$ را به‌دست آورید و به کمک تشابه مثلثهای $HB'C$ و $HC''C'$ ثابت کنید که $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{B'C'}$.

۳۰۹. ۱. در مثلث ABD، $BD \| EG$ و در مثلث AEC، $EC \| FD$ است، پس:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE} \quad \text{و} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$$

۲. از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که :

$$AD.AE = AC.AF = AB.AG$$

۳. از رابطهٔ بالا داریم :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC} \Rightarrow FG \| BC$$

۱. ۸. ۳. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها (نابرابریها)

۳۱۰. الف. نخست مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم :

فرض کنید M نقطه‌ای روی ضلع AB از مثلث ABC باشد، فاصله‌های M تا ضلعهای BC و AC، بترتیب برابرند با u و v ؛ h_1 و h_2، بترتیب طول ارتفاعهای رسم شده به BC و AC هستند. ثابت کنید که عبارت $\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v}$، وقتی که نقطهٔ M وسط AB است، کمترین مقدار است.

فرض می‌کنیم $BC = a$ و $AC = b$ و s مساحت مثلث ABC باشد. داریم :

$$au + bv = 2s \Rightarrow v = \frac{2s - au}{b}$$

با قرار دادن v در عبارت $\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v} = t$، به‌دست می‌آوریم :

$$atu^2 - 2stu + 2h_1s = 0$$

مبین این معادله نامنفی است، $s^2(t^2 - 4t) \geq 0$ که از آن‌جا $t \geq 4$. کمترین مقدار، $t = 4$، به‌ازای $u = \frac{s}{a} = \frac{h_1}{2}$ و $v = \frac{h_2}{2}$ به‌دست می‌آید. از این مسأله نتیجه می‌شود که کمترین مقدار سمت چپ نابرابری قسمت (الف)، وقتی که M نقطهٔ میانه‌ای است به‌دست می‌آید. نابرابریهای (ب) و (ج) به روش مشابه ثابت می‌شوند. در قسمت (ب) باید معلوم کنیم که به‌ازای کدام نقطهٔ M واقع بر ضلع AB، حاصلضرب uv به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در قسمت (ج)، نخست دو طرف نابرابری را بر uvw تقسیم می‌کنیم و مسألهٔ پیدا کردن مینیمم تابع $(\frac{h_1}{u}-1)(\frac{h_2}{v}-1)$ را، به‌ازای M روی AB، حل می‌کنیم.

۳۱۱. داریم :

$$2s = ab\sin\gamma \leq ab$$

که در آن، s مساحت مثلث و γ، زاویهٔ بین دو ضلع مفروض است. بنابراین با شرط $a > b$ به‌دست می‌آید :

$$(a+h_a)-(b+h_b) = (a+\frac{2s}{a})+(b+\frac{2s}{a}) =$$

$$(a-b)(2-\frac{2s}{ab}) \geq 0$$

در ضمن، برابری تنها وقتی برقرار است که $s = \frac{ab}{2}$، یعنی وقتی که زاویهٔ بین ضلعهای داده شده، قائمه باشد.

۳۱۲. لم. اگر A' نقطه‌ای واقع در داخل (یا روی ضلعهای) مثلث ABC باشد،
$m(A'BC) \le m(ABC)$

دو حالت برای نقطهٔ X در نظر می‌گیریم :

الف) X نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد.

اگر $a_۱$ و $h_۱$، $a_۲$ و $h_۲$، $a_۳$ و $h_۳$، و a و h بترتیب طول ماکزیمم ضلع و مینیمم ارتفاع مثلثهای XAB، XBC، XAC و ABC بگیریم :

$a \ge a_۱$ و $a \ge a_۲$ و $a \ge a_۳$

زیرا از $AX \le Max\{AC, CB\}$، نتیجه می‌شود :

$Max\{AB, AX, XB\} \le Max\{AB, AC, BC\}$

و $BX \le Max\{AB, BC\}$ و $AB \le AB$

بنابراین

$$h_۱ + h_۲ + h_۳ \ge \frac{a_۱h_۱}{a} + \frac{a_۲h_۲}{a} + \frac{h_۳}{a} = \frac{۲S(ABC)}{a} = h$$

ب) X نقطه‌ای خارج مثلث ABC باشند، در این صورت بنا بر لم :

$$m(X_۱AB) \ge m(ABC) \Rightarrow m(X_۱AB) + m(X_۱AC) + m(X_۱BC) \ge m(ABC)$$

اگر X نقطه‌ای باشد که XC، AB را قطع کند. بنابر لم :

$m(XAC) \ge m(C'AC)$

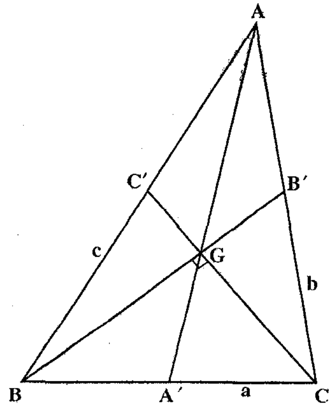
$m(XBC) \ge m(C'BC)$

بنابر حالت ۱، $m(XAC) + m(XBC) \ge m(C''AC) + m(C''BC) \ge m(ABC)$

پس : $m(XAC) + m(XBC) + m(XAB) \ge m(ABC)$

۱. ۸. ۴. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۳۱۳. نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم و میانهٔ رأس A را نیز رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCG داریم :



$$GA' = \frac{a}{۲}\ , AA' = ۳GA' = \frac{۳a}{۲}$$

$$b^۲ + c^۲ = ۲ \times \frac{۹a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow$$

$$b^۲ + c^۲ = \frac{۹a^۲}{۲} + \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۵a^۲$$

۳۱۴. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث را G می‌نامیم. داریم :

$$GA' = \frac{a}{2},\ GA = a\ ,\ AA' = \frac{3}{2}a,\ BB' = \frac{3}{2}GB,\ CC' = \frac{3}{2}GC$$

می‌خواهیم درستی رابطهٔ $AA'^2 = BB'^2 + CC'^2$ را ثابت کنیم. با استفاده از رابطه‌های بالا می‌توان نوشت :

$$\frac{9}{4}a^2 = \frac{9}{4}GB^2 + \frac{9}{4}GC^2 \Rightarrow a^2 = GB^2 + GC^2$$

که این رابطه نیز برقرار است.

۳۱۵. داریم :

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \\ m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{cases}$$

از جمع کردن سه رابطهٔ بالا داریم :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

۳۱۶. در مثلث AGB، $AG^2 + BG^2 = 2GM''^2 + \frac{AB^2}{2}$ ؛

در مثلث AGC، $AG^2 + CG^2 = 2GM'^2 + \frac{AC^2}{2}$ ؛

و در مثلث BGC، $BG^2 + CG^2 = 2GM^2 + \frac{BC^2}{2}$ است. از جمع کردن این سه رابطه داریم :

$$2(AG^2 + BG^2 + CG^2) = 2(GM^2 + GM'^2 + GM''^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 + BC^2),$$

$$4(AG^2 + BG^2 + CG^2) = AB^2 + AC^2 + BC^2 + 4(GM^2 + GM'^2 + GM''^2)$$

امّا $MG = \frac{AG}{2}$ و $M'G = \frac{GB}{2}$ و $M''G = \frac{GC}{2}$، پس :

$$4(AG^2 + BG^2 + CG^2) = AB^2 + AC^2 + BC^2 + 4(\frac{AG^2 + BG^2 + CG^2}{4})$$

$$\Rightarrow 3(AG^2 + BG^2 + CG^2) = AB^2 + AC^2 + BC^2$$

۳۱۷. اگر AA' میانهٔ نظیر ضلع BC و D وسط AG باشد، قضیهٔ اول میانه‌ها را برای مثلثهای MBC و MDA' و MAG می‌نویسیم :

$$MB^2 + MC^2 = 2MA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$MA'^{2} + MD^{2} = 2MG^{2} + \frac{1}{2}DA'^{2}$$

$$MA^{2} + MG^{2} = 2MD^{2} + \frac{1}{2}AG^{2}$$

طرفین دومین رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم و رابطه‌ها را با هم جمع می‌کنیم. با توجه به مساوی بودن DA' و AG داریم :

$$MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} - 3GM^{2} = \frac{1}{2}BC^{2} + \frac{3}{2}AG^{2}$$

به همین صورت برای میانه‌های BB' و CC' عمل می‌کنیم و دو رابطهٔ حاصل را با رابطهٔ بالا جمع می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت :

$$3(MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} - 3MG^{2}) = \frac{1}{2}(BC^{2} + CA^{2} + AB^{2}) + \frac{3}{2}\times (GA^{2} + GB^{2} + GC^{2})$$

به سادگی ثابت می‌شود که :

$$BC^{2} + CA^{2} + AB^{2} = 3(GA^{2} + GB^{2} + GC^{2})$$

و به‌جای طرف اول، مساوی آن را در رابطه قرار می‌دهیم. رابطهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

نتیجه. اگر نقطهٔ M بر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منطبق شود، رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$OG^{2} = R^{2} - \frac{1}{9}(a^{2} + b^{2} + c^{2})$$

۳۱۸. ۱. می‌دانیم که $GA^{2} + GB^{2} + GC^{2} = \frac{1}{3}(a^{2} + b^{2} + c^{2})$ و

$$MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} = GA^{2} + GB^{2} + GC^{2} + 3MG^{2}$$

از این دو رابطهٔ نتیجه می‌شود که :

$$MA^{2} + MB^{2} + MC^{2} = \frac{a^{2} + b^{2} + c^{2}}{3} + 3MG^{2}$$

۲. در این صورت $MG^{2} = \frac{K^{2}}{3} = \frac{1}{9}(a^{2} + b^{2} + c^{2})$ و در نتیجه $MG = \frac{1}{3}\sqrt{3k^{2} - (a^{2} + b^{2} + c^{2})}$ است. پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز G و به شعاع مقدار بالاست.

۳۱۹. فرض کنیم m_a، m_b و m_c بترتیب سه میانهٔ نظیر ضلعهای a و b و c باشند و بنا به قضیهٔ میانه‌ها داریم :

$$b^{2} + c^{2} = 2m_a^{2} + \frac{a^{2}}{2}$$

پس $4m_a^{2} = 2(b^{2} + c^{2}) - a^{2}$. به همین ترتیب $4m_c^{2} = 2(a^{2} + b^{2}) - c^{2}$ و

$4m_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$. حال طرفین این سه رابطه را مجذور کرده با هم جمع می‌کنیم تا حاصل شود:

$$16(m_a^4 + m_b^4 + m_c^4) = 4\left[(b^2+c^2)^2 + (c^2+a^2)^2 + (a^2+b^2)^2\right] +$$
$$a^4 + b^4 + c^4 - 4\left[a^2(b^2+c^2) + b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2+b^2)\right]$$
$$= 4(2a^4 + 2b^4 + 2c^4) + a^4 + b^4 + c^4 = 9(a^4 + b^4 + c^4)$$

۳۲۰. اولاً: می‌دانیم که در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$$

اما $BD = BM + MD$

و $DC = MC - MD$

وچون $MC = BM$

و $AD = MD$

است بنابراین داریم:

$$AB \times AC = MD^2 + (BM + MD)(BM - MD) = BM^2$$

ثانیاً: حکم قضیهٔ میانه‌ها را در مثلث ABC می‌نویسیم:

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ و چون بنا به قسمت اول $BM^2 = AB \times AC$

پس $2AM^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC$ و یا $AM\sqrt{2} = |AB - AC|$

۳۲۱. داریم: $\hat{F} = \hat{B}$ و $\hat{M} = \hat{B}$

پس $\hat{M} = \hat{F}$ ، از چهار نقطهٔ D و A و F و M یک دایره می‌گذرد و قوت نقطهٔ E نسبت به این دایره را می‌نویسیم $\overline{EA}.\overline{EM} = \overline{EF}.\overline{ED}$ و چون AM میانه است، پس E وسط FD واقع است. داریم: $\overline{EA}.\overline{EM} = ED^2$

۳۲۲. از K و L، خطهای راستی به موازات BC رسم کنید تا میانهٔ AD را در نقطه‌های N و S قطع کنند. فرض کنید $AD = 3a$ ، $MN = xa$ و $MS = ya$

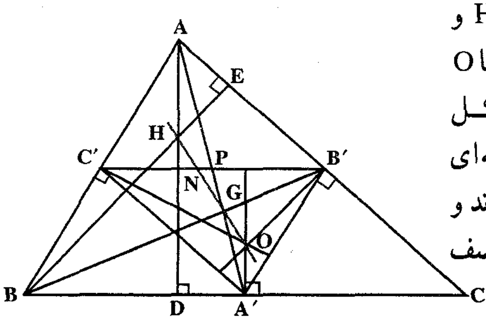
از آن‌جا که: $\dfrac{LS}{NK} = \dfrac{AS}{AN}$, $\dfrac{LS}{NK} = \dfrac{MS}{MN}$

داریم: $\dfrac{MS}{MN} = \dfrac{AS}{AN}$ ، $\dfrac{y}{x} = \dfrac{(2+y)a}{(2-x)a}$ و برابری $y = \dfrac{x}{1-x}$

$$\frac{1}{MK} = \frac{1}{ML} + \frac{1}{MP}$$

با $\dfrac{1}{MD} + \dfrac{1}{MS} = \dfrac{1}{MN}$ و $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{ay} = \dfrac{1}{ax}$ هم‌ارز است. با قرار دادن $y = \dfrac{x}{1-x}$ ، به برابری درستی می‌رسیم.

۳۲۹. مثلث میانه‌ای و خط اولر. مثلثی را که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث، یعنی پاهای میانه‌های مثلث می‌باشند، مثلث میانه‌ای آن مثلث می‌نامیم. در شکل که A' وسط BC و B' وسط CA و C' وسط AB است، مثلث $A'B'C'$ مثلث میانه‌ای مثلث ABC است. مرکز ثقل مثلث ABC، یعنی نقطهٔ تلاقی میانه‌های AA' و BB' را با G و مرکز ارتفاعی آن را با H و مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ را با O نشان می‌دهیم. از بررسی شکل برمی‌آید که ضلعهای مثلث میانه‌ای بترتیب با ضلعهای مثلث موازی‌اند و طول هر ضلع از مثلث میانه‌ای نصف طول ضلع نظیر از مثلث است.



پاره‌خطهای $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$، مثلث ABC را به چهار مثلث متساوی تقسیم می‌کنند. چهار گوشهٔ $AC'A'B'$ متوازی‌الاضلاع است و دو قطر AA' و $B'C'$ از آن منصف یکدیگرند. از اینرو میانه‌های مثلث ABC در عین‌حال میانه‌های مثلث $A'B'C'$ بوده و G مرکز ثقل هر یک از دو مثلث ABC و $A'B'C'$ می‌باشد. ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ عمودمنصفهای ضلعهای مثلث ABC می‌باشند. از اینرو O که مرکز ارتفاعی مثلث $A'B'C'$ است مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به نسبت ۲ متشابه‌اند (مجانس یکدیگرند) و نتیجه می‌شود که $\overline{AH}=2\overline{OA'}$ و چون $AG=2GA'$ پس دو مثلث AHG و $GA'O$ به نسبت ۲ متشابهند (مجانس یکدیگرند) و نتیجه می‌شود که سه نقطهٔ O و G و H بر یک خط راست واقعند و $\overline{HG}=2\overline{GO}$.

۳۳۰. هرگاه خط اولر با BC موازی باشد با AD در یک سوم از طول آن برخورد می‌کند، پس $OA'=\frac{AD}{3}$. اکنون کافی است که AD و OA' را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$AD=b\sin\hat{C}=2R\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$OA'=R\cos\hat{A}=R(\sin\hat{B}\sin\hat{C}-\cos\hat{B}\cos\hat{C})$$

$$\Rightarrow R(\sin\hat{B}\sin\hat{C}-\cos\hat{B}\cos\hat{C})=\frac{2R}{3}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B}\sin\hat{C}=3\cos\hat{B}\cos\hat{C}\Rightarrow tg\hat{B}.tg\hat{C}=3$$

۳۳۱. روی BC، نقطه‌ای مانند A_1 و روی BA، نقطه‌ای مانند C_1 انتخاب کنید، به طوری‌که $BA_1=BA$ و $BC_1=BC$ (مثلث A_1BC_1 با مثلث ABC، نسبت به نیمساز زاویهٔ B، قرینه است). به روشنی، BK، A_1C_1 را نصف می‌کند. دو متوازی‌الاضلاع BA_1MC_1 و $BCND$ را رسم می‌کنیم (ضلعهای متناظر

متوازی‌الاضلاعها موازی‌اند و نقطه‌های B، K، M و N همخطند)؛

$CN = AA_۱.\frac{BC}{BA_۱} = \frac{BC^۲}{BA}$، در نتیجه:

$$\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CN} = \frac{AB^۲}{BC^۲}$$

۳۳۲. فاصله‌های نقطهٔ S پای شبه میانه مثلث ABC از دو ضلع AC و AB را بترتیب x و y می‌نامیم. دو مثلث ASC و ASB در ارتفاع رأس A مشترکند؛ پس داریم:

$bx:cy =$ ASC مساحت : ASB مساحت $= SC:SB = b^۲:c^۲$

از آن‌جا نتیجه می‌شود: $x:y = b:c$

بنابراین نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ مانند M از شبه میانهٔ AS از دو ضلع AC و AB به نسبت $x:y$ است.

۳۳۳. فرض می‌کنیم نقطه‌های M و N دو نقطهٔ واقع بر دو خط همزاویهٔ AM و AN باشند، MQ، MP، NR و NS چهار عمودی هستند که از این نقطه‌ها بر ضلعهای AB و AC از زاویهٔ BAC رسم شده‌اند. از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMQ با ANS، و AMP با ANR داریم:

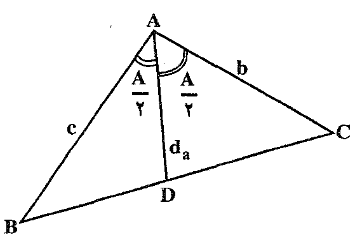
$$MQ:NS = AQ:AS = AM:AN = AP:AR = MP:NR$$

رابطهٔ $MQ:NS = MP:NR$ حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۱. ۸. ۵. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۱. ۸. ۵. ۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

۳۳۴. الف) داریم:



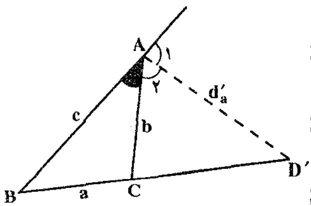
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \\ S_{ABD} = \frac{۱}{۲}cd_a\sin\frac{\hat{A}}{۲} \\ S_{ADC} = \frac{۱}{۲}bd_a\sin\frac{\hat{A}}{۲} \end{array}\right\} \text{و } S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}cd_a\sin\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{۱}{۲}bd_a\sin\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \Rightarrow$$

$$d_a\sin\frac{\hat{A}}{۲}(c+b) = ۲bc\sin\frac{\hat{A}}{۲}\cos\frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow \frac{b+c}{bc} = \frac{۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{d_a}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{c} + \frac{۱}{b} = \frac{۲\cos\frac{\hat{A}}{۲}}{d_a} \quad ، \quad \hat{A} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{c} + \frac{۱}{b} = \frac{\sqrt{۲}}{d_a}$$

ب) می‌دانیم که :



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \\ S_{ABD'}=\frac{۱}{۲}cd'_a\sin(\hat{A}+\hat{A}_۲) \\ S_{CAD'}=\frac{۱}{۲}bd'_a\sin\hat{A}_۲ \end{array}\right\} \text{و}\ S_{ABC}=S_{ABD'}-S_{ACD'}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}cd'_a\sin(\hat{A}+\hat{A}_۲)-\frac{۱}{۲}bd'_a\sin\hat{A}_۲$$

(توجه : $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\ \ ,\ \ A_۲=\hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{A}_۲)\Rightarrow\sin(\hat{A}+\hat{A}_۲)=\sin\hat{A}_۲$)

$$\Rightarrow bc\sin A=cd'_a\sin\hat{A}_۱-bd'_a\sin\hat{A}_۲$$

$$bc\sin ۲\hat{A}_۲=cd'_a\sin\hat{A}_۲-bd'_a\sin\hat{A}_۲$$

$$۲bc\sin\hat{A}_۲\cos\hat{A}_۲=cd'_a\sin\hat{A}_۲-bd'_a\sin\hat{A}_۲$$

$$\Rightarrow ۲bc\ \ \cos\hat{A}_۲=d'_a(c-b)\Rightarrow ۲bc\sin\frac{\hat{A}}{۲}=d'_a(c-b)\Rightarrow$$

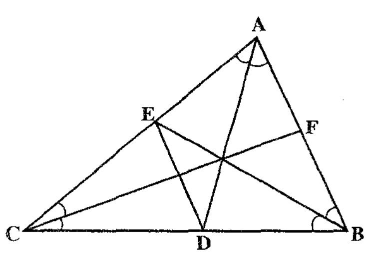
$$\frac{۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}}{d'_a}=\left|\frac{c-b}{bc}\right|=\left|\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right|\Rightarrow\frac{۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}}{d'_a}=\left|\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}\right|$$

۱. ۸. ۵. ۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۳۳۸. چون :

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}>\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

پس، نقطهٔ E، نسبت به نقطهٔ D، از خط راست AB دورتر است. در نتیجه، نقطهٔ $P=(AB)\cap(DE)$، روی خط راست AB طوری قرار دارد که B، بین A و P واقع است. یعنی :

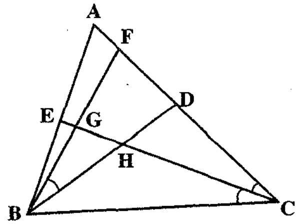


$$A\hat{B}E<B\hat{E}P\Rightarrow D\hat{B}E<B\hat{E}D$$

و بنابراین $DE>BD$ به همین ترتیب :

$$E\hat{D}A>P\hat{A}D\Rightarrow D\hat{A}E<E\hat{D}A$$

۳۳۹. اگر در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{B}$ بزرگتر از $\hat{C}$ و BD و CE نیمساز این زاویه‌ها باشد، از B و روی BD زاویه‌یی مساوی $\frac{\hat{C}}{2}$ جدا می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. اگر H و G نقطه‌های برخورد BD و BF با CE باشد، دو مثلث FBD و FCG متشابه‌اند. (زیرا زاویه‌هایشان مساوی است) و داریم:



$$BF:CF = BD:CG$$

اما در مثلث BFC زاویهٔ رأس C از زاویهٔ رأس B کمتر است، پس $BF < CF$ پس نظر به تناسب بالا باید $BD < CG$ باشد و چون $CG < CE$ است پس $BD < CE$ می‌شود.

نتیجه. اگر در مثلثی دو نیمساز مساوی باشد، مثلث متساوی‌الساقین است. مسأله برای دو نیمساز خارجی صدق نمی‌کند.

۳۴۱. راه اول. محل تلاقی امتداد CD با دایرهٔ محیطی ΔABC را E می‌نامیم. چون $B\hat{C}D = A\hat{C}D$ و $C\hat{B}D = C\hat{E}A$، پس $\Delta CBD \sim \Delta CEA$ و بنابراین:

$CD:CB = CA:CE$ یا $CA.CB = CD.CE$

چون CE بلندتر از CD است، $CA.CB > CD^2$؛ نتیجه می‌شود که CD کوچکتر از $\sqrt{CA.CB}$ است، همان که می‌خواستیم ثابت کنیم.

راه دوم. الف) اندازهٔ ضلعهای BC و AC را بترتیب با a و b و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها را با γ و اندازهٔ نیمساز این زاویه، یعنی CD را با V نشان می‌دهیم. در این صورت، همان‌طور که در راه حل اول نشان داده شد،

$$\frac{1}{v}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad (1)$$

چون $\frac{\gamma}{2}$ یک زاویهٔ حاده است، $1 > \cos\frac{\gamma}{2} > 0$، و اگر در (۱) به جای $\cos\frac{\gamma}{2}$ عدد ۱ را قرار دهیم، طرف چپ رابطه افزایش می‌یابد. پس:

$$\frac{1}{v} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

ب) چون میانگین حسابی دو عدد از میانگین هندسی آنها کوچکتر نیست، یعنی، چون

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}$$

از (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{1}{v} > \sqrt{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}}$

و لذا $v < \sqrt{a.b} \quad (3)$

نابرابری (۲) شرط لازم و کافی برای وجود یک مثلث با ضلعهای به اندازه‌های a و b و با نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع به طول v، است، در حالی که (۳) فقط یک شرط لازم، ولی نه کافی است. برای مثال $a=3$، $b=13$ و $v=6$ در (۳) صدق می‌کنند.

$\sqrt{39}=\sqrt{3\times 13}>6$ ؛ با وجود این مثلثی با این جزءها وجود ندارد، زیرا در (۲) صادق نیستند : $\frac{1}{6}\not>\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\frac{1}{13})=\frac{8}{39}$

۱. ۸. ۶. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۳۴۲. داریم :

$$\frac{FE}{FC}=\frac{FC'}{FB'}\quad(1)$$

$$\frac{FB}{FE}=\frac{FC'}{FB'}\quad(2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow\frac{FE}{FC}=\frac{FB}{FE}\Rightarrow FE^2=FB.FC$$

۳۴۳. از به‌کارگیری قضیهٔ سوا در مثلث $AB'C'$ و نقطه I، و از موازی بودن خطهای AC و $C'M$ رابطهٔ (۱) ثابت می‌شود. قضیهٔ منلائوس را برای مثلثهای ABB' و ACC' بترتیب با موربهای CC' و BB' بنویسید و از موازی بودن خطهای AB با MB' و AC با MC' رابطهٔ (۲) را ثابت کنید.

با به‌کارگیری قضیهٔ منلائوس در مثلث $AC'N$ و مورب BB' و استفاده از رابطهٔ (۱) رابطهٔ (۳) ثابت می‌شود.

۳۴۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM : $AH^2=AM^2-MH^2$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMF : $BF^2=BM^2-MF^2$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ CMK : $CK^2=CM^2-MK^2$

$$\Rightarrow AH^2+BF^2+CK^2=AM^2+BM^2+CM^2-(MH^2+MF^2+MK^2)\quad(1)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ BMH : $BH^2=BM^2-MH^2$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ CMF : $CF^2=CM^2-MF^2$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMF : $AK^2=AM^2-MK^2$

$$\Rightarrow BH^2+CF^2+AK^2=BM^2+CM^2+AM^2-(MH^2+MF^2+MK^2)\quad(2)$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$AH^2+BF^2+CK^2=BH^2+CF^2+AK^2$$

۳۴۵. به عنوان تمایز با مسأله‌های قبل می‌توان گفت که این مسأله در مورد محاسبهٔ مساحت یک شکل مستوی بحث نمی‌کند. از این گذشته همان‌طوری که خواهیم دید، مساحت مثلث به‌عنوان وسیله‌ای برای حل مسأله استنتاج می‌شود. تساویهای $AM = x$، $BM = y$ و $CM = z$ را منظور می‌کنیم. طبق فرض، $\hat{AMB} = \hat{BMC} = \hat{AMC} = ۱۲۰°$ است.

با استفاده از قاعدهٔ کسینوسها در مورد هر یک از مثلثهای AMB، BMC و AMC دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a^۲ = z^۲ + y^۲ + yz \\ b^۲ = x^۲ + z^۲ + xz \\ c^۲ = x^۲ + y^۲ + xy \end{cases}$$

از این گذشته چنین داریم:

$$S = S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} + S_{AMB} = \frac{۱}{۲} xz \sin ۱۲۰° + \frac{۱}{۲} yz \sin ۱۲۰° + \frac{۱}{۲} xy \sin ۱۲۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(xz + yz + xy)$$

بنابراین $xy + xz + yz = \frac{۴s}{\sqrt{۳}}$ را خواهیم داشت که در آن $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و $(p = \frac{a+b+c}{۲})$ است. یافتن مقدار عبارت $x + y + z$ موردنیاز است. با جمع کردن سه معادلهٔ دستگاه چنین حاصل می‌شود:

$$(x+y+z)^۲ = x^۲ + y^۲ + z^۲ + ۲xy + ۲xz + ۲yz$$

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} - \frac{۱}{۲}(xy + xz + yz)$$

از این‌رو داریم:

$$(x+y+z)^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}(xy + xz + yz) = \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} + \frac{۳}{۲} . \frac{۴s}{\sqrt{۳}} = \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} + ۲s\sqrt{۳}$$

در نتیجه تساوی زیر به دست می‌آید:

$$x + y + z = \sqrt{\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۲} + ۲s\sqrt{۳}}$$

۳۴۶. فرض کنید M نقطه‌ای در درون مثلث ABC باشد که بزرگترین زاویه‌اش از $۱۲۰°$ کمتر است. مثلث AMC را دور نقطهٔA، به اندازهٔ زاویهٔ $۶۰°$، به‌طور خارجی نسبت به مثلث ABC دوران می‌دهیم. در نتیجه، نقطهٔ C به نقطهٔ $C_۱$ و نقطهٔ M به نقطهٔ $M_۱$ بدل می‌شود. مجموع $AM + BM + CM$، برابر است با طول خط شکستهٔ $BMM_۱C$. طول این خط، وقتی که نقطه‌های M و $M_۱$ روی پاره‌خط $BC_۱$ واقعند، کمترین مقدار است. بنابراین، حکم مسأله به‌دست می‌آید.

۳۴۷. فرض کنید M در درون مثلث ABC، به فاصلهٔ x، y و z بترتیب از ضلعهای BC، CA و AB قرار گیرد. مسأله، پیدا کردن مینیمم $x^2+y^2+z^2$ به شرط این که $ax+by+cz=2S_{ABC}$ است. به روشنی، این مقدار مینیمم، به‌ازای همان مقدارهای x، y و z برای مینیمم

$$x^2+y^2+z^2-2\lambda(ax+by+cz)=$$
$$(x-\lambda a)^2+(y-\lambda b)^2+(z-\lambda c)^2-\lambda^2(a^2+b^2+c^2)$$

به‌دست می‌آید، که در آن λ عدد ثابت دلخواهی است (باز هم به‌شرط این که $ax+by+cz=2S_{ABC}$). با قرار دادن $\lambda=\frac{2S_{ABC}}{a^2+b^2+c^2}$ (λ، از معادله‌های $x=\lambda a$، $y=\lambda b$، $z=\lambda c$ و $ax+by+cz=2S_{ABC}$ به‌دست می‌آید). مشاهده می‌کنیم که مینیمم عبارت اخیر، به‌ازای $x=\lambda a$، $y=\lambda b$ و $z=\lambda c$ به‌دست می‌آید. اکنون فرض کنید نقطهٔ M به فاصلهٔ λa، λb و λc بترتیب، از BC، CA و AB و نقطهٔ M_1، قرینهٔ M نسبت به نیمساز زاویهٔ A باشد. از آن‌جا که $S_{AM_1C}=S_{AM_1B}$، M_1 روی میانه‌ای قرار دارد که از A خارج می‌شود، و این بدان معنی است که M روی هم میانهٔ این زاویه قرار دارد.

۳۴۸. کمترین مقدار، برابر با $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ است و وقتی به‌دست می‌آید که M مرکز ثقل مثلث ABC باشد زیرا بنا به قضیهٔ لایبنیتس داریم:

$$MA^2+MB^2+MC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+3MG^2$$

از این رابطه مشخص می‌شود که کمترین مقدار $MA^2+MB^2+MC^2$ وقتی است که $MG=0$ یعنی نقطهٔ M بر نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث منطبق شود.

۳۵۰. داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{OA'}{AP}=\dfrac{OA''}{AA''}\\[2mm] \dfrac{OB'}{BQ}=\dfrac{OB''}{BB''}\\[2mm] \dfrac{OC'}{CR}=\dfrac{OC''}{CC''}\end{cases} + \Rightarrow \frac{OA'}{AP}+\frac{OB'}{BQ}+\frac{OC'}{CR}=1\Rightarrow\frac{OA''}{AA''}+\frac{OB''}{BB''}+\frac{OC''}{CC''}=1$$

۱. ۸. ۷. رابطه‌های متری مربوط به مساحت

۱. ۸. ۷. ۱. رابطه‌های متری مربوط به مساحت (برابریها)

۳۵۲. می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} S=\frac{۱}{۲}a.h_a \\ S=\frac{۱}{۲}b.h_b \\ S=\frac{۱}{۲}c.h_c \end{cases} \Rightarrow S^۳=\frac{۱}{۸}abc.h_a.h_b.h_c \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{abc\ \ h_ah_bh_c}$$

۱. ۸. ۷. ۲. رابطه‌های متری مربوط به مساحت (نابرابریها)

۳۵۳. داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}\le\frac{۱}{۲}ab$$

(زیرا $\sin\hat{C}\le ۱ > ۰$ در مثلث)

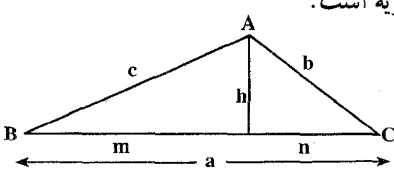
و می‌دانیم:

$$(a-b)^۲\ge ۰\Rightarrow a^۲+b^۲\ge ۲ab\Rightarrow\frac{a^۲+b^۲}{۲}\ge ab$$

$$\Rightarrow S\le\frac{۱}{۲}.\frac{a^۲+b^۲}{۲}\Rightarrow S\le\frac{a^۲+b^۲}{۴}$$

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}\le\frac{۱}{۲}ab\le\frac{a^۲+b^۲}{۴}$$

شرط تساوی، مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.



(الف)

۳۵۴. راه اول. (از G. Arenstorf). حداقل یکی از سه ارتفاع مثلث، داخل مثلث قرار می‌گیرد؛ طول این ارتفاع را با h نمایش داده، فرض می‌کنیم ضلع نظیرش را به دو پاره‌خط m و n تقسیم کند (مراجعه به شکل الف). در این صورت مربعهای دو ضلع دیگر مثلث $h^۲+m^۲$ و $h^۲+n^۲$، و مساحت آن: $T=\frac{۱}{۲}(m+n)h$ می‌شود، و نامساوی مورد بحث به صورت $۲h^۲+m^۲+n^۲+(m+n)^۲\ge ۲\sqrt{۳}(m+n)h$ که معادل نامساوی:

$$h^۲-\sqrt{۳}(m+n)h+n^۲+m^۲+mn\ge ۰ \qquad (۱)$$

است، درمی‌آید. عبارت سمت چپ این نامساوی درجهٔ دوم برحسب h است آن را Q(h) می‌نامیم. در این صورت با مربع کامل کردن، آن را به صورت:

$$Q(h)=\left[h-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(m+n)\right]^۲+\left[\frac{۱}{۲}(m-n)\right]^۲$$

یعنی مجموع دو مربع درمی‌آوریم. بنابراین Q(h) هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، و نامساوی (۱) به ازاء جمیع مقادیر h برقرار است. $Q(h)=۰$ است اگر و فقط اگر $m=n$ و $h=\sqrt{۳}m$ باشد. در این حال ارتفاع از A قاعدهٔ BC را نصف

می‌کند وطول$BC(\frac{\sqrt{3}}{2})$ را دارد. در نتیجه ΔABC چون $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$ باشد، متساوی‌الاضلاع است.

راه دوم. محیط مثلث را با p نمایش می‌دهیم : $p=a+b+c$ بنا به قضیهٔ هم پیرامونی مثلثها در میان تمام مثلثهای با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{p}{3}$ برابر : $(\frac{p}{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ است، بنابراین : $T\le(\frac{p}{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ از این گذشته، مجموع اتحادهای :

$$p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

و

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac$$

عبارت است از :

$$p^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)$$

که از آن

$$p^2\le 3(a^2+b^2+c^2) \qquad (2)$$

برابری اگر و فقط اگر $a=b=c$، حاصل می‌شود. از (۱) و (۲)

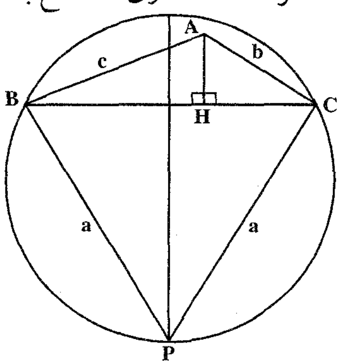
$$T\le\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

نتیجه می‌شود که معادل

$$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}T$$

است. از آن جا که تساوی واقع در (۱) و (۲) اگر و فقط اگر $a=b=c$ باشد برقرار است، این تساوی در نامساوی اخیر اگر و فقط اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، برقرار می‌شود.

راه سوم.



(ب)

الف) فرض می‌کنیم در ΔABC، $\hat{A}\ge 120^\circ$، و مثلث متساوی‌الاضلاع PBC را بر ضلع BC، چنان که در شکل (ب) نشان داده شده، رسم می‌کنیم. قطر دایرهٔ محیطی ΔPBC برابر $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ می‌شود، و ارتفاع AH از ΔABC در $AH\le\frac{a\sqrt{3}}{6}$ صدق می‌کند. در این صورت نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{(aPBC)}{(aABC)}\ge\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=3$$

که در آن (aXYZ) یا (XYZ) مساحت ΔXYZ را نمایش می‌دهد و بنابراین :

$$(aPBC)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ge 3T \qquad (3)$$

که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر A بر دایرهٔ محیطی ΔPBC واقع، و $AB = AC$ باشد. اکنون نامساوی (۳) را با اضافه کردن عبارات مثبت $b^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و $c^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ به عضو چپ آن تقویت می‌کنیم، و: $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} > ۴\sqrt{۳}T$ و یا $\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}) > ۳T$ را، که باید نشان می‌دادیم، به دست می‌آوریم.

ب) فرض می‌کنیم تمام زاویه‌های ΔABC کمتر از ۱۲۰°است. مثلثهای متساوی‌الاضلاع PBC و QAC و RBA را بر ضلعهای ΔABC بنا می‌کنیم، شکل (پ) را ملاحظه کنید. در این صورت دایره‌های محیطی آنها در نقطهٔ متغیر N تلاقی می‌کنند و:

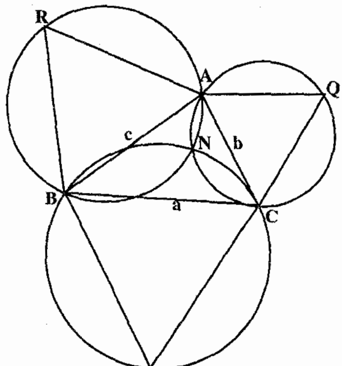
$$A\hat{N}B = B\hat{N}C = C\hat{N}A = ۱۲۰^{\circ}$$

بنابراین، بنا به نتیجهٔ (الف) بالا:

$$a^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴} \geq ۳(NBC)$$

$$b^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴} \geq ۳(NCA)$$

$$c^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴} \geq (۳NAB)$$



(پ)

که با جمع آنها درمی‌یابیم که:

$$(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})\frac{\sqrt{۳}}{۴} \geq ۳T$$

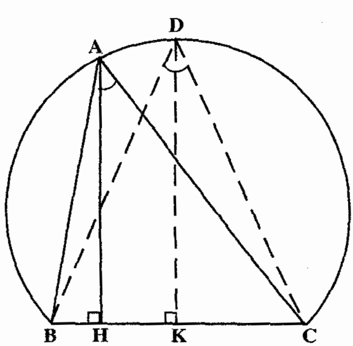
و بنابراین:

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \geq ۴\sqrt{۳}T$$

تساوی وقتی رخ می‌دهد که $NA = NB = NC$، یعنی وقتی که ΔABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۳۵۵. قرار می‌گذاریم:

$B\hat{A}C = \alpha$ و $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ کمان BAC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. چون نقطهٔ D وسط این کمان، نسبت به همهٔ نقطه‌های دیگر آن، فاصلهٔ بیشتری از وتر BC دارد، بنابراین، برای $AH = h$، ارتفاع مثلث ABC و DK، ارتفاع مثلث DBC، داریم:



$$h \leq DK = BK.\cot g(\frac{B\hat{D}C}{۲}) = \frac{a}{۲}\cot g\frac{\alpha}{۲}$$

بنابر قضیهٔ واسطه‌ها، به دست می‌آید :

$$\frac{ab+ac+bc}{4s} \geq \frac{3}{4s}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(\frac{1}{2}bc\sin\alpha)^2\frac{1}{2}ah}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{a}{h\sin^2\alpha}} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{\sin^2\alpha\cot g\frac{\alpha}{2}}}$$

دوباره از قضیهٔ واسطه‌ها استفاده می‌کنیم ؛ اگر $\cos\alpha = x$ بنامیم، داریم :

$$\frac{1}{2}\sin^2\alpha\cot g\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\alpha(1+\cos\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(1+x) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+x)^3(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{27\left(\frac{1+x}{3}\right)^3(1-x)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{27}\left[\frac{1}{4}\left(3\times\frac{1+x}{3}+(1-x)\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{27}\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

به نحوی که

$$\frac{ab+ac+bc}{4s} \geq \frac{3}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۳۵۶. اثبات قضیهٔ فینسلر ــ هادویگر:

اثبات زیر با وجود این که ظاهراً جبری است از یک ایدهٔ زیبای هندسی سود می‌جوید. قرار می‌دهیم $a = x+y$، $b = y+z$ و $c = z+x$. برقراری نامساویهای مثلث معادل است با $x \geq 0$، $y \geq 0$ و $z \geq 0$.

اگر عبارتهای بالا را در نامساوی اصلی جایگزین کنیم، به دست می‌آید :

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \geq 4\sqrt{3}s+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$

و در نتیجه کافی است نشان دهیم $xy+yz+zx \geq 4\sqrt{3}s$. برای محاسبهٔ s برحسب x، y و z از رابطهٔ هرون استفاده می‌کنیم :

$$p-a = (x+y+z)-(y+x) = z$$

و به همین ترتیب برای $p-b$ و $p-c$ ؛ درنتیجه : $s' = \sqrt{xyz(x+y+z)}$ و از این جا یک نامساوی جبری حاصل می‌شود :

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)} \qquad x,y,z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^{۲}y^{۲}+y^{۲}z^{۲}+z^{۲}x^{۲}\geq xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow x^{۲}(y-z)^{۲}+y^{۲}(z-x)^{۲}+z^{۲}(x-y)^{۲}\geq ۰$$

که همواره برقرار است.

۳۵۷. ۱) بنابر قضیهٔ هرون و قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها داریم:

$$۲۷s^{۲}=۲۷\times\frac{p}{۲}(\frac{p}{۲}-a)(\frac{p}{۲}-b)(\frac{p}{۲}-c)\leq ۲۷\times\frac{p}{۲}\left(\frac{(\frac{p}{۲}-a)+(\frac{p}{۲}-b)+(\frac{p}{۲}-c)}{۳}\right)^{۳}$$

$$=\frac{۱}{۱۶}p^{۴}\Rightarrow p^{۲}\geq ۱۲\sqrt{۳}s$$

۲) از رابطهٔ (۱) و رابطهٔ $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}\geq\frac{۱}{۹}p^{۳}$ داریم:

$$a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}\geq\frac{۱}{۹}p^{۳}\geq ۱۲\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۹}sp=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}sp$$

۳) از نابرابری $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}\geq\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}s$ نتیجه می‌شود:

$$۱۶s^{۲}\leq\frac{(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})^{۲}}{۳}=\frac{a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}+۲a^{۲}b^{۲}+۲a^{۲}c^{۲}+۲b^{۲}c^{۲}}{۳}\leq$$

$$a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}$$

۳۵۸. فرض کنید $\cot g\alpha=x$ و $\cot g\beta=y$، در این صورت:

$$\cot g\gamma=\frac{-xy+۱}{x+y}=\frac{x^{۲}+۱}{x+y}=-x$$

$$a^{۲}\cot g\alpha+b^{۲}\cot g\beta+c^{۲}\cot g\gamma=(a^{۲}-b^{۲}-c^{۲})x+b^{۲}(x+y)+c^{۲}\frac{x^{۲}+۱}{x+y}$$

مینیمم عبارت $b^{۲}(x+y)+c^{۲}\frac{x^{۲}+۱}{x+y}$، به ازای x ثابت و $x+y>۰$ به ازای y ای به دست می‌آید که در برابری زیر صدق می‌کند.

$$b^{۲}(x+y)=c^{۲}\frac{x^{۲}+۱}{x+y}\Rightarrow\frac{x+y}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\frac{c}{b}$$

بنابراین $\frac{c}{b}=\frac{x+y}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ به این ترتیب، کمترین مقدار عبارت مفروض به ازای α، β و γ ای به دست می‌آید که سینوسهایشان با طول ضلعهای a، b و c متناسبند، یعنی، وقتی که مثلثهای مورد بحث متشابه‌اند. اما در این حالت، تساوی حاصل می‌شود (این مطلب به سادگی تحقیق می‌شود).

۱. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱. ۹. ۱. نقطه‌ها همخطند

۳۵۹. با نوشتن تساوی $R=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}.\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=1$ (طبق قضیه‌های سوا و منلائوس) برای نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 ؛ A_1، B_1 و C_2 ؛ A_1، B_2 و C_1، A_2، B_1 و C_1 نتیجه می‌گیریم که به‌ازای نقطه‌های A_2 و B_2 و C_2 هم، تساوی $R=1$ درست است. اکنون، تنها این می‌ماند که ثابت کنید، یا هر سه نقطهٔ A_2، B_2 و C_2 بر امتدادهای ضلعهای مثلث واقعند (یعنی حالتی که نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای مثلث قرار دارند)، یا تنها یکی از آنها بر امتداد ضلعها واقع است (اگر تنها یکی از نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بر ضلعهای مثلث واقع باشد) و از قضیهٔ منلائوس استفاده کنید.

۳۶۰. این نقطه‌ها نسبت به دایره‌هایی که به قطرهای AE، DC و BF رسم شوند، قوت برابر دارند، و چون مرکز این دایره‌ها روی یک خط راستی به نام خط گاوسی قرار دارند، پس نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF روی یک خط راست عمود بر خط گاوسی قرار دارند (این خط، محور اصلی دسته دایرهٔ تشکیل شده از دایره‌های بالا و خط گاوسی پایهٔ این دسته دایره است).

۳۶۱. در قسمتهای (الف) و (ج)، از قضیه‌های سوا و منلائوس استفاده کنید، بعلاوه در قسمت (ب) راحت‌تر است که از دستگاه مختصات آفین، که محورهایش خطهای راست AB و AC و نقطه‌های B و C به مختصات (۱ و ۰) و (۰ و ۱) هستند، استفاده کنید.

۳۶۲. فرض می‌کنیم خطهای مفروض موازی باشند، این را می‌توان با تصویر کردن یا تبدیل کردن مختصات به دست آورد. قضیهٔ منلائوس را در مثلث A_1A_6M به کار ببرید. (در شکل، $N'K'$ با خطهای راست مفروض موازی است). داریم :

$$\frac{A_1L}{LA_6}.\frac{A_6K}{KM}.\frac{MN}{NA_1}=\frac{A_1A_3}{A_4A_6}.\frac{A_6A_2}{K'M}.\frac{MN'}{A_5A_1}$$
$$=\frac{A_1A_3}{K'M}.\frac{MN'}{A_4A_6}.\frac{A_6A_2}{A_5A_1}$$
$$=\frac{A_1A_2}{A_2M}.\frac{MA_5}{A_5A_6}.\frac{A_6A_2}{A_5A_1}$$
$$=\frac{A_1M}{A_2M}.\frac{MA_5}{A_5M}.\frac{A_2M}{MA_1}=1$$

بنابراین، نقطه‌های L، N و K همخطند و می‌توانیم نسبت $\frac{A_1L}{LA_6}$، و بقیهٔ نسبتها را به جای $\frac{|A_1L|}{|LA_6|}$ و بقیهٔ نسبتها در نظر بگیریم. در این حالت حاصلضرب کسرهای مناسب هم، برابر با (-1) است.

۱. ۹. ۲. خطها همرسند

۳۶۳. اگر a طول ضلع پنج ضلعی MKLNP، b طول ضلع پنج ضلعی با یک ضلع روی AB و c طول ضلع پنج ضلعیی که یک ضلعش روی AC است، باشد، آن وقت $\frac{BA_1}{C_1B}=\frac{a}{b}$، $\frac{AC_1}{B_1A}=\frac{b}{c}$ و $\frac{CB_1}{A_1C}=\frac{c}{a}$. این تساویها را در هم ضرب کنید، به دست می‌آورید $R=1$، و سپس از قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۳۶۴. قرار می‌گذاریم: $A_1\hat{B}C=\alpha$ و $A_1\hat{C}B=\beta$؛ در این صورت، AA_1، BC را به نسبتی برابر با:

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}}=\frac{\frac{1}{2}AB.BA_1\sin(\hat{B}+\alpha)}{\frac{1}{2}AC.CA_1\sin(\hat{C}+\beta)}=\frac{c}{b}.\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.\frac{\sin(\hat{B}+\alpha)}{\sin(\hat{C}+\beta)}$$

تقسیم می‌کند. با انجام دادن محاسبه‌های مشابه برای دیگر ضلعهای مثلث ABC، از قضیهٔ سوا استفاده کنید.

۳۶۵. از برابری $\frac{\sin B_1\hat{A}A_2}{\sin A_2\hat{A}C_1}=\frac{AC_1}{AB_1}.\frac{B_1A_2}{A_2C_1}$ استفاده کنید. با به‌دست آوردن تساویهای مشابه برای زاویه‌های دیگر و ضرب کردن آنها درهم، به نتیجهٔ مورد نظر می‌رسیم.

۳۶۶. اگر M نقطهٔ برخورد عمودهای وارد از A_1 و B_1 بر BC و AC باشد، آن‌وقت $MB^2-MC^2=A_1B^2-A_1C^2$ و $MC^2-MA^2=B_1C^2-B_1A^2$؛ با جمع کردن این برابریها با هم و در نظر گرفتن شرطهای مسأله، به‌دست می‌آوریم: $MB^2-MA^2=C_1B^2-C_1A^2$، یعنی M روی عمود مرسوم از C_1 بر AB قرار دارد.

۳۶۷. شرط برخورد عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1 برضلعهای BC، CA و AB در یک نقطه همان شرط برخورد عمودهای وارد از A، B و C بترتیب بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 در یک نقطه است.

۳۶۸. چون عمودهای وارد از A_2، B_2 و C_2 بترتیب بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 همرسند. عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر B_2C_2، C_2A_2 و A_2B_2 نیز همرسند.

۳۶۹. فرض کنید $AA_1=a$، $BB_1=b$، $CC_1=c$، $A_1B_1=x$، $B_1C_1=y$ و $C_1A_1=z$ در این صورت، $AB_1^2=a^2+x^2$، $BC_1^2=c^2+y^2$ و غیره.

۳۷۰. فرض کنید C_1 معرف مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APB و C_2 نقطهٔ قرینهٔ C_1 نسبت به AB باشد. به همین نحو برای مثلثهای BPC و CPA بترتیب نقطه‌های A_1، A_2، و B_1 و B_2 را معین می‌کنیم. چون مثلثهای AC_1B، AC_2B، BA_1C، BA_2C، CB_1A و CB_2A متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس 120° هستند، مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متساوی‌الاضلاع می‌شوند. با محاسبهٔ اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی با رأسهای P، A_2، B_2 و C_2 می‌توانیم ثابت کنیم که اینها روی یک دایره واقعند. بعلاوه، اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث APB باشد، آن‌وقت چون $PH = C_1C_2$ و درنتیجه PHC_2C_1 متوازی‌الاضلاع است، خط راست C_1H (خط اویلر مثلث APB) از وسط PC_2 می‌گذرد. اما PC_2 وتری از دایرهٔ به مرکز C_1 است، درنتیجه، C_1H بر PC_2 عمود است. بنابراین، سه‌خط اویلر، بر عمودمنصف پاره‌خطهای PC_2، PB_2 و PA_2 منطبقند و چون نقطه‌های P، A_2، B_2 و C_2 روی یک دایره واقعند، این خطها در مرکز آن که مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع $A_2B_2C_2$ است متقاطعند ثابت می‌شود که این سه خط اویلر، در نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC متقاطعند.

۳۷۱. اگر A_0، B_0 و C_0 بترتیب وسط پاره‌خطهای AO، BO و CO باشند، آن‌وقت خطهای راست رسم شده، با خطهای A_0O، B_0O و C_0O نسبت به نیمسازهای مثلث $A_0B_0C_0$ قرینه‌اند.

۳۷۲. با به کار بردن قضیهٔ سوا در مثلثهای ABD، BDC و CDA به دست می‌آوریم:

$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DE}{EA}=1$، $\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DF}{FB}=1$ و $\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DG}{GC}=1$ با ضرب کردن این برابریها درهم، به دست می‌آوریم: $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$، یعنی خطهای راست AQ، BR و CP در یک نقطه متقاطعند. این نقطه را با N نشان دهید، فرض کنید T نقطهٔ برخورد PG با DN باشد. از قضیهٔ منلائوس داریم: $\frac{\overline{DT}}{\overline{TN}}\cdot\frac{\overline{NP}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=-1$ که از آن جا $\frac{\overline{DT}}{\overline{TN}}=-\frac{\overline{PC}}{\overline{NP}}\cdot\frac{\overline{GD}}{\overline{CG}}=-\frac{\overline{CP}}{\overline{PN}}\cdot\frac{\overline{GD}}{\overline{CG}}$. اگر $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\alpha$، $\frac{\overline{BF}}{\overline{FD}}=\beta$ و $\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\gamma$، آن وقت $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\frac{\alpha}{\beta}$، $\frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}=\frac{\gamma}{\alpha}$، $\frac{\overline{CN}}{\overline{NP}}=-\frac{\overline{BA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{RC}}{\overline{AR}}=\frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}$ و $\frac{\overline{CP}}{\overline{PN}}=-(1+\frac{\overline{CN}}{\overline{NP}})=-\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta}$ بنابراین $\frac{\overline{DT}}{\overline{TN}}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}$. خطهای راست دیگر، پاره‌خط DN را به همین نسبت تقسیم می‌کنند.

۳۷۳. فرض کنید S معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست A_1M ، B_1L و C_1K باشد. با به کار بردن قضیهٔ منلائوس در مثلثهای SMK ، SKL و SLM، به دست می‌آوریم :

$$\frac{\overline{KL_1}}{\overline{L_1M}}\cdot\frac{\overline{MA_1}}{\overline{A_1S}}\cdot\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1K}}=-1 \ ، \ \frac{\overline{LM_1}}{\overline{M_1K}}\cdot\frac{\overline{KC_1}}{\overline{C_1S}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1L}}=-1$$

و $\frac{\overline{MK_1}}{\overline{K_1L}}\cdot\frac{\overline{LB_1}}{\overline{B_1S}}\cdot\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1M}}=-1$ با ضرب کردن این تساویها درهم، به دست می‌آوریم :

$$\frac{\overline{KL_1}}{\overline{L_1M}}\cdot\frac{\overline{LM_1}}{\overline{M_1K}}\cdot\frac{\overline{MK_1}}{\overline{K_1L}}=-1 \qquad (1)$$

برابری (۱) شرط لازم و کافی است برای این که خطهای A_1M ، B_1L و C_1K در یک نقطه متقاطع باشند. لزوم، قبلاً ثابت شده است. کفایت، مطابق معمول، با رسیدن به تناقض ثابت می‌شود. (نقطهٔ برخورد A_1M و B_1L را با S' نشان می‌دهیم، $S'C_1$ را رسم کنید، نقطهٔ برخورد آن با خط راست مفروض را با K' نشان دهید و ثابت کنید که K و K' بر هم منطبقند) چون برابری (۱) با عوض کردن K ، L و M بترتیب با K_1 ، L_1 و M_1 و برعکس تغییری نمی‌کند، ادعای مسأله ثابت شده است.

۳۷۴. حکم زیر را تحقیق کنید : اگر برای خطهای راست مفروض $R=1$ ، آن‌وقت، برای خطهای قرینهٔ آنها هم همین نتیجه درست است. اگر خط راستی که از مثلاً رأس A می‌گذرد، ضلع BC را قطع کند، آن‌وقت خط راست قرینهٔ آن نسبت به نیمساز این زاویه هم، ضلع BC را قطع می‌کند.

۳۷۵. زاویهٔ با رأس A را در نظر بگیرید. سه نقطهٔ B_1 ، B_2 و B_3 بر یک ضلع زاویه، و سه نقطهٔ C_1 ، C_2 و C_3 روی ضلع دیگر آن اختیار می‌شوند. از قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود برای این که خطهای راست B_1C_1 ، B_2C_2 و B_3C_3 در یک نقطه به هم برسند، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد :

$$\frac{AB_2}{B_2B_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2A}=\frac{AB_3}{B_3B_1}\cdot\frac{C_1C_3}{C_3A} \qquad (1)$$

در حقیقت، اگر برابری (۱) برقرار باشد، آن‌وقت از قضیهٔ منلائوس نتیجه می‌شود که خطهای راست B_2C_2 و B_3C_3 ، ضلع B_1C_1 از مثلث AB_1C_1 را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۳۷۶. کافی است برقراری شرط $AB_2^2-B_2C^2+CA_2^2-A_2B^2+BC_2^2-C_2A^2=0$ را تحقیق کنیم. توجه کنید که مثلثهای BB_2C_1 و AA_2C_1 متشابه‌اند، بنابراین $AC_1.C_1B_2=BC_1.C_1A_2$ ؛ به علاوه $A\hat{C_1}B_2=B\hat{C_1}A_2$ ، درنتیجه $AB_2^2-BA_2^2=(AC_1^2-C_1B^2)+(C_1B_2^2-A_2C_1^2)$. با نوشتن برابریهای متناظر برای $CA_2^2-AC_2^2$ و $BC_2^2-CB_2^2$ و جمع کردن آنها با یکدیگر، مشاهده می‌کنیم که مجموع تفاضلها در پرانتزهای اولی، برابر صفر است. به سادگی می‌توان ثابت کرد

که AA_2، BB_2 و CC_2 از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند، یعنی مجموع تفاضلها در پرانتزهای دومی هم، صفر است.

۳۷۷. فرض کنید $AM_1 : BM_1 : CM_1 = p : q : r$. در این صورت، مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M، به طوری که $(r^2 - q^2)AM^2 + (p^2 - r^2)BM^2 + (q^2 - p^2)CM^2 = 0$، خط راستی است که از M_1 و M_2 و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۱. ۹. ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۸. فرض کنید B_1 وسط AC باشد. نیمساز زاویهٔ B را امتداد دهید تا عمود اخراج شده بر AC در نقطهٔ B_1 را در نقطه‌ای مانند B_2 قطع کند. نقطهٔ B_2 روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد. از M عمودی بر AC رسم می‌کنیم ؛ فرض کنید L نقطهٔ برخورد آن با AC، و K نقطهٔ برخورد آن با BB_1 باشد، در این صورت $KM = ML$. از نقطهٔ K خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم تا خطهای راست AB و BC را بترتیب در نقطه‌های D و E قطع کند. اگر G و F بترتیب تصویرهای D و E روی AC باشند، آن وقت M مرکز مستطیل $GDEF$ است و مثلث DME با مثلث AB_2C متشابه می‌شود. (مثلث DME، از مثلث AB_2C بر اثر تبدیل تجانسی با مرکز B به دست می‌آید)

داریم :

$$\cot g\, M\hat{C}L = \frac{LC}{ML} = \frac{LF}{ML} + \frac{FC}{ML} = \frac{AB_1}{B_1B_2} + 2\frac{FC}{EF} = \cot g\frac{\hat{B}}{2} + 2\cot g\,\hat{C}$$

اکنون اگر B' پای نیمساز زاویهٔ C باشد و P و T، بترتیب تصویرهای N و B' روی BC باشند، آن‌وقت :

$$\cot g\, N\hat{C}B = \frac{PC}{NP} = \frac{PT}{NP} + \frac{TC}{NP} = \frac{BP}{NP} + 2\frac{TC}{B'T} = \cot g\frac{\hat{B}}{2} + 2\cot g\,\hat{C}$$

یعنی $M\hat{C}A = N\hat{C}B$.

۳۷۹. فرض کنید K_1 و L_1 نقطه‌هایی بترتیب روی BC و BA باشند، به‌طوری که $K_1K \| L_1L \| B_1B$ کافی است ثابت کنیم که مثلثهای BK_1K و BL_1L متشابه‌اند، یعنی، $\frac{BK_1}{K_1K} = \frac{BL_1}{L_1L}$. داریم : $\frac{BK_1}{BA_1} = \frac{B_1K}{B_1A_1}$ ، $\frac{K_1K}{BB_1} = \frac{A_1K}{B_1A_1}$ و بنابر ویژگی نیمساز داریم :

$$\frac{BK_1}{K_1K} = \frac{B_1K}{A_1K} \cdot \frac{BA_1}{BB_1} = \frac{CB_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_1}{BB_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{CB_1}{BB_1} = \frac{ca}{(c+a).BB_1}$$

عبارت $\frac{ca}{(c+a)BB_1}$ نسبت به a و c متقارن است و بنابراین با $\frac{BL_1}{L_1L}$ هم برابر است.

۳۸۰. از نقطهٔ A_2، خط راستی به موازات AC رسم کنید. فرض کنید R نقطهٔ برخورد این خط با AB باشد. با در نظر داشتن اینکه $\frac{AR}{RC_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{1}{K}$ و $\frac{AC_1}{C_1B} = K$ ، به

دست می‌آوریم : $\frac{AR}{AB}=\frac{K}{(K+1)^2}$. به همین ترتیب، با رسم کردن خط راستی از C_2 به موازات AC، که BC را در نقطهٔ S قطع می‌کند، به‌دست می‌آوریم : $\frac{CS}{CB}=\frac{K}{(K+1)^2}$. بنابراین نقطه‌های R، A_2 ، C_2 و S روی خط راستی به موازات AC واقعند. به این ترتیب ضلعهای مثلثهای ABC و $A_2B_2C_2$ متناظراً موازی‌اند.

اکنون، به آسانی به دست می‌آید که

$$A_2C_2 = RS - RA_2 - C_2S = AC.(1-\frac{3K}{(K+1)^2})$$

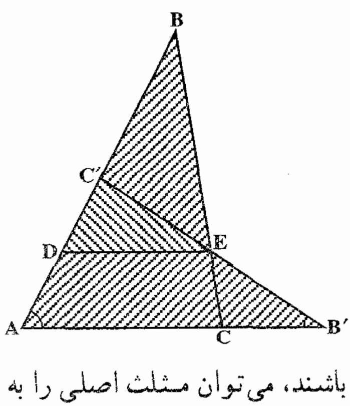
بنابراین نسبت تشابه برابر $\frac{K^2-K+1}{(K+1)^2}$ است.

۳۸۱. نتیجه‌ای را که م.د. کوالف به دست آورده، بیان و اثبات می‌کنیم که از خواستهٔ مسأله قویتر است. از میان همهٔ شکلهای محدب که هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از واحد را می‌پوشانند، کمترین مساحت را مثلث ABC داراست، که در آن $\hat{A}=60^\circ$ ، $AB=1$ و ارتفاع مرسوم بر AB، برابر با $\cos 10^\circ$ است. مساحت این مثلث، برابر $\frac{1}{2}\cos 10^\circ \simeq 0/4924$ است.

(۱) توجه کنید که کافی است مثلثی پیدا کنیم که هر مثلث متساوی‌الساقین را که طول ساقهایش برابر ۱ است و φ زاویهٔ بین آنها از 60° تجاوز نمی‌کند، می‌پوشاند. این مطلب از این حقیقت نتیجه می‌شود که هر مثلث با طول ضلعهای نابیشتر از ۱ را می‌توان با مثلث متساوی‌الساقین از نوع ذکر شده پوشاند.

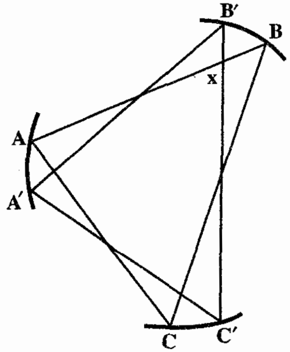
(۲) ثابت می‌کنیم که هر مثلث متساوی‌الساقین مذکور در قسمت (۱) را می‌توان با مثلث ABC پوشاند. دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز نقطهٔ C رسم می‌کنیم. فرض کنید K ، L ، M و N نقطه‌های برخورد متوالی آن با CB ، BA و AC باشند. (L و M بر BA واقعند)، $L\hat{C}M = M\hat{C}N = 20^\circ$. بنابراین، مثلثهای متساوی‌الساقین با شرط $0 \le \varphi \le 20^\circ$ را قطاع CMN می‌پوشاند، در حالی که مثلثهایی را که در آنها $20^\circ < \varphi \le \hat{C}$ ، مثلث ABC می‌پوشاند، به شرط این که نقطه‌های انتهایی قاعده، روی کمانهای KL و MN، و رأس سوم در نقطهٔ C اختیار شود. اکنون دایره‌ای به شعاع واحد و مرکز نقطهٔ A رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B می‌گذرد و BC را دوباره در نقطهٔ P و ضلع AC را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. به دست می‌آوریم: $P\hat{A}B = 180^\circ - 2\hat{B} < \hat{C}$ زیرا $\hat{B}$ بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC است. بنابراین گرفتن رأس مثلث متساوی‌الساقین در نقطهٔ A، و نقطه‌های انتهایی قاعده در نقطهٔ B و روی کمان PQ، می‌توانیم هر مثلث متساوی‌الساقین را که برای آن $\hat{C} < \varphi \le 60^\circ$ (حتی $180 - 2\hat{B} \le \varphi \le 60^\circ$)، بپوشانیم.

(۳) ثابت می‌کنیم در هر ترتیب (در صفحه) از مثلث متساوی‌الساقین DEF، که در آن، $D\hat{E}F = ۲۰^\circ$، $DE = EF = ۱$، و مثلث متساوی‌الاضلاع XYZ به ضلع ۱، مساحت کوچکترین شکل محدب شامل مثلثهای DEF و XYZ، از $۰/۵\cos ۱۰^\circ$ کمتر نیست. نخست توجه کنید که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع شامل DEF، برابر است با $\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos ۱۰^\circ$ (حکم زیر درست است: اگر مثلثی بتواند در درون مثلث دیگری جا بگیرد، آن‌وقت می‌تواند چنان قرار بگیرد که دو تا از رأسهایش بر ضلعهای مثلث بزرگتر قرار گیرد. این حکم کلی را ثابت نمی‌کنیم. کافی است درستی آن را در حالتی که یکی از آنها مثلث DEF و دیگری مثلث متساوی‌الاضلاع است، ببینید. این کار را می‌توان به سادگی انجام داد). اکنون کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع، $X_۱Y_۱Z_۱$ را با ضلعهای به موازات ضلعهای مثلث XYZ و شامل مثلثهای DEF و XYZ در نظر بگیرید. طول ضلع $\Delta X_۱Y_۱Z_۱$، از $\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos ۱۰^\circ$ و ارتفاع آن از $\cos ۱۰^\circ$ کمتر نیست. رأسهای مثلث DEF باید بر ضلعهای مثلث $X_۱Y_۱Z_۱$ که شامل ضلعهای مثلث XYZ نیستند، قرار بگیرند. درنتیجه، مجموع فاصلهٔ رأسهای مثلث DEF، که بیرون مثلث XYZ هستند، تا ضلعهای نظیر مثلث XYZ، دست کم $\cos ۱۰^\circ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و مساحت کوچکترین چندضلعی محدب شامل مثلثهای DEF و XYZ، از $۰/۵(\cos ۱۰^\circ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}) + \frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۰/۵\cos ۱۰^\circ$ کمتر نیست. (م.د. کوالف همچنین ثابت کرد که کوچکترین (از نظر مساحت) پوشش محدب پیدا شده برای مثلثهای با طول ضلعهای نابیشتر از واحد، یکتاست).



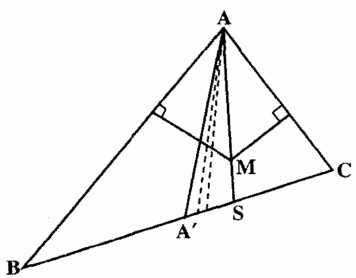
۳۸۲. فرض کنید $AB > AC$. مثلث $AB'C'$ را متشابه با مثلث ABC و به نحوی که $AC < AB' < AB$ باشد، روی ضلع AC از مثلث ABC می‌سازیم. از نقطهٔ E محل برخورد BC و $B'C'$، خط DE را به موازات AC رسم می‌کنیم. مثلثهای $AB'C'$ و DBE، مثلثهای موردنظر مسأله‌اند.

۳۸۴. خیر، نمی‌توان. نقطه‌های آبی، به هر گونه‌ای باشند، می‌توان مثلث اصلی را به مثلثهای کوچکتری با رأسهای آبی تقسیم کرد. تعداد این مثلثها بستگی به روش تقسیم ندارد و برابر است با $۲k + ۱$ که در آن k عبارت است از تعداد نقطه‌های آبی درون مثلث.



۳۸۵. مثلث مفروض T را درنظر می‌گیریم، دایرهٔ به مرکز O را بر آن محیط می‌کنیم و به همهٔ مثلثهایی توجه می‌کنیم که از T، با دوران دور O و به اندازهٔ زاویه‌های کوچک، به‌دست می‌آیند. برای هر یک از این مثلثها می‌توان جدولی با اندازه‌های ۱۹۹۲×۳ رسم کرد و در محل برخورد kامین ستون و jامین سطر، علامت ستاره گذاشت، به شرطی که روی j امین ضلع این مثلث، نقطه‌ای به رنگ kام وجود داشته باشد؛ درحالتی که این شرط وجود نداشته باشد، خانهٔ مربوط را در جدول، خالی می‌گذاریم. روشن است که دو مثلث ABC و A′B′C′ پیدا می‌شوند که جدولی یکسان دارند (S). نقطهٔ x محل برخورد ضلعهای AB و B′C′ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم این نقطه به رنگ P باشد. در این صورت در Pامین ستون در نخستین خانهٔ جدول S، باید ستاره گذاشته شده باشد. ولی این به معنای آن است که روی نخستین ضلع مثلث A′B′C′ (یعنی A′B′)، نقطه‌ای با رنگ Pام وجود دارد. به این ترتیب برای دو ضلع A′B′ و B′C′ از مثلث A′B′C′، نقطه‌هایی با یک رنگ وجود دارد. همین استدلال را برای دو ضلع دیگر هم می‌توان کرد.

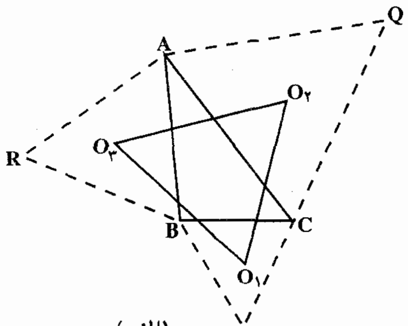
۳۸۶. نقطه را باید در گرانیگاه مثلث گرفت.



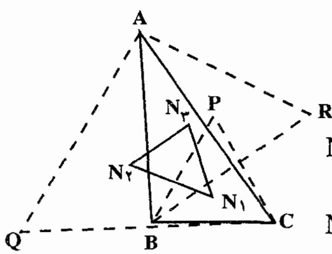
۳۸۷. فرض می‌کنیم M نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو ضلع AC و AB متناسب با b و c باشد. نقطهٔ برخورد AM با ضلع BC را S می‌نامیم. نقطهٔ S نیز نسبت فاصله‌اش از دو ضلع AC و AB به نسبت b به c است. اما می‌دانیم که این نقطه ضلع BC را به نسبت $\frac{b^2}{c^2}$ تقسیم می‌کند. بنابراین نقطه‌ای است که بر شبه میانهٔ نظیر رأس A واقع است.

۳۸۸. مثلث ABC و مثلث میانه‌ای آن مجانس یکدیگرند، پس نقطه‌های ناگل و خطهای نظیر گذرنده از این نقطه‌ها در دو مثلث نیز مجانس یکدیگر می‌باشند. پس اگر AX_a خط گذرنده از نقطهٔ ناگل مثلث ABC، ′A وسط BC و I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد، ثابت کنید که $A'I \parallel AX_a$ و همچنین خطهای نظیر دیگر.

۳۸۹. شکلهای (الف) و (ب) را با هم و به‌صورت یک شکل درنظر می‌گیریم. شش مثلث BO_1N_1 ، CN_1O_1 ، CO_2N_2 ، AN_2O_2 ، AN_3O_3 و BO_3N_3 متساوی‌الاضلاعند. همچنین شش مثلث AN_3O_2 ، AO_3N_2 ، O_3BN_1 ، N_3BO_1 ، N_2O_1C و O_2N_1C با مثلث ABC مستقیماً متشابه‌اند و با یکدیگر برابرند. بنابراین خواهیم داشت :



(الف)



(ب)

$$N_3O_2 = O_3N_2 = BN_1 = BO_1 = O_1C = N_1C = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$N_1O_3 = O_1N_3 = CN_2 = CO_2 = O_2A = N_2A = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$N_2O_1 = O_2N_1 = AN_3 = AO_3 = O_3B = N_3B = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

$$O_1\hat{B}O_3 = O_1\hat{B}N_1 + N_1\hat{B}O_3 = 60^\circ + \hat{B}$$

$$B\hat{O}_3N_2 = B\hat{O}_3A - N_2\hat{O}_3A = 120^\circ - \hat{B}$$

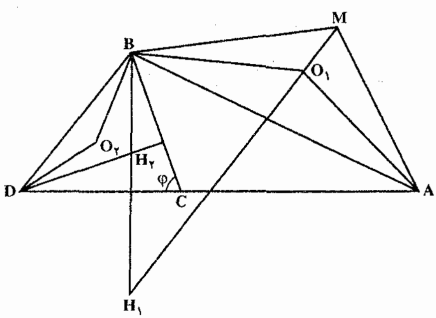
بنابراین چهار گوشهٔ $BO_1N_2O_3$ (که دو ضلع رو به رویش با هم برابرند) متوازی‌الاضلاع است. هرگاه وسط O_2O_3 را با X و وسط CA (که همچنین وسط O_2N_2 است) را با B' نشان دهیم، نتیجه می‌شود که XB' با O_3N_2 و BO_1 موازی است. چون BO_1 دو برابر XB' است، خطهای O_1X و BB' در G برخورد می‌کنند به‌گونه‌ای که : $O_1G = 2GX$ و $BG = 2GB'$. اما O_1X و BB' میانه‌های مثلثهای $O_1O_2O_3$ و ABC می‌باشند، پس G مرکز ثقل مشترک دو مثلث مزبور است. هرگاه متوازی‌الاضلاع $BN_1O_2N_3$ را به‌جای متوازی‌الاضلاع $BO_1N_2O_3$ قرار دهیم، با روش مشابه نتیجه خواهد شد که G، همچنین مرکز ثقل مثلث $N_1N_2N_3$ است.

۳۹۰. فرض می‌کنیم هیچ سه مثلثی نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. در این صورت، در درون هر یک از این مثلثها، تنها یک نقطه وجود دارد که رأس مثلثی دیگر است ؛ همچنین یک رأس از یک مثلث، متعلق به بیش از یک مثلث نیست. روی هم چند رأس وجود دارد؟ از یک طرف، حداکثر 3×1993 رأس، زیرا هر مثلث سه رأس دارد،

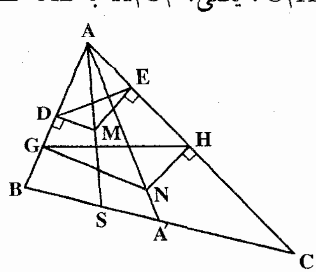
از طرف دیگر، حداقل ۴×۱۹۹۳ رأس، زیرا در درون هر مثلث، دست‌کم چهار رأس وجود دارد و بنابراین روش محاسبه هیچ رأسی دو بار به‌حساب نیامده است. تناقض.

۳۹۱. فرض کنید چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد (آن را با N نشان می‌دهیم). در این صورت، خط راست MN بر سه ضلع مثلث عمود است (در فضا).

۳۹۲. در مثلث حاده، خط اویلر، ضلعهای بزرگتر و کوچکتر را قطع می‌کند. در مثلث منفرجه، خط اویلر، ضلعهای بزرگتر و میانی را قطع می‌کند.



۳۹۳. اگر یکی از خطهای راست به موازات خودش جابه‌جا شود، آن‌وقت خط اویلر مثلثی که یکی از ضلعهایش خط جابه‌جا شده است، به موازات خودش جابه‌جا می‌شود. با درنظر گرفتن این امر می‌توانیم به سادگی مسأله را به شکل زیر تبدیل کنیم. فرض کنید A، C و D سه نقطهٔ همخط باشند و B نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. اگرخط اویلر مثلث ABC با BD موازی باشد، آن‌وقت خط اویلر مثلث CBD با AB موازی می‌شود. این را ثابت می‌کنیم. قرار می گذاریم: $B\hat{C}D = \varphi$ (فرض می‌کنیم C بین A و D قرار دارد و $\varphi \le 90°$)، O_1 و H_1، بترتیب، مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و O_2 و H_2 مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث BCD هستند. بر ABH_1 دایره‌ای محیط می‌کنیم تا O_1H_1 را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت می‌کنیم چهارضلعیهای O_1AMB و O_2DH_2B متشابه‌اند. پیش‌از هر چیز، مثلثهای O_1AB و O_2DB مثلثهای متشابه‌اند و $M\hat{A}B = M\hat{H}_1B = H_1\hat{B}D = H_2\hat{B}D$ (O_1H_1 با BD موازی است) $M\hat{B}A = M\hat{H}_1A = H_2\hat{D}B$ (AH_1 و DH_2 بر CB عمودند). تشابه این چهار ضلعیها ثابت شد. بعلاوه:
$O_2\hat{H}_2B = O_1\hat{M}A = H_1\hat{M}A = H_1\hat{B}A = H_2\hat{B}A$، یعنی، H_2O_2 با AB موازی است.



۳۹۵. در مثلث ABC میانهٔ ′AA و شبه میانهٔ AS را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ M واقع بر شبه‌میانهٔ AS عمودهای MD و ME را بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم. چهارضلعی ADME محاطی است.

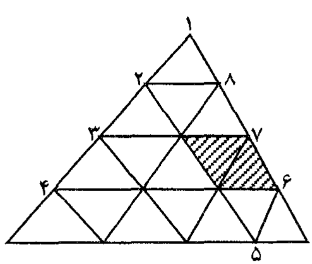
سپس : $D\hat{E}M = D\hat{A}M = E\hat{A}A'$ اما ME عمود بر AE است پس با توجه به برابریهای بالا ED عمود بر AA' است. به روش مشابه ثابت می‌شود که GH بر شبه میانهٔ AS عمود است.

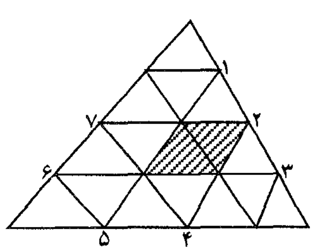
۳۹۶. از A خط راستی به موازات BC رسم کنید و نقطه‌های برخورد آن با A_1C_1 و A_1B_1 را بترتیب با K و L نشان دهید. داریم : $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{KA}{BA_1}$ و $\frac{A_1C}{AL} = \frac{CB_1}{B_1A}$. بنابر قضیهٔ سوا $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = ۱$، بنابراین $KA = AL$. اما اگر AA_1 نیمساز زاویهٔ KA_1L باشد آن‌وقت چون $KA = AL$، AA_1 بر KL عمود است یعنی، AA_1 ارتفاع مثلث ABC است.

۳۹۷. فرض کنید F و D معرف نقطهٔ برخورد EN و EM، بترتیب با AB و BC باشند. ثابت کنید که مثلثهای AFN و MDC متشابه‌اند. با استفاده از تشابه مثلثهای مختلف و برابری ضلعهای روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع داریم :

$$\frac{NF}{FA} = \frac{NF}{FB}\cdot\frac{FB}{FA} = \frac{BD}{DM}\cdot\frac{ED}{FA} = \frac{BD}{DM}\cdot\frac{DC}{FE} = \frac{BD}{DM}\cdot\frac{DC}{BD} = \frac{DC}{DM}$$

یعنی مثلث AFN با مثلث MDC متشابه است.



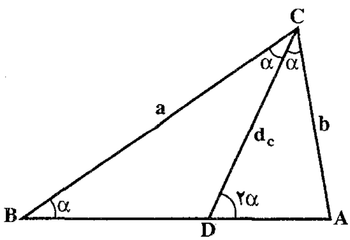


۳۹۹. هر متوازی‌الاضلاع از برخورد دو زوج خط موازی به‌دست می‌آید و این خطها، ضلعهای مثلث را در ۷ یا ۸ نقطه قطع می کنند (زیرا ممکن است دو خط روی یک ضلع به هم برسند) درواقع دو ضلع دو نقطهٔ تقاطع دارند و یک ضلع ۳ یا ۴ نقطه، لذا هر متوازی‌الاضلاع با انتخاب یک ضلع و ۳ یا ۴ نقطه روی آن مشخص می‌شود. چون روی هر ضلع $n+1$ نقطه موجود است. داریم :

$$\text{تعداد متوازی الاضلاعها} = ۳\times\left(\binom{n+۱}{۴}+\binom{n+۱}{۳}\right) = ۳\times\binom{n+۲}{۴}$$

۱۰.۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۰۱. ۱. نیمساز زاویهٔ C را رسم می‌کنیم و پای این نیمساز را D می‌نامیم. مثلث BCD متساوی‌الساقین است و داریم:



$$DB = DC = d_c$$

دو مثلث ADC و ABC متشابه‌اند، زیرا به فرض $B = \alpha$، $\hat{C} = ۲\alpha$، $A\hat{C}D = \alpha$ و $A\hat{D}C = ۲\alpha$ است، پس:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{d_c}{a} \Rightarrow d_c = \frac{ab}{c}$$

.۲

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin ۲B}$$
$$= \frac{c}{۲\sin B\cos B} \Rightarrow c = ۲b\cos B$$
$$\cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} \Rightarrow$$
$$c = ۲b \times \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} \Rightarrow$$
$$ac^۲ = ba^۲c^۲(a-b) = b(a-b)(a+b) + bc^۲ - b^۳ \Rightarrow$$
$$a - b \neq ۰ \Rightarrow c^۲ = ab + b^۲ \text{ یا } c^۲ - b^۲ = ab$$

۳. بنا به ویژگی نیمساز زاویه‌های مثلث داریم:

$$CP = \frac{a.b}{b+c} \Rightarrow CP = \frac{c^۲ - b^۲}{b+c} = c - b$$

$$CQ = \frac{ab}{c-b} \Rightarrow CQ = \frac{c^۲ - b^۲}{c-b} = c + b$$

۴. اگر تصویر رأس A روی BC را H بنامیم، در مثلثهای قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم:

$$BH = c\ \cos B \Rightarrow BH = c \cdot \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac} =$$
$$\frac{a^۲ + ab}{۲a} = \frac{a+b}{۲}$$

$$CH = b\cos C \Rightarrow CH = b \cdot \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab} = \frac{a^۲ - ab}{۲a} = \frac{a-b}{۲}$$

۴۰۲. ۱. می‌دانیم کـه $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$ و $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. از آن‌جا خواهیم داشت :

$$\frac{m^2_b}{m^2_c}=\frac{c^2}{b^2}\Rightarrow \frac{b^2}{4}(2a^2+2c^2-b^2)=\frac{c^2}{4}(2a^2+2b^2-c^2)\Rightarrow$$

$$(b^2-c^2)(b^2+c^2-2a^2)=0 \text{ ، } b\neq c\Rightarrow b^2+c^2=2a^2$$

۲. الف.

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(2a^2)-a^2}\Rightarrow m_a=A'A=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

پس مکان هندسی رأس A دایره‌ای به مرکز A' وسط BC و به شعاع $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است.

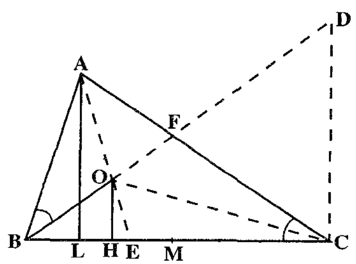
ب. می‌دانیم کـه در هر مـثلث $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. در این جـا داریم :

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{9a^2}{4}=c^{te}$$

۳. ثابت کنید که $\frac{m_a}{a}=\frac{m_b}{b}=\frac{m_c}{c}$ است.

۴. ضلع a معلوم است برای رأس A دو مکان هندسی مشخص کنید.

۴۰۳. ۱. نیمساز BF را رسم کرده ملاحظه می‌کنیم کـه چون زاویهٔ C نصف زاویهٔ B است، مثلث BFC متساوی‌الساقین می‌باشـد. از طرفی دو مـثلث ABF و ACB مـتـشـابه‌اند (A مـشـتـرک و $\hat{ABF}=\hat{ACB}$). پـس : $\frac{AB}{AC}=\frac{AF}{AB}=\frac{FB}{BC}$ در دو نسـبـت طرف راست با مـلاحظهٔ FB = FC ترکیب نسبت می‌کنیم حاصل می‌شود :



$$\frac{AB}{AC}=\frac{AF+FC}{AB+BC}=\frac{AC}{AB+BC}$$

پس : $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+AB\times BC$ و یا : $b^2=c^2+ac$

و یا : $b^2-c^2=ac \qquad (1)$

۲. اگـــر M وسط BC و L تصـــویر A بر BC باشـــد می‌دانیم کـــه : $AC^2-AB^2=2BC\times LM$ و یا : $b^2-c^2=2a\times LM$ از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود : $LM=\frac{c}{2}$ اکنون با ملاحظهٔ آن که BM و MC هر کدام $\frac{a}{2}$ می‌باشند نتیجه می‌شود :

$$LC=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=\frac{a+c}{2}$$

و طول BL برحسب این‌که زاویهٔ B حاده یا منفرجه باشد:

$\frac{a-c}{۲}$ و یا، $\frac{c-a}{۲}$ و در هر حال $\left|\frac{a-c}{۲}\right|$ است.

۳. دیدیم که $BF = FC$ پس $BD = ۲FC$ و مثلث BDC که در آن میانهٔ FC نصف ضلع BD است در رأس C قائم‌الزاویه می‌باشد.

۴. قبلاً از تشابه دو مثلث ABF و ACB نتیجه گرفتیم که:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{BC} \text{ ، پس } FB = \frac{ac}{b} \text{ و } BD = \frac{۲ac}{b}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه DCB داریم:

$$\overline{DC}^۲ = \overline{DB}^۲ - \overline{BC}^۲ = \frac{۴a^۲c^۲}{b^۲} - a^۲$$

و یا

$$\overline{DC}^۲ = \frac{a^۲}{b^۲}(۴c^۲ - b^۲)$$

و یا

$$DC = \frac{a}{b}\sqrt{۴c^۲ - b^۲}$$

۵. O نقطهٔ تقاطع نیمسازهای مثلث است پس OC نیمساز زاویهٔ C می‌باشد و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC و EHO متشابه‌اند زیرا:

$$H\hat{O}E = L\hat{A}E \quad \text{و} \quad H\hat{C}O = \frac{\hat{C}}{۲}$$

اما زاویهٔ LAE مساوی با نصف تفاضل زاویه‌های B و C است پس:

$$H\hat{O}E = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} = \frac{۲\hat{C} - \hat{C}}{۲} = \frac{\hat{C}}{۲}$$

از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود $\frac{OH}{HE} = \frac{HC}{OH}$ و یا $OH^۲ = HE.HC$

۴۰۴. فرض کنید ABC مثلث مفروض، $A_۱B_۱C_۱$ مثلث Δ و $A_۲B_۲C_۲$ مثلث δ باشد. ($A_۱$ و $A_۲$ مرکز مثلثهای ساخته شده روی BC هستند) و a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند

(الف) این مطلب که $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$ متساوی‌الاضلاعند به سادگی ثابت می‌شود.

(ب) حکم کلی‌تری را ثابت می‌کنیم. اگر روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون (یا داخل) آن مثلثهای مشابه $A_۱BC$ ، $B_۱CA$ و $C_۱AB$ رسم شوند، به‌طوری که:

$$A_۱\hat{B}C = B_۱\hat{C}A = C_۱\hat{A}B \quad \text{و} \quad A_۱\hat{C}B = B_۱\hat{A}C = C_۱\hat{B}A$$

آن‌وقت، نقطه‌های میانه‌ای مثلثهای ABC و $A_۱B_۱C_۱$ بر هم منطبقند. نخست، توجه کنید که اگر M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، آن‌وقت $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = ۰$ و برعکس، اگر این تساوی برقرار باشد، آن‌وقت M نقطهٔ

میانه‌ای مثلث ABC است. می‌ماند تحقیق کنیم که $\vec{MA_1}+\vec{MB_1}+\vec{MC_1}=0$ ، یا
$(\vec{MA}+\vec{AC_1})+(\vec{MB}+\vec{BA_1})+(\vec{MC}+\vec{CB_1})=0$
اما $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=0$ ، بعلاوه $\vec{AC_1}+\vec{BA_1}+\vec{CB_1}=0$ ، زیرا هر یک از بردارهای $\vec{AC_1}$ ، $\vec{BA_1}$ و $\vec{CB_1}$ بترتیب از بردارهای $\vec{AB}$ ، $\vec{BC}$ و $\vec{CA}$ با دوران آنها دور یک زاویهٔ $(A_1\hat{B}C)$ و ضرب در یک عدد واحد به‌دست می‌آیند.

(ج) حالت کلیتری را درنظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقین B_1CA ، A_1BC ، C_1BA ، A'_1BC ، B'_1CA و C'_1BA که در آنها نسبت طول ارتفاع مرسوم به قاعده به طول قاعده برابر با K است، با قاعده‌های ضلعهای مثلث ABC در بیرون و در درون آن، رسم می‌شوند. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد؛ a، b و c طول ضلعهای آن و A_0 ، B_0 و C_0 بترتیب وسط BC ، CA و AB باشند.
برای روشنی وضع فرض می کنیم ABC مثلثی حاده باشد در این‌صورت:

$$S_{A_1OC_1}=\frac{1}{2}AO_1.C_1O.\sin\hat{B}=\frac{1}{2}(OA_0+ka)(OC_0+kc)\sin\hat{B}$$

$$=\frac{1}{2}OA_0.OC_0.\sin\hat{B}+\frac{1}{2}k^2ac\sin\hat{B}+\frac{k}{2}(a.OC_0+c.OA_0)\sin\hat{B}$$

$$=k^2S_{ABC}+S_{A_0OC_0}+\frac{k}{4}b^2$$

با به‌دست آوردن رابطه‌های مشابه برای مثلثهای A_1OB_1 و B_1OC_1 و جمع کردن آنها با یکدیگر به‌دست می‌آوریم: $S_{A_1B_1C_1}=(3k^2+\frac{1}{4})S_{ABC}+\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)$

(این برابری برای مثلث منفرجه هم درست است) برای مثلث $A'_1B'_1C'_1$ داریم:

$$S_{A'_1B'_1C'_1}=\left|\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)-(3k^2+\frac{1}{4})S_{ABC}\right|$$

درنتیجه، اگر $\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)-(3k^2+\frac{1}{4})S_{ABC}\geq 0$ ، آن‌وقت:

$$S_{A_1B_1C_1}-S_{A'_1B'_1C'_1}=(6k^2+\frac{1}{2})S_{ABC}$$

و اگر $\frac{k}{4}(a^2+b^2+c^2)-(3k^2+\frac{1}{4})S_{ABC}<0$ ، آن‌گاه:

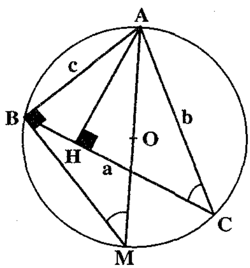
$$S_{A_1B_1C_1}-S_{A'_1B'_1C'_1}=\frac{k}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

می‌توانیم ثابت کنیم که همیشه داریم $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$. و این، بدان معنی است که به‌ازای $k=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ، تفاضل میان مساحت مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ برابر است با S_{ABC} .

راهنمایی و حل

بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی

۱.۲. تعریف و قضیه



۴۰۵. در مثلث ABC ارتفاع AH و آن قطر از دایرهٔ محیطی را، که از رأس A می‌گذرد، یعنی قطر AOM را رسم می‌کنیم و نقطهٔ M را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. در دو مثلث AHC و ABM خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix}\hat{M}=\hat{C}\\ \hat{H}=\hat{B}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta AHC$$

بنابراین:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AH}{AC}\Rightarrow AB.AC=AM.AH$$

اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را با R نمایش دهیم، از این رابطه خواهیم داشت:

$$bc=۲R.h_a$$

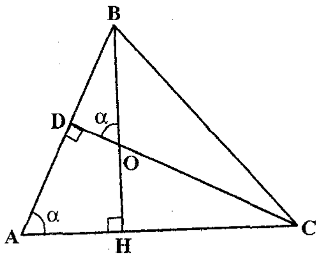
و چون در هر مثلث $h_a=\frac{۲}{a}s$ است، شعاع دایره محیطی را برحسب اندازه‌های ضلعهای آن از دستور زیر تعیین می‌کنیم:
$$R=\frac{abc}{۴s}$$

۲.۲. زاویه

۱.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۴۰۶. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. چون خط راست OH بر نیمساز زاویهٔ A عمود است، این خط، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های K و M، به‌طوری که $AK=AM$، قطع می‌کند. بنابراین $A\hat{O}B=۲\hat{C}$ (فرض می‌کنیم زاویهٔ C حاده باشد)؛ $O\hat{A}K=۹۰^\circ-\hat{C}=H\hat{A}M$.
بنابراین: $\Delta OAK=\Delta HAM$ و $OA=HA=R$ (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است). اگر D پای عمود وارد از O بر BC باشد، آن‌وقت $OD=\frac{AH}{۲}=\frac{R}{۲}$.
درنتیجه، $\cos\hat{A}=\cos D\hat{O}C=\frac{۱}{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$.

۴۰۷. فرض می‌کنیم $B\hat{O}D = B\hat{A}C = \alpha$. در مثلثهای CDB و ODB داریم :



$$BD = BC\cos C\hat{B}D \quad \text{و}$$

$$OB = \frac{BD}{\sin B\hat{O}D} = \frac{BD}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow OB = \frac{a\cos C\hat{B}D}{\sin\alpha} \quad \text{و} \quad a = ۲R\sin\alpha \Rightarrow$$

$$OB = \frac{۲R\sin\alpha\cos C\hat{B}D}{\sin\alpha} = ۲R\cos C\hat{B}D$$

اگر $C\hat{B}D = ۶۰^\circ$ باشد، $\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ و درنتیجه $OB = R$ است و اگر $A\hat{B}C = ۱۲۰^\circ$ فرض شود، داریم $OB = R$. حال ثابت می‌کنیم اگر یک زاویه از مثلث ۶۰° یا ۱۲۰° باشد، لازم است $OB = R$ باشد. داریم :

$$OB = R = \frac{a}{۲\sin\alpha}, \Delta ODB \;؛\; BD = AB\sin\alpha \;\text{ و }\; BD = \frac{a}{۲} \Rightarrow BD =$$

$$a\cos C\hat{B}D = a\cos(۱۸۰^\circ - A\hat{B}C) \;\text{ و }\; BD = \frac{a}{۲} \Rightarrow \cos C\hat{B}D = \frac{۱}{۲} \;\text{ و}$$

$$\cos(۱۸۰^\circ - A\hat{B}C) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow C\hat{B}D = ۶۰^\circ \quad \text{یا} \quad A\hat{B}C = ۱۲۰^\circ$$

۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۰۹. R را شعاع دایره‌ای می گیریم که دو مثلث ABC و DEF در آن محاط شده‌اند. بنابر قضیهٔ سینوسها در مثلث ABC داریم :

$$\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C} = \frac{BC + AC + AB}{۲R} = \frac{P_۱}{۲R}$$

($P_۱$ ، محیط مثلث ABC است). و در مثلث DEF :

$$\sin\hat{E} + \sin\hat{D} + \sin\hat{F} = \frac{P_۲}{۲R}$$

($P_۲$ ، محیط مثلث DEF است). بنابراین، دو برابری زیر هم‌ارزند :

$$\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C} = \sin\hat{E} + \sin\hat{D} + \sin\hat{F} \quad \text{و} \quad P_۱ = P_۲$$

۳.۲. ضلع

۱.۳.۲. اندازهٔ ضلع

۴۱۰. با فرض $BC=a$ می‌دانیم که: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R \Rightarrow a=۲R\sin\hat{A} \Rightarrow$

$$a=۲\times۱۲\sin۶۰^\circ \Rightarrow a=۱۲\sqrt{۳}$$

۴۱۱. اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴۵^\circ+\hat{B}+۶۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۷۵^\circ$$

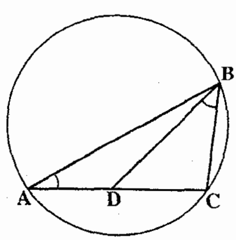
حال با استفاده از قانون سینوسها داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin۴۵^\circ}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sin۷۵^\circ}=\frac{c}{\sin۶۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)}{۴}}=\frac{c}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۱}=\frac{c}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow a=۲\ ,\ c=\sqrt{۶}$$

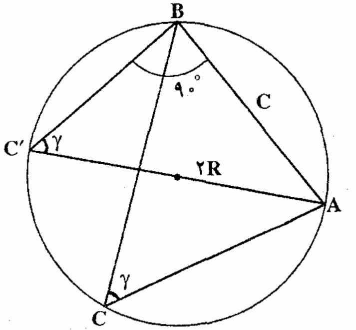
۴۱۲. از شرایط مسأله معلوم می‌شود که $\Delta ABC \sim \Delta BDC$. از آن‌جا:



$$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{DC} \Rightarrow BC=۶$$

۴۱۳. راه اول. زاویهٔ γ مقابل به ضلع c را می‌توان از فرمول $\sin\gamma=c/۲R$ یافت بنابر آن که $c<۲R$ یا $c=۲R$، برای γ دو مقدار یا یک مقدار وجود خواهد داشت، c نمی‌تواند بزرگتر از $۲R$ باشد زیرا، ضلع یک مثلث محاط در دایره است. به‌ازای هر مقدار γ که به این طریق یافته‌ایم، جزء‌های دیگر مثلث را می‌توان به‌صورت زیر معین کرد:

بنابر قانون تانژانتها $\frac{tg(\frac{۱}{۲})(\alpha+\beta)}{tg(\frac{۱}{۲})(\alpha-\beta)}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a/b)+۱}{(a/b)-۱}$



که در آن α و β بترتیب زاویه‌های مقابل به ضلعهای a و b هستند. چون $(\alpha+\beta)/۲=(۱۸۰°-\gamma)/۲$ پس می‌توان $(\alpha-\beta)/۲$ را از روی a/b حساب کرد. بنابراین $(\alpha+\beta)/۲$ و $(\alpha-\beta)/۲$ معلوم می‌باشند. از این‌رو α و β را می‌توان از:

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{۲}+\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad \beta=\frac{\alpha+\beta}{۲}-\frac{\alpha-\beta}{۲} \qquad (۱)$$

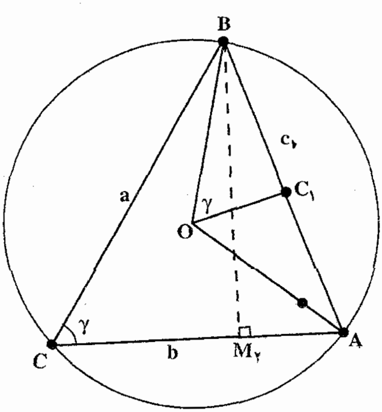
به‌دست آورد. سرانجام با استفاده از قانون سینوسها، مقادیر a و b به‌دست می‌آیند:

$$a=\frac{c.\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad b=\frac{c.\sin\beta}{\sin\gamma}$$

راه‌دوم. فرض کنیم O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و $C_۱$ پای عمود وارد از O بر AB باشد در این صورت $C_۱$ وسط AB است. با به‌کار بردن قضیه‌های مربوط به زاویه‌های محاطی و مرکزی روبه‌روی به یک کمان، در این‌جا کمان AB، داریم $B\hat{O}C_۱=A\hat{C}B=\gamma$. از این‌رو:

$$\sin\gamma=\frac{BC_۱}{OB}=\frac{c/۲}{R}=\frac{c}{۲R}$$

هرگاه $c<۲R$، این معادله دو جواب دارد؛ یک زاویهٔ حاده و یک زاویهٔ منفرجه. هرگاه $c=۲R$، آن‌گاه $\gamma=۹۰°$. به‌ازای هر مقدار γ که به این ترتیب معین می‌گردد، جزءهای دیگر مثلث را می‌توان به‌صورت زیر پیدا کرد:



از رأس دیگر مثلاً B، عمودی بر ضلع مقابل AB رسم می‌کنیم و پای عمود را با $M_۲$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$BM_۲=a.\sin\gamma=\frac{ac}{۲R}$$ و

$$CM_۲=a\cos\gamma=\frac{a\pm\sqrt{۴R^۲-c^۲}}{۲R}$$

ریشهٔ مثبت در پرانتز با یک زاویهٔ حادهٔ γ و ریشهٔ منفی با یک زاویهٔ منفرجه γ، متناظر است. همچنین:

$$AM_۲=b-CM_۲=b-a\cos\gamma$$

پس :
$$tg\alpha = \frac{BM_۲}{AM_۲} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma} = \frac{(a/b)\sin\gamma}{۱ - (a/b)\cos\gamma}$$

این فرمول، هرگاه α یک زاویهٔ منفرجه باشد، نیز برقرار است. در این حالت $AM_۲$ را منفی درنظر می‌گیریم و $b - a\cos\gamma$ منفی است. زاویهٔ β از $\alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$ به‌دست می‌آید. سرانجام، از قانون سینوسها، داریم :
$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} = ۲R\sin\alpha \quad و \quad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = ۲R\sin\beta$$

۴۱۴. عددهای طبیعی a و b و c را طول ضلعهای مثلثی می‌گیریم که قطر دایرهٔ محیطی آن $۲R = ۶/۲۵$، مساحت آن S و نصف محیط آن P باشد. چون طول هر ضلع مثلث نمی‌تواند از طول قطر دایرهٔ محیطی آن، تجاوز کند، بنابراین
$$a, b, c \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

سپس داریم :
$$(abc)^۲ = (۴SR)^۲ = p(p-a)(p-b)(p-c)(۴R)^۲$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید :
$$۶۴a^۲b^۲c^۲ = ۶۲۵(a+b+c)(c+b-a)(a+c-b)(a+b-c)$$

بنابراین باید عدد $۶۴a^۲b^۲c^۲$ بر ۶۲۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی دست‌کم، دو عدد از این سه عدد a و b و c برابر ۵ باشند. فرض کنیم مثلاً $a = b = ۵$. آن‌وقت :
$$۶۴c^۲ = (۱۰ + c)c^۲(۱۰ - c)$$

یعنی $۱۰۰ - c^۲ = ۶۴$ و $c = ۶$. بنابراین ضلعهای مثلث تنها می‌توانند ۵ و ۵ و ۶ باشند و آزمایش هم نشان می‌دهد که با شرط‌های مسأله سازگارند.

۴.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۴۱۵. داریم :
$$AB.AC = ۲R.h_a \Rightarrow ۱۶ \times ۱۵ = ۲ \times ۱۰ \times h_a \Rightarrow h_a = ۱۲$$

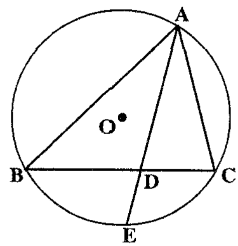
در مثلثهای قائم‌الزاویه ABH و ACH داریم :
$$BH = \sqrt{AB^۲ - AH^۲} = \sqrt{۲۵۶ - ۱۴۴} = ۴\sqrt{۷}$$
$$CH = \sqrt{AC^۲ - AH^۲} = \sqrt{۲۲۵ - ۱۴۴} = ۹$$
$$\Rightarrow BC = BH + CH = ۴\sqrt{۷} + ۹$$

۴۱۶. داریم : $AB.AC = ۲R.h_a \Rightarrow ۱۴۴ = ۱۶ \times h_a \Rightarrow h_a = ۹$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH داریم :

$AM^۲ = AH^۲ + MH^۲ = ۹^۲ + ۵^۲ = ۱۰۶ \Rightarrow AM = \sqrt{۱۰۶}$

۴۱۷. دایره‌ای به شعاع R و سپس در این دایره وتر BC به طول a را رسم می‌کنیم. روی BC نقطهٔ D را چنان می‌یابیم که DB:DC = K باشد. از نقطهٔ D به نقطهٔ E وسط کمان BC وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در A قطع کند. پاره‌خط AD نیمساز زاویهٔ درونی A است.



۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۴۱۸. اگر O و $O_۱$ بترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ADB باشند، آن‌وقت مثلث $AOO_۱$ با مثلث ACD متشابه است. جواب : aR

۴۱۹. این فاصله برابر با نصف مجموع فاصله‌های H نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، تا BC است. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تاBC برابر با نصف HA است.

۴۲۰. $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin(\alpha+\beta)}$

۴۲۱. داریم : $BD \parallel AT \Rightarrow B\hat{A}T = A\hat{B}D \ , \ A\hat{C}B = B\hat{A}T \Rightarrow A\hat{B}D = A\hat{C}B$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABD} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AD = \frac{c^۲}{b} \ , \ DC = AC - AD = \frac{b^۲ - c^۲}{b}$$

و چون $BD \parallel AT \Rightarrow \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{BC}{BT} \times \dfrac{b^۲ - c^۲}{b \times \dfrac{c^۲}{b}} \Rightarrow BT = \dfrac{ac^۲}{b^۲ - c^۲}$

$$AT^۲ = BT.TC = \frac{ac^۲}{b^۲ - c^۲}\left(a + \frac{ac^۲}{b^۲ - c^۲}\right) = \frac{(abc)^۲}{(b^۲ - c^۲)^۲} \Rightarrow AT = \frac{abc}{|b^۲ - c^۲|}$$

۲.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۴۲۳. فرض کنید R معرف شعاع دایرهٔ محیطی ΔABC، O مرکز آن و N نقطهٔ میانه‌ای مثلث BCM باشد. عمود بودن ON و CM، برابری $CN^2 - MN^2 = CO^2 - OM^2$ را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $AB = 1$، $MB = x$ و $CM = y$، در این صورت $MN^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2x^2 - k^2)$، $CN^2 = \frac{1}{9}(2y^2 + 2k^2 - x^2)$، $CO^2 = R^2$ و $OM^2 = R^2\cos^2\hat{C} + (x - \frac{1}{2})^2$ برای x به معادلهٔ $2x^2 - 3x + k^2 = 0$ می‌رسیم.

جواب: $\frac{3 \pm \sqrt{9 - 8k^2}}{4}$ (اگر $1 < k < \frac{3\sqrt{2}}{4}$، آن‌وقت هر دو نقطه در درون پاره‌خط AB قرار می‌گیرند.

۴۲۴. از تشابه مثلثهای MAB و MBC، نتیجه می‌شود که:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{BA^2}{BC^2} = k^2$$

۳.۵.۲. تساوی پاره‌خطها

۴۲۵. حکم مسأله، از این حقیقت که D بر دایرهٔ نه نقطه واقع است و این دایره با دایرهٔ محیطی به مرکز تجانس H و نسبت $\frac{1}{2}$، متجانس است، نتیجه می‌شود.

۴۲۷. فرض می‌کنیم D وسط CB باشد و AD دایره را برای دومین بار در نقطه‌ای مانند K قطع کند. ثابت می‌کنیم که مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و C روی خط راست MK متقاطعند.

چهارضلعی CMBK را درنظر بگیرید. برای این‌که نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره در نقطه‌های C و B روی قطر MK واقع باشد لازم و کافی است که:

$$\frac{CM}{CK} = \frac{MB}{BK}$$

اما، $\frac{CM}{CK} = \frac{AB}{CK} = \frac{BD}{DK} = \frac{CD}{DK} = \frac{AC}{BK} = \frac{MB}{BK}$. (در اولین و آخرین برابری از این حقیقت که $CM = AB$ و $AC = MB$، زیرا AM با BC موازی است، در دومین و چهارمین برابری از این‌که مثلث ABD با مثلث CDK و مثلث ADC با مثلث KDB متشابه است و در برابری سوم از این حقیقت که AD میانه است استفاده کرده‌ایم.)

۶.۲. شعاع

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی

۴۲۸. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا داریم:

$$s=\frac{۱۰۵}{۲}\Rightarrow R=\frac{abc}{۴s}=\frac{۱۴/۵\times ۱۰/۵\times ۱۰}{۴\times ۵۲/۵}=۷/۲۵$$

۴۲۹.

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\gamma\Rightarrow c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\gamma}\ ,\ R=\frac{c}{۲\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\gamma}}{۲\sin\gamma}$$

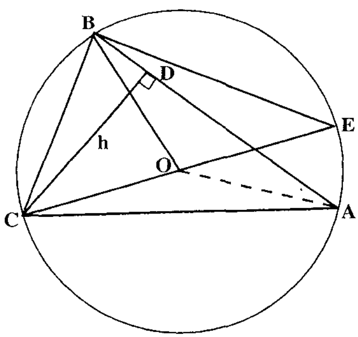
۴۳۰. اگر a , b و c طول ضلعهای مثلث مفروض باشند آن‌وقت محیط مثلثهای جدا شده برابرند با $۲(p-a)$، $۲(p-b)$ و $۲(p-c)$ که در آنها p نصف محیط مثلث مفروض است، درنتیجه اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد، آن‌وقت:

$$R_{۱}+R_{۲}+R_{۳}=(\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p})R=R$$

جواب: $R_{۱}+R_{۲}+R_{۳}$

۲.۶.۲. اندازهٔ قطر دایرهٔ محیطی

۴۳۱. گزینهٔ (ب) درست است. فرض کنید h طول ارتفاع وارد بر ضلع AB باشد. هر ارتفاع دیگر را نیز می‌توان انتخاب کرد. در این صورت مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD با مثلث قائم‌الزاویهٔ ECB متشابه است. زیرا زاویه‌های A و E مساوی‌اند. بنابراین $\frac{۲R}{۲۵}=\frac{۴۰}{h}$. برای محاسبهٔ h از مساحت استفاده کنید:



$$ABC\ \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}h\times ۳۹$$
$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۵۲\times ۱۲\times ۱۳\times ۲۷}$$
$$=۴\times ۹\times ۱۳\Rightarrow h=۲۴$$
$$۲R=\frac{۲۵\times ۴۰}{۲۴}=\frac{۱۲۵}{۳}$$

۴۳۲. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا داریم: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R$ پس:

$$۲R=\frac{۱۲}{\sin ۳۰}\Rightarrow ۲R=\frac{۱۲}{\frac{۱}{۲}}=۲۴$$

۷.۲. محیط

۱.۷.۲. اندازهٔ محیط

۴۳۴. $(۳+\sqrt{۳})cm$ از رابطهٔ $CD.AD = BD^۲$ استفاده کرده و قانون کسینوسها را در مورد مثلث BAD به‌کار گیرید.

۴۳۵. با توجه به رابطهٔ $bc = ۲R.h_a$ داریم:

$$bc = ۲\times\frac{۳۵\sqrt{۶}}{۲۴}\times۲\sqrt{۶} = ۳۵$$

از آن‌جا:

$$\begin{cases} b+c=۱۲ \\ bc=۳۵ \end{cases} \Rightarrow b=۵\ ,\ \ c=۷$$

از $h_a = \frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ اندازهٔ ضلع a برابر ۴ محاسبه می‌شود. در نتیجه اندازهٔ محیط مثلث برابر است با:

$$۲p = a+b+c = ۴+۵+۷ = ۱۶$$

۴۳۶. داریم:

$$۱۲۰^\circ + ۹۰^\circ + \overparen{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overparen{BC} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۷۵^\circ$$

$$\Rightarrow c = AB = C_۳ = R\sqrt{۳} = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$b = AC = C_۴ = R\sqrt{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin ۷۵} = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sin ۴۵} \Rightarrow a = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} = ۵(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow ۲p = a+b+c = ۱۵\sqrt{۲}+۱۰\sqrt{۳}+۵\sqrt{۶}$$ محیط مثلث

۸.۲. مساحت

۱.۸.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

۴۳۷. $۲۰۰cm^۲$. فرض کنید که AK و CM عمودهای وارده بر مماس، و BD ارتفاع مثلث ABC باشد. از تشابه مثلثهای AKB و BMC تساوی $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{۱۶}$ و از تشابه مثلثهای AKB و BDC تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{۲۵}$ را به‌دست آورید.

۴۳۸. $\frac{۱۸۰\sqrt{۳}}{۱۹}$

۴۳۹. $۳\sqrt{۲}$

۴۴۰. $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$

۴۴۲. داریم :
$$a = ۲R\sin\hat{A} \Rightarrow a = ۴\times\frac{۱}{۲} = ۲$$
$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۴ \Rightarrow \frac{۲}{\sin ۳۰} = \frac{۳}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۴$$
$$\Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cos\hat{B} = \sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۴۴۳. ضلعهای مثلث را بر حسب R و زاویه‌های A، B و C (با استفاده از قانون سینوسها) بیان کرده و ثابت کنید $\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C} \leq \frac{۳}{۴}$ است.

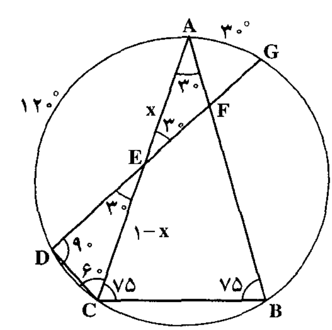
۲.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۴۴. $۲۱۰cm^۲$. فرض کنید که $OP \perp AC$ $(OP = ۱۰cm)$، BH ارتفاع مثلث ABC و $OK \perp BH$ است. از مثلث BHD درمی‌یابیم که $BH = ۲۰cm$ است. آن‌گاه در مثلث OBK، $BK = ۱۰cm$ و $O\hat{B}K = B\hat{D}H$ می‌باشد. از این مثلث شعاع دایره و سپس AP و AC را پیدا می‌کنیم. با استفاده از فرمول $CD.AD = BD^۲$ مقدار CD را به‌دست می‌آوریم.

۴۴۵. مساحت مثلث ارتفاعیه برابر $\frac{abc}{۲R^۲}$ است.

۳.۸.۲. نسبت مساحتها

۴۴۶. گزینه (ج) درست است. مطابق شکل وتر DC را رسم می‌کنیم چون $\overset{\frown}{AC} = ۱۵۰^\circ$
$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{DC} = ۱۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$
بنابراین $A\hat{C}D = ۶۰^\circ$ چون $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{DG}$،
$$\overset{\frown}{GA} = \overset{\frown}{GD} - \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC} - ۱۲۰^\circ = ۳۰^\circ$$
بنابراین $\overset{\frown}{CG} = ۱۸۰^\circ$ و $C\hat{D}G = ۹۰^\circ$ پس ΔDEC یک مثلث $۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ$ است.



چون نسبت مساحتها منظور ماست، می‌توانیم بدون کاستن از کلی بودن مسأله فرض کنیم که $AC = AB = DG = ۱$. چون AC و DG دو وتر یک دایره و دارای طولهای برابرند، داریم $AE = DE$. طول مشترک این دوپاره‌خط را x می‌گیریم. آن‌گاه :
$$CE = ۱ - x = ۲x/\sqrt{۳}$$

از حل این معادله نسبت به x نتیجه می‌شود $AE = x = ۲\sqrt{۳} - ۳$ همچنین از این‌که BA و DG دو وتر مساوی هم از یک دایره‌اند که در F برخورد کرده‌اند، نتیجه می‌شود FG=FA و چون ΔFAE متساوی‌الساقین است، EF=FA. از این‌رو :

$$EF = FG = \frac{۱}{۲}(۱-x)$$

$$\Delta AFE \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(AE)(AF)\sin ۳۰^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲}(x)\times(\frac{۱-x}{۲})\times\frac{۱}{۲} = \frac{x-x^۲}{۸} = \frac{۷\sqrt{۳}-۱۲}{۴}$$

$$\Delta ABC \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(AB)(AC)\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴}$$

بنابراین :

$$\frac{\Delta AFE \text{ مساحت}}{\Delta ABC \text{ مساحت}} = ۷\sqrt{۳} - ۱۲$$

۴.۸.۲. رابطه‌ای درمساحتها

۴۴۷. کتانژانت زاویهٔ بین یک میانه و یک ضلع مثلث ABC را پیدا می‌کنیم. اگر $A_۱\hat{A}B = \varphi$ ($AA_۱$ میانهٔ مثلث ABCاست، b ،a و c طول ضلعهای مثلث و m_a ، m_b و m_c طول میانه‌های آن هستند وS مساحت آن است) آن‌گاه :

$$\cot g\varphi = \frac{۲c - a\cos\beta}{h_c} = \frac{۲c^۲ - ac\cos B}{۲c^۲} = \frac{۳c^۲ + b^۲ - a^۲}{۴s}$$

فرض کنید M نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC باشد، خطهای راست عمود بر میانه‌هایی که از رأسهای A و B خارج می‌شوند، در $C_۱$ متقاطعند ؛ $M\hat{C}_۱B = M\hat{A}B = \varphi$ ($MAC_۱B$ چهارضلعیی محاطی است) درنتیجه :

$$S_{MBC_۱} = \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳}m_b)^۲\cot g\varphi = \frac{(۲a^۲ + ۲c^۲ - b^۲)(۳c^۲ + b^۲ - a^۲)}{۷۲S}$$

مساحت مثلث مطلوب، برابر مجموع مساحتهای شش مثلث است که هر مساحت به روشی مشابه به‌دست می‌آید. بالاخره به‌دست می‌آوریم : $\frac{(a^۲+b^۲+c^۲)^۲}{۱۲S} = \frac{۲۷(R^۲-d^۲)^۲}{۴S}$ (اثبات برابری $a^۲+b^۲+c^۲ = ۹(R^۲-d^۲)$ به خواننده واگذار می‌شود). جواب : $\frac{۲۷}{۴}(R^۲-d^۲)^۲$

۴۴۸. نمادگذاری: ABC مثلث مفروض و M نقطهٔ به فاصلهٔ d از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABCاست، $A_۱$ ، $B_۱$ و $C_۱$ پای عمودهای وارد از M بر CA،BC و AB ؛ $A_۲$ ، $B_۲$ و $C_۲$ بترتیب نقطه‌های برخورد BM،AM و CM با دایرهٔ محیطی مثلث

ABC ، a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC، a_1، b_1، c_1 و a_2، b_2، c_2 بترتیب طول ضلعهای مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، S، S_1 و S_2 مساحت این مثلثها هستند. داریم:

$$a_1 = AM.\sin\hat{A} = AM\times\frac{a}{2R} \qquad (1)$$

طول ضلعهای b_1 و c_1 به روش مشابه پیدا می‌شوند. از تشابه مثلثهای B_2MC_2 و BMC، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{a_2}{a}=\frac{B_2M}{CM}=\frac{C_2M}{BM} \qquad (2)$$

نسبتهای مشابه برای $\frac{b_2}{b}$ و $\frac{c_2}{c}$، به روش مشابه به‌دست می آیند. مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متشابه‌اند بعلاوه:

$$\frac{S_2}{S}=\frac{a_2b_2c_2}{abc} \qquad (3)$$

با توجه به تمام اینها داریم:

$$\left(\frac{S_1}{S}\right)^3=\frac{S_1^3}{S_2^3}\cdot\frac{S_2^3}{S^3}=\frac{a_1^2.b_1^2.c_1^2}{a^2.b^2.c^2}\cdot\frac{a_2^3.b_2^3.c_2^3}{a^3.b^3.c^3}$$
$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3\frac{AM^2.BM^2.CM^2.a^2b^2c^2}{a^3b^3c^3}\cdot a_2b_2c_2$$
$$=\left(\frac{1}{4R^2}\right)^3 AM^2.BM^2.CM^2.\frac{B_2M}{CM}\cdot\frac{C_2M}{AM}\cdot\frac{A_2M}{BM}$$
$$=\left(\frac{1}{4R^2}\left|R^2-d^2\right|\right)^3$$

در برابری دوم، از تشابه مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ و تساوی (۳)، در برابری سوم از دستور (۱) و در برابری چهارم از دستور (۲) استفاده کرده‌ایم.

تبصره. به ازای d=R، مساحت مثلث تشکیل شده با پای عمودها برابر با صفر می‌شود، یعنی، این پاها روی یک خط راست واقعند. این خط، خط سیمسون است.

۹.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به زاویه‌ها، ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۴۵۰. داریم: الف)

$$\sin\hat{A}=\frac{a}{2R},\ \sin\hat{B}=\frac{b}{2R},\ \sin\hat{C}=\frac{c}{2R}$$
$$\Rightarrow \sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2P}{2R}=\frac{P}{R}$$

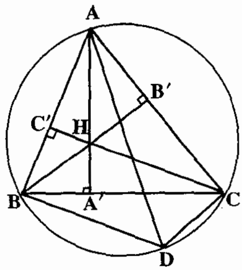
رابطه‌های (ب) و (پ) به روش مشابه ثابت می‌شوند.

۴۵۲. با فرض $b>c$ و با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overline{BA}^2-\overline{BD}^2=\overline{AA'}^2-\overline{DA'}^2$$
$$c^2-\left(\frac{a}{2}-\overline{DA'}\right)^2=\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)-\overline{DA'}^2 \Rightarrow DA'=\frac{b^2-c^2}{2}$$

۲.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۴۵۳. قطر گذرنده از A دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. DC و BB' هردو به AC عمودند و درنتیجه موازی، همچنین DB و CC'. پس BHCD متوازی‌الاضلاع است؛ یعنی $HB = CD$ در قائم‌الزاویهٔ ACD داریم:



$$AC^{۲} + CD^{۲} = AD^{۲}$$

و یا:

$$AC^{۲} + HB^{۲} = ۴R^{۲}$$

۴۵۴. داریم:

$$S_{ABC} = S_{BHC} + S_{BHA} + S_{CHA}$$

و یا

$$S = \frac{HA' \times BC}{۲} + \frac{HB' \times AC}{۲} + \frac{HC' \times AB}{۲}$$

و یا

$$S = \frac{a(h_a - \alpha)}{۲} + \frac{b(h_b - \beta)}{۲} + \frac{c(h_c - \gamma)}{۲}$$

و یا

$$S = \frac{a \times h_a}{۲} + \frac{b \times h_b}{۲} + \frac{c \times h_c}{۲} - \left(\frac{a\alpha}{۲} + \frac{b\beta}{۲} + \frac{c\gamma}{۲}\right)$$

می‌دانیم:

$$۲s = ah_a = bh_b = ch_c$$

از آن‌جا

$$۴s = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

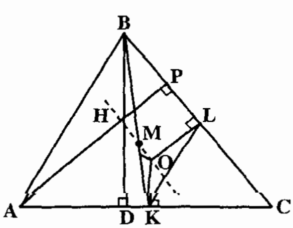
و یا

$$\frac{abc}{R} = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

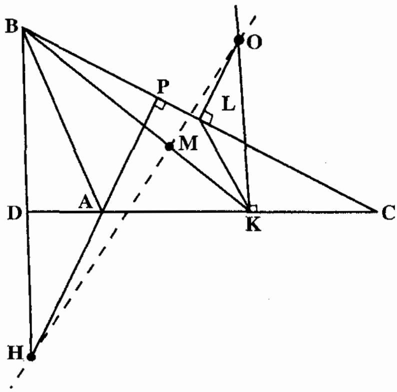
طرفین را بر abc تقسیم می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{۱}{R} = \frac{\alpha}{bc} + \frac{\beta}{ac} + \frac{\gamma}{ab}$$

۴۵۶. مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC را با مرکز ارتفاعی H، مرکز دایرهٔ محیطی O، ارتفاعهای BD و AP و نیز با نقطه‌های K و L به عنوان وسط ضلعها، OK و OL که عمود بر ضلعها هستند درنظر می‌گیریم (شکل الف). مثلثهای ABH و KOL مشابه هستند (به دلیل BH‖OK، AH‖OL، AB‖LK)؛



و از اینرو $\frac{BH}{OK} = \frac{AB}{LK}$ را داریم. پاره‌خط LK وسط دو ضلع ΔABC را به‌هم وصل کرده و از این‌رو $\frac{AB}{LK} = ۲$ است. و آن‌گاه $\frac{AB}{OK} = ۲$ بوده و مطلوب مسأله اثبات می‌گردد.



حال فرض کنید که مثلث ABC یک مثلث غیر متساوی‌الساقین با زاویهٔ منفرجه باشد. عبارتهای مورد استفاده برای اثبات مسأله به همان‌صورت حالت اول خواهد بود (شکل ب). ازتشابه مثلثهای ABH و KOL به $۲=\frac{AB}{LK}=\frac{BH}{OK}$ و در نتیجه به $BH = ۲OK$ دست می‌یابیم. خطهای نقطه‌چین مرسوم در شکلهای (الف) و (ب) را خط اولر می‌نامند.

۴۵۷. با توجه به $h_a = \frac{۲s}{a}$، $h_b = \frac{۲s}{b}$، $h_c = \frac{۲s}{c}$ و $R = \frac{abc}{۴s}$ درستی رابطه مشخص می‌شود.

۳.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۴۵۸. اگر O مرکز دایره محیطی و G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد داریم:

$$\overline{OA}^۲ + \overline{OB}^۲ + \overline{OC}^۲ = ۳\overline{OG}^۲ + \overline{GA}^۲ + \overline{GB}^۲ + \overline{GC}^۲ \quad ; \qquad (۱)$$

اما $OA = OB = OC = R$ است و اگر m میانهٔ رأس A باشد داریم:

$$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲m^۲ \ ;$$

$$m^۲ = \frac{۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲}{۴} \text{ و } GA = \frac{۲}{۳}m \ ;$$

پس:

$$\overline{GA}^۲ = \frac{۴}{۹}m^۲ = \frac{۱}{۹}(۲b^۲ + ۲c^۲ - a^۲) \ ;$$

و به همین ترتیب

$$\overline{GB}^۲ = \frac{۱}{۹}(۲c^۲ + ۲a^۲ - b^۲) \ ;$$

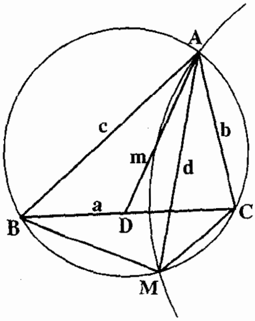
$$\overline{GC}^۲ = \frac{۱}{۹}(۲a^۲ + ۲b^۲ - c^۲) \ ;$$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$۳R^۲ = ۳OG^۲ + \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۳} \ ;$$

$$OG^۲ = R^۲ - \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۹} \ .$$

۴۵۹. حکم مسأله ازاین حقیقت، که E روی دایرهٔ نه نقطه واقع است و این دایره با دایرهٔ محیطی، به مرکز تجانس M و نسبت $\frac{-۱}{۲}$ متجانس است، نتیجه می‌شود.



۴۶۱. مکان نقطه‌های M عبارتست از یک دایره و اگر وتر مشترک آن با دایرهٔ محیطی مثلث AM باشد، درچهارضلعی ABMC حکم قضیهٔ بطلمیوس را می نویسیم:

$$b.MB + c.MC = AM.BC$$

اما بنا به فرض داریم: $b.MB = c.MC$ و $BC = ۲BD$، بنابراین داریم: $c.MC = AM.BD$ و یا $\frac{BD}{BA} = \frac{MC}{MA}$. از این تناسب معلوم می‌شود که دو مثلث BAD و MAC متشابه‌اند.

پس داریم: $\frac{AC}{AD} = \frac{AM}{AB}$ و یا $b.c = m.d$

۴۶۲. بنابه رابطه‌های قبل داریم:

$$\overline{OG}^۲ = R^۲ - \frac{۱}{۹}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

و چون $OH = ۳OG$ قرار دهیم. رابطهٔ (۱) و اگر $GH = ۲OG$ قرار دهیم رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید. برای رابطهٔ (۳) اگر M و H محل تلاقی ارتفاعها فرض کنیم، داریم:

$$\overline{HA}^۲ + \overline{HB}^۲ + \overline{HC}^۲ = \overline{GA}^۲ + \overline{GB}^۲ + \overline{GC}^۲ + ۳\overline{HG}^۲ \qquad (۱)$$

ولی داریم:

$$\overline{GA}^۲ + \overline{GB}^۲ + \overline{GC}^۲ = \frac{۱}{۳}(a^۲ + b^۲ + c^۲)$$

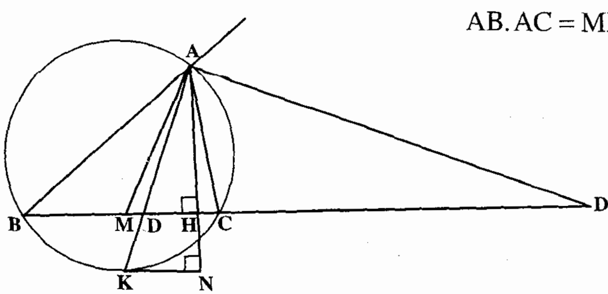
به‌جای طرف دوم رابطهٔ (۱) مساوی آنها را قرار می‌دهیم، حکم ثابت می‌شود.

۲.۹.۴. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۲.۹.۴.۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها(برابریها)

۴۶۴. اگر نیمساز AD دایرهٔ محیطی را در K قطع کند و از K خطی به موازات BC رسم کنیم تا ارتفاع AH را در N قطع کند دومثلث ′ADD و NKA متشابه‌اند و دو مثلث ABD و AKC نیز متشابه می‌باشند. از آن‌جا ثابت می‌شود که

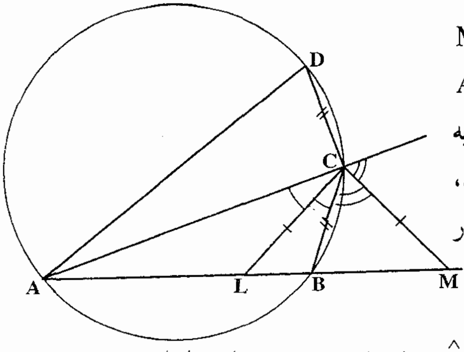
$$AB.AC = MH.DD'$$



۴۶۶. دو مثلث EBD و BAE متشابه‌اند. زیرا $\hat{B}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_1$ و $\hat{E}$ در هر دو مثلث مشترک است. پس داریم:

$$\frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.ED$$

۴۶۷. دو مثلث AEB و EDB متشابه‌اند از آن‌جا داریم $EA^2 = EA.ED$.



۴۶۸. فرض می‌کنیم، نقطه‌های A، L، B و M به همین ردیف روی خط راست AB واقع باشند (شکل حالتی را که نقطه‌ها به ردیف M، A، L و B واقع باشند، به‌صورتی مشابه مورد بررسی قرار می‌دهد) داریم:

$C\hat{L}M = 45°$ و $L\hat{C}M = \frac{1}{2}\times 180° = 90°$ (زیرا $CL = CM$). بنابراین:

$$2B\hat{A}C + B\hat{C}A = 2(L\hat{A}C + L\hat{C}A) = 2C\hat{L}M = 90° \; ,$$
$$B\hat{A}C + B\hat{C}A = 180° - A\hat{B}C$$

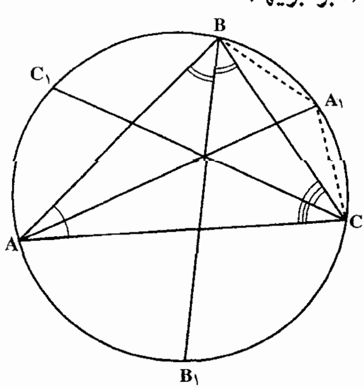
از آن‌جا $B\hat{A}C = A\hat{B}C - 90°$

چون زاویهٔ ABC منفرجه است، قطر AD از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، در بیرون این مثلث قرار می‌گیرد، یعنی:

$$D\hat{A}C = (180 - A\hat{D}C) - A\hat{C}D = A\hat{B}C - 90° = B\hat{A}C$$

(زیرا زاویه‌های ABC و ADC، زاویه‌های روبه رو، درچهارضلعی محاطی ABCD هستند). بنابراین $DC = BC$ و $4R^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = AC^2 + BC^2$

۲.۴.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)



۴۷۰. ثابت می‌کنیم: $AA_1 > \frac{1}{2}(AB + AC)$

در واقع، بنابر قضیهٔ بطلمیوس، داریم:

$AA_1.BC = AB.A_1C + AC.A_1B$ و

با درنظر گرفتن برابری زاویه‌های BAA_1 و CAA_1 (دو زاویهٔ محاطی) به‌دست می‌آید: $A_1B = A_1C = x$ و

$$2AA_1 = 2\times\frac{AB.x + AC.x}{BC} = (AB + AC)\cdot\frac{2x}{BC} > AB + AC$$

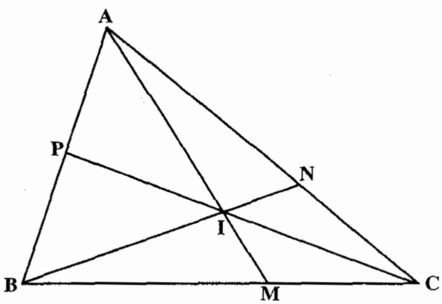
زیرا $2x = A_1B + A_1C > BC$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود :

$$BB_1 > \frac{1}{2}(BA+BC)\ ,\ CC_1 > \frac{1}{2}(CA+CB)$$

که از مجموع آنها، به نابرابری موردنظر می‌رسیم :

$$AA_1+BB_1+CC_1 > \frac{1}{2}(AB+AC+AB+BC+AC+BC) =$$
$$AB+BC+AC$$

۴۷۱. برای هر سه خط همرس داریم :



$$\frac{AI}{IM}+\frac{BI}{IN}+\frac{CI}{IP} \geq 6$$

زیرا با درنظر گرفتن مساحتها داریم :

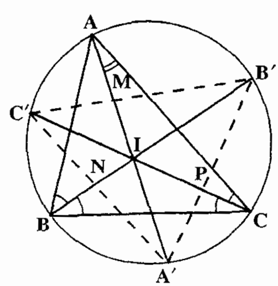
$$\frac{IM}{MA}+\frac{IN}{BN}+\frac{IP}{CP} = 1$$

پس، $\frac{AM}{IM}+\frac{BN}{IN}+\frac{CP}{IP} \geq 9$

و یا : $\frac{AI+IM}{IM}+\frac{BI+IN}{IN}+\frac{CI+IP}{IP} = 3+\frac{AI}{IM}+\frac{BI}{IN}+\frac{CI}{IP} \geq 9$

و در نتیجه رابطهٔ (۱) برقرار است.

حال با توجه به شکل زیر بدیهی است که $A'C'$ عمود منصف IB و $A'B'$ عمود منصف IC و $B'C'$ عمود منصف IA است پس :



$$\frac{IA'}{IM}+\frac{IB'}{IN}+\frac{IC'}{IP} \geq 6$$

و از آن‌جا : $\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC} \geq 3$

اکنون طبق نامساوی «اردیش ـ مردل» داریم :

$$IA'+IB'+IC' \geq 2(IM+IN+IP)$$

و یا : $IA'+IB'+IC' \geq IA+IB+IC$

۵.۹.۲. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۴۷۲. بنابه قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی داریم :

$$AM.BC = BM.AC + MC.AB \Rightarrow a.AM = b.BM + c.CM \qquad (۱)$$

$$\Delta MBD \sim \Delta ADC, \Delta MDC \sim \Delta BAD \Rightarrow \frac{BM}{AC} = \frac{BD}{AD}, \frac{MC}{AB} = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow BM = b \times \frac{BD}{AD} \ , \ MC = c \times \frac{CD}{AD}$$

این دو را در رابطهٔ (۱) گذاشته و داریم : $a.AM.AD = b^{۲}.BD + c^{۲}.CD$

۴۷۴. می‌دانیم که در مثلث ABC داریم $AB \times AC = ۲R \times AH$. از طرف دیگر CO را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ F قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACF داریم :

$AC^{۲} = ۲R \times CN$ و به همین طریق $\overline{AB}^{۲} = ۲R \times BM$

پس $\overline{AB}^{۲} \times \overline{AC}^{۲} = ۴R^{۲} \times BM \times CN$

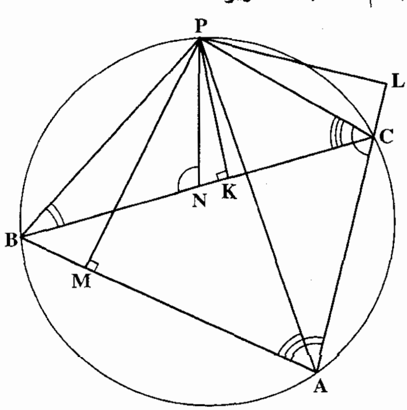
اما به موجب رابطهٔ $AB \times AC = ۲R \times AH$ داریم :

پس ؛ $\overline{AB}^{۲} \times \overline{AC}^{۲} = ۴R^{۲} \times \overline{AH}^{۲}$

$$AH^{۲} = BM \times CN$$

۴۷۶. روی پاره‌خط راست BC، می‌توان نقطهٔ N را طوری پیدا کرد که برای آن داشته باشیم : $P\hat{N}B = P\hat{C}A$ ، زیرا :

$P\hat{C}B < P\hat{C}A = ۱۸۰^{\circ} - P\hat{B}A < ۱۸۰^{\circ} - P\hat{B}C$ در این‌صورت، دو مثلث BPN و APC و همچنین دو مثلث CPN و APB باهم متشابه‌اند، زیرا :



$P\hat{N}C = ۱۸۰^{\circ} - P\hat{N}B = P\hat{B}A$ و $P\hat{C}B = P\hat{A}B$ و $P\hat{B}C = P\hat{A}C$. اگر توجه کنیم که PK، ارتفاع مثلثهای BPN و CPN ؛ و PL و PM، بترتیب ارتفاعهای مثلثهای متشابه با آنها، یعنی APC ، APB هستند، به‌دست می‌آید :

$$\frac{AC}{PL} = \frac{BN}{PK} \ , \ \frac{AB}{PM} = \frac{CN}{PK}$$

از آن‌جا :

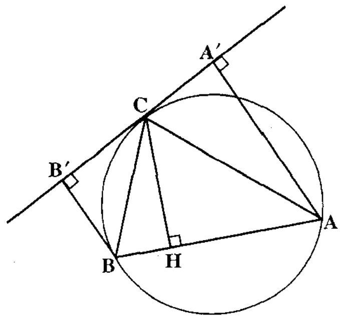
$$\frac{AC}{PL} + \frac{AB}{PM} = \frac{BN + CN}{PK} = \frac{BC}{PK}$$

۴۷۸. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BCH با CAA' و ACH با BCB' متشابه‌اند.

از آن‌جا داریم :

$$\frac{CH}{AA'}=\frac{BC}{CA} \quad (۱)$$

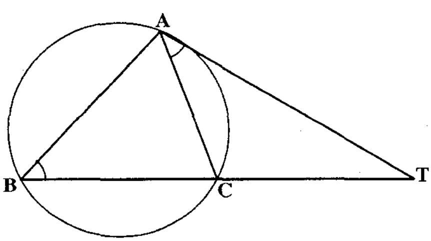
$$\frac{CH}{BB'}=\frac{AC}{BC} \quad (۲)$$



از ضرب دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\frac{CH^{۲}}{AA'.BB'}=۱\Rightarrow CH^{۲}=AA'.BB'$$

۴۷۹. داریم :



$$\Delta ACT\sim\Delta BAT\Rightarrow\frac{TB}{AT}=\frac{AT}{TC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{TB}{AT}\cdot\frac{AT}{TC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{TB}{TC}=\frac{AB^{۲}}{AC^{۲}}$$

۴۸۰. نسبت به دو موازی xy و MN و قاطعهای AB و AC بترتیب زاویهٔ $M\hat{N}A$ با $N\hat{A}Y$ و زاویهٔ $A\hat{M}N$ با $M\hat{A}X$ برابر می‌شود. ولی $A\hat{B}C=Y\hat{A}C$ و $A\hat{C}B=X\hat{A}B$ در نتیجه دو مثلث مطلوب به حالت برابری دو زاویه متشابه می‌شوند.

پس : $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}$

۴۸۳. اگر از N به C وصل کنیم، دو مثلث ANC و AMB متشابه‌اند در نتیجه :

$\frac{AM}{AC}=\frac{AB}{AN}$ و از آن‌جا $AM.AN=AB.AC$ اگر AM ارتفاع نظیر ضلع BC باشد AN قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و رابطهٔ $bc=۲Rh_a$ به‌دست می‌آید.

۲.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۸۴. داریم:

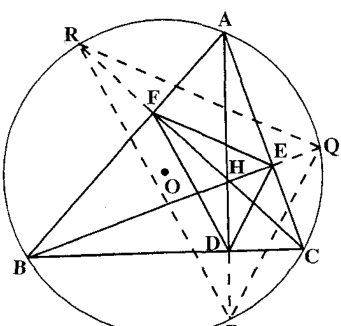
$$A\hat{B}H = ۹۰^\circ \ , \ A\hat{C}H = ۹۰^\circ \Rightarrow DE \| BH \ , \ DF \| CH \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{AD}{AH}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AH} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow EF \| BC$$

۴۸۵. اگر D، E و F محل ارتفاعها و P، Q و R بترتیب محل برخورد آنها با دایرهٔ محیطی مثلث ABC و H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث باشد می‌دانیم که H و P نسبت به BC قرینه‌اند و همین‌طور H و Q و H و R نسبت به AC و AB. پس در دو مثلث HFD و HRP داریم:

$$HD:HP = \frac{۱}{۲} \text{ و } HF:HR = \frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه این ضلعها متناسبند و چون H در هر دو مشترک است پس: $FD \| RP$ است و همینطور برای سایر ضلعها.



تبصره. هریک از مثلثهای AFE و CDE و BFD با مثلث ABC متشابه‌اند زیرا در دو مثلث AFE و ABC داریم $A\hat{F}E = \hat{C}$ زیرا هرکدام با $B\hat{E}F$ مکمل هستند و $A\hat{E}F = \hat{B}$ زیرا با $F\hat{E}C$ مکملند و در نتیجه دومثلث متشابه‌اند و همچنین برای مثلثهای دیگر.

۴۸۶. می‌دانیم که $(CBDD')$ تقسیم توافقی است و چون I وسط $D'D$ است، پس: $\overline{ID}^۲ = \overline{IB}.\overline{IC}$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' میانهٔ وارد بر وتر (AI) نصف وتر DD' است، $AI = \frac{DD'}{۲}$. لذا رابطهٔ بالا به‌صورت $\overline{IA}^۲ = \overline{IB}.\overline{IC}$ درمی‌آید و این رابطه نشان می‌دهد که دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ A بر خط AI مماس است.

۴۸۷. نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ به مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند M که به ازای آنها $۵MA^۲ - ۸MB^۲ + ۳MC^۲ = ۰$ متعلقند. این مجموعه، یک خط راست است و به روشنی، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث درشرطی که این مجموعه را تعریف می کند، صدق می کند.

۴۸۸. چون حاصل ضرب دو ضلع $AB.AC$ مثلث ABC برابر است با حاصل‌ضرب ارتفاع AH در قطر دایرهٔ محیطی آن، پس قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC طول ثابتی دارد پس جمیع دایره‌های محیطی مثلثهای ABC باهم برابرند و همه بر نقطهٔ A می‌گذرند؛ پس تمام آنها در داخل دایره‌ای به شعاع برابر قطر مشترک آنها و به مرکز A قرار دارند و همگی براین دایره مماسند. اگر مثلث ABC در دایرهٔ O محاط باشد به قسمی که $AB.AC$ ثابت بماند چون $AB.AC = ۲R.AH$ (که در آن $۲R$ قطر دایرهٔ O و AH ارتفاع مثلث ABC است) می‌باشد، پس AH مقداری است ثابت. بنابراین جمیع وضعهای خطهای BC بر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع این مقدار ثابت مماس می‌باشند.

۴۸۹. داریم:
$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AN}+\widehat{PM}}{۲} = \frac{\frac{\widehat{AC}}{۲}+\frac{\widehat{ABC}}{۲}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۴} = ۹۰^\circ$$
$$\Rightarrow AM \perp PN$$

۴۹۰. داریم:
$$M\hat{I}B = \frac{۱}{۲}\hat{A}+\frac{۱}{۲}\hat{B}\ ,\ I\hat{B}M = \frac{۱}{۲}\hat{A}+\frac{۱}{۲}\hat{B} \Rightarrow$$
$$M\hat{I}B = I\hat{B}M \Rightarrow MI = MB$$

پس مثلث IMB متساوی‌الساقین است. در مثلث IMC داریم:

$M\hat{I}C = M\hat{C}I = \frac{۱}{۲}\hat{A}+\frac{۱}{۲}\hat{B}$ پس این مثلث نیز متساوی‌الساقین است.

۴۹۱. برای تعیین اندازهٔ زاویه‌های مثلث $A_۱B_۱C_۱$، ازاین نتیجه که نقطه‌های P، $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ روی یک دایره واقعند، استفاده کنید. (همین مطلب برای چهار نقطهٔ دیگر هم درست است) اگر نقطهٔ P در درون مثلث ABC قرار گیرد، آن‌وقت:
$$A_۱\hat{C}_۱B_۱ = A_۲\hat{C}_۲B_۲ = A\hat{P}B - A\hat{C}B$$
برای مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، هشت نقطهٔ متمایز P وجود دارد. به‌طوری که مثلثهای $A_۱B_۱C_۱$ و $A_۲B_۲C_۲$ ی متناظر آنها، با مثلث ABC متشابه‌اند (مثلث $A_۲B_۲C_۲$ با آن قابل انطباق می‌شود). از این هشت نقطه، شش تا در درون دایرهٔ محیطی مثلث، و دو تا بیرون آن قرار دارند.

۴۹۲. فرض کنید $B_۲$ و $C_۲$ نقطه‌های مقابل قطری نقطه‌های B و C باشند، M دومین نقطهٔ برخورد $B_۲B_۱$ و دایرهٔ محیطی مثلث ABC و $C'_۱$ نقطهٔ برخورد AB و $C_۲M$ باشد. بنابر قضیهٔ پاسکال که در شش ضلعی $AB_۲CMBC_۲$ به‌کار رود، نقطهٔ O (مرکز دایره)، $B_۱$ و $C'_۱$ روی یک خط راست واقعند، یعنی $C'_۱$ و $C_۱$ منطبق است. اما $B\hat{M}B_۱ = B\hat{M}B_۲ = ۹۰^\circ$ و $C\hat{M}C_۱ = C\hat{M}C_۲ = ۹۰^\circ$؛ بنابراین M یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های به قطرهای $BB_۱$ و $CC_۱$ است. فرض کنید N دومین نقطهٔ برخورد

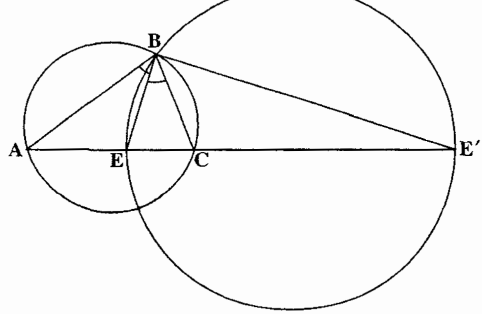
این دایره‌ها باشد. وتر مشترک آنها شامل نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است. اگر $BB_\circ$ ارتفاع مثلث ABC باشد، آن‌وقت $MH.HN = BH.HB_\circ$. بدین ترتیب N روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC قرار دارد.

۴۹۳. فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد و A_1، B_1 و C_1 وسط ضلعهای متناظر آن باشند، ثابت کنید دایره‌ای که مثلاً از رأس A می‌گذرد و در شرطهای مسأله صادق است، از نقطه‌های برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی A و میانخط B_1C_1 هم می‌گذرد. بنابراین، برای کلیهٔ نقطه‌هایی مانند M از این دایره برابری $B_1M:C_1M = B_1A:C_1A = b:a$ برقرار است بنابراین اگر M_1 و M_2 نقطه‌های برخورد چنین دایره‌هایی باشند، آن‌وقت : $A_1M_1:B_1M_1:C_1M_1 = a:b:c$ (همین‌طور برای نقطهٔ M_2). بدین ترتیب M_1 و M_2 به دایرهٔ سومی متعلقند. بعلاوه، M_1 و M_2 متعلق به خط راستی هستند که برای کلیهٔ نقطه‌هایی مانند M از آن، برابری $(c^2-b^2)A_1M^2+(a^2-c^2)B_1M^2+(b^2-a^2)C_1M^2=0$ صادق است. این خط از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ و نقطهٔ برخورد میانه‌های آن می‌گذرد یعنی این خط بر خط اویلر مثلث $A_1B_1C_1$ و بنابراین برخط اویلر مثلث ABC منطبق است.

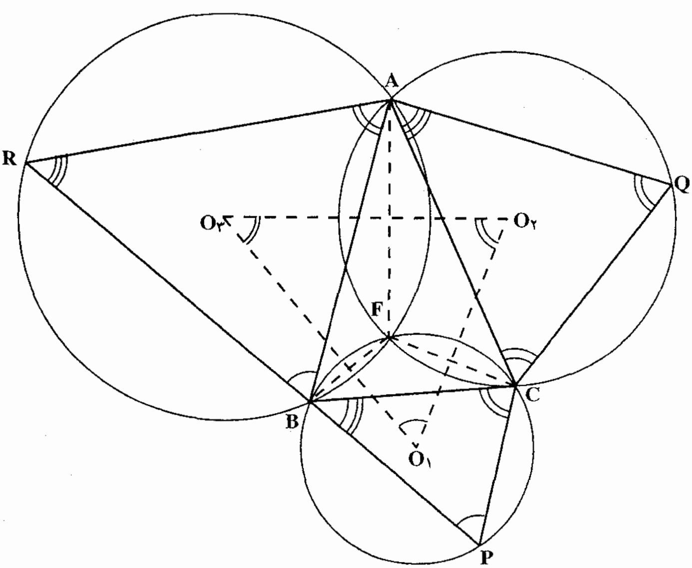
۴۹۴. دایرهٔ آپولونیوس که از رأس B ی مثلث ABC می‌گذرد، مکان هندسی نقطه‌های M است که برای آنها $\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}$ درنتیجه اگر D نقطهٔ برخورد این دایرهٔ آپولونیوس و دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن وقت خط راست BD، AC را به نسبت

$$\frac{S_{BAD}}{S_{BCD}}=\frac{AB.AD}{CB.CD}=\frac{AB^2}{CB^2}$$

تقسیم می‌کند.



۴۹۵. این قضیه که دربارهٔ خطهای همرس است، اثباتی بسیار ساده دارد. بنابه شکل، روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آن، مثلثهای CBP، ACQ و BAR را چنان رسم کرده‌ایم که مجموع سه زاویهٔ Q،P و R برابر با ۱۸۰°است. دایره های محیطی دو مثلث CBP و ACQ که در C مشترکند در نقطهٔ دیگر F نیز مشترکند. از F به سه نقطهٔ A، B و C وصل می کنیم.



هریک از چهار گوشه های FBPC و FCQA محاطی است و با توجه به این که درهر چهار گوشهٔ محاطی زاویه های روبه‌رو مکملند می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned} A\hat{F}B &= ۳۶۰^\circ - (B\hat{F}C + C\hat{F}A) \\ &= ۳۶۰^\circ - \left[(۱۸۰^\circ - \hat{P}) + (۱۸۰^\circ - \hat{Q})\right] \\ &= \hat{P} + \hat{Q} = ۱۸۰^\circ - \hat{R} \end{aligned}$$

بنابراین چهار گوشهٔ ARBF محاطی است و دایرهٔ محیطی مثلث ABR از F می گذرد. دو حالت خاص قضیه به‌صورت زیر قابل ملاحظه است :

قضیه. هرگاه رأسهای A، B و C از مثلث ABC بترتیب روی ضلعهای RP، QR و RQ از مثلث PQR واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای CBP، ACQ و BAR در یک نقطه مشترکند.

قضیه. هرگاه روی ضلعهای مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه PCB، CQA و BAR را بسازیم (که در تشابه آنها زاویه‌های نظیر به ترتیبی است که در نامگذاری مثلثها به‌کار رفته است و ملاحظه می‌شود که زاویه‌های Q،P و R متناظر نیستند)، دایره‌های محیطی سه مثلث مزبور در یک نقطه مشترکند.

این قضیه در ۱۸۳۸ توسط **میکل** ثابت شده و از طرف **فوردر** به قضیهٔ محور موسوم شده است. هرگاه به جای C، B، A، R، Q و P بترتیب C_1، B_1، A_1، C، B و A را به کار ببریم تا همان شکل را داشته باشیم، می‌توانیم این قضیه را به شرح مبسوط زیر ثابت کنیم:

هرگاه A_1، B_1 و C_1 سه نقطهٔ دلخواه باشند که بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC واقع باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C دریک نقطهٔ P مشترکند. در حالت خاص که AP، BP و CP قطرهای این دایره‌ها باشند $A_1B_1C_1$ مثلث عمودی نظیر نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. اگر مثلث ABC و نقطهٔ P ثابت باشد و خطهای PA_1، PB_1 و PC_1 را با هم حول نقطهٔ P و به زاویهٔ دلخواه دوران دهیم، واضح است که دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C_1، A_1BC_1 و A_1B_1C همواره از P می‌گذرند. لازم نیست که سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1 حتماً مثلث تشکیل دهند؛ ممکن است که این سه نقطه بر یک خط راست واقع باشند. دراین حالت سه نقطهٔ A_1، B و C برخطهای B_1C_1، C_1A و AB_1 واقعند و بنابه همان قضیه دایره های محیطی مثلثهای ABC، A_1B_1C و A_1BC_1 در یک نقطه مشترکند و چون تنها نقطه‌های مشترک دو دایرهٔ آخری A_1 و P است، پس قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیه. هرگاه چهار خط دوبه‌دو در شش نقطهٔ A، B، C، A_1، B_1، C_1 متقاطع باشند به‌گونه‌ای که A_1BC، AB_1C، ABC_1 و $A_1B_1C_1$ نقطه‌های بر یک استقامت را مشخص کنند، دایره‌های محیطی چهار مثلث، AB_1C_1، A_1BC_1، A_1B_1C و ABC در یک نقطه مشترکند. درحالت خاص که AP، BP و CP قطرهای سه دایرهٔ نخست باشند، A_1B_1 خط سیمسون نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌باشد. هرگاه مثلث ABC و نقطهٔ P ثابت بماند و خطهای PA_1، PB_1 و PC_1 باهم حول نقطهٔ P به زاویهٔ دلخواه به گونه‌ای دوران کنند که «خط سیمسون مایل» به دست آید، دراین صورت A_1، B_1 و C_1 چنانند که خطهای PA_1، PB_1 و PC_1 با خطهای BC، CA و AB زاویه های متساوی (دریک جهت) می‌سازند. نتیجهٔ مربوط به مثلث حاصل از O_1، O_2 و O_3 مرکزهای دایره‌های محیطی سه مثلث BCP، CAQ و ABR. ضلعهای O_2O_3، O_3O_1 و O_1O_2 از این مثلث بترتیب بر وترهای مشترک (محورهای اصلی) دوبه‌دو از دایره‌ها عمودند و زاویه‌های O_1، O_2 و O_3 از این مثلث بترتیب با زاویه‌های P، Q و R برابرند.

۴۹۶. دو حالت درنظر بگیرید: (۱) مثلث ABC بر دایرهٔ مفروض محیط است؛ (۲) دایرهٔ مفروض بر امتداد ضلعهای AB و ACی مثلث مماس است. در حالت اول دایره‌ای

را درنظر می‌گیریم که بر ضلعهای زاویه درنقطه‌های M و N مماس و بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس درونی است. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند و r شعاع دایرهٔ مفروض باشد $\hat{A}=\alpha$ و $AM=AN=x$. از قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ بطلمیوس استفاده می‌کنیم :

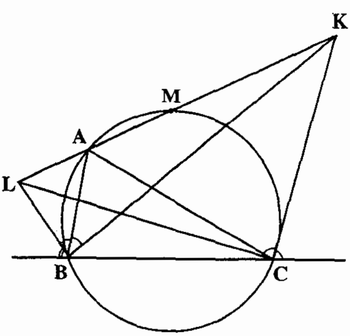
$xa=(b-x)c+(c-x)b$ ، که از آن‌جا :

$$x=\frac{۲bc}{a+b+c}=\frac{۴S_{ABC}}{(a+b+c)\sin\alpha}=\frac{۲r}{\sin\alpha}$$

یعنی، x ثابت است. (می‌توان ثابت کرد که MN ازمرکز دایرهٔ مفروض می‌گذرد).

درحالت دوم، باید دایرهٔ مماس برضلعهای زاویه و مماس بیرونی بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را اختیار کنیم.

۴۹۷. نقطهٔ برخورد $A_۱C_۱$ و AB را P و نقطهٔ برخورد $A_۱C_۱$ و BC را Q می‌نامیم. مثلث BPQ متساوی‌الساقین است و بنابراین، میانهٔ $BM_۳$ در آن برنیمساز منطبق است ($BB_۱$). سپس $BM_۳$ بر $A_۱C_۱$ عمود و زاویهٔ $C_۱M_۳B_۱$ برابر ۹۰ درجه، همچنین زاویهٔ $C_۱M_۱B_۱$ هم برابر ۹۰ درجه است، یعنی $M_۱$ و $M_۳$ روی محیط دایرهٔ به قطر $B_۱C_۱$ قرار دارند.



۵۰۰. چون AK، مثل AL، نیمساز خارجی زاویهٔ A است، پس A روی پاره‌خط راست KL واقع است. روشن است که این نیمساز از وسط کمان $\overset{\frown}{CAB}$ می‌گذرد، زیرا نیمساز داخلی زاویهٔ A از وسط کمان $\overset{\frown}{CD}$ عبور می‌کند. ازاین‌جا ثابت می‌شود که $KH=LH$. آنهارا برخط راست CB تصویر، و ثابت می‌کنیم تصویر پاره‌خط راست CK با تصویر پاره‌خط راست BL برابر است. درواقع آنها برابرند با :

$$\frac{۲S\,tg\frac{\gamma}{۲}}{a+c-b} \quad \text{و} \quad \frac{۲S\,tg\frac{\beta}{۲}}{a+b-c}$$

$A\hat{C}B=\gamma$ و $A\hat{B}C=\beta,\ AB=c,\ AC=b,\ BC=a$

که چون : $(a+c-b)tg\frac{\beta}{۲}=r=(a+b-c)tg\frac{\gamma}{۲}$

(r، شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است)، بنابراین تصویرهای مذکور برابرند که اثبات حکم مسأله را تمام می‌کند.

۵۰۱. بر امتداد AC، از طرف نقطهٔ C نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌کنیم که $CM = CB$ ؛ در این صورت، E مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMB است. ($AE = BE$ و $A\hat{E}B = A\hat{C}B = 2A\hat{M}B$) بنابراین نتیجه می‌شود که F وسط AM است و DF محیط مثلث ABC را نصف می‌کند. بعلاوه DF با BM و BM با نیمساز زاویهٔ Cی مثلث ABC موازی است، یعنی، DF نیمساز زاویهٔ D از مثلث DKL است که در آن K و L بترتیب وسطهای AC و CB هستند.

۵۰۲. فرض کنید N نقطهٔ برخورد خط راست A_2A_1 و دایره باشد، N متمایز از A_2 است. قضیهٔ پاسکال را برای شش ضلعی $ABCC_2NA_2$ که ممکن است خودش را قطع کند به‌کار ببرید. نقطه‌های برخورد زوج خطهای راست AB و C_2N، BC و NA_2 (نقطهٔ A_1) CC_2 و AA_2 (نقطهٔ M) بر یک خط راست واقعند درنتیجه AB و C_2N در نقطهٔ C_1 متقاطعند.

۵۰۳. فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ باشد. نقطه‌های A_1، H، B_1 و C بر یک دایره و نقطه‌های C_1، H، B_1 و A هم بر یک دایره واقعند. شعاعهای این دایره‌ها با هم برابرند ؛ زاویه‌های HB_1C و HB_1A یا با هم برابرند و یا مکملند. درنتیجه $HA = HC$.

عکس مسأله درست نیست. به‌ازای هر نقطهٔ A_1 روی خط راست BC، به‌طورکلی دو مثلث موجود است : $A_1B_1C_1$ و $A_1'B_1'C_1'$ (B_1 و B_1' بر AC، و C_1 و C_1' بر AB قرار می‌گیرند)، که در آنها نقطهٔ برخورد ارتفاعها بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منطبق است و یکی از آنها با مثلث ABC متشابه است و دیگری نیست. مثلاً، اگر ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و A_1 وسط BC باشد، آن‌وقت می‌توانیم وسطهای AC و AB را به‌جای B_1 و C_1 و نقطه‌هایی را روی امتدادهای AC و AB، از طرف B و C، به‌جای B_1' و C_1' اختیار کنیم، $CB_1' = CB$ و $BC_1' = BC$. عکس مسأله درست است به شرط این‌که نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 روی ضلعهای مثلث ABC و نه بر امتدادهای آنها، قرار گیرند.

۵۰۴. فرض کنید M_0 وسط HP و A_0 وسط HA باشد و نقطه‌های A_0، A_1 و M_0 روی دایرهٔ نه نقطه قرار داشته باشند. درنتیجه، M نیز بر روی این دایره واقع است، زیرا از فرض، برابری $M_0H.HM = A_0H.HA_1$ نتیجه می‌شود و H به‌طور همزمان یا در درون و یا بیرون هر یک از پاره‌خطهای M_0M و A_0A_1 قرار دارد.

۵۰۵. برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ $BMNC$ بایستی قاعدهٔ BM و ارتفاع MN را محاسبه کرد، زیرا طول CN معلوم است.

$CD = x$ فرض می‌کنیم، داریم : $x(BC + x) = AD^2$

یا : $x(۵+x)=۱۵۰$

از آن‌جا : $CD = x = ۱۰(cm)$

از تشابه دو مثلث BMD و CND نتیجه می‌شود $\frac{CN}{CD}=\frac{BM}{BD}$ ، یا $\frac{BM}{۱۵}=\frac{۶}{۱۰}$ از آنجا $BM = ۹cm$ می‌شود. ارتفاع MN ذوزنقه از تناسب $\frac{ND}{CD}=\frac{MN}{BC}$ که در آن $ND=\sqrt{CD^۲-CN^۲}$ می‌باشد، به‌دست می‌آید $(MN = ۴cm)$.

جواب : $S = ۳۰cm^۲$.

۱۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۵۰۶. ۱. $B\hat{C}A = ۴۵^\circ$ و $C\hat{B}A = ۶۰^\circ$ و $B\hat{A}C = ۷۵^\circ$

۲. $AB = ۶\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۳}\times\sqrt{۲} = AH = ۳\sqrt{۶}$

$HC = AH = ۳\sqrt{۶}$

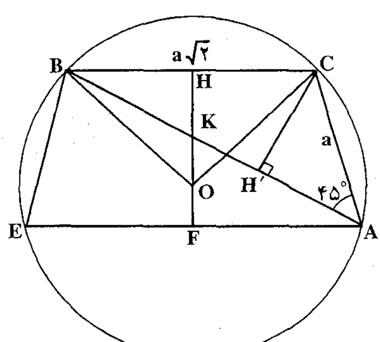
$CB = HB + HC = ۳\sqrt{۶} + ۳\sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)$

$CA^۲ = HA^۲ + CH^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow AC = ۶\sqrt{۳}$

۵۰۷. ۱. مماس مشترک دو دایره را رسم کنید و ثابت کنید که $\hat{B}=\hat{B}'$ است.

۲. دو مثلث $AB'C'$ و ABC متشابه‌اند.

۳. بنابر ویژگی خطهای همرس که دو خط موازی را قطع کرده‌اند N وسط $B'C'$ است.



۵۰۸. ۱. ارتفاع CH' را رسم می‌کنیم در مثلث ACH' که قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. داریم :

$\overline{۲CH'}^۲ = a^۲$ پس :

$CH' = AH' = \frac{a'\sqrt{۲}}{۲}$

از این‌جا معلوم می‌شود که CH' نصف BC است ؛ پس زاویهٔ B مساوی با ۳۰° و زاویهٔ C برابر با ۱۰۵° است در ضمن :

$$BH' = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۶}}{۲}$$

پس :

$$AB = \frac{a}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$$

۲. مثلث CHO قائم‌الزاویهٔ و متساوی‌الساقین است پس :
$C\hat{O}H = ۴۵^\circ$ و $C\hat{O}B = ۹۰^\circ$ و چون بفرض زاویهٔ A مساوی با ۴۵° و نصف زاویهٔ مرکزی COB است پس دایرهٔ به مرکز O و شعاع OC از A می‌گذرد. شعاع این دایره CO است و داریم : $\overline{CO}^۲ = \overline{OH}^۲ + \overline{HC}^۲ = \frac{a^۲}{۲} + \frac{a^۲}{۲} = a^۲$
پس : $CO = a$
۳. چهارضلعی محاطی CBEA ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، پس :
$B\hat{C}A = E\hat{B}C = ۱۰۵^\circ$ و $\hat{E} = E\hat{A}C = ۷۵^\circ$
از طرف دیگر $A\hat{B}E = ۱۰۵^\circ - ۳۰^\circ = ۷۵^\circ$ پس مثلث AEB متساوی‌الساقین است و $AE = AB$ طول HF مساوی است با طول ارتفاعی از مثلث ABC که از رأس A رسم شود پس : $HF \times BC = CH' \times AB$ چنان که دیدیم (قسمت اول) $BC = ۲CH'$، پس : $AB = ۲HF$ و بنابراین : $AE = AB = ۲HF.$
۴. در مثلث KHB زاویهٔ B مساوی با ۳۰° است پس: $KB = ۲KH$ بنابراین داریم : $\overline{KB}^۲ = \frac{\overline{KB}^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۲}$ و یا $\frac{۳\overline{KB}^۲}{۴} = \frac{a^۲}{۲}$

و $\overline{KB}^۲ = \frac{۲a^۲}{۳}$ و $KB = a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{AB \times CH'}{۲} = \frac{a^۲}{۴}(۱+\sqrt{۳})$$

۵۰۹. داریم :
۱. $\hat{A} = \frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = ۱۵^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۱۵ \times ۸ = ۱۲۰^\circ$ و $\hat{C} = ۴۵^\circ$
قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $\Delta LAC: ۲AL^۲ = ۲CL^۲ = AC^۲ = ۳a^۲ \Rightarrow$

$AL = CL = a\sqrt{\frac{۳}{۲}}$
$BL = a\sqrt{\frac{۱}{۲}}$ $\quad BC = CL - BL = \frac{a}{۲}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$
۲. $R = \frac{abc}{۴S}$ و $S = \frac{BC.AL}{۲} = \frac{a^۲}{۴}(۳ - \sqrt{۲}) \Rightarrow R = a$
$\Delta OMA: OA^۲ = OM^۲ + MA^۲ \Rightarrow OA^۲ = a^۲ \Rightarrow OA = a$

O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است $\Rightarrow$
۳. H وسط $\widehat{AHC}$ و $AF = AO = a$ و $A\hat{O}C = \widehat{AHC} = ۲۲۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}F = ۶۰^\circ$
$\Rightarrow A\hat{O}H = ۶۰^\circ$ و $AH = AO = a$
۴. $(H\hat{O}C = A\hat{F}C = ۶۰^\circ$ و ۴ ضلع برابرند) FAHO لوزی است.
$\Rightarrow$ M′ وسط OA است
و در مثلث OAC : $M'O = M'A$ و $MM' \parallel OC \Rightarrow MM' = \frac{OC}{۲} = \frac{a}{۲}$
۵۱۰. ۱. ابتدا زاویهٔ $\hat{B}$ را مساوی ۴۵° رسم می‌کنیم سپس بر یکی از ضلعهای آن AB را

مساوی a جدا کرده و به مرکز A و به شعاع $a\sqrt{2}$ کمانی می‌زنیم تا ضلع دیگر زاویه را در C قطع کند. A را به C وصل می‌کنیم.

۲. AH ارتفاع مثلث را رسم می‌کنیم، داریم: $AH = BH$

$$AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow 2AH^2 = a^2 \Rightarrow AH^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow$$

$$AH = BH = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم: $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}}{2} \qquad BC = CH + BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOC داریم: $AC^2 = 2OA^2 \Rightarrow 2a^2 = 2OA^2$

$$\Rightarrow a^2 = R^2 \Rightarrow a = R$$

O را به B وصل می کنیم: $OA = OB = AB = a = R$

پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و $\hat{A}_2 = 45^\circ$ پس: $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$

$$\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

۳. الف. $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ زیرا زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان 90° می‌باشند و همین‌طور $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ زیرا به کمان DB نگاه می‌کنند، پس دو مثلث AEB و BCD درحالت برابری دو زاویه متشابه‌اند.

ب. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:

$$DB^2 = AD^2 - AB^2 = 4R^2 - a^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 = 3a^2 \Rightarrow DB = a\sqrt{3}$$

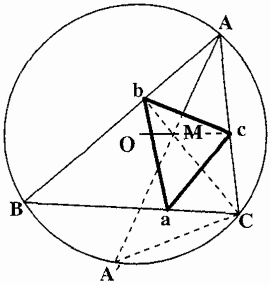
$\hat{A}_2 = \hat{D}_1 = 45^\circ$ زیرا به کمان 90° نگاه می‌کنند پس: $AC = CD = a\sqrt{2}$

ج. دو مثلث ODF و OAB متشابه‌اند. زیرا $\hat{O} = \hat{B} = 90^\circ$ و $\hat{D}$ در هر دو مشترک است پس نسبت ضلعها را می‌نویسیم:

$$\frac{DO}{DB} = \frac{DF}{DA} \Rightarrow DO.DA = DF.DB \Rightarrow R.2R = DF.a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2a^2 = a\sqrt{3}.DF \Rightarrow DF = \frac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

۵۱۱. معمولاً برای اثبات این قضیه در کتابها از مختصات متجانس سه‌خطی Trilinéaire استفاده می‌کنند ولی ممکن است اثبات هندسی مستقیمی از مسأله به‌دست داد :



سطح مثلث abc برابر است با $\frac{۱}{۲}bc\times ca\sin\hat{c}$ (c زاویهٔ مثلث abc می‌باشد). با ملاحظهٔ این که چهارضلعی Mc Ca محاطی است، نتیجه می‌شود که : MC قطر آن است. زیرا زاویه‌های McC و MaC قائمه می‌باشند. پس $\overline{ac}=MC\sin\hat{C}$ و همچنین در چهارضلعی محاطی McAb معلوم می‌شود که $\overline{cb}=MA\sin\hat{A}$ ولی زاویهٔ c از دو جزء Mca و Mcb تشکیل شده است، چون $M\hat{c}a=M\hat{C}c$ (در چهارضلعی محاطی Mc Ca) و : $M\hat{c}b=M\hat{A}B$ (در چهارضلعی McAb) پس زاویهٔ c مثلث abc برابر است با $M\hat{C}a+M\hat{A}B$. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MaC و MAb این دو زاویهٔ مذکور دارای متممهای $a\hat{M}C$ و $b\hat{M}A$ می‌باشند، پس :

$$\hat{c}=M\hat{C}a+M\hat{A}b=\frac{\pi}{۲}-a\hat{M}C+\frac{\pi}{۲}-b\hat{M}A$$
$$=\pi-(a\hat{M}C+b\hat{M}A)$$

ولی :
$$a\hat{M}C+b\hat{M}A=۲\pi-b\hat{M}a+A\hat{M}C$$

و چون $\pi-b\hat{M}A=\hat{B}$ می‌باشد بنابراین :

$$a\hat{M}C+b\hat{M}A=\pi+\hat{B}-(b\hat{M}A+a\hat{M}C)$$

یعنی :
$$۲(b\hat{M}A+a\hat{M}C)=\pi+\hat{B}$$

پس :
$$b\hat{M}A+a\hat{M}C=\frac{\pi}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}$$

پس : $\hat{c}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}$ و سطح مثلث abc عبارت است از :

$$\frac{۱}{۲}\overline{ca}\times\overline{cb}\sin\hat{c}=\frac{۱}{۲}\overline{MA}\times\overline{MC}\sin\hat{A}\sin\hat{C}\cos\frac{\hat{B}}{۲}$$

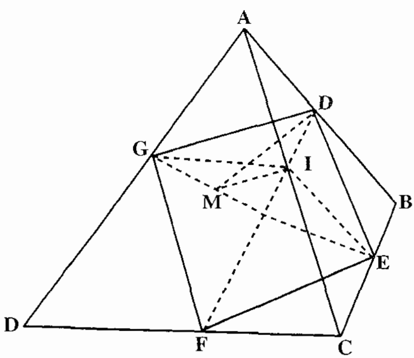
حال اگر MA را تا نقطهٔ تقاطع A′ آن با دایرهٔ محیطی امتداد دهیم، ملاحظه می‌شود که در مثلث A′MC زاویه MCA′ برابر است با $M\hat{C}a+a\hat{C}A'$ و یا $M\hat{C}a+b\hat{A}M$. زیرا زاویه‌های $b\hat{A}M$ و $a\hat{C}A'$ به قوس BA′ متقابلند. پس :

$$M\hat{C}A'=\frac{\pi}{۲}-a\hat{M}C+\frac{\pi}{۲}-A\hat{M}b$$

یعنی $\hat{c}=\frac{\pi}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}=M\hat{C}A'$ و چون $A'\hat{A}C=\hat{B}$ می‌باشد، پس در مثلث MCA′ خواهیم داشت : $\frac{MA'}{\cos\frac{\hat{B}}{۲}}=\frac{MC}{\sin\hat{B}}$ پس : $MC=MA'\times\frac{\sin\hat{B}}{\cos\frac{\hat{B}}{۲}}$ و سطح مثلث abc سرانجام به‌صورت :

$$\frac{۱}{۲}\overline{ac}\times\overline{cb}\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}MA\times MA'\sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$$

نوشته می‌شود و مشاهده می‌شود که این سطح با $MA \times MA'$ متناسب است. یعنی با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی و این قوت مساوی است با : $MO^{2} - R^{2}$ (که R شعاع دایرهٔ محیطی است). پس اگر این سطح مقدار ثابتی باشد (به حسب قدر مطلق) مقدار $\overline{MO}^{2} - R^{2}$ به حسب قدرمطلق مقدار ثابتی است و MO طول ثابتی دارد (یکی کمتر از R و دیگری بیشتر از R). و مکان M دو دایره است که هر دو به مرکز O می‌باشند یعنی با دایرهٔ محیطی متحدالمرکزند. اگر سطح مثلث abc صفر شود، سه نقطهٔ a، b و c بر یک استقامتند و مکان نقطهٔ M در این صورت دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. اگر سهمی در مثلث ABC محاط باشد، یعنی مثلث بر آن محیط گردد، کانون سهمی نقطه‌ای است که تصویرهای آن بر روی مماسهای سهمی بر خط مستقیم مماس بر رأس سهمی واقع می‌باشند. چون سه ضلع مثلث بر سهمی مماسند، پس کانون سهمی نقطه‌ای است که تصویرهای آن بر سه ضلع AB و AC و BC بر یک استقامت باشند، یعنی یکی از نقطه‌های دایرهٔ محیطی مثلث. ولی بی‌نهایت سهمی می‌توان در مثلث محاط کرد. مکان هندسی کانونها دایرهٔ محیطی مثلث است.



قضیه را برای هر شکل می‌توان تعمیم داد. ما در این‌جا فقط برای چهارضلعی قناعت می‌کنیم. اگر DEFG چهارضلعیِ پدر نقطهٔ M نسبت به چهارضلعی ABCD باشد، سطح آن از مجموع مثلثهای MDE ، MEF ، MFG و MGD تشکیل می‌شود. ولی می‌توان به کمک یکی از قطرهای چهارضلعی مثلاً AC سطح این چهارضلعی پدر را با فرود آوردن عمود MI بر قطر AC، به مجموع مثلثهای IDE و ICF و IEF و IGD تبدیل کرد. سطح مثلث IDE : با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی ACB متناسب است ؛

و سطح مثلث ICF با قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی ACD متناسب است و دو مثلث IEF و IGE دو مثلث پدر نسبت به سه خط رسم شده از یک نقطه می‌باشند پس اولی با MC^{2} و دومی با $\overline{MA}^{2}$ متناسب است. پس سطح چهارضلعی GDEF به‌صورت :

$$K_{1}(\overline{MO}_{1}^{2} - R_{1}^{2}) + K_{2}(\overline{MO}_{2}^{2} - R_{2}^{2}) + K_{3}\overline{MC}^{2} + K_{4}\overline{MA}^{2} = S$$

(که K_{1} و K_{2} و K_{3} و K_{4} چهار عدد ثابت و R_{1} شعاع دایرهٔ محیطی مثلث

ACB پس مقداری ثابت و R_2 شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ACD یعنی مقداری ثابت می‌باشند) S سطح ثابت چهارضلعیهای پدر فرض شده است و درنتیجه رابطهٔ :

$$K_1\overline{MO}_1^2 + K_2\overline{MO}_2^2 + K_3\overline{MO}_3^2 + K_4\overline{MO}_4^2 = S_1$$

(S_1 مقداری ثابت و O_3 همان نقطهٔ C و O_4 همان نقطهٔ A است) به‌دست می‌آید.

اکنون اگر فرض کنیم که H مرکز ثقل نقطه‌های O_1، O_2، O_3 و O_4 باشد هر یک مرتباً به جرمهای K_1، K_2، K_3 و K_4 می‌باشند، خواهیم داشت :

$$\sum_{i=1}^{i=4} k_i.\overrightarrow{MO}_i = \overrightarrow{MH}\sum_1^4 k_i$$ (تعریف مرکز ثقل)

که Mهر نقطهٔ دلخواهی درصفحه می‌تواند باشد. اگر M برH قرارگیرد خواهیم داشت :

$$\sum_1^4 k_i\,\overrightarrow{HO}_i = 0$$

ولی فاصلهٔ هر نقطهٔ M از نقطهٔ O_i به‌صورت ترکیب حاملها چنین نوشته می‌شود :[1]

$$\overrightarrow{MO}_i = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HO}_i$$

پس :

$$\overrightarrow{MO}_i^2 = MH^2 + 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HO}_i + \overrightarrow{HO}_i^2$$

چون رابطه را در k_i ضرب کرده و حاصل عملها را برای K_1، K_2، K_3 و K_4 جمع کنیم، خواهیم داشت :

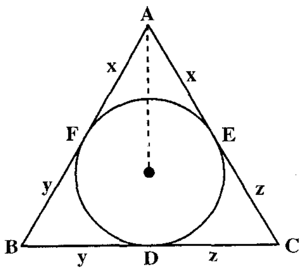
$$\sum_1^4 k_i\,\overrightarrow{MO}_i^2 = \overrightarrow{MH}^2\sum_1^4 k_i + 2\overrightarrow{MH}\sum_1^4 \overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{HO}_i + \sum_1^4 k_i.\overrightarrow{HO}_i^2 = S_1$$

ولی چون $\sum_1^4 k_i\,\overrightarrow{HO}_i = 0$ است. پس مشاهده می‌شود که در این رابطهٔ بی‌تردید، MH مقداری است ثابت. یعنی مکان M دایره‌ای است به مرکز H مرکز ثقل نقطه‌های O_1، O_2، O_3 و O_4. جرمهای K_1، K_2، K_3 و K_4. پس اولاً نتیجه می‌شود که مکان نقطهٔ M برای آن که چهارضلعی پدر سطح ثابتی داشته باشد، دایره است. ثانیاً، اگر این سطح ثابت تغییر کند، مرکز این دایره تغییر نمی‌کند ؛ زیرا نقطهٔ H فقط به نقطه‌های O_1، O_2، O_3 و O_4 و جرمهای ثابت K_1، K_2، K_3 و K_4 مربوط است یعنی تمام این مکانهای هندسی متحدالمرکزند. (اگر توجه شود به‌جای چهارضلعی می‌توان n ضلعی انتخاب کرد و رابطهٔ کلی شبیه رابطه‌های قبل برای n نقطه به‌دست آورد و طرز اثبات عوض نمی‌شود.) درصورتی که سطح چهارضلعی پدر صفر باشد باید نقطه‌های D، E، F و G بر یک خط مستقیم واقع باشند و می‌دانیم که در چهارضلعی محل تلاقی چهار دایرهٔ محیطی مثلثهایی که از ضلعهای چهارضلعی سه به سه به‌دست می‌آید، یک نقطهٔ ثابت است و این نقطه، کانون تنها سهمی است که در چهارضلعی محاط است. پس در مورد چهارضلعی مرکز مشترک این مکانها نقطهٔ H (مرکز ثقل مذکور) کانون سهمی است که بر ضلعهای چهارضلعی مماس است. اگر در n ضلعی محیطی بر سهمی ثابتی نیز عمل شود ملاحظه می‌شود که مرکز مشترک مکانها همان کانون F سهمی محاطی است.

راهنمایی و حل

بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محاطی

۱.۳. تعریف و قضیه



۵۱۲. دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را که در نقطه‌های D، E و F بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است، درنظر می‌گیریم. به‌دلیل برابری اندازه‌های دو مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره فرض می‌کنیم :

$$\begin{cases} AF = AE = x \\ BF = BD = y \\ CE = DC = z \end{cases}$$ باشد، داریم :

$x + y = b$ ، $y + z = a$ و $z + x = b$

محیط مثلث $= ۲p = a + b + c = ۲x + ۲y + ۲z \Rightarrow \ x + y + z = p \Rightarrow$

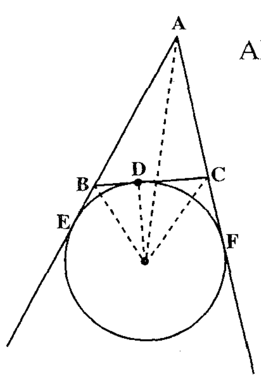
$x = p - (y + z) \Rightarrow AE = AF = P - a$

و به همین ترتیب $BF = BD = P - b$ و $CD = CE = P - c$.

۵۱۳. دایرهٔ محـاطی برونی مثلث مماس بر ضلع BC را درنظر می‌گیریم و نقطه‌های مماس ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC با دایره را بترتیب D، E و F می‌نامیم.

داریم :

$AE = AF$ ، $BD = BE$ و $CD = CF$

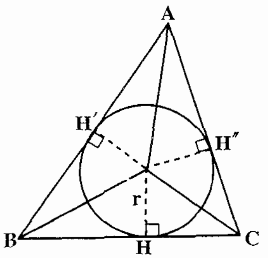


درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\text{محیط مثلث} = 2P = AB + BD + DC + AC = AB + BE + CF + AC$$
$$= AE + AF = 2AE = 2AF \Rightarrow AE = AF = P$$ و
$$CD = CF = AF - AC = P - b \quad BD = BE = AF - AB = P - c$$

با همین روش قطعه‌هایی از ضلعهای مثلث محصور بین رأسهای مثلث و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی مماس بر ضلعهای b و c را می‌توان به‌دست آورد.

۵۱۴. اگر در مثلث ABC نقطه O مرکز دایرهٔ محاطی درونی را به سه رأس وصل کنیم، مثلث به سه مثلث AOB ، AOC و BOC تقسیم می‌شود. ارتفاعهای نظیر سه ضلع AB ، AC و BC این سه مثلث، پاره‌خطهای OH' ، OH'' و OH هستند که هر یک شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث است. (چرا؟). بنابراین مساحتهای این سه مثلث $\frac{1}{2}ar$ ، $\frac{1}{2}br$ و $\frac{1}{2}cr$ و در نتیجه مساحت ΔABC ، به‌صورت زیر است :



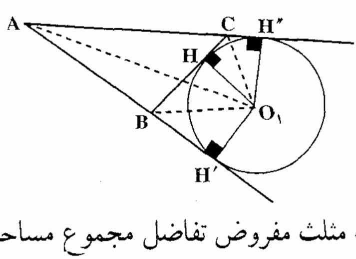
$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}(2p)r = pr \Rightarrow \quad S = pr$$

از این تساوی شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$r = \frac{S}{p}$$

نکته: می‌توان گفت که مساحت هر مثلث برابر است با حاصل‌ضرب نصف محیط مثلث در شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن مثلث.

۵۱۵. اگر در مثلث ABC نقطهٔ O_1 مرکز دایرهٔ محاطی برونی نظیر ضلع BC را به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث O_1BC ، O_1AB و O_1AC بر سه ضلع مثلث بنا می‌شوند که در رأس O_1 مشترکند. به‌آسانی می‌توان دید که مساحت مثلث مفروض تفاضل مجموع مساحتهای دو مثلث O_1AB و O_1AC از مساحت مثلث O_1BC است، یعنی :



$$S_{ABC} = S_{O_1AB} + S_{O_1AC} - S_{O_1BC}$$

ارتفاعهای نظیر رأس O_1 از سه مثلث هر سه شعاعی از دایرهٔ محاطی برونی نظیر ضلع BC هستند، پس اگر شعاع این دایره را با r_a نمایش دهیم، از تساوی بالا حاصل می‌شود :

$$S = \frac{1}{2}(b+c-a)r_a$$

اما در هر مثلث به ضلعهای a، b و c و نصف محیط p، $b+c-a=۲p-۲a$ است. بنابراین رابطهٔ بالا را به‌صورت: $S=(p-a)r_a$ می‌توان تبدیل کرد. از این تساوی دستور محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث نظیر ضلع a به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r_a=\frac{S}{p-a}$$

و به روش مشابه داریم:

$$r_b=\frac{S}{p-b} \text{ و } r_c=\frac{S}{p-c}$$

۲.۳. زاویه

۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۵۱۶. ۱۲۰°

۵۱۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBD داریم: $tg O\hat{B}D=\frac{OD}{BD}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=tg ۳۰^\circ$

اما OB نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}C$ است پس: $\Rightarrow O\hat{B}D=۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}C=۶۰^\circ$

۵۱۸. نقطهٔ O مرکز دایره را به A، E و D وصل می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAE و OBD داریم:

$$tg O\hat{A}E=\frac{OE}{AE}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=tg\frac{\pi}{۶}\Rightarrow O\hat{A}E=\frac{\pi}{۶}$$

$$tg B\hat{O}D=\frac{BD}{OD}=\frac{\sqrt{۲}-۱}{۱}=\sqrt{۲}-۱=tg\frac{\pi}{۸}\Rightarrow B\hat{O}D=\frac{\pi}{۸}\Rightarrow D\hat{O}E=\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow A\hat{B}C=۴۵^\circ \Rightarrow A\hat{C}B=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۵^\circ)=۷۵^\circ$$

۵۱۹. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث باشد، نقطه‌های C، O، K و M بر یک دایره واقعند. ($C\hat{O}K=\hat{A}/۲+\hat{C}/۲=۹۰^\circ-\hat{B}/۲=K\hat{M}B=۱۸۰^\circ-K\hat{M}C$)؛ اگر نقطهٔ K بر امتداد NM قرار گیرد، آن‌وقت $C\hat{O}K=C\hat{M}K$). بنابراین، $O\hat{K}C=O\hat{M}C=۹۰^\circ$.

۳.۳. ضلع

۱.۳.۳. اندازهٔ ضلع

۵۲۰. $BC=۱۳$.

۵۲۱. M، P و N را نقطه‌های تماس دایره و مثلث درنظر می‌گیریم. آن‌گاه $AM=AN$، $CN=CP$ و $BP=BM$ خواهد بود. با منظور کردن $CN=CP=y$، $AN=AM=x$

و $BP = BM = z$ محیط مثلث برابر $۲x + ۲y + ۲z$ بوده و درنتیجه $x + y + z = ۹$ خواهد بود. مماس DE بر دایره را به موازات AC رسم می کنیم. آن گاه مثلثهای ABC و DBE متشابه بوده و بنابراین نسبت ضلعهای آنها با نسبت محیطها برابر خواهد بود: $\frac{DE}{AC} = \frac{P_{DBE}}{P_{ABC}}$، یعنی چنین خواهیم داشت: $(۱)\ \frac{۲}{x+y} = \frac{P_{DBE}}{۱۸}$

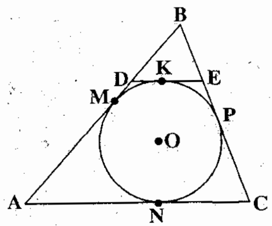
به‌طوری که در آن داریم:

$P_{DBE} = BD + BE + DE = BD + BE + (DK + KE) =$
$BD + BE + (DM + EP)$

در این‌جا از تساویهای $DM = DK$ و $KE = EP$ استفاده شده است.

از این‌رو:

$P_{DBE} = (BD + DM) + (BE + EP) =$
$BM + BP = ۲z$

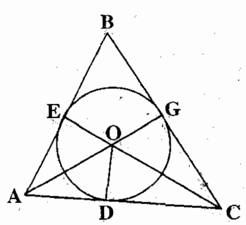


بوده و تساوی (۱) را می‌توان به‌صورت $\frac{۲}{x+y} = \frac{۲z}{۱۸}$ باز نوشت.

بدین‌ترتیب دستگاه معادلات $\begin{cases} x + y + z = ۹ \\ \frac{۲}{x+y} = \frac{z}{۹} \end{cases}$ به‌دست می‌آید. با منظور کردن x+y=b به $\begin{cases} b + z = ۹ \\ bz = ۱۸ \end{cases}$ می‌رسیم که از آن نیز $b = ۳cm$ یا $b = ۶cm$ به‌دست می‌آید.

۵۲۲. ۳

۵۲۳. برای محاسبهٔ ضلعهای AB و BC فرض می کنیم $EB = BG = x$ باشد، با توجه به این که: $AE = AD = ۶cm$ و $CG = CD = ۸cm$ و



$$\begin{cases} S = p.r \\ S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

که در آن p نصف محیط مثلث است. یعنی:

$\frac{۱}{۲}(EA + AD + DC + CG + GB + BE) = \frac{۱}{۲}(۲۸ + ۲x) = ۱۴ + x$

معادلهٔ روبه‌رو را به‌دست می‌آوریم: $۴(۱۴ + x) = \sqrt{(۱۴+x)x \times ۶ \times ۸}$

و از آن‌جا $x = ۷cm$ می‌شود. جواب: $AB = ۱۳cm$ و $BC = ۱۵cm$.

۵۲۴. $\frac{۱۸\sqrt{۳}}{۳}cm$، $\frac{۲۶\sqrt{۳}}{۳}cm$. ثابت کنید که $a:b:c = ۴:۱۳:۱۵$ است. عبارت $a = ۴x$، $b = ۱۳x$ و $c = ۱۵x$ را منظور کنید.

۵۲۵. نقطه‌های تماس AB و BC را با دایره، P و N می‌نامیم. خواهیم داشت:

$\overline{AP}^2 = AD.AF \qquad \overline{MN}^2 = MF.MD$

و چون طرف دوم این دو تساوی برابر است، پس داریم:

$\overline{AP}^2 = \overline{MN}^2$ و یا $AP = MN$

و چون $BP = BN$ است، پس $AB = BM$: یعنی ضلع c نصف ضلع a می‌باشد ($a = 2c$). از طرفی دیگر طبق قضیهٔ اول میانه‌ها داریم:

$$\overline{AM}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

و همچنین داریم: $AP = p - a$ و یا $\overline{AP}^2 = (p-a)^2$

$$AD.AF = \frac{1}{3}AM \times \frac{2}{3}AM = (p-a)^2$$

پس: $\overline{AM}^2 = \frac{9}{2}(p-a)^2$

و خواهیم داشت: $\frac{9}{2}(p-a)^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

و چون: $a + b + c = b + 3c = 28$

پس: $b = 28 - 3c$

و به‌جای a، b و p مساویشان را قرار می‌دهیم، c به‌دست می‌آید. یکی از جوابهای c، مثلث را به خط تبدیل می‌کند که قابل قبول نیست.

۲.۳.۳. نسبت ضلعها

۵۲۶. فرض کنید طول هر قطعهٔ میانه برابر با a باشد. طول کوچکترین پاره‌خطی را که نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی، روی ضلع نظیر پای میانه جدا می‌کند، با x نشان می‌دهیم. اکنون، طول ضلعهای مثلث را می‌توان برحسب a و x نشان داد. طول ضلعهایی که میانه را دربردارند، $a\sqrt{2} + x$ و $3a\sqrt{2} + x$ و طول ضلع سوم $2a\sqrt{2} + 2x$ است. با استفاده از دستور طول میانه به‌دست می‌آوریم:

$$9a^2 = \frac{1}{4}\left[2(a\sqrt{2} + x)^2 + 2(3a\sqrt{2} + x)^2 - (2a\sqrt{2} + 2x)^2\right]$$

که از آن‌جا $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

جواب: ۱۳ : ۵ : ۱۰

۴.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۵۲۷. اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 45^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ$$

از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OBH و OCH اندازه‌های BH و CH و از آن‌جا، طول ضلع BC محاسبه می‌شود؛ آن‌گاه با استفاده از قانون سینوسها: $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$ اندازهٔ ضلعهای b و c محاسبه می‌شود. با معلوم بودن a و b و c اندازهٔ ارتفاعها و از جمله ارتفاع h_c قابل محاسبه است.

۵۲۸. با توجه به برابری مماسهای رسم شده از یک نقطه بر دایره داریم:

$$\begin{cases} AF=AE=۵ \\ BD=BF=۷ \\ CD=CE=۳ \end{cases} \Rightarrow AB=۱۲ \;,\; AC=۸ \;,\; BC=۱۰ \quad \Rightarrow ۲P=۳۰ \;\Rightarrow P=۱۵$$

$$\Rightarrow h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{۲}{۱۰}\sqrt{۱۵(۱۵-۱۰)(۱۵-۸)(۱۵-۱۲)}$$
$$\Rightarrow h_a=۳\sqrt{۷}$$

۵۲۹. ابتدا اندازهٔ ضلعهای مثلث را به‌دست می‌آوریم:

$$AC=AE+EC=۴+۳=۷ \;\Rightarrow b=۷$$
$$AF=p-a=۴ \;,\; p=۱۲ \quad \Rightarrow ۱۲-a=۴\Rightarrow a=۸$$
$$DC=p-c=۳ \;,\; p=۱۲ \quad \Rightarrow ۱۲-c=۳\Rightarrow c=۹$$
$$\Rightarrow m_b=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+c^۲)-b^۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(۶۴+۸۱-۴۹}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۴۱}$$

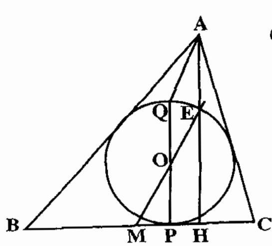
۵۳۰. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را به A' و B' وصل می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $OB'A$ و $OA'D$ داریم:

$$OA=\sqrt{AB'^۲+OB'^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$
$$OD=\sqrt{OA'^۲+DA'^۲}=\sqrt{۱۶+۴}=۲\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow AD=OA+OD=۵+۲\sqrt{۵}$$

۳. ۵. پاره‌خط

۳. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۳۱. راه اول. P را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC و PQ را قطر دایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. می‌دانیم که $AQ \parallel MO$ بنابراین AEOQ متوازی الاضلاع است، به‌نحوی که:



$$OQ=AE=r$$

راه دوم. a ، b و c را بترتیب طول ضلعهای مقابل به رأسهای A، B و C از مثلث می‌گیریم. می‌توان فرض کرد b > c . از نقطهٔ O عمود OP را بر BC رسم می‌کنیم. در این صورت :

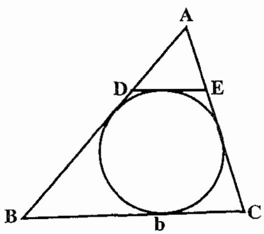
$$MC=\frac{a}{2};\ PC=\frac{a+b-c}{2};\ HC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a};$$

$$\frac{EH}{OP}=\frac{HM}{PM}=\frac{HC-MC}{PC-MC}=\frac{2HC-a}{b-a}=\frac{a^2+b^2-c^2-a^2}{a(b-c)}=\frac{b+c}{a};$$

$$\frac{AE}{r}=\frac{AH}{r}-\frac{EH}{r}=\frac{a+b+c}{a}-\frac{b+c}{a}=1$$

که از آن‌جا $AE=r$.

۵۳۲. طول پاره‌خط راست مجهول را x و طول قاعدهٔ AC از مثلث ABC را b می‌گیریم.



محیط مثلث BDE برابر $2p=2b$ می‌شود. (با استفاده از ویژگی مماسهای بر دایره). از تشابه مثلثهای BDE و ABC به‌دست می‌آید :

$$x=\frac{1}{p}b(p-b)=\frac{1}{p}\left[\frac{p^2}{4}-(b-\frac{p}{2})^2\right]$$

حداکثر مقدار x برابر است با $\frac{p}{4}$ و وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم : $b=\frac{p}{2}$

۵۳۳. راه اول. داریم :

$$2S_{AOB}=AE.OE=OA.\frac{EF}{2} \Rightarrow EF=2\times\frac{AE.OE}{OA} \Rightarrow$$ بنابه قضیهٔ بطلمیوس

$$AE+CD=b,\ldots \Rightarrow AE=p-a,$$
و $CD=p-c$
$BD=p-b$

و $OE=\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

و

$$OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$$

$$EF=2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

FD و DE به روش مشابه محاسبه می‌شوند.

راه دوم $\Delta AKE: \hat{K}=۹۰^\circ \Rightarrow$ و $Q\hat{A}E=\frac{\hat{A}}{۲}$ و $AE=p-a$

$KE=AE\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ و $\sin\frac{\hat{A}}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

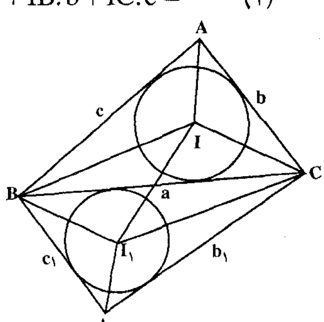
$$KE=(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \Rightarrow EF=۲(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

۳. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۵۳۵. ثابت کنید، در تبدیل تجانسی به مرکز M و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$، نقطهٔ N به I تبدیل می‌شود. (به روشنی این تبدیل تجانس، I را به S می‌برد). فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد، $A_\circ$، $B_\circ$ و $C_\circ$ بترتیب وسط ضلعهای BC، CA و AB باشند و $A_۱$ نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، به‌طوری که $AA_۱$ محیط مثلث را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند. به سادگی می‌توان دید که $A_۱$ نقطهٔ تماس ضلع BC با دایرهٔ محاطی خارجی است که بر امتداد ضلعهای AB و AC هم مماس است. $A_۲$ نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با ضلع BC است. داریم: $BA_۲=CA_۱$ در نقطهٔ $A_۲$، عمودی بر BC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با $AA_۱$ را به D نشان می‌دهیم. ثابت می‌توان کرد $A_۲I=ID$. در نتیجه، خط راست $A_\circ I$ با $AA_۱$ موازی است. اگر تبدیل تجانسی مذکور در ابتدای حل را انجام دهیم، آن وقت خط راست $AA_۱$ به خط $A_\circ I$ تبدیل می‌شود. به روش مشابه، دو خط راست دیگر که محیط را نصف می‌کنند. بترتیب به $B_\circ I$ و $C_\circ I$ تبدیل می‌شوند. بنابراین، هر دو سه این خطها، در نقطه‌ای مانند N متقاطعند که در این تبدیل به I تبدیل می‌شود. این حکم مسأله را ایجاب می‌کند.

۵۳۶. فرض کنید a، b و c معرف طول ضلعهای مثلث ABC باشند و I مرکز دایرهٔ محاطی آن باشد. تساوی برداری زیر برقرار است(این تساوی از ویژگی نیمساز نتیجه می‌شود).

$$\vec{IA}.a+\vec{IB}.b+\vec{IC}.c=\circ \qquad (۱)$$



بعلاوه $IB<c$ و $IC<b$. این نابرابریها از این حقیقت که زاویه‌های AIB و AIC منفرجه‌اند، به‌دست می‌آیند. نقطهٔ $A_۱$ را به دلخواه نزدیک به نقطهٔ A طوری می‌گیریم که مانند قبل، نابرابریهای $I_۱B<c$ و $I_۱C<b$، که در آنها $I_۱$، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث

A_1BC است، برقرار باشند. طول ضلعهای مثلث A_1BC برابرند با a، b_1 و c_1. مثل مثلث ABC می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{I_1A_1}.a+\overrightarrow{I_1B}.b_1+\overrightarrow{I_1C}.c_1=0 \qquad (۲)$$

(۱) را از (۲) کم کنید:

$$a(\overrightarrow{I_1A_1}-\overrightarrow{IA})+\overrightarrow{I_1B}.b_1-\overrightarrow{IB}.b+\overrightarrow{I_1C}.c_1-\overrightarrow{IC}.c=0 \qquad (۳)$$

توجه کنید که

$$\overrightarrow{I_1A_1}-\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{I_1I}+\overrightarrow{AA_1} \qquad (۴)$$

$$\overrightarrow{I_1B}.b_1-\overrightarrow{IB}.b=\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1I}.b \qquad (۵)$$

$$\overrightarrow{I_1C}.c_1-\overrightarrow{IC}.c=\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)+\overrightarrow{I_1I}.c \qquad (۶)$$

در (۳) با قرار دادن تفاضلهای نظیر از دستورهای (۴)، (۵) و (۶) به‌دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{I_1I}(a+b+c)+\overrightarrow{AA_1}.a+\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)=0$$

از آن‌جا که $\left|\overrightarrow{I_1B}\right|<c$، $\left|\overrightarrow{I_1C}\right|<b$، $|b_1-b|<\left|\overrightarrow{A_1A}\right|$ و $|c_1-c|<\left|\overrightarrow{A_1A}\right|$، داریم:

$$\left|\overrightarrow{I_1I}\right|=\frac{1}{a+b+c}\left|\overrightarrow{AA_1}.a+\overrightarrow{I_1B}(b_1-b)+\overrightarrow{I_1C}(c_1-c)\right|<\left|\overrightarrow{AA_1}\right|\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$$=AA_1$$

که از آن‌جا، حکم مسأله به‌ازای هر وضعیت از نقطهٔ A_1 نتیجه می‌شود.

تبصره. در واقع از برابری (۱) مشتق گرفته‌ایم و ثابت کرده‌ایم که $V_A>V_I$، که در آن V_A و V_I، بترتیب سرعت جابه‌جایی نقطه‌های A و I هستند.

۳. ۵. ۳. تساوی پاره‌خطها

۵۳۷. از K، خط راستی به موازات BC رسم کنید. فرض کنید L و Q معرف نقطه‌های برخورد مماس در نقطهٔ P با خط BC و خط مرسوم به موازات آن، باشند و N نقطهٔ برخورد AK و BC باشد. از آن‌جا که $CN=BM$، کافی است ثابت کنیم $NL=LM$؛ اما $PL=LM$، پس باید ثابت کنیم $PL=NL$. چون مثلث PLN بامثلث PQK، که در آن $PQ=QK$، متشابه است، داریم: $PL=NL$ و $CL=LB$.

۵۳۹. دو مثلث AGE و AFH بترتیب با دو مثلث متساوی‌الساقین BDE و CFD متشابه‌اند.

۵۴۰. اگر $BC=a$، $CA=b$ و $AB=c$، آن وقت، همان‌طور که می‌دانیم $MC=\frac{a+b-c}{2}$. از K، خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با AB و BC را بترتیب با A_1 و C_1 نشان می‌دهیم. دایرهٔ محاطی مثلث ABC، یک دایرهٔ محاطی خارجی برای مثلث A_1BC_1 است (این دایره، بر A_1C_1 و

امتدادهای BA_1 و BC_1 مماس است). اما مثلث A_1BC_1 با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه، دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC، بر AC در نقطهٔ N مماس خواهد بود؛ فرض کنید R و L معرف نقطه‌های تماس دایره بترتیب با امتدادهای BA و BC باشند. داریم:

$$BR = BL = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

بنابراین،

$$AN = AR = RB - BA = \frac{a+b-c}{2} = MC$$

۵۴۱. با فرض $b > c$ روی BC نقطهٔ X را به گونه‌ای می‌گزینیم که:

$$BX' = XC = s - c$$ و (s نصف محیط مثلث ABC)

در نتیجه:

$$XA' = A'X' = \frac{b-c}{2}$$

ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. داریم:

$$DA' = \frac{b^2-c^2}{2a}$$

$$DX' = DA' + A'X' = \frac{b^2-c^2}{2a} + \frac{b-c}{2} = \frac{s(b-c)}{a}$$

$$AD = \frac{2s(ABC)}{a} = \frac{2sr}{a}$$

$$\frac{DX'}{AD} = \frac{b-c}{2r} = \frac{XA'}{r} = \frac{XA'}{IX}$$

بنابراین دو مثلث ADX' و IXA' متشابه‌اند و AX' با IA' موازی است. بنابراین خط IA' از وسط XX'، همچنین از وسط AX می‌گذرد.

۵۴۲. از رابطه‌های $KD^2 = KE.KF$ و $K'D'^2 = K'E'.K'F'$ و از تشابه دو مثلث CEK و $CE'K'$ و نیز از تشابه دو مثلث BFK و $BF'K'$ استفاده کنید.

۳. ۶. شعاع

۳. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی

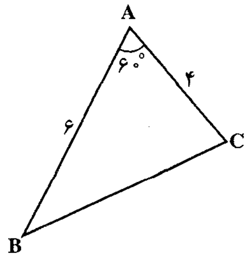
۵۴۵. نخست زاویهٔ C را مشخص می‌سازیم $\hat{C} = 180° - (60° + 75°) = 45°$، سپس با استفاده از قانون سینوسها اندازهٔ ضلعهای b و c را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60} = \frac{b}{\sin 75} = \frac{c}{\sin 45}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \sqrt{6}+\sqrt{2} \text{ و } c = 2\sqrt{2}$$

حال با معلوم بودن سه ضلع اندازهٔ p نصف محیط و S مساحت مثلث را به‌دست

آورده و از روی آنها اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی با استفاده از دستورهای $r=\frac{S}{p}$ ، $r_a=\frac{S}{p-a}$ و ... قابل محاسبه است.



۵۴۶. داریم :

$$a^۲=b^۲+c^۲-bc \Rightarrow a^۲=۱۶+۳۶-۲۴=۲۸$$
$$\Rightarrow a=۲\sqrt{۷}$$
$$۲p=۱۰+۲\sqrt{۷} \Rightarrow \quad p=۵+\sqrt{۷}$$

مثلث $S=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۴\times\sin۶۰^\circ=۶\sqrt{۳}$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۵+\sqrt{۷}}=\frac{۶\sqrt{۳}(۵-\sqrt{۷})}{۱۸}=\frac{\sqrt{۳}(۵-\sqrt{۷})}{۳}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۵-\sqrt{۷}}\text{، } r_b=\frac{S}{p-b}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۷}} \text{ و } r_c=\frac{S}{p-c}=\frac{۶\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}-۱}$$

۵۴۷. محیط و مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم :

$$۲p=۵+۷+۶=۱۸ \Rightarrow p=۹$$

$$S=\sqrt{۹(۹-۵)(۹-۷)(۹-۶)}=۶\sqrt{۶}$$

از آن‌جا :

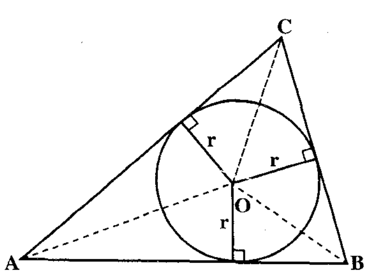
$$r=\frac{S}{p}=\frac{۶\sqrt{۶}}{۹}=\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{۶\sqrt{۶}}{۴}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}\text{، } r_b=\frac{S}{p-b}=\frac{۶\sqrt{۶}}{۲}=۳\sqrt{۶} \text{ و}$$

$$r_c=\frac{S}{p-c}=\frac{۶\sqrt{۶}}{۳}=۲\sqrt{۶}$$

۵۴۸. اگر p نصف محیط مثلث باشد، داریم : $r=\frac{S(ABC)}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

۵۴۹. فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد با محیط $P=AB+BC+CA$ ، دایرهٔ محاطی به مرکز O و شعاع r. شکل را ملاحظه کنید. مساحت مثلث ABC برابر مجموع مساحتهای مثلثهای AOB، BOC و AOC است که قاعده‌های آنها بترتیب AB، BC و CA و طول ارتفاع همهٔ آنها r است. در نتیجه



$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{1}{2}rAB + \frac{1}{2}rBC + \frac{1}{2}rCA = \frac{1}{2}r(AB+BC+CA) = \frac{1}{2}rp$$

بنابه فرض $rp/2 = P$ بنابراین $r = 2$

۵۵۰. $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ فرض می‌کنیم. از آن جا که $b = \frac{1}{2}(a+c)$، پس $\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}b$ و $r = \frac{2s}{a+b+c} = \frac{2s}{3b} = \frac{b.h}{3b} = \frac{1}{3}h$ (h را طول ارتفاع وارد بر ضلع b گرفته‌ایم).

۳. ۶. ۲. اندازهٔ شعاع دایره‌های دیگر

۵۵۱. از فرض نتیجه می‌شود $\hat{B} = 60^\circ$. بنابراین شعاع دایرهٔ $(BDEF)$ از $\frac{1}{2}BE$ که مساوی $BE\sin F\hat{B}E$ می‌باشد، کمتر نیست. (زیرا $F\hat{B}E = 30^\circ$ است) و عدد اخیر هم برابر طول عمودی است که از نقطهٔ F (مرکز دایرهٔ محاطی) بر ضلع AB فرود آمده است. (یعنی شعاع دایرهٔ محاطی).

۵۵۲. ۱۴۳/۲ کیلومتر

۵۵۳. $\frac{ar}{a+2r}$ کیلومتر

۳. ۶. ۳. نسبت شعاعها

۵۵۴. $\frac{\sqrt{7}}{9}(4+\sqrt{7})$

۳. ۷. محیط

۳. ۷. ۱. اندازهٔ محیط مثلث

۵۵۵. داریم: اندازهٔ محیط مثلث $r = \frac{S}{P} \Rightarrow 6 = \frac{48}{P} \Rightarrow P = 8 \Rightarrow 2P = 16\text{cm}$

۵۵۶. نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی درونی مثلث با ضلعهای BC، CA و AB را بترتیب D، E و F می‌نامیم.

داریم:
$$\hat{A} + 45^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ$$

$$\Delta ODB: \cot g\frac{\hat{B}}{2} = \frac{BD}{OD} \Rightarrow \cot g 22,30' = \frac{BD}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow BD = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$$

$$\Delta ODC: \cot g\frac{C}{2} = \frac{DC}{OD} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DC}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow DC = \sqrt{6}+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BC = 3+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

با استفاده از قانون سینوسها $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$ اندازهٔ دو ضلع b و c به‌دست می‌آید.

۵۵۷. فرض کنید KM پاره‌خطی موازی با BC باشد و N و L نقطه‌هایی باشند که در آنها، دایرهٔ محاطی بر ضلعهای AC و BC مماس است. همان‌طور که می‌دانیم $AN=AL=p-a$، که در آن P نصف محیط مثلث ABC است. از طرف دیگر، $AN=AL$ نصف محیط مثلث AKM است که با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه:

$$P=\frac{a^۲}{a-b} \text{ و } \frac{p-a}{p}=\frac{b}{a}$$

جواب: $\frac{۲a^۲}{a-b}$.

۳. ۸. مساحت

۳. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۵۶۰. $ab\sqrt{۳}$. مساحت مثلث را به دو طریق بیان کنید: به‌وسیلهٔ فرمول هرون و فرمول $S=pr$.

۵۶۱. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و M وسط BC باشد و K، L و N نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بترتیب با ضلعهای AC، AB و BC ی مثلث باشند. قرار می‌گذاریم:

$AK=AL=x$، $CK=CN=y$، $BL=BN=z$ و $y+z=a$. بنا به فرض

$OM=\frac{a}{۲}-r$. در نتیجه $NM=\sqrt{OM^۲-ON^۲}=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}-ar}$، و یکی از پاره‌خطهای به طول y یا z، برابر با $\frac{a}{۲}-\sqrt{\frac{a^۲}{۴}-ar}$ و دیگری برابر با $\frac{a}{۲}+\sqrt{\frac{a^۲}{۴}-ar}$ است. مساحت مثلث را از دستور هرون و $S=pr$، محاسبه کنید:

$$\sqrt{(x+y+z)xyz}=(x+y+z)r \Rightarrow xar=(x+a)r^۲ \Rightarrow x=\frac{ar}{a-r}$$

بنابراین، مساحت مطلوب برابر است با:

$$(\frac{ar}{a-r}+a)r=\frac{a^۲r}{a-r}$$

۵۶۲. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و r_a ، r_b و r_c بترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی مماس بر ضلعهای a، b و c باشند، باید ثابت کرد:

$$s=\sqrt{r.r_a.r_b.r_c} \quad (۱)$$

می‌دانیم :
$$r=\frac{s}{p} \quad \text{و} \quad r_a=\frac{s}{p-a}$$
$$r_b=\frac{s}{p-b} \quad \text{و} \quad r_c=\frac{s}{p-c}$$
اگر این رابطه‌ها را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، تساوی دو طرف ثابت می‌شود.

۳. ۸. ۲. اندازهٔ مساحت مثلثها یا شکلهای دیگر ایجاد شده

۵۶۳. زاویهٔ $A\hat{K}B$ برابر ۹۰° است. فرض کنید R نقطهٔ برخورد BK و AC، و Q نقطه‌ای بر BK باشد، به‌طوری‌که $NQ\|AC$. با استفاده از نمادگذاری همیشگی، داریم :

$AR=AB=c$ ، $MR=c-(p-a)=p-b=NB$ و

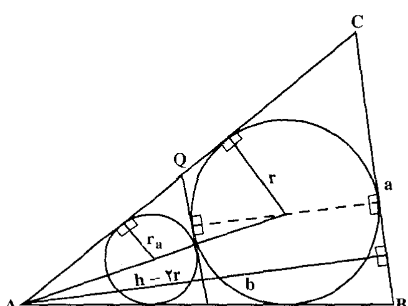
از آن‌جا که $\frac{MK}{KN}=\frac{MR}{QN}=\frac{CB}{RC}=\frac{a}{b-c}(b>c)$ ، $MN=۲(p-c)\sin\frac{\alpha}{۲}$ ، $MK=a\sin\frac{\alpha}{۲}$. بقیهٔ پاره‌خطها به روش مشابه در نظر گرفته می‌شوند. مثلث مطلوب، با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه برابر $\sin\frac{\alpha}{۲}$ است. مساحت این مثلث برابر با $S.\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$ است.

۵۶۴. $\frac{۷۲۰}{۱۷}cm^۲$.نوع مثلث را تعیین کنید.

۵۶۵. $(\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲})^۲$ عبارتهای $BQ=x$ ، $CQ=y$ را منظور کرده و از تساویهای $\frac{S_{ABC}}{S_۲}=(\frac{x+y}{y})^۲$ و $\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{x^۲}{y^۲}$ استفاده کنید.

۵۶۶. $\frac{abc(a+b+c)}{۴s}$

۵۶۷. یکی از مثلثهای بریده شده، مثلاً ΔAPQ ، که در آن PQ موازی BC است، را در نظر می‌گیریم. ازآن‌جاکه $\Delta APQ \sim \Delta ABC$: است، r_a شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ΔAPQ به r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC همان نسبت را دارد که هر قطعه در ΔAPQ به قطعهٔ نظیرش در ΔABC داراست. در حالت خاص، ارتفاع نظیر A در ΔAPQ ، که به‌اندازهٔ ۲r ، قطر دایرهٔ محاطیش با h ارتفاع نظیرش در ΔABC تفاوت دارد، به h به همین نسبت است بنابراین :



$$\frac{h-۲r}{h}=\frac{r_a}{r}=۱-\frac{۲r}{h}$$

فـرض می کنیم (ABC) مـسـاحت مـثلث ABC را نمایش دهد. از آن‌جـا کـه: $(ABC) = ah/2$ است، داریم: $h = 2(ABC)/a$ و در نتیجه:

$$\frac{r_a}{r} = 1 - \frac{r_a}{(ABC)}$$

به همین طریق، درمی‌یابیم که r_b و r_c شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای بریده شدهٔ دیگر، در رابطه‌های زیر صادقند:

$$\frac{r_b}{r} = 1 - \frac{r_b}{(ABC)} \quad \text{و} \quad \frac{r_c}{r} = 1 - \frac{r_c}{(ABC)}$$

با مربع کردن هر تساوی و جمع کردن، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{r^2} = 3 - \frac{2r(a+b+c)}{(ABC)} + \frac{r^2(a^2+b^2+c^2)}{(ABC)^2} \qquad (1)$$

اما:

$$(ABC) = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r.\frac{a+b+c}{2} = rs$$

که در آن $s = \frac{a+b+c}{2}$ است.

در نتیجه جملهٔ دوم سمت راست (۱) برابر ۴ است، و می‌توانیم (۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{r^2} = \frac{r^2(a^2+b^2+c^2)}{(ABC)^2} - 1$$

یا

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2}{r^2} = \frac{r^2(a^2+b^2+c^2)}{(ABC)^2} \qquad (3)$$

در (۳): $r = (ABC)/s$ را از (۲) قرار داده با استفاده از فرمول هرون می‌نویسیم:

$$(ABC)^2 = r^2 s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

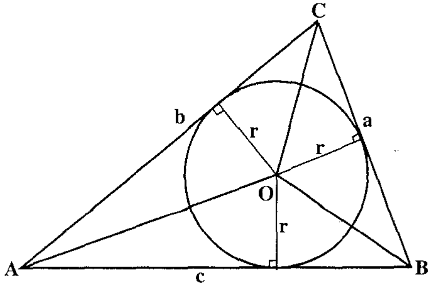
در این صورت به‌دست می‌آوریم:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + r^2 = (a^2+b^2+c^2)(s-a)(s-b)(s-c)/s^3$$

مساحت مطلوب، π برابر مقدار بالا است.

۳. ۸. ۳. رابطه‌ای در مساحتها

۵۶۸. ثابت کنید که Q_a، مساحت مثلث با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی خارجی به مرکز I_a با دستور $Q_a = S_{ABC}\frac{r_a}{2R} = \frac{S^2 ABC}{2R(p-a)}$ قابل محاسبه است. دستورهای مشابه برای دیگر مثلثها به‌دست خواهند آمد.



۵۷۰. ضلعهای مثلث محیطی را با a، b و c نمایش می‌دهیم. شعاعهای وارد بر نقطه‌های تماس بر ضلعها عمودند و از این‌رو ارتفاعهای سه مثلثی به حساب می‌آیند که مثلث محیطی به آنها تقسیم شده است. بنابراین مساحت مثلث برابر است با :

$$k=\frac{(ar+br+cr)}{r}=\frac{(a+b+c)r}{r}=\frac{pr}{۲}$$

در نتیجه $p/k=\frac{۲}{r}$ پس گزینه (د) درست است.

یادآوری. بدیهی است که p با r، k با $r^۲$ متناسب است، بنابراین p/k با ۱/r متناسب است. این موضوع گزینه‌های (الف)، (ج) و (هـ) را حذف می‌کند.

۹.۳. رابطه‌های متری

۳. ۹. ۱. رابطه‌های متری مربوط به زاویه‌ها، ضلعها و قطعه‌های ضلعها

۵۷۱. با توجه به این که

$$Az=p-a$$
$$Bx=p-b$$
$$Cy=p-c$$

است، داریم :

$$Az.Bx.Cy=(p-a)(p-b)(p-c)=\frac{S^۲}{p}=\frac{S}{p}.S=r.S$$

۳. ۹. ۲. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها

۵۷۲. رابطهٔ

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$
$$\frac{a}{۲S}+\frac{h}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{p}{S}$$

و یا :

$$\frac{a+b+c}{۲}=p$$

و این رابطه هم برقرار است.

۵۷۳. اگر AD ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC و P و Q تصویرهای I و I_a مرکزهای دایرهٔ محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع a روی آن باشند، AD مزدوج توافقی PQ است و رابطهٔ زیر را داریم :

$$AD=۲PQ.QD:(\overline{DQ}^۲-\overline{PD}^۲)$$

و به‌جای هر یک از جزءها مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$h_a = ۲(r+r_a)rr_a:(r_a^۲-r^۲)$$

و یا

$$h_a = ۲rr_a:(r_a-r)$$

تبصره. نقطه‌های P و Q ارتفاع AD را به نسبت $(r_a-r):(r_a+r)$ تقسیم می‌کنند.

۳. ۹. ۳. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۵۷۵. باید ثابت کنید که:

$$\frac{b-c}{m_a}=\frac{c-a}{m_b}=\frac{a-b}{m_c}=\frac{۲}{r}$$

۳. ۹. ۴. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۳. ۹. ۴. ۱. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (برابریها)

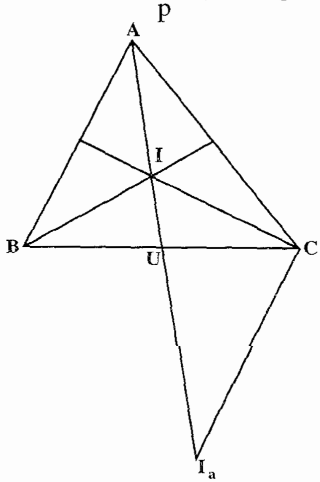
۵۷۷. داریم:

$$\Delta AOP \Rightarrow AO = AP:\cos\frac{\hat{A}}{۲} \text{ و } AP = p-a \Rightarrow AO=(p-a):\cos\frac{\hat{A}}{۲},$$

$$\cos^۲\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{p(p-a)}{bc},\quad AO^۲.BC = a(p-a)^۲:\cos^۲\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{abc(p-c)}{p}$$

$$\sum AO^۲\times BC=\frac{abc}{p}(p-a+p-b+p-c)=abc$$

۵۷۸. در مثلث ABC داریم:



$$BU:CU=c:b$$

$$BU:(BU+CU)=c:(b+c)$$

$$BU:a=c:(b+c)$$

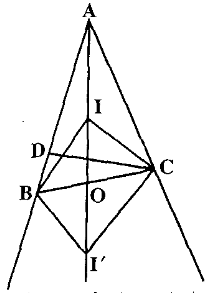
همچنین در مثلث ABU داریم: (BI نیمساز است)

$$AI:IU=c:BU$$

BU را از این رابطه به‌دست آورده و در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$AI.IU=(b+c):a$$

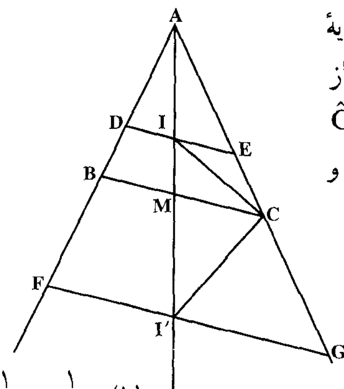
برای نیمساز خارجی طریقهٔ اثبات همین‌طور است.



۵۸۰. چهار ضلعی $IBI'C$ محاطی است. زیرا $I\hat{B}I' = I\hat{C}I' = 90^\circ$ و در دایرهٔ به قطر II' محاط می‌شود. روی AB قطعه خط AD را برابر AC جدا می‌کنیم و در مثلث متساوی‌الساقین ADC نیمساز رأس A عمودمنصف DC است. پس $OC = OD$ (O وسط II' است) بنابراین دایرهٔ محیطی چهارضلعی مذکور از D می‌گذرد. پس می‌توان نوشت:

$$AI.AI' = AD.AB = AC.AB$$

۵۸۱. I محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی و I' محل برخورد دو نیمساز زاویه‌های خارجی و یک نیمساز زاویهٔ داخلی است. پس IC و $I'C$ نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی زاویهٔ $\hat{C}$ می‌باشند. $(AIMI')$ توافقی است و داریم:



$$\frac{2}{AM} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AI'} \quad (1)$$

در دو مثلث متشابه نسبت نیمسازها برابر نسبت ضلعها است. پس در مثلثهای ABC و ADE داریم:

$$\frac{AI}{AM} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{AI} = \frac{BC}{AM.DE} \quad (2)$$

همچنین در مثلثهای ABC و ADE داریم:

$$\frac{AI'}{AM} = \frac{FG}{BC} \Rightarrow \frac{1}{AI'} = \frac{BC}{AM.FG} \quad (3)$$

در طرف دوم رابطهٔ (۱) دو رابطهٔ (۲) و (۳) را قرار می‌دهیم:

$$\frac{2}{AM} = \frac{BC}{AM.DE} + \frac{BC}{AM.FG}$$

اگر طرفین رابطه را در AM ضرب و بر BC تقسیم کنیم، حکم ثابت می‌شود.

۵۸۲. باید ثابت کنیم :

$$\frac{B_1C_1}{BC}+\frac{A_2C_2}{AC}+\frac{A_3B_3}{AB}=2$$

$$4S=B_1C_1.h_a+A_2C_2.h_b+A_3B_3.h_c$$

۵۸۴. می‌دانیم که : ۱. $A\hat{O}B=90+\frac{\hat{C}}{2}$ و $A\hat{D}O=90+\frac{\hat{C}}{2}$ و $B\hat{E}O=90+\frac{\hat{C}}{2}$

همچنین $O\hat{A}D=B\hat{O}E=B\hat{A}O=\frac{\hat{A}}{2}$ پس دو مثلث ADO و AOB و به همین ترتیب BOE با هم متشابه می‌شوند که در نتیجه

$$\frac{OD}{BE}=\frac{OA}{OB}=\frac{DA}{ED=OD}$$

۲. از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$\frac{AD}{EB}=\frac{AD\times EB}{EB^2}=\frac{OA^2}{OB^2}=\frac{OD^2}{BE^2}$$

و $OD^2=AD\times EB$

۳. ۹. ۴. ۲. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها (نابرابریها)

۵۸۵. ابتدا نیمسازهای AA'، BB' و CC' را رسم می‌نماییم. در مثلث ABA' طبق قضیهٔ نیمسازها داریم :

$$\frac{IA}{IA'}=\frac{c}{BA'}=\frac{c}{\frac{c.a}{b+c}}=\frac{b+c}{a}\Rightarrow\frac{IA}{IA+IA'}=\frac{b+c}{b+c+a}\Rightarrow\frac{IA}{AA'}=\frac{b+c}{2p}$$

$$\Rightarrow\frac{IB}{BB'}=\frac{a+c}{2p}\ \text{و}\ \frac{IC}{CC'}=\frac{a+b}{2p}$$

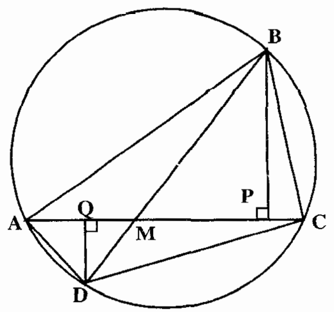
طبق نامساوی واسطهٔ حسابی هندسی، داریم : $xyz\le(\frac{x+y+z}{3})^3$ پس :

$$\frac{IA}{AA'}.\frac{IB}{BB'}.\frac{IC}{CC'}=\frac{b+c}{2p}.\frac{a+c}{2p}.\frac{a+b}{2p}\le\frac{1}{27}(\frac{b+c+a+c+a+b}{2p})^3=\frac{8}{27}$$

۵۸۶. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم :

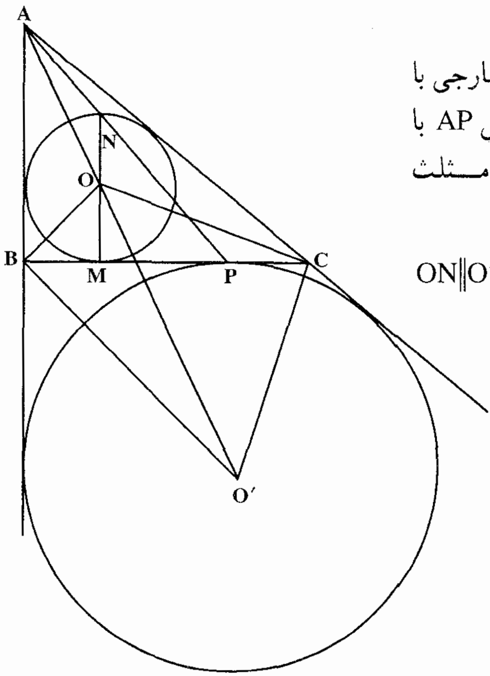
در چهارضلعی محاطی ABCD فرض می‌کنیم، P و Q پای عمودهای وارد از رأسهای B و D بر قطر AC باشند، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\sqrt{BP.DQ}\le\frac{AC}{2}$$



برای اثبات، فرض می‌کنیم نقطهٔ M محل برخورد قطرها باشد، در این صورت :

$$\begin{cases} DQ \le DM \\ BP \le BM \end{cases} \Rightarrow \sqrt{DQ.BP} \le \sqrt{DM.BM} \quad , \quad \sqrt{AM.MC} \le \frac{AM+MC}{۲} = \frac{AC}{۲}$$



حال به حل مسأله می‌پردازیم :
محل تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع BC را ′P و محل تلاقی AP با ′O′P را ″P می‌نامیم. در مثلث ″AO′P خواهیم داشت :

$$ON \| O'P'' \Rightarrow \frac{AO}{AO'} = \frac{ON}{O'P''}$$

از طرفی $\frac{r}{r_a} = \frac{AO}{AO'}$ یعنی $\frac{AO}{AO'} = \frac{ON}{O'P'}$. بنابراین $O'P' = O'P''$. یعنی نقطه‌های P و ′P و ″P بر هم منطبقند. پس P همان محل تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلع BC است. حال اگر لم فوق را در چهارضلعی محاطی ′BOCO استفاده کنیم، حکم ثابت می‌شود.

۳. ۹. ۵. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی

۳. ۹. ۵. ۱. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (برابریها)

۵۸۷. اگر s را نصف محیط مثلث بگیریم، داریم :

$$\frac{r}{r_a} + \frac{r}{r_b} + \frac{r}{r_c} = \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} + \frac{s-c}{s} = ۱$$

۵۸۸. داریم :

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r} = c^{te}$$

۵۸۹. داریم :

$$\text{پرانتز اول} = \frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}=\frac{۳p-a-b-c}{S}=\frac{p}{S}$$

$$\text{پرانتز دوم} = \frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}-\frac{p}{S}=\frac{p-a-b}{S}=\frac{p-(a+b+c)+c}{S}=$$

$$=\frac{p-۲p+c}{S}=\frac{-(p-c)}{S}$$

$$\text{پرانتز سوم} = \frac{-(p-a)}{S} \qquad \text{پرانتز چهارم} = \frac{-(p-b)}{S}$$

$$\text{طرف اول} = -\frac{p(p-a)(p-b)(p-S)}{S^۴}=-\frac{S^۲}{S^۴}=-\frac{۱}{S^۲}$$

۵۹۰. داریم :

$$r=\frac{S}{p} \qquad \frac{۱}{r}=\frac{p}{S}$$

$$r_a=\frac{S}{p-a} \qquad \frac{۱}{r_a}=\frac{p-a}{S}$$

$$\frac{p}{S}-\frac{p-a}{S}=\frac{۲}{h_a}\Rightarrow\frac{p-p+a}{S}=\frac{۲}{h_a}\Rightarrow\frac{a}{S}=\frac{۲}{h_a}\Rightarrow a.h_a=۲S$$

و در هر مثلث این رابطه برقرار است.

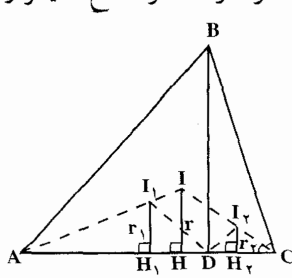
۵۹۲. داریم :

$$\frac{S}{p-a}.\frac{S}{p-b}.\frac{S}{p-c}=p.s\Rightarrow\frac{S^۲}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p\Rightarrow$$

$$\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}=p\Rightarrow p=p$$

۳. ۹. ۵. ۲. رابطه‌های متری مربوط به شعاعهای دایره‌های محاطی (نابرابریها)

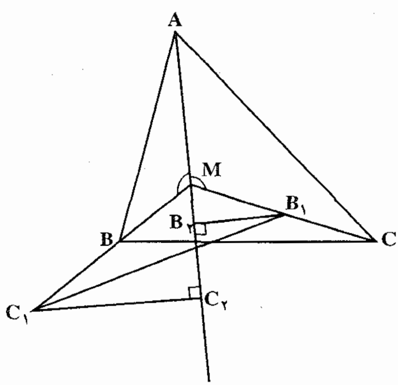
۵۹۳. در مثلث BIC (I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC) نقطه‌های $I_۱$ و $I_۲$ روی ضلعهای IA و IC قرار دارند و IH ارتفاع نظیر رأس I است. ثابت کنید $IH < I_۱H_۱ + I_۲H_۲$ است.



۳. ۹. ۶. رابطه‌های متری مربوط به نقطه و خط در صفحهٔ مثلث

۵۹۴. اگر بزرگترین زاویهٔ مثلث کمتر از ۱۲۰° باشد، آن وقت مجموع فاصله‌ها، به ازای نقطه‌ای که از آن، ضلعهای مثلث به زاویهٔ ۱۲۰° قابل رؤیتند، کمترین مقدار است. این مجموع، برابر BC_1 است. مربع این مجموع برابر است با $a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C} + 60^\circ) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S\sqrt{3}$ اما، می‌دانیم که $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. می‌ماند این که نابرابری $S \geq 3\sqrt{3}r^2$ را ثابت کنیم، که این هم، به روش نسبتاً ساده‌ای ثابت می‌شود؛ این مطلب نتیجه می‌دهد که از میان همهٔ مثلثهای محیط بر دایره‌ای مفروض، مثلث متساوی‌الاضلاع کمترین مساحت را دارد (برای این مثلث، تساوی برقرار است). برای کامل کردن برهان، لازم است تحقیق کنید که چه وقت نابرابری $a + b \geq 6r$ درست است، چرا که برای مثلثی با یک زاویهٔ بیشتر از ۱۲۰°، کمترین مقدار مجموع فاصله‌ها تا رأسها، در رأس منفرجه به‌دست می‌آید.

۵۹۵. روی نیمخطهای MB و MC، بترتیب نقطه‌های C_1 و B_1 را طوری می‌گیریم که $MC_1 = MC$ و $MB_1 = MB$ (مثلث MC_1B_1 نسبت به نیمساز زاویهٔ $B\hat{M}C$، قرینهٔ مثلث MBC است)، C_2 و B_2 بترتیب تصویرهای C_1 و B_1 روی خط راست AM هستند، داریم:

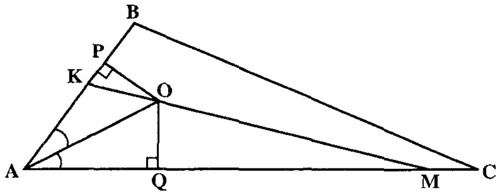


$$\begin{aligned} &BM.\sin A\hat{M}C + CM.\sin A\hat{M}B \\ &= B_1M\sin A\hat{M}C + C_1M\sin A\hat{M}B \\ &= B_1B_2 + C_1C_2 \geq B_1C_1 = a \end{aligned}$$

۳. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۵۹۶. راه اول. فرض کنید، خط راست، ضلعهای مثلث ABC را در K و M قطع کرده باشد که، برای مشخص بودن وضع، آنها را بترتیب روی ضلعهای AB و AC می‌گیریم. ثابت می‌کنیم برابری

$$\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}} = \frac{AK + AM}{AB + AC + BC} \qquad (1)$$



تنها وقتی برقرار است که، خط راست KM، از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث بگذرد. آنچه مسأله خواسته است، حالت خاصی از حکم بالاست، با این شرط اضافی که $S_{AKM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}$ (زیرا، شرط اخیر، به معنای برابری $S_{AKM}=S_{KBCM}$ است، و شرط $AK+AM=\frac{۱}{۲}(AB+AC+BC)$ به معنای درستی برابری $AK+AM+KM=KB+MC+BC-KM$ است.)
شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را، r می‌گیریم. در این صورت $۲S_{ABC}=r(AB+AC+BC)$. از طرف دیگر، اگر ρ شعاع دایره‌ای باشد که مرکز آن بر خط راست KM و خود دایره بر ضلعهای AK و AM مماس است، داریم:

$$۲S_{AKM}=\rho(AK+AM)$$

بنابراین، برابری (۱)، با برابری $r=\rho$ هم ارز است و برابری اخیر تنها وقتی برقرار است که مرکزهای دو دایره بر هم منطبق باشند.
راه دوم. فرض کنید این خط راست، ضلعهای AC و ABی مثلث ABCرا در نقطه‌های M و N قطع کند. قرار می‌گذاریم. $AM+AN=۲l$. شعاع دایرهٔ با مرکز روی MN که بر AC و AB مماس است، برابر است با $\frac{S_{AMN}}{l}$، بنا به فرض $\frac{S_{AMN}}{l}=\frac{S_{ABC}}{p}=r$، که در آن p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.

۵۹۷. ثابت کنید که خط راست موازی با BC که از E می‌گذرد، نیمساز زاویهٔ Aرا به همان نسبت تقسیم می‌کند که نیمساز زاویهٔ C آن را قسمت می‌کند.

۶۰۲. فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد این مماس مشترک با BC باشد. کافی است تحقیق کنیم $FN.NG=KN.NM=DN.NE$. همهٔ پاره‌خطها به سادگی محاسبه می‌شوند، چون $BD=CE=p-b$، $DE=|b-c|$، $\frac{DN}{NE}=\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}$ (r_a شعاع دایرهٔ مماس بر ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC است)، و غیره.

۶۰۳. (الف) فرض کنید خط راست BM، AC را در نقطهٔ B'، و خط CK، AB را در نقطهٔ C' قطع کند. از M، خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با AB و BC را بترتیب با P و Q نشان می‌دهیم. به روشنی، $\frac{AB'}{B'C}=\frac{PM}{MQ}$. با رسم کردن خط راستی از K به موازات AB و نشان دادن نقطه‌های برخورد آن با CA و CB، بترتیب با E و F، داریم: $\frac{BC'}{C'A}=\frac{FK}{KE}$.

ساختار مشابهی برای نقطهٔ L انجام می‌دهیم. با قرار دادن نسبتهای عبارت R به کمک این تساویها، ملاحظه می‌کنیم به ازای هر پاره خط در صورت، پاره‌خطی برابر در مخرج وجود دارد، مثلاً : $PM = KE$.

(ب) برای روشنی وضع، فرض کنید خط l، پاره‌خطهای $C_\circ A$ و $CA_\circ$ را قطع می‌کند و با OK، زاویهٔ حاده φ تشکیل می‌دهد. خط راست A_1L، پاره‌خط MK را به نسبت $\frac{S_{LMA_1}}{S_{LKA_1}}$ (با احتساب از نقطهٔ M) تقسیم می‌کند. نسبتهایی که ضلعهای KL و LM از مثلث KLM به آنها تقسیم می‌شوند، به روش مشابه پیدا می‌شوند. باید ثابت کنیم که برابری $R = ۱$ برقرار است. نسبتهای پاره‌خطها را با نسبتهای مساحتهای مثلثهای متناظر عوض می‌کنیم. در این صورت، R شامل S_{LMA_1} در صورت و S_{KMC_1} در مخرج است. ثابت کنید، $\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$، که در آن A و C زاویه‌های مثلث ABCاند. به روشنی $\frac{S_{B_\circ OA_\circ}}{S_{B_\circ OC_\circ}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$. بعلاوه، $A_1\hat{B}_\circ A_\circ = C_\circ\hat{B}_\circ A_\circ + A_1\hat{B}_\circ C_\circ = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} + \varphi$ (این تساوی از این حقیقت که دایرهٔ به قطر AO از $B_\circ$، $C_\circ$ و A_1 می‌گذرد، نتیجه می‌شود) و $B_\circ\hat{A}_1O = B_\circ\hat{A}O = \frac{\hat{A}}{۲}$ به همین نحو، $B_\circ\hat{C}O = \frac{\hat{C}}{۲}$ و

$$
\begin{aligned}
C_1\hat{B}_\circ C_\circ &= (۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}) + C_1\hat{O}L \\
&= (۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}) + (۱۸۰ - \hat{C} - B_\circ\hat{O}C_1) \\
&= (۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}) + (B_\circ\hat{C}A_1 - \hat{C}) \\
&= (۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}) + (۱۸۰ - \hat{A} - \hat{C} - \varphi) \\
&= ۹۰^\circ + \frac{\hat{B}}{۲} - \varphi
\end{aligned}
$$

یعنی، $\sin A_1\hat{B}_\circ A_\circ = \sin C_1\hat{B}_\circ C_\circ$ به این ترتیب :

$$
\frac{S_{A_1B_\circ A_\circ}}{S_{C_1B_\circ C_\circ}} = \frac{B_\circ A_1}{B_\circ C_1} = \frac{B_\circ A_\circ}{B_\circ C_\circ} = \frac{\sin\frac{\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{C}}{۲}}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}\cos\frac{\hat{A}}{۲}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}
$$

فرض کنید r معرف شعاع دایرهٔ محاطی مثلث باشد و $OL=OK=OM=a$ داریم :

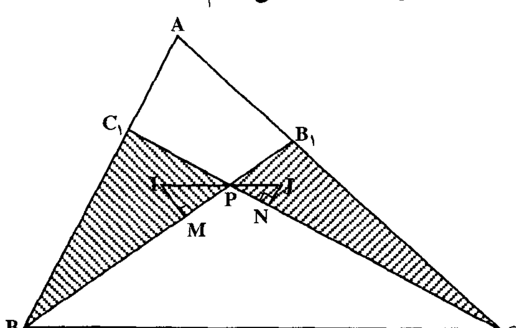
$$\frac{S_{LMA_1}}{S_{KMC_1}}=\frac{S_{LOM}+S_{LOMA_1}}{S_{KOM}+S_{KOMC_1}}=\frac{\frac{a^2}{r^2}S_{A_0OB_0}+\frac{a}{r}S_{A_0OB_0A_1}}{\frac{a^2}{r^2}S_{C_0OB_0}+\frac{a}{r}S_{C_0OB_0C_1}}$$

$$=\frac{\frac{a}{r}S_{A_0OB_0}+(S_{A_0B_0A_1}-S_{A_0OB_0})}{\frac{a}{r}S_{C_0OB_0}+(S_{C_0B_0C_1}-S_{C_0OB_0})}$$

$$=\frac{(\frac{a}{r}-1)S_{A_0OB_0}+S_{A_0B_0A_1}}{(\frac{a}{r}-1)S_{C_0OB_0}+S_{C_0B_0C_1}}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$$

(تساوی آخر، از این حقیقت که $\frac{S_{A_0OB_0}}{S_{C_0OB_0}}=\frac{S_{A_0B_0A_1}}{S_{C_0B_0C_1}}=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}$ نتیجه می‌شود.) به همین نحو در صورت و مخرج عبارت R، دو زوج دیگر انتخاب می‌کنیم که نسبتهایشان بترتیب برابر با $\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}$ و $\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}$ باشند. بنابراین، $R=1$ تنها این می‌ماند که ثابت کنید، تعداد نقطه‌های برخورد خطهای راست LA_1، KC_1 و MB_1 بترتیب با پاره‌خطهای KM، ML و LK ، فرد است.

۶۰۴. فرض می‌کنیم دو مثلث PB_1C و PCB_1 دو مثلثی باشند که مساحتها و محیطهای مساوی دارند : $S=S'$ و $2p=2p'$ می‌دانیم :



$$\left.\begin{array}{l}S=p.r\\ S'=p'.r'\end{array}\right\}\Rightarrow p.r=p'.r'\Rightarrow r=r'$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PMI و PNJ برابرند در نتیجه $PM=PN$ است ولی $PM=p-BC_1$ و $PN=p'-CB_1$ و یا $p-BC_1=p'-CB_1$ و یا $BC_1=CB_1$

از طرف دیگر :

$$\begin{cases} S = \frac{۱}{۲} BC_۱ . h_۱ \\ S' = \frac{۱}{۲} CB_۱ . h'_۱ \end{cases} \Rightarrow h_۱ = h'_۱$$

یعنی نقطهٔ P از دو ضلع AB و AC به یک فاصله است. یعنی P روی نیمساز زاویهٔ A واقع است.

۶۰۵. به دست می‌آوریم $\frac{F_bF_c}{B_۱C_۱} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)R^۳}{abc.OI_a.OI_b.OI_c}$ نسبتهای ضلعهای متناظر دیگر از مثلثهای $F_aF_bF_c$ و $A_۱B_۱C_۱$، همین مقدار هستند. تشابه زوج مثلثهای دیگر، به روش مشابه ثابت می‌شود.

۶۰۶. از D، خط راستی عمود بر نیمساز زاویهٔ A رسم کنید، سپس نقطه‌های برخورد آن با AB و AC را بترتیب با K و M نشان دهید و ثابت کنید که $AK = AM = \frac{b+c}{۲}$ چون، $AC_۱ = AB_۱ = p - a$ و $AC_۲ = BC_۲ = p$ (P نصف محیط مثلث ABC است، و a، b و c طول ضلعهای آن هستند)، نقطه‌های k و M وسط پاره‌خطهای $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$ هستند.

۳. ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

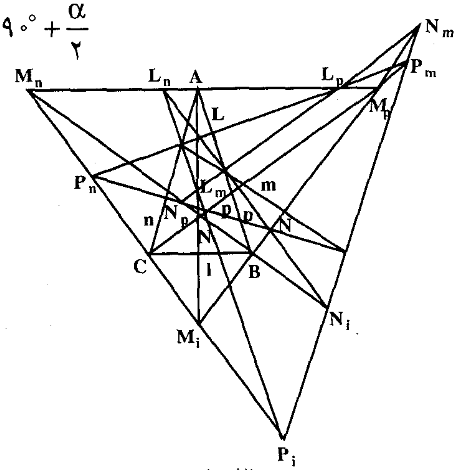
۶۰۷. فرض کنید، l، m، n و p خطهای راستی باشند که مثلثها را می‌سازند (شکل الف). نمادگذاری زیر را در نظر می‌گیریم : p مرکز دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل شده با خطهای l، m و n، و P_i مرکز دایرهٔ محاطی خارجی همین مثلث است که بر ضلعی که روی خط l قرار دارد، مماس است. نمادهای L، M_p، N_M و غیره به همین معنی‌اند.

در جدول روبه‌رو چهار نقطه‌ای که یک سطر یا ستون را تشکیل می‌دهند، روی یک دایره قرار دارند. مرکز دایره‌های متناظر با سطرها، روی یک خط راست ($q_۱$) قرار دارند، در حالی که مرکز دایره‌های متناظر ستونها روی خط دیگری ($q_۲$) واقعند؛ $q_۱$ و $q_۲$ دو به دو بر هم عمودند و در نقطهٔ میشل

L	N	M_i	P_n	$O_۱$
M	P	L_m	N_p	$O_۲$
P_m	M_p	N_m	L_p	$O_۳$
N_i	L_n	P_i	M_n	$O_۴$
$Q_۱$	$Q_۲$	$Q_۳$	$Q_۴$	

متقاطعند. این را ثابت می‌کنیم. این که چهار تاییهای مشخص شده، روی یک دایره قرار دارند، به سادگی ثابت می‌شود. فرض کنید O_i و Q_i $(i=۱,۲,۳,۴)$ معرف مرکز دایره‌های متناظر با آنها باشند. ثابت می‌کنیم که $O_۱O_۲$ بر $Q_۱Q_۳$ و $Q_۲Q_۴$ عمود است اگر در مثلث (i,m,n)، زاویهٔ میان L و m برابر α باشد، آن وقت

$$L\hat{N}M_i = L_m\hat{P}M = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$$



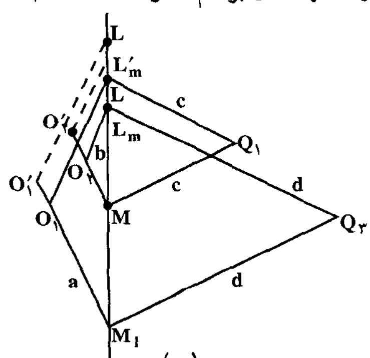
(الف)

در نتیجه $L\hat{O}_۱M_i = L_m\hat{O}_۲M = ۱۸۰^\circ - \alpha$ به روش مشابه

$$L\hat{P}_mM = L_m\hat{P}_iM_i = \frac{\alpha}{۲}$$

$$L\hat{Q}_۱M = L_m\hat{Q}_۳M_i = \alpha$$

مثلثهای $LO_۱M_i$ ، $L_mO_۲M$ ، $LQ_۱M$ و $L_mO_۳M_i$ ، مثلثهایی متساوی‌الساقیند، و ساقهایشان بر هم عمودند (مثلاً $O_۱L$ و $LQ_۱$) بعلاوه (شکل ب).



(ب)

$$Q_۱O_۱^۲ - O_۱O_۳^۲ = (a^۲+c^۲)-(a^۲+d^۲) = (b^۲+c^۲)-(b^۲+d^۲)$$
$$= O_۲Q_۱^۲ - O_۲Q_۳^۲$$

در نتیجه، O_1O_2 و Q_1Q_3 دو به دو بر هم عمودند. به روش مشابه، ثابت می‌کنیم که O_1O_2 و Q_2O_4 هم، دو به دو بر هم عمودند (خط راستی را در نظر بگیرید که نقطه‌های N، P ، N_p و P_n بر روی آن واقعند)، بنابراین Q_1Q_3 و Q_2Q_4 موازی‌اند (اگر این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار نگیرند). به روش مشابه، Q_1Q_4 و Q_3Q_2 هم، موازی‌اند (اینها بر O_1O_3 عمودند)، Q_1Q_2 با Q_3Q_4 موازی است (اینها بر O_1O_4 عمودند)، و این بدان معنی است که نقطه‌های Q_1 ، Q_2، Q_3 و Q_4 هم‌خط و بر روی خط راست q_2 واقعند؛ نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 هم، همخطند و روی خط q_2 قرار دارند. به روشنی، q_1 و q_2 دو به دو بر هم عمودند.

خط m را به موازات خودش جابه‌جا می‌کنیم. فرض کنید L'، L'_m ، O'_1 و O'_2 متناظر با خط راست m' باشند. نسبت $\dfrac{O_1O'_1}{O_2O'_2}=\dfrac{LL'}{L_mL'_m}$ ثابت است (این نسبت برابر $\dfrac{AL}{AL_m}$ است). این بدان معنی است که وقتی خط m جابه‌جا شود، خط O_1O_2، یعنی، q_1 ، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. خط راست q_2 هم، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. چون q_1 و q_2 دو به دو بر هم عمودند، نقطهٔ برخورد آنها یک دایره را می‌پیماید. اما، وقتی که m از A (و نیز B یا C) بگذرد، نقطه‌های L و L_m بر A منطبق می‌شوند و خطهای O_1O_2 و Q_1Q_3 ، یعنی، q_1 و q_2 ، از A (متناظراً B یا C) می‌گذرند. بنابراین، نقطهٔ برخورد q_1 و q_2 ، دایرهٔ محیطی مثلث ABC را می‌پیماید. با جابه‌جا کردن خطهای دیگر (p، n و l) ثابت می‌کنیم که نقطهٔ برخورد q_1 و q_2 به همه دایره‌های محیطی تک تک مثلثهای تشکیل شده با خطهای l، m، n و p متعلق است، یعنی، خطهای q_1 و q_2 در نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی این مثلثها، یعنی در نقطهٔ میشل به هم می‌رسند.

توجه کنید که به طور همزمان، ثابت کرده‌ایم که چهار دایرهٔ محیطی مثلثهای تشکیل شده با چهار خط راست در صفحه، در یک نقطه متقاطعند.

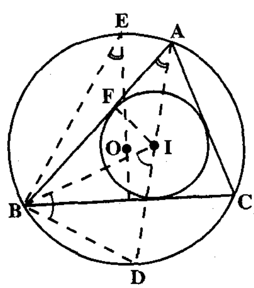
راهنمایی و حل

بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی

۱.۴. تعریف و قضیه

۶۱۰. فرض کنیم I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است. نیمساز AI از نقطهٔ D وسط کمان BC می‌گذرد و عمود DE بر BC قطر دایرهٔ محیطی است. خطهای BD، BE و BI را می‌کشیم. IF را بر AB عمود رسم می‌کنیم. درمثلث DBI هر یک از زاویه‌های B و I برابرند با $\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$($\hat{A}$ و $\hat{B}$ زاویه‌های مثلث ABC می‌باشد) پس $DI = DB$.
قدر مطلق قوت نقطهٔ I نسبت به دایرهٔ محیطی برابر است با $IA \times ID$ و یا $R^۲ - d^۲$ پس :

$$IA \times ID = R^۲ - d^۲; \qquad (۱)$$



اما از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DEB و IAF داریم : $\frac{DB}{r} = \frac{۲R}{IA}$ یا $DB \times IA = ۲Rr$ یا $DI \times IA = ۲Rr$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

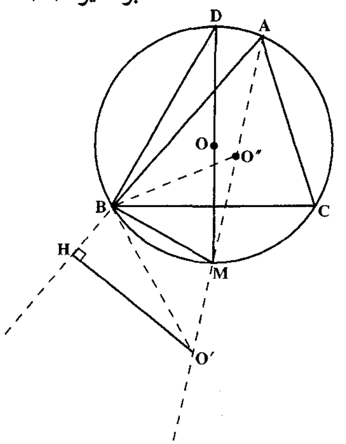
$R^۲ - d^۲ = ۲Rr$

یا $d^۲ = R^۲ - ۲rR;$

بعکس، اگر بین R ، r و d شعاع دو دایره و خط‌المرکزین آنها رابطهٔ (۲) $d^۲ = R^۲ - ۲Rr$ برقرار باشد. بینهایت مثلث می‌توان رسم نمود که در دایرهٔ اول محاط و بر دایرهٔ دوم محیط باشد زیرا رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که $r \leq \frac{R}{۲}$ و $d^۲ < (R-r)^۲$ یا $d < R - r$ پس دایرهٔ به مرکز I در داخل دایرهٔ (O) واقع است.

از نقطهٔ غیر مشخص A واقع بر دایرهٔ (O) و مماسهای AB و AC را بر دایرهٔ I رسم می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم که BC نیز بر دایرهٔ (I) مماس است. AI قوس BC را در وسط آنها، نقطهٔ D قطع می‌کند، DEعمود بر BC است پس قطری از دایرهٔ (O) است و رابطهٔ $۲Rr = d^۲ - r^۲$ را به صورت $۲Rr = IA \times ID$ می‌نویسیم که خواهیم داشت $\frac{ID}{r} = \frac{۲R}{IA}$. از تشابه دو مثلث IFA و DBE داریم : $\frac{DB}{r} = \frac{۲R}{IA}$ پس

$DI = DB$ ، $D\hat{I}B = D\hat{B}I$ یا $I\hat{B}A + \frac{\hat{A}}{۲} = C\hat{B}D + I\hat{B}C$ و از آن جـــــــــا
$I\hat{B}A = I\hat{B}C$ پس BI نیمساز داخلی مثلث ABC است، BA بر دایرهٔ (I) مماس است. BC نیز بر (I) مماس می‌باشد.



۶۱۱. برای تعیین مرکز دایره‌ای که مماس بر ضلع a است، خطی بر نیمساز زاویهٔ داخلی B یعنی ″BO عمود می‌کنیم تا امتداد نیمساز زاویهٔ داخلی A را در ′O قطع کند. عمود O′H را بر AB فرود می‌آوریم. قوت نقطهٔ ′O را نسبت به دایرهٔ O می‌نویسیم.

$$O'M.O'A = d^۲ - R^۲ = OO'^۲ - R^۲ \qquad (۱)$$

نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ Aبا دایره را M نامیده، قطر گذرنده از M را MD می‌نامیم و از D به B وصل می‌کنیم. دو مثلث BDM و ′AHO متشابه هستند. چون هر دو قائم الزاویه هستند.

$$\hat{A} = \hat{D} = \frac{BM}{۲}$$

بنابراین نسبت تشابه را می‌نویسیم :

$$\frac{BM}{O'H = r_a} = \frac{DM = ۲R}{O'A} \Rightarrow ۲R.r_a = BM.O'A$$

ولی چون $BM = O'M$ ، به جایش قرار می‌دهیم.

$$۲R.r_a = \overline{O'M}.\overline{O'A} \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow ۲R.r_a = OO'^۲ - R^۲ \Rightarrow OO'^۲ = ۲Rr_a + R^۲$$

به فرض $OO' = d$ ، این رابطه را به صورت $d^۲ = R^۲ + ۲Rr_a$ می‌توان نوشت.

۲.۴. زاویه

۱.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۶۱۲. اگر نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی با ضلع AB را F بنامیم، در مثلث قائم‌الزاویه AIF داریم :

$$\sin\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{IF}{IA} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

از طرفی داریم : $۲R=\dfrac{a}{\sin\hat{A}}\Rightarrow ۱۶=\dfrac{a}{\sin ۶۰^\circ}\Rightarrow a=۱۶\times\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}=۸\sqrt{۳}$

در مثلث IAF، اندازهٔ AF برابر $p-a$ است، پس :

$$p-a=AF=IA\cos ۳۰^\circ=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\Rightarrow p=۱۱\sqrt{۳}$$

با معلوم بودن P و a مقدار $b+c$ مشخص می‌شود. حال با استفاده از قانون سینوسها می‌توان $\hat{B}-\hat{C}$ را به دست آورد و چون $\hat{B}+\hat{C}=۱۲۰^\circ$ است، زاویه‌های B و C به دست می‌آید.

۶۱۳. ۱۰۸°

۶۱۴. فرض می‌کنیم ضلعهای مثلث به صورت $a+d$ و a و $a-d$ باشد، داریم :

$$\cos\hat{B}=\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}=\frac{(a-d)^۲+(a+d)^۲-a^۲}{۲(a-d)(a+d)}=\frac{a^۲+۲d^۲}{۲(a^۲-d^۲)} \qquad (۱)$$

از طرفی :

$$\frac{R-r}{R}=۱-\frac{r}{R}=۱-\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{۴S}}=۱-\frac{۴s^۲}{Pabc}$$

$$=۱-\frac{۴(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=۱-\frac{۴(\frac{۳a}{۲}-a+d)(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a-d)}{(a-d)(a)(a+d)}$$

$$=۱-\frac{a^۲-۴d^۲}{۲(a^۲-d^۲)}=\frac{a^۲+۲d^۲}{۲(a^۲-d^۲)} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که : $\cos\hat{B}=\dfrac{R-r}{R}$.

۳.۴. ضلع

۱.۳.۴. اندازهٔ ضلع

۶۱۵. $\dfrac{\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}{۲}$.

۶۱۶. ضلعهای مثلث را $a+d$ ، a ، $a-d$ اختیار می‌کنیم. داریم :

$$۲p=۳a\Rightarrow p=\frac{۳a}{۲}\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{a}{۲}\sqrt{۳(\frac{a^۲}{۴}-d^۲)}$$

$$r=\frac{S}{p}\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{\frac{a}{۲}\sqrt{۳(\frac{a^۲}{۴}-d^۲)}}{\frac{۳a}{۲}}=\frac{\sqrt{۳(\frac{a^۲}{۴}-d^۲)}}{۳} \qquad (۱)$$

$$R=\frac{abc}{۴S}\Rightarrow\frac{۵}{۴}=\frac{(a-d)a(a+d)}{۴\times\frac{a}{۲}\sqrt{۳(\frac{a^۲}{۴}-d^۲)}}=\frac{a^۲-d^۲}{۲\sqrt{۳(\frac{a^۲}{۴}-d^۲)}}\qquad(۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=۲$ و $d=\frac{۱}{۲}$. از آن جا، اندازه‌های ضلعهای مثلث برابرند با $\frac{۵}{۲}$، ۲، $\frac{۳}{۲}$، در نتیجه اگر کوچکترین زاویه را A فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۴+\frac{۲۵}{۴}-\frac{۹}{۴}}{۲\times۲\times\frac{۵}{۲}}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\hat{A}=\mathrm{Arc}\cos\frac{۴}{۵}$$

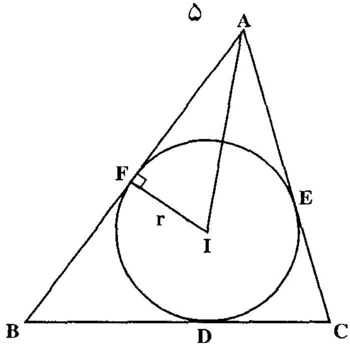
۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۶۱۷. داریم:

$$\hat{A}=\mathrm{Arc}\cos\frac{۳}{۵}\Rightarrow\cos\hat{A}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\hat{A}=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R\Rightarrow\frac{a}{\frac{۴}{۵}}=۱۰\Rightarrow a=۸$$



در مثلث AIF داریم: $\mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{IF}{AF}=\frac{r}{AF}$ اما:

$$\sin\hat{A}=\frac{۲\,\mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲}}{۱+\mathrm{tg}^۲\frac{\hat{A}}{۲}}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{۲\mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲}}{۱+\mathrm{tg}^۲\frac{\hat{A}}{۲}}\Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱}{۲}\ ,\ \mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲}=۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{AF}\Rightarrow$$

$AF=۴=p-a\Rightarrow۴=p-۸\Rightarrow p=۱۲$ نصف محیط

$$۲p=۲۴\Rightarrow b+c+a=۲۴\Rightarrow b+c=۲۴-۸=۱۶$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R\Rightarrow\frac{۸}{\frac{۴}{۵}}=\frac{b+c}{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow۱۰=\frac{۱۶}{۲\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}}\Rightarrow۵\cos\frac{\hat{A}}{۲}.\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}=۴$$

$$\cos \hat{A} = \frac{۳}{۵} = ۲\cos^{۲}\frac{\hat{A}}{۲} - ۱ \Rightarrow \cos\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\Rightarrow ۵ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}} \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} = ۴ \Rightarrow \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} = \cos\alpha$$

در نتیجه $\hat{B}-\hat{C}$ مشخص می‌شود و چون $\hat{B}+\hat{C}$ نیز معلوم است، پس اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و از روی آنها اندازهٔ ضلعهای b و c بترتیب ۶ و ۱۰ به دست می‌آید. حال داریم :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۱۲(۴)(۶)(۲)} = ۲۴$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{۲}{a}S = \frac{۲}{۸} \times ۲۴ = ۶$$

۶۱۸. چنین مثلثی زاویه‌هایش °۳۶ ، °۳۶ و °۱۰۸ می‌باشند. با استفاده از قانون سینوسها با معلوم بودن R، اندازهٔ ضلعهای a، b و c به دست می‌آید و با معلوم بودن ضلعها، اندازهٔ میانه‌ها و از جمله m_a قابل محاسبه است.

۶۱۹. نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی مثلث با نیمساز AD را که از I مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد، E می‌نامیم. اندازهٔ کمان BC برابر °۱۲۰ و در نتیجه $BE = EC = ۶۰^\circ$ و از آن جا $EB = EC = R$ است و با معلوم بودن R، اندازهٔ ضلعهای AB، AC و BC مشخص است.

بنا به قضیه بطلمیوس داریم :

$EB.AC + AB.EC = AE.BC \Rightarrow AE =$ مقدار معلوم

۵.۴. پاره خط

۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۶۲۰. الف . داریم :

$$KA' + A'K'' = KK'' = \frac{۱}{۲}I_aI = \frac{۱}{۲}(I_aX_a + X_aI)$$

ولی

$$I_aX_a = r_a \ , \ A'K'' = X_aI = r$$

پس خواهیم داشت :

$$KA' + r = \frac{۱}{۲}(r_a + r)$$

و یا :

$$KA' = \frac{۱}{۲}(r_a - r)$$

ب . K' وسط ضلع I_bI_c از دوزنقهٔ $I_bI_cX_cX_b$ است و داریم :

$$A'K' = \frac{۱}{۲}(I_bX_b + I_cX_c) = \frac{۱}{۲}(r_b + r_c)$$

نتیجه : رابطهٔ $r_a + r_b + r_c = ۴R + r$ به سادگی از تساوی

$$KK' = KA' + A'K'$$

و با قرار دادن $A'K' = \frac{۱}{۲}(r_b + r_c)$ ، $KA' = \frac{۱}{۲}(r_a - r)$ ، $KK' = ۲R$
به جای آنها به دست می‌آید.

۶۲۱. از نقطهٔ O ، خطهای راستی به موازات AB و AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد این خطها با عمودهای وارد از I_a بر AB و AC را بترتیب با L و K نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که مثلثهای $AB_۱C_۱$ و OLK متشابه‌اند. داریم :

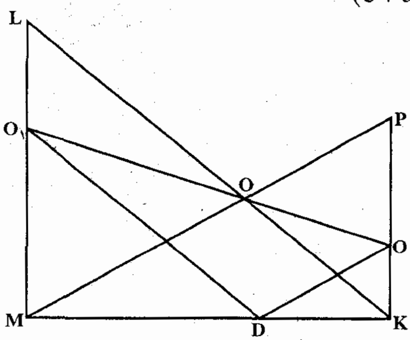
$$B_۱\hat{A}C_۱ = L\hat{O}K \text{ ، } AB_۱ = \frac{bc}{c+a} \text{ ، } AC_۱ = \frac{bc}{c+a}, \quad OL = p - \frac{c}{۲} = \frac{۱}{۲}(a+b)$$ و

$OK = p - \frac{b}{۲} = \frac{۱}{۲}(a+c)$ بنابراین :

$$\frac{AB_۱}{OL} = \frac{AC_۱}{OK} = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)}$$

اما OI_a قطر دایرهٔ محیطی مثلث OLK است، در نتیجه :

$$B_۱C_۱ = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)} \times LK = \frac{۲bc}{(c+a)(b+a)} OI_a \sin A$$
$$= \frac{abc}{(c+a)(b+a)R} . OI_a$$



۲.۵.۴. نسبت پاره‌خطها

۶۲۲. فرض کنید M و K بترتیب نقطه‌های تماس دایره‌های به مرکزهای $O_۱$ ، $O_۲$ با AC باشند. داریم که $O_۱\hat{D}M = O\hat{K}D = \frac{\varphi}{۲}$ و $O_۲\hat{D}K = O\hat{M}D = ۹۰^\circ - \frac{\varphi}{۲}$.

OK و OM را امتداد می‌دهیم تا $O_۱M$ و $O_۱K$ را بترتیب در نقطه‌های L و P قطع کنند. در ذوزنقهٔ LMKP با قاعده‌های LM و PK ، داریم :

$$\frac{MO_۱}{O_۱L} = \frac{MD}{DK} = \frac{PO_۲}{O_۲K}$$

در نتیجه، $O_۱O_۲$ از نقطهٔ برخورد قطرهای این ذوزنقه، نقطهٔ O ، می‌گذرد، بعلاوه :

$$\frac{O_۱O}{OO_۲} = \frac{LM}{PK} = \frac{MK \tan\frac{\varphi}{۲}}{MK \cot\frac{\varphi}{۲}} = \tan^۲\frac{\varphi}{۲}$$

۶۲۳. فرض کنید Q معرف وسط OH باشد. همان طور که می‌دانیم، Q مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است. داریم $OH^۲ + ۴QI^۲ = ۲OI^۲ + ۲HI^۲$ از آن جا که $QI = \frac{R}{۲} - r$ (بنا بر قضیهٔ فوئرباخ)، $OI^۲ = R^۲ - ۲Rr$ (دستور اویلر) و با در نظر داشتن این که

$R \geq 2r$، به دست می‌آوریم :

$$OH^2 = 2IH^2 + R^2 - 4r^2 \geq 2IH^2$$

۳.۵.۴. تساوی پاره‌خطها

۶۲۴. نقطهٔ M را وسط پاره‌خط O_1O_2 فرض کنید. پاره‌خطهای O_1B، O_1C، O_2B و O_2C را رسم کنید. با استفاده از این مطلب که مثلثهای O_1BO_2 و O_1CO_2 قائم‌الزاویه‌اند، زاویه‌های $B\hat{M}O_1$ و $C\hat{M}O_1$ را بر حسب زاویه‌های مثلث اصلی بنویسید. بالاخره ثابت کنید :

$$B\hat{A}C + B\hat{M}C = 180°$$

۶.۴. شعاع

۱.۶.۴. اندازهٔ شعاع

۶۲۵.

۱. $r_a = 30\ ,\ r = 15\ ,\ R = \frac{1037}{30}$

۲. $r_a = 56\ ,\ r = 28\ ,\ R = \frac{7345}{112}$

۳. $r_a = 164\ ,\ r = \frac{164}{7}\ ,\ R = \frac{3445}{56}$

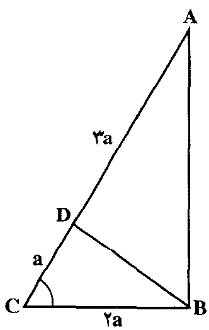
۶۲۶. از فرمولهای مربوطه استفاده می‌کنیم.

$S = 360 cm^2\quad ,\ r = 8 cm\ ,\ r_a = 18 cm\ ,$

$r_b = 40 cm\ ,\ r_c = 22/5\ cm$

۶۲۷. $\frac{Rr}{R+r}$

۲.۶.۴. نسبت شعاعها



۶۲۸. پارامتر کمکی $CD = a$ را منظور می‌کنیم. آن‌گاه $AD = 3a$، $AC = 4a$ و $BC = 2a$ خواهد بود. برای یافتن R، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، به محاسبهٔ ضلع AB به وسیلهٔ قانون کسینوسها مبادرت کرده و سپس قانون سینوسها را به کار می‌گیریم.

چنین داریم : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos\hat{C}$ یعنی :

$$AB^2 = 16a^2 + 4a^2 - 2 \cdot 4a.2a.\frac{3}{4}$$

از این رابطه $AB=۲a\sqrt{۲}$ نتیجه می‌شود. طبق فرض $\cos\hat{C}=\frac{۳}{۴}$ بوده و از این رو

$$\sin\hat{C}=\sqrt{۱-\cos^{۲}\hat{C}}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

را خواهیم داشت. طبق قانون سینوسها $\frac{AB}{\sin\hat{C}}=۲R$ و در نتیجه $۲R=\frac{۲a\sqrt{۲}.۴}{\sqrt{۷}}$ را داریم از این رابطه $R=\frac{۴a\sqrt{۲}}{\sqrt{۷}}$ به دست می‌آید. شعاع r دایرهٔ محاطی مثلث ABD با فرمول $r=\frac{S}{p}$ به دست می‌آید که در آن S مساحت و P نصف محیط مثلث ABD است.

می‌دانیم که $AD=۳a$ و $AB=۲a\sqrt{۲}$ است. ضلع BD از مثلث BCD را طبق قانون کسینوسها به دست می‌آوریم: $BD^{۲}=a^{۲}+۴a^{۲}-۲a.۲a.\frac{۳}{۴}$ از این تساوی $BD=a\sqrt{۲}$ حاصل می‌شود. از این‌رو داریم:

$$p=\frac{۳a+۲a\sqrt{۲}+a\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳a}{۲}+\frac{۳a\sqrt{۲}}{۲}$$

مساحت S مثلث ABD با فرمول هرون محاسبه می‌شود:

$$S=\sqrt{p(p-AD)(p-AB)(p-BD)}$$

$$=\sqrt{(\frac{۳a}{۲}+\frac{۳a\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۳a\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۳a}{۲})(\frac{۳a}{۲}-\frac{a\sqrt{۲}}{۲})(\frac{۳a}{۲}+\frac{a\sqrt{۲}}{۲})}$$

$$=\sqrt{(\frac{۹a^{۲}}{۲}-\frac{۹a^{۲}}{۴})(\frac{۹a^{۲}}{۴}-\frac{a^{۲}}{۲})}=\frac{۳a^{۲}\sqrt{۷}}{۴}$$

از این‌رو داریم: $\frac{R}{r}=\frac{۸}{۷}(۲+\sqrt{۲})\ ,\ r=\frac{S}{p}=\frac{a\sqrt{۷}}{۲(\sqrt{۲}+۱)}$

۷.۴. محیط

۱.۷.۴. اندازهٔ محیط مثلث

۶۲۹. با استفاده از $R=\frac{abc}{۴s}$ و $r=\frac{S}{p}$ داریم:

$$\frac{۴۵\sqrt{۱۴}}{۵۶}=\frac{۹۰}{۴s}\Rightarrow S=۲\sqrt{۱۴}$$

اندازهٔ محیط مثلث $r=\frac{S}{p}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۱۴}}{۷}=\frac{۲\sqrt{۱۴}}{p}\Rightarrow p=۷\Rightarrow ۲p=۱۴$

۶۳۰. داریم :

$$R = \frac{abc}{۴S} \; , \; r = \frac{S}{p} \; , \; R = \frac{۴۵}{۱۶}r$$

$$\Rightarrow \frac{۴۵s}{۱۶p} = \frac{abc}{۴S} \Rightarrow ۴۵S^۲ = ۴pabc \Rightarrow ۴۵(۸\sqrt{۱۴})^۲ = ۴p \times ۷۲۰$$

$$\Rightarrow p = ۱۴ \Rightarrow ۲p = ۲۸$$ اندازهٔ محیط مثلث

۸.۴. مساحت

۴. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۶۳۲. فرض کنید ABC معرف مثلث مفروض باشد، و O ، K و H بترتیب مرکز دایره‌های محیطی و محاطی و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشند. از نتیجهٔ زیر استفاده می‌کنیم : در مثلثی دلخواه نیمساز هر یک از زاویه‌های آن، با شعاع دایرهٔ محیطی و ارتفاع خارج شده از آن رأس، زاویه‌های برابر می‌سازد (اثبات به عهده خواننده واگذار می‌شود).

چون دایره‌ای که از O، K و H می‌گذرد، دست کم، شامل یک رأس از مثلث ABC (مثلاً، رأس A) است، نتیجه می‌شود که $OK = KH$ نقطهٔ K ، دست کم، در درون یکی از مثلثهای OBH و OCH قرار می‌گیرد فرض کنید این مثلث OBH باشد. زاویهٔ $\hat{B}$ نمی‌تواند منفرجه باشد. در مثلثهای OBK و HBK ، داریم : $OK = HK$، KB ضلع مشترکی است و $O\hat{B}K = H\hat{B}K$. بنابراین $\Delta OBK = \Delta HBK$ ، زیرا در غیر این صورت $B\hat{O}K + B\hat{H}K = ۱۸۰°$ ، که این ناممکن است (K در درون مثلث OBH است). در نتیجه $BH = BO = R$ فاصلهٔ O تا AC، برابر است $۰/۵R = ۰/۵BH$ یعنی، $\hat{B} = ۶۰°$ ($\hat{B}$ حاده است) و $AC = R\sqrt{۳}$ حال اگر $A_۱$ ، $B_۱$ و $C_۱$ بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای BC، CA و AB با دایرهٔ محاطی مثلث باشند، آن وقت $BA_۱ = BC_۱ = r\sqrt{۳}$ و

$$CA_۱ + AC_۱ = CB_۱ + B_۱A = AC = R\sqrt{۳}$$

محیط مثلث برابر با $۲\sqrt{۳}(R+r)$ است. اکنون، پیدا کردن مساحت آن آسان است.
جواب : $\sqrt{۳}(R+r)r$.

۴. ۸. ۲. نسبت مساحتها

۶۳۳. در دو مثلث ABC و IYZ دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{I}$ مکمل یکدیگرند :

$$S_{IYZ} : S_{ABC} = r^۲ : bc = ar^۲ : abc$$

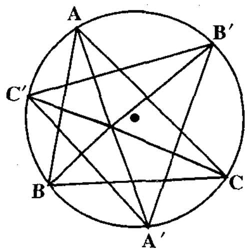
شبیه این رابطه‌ها را برای مثلثهای IZX و IXY می‌نویسیم و، طرفین سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم، خواهیم داشت:

$S_{XYZ}:S_{ABC} = r^2(a+b+c):abc$

اگر: $a+b+c = 2p \;,\; pr = S \;,\; abc = 4RS$

قرار دهیم و طرفین تساوی را معکوس کنیم، حکم ثابت می‌شود.

۶۳۴. از دستور $S = 2R^2 \sin\hat{A}\sin\hat{B}\sin\hat{C}$ برای مساحت مثلث، استفاده می‌کنیم، که در آن A، B و C زاویه‌های مثلثند. در این صورت، مساحت مثلث $A_1B_1C_1$، که در آن A_1، B_1 و C_1 نقطه‌های برخورد نیمسازهای مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن هستند، برابر



$$S = 2R^2 \sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\sin\frac{\hat{C}+\hat{A}}{2} = 2R^2\cos\frac{\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}$$

خواهد بود و $\frac{S}{S_1} = 8\sin\frac{\hat{A}}{2}.\sin\frac{\hat{B}}{2}.\sin\frac{\hat{C}}{2}$. از طرفی $BC = 2R\sin\hat{A}$، $r(\cot g\frac{\hat{B}}{2}+\cot g\frac{\hat{C}}{2}) = 2R\sin\hat{A}$ و $r = 4R\sin\frac{\hat{A}}{2}\sin\frac{\hat{B}}{2}\sin\frac{\hat{C}}{2}$، بنابراین، $\frac{S}{S_1} = \frac{2r}{R}$.

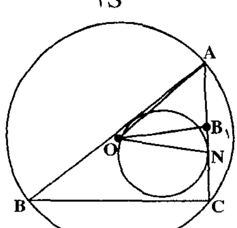
۶۳۵. $\frac{784}{7225}$.

۹.۴. رابطه‌های متری

۱.۹.۴. رابطه‌های متری (برابریها)

۶۳۶. عبارتهای $b = a+d$ و $c = a+2d$ را درنظر گرفته و مساحت S را برحسب a و d بیان کنید. فرمول را به‌کار گرفته و سپس فرمولهای $R = \frac{abc}{4S}$ و $r = \frac{S}{P}$ را مورد استفاده قرار دهید.

۶۳۷. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، B_1 وسط AC و N نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث با AC باشد. دراین صورت، $AN = p-a$، $CN = p-c$



و

$$ON^2 = OB_1^2 + B_1N^2 = AO^2 - AB_1^2 + B_1N^2$$
$$= R^2 - \frac{b^2}{4} + (p - a - \frac{b}{2})^2$$
$$= R^2 - (p-a)(p-c)$$

سپس مربع فاصلهٔ نقطه‌های دیگر تماس را پیدا می‌کنیم و آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم تا مجموع موردنظر را به‌دست آوریم ؛ این مجموع برابر است با :

$$3R^2 - (p-a)(p-c) - (p-c)(p-b) - (p-b)(p-a) = 3R^2 - M$$

با استفاده از دستور هرون برای مساحت مثلث و دستورهای $S = pr$ و $S = \frac{abc}{4R}$ ، به‌دست می‌آوریم : $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$ و $4Rr = \frac{abc}{p}$ ، با جمع کردن دو برابری اخیر و استفاده از اتحاد :

$$(p-a)(p-b)(p-c) + abc = p(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) +$$
$$(p-c)(p-a) = P.M$$

به‌دست می‌آوریم : $M = 4Rr + r^2$

جواب : $3R^2 - 4Rr - r^2$

۶۳۸. $\frac{abc}{2P} = 2 \times \frac{abc}{4S} \times \frac{S}{P} \Rightarrow 1 = 1$

۶۴۰. داریم : $r_a - r = 2KA' - 2(KO - OA')$

از طرفی داریم : $2OA' + r_a = AH + r_a = 2KO + r = 2R + r$

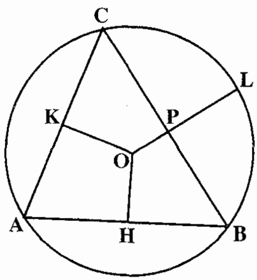
و همین‌طور داریم : $BH + r_b = CH + r_c = 2R + r$

تبصره. نسبت ضلع هر مثلث، به ضلع مقابلش از مثلثی که پای ارتفاعها را به هم وصل می‌کند، برابر است با نسبت شعاع دایرهٔ محیطی مثلث به فاصلهٔ مرکز این دایره ازاین ضلع .

۶۴۲. اگر رابطهٔ اول میانه‌ها را برای دو مثلث OII_a و OI_bI_c بنویسیم (O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است)، خواهیم داشت :

$$\overline{OI}^2 + \overline{OI_a}^2 = 2OK^2 + \frac{1}{2}\overline{II_a}^2$$
$$\overline{OI_b}^2 + \overline{OI_c}^2 = 2OK'^2 + \frac{1}{2}\overline{I_bI_c}^2$$

و با استفاده از رابطه‌های مسألهٔ قبل رابطه‌های بالا به سادگی به‌دست می‌آید.



۶۴۴. اگر OH ، OP و OK را d، d′ و d″ و شعاع دایرهٔ محیطی را R و شعاعهای دایره‌های محاطی و محاطی خارجی را r، r′ ، r″ و r‴ بنامیم، می‌دانیم :

$LP=\frac{r'-r}{۲}$ پس $d'=R-\frac{r'-r}{۲}$ و

$d''=R-\frac{r''-r}{۲}$ و $d=R-\frac{r'''-r}{۲}$ از جمع رابطه‌های بالا، داریم :

$d+d'+d''=۳R-\frac{r'+r''+r'''+۳r}{۲}$ و می‌دانیم :

$r'+r''+r'''=۴R+r$ پس :

$d+d'+d''=۳R-\frac{۴R+r-۳r}{۲}$ یا $d+d'+d''=R+r$

۶۴۵. داریم :

$$r_a+r_b+r_c-r=S(ABC)(\frac{۱}{s-a}+\frac{۱}{s-b}+\frac{۱}{s-c}-\frac{۱}{s})$$
$$=\frac{S(ABC)abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{s(ABC)}=۴R$$

$$S(I_aI_bI_c)=S(I_aCB)+S(I_bAC)+S(I_cBA)+S(ABC)$$
$$=\frac{۱}{۲}(ar_a+br_b+cr_c)+sr$$
$$=\frac{۱}{۲}s(r_a+r_b+r_c-r)-\frac{۱}{۲}(s-a)r_a$$
$$-\frac{۱}{۲}(s-b)r_b-\frac{۱}{۲}(s-c)r_c+۳sr$$
$$=\frac{۱}{۲}s.۴R-\frac{۳}{۲}S(ABC)+\frac{۳}{۲}S(ABC)$$
$$=۲sR$$

۶۴۶. چون $r_a+r_b+r_c=r+۴R$ است، با ثابت بودن r و R اندازهٔ $r_a+r_b+r_c$ ثابت است.

۶۴۷. از A، خط راستی عمود بر OI رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با خط راست BC را به D نشان می‌دهیم. ثابت کنید که تفاضل شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و ACD برابر با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BKM است.

۲.۹.۴. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۶۴۸. داریم:

$R(R-2r)=R^2-2rR=d^2\geq 0$ و $R>0 \Rightarrow R-2r\geq 0$

۶۴۹. فرض کنید در مثلث حادهٔ ABC، نابرابریهای $AC\leq AB\leq BC$ برقرار باشند؛ BD ارتفاع، O مرکز دایرهٔ محیطی، I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و E تصویر I روی BD است. از آن‌جا که $ED=r$، باید ثابت کنیم که $BE\geq R=BO$. اما، BI نیمساز زاویهٔ EBO است (BI نیمساز زاویهٔ ABC است و $A\hat{B}D=O\hat{B}C$)، $B\hat{E}I=90^\circ$ و $B\hat{O}I\geq 90^\circ$ (نابرابری اخیر، از این حقیقت که طول تصویر CI روی BC از $\frac{BC}{2}$ تجاور نمی‌کند، به‌دست می‌آید). در نتیجه، $BE\geq BO$ را به‌طور قرینهٔ نسبت به BI می‌نگاریم.

۶۵۰. از برابری $Rr=\frac{abc}{4P}$ و نابرابری $2p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ (نابرابری میانگین حسابی ـ هندسی) استفاده کنید.

۶۵۱. دایره‌ای بر مثلث AMC محیط کنید. تمامی مثلثهای A_1MC حاصل از جابه‌جایی M روی کمان AC متشابه‌اند، درنتیجه، نسبت $\frac{CM}{A_1M}$ برای همهٔ آنها یکی است. بنابراین اگر M نقطهٔ مینیمم عبارت $f(M)=\frac{BM.CM}{A_1M}$ باشد، آن وقت BM باید از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMC بگذرد، در غیر این صورت، می‌توانیم BM را کوچک کنیم بدون این‌که نسبت $\frac{CM}{A_1M}$ تغییری کند. اکنون فرض کنید B_1 و C_1 بترتیب نقطه‌های برخورد خطهای راست BM و CM با دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند، در این صورت:

$$\frac{BM.CM}{A_1M}=\frac{CM.AM}{B_1M}=\frac{AM.BM}{C_1M}$$

درنتیجه، خطهای راست AM و CM هم، بترتیب باید از مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BMC و AMB بگذرند. بدین ترتیب، نقطهٔ M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است. بعلاوه، دراین حالت، A_1 مرکز دایرهٔ محیطی مثلث CMB است، $\sin M\hat{B}C=\frac{r}{MB}$ و $\frac{CM}{\sin M\hat{B}C}=2A_1M$ از این‌رو $\frac{BM.CM}{A_1M}=2r$. به تعیین کمترین مقدار تابع $f(M)$ باز می‌گردیم.

یکی از قضیه‌های آنالیز ریاضی بیان می‌کند که تابعی پیوسته روی مجموعه‌ای بسته، کمترین و بیشترین مقدارش را روی آن مجموعه می‌گیرد. به‌ویژه، این قضیه برای تابعی دو متغیری (پیوسته) روی چندضلعی درست است. اما، این قضیه در این مسأله به‌طور مستقیم قابل استفاده نیست، چراکه تابع $f(M)$ روی رأسهای مثلث ABC تعریف نشده است اما، با بریدن گوشه‌های مثلث، به یک شش‌ضلعی می‌رسیم که $f(M)$ روی آن، تابعی پیوسته است و در نتیجه کمترین مقدارش را می‌گیرد. می‌توان ثابت کرد که در نزدیکی محیط مثلث $f(M) > ۲r$. بدین ترتیب، اگر گوشه‌های بریده شده، به اندازهٔ کافی کوچک باشند، آن وقت تابع $f(M)$ کمترین مقدارش را روی شش ضلعیها و در نتیجه روی مثلث می‌گیرد، وقتی که M مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد، این کمترین مقدار برابر با $۲r$ می‌شود. از طرف دیگر، که در آن 1 طول بزرگترین ضلع مثلث ABC است، به ازای همهٔ نقطه‌های مثلث بجز رأسهای آن و $f(M)$ مقدارهای به‌دلخواه نزدیک به 1 را می‌گیرد.

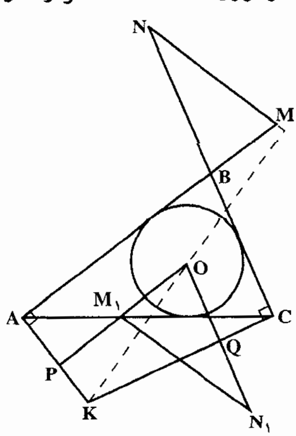
۴.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۵۲. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O بنامید و ثابت کنید چهارضلعی ABOC محاطی است.

۶۵۳. نیمساز زاویهٔ B، نیمساز $O\hat{B}H$ و نیمساز زاویهٔ A، نیمساز $O\hat{A}H$ است. بعلاوه، $B\hat{A}H = ۹۰^\circ - \hat{B} < ۹۰^\circ - \hat{A} = A\hat{B}H$ ؛ بنابراین $AH > BH$. اگر K و M نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و B با OH باشند، آن وقت:

$$\frac{HK}{KO} = \frac{AH}{AO} = \frac{AH}{R} > \frac{BH}{R} = \frac{BH}{OB} = \frac{HM}{MO}$$

بنابراین، $HK > HM$ و نقطهٔ برخورد نیمسازها، دردرون مثلث BOH قرار دارد.



۶۵۴. قرار می‌گذاریم: $BC = a$، $CA = b$ و $AB = c$. از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث خطهای راستی به موازات AB و BC رسم می‌کنیم تا AK و KC را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. در مثلث OPQ داریم:

$P\hat{O}Q = A\hat{N}C$ ، $OQ = p - c$ و $OP = p - a$ که در آن، P نصف محیط ABC است. اما بنابه فرض

$N\hat{B}M = A\hat{B}C$ ، $NB = p - a$ و $MB = p - c$. در نتیجه، $\Delta POQ = \Delta NBM$. اگر روی خط راست OP، نقطه‌ای مانند $M_۱$ به‌طوری که $OM_۱ = OQ$ ، و روی OQ ، نقطه‌ای مانند $N_۱$ به‌طوری که $ON_۱ = OP$ ، اختیار کنیم، آن وقت $\Delta ON_۱M_۱ = \Delta NBM$ و ضلعهای متناظرشان موازی می‌شوند، یعنی $BM \| OM_۱$ و $BN \| ON_۱$. بنابراین $N_۱M_۱ \| NM$. ثابت می‌کنیم OK بر $N_۱M_۱$ عمود است. چون در چهارضلعی OPKQ ، دو زاویه روبه‌رو قائمه‌اند، چهارضلعی اخیر محاطی است، در نتیجه $O\hat{K}P = O\hat{Q}P$ ، بعلاوه

$$K\hat{O}P + O\hat{M}_۱N_۱ = K\hat{O}P + O\hat{Q}P = K\hat{O}P + O\hat{K}P = ۹۰^\circ$$

و این بدان معنی است که $OK \perp M_۱N_۱$.

۶۵۵. فرض کنید BO معرف ارتفاع مثلث باشد و $BD = R\sqrt{۲}$ ، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی است. K و M پای عمودهای فرود آمده از D بترتیب بر AB و BC هستند و O مرکز دایرهٔ محیطی است. اگر زاویهٔ C حاده باشد، آن‌وقت $K\hat{B}O = ۹۰^\circ - \hat{C}$. چون BMDK چهارضلعی محاطی است، $M\hat{K}D = D\hat{B}M = ۹۰^\circ - \hat{C}$. بنابراین :

$$M\hat{K}B = ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - (۹۰ - \hat{C}) = \hat{C}$$

در نتیجه، BO بر KM عمود است. اما

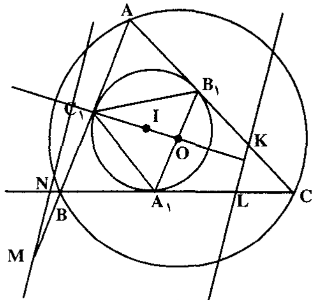
$$S_{BKM} = \frac{۱}{۲} BD^۲ \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C} = R^۲ \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C} = \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$

(از دستور $S = ۲R^۲ \sin\hat{A} \sin\hat{B} \sin\hat{C}$ استفاده کرده‌ایم). از طرف دیگر، اگر $h_۱$ طول ارتفاع مثلث BKM، مرسوم از رأس B باشد، آن‌وقت :

$$\frac{۱}{۲} S = \frac{۱}{۴} AC.BD = S_{BKM} = \frac{۱}{۲} KM.h_۱ = \frac{۱}{۲} BDh_۱ \sin\hat{B}$$

بنابراین $h_۱ = \frac{AC}{۲\sin\hat{B}} = R$ ؛ با درنظر داشتن این‌که $BO \perp KM$ نتیجه می‌گیریم نقطهٔ O روی KM قرار دارد.

۶۵۶. فرض کنید ABC مثلث مفروض باشد که طول ضلعهایش، a ، b و c $(a \geq b \geq c)$ هستند، $A_۱$ ، $B_۱$ و $C_۱$ نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی باشند، I مرکز دایرهٔ محاطی و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد. چون در مثلث $A_۱B_۱C_۱$ ، I مرکز دایره محیطی است، کافی است ثابت کنیم که خط راست IO از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_۱B_۱C_۱$ می‌گذرد. روی نیم‌خطهای AC و BC، پاره‌خطهای AK و BL $(AK = BL = c)$ و روی نیم‌خطهای AB و CB، پاره‌خطهای AM و CN $(AM = CN = b)$ را جدا کنید. همان طور که می‌دانیم خط IO بر LK و MN عمود است، بنابراین $LK \| MN$.



فرض کنید $K\hat{L}C = B\hat{N}M = \varphi$. بنابر قانون سینوسها در مثلثهای KLC و BNM، داریم :

$$\frac{LC}{KC} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\sin(\varphi+\hat{C})}{\sin\varphi} \qquad (۱)$$

$$\frac{BN}{BM} = \frac{a-b}{b-c} = \frac{\sin(\hat{B}-\varphi)}{\sin\varphi} \qquad (۲)$$

اکنون، در مثلث $A_1B_1C_1$ ، ارتفاع ضلع B_1C_1 را رسم می‌کنیم. فرض کنید Q نقطهٔ برخورد آن با خط راست IO باشد. باید ثابت کنیم، Q نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ است. امّا فاصلهٔ I تا B_1C_1 برابر با $IA_1 \cos\hat{A}_1 = r\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ است. بنابراین، برابری $A_1Q = ۲r\sin\frac{\hat{A}}{۲}$ درست خواهد بود. اندازهٔ زاویه‌های مثلث QIA_1 را می‌توان بر حسب اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC و φ نشان داد، مثلاً، $Q\hat{I}A_1 = ۱۸۰^\circ - \varphi$ و $Q\hat{A}I = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ باید ثابت کنیم.

$$۲\sin\frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})} \Leftrightarrow \sin(\varphi+\hat{C}) - \sin(\hat{B}-\varphi) = \sin\varphi$$

برابری اخیر، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

۶۵۷. طول ضلعهای مثلث ABC را به روش معمول نامگذاری کنید : a، b و c ؛ فرض کنید $BD = d$، $AD = b_1$ و $AM = x$. از قضیهٔ تعمیم یافتهٔ بطلمیوس استفاده کنید : $xa + (d - b_1 + x)b = (b-x)c$ ، که از آن‌جا :

$$x = \frac{b(c+b_1-d)}{a+b+c}$$

بر روی AB ، نقطهٔ N را طوری اختیار کنید که MN با BD موازی شود. داریم :

$$MN = \frac{x}{b_1}d \text{ و } AN = \frac{x}{b_1}c$$

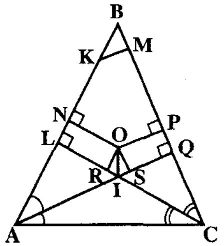
$$S_{AMN} = (\frac{x}{b_1})^۲ \cdot S_{ABD} = (\frac{x}{b_1})^۲ \cdot \frac{b_1}{b} \cdot S_{ABC} = \frac{x^۲}{b_1 b} \cdot S_{ABC} \qquad (۲)$$

فرض کنید r شعاع دایره‌ای باشد که بر MN و امتداد AN و AM مماس است. دراین صورت، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که :

$$r = \frac{۲S_{AMN}}{AM+AN-MN} = \frac{۲x^۲ S_{ABC}}{bx(b_1+c-d)} = \frac{۲S_{ABC}}{a+b+c}$$

یعنی، r برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC ، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

۶۵۸. فرض کنید (شکل الف)، O مرکز دایرهٔ محیطی و I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد. از O و I، عمودهای ON، OP، IL و IQ را بر AB و BC فرود می‌آوریم. اگر a، b و c معرف طولهای نظیر ضلعهای BC، CA و AB باشند و P نصف محیط مثلث ABC باشد، آن‌وقت $BK=|c-b|$، $BM=|a-b|$،

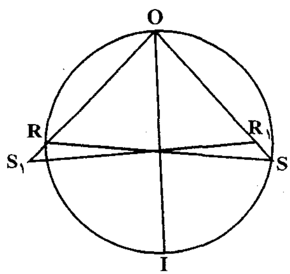


(الف)

$BN=\frac{c}{۲}$، $BP=\frac{a}{۲}$، $BL=BQ=p-b$، $NL=\frac{۱}{۲}|a-b|$ و $PQ=\frac{۱}{۲}|c-b|$.

درنتیجه اگر از O خطهای راستی به موازات ضلعهای AB و BC رسم کنیم تا عمودهای وارد از I را قطع کنند، آن‌وقت به مثلث ORS، متشابه با مثلث BKM با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$ می‌رسیم. اما دایرهٔ رسم شده به قطر OI، بر مثلث ORS محیط است. درنتیجه، شعاع دایرهٔ محیطی ΔBKM برابر با OI است.

برای اثبات قسمت دوم مسأله یادآوری می‌کنیم که اگر پاره‌خطی مانند $OR_۱$، برابر OR، روی خط راست OS و پاره‌خطی مانند $OS_۱$، برابر با OS، روی خط OR جدا شود، آن وقت خط $S_۱R_۱$ با KM موازی می‌شود (شکل ب)؛ اما:

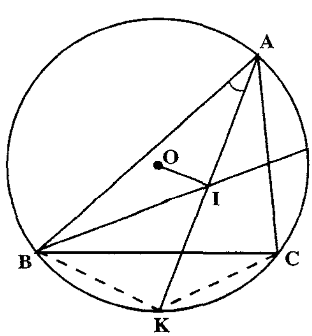


$O\hat{R}_۱S_۱+I\hat{O}R_۱=O\hat{R}S+I\hat{O}S=۹۰^\circ$ یعنی، $S_۱R_۱\perp OI$. (ب)

۶۵۹. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و نقطهٔ K محل تلاقی نیمساز زاویهٔ A با دایرهٔ محیطی باشد، درچهارضلعی ABKC، حکم قضیهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم:

$AK\times BC=AB\times CK+AC\times BK=$
$BK(AB+AC)$

و چون به فرض $AC+AB=۲BC$؛ پس داریم $AK=۲BK$؛ اما مثلث BIK متساوی‌الساقین است، زیرا هریک ازدو زاویهٔ $B\hat{I}K$ و $I\hat{B}K$ مساوی با $\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}$ می‌باشند. پس داریم: $BK=IK$ و بنابر نتیجهٔ بالا حاصل می‌شود:



$AK = AI + IK = 2IK$ و یا $AI = IK$ ؛ پس I وسط وتر AKاست و خط OI برنیمساز AI عمود است.

۱۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۰. فرض کنید طول ضلعهای مثلث برابر a، b و c باشد و $b = \frac{a+c}{2}$.

(الف) از برابری $Pr = \frac{1}{2}bh_b$ (P نصف محیط، r شعاع دایرهٔ محاطی و h_b طول ارتفاع رسم شده برضلع با طول b است)، به‌دست می‌آوریم $\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}bh_b$ ؛ اما $a + c = 2b$، بنابراین $h_b = 3r$.

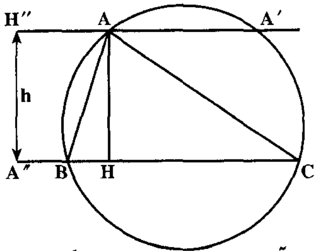
(ب) حکم ازاین حقیقت که $r = \frac{1}{3}h_b$ و نقطهٔ میانه‌ای، هر میانه را به نسبت ۱ :۲ تقسیم می‌کنند، نتیجه می‌شود.

(ج) نیمساز BD را امتداد دهید تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر ثابت کنیم O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، BM را نصف می‌کند، آن‌وقت به موجب آن، حکم ما ثابت می‌شود. (قطر BN را رسم می‌کنیم، دراین‌صورت، خطی که مرکز دایره‌های محیطی و محاطی را به‌هم وصل می‌کند، باNM موازی است و $B\hat{M}N = 90^\circ$.) اما مثلث COM متساوی‌الساقین است، زیرا $C\hat{O}M = O\hat{C}M = \frac{1}{2}(\hat{C}+\hat{B})$. بنابراین، $CM = OM$. از شرط $b = \frac{a+c}{2}$، بنابر ویژگی نیمساز به‌دست می‌آوریم: $CD = \frac{a}{2}$. فرض کنید Kوسط CBباشد؛ $\Delta CKO = \Delta CDO$ ($CK = CD$ و $K\hat{C}O = O\hat{C}D$)؛ به این ترتیب، نتیجه می‌شود: $B\hat{K}O = C\hat{D}M$ ؛ بعلاوه، $D\hat{C}M = O\hat{B}K = \frac{\hat{B}}{2}$ و $CD = BK$، یعنی، $\Delta BKO = \Delta CDM$، $CM = BO$، بنابراین $BO = OM$، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

(د) نقطه‌ای روی نیمساز اختیار می‌کنیم. فرض کنید فاصله‌هایش تا ضلعهای BC و BA برابر با x و تا ضلع AC برابر با y باشد. داریم:

$$\frac{1}{2}(ax + cx + by) = S_\Delta \Rightarrow b(2x + y) = 2S_\Delta \Rightarrow 2x + y = h_b$$

(هـ) اگر L وسط BA باشد، آن وقت چهارضلعی مطلوب، با چهارضلعی BCMA، به نسبت $\frac{1}{2}$، متجانس است. (قسمت (ج) را ببینید.)



۶۶۱. الف. دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کرده، ازنقطهٔ اختیاری B واقع بر آن، وتر BC را مساوی با طول داده شده جدا می‌کنیم. روی BC یا امتداد آن نقطهٔ اختیاری «A''» را فرض کرده از این نقطه عمودی بر BC اخراج می‌کنیم و روی آن در طرف کمان بزرگتر BC طول $A''H'' = AH$ را جدا می‌کنیم و از H'' خطی به موازات BC رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این خط با دایره موضع رأس A است و مثلث مشخص می‌شود. به سهولت معلوم می‌شود که شرط امکان مسأله آن است که: (۱) $BC \leq 2R$ (R شعاع دایرهٔ محیطی است) و(۲) $h \leq R+\sqrt{R^2-\frac{\overline{BC}^2}{4}}$ اگر $BC = 2R$ باشد، با وجود شرط دوم، جوابهای مسأله مثلث قائم‌الزاویه‌اند. اگر نامساوی دوم برقرار باشد، مسأله دو جواب متساوی دارد. اگر این نامساوی به تساوی تبدیل شود، مسأله یک جواب دارد که مثلث متساوی‌الساقین است، و اگر شرط (۲) برقرارنباشد، مسأله جواب ندارد.

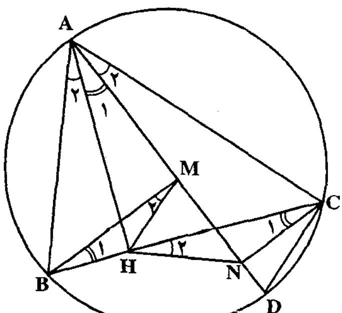
۲. الف. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACN متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های BAH و CAD بترتیب با زاویه‌های ABH و ACD که مقابل به یک قوس هستند، متمم می‌باشند. از تشابه آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BH}{CN}\ (1) \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC}=\frac{AH}{AN}\ (2)$$

و نیز دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و ACH متشابه‌اند و از تشابه آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{CH}\ (3)$$

و $$\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AH}\ (4)$$



از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۳) حاصل می‌شود: $\frac{BH}{CN}=\frac{BM}{CH}$

و یا $BH \times CH = BM \times CN$

و از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۴) حاصل می‌شود:

$\frac{AM}{AH}=\frac{AH}{AN}$ و یا: $\overline{AH}^2 = AM \times AN$

ب) چهارضلعی ABHM در دایرهٔ به قطر AB و چهارضلعی AHNC در دایرهٔ به قطر AC محاط است. ازاین دو چهار ضلعی نتیجه می‌شود که زاویه‌هایی که روی شکل با شمارهٔ (۱) نشان داده شده‌اند، برابرند و نیز با درنظر گرفتن تساوی زاویه‌های BAH و CAD زاویه‌هایی که به علامت (۲) ممتاز شده‌اند نیز برابرند. پس دو مثلث BMH و CHN متشابه هستند.

از چهار ضلعی محاطی ABHM نتیجه می‌شود که زاویهٔ HMN که مکمل زاویهٔ HMA است با زاویهٔ ABC مساوی است و از چهارضلعی AHNC معلوم می‌شود که زاویه‌های HNA و HCA متساوی‌اند، پس دومثلث ABC و HMN نیز متشابه‌اند.

ج) چون ABHN محاطی است دایره‌یی که از B و H و M بگذرد بر A نیز مرور می‌کند و چون AHNC نیز محاطی است دایره‌یی که از H و N و C بگذرد بر Aنیز می‌گذرد.

۳. اگر مثلث MHN قائم‌الزاویه باشد مثلث ABC متشابه با آن نیز قائم‌الزاویه خواهد بود $(\hat{A}=۹۰^\circ)$. دراین حالت $BC=۲R$ است.

و $$\overline{AC}^۲=\overline{BC}^۲-\overline{AB}^۲=۴R^۲-\frac{۳۶R^۲}{۲۵}=\frac{۶۴R^۲}{۲۵}$$

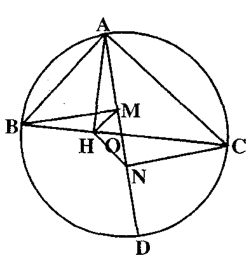
و یا: $AC=\frac{۸R}{۵}$. در این حالت چون BC و AD قطر دایره‌اند، نقطهٔ تقاطع آنها O مرکز دایره است و OMو ON و همچنین BM و CN متساوی‌اند، به‌طوری که HO میانهٔ وارد بر وتر مثلث HMN است و مساوی با نصف وتر می‌باشد.

اما در مثلث ABC داریم:

$$\overline{AB}^۲=BC\times BH$$

و یا: $$\frac{۳۶R^۲}{۲۵}=۲R\times BH$$

پس: $$BH=\frac{۲۸}{۲۵}R$$



بنابراین: $HO=\frac{۷R}{۲۵}$ و

$$MN=۲HO=\frac{۱۴R}{۲۵}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که نسبت تشابه دو مثلث HMN و ABC عبارت است از:

$$\frac{BC}{MN}=\frac{۷}{۲۵}$$

پس :

$$HM = \frac{۶R}{۵} \times \frac{۷}{۲۵} = \frac{۴۲R}{۱۲۵}$$

و

$$HN = \frac{۸R}{۵} \times \frac{۷}{۲۵} = \frac{۵۶R}{۱۲۵}$$

شعاع دایرهٔ محاطی عبارت است از :

$$r = \frac{HM + HN - MN}{۲} \text{ و } r = \frac{۱۴R}{۱۲۵}$$

۶۶۲. الف) با استفاده از دستورهای $r = \frac{S}{P}$، $R = \frac{abc}{۴S}$ و $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ که در آنها S مساحت مثلث ABC است، رابطهٔ داده شده را به سادگی اثبات می‌کنیم.

ب) از دستور لایبنیتس، با گرفتن مرکز دایرهٔ محیطی به جای M، استفاده کنید.

(اگر M نقطه‌ای دلخواه در صفحه و G مرکز ثقل مثلث ABC باشد، داریم :

دستور لایبنیتس $\quad ۳MG^۲ = MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ - \frac{۱}{۳}(AB^۲ + BC^۲ + CA^۲)$)

پ) از دستور لایبنیتس، با گرفتن مرکز دایرهٔ محاطی به جای M، استفاده کنید. مثلاً، برای محاسبهٔ $MA^۲$، عمود MK را بر AB فرود می‌آوریم، داریم : $MK = r$ و $AK = p - r$ ؛ بنابراین، $AM^۲ = (p-a)^۲ + r^۲$، $MB^۲$ و $MC^۲$ به روشی مشابه محاسبه می‌شوند. برای ساده کردن طرف راست، از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید.

ت) فاصلهٔ میان تصویرهای I و I_a روی AC، برابر با a است. نقطه‌ای مانند K طوری اختیار می‌کنیم که $IK \| AC$ و $I_aK \perp AC$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ IKI_a، داریم $K\hat{I}I_a = \frac{۱}{۲}\hat{A}$ ، $IK = a$ و $I_aK = r_a - r$. بنابراین :

$$II_a^۲ = \frac{IK^۲}{\cos^۲ \frac{\hat{A}}{۲}} = \frac{a}{\sin \hat{A}} \cdot ۲ \cdot IK \cdot \mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{۲} = ۴R(r_a - r)$$

۶۶۳. ایدهٔ زیبای اثبات چنین نابرابریهایی را کازارینوف پیشنهاد کرده است. (مجلهٔ ریاضی میشیگان، ۱۹۵۷، شمارهٔ ۲، صص ۹۷-۹۸). بدین قرار : نقطه‌های $B_۱$ و $C_۱$ را، بترتیب، روی نیمخطهای AB و AC اختیار کنید. روشن است که مجموع مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای رسم شده بر $AB_۱$ و AM، و بر $AC_۱$ و AM، برابر مساحت متوازی‌الاضلاعی است که یک ضلعش $B_۱C_۱$ و دیگری موازی با AM و برابر با AM است. در نتیجه :

$$AC_1 . v + AB_1 . w \le B_1C_1 . x \qquad (1)$$

(الف) نقطه‌های B_1 و C_1 را منطبق بر نقطه‌های B و C می‌گیریم؛ دراین صورت، نابرابری (۱)، نابرابری $bv + cw \le ax$ را نتیجه می‌دهد. با جمع کردن سه نابرابری از این قبیل باهم، به نابرابری مطلوب می‌رسیم.

(ب) اگـر $AB_1 = AC$ ، $AC_1 = AB$ ، آن‌وقت نابرابری (۱) نتیـجـه می‌دهد $cv + bw \le ax$ یا $x \ge \frac{c}{a}v + \frac{b}{a}w$. با جـمع کـردن سـه نابرابری از این نوع با هم، به‌دست می‌آوریم :

$$x + y + z \ge (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})u + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c})v + (\frac{b}{c} + \frac{a}{b})w \ge ۲(u + v + w)$$

(پ) در قـسـمت (الف)، نابرابری $ax \ge bv + cw$ را ثابت کـردیم، کـه از آن‌جـا $xu \ge \frac{b}{a}uv + \frac{c}{a}wu$ به روش مشابه، $zw \ge \frac{a}{c}uw + \frac{b}{c}vw$ ، $yv \ge \frac{a}{b}uv + \frac{c}{b}wv$. با جمع کردن این سه نابرابری با هم، به‌دست می‌آوریم :

$$xu + yv + zw \ge (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})uv + (\frac{b}{c} + \frac{c}{b})vw + (\frac{a}{c} + \frac{c}{a})wu \ge ۲(uv + vw + wu)$$

(ت) فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب معرف تصویرهای M روی ضلعهای BC ، CA و AB مثلث ABC باشند. روی نیمخطهای MA، MA_1 ، MB، MB_1 ، MC و MC_1 بترتیب نقطه‌های A' ، A'_1 ، B' ، B'_1، C' و C'_1 را طوری بگیرید که :

$$MA.MA' = MA_1.MA'_1 = MB.MB' = MB_1.MB'_1$$

$$= MC.MC' = MC_1.MC'_1 = d^۲$$

می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A' ، B' و C' بترتیب روی خطهای راست $B'_1C'_1$ ، $C'_1A'_1$ و $A'_1B'_1$ واقعند و MA' ، MB' و MC' بترتیب بر این خطها عمودند. بنابراین، در مثلث $A'_1B'_1C'_1$ ، فاصله‌های M تا رأسها برابرند با $\frac{d^۲}{u}$ ، $\frac{d^۲}{v}$ و $\frac{d^۲}{w}$ ، و تا ضلعهای روبه روی آنها برابرند با $\frac{d^۲}{x}$ ، $\frac{d^۲}{y}$ و $\frac{d^۲}{z}$. با استفـاده از قسمت (ب)، به نابرابری مطلوب می‌رسیم.

(ث) درنابرابری (۱)، $b_1 = c_1 = 1$ می‌گیریم؛ دراین صورت $a_1 = ۲1\sin\frac{\hat{A}}{۲}$. داریم :

$$x \ge \frac{۱}{۲\sin\frac{\hat{A}}{۲}}(u + v)$$

با به‌دست آوردن نابرابری مشابه برای y و z، ضرب‌کردن آنها با هم به‌دست می‌آوریم.

$$xyz \ge \frac{۱}{۸\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲}}(u+v)(v+w)(w+u) =$$
$$\frac{R}{۲r}(u+v)(v+w)(w+u)$$

(برابری $\sin\frac{\hat{A}}{۲}\sin\frac{\hat{B}}{۲}\sin\frac{\hat{C}}{۲} = \frac{r}{۲R}$ را می‌دانیم)

(ج) از نابرابری قسمت قبل نتیجه می‌شود :

$$xyz \ge \frac{R}{۲r}۲\sqrt{uv}.۲\sqrt{vw}.۲\sqrt{wu} = \frac{۴R}{r}uvw$$

(چ) با تقسیم کردن نابرابری قسمت (ت) بر نابرابری قسمت (ج)، به نابرابری مطلوب می‌رسیم.

تبصره . درنابرابری قسمت (الف)، برابری برای مثلثهای حاده، وقتی اتفاق می‌افتد که M برنقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث منطبق شود. درقسمتهای (ب)، (پ)، (ت) و (چ)، برابری درمثلث متساوی‌الساقین، وقتی M مرکز این مثلث باشد، رخ می‌دهد. در قسمتهای (ث) و (ج) برابری در هر مثلث، وقتی که M مرکز دایرهٔ محاطی است، رخ می‌دهد.

۶۶۴. ۱. داریم :

$$h_a = \frac{۲S}{a} \text{ و } r = \frac{S}{p} \Rightarrow \frac{۲S}{a} = \frac{۳S}{p} \Rightarrow ۲p = ۳a \Rightarrow a+b+c = ۳a \Rightarrow b+c = ۲a$$

در نتیجه رابطه $h_a = ۳r$ برقرار است.

۲. می‌دانیم که $r_a = \frac{S}{p-a}$ و $h_a = \frac{۲S}{a}$ است. پس :

$$\frac{S}{p-a} = \frac{۲S}{a} \Rightarrow ۲p-۲a = a \Rightarrow ۲p = ۳a \Rightarrow a+b+c = ۳a$$

$$\Rightarrow b+c = ۲a \text{ که این رابطه برقرار است } \Rightarrow r_a = h_a$$

۳. $$h_b = \frac{۲S}{b}S \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲S} \text{ و } \frac{۱}{h_c} = \frac{۲S}{c} \text{ و } \frac{۱}{h_a} = \frac{۲S}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۲S} + \frac{S}{۲S} = \frac{۲a}{۲S} \Rightarrow b+c = ۲a$$

$$\frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{s} \text{ و } \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{S} \text{ و } \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{S} \Rightarrow \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{۲(p-a)}{S}$$

که این رابطه برقرار است. $۲p-(b+c)=۲p-۲a \Rightarrow b+c=۲a$

۵. می‌دانیم که $d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$. داریم :

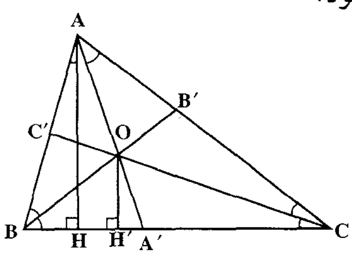
$$d_a^۲=\frac{۴}{۴a^۲}\cdot pbc(p-a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲a^۲}\times pbc(p-a)=\frac{۳}{۴}bc\Rightarrow(a+b+c)(b+c-a)=۳a^۲$$

$$\Rightarrow(a+۲a)(۲a-a)=۳a^۲\Rightarrow ۳a.a=۳a^۲\Rightarrow ۳a^۲=۳a^۲\Rightarrow$$

رابطهٔ ۵ برقرار است

حل بقیه قسمتها به عهده پژوهندگان واگذار می‌شود.



۶۶۵. ۱. از نقطه‌های A و O عمودهای AH و OH' را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. $OH'=r$ و $AH=h_a$ است. از تشابه مثلثهای AHA' و $OH'A'$ داریم :

$$\frac{OA'}{AA'}=\frac{OH'}{AH}=\frac{r}{h_a}\Rightarrow\frac{AA'-OA'}{AA'}=\frac{h_a-r}{h_a}$$

$$\Rightarrow\frac{OA}{AA'}=\frac{h_a-r}{h_a} \text{ و } AA'=d_a\Rightarrow OA=\frac{d_a}{h_a}(h_a-r)$$

با جایگذاری d_a ، h_a و r برحسب ضلعهای مثلث خواهیم داشت :

$$OA=\frac{۱}{p}\sqrt{bcp(p-a)}$$

و به روش مشابه داریم : $OB=\frac{۱}{p}\sqrt{acp(p-b)}$ و $OC=\frac{۱}{p}\sqrt{abp(p-c)}$

۲. مثلثهای OBC و ABC در قاعده BC مشترکند، پس :

$$\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{OH'}{AH}=\frac{OA'}{AA'}=\frac{AA'-OA}{AA'}=۱-\frac{OA}{AA'}\Rightarrow\frac{OA}{AA'}=۱-\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}\ (۱)$$

$$\frac{OB}{BB'}=۱-\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}\ (۲) \text{ و } \frac{OC}{CC'}=۱-\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}\ (۳)$$

از جمع کردن رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) و توجه به این که

$S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=S_{ABC}$ داریم :

$$\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=۳-۱=۲$$

۳. داریم :

$$OA.OB.OC=\frac{abc}{p^۲}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc\times S}{p^۲}=\frac{abc}{S}\cdot\frac{S^۲}{p^۲}$$

$$=۴Rr^۲$$

۴. در رابطه $OB.OC=a.OA$ به‌جای OB، OC و OA مقدار می‌گذاریم،

داریم :

$$\frac{۱}{p}\sqrt{acp(p-b)}.\frac{۱}{p}\sqrt{abp(p-c)}=a.\frac{۱}{p}\sqrt{bcp(p-b)}\Rightarrow$$

$$(p-b)(p-c)=p(p-a)$$

و این رابطه در مثلث قائم‌الزاویه به رأس A برقرار است.

۵. تصویر نقطهٔ A' روی ضلع AC را A'' می‌نامیم. در مثلث $AA'A''$ داریم :

$$AA''=AA'\cos\frac{\hat{A}}{۲} \text{ و } AA'=d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \text{ و } \cos\frac{\hat{A}}{۲}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\Rightarrow AA''=\frac{۲p(p-a)}{b+c}$$

راهنمایی و حل

بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های دیگر

۵. ۲. زاویه

۵. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۶۶۶. $A\hat{B}C = ۶۰^\circ$ است.

۶۶۷. $\frac{۵}{۱۲}\pi + \frac{۱}{۲}\arccos(\frac{۳}{\pi} - \frac{\sqrt{۳}}{۲})$

۶۶۸. اگر $B\hat{A}C = ۲\alpha$، آن‌وقت به سادگی معلوم می‌شود، $K\hat{M}C = M\hat{K}C = ۳۰^\circ + \alpha$ یعنی، $MK.MC = KC$ را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه‌ای مانند N قطع کند؛ ΔKMC با ΔKAN متشابه است، بنابراین، $AN = KN = R$، یعنی، برابر با شعاع دایره (زیرا $A\hat{M}N = ۳۰^\circ$). نقطه‌های A، K و O بر دایره‌ای به مرکز N واقعند و $A\hat{N}O = ۶۰^\circ$، درنتیجه $A\hat{K}O = ۳۰^\circ$، برحسب این که زاویهٔ AMC منفرجه یا حاده باشد.

جواب: ۳۰° یا ۱۵۰°

۶۶۹. $\frac{\pi}{۲}$، $\left|\alpha + \frac{\beta}{۲} - \frac{\pi}{۲}\right|$

۵. ۳ ضلع

۵. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۶۷۰. اندازهٔ BC برابر ۲ سانتی‌متر است.

۶۷۱. ۲ سانتی‌متر و ۳ سانتی‌متر.

۶۷۲. ۳۰°، ۳۰°، ۱۲۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\text{cm}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\text{cm}$

۶۷۳. $a^۲ + b^۲ = ۲c^۲$

فرمول میانهٔ m_c را برحسب ضلعهای مثلث مورد استفاده قرار دهید.

۵. ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۵. ۴. ۱. اندازهٔ ارتفاع، میانه، نیمساز

۶۷۴. دایرهٔ به قطر ارتفاع AA' در نقطهٔ A' بر ضلع BC مماس است. بنابراین داریم:

$$BA'^{۲} = BD.BA \Rightarrow ۱۴۴ = ۸ \times BA \Rightarrow AB = ۱۸$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABA' می‌توان نوشت:

$$AA'^{۲} = AB^{۲} - BA'^{۲} = ۳۲۴ - ۱۴۴ = ۱۸۰ \Rightarrow AA' = h_a = ۶\sqrt{۵}$$

۶۷۵. $\frac{c\sqrt{۳}}{۲}$. M را گرانیگاه و P را محل برخورد CM و DE فرض کنید. رابطهٔ $MP.PC = PE.DP$ را مورد استفاده قرار دهید.

۶۷۶. وتر مشترک این دو دایره ارتفاع AH است. از آن‌جا:

$$BH = \sqrt{۱۶ - ۴} = ۲\sqrt{۳}$$

$$CH = \sqrt{۹ - ۴} = \sqrt{۵} \Rightarrow BC = BH + CH = ۲\sqrt{۳} + \sqrt{۵}$$

با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع، اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی A از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

۵. ۵. پاره‌خط

۵. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶۷۷. $\frac{(a^{۲} + b^{۲} - c^{۲})c}{۴ab}$.

۶۷۸. $\frac{b}{۲}$.

۵. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۶۷۹. فرض کنید $AM : MC = K$. برابری شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABM و BCM، بدین معنی است که نسبت مساحتهای آنها، برابر نسبت محیطهای آنهاست. بنابراین، چون نسبت مساحتها K است، به دست می‌آوریم $BM = \frac{۱۳k - ۱۲}{۱ - k}$. به ویژه، از این برابری نتیجه می‌شود که $\frac{۱۲}{۱۳} < k < ۱$. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای ABM و BCM (برای زاویه‌های BMA و BMC) و حذف کردن کسینوس زاویه‌ها از این معادله‌ها، برای k به معادله‌ای درجه دوم با ریشه‌های $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۲۲}{۲۳}$ می‌رسیم. با حساب محدودیت k، به دست می‌آوریم $k = \frac{۲۲}{۲۳}$.

۵. ۵. ۳. تساوی پاره‌خطها

۶۸۰. باید ثابت کنیم که $\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{C_2B}{C_2A}$. با استفاده از قضیهٔ منلائوس در مثلث ABC که به وسیلهٔ موربهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ قطع شده است، داریم :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=1 \quad , \quad \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}\cdot\frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}}\cdot\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}=1$$

از ضرب این دو رابطه داریم :

$$\frac{\overline{BA_1}\ .\ \overline{BA_2}}{\overline{AB_1}\ .\ \overline{AB_2}}\cdot\frac{\overline{CB_1}\ .\ \overline{CB_2}}{\overline{CA_1}\ .\ \overline{CA_2}}\cdot\frac{\overline{C_1A}\ .\ \overline{C_2A}}{\overline{C_1B}\ .\ \overline{C_2B}}=1 \qquad (1)$$

امّا، $\overline{CB_1}.\overline{CB_2}=\overline{CA_1}.\overline{CA_2}$. از طرفی داریم : $\overline{AB_1}\ .\overline{AB_2}=\overline{BA_1}\ .\ \overline{BA_2}$. در نتیجه از رابطهٔ (۱) داریم : $1=\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}\cdot\frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}}$ و یا $\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=\frac{\overline{C_2B}}{\overline{C_2A}}$ و حکم ثابت است.

۶۸۲. خودمان را به حالتی که ABC مثلث حاده است، محدود می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع A_1MON را در نظر بگیرید (M و N، بترتیب روی A_1B_1 و A_1C_1 واقعند) چون A_1O، با A_1C_1 و A_1B_1، زاویه‌های $(90^\circ-\hat{B})$ و $(90^\circ-\hat{C})$ می‌سازد، داریم :

$$\frac{A_1M}{A_1N}=\frac{A_1M}{MO}=\frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}}=\frac{A_1L}{A_1K}$$

۶۸۳. از نقطهٔ M، خط راستی به موازات AC رسم می‌کنیم تا خطهای راست BA و BC را در نقطه‌های A_1 و C_1 قطع کند. داریم :

$$A_1\hat{K}M=90^\circ-D\hat{K}M=90^\circ-K\hat{B}D=B\hat{A}D=K\hat{A_1}M$$

در نتیجه، KMA_1 مثلث متساوی‌الساقین است و $A_1M=MK$. به همین ترتیب، $MC_1=ML$ ؛ اما $KM=ML$، بنابراین $A_1M=MC_1$، یعنی، خط راست BM، AC را نصف می‌کند.

۵. ۶. شعاع

۵. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع

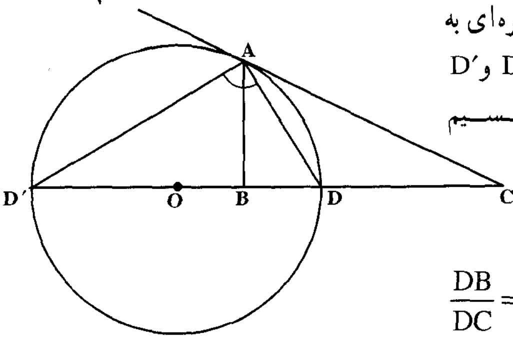
۶۸۴. طبق فـــــرض داریم : $a=BC=13$ و $b=CA=14$ و $c=AB=15$. باید $OE=OF=R$ را محاسبه کنیم. مساحت مثلث ABC برابر است با مجموع مساحتهای مثلثهای BQC و AOC. از آن جا که مساحت این مثلثها بترتیب مساوی $\frac{13R}{2}$ و $\frac{14R}{2}$ است، داریم :

$S_{ABC}=\frac{۲۷R}{۲}$

از طرف دیگر : $S_{ABC}=\sqrt{۲۱(۲۱-۱۵)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۳)}=۸۴$

و از آن جا : $R=۶\frac{۲}{۹}$

۶۸۵. دایرهٔ محیطی مثلث ADD' دایره‌ای به قطر DD' است و دو نقطهٔ D و D' پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{c}{b}$ تقسیم می‌کنند، یعنی داریم :



$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{c}{b}$$

از آن جا طول پاره‌خط DD' را محاسبه می‌کنیم. با فرض $b>c$ داریم :

$$\frac{DB}{a}=\frac{c}{b+c}\ ,\quad DB=\frac{ac}{b+c}$$

$$\frac{D'B}{a}=\frac{c}{b-c}$$

$$D'B=\frac{ac}{b-c}\Rightarrow DD'=\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b-c}=ac(\frac{۲b}{b^۲-c^۲})$$

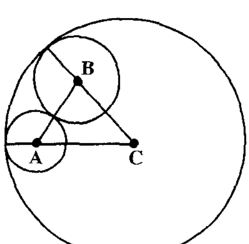
$$=\frac{۲abc}{b^۲-c^۲}\Rightarrow R=\frac{DD'}{۲}=\frac{abc}{b^۲-c^۲}$$

۶۸۶. $\frac{br}{c}$.

۶۸۷. $\cot g\frac{\alpha+\beta}{۲}\ \frac{a\sin\hat{\beta}}{\sin\alpha}$.

۶۸۸. $\sqrt{\frac{d^۲}{۴}+\frac{\sin^۲\frac{\beta}{۲}\cos^۲\frac{\alpha+\beta}{۲}}{a^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}}$.

۶۸۹. با توجه به شکل داریم :



$R_A+R_B=۶$

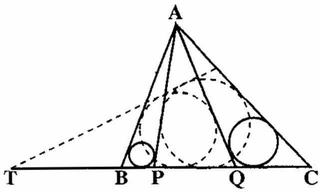
$R_C-R_B=۷$

$R_C-R_A=۹$

جواب : $R_A=۲^m$ ، $R_B=۴^m$ ، $R_C=۱۱^m$

۵. ۶. ۲. نسبت شعاعها.

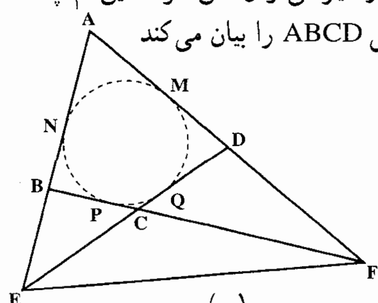
۶۹۰. هر چند این مسأله را می‌توان از راههای گوناگونی حل کرد ؛ اما می‌توان آن را حالت خاصی از قضیهٔ زیر در نظر گرفت :



(الف)

قضیهٔ ۱. فرض کنید P و Q دو نقطه روی ضلع مثلث ABC باشند. اگر T مرکز تجانس خارجی دایرهٔ محاطی مثلثهای APB و AQC باشد، ثابت کنید T مرکز تجانس خارجی مثلثهای ABQ و AQC نیز هست (شکل الف).

می‌بینید که با استفاده از قضیهٔ ۱، مسألهٔ چهار دایره به سادگی اثبات می‌شود (چرا؟) برای اثبات این قضیه لمی داریم که با استفاده از آن، علاوه بر قضیهٔ ۱، مسأله‌های متنوع و جالب دیگری را نیز می‌توان حل کرد. این لم چند شرط لازم و کافی برای محیطی بودن چهارضلعی ABCD را بیان می کند



(ب)

لم. در مثلث AEF فرض کنید D نقطه‌ای روی AF و B نقطه‌ای روی AE باشد و ED و FB یکدیگر را در C قطع کنند. در آن صورت، عبارتهای زیر معادلند (شکل ب) :

i) چهارضلعی ABCD محیطی است.

ii) $AE - AF = CE - CF$

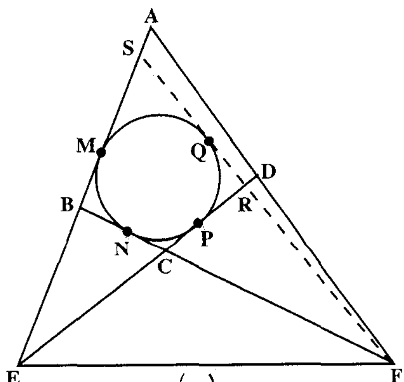
iii) $BE + BF = DE + DF$

iiii) $AB + CD = CB + AD$

اثبات. هم‌ارزی (i) و (ii) را ثابت خواهیم کرد و بقیه را به دلیل سادگی به خواننده محول می‌کنیم. اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} AE - AF &= AN + NE - AM - MF \\ &= EN - FM \\ &= EC + CQ - FC - CP \\ &= CE - CF \end{aligned}$$

هرگاه (ii) برقرار باشد، اگر چهارضلعی ABCD محیطی نباشد، می‌توانیم دایره‌ای به سه ضلع AB، BC و CD مماس کنیم که برضلع AD مماس نباشد (شکل پ). اگر از F مماس FQ را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم تا AE و ED را در S و r قطع کند، در آن صورت، از آن‌جا که چهارضلعی SBCr محاطی است، در مثلث SEF خواهیم داشت:



$$SE - SF = CE - CF$$

از طرفی دیگر: $AE - AF = CE - CF$

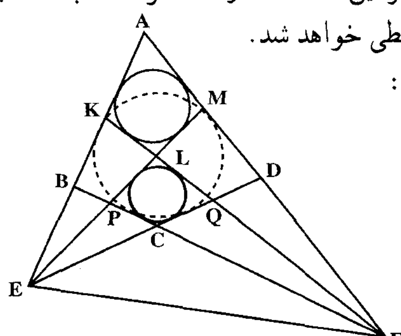
بنابراین: $AE - AF = SE - SF$

بنابراین: $AE - SE = AF - SF$

یا: $AS + SF = AF$ که امکان ندارد؛ مگر این که A، S و F هم‌راستا باشند. یا $S = A$ که در آن صورت، چهارضلعی محیطی خواهد شد.

حال به بررسی نتایجی از لم فوق می‌پردازیم:

در مثلث AEF نقطه‌های M و D را روی AF و نقطه‌های K و B را روی ضلع AE در نظر بگیرید تا EM خطهای FK و FB را بترتیب در L و P، و ED همین خطها را در Q و C قطع کند (شکل ت).



قضیهٔ ۲. هرگاه دو تا از سه، چهارضلعی ABCD، AKLM و LPQC محیطی باشند، سومی نیز محیطی خواهد شد.

اثبات. بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که چهارضلعیهای AKLM و LPQC محیطی هستند. در این صورت بنابر لمی که ثابت کردیم:

(۱) $AKLM \Rightarrow AE - AF = LE - LF$

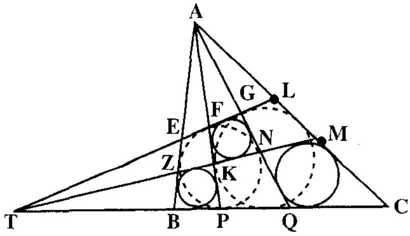
محیطی است

(۲) $LPCQ \Rightarrow LE - LF = CE - CF$

محیطی است

از (۱) و (۲) $\Leftarrow$ $AE - AF = CE - CF$. درنتیجه ABCD محیطی است.

قضیهٔ ۳. هرگاه دو تا از چهارضلعیهای LQDM، KLPB و ABCD محیطی باشند، سومی نیز محیطی خواهد بود. (به دلیل مشابهت با قضیهٔ ۲، اثبات به خواننده واگذار می‌شود.)



(ث)

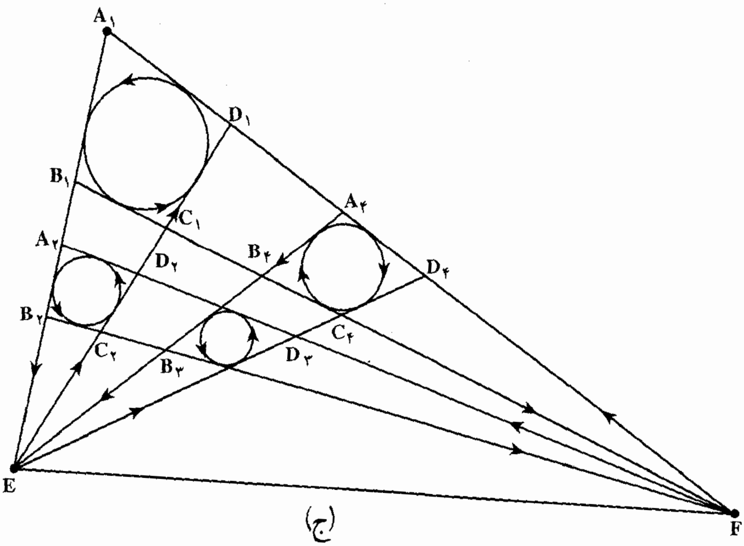
اثبات قضیهٔ ۱ (شکل ث)

فرض کنیم T همان مرکز تجانس خارجی دایرهٔ محاطی مثلثهای ABP و AQC باشد. می‌دانیم این نقطه محل برخورد مماسهای مشترک خارجی دایرهٔ محاطی این دو مثلث خواهد بود (یکی از مماس مشترکها ضلع BC است). از T مماس مشترک خارجی این دو دایره را رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB ، AP ، AQ و AC را بترتیب در نقطه‌های Z ، K ، N و M قطع کند. آن گاه دایرهٔ محاطی مثلث APC را رسم می‌کنیم و از T مماسی به این دایره رسم می‌کنیم تاضلعهای AB ، AP ، AQ و AC را بترتیب در E ، F ، G و L قطع کند. حال در مثلث ACT ؛ از آن جا که چهارضلعیهای NMCQ و FPCL محیطی هستند، بنابر قضیهٔ ۲، چهارضلعی FKNG نیز محیطی است ؛ و از آن‌جا که چهارضلعیهای FGNK و BZKP محیطی هستند، بنابراین قضیهٔ ۳، چهارضلعی EBQG نیز محیطی خواهد شد. اگر دایرهٔ محاطی این چهارضلعی را بر ضلعهای BQ، AQ و AB رسم کنیم، TL مماس است. بنابر دایرهٔ محاطی مثلث ABQ است که این مسأله را ثابت می‌کند.

با استفاده از مطالب بیان شده، خودتان می‌توانید به سادگی قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیه. در شکل (ت) اگر سه تا از چهارضلعیهای AMLK ، KLPB، PLQC و LQDM محیطی باشند، دیگری نیز محیطی خواهد بود. (سعی کنید این مسأله را بدون استفاده از مطالب گفته شده نیز حل کنید.)

قضیهٔ ۴. در مثلث A_1EF نقطه‌های B_1 ، A_2 و B_2 را روی ضلع A_1E و نقطه‌های D_1 ، A_4 و D_4 را روی ضلع A_1F در نظر می‌گیریم ؛ به‌طوری که ضلع ED_1 ، ضلعهای FB_1 ، FA_2 و FB_2 را بترتیب در C_1 ، D_2 و C_2 قطع کند و EA_4 ضلعهای FB_1 ، FA_2 و FB_2 را در B_4 ، A_3 و B_3 و نیز ED_4 ضلعهای FB_1 ، FA_2 و FB_2 را در C_3 ، D_3 و C_4 قطع کنند(شکل ج). در آن صورت اگر ۳ تا از چهار ـ ضلعیهای $A_iB_iC_iD_i$ $(i = ۱، ۲، ۳، ۴)$ محیطی باشند، دیگری نیزمحیطی خواهد بودو بین شعاع دایرهٔمحاطی‌های آنهارابطهٔ $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$ برقرار خواهد شد. قسمت اول این مسأله،(یعنی محیطی‌بودن $A_4B_4C_4D_4$ با فرض محیطی بودن $A_iB_iC_iD_iL_i$ $(i = ۱، ۲، ۳)$ را می‌توان حتی بدون استفاده ازمطالب گفته شده حل کرد).



(ج)

راهنمایی. اگر سه دایره در صفحه داشته باشیم، سه نقطهٔ مرکز تجانس خارجی دوبه‌دوی آنها همراستا هستند. ولی اگر کمی دربارهٔ قسمت بعدی آن (رابطهٔ $\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_1}$) فکر کنید، احتمالاً به این نتیجه می‌رسید که: «مگر با محاسبات بسیار طولانی نمی‌توان آن را ثابت کرد؟»

اما در اینجا روشی را توضیح می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توان مسأله را راحت‌تر کرد. این روش که به ندرر، نسبت داده شده است، مانند یک تبدیل عمل می‌کند. در این روش خطها و دایره را جهتدار در نظر می‌گیریم. دایره و خط را به‌طور «همجهت مماس» گوییم هرگاه خط و دایره همجهت بوده و بر هم مماس باشند.

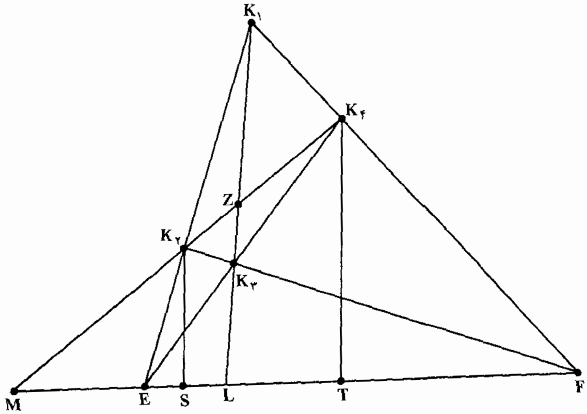
به عنوان مثال، در شکل (چ) خط a و دایرهٔ (c) به‌طور همجهت برهم مماسند؛ در صورتی که خط b و دایرهٔ (c) چنین نیستند. یک زوج خط همجهت را نیز دو خطی گویند که همجهت باشند؛ یعنی هر دو بر یک دایره به‌طور همجهت مماس می‌باشند.

ایدهٔ اصلی این است که به هر دایره در صفحه، نقطه‌ای در فضا، و به هر زوج خط در صفحه نیز خطی در فضا نسبت می‌دهیم؛ به‌طوری که شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو خط حاصل از تبدیل دو زوج خط جهتدار در صفحه این باشد، که هر دو زوج خط جهتدار بر یک دایره مماس همجهت باشند. به راحتی می‌توان ثابت کرد که در چنین تبدیلی، یک زوج خط در صفحه، تبدیل به خطی در فضا می‌شود که نقطه‌های آن حاصل از تبدیل دایره‌های مماس بر این زوج خط در صفحه است (چرا؟).

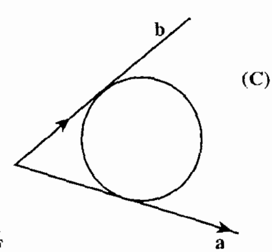
بهترین مثال برای چنین تبدیلی این است که مختصات دکارتی در صفحه و فضا را در

نظر گرفته و به هر دایره با معادلهٔ $(x-a)^۲+(y-b)^۲=r^۲$ در صفحه، نقطهٔ $(a ، b ،r)$ را نسبت دهیم، اگر جهت این دایره مثبت بود (مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) و $(a ، b ، -r)$ را نسبت دهیم اگر جهت آن منفی بود (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت). و نیز به هر زوج خط همجهت در صفحه نیز در فضا مجموعهٔ نقطه‌های حاصل از تبدیل دایره‌ها به‌طور همجهت مماس بر این زوج خط را نسبت می‌دهیم (که بنابر آنچه گفته شد، تشکیل یک خط در فضا را می‌دهند). حال با استفاده از این تبدیل می‌توانیم قضیهٔ ۴ را ثابت کنیم :

اثبات قضیهٔ ۴. بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توانیم فرض کنیم که $A_iB_iC_iD_i$ $(i=۱,۲,۳)$ محیطی هستند. جهتهای خطها و دایره‌ها مانند شکل (چ) در نظر بگیرید و سپس تبدیلی که توضیح داده شد، دایرهٔ محاطی $A_iB_iC_iD_i$ به نقطهٔ $K_۱$ در قطب تبدیل می‌شوند و نقاط E و F نیز به صورت دایره‌های به شعاع ۰ به نقاط E و F تبدیل می‌شوند. در آن صورت، بنابر مطالب یاد شده $K_۱$ ، $K_۲$ و E همراستا خواهند بود، و $K_۲$ بین $K_۱$ و E قرار خواهد گرفت. به همین ترتیب $K_۲$ ، $K_۳$ و F همراستا خواهند بود و $K_۳$ بین $K_۲$ و F قرار خواهد گرفت. بنابراین، $K_۱$ ، $K_۲$ ، $K_۳$ ، E و F همصفحه خواهند شد و $EK_۳$ خط $K_۱F$ را در $K_۴$ قطع خواهد کرد که نقطه‌ای بین $K_۱$ و F می‌باشد بنابراین ، $A_۴B_۴C_۴D_۴$ نیز محیطی خواهد شد



(ح)



(چ)

(شکل ح) ؛ زیرا از آن‌جا که $EK_۳$ و $EK_۱$ متقاطعند، بنابر آنچه گفته شد، زوج خطهای ($\overrightarrow{ED_۴}$ ، $\overrightarrow{A_۴E}$) و ($\overrightarrow{B_۱F}$ ، $\overrightarrow{FA_۱}$) بر یک دایره مماسند. بنابراین، چهارضلعی $A_۴B_۴C_۴D_۴$ محیطی است. حال اگر شعاع دایرهٔ محاطی $A_iB_iC_iD_i$ را برابر r_i بگیریم و نیز امتداد $K_۱K_۳$ و $K_۲K_۴$ خط EF را در L و M قطع کنند، از $K_۲$ و

K_4 خطهای موازی K_1K_3 رسم می‌کنیم تا EF را در S و T قطع کنند. در آن صورت، r_1 ، r_2 ، r_3 و r_4 بترتیب متناسب با K_1L ، K_2S ، K_3L و K_4T خواهند بود. (چرا؟)

از طرفی، اگر K_1K_3 و K_2K_4 یکدیگر را در Z قطع کنند، نقطه‌های L، K_3، Z و K_1 تشکیل یک تقسیم توافقی خواهند داد. (چرا؟) بنابراین:

$$\frac{۲}{LZ}=\frac{۱}{K_1L}+\frac{۱}{K_3L} \qquad (۱)$$

و به همین ترتیب M ، K_2 ، Z و K_4 نیز تشکیل یک تقسیم توافقی خواهد داد و بنابراین:

$$\frac{۲}{MZ}=\frac{۱}{K_2M}+\frac{۱}{K_4M}$$

و مگر در حالتی که: $K_2K_4 \| EF$ که در آن صورت خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{LZ}=\frac{۱}{K_2S}+\frac{۱}{K_4M} \qquad (۲)$$

بنابراین، از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{۱}{K_1L}+\frac{۱}{K_3L}=\frac{۱}{K_2S}+\frac{۱}{K_4T} \Rightarrow \frac{۱}{r_1}+\frac{۱}{r_3}=\frac{۱}{r_2}+\frac{۱}{r_4}$$

۵. ۷. محیط

۵. ۷. ۱. اندازهٔ محیط مثلث

۶۹۱. داریم:

$$AB=AD+DB=۲+۶=۸$$

$$BC^۲=BD-BA \Rightarrow BC^۲=۶\times۸=۴۸ \Rightarrow BC=۴\sqrt{۳}$$

$$۲p=AB+AC+BC=۱۴+۴\sqrt{۳}cm$$ اندازهٔ محیط مثلث

۶۹۲. داریم:

$$BC=BH+HC=۱۲+۴=۱۶$$

$$BH^۲=BD.AB \Rightarrow ۱۴۴=۸AB \Rightarrow AB=۱۸ \ , \ AH=\sqrt{۳۲۴-۱۴۴}=۶\sqrt{۵}$$

$$AC=\sqrt{AH^۲+HC^۲}=\sqrt{۱۸۰+۱۶}=۱۴$$

$$۲p=AB+BC+AC=۱۸+۱۶+۱۴ \Rightarrow ۲p=۴۸$$ اندازهٔ محیط مثلث

۶۹۳. اندازهٔ ضلع BC برابر است با $BC=۵+۳=۸$. حال با استفاده از رابطه‌های متری در دایره داریم:

$$CD.CB=CE.CA \Rightarrow ۳\times(۳+۵)=۴CA \Rightarrow AC=۶$$

$$AB+BC+CA=۹+۸+۶=۲۳$$ اندازهٔ محیط مثلث

۶۹۴. وتر مشترک دو دایره به قطرهای AB و AC، ارتفاع وارد بر ضلع BC است. این ارتفاع را AH می‌نامیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH داریم:

$$BH = \sqrt{AB^۲ - AH^۲} = \sqrt{۶۴-۱۶} = ۴\sqrt{۳}$$
$$CH = \sqrt{AC^۲ - AH^۲} = \sqrt{۳۶-۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$
$$BC = BH + CH = ۴\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow ۲p = AB + AC + BC = ۱۴ + ۴\sqrt{۳} + ۲\sqrt{۵}\text{cm}$$

۸.۵. مساحت

۱.۸.۵. اندازهٔ مساحت مثلث

۶۹۵. $\dfrac{۲R^۲ \sin^۳\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

۲.۸.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر ایجاد شده

۶۹۶. $\dfrac{h^۲}{۲}\sin\beta\cos(\alpha-\gamma)$.

۶۹۷. $\dfrac{\pi a^۲}{۱۸}(۲-\sqrt{۳})$.

۶۹۸. برای محاسبهٔ شعاع قطاع روش مساحتها را به‌کار می‌گیریم. از طرف دیگر S، مساحت مثلث ABC را می‌توان طبق فرمول هرون محاسبه کرد: $S = ۸۴\text{cm}^۲$

$$S = S_{AOC} + S_{BOC} = \frac{۱}{۲}AC.DO + \frac{۱}{۲}BC.OE = \frac{۱}{۲}(۱۵+۱۳)r = ۱۴r$$

از این‌رو $۱۴r = ۸۴$ و $r = ۶\text{cm}$ را داریم. برای یافتن مساحت قطاع ضروری است که زاویهٔ مرکزی آن یعنی زاویهٔ DOE را به‌دست آوریم.

از چهارضلعی ODCE نتیجه می‌شود که $D\hat{O}E = \pi - \gamma$ است، به‌طوری که در آن $\gamma = A\hat{C}B$ است. طبق قانون کسینوسها:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲AC.BC\cos\gamma$$

را داریم. بنابراین $۱۴^۲ = ۱۳^۲ + ۱۵^۲ - ۲\cdot۱۳\cdot۱۵\cdot\cos\gamma$ نتیجه می‌شود که از آن $\cos\gamma = \dfrac{۹۹}{۱۹۵}$ و درنتیجه $\gamma = \arccos\dfrac{۹۹}{۱۹۵}$ نتیجه می‌شود.

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که زاویهٔ مرکزی قطاع برابر $\pi - \arccos\dfrac{۹۹}{۱۹۵}$ است و داریم:

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}r^۲(\pi - \arccos\frac{۹۹}{۱۹۵}) = ۱۸(\pi - \arccos\frac{۹۹}{۱۹۵})$$

۶۹۹. $\frac{5^2}{4}\cot g\beta(\beta-\sin\beta\cos(2\alpha+\beta))$. از این نکته استفاده کنید که دایره از نقطهٔ C می گذرد.

۳.۸.۵. نسبت مساحتها

۷۰۰. فرض می کنیم که O مرکز دایرهٔ محیطی ΔAMB و O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ΔAMC باشد. از A به O و O' و از O به O' وصل می کنیم، دو مثلث ΔABC و $\Delta AOO'$ بنابه حالت دوزاویه با یکدیگر متشابه‌اند. چون

$$A\hat{O'}O = AF = \frac{\overset{\frown}{AFM}}{2} \quad \text{و} \quad A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AFM}}{2}\ .$$

یعنی :

$A\hat{O'}O = A\hat{C}B$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که : $A\hat{B}C = A\hat{O}O'$ ، از تشابه این دو مثلث نتیجه می گیریم که :

$$\frac{AO}{AB}=\frac{AO'}{AC}\Rightarrow\frac{AO}{AO'}=\frac{AB}{AC}=K\Rightarrow\frac{AO^2}{AO'^2}=K^2$$

اما مساحت دایرهٔ محیطی مثلث ΔAMB برابر است با : $OA^2.\pi$ و مساحت دایرهٔ محیطی مثلث ΔAMC برابر است با : $O'A^2.\pi$

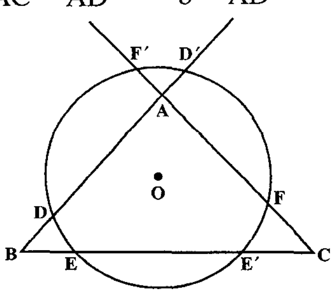
و نسبت آنها برابر است با : $\frac{OA^2.\pi}{O'A^2.\pi}=\frac{OA^2}{O'A^2}$ ، یعنی باید ثابت کنیم که $\frac{OA^2}{O'A^2}$ ، مقداری است ثابت که این رابطه نیز برقرار است.

۷۰۱. $\frac{33+12\sqrt{6}}{25}$.

۹.۵. رابطه های متری

۷۰۲. دو مثلث ABC و DAC متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AD} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{AD}$$



۷۰۳. داریم :

$$AD.AD' = AF.AF'$$

و

$$BE.BE' = BD.BD'$$

و

$$CF.CF' = CE.CE'$$

طرفین رابطه‌های بالا را درهم ضرب می کنیم :

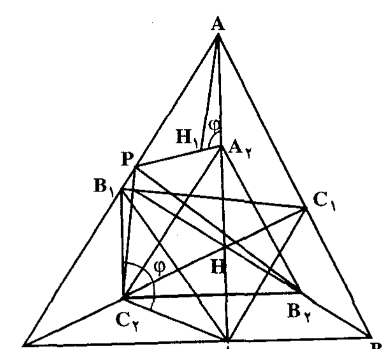
$$AD.BE.CF.AD'.BE'.CF' = AF.BD.CE.AF'.BD'.CE'$$

یا :
$$\frac{AD.BE.CF}{AF.BD.CE}\times\frac{AD'.BE'.CF'}{AF'.BD'.CE'}=1$$

۷۰۵. فرض کنید H معرف نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد و A_2 ، B_2 و C_2 بترتیب وسط پاره‌خطهای AH، BH و CH باشند. توجه کنید که مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1BC متشابه‌اند (رأسهای متناظر، با یک حرف نشان داده شده اند) و A_2 ، B_2 و C_2 مرکز دایرهٔ محیطی متناظر با آنها را نشان می‌دهند. نخست، ادعای زیر را ثابت می‌کنیم : سه خط راست که از نقطه های A_2 ، B_2 و C_2 می‌گذرند و نسبت به مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1BC وضعیت یکسانی را دارند، در نقطه‌ای روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث متقاطعند. توجه کنید که خطهای راست A_2B_1 ، B_2B و C_2B_1 ، نسبت به مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1BC به‌طور یکسان قرار دارند و در نقطهٔ B_1 ، واقع بر دایرهٔ نه نقطه، متقاطعند. چون نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 بر دایرهٔ نه نقطه واقعند، روشن است که سه خط راست حاصل از دوران خطهای راست A_2B_1 ، B_2B و C_2B_1 ، بترتیب دور نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 و با یک زاویه نیز در یک نقطه واقع بر دایرهٔ نه نقطه متقاطعند. اکنون فرض کنید P نقطهٔ برخورد خطهای اویلر مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1B_1C باشد. فرض کنید : $P\hat{A}_2A=\varphi$. برای راحتی کار، فرض می‌کنیم ABC مثلث حاده باشد و نقطهٔ P روی کمان B_1A_2 ی دایرهٔ نه نقطه قرار گیرد (مراجعه به شکل). در این صورت $P\hat{A}_2A_1=180^\circ-\varphi$ ،

$$P\hat{A}_2B_1=180^\circ-\varphi-B_1\hat{A}_2A_1=180^\circ-\varphi-B_1\hat{C}_1A_1=2\hat{C}-\varphi$$

و
$$P\hat{A}_2C_1=180^\circ-\varphi+180^\circ-2\hat{B}=360^\circ-\varphi-2\hat{B}$$



چون وترهای PA_1 ، PB_1 و PC_1 با سینوس زاویه های مقابل به آنها متناسبند، می‌ماند این که ثابت کنیم یکی از سه مقدار : $\sin\varphi$ ، $\sin(2\hat{C}-\varphi)$ و $-\sin(2\hat{B}+\varphi)$ (در حالت ما، اولی) برابر است با مجموع دوتای دیگر، یعنی :

$$\sin\varphi=\sin(2\hat{C}-\varphi)-\sin(2\hat{B}+\varphi)$$

اما در مثلث AA_2H_1 : $AA_2=R$ ، $AH_1=2R\cos A$ (R شعاع دایرهٔ محیطی و $R\cos\hat{A}$ فاصلهٔ A_2 ، مرکز دایرهٔ محیطی، تا B_1C_1 است) و

$H_1\hat{A}A_2 = \hat{A} + 2\hat{B} - 180^\circ$ بنابر قانون سینوسها در ΔAA_2H_1 ، داریم :

$$\frac{2\cos\hat{A}}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin(2\hat{B}+\hat{A}+\varphi)}$$

$$\Rightarrow -\sin(2\hat{B}+2\hat{A}+\varphi) - \sin(2\hat{B}+\varphi) = \sin\varphi \Rightarrow$$

$$\sin(2\hat{C}-\varphi) - \sin(2\hat{B}+\varphi) = \sin\varphi$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم. بنابراین، حکم را برای مثلث حاده ثابت کرده‌ایم. حالت مثلثی منفرجه مانند ABC ، درست به همین نحو بررسی می‌شود.

۷۰۶. ۱. این چهارضلعیها همه محاطی‌اند، زیرا رأسهای دو زاویهٔ قائمه که دارای یک وترند، به هم وصل کرده‌ایم پس $BC'B'C$ ، $A'HB'C$ و $AB'A'B$ محاطی‌اند و داریم :

$B\hat{B}'C' = B\hat{C}C' \quad (1)$

$H\hat{B}'A' = H\hat{C}A' \quad (2)$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $B\hat{B}'C' = B\hat{B}'A'$ ؛ یعنی BB' نیمساز زاویهٔ $C'B'A'$ است.

۲. چون BB' نیمساز است و AB' عمود بر آن می‌باشد، پس نیمساز خارجی مثلث است و این رابطه را داریم :

$$\frac{DB'}{B'A} = \frac{DH}{HA'} = \frac{DB'}{B'A} = \frac{AD}{AA'}$$

از آن جا : $DH.AA' = AD.HA'$

۷۰۸. حاصل‌ضرب طول پاره‌خطهای از رأس A ی مثلث ABC تا نقطه‌های برخورد ضلع AB با دایرهٔ مفروض، برابر است با همین حاصل‌ضرب برای ضلع AC. طول هریک از این پاره‌خطها به‌سادگی برحسب طول ضلعهای مثلث و وترهای مورد بحث قابل بیانند. بنابراین، دستگاه معادله هایی با سه معادله به‌دست می‌آوریم که ما را قادر می‌سازد طول وترها را برحسب طول ضلعهای مثلث نشان دهیم. برای اجتناب از بررسی حالتهای مختلف، راحت‌تر است جهت معینی برای پیمودن مثلث انتخاب کنیم و پاره‌خطها را جهت‌دار و طول آنها را عددهای حقیقی دلخواه در نظر بگیریم.

۷۰۹. شکل (الف) مثلث ABC، دایرهٔ محاطی داخلی آن با مرکز I و شعاع r، و دایرهٔ خارجی واقع در $A\hat{C}B$ به مرکز E و شعاع q را نشان می‌دهد. U و V نقطه هایی هستند که دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث در آنها بر AB مماسند. اندازه‌های $C\hat{A}B$ و $A\hat{B}C$ با α و β نمایش داده شده‌اند. در مورد طول $AB = c$

دوعبارت مساوی با آن‌داریم : $AU+BU=c$ و $AV+BV=c$ از طرف‌دیگر داریم :

(۱) $c=r(\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g\frac{\beta}{۲})$ و بنابراین : $BU=r\cot g\frac{\beta}{۲}$ و $AU=r\cot g\frac{\alpha}{۲}$. از آن‌جا که شعاعهای عمود از E به AB و BC زاویه‌یی تشکیل می‌دهند که ضلعهایش بر ضلعهای زاویهٔ $A\hat{B}C$ عمود است. $B\hat{E}V$ نیز به اندازهٔ $\frac{\beta}{۲}$ است، و به همین ترتیب $A\hat{E}V=\frac{\alpha}{۲}$ بنابراین :

(۲) $c=q(tg\frac{\alpha}{۲}+tg\frac{\beta}{۲})$ و بنابراین : $BV=qtg\frac{\beta}{۲}$ و $AV=qtg\frac{\alpha}{۲}$. به این ترتیب داریم :

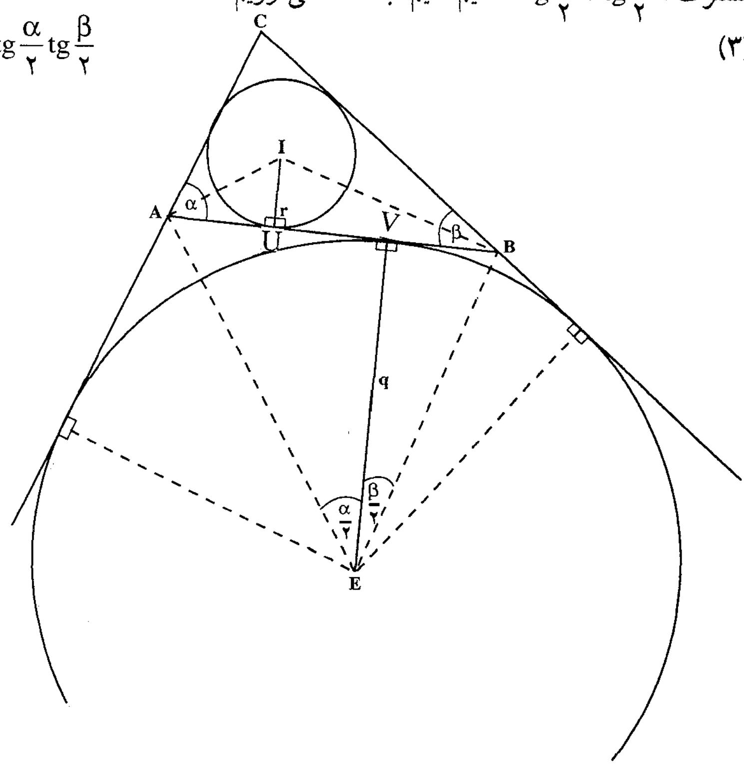
$$r(\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g\frac{\beta}{۲})=q(tg\frac{\alpha}{۲}+tg\frac{\beta}{۲})$$

و :

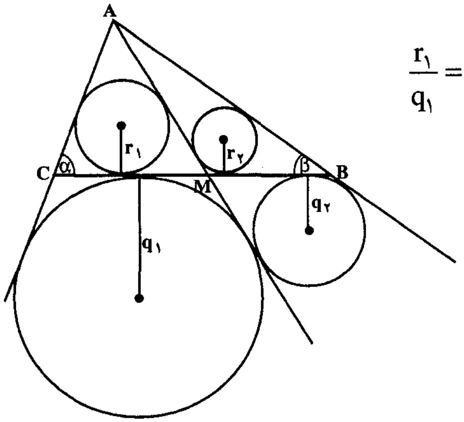
$$\frac{r}{q}=\frac{tg\frac{\alpha}{۲}+tg\frac{\beta}{۲}}{\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g\frac{\beta}{۲}}$$

اگر صورت و مخرج سمت راست را در : $tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}$ ضرب و سپس بر عامل مشترک : $tg\frac{\alpha}{۲}+tg\frac{\beta}{۲}$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آوریم :

(۳) $$\frac{r}{q}=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}$$



بعد این نتیجه را در مورد مثلثهای مجاور AMC و MBC به‌کار می‌بریم، شکل (ب) را



ملاحظه کنید. در این صورت داریم :

$$\frac{r_۱}{q_۱}=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{A\hat{M}C}{۲},\frac{r_۲}{q_۲}=tg\frac{C\hat{M}B}{۲}tg\frac{\beta}{۲}$$

اما :

$$A\hat{M}C+C\hat{M}B=۱۸۰^\circ$$

بنابراین :

$$\frac{۱}{۲}C\hat{M}B=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}A\hat{M}C$$

و :

$$tg\frac{۱}{۲}C\hat{M}B=\cot g\frac{۱}{۲}A\hat{M}C$$

بنابراین داریم :

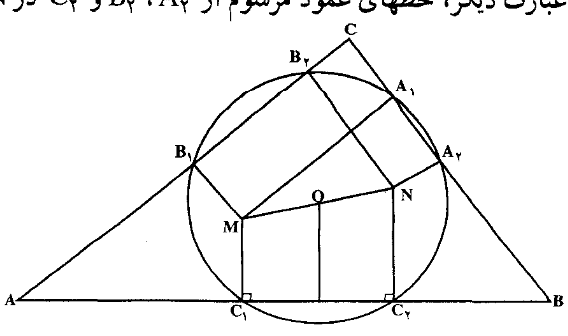
$$\frac{r_۱}{q_۱}\times\frac{r_۲}{q_۲}=(tg\frac{\alpha}{۲}.tg\frac{A\hat{M}C}{۲})(\cot g\frac{A\hat{M}C}{۲}tg\frac{\beta}{۲})=tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}=\frac{r}{q}$$

۱۰.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

.۷۱۰ $a(\pi-\beta-\gamma)\times\frac{\sin\beta.\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$.

.۷۱۱ $\beta b\cot g\beta$ از این موضوع استفاده کنید که پاره خط BH (H مرکز ارتفاعی مثلث است) برابر با ۲OK است، $BH=۲OK$. در این رابطه O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و OK عمود وارده از نقطهٔ O بر AC است.

.۷۱۵ نقطهٔ O مرکز K، بر عمود منصف پاره‌ـ خط $C_۱C_۲$ واقع است. بنابراین خط عمود مرسوم از $C_۲$ بر AB با خطی که از M و O می گذرد در نقطه‌ای چون N برخورد می کند، به قسمی که OM=ON (خطهای موازی، دو خط قاطع را به پاره‌خطهای متناسب تقسیم می کنند). به همین نحو، خط عمود مرسوم از $A_۲$ بر BC و خط عمود مرسوم از $B_۲$ بر AC خطی را که از M و O می گذرد در نقطهٔ N قطع می کنند. به‌عبارت دیگر، خطهای عمود مرسوم از $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ در N همرسند.



۷۱۶. بنابر ویژگی قاطع مرسوم از نقطه‌ای بیرونی بر دایره، یا از ویژگی قطعه‌های وترهای دایره که از یک نقطه می‌گذرند، داریم :

$BC_1 . BC_2 = BA_1 . BA_2$

$CB_1 . CB_2 = CA_1 . CA_2$

$AB_1 . AB_2 = AC_1 . AC_2$

اکنون به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر ادّعای قضیه سوا (برابری $R=1$) برای نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 درست باشد، آن‌وقت برای نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 هم درست است. از صورت مسأله نتیجه می‌شود که یا هر سه نقطهٔ A_2 ، B_2 و C_2 بر ضلعهای متناظر مثلث قرار دارند، و یا تنها یکی از آنها چنین است.

۷۱۷. $B'C'$ با امتداد ثابتی موازی است. از آن‌جا، چهار نقطه B ، C ، B' و C' بر روی یک دایره‌اند (چرا؟). $(B'C', B'B) = (BC', CB)$ و یا $(B'C', AB) = (AC, \acute{C}B)$ از آن‌جا زاویهٔ (AB و $B'C'$) مقداری است ثابت، یا امتداد $B'C'$ ثابت است.

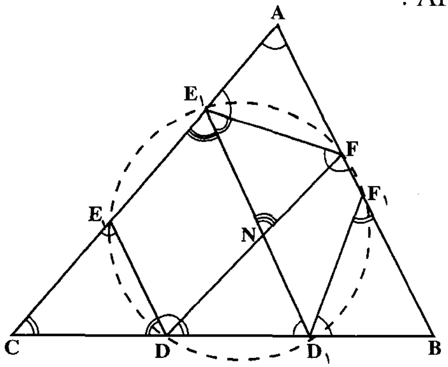
۷۱۸. دایرهٔ سومی به قطر BC اختیار کنید. ارتفاعهای مرسوم از رأسهای B و Cی مثلث، وتر مشترک دایره‌های اول و سوم و نیز دوم و سوم هستند. درنتیجه وتر مشترک دایره‌های مفروض هم، از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد.

۷۱۹. وتر مشترک دایره‌های به قطر AE و DC (و نیز DC و BF ، و BF و AE) شامل نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC، BDE، DAF و CEF است. بعلاوه فرض کنید K معرف نقطهٔ برخورد AE و DC و L نقطهٔ برخورد AE و BF باشد. بنابر قضیهٔ منلائوس، در مثلثهای BEA و EAC داریم :

$1 = \frac{AK}{KE} . \frac{EC}{CB} . \frac{BD}{DA}$ و $1 = \frac{AL}{LE} . \frac{EB}{BC} . \frac{CF}{FA}$. با تقسیم کردن این تساویها بر یکدیگر و در نظرداشتن این که $1 = \frac{CE}{EB} . \frac{BD}{DA} . \frac{AF}{FC}$ ، به‌دست می‌آوریم: $\frac{AK}{AL} = \frac{KE}{LE}$. دایرهٔ به قطر AE را در نظر بگیرید. به ازای کلیهٔ نقطه‌های P از این دایره، نسبت $\frac{PK}{PL}$ ثابت است. همین مطلب برای دایره‌های به قطر DC و BF درست است. بنابراین این سه دایره در دو نقطهٔ P_1 و P_2 متقاطعند، به طوری که نسبتهای فاصله‌های P_1 و P_2 تا K، L و M به ازای آنها برابرند.

۷۲۰. حکم این مسأله، از قضیهٔ فوئرباخ و این حقیقت که مثلثهای ABC، AHB، BHC و CHA دایرهٔ نه نقطهٔ یکسانی دارند (اثبات این امر به خواننده واگذار می‌شود)، نتیجه می‌شود.

۷۲۱. داریم : $F\hat{E}_1A = E\hat{D}F = \hat{A}$ ، بنابراین، $AF = E_1F$ ،
$F\hat{E}_1N = F\hat{D}B = \hat{C}$ و $E_1\hat{F}N = \hat{A}$. در نتیجه، ΔE_1FN با ΔABC متشابه است،
$\frac{AF}{FN} = \frac{E_1F}{FN} = \frac{AC}{AB}$ و $A\hat{F}N = 180^\circ - \hat{A}$.



اکنون می‌توانیم نشان دهیم که AN هم میانه است. برای اثبات حکم اخیر، متوازی‌الاضلاع ACA_1B را در نظر بگیرید ؛ AA_1 ، BC را نصف می‌کند و مثلث ACA_1 با مثلث AFN متشابه است، بنابراین :

$$N\hat{A}F = A_1\hat{A}C$$

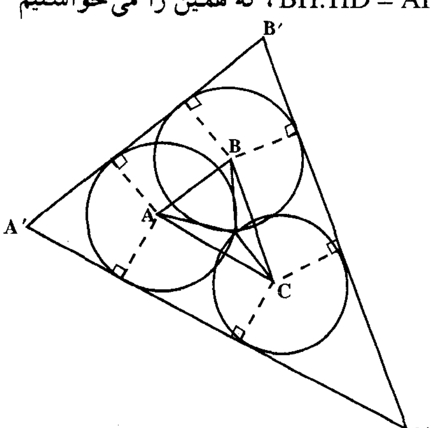
۷۲۲. ثابت می‌کنیم که مرکز دایرهٔ مطلوب بر مرکز ارتفاعی مثلث (محل برخورد ارتفاعها) منطبق است. فرض کنید BD معرف ارتفاع و H نقطهٔ برخورد ارتفاعها باشد و K و L وسط پاره خطهای مرسوم از رأس B باشند، $BK = BL = l$ و M وسط BD باشد. در این صورت : $KH^2 = LH^2 = MH^2 + KM^2 = l^2 - BM^2 + MH^2$

$$= l^2 - \frac{BD^2}{4} + (BH - \frac{BD}{2})^2$$

$$= l^2 + BH^2 - BH \cdot BD$$

$$= l^2 - BH.HD$$

می‌ماند، این که ثابت کنیم حاصل‌ضربهای قطعه‌هایی که نقطهٔ برخورد ارتفاعها، ارتفاعها را به آنها تقسیم می‌کند، برابرند. ارتفاع AE را رسم می‌کنیم. چون مثلثهای BHE و AHD متشابه‌اند، داریم : $BH.HD = AH.HE$ ، که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.



۷۲۴. مثلث $A'B'C'$ را، متشابه با مثلث ABC ، جستجو می‌کنیم که برای آن دایره‌های مورد نظر مسأله، وجود داشته باشد (که در این صورت، وجود چنین دایره‌هایی برای مثلث ABC هم، ثابت خواهد شد). برای این منظور، به مرکز نقطه‌های A، B و C سه دایره با شعاعهای برابر و برابر با شعاع دایرهٔ

محیطی مثلث ABC رسم می‌کنیم. این دایره‌ها، تنها یک نقطهٔ مشترک دارند (که از سه رأس A، B و C به یک فاصله است). اگر سه مماس مشترک دو به دوی دایره‌ها را رسم کنیم، از برخورد آنها مثلث مورد نظر $A'B'C'$ به‌دست می‌آید که با مثلث ABC متشابه است (زیرا $A'B' \| AB$ ، $B'C' \| BC$ ، $A'C' \| AC$) (شکل را ببینید).

۱۱.۵. مسأله های ترکیبی

۷۲۷. ۱. اگر M وسط BC باشد به موجب قضیهٔ میانه ها داریم:

$$\overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲ = ۲\overline{AM}^۲ + ۲\overline{MB}^۲$$

اما بنا به فرض

$$\overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲ = ۸\overline{MB}^۲$$

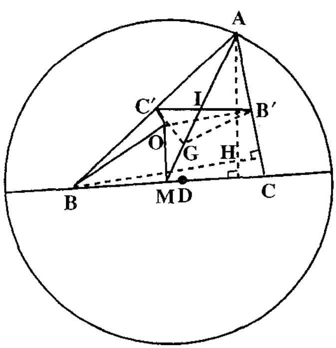
پس: $\overline{AM}^۲ = ۳\overline{MB}^۲$ و $\overline{MA} = \overline{MB}\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

و رأس A روی دایره‌ای به مرکز M و به شعاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ تغییر مکان می‌دهد. به عکس هر نقطه از این دایره یک نقطه از مکان است زیرا اگر $MA = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ باشد به سهولت از قضیهٔ میانه‌ها نتیجه می‌شود که مابین ضلعهای مثلث ABC رابطهٔ $۲a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.

۲. فرض کنیم I نقطهٔ تقاطع $B'C'$ با میانهٔ AM باشد، برای اثبات آن که چهارضلعی $AB'GC'$ محاطی است، کافی است ثابت کنیم:

$$IA \times IG = IC' \times IB' = \overline{IB'}^۲ = \frac{\overline{MC}^۲}{۴} = \frac{a^۲}{۱۶}$$

برای این کار ملاحظه می‌کنیم که نقطهٔ I وسط میانهٔ AM است، پس:



$$IA = \frac{AM}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۴}$$

و

$$IG = \frac{۱}{۶}AM = \frac{a\sqrt{۳}}{۱۲}$$

پس: $IA \times IG = \frac{a^۲}{۱۶} = IC' \times IB'$

یعنی چهارضلعی $AB'GC'$ محاطی است.

۳. داریم:

$$MG = \frac{AM}{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

پس : $MG\times MA=\frac{\overline{MA}^{2}}{3}=\frac{a^{2}}{4}=\overline{MB}^{2}=\overline{MC}^{2}$

از این رابطه معلوم می‌شود که دایره‌های AGB و AGC در نقطه‌های B و C بر خط BC مماس هستند.

۴. فرض کنیم D و D′ پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A باشند، می‌دانیم که چهار نقطهٔ B ، D ، C و D′ تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند.

پس : $MD\times MD'=\overline{MC}^{2}=MG\times MA$

از این جا معلوم می‌شود که دایرهٔ ′ADD بر نقطهٔG نیز می‌گذرد.

۵. طبق قضیهٔ میانه‌ها طول سه میانه عبارتست از :

$$m_a^{2}=\frac{1}{2}(b^{2}+c^{2}-\frac{a^{2}}{2})$$

و

$$m_b^{2}=\frac{1}{2}(c^{2}+a^{2}-\frac{b^{2}}{2})$$

و

$$m_c^{2}=\frac{1}{2}(a^{2}+b^{2}-\frac{c^{2}}{2})$$

از جمع این سه رابطه حاصل می‌شود :

$$m_a^{2}+m_b^{2}+m_c^{2}=\frac{3}{4}(b^{2}+c^{2}+a^{2})$$

و با رعایت رابطهٔ $b^{2}+c^{2}=2a^{2}$ حاصل می‌شود :

$$m_a^{2}+m_b^{2}+m_c^{2}=\frac{9a^{2}}{4}=\text{مقدار ثابت}$$

۶. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC و R شعاع این دایره باشد، در مثلث OMB داریم : $R^{2}=\overline{OM}^{2}+\frac{a^{2}}{4}$

با رعایت $OM=\frac{AH}{2}$ حاصل می‌شود :

$$a^{2}+\overline{AH}^{2}=4R^{2}$$

به همین استدلال معلوم می‌شود :

$$b^{2}+\overline{BH}^{2}=4R^{2}$$

و

$$c^{2}+\overline{CH}^{2}=4R^{2}$$

از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود :

$$2a^{2}+2\overline{AH}^{2}=\overline{BH}^{2}+b^{2}+\overline{CH}^{2}+c^{2}$$

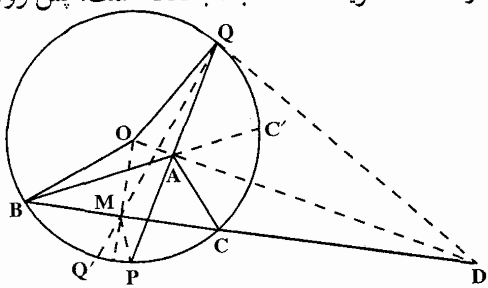
و یا :

$$2\overline{AH}^{2}+2a^{2}=(\overline{BH}^{2}+\overline{CH}^{2})+(b^{2}+c^{2})$$

و با مراعات $2a^{2}=b^{2}+c^{2}$ داریم :

$$2\overline{AH}^{2}=\overline{BH}^{2}+\overline{CH}^{2}$$

۷۲۸. ۱. ضلع BA را به طول $AC' = AC$ امتداد می‌دهیم، داریم:
$AB \times AC' = AP \times AQ$ از این رابطه معلوم می‌شود که چهار نقطهٔ P، Q، B و C' روی یک دایره قرار دارند. فرض کنیم O مرکز این دایره باشد. خط OA بر PQ عمود است و چون PQ زاویهٔ BAC را نصف می‌کند، خط OA نیز زاویهٔ CAC' را نصف می‌کند و نقطهٔ C قرینهٔ C' نسبت به OA است، پس روی دایرهٔ $PBQC'$ قرار دارد.



۲. دیدیم که OA نیمساز خارجی زاویهٔ BAC است. از طرف دیگر نقطهٔ O روی عمود منصف قطعه خط BC واقع است و می‌دانیم که در هر مثلث نقاط تقاطع نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه با عمود منصف ضلع مقابل روی دایرهٔ محیطی مثلث واقعند، پس چهارضلعی OBCA محاطی است و دو مثلث ACD و AOB متشابه‌اند. زیرا: $A\hat{C}D = D\hat{A}C = B\hat{A}O$

و زاویه‌های ACD و BOA هر دو مکمل زاویهٔ BCA هستند، پس داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{OA}{AQ}$$

و یا
$$OA \times AD = AB \times AC = \overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2$$

از این رابطه معلوم می‌شود که دو مثلث OPD و OQD که در آنها AP و AQ ارتفاع می‌باشند، قائم‌الزاویه هستند و نقطه‌های P و Q روی دایرهٔ به قطر OD قرار دارند.

۳. دایرهٔ به قطر OD از P، Q و M می‌گذرد و O و D وسطهای کمانهایی هستند که روی این دایره به وسیلهٔ وتر PQ جدا می‌شوند. بنابراین خطهای MD و MO نیمسازهای زاویهٔ PMQ می‌باشند. فرض کنیم Q' فصل مشترک دایرهٔ BPCQ با خط QM باشد. چون خط OM از مرکز این دایره می‌گذرد و نیمساز زاویهٔ PMQ است پس Q' قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط OM است. بنابراین داریم:

$$MB \times MC = MQ' \times MQ = MP \times MQ$$

و چون $MB = MC$ پس $\overline{MB}^2 = MP \times MQ$. حال قضیهٔ میانه‌ها را در مورد مثلث BAC که AM میانهٔ آن است و در مورد مثلث PMQ که MA در عین حال میانهٔ آن نیز می‌باشد، می نویسیم حاصل می‌شود:

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{MB}^2$$

و

$$\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{AP}^2$$

پس:

$$(AB+AC)^2=2\overline{AM}^2+2\overline{MB}^2+2AB\times AC$$

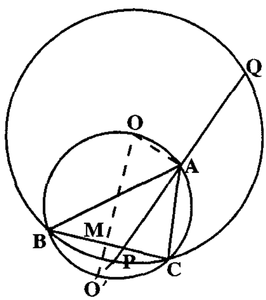
و

$$(MP+MQ)^2=2\overline{AM}^2$$

و با رعایت آن که $2AB\times AC=2\overline{AP}^2$ و $2MP\times MQ=2\overline{MB}^2$ نتیجه می‌شود:

$$AB+AC=MP+MQ$$

۴. هرگاه A روی دایرهٔ ثابتی حرکت کند نقطهٔ O مرکز دایرهٔ BPCQ است زیرا این نقطه محل تلاقی دایره محیطی مثلث ABC با عمود منصف BC است. که هر دو ثابت می‌باشند.



بنابراین نقطهٔ O بر وسط یکی از دو کمانی که به وسیلهٔ وتر BC روی دایرهٔ محیطی ABC جدا شده‌اند قرار دارد و اگر نقطهٔ A یکی از این دو کمان یا کمان دیگر را طی کند، مرکز مزبور بر O یا O' قرار خواهد گرفت. بنابراین دایرهٔ محیطی BPCQ ثابت است و نقطه‌های P و Q روی این دایره یا روی دایرهٔ به مرکز O' که از B و C می‌گذرد واقع است. اگر نقطهٔ A بر B یا C منطبق شود P و Q نیز بر B یا C منطبق می‌شوند. اگر A بر کمانی از دایرهٔ خود که نظیر نقطهٔ O است حرکت کند، نقطه‌های P و Q بترتیب بر دو کمان دایره که به وسیلهٔ BC جدا می‌شوند، حرکت می‌کنند. به همین طریق چون A روی کمان دیگر از مکان خود حرکت کند، P و Q بترتیب دو کمان از دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'B$ را که محدود به نقطه های B و C است، می‌پیماید.

۷۲۹. الف) می‌توانیم ثابت کنیم سه دایره، در دو نقطهٔ M_1 و M_2 متقاطعند و $AM_1:BM_1:CM_1=bc:ac:ab$ (همین طور برای نقطهٔ M_2).

(ب) از قسمت (الف).

(ج) ثابت کنید که اگر M_1 در درون مثلث ABC باشد، آن‌وقت $A\hat{M_1}C=60^\circ+\hat{B}$ ، $B\hat{M_1}A=60^\circ+\hat{C}$ و $C\hat{M_1}B=60^\circ+\hat{A}$.

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.

۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. تألیف : واسیلیف. گوتن ماخر. رابوت. توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.

۴. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.

۵. المپیادهای ریاضی بلژیک. مؤلف انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.

۶. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. مؤلف ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور نشر ماس ــ نشر نام.

۷. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مؤلف مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ماس ــ نشر نام.

۸. المپیادهای ریاضی لنینگراد. مؤلف د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.

۹. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری، ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.

۱۰. بازآموزی و باز شناخت هندسه. مؤلف هـ. س. م. کوکس تیر ــ س. ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.

۱۱. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.

۱۲. تاریخ ریاضیات. جلد اول. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.

۱۳. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. مؤلف دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.

۱۴. تاریخ هندسه. مؤلف. پی‌یر، مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.

۱۵. تئوری مقدماتی اعداد. جلد اول. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.

۱۶. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.

۱۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۱۸. حل مسائل ریاضیات. مؤلف محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.

۱۹. حل مسائل متمم هندسه. مؤلف دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.

۲۰. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. مؤلف حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۱. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۲. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. تألیف :

محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۲۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. مؤلف. عباس ذوالقدر.
۲۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. مؤلف. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. مؤلف. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. تألیف : غلامعلی ریاضی. علی‌حسن‌زاده. محمد حسین پرتوی. محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستانها. تألیف : محمدباقر ازگمی. غلامرضا بهنیا. باقر امامی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۲۹. خلاقیت ریاضی. مؤلف جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۰. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو و.ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۱. در پس فیثاغورس. شه‌پان ــ النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۲. دورهٔ حل‌المسائل هندسه. جلدهای اول و دوم. تألیف : ابوالقاسم قربانی. حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۳. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۴. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۵. دورهٔ مجلهٔ ریاضی رشد. وزارت آموزش و پرورش.
۳۶. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.
۳۷. روش حل مسائل هندسه. تألیف : دکتر حسن صفاری. ابوالقاسم قربانی. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۳۸. ریاضیات زنده. مؤلف ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۳۹. ریاضیدانان نامی. مؤلف دکتر اریک تمپل‌بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۰. سرگرمیهای هندسه‌ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۱. قضایا و مسائل هندسه. تألیف غلامرضا یاسی‌پور.
۴۲. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. مؤلف : جی.ال.بِرگرِن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مؤلف موری. اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. تألیف : واسیلیف. یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۴۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. تألیف جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۴۶. مسأله های تاریخی ریاضیات. مؤلف و.د.چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۴۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. مؤلف. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۴۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. مؤلف. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۴۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. مؤلف ای. خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۰. مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستان امریکا. جلد اول. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور. محمدقزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۱. مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد دوم. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۲. مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا جلد سوم. مؤلف چارلز.ت. سالکیند. جیمز. م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۳. مسائل مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. مؤلف آرتینو. گاگلیون. شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی). مؤلف و.س.کوشچنکو ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۵۵. مسائل مسابقه های ریاضی مجارستان. جلد اول. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه های ریاضی مجارستان. جلد دوم. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. تألیف : محمدباقر ازگمی. پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۵۸. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. مؤلف ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۵۹. نابرابریها. مؤلف پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۰. نابرابریهای هندسی. مؤلف نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. نه مقالهٔ هندسه. تألیف : ابوالقاسم قربانی. دکتر حسن صفاری.
۶۲. هندسهٔ ایرانی. مؤلف. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۶۳. هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی. مؤلف ماروین جی گرینبرگ. ترجمهٔ. م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۴. هندسهٔ تحلیلی. تألیف : حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۶۵. هندسه های جدید. تألیف : جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.

۶۶. هندسه درگذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۶۷. هندسهٔ دوایر. مؤلف. دکتر محسن هشترودی از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۶۸. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). تألیف : محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا. پرویز شهریاری. علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۹. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم نظام قدیم وزارت آموزش و پرورش.
۷۰. هندسه و مخروطات جدید. تألیف : محمدحسین پرتوی. محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۷۱. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش‌وپرورش (نظام اسبق).
۷۲. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته مؤلف اِدوین.ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیرخسروی. محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۷۳. هندسهٔ موئیز. دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۷۴. هندسه‌های ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
75. COLLEGE GEOMETRY. NATHAN ALTSHILLER. COURT. BRANES NOBLE. NEW YORK.
76. COLLEGE BOARDS. EXAMINATION, M. MCDONOUGH, A. HANSEN.
77. EXERCICES. DE GÉOMÉTRIE PAR, F.G.M.
78. EXERCICES DE GEOMTRIE PAR TH, CARONNET.
79. ÉXÉRCICES DE GÉOMETRIE MODERNE. PAR G. PAPELIER. LIBRAIRIE. VUIBERT. PARIS.
80. GEOMETRY A HIGH SCHOOL. COURSE, Serge Lange, Gene Murrow.
81. GIANT COLOUR BOOK. OF MATHEMATICS by IRVING ADLER.
82. GUIDES PRATIQUES BORDAS.II.GEOMETRIE PAR. ROBERT ARDRE´.
83. JACUB GEOMETRY.
84. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR. ANDRÉWARUSFEL.
85. MATHEMATICS AROUND US.
86. MÉMENTO DE MATHEMATIOUES USUELLES PAR , A.PONT.
87. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS A.M. WELCHONS, W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.
88. PRECIS DE GÉOME´TRIE PAR.ANDRE´ VIEILLEFOND ETP. TURMEL.
89. PRENTICE HALL GEOMETRY. BY, ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.
90. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.
91. RÉSOLUTION DES PROBLÉMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE. PAR E. J. HONNET.