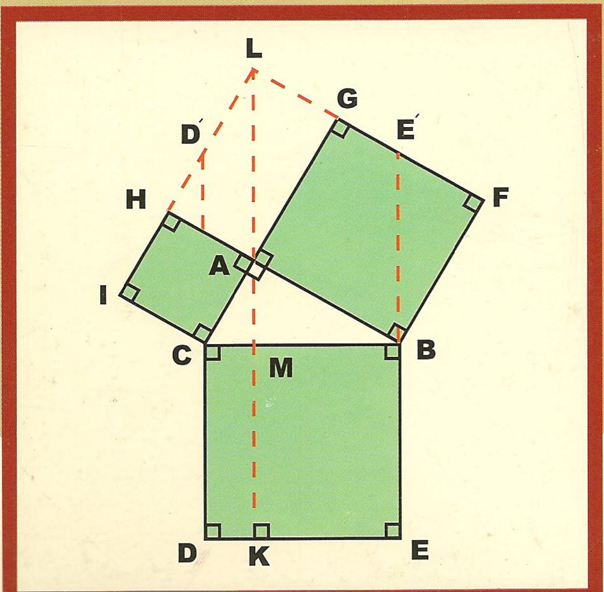
دایرة المعارف هندسه

۶

رابطه های متری در مثلثهای ویژه

(مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه، ...)



مؤلّف: محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرةالمعارف هندسه

«جلد ششم»

رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه

(مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه،

مثلث با زاویه‌های حاده، مثلث با زاویهٔ منفرجه)

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

QA
۵۰۱/۵
۲ د ۵ ر
رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ـ
دایرةالمعارف مسائل هندسه/ مؤلف محمدهاشم رستمی. ـ تهران: سازمان پژوهش وبرنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸.
ج.: مصور، جدول، نمودار.

ISBN 964-436-698-0 (ج. ۱)
ISBN 964-436-567-4 (ج. ۳)
ISBN 964-436-560-7 (ج. ۴)
ISBN 964-436-565-8 (ج. ۵)
ISBN 964-436-819-3 (ج. ۶)

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
ویرایش اوّل جلد اوّل با عنوان دایرةالمعارف مسائل هندسه، چاپ و منتشر شده است.
مندرجات: ج. ۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه. ـ ج. ۲. ـ ج. ۳. رابطه‌های متری مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه. ـ ج. ۴. رابطه‌های متری در دایره. ـ ج. ۵. رابطه‌های متری در مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی و دایره‌های دیگر. ـ ج. ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، مثلث با زاویه‌های حاده، مثلث با زاویهٔ منفرجه).
ج. ۶. (چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۸).
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره.الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

۵۱۶/۰۰۷۶ QA ۵۰۱/۵ ۲ د ۵ ر

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی
انتشارات مدرسه
دایرةالمعارف هندسه
(جلد ششم)
رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه
مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
رسامی از: مهدی ملکوتیان
چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۸
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
شابک ۳ـ ۸۱۹ـ ۴۳۶ـ ۹۶۴
ISBN-964-436-819-3

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.

از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی‌وپنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، ...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه‌های نااقلیدسی
. . .

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربرمی‌گیرد، به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح

زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...) ؛ مثلثهای ویژه و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعیها (چهار ضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش ضلعی و ...).

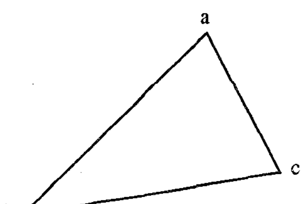
برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^۲ = b^۲ + c^۲$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده «در مثلث abc ضلعهای ab، ac و bc، ...» .



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به عنوان مثال همه جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند، نقطه‌های A ، B ، C و ... ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این مجلد از دایرةالمعارف شامل رابطه‌های متری مربوط به مثلثهای ویژه است که ۸ بخش دارد :

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع
بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره
بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین
بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره
بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه
بخش ۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره
بخش ۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویهٔ منفرجه
بخش ۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده و مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره

هر یک از این بخشها خود به چند زیر بخش تقسیم شده است. به عنوان مثال، بخش ۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره، شامل زیر بخشهای زیر است :

۶ . ۱ . رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی
۶ . ۲ . رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محاطی
۶ . ۳ . رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محیطی و محاطی
۶ . ۴ . رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های دیگر

هر یک از این زیر بخشها خود زیر بخشهای جدیدی دارند. به عنوان مثال، زیر بخش ۶ . ۱ . رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی، دارای ۱۲ زیر بخش زیر است :

۶ . ۱ . ۱ . تعریف و قضیه
۶ . ۱ . ۲ . زاویه
۶ . ۱ . ۳ . ضلع
۶ . ۱ . ۴ . ارتفاع، میانه، نیمساز
۶ . ۱ . ۵ . پاره‌خط
۶ . ۱ . ۶ . شعاع
۶ . ۱ . ۷ . محیط
۶ . ۱ . ۸ . مساحت

۶ . ۱ . ۹. رابطه‌های متری

۶ . ۱ . ۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۶ . ۱ . ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶ . ۱ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

اکثر زیربخشهای بالا نیز، دارای زیر بخشهای جدیدی هستند، در هر یک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب خاصی ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است، لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرها و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع
بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره
بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین
بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره
بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه
بخش ۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره
بخش ۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویه منفرجه
بخش ۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه و دایره

بخش ۱
• رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۳.۱. ضلع

۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۲.۳.۱. نسبت ضلعها

۴.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲.۵.۱. تساوی دو پاره‌خط

۶.۱. محیط

۱.۶.۱. اندازهٔ محیط مثلث

۲.۶.۱. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۳.۶.۱. حد محیطها، نسبت محیطها

۱.۷. مساحت

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱.۷.۳. نسبت مساحتها

۱.۷.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۱.۸. رابطه‌های متری

۱.۸.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

۱.۸.۲. رابطه‌های متری (نابرابریها)

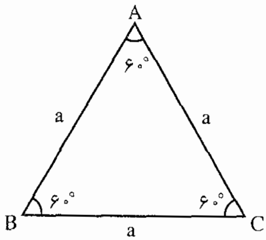
۱.۹. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۱.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱.۱۱. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۱. تعریف و قضیه



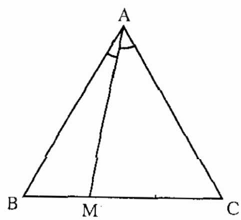
می‌دانیم مثلثی که سه ضلع یا سه زاویهٔ برابر دارد (هر زاویه ۶۰ درجه)، مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود.

۱. **قضیه**. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ هر ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$، اندازهٔ محیط برابر ۳a و اندازهٔ مساحت آن $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۲. خط رسم شده از یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی، ضلع روبه‌رو را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم می‌کند. اندازهٔ زاویه‌های تشکیل شده با این خط و ضلعهای مجاور زاویهٔ مزبور چه قدر است؟

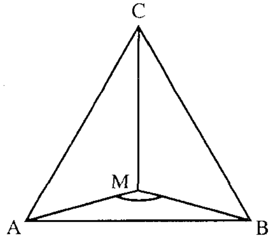


۳. اگر $\Delta A_۱A_۲A_۳$ متساوی‌الاضلاع و به ازای هر عدد صحیح مثبت n، نقطهٔ $A_{n+۳}$ وسط ضلع $A_nA_{n+۱}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $A_{۴۴}A_{۴۵}A_{۴۳}$ برابر است با :

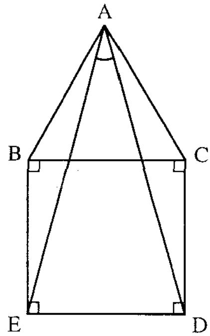
الف) °۳۰ ب) °۴۵ ج) °۶۰ د) °۹۰ هـ) °۱۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸

۴. اگر نقطهٔ M در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC طوری اختیار شده باشد که $CM^2 = AM^2 + BM^2$ باشد، ثابت کنید، زاویهٔ $A\hat{M}B = 150°$ است.



۵. روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و در بیرون مثلث، مربع BCDE را می‌سازیم. اندازهٔ زاویهٔ DAE را تعیین کنید.



۳.۱. ضلع

۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۶. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که مساحت آن دو برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰ باشد.

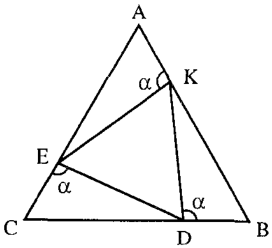
۷. نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲، ۳ و ۶ از ضلعهای مثلثی متساوی الاضلاع (یعنی، از خطهایی که این ضلعها بر آنها واقعند) قرار دارد. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را، اگر مساحت آن کمتر از ۱۴ باشد، پیدا کنید.

۸. خطهای l_1 ، l_2 و l_3 با هم موازی بوده و l_2 بین l_1 و l_3 قرار دارد. فاصله‌های خط وسط از خطهای دیگر بترتیب برابر p و q است. طول ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که هر یک از رأسهای آن روی هر یک از سه خط مفروض قرار دارد.

۹. نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. اگر $AH = m$ باشد، اندازهٔ ضلع این مثلث را تعیین کنید.

۲.۳.۱. نسبت ضلعها

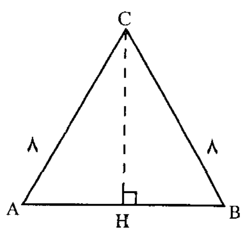
۱۰. در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a ، مثلث متساوی‌الاضلاع DEK را طوری محاط کرده‌ایم که نقطهٔ D روی ضلع BC، نقطهٔ E روی ضلع AC و نقطهٔ K روی ضلع AB قرار دارد. اگر $D\hat{E}C = \alpha$ باشد، نسبت $AB:DE$ را به دست آورید.



۴.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۱. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. اگر طول هر ضلع ۸cm باشد، ارتفاع وارد بر ABچه قدر است؟

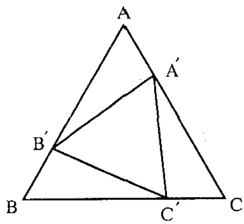


۱۲. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $۱۰۰\sqrt{۳}$ است. طول ضلعها و ارتفاعهای این مثلث را به دست آورید.

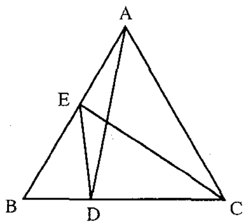
۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳. در مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ سانتیمتر، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری به ضلع $\sqrt{3}$ سانتیمتر محاط کرده‌ایم. فاصلهٔ بین هر دو رأس مثلثها را پیدا کنید.



۱۴. دو مثلث متساوی‌الاضلاع و همنهشت ABC و CDE به ضلع ۱، طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که تنها در نقطهٔ C مشترکند و زاویهٔ BCD از $\frac{\pi}{3}$ کمتر است. K معرف وسط ضلع AC، L وسط CE و M وسط BD است. مساحت مثلث KLM برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{5}$. BD را پیدا کنید.



۱۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، هر ضلع برابر با a است. بر ضلع BC ، نقطهٔ D، و بر ضلع AB ، نقطهٔ E، طوری اختیار می‌شود که : $BD=\frac{a}{3}$ و $AE=DE$ ، CE را پیدا کنید.

۱۶. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با مساحت S داده شده است. سه خط راست، به موازات ضلعهای مثلث و به فاصلهٔ برابر از آنها، رسم می‌شوند و از برخورد آنها، در درون مثلث، مثلث $A_1B_1C_1$ با مساحت Q درست می‌شود. فاصلهٔ میان ضلعهای موازی مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را پیدا کنید.

۱۷. ABC و $A_1B_1C_1$ مثلثهایی متساوی‌الاضلاع و همجهتند. می‌دانیم : $|AA_1|=a$ و $|BB_1|=b$. زاویهٔ بین خطهای راست AA_1 و BB_1، برابر است با α. مطلوب است محاسبهٔ طول پاره‌خط راست CC_1.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۱۸. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ را، با رسم خطی موازی با یک ضلع آن، به یک مثلث و یک ذوزنقه تقسیم می‌کنیم. اگر مساحت ذوزنقه، نصف مساحت مثلث اوّلیه باشد، طول میانهٔ ذوزنقه (یعنی طول خطی که وسط یک ساق را به وسط ساق دیگر وصل می‌کند) برابر است با :

الف) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ب) $\sqrt{۲}$ ج) $۲+\sqrt{۲}$ د) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$ هـ) $\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۶}}{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۱۹. قاعده‌های دو مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع a و ۳a ، روی دو طرف یک خط مستقیم قرار دارند. فاصلهٔ دو رأس از قاعده‌ها که دورترین آنها از همدیگر محسوب می‌شوند، معادل ۲a است. فاصلهٔ رأسهای دو مثلث را که روی خط مفروض قرار ندارند، به دست آورید.

۱.۵.۲. تساوی دو پاره‌خط

۲۰. نقطهٔ M را روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC انتخاب کرده‌ایم. سپس ضلع BC را از طرف رأس C امتداد داده‌ایم و نقطهٔ N را روی این امتداد طوری نشان گذاشته‌ایم که طولهای دو پاره‌خط راست BM و MN برابر باشد. ثابت کنید، دو پاره‌خط راست AM و CN هم، طولهایی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۱.۶. محیط

۱.۶.۱. اندازهٔ محیط مثلث

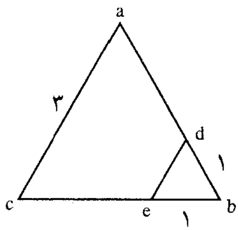
۲۱. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی $۲۰\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ محیط این مثلث را تعیین کنید.

۲۲. ثابت کنید، بین مثلثهای به مساحت ثابت، مثلثی به محیط می‌نیمم است، که متساوی‌الاضلاع باشد.

۱ . ۶ . ۲ . اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۲۳. از مثلث متساوی‌الاضلاع abc به ضلع ۳، مثلث bed جدا می‌شود که $|be| = |bd| = ۱$.
محیط چهار ضلعی باقیمانده برابر است با :

الف) ۶ ب) ۶/۵ ج) ۷ د) ۷/۵ هـ) ۸



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۱ . ۶ . ۳. حد محیطها، نسبت محیطها

۲۴. مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول a داده شده است. وسطهای ضلعهای این مثلث را به یکدیگر وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی تشکیل می‌شود، وسطهای ضلعهای مثلث دوم را به یکدیگر وصل می‌کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع سوم تشکیل می‌شود. به همین ترتیب این عمل را ادامه می‌دهیم. **حد مجموع محیطهای تمامی مثلثهایی که بدین ترتیب رسم شده‌اند برابر است با :**

الف) بی‌نهایت ب) $۵\frac{۱}{۴}a$ ج) $۲a$ د) $۶a$ هـ) $۴\frac{۱}{۲}a$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۲۵. اگر $A_۱$ نقطه‌ای در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $A_۲$ نقطه‌ای در درون مثلث $A_۱BC$ باشد، ثابت کنید : $I.Q.(A_۱BC) > I.Q.(A_۲BC)$ که در آن منظور از I.Q. نسبت همپیرامونی شکل است. نسبت همپیرامونی شکل F، به این صورت تعریف می‌شود :

$$I.Q.(F) = \frac{S_F}{(P_F)^۲}$$ (S_F مساحت و P_F محیط شکل F است.)

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

۱.۷. مساحت

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۲۶. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۲ سانتیمتر را تعیین کنید.

۲۷. ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۲ است. طول یک ضلع مثلث و مساحت آن را بیابید.

۲۸. مساحتِ مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که تفاضل بین ضلع و ارتفاع آن مساوی d باشد.

۲۹. هر یک از دو زاویهٔ یک مثلث °۶۰، و طول ضلع بین آنها ۴ سانتیمتر است. مساحت مثلث بر حسب سانتیمتر مربع، برابر است با :

الف) $۸\sqrt{۳}$ ب) ۸ ج) $۴\sqrt{۳}$ د) ۴ هـ) $۲\sqrt{۳}$

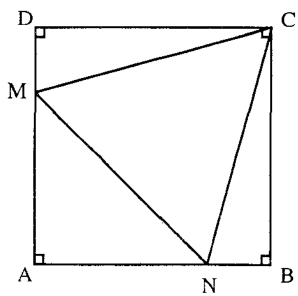
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۳۰. اگر ارتفاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع $\sqrt{۶}$ باشد، آن گاه مساحت مثلث برابر است با :

الف) $۲\sqrt{۲}$ ب) $۲\sqrt{۳}$ ج) $۳\sqrt{۳}$ د) $۶\sqrt{۲}$ هـ) ۱۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۳۱. در شکل، ABCD یک مربع و CMN یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر مساحت مربع ABCD یک متر مربع باشد، مساحت مثلث CMN چند متر مربع است؟



الف) $۲\sqrt{۳}-۳$ ب) $۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ د) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ هـ) $۴-۲\sqrt{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

۳۲. در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، نقطهٔ P چنان قرار دارد که PA = ۶ ، PB = ۸ و PC = ۱۰ . نزدیکترین عدد صحیح به مساحت مثلث ABC عبارت است از :

الف) ۱۵۹ ب) ۱۳۱ ج) ۹۵ د) ۷۹ هـ) ۵۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۳۳. سه شهر L، M و N در سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا شده‌اند. یک جهانگرد در محلی از داخل این مثلث قرار دارد، که فاصله‌اش از L ، M و N بترتیب ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ کیلومتر است. مساحت این مثلث عظیم چند کیلومترمربع می‌شود؟ (پاسخ را به طور تقریبی پیدا کنید.)

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

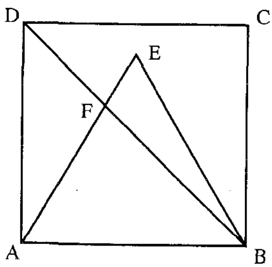
۳۴. ثابت کنید، بین مثلثهای به محیط ثابت ۲P ، مثلثی مساحتش ماکزیمم است که متساوی‌الاضلاع باشد.

۳۵. بیشترین مقدار مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که می‌تواند با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ پوشانده شود، چیست؟

۱.۷.۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳۶. مثلث متساوی‌الاضلاع LMN را در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC چنان محاط کرده‌ایم که رأسهای آن روی ضلعهای مثلث ABC واقع شده و هر یک از ضلعهای این مثلث را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. اگر ضلع مثلث ABC برابر a باشد، مساحت LMN را به‌دست آورید.

۳۷. E رأس مثلث متساوی‌الاضلاع ABE در داخل مربع ABCD واقع شده است و BD قطر مربع، با پاره‌خط AE در F برخورد می‌کند (شکل). اگر طول AB برابر $\sqrt{۱+\sqrt{۳}}$ باشد، آن گاه، مساحت مثلث ABF برابر است با :



الف) ۱ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ د) $۴-۲\sqrt{۳}$ هـ) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۸

۳۸. فرض کنید، ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a و M نقطه‌ای در صفحه به فاصلهٔ d از مرکز مثلث ABC باشد. ثابت کنید، مساحت مثلثی را که ضلعهایش با پاره‌خطهای MA، AB و MC برابرند، می‌توان با دستور $S=\frac{\sqrt{3}}{12}\left|a^2-3d^2\right|$ نشان داد.

۳۹. دهقانی که صاحب مزرعهٔ بزرگی بود، دو پسر داشت. او می‌خواست به هر یک از آنها قسمتی از مزرعه را اختصاص دهد تا به طور مستقل در آن بخش مشغول کار شود. جهت برقراری مساوات، به هر کدام از فرزندانش یک طناب بسیار بلند (به طولهای مساوی) داد و از آنها خواست، که هر یک به وسیلهٔ این طناب قسمتی از مزرعه را محصور کنند و از آن خود سازند. پسر بزرگتر به کمک آن طناب قسمتی از مزرعه را، به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به خود اختصاص داد و مساحت سهم او ۲۰ آر گردید. امّا پسر کوچکتر که باهوشتر از او بود، قسمتی از مزرعهٔ پدر را به شکل شش ضلعی منتظم، تصاحب کرد. اولاً سهم پسر کوچک چند آر است؟ ثانیاً اگر شما به جای یکی از آنها بودید، آیا می‌توانستید به کمک این طناب مزرعه‌ای را با بیشترین مساحت تصاحب کنید؟ چگونه و به چه مساحت؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۱.۷.۳. نسبت مساحتها

۴۰. از میانگاه یکی از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع خطی را طوری رسم می‌کنیم که با آن ضلع زاویهٔ حاده α را تشکیل دهد. این خط مثلث مفروض را به دو بخش تقسیم می‌کند. نسبت مساحتهای آنها را بیابید.

۱.۷.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۴۱. ΔABC و $\Delta A'B'C'$ متساوی‌الاضلاعند. طول ارتفاع $\Delta A'B'C'$ با طول ضلع ΔABC برابر است. ثابت کنید: $a\Delta A'B'C'=\frac{4}{3}a\Delta ABC$.

۴۲. نقطهٔ A_1 را در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطهٔ A_2 را در درون مثلث A_1BC انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید: $S_1:P_1^2 > S_2:P_2^2$.

که در آن، S_1، S_2، P_1 و P_2 بترتیب، مساحتها و محیطهای دو مثلث A_1BC و

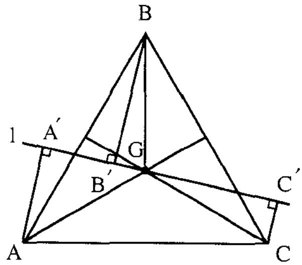
A_2BC هستند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۲

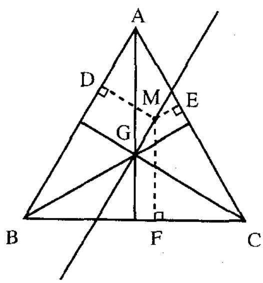
۸.۱. رابطه‌های متری

۱.۸.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

۴۳. l، خط گذرنده از مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، ضلعهای AB و BC را قطع می‌کند. ثابت کنید که مجموع فاصله‌های A و C از l با فاصلهٔ B از l برابر است.

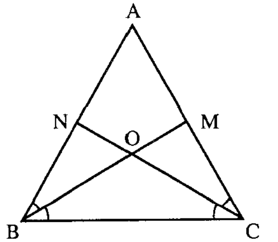


۴۴. از گرانیگاه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، خطی را به موازات ضلع AB رسم می‌کنیم. در درون مثلث، روی این خط، نقطهٔ دلخواه M را اختیار کرده و از این نقطه عمودهای MD، ME و MF را بترتیب بر ضلعهای AB، AC و BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید که: $MD = \frac{1}{2}(ME + MF)$.



۴۵. در صفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاعی، خطی را از مرکز ثقل (گرانیگاه) مثلث عبور می‌دهیم. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های رأسهای مثلث از این خط، مستقل از انتخاب آن است.

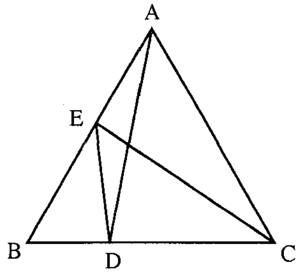
۴۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، نیمسازهای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع



کرده‌اند. ثابت کنید :

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OC}{ON} = ۲$$

۴۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. نقطهٔ D را بین B و C به طریقی اختیار می‌کنیم که $BD = \frac{BC}{۳}$ باشد و نیز روی ضلع AB، نقطهٔ E را به قسمی فرض می‌کنیم که $AE = ED$ باشد، ثابت کنید که : $CE = BE + BD$.



۴۸. نقطهٔ غیر مشخصی در داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع انتخاب کرده و از آن جا عمودهایی بر ضلعها فرود آورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع این سه عمود برابر مقدار ثابتی است.

۴۹. نقطهٔ M در درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع است. تصویرهای قائم نقطهٔ M بر ضلعهای BC، AC و AB را بترتیب $A_۱$ ، $B_۱$ و $C_۱$ می‌نامیم. ثابت کنید :

$$|AB_۱|.|BC_۱| + |BC_۱|.|CA_۱| + |CA_۱|.|AB_۱| = |AC_۱|.|BA_۱| + |BA_۱|.|CB_۱| + |CB_۱|.|AC_۱|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

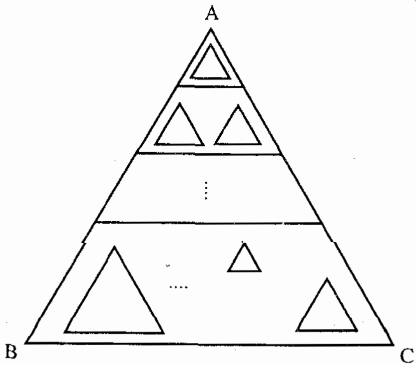
۵۰. فرض می‌کنیم: $A_۱A_۲$ ، $B_۱B_۲$ و $C_۱C_۲$ سه پاره‌خط مساوی بر ضلعهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند. ثابت کنید که در مثلث تشکیل شده از خطهای $B_۲C_۱$ ، $C_۲A_۱$ و $A_۲B_۱$ ، پاره‌خطهای: $B_۲C_۱$ ، $C_۲A_۱$ و $A_۲B_۱$ ، با ضلعهایی که در آنها مشمولند، متناسبند.

۲.۸.۱. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۵۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. ضلع AB را به دو قسمت (نه لزوماً مساوی) تقسیم می‌کنیم، از نقطه‌های تقسیم خطهایی موازی BC رسم می‌کنیم. آن‌گاه در هر یک از قسمتهای به دست آمده، در قسمت اوّل یک مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه)، در قسمت دوم، ۲ مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز) ... و در قسمت nام، n مثلث متساوی‌الاضلاع (دلخواه و متمایز) طوری قرار می‌دهیم که قاعدهٔ آنها موازی BC باشد. اگر ضلع مثلث ABC را a نامیده و ضلعهای سایر مثلثها را بترتیب $a_۱$ ، $a_۲$ ، ...، a_m بنامیم (واضح است که $m=\frac{n(n+۱)}{۲}$) آن گاه ثابت کنید:

الف. $\sum_{i=۱}^{m} a_i^۲ \le a^۲$

ب. $\sum_{i=۱}^{m} a_i^۲ \le \frac{m}{۲}a$ ، $m \ne ۱$.



اوّلین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، ۱۳۷۲

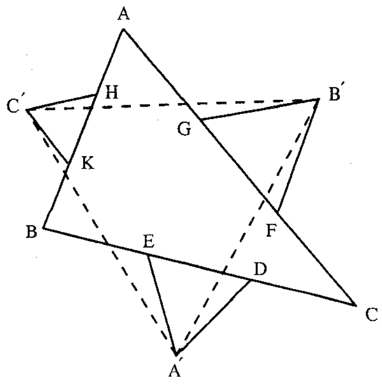
۵۲. نقطهٔ D را روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نظر گرفته‌ایم. خط راست موازی AD که از نقطهٔ C گذشته است، خط راست AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$|CE| : |CD| \geq ۲\sqrt{۳}$$

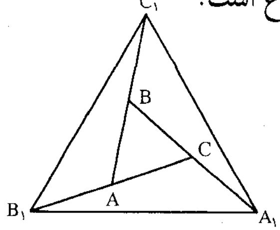
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۱ . ۹. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۵۳. مثلث دلخواه ABC داده شده است. هر سه ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مطابق شکل روی پاره‌خطهای میانی، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم. ثابت کنید، مثلث $A'B'C'$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



۵۴. ضلعهای مثلث ABC را طوری ادامه داده‌ایم که داشته باشیم: $CA_1 = AB$ ، $AB_1 = AB$ و $BC_1 = AC$. اگر مثلث $A_1B_1C_1$ متساوی‌الاضلاع باشد، ثابت کنید، مثلث نخستین ABC متساوی‌الاضلاع است.



المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

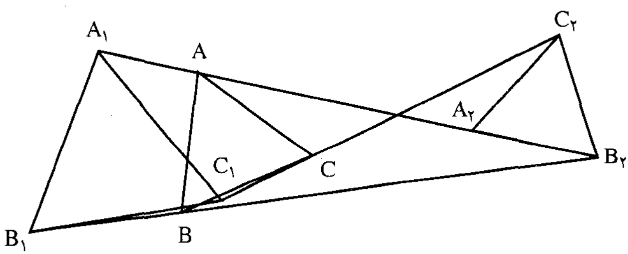
۵۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع CH و میانهٔ BK را رسم کرده‌ایم. می‌دانیم : $K\hat{B}C = H\hat{C}B$ و $CH = BK$. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

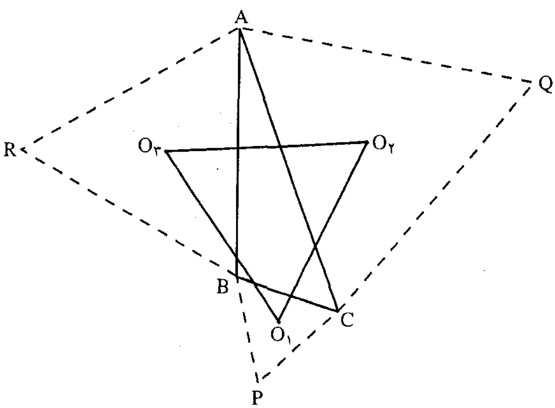
۵۶. ارتفاع AK، نیمساز BL و میانهٔ CM در مثلث ABC ، در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند. در ضمن $AO = BO$ ، ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

۵۷. دو مثلث متساوی‌الاضلاع و همجهت $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ مفروضند. پاره‌خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 از طرف نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 به وسیلهٔ نقطه‌های A، B و C به نسبتهای مساوی تقسیم می‌شوند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.



۵۸. قضیه. مثلث ناپلئون خارجی هر مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

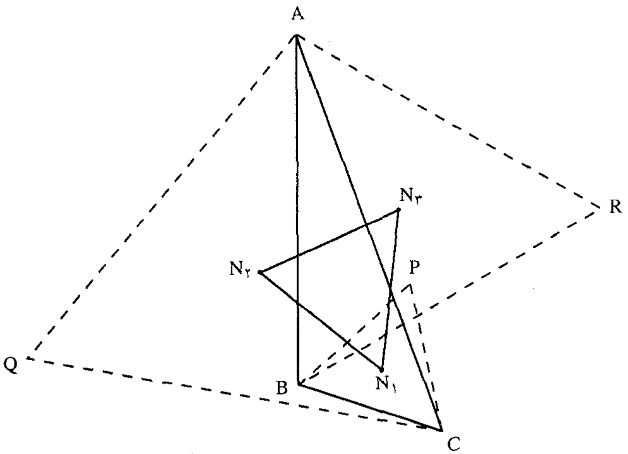


این قضیه را به ناپلئون نسبت می‌دهند، اما در این باره می‌توان شک داشت. زیرا معلومات هندسی او آن اندازه نبوده که به این نتیجهٔ جالب توجه دست یابد : چنان که در انگلیسی جملهٔ دو سویهٔ زیر را به او نسبت می‌دهند :

ABLE WAS I ERE I SAW ELBA

(تقریباً به این مضمون : «قبل از دیدن جزیرهٔ الب می‌توانستم.»)
به هر ترتیب، در حالتی که مثلثهای متساوی‌الاضلاع PCB ، CQA و BAR را در خارج مثلث ABC بسازیم و O_1 ، O_2 و O_3 مرکزهای آن مثلثها باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع $O_1O_2O_3$ را مثلث ناپلئون خارجی نظیر مثلث ABC می‌نامند و در حالتی که مثلثهای متساوی‌الاضلاع را در داخل مثلث بسازیم و N_1 ، N_2 و N_3 مرکزهای آنها باشند، مثلث $N_1N_2N_3$ را مثلث ناپلئون داخلی نظیر مثلث ABC می‌نامند.

۵۹. مثلث ناپلئون داخلی هر مثلث متساوی‌الاضلاع است.



۶۰. تفاضل مساحتهای دو مثلث ناپلئون خارجی و داخلی نظیر هر مثلث برابر است با مساحت آن مثلث. دستور صحیح مربوط به این قضیه با در نظر گرفتن جهت نامگذاری مثلثها به صورت زیر است :

$$S(O_1O_2O_3) - S(N_3N_2N_1) = S(ABC)$$

به عبارت دیگر :

$$S(O_1O_2O_3) + S(N_1N_2N_3) = S(ABC)$$

۶۱. رأسهای مثلث ABC را بترتیب مثبت (عکس گردش عقربه‌های ساعت) مرتب می‌کنیم.

برای هر دو نیمخط α و β نماد $(\alpha \hat{,} \beta)$ معرف زاویه‌ای است که به اندازهٔ آن، نیمخط α باید در جهت عکس گردش عقربه‌های ساعت دوران کند، تا بر نیمخط β منطبق گردد. فرض کنید α_1 و α'_1 معرف دو نیمخط با مبدأ A باشند که برای آنها :

$$(AB \hat{,} \alpha_1) = (\alpha_1 \hat{,} \alpha'_1) = (\alpha'_1 \hat{,} AC) = \frac{1}{3}\hat{A}$$

α_2 و α'_2 دو نیمخط باشند که برای آنها :

$$(AB\hat{,}\alpha_2)=(\alpha_2\hat{,}\alpha'_2)=(\alpha'_2\hat{,}AC)=\frac{1}{3}(\hat{A}+2\pi)$$

و بالاخره α_3 و α'_3 نیمخطهایی باشند که برای آنها :

$$(AB\hat{,}\alpha_3)=(\alpha_3\hat{,}\alpha'_3)=(\alpha'_3\hat{,}AC)=\frac{1}{3}(\hat{A}+4\pi)$$

(α_i ، α'_i ؛ $i=1,2,3$ ، را سه سازهای نوع اول، دوم و سوم می‌نامند). به همین ترتیب برای رأسهای B و C ، β_j ، β'_j و γ_k ، γ'_k ($k=1,2,3$ و j) را تعیین می‌کنیم. مثلث تشکیل شده با، بترتیب، خطهای (نه نیمخطهای) متقاطع α_i ، β'_j ، β_j ، γ'_k ، γ_k و α'_i را با $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که به ازای کلیهٔ i، j و kهایی که $i+j+k-1$ مضربی از سه نباشند، مثلثهای $\alpha_i\beta_j\gamma_k$ متساوی‌الاضلاعند، ضلعهای متناظرشان موازی‌اند و رأسهایشان روی نه خط راست شش تا روی هر خط، واقعند (قضیهٔ کامل مورلی).

۶۲. سه مثلث متساوی‌الاضلاع A_1BC ، A_2DE و A_3FQ با جهتهای یکسان داده شده‌اند. نقطه‌های A_1 ، A_2 و A_3 رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع همجهت با این مثلثها هستند. ثابت کنید، میانگاههای پاره‌خطهای CD، EF و QB رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. حالت خاص این مسأله آن است که نقطه‌های A_1 ، A_2 و A_3 بر هم منطبق باشند.

۶۳. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC، مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC_1 و BCA_1 را در خارج آن رسم می‌کنیم. اگر M، N و P بترتیب میانگاههای ضلعهای AC ، C_1B و BA_1 باشد، آن گاه ثابت کنید، مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

۶۴. در مثلثی رابطه‌های $\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\frac{3}{4}$ و $\frac{a^3+b^3-c^3}{a+b-c}=c^2$ برقرار است. ثابت کنید، این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۶۵. مثلثی که در آن رابطهٔ $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}$ برقرار است، ثابت کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع است.

۶۶. $A_iH_i\,(i=1,2,3)$ را ارتفاعهای مثلث $A_1A_2A_3$ که مساحتی برابر S دارد، می‌گیریم. ثابت کنید این مثلث وقتی و تنها وقتی متساوی‌الاضلاع است که داشته باشیم :

$$S=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}A_iA_{i+1}.A_iH_i \qquad (A_1=A_4)$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۰

۶۷. از برخورد شش خط راست، حداکثر چند مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن است به وجود آید؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۶۸. نیمساز هر زاویهٔ مثلثی، ضلع روبه‌رو را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به فاصلهٔ برابر از وسطهای دو ضلع دیگر قرار دارد. آیا این بدان معنی است که مثلث، متساوی‌الاضلاع است؟

۱ . ۱۰ . سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۹. سربازی نیاز دارد که وجود مین را در ناحیه‌ای که به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع است، بررسی کند. شعاع عمل مین‌یاب سرباز، مساوی نصف ارتفاع مثلث است و از یک رأس مثلث آغاز به حرکت می‌کند. برای این که کمترین فاصلهٔ ممکن را طی کند و با این همه، مأموریتش را انجام دهد، چه مسیری را باید پیش گیرد؟

پانزدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۳

۷۰. مثلث متساوی‌الاضلاعی با ضلع به طول برابر ۳۲ داده شده است. از گوشهٔ آن، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع برابر واحد جدا کرده‌ایم. شکل باقی‌مانده را به مثلثهای متساوی‌الاضلاعی تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید تعداد آنها، از ۱۵ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۷۱. هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را به ۳۰ بخش برابر تقسیم کرده‌ایم. با رسم خطهای راستی موازی با ضلعهای مثلث و از نقطه‌های تقسیم ضلعها، مثلث اصلی را به ۹۰۰ مثلث کوچک تقسیم کرده‌ایم. حداکثر چند رأس تقسیم وجود دارد که هیچ دوتایی از آنها روی ضلع یا روی خط راست رسم شده، نباشند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۷۲. ثابت کنید، نمی‌توان مثلث متساوی الاضلاع را به چند مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کرد، به نحوی که، این مثلثها دو به دو با هم نابرابر باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۷۳. روستاهای A ، B و C در رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار دارند. در روستای A، ۱۰۰ دانش‌آموز، در روستای B، ۲۰۰ دانش‌آموز و در روستای C، ۳۰۰ دانش‌آموز زندگی می‌کنند. مدرسه را در کجا بسازیم که مجموع مسافتهایی که همهٔ دانش‌آموزان می‌پیمایند، کمترین مقدار ممکن باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۷۴. O را مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گیریم. مجموعهٔ نقطه‌های X را طوری پیدا کنید که، هر خط راستی که از X می‌گذرد، یا پاره‌خط راست AB و یا پاره‌خط راست OC را قطع کند.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۷۵. مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول S مفروض است. مکان هندسی همهٔ نقطه‌های P از صفحهٔ مثلث را در نظر می‌گیریم که مجموع مربعهای فاصله‌های P تا رأسهای مثلث مقدار ثابت a باشد. این مکان هندسی:

الف) به شرط $a > s^2$ یک دایره است.

ب) اگر $a = 2s^2$ فقط شامل سه نقطه است و اگر $a > 2s^2$ یک دایره است.

ج) فقط وقتی که $s^2 < a < 2s^2$ یک دایره با شعاع مثبت است.

د) به ازای همهٔ مقادیر a فقط شامل تعداد محدودی نقطه است.

هـ) هیچ یک از اینها نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۷۶. رأس P از مثلث متساوی‌الاضلاع PKM ثابت و رأس K روی محیط مربعی مثل Q حرکت می‌کند. مکان هندسی M، رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۷۷. شعاع نور بارها از ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC منعکس می‌شود. فرض می‌کنیم که در یک فاصلهٔ زمانی، شعاع نور ۴ مرتبه از ضلع AB، x مرتبه از ضلع AC و y مرتبه از ضلع BC منعکس شده باشد. x و y چه عددهایی می‌توانند داشته باشند؟ (همهٔ حالتهای ممکن را پیدا کنید.)

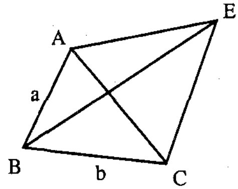
۷۸. دو مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است: ABC و $A_1B_1C_1$. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را طوری پیدا کنید که مساحتهای دو مثلث که با پاره‌خطهای MA، MB، MC و MA_1، MB_1، MC_1 تشکیل شده‌اند، برابر باشند.

۷۹. چگونه می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را با حداقل تعداد تقسیمها، به مربع تبدیل کرد.

۸۰. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و ε مجموعهٔ تمام نقطه‌های مشمول در سه پاره‌خط AB، BC و CA (از جمله A، B و C) باشد. معین کنید به ازای هر افراز به دو زیر مجموعهٔ مجزا، حداقل یکی از این دو زیر مجموعه، شامل رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویه هست یا خیر؟ پاسختان را مدلل کنید.

۸۱. نقطهٔ P روی ضلع AB از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. تصویر نقطهٔ P روی ضلعهای AC و CB را بترتیب Q و R می‌نامیم. ثابت کنید میانهٔ PM از مثلث PQR از نقطهٔ O، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC می‌گذرد.

۸۲. دو میلهٔ AB به طول a و BC به طول b در نقطهٔ B به هم لولا شده‌اند. روی پاره‌خط AC ، مثلث متساوی‌الاضلاع ACE را می‌سازیم. میله‌ها را چگونه قرار دهیم که فاصلهٔ BE حداکثر مقدار ممکن باشد.



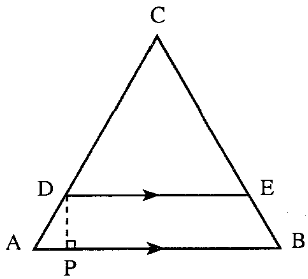
۱۱.۱. مسأله‌های ترکیبی

۸۳. مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱۰ واحد را در نظر بگیرید و پاره‌خط DE را طوری رسم کنید تا AD برابر ۴ واحد گردد.

الف. طول DP را به دست آورید.

ب. طول PE را محاسبه کنید.

پ. چگونه با سه برش روی ذوزنقهٔ ABED، می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی با طول ۸ واحد ساخت؟ آیا با دو برش نیز می‌توان این کار را انجام داد؟



۸۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به ضلع a = ۳cm رسم کنید. ضلع AB را از طرف B و در جهت از A به B ، به اندازهٔ BD = AB امتداد دهید و ضلع BC را در جهت از B به C ، از نقطهٔ C به اندازهٔ CE = BC امتداد دهید. خطهای DC و EA که در نقطهٔ I متقاطعند را رسم می‌کنیم. همچنین پاره‌خطهای BI و DE را رسم می‌نماییم.

۱. اندازهٔ زاویه‌های مثلثهای CAE، BDC ، BAE و CAD را بر حسب درجه تعیین کنید و نشان دهید که مثلثهای CAE و ICE متشابه‌اند.

۲. اندازهٔ پاره‌خطهای AE و IE را بیابید.

۳. ثابت کنید که مثلثهای ABI ، BDI و DIE مساحتهای برابر دارند. اندازهٔ مساحت چهارضلعی BDEI را بر حسب سانتیمتر مربع تعیین کنید.

۴. ثابت کنید که چهار نقطهٔ B، D، E و I همدایره‌اند.

۸۵. نقطهٔ C روی پاره‌خط AB جابه جا می‌شود. دو مثلث متساوی‌الاضلاع ACM و BCP را در یک طرف پاره‌خط AB می‌سازیم.

۱. مکان هندسی نقطه‌های M و P را وقتی نقطهٔ C بین A و B تغییر مکان می‌دهد، تعیین کنید.

۲. نشان دهید که اگر I وسط پاره‌خط MP باشد، CI از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. مکان هندسی نقطهٔ I چیست؟

۳. با فرض $AB = 6cm$ و $x = AC$ ، به ازای چه مقداری از x ، مثلث CMP قائم‌الزاویه در رأس M است؟ مساحت چهار ضلعی محدب AMPB را در این حالت بیابید.

بخش ۲

• رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره

۲ . ۱ . رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایرهٔ محیطی

۲ . ۱ . ۱ . تعریف و قضیه

۲ . ۱ . ۲ . زاویه

۲ . ۱ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۲ . ۱ . ۳ . ضلع

۲ . ۱ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۲ . ۱ . ۴ . ارتفاع، میانه، نیمساز

۲ . ۱ . ۴ . ۱ . اندازهٔ ارتفاع

۲ . ۱ . ۵ . پاره خط

۲ . ۱ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره خط

۲ . ۱ . ۵ . ۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲ . ۱ . ۶ . شعاع دایره

۲ . ۱ . ۶ . ۱ . اندازهٔ شعاع

۲ . ۱ . ۷ . محیط

۲ . ۱ . ۷ . ۱ . اندازهٔ محیط

۲ . ۱ . ۷ . ۲ . نسبت محیطها

۲ . ۱ . ۸ . مساحت

۲ . ۱ . ۸ . ۱ . اندازهٔ مساحت مثلث

۲ . ۱ . ۸ . ۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

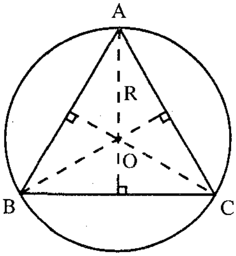
۲ . ۱ . ۹ . رابطه‌های متری

۲ . ۱ . ۱۰ . ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

بخش ۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره

۱.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایرهٔ محیطی

۱.۱.۲. تعریف و قضیه



در این قسمت، قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع و دایرهٔ محیطی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. می‌دانیم که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر است با $R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$.

۲.۱.۲. زاویه

۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویه

۸۶. ثابت کنید که اگر ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و M نقطه‌ای دلخواه در صفحه، غیر واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن وقت مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش برابر است با MA، MB و MC (قضیهٔ پومپیو*) . اندازهٔ زاویهٔ این مثلث را که روبه‌رو به ضلع با طول برابر با MB است، پیدا کنید، به شرطی که $A\hat{M}C = \alpha$.

۳.۱.۲. ضلع

۱.۳.۱.۲. اندازهٔ ضلع

۸۷. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی $۱۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر است. اندازهٔ ضلع این مثلث را بیابید.

۸۸. هرگاه 3α ، 3β و 3γ اندازه‌های زاویه‌ها و R شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث باشند، ثابت کنید که طول ضلع مثلث مورلی نظیر آن برابر است با $R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

۲.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

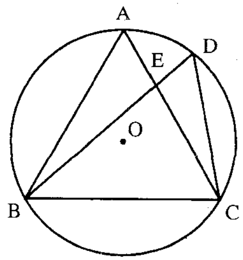
۲.۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۸۹. اندازهٔ ارتفاع مثلثی متساوی‌الاضلاع را بیابید که شعاع دایرهٔ محیطی آن $6\sqrt{3}$ سانتیمتر است.

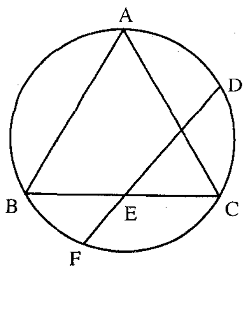
۲.۱.۵. پاره‌خط

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

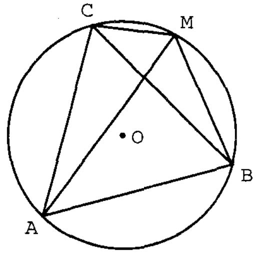
۹۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در دایره‌ای به شعاع R محاط کرده‌ایم. وتر BD، ضلع AC را در نقطهٔ E طوری قطع می‌کند که تناسب $AE : CE = 2 : 3$ برقرار می‌شود. طول CD را پیدا کنید.



۹۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در دایره‌ای به شعاع R، محاط است. وسط کمان $\overset{\frown}{AC}$ (کوچکتر از نیمدایره) را D و وسط ضلع BC را E می‌نامیم و خط راست DE را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ دیگری مانند F قطع کند. مطلوب است محاسبهٔ طول قطعه خطهای DE و EF بر حسب R.



۹۲. ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ O و M نقطه‌ای از قوس BC است. خطهای AM ، BM و CM را رسم می‌کنیم، در این صورت $\overline{AM}$:



الف) برابر است با $\overline{BM}+\overline{CM}$

ب) کوچکتر است از $\overline{BM}+\overline{CM}$

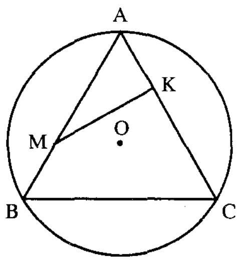
ج) بزرگتر است از $\overline{BM}+\overline{CM}$

د) بسته به موضع M مساوی، کوچکتر از یا بزرگتر از $\overline{BM}+\overline{CM}$ است.

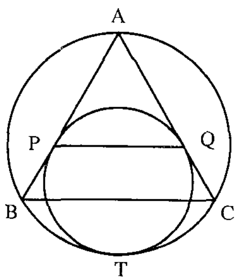
هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۹۳. روی ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نقطه‌های M و K را طوری انتخاب کرده‌ایم که $AM:MB=۲:۱$ و $AK:KC=۱:۲$ است. ثابت کنید که پاره‌خط KM با شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث ABC برابر است.



۹۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در یک دایره محاط است. دایرهٔ دیگری با دایرهٔ اوّل در Tمماس داخلی است و بر ضلعهای AB و AC بترتیب در نقطه‌های P و Q مماس است. اگر ضلع BC به طول ۱۲ باشد، طول پاره‌خط PQ برابر است با :

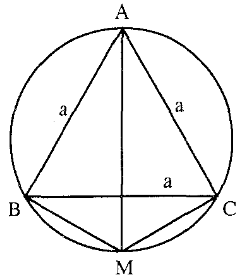


الف) ۶ ب) $۶\sqrt{۳}$ ج) ۸ د) $۸\sqrt{۳}$ هـ) ۹

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۲.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۹۵. نقطهٔ M را روی کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اختیار می‌کنیم.
ثابت کنید: $MA = MB + MC$.



۲.۱.۶. شعاع دایره

۲.۱.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۹۶. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی را که ارتفاع آن ۱۲ سانتیمتر است، تعیین کنید.

۲.۱.۷. محیط

۲.۱.۷.۱. اندازهٔ محیط

۹۷. اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع $۸\sqrt{۳}$ را تعیین کنید.

۲.۱.۷.۲. نسبت محیطها

۹۸. نسبت محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ارتفاع مساوی شعاع یک دایره، به محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره برابر است با:

الف) ۱ : ۲ ب) ۱ : ۳ ج) $۱ : \sqrt{۳}$ د) $\sqrt{۳} : ۲$ هـ) ۲ : ۳

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲.۱.۸. مساحت

۲.۱.۸.۱ . اندازهٔ مساحت مثلث

۹۹. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع $۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر را تعیین کنید.

۲.۱.۸.۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۰۰. مثلث متساوی‌الاضلاعی را در نظر بگیرید که هر ضلع آن به اندازهٔ یک باشد. دایرهٔ C را بر سه رأس مثلث، و دایرهٔ C' را بر وسطهای سه ضلع مثلث بگذرانید. مساحت تاج دایره‌ای محصور بین دایره‌های C و C' چه قدر است؟

الف) $\frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{\pi}{۳}$ ج) $\frac{\pi}{۴}$ د) $\frac{\pi}{۶}$ هـ) $\frac{\pi}{۱۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۱۰۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۶ سانتیمتر مفروض است. دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم می‌کنیم؛ همچنین سه نیمدایره به قطر ضلعهای مثلث و در خارج مثلث رسم می‌نماییم. مساحت سطح بین این نیمدایره‌ها و دایرهٔ محیطی مثلث را تعیین کنید.

۱۰۲. مثلث I، متساوی‌الاضلاع به ضلع A ، به محیط P، به مساحت K و شعاع محیطی R (شعاع دایرهٔ محیطی) است. مثلث II، متساوی‌الاضلاع به ضلع a، به محیط p ، به مساحت k و به شعاع محیطی r است. اگر A متفاوت با a باشد، آن‌گاه:

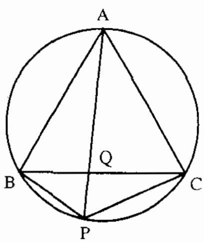
الف) فقط گاهی $P:p = R:r$ ب) همواره $P:p = R:r$

ج) فقط گاهی $P:p = K:k$ د) همواره $R:r = K:k$

هـ) فقط گاهی $R:r = K:k$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۲.۱.۹. رابطه‌های متری



۱۰۳. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. خطی از A می‌گذرد و با ضلع BC در Q و با دایرهٔ محیطی مثلث در P برخورد می‌کند. ثابت کنید که: $\frac{۱}{PQ} = \frac{۱}{PC} + \frac{۱}{PB}$.

۱۰۴. نقطهٔ M روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. ثابت کنید، مقدار $MA^4 + MB^4 + MC^4$ به جای نقطهٔ M بستگی ندارد.

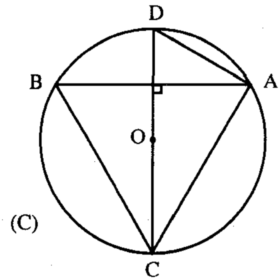
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، ویتنام، ۱۹۷۹

۱۰۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطهٔ P واقع در صفحهٔ آن داده شده است، در صورتی که نقطهٔ P بر کمان $\overset{\frown}{CA}$ از دایرهٔ محیطی مثلث واقع نباشد، ثابت کنید که داریم:

$PC + PA > PB$.

۲.۱.۱۰. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۱۰۶. مثلث ABC محاط در دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده است. عمود منصف ضلع AB دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است. اگر $AD = R$ باشد، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.



۱۰۷. نسبت بین ضلعهای مثلثی را پیدا کنید که برای آن داشته باشیم:

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha} = \frac{P}{9R}$$

که در آن a، b و c ضلعها، α، β و γ زاویه‌های مقابل به آن ضلعها، P محیط و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلثند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۶۸

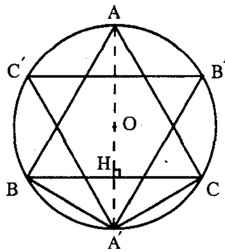
۲.۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم می‌کنیم.

وسط کمانهای $\widehat{BC}$، $\widehat{AC}$ و $\widehat{AB}$ را بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید:

۱. مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. ضلعهای مثلث $A'B'C'$ بر ارتفاعهای مثلث ABC عمودند.



۱۰۹. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. وسطهای ضلعهای BC، CA و AB را بترتیب A_1، B_1 و C_1 می‌نامیم. سه خط موازی و متمایز p، q و r از A_1، B_1 و C_1 رسم شده‌اند. خط p، B_1C_1 را در نقطهٔ A_2، خط q، C_1A_1 را در نقطهٔ B_2، و خط r، A_1B_1 را در نقطهٔ C_2 قطع کرده است. ثابت کنید سه خط AA_2، BB_2 و CC_2 روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC همرسند.

المپیادهای ریاضی تایوان، ۱۹۹۵

۲.۱.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۱۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a داده شده است. بر دایرهٔ محیطی آن، نقطهٔ دلخواه M را روی قوس BC فرض می‌کنیم. اگر A'، B' و C' بترتیب تصویرهای M روی ضلعهای BC، AC و AB باشند و h ارتفاع مثلث فرض شود:

الف. ثابت کنید:

۱) $MA = MB + MC$

۲) $MB' + MC' - MA' = h$

۳) $MA.MB + MB.MC + MC.MA = a^2$

۴) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

۵) $MA^2.MB^2 + MB^2.MC^2 + MC^2.MA^2 = a^4$

۶) $\frac{1}{MA'} + \frac{1}{MB'} = \frac{1}{MC'}$

۷) $MA'^{2} + MB'^{2} + MC'^{2} = h^{2}$

۸) $MA'^{2}.MB'^{2} + MB'^{2}.MC'^{2} + MC'^{2}.MA'^{2} = 2MA'.MB'.MC'.h$

ب. اگر MA ضلع BC را در نقطهٔ F قطع کند، ثابت کنید :

۱) $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MF}$ ۲) $\frac{MF.MA}{MA'} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

پ. اگر M روی قوس BC حرکت کند، مطلوب است تعیین مکان هندسی O' و O''، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای MFB و MFC.

ت. ثابت کنید، نقطه‌های A'، B' و C' بر یک خط راست واقعند (خط سیمسون).

ث. اگر امتداد MB، امتداد AC را در نقطهٔ H قطع کند و امتداد MC، امتداد AB را در K تلاقی نماید، ثابت کنید، BK.CH مقداری ثابت است که آن را تعیین می‌کنید و به علاوه $KH^{2} = KB.KA + HC.HA$.

ج. نقطهٔ M را به قسمی تعیین کنید که MF.MA ماکزیمم باشد و در این حال ضلعها و شعاع دایرهٔ محیطی چهار ضلعی ABMC را حساب کنید.

۱۱۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۶ سانتیمتر داده شده است. از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث عمود OI را بر شعاع OA اخراج کرده، فرض می‌کنیم $OI = x$ باشد.

۱. x را حساب کنید در صورتی که $AI = 6cm$ باشد.

۲. عمودمنصف AI ، خط OI را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اندازهٔ OE همچنین نسبت $\frac{OE}{OI}$ را تعیین کنید.

۳. مقدار x را در صورتی که $B\hat{A}I = 90°$ باشد، تعیین کنید و در این حالت، مساحت چهارضلعی محدب ABCI را حساب کنید.

۲.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های محاطی

۱.۲.۲. تعریف و قضیه

مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع بر مرکز دایرهٔ محیطی آن منطبق است.

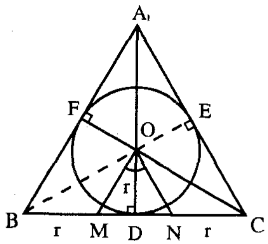
شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$، و اندازهٔ هر یک از شعاعهای دایره‌های محاطی برونی این مثلث برابر است با :

$$r_a = r_b = r_c = \frac{s}{p-a} = \frac{a^۲\sqrt{۳}/۴}{\frac{۳a}{۲}-a} = \frac{a^۲\sqrt{۳}/۴}{\frac{a}{۲}} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

یعنی در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی، نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث است و اندازهٔ شعاع هر دایرهٔ محاطی برونی، برابر ارتفاع مثلث می‌باشد.

۲.۲.۲. زاویه

۱.۲.۲.۲. اندازهٔ زاویه



۱۱۲. نقطه‌های M و N را روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC چنان اختیار می‌کنیم که BM = NC = r باشد. (r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث است.) نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث را به دو نقطهٔ M و N وصل می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{O}N$ را بیابید.

۳.۲.۲. ضلع

۱.۳.۲.۲. اندازهٔ ضلع

۱۱۳. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $۴\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ ضلع این مثلث را تعیین کنید.

۱۱۴. شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $۹\sqrt{۳}$ cm است. اندازهٔ ضلع این مثلث را تعیین کنید.

۲ . ۲ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۲ . ۲ . ۴ . ۱. اندازهٔ ارتفاع

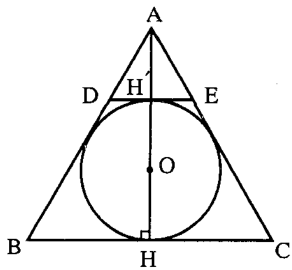
۱۱۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاعی $۵\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ ارتفاع این مثلث را بیابید.

۱۱۶. اندازهٔ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی آن، برابر ۱۸cm باشد.

۲ . ۲ . ۵. پاره‌خط

۲ . ۲ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۱۷. خطی که به موازات ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر دایرهٔ محاطی درونی مثلث رسم می‌شود، ضلعهای AB و AC را از D و E قطع می‌کند. طول پاره‌خط DE را بیابید.



۲ . ۲ . ۶. شعاع دایره

۲ . ۲ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع

۱۱۸. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی مثلث متساوی‌الاضلاعی را که اندازهٔ ارتفاع آن $۶\sqrt{۳}$ است، تعیین کنید.

۲.۲.۷. محیط

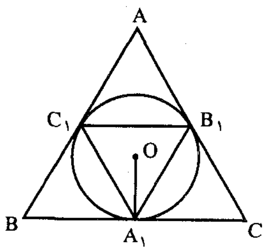
۲.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط

۱۱۹. مساحت دایرهٔ محاط در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ۴۸π است. محیط این مثلث برابر است با :

الف) $۷۲\sqrt{۳}$ ب) $۴۸\sqrt{۳}$ ج) ۳۶ د) ۲۴ هـ) ۷۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۲.۲.۷.۲. نسبت محیطها



۱۲۰. دایره‌ای در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط کرده‌ایم. مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ را نیز در این دایره محاط می‌نماییم. ثابت کنید، محیط مثلث ABC، از دو برابر محیط مثلث $A_1B_1C_1$ کوچکتر نیست.

۲.۲.۸. مساحت

۲.۲.۸.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۲۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلثی متساوی‌الاضلاع، $r = ۱۲\text{cm}$ است. اندازهٔ مساحت این مثلث را تعیین کنید.

۱۲۲. شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $۴\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ مساحت این مثلث را تعیین کنید.

۲.۲.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۲۳. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی S است. دایره‌ای را دراین مثلث و مربعی را در آن دایره محاط می‌کنیم، مساحت مربع برابر است با :

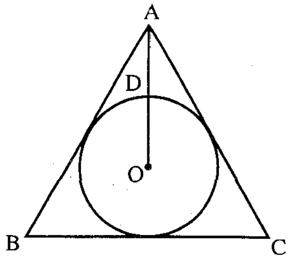
الف) $\frac{S^۲}{۲۴}$ ب) $\frac{S^۲}{۶}$ ج) $\frac{S^۲\sqrt{۲}}{۶}$ د) $\frac{S^۲\sqrt{۳}}{۶}$ هـ) $\frac{S^۲}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۱۲۴. در مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. سپس در این مثلث سه دایرهٔ محاط کرده‌ایم. به طوری که هر یک از آنها بر دایرهٔ اوّل و دو ضلع مثلث مماس باشند. سپس باز هم سه دایره که هر یک از آنها بر یکی از دایرهٔ دوم و دو ضلع مثلث مماس باشند، رسم کرده‌ایم و این عمل را مرتباً تکرار کرده‌ایم. مطلوب است مساحت همهٔ دایره‌های محاطی که بدین ترتیب به دست می‌آید (یعنی حد مجموع مساحتهای دایره‌های محاطی).

۹.۲.۲. رابطه‌های متری

۱۲۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، محیط بر دایرهٔ به مرکز O داده شده است. پاره‌خط AO دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید: $AD.AO = \frac{a^۲}{۶}$.



۱۰.۲.۲. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۱۲۶. ثابت کنید مثلثی که در آن رابطهٔ $h_a + h_b - h_c = ۹r$ برقرار است، متساوی‌الاضلاع است.

۱۲۷. از بین همهٔ مثلثهای با محیط برابر آن را پیدا کنید که در آن، شعاع دایرهٔ محاطی، حداکثر مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران بلژیک، ۱۹۸۲

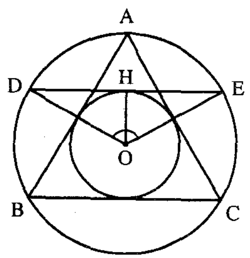
۲.۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های محیطی و محاطی

۱.۳.۲. تعریف و قضیه

در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر $R=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ و اندازهٔ شعاع هر یک از دایره‌های محاطی برونی برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. در این قسمت مسأله‌های مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های محاطی و محیطی آن را بررسی می‌کنیم.

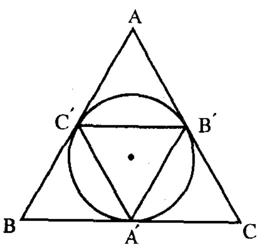
۲.۳.۲. زاویه

۱.۲.۳.۲. اندازهٔ زاویه



۱۲۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و دایره‌های محاطی درونی و محیطی آن را در نظر می‌گیریم. خط مماس بر دایرهٔ محاطی درونی مثلث، دایرهٔ محیطی را در دو نقطهٔ D و E قطع می‌کند. اگر O مرکز مشترک این دو دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ DOE را بیابید.

۳.۳.۲. ضلع



۱.۳.۳.۲. اندازهٔ ضلع

۱۲۹. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی الاضلاع محیط بر دایره‌ای به شعاع $۴\sqrt{۳}$ را بیابید. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره چه قدر است؟

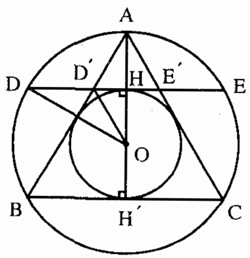
۴.۳.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۲. اندازهٔ ارتفاع

۱۳۰. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، $R=12cm$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن $r=6cm$ است. اندازهٔ یکی از ارتفاعهای مثلث را به‌دست آورید.

۵.۳.۲. پاره‌خط

۱.۵.۳.۲. اندازهٔ پاره‌خط



۱۳۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، به ضلع a، و دایره‌های محیطی و محاطی درونی این مثلث را درنظر می‌گیریم. خط مماس بر دایرهٔ محاطی مثلث که موازی ضلع BC است، ضلع AB را در نقطهٔ D' و دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط DD' را برحسب a بیابید.

۶.۳.۲. شعاع دایره

۱.۶.۳.۲. اندازهٔ شعاع

۱۳۲. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی و شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $5\sqrt{3}$ cm را تعیین کنید.

۷.۳.۲. محیط

۱.۷.۳.۲. اندازهٔ محیط

۱۳۳. اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع $8\sqrt{3}$ و اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر این دایره را بیابید.

۲.۳.۷.۲. نسبت محیطها

۱۳۴. اندازهٔ محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر یک دایره، چند برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در همان دایره است؟

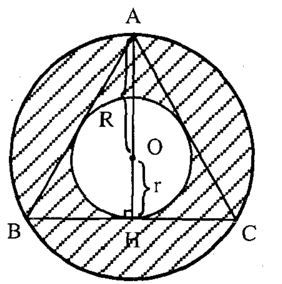
۲.۳.۸. مساحت

۲.۳.۸.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۳۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلثی متساوی‌الاضلاع $۱۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی و مساحت این مثلث را به‌دست آورید.

۲.۳.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۳۶. طوق، ناحیه‌ای است محصور بین دو دایرهٔ هم‌مرکز. مساحت طوق محصور بین دایره‌های محیطی و محاطی مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ را بیابید.



۱۳۷. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a و دایره‌های محیطی و محاطی آن داده شده است. اندازهٔ مساحت سطح محصور بین این دو دایره را برحسب a تعیین کنید.

۲.۳.۸.۳. نسبت مساحتها

۱۳۸. مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر یک دایره چند برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن دایره است؟

۴.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های دیگر

۱.۴.۲. تعریف و قضیه

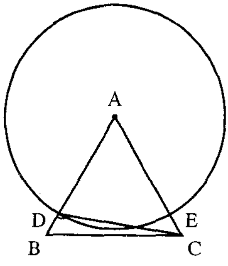
در این قسمت مسأله‌های مربوط به مثلث و دایره‌هایی غیر از دایره‌های محیطی و محاطی مثلث مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نکته. در برخی از مسأله‌ها، علاوه بر دایره‌های غیرمحیطی و غیرمحاطی، دایره‌های محیطی و یا محاطی مثلث نیز دخالت دارند. این‌گونه مسأله‌ها نیز در این قسمت آمده‌اند.

۲.۴.۲. زاویه

۱.۲.۴.۲. اندازهٔ زاویه

۱۳۹. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ سانتیمتر داده شده است. به مرکز A و به شعاع ۳ سانتیمتر دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در نقطه‌های D و E قطع کند. اندازهٔ زاویهٔ BDC را بیابید.

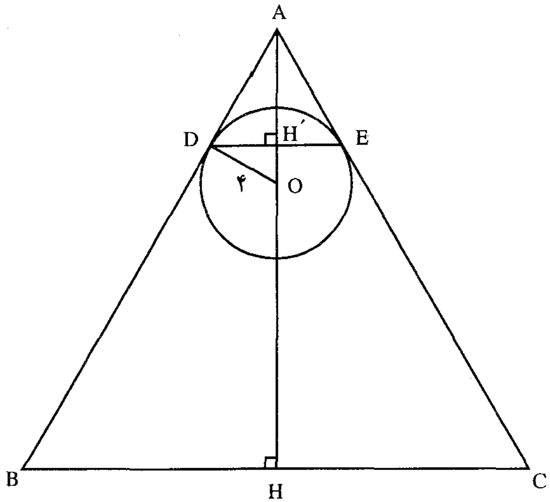


۳.۴.۲. ضلع

۱.۳.۴.۲. اندازهٔ ضلع

۱۴۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نقطه‌های D و E بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۴

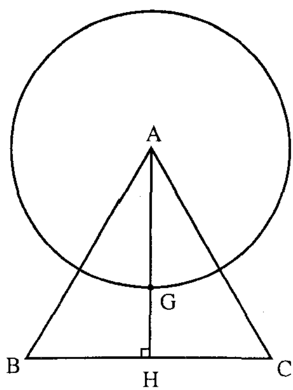
مماس است. اگر ارتفاع AH' از مثلث ADE یک چهارم ارتفاع AH از مثلث ABC باشد، اندازهٔ ضلع مثلث ABC را بیابید.



۲.۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۲.۴.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۴۱. دایره‌ای به مرکز رأس A از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و به شعاع $۲\sqrt{۳}$ از مرکز ثقل این مثلث می‌گذرد. اندازهٔ ارتفاع این مثلث را بیابید.



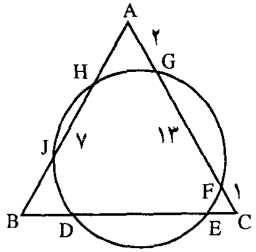
۲.۴.۵. پاره‌خط

۲.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۴۲. در شکل مقابل دایره‌ای، ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در شش نقطه قطع کرده است. اگر ۲ = AG ، ۱۳ = GF ، ۱ = FC ، ۷ = HJ ، آن‌گاه طول DE برابر است با :

الف) $۲\sqrt{۲۲}$ ب) $۷\sqrt{۳}$ ج) ۹

د) ۱۰ هـ) ۱۳



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

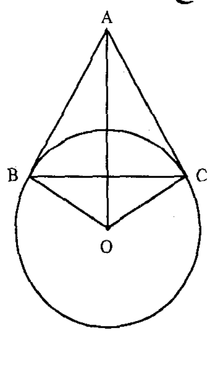
۲.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۴۳. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. به قطر AC در بیرون مثلث نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. از رأس B دو خط چنان رسم می‌کنیم که این نیمدایره را به سه کمان برابر با هم بخش کنند. ثابت کنید که این دو خط، پاره‌خط AC را نیز به سه پارهٔ برابر با هم، بخش می‌کنند.

۲.۴.۶. شعاع

۲.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۱۴۴. دایره‌ای در دو نقطهٔ B و C بر ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a مماس است. اندازهٔ شعاع این دایره را برحسب a تعیین کنید.



۲.۴.۶.۲. رابطهٔ بین شعاعها

۱۴۵. در درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱، دو دایره، مماس بر یکدیگر رسم شده‌اند. هر یک از دایره‌ها، بر دو ضلع مثلث مماس است (هر ضلع مثلث دست‌کم بر یکی از دایره‌ها مماس است). ثابت کنید که مجموع شعاعهای این دایره‌ها از $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$ کمتر نیست.

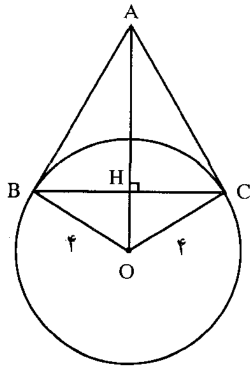
۱۴۶. نقطه‌های C_1 ، B_1 و A_1 را بترتیب روی ضلعهای AB، AC و BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، که ضلعی به طول ۲ دارد، انتخاب کرده‌ایم. بیشترین مقدار مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای AB_1C_1 ، A_1BC_1 و A_1B_1C چه‌قدر می‌تواند باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۲.۴.۷. محیط

۲.۴.۷.۱. اندازهٔ محیط مثلث

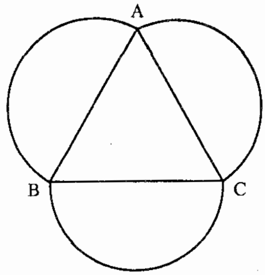
۱۴۷. دایره‌ای به شعاع ۴ سانتیمتر، در نقطه‌های B و C، بر ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مماس است. اندازهٔ محیط این مثلث را تعیین کنید.

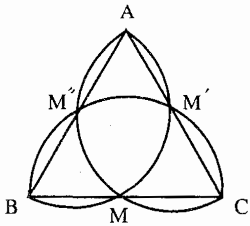


۲.۴.۷.۲. اندازهٔ محیط شکلهای دیگر

۱۴۸. در خارج مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a، به قطر هر یک از ضلعها، نیمدایره‌ای رسم

می‌کنیم. محیط شکل سه برگی حاصل را به‌دست آورید.

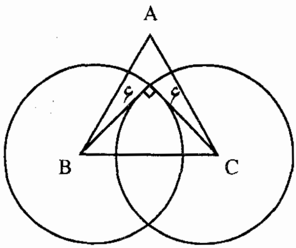




۱۴۹. در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، به قطر هر یک از ضلعها، نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. محیط شکل سه برگی حاصل را به‌دست آورید.

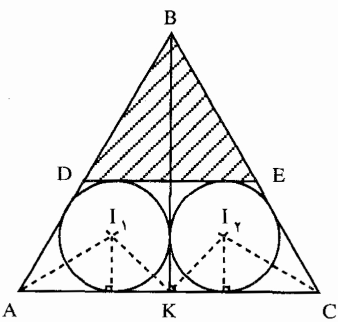
۲.۴.۸. مساحت

۲.۴.۸.۱. اندازهٔ مساحت مثلث



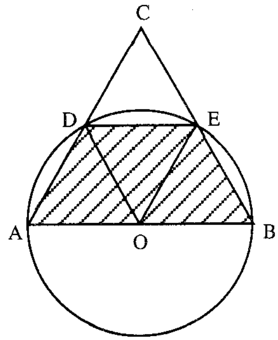
۱۵۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. دو دایرهٔ مساوی هریک به شعاع ۶ سانتیمتر و به مرکزهای B و C برهم عمودند. اندازهٔ مساحت مثلث ABC را بیابید.

۲.۴.۸.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۱۵۱. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که ضلعش برابر a است، ارتفاع BK رسم شده است. در هر یک از مثلثهای ABK و BCK، دایره‌ای محاط و یک مماس مشترک خارجی، به غیر از ضلع AC، بر آنها رسم می‌شود. مساحت مثلثی را که این مماس از مثلث ABC جدا می‌کنند، پیدا کنید.

۱۵۲. در این شکل ΔABC متساوی‌الاضلاع است. AB قطر دایره است و دو ضلع دیگر مثلث، دایره را در دو نقطهٔ D و E قطع می‌کنند. اگر قطر دایره ۱۶ باشد، مساحت چهارضلعی محاطی $\square ABED$ را بیابید.

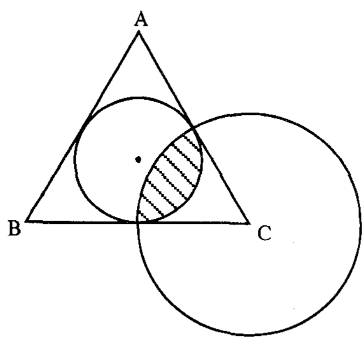


۱۵۳. مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a فرض شده است. به مرکز O (مرکز مثلث) و به شعاع $\frac{a}{3}$ دایره‌ای رسم کرده‌ایم. مطلوب است، مساحت قسمتی از مثلث که در خارج دایره قرار گرفته است.

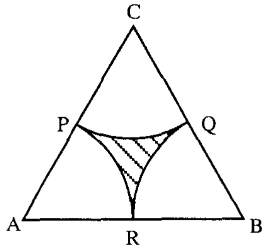
۱۵۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، سه دایرهٔ مساوی که دو به دو برهم مماسند، محاط کرده‌ایم. هر یک از این دایره‌ها، بر دو ضلع مثلث مماس است. مطلوب است شعاع این دایره‌ها و سطح مثلث منحنی‌الخطی که ضلعهای آن قوسهایی از این دایره‌ها و رأسهای آن، نقطه‌های تماس دایره‌ها با یکدیگر باشد.

۱۵۵. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر a است. روی یک ضلع آن به‌عنوان قطر، دایره‌ای را رسم می‌کنیم. قسمتی از مساحت مثلث را که در خارج دایره قرار دارد، محاسبه کنید.

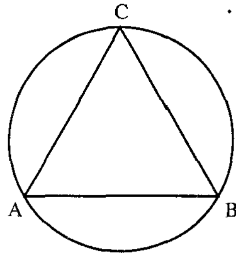
۱۵۶. دایره‌ای در مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. دایره‌ای دیگر رسم می‌کنیم. مرکز این دایره بر یکی از رأسهای مثلث واقع بوده و شعاع آن نصف ضلع مثلث است. مساحت مقطع این دو شکل، چه قسمتی از مساحت مثلث محسوب می‌شود؟



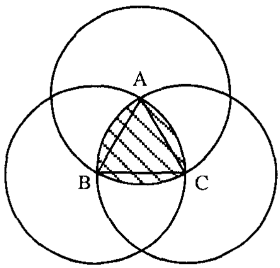
۱۵۷. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ΔABC برابر با ۶ است. P، Q و R وسطهای ضلعهای مثلثند. رأسهای مثلث مرکزهای کمانهای $\overset{\frown}{PQ}$، $\overset{\frown}{PR}$ و $\overset{\frown}{QR}$ هستند. مساحت و محیط ناحیهٔ سایه زدهٔ PQR را بیابید.



۱۵۸. مساحت قوس مثلث متساوی‌الاضلاع ACB را تعیین کنید، درصورتی که شعاع هر قوسش برابر ۶ سانتیمتر باشد.

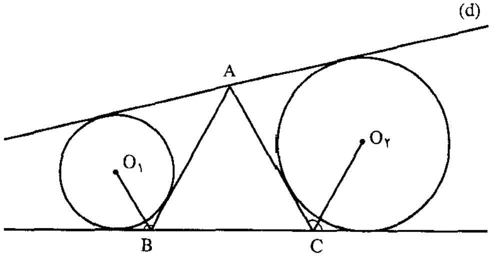


۱۵۹. هریک از سه رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع را مرکز قرار می‌دهیم و به شعاع ضلع مثلث، دایره‌ای رسم می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ سطح مشترک مابین هر سه دایرهٔ رسم شده.



۹.۴.۲. رابطه‌های متری

۱۶۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است:



از نقطهٔ A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشند که مطابق شکل، بترتیب بر AB ، BC و (d) و همچنین بر AC ، BC و

(d) مماسند، آن‌گاه ثابت کنید که O_1B+O_2C مقداری ثابت است.

مرحلهٔ اوّل دهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۱

۲.۴.۱۰. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۱۶۱. ثابت کنید، اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلثی، برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد، این مثلث، متساوی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۸۲

۱۶۲. میانه‌های مثلث ABC، آن را به شش مثلث تقسیم می‌کنند. معلوم شد، از بین دایره‌های محاطی این مثلثها، چهار دایره با هم برابرند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۲.۴.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. در آغاز قرن نوزدهم، مالفاتی، هندسه‌دان ایتالیایی، این مسأله را پیشنهاد کرد : از مثلثی مفروض، سه دایره طوری جدا کنید که مجموع مساحتهای آنها بیشترین مقدار باشد. در تحقیقات بعدی، دایره‌های مالفاتی، سه دایرهٔ دو به دو بر هم مماس و نیز هر یک مماس بر دو ضلع از مثلث مفروض، درنظر گرفته شدند. ثابت کنید که برای مثلث متساوی‌الاضلاع، دایره‌های مالفاتی هیچ جوابی از مسألهٔ اصلی به‌دست نمی‌دهند. (تنها در میانهٔ این قرن بود که ثابت شد، برای هر مثلث، دایره‌های مالفاتی هیچ جوابی برای مسألهٔ اوّلیه به‌دست نمی‌دهند.)

۱۶۴. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطهٔ دلخواه D مفروضند. فرض کنید A_1، B_1 و C_1 بترتیب، معرف مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای BCD، CAD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از رأسهای A، B و C بترتیب بر B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 در یک نقطه متقاطعند.

۱۶۵. سه نقطه در صفحه‌ای داده شده‌اند. از این نقطه‌ها، سه خط که مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، رسم شده است. مکان هندسی مرکز این مثلثها را بیابید.

۱۶۶. روی ضلعهای AB، BC و CA از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، بترتیب نقطه‌های C_1، A_1 و B_1 را اختیار کرده‌ایم به قسمی که شعاعهای دایره‌های محاطی درونی

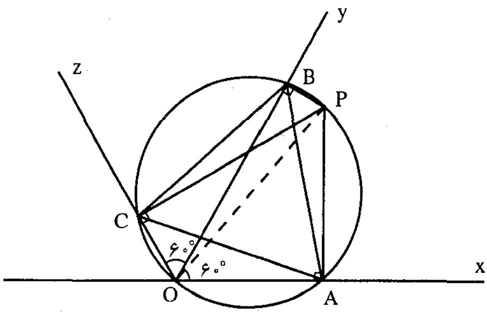
مثلثهای C_1AB_1 ، B_1CA_1 ، A_1BC_1 و $A_1B_1C_1$ مساوی است. ثابت کنید، نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 وسطهای ضلعهای نظیر هستند.

المپیادهای ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵

۱۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۶۷. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a داده شده و BD ارتفاع مثلث است. مثلث متساوی‌الاضلاع دومی، BDC_1 ، روی BD، و مثلث متساوی‌الاضلاع سومی، BD_1C_2 ، بر ارتفاع BD_1 از مثلث دوم رسم می‌شود. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث CC_1C_2 را پیدا کنید. ثابت کنید، مرکز این دایره بر یکی از ضلعهای مثلث ABC قرار دارد (C_2 بیرون مثلث ABC است).

۱۶۸. دو زاویهٔ مجاور $x\hat{O}y$ و $y\hat{O}z$ هر یک برابر ۶۰ درجه‌اند. از نقطهٔ P واقع در زاویهٔ $x\hat{O}y$ عمودهای PA، PB و PC را بترتیب بر Ox، Oy و Oz فرود می‌آوریم. ثابت کنید $PC = PA+PB$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.



۱۶۹. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. نقطهٔ M را روی ضلع AB و در امتداد AB ، نقطهٔ N را طوری تعیین می‌کنیم که دو مثلث ACM و ACN متشابه باشند.

۱. ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث MNC بر AC مماس است و $AM.AN = AC^2$ است.

۲. ثابت کنید : $BM.NC = BN.MC$.

بخش ۳
• رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳. تعریف و قضیه

۲.۳. زاویه

۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۲.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه‌های مثلث

۲.۲.۳. اندازهٔ زاویهٔ شکلهای ایجاد شده

۳.۳. ضلع

۱.۳.۳. اندازهٔ ضلع

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ قاعده

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ ساق

۲.۳.۳. رابطهٔ بین ضلعها

۴.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

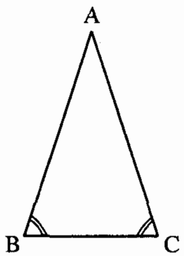
۲.۴.۳. اندازهٔ میانه

۳.۴.۳. اندازهٔ نیمساز

۴.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳. تعریف و قضیه



می‌دانیم شرط لازم و کافی برای آن‌که مثلثی متساوی‌الساقین باشد، آن است که دو زاویهٔ مجاور به یک ضلع آن برابر باشند، یعنی در مثلث ABC : $AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$.

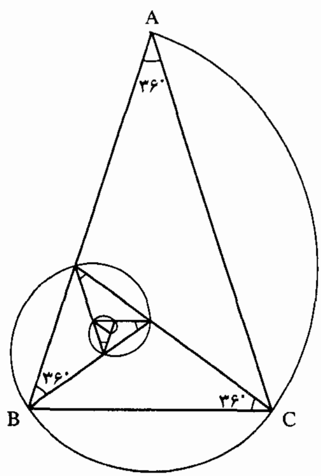
ضلع BC را قاعده و هر یک از دو ضلع AB و AC را یک ساق مثلث متساوی‌الساقین، و A را رأس یا تارک می‌نامند.

در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، عمودمنصف قاعده، و نیمساز زاویهٔ رأس است و بعکس. در این بخش رابطه‌های متری مربوط به مثلث متساوی‌الساقین را بررسی می‌کنیم.

مثلث طلایی

مثلث متساوی‌الساقینی که اندازهٔ زاویهٔ رأسش 36° (درنتیجه هر زاویهٔ مجاور به قاعده 72°) است، مثلث طلایی نامیده می‌شود. زیرا نسبت اندازهٔ ساق به قاعدهٔ مثلث برابر عدد طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است. اگر نیمساز یک زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ این مثلث متساوی‌الساقین را رسم کنیم، دو مثلث متساوی‌الساقین به‌وجود می‌آید، که یکی از آنها با مثلث اصلی متشابه است و از مثلث دیگر برای رسم مارپیچ همزاویه استفاده می‌شود.

با رسم نیمساز زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مثلث طلایی جدید، و ادامه دادن این کار، چندین مثلث طلایی جدید ساخته می‌شود که از آنها برای رسم مارپیچ همزاویه می‌توان استفاده نمود.



۲.۳. زاویه

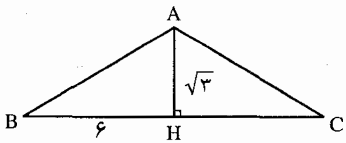
۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۱۷۰. در مثلث متساوی‌الساقینی، میانهٔ وارد بر ضلع جانبی مثلث، با قاعده، زاویهٔ $\text{Arc}\sin\frac{۳}{۵}$ می‌سازد. زاویهٔ تارک مثلث را پیدا کنید.

۱۷۱. از بین همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین، که در آنها، طول میانه‌های وارد بر ضلع جانبی مقدار ثابتی است، مثلثی را بیابید که دارای بیشترین مساحت باشد. اندازهٔ زاویهٔ مقابل به قاعدهٔ چنین مثلثی چه‌قدر خواهد بود؟

۲.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه‌های مثلث



۱۷۲. اندازهٔ قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، (AB=AC)، برابر ۶ سانتیمتر و طول ارتفاع وارد بر این قاعده $AH = \sqrt{۳}$ است. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را تعیین کنید.

۱۷۳. ارتفاع وارد بر ساق مثلث متساوی‌الساقینی، ساق را به نسبت m:n تقسیم کرده است، مطلوب است اندازهٔ زاویه‌های مثلث.

۱۷۴. در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازهای زاویهٔ منفرجه و زاویهٔ حاده را رسم کرده‌ایم. طول نیمساز زاویهٔ رأس، نصف طول نیمساز زاویهٔ مجاور قاعده شده است. مقدار زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۲.۲.۳. اندازهٔ زاویهٔ شکلهای ایجاد شده

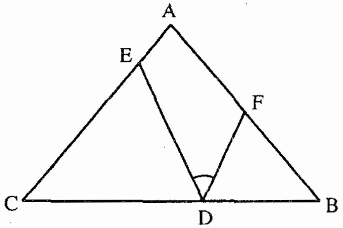
۱۷۵. زاویهٔ مجاور قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین برابر $\text{Arc}\tan\frac{۳}{۴}$ است. زاویهٔ بین میانه و نیمساز رسم شده بر ضلع جانبی مثلث را بیابید.

۱۷۶. زاویهٔ رأس، در مثلث متساوی‌الساقین ABC، برابر ۱۰۰ درجه است. روی نیم‌خط راست AB، پاره‌خط راست AM را برابر قاعدهٔ BC جدا کرده‌ایم. اندازهٔ زاویهٔ BCM را پیدا کنید.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۱۷۷. در مثلث ABC، $AB = BC$ و $\hat{B} = ۲۰^\circ$. نقطهٔ M روی AB، به‌طوری که $M\hat{C}A = ۶۰^\circ$ و نقطهٔ N برضلع CB، به‌طوری که $N\hat{A}C = ۵۰^\circ$، اختیار می‌شود. $N\hat{M}C$ را پیدا کنید.

۱۷۸. نقطه‌های D و E را بترتیب روی ضلعهای BC و AC از مثلث ABC، طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $B\hat{A}D = ۵۰^\circ$ و $A\hat{B}E = ۳۰^\circ$. به‌شرطی که هر یک از دو زاویهٔ ABC و ACB برابر ۵۰ درجه باشند، مقدار زاویهٔ BED را پیدا کنید.
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۰

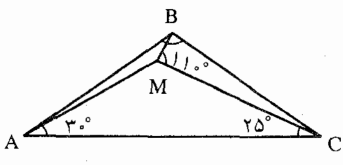
۱۷۹. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\hat{A} = ۸۰^\circ$. نقطه‌های D، E و F بترتیب بر ضلعهای BC، AC و AB واقعند، به‌گونه‌ای که $CE = CD$ و $BF = BD$. اندازهٔ زاویهٔ EDF برابر است با:



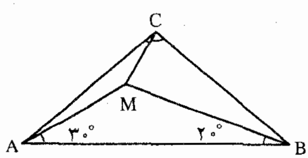
الف) ۳۰° ب) ۴۰° ج) ۵۰°
د) ۶۵° هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

۱۸۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AC = BC$، BD نیمساز و BDEF مستطیل است. اگر $B\hat{A}E = ۱۲۰^\circ$، $B\hat{A}F$ را پیدا کنید.



۱۸۱. زاویهٔ B از مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۱۱۰° است. در داخل مثلث نقطهٔ M را طوری انتخاب می‌کنیم که $M\hat{A}C = ۳۰^\circ$ و $M\hat{C}A = ۲۵^\circ$ باشد. زاویهٔ BMC را محاسبه کنید.



۱۸۲. اندازهٔ زاویهٔ C که تارک مثلث متساوی‌الساقین ABC است، برابر ۱۰۰° است. دو نیمخط رسم می‌کنیم: یکی به مبدأ A که با AB زاویهٔ ۳۰° می‌سازد، و دیگری به مبدأ B، که با BA زاویهٔ ۲۰° می‌سازد. این دو نیمخط، همدیگر را در M قطع می‌کنند. زاویه‌های ACM و BCM را پیدا کنید.

۳.۳. ضلع

۱.۳.۳. اندازهٔ ضلع

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ قاعده

۱۸۳. طول ضلع جانبی مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۴cm و طول میانهٔ وارد بر این ضلع برابر ۳cm است. طول قاعدهٔ مثلث را پیدا کنید.

۱۸۴. مساحت مثلث متساوی‌الساقینی برابر S و زاویهٔ بین میانه‌های وارد بر ساقهای آن برابر α است. طول قاعدهٔ مثلث را محاسبه کنید.

۱۸۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB=BC)، نیمساز AD را رسم می‌کنیم. اگر $S_{\Delta ABD} = S_1$ و $S_{\Delta ACD} = S_2$ باشد، AC را پیدا کنید.

۱۸۶. ثابت کنید در بین مثلثهایی که در آن‌ها زاویه‌های مقابل به قاعده‌ها مساوی بوده و مجموع ضلعهای جانبی آنها مقدار ثابتی است، مثلثی دارای کوتاهترین قاعده است، که متساوی‌الساقین باشد.

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ ساق

۱۸۷. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر $4\sqrt{2}$cm و طول میانهٔ وارد بر ضلع جانبی آن برابر ۵cm است. طول این ضلع را پیدا کنید.

۱۸۸. در مثلث متساوی‌الساقینی، اندازهٔ زاویهٔ تارک برابر 36° و طول قاعدهٔ آن برابر a است. طول ضلعهای جانبی مثلث را پیدا کنید.

۱۸۹. مجموع دو ارتفاع نامساوی از یک مثلث متساوی‌الساقین برابر l و اندازهٔ زاویهٔ تارک آن برابر a است. طول ضلع جانبی مثلث را بیابید.

۲.۳.۳. رابطهٔ بین ضلعها

۱۹۰. مثلث متساوی‌الساقین، با زاویهٔ رأس ۲۰ درجه داده شده است. ثابت کنید:

الف. طول ساق از دو برابر طول قاعده بیشتر است.

ب. طول ساق از سه برابر طول قاعده کوچکتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

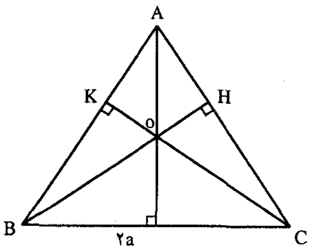
۴.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

۱۹۱. اندازهٔ ارتفاع رأس مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که اندازهٔ قاعده‌اش برابر ۱۴ سانتیمتر و اندازهٔ محیطش ۵۰ سانتیمتر است.

۱۹۲. در مثلث متساوی‌الساقین طول قاعده مساوی ۳ سانتیمتر و طول ارتفاع وارد بر قاعده مساوی ۲ سانتیمتر است. مطلوب است طول ارتفاع وارد بر ساق.

۱۹۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC)، ارتفاعهای BH و CK یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند، و می‌دانیم که $BO = ۳OH$. مطلوب است محاسبهٔ ضلعها و ارتفاعهای مثلث برحسب طول قاعدهٔ مثلث $BC = ۲a$.



۲.۴.۳. اندازهٔ میانه

۱۹۴. ثابت کنید هرگاه در مثلثی قاعده و زاویهٔ رأس ثابت بماند، میانهٔ وارد بر قاعده می‌نیمم است، اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۱۹۵. ثابت کنید اگر در مثلثی قاعده و زاویهٔ رأس حاده و ثابت شد، میانهٔ وارد بر قاعده ماکسیمم است، اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۳.۴.۳. اندازهٔ نیمساز

۱۹۶. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر a و اندازهٔ زاویهٔ تارک آن برابر ۲a است. طول نیمساز زاویه‌ای از آن را که بر ضلع جانبی وارد می‌شود، پیدا کنید.

۱۹۷. ثابت کنید که در بین همهٔ مثلثها که قاعده و زاویهٔ مقابل به قاعده در آنها یکسان است، مثلثی دارای بلندترین نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعده است، که متساوی‌الساقین باشد.

۴.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۸. اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقین برابر a است. نسبت قاعده به میانهٔ وارد بر ضلع جانبی مثلث را بیابید.

۱۹۹. در مثلث ABC، $AB=۱۰$ ، $AC=۱۳$ و $BC=۱۳$ سانتیمتر است. اندازهٔ سه میانه، سه ارتفاع و سه نیمساز زاویه‌های درونی این مثلث را تعیین کنید.

۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۲۰۰. در مثلث ABC، $AB = AC = ۳/۶$ ، نقطهٔ D بر روی AB به فاصلهٔ ۱/۲ از A انتخاب می‌شود. نقطهٔ D، به نقطهٔ E که در امتداد AC است، وصل می‌شود، به‌طوری که مساحت مثلث AED برابر مساحت مثلث ABC است، در این‌صورت AE برابر است با :

الف) ۴/۸ ب) ۵/۴ ج) ۷/۲ د) ۱۰/۸ هـ) ۱۲/۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۲۰۱. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۱۲cm و طول ضلع جانبی آن برابر ۱۸cm است. ارتفاعهای وارد بر ضلعهای جانبی را رسم می‌کنیم. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که پای ارتفاعهای دو سر آن است.

۲۰۲. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۱۲cm و طول ضلع جانبی آن برابر ۱۸cm است. نیمساز زاویه‌هایی از آن را که بر ضلعهای جانبی وارد می‌شوند، رسم می‌کنیم. پای این نیمسازها را به هم وصل می‌کنیم. طول پاره‌خط حاصل از اتصال پای نیمسازها را پیدا کنید.

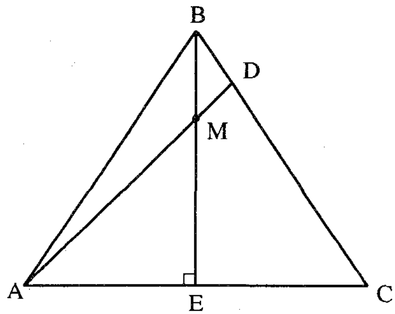
۲۰۳. سه شهر A، B و C در یک ناحیهٔ کاملاً مسطح از یک کشور قرار دارند، و فاصلهٔ آنها از یکدیگر دو به دو عبارتند از : $AB=۲۰۰km$ ، $AC=۲۰۰km$ و $BC=۱۰۰۰km$. مهندسان راه‌سازی وزارت راه می‌خواهند به‌جای راه ۵۰۰ کیلومتری، با جاده‌ای این سه شهر را به هم مربوط سازند، که طولش نیز می‌نیمم باشد. طول این راه چند کیلومتر باید باشد و چگونه؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۲۰۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC داده شده است (AB=AC و BC=۲m). در روی ارتفاع AD نقطهٔ O را اختیار می‌کنیم. فاصلهٔ OD را طوری تعیین کنید که مجموع فاصله‌های نقطهٔ O از رأسهای مثلث، کوچکترین مقدار را داشته باشد.

۲.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۲۰۵. نقطهٔ D روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=BC)، طوری انتخاب شده است که: BD:DC = ۱:۴ است. BM:ME را پیدا کنید به‌طوری که، BE ارتفاع مثلث و M نقطهٔ تلاقی BE و AD باشد.



۲۰۶. نقطهٔ M روی ارتفاع BH از مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=BC) طوری انتخاب شده است که زاویه‌های AMB، BMC و AMC با هم برابرند. اگر زاویهٔ مجاور به قاعده برابر α باشد، نقطهٔ M ارتفاع رسم شده را به چه نسبتی (از طرف تارک) تقسیم می‌کند؟

۳.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

۲۰۷. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زاویهٔ رأس B برابر ۱۰۸ درجه است. نیمساز زاویهٔ ACB، ضلع AB را در D قطع کرده است. عمود بر این نیمساز در نقطهٔ D، قاعدهٔ AC را در نقطهٔ E قطع کرده است. ثابت کنید: $|AE|=|BD|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۶.۳. محیط

۱.۶.۳. اندازهٔ محیط

۲۰۸. در مثلثی، قاعده و مساحت، اندازه‌های ثابت دارند. ثابت کنید که محیط این مثلث وقتی می‌نیمم است که آن مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۷.۳. مساحت

۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت مثلث

۲۰۹. اندازهٔ ضلعهای یک مثلث ۲۵، ۲۵ و ۴۸ است. مساحت آن را بیابید.

۲۱۰. مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که طول هر ساق آن ۱۲cm و اندازهٔ زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن برابر با یکی از مقدارهای زیر باشد.

الف) ۴۵° ب) ۳۰° ج) ۶۰°

۲۱۱. مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را بیابید که طول قاعدهٔ آن ۱۲، و اندازهٔ زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن برابر با یکی از مقدارهای زیر باشد.

الف) ۴۵° ب) ۳۰° ج) ۶۰°

۲۱۲. ارتفاع وارد بر قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین ۸ و محیط آن ۳۲ است. مساحت مثلث برابر است با:

الف) ۵۶ ب) ۴۸ ج) ۴۰ د) ۳۲ هـ) ۲۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۲۱۳. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی $\sqrt{۲}$ است. میانه‌های وارد بر ساقها، بر یکدیگر عمودند. مساحت مثلث برابر است با:

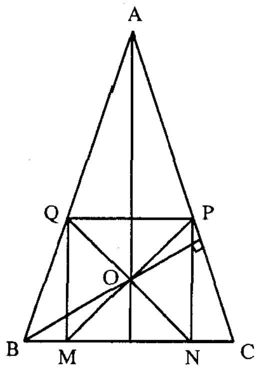
الف) ۱/۵ ب) ۲ ج) ۲/۵ د) ۳/۵ هـ) ۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۲۱۴. اندازهٔ هریک از دو زاویهٔ قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین ۳۰ و طول هر ساق ۱۴ است. طول قاعده و مساحت مثلث را بیابید.

۲۱۵. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آن، مساوی ۱۲، و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن، برابر با پاره‌خطی باشد که وسط قاعده را به وسط یکی از ساقها وصل می‌کند.

۲۱۶. مربعی با مساحت واحد، در مثلث متساوی‌الساقینی محاط شده و یکی از ضلعهای مربع بر قاعدهٔ مثلث واقع است. اگر بدانیم مرکزهای ثقل مثلث و مربع بر هم منطبق است، مساحت مثلث را پیدا کنید.

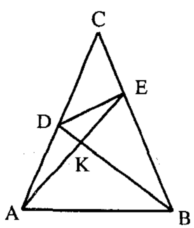


۲۱۷. مثلث متساوی‌الساقینی که طول ساق آن مساوی a است، داده شده است. از رأس بین دو ساق، قطعه خطی چنان رسم کرده‌ایم که زاویهٔ بین دو ساق را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم کرده است. اگر طول این قطعه خط مساوی ۴ باشد، مساحت مثلث را به‌دست آورید.

۲۱۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = BC)$، از E، انتهای نیمساز AE، عمودی بر AE رسم می‌شود تا امتداد ضلع AC را در F قطع کند (C بین A و F قرار دارد). می‌دانیم که $AC = ۲m$ ، $FC = \frac{m}{۴}$. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۲۱۹. ثابت کنید بین مثلثهای به قاعدهٔ ثابت و زاویهٔ رأس ثابت، مثلثی مساحتش ماکسیمم است که متساوی‌الساقین باشد.

۲.۷.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۲۲۰. درشکل، اگر $AC = BC = ۵۲$، $AB = ۴۰$، $BK = ۳۲$، $AK = ۲۴$، $DK = ۴$ و $EK = ۶$؛ $a\Delta CDE$ چه‌قدر است؟

۲۲۱. روی ضلعهای مساوی AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطه‌های D و E را با شرط $DE \parallel AC$ اختیار می‌کنیم. روی خط DE مربعی را طوری رسم می‌کنیم که مربع و نقطهٔ B در دو طرف خط DE قرار بگیرند. اگر $AC=b$ و ارتفاع BH از مثلث ABC برابر h باشد، بزرگترین مقدار ممکن برای مساحت سطح اشتراک مثلث و مربع را بیابید.

۳.۷.۳. نسبت مساحتها

۲۲۲. اندازهٔ هریک از زاویه‌های مجاور به قاعده در مثلث متساوی‌الساقینی برابر α است. از رأس یکی از این زاویه‌ها، خطی را عبور می‌دهیم که با قاعده زاویهٔ β می‌سازد $(\beta < \alpha)$، این خط مثلث را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت مساحتهای این دو قسمت را بیابید.

۴.۷.۳. رابطه‌ای در مساحتها

۲۲۳. ثابت کنید، مساحت هر مثلث متساوی‌الساقین، همیشه کوچکتر است از مساحت مثلثی که همان قاعده را داشته باشد و مجموع دو ضلع دیگرش، با مجموع دو ساق مثلث متساوی‌الساقین، برابر باشد.

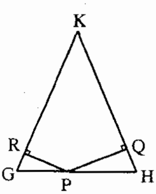
از اشتینر، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۵.۷.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۴. مصری‌ها، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، نصف حاصلضرب قاعدهٔ آن را در یکی از ساقها، به‌دست می‌آورند. درصد اشتباه آنها را، برای حالتی که قاعدهٔ مثلث برابر ۴ و ساق آن برابر ۱۰ باشد، پیدا کنید.

از مسأله‌های مصری، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۸.۳. رابطه‌های متری

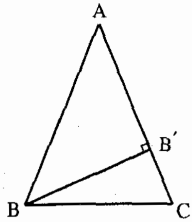


۲۲۵. در ΔGHK، $GK = HK$، $PR \perp GK$ و $PQ \perp HK$. ثابت کنید:

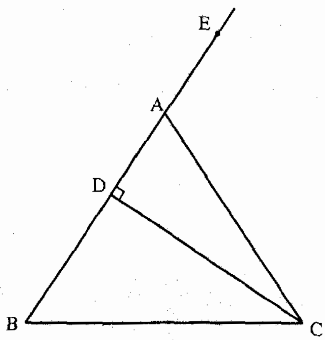
$$GR.PQ = PR.HQ$$

۲۲۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، ارتفاع BB' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مجموع مربعهای سه ضلع مثلث برابر است با :

$$CB'^{2} + 2AB'^{2} + 3BB'^{2}$$

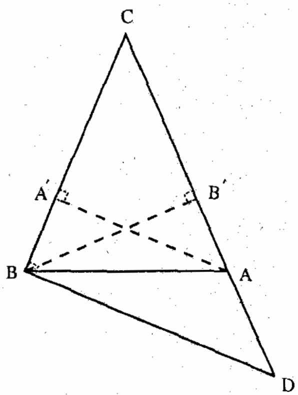


۲۲۷. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ را درنظر گرفته، ارتفاع CD را رسم می‌کنیم و قرینهٔ نقطهٔ D را نسبت به نقطهٔ A، نقطهٔ E می‌نامیم. ثابت کنید : $CD^{2} = \overline{BD}.\overline{BE}$.



۲۲۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(CA = CB)$، دو ارتفاع AA' و BB' را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ B عمودی بر CB اخراج کرده، امتداد می‌دهیم تا AC را در نقطهٔ D قطع کند. ثابت کنید :

$$CA^{2} = CB'.CD$$



۲۲۹. نقطه‌های D، E و F را روی ضلعهای AC، AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(|AB|=|BC|)$ طوری درنظر گرفته‌ایم که پاره‌خطهای راست DE و DF طولی برابر داشته باشند و درضمن، دو زاویهٔ BAC و FDE نیز برابر باشند. ثابت کنید:
$$|AE|+|FC|=|AC|$$
المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۹۳

۲۳۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = BC)$، D وسط AC و E تصویر D روی BC و F وسط DE است. ثابت کنید، خطهای BF و AE دو به دو بر هم عمودند.

۹.۳. ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است

۲۳۱. نقطهٔ P روی ضلع BC از مثلث ABC$(\hat{A}\neq ۹۰^\circ)$ چنان است که اگر نقطه‌های M و N بترتیب پای عمودهای وارد از آن نقطه بر ضلعهای AB و AC باشند، آن‌گاه MN موازی BC بوده و خطهای BN، CM و AP همرس می‌شوند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

چهارمین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، پاییز۱۳۷۲

۲۳۲. فرض می‌کنیم a، b و c طولهای ضلعهای یک مثلث و α، β و γ بترتیب زاویه‌های مقابل به این ضلعها هستند. ثابت کنید که اگر: $a+b=\tan\frac{\gamma}{۲}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$ باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۳۳. ثابت کنید اگر برای عددهای حقیقی a، b و c و برای هر مقدار $n\in\mathbb{N}$ مثلثی به ضلعهای c^n، b^n و a^n وجود داشته باشد، آن‌وقت همهٔ این مثلثها متساوی‌الساقینند.
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، بلژیک،۱۹۷۷

۲۳۴. بین مثلثهایی که یک زاویه و مجموع طولهای دو ضلع آن مقدار ثابتی است، ثابت کنید مثلثی که محیط آن می‌نیمم باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۳۵. ثابت کنید بین مثلثهای محاط در دایرهٔ داده شده، مثلثی که مجموع مربعهای ضلعهایش ماکزیمم باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۳۶. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌های $A_۱$ و $A_۲$، ضلع AC را و نقطه‌های $B_۱$ و $B_۲$، ضلع BC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، اگر دو زاویهٔ $A_۱BA_۲$ و $B_۱AB_۲$ برابر باشند، آن‌وقت مثلث ABC، متساوی‌الساقین است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۸۷

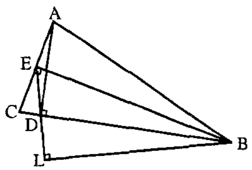
۲۳۷. نقطه‌های D و E را بترتیب روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم : $|BE|+|ED|=|AB|$ و $|BD|+|DE|=|BC|$
همچنین می‌دانیم، چهارضلعی ADEC، یک چهارضلعی محاطی است. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۹۳

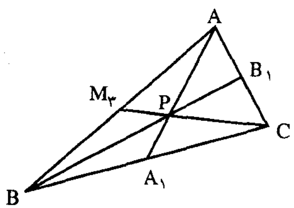
۲۳۸. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC، مربعهای ABDE و BCFG را در بیرون مثلث ساخته‌ایم. معلوم شد، خط راست DG با خط راست AC موازی است. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۸۸

۲۳۹. اگر AD و BE دو ارتفاع مثلث ABC و BL عمودی باشد که از B بر DE فرود می‌آید و داشته باشیم : $LB^2 = LD.LE$، ثابت کنید که مثلث متساوی‌الساقین است.



۲۴۰. روی میانهٔ CM_3 از مثلث ABC، نقطهٔ P داده شده است. خطهای AP و BP که از این نقطه عبور داده شده‌اند، ضلعهای CB و AC را بترتیب در A_1 و B_1 قطع می‌کنند. اگر $AA_1 = BB_1$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید مثلث داده شده، متساوی‌الساقین است.

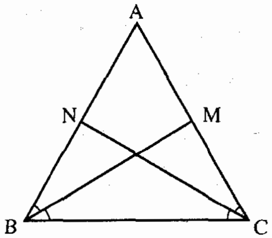


۲۴۱. BM میانهٔ مثلث ABC و K نقطه‌ای واقع بر پاره‌خط راست BM است. می‌دانیم زاویه‌های BAK و BCK، با هم برابرند. ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.
المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۸۴

۲۴۲. ثابت کنید اگر نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث، نیمساز زاویهٔ متشکل از دو نیمساز داخلی دیگر هم باشد، مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۴۳. در مثلث ABC نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C برابرند. ثابت کنید، مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۴۴. در مثلث ABC، $d_b = d_c$ است. ثابت کنید این مثلث متساوی‌الساقین است.



۲۴۵. ثابت کنید هر مثلث که در آن d_a واسطهٔ هندسی بین r_b و r_c باشد، متساوی‌الساقین است.

۲۴۶. مثلثی داده شده است. می‌دانیم که مثلث تشکیل شده با پای نیمسازهای آن، متساوی‌الساقین است. آیا این حکم که مثلث داده شده هم متساوی‌الساقین است، درست است؟

۳.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۴۷. مثلث متساوی‌الساقینی داده شده، که یکی از زاویه‌های آن برابر ۱۰۸ درجه است. ثابت کنید می‌توان آن را به مثلثهایی با زاویه‌های حاده تقسیم کرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

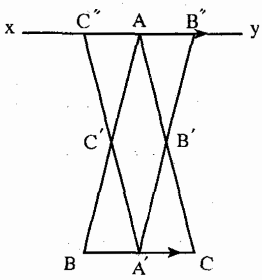
۲۴۸. از نقطهٔ M وسط قاعدهٔ AC در مثلث متساوی‌الساقین ABC، عمود MH را بر ضلع BC فرود آورده‌ایم. P را وسط پاره‌خط راست MH می‌گیریم. ثابت کنید: $AH \perp BP$.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۲

۲۴۹. شش نقطه را روی صفحه طوری درنظر بگیرید که هر سه نقطه از آنها، رأسهای یک مثلث متساوی‌الساقین باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۲۵۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطه‌های A'، B' و C' بترتیب وسط ضلعهای BC، AC و AB می‌باشند. از نقطهٔ A خط xy را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا امتداد خطهای $A'B'$ و $A'C'$ را بترتیب، در نقطه‌های B'' و C'' قطع کند. ثابت کنید که مثلث ABC با مثلث $A'B''C''$ متشابه است.



۳.۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۵۱. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC) اگر D نقطه‌ای از قاعدهٔ BC باشد، رابطهٔ زیر محقق است :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}.\overline{DC}$$

و اگر :

$$\overline{BC}^2 + 2\overline{AD}^2 = 4\overline{AB}^2$$

باشد، زاویهٔ AD و BC برابر °۴۵ می‌باشد. به‌طورکلی اگر رابطهٔ :

$$\overline{BC}^2 + k\overline{AD}^2 = 4\overline{AB}^2$$

صادق باشد (k عددی مثبت یا منفی)، امکان صحت آن را بحث کنید. درصورت امکان، زاویهٔ AD را با قاعدهٔ BC مشخص سازید. اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC رأسهای A و B (طرفین یک ساق) ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ D از قاعدهٔ BC به قسمی که :

الف. $\overline{BD}.\overline{BC}$ ثابت بماند.

ب. همان مکان به فرض این که $\overline{BD}.\overline{DC}$ ثابت بماند.

بخش ۴

• رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره

۱.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایرهٔ محیطی

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

۳.۱.۴. ضلع

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع

۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴. اندازهٔ ارتفاع

۵.۱.۴. پاره‌خط

۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۶.۱.۴. شعاع دایره

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ شعاع

۷.۱.۴. محیط

۱.۷.۱.۴. اندازهٔ محیط

۸.۱.۴. مساحت

۱.۸.۱.۴. اندازهٔ مساحت

۲.۸.۱.۴. نسبت مساحتها

۹.۱.۴. رابطه‌های متری

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محاطی

۱.۲.۴. تعریف و قضیه

۴.۲.۲. زاویه
۴.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۴.۲.۳. ضلع
۴.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع
۴.۲.۳.۲. نسبت ضلعها
۴.۲.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز
۴.۲.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع
۴.۲.۵. پاره‌خط
۴.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۴.۲.۶. شعاع دایره
۴.۲.۶.۱. اندازهٔ شعاع
۴.۲.۷. محیط
۴.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط
۴.۲.۸. مساحت
۴.۲.۸.۱. اندازهٔ مساحت
۴.۲.۹. رابطه‌های متری
۴.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴.۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محیطی و محاطی

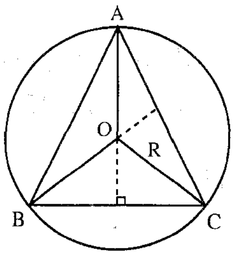
۴.۳.۱. تعریف و قضیه
۴.۳.۲. زاویه
۴.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۴.۳.۳. ضلع
۴.۳.۳.۱. اندازهٔ ضلع
۴.۳.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز
۴.۳.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع
۴.۳.۵. پاره‌خط

بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره

۱.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایرهٔ محیطی

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

در این قسمت قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایرهٔ محیطی آن را بررسی می‌کنیم.



۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

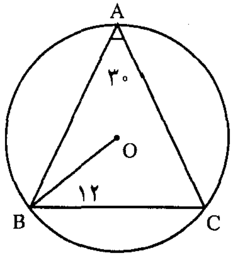
۲۵۲. در مثلث متساوی‌الساقینی ارتفاع وارد بر قاعده برابر دو سوم شعاع دایرهٔ محیطی است. اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعده را محاسبه کنید.

۳.۱.۴. ضلع

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع

۲۵۳. اندازهٔ ضلعهای مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) را که زاویهٔ رأسش $\hat{A} = ۳۰^\circ$

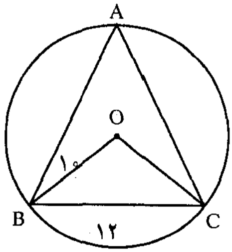
و شعاع دایرهٔ محیطی آن R=۱۲ سانتیمتر است، تعیین کنید.



۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴. اندازهٔ ارتفاع

۲۵۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC در دایرهٔ C(O,۱۰) محاط است. درصورتی که اندازهٔ قاعدهٔ آن BC = ۱۲cm باشد، اندازهٔ ارتفاعهای مثلث را تعیین کنید.



۵.۱.۴. پاره‌خط

۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۲۵۵. مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $\hat{A} = \alpha > 90^\circ$ و BC = a، مفروض است. فاصلهٔ بین نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را پیدا کنید.

۲۵۶. طول هر ساق مثلث متساوی‌الساقینی برابر با ۱، و قاعدهٔ آن برابر با a است. دایره‌ای بر مثلث محیط می‌شود. طول وتری را پیدا کنید که ساقهای مثلث را قطع می‌کند و نقطه‌های برخورد، آن را به سه پاره‌خط برابر تقسیم می‌کنند.

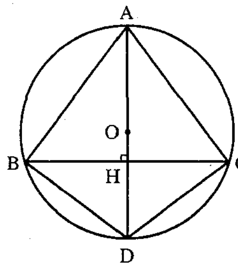
۶.۱.۴. شعاع دایره

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ شعاع

۲۵۷. شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی را بیابید که ضلعهای آن ۵۰، ۵۰ و ۶۰ هستند.

از لوحهای شوش susa ، ایران

۲۵۸. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن مساوی و برابر ۸cm است. R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را به‌دست آورید.



۲۵۹. قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین ۶ سانتیمتر، و هر ساق آن ۱۲ سانتیمتر است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برحسب سانتیمتر برابر است با :

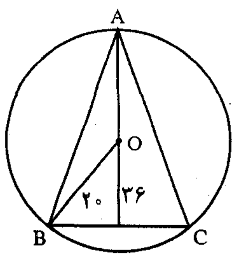
الف) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۵}$ ب) $۴\sqrt{۳}$ ج) $۳\sqrt{۵}$ د) $۶\sqrt{۳}$ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۷.۱.۴. محیط

۱.۷.۱.۴. اندازهٔ محیط

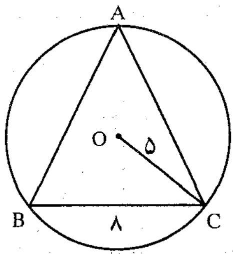
۲۶۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC محاط در دایره‌ای به شعاع ۲۰cm داده شده است. اگر ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث ۳۶cm باشد، اندازهٔ محیط مثلث را بیابید.



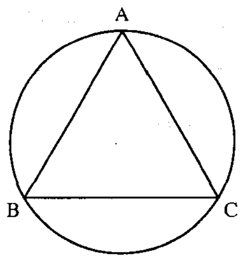
۸.۱.۴. مساحت

۱.۸.۱.۴. اندازهٔ مساحت

۲۶۱. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC)، در دایره‌ای به شعاع ۵cm محاط است. اگر BC = ۸cm باشد، اندازهٔ مساحت این مثلث را بیابید.



۲۶۲. ثابت کنید در بین مثلثهای متساوی‌الساقین محاط در یک دایره، مثلثی دارای (a) بیشترین مساحت، (b) بیشترین محیط است که متساوی‌الاضلاع باشد.



۲.۸.۱.۴. نسبت مساحتها

۲۶۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC، که در آن $AB = BC$ و $\hat{B} = \beta$ در دایره‌ای محاط شده است. میانخط مثلث را امتداد می‌دهیم، تا دایره را در نقطه‌های D و E قطع کند ($DE \parallel AC$). نسبت مساحتهای مثلثهای ABC و DBE را پیدا کنید.

۹.۱.۴. رابطه‌های متری

۲۶۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=BC) را در دایره‌ای محاط کرده‌ایم. روی کمان

$\widehat{AB}$ نقطهٔ دلخواه K را اختیار کرده و آن را به‌وسیلهٔ وترهایی به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم. تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AK.KC = AB^{۲} - KB^{۲}$$

۴.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

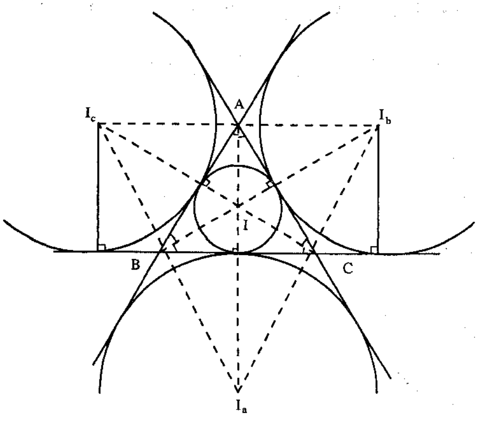
۲۶۵. رأسهای مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) روی دایره‌ای قرار دارند. از رأس A خطی رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ D و دایره را در نقطهٔ E قطع کند.

۱. ثابت کنید دو مثلث ABD و ABE متشابه‌اند و رابطهٔ $AB^{۲} = AD.AE$ برقرار است.

۲. ثابت کنید دو مثلث ABD و CED متشابه‌اند و از آن‌جا نتیجه بگیرید که BD.DC=AD.DE.

۴.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محاطی

۴.۲.۱. تعریف و قضیه



در هر مثلث متساوی‌الساقین، دایرهٔ محاطی درونی، بر دایرهٔ محاطی برونی واقع در درون زاویهٔ رأس مماس است. هر مثلث متساوی‌الساقین دو دایرهٔ محاطی برونی برابر دارد، یعنی اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB=AC باشد، $r_b = r_c$ است.

در این قسمت مطالب مربوط به مثلث

متساوی‌الساقین و دایره‌های محاطی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۴.۲.۲. زاویه

۴.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه

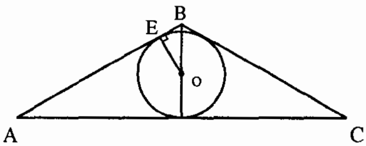
۲۶۶. اگر در مثلث متساوی‌الساقینی مرکز ارتفاعی مثلث روی دایرهٔ محاطی قرار داشته باشد، زاویهٔ مجاور به قاعده را بیابید.

۴.۲.۳. ضلع

۴.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع

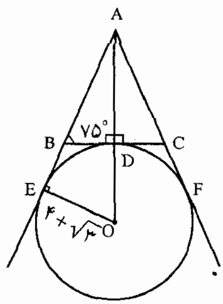
۲۶۷. دایره‌ای به شعاع a در داخل مثلث متساوی‌الساقینی محاط شده است. دایره‌ای به شعاع b را بر ساقهای مثلث و دایرهٔ محاطی مماس کرده‌ایم. قاعدهٔ مثلث را بیابید.

۲۶۸. مثلث متساوی‌الساقینی که زاویهٔ رأس آن مساوی ۱۲۰ درجه است بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. مطلوب است طول ضلعهای مثلث.



۴.۲.۳.۲. نسبت ضلعها

۲۶۹. شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر $۴+\sqrt{۳}$ است. اگر $A\hat{B}C = ۷۵^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث و نسبت AB:BC را بیابید.



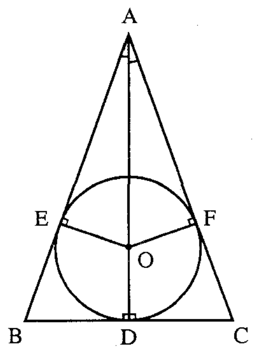
۲۷۰. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث متساوی‌الساقین، روی محیط دایرهٔ محاطی مثلث است. نسبت ضلعهای مثلث را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۷۵

۴.۲.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۴. اندازهٔ ارتفاع

۲۷۱. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC)، بر دایره ای به شعاع ۳ سانتیمتر مماس است (شکل). اگر AE=۴cm باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس A را تعیین کنید.



۵.۲.۴. پاره‌خط

۱.۵.۲.۴. اندازهٔ پاره‌خط

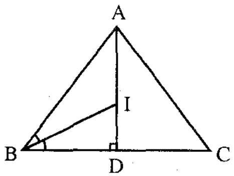
۲۷۲. در مثلث متساوی‌الساقین ABC که اندازهٔ زاویهٔ B در آن برابر ۱۲۰° است، نیمدایره‌ای به شعاع $(۳\sqrt{۳} + \sqrt{۲۱})$cm با مرکز واقع بر روی AC محاط شده است. بر نیمدایره، مماسی رسم شده است که ساقهای AB و BC مثلث را بترتیب در نقطه‌های D و E قطع می کند. اگر $DE = ۲\sqrt{۷}$cm باشد، BD و BE را به‌دست آورید.

۲۷۳. قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر ۲a و ارتفاع آن برابر h است. بر دایرهٔ محاطی مثلث خطی را به موازات قاعده مماس می کنیم. طولی از این پاره‌خط را که بین دو ساق مثلث قرار دارد، به‌دست آورید.

۶.۲.۴. شعاع دایره

۱.۶.۲.۴. اندازهٔ شعاع

۲۷۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC داریم : AB = AC = ۵ و BC = ۶. مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی آن.

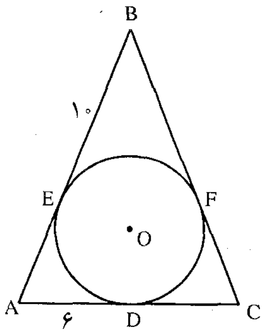


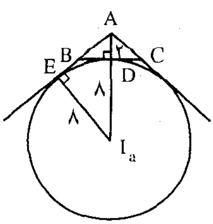
۲۷۵. مثلث متساوی‌الساقینی با قاعدهٔ ۲a و ارتفاع h داده شده است. دایره‌ای در آن محاط کرده‌ایم، و سپس مماسی بر دایره، موازی با قاعده رسم کرده‌ایم. مطلوب است شعاع دایره و طول قطعه‌ای از مماس که به‌وسیلهٔ دو ساق محدود شده است.

۷.۲.۴. محیط

۱.۷.۲.۴. اندازهٔ محیط

۲۷۶. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = BC)، در نقطه‌های D، E و F بر دایرهٔ O محیط است. با توجه به شکل، اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

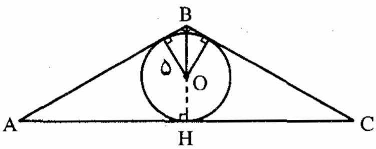




۲۷۷. دایرهٔ $(I_a, ۸)$ ، دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC) است. اگر $h_a = ۲$ باشد، محیط مثلث ABC را بیابید.

۸.۲.۴. مساحت

۱.۸.۲.۴. اندازهٔ مساحت



۲۷۸. زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB=BC)، $\hat{B}=120^\circ$ است. اگر شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث برابر ۵ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث را بیابید.

۹.۲.۴. رابطه‌های متری

۲۷۹. به مرکز O وسط قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم که بر ضلعهای AB و AC مماس باشد. نقطهٔ M را روی نیمدایره فرض کرده، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا AC را در K، و AB را در H قطع کند. ثابت کنید:

$$OB^2 = CK.BH$$

۱۰.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲۸۰. الف. از بین همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین با مساحت S، مثلثی را بیابید که شعاع دایرهٔ محاطی به حداقل برسد، شعاع این دایره را محاسبه کنید.

ب. بر دایره‌ای به شعاع r، مثلثی را با حداقل مساحت ممکنه محیط کنید. این مساحت را محاسبه کنید.

۲۸۱. الف. در یک مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم. سپس دایرهٔ دومی رسم کرده‌ایم که بر دایرهٔ اوّل و دو ساق مثلث مماس باشد؛ سپس دایرهٔ سوم را، و غیره. مساحت هر دایرهٔ محاطی از مساحت دایرهٔ محاطی قبل از خود، کمتر است. بنابراین مساحتهای این دایره‌ها یک رشتهٔ عددی نزولی تشکیل می‌دهند. حد مجموع جمله‌های این رشته «مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی» نامیده می‌شود. می‌خواهیم دایره‌ای پیدا کنیم که مساحت آن مساوی مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی باشد. مسأله را هم به طریق محاسبه و هم به طریق ترسیم

حل کنید.

ب. در یک مثلث متساوی‌الساقین دایره‌ای محاط کرده‌ایم. سپس دایرهٔ دوم و بعد دایرهٔ سوم و غیره. فرض کنید قاعدهٔ این مثلث ثابت و ارتفاع آن متغیر باشد. آیا در این صورت نسبت مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی به مساحت مثلث تغییر می‌کند؟ اگر جواب مثبت است، در چه حالتی این نسبت نزولی است؟ به این سؤال بدون هیچ محاسبه‌ای و بدون استفاده از رابطه‌هایی که در قسمت قبل پیدا کرده‌اید، جواب بدهید.

۳.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محیطی و محاطی

۱.۳.۴. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محیطی و محاطی آن را بررسی می‌کنیم.

۲.۳.۴. زاویه

۱.۲.۳.۴. اندازهٔ زاویه

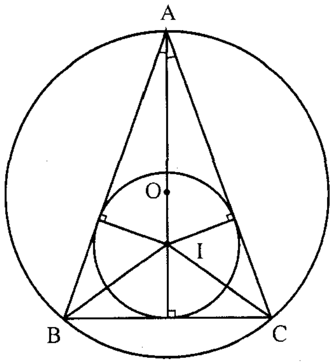
۲۸۲. در مثلث متساوی‌الساقینی نسبت شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی برابر K است. زاویه‌های مثلث را به‌دست آورید.

۳.۳.۴. ضلع

۱.۳.۳.۴. اندازهٔ ضلع

۲۸۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، اندازهٔ شعاعهای دایره‌های

محاطی درونی و محیطی، بترتیب $\frac{۱۰}{۳}$ و $\frac{۱۶۹}{۲۴}$ است. اندازهٔ ضلعهای مثلث را بیابید.



۴.۳.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۴. اندازهٔ ارتفاع

۲۸۴. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = BC)، $R = \frac{۲۵}{۴}$cm و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر قاعدهٔ AC، $r_b = ۱۲$cm است. اندازهٔ ارتفاعهای این مثلث را بیابید.

۵.۳.۴. پاره‌خط

۱.۵.۳.۴. اندازهٔ پاره‌خط

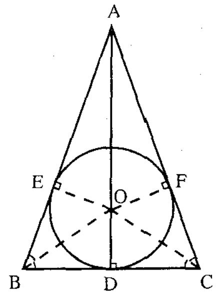
۲۸۵. مثلث متساوی‌الساقینی را درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم r شعاع دایرهٔ محیطی و ρ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ بین مرکزهای این دو دایره عبارت است از :

$$d = \sqrt{r(r - ۲\rho)}$$

۶.۳.۴: شعاع دایره

۱.۶.۳.۴. اندازهٔ شعاع

۲۸۶. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB=AC)، بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۳}-۲$ محیط است (شکل). اگر $\hat{A}=۳۰^\circ$ باشد، شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را تعیین کنید.



۲.۶.۳.۴. نسبت شعاعها

۲۸۷. زاویهٔ بین دو ساق از مثلث متساوی‌الساقینی برابر α است. مطلوب است نسبت شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی این مثلث.

۲۸۸. ثابت کنید در یک مثلث متساوی‌الساقین نسبت شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی از $\frac{۱}{۲}$ تجاوز نمی‌کند.

۴.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های دیگر

۱.۴.۴. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌هایی غیر از دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۴.۴. زاویه

۱.۲.۴.۴. اندازهٔ زاویه

۲۸۹. مثلث ABC، که در آن $|AB| = |AC|$ و $\hat{A} = 80^\circ$ داده شده است.

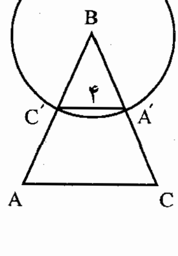
الف. نقطهٔ M در درون مثلث طوری اختیار می‌شود که $M\hat{B}C = 30^\circ$ و $M\hat{C}B = 10^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ AMC را پیدا کنید.

ب. نقطهٔ P بیرون مثلث طوری اختیار می‌شود که $P\hat{B}C = P\hat{C}A = 30^\circ$ و پاره‌خط BP، ضلع AC را قطع می‌کند. $P\hat{A}C$ را پیدا کنید.

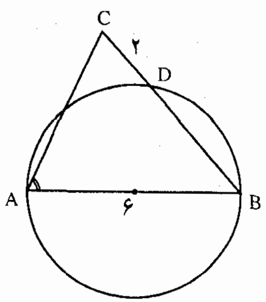
۳.۴.۴. ضلع

۱.۳.۴.۴. اندازهٔ ضلع

۲۹۰. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = BC$) داده شده است. دایره‌ای به مرکز B رسم کرده‌ایم که از نقطه‌های C' و A' وسط ساقهای AB و BC گذشته است. اگر $B'C' = 4\text{cm}$ و قوت رأس A نسبت به این دایره برابر ۱۸ باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث را تعیین کنید.



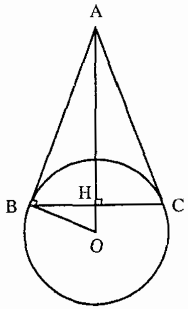
۲۹۱. ضلع AB از مثلث ABC قطر دایره‌ای محسوب می‌شود که ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AB = BC = 6\text{cm}$ و $CD = 2\text{cm}$ باشد، در آن صورت AC را بیابید.



۴.۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۴.۴. اندازهٔ ارتفاع

۲۹۲. دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتیمتر در رأسهای B و C بر ساقهای AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ BC برابر ۸cm باشد، طول ارتفاع رأس A را به‌دست آورید.



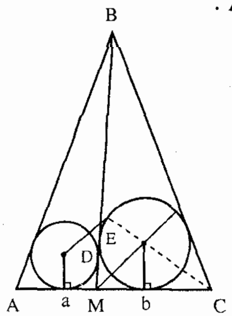
۵.۴.۴. پاره‌خط

۱.۵.۴.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۲۹۳. دایره‌ای بر ضلعهای AB و AC از مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. فرض کنید M نقطهٔ تماس دایره با ضلع AB و N محل برخورد دایره با قاعدهٔ BC باشد. اگر $AM = a$ و $BM = b$، AN را پیدا کنید.

۲۹۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$. طول وتر مشترک دو دایره را پیدا کنید که یکی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است و دیگری از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و پای نیمسازهای زاویه‌های A و C می‌گذرد، به‌شرطی که $AC = ۱$.

۲۹۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ M بر قاعدهٔ AC طوری اختیار شده است که $AM = a$ و $MC = b$. دایره‌هایی در مثلثهای ABM و CBM محاط می‌شوند. فاصلهٔ میان نقطه‌های تماس این دایره‌ها با ضلع BM را پیدا کنید.



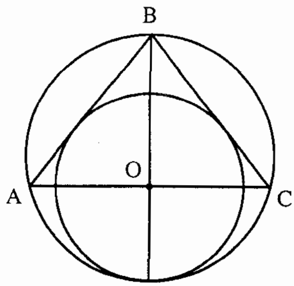
۶.۴.۴. شعاع دایره

۱.۶.۴.۴. اندازهٔ شعاع

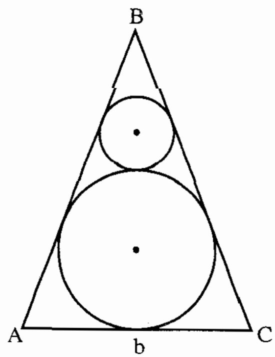
۲۹۶. در مثلث ABC طول سه ضلع به‌صورت $AB = BC = ۳۹cm$ ، $AC = ۳۰cm$ معلوم است. در این مثلث ارتفاعهای AD و BE را رسم کرده‌ایم. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های D و E عبور کرده و بر ضلع BC مماس باشد.

۲۹۷. روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی، به‌عنوان یک وتر، دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر دو ضلع مساوی مثلث مماس باشد. اگر قاعدهٔ مثلث a و ارتفاع آن h باشد، شعاع دایره را به‌دست آورید.

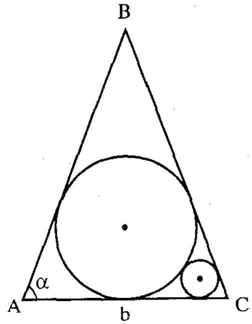
۲۹۸. دایره‌ای را بر مثلث متساوی‌الساقینی محیط می‌کنیم که طول قاعدهٔ آن b و زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن برابر α است. دایرهٔ دیگری را بر این دایره و ساقهای مثلث محاط می‌کنیم. شعاع دایرهٔ دوم را به‌دست آورید.



۲۹۹. قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر b و زاویهٔ مجاور به قاعده نیز برابر α است. دایره‌ای را در این مثلث محاط می‌کنیم. دایره‌ای را نیز بر این دایره و دو ساق مثلث مماس رسم می‌کنیم. شعاع دایرهٔ دوم را محاسبه کنید.



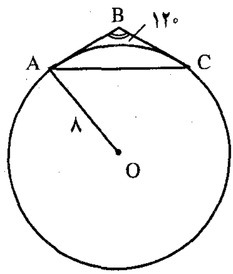
۳۰۰. طول قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی برابر b و زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ آن برابر α است. دایره‌ای را در این مثلث محاط می‌کنیم. دایرهٔ دیگری نیز بر این دایره، قاعده و یک ساق آن مماس می‌شود. شعاع دایرهٔ دوم را بیابید.



۷.۴.۴. محیط

۱.۷.۴.۴. اندازهٔ محیط

۳۰۱. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۸ سانتیمتر در رأسهای A و C بر ساقهای AB و BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC مماس است. اگر $\hat{B}=۱۲۰^\circ$ باشد، محیط مثلث ABC را تعیین کنید.

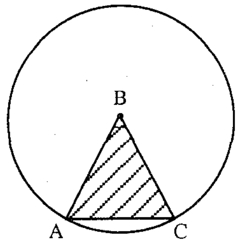


۸.۴.۴. مساحت

۱.۸.۴.۴. اندازهٔ مساحت مثلث

۳۰۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = BC) داده شده است. به مرکز B و به شعاع

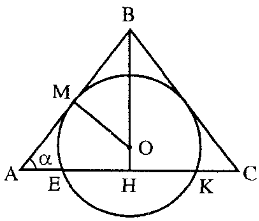
۸ سانتیمتر دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از دو رأس A و C گذشته است. اگر مساحت قطاع نظیر زاویهٔ ABC برابر $\frac{۱۶\pi^۲}{۳}$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.



۲.۸.۴.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳۰۳. زاویهٔ A از مثلث متساوی‌الساقین ABC ‏($AB = BC$) برابر $\text{Arc}\sin\frac{۵}{۱۳}$ است. دایره‌ای که فاصلهٔ مرکز آن از رأس B برابر $\frac{۱۳}{۲۴}$cm است، ساقهای AB و BC را بترتیب در نقطه‌های K و P، قطع کرده و پاره‌خط EF را روی قاعده جدا می‌کند. اگر $PC = \frac{۶}{۵}$ cm باشد، مساحت مثلث EPC را پیدا کنید.

۳۰۴. زاویهٔ A از مثلث ABC‏($AB = BC$) برابر $\text{Arc}\tan\frac{۸}{۱۵}$ است (شکل). دایره‌ای به شعاع ۴ سانتیمتر بر ضلعهای AB و BC مماس بوده و قاعدهٔ AC را در نقطه‌های E و K قطع می‌کند (E بین A و K قرار دارد). M نقطهٔ تماس دایره وخط مستقیم BA بوده و $AM = \frac{۱۵}{۸}$cm است. مساحت مثلث AMK را محاسبه کنید.



۳۰۵. مثلث متساوی‌الساقینی داده شده است. قاعدهٔ این مثلث ۴ سانتیمتر و ارتفاع وارد بر آن ۶ سانتیمتر است. به قطر یکی از ساقها نیمدایره‌ای رسم کرده‌ایم. محل تلاقی این نیمدایره را با قاعده، به محل تلاقی آن با ساق دیگر وصل کرده‌ایم، مطلوب است مساحت چهارضلعی محاط در نیمدایره‌ای که به این ترتیب به‌دست می‌آید.

۹.۴.۴. رابطه‌های متری

۳۰۶. مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، داده شده است. دایره‌ای رسم می‌کنیم که در نقطه‌های B و C بترتیب بر AB و AC مماس باشد و نقطهٔ اختیاری M از این دایره را در نظر می‌گیریم. اگر MH فاصلهٔ نقطهٔ M از قاعده و MH' و MH'' فاصله‌های نقطهٔ M از دو ساق مثلث باشند، ثابت کنید : $MH^2 = MH'.MH''$.

۳۰۷. اگر M نقطه‌ای اختیاری از قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد، ثابت کنید که :

$$\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = \overline{MB} \times \overline{MC}$$

۱۰.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۸. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الساقین ($AB = BC$) و BD ارتفاع آن باشد. قرصی به شعاع BD، در امتداد خط راست AC دوران می‌کند. ثابت کنید به شرط آن که B در درون قرص باشد، طول کمان مستدیر در درون مثلث، ثابت است.

۳۰۹. دایره‌ای که مرکز آن روی ضلع BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد، بر دو ضلع برابر AB و AC مماس است. ثابت کنید، پاره‌خط PQ که دو انتهای آن، بترتیب بر ضلعهای AB و AC قرار دارد، وقتی و تنها وقتی بر دایره مماس است که داشته باشیم :

$$BP.CQ = \frac{1}{4}BC^2$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۷۹

۱۱.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۱۰. در مثلث متساوی‌الساقین ABC هریک از دو ساق، دو برابر قاعدهٔ BC می‌باشند.

۱. دو میانهٔ BM و CN را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ G قطع کنند. ثابت کنید دو مثلث GBC و BMC متشابه‌اند و از آن جا نتیجه بگیرید :

$$\overline{MC}^2 = \frac{3}{2}\overline{BC}^2$$

۲. اگر طول ارتفاع $AH = 2$ باشد، طول ضلعها، ارتفاعها، میانه‌ها و نیمسازهای داخلی مثلث ABC را بر حسب a حساب کنید.

۳. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از B و C بگذرد و بر AB و AC مماس باشد. (چگونه؟) مرکز این دایره را O و محل تلاقی آن را با AH نقطهٔ O' می‌نامیم. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث از O می‌گذرد و O' مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است.

۴. شعاع این دایره و شعاع دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث را برحسب a حساب کنید.

۳۱۱. مثلث متساوی‌الساقین ABC، به قاعدهٔ $BC = 4cm$ و ارتفاع $AH = 4cm$ داده شده است. دایرهٔ (H) به قطر BC و دایرهٔ (O) را که مماس بر ضلعهای AB وAC در نقطه‌های B و C است، رسم می‌کنیم. AB و AC دایرهٔ (H) را بترتیب در نقطه‌های C' و B' قطع می‌کند. AH دایره های (O , H) را بترتیب در E و D و در درون مثلث ABC قطع می‌کند.

۱. وضعیت نقطهٔ O را روشن کنید. نشان دهید که BB' و CC' در نقطهٔ K روی AH متقاطعند. نشان دهید که E نقطهٔ برخورد نیمسازهای درونی چهارضلعی $AB'KC'$ است.

۲. اندازهٔ زاویهٔ DBE را برحسب اندازهٔ زاویهٔ A تعیین کنید.

۳. اندازهٔ مساحت چهارضلعی OBKC را تعیین کنید.

۴. اندازهٔ شعاع دایرهٔ (O) و شعاع دایرهٔ محاطی چهارضلعی $AB'KC'$ را تعیین کنید.

بخش ۵

• رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه

۳.۵.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۵. محیط

۱.۶.۵. اندازهٔ محیط مثلث

۲.۶.۵. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۷.۵. مساحت

۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت مثلث

۲.۷.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳.۷.۵. نسبت مساحتها

۴.۷.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۸.۵. رابطه‌های متری

۱.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای اصلی

۲.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاع و خطهای عمود

۳.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۴.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۵.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای دیگر

۶.۸.۵. رابطه‌های متری (نابرابریها)

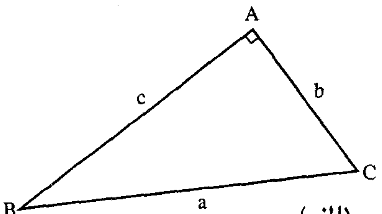
۹.۵. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۱۰.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

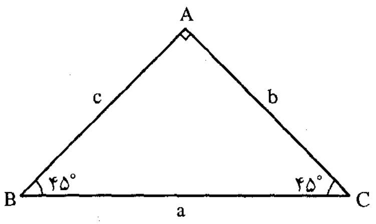
۱۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه

۱.۵. تعریف و قضیه



(الف)



(ب)

می‌دانیم، مثلثی که یک زاویهٔ ۹۰ درجه دارد، مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شود. ضلع روبه‌روی این زاویه را وتر، و دو ضلع دیگر را ساقها، یا دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، و گاهی به اختصار، دو ضلع مثلث می‌نامند؛ مانند مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) (شکل الف). اگر طول دو ساق مثلث قائم‌الزاویه با هم برابر باشد، مثلث را قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین گویند. در چنین مثلثی، اندازهٔ هر زاویهٔ حاده، برابر °۴۵ است؛ مانند مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC که در آن $\hat{A} = ۹۰°$ و $AB = AC$ است (شکل ب).

در این بخش رابطه‌های متری مربوط به مثلث قائم‌الزاویه را بررسی می‌کنیم.

افتخار تفکر ریاضی فیثاغورسی

۳۱۲. مشهورترین قضیهٔ فیثاغورس این است: مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ساخته شود، برابر است با مجموع مربعهایی که روی ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ساخته می‌شوند. عکس این قضیه هم صحیح است: اگر ضلعهای a، b و c از مثلثی در شرط فیثاغورسی $a^2 + b^2 = c^2$ صدق کنند، در این صورت، مثلث مفروض، قائم‌الزاویه است و زاویهٔ قائمهٔ آن روبه‌روی ضلع c است.

بخصوص، مثلثی جالب است که سه ضلع آن با عددهای صحیح بیان شود و شرط فیثاغورسی در مورد آنها برقرار باشد.

به عنوان مثال، مثلث با ضلعهای ۳، ۴ و ۵، شرط فیثاغورسی را قبول دارد:

$۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$ و این ساده‌ترین مثلث فیثاغورسی است.

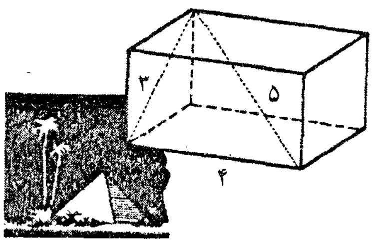
در این جا چند مثلث فیثاغورسی آورده‌ایم:

$a = ۳ \quad , \quad b = ۴ \quad , \quad c = ۵$
$a = ۵ \quad , \quad b = ۱۲ \quad , \quad c = ۱۳$
$a = ۱۵ \quad , \quad b = ۸ \quad , \quad c = ۱۷$
$a = ۷ \quad , \quad b = ۲۴ \quad , \quad c = ۲۵$
$a = ۲۱ \quad , \quad b = ۲۰ \quad , \quad c = ۲۹$
$a = ۹ \quad , \quad b = ۴۰ \quad , \quad c = ۴۱$

بسادگی دیده می‌شود که همهٔ این مثلثها در شرط فیثاغورسی $a^۲ + b^۲ = c^۲$ صدق می‌کنند و بنابراین قائم‌الزاویه‌اند.

در مصر قدیم و سایر کشورهای شرق آسیا از مثلثی که ضلعهای آن ۳، ۴ و ۵ باشد، برای ساختن زاویهٔ قائمه (یعنی برای رسم دو خط راست عمود بر هم) در عمل استفاده می‌کرده‌اند. تصادفی نیست که باستان‌شناسان چنین نسبتهایی را در اندازه‌های سنگهای تراشیده شدهٔ هرم خفرون پیدا کرده‌اند. این حقیقت بسیار جالب است که اتاق فرعون در هرم مشهور خئوپس اندازه‌هایی دارد که کاملاً به عددهای ۳، ۴ و ۵ مربوطند. اگر قطر تمام اتاق را ۵ واحد بگیریم، بزرگترین دیوار آن ۴ و قطر کوچکترین دیوار آن مساوی ۳ واحد است.

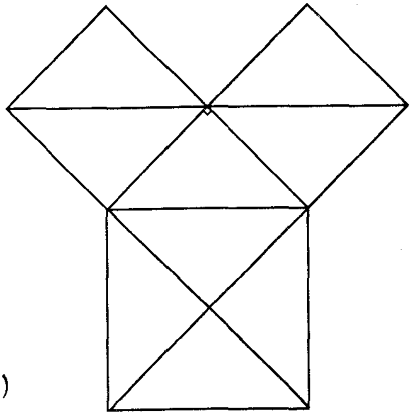
در دوران باستان، مثلثی را که ضلعهای آن ۳، ۴ و ۵ باشد، شکلی اسرارآمیز و جادویی به حساب می‌آوردند (شکل الف). چنین مثلثی خاصیتهای جالب دیگری هم دارد. محیط آن با عدد ۱۲ بیان می‌شود و مساحت آن برابر است با ۶، یعنی عددی که درست بعد از سه عدد ضلعها قرار گرفته است؛ بالاتر از همه $۶^۳ = ۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳$، که به قول پلوتارک زیباترین وضع در بین همهٔ مثلثهاست.



(الف)

بدون تردید هنوز هم نجارهای روستاها موقع ساختن خانه‌ها و یا انبارهای چوبی، برای این که زاویهٔ قائمه به دست آورند از مثلث به ضلعهای ۳، ۴ و ۵ استفاده می‌کنند؛ و این درست همان شیوه‌ای است که در هزاران سال قبل برای ساختمان معبدهای بزرگ در مصر، بابل، چین و شاید در مکزیک به کار می‌رفته است.

بنابراین فیثاغورس، این خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را کشف نکرد، بلکه او برای نخستین بار توانست این خاصیت را تعمیم دهد، آن را ثابت کند و از جنبهٔ عملی به جنبهٔ علمی آن برسد. برای ما معلوم نیست که او چگونه این مهم را انجام داد.



(ب)

م. کانتور که به زندگینامهٔ ریاضیدانها پرداخته است، حدس می‌زند به احتمال قوی، این اثبات اساسی نبوده است و تنها روی حالتهای خاصی از مثلثها انجام گرفته است؛ مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین اوّلین حالت خاص مورد نظر فیثاغورس برقرار است که با توجه به شکل (ب) بسادگی می‌توان نتیجهٔ مورد نظر را از آن به‌دست آورد.

فیثاغورس Pythagoras

در میان همهٔ شخصیتهای جالب تاریخ علم، فیثاغورس که در حدود ۵۷۲ ق.م در ساموس زاده شد و در حدود ۵۰۱ ق. م در تاونتوم درگذشت، کاملاً مقام اوّل را دارد، از جهتی به‌خاطر اسراری که زندگیش را احاطه کرده، از جهتی به‌خاطر رازگرایی او، از جهتی به‌خاطر آیین اخوتی که ایجاد کرد، و از جهتی هم به خاطر استعداد بی چون خود او.

اوایل زندگی فیثاغورس

مانند اقلیدس و هرون، که از آنها سخن خواهیم گفت، زمان و جای تولد فیثاغورس نامعلوم است. او ظاهراً در اثنای المپیاد پنجاهم و سی و دوم، تقویمی که مورد استفادهٔ یونانیان قرار می‌گرفت، یعنی میان سالهای ۵۸۰ و ۵۶۸ ق. م مطابق تقویم ما، تولد یافته است. گرچه او را ساموسی می‌خوانند، مطمئن نیستیم که در جزیرهٔ ساموس زاده شده باشد، چون سویداس، از مورخان اواخر قرون وسطی (ح ۱۰۰۰ م)، می گوید که او در ایتالیا به دنیا آمده و هنگام کودکی

تصویر فیثاغورس

یک سکهٔ ساموسی مربوط به عصر ترازان (۹۸ ـ ۱۱۸) و بنابراین مدتها بعد از فیثاغورس. این سکه شهرتی را که او کسب کرده بود و دعوی ساموسیان را در مورد همشهری بودن وی نشان می‌دهد.

همراه پدرش به ساموس رفته است. به هر حال اغلب اسناد مبنی بر ساموسی بودن اوست، و تعدادی سکهٔ متعلق به این جزیره که چند قرن بعد از وی ضرب شده دارای نام و تصویر اوست، و بدین ترتیب مشکل بتوان قبول کرد که او فقط دوران کودکیش را در ساموس گذرانده باشد. داستانهای زیادی دربارهٔ والدین او گفته شده است، ولی به هیچ روی مطمئن نیستیم که آیا پدر او حکاک صدف بوده یا بازرگان. به هر صورت، او موقعی زندگی کرد که یونان از دو قرن فعالیت اقتصادی برخوردار شده بود، و سپیده‌دم عصر زرینی بود که در سدهٔ ششم ق. م در آتن آغاز شد و در پایان سدهٔ پنجم ق. م در آن شهر به پایان رسید.

عصر فیثاغورس

فیثاغورس در هر جا و در هر سالی زاده شده باشد، و والدینش هر کس که باشند، او در روزگار پرهیجانی می‌زیست و شخصاً از سازندگان تمدن عصر خویش بود. درست در هنگامی که پولی کراتس بر تخت می‌نشست، و آنا کریون در دربار ساموس به سرودن غزلهای دلنشین می‌پرداخت. بدین سان فیثاغورس در وسط صحنه‌ای قرار گرفت که روح جوان را سخت تحریک می‌کرد. از این گذشته روح زمان سرگرم کارهای بزرگی بود. بودا آیین خود را در هند ترویج می‌کرد، و کنفوسیوس و لائوتسه، شالودهٔ مذهبهای فلسفی خود را در چین می‌ریختند، و فیثاغورس خواه با خاور دور تماس شخصی داشته باشد یا نه، در زمانی می‌زیست که جهان مستعد نهضتهای بزرگ بود. این که حساب و هندسه در این زمان به چنان پایهٔ بلندی رسید، تا حدود زیادی مربوط به رواج پاپیروس مصری در یونان بود. این حادثه در حدود ۶۶۰ ق.م در زمان پسامتیخوس اوّل، فرعون مصر، اتفاق افتاد؛ و اختراع چاپ در سدهٔ پانزدهم مسلماً آن‌چنان موجب انقلاب فکری نشد، که رواج این مادهٔ نوشتنی درست پیش از زمان تالس در کرانه‌های شمالی دریای مدیترانه آن را پدید آورد.

تحصیلات و مسافرتهای فیثاغورس

معلومات ما راجع به زندگی فیثاغورس بسیار محدود است. نویسندگان قدیم در ابداع قصه‌های مربوط به سفرهای فیثاغورس، قدرت اعجاز و آموزشهایش با یکدیگر به رقابت

پرداخته‌اند. ظاهراً در جستجوی تالس برآمده و شاگردی او را کرده است. روایت کرده‌اند که استادش او را به اسرار زیوس در کوه ایدا واقف کرده و بدو گفته است اگر در طلب روشنی بیشتری است باید آن را در مصر بجوید. از آن پس برای مدتی مدید از فیثاغورس اطلاع دقیقی نداریم. آپولیوس از نویسندگان رومی در حدود ۱۵۰ م می‌گوید کمبوزیه او را اسیر کرد. او علم مغان می‌آموخت، و حتی در خدمت خود زرتشت شاگردی کرد؛ ولی بخشی از این داستان نمی‌تواند درست باشد، چون زرتشت احتمالاً مقارن زمانی درگذشت که فیثاغورس زاده شد، و ممکن است خیلی پیش از آن، چون تاریخ دقیقی در دست نیست. ایزوکراتس، نویسنده‌ای که یک قرن پس از فیثاغورس می‌زیست، و کالیماخوس کتابدار کتابخانهٔ اسکندریه که در سدهٔ سوم ق.م می‌زیست، هر دو برآنند که چند سالی را در مصر گذراند؛ پلینی در سدهٔ اوّل میلادی می‌نویسد که فیثاغورس در زمان پسامتیخوس سوم، فرعون مصر، که در ۵۲۶ـ۵۲۵ ق.م پادشاهی کرد، در مصر بود؛ و استرابون مقارن میلاد مسیح می‌گوید که او در بابل تحصیل کرد. دیگران ادعا می‌کنند که او تا به هند سفر کرد؛ ولی ما هیچ دلیل معتبری برای این اظهارات در دست نداریم.

ارتباط با شرق

علی‌رغم اظهارات مخالف برخی نویسندگان، شواهد به‌دست آمده از فلسفهٔ فیثاغورس حاکی از ارتباط او با شرق است. اسرار شرق در همهٔ تعالیم او نمایان است. عقیدهٔ او در باب اسرار اعداد کاملاً شبیه چیزی است که قبلاً در بابل وجود داشته، و بی شک مجموع فلسفهٔ او بیشتر رنگ تمدن هند را دارد تا یونان را که در آن تولد یافته بود. بر اساس بهترین شواهد، قضیهٔ معروف هندسی که به نام اوست، همچنان که قبلاً خاطرنشان شد، پیش از او در چین، هند، ایران و مصر شناخته شده بود، و آن چه در این باره برای او می‌توان ادعا کرد، این است که او نخستین اثبات کلی صحت آن را ارائه کرد.

مدرسهٔ کروتون

هنگامی که فیثاغورس پس از سالها سرگردانی دوباره نمایان شد، در جستجوی جای مناسبی برای مدرسه‌اش برآمد، و سرانجام در کروتون مقیم شد، که شهرکی بود در کرانهٔ جنوب خاوری ایتالیا، یعنی در منطقه‌ای که یونانیان ایتالیا در آن زمان آن را یونان بزرگ می‌نامیدند. این شهرک بندر ثروتمندی بود، و این جوانان خانواده‌های توانگر بودند که مورد توجه فیثاغورس قرار گرفتند. با دعوی داشتن قدرت پیشگویی، که همیشه با رازگرایی همراه است، و داشتن مقدار زیادی جاذبهٔ شخصی، قریب سیصد تن از اشراف و توانگران جوان یونان بزرگ را به گرد خویش جمع کرد، و انجمن اخوتی پدید آورد، که تا به امروز سرمشق همهٔ اجتماعات پنهانی

اروپا و امریکا بوده است. او شاگردانش را دو گروه کرد، شنوندگان و ریاضیدانان، که ریاضیدانان یک دورهٔ آزمایشی را در میان شنوندگان می گذراندند.

آموزشهای شفاهی فیثاغورس

فیثاغورس به هیچ روی اصول عقاید خود را ننوشت. او هم مانند تالس، و مانند استادان شرقی که احتمالاً شاگردیشان را کرده بود، نظریه‌های خود را به وسیلهٔ کلام شفاهی به دیگران منتقل کرد. وی این کار را با تأسیس انجمن اخوت خویش انجام داد، و بدین ترتیب اصول عقاید خود را آزادانه در اختیار کسانی گذاشت که مایل به آشنایی با آن بودند. این روش انتقال معلومات کاملاً مربوط به روح رازگرایی نبود، بلکه از نبودن مادهٔ نوشتنی خوب ناشی می‌شد. کاغذ چرمی هنوز اختراع نشده بود، لوحه‌های مومی فقط برای نامه‌های کوتاه قابل استفاده بود، استوانه‌های گلی بابلی در معرض محدودیتهای مشابهی بود، و پاپیروس ظریف مصری به احتمال در یونان بزرگ تا حدی کمیاب بود. از این رو فیثاغورس در انتقال فلسفهٔ خویش به طریق شفاهی از سنت عصر خویش پیروی کرد، همچنان که گذشتگان، ترانه‌های هومر را به نسل او رسانده بودند. حتی در زمان افلاطون، که می‌شد دستنوشته‌های باارزشی خریداری کرد، در سراسر آتن کتابفروشی وجود نداشت، و هنگامی هم که اقلیدس در اسکندریه تدریس می کرد، وضع چنین بود. تا زمان اوگوستوس تجارت کتاب به وجود نیامده بود، تا انتقال آسان و مطمئن معارف را امکان‌پذیر سازد، و تا حدود پانزده قرن بعد از آن فن چاپ در اروپا شناخته نشد. در مورد اصول عقاید فیثاغورس تا حدود زیادی به اودموس رودسی (ح ۳۳۵ ق.م) مدیونیم، که هرچند کتاب او در دست نیست، ولی از طریق نوشته‌های نویسندگان بعدی آن‌را می‌شناسیم. همچنین از طریق قطعات یکی از آثار فیلولایوس کروتونی (که در سدهٔ پنجم ق.م می‌زیست)، از طریق اظهارات آرخوتاس تارنتومی (ح ۴۰۰ ق.م) از دوستان افلاطون، و قطعاتی از آثار نویسندگان بعدی، با اصول عقاید فیثاغوری آشنایی داریم.

فلسفهٔ فیثاغورس

فیثاغورس فلسفهٔ خود را بر این اصل موضوعه قرار داد که عدد موجب کیفیات مختلف ماده است. این موضوع سبب شد تا او علم عدد را، به‌صورتی جدا از فن محاسبه، و بیش از اهمیت واقعی آن تمجید کند. همچنین موجب شد تا در باب خواص رمزی اعداد بحث زیادی کند و علم عدد را یکی از چهار مرحلهٔ حکمت بداند ـ علم عدد، موسیقی، هندسه، و علم افلاک (نجوم) ـ که هنرهای چهارگانهٔ قرون وسطی را تشکیل داد. ارسطو (۳۸۴ـ۳۲۲ ق.م) می گوید که فیثاغورس برای اعداد خواصی قایل بود، و پلوتارخوس حکایت می کند که او عقیده داشت خاک از مکعب ساخته شده، آتش از هرم، هوا از هشت‌وجهی، آب از دوازده وجهی و کرهٔ

آسمانی از بیست وجهی منتظم، که در همهٔ آنها عناصر طبیعی به شکل و عدد وابسته است. فیلولایوس وقتی اظهار می کند که پنج، عامل رنگ ؛ شش، عامل سرما ؛ هفت، عامل تندرستی ؛ و هشت، عامل عشق است، احتمالاً تعالیم استاد را بازگو می کند. چنیان می گویند که پنج، معرف باد و دو، معرف خاک است. و این مطلب در مورد تعالیم فیثاغوریان هم اظهار شده است. در این جا هم باز شباهت میان رازگرایی این مکتب و آنچه عموماً در خاور دور یافت می شود بدین عقیده منجر می گردد که بایستی فیثاغوریان با حکمای شرق در ارتباط بوده باشند. تأثیر شرق را بار دیگر در گزارشی از سویداس مؤلف یونانی اواخر قرون وسطی می بینیم. او می گوید در جشنی به نام پیتاگوس کلماتی با خون بر روی آیینه نوشته شده بود، که به هنگام ماه تمام، وقتی قرص ماه در آیینه می تابید آن کلمات خوانده می شد ؛ ولی هیچ مرجع کهنی در این باره در دست نیست.

شکسپیر در این عبارات نظر فیثاغورس را در تأیید عقیدهٔ هندیان دایر به مهاجرت ارواح بیان می کند :

تو با اظهار عقیدهٔ فیثاغورس
دربارهٔ این که ارواح جانوران
خود را در جسم مردم داخل می کنند
تا حدی ایمان مرا متزلزل ساختی

تاجر ونیزی

وحدت و بی نهایت

از نوشته های متعدد قدیمی چنین نتیجه می گیریم که فیثاغورس عقیده داشت وحدت ذات عدد، جوهر همه چیز، و عنصری آسمانی است ؛ و این بدان معنی است که وی معتقد به محدود و نامحدود بوده ؛ و از این جا بوده که فکر زمان، مکان و حرکت برایش پیدا شده است. دیوجانوس لایرتی (دیوگنس لائرتیوس، سدهٔ ۲ م) می گوید که «وی به اعداد علاقه داشت، و آن قسمت از ریاضیات که فیثاغورس بیش از همه بدان می پرداخت، علم عدد بود»، و آریستوکزنوس Aristoxenos فیلسوفی که در ح ۳۵۰ ق. م در تارنتوم زاده شد، گوید که این علم را برتر از همه می شمرد.

هندسهٔ فیثاغوری

در زمینهٔ هندسه اودموس (ح ۳۳۵ ق.م) می گوید که فیثاغورس «قضایای خود را از لحاظ غیرمادی و فکری مورد بررسی قرار داد.» و این که «او مقادیر گنگ و ترسیم شکلهای دنیوی (غیرموهوم) را کشف کرد». فاورنیوس که در ح ۱۲۵ در جنوب فرانسه می زیست،

اظهار می‌کند که در کتاب ریاضیاتش تعریفها را به‌کار برده است، و این نخستین نشانهٔ استفاده از تعریفها است. بخصوص او نقطه را چنین تعریف می‌کند «وحدتی که دارای موضع است». او یا مکتب او می‌دانسته که صفحهٔ مسطح حول یک نقطه را می‌توان با شش مثلث متساوی‌الاضلاع، چهار مربع، یا سه شش‌ضلعی منظم پر کرد. موضوعی که بی شک مدتها پیش بر اثر مشاهدهٔ سنگفرشها معلوم شده بود، ولی شک نیست که او قادر به اثبات آن بوده. احتمال دارد که فیثاغورس قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های یک مثلث را حل کرده، کثیرالاضلاعی معادل کثیرالاضلاع معین و مشابه با دیگری ترسیم کرده، و قادر به ساختن پنج چندوجهی منتظم بوده است، و ممکن است او توانسته قضیهٔ مربوط به مربع وتر را ثابت کند. محتمل است که او فکر می‌کرده زمین گویی است در فضا؛ به هر صورت بسیاری از فلاسفهٔ بعدی این نظریه را پذیرفته‌اند.

فیثاغورس و موسیقی

فیثاغورس موسیقی‌دان

از موسیقی نظری تألیف گافوریوس چاپ میلان ۱۴۹۲، یکی از نخستین کوششهای خام برای حکاکی تصویر فیثاغورس بر روی چوب و نخستین تجسم وی در مقام موسیقی‌دان. همچنین در همان کتاب او به صورت نوازندهٔ ارکستر نشان داده شده. گویند فیثاغورس کشف کرد که با گرفتن نصف طول یک سیم می‌توان یک هنگام و با گرفتن $\frac{۲}{۳}$ طول آن یک پنجم را نواخت و این هماهنگی به «نسبت تألیفی» موسوم شد، چون

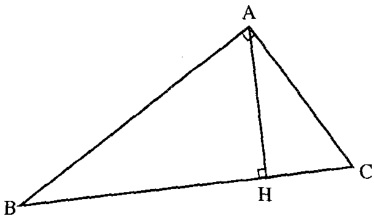
$$۱:\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۲}{۳}:\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۲}$$

با این که در ظاهر وی برخی اطلاعات مربوط به موسیقی را از مصریان اخذ کرده بود، عموماً او را مخترع علم موسیقی یا قانون تألیفی (روایت محض) می‌نامند، ولی ما از نوتهای او یا دستگاهی که به‌کار می‌برد چیزی نمی‌دانیم. با علاقه‌ای که به موسیقی و عدد داشته می‌توان اعتقاد داشت، عدد دو را به خاطر نقش آن در نسبت تألیفی سخت می‌ستوده است. ظاهراً عقیده داشته که فواصل میان اجرام سماوی را می‌توان از روی قوانین تألیف موسیقی تعیین کرد و آیین هماهنگی افلاک از این جا سرچشمه گرفته است.

نفوذ فیثاغورس آن چنان عظیم بود که دولت، فرقهٔ اخوت او را منحل کرد، ولی اعضای آن، آیین فیثاغورس را در سراسر یونان انتشار دادند. فیثاغورس از کروتون تبعید شد و احتمالاً در تارنتوم مرد. با این همه، دو قرن بعد، در جریان جنگهای ساموس در ۳۴۳ ق. م سنای روم بنا به توصیهٔ غیبگوی معبد دلف، مجسمهٔ او را در مقام «فرزانه‌ترین و دلیرترین یونانی» برپا کرد، و مردم عادت کردند او را معلم نوما شاه بدانند، همچنان که بعدها خاندان بزرگ آیمیلیان بدین ادعا مفتخر بودند که از بازماندگان او هستند.

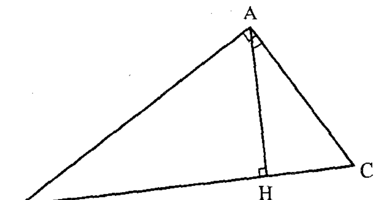
۳۱۳. قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع واسطهٔ هندسی است بین وتر و تصویر همان ضلع بر وتر.

۳۱۴. عکس قضیه. ثابت کنید هرگاه در مثلث ABC زاویهٔ B حادّه بوده و ضلع AB واسطهٔ هندسی بین BC و تصویر AB بر BC باشد، زاویهٔ A قائمه است. یعنی:



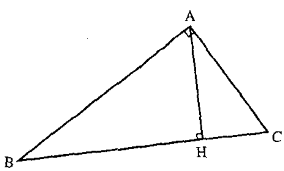
$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow B\hat{A}C = 90^\circ$$

۳۱۵. قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ وتر است. یعنی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، اگر H پای ارتفاع رأس A باشد، $AH^2 = HB.HC$ است.



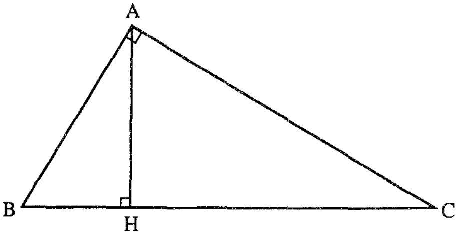
تبصره. با در نظرگرفتن محوری موازی BC رابطهٔ بالا را به‌صورت $\overline{AH}^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$ می‌توان نوشت.

۳۱۶. عکس قضیه. ثابت کنید هرگاه، در مثلث ABC زاویه‌های B و C حاده بوده و ارتفاع AH واسطهٔ هندسی مابین دو قطعه خط HB و HC باشد، زاویهٔ A قائمه‌است. یعنی: $AH^2 = HB.HC \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$



تبصره. این قضیه را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:
هرگاه AH ارتفاع رأس A از مثلث ABC و $AH^2 = -\overline{HB}.\overline{HC}$ باشد، مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است. (چون زاویه‌های B و C حاده‌اند. پس نقطهٔ H بین دو نقطهٔ B و C است.)

۳۱۷. قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصلضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه، مساوی است با، حاصلضرب وتر در ارتفاع نظیر آن. یعنی اگر AH ارتفاع وارد بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد، داریم:

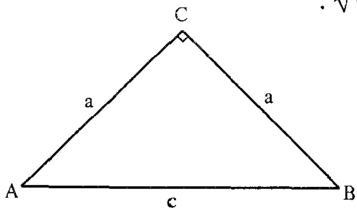


$$AB.AC = AH.BC$$

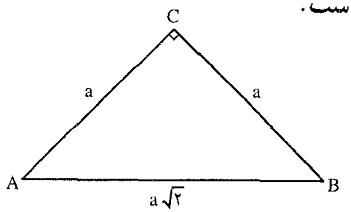
مثلثهای خاص

قضیهٔ فیثاغورس اطلاعاتی در مورد چند مثلث خاص در اختیارمان قرار می‌دهد.

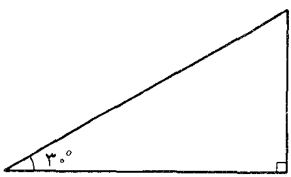
۳۱۸. قضیه. اندازهٔ وتر مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه، برابر است با حاصلضرب اندازهٔ یکی از دو ساق در $\sqrt{2}$.



۳۱۹. اگر اندازهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی $\sqrt{2}$ برابر هریک از دو ساق آن باشد، زاویهٔ روبه رو به قاعده، قائمه است.



۳۲۰. قضیه. در مثلث $۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ$، ضلع روبه رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است و بعکس.

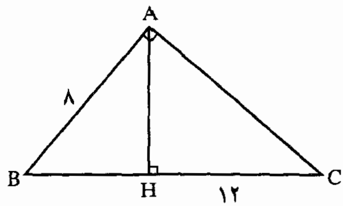


۳۲۱. قضیه. در مثلث $۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ$ اندازهٔ ساق بزرگ برابر است با اندازهٔ وتر در $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$.

۲.۵. زاویه

۱.۲.۵. اندازهٔ زاویهٔ مثلث

۳۲۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، $AB=۸$ و $HC=۱۲$ است (H پای ارتفاع رأس A است). اندازهٔ زاویهٔ B را بیابید.



۳۲۳. در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر، دو برابر حاصلضرب دو ضلع دیگر است. یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث برابر است با :

الف) ۱۵° ب) ۳۰° ج) ۴۵° د) ۶۰° هـ) ۷۵°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۳۲۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در زاویهٔ A، مقدار زاویهٔ B را چنان تعیین کنید که بین ارتفاع AH و دو ضلع مثلث، رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{۱}{AB}+\frac{۲}{AC}=\frac{m}{AH}\ ,\ (m>۰)$$

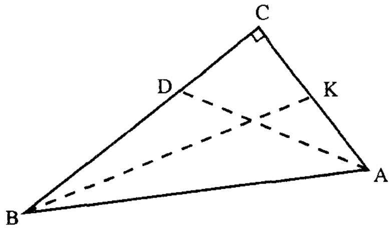
و برحسب مقدارهای مختلف m، بحث کنید.

۳۲۵. در مثلث ABC داریم : $AB=۵$ ، $BC=۵\sqrt{۳}$ و $AC=۱۰$. اندازهٔ زاویه‌های مثلث را بیابید.

۳۲۶. در مثلثی، طول هریک از دو ارتفاع آن، از طول ضلعی که بر آن رسم شده است، کوچکتر نیست. زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۴

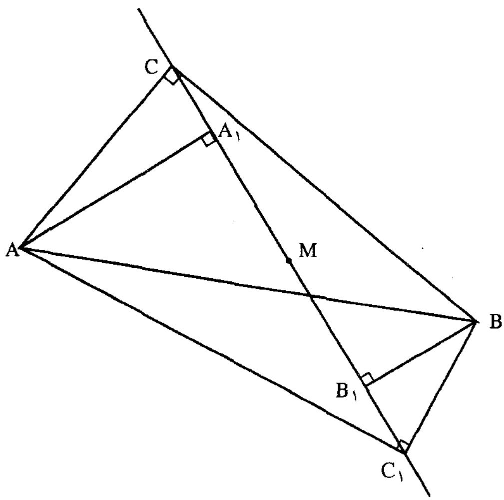
۳۲۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، AD و BK، نیمساز زاویه‌های حاده را رسم می‌کنیم. اگر $AB^۲ = AD.BK$ باشد، زاویه‌های مثلث را پیدا کنید.



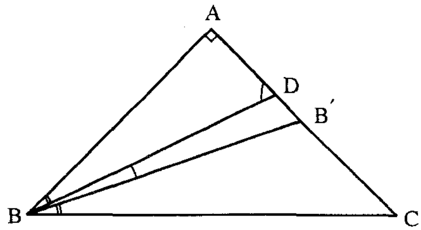
۲.۲.۵. اندازهٔ زاویهٔ شکلهای ایجاد شده

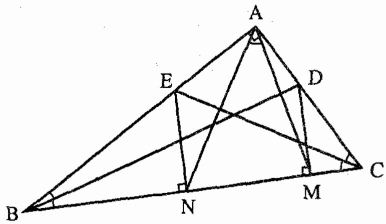
۳۲۸. از رأس قائمهٔ C در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC خطی را رسم می‌کنیم. از رأسهای A و B مثلث، عمودهای $AA_۱$ و $BB_۱$ را بر این خط عمود می‌کنیم. رأس C نسبت به نقطهٔ M، میانگاه پاره‌خط $A_۱B_۱$ روی نقطهٔ $C_۱$ منعکس می‌شود، ثابت کنید که:

$$A\hat{C_۱}B = \frac{\pi}{۲}$$



۳۲۹. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ یکی از زاویه‌های حاده برابر α است. اندازهٔ زاویهٔ بین نیمساز و میانهٔ رسم شده از رأس این زاویه را پیدا کنید.





۳۳۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، نیمسازهای زاویه‌های درونی B و C (BD و CE) را رسم نموده از D و E عمودهای DM و EN را بر BC فرود می‌آوریم. اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{A}N$ را تعیین کنید.

از المپیادهای ریاضی کشورهای دیگر، ۱۹۹۵

۳۳۱. در مثلث abc، زاویهٔ b قائمه، درازای وتر [ac] برابر ۱۲ سانتیمتر، درازای ضلع [bc] برابر ۶ سانتیمتر، و میانهٔ am با وتر، زاویهٔ حادهٔ x را می‌سازد. مقدار tanx چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۹}$ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ ج) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ د) $\frac{\sqrt{۳}}{۷}$ هـ) $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

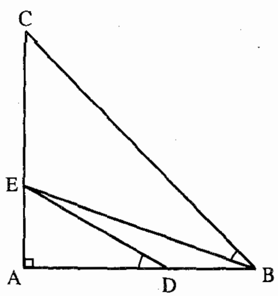
۳۳۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شدهٔ ABC، وتر BC، به طول a، را به n پاره‌خط مساوی (n عددی فرد است) تقسیم کرده‌ایم. فرض می‌کنیم زاویهٔ حاده‌ای که پاره‌خطی که شامل وسط وتر مثلث است از A به آن زاویه دیده می‌شود، α باشد؛ نیز فرض می‌کنیم h طول ارتفاع وارد بر وتر باشد. ثابت کنید:

$$\tan\alpha=\frac{۴nh}{(n^{۲}-۱)^{a}}$$

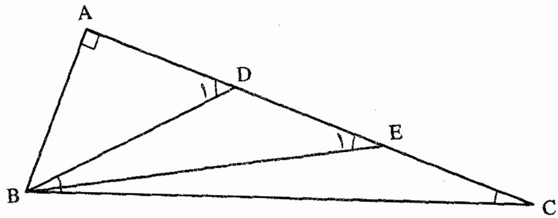
المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۰

۳.۲.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

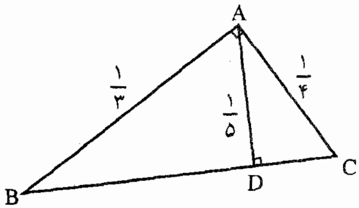
۳۳۳. روی دو ضلع AB و AC از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، بترتیب دو نقطهٔ D و E را در دو سوم و یک سوم ضلعها، ابتدا از A اختیار می‌کنیم. ثابت کنید: زاویهٔ ADE با زاویهٔ EBC مساوی است.

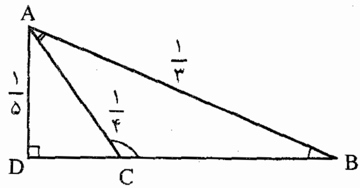


۳۳۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ضلع AC سه برابر AB است. اگر D و E ضلع AC را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند به طوری که، $AD = DE = EC$ باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ $A\hat{C}B$ و $A\hat{E}B$ مساوی 45° است.



۳۳۵. در مثلث ABC، $AB=\frac{1}{3}$ ، $AC=\frac{1}{4}$ و طول ارتفاع AD مساوی با $\frac{1}{5}$ است (واحد دسی‌متر است). مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع BC. مسأله بر حسب آن که زاویهٔ C حاده یا منفرجه باشد، دو حالت دارد. ثابت کنید در یکی از این دو حالت، زاویهٔ BAC قائمه است و در حالت دیگر $|\hat{B}-\hat{C}|=90^\circ$.





۳۳۶. α، β و γ، زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. درستی این رابطه را ثابت کنید:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+$$
$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0$$

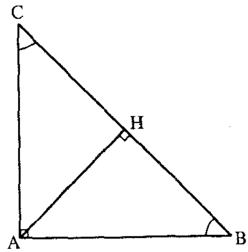
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۷

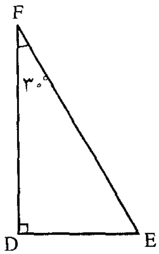
۳۳۷. نقطه‌های P و Q روی وتر AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده‌اند، به نحوی که $AP=CQ=\frac{1}{n}(AC)$. ثابت کنید: $\operatorname{cotg}A\hat{B}P.\operatorname{cotg}Q\hat{B}C=(n-1)^2$.

۳.۵. ضلع

۱.۳.۵. اندازهٔ یک ضلع

۳۳۸. در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است و $\hat{B}=\hat{C}=45^\circ$ و $BC=6$ ؛ AB را بیابید.





۳۳۹. در مثلث DEF، زاویهٔ D قائمه و $\hat{F}=30^\circ$ است.

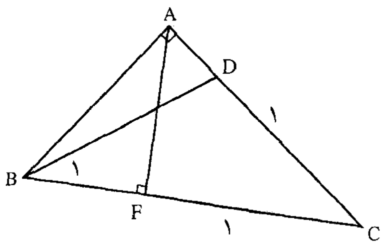
الف. طول $\overline{DE}$ چه‌قدر است، اگر $FE=6$؟ اگر $FE=10$؟ اگر $FE=15$؟ اگر $FE=25$؟

ب. طول $\overline{DF}$ چه‌قدر است، اگر $DE=2$؟ اگر $DE=5$؟ اگر $DE=8$؟ اگر $FE+DE=12$؟

۳۴۰. طول ضلع بزرگ مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ را بیابید، اگر وتر آن ۴ ؛۱۸ ؛۹۸ ؛ $2\sqrt{3}$ ؛ ۱۳ باشد.

۳۴۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای، دارای ساقهای مساوی و مساحت ۴۰ است. طول هر ساق آن چه‌قدر است؟

۳۴۲. مثلث ABC در زاویهٔ A قائمه است. نقطهٔ F بر وتر BC و نقطهٔ D بر ضلع AC به‌گونه‌ای واقع است که AF بر BC عمود و $BD=DC=CF=1$. اندازهٔ ضلع AC از این مثلث چه‌قدر است؟



الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) $\sqrt[3]{2}$ د) $\sqrt[3]{3}$ هـ) $\sqrt[4]{2}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۳۴۳. طولهای ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه، سه عدد صحیح هستند و یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. کدام یک از عددهای زیر ممکن است طول یکی از ضلعهای این مثلث باشد؟

الف) ۲۲   ب) ۵۸   ج) ۸۱   د) ۹۱   هـ) ۳۶۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱

۳۴۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌های وتر c و ضلع a، دو عدد صحیح متوالی‌اند. مربع ضلع دیگر برابر است با :

الف) ca ب) $\frac{c}{a}$ ج) $c+a$ د) $c-a$ هـ) هیچ‌یک از اینها

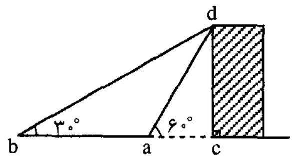
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۳۴۵. روی وتر AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر ABD با وتر AB ساخته می‌شود. اگر $\overline{BC}=۱$، $\overline{AC}=b$ و $\overline{AD}=۲$، آن‌گاه $\overline{BD}$ برابر است با :

الف) $\sqrt{b^۲+۱}$ ب) $\sqrt{b^۲-۳}$ ج) $\sqrt{b^۲+۱}+۲$ د) $b^۲+۵$ هـ) $\sqrt{b^۲+۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

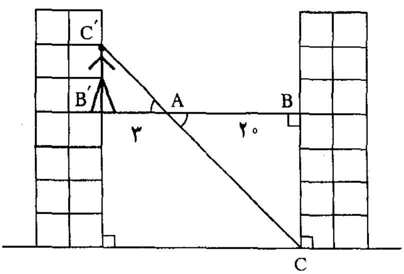
۳۴۶. برجی بر لبهٔ خندقی بنا شده است. نقطهٔ a بر لبهٔ دیگر خندق و نقطهٔ b به فاصلهٔ ۱۰۰ متر از a، و هر دو نقطه بر خطی افقی می‌گذرند. برج از نقطهٔ a به زاویهٔ °۶۰ و از نقطهٔ b به زاویهٔ °۳۰ دیده می‌شود. ارتفاع برج چه‌قدر است؟



الف) کمتر از ۶۰ متر   ب) بین ۶۰ و ۷۰ متر   ج) بین ۷۰ و ۸۰ متر
د) بین ۸۰ و ۹۰ متر   هـ) بیش از ۹۰ متر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۳۴۷. این آقا می‌خواهد ارتفاع پل بین دو ساختمان را اندازه‌گیری کند. طول قد این آقا ۱/۸ متر است. با توجه به شکل،



الف. چرا دو مثلث ABC و AB′C′ متشابه‌اند؟

ب. اگر AB′ = ۳m ، AB = ۲۰m ، ارتفاع پل یعنی طول BC را به‌دست آورید.

۳۴۸. روی دریاچهٔ آرام، به اندازهٔ نیم پا گل زیبایی ایستاده است. او تنهاست. وزش باد آغاز شد و آن‌را به‌طرفی خم کرد. دیگر هیچ بخشی از گل روی آب نیست. ماهیگیر، آن‌را در دو پایی جایی که روییده بود، پیدا کرد. حالا پرسشی دارم:
عمق دریاچه در این جا چه قدر است؟

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از بهاسکارا، از مسأله‌های هندی

مسأله‌های هندی

هند فرهنگی بزرگ، غنی و بکر دارد، که سرچشمهٔ آن‌را باید در ژرفای تاریخ جست و جو کرد. هزاران سال پیش از این، و حتی پیش از میلاد، در هند، کانالهای آبیاری و دستگاه آب‌رسانی شهری به‌وجود آمده بود و ساختمانهای چند طبقه با آجر پخته وجود داشت. هندیها، از زمانهای بسیار دور، با هنر سرامیک‌سازی آشنا بودند و چیزهای زیادی را از گل پخته به‌دست می‌آوردند. از چرخ کوزه‌گری استفاده می‌کردند و هنر جواهرسازی را (با استفاده از فلزها و سنگهای قیمتی)، به حد کمال خود رسانده بودند.

حتی در دورترین دورانهای تاریخی، آگاهیهای بسیاری در زمینهٔ دستور زبان، اخترشناسی و بعضی از دانشهای دیگر، در سرزمین هند وجود داشت.

بیشترین موفقیّت دانشمندان هندی، در زمینهٔ ریاضیات بود. آنها پایه‌های اصلی حساب و جبر را بنا نهادند و یونانیها، در واقع، کارهای آنها را دنبال کردند.

بزرگترین موفقیت ریاضیدانان هندوستان را باید قبل از همه، کشف دستگاه موضعی عددنویسی دانست که از ده رقم هندی تشکیل می‌شد و شامل صفر هم بود. هندیها، صفر را «سونیا» می‌نامیدند که به معنای «هیچ» بود.

یادآوری این مطلب جالب است که در ابتدا، صفر را با یک نقطه نشان می‌دادند و تنها بعد از گذشت چند سده، دایرهٔ توخالی کوچک را به جای آن انتخاب کردند. از این که، کدام دانشمند هندی، دستگاه دهدهی را برای نخستین بار به‌کار برده است، اطلاعی نداریم. با وجود این، دلیلهایی وجود دارد که می‌توان حکم کرد که، این دستگاه در ابتدای سدهٔ اوّل میلادی کشف شده است. ولی، به‌کاربردن علامت صفر را، باید به سدهٔ دوم میلادی مربوط دانست.

به‌عنوان مشهورترین ریاضیدانان هندی، می‌توان از آریابهاتا (اواخر سدهٔ اوّل)، برهماگوپتا (سدهٔ هفتم) و بهاسکارا (سدهٔ دوازدهم) نام برد.

ریاضیدانان هندی دوران کهن دوست داشتند در اجتماعهای عمومی مردم، با هم مسابقه دهند. یکی از نویسندگان هندی سدهٔ هفتم، در پایان کتاب خود می‌نویسد: «همان‌طور که خورشید، با پرتوهای درخشان خود، ستارگان را محو می‌کند، یک حکیم هم، وقتی که در اجتماعهای مردم، مسأله‌های ریاضی را طرح و حل می‌کند، بر افتخارهای دیگران، خط بطلان می‌کشد».

یادآوری می‌کنیم که تمام راهنماییها و حلهایی که در این جا از مسأله‌های هندی داده شده است، با علامت‌گذاریهای امروزی است.

۳۴۹. مطلوب است ارتفاع یک شمع، به‌شرطی که سایهٔ یک تکه چوب قائم را در دو ضلع متفاوت و، همچنین، فاصلهٔ بین دو تکه چوب را بدانیم.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از برهماگوپتا

۳۵۰. برکهٔ آبی به ضلع یک «چژان» وجود دارد. در مرکز آن، یک نی روییده است که درست یک «چی» از آب بیرون زده است. اگر نی را به‌طرف کنار برکه خم کنیم، سر نی به کنار برکه می‌رسد. عمق برکه و ارتفاع نی را پیدا کنید (هر «چژان» برابر است با ۱۰ «چی»).

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از مسأله‌های چینی

به‌سختی می‌توان زمانی را پیدا کرد که چینیها، برای نخستین بار از قانون مربوط به ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه، یعنی قضیهٔ فیثاغورس، استفاده کرده‌اند. ولی این مطلب روشن است که آنها، از زمانهایی بسیار دور، با این قضیه آشنا بوده‌اند. آن‌طور که سندها گواهی می‌دهند، چینیها در حدود ۲۲۰۰ سال پیش از میلاد، از قضیهٔ فیثاغورس، در مورد مثلثی که ضلعهای آن ۳، ۴ و ۵ باشد، آگاهی داشتند.

در «ریاضیات در نه کتاب»، از قضیهٔ فیثاغورس، به نام «هو او هو» نام برده شده است. طبق این قاعده، می‌توان با معلوم بودن وتر و یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، ضلع دیگر مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست آورد. همچنین می‌توان وتر را، با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه محاسبه کرد.

قاعدهٔ «هو او هو»، این‌طور بیان می‌شود : «هرکدام از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن، جمع کن، از این مجموع جذر بگیر، حاصل برابر وتر می‌شود. به همین ترتیب، ضلع افقی مجاور به زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن، آن‌را از ضرب وتر در خودش کم کن، از باقی‌مانده جذر بگیر، ضلع قائم مجاور به زاویهٔ قائمه به‌دست می‌آید».

اصطلاحهای «هواو» و «هو» به معنای ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه هستند. ضمناً «هواو» به ضلع قائم و معمولاً کوچکتر، و «هو» به ضلع افقی و معمولاً بزرگتر، گفته می‌شده است. معنای تحت‌اللفظی «هواو» ـ قلاب و «هو» ـ دنده یا رابط است. از قاعدهٔ «هو او هو»، در تمام ۲۴ مسألهٔ کتاب نهم رسالهٔ «ریاضیات در نه کتاب» استفاده شده است و به همین مناسبت، کتاب نهم را «هواوهو» می نامند.

مسأله‌های چینی

ریاضیات، زمینه و سابقه‌ای طولانی در فرهنگ چین دارد. بسیاری از کشفها، چه در

زمینهٔ دانش و چه در زمینهٔ صنعت، خیلی قبل از سایر کشورها، در چین و به‌وسیلهٔ دانشمندان چینی، انجام گرفته است.

دانشمندان چینی، برای نخستین بار در تاریخ صنعت جهان، قطب‌نما (سدهٔ سوم پیش از میلاد)، زلزله‌نگار (سدهٔ دوم پیش از میلاد) و سرعت سنج را کشف کردند. مردم چین، خیلی پیش از اروپایی‌ها طرز تهیهٔ شوره را برای به‌دست آوردن باروت، می‌دانستند (سدهٔ دهم). استادکاران چینی، حتی در سدهٔ هفتم پیش از میلاد، از راه تهیهٔ ظرفهای چینی باخبر بودند. همه می‌دانند که چین زادگاه ابریشم و انواع رنگها و روغنهای رنگی است. در سدهٔ یازدهم «بی‌شن» آهنگر؛ وسیله‌ای برای چاپ درست کرد که با آنچه ما امروز داریم، تفاوت کمی دارد.

اخترشناسی توضیحی، یعنی دانش جسمهای آسمانی و تقویم، در چین به وجود آمد. دانشمندان چینی، در ژرفای تاریخ، کار مشاهدهٔ منظم آسمان را آغاز کردند و به ثبت موقعیتها و حرکت ستاره‌ها پرداختند. «شی شن»، اخترشناس چینی، در سدهٔ چهارم پیش از میلاد، نخستین سیاههٔ ستارگان را تنظیم کرد. در جدول «شی شن»، شرح ۸۰۰ ستاره داده شده است. در اروپا، چنین سیاهه‌ای، تنها در سدهٔ دوم میلادی تنظیم شد (کاتالوگ هیپارک).

اخترشناسان چینی، برای انجام مشاهده‌های خود، ساختمانهای مجهزی داشتند که آنها را رصدخانه می‌گفتند. بنایی که به نام رصدخانهٔ پکن در حال حاضر وجود دارد، با ابزارهای قدیمی آن، در سال ۱۲۷۹ میلادی، در حومهٔ پکن، ساخته شده است.

۳۵۱. ستون در فاصلهٔ مجهولی از یک شخص قرار دارد. ۴ سکو داریم که دو به دو به فاصلهٔ یک «چژان» از یکدیگر قرار دارند. ناظری چنان ایستاده است که سکو در سمت چپ او واقع شده است و خودش در کنار سکوی طرف راست و پایین ایستاده است. این ناظر، ستون را در فاصلهٔ ۳ «تسون» از سکوی بالا و سمت راست می‌بینند. فاصلهٔ شخص را تا ستون پیدا کنید.

از ریاضیات در نه کتاب، مسألهٔ چینی

۳۵۲. کوه در غرب ستون قرار دارد و ارتفاع آن مجهول است. فاصلهٔ کوه تا ستون، برابر ۵۳ «لی» است. ارتفاع ستون، برابر ۹ «چژان» و ۵ «لی» است. شخصی در فاصلهٔ ۳ «لی» در شرق ستون ایستاده است و قلهٔ کوه را با رأس ستون در یک امتداد می‌بیند. چشم این شخص در ارتفاع ۷ «چی» واقع شده است. ارتفاع کوه را پیدا کنید.

از ریاضیات در نه کتاب، مسألهٔ چینی

۲.۳.۵. اندازهٔ وتر

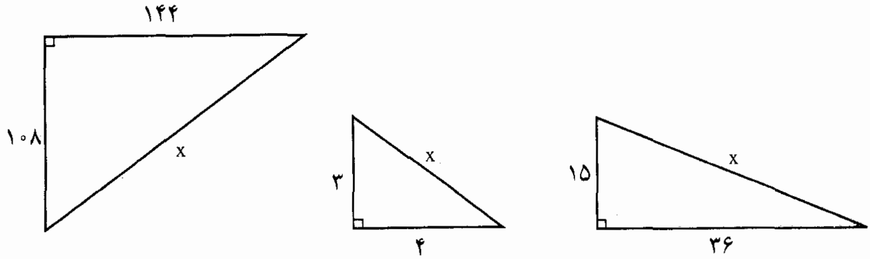
۳۵۳. الف. طول ضلعهای زاویهٔ قائمه یک مثلث قائم‌الزاویه ۳ و ۴ است. طول وتر مثلث

چه‌قدر است؟

ب. اگر طول ضلعهای زاویهٔ قائمه را دو برابر کنیم. در این حالت طول وتر چه‌قدر است؟

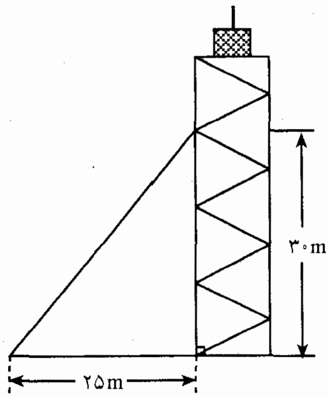
پ. اگر طول ضلعهای زاویهٔ قائمه را ۳ برابر کنیم. در این حالت طول وتر چه‌قدر است؟

۳۵۴. در هریک از شکلهای زیر x را بیابید (با درنظرگرفتن سه‌تایی فیثاغورسی).



(پ) (ب) (الف)

۳۵۵. یک آنتن تلویزیونی از ارتفاع ۳۰ متری، توسط سیمهایی به‌طور قائم نگاه داشته شده است. این سیمها به فاصلهٔ ۲۵ متر از پایهٔ آنتن، به زمین وصل شده‌اند. طول هریک از سیمها چه‌قدر است؟



۳۵۶. نسبت طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر مساحت مثلث ۲۷ باشد، طول وتر چه‌قدر است؟

۳۵۷. یکی از ساقهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای، دو برابر ساق دیگر آن است. اگر مساحت مثلث ۷۲ سانتیمترمربع باشد، طول وتر مثلث را بیابید.

۳۵۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، طول میانه‌های وارد بر ضلعهای زاویهٔ قائمه، معادل $\sqrt{۵۲}$cm و $\sqrt{۷۳}$cm است. طول وتر آن را بیابید.

۳۵۹. اندازه‌های میانه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، که از رأسهای زاویه‌های حاده ترسیم می‌شوند، برابرند با ۵ و $\sqrt{۴۰}$. اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با :

الف) ۱۰ ب) $۲\sqrt{۴۰}$ ج) $\sqrt{۱۳}$ د) $۲\sqrt{۱۳}$ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳۶۰. AB وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. اگر میانهٔ AD به طول ۷ و میانهٔ BE به طول ۴ باشد، طول AB برابر است با :

الف) ۱۰ ب) $۵\sqrt{۳}$ ج) $۵\sqrt{۲}$ د) $۲\sqrt{۱۳}$ هـ) $۲\sqrt{۱۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۳۶۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، عددهای طبیعی هستند. اندازهٔ وتر این مثلث،

الف) ممکن است عددی طبیعی باشد.

ب) ممکن است عددی گویا، اما غیرطبیعی باشد.

ج) هیچ‌گاه عددی گویا نیست.

د) ممکن است عددی گویا و ممکن است عددی گنگ باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۳۶۲. در یک مثلث قائم‌الزاویه، با دو نقطه وتر را به سه قسمت برابر بخش می‌کنیم، sinx و cosx طول پاره‌خطهایی است که این دو نقطه را به رأس زاویهٔ قائمه وصل می‌کنند، x عدد حقیقی است و $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$. طول وتر مثلث برابر است با :

الف) $\frac{۴}{۳}$ ب) $\frac{۳}{۲}$ ج) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$ د) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۳}$

هـ) مقداری که از روی اطلاعات مفروض یکتا به‌دست نمی‌آید.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰

۳۶۳. اگر a وتر و b و c ضلعها و h ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشند، ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهای زاویهٔ قائمه‌اش $b+c$ و h باشند، وترش $a+h$ است.

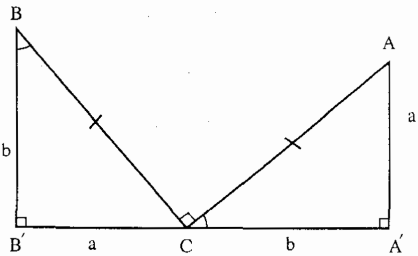
۳۶۴. نیزه‌ای به‌طور عمودی در آب قرار گرفته و به اندازهٔ ۳ ارش از آب بیرون است. باد نیزه را منحرف کرد و آن‌را در آب، به این ترتیب غرق کرد که رأس آن بر سطح آب قرار گرفت و پای آن بر جای سابق خود باقی ماند. فاصلهٔ بین موقعیت اوّل و موقعیت دوم آن، برابر ۵ ارش است. می‌خواهیم ارتفاع نیزه را پیدا کنیم.

از غیاث‌الدین جمشید کاشانی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

مسأله‌های ایرانی

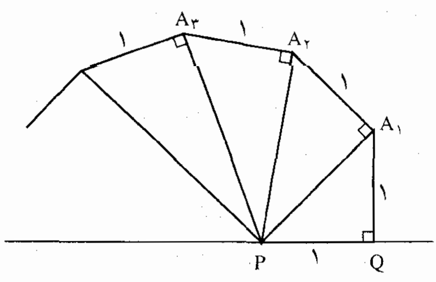
قبلاً به این نکته اشاره کنیم که در بیشتر کتابهای تاریخی، وقتی از «فرهنگ عربی» صحبت می‌شود، به معنای فرهنگی است که در سرزمینهای گوناگون تحت سلطهٔ عربها پا گرفته است. به همین علت، فرهنگ ایرانی هم، در دوران بعد از تسلط عربها، غالب به همین نام ذکر شده است. فرهنگ این ملتها، یعنی ملتهای آسیای میانه، ماوراء قفقاز و بخصوص ایرانیها، در دوره‌ای که نزدیک به پنج سده را در بر می‌گیرد، از سدهٔ نهم تا سدهٔ شانزدهم میلادی، درخششی فوق‌العاده داشته است. دانشمندان ایرانی و آسیای میانه در زمینهٔ حساب، دستگاه موضعی عددنویسی شصت شصتی را تکامل دادند، دستگاهی که در آن عدد ۶۰، به‌عنوان مبنای عددشماری و عددنویسی قرار دارد. کسرهای دهدهی را کشف کردند و دستگاه موضعی عددنویسی دهدهی را به‌صورت گسترده‌ای، معمول کردند.

از میان بزرگترین دانشمندان این دوره، می‌توان از محمدبن موسی خوارزمی (سدهٔ نهم)، ابوالوفا بوزجانی (سدهٔ دهم)، ابن سینا (سدهٔ یازدهم)، ابوریحان بیرونی (سدهٔ یازدهم)، حکیم عمر خیام (سدهٔ دوازدهم)، خواجه نصیرالدین طوسی (سدهٔ سیزدهم)، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (سدهٔ چهاردهم) و غیر آن نام برد.



۳۶۵. پنجرهٔ A در سمت راست کوچه به ارتفاع a و پنجرهٔ B در سمت چپ کوچه به ارتفاع b واقع است. نردبانی را از پنجرهٔ A در سطح قائم پنجره‌های A و B که مشترک است بر سطح کوچه تکیه داده و برگردانده و بر پنجرهٔ B قرار می‌دهیم دو ضلع نردبان بر هم عمود است. عرض کوچه و طول نردبان را پیدا کنید.

۳۶۶. در شکل زیر، طول هریک از ضلعهای زاویهٔ قائمه در مثلث PQA_1، برابر ۱ سانتیمتر است.



الف) طول وتر PA_1 چه‌قدر است؟

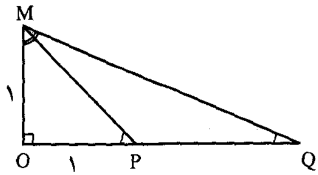
پاره‌خط A_1A_2 نیز به‌طول ۱ سانتیمتر و بر وتر PA_1 عمود است. طول پاره‌خط A_2A_3 نیز ۱ سانتیمتر است و بر PA_2 عمود است، . . . .

ب) طول پاره‌خط PA_2 چه‌قدر است؟

پ) طول پاره‌خط PA_3 چه‌قدر است؟

ت) طول n ـ امین پاره‌خط، یعنی PA_n چه‌قدر است؟

۳۶۷. در مثلث MOQ، $\overline{MO}\perp\overline{OQ}$ ، $MO = OP = ۱$ و $MP = PQ$. در این صورت MQ، $\hat{Q}$ و $Q\hat{M}O$ را بیابید.

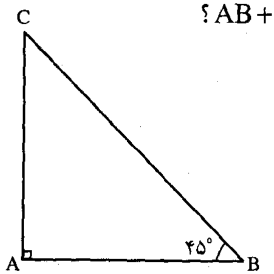


۳۶۸. دو نفر در یک جا ایستاده‌اند. معیار راه رفتن A برابر ۷ و معیار راه رفتن B برابر ۳ می‌باشد. B به‌طرف مشرق می‌رود. A، ۱۰ «بو» به‌طرف جنوب می‌رود، بعد راه خود را کج می‌کند و به‌طرف شمال شرقی حرکت می‌کند، تا به B برسد، هرکدام از دو نفر A و B چه قدر راه رفته‌اند؟

از ریاضیات در نه کتاب، از مسأله‌های چینی

۳۶۹. زاویه‌های حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه همنهشتند و طول یکی از ساقها ۱۵ است. طول وتر مثلث چه‌قدر است؟

۳۷۰. در مثلث ABC، زاویهٔ A قائمه است و $\hat{B} = ۴۵^\circ$. طول وتر $\overline{BC}$ چه‌قدر است، اگر $AB = ۳$ ؟ اگر $AC = ۵$ ؟ اگر $AB = ۶$ ؟ اگر $AB + AC = ۸$ ؟



۳.۳.۵. اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه

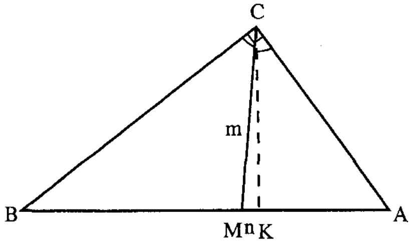
۳۷۱. نقطه‌ای بر روی وتر مثلث قائم‌الزاویه که از ضلعهای قائمهٔ مثلث همفاصله است، وتر را به دو قطعه به طولهای ۳۰cm و ۴۰cm تقسیم می‌کند. طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ مثلث را به‌دست آورید.

۳۷۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول وتر AB مساوی است با ۴۰ متر و یکی از زاویه‌های حاده سه برابر دیگری است. مطلوب است طول ضلعهای زاویهٔ قائمه.

۳۷۳. طول یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۴}{۵}$ دیگری است. مساحت مثلث ۳۲۰ سانتیمتر مربع است. طول ضلعهای زاویهٔ قائمه را بیابید.

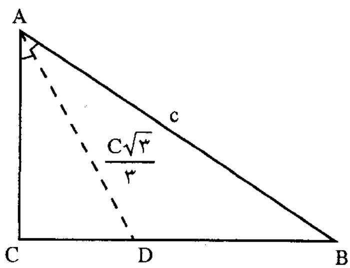
۳۷۴. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۶۰ سانتیمتر و طول ارتفاع وارد بر وتر برابر ۱۲ سانتیمتر است. اندازهٔ ضلعهای زاویهٔ قائمه این مثلث را به‌دست آورید.

۳۷۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، از رأس زاویهٔ قائمهٔ C، نیمساز CK و میانهٔ CM را رسم می‌کنیم. اگر $CM = m$ و $KM = n$ باشد، در آن صورت طول ضلعهای زاویهٔ قائمه را به‌دست آورید.



۳۷۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر ۲۰ سانتیمتر است و ارتفاع نظیر وتر، بر آن، دو پاره‌خط متناسب با عددهای ۱۶ و ۹ جدا می‌کند. اندازهٔ ضلعهای مثلث را حساب کنید.

۳۷۷. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول وتر برابر c و طول نیمساز یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث برابر $\frac{c\sqrt{۳}}{۳}$ است. طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ مثلث را پیدا کنید.



۴.۳.۵. اندازهٔ وتر و یک ضلع

۳۷۸. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه ۸ سانتیمتر، و اندازهٔ تصویر آن بر وتر ۴ سانتیمتر است. سایر ضلعهای مثلث را حساب کنید.

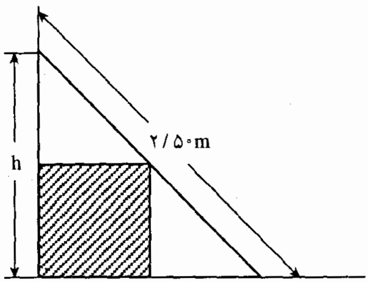
۳۷۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌ها 30° و ضلع مقابل آن زاویه ۸ سانتیمتر است. اندازه‌های سایر ضلعها و ارتفاع نظیر وتر مثلث را تعیین کنید.

۳۸۰. طول دیوار چه‌قدر است؟

اگر این نردبان را به‌طور عمودی کنار دیوار بگذاریم، انتهای آن ۱۰ سانتیمتر بالاتر از دیوار قرار می‌گیرد، و اگر پای نردبان را به فاصلهٔ ۷۰ سانتیمتر از پای دیوار کنار بکشیم، تا نردبان به‌طور مایل قرار گیرد، انتهای فوقانی آن بر لبهٔ دیوار منطبق می‌شود. طول دیوار را بیابید.

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۳۸۱. معمّای نردبان:



یک صندوق مکعبی به ضلع ۷۰ سانتیمتر کنار دیوار و متّصل به آن قرار گرفته است. و مطابق شکل، یک نردبان ۲/۵۰ متری نیز به دیوار تکیه داده شده است، که با لبهٔ میز در تماس است. بیشترین فاصله‌ای که انتهای فوقانی نردبان با سطح زمین دارد، چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۳۸۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، c طول وتر و a و b طول ساقها هستند.

الف. اگر $a=12$ و $b=16$؛ آن‌گاه $c=?$.

ب. اگر $a=24$ و $c=25$؛ آن‌گاه $b=?$.

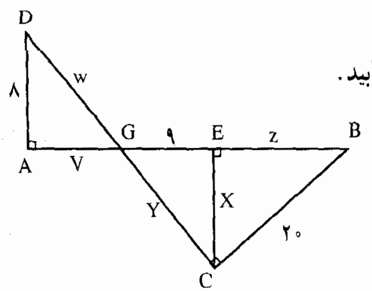
پ. اگر $a=1$ و $b=2$؛ آن‌گاه $c=?$.

ت. اگر $b=18$ و $c=20$؛ آن‌گاه $a=?$.

ث. اگر $a=7$ و $b=7$؛ آن‌گاه $c=?$.

ج. اگر $a=6$ و $c=12$؛ آن‌گاه $b=?$.

۳۸۳. در شکل روبه‌رو، V، W، X، Y و Z را بیابید.



۵.۳.۵. اندازهٔ ضلعها

۳۸۴. یکی از ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مکعب کامل است. ضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمهٔ این مثلث، برابر است با تفاضل همان ضلع و کعب آن؛ و وتر مثلث برابر با مجموع آن ضلع و کعب آن است. ضلعهای مثلث را پیدا کنید.

۳۸۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ سانتیمتر، و دو پاره‌خطی که ارتفاع بر وتر پدید می‌آورد به نسبت ۹ و ۱۶ هستند. هریک از ضلعهای مثلث را تعیین کنید.

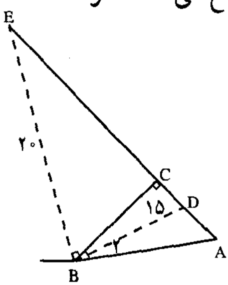
۳۸۶. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازه‌های دو پاره‌خطی که ارتفاع نظیر رأس زاویهٔ قائمه بر وتر جدا می‌کند، m^2a و $(1-m^2)a$ هستند (m عددی حقیقی است). اندازه‌های سه ضلع مثلث را برحسب a و m حساب کنید (به‌ازاء مقدارهای مختلف m بحث کنید).

۳۸۷. یک ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای $2\frac{1}{2}$ برابر ساق دیگر و مساحت آن ۲۰ است. ابعاد آن چه‌قدر است؟

از پاپیروس مسکو

۳۸۸. در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، زاویهٔ قائمه را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم کرده و طول آن برابر m است. ضلعهای مثلث را بیابید.

۳۸۹. در مثلث ABC می‌دانیم زاویهٔ C قائمه است. نیمساز زاویهٔ درونی B، AC را در D و نیمساز زاویهٔ برونی B، AC را در E قطع می‌کند. اگر $BD=15$ و $BE=20$، طول ضلعهای مثلث ABC را بیابید.



۳۹۰. مطلوب است ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که محیط آن $2P$ و ارتفاع وارد بر وتر آن مساوی h باشد.

۳۹۱. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی ۱۳۲ و مجموع مربعهای ضلعهای آن، مساوی ۶۰۵۰ می‌باشد. مطلوب است طول هریک از ضلعهای آن.

۳۹۲. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که عدد معرف وتر آن، با عدد معرف مساحت آن برابر باشد.

از بهاسکارا، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۳۹۳. اگر مساحت و محیط یک مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلعهای آن را پیدا کنید.

از رسالهٔ آغاز هنر محاسبه، مسأله‌های چینی

۳۹۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، لوزی‌ای را طوری محاط کرده‌ایم که همهٔ رأسهای آن روی ضلعهای مثلث واقع بوده و آنها در یک زاویهٔ ۶۰ درجه‌ای با هم مشترک هستند. اگر طول هریک از ضلعهای لوزی ۶cm باشد، طول ضلعهای مثلث را بیابید.

۳۹۵. کدام یک از مجموعه عددهای زیر، می‌تواند طول ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه باشد؟

الف) ۳۰ ، ۴۰ ، ۶۰ ب) ۱۶، ۳۰ ، ۳۴ پ) ۱۰، ۲۴ ، ۲۶

ت) $\frac{۳}{۴}$ ، ۱ ، $۱\frac{۱}{۴}$ ث) ۱/۴ ، ۴/۸ ، ۵/۰ ج) $۱\frac{۲}{۳}$ ، $۲\frac{۲}{۳}$ ، $۳\frac{۱}{۳}$

۳۹۶. کدام دسته از عددهای زیر می‌تواند طولهای ضلعهای مثلثی قائم‌الزاویه باشد؟

الف) ۵ ، ۱۳ ، ۱۲ ب) ۱، $\sqrt{۳}$ ، ۲ پ) ۱، $\sqrt{۲}$ ، ۳

ت) $\frac{۳}{۴}$ ، ۱ ، $۱\frac{۱}{۴}$ ث) ۲۵ ، ۲۴ ، ۷ ج) $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۴}$ ، $\sqrt{۵}$

چ) ۴ ، ۷/۵ ، ۸/۵ ح) $\sqrt{۱۲}$ ، $\sqrt{۳}$ ، ۳

۶.۳.۵. سه‌تاییهای فیثاغورسی

۳۹۷. همهٔ عددهای فیثاغوری را پیدا کنید، یعنی همهٔ سه‌تاییهای درست و مثبت x، y و z، که در معادلهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ صدق می‌کنند.

از فیثاغورس، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

پلیمپتن ۳۲۲

شاید مهمترین لوح ریاضی که تاکنون تجزیه و تحلیل شده، لوحی باشد که به پلیمپتن ۳۲۲ معروف است، بدین معنی که این لوح، فقره‌ای است به شمارهٔ کاتالوگ ۳۲۲ در مجموعهٔ ج. ا. پلیمپتن (Plimpton) در دانشگاه کلمبیا. این لوح به خط بابلی قدیم نوشته شده، که قدمتی بین ۱۹۰۰ تا ۱۶۰۰ ق.م. دارد، و برای اوّلین بار توسط نوگه باوئر و زاکس (Sachs) در سال ۱۹۴۵ توصیف شده است.

شکل، تصویری از این لوح را به‌دست می‌دهد. متأسفانه قسمتی از سرتاسر لبهٔ چپ شکسته و گم شده، و یک لب‌پریدگی عمیق نزدیک قسمت میانی لبهٔ راست و ناحیهٔ پوسته پوسته‌شده‌ای در گوشهٔ بالای سمت چپ، صدمهٔ بیشتری به آن زده‌اند. در موقع معاینه، بلورهایی

۱	۱۶۹	۱۱۹
۲(۱۱۵۲۱)	۴۸۲۵	۳۳۶۷
۳	۶۶۴۹	۴۶۰۱
۴	۱۸۵۴۱	۱۲۷۰۹
۵	۹۷	۶۵
۶	۴۸۱	۳۱۹
۷	۳۵۴۱	۲۲۹۱
۸	۱۲۴۹	۷۹۹
۹	۷۶۹	۴۸۱(۵۴۱)
۱۰	۸۱۶۱	۴۹۶۱
۱۱	۷۵	۴۵
۱۲	۲۹۲۹	۱۶۷۹
۱۳	۲۸۹	۱۶۱(۲۵۹۲۱)
۱۴	۳۲۲۹	۱۷۷۱
۱۵	۱۰۶(۵۳)	۵۶

(الف)

پلیمپتن ۳۲۲. (دانشگاه کلمبیا)

از انواع چسب امروزی در امتداد لبهٔ شکستهٔ سمت چپ لوح مشاهده شد. این، می‌رساند که لوح احتمالاً در موقع حفاری کامل بوده و بعداً شکسته و کوشش شده تا قطعات دوباره به هم چسبانده شوند، و قطعه‌های مزبور بعدها، از نو، از هم جدا شده‌اند. بنابراین، ممکن است قطعهٔ

گمشدهٔ لوح هنوز موجود باشد، اما چون سوزنی در انبارکاه، در جایی بین این مجموعه‌های لوحهای باستانی گم شده است.

خواهیم دید که اگر این قطعهٔ مفقود شده پیدا می‌شد، چه‌قدر جالب می‌بود.

این لوح شامل سه ستون اساساً کامل اعداد است که برای سهولت، در شکل (الف) با نمادگذاری دهدهی معمولی بازنویسی شده‌اند. ستون چهارمی در امتداد لبهٔ شکسته وجود دارد که بخشی از آن ناقص است. این ستون را بعداً بازسازی خواهیم کرد.

روشن است که ستون واقع در منتهی الیه سمت راست، صرفاً برای شمارش سطرها به‌کار می‌آید. در نگاه اوّل به نظر می‌رسد که دو ستون بعدی چندان ترتیب و معنای مشخصی نداشته باشند. اما، ضمن مطالعه معلوم می‌شود که عددهای متناظر در این ستونها، بجز در چهار مورد استثنایی نامقبول، تشکیل وتر و ساق مثلث قائم‌الزاویه‌ای را می‌دهند که ضلعهای آن مقدارهای صحیح دارند. چهار مورد استثنایی شکل (الف) با قراردادن مقدارهای اوّلیه در داخل پرانتزی در سمت راست مقدارهای تصحیح شده، ذکر شده‌اند. برای مورد استثنایی واقع در سطر دوم توضیح پیچیده‌ای داده شده است، ولی علت سه استثنای دیگر را بسادگی می‌توان بیان کرد. مثلاً، در سطر نهم، ۴۸۱ و ۵۴۱ در دستگاه شصتگانی به‌صورت (۸،۱) و (۹،۱) ظاهر می‌شوند. ظهور ۹ به جای ۸ به‌روشنی می‌تواند تنها ناشی از لغزش قلم در موقع نوشتن این عددها به خط میخی باشد. عدد واقع در سطر ۱۳ مجذور مقدار تصحیح شده است، و عدد واقع در سطر آخر نصف مقدار تصحیح شده است. مجموعه‌ای از سه عدد صحیح مثبت، مانند (۳،۴،۵)، که می‌تواند ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، به سه‌تایی فیثاغورسی معروف است. همچنین، درصورتی که سه‌تایی مزبور شامل هیچ عامل مشترک صحیحی بجز واحد نباشد، سه‌تایی فیثاغورسی اوّلیه نامیده می‌شود. مثلاً (۳،۴،۵) یک سه‌تایی اوّلیه است، درحالی که (۶،۸،۱۰) چنین نیست. یکی از دستاوردهای ریاضی متجاوز بر یک هزاره بعد از زمان لوح پلیمپتن نشان دادن این مطلب بود که کلیهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اوّلیهٔ (a ،b ،c) به‌صورت پارامتری به‌وسیلهٔ رابطه‌های:

$$a = ۲uv \ , \quad b = u^۲ - v^۲ \quad , \quad c = u^۲ + v^۲$$

داده می‌شوند که در آنها u و v نسبت به هم اوّلند، دارای زوجیت متفاوت هستند و $u > v$. به‌عنوان مثال، اگر $u = ۲$ و $v = ۱$، سه‌تایی اوّلیهٔ $a = ۴$، $b = ۳$ و $c = ۵$ را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید که بخواهیم a، ساق دیگر مثلثهای قائم‌الزاویهٔ به ضلعهای صحیح را محاسبه کنیم که با وتر c و ساق b داده شده در لوح پلیمپتن معین می‌شوند. سه‌تاییهای فیثاغورسی جدول صفحهٔ بعد را پیدا خواهیم کرد. ملاحظه می‌شود که همهٔ این سه‌تاییها، بجز آنها که در

سطرهای ۱۱ و ۱۵ واقعند، سه‌تاییهای اوّلیه‌اند. برای سهولت بحث، مقادیر پارامترهای u و v را نیز که به این سه‌تاییهای فیثاغورسی منجر می‌شوند، در جدول آورده‌ایم. شواهد به‌خوبی گویای آنند که بابلیهای آن دورهٔ دیرین با نمایش کلی پارامتری سه‌تاییهای فیثاغورسی اوّلیه، به‌گونه‌ای که در بالا نشان داده شده، آشنا بوده‌اند. این شواهد زمانی تقویت می‌شوند که توجه کنیم u و v، و لذا a نیز (چون $a = 2uv$)، اعداد شصتگانی منظمی هستند. به نظر می‌رسد که جدول روی لوح با انتخاب سنجیدهٔ عددهای منظم کوچک برای پارامترهای u و v تشکیل شده باشد.

قاعدتاً انگیزهٔ انتخاب u و v به‌صورت بالا، بایستی عمل بعدی که متضمن تقسیم است، بوده باشد. زیرا عددهای منظم در جدولهای معکوسها ظاهر می‌شوند و برای تحویل تقسیم به ضرب به‌کار می‌روند. بررسی ستون چهارم که نیمی از آن از بین رفته است، پاسخ را می‌دهد.

a	b	c	u	v
۱۲۰	۱۱۹	۱۶۹	۱۲	۵
۳۴۵۶	۳۳۶۷	۴۸۲۵	۶۴	۲۷
۴۸۰۰	۴۶۰۱	۶۶۴۹	۷۵	۳۲
۱۳۵۰۰	۱۲۷۰۹	۱۸۵۴۱	۱۲۵	۵۴
۷۲	۶۵	۹۷	۹	۴
۳۶۰	۳۱۹	۴۸۱	۲۰	۹
۲۷۰۰	۲۲۹۱	۳۵۴۱	۵۴	۲۵
۹۶۰	۷۹۹	۱۲۴۹	۳۲	۱۵
۶۰۰	۴۸۱	۷۶۹	۲۵	۱۲
۶۴۸۰	۴۹۶۱	۸۱۶۱	۸۱	۴۰
۶۰	۴۵	۷۵	۲	۱
۲۴۰۰	۱۶۷۹	۲۹۲۹	۴۸	۲۵
۲۴۰	۱۶۱	۲۸۹	۱۵	۸
۲۷۰۰	۱۷۷۱	۳۲۲۹	۵۰	۲۷
۹۰	۵۶	۱۰۶	۹	۵

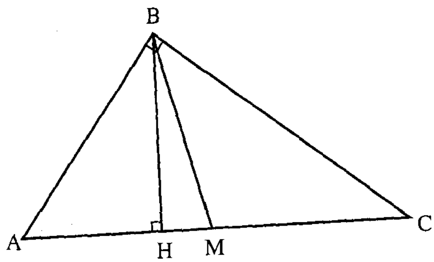
زیرا دیده می‌شود که این ستون شامل مقدارهای $(c/a)^2$ برای مثلثهای مختلف است. برای انجام این تقسیم، ضلع a، و درنتیجه عددهای u و v، باید منظم می‌بودند.

جا دارد که ستون مقدارهای $(c/a)^2$ را قدری دقیقتر بررسی کنیم. البته، این ستون جدولی است که مجذور سکانت زاویهٔ B مقابل به ضلع b از مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست می‌دهد. چون ضلع a منظم است، $\sec\hat{B}$ دارای بسط شصتگانی متناهی است. بعلاوه، با

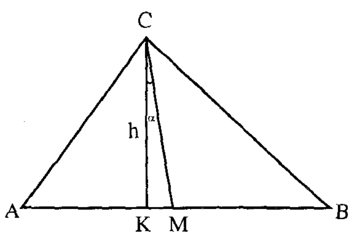
انتخاب خاص مثلثها به‌صورتی که داده شده، چنین نتیجه می‌شود که مقدارهای $\sec\hat{B}$ دنباله‌ای با نظم شگفت‌انگیز تشکیل می‌دهند که وقتی از سطری به سطر دیگر جدول می‌رویم، تقریباً درست به اندازهٔ ۱/۶۰ کاهش می‌یابند، و زاویهٔ متناظر از °۴۵ به °۳۱ تنزل می‌یابد. بدین ترتیب یک جدول سکانت برای زاویه‌های از °۴۵ تا °۳۱ در دست داریم که به کمک مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای با ضلعهای صحیح ساخته شده است و در آن به جای زاویهٔ متناظر، تابع دارای جهش منظمی است. همهٔ اینها در واقع درخور توجهند. بسیار محتمل به نظر می‌رسد که جدولهای دیگری همراه آنها با اطلاعات مشابهی برای زاویه‌های بین °۳۰ تا °۱۶ و از °۱۵ تا °۱ موجود بوده‌اند. این تجزیه و تحلیل لوح پلیمپتن به شمارهٔ ۳۲۲ لزوم توجه دقیقی را که باید به برخی از لوحهای ریاضی بابلی معطوف شود، نشان می‌دهد. سابقاً، ممکن بود که چنین لوحی را به تصور این که صرفاً یک فهرست یا سند بازرگانی است با بی توجهی کنار گذارند.

۷.۳.۵. نسبت ضلعها

۳۹۸. مطلوب است نسبت ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که نسبت ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر آن ۴۱ : ۴۰ باشد.



۳۹۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، از رأس قائمهٔ C، میانه و ارتفاع را رسم می‌کنیم. α، زاویهٔ بین این دو خط برابر $\operatorname{Arccos}\frac{۴۰}{۴۱}$ است. نسبت ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ این مثلث را بیابید (شکل).

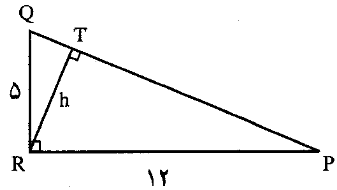


۴۰۰. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ایجاد می‌شود ۲ برابر مساحت این مثلث می‌باشد. نسبت بین ضلعهای زاویهٔ قائمه را به‌دست آورید.

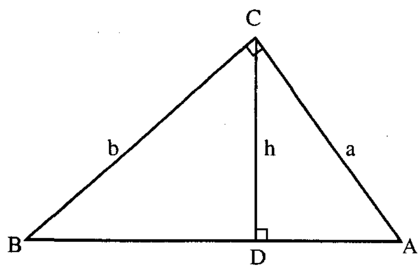
۴.۵. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۵. اندازهٔ ارتفاع

۴۰۱. در شکل مقابل $QR=۵$ ، $RP=۱۲$ ، $PT=h$ ، $QR\perp RP$ و $RT\perp PQ$ ، h را پیدا کنید.



۴۰۲. اگر طولهای ساقهای یک مثلث قائم‌الزاویه a و b باشد، طول ارتفاع وارد بر وتر آن را برحسب a و b بیابید.



۴۰۳. نیمساز زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه، وتر را به دو پاره‌خط به طولهای m و n تقسیم می‌کند. طول ارتفاع وارد بر وتر را پیدا کنید.

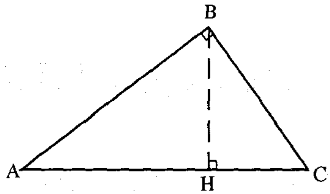
۴۰۴. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه را با c و مساحت آن‌را با A نمایش می‌دهیم. ارتفاع وارد بر وتر برابر است با :

الف) $\frac{A}{c}$ ب) $\frac{۲A}{c}$ ج) $\frac{A}{۲c}$ د) $\frac{A^{۲}}{c}$ هـ) $\frac{A}{c^{۲}}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۴۰۵. پاره‌خط راست BC داده شده است. در دو انتهای آن، تحت زاویه‌های معلوم ABC و ACB، خطهای راست BA و CA را رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد آنها، یعنی A را از خط مفروض BC پیدا کنید.

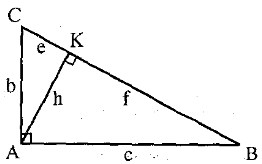
از نیوتن (در کتاب حساب عمومی)، مسأله‌های تاریخی ریاضیات



۴۰۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B}=۹۰^\circ$)، ارتفاع BH روی وتر AC پاره‌خطهای (CH = ۳/۶ و AH = ۶/۴ سانتیمتر) را پدید آورده است. طول ضلعهای AB و BC و ارتفاع BH را حساب کنید.

۴۰۷. ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه، پاره‌خطهایی به طولهای m و n روی وتر ایجاد کرده است. طول ارتفاع و طول ضلعهای مثلث را بیابید.

۴۰۸. در شکل، AK ارتفاع وارد بر وتر مثلث ABC است.



الف. اگر e = ۵ و h = ۱۵ ؛ b ،f و c را بیابید.

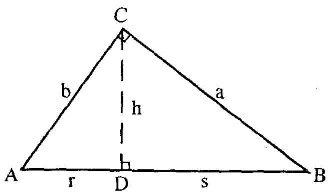
ب. اگر $b=۴\sqrt{۳}$ و e = ۴ ؛ h ،f و c را بیابید.

پ. اگر $c=۶\sqrt{۲}$ و e = ۴ ؛ b ،f و h را بیابید.

ت. اگر $b=۳\sqrt{۱۰}$ و f = ۱۳ ؛ h ،e و c را بیابید.

ث. اگر b = f = ۸ ؛ h ،e و c را بیابید.

۴۰۹. در این شکل، CD ارتفاع وارد بر وتر ABC است.



الف. اگر r = ۴ و s = ۹ ؛ h را بیابید.

ب. اگر r = ۷ و s = ۲۸ ؛ h را بیابید.

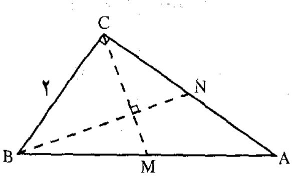
پ. اگر r = ۹ و s = ۳ ؛ a را بیابید.

ت. اگر r = ۷ و s = ۲۱ ؛ b را بیابید.

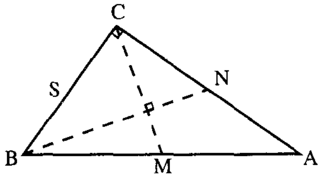
ث. اگر $r=\sqrt{۳}$ و $s=\sqrt{۱۲}$ ؛ h، a و b را بیابید.

۵ . ۴ . ۲ . اندازهٔ میانه

۴۱۰. در مثلث ABC، AB = ۱۷ ، AC = ۸ و BC = ۱۵ سانتیمتر است. اندازهٔ میانه‌های این مثلث را تعیین کنید.



۴۱۱. مثلث ABC شکل رو به رو، در زاویهٔ C قائمه و میانه‌های CM و BN بر هم عمودند. اگر ضلع BC به طول ۲ باشد، طول میانهٔ BN را به‌دست آورید.



۴۱۲. در شکل زیر مثلث ABC در زاویهٔ C قائمه و میانهٔ CM بر میانهٔ BN عمود است و $BC = s$.
طول BN برابر است با :

الف) $s\sqrt{2}$ ب) $\frac{3}{2}s\sqrt{2}$ ج) $2s\sqrt{2}$

د) $\frac{s\sqrt{5}}{2}$ هـ) $\frac{s\sqrt{6}}{2}$

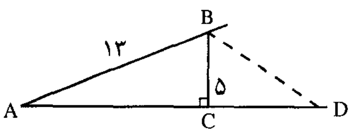
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲. مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲

۴۱۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول قطعه‌هایی که ارتفاع روی وتر جدا می‌کند، برابرند با ۴/۵ و ۲ سانتیمتر. مطلوب است طول هریک از ضلعها و ارتفاع و میانه‌های مثلث.

۵ . ۴ . ۳ . اندازهٔ نیمساز

۴۱۴. در مثلثی ضلعها به اندازه‌های ۳ ، ۴ و ۵ می‌باشند(این مثلث قائم‌الزاویه است). طول نیمساز زاویهٔ قائمه از این مثلث را حساب کنید.

۴۱۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در A، $BC = ۲۵$ و $AB = ۲۴$ است. طول نیمساز زاویهٔ C را حساب کنید.



۴۱۶. مثلث ABC در رأس C زاویهٔ قائمه دارد. نیمساز زاویهٔ برونی B، امتداد ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $AB = ۱۳$ و $BC = ۵$ باشد، طول BD را بیابید.

۴۱۷. ضلعهای زاویهٔ قائمه در یک مثلث قائم‌الزاویه برابر a و b است. اندازهٔ نیمساز زاویهٔ رسم شده از رأس قائمه را بیابید.

۴۱۸. طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه، ۱۸cm و ۲۴cm است. طول نیمساز زاویه‌های حادهٔ این مثلث را به دست آورید.

۴۱۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول ارتفاع وارد بر وتر ۲/۴ و طول وتر ۵ سانتیمتر است. مطلوب است محاسبهٔ هریک از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ؛ همچنین طول هریک از نیمسازهای مثلث.

۴۲۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، وتر $AB = ۵$ ، ضلع $AC = ۳$ و نیمساز زاویهٔ A ضلع مقابل را در نقطهٔ A_1 قطع می‌کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR با وتر $PQ \equiv A_1B$ و ضلع $PR = A_1C$ ساخته می‌شود. اگر نیمساز زاویهٔ P ضلع مقابل را در نقطهٔ P_1 قطع کند، آن گاه طول PP_1 برابر است با :

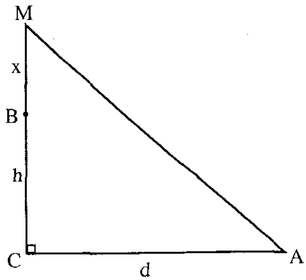
الف) $\frac{۳\sqrt{۶}}{۴}$ ب) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$ ج) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ د) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ هـ) $\frac{۱۵\sqrt{۲}}{۱۶}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۵ .۵. پاره خط

۵ .۵ .۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۲۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، مجموع طولهای $\overline{BM}$ و $\overline{MA}$ برابر مجموع طولهای $\overline{BC}$ و $\overline{CA}$ است. اگر $\overline{MB}=x$ ، $\overline{CB}=h$ و $\overline{CA}=d$ ، آن‌گاه x برابر است با :

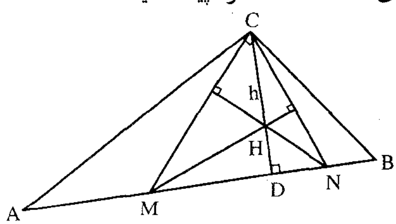


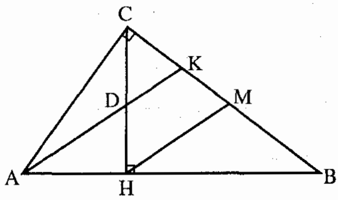
الف) $\frac{hd}{۲h+d}$ ب) $d-h$ ج) $\frac{۱}{۲}d$

د) $h+d-\sqrt{۲d}$ هـ) $\sqrt{h^۲+d^۲}-h$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۴۲۲. طول ارتفاع وارد بر وتر AB در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر با h و D پای آن است؛ M و N، بترتیب، وسط پاره‌خطهای AD و DB هستند. فاصلهٔ رأس C تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث CMN را پیدا کنید.





۴۲۳. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قسمت با طولهای ۹cm و ۱۶cm تقسیم می‌کند. از رأس زاویهٔ حادهٔ بزرگتر مثلث، و وسط ارتفاع مثلث، خطی عبور می‌دهیم. قسمتی از این پاره‌خط را که در داخل مثلث قرار دارد، پیدا کنید (شکل).

۴۲۴. در مثلثی قائم‌الزاویه، نیمساز زاویهٔ قائمه رسم شده است. فاصلهٔ بین نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای حاصل را پیدا کنید، به شرط این که طول ساقهای مثلث مفروض a و b باشد.

۴۲۵. مثلث ABC که در آن $\hat{C} = ۹۰^\circ$ ، $\overline{BC} = ۳$ و $\overline{AC} = ۴$ ، داده شده است. طول کوتاهترین پاره‌خط متکی بر وتر که از زاویهٔ C یک سوم آن را جدا می‌کند، برابر است با :

الف) $\frac{۳۲\sqrt{۳} - ۲۴}{۱۳}$ ب) $\frac{۱۲\sqrt{۳} - ۹}{۱۳}$ ج) $۶\sqrt{۳} - ۸$

د) $\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۶}$ هـ) $\frac{۲۵}{۱۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۴۲۶. روی تپه‌ای، درخت کاجی با ارتفاع مجهول روییده است. پایین، در جلگه، دو دیرک، هرکدام به ارتفاع ۲۰ پا (a)، طوری قرار دارند که با درخت در یک خط راست و به فاصلهٔ ۵۰ گام (b) از یکدیگر واقع شده‌اند. رأس درخت و انتهای دیرک اوّل، خط راستی تشکیل می‌دهند که در فاصلهٔ ۷ گام و ۴ پایی دیرک به زمین می‌رسد (c). رأس درخت و انتهای دیرک دوم، خط راستی تشکیل می‌دهند که در فاصلهٔ ۸ گام و ۵ پایی دیرک (d) به زمین می‌رسد. می‌خواهیم ارتفاع درخت کاج (x) و فاصلهٔ دیرک اوّل را از تپهٔ (y) پیدا کنیم.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از لیوهوئه، از مسأله‌های چینی

۴۲۷. قطر یک چاه برابر ۵ «چی» و عمق آن مجهول است. در کنار محیط بالای چاه، دیرکی به ارتفاع ۵ «چی» قرار دارد. رأس دیرک با سطح آب در جایی که با دیوار چاه تماس دارد و نقطه‌ای از قطر دهانهٔ چاه که با کنارهٔ آن ۴ «تسون» فاصله دارد، روی یک خط راست قرار دارند. عمق چاه را پیدا کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از ریاضیات در نه کتاب، مسألهٔ چینی

۴۲۸. سپیداری تنها، در کنار رودخانه روییده است.
ناگهان باد تندی وزید و تنهٔ آن را شکست.

تنهٔ بیچاره افتاد. باقی ماندهٔ تنه
با جریان رودخانه، زاویه‌ای قائمه می‌سازد.
به یاد بیاوریم که سر شاخهٔ سپیدار،
در چهار پایی این جا به زمین خورد
و سه پا هم، از تنه، باقی مانده است.
اکنون از شما خواهش می‌کنم، زود به من بگویید:
ارتفاع درخت سپیدار چه‌قدر بوده است؟

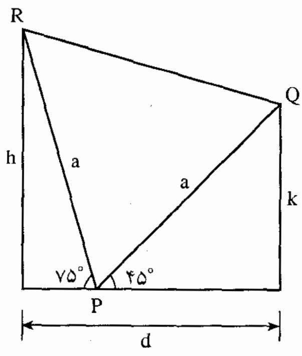
مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از بهاسکارا، مسألهٔ هندی

۴۲۹. یک نردبان به طول ۲۵ پا بر دیوار عمودی ساختمانی تکیه دارد. فاصلهٔ پایهٔ نردبان از پی دیوار ۷ پا است. اگر بالای نردبان ۴ پا سر بخورد، آن‌گاه مقداری که پایهٔ نردبان سر می‌خورد، برابر است با:

الف) ۹ پا　　ب) ۱۵ پا　　ج) ۵ پا　　د) ۸ پا　　هـ) ۴ پا

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۴۳۰. در کوچه‌ای باریک به پهنای d، یک سر نردبان به طول a در نقطهٔ P واقع بر کف کوچه ثابت می‌شود و سر دیگر آن اگر در نقطهٔ Q بر یک دیوار تکیه داشته باشد، ارتفاع Q از سطح کوچه k و زاویهٔ نردبان با سطح کوچه 45° است، و اگر سر دیگر نردبان در نقطهٔ R بر دیوار دیگر تکیه داشته باشد، ارتفاع R از سطح کوچه h و زاویهٔ نردبان با سطح کوچه 75° است. مقدار d برابر با کدام مقدار زیر است؟



الف) a　　ب) RQ　　ج) k　　د) $\frac{b+k}{۲}$　　هـ) b

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۴۳۱. ماهی و پرنده

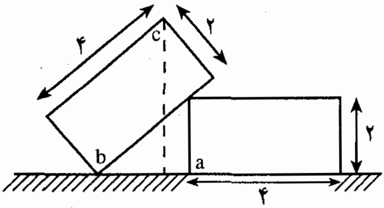
این معمّا در قرن یازدهم میلادی مطرح شده است: در دو طرف یک رودخانه، دو درخت بلند قرار دارند، که بلندی یکی از آنها ۳۰ متر و دیگری ۲۰ متر است. پای دو درخت از یکدیگر نیز ۵۰ متر فاصله دارند.

در قلهٔ هر درخت، یک پرنده نشسته است. آن دو در انتظار طعمه چشم به آب رودخانه دوخته‌اند. ناگهان یک ماهی کوچک در سطح آب پدیدار می‌شود. در یک لحظه پرنده‌ها

به سوی او هجوم می‌برند و با سرعتهای مساوی پر می‌زنند، و هر دو همزمان به او می‌رسند. می‌دانیم که ماهی روی یک خط مستقیم فرضی قرار دارد، که پای دو درخت را به هم مربوط می‌سازد. آیا می‌توانید بگویید، فاصلهٔ ماهی تا درخت بزرگ چند متر است؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۴۳۲. مطابق شکل، یک آجر بر سطح زمین و آجر دیگر بر آجر اوّلی تکیه دارد. هرگاه فاصلهٔ از a تا b برابر ۱/۵ باشد، با توجه به اندازه‌های آجرها، ارتفاع نقطهٔ c از زمین چه قدر است؟



الف) ۴/۰۵ ب) ۴/۱ ج) ۴/۲ د) ۴/۴ هـ) ۴/۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۴۳۳. روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شده و در خارج آن سه مربع می‌سازیم. اگر اندازه‌های ضلعهای زاویهٔ قائمه از مثلث، a و b باشد، فاصلهٔ مرکزهای مربعهای مزبور را از یکدیگر دو به دو بر حسب a و b به‌دست آورید.

۴۳۴. در این شکل، RS ارتفاع وارد بر وتر PQ از مثلث PQR است.

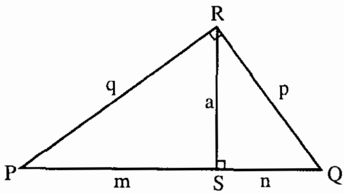
الف. اگر $m=27$ و $n=3$ ؛ a، p و q را بیابید.

ب. اگر $m=24$ و $n=6$ ؛ a، p و q را بیابید.

پ. اگر $m=\sqrt{18}$ و $n=\sqrt{8}$ ؛ a، p و q را بیابید.

ت. اگر $p=15$ و $n=9$ ؛ m و q را بیابید.

ث. اگر $a=8$ و $m=16$ ؛ n، p و q را بیابید.



۴۳۵. در این شکل، HM ارتفاع وارد بر وتر GK از مثلث قائم‌الزاویهٔ GHK است.

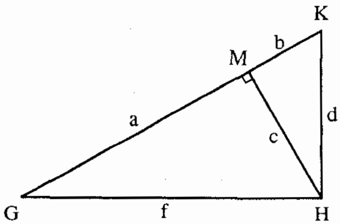
الف. اگر $a=18$ و $b=8$ ؛ c را بیابید.

ب. اگر $a=10\frac{2}{3}$ و $c=8$ ؛ b و d را بیابید.

پ. اگر $a=15$ و $b=4\frac{4}{15}$ ؛ f و c را بیابید.

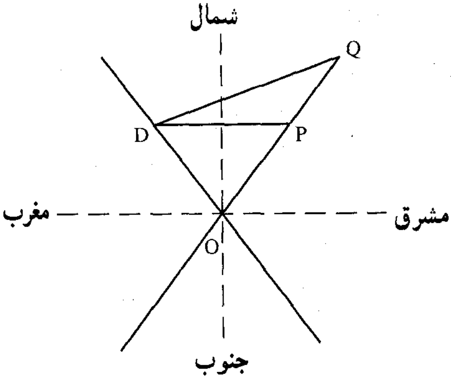
ت. اگر $f=20$ و $c=12$ ؛ a و b را بیابید.

ث. اگر $d=12$ و $b=4$ ؛ a و c را بیابید.



۴۳۶. در داخل یک زاویهٔ ۶۰ درجه، نقطه‌ای به فاصله های a و b از ضلعهای زاویه انتخاب کرده‌ایم. مطلوب است فاصلهٔ این نقطه از رأس زاویه.

۴۳۷. از یک کشتی که در جهت جنوب به شمال حرکت می‌کرد. دو جسم P و Q در شرق مسیر حرکت دیده شد. به نحوی که امتداد PQ با امتداد حرکت کشتی، زاویهٔ °۱۵ می‌ساخت. در همین لحظه، کشتی مسیر خود را عوض کرد و درست در جهت شمال غربی به راه افتاد. پس از طی ۵ کیلومتر، جسم P در مشرق و جسم Q در شمال شرقی کشتی بود. فاصلهٔ بین P و Q را معین کنید.



۵.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۴۳۸. روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای مربعی در خارج مثلث می‌سازیم و وتر، یکی از ضلعهای آن محسوب می‌شود. مرکز مربع را به رأس قائمهٔ مثلث وصل می‌کنیم. اگر طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ مثلث ۲۱cm و ۲۸cm باشد، خط مزبور وتر را به چه قطعه‌هایی تقسیم می‌کند؟

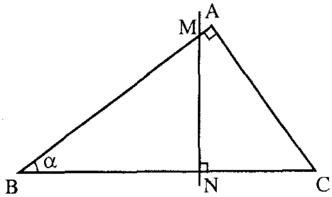
۴۳۹. اندازهٔ ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه، a و b و اندازهٔ وتر آن c است. عمود وارد از رأس زاویهٔ قائمه، وتر c را به پاره‌خطهای r و s تقسیم می‌کند که بترتیب مجاور a و b هستند. اگر a:b = ۱:۳ ، آن‌گاه نسبت r به s برابر است با :

الف) ۱:۳ ب) ۱:۹ ج) ۱:۱۰ د) ۳:۱۰ هـ) $1:\sqrt{10}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

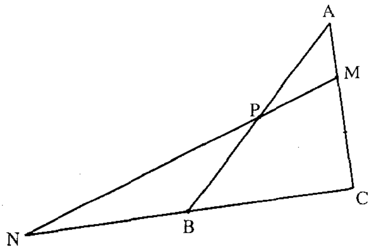
۴۴۰. اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمه دو برابر دیگری باشد، ثابت کنید، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو قسمت چنان تقسیم می‌کند که یکی از آنها چهار برابر دیگری است.

۴۴۱. ثابت کنید که در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ حاده‌اش °۳۰ (یا °۶۰) است، ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به نسبت ۱:۳ تقسیم می‌کند.



۴۴۲. در مثلثی قائم‌الزاویه، زاویهٔ کوچکتر برابر با α است. خط راستی که عمود بر وتر رسم شده است، مثلث را به دو بخش با مساحت برابر تقسیم می‌کند. نسبتی را که این خط وتر را قسمت می‌کند، پیدا کنید.

۴۴۳. روی ضلع AC از مثلث ABC نقطهٔ M را طوری اختیار می‌کنیم که $AM = \frac{۱}{۳} AC$ باشد. روی امتداد ضلع BC نقطهٔ N را نیز طوری انتخاب می‌کنیم که $BN = CB$ باشد. نقطهٔ تلاقی پاره‌خطهای AB و MN، آنها را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟



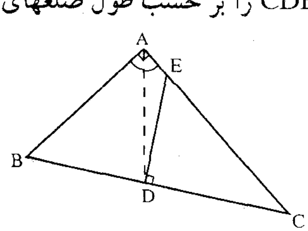
۵ . ۵ . ۳ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۴۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = ۹۰^\circ$) نیمساز BD ارتفاع AH را در E قطع می‌کند. از E خطی به موازات وتر BC رسم می‌کنیم، تا AB را در F و AC را در G قطع کند. ثابت کنید که $AD = CG$.

۴۴۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = ۹۰^\circ$) داده شده است به طوری که $AC > AB$ می‌باشد. نیمساز داخلی AD را رسم کرده و از نقطهٔ D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند.

۱. ثابت کنید : $DB = DE$.

۲. طول ضلعهای مثلث CDE را بر حسب طول ضلعهای مثلث ABC حساب کنید.

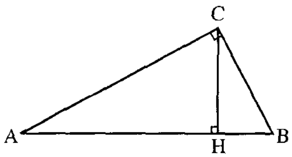


۵. ۶. محیط

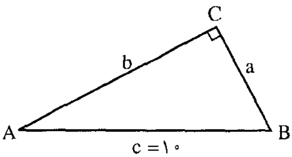
۵. ۶. ۱. اندازهٔ محیط مثلث

۴۴۶. دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۴ و ۷ است. اندازهٔ محیط این مثلث چه‌قدر است؟

۴۴۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{C}=۹۰^\circ)$، اندازهٔ ارتفاع رأس C برابر $۶\sqrt{۳}$ است، و این ارتفاع، وتر را به نسبت ۳:۴ تقسیم می‌کند. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

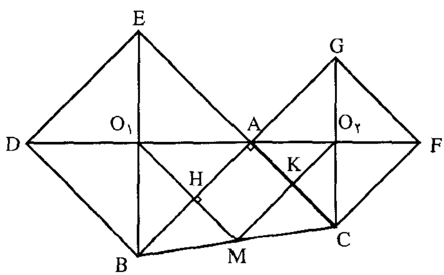


۴۴۸. اندازهٔ مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{C}=۹۰^\circ)$ برابر ۲۴ و طول وتر آن $c=۱۰$ است. اندازهٔ محیط این مثلث را تعیین کنید.



۵. ۶. ۲. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

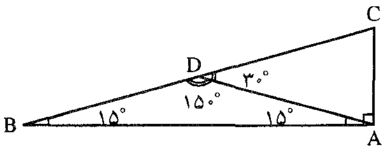
۴۴۹. روی ضلعهای AB و AC از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$، مربعهای ABDE و ACFG را ساخته‌ایم. اگر $AC=۱۲$ و $AB=۱۶$ باشد، محیط مثلث $MO_۱O_۲$ را که M وسط وتر BC، و $O_۱$ و $O_۲$ مرکز مربعها هستند، به دست آورید.



۴۵۰. در درون مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ a و b، مربعی را محاط کرده‌ایم که با مثلث در یک زاویهٔ قائمه مشترک است. محیط مربع را به‌دست آورید.

۵ . ۷ . مساحت

۵ . ۷ . ۱ . اندازهٔ مساحت مثلث



۴۵۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$، اندازهٔ $\hat{B}=15^\circ$ است. مساحت این مثلث را بر حسب a، وتر مثلث، پیدا کنید.

۴۵۲. اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای مجموع سینوسهای زاویه‌های حادهٔ آن برابر q باشد، آن‌گاه مساحت مثلث را محاسبه کنید.

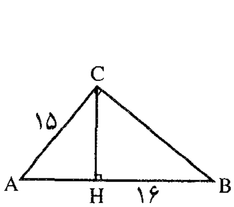
۴۵۳. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۷ و طول یک ساق آن ۱۵ است، مساحت مثلث را بیابید. از چه قضیه‌ای استفاده می‌کنید؟

همین مسأله را وقتی طول وتر ۵۱ و اندازهٔ یک ضلع ۲۴ باشد، حل کنید.

۴۵۴. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای را بیابید که ارتفاع وارد بر وترش، وتر را به پاره‌خطهایی به طولهای ۹ و ۱۶، یا (۷ و ۲۱) تقسیم می‌کند.

۴۵۵. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر است با c. ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ قائمه بر وتر، وتر را به نسبت ذات وسط و طرفین (به نسبت طلایی) تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را به دست آورید.

۴۵۶. ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه وتر را به پاره‌خطهایی به طولهای r و s تقسیم می‌کند. ثابت کنید، مساحت مثلث برابر است با حاصلضرب واسطهٔ هندسی r و s در واسطهٔ حسابی آنها.



۴۵۷. مثلث ABC در زاویهٔ C قائمه است. ارتفاع CH روی وتر AB پارهٔ BH را به اندازهٔ ۱۶ پدید می‌آورد و ضلع AC به اندازهٔ ۱۵ است. مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

الف) ۱۲۰   ب) ۱۴۴   ج) ۱۵۰

د) ۲۱۶   هـ) $144\sqrt{5}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴۵۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ارتفاع CH و میانهٔ CM، زاویهٔ قائمهٔ C را به ۳ زاویهٔ برابر بخش می‌کنند. اگر مساحت مثلث CHM برابر K باشد، مساحت مثلث ABC برابر است با :

الف) 6K   ب) $4\sqrt{3}K$ ج) $3\sqrt{3}K$ د) 3K   هـ) 4K

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۳

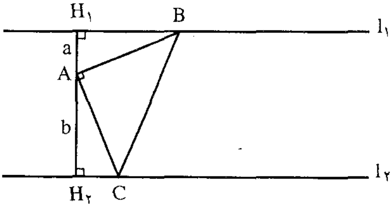
۴۵۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. نیمساز CL ($|CL| = a$) و میانهٔ CM ($|CM| = b$) از زاویهٔ قائمهٔ C رسم می‌شوند. مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.

۴۶۰. محیط یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، ۲P است. مساحت آن برابر است با :

الف) $(۲+\sqrt{۲})P$ ب) $(۲-\sqrt{۲})P$ ج) $(۳-۲\sqrt{۲})P^۲$

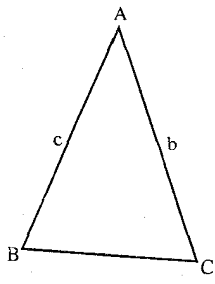
د) $(۱-۲\sqrt{۲})P^۲$ هـ) $(۳+۲\sqrt{۲})P^۲$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

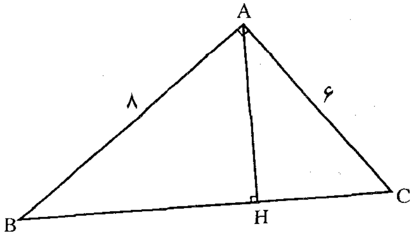


۴۶۱. نقطهٔ A واقع بین دو خط موازی $l_۱$ و $l_۲$ بترتیب به فاصله‌های a و b از آنها قرار دارد. این نقطه رأس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. نقطهٔ B روی خط مستقیم $l_۱$ و نقطهٔ C روی خط مستقیم $l_۲$ قرار دارد. ثابت کنید از بین همهٔ چنین مثلثهایی، مثلثی با ضلعهای زاویهٔ قائمه با طولهای $a\sqrt{۲}$ و $b\sqrt{۲}$ کمترین مساحت را دارد.

۴۶۲. بین تمام مثلثهایی که دو ضلع آنها معلوم است، مساحت کدام یک بیشتر است؟

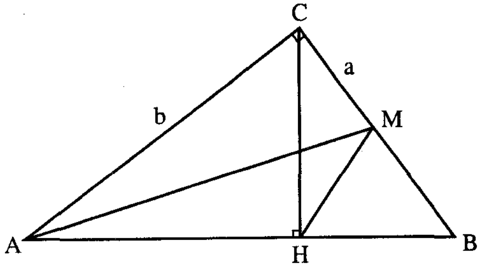


۵ . ۷ . ۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۴۶۳. ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۸ متر و ۶ مترند، از رأس زاویهٔ قائمه عمودی بر وتر رسم کرده‌ایم، طول این عمود و مساحت مثلثهای کوچکی که به دست می‌آید، پیدا کنید.

۴۶۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، ساق CA برابر با b، ساق CB برابر با a، CH ارتفاع و AM میانه است. مساحت مثلث BMH را بر حسب a و b تعیین کنید.

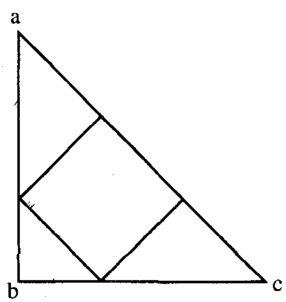


۴۶۵. مثلث ABC قائمه در A داده شده است : AB = ۴ و AC = ۳ . به قاعدهٔ AB و در طرف رأس C ، مثلث متساوی‌الساقین ABD را معادل مثلث مفروض می‌سازیم. مطلوب است، محاسبهٔ مساحت مثلثی که بین دو مثلث مشترک است.

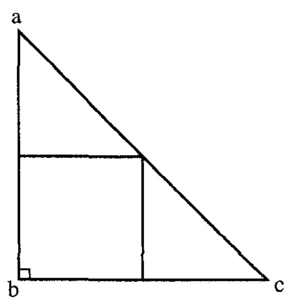
۴۶۶. روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی که وتر آن برابر b است، مربعی در خارج مثلث ساخته‌ایم. مطلوب است، مساحت مثلثی که از وصل مرکزهای این مربعها به‌دست می‌آید.

۴۶۷. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین abc داده شده است. یک مربع را به دو گونه می‌توان در این مثلث محاط کرد. این مربع اگر به گونهٔ شکل ۱ در مثلث محاط شود، مساحت آن ۴۴۱ سانتیمتر مربع می‌شود. حال اگر این مربع به گونهٔ شکل ۲ در مثلث محاط شود، مساحت آن بر حسب سانتیمترمربع برابر می‌شود با :

الف) ۳۷۸ ب) ۳۹۲ ج) ۴۰۰ د) ۴۴۱ هـ) ۴۸۴

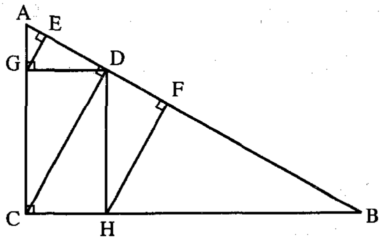


شکل ۲



شکل ۱

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

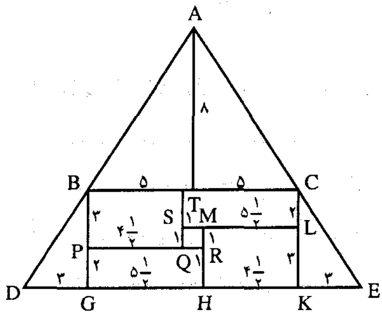


۴۶۸. در این شکل، $AC \perp BC$ ، $CD \perp AB$ ، $HF \parallel GE \parallel CD$ و □CHDG مستطیل است. اگر $AE = 1$ ، $ED = 4$ ، $DF = 4$ و $FB = 16$ ؛

الف. GE و HF را بیابید.

ب. a □CHDG را بیابید.

پ. ثابت کنید : $a\Delta BHF = 64 a\Delta AEG$.



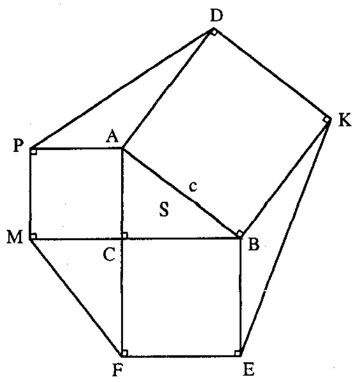
۴۶۹. این شکل از چهار مثلث قائم‌الزاویه، چهار مستطیل و یک سوراخ مربعی به ضلع واحد تشکیل شده است.

الف. مجموع مساحتهای این هشت ناحیه را حساب کنید. (سوراخ را به حساب نیاورید!)

ب. قاعدهٔ DE و ارتفاعی را که از A بر DE وارد می‌شود، بیابید. نصف حاصلضرب این دو عدد را به دست آورید.

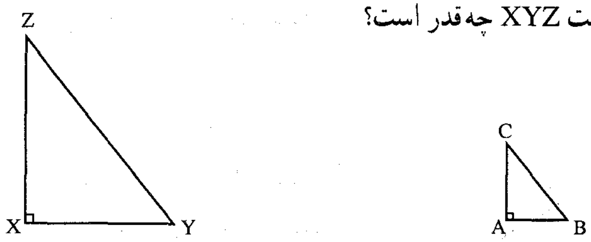
پ. آیا می‌توانید بگویید، چرا با وجود سوراخ، نتیجه‌های قسمتهای (الف) و (ب) با هم برابرند؟

۴۷۰. روی ضلعهای AC و BC و وتر AB، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و در بیرون آن، مربعهای CMPA، BEFC و ADKB را رسم می‌کنیم. اگر $AB = C$ و $S_{\Delta ABC} = s$ باشد، مساحت شش ضلعی DKEFMP را محاسبه کنید.

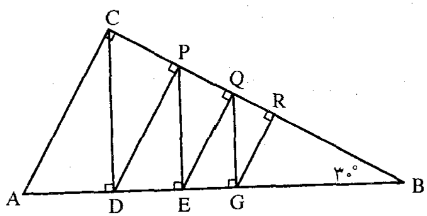


۵ . ۷ . ۳ . نسبت مساحتها

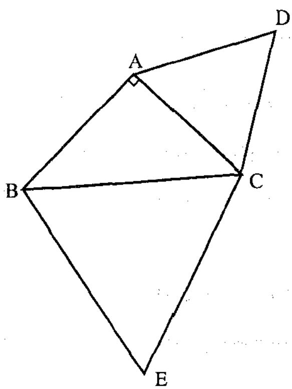
۴۷۱. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC و XYZ، طول هریک از ضلعهای زاویهٔ قائمه در مثلث XYZ، ۳ برابر طول ضلع نظیر آن در مثلث ABC است. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت XYZ چه‌قدر است؟



۴۷۲. در مثلث ABC، زاویهٔ C قائمه است و $m\hat{B} = ۳۰$. CD، PE و QG هر یک بر AB ؛ و PD، EQ و GR هریک بر BC عمودند. $\frac{a\Delta GBR}{a\Delta ABC}$ را بیابید.



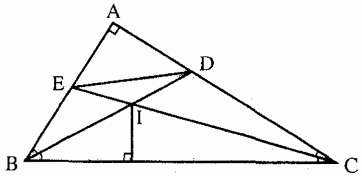
۴۷۳. مثلث ABC متساوی‌الساقین و زاویهٔ A از آن قائمه است. E و D در دوطرف AC و E و B در یک طرف AC هستند، به نحوی که مثلثهای ACD و BCE هر دو متساوی‌الاضلاعند. نسبت مساحتهای مثلثهای ACD و BCE را بیابید.



۴۷۴. سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، روی سه ضلع مختلف مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین دیگری قرار دارند. حداقل نسبت مساحتهای این دو مثلث، چه‌قدر است؟

سیزدهمین المپیاد سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۹ (تفلیس)

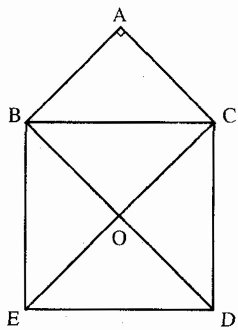
۵ .۷ .۴. رابطه‌ای در مساحتها



۴۷۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، نیمسازهای درونی زاویه‌های B و C یکدیگر را در نقطهٔ I و ضلعهای روبه‌رو را بترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید، مساحت چهار ضلعی BCDE دو برابر مساحت مثلث BIC است.

مرحلهٔ نهایی دهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۲

۴۷۶. مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقینی که وترش ضلع یک مربع باشد، $\frac{1}{4}$ مساحت آن مربع است.



۴۷۷. دو مربع ACKL و BCMN، روی ساقهای AC و BC از مثلثی قائم‌الزاویه و بیرون آن رسم شده‌اند. ثابت کنید، مساحت چهارضلعی محدود به ساقهای مثلث مفروض و خطهای راست LB و NA، برابر است با مساحت مثلث تشکیل شده با خطهای LB، NA و وتر AB.

۴۷۸. اگر روی ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه چند ضلعی متشابه رسم کنیم، مساحت چندضلعی نظیر وتر، برابر است با مجموع مساحتهای دو چندضلعی دیگر (تعمیم قضیهٔ فیثاغورس).

۵ . ۸. رابطه‌های متری

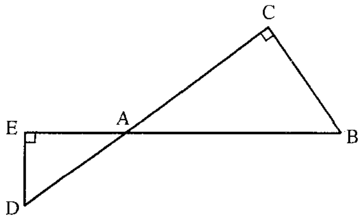
۵ . ۸ . ۱. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای اصلی

۴۷۹. $n > ۲$ ، عددی است طبیعی. ثابت کنید : توان nام طول وتر مثلث قائم‌الزاویه از مجموع توانهای nام طولهای دو ضلع دیگر، بزرگتر است.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۸

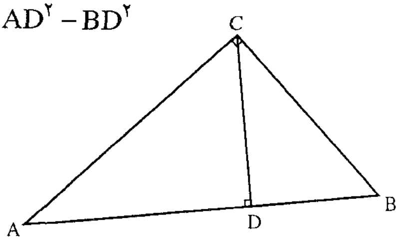
۴۸۰. تحقیق کنید که C_5 ، C_6 و C_{10} می‌توانند ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه باشند.

۴۸۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ داده شده است. روی امتداد CA نقطهٔ D را اختیار و عمود DE را بر AB فرود می‌آوریم. ثابت کنید : $DA:AB = DE:CB$.



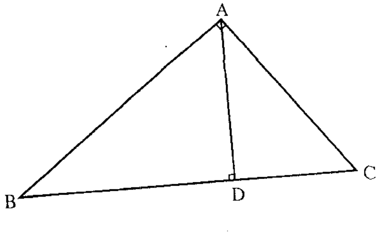
۴۸۲. در مثلث ABC، CD ارتفاع وارد بر وتر AB است. ثابت کنید :

$AC^۲ - BC^۲ = AD^۲ - BD^۲$



۴۸۳. ارتفاع AD از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

$$\frac{AB^۲}{AC^۲} = \frac{DB}{DC}$$



۵ . ۸ . ۲ . رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها و خطهای عمود

۴۸۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، نقطهٔ H، پای ارتفاع AH است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$$

۴۸۵. در یک مثلث قائم‌الزاویه به ضلعهای a و b و وتر c، اگر ارتفاع وارد بر وتر x باشد، آن‌گاه:

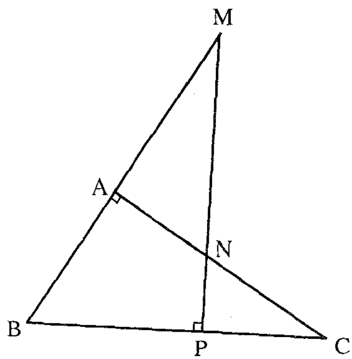
الف) $a.b=x^2$ ب) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ ج) $a^2+b^2=2x^2$

د) $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ هـ) $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۴۸۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در A، ارتفاع AD را رسم می‌کنیم و DE را بر AB عمود می‌کنیم. ثابت کنید: $AD^2=AC.DE$.

۴۸۷. از نقطهٔ P واقع بر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، عمودی بر این وتر اخراج می‌کنیم تا AC را در N و AB را در M قطع کند. ثابت کنید: $BA.BM=BP.BC$، $NA.NC=NM.NP$ و $MA.MB=MN.MP$.

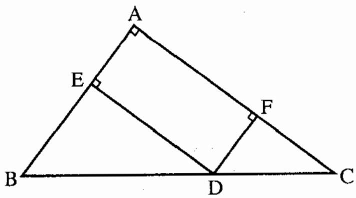


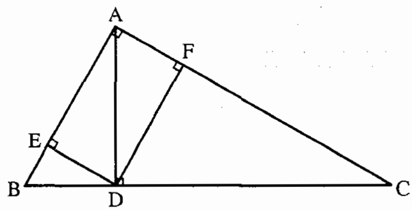
۴۸۸. عمودهای MX، MY و MZ را از نقطهٔ M واقع در درون مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (با زاویهٔ قائمهٔ C) بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB وارد می‌کنیم، آن‌گاه رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$AY.AC+BZ.BA+CX.CB=AB^2$$

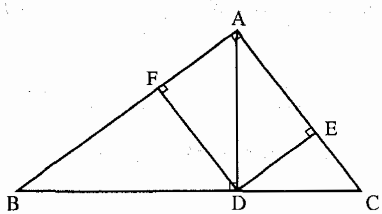
۴۸۹. در مثلث ABC قائمه در A، از نقطهٔ D واقع بر وتر، DE را بر AB و DF را بر AC عمود می‌کنیم. ثابت کنید:

$$BD.DC = EA.EB + FA.FC$$





۴۹۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، فاصله‌های نقطهٔ D، پای ارتفاع AD از دو ضلع زاویهٔ قائمه، با این دو ضلع متناسبند.



۴۹۱. مثلث ABC قائمه در A داده شده است. ارتفاع AD نظیر وتر را رسم کرده‌ایم. اگر E و F تصویرهای نقطهٔ D بترتیب روی AC و AB باشند، ثابت کنید:

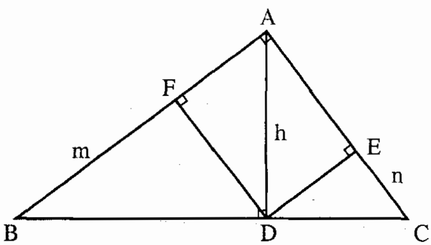
$$\frac{AC^۳}{AB^۳} = \frac{GE}{BF}.$$

۴۹۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قائمه در A، ارتفاع AD را رسم نموده DE و DF را عمود بر AB و AC رسم می‌کنیم. اگر BE = m و CF = n و AD = h فرض شود، ثابت کنید:

۱. $\sqrt[۳]{m^۲} + \sqrt[۳]{n^۲} = \sqrt[۳]{a^۲}$;

۲. $۳h^۲ + m^۲ + n^۲ = a^۲$;

۳. $amn = h^۳$

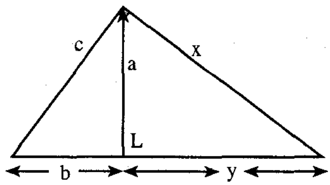


۴۹۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر، کدام رابطه همواره برقرار است؟

الف) $y = \frac{ac}{b}$ ب) $y = \sqrt{x^۲ + b^۲}$

ج) $y = \frac{a^۲}{b}$ د) $y = c$

هـ) $y = \frac{c^۲}{a}$

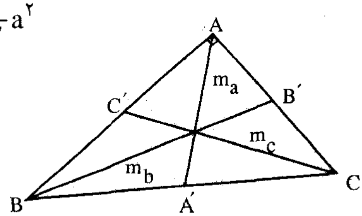


المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۵. ۸. ۳. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

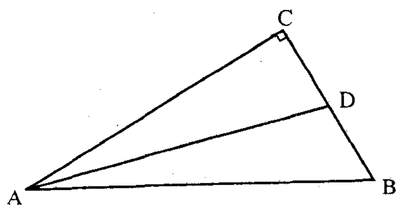
۴۹۴. ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع مجذورهای طول سه میانه مساوی است با سه برابر نصف مجذور وتر.

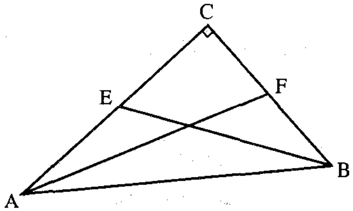
$$m_a^۲ + m_b^۲ + m_c^۲ = \frac{۳}{۲}a^۲$$



۴۹۵. اگر AB وتر مثلثی قائم‌الزاویه، و D پای میانهٔ رأس A روی ضلع BC باشد، ثابت کنید:

$$\overline{AB}^۲ - \overline{AD}^۲ = ۳\overline{CD}^۲$$



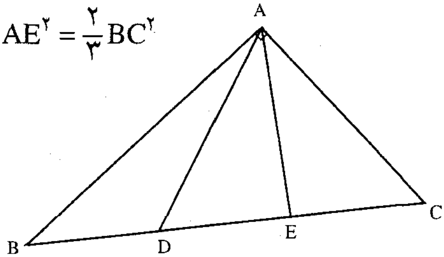


۴۹۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C} = ۹۰^\circ$)، خطهای BE و AF بترتیب میانه‌های وارد بر ضلعهای AB و AC می‌باشند. ثابت کنید :
$۴BE^{۲} + ۴AF^{۲} = ۵AB^{۲}$.

۴۹۷. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های رأس زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه از دو نقطه‌ای که وتر را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند، برابر $\frac{۵}{۹}$ مربع وتر آن است.

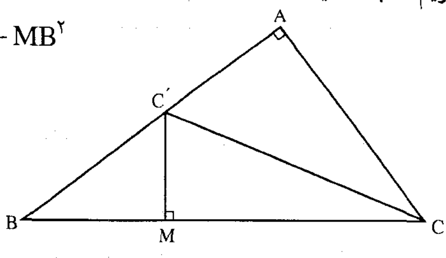
۴۹۸. روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نقطه‌های D و E را طوری اختیار می‌کنیم که $BD = DE = EC$ باشد. ثابت کنید که :

$$AD^{۲} + DE^{۲} + AE^{۲} = \frac{۲}{۳}BC^{۲}$$

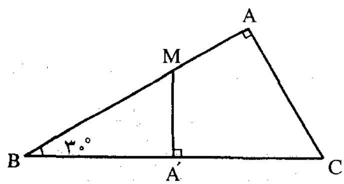


۴۹۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، از نقطهٔ C' وسط AB، عمود $C'M$ را بر وتر BC فرود می‌آوریم. ثابت کنید :

$$AC^{۲} = MC^{۲} - MB^{۲}$$



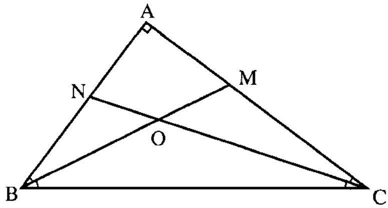
۵۰۰. یکی از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۳۰ درجه است. از نقطهٔ وسط وتر، عمودی بر وتر اخراج کرده‌ایم. ثابت کنید، طول پاره‌خط راستی از این عمود که در درون مثلث قرار دارد، یک سوم طول ضلع بزرگتر مجاور به زاویهٔ قائمه است.



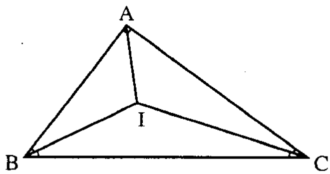
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۵ . ۸ . ۴ . رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها

۵۰۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC دو نیمساز BM و CN زاویه‌های حاده را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، ثابت کنید : $BM \times CN = ۲BO \times CO$.



۵۰۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (قائمه در A)، اگر I محل تلاقی سه نیمساز داخلی باشد، ثابت کنید: $IB \times IC = IA \times BC$.



۵۰۳. اگر b و c طول ضلعهای مثلث قائم و l طول نیمساز زاویهٔ قائمه باشد، ثابت کنید :

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{\sqrt{۲}}{l}$$

۵۰۴. CD نیمساز زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. DE و DK، نیمسازهای داخلی مثلثهای ADC و BDC هستند، ثابت کنید : $AD^{۲}+BD^{۲}=(AE+BK)^{۲}$.

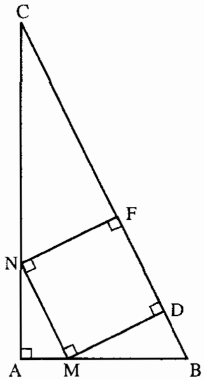
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۵۰۵. در مثلث ABC نقطهٔ M وسط ضلع BC است. نیمساز درونی زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع می‌کند و E قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است. ثابت کنید پاره‌خطهای AD، DE و $|AB-AC|$، ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

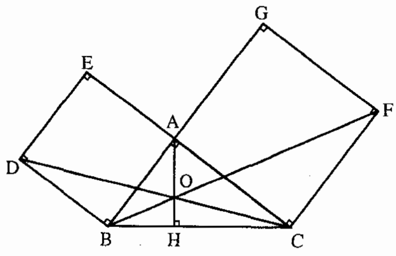
اوّلین المپیاد مقدماتی ایران، ۱۳۷۲

۵ . ۸ . ۵. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای دیگر

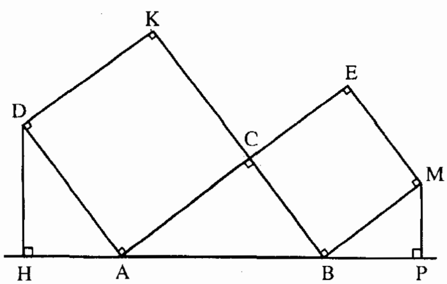
۵۰۶. مربع MNFD را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چنان محاط کرده‌ایم که ضلع DF از آن روی BC و رأسهای M و N روی AB و AC واقع شده است، ثابت کنید:
$DF^{2} = BD.FC$.



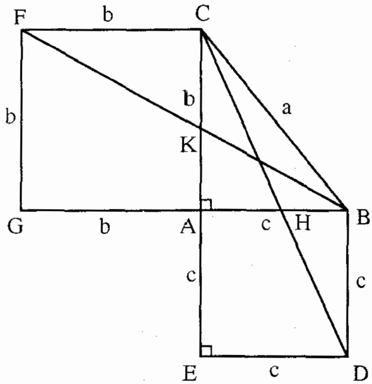
۵۰۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=90^\circ)$، داده شده است. دو مربع ABDE و ACFG را بر ضلعهای زاویهٔ قائمه می‌سازیم. ثابت کنید، DC و FB یکدیگر را در نقطهٔ O روی ارتفاع AH قطع می‌کنند و داریم: $\frac{1}{AO}=\frac{1}{AH}+\frac{1}{CB}$.



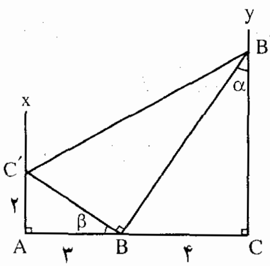
۵۰۸. روی ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ AC و BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، مربعهای ADK و CEMB را رسم می‌کنیم. عمودهای DH و MP را از نقطه‌های D و M بر امتداد وتر AB وارد می‌کنیم ثابت کنید که:
$DH + MP = AB$.



۵۰۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (A قائمه)، داده شده است. روی ضلعهای زاویهٔ قائمه و در خارج مثلث، دو مربع ABDE و ACFG را رسم می‌کنیم. هرگاه CD خط AB را در H و BF خط AC را در K قطع کند، ثابت کنید : $AH = AK$ و $AH^2 = BH.CK$.



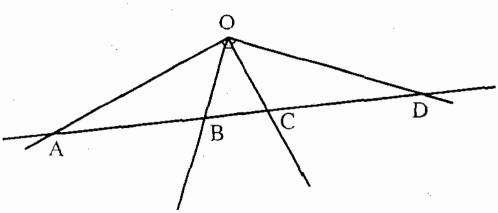
۵۱۰. پاره خط AC به طول ۷cm داده شده است. نقطهٔ B را روی آن و به فاصلهٔ ۳cm از A انتخاب کرده‌ایم. سپس از A و C دو عمود Ax و Cy را بر AC در یک طرف آن اخراج کرده‌ایم. روی Ax طول $AC' = 2cm$ را جدا کرده، BC' را وصل می‌کنیم و از B عمودی بر BC' اخراج می‌نماییم تا Cy را در B' قطع کند.



۱. ثابت کنید : $AB.BC = AC'.CB'$.

۲. طول $B'C'$ را حساب کنید.

۵۱۱. چهار نیمخط OC ،OB ،OA و OD با یکدیگر زاویه‌های متوالی ۴۵ درجه تشکیل داده‌اند. هرگاه آنها را با خط ABCD چنان قطع کنیم که مثلث OAD متساوی‌الساقین شود، ثابت کنید که : $AB^2 = AD.BC$.



۵ . ۸ . ۶. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۵۱۲. اگر c وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد، ثابت کنید : $c \geq \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$.

۵۱۳. در مثلث قائم‌الزاویه، a و b ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه، c وتر و h، ارتفاع وارد بر وتر است. ثابت کنید، $c+h$ از $a+b$ بزرگتر است.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۵۱۴. P نقطه‌ای واقع بر وتر AB (یا واقع بر امتداد آن) از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC است. اگر $S = AP^2 + PB^2$، آن‌گاه :

الف) $S < 2\overline{CP}^2$ به ازای تعداد معینی از مکانهای P.

ب) $S < 2\overline{CP}^2$ به ازای تعداد نامتناهی از مکانهای P.

ج) $S = 2\overline{CP}^2$، تنها اگر P وسط AB یا یکی از دو سر AB باشد.

د) همواره $S = 2\overline{CP}$.

هـ) $S > 2\overline{CP}^2$، اگر P در یک سوم AB واقع باشد.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۹

۵ . ۹ . ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۱۵. a، b و c، طولهای ضلعهای یک مثلثند و می‌دانیم :

$$2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$$

ثابت کنید، این مثلث، قائم‌الزاویه است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۵۱۶. در مثلث ABC، نقطهٔ D بین B و C و رابطهٔ زیر برقرار است :

$$AD^2.BC^2 = AB^2.DC^2 + AC^2.DB^2$$

ثابت کنید، زاویهٔ A قائمه است.

۵۱۷. اگر ارتفاعهای مثلثی متناسب با عددهای ۱۲، ۱۵ و ۲۰ باشند، آن مثلث :

الف) زاویهٔ ۶۰ درجه دارد.

ب) یک زاویهٔ ۳۰ درجه دارد.

ج) قائم‌الزاویه است.

د) متساوی‌الساقین است.

مرحلهٔ اوّل دومین دورهٔ المپیادهای ریاضی استانی اصفهان، ۱۳۶۳

۵۱۸. در چهار مثلث I، II، III و IV طول ۳ ضلع بر حسب سانتیمتر به شرح زیر است:

I : ۳، ۴ و ۵   III : ۷، ۲۴ و ۲۵

II : ۴، $7\frac{1}{2}$ و $8\frac{1}{2}$ IV : $3\frac{1}{2}$، $4\frac{1}{2}$ و $5\frac{1}{2}$

از این چهار مثلث تنها مثلثهای قائم‌الزاویه عبارتند از:

الف) I و II   ب) I و III

ج) I و IV   د) I، II و III

هـ) I، II و IV

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۵۱۹. ثابت کنید مثلثی که در آن رابطهٔ $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ برقرار است، قائم‌الزاویه است.

۵۲۰. ثابت کنید مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است، در صورتی که:

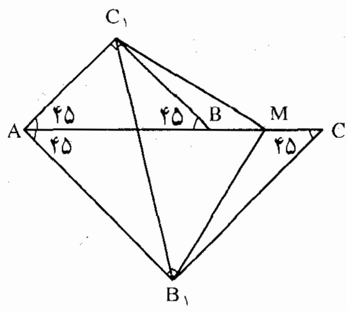
الف) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ب) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}^2 = 0$

۵۲۱. ثابت کنید، اگر در مثلثی، نسبت تانژانت دو زاویه با نسبت مربعهای سینوسهای این دو زاویه برابر باشد در آن صورت این مثلث یا متساوی‌الساقین و یا قائمه خواهد بود.

۵۲۲. ثابت کنید، اگر نیمساز یک زاویهٔ مثلث، زاویهٔ بین میانه و ارتفاع را که از همان رأس می‌گذرند، نصف کند، یا مثلث متساوی‌الساقین است و یا قائم‌الزاویه.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۵۲۳. روی پاره‌خطهای AB و AC از یک خط مستقیم، مثلثهای متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویهٔ ABC_1 و ACB_1 $(\hat{C}_1 = \hat{B}_1 = 90°)$ را درجهتهای متقابل رسم می‌کنیم. ثابت کنید که میانگاه پاره‌خط BC و نقطه‌های B_1 و C_1 رأسهای یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه هستند.

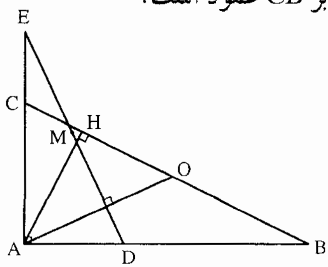


۵۲۴. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABD و BCE ($\hat{B}=\hat{C}=۹۰^\circ$) را در یک جهت رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاههای پاره‌خطهای AB، BC و DE رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند.

۵۲۵. روی قاعده و یکی از ضلعهای جانبی مثلث متساوی‌الساقینی و در خارج آن، دو مربع رسم می‌کنیم. ثابت کنید مرکزهای این مربعها و میانگاه ضلع جانبی دیگر مثلث، رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۵. ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۵۲۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، میانهٔ AO وارد بر وتر را رسم کرده، ضلعهای AB و AC یا امتداد آنها را با قاطع DE عمود بر AO قطع می‌کنیم. اگر M وسط DE باشد، ثابت کنید AM بر CB عمود است.



۵۲۷. ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه برابرند با a، a+d و a+۲d که a و d هر دو مثبتند، نسبت a به d برابر است با :

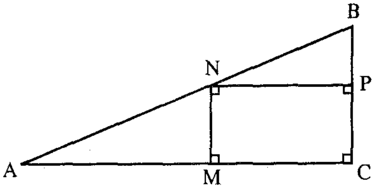
الف) ۱:۳ ب) ۱:۴ ج) ۲:۱ د) ۳:۱ هـ) ۳:۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۵۲۸. ضلع افقی یک مثلث ۱ «یو» و ضلع قائم آن ۱۲ «یو» است. مطلوب است طول ضلع مربع محاط در این مثلث.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از مسأله‌های چینی

۵۲۹. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، مستطیلی محاط می‌کنیم که یک زاویهٔ آن زاویهٔ قائمهٔ مثلث باشد. بین مستطیلهای حاصل، قطر کدامیک می‌نیمم است؟



۵۳۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $BC=۵$، $AC=۱۲$ و $AM=x$؛ $MN\perp AC$، $NP\perp BC$ و N بر AB قرار دارد. اگر $y=MN+NP$ نصف محیط مستطیل MCPN باشد، آن‌گاه:

الف) $y=\frac{۱}{۲}(۵x+۱۲)$ ب) $y=\frac{۵x}{۱۲}+\frac{۱۲}{۵}$

ج) $y=\frac{۱۴۴-۷x}{۱۲}$ د) $y=۱۲$

هـ) $y=\frac{۵x}{۱۲}+۶$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۵۳۱. ثابت کنید، هر مثلث با زاویه‌های حاده و به مساحت واحد را، می‌توان در مثلث قائم‌الزاویه‌ای جا داد که مساحتی بیش از $\sqrt{۳}$ نداشته باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف چکوسلواکی، ۱۹۷۵

۵۳۲. ثابت کنید، برای x، y و z نمی‌توان سه عدد درست پیدا کرد، به نحوی که در معادلهٔ $x^۴+y^۴=z^۴$ صدق کنند.

۵۳۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{C}=۹۰^\circ)$، داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ P را تعیین کنید، در صورتی که $۲|PC|^۲=|PA|^۲+|PB|^۲$ باشد.

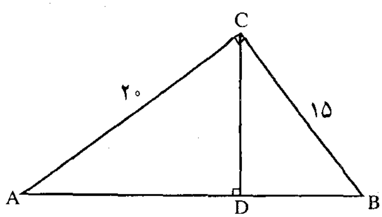
۱۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۵۳۴. در مثلث ABC، زاویهٔ C قائمه است؛ $AC=۲۰$ و $BC=۱۵$.

الف. مساحت مثلث ABC

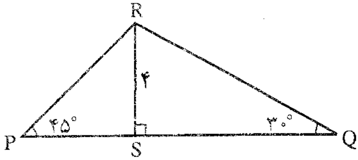
ب. اندازهٔ وتر AB

پ. ارتفاع وارد بر وتر را بیابید.



۵۳۵. در مثلث PQR، $\hat{P} = ۴۵^\circ$ ، $\hat{Q} = ۳۰^\circ$ و $RS \perp PQ$. اگر $RS = ۴$ باشد، مقدارهای زیر را بیابید.

الف. PR ب. RQ پ. SQ ت. محیط ΔPQR ث. $a\Delta PQR$

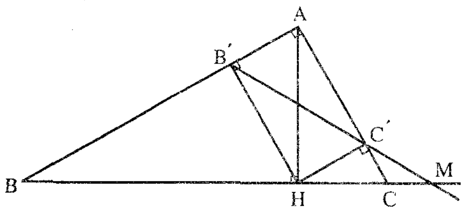


۵۳۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، داده شده است به طوری که $AC > AB$ می‌باشد. نیمساز داخلی AD را رسم کرده و از نقطهٔ D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. ثابت کنید :

۱. $DB = DE$.

۲. طول ضلعهای مثلث CDE را بر حسب طول ضلعهای مثلث ABC حساب کنید.

۵۳۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، داده شده است. ارتفاع AH را رسم و از نقطهٔ H عمودهای HB' و HC' را بر AB و AC وارد می‌کنیم.



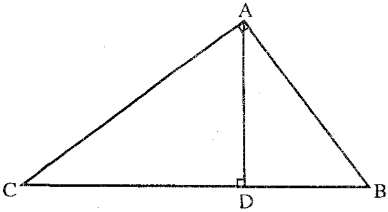
۱. ثابت کنید : $\frac{AB}{AC} = \frac{HB'}{HC'}$.

۲. ثابت کنید : دو مثلث $AB'C'$ و ABC متشابه‌اند.

۳. ثابت کنید : چهارضلعی $BB'CC'$ محاطی است.

۴. امتداد $B'C'$ امتداد BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید MH واسطهٔ هندسی بین MB و MC است، $MH^۲ = MB.MC$.

۵۳۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ وتر BC برابر ۴/۵ و پاره‌خط $BD = ۱/۶۲$ است که D پای ارتفاع رأس A می‌باشد. اندازهٔ AB، AC، AD و میانه‌های این مثلث را تعیین کنید.



۵۳۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین OAB، $OA = OB = a$ داده شده است.

۱. M نقطه‌ای دلخواه روی وتر AB، و P و Q تصویرهای قائم نقطهٔ M بترتیب روی OA و OB است. ثابت کنید که $MP + MQ$ هنگامی که نقطهٔ M روی AB، از A تا B جابه‌جا می‌شود، مقدار ثابتی است.

۲. با شرایط بالا، مکان هندسی نقطهٔ S وسط پاره‌خط PQ را تعیین کنید.

۳. مثلثهای IOQ و IAP (I وسط پاره‌خط AB) را با هم مقایسه کنید. در مورد مثلث IPQ و خط راست IS چه می‌توان گفت؟ نشان دهید که ۵ نقطهٔ I، Q، O، P و M روی یک دایره واقعند. مرکز این دایره کدام نقطه است؟

۴. فرض می‌کنیم که $\frac{MA}{MB} = \frac{۱}{۳}$ باشد، اندازهٔ پاره خطهای MA، MB، MP، MQ و OM همچنین مساحت چهارضلعی $IQOP$ را برحسب a تعیین کنید.

۵۴۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به رأس قائم A داده شده است. ضلعهای AB و AC را از طرف A به اندازه‌های مساوی $AD = AE$ امتداد می‌دهیم. خطی که از نقطهٔ E موازی ضلع AC رسم می‌شود، خط BC را در نقطهٔ F قطع می‌کند. نقطهٔ O وسط ضلع BC است:

۱. H پای عمود رسم شده از C بر EF است. ثابت کنید که $OD = OH$ و $D\hat{O}H = ۹۰°$ است.

۲. خط HA خط BD را در نقطهٔ H' قطع می‌کند. ثابت کنید که HH' بر BD عمود است.

۳. مربع $OHKD$ را می‌سازیم. خطهای BE و DK در نقطهٔ G یکدیگر را قطع می‌کنند. I را پای عمود رسم شده از نقطهٔ O بر خط AC می‌نامیم. مثلثهای ODI و DAG را با هم مقایسه کنید. این دو مثلث چگونه باید باشند تا نقطه‌های K و G بر هم منطبق شوند.

۴. فرض می‌کنیم $BC = ۲a$ باشد. اندازهٔ پاره‌خطهای EH، EA و ED را بر حسب a حساب کنید. نشان دهید، $BOED$ متوازی‌الاضلاع است. ضلعهای مربع $OHKD$ را با فرض این که نقطه‌های K و G بر هم منطبقند، تعیین کنید.

۵۴۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ در رأس A داده شده است. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین AEC و ADB را که وترهایشان بترتیب AC و AB است، در خارج مثلث ABC می‌سازیم.

۱. نشان دهید که سه نقطهٔ D، A و E روی یک خط راستند. نقطهٔ O وسط ضلع BC است، مثلثهای OAE و OCE و سپس مثلثهای OAD و OBD را با هم مقایسه

کنید. در مورد مثلث ODE چه می‌توان گفت؟

۲. نقطه‌های E' و D' نقطه‌های برخورد OE و OD بترتیب با DB و EC است. چهارضلعی $DED'E'$ چگونه است؟

۳. ثابت کنید که $AB + AC = OD + OE$.

۴. فرض می‌کنیم $AB = b$ و $AC = c$ باشد. مساحت چهارضلعی $DED'E'$ را بر حسب b و c تعیین کنید و نشان دهید که این مساحت برابر است با ۲ برابر مساحت مربعی به ضلع OA به اضافهٔ دو برابر مساحت مثلث ABC.

بخش ۶
• رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره

۶. ۱. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی

۶. ۱. ۱. تعریف و قضیه

۶. ۱. ۲. زاویه

۶. ۱. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۶. ۱. ۳. ضلع

۶. ۱. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۶. ۱. ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۶. ۱. ۴. ۱. اندازهٔ ارتفاع

۶. ۱. ۵. پاره‌خط

۶. ۱. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶. ۱. ۵. ۲. رابطهٔ بین پاره خطها

۶. ۱. ۶. شعاع دایره

۶. ۱. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع

۶. ۱. ۷. محیط

۶. ۱. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۶. ۱. ۸. مساحت

۶. ۱. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۶. ۱. ۸. ۲. نسبت مساحتها

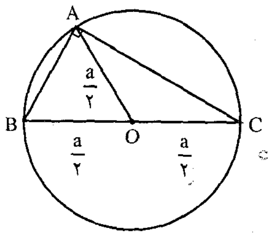
۶. ۱. ۹. رابطه‌های متری

۶. ۱. ۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

بخش ۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره

۱.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی

۱.۱.۶. تعریف و قضیه

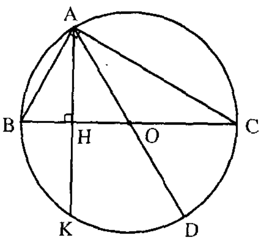


مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. دایرهٔ محیطی این مثلث دایره‌ای به قطر BC است. بنابراین مرکز آن، وسط وتر و شعاع آن نصف اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه است.

در این بخش رابطه‌های متری مربوط به مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی آن را بررسی می‌کنیم.

۲.۱.۶. زاویه

۱.۲.۱.۶. اندازهٔ زاویه



۵۴۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. ارتفاع AH دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ K قطع می‌کند. اگر D انتهای دیگر قطر دایرهٔ گذرنده از رأس A و $\widehat{KD}=۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ مثلث ABC را تعیین کنید.

۳.۱.۶. ضلع

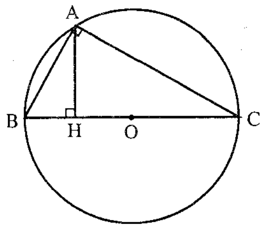
۱.۳.۱.۶. اندازهٔ ضلع

۵۴۳. یکی از زاویه‌های مثلثی برابر تفاضل دو زاویهٔ دیگر است. در این مثلث طول ضلع کوچکتر برابر ۱cm و مجموع مساحتهای مربعهای تشکیل شده بر روی دو ضلع دیگر، دو برابر مساحت دایرهٔ محیطی مثلث است. طول ضلع بزرگتر مثلث را محاسبه کنید.

۴.۱.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۶. اندازهٔ ارتفاع

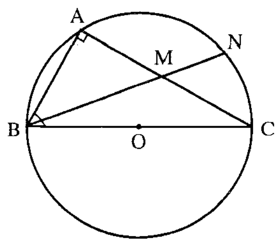
۵۴۴. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را رسم کرده‌ایم. اگر $\widehat{AB}=60^\circ$ و $BC=20\text{cm}$ باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث و ارتفاع AH را بیابید.



۵.۱.۶. پاره‌خط

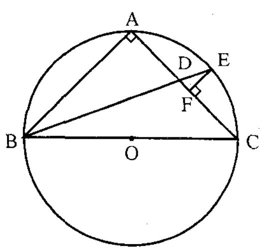
۱.۵.۱.۶. اندازهٔ پاره‌خط

۵۴۵. وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، برابر ۲۰ و $A\hat{B}C=60^\circ$ است. میانهٔ BM دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ N قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خط MN را بیابید.



۲.۵.۱.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۴۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC در دایره محاط شده است. نقطهٔ برخورد میانهٔ BD با دایره را E می‌نامیم و عمود EF را بر AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید: $AF=3EF$.



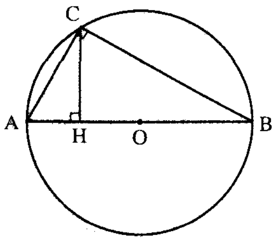
۶.۱.۶. شعاع دایره

۱.۶.۱.۶. اندازهٔ شعاع

۵۴۷. اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه، ۱۶ و ۲۰ سانتیمترند. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث را تعیین کنید.

۷.۱.۶. محیط

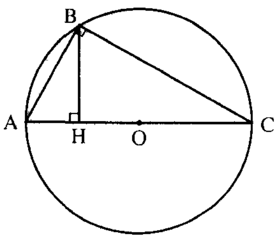
۱.۷.۱.۶. اندازهٔ محیط



۵۴۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. در صورتی که شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۱۰cm و اندازهٔ ارتفاع نظیر وتر مساوی $۵\sqrt{۳}$cm باشد، اندازهٔ محیط مثلث را بیابید.

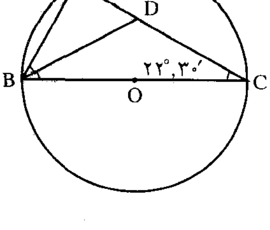
۸.۱.۶. مساحت

۱.۸.۱.۶. اندازهٔ مساحت



۵۴۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B}=۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. اگر AB = ۱۰cm و اندازهٔ ارتفاع رأس B برابر ۸cm باشد، اندازهٔ مساحت مثلث را تعیین کنید.

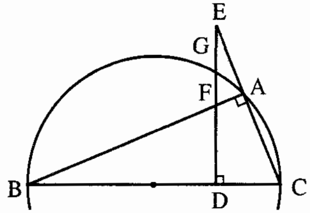
۲.۸.۱.۶. نسبت مساحتها



۵۵۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ داده شده است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر ۱۰ سانتیمتر و اندازهٔ زاویهٔ C برابر ′۳۰ و °۲۲ است. اگر D پای نیمساز زاویهٔ B باشد، نسبت مساحت مثلث ABD به مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.

۹.۱.۶. رابطه‌های متری

۵۵۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر گرفته، از نقطهٔ D واقع بر وتر BC، عمودی بر آن اخراج می‌کنیم تا خط AC را در E، و خط AB را در F، و نیمدایرهٔ محیط بر مثلث را در G قطع کند. ثابت کنید : $DG^2 = DF.DE$.



۱۰.۱.۶. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

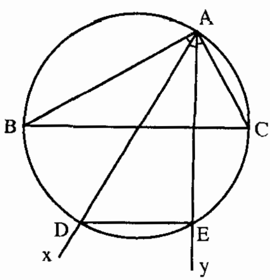
۵۵۲. محل تلاقی میانه‌های مثلثی از مرکز دایرهٔ محیطی آن، برابر یک سوم شعاع این دایره است. ثابت کنید این مثلث، قائم‌الزاویه است.

۱۱.۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۵۳. رأسهای B و C از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به نقطهٔ دلخواه K از ارتفاع وارد بر وتر BC وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا ضلعهای AC و AB را در E و F قطع کنند. اگر امتدادهای EF و BC یکدیگر را در نقطهٔ S قطع کنند، ثابت کنید مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطهٔ A از نقطهٔ S می‌گذرد.

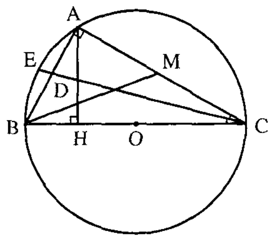
دومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، ۱۳۷۱

۵۵۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن را در نظر می‌گیریم. خطهای Ax و Ay که زاویهٔ A را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند، دایرهٔ محیطی را بترتیب در نقطه‌های D و E قطع کرده‌اند. ثابت کنید که DE موازی BC و DE = R (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث) است.



۵۵۵. نشان دهید خط اویلر مثلث، تنها در صورتی از یک رأس مثلث می‌گذرد که مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه باشد.

۱۲.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی



۵۵۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. اگر $BC = 26$ و $AB = 10$ باشد:

۱. اندازهٔ ارتفاع AH را تعیین کنید.

۲. طول میانهٔ BM را به‌دست آورید.

۳. اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی C را بیابید.

۴. نیمساز CD، دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ E قطع می‌کند. طول پاره‌خط DE را محاسبه کنید.

۲.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محاطی

۱.۲.۶. تعریف و قضیه

در این قسمت قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محاطی آن را بررسی می‌کنیم.

۵۵۷. قضیه. اگر a و b ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه و c طول وتر و r شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد، آن‌گاه ثابت کنید که: $r = \frac{a+b-c}{2}$.

۲.۲.۶. زاویه

۱.۲.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۵۵۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، BE، نیمساز زاویهٔ قائمهٔ

B، را طوری تقسیم می‌کند که $BO : OE = \sqrt{۳} : \sqrt{۲}$. اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ مثلث را پیدا کنید.

۵۵۹. نقطهٔ میانه‌ای مثلث قائم‌الزاویه‌ای بر دایرهٔ محاطی این مثلث قرار دارد. اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ این مثلث را پیدا کنید.

۵۶۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دایره‌ای را محاط کرده‌ایم. نقطهٔ تماس دایره با وتر مثلث، آن را به دو قطعه تقسیم می‌کند که نسبت آنها برابر $K(K > ۱)$ است. زاویه‌های مثلث را به دست آورید.

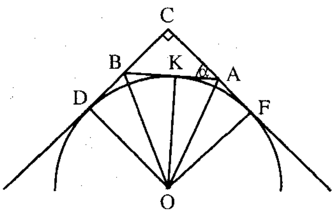
۳.۲.۶. ضلع

۱.۳.۲.۶. اندازهٔ ضلع

۵۶۱. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی وتر آن را به پاره‌خطهایی به طول ۲۴cm و ۳۶cm تقسیم می‌کند. طول ضلعهای زاویهٔ قائمه را به دست آورید.

۵۶۲. مطلوب است محاسبهٔ ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که فاصله‌های مرکز دایرهٔ محاطی آن از دو انتهای وتر، برابر $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۱۰۴}$ باشد.

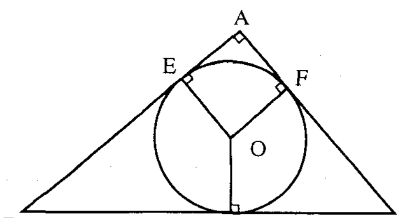
۵۶۳. زاویهٔ حاده‌ای از مثلث قائم‌الزاویه برابر α است. اگر شعاع دایرهٔ مماس بر وتر و امتداد ضلعهای قائمهٔ این مثلث برابر R باشد. در آن صورت طول ضلعهای مثلث داده شده را به‌دست آورید (شکل).



۴.۲.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۶. اندازهٔ ارتفاع

۵۶۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، برابر ۱ سانتیمتر است. اگر D، E و F بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای BC، AB و AC با دایرهٔ محاطی آن و $BD = ۳cm$ باشد. طول ضلعها و اندازهٔ ارتفاع این مثلث را بیابید.



۵.۲.۶. پاره‌خط

۱.۵.۲.۶. اندازهٔ پاره‌خط

۵۶۵. طول ساقهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای a و b است. فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمه تا نزدیکترین نقطه از دایرهٔ محاطی مثلث را پیدا کنید.

۵۶۶. طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با c است. دامنهٔ تغییرات فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محاطی مثلث و محل برخورد میانه‌های آن، چیست؟

۲.۵.۲.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۶۷. ارتفاع وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه، آن مثلث را به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم می‌کند. نشان دهید که خط‌المرکزین دایره‌های محاطی این دو مثلث با فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محاطی مثلث اصلی از رأس قائمهٔ این مثلث برابر است.

۶.۲.۶. شعاع دایره

۱.۶.۲.۶. اندازهٔ شعاع

۵۶۸. در مثلث ABC، اندازهٔ ضلعها، $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ و $\overline{AB}$ ، بترتیب ۲۴ سانتیمتر، ۱۰ سانتیمتر و ۲۶ سانتیمتر است. شعاع دایرهٔ محاطی چند سانتیمتر است؟

الف) ۲۶　　ب) ۴　　ج) ۱۳　　د) ۸　　هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۵۶۹. در مثلثی به ضلعهای ۸، ۱۵ و ۱۷، دایره‌ای محاط می‌شود. شعاع این دایره برابر است با :

الف) ۶　　ب) ۲　　ج) ۵　　د) ۳　　هـ) ۷

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۵۷۰. مطلوب است شعاع دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر آن c و یکی از زاویه‌های حاده‌اش α باشد.

۷.۲.۶. محیط

۱.۷.۲.۶. اندازهٔ محیط مثلث

۵۷۱. وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۱۰ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ۱ سانتیمتر

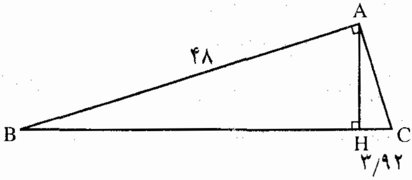
است. محیط این مثلث چند سانتیمتر است؟

الف) ۱۵ ب) ۲۲ ج) ۲۴ د) ۲۶ هـ) ۳۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۲.۷.۲.۶. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

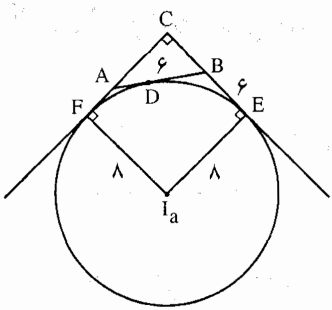
۵۷۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای طول یک ضلع زاویه، برابر ۴۸cm و طول تصویر ضلع دیگر بر روی وتر، معادل ۳/۹۲cm است. محیط دایرهٔ محاطی مثلث را به‌دست آورید.



۸.۲.۶. مساحت

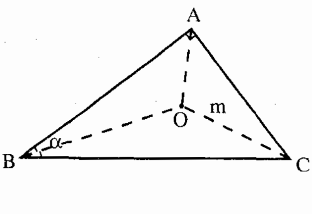
۱.۸.۲.۶. اندازهٔ مساحت مثلث

۵۷۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$، داده شده است. دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع AB در نقطهٔ D و در نقطه‌های E و F بترتیب بر امتداد ضلعهای BC و AC مماس است. اگر $r_a=۸$ و $BD=BE=۶$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ABC را بیابید.



۵۷۴. مساحت مثلث قائم‌الزاویه مساوی است با حاصلضرب دو قطعه‌ای که دایرهٔ محاطی از وتر جدا می‌کند.

۵۷۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ یکی از زاویه‌های حاده برابر α است. فاصلهٔ رأس حادهٔ دیگر از مرکز دایرهٔ محاطی آن، برابر m است. مساحت مثلث را محاسبه کنید.



۵۷۶. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن r و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی مماس بر وترش، r_a باشد.

۲.۸.۲.۶. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۷۷. مطلوب است مساحت دایره‌ای که در مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط شده است. به شرطی که بدانیم ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث، وتر را به قطعه‌هایی مساوی ۲۵/۶ سانتیمتر و ۱۴/۴ سانتیمتر تقسیم کرده است.

۵۷۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC قائمه در رأس A و به ارتفاع $AH = ۴cm$ ، داده شده است. مساحت دایرهٔ محاطی داخلی آن را تا ۰/۰۱ تقریب حساب کنید.

۳.۸.۲.۶. نسبت مساحتها

۵۷۹. در یک مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر h، شعاع دایرهٔ محاطی r است. نسبت مساحت این دایره به مساحت مثلث برابر است با :

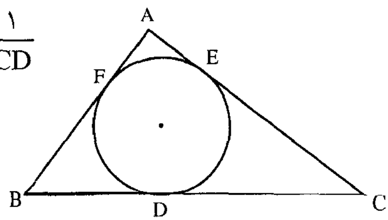
الف) $\frac{\pi r}{h+۲r}$ ب) $\frac{\pi r}{h+r}$ ج) $\frac{\pi r}{۲h+r}$ د) $\frac{\pi r^۲}{h^۲+r^۲}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۹.۲.۶. رابطه‌های متری

۵۸۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، دایرهٔ محاطی در نقطه‌های D، E و F بر وتر BC و ضلع AC و ضلع AB مماس است. ثابت کنید :

$$۲\left(\frac{۱}{AB} - \frac{۱}{AC}\right) = \frac{۱}{BD} - \frac{۱}{CD}$$



۵۸۱. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ مماس بر وتر مثلث قائم‌الزاویه و امتدادهای ضلعهای آن با مجموع طولهای وتر و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث برابر است.

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \Rightarrow r_a = a + r$$

۵۸۲. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، و r' و r'' شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهایی باشند که ارتفاع وارد بر وتر به‌وجود می‌آورد، رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$r^2 = r'^2 + r''^2$$

۵۸۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$، ثابت کنید:

$$S = p(p-a) = (p-b)(p-c) = rr_a = r_b r_c$$

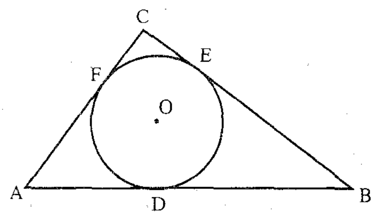
۵۸۴. ثابت کنید نامساوی زیر که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی و h ارتفاع وارد بر وتر است، در مورد هر مثلث قائم‌الزاویه برقرار است: $0/4 < \frac{r}{h} < 0/5$.

۶.۲.۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۸۵. ثابت کنید مثلثی که در آن رابطهٔ $S = r_b . r_c$ برقرار باشد، قائم‌الزاویه است.

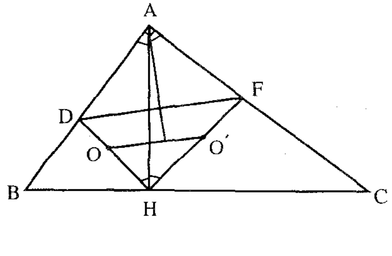
۵۸۶. ثابت کنید مثلثی که در آن رابطهٔ $S = r . r_a$ برقرار باشد، قائم‌الزاویه است.

۵۸۷. اگر دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC در نقطهٔ D بر ضلع AB مماس باشد، به طوری که $AC . CB = 2AD . DB$، ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است.



۶.۲.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر O و O' مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABH و ACH باشد، ثابت کنید نیمساز زاویهٔ A بر OO' عمود است.

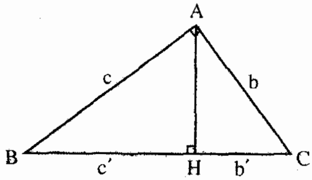


۵۸۹. ثابت کنید نسبت r به محیط مثلث قائم‌الزاویه، وقتی Min است که مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۱۲.۲.۶. مسأله‌های ترکیبی

۵۹۰. ۱. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، رابطهٔ $\frac{۱}{r}+\frac{۱}{r_a}=\frac{۲\sqrt{۲}}{l}$ برقرار است (l طول نیمساز زاویهٔ درونی رأس قائم است).

۲. اگر $r=۱$ و $r_a=۶$ باشند، طولهای ضلعهای مثلث را حساب کنید.



۵۹۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، می‌دانیم که $BC=۱۳$ و $AB=۱۲$ است. مطلوب است محاسبهٔ AC و تصویرهای دو ضلع زاویهٔ قائمه روی وتر، ارتفاع و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث.

۵۹۲. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای دو ضلع بترتیب ۳ و ۴ هستند. وتر، ارتفاع وارد بر وتر، قطعه‌هایی که این ارتفاع از وتر جدا می‌کند و شعاع دایرهٔ محاطی را حساب کنید.

۵۹۳. اگر عددهای صحیح و مثبت a، b و c در رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ صدق کنند، حاصلضرب abc بر ۶۰ بخشپذیر است. با مقایسهٔ اتحاد:

$$(\alpha^۲+\beta^۲)^۲=(\alpha^۲-\beta^۲)^۲+(۲\alpha\beta)^۲$$

جوابهایی یا مقدارهایی برای a، b و c به دست آورید. در این صورت کلیهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه که ضلعهای آنها عددهای صحیح‌اند، معلوم می‌شوند. اگر عدد صحیح n را بر a، b و c که با اتحاد بالا تعیین شده‌اند، بیفزاییم، مثلث حاصل بر حسب علامت n حاده‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه خواهد بود. مطابقهٔ علامت را با حاده یا منفرجه بودن زاویه‌های مثلث بحث کنید.

آیا عکس قضیه نیز صحیح است؟ یعنی اگر در مثلثی ضلعها، عددهای صحیح باشند (قدرمطلق ضلعها منظور شده است، یعنی ممکن است ضلعی را منفی فرض کرد)، آیا می‌توان عدد صحیحی (مثبت یا منفی) یافت که افزودن آن به ضلعهای مثلث، مثلث جدیدی به‌دست دهد که قائم‌الزاویه باشد؟ آیا در کدام مثلثها این مطلب میسر است؟ (دو دسته از این مثلثها وجود دارد که یکی مثلثی است که ضلعهایش تصاعد عددی تشکیل می‌دهند.) ثابت کنید که برای هر مثلث قائم‌الزاویه، عددی صحیح و مثبت وجود دارد که اگر آن را از ضلعها کم کنیم (قدرمطلق تفاوتها منظور شده است)، مثلث جدید باز هم قائم‌الزاویه است. ثابت کنید که این عدد دو برابر قطر دایرهٔ محاطی مثلث اوّل است.

هندسهٔ دوایر، دکتر محسن هشترودی

۳.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محیطی و محاطی

۱.۳.۶. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محیطی و محاطی آن را بررسی می‌کنیم.

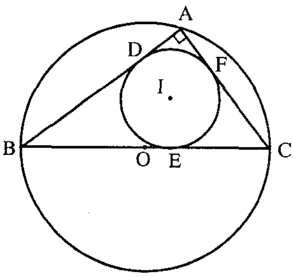
۲.۳.۶. زاویه

۱.۲.۳.۶. اندازهٔ زاویه

۵۹۴. مطلوب است اندازهٔ زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه‌ای که نسبت شعاع دایرهٔ محیطی آن به شعاع دایرهٔ محاطی آن مثل ۲ : ۵ است.

۳.۳.۶. ضلع

۱.۳.۳.۶. اندازهٔ ضلع



۵۹۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، داده شده است. D، E و F بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC و CA با دایرهٔ محاطی درونی این مثلث است. در صورتی که شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر ۱۰cm و شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن برابر ۴cm باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث را به‌دست آورید.

۴.۳.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۶. اندازهٔ ارتفاع

۵۹۶. نسبت شعاع دایرهٔ محیطی به شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلثی قائم‌الزاویه، برابر $\frac{5}{2}$ است. اگر مساحت این مثلث برابر ۹۶ باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس قائم را به‌دست آورید.

۶.۳.۵. پاره‌خط

۶.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۹۷. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلعهای زاویهٔ قائمه با طولهای ۱۸cm و ۲۴cm فاصلهٔ بین مرکزهای دایره‌های محاطی و محیطی را به‌دست آورید.

۶.۳.۶. شعاع دایره

۶.۳.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۵۹۸. ضلعهای مثلثی بترتیب ۲۵، ۲۴ و ۷ سانتیمتر است. مطلوب است شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی مثلث.

۶.۳.۶.۲. نسبت شعاعها

۵۹۹. دایره‌ای به شعاع r در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین محاط است و دایره‌ای به شعاع R بر آن مثلث محیط است. نسبت $\frac{R}{r}$ برابر است با:

الف) $\sqrt{۲}+۱$ ب) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$ د) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$ هـ) $۲(۲-\sqrt{۲})$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

۶.۳.۷. محیط

۶.۳.۷.۱. اندازهٔ محیط

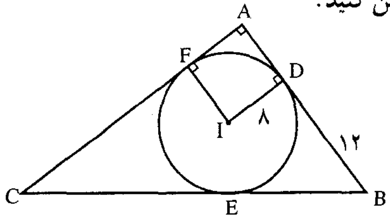
۶۰۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=۹۰^\circ)$، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر ۲۶ و قطعه‌ای از ضلع مثلث محصور بین رأس قائم و نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی برابر ۸ است. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

۶.۳.۸. مساحت

۶.۳.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۶۰۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی $r=۸$ و

$BD = ۱۲$ است. (D نقطهٔ تماس ضلع AB با دایرهٔ محاطی درونی است.) اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی و مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.



۹.۳.۶. رابطه‌های متری

۶۰۲. ثابت کنید که در مثلث قائم‌الزاویه، مجموع ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه برابر است با مجموع قطرهای دایره‌های محاطی و محیطی مثلث.

۴.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های دیگر

۱.۴.۶. تعریف و قضیه

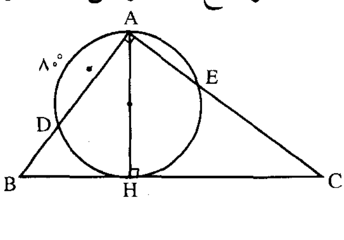
در این قسمت مسأله‌های مربوط به رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌هایی غیر از دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نکته. قضیه‌ها و مسأله‌هایی که دایره‌هایی غیر از دایره‌های محاطی و محیطی در آنها دخالت اساسی دارند، امّا شامل دایره‌های محاطی یا محیطی نیز می‌باشند، در این قسمت آورده شده‌اند.

۲.۴.۶. زاویه

۱.۲.۴.۶. اندازهٔ زاویه

۶۰۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، داده شده است. ارتفاع AH از این مثلث و سپس دایره‌ای به قطر AH رسم می‌کنیم. این دایره ضلع AB را در D و ضلع AC را در E قطع می‌کند. اگر $\overset{\frown}{AD} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های مثلث را تعیین کنید.



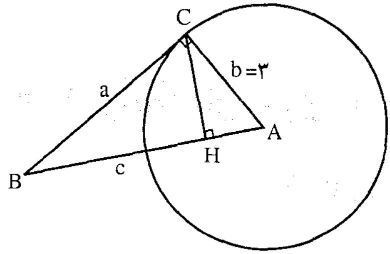
۶.۴.۳. ضلع

۶.۴.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۶۰۴. ضلع BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$، را به عنوان قطر دایره‌ای در نظر می‌گیریم. این دایره وتر AB از مثلث را در نقطهٔ D طوری قطع می‌کند که $AD : DB = 3:1$ باشد. اگر ارتفاع وارد بر وتر مثلث برابر ۳cm باشد، ضلعهای مثلث ABC را بیابید.

۶.۴.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۶.۴.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع



۶۰۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$، داده شده است. به مرکز A و به شعاع $AC = 3cm$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اگر قوت رأس B نسبت به این دایره برابر ۱۶ باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس C را تعیین کنید.

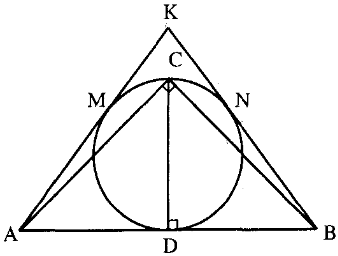
۶.۴.۵. پاره‌خط

۶.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶۰۶. دایره‌ای بر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$، محیط شده است. فرض کنید CD معرف ارتفاع مثلث باشد. دایره‌ای به مرکز D، از وسط کمان $\widehat{AB}$ می‌گذرد و AB را در M قطع می‌کند. اگر $AB = c$ ، CM را پیدا کنید.

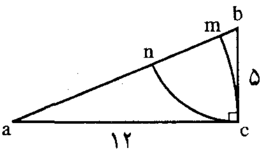
۶۰۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، دایره‌ای رسم می‌شود که از وسطهای AB و AC می‌گذرد و بر ضلع BC مماس است. اگر $AB = 3$ و $BC = 4$ ، طول آن بخش از وتر AC را که درون این دایره قرار دارد، پیدا کنید.

۶۰۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، زاویهٔ حادهٔ A برابر با 30° است. نیمساز زاویهٔ حادهٔ دیگر رسم می‌شود. اگر طول ساق کوچکتر برابر با ۱ باشد، فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABD و CBD را پیدا کنید.



۶۰۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، با وتر AB به طول c، دایره‌ای به قطر ارتفاع CD رسم شده است. دو مماس بر این دایره که از نقطه‌های A و B می‌گذرند، بترتیب، در نقطه‌های M و N بر دایره مماسند و امتدادهای آنها، یکدیگر را در نقطهٔ K قطع می‌کنند. MK را پیدا کنید.

۶۱۰. طول ارتفاع رسم شده بر وتر مثلثی قائم‌الزاویه، برابر با h است. ثابت کنید که رأسهای زاویه‌های حادهٔ مثلث و تصویرهای پای این ارتفاع بر ساقها، همگی بر یک دایره واقعند. طول وتری را که این دایره روی خط شامل ارتفاع جدا می‌کند و طول قطعه‌هایی از وتر دایره را که وتر مثلث جدا می‌کند، تعیین کنید.



۶۱۱. در مثلث abc زاویهٔ به رأس c قائمه و ۵ = [bc] و ۱۲ = [ac] است. دایرهٔ به مرکز a که بر c بگذرد، وتر را در m قطع می‌کند. دایرهٔ به مرکز b و گذرنده بر c با وتر در n برخورد می‌کند. درازای پاره‌خط [mn] برابر می‌شود با :

الف) ۲ ب) $\frac{۱۳}{۵}$ ج) ۳ د) ۴ هـ) $\frac{۲۴}{۵}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۶.۴.۶. شعاع دایره

۶.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۶۱۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای ABH و ACH، بترتیب برابر ۱ و ۳ باشند، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC برابر است با :

الف) ۵ ب) $\sqrt{۱۰}$ ج) $۲\sqrt{۲}$ د) ۴/۵ هـ) ۳

مرحلهٔ اوّل چهاردهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۵

۶۱۳. دایره‌ای از رأس Aی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC عبور کرده و بر ضلع قائمهٔ BC مماس می‌شود. مرکز آن نیز روی وتر AB از مثلث قرار می‌گیرد. اگر AB = c و BC = a باشد، اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

۶۱۴. نیمدایره‌ای داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای طوری محاط شده است که قطر آن روی وتر

مثلث قرار گرفته و مرکز دایره، وتر مثلث را به دو قطعه به طولهای ۱۵cm و ۲۰cm تقسیم کرده است. شعاع نیمدایره را بیابید.

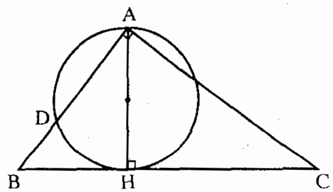
۶۱۵. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، وتر برابر با c است. رأسهای مثلث، مرکزهای سه دایره به شعاع $\frac{c}{5}$ هستند. شعاع دایرهٔ چهارمی را پیدا کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس و آنها را محصور نکرده است.

۶۱۶. طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر با c و اندازهٔ یکی از زاویه‌های حادهٔ آن $30°$ است. شعاع دایرهٔ با مرکز رأس زاویهٔ $30°$ را، که مثلث را به دو قسمت برابر تقسیم می‌کند، پیدا کنید.

۶.۴.۷. محیط

۶.۴.۷.۱. اندازهٔ محیط

۶۱۷. به قطر ارتفاع AH از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90°)$، دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره ضلع AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر $BH=4$ و $BD=\frac{8\sqrt{13}}{13}$ باشد، اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.



۶.۴.۸. مساحت

۶.۴.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۶۱۸. ارتفاع وارد از زاویهٔ قائمهٔ مثلثی قائم‌الزاویه بر وتر آن، مثلث را به دو مثلث که در هر کدام دایره‌ای محاط شده، تقسیم می‌کند. اگر طول ارتفاع مثلث اصلی h باشد، اندازهٔ زاویه‌ها و مساحت مثلثی را پیدا کنید که از ساقهای مثلث اصلی و خطی که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد، تشکیل شده است.

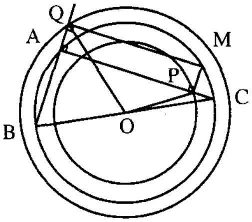
۶.۴.۸.۲. نسبت مساحتها

۶۱۹. دایره‌ای بر یک مثلث قائم‌الزاویه محیط شده است. دایرهٔ دیگری با همان شعاع، بر ساقهای این مثلث مماس و یکی از رأسهای مثلث نقطهٔ تماس است. نسبت مساحت مثلث، به مساحت بخش مشترک دو دایرهٔ مفروض را پیدا کنید.

۳.۸.۴.۶. رابطهٔ بین مساحتها

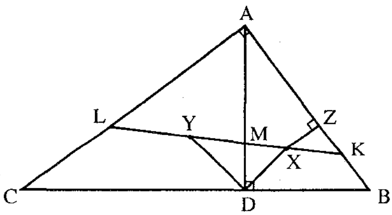
۶۲۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AD را رسم کرده و سه نیمدایره به قطرهای BC، BD و CD در یک طرف BC رسم می‌کنیم. ثابت کنید اندازهٔ سطحی که بین سه نیمدایره قرار دارد، مساوی مساحت دایره به قطر AD می‌باشد.

۶۲۱. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. از نقطهٔ غیرمشخص M دو عمود بر AB و AC ضلعهای زاویهٔ قائمه فرود می‌آوریم و پای این عمودها را P و Q می‌نامیم. ثابت کنید دو دایره به مرکز O که یکی از نقطهٔ P و دیگری از نقطهٔ Q می‌گذرد، دو تاج معادل می‌سازند.



۶۲۲. اگر به شعاع یا به قطر ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای سه دایره رسم کنیم، مساحت دایرهٔ نظیر وتر مساوی مجموع مساحتهای دو دایرهٔ دیگر است.

۶۲۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در رأس A قائمه است، در نظر بگیرید. فرض کنید D پای ارتفاع رسم شده از A باشد. مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABD و ACD را به هم وصل کنید تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در K و L قطع کند.



مساحت مثلثهای ABC و AKL را بترتیب S و T می‌نامیم؛ ثابت کنید: $S \geq 2T$.

بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، استرالیا، ۱۹۸۸

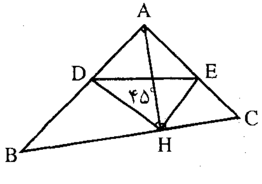
۹.۴.۶. رابطه‌های متری

۶۲۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم کرده، نیمسازهای دو زاویهٔ AHB و AHC را رسم می‌کنیم تا در نقطه‌های D و E بترتیب ضلعهای AB و AC را قطع کنند. ثابت کنید:

۱. دایرهٔ به قطر DE از دو نقطهٔ A و H می‌گذرد.

۲. $\dfrac{HB^2}{HC^2}=\dfrac{DB}{CE}\cdot\dfrac{AB}{AC}$

۳. $\dfrac{DH}{HE}=\dfrac{BD}{AE}=\dfrac{BH}{AH}$



۶۲۵. مثلث قائم‌الزایهٔ ABC $(\hat{B}=۹۰^\circ)$ داده شده است. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن باشد، نقطهٔ D را روی ضلع BC چنان در نظر می‌گیریم که $BD=r$. اگر $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دایره‌های محاطی درونی مثلثهای ABD و ADC باشند، آن‌گاه ثابت کنید:

$$|AO_۱|^۲+|DO_۲|^۲=|AO_۲|^۲+|DO_۱|^۲$$

اوّلین المپیاد ریاضی کشورهای اکو، تهران، ۱۳۷۳

۶۲۶. نشان دهید که:

الف. مجموع ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه منهای وتر آن مثلث، با قطر دایرهٔ محاطی درونی آن مثلث برابر است. یعنی با فرض $\hat{A}=۹۰^\circ$؛ $b+c-a=۲r$.

ب. ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع شعاع دایرهٔ محاطی درونی و شعاعهای دایره‌های محاطی درونی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث ایجاد می‌کند، یعنی با فرض $\hat{A}=۹۰^\circ$؛ $h_a=r+r_۱+r_۲$.

۶.۴.۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

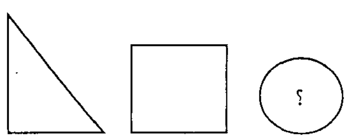
۶۲۷. در مثلث ABC نیمسازهای داخلی و خارجی AD و AD' نظیر زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، هرگاه میانهٔ رسم شده از A بر دایرهٔ به قطر DD' مماس باشد، مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

۶۲۸. روی دو ضلع از مثلثی و در خارج آن، دو مربع می‌سازیم. ثابت کنید که دایره‌های محیطی این مربعها و دایره‌ای که قطرش ضلع سوم مثلث است، در یک نقطه همرسند و مرکزهای این سه دایره، رأسهای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند.

۶.۴.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۲۹. از مثلث قائم‌الزاویه، مربع بسازید!

یک مثلث قائم‌الزاویه داریم. می‌خواهیم با سه برش مستقیم قیچی آن را چهار قطعه کنیم و از کنار هم گذاشتن این قطعه‌ها یک مربع، به همان مساحت بسازیم، چگونه؟



المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۶۳۰. فرض کنید ABC مثلثی قائم‌الزاویه باشد ($\hat{C} = 90^\circ$). CD ارتفاع آن است و K نقطه‌ای در صفحه، به طوری که $AK = AC$. ثابت کنید، قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABK که از رأس A می‌گذرد، بر خط DK عمود است.

۶۳۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با زاویهٔ قائمهٔ C، مفروض است. فرض کنید O مرکز دایرهٔ محیطی و M نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با وتر مثلث باشد. فرض کنید دایره‌ای به مرکز M که از O می‌گذرد، نیمساز زاویه‌های A و B را در نقطه‌های K و L، متمایز از O، قطع کند. ثابت کنید که K و L، بترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BCD هستند، که در آنها، CD ارتفاع مثلث ABC است.

۶۳۲. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند (زاویه‌های به رأسهای B و B' قائمه‌اند ؛ رأسهای متناظر دو مثلث، با یک حرف بیان شده‌اند ؛ حرکت روی محیط هر مثلث را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته‌ایم). این دو مثلث طوری قرار گرفته‌اند که $A = C'$ ، و نقطهٔ A' بر نیم‌خط راست (BC]، بعد از نقطهٔ C واقع است. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'AC$ روی خط راست $A'B'$ است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۱۲.۴.۶. مسأله‌های ترکیبی

۶۳۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به قطر AH می‌کشیم. این دایره ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند.

۱. ثابت کنید مثلث AED با مثلث ABC متشابه است و چهارضلعی ECDB محاطی است.

۲. به فرض $AH = h$ و $BC = 3h$ ، ضلعهای دو مثلث ABC و ADE و مساحت چهارضلعی BCED را بر حسب h حساب کنید.

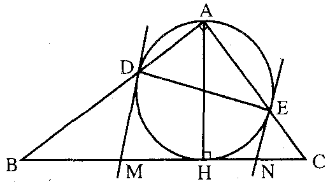
۶۳۴. مثلث ABC زاویهٔ قائمه‌ای در رأس A دارد و AD ارتفاع آن است. نیمسازهای زاویه‌های BAD و CAD ضلع BC را در S و S' قطع می‌کنند، و نیمسازهای زاویه‌های ABD و ACD ارتفاع AD را در T و T' قطع می‌کنند. اگر U، V و W مرکزهای دایره‌های محاطی درونی مثلثهای ABC، ABD و ACD باشند، نشان دهید که :

الف. نقطه‌های A، U، V و W یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند.

ب. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AVW روی AD قرار دارد.

ج. نقطه‌های B، C، V و W همدایره‌اند.

د. نقطه‌های S، S' ، T و T' یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می‌دهند. خاصیتهای دیگر شکل را بیان و ثابت کنید.



۶۳۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}$ قائمه)، داده شده است. دایره‌ای به قطر ارتفاع AH رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ D و AC را در نقطهٔ E قطع کند و از نقطه‌های D و E دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا بترتیب BC را در نقطه‌های M و N قطع کند.

۱. ثابت کنید که M و N بترتیب وسط قطعه خطهای BH و CH می‌باشند.

۲. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی DENM، نصف مساحت مثلث ABC است.

۶۳۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، فرض می‌کنیم $AB < AC$ باشد. روی وتر BC (بین نقطه‌های B و C) یک نقطهٔ دلخواه مانند D اختیار کرده، عمودمنصف قطعه خط BD را می‌کشیم تا ضلع AB یا امتداد آن را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ همچنین عمودمنصف قطعه خط CD را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. سه نقطهٔ D، E و F را دو به دو به یکدیگر وصل می‌کنیم.

۱. ثابت کنید مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

۲. به مرکز E و با شعاع EB یک دایره و به مرکز F و با شعاع FC یک دایرهٔ دیگر رسم می‌کنیم. این دو دایره که هر دو از نقطهٔ D می‌گذرند (دلیل؟) یکدیگر را در نقطهٔ دیگری مانند M قطع می‌کنند. بعلاوه فرض می‌کنیم G دومین نقطهٔ تلاقی خط AB با دایرهٔ اوّل و H دومین نقطهٔ تلاقی خط AC با دایرهٔ دوم باشد. ثابت کنید زاویهٔ BMC قائمه است و سه نقطهٔ C، G و M بر یک استقامتند. و دو خط BM و DG از نقطهٔ H می‌گذرند. نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع مثلث BCH کجا است؟ ثابت کنید سه مثلث ADC، BDM و AMH با مثلث BCH متشابه هستند.

۳. ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث ACG از نقطهٔ D می‌گذرد و نقطهٔ G مرکز دایرهٔ محاطی داخل یا خارج مثلث ADM است. بعلاوه صحت این رابطه را ثابت کنید:

$$BC^۲ = BA.BG + CM.CG$$

۴. فرض می‌کنیم $AB = ۶a$، $AC = ۸a$ و $BD = ۲x$ باشد. طولهای DE و DF را بر حسب a و x حساب نموده، مقدار x را بر حسب a طوری تعیین کنید که مثلث DEF متساوی‌الساقین شود و ثابت کنید که اگر مثلث DEF متساوی‌الساقین باشد، خط AD منصف زاویهٔ BAC خواهد بود.

۶۳۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده، مرکزهای دایره‌های محاطی سه مثلث ABC، ABH و ACH را بترتیب I، O و O' می‌نامیم. خط OO'

ضلعهای AB و AC را در B' و C' و خطهای AO و AO' ضلع BC را در نقطه‌های α و α' قطع می‌کند. ثابت کنید:

۱. دو مثلث $A\alpha C$ و $A\alpha' B$ متساوی‌الساقین هستند.

۲. نقطهٔ I محل تلاقی ارتفاعهای مثلث AOO' و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A\alpha\alpha'$ است.

۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AB'C'$ متساوی‌الساقین است.

۴. طول $B'C'$ و فاصلهٔ رأس A از آن را برحسب طول $AH = h$ حساب کنید.

۵. مثلث OHO' با مثلث ABC مشابه است.

۶. دو مثلث AOO' و $A\alpha\alpha'$ متشابه‌اند. اندازهٔ زاویه‌های آنها را بر حسب زاویه‌های مثلث ABC به‌دست آورید و همچنین نسبت تشابه آنها را حساب کنید.

۷. طولهای AI و OO' متساوی‌اند.

۸. رأس A مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث HOO'، محاط در زاویهٔ H است.

۶۳۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، داده شده است. نیمساز AD را رسم کرده، مرکزهای دایره‌های ABD و ACD را E و E' می‌نامیم.

۱. ثابت کنید که نقطه‌های A، E، E'، D و M وسط BC روی یک دایره قرار دارند.

۲. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC و r، r' و r'' شعاع دایره‌های ABD و ACD و دایرهٔ قسمت اوّل مسأله باشند، ثابت کنید:

$$r + r' = R\sqrt{۲} \quad \text{و} \quad ۴r''^{۲} = r^{۲} + r'^{۲}$$

و طولهای r و r' را حساب کنید.

۳. مکان هندسی نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ قسمت اوّل را وقتی که BC ثابت مانده، نقطهٔ A تغییر کند، به طوری که مثلث قائم‌الزاویه باشد، به دست آورید.

۴. ثابت کنید که مماسهای مشترک دایره‌های ABD و ACD همواره یکدیگر را روی BC قطع می‌کنند.

۵. به ازاء چه وضعی از نقطهٔ A، شعاع دایرهٔ O بزرگترین یا کوچکترین اندازهٔ ممکن را به‌دست می‌آورد.

۶۳۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، داده شده است. وتر BC به وسیلهٔ نقطه‌های B' و C' به سه قسمت متساوی تقسیم شده است.

۱. ثابت کنید: $AB'^{۲} + AC'^{۲} = ۵B'C'^{۲}$.

۲. فرض کنیم $\hat{C} = ۳۰^\circ$ باشد:

الف. ثابت کنید دایره به قطر BC' در نقطه‌ای مانند M بر AC مماس است و اگر N

نقطهٔ برخورد دیگر این دایره با AB باشد، داریم : $BN = ۲AN$.

ب. ثابت کنید $MN \| BC$ و $MN = \frac{BC}{۳}$.

پ. اگر $BC = ۳a$ پنداشته شود، محیط و مساحت ذوزنقهٔ $BCMN$ را بر حسب a به‌دست آورید.

۶۴۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$ و ارتفاع AH از آن را در نظر می‌گیریم :

۱. نشان دهید که دایره‌ای که از A، H و نقطهٔ D وسط ضلع AB می‌گذرد، از نقطهٔ I وسط BC و از نقطهٔ E وسط AC می‌گذرد.

۲. نشان دهید که $AH.AI = ۲AD.AE$.

۳. فرض می‌کنیم $AB = ۳cm$ و $AC = ۴cm$ باشد. نسبت مساحتهای دو مثلث ABI و DES را بیابید (S نقطهٔ برخورد DH و EI است).

۴. با همان شرایط قسمت ۳، مساحت چند ضلعی $ADHIE$ را بیابید.

۶۴۱. مثلث OAB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین در رأس O است. از نقطهٔ متغیر M واقع بر وتر BC، عمود MP را بر OA و عمود MQ را بر OB فرود می‌آوریم.

۱. نشان دهید که $MP + MQ$ مقدار ثابتی است. مکان هندسی نقطهٔ S وسط پاره‌خط OM را وقتی نقطهٔ M روی AB از A تا B حرکت می‌کند، تعیین کنید.

۲. نقطهٔ I وسط AB است. نشان دهید که $IP = IQ$ و چهارضلعی $IQOP$ قابل محاط شدن در یک دایره است.

۳. فرض می‌کنیم $OA = a$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{۱}{۳}$ باشد. اندازهٔ پاره‌خطهای MP، MQ، MA، MB و OM و همچنین مساحت چهارضلعی $IQOP$ را بر حسب a محاسبه کنید.

۶۴۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین در رأس A $(AB = AC = a)$ داده شده است.

۱. دایرهٔ مماس بر ضلعهای زاویهٔ A در نقطه‌های B و C را رسم کنید. اگر D نقطهٔ متقابل قطری B در دایره باشد و قاطعی در دایره، موازی BD رسم شود که امتداد AB را در I و دایره را در E و F (E بین I و F) قطع کند، مکان هندسی نقطهٔ M محل برخورد خطهای DF و BE را بیابید ؛ در صورتی که نقطهٔ I از نقطهٔ B در امتداد AB به فاصلهٔ دور برود.

۲. ثابت کنید که BI واسطهٔ توافقی بین IE و IF است. E' و F' را نقطه‌های متناظر E و F روی دایره، متقابل قطری در نظر می‌گیریم. نشان دهید که نقطه‌های برخورد $F'B$ و $E'B$ با خط راست EF، بترتیب قرینهٔ مرکزی نقطه‌های E و F نسبت به نقطهٔ I هستند.

۳. در دو قسمت زیر فرض می‌کنیم FF' عمود بر BC است. EF و BC را با هم مقایسه کنید. اندازهٔ پاره‌خطهای FC، FB و FI را بر حسب a بیابید. همچنین اندازهٔ پاره‌خطهای BI و IE را.

۴. اندازهٔ مساحت ذوزنقهٔ AIFC را بر حسب a بیابید. همچنین قسمتی از مساحت این ذوزنقه را که داخل دایره قرار دارد.

۶۴۳. مثلث ABC قائم‌الزاویه در رأس A است. دایره‌هایی به قطرهای AB و AC رسم می‌کنیم. خط دلخواهی که از A و در درون زاویهٔ BAC رسم می‌شود، دایرهٔ اوّل را در M و دایرهٔ دومی را در N قطع می‌کند. نشان دهید:

۱. که مثلثهای MHN و ABC متشابه‌اند. AH ارتفاع مثلث ABC است.

۲. که IJ با MN موازی است. I و J نقطه‌های برخورد HM و HN بترتیب با AB و AC است.

۳. که مثلثهای AJH و HIB همچنین دو مثلث AIH و HJC متشابه‌اند. با این نتیجه که $IA.JA = IB.JC$.

۴. با فرض $AH = h$ ، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\frac{IB}{IA} = \frac{۱}{۳}$. اندازهٔ ضلعهای مثلثهای ABC، MHN و همچنین نسبت مساحتهای آنها را بیابید.

۶۴۴. مثلث قائم‌الزاویه در رأس A داده شده است. از نقطهٔ دلخواه D واقع بر وتر BC عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ F و امتداد ضلع AB را در نقطهٔ E قطع کند. نقطهٔ برخورد BF و CE را H می‌نامیم.

۱. ثابت کنید که BH بر EC عمود است. مکان هندسی نقطهٔ H را وقتی نقطهٔ D روی BC تغییر مکان می‌دهد، پیدا کنید. F آیا بین A و C باقی می‌ماند؟

۲. نشان دهید که چهارضلعی EADC قابل محاط شدن در یک دایره است. مکان هندسی نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را بیابید؛ در صورتی که نقطهٔ D با شرایط قسمت ۱، جابه‌جا شود.

۳. خط DH دوباره دایرهٔ (O) را در نقطهٔ K قطع می‌کند. ثابت کنید که AK موازی BH است.

۴. فرض می‌کنیم $AB = ۲cm$ و $AC = ۴cm$. خط DE را چنان رسم کنید که چهارضلعی ABHK متوازی‌الاضلاع باشد.

۶۴۵. مثلث ABC قائم‌الزاویه در رأس A و متساوی‌الساقین است. O وسط ضلع BC و M یک نقطه روی پاره‌خط OB است. عمودهای MD و ME را بترتیب بر AB و AC

فرود می‌آوریم.

۱. نقطهٔ M' قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به DE است. نشان دهید که ۵ نقطهٔ A، E، M، D و M' روی یک دایره‌اند که P مرکز آن را مشخص خواهد کرد.

۲. مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی نقطهٔ M روی OB بین B و O جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۳. ثابت کنید که مثلثهای $M'EC$ ، $M'DB$ و همچنین مثلثهای MDB و MEC متشابه‌اند. نتیجه می‌شود که MM' نیمساز زاویهٔ $BM'C$ است.

۴. اندازهٔ زاویهٔ $BM'C$ و ارزش خط رسم شده به وسیلهٔ M' را وقتی M بین B و O حرکت می‌کند، تعیین کنید. نشان دهید که خط $M'M$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

بخش ۷
• رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه

۱.۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده

۱.۱.۷. تعریف و قضیه

۲.۱.۷. زاویه

۱.۲.۱.۷. اندازهٔ زاویه

۳.۱.۷. ضلع

۱.۳.۱.۷. اندازهٔ ضلع

۴.۱.۷. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۷. اندازهٔ ارتفاع

۵.۱.۷. پاره‌خط

۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱.۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۲.۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶.۱.۷. محیط

۱.۶.۱.۷. اندازهٔ محیط

۷.۱.۷. مساحت

۱.۷.۱.۷. اندازهٔ مساحت

۲.۷.۱.۷. رابطهٔ بین مساحتها

۸.۱.۷. رابطه‌های متری

۹.۱.۷. ثابت کنید مثلث با زاویه‌های حاده است

بخش ۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه

۱.۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده

۱.۱.۷. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلثی که هر سه زاویه‌اش حاده است، مورد بررسی قرار می‌گیرند. چنین مثلثی را مثلث حاده‌الزاویه یا مثلث با زاویه‌های حاده و برخی به طور خلاصه، مثلث حاده می‌نامند.

۲.۱.۷. زاویه

۱.۲.۱.۷. اندازهٔ زاویه

۶۴۶. در مثلث ABC که زاویه‌هایی حاده دارد، نیمساز AD، میانهٔ BM و ارتفاع CH، در یک نقطه به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، زاویهٔ BAC از ۴۵ درجه بیشتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

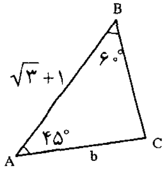
۳.۱.۷. ضلع

۱.۳.۱.۷. اندازهٔ ضلع

۶۴۷. در مثلث حاده الزاویهٔ ABC، زاویهٔ حاده بین ارتفاعهای AD و CE برابر α است. اگر $AD = a$ و $CE = b$ باشد، آن‌گاه AC را به دست آورید.

۴.۱.۷. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۷. اندازهٔ ارتفاع



۶۴۸. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵°$ و $\hat{B} = ۶۰°$ است. اگر $AB = \sqrt{۳} + ۱$ باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس A را به دست آورید.

۷.۱.۵. پاره‌خط

۷.۱.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷.۱.۵.۱.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۶۴۹. ارتفاعهای مثلث ABC، که زاویه‌هایی حاده دارد، در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند. روی پاره‌خطهای راست OB و OC، نقطه‌های B_1 و C_1 را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $A\hat{B_1}C = A\hat{C_1}B = 90^\circ$. ثابت کنید: $AB_1 = AC_1$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، نیویورک، ۱۹۷۶

۷.۱.۵.۱.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶۵۰. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد و در ضمن $|AB|<|BC|$. نقطه‌های X و Y را بترتیب، روی ضلعهای AB و BC، طوری انتخاب کرده‌ایم که $AX = BY$. ثابت کنید: $|XY| \geq \frac{1}{2}|AC|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۷.۱.۶. محیط

۷.۱.۶.۱. اندازهٔ محیط

۶۵۱. ثابت کنید، محیط مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلثی مفروض با زاویه‌های حاده هستند، از نصف محیط مثلث مفروض تجاوز نمی‌کند.

۷.۱.۷. مساحت

۷.۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۶۵۲. در مثلث حاده الزاویهٔ ABC، $AB = c$ بوده و در مورد میانهٔ آن نیز $BD = m$ را داریم. همچنین $B\hat{D}A = \beta$ $(\hat{\beta} < 90^\circ)$ است. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.

۷.۱.۷.۲. رابطهٔ بین مساحتها

۶۵۳. در مثلث حاده الزاویهٔ ABC، نیمسازهای زاویه‌های A، B و C بترتیب دایرهٔ محیطی را

در نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 قطع می‌کند. همچنین نقطه‌های A_0، B_0 و C_0 بترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی متناظر با رأسهای A، B و C می‌باشد. ثابت کنید:

(i) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ دو برابر مساحت شش ضلعی $AC_1BA_1CB_1$ است.

(ii) مساحت مثلث $A_0B_0C_0$ حداقل چهار برابر مساحت مثلث ABC است.

سی‌امین دورهٔ المپیادهای بین‌المللی ریاضی، آلمان، ۱۹۸۹

۶۵۴. رأسهای یک مثلث با زاویه‌های حاده، روی دو ضلع روبه‌رو از یک مربع به ضلع واحد و رأسهای مثلث دوم با زاویه‌های حاده روی دو ضلع روبه‌روی دیگر این مربع قرار دارند. ثابت کنید، بخش مشترک مساحتهای این دو مثلث، از چهار برابر عدد حاصلضرب مساحتهای دو مثلث تجاوز نمی‌کند.

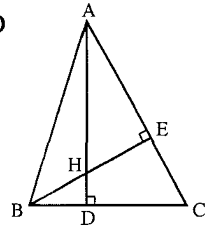
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۸.۱.۷. رابطه‌های متری

۶۵۵. در یک مثلث حاده‌الزاویه هر ارتفاعی را در قطعه‌ای از آن ضرب می‌کنیم که بین مرکز ارتفاعی و رأس مثلث واقع است. سپس در مورد هر سه ارتفاع مجموع این حاصلضربها را به دست می‌آوریم. ثابت کنید، این حاصل جمع با نصف مجموع مربعهای ضلعها برابر است.

۶۵۶. در مثلث ABC که زاویه‌های آن را حاده فرض می‌کنیم، ارتفاعهای AD و BE را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند. ثابت کنید:

$$\overline{AB}^2 = BH.BE + AH.AD$$



۶۵۷. نقطهٔ O را در درون مثلث ABC و نقطهٔ O' را در درون مثلث $A'B'C'$ انتخاب کرده‌ایم؛ زاویه‌های هر دو مثلث، حاده‌اند. از نقطهٔ O، عمود OA_1 را بر ضلع BC، عمود OB_1 را بر ضلع CA و عمود OC_1 را بر ضلع AB رسم کرده‌ایم. به همین ترتیب، عمودهای $O'A'_1$، $O'B'_1$ و $O'C'_1$ را بترتیب بر ضلعهای $B'C'$، $C'A'$ و $A'B'$ رسم کرده‌ایم. معلوم شد:

$OA_1 \| O'A'$, $OB_1 \| O'B'$, $OC_1 \| O'C'$,

$OA_1 . O'A' = OB_1 . O'B' = OC_1 . O'C'$

ثابت کنید : $O'A'_1 \| OA$, $O'B'_1 \| OB$, $O'C'_1 \| OC$,

$O'A'_1 . OA = O'B'_1 . OB = O'C'_1 . OC$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۶۵۸. مثلثی با زاویه‌های حاده داده شده است. نقطه‌ای در داخل زاویه‌ای از آن انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ آن تا هر یک از رأسهای مثلث، از کوچکترین ضلع مثلث، کوچکتر است. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های از این نقطه تا سه رأس مثلث، از $\frac{۳}{۴}$ محیط تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۹.۱.۷. ثابت کنید مثلث با زاویه‌های حاده است

۶۵۹. ضلعهای مثلث ABC، $a = ۵$ ، $b = ۶$ و $c = ۷$ است. ثابت کنید زاویه‌های این مثلث حاده‌اند.

۶۶۰. مثلث ABC در صورتی با زاویه‌های حاده است که به طور همزمان داشته باشیم :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > ۰$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > ۰$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > ۰$

۱۰.۱.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۶۱. خط D را نسبت به مثلث ABC وفادار گویند، هرگاه در صفحهٔ آن مثلث بوده و قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع مثلث مزبور همرس (متقارب) باشند.

ثابت کنید، برای هر دو مثلث واقع در یک صفحه که کلیهٔ زاویه‌های آنها حاده می‌باشند، یا تنها یک خط وفادار نسبت به آن دو وجود دارد و یا به تعداد نامتناهی.

هفتمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۶۶۲. در مثلث ABC با زاویه‌های حاده، نیمساز زاویهٔ A با ضلع BC در D برخورد می‌کند. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BD با ضلع AB در M تلاقی می‌کند. دایرهٔ به مرکز C و به شعاع CD ضلع AC را در N قطع می‌کند. در این صورت کدام رابطهٔ زیر همواره برقرار است؟

الف. $C\hat{N}D + B\hat{M}D - D\hat{A}C = ۱۲۰^\circ$

ب. AMDN ذوزنقه است.

ج. BC با MN موازی است.

د. $AM - AN = \frac{۳(DB - DC)}{۲}$

هـ. $AB - AC = \frac{۳(DB - DC)}{۲}$ مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

۶۶۳. فرض می‌کنیم $A_0B_0C_0$ و $A_1B_1C_1$ دو مثلث حاده الزوایا باشند. تمام مثلثهای ABC یی را که مشابه مثلث $A_1B_1C_1$ (چنان که رأسهای A_1، B_1 و C_1 بترتیب، متناظر با رأسهای A، B و C باشند) و محیط بر مثلث $A_0B_0C_0$ (به‌طوری که A_0 بر BC، B_0 بر CA و C_0 بر AB واقع شود) می‌باشند، در نظر می‌گیریم. از بین چنین مثلثهای ممکنی، مثلث با مساحت ماکزیمم را معین و آن را رسم کنید.

نهمین دورهٔ المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۷

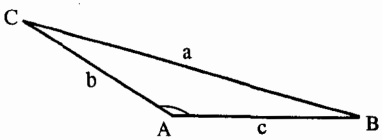
۶۶۴. ABC، مثلثی است با زاویه‌های حاده؛ زاویهٔ A در این مثلث، برابر ۳۰ درجه، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای آن و B_2 و C_2 بترتیب، وسط ضلعهای AC و AB هستند. ثابت کنید، پاره‌خطهای راست B_1C_2 و B_2C_1 بر هم عمودند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۶۶۵. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد. در این مثلث، ارتفاع AH میانهٔ BM را در نقطهٔ L و نیمساز CK را در نقطهٔ N قطع کرده است. میانهٔ BM با نیمساز CK، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند (نقطه‌های L، N و P، متمایزند). ثابت کنید، مثلث LNP نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد. المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۲.۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویهٔ منفرجه

۱.۲.۷. تعریف و قضیه



مثلثی که زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، مثلث منفرجه‌الزاویه یا مثلث با زاویهٔ منفرجه نامیده می‌شود. برخی آن را به‌طور خلاصه مثلث منفرجه می‌نامند. مانند مثلث با زاویهٔ منفرجهٔ ABC که در آن زاویهٔ A منفرجه است.

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه را بررسی می‌کنیم. قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به مثلث شبه‌قائم‌الزاویه که در آن تفاضل دو زاویه برابر 90° است، نیز در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۷.۲.۲. زاویه

۷.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۶۶۶. در مثلث ABC، $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 8$ است. اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را به‌دست آورید. کدام زاویه از این مثلث منفرجه است؟

۶۶۷. اگر مثلثی که زاویه‌ای منفرجه دارد با مثلث پادک خود متشابه باشد، زاویه‌های آن $\frac{180^\circ}{7}$، $\frac{360^\circ}{7}$ و $\frac{720^\circ}{7}$ هستند.

۶۶۸. زاویهٔ A از مثلث ABC برابر ۱۲۰ درجه است. نیمسازهای AF، BG و CH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، زاویهٔ GFH برابر 90° است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۶۶۹. نقطهٔ D را در درون ضلع AB از مثلث ABC طوری در نظر گرفته‌ایم که داشته‌باشیم:

$$|AD|:|DC| = |AB|:|BC|$$

ثابت کنید، زاویهٔ ACB منفرجه است. المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۷.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۷۰. در مثلث ABC یکی از زاویه‌های B و C منفرجه و نسبت مجذورهای ضلعهای مقابل به این زاویه‌ها مساوی با نسبت تصویرهای این ضلعها روی BC است. ثابت کنید که تفاضل زاویه‌های B و C یک قائمه است.

۶۷۱. ثابت کنید که اگر در مثلث ABC، زاویهٔ B منفرجه باشد و $AB = \frac{AC}{2}$ ، آن وقت $\hat{C} > \frac{\hat{A}}{2}$.

۷.۲.۳. ضلع

۷.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۶۷۲. در مثلث abc زاویهٔ c منفرجه و سه برابر زاویهٔ a است و $[bc] = 27$ و $[ab] = 48$.

مقدار [ac] چه‌قدر است؟

الف) ۳۳ ب) ۳۵ ج) ۳۷ د) ۳۹

هـ) مقداری که به‌طور دقیق مشخص نمی‌شود.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۶۷۳. یک مثلث، زاویه‌های ۳۰° و ۴۵° دارد. اگر طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۴۵°، برابر ۸ باشد، طول ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° برابر است با :

الف) ۴ ب) $۴\sqrt{۲}$ ج) $۴\sqrt{۳}$ د) $۴\sqrt{۶}$ هـ) ۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۶۷۴. درمثلث ABC ضلعهای $b=۱۵cm$ و $c=۸cm$ می‌باشند، حدود a را طوری تعیین کنید که :

۱. زاویهٔ $\hat{A}$ منفرجه باشد.

۲. زاویهٔ $\hat{A}$ حاده باشد.

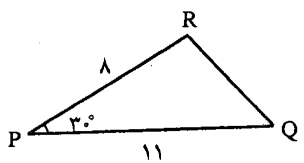
۲.۳.۲.۷. رابطهٔ بین ضلعها

۶۷۵. اگر اندازهٔ یک زاویه از مثلثی ۱۲۰° باشد، بین ضلعهای آن چه رابطه‌ای برقرار است؟

۴.۲.۷. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۷. اندازهٔ ارتفاع

۶۷۶. در مثلث PQR، $\hat{P}=۳۰^\circ$، $PR=۸$ و $PQ=۱۱$. ارتفاع وارد بر $\overline{PQ}$ را بیابید.



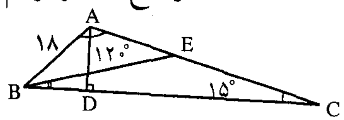
۶۷۷. در مثلث متساوی‌الساقینی که زاویهٔ رأس ۱۲۰ درجه دارد، ارتفاع وارد بر قاعده برابر نصف ساق مثلث است.

۵.۲.۷. پاره‌خط

۱.۵.۲.۷. اندازهٔ پاره‌خط

۶۷۸. در مثلث ABC، $\hat{A}=۱۳۵^\circ$ ، $\hat{B}=۱۵^\circ$ و $AB=۱۲cm$ است. اندازهٔ پاره‌خطهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ ارتفاع رأس A روی ضلع BC را تعیین کنید.

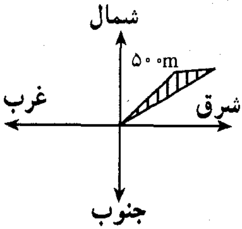
۶۷۹. در مثلث ABC، $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ ، $\hat{C}=۱۵^\circ$ و $AB=۱۸cm$ است. ارتفاع AD را رسم می‌کنیم و از B خط BE را چنان رسم می‌کنیم که $E\hat{B}C=۱۵^\circ$ باشد. اندازهٔ پاره‌خطهای BD و AE را تعیین کنید.



۶.۲.۷. محیط

۱.۶.۲.۷. اندازهٔ محیط

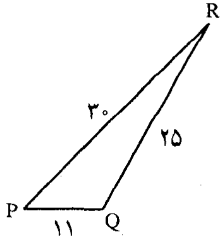
۶۸۰. کشاورزی می‌خواهد یک زمین مثلثی شکل را نرده‌کشی و زراعت کند. یک ضلع زمین با خط شرق به غرب زاویهٔ ۴۵° می‌سازد و ۵۰۰ متر طول دارد. ضلع دیگر با خط شرق به غرب موازی است و ضلع سوم با خط شرق به غرب زاویهٔ ۳۰° می‌سازد. نشان دهید که محیط زمین $۲۵۰(\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$ متر است.



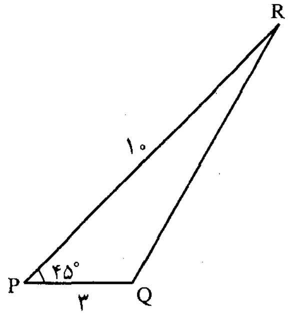
۷.۲.۷. مساحت

۱.۷.۲.۷. اندازهٔ مساحت مثلث

۶۸۱. در مثلث PQR، $\hat{Q}$ منفرجه، $PQ=۱۱$ ، $QR=۲۵$ و $PR=۳۰$. ارتفاع وارد بر PQ و $a\Delta PQR$ را بیابید.



۶۸۲. در مثلث PQR، زاویهٔ Q منفرجه است. $PQ = ۳$ ، $PR = ۱۰$ و $\hat{P} = ۴۵^\circ$. اندازهٔ ضلع RQ و مساحت مثلث PQR را تعیین کنید.



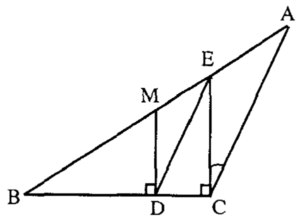
۶۸۳. در مثلث ABC، $AC = ۲۰$ ، $BC = ۱۳$ و طول ارتفاع CD برابر با ۱۲ است. اگر $A - D - B$ ؛ مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟ اگر $A - B - D$ ؛ مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟

۲.۷.۲.۷. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجادشده

۶۸۴. در مثلث ABC، زاویهٔ C منفرجه، M وسط AB، و CE و DM بر BC عمودند. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۲۴ باشد، مساحت مثلث BED چه‌قدر است؟

الف) ۹ ب) ۱۲ ج) ۱۵ د) ۱۸

هـ) مشخص نمی‌شود.



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۸.۲.۷. رابطه‌های متری

۶۸۵. اگر AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC و $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{AD} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC}.$$

۹.۲.۷. ثابت کنید مثلث با زاویهٔ منفرجه است

۶۸۶. ثابت کنید، مثلث ABC با ضلعهای $AB = ۶$ ، $BC = ۹$ و $AC = ۴$ با زاویهٔ منفرجه است.

۶۸۷. ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} < ۰$ باشد، زاویهٔ C از این مثلث منفرجه است.

۱۰.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی

۶۸۸. طول ضلعهای مثلث ABC، عبارتند از $CA = ۷$ ، $BC = ۵$ و $AB = ۳$.

۱. ثابت کنید که زاویهٔ B منفرجه است. اندازهٔ این زاویه را بیابید.

۲. اندازهٔ تصویر ضلع AB روی ضلع BC را حساب کنید.

بخش ۸

• رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه و دایره

۱.۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده و دایره

۱.۱.۸. تعریف و قضیه

۲.۱.۸. زاویه

۱.۲.۱.۸. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۱.۸. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳.۱.۸. ضلع

۱.۳.۱.۸. اندازهٔ ضلع

۴.۱.۸. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۸. اندازهٔ ارتفاع

۵.۱.۸. پاره‌خط

۱.۵.۱.۸. اندازهٔ پاره‌خط

۶.۱.۸. شعاع دایره

۱.۶.۱.۸. اندازهٔ شعاع

۲.۶.۱.۸. رابطهٔ بین شعاعها

۷.۱.۸. محیط

۱.۷.۱.۸. اندازهٔ محیط

۸.۱.۸. مساحت

۱.۸.۱.۸. اندازهٔ مساحت مثلث

۲.۸.۱.۸. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۹.۱.۸. رابطه‌های متری

۱.۹.۱.۸. رابطه‌های متری (برابریها)

بخش ۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه و دایره

۱.۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده و دایره

۱.۱.۸. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویه‌های حاده و دایره را بررسی می‌کنیم. ترتیب ارائهٔ قضیه‌ها و مسأله‌ها در هر قسمت، به‌صورت زیر است :

۱. رابطه‌های متری مربوط به مثلث و دایرهٔ محیطی
۲. رابطه‌های متری مربوط به مثلث و دایره‌های محاطی
۳. رابطه‌های متری مربوط به مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی
۴. رابطه‌های متری مربوط به مثلث و دایره‌های دیگر

۲.۱.۸. زاویه

۱.۲.۱.۸. اندازهٔ زاویه

۶۸۹. در مثلث ABC، $\hat{A} = 60°$ و $\hat{B} = 70°$ است. دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم می‌کنیم و آن‌گاه مماسهایی بر این دایره در نقطه‌های A، B و C رسم می‌نماییم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید :
۱. اندازهٔ زاویه‌های مثلث $A'B'C'$ را بر حسب درجه بیابید.
۲. اندازهٔ زاویه‌های مثلث $A'B'C'$ را بر حسب زاویه‌های مثلث ABC تعیین کنید.

۶۹۰. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، داریم، $B\hat{A}C = 60°$. اگر H، I و O بترتیب مرکز ارتفاعی، مرکز دایرهٔ محاطی درونی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند و $BH = OI$ ، اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC را تعیین کنید. از المپیادهای ریاضی، ۱۹۹۵

۲.۲.۱.۸. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۹۱. سه زاویهٔ مثلث ABC حاده است. از رأس A به نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث وصل و ارتفاع AH را نیز رسم کرده‌ایم. ثابت کنید دو زاویهٔ BAH و OAC برابرند.

۶۹۲. مثلث ABC با زاویه‌های حاده که در آن $AC < BC$ است، داده شده است. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی، نقطهٔ H مرکز ارتفاعی و P پای ارتفاع نظیر رأس C است. خط عمود بر OP در نقطهٔ P، AC را در Q قطع می‌کند. ثابت کنید:

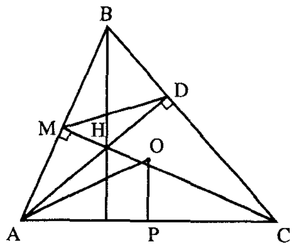
$$P\hat{H}Q = B\hat{A}C$$

از المپیادهای ریاضی کشورهای دیگر، ۱۹۹۵

۳.۱.۸. ضلع

۱.۳.۱.۸. اندازهٔ ضلع

۶۹۳. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC، برابر با ۱ است. می‌دانیم مرکز دایره‌ای که از رأسهای A و C و محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرد، بر این دایره قرار دارد. AC را پیدا کنید.



۶۹۴. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، AD و CM ارتفاعهای آن بوده، محیط مثلث ABC برابر ۱۵cm، محیط مثلث MBD برابر ۹cm و شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث MBD نیز معادل ۱/۸cm است. طول ضلع AC را محاسبه کنید (شکل).

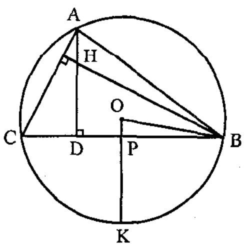
۴.۱.۸. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۸. اندازهٔ ارتفاع

۶۹۵. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، $\hat{B} = ۴۵^\circ$، $BC = ۶\sqrt{۳}\text{cm}$ و شعاع دایرهٔ محیطی $R = ۶\text{cm}$ است. اندازهٔ ارتفاع AH را بیابید.

۵.۱.۸. پاره‌خط

۱.۵.۱.۸. اندازهٔ پاره‌خط



۶۹۶. مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC با زاویه‌های $\hat{A} = \alpha$، $\hat{B} = \beta$ و $\hat{C} = \gamma$ داده شده است. با استفاده از دایرهٔ محیطی مثلث بررسی کنید، ارتفاع رسم شده از رأس A توسط مرکز ارتفاعی مثلث، به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۶.۱.۸. شعاع دایره

۱.۶.۱.۸. اندازهٔ شعاع

۶۹۷. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلثی حاده، از ۵/۶ شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث اصلی بزرگتر است.

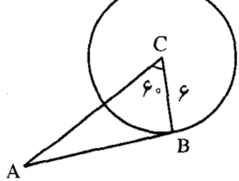
۲.۶.۱.۸. رابطهٔ بین شعاعها

۶۹۸. در مثلثی با زاویه‌های حاده، دو دایرهٔ مماس بر هم رسم کرده‌ایم، به‌نحوی که یکی از آنها بر دو ضلع AC و BC و دیگری بر دو ضلع AB و BC مماس است. ثابت کنید، مجموع طولهای شعاعهای این دو دایره، از طول شعاع دایرهٔ محاطی مثلث بیشتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۷.۱.۸. محیط

۱.۷.۱.۸. اندازهٔ محیط



۶۹۹. در مثلث ABC، $\hat{C}=۶۰^\circ$ ، $BC=۶cm$ و قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ به مرکز C و به شعاع CB برابر ۲۸ است. اندازهٔ محیط مثلث ABC را تعیین کنید.

۸.۱.۸. مساحت

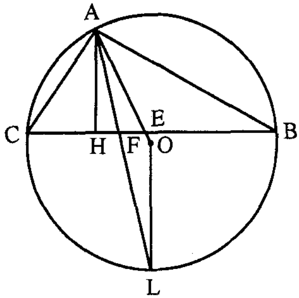
۱.۸.۱.۸. اندازهٔ مساحت مثلث

۷۰۰. ثابت کنید در مثلث حاده‌الزاویه، مساحت مثلث برابر است با حاصلضرب محیط مثلث ارتفاعیه در شعاع دایرهٔ نه نقطه.

۲.۸.۱.۸. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۷۰۱. مساحت مثلثی که از نیمسازهای خارجی یک مثلث حاده‌الزاویه ساخته می‌شود، برابر است با حاصلضرب محیط و شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث.

۷۰۲. دایره‌ای با مرکز O بر مثلث ABC با زاویهٔ حادهٔ A محیط شده است. شعاع AO با



ارتفاع AH زاویه‌ای به اندازهٔ 30° می‌سازد. امتداد نیمساز AF، دایره را در نقطهٔ L و شعاع AO ضلع BC را در نقطهٔ E قطع می‌کند (شکل). اگر $AL = ۴\sqrt{۲}cm$ و $AH = \sqrt{۲\sqrt{۳}}cm$ باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی FEOL را محاسبه کنید.

۸.۱.۹. رابطه‌های متری

۸.۱.۹.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

۷۰۳. ثابت کنید در هر مثلث حاده‌الزاویه مجموع فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلعهای مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌های محیطی و محاطی داخلی آن مثلث.

۷۰۴. در مثلث حاده‌الزاویه‌ای با ضلعهای a، b و c از مرکز دایرهٔ محیطی بر ضلعهای آن عمودهایی را رسم می‌کنیم. طول این عمودها بترتیب برابر m، n و p است. ثابت کنید که :

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=\frac{mnp}{abc}$$

۷۰۵. در یک مثلث حاده‌الزاویه، مجموع فاصله‌های رأسها از ضلعهای مقابل به آن رأسها از مثلث ارتفاعیه (پادک)، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی مثلث، به‌علاوهٔ فاصلهٔ محل برخورد ارتفاعهای آن، از یکی از ضلعهای مثلث ارتفاعیه.

۷۰۶. در هر مثلث حاده‌الزاویه، مجموع نسبتهای ضلعهای مثلثی که رأسهای آن پای ارتفاعهای مثلثند به ضلعهای این مثلث برابر است با نسبت مجموع شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی داخلی به شعاع محیطی آن مثلث.

۸.۱.۹.۲. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۷۰۷. در مثلث غیرمشخص ABC که هر سه زاویهٔ آن حاده هستند، ارتفاعهای AD، BE و CF را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را بترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین سه پاره‌خط AP، BQ و CR باشند، ثابت کنید :

$$\frac{h}{s}>\frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

مرحلهٔ اوّل ششمین دورهٔ مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزان ممتاز ایران، ۱۳۶۷

۷۰۸. در مثلث ABC فرض می کنیم I مرکز دایرهٔ محاطی باشد و نیمسازهای داخلی زاویه‌های A، B و C ضلعهای مقابل را بترتیب در A' ، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۴}<\frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'}\leq\frac{۸}{۲۷}$$

سی‌ودومین المپیاد بین‌المللی ریاضی، سوئد، ۱۹۹۱

۸.۱.۱۰. ثابت کنید مثلث با زاویه‌های حاده است

۷۰۹. در مثلث ABC، شعاع دایرهٔ محیطی $R=۱۲cm$ ، $a=۱۲\sqrt{۳}cm$ و $c=۶(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})$ است. ثابت کنید که با شرط $\hat{C}<۹۰°$ ، این مثلث حاده‌الزاویه است.

۸.۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۱۰. نقطهٔ M روی ضلع AC از مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) قرار دارد. دایره‌هایی بر دو مثلث ABM و ACM محیط کرده‌ایم. نقطهٔ M در چه وضعی باشد تا مساحت بخش مشترک دو دایره، حداقل مقدار ممکن بشود؟

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۸۶

۷۱۱. در مثلث ABC، هر سه زاویه حاده‌اند. زاویهٔ B برابر ۶۰ درجه است و ارتفاعهای CE و AD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. ثابت کنید، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، روی نیمساز مشترک دو زاویهٔ AOE و COD قرار دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۷۱۲. زاویه‌های مثلث ABC حاده‌اند. در این مثلث قرینهٔ خط راست AC را نسبت به خطهای راست AB و BC پیدا کرده‌ایم. دو خط راست حاصل، در نقطهٔ K به هم رسیده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK، از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۷۱۳. ارتفاع BK از مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، قطر دایرهٔ (S) است که ضلعهای AB و BC را در نقطه‌های E و F قطع کرده است. مماس بر دایره در نقطه‌های E و F را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطهٔ برخورد دو خط مماس، روی امتداد میانهٔ BM از مثلث ABC قرار دارد.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۹۵

۷۱۴. مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. ارتفاع رأس B دایرهٔ به قطر AC را در نقطه‌های P و Q، و ارتفاع رأس C دایرهٔ به قطر AB را در نقطه‌های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، نقطه‌های P، Q، M و N روی یک دایره واقعند.

المپیادهای ریاضی سنگاپور، ۱۹۹۵

۷۱۵. مثلث ABC با زاویه‌های حاده داده شده است. نقطه‌های A_1 و A_2 روی ضلع BC (A_2 بین A_1 و C) و B_1 و B_2 روی ضلع AC (B_2 بین B_1 و A)؛ و C_1 و C_2 روی AB (C_2 بین C_1 و B) طوری در نظر گرفته شده‌اند که:

$$A\hat{A}_1A_2 = A\hat{A}_2A_1 = B\hat{B}_2B_1 = B\hat{B}_1B_2 = C\hat{C}_1C_2 = C\hat{C}_2C_1 = \alpha$$

از برخورد خطهای راست AA_1، BB_1 و CC_1 یک مثلث، و از برخورد خطهای راست AA_2، BB_2 و CC_2 نیز مثلث دیگری به‌دست می‌آید. ثابت کنید، شش نقطهٔ رأسهای این دو مثلث روی یک دایره قرار دارند.

از المپیادهای ریاضی کشورهای دیگر، ۱۹۹۵

۱۲.۱.۸. مسأله‌های ترکیبی

۷۱۶. فرض کنیم D یک نقطه درون یک مثلث حادةالزاویهٔ ABC باشد، به‌طوری که:

$$A\hat{D}B = A\hat{C}B + 90^\circ ,$$

$$AC.BD = AD.BC$$

الف. مقدار عددی نسبت $\frac{AB.CD}{AC.BD}$ را محاسبه کنید.

ب. ثابت کنید، خطهای مماس در نقطهٔ C بر دایره‌های محیطی مثلثهای ACD و BCD برهم عمودند.

سی‌وچهارمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ترکیه، ۱۹۹۳

۷۱۷. در مثلث ABC زاویه‌های A، B و C بترتیب ۴۵، ۶۰ و ۷۵ درجه می‌باشند. ارتفاعهای رأسهای B و C را رسم کرده پای آنها را بترتیب O و E می‌نامیم.

۱. به مرکز O و به شعاع OB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AC را در B' و امتداد ضلع BC را در A' تلاقی کند. ثابت کنید که این دایره از رأس A می‌گذرد.

۲. خط $A'O$ را وصل کرده، امتداد می‌دهیم. ثابت کنید، این خط از نقطهٔ E می‌گذرد و در ضمن این تساویها برقرار است: $OB = A'B'$ و $CE = CA'$.

۳. اگر CE را امتداد دهیم ،دایره را در M و F قطع می‌کند و همچنین $A'O$ را امتداد می‌دهیم تا دایره را در N قطع کند. ثابت کنید :

$$\overset{\frown}{A'F} = \overset{\frown}{BN} - \overset{\frown}{MN}$$

و مثلث AEO با مثلث $A'B'C'$ برابر است.

۴. اگر طول AB را برابر $a\sqrt{۲}$ اختیار کنیم، طولهای ضلعها و قطرهای چهارضلعی $ABB'A'$ را برحسب a حساب کنید.

۷۱۸. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵°$ و زاویه‌های B و C حاده‌اند. دایرهٔ به قطر CB و به مرکز O، AC را در نقطهٔ D و AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر H نقطهٔ برخورد BD و CE باشد :

۱. نشان دهید که AH بر BC عمود است. پای این عمود را F می‌نامیم.
نشان دهید که چهارضلعی ADHE محاطی است. وضعیت نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را تعیین کنید.

۲. ثابت کنید که مثلث ADB متساوی‌الساقین است و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{DE}$ از دایرهٔ (O) را برحسب درجه تعیین کنید.

۳. مثلثهای DIA و DOB را با هم مقایسه کنید. در مورد دایره‌های (O) و (I) چه می‌توان گفت؟ نشان دهید که ID بر دایرهٔ (O) مماس است و OD بر دایرهٔ (I) مماس می‌باشد.

۴. نشان دهید که مثلث DFE قائم‌الزاویه است. اندازهٔ وتر این مثلث را برحسب R شعاع دایرهٔ (O) بیابید.

۲.۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره

۱.۲.۸. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره را بررسی می‌کنیم. رابطه‌های متری مربوط به مثلث شبه‌قائم‌الزاویه، که در آن، تفاضل دو زاویهٔ مثلث برابر ۹۰° است. (به‌عنوان مثال $\hat{B} - \hat{C} = ۹۰°$) و دایره نیز در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ترتیب ارائهٔ مسأله‌ها در هر قسمت به‌صورت زیر است :

۱. رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایرهٔ محیطی

۲. رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره‌های محاطی
۳. رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره‌های محیطی و محاطی
۴. رابطه‌های متری مربوط به مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره‌های دیگر

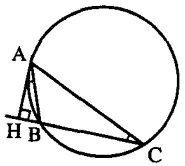
۲.۲.۸. زاویه

۱.۲.۲.۸. اندازهٔ زاویه

۷۱۹. اندازهٔ بزرگترین زاویهٔ مثلثی را، اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث با رأسهای پای ارتفاعهای مثلث مفروض، برابر با نصف کوچکترین ارتفاع مثلث مفروض باشد، پیدا کنید.

۳.۲.۸. ضلع

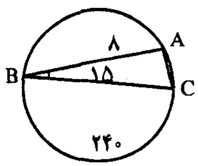
۱.۳.۲.۸. اندازهٔ ضلع



۷۲۰. زاویهٔ B از مثلث ABC منفرجه است و دایرهٔ محیطی این مثلث در رأس A بر ارتفاع AH مماس است. اگر $AH = ۳(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})cm$ و $HB = ۳(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})cm$ باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC را بیابید.

۴.۲.۸. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۸. اندازهٔ ارتفاع



۷۲۱. در مثلث ABC، $AB = ۸cm$ ، $\hat{B} = ۱۵^\circ$ و اندازهٔ کمان $\widehat{BC}$ از دایرهٔ محیطی این مثلث ۲۴۰ درجه است. اندازهٔ ارتفاعهای این مثلث را به‌دست آورید.

۵.۲.۸. پاره‌خط

۱.۵.۲.۸. اندازهٔ پاره‌خط

۷۲۲. ارتفاعهای AD و CE از مثلث منفرجه‌الزاویهٔ ABC از رأسهای A و C رسم شده‌اند. می‌دانیم که مساحت مثلث ABC برابر $۶۴cm^۲$ و مساحت مثلث BDE برابر $۱۶cm^۲$ است. طول پاره‌خط DE را محاسبه کنید، با این شرط که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر $۱۶\sqrt{۳}$ باشد.

۸.۲.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۷۲۳. در مثلث ABC، زاویهٔ B برابر با $\frac{\pi}{۴}$ و زاویهٔ C برابر با $\frac{\pi}{۶}$ است. دایره‌هایی که به قطر میانه‌های BN و CN رسم می‌شوند، یکدیگر را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کنند. وتر PQ، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. نسبت BD:DC را پیدا کنید.

۸.۲.۶. شعاع دایره

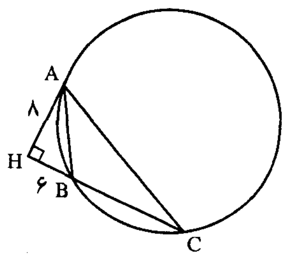
۸.۲.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۷۲۴. ارتفاعهای AD و CE در مثلث منفرجه‌الزاویهٔ ABC را از رأسهای A و C رسم می‌کنیم. می‌دانیم که مساحت مثلث ABC برابر $۱۸cm^۲$، مساحت مثلث BDE برابر $۲cm^۲$ و طول پاره‌خط DE برابر $۲\sqrt{۲}cm$ است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را محاسبه کنید.

۸.۲.۷. محیط

۸.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط

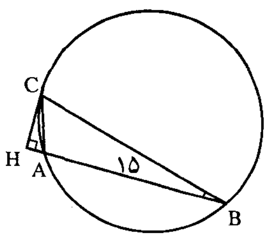
۷۲۵. در مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع رأس A، $AH = ۸cm$، پاره‌خط $BH = ۶cm$ و $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$ است. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.



۸.۲.۸. مساحت

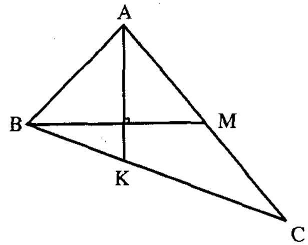
۸.۲.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۷۲۶. در مثلث ABC، ارتفاع CH بر دایرهٔ محیطی مماس است. اگر $\hat{B}=۱۵^\circ$ و $CH=۱۲cm$ باشد. اندازهٔ مساحت مثلث را بیابید.



۲.۸.۲.۸. نسبت مساحتها

۷۲۷. در مثلث ABC، نیمساز AK بر میانهٔ BM عمود و زاویهٔ B برابر با 120° است. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت دایرهٔ محیطی این مثلث را پیدا کنید.



۹.۲.۸. ثابت کنید مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است

۷۲۸. ثابت کنید که مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است، برحسب آن که، نصف محیط آن، بترتیب، بزرگتر از، برابر یا کمتر از مجموع قطر دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی آن باشد.

۷۲۹. ثابت کنید که مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است، برحسب آن که، عبارت $a^2+b^2+c^2-8R^2$، بترتیب، مثبت، صفر و یا منفی باشد (a، b و c طول ضلعهای مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن است).

۱۰.۲.۸. مسأله‌های ترکیبی

۷۳۰. در مثلث ABC، می‌دانیم $\hat{A}=120^\circ$ است.

۱. ثابت کنید : $a^2=b^2+c^2+bc$

۲. ثابت کنید : $r_b+r_c=R$

۳. ثابت کنید : $r_a-r=3R$

۴. ثابت کنید : $\frac{1}{d_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

۵. ثابت کنید : $h_bh_c=\frac{3}{4}bc$

۶. ثابت کنید : $8(m_b^2+m_c^2)-4m_a^2=9a^2$

۷. ثابت کنید : $d_b d_c = ۳Rd_a$

۸. به فرض معلوم بودن a و s از این مثلث، آن را رسم کنید.

۹. اگر H نقطهٔ تقارب ارتفاعها باشد، ثابت کنید : $AH = R$.

۱۰. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد، ثابت کنید : $OH = b + c$.

۷۳۱. در مثلثی تفاضل زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یک قائمه است، ثابت کنید :

۱. نیمسازهای خارجی و داخلی زاویهٔ A متساوی‌اند.

۲. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، ثابت کنید :

الف. $\overline{HA}^۲ = HB \times HC$ ب. $A\hat{B}H = C\hat{A}H$

۳. ثابت کنید قطر AA' از دایرهٔ محیطی با ضلع BC موازی است.

۴. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی باشد، ثابت کنید :

$$b^۲ - c^۲ = ۲aR, b^۲ + c^۲ = ۴R^۲, a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۴h_a^۲ = ۸R^۲$$

۷۳۲. در مثلث ABC، $AB = a$ ، $\hat{A} = ۱۰۵°$ و $\hat{C} = ۳۰°$ است.

۱. مثلث را رسم کنید. (مرکز دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ C بخشی از آن است را O بنامید.)

۲. در دایرهٔ (O) وتر CD را موازی با AB رسم کنید و DB را وصل نمایید. در مورد چهارضلعی ABDC و ضلعهایش چه می‌توان گفت؟ اندازهٔ محیط و مساحت این چهارضلعی را برحسب R شعاع دایرهٔ (O) تعیین کنید.

۳. نشان دهید که قطرهای AD و BC برهم عمودند. اگر N نقطهٔ مشترک آنها باشد، طول پاره‌خطهای NA، NB، NC و ND را تعیین کنید.

۴. نشان دهید که نقطه‌های وسط ضلعهای چهارضلعی ABDC روی یک دایره‌اند و شعاع این دایره را بیابید.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya، استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد».

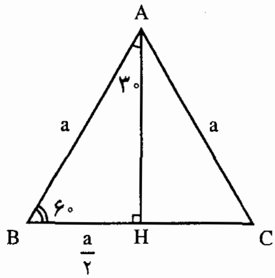
در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی، نمی‌باشند؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشد، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود، نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایید تا برای هر چه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد، ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به‌نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله های بخش ۱. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، $B\hat{A}H = ۳۰^\circ$ است. بنابراین $BH = \frac{a}{۲}$ است و بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \Rightarrow AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ \Rightarrow AH^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

اندازهٔ مساحت مثلث برابر است با :

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC.AH = \frac{۱}{۲}a.\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

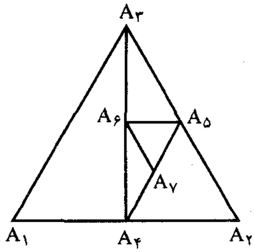
محیط مثلث نیز به‌دلیل برابری سه ضلع، برابر $۳a$ است.

۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۲. $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۲۱}}{۷}$ و $\text{Arc}\sin\frac{\sqrt{۲۱}}{۱۴}$

۳. (هـ). زاویهٔ رأسهای مثلث $A_۲A_۳A_۴$ بترتیب ۶۰°، ۳۰° و ۹۰° است. چون $A_۱\hat{A_۲}A_۳ = ۶۰^\circ$ و $A_۳A_۴$ و $A_۴A_۵$ طولهای برابر دارند، $\Delta A_۲A_۴A_۵$



متساوی‌الاضلاع است. بنابراین زاویهٔ رأسهای $\Delta A_3A_4A_5$، بترتیب رأسها $30°$، $30°$ و $120°$ است. در نتیجه زاویهٔ رأسهای $\Delta A_4A_5A_6$ بترتیب $30°$، $60°$ و $90°$ است. سرانجام $A_4\hat{A}_5A_6 = 60°$ و A_5A_6 و A_5A_7 یک طول دارند، پس $\Delta A_5A_6A_7$ متساوی‌الاضلاع است. در دور بعدی چهار مثلث جدید ایجاد می‌شود که هر کدام با مثلث نظیر از دور قبلی متشابه است، یعنی هر دو مثلث $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ و $A_{n+4}A_{n+5}A_{n+6}$ با هم متشابه‌اند که در این تشابه A_{n+4} نظیر رأس A_n است، از این‌رو $A_{44}\hat{A}_{45}A_{43} = A_4\hat{A}_5A_3 = 120°$.

۴. روی ضلع CM، متوازی‌الاضلاع $CMBM_1$ را می‌سازیم.

$$A\hat{C}M = B\hat{C}M_1 = 60° - B\hat{C}M$$

$$AC = BC,\ CM = CM_1 \Rightarrow \Delta ACM = \Delta BCM_1,\ BM_1 = AM$$

$$CM^2 = AM^2 + BM^2,\ CM = MM_1,\ AM = BM_1$$

$$\Rightarrow M_1M^2 = BM_1^2 + MB^2 \Rightarrow M\hat{B}M_1 = 90° \qquad \text{فرض: } B\hat{M}_1M = \alpha$$

$$\Rightarrow M_1\hat{M}B = 90° - \alpha,\ C\hat{M}A = \alpha + 60°$$

$$C\hat{M}A + C\hat{M}M_1 + B\hat{M}M_1 + A\hat{M}B = 360° \Rightarrow (\alpha + 60°) + 60° + (90° - \alpha) +$$

$$A\hat{M}B = 360° \Rightarrow A\hat{M}B = 150°$$

۵. مثلثهای ABE و ACD متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس $150° = 60° + 90°$ می‌باشند. بنابراین $B\hat{A}E = D\hat{A}C = 15°$ و از آن‌جا:

$$D\hat{A}E = 60° - 2\times 15° = 30°$$

۳.۱. ضلع

۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۶. اگر ضلع مثلث داده شده را a فرض کنیم، ضلع مثلث خواسته شده، $a' = a\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ است. زیرا هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع، متشابه‌اند و نسبت مساحت آنها برابر مجذور

نسبت تشابه (نسبت ضلعهای آن دو مثلث) است. چون $S' = ۲s$، پس $a' = a\sqrt{۲}$ و یا $a' = ۱۰\sqrt{۲}$ است.

۷. $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۸. $\frac{۲\sqrt{۳(p^۲ + q^۲ + pq)}}{۳}$

۹. می‌دانیم که در مثلث متساوی الاضلاع، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل بر هم منطبقند. بنابراین داریم:

$$AH = \frac{۲}{۳}h_a \Rightarrow m = \frac{۲}{۳}h_a \Rightarrow h_a = \frac{۳m}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳m}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳m}{\sqrt{۳}} \Rightarrow a = \sqrt{۳}m$$

۱.۳.۲. نسبت ضلعها

۱۰. مثلثهای AEK، BKD و CDE همنهشتند، زیرا:

$$D\hat{E}C = B\hat{D}K = A\hat{K}E = \alpha\,,\ C\hat{D}E = D\hat{K}B = A\hat{E}K$$

$$= ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + \alpha) = ۱۲۰^\circ - \alpha \qquad DE = EK = KD$$

بنابراین $CE = AK = BD$ و $CD = BK = AE$ است. با فرض $CD = x$، $CE = a - x$ است.

از آن‌جا در مثلث CDE داریم:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{a-x}{\sin(۱۲۰^\circ - \alpha)} = \frac{DE}{\sin ۶۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha + \sin(۱۲۰^\circ - \alpha)} = \frac{DE}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{۳}}{۲\left(\sin\alpha + \sin(۱۲۰^\circ - \alpha)\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{۲a\left(\sin\alpha + \sin(۱۲۰^\circ - \alpha)\right)}{a\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\left(\sin\alpha + \sin(۱۲۰^\circ - \alpha)\right)$$

$$= \cos(\alpha - ۶۰^\circ)$$

۴.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۱. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ هر ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است، بنابراین داریم:

$$h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}cm$$

۱۲. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. بنابراین: $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۱۰۰\sqrt{۳}$؛

و از آن‌جا $a^۲ = ۴۰۰$ و $a = ۲۰$. اندازهٔ هر ارتفاع این مثلث برابر است با:

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۰\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰\sqrt{۳}$$

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳. مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ محاط در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را در نظر می‌گیریم. با فرض $AA' = BB' = CC' = x$، داریم: $A'C = C'B = B'A = ۳ - x$.

در مثلث $AA'B'$، اندازهٔ زاویهٔ A برابر ۶۰° است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$A'B'^۲ = AA'^۲ + AB'^۲ - AA'.AB'$$

با توجه به این که $A'B' = \sqrt{۳}$ است، داریم:

$$(\sqrt{۳})^۲ = x^۲ + (۳-x)^۲ - x(۳-x) \Rightarrow ۳ = x^۲ + ۹ + x^۲ - ۶x - ۳x + x^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۹x + ۶ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = ۲$$

$$\Rightarrow AA' = BB' = CC' = ۱cm \quad \text{یا} \quad AA' = BB' = CC' = ۲cm$$

۱۴. نقطه‌های C، M، D و L، بر یک دایره واقعند، در نتیجه:

$$C\hat{M}L = C\hat{D}L = ۳۰^\circ$$

به همین ترتیب، $C\hat{M}K = ۳۰^\circ$ ؛ بنابراین $L\hat{M}K = ۶۰^\circ$ و ΔLMK متساوی‌الاضلاع است و $KM = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$. از قانون کسینوسها بدست می‌آوریم : $\cos L\hat{C}K = \frac{-۳}{۵}$. چون $D\hat{C}B = L\hat{C}K - ۱۲۰^\circ$ ، داریم : $DB = \frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}$.

۱۵. $\frac{۱۳}{۱۵}a$

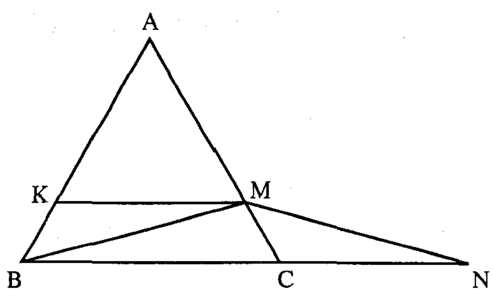
۱۶. اگر $Q \geq \frac{۱}{۴}S$ ، آن وقت فاصلهٔ مطلوب، $\frac{\sqrt[۴]{۳}}{۳}(\sqrt{S}-\sqrt{Q})$ است. اگر $Q < \frac{۱}{۴}S$ ، آن وقت دو جواب ممکن است : $\frac{\sqrt[۴]{۳}}{۳}(\sqrt{S}\pm\sqrt{Q})$.

۱۸. (د). فرض کنید مساحتهای مثلث کوچک و مثلث اصلی بترتیب $A_۱$ و $A_۲$ باشند. میانهٔ ذوزنقه، m، واسطهٔ حسابی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است، یعنی $m = \frac{(b+۲)}{۲}$ که در آن b قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه است. برای پیدا کردن b، دیده می‌شود که :

$$\frac{A_۱}{A_۲} = \frac{b^۲}{۲^۲} = \frac{۱}{۲}, \therefore b = \sqrt{۲}\,, m = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}+۲)$$

۲.۵.۱. تساوی دو پاره‌خط

۲۰. نقطهٔ K را روی ضلع AB طوری انتخاب می کنیم که خط راست KM با ضلع BC موازی باشد. بسادگی دیده می‌شود که مثلثهای MCN و MKB با هم برابرند (در یک ضلع و سه زاویه). بنابراین خواهیم داشت : $|CN| = |KM| = |AM|$.



۶.۱. محیط

۱.۶.۱. اندازهٔ محیط مثلث

۲۱. با توجه به این که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است، داریم :

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۲۰\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۸۰\Rightarrow a=۴\sqrt{۵}\Rightarrow \text{محیط مثلث}=۳a=۱۲\sqrt{۵}$$

۲۲. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)$

(۱) $(a+b-c)=۱۶s^۲$

(۲) $a+b+c=\frac{۳}{۴}\left(\frac{a+b+c}{۳}+\frac{a+b-c}{۱}+\frac{a+c-b}{۱}+\frac{b+c-a}{۱}\right)$

(۳) $(۱)\Rightarrow \frac{a+b+c}{۳}\times\frac{a+b-c}{۱}\times\frac{a+c-b}{۱}\times\frac{b+c-a}{۱}=\frac{۱۶s^۲}{۳}$

چون حاصلضرب (۳) مقداری ثابت است، پس مجموع (۲) وقتی می‌نیمم است که داشته باشیم :

$$\frac{a+b+c}{۳}=a+b-c=a+c-b=b+c-a\Rightarrow a=b=c$$

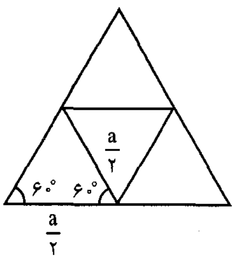
یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۲.۶.۱. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۲۳. (هـ). زیرا مثلث bde متساوی‌الاضلاع و $de=۱$ است. پس :

$$ad=ce=۳-۱=۲\,,\ de=۱\Rightarrow \text{محیط چهارضلعی}=۳+۲(۲)+۱=۸$$

۳.۶.۱. حد محیطها، نسبت محیطها



۲۴. فرض کنید P_k ، محیط k امین مثلث باشد، آن‌گاه :

$$P_{k+۱}=P_{k/۲}$$

$$S=p_۱+p_۲+p_۳+\ldots=۳a+\frac{۱}{۲}\times۳a+\frac{۱}{۴}\times۳a+\ldots$$

$$= ۳a\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots\right) = ۳a \times \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۶a$$

۷.۱. مساحت

۱.۷.۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۲۶. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است ؛ بنابراین داریم :

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{(۱۲)^۲ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۳۶\sqrt{۳}\text{cm}^۲$$

۲۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ ارتفاع، $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است ؛ بنابراین داریم :

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ \Rightarrow a = ۸\sqrt{۳} \quad \text{اندازهٔ هر ضلع}$$

$$S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = (۸\sqrt{۳})^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = ۴۸\sqrt{۳}$$

۲۸. اندازهٔ ضلع مثلث را a و اندازهٔ ارتفاع آن را h فرض می‌کنیم. داریم :

$$a-h=d\,, h=\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a-\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=d \Rightarrow a\times\left(\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}\right)=d$$

$$\Rightarrow a = ۲(۲+\sqrt{۳}) \Rightarrow \quad S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = (۱۲+۷\sqrt{۳})d^۲$$

۲۹. (ج). این مثلث، مثلثی متساوی‌الاضلاع با ضلع ۴ است.

$$A = \frac{S^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴^۲\times\sqrt{۳}}{۴} = ۴\sqrt{۳}$$

۳۰. (ب). به فرض آن که S، h و A، بترتیب طول ضلع، طول ارتفاع و مقدار مساحت باشند، داریم :

$$h=\frac{S\sqrt{۳}}{۳}\,;\therefore S=\frac{۲h}{\sqrt{۳}}\,, A=\frac{S^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴h^۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

۳۱. (الف). $DM = NB$ را x می‌گیریم، آن‌گاه : $AM = AN = ۱ - x$,

مساحت ΔCMN = مساحت $\square ABCD$ − مساحت ΔANM − مساحت ΔNBC − مساحت ΔCDM

$$= ۱ - \frac{۱}{۲}(۱-x)^۲ - \frac{x}{۳} - \frac{x}{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ - x^۲)$$

طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع CMN را با y نشان می‌دهیم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$x^۲ + ۱^۲ = y^۲ \,,\, (۱-x)^۲ + (۱-x)^۲ = y^۲$$

از حذف y بین دو معادله داریم :

$$۲(۱-x)^۲ = x^۲ + ۱ \,;\, x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

ریشه‌های این معادله $۲ + \sqrt{۳}$ و $۲ - \sqrt{۳}$ است ؛ امّا $۲ + \sqrt{۳} > ۱$، پس $x = ۲ - \sqrt{۳}$ و مساحت مثلث CMN، $۲\sqrt{۳} - ۳$ می‌شود.

۳۲. (د). رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را مبدأ دستگاه مختصات متعامد، و ارتفاع نظیر این رأس را منطبق بر نیمهٔ مثبت محور xها اختیار می‌کنیم. طول ضلع مثلث ABC را با s نشان می‌دهیم، بنابراین نقطه‌های A و B بترتیب دارای مختصات $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}s, \frac{s}{۲})$ و $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}s, \frac{-s}{۲})$ هستند (شکل الف). مجذور فاصله‌های $P(x,y)$ تا C، B و A بترتیب عبارتند از :

$$(x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}s)^۲ + (y - \frac{s}{۲})^۲ = ۶^۲ \,,\, x^۲ + y^۲ = ۱۰^۲ \,,\, (x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}s)^۲ + (y + \frac{s}{۲})^۲ = ۸^۲$$

از تفریق معادلهٔ سوم از معادلهٔ دوم، داریم : $۲sy = ۲۸ \Rightarrow sy = ۱۴$.

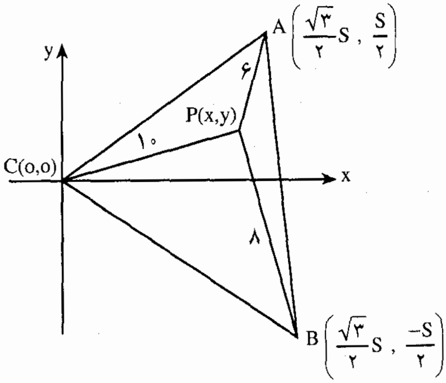
این مقدار sy را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم و با استفاده از معادلهٔ اوّل داریم :

$$۱۰^۲ - \sqrt{۳}sx + s^۲ + ۱۴ = ۶۴ \quad , \quad s^۲ + ۵۰ = \sqrt{۳}sx$$

$$sx = \frac{s^۲ + ۵۰}{\sqrt{۳}}$$

این عبارتهای sx و sy به‌دست آمده را در $(sx)^۲ + (sy)^۲ = (x^۲ + y^۲)s^۲$ قرار داده و $\frac{(s^۲ + ۵۰)^۲}{۳} + ۱۴^۲ = ۱۰^۲ s^۲$ را به‌دست می‌آوریم که برحسب $s^۲$ به معادلهٔ درجهٔ دوم $(s^۲)^۲ - ۲۰۰(s^۲) + ۳۰۸۸ = ۰$ منجر می‌شود.

ریشه‌های این معادله عبارتند از :

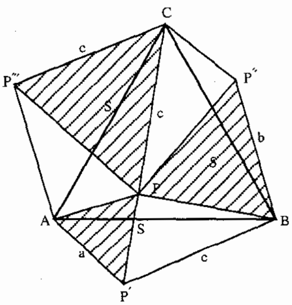


$$s^2 = 100 \pm 48\sqrt{3}$$

و ریشهٔ کوچکتر را به‌دلیل آن که $s^2 > 100$ کنار می‌گذاریم. مساحت مطلوب عبارت است از :

$$A = \frac{\sqrt{3}s^2}{4} = 25\sqrt{3} + 36 \simeq 79$$

راه‌دیگر. می‌توان از این موضوع که ۶، ۸ و ۱۰ ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه هستند، برای تسهیل در حل مسأله استفاده کرد. بدین منظور مثلث AP′B را مساوی مثلث APC رسم می‌کنیم (شکل ب). بنابراین :



$$P\hat{A}P' = P\hat{A}B + B\hat{A}B' = P\hat{A}B + C\hat{A}P = 60^\circ$$

یعنی مثلث متساوی‌الساقین PAP′ متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه مثلث P′PB یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۶، ۸ و ۱۰ است، بعلاوه :

$$B\hat{P}A = B\hat{P}P' + P'\hat{P}A = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$$

حال با استفاده از قانون کسینوسها در مثلث PAB، داریم :

$$s^2 = 6^2 + 8^2 - 2\times 6\times 8\times \cos 150^\circ = 100 + 48\sqrt{3}$$

یادآوری.

در راه‌حل جبری نخست، از این مطلب که $a = PA$ ، $b = PB$ و $c = PC$ ، اعداد فیثاغورس هستند، استفاده نکردیم. راه‌حل دوم، حل هندسی را می‌توان برای هر سه عدد مثبت a، b و c که در آن مجموع هر دو عدد بزرگتر از سومی است، نیز بکار برد. ترسیم $\Delta ABP' = \Delta ACP$ مثل قبل است، مثلث APP′ مجدداً متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد، حال اگرچه $\delta = P'\hat{P}B$ الزاماً یک زاویهٔ قائمه نیست، اما می‌توان آن را به کمک قانون کسینوسها محاسبه کرد ؛ چرا که a، b و c ضلعهای مثلث P′PB مشخص هستند. حال می‌توانیم از $A\hat{P}B = 60^\circ + \delta$ ، برای پیدا کردن s استفاده کنیم. محاسبه‌ها بسیار پرزحمت‌تر از حالت $a^2 + b^2 = c^2$ است، اما از همان قاعده استفاده می‌شود.

در راه‌حل دوم، مثلث ABP′ را می‌توانستیم با دوران AP، به زاویهٔ °۶۰ حول نقطهٔ A در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و تبدیل آن به AP′ به‌دست آوریم (شکل ب). اگر

به‌طور مشابه BP را حول نقطهٔ B به‌اندازهٔ °۶۰ تا ″BP و CP را حول نقطهٔ C به‌اندازهٔ °۶۰ تا ‴CP در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، شش ضلعی ‴AP′BP″CP را به‌دست می‌آوریم. شکل (ب) را ببینید. قسمتی از شش ضلعی که خارج مثلث ABC است از دوران سه مثلثی که با هم مثلث ABC را ساخته بودند، به خارج مثلث ABC تشکیل می‌شود؛ بنابراین مساحت شش ضلعی دو برابر مساحت مثلث ABC است. از طرف دیگر شش ضلعی از ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلعهای a، b و c (هاشورخورده در شکل (ب)) و سه مثلث برابر به ضلعهای a، b و c که مساحت آنها را می‌توان از دستور هرون، به‌دست آورد، تشکیل می‌شود. بنابراین:

مساحت شش ضلعی = (دو برابر مساحت مثلث ABC)

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})+۳\sqrt{\delta(\delta-a)(\delta-b)(\delta-c)}$$

که در آن $\delta=\frac{(a+b+c)}{۲}$. در این مسأله $a=۶$، $b=۸$ و $c=۱۰$ و داریم:

$$ABC \text{ دو برابر مساحت مثلث} =\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲۰۰)+۳\sqrt{۱۲\times۶\times۴\times۲}=۵۰\sqrt{۳}+۳\times۲۴$$

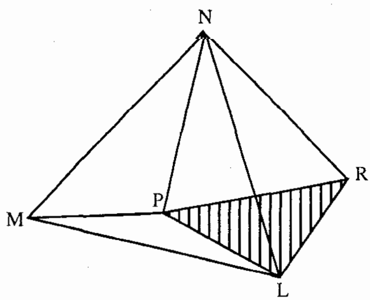
بنابراین: $ABC \text{ مساحت مثلث} = ۲۵\sqrt{۳}+۳۶$

۳۳. ابتدا مثلث متساوی‌الاضلاع LNM را رسم می‌کنیم، و نقطهٔ P را در داخل آن، با توجه به فاصلهٔ داده شده در صورت مسأله در جای مناسبی قرار می‌دهیم، و فاصلهٔ آن را از رأسهای مثلث چنین نشان می‌دهیم: $PL=a\ ,\ PM=b\ ,\ PN=c$

حال هر یک از دو نقطهٔ M و P را به مرکز N، و زاویهٔ ۶۰ درجه از چپ به راست، چرخش می‌دهیم، تا بترتیب در L و R قرار گیرند. خواهیم داشت:

$$MP=LR\ ,\ NP=NR=PR$$

مثلث دیگری را در اینجا هاشور زده‌ایم که ضلعهای آن معلوم است:



$$PL=a\ ,\ LR=b\ ,\ PR=c$$

اگر زاویهٔ LPR را x بنامیم، اندازهٔ زاویهٔ LPN چنین می‌شود: $\frac{\pi}{۳}+x$

و در مثلث LPN مقدار $d=LN$، چنین به‌دست می‌آید:

$$LN^۲ = PL^۲ + PN^۲ - ۲PL.PN\cos(x+\frac{\pi}{۳})$$

به بیان دیگر: $d^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos(x+\frac{\pi}{۳})$

همچنین $d^۲ = a^۲ + c^۲ - ac\cos x + ac\sqrt{۳}\sin x$

محاسبه‌ها را با توجه به $a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos x = b^۲$ و همچنین $\frac{۱}{۲}ac\sin x = s$ ادامه می‌دهیم، تا مساحت مثلث PLR به‌دست آید.

و سرانجام خواهیم داشت: $d^۲ = \frac{۱}{۲}(a^۲ + b^۲ + c^۲) + ۲\sqrt{۳}s$

و مساحت مثلث متساوی‌الساقین LMN مساوی می‌شود با:

$$\frac{d^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow: \frac{\sqrt{۳}}{۸}(a^۲ + b^۲ + c^۲)\frac{۳}{۲}s$$

به‌طوری که: $a = ۳۰۰, b = ۴۰۰, c = ۵۰۰, a^۲ + b^۲ = c^۲$

یعنی مثلث PLR دارای زاویهٔ قائم L است، و مساحتش چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{۲} \times ۳۰۰ \times ۴۰۰ = ۶۰۰۰۰$$

پس مساحت مثلث LMN هم برابر است با: $(\frac{۲۵\sqrt{۳}}{۴} + ۹) \times ۱۰۰۰۰ Km^۲$

که تقریباً مساوی خواهد بود با: $۱۹۸۲۵۰ Km^۲$

۳۴. می‌دانیم که $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ است. با توجه به این که p مقدار ثابتی است، $(p-a)+(p-b)+(p-c) = p$ نیز مقدار ثابتی می‌باشد. بنابراین s در صورتی حداکثر مقدار خود را داراست که $p-a = p-b = p-c$ یعنی $a = b = c$ و یا، مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

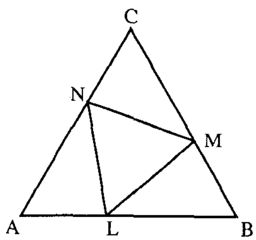
۳۵. نخست، توجه می‌کنیم که ضلع کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاع که لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ ۶۰° را می‌پوشاند، برابر با ۲a است. در حقیقت، اگر رأس زاویه‌های حادهٔ M و N از لوزی، روی ضلعهای AB و BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC واقع باشند و $B\hat{N}M = \alpha$ و $۳۰^\circ \leq \alpha \leq ۹۰^\circ$، آن‌وقت با استفاده از قانون سینوسها برای پیدا کردن BN از مثلث BNM و CN از مثلث KNC (K رأس منفرجهٔ لوزی است که واقع بر ضلع AC فرض می‌شود)، پس از تبدیلات خواهیم داشت: $BC = ۲a\frac{\cos(۶۰^\circ - \alpha)}{\cos ۳۰^\circ}$.

با توجه به این که: $۳۰^\circ \leq \alpha \leq ۹۰^\circ$، به‌دست می‌آوریم $BC \geq ۲\alpha$. می‌توان بسادگی دید

که مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۳}{۲}$ را می‌توان با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ پوشاند. برای اثبات حکم اخیر، هر کدام از مثلثهای به ضلع واحد را طوری جا می‌دهیم که یکی از رأسهای آن، بر یکی از رأسهای مثلثی که پوشانده می‌شوند، منطبق باشد. و در عین حال، وسط ضلع روبه‌رو به آن رأس هم، بر مرکز مثلث پوشانده شده، منطبق باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که نمی‌توان مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $b > \frac{۳}{۲}$ را با سه مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت واحد پوشاند. اگر چنین پوششی ممکن باشد، آن وقت رأسهای A، B و C، با مثلثهای متمایز پوشانده می‌شوند و هر یک از ضلعهای AB، BC و CA، با دو مثلث پوشانده خواهد شد. فرض کنید A به مثلث I، B به مثلث II و C به مثلث III و O، مرکز مثلث، مثلاً به مثلث I متعلق باشد. روی AB و AC بترتیب، نقطه‌های M و N را طوری می‌گیریم که $AM = AN = \frac{۱}{۳}b$. از آن‌جا که $BM = CN = \frac{۲}{۳}b > ۱$، نقطه‌های M و N هم، به مثلث I متعلقند و در نتیجه، لوزی AMON را تماماً، مثلث با طول ضلعهای کمتر از ۲AM (۲AM > ۱) می‌پوشاند، که این هم ناممکن است.

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



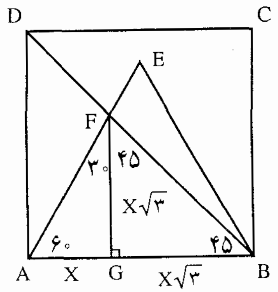
۳۶. دو مثلث ABC و ANL در زاویهٔ A مشترکند و بنابراین نسبت مساحتهای آنها بر نسبت حاصلضرب ضلعهای مجاور به این زاویه خواهد بود:

$$\frac{S_{ANL}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۳}a.\frac{۲}{۳}a}{a.a}$$

و از آن‌جا:
$$S_{ANL} = \frac{۲}{۹}S_{ABC}$$

و بنابراین داریم:
$$S_{NLM} = S_{ABC} - ۳S_{ANL} = \frac{۱}{۳}S_{ABC} = \frac{a\sqrt{۳}}{۱۲}$$

تبصره. وقتی که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، مثلث MLN نیز متساوی‌الاضلاع خواهد بود (چرا؟). همین مسأله را می‌توان در حالتی که مثلث ABC غیرمشخص باشد و ضلعهای آن به نسبت غیرمشخص تقسیم شده باشد، نیز حل کرد.



۳۷. (ج). FG ارتفاع مثلث AFB را رسم می کنیم و طول AG را x می گیریم. از روی شکل دیده می‌شود که :

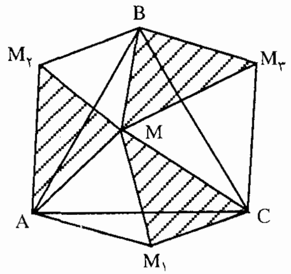
$$\sqrt{۱+\sqrt{۳}} = AB = x(۱+\sqrt{۳})$$

$$۱+\sqrt{۳} = x^{۲}(۱+\sqrt{۳})^{۲}$$

$$۱ = x^{۲}(۱+\sqrt{۳})$$

مساحت مثلث ABF برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}(AB)(FG) = \frac{۱}{۲}x^{۲}(۱+\sqrt{۳})\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$$



۳۸. حالتی را در نظر بگیرید که نقطهٔ M (شکل) در درون مثلث ABC قرار می‌گیرد. مثلث ABM را دور A به‌اندازهٔ زاویهٔ °۶۰ دوران دهید تا B به C بیاید. به مثلث $AM_۱C$ می‌رسیم که با مثلث ABM قابل انطباق است ؛ مثلث $AMM_۱$ متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه، ضلعهای مثلث $CMM_۱$ برابرند با پاره‌خطهای MA، MB و MC نقطه‌های $M_۲$ و $M_۳$ به طریق مشابه به‌دست می‌آیند. مساحت شش‌ضلعی $AM_۱CM_۳BM_۲$ دو برابر مساحت مثلث ABC است، یعنی برابر است با $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$. از طرف دیگر، مساحت این شش‌ضلعی برابر است با مجموع مساحتهای سه مثلث متساوی‌الاضلاع $AMM_۱$ ، $CMM_۳$ و $BMM_۲$ و سه مثلث، قابل انطباق با مثلث موردنظر ما، در نتیجه :

$$۳S + (MA^{۲} + MB^{۲} + MC^{۲})\frac{\sqrt{۳}}{۴} = a^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

امّا می‌دانیم که $MA^{۲} + MB^{۲} + MC^{۲} = ۳d^{۲} + a^{۲}$. بنابراین :

$$۳S + (۳d^{۲} + a^{۲})\frac{\sqrt{۳}}{۴} = a^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

که از آن‌جا : $S = \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}(a^{۲} - ۳d^{۲})$. حالتهای دیگر جای نقطهٔ M به روش مشابه قابل بررسی‌اند.

۳۹. ۱. پسر بزرگ یک سوم طناب را طول یک ضلع از مثلث متساوی‌الاضلاع قرار داد. اگر طول طناب را L فرض کنیم، مساحت مزرعهٔ او چنین است :

$$A=\frac{۱}{۲}\times(\frac{L}{۳})^{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۰$$

و پسر کوچک هم یک ششم طول همان طناب را یک ضلع از شش ضلعی منتظم قرار داد، و مزرعه‌ای به مساحت زیر تصاحب کرد:

$$۶\times\frac{۱}{۲}\times(\frac{L}{۶})^{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}A=۳۰$$

۲. ما می‌دانیم که وقتی با محیط ثابت، مساحت مزرعه ماکسیمم می‌شود که به شکل دایره باشد و می‌دانیم که طول محیط دایره عبارت است از: $۲\pi R=L$

در این صورت R چنین خواهد بود: $\pi R^{۲}=\pi(\frac{L}{۲\pi})^{۲}=\frac{۲۰\times ۳۶}{۴\pi\sqrt{۳}}\approx ۳۳/۰۸$

پس بیشترین مساحت مزرعه به‌وسیلهٔ این طناب ۳۳/۰۸ آر است.

۱.۷.۳. نسبت مساحتها

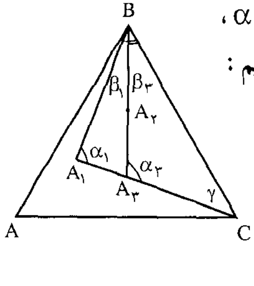
۴۰. $\frac{۲\sqrt{۳}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$

۱.۷.۴. رابطه‌ای در مساحتها

۴۱. طول ضلع مثلث ABC را a، و طول ضلع مثلث $A'B'C'$ را a' فرض می‌کنیم. با توجه به داده‌های مسأله:

$$h_{a'}=a\ ,\ h_{a'}=\frac{a'\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{a'\sqrt{۳}}{۲}=a\Rightarrow\frac{a'}{a}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow\frac{S'}{S}=(\frac{۲}{\sqrt{۳}})^{۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow S_{A'B'C'}=\frac{۴}{۳}S_{ABC} \text{ یا } a\Delta A'B'C'=\frac{۴}{۳}a\Delta ABC$$



۴۲. در هر مثلث به ضلعهای a، b و c، با زاویه‌های روبه‌رو به آنها α، β و γ، محیط P، مساحت S و شعاع دایرهٔ محاطی r، داریم:

$$a=r(\text{cotg}\frac{\beta}{۲}+\text{cotg}\frac{\gamma}{۲})\ ,\ b=r(\text{cotg}\frac{\alpha}{۲}+\text{cotg}\frac{\gamma}{۲}),$$

$$c=r(\text{cotg}\frac{\alpha}{۲}+\text{cotg}\frac{\beta}{۲})$$

$$\frac{P^2}{S}=\frac{2P^2}{Pr}=\frac{2(a+b+c)}{r}=4(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2})$$

بنابراین برای حل مسأله کافی است ثابت کنیم :

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}<\operatorname{cotg}\frac{\alpha_2}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_2}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma_2}{2}$$

که در آن، فرض کرده‌ایم :

$$\alpha_j=B\hat{A}_jC\,,\beta_j=A_j\hat{B}C\,,\gamma_j=A_j\hat{C}B$$

نقطهٔ A_3 را روی یکی از ضلعهای مثلث A_1BC و مثلاً در برخورد خط راست BA_2 با ضلع A_1C، در نظر می‌گیریم (شکل). در این صورت $\gamma_1=\gamma_3=\gamma$ و نابرابری متناظر، برای مثلثهای A_1BC و A_3BC، به این صورت درمی‌آید :

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_1}{2}<\operatorname{cotg}\frac{\alpha_3}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_3}{2}$$

برای اثبات آن، توجه می‌کنیم که :

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha_j}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta_j}{2}=\frac{\sin(\frac{\alpha_j}{2}+\frac{\beta_j}{2})}{\sin\frac{\alpha_j}{2}\sin\frac{\beta_j}{2}}=\frac{2\cos\gamma/2}{\cos(\frac{\alpha_j}{2}-\frac{\beta_j}{2})-\sin\frac{\gamma}{2}}$$

بنابراین، از نابرابری $\cos\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}>\cos\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}$

که نتیجه‌ای است از نابرابریهای :

$$\alpha_3>\alpha_1>\frac{\pi}{3}>\beta_1>\beta_3\,,0<\frac{\alpha_1-\beta_1}{2}<\frac{\alpha_3-\beta_3}{2}<\frac{\pi}{2}$$

به‌دست می‌آید : $S_1:P_1^2>S_3:P_3^2$

که در آن، S_j و P_j، مساحت و محیط مثلث A_jBC است. اگر از همین استدلال، در مورد مثلثهای A_3BC و A_2BC استفاده کنیم (یادآوری می‌کنیم که نقطهٔ A_2، روی ضلع A_3B از مثلث A_3BC قرار دارد)، به‌دست خواهیم آورد : $S_3:P_3^2>S_2:P_2^2$

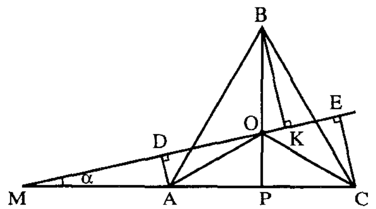
که از آنها، نابرابری مطلوب، به‌دست می‌آید.

۱.۸. رابطه‌های متری

۱.۸.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

۴۳. پای ارتفاع رأس B را H می‌نامیم و از H عمود HH' را بر خط l فرود می‌آوریم. در ذوزنقهٔ $AA'C'C$، (۱) $AA'+CC'=۲HH'$ است. (خط HH' از وسط یک ساق موازی قاعده‌ها رسم شده است.) از طرفی دو مثلث GBB' و GHH' متشابه‌اند و داریم: $۲=\frac{GA}{GB}=\frac{BB'}{HH'}$؛ پس (۲) $BB'=۲HH'$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $AA'+CC'=BB'$.

۴۵. فرض کنید که خط مورد نظر با قاعدهٔ AC از مثلث ABC زاویه‌ای برابر α تشکیل دهد (شکل). عبارتهای $AO=BO=CO=a$ را در نظر می‌گیریم. خطهای AD، BK و CE عمود بر این خط موردنظر را برحسب a و α بیان کرده و ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر



مقدار α عبارت $AD^۲+BK^۲+CE^۲$ مقداری ثابت است. از آن‌جا که $O\hat{A}C=۳۰^\circ$ است، از این‌رو $M\hat{A}O=۱۵۰^\circ$ بوده و آن‌گاه $D\hat{O}A=۱۸۰^\circ-(\alpha+۱۵۰^\circ)=۳۰^\circ-\alpha$ را خواهیم داشت. از ΔDOA به $AD=OA\sin A\hat{O}D=a\sin(۳۰^\circ-\alpha)$ وصول می‌یابیم. از ΔMOP به $B\hat{O}K=M\hat{O}P=۹۰^\circ-\alpha$ می‌رسیم. از ΔBOK به $BK=BO\sin B\hat{O}K=a\sin(۹۰^\circ-\alpha)=a\cos\alpha$ می‌رسیم. به‌دلیل $P\hat{O}E=۹۰^\circ+\alpha$ (زاویهٔ خارجی ΔMOP) و $P\hat{O}C=۶۰^\circ$، چنین داریم:

$$C\hat{O}E=P\hat{O}E-P\hat{O}C=(۹۰^\circ+\alpha)-۶۰^\circ=۳۰^\circ+\alpha$$

از ΔCOE به $CE=CO\sin C\hat{O}E=a\sin(۳۰^\circ+\alpha)$ دست می‌یابیم. چنین نتیجه می‌شود:

$$AD^۲+BK^۲+CE^۲=a^۲\sin^۲(۳۰^\circ-\alpha)+a^۲\cos^۲\alpha+a^۲\sin^۲(۳۰^\circ+\alpha)$$

$$=a^۲\left(\frac{۱-\cos(۶۰^\circ-۲\alpha)}{۲}+\cos^۲\alpha+\frac{۱-\cos(۶۰^\circ+۲\alpha)}{۲}\right)$$

$$= a^2\left(1-\frac{\cos(60^\circ+2\alpha)+\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}+\cos^2\alpha\right)$$

$$= a^2\left(1-\cos 60^\circ \cos 2\alpha+\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)$$

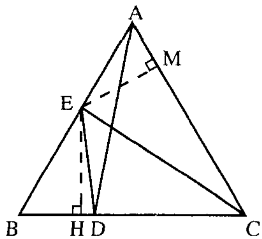
$$= a^2\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right)=\frac{3}{2}a^2$$

و بدین ترتیب به‌ازای هر مقدار α نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$AD^2+BK^2+CE^2=\frac{3}{2}a^2$$

۴۶. نیمسازهای مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه‌های مثلث نیز هستند. پس نقطهٔ O مرکز ثقل مثلث ABC است و رابطهٔ $\frac{OB}{OM}=\frac{OC}{ON}=2$ برقرار است.

۴۷. فرض می‌کنیم که $AB=AC=BC=3a$ باشد. در نتیجه $BD=a$ ، همچنین فرض می‌کنیم که $AE=ED=b$ باشد. پس : $EB=3a-b$ در مثلث EBD ارتفاع EH را رسم می‌کنیم. داریم :



$$\overset{\Delta}{EDB} \Rightarrow ED^2=BD^2+EB^2-2\times\frac{EB}{2}\times BD$$

$$\Rightarrow b^2=a^2+9a^2+b^2-6ab-a(3a-b)$$

$$a^2+9a^2-6ab-3a^2+ab=0 \Rightarrow 7a^2-5ab=0 \Rightarrow b=\frac{7a}{5}$$

پس : $EB=3a-\frac{7a}{5} \Rightarrow EB=\frac{8a}{5}\ ,\ ED=EA=\frac{7a}{5}$

در مثلث AEC نیز ارتفاع EM را رسم می‌کنیم. داریم :

$$\overset{\Delta}{AEC} \Rightarrow EC^2=AE^2+AC^2-2\times\frac{AE}{2}\times AC$$

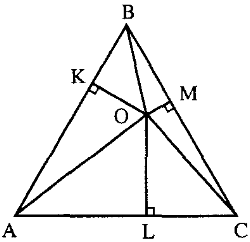
$$\Rightarrow EC^2=\frac{49a^2}{25}+9a^2-\frac{7a}{5}\times 3a$$

$$\Rightarrow EC^{۲}=\frac{۱۶۹a^{۲}}{۲۵}\Rightarrow EC=\frac{۱۳a}{۵}$$

ولی :

$$EB+BD=\frac{۸a}{۵}+a\Rightarrow EB+BD=\frac{۱۳a}{۵}$$

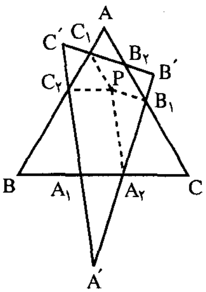
از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که : $EB+BD=EC$



۴۸. مساحت مثلث ABC برابر است با، مجموع مساحتهای مثلثهای AOB، BOC و COA ؛ و بنابراین، اگر ضلع مثلث را مساوی a و ارتفاع آن را مساوی h فرض کنیم،

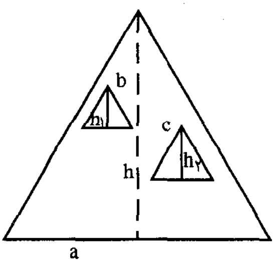
داریم : $(OK+OL+OM)\frac{a}{۲}=\frac{ah}{۲}$

و یا : $OK+OL+OM=h=$ مقدار ثابت



۵۰. فرض می‌کنیم مثلث حاصل از خطهای $B_۲C_۱$ ، $C_۲A_۱$ ، $A_۲B_۱$ ، همان که در شکل نشان داده شده، مثلث $A'B'C'$ باشد. اکنون متوازی‌الاضلاع : $C_۲A_۱A_۲P$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت مثلث $C_۱C_۲P$ متساوی‌الاضلاع است. نیز، از آن‌جا که $C_۱P$ مساوی و موازی با $B_۲B_۱$ است، $B_۱B_۲C_۱P$ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. بنابراین : $B_۲C_۱:C_۲A_۱:A_۲B_۱=B_۱P:PA_۲:A_۲B_۱$ است. بالاخره $\Delta A_۲B_۱P\sim\Delta A'B'C'$ است، که نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

۲.۸.۱. رابطه‌های متری (نابرابریها)



۵۱. الف) این رابطه با در نظر گرفتن مساحت مثلثها برقرار می‌شود : اگر ضلع مثلث a باشد، ارتفاع آن $a\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و مساحت آن $a^{۲}\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است، که با مقایسهٔ مساحتها، رابطهٔ موردنظر حاصل می‌شود.

ب) ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که اگر در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a دو مثلث متساوی‌الاضلاع b و c مطابق شکل، داشته باشیم،

داریم : $a \geq b+c$ ؛ زیرا $h \geq h_۱ + h_۲$ و یا $\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \geq \frac{b\sqrt{۳}}{۲} + \frac{c\sqrt{۳}}{۲}$ ؛ پس $a \geq b+c$.

حال این رابطه برای هر دو مثلث از مثلثهایی به ضلعهای $a_۱, \ldots, a_m$ می‌نویسیم :

$$a_۱ + a_۲ \leq a$$

$$a_۱ + a_۳ \leq a$$

$$\vdots$$

$$a_۱ + a_m \leq a$$

$$a_۲ + a_۳ \leq a$$

$$\vdots$$

$$a_{m-۱} + a_m \leq a$$

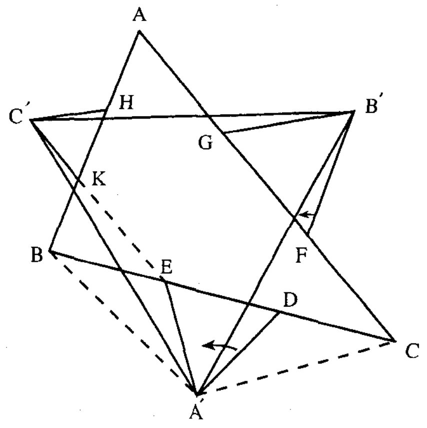
حال طرفین را جمع می‌زنیم :

$$(m-۱)\sum_{i=۱}^{m} a_i \leq \frac{m(m-۱)}{۲} a$$

$$\sum_{i=۱}^{m} a_i \leq \frac{m}{۲} a$$

۱.۹. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است

۵۳. راه‌حل هندسی. نقطهٔ A' را به B و C وصل می‌کنیم. از تساوی دو مثلث $A'DC$ و $A'EB$ به حالت (ض ز ض) نتیجه می‌گیریم که مثلث $A'BC$ مثلثی متساوی‌الساقین به رأس A' با زاویهٔ رأس °۱۲۰ است ؛ و همین‌طور دو مثلث $B'CA$ و $C'AB$. بنابراین A' ، B' و C' مرکزهای سه مثلث متساوی‌الاضلاع است که بترتیب روی ضلعهای BC، CA و AB بنا می‌شوند و بنابراین مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.



راه‌حل برداری. برای اثبات به روش برداری مقدمهٔ ذیل را به‌عنوان لم مطرح می‌کنیم :

لم. اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و ...، چند بردار واقع در یک صفحه با مجموع $\vec{l}$ فرض شود، مجموع دوران یافته‌های $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ و ... به اندازهٔ زاویهٔ α برابر است با دوران یافتهٔ $\vec{l}$ به‌اندازهٔ α . (در دوران شکل مسطح در حول نقطه به اندازهٔ α، هر خط از شکل با دوران یافتهٔ خود زاویهٔ α می‌سازد.) اینک برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB'} ,$$

$$R_{۶۰}(\overrightarrow{A'B'}) = R_{۶۰}(\overrightarrow{A'D}) + R_{۶۰}(\overrightarrow{DF}) + R_{۶۰}(\overrightarrow{FB'}) \qquad (۱)$$

ولی : $R_{۶۰}(\overrightarrow{A'D}) = \overrightarrow{A'E}$ و $R_{۶۰}(\overrightarrow{DF}) = R_{۶۰}(\overrightarrow{KH}) = \overrightarrow{KC'}$,

$$R_{۶۰}(\overrightarrow{FB'}) = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EK}$$

تساوی (۱) با توجه به سه تساوی اخیر به‌صورت ذیل درمی‌آید :

$$R_{۶۰}(\overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{A'E} + \overrightarrow{KC'} + \overrightarrow{EK}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که $R_{۶۰}(\overrightarrow{A'B'}) = \overrightarrow{A'C'}$.

۵۸. می‌دانیم که $O_۱$ ، $O_۲$ و $O_۳$ مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای متساوی‌الاضلاع BCP، ACQ و ABR ، رأسهای مثلثی هستند که زاویه‌های آن بترتیب با زاویه‌های P، Q و R برابرند ؛ یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{P} = ۶۰^\circ$ و $\hat{O}_۲ = \hat{Q} = ۶۰^\circ$ و $\hat{O}_۳ = \hat{R} = ۶۰^\circ$ است. بنابراین مثلث $O_۱O_۲O_۳$ متساوی‌الاضلاع است.

۵۹. با قرارداد $AC = b$ ، $CB = a$ و $BA = c$، داریم $AO_۲ = \frac{b}{\sqrt{۳}}$ و $AO_۳ = \frac{c}{\sqrt{۳}}$ و چون اندازهٔ زاویهٔ $O_۳AO_۲$ برابر $\hat{A}+۶۰^\circ$ است، بنابه قانون کسینوسها در مثلث $AO_۳O_۲$ داریم :

$$\overline{O_۳O_۲}^۲ = \frac{۱}{۳}b^۲ + \frac{۱}{۳}c^۲ - \frac{۲}{۳}bc\cos(\hat{A}+۶۰^\circ)$$

رأسهای $N_۲$ و $N_۳$ از مثلث ناپلئون داخلی بترتیب قرینه‌های $O_۲$ و $O_۳$ نسبت به CA و AB می‌باشد و بعلاوه زاویهٔ $N_۳AN_۲$ برابر است با $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و نتیجه می‌شود :

$$\overline{N_۳N_۲}^۲ = \frac{۱}{۳}b^۲ + \frac{۱}{۳}c^۲ - \frac{۲}{۳}bc\cos(\hat{A}-۶۰^\circ)$$

از دو رابطهٔ بالا داریم :

$$O_3O_2^2 - N_3N_2^2 = \frac{2}{3}bc\left[\cos(\hat{A}-60^\circ) - \cos(\hat{A}+60^\circ)\right]$$

$$= \frac{4}{3}bc\sin\hat{A}\sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}bc\sin\hat{A} = \frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC)$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\overline{O_1O_2}^2 - \overline{N_1N_2}^2 = \overline{O_3O_1}^2 - \overline{N_3N_1}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC)$$

و چون $O_1O_2 = O_3O_1 = O_2O_3$ ، پس :

$$N_1N_2 = N_3N_1 = N_1N_3$$

بالاخره چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4}$ برابر مربع یک ضلع آن، پس می‌توانیم نتیجهٔ مهم فوق را بیان کنیم.

۶۰. اگر O_1O_2 و N_1N_2 دو ضلع متناظر از دو مثلث ناپلئون خارجی و داخلی یک مثلث باشند، داریم :

$$\overline{O_1O_2}^2 - \overline{N_1N_2}^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{\sqrt{3}\ \overline{O_1O_2}^2}{4} - \frac{\sqrt{3}\ \overline{N_1N_2}^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{4}{\sqrt{3}}S(ABC) = S(ABC)$$

با توجه به این که $\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{O_1O_2}^2$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{N_1N_2}^2$ بترتیب مساحتهای دو مثلث $O_1O_2O_3$ و $N_1N_2N_3$ هستند، خواهیم داشت :

$$S(O_1O_2O_3) - S(N_1N_2N_3) = S(ABC)$$

۶۱. ضمن حل مسأله از گزاره‌های زیر استفاده می کنیم که بسادگی اثبات می‌شوند.

الف. اگر نقطهٔ N روی نیمساز زاویهٔ M از مثلث KLM (در درون این مثلث) طوری اختیار شود که $K\hat{L}N = \frac{1}{2}(\pi + K\hat{M}L)$ ، آن‌وقت N نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث KLM است.

ب. اگر نقطهٔ N در درون زاویهٔ KML و بیرون مثلث KLM ، بر روی امتداد نیمساز زاویهٔ درونی M طوری اختیار شوْد که $K\hat{N}L = \frac{1}{2}(\pi - K\hat{M}L)$ ، آن‌وقت N نقطهٔ

برخورد نیمساز زاویهٔ M و نیمسازهای زاویه‌های خارجی K و L است.

ج. اگر نقطهٔ N در درون زاویهٔ KML و روی نیمساز زاویهٔ خارجی K از مثلث KML اختیار شود، به‌طوری که $M\hat{N}L = \frac{۱}{۲}M\hat{K}L$ ، آن‌وقت N نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ M و نیمسازهای زاویه‌های خارجی K و L است.

حکم را به ازای همهٔ مقدارهای ممکن i، j و k(در کل هفت حالت) به یک شکل ثابت می‌کنیم. هر دفعه، حکم عکس نظیر هم‌ارز با حالت قضیهٔ مورلی را بیان و اثبات می‌کنیم. مسألهٔ قبل نمونه‌ای از یک چنین شکلی از اثبات است. برای اجتناب از تکرار، نخست، قسمت کلی اثبات را مشخص می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع PQR را درنظر بگیرید. مثلثهای متساوی‌الساقین PXQ ، QYR و RZP را با قاعده‌های ضلعهای آن رسم می‌کنیم (هر مثلث و چگونگی ترسیم آن در هر هفت حالت، توضیح داده می‌شود). فرض کنید $A_۰$ معرف نقطهٔ برخورد خطهای راست ZP و YQ ، $B_۰$ نقطه برخورد XQ و ZR و $C_۰$ نقطهٔ برخورد YR و XP باشد. در این صورت، در هر حالت ثابت می‌کنیم که مثلث $A_۰B_۰C_۰$ با مثلث ABCمتشابه است و نیمخطهای $A_۰P$ و $A_۰Q$ ، $B_۰Q$ و $B_۰R$ ، $C_۰R$ و $C_۰P$ سه سازهای آن از نوع متناظرشان هستند. اکنون در هر حالت مشخص می‌کنیم که چه مثلثی و چگونه باید بر روی ضلعهای مثلث PQR رسم شود.

$$R\hat{Z}P = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\hat{C})\ ,\ \ Q\hat{Y}R = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\hat{B}),$$

$$P\hat{X}Q = \frac{۱}{۳}(\pi + ۲\hat{A})\ ;\ \ i = j = k = ۱ \qquad (۱)$$

همهٔ مثلثها، بیرون مثلث PQR واقعند.

$$R\hat{Z}P = \pi - \frac{۲\hat{C}}{۳}\ ,\ \ Q\hat{Y}R = \pi - \frac{۲\hat{B}}{۳}\ ,$$

$$P\hat{X}Q = \frac{۱}{۳}(\pi - ۲\hat{A})\ ;\ \ j = k = ۲\ ,\ \ i = ۱ \qquad (۲)$$

همهٔ مثلثها، بیرون مثلث PQR قرار دارند. (فرض می‌کنیم $\hat{A} < \frac{\pi}{۲}$. اگر $\hat{A} > \frac{\pi}{۲}$ ، آن وقت مثلث PXQ روبه سمت دیگر مثلث PQR قرار دارد و $P\hat{X}Q = \frac{۱}{۳}(۲\hat{A} - \pi)$.

اگر $\hat{A} = \frac{\pi}{۲}$ ، آن وقت مثلث PXQ به یک جفت خط موازی تبدیل می‌شود. این

یادآوری را، در بررسی بقیهٔ حالتها، درنظر خواهیم داشت.)

$$R\hat{Z}P=\frac{1}{3}(\pi+2\hat{C}),\ Q\hat{Y}R=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{B})\ ،$$

$$P\hat{X}Q=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{A})\ ;\ k=3,\ i=j=1 \quad (3)$$

مثلثهای PXQ و QYR ، بیرون مثلث PQR قرار دارند و مثلث RZP ، در درون آن واقع است (قسمت (۲) را ببینید).

$$R\hat{Z}P=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{C}),\ Q\hat{Y}R=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{B})$$

$$P\hat{X}Q=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{A})\ ;\ i=j=k=2 \quad (4)$$

همهٔ مثلثها و خود مثلث PQR، در یک طرف ضلعهای نظیر مثلث PQR قرار دارند (قسمت (۲) را ببینید).

$$R\hat{Z}P=\pi-\frac{2\hat{C}}{3},\ Q\hat{Y}R=\frac{1}{3}(\pi-2\hat{B})،$$

$$P\hat{X}Q=\frac{1}{3}(\pi+2\hat{A})\ ;\ k=3,\ j=2,\ i=1 \quad (5)$$

مثلث PXQ ، بیرون مثلث PQR رسم می‌شود، درحالی که دو مثلث دیگر، در درون آن رسم می‌شوند (قسمت (۲)).

$$R\hat{Z}P=\frac{1}{3}(\pi+2\hat{C}),\ Q\hat{Y}R=\frac{1}{3}(\pi+2\hat{B})\ ,$$

$$P\hat{X}Q=\pi-\frac{2\hat{A}}{3}\ ;\ j=k=3,\ i=2 \quad (6)$$

مثلث PXQ بیرون، و دوتای دیگر، در درون مثلث PQR رسم می‌شوند.

$$R\hat{Z}P=\pi-\frac{2\hat{C}}{3},\ Q\hat{Y}R=\pi-\frac{2\hat{B}}{3},\ P\hat{X}Q=\pi-\frac{2\hat{A}}{3}\ ;\ i=j=k=3 \quad (7)$$

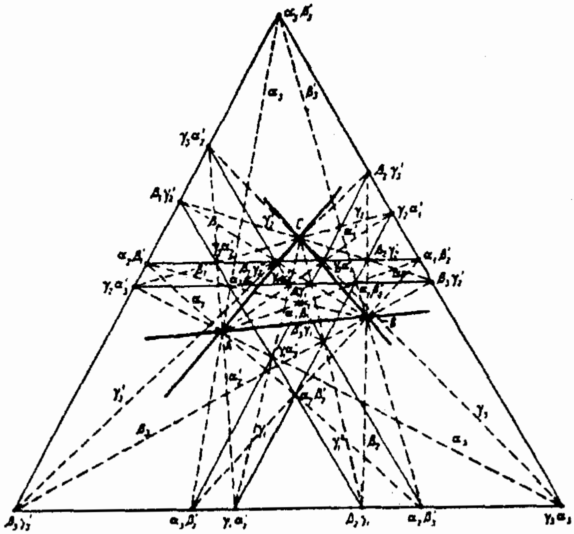
همهٔ مثلثها، در درون مثلث PQR قرار دارند.

فرض کنید $\hat{A}<\frac{\pi}{2}$. مثلث $B_\circ XC_\circ$ را درنظر بگیرید که در آن، XR ، نیمساز زاویهٔ $B_\circ XC_\circ$ است، بعلاوه $B_\circ\hat{R}C_\circ=\frac{1}{2}(\pi+B_\circ\hat{X}C_\circ)$.

بنابر گزارهٔ (الف)، R نقطهٔ برخورد نیمسازهای این مثلث است. (اگر $\hat{A} > \frac{\pi}{2}$، آن وقت B_0R و C_0R نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث B_0XC_0 هستند.) بعلاوه، در مثلث C_0YA_0 : YP نیمساز زاویهٔ خارجی Y است و $A_0\hat{P}C_0 = \frac{1}{2}A\hat{Y}C_0$ (این مطلب، بسادگی تحقیق می‌شود). بنابر گزارهٔ (ج)، P نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ C_0A_0Y و نیمسازهای زاویه‌های خارجی A_0C_0Y و C_0YA_0 از مثلث C_0YA_0 است. به روش مشابه، نقطهٔ Q، نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ ZA_0B_0 و نیمسازهای زاویه‌های خارجی A_0B_0Z و A_0ZB_0 از مثلث A_0ZB_0 است. (این مطلب نتیجه می‌دهد که مثلث PQR، از برخورد سه ساز نوع اوّل زاویهٔ A_0 با سه سازهای نوع دوم زاویه‌های B_0 و C_0 از مثلث $A_0B_0C_0$ به‌وجود می‌آید (قسمت (۲) را ببینید). خود مثلث $A_0B_0C_0$ با مثلث ABC متشابه است.

در تمامی حالتهای باقیمانده (۳ تا ۷) به همین نحو، با تفاوت در استفاده از گزاره‌ها (الف، ب و ج) استدلال می‌کنیم. با تغییر دادن اندیسهای i ، j و k توجه می‌کنیم که متناظر با قسمت (۵)، شش مثلث متساوی‌الاضلاع، هر یک از قسمتهای (۲)، (۳) و (۶)، سه مثلث متساوی‌الاضلاع و هریک از قسمتهای (۱)، (۴) و (۷) یک مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارد. به این ترتیب، تعداد کل مثلثهای متساوی الاضلاع حاصل، هجده است. اکنون، در هر حالت، اندازه‌های مثلث PQR را طوری انتخاب می‌کنیم که مثلث $A_0B_0C_0$ نظیر، با مثلث ABC برابر باشد. هجده شکل حاصل را یکی پس از دیگری روی هم قرار می‌دهیم، به‌طوری که مثلثهای ABC ، بر هم منطبق شوند.
این کار را بترتیب زیر انجام می‌دهیم :

نخست، شکل نظیر قسمت (۱)، سپس سه شکل نظیر قسمت (۳)، آن وقت شش شکل نظیر قسمت (۵)، پس از آن، سه شکل نظیر قسمت (۲)، و سر آخر، سه شکل قسمت (۶)، شکل قسمت (۴) و شکل قسمت (۷). در هر انطباق متوالی، دست کم یکی از رأسهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع نظیر، باید بر یکی از رأسهای مثلثهای منطبق شدهٔ قبلی منطبق شود. اگر زاویه‌ها را بشماریم، می‌توانیم ببینیم که پنج رأس از دو مثلث متساوی‌الاضلاع که یک رأس مشترک دارند، روی دو خط راست قرار دارند که از این رأس مشترک می‌گذرند. به این ترتیب رأسهای هجده مثلث متساوی‌الاضلاع، حتماً باید مطابق شکل قرار گیرند (در این شکل، $\alpha_1\beta_1'$ معرف نقطهٔ برخورد سه سازهای α_1 و β_1' است و غیره).



۶۴. داریم :

$$a^{۳}+b^{۳}-c^{۳}=c^{۲}(a+b-c)\Rightarrow c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-ab\Rightarrow \hat{C}=۶۰^{\circ}$$

$$\sin\hat{A}\sin\hat{B}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \cos(\hat{A}-\hat{B})=۱\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^{\circ}$$

۶۵. داریم :

$$a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}+a^{۳}b+a^{۳}c+b^{۳}a+b^{۳}c+c^{۳}a+c^{۳}b$$
$$=a^{۴}+b^{۴}+c^{۴}+۲a^{۲}b^{۲}+۲a^{۲}c^{۲}+۲b^{۲}c^{۲}$$

$$ab^{۳}+ac^{۳}+ba^{۳}+bc^{۳}+ca^{۳}+cb^{۳}-۲a^{۲}b^{۲}-۲a^{۲}c^{۲}-۲b^{۲}c^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow ab(a^{۲}+b^{۲}-۲ab)+ac(a^{۲}+c^{۲}-۲ac)+bc(b^{۲}+c^{۲}-۲bc)=۰$$

$$\Rightarrow ab(a-b)^{۲}+ac(a-c)^{۲}+bc(b-c)^{۲}=۰$$

$$\begin{cases}(a-b)^{۲}=۰\\(a-c)^{۲}=۰\\(b-c)^{۲}=۰\end{cases}\qquad\begin{cases}a-b=۰\\a-c=۰\\b-c=۰\end{cases}\qquad\begin{cases}a=b\\a=c\\b=c\end{cases}$$

چون $a=b=c$، بنابراین مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

۶۶. فرض می‌کنیم :

$$a_{۱}=A_{۲}A_{۳}\ ,\ a_{۲}=A_{۱}A_{۳}\ ,\ a_{۳}=A_{۱}A_{۲}$$ و

$$h_{۱}=A_{۱}H_{۱}\ ,\ h_{۲}=A_{۲}H_{۲}\ ,\ h_{۳}=A_{۳}H_{۳}$$

در این‌صورت خواهیم داشت :

$$a_{۳}h_{۱}+a_{۱}h_{۲}+a_{۲}h_{۳}$$

$$=a_1h_1.\frac{a_3}{a_1}+a_2h_2.\frac{a_1}{a_2}+a_3h_3.\frac{a_2}{a_3}=2S\left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\right)$$

از طرف دیگر، با توجه به قضیهٔ واسطه‌ها داریم :

$$\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}\geq 3$$

که در آن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}\Rightarrow a_1=a_2=a_3$$

بنابراین، شرط $a_3h_1+a_1h_2+a_2h_3=6S$، با شرط $a_1=a_2=a_3$ هم‌ارز است.

۶۷. ۸ مثلث.

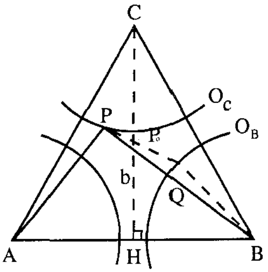
۶۸. فرض کنید BD معرف نیمسازی در مثلث ABC باشد، A_1 و C_1 وسط ضلعهای BC و AB هستند و $DA_1=DC_1$. دو حالت ممکن است : (۱) $B\hat{A_1}D=B\hat{C_1}D$ و (۲) $B\hat{A_1}D+B\hat{C_1}D=180^\circ$. در حالت اوّل، $AB=BC$، در حالت دوم، مثلث AC_1D را دور D، به اندازهٔ زاویهٔ C_1DA_1 دوران می‌دهیم تا C_1 به A_1 برود. مثلثی با طول ضلعهای $\frac{ba}{a+c}$، $\frac{a+c}{2}$ و $\frac{bc}{a+c}$ (a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC می‌باشند.) به دست می‌آوریم، که با مثلث ABC متشابه است. در نتیجه :

$$\frac{ba}{a+c}:a=\frac{a+c}{2}:b=\frac{bc}{a+c}:c$$

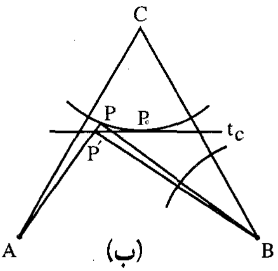
بنابراین $a+c=b\sqrt{2}$. چون $a\neq c$، دست کم یکی از دو نابرابری $b\neq a$ و $b\neq c$ درست است. فرض کنید $b\neq c$، در این صورت $b+c=a\sqrt{2}$ و $b=a$ و مثلثی به ضلعهای a، a و $a(\sqrt{2}-1)$ به دست می‌آوریم که این ویژگی را دارد، بنابراین دو دسته از مثلثها، که در شرطهای مسأله صادقند، وجود دارد : مثلثهای متساوی‌الاضلاع، مثلثهای متشابه با مثلث به ضلعهای ۱، ۱ و $\sqrt{2}-1$.

۱ . ۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۶۹. ناحیهٔ مورد پوشش مین‌یاب، به صورت ΔABC در شکل (الف) تصویر شده، رأس A نقطهٔ شروع سرباز، و h نمایش دهندهٔ ارتفاع ΔABC است. گفته شده که عملکرد



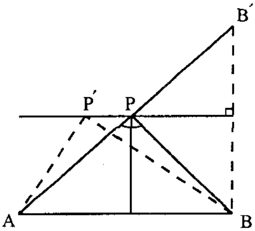
(الف)



(ب)

مین‌یاب، روی دایره‌ای به شعاع : $r=\frac{h}{2}$ تغییر می‌کند، ولی ما این مقدار دقیق r را تنها در مرحلهٔ بعد مورد استفاده قرار می‌دهیم. واضح است که مین‌یاب، برای این که رأسهایB و C را تحت پوشش خود قرار دهد، باید در مرحله‌ای از زمان، بر دایره‌های O_B و O_C به شعاع r و مرکزهای B و C قرار گیرد، بنابراین ابتدا به حل مسألهٔ ساده‌تر زیر می‌پردازیم :

مسیر از Aی با کمترین طول، به طوری که مین‌یاب نقطه‌های B و C را بررسی کند، چیست؟



(پ)

این مسأله معادل مسألهٔ : کمترین مسیر از A تا نقطهٔ C ، واقع بر محیط O_B ، از طریق نقطهٔ P واقع بر محیط O_C چیست؟ می‌باشد. معلوم خواهد شد که جواب این مسأله، جواب مسألهٔ مفروض، چون $r=\frac{h}{2}$ باشد، نیز هست.

برای یافتن مسیر کمترین APQ با P واقع بر O_C و Q واقع بر O_B ، شکل (الف) را ملاحظه کنید، مسیر APQB را درنظر می‌گیریم ؛ از آن‌جا که به ازاء جمیع Qهای واقع بر O_B ، قطعهٔ QB دارای طول r است، مسیر کمترین APQB، طول APQ را نیز می‌نیمم می‌کند. برعکس، مسیر APB (P بر O_C) با کمترین طول، کمترین طول : $AP+PQ=AP+PB-r$ ، Q واقع بر O_B ، را حاصل می‌کند.

ادعا می‌کنیم که مسیر کمترین از A به B و از طریق نقطهٔ P واقع بر O_C مسیر AP_0B است، که در آن P_0 تقاطع O_C با ارتفاع رسم شده از C در ΔABC است.

اثبات. مماس در P_0 بر O_C را با t_C ، هر نقطهٔ دیگر واقع بر O_C را با P، و تقاطع AP با t_C را با P' نمایش می‌دهیم ؛ شکل (ب) را ملاحظه کنید. با توجه به نامساوی مثلث : $P'B \le P'P + PB$ است، بنابراین طول $AP'B$ کوچکتر از یا مساوی با APB است.

این نشان می‌دهد که کوتاهترین مسیر واصل A به B از نقطهٔ P' واقع بر t_C کوتاهتر از یا مساوی با کوتاهترین مسیر واصل A به B از نقطهٔ P واقع بر O_C است. اما کوتاهترین فاصلهٔ از A به B از نقطه‌ای واقع بر t_C راه حل معروفی دارد که بترتیب زیر است : این مسیر، مسیر AP^*B است که در آن P^* تقاطع t_C با عمودمنصف AB می‌باشد، شکل (پ) را ملاحظه کنید. در شکل ما P^* نقطهٔ P_0 واقع بر محیط O_C است. به این ترتیب مسألهٔ می‌نیمم شامل t_C مسألهٔ می‌نیمم شامل O_C را نیز حل می‌کند.

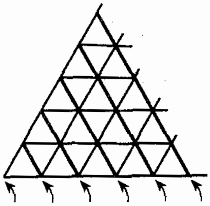
در این صورت مین‌یاب به ازای $r = \frac{h}{۲}$ ، در امتداد AP_0Q_0 که در آن Q_0 تقاطع P_0B با O_B است، حرکت کرده، کل ناحیه را تحت پوشش خود قرار می‌دهد. تحقیق در این مطلب را که هیچ نقطه‌ای از ΔABC بیش از $\frac{h}{۲}$ ، از یکی از نقطه‌های مسیر، فاصله ندارد، به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، بسادگی معین می‌کنیم که : $AP_0^۲ = ۷h^۲/۱۲$ است، بنابراین مسیر کمترین مورد بحث دارای طول :

$AP_0 + P_0Q_0 = AP_0 + P_0B - \frac{h}{۲} = \left(\sqrt{\frac{۷}{۳}} - \frac{۱}{۲}\right)h$ یا برحسب S طول ضلع مثلث ABC : $AP_0 + P_0Q_0 = (\frac{\sqrt{۷}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۴})S$ است.

تبصره. روش به کار رفته در راه حل بالا در حل مسألهٔ عمومی‌تر زیر نیز به کار می‌رود. فرض می‌کنیم K منحنی محدب بستهٔ هموار باشد، و A و B نقطه‌های خارج ناحیهٔ محدود توسط K باشند. کوتاهترین مسیر APB ، P واقع بر K را بیابید. در این مورد شخص باید وجود نقطهٔ P_0 واقع بر K را، به‌طوری که زاویه‌های تشکیل شده از AP_0 و P_0B با n ، قائم بر منحنی K، مساوی باشند، مشخص کند. در این صورت مماس در K بر P_0 همان نقش مماس t_C را ایفا می‌کند.

۷۱. در واقع برای هر رأس می‌توان سه مختص در رابطه با شماره‌هایی که به خطهای راست



موازی یکی از ضلعها می‌دهیم، درنظر گرفت (شکل را ببینید). روشن است که مجموع سه مختص هر رأس برابر است با ۳۰. چون برای هر دو رأس مورد نظر با مختص اوّل (همچنین دوم یا سوّم)، باید مقدار مختص متفاوت باشد، بنابراین مجموع آنها از

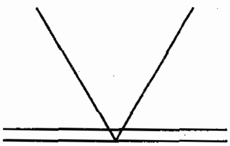
$$۰+۱+۲+...+(n-۱)=\frac{۱}{۲}n(n-۱)$$

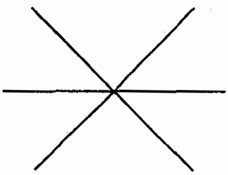
کمتر نیست ؛ در نتیجه، مجموع همهٔ مختصات این نقطه ها از : $\frac{۳}{۲}n(n-۱)$ کمتر نیست. (n ، تعداد همهٔ رأسهای مورد نظر در تقسیم است.) از طرف دیگر، این مجموع برابر است با ۳۰n. بنابراین :

$$۳۰n \geq \frac{۳}{۲}n(n-۱) \Rightarrow n-۱ \leq ۲۰$$

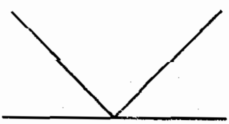
مثال مربوط به پاسخ ۲۱ رأس را به عنوان تمرین به عهدهٔ خوانندگان می‌گذاریم.

۷۲. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، چنین تقسیمی ممکن باشد. انتهاهای ضلع درونی مثلثهای تقسیم را به سه گروه رده‌بندی می‌کنیم : نقطه‌های واقع بر ضلع مثلث بزرگ (در آنها چهارضلعی درونی به‌هم می‌رسند (شکل a را ببینید) ؛ نقطه‌های درونی مثلث که، در آنها شش مثلث تقسیم، یعنی ۱۲ ضلع به‌هم می‌رسند (شکل b) ؛ نقطه‌های واقع در داخل یک ضلع درونی مثلث تقسیم که در آنها، شش‌ضلعی درونی مثلثهای تقسیم به هم می‌رسند (شکل c). اگر تعداد نقطه‌های این گروهها را به ترتیب $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ بنامیم، آن وقت تعداد ضلعهای درونی، برابر


(a)


(b)

$$\frac{۱}{۲}(۴A_۱+۱۲A_۲+۶A_۳)=۲A_۱+۶A_۲+۳A_۳$$


(c)

خواهد شد. درضمن هر نقطهٔ گروه سوم، متناظر است با سه ضلع درونی : آن که، این نقطه روی آنها قرار دارد و آن دو ضلعی که چسبیده به اولّی هستند. بسادگی دیده می‌شود که، هر ضلع درونی تقسیم، متناظر است با نقطه‌ای از گروه سوم، در غیر این صورت، می‌توان دو مثلث برابر ایجاد کرد. به این ترتیب، تعداد ضلعهای درونی، از $۳A_۳$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین $A_۱=A_۲=۰$ ،

یعنی مثلثهای تقسیم، روی ضلعهای مثلث بزرگ رأسی ندارند و این به معنای آن است که همهٔ تقسیم ما، چیزی نیست، جز همان مثلث اصلی.

۷۳. در روستای C. اگر مدرسه را در هر نقطهٔ دیگری مثل X بسازیم، آن‌وقت اگر آن را به نقطهٔ C منتقل کنیم، مجموع راهی که باید دانش‌آموزان بپیمایند، به اندازهٔ :

$$۳۰۰|CX|-۱۰۰(|AX|-|AC|)-۲۰۰(|BX|-|BA|)$$

تغییر می‌کند، یعنی کوتاهتر می‌شود، زیرا :

$$|AX|-|AC|\le|CX| \ ; \ |BX|-|BC|\le|CX|$$

۷۵. (الف). محورهای مختصات متعامد را به‌گونه‌ای درنظر می‌گیریم که مختصات رأسهای مثلث مفروض عبارت باشند از $(۰,۰)$، $(s,۰)$ و $(\frac{s}{۲},s\frac{\sqrt{۳}}{۲})$. نسبت به این محورها، مختصات P را (x,y) می‌گیریم. نقطهٔ P به مکان موردنظر تعلق دارد، اگر و تنها اگر :

$$a=x^۲+y^۲+(x-s)^۲+y^۲+(x-\frac{s}{۲})^۲+(y-\frac{s\sqrt{۳}}{۲})^۲$$

و این هم‌ارز است با، اگر و تنها اگر $a=(۳x^۲-۳sx)+(۳y^۲-s\sqrt{۳}y)+۲s^۲$

$$\frac{a-۲s^۲}{۳}=(x-\frac{s}{۲})^۲+(y-\frac{s\sqrt{۳}}{۶})^۲-\frac{s^۲}{۳} \ , \ \frac{a-s^۲}{۳}=(x-\frac{s}{۲})^۲+(y-\frac{s\sqrt{۳}}{۶})^۲$$

مکان P اگر $a<s^۲$، یک مجموعهٔ تهی است ؛ اگر $a=s^۲$، منحصر به یک نقطه است ؛ اگر $a>s^۲$، یک دایره است.

۷۶. متذکر می‌شویم که نقطهٔ M را می‌توان با دوران PK به اندازهٔ ۶۰ درجه، دور نقطهٔ P به‌دست آورد. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از مربعی مساوی مربع Q که از دوران آن به اندازهٔ ۶۰ درجه نسبت به نقطهٔ P بدست آمده است.

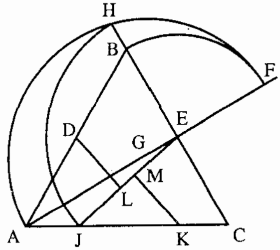
۷۷. ثابت کنید که اگر a ، b و c تعداد انعکاسهای شعاع نور، از سه ضلع مثلث باشند، نامساوی زیر درست است :

$$c-۱\le a+b\le ۳c+۳$$

عددهای x و y می‌توانند مقادیری را انتخاب کنند که سه عدد x، y و ۴ در نامساویهای بالا صدق کنند.

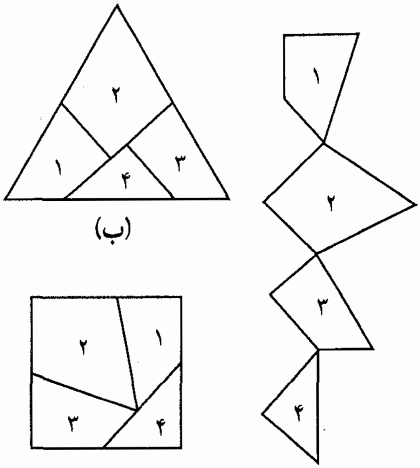
۷۸. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از یک خط راست و یک دایره.

۷۹. راه‌حل در شکل (الف) داده شده است، که با وجود ساده نبودن آن، راه حل قشنگی است. دربارهٔ شکل باید کمی توضیح داد. AB و BC را نصف می‌کنیم و نقطه‌های D و E را به دست می‌آوریم. میانهٔ AE را امتداد می‌دهیم و روی آن $EF=EB$ را جدا می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ G وسط AF نیمدایرهٔ AHF را رسم می‌کنیم. CB را تا H امتداد



(الف)

می‌دهیم. به مرکز E و شعاع EH قوس HJ را می‌کشیم. JK = BE جدا می‌کنیم. دنبالهٔ کار به اندازهٔ کافی روشن است. طرح‌کنندهٔ معما با خوشحالی این مسأله را طرح کرد که یک قطعهٔ مثلثی، با سه برش به چهار قسمت چنان تقسیم شود که از آنها بتوان یک مربع درست کرد (شکل ب) برای شکل قبل (شکل الف) این علامتها را درنظر می‌گیریم :



(ب)

(پ)

چهارضلعی JADL : شکل ۱

چهارضلعی DBEL : شکل ۲

چهارضلعی ECKM : شکل ۳

مثلث KJM : شکل ۴

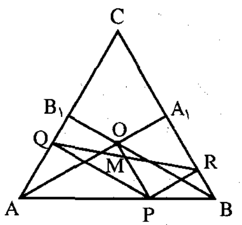
اگر تختهٔ مثلثی کمی کلفت باشد، می‌توان در نقطه‌های D، E و K لوله‌های کوچکی قرار داد، یک رشته شامل چهار شکل نامنظم بدست می‌آید که از آن می‌توان یک مربع یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرد (شکل پ).

۸۰. نشان خواهیم داد که پاسخ مثبت است، و در این مورد اثباتمان غیرمستقیم یا با استفاده از برهان خلف است. ابتدا نقطه‌های D، E و F را بترتیب بر BC، CA و AB چنان انتخاب می‌کنیم که :

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=۲$$

باشد، به آسانی نتیجه می‌شود که : AFE ، BDF و CED مثلثهای $۶۰^\circ - ۳۰^\circ - ۹۰^\circ$اند.

اکنون فرض می‌کنیم که نقطه‌های ε به دو رنگ، مثلاً قرمز و آبی، به‌طوری که مثلث قائم‌الزاویهٔ یک رنگی وجود نداشته باشد، درآمده باشند. در این صورت دو نقطه از نقطه‌های D، E و F باید رنگ یکسان داشته باشند و مثلاً E و F قرمز باشند، در این صورت هر نقطهٔ واقع در $AC-[E]$: باید آبی باشد و این به نوبت خود مستلزم این است که هر نقطهٔ واقع در $AB\cup BC-[A \text{،} C]$: باید قرمز باشد، زیرا در غیر این صورت مثلث APQ ، که در آن Q تصویر قائم P بر AC است یک رنگ خواهد بود. اما در این صورت مثلث BFD یک رنگ می‌شود، و این به تناقض برخورد می‌کند، و بنابراین هر دو رنگی از ε باید شامل یک مثلث قائم‌الزاویهٔ یک رنگ باشد.



۸۱. نقطهٔ O را مرکز مثلث ABC و $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را میانه‌های آن می‌گیریم (شکل) و فرض می‌کنیم :

$$|BP|:|AB|=\alpha \ , \ |PA|:|AB|=\beta$$

در این صورت داریم :

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=-\frac{۲}{۳}\alpha\overrightarrow{AA_1}-\frac{۲}{۳}\beta\overrightarrow{BB_1}$$

$$\overrightarrow{OP}=-\frac{۲}{۳}(\alpha\overrightarrow{AA_1}+\beta\overrightarrow{BB_1}) \quad (۱)$$

سپس، $\overrightarrow{PQ}=\beta\overrightarrow{BB_1}$ ، $\overrightarrow{PR}=\alpha\overrightarrow{AA_1}$ ؛ بنابراین :

$$\overrightarrow{PM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PQ})=\frac{۱}{۲}(\alpha\overrightarrow{AA_1}+\beta\overrightarrow{BB_1}) \quad (۲)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به دست می‌آید : $\overrightarrow{PO}=\frac{۴}{۳}\overrightarrow{PM}$ ؛ یعنی خط راست PM از نقطهٔ O می‌گذرد.

۸۲. اگر میلهٔ BC را دور نقطهٔ B بچرخانیم، نقطهٔ C روی محیط یک دایره حرکت می‌کند. با استفاده از این مطلب که اگر AC را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور نقطهٔ A دوران دهیم، نقطهٔ E به دست می‌آید. ثابت کنید که نقطهٔ E هم روی دایره‌ای حرکت می‌کند. روی این دایره نقطه‌ای پیدا کنید که بیشترین فاصله را از B داشته باشد.

جواب. حداکثر مقدار BE برابر است با a+b و در این حالت داریم : $\hat{ABC}=۱۲۰^\circ$.

۱ . ۱۱ . مسأله‌های ترکیبی

۸۳. الف. $۲\sqrt{۳}$

ب. $۴\sqrt{۳}$

پ. تقطیع ذوزنقه است.

۱.۸۴ . ساده است، زاویه‌های دو مثلث CAE و ICE را با هم مقایسه کنید.

۲. از مثلثهای متشابه قبلی و از ویژگیهای مثلث $۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ$ استفاده کنید.

۳. قاعده‌ها و ارتفاعها را با هم مقایسه کنید.

۴. ساده است.

۸۵. ۱و ۲ آسان است.

۳. ویژگیهای مثلث قائم‌الزاویهٔ $۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ$ را به‌کار بندید.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره

۲ . ۱ . رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایرهٔ محیطی

۲.۱.۲. زاویه

۲.۱.۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۸۶. اگر MB بزرگترین در پاره‌خطهای به طول MA ، MB و MC باشد، آن‌وقت، با به‌کار بردن قضیهٔ برتشنیدر، در چهارضلعی ABCM، به دست می‌آوریم.

$$MB^۲ = MA^۲ + MC^۲ - ۲MA.MC\cos(A\hat{M}C + ۶۰^\circ)$$

یعنی $MB < MA + MC$، زیرا $A\hat{M}C \neq ۱۲۰^\circ$.

۲.۱.۳.ضلع

۲.۱.۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۸۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ است.

بنابراین :

$$۱۲\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = ۳۶\text{cm}$$

۸۸. با توجه به شکل خواهیم داشت :

$$B\hat{Z}X = ۶۰^\circ + \alpha \ , \ B\hat{X}C = ۱۲۰^\circ + \alpha$$

$$\frac{ZX}{\sin\beta} = \frac{BX}{\sin(۶۰^\circ + \alpha)} \ , \ \frac{BX}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(۱۲۰^\circ + \alpha)} = \frac{۲R\sin ۳\alpha}{\sin(۶۰^\circ - \alpha)}$$

$$ZX = \frac{۲R\sin ۳\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin(۶۰^\circ + \alpha)\sin(۶۰^\circ - \alpha)} = \frac{۴R\sin\alpha(۳ - ۴\sin^۲\alpha)\sin\beta\sin\gamma}{\cos ۲\alpha - \cos ۱۲۰^\circ}$$

$$= 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

۲.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۲.۱.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۸۹. اگر a اندازهٔ ضلع مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد، داریم: $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. از آن‌جا:

$$6\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow a=18\text{cm}$$

$$h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow h_a=\frac{18\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\text{cm}$$

۲.۱.۵. پاره‌خط

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۹۰. $\frac{3R\sqrt{57}}{19}$

۹۱. $DE=\frac{R\sqrt{7}}{2}$ و $EF=\frac{3R\sqrt{7}}{14}$

۹۲. (الف). نخست حالتی خاص را درنظر بگیرید که در آن M بر C منطبق است. آن‌گاه:

$$\overline{BM}+\overline{MC}=\overline{BM}=\overline{BC}=\overline{AC}\ ,\ \ \overline{AM}=\overline{AC}$$

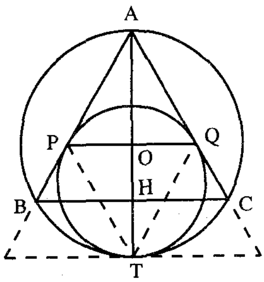
$$\therefore\ \overline{AM}=\overline{BM}+\overline{MC}$$

برای اثبات در حالت کلی، $\overline{MN}$ را (بر $\overline{MA}$) مساوی $\overline{MC}$ جدا کنید، چون $C\hat{M}A=60^\circ$، مثلث MCN متساوی‌الاضلاع است. می‌توان نشان داد که دو مثلث MCB و ACN برابرند. زیرا:

$$A\hat{C}N=A\hat{C}M-60^\circ=M\hat{C}B\ ,\ \ \overline{CN}=\overline{CM}\ ,\ \ \overline{AC}=\overline{CB}$$

در نتیجه: $\overline{AM}=\overline{AN}+\overline{MN}=\overline{MB}+\overline{MC}\ ,\ \ \overline{BM}=\overline{AN}$

۹۴. (ج). مطابق شکل، قطر AT با $\hat{P}Q$ و BC بترتیب در O و H برخورد می‌کند. امتداد



ضلعهای AB و AC با مماس بر دایره در نقطهٔ T یک مثلث متساوی الاضلاع محیط بر دایرهٔ کوچکتر پدید می‌آورند.

بنابراین مثلث PQT متساوی‌الاضلاع است. مثلث APQ نیز متساوی‌الاضلاع است و با مثلث PQT در ضلع PQ مشترک است. بنابراین، دو مثلث همنهشتند، و در نتیجه AO = OT و O مرکز دایرهٔ بزرگتر است. در نتیجه :

$$AO = \frac{۲}{۳}(AH); PQ = \frac{۲}{۳}(BC) = ۸$$

۲.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۹۵. بنابه قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی محاطی ABMC می‌توان نوشت :

$$MA.BC = MB.AC + MC.AB$$

با توجه به این که $BC = AC = AB = a$ است، داریم :

$$a.MA = a.MB + a.MC \Rightarrow MA = MB + MC$$

۲.۱.۶. شعاع دایره

۲.۱.۶.۱ . اندازهٔ شعاع

۹۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a داریم : $h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$. پس :

$$۱۲ = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۲۴\sqrt{۳}}{۳} = ۸\sqrt{۳}cm$$

$$R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow R = \frac{۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۳} = ۸ \Rightarrow R = ۸cm$$

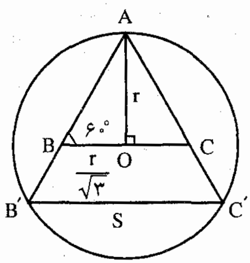
۲.۱.۷. محیط

۲.۱.۷.۱ . اندازهٔ محیط

۹۷. اگر ضلع این مثلث را a فرض کنیم، شعاع دایرهٔ محیطی آن $R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ است. بنابراین داریم :

$$۸\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = ۲۴cm \Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۲P = ۳a = ۷۲cm$$

۲.۷.۱.۲ نسبت محیطها



۹۸. (هـ). فرض کنید r شعاع دایره، s ضلع مثلث کوچکتر و $P_۱$ و $P_۲$ بترتیب محیطهای مثلثهای کوچکتر و بزرگتر باشند، داریم:

$$r = \frac{s\sqrt{۳}}{۲}, \quad s = \frac{۲r}{\sqrt{۳}}$$

$$\therefore P_۱ = ۲r\sqrt{۳}, \quad P_۲ = ۳r\sqrt{۳}$$

$$\therefore P_۱ : P_۲ = ۲ : ۳$$

۸.۱.۲. مساحت

۱.۸.۱.۲ . اندازهٔ مساحت مثلث

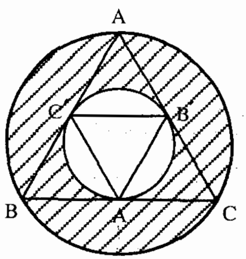
۹۹. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ است. بنابراین:

$$۶\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = ۱۸cm \quad \text{ضلع مثلث}$$

$$\text{مثلث}\ S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۳۲۴\sqrt{۳}}{۴} = ۸۱\sqrt{۳}cm^۲$$

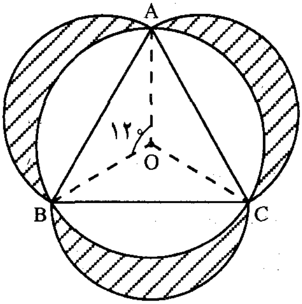
۲.۸.۱.۲ اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۰۰. (ج). راه اوّل. زیرا ضلع مثلث $A'B'C'$ برابر $\frac{۱}{۲}$، شعاع



دایرهٔ C، $R = ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، و شعاع دایرهٔ C′، $R' = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است. بنابراین مساحت موردنظر برابر است با:

$$\pi(R^۲ - R'^۲) = \pi(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۲}) = \frac{\pi}{۴}$$



۱۰۱. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $R=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}cm$ است. بنابراین مساحت آن $\pi R^{۲}=۱۲\pi\ cm^{۲}$ است. شعاع هر نیمدایره ۳ سانتیمتر است. بنابراین مساحت هر نیمدایره مساوی است با :

$$\frac{۱}{۲}\times\pi(۳)^{۲}=\frac{۹\pi}{۲}cm$$

از آن‌جا : S مورد نظر $= ۳\times S$ یک نیمدایره $+ S_{\Delta ABC} - S$ دایرهٔ محیطی

$\Rightarrow S$ مورد نظر $=۳\times\frac{۹\pi}{۲}+۹\sqrt{۳}-۱۲\pi=(\frac{۳\pi}{۲}+۹\sqrt{۳})cm^{۲}$

راه دوم. مساحت یک هلالی را محاسبه کرده، سه برابر می‌کنیم. با توجه به این که :

مساحت قطعهٔ ۱۲۰° از دایرهٔ محیطی− مساحت یک نیمدایره = مساحت هر هلالی

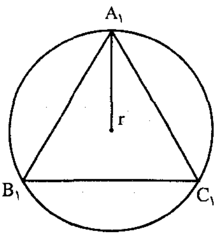
امّا : S یک نیمدایره $=\frac{۱}{۲}\times\pi\times۳^{۲}=\frac{۹\pi}{۲}$

S قطعهٔ ۱۲۰° $=S$ قطاع ۱۲۰° $-S_{\Delta OAB}=\frac{۱}{۳}\pi(۶)^{۲}-(\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\times\sin۱۲۰^{\circ})$

$=۱۲\pi-۹\sqrt{۳}$

بنابراین : S مورد نظر $=۳\times\frac{۹\pi}{۲}-(۱۲\pi-۹\sqrt{۳})$

S مورد نظر $=\frac{۲۷\pi}{۲}-۱۲\pi+۹\sqrt{۳}=\frac{۳\pi}{۲}+۹\sqrt{۳}$



۱۰۲. (ب). چون مثلثها متشابه‌اند، همواره داریم :

$$\frac{A}{a}=\frac{P}{p}=\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k}}$$

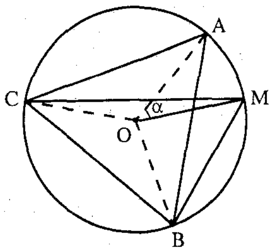
۹.۱.۲. رابطه‌های متری

۱۰۳. خط CP را تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم به گونه‌ای که مثلث BDP متساوی‌الاضلاع باشد. از تشابه مثلثهای DCB و PCQ نتیجه می‌شود :

$$\frac{DB}{PQ}=\frac{DC}{PC}=۱+\frac{DP}{PC}$$

دو طرف را بر $DB = PB = DP$ تقسیم می‌کنیم. به دست می‌آید :

$$\frac{۱}{PQ} = \frac{۱}{PB} = \frac{۱}{PC}$$



۱۰۴. دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به مرکز O و شعاع R می‌گیریم و بدون این که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، نقطهٔ M را روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ از این دایره، انتخاب می‌کنیم (شکل). اگر قرار بگذاریم :

$$A\hat{O}M = \alpha \text{ ،} MA = ۲R\sin\frac{\alpha}{۲}$$

$$MB = ۲R\sin\frac{۱}{۲}(A\hat{O}B - A\hat{O}M) = ۲R\sin(۶۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) \ ,$$

$$MC = ۲R\sin\frac{۱}{۲}(A\hat{O}C + A\hat{O}M) = ۲R\sin(۶۰^\circ + \frac{\alpha}{۲})$$

بنابراین، مقدار

$$\frac{MA^۴ + MB^۴ + MC^۴}{R^۴} = ۱۶\left[\sin^۴\frac{\alpha}{۲} + \sin^۴(۶۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}) + \sin^۴(۶۰^\circ + \frac{\alpha}{۲})\right]$$

$$= ۴\left[(۱-\cos\alpha)^۲ + (۱-\cos(۱۲۰^\circ - \alpha))^۲ + (۱+\cos(۱۲۰^\circ + \alpha))^۲\right]$$

$$= ۱۲ - ۸\Big[\cos\alpha + \cos(۱۲۰^\circ - \alpha) + \cos(۱۲۰^\circ + \alpha) + ۴(\cos^۲\alpha +$$

$$\cos^۲(۱۲۰^\circ - \alpha) + \cos^۲(۱۲۰^\circ + \alpha))\Big]$$

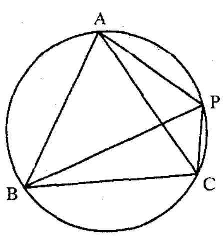
$$= ۱۲ - ۸\cos\alpha - ۱۶\cos\alpha\cos۱۲۰^\circ + ۲\Big[(۱-\cos۲\alpha) + (۱-\cos(۲۴۰^\circ - ۲\alpha)) +$$

$$(۱-\cos(۲۴۰^\circ + ۲\alpha))\Big]$$

$$= ۱۲ - ۸\cos\alpha + ۸\cos\alpha + ۶ - ۲\cos۲\alpha - ۴\cos۲\alpha\cos۲۴۰^\circ$$

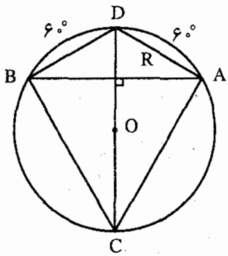
$$= ۱۸ - ۲\cos۲\alpha + ۲\cos۲\alpha = ۱۸$$

بستگی به جای نقطهٔ M ندارد.



۱۰۵. تنها اگر نقطهٔ P روی کمان $\overset{\frown}{AC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث باشد، $PB = PA + PC$ است. بنابراین حکم مسأله روشن است.

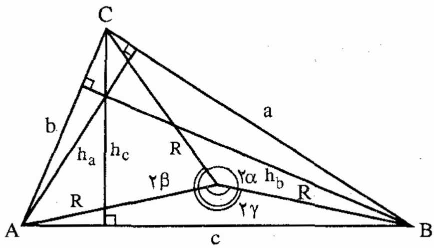
۲ . ۱ . ۱۰ . ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است



۱۰۶. عمودمنصف ضلع AB از مرکز دایره می‌گذرد و کمان $\widehat{AB}$ را نصف می‌کند. پس $DB = DA = R = C_6$ است.
بنابراین $\widehat{DB} = \widehat{DA} = 60^\circ$ و از آن‌جا:
$\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CA} = 120^\circ$ است. پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱۰۷. h_a، h_b و h_c را ارتفاعهای مثلث و S را مساحت آن می‌گیریم؛ در این صورت (شکل):

$$a\sin\beta = h_c, b\sin\gamma = h_a, c\sin\alpha = h_b$$



بنابراین، برابری فرض، هم‌ارز برابری زیر است:

$$P(h_a + h_b + h_c) = 9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$9R(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)$$

$$= 9R(2R\sin\alpha\cos\alpha + 2R\sin\beta\cos\beta + 2R\sin\gamma\cos\gamma)$$

$$= 9R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

و با توجه به قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها:

$$P(h_a + h_b + h_c) = (a+b+c)(h_a + h_b + h_c) \geq$$

$$9\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{h_a h_b h_c} = 9\sqrt[3]{ah_a.bh_b.ch_c} = 9\sqrt[3]{(2s)^3} = 18s$$

درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a = b = c \;,\; h_a = h_b = h_c$$

یعنی، وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۱.۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۰۸. ۱. کمانهای $\widehat{A'B'} = \widehat{B'C'} = \widehat{A'C'} = 120^\circ$ است. پس مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. ضلعهای متناظر دو مثلث موازی‌اند. به عنوان مثال $B'C'$ موازی BC است. بنابراین حکم برقرار است.

۱۲.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

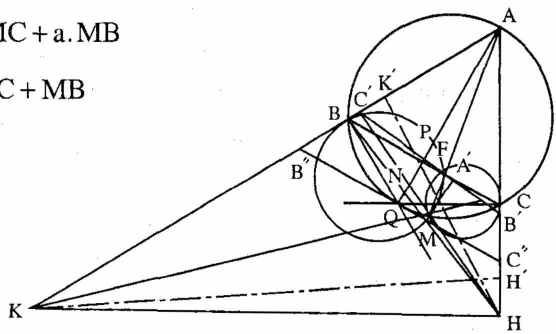
۱۱۰. الف. ۱. در چهارضلعی $MCAB$ بنا به قضیهٔ بطلمیوس خواهیم داشت:

$$MA.BC = MC.AB + MB.AC$$

یا

$$a.MA = a.MC + a.MB$$

$$\Rightarrow MA = MC + MB$$



۲. از نقطهٔ M خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا امتداد ضلعهای مثلث را در نقطه‌های C'' و B'' قطع کند. می‌دانیم که $MB' + MC'' = AN$. ولی چون $MA' = PN$ است، پس نتیجه می‌شود:

$$MB' + MC' - MA' = AP = h$$

راه دیگر. از طریق مساحتها: $S_{AMC} = \frac{a}{2} \times MB'$ و $S_{AMB} = \frac{a}{2} \times MC'$.

از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$S_{AMBC} = S_{AMC} + S_{AMB} = \frac{a}{2}(MB' + MC')$$

از طرفی $S_{AMBC} = S_{ABC} + S_{AMC}$ یا $S_{AMBC} = \frac{a}{2}.h + \frac{a}{2}.MA'$

پس نتیجه می‌شود : $S_{AMBC} = \frac{a}{۲}(MB' + MC') = \frac{a}{۲}(h + MA')$

$\Rightarrow MB' + MC' - MA' = h$

۳. در هر مثلث حاصلضرب دو ضلع مساوی است با حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی، در ارتفاع وارد بر ضلع سوم. پس نتیجه می‌شود :

$MA.MB = ۲R.MC' \ , \ MA.MC = ۲R.MB' \ , \ MB.MC = ۲R.MA'$

$\Rightarrow (MA.MB) + (MA.MC) - (MB.MC)$

$= ۲R(MC' + MB' - MA') = ۲R.h$

اما $C_۳ = R\sqrt{۳}$ ، پس $a = R\sqrt{۳}$. لذا $R = \frac{a}{\sqrt{۳}}$ و $h = R + \frac{R}{۲} = \frac{۳R}{۲}$ یا $h = \frac{۳a}{۲\sqrt{۳}}$ ، پس $۲Rh = \frac{۲a}{\sqrt{۳}}.\frac{۲a}{۲\sqrt{۳}} = a^۲$.

راه دیگر. می‌دانیم در هر مثلث حاصلضرب دو ضلع مساوی است با مربع طول نیمساز زاویه بعلاوهٔ حاصل‌ضرب دو قطعه‌ای که نیمساز از ضلع روبه‌رو جدا می‌کند. زاویهٔ $A\hat{M}C = \frac{\widehat{AC}}{۸} = ۶۰^\circ$ و $A\hat{M}B = \frac{\widehat{AB}}{۲} = ۶۰^\circ$ ؛ پس MF نیمساز زاویهٔ BMC است.

بنابراین خواهیم داشت : $MB.MC = MF^۲ + (FB.FC)$

امّا $FB.FC = FA.FM$ ؛ پس رابطهٔ بالا به صورت زیر درمی‌آید :

$MB.MC = MF^۲ + MF.FA \quad (۱)$

دو مثلث ABF و ABM متشابه‌اند، زیرا زاویهٔ A در هر دو مشترک و $A\hat{B}F = A\hat{M}B = ۶۰^\circ$ ، پس $\frac{AB}{AM} = \frac{AF}{AB}$ یا $AB^۲ = AM.AF$ و یا $a^۲ = AF(AF + FM)$ یا $a^۲ = MF^۲ + (AF.FM) \quad (۲)$

$(۱) + (۲) \Rightarrow MB.MC + a^۲ = MF^۲ + AF^۲ + (۲AF.FM)$

$= (MF + AF)^۲ = MA^۲$

با استفاده از رابطهٔ (۱) می‌نویسیم :

$MB.MC + a^۲ = MA^۲ = MA(MB + MC)$

$\Rightarrow MA.MB + MA.MC - MB.MC = a^۲$

۴. رابطهٔ $MA - MB - MC = ۰$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

$MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ + ۲(MB.MC - MA.MB - MA.MC) = ۰$

با استفاده از رابطهٔ قبلی، مقدار پرانتز مساوی $-a^2$ می‌شود. پس خواهیم داشت:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$$

۵. رابطهٔ $MA.MB + MB.MC + MC.MA = a^2$ را مجذور می‌کنیم.

$$MA^2.MB^2 + MB^2.MC^2 + MC^2.MA^2$$

$$+ 2MA.MB.MC(MA - MB - MC) = a^2$$

اما پرانتز بنا به رابطهٔ (۱) برابر صفر است. پس خواهیم داشت:

$$MA^2.MB^2 + MB^2.MC^2 + MC^2.MA^2 = a^2$$

۶. دو مثلث $A'FM$ و CMB' متشابه‌اند؛ زیرا $\hat{B}' = \hat{A}' = 90^\circ$ و $\hat{F} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MC}}{2} = 90^\circ + \frac{\overset{\frown}{MC}}{2}$ و $M\hat{C}B' = \frac{\overset{\frown}{ACM}}{2} = 30^\circ + \frac{\overset{\frown}{MC}}{2}$. بنابراین:

$$\frac{MA'}{MB'} = \frac{MF}{MC} \quad (1)$$

دو مثلث $MA'F$ و $MC'B$ که با مثلث $MB'C$ متشابه‌اند خود متشابه می‌شوند؛ پس:

$$\frac{MA'}{MC'} = \frac{MF}{MB} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{MA'}{MB'} + \frac{MA'}{MC'} = \frac{MF(MB + MC)}{MB.MC} \quad (3)$$

اما از تشابه دو مثلث ABM و CFM ($B\hat{A}M = F\hat{C}M = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}$ و $A\hat{M}B = F\hat{M}C = 60^\circ$) داریم:

$$\frac{MF}{MB} = \frac{MC}{MF} \Rightarrow MB.MC = MF.MA = MF(MB + MC)$$

بنابراین صورت و مخرج کسر (۳) برابر است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{MA'} = \frac{1}{MB'} + \frac{1}{MC'} \quad \text{یا} \quad \frac{MA'}{MB'} + \frac{MA'}{MC'} = 1$$

راه دیگر. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC' و $A'MC$ متشابه‌اند زیرا $C'\hat{A}M = A'\hat{C}M = \frac{\overset{\frown}{BM}}{2}$؛ پس $\frac{MA'}{MC'} = \frac{MC}{MA}$. همچنین دو مثلث AMB' و $A'BM$ متشابه‌اند؛ پس $\frac{MA'}{MB'} = \frac{MB}{MA}$. این دو رابطه را باهم جمع می‌کنیم و طرفین

رابطهٔ حاصل را بر MA' بخش می‌کنیم.

$$\frac{MA'}{MC'}+\frac{MA'}{MB'}=\frac{MC+MB}{MA}=\frac{MA}{MA}=1\Rightarrow\frac{1}{MC'}+\frac{1}{MB'}=\frac{1}{MA'}$$

۷. طرفین رابطهٔ $MB'+MC'-MA'=h$ را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$MA'^2+MB'^2+MC'^2+2(MC'.MB'-MC'.MA'-MA'.MB')-h^2=0$$

اما عبارت داخل پرانتز برابر صفر است، پس $MA'^2+MB'^2+MC'^2=h^2$.

۸. رابطه‌های ۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$MA'.MB'+MA'.MC'-MB'.MC'=0$$

طرفین این رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$MA'^2.MB'^2+MA'^2.MC'^2+MB'^2.MC'^2$$

$$+2MA'.MB'.MC'(MA'-MB'-MC')=0$$

مقدار داخل پرانتز برابر $(-h)$ است. پس: $\Sigma=2MA'.MB'.MC'.h$

ب. ۱. از تشابه دو مثلث ACF و MFB نتیجه می‌شود: $\frac{MB}{a}=\frac{FB}{AF}$ و از تشابه دو مثلث AFB و CFM خواهیم داشت: $\frac{CF}{AF}=\frac{MC}{a}$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{MC}=\frac{AF}{a.FC},\ \frac{1}{MB}=\frac{AF}{a.FB}\Rightarrow\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}=\frac{AF}{a}\left(\frac{1}{CF}+\frac{1}{BF}\right)$$

$$=\frac{AF}{a}\left(\frac{CF+BF}{CF.BF}\right)=\frac{AF}{a}\left(\frac{a}{CF.FB}\right)=\frac{AF}{CF.FB}$$

امّا $CF.FB=AF.FM$ است. پس:

$$\frac{1}{MC}+\frac{1}{MB}=\frac{AF}{AF.MF}=\frac{1}{FM}$$

راه دیگر.

$$\Delta ABM\sim\Delta CFM\Rightarrow\frac{MF}{MB}=\frac{FC}{AB}$$

$$\Delta ACM\sim\Delta BFM\Rightarrow\frac{MF}{MC}=\frac{FB}{AC}$$

$$\frac{MF}{MB}+\frac{MF}{MC}=\frac{FC+FB}{AC}=\frac{a}{a}=1\Rightarrow\frac{1}{MC}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MF}$$

۲. داشتیم $MA=MB+MC$. طرفین رابطه را بر $MB.MC$ بخش می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}=\frac{AM}{MB.MC}$$

در مثلث MCB داریم : $MB.MC = ۲R.MA'$ و طرف اوّل تساوی بنابه حالت قبل برابر $\frac{۱}{FM}$ است. پس :

$$\frac{MA}{۲R.MA'} = \frac{۱}{FM} \text{ یا } \frac{FM.MA}{MA'} = ۲R$$

و داشتیم $R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ پس :
$$\frac{FM.MA}{MA'} = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

راه دیگر. ارتفاع وارد از رأس A بر قاعده، قوس $\overset{\frown}{BC}$ را نصف می‌کند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $MA'F$ و MAQ متشابه‌اند. پس داریم :

$$\frac{MF}{AQ} = \frac{AM'}{MA}$$

اما $AQ = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$ است. بنابراین :

$$\frac{MF.MA}{MA'} = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$$

پ. دایرهٔ محیطی مثلث MFB در همه‌حال از نقطهٔ B می‌گذرد و بعلاوه در هرحال $F\hat{M}B = ۶۰^\circ$ است و زاویهٔ $A\hat{B}C = ۶۰^\circ$ بوده است. بنابراین خط AB در نقطهٔ B بر دایرهٔ محیطی مماس است. پس مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث روی خط عمود بر AB در نقطهٔ B است. یعنی خط BQ مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MFB است. همچنین خط CQ به همان دلیل مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MFC است.

راه دیگر. دو مثلث ABF و ABM متشابه‌اند و داریم : $AB^۲ = AM.AF$. این رابطه نشان می‌دهد دایره‌ای که بر سه نقطهٔ B ، M و F می‌گذرد، در نقطهٔ B بر خط AB مماس است و مکان هندسی مرکز آن روی خط عمود بر AB در نقطهٔ B یعنی روی خط BQ است.

ت. چهارضلعی $MA'CB'$ محاطی است. بنابراین $C\hat{A'}B' = C\hat{M}B'$ و از آن‌جا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $MA'B$ و $MC'B$ مقابل به وتر BM در یک دایرهٔ به قطر BM محاط می‌شوند. از آن‌جا لازم است $C'\hat{A'}B = C'\hat{M}B$. امّا از تشابه دو مثلث $MC'B$ و MCB نتیجه می‌شود که $C'\hat{M}B = C\hat{M}B'$. پس از مقایسهٔ این سه رابطه نتیجه می‌شود $C\hat{A'}B' = C'\hat{A'}B$ ؛ بنابراین نقطه‌های A' ، B' و C' روی یک خط راست

قرار دارند (قضیهٔ سیمسون).

راه دیگر. چهارضلعی $AC'MB'$ محاطی است و چون $\hat{A}=60^\circ$ بوده، پس $C'\hat{M}B'=120^\circ$ می‌شود. از طرف دیگر $B\hat{M}C=120^\circ$ است زاویه با زاویهٔ $C'MC$، مساوی می‌شوند، یعنی $C'\hat{M}B=B'\hat{M}C$. از این‌جا دو مثلث $BC'M$ و MCB' متشابه می‌شوند و داریم:
$$\frac{MC}{MB}=\frac{MB'}{MC'}=\frac{MB}{MC'}$$
حال $B'C'$ را وصل کرده محل برخورد این خط با BC را A' می‌نامیم و ثابت می کنیم MA' بر BC عمود است. دو مثلث $MC'B'$ و MCB متشابه‌اند.
$$B'\hat{C}'M=C\hat{B}M,\ C'\hat{B}'M=B\hat{C}M$$
پس دایره‌ای که بر سه نقطهٔ M، C و A' بگذرد، از نقطهٔ B' هم خواهد گذشت و چون در چهارضلعی محاطی $A'CB'M$ زاویهٔ B'، ۹۰ درجه است، باید زاویهٔ A' هم ۹۰ درجه باشد، یعنی MA' بر BC عمود است. پس سه نقطهٔ A'، B' و C' بر یک خط راست قرار دارند.

ث. داریم:
$$\Delta AMB=\Delta MCH\Rightarrow\frac{CH}{AB}=\frac{MC}{MB}\Rightarrow CH=a.\frac{MC}{MB}\quad(1)$$
$$\Delta KMB\sim\Delta AMC\Rightarrow\frac{KB}{AC}=\frac{MB}{MC}\Rightarrow KB=a.\frac{MB}{MC}\quad(2)$$
$$(1).(2)\Rightarrow CH.KB=a^2$$
راه دیگر. دو مثلث BCH و KBC متشابه‌اند ؛ زیرا :
$$B\hat{K}C=\frac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{BM}}{2}=\frac{\overset{\frown}{CM}}{2}\ ,\ \ C\hat{B}H=\frac{\overset{\frown}{CM}}{2}\text{،}\ B\hat{C}H=K\hat{B}C=120^\circ$$
بنابراین داریم:
$$\frac{BK}{BC}=\frac{BC}{CH}\Rightarrow BK.CH=a^2$$
برای اثبات رابطهٔ دیگر در مثلث AKH می‌توان نوشت :
$$KH^2=KA^2+AH^2-2AH.AH'$$
اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ AKH' یکی از زاویه‌ها برابر ۶۰ درجه است. پس $AK=2AH'$، و بعلاوه $AK=a+KB$ و $AH=a+HC$. پس خواهیم داشت :
$$KH^2=(a+KB)^2+(a+HC)^2-(a+KB)(a+HC)$$

$$=a^{2}+(KB^{2}+KC^{2})+a(KB+HC)-KB.HC$$

امّا $KB.HC=a^{2}$ است. بنابراین :

$$KH^{2}=KB^{2}+HC^{2}+a.KB+a.HC=KB(a+KB)+HC(a+HC)$$

$$=KB.AK+HC.AH$$

راه دیگر. می‌دانیم در هر مثلث، مربع اندازهٔ یک ضلع برابر است با مجموع حاصلضربهای ضلعهای دیگر در تصویر این ضلع بر روی آن ضلعها ؛ یعنی خواهیم داشت :

$$\overline{KH}^{2}=HA.HH'+KA.KK' \quad (۱)$$

اما دو مثلث KCH' و $HK'B$ ، همچنین دو مثلث AKH' و AHK' متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{K'H}{KH'}=\frac{K'B}{CH'} \quad , \quad \frac{AH}{AK}=\frac{K'H}{KH'}$$

از مقایسهٔ این‌دو تناسب نتیجه می‌شود : $\frac{AH}{AK}=\frac{K'B}{CH'}$ ، از آن‌جا :

$$AH.CH'=AK.K'B \Rightarrow AH(CH-HH')=AK(KK'-KB)$$

$$\Rightarrow AH.CH-AH.HH'=AK.KK'-AK.KB$$

$$\Rightarrow AH.CH+AK.KB=AK.KK'+AH.HH'$$

پس می‌توان در رابطهٔ (۱) به‌جای طرف دوم از رابطهٔ اخیر استفاده کرد و حکم ثابت می‌شود.

ج. در حالت (ب) داشتیم $MF.MA=\frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}MA'$ ؛ پس این حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که MA' ماکزیمم باشد و MA' وقتی ماکزیمم است که نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ باشد و $CM=CQ$ می‌شود. ولی $\overline{MC}^{2}=۴R^{2}-a^{2}$ و $R=\frac{a}{\sqrt{۳}}$ بوده است. پس $MC^{2}=\frac{۴}{۳}a^{2}-a^{2}$ یا $CM=\frac{a}{\sqrt{۳}}$ ، پس $CQ=\frac{a}{\sqrt{۳}}$ ؛ پس به‌طور کلی $CQ=BQ=\frac{a}{\sqrt{۳}}$ و $AB=AC=a$ می‌باشد. چون AQ نیمساز زاویهٔ A است، اگر نیمساز زاویهٔ C را هم رسم کنیم، محل تقاطع مرکز دایرهٔ محاطی خواهد بود. پس مقصود محاسبه طول $O'T$ است که ارتفاع مثلث ACO' می‌باشد. در مثلث $AO'T$ یکی از زاویه‌ها مساوی ۳۰ درجه است، پس $AO'=۲O'T$ ؛ ضمناً بعلاوه $TO'^{2}=AT^{2}+O'T^{2}$ و $AT=\sqrt{۳}O'T$ بعلاوه $O'T=TC$ ، زیرا مثلث $O'TC$

قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس :

$$a = AT + TC = \sqrt{۳}O'T + O'T \Rightarrow O'T = \frac{a}{\sqrt{۳}+۱}$$

که اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی چهارضلعی ABMC است.

۱۱۱. ۱. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه را به‌کار بندید.
۲. اندازهٔ EI را حساب کنید. از مثلثهای متشابه استفاده نمایید.
۳. چهارضلعی را به دو مثلث تجزیه کنید.

۲.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های محاطی

۲.۲.۲. زاویه

۲.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۱۱۲. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a فرض می‌کنیم. از O به D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی مثلث با ضلع BC وصل می‌کنیم. OD نیمساز زاویهٔ MON است. زیرا OD عمودمنصف MN است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMD داریم :

$$MD = \frac{۱}{۲}MN = \frac{۱}{۲}(a-۲r) = \frac{a}{۲} - r \ , \ \ OD = r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳}r$$

$$\Rightarrow MD = r\sqrt{۳} - r = r(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow \tan D\hat{O}M = \frac{MD}{OD} = \frac{r(\sqrt{۳}-۱)}{r}$$

$$\Rightarrow \tan D\hat{O}M = (\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow D\hat{O}M = \operatorname{Arc\,tan}(\sqrt{۳}-۱)$$

$$\Rightarrow M\hat{O}N = ۲\operatorname{Arc\,tan}(\sqrt{۳}-۱)$$

۲.۲.۳. ضلع

۲.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۱۱۳. می‌دانیم که اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است با . بنابراین داریم :

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۶} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۲۴$$

۱۱۴. اگر ضلع مثلث را a فرض کنیم، $r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین :

$$۹\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = ۱۸cm$$

۲.۲.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۲.۲.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۱۵. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a فرض می کنیم. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن $r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است. بنابراین $۵\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$، و از آن‌جا، $a = ۳۰$ است.

اما اندازهٔ ارتفاع این مثلث برابر است با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ ، بنابراین : $h_a = \frac{۳۰\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$.

۱۱۶. می‌دانیم که اگر a اندازهٔ ضلع، و r_a شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، $r_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین :

$$۱۸ = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۳} = ۱۲\sqrt{۳}cm$$

$$\Rightarrow h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۲} = ۱۸cm$$

۲.۲.۵. پاره‌خط

۲.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۱۷. نقطهٔ تماس DE با دایرهٔ محاطی درونی را H' می‌نامیم. مثلث ADE متساوی‌الاضلاع، و با مثلث ABC متشابه است. بنابراین داریم : $\frac{DE}{BC} = \frac{AH'}{AH}$. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a می‌نامیم. خواهیم داشت :

$$r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} \ , \ AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \ ; \ AH' = AH - ۲r = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} - \frac{a\sqrt{۳}}{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۶}}{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow DE = \frac{a}{۳}$$

۲.۲.۶. شعاع دایره

۲.۲.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۱۱۸. اگر a اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، داریم:

$$h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow ۶\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = ۱۲$$

$$r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow r = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{۶} = ۲\sqrt{۳} \quad , \quad r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$$

نکته. در مثلث متساوی‌الاضلاع، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع مثلث و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی برابر ارتفاع مثلث است. پس:

$$r_a = h_a = ۶\sqrt{۳} \ , \ r = ۲\sqrt{۳}$$

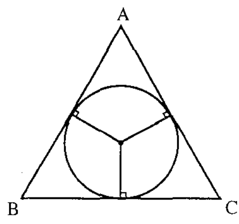
۲.۲.۷. محیط

۲.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط

۱۱۹. (هـ). برای دایرهٔ محاطی

$$r = \frac{h}{۳} = \frac{S\sqrt{۳}}{۶} \ , \ P = ۳S = ۶\sqrt{۳}r = (۶\sqrt{۳})(۴\sqrt{۳}) = ۷۲$$

$$(A = \pi r^۲ \ , \ r = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳})$$



۲.۲.۷.۲. نسبت محیطها

۱۲۰. اگر r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $A_۱B_۱C_۱$، محاط در دایره، $r\sqrt{۳}$ و ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که محیط بر این دایره است، $۲\sqrt{۳}r$ است.

اگر محیط مثلث ABC برابر ۲P باشد، طبق فرض باید داشته باشیم، $۲P \geq ۶\sqrt{۳}r$ یا $P^۲ \geq ۲۷r^۲$.

(طبق توضیح داده شده واضح است که اگر اضلاع برابر باشند، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.)

۸.۲.۲. مساحت

۱.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۲۱. ضلع این مثلث را a فرض می‌کنیم، با توجه به این که $r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است، داریم:

$$۱۲=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\Rightarrow a=\frac{۷۲}{\sqrt{۳}}=۲۴\sqrt{۳}cm$$

با معلوم بودن اندازهٔ ضلع مثلث با استفاده از $S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ مثلث، خواهیم داشت:

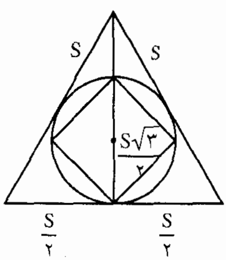
$$S=\frac{۵۷۶\times ۳\times \sqrt{۳}}{۴}=۴۳۲\sqrt{۳}cm^{۲}$$

۱۲۲. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a فرض می‌کنیم. داریم:

$$r_a=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow ۴\sqrt{۳}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow a=۸$$

$$\text{مساحت مثلث}=S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۶۴\sqrt{۳}}{۴}=۱۶\sqrt{۳}$$

۲.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

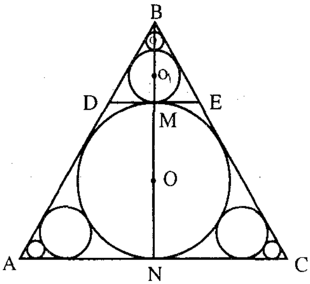


۱۲۳. (ب). h ارتفاع مثلث داده شده، $S\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است و شعاع دایرهٔ محاطی آن، r، برابر است با: $r=\frac{h}{۳}=\frac{S\sqrt{۳}}{۶}$ قطر مربع محاطی برابر قطر این دایره یعنی برابر $۲r=\frac{S\sqrt{۳}}{۳}$، و مساحت مربع برابر نصف حاصلضرب قطرهای آن است.

$$\text{مساحت مربع}=\frac{(۲r)^{۲}}{۲}=\frac{S^{۲}\times ۳}{۲\times ۹}=\frac{S^{۲}}{۶}$$

راه دیگر. نخست می‌توانیم ضلع مربع را از تقسیم قطر آن بر $\sqrt{۲}$ به دست آوریم؛ آن‌گاه مساحت مربع را با مجذور کردن ضلعش محاسبه می‌کنیم:

$$(\frac{S\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}})^{۲}=\frac{۳S^{۲}}{۱۸}=\frac{S^{۲}}{۶}$$



۱۲۴. مرکز O دایرهٔ اوّل (شکل)، ارتفاع $BN = h$ را به نسبت $BO : ON = ۲ : ۱$ تقسیم می‌کند، بنابراین قطر MN برابر $\frac{۲}{۳}h$ و $BM = \frac{۱}{۳}h$ می‌شود. دایرهٔ دوم در مثلث DBE محاط شده است و چون ارتفاع این مثلث دو مرتبه کوچکتر از ارتفاع مثلث ABC می‌باشد، شعاع دایرهٔ محاطی آن نیز، دو مرتبه کوچکتر از شعاع دایرهٔ محاطی اوّلی است :

$$r_۱ = \frac{۱}{۳}r$$

$(r_۱ = O_۱M$ و $r = ON)$. بنابراین اگر S مساحت دایره باشد :

$S = \pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۶})^۲ = \frac{\pi a^۲}{۱۲}$، مساحت دایرهٔ $O_۱$ خواهد شد : $S_۱ = \frac{۱}{۹}S$ ، ولی چون از نوع دایرهٔ $O_۱$ سه دایره وجود دارد، بنابراین اگر مجموع مساحت سه دایرهٔ دوم را $Q_۱$ بگیریم، خواهیم داشت : $Q_۱ = \frac{۱}{۳}S$.

اگر به همین ترتیب استدلال کنیم، مجموع مساحتهای سه دایرهٔ سوم خواهد شد :

$$Q_۲ = \frac{۱}{۳^۲}Q_۱ = \frac{۱}{۳^۳}S, \ldots$$

و بنابراین مجموع رشته عددهای زیر به‌دست می‌آید :

$$S + Q_۱ + Q_۲ + Q_۳ + \ldots = S + \frac{۱}{۳}S + \frac{۱}{۳^۳}S + \frac{۱}{۳^۵}S + \ldots$$

این مجموع، مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی است که جملهٔ اوّل آن $\frac{۱}{۳}S$ و قدر نسبت آن $\frac{۱}{۳^۲}$ می‌باشد. (اوّلین جملهٔ S را بعداً به حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی اضافه می‌کنیم.)

مجموع جمله‌های این تصاعد خواهد شد :

$$\frac{a}{۱-q} = \frac{\frac{۱}{۳}S}{\frac{۸}{۹}} = \frac{۳}{۸}S$$

جواب : $\frac{11}{8}S = \frac{11}{96}\pi a^2$ = مساحت مجهول

۹.۲.۲. رابطه‌های طولی

۱۲۵. با توجه به این که $AO = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ و $OD = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ است، داریم :

$$AD = AO - DO = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$AD.AO = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{6}$$

۱۰.۲.۲. ثابت کنید مثلث متساوی الاضلاع است

۱۲۶. داریم :

$$h_a = \frac{2pr}{a} = \frac{2r(a+b+c)}{2a} = r(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a})$$

$$h_b = r(1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}) \ , \ h_c = r(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c})$$

$$\sum h_a = r\left[3+\sum(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\right] = 9r \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow a = b \Rightarrow a = b = c$$

۱۲۷. a، b و c را ضلعها، P را نصف محیط، S را مساحت و r را شعاع دایرهٔ محاطی مثلث می‌گیریم. در این صورت، با توجه به قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها، داریم :

$$(rp)^2 = S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \le p\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

از آن‌جا $r \le \frac{p}{\sqrt{27}}$. درضمن، r وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم :

$$p-a = p-b = p-c$$

یعنی، وقتی که مثلث متساوی الاضلاع باشد.

۳.۲ . رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الاضلاع و دایره‌های محیطی و محاطی

۲.۳.۲. زاویه

۱.۲.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۱۲۸. اگر H نقطهٔ تماس DE با دایرهٔ محاطی باشد، مثلث DOH قائم‌الزاویه است، داریم :

$$OD = R \ , \ \ OH = r \ , \ \ \cos \hat{HOD} = \frac{OH}{OD} = \frac{r}{R} = \frac{۱}{۲}$$

$$\hat{HOD} = \text{Arc}\cos\frac{۱}{۲} \ , \ \ \hat{DOE} = ۲\,\text{Arc}\cos\frac{۱}{۲}$$

۳.۳.۲.ضلع

۱.۳.۳.۲.اندازهٔ ضلع

۱۲۹. ضلع مثلث محیط بر دایره را a' و ضلع مثلث محاط در دایره را a می‌نامیم. داریم :

$$a' = ۲R\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۳} = ۲۴$$

$$a = R\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۶$$

۴.۳.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۲.اندازهٔ ارتفاع

۱۳۰. چون $R = ۲r$ است، مثلث داده شده، متساوی‌الاضلاع است. بنابراین اگر ضلع مثلث را a فرض کنیم، داریم :

$$R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۱۲ = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۳} = ۱۲\sqrt{۳}\text{cm}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۲} = ۱۸\text{cm}$$

۲.۳.۵. پاره‌خط

۲.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳۱. نقطهٔ تماس خط DD' با دایرهٔ محاطی درونی مثلث را H و نقطهٔ برخورد DD' با ضلع AC را E' و با دایره E می‌نامیم. $DD' = DH - D'H$ است. امّا:

$$DE = AB = a \Rightarrow DH = \frac{a}{۲}$$

$$D'H = \frac{۱}{۲}D'E' \;,\; D'E' = \frac{a}{۳} \Rightarrow D'H = \frac{a}{۶} \Rightarrow DD' = \frac{a}{۲} - \frac{a}{۶} = \frac{a}{۳}$$

۲.۳.۶. شعاع دایره

۲.۳.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۱۳۲. برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a داریم:

$r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ شعاع دایرهٔ محاطی درونی، $r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ شعاع دایرهٔ محاطی برونی.

$R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ شعاع دایرهٔ محیطی، بنابراین داریم:

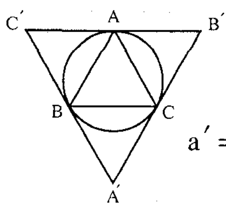
$$R = \frac{۵\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۳} = ۵cm \;,\; r = \frac{۵\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۶} = \frac{۵}{۲}cm$$

$$r_a = r_b = r_c = \frac{۵\sqrt{۳} \times \sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱۵}{۲}cm$$

۲.۳.۷. محیط

۲.۳.۷.۱. اندازهٔ محیط

۱۳۳. اگر a اندازهٔ ضلع مثلث محاطی و a' اندازهٔ ضلع مثلث محیطی باشد، داریم:



$$a = C_۳ = R\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۸\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} = ۲۴$$

$$۲p = ۳a = ۳ \times ۲۴ = ۷۲$$

$$a' = C'_۳ = ۲R\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \Rightarrow a' = ۴۸ \Rightarrow ۲p' = ۱۴۴$$

۲.۷.۳.۲. نسبت محیطها

۱۳۴. اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره $C'_{۳} = ۲R\sqrt{۳}$ و اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن $C_{۳} = R\sqrt{۳}$ است.
از طرفی به دلیل متشابه بودن دو مثلث متساوی‌الاضلاع نسبت محیطها برابر نسبت ضلعهای متناظر است. بنابراین :

$$\frac{۲p'}{۲p} = \frac{C'_{۳}}{C_{۳}} = \frac{۲R\sqrt{۳}}{R\sqrt{۳}} = ۲$$

یعنی $p' = ۲p$.

۸.۳.۲. مساحت

۱.۸.۳.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۳۵. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است.
بنابراین داریم :

$$۱۲\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow a = ۷۲cm \ , \ R = ۲r = ۱۴۴cm$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۷۲^{۲} \times \sqrt{۳}}{۴} = ۱۲۹۶\sqrt{۳}cm^{۲}$$

۲.۸.۳.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

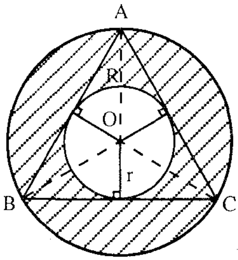
۱۳۶. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث باشد، داریم :

$$R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۶\sqrt{۳}}{۳} = ۲\sqrt{۳} \ , \ r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶} = \sqrt{۳}$$

$$S_{\text{طوق}} = \pi(R^{۲} - r^{۲}) = \pi(۱۲ - ۳) = ۹\pi$$

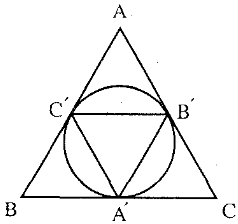
۱۳۷. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، $R = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن $r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است. بنابراین مساحت طوق دایرهٔ ایجاد شده برابراست با :

$$S_{\text{طوق دایره}} = \pi R^{۲} - \pi r^{۲} = \pi(R^{۲} - r^{۲}) = \pi(\frac{۳a^{۲}}{۹} - \frac{۳a^{۲}}{۳۶})$$



$$\Rightarrow S=\pi(\frac{a^۲}{۳}-\frac{a^۲}{۱۲})=\frac{\pi a^۲}{۴}$$

۳.۸.۳.۲. نسبت مساحتها



۱۳۸. **راه اول.** شعاع دایره را R فرض می‌کنیم. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن، $a=C_۳=R\sqrt{۳}$، و اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر آن، $a'=C'_۳=۲R\sqrt{۳}$ است. از آن‌جا:

$$S=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۴}\ ,\ \ S'=\frac{a'^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۱۲R^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳\sqrt{۳}R^۲$$

$$\Rightarrow\frac{S'}{S}=۴\Rightarrow S'=۴S$$

راه دوم. این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها برابر ۲ است. پس نسبت مساحت آنها برابر ۴ است. یعنی، $S'=۴S$.

۴.۲. رابطه‌های متری در مثلث متساوی الاضلاع و دایره‌های دیگر

۲.۴.۲. زاویه

۱.۲.۴.۲. اندازهٔ زاویه

۱۳۹. در مثلث BDC داریم: $BD=۴-۳=۱cm$ و $BC=۴cm$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$. از آن‌جا:

$$DC^۲=DB^۲+BC^۲-DB.BC$$

$$DC^۲=۱+۱۶-۱\times۴=۱۳\Rightarrow DC=\sqrt{۳}cm$$

$$\frac{BC}{\sin B\hat{D}C}=\frac{DC}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{۴}{\sin B\hat{D}C}=\frac{\sqrt{۱۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B\hat{D}C=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۲\sqrt{۳۹}}{۱۳}$$

$$\Rightarrow B\hat{D}C = \text{Arc}\sin\frac{۲\sqrt{۳۹}}{۱۳}$$

۲.۴.۳.ضلع

۲.۴.۳.۱.اندازهٔ ضلع

۱۴۰. از D به E وصل می‌کنیم، مثلث ADE متشابه با مثلث ABC است. بنابراین نسبت ضلعهای این دو مثلث، با نسبت ارتفاعهای آنها برابر است. در مثلث ADE داریم :

$$O\hat{A}D = ۳۰^\circ \;,\; A\hat{O}D = ۶۰^\circ \;,\; OD = ۴ \Rightarrow AD = ۴\times\tan ۶۰^\circ$$

$$AD = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AH'}{AH} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۴\sqrt{۳}}{AB} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow AB = ۱۶\sqrt{۳}$$

۲.۴.۴ .ارتفاع، میانه، نیمساز

۲.۴.۴.۱. اندازهٔ ارتفاع

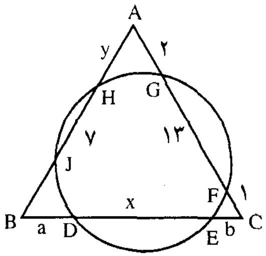
۱۴۱. در مثلث متساوی الاضلاع، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ محیطی برهم منطبق می‌باشند.

بنابراین، $R = AG = \frac{۲}{۳}AH$

در نتیجه : $۲\sqrt{۳} = \frac{۲}{۳}AH \Rightarrow AH = ۳\sqrt{۳}$

۲.۴.۵ . پاره‌خط

۲.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۱۴۲. (الف). مطابق شکل فرض می‌کنیم $DE = x$، $EC = b$، $AH = y$ و $BD = a$. بنابه فرض داریم : $AG = ۲$ ، $GF = ۱۳$ ، $HJ = ۷$ و $FC = ۱$. پس طول هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ۱۶ است. با استفاده از قضیهٔ مربوط به قاطعهای وارد بر دایره از یک نقطهٔ واقع در خارج دایره، داریم :

$$y(y+۷) = ۲(۲+۱۳)$$

$$\circ = y^{۲} + ۷y - ۳\circ = (y-۳)(y+۱\circ)$$

نتیجه می‌شود $y = ۳$ و $BJ = ۶$. با استفاده از همان قضیه داریم :

$$b(b+x) = ۱(۱+۱۳) = ۱۴ \ , \ \ a(a+x) = ۶(۶+۷) = ۷۸$$

همچنین [روی شکل دیده می‌شود که] $a+b+x = ۱۶$. دستگاه سه معادلهٔ زیر را که به این ترتیب به دست آوردیم :

$$a^{۲} + ax = ۷۸ \ \ (۱)$$

$$b^{۲} + bx = ۱۴ \ \ (۲)$$

$$b+a+x = ۱۶ \ \ (۳)$$

راههای مختلفی می‌توان حل کرد. راهی که در زیر به کار می‌رود به ما امکان می‌دهد که x را بدون بدست آوردن a و b ، حساب کنیم. معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اوّل کم می‌کنیم، از $a-b$ فاکتور می‌گیریم و (۳) را به‌کار می‌بریم :

$$a^{۲} - b^{۲} + (a-b)x = (a-b)(a+b+x) = (a-b)\times ۱۶ = ۷۸ - ۱۴ = ۶۴$$

پس $a - b = ۴$.

این معادله را با (۳) جمع می‌کنیم، $۲a + x = ۲$ به دست می‌آید، پس $a = ۱\circ - (\frac{x}{۲})$.

اکنون این مقدار را در (۱) می‌گذاریم :

$$(۱\circ - \frac{x}{۲})\left[۱\circ - \frac{x}{۲} + x\right] = (۱\circ - \frac{x}{۲})(۱\circ + \frac{x}{۲}) = ۱\circ\circ - \frac{x^{۲}}{۴} = ۷۸$$

$$\frac{x^{۲}}{۴} = ۲۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲۲}$$

۲.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۴۳. هرگاه D و E نقطه‌های تقسیم نیمدایرهٔ به قطر AC باشد، وترهای AD، DE و EC ضلعهای شش‌ضلعی منتظم محاطی بوده، باهم برابرند، و DE با AC موازی است. ضلعهای AB و BC را امتداد می‌دهیم تا با امتداد DE در P و Q برخورد کنند. مثلثهای PAD و QEC متساوی‌الاضلاع، و باهم برابرند. پس ضلع PQ از مثلث متساوی‌الاضلاع BPQ، به سه پارهٔ برابر بخش شده، و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که ضلع AC نیز، به سه پارهٔ برابر بخش گردیده است.

۶.۴.۲ .شعاع دایره

۱.۶.۴.۲ .اندازهٔ شعاع

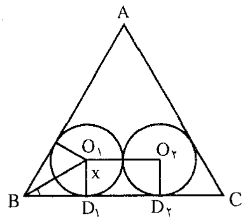
۱۴۴. مرکز این دایره را O و شعاع آن را $OB = OC = x$ فرض می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین OBC، $B\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$ و $BC = a$ است و داریم :

$$BC^۲ = OB^۲ + OC^۲ + OB.OC \Rightarrow a^۲ = x^۲ + x^۲ + x.x = ۳x^۲$$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{a^۲}{۳} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$$

۲.۶.۴.۲. رابطهٔ بین شعاعها

۱۴۵. در حالتی که دو دایره مساوی باشند، شعاع هر دایره را اگر r فرض کنیم، داریم :



$$CD_۲ = BD_۱ = r\sqrt{۳} \ , \ D_۱D_۲ = ۲r$$

$$BC = ۲BD_۱ + D_۱D_۲ = ۲r\sqrt{۳} + ۲r = ۲r(\sqrt{۳}+۱) \Rightarrow ۱ = ۲r(\sqrt{۳}+۱)$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۴} \Rightarrow \ O_۱O_۲ = ۲r = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$$

که درستی مسأله ثابت می‌شود. مسأله را در حالتی که دو دایره مساوی نباشند، بررسی کنید.

۷.۴.۲. محیط

۱.۷.۴.۲. اندازهٔ محیط مثلث

۱۴۷. مرکز دایره را O می‌نامیم، و از O به B و C وصل می‌کنیم. در مثلث OBC، داریم :

$$OB = OC = ۴ \ , \ B\hat{O}C = ۱۲۰^\circ \Rightarrow BC^۲ = OB^۲ + OC^۲ + OB.OC$$

$$\Rightarrow BC^۲ = ۱۶ + ۱۶ + ۴ \times ۴ = ۴۸ \Rightarrow BC = a = ۴\sqrt{۳}cm$$

$$\Rightarrow ۲P = ۱۲\sqrt{۳}\,cm \qquad \text{اندازهٔ محیط مثلث}$$

۲.۷.۴.۲. اندازهٔ محیط شکلهای دیگر

۱۴۸. شعاع هر نیمدایره $\frac{a}{۲}$ و محیط هر نیمدایره $\frac{a}{۲} \times ۲\pi \times \frac{۱}{۲}$ و یا $\frac{\pi a}{۲}$ است. بنابراین محیط شکل سه برگی حاصل $\frac{۳\pi a}{۲}$ می‌باشد.

۱۴۹. در دایره به قطر AB وتر MM' با شعاع دایره برابر است. پس $MM' = \frac{AB}{۲}$ بوده و مساوی $C_۶$ است و کمان $\widehat{MM'} = ۶۰^\circ$ لذا $\widehat{MM'} = \frac{۱}{۶} \times ۲\pi \times \frac{AB}{۲} = \frac{\pi AB}{۶}$

$$\Rightarrow ۳\widehat{MM'} = \frac{۳ \times \pi AB}{۶} = \frac{\pi AB}{۲}$$

۸.۴.۲. مساحت

۱.۸.۴.۲. اندازهٔ مساحت مثلث

۱۵۰. اگر یک نقطهٔ تقاطع دو دایره را M بنامیم، مثلث BMC در رأس C قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، بنابراین $BC = BO\sqrt{۲}$،

$$\Rightarrow BC = a = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۷۲ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۱۸\sqrt{۳}\,cm^۲$$

۲.۸.۴.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۵۱. $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۱۲}$

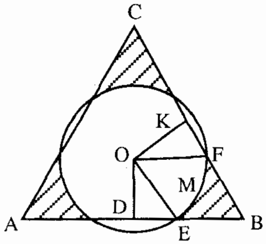
۱۵۲. وسط ضلع AB را O می‌نامیم و از O به E و D وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین OBE $(OB = OE)$ که یک زاویهٔ ۶۰° دارد $(\hat{B} = ۶۰^\circ)$، متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $BE = OB = OE = ۸$ و از آن‌جا : $CE = CD = DE = ۸$ است. بنابراین :

$$S_{ABED} = S_{ABC} - S_{CDE}$$

اما : $S_{ABC} = \frac{۱۶^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۶۴\sqrt{۳}$ ، $S_{CDE} = \frac{۸^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۱۶\sqrt{۳}$

$$\Rightarrow S_{ABED} = ۶۴\sqrt{۳} - ۱۶\sqrt{۳} = ۴۸\sqrt{۳}$$

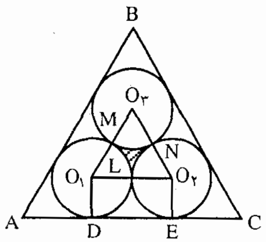
۱۵۳. مساحت S مورد نظر (که در شکل هاشور خورده است) برابر است با سه برابر سطح EMFB. طبق فرض داریم: $. OE = \frac{۱}{۳}AB = \frac{a}{۳}$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ OED داریم: $OD = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ (شعاع دایرهٔ محاطی مثلث). یعنی $OD = OE = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌شود و بنابراین $D\hat{E}O = ۶۰^\circ$ خواهد شد. به‌همین ترتیب $K\hat{F}O = ۶۰^\circ$ می‌شود، و چون $E\hat{B}F$ نیز مساوی ۶۰ درجه بود، پس $EO \parallel BF$ و $OF \parallel BE$ شده و چهارضلعی OEBF یک لوزی به ضلع $\frac{a}{۳}$ و به زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه در رأس O می‌شود. اکنون برای محاسبهٔ سطح EMFB، سطح قطاع EOF $\left[\frac{۱}{۶}\pi(\frac{a}{۳})^۲\right]$ را از سطح لوزی $\left[(\frac{a}{۳})^۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right]$ کم می‌کنیم.

جواب: $S = \frac{a^۲}{۱۸}(۳\sqrt{۳} - \pi)$

۱۵۴. $O_۱$، $O_۲$ و $O_۳$ را مرکزهای سه دایرهٔ محاطی و r را شعاع هر یک از آنها فرض می‌کنیم (شکل). چون $AO_۱$ و $CO_۲$ نیمسازهای زاویه‌های A و C می‌باشند، پس $O_۱\hat{A}D = ۳۰^\circ$ شده و خواهیم داشت:



و $AD = EC = r\sqrt{۳}$

$DE = O_۱O_۲ = ۲r$ یعنی $\Rightarrow ۲r(۱+\sqrt{۳}) = a$

جواب: $S = \frac{۱}{۱۶}a^۲(۲-\sqrt{۳})(۲\sqrt{۳}-\pi)$ ، $r = \frac{a}{۲(\sqrt{۳}+۱)} = \frac{a(\sqrt{۳}-۱)}{۴}$

۱۵۵. $\frac{a^۲}{۲۴}(۳\sqrt{۳}-\pi)$

۱۵۶. $\frac{۵\sqrt{۳}\pi - ۱۸}{۵۴}$

۱۵۷. شعاع دایرهٔ نظیر هر کمان برابر ۳ است. قوس $\overset{\frown}{PQ}$، $\overset{\frown}{QR}$ و $\overset{\frown}{PR}$ باهم برابرند، بنابراین محیط ناحیهٔ هاشورخورده ۳ برابر طول یکی از این قوسها است، اما هر یک از این

قوسها، کمان مقابل به زاویهٔ ۶۰° در دایره‌ای به شعاع ۳ می‌باشند. بنابراین :

$$\text{طول هر قوس} = ۲\pi \times ۳ \times \frac{۶۰}{۳۶۰} = \pi \;\Rightarrow\; \text{محیط ناحیهٔ هاشورخورده} = ۳\pi$$

و مساحت موردنظر برابر مساحت مثلث منهای ۳ برابر مساحت قطاع ۶۰° در دایره‌ای به شعاع ۳ است.

$$\text{مثلث } ABC \quad S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴} = ۹\sqrt{۳}$$

امّا :

$$\text{قطاع } ۶۰^\circ \quad S = \frac{۱}{۶}(\pi \times ۳^۲) = \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۵۸. مساحت مورد نظر، برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، به اضافهٔ ۳ برابر مساحت یکی از قطعه‌های $\frac{\pi}{۳}$ رادیان در دایره‌ای به شعاع ۶ است. امّا :

$$S_{ABC} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴} = ۹\sqrt{۳}$$

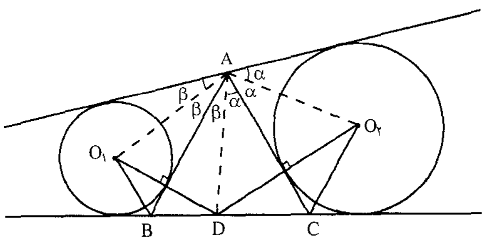
$$\text{یک قطعه} \quad S = \frac{۱}{۲}R^۲(\theta - \sin\theta) = \frac{۱}{۲} \times ۳۶\left(\frac{\pi}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۶\pi - ۹\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \text{موردنظر} \quad S = ۹\sqrt{۳} + ۳(۶\pi - ۹\sqrt{۳}) = ۱۸\pi - ۱۸\sqrt{۳}$$

۱۵۹. $\frac{a^۲}{۲}(\pi - \sqrt{۳})$

۹.۴.۲. رابطه‌های متری

۱۶۰. از $O_۲$ عمودی بر AC فرود می‌آوریم، تا BC را در D قطع کند. مطابق شکل، سه زاویهٔ مساوی α پدید می‌آید. چون :

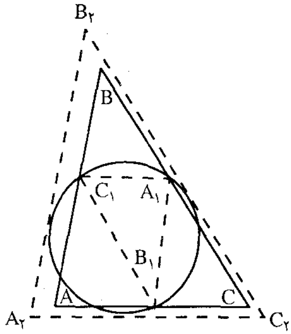


$$B\hat{A}D = ۶۰^\circ - \alpha$$

پس : $\hat{\beta} = ۶۰^\circ - \alpha$. درنتیجه، سه زاویهٔ مساوی β نیز در طرف چپ شکل ایجاد می‌شود. اما دو مثلث ABD و $ABO_۱$ به حالت (ز ض ز) با هم برابرند، درنتیجه : $O_۱B = BD$ و به دلیل مشابه $O_۲C = CD$ است. پس :

$$O_۱B + O_۲C = BD + CD = BC = \text{مقدار ثابت}$$

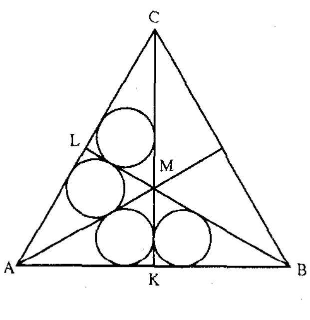
۱۰.۴.۲. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع است



۱۶۱. A_1 ، B_1 و C_1 را وسط ضلعهای BC، AC و AB از مثلث داده شدهٔ ABC می‌گیریم. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را r و شعاع دایرهٔ محیطی آن را R می‌نامیم و فرض می‌کنیم $R = 2r$. روشن است که ρ ، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ برابر نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (زیرا $A_1B_1C_1$ با ABC متشابه است و نسبت تشابه برابر $\frac{1}{2}$ است). اگر این دایره بر ضلعهای مثلث ABC مماس نباشد، مماسهایی موازی با ضلعهای مثلث ABC بر کمانهای متناظر این دایره رسم می‌کنیم (شکل). به این ترتیب، دایره‌ای به شعاع ρ به دست می‌آید که در مثلث $A_2B_2C_2$ ، که با ABC متشابه است و مساحتی بیشتر از مساحت مثلث ABC دارد، محاط است. بنابراین داریم : $r < \rho = \frac{R}{2}$ که فرض ما را نقض می‌کند. پس باید دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ ، بر ضلعهای AB، BC و AC مماس باشد، و بنا به ویژگی خطهای راست مماس بر دایره داشته باشیم :

$$AB_1 = AC_1 \quad , \quad BC_1 = BA_1$$

یعنی $AC = BC = AB$ و مثلث ABC، متساوی‌الاضلاع است.



۱۶۲. هر شش مثلثی که با رسم میانه‌ها، در یک مثلث بوجود می‌آیند، مساحتی برابر دارند. از برابری شعاعهای دایره‌های محاطی و با توجّه به دستور $S = pr$ برابری محیطهای چهار تا از این مثلثها ثابت می‌شود. از برابری محیطهای دو مثلث AMK و BMK نتیجه می‌شود : $MK = MB$. یعنی، MK ارتفاع مثلث AMB است و درنتیجه $AC = BC$.

اگر شعاع دایره‌های محاط در مثلثهای ALM و AKM برابر باشند، آن وقت این مثلثها برابر می‌شوند. (به‌عنوان مثلثهایی که مساحتها، قاعده‌ها و محیطهای برابر دارند) ؛ درضمن $AL = AK$، یعنی $AC = AB$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

اگر محیطهای دو مثلث CLM و KMB برابر باشند، آن‌وقت با استفاده از برابری طولهای دو مماسی که از یک نقطه بر دایره‌ای رسم می‌شوند، اگر x را فاصلهٔ نقطهٔ M تا نقطهٔ تماس با دایرهٔ متناظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$CL + LM + CM = ۲CL + ۲x = ۲BK + ۲x$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $AC = AB$.

* مالفاتی. جیووانی فرانسیسکو جوزپ (۱۷۳۱-۱۸۰۷) ریاضیدان ایتالیایی.

۱۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. در مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع برابر با ۱، شعاع هر دایرهٔ مالفاتی، برابر با $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$ است. مجموع مساحتهای همین دایره‌ها، برابر $\frac{۳\pi(۲-\sqrt{۳})}{۸}$ است. مجموع مساحتهای سه دایره که یکی از آنها در این مثلث محاط است و دو تای دیگر، بر این دایره و دو ضلع مثلث مماسند، برابر است با: $\frac{۱۱\pi}{۱۰۸} > \frac{۳\pi(۲-\sqrt{۳})}{۸}$.

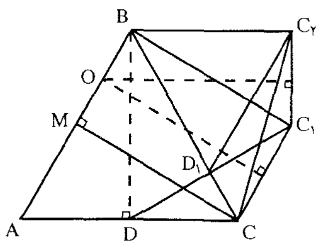
۱۶۴. فرض کنید $AD = x$، $BD = y$، $CD = z$ و $AB = a$. فرض کنید $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ معرف نقطه‌های تماس دایره‌های محاط در، بترتیب، مثلثهای BCD، CAD و ABD با ضلعهای BC، CA و AB، باشند. عمودهای رسم شده از نقطه‌های $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$ بر ضلعهای BC، CA و AB، بر عمودهای رسم شده بر همان ضلعها در نقطه‌های $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$، منطبقند. امّا $BA_۲ = \frac{a+y-z}{۲}$ و $A_۲C = \frac{a+z-y}{۲}$؛ $AC_۲$، $C_۲B$، $AB_۲$ و $B_۲C$ به روش مشابه پیدا می‌شوند؛ اکنون حل مسأله آسان است.

۱۶۵. فرض کنید سه نقطهٔ داده شده، یک مثلث ABC، تشکیل دهند. دو خانوادهٔ ممکن از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، وجود دارد. خانوادهٔ اوّل، به طریق زیر به‌دست می‌آید. دایره‌هایی بر روی ضلعهای مثلث طوری رسم می‌کنیم که کمانهای این دایره‌ها، که بیرون مثلث واقعند، به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{۴\pi}{۳}$ باشند. یک نقطهٔ دلخواه $A_۱$، روی دایرهٔ ساخته شده بر روی BC، اختیار می‌کنیم. خط راست $A_۱B$، دایرهٔ مرسوم بر BA را، برای بار دوم در نقطه‌ای مانند $C_۱$ و خط راست $A_۱C$، دایرهٔ مرسوم بر CA را در نقطه‌ای مانند $B_۱$ قطع می‌کند. مثلث $A_۱B_۱C_۱$ یکی از مثلثهای متعلق به خانوادهٔ اوّل است. فرض کنید، E، F و G نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث $A_۱B_۱C_۱$ با دایره‌های مرسوم بر ضلعهای مثلث داده شده باشند. نقطه‌های E، F و G ثابتند (E

وسط کمان دایرهٔ رسم شده بر BC است و با مثلث ABC، در یک طرف BC قرار دارند). نقطه‌های E، F و G مرکز مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده در درون و روی ضلعهای مثلث ABC، هستند. مثلث EFG متساوی‌الاضلاع است و مرکز آن بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبق است. مرکز مثلث $A_1B_1C_1$ برروی دایرهٔ محیطی مثلث EFG قرار دارد؛ مربع شعاع این دایره، برابر می‌شود با $\frac{1}{9}(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2S\sqrt{3})$، که در آن، a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC هستند و S مساحت آن است.

دومین خانواده، از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، به شرط آن که کمانهای بیرونی دایره‌هایی که برروی ضلعهای مثلث شده‌اند (هرکدام)، برابر $\frac{2\pi}{3}$ باشند، به‌دست می‌آید. مکان مطلوب، عبارت است از دو دایرهٔ هم مرکز، که مرکزهایشان بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبقند و شعاعهایشان برابرند با $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\pm 2S\sqrt{3}}$.

۱۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی



۱۶۷. ثابت می‌کنیم که اگر C_1 و C_2 (شکل) در طرفی از ضلع BC که رأس A نیست، واقع باشند، آن وقت مرکز دایرهٔ محیطی مثلث CC_1C_2، در نقطهٔ O روی ضلع BC، قرار دارد، و $BO=\frac{1}{4}AB$.

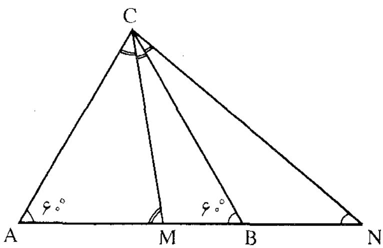
با رسم ارتفاع CM از رأس C، به چهارضلعی مستطیل BC_1CM می‌رسیم. بنابراین، عمود مرسوم بر CC_1 در وسط آن، از نقطهٔ O می‌گذرد. با درنظر گرفتن این که $BD\|C_1C_2$ و $C_1C_2=\frac{1}{2}BD$، مشاهده می‌کنیم که عمود منصف C_1C_2 نیز، از نقطهٔ O می‌گذرد.

اکنون، به‌راحتی، شعاع خواسته شده برابر با :

$$\sqrt{CM^{۲}+MO^{۲}}=\sqrt{\frac{۳a^{۲}}{۴}+\frac{a^{۲}}{۱۶}}=\frac{a}{۴}\sqrt{۱۳}$$

به دست می‌آید.

۱۶۸. کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ هر کدام ۱۲۰° درجه‌اند. پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، و چون P نقطه‌ای واقع بر کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است، بنابراین رابطهٔ $PC = PA + PB$ برقرار است.



۱۶۹. ۱. اگر دایرهٔ محیطی مثلث CMN را رسم کنیم، AC بر این دایره مماس است، زیرا $A\hat{C}M = A\hat{N}C$ است. بنابراین داریم : $AM.AN = AC^{۲}$.

۲. چون $A\hat{C}B = ۶۰^\circ$ و $A\hat{C}M = \hat{N}$ ؛ بنابراین $B\hat{C}M = ۶۰^\circ - \hat{N}$ ، همچنین $B\hat{C}N = ۶۰^\circ - \hat{N}$. بنابراین BC نیمساز زاویهٔ MCN است. پس رابطهٔ نیمساز برقرار است :

$$\frac{MB}{NB}=\frac{MC}{NC} \Rightarrow MB.NC = MC.NB$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین

۲.۳. زاویه

۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویهٔ رأس

۱۷۰. $\text{Arc}\sin\frac{۷۲}{۹۷}$

۱۷۱. $\text{Arc}\cos\frac{۴}{۵}$

۲.۱.۲.۳. اندازهٔ زاویه‌های مثلث

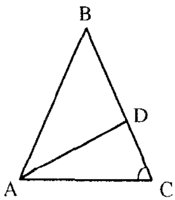
۱۷۲. با توجه به این که AH عمودمنصف BC است، $BH=\frac{۶}{۲}=۳cm$ است. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\tan A\hat{B}H=\frac{AH}{BH}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\tan ۳۰^\circ \Rightarrow A\hat{B}H=۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{B}C=A\hat{C}B=۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{A}C=۱۸۰^\circ-۲\times۳۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

۱۷۳. فرض می‌کنیم (شکل): $CD:DB=m:n$

از آن‌جا داریم: $BD:BC=n:(m+n)$



بنابراین: $\cos\hat{B}=\frac{BD}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{n}{m+n}$ و چون $\hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\hat{C}$ می‌باشد، داریم:

$$\cos ۲\hat{C}=\cos(۱۸۰^\circ-\hat{B})=\frac{-n}{m+n}$$

از آن‌جا:

$$\cos\hat{C}=\sqrt{\frac{۱+\cos ۲\hat{C}}{۲}}=\sqrt{\frac{m}{۲(m+n)}}$$

جواب :

$$B=\operatorname{Arc}\cos\frac{n}{m+n}\ ;\ C=\operatorname{Arc}\cos\sqrt{\frac{m}{۲(m+n)}}=\left[\frac{۱}{۲}\operatorname{Arc}\cos(\frac{-n}{m+n})\right]$$

۱۷۴. ۳۶ درجه، ۳۶ درجه، ۱۰۸ درجه.

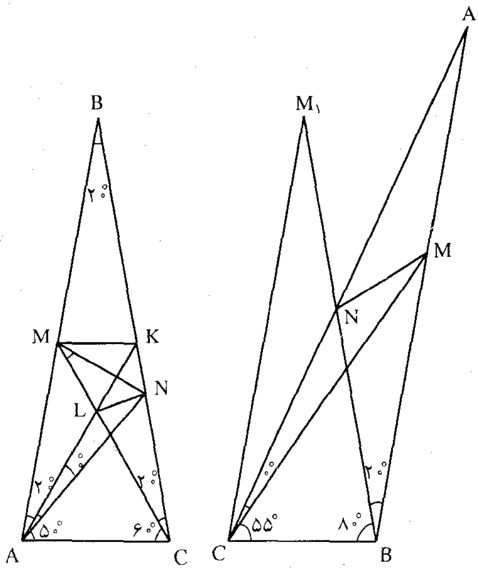
۳.۲.۲. اندازهٔ زاویهٔ شکلهای ایجادشده

۱۷۵. $\operatorname{Arc}\tan\frac{۱}{۱۳}$

۱۷۶. ۱۰ درجه. روی نیمخط راست AM، پاره خط راست BN را با طولی برابر طول قاعدهٔ BC جدا کنید. CM نیمساز زاویهٔ C در مثلث متساوی‌الساقین BNC است، زیرا برابری :

$$BM:BN=CB:CN$$

برقرار است. از آن‌جا که زاویهٔ BCN برابر ۲۰ درجه است، بنابراین زاویهٔ BCM برابر ۱۰ درجه می‌شود.



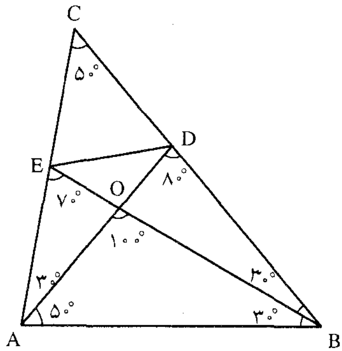
۱۷۷. روی BC نقطه‌ای مانند K (شکل) طوری اختیار می‌کنیم که $K\hat{A}C=۶۰^\circ$ و $MK\|AC$. فرض کنید L نقطهٔ برخورد AK و MC باشد ؛ ALC مثلثی متساوی‌الاضلاع و ANC مثلثی متساوی‌الساقین است (از خواننده می‌خواهیم که اندازهٔ زاویه‌ها را پیدا کند). بنابراین LNC هم، مثلثی متساوی‌الساقین است و $L\hat{C}N=۲۰^\circ$. اکنون، اندازهٔ زاویه‌های NLM و MKN را پیدا می‌کنیم. هر کدام از آنها برابر ۱۰۰° است. چون MKL مثلثی متساوی‌الاضلاع است، هر یک از زاویه‌های KLN و NKL برابر با ۴۰° است، یعنی $KN=LN$، $\Delta MKN=\Delta MLN$ و $N\hat{M}L=K\hat{M}N=۳۰^\circ$.

۱۷۸. O را محل برخورد خطهای راست AD و BE فرض می کنیم (شکل). در این صورت :

$\hat{AOB} = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۰۰^\circ$,

$\hat{BDA} = ۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ - ۵۰^\circ = ۸۰^\circ$,

$\hat{CBE} = ۵۰^\circ - ۳۰^\circ = ۲۰^\circ$,



$\hat{AEB} = \hat{CBE} + \hat{ECB} = ۷۰^\circ \qquad ,\hat{CAD} = ۱۸۰^\circ - \hat{ACB} - \hat{ABC} - \hat{BAD} = ۳۰^\circ$

بنابر قضیهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\sin ۲۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ}, \frac{OB}{OA} = \frac{\sin ۵۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}, \frac{OA}{OE} = \frac{\sin ۷۰^\circ}{\sin ۳۰^\circ}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$\frac{OD}{OE} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OA}{OE} = \frac{\sin ۲۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ \sin^۲ ۳۰^\circ}$$

$$= \frac{۴\sin ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{۲\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = ۱$$

یعنی $OD = OE$ و

$$\hat{BED} = \hat{ODE} = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{EOD}) = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ) = ۴۰^\circ$$

۱۷۹. (ج). در مثلث متساوی‌الساقین دو زاویهٔ مجاور به قاعده با هم برابرند. پس $\hat{C} = \hat{B} = ۵۰^\circ$.

$$\hat{EDC} = \hat{CED} = ۶۵^\circ , \hat{BDF} = \hat{DFB} = ۶۵^\circ , \hat{FDE} = ۱۸۰^\circ - ۲ \times ۶۵^\circ = ۵۰^\circ$$

یادداشت. اگر $AB \neq AC$ ، باز هم $\hat{EDF} = ۵۰^\circ$. زیرا مطابق شکل داریم :

$$\hat{FDE} = ۱۸۰^\circ - \hat{EDC} - \hat{BDF}$$
$$= ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{C}) - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B})$$

$$=\frac{۱}{۲}(\hat{B}+\hat{C})=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-\hat{A})=۵۰^\circ$$

۱۸۰. فرض کنید $B\hat{A}F=\varphi$ ، $D\hat{B}A=\alpha$ و $D\hat{A}B=۲\alpha$ (از فرض، نتیجه می‌شود که نقطه‌های A، E و F در یک طرف BD واقعند و $B\hat{D}A<۹۰^\circ$ ، یعنی، $\alpha>۳۰^\circ$). بنابر قانون سینوسها در مثلثهای DEA، DAB و BAF داریم :

$$\frac{DE}{AD}=\frac{\sin(۱۲۰^\circ-۲\alpha)}{\sin(۳۰^\circ+\alpha)}=۲\cos(۳۰^\circ+\alpha)$$

$$\frac{AB}{BF}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi},\ \frac{AD}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\sin ۳\alpha}=\frac{۱}{۴\cos(۳۰^\circ+\alpha)\cos(۳۰^\circ-\alpha)}$$

با ضرب کردن برابریها درهم، به‌دست می‌آوریم : $\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\varphi}=۲\cos(\alpha-۳۰^\circ)$ ، که از آن‌جا $B\hat{A}F=\varphi=۳۰^\circ$.

۱۸۱. ۸۵° . از نقطهٔ M، عمودهای MK، ML و MN را بترتیب بر ضلعهای AB، AC و BC وارد می‌کنیم. با در نظر گرفتن $B\hat{M}C=x$ و $AM=K$ خط MN را به عنوان عنصر مرجع به دو طریق برحسب k و x بیان می‌کنیم.

۱۸۲. نقطه‌های M و C را به هم وصل کرده و زاویهٔ ACM را با x نشان می‌دهیم. از نقطهٔ M عمودهایی را به ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم : $MB_۱\perp AC$ ، $MC_۱\perp AB$ و $MA_۱\perp BC$. با در نظر گرفتن $CM=a$ پارامتر کمکی را معرفی می‌کنیم و $MC_۱$ را از دو طریق یعنی با استفاده از $MC_۱$ به‌عنوان عنصر مرجع محاسبه می‌کنیم. از مثلث $CMB_۱$ درمی‌یابیم که $MB_۱=MC\sin x=a\sin x$ است. به دلیل اینکه $A\hat{C}B=۱۰۰^\circ$ بوده و ABC طبق فرض، متساوی‌الساقین است.

از این رو $C\hat{A}B=A\hat{B}C=۴۰^\circ$ بوده و درنتیجه $C\hat{A}M=۱۰^\circ$ را خواهیم داشت.

از مثلث $AMB_۱$ نیز $AM=\frac{MB_۱}{\sin ۱۰^\circ}=\frac{a\sin x}{\sin ۱۰^\circ}$ را داریم. سرانجام از مثلث $AMC_۱$ چنین حاصل می‌شود : $MC_۱=AM\sin ۳۰^\circ=\frac{a\sin x}{۲\sin ۱۰^\circ}$. مثلث $CMA_۱$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. در این مثلث $M\hat{C}A_۱=۱۰۰^\circ-x$ بوده و از این رو

$MA_1 = CM\sin(100^\circ - x) = a\sin(100^\circ - x)$ را خواهیم داشت. به دلیل $M\hat{B}C = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$ مثلثهای BMC_1 و BMA_1 با هم مساوی بوده و درنتیجه $MC_1 = MA_1 = a\sin(100^\circ - x)$ را خواهیم داشت. با متساوی قرار دادن عبارتهای معادل MC_1 معادلهٔ مثلثاتی $\frac{a\sin x}{2\sin 10^\circ} = a\sin(100^\circ - x)$ به‌دست می‌آید. از این معادله بترتیب چنین حاصل می‌شود:

$$\sin x = 2\sin(100^\circ - x).\sin 10^\circ ، \ \sin x = \cos(90^\circ - x) - \cos(110^\circ - x)$$

$$\cos(110^\circ - x) = 0$$

و در نتیجه $x = 20^\circ$ خواهد شد.

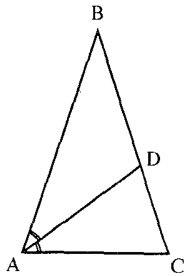
۳.۳. ضلع

۱.۳.۳. اندازهٔ ضلع

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ قاعده

۱۸۳. $\sqrt{10}$ سانتیمتر

۱۸۴. $2\sqrt{\frac{S}{3}\cot\frac{\alpha}{2}}$



۱۸۵. $\frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}$. عبارات $AC = x$ و $AB = y$ را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را برحسب x و y بیان کنید.

ثابت کنید، $\frac{y}{x} = \frac{S_1}{S_2}$ است.

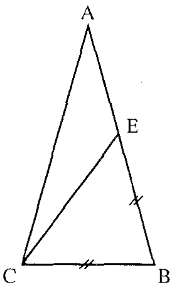
۲.۱.۳.۳. اندازهٔ ساق

۱۸۷. $6cm$

۱۸۸. $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$

.۱۸۹ $\frac{1}{۲\sin(۴۵^\circ + \frac{\alpha}{۴})\cos(۴۵^\circ - \frac{۳\alpha}{۴})}$

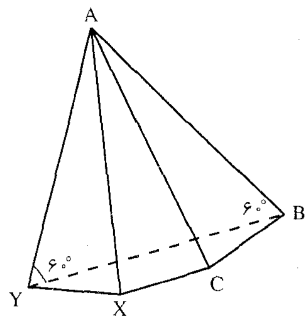
۲.۳.۳. رابطهٔ بین ضلعها



.۱۹۰ روی ساق AB، پاره‌خط راست BE را با طولی برابر طول قاعدهٔ BC جدا می‌کنیم (شکل). بنابراین :

$\hat{CEB} = \hat{ECB} = ۵۰^\circ ; \hat{ACE} = ۳۰^\circ$

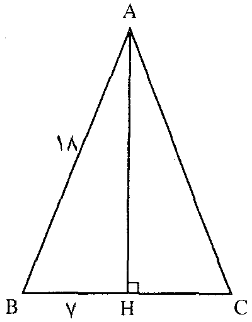
چون در هر مثلث، ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگتر، طول بیشتری دارد، پس $AE > CE$ و سپس $CE > CB$. از آن‌جا $AB = AE + BE > ۲CB$. برای اثبات بخش دوم مسأله، سه نمونهٔ مثلث را شبیه شکل (شکل پایین) پهلوی هم می‌گذاریم. از آن‌جا که طول خط شکستهٔ BCXY، بزرگتر است از طول پاره‌خط راست BY، نابرابری مطلوب به‌دست می‌آید.



۴.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

.۱۹۱ اندازهٔ هر ساق این مثلث برابر $۱۸cm = \frac{۵۰-۱۴}{۲}$ است. از آن‌جا، با توجه به این که AH عمود منصف قاعدهٔ BC است، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم :



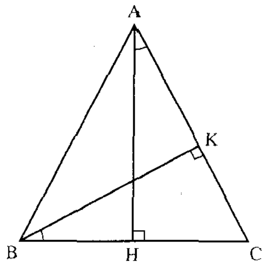
$$AB=۱۸\,,\,BH=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

$$AH=\sqrt{AB^۲-BH^۲}=\sqrt{۳۲۴-۴۹}$$

۱۹۲. AH ارتفاع وارد بر قاعده و BK ارتفاع وارد بر ساق مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می‌کنیم. داریم :

$$BH=\frac{BC}{۲}=\frac{۳}{۲}\text{cm}\,,\,AH=۲\Rightarrow AB=AC=۲/۵\text{cm}$$

$$\Delta AHC\sim\Delta BKC\Rightarrow\frac{BC}{AC}=\frac{BK}{AH}\Rightarrow\frac{۳}{۲/۵}=\frac{BK}{۲}\Rightarrow BK=۲/۴\text{cm}$$



۱۹۳. ارتفاع AD را که از نقطهٔ O می‌گذرد، رسم می‌کنیم. داریم :

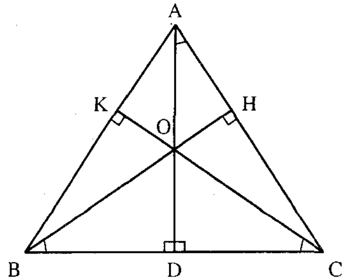
$$\Delta BOD\sim\Delta BCH\Rightarrow\frac{BO}{BC}=\frac{BD}{BH}$$

$$\Rightarrow\frac{۳OH}{۲a}=\frac{a}{۴OH}\Rightarrow OH=\frac{a}{\sqrt{۶}}\,,\,BH=CK=\frac{۴a}{\sqrt{۶}}$$

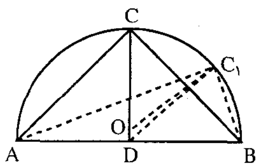
$$\Delta ACD\sim\Delta BCH\Rightarrow\frac{AD}{BH}=\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{CH}\quad(۱)$$

$$\Delta BCH: CH^۲=BC^۲-BH^۲=۴a^۲-\frac{۸a^۳}{۳}=\frac{۴a^۲}{۳}\Rightarrow CH=\frac{۲a}{\sqrt{۳}}$$

$$(۱)\Rightarrow\frac{AD}{\frac{۲a\sqrt{۶}}{۳}}=\frac{AC}{۲a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow AC=a\sqrt{۲}\,,\,AD=a\sqrt{۲}$$



۲.۴.۳. اندازهٔ میانه



۱۹۴. روی ضلع AB، کمان درخور زاویهٔ مفروض را رسم می‌کنیم. اگر ABC مثلث متساوی‌الساقین و AC_1B مثلث غیر مشخص باشد که C و C_1 روی کمان درخور هستند، باید ثابت کنیم $DC < DC_1$. با توجه به شکل داریم:

$$OD + DC = O_1C$$

چون O مرکز کمان است، پس داریم:

$$OD + DC + DC_1 < OC_1 + OD + OC_1 \Rightarrow DC < DC_1$$

۱۹۵. کمان درخور AB را با زاویهٔ داده شده رسم می‌کنیم. اگر ACB مثلث متساوی‌الساقین باشد، در مثلث غیر مشخص AC_1B اگر D وسط کمان AB باشد، خواهیم داشت $OC = OC_1$ و $OC_1 + OD > DC_1$، از جمع این دو رابطه داریم: $OC + OC_1 + OD > OC_1 + DC_1$ یا $DC > DC_1$.

۳.۴.۳. اندازهٔ نیمساز

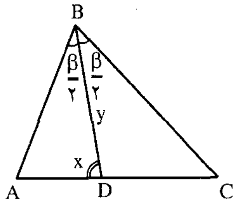
۱۹۶. $\dfrac{a\cos\alpha}{\sin(۴۵^\circ + \frac{۳\alpha}{۲})}$

۱۹۷. روش اوّل.

۱. طول نیمساز BD را باید بهینه کنیم.

۲. طبق فرض AC و زاویهٔ ABC مقدارهای ثابتی هستند. تساویهای $AC = b$ و

$A\hat{B}C=\beta$ را درنظر می‌گیریم و متغیر مستقل $x = A\hat{D}B$ را معرفی می‌کنیم. کرانه‌های حقیقی متغیر x را به‌دست می‌آوریم. از یک طرف: زاویهٔ x برای مثلث BDC زاویهٔ خارجی بوده و از هر یک از زاویه‌های داخلی مثلث BDA که غیر مجاور به این زاویه هستند بزرگتر است، یعنی $x > \frac{\beta}{۲}$ است. از طرف دیگر از مثلث ABD به $x < \pi - \frac{\beta}{۲}$ و درنتیجه به $\frac{\beta}{۲} < x < \pi - \frac{\beta}{۲}$ می‌رسیم.



۳. BD را بر حسب x، b و β بیان می‌کنیم. توجه داریم که $B\hat{A}D = \pi - x - \frac{\beta}{۲}$ و $B\hat{C}D = x - \frac{\beta}{۲}$. طبق قانون سینوسها از مثلث ABC به $\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}}$ یعنی $\frac{AB}{\sin(x-\frac{\beta}{۲})} = \frac{b}{\sin\beta}$ می‌رسیم که از آن نیز $AB = \frac{b\sin(x-\frac{\beta}{۲})}{\sin\beta}$ به‌دست می‌آید. به طریق مشابه طبق قانون سینوسها از مثلث ABD نیز $\frac{BD}{\sin\hat{A}} = \frac{AB}{\sin\hat{D}}$ یعنی $\frac{y}{\sin(\pi - x - \frac{\beta}{۲})} = \frac{AB}{\sin x}$ حاصل می‌شود که از آن نیز تساوی زیر استنتاج می‌شود:

$$y = \frac{AB\sin(x+\frac{\beta}{۲})}{\sin x} = \frac{b\sin(x-\frac{\beta}{۲})\sin(x+\frac{\beta}{۲})}{\sin x\sin\beta}$$

$$= \frac{b}{۲\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta - \cos ۲x}{\sin x}$$

۴. بزرگترین مقدار تابع $y = \frac{b}{۲\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta - \cos ۲x}{\sin x}$ را در بازهٔ $(\frac{\beta}{۲}, \pi - \frac{\beta}{۲})$ به‌دست می‌آوریم.

$$y' = \frac{b}{۲\sin\beta}\cdot\frac{۲\sin ۲x\sin x - \cos x(\cos\beta - \cos ۲x)}{\sin^۲ x} = \frac{b}{۲\sin\beta}\times$$

$$\frac{(\cos ۲x\cos x + \sin ۲x\sin x + \sin ۲x\sin x - \cos\beta\cos x)}{\sin^۲ x} = \frac{b}{۲\sin\beta}\times$$

$$\frac{\cos x+۲\sin^{۲} x\cos x-\cos\beta\cos x}{\sin^{۲} x}=\frac{b}{۲\sin\beta}\times$$

$$\frac{\cos x(۱-\cos\beta+۲\sin^{۲} x)}{\sin^{۲} x}=\frac{b\cos x(\sin^{۲}\frac{\beta}{۲}+\sin^{۲} x)}{\sin\beta\sin^{۲} x} \qquad (۱)$$

(۲) اگر $\cos x=۰$ باشد، یعنی به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ (معادله $\cos x=۰$ در بازهٔ باز $(\frac{\beta}{۲},\pi-\frac{\beta}{۲})$ جواب دیگری ندارد)، $y'=۰$ است ؛ اگر $\sin x=۰$ باشد، y' موجود نخواهد بود و در بازهٔ باز $(\frac{\beta}{۲},\pi-\frac{\beta}{۲})$ این معادله فاقد جواب است.

(۳) جهت تهیهٔ جدولی برای یافتن بزرگترین مقدار، ابتدا همهٔ حدود یکطرفه تابع تحت بررسی را، به‌ازای $x\to\frac{\beta}{۲}+۰$ و $x\to\pi-\frac{\beta}{۲}-۰$ پیدا می‌کنیم :

$$\lim_{x\to\frac{\beta}{۲}+۰}\frac{b(\cos\beta-\cos ۲x)}{۲\sin\beta\sin x}=\frac{b(\cos\beta-\cos\beta)}{۲\sin\beta\sin\frac{\beta}{۲}}=۰,$$

$$\lim_{x\to\pi-\frac{\beta}{۲}-۰}\frac{b(\cos\beta-\cos ۲x)}{۲\sin\beta\sin x}=\frac{b(\cos\beta-\cos(۲\pi-\beta))}{۲\sin\beta\sin(\pi-\frac{\beta}{۲})}=۰$$

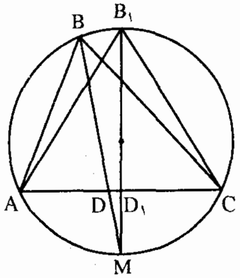
حال بدیهی به نظر می‌رسد که بزرگترین مقدار تابع $y(x)$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ حاصل می‌شود.

این مقدار برابر عبارت زیر است :

$$\frac{b}{۲\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta+۱}{۱}=\frac{b.۲\cos^{۲}\frac{\beta}{۲}}{۴\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}}=\frac{b}{۲}\cot\frac{\beta}{۲}$$

۵. اگر $x=\frac{\pi}{۲}$ باشد، آن‌گاه $\hat{ADB}=۹۰^\circ$ خواهد شد. این امر بدین معنی است که در مثلث ABC نیمساز BD ارتفاع آن نیز بوده و از این رو مثلث ABC متساوی‌الساقین است. بدین ترتیب از بین همهٔ مثلثهایی با زاویهٔ مقابل به قاعده و قاعدهٔ یکسان، مثلثی دارای بزرگترین نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعده است که متساوی‌الساقین باشد.

روش دوم. در این‌جا روش هندسی برای حل مسأله ارائه می‌دهیم، که به‌طور چشمگیری

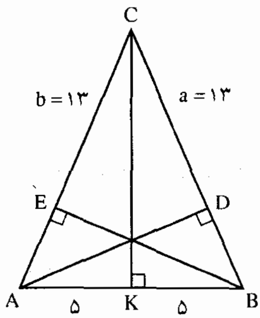


از راه قبلی خلاصه‌تر و ظریف‌تر است. بر مثلث ABC با نیمساز BD، دایره‌ای را محیط می کنیم (شکل). رأسهای همهٔ مثلثهای باقیمانده با قاعده و زاویهٔ مقابل به قاعدهٔ یکسان، روی کمان $\widehat{ABC}$ قرار دارد. مثلث متساوی‌الساقین AB_1C را اختیار کرده و نیمساز B_1D_1 را رسم می‌کنیم. ثابت می کنیم که $BD < B_1D$ است. نیمسازهای BD و B_1D_1 را امتداد می‌دهیم تا دایره را قطع کنند. هر دوی آنها دایره را در یک نقطه مانند M قطع می کنند که میانگاه کمان $\widehat{AC}$ است. به‌دلیل این که B_1M قطر دایره است، $BM < B_1M$ را داریم. از مثلث DD_1M نتیجه می‌شود که $DM > D_1M$ است. از این نامساویها $DM < B_1M - D_1M$ و درنتیجه $BM - BD < B_1D_1$ استنتاج می‌شود.

۴.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۸. $\dfrac{\sqrt{۱-۸\cos^۲\alpha}}{۴\cos\alpha}$

۱۹۹. ارتفاع CK از مثلث متساوی‌الساقین ABC را رسم می کنیم. می‌دانیم که CH عمودمنصف قاعدهٔ AB است. برای محاسبهٔ ارتفاعهای مثلث داریم:



$$CK = \sqrt{۱۶۹-۲۵} = ۱۲ = h_c$$

$$h_a.a = h_b.b = h_c.c \Rightarrow h_a.۱۳ = ۱۲\times۱۰ \Rightarrow h_a = h_b = \frac{۱۲۰}{۱۳}$$

برای محاسبهٔ میانه‌ها :

$$m_c = CK = ۱۲, m_a = m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(۱۶۹+۱۰۰)-۱۶۹}$$

برای محاسبهٔ نیمسازها :

$$d_a = CK = ۱۲, d_a = d_b = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}, ۲p = ۳۶, p = ۱۸$$

$$\Rightarrow d_a = d_b = \frac{۲}{۱۳+۱۰}\sqrt{۱۸\times۱۳\times۱۰(۵)} = \frac{۶۰}{۲۳}\sqrt{۱۳}$$

۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط

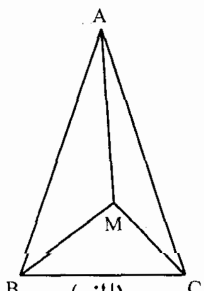
۲۰۰. (د). فرض کنید طول ارتفاع وارد از B بر AC، برابر h باشد، در این صورت چون : $AD = \frac{۱}{۳}AB$ ، طول ارتفاع وارد از D بر AE برابر $\frac{۱}{۳}h$ است. فرض کنید $AE = x$،

آن‌گاه :
$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}h = \frac{۱}{۲}h(۳/۶); \Rightarrow x = ۱۰/۸$$

۲۰۱. $۹\frac{۱}{۳}cm$

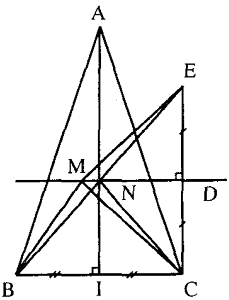
۲۰۲. $۷/۲cm$

۲۰۳. این سه شهر در رأسهای مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار گرفته‌اند. وسط BC را در این مثلث I می‌نامیم. بی‌شک راه مطلوب MA، MB و MC خواهد بود (شکل الف)، که در آن M در خارج محور تقارن AI قرار دارد، و محلّش باید تعیین شود. ابتدا فرض می‌کنیم، که M در خارج محور تقارن AI قرار دارد. از نقطهٔ M عمودی بر AI فرود می‌آوریم، و آن را D می‌نامیم (شکل ب). این خط AI را در N قطع می‌کند و E نیز قرینهٔ C نسبت به خط D است. حالا نقطهٔ N وسط BE خواهد بود، و خواهیم داشت :

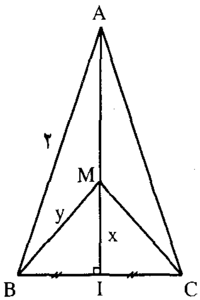


(الف)

$NE = NB = NC$. در این صورت نقطهٔ M روی عمود منصف CE قرار



(ب)



(پ)

می‌گیرد و $MC = ME$ می‌شود و به دنبال آن :

$$MB + MC = MB + ME \geq BE = NB + NE = NB + NC$$

بعلاوه معلوم می‌شود که :

$$MA > NA$$

از آن‌جا :

$$MA + MB + MC > NA + NB + NC$$

که باید ثابت شود. پس نقطهٔ M باید روی AI، و بین A و I واقع شود. فرض می‌کنیم :$MB = y$ و $IM = x$ (شکل پ). با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس :

$$y^۲ - x^۲ = MB^۲ - MI^۲ = IB^۲ = ۱/۴$$

(هر ۱۰۰ کیلومتر را یک واحد می‌گیریم). و از طرف دیگر :

$$MA = AI - x\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۵} - x$$

و طول تمام جاده‌ها چنین می‌شود :

$$L = MA + MB + MC = ۲y\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۵} - x$$

می‌دانیم که :

$$(۲y - x)^۲ - (y - ۲x)^۲ = ۳y^۲ - ۳x^۲ = ۳/۴$$

و از آن‌جا :

$$(L - \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۵})^۲ = (y - ۲x)^۲ + \frac{۳}{۴}$$

و طرف دوم تساوی وقتی به حداقل مقدار، یعنی سه‌چهارم می‌رسد که :

$y - ۲x = ۰$ باشد، در این صورت $y = ۲x$ می‌شود و این وقتی است که $B\hat{M}I$، برابر ۶۰° باشد.

یعنی اگر $x = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ باشد، کمترین مقدار L عبارت است از :

$$\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}).L \approx ۲۸۰\ km$$

۲.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۲۰۵. ۲ : ۱. در مثلث ADC میانخط را رسم کنید.

۲۰۶. $\frac{۲\sin(\alpha-۳۰^\circ)}{\cos\alpha}$

۳.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

۲۰۷. قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نیمساز CD پیدا می‌کنیم ؛ نقطهٔ M، روی پاره‌خط راست CE به‌دست می‌آید. با محاسبهٔ زاویه‌ها، روشن می‌شود که هریک از مثلثهای DEM و AED متساوی‌الساقیند و بنابراین :

$$BD = DM = DE = AE$$

۶.۳. محیط

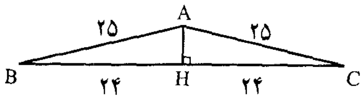
۱.۶.۳. اندازهٔ محیط

۲۰۸. با توجّه به داده‌های مسأله، طول ارتفاع مثلث ثابت است، پس اگر AB قاعدهٔ مثلث باشد، رأس C بر خط Δ موازی با AB واقع است. بنابر آنچه می‌دانیم، برای آن که AC + CB می‌نیمم باشد، لازم و کافی است که C نقطهٔ برخورد Δ با خطی باشد که قرینهٔ A نسبت به Δ را به B وصل می‌کند. در این حال مثلث ACB متساوی‌الساقین خواهد بود.

۷.۳. مساحت

۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت مثلث

۲۰۹. ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث متساوی‌الساقین $AH = ۷$ است، زیرا :



$$BH=\frac{۴۸}{۲}=۲۴ \quad , \quad AH=\sqrt{۲۵^۲-۲۴^۲}=۷$$

از آن‌جا : $\text{مساحت مثلث}=\frac{۱}{۲}\times ۴۸\times ۷=۱۶۸$

۲۱۰. الف) ۷۲ ب) $۳۶\sqrt{۳}$ پ) $۳۶\sqrt{۳}$

۲۱۱. الف) ۳۶ ب) $۱۲\sqrt{۳}$ پ) $۳۶\sqrt{۳}$

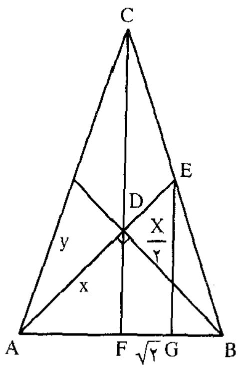
۲۱۲. طول هر ساق را با a و طول قاعده را با ۲b نشان دهید.

$۲a+۲b=۳۲ \quad , \quad a+b=۱۶$ ؛

$a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)=(a-b)(۱۶)=۶۴ \quad ; \quad a-b=۴ \quad ;$

$\Rightarrow b=۶ \quad ; \quad \Rightarrow \text{مساحت مثلث}=۸\times ۶=۴۸$

۲۱۳. $DF=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ؛ $x=۱$ و $x^۲+x^۲=۲$ مطابق شکل $EG\perp AB$ رسم شده است.



$$\frac{AD}{AE}=\frac{۲}{۳}=\frac{DF}{EG}\Rightarrow EG=\frac{۳}{۲}DF=\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع } CDF=۲EG=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۳}{۲} \quad \text{یا} \quad x^۲+x^۲=۲, x=۱ \text{ ؛}$$

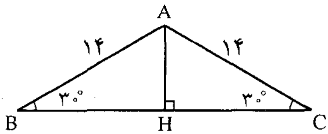
$$y^۲=x^۲+(\frac{x}{۲})^۲=۱+\frac{۱}{۴}=\frac{۵}{۴}$$

$$\text{ارتفاع } CDF=\sqrt{(۲y)^۲-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\sqrt{۴\times\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۲}}=\sqrt{\frac{۹}{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

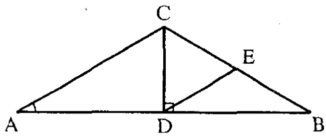
۲۱۴. داریم :

$$AH=\frac{۱}{۲}AB=۷\,,\,BH=۱۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۷\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow BC=۱۴\sqrt{۳}\,,\ \text{مساحت مثلث}=S=۴۹\sqrt{۳}$$



۲۱۵. بسادگی دیده می‌شود که $C\hat{A}D=۳۰°$ بوده و بنابراین $CD=۲\sqrt{۳}$ خواهد شد و از آن‌جا : $S=۱۲\sqrt{۳}$.

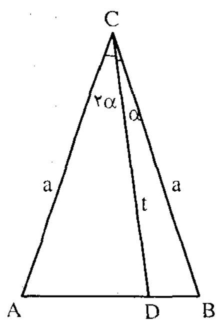


۲۱۶. $۲\frac{۱}{۴}$

۲۱۷. زاویهٔ BCD را مساوی α فرض می‌کنیم (شکل). بنابراین داریم :

$$A\hat{C}D=۲\alpha\,,\,A\hat{C}B=۳\alpha$$

$$B\hat{A}C=A\hat{B}C=۹۰°-\frac{۳\alpha}{۲}\,,\,B\hat{D}C=۹۰°+\frac{\alpha}{۲}$$



در مثلث BCD داریم :

$$\frac{t}{a}=\frac{\sin(۹۰^\circ-\frac{۳\alpha}{۲})}{\sin(۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲})}=\frac{\cos\frac{۳\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۴\cos^۳\frac{\alpha}{۲}-۳\cos\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{t+۳a}{۴a}}$$

سپس $\sin\frac{\alpha}{۲}$ را محاسبه کرده و از رابطهٔ $\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$ مقدار $\sin\alpha$ به‌دست می‌آید، درنتیجه :

$$S=\frac{۱}{۲}a^۲\sin ۳\alpha=\frac{۱}{۲}a^۲\sin\alpha(۳-۴\sin^۲\alpha)$$

جواب : $$S=\frac{t}{۴a}(۲a+t)\sqrt{(۳a+t)(a-t)}$$

۲۱۸. اگر $B\hat{A}C=B\hat{C}A=۲\alpha$ ، آن وقت، از قانون سینوسها، به‌دست می‌آوریم :

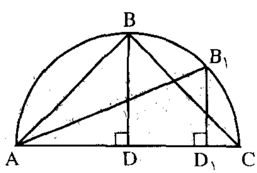
$$AF=\frac{AE}{\cos\alpha}=\frac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha\cos\alpha},\ AE=\frac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha}$$

بنابراین، $\frac{۹}{۴}m=\frac{۲m\sin ۲\alpha}{\sin ۳\alpha\cos\alpha}$ ، که از آن‌جا :

$$S_{ABC}=m^۲\tan ۲\alpha=\frac{۵m^۲\sqrt{۱۱}}{۷},\ \cos ۲\alpha=\frac{۷}{۱۸}$$

۲۱۹. قاعدهٔ ثابت مثلث را AC و زاویهٔ ثابت رأس را $\hat{B}=\alpha$ اختیار کرده، کمان درخور زاویهٔ α مقابل به پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ D وسط ضلع AC، عمودی بر AC اخراج می‌کنیم، تا کمان درخور زاویهٔ α را در نقطهٔ B قطع کند. از B به A و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است، زیرا اگر مثلث $AB_۱C$ را در نظر بگیریم، داریم :

$$B_۱D_۱<BD\Rightarrow S_{AB_۱C}<S_{ABC}$$



۲.۷.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۲۲۰. مساحت مثلث CDE برابر است با : $S(ABC)-S(ABED)$

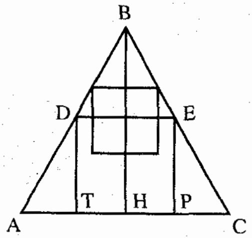
امّا : $S(ABC)=\frac{۱}{۲}\times ۴۰\times ۴۸=۹۶۰$

$$\cos A\hat{K}B=\frac{۲۴^۲+۳۲^۲-۴۰^۲}{۲\times ۲۴\times ۳۲}=۰\Rightarrow A\hat{K}B=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow S(ABED)=\frac{۱}{۲}\times AE.BD.\sin ۹۰^\circ$$

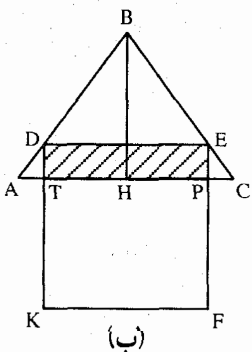
$$\Rightarrow S(ABED)=۴۸۰\Rightarrow S(CDE)=۹۶۰-۴۸۰=۴۸۰$$

۱.۲۲۱. کمیت مورد بهینه عبارت از مساحت سطح اشتراک مثلث و مربع است که با S نشان می‌دهیم.



(الف)

۲. ضلع مربع را با x یعنی DE= x نشان می‌دهیم و کرانه‌های حقیقی x را پیدا می‌کنیم. بدیهی است که از میان همهٔ مربعهایی که کاملاً در داخل مثلث قرار دارند، مربعی بیشترین مساحت را داراست که در داخل مثلث محاط شده است. یعنی مربعی که همهٔ رأسهای آن روی ضلعهای مثلث قرار دارند (شکل الف) اگر مقدار x از طول ضلع مربع محاطی بیشتر باشد، آن‌گاه مربع و مثلث به شکل (ب) درمی‌آیند. در این حالت سطح مشترک مثلث، مربع با مستطیل محاطی DEPT نشان داده می‌شود. از این روx از طول ضلع مربع محاطی تا ضلع AC تغییر می‌کند. ضلع مربع محاطی را پیدا می‌کنیم. از تشابه مثلثهای BDE و ABC (شکل الف) درمی‌یابیم که :



(ب)

$$\frac{x}{b}=\frac{h-x}{h},\ x=\frac{bh}{b+h}$$

بنابراین $\frac{bh}{h+b} \le x < b$ حاصل می‌شود.

۳. مساحت S مربوط به مستطیل محاطی DEPT را برحسب a، x و h بیان می کنیم. از تشابه مثلثهای ADT و ABH به $\frac{AT}{AH} = \frac{DT}{BH}$ یعنی $\frac{DT}{h} = \frac{\frac{b}{۲} - \frac{x}{۲}}{\frac{b}{۲}}$ می‌رسیم که از آن نیز، $DT = \frac{h(b-x)}{b}$، و در نتیجه $S = \frac{hx(b-x)}{b}$ به‌دست می‌آید.

۴. تابع $S = \frac{h}{b}(bx - x^۲)$ را در بازهٔ نیمباز $\left[\frac{bh}{b+h}, b\right)$ مورد ملاحظه قرار داده و بزرگترین مقدار آن را به‌دست می‌آوریم :

(۱) $S' = \frac{h}{b}(b - ۲x)$ (۲) $S' = O$؛ $x = \frac{b}{۲}$ به ازای

حال تعلق نقطهٔ $\frac{b}{۲}$ را به بازهٔ نیمباز $\left[\frac{bh}{b+h}, b\right)$، یعنی برقراری نامساوی $\frac{b}{۲} > \frac{bh}{b+h}$ را بررسی می کنیم. این رابطه با شرط $۲h < b+h$ یعنی با شرط $h < b$ متقاعد می‌شود. اگر $h \ge b$ باشد، آن‌گاه در درون بازهٔ نیمباز $\left[\frac{bh}{b+h}, b\right)$ نقطهٔ ایستا وجود نخواهد داشت.

(۳) از بین مقدارهای تابع، جدولی را برای یافتن بزرگترین مقدار آن تهیه می کنیم. قبل از همه توجه داریم که : $\lim\limits_{x \to b-۰} S(x) = \lim\limits_{x \to b-۰} \frac{h}{b}(bx - x^۲) = ۰$. همچنین از آن‌جا که $\frac{bh}{b+h}$ یک ضلع مربع محاطی است، $S(\frac{bh}{b+h}) = (\frac{bh}{b+h})^۲$ را داریم.

سرانجام چنین حاصل می‌شود : $S(\frac{b}{۲}) = \frac{h}{b}(b.\frac{b}{۲} - (\frac{b}{۲})^۲) = \frac{hb}{۴}$

اگر $h < b$ باشد، آن‌گاه جدول موردنظر دارای شکل زیر خواهد بود :

x	$\frac{bh}{b+h}$	$\frac{b}{۲}$	b
S	$(\frac{bh}{b+h})^۲$	$\frac{bh}{۴}$	۰

حال $(\frac{bh}{b+h})^۲ < \frac{bh}{۴}$ را ثابت می‌کنیم. این رابطه را به نامساوی $(b+h)^۲ > ۴bh$

یعنی : $(b-h)^۲ > ۰$ تحویل می‌دهیم که یک نامساوی بدیهی است. بدین ترتیب اگر $h < b$ باشد، آن‌گاه بزرگترین مقدار تابع S عبارت از $\frac{bh}{۴}$ بوده و در نقطهٔ $x = \frac{b}{۲}$ به این مقدار می‌رسد. اگر $h \geq b$ باشد، آن‌گاه جدول مورد نظر دارای شکل زیر خواهد بود :

x	$\frac{bh}{b+h}$	b
S	$(\frac{bh}{b+h})^۲$	۰

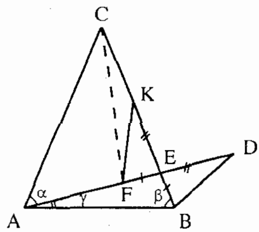
در این حالت بزرگترین مقدار تابع S برابر $(\frac{bh}{b+h})^۲$ بوده و در نقطهٔ $x = \frac{bh}{b+h}$ به این مقدار می‌رسد.

۵. با مراجعه به اصل مسأله به نتیجه‌گیری زیر می‌رسیم. اگر ارتفاع مثلث از قاعدهٔ آن کوتاهتر باشد، آن‌گاه سطح مشترک مثلث و مربع رسم شده بر روی میانخط مثلث بزرگترین سطح را خواهد داشت. و اگر ارتفاع مثلث از قاعده کوتاهتر باشد، آن‌گاه مساحت مربع محاط در مثلث بزرگترین مقدار را خواهد داشت.

۳.۷.۳. نسبت مساحتها

۲۲۲. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{۲\cos\alpha\sin\beta}$

۴.۷.۳. رابطه‌ای در مساحتها



۲۲۳. مثلث متساوی‌الساقین ABC و مثلث دلخواه و غیر متساوی‌الساقین ABD را در نظر می‌گیریم (شکل). قاعدهٔ دو مثلث یکی هستند ؛ فرض می‌کنیم داشته باشیم :

$$AD + DB = AC + CB$$

مثلث ABE قسمت مشترک دو مثلث ABC و ABD را تشکیل می‌دهد. برای این‌که مسأله را حل کنیم، کافی است ثابت کنیم، مثلث BDE، بخشی از مثلث ACE را تشکیل می‌دهد. برای این منظور، روی پاره‌خطهای EA و EC، بترتیب $EF = EB$ و

$EK = EC$ را جدا می‌کنیم. روشن است که مثلث FKE با مثلث BDE برابر است. حالا باید ثابت کنیم، نقطهٔ F بین نقطه‌های A و E و نقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد.
به مثلث AEB توجه می‌کنیم. در این مثلث داریم: $\alpha < \beta$، زیرا $\alpha > \gamma$ و $\alpha = \beta$ (طبق فرض، مثلث ABC متساوی‌الساقین است). از آن‌جا $AE > BE$ و $AE > EF$، زیرا، $BE = FE$.

بنابراین نقطهٔ F بین نقطه‌های A و E قرار دارد.
اکنون، فرض می‌کنیم، نقطهٔ K بین C و E واقع باشد، در این صورت داریم:

$$AF + FK + KE + EF < AF + FC + CE + EF \quad ,$$

$$EF = EB, \quad KE = ED, \quad FK = BD \quad ,$$

$$AF + DB + ED + EF < AF + FC + CE + EB \quad ,$$

$$AF + FE + ED + DB < AF + FC + CB \quad ,$$

$$AD + DB < AF + FC + CB$$

و بنا بر شرط:

$$AD + DB = AC + CB$$

بنابراین:

$$AC + CB < AF + FC + CB$$

یا:

$$AC < AF + FC$$

به نابرابری درستی رسیدیم. بنابراین، حکم نخستین هم در این باره که نقطهٔ K بین نقطه‌های C و E قرار دارد، درست است.

۵.۷.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۴. بنابر روش مصری داریم:

$$S_1 = \frac{1}{2} a . b$$

۸.۳. رابطه‌های متری

۲۲۵. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PGR و PHQ متشابه‌اند، زیرا:

$$\hat{Q} = \hat{R} = 90^\circ \quad , \quad \hat{G} = \hat{H}$$

از آن‌جا :

$$\frac{GR}{HQ}=\frac{PR}{PQ}\Rightarrow GR.PQ=PR.HQ$$

۲۲۶. داریم : $BC^۲=BB'^۲+CB'^۲$

$$AB^۲=BB'^۲+AB'^۲$$

$$AC^۲=AB^۲=BB'^۲+AB'^۲$$

از جمع طرفین رابطه‌های بالا، نتیجه می‌شود :

$$BC^۲+AB^۲+AC^۲=CB'^۲+۲AB'^۲+۳BB'^۲$$

۲۲۷. قوت نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ به قطر ED با قوت نقطهٔ C نسبت به این دایره مساوی است.

۲۲۸. داریم : $AA'\|BD\Rightarrow\frac{CA'}{CB}=\frac{CA}{CD}$

و یا : $CA^۲=CD.CA'$

چون : $CA'=CB'$

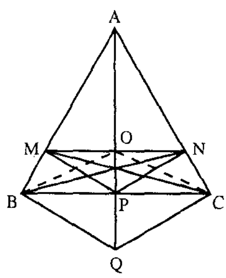
پس : $CA^۲=CD.CB'$

۲۳۰. فرض کنید M معرف وسط AD باشد. تحقیق کنید که $BF^۲+FM^۲=BM^۲$.

۳ . ۹ . ثابت کنید مثلث متساوی‌الساقین است

۲۳۱. در نقطهٔ C بر ضلع AC عمودی اخراج می‌کنیم تا امتداد AP را در Q قطع کند. با توجه به موازی بودن MN با BC و PN با QC خواهیم داشت :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{AP}{AQ}\Rightarrow PM\|BQ$$



یعنی مثلث ABQ نیز قائم‌الزاویه است. لذا اگر نقطهٔ O را وسط AQ فرض کنیم (با

توجه به این که $A \neq ۹۰^\circ$ ، لذا نقطه‌های O و P متمایز خواهند بود.)، آن‌گاه $CO = BO$ خواهد بود. از طرفی با توجه به قضیهٔ سوا داریم :

$$\frac{AN}{NC} \times \frac{CP}{PB} \times \frac{BM}{MA} = ۱$$

و چون $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ پس $\frac{CP}{PB} = ۱$ ، یعنی P وسط BC خواهد شد که با توجه به مساوی بودن OB و OC نتیجه می‌گیریم که OP بر BC عمود است، پس در مثلث ABC میانهٔ AP ارتفاع نیز می‌باشد، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین می‌باشد.

۲۳۲. راه حل اوّل. در معادلهٔ داده شده، به‌جای $\tan x$ مساویش $\sin x/\cos x$ را قرار می‌دهیم ؛ سپس دو طرف رابطه را در $\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\gamma}{۲}$ ضرب می‌کنیم. نتیجهٔ این کار عبارت از :

$$(a+b)\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\gamma}{۲} = a\sin\alpha\cos\beta\sin\frac{\gamma}{۲} + b\sin\beta\cos\alpha\sin\frac{\gamma}{۲}$$

است، که معادل :

$$a\cos\beta(\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{۲} - \sin\alpha\sin\frac{\gamma}{۲})$$

$$+b\cos\alpha(\cos\beta\cos\frac{\gamma}{۲} - \sin\beta\sin\frac{\gamma}{۲}) = ۰$$

می‌باشد. رابطهٔ اخیر، به نوبهٔ خود، معادل :

$$a\cos\beta\cos(\alpha+\frac{\gamma}{۲}) + b\cos\alpha\cos(\beta+\frac{\gamma}{۲}) = ۰$$

است. از آن‌جا که : $\alpha + \frac{\gamma}{۲} + \beta + \frac{\gamma}{۲} = \alpha+\beta+\gamma = \pi$

است، داریم : $\cos(\beta+\frac{\gamma}{۲}) = -\cos(\alpha+\frac{\gamma}{۲})$

و بنابراین : $(a\cos\beta - b\cos\alpha)\cos(\alpha+\frac{\gamma}{۲}) = ۰$

اگر : $\cos(\alpha+\frac{\gamma}{۲}) = ۰$ باشد، در این صورت : $\alpha+\frac{\gamma}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ و بنابراین : $\beta+\frac{\gamma}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ می‌شود، و نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \beta$ است. اگر $a\cos\beta - b\cos\alpha = ۰$ باشد، در این

صورت از قانون سینوسها : $a\sin\beta = b\sin\alpha$ استفاده و آن را بر : $a\cos\beta = b\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم و $\tan\alpha = \tan\beta$ را نتیجه می‌گیریم. از این رابطه $\alpha = \beta$ نتیجه، و مثلث متساوی‌الساقین می‌شود.

راه حل دوم. بنا به قانون سینوسها داریم :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = ۲R$$

در این صورت : $a = ۲R\sin\alpha$ ، $b = ۲R\sin\beta$ می‌شود. با قرار دادن این عبارتها به‌جای a و b در رابطهٔ داده شده و تقسیم دو طرف آن بر $۲R$ به دست می‌آوریم :

$$\sin\alpha + \sin\beta = \tan\frac{\gamma}{۲}\left(\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^۲\beta}{\cos\beta}\right) \qquad (۱)$$

از آن‌جا که : $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ است، داریم : $\frac{\gamma}{۲} = \frac{\pi}{۲} - (\alpha+\beta)\ /۲$ و :

$$\tan\frac{\gamma}{۲} = \tan\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\alpha+\beta}{۲}\right) = \cot\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۲)$$

بعد α و β را به‌صورت مجموعهای :

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{۲} + \frac{\alpha-\beta}{۲} \quad , \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{۲} - \frac{\alpha-\beta}{۲}$$

نوشته، فرمولهای جمع سینوس و کسینوس را به کار می‌بریم :

$$\sin\alpha = \sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} + \cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\sin\beta = \sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} - \cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

و :

$$\cos\alpha = \cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} - \sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

$$\cos\beta = \cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲} + \sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\sin\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

مجموع دو رابطهٔ اوّل و مجموع دو رابطهٔ دوم بترتیب عبارتند از :

$$\sin\alpha + \sin\beta = ۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

و :

$$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}$$

و نسبت مجموع دوم به مجموع اوّل عبارت از :

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\tan\frac{\gamma}{2}$$

است. عبارت مساوی $\tan\frac{\gamma}{2}$ را در (۱) قرار داده، پس از ضرب دو طرف در : $\sin\alpha+\sin\beta$ به‌دست می‌آوریم :

$$(\sin\alpha+\sin\beta)^2=(\cos\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta}\right) \qquad (۳)$$

معادلهٔ (۳) بسادگی به‌صورت :

$$2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta=\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha$$

که معادل :

$$(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2=0$$

است، تبدیل می‌شود. عبارت سمت چپ این معادله : $\sin^2(\alpha-\beta)$ است، و تنها اگر زاویه‌های α و β مساوی باشند، صفر می‌شود. در این صورت نتیجه می‌گیریم که $\alpha=\beta$، و مثلث ABC، مثلث متساوی‌الساقینی با : $a=b$ است.

راه حل سوم. از آن‌جا که $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ است، داریم :

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

درنتیجه معادلهٔ داده شده را می‌توان به‌صورت :

$$a+b=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}(a\tan\alpha+b\tan\beta)$$

یا به‌طور معادل :

$$(a+b)\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=a\tan\alpha+b\tan\beta \qquad (۴)$$

نوشت. می‌توانیم، بدون از دست دادن حالت عام مسأله، فرض کنیم $\alpha\le\beta$، و بنابراین $a\le b$. ابتدا توجه می‌کنیم که α و β باید زاویه‌های حاده باشند ؛ زیرا، اگر β منفرجه باشد، سمت راست (۴) منفی می‌شود (زیرا در این صورت $a<b$ و $\tan\alpha<\tan(\pi-\beta)=|\tan\beta|$)، در حالی که سمت چپ آن مثبت است.

اما در مورد زاویه‌های حاده، نامساوی :

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\le\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{2} \qquad (۵)$$

را، که در آن تساوی اگر و فقط اگر $\alpha=\beta$ باشد برقرار است، داریم. نامساوی (۵) را در تبصرهٔ زیر ثابت خواهیم کرد.

اگر $\alpha<\beta$ باشد، قرار دادن (۵) در (۴) می‌دهد :

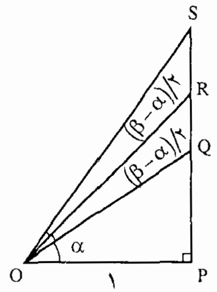
$$\frac{a+b}{۲}(\tan\alpha+\tan\beta)>a\tan\alpha+b\tan\beta$$

یا :

$$\frac{b-a}{۲}\tan\alpha>\frac{b-a}{۲}\tan\beta$$

یا، سرانجام، $\tan\alpha>\tan\beta$، و این، از آن‌جا که $\tan x$ به‌ازای : $۰<x<\frac{\pi}{۲}$. تابعی صعودی است، $\alpha<\beta$ را نقض می‌کند. در این صورت نتیجه می‌گیریم که : $\alpha=\beta$، و به عبارت دیگر مثلث مورد بحث متساوی‌الساقین است.

تبصره. در مورد نامساوی (۵) دو اثبات به‌دست می‌دهیم. اثبات اوّل هندسی است و از شکل، که در آن $OP=۱$ ، $\alpha\le\beta$ است، ملاحظه می‌شود. در این شکل داریم :



$$PQ=\tan\alpha \quad \text{و} \quad PS=\tan\beta \quad \text{و} \quad PR=\tan(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{۲})=\tan\frac{\alpha+\beta}{۲} \qquad (۶)$$

واضح است که : $QR\le RS$ ، یا : $PR-PQ\le PS-PR$. درنتیجه :

$$PR\le\frac{PQ+PS}{۲}$$

نامساوی اخیر بنا به (۶)، معادل (۵) است.

اثبات دوم عبارت از ملاحظهٔ این مطلب است که $y=\tan x$ در فاصلهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ تابعی محدب است و این بدین معنی است که به‌ازای هر دو نقطهٔ α ، β ، $\alpha<\beta$ ، در این فاصله، نمودار : $y=\tan x\ (\alpha\le x\le\beta)$ زیر پاره‌خط واصل نقطه‌های $(\alpha,\tan\alpha)$ و $(\beta,\tan\beta)$ قرار می‌گیرد (شکل را ملاحظه کنید). در حالت خاص، نقطهٔ :

$$L = (\frac{\alpha+\beta}{۲}, \tan\frac{\alpha+\beta}{۲})$$

زیرا :

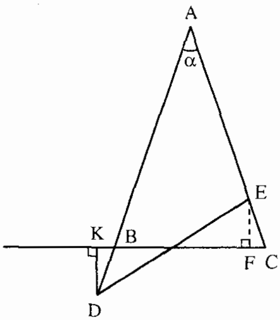
$$M = (\frac{\alpha+\beta}{۲}, \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۲})$$

وسط این پاره‌خط قرار می‌گیرد، ملاک تحلیلی تحدب یک تابع این است که مشتق مرتبهٔ دوم آن مثبت می‌باشد. درواقع، $y' = \sec^۲ x$ و $y'' = \sec^۲ x \tan x$، که به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ مثبت است.

۲۳۳. بدون این که به کلی بودن مسأله، لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد : $a \le b \le c$.
اگر $c > b$، آن وقت :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{c^n} = ۰ \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{c^n} = ۰$$

و برای مقدارهای به‌قدر کافی بزرگ $n \in N$، نابرابری $a^n + b^n > c^n$ نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین $b = c$ و همهٔ مثلثها، متساوی‌الساقیند.



۲۳۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC و مثلث ADE را که زاویهٔ رأس آنها مشترک و برابر مقدار ثابت α است، درنظر می‌گیریم. به‌طوری که :

$$AB + AC = AD + AE \qquad (۱)$$

عمودهای DK و EF را بر BC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDK و CEF همنهشتند و داریم :

$$BK = CF , KF = BC \Rightarrow BC < DE \qquad (۲)$$

محیط مثلث ADE > محیط مثلث ABC ⇐ (۲) و (۱)

۲۳۵. با توجه به $\sin\hat{C} = \sin(\hat{A}+\hat{B})$ داریم :

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۴R^۲[\sin^۲\hat{A} + \sin^۲\hat{B} + \sin^۲(\hat{A}+\hat{B})]$$

$$= ۴R^۲[۲ - \cos(\hat{A}-\hat{B})\cos(\hat{A}+\hat{B}) - \cos^۲(\hat{A}+\hat{B})]$$

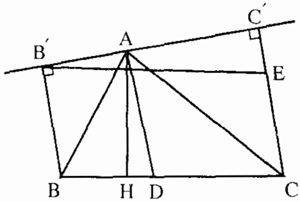
اگر $x = ۲ - \cos(\hat{A}-\hat{B})\cos(\hat{A}+\hat{B}) - \cos^۲(\hat{A}+\hat{B})$ باشد داریم :

$$\cos(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{۱}{۲}\left[-\cos(\hat{A}-\hat{B}) \pm \sqrt{\cos^۲(\hat{A}-\hat{B}) + ۸ - ۴x}\right]$$

برای آن که $\cos(\hat{A}+\hat{B})$ حقیقی باشد، لازم است $x \le \frac{۱}{۴}[\cos^۲(\hat{A}-\hat{B})+۸]$ باشد.

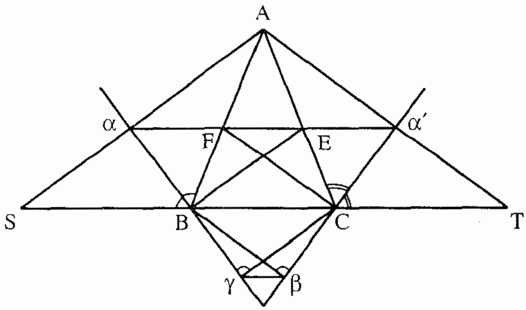
ماکزیمم x وقتی به دست می‌آید که $\cos(\hat{A}-\hat{B})=۱$ یا $\hat{A}=\hat{B}$، یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۲۴۳. ابتدا قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:



مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصلضرب طول نیمساز داخلی یک زاویه در تصویر ضلع مقابل روی نیمساز خارجی این زاویه. در مثلث ABC فرض می‌کنیم AD نیمساز داخلی زاویهٔ A و B′C′ تصویر ضلع BC روی نیمساز خارجی باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$S=\frac{۱}{۲}AD\times B'C'$$



ارتفاع AH را رسم کرده و B′E را به موازات BC می‌کشیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ B′C′E و AHD متشابه‌اند، زیرا $H\hat{A}D=C'\hat{B}'E$ است. (ضلعهایشان برهم عمودند) و $\hat{H}=\hat{C}=۹۰^\circ$ پس:

$$\frac{AD}{AH}=\frac{BC}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{AD}{AH}=\frac{B'E}{B'C'}$$

یا: $$S=\frac{۱}{۲}AD\times B'C' \quad \text{یا} \quad AD\times B'C'=AH\times BC=۲S$$

حال با استفاده از قضیهٔ بالا ثابت می‌کنیم اگر در مثلثی دو نیمساز داخلی برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین است. BE و CF نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ B و C با هم برابرند. نیمسازهای خارجی این دو زاویه را رسم می‌کنیم. $\alpha'\beta$ و $\alpha\gamma$ تصویرهای

AB و AC را روی نیمسازهای خارجی به‌دست می‌آوریم. به موجب قضیهٔ بالا داریم :

$$S = \frac{1}{2}BE \times \alpha\gamma = \frac{1}{2}CF \times \alpha'\beta$$

پس $\alpha\gamma = \alpha'\beta$ و مثلثهای ACT و ABS متساوی‌الساقین می‌باشند. پس α' و α وسطهای AT و AS می‌باشند و $\alpha'\alpha$ با BC موازی است. چون چهارضلعی $BC\beta\gamma$ محاطی است، پس چهارضلعی $\alpha\alpha'\beta\gamma$ نیز محاطی است و چون $\alpha\gamma = \alpha'\beta$ است، پس $\alpha\alpha'\beta\gamma$ و $BC\beta\gamma$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند. از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که نصف زاویه‌های خارجی $\hat{C}$ و $\hat{B}$ با هم برابرند، پس زاویه‌های داخلی $\hat{C}$ و $\hat{B}$ نیز برابرند و مثلث متساوی‌الساقین است.

۲۴۴. از برابری $d_b = d_c$ نتیجه می‌شود :

$$ca\left[1-\left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right] = ab\left[1-\left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

$$a(a+b+c)\left[(a+b+c)(a^2+bc)+2abc\right](b-c)=0$$

تنها عاملی که می‌تواند برابر صفر باشد، $b-c=0$ است، که از آن‌جا نتیجه می‌شود، $b=c$ ، یعنی مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۲۴۵. داریم :

$$d_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

$$r_b = \frac{s}{p-b}, r_c = \frac{s}{p-c}$$

$$d_a^2 = r_b . r_c \Rightarrow \frac{4}{(b+c)^2} \times pbc(p-a) = \frac{s^2}{(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{4pbc(p-a)}{(b+c)^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)} = p(p-a)$$

$$\Rightarrow (b+c)^2 = 4bc \Rightarrow b^2+c^2-2bc=0 \Rightarrow (b-c)^2=0$$

$$\Rightarrow b=c \Rightarrow AB=AC$$

۲۴۶. فرض کنید ABC مثلث داده شده باشد و AA_1 ، BB_1 و CC_1 نیمسازهای آن باشند. اگر $A_1B_1 = A_1C_1$ ، آن وقت یا $A_1\hat{B}_1C = A_1\hat{C}_1B$ (در این حالت، مثلث ABC متساوی‌الساقین است) یا $A_1\hat{B}_1C + A_1\hat{C}_1B = 180^\circ$. در حالت دوم، مثلث A_1B_1C را دور نقطهٔ A_1 ، به اندازهٔ زاویهٔ $B_1\hat{A}_1C_1$ ، دوران می‌دهیم. در نتیجه، مثلثهای A_1C_1B

و A_1B_1C به کنار یکدیگر می‌آیند و مثلثی متشابه با مثلث ABC به‌وجود می‌آورند. اگر طول ضلعهای مثلث ABC، a، b و c باشند، آن وقت طول ضلعهای مثلث حاصل برابرند با $\frac{ac}{b+c}$، $\frac{ab}{b+c}$ و $\frac{ab}{a+c}+\frac{ac}{a+b}$. با توجه به این که مثلثها متشابه‌اند، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}=\frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow b^3+c^3-a^3+b^2c+b^2a+c^2b+c^2a-a^2b-a^2c+abc=0 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم $\cos B\hat{A}C=x$. بنابر قانون کسینوسها، $b^2+c^2-a^2=2bcx$. با ضرب‌کردن برابری اخیر، به‌طور متوالی، در a، b و c و کم کردن آن از (۱)، به‌دست می‌آوریم:

$$2x(a+b+c)+a=0 \Rightarrow a=\frac{-2(b+c)x}{2x+1}$$

چون $0<a<b+c$، داریم:

$$-\frac{1}{4}<x<0 \qquad (2)$$

با نوشتن a در قانون کسینوسها برحسب b، c و x، و فرض $\frac{b}{c}=\lambda$، برای λ به معادلهٔ: $(4x+1)\lambda^2-2\lambda(4x^3+8x^2+x)+4x+1=0$ می‌رسیم. برای این که این معادله ($\lambda=0, \lambda\neq 1$) با شرطهای (۲) جواب داشته باشد، باید نابرابریهای زیر محقق باشند.

$$4x^3+8x^2+x>0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{4}D=(4x^3+8x^2+x)^2-(4x+1)^2=$$

$$(2x+1)^2(x+1)(2x-1)(2x^2+5x+1)>0 \qquad (4)$$

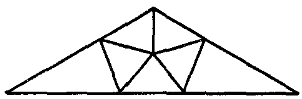
که در آن، D، مبیّن معادلهٔ درجهٔ دوم است. دستگاه نامعادله‌های (۲)، (۳) و (۴)؛ به‌ازای: $-\frac{1}{4}<x<\frac{\sqrt{17}-5}{4}$ درست است.

بنابراین، مثلث اصلی لزوماً متساوی‌الساقین نیست، اما ثابت شده است که این مثلث می‌تواند متساوی‌الساقین باشد، به شرطی که یکی از زاویه‌های مثلث اصلی منفرجه و

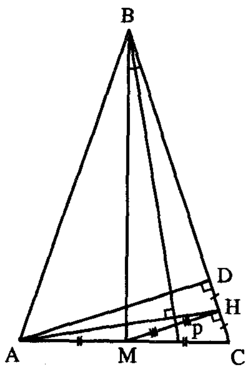
کسینوس آن در بازهٔ $(-\frac{۱}{۴}, \frac{\sqrt{۱۷}-۵}{۴})$ واقع باشد، که این تقریباً متناظر با زاویه‌ای از ۴۰′°۱۰۲ تا ۲۸′°۱۰۴ است. اگر $x = -\frac{۱}{۴}$، آن وقت مثلث ساخته شده تباهیده می‌شود؛ به‌ازای $x = \frac{\sqrt{۱۷}-۵}{۴}$، داریم: $A_1\hat{B}_1C = A_1\hat{C}_1B = ۹۰°$، یعنی، دو حالتی که در ابتدای حل بررسی کردیم، به ازای این اندازه از زاویه، یکی‌اند.

۳.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۴۷. نمونهٔ تقسیم را در شکل ببینید.



۲۴۸. ارتفاع AD را در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل). در این صورت، در مثلث ADC، پاره‌خط راست MH ضلع DC را هم نصف می‌کند، یعنی DH = CH. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BHM و ADC متشابه‌اند، زیرا $D\hat{A}C = ۹۰° - \hat{C} = H\hat{B}M$. اگر یکی از این مثلثها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، ضلعهای متناظر در آنها، با هم موازی می‌شوند؛ درضمن میانه‌های آنها، BP و AH هم، موازی با هم درمی‌آیند، یعنی قبل از دوران، BP و AH برهم عمودند.



۲۴۹. پنج رأس و مرکز یک پنج ضلعی منتظم.

۳.۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۵۱. از رابطه استیوارت استفاده کنید. ...

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره

۱.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایرهٔ محیطی

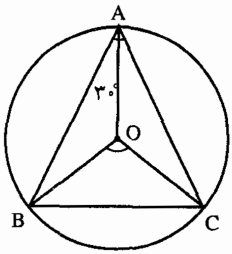
۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

۲۵۲. $\mathrm{Arc}\cos\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۳.۱.۴. ضلع

۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع



۲۵۳. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را O می‌نامیم. مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است. پس $BC = OB = OC = ۱۲\mathrm{cm}$.

در مثلث متساوی‌الساقین AOB، $A\hat{O}B = ۱۵۰°$ و $OA = OB = ۱۲\mathrm{cm}$ است. پس:

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ - ۲OA.OB.\cos A\hat{O}B$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۱۴۴ + ۱۴۴ - ۲\times ۱۲ \times ۱۲ \times (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})$$

$$AB^۲ = ۲۸۸ + ۱۴۴\sqrt{۳} = ۱۴۴(۲ + \sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AB = ۱۲(\sqrt{\frac{۳}{۲}} + \sqrt{\frac{۱}{۲}}) = ۱۲(\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۲}) = ۶(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})\mathrm{cm}$$

$$\Rightarrow AB = AC = ۶(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})\mathrm{cm}$$

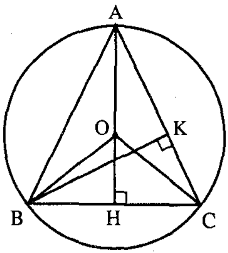
راه دیگر محاسبهٔ AB. با توجه به این که $\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ$ است، در مثلث ABC بنا به رابطهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}\Rightarrow\frac{۱۲}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{AB}{\sin ۷۵^\circ}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{۱۲\times\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=۶(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\text{cm}$$

۴.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۴. اندازهٔ ارتفاع



۲۵۴. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم :

$$BH=\frac{۱۲}{۲}=۶\,,\,OB=۱۰\Rightarrow OH=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸$$

$$\Rightarrow AH=AO+OH=۱۰+۸=۱۸$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH می‌توان نوشت :

$$AC=AB=\sqrt{AH^۲+BH^۲}=\sqrt{۳۲۴+۳۶}=\sqrt{۳۶۰}=۶\sqrt{۱۰}$$

از آن‌جا اندازهٔ ارتفاع BK قابل محاسبه است.

$$AC.BK=BC.AH\Rightarrow ۶\sqrt{۱۰}\times BK=۱۲\times ۱۸$$

$$\Rightarrow BK=\frac{۳۶\sqrt{۱۱}}{۱۰}=\frac{۱۸\sqrt{۱۱}}{۵}$$

۵.۱.۴. پاره‌خط

۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۲۵۵. $\frac{a}{۲}(\tan\frac{\alpha}{۲}-\cot\alpha)$

۲۵۶. همواره وتری موازی با قاعدهٔ مثلث وجود دارد. این وتر را ضلعهای جانبی به سه بخش

برابر تقسیم می‌کنند. (مسلماً، $۲ > a > ۰$) و طول آن $\frac{۳a}{۲a^۲+۱}$ است. بعلاوه اگر $a < \frac{۱}{\sqrt{۲}}$، آن وقت وتری دیگر وجود دارد که موازی با قاعده نیست و همان ویژگی را دارد. طول این وتر $\frac{۳}{\sqrt{۹-۲a^۲}}$ است.

۶.۱.۴. شعاع

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ شعاع

۲۵۷. داریم:

$$۲p = ۵۰+۵۰+۶۰ = ۱۶۰ \Rightarrow p = ۸۰ \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{۸۰(۳۰)(۳۰)(۲۰)} = ۱۲۰۰ \ , \ R = \frac{abc}{۴s} = \frac{۵۰\times۵۰\times۶۰}{۴\times۱۲۰۰}$$

$$\Rightarrow R = \frac{۲۵۰}{۸} = \frac{۱۲۵}{۴}$$

۲۵۸. مثلث متساوی‌الساقین ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند، از D به B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $BH = ۴$، $AH = ۸$ است. بنابراین داریم:

$$BH^۲ = AH.HD \Rightarrow ۱۶ = ۸\times HD \Rightarrow HD = ۲cm$$

از آن‌جا:

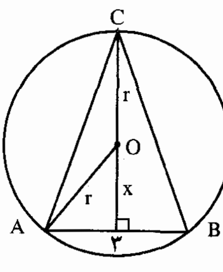
$$AD = ۲R = AH + HD = ۸+۲ = ۱۰ \Rightarrow R = ۵cm$$

۲۵۹. فرض کنید x فاصلهٔ مرکز دایره تا قاعده و h ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد، آن‌گاه:

$$h = r+x \ , \ h^۲+۹ = ۱۴۴ \Rightarrow h = \sqrt{۱۳۵}$$

$$r^۲ = ۳^۲+x^۲ = ۳^۲+(h-r)^۲ = ۳^۲+h^۲-۲hr+r^۲ \Rightarrow r = (۹+h^۲)/۲h$$

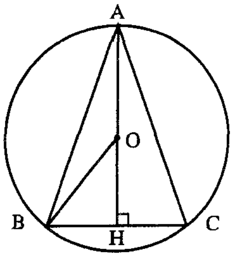
$$= (۹+۱۳۵)/۲\sqrt{۱۳۵} = ۱۴۴\sqrt{۱۳۵}/۲۷۰ = ۸\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}$$



۷.۱.۴. محیط

۱.۷.۱.۴. اندازهٔ محیط

۲۶۰. با فرض AB = AC، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد، داریم :



$$OH = AH - OA = ۳۶ - ۲۰ = ۱۶$$

$$BH = \sqrt{OB^۲ - OH^۲} = \sqrt{۴۰۰ - ۲۵۶} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲۴cm\,,\ AC = AB = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{۳۶^۲ + ۱۲^۲} = ۱۲\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = BC + ۲AB = ۲۴ + ۲۴\sqrt{۱۰}$$

۸.۱.۴. مساحت

۱.۸.۱.۴. اندازهٔ مساحت

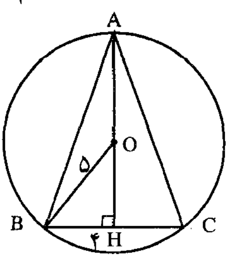
۲۶۱. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم :

$$OH = \sqrt{OB^۲ - BH^۲} = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳cm$$

از آن‌جا :

$$AH = AO + OH = ۵ + ۳ = ۸cm$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC.AH = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ = ۳۲cm^۲$$



۲.۸.۱.۴. نسبت مساحتها

۲۶۳. $\sqrt[4]{\dfrac{1-\cos\beta}{3-\cos\beta}}$

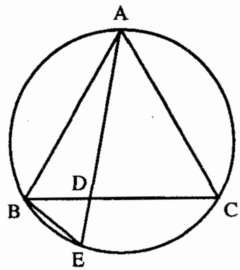
۹.۱.۴. رابطه‌های متری

۲۶۴. شعاع دایره را با R نشان داده و عبارتهای $A\hat{C}K=\alpha$ و $K\hat{C}B=\beta$ را درنظر بگیرید. با استفاده از قانون سینوسها KC، AK، AB و KB را بر حسب R، α و β بیان کنید.

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲۶۵. $A\hat{B}C=A\hat{C}B$ و $A\hat{C}B=A\hat{E}B$ (زیرا هر دو روبه‌رو به یک کمانند) پس دو مثلث مطلوب (در یک زاویهٔ مشترک و زاویه‌های دیگر برابر)، متشابه می‌شوند و درنتیجه :

$$\frac{BE}{BD}=\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AB}$$



۲.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی الساقین و دایره‌های محاطی

۲.۲.۴. زاویه

۱.۲.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۲۶۶. $\operatorname{Arc}\cos\frac{2}{3}$

۳.۲.۴. ضلع

۱.۳.۲.۴. اندازهٔ ضلع

۲۶۷. $\frac{۲a\sqrt{ab}}{b}$

۲۶۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OEB زاویهٔ EBO مساوی ۶۰° است. بنابراین :

$$BO = EO \times \frac{۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

از آن‌جا :

$$BD = R(۱ + \frac{۲}{\sqrt{۳}}) = \frac{R(\sqrt{۳}+۲)}{\sqrt{۳}}$$

اکنون بسادگی اضلاع مثلث بدست می‌آیند :

$$AB = BC = \frac{۲R(\sqrt{۳}+۲)}{\sqrt{۳}}, AC = ۲R(\sqrt{۳}+۲)$$

۲.۳.۲.۴. نسبت ضلعها

۲۶۹. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر قاعدهٔ BC را O می‌نامیم. و ارتفاع AD را که از O می‌گذرد، رسم کرده از O به E، نقطهٔ تماس AB با دایره نیز وصل می‌کنیم. به کمک مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AOE و ABD اندازهٔ ضلعهای AB، BD و از آن‌جا BC قابل محاسبه است. آن‌گاه نسبت AB:BC را می‌توان محاسبه کرد.

نکته. نسبت AB:BC را می‌توان با استفاده از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD محاسبه کرد.

$$\cos A\hat{B}D = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos ۷۵^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{BC}{۲}}{AB} = \frac{BC}{۲AB}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = ۲\cos ۷۵^\circ \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۲\cos ۷۵^\circ} = \frac{۱}{۲(\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴})}$$

$$= \frac{۲(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{۶-۲} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۷۰. جواب : ۴، ۳، ۴، ۳.

۴.۲.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۴. اندازهٔ ارتفاع

۲۷۱. مرکز دایره را O می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOE داریم :

$$AE = ۴،\ OE = ۳ \Rightarrow AO = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

$$\Rightarrow AD = AO + OD = ۵ + ۳ = ۸$$

۵.۲.۴. پاره‌خط

۱.۵.۲.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۲۷۲. ۲cm و ۴cm . از این حقیقت استفاده کنید که محیط مثلث BDE، از انتخاب نقطهٔ تماس مستقل است. قانون کسینوسها را در مورد مثلث BDE به‌کار گیرید.

۲۷۳. $\dfrac{۲a(\sqrt{a^{۲} + h^{۲}} - a)^{۲}}{h^{۲}}$

۶.۲.۴. شعاع دایره

۱.۶.۲.۴. اندازهٔ شعاع

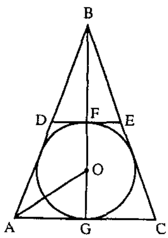
۲۷۴. با توجه به این که AD عمودمنصف BC است، داریم :

$$AD^{۲} = AB^{۲} - BD^{۲} = ۱۶ \Rightarrow AD = ۴\ ,$$

$$\frac{ID}{BD} = \frac{IA}{AB} \Rightarrow \frac{ID}{۳} = \frac{IA}{۵} = \frac{DI + IA}{۳ + ۵} = \frac{۴}{۸}$$

$$\Rightarrow \frac{ID}{۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ID = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۲۷۵. مساحت S مثلث ABC برابر است با حاصلضرب محیط آن :



(r شعاع دایره محاطی مثلث) $\frac{۱}{۲} r$ در $۲a+۲\sqrt{a^۲+h^۲}$

$$S=(a+\sqrt{a^۲+h^۲})\ r$$

از طرف دیگر: $S=\frac{۱}{۲}AC.BG=a.h$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود: $r=\frac{a.h}{a+\sqrt{a^۲+h^۲}}$

و قطعه خط DE از تناسب زیر به‌دست می‌آید:

$$DE:AC=BF:BG$$

که در آن: $AC=۲a\ ,\ BF=h-۲r\ ,\ BG=h$

تبصره. طول r را به این ترتیب هم می‌توان به‌دست آورد: AO نیمساز زاویهٔ A است و بنابراین نسبت قطعه‌های $GO=r$ و $OB=h-r$ مساوی نسبت ضلعهای AG و AB می‌شود، یعنی:

$$\frac{r}{h-r}=\frac{a}{\sqrt{a^۲+h^۲}}$$

جواب: $r=\frac{a.h}{a+\sqrt{a^۲+h^۲}}$

$$DE=\frac{۲a(\sqrt{a^۲+h^۲}-a)^۲}{h^۲}$$

۴ . ۲ . ۷. محیط

۴ . ۲ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۲۷۶. داریم: $AC=۲\times۶=۱۲\ ,\ BC=AB=۶+۱۰=۱۶$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $=۱۲+۲\times۱۶=۴۸$

۲۷۷. نقطه‌های تماس دایرهٔ I_a با ضلع BC را D و با امتداد ضلع AB را E می‌نامیم. داریم:

$$AI_a=AD+DI_a=h_a+r_a\Rightarrow AI_a=۶+۸=۱۴$$

$$\Delta AEI_a:\cos E\hat{I_a}A=\frac{I_aE}{AI_a}=\frac{۸}{۱۴}=\frac{۴}{۷}\Rightarrow A\hat{I_a}E=\mathrm{Arc}\cos\frac{۴}{۷}$$

$$A\hat{B}C=A\hat{I_a}E\Rightarrow\sin\hat{B}=\sin A\hat{I_a}E=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۴۹}}=\frac{\sqrt{۳۳}}{۷}\Rightarrow\tan\hat{B}=\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}$$

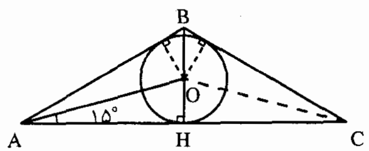
$$\Delta ABD \Rightarrow: \tan\hat{B}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳۳}}{۴}=\frac{۶}{BD}\Rightarrow BD=\frac{۲۴}{۳۳}\Rightarrow BC=a=\frac{۴۸}{\sqrt{۳۳}}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{۴}{۵}=\frac{\frac{۸}{۳}}{AB}\Rightarrow AB=\frac{۱۰}{۳}=AC$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث}=۲P=BC+۲AB=\frac{۱۶}{۳}+۲\times\frac{۱۰}{۳}=۱۲$$

۴ . ۲ . ۸. مساحت

۴ . ۲ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت



۲۷۸. مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث را O نامیده از O به A وصل می‌کنیم و ارتفاع BH را نیز رسم می‌نماییم. از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH داریم :

$$O\hat{A}H=\frac{۱}{۲}\hat{A}=\frac{۱}{۴}(۱۸۰°-۱۲۰°)=۱۵°\ ,\ \tan ۱۵°=\frac{OH}{AH}\Rightarrow ۲-\sqrt{۳}=\frac{۵}{AH}$$

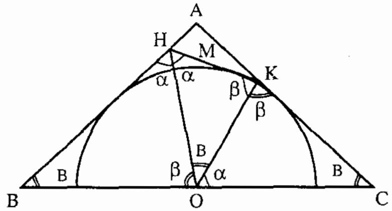
$$\Rightarrow AH=۵(۲+\sqrt{۳})\Rightarrow AC=۲AH=۱۰(۲+\sqrt{۳})\ ,$$

$$\tan B\hat{A}H=\frac{BH}{AH}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{BH}{۵(۲+\sqrt{۳})}\Rightarrow BH=\frac{۵(۲\sqrt{۳}+۳)}{۳}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BH=\frac{۱}{۲}\times ۱۰(۲+\sqrt{۳})\times\frac{۵(۲\sqrt{۳}+۳)}{۳}$$

$$S_{ABC}=\frac{۲۵\sqrt{۳}(۲+\sqrt{۳})^{۲}}{۳}\quad \text{اندازهٔ مساحت مثلث}$$

۴ . ۲ . ۹. رابطه‌های متری



۲۷۹. در چهارضلعی HKCB داریم :

$$\hat{H}+\hat{K}+\hat{C}+\hat{B}=۳۶۰°$$

امّا : $\hat{K}=۲\beta\ ,\ \hat{H}=۲\alpha\ ,\ \hat{C}=\hat{B}$

پس $۲\alpha+۲\beta+۲\hat{B}=۳۶۰^\circ$ و یا $\rightarrow \alpha+\beta+\hat{B}=۱۸۰^\circ$

در مثلث HOK داریم : $\alpha+\beta+H\hat{O}K=۱۸۰^\circ$

و از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم که : $\hat{B}=H\hat{O}K$

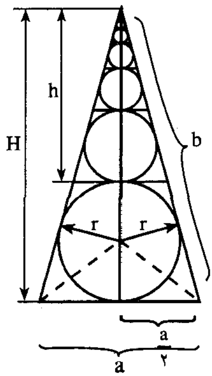
زاویهٔ $H\hat{O}C$ زاویهٔ خارجی مثلث HBO می‌باشد. بنابراین $H\hat{O}C=\alpha+\beta$. پس به جای $H\hat{O}C$ ، $(H\hat{O}K+C\hat{O}K)$ و به جای B و $H\hat{O}K$ قرار می‌دهیم $H\hat{O}K+H\hat{O}C=\alpha+H\hat{O}K$. درنتیجه $H\hat{O}C=\alpha$ است. دو مثلث KOC و BHO به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند، پس $\frac{BH}{OC}=\frac{OB}{CK}$ ، و یا $OB.OC=BH.CK$ ، و چون $OB=OC$ ، پس : $OB^۲=BH.CK$.

۴ . ۲ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲۸۰. **الف.** $\frac{۲\sqrt{S}}{\sqrt[۴]{۲۷}}$

ب. $۳\sqrt{۳}r^۲$. نصف زاویهٔ مجاور به قاعده در مثلث را با x نشان دهید.

۲۸۱. **الف.** شعاع دایرهٔ محاط در مثلث متساوی‌الساقین (منظور اوّلین دایره است)، برابر است با :



(الف)

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)^۲}{p}}=(p-b)\sqrt{\frac{p-a}{p}}=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

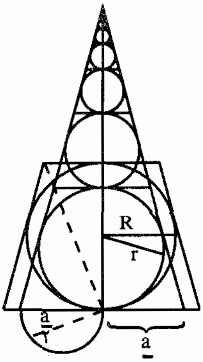
و مساحت این دایرهٔ محاطی چنین می‌شود :

$$S_0 = \pi r^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{p-a}{p}\cdot a^2$$

پس :

$$h = H - 2r = H - a\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

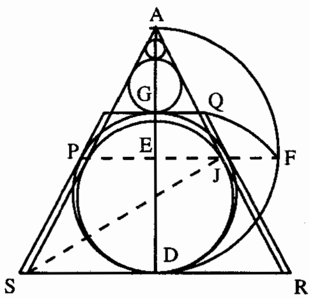
و بالاخره :



(ب)

$$h \div H = 1 - \frac{a^2\sqrt{p-a}}{2\sqrt{p}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)^2}} = 1 - \frac{a^2}{2p(p-b)} = 1 - \frac{a^2}{p.a}$$

$$= 1 - \frac{a}{p} = \frac{p-a}{p}$$



(پ)

مثلثهای متساوی‌الساقینی که از مثلث متساوی‌الساقین داده شده، با رسم مماس بر دایرهٔ محاطی آن به موازات قاعده، به‌دست می‌آیند، با هم متشابه‌اند. عنصرهای خطی هر مثلث بعدی نسبت به عنصرهای نظیر در مثلث قبلی، به نسبت $h \div H$ هستند، یعنی عنصرهای متناظر مثلثها، یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت : $q = \frac{p-a}{p}$ تشکیل می‌دهند. بنابراین مساحتهای این مثلثها (همچنین دایره‌های محاطی آنها)، یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $q_0 = q^2 = \frac{(p-a)^2}{p^2}$ تشکیل می‌دهند. به این ترتیب باید مجموع بی‌نهایت جمله از یک تصاعد هندسی نزولی را که جملهٔ اوّل آن a_1 است محاسبه کنیم :

$$a_1 = S_0 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{p-a}{p}a^2$$

$$\Sigma=\frac{a_۱}{۱-q_۰}=\frac{\pi(p-a)a^۲}{۴p\left[۱-\frac{(p-a)^۲}{p^۲}\right]}=\frac{\pi(p-a)a^۲p}{۴[p^۲-p^۲+۲ap-a^۲]}$$

$$=\frac{\pi(p-a)ap}{۴(۲p-a)}=\frac{\pi(p-a)ap}{۸b}$$

اگر شعاع دایرهٔ مطلوب را $R_۰$ بگیریم، داریم :

$$\pi R_۰^۲=\frac{\pi(p-a)ap}{۸b}\Rightarrow R_۰=\sqrt{\frac{(p-a)pa}{۸b}}$$

راه حل دیگر. مساحت اوّلین ذوزنقه :

$$S_T=\left[۱-\left(\frac{h}{H}\right)^۲\right]S_\Delta=\left[۱-\left(\frac{p-a}{p}\right)^۲\right]S_\Delta=\frac{۲ab}{p^۲}\ S_\Delta$$

آن قسمت از مساحت ذوزنقه، که به‌وسیلهٔ دایره اشغال می‌شود :

$$\sigma=\frac{S_۰}{S_T}=\frac{\pi(p-a)a^۲p^۲}{۴p.۲ab.S_\Delta}=\frac{\pi(p-a)ap}{۸b.S_\Delta}$$

چون همهٔ ذوزنقه‌های متوالی با دایره‌هایی که در آنها محاط هستند، با ذوزنقهٔ اوّل و دایرهٔ محاط در آن متشابه‌اند، این نسبت برای همهٔ ذوزنقه‌ها، و درنتیجه برای مجموع آنها، درست است. به این ترتیب مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاطی برابر است با :

$$\sigma.S_\Delta=\frac{\pi(p-a)p}{۸}.\frac{a}{b}$$

و از آن‌جا :

$$R_۰=\sqrt{\frac{\sigma S_\Delta}{\pi}}=\sqrt{\frac{(p-a)p}{۸}.\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{(b^۲-\frac{a^۲}{۴})a}{۸b}}=\frac{H}{۲}\sqrt{\frac{a}{۲b}}$$

روش ساختن دایرهٔ مطلوب :

به این ترتیب، مثلث متساوی‌الساقین داده شده، به‌وسیلهٔ یک دستگاه خطهای موازی با قاعده، به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی تقسیم می‌شود، که در هر کدام از آنها دایره‌ای محاط شده است و مساحت هر یک از این دایره‌ها قسمت مشخصی از مساحت ذوزنقهٔ مربوطه را اشغال می‌کند و این نسبت ارتباطی به اندازه‌های ذوزنقه ندارد. بنابراین مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌های محاط در ذوزنقه‌ها، برابر است با مساحت دایره‌ای که در ذوزنقهٔ متساوی الساقینی متشابه با این ذوزنقه‌ها محاط باشد و بخصوص مساحت این ذوزنقه برابر با مساحت همهٔ ذوزنقه‌ها، یعنی مساوی مساحت مثلث داده شده باشد.

مساحت اوّلین ذوزنقه (φ) برابر است با مساحت مثلث داده شده (F)، منهای مساحت دومین مثلث (f). مثلث مفروض با دومین مثلث متشابه است و بنابراین مساحتهای آنها بر نسبت مجذور نسبت عنصرهای خطی آنهاست :

$$\left.\begin{aligned} F &= \psi L^2 \\ f &= \psi l^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\varphi = F - f = \psi(L^2 - l^2) = \psi\lambda^2 \\ &(\lambda^2 = L^2 - l^2) \end{aligned}$$

شعاع دایره‌ای را که در ذوزنقهٔ مجهول محاط است R، و شعاع دایرهٔ محاط در اوّلین ذوزنقه را r می‌گیریم. در این صورت :

$$F \div \varphi = R^2 \div r^2 \;;\; R^2 = \frac{F}{\varphi} r^2 = \frac{L^2}{\lambda^2} r^2 \;;\; R = \frac{L}{\lambda} r$$

به عنوان عنصر خطی نزولی، نصف قاعدهٔ مثلثهای متشابه را انتخاب می‌کنیم $\left(\frac{a'}{2}, \frac{a}{2}\right)$،

در این صورت :

$$R = \frac{a \div 2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a'}{2}\right)^2}} r$$

از این‌جا روش رسم روشن می‌شود (شکل ب). روی نصف قاعدهٔ مثلث مفروض $\left(\frac{a}{2}\right)$، نیمدایره‌ای می‌سازیم. در این نیمدایره، مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط می‌کنیم که یکی از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی $\frac{a}{2}$ و ضلع دیگر مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی $\frac{a}{2}$ باشد (a قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که متشابه با مثلث مفروض و معادل اوّلین ذوزنقه است). از مرکز قاعدهٔ مثلث، پاره‌خطی مساوی $\frac{a}{2}$ جدا می‌کنیم و از نقطه‌ای که به دست می‌آید به مرکز اوّلین دایرهٔ محاطی وصل می‌کنیم، از رأس مجاور به قاعدهٔ مثلث مفروض، نیمخطی موازی این خط رسم می‌کنیم، مرکز دایرهٔ مورد نظر به‌دست می‌آید، که از آن‌جا بسادگی شعاع و خود دایره پیدا می‌شود.

در شکل (ب) علاوه بر آن، ذوزنقهٔ معادل مثلث مفروض هم رسم شده است.

حالت خاص. حالت خاصی را، که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، بررسی می‌کنیم. از نقطهٔ تماس هر دو دایرهٔ محاطی متوالی، مماس مشترک دو دایره را، که موازی با قاعدهٔ مثلث می‌شود، رسم می‌کنیم ؛ در این صورت مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض به ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی تقسیم می‌شود، که در هر کدام از آنها، دایره‌ای محاط

شده است. چون این ذوزنقه‌ها همراه با دایره‌های محاطی آنها، شکلهای متشابهی هستند، نسبت مساحت هر دایره به مساحت ذوزنقهٔ محیطی آن، برای همهٔ شکلها مقدار ثابتی است. بنابراین نسبت مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌ها به مجموع مساحتهای ذوزنقه‌ها (یعنی مساحت مثلث مفروض) هم مساوی همین مقدار ثابت می‌شود. از طرف دیگر، مساحت هر یک از ذوزنقه‌ها، برابر است با دو برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که ارتفاعش برابر با ارتفاع ذوزنقه (یعنی قطر دایرهٔ محاطی) باشد (چرا؟). مساحت ذوزنقه‌ای که بر دایرهٔ مورد جستجو محیط باشد (و ضمناً با بقیهٔ ذوزنقه‌ها متشابه هم باشد)، باید مساوی مساحت مثلث مفروض باشد؛ پس نصف مساحت ذوزنقهٔ مجهول (شکل این نصف مساحت، یک مثلث متساوی‌الاضلاع است)، باید مساوی نصف مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض باشد. در این صورت، نسبت ارتفاع ذوزنقهٔ مجهول به ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض، برابر است با $\sqrt{۲} \div ۱$. طریقهٔ رسم، از شکل (پ) معلوم است:

$$۱ \div \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \div ۲$$

به قطر ارتفاع AD، نیمدایرهٔ AFD را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ E، عمود EF را بر AD اخراج می‌کنیم (این عمود، از نقطهٔ j، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی مثلث می‌گذرد). روی ارتفاع AD، نقطهٔ G را به فاصلهٔ DF از نقطهٔ D، معین می‌کنیم. DG ارتفاع ذوزنقهٔ PQRS است، که مساحت آن برابر است با مساحت مثلث متساوی الاضلاع مفروض. بنابراین، دایرهٔ مورد نظر، دایره‌ای به قطر DG است (مساحت این دایره برابر است با مجموع مساحتهای بی‌نهایت دایره‌ای که در مثلث متساوی‌الاضلاع مفروض محاط شده‌اند). برای مثلث متساوی‌الاضلاع داریم:

$$R_{\circ} = \frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۳}{۲}}a \ ; \ S_{\circ} = \pi R^{۲} = \frac{۳\pi}{۳۲}a^{۲} \ ; \ S_{\Delta} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \ ;$$

$$\sigma = \frac{S_{\circ}}{S_{\Delta}} = \frac{۳\pi \times ۴}{۳۲\sqrt{۳}} = \frac{۳\pi}{۸\sqrt{۳}} \approx ۰/۷$$

ب. برای پاسخ به سؤال مسأله، کافی است مجموعهٔ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقینی را بررسی کنیم، که بر یک دایره محیط هستند؛ مساحت هر یک از این ذوزنقه‌ها، برابر است با حاصلضرب ارتفاع (یعنی قطر دایره)، در خط میانهٔ ذوزنقه (یعنی خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند)؛ از آن‌جا که ارتفاع همهٔ ذوزنقه‌ها یکی است، نسبت مساحت ذوزنقه‌ها مساوی نسبت خط میانهٔ آنها می‌شود.

کوچکترین خط میانه مربوط به حالتی است که ذوزنقه به مربع تبدیل شود؛ در این

حالت، مساحت ذوزنقه محیط بر دایره، به حداقل خود می‌رسد و بنابراین نسبت مساحت ذوزنقه، حداکثر می‌شود : این نسبت برابر است با : $\pi \div ۴ = ۰/۷۸۵$. با بزرگ شدن زاویهٔ رأس، خط میانهٔ ذوزنقه و بنابراین مساحت آن بزرگ می‌شود ؛ و در این وضع، «اشغال» مساحت ذوزنقه، به‌وسیلهٔ دایره (یعنی «اشغال» مساحت مثلث، به وسیلهٔ دایره‌های محاطی)، روبه کاهش می‌رود (و به سمت صفر میل می‌کند).

۴ . ۳. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های محیطی و محاطی

۴ . ۳ . ۲. زاویه

۴ . ۳ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۲۸۲. اگر $K \leq ۲$ باشد آن‌گاه جواب مسأله عبارت است از $\operatorname{Arc}\cos\frac{۱-\sqrt{۱-۲K}}{۲}$ ، $\operatorname{Arc}\cos\frac{۱-\sqrt{۱-۲K}}{۲}$ و $\pi - ۲\operatorname{Arc}\cos\frac{۱-\sqrt{۱-۲K}}{۲}$ خواهد بود.

۴ . ۳ . ۳. ضلع

۴ . ۳ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۲۸۳. می‌دانیم که در هر مثلث $R = \frac{abc}{۴S}$ و $r = \frac{S}{p}$ است. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ داریم :

$$b = c \Rightarrow R = \frac{ab^۲}{۴\sqrt{(\frac{a}{۲}+b)(b-\frac{a}{۲})(\frac{a}{۲})^۲}} \Rightarrow R = \frac{b^۲}{۲\sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۶۹}{۲۴} = \frac{b^۲}{۲\sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}} \quad (۱)$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\frac{\sqrt{(b-\frac{a}{۲})(\frac{a}{۲})^{۲}}}{b+\frac{a}{۲}}$$

$$=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{b-\frac{a}{۲}}{b+\frac{a}{۲}}}\Rightarrow\frac{۱۰}{۳}=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{b-\frac{a}{۲}}{b+\frac{a}{۲}}}\quad(۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازهٔ a و b، ضلعهای مثلث قابل محاسبه است.

$$\begin{cases}۲۴b^{۲}=۲۳۸\sqrt{b^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}}\\ ۳a\sqrt{\frac{b-\frac{a}{۲}}{b+\frac{a}{۲}}}=۲۰\end{cases}$$

از حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بالا اندازهٔ a و b به‌دست می‌آید.

۴ . ۳ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴ . ۳ . ۴ . ۱. اندازهٔ ارتفاع

۲۸۴. با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB=AC)$، $R=\dfrac{a^{۲}}{۲\sqrt{a^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴}}}$

است و $r_b=\dfrac{b}{۲}\sqrt{\dfrac{a+\frac{b}{۲}}{a-\frac{b}{۲}}}$، با جایگزینی $R=\dfrac{۲۵}{۴}$ و $r_b=۱۲$، اندازهٔ ضلعهای مثلث $a=c=۱۰cm$ و $b=۱۲cm$ به‌دست می‌آید.

از آن‌جا :

$$h_b=\sqrt{a^{۲}-\frac{b^{۲}}{۴}}=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸cm$$

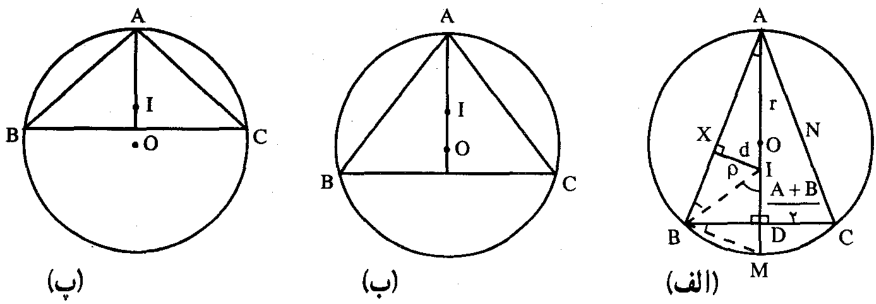
$$h_a.a=h_b.b\Rightarrow h_a\times۱۰=۸\times۱۲\Rightarrow h_b=h_c=۹/۶cm$$

۴ . ۳ . ۵. پاره‌خط

۴ . ۳ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۸۵. راه حل اوّل. در شکل، O مرکز دایرهٔ محیطی و I مرکز دایره محاطی مثلث متساوی‌الساقین ABC با ضلعهای مساوی $AB = AC = S$ است. در این مورد سه حالت متفاوت موجود است که در شکلهای الف، ب و پ مشخص شده‌اند. در حالت (الف)، $\hat{A} \leq ۶۰^\circ$ ؛ در حالت (ب)، $۶۰^\circ \leq \hat{A} \leq ۹۰^\circ$ و در حالت (پ)، $\hat{A} \geq ۹۰^\circ$ است.

(در حالت مرزی $\hat{A} = ۶۰^\circ$ داریم $O = I$ ؛ و چون $\hat{A} = ۹۰^\circ$ باشد، O بر BC واقع است.) راه‌حل را در مورد حالت اوّل به دست می‌دهیم ؛ این راه‌حل را می‌توان با تغییرات جزیی در مورد دو حالت دیگر به کار برد.



در ΔABI داریم : $A\hat{B}I = \frac{۱}{۲}\hat{B}$ و $B\hat{A}I = \frac{۱}{۲}\hat{A}$ ، درنتیجه، زاویهٔ خارجی BIM برابر $\frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B})$ می‌شود. نیز $M\hat{B}C = \frac{۱}{۲}\hat{A}$ و $I\hat{B}C = \frac{۱}{۲}\hat{B}$ ؛ بنابراین : $I\hat{B}M = \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B})$. بنابراین ΔMBI متساوی‌الساقین با : $BM = IM = r - d$ است. فرض می کنیم X نقطه‌ای باشد که در آن دایرهٔ محاطی داخلی بر ضلع AB مماس است. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AXI و ABM متشابه‌اند، بنابراین :

$$\frac{IX}{BM} = \frac{AI}{AM} \quad \text{یا و} \quad \frac{\rho}{r-d} = \frac{r+d}{۲r}$$

که از آن نتیجه می‌شود : $r^۲ - d^۲ = ۲r\rho$. بنابراین : $d = \sqrt{r(r-۲\rho)}$.

تبصره. اولر ثابت کرد که در هر مثلث، d فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محیطی در : $d^۲ = r^۲ - ۲\rho r$ که در آن ρ و r بترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی داخلی‌اند، صادق است.

یکی از نتیجه‌های مفید قضیهٔ اولر نامساوی $r \geq ۲\rho$ است که در آن تساوی اگر و فقط اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، برقرار است.

از آن‌جا که مثلث متساوی‌الساقین با استفاده از اندازهٔ دایرهٔ محیطی و محاطی داخلی آن معین می‌شود، واضح است که هر کمیت دیگر وابسته به این مثلث، ازجمله d را می‌توان برحسب ρ و r بیان کرد. از طرف دیگر مثلثهای مختلف الاضلاع متفاوت بسیاری با همان ρ و r موجودند؛ کشف اولر این است که فاصلهٔ بین مرکزهای این دایره‌ها برای تمام این مثلثها یکسان است. این مطلب به این حقیقت قابل توجه منجر می‌شود که اگر دو دایرهٔ نامتحدالمرکز چنان باشند که مثلثی بتواند محاط در یکی و محیط بر یکی از آنها شود، در این صورت این خانوادهٔ کامل و متصل از مثلثهای نامساوی با این خاصیت موجود است.

این قضیه را بعدها پونسله بترتیب زیر تعمیم داد: اگر دو مقطع مخروطی چنان باشند که n ضلعی‌ای بتواند محاط در یکی و محیط بر دیگری شود، در این صورت بی‌نهایت عدد از چنین n ضلعیهایی داریم.

راه‌حل دوم. (از P. Herdeg). فرض می‌کنیم $h = AD$ ارتفاع نظیر BC باشد، در این صورت: $h = r + d + \rho$. در ΔADC:

$$h = S\sin\hat{C} \qquad (۱)$$

در ΔABM،

$$\frac{AB}{AM} = \frac{S}{۲r} = \sin A\hat{M}B = \sin\hat{C}$$

(زیرا هر دو زاویهٔ AMB و C در کمان $\widehat{BCA}$ محاطند).

درنتیجه:

$$۲r = \frac{S}{\sin\hat{C}} \qquad (۲)$$

در ΔBID:

$$\rho = BD\tan\frac{\hat{B}}{۲} = BD\tan\frac{\hat{C}}{۲}$$

اما: $BD = DC = S\cos\hat{C}$ است، بنابراین:

$$\rho = S\cos\hat{C}\tan\frac{\hat{C}}{۲} = S\cos\hat{C}\,\frac{۱-\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}} \qquad (۳)$$

با حل معادلهٔ $h = r + d + \rho$ برای به‌دست آوردن d، با استفاده از (۱)، (۲) و (۳)

حاصل می‌کنیم :

$$d = h - r - \rho = \frac{S}{۲\sin\hat{C}}\left[۲\sin^۲\hat{C} - ۱ - ۲\cos\hat{C} + ۲\cos^۲\hat{C}\right] = \frac{S(۱ - ۲\cos\hat{C})}{۲\sin\hat{C}}$$

امّا :

$$r^۲ - ۲r\rho = \frac{S^۲}{۴\sin^۲\hat{C}} - \frac{S^۲}{\sin\hat{C}} \cdot \frac{\cos\hat{C}(۱ - \cos\hat{C})}{\sin\hat{C}}$$

$$= \frac{S^۲}{۴\sin^۲\hat{C}}(۱ - ۲\cos\hat{C})^۲ = d^۲$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که :

$$d = \sqrt{r^۲ - ۲r\rho}$$

۴ . ۳ . ۶. شعاع دایره

۴ . ۳ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع

۲۸۶. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را O می‌نامیم. از O به D، E و F، نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بترتیب با ضلعهای BC، AB و AC وصل می‌کنیم. چون $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است، پس $\hat{B} = \hat{C} = ۷۵^\circ$ می‌باشد. از O به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم. در مثلثهای قائم الزاویهٔ AOE و DBO داریم :

$$\cot O\hat{A}E = \cot ۱۵^\circ = \frac{AE}{OE} \Rightarrow ۲ + \sqrt{۳} = \frac{AE}{۲ - \sqrt{۳}} \Rightarrow AE = ۱ = AF$$

$$\cot O\hat{B}D = \cot ۳۷^\circ, ۳۰' = \frac{BD}{DO} \Rightarrow \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۱ + \sqrt{۶} + \sqrt{۲}} = \frac{BD}{۲ - \sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow BD = DC = BE = CF = \frac{۱}{۱ + \sqrt{۶} + \sqrt{۲}} \Rightarrow BC = ۲BD = \frac{۲}{۱ + \sqrt{۶} + \sqrt{۲}} ,$$

$$AB = AC = ۱ + \frac{۱}{۱ + \sqrt{۶} + \sqrt{۲}}$$

با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع مثلث، اندازهٔ R شعاع دایرهٔ محیطی آن قابل مقایسه است.

۴ . ۳ . ۶ . ۲. نسبت شعاعها

۲۸۷. از مثلث $EBO_۲$ که در آن $BE = \frac{۱}{۲}AB$ می‌باشد، داریم :

$$R = O_۲B = \frac{AB}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

از مثلث $ADO_۱$ که در آن $D\hat{A}O_۱ = \frac{۱}{۲}D\hat{A}B = \frac{۱}{۲}(۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲})$ داریم :

$$r = O_۱D = AD.\tan(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۴})$$

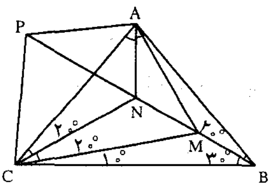
از آن‌جا که $AD = AB\sin\frac{\alpha}{۲}$ (از مثلث ABD) خواهیم داشت :

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۴})}{\sin\alpha}$$

۴.۴. رابطه‌های متری در مثلث متساوی‌الساقین و دایره‌های دیگر

۴.۴.۲. زاویه

۴.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۲۸۹. (الف) نیمساز زاویهٔ A را رسم کنید و BM را امتداد دهید تا نیمساز را در نقطه‌ای مانند N قطع کند (شکل).

چون $BN = NC$ و $B\hat{N}C = ۱۲۰^\circ$، بنابراین هر یک از زاویه‌های BNA و CNA هم، برابرند با ۱۲۰° و $N\hat{C}A = N\hat{C}M = ۲۰^\circ$، یعنی $\Delta NMC = \Delta NCA$ و $MC = AC$. درنتیجه، AMC متساوی‌الساقین است و $A\hat{M}C = ۷۰^\circ$.

(ب) نقطه‌های M، P، A و C بر یک دایره قرار دارند (نقطهٔ M از قسمت (الف) است) ؛ $P\hat{A}C = P\hat{M}C = ۴۰^\circ$.

۴.۴.۳. ضلع

۴.۴.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۲۹۰. با توجه به داده‌های مسأله $A'C' = \frac{AC}{۲}$ است، پس $۴ = \frac{AC}{۲}$ و از آن‌جا $AC = ۸cm$

است. از طرفی داریم:

$$PA(B)=۱۸=AB.AC'=C.\frac{C}{۲}=\frac{C^{۲}}{۲}\Rightarrow C^{۲}=۳۶\ ,\ \ C=۶$$

$$\Rightarrow AB=BC=۶cm$$

۲۹۱. $۲\sqrt{۶}$ سانتیمتر

۴ . ۴ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴ . ۴ . ۴ . ۱. اندازهٔ ارتفاع

۲۹۲. پای ارتفاع از رأس A را H می‌نامیم و OB را رسم می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH:

$$BH=\frac{BC}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴\ ,\ \ OH=\sqrt{OB^{۲}-BH^{۲}}=\sqrt{۲۵-۱۶}=۳$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB، BH ارتفاع وارد بر وتر است. بنابراین داریم:

$$OB^{۲}=OH.OA\Rightarrow ۲۵=۳\times OA\Rightarrow OA=\frac{۲۵}{۳}$$

$$AH=OA-OH=\frac{۲۵}{۳}-۳=\frac{۱۶}{۳}$$

۴ . ۵. پاره‌خط

۴ . ۴ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۹۳. فرض کنید D وسط BC باشد. داریم:

$$b^{۲}=BM^{۲}=(BD+DN)(BD-DN)=BD^{۲}-DN^{۲}$$
$$=AB^{۲}-AD^{۲}-DN^{۲}=(a+b)^{۲}-AD^{۲}-DN^{۲}$$

بنابراین، $AN^{۲}=AD^{۲}+DN^{۲}=(a+b)^{۲}-b^{۲}=a^{۲}+۲ab$.

جواب: $\sqrt{a^{۲}+۲ab}$

۲۹۴. $\sqrt[۴]{۱۲}(۲-\sqrt{۳})$

۲۹۵. $\frac{|a-b|}{۲}$

۴ . ۴ . ۶. شعاع دایره

۴ . ۴ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع

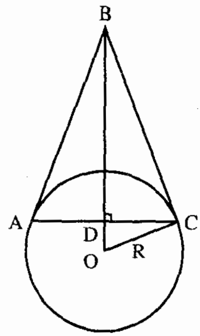
۲۹۶. $۸\frac{۱}{۸}$cm . ثابت کنید که مثلثهای DEC و ABC متشابه و نیز DE = EC = ۱۵cm است. از این نکته استفاده کنید که مرکز این دایره روی محل تلاقی AD و عمود مرسوم بر میانگاه DE قرار دارد، $\sin\hat{A}=\frac{۱۲}{۱۳}$ است.

۲۹۷. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = BC) را در نظر می‌گیریم. ارتفاع BD را که از نقطهٔ O مرکز دایره می‌گذرد، رسم می‌کنیم. داریم :

$$DC^۲ = OD.DB \Rightarrow \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = OD.h \qquad (۱)$$

$$R^۲ = OD^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow R = \frac{a}{۴h}\sqrt{a^۲ + ۴h^۲}$$

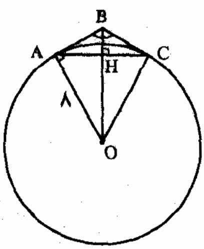


۲۹۸. $\dfrac{b}{۴\sin\alpha\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}$

۲۹۹. $\dfrac{b}{۲}\tan^۳\dfrac{\alpha}{۲}$

۳۰۰. $\dfrac{b}{۲}\tan\dfrac{\alpha}{۲}\tan^۲\left(\dfrac{\pi}{۴}-\dfrac{\alpha}{۲}\right)$

۴ . ۴ . ۷. محیط



۴ . ۴ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۳۰۱. پاره‌خط OB را رسم کرده، نقطهٔ برخورد آن با AC را H می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم :

$$A\hat{O}H = ۳۰° \Rightarrow AH = \frac{OA}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴cm$$

$$\Rightarrow AC = b = ۸cm$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم:

$$\tan A\hat{O}B = \frac{AB}{OA} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{AB}{۸} \Rightarrow AB = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow BC = AB = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} cm$$

در نتیجه: محیط بر حسب سانتیمتر $۲P = AC + ۲AB = ۸ + \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

۴ . ۸ . ۴. مساحت

۴ . ۸ . ۴ . ۱. اندازهٔ مساحت مثلث

۳۰۲. اندازهٔ زاویهٔ رأس مثلث را α رادیان فرض می‌کنیم. می‌دانیم که مساحت قطاع α رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با: $S_{\text{قطاع}} = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۲}$. پس:

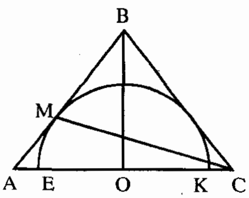
$$\frac{۱۶\pi^۲}{۳} = \frac{\pi \times ۶۴\alpha}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow A\hat{B}C = ۳۰° \Rightarrow B\hat{A}C = B\hat{C}A = ۷۵°$$

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{۱}{۲} AB.BC \sin ۳۰° = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۸ \times \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث}} = ۱۶cm^۲$$

۴ . ۸ . ۴ . ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳۰۳. $\frac{۲۷}{۶۵}cm^۲$.



۳۰۴. قبل از هر چیز بایستی محاسبه‌هایی را انجام دهیم که ما را به یافتن موقعیت مرکز دایره قادر می‌سازد. (در ابتدا بدیهی به نظر می‌رسد که چون BA و BC بر دایره مماس هستند، از این‌رو مرکز دایره روی ارتفاع BH از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار داشته، و درنتیجه، مرکز دایره روی نیمساز زاویهٔ بین ساقها واقع خواهد بود). زاویهٔ BAC را با α نشان می‌دهیم. از

نقطهٔ تماس، شعاع OM را رسم می‌کنیم. آن‌گاه زاویهٔ BOM نیز برابر α خواهد بود.
طبق فرض، $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ است. با استفاده از فرمول $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ به $\cos\alpha = \frac{15}{17}$، و درنتیجه به: $\sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \frac{8}{17}$ می‌رسیم. از مثلث BOM درمی‌یابیم که:

$$BM = OM\tan\alpha = \frac{8}{15}\ ,\ BO = \frac{OM}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{15}{17}} = \frac{17}{15}$$

از این گذشته چنین داریم:

$$AB = AM + BM = \frac{15}{8} + \frac{8}{15} = \frac{289}{120}\ ,\ BH = AB\sin\alpha = \frac{289}{120}.\frac{8}{17} = \frac{17}{15}$$

این امر بدین معنی است که $BH = BO$ بوده و از این‌رو نقطه‌های O و H برهم منطبق هستند. بنابراین برای حل مجدد مسأله بایستی شکل جدید (صحیح) را رسم کنیم.

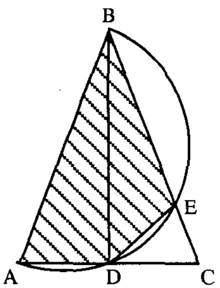
با کمک فرمول $S = \frac{1}{2}AM.AK.\sin\alpha$ مساحت مثلث AMK را تعیین می‌کنیم.

می‌دانیم که: $AM = \frac{15}{8}cm$ و $\sin\alpha = \frac{8}{15}$ است.

بدین ترتیب حل مسأله به یافتن طول پاره‌خط AK تحویل می‌یابد. از تساوی $AM^2 = AE.AK$، استفاده می‌کنیم. اگر $AE = x$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه $AK = 2 + x$ بوده و معادلهٔ $\frac{225}{64} = x(2+x)$ نتیجه می‌شود، که از آن نیز $x = \frac{9}{8}$ به‌دست می‌آید. آن‌گاه $AK = \frac{9}{8} + 2 = \frac{25}{8}cm$ بوده و درنتیجه تساوی زیر را خواهیم داشت:

$$S_{AMK} = \frac{1}{2}AM.AK.\sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{15}{8}.\frac{25}{8}.\frac{8}{17} = \frac{375}{272}cm^2$$

۳۰۵. مساحت S چهارضلعی ADEB برابر است با:



$$S = S_{ABC} - S_{DEC}$$

داریم: $S_{ABC} = \frac{AC}{2}.BD = 12(cm^2)$

برای محاسبهٔ مساحت DEC به این نکته توجه می‌کنیم که دو مثلث DEC و DBC در رأس D مشترکند و بنابراین دارای ارتفاعهای مساوی هستند (ارتفاع وارد از D بر قاعده

که در شکل رسم نشده است). بنابراین داریم :

$$S_{DEC} : ۶ = CE : CB$$

از طرف دیگر داریم :

$$CE \times CB = CD \times CA$$

و از آن‌جا :

$$CE = \frac{CD \times CA}{CB}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود :

$$S_{DEC} = ۶ \times \frac{CE}{CB} = ۶ \times \frac{CD \times CA}{CB^۲} = ۶ \times \frac{۲+۴}{۲^۲+۶^۲} = ۱/۲ (cm^۲)$$

۴ . ۴ . ۹. رابطه‌های متری

۳۰۶. از M به A، B و C وصل می کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH و MCH″ متشابه‌اند، بنابراین داریم :

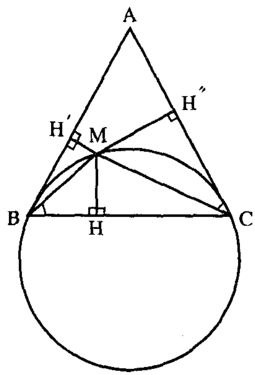
$$\frac{MH}{MH''} = \frac{MB}{MC} \qquad (۱)$$

همچنین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MBH′ و MCH متشابه‌اند. بنابراین داریم :

$$\frac{MH'}{MH} = \frac{MB}{MC} \qquad (۲)$$

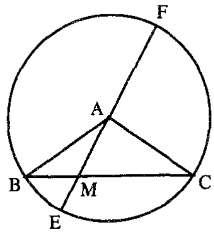
از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\frac{MH}{MH''} = \frac{MH'}{MH} \Rightarrow MH^۲ = MH'.MH''$$



۳۰۷. به مرکز A و به شعاع AC = AB دایره‌ای رسم می کنیم و نقطه‌های برخورد خط AM با این دایره را E و F می‌نامیم. خواهیم داشت :

$$MB.MC = ME.MF$$



امّا:

$$ME = AE - AM = AB - AM$$
$$MF = AF + AM = AB + AM$$

پس می‌توان نوشت:

$$MB.MC = (AB - AM)(AB + AM) = AB^2 - AM^2$$

۴ . ۴ . ۱۰ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۸. فرض کنید KL کمان واقع در درون مثلث ABC باشد. با امتداد دادن ضلعهای AB و BC، از سمت نقطهٔ B، کمان $\overset{\frown}{MN}$ را قرینه با کمان $\overset{\frown}{KL}$، نسبت به قطر موازی با AC، به دست می‌آوریم. چون $\hat{B}$ با کمان برابر با $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{KL}+\overset{\frown}{MN})=\overset{\frown}{KL}$ برابر است، کمان $\overset{\frown}{KL}$ طولی ثابت دارد و زاویهٔ مرکزی متناظر با آن، برابر با زاویهٔ B است.

۳۰۹. پاره‌خط راست PQ را مماس بر دایرهٔ مورد نظر مسأله می‌گیریم. نقطهٔ O، مرکز این دایره، در وسط قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC قرار دارد. قرار می‌گذاریم:

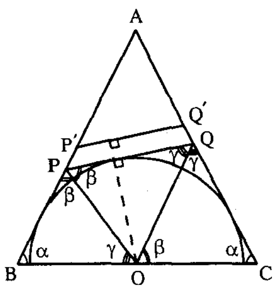
$$P\hat{B}O = Q\hat{O}C = \alpha \;,\; B\hat{P}O = Q\hat{P}O = \beta \;,\; C\hat{Q}O = P\hat{Q}O = \gamma$$

(شکل). در این صورت، با توجه به چهارضلعی CBPQ، داریم:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360° \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = 180°$$

بنابراین، مثلثهای BPO و CQO متشابه‌اند و داریم:

$$BP.CQ = BO.OC = \frac{1}{4}BC^2$$



اکنون، پاره‌خط راست $P'Q'$ را در نظر می‌گیریم که، بر دایرهٔ به مرکز O، مماس نباشد. پاره‌خط PQ را موازی $P'Q'$ و مماس بر دایره طوری رسم می‌کنیم که P روی AB و Q روی AC باشد. در این صورت، بنابر آنچه ثابت کردیم، داریم :

$$\frac{۱}{۴}BC^{۲} = BP.CQ \neq BP'.CQ'$$

حکم مسأله، به‌طور کامل، ثابت شد.

۴ . ۴ . ۱۱. مسأله‌های ترکیبی

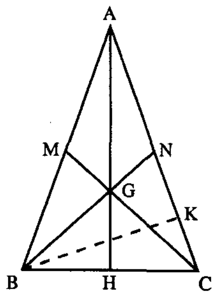
۳۱۰. ۱. دو مثلث متساوی‌الساقین GBC و BMC، چون در یک زاویهٔ C مشترک هستند، متشابه می‌باشند. پس داریم :

$$\frac{GC}{BC} = \frac{BC}{MC}$$

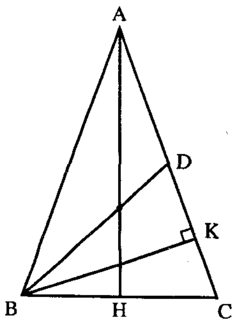
و یا :
$$BC^{۲} = GC \times MC$$

اما : $GC = \frac{۲}{۳}MC$ پس $BC^{۲} = \frac{۲}{۳}MC^{۲}$

و یا :
$$MC^{۲} = \frac{۳}{۲}BC^{۲} \qquad (۱)$$



۲. در مثلث AHC داریم : $AC = ۴HC$ پس : $۱۶HC^{۲} - HC^{۲} = a^{۲}$ و یا : $HC = \frac{a\sqrt{۱۵}}{۱۵}$ پس : $BC = \frac{۲a\sqrt{۱۵}}{۱۵}$ و $AC = \frac{۴a\sqrt{۱۵}}{۱۵}$. برای محاسبهٔ طول میانه‌های وارد بر دو ساق از رابطهٔ (۱) قسمت اول استفاده می‌کنیم و داریم : $MC^{۲} = \frac{۳}{۲}BC^{۲} = \frac{۲a^{۲}}{۵}$ و از آن‌جا :



$MC = NB = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. برای محاسبهٔ طول ارتفاعهای وارد بر دو ساق، ملاحظه می‌کنیم که مثلث ABC با مثلث BCN متشابه است و نسبت تشابه آنها ۲ می‌باشد، پس ارتفاع BK نصف ارتفاع AH، یعنی مساوی با $\frac{a}{2}$ است.

برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویه‌های B و C، ارتفاع BK و نیمساز BD را رسم می‌کنیم، داریم :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = 2$$

پس :

$$DC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{3}AC$$

و یا :

$$DC = \frac{4a\sqrt{15}}{45}$$

از طرف دیگر از تشابه دو مثلث AHC و BKC نتیجه می‌شود :

$$\frac{AC}{HC} = \frac{BC}{KC} = 4$$

پس :

$$KC = \frac{1}{4}BC = \frac{a\sqrt{15}}{30}$$

بنابراین :

$$KD = CD - CK = \frac{a\sqrt{15}}{18}$$

و از مثلث KDB حاصل می‌شود :

$$BD^2 = BK^2 + KD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{108} = \frac{8a^2}{27}$$

و یا :

$$BD = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$$

۳. برای ترسیم دایره‌ای که از B و C بگذرد و در این نقطه‌ها بر AB و AC مماس باشد، کافی است از C عمودی بر AC و از B عمودی بر AB رسم کنیم، این دو عمود یکدیگر را در نقطهٔ O مرکز دایرهٔ مطلوب که روی AH واقع است، قطع می‌کنند. چون زاویه‌های ACO و ABO قائمه هستند، دایرهٔ به قطر AO از B و C می‌گذرد. برای اثبات آن که O' مرکز دایرهٔ محاطی مثلث است، کافی است ثابت کنیم، BO' نیمساز زاویهٔ B است. به این منظور ملاحظه می‌کنیم که اندازهٔ زاویه‌های $\widehat{O'BC}$ و $\widehat{O'BA}$ بترتیب، مساوی با نصف اندازه‌های دو کمان متساوی $\widehat{O'C}$ و $\widehat{O'B}$ می‌باشد و حکم ثابت است.

۴. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCA داریم:

$$CH^۲ = OH \times HA \quad \text{و یا} \quad \frac{a^۲}{۱۵} = a \times OH$$

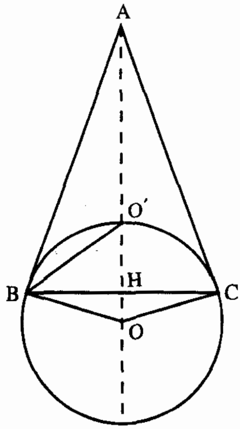
پس: $HO = \frac{a}{۱۵}$ ؛ از طرف دیگر در همین مثلث داریم:

$$OC^۲ = OH \times OA = \frac{a}{۱۵} \times \frac{۱۶a}{۱۵} = \frac{۱۶a^۲}{۲۲۵}$$

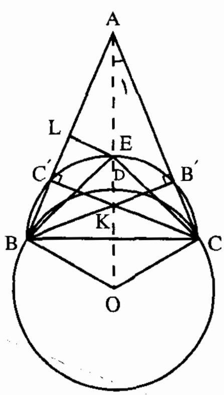
پس OC یعنی شعاع دایرهٔ رسم شده مساوی با $\frac{۴a}{۱۵}$ است.

چون OA قطر دایرهٔ محیطی $\frac{۱۶a}{۱۵}$ است، شعاع این دایره $\frac{۸a}{۱۵}$ می‌باشد. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، O′H است و داریم:

$$O'H = O'O - OH = \frac{۴a}{۱۵} - \frac{a}{۱۵} = \frac{a}{۵}$$



۳۱۱. ۱. مرکز O محل برخورد عمودهای رسم شده بر AB و AC در نقطه‌های B و C است.



زاویه‌های BB′C و CC′B که محاط در نیمدایرهٔ (H) است قائمه‌اند، پس BB′ و CC′ دو ارتفاع و K مرکز ارتفاعی روی سومین ارتفاع AH است. نقطهٔ E روی نیمسازهای زاویه‌های B′AC′ و B′KC′ است و داریم:

$$E\hat{C'}C = \frac{\widehat{EB'C}}{۲} = ۴۵^\circ \;,\; A\hat{C'}C = ۹۰^\circ$$

درنتیجه: CE′ نیمساز زاویهٔ AC′K است. همچنین EB′

نیمساز زاویهٔ $AB'K$ است.

۲. $D\hat{B}E = C\hat{B}E - C\hat{B}D$. در دایـرهٔ (H)، $C\hat{B}E = \frac{\overset{\frown}{CE}}{۲} = ۴۵°$ و در دایـرهٔ (O)،

$C\hat{B}D = \frac{۱}{۲}C\hat{O}D$ (زاویهٔ مرکزی نظیر). امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ COA، زاویهٔ $C\hat{O}A$

(یا $C\hat{O}D$) متمم زاویهٔ $A_۱$ است :

$$C\hat{O}A = ۹۰° - \hat{A}_۱ = ۹۰° - \frac{\hat{A}}{۲} \ ; \ C\hat{B}D = \frac{C\hat{O}A}{۲} = ۴۵° - \frac{\hat{A}}{۴} \ ;$$

$$D\hat{B}E = ۴۵° - \left(۴۵° - \frac{\hat{A}}{۴}\right) = \frac{\hat{A}}{۴}$$

۳. چهارضلعی BOCK لوزی است. درنتیجه BB' و OC موازی یکدیگرند، زیرا هر دو بر AC عمودند، همچنین که OB و CC' عمود بر AB هستند، بعلاوه قطرهای OK و BC برهم عمودند.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB داریم :

$$HA = ۴cm \ , \ BH = ۲cm \ , \ BH^۲ = HO.HA$$

از آن‌جا :

$$OK = ۲cm \ , \ HO = ۱cm$$

$$aireOBKC = \frac{۱}{۲}BC.OK = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴cm^۲$$

۴. شعاع دایرهٔ O.

$$OB^۲ = OH.OA = ۱ \times ۵ = ۵ \Rightarrow OB = \sqrt{۵}cm$$

نقطهٔ E روی نیمسازهای درونی زاویه‌های $AB'KC'$ و به یک فاصله از ضلعهای چهارضلعی مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی است. شعاع دایره برابر EI است، عمود بر AC'.

از مثلثهای متشابه AEL و AOB داریم :

$$\frac{AE}{AO} = \frac{EL}{OB} = \frac{AL}{AB}$$

امّا :

$$AE = AH - EH = ۴ - ۲ = ۲cm$$

$$AO = AH + OH = ۴ + ۱ = ۵cm \ , \ OB = \sqrt{۵}cm$$

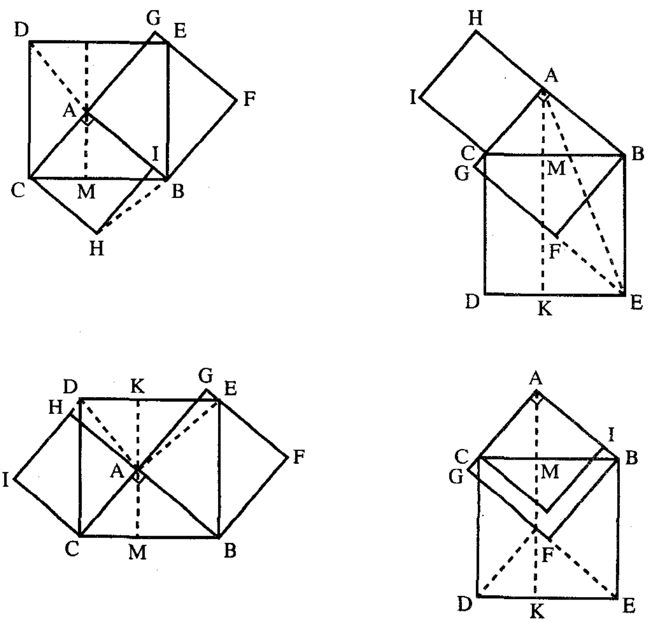
از آن‌جا :

$$\frac{۲}{۵} = \frac{EL}{\sqrt{۵}} \Rightarrow EL = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}cm$$

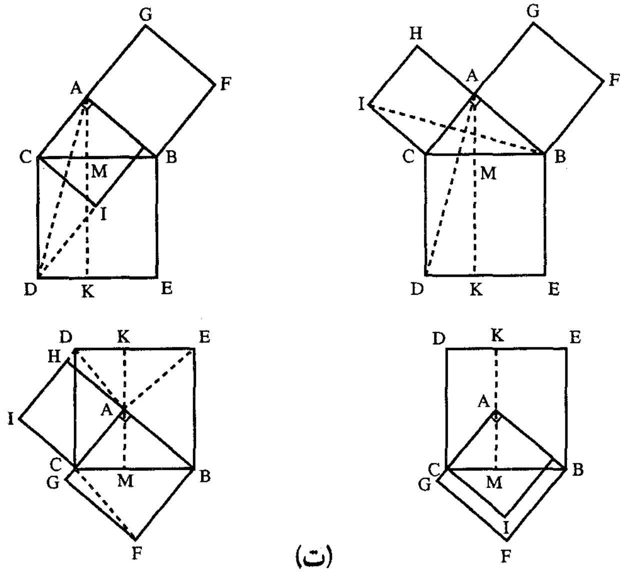
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه

۵. ۱. تعریف و قضیه

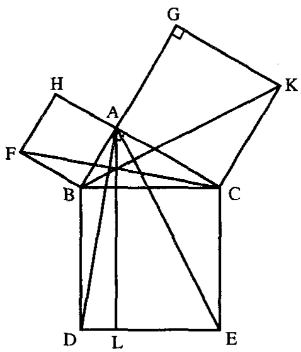
۳۱۲. در زمان ما قضیهٔ فیثاغورس را می‌توان به صدها روش ثابت کرد، بله، به صدها روش! تقریباً هر قرنی که می‌گذرد روشهای جدیدی برای اثبات این قضیه پیدا می‌شود و یا لااقل فکر روشهای جدید اثبات به‌وجود می‌آید؛ هنوز هم افزایش تعداد این اثباتها به پایان نرسیده است. اقلیدس در کتاب «مقدمات» خود (کتاب I) به ۸ طریق این قضیه را ثابت کرده است. (شکلهای پ و ت)؛ که ما یکی از این روشها را آن‌طور که اقلیدس در مقدمات خود داده است (حکم ۴۷) می‌آوریم. متعلق بودن این اثبات به اقلیدس را پروکلوس (۴۱۰ ـ ۴۸۵ میلادی) گواهی نموده است: «فرض کنید، ABC مثلث



(پ)



(ت)



قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ قائمه BAC باشد. من حکم می‌کنم که مربع روی BC برابر است با مربعهای روی BA و AC روی هم (شکل).

اثبات. مربع BDEC را روی BC و مربعهای HB و GC را بترتیب، روی BA و AC می‌سازیم (حکم ۴۶). از نقطهٔ A، خط راست AL را موازی BD و CE می‌کشیم (حکم ۳۱) ؛ AD و FC را وصل می‌کنیم. چون هر کدام از زاویه‌های BAC و BAH قائمه‌اند (تعریف ۱۰)، یعنی از نقطهٔ A روی خطی مثل BA، دو خط راست AC و AH را در دو جهت طوری رسم کرده‌ایم که زاویه‌های مجانبی به مجموع دو قائمه تشکیل داده‌اند، درنتیجه، CA روی همان خط راست CH قرار دارد (حکم ۱۴). به همین ترتیب، AB هم در امتداد AG قرار می‌گیرد. و چون زاویهٔ DBC با زاویهٔ FBA برابر است (اصل ۱)، زیرا هر کدام از آنها قائمه‌اند، اگر زاویهٔ مشترک ABC را اضافه کنیم، به معنای این می‌شود که زاویهٔ DBA با زاویهٔ FBC برابر است (اصل ۲)، زیرا اگر به دو مقدار برابر، یک مقدار اضافه کنیم، دو مقدار برابر به‌دست می‌آید. چون DB برابر BC و FB برابر BA است (تعریف ۲۲)، پس دو ضلع DB و BA، نظیر به نظیر، با دو ضلع BC و FB برابرند، و زاویهٔ DBA با زاویهٔ FBC برابر است ؛ یعنی قاعدهٔ AD با قاعدهٔ FC و مثلث ABD با مثلث

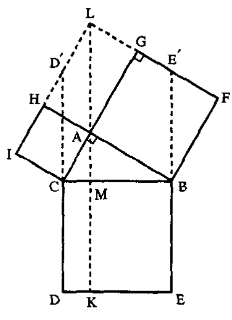
FBC برابر می‌شود (حکم ۴). دو برابر مثلث ABD، مستطیل BL است (حکم ۴۱)، زیرا آنها در قاعدهٔ BD مشترکند و بین دو خط موازی BD و AL قرار گرفته‌اند (حکم ۴۱). دو برابر مثلث FBC هم (حکم ۴۱)، مربع HB می‌شود، زیرا قاعدهٔ هر دوی آنها FB است و بین دو خط موازی FB و HC قرار دارند. ولی دو برابر دو مقدار برابر، با هم برابرند (اصل ۵)؛ یعنی مستطیل BL با مربع HB برابر می‌شود. به همین ترتیب، با وصل AE و BK، ثابت می‌شود که مستطیل CL برابر است با مربع GC؛ یعنی تمامی مربع BDEC برابر است با دو مربع HB و GC روی هم. اما BDEC، مربعی است که روی BC ساخته شده است و HB و GC، مربعهای روی BA و AC. به این ترتیب، مربع روی ضلع BC برابر است با مجموع مربعهای روی ضلعهای BA و AC. یعنی، در مثلث قائم‌الزاویه، مربع روی ضلع مقابل به زاویهٔ قائمه (وتر)، برابر است با مجموع مربعهای روی ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.» اثبات از این نظر جالب است که به وسیلهٔ اقلیدس، و در بیش از دو هزار سال پیش، داده شده است و با اثبات امروزی آن، تفاوت ناچیزی دارد.

علاوه بر روشهای اثبات اقلیدس، ما به چند روش جالب دیگر هم که به هم ارزی شکلها مربوط می‌شود، می‌پردازیم.

در تمام این اثباتها از این علامتها استفاده می‌کنیم.

$$\hat{A} = 90^\circ \quad , \quad BC = a \quad , \quad CA = b \quad , \quad AB = c$$

اثبات خواجه نصیرالدین طوسی (سال ۱۵۹۴ م). داریم (شکل ث) :



(ث)

$$\Delta GAL = \Delta ABC \; , \; LA = CB \; , \; G\hat{A}L = A\hat{B}C = C\hat{A}M$$

بنابراین LAMK خط راست است. شکلهایی با مساحتهای مساوی به‌دست می‌آید :

$$DKMC = CALD' = CAHI = b^2$$

و به همین ترتیب :

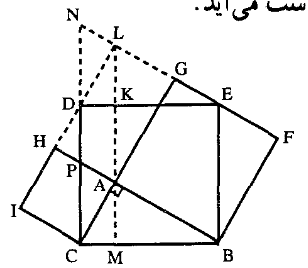
$$KEBM = ABE'L = ABFG = c^2$$

ولی $DEBC = DKMC + KEBM \ , \ DEBC = a^۲$

بنابراین $a^۲ = b^۲ + c^۲$

اثبات هوفمان (سال ۱۸۲۱).

CD و FG را امتداد می‌دهیم تا در N به هم برسند (شکل ج). شکلهای هم‌ارز (یعنی با مساحتهای مساوی) به‌دست می‌آید.



(ج)

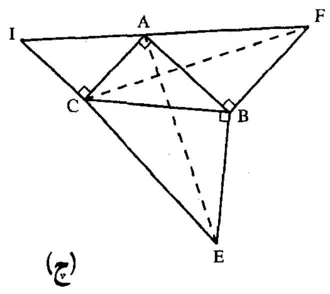
$PALN = CALD = CAHI = b^۲ \ ;$

$ABEL = ABFG = c^۲ \ ; \ PBEN = CBED = a^۲ \ ;$

ولی $PBEN = PALN + ABEL$

بنابراین $a^۲ = b^۲ + c^۲$

اثبات دیگری از همین مؤلف که خیلی جالب و عجیب است:



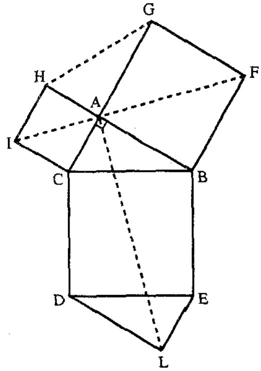
(چ)

پاره‌خط BF را عمود بر AB ومساوی آن رسم می‌کنیم (شکل چ)، بعد پاره خط CI را عمود بر AC و مساوی آن و بالاخره BE را عمود بر BC و مساوی آن رسم می‌کنیم. بسادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های F، A و I بر یک امتدادند.

چهارضلعیهای IFBC و ABEC هم‌ارزند، زیرا دو مثلث CBF و ABE مساوی و دو مثلث ICF و ACE هم‌ارزند. از هر دو چهارضلعی، قسمت مشترک آنها، مثلث ABC را حذف می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{c^۲}{۲} + \frac{b^۲}{۲} = \frac{a^۲}{۲}$$

اثبات تمپلهوف (سال ۱۷۶۹). داریم (شکل ح) :



(ح)

$\Delta LDE = \Delta ABC$, $\Delta AGH = \Delta ABC$,

$LDCA = FBCI = ABEL$, $IHGF = ICBF$

بنابراین : $ICBFGH = ACDLEB$

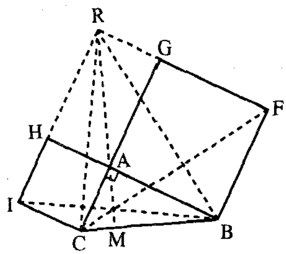
این شش ضلعیها در مثلث ABC مشترکند، همچنین دومثلث AGH و LDE برابرند، بنابراین باقیماندهٔ این چندضلعیها هم برابر می‌شوند، یعنی $CDEB = CAHI + ABFG$ و یا $a^۲ = b^۲ + c^۲$

اثبات رنان (سال ۱۸۸۹). داریم (شکل خ) :

$\Delta HRA = \Delta ABC \Rightarrow RA = BC$

توجه می‌کنیم که : $\Delta IBC = \Delta CAR$; $\Delta FBC = \Delta BAR$

و بسادگی ثابت می‌شود که : $RA \perp BC$, $BI \perp CR$, $CF \perp BR$



(خ)

زیرا AR (یعنی RM)، BI و CF ارتفاعهای مثلث BCR هستند و در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

$\Delta CAR = \frac{۱}{۲} CA.RG = \frac{۱}{۲} b.b = \frac{۱}{۲} b^۲$,

$$\Delta BAR = \frac{۱}{۲} BA.RH = \frac{۱}{۲} c.c = \frac{۱}{۲} c^{۲} \ ,$$

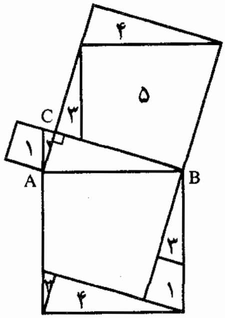
بنابراین
$$\Delta CAR + \Delta BAR = \frac{۱}{۲}(b^{۲} + c^{۲})$$

ولی
$$\Delta CAR = \frac{۱}{۲} RA.CM \ ; \ \Delta BAR = \frac{۱}{۲} RA.BM$$

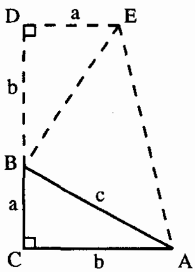
و بنابراین
$$\Delta CAR + \Delta BAR = \frac{۱}{۲} RA(CM + BM) = \frac{۱}{۲} a.a = \frac{۱}{۲} a^{۲}$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:
$$b^{۲} + c^{۲} = a^{۲}$$

در سدهٔ نهم میلادی **آنارتیسی** اثبات خودش را براساس شکل زیر قرار داد (شکل د).



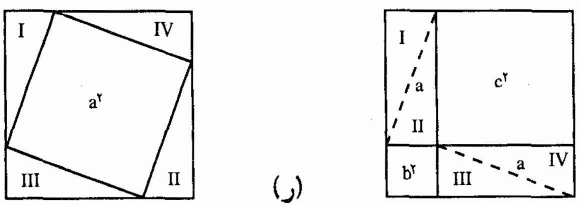
(د)



(ذ)

ژنرال جیمز گارفیلد، چند سال قبل از این که رئیس جمهور امریکا شود، با استفاده از شکل روبه‌رو روشی برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس یافت. شما هم با برابر قراردادن مساحت ذوزنقه با مجموع مساحتهای سه مثلث، ثابت کنید که $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$. ابتدا باید قائمه بودن زاویهٔ EBA را ثابت کنید (شکل ذ). همهٔ روشهایی که تا این‌جا برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس ذکر کردیم، براساس شکلهای هم‌ارز بود. اگر علاوه بر آن، از جابه‌جایی شکلها هم استفاده کنیم، روشهای جدیدی برای اثبات پیدا می‌شود.

ابتدا به اثبات احتمالی خود فیثاغورس می‌پردازیم.



(ر)

مربعی می‌سازیم که ضلع آن مساوی $b+c$ یعنی مجموع ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم الزاویهٔ داده شده باشد (شکل ر). این مربع را به دو مربع $b^۲$ و $c^۲$ و دو مستطیل مساوی به ضلعهای b و c تقسیم می‌کنیم.

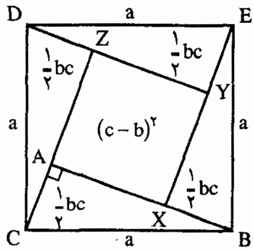
این مستطیلها را به نوبهٔ خود به چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی I، II، III و IV تقسیم می‌کنیم.

این مثلثها را آن‌طور که در شکل دیده می‌شود قرار می‌دهیم، بلافاصله مربع $a^۲$ به‌دست می‌آید.

از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر از مربع به ضلع $b+c$ مقدار ۲bc را کم کنیم، از یکطرف $b^۲+c^۲$ و از طرف دیگر $a^۲$ را می‌دهد، یعنی :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲$$

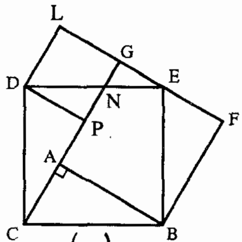
اثبات بهاسکارا (مؤلف معروف لیلا واتی قرن دوازدهم). ریاضیدان بزرگ هند زیر شکل تنها یک کلمه نوشته است : نگاه کنید (شکل ز).



(ز)

اثبات ماری (سال ۱۸۸۷).

مربعهای $BCDE = a^۲$ و $ABFG = c^۲$ را می‌سازیم (شکل س). نقطهٔ E برخط GF قرار می‌گیرد. از نقطهٔ D خط DP را موازی با GF و DL را موازی AG رسم می‌کنیم. مربع $DLGP = b^۲$ تشکیل می‌شود. از پنج ضلعی BCDLF یکبار مثلثهای ABC و DPC و بار دیگر مثلثهای LED و EFB را (که مساوی مثلثهای قبلی هستند) کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید : $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

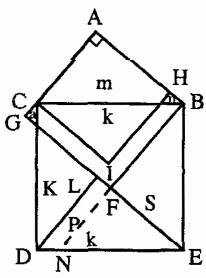


(س)

اثبات رایشنبرگ (سال ۱۷۷۵). داریم (شکل ش) :

$$a^۲ = p + ۳k + r + s$$

$$b^۲ + c^۲ = ۲m + ۲n + ۲k + r$$



(ش)

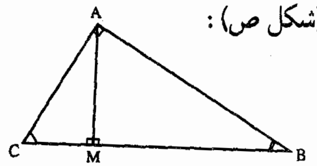
از تساوی مثلثهای ABC، FBE و LED نتیجه می‌شود :

$$m+n=s=p+k$$

یعنی: $b^2+c^2=s+p+k+2k+r=a^2$.

روش سوم اثبات، روش اثبات جبری است که بین آنها مقام نخست مربوط به راه منسوب به فیثاغورس است.

مثلث ABC با مثلث MBA متشابه است و داریم (شکل ص):



(ص)

$$BC:AB=AB:BM$$

از آن‌جا
$$AB^2=BC.BM$$

مثلث ABC با مثلث MAC متشابه‌است و داریم:

$$BC:AC=AC:MC$$

از آن‌جا
$$AC^2=BC.MC$$

از جمع این دو تساوی به‌دست می‌آید:

$$AB^2+AC^2=BC(BM+MC)$$

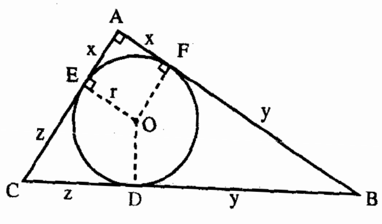
ولی
$$BM+MC=BC$$

و بنابراین
$$AB^2+AC^2=BC^2$$

اگر واقعاً فیثاغورس قضیهٔ مشهور خود را به این ترتیب ثابت کرده باشد، این مسأله پیش می‌آید که او باید با یک رشته قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی آشنا بوده باشد.

اثبات مولمان.

مساحت مثلث ABC از یکطرف برابر با $\frac{b.c}{2}$ (شکل ض) و از طرف دیگر برابر با $\frac{p.r}{2}$ (یعنی نصف حاصلضرب محیط مثلث در شعاع دایرهٔ محاطی آن) می‌باشد؛



(ض)

شعاع r از دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$x=\frac{b+c-a}{2}$$

از آن‌جا
$$\frac{b.c}{2}=\frac{p.r}{2}=\frac{a+b+c}{2}.\frac{b+c-a}{2}$$

و از این معادله به‌دست می‌آید. $a^2 = b^2 + c^2$

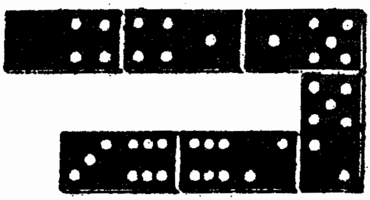
اثبات دومینویی قضیهٔ فیثاغورس

بازی دومینو

آیا می‌دانید چند ترکیب مختلف می‌توان در بازی معمولی دومینو، که شامل ۲۸ سنگ است، پیدا کرد؟ درست ۳,۹۷۹,۶۱۴,۹۶۵,۷۶۰ ترکیب مختلف. روشن است که بازیهای یک‌جور را به حساب نیاورده‌ایم.

ما در این جا به چند ملاحظهٔ اصلی می‌پردازیم و خواننده می‌تواند خود نمونه‌های فراوان دیگری پیدا کند.

در شکل (الف)، شش سنگ دومینو طبق قاعدهٔ معمولی بازی چیده شده است، به‌نحوی که تعداد خالهای سنگها تشکیل یک تصاعد عددی با قدر نسبت واحد داده‌اند، یعنی : ۴، ۵، ۶، ۷، ۸و۹. این پرسش پیش می‌آید : با شش سنگ دومینو چند تصاعد عددی (با قدر نسبت ۱ یا ۲) می‌توان درست کرد؟



(الف)

حساب کرده‌اند که از ۲۸ سنگ دومینو می‌توان ۲۰ تصاعد با قدر نسبت واحد و سه تصاعد با قدر نسبت ۲ به‌وجود آورد که البته روی هم تنها ۲۳ تصاعد می‌شود.

اگر کسی نسبت به این تعداد کم اعتراض دارد، می‌تواند خودش برای پیدا کردن ترکیبهای دیگر، سنگهای دومینو را امتحان کند. این ۲۳ نوع تصاعد با سنگهای زیر شروع می‌شوند :

(۰−۰) , (۰−۱) , (۱−۰) , (۰−۲) , (۱−۱) , (۲−۰) ,
(۰−۳) , (۱−۲) , (۲−۱) , (۳−۰) , (۰−۴) , (۱−۳) ,
(۲−۲) , (۳−۱) , (۱−۴) , (۲−۳) , (۳−۲) , (۲−۴) ,
(۳−۳) , (۳−۴)

برای تصاعدهای با قدر نسبت واحد و سنگهای (۰−۰)، (۱−۰)، (۲−۰) برای تصاعدهای با قدر نسبت ۲.

(ب)

در سمت چپ شکل (ب) پنج سنگ قرار دارد که مجموع خالهای سنگهای وسط مساوی ۵ و مجموع خالهای تمام سنگها مساوی ۱۰ است. از این نوع ترکیب چند جور می‌شود ساخت؟ به ظاهر فقط چهارجور، یعنی (شکل ب) :

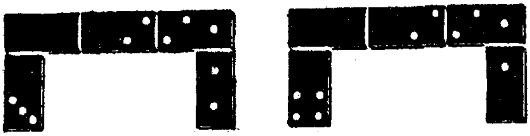
(۱−۰) , (۰−۰) , (۰−۲) , (۲−۱) , (۱−۳)

(۲−۰) , (۰−۰) , (۰−۱) , (۱−۳) , (۳−۰)

(۳−۰) , (۰−۰) , (۰−۲) , (۲−۱) , (۱−۱)

(۴−۰) , (۰−۰) , (۰−۲) , (۲−۱) , (۱−۰)

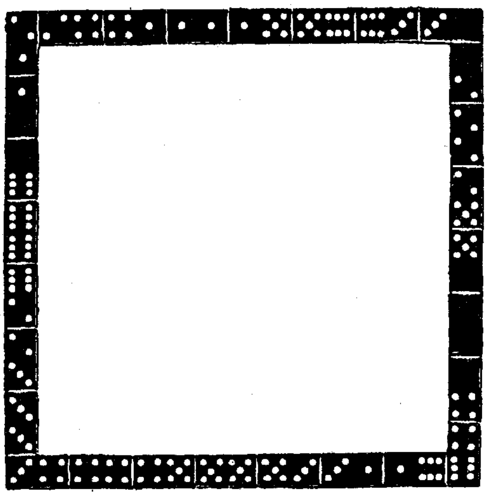
اگر قبول ندارید، ترکیبهای دیگرش را خودتان پیدا کنید.



(پ)

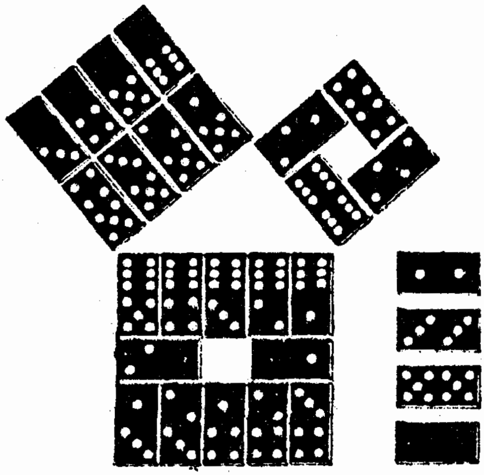
این مسأله را در این مورد آزمایش کنید که مجموع خالهای سنگهای وسط مساوی ۶ یا ۷ و مجموع خالهای تمام سنگها مساوی ۱۲ یا ۱۴ باشد.

طبق قاعدهٔ بازی دومینو، هر ۲۸ سنگ را طوری بچینید که یک مربع کامل تشکیل دهند (شکل ت). بسادگی معلوم می‌شود که مجموع خالهای ردیف بالا و ستون سمت چپ هر کدام ۴۴، ردیف پایین ۵۹ و ستون سمت راست ۳۲ است.

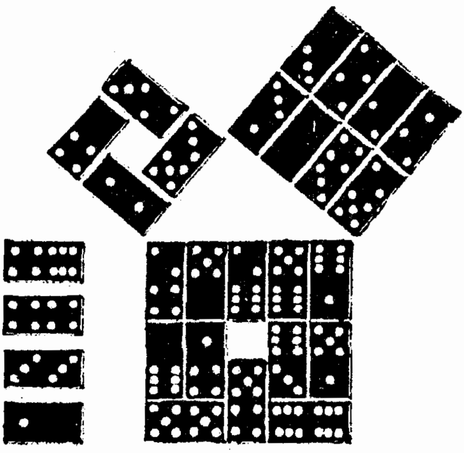


(ت)

آیا می‌توانید سنگهای دومینو را، طبق قاعدهٔ بازی آن، طوری به صورت یک مربع کامل بچینید که در هر ضلع آن ۴۴ خال وجود داشته باشد؟ برای این که حل این مسأله را کمی ساده‌تر کنیم، یادآوری می‌کنیم که در این ترکیب، سنگهایی که در گوشه‌های مربع قرار گرفته‌اند، باید ۸ خال داشته باشند، زیرا مجموع خالهای ۲۸ سنگ مساوی ۱۶۸ و ۴۴×۴ مساوی ۱۷۶ می‌شود. راه‌حلهای زیادی برای این مسأله می‌توان پیدا کرد.



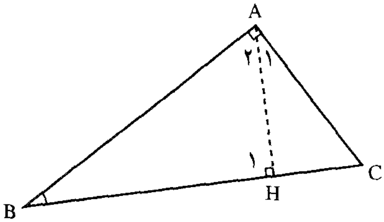
(ث)



(ج)

از آن جا که ما در این کتاب «در پی فیثاغورس» روانیم، اثبات جالبی از قضیهٔ بزرگ او می‌دهیم : مربع وتر برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه. این

اثبات را می توان اثبات «دومینویی» نامید. شکلهای ۳۹۵ و ۳۹۶ به اندازهٔ کافی موضوع را روشن می کنند.



۳۱۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر می گیریم و تصویر رأس A روی وتر BC را H می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AB^۲ = BC.BH \qquad (۱)$$

$$AC^۲ = BC.CH \qquad (۲)$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ABC متشابه‌اند؛ زیرا

$$\hat{H}_۱ = B\hat{A}C = ۹۰^\circ \ , \ \hat{B} = \hat{A}_۱$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^۲ = BC\,.\,BH$$

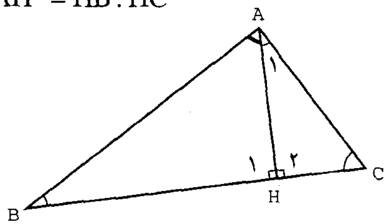
از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و ABC رابطهٔ $AC^۲ = BC\,.\,CH$ به‌دست می‌آید.

۳۱۴. چون زاویهٔ B حاده است، پس رأس C و نقطهٔ H پای ارتفاع رأس A در یک طرف B واقعند. دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند؛ زیرا در زاویهٔ B مشترکند و بنا به فرض $AB^۲ = BC\,.\,BH$ یا $\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ است. درنتیجه $B\hat{A}C = A\hat{H}B = ۹۰^\circ$، یعنی مثلث ABC در رأس A قائم الزاویه است.

۳۱۵. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC متشابه‌اند. زیرا: $\hat{B} = \hat{A}_۱$ و $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$

پس داریم:

$$\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^۲ = HB\,.\,HC$$

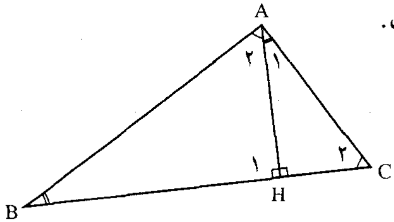


نکته. اگر محوری موازی BC در نظر بگیریم بردارهای $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{HC}$ مختلف‌الجهت هستند و در نتیجه رابطهٔ بالا به صورت $AH^۲ = -\overline{HB}\,.\,\overline{HC}$ درمی‌آید.

۳۱۶. چون زاویه‌های B و C حاده‌اند، پس نقطهٔ H بین دو نقطهٔ B و C است و از رابطهٔ

رابطهٔ $AH^{2} = HB \, . \, HC$ نتیجه می‌شود و با توجه به این که $\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{AH}$ است، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC متشابه‌اند؛ بنابراین $\hat{H}_{1} = \hat{H}_{2} = 90^\circ$ و $\hat{B} = \hat{A}_{1}$ و $\hat{C} = \hat{A}_{2}$ امّا $\hat{A}_{1} + \hat{A}_{2} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$، پس $2(\hat{A}_{1} + \hat{A}_{2}) = 180^\circ$ و یا $2\hat{A} = 180^\circ$ و یا $\hat{A} = 90^\circ$ یعنی مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

نکته. در بیان این قضیه به صورت دیگر، رابطهٔ $AH^{2} = -\overline{HB} \, . \, \overline{HC}$ به معنی آن است که نقطهٔ H بین دو نقطهٔ B و C است.



۳۱۷. راه اوّل. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AB \, . \, AC = BC \, . \, AH \quad \text{یا} \quad bc = a . h_a$$

راه دوم. داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a . h_a \qquad (1)$$

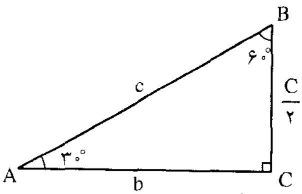
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b . c \qquad (2)$$

$$(1) \; , \; (2) \; \Rightarrow \frac{1}{2} a . h_a = \frac{1}{2} bc \Rightarrow a . h_a = bc$$

۳۱۸. بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$c^{2} = a^{2} + b^{2}$$
$$c^{2} = a^{2} + a^{2} = 2a^{2} \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

۳۲۱. c را طول وتر و b را طول ساق بزرگ فرض کنید.



بنابراین طول ساق کوچک $\frac{1}{2}c$ است. طبق قضیهٔ فیثاغورس $(\frac{c}{2})^{2} + b^{2} = c^{2}$ از این تساوی b را به‌دست می‌آورید.

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

نتیجه. در مثلث $۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ$ طول ساق بزرگ $\sqrt{۳}$ برابر طول ساق کوچک است.
$b = \sqrt{۳}\,a$

۵.۲. زاویه

۵.۲.۱. اندازهٔ زاویهٔ مثلث

۳۲۲. بنا به رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۶۴ = BH(BH + ۱۲) \Rightarrow BH^۲ + ۱۲BH - ۶۴ = ۰$$

$$\Rightarrow BH = -۱۶ < ۰ \Rightarrow BH = ۴ \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

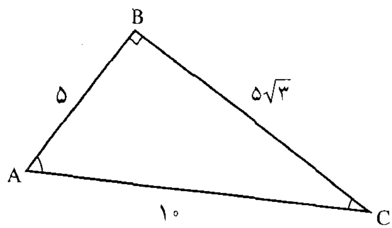
$$= \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ$$

۳۲۳. $c^۲ = ۲ab \;;\; \therefore\; a^۲ + b^۲ = ۲ab \;;\; \therefore (a-b)^۲ = ۰ \;;\; a = b$

چون مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، هر یک از دو زاویهٔ حاده ۴۵° است.

۳۲۵. چون $۵^۲ + (۵\sqrt{۳})^۲ = ۱۰^۲$. یا $۲۵ + ۷۵ = ۱۰۰$ است، پس $\hat{B} = ۹۰^\circ$ است. برای تعیین اندازهٔ زاویه‌های A و C داریم:

$$\sin\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$$



۳۲۶. زاویه‌های مثلث، ۹۰ درجه، ۴۵ درجه و ۴۵ درجه است. h_a و h_b را طول ارتفاعهای وارد بر ضلعهای به طول a و b می‌گیریم. بنا به شرط مسأله، $a \le h_a$ و $b \le h_b$، ولی در هر مثلث $h_a \le b$ و $h_b \le a$، به‌نحوی که $a \le h_a \le b \le h_b \le a$ یعنی $a = b = h_a = h_b$، و بنابراین با مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین سر و کار داریم.

۳۲۷. می‌دانیم که

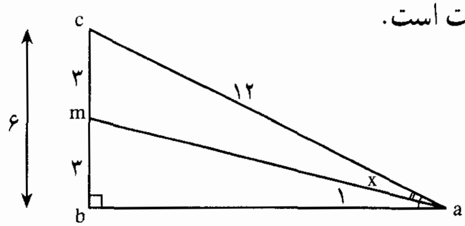
$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$ و $d_b = \frac{۲}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}$ است.

با توجه به رابطهٔ داده شده $c^۲ = d_a . d_b$، و این که $c^۲ = a^۲ + b^۲$ است، مسأله را حل کنید.

۵ . ۲ . ۲. اندازهٔ زاویهٔ شکلهای ایجاد شده

۳۲۸. ثابت کنید : $AB^۲ = AC_۱^۲ + C_۱B^۲$.

۳۳۱. گزینهٔ (د) درست است.



۳۳۲. راه حل اوّل. فرض می‌کنیم P و Q نقطه‌های انتهایی پاره‌خط شامل O وسط BC را نمایش دهند. نیز فرض می‌کنیم H پای ارتفاع از رأس A باشد. در شکل زاویهٔ HAQ را با β، زاویهٔ HAP را با γ و BH را با s نمایش می‌دهیم. در این صورت $\alpha = \beta - \gamma$ و

$$\tan\alpha = \tan(\beta-\gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{۱+\tan\beta\tan\gamma} \qquad (۱)$$

اما :

$$\tan\beta = \frac{HQ}{AH} = \frac{BO - BH + OQ}{h} = \frac{a-۲s}{۲h} + \frac{a}{۲nh}$$

$$\tan\gamma = \frac{HP}{AH} = \frac{BO - BH - OP}{h} = \frac{a-۲s}{۲h} - \frac{a}{۲nh}$$

بنابراین :

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{nh}}{۱+\frac{\left[a^۲(n^۲-۱) - ۴n^۲ s(a-s)\right]}{۴n^۲h^۲}} \qquad (۲)$$

از آن‌جا که h ارتفاع یک مثلث قائم‌الزاویه است :

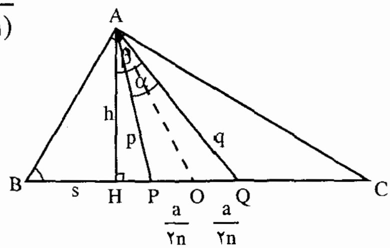
$$\frac{s}{h}=\frac{h}{a-s}$$

بنابراین :

$$s(a-s)=h^{2}$$

رابطهٔ اخیر را در (۲) جانشین کرده، ساده می‌کنیم، و به دست می‌آوریم :

$$\tan\alpha=\frac{4nh}{a(n^{2}-1)}$$



راه حل دوم. طولهای AP و AQ را بترتیب با p و q نمایش می‌دهیم ؛ شکل را ملاحظه کنید. بدین ترتیب :

$$AH=h\quad,\quad AO=\frac{a}{2}\quad,\quad OP=OQ=\frac{a}{2n}$$

اکنون قانون کسینوسها را در مورد مثلث AOP و مثلث AOQ به کار برده، p^{2} و q^{2} را برحسب مقدارهای داده شده بیان می‌کنیم :

$$p^{2}=\frac{a^{2}}{4}+\frac{a^{2}}{4n^{2}}-2\frac{a}{2}\frac{a}{2n}\cos A\hat{O}P$$

$$q^{2}=\frac{a^{2}}{4}+\frac{a^{2}}{4n^{2}}-2\frac{a}{2}\frac{a}{2n}\cos A\hat{O}Q$$

از آن‌جا که زاویهٔ AOP و زاویهٔ AOQ زاویه‌های مکملند، داریم :

$$\cos A\hat{O}P=-\cos A\hat{O}Q$$

بنابراین با جمع کردن معادله‌های بالا ، به دست می‌آوریم :

$$p^{2}+q^{2}=\frac{a^{2}(n^{2}+1)}{2n^{2}}\qquad(1)$$

مساحت مثلث APQ را می‌توان به صورت $\frac{ah}{2n}=\frac{1}{2}PQh$ ، نیز به صورت $\frac{1}{2}pq\sin\alpha$ بیان کرد.

با مساوی قرار دادن آنها و حل معادلهٔ حاصل برای $\sin\alpha$، به‌دست می‌آوریم :

$$\sin\alpha = \frac{ah}{pqn}$$

بنا به قانون کسینوسها :
$$PQ^{۲} = (\frac{a}{n})^{۲} = p^{۲} + q^{۲} - ۲pq\cos\alpha$$

بنابراین :
$$\cos\alpha = \frac{۱}{۲pq}\left[p^{۲} + q^{۲} - \frac{a^{۲}}{n^{۲}}\right]$$

با قرار دادن مساوی $p^{۲} + q^{۲}$ از (۱)، به دست می‌آوریم :

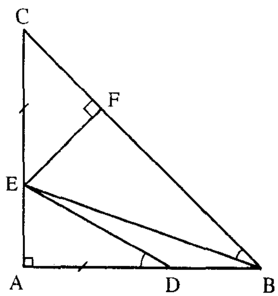
$$\cos\alpha = \frac{a^{۲}(n^{۲} - ۱)}{۴pqn^{۲}}$$

و
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ah}{pqn} \cdot \frac{۴pqn^{۲}}{a^{۲}(n^{۲} - ۱)} = \frac{۴nh}{a(n^{۲} - ۱)}$$

که همان چیزی است که باید اثبات می‌شد.

۵ . ۲ . ۳. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۳۳. از E عمود EF را بر BC فرودآورده به‌وسیلهٔ تناسب ضلعها تشابه دو مثلث ADE و FBE را ثابت کنید.



۳۳۴. اگر فرض کنیم $AB = a$ ، پس :

$$\overset{\Delta}{ABO} \Rightarrow BD^{۲} = AD^{۲} + AB^{۲} \Rightarrow BD^{۲} = ۲a^{۲}$$

و $DE = EC = a$ بنابراین $DE \times EC = a \times ۲a = ۲a^{۲}$

درنتیجه $BD^{۲} = DE \,.\, EC$ پس اگر دایرهٔ محیطی مثلث BEC را رسم کنیم، DB بر دایره مماس است، یعنی : $\hat{B}_{۱} = \hat{C}_{۱}$ ؛ از طرفی چون $\hat{D}_{۱}$ زاویهٔ خارجی مثلث DBE

است، داریم :

$$\hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{E}_۱ \Rightarrow \hat{B}_۱ + \hat{E}_۱ = ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{E}_۱ + \hat{C}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{E}B + A\hat{C}B = ۴۵^\circ$$

۳۳۵. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADB و ADC داریم :

$$BD = \sqrt{\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۶}{۹ \times ۲۵}} = \frac{۴}{۱۵}$$

$$CD = \sqrt{\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۹}{۱۶ \times ۲۵}} = \frac{۳}{۲۰}$$

اگر D بین B و C باشد، داریم :

$$BC = \frac{۴}{۱۵} + \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۶+۹}{۶۰} = \frac{۲۵}{۶۰} = \frac{۵}{۱۲}$$

اگر D خارج B و C باشد،

$$BC = DB - DC = \frac{۴}{۱۵} - \frac{۳}{۲۰} = \frac{۱۶-۹}{۶۰} = \frac{۷}{۶۰}$$

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۶} = (\frac{۵}{۱۲})^۲ \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۴۴} = \frac{۲۵}{۱۴۴} \Rightarrow B\hat{A}C = ۹۰^\circ$$

$$AD^۲ = DB.DC \Rightarrow \frac{۱}{۲۵} = \frac{۴}{۱۵} \times \frac{۳}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲۵} = \frac{۱}{۲۵} \Rightarrow \hat{C} - \hat{B} = ۹۰^\circ$$

۳۳۶. $\alpha = \beta + \gamma = ۹۰^\circ$ می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$\sin\alpha = ۱ \;,\; \sin(\alpha - \beta) = \sin\gamma \;,\; \sin(\gamma - \alpha) = -\sin\beta$$

بنابراین، بترتیب داریم :

$$\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha - \beta) = \sin\beta \sin\gamma \;,$$

$$\sin\beta \sin\gamma \sin(\beta - \gamma) = \sin\beta \sin\gamma \sin(\beta - \gamma) \;,$$

$$\sin\gamma \sin\alpha \sin(\gamma - \alpha) = -\sin\gamma \sin\beta \;,$$

$$\sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha) = -\sin\gamma \sin(\beta - \gamma)\sin\beta$$

و از مجموع این چهار برابری، به اتحاد مطلوب می‌رسیم.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که، این اتحاد، نه تنها برای زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه و نه تنها برای زاویه‌های هر مثلث دلخواه، بلکه برای هر سه زاویهٔ دلخواه α، β و γ برقرار است.

a) به کمک دستورهای مربوط به سینوس و کسینوس مجموع یا تفاضل دو زاویه به‌دست می‌آید :

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = ۲\sin x \cos y$$

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = ۲\cos x \cos y \;,$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = ۲\sin x \sin y$$

و از آن‌جا

$$\sin x \sin y = \frac{۱}{۲}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] \ ,$$

$$\cos x \cos y = \frac{۱}{۲}[\cos(x-y) + \cos(x+y)] \ ,$$

$$\sin x \cos y = \frac{۱}{۲}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

که در حالت خاص $x = y$ ، نتیجه می‌شود :

$$\sin^{۲} x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲x) \ , \ \cos^{۲} x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲x) \ ,$$

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲} \sin ۲x$$

اگر با ضرب تعداد بیشتری سینوس و کسینوس سر و کار داشته باشیم، با استفادهٔ پشت سر هم از همین دستورها، می‌توان صورتهای ضرب را به صورتهای مجموع تبدیل کرد. در هر جمله از سمت چپ اتحاد مفروض، ضرب سه سینوس وجود دارد و در حالت کلی داریم :

$$\sin x \sin y \sin z = \frac{۱}{۲}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]\sin z$$

$$= \frac{۱}{۲}[\cos(x-y)\sin z - \cos(x+y)\sin z]$$

$$= \frac{۱}{۴}[\sin(x-y+z) + \sin(-x+y+z) - \sin(x+y+z) - \sin(-x-y+z)]$$

$$= \frac{۱}{۴}[\sin(-x+y+z) + \sin(x-y+z) + \sin(x+y-z) - \sin(x+y+z)]$$

b) اکنون فرض می‌کنیم :

$$x = \alpha - \beta \ , \ y = \beta - \gamma \ , \ z = \gamma - \alpha$$

در این صورت، خواهیم داشت :

$$-x + y + z = -۲(\alpha - \beta) \ , \ x - y + z = -۲(\beta - \gamma) \ ,$$

$$x + y - z = -۲(\gamma - \alpha) \ , \ x + y + z = ۰$$

در ضمن، با توجه به رابطهٔ مربوط به بسط ضرب سه سینوس، به‌دست می‌آید :

$$۴\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha) = -\sin ۲(\alpha-\beta) - \sin ۲(\beta-\gamma) - \sin ۲(\gamma-\alpha)$$

و اگر در دو طرف برابری اخیر، ابتدا $\gamma = ۰$ ، سپس $\alpha = ۰$ و بالاخره $\beta = ۰$ بگیریم، بترتیب، به‌دست می‌آید :

$$۴\sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha - \beta) = \sin ۲(\alpha - \beta) + \sin ۲\beta - \sin ۲\alpha \ ,$$

$$4\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin 2(\beta-\gamma)+\sin 2\gamma-\sin 2\beta\ ,$$
$$4\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\sin 2(\gamma-\alpha)+\sin 2\alpha-\sin 2\gamma$$

و از مجموع چهار برابری اخیر به اتحاد مورد نظر می‌رسیم.

۳۳۷. داریم : $\overrightarrow{BA}=a$ ، $\overrightarrow{BC}=c$ ، $\overrightarrow{BP}=p$ و $\overrightarrow{BQ}=q$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، نقطهٔ P پاره‌خط راست AB را به نسبت $(n-1):1$ و نقطهٔ Q پاره‌خط راست AC را به نسبت $1:(n-1)$ تقسیم کرده باشند. داریم :

$$p=\frac{n-1}{n}a+\frac{1}{n}c\ ,\ \ q=\frac{1}{n}a+\frac{n-1}{n}c$$

ولی بردارهای a و c بر هم عمودند. بنابراین $a.c=0$ و

$$\cot A\hat{B}P.\cot Q\hat{B}C=\frac{a.p}{a\times p}.\frac{q.c}{q\times c}=\frac{\frac{(n-1)}{n}a^2}{\frac{1}{n}a\times c}.\frac{\frac{n-1}{n}c^2}{\frac{1}{n}a\times c}$$

$$=(n-1)^2.\frac{a^2.c^2}{a^2.c^2}=(n-1)^2$$

۳.۵. ضلع

۱.۳.۵. اندازهٔ یک ضلع

۳۳۸. در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که وترش برابر a است، اندازهٔ هر ضلع $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است. بنابراین در این مسأله داریم :

$$AB=\frac{BC\times\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

۳۳۹. الف. DE برابر است با : ۵، ۷/۵، ۱۲/۵

ب. $2\sqrt{3}$، $5\sqrt{3}$، $8\sqrt{3}$، $4\sqrt{3}$

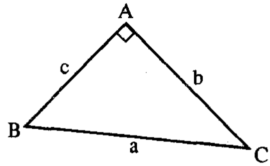
۳۴۰. ضلع بزرگ این مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰ درجه، و برابر است با اندازهٔ وتر، ضرب در $\frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین داریم :

$$4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\ ;\ 18\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}\ ;\ 98\times\frac{\sqrt{3}}{2}=49\sqrt{3}\ ;$$

$$۲\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\ ;\ ۱۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۴۱. اگر $\hat{A}=۹۰^\circ$ باشد، با توجه به برابری b و c داریم :

$$s=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}b^۲\Rightarrow ۴۰=\frac{۱}{۲}b^۲\Rightarrow b^۲=۸۰\Rightarrow b=۴\sqrt{۵}=c$$



۳۴۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۴۳. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا :

طولهای ضلعهای مثلث را $s-d$ ، s ، $s+d$ می‌گیریم، بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$(s-d)^۲+s^۲=(s+d)^۲$$

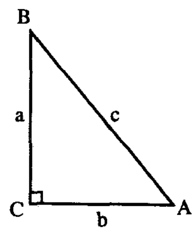
پس از ساده کردن نتیجه می‌شود : $\Rightarrow s(s-۴d)=۰$

اما s باید مثبت باشد، پس $s=۴d$. بنابراین ضلعهای مثلث دارای طولهای $۳d$، $۴d$ و $۵d$ هستند. چون طولهای ضلعها عددهای صحیح هستند، هریک باید بر ۳، ۴ یا ۵ بخشپذیر باشد؛ بنابراین فقط گزینهٔ (ج) می‌تواند طول ضلع چنین مثلثی باشد.

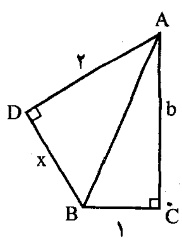
۳۴۴. گزینهٔ (ج) درست است. فرض می‌کنیم : $a=a$، $c=a+۱$ باشد، داریم :

$$b=\sqrt{c^۲-a^۲}=\sqrt{(a+۱)^۲-a^۲}=\sqrt{۲a+۱}$$

$$\Rightarrow b^۲=۲a+۱=c+a$$



۳۴۵. گزینهٔ (ب) درست است.



$$x^۲+۴=b^۲+۱$$

$$\therefore x=\sqrt{b^۲-۳}$$

۳۴۶. گزینهٔ (د) جواب است. زیرا اگر ارتفاع برج را x فرض کنیم داریم:

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{x}{\overline{ac}} \Rightarrow x = \overline{ac}\tan ۶۰^\circ = \overline{ac}\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{x}{\overline{bc}} \Rightarrow \frac{x}{\overline{ab}+\overline{ac}} = \frac{x}{۱۰۰+\overline{ac}} \Rightarrow x = (۱۰۰+\overline{ac})\tan ۳۰^\circ \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \overline{ac}\sqrt{۳} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۳} + \overline{ac}\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳}\overline{ac}\sqrt{۳} = \frac{۱۰۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \overline{ac} = ۵۰ \Rightarrow x = ۵۰\sqrt{۳} = ۵۰\times ۱/۷۳۲ = ۸۶/۶۰\,\text{cm}$$

۳۴۷. الف. دو مثلث قائم‌الزاویه‌اند. $\hat{B} = \hat{B'} = ۹۰^\circ$ و $B\hat{A}C = B'\hat{A}C'$ است، پس متشابه‌اند.

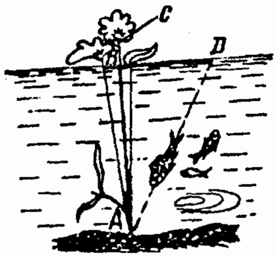
ب. با توجه به این که $B'C' = ۱/۸\text{m}$ است، داریم:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow \frac{۱/۸}{BC} = \frac{۳}{۲۰} \Rightarrow BC = ۱۲\text{m}$$

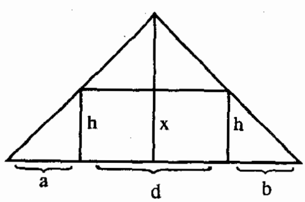
۳۴۸. با توجه به شکل، می‌توان مسأله را، به این ترتیب، تنظیم کرد: «گلی $\frac{۱}{۲}$ پا از آب بیرون است. اگر آن را خم کنیم، تا به نقطهٔ D، در ۲ پایی جای اوّل آن برسد، در زیر آب قرار می‌گیرد. عمق دریاچه، یعنی طول پاره‌خط AB را پیدا کنید.» با توجه به شکل داریم:

$x=$ عمق دریاچه و $AB = AD = x + \frac{۱}{۲} \Rightarrow (x+\frac{۱}{۲})^۲ = x^۲ + ۲^۲$

که بسادگی قابل حل است و به‌دست می‌آید: $x = ۳\frac{۳}{۴}$ (پا)



۳۴۹. h را ارتفاع تکه چوب، a و b را طول سایهٔ آن در دو حالت مختلف و d را فاصلهٔ بین پای تکه چوب در حالت اوّل و پای آن در حالت دوم می‌گیریم (شکل). اگر ارتفاع شمع را x بگیریم، با توجه به مثلثهایِ متشابهی که روی شکل دیده



می‌شود، داریم :

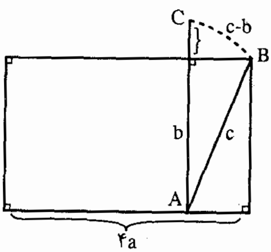
$$\frac{x}{x-h}=\frac{a+b+d}{d}$$

و از آن‌جا

$$x=\frac{h(a+b+d)}{a+b}=h(1+\frac{d}{a+b})$$

مؤلف این مسأله، براهماگوپتا (متولد ۵۹۸ میلادی)، بزرگترین ریاضیدان و اخترشناس هندی است. تنها یکی از رساله‌های نجومی او به ما رسیده است که درسال ۶۲۸ میلادی نوشته شده و شامل ۲۰ کتاب است و از آنها، کتاب دوازدهم (حساب) و کتاب هیجدهم (جبر) به ریاضیات مربوط می‌شود. در کتاب حساب او، فصلهایی هم به موضوعهای هندسی اختصاص دارد و مسأله‌ای را هم، که در بالا حل کردیم، از آن‌جا برداشته‌ایم.

۳۵۰. در رساله، برای حل مسأله، این‌طور گفته شده است : «نصف ضلع برکه را در خودش ضرب کن، قسمت بالای آب، یعنی ۱ «چی» را در خودش ضرب کن ؛ از اوّلی کم کن، باقی‌مانده را بر ۲ برابر قسمت روی آب نی تقسیم کن، عمق آب را به‌دست آور. قسمت بالای آب را به آن اضافه کن، طول نی پیدا می‌شود».



رساله، جواب را نداده است، ولی با این راهنمایی، می‌توان جواب را بسادگی به‌دست آورد.

طول برکه را $2a$، ارتفاع نی را c و عمق برکه را b می‌گیریم (شکل). باید b و c را پیدا کنیم. با استفاده از قاعدهٔ چینی، می‌توان رابطه‌های زیر را، برای این دو مجهول، نوشت :

$$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$$

$$c=b+(c-b)=\frac{a^2+(c-b)^2}{2(c-b)}$$

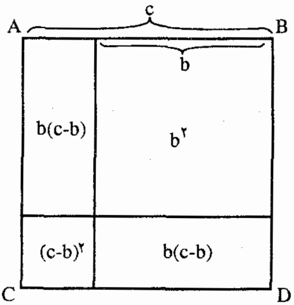
در رساله، نتیجهٔ این قاعده داده نشده است، بنابراین به سختی می‌توان فهمید که، ریاضیدانان چین باستان، از چه راهی، این رابطه‌ها را به‌دست می‌آوردند.

با وجود این، با استدلالهای عادی می‌توان، به‌راحتی، به این رابطه‌ها رسید. با شروع از شرطهای مسأله و به‌کار بردن قاعدهٔ «هواوهو» یعنی قضیهٔ فیثاغورس، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} b=c-k \\ b^2=c^2-a^2 \end{cases}$$

که در آن، برای سادگی کار، قسمت بالای آب را، که برای ما معلوم است، یعنی $c-b$ را، به k نشان داده‌ایم. با حل این دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a^2 - k^2}{2k} \\ c = \dfrac{a^2 + k^2}{2k} \end{cases} \quad (k = c - b)$$



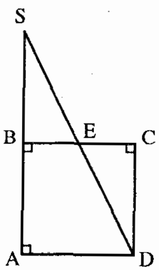
«لیوهوای» ضمن بحث دربارهٔ «ریاضیات در نه کتاب» به‌طور قانع‌کننده‌ای روشن می‌کند که چینیها قاعده‌ای به‌دست آورده بودند که می‌شد، از آن، دو رابطهٔ اخیر را نتیجه گرفت. او معتقد است، این رابطه‌ها را، که به‌طور شفاهی داده شده است، براساس تصورهای هندسی به‌دست آورده‌اند. ظاهراً، دانشمندان چین باستان، در این مورد، از شکلی شبیه شکل روبه‌رو استفاده می‌کرده‌اند.

قبل از همه، بنا بر قاعدهٔ «هواوهو» داریم: $a^2 = c^2 - b^2$

سپس، از روی شکل معلوم است: $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)^2 + 2b(c-b)$

و از آن‌جا $b = \dfrac{a^2 - (c-b)^2}{2(c-b)}$

۳۵۱. مسأله را می‌توان به کمک شکل روشن کرد (شکل). دانشمندان چینی، ظاهراً برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث SAD و ECD استفاده کرده‌اند. از این دو مثلث، می‌توان نتیجه گرفت:



$$\frac{AS}{CD} = \frac{AD}{EC}$$

$$x = AS = \frac{AD.DC}{EC}$$

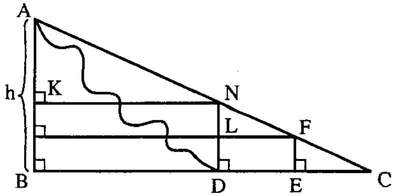
که با قرار دادن مقدارهای مفروض، به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{\text{۱ «چژان»} \times \text{۱ «چژان»}}{\text{۳ «تسون»}}$$

در رسالهٔ باستانی چین، این قاعده برای حل مسأله داده شده است.

۱ «چژان» را در خودش ضرب کن، این مقسوم است. ۳ «تسون» مقسوم‌علیه است. مقسوم و مقسوم‌علیه را با هم درنظر بگیر.

۳۵۲. ظاهراً، چینیها، برای حل این مسأله، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AKN و NLF استفاده کرده‌اند (شکل). از این دو مثلث، به‌دست می‌آید :



$$\frac{AK}{KN}=\frac{NL}{LF}$$

و یا

$$\frac{x-ND}{BD}=\frac{ND-FE}{DE}$$

و بنابراین :

$$x=ND+\frac{(ND-FE)BD}{DE}$$

همین رابطه است که در رسالهٔ چینی «ریاضیات در نه کتاب»، به‌عنوان حل مسأله، داده شده است : «از ارتفاع ستون، ارتفاع سطح دید (۷ «چی») را کم کن، تفاضل را در ۵۳ «لی» ضرب کن، این می‌شود مقسوم. فاصلهٔ شخص تا ستون، یعنی ۳ «لی»، مقسوم‌علیه است. مقسوم و مقسوم‌علیه را با هم درنظر بگیر. آن‌چه را به‌دست آوردی، با ارتفاع ستون جمع کن، این می‌شود ارتفاع کوه».

۲.۳.۵. اندازهٔ وتر

۳۵۳. الف. ۵

ب. ۱۰

پ. ۱۵

۳۵۴. الف. ۳۹

ب. 5m

پ. ۱۸۰

۳۵۵. طول هر سیم، وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه‌اش ۳۰ متر و ۲۵ متر است. بنابراین :

$$\text{طول سیم}=\sqrt{۳۰^۲+۲۵^۲}=۵\sqrt{۶۱}$$

۳۵۶. مثلث را قائم‌الزاویه در رأس A فرض می‌کنیم. داریم:

$$\frac{b}{c}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}c\ ,\ s=\frac{۱}{۲}bc\Rightarrow ۲۷=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}c\times c$$

$$\Rightarrow ۸۱=c^۲\Rightarrow c=۹\Rightarrow b=\frac{۲}{۳}\times ۹=۶$$

اندازهٔ وتر $a^۲=b^۲+c^۲=۳۶+۸۱=۱۱۷\Rightarrow a=\sqrt{۱۱۷}$

۳۵۷. با فرض $\hat{A}=۹۰^\circ$، داریم:

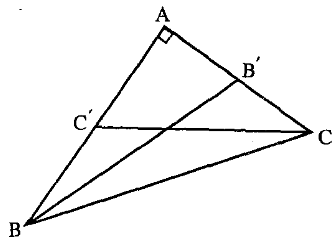
$$b=۲c\ ,\ s=\frac{۱}{۲}bc\Rightarrow ۷۲=\frac{۱}{۲}(۲c)(c)\Rightarrow c^۲=۷۲$$

$$\Rightarrow c=۶\sqrt{۲}\Rightarrow b=۲c=۱۲\sqrt{۲}$$

اندازهٔ وتر $a^۲=b^۲+c^۲=۲۸۸+۷۲=۳۶۰\Rightarrow a=۶\sqrt{۱۰}$

۳۵۸. میانه‌های BB' و CC' از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را رسم می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABB' و ACC' داریم:

$$\begin{cases}b^۲+\frac{c^۲}{۴}=۵۲\\ c^۲+\frac{b^۲}{۴}=۷۳\\ a^۲=b^۲+c^۲\end{cases}\Rightarrow a^۲+\frac{a^۲}{۴}=۱۰۵\Rightarrow a^۲=۸۴\Rightarrow a=۲\sqrt{۲۱}\text{cm}$$



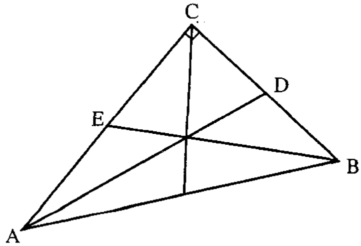
۳۵۹. گزینهٔ (د) درست است. زیرا:

اگر c اندازهٔ وتر، a و b اندازه‌های دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه باشند، بنا بر فرض مسأله داریم: $(\frac{a}{۲})^۲+b^۲=۲۵\ ,\ a^۲+(\frac{b}{۲})^۲=۴۰\ ,\ \therefore a^۲=۳۶\ ,\ b^۲=۱۶$

$$\therefore c^۲=a^۲+b^۲=۵۲\ ;\ \therefore c=۲\sqrt{۱۳}$$

۳۶۰. گزینهٔ (د) درست است؛ زیرا:

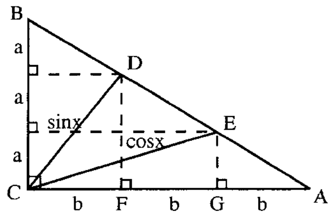
$$۱۶=a^۲+\frac{b^۲}{۴}\ ;\ ۴۹=\frac{a^۲}{۴}+b^۲\ ;\ ۶۵=\frac{۵}{۴}(a^۲+b^۲)$$



$$a^۲ + b^۲ = c^۲ = ۵۲ \;;\; c = ۲\sqrt{۱۳}$$

۳۶۱. گزینه‌های (الف و د) درست هستند.

۳۶۲. (ج) قضیهٔ فیثاغورس را در مثلثهای CDF و CEG به‌کار می‌بریم:



$$۴a^۲ + b^۲ = \sin^۲ x$$

$$a^۲ + ۴b^۲ = \cos^۲ x$$

از جمع کردن این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$۵(a^۲ + b^۲) = \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

بنابراین،

$$AB = ۳\sqrt{a^۲ + b^۲} = ۳\sqrt{\frac{۱}{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

۳۶۳. وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شده را x فرض می‌کنیم. داریم:

$$x^۲ = (b+c)^۲ + h^۲ = b^۲ + c^۲ + ۲bc + h^۲ \;,\; bc = a.h \;,\; b^۲ + c^۲ = a^۲$$

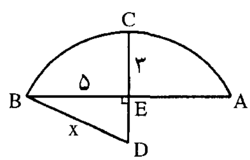
$$\Rightarrow x^۲ = a^۲ + ۲ah + h^۲ = (a+h)^۲ \Rightarrow x = a + h$$

۳۶۴. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BED (شکل)، به‌دست می‌آید:

$$(x-۳)^۲ + ۵^۲ = x^۲ \;;$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ + ۲۵ = x^۲ \;;$$

$$۶x = ۳۴ \;;\; ۳x = ۱۷ \;;\; x = \frac{۱۷}{۳} = ۵\frac{۲}{۳}$$ (ارش)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی، معروف به کاشی، ریاضیدان ایرانی، دو رسالهٔ مهم دارد : «مفتاح‌الحساب» و «رسالةالمحیطیه». تاریخ تولد و مرگ کاشی، دقیقاً معلوم نیست. گمان می‌رود که در ثلث آخر یا ابتدای ربع آخر سدهٔ چهاردهم متولد شده باشد. کاشی نه‌تنها ریاضیدان، بلکه پزشک هم بود. او راهنمای ساختمان رصدخانهٔ بزرگ سمرقند بود که به دستور الغ‌بیگ اخترشناس ساخته شد. کاشی در «رسالةالمحیطیه» مقدار عدد π را تا ۱۷ رقم درست اعشار حساب کرده است که دقیق‌ترین مقدار π تا آن زمان است. کاشی، همچنین واضع کسرهای دهدهی است و با حل معادلهٔ درجه سوم مربوط، مقدار سینوس یک درجه را به‌دست آورد.

۳۶۵. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'C$ و $BB'C$، $\hat{A}'=\hat{B}'=۹۰^\circ$، به‌دلیل برابری وتر و یک زاویهٔ حاده، همنهشتند. زیرا از قائمه بودن زاویهٔ BCA نتیجه می‌شود که $B'\hat{C}B=C\hat{A}A'$ و $BC=AC$ است. بنابراین $CA'=b$ و $CB'=a$ است. از آن‌جا عرض کوچه $A'B'=a+b$ و طول نردبان $AC=CB=\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.

۳۶۶. الف. $PA_۱=\sqrt{۲}$

ب. $PA_۲=\sqrt{۳}$

پ. $PA_۳=\sqrt{۴}=۲$

ت. $PA_n=\sqrt{n+۱}$

۳۶۷. داریم :

$$MP=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}=MQ\Rightarrow OQ=OP+PQ$$
$$=۱+\sqrt{۲}\Rightarrow MQ=\sqrt{OM^۲+OQ^۲}=\sqrt{۱+(۱+\sqrt{۲})^۲}$$
$$MQ=\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}$$
$$\tan\hat{Q}=\frac{MO}{OQ}=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}=\sqrt{۲}-۱=\tan\frac{\pi}{۸}$$
$$\Rightarrow \hat{Q}=۲۲^\circ,۳۰'\Rightarrow O\hat{M}Q=۹۰^\circ-(۲۲^\circ,۳۰')=۶۷^\circ,۳۰'$$

۳۶۸. ریاضیدان چین باستان، برای حل این مسأله، قاعدهٔ زیر را، در رسالهٔ خود، ذکر می‌کند : «۷ را در خودش ضرب کن، ۳ را هم در خودش ضرب کن، با هم جمع و بعد نصف کن. این را به‌عنوان معیار A در جهت کج بگیر. از ۷ که در خودش ضرب کرده‌ای، معیار حرکت در جهت کج را کم کن، باقی‌مانده، معیار همان حرکت به طرف جنوب می‌شود. ۳ را در ۷ ضرب کن، این معیار حرکت B به‌طرف شرق است، ۱۰ «بو» حرکت به طرف جنوب را در معیار حرکت A در جهت کج ضرب کن ؛ ۱۰ «بو» را در معیار حرکت B به طرف شرق ضرب کن. هر کدام از اینها مقسوم است. مقسومها را با

معیار حرکت به طرف جنوب درنظر بگیر و مقدارها را پیدا کن».
با استفاده از این قاعده، مسأله به این ترتیب حل می‌شود :
۱) ابتدا، معیار حرکت A را «در جهت کج» به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{۷^۲+۳^۲}{۲}=۲۹$$

۲) معیار حرکت A به طرف جنوب را به‌دست می‌آوریم : $۷^۲-\frac{۷^۲+۳^۲}{۲}=۲۰$

۳) مقدار حرکت به طرف شرق، چنین می‌شود : $۷\times۳=۲۱$

۴) مقسومها را پیدا می‌کنیم :

$$۱۰\times۲۹\ ;\ ۱۰\times۲۱$$

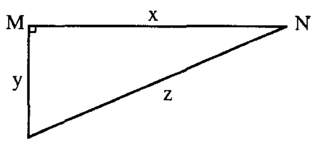
۵) A «در جهت کج»، این مقدار راه رفته است :

$$\frac{۱۰\times۲۹}{۲۰}=\frac{۲۹}{۲}=۱۴\frac{۱}{۲}$$ «بو»

۶) B به طرف شرق، این مقدار راه رفته است :

$$\frac{۱۰\times۲۱}{۲۰}=\frac{۲۱}{۲}=۱۰\frac{۱}{۲}$$ «بو»

راه‌حل عادی این مسأله، چنین است : x را راهی می‌گیریم که B به طرف شرق رفته است ؛ y مسافتی که A به طرف جنوب طی کرده است (ضمناً، بنابر شرط مسأله می‌دانیم : $y=۱۰$) و بالاخره، z را مقدار «راه کج» به طرف شمال شرقی می‌گیریم، که همان وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌شود (شکل).



در این‌صورت داریم : $x^۲+۱۰^۲=z^۲$,

$$\frac{x}{z+۱۰}=\frac{۳}{۷}$$

از آن‌جا $z=\frac{۷}{۳}x-۱۰$

سپس $x^۲+۱۰^۲=(\frac{۷}{۳}x-۱۰)^۲$

یا $x^۲+۱۰۰=\frac{۴۹}{۹}x^۲-\frac{۲\times۷\times۱۰}{۳}x+۱۰۰$, .

$$۴۰x^۲ - ۳\times ۲\times ۷\times ۱۰x = ۰ \ ,$$

$$۲x^۲ - ۲۱x = ۰ \ ,$$

$$x(۲x - ۲۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱۰\frac{۱}{۲}$$ «بو»

حالا، z را پیدا می‌کنیم :

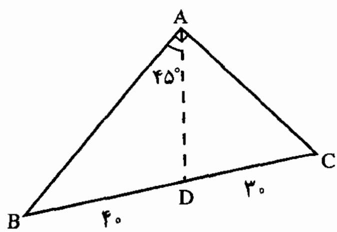
$$z = \frac{۷}{۳}\times\frac{۲۱}{۲} - ۱۰ = \frac{۴۹}{۲} - ۱۰ = \frac{۲۹}{۲} = ۱۴\frac{۱}{۲}$$ «بو»

۳۶۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، اگر c وتر و a و b ساقهای آن باشند، $c = a\sqrt{۲}$ و یا $c = ۱۵\sqrt{۲}$ است.

۳۷۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. اندازهٔ وتر در حالتهای خواسته شده برابر است با : $۳\sqrt{۲}$ ، $۵\sqrt{۲}$ ، $۶\sqrt{۲}$ ، $۴\sqrt{۲}$

۳.۳.۵. اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه

۳۷۱. داریم :



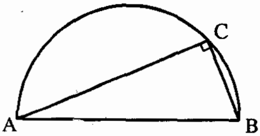
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$DB + DC = BC = ۳۰ + ۴۰ = ۷۰\,cm$$

$$\begin{cases}\frac{c}{b} = \frac{۴}{۳}\\ a^۲ = b^۲ + c^۲\end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + \frac{۱۶}{۹}b^۲ \Rightarrow ۴۹۰۰ = \frac{۲۵}{۹}b^۲ \Rightarrow b = ۴۲\,cm$$

$$\Rightarrow c = \frac{۴}{۳}\times ۴۲ = ۵۶ \Rightarrow c = ۵۶\,cm$$

۳۷۲. نیمدایره‌ای به قطر وتر AB رسم می‌کنیم. چون زاویهٔ حادهٔ A مساوی با $\frac{۱}{۳}$ زاویهٔ حادهٔ B است، پس $\frac{۱}{۴}$ زاویهٔ قائمه می‌باشد ؛ بنابراین، ضلع CB ضلع هشت



ضلعی منتظم محاط در دایره است.

می‌دانیم که : $C_{۴} = R\sqrt{۲}$ و $C_{۲n} = \sqrt{۲R(R - \sqrt{R^{۲} - \frac{C_n^{۲}}{۴}})}$

پس $C_{۸} = \sqrt{۲R(R - \sqrt{R^{۲} - \frac{R^{۲}}{۲}})} = R\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$

به‌ازای متر ۴۰=۲R، یعنی متر ۲۰=R، نتیجه می‌شود : $CB = ۲۰\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$. از طرف دیگر از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB نتیجه می‌شود :

$$\overline{AC}^{۲} = ۴R^{۲} - R^{۲}(۲ - \sqrt{۲}) = ۲R^{۲} + R^{۲}\sqrt{۲} = R^{۲}(۲ + \sqrt{۲})$$

پس $AC = R\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$ و به ازای R=۲۰m، حاصل می‌شود :

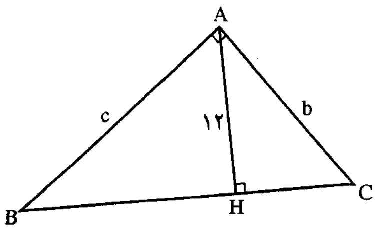
$$AC = ۲۰\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$$

۳۷۳. با فرض $\hat{A} = ۹۰^{\circ}$ و $b = \frac{۴}{۵}c$ ، با توجه به این‌که $S = \frac{۱}{۲}bc$ است، داریم :

$$۳۲۰ = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۵}c).c \Rightarrow ۳۲۰ = \frac{۲}{۵}c^{۲} \Rightarrow c^{۲} = ۸۰۰$$

$$\Rightarrow c = ۲۰\sqrt{۲} \Rightarrow b = \frac{۴}{۵} \times ۲۰\sqrt{۲} = ۱۶\sqrt{۲}$$

۳۷۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A} = ۹۰^{\circ})$ را درنظر می‌گیریم. با توجه به داده‌های مسأله داریم :



$$a + b + c = ۶۰ \qquad (۱)$$

$$h_a = ۱۲cm \ , \ a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \qquad (۲)$$

$$a.h_a = b.c \Rightarrow ۱۲a = bc \qquad (۳)$$

$$\begin{cases} a + b + c = ۶۰ \\ ۱۲a = bc \\ a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(b+c)^{۲}=(۶۰-a)^{۲}\Rightarrow b^{۲}+c^{۲}+۲bc=۳۶۰۰+a^{۲}-۱۲۰a$$

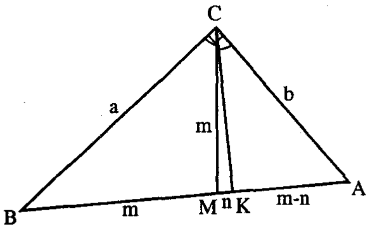
$$\Rightarrow a^{۲}+۲۴a=۳۶۰۰+a^{۲}-۱۲۰a$$

$$\Rightarrow ۱۴۴a=۳۶۰۰\Rightarrow a=۲۵$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b+c=۶۰-۲۵=۳۵\\ bc=۳۰۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow X^{۲}-۳۵X+۳۰۰=۰\Rightarrow X'=۲۰ \text{ و}$$

$$X''=۱۵\Rightarrow\begin{cases}b=۲۰\\ c=۱۵\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}b=۱۵\\ c=۲۰\end{cases}$$



۳۷۵. میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر مثلث قائم‌الزاویه است. بنابراین $AM=MB=m$ و $AB=۲m$ است. درنتیجه $AK=m-n$ و $KB=m+n$ خواهد بود. امّا بنا به ویژگی نیمساز زاویهٔ درونی مثلث داریم:

$$KA:KB=(m-n):(m+n)=b:a \qquad (۱)$$

از طرفی $b^{۲}+a^{۲}=(۲m)^{۲}$ (۲). از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازهٔ a و b محاسبه می‌شود.

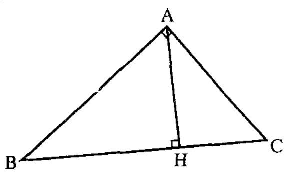
۳۷۶. مثلث قائم الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را درنظر گرفته، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. بنا به داده‌های مسأله داریم:

$$\frac{BH}{CH}=\frac{۱۶}{۹}\Rightarrow\frac{BH}{BC}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\frac{BH}{۲۰}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow BH=\frac{۶۴}{۵}=۱۲/۸cm$$

$$CH=۲۰-۱۲/۸=۷/۲cm$$

$$AB=\sqrt{BC.BH}=\sqrt{۲۰\times ۱۲/۸}=۱۶cm$$

$$AC=\sqrt{BC.CH}=\sqrt{۲۰\times ۷/۲}=۱۲cm$$



۳۷۷. روش اوّل. با منظور کردن $AC=x$، $BC=y$ و $CD=z$، طبق قضیهٔ فیثاغورس چنین داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}=c^{۲} \text{ و } x^{۲}+z^{۲}=\left(\frac{c\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}$$

علاوه بر این براساس ویژگی نیمساز زاویه (قضیهٔ ۵) $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{DB}$ یعنی $\frac{x}{c}=\frac{z}{y-z}$ حاصل می‌شود. سرانجام دستگاه معادله‌های سه متغیره زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = c^۲, \\ x^۲ + z^۲ = \frac{c^۲}{۳}, \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z} \end{cases}$$

حل این دستگاه از پیچیدگیهای جبری قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

روش دوم. تساوی $C\hat{A}D = B\hat{A}D = x$ را منظور می‌کنیم. با استفاده از پاره‌خط AC به‌عنوان «عنصر مرجع» یک معادله تشکیل می‌دهیم. از مثلث ABC به $AC = c\cos ۲x$ و از مثلث ACD به $AC = \frac{c\sqrt{۳}}{۳}$ می‌رسیم. با مساوی قرار دادن این عبارتها، معادلهٔ مثلثها به‌دست می‌آید. $c\cos ۲x = \frac{c\sqrt{۳}}{۳}\cos x$. این معادله را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{۳}\cos ۲x = \cos x \ , \ \sqrt{۳}(۲\cos^۲ x - ۱) = \cos x \ ,$$
$$۲\sqrt{۳}\cos^۲ x - \cos x - \sqrt{۳} = ۰$$

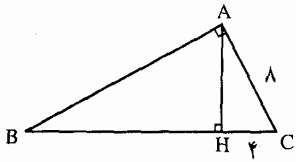
از این تساوی، $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $\cos x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ به‌دست می‌آید. از آن‌جا که با توجه به مفاد مسأله $\cos x > ۰$ است، بنابراین $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ خواهد بود. از این‌رو زاویهٔ BAD برابر °۳۰ و زاویهٔ BAC برابر °۶۰ خواهد بود. درنتیجه $AC = \frac{c}{۲}$ و $BC = \frac{c\sqrt{۳}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

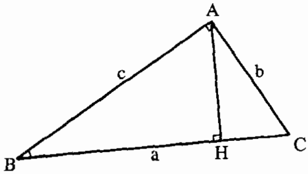
اگر مسأله یافتن نسبت کمیتهای معین (طولها یا مساحتها) به‌ویژه یافتن اندازهٔ زاویه‌ای (که معمولاً به یافتن تابعهای مثلثاتی معینی از آن زاویه و درنتیجه به یافتن نسبت ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه تحویل یابد.) مطلوب باشد، معمولاً به شرح زیر عمل می‌کنیم: یکی از عناصر خطی را معلوم درنظر گرفته و کمیتهای مطلوب را برحسب این عنصر بیان کرده و سپس نسبت این کمیتها را پیدا می‌کنیم. عنصر خطی منظور شده، پارامتر کمکی و این روش حل مسأله‌های هندسی، روش معرفی پارامتر کمکی نامیده می‌شود. از این روش در حل مسائلی استفاده می‌شود که در آن اشکال هندسی مشابهی وجود دارد.

۴.۳.۵. اندازهٔ وتر و یک ضلع

۳۷۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، AC=۸ و CH=۴ باشد، داریم:

$$AC^2 = CH.BC \Rightarrow 64 = 4BC \Rightarrow BC = 16\text{cm}$$
$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}\text{cm}$$





۳۷۹. مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ است. اگر A رأس قائم مثلث و $\hat{B}=30^\circ$ باشد، b=۸ و a=۲b است. از آن‌جا a=۱۶cm و $c = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\text{cm}$ است. برای محاسبهٔ طول ارتفاع وارد بر وتر، می‌دانیم که $a.h_a = b.c$ است. بنابراین

$$16 \times h_a = 8 \times 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 4\sqrt{3}$$

h_a از مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$، ABH نیز قابل محاسبه است. زیرا داریم:

$$AH = \frac{c}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

۳۸۰. طول دیوار چه‌قدر است؟

طول نردبان و بلندی دیوار را برحسب سانتیمتر بترتیب e و m می‌نامیم. بنا به نخستین دادهٔ معمّا، وقتی که نردبان عمودی قرار دارد می‌توان نوشت:

$$e - m = 65$$

از روی دومین دادهٔ معمّا، که نردبان مایل است، و با توجّه به رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$e^2 - m^2 = 65^2$$

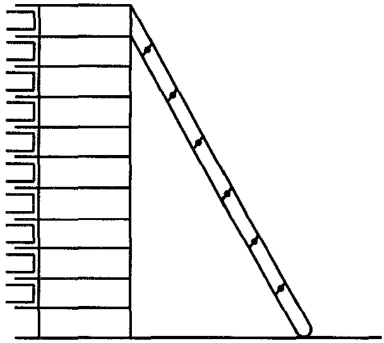
معادلهٔ دوم را تجزیه می‌کنیم:

$$(e+m)(e-m) = 4900$$

و از تلفیق آن با معادلهٔ اوّل خواهیم داشت:

$$e+m=490$$

دو معادلهٔ $e+m=490$ و $e-m=10$ دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی جدیدی می‌دهند، که بسادگی قابل حلّ است.



خواهیم داشت : $m=۲۴۰$ و $e=۲۵۰$

پس نردبان ۲/۵۰ و دیوار ۲/۴۰ متر طول دارد.

۳۸۱. فاصلهٔ انتهای فوقانی نردبان از سطح زمین را h می‌نامیم، و فاصلهٔ پای نردبان از پای دیوار را با b نشان می‌دهیم. اگر طول نردبان (۲/۵۰ متر) را با l و طول هر یال صندوق (۷۰ سانتیمتر) را با c مشخص کنیم، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$h^۲ + b^۲ = l^۲$$

دو مثلث کوچک نیز، که در شکل مشاهده می‌کنید، با هم متشابه‌اند، و خواهیم داشت :

$$\frac{h-c}{c} = \frac{c}{b-c}$$

$$(h-c)(b-c) = c^۲$$

$$hb = c(h+b)$$

حالا اوّلین رابطه به این شکل درمی‌آید :

$$(h+b)^۲ - ۲c(h+b) - l^۲ = ۰$$

در این معادلهٔ درجهٔ دوم، (h+b) فقط یک ریشهٔ مثبت دارد :

$$h+b = \sqrt{c^۲ + l^۲} + c$$

اکنون h و b از حلّ معادلهٔ درجهٔ دوّم زیر به‌دست می‌آیند :

$$X^۲ - (\sqrt{c^۲ + l^۲} + c)X + c(\sqrt{c^۲ + l^۲} + c) = ۰$$

با جاگذاری مقدارهای l و c ریشه‌های معادله، ۲/۲۸ و ۱/۱۰ متر (به‌طور تقریبی) خواهند بود، که به‌طور یقین عدد بزرگ به h، و عدد کوچک به b اختصاص دارد، پس :

$$h = ۲/۲۸m \quad \text{و} \quad b = ۱/۱۰m$$

۳۸۲. الف. $c=\sqrt{a^۲+b^۲}=\sqrt{۱۲^۲+۱۶^۲}=۲۰$

ب. $b=\sqrt{c^۲-a^۲}=\sqrt{۲۵^۲-۲۴^۲}=۷$

پ. $c=\sqrt{۵}$

ت. $c=۲\sqrt{۱۹}$

ث. $c=۷\sqrt{۲}$

ج. $b=۶\sqrt{۳}$

۳۸۳. با استفاده از مثلثهای قائم‌الزاویه و متشابه داده شده درشکل، داریم :

$$\begin{cases}\dfrac{۸}{x}=\dfrac{V}{۹}=\dfrac{W}{y} & (۱)\\ x^۲=۹z & (۲)\\ x^۲+z^۲=۴۰۰ & (۳)\\ y^۲=x^۲+۸۱ & (۴)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^۲=۹z\\ x^۲+z^۲=۴۰۰\end{cases}\Rightarrow z^۲+۹z-۴۰۰=۰\Rightarrow z=۱۶\ ,\ z=-۲۵<۰$$

$$z=۱۶\Rightarrow x^۲=۱۴۴\Rightarrow x=۱۲\Rightarrow y^۲=۱۴۴+۸۱=۲۲۵$$

$$\Rightarrow y=۱۵\Rightarrow x=۱۶\Rightarrow\frac{۸}{۱۶}=\frac{V}{۹}\Rightarrow V=\frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۸}{۱۶}=\frac{W}{۱۵}\Rightarrow W=\frac{۱۵}{۲}$$

۵.۳.۵. اندازهٔ ضلعها

۳۸۴. اگر ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه را که مکعب کامل است $x^۳$ بگیریم، ضلع دوم پهلوی زاویهٔ قائمه برابر $x^۳-x$ و وتر مثلث برابر $x^۳+x$ می‌شود و، درنتیجه، باید داشته باشیم :

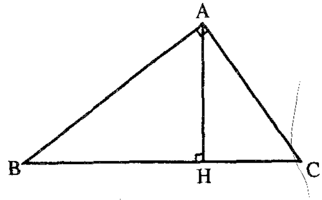
$$\sqrt{(x^۳+x)^۲-(x^۳-x)^۲}=x^۳$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$۲x^۲=x^۳$$

درنتیجه، x=۲، یعنی وتر برابر ۱۰ و دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه، بترتیب، برابر ۶ و ۸ می‌شود.

۳۸۵. فرض می‌کنیم $\hat{A} = ۹۰°$ باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. داریم :



$$AH^۲ = BH.CH \Rightarrow ۲۴^۲ = ۹K.۱۶K$$

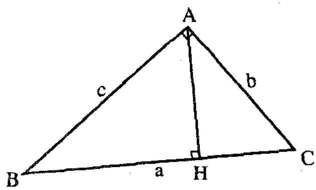
$$\Rightarrow ۵۷۶ = ۱۴۴K^۲ \Rightarrow K^۲ = ۴ \Rightarrow K = ۲$$

$$\Rightarrow BH = ۳۲cm \ , \ CH = ۱۸cm \Rightarrow a = BC = ۳۲ + ۱۸ = ۵۰cm$$

$$b^۲ = BH.BC = ۳۲ \times ۵۰ = ۱۶۰۰ \Rightarrow b = ۴۰cm$$

$$c^۲ = CH.BC = ۱۸ \times ۵۰ = ۹۰۰ \Rightarrow c = ۳۰cm$$

۳۸۶. با فرض $\hat{A} = ۹۰°$ و رسم ارتفاع AH داریم :



$$BC = m^۲a + (۱ - m^۲)a = a$$

$$b^۲ = BC.CH = a.m^۲a = m^۲a^۲ \Rightarrow b = ma$$

$$c^۲ = BC.BH = a(۱ - m^۲)a = a^۲(۱ - m^۲) \Rightarrow c = a\sqrt{۱ - m^۲}$$

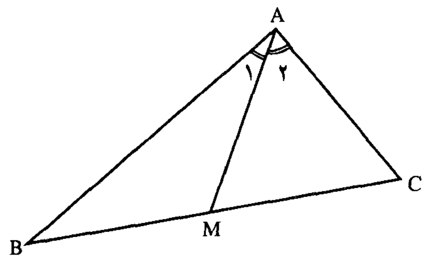
۳۸۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{C} = ۹۰°)$ را درنظر می‌گیریم. بنا به داده‌های مسأله داریم :

$$\begin{cases} b = ۲\frac{۱}{۲}a \\ S = ۲۰ \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۵}{۲}a \\ \frac{۱}{۲}ab = ۲۰ \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a \times \frac{۵}{۲}a = ۲۰$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow b = ۱۰ \ , \ c = ۲\sqrt{۲۹}$$

۳۸۸. فرض

$$\begin{cases} \hat{A} = ۹۰^\circ \\ \dfrac{\hat{A}_۱}{\hat{A}_۲} = \dfrac{۱}{۲} \\ m_a = m \end{cases}$$



مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را درنظر گرفته، میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. با فرض $AB > AC$ داریم:

$$B\hat{A}M = ۳۰^\circ \ , \ M\hat{A}C = ۶۰^\circ$$

چون مثلث AMC در رأس M متساوی‌الساقین است و یک زاویهٔ ۶۰° دارد، پس متساوی‌الاضلاع است. درنتیجه $AC=MA=MC=m$ است و چون $BC=۲m$ می‌باشد، بنابراین:

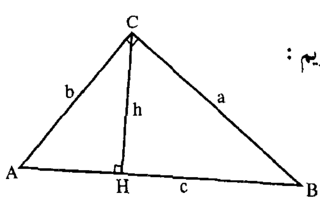
$$AB = \sqrt{۴m^۲ - m^۲} = m\sqrt{۳}$$

۳۸۹. با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$\begin{cases} d_b = \dfrac{۲}{a+c}\sqrt{pac(p-b)} \\ d'_b = \dfrac{۲}{c-a}\sqrt{p(p-a)(p-c)} = ۲۰ \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۵ = \dfrac{۲}{a+c}\sqrt{pac(p-a)} \\ ۲۰ = \dfrac{۲}{c-a}\sqrt{p(p-a)(p-c)} \\ c^۲ = a^۲ + b^۲ \end{cases}$$

از حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی برحسب a، b و c اندازهٔ ضلعهای مثلث به‌دست می‌آید.

۳۹۰. راه اوّل. داریم:



$$a + b = ۲p - c$$

$$a^۲ + ۲ab + b^۲ = (۲p - c)^۲$$

و با توجه به این که $a^۲ + b^۲ = c^۲$ و ab=ch می‌باشد، خواهیم داشت :

$$c = \frac{۲p^۲}{h + ۲p}$$

اکنون اگر رابطه‌های زیر را درنظر بگیریم :

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{۲p(h + p)}{h + ۲p} \\ a.b = \dfrac{۲p^۲h}{h + ۲p} \end{cases}$$

a و b ریشه‌های معادلهٔ زیر می‌باشند : $x^۲ - \frac{۲p(h + p)}{h + ۲p}x + \frac{۲p^۲h}{h + ۲p} = ۰$

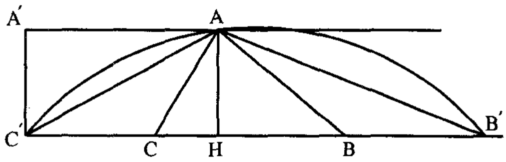
جواب :

$$\begin{cases} a = \dfrac{p}{h + ۲p}\left[h + p + \sqrt{(p - h)^۲ - ۲h^۲}\right] \\ b = \dfrac{p}{h + ۲p}\left[h + p - \sqrt{(p - h)^۲ - ۲h^۲}\right] \\ c = \dfrac{۲p^۲}{h + ۲p^۲} \end{cases}$$

و مسأله وقتی جواب دارد که داشته باشیم :

شرط وجود جواب : $(p - h)^۲ \geq ۲h^۲$

راه دوم. مسأله به این‌جا منجر می‌شود که از یک مثلث قائم‌الزاویه طول محیط و اندازهٔ ارتفاع معلوم است می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم. پاره‌خط $B'C'$ را مساوی با محیط رسم کرده



و قوسی حاوی زاویهٔ ۱۳۵ درجه می‌کشیم که از B' و C' بگذرد (شکل). از C' عمود $C'A'$ را به اندازهٔ ارتفاع معلوم بر $B'C'$ اخراج می‌کنیم. اگر از A' به موازات $B'C'$ بکشیم، محل تلاقی آن با قوس دایره، رأس A خواهد بود (دو جواب). $C'A$ و $B'A$ را رسم کرده و زاویه‌های $C'AC$ و $C'AB$ را بترتیب مساوی با زاویه‌های $CC'A$ و $BB'A$ جدا می‌کنیم. مثلث ABC به‌دست خواهد آمد.

۳۹۱. اگر a و b اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه و c وتر مثلث باشد، داریم:

$$a = ۳۳\ ,\ b = ۴۴\ ,\ c = ۵۵$$

۳۹۲. اتحاد زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\left[(m^۲ + n^۲)x\right]^۲ = \left[(m^۲ - n^۲)x\right]^۲ + (۲mnx)^۲$$

$(m^۲ + n^۲)x$ را وتر مثلث و $(m^۲ - n^۲)x$ و $۲mnx$ را ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه می‌گیریم. با توجه به شرط مسأله، داریم:

$$(m^۲ + n^۲)x = mnx^۲(m^۲ - n^۲)$$

و یا

$$m^۲ + n^۲ = mn(m^۲ - n^۲)x$$

و از آن‌جا

$$x = \frac{m^۲ + n^۲}{mn(m^۲ - n^۲)}$$

اکنون بدون هیچ زحمتی، می‌توان ضلعهای مثلث و؛ بنابراین، خود مثلث را به‌دست آورد. این مسأله را از رسالهٔ «آموزش اخترشناسی» بهاسکارا برداشته‌ایم.

۳۹۳. مسأله، منجر به حل دستگاهی از سه معادلهٔ سه مجهولی می‌شود:

$$\begin{cases} a + b + c = p\ , \\ a^۲ + b^۲ = c^۲\ , \\ a.b = ۲s \end{cases}$$

که در آن، a، b و c طول ضلعها، p اندازهٔ محیط و s اندازهٔ مساحت مثلث مفروضند.

از معادله‌های دوم و سوم به‌دست می‌آید:

$$(a + b)^۲ = ۴s + c^۲ \Rightarrow (p - c)^۲ = ۴s + c^۲$$

که اگر آن را نسبت به c حل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$c = \frac{p^۲ - ۴s}{۲p}$$

درنتیجه، با توجه به معادلهٔ اوّل، خواهیم داشت:

$$a + b = \frac{p^۲ + ۴s}{۲p}$$

اگر این معادله را با معادلهٔ سوم درنظر بگیریم، به معادلهٔ درجهٔ دومی می‌رسیم که a و b ریشه‌های آن خواهند بود:

$$x^۲ - \frac{p^۲ - ۴s}{۲p}x + ۲s = ۰$$

رسالهٔ «آغاز هنر محاسبه» درسال ۱۵۹۳ چاپ شد. در این رساله، قاعده‌های مهمی

وجود دارد که، احتمالاً برای این‌که بهتر به‌خاطر بماند، به‌صورت شعر تنظیم شده است. ظاهراً، از این کتاب، در زمان خودش، به‌عنوان یک کتاب درسی، در مدرسه‌های ریاضیات مقدماتی، استفاده می‌کرده‌اند. محتوی این کتاب، طرح خوبی از وضع ریاضیات چین، در اواخر سدهٔ شانزدهم به‌دست می‌دهد.

۳۹۵. مربع بزرگترین عدد باید برابر مجموع مربعهایِ دو عدد دیگر باشد.
جواب : (ب)، (پ)، (ت) و (ث)

۳۹۶. مربع بزرگترین عدد باید برابر مجموع مربعهای دو عدد دیگر باشد.
جواب : الف، ب، پ، ت، ث، ج و ح

۶.۳.۵. سه‌تاییهای فیثاغورسی

۳۹۷. قبلاً یادآوری می‌کنیم که، اگر x_1 ، y_1 و z_1 ، یک سه‌تایی فیثاغوری باشد، عددهای Kx_1 ، Ky_1 و Kz_1 هم، یک سه‌تایی فیثاغوری را تشکیل می‌دهند (K، عددی است درست و مثبت). درواقع، اگر دو طرف معادلهٔ $x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$ را در K^2 ضرب کنیم، به‌دست می‌آید : $(Kx_1)^2 + (Ky_1)^2 = (Kz_1)^2$
بنابراین، اگر یک سه‌تایی فیثاغوری در اختیار داشته باشیم، می‌توان با استفاده از یادآوری بالا، مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تایی فیثاغوری را به‌دست آورد. ولی البته، این مطلب به معنای آن نیست که، از این راه همهٔ سه‌تاییهای فیثاغوری به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن این سه‌تاییها، به استدلال بیشتری نیاز داریم.
سه‌تاییهای فیثاغوری x، y و z را وقتی ساده می‌نامیم، که دو به دو نسبت به هم اوّل باشند. در غیر این‌صورت، به آن «سه‌تایی مرکب» می‌گوییم. به خودی خود روشن است که، برای به‌دست آوردن همهٔ سه‌تاییهای فیثاغوری، باید مجموعهٔ همهٔ سه‌تاییهای ساده را شناخت تا از راه ضرب آنها در عددهای مثبت ۲ ، ۳،... بتوان همهٔ سه‌تاییهای دیگر را پیدا کرد. از این به بعد، تنها با سه‌تاییهای ساده سر و کار خواهیم داشت.
سپس، توجه کنیم که، اگر از سه عدد فیثاغوری x، y و z، دوتای آنها نسبت به هم اوّل باشند، سه‌تایی (x, y, z) یک سه‌تایی ساده می‌شود، یعنی هر دو عدد دلخواه آن، نسبت به هم، اوّل خواهند بود. این حکم را ثابت می‌کنیم.
x و y را نسبت به هم اوّل می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که x و z و، همچنین، y و z نسبت به هم اوّلند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، x و z نسبت به هم اوّل

نباشند (هر استدلالی که برای x و z به کار بریم، در مورد دو عدد y و z هم صادق است). در این‌صورت داریم :

$$x = d.x_1 \quad و \quad z = d.z_1$$

که در آن، $d \neq 1$ ، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد x و z است. هر سه‌تایی فیثاغوری در این معادله صدق می‌کنند :

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$

بنابراین

$$(dx_1)^2 + y^2 = (dz_1)^2$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید :

$$y^2 = d^2z_1^2 - d^2x_1^2 = (z_1^2 - x_1^2)d^2$$

از این‌جا دیده می‌شود که عدد y، بناچار، باید بر d بخش‌پذیر باشد و، در این صورت، دو عدد x و y، برخلاف فرض، نسبت به هم اوّل نمی‌شوند. درنتیجه، x و z نسبت به هم اوّلند. و به همین ترتیب، در مورد دو عدد y و z. از آن‌جا که x و y نسبت به هم اوّلند، هر دوی آنها نمی‌توانند زوج باشند. ولی این دو عدد، هر دو، فرد هم نمی‌توانند باشند. درواقع، اگر هر دو عدد فرد باشند، می‌توانیم آنها را به‌صورت $x = 2p + 1$ و $y = 2q + 1$ بنویسیم، که در آنها، p و q عددهایی درست و مثبتند. اگر مقدارهای x و y را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، به‌دست می‌آید :

$$(2p+1)^2 + (2q+1)^2 = z^2 ,$$

$$z^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$$

از این‌جا، z^2 عددی زوج می‌شود و این ممکن نیست، مگر آن‌که z عددی زوج باشد. ولی اگر z عددی زوج باشد، z^2 باید بر ۴ بخش‌پذیر شود، درحالی که از مقدار z^2 دیده می‌شود که در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد، و این، یک تناقض منطقی است. به این‌ترتیب، x و y نمی‌توانند هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، یعنی به‌طور حتم یکی از آنها و دیگری فرد است. از این به بعد، x را فرد و y را زوج می‌گیریم. روشن است که z عددی فرد می‌شود. حالا، معادلهٔ (۱) را، به این‌صورت می‌نویسیم :

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$$

و فرض می‌کنیم :

$$z + y = m \ , \ z - y = n$$

در این‌صورت

$$z = \frac{m+n}{2} \ , \ y = \frac{m-n}{2} \ , \ x^2 = m.n$$

و ضمناً $m>n$.

چون x، و درنتیجه $x^۲$، عددی فرد است، بنابراین هر دو عدد m و n باید فرد باشند.
ثابت می‌کنیم که m و n نسبت به هم اوّلند. استدلال را، با برهان خلف انجام می‌دهیم.
m و n را عددهایی می‌گیریم که نسبت به هم اوّل نیستند و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها را $d \neq ۱$ فرض می‌کنیم. در این‌صورت

$$m = m_۱ d \ , \ n = n_۱ d$$

و از آن‌جا

$$z = \frac{m+n}{۲} = \frac{m_۱ + n_۱}{۲} d \quad , \quad y = \frac{m-n}{۲} = \frac{m_۱ - n_۱}{۲} d$$

یعنی y و z نسبت به هم اوّل نیستند، چیزی که مخالف فرض ما است. به این‌ترتیب، عددهای m و n، نسبت به هم اوّلند.
از رابطهٔ $x^۲ = mn$ و از این حکم که m و n نسبت به هم اوّلند، نتیجه می‌شود:

$$m = u^۲ \quad , \quad n = v^۲$$

که در آنها، u و v نسبت به هم اوّلند و، ضمناً $u>v$.
به این‌ترتیب، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$x = u.v \quad , \quad y = \frac{u^۲ - v^۲}{۲} \quad , \quad z = \frac{u^۲ + v^۲}{۲}$$

و اینها، همان رابطه‌هایی هستند که سه‌تاییهای سادهٔ فیثاغوری را به‌دست می‌دهند (به‌صورت مستقیم تحقیق کنید و ببینید که این مقدارها، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند).
برای این که مطلب روشن‌تر باشد، چند سه‌تایی سادهٔ فیثاغوری را، به یاری این رابطه‌ها، پیدا می‌کنیم:

u	v	x	y	z
۳	۱	۳	۴	۵
۵	۱	۵	۱۲	۱۳
۵	۳	۱۵	۸	۱۷
۷	۱	۷	۲۴	۲۵
۷	۳	۲۱	۲۰	۲۹
۷	۵	۳۵	۱۲	۳۷
۹	۱	۹	۴۰	۴۱
۹	۵	۴۵	۱۸	۵۳
۹	۷	۶۳	۱۶	۶۵

یادداشت ۱. سه‌تاییهای فیثاغوری ۳، ۴ و ۵، خیلی پیش از فیثاغورس، برای مصریها شناخته شده بود و از آن، برای رسم خطهای عمود بر هم بر روی زمین، استفاده می‌کرده‌اند. به همین مناسبت است که مثلث با ضلعهای ۳، ۴ و ۵ را مثلث مصری گویند.

یادداشت ۲. با عددهای فیثاغوری، می‌توانیم، هرقدر که بخواهیم، مثلث هرونی بسازیم. **مثلث هرونی**، به مثلثی گویند که سه ضلع و مساحت آن، با عددهای درست و مثبت بیان شده باشند. درواقع، هر سه‌تایی فیثاغوری، متناظر با یک مثلث قائم‌الزاویه است که وتر و ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آن، با این عددها، بیان شده‌اند. اگر دو مثلث فیثاغوری درنظر بگیریم که در یکی از ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه برابر باشند، و آن‌وقت، این دو ضلع برابر را طوری روی هم قرار دهیم که دو ضلع دیگر پهلوی زاویهٔ قائمه، از دو مثلث، در امتداد هم قرار گیرند، یک مثلث هرونی به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال از دو مثلث فیثاغوری با ضلعهای ۵، ۱۲، ۱۳ و ۳۵، ۱۲، ۳۷، یک مثلث هرونی با ضلعهای ۴۰، ۱۳ و ۳۷ به‌دست می‌آید که ارتفاعی برابر ۱۲ دارد و، بنابراین، مساحتش برابر $\frac{۴۰\times۱۲}{۲}$، یعنی ۲۴۰ واحد مربع می‌شود.

یادداشت ۳. وجود مجموعه‌ای نامتناهی از سه‌تاییهای فیثاغوری، وسیله‌ای است برای درست کردن مسأله‌هایی بسیار جالب. ریاضیدانان، بخصوص به این سه مسأله علاقه‌مندند:

مسألهٔ اول. از میان سه‌تاییهای فیثاغوری، همهٔ آنهایی را پیدا کنید که، در هر کدام از آنها، یک مجذور کامل وجود داشته باشد (مثل سه‌تایی ۳، ۴، ۵ یا ۷، ۲۴، ۲۵، یا ۹، ۴۰، ۴۱ و غیره).

مسألهٔ دوم. از بین سه‌تاییهای فیثاغوری، همهٔ آنهایی را پیدا کنید که، در هر کدام از آنها، دو عدد متوالی وجود داشته باشد (مثل ۵، ۱۲، ۱۳ یا ۲۰، ۲۱، ۲۹ و غیره).

مسألهٔ سوم (مسألهٔ فرما). سه‌تاییهای فیثاغوری (x, y, z) را طوری پیدا کنید که، در آنها، $x+y$ و z مجذور کامل باشند.

معلوم شده است که این‌گونه سه‌تاییها، یک مجموعهٔ نامتناهی را تشکیل می‌دهند، ولی همهٔ آنها، شامل عددهایی بسیار بزرگ‌اند.

۷.۳.۵. نسبت ضلعها

۳۹۸. داریم:

$$BH:BM = ۴۰:۴۱$$

اگر $\frac{۱}{۴۰}$ طول BH را واحد بگیریم، BH=۴۰ و BM=۴۱ است. از آن‌جا با توجه به قائم‌الزاویه بودن مثلث BHM داریم :

$$HM = \sqrt{BM^۲ - BH^۲} = \sqrt{۱۶۸۱ - ۱۶۰۰} = ۹$$
$$\Rightarrow AH = AM - MH = ۴۱ - ۹ = ۳۲$$

از طرفی

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{BH} = \frac{۳۲}{۴۰} = \frac{۴}{۵}$$

۳۹۹. قبل از همه، ابتدا طبق فرض $\cos\alpha = \frac{۴۰}{۴۱}$ یعنی $\frac{CK}{CM} = \frac{۴۰}{۴۱}$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. با استفاده از روش معرفی پارامتر کمکی، به حل مسأله می‌پردازیم. اگر CK=h را درنظر بگیریم، آن‌گاه $CM = \frac{۴۱}{۴۰}h$ و $KM = \sqrt{CM^۲ - CK^۲} = \frac{۹}{۴۰}h$ را خواهیم داشت. از آن‌جا که در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، از این‌رو $AM = CM = MB = \frac{۴۱}{۴۰}h$ را داریم. آن‌گاه چنین خواهیم داشت :

$$KB = KM + BM = \frac{۹}{۴۰}h + \frac{۴۱}{۴۰}h = \frac{۵}{۴}h \ ,$$

$$AK = AM - KM = \frac{۴۱}{۴۰}h - \frac{۹}{۴۰}h = \frac{۴}{۵}h$$

$$AC = \sqrt{AK^۲ + CK^۲} = \sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}h^۲ + h^۲} = \frac{h}{۵}\sqrt{۴۱}$$

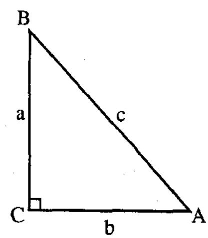
$$BC = \sqrt{BK^۲ + CK^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}h^۲ + h^۲} = \frac{h}{۴}\sqrt{۴۱}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{h\sqrt{۴۱}}{۵} \div \frac{h\sqrt{۴۱}}{۴} = \frac{۴}{۵}$$

۴۰۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. بنا به فرض داریم :

$$\frac{c^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۲ \times \frac{ab}{۲} \Rightarrow c^۲ = \frac{۴ab}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ = \frac{۴ab}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{۴}{۳} \ , \ x = \frac{a}{b}$$



$$\Rightarrow x + \frac{۱}{x} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} \Rightarrow x = -\sqrt{۳} \ , \ x = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \ , \ \frac{b}{a} = \sqrt{۳}$$

۴.۵. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۵. اندازهٔ ارتفاع

۴۰۱. اندازهٔ وتر PQ را تعیین می‌کنیم.

$$PQ=\sqrt{PR^۲+QR^۲}=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=۱۳$$

از آن‌جا:

$$PQ.RT=PR.QR\Rightarrow ۱۳\times h=۱۲\times ۵\Rightarrow h=\frac{۶۰}{۱۳}$$

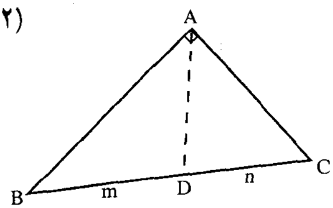
۴۰۲. داریم:

$$AB=c=\sqrt{CB^۲+AC^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲}\ ,$$

$$AB.CD=AC.CB\Rightarrow \sqrt{a^۲+b^۲}.h=b.a\Rightarrow h=\frac{ab}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

۴۰۳. اندازهٔ وتر مثلث (۱) $BC=m+n$ است و

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Rightarrow\frac{c}{b}=\frac{m}{n}\qquad (۲)$$



$$\begin{cases} m+n=a & (۱)\\ \dfrac{m}{n}=\dfrac{c}{b} & (۲)\ \Rightarrow (m+n)^۲=b^۲+(\dfrac{bm}{n})^۲\\ a^۲=b^۲+c^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m+n)^۲=\frac{b^۲n^۲+b^۲m^۲}{n^۲}=\frac{b^۲(m^۲+n^۲)}{n^۲}\Rightarrow b=\frac{n(m+n)}{\sqrt{m^۲+n^۲}}\ ,$$

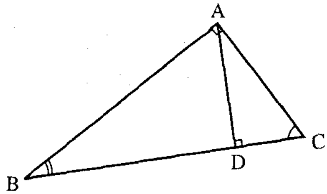
$$c=\frac{m(m+n)}{\sqrt{m^۲+n^۲}}\ ,\ a.h_a=b.c\Rightarrow$$

$$(m+n).h_a=\frac{mn(m+n)^۲}{m^۲+n^۲}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{mn(m+n)}{m^۲ + n^۲}$$

۴۰۴. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا از $\frac{۱}{۲}hc = A$ نتیجه می‌شود $h = \frac{۲A}{c}$.

۴۰۵. نیوتون مسأله را این طور حل می‌کند: فرض می‌کنیم $BC = a$ و $AD = y$ (شکل). چون زاویهٔ ABD معلوم است، نسبت بین پاره‌خطهای AD و BD هم معلوم خواهد بود. (از روی جدول سینوسها یا تانژانتها)، این نسبت را $\frac{d}{l}$ می‌نامیم. به این ترتیب



$$\frac{d}{l} = \frac{y}{BD} \Rightarrow BD = \frac{l.y}{d}$$

به همین ترتیب، با معلوم بودن زاویهٔ ACD، نسبت AC به CD معلوم است که آن را برابر $\frac{d}{f}$ می‌گیریم. از آن جا

$$DC = \frac{f.y}{d}$$

ولی می‌دانیم: $BD + DC = BC$ ، بنابراین

$$\frac{l.y}{d} + \frac{f.y}{d} = a$$

با حل این معادله، نسبت به مجهول y، به دست می‌آید:

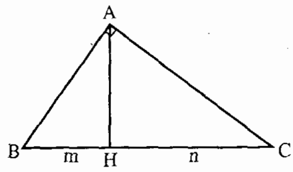
$$y = \frac{ad}{l+f}$$

این مسأله هم، از کتاب «حساب عمومی» نیوتون برداشته شده است.

۴۰۶. داریم:

$$AB^۲ = AC \times AH = ۱۰ \times ۶/۴ = ۶۴$$
$$AB = ۸$$
$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲ = ۱۰۰$$
$$BC^۲ = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Rightarrow BC = ۶$$
$$BH \times AC = BC \times AC = ۴۸ \Rightarrow BH = ۴/۸$$

۴۰۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با فرض $BH = ۵$ و $HC = ۱۵$ ، داریم:



$$BC = BH + CH = m + n$$
$$AH = \sqrt{BH.CH} = \sqrt{m \times n} = \sqrt{mn}$$
$$AB = \sqrt{BH.BC} = \sqrt{m(m+n)}$$
$$AC = \sqrt{CH.BC} = \sqrt{n(m+n)}$$

۴۰۸. از ویژگیهای مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید.

به عنوان مثال برای حل (الف) داریم:

$$h^۲ = e.f \Rightarrow ۱۵^۲ = ۵ \times f \Rightarrow f = ۴۵$$
$$b = \sqrt{h^۲ + e^۲} = \sqrt{۲۲۵ + ۲۵} = \sqrt{۲۵۰} = ۵\sqrt{۱۰}$$
$$c = \sqrt{h^۲ + f^۲} = \sqrt{۲۲۵ + ۲۰۲۵} = \sqrt{۲۲۵۰} = ۱۵\sqrt{۱۰}$$

۴۰۹. الف. $h = ۶$

ب. $h = ۱۴$

پ. $a = ۶$

ت. $b = ۱۴$

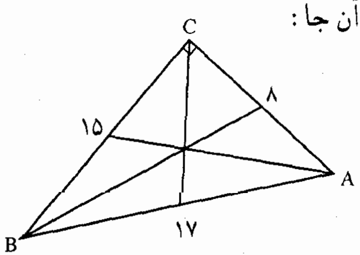
ث. $h = \sqrt{rs} = \sqrt{۶}\ ,\ a^۲ = s(s+r) = \sqrt{۱۲}(\sqrt{۱۲} + \sqrt{۳}) = ۱۲ + ۶ = ۱۸$
$\Rightarrow a = ۳\sqrt{۲}$

$$b^۲ = r(s+r) = \sqrt{۳}(\sqrt{۱۲} + \sqrt{۳}) = ۶ + ۳ = ۹ \Rightarrow b = ۳$$

۲.۴.۵. اندازهٔ میانه

۴۱۰. چون $۷^۲ + ۱۵^۲ = ۱۷^۲$ یا $۲۸۹ = ۲۸۹$ است، این مثلث قائم‌الزاویه در رأس c است.

از آن جا:



$$m_c = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۷}{۲} = ۸/۵$$
$$m_b = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲ + c^۲) - b^۲}$$

۴۱۱. نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCN، BG ارتفاع وارد بر وتر است. بنابراین داریم:

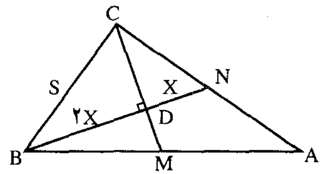
$BC^۲ = BG.BN$ امّا $BC = ۲$ و $BG = \frac{۲}{۳}BN$ است.

پس: $\text{۴} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}} BN.BN \Rightarrow BN^{\text{۲}} = \text{۶} \Rightarrow BN = \sqrt{\text{۶}}$

۴۱۲. (هـ) چون D نقطهٔ برخورد دو میانهٔ مثلث است، $BD = \text{۲}DN$، پس اگر $DN = x$، آن‌گاه $BD = \text{۲}x$، از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BCN و BDC نتیجه می‌شود:

$$\frac{s}{\text{۳}x} = \frac{\text{۲}x}{s} \Rightarrow s^{\text{۲}} = \text{۶}x^{\text{۲}} \;;\; x = \frac{s}{\sqrt{\text{۶}}}$$

$$BN = \text{۳}x = \frac{\text{۳}s}{\sqrt{\text{۶}}} = \frac{s\sqrt{\text{۶}}}{\text{۲}}$$



۴۱۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = \text{۹۰}^\circ)$ فرض می‌کنیم $HC = \text{۴/۵}cm$، $HB = \text{۲}cm$ باشد. خواهیم داشت:

$$a = BC = \text{۲} + \text{۴/۵} = \text{۶/۵}cm$$

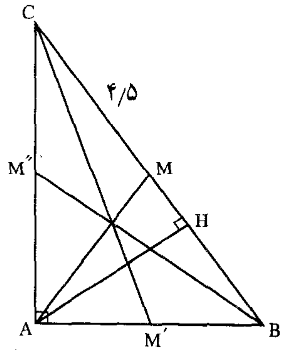
$$h_a^{\text{۲}} = AH^{\text{۲}} = HB.HC = \text{۲} \times \text{۴/۵} = \text{۹}$$

$$\Rightarrow AH = \text{۳}cm$$

$$c = AB = \sqrt{AH^{\text{۲}} + BH^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۹} + \text{۴}} = \sqrt{\text{۱۳}}cm$$

$$b = AC = \sqrt{AH^{\text{۲}} + HC^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۹} + \frac{\text{۸۱}}{\text{۴}}} = \frac{\text{۳}\sqrt{\text{۱۳}}}{\text{۲}}cm$$

$$AM = \frac{BC}{\text{۲}} = \frac{\text{۶/۵}}{\text{۲}} = \frac{\text{۱۳}}{\text{۴}}cm$$



$$CM' = \sqrt{AC^{\text{۲}} + AM'^{\text{۲}}} = \sqrt{\frac{\text{۱۱۷}}{\text{۴}} + \frac{\text{۱۳}}{\text{۴}}} = \sqrt{\frac{\text{۱۳۰}}{\text{۴}}} = \frac{\sqrt{\text{۱۳۰}}}{\text{۲}}$$

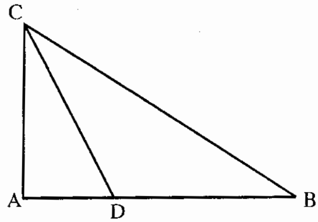
$$BM'' = \sqrt{AB^{\text{۲}} + AM''^{\text{۲}}} = \sqrt{\text{۱۳} + \frac{\text{۱۱۷}}{\text{۱۶}}} = \frac{\text{۵}\sqrt{\text{۱۳}}}{\text{۴}}$$

۳.۴.۵. اندازهٔ نیمساز

۴۱۴. پاسخ: $\frac{\text{۱۲}\sqrt{\text{۲}}}{\text{۷}}$

۴۱۵. DA و DB را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که $AC = \sqrt{\text{۲۵}^{\text{۲}} - \text{۲۴}^{\text{۲}}} = \text{۷}$ است.

$$\frac{DA}{AC} = \frac{DB}{BC} = \frac{DA + DB}{AC + BC}$$



$$\frac{DA}{۷}=\frac{DB}{۲۵}=\frac{۲۴}{۳۲}=\frac{۳}{۴}$$

پس :

$$CD^۲=DA^۲+CA^۲ \ , \ DA=\frac{۲۱}{۴}$$

$$CD^۲=(\frac{۲۱}{۴})^۲+۷^۲=\frac{۱۲۲۵}{۱۶}$$

$$CD=\frac{۳۵}{۴}=۸/۷۵$$

۴۱۶. طول ضلع AC برابر است با :

$$AC=\sqrt{AB^۲-BC^۲}=\sqrt{۱۶۹-۲۵}=۱۲$$

از آن جا : $a=۵$ و $b=۱۲$ و $c=۱۳$ و $p=۱۵$ است.

امّا $d'_b=\frac{۲}{c-a}\sqrt{p(p-a)(p-c)}$ است. بنابراین :

$$DB=d'_b=\frac{۲}{۱۳-۵}\sqrt{۱۵(۱۵-۵)(۱۵-۱۳)}=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۵\times۱۰\times۲}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

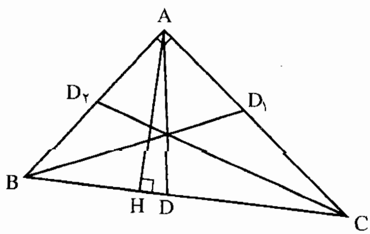
۴۱۷. اندازهٔ وتر مثلث $c=\sqrt{a^۲+b^۲}$ است. از آن جا :

$$P=\frac{a+b+\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲} \ , \ d_c=\frac{۲}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$$

۴۱۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. داریم :

$$b.c=a.h_a \Rightarrow bc=۵\times۲/۴=۱۲ \qquad (۱)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow b^۲+c^۲=۲۵ \qquad (۲)$$



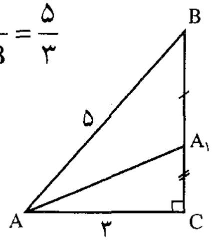
$$\Rightarrow \begin{cases} b^۲+c^۲=۲۵ \\ bc=۱۲ \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} b^۲+c^۲+۲bc=۴۹ \Rightarrow b+c=۷ \\ b^۲+c^۲-۲bc=۱ \Rightarrow b-c=۱ \end{matrix}$$

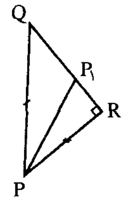
از آن جا : $b = ۴$ و $c = ۳$ است.

با معلوم بودن اندازهٔ ضلعهای مثلث، طول نیمسازهای زاویه‌ها قابل محاسبه است.

۴۲۰. (ب) نقطهٔ A_1، پای نیمساز زاویهٔ A، ضلع $BC = ۴$ از مثلث ABC را به پاره خطهای A_1B و A_1C متناسب با ضلعهای مجاور AB و AC (شکل را ملاحظه کنید) تقسیم می‌کند:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A_1B}{۴ - A_1B} = \frac{۵}{۳}$$





بنابراین $PQ = \frac{۵}{۲} = A_1B$ و $PR = \frac{۳}{۲} = A_1C$.

بترتیب، وتر و ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ PQR می‌باشند. ضلع سوم این مثلث $RQ = \frac{۴}{۲} = ۲$

بنابراین هر جزء این مثلث برابر نصف جزء متناظر با آن از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است.

در نتیجه : $PP_1 = \frac{۱}{۲}AA_1 = \frac{۱}{۲}\sqrt{AC^۲ + CA_1^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۴}$

۵.۵. پاره خط

۱.۵.۵. اندازهٔ پاره خط

۴۲۱. گزینهٔ (الف) درست است. زیرا :

$$x + \sqrt{d^۲ + (h + x)^۲} = h + d \ , \ \sqrt{d^۲ + (h + x)^۲} = h + d - x$$

$$d^۲ + h^۲ + ۲hx + x^۲ = h^۲ + d^۲ + x^۲ + ۲hd - ۲hx - ۲dx \ ,$$

$$۲hx + dx = hd \ ;$$

$$\therefore x = \frac{hd}{۲h + d}$$

۴۲۲. $\frac{۳}{۴}h$

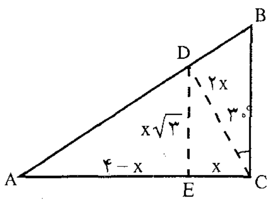
۴۲۳. چنین داریم : $CH^{۲} = AH.BH$ ؛ و از این رو $CH^{۲} = ۹\times۱۶$ یعنی $CH = ۱۲cm$ حاصل می‌شود. از مثلث ADH به $AD = \sqrt{۹^{۲}+۶^{۲}} = ۳\sqrt{۱۳}cm$ دست می‌یابیم. خط HM را به صورت $HM \| AK$ رسم کرده و $DK = x$ را در نظر می‌گیریم. به دلیل این که DK خط واصل وسط دو ضلع از مثلث HCM است، از این رو $HM = ۲x$ است. از آن جا که مثلثهای HMB و AKB متشابه هستند از این رو $\frac{HM}{AK} = \frac{BH}{AB}$ یعنی $\frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۲x}{x+۳\sqrt{۱۳}}$ نتیجه شده و از آن نیز چنین به دست می‌آید :

$$AK = ۳\sqrt{۱۳} + \frac{۲۴\sqrt{۱۳}}{۱۷} = \frac{۷۵\sqrt{۱۳}}{۱۷} \;,\; x = \frac{۲۴\sqrt{۱۳}}{۱۷}$$

بدین ترتیب داریم :
$$AK = \frac{۷۵\sqrt{۱۳}}{۱۷}cm$$

۴۲۴. $\frac{|a-b|}{a+b}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$

۴۲۵. گزینهٔ (الف) درست است. زیرا CD یک سوم زاویهٔ قائمهٔ C را جدا می‌کند، $B\hat{C}D = ۳۰^\circ$ و $D\hat{C}A = ۶۰^\circ$ و $C\hat{D}E = ۳۰^\circ$. بنابراین زاویه‌های مثلث DEC، ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° هستند. فرض کنید $\overline{EC} = x$ در نتیجه $\overline{DE} = x\sqrt{۳}$ و $\overline{DC} = ۲x$.



$$\frac{۴-x}{x\sqrt{۳}} = \frac{۴}{۳} \;,\; x = \frac{۱۲}{۳+۴\sqrt{۳}} \;,\; ۲x = \frac{۲۴}{۳+۴\sqrt{۳}} = \frac{۳۲\sqrt{۳}-۲۴}{۱۳} \;;$$

$$\text{مساحت مثلث } BCD = \frac{۱}{۲}\times۳\times۲x\times\sin ۳۰^\circ = \frac{۳x}{۲}$$

$$\text{مساحت مثلث } ACD = \frac{۱}{۲}\times۴\times۲x\times\sin ۶۰^\circ = ۲\sqrt{۳}x$$

مساحت مثلث ACB = مساحت مثلث ACD + مساحت مثلث BCD

$$\frac{۳}{۲}x + ۲\sqrt{۳}x = ۶ \;,\; x = \frac{۱۲}{۳+۴\sqrt{۳}} = \frac{۱۶\sqrt{۳}-۱۲}{۱۳} \;,$$

$$۲x = \frac{۳۲\sqrt{۳} - ۲۴}{۱۳}$$

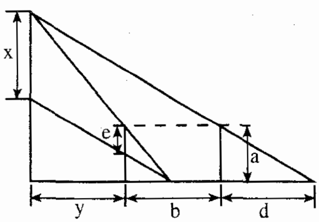
۴۲۶. لیوهوئه، ریاضیدان سدهٔ سوم، چینی و مؤلف آثار زیادی در ریاضیات، کارهای بسیاری در زمینهٔ پیشبرد هندسهٔ کاربردی دارد. تمامی رسالهٔ او، به نام «ریاضیات جزیرهٔ دریایی»، به کاربرد عملی هندسه اختصاص دارد. او این رساله را، ابتدا به عنوان فصل دهم تفسیر خود بر کتاب قدیمی «ریاضیات در نه کتاب» نوشت، ولی بعدها به صورت کتاب مستقلی عرضه شد. خود نام رساله نشان می‌دهد که، در آن، مسأله‌های گوناگونی دربارهٔ تعیین فاصله تا اشیاء غیرقابل دسترس، که در جزیره قرار دارند و ناظر هم در خارج آن جزیره واقع است، حل شده است. علاوه بر آن، در این رساله، مسأله‌هایی هم دربارهٔ محاسبهٔ ارتفاعهای غیرقابل دسترس داده شده است که ناظر در همان جزیره وجود دارد.

*

لیوهوئه، مسأله را با قاعده‌ای حل می‌کند که می‌توان آن را با دو رابطهٔ زیر بیان کرد :

$$x = \frac{be}{d+c} + e \;;\; y = \frac{bc}{d-c}$$

که در آنها، x ارتفاع درخت کاج ؛ y فاصلهٔ دیرک اوّل از تپه، a ارتفاع هر دیرک ؛ b فاصلهٔ بین دیرکها ؛ c فاصلهٔ نقطه‌ای که عقب دیرک قرار دارد و با انتهای دیرک اوّل و رأس درخت روی یک خط راست است، تا پای دیرک ؛ d فاصله‌ای از عقب دیرک دوم که با انتهای دیرک دوم و رأس درخت روی یک خط راست قرار دارد، تا پای دیرک ؛ e عددی است که «قاعدهٔ درخت» را از رأس دیرک دوم «اندازه می‌گیرد» (شکل).

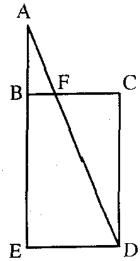


باید توجه داشت که اغلب مسأله‌های «لیوهوئه» دشوار است. خود او، راه حل مسأله‌ها را، طبق معمول، به صورت قاعده و بر اساس مثلثهای متشابه می‌دهد. این مسأله‌ها، به علت اهمیتی که از نظر عملی دارند، بعدها، چه در چین و چه در بیرون از مرزهای چین به طور گسترده‌ای شهرت پیدا کردند.

۴۲۷. باید توجه داشت که :

۱۰۰ «تسون» = ۱۰ «چی» = ۱ «چژان»

ریاضیدانان چینی، به احتمال زیاد، ضمن تنظیم قاعدهٔ لازم برای حل مسأله، از مثلثهای متشابه ABF و FCD استفاده کرده‌اند (شکل).



با توجه به این دو مثلث، خواهیم داشت :

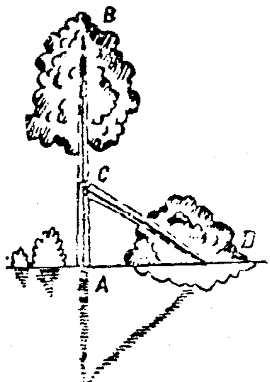
$$\frac{AB}{BF}=\frac{x}{FC}\ ;$$

$$x=FC.\frac{AB}{BF}=\frac{AB(BC-BF)}{BF}$$

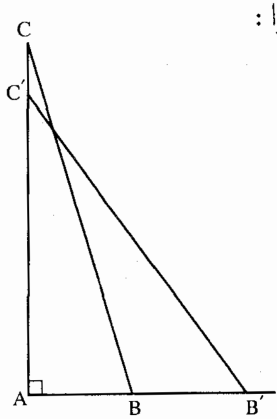
قاعده‌ای که در رساله داده شده است، بر مبنای همین رابطهٔ اخیر است : «از ۵ «چی» قطر چاه، ۴ «تسون» را که از قطر جدا شده است، کم کن. باقیمانده را در ۵ «چی» ارتفاع دیرک ضرب کن. این مقسوم است. ۴ «تسون»، بخش جدا شدهٔ قطر، مقسوم‌علیه است. مقسوم و مقسوم علیه را با هم در نظر بگیر، مقدار مجهول، بر حسب «تسون» به دست می‌آید».

۴۲۸. با توجه به شکل و شرطهای مسأله، تنهٔ AB از نقطهٔ C به ارتفاع ۴ پا شکسته و رأس آن، در نقطهٔ D، ۴ پایی نقطهٔ A به زمین افتاده است. باید ارتفاع تنه را پیدا کنیم. مسأله، بسادگی حل می‌شود :

$$AB=AC+CD=AC+\sqrt{AC^۲+AD^۲}$$
$$=۳+\sqrt{۹+۱۶}=۳+۵=۸\ (\text{پا})$$



۴۲۹. گزینهٔ (د) درست است. زیرا :

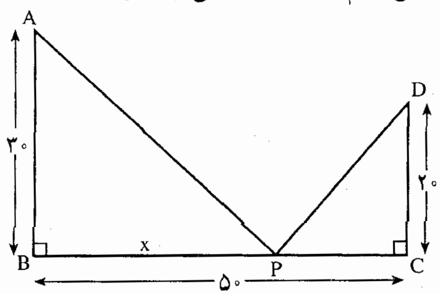


$$AB = ۷ \ , \ BC = ۲۵ \ , \ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$
$$\Rightarrow ۴۹ + AC^۲ = ۶۲۵ \Rightarrow AC = ۲۴cm$$
$$AC' = AC - CC' = ۲۴ - ۴ = ۲۰ \ , \ B'C' = BC = ۲۵$$
$$\Rightarrow AB' = \sqrt{B'C'^۲ - AC'^۲} = \sqrt{۶۲۵ - ۴۰۰} = ۱۵cm$$
$$BB' = AB' - AB = ۱۵ - ۷ = ۸cm$$

۴۳۰. گزینهٔ (هـ) درست است.

۴۳۱. ماهی و پرنده

فاصلهٔ بین B(پای درخت بزرگ) و P (محل ماهی) را x می‌نامیم، و سرعت هریک از دو پرنده را با V نشان می‌دهیم. مدّتی را که هریک از دو پرنده برای پیمودن AP و DP صرف کرده‌اند، t می‌نامیم که از آن جا می‌توان نوشت :



و نتیجه می گیریم که : $AP = DP \ , \ AP^۲ = DP^۲$

و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$۳۰^۲ + x^۲ = ۲۰^۲ + (۵۰ - x)^۲$$

و از آن جا :

$$۱۰۰x = ۲۰^۲ + ۵۰^۲ - ۳۰^۲ = ۲۰۰۰ \ , \ \ x = ۲۰$$

پس ماهی به فاصلهٔ ۲۰ متر از پای درخت بزرگ قرار دارد.

۴۳۲. گزینهٔ (د) درست است.

۴۳۴. الف. $a = ۹$ ، $p = ۳\sqrt{۱۰}$ ، $q = ۹\sqrt{۱۰}$

ب. $a = ۱۲$ ، $p = ۶\sqrt{۵}$ ، $q = ۱۲\sqrt{۵}$

پ. $a = ۲\sqrt{۳}$ ، $p = ۲\sqrt{۵}$ ، $q = \sqrt{۳۰}$

ت. $m = ۱۶$ ، $q = ۲۰$

ث. $n = ۴$ ، $p = ۴\sqrt{۵}$ ، $q = ۸\sqrt{۵}$

۴۳۵. الف. $c = ۱۲$

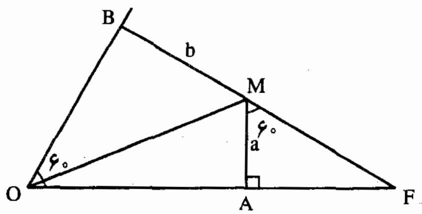
ب. $b = ۶$ ، $d = ۱۰$

پ. $f = ۱۷$ ، $c = ۸$

ت. $a = ۱۶$ ، $b = ۹$

ث. $a = ۳۲۰$ ، $c = ۸\sqrt{۲}$

۴۳۶. BM را امتداد می‌دهیم (شکل)، تا ضلع OA از زاویهٔ AOB را در F قطع کند.



از مثلث AMF که در آن $\hat{AMF} = ۶۰^\circ$ است، داریم :

$$MF = ۲AM = ۲a$$

بنابراین :

$$FB = FM + MB = ۲a + b$$

اکنون از مثلث FOB که در آن $OF = ۲OB$ داریم :

$$(۲OB)^۲ - OB^۲ = (۲a + b)^۲$$

و از آن جا طول OB به دست می‌آید :

$$OB = \frac{۲a + b}{\sqrt{۳}}$$

دیگر محاسبهٔ OM کار مشکلی نیست.

جواب :

$$OM = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\sqrt{a^۲ + ab + b^۲}$$

۴۳۷. فرض می‌کنیم که کشتی قبل از تغییر جهت در امتداد KO حرکت می‌کند و پس از تغییر جهت در امتداد OD :

(نیمساز $B\hat{O}C \parallel DQ$) زیرا $O\hat{D}Q=90^\circ$ و $D\hat{O}Q=60^\circ$ و $C\hat{O}Q=15^\circ$.

(DP نیمساز $\hat{D}$ است)

$\frac{OP}{PQ}=\frac{OD}{DQ}$ و $DQ=5\sqrt{3}$ و $OQ=10$ و $P\hat{Q}D=30^\circ \Rightarrow OD=5$ همچنین

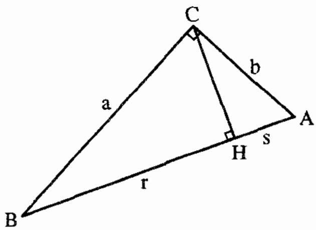
$$\Rightarrow \frac{OP}{PQ}=\frac{5}{5\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow OP+PQ=10\ ,\ \ PQ=5(3-\sqrt{3})$$

۲.۵.۵. نسبت پاره‌خطها

۴۳۸. ۱۵cm و ۲۰cm، بر مثلث داده شده دایره‌ای را محیط کنید.

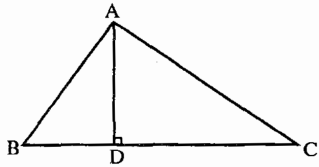
۴۳۹. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا :

$$a^2=cr\ ,\ \ b^2=cs\ ;\ \ \frac{r}{s}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{1}{9}$$

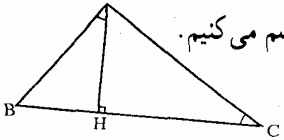


۴۴۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل) به فرض $AC=2AB$ می‌نویسیم :

$$AC^2=CB\times CD$$
$$AB^2=BC\times BD$$
$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{CB\times CD}{BC\times BD}=\frac{CD}{BD}$$
$$\frac{AC}{AB}=2\times\frac{AC^2}{AB^2}=4\times\frac{CD}{BC}=4$$



۴۴۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را درنظر می‌گیریم.



اگر $\hat{C}=30^\circ$ باشد، $\hat{B}=60^\circ$ است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

می‌دانیم که : $HB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times\frac{a}{2}=\frac{a}{4}$

$$HC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{۳}{۴}a$$

از آن جا :

$$HC:HB=\frac{۳}{۴}a:\frac{۱}{۴}a=۳:۱$$

و یا :

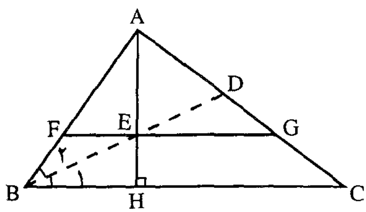
$$HB:HC=۱:۳$$

۴۴۲. $\frac{\sqrt{۲}}{\cos\alpha}-۱$

۳.۵.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۴۴. چون BD نیمساز است، $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$ پس باید ثابت کنیم که $\frac{AB}{BC}=\frac{CG}{DC}$.

دو مثلث ABH و ABC با یکدیگر متشابه‌اند. $\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}$



پس باید ثابت کنیم $\frac{CG}{DC}=\frac{BM}{AB}$ در مثلث DBC چون GE||BC است.

$$\frac{DG}{DC}=\frac{DE}{DB}\Rightarrow\frac{DC-DG}{DC}=\frac{DB-DE}{DB}\Rightarrow\frac{CG}{DC}=\frac{BE}{DB}$$

پس باید ثابت کنیم که $\frac{BH}{AB}=\frac{DE}{DB}$

و این رابطه نیز محقق است. چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BHE و ABD با یکدیگر برابرند، چون $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲$ ، بنابراین : $\overset{\Delta}{BEH}\sim\overset{\Delta}{ADB}\Rightarrow\frac{BH}{AB}=\frac{BE}{DB}$

۶.۵. محیط

۱.۶.۵. اندازهٔ محیط مثلث

۴۴۶. اندازهٔ وتر این مثلث، $۲۵ = \sqrt{۲۴^۲ + ۷^۲}$، و از آن جا، اندازهٔ محیط مثلث برابر است با :

$$۷+۲۴+۲۵=۵۶$$

۴۴۷. پای ارتفاع رأس C را H می‌نامیم. با توجه به فرض مسأله $AH = ۴k$ و $BH = ۳k$ است.

$$CH^۲ = AH.HB \Rightarrow ۱۰۸ = ۳K \times ۴K = ۱۲K^۲$$
$$\Rightarrow K^۲ = ۹ \Rightarrow K = ۳ \Rightarrow AH = ۱۲ \ , \ BH = ۹$$
$$\Rightarrow BC = ۱۲+۹ = ۲۱ \ , \ AC^۲ = AH.AB \Rightarrow AC^۲ = ۱۲ \times ۲۱$$
$$\Rightarrow AC = ۶\sqrt{۷} \ , \ AB^۲ = BH.BC = ۹ \times ۲۱ \Rightarrow AB = ۳\sqrt{۲۱}$$
$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۲۱ + ۶\sqrt{۷} + ۳\sqrt{۲۱}$$

۴۴۸. داریم :

$$S = \frac{۱}{۲}ab \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲}ab \Rightarrow ab = ۴۸ \qquad (۱)$$

$$a^۲ + b^۲ = c^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۰^۲ \Rightarrow a^۲ + b^۲ = ۱۰۰ \qquad (۲)$$

$$\begin{cases} ۲ab = ۹۶ & (۱) \\ a^۲ + b^۲ = ۱۰۰ & (۲) \end{cases} \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab = ۴ \Rightarrow (a-b)^۲ = ۴$$

$$\Rightarrow a - b = ۲$$

$$a^۲ + b^۲ + ۲ab = ۱۹۶ \Rightarrow (a+b)^۲ = ۱۹۶ \Rightarrow a + b = ۱۴$$

$$\begin{cases} a - b = ۲ \\ a + b = ۱۴ \end{cases} \Rightarrow a = ۸ \ , \ b = ۶ \Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۱۰ + ۸ + ۶ = ۲۴$$

۲.۶.۵. اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۴۴۹. $MO_۱$ موازی AC و عمود منصف ضلع AB ؛ و $MO_۲$ موازی AB و عمود منصف ضلع AC و $O_۱AO_۲$ خط راست است. اگر H و K بترتیب وسط ضلعهای AB و AC باشد، داریم :

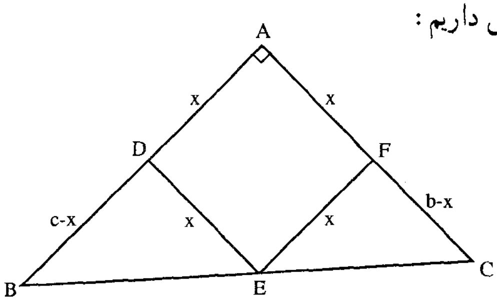
$$MO_۱ = MH + HO_۱ = \frac{AC}{۲} + \frac{AB}{۲} = \frac{۱۲}{۲} + \frac{۱۶}{۲} = ۱۴$$

$$MO_۲ = MK + KO_۲ = \frac{AB}{۲} + \frac{AC}{۲} = \frac{۱۶}{۲} + \frac{۱۲}{۲} = ۱۴$$

$$O_۱O_۲ = O_۱A + O_۲A = \frac{AB\sqrt{۲}}{۲} + \frac{AC\sqrt{۲}}{۲} = ۸\sqrt{۲} + ۶\sqrt{۲} = ۱۴\sqrt{۲}$$

$$MO_۱O_۲ \text{ محیط } = ۱۴\sqrt{۲} + ۲۸$$

۴۵۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ و مربع ADEF محاط در آن را که در زاویهٔ A مشترکند، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم ضلع مربع برابر x باشد، در این صورت با توجه به شکل داریم:



$$BD = c - x \ , \ FC = b - x \ , \ DE \| AC$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{c-x}{c} \Rightarrow cx = bc - bx$$

$$\Rightarrow (b+c)x = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{b+c} \Rightarrow \text{ محیط مربع } = ۴x = \frac{۴bc}{b+c}$$

۷.۵. مساحت

۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت مثلث

۴۵۱. راه اول. میانهٔ وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. دو مثلث متساوی‌الساقین به دست می‌آید.

$$S = \frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \sin ۳۰^\circ + \frac{۱}{۲} \times \frac{c}{۲} \times \frac{c}{۲} \times \sin ۱۵۰^\circ = \frac{a^۲}{۸}$$

راه دوم. $AC = a \sin ۱۵^\circ \ , \ AB = a \cos ۱۵^\circ \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} AB.AC = \frac{a^۲}{۸}$

۴۵۲. $\frac{1}{4}c^2(q^2-1)$، اگر $1 < q \leq \sqrt{2}$ باشد.

۴۵۳. اندازهٔ ساق دیگر مثلث با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، $8 = \sqrt{17^2 - 15^2}$ است.

از آن جا :
$$S = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60\text{cm}^2$$

در حالت دوم، اندازهٔ ساق برابر $45 = \sqrt{51^2 - 24^2}$ و اندازهٔ مساحت

$$S = \frac{1}{2} \times 45 \times 24 = 540$$

۴۵۴. اندازهٔ وتر $25 = 16 + 9$ و اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $h = \sqrt{9 \times 16} = 12$ است.

مساحت مثلث برابر است با :
$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2} \times 25 \times 12 = 150$$

حالت (۷ و ۲۱) را خودتان حل کنید.

۴۵۵. $S = \frac{c^2}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 2}$

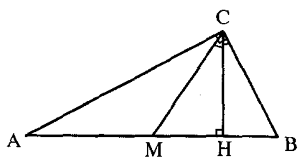
۴۵۶. اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $h = \sqrt{r.s}$ و از اندازهٔ وتر $r + s$ است. از آن جا :

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}(r+s)\sqrt{rs}$$

$$S = \frac{r+s}{2}.\sqrt{rs}$$

۴۵۷. گزینهٔ (ج) درست است.

۴۵۸. گزینهٔ (هـ) درست است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CHM و CHB همنهشتند، زیرا در زاویهٔ رأس C برابرند. بنابراین MH، قاعدهٔ مثلث CHM، یک چهارم AB قاعدهٔ مثلث ABC است. چون این دو مثلث در ارتفاع مشترکند، پس نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت قاعده‌های آنها، و در نتیجه مساحت مثلث ABC برابر 4K است.



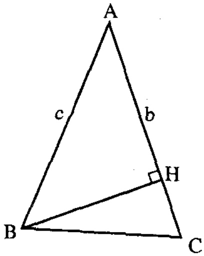
۴۵۹. $\frac{a^2 + a\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$

۴۶۰. فرض کنید x یکی از دو ساق مثلث باشد. $2p = 2x + x\sqrt{2}$

$$x = \frac{2p}{2+\sqrt{2}} \qquad A = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4p^2}{6+4\sqrt{2}} \times \frac{6-4\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}}$$

$=p^{۲}(۳-۲\sqrt{۲})$

۴۶۲. مثلث ABC را که دو ضلع آن $AC=b$ و $AB=c$ معلوم است، در نظر می‌گیریم و ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در این صورت داریم: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}b\times BH$. این مساحت وقتی حداکثر مقدار خود را داراست که BH حداکثر مقدار خود را داشته باشد. اما با توجه به این که $BH\le AB$ است، پس حداکثر مقدار مساحت وقتی است که $BH=AB$ باشد که در این صورت مثلث قائم‌الزاویه در رأس A خواهد بود و مقدار حداکثر مساحت برابر $S=\frac{۱}{۲}bc$ است.



۲.۷.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۶۳. اندازهٔ ارتفاع رأس قائم $h=۴/۸m$ و مساحت دو مثلث ایجاد شده $S_۱=۸/۶۴m^۲$ و $S_۲=۱۵/۳۶m^۲$ است.

۴۶۴. طول وتر AB برابر است با $AB=\sqrt{a^۲+b^۲}$

$$BC^۲=BH.AB\Rightarrow a^۲=BH.\sqrt{a^۲+b^۲}\Rightarrow BH=\frac{a^۲}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

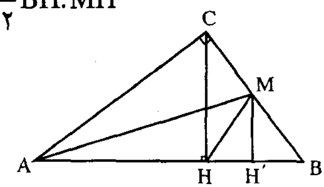
$$CH.AB=AC.CB\Rightarrow CH.\sqrt{a^۲+b^۲}=a.b\Rightarrow CH=\frac{ab}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

ارتفاع MH' از مثلث MBH را رسم می‌کنیم. داریم:

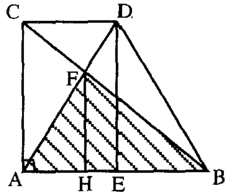
$$MH'=\frac{CH}{۲}=\frac{ab}{۲\sqrt{a^۲+b^۲}}\ ,\ S_{MBH}=\frac{۱}{۲}BH.MH'$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{a^۲}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\times\frac{ab}{۲\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$\Rightarrow S_{MBH}=\frac{a^۳b}{۲(a^۲+b^۲)}$$

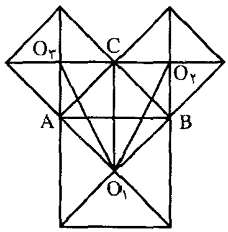


۴۶۵. برای این که مثلث ABD معادل با مثلث مفروض ABC باشد (شکل)، کافی است ارتفاع DE برابر AC شود، پس $DE=۳$؛ و برای محاسبهٔ مساحت AFB لازم است ارتفاع FH را حساب کنیم.



گوییم :
$$\frac{FD}{AF}=\frac{CD}{AB}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}\ ,\ CD=\frac{AB}{۲}=۲$$
$$\frac{AF+FD}{AF}=\frac{۱+۲}{۲}=\frac{۳}{۲}\quad ,\quad \frac{AF}{AD}=\frac{۲}{۳}$$
$$\frac{FH}{DE}=\frac{AF}{AD}=\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{FH}{۳}=\frac{۲}{۳}\ ,\ FH=۲\ ,\ S=\frac{۲\times ۴}{۲}=۴$$

۴۶۶. $S_{O_۱O_۲O_۳}=\frac{۱}{۲}O_۲O_۳\times O_۱C=\frac{۱}{۲}AB^۲=b^۲$



۴۶۷. گزینهٔ (ب) درست است.

۴۶۸. الف. $GE=۲$ ، $HF=۸$

ب. $DG=\sqrt{۴\times ۵}=۲\sqrt{۵}\ ,\ DH=\sqrt{۴\times ۲۰}=۴\sqrt{۵}$

$\Rightarrow a\ \square\ CHDG=۴۰$

پ. $a\Delta BHF=۶۴\qquad a\Delta AEG=۱\Rightarrow a\Delta BHF=۶۴a\Delta AEG$

۴۶۹. الف. $۲۰+۲۰+۱۱+۷/۵+۱۳/۵+۱۱+۱۳/۵+۷/۵=۱۰۴$

ب. $DE=۱۶$ و ارتفاع رأس A برابر ۱۳ است. از آن جا مساحت مثلث ADE برابر $\frac{۱}{۲}\times ۱۶\times ۱۳=۱۰۴$ است.

پ. اشکال از شکل است. BD و CE در امتداد AB و AC قرار نمی‌گیرند. اگر چنین باشد، $BD=\frac{۵\sqrt{۸۹}}{۸}$ است ؛ حال آن که در شکل $BD=\sqrt{۳۴}$ است.

۴۷۰. مثلثهای BEK و MCF و APD معادل مثلث ABC و $S_{ABKD} = S_{BEFC} + S_{ACMP} = C^2$ است، پس $S_{DKEFMP} = 2c^2 + 4s$.

۳.۷.۵. نسبت مساحتها

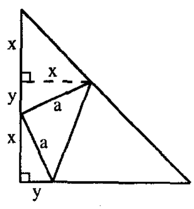
۴۷۱. این دو مثلث متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها $\frac{1}{3}$ است. بنابراین نسبت مساحتهای آنها برابر $\frac{1}{9}$ است.

۴۷۲. GB را بر حسب AB پیدا کنید.

۴۷۳. با فرض $AB = AC = a$ ، $BC = a\sqrt{2}$ است. از آن جا: $S_{ACD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ و $S_{BCE} = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. بنابراین $S_{ACD}:S_{BCE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}:\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

۴۷۴. پاسخ: $\frac{1}{5}$

باید دو حالت را در نظر گرفت: رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر، یا روی وتر مثلث بزرگتر قرار دارد و یا روی یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن. در حالت اوّل، نسبت ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ دو مثلث از $\frac{1}{2}$ و، بنابراین، نسبت مساحتهای آنها از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست. در حالت دوم، مثلث کوچکتر را ثابت می‌گیریم و از این نکته استفاده می‌کنیم که، رأسهای مثلث بزرگتر، روی کمانی از دایره حرکت می‌کنند. در این صورت، جواب مسأله، با روش خالص هندسی به دست می‌آید.



مسأله راه حل دیگری هم دارد: تصویر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث کوچکتر را روی ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر x و y می‌گیریم (شکل). در این صورت $x^2 + y^2 = a^2$ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث بزرگتر، برابر می‌شود با:

$$2x + y \le a\sqrt{5}$$

۴.۷.۵. رابطه‌ای در مساحتها

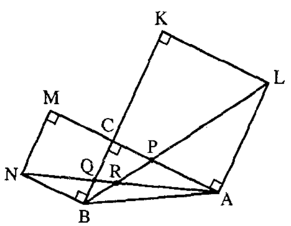
۴۷۵. داریم:

$$S(BCDE)=S(ABC)-S(ADE)$$
$$=\frac{۱}{۲}b.c-\frac{۱}{۲}AD.AE=\frac{۱}{۲}b.c-\frac{۱}{۲}.\frac{c.b}{a+b}.\frac{b.c}{a+c}$$
$$=\frac{۱}{۲}bc-\frac{b^۲c^۲}{۲(a+b)(a+c)}$$
$$۲(a+b)(a+c)=۲(a^۲+ac+ab+bc)$$
$$=۲a^۲+۲ab+۲ac+۲bc=a^۲+(b^۲+c^۲)+۲ab+۲ac+۲bc=(a+b+c)^۲$$
$$S(BCDE)=\frac{۱}{۲}bc-\frac{b^۲c^۲}{(a+b+c)^۲}=\frac{bc(a+b+c)^۲-۲b^۲c^۲}{۲(a+b+c)}$$
$$=\frac{bc\left[(a+b+c)^۲-۲bc\right]}{۲(a+b+c)^۲}=\frac{bc(a^۲+\overbrace{b^۲+c^۲}^{a^۲}+۲ab+۲ac)}{۲(a+b+c)^۲}$$
$$=\frac{۲abc(a+b+c)}{۲(a+b+c)^۲}=\frac{abc}{a+b+c}=\frac{۴RS(ABC)}{۲P}$$
$$S(BCDE)=\frac{۲R.S}{P}=a.r=۲S(BIC)$$

۴۷۶. داریم:

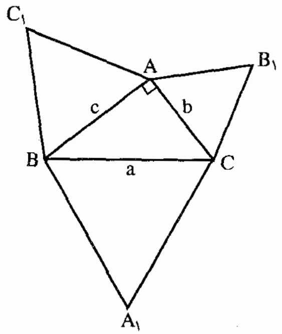
$$S_{ABC}=S_{OBC}$$
$$S_{BCDE}=۴S_{ABC}$$
$$S_{ABC}=a.\frac{a}{۴}=\frac{a^۲}{۴}$$
$$S_{BCDE}=a^۲ \qquad ۴S_{ABC}=S_{BCDE}$$

۴۷۷. فرض کنید P، Q و R، بترتیب، معرف نقطه‌های برخورد LB و AC، AN و BC، و LB و AN باشند. فرض کنید $BC=a$ و $AC=b$. کافی است نشان دهیم $S_{ACQ}=S_{APB}$ (هر دو این مساحتها، با مساحتهای مورد بحث، به اندازهٔ مساحت مثلث APR اختلاف دارند). از تشابه مثلثهای متناظر، به دست می‌آوریم $CQ=PC=\frac{ab}{a+b}$. در نتیجه:



$$S_{ACQ} = \frac{۱}{۲} AC.CQ = \frac{ab^۲}{۲(a+b)}$$

$$S_{APB} = S_{ACB} - S_{PCB} = \frac{۱}{۲}ab - \frac{a^۲b}{۲(a+b)} = \frac{ab^۲}{۲(a+b)}$$



۴۷۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را در نظر می‌گیریم و روی ضلعهای آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع رسم می‌کنیم. ضلعهای این مثلثها، a، b و c و مساحت آنها $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$، $\frac{b^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و $\frac{c^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. با توجه به این که $a^۲ = b^۲ + c^۲$ است، داریم: $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{b^۲\sqrt{۳}}{۴} + \frac{c^۲\sqrt{۳}}{۴}$، بنابراین حکم مسأله برای مثلثهای متساوی‌الاضلاع برقرار است. برای شکلهای دیگر از جمله n ضلعیهای منتظم با تعداد ضلعهای برابر می‌توان درستی مسأله را تحقیق نمود.

۸.۵. رابطه‌های متری

۱.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای اصلی

۴۷۹. طول وتر، در مثلث قائم‌الزاویه، از طول هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه بزرگتر است: $c > a$ و $c > b$، از این دو نابرابری، برای هر عدد درست و مثبت K به‌دست می‌آید:

$$c^K > a^K \;,\; c^K > b^K$$

با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$c^n = c^۲.c^{n-۲} = (a^۲ + b^۲).c^{n-۲} = a^۲c^{n-۲} + b^۲c^{n-۲}$$

که اگر به جای $c^{n-۲}$، مقدارهای کوچکتر $a^{n-۲}$ و $b^{n-۲}$ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$c^n = a^۲c^{n-۲} + b^۲c^{n-۲} > a^۲.a^{n-۲} + b^۲.b^{n-۲} = a^n + b^n$$

یعنی:

$$c^n > a^n + b^n$$

۴۸۰. داریم :

$$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$c_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\ ,\ \ c_6 = R$$

$$\Rightarrow c_5^2 = c_6^2 + c_{10}^2$$

$$\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5}+4)$$

$$\frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5})$$

پس حکم مسأله برقرار است.

۴۸۱. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ADE متشابه‌اند.

۴۸۲. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADC و BDC داریم :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \qquad (1)$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 \qquad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$

۴۸۳. داریم :

$$AB^2 = DB.BC \qquad (1)$$

$$AC^2 = DC.BC \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB.BC}{DC.BC} = \frac{DB}{DC}$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}$$

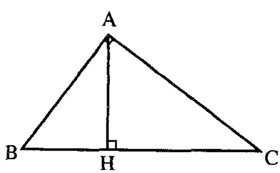
۲.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به ارتفاعها و خطهای عمود

۴۸۴. می‌دانیم :

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{CH+BH}{BC.CH.BH}$$

$$\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{BC.CH}\ ,\ \ \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{BC.BH}$$

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$



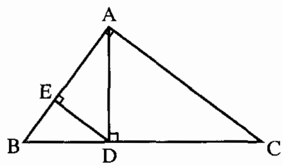
۴۸۵. گزینه (د) درست است، زیرا دو پاره خطی که روی وتر جدا می‌شوند عبارتند از a^2/c و b^2/c . با استفاده از مثلثهای متشابه،

$$\frac{x}{a}=\frac{b^2/c}{b}\ ,\ \frac{x}{b}=\frac{a^2/c}{a}$$

$$x^2=\frac{a^2}{c}\times\frac{b^2}{c}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\ ;\ \frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

۴۸۶. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC و DEA (شکل) متشابه‌اند (چرا؟). می‌نویسیم :

$$AD^2=AC.ED \text{ یا } \frac{AD}{ED}=\frac{AC}{AD}$$



۴۸۹. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE و CDF با مثلث ABC متشابه‌اند و می‌نویسیم (شکل) :

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}=\frac{DE}{AC} \qquad \frac{CD}{BC}=\frac{DF}{AB}=\frac{CF}{AC}$$

از ضرب رابطه‌های بالا خواهیم داشت :

$$\frac{BD\times CD}{BC^2}=\frac{BE\times DF}{AB^2}=\frac{DE\times CF}{AC^2}=\frac{BE\times DF+DE\times CF}{AB^2+AC^2}$$

پس :

$$BD.CD=BE.DF+DE.CF$$

یا :

$$BD.CD=BE.EA+AF.CF$$

۴۹۰. چهارضلعی AEDF مستطیل و $DE=AF$ است. داریم :

$$\Delta ABC\sim\Delta ADF\Rightarrow\frac{AF}{AB}=\frac{DF}{AC}\quad,\quad\frac{AF}{DF}=\frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}$$

۴۹۱. می‌دانیم $\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{DC}{DB}$. از طرفی در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADB و ADC داریم :

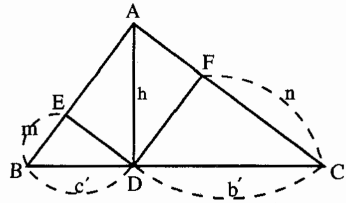
$$DB^2=AB.BF\ ,\ DC^2=AC.CE$$

از آن جا :

$$\frac{DC^2}{DB^2}=\frac{CE.AC}{BF.AB}\Rightarrow\frac{AC^4}{AB^4}=\frac{CE.AC}{BF.AB}\Rightarrow\frac{AC^3}{AB^3}=\frac{CE}{BF}$$

۴۹۲. ۱. فرض کنیم b' و c' تصویرهای b و c روی وتر BC باشند. از تشابه دو مثلث BCA و BDE (شکل) داریم:

$$\frac{m}{c}=\frac{c'}{a}$$



و می‌دانیم $c^2 = ac'$. با حذف c' خواهیم داشت:

$$c^2 = \sqrt[3]{a^4m^2} \text{ ; و یا } m=\frac{c^3}{a^2} \text{ ;}$$

و به همین ترتیب $$b^2+c^2=a^2 \text{ چون ; } b^2=\sqrt[3]{a^4n^2} \text{ ;}$$

پس: $$\sqrt[3]{a^4n^2}+\sqrt[3]{a^4m^2}=a^2=\sqrt[3]{a^6} \text{ ;}$$

از آن جا: $$\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}=\sqrt[3]{a^2};$$

۲. m^2 و n^2 را از رابطه‌های $m^2=\frac{c^6}{a^4}$ و $n^2=\frac{b^6}{a^4}$ به دست آورده با هم جمع می‌کنیم:

$$m^2+n^2=\frac{b^6+c^6}{a^4}=\frac{(b^2+c^2)^3-3b^2c^2(b^2+c^2)}{a^4};$$

و چون $b^2+c^2=a^2$ و $bc=ah$ است، خواهیم داشت:

$$m^2+n^2=\frac{a^6-3a^4h^2}{a^4}=a^2-3h^2 \text{ ;}$$

و یا: $$m^2+n^2+3h^2=a^2;$$

۳. از ضرب طرفین رابطه‌های $m=\frac{c^3}{a^2}$ و $n=\frac{b^3}{a^2}$ داریم:

$$amn=h^3 \text{ و یا } mn=\frac{b^3c^3}{a^4}=\frac{a^3h^3}{a^4};$$

۴۹۳. گزینهٔ (ج) درست است.

۳.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به میانه‌ها

۴۹۴. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABB' و ACC' و ABC داریم :

$$\begin{cases} m_b^2 = c^2 + \dfrac{b^2}{4} \\ m_c^2 = b^2 + \dfrac{c^2}{4} \\ m_a^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{5(b^2+c^2)}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{6a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$$

۴۹۵. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABC و ACD داریم :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (1)$$

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 \qquad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow AB^2 - AD^2 = BC^2 - DC^2$$

امّا $BD = 2DC$ است. بنابراین : $AB^2 - AD^2 = 4DC^2 - DC^2 = 3DC^2$

۴۹۶. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACF و BCF و ABC داریم :

$$BE^2 = BC^2 + \frac{AC^2}{4} \Rightarrow 4BE^2 = 4BC^2 + AC^2 \qquad (1)$$

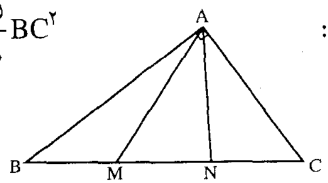
$$AF^2 = AC^2 + \frac{BC^2}{4} \Rightarrow 4AF^2 = 4AC^2 + BC^2 \qquad (2)$$

$$4BE^2 + 4AF^2 = 5(BC^2 + AC^2)\ ,\ \ BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$\Rightarrow 4BE^2 + 4AF^2 = 5AB^2$$

۴۹۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $BM = MN = NC$ باشد،

می‌خواهیم ثابت کنیم که : $AM^2 + AN^2 = \frac{5}{9}BC^2$



داریم :

$$BM = MN = NE \Rightarrow MC = NB = \frac{۲}{۳}BC$$

$$\Delta ABN: AB^{۲} + AN^{۲} = ۲AM^{۲} + \frac{BN^{۲}}{۲}$$

$$\Delta AMC: AC^{۲} + AM^{۲} = ۲AN^{۲} + \frac{MC^{۲}}{۲}$$

$$AB^{۲} + AC^{۲} = AM^{۲} + AN^{۲} + MC^{۲}$$

$$BC^{۲} = AM^{۲} + AN^{۲} + \frac{۴}{۹}BC^{۲}$$

$$AM^{۲} + AN^{۲} = \frac{۵}{۹}BC^{۲}$$

۴۹۸. مثلث ABC قائم‌الزاویه و در دو مثلث ABE و ACD خطهای AD و AE میانه‌اند. سپس :

$$\begin{cases} AB^{۲} + AE^{۲} = ۲AD^{۲} + ۲DE^{۲} \Rightarrow \\ AD^{۲} + AC^{۲} = ۲AE^{۲} + ۲DE^{۲} \\ AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AD^{۲} + AE^{۲} + BC^{۲} = ۲AD^{۲} + ۲AE^{۲} + ۴DE^{۲}$$

$$AD^{۲} + AE^{۲} + DE^{۲} = BC^{۲} - ۳DE^{۲}, DE = \frac{BC}{۳}$$

$$\Rightarrow AD^{۲} + AE^{۲} + DE^{۲} = \frac{۲}{۳}BC^{۲}$$

۴۹۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MCC' داریم :

$$MC^{۲} = CC'^{۲} - MC'^{۲} \quad (۱)$$

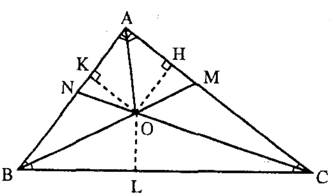
و در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBC' داریم :

$$MB^{۲} = BC'^{۲} - MC'^{۲} \quad (۲)$$

$$(۱) - (۲) \Rightarrow MC^{۲} - MB^{۲} = CC'^{۲} - BC'^{۲} = CC'^{۲} - AC'^{۲} = AC^{۲}$$

$$\Rightarrow MB^{۲} - MC^{۲} = AC^{۲}$$

۴.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به نیمسازها



۵۰۱. نیمساز سوم AO را رسم می‌کنیم. دو مثلث ANO و AOM متشابه‌اند، زیرا از طرفی $N\hat{A}O = M\hat{A}O = ۴۵°$ ، و از طرف دیگر در

مثلث AOM داریم : $$A\hat{M}O=\hat{C}+\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}=۴۵^\circ+\hat{C}$$

و در مثلث AON نیز داریم :

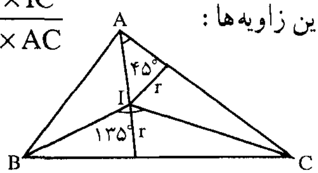
$$A\hat{O}N=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ-A\hat{N}O=۱۳۵^\circ-\hat{B}-\frac{\hat{C}}{۲}=۱۳۵^\circ-(\hat{B}+\hat{C})+\frac{\hat{C}}{۲}=۴۵^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}$$

بنابراین $A\hat{M}O=A\hat{O}N$ و دو مثلث مزبور متشابه‌اند و از تشابه آنها نتیجه می‌شود : $\frac{AO}{AN}=\frac{AM}{AO}$ و یا $AM\times AN=\overline{AO}^۲$. اما اگر شعاع دایرهٔ محاطی مثلث را r فرض کنیم، شکل HOK مربع است و داریم : $AO^۲=۲r^۲$ ، پس (۱) $AM.AN=۲r^۲$ و از طرف دیگر از تشابه دو مثلث COH و CNA نتیجه می‌شود : $\frac{r}{AN}=\frac{CO}{CN}$ ؛ و از تشابه دو مثلث BOK و BMA حاصل می‌شود $\frac{r}{AM}=\frac{BO}{BM}$. چون این دو رابطه را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود : $\frac{r^۲}{AM\times AN}=\frac{BO\times CO}{BM\times CN}$ و با مراعات رابطهٔ (۱) حاصل می‌گردد :

$$\frac{BO\times CO}{BM\times CN}=\frac{r^۲}{۲r^۲}=\frac{۱}{۲}$$ و یا $$BM\times CN=۲BO\times CO$$

۵۰۲. زاویهٔ $B\hat{I}C$ برابر ۱۳۵° است (چرا؟) و $I\hat{A}C=۴۵^\circ$. دو مثلث BIC و IAC دارای دو زاویهٔ مکمل می‌باشند (شکل)، پس نسبت مساحت آنها برابر است با نسبت حاصلضرب ضلعهای این زاویه‌ها :

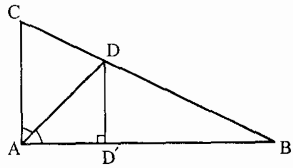
$$\frac{\text{مساحت } BIC}{\text{مساحت } IAC}=\frac{IB\times IC}{IA\times AC}$$



ولی مساحت دو مثلث مذکور عبارتند از : $\frac{BC\times r}{۲}$ و $\frac{AC\times r}{۲}$

پس $$\frac{IB\times IC}{IA\times AC}=\frac{BC\times\frac{r}{۲}}{AC\times\frac{r}{۲}}$$ یا $$BC=\frac{IB\times IC}{IA}$$ و یا $$BC\times IA=IB\times IC$$

۵۰۳. اگر AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ باشد (شکل) و DD' را بر AB عمود کنیم $AD' = DD'$ و می‌نویسیم $۲DD'^{۲} = AD^{۲} = l^{۲}$ یا :

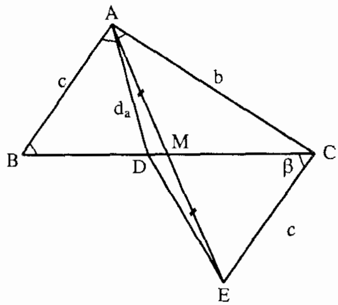


$$DD' = \frac{l\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{DD'}{CA} = \frac{BD'}{BA} \quad \text{یا} \quad \frac{DD'}{b} = \frac{c - DD'}{c}$$

$$\frac{DD'}{b} = ۱ - \frac{DD'}{c}$$

$$\frac{۱}{b} = \frac{۱}{DD'} - \frac{۱}{c} \Rightarrow \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۱}{DD'} = \frac{۱}{\frac{l\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{l}$$

۵۰۵. می‌دانیم :



$$\begin{cases} DB = \dfrac{a.c}{b+c} \\ DC = \dfrac{a.b}{b+c} \\ d_a^{۲} = b.c - \dfrac{a^{۲}bc}{(b+c)^{۲}} \end{cases}$$

در مثلث CBE داریم :

$$DE^{۲} = CE^{۲} + CD^{۲} - ۲CE.CD.\cos\beta$$

$$DE^{۲} = c^{۲} + \frac{a^{۲}.b^{۲}}{(b+c)^{۲}} - ۲c \times \frac{a.b}{b+c} \times \frac{a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}}{۲a.c}$$

$$DE^{۲} = \frac{c^{۲}(b+c)^{۲} + a^{۲}.b^{۲} - b(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})(b+c)}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{(b+c)\left[c^{۲}(b+c) - b(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})\right] + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{(b+c)(c^{۲}b + c^{۳} - a^{۲}b - c^{۲}b + b^{۳}) + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{(b+c)(c^{۳} - a^{۲}b + b^{۳}) + a^{۲}b^{۲}}{(b+c)^{۲}}$$

$$= \frac{bc^3 - a^2b^2 + b^4 + c^4 - a^2bc + b^3c + a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{b^3(b+c) + c^3(b+c) - a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{(b+c)(b^3+c^3) - a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{(b+c)^2(b^2+c^2-bc)}{(b+c)^2} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$= b^2 + c^2 - bc + d_a^2 - bc$$

$$DE^2 = AD^2 + (AC - AB)^2$$

۵.۸.۵. رابطه‌های متری مربوط به جزءهای دیگر

۵۰۶. با توجه به این که ضلعهای مربع برابر و زاویه‌های آن قائمه‌اند، داریم:

$$\Delta ANM \sim \Delta BDM \Rightarrow \frac{BD}{DM} = \frac{AM}{AN} \qquad (1)$$

$$\Delta ANM \sim \Delta CNF \Rightarrow \frac{CF}{FN} = \frac{AN}{AM} \qquad (2)$$

$$(1)\times(2) \Rightarrow \frac{BD}{DM}.\frac{CF}{FN} = 1 \text{ و } DM = FN = DF$$

$$\Rightarrow \frac{BD.CF}{DF.DF} = 1 \Rightarrow DF^2 = BD.FC$$

۵۰۷. تقارب خطهای DC و FB و AH را در مسألهٔ ۴۵۰ راهنمایی کردیم. برای قسمت دوم EI را بر خط BC عمود کنید و مقدار OH را از تشابه دو مثلث BOH و BFI حساب کرده در تساوی $AO = AH - OH$ قرار دهید و با رعایت تساوی $C\overset{\Delta}{I}F = A\overset{\Delta}{H}C$ رابطه را خلاصه کنید.

۵۰۹. داریم:

$$AC = b \text{ و } AB = c \text{ و } \Delta CAH \sim \Delta CED \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow AH = \frac{bc}{b+c}$$

$$\Delta BAK \sim \Delta BGF \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b+c} \text{ یا } AK = \frac{bc}{b+c} \Rightarrow AH = AK$$

$$BH = c - AH = \frac{c^۲}{b+c} \text{ و } CK = b - AK = \frac{b^۲}{b+c}$$

$$\Rightarrow BH.CK = \frac{b^۲c^۲}{(b+c)^۲} = AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = BH.CK$$

۵۱۰. داریم :

$$\alpha = \beta \Rightarrow \Delta ABC' \sim \Delta ACB' \Rightarrow AB.BC = AC'.CB'$$

$$BC' = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}, ۳ \times ۴ = ۲ \times CB' \Rightarrow CB' = ۶ \Rightarrow BB' = \sqrt{۱۶+۳۶},$$

$$BB' = ۲\sqrt{۱۳} \text{ , } B'C' = \sqrt{BC'^۲ + BB'^۲} = \sqrt{۱۳+۵۲} = \sqrt{۶۵}$$

۵۱۱. OB نیمساز درونی و OD نیمساز برونی زاویهٔ AOC از مثلث AOC است. پس :

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{OA}{OC}$$

اما به‌دلیل همنهشتی دو مثلث OAB و OCD، AB=DC است. پس

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{و یا} \quad AB^۲ = AD.BC$$

۶.۸.۵. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۵۱۲. داریم :

$$a^۲ + b^۲ \geq ۲ab \text{ , } a^۲ + b^۲ = c^۲ \Rightarrow ۲(a^۲ + b^۲) \geq c^۲ + ۲ab$$

$$= a^۲ + b^۲ + ۲ab = (a+b)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲ + b^۲}{۲} \geq \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ \text{ و } \frac{c^۲}{۲} \geq \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{۲}} \geq \frac{a+b}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)\sqrt{۲}}{۲} \leq c$$

۵۱۳. اگر مساحت مثلث را به دو طریق محاسبه کنیم، به دست می‌آید :ch=ab ؛ از آن‌جا $h = \frac{ab}{c}$. نابرابری $c + h > a + b$ را، می‌توان این‌طور نوشت :

$$c + \frac{ab}{c} > a + b$$

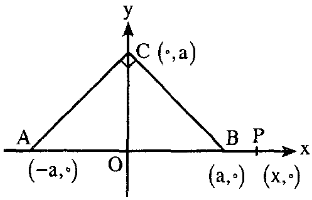
اگر دو طرف این نابرابری را در c ضرب کنیم ($c>0$)، به نابرابری زیر که هم‌ارز نابرابری صفحه قبل است، می‌رسیم:

$$c^2-c(a+b)+ab>0 \quad \text{و یا} \quad (c-a)(c-b)>0$$

و این نابرابری، همیشه برقرار است، زیرا وتر، از هر ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه بزرگتر است.

∇ در حل این مسأله، درواقع، ثابت کردیم: اگر حاصلضربهای ch و ab، از دو زوج عدد مثبت برابر باشند، آن‌وقت، مجموع دو عددی بزرگتر است که «از هم دورترند»؛ اگر عددهای مثبت a و b، بین عددهای مثبت c و h باشند، آن‌وقت $c+h>a+b$.

این حقیقت را، از این‌جا هم می‌توان نتیجه گرفت که، تابع $f(x)=x+\frac{A}{x}$، به‌ازای $x\ge\sqrt{A}$، به‌طور یکنوا، صعودی است.



۵۱۴. گزینهٔ (د) درست است. وتر مثلث ABC را بر محور xها و وسط آن را بر مبدأ مختصات صفحهٔ xy قرار دهید، و مختصات نقطه‌های A، B، C و P را بترتیب با $(-a,0)$، $(a,0)$، $(0,a)$ و $(x,0)$ نشان دهید (شکل). بنابراین عبارتهای S و CP^2 را می‌توان به‌صورت

$$S=[x-(-a)]^2+[x-a]^2=2(x^2+a^2)$$

$$CP^2=(0-x)^2+(a-0)^2=x^2+a^2$$

نوشت درنتیجه، به‌ازای همهٔ مکانهای P روی محور xها داریم: $2CP^2=S$. این مسأله را می‌توان از راه محاسبهٔ CP^2 به کمک قانون کسینوسها، نخست در مثلث CPA، سپس در مثلث CPB نیز حل کرد.

۹.۵. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۱۵. داریم:

$$2\hat{a}+2\hat{b}+2\hat{c}=\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+2a^4b^4+2a^4c^4+2b^4c^4$$

$$\Rightarrow \hat{a}+\hat{b}+\hat{c}=2a^4b^4+2a^4c^4+2b^4c^4$$

$$\Rightarrow \hat{a}+\hat{b}+\hat{c}-2a^4b^4-2a^4c^4+2b^4c^4=4b^4c^4$$

$$\Rightarrow (a^4-b^4-c^4)^2 = 4b^4c^4 \Rightarrow a^4-b^4-c^4 = \pm 2b^2c^2$$

$$a^4 = b^4+c^4 \pm 2b^2c^2 \Rightarrow a^4 = (b^2 \pm c^2)^2 \Rightarrow a^2 = \pm(b^2 \pm c^2)$$

$$a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2-c^2 \Rightarrow a^2+c^2 = b^2 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$\text{یا} \quad a^2 = -b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2 = c^2 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

۵۱۷. می‌دانیم که : $\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$. پس، $\frac{a}{\frac{1}{12}} = \frac{b}{\frac{1}{15}} = \frac{c}{\frac{1}{20}}$ یا $\frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{c}{3}$ بنابراین مثلث قائم الزاویه است.

۵۱۸. گزینهٔ (د) درست است. بنابر تعمیم قضیهٔ فیثاغورس، زاویهٔ روبه‌رو به بزرگترین ضلع یک مثلث، حاده، قائمه، یا منفرجه است. برحسب آن که مربع آن ضلع، کوچکتر، برابر، یا بزرگتر از مجموع مربعهای دو ضلع دیگر باشد، جدول زیر را برای مثلثهای داده شده تنظیم می کنیم :

زاویهٔ روبه‌رو	مجموع مربعهای دو ضلع دیگر	مجذور بزرگترین ضلع	ضلعها	مثلثها
قائمه	$=9+16$	۲۵	۳، ۴، ۵	I
قائمه	$=16+56/25$	۷۲/۵	۴، ۷/۵، ۸/۵	II
قائمه	$=49+576$	۶۲۵	۷، ۲۴، ۲۵	III
حاده	$<16/25+20/25$	۳۰/۲۵	۳/۵، ۴/۵، ۵/۵	IV

ملاحظه می کنیم که تنها مثلثهای I، II، III قائم‌الزاویه هستند.

۵۱۹. مثلث قائم‌الزاویه است. زیرا داریم :

$$\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4} = 5 \times \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$\Rightarrow 9a^2+9b^2 = 9c^2 \Rightarrow a^2+b^2 = c^2 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

۵۲۰. داریم :

الف) $\vec{AB}.\vec{AC} = 0 \Rightarrow |\vec{AB}||\vec{AC}|\cos B\hat{A}C = 0 \Rightarrow \cos B\hat{A}C = 0 \Rightarrow B\hat{A}C = 90^\circ$

ب) $\vec{AB}.\vec{BC} + \vec{AB}^2 = 0 \Rightarrow \vec{AB}.(\vec{BC}+\vec{AB}) = 0 \Rightarrow \vec{AB}.\vec{AC} = 0$

$$\Rightarrow B\hat{A}C = 90^\circ$$

۱۰.۵ . سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

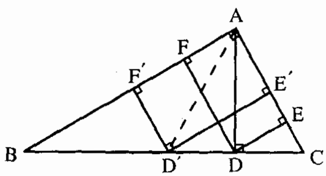
۵۲۶. اگر H نقطهٔ برخورد AM با BC باشد، دو مثلث ABC و ABH متشابه‌اند.

۵۲۷. (د) ($a=-d$ قابل قبول نیست) ؛ $\therefore a = ۳d \qquad a^{۲}+(a+d)^{۲}=(a+۲d)^{۲}$

$$\frac{a}{d}=\frac{۳}{۱}$$

۵۲۸. قاعدهٔ چینی، در مورد این مسأله، چنین است : «ضلعهای افقی و قائم مجاور به زاویهٔ قائمه را جمع کن، این می‌شود مقسوم‌علیه. همین ضلعها را درهم ضرب کن، می‌شود مقسوم : با عمل روی مقسوم و مقسوم‌علیه، ضلع مربع، برحسب «یو»، به‌دست می‌آید».

۵۲۹. AD ارتفاع رأس قائم را رسم می‌کنیم، و از D پای این ارتفاع عمودهای DE و DF را بر ضلعهای AC و AB فرود می‌آوریم. واضح است که AD قطر یکی از مستطیلهای مورد نظر است.



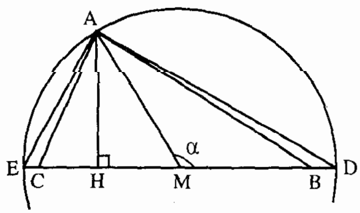
هر مستطیل دیگری مانند $AE'D'F'$ قطرش از قطر مستطیل AEDF بزرگتر است. زیرا $AD' > AD$ است. بنابراین مستطیل AEDF جواب مسأله است.

۵۳۰. گزینهٔ (ج) درست است. از تشابه دو مثلث ANM و ABC نتیجه می‌شود : $\frac{\overline{MN}}{x}=\frac{۵}{۱۲}$ ،

یا $\overline{MN}=\frac{۵x}{۱۲}$. همین‌طور،

$$\overline{NP}=\overline{MC}=۱۲-x \ , \quad \therefore y=۱۲-x+\frac{۵x}{۱۲}=\frac{(۱۴۴-۷x)}{۱۲}$$

۵۳۱. مثلث ABC را با زاویه‌های حاده درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، A، بزرگترین زاویهٔ مثلث باشد.



دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M وسط BC، و به شعاع R=MA رسم می‌کنیم. این دایره، امتداد ضلع BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند (شکل). در این‌صورت، زاویهٔ DAE قائمه است و $a = MB = MC < R$ (اگر غیر از این باشد، باید داشته باشیم $MB \geq MD$ و $MC \geq ME$ و از آن‌جا : $B\hat{A}C \geq D\hat{A}E = ۹۰^{\circ}$

که با فرض ما مبنی بر حاده بودن زاویه‌های مثلث ABC متناقض است). دست کم، یکی از دو زاویهٔ AMC یا AMB حاده نیست. به‌طور مثال

$$A\hat{M}B = \alpha \geq ۹۰^\circ$$

چون $AB \leq BC = ۲a$ (زیرا $B\hat{A}C \geq A\hat{C}B$)، بنابراین، طبق قضیهٔ کسینوسها داریم:

$$R^۲ + a^۲ = MA^۲ + MB^۲ \leq MA^۲ + MB^۲ - ۲MA.MB\cos\alpha = AB^۲ \leq ۴a^۲$$

از آن‌جا $R \leq \sqrt{۳}a$ و

$$S_{ADE} = \frac{۱}{۲}DE.AH = R.AH \leq \sqrt{۳}a.AH = \sqrt{۳}.\frac{۱}{۲}.BC.AH = \sqrt{۳}$$

(که در آن، AH، بر BC عمود است) حکم ثابت شد.

۵۳۲. این مسأله، حالت خاص مسألهٔ کلی‌تری است که به قضیهٔ بزرگ فرما مشهور شده است: معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$، که در آن، n عددی درست و مثبت است، برای عددهای $n > ۲$، دارای جواب درست برای x، y و z نیست.

فرما، بطور معمول (غالباً) ضمن خواندن کتاب، در حاشیه‌های آن یادداشتهایی می کرد. بطور مثال، وقتی که کتاب «حساب» دیوفانت را می خواند، در حاشیهٔ صفحه‌ای که معادلهٔ سیال $x^۲ + y^۲ = z^۲$ مورد بحث قرار گرفته بود، نوشت: «به هیچ‌وجه نمی‌توان یک توان سوم را به مجموع دو توان سوم، یا یک توان چهارم را به مجموع دو توان چهارم و، به‌طورکلی، یک توان با نمای بزرگتر از ۲ را به مجموع دو توان با همان نما تبدیل کرد. من اثبات عجیبی برای این حکم پیدا کرده‌ام، ولی در این‌جا، به دلیل کمبود جا، نمی‌توانم آن را بیان کنم».

هنوز این معما حل نشده است که فرما، چگونه استدلال کرده است و آیا درواقع، به چنین اثباتی رسیده است؟ البته، برای مقدارهای جداگانه‌ای از n، توانسته‌اند قضیهٔ فرما را با دقت ثابت کنند. مثلاً، اولر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳)، عضو فرهنگستان پترزبورگ، قضیهٔ فرما را، برای n=۳ و n=۴، ثابت کرد. دیریکله (۱۸۰۵ ـ ۱۸۵۹)، ریاضیدان اهل گوتینگن آلمان، حالت n=۵ را ثابت کرد، کومر (۱۸۱۰ـ۱۸۹۳)، استاد دانشگاه برلن، به کمک روشهای جدید توانست درستی حکم قضیهٔ بزرگ فرما را، تا n=۱۰۰ ثابت کند.

سرانجام، ریاضیدانان معاصر امریکایی، با استفاده از نتیجه‌گیریهای کومر و به کمک کامپیوتر، ثابت کردند، حکم فرما برای همهٔ عددهای از n=۳ تا n=۴۰۰۲ درست است.

سرانجام آندرو وایلز ریاضیدان بزرگ انگلیسی درسال ۱۹۹۵ قضیهٔ فرما را در حالت کلی ثابت کرد. همان‌طورکه گفتیم، حالت n=۴ را اولر ثابت کرد. او ثابت کرد معادلهٔ

$$x^4 + y^4 = z^4 \qquad (1)$$

برای مقدارهای درست x ، y و z، جواب ندارد. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم معادلهٔ

$$x^4 + y^4 = z^2 \qquad (2)$$

برای مقدارهای درست جواب ندارد. اگر بتوانیم ثابت کنیم، معادلهٔ (۲) برای عددهای درست، بدون جواب است، در آن صورت، معادلهٔ (۱) هم، جواب درست نخواهد داشت. درواقع، اگر عددهای درست x_1 ، y_1 و z_1 ، جوابی از معادلهٔ (۱) باشند، باید داشته باشیم:

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$$

و در این‌صورت، سه عدد x_1 ، y_1 و z_1^2 جوابی از معادلهٔ (۲) خواهد بود. و اگر معادلهٔ اخیر جواب درست نداشته باشد، معادلهٔ (۱) هم بدون جواب می‌ماند.

بنابراین، برای این‌که مسألهٔ فرما (قضیهٔ بزرگ فرما، برای حالت n=۴) حل شود، باید ثابت کنیم، معادلهٔ (۲) دارای جواب درست نیست. اثبات را با برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم x_1 ، y_1 و z_1 عددهای درستی باشند که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند. درضمن، بدون این‌که به کلی بودن مطلب لطمه‌ای وارد آید، می‌توان این عددها را مثبت به حساب آورد، زیرا روشن است که اگر x_1 ، y_1 و z_1 در معادلهٔ (۲) صدق کنند، $|x_1|$، $|y_1|$ و $|z_1|$ هم در این معادله صدق خواهند کرد. معادلهٔ (۲) را، بعد از قرار دادن این سه عدد، می‌توان این‌طور نوشت:

$$(x_1^2)^2 + (y_1^2)^2 = z_1^2$$

یعنی عددهای x_1^2 ، y_1^2 و z_1 عددهای فیثاغوری هستند و، همان‌طورکه می‌دانیم، چنین سه عددی را می‌توان، نسبت به دو عدد فرد u و v که نسبت به هم اوّلند، بیان کرد (درضمن u>v):

$$x_1^2 = u.v \qquad (3)$$

$$y_1^2 = \frac{u^2 - v^2}{2} \qquad (4)$$

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2} \qquad (5)$$

چون در برابری (۳)، حاصلضرب دو عدد u و v، که نسبت به هم اوّلند، مجذور کامل شده است، باید u و v، هر کدام مجذور کامل باشند (چرا؟)، یعنی

$$u = u_1^2 \qquad (6)$$

$$v = v_1^2 \qquad (7)$$

درضمن عددهای u_1 و v_1 هم باید عددهایی فرد و نسبت به هم اوّل باشند و $u_1 > v_1$.
برابریهای ۳، ۴ و ۵، با توجه به برابریهای (۶) و (۷)، به این‌صورت درمی‌آیند :

$$x_1^2 = u_1^2 v_1^2 \tag{8}$$

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} \tag{9}$$

$$z_1 = \frac{u_1^4 + v_1^4}{2} \tag{10}$$

از برابری (۹) نتیجه می‌شود :

$$y_1^2 = \frac{u_1^4 - v_1^4}{2} = \frac{(u_1^2 + v_1^2)(u_1^2 - v_1^2)}{2} \tag{11}$$

از آن‌جا که مجموع و تفاضل دو عدد فرد، همیشه عددی است زوج، بنابراین

$$u_1 + v_1 = 2u_2 \tag{12}$$

$$u_1 - v_1 = 2v_2 \tag{13}$$

از آن‌جا

$$u_1 = u_2 + v_2 \tag{14}$$

$$v_1 = u_2 - v_2 \tag{15}$$

در این‌جا هم u_2 و v_2 نسبت به هم اوّلند، زیرا در غیر این‌صورت، با توجه به رابطه‌های (۱۴) و (۱۵)، نتیجه می‌شود که u_1 و v_1 نسبت به هم اوّل نیستند. و این، مخالف فرض است.

یادآوری می‌کنیم که، چون u_2 و v_2 نسبت به هم اوّلند، مجموع مجذورهای آنها هم نسبت به هر کدام از این عددها اوّل است، یعنی $u_2^2 + v_2^2$ ، به‌جز واحد، هیچ مقسوم‌علیه مشترکی با u_2 و v_2 ندارد (چرا؟).

اکنون y_1^2 را از رابطهٔ (۱۱)، برحسب u_2 و v_2 ، طبق رابطه‌های (۱۴) و (۱۵)، به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا u_1^2 و v_1^2 را از رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) پیدا می‌کنیم :

$$u_1^2 = u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2$$

$$v_1^2 = u_2^2 + v_2^2 - 2u_2 v_2$$

و از آن‌جا

$$u_1^2 + v_1^2 = 2(u_2^2 + v_2^2) \tag{16}$$

$$u_1^2 - v_1^2 = 4u_2 v_2 \tag{17}$$

حالا، با استفاده از رابطه‌های (۱۱)، (۱۶) و (۱۷)، به‌دست می‌آید :

$$y_1^2 = 4u_2v_2(u_2^2 + v_2^2)$$

که با تقسیم دو طرف این برابری بر ۴، خواهیم داشت :

$$\frac{y_1^2}{4} = u_2v_2(u_2^2 + v_2^2) \qquad (18)$$

توجه کنیم که در میان سه عدد فیثاغوری x_1^2 ، y_1^2 و z_1 دو عدد نخست نمی‌توانند با هم فرد باشند، بنابراین، همیشه می‌توان x_1^2 را فرد، y_1^2 را زوج و، درنتیجه، z_1 را فرد به حساب آورد. به این ترتیب، y_1^2 ، عددی زوج است. ولی هر عدد زوج مجذور کامل بر ۴ بخشپذیر است و بنابراین، $\frac{y_1^2}{4}$ عددی است درست.

در سمت راست رابطهٔ (۱۸) حاصلضرب سه عدد u_2 ، v_2 و $u_2^2 + v_2^2$ را داریم که دو به دو نسبت به هم اوّلند و، در ضمن این حاصلضرب مجذور کامل است (زیرا، برابر است با مجذور $\frac{y_1}{2}$). بنابراین، بناچار باید هر کدام از این سه عدد خود مجذور کامل باشند، یعنی داشته باشیم :

$$u_2 = x_2^2 \quad , \quad v_2 = y_2^2 \quad , \quad u_2^2 + v_2^2 = z_2^2$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2$$

به این ترتیب، اگر $(z_1 ، y_1 ، x_1)$، جواب درستی از معادلهٔ $x^4 + y^4 = z^2$ باشد، ناچار جواب درست دیگری مثل $(z_2 ، y_2 ، x_2)$ هم وجود دارد که در این معادله صدق می‌کند و، درضمن، باید داشته باشیم : $z_1 > z_2$.

نابرابری $z_1 > z_2$ را می‌توان، با این استدلال، ثابت کرد :

$$z_2^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{u + v}{2}$$

از طرف دیگر

$$z_1 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

از آن‌جا

$$z_1^2 > z_2^2 \Rightarrow z_1 > z_2$$

اکنون، اگر از جواب درست $(z_2 ، y_2 ، x_2)$ آغاز کنیم، می‌توانیم با استدلالی شبیه استدلال بالا، ثابت کنیم که جواب درست سه‌گانهٔ دیگری هم، مثل $(z_3 ، y_3 ، x_3)$ وجود دارد که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کند و از این عددهای درست سه‌گانه، تا هر جا

که بخواهیم پیدا می‌شود. این جوابها، دنباله‌ای نامتناهی را به‌وجود می‌آورند :

(x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , $(x_3, y_3, z_3), \ldots$

و در میان آنها، عددهای درست و مثبت $z_1, z_2, z_3, \ldots$

دنباله‌ای نامتناهی تشکیل می‌دهند که، به‌صورتی یکنوا (مونوتون)، نزولی است :

$z_1 > z_2 > z_3 > \ldots$

و منجر به تضادی منطقی می‌شود.

درواقع، این دنباله، نمی‌تواند بیش از z_1 جمله داشته باشد و، بنابراین، نمی‌تواند نامتناهی باشد. به این ترتیب، فرض وجود جوابی با عددهای درست برای معادلهٔ (۲)، منجر به تناقض منطقی می‌شود. بنابراین، معادلهٔ (۲) و، همراه با آن، معادلهٔ (۱)، نمی‌تواند جوابی شامل عددهای درست داشته باشد.

یادداشت. روشی که برای حل این مسأله به‌کار رفته است، روش نزولی نامحدود نامیده می‌شود. در این روش، با مبنا قرار دادن یک جواب، دنبالهٔ بی‌پایانی از جوابها پیدا می‌شود که از عددهای درست و مثبتی که به‌طور یکنوا نزولی‌اند، تشکیل شده است :

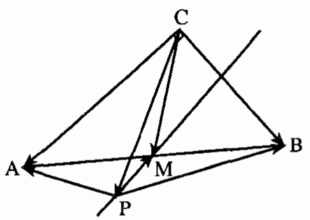
$z_1, z_2, z_3, \ldots$

از این روش، برای حل حالتهای خاص قضیهٔ بزرگ فرما، می‌توان استفاده کرد، ولی به‌کار گرفتن آن، برای حالت کلی $x^n + y^n = z^n$ (که در آن، n عددی است طبیعی)، عملی نیست.

۵۳۳. چون $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB}$

بنابراین :

$$2\overrightarrow{PC}^2 = (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA})^2 + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CB})^2$$



از آن‌جا :

$$2\,\overrightarrow{PC}.(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 0 \quad (1)$$

اگر M را وسط وتر AB بگیریم، داریم :

$$\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 4\overrightarrow{CM}^2, \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\,\overrightarrow{CM}$$

درنتیجه برابری (۱) به این صورت درمی‌آید :

$$\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CM}.(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{PM} = 0$$

$$\Rightarrow C\hat{M}P = 90^\circ$$

به این ترتیب، مکان هندسی نقطهٔ P عبارت است از خط راستی که از نقطهٔ M وسط وتر AB می‌گذرد و بر میانهٔ CM عمود است.

۱۱.۵ . مسأله‌های ترکیبی

۵۳۴. الف. ۱۵۰

ب. ۲۵

پ. ۱۲

۵۳۵. الف. $۴\sqrt{۲}$

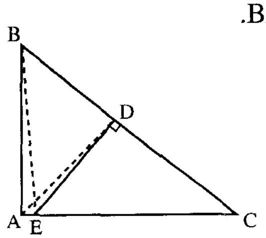
ب. ۸

پ. $۴\sqrt{۳}$

ت. $۱۲+۴\sqrt{۳}+۴\sqrt{۲}$

ث. $۸+۸\sqrt{۳}$

۵۳۶. ۱. چهارضلعی AEDB محاطی و $\overline{AD}$ کمان $\widehat{BDE}$ به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، درنتیجه BD=DE.



۲. $DE = DB = \frac{ac}{b+c}$ و $DC = \frac{ab}{b+c}$

$$EC^۲ = \frac{a^۲c^۲}{(b+c)^۲} + \frac{a^۲b^۲}{(b+c)^۲} = \frac{a^۲(c^۲+b^۲)}{(b+c)^۲} = \frac{a^۴}{(b+c)^۲}$$

$$EC = \frac{a^۲}{b+c}$$

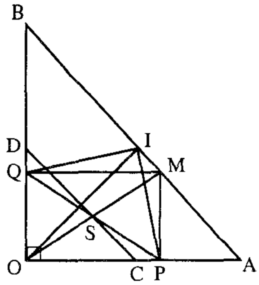
۵۳۸. با استفاده از رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB^۲ = BD.BC \Rightarrow AB = \sqrt{۱/۶۲ \times ۴/۵} = ۲/۷$$

$$AC = \sqrt{BC^۲ - AB^۲} = \sqrt{۴/۵^۲ - ۲/۷^۲} = ۳/۶$$

$DC = ۴/۵ - ۱/۶۲ = ۲/۸۸$ و $AD = ۲/۱۶$

و میانه‌ها : $CC' = ۳/۸۴$ و $BB' = ۳/۲۴$ ، $AA' = ۲/۲۵$



۵۳۹. ۱. مثلثهای APM و MQB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینند. بنابراین MP=PA و چون MPOQ مستطیل است، MQ=OP ؛ از آن‌جا :

مقدار ثابت =MP+MQ=PA+OP=OA

۲. نقطهٔ S وسط OM است. مکان هندسی نقطهٔ S خطی موازی خط AB است که از نقطهٔ C وسط OA و از نقطهٔ D وسط OB می‌گذرد. این مکان هندسی محدود به دو نقطهٔ C و D است.

۳. در مثلثهای IAP و IOQ زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{O}$ هر کدام $۴۵°$ است ؛ IA=IO، زیرا IO میانهٔ نظیر وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB برابر نصف وتر است. AP=PM=OQ. دو مثلث به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع همنهشتند. از آن‌جا : IP=IQ و مثلث IPQ متساوی‌الساقین است. بعلاوه این مثلث قائم‌الزاویه در رأس I است.

زیرا $P\hat{I}A + O\hat{I}P = ۹۰°$. IS میانهٔ مثلث IPQ در عین حال نیمساز زاویهٔ QIP و عمودمنصف پاره‌خط PQ است.

از آن‌جا : SI=SQ=SO=SP=SM و پنج نقطهٔ I، Q، O ، P و M روی دایره‌ای به مرکز S و به شعاع SO قرار دارند.

۴. $MB = \frac{۳a\sqrt{۲}}{۴}$ و $MA = \frac{a\sqrt{۲}}{۴}$ و $AB = a\sqrt{۲}$ و $\frac{MA}{MB} = \frac{۱}{۳}$ زیرا نقطهٔ M به فاصلهٔ $\frac{AB}{۴}$ از رأس A قرار دارد.

$\frac{PA}{PO} = \frac{۱}{۳}$ بنا به قضیهٔ تالس :

$$PA = \frac{a}{۴} \text{ و } PO = \frac{۳a}{۴} \text{ و } MP = \frac{a}{۴} \text{ و } MQ = \frac{۳a}{۴} \text{ و}$$

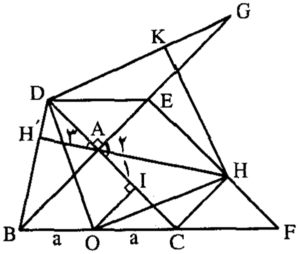
$$OM^۲ = OP^۲ + PM^۲ \text{ و } OM^۲ = \frac{۹a^۲}{۱۶} + \frac{a^۲}{۱۶} = \frac{۱۰a^۲}{۱۶} \text{ و } OM = \frac{a\sqrt{۱۰}}{۴}$$

مساحت IQOP را به‌دست می‌آوریم :

$$a.IQOP = a.IPQ + a.OPQ = \frac{PQ.IS}{۲} + \frac{OP.OQ}{۲}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{a\sqrt{10}}{4}\times\frac{a\sqrt{10}}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3a}{4}\times\frac{a}{4}=\frac{16a^2}{64}\Rightarrow a.IQOP=\frac{a^2}{4}$$

۵۴۰. ۱. مثلثهای OCH و OAD را مقایسه می‌کنیم. AO میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ BAC برابر با $\frac{BC}{2}$، یا OC است.



$$CH = AE = AD\ ;\ O\hat{C}H = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

$$O\hat{A}D = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

این دو مثلث همنهشتند. OH=OD

$$H\hat{O}C + A\hat{O}H = 90^\circ \Rightarrow D\hat{O}A + A\hat{O}H = D\hat{O}H = 90^\circ$$

۲. مثلثهای ADB و AEH مساوی و قائم‌الزاویه در رأسهای A و E هستند. زیرا $\hat{A}_2 = \hat{D}$ امّا $\hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ پس $\hat{A}_2 + \hat{D} = 90^\circ$ از آن‌جا $A\hat{H'}D = 90^\circ$ و AH عمود بر BD است.

۳. مثلثهای ODI و DGA متشابه‌اند. زیرا ضلعهایشان دو به دو بر هم عمودند. OI بر DA، OD بر DG و ID بر AG.

اگر K و G بر هم منطبق باشند، DG=DK=DO است. دو مثلث متشابه که یک ضلع نظیر مساوی داشته باشند با هم مساوی‌اند.

۴. $BC = 2a\ ;\ AO = a\ ;\ EH = AC = OC\sqrt{2} = a\sqrt{2}\ ;$

$$EA = AD = OI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$ED = EA\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = a$$

DE با BO موازی و مساوی است و چهارضلعی DEOB متوازی‌الاضلاع است.
مثلث EOD متساوی‌الساقین است. زیرا مثلثهای AOE و AOD مساوی یکدیگرند.

از آن‌جا: $OE^2 = OD^2 = OI^2 + DI^2$

$$OI=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}\ ;\ DI=DA+AI \text{ امّا } AI=OI=DA$$

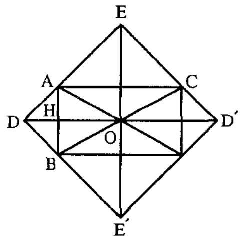
از آن‌جا :

$$DI=۲DA=a\sqrt{۲}\ ;\ OE^۲=\frac{۲a^۲}{۴}+۲a^۲=\frac{۵a^۲}{۲}\ ;\ OE=\frac{a\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۵۴۱. ۱. داریم : $D\hat{A}B=E\hat{A}C=۴۵^\circ$ و $B\hat{A}C=۹۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}E=۱۸۰^\circ$

درنتیجه سه نقطهٔ D، A و E روی یک خط راست قرار دارند.

$$OA=\frac{BC}{۲}=OB=OC$$



مثلث OAE همنهشت با مثلث OCE و مثلث OAD همنهشت با مثلث OBD است.

$$A\hat{E}O=C\hat{E}O=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ \text{ و } A\hat{D}O=B\hat{D}O=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

درنتیجه مثلث ODE قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۲. مثلث DED' قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. زیرا $D\hat{E}D'=۹۰^\circ$ و $D'\hat{D}E=۴۵^\circ$ است. همچنین مثلث EDE' قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشد. از آن‌جا نتیجه می‌شود :

الف. که چهارضلعی $DED'E'$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا DE' و ED' مساوی DE و درنتیجه مساوی هم و همچنین موازی‌اند. (هر دو در یک طرف عمود بر DE).

ب. که این متوازی‌الاضلاع لوزی است. زیرا دو ضلع مجاورش با هم برابرند.

پ. که این چهارضلعی مستطیل است. زیرا زاویه‌هایش قائمه‌اند. بنابراین $DED'E'$ مربع است.

۳.

$$\begin{aligned}AB+AC&=۲AH+۲AK\\&=DH+OK+OH+EK\\&=\underbrace{DH+OH}+\underbrace{EK+OK}\\&=OD+OE\end{aligned}$$

۴. مساحت چهارضلعی $DED'E'$ برابر است با : $DE^{۲} = (DA + EA)^{۲}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ADB ؛ $DA = \frac{AB}{\sqrt{۲}} = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین AEC ؛ $EA = \frac{AC}{\sqrt{۲}} = \frac{c\sqrt{۲}}{۲}$

$$(DA + AE)^{۲} = \left(\frac{b\sqrt{۲}}{۲} + \frac{c\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{(b+c)\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۲}(b+c)^{۲}$$

$$\text{aire } DED'E' = \frac{۱}{۲}(b^{۲} + c^{۲} + ۲bc) = \frac{۱}{۲}(b^{۲} + c^{۲}) + bc$$

امّا : $b^{۲} + c^{۲} = BC^{۲} = (۲OA)^{۲} = ۴OA^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(b^{۲} + c^{۲}) = ۲OA^{۲}$

و این مقدار ۲ برابر مساحت مربع به ضلع OA است.

$$bc = AB.AC = ۲\text{aires } ABC \Rightarrow \text{aire } DED'E' = ۲\text{aire}$$

۲ برابر مساحت مثلث ABC + ۲ برابر مساحت مربع به ضلع $OA = DED'E'$ مساحت

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره

۱.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایرهٔ محیطی

۲.۱.۶. زاویه

۱.۲.۱.۶. اندازهٔ زاویه

۵۴۲. اندازهٔ زاویهٔ محاطی $K\hat{A}D$ برابر ۱۰° است. زیرا: $K\hat{A}D=\frac{\overset{\frown}{KD}}{۲}=\frac{۲۰^\circ}{۲}=۱۰^\circ$

امّا می‌دانیم که $K\hat{A}D=\hat{B}-\hat{C}$ است؛ پس (۱) $\hat{B}-\hat{C}=۱۰^\circ$. از طرفی $\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ$

بنابراین
$$\begin{cases}\hat{B}-\hat{C}=۱۰^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{B}=۵۰^\circ \quad,\quad \hat{C}=۴۰^\circ$$

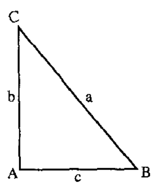
۳.۱.۶. ضلع

۱.۳.۱.۶. اندازهٔ ضلع

۵۴۳. فرض می‌کنیم داشته باشیم $\hat{C}=\hat{A}-\hat{B}$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}\Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

بنا به داده‌های مسأله داریم:



$$\begin{cases}c=۱\\ a^۲+b^۲=۲(\frac{\pi a^۲}{۴})\\ a^۲=b^۲+c^۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a^۲+۲b^۲=\pi a^۲\\ a^۲=b^۲+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲a^۲+۲(a^۲-۱)=\pi a^۲\Rightarrow ۴a^۲-\pi a^۲=۲\Rightarrow a^۲=\frac{۲}{۴-\pi}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{۲}{۴-\pi}}$$

۴.۱.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۶. اندازهٔ ارتفاع

۵۴۴. زاویهٔ ACB برابر 30° و مثلث قائم‌الزاویه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ است. بنابراین:

$$AB=\frac{BC}{2}=\frac{20}{2}=10\,cm \text{ و } AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20=10\sqrt{3}\,cm$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH، $\hat{C}=30^\circ$ است. درنتیجه $AH=\frac{AC}{2}=5\sqrt{3}\,cm$ است.

۵.۱.۶. پاره‌خط

۱.۵.۱.۶. اندازهٔ پاره‌خط

۵۴۵. مثلث قائم‌الزاویه $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ است. بنابراین:

$$BC=20 \Rightarrow AB=10 \text{ و } AC=10\sqrt{3} \text{ و } AM=5\sqrt{3}$$

$$\Delta ABM: BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{100+75}=5\sqrt{7}$$

حال قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ محیطی آن را می‌نویسیم:

$$MA.MC=MB.MN \Rightarrow 5\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}=5\sqrt{7}\times MN \Rightarrow MN=\frac{15\sqrt{7}}{7}$$

۲.۵.۱.۶. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۴۶. اگر میانهٔ AO میانهٔ BD را در نقطهٔ M قطع کند، دو مثلث BMO و AEF متشابه‌اند.

۶.۱.۶. شعاع دایره

۱.۶.۱.۶. اندازهٔ شعاع

۵۴۷. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است. بنابراین داریم:

$$\text{اندازهٔ وتر}=a=\sqrt{16^2+20^2}=\sqrt{656}=2\sqrt{41} \Rightarrow R=\frac{a}{2}=\sqrt{41}$$

۶.۱.۷. محیط

۶.۱.۷.۱. اندازهٔ محیط

۵۴۸. چون R=۱۰cm است، اندازهٔ وتر AB برابر ۲۰ = ۱۰×۲ سانتیمتر می‌باشد. با فرض AH=x، HB = ۲۰ − x داریم:

$$CH^{۲} = HA.HB \Rightarrow ۷۵ = x(۲۰ - x) \Rightarrow x^{۲} - ۲۰x + ۷۵ = ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ = ۱۵ \text{ و } x_۱ = ۵ \Rightarrow AH = ۵ \text{ و } HB = ۱۵ \text{ یا } AH = ۱۵ \text{ و } BH = ۵$$

حال در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACH و BCH داریم:

$$AC = \sqrt{۷۵ + ۲۵} = ۱۰$$

$$BC = \sqrt{۲۲۵ + ۲۵} = ۵\sqrt{۱۰} \Rightarrow \text{محیط مثلث} = ۲۰ + ۱۰ + ۵\sqrt{۱۰} = ۳۰ + ۵\sqrt{۱۰}$$

۶.۱.۸. مساحت

۶.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۵۴۹. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH نتیجه می‌شود:

$$AH = \sqrt{AB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = ۶$$

از آن‌جا:

$$AB^{۲} = AH.AC \Rightarrow ۱۰۰ = ۶ \times AC \Rightarrow AC = \frac{۵۰}{۳} \qquad \text{اندازهٔ وتر مثلث}$$

$$\text{مساحت مثلث} = S = \frac{۱}{۲}AC.BH = \frac{۱}{۲} \times \frac{۵۰}{۳} \times ۸ = \frac{۲۰۰}{۳}cm^{۲}$$

۶.۱.۸.۲. نسبت مساحتها

۵۵۰. وتر مثلث قائم‌الزاویه BC = ۲۰cm است. بنابراین داریم:

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sin ۲۲^\circ, ۳۰' = \frac{AB}{۲۰} \Rightarrow AB = ۲۰\left(\frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}\right)$$

$$= ۱۰\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}cm$$

دو مثلث ABD و ABC در ارتفاع رأس B مشترکند، بنابراین نسبت مساحتهای آنها به نسبت قاعده‌های نظیر این ارتفاع مشترک است، یعنی داریم:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC}$$

امّا می‌دانیم :

$$\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{BC}=\frac{۱۰\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲۰}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{AC}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲+\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲+\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}$$

۶.۱.۹. رابطه‌های متری

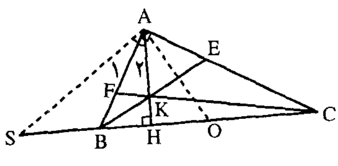
۵۵۱. دو مثلث BDF و EDC متشابه‌اند و $DG^{۲}=DB.DC$ است.

۶.۱.۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۵۲. اگر G مرکز ثقل و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد، OG خط اولر مثلث است. با استفاده از ویژگی داده شده ثابت کنید مثلث یک زاویهٔ °۹۰ دارد و یا بین ضلعها رابطهٔ فیثاغورس برقرار است.

۶.۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۵۳. مسأله را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم :



«فرض کنید مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در نقطهٔ A، امتداد وتر BC را در نقطهٔ S قطع کند. ثابت کنید، نقطه‌های E، F و S بر یک استقامتند.»

نقطهٔ O را وسط وتر BC می‌گیریم. داریم :

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_۱&=۹۰^\circ-B\hat{A}O=۹۰^\circ-\hat{B}\\ \hat{A}_۲&=۹۰^\circ-\hat{B}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$

لذا AB نیمساز داخلی مثلث SAH می‌باشد. و چون $AB \perp AC$ پس AC نیمساز خارجی این مثلث می‌باشد. بنابراین : (۱) $\frac{BS}{BH} = \frac{CS}{CH}$. از طرفی طبق قضیهٔ سوا تساوی $\frac{AF}{FB} \times \frac{BH}{HC} \times \frac{CE}{EA} = ۱$ برقرار است که با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BS}{CS} \times \frac{CE}{EA} = ۱$$

لذا طبق عکس قضیهٔ منلائوس سه نقطهٔ F، E و S بر یک استقامتند.

۵۵۴. هر یک از زاویه‌های $B\hat{A}D$، $D\hat{A}E$ و $E\hat{A}C$ برابر ۳۰ درجه و درنتیجه هر یک از کمانهای $\widehat{BD}$، $\widehat{DE}$ و $\widehat{EC}$ برابر ۶۰° است. بنابراین DE موازی BC است. چون $\widehat{DE} = ۶۰^\circ$ می‌باشد، بنابراین $DE = C_۶ = R$ است.

۵۵۵. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، G محل برخورد میانه‌ها و H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای یک مثلث باشد، سه نقطهٔ O، G و H بر یک خط راست قرار دارند که آن را خط اویلر مثلث می‌نامند.

۱۲.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی

۵۵۶. اندازهٔ ضلع AC برابر است با $AC = \sqrt{BC^۲ - AB^۲} = \sqrt{۶۷۶ - ۱۰۰} = ۲۴$.

۱. می‌دانیم که AB.AC=AH.BC است. بنابراین :

$$۱۰ \times ۲۴ = AH.۲۶ \Rightarrow AH = \frac{۱۲۰}{۱۳}$$

۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم :

$$AB = ۱۰ \text{ و } AM = \frac{AC}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲ \Rightarrow BM = \sqrt{AB^۲ + AM^۲}$$

$$\Rightarrow BM = \sqrt{۱۰۰ + ۱۴۴} = \sqrt{۲۴۴} = ۲\sqrt{۶۱}$$

۳. با معلوم بودن سه ضلع مثلث ABC اندازهٔ نیمساز CD را از دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$d_c = \frac{۲}{a+b}\sqrt{pab(p-c)} \ , \ a = ۲۶ \ , \ b = ۲۴ \ , \ c = ۱۰ \ ,$$

$$۲p = a + b + c = ۲۶ + ۲۴ + ۱۰ = ۶۰ \Rightarrow p = ۳۰$$

$$\Rightarrow d_c = \frac{۲}{۲۶ + ۲۴}\sqrt{۳۰ \times ۲۶ \times ۲۴(۳۰ - ۲۶)} = \frac{۲۴\sqrt{۱۳۰}}{۲۵}$$

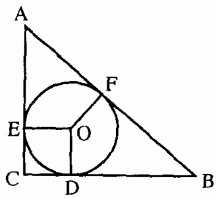
۴. DA و DB را محاسبه می‌کنیم و از رابطهٔ DA.DB=DC.DE برای محاسبهٔ DE استفاده می‌کنیم. داریم:

$$DA=\frac{c.b}{a+b}=\frac{۱۰\times ۲۴}{۵۰}=۴/۸ \text{ و } DB=\frac{c.a}{a+b}=\frac{۱۰\times ۲۶}{۵۰}=۵/۲$$

$$\Rightarrow ۴/۸\times ۵/۲=\frac{۲۴\sqrt{۱۳۰}}{۲۵}\times DE\Rightarrow DE=\frac{۲۶}{\sqrt{۱۳۰}}=\frac{\sqrt{۱۳۰}}{۵}$$

۲.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محاطی

۱.۲.۶. تعریف و قضیه



۵۵۷. خطهای کمکی زیر را که لازم هستند رسم می‌کنیم: از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی شعاعهای OD، OE و OF را به نقطه‌های تماس وصل می‌کنیم. آن‌گاه OE⊥AC و OD⊥BC و OF⊥AB خواهد بود (شکل).
از آن‌جا که ODCE یک مربع است (همهٔ زاویه‌های آن قائمه بوده و OE=OD است). از این‌رو $BD=a-r$ و CE=CD=r و $AE=b-r$ را داریم. ولی BD=BF و AE=AF بوده و از این‌رو $BF=a-r$ و $AF=b-r$ خواهد بود. به‌دلیل AB=BF+AF یعنی $c=(a-r)+(b-r)$، $r=\frac{a+b-c}{۲}$ نتیجه می‌شود.

توجه. فرمول حاصله را می‌توان در مورد مسأله‌های مربوط به مثلثهای قائم‌الزاویه مورد استفاده قرار داد.

۲.۲.۶. زاویه

۱.۲.۲.۶. اندازهٔ زاویه

۵۵۸. ۱۵° و ۷۵°.

۵۵۹. فرض کنید در مثلث ABC، زاویهٔ C، زاویه‌ای قائمه، M نقطهٔ میانه‌ای، O مرکز دایرهٔ محاطی و r شعاع آن باشد و $\hat{B}=\alpha$ ؛ در این‌صورت :

$$AB=r\left(\cot\frac{\alpha}{۲}+\cot(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲})\right)=\frac{r\sqrt{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲})}$$

$O\hat{C}M=\alpha-\frac{\pi}{۴}$ و $OM=r$ ، $CO=r\sqrt{۲}$ ، $CM=\frac{۱}{۳}AB$

با نوشتن قانون کسینوسها در مثلث COM، به‌دست می‌آوریم $۱=۲+\frac{۸}{۹(۲x-\sqrt{۲})^۲}-\frac{۸x}{۳(۲x-\sqrt{۲})}$ که در آن $x=\cos(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ ، که از آن‌جا $x=\frac{۴\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۶}$.

جواب : $\frac{\pi}{۴}\pm\arccos\frac{۴\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۶}$.

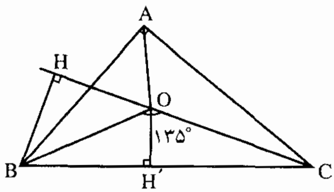
۵۶۰. $\pi-\arctan\frac{\sqrt{K^۲+۶K+۱}-K-۱}{۲}$ و $۲\arctan\frac{\sqrt{K^۲+۶K+۱}-K-۱}{۲}$

۳.۲.۶. ضلع

۱.۳.۲.۶. اندازهٔ ضلع

۵۶۱. ۳۶cm و ۴۸cm

۵۶۲. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است. بنابراین $B\hat{O}C=۹۰^\circ+\frac{\hat{A}}{۲}$ و چون



$\hat{A}=۹۰^\circ$ است، پس $B\hat{O}C=۹۰^\circ+۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$ است. از نقطهٔ O عمودهای OH و OH′ را بترتیب بر خطهای OC و BC فرود می‌آوریم $OH'=r$ است. داریم :

$$\Delta OBC\ :B\hat{O}C=۱۳۵^\circ\Rightarrow BC^۲=OB^۲+OC^۲+\sqrt{۲}OB.OC$$
$$=۱۳+۱۰۴+\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۰۴}$$
$$BC^۲=۱۶۹\Rightarrow BC=۱۳$$

$$\Delta OBH : B\hat{O}H = O\hat{B}H = ۴۵^\circ \ , \ OB = \sqrt{۱۳} \Rightarrow BH = OH = \frac{OB\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

$$\Delta OBC : BC.OH' = OC.BH \Rightarrow ۱۳ \times OH' = \sqrt{۱۰۴} \times \frac{\sqrt{۲۶}}{۲} \Rightarrow OH' = r = ۲$$

$$r = P - a \Rightarrow ۲ = P - ۱۳ \Rightarrow P = ۱۵ \Rightarrow ۲P = ۳۰$$

$$\begin{cases} b^۲ + c^۲ = ۱۶۹ \\ b + c = ۳۰ - ۱۳ = ۱۷ \Rightarrow b = ۱۷ - c \end{cases}$$

$$(۱۷ - c)^۲ + c^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow ۲۸۹ + c^۲ - ۳۴c + c^۲ = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow ۲c^۲ - ۳۴c + ۱۲۰ = ۰ \Rightarrow c^۲ - ۱۷c + ۶۰ = ۰ \Rightarrow c = ۵ \ , \ c = ۱۲$$

$$\Rightarrow b = ۱۲{,}۵ \ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۳ \\ b = ۱۲ \\ c = ۵ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = ۱۳ \\ b = ۵ \\ c = ۱۲ \end{cases}$$

۵۶۳. نخست طول وتر مثلث را محاسبه می‌کنیم. به‌دلیل AB=AK+BK مسأله به محاسبهٔ پاره‌خطهای AK (از ΔAOK) و BK (از ΔOBK) تحویل می‌یابد. مثلث AOK را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. به‌دلیل $K\hat{O}F = B\hat{A}C = \alpha$ (به‌عنوان زاویه‌هایی که ضلعهای آنها بر هم عمود هستند) چنین داریم:

$K\hat{O}A = \frac{\alpha}{۲} (\Delta KOA = \Delta AOF)$ از این‌رو $AK = OK \tan\frac{\alpha}{۲} = R\tan\frac{\alpha}{۲}$ حاصل می‌شود. مثلث BOK را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. چنین داریم:

$B\hat{O}K = \frac{۱}{۲}D\hat{O}K = \frac{۱}{۲}(۹۰^\circ - K\hat{O}F) = ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}$. (در این‌جا از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که در چهارضلعی ODCF سه زاویهٔ C، D و F قائمه بوده و از این‌رو زاویهٔ چهارم یعنی زاویهٔ DOF نیز قائمه خواهد بود). آن‌گاه چنین خواهیم داشت:

$$BK = OK \tan B\hat{O}K = R\tan(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})$$

$$AB = AK + BK = R\tan\frac{\alpha}{۲} + R\tan(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}) = R\frac{\sin(\frac{\alpha}{۲} + ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}{\cos\frac{\alpha}{۲}\cos(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}$$

$$= \frac{R\sqrt{۲}}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}\cos(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}$$

(در این‌جا فرمول $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ به‌کار گرفته شده است).

حال محاسبهٔ طول ضلعهای AC و BC ، با معلوم بودن $B\hat{A}C = \alpha$ ، بسادگی امکان‌پذیر است.

$$BC = AB.\sin\alpha = \frac{R\sqrt{۲}\times\sin\alpha}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}\cos(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})} = \frac{\sqrt{۲}R\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}$$

$$AC = AB.\cos\alpha = \frac{R\sqrt{۲}\cos\alpha}{۲\cos\frac{\alpha}{۲}\cos(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲})}$$

۴.۲.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۶. اندازهٔ ارتفاع

۵۶۴. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث باشد، چهارضلعی OEAF مربع است و $AE = AF = OE = ۱cm$ است. از طرفی $BE = BD = ۳cm$ می‌باشد بنابراین $AB = c = ۱ + ۳ = ۴cm$ است. برای محاسبهٔ اندازهٔ وتر و ضلع AC فرض می‌کنیم. $DC = DF = x$ باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم :

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow (۳+x)^۲ = ۴^۲ + (۱+x)^۲$$
$$\Rightarrow ۹ + x^۲ + ۶x = ۱۶ + ۱ + x^۲ + ۲x \Rightarrow ۴x = ۸ \Rightarrow x = ۲$$
$$\Rightarrow AC = ۲ + ۱ = ۳cm \text{ و } BC = ۲ + ۳ = ۵cm$$

برای محاسبهٔ ارتفاع AH می‌دانیم که $AH.BC=AB.AC$ است. بنابراین :

$$AH \times ۵ = ۴ \times ۳ \Rightarrow AH = \frac{۴\times۳}{۵} = ۲/۴cm$$

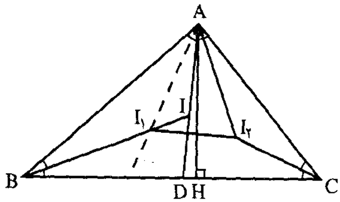
۵.۲.۶. پاره‌خط

۱.۵.۲.۶. اندازهٔ پاره‌خط

۵۶۵. $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}(a + b - \sqrt{a^۲ + b^۲})$

۵۶۶. $\frac{c}{۶}(۳\sqrt{۲} - ۴)$ تا $\frac{c}{۳}$.

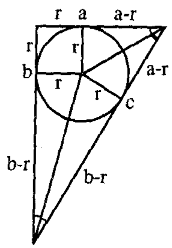
۶ . ۲ . ۵ . ۲ . رابطه بین پاره خطها



۵۶۷. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A}=۹۰^\circ)$، و I_1 و I_2 مرکزهای دایره‌های محاطی درونی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC (H پای ارتفاع رأس A است) باشد، ثابت کنید: $IA = I_1I_2$.

۶ . ۲ . ۶ . شعاع دایره

۶ . ۲ . ۶ . ۱ . اندازهٔ شعاع



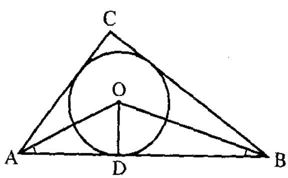
۵۶۸. گزینهٔ (ب) درست است. در هر مثلث قائم‌الزاویه که c اندازهٔ وتر، a و b اندازه‌های دو ضلع و r شعاع دایرهٔ محاطی باشد، داریم:

$$a-r+b-r=c$$

$$۲r=a+b-c=۲۴+۱۰-۲۶=۸; \qquad r=۴$$

۵۶۹. گزینهٔ (د) درست است. این مثلث قائم‌الزاویه است. برای هر مثلث قائم‌الزاویه می‌توان نشان داد که:

$$a-r+b-r=c \quad \therefore\ ۲r=a+b-c=۸+۱۵-۱۷=۶ \text{ و } r=۳$$



۵۷۰. چون AO (شکل) نیمساز زاویهٔ A است، پس $B\hat{A}O=\frac{\alpha}{۲}$ می‌شود و بنابراین:

$$A\hat{B}O=\frac{۱}{۲}(۹۰^\circ-\alpha)=۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}$$

از مثلثهای AOD و BOD داریم:

$$AD=OD.\cot g\frac{\alpha}{۲}$$

$$DB=OD.\cot g(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})$$

بنابراین:

$$c=AB=AD+DB=OD\left[\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})\right]$$

از آن‌جا خواهیم داشت:

$$r=\frac{c}{\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})}$$

می‌توان در صورت لزوم این رابطه را قابل محاسبهٔ لگاریتمی کرد :

$$\cot g\frac{\alpha}{۲}+\cot g(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})=\frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin\frac{\alpha}{۲}\sin(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})}$$

جواب : $r=c\sqrt{۲}\ \sin\frac{\alpha}{۲}\ \sin(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲})$

۶ . ۲ . ۷. محیط

۶ . ۲ . ۷ . ۱ . اندازهٔ محیط مثلث

۵۷۱. گزینهٔ (ب) درست است.

$$c=a-r+b-r$$

$$۱۰=a+b-۲$$

$$P=a+b+c=۱۰+۲+۱۰=۲۲$$

۶ . ۲ . ۷ . ۲ . اندازهٔ محیط شکلهای ایجاد شده

۵۷۲. $۱۲\pi cm$

۶ . ۲ . ۸. مساحت

۶ . ۲ . ۸ . ۱ . اندازهٔ مساحت مثلث

۵۷۳. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث مماس بر ضلع BC را I_a می‌نامیم. چهارضلعی I_aFCE مربع است. بنابراین $CF=CE=۸$ است. از آن‌جا داریم :

$$BC=CE-BE=۸-۶=۲$$

با فرض $AD=AF=x$ ، $CA=۸-x$ است و می‌توان نوشت :

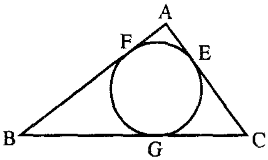
$$AB^۲=AC^۲+BC^۲\Rightarrow(۶+x)^۲=(۸-x)^۲+۲^۲$$

$$\Rightarrow ۳۶+x^۲+۱۲x=۶۴+x^۲-۱۶x+۴\Rightarrow ۲۸x=۳۲\Rightarrow x=\frac{۸}{۷}$$

$$\Rightarrow AC=۸-\frac{۸}{۷}=\frac{۴۸}{۷}$$

در نتیجه مساحت مثلث برابر است با :

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC.BC=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴۸}{۷}\times ۲=\frac{۴۸}{۷}$$



۵۷۴. نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) را G می‌نامیم.

داریم : $BG=p-b$

$$CG=p-c \Rightarrow BG.CG=(p-b)(p-c)=(\frac{a+b+c}{۲}-b)(\frac{a+b+c}{۲}-c)$$

$$\Rightarrow BG.CG=(\frac{a+c-b}{۲})(\frac{a+b-c}{۲})=\frac{a^۲+ab-ac+ac+cb-c^۲+ab-b^۲+cb}{۲}$$

$$\Rightarrow BG.CG=\frac{a^۲+۲bc-c^۲-b^۲}{۲}=\frac{b^۲+c^۲-c^۲-b^۲+۲bc}{۲}=bc$$

۵۷۵. $m^۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}\cot\alpha$

۵۷۶. داریم :

$$S=\frac{ab}{۲}=\frac{a+b+c}{۴}r \quad S=\frac{ar_a}{۲}+\frac{br_a}{۲}-\frac{cR_a}{۲}$$

$$r=\frac{ab}{a+b+c}\ ,\ r_a=\frac{ab}{a+b-c}$$

$$\Rightarrow r_a.r=\frac{a^۲b^۲}{(a+b)^۲-c^۲}=\frac{a^۲b^۲}{۲ab}=\frac{ab}{۲}=S$$

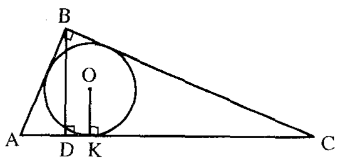
۶ . ۲ . ۸ . ۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۷۷. داریم : $AC=۲۵/۶+۱۴/۴=۴۰$

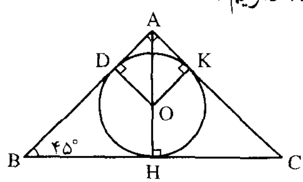
$AB=\sqrt{AD.AC}=۲۴\ ,\ BC=\sqrt{DC.AC}=۳۲\ ,\ BD=\sqrt{AD.DC}=۱۹/۲$

$P=۴۸\ ,\ S=۳۸۴$

$r=\frac{S}{P}=۸\Rightarrow$ دایره $S=\pi r^۲=۶۴\pi$



۵۷۸. داریم :



$BC=۲AH=۸cm\ ,\ AB=AC=۴\sqrt{۲}cm$

$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}\times۸\times۴=۱۶cm$

$$۲P = ۸ + ۸\sqrt{۲} \Rightarrow P = ۴ + ۴\sqrt{۲} = ۴(۱+\sqrt{۲})\text{cm}$$

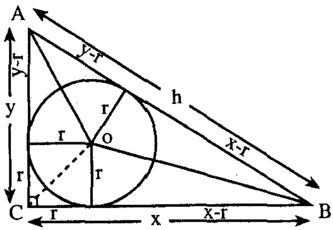
$$r = \frac{S}{P} = \frac{۱۶}{۴(۱+\sqrt{۲})} = ۴(\sqrt{۲}-۱) = ۴(۱/۴-۱) = ۱/۶\text{cm}$$

$$S = \pi r^۲ = \pi(۱/۶)^۲ = ۸/۰۴$$

۶ . ۲ . ۸ . ۳ . نسبت مساحتها

۵۷۹. (ب) در شکل زیر مرکز دایرهٔ محاطی با O و طولهای دو ضلع زاویهٔ قائمه مثلث با x و y نشان داده شده‌اند. بنابراین :

$$h = (y-r)+(x-r) \quad h = x+y-۲r \quad x+y = h+۲r$$



مساحت ΔABC مجموع مساحتهای مثلثهای AOB، BOC و AOC است که ارتفاع هرکدام از آنها r است. پس :

$$\Delta ABC \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(xr+yr+hr) = \frac{r}{۲}(x+y+h)$$

$$= \frac{r}{۲}(h+۲r+h) = r(h+r)$$

و نسبت مطلوب می‌شود. $\dfrac{\pi r^۲}{r(h+r)} = \dfrac{\pi r}{h+r}$

یادداشت. گونهٔ دیگر محاسبهٔ مساحت ΔABC عبارت است از :

$$\frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}\times\frac{(x+y)^۲-(x^۲+y^۲)}{۲}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left[(h+۲r)^۲-h^۲\right] = hr+r^۲$$

۶ . ۲ . ۹ . رابطه‌های متری

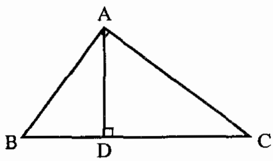
۵۸۰. مقدار AC و AB را بر حسب شعاع دایره محاطی و BD و CD به دست آورده، در هم

ضرب کنید و با درنظر گرفتن مساحت شکلها رابطهٔ حاصل را به صورت $AB.AC = ۲BD.CD(۱)$ درآورید و طرفین رابطهٔ $AC - AB = CD - BD$ را بر طرفین رابطهٔ (۱) تقسیم کنید.

۵۸۲. می‌دانیم مثلثهای ABC و ADB و ADC با هم متشابه‌اند و همچنین در دو مثلث متشابه نسبت مساحتها برابر مربع نسبت ضلعها می‌باشد، و چون نسبت ضلعها همان نسبت شعاعهای دایرهٔ محاطی دو مثلث است، پس نسبت مساحتها برابر مربع نسبت شعاعهای دایرهٔ محاطی دو مثلث می‌باشد. رابطهٔ زیر را می‌نویسیم و صورتها و مخرجهای دو کسر دوم و سوم را جمع می‌کنیم: (S و S' و S'' مساحتهای مثلثهای ABC و ADB و ADC می‌باشد).

$$\frac{S}{r^۲}=\frac{S'}{r'^۲}=\frac{S''}{r''^۲}=\frac{S'+S''}{r'^۲+r''^۲}$$

صورت دو کسر اوّل و آخر چون $S = S' + S''$ است برابرند، پس مخرجها نیز برابرند، یعنی: $r^۲ = r'^۲ + r''^۲$



۵۸۳. داریم:

$$S=\frac{bc}{۲}=\frac{۲bc}{۴}=\frac{c^۲+b^۲+۲bc-b^۲-c^۲}{۴}=\frac{(b+c)^۲-(b^۲+c^۲)}{۴}$$

$$=\frac{(b+c)^۲-a^۲}{۴}=\frac{[(b+c)-a][(b+c)+a]}{۴}=\frac{(۲p-۲a)۲p}{۴}=p(p-a)$$

$$S=\frac{bc}{۲}=\frac{۲bc}{۴}=\frac{b^۲+c^۲+۲bc-b^۲-c^۲}{۴}=\frac{(b^۲+c^۲)-(b-c)^۲}{۴}$$

$$=\frac{a^۲-(b-c)^۲}{۴}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{۴}=\frac{(۲p-۲b)(۲p-۲c)}{۴}=(p-b)(p-c)$$

$$S=p(p-a)=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-b)(p-c)}=\frac{S^۲}{(p-b)(p-c)}=\frac{S}{p-b}\times\frac{S}{p-c}=r_b.r_c$$

$$S=(p-b)(p-c)=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}=\frac{S^۲}{p(p-a)}=\frac{S}{p}\times\frac{S}{p-a}=r.r_a$$

۵۸۴. راه اوّل. با استفاده از فرمول‌های $r=\frac{a+b-c}{۲}$ و $h=\frac{ab}{c}$ کسر $\frac{r}{h}$ را به شکل

$\frac{\sin\hat{A}+\cos\hat{A}-1}{\sin 2\hat{A}}$ تبدیل کنید. سپس از $\sin 2\hat{A} \neq \sqrt{(\sin\hat{A}+\cos\hat{A})^2-1}$ استفاده کنید.

راه دوم. با فرض $\hat{C}=90^\circ$ داریم:

$$S=\frac{a+b+c}{2}\cdot r \text{ و } S=\frac{h.c}{2}\Rightarrow\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}$$

و چون $a+b>c$ است، پس $\frac{r}{h}<\frac{c}{2c}=0/5$ است.

از طرفی $a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow c^2+(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

$$\Rightarrow 2c^2\geq(a+b)^2, a+b\leq c\sqrt{2}\Rightarrow\frac{r}{h}=\frac{c}{a+b+c}\geq\frac{c}{c\sqrt{2}+c}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1>0/4\Rightarrow 0/4<\frac{r}{h}<0/5$$

۶. ۲. ۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

۵۸۵. داریم:

$$S=p(p-a) \quad r_b=\frac{S}{p-b} \quad r_c=\frac{S}{p-c}$$

$$S=\frac{S}{p-b}\cdot\frac{S}{p-c} \qquad S=(p-b)(p-c)$$

$$p(p-a)=(p-b)(p-c)$$

$$p^2-pa-p^2+bp+cp-bc=0$$

$$p(b+c-a)=bc$$

$$p[2(p-a)]=bc$$

$$2p(p-a)=bc$$

$$2S=bc$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد.

۵۸۶. می‌دانیم که

$$r=\frac{S}{p} \text{ و } r_a=\frac{S}{p-a}$$

$$S=\frac{S}{p}\cdot\frac{S}{p-a}=\frac{S^2}{p(p-a)}$$

$$\frac{S}{p(p-a)}=1 \qquad S=p(p-a)$$

می‌دانیم که $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

طرفین را به قوهٔ دو می‌رسانیم : $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=p(p-a)$

$$p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2(p-a)^2$$

$$(p-b)(p-c)=p(p-a) \quad p^2-pb-pc+bc-p^2+pa=0$$

$$bc=pb+pc-pa$$

$$bc=p(b+c-a)\Rightarrow bc=p[2(p-a)]$$

$$bc=2p(p-a)$$

اما $2S=2p(p-a)$ بنابراین $bc=2S$. بنابراین مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد.

۵۸۷. $AD=p-a \ , \ BD=p-b\Rightarrow ab=2(p-a)(p-b)\Rightarrow c^2=a^2+b^2$

۶ . ۲ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۸. چهارضلعی ADHF محاطی است، زیرا $\hat{A}+\hat{H}=180^\circ$ ($AF=AD$ مقابل به زاویه‌های 45° اند.) D را به F وصل می‌کنیم. داریم :

$$\frac{HO'}{DO'}=\frac{AH}{AD}$$

و یا :

$$\frac{HO}{OF}=\frac{AH}{AD}$$

چون طرف دوم این دو تناسب با هم برابرند، پس طرفهای دیگر هم با هم برابرند. یعنی :

$$\frac{HO'}{O'O}=\frac{HO}{OF}$$

و بنا به عکس قضیهٔ تالس، DF موازی است با OO' پس نیمساز زاویهٔ A بر OO' عمود است.

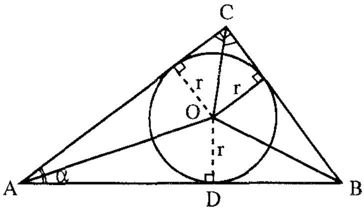
۵۸۹. داریم :

$$r=p-c \ , \ \hat{A}=\alpha\Rightarrow AC=c\cos\alpha \ , \ BC=c\sin\alpha$$

$$2p=c(1+\sin\alpha+\cos\alpha)=c\sqrt{2}\left[\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)} \text{ و } \frac{r}{2p}=\frac{p-c}{2p}=\frac{1}{2}(1-\frac{c}{p})$$

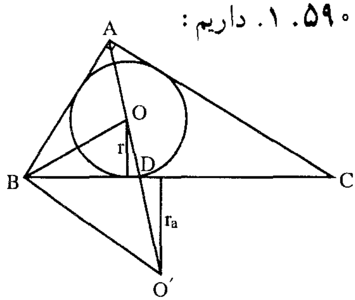
$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{\cos 45^\circ+\cos(45^\circ-\alpha)}\right]$$



ماکزیمم مقدار $\frac{r}{۲p}$ وقتی است که $\cos(۴۵-\alpha)$ ماکزیمم باشد، یعنی $\alpha = ۴۵^\circ$ باشد، که دراین صورت، مثلث قائم‌الزاویه است.

۶ . ۲ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۵۹۰. ۱. داریم :



$$\frac{p}{S}+\frac{p-a}{s}=\frac{b+c}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{(b+c)^۲}{s^۲}=\frac{۸}{\frac{۴pbc(p-a)}{(b+c)^۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{s}=\frac{۱}{p(p-a)} \Rightarrow s=p(p-a)$$

امّا رابطهٔ $s=p(p-a)$ در هر مثلث قائم‌الزاویه برقرار است. بنابراین رابطهٔ داده شده در هر مثلث قائم‌الزاویه برقرار است.

۲. بنا به داده‌های مسأله :

$$a+b+c=۱۲$$

$$۶-a=۱ \Rightarrow a=۵$$

$$\begin{cases} b^۲+c^۲=a^۲ & (b+c)^۲-۲bc=۲۵ \\ bc=۱۲ & (b+c)^۲-۲۴=۲۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+c=۷ \\ bc=۱۲ & b=۴ \quad c=۳ \end{cases}$$

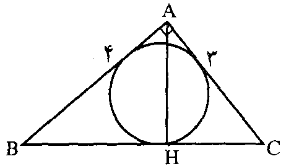
۵۹۱. داریم :

$$b=۵ \Rightarrow b'=\frac{۲۵}{۱۳} \text{ و } c'=\frac{۱۴۴}{۱۳} \text{ و } h=\frac{۶۰}{۱۳} \text{ و } r=\frac{AB+AC-BC}{۲}=۲$$

۵۹۲. داریم :

$$BC^۲=AB^۲+AC^۲=۱۶+۹=۲۵ \qquad BC=۵$$

$$۲s=BC.AH=AB.AC$$



$$۵\times AH=۴\times ۳ \qquad AH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

$$AB^۲=BC.BH$$

$$۱۶=۵\times BH \qquad BH=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲ \text{ و } CH=BC-BH=۵-۳/۲=۱/۸$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{BC.AH}{a+b+c}=\frac{۵\times ۱۲}{۳+۴+۵}=۵$$

۵۹۳. اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ باشد، یکی از عددهای a، b و c به طور حتم زوج است (a، b و c نسبت به هم اول فرض شده‌اند والا رابطه را می‌توان به بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a، b و c تقسیم کرد). چه اگر هر سه عدد فرد باشند، $b^۲+c^۲$ زوج می‌شود و a نمی‌تواند فرد باشد. زیرا مجذور آن نیز فرد خواهد بود و البته چون a، b و c نسبت به‌هم متباینند، هر سه نمی‌توانند زوج باشند؛ پس یکی از این مقدارها بر ۲ بخشپذیر است.

یکی از مقدارهای a، b و c بر ۳ بخشپذیر می‌باشد، زیرا اگر عددی بر ۳ بخشپذیر نبود، بر آن ۱ یا ۲ باقی می‌آورد و مجذور آن بر ۳ بطور حتم مانده‌ای برابر واحد خواهد داشت. پس ملاحظه می‌شود: $a^۲=m.۳+۱$ و $b^۲=m.۳+۱$ و $c^۲=m.۳+۱$ و رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ با این امکانها محال است، مگر این کهماندهٔ $a^۲$ یا $b^۲$ یا $c^۲$ بر ۳ برابر صفر باشد، پس بطور حتم یکی از مقدارهای a، b و c بر ۳ بخشپذیر است؛ همچنین یکی از مقدارهای a، b و c بر ۵ بخشپذیر است. زیرا مجذور هر عدد، بر ۵، مانده‌ای برابر ۱ یا ۴ دارد. بنابراین: $a^۲=m.۵\pm۱$ و $b^۲=m.۵\pm۱$ و $c^۲=m.۵\pm۱$ (ماندهٔ ۴ نسبت به ۵ معادل ماندهٔ ۱- نسبت به پنج است). با این تساویها رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ امکان‌پذیر نیست، مگر این که یکی از این مقدارها بر ۵ قابل قسمت بوده و آن دو تای دیگر، مانده‌های برابر با مانده‌های برابر ۱+ و ۱- نسبت به ۵ داشته باشند. پس از عددهای a، b و c یکی بر ۲ و یکی بر ۳ و یکی بر ۵ (البته ممکن است مثلاً یکی ازآنها هم بر ۲ و هم بر ۳ بخشپذیر باشد) بخشپذیر است، پس حاصلضرب abc بر $۵\times۳\times۲$ یعنی ۳۰ بخشپذیر است. اگر ملاحظه شود که مجذور هر عددی بر چهار یا بر آن بخشپذیر است یا بر آن یک، باقی می‌آورد، از ملاحظهٔ رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ معلوم می‌شود که عددی زوج که بین a، b و c وجود دارد بر ۴ نیز بخشپذیر است. پس حاصلضرب abc بر ۶۰ بخشپذیر است. از ملاحظهٔ رابطه‌های $a=\alpha^۲+\beta^۲$ و

$b=\alpha^2-\beta^2$ و $c=2\alpha\beta$ مشاهده می‌شود که برای این که a، b و c متباین باشند، باید α و β دو عدد متباین باشند که یکی فرد و دیگری زوج باشد، یعنی به عنوان مثال

$$\alpha=2\alpha' \quad \text{و} \quad \beta=2\beta'+1$$

باشد و α' و $2\beta'+1$ متباین باشند. پس :

$$a=4(\alpha'^2+\beta'^2)+4\beta'+1 \quad \text{و} \quad b=4(\alpha'^2-\beta'^2)-4\beta'-1$$

و

$$c=4\alpha'(2\beta'+1)$$

و

$$abc=4\alpha'(2\beta'+1)\left[16\alpha'^4-(2\beta'+1)^4\right]$$

پس :

$$abc=4\alpha'(2\beta'+1)[4\alpha'^2+(2\beta'+1)^2][2(\alpha'+\beta')+1]\times[2(\alpha'-\beta')-1]$$

از این عبارت مشهود است که از عبارتهای :

$$\alpha' \quad \text{و} \quad 2\beta'+1 \quad \text{و} \quad 2(\alpha'+\beta')+1 \quad \text{و} \quad 2(\alpha'-\beta')-1$$

یکی به طور حتم بر ۳ بخشپذیر است و همچنین از عبارتهای α' و $2\beta'+1$ و $2(\alpha'+\beta')+1$ و $2(\alpha'-\beta')-1$ و $4\alpha'^2+(2\beta'+1)^2$ یکی بر ۵ بخشپذیر است، پس abc بر ۶۰ بخشپذیر می‌باشد. اگر $a^2>b^2+c^2$ باشد زاویهٔ A مثلث منفرجه است والاّ حاده می‌باشد. اکنون اگر فرض کنیم که n عددی جبری صحیح باشد، با افزودن آن بر ضلعهای a، b و c مقدارهای زیر به‌دست می‌آید :

$$a+n=\alpha^2+\beta^2+n \quad \text{و} \quad b+n=\alpha^2-\beta^2+n$$

و

$$c+n=2\alpha\beta+n$$

پس

$$(a+n)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2+2n(\alpha^2+\beta^2)+n^2$$

و

$$(b+n)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+2n(\alpha^2-\beta^2)+n^2$$

و

$$(c+n)^2=(2\alpha\beta)^2+4\alpha\beta n+n^2$$

پس

$$(b+n)^2+(c+n)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2+2n(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)+2n^2$$

و

$$(a+n)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2+2n(\alpha^2+\beta^2)+n^2$$

پس اگر عبارت $(a+n)^2-(b+n)^2-(c+n)^2$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت $4n(\beta^2-\alpha\beta)-n^2$. اگر $\alpha>\beta$ باشد، این مقدار منفی است، اگر n مثبت باشد ؛ ولی

اگر n منفی باشد، این عبارت مثبت است. اگر $۴\beta(\beta-\alpha)-n<۰$ باشد، یعنی $n>۴\beta(\beta-\alpha)$ در غیر این‌صورت، عبارت مذکور منفی است. اگر $n<۴\beta(\beta-\alpha)$ پس مثلث پس از افزودن n بر ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه، مثلثی با زاویه‌های حاده به‌دست می‌دهد. اگر n مثبت باشد ؛ در صورتی که n منفی ولی از $۴\beta(\beta-\alpha)$ بزرگتر باشد بازهم مثلث حاصل حادةالزوایا است. فقط در حالی که n منفی و از $۴\beta(\beta-\alpha)$ کوچکتر باشد، مثلثی با زاویهٔ منفرجهٔ A به‌دست خواهد آمد.

اگر در مثلثی به ضلعهای a، b و c عددی مانند n بتوان یافت که :

$$(a+n)^۲=(b+n)^۲+(c+n)^۲$$

باشد، معادلهٔ زیر به دست می‌آید :

$$a^۲+۲an=b^۲+c^۲+۲(b+c)n+n^۲$$

و یا
$$n^۲+۲(b+c-a)n+b^۲+c^۲-a^۲=۰$$

پس
$$n=-(b+c-a)\pm\sqrt{(b+c-a)^۲-b^۲-c^۲+a^۲}$$

پس
$$n=-(b+c-a)\pm\sqrt{(a-b)(a-c)\times ۲}$$

اگر a، b و c عددهای صحیح باشند برای این که n عددی صحیح باشد، لازم است که $a-b=۲k\alpha^۲$ و $a-c=k\beta^۲$ باشد، پس : $n=k(۲\alpha^۲+\beta^۲\pm ۲\alpha\beta)-a$ و عبارتهای :

$$a+n=k^۲(۲\alpha^۲+\beta^۲\pm۲\alpha\beta)=k^۲\left[(\alpha\pm\beta)^۲+\alpha^۲\right]$$

و
$$b+n=k^۲(\beta^۲\pm۲\alpha\beta)=k^۲\left[(\alpha\pm\beta)^۲-\beta^۲\right]$$

و
$$c+n=k^۲\times۲\alpha(\alpha\pm\beta)$$

به صورت : $a_۱=k^۲(\lambda^۲+\mu^۲)$ و $b_۱=k^۲(\lambda^۲-\mu^۲)$ و $c_۱=k^۲\times۲\lambda\mu$

می‌باشند، یعنی مثلث $a_۱$ ، $b_۱$ و $c_۱$ قائم‌الزاویه می‌باشد ؛ ولی مثلثهایی که در آنها : $a=b+۲k\alpha^۲$ و $a=c+k\beta^۲$ می‌باشند که امکان وجود n چنان است که مثلث قائم‌الزاویه‌ای با افزودن n به ضلعها تشکیل می‌شود، مثلثهایی هستند که a بزرگترین ضلع آنهاست. اگر $\beta=۲\alpha$ باشد، ضلعهای این مثلثها تصاعد عددی تشکیل می‌دهند و در این صورت $n=۱۰k\alpha^۲$ و یا $n=۲k\alpha^۲$ می‌باشد. اگر بخواهند که مثلث قائم‌الزاویه‌ای که نتیجه می‌شود، مثلثی با ضلعهای متباین باشد، لازم است که $k=۱$

باشد ؛ در این صورت مثلثهای مطلوب عبارتند از مثلثهای $a = b + ۲\alpha^۲$ و $a = c + \beta^۲$
برای هر مثلث قائم‌الزاویه :

$$(\alpha^۲ + \beta^۲)^۲ = (\alpha^۲ - \beta^۲)^۲ + (۲\alpha\beta)^۲$$

یعنی $a^۲ = b^۲ + c^۲$ عددی صحیح وجود دارد که اگر آن را از ضلعهای مثلث کم کنیم (قدر مطلق تفاوتها منظور است) مقدارهای جدید باز ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل دهند. زیرا اگر این مقدار را x فرض کنیم معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(a - x)^۲ = (b - x)^۲ + (c - x)^۲$$

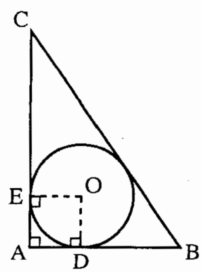
و یا

$$a^۲ + x^۲ - ۲ax = b^۲ + c^۲ - ۲(b + c)x + ۲x^۲$$

و یا $x^۲ = ۲(b + c - a)x$ جوابها عبارتند از $x = ۰$ (بدون معنی) و $x = ۲(b + c - a)$ که ممکن است به حسب قدرمطلق از بعضی از ضلعها بیشتر باشد ؛ ولی قدرمطلق تفاوتها، به هر حال ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه باشند. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC باشد، روشن است که :

$$r = AE = AD = \frac{b + c - a}{۲}$$

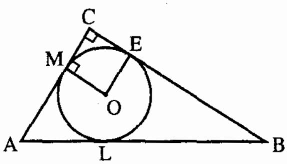
پس $x = ۲(b + c - a) = ۴r$ می‌باشد، یعنی جوابی که برای مسألهٔ مذکور به‌دست آمده است، دو برابر قطر دایرهٔ محاطی مثلث می‌باشد و اگر ضلعها عددهای صحیح باشند، این مقدار نیز عددی صحیح است. (روشن است که کلیهٔ مطالبی که دراین مسأله ذکر شده است برای مثلثهایی که ضلعهای آنها عددهایی صحیح نمی‌باشند، صادق است. صحیح بودن ضلعها شرط اضافی است که برای امکان مسأله ضروری نیست.)
یعنی قضیهٔ زیر مسلم است : زیادتی یا نقصان دو برابر قطر دایرهٔ محاطی درونی هر مثلث قائم‌الزاویه بر ضلعهای مثلث، ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه جدید می‌باشند.



۶.۳. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های محیطی و محاطی

۶.۳.۲. زاویه

۶.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۵۹۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{C} = ۹۰^\circ)$ را درنظر می‌گیریم و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی درونی آن را به M و E نقطه‌های تماس AC و CB با دایرهٔ محاطی وصل می‌کنیم. داریم : $a + b = ۲(R + r)$

$$a + b = ۲(\frac{۲}{۵}R + R) = \frac{۷}{۵}c \text{ و } a^۲ + b^۲ = c^۲ \quad a = \frac{۳}{۵}c \text{ و } b = \frac{۴}{۵}c$$

$$\sin\hat{A} = \frac{۳}{۵} \quad \sin\hat{B} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \hat{A} = \text{Arc}\sin\frac{۳}{۵} \text{ و } \hat{B} = \text{Arc}\sin\frac{۴}{۵}$$

۶.۳.۳. ضلع

۶.۳.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۵۹۵. اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه، دو برابر شعاع دایرهٔ محیطی آن است. بنابراین $a = BC = ۲R = ۲۰cm$ است. برای محاسبهٔ اندازهٔ دو ضلع AB و AC فرض می‌کنیم، $BD = x$ و $FC = y$ باشد. با توجه به این که $AD = AF = r = ۴$ است، داریم :

$$AB = x + ۴ \text{ و } AC = y + ۴ \text{ و } BC = ۲۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = ۲۰ & \Rightarrow (۲۰ - y + ۴)^۲ + (y + ۴)^۲ = ۴۰۰ \\ (x + ۴)^۲ + (y + ۴)^۲ = ۴۰۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵۷۶ + y^۲ - ۴۸y + y^۲ + ۱۶ + ۸y - ۴۰۰ = ۰$$

$$۲y^۲ - ۴۰y + ۱۹۲ = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲۰y + ۹۶ = ۰ \Rightarrow y = ۸\ ,\ y = ۱۲$$

$$\Rightarrow x = ۱۲\ ,\ x = ۸ \Rightarrow AB = x + ۴ = ۱۲ + ۴ = ۱۶cm$$

$$AC = y + ۴ = ۸ + ۴ = ۱۲cm$$

دسته جواب دیگر $AB = ۱۲cm$ و $AC = ۱۶cm$ است.

۶ . ۳ . ۴ . ارتفاع، میانه، نیمساز

۶ . ۳ . ۴ . ۱ . اندازهٔ ارتفاع

۵۹۶. با فرض $\hat{A}=۹۰^\circ$ داریم: $r=\frac{s}{p}$ و $R=\frac{a}{۲}$. از آن‌جا:

$$\frac{R}{r}=\frac{a}{۲}:\frac{s}{p}=\frac{ap}{۲s}\Rightarrow\frac{۵}{۲}=\frac{ap}{۲\times ۹۶}\Rightarrow ap=۴۸۰$$

$$\Rightarrow a\frac{(b+c+a)}{۲}=۴۸۰\quad (۱)\ \text{و}\ S=\frac{۱}{۲}bc\Rightarrow ۹۶=\frac{۱}{۲}bc\Rightarrow bc=۱۹۲\quad (۲)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲\qquad (۳)$$

از حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی شامل رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $a=۲۰$ ، $b=۱۶$ ، $c=۱۲$. آن‌گاه با استفاده از رابطهٔ $a.h_a=b.c$ اندازهٔ ارتفاع AH برابر است با $۲۰\times h_a=۱۲\times ۱۶\Rightarrow h_a=۹/۶cm$.

۶ . ۳ . ۵ . پاره خط

۶ . ۳ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

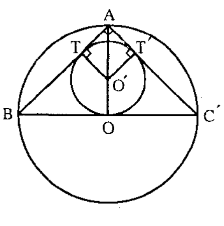
۵۹۷. $۳\sqrt{۵}cm$

۶ . ۳ . ۶ . شعاع دایره

۶ . ۳ . ۶ . ۱ . اندازهٔ شعاع

۵۹۸. با توجه به این که $۲۵^۲=۲۴^۲+۷^۲$ می‌باشد، مثلث قائم‌الزاویه بوده و به سادگی شعاع دایره‌های محاطی و محیطی به‌دست می‌آید. جواب: $r=۳(cm)$ و $R=۱۲/۵(cm)$

۶ . ۳ . ۶ . ۲ . نسبت شعاعها



۵۹۹. الف. در شکل مقابل، در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه و AB = AC . O مرکز و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است. پاره‌خط AO، به طول R، زاویهٔ A و پاره‌خط BC را نصف می‌کند. دایره‌ای که ′O مرکز آن بر AO واقع و r شعاع آن

است در مثلث ABC محاط شده است. ضلعهای AB و AC بترتیب در T و T' بر دایرهٔ محاطی مماس هستند. چون ATO' مثلث ۴۵°- ۴۵° - ۹۰° است و $OT = r$ ، پس $AT = r$ و $O'A = R - r = r\sqrt{۲}$. بنابراین $R = r + r\sqrt{۲}$ و $R/r = ۱ + \sqrt{۲}$.

۶. ۳. ۷. محیط

۶. ۳. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۶۰۰. با توجه به این که $R = \frac{c}{۲}$ است، $\frac{c}{۲} = ۲۶$ بنابراین $c = ۵۲$ است. امّا بنا به فرض $p - c = ۸$ است. بنابراین $p - ۵۲ = ۸$ در نتیجه $p = ۶۰$ و در نتیجه محیط مثلث $۲p = ۱۲۰$ است.

۶. ۳. ۸. مساحت

۶. ۳. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۶۰۱. با توجه به شکل و با فرض $CE = CF = x$ داریم:

$$AD = AF = r = ۸\ ,\ BD = BE = ۱۲$$

$$\Rightarrow AB = ۸ + ۱۲ = ۲۰\ ,\ AC = x + ۸\ ,\ BC = ۱۲ + x$$

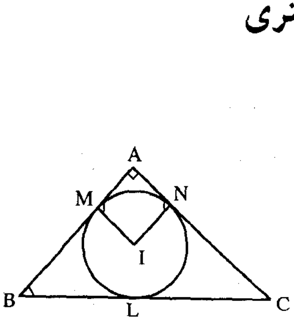
$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow ۴۰۰ + (x + ۸)^۲ = (۱۲ + x)^۲ \Rightarrow x = ۴۰$$

$$\Rightarrow BC = a = ۵۲\ ,\ AC = ۸ + ۴۰ = ۴۸ \Rightarrow R = \frac{a}{۲} = ۲۶$$

$$S = \frac{۱}{۲}bc = \frac{۱}{۲} \times ۲۰ \times ۴۸ = ۴۸۰$$

۶. ۳. ۹. رابطه‌های متری

۶۰۲. نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC و AC با دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را بترتیب M، N و L می‌نامیم. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث باشد، چهارضلعی IMAN مربع است و داریم:



$$AM = MI = IN = NA = r$$

از طرفی $BC = ۲R$ است. حال می‌توان نوشت :

$$AB + AC = AM + MB + AN + NC = r + BL + r + LC = ۲r + BC$$

$$\Rightarrow AB + AC = ۲r + ۲R$$

۴.۶. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و دایره‌های دیگر

۲.۴.۶. زاویه

۱.۲.۴.۶. اندازهٔ زاویه

۶۰۳. چون AH قطر دایره است، $\widehat{AD} + \widehat{DH} = ۱۸۰^\circ$ است. بنابراین :

$$\widehat{DH} = ۱۸۰^\circ - \widehat{AD} = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}H = \hat{C} = \frac{۱۰۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ - ۵۰^\circ = ۴۰^\circ$$

۳.۴.۶. ضلع

۱.۳.۴.۶. اندازهٔ ضلع

۶۰۴. $۲\sqrt{۳}cm$ ، $۴\sqrt{۳}cm$ و $۶cm$

۴.۴.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۴.۶. اندازهٔ ارتفاع

۶۰۵. چون BC بر دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۳ مماس است، بنابراین داریم :

$$PB(A) = BC^۲ = ۱۶ \Rightarrow BC = ۴cm$$

از آن‌جا :

$$c = AB = \sqrt{۹+۱۶} = ۵cm$$
$$c.h_c = b.a \Rightarrow ۵ \times h_c = ۳ \times ۴ \Rightarrow h_c = ۲/۴cm$$

۶.۴.۵. پاره خط

۶.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

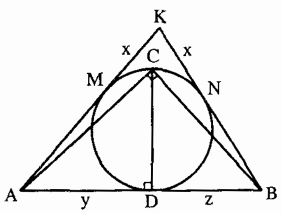
۶۰۶. اگر K وسط کمان $\widehat{AB}$ و O مرکز دایره باشد و $AB = ۲R = c$، آن‌وقت :

$$CM^۲ = CD^۲ + DM^۲ = CD^۲ + DK^۲ = AD.DB + R^۲ + DO^۲$$
$$= (R+DO)(R-DO) + R^۲ + DO^۲ = ۲R^۲ = \frac{c^۲}{۲}$$

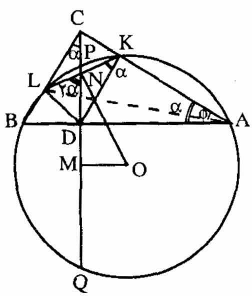
جواب : $c\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۶۰۷. ۱/۱

۶۰۸. $\frac{۱}{۳}\sqrt{۹۶ - ۵۴\sqrt{۳}}$



۶۰۹. فرض کنید $KM = KN = x$، $AD = y$ و $DB = z$
در این صورت $CD = \sqrt{yz}$ و $y + z = c$ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث AKB برابر است با $\frac{۱}{۲}CD = \frac{۱}{۲}\sqrt{yz}$.
مساحت مثلث AKB را از دستور هرون و $S = pr$، حساب کنید. به معادلهٔ $\sqrt{(x+y+z)xyz} = (x+y+z)\frac{۱}{۲}\sqrt{yz}$ می‌رسیم. می‌دانیم $y + z = c$، داریم $x = \frac{c}{۳}$.



۶۱۰. برای اسم‌گذاری، شکل را ببینید. CKDL مستطیل است.
از آن جا که $L\hat{K}A = ۹۰^\circ + \alpha$ و $L\hat{B}A = ۹۰^\circ - \alpha$،
BLKA چهارضلعیی محاطی است.

$$\tan\varphi = \frac{LC}{CA} = \frac{h\cos\alpha}{\frac{h}{\sin\alpha}} = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha \quad (۱)$$

اگر R شعاع دایره باشد، آن وقت (۲) $R = \frac{KL}{2\sin\varphi} = \frac{h}{2\sin\varphi}$.

چون $L\hat{O}K = 2\varphi$ ، داریم : $ON = R\cos\varphi = \frac{h}{2\tan\varphi} = \frac{h}{\sin 2\alpha}$ (از برابریهای (۱) و (۲) استفاده کرده‌ایم)، $OM = ON\sin(90^\circ - 2\alpha) = h\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = h\cot 2\alpha$ و

بالاخره، به دست می‌آوریم :

$$\frac{1}{2}PQ = QM = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4\sin^2\varphi} - h^2\cot^2 2\alpha}$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{4}(1+\cot^2\varphi) - \cot^2 2\alpha}$$

$$= h\sqrt{\frac{1}{4}(1+\frac{4}{\sin^2 2\alpha}) - \cot^2 2\alpha} = \frac{h\sqrt{5}}{2}$$

یا $PQ = h\sqrt{5}$ اکنون، اگر طول قطعه‌های PQ و DQ از وتر، با x و y نشان داده شوند، آن وقت $x + y = h\sqrt{5}$ و $xy = h^2$ ، که از آن جا طول پاره‌خطهای مطلوب، برابر با $\frac{\sqrt{5}+1}{2}h$ و $\frac{\sqrt{5}-1}{2}h$ می‌شود.

۶۱۱. گزینهٔ (د) درست است.

۶.۴.۶. شعاع دایره

۶.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۶۱۲. گزینهٔ (ب) درست است زیرا اگر r، r_1 و r_2 بترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی درونی مثلثهای ABC، ABH و ACH باشند، $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ است. بنابراین :

$$r^2 = (1)^2 + (3)^2 = 1+9 = 10 \Rightarrow r = \sqrt{10}$$

۶۱۳. $\frac{ac}{a+c}$

۶۱۴. ۱۲cm

۶۱۵. $\frac{3}{10}c$

۶۱۶. $\frac{c}{2}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}}$

۶.۴.۷. محیط

۶.۴.۷.۱. اندازهٔ محیط

۶۱۷. این دایره در نقطهٔ H بر ضلع BC مماس است و داریم:

$$BH^2 = BD.BA \Rightarrow 16 = \frac{8\sqrt{13}}{13} \times AB \Rightarrow AB = 2\sqrt{13}$$

$$AB^2 = BH.BC \Rightarrow 52 = 4 \times BC \Rightarrow BC = 13$$

$$AC = \sqrt{169-52} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 2\sqrt{13} + 3\sqrt{13} + 13 = 5\sqrt{13} + 13$$

۶.۴.۸. مساحت

۶.۴.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۶۱۸. فرض کنید ABC مثلث مفروض و CD ارتفاع آن باشد، O_1 و O_2، بترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ACD و BDC و K و L نقطه‌های برخورد خطهای راست DO_1 و DO_2 بترتیب، با AC و CB هستند. چون مثلث ADC با مثلث CDB متشابه است و KD و LD نیمساز زاویه‌های قائمهٔ این مثلثها هستند، O_1 و O_2، بترتیب، KD و LD را به یک نسبت تقسیم می‌کنند. به این ترتیب، KL با O_1O_2 موازی است. اما CKDL چهار ضلعی محاطی است ($K\hat{C}L = K\hat{D}L = 90^\circ$)، در نتیجه، $C\hat{K}L = C\hat{D}L = \frac{\pi}{4}$ و $C\hat{L}K = C\hat{D}K = \frac{\pi}{4}$. بنابراین، خط راست O_1O_2 با هر کدام از ساقها، زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ می‌سازد. اگر M و N نقطه‌های برخورد O_1O_2 با CB و AC باشند، آن وقت مثلث CMO_2 با مثلث CDO_2 قابل انطباق است (CO_2 ضلعی مشترک است، $O_2\hat{C}D = O_2\hat{C}M$ و $C\hat{D}O_2 = C\hat{M}O_2$)، بنابراین $CM = NC = h$.

جواب: زاویه‌های مثلث برابرند با $\frac{\pi}{4}$، $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ و مساحتش $\frac{h^2}{2}$ است.

۲.۸.۴.۶. نسبت مساحتها

۶۱۹. $\frac{۳\sqrt{۳}}{۵\pi - ۳}$

۳.۸.۴.۶. رابطهٔ بین مساحتها

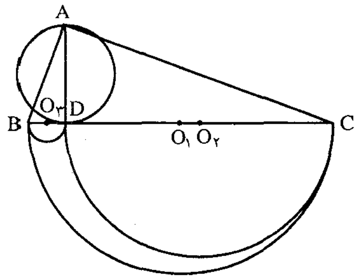
۶۲۰. داریم :

$$S_{\text{شکل}} = \frac{BC^۲\pi}{۸} - (\frac{BD^۲\pi}{۸} + \frac{DC^۲\pi}{۸}) = \frac{\pi}{۸}(BC^۲ - BD^۲ - DC^۲)$$

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \quad BD^۲ = AB^۲ - AD^۲ \quad DC^۲ = AC^۲ - AD^۲$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{\pi}{۸}(AB^۲ + AC^۲ - AB^۲ + AD^۲ - AC^۲ + AD^۲)$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{AD^۲\pi}{۴} \quad S_{\text{دایره}} = \frac{AD^۲\pi}{۴}$$



۶۲۲. اگر مثلث قائم‌الزاویه در رأس A باشد، داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲$ از آن جا داریم :

$$\frac{\pi a^۲}{۴} = \frac{\pi b^۲}{۴} + \frac{\pi c^۲}{۴} \ (۱) \quad \pi a^۲ = \pi b^۲ + \pi c^۲ \quad (۲)$$

۶۲۳. فرض کنیم X و Y مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD و ADC باشند و r ، $r_۱$ و $r_۲$ به ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی مثلثهای ABC ، ABD و ADC و p را نصف محیط مثلث ABC فرض می‌کنیم، آن‌گاه E مساحت مثلث BAC است $E = r.p = \frac{bc}{۲}$ (۱) دو مثلث ABD و CBA متشابه‌اند و نسبت ضلعهای متناظر برابر $\frac{c}{a}$ است، بنابراین

$$(۲) \ r_۱ = \frac{r.c}{a}$$

و به طور مشابه $(۳) \quad r_۲ = \frac{r.b}{a}$

فرض کنیم X، AD را در M قطع کند، آن گاه $X\hat{D}M = ۴۵^\circ$

بنابراین $(۴) \quad DX = r_۱\sqrt{۲} = \sqrt{۲}\ \frac{r.c}{a}$

و به طور مشابه $(۵) \quad DY = \sqrt{۲}\ \frac{r.b}{a}$

پس DX و DY بر هم عمودند.

از (۴) و (۵) نتیجه می‌گیریم : $(\frac{DX}{DY} = \frac{c}{b})\ \Delta XDY \sim \Delta ABC$

بنابراین $D\hat{X}L = C\hat{B}A$ و $D\hat{Y}K = B\hat{C}A$

در چهارضلعی DYKB، $Y\hat{D}B = ۱۳۵^\circ$ و $D\hat{Y}K + K\hat{B}D = ۹۰^\circ$

در نتیجه $B\hat{K}Y = ۱۳۵^\circ$

بنابراین مثلث AKL قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

فرض کنیم Z پای عمودی باشد که از X بر AB رسم شده است، آن گاه

$$(۶) \quad XZ = r_۱ = ZK = \frac{rc}{a} = \frac{(p-a)c}{a}$$

(زیرا در هر مثلث قائم الزاویه $s = p(p-a)$ و $r = \frac{S}{p}$ لذا $r = p-a$). اگر اعمال مشابه را در مثلثهای ABC و ABD انجام دهیم، $AZ = \frac{(p-c)c}{a}$ (۷) به دست می‌آید.

($p-c$ فاصلهٔ رأس C تا نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با ضلع BC است).

از (۶) و (۷) به دست می‌آوریم.

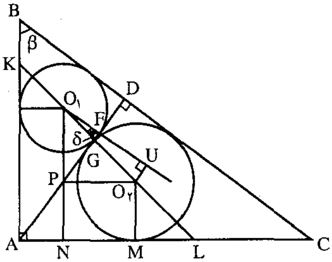
$$(۸) \quad AK = \frac{c(۲p-a-c)}{a} = \frac{bc}{a} \text{ و } E_۱ = \frac{۱}{۲}(\frac{bc}{۲})^۲$$

از (۱) و (۸) داریم، $\frac{E}{E_۱} = \frac{a^۲}{bc}$ و می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{a^۲}{bc} \geq ۲$، اما $a^۲ = b^۲ + c^۲$ و $b^۲ + c^۲ \geq ۲bc$ و لذا $a^۲ \geq ۲bc$ و ثابت است.

در زیر چهار راه حل دیگر مسأله، آمده است که همگی آنها را با شکل (۲) توضیح

می‌دهیم که توسط طراحان ارائه شده است. علاوه بر این دو راه حل دیگر هم ارائه می‌شود.

الف (طراح). فرض می‌کنیم: $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a$ و $AD = h$ دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABD و ADC را به C_1 و C_2 نشان می‌دهیم. فرض کنیم O_1 و O_2 بترتیب مرکزهای C_1 و C_2 باشند شکل (۲). نقطه‌های تلاقی C_1 را با AB و AD بترتیب E و F می‌نامیم و نقطه‌های تلاقی دایرهٔ C_2 را با AD و AC بترتیب G و M می‌نامیم.



از O_1 عمود، O_1N را بر AC و از O_2 عمود O_2P را بر NO_1 رسم می‌کنیم، آن گاه

$$O_1N = EA = AF = h - r$$

$$O_1P = O_1N - PN = O_1N - O_2M = h - r - R$$

$$O_2P = MN = AM - AN = AG - r = h - R - r$$

(r شعاع دایرهٔ C_1 و R شعاع دایرهٔ C_2 است).

بنابراین $PO_1 = PO_2$ و در نتیجه $O_1\hat{O_2}P = 45^\circ$ و از این جا نتیجه می‌گیریم که :

$ML = O_2M = R$ و لذا $O_2\hat{L}M = 45^\circ$

در نتیجه : $AL = AM + ML = AG + R = h - R + R = h$

به طریق مشابه $AK = h$ و بنابراین $\frac{S}{T} = \frac{ah}{h^2} = \frac{a}{h} = \frac{a^2}{ah} = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2 + c^2}{bc} \geq 2$

ب (طراح). دستگاه مختصات هندسی را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم A مبدأ مختصات و AB محور Oy و AC محور Ox باشد.

سپس مانند قبل مختصات O_1، $(h - r$ و $r)$ و مختصات O_2، $(R$ و $h - R)$ است.

بنابراین معادله خط KL به صورت زیر است :

$$y - R = \frac{R - (h - r)}{h - R - r}(x - h + R)$$

اگر $y=0$ فرض کنیم داریم:
$$-R=-(AL-h+R)$$
و بنابراین $AL=h$ و به طریق مشابه $AK=h$ و بقیه مانند روش (۱) است.

ج (طراح). فرض می‌کنیم O_1U موازی BC و O_2U عمود بر O_1U باشد. و زاویهٔ O_2O_1U را به δ و زاویهٔ ABC را به β نشان می‌دهیم، آن گاه

$$tg\delta=\frac{O_2U}{O_1U}=\frac{R-r}{R+r}$$

چون $\Delta ABD \sim \Delta ADC$، داریم:
$$\frac{R}{r}=\frac{b}{c}$$

بنابراین $tg\delta=\frac{b-c}{b+c}$. لذا

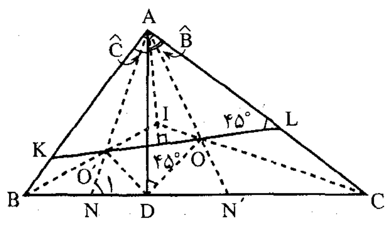
$$tgN\hat{O_1}O_2=tg(N\hat{O_1}U-\delta)=tg(\beta-\delta)$$
$$=\frac{tg\beta-tg\delta}{1+tg\beta.tg\delta}=\frac{\frac{b}{c}-\frac{b-c}{b+c}}{1+\frac{b(b-c)}{c(b+c)}}=\frac{b^2+bc-bc+c^2}{bc+c^2+b^2-bc}=1$$

در نتیجه $N\hat{O_1}O_2=45^\circ$ بقیه مانند روش اوّل است.

د (طراح).
$$tgP\hat{A}N=\frac{R}{r}=\frac{b}{c}=tg\beta=tgD\hat{A}C$$

بنابراین نقطهٔ P روی AD قرار دارد. چون AO_2 نیمساز زاویهٔ PAC و $O_2P\|AC$ داریم $O_2P=AP$، به طور مشابه $O_1P=AP$. لذا $O_1P=O_2P$، بقیه مانند روش اوّل است.

مثلثهای ANC و $AN'B$ متساوی‌الساقین می‌باشند $\hat{N}_1=\hat{B}+\frac{\hat{C}}{2}=N\hat{A}C$ و $\hat{N'}=B\hat{A}N'=\hat{C}+\frac{\hat{B}}{2}$ پس CO نیمساز رأس ارتفاع نیز می‌باشد، یعنی $CI\perp AN$



به همین ترتیب $BI\perp AN'$ پس AI نیمساز زاویهٔ قائمه، بر OO' عمود است. یعنی AI هم ارتفاع و هم نیمساز رأس A از مثلث AKL است در نتیجه این مثلث متساوی‌الساقین

است. $AK = AL$ از طرف دیگر $\Delta AOD = \Delta AOL$

پس $AK = AL = AD = h_a$

لذا $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AKL}} = \dfrac{AD.BC}{AK.AL} = \dfrac{BC}{h_a} = \dfrac{۲m_a}{h_a} \geq ۲$

$\Rightarrow S_{ABC} \geq ۲S_{AKL}$

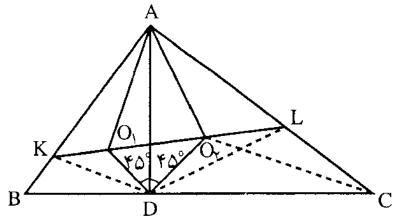
در هر مثلث قائم‌الزاویه $m_a \geq h_a$ (m_a میانه وارد بر وتر است).

و. راه حل دیگری از مسألهٔ ۵ که توسط تعدادی از خوانندگان ارسال گردیده است.

$\dfrac{AB}{AC} = tg\hat{C} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DO_۱}{DO_۲} \Leftarrow \Delta AO_۱D \sim \Delta DO_۲C$ از $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DO_۱}{DO_۲}$ نتیجه

می‌گیریم که دو مثلث $DO_۱O_۲$ و ABC متشابه‌اند و لذا $D\hat{O}_۲O_۱ = \hat{C}$ و $D\hat{O}_۲L = ۱۸۰^\circ - \hat{C}$.

مثلث AKL متساوی‌الساقین است $\Leftarrow A\hat{L}K = ۴۵^\circ \Leftarrow O_۲\hat{L}C = ۱۳۵^\circ \Leftarrow$



۶.۴.۹. رابطه‌های متری

۶۲۴. ۱. زاویهٔ $D\hat{H}E = ۹۰^\circ$ است، زیرا :

$$D\hat{H}E = A\hat{H}D + A\hat{H}E = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

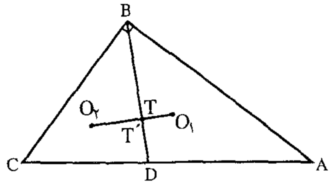
و چون $D\hat{A}E = ۹۰^\circ$ است، پس $D\hat{A}E + D\hat{H}E = ۱۸۰^\circ$ و بنابراین چهار ضلعی ADHE محاطی است و قطر دایرهٔ محیطی آن DE است.

۲. قوت نقطه‌های B و C نسبت به دایرهٔ به قطر DE را می نویسیم :

$$BH^۲ = BD.AB \text{ و } HC^۲ = CE.AC \Rightarrow \frac{HB^۲}{HC^۲} = \frac{DB}{CE}.\frac{AB}{AC}$$

۳. دو مثلث BDH و AHE متشابه‌اند. زیرا $B\hat{H}D = A\hat{H}E = ۴۵°$ و $D\hat{B}H = H\hat{A}E$ است. پس: $\frac{HD}{HE} = \frac{HB}{HA} = \frac{BD}{AE}$.

۶۲۵. T و T′ را محلهای تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABD و ACD با پاره خط AD می‌گیریم. اگر $p_۱$ ، $p_۲$ و p نصف محیط مثلثهای ABD، ACD و ABC باشند، آن‌گاه:



$$DT = p_۱ - c = \frac{r+d-c}{۲}$$

$$DT' = p_۲ - b = \frac{a-r+d-b}{۲}$$

(a ، b، c و d بترتیب ضلعهای نظیر A ، B، C و ضلع AD هستند).

$$DT - DT' = \frac{۲r-(a+c-b)}{۲} = r-(p-b) = ۰$$

زیرا در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$p(p-b) = (\frac{a+b+c}{۲})(\frac{a-b+c}{۲}) = \frac{(a+c)^۲ - b^۲}{۴} = \frac{ac}{۲} = S$$

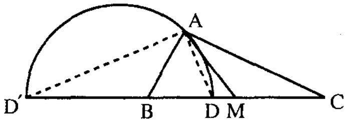
$$r = \frac{S}{p} = \frac{p(p-b)}{p} = p-b$$

پس T و T′ بر هم منطبق هستند و طبق رابطهٔ فیثاغورس دو طرف تساوی خواسته شده برابرند با:

$$O_۱T^۲ + AT^۲ + DT^۲ + O_۲T^۲$$

۶.۴.۱۰. ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است

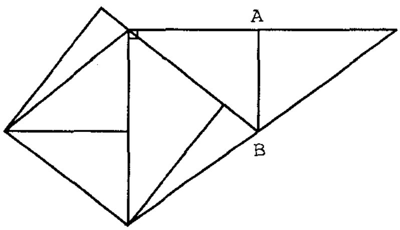
۶۲۷. می‌دانیم که چهار نقطهٔ C، D ، B و D′ تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند و چون M وسط BC است، داریم: $\overline{MC}^۲ = MD \times MD'$ از طرف دیگر اگر میانهٔ MA بر دایرهٔ



به قطر DD' مماس باشد، خواهیم داشت: $\overline{MA}^2 = MD \times MD'$ از مقایسهٔ این دو تساوی معلوم می‌شود که $MC = MA$ ؛ یعنی در مثلث ABC ، میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع است ؛ بنابراین مثلث در رأس A مقابل به ضلع مزبور قائم‌الزاویه است.

۶۲۸. قطرهای CP و CQ از دو مربعی را که روی ضلعهای BC و CA از مثلث ساخته شده‌اند، رسم کنید. همچنین مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین BAR را به وتر AB رسم کنید. با توجه به تشابه مثلثهای PCB، CQA و BAR از قضیه‌های (۳،۳۰۳) و (۵، ۳۰۳) استفاده کنید.

۶.۴.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۶۲۹. از مثلث قائم‌الزاویه مربع بسازید! مطابق شکل، وسط وتر و وسط ضلع متوسط را به هم وصل می‌کنیم، یک مثلث قائم‌الزاویه، و یک ذوزنقهٔ قائم حاصل می‌شود. سپس قطر کوچک این ذوزنقه را رسم می‌کنیم، و از گوشهٔ حادهٔ ذوزنقه عمودی بر آن وارد می‌سازیم. مثلث اصلی به ۴ مثلث قائم‌الزاویهٔ کوچک تجزیه می‌شود، که اگر آنهارا، با توجه به شکل، کنار هم قرار دهیم، یک مربع حاصل می‌شود. اثبات هندسی آن را نیز، که ساده است، به عهدهٔ شما می‌گذاریم.

۶۳۰. توجه کنید که مثلثهای ADK و ABK متشابه‌اند، زیرا $AK^2 = AC^2 = AD.AB$. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABK باشد ، آن وقت

$O\hat{A}D + A\hat{D}K = 90^\circ - A\hat{K}B + A\hat{D}K = 90^\circ$ ($A\hat{K}B$ حاده فرض شده است ؛

اگر $A\hat{K}B$ منفرجه باشد، استدلال مشابه است).

۶۳۱. اگر KN عمودی از K بر AB باشد و $C\hat{A}B = \alpha$ ، آن وقت :

$$\frac{KN}{OM} = \frac{AK}{AO} = \frac{AO - KO}{AO} = \frac{AO - 2OM\sin\frac{\alpha}{2}}{AO}$$

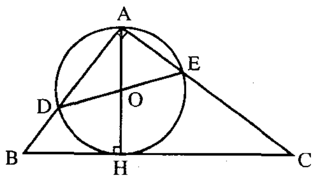
$$= \frac{AO - ۲AO\sin^۲ \frac{\alpha}{۲}}{AO}$$

$$= \cos\alpha = \frac{CD}{CB}$$

چون مثلثهای ACB و ACD متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که طول KN با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ACD برابر است و چون K روی نیمساز زاویهٔ A واقع است، K مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ACD است. اثبات برای L به روش مشابه انجام می‌شود.

۶۳۲. قرینهٔ نقطهٔ C' را نسبت به خط راست $A'B'$، با D نشان می‌دهیم. روشن است، چهارضلعی $CA'DC'$، یک چهارضلعی محاطی است. بنابراین، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'AC$ بر مرکز دایرهٔ محیط بر این چهار ضلعی واقع است و بنابراین روی عمود منصف پاره‌خط راست $C'D$، یعنی روی خط راست $A'B'$ قرار دارد.

۱۲.۴.۶. مسأله‌های ترکیبی



۶۳۳. ۱. چون زاویهٔ A قائمه است. DE قطر دایره است، پس زاویهٔ ADO با زاویهٔ DAOمساوی است و زاویهٔ اخیر با زاویهٔ C برابر است (ضلعهایشان بر هم عمودند). پس $\hat{C} = A\hat{D}E$ بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و AED متشابه‌اند و زاویهٔ BDE که با زاویهٔ ADE مکمل است، با زاویهٔ C نیز مکمل می‌باشد. یعنی چهارضلعی BDEC محاطی است.

۲. اگر برای سهولت AB و AC را بترتیب مساوی با x و y فرض کنیم، داریم:

$$x^۲ + y^۲ = BC^۲ = ۹h^۲$$

و

$$x \times y = AH \times BC = ۳h^۲$$

و به فرض $x < y$ حاصل می‌شود:

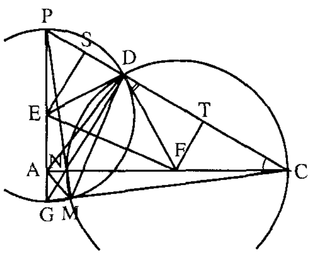
$$x = \frac{h}{۲}(\sqrt{۱۵} - \sqrt{۳}) = AB \qquad y = \frac{h}{۲}(\sqrt{۱۵} + \sqrt{۳}) = AC$$

چون DE وتر مثلث ADE قطر دایرهٔ داده شده است با AH مساوی است، $DE = h$ پس نسبت تشابه دو مثلث AED و ABC مساوی با $\frac{۱}{۳} = \frac{DE}{BC}$ است.

بنابراین :
$$AE = \frac{AB}{۳} = \frac{h}{۶}(\sqrt{۱۵} - \sqrt{۳})$$
و
$$AD = \frac{AC}{۳} = \frac{h}{۶}(\sqrt{۱۵} + \sqrt{۳})$$

مساحت مثلث ABC عبارت است از :
$$S = \frac{xy}{۲} = \frac{۳h^۲}{۲}$$

مساحت مثلث ADE مساوی با $\frac{۱}{۹}$ این مقدار یا $\frac{h^۲}{۶}$ است و مساحت چهارضلعی BCED مساوی تفاضل این دو مقدار یعنی $\frac{۴h^۲}{۳}$ می‌باشد.



۶۳۶. ۱. زاویه‌های EDB و FDC که با زاویه‌های B و C از مثلث ABC قرینهٔ محوری می‌باشند، با آنها برابرند و مجموعشان $۹۰°$ است، پس $E\hat{D}F = ۹۰°$.

۲. از تساویهای EB = ED و FD = FC معلوم می‌شود که دایره‌های رسم شده از D می‌گذرند.

حال خطهای BM، CM، DM و GM را وصل کرده، ملاحظه می کنیم که : (مقابل به قطر BG) $B\hat{M}G = ۹۰°$

$$B\hat{M}D = \frac{B\hat{E}D}{۲} = ۹۰° - \hat{B} = \hat{C} \qquad D\hat{M}C = \frac{D\hat{F}C}{۲} = ۹۰° - \hat{C} = \hat{B}$$

پس :
$$G\hat{M}C = ۹۰° + \hat{C} + \hat{B} = ۱۸۰°$$

یعنی نقطه‌های G ، M و C بر یک استقامت واقعند و زاویهٔ BMC قائمه است. زاویهٔ HMC در دایرهٔ به مرکز F مقابل به قطر بوده قائمه است و چون زاویهٔ BMC نیز قائمه است، HM بر BM منطبق می‌باشد و H نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث GBC است و ارتفاع سومی GD نیز از این نقطه عبور می کند. واضح است که محل تلاقی ارتفاعهای مثلث BCH نقطهٔ G می‌باشد. دو مثلث BHC و ADC یک زاویهٔ مشترک $\hat{C}$ دارند و در چهار ضلعی محاطی ABDH داریم : $D\hat{B}H = D\hat{A}H$ پس این دو مثلث متشابه‌اند.

دو مثلث BCH و BDM یک زاویهٔ مشترک $\hat{B}$ دارند و در چهار ضلعی محاطی DHMC داریم : $D\hat{C}H = D\hat{M}H$ پس این دو مثلث متشابه‌اند.

دو مثلث AHM و BHC یک زاویهٔ روبه‌رو دارند و زاویه‌های دیگر آنها در چهارضلعی

محاطی BAMC برابرند پس متشابه می‌باشند.

۳. چون AC و GD دو ارتفاع مثلث CGB هستند، چهار ضلعی AGCD محاطی است و دایرهٔ محیطی مثلث ACG از نقطهٔ D می‌گذرد.

چهار ضلعی ADCG محاطی است پس : $B\hat{A}D = D\hat{C}G$

و چهار ضلعی BAMC نیز محاطی است پس : $G\hat{A}M = D\hat{C}G$

بنابراین $B\hat{A}D = G\hat{A}M$ و خط BG یک نیمساز مثلث DAM می‌باشد، به همین استدلال معلوم می‌شود که CG یک نیمساز دیگر این مثلث و DG نیمساز سوم آن است و G مرکز دایرهٔ محاطی داخل یا خارج مثلث ADM است. (برحسب آن که یکی از زاویه‌های مثلث ADM منفرجه یا تمام زاویه‌های آن حاده باشد.)

چهارضلعی AGCD محاطی است و از B دو قاطع BAG و BDC بر دایرهٔ محیطی آن رسم شده است، پس داریم :

$$BA \times BG = BD \times BC$$

همین‌طور از نقطهٔ C دو قاطع بر دایرهٔ به مرکز E رسم شده است، پس داریم :

$$CM \times CG = CD \times CB$$

از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود :

$$BA \times BM + CM \times CG = BC(BD + BD) = \overline{BC}^{۲}$$

۴. داریم :

$$\overline{BC}^{۲} = ۳۶a^{۲} + ۶۴a^{۲} = ۱۰۰a^{۲}$$

پس :

$$DC = ۱۰a - ۲x \quad و \quad BC = ۱۰a$$

مثلث SBE با مثلث ABC مشابه است، پس : $\frac{BE}{BC} = \frac{BS}{BA}$ و یا : $\frac{FD}{۱۰a} = \frac{x}{۶a}$

$ED = \frac{۵}{۳}x$ و از تشابه دو مثلث CFT و CBA معلوم می‌شود : $\frac{FC}{BC} = \frac{CT}{CA}$ و یا :

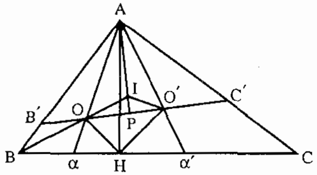
$\frac{DF}{۱۰a} = \frac{۵a - x}{۸a}$ و یا : $DF = \frac{۵(۵a - x)}{۴}$. اگر DE = DF باشد خواهیم داشت :

$$\frac{۵a - x}{۴} = \frac{x}{۳}$$

و یا $۱۵a = ۷x$ و $x = \frac{۱۵a}{۷}$ در این صورت : $BD = \frac{۳۰a}{۷}$ و $DC = \frac{۴۰a}{۷}$ و

$$\frac{BD}{DC} = \frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸} = \frac{۶a}{۸a} = \frac{AB}{AC}.$$

یعنی نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ A است. می‌توان ملاحظه کرد که اگر DEF متساوی‌الساقین باشد، هر زاویهٔ حادهٔ آن ۴۵ درجه است، و در چهارضلعی محاطی AEDF داریم: $D\hat{A}F = D\hat{E}F = ۴۵^\circ$ یعنی AD نیمساز زاویهٔ قائمهٔ A است.



۶۳۷. ۱. داریم: $\alpha\hat{A}C = \alpha\hat{A}H + H\hat{A}C$، اما زاویهٔ $\widehat{HAC}$ برابر $\hat{B}$ و زاویهٔ $B\hat{A}H$ برابر $\hat{C}$ است و خط Aα نیمساز زاویهٔ HAB است. پس $\alpha\hat{A}C = \frac{\hat{C}}{۲} + \hat{B}$ و نیززاویهٔ $A\hat{\alpha}H$ زاویهٔ خارجی مثلث ABα است. پس: $A\hat{\alpha}H = \hat{B} + B\hat{A}\alpha = \hat{B} + \frac{\hat{C}}{۲}$ و یا: $A\hat{\alpha}H = \alpha\hat{A}C$ و مثلث AαC متساوی‌الساقین است. به همین استدلال معلوم می‌شود که مثلث ABα′ نیز متساوی‌الساقین است و زاویه‌های طرفین قاعدهٔ آن هریک $\hat{C} + \frac{\hat{B}}{۲}$ می‌باشد.

۲. در مثلث متساوی‌الساقین AαC نیمساز CI عمود منصف Aα است و به همین دلیل BI نیز عمودمنصف Aα′ است. پس نقطهٔ I محل برخورد عمودمنصفهای Aα و Aα′ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث Aαα′ است. چون O′I بر AO، و OI بر AO′ عمود می‌باشند، نقطهٔ I محل تلاقی ارتفاعهای مثلث AOO′ است.

۳. چون I نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث AOO′ است، پس خط AIF ارتفاع سوم مثلث مزبور بر B′C′ عمود می‌باشد و چون AI در عین حال نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AB′C′ که در آن ارتفاع و نیمساز بر هم منطبقند متساوی‌الساقین است.

۴. دو مثلث AOH و AOB′ متساوی‌اند. زیرا AO در هر دو مشترک است و $B'\hat{A}O = O\hat{A}H$ و نیز $A\hat{H}O = A\hat{B'}O = ۴۵^\circ$ از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود که $AB' = AH = AC' = h$ پس B′C′ وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی که ضلع آن h است مساوی با $h\sqrt{۲}$ و ارتفاع وارد بر وتر یعنی AP مساوی با $h\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌باشد.

۵. در دو مثلث متشابه ABH و CAH نیمسازهای HO و HO′ متناظر هستند، پس $\frac{HO'}{AC}=\frac{HB}{AB}$ و یا $\frac{AB}{AC}=\frac{HO}{HO'}$ از طرفی زاویهٔ OHO′ که ضلعهای آن نیمسازهای دو زاویهٔ مکمل هستند، قائمه است پس: OHO′ = BAC و دو مثلث BAC و OHO′ که دو ضلع آنها متناسب و زاویهٔ بین این دو ضلع در آنها متساوی است، متشابه هستند.

۶. اندازهٔ دو زاویهٔ مثلث Aαα′ را در قسمت اوّل به دست آوردیم و زاویهٔ مشترک دو مثلث یعنی زاویهٔ OAO′ نیز به طور وضوح مساوی با ۴۵ درجه است. حال ملاحظه می‌کنیم که زاویهٔ AOO′ زاویهٔ خارجی مثلث AOB′ است، پس:

$$A\hat{O}O'=۴۵^\circ+B'\hat{A}O=۴۵^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=\hat{C}+\frac{\hat{B}}{۲}=A\hat{\alpha}'\alpha$$

و دو مثلث داده شده متشابه‌اند. در دو مثلث داده شده ارتفاعهای AP و AH متناظرند، اما $AP=AH\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ پس $\frac{AP}{AH}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و نسبت تشابه دو مثلث $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۷. در سه مثلث متشابه BAC، BHA و AHC نیمسازهای AI، HO و H′O قطعه‌های متناظر هستند، پس داریم:

$$\frac{AI}{BC}=\frac{HO}{AB}=\frac{HO'}{AC}$$

و یا:

$$\frac{\overline{AI}^۲}{\overline{BC}^۲}=\frac{\overline{HO}^۲}{\overline{AB}^۲}=\frac{\overline{HO'}^۲}{\overline{AC}^۲}=\frac{\overline{HO}^۲+\overline{HO'}^۲}{\overline{AB}^۲+\overline{AC}^۲}$$

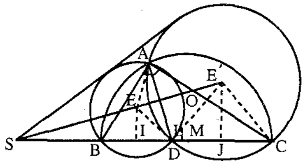
مخرج کسر طرف راست مساوی با $\overline{BC}^۲$ و صورت آن مساوی با $\overline{OO'}^۲$ است. پس:

$$\frac{\overline{AI}^۲}{\overline{BC}^۲}=\frac{\overline{OO'}^۲}{\overline{BC}^۲}$$ و یا: $AI=OO'$

۸. می‌دانیم که خط HA نیمساز زاویهٔ OHO′ در رأس O می‌باشد و چون از تشابه دو مثلث OHO′ و BAC نتیجه می‌شود که زاویهٔ HOO′ مساوی B است، پس کافی است ثابت کنیم که $A\hat{O}O'=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}$. اما اندازهٔ این زاویه را که زاویهٔ خارجی AOB′ است، قبلاً حساب کرده دیدیم که مساوی با $۴۵^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}$ می‌باشد، پس:

$$A\hat{O}O'=۴۵^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}=۴۵^\circ+\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}$$

و حکم ثابت است.



۶۳۸. ۱. نقطه‌های E و E′ روی عمود منصف قطعه خط AD واقع هستند. نقطهٔ E بر خط IE عمودمنصف BD و نقطهٔ E′ بر JE′ عمود منصف DC قرار دارد. اما چون M وسط BC است، طول DM دو برابر اختلاف DC و DB را نشان می‌دهد و نقطهٔ L وسط DM در عین حال وسط IJ است. بنابراین عمودی که از L بر BC اخراج شود، از نقطهٔ O وسط EE′ می‌گذرد و این نقطه از A، D و M به یک فاصله است. از طرف دیگر زاویهٔ DEO نصف زاویهٔ DEA و بنابراین مساوی با زاویهٔ DBA است، نیز به همین استدلال زاویهٔ DE′O مساوی با زاویهٔ DCA است به طوری که مثلث EDE′ با مثلث ABC مشابه است و زاویهٔ EDE′ یک قائمه است. بنابراین دایره به مرکز O و به شعاع OE از پنج نقطهٔ A، E، D، M و E′ می‌گذرد. باید درنظر داشت که برای استدلال این قسمت به هیچ وجه از این که AD نیمساز زاویهٔ A است استفاده نکرده‌ایم و بنابراین مسأله برای هر نقطهٔ D واقع بر قطعه خط BC صحیح است.

۲. مثلث DEI متساوی الساقین است. زیرا داریم : $D\hat{E}I = D\hat{A}B = ۴۵^\circ$ و به همین استدلال مثلث DJE′ نیز متساوی‌الساقین است، پس :

$$r = DE = DI\sqrt{۲} = \frac{DB}{\sqrt{۲}} \quad (۱) \qquad r' = DE' = DJ\sqrt{۲} = \frac{DC}{\sqrt{۲}} \quad (۲)$$

پس :
$$r + r' = \frac{DB + DC}{\sqrt{۲}} = \frac{a}{\sqrt{۲}} = R\sqrt{۲}$$

از طرف دیگر چون AD نیمساز زاویهٔ BAC است. پس داریم : $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ و ازتساویهای (۱) و (۲) حاصل می‌شود : $\frac{r}{r'} = \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$ پس : $\frac{r}{c} = \frac{r'}{b} = \frac{R\sqrt{۲}}{b+c}$

پس : $r' = \frac{b \times R\sqrt{۲}}{b+c}$ و $r = \frac{c \times R\sqrt{۲}}{b+c}$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ EDE′ داریم: $\overline{EE'}^{۲} = \overline{DE}^{۲} + \overline{DE'}^{۲} = r^{۲} + r'^{۲}$ و یا $۴r''^{۲} = r^{۲} + r'^{۲}$

۳. در ذوزنقهٔ IEE′J داریم: $OL = \frac{۱}{۲}(IE + JE') = \frac{۱}{۲}(DI + DJ) = \frac{BC}{۴} = \frac{R}{۲}$

بنابراین مکان نقطهٔ O بر خطی واقع است که به فاصلهٔ $\frac{R}{۲}$ از BC رسم شود. چون

همواره تصویر O روی BC بر وسط DM واقع است و D از یک طرف تا نقطهٔ B و از طرف دیگر تا C تغییر مکان پیدا می‌کند، پس تغییر مکان L از یک طرف محدود به وسط MB و از طرف دیگر محدود به وسط MC است به طوری که O نیز فقط می‌تواند روی قطعه خطی به طول R که وسط آن بر M تصویر می‌شود، حرکت کند.

۴. شعاعهای ED و E′C از دو دایره متوازی‌اند و با BC زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند و جهت آنها نیز یکی است. پس خط BC از مرکز تجانس مستقیم دو دایره عبور می‌کند و این مرکز تجانس چنان که می‌دانیم محل تلاقی مماسهای مشترک خارجی دو دایره داده شده است.

۵. دیدیم که :

$$۴r''^{۲} = r^{۲} + r'^{۲} = (r+r')^{۲} - ۲rr' = ۲r^{۲} - ۲rr' = ۲r^{۲} - DC \times DB$$

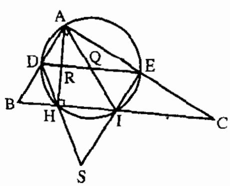
بر حسب این که $DC \times DB$ بزرگترین یا کوچکترین مقدار ممکن را به‌دست آورد، دایرهٔ داده شده کوچکترین یا بزرگترین اندازهٔ ممکن را به دست می‌آورد. به ازای $DC = ۰$ و $DB = BC$ یا $DB = ۰$ و $DC = BC$ شعاع r'' بزرگترین مقدار را به‌دست می‌آورد $r' = R\sqrt{۲}$ در این حال رأس A بر C یا B منطبق شود.

اما $DC \times DB$ وقتی بزرگترین مقدار خود را داراست که : $DC = DB = R$ باشد، در این حالت $r'' = R$ و مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

تبصره. دو مقدار متغیر x و y را که مجموع آنها مقدار ثابت m است، درنظر گرفته، می‌خواهیم ثابت کنیم که حاصلضرب آنها وقتی بزرگترین مقدار ممکن را داراست که $x = y = \frac{m}{۲}$ باشد. برای این کار اتحاد زیر را می‌نویسیم :

$$xy = \frac{۱}{۴}\left[(x+y)^{۲} - (x-y)^{۲}\right] = \frac{۱}{۴}\left[m^{۲} - (x-y)^{۲}\right]$$

برای این که m بزرگ شود باید $(x-y)^{۲}$ کوچک شود و حداقل این مقدار وقتی است که صفر باشد، یعنی $x = y = \frac{m}{۲}$.



۶۴۰. ۱. اگر I نقطه‌ای باشد که دایرهٔ گذرنده بر $A\hat{D}H$ بار دیگر BC را قطع می‌کند، AHI قائمه است. AI یک قطر است. DE همچنین یک قطر دایره است، O وسط پاره خط AI و از آن‌جا خط DO، خط میانه‌ای مثلث ABI است. این خط با BI موازی است و AC

را در وسطش نقطهٔ E قطع می‌کند. بعلاوه نقطهٔ O وسط DE و I وسط BC است.

۲. مثلثهای ABH و AIE در رأسهای H و E قائم‌الزاویه و متشابه‌اند. زیرا دو زاویهٔ حادهٔ برابر دارند. $B\hat{A}H = I\hat{A}E$ این دو زاویهٔ مساوی کمانهای نظیر برابر دارند. یعنی در دایرهٔ (O)، $\overset{\frown}{EI} = \overset{\frown}{DH}$ بنابراین $\frac{DH}{IE} = \frac{AB}{AI} = \frac{AH}{AE}$ از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود: $AH.AI = AE.AB$

امّا $AB = ۲AD$ است، از آن‌جا: $AH.AI = ۲AE.AD$

۳. مثلثهای ABI و DES متساوی‌الساقین هستند. بنابراین در اوّلی $AI = \frac{BC}{۲} = BI$ و در دومی زاویه‌های قاعده $H\hat{D}E$ و $I\hat{E}D$ برابرند. زیرا در دایرهٔ (O) رو به رو به کمانهای برابر می‌باشند.

$\overset{\frown}{EIH} = \overset{\frown}{DHI}$ ، اما DEIB متوازی‌الاضلاع است: زیرا $D\hat{E}I = D\hat{B}I$، مثلثهای متساوی‌الساقین دارای زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ مساوی هستند، بنابراین متشابه‌اند و نسبت مساحتهای آنها برابر مربع نسبت تشابه آنهاست.

$$\frac{aire\ \ ABI}{aire\ \ DES} = \frac{AB^۲}{DE^۲} \quad و$$

$$AB = ۳cm\ ,\ \ BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵cm$$

$$DE = \frac{BC}{۲} = ۲/۵cm \quad \frac{aire\ \ ABI}{aire\ \ DES} = \frac{۹}{۶/۲۵} = \frac{۳۶}{۲۵}\ یا\ \frac{۱۴۴}{۱۰۰}$$

۴. $aire\ \ ADHIE = aire\ \ ADE + aire\ \ DEIH$

$$aire\ \ ADE = \frac{۱}{۲}AD.AE = \frac{۱}{۲}\times ۱/۵ \times ۲ = ۱/۵cm^۲$$

$$\Rightarrow aire\ \ DEIH = \frac{۱}{۲}(DE + HI)\times HK$$

$HK = \frac{AH}{۲}$ (HK ارتفاع ذوزنقهٔ DEIH است)

اما در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$AB.AC = BC.AH \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{۳\times ۴}{۵} = ۲/۴cm$$

از آن‌جا $HK = ۱/۲cm$.

$$HI^{۲} = AI^{۲} - AH^{۲} = (۲/۵)^{۲} - (۲/۴)^{۲} = ۰/۴۹\ ,\ HI = \sqrt{۰/۴۹} = ۰/۷\text{cm}$$

$$\text{aire}\ \ DEIH = \frac{۱}{۲}(۲/۵ + ۰/۷) \times ۱/۲ = ۱/۹۲\text{cm}^{۲}$$

$$\Rightarrow \text{aire}\ \ ADHIE = ۱/۵ + ۱/۹۲ = ۳/۴۲\text{cm}^{۲}$$

۶۴۱. ۱. آسان است.

۲. مثلثهای IOQ و IPA را با هم مقایسه کنید.

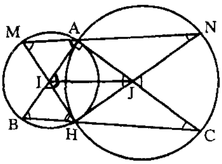
۳. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را به کار ببرید. چهار ضلعی را به مثلث تجزیه کنید.

۶۴۲. ۱. MB و MD را با هم مقایسه کنید.

۲. از تقارن محوری (بازتاب محوری) استفاده کنید.

۳. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه را به کار ببرید.

۴. آسان است.



۶۴۳. ۱. دایره‌های به قطرهای AB و AC در دو نقطهٔ A و H متقاطعند. $A\hat{N}H = A\hat{C}H$ و $A\hat{M}H = A\hat{B}H$ است، پس مثلثهای ABC و HMN متشابه‌اند. از طرفی زاویهٔ $B\hat{A}C = ۹۰°$ است. بنابراین زاویهٔ $M\hat{H}N = ۹۰°$ می‌باشد.

۲. چهار ضلعی AIHJ محاطی است. زیرا دو زاویهٔ روبه‌روی A و H از آن قائمه است. در این چهار ضلعی محاطی، زاویه‌های JAH و JIH با هم برابرند. اما در مثلث قائم ABC زاویهٔ JAH برابر زاویهٔ ABH که این زاویه نیز برابر زاویهٔ AMH است. از آن جا $J\hat{I}H = N\hat{M}H$ در نتیجه $MN \| IJ$ است.

۳. تشابه AJH و HIB : این دو مثلث زاویه‌های مساوی $J\hat{A}H = I\hat{B}H$ و $A\hat{J}H = B\hat{I}H$ را دارند، بنابراین متشابه‌اند. نسبت ضلعهای این دو مثلث برابر است با :

$$\Delta AJH \sim \Delta BIH \Rightarrow \frac{AJ}{BI} = \frac{AH}{BH} = \frac{JH}{IH'} \qquad (۱)$$

$$\Delta CJH \sim \Delta AIH \Rightarrow \frac{CJ}{AI} = \frac{CH}{AH} = \frac{JH}{IH'} \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\ \Rightarrow \frac{AJ}{BI} = \frac{CJ}{AI} \Rightarrow IA.JA = IB.JC$$

۴. ضلعهای مثلث ABC : مثلثهای ABH، ACH و ABC مثلثهای نیم مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین:

$$AH = \frac{AB\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AB = \frac{۲AH}{\sqrt{۳}} = \frac{۲AH\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۲h\sqrt{۳}}{۳} \quad \text{و} \quad BC = ۲AB = \frac{۴h\sqrt{۳}}{۳}$$

$$AC = \frac{BC\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴h\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲h$$

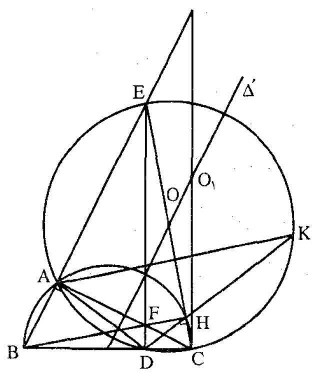
ضلعهای مثلث MHN : مثلث MHN نیز نیم مثلث متساوی‌الاضلاع است. با توجه به $\frac{IB}{IA} = \frac{۱}{۳}$، نقطهٔ I وسط شعاع OB و BOH متساوی‌الاضلاع است، پس HI عمود منصف است. HIM عمود بر AB، AM = AH و $\hat{M} = ۶۰°$ ، AMH متساوی‌الاضلاع است، MH = h :

$$MN = ۲MH = ۲h \qquad HN = \frac{MN \times \sqrt{۳}}{۲} = h\sqrt{۳}$$

نسبت تشابه دو مثلث برابر است با :

$$\frac{BC}{MN} = \frac{\frac{۴h\sqrt{۳}}{۳}}{۲h} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین نسبت مساحت آنها برابر $\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۳}$ است.



۶۴۴. ۱. CA و ED دو ارتفاع از مثلث EBC و F مرکز ارتفاعی آن است. بنابراین BH که از F می‌گذرد ارتفاع سوم این مثلث می‌باشد، یعنی بر EC عمود است.

$B\hat{H}C = ۹۰°$. نقطهٔ H روی نیمدایره‌ای به قطر BC (که از نقطهٔ A می‌گذرد). نقطهٔ F از A تا C تغییر مکان می‌دهد. BF تمام زاویهٔ ABC را می‌پیماید. در نتیجه تمام نقطه‌های کمان $\widehat{AC}$ شامل مکان هندسی می‌شوند.

۲. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ EAC و EDC که در آنها $\hat{A} = \hat{D} = ۹۰°$ است در دایره‌ای به قطر EC محاطند. بنابراین چهار ضلعی EADC در دایره‌ای

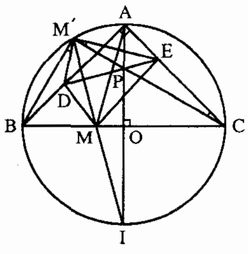
به مرکز O وسط پاره خط EC محاط است. اما C ثابت است و نقطهٔ E خط BA (یا Δ) را طی می‌کند. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O خط راستی است مانند Δ' که از نقطهٔ O به موازات خط Δ رسم می‌شود. این خط CA و CB را در نقطه‌های وسطشان قطع می‌کند. اگر F روی A، O در O_2 وسط AC است اگر F روی C، O در O_1 وسط پاره خط CE_1 عمود بر BC است. نقطهٔ E_1 حد نقطهٔ E روی Δ است. از آن جا مکان هندسی پاره خط O_1O_2 است. همهٔ نقطه‌های این پاره خط به مکان هندسی نقطه تعلق دارند زیرا وقتی E از A به E_1 می‌رود، CE تمام زاویهٔ ACE_1 را می‌پیماید و بالاخره O تمام نقطه‌های O_2O_1 را طی می‌کند.

۳. برای اثبات عمود بودن BH بر EC کافی است ثابت کنیم که AK بر EC عمود است. چهار ضلعی DFHC محاطی است. در این دایره:

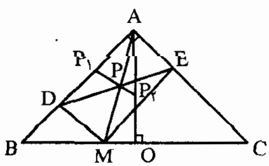
$$F\hat{C}H = F\hat{D}H \text{ یا } A\hat{C}E = E\hat{D}K \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EK} \Rightarrow \overset{\frown}{EC} \perp \overset{\frown}{AK}$$

در نتیجه AK و BH که هر دو بر EC عمودند، با هم موازی‌اند.

۴. برای موازی بودن KH و AB کافی است که $A\hat{B}H = B\hat{H}D$ باشد. چهارضلعی FHCD محاطی است در این چهارضلعی $F\hat{H}D = F\hat{C}D$ اما $A\hat{B}F = A\hat{C}B$ است. $AB = 2cm$ ، $AC = 4cm$ پس $AB < AC$ و در نتیجه $A\hat{C}B < A\hat{B}C$ و همیشه می‌توان BF را در درون مثلث ABC ساخت.



۶۴۵. ۱. سه مثلث DME ، DM′E و DAE بترتیب در رأسهای M، M′ و A قائم‌الزاویه‌اند و DE وتر مشترک آنهاست. بنابراین این سه مثلث در دایره‌ای به قطر DE محاط می‌باشند. در نتیجه مرکز دایرهٔ محیطی آنها نقطهٔ P وسط پاره خط DE است.



۲. چهار ضلعی MDAE مستطیل است. زیرا قطرهای DE و AM در نقطهٔ P وسط آنها متقاطعند.

مکان هندسی وسط پاره خط AM ، بخشی از خطی است که از نقطهٔ P_2 وسط AO موازی BO رسم می‌شود و محدود به P_1 و P_2 است وقتی که نقطهٔ M از B تا O تغییر مکان می‌دهد. AM زاویهٔ $B\hat{A}O$ و

P تمام پاره خط P_1P_2 را می‌پیماید. پس همهٔ نقطه‌های پاره‌خط P_1P_2 جزء مکان هندسی نقطه است.

۳. نقطه‌های M و M' نسبت به خط DE قرینهٔ یکدیگرند. از آن جا: $ME = M'E$ و مثلث MEC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. $ME = EC$. از آن جا $M'E = EC$ دیده می‌شود که $DM' = DM = DB$ در نتیجه دو مثلث $M'DB$ و $M'EC$ متساوی‌الساقینند. به علاوه دو زاویهٔ $A\hat{E}M'$ و $A\hat{D}M'$ که نظیر یک کمان در دایرهٔ (P) (که رسم نشده‌اند) هستند، با هم برابرند، زیرا مکملهای آنها یعنی $M'EC$ و $M'DB$ برابرند.

از آن جا مثلثهای متساوی‌الساقین متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{\Delta M'DB}{\Delta M'EC} \rightarrow \frac{M'B}{M'C} = \frac{DB}{EC} = \frac{M'D}{M'E}$$

همچنین مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین DBM و ECM متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{\Delta DBM}{\Delta ECM} \rightarrow \frac{DB}{EC} = \frac{DM}{EM} = \frac{BM}{CM}$$

از مقایسهٔ این دو رابطه داریم:

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC}$$

در نتیجه $M'M$ نیمساز زاویهٔ $BM'C$ است.

۴. $C\hat{M}'B = C\hat{M}'D + D\hat{M}'B = C\hat{M}'D + E\hat{M}'C = E\hat{M}'D = ۹۰^\circ$

$A\hat{B}M' = A\hat{C}M'$، چهار ضلعی $ACBM'$ قابل محاط شدن در یک دایره است. و چون $C\hat{A}B = ۹۰^\circ$ و $C\hat{M}'B = ۹۰^\circ$، نقطهٔ M' کمان $\widehat{BA}$ از دایرهٔ (O) و به قطر BC را می‌پیماید. MM' نیمساز زاویهٔ $BM'C$ است. دو زاویهٔ محاطی مساوی $BM'M$ و $CM'M$ کمانهای متناظر مساوی در دایرهٔ (O) را دارند. $M'M$ از نقطهٔ I سر دیگر قطری از دایرهٔ (O) که از نقطهٔ A می‌گذرد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله های بخش ۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه

۱.۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده

۲.۱.۷. زاویه

۱.۲.۱.۷. اندازهٔ زاویه

۶۴۶. راه‌حل اوّل. فرض می‌کنیم $B\hat{A}C < 45^\circ$، در این صورت، $BC < AC$، $C\hat{B}A > 45^\circ$، $B\hat{C}H < 45^\circ$ و $A\hat{C}H > 45^\circ$. بنابراین، میانهٔ CP در درون مثلث ACH قرار می‌گیرد و با میانهٔ BM در نقطهٔ K متعلق به پاره‌خط راست OM برخورد دارد (O را نقطهٔ برخورد BM، AD و CH گرفته‌ایم). از این‌جا، با توجه به

$$PK = \frac{1}{2}KC$$

$$OH:OC < \frac{1}{2}$$

ولی بنا به ویژگی نیمساز زاویهٔ مثلث $\quad OH:OC = AH:AC$

یعنی $AH < \frac{1}{2}AC$ و بنابراین $A\hat{C}H < 30^\circ$. تناقض.

راه‌حل دوم. ثابت می‌کنیم، اگر داشته باشیم: $B\hat{A}C < 45^\circ$، آن وقت $A\hat{C}B > 90^\circ$. نقطهٔ B_1 را روی خط راست AB طوری انتخاب می‌کنیم که $HB_1 = AH$. نیمساز زاویهٔ AB_1C، که آن را B_1F می‌نامیم، از نقطهٔ O می‌گذرد (در این نقطه، دو نیمساز دیگر از زاویه‌های مثلث AB_1C به هم رسیده‌اند). بنا به ویژگی نیمساز

$$AF:FC = AB_1:B_1C$$

ولی $AB_1:B_1C > 1$، زیرا $B_1\hat{A}C < 45^\circ$. به این ترتیب، نقطهٔ B_1 بین نقطه‌های A و B قرار می‌گیرد و بنابراین $B_1\hat{C}A > 90^\circ$.

۳.۱.۷. ضلع

۱.۳.۱.۷. اندازهٔ ضلع

۶۴۷. $\dfrac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}$

۴.۱.۷. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۷. اندازهٔ ارتفاع

۶۴۸. اندازهٔ زاویهٔ C برابر است با $۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$

با استفاده از رابطهٔ سینوسها داریم:
$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{\sin ۴۵^\circ}=\frac{b}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sin ۷۵^\circ}\Rightarrow\frac{a}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=۲\sqrt{۲}$$

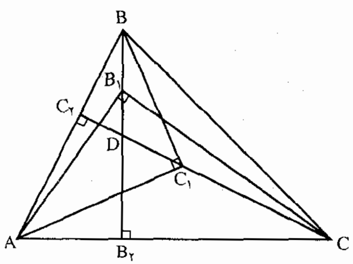
$$a=۲\,,\,b=\sqrt{۶}\Rightarrow h_a=\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (۱)$$

$$۲p=۲+\sqrt{۶}+\sqrt{۳}+۱=۳+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}\quad,\quad p=\frac{۳+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}}{۲}$$

با جایگذاری در رابطهٔ (۱) اندازهٔ h_a محاسبه می‌شود.

۵.۱.۷. پاره‌خط

۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۱.۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (برابریها)

۶۴۹. پای ارتفاعهای وارد بر AC و AB را، بترتیب، $B_۲$ و $C_۲$ می‌نامیم (شکل). مثلثهای $AB_۱C$ و $AB_۲B_۱$ ؛ $ABB_۲$ و $ACC_۲$ ؛ $AC_۱B$ و $AC_۲C_۱$ متشابه‌اند (در هر مورد از دو مثلث

قائم‌الزاویه، یک زاویهٔ حادهٔ مشترک وجود دارد).

بنابراین $AB_1^2 = AB_2 . AC = AC_2 . AB = AC_1^2$

که از آن‌جا، برابری $AB_1 = AC_1$ ، به‌دست می‌آید.

۲.۱.۵.۱.۷. رابطهٔ بین پاره‌خطها (نابرابریها)

۶۵۰. از نقطهٔ A، نیمخط راستی موازی CB (و در جهت از C به B) رسم و، روی آن، نقطهٔ Z را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم : $AZ = BX$. بسادگی روشن می‌شود که $YZ \geq AC$ و، با توجه به نابرابری مثلثی $XZ + XY \geq AC$.

چون دو مثلث AXZ و BXY برابرند، پس $XY = XZ$ و $2XY \geq AC$.

۶.۱.۷. محیط

۱.۶.۱.۷. اندازهٔ محیط

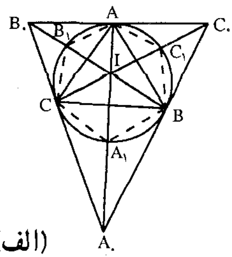
۶۵۱. اگر p_1 نصف محیط مثلث با رأسهای پای ارتفاعهای مثلث مفروض باشد و p، S، r و R، بترتیب، نصف محیط، مساحت و شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی باشند، آن وقت $S = pr$ و بعلاوه، $S = p_1R$ (حکم اخیر، از این حقیقت که شعاع دایرهٔ محیطی، رسم شده به رأس مثلث، بر پاره‌خط واصل پای ارتفاعهای وارد بر ضلعهای خارج شده از این رأس، عمود است، به‌دست می‌آید). در نتیجه، $p_1 = p\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}p$.

۷.۱.۷. مساحت

۱.۷.۱.۷. اندازهٔ مساحت

۶۵۲. $m\sin\beta(\sqrt{c^2 - m^2\sin^2\beta} + m\cos\beta)$

۲.۷.۱.۷. رابطهٔ بین مساحتها



(الف)

۶۵۳. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی را I می‌نامیم (شکل الف)، پس

$$\overline{IA_1} = \overline{A_1A_0} \quad (1)$$

یکی از راههای اثبات (۱) این است که چون AA_0 ، BB_0 و CC_0 ارتفاعهای مثلث $A_0B_0C_0$ است، در نتیجه دایرهٔ

محیطی مثلث ABC، دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$ است. بنابراین این دایره، $IA_\circ$ را نصف می‌کند، یا بدون مراجعه به دایرهٔ نه نقطه خواهیم داشت :

(زاویهٔ خارجی مثلث AIB) $$A_1\hat{I}B = \frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B}$$

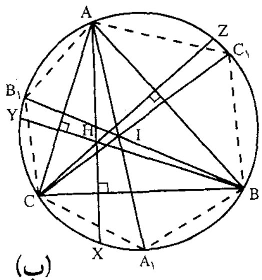
$$I\hat{B}A_1 = \frac{1}{2}\hat{A} + \frac{1}{2}\hat{B} = A_1\hat{I}B$$

بنابراین $IA_1 = A_1B$ (۲).

ولی همچنین داریم : $$A_1\hat{A}_\circ B = 90^\circ - A_1\hat{I}B$$

$$A_1\hat{B}A_\circ = 90^\circ - I\hat{B}A_1$$

بنابراین $\overline{A_1B} = \overline{A_1A_\circ}$ (۳). با توجه به (۱) خواهیم داشت که :



(ب)

مساحت مثلث IA_1B = مساحت مثلث $A_\circ A_1B$. با تکرار این عمل برای شش مثلثی که یکی از رأسهای آنها I است و جمع نمودن آنها با هم، تساوی موردنظر را به‌دست می‌آوریم. برای اثبات نامساوی (ii)، سه ارتفاع مثلث ABC را رسم می‌کنیم و محل برخورد آنها را H می‌نامیم (شکل ب). فرض می‌کنیم X، Y و Z بترتیب قرینه‌های H نسبت به BC، AC و AB باشد. نقطه‌های Z، Y و X روی دایرهٔ محیطی ABC قرار دارند (زیرا $C\hat{x}B = C\hat{H}B = 180^\circ - \hat{A}$ و این از رابطه‌های چهارضلعی‌های محاطی تشکیل شده از ارتفاعها نتیجه می‌شود).

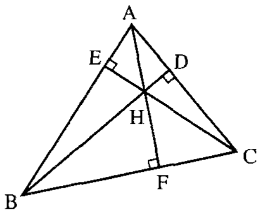
چون A_1 وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ است، مساحت مثلث $BA_1C \le$ مساحت BXC. بنابراین مساحت شش ضلعی $AC_1BA_1CB_1 \le$ مساحت شش ضلعی AZBXCY = (مساحتBHC+ مساحت CHA+ مساحتAHB) ۲برابر= ۲ برابرمساحت ABC.

که بدین ترتیب، نامساوی خواسته شده اثبات می‌شود.

۶۵۴. طول قاعده‌های مثلثها را برابر a و b فرض می‌کنیم. برای هر یک از این مثلثها، متوازی‌الاضلاعی را در نظر می‌گیریم که، سه رأس آن، بر سه رأس مثلث و، یک ضلع آن، بر قاعدهٔ مثلث منطبق باشد. در این صورت، بخش مشترک مثلثها در درون بخش

مشترک متوازی‌الاضلاعها قرار می‌گیرد که مساحت آن از مقدار ab تجاوز نمی‌کند.

۸.۱.۷. رابطه‌های متری



۶۵۵. فرض کنید که ارتفاعهای BD، AF و CE در نقطهٔ H همدیگر را قطع کنند. بر چهارضلعی AEHD دایره‌ای را محیط کرده و ثابت کنید، $AC.CD = CE.CH = ab\cos\hat{C}$ است. به طریق مشابه ثابت کنید، $AF.AH = bc\cos\hat{A}$ و $BD.BH = ac\cos\hat{B}$ بوده و آن‌گاه قانون کسینوسها را در مورد هر یک از ضلعهای a، b و c اعمال کنید.

۶۵۶. چهارضلعی CEHD محاطی است، پس داریم:

$$AH \times AD = AE \times AC \quad \text{و} \quad BH \times BE = BD \times BC$$

بنابراین رابطهٔ مطلوب به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$AB^2 = AE \times AC + BD \times BC$$

با مراعات آن که دایرهٔ به قطر AB از دو نقطهٔ E و D می‌گذرد، مسأله ثابت می‌شود.

۶۵۷. مثلث $A'B'C'$ را به موازات خود منتقل می‌کنیم تا نقطهٔ O' بر نقطهٔ O منطبق شود. رأسهای مثلثی را که به این طریق به‌دست می‌آید، مثل سابق، A'، B' و C' می‌نامیم. چون $A'\hat{O}B' = A_1\hat{O}B_1$ و $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB_1}{OA_1}$ (بنابه فرض)، بنابراین دو مثلث A_1OB_1 و $B'OA'$ متشابه‌اند و $OB_1\hat{A}_1 = OA'\hat{B}'$ و $OA_1\hat{B}_1 = OB'\hat{A}'$.

چون بر چهارضلعی OA_1CB_1 می‌توان یک دایره محیط کرد (به قطر OC)، بنابراین:

$$B_1\hat{C}O = OA_1\hat{B}_1 \quad \text{و} \quad A_1\hat{C}O = OB_1\hat{A}_1$$

در نتیجه مثلثهای A_1OC و $C_1'OA'$ و همچنین، مثلثهای BOC و $C_1'OB_1$ با هم متشابه‌اند، یعنی پاره‌خط راست OC' بر خط راست OC قرار دارد و

$$OC.O'C_1' = OA.O'A_1' = OB.O'B_1'$$

به همین ترتیب، می‌توان مثلثهای $B'OC'$ و $C'OA'$ را مورد مطالعه قرار داد.

۷.۱.۹. ثابت کنید مثلث با زاویه‌های حاده است

۶۵۹. از رابطهٔ کسینوسها استفاده می‌کنیم.

$$\cos\hat{A} = \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc} = \frac{۴۹+۳۶-۲۵}{۲\times۶\times۷} = \frac{۵۸}{۸۴} > ۰ \Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac} = \frac{۲۵+۴۹-۳۶}{۲\times۵\times۷} = \frac{۲}{۵} > ۰ \Rightarrow \hat{B} < ۹۰^\circ$$

$$\cos\hat{C} = \frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab} = \frac{۲۵+۳۶-۴۹}{۲\times۵\times۶} = \frac{۱}{۵} > ۰ \Rightarrow \hat{C} < ۹۰^\circ$$

بنابراین مثلث ABC با زاویه‌های حاده است.

۶۶۰. داریم :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > ۰ \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos B\hat{A}C > ۰ \Rightarrow \cos B\hat{A}C > ۰$$

$$\Rightarrow \hat{A} < ۹۰^\circ$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} > ۰ \Rightarrow \hat{B} < ۹۰^\circ$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} > ۰ \Rightarrow \hat{C} < ۹۰^\circ$$

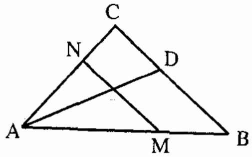
بنابراین مثلث با زاویه‌های حاده است.

۷.۱.۱۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۶۱. آشکار است که هر ارتفاع خطی وفادار است. حال اگر d یک خط وفادار باشد، $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع باشند، P نقطهٔ تقاطع $d_۱$، $d_۲$ و $d_۳$ باشد، و M، N و O پاهای عمود از P به سه ضلع مثلث باشند، آشکار است که قرینه‌های P نسبت به سه ضلع روی خط d قرار می‌گیرند، پس M، N و O روی خطی موازی خط d قرار می‌گیرند. در نتیجه طبق قضیهٔ سمسون، P روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار می‌گیرد. از طرفی طبق خاصیت خط سمسون، مجانس خط ONM به مرکز P و نسبت تجانس ۲، از محل تلاقی ارتفاعها می‌گذرد. پس خط وفادار باید از محل تلاقی ارتفاعهای مثلث بگذرد، و نیز به‌راحتی می‌توان نشان داد هر خطی که از محل تلاقی ارتفاعهای مثلث بگذرد، خطی است وفادار. حال اگر محل تلاقی ارتفاعهای دو مثلث یکسان باشد، هر خط که از این نقطه بگذرد برای هر دو مثلث وفادار است و در نتیجه

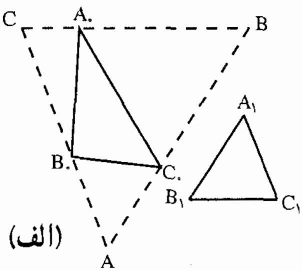
تعداد آنها نامتناهی است. و اگر محل تلاقی ارتفاعهای دو مثلث دو نقطهٔ متمایز باشند، فقط خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، می‌تواند برای هر دو وفادار باشد.

۶۶۲. (ج) چون AD نیمساز زاویهٔ A است، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند، یعنی $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ و چون $CN = CD$ و $BM = BD$، داریم $\frac{BM}{CN}=\frac{AB}{AC}$

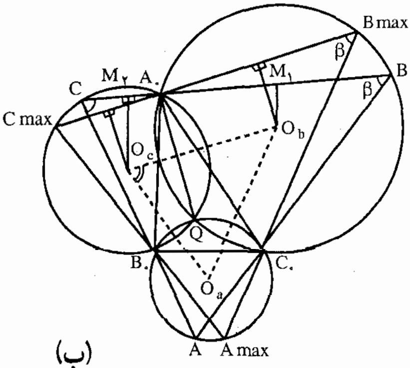


و این ایجاب می‌کند [عکس قضیهٔ تالس] که MN با BC موازی باشد. چون فقط یک گزینه می‌تواند صحیح باشد، آن گزینهٔ (ج) است. در واقع بسادگی می‌توان محقق کرد که (الف)، (ب)، (د) و (هـ) غلط هستند. اگر $\hat{A}=90^\circ-\delta$، $\hat{B}=60^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ+\delta$ و δ زاویه‌ای به اندازهٔ کافی کوچک و مثبت باشد.

۶۶۳. از A_0، B_0 و C_0 خطهایی بترتیب موازی B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 رسم می‌کنیم؛ شکل (الف) را ملاحظه کنید. این کار ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC را که مشابه مثلث $A_1B_1C_1$ است، تشکیل می‌دهد. اکنون فرض می‌کنیم هر یک از خطهایی را که به این ترتیب رسم کرده‌ایم، بترتیب حول A_0، B_0 و C_0 و با یک اندازه، دوران بدهیم؛ در این صورت آنها با همان زاویه‌های قبل با یکدیگر تلاقی می‌کنند و مثلثهایی متشابه با مثلث $A_1B_1C_1$ می‌سازند و در میان آنها مثلث به مساحت ماکزیمم مثلثی است که ضلعهایش طول ماکزیمم داشته باشند. برای یافتن این مثلث، به خاطر می‌آوریم که مکان هندسی تمام نقطه‌های Bیی که در آنها زاویهٔ A_0BC_0 دارای مقدار معلوم β است



(الف)



(ب)

کمانی از دایره‌ای با وتر A_0C_0 می‌باشد. این مطلب مطرح می‌کند که دایره‌های محیطی مثلثهای A_0C_0B، B_0A_0C و B_0C_0A را رسم کنیم. مرکزهای این دایره‌ها را بترتیب

با O_b ، O_c و O_a نمایش می‌دهیم، شکل (ب) را ملاحظه کنید.
اثبات این که این دایره‌های محیطی دارای نقطهٔ مشترک Q می‌باشند آسان است. [این موضوع نتیجه‌ای از این حقیقت است که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ می‌باشد.]
سپس نشان می‌دهیم که: مثلث ABC ~ مثلث $O_aO_bO_c$.

اثبات. $O_a\hat{O}_cO_b=(1/2)\overset{\frown}{A_\circ Q}+(1/2)\overset{\frown}{QB_\circ}$ ؛ و $\hat{C}=(1/2)\overset{\frown}{A_\circ QB_\circ}$ است، زیرا O_cO_a و O_cO_b بترتیب کمانهای $\overset{\frown}{B_\circ Q}$ و $\overset{\frown}{A_\circ Q}$ را نصف می‌کنند. بنابراین $\hat{C}=O_a\hat{O}_cO_b$ می‌شود. به همین ترتیب: $\hat{A}=O_c\hat{O}_aO_b$ ، $\hat{B}=O_a\hat{O}_bO_c$ است.
بنابراین:

$$\Delta O_aO_bO_c \sim \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

سرانجام، نشان می‌دهیم که بزرگترین مثلث ABCی گذرنده از نقطه‌های $A_\circ$ ، $B_\circ$ و $C_\circ$ مثلثی است که ضلعهایش موازی ضلعهای مثلث $O_aO_bO_c$ می‌باشد.
اثبات. از آن‌جا که عمودهای از O_b و O_c وترهای $BA_\circ$ و $CA_\circ$ را در M_1 و M_2 نصف می‌کنند، داریم: $M_1M_2=(1/2)BC$. اما M_1M_2 تصویر قائم O_bO_c بر BC و زمانی دارای بیشترین مقدار است که $BC\|O_bO_c$ باشد. از آن جا که مثلث ABC ~ مثلث $O_aO_bO_c$ است، جمیع ضلعهای مثلث به مساحت ماکزیمم یا بزرگترین مورد بحث، موازی ضلعهای نظیرشان از مثلث $O_aO_bO_c$ اند.
به این ترتیب، برای رسم مثلث بزرگترین مذکور، ابتدا از $A_\circ$ ، $B_\circ$ و $C_\circ$ مثلثی متشابه با مثلث $A_1B_1C_1$ رسم می‌کنیم (بند اوّل این راه‌حل را ملاحظه کنید). بعد O_a ، O_b و O_c مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای $AB_\circ C_\circ$ ، $BA_\circ C_\circ$ و $CB_\circ A_\circ$ را رسم می‌کنیم و سرانجام از $A_\circ$ ، $B_\circ$ و $C_\circ$ خطهایی بترتیب موازی O_bO_c ، O_cO_a و O_aO_b می‌کشیم. این خطها، ضلعهای BC، CA و AB از مثلث بزرگترین مطلوب را تشکیل می‌دهند.

۲.۷. رابطه‌های متری در مثلث با زاویهٔ منفرجه

۲.۲.۷. زاویه

۱.۲.۲.۷. اندازهٔ زاویه

۶۶۶. با استفاده از رابطهٔ کسینوسها و با توجه به این که $a=8$ ، $b=5$ و $c=4$ است، داریم:

$$\cos\hat{A}=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۲۵+۱۶-۶۴}{۲\times ۵\times ۴}=-\frac{۲۳}{۴۰}\Rightarrow \hat{A}=\operatorname{Arc}\cos(-\frac{۲۳}{۴۰})$$

$$\Rightarrow \hat{A}>۹۰^\circ$$

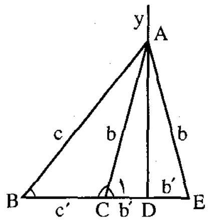
$$\cos\hat{B}=\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}=\frac{۶۴+۱۶-۲۵}{۲\times ۸\times ۴}=\frac{۵۵}{۶۴}\Rightarrow \hat{B}=\operatorname{Arc}\cos(\frac{۵۵}{۶۴})$$

$$\cos\hat{C}=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}=\frac{۶۴+۲۵-۱۶}{۲\times ۸\times ۵}=\frac{۷۳}{۸۰}\Rightarrow \hat{C}=\operatorname{Arc}\cos(\frac{۷۳}{۸۰})$$

بدیهی است زاویهٔ A از این مثلث منفرجه است.

۶۶۸. ثابت کنید H، مرکز دایرهٔ محاطی بیرونی مثلث ACF (مماس بر ضلع AF) است.

۲.۲.۲.۷. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۶۷۰. مثلث ABC را که در آن زاویهٔ B حاده و زاویهٔ C منفرجه است، در نظر می‌گیریم و تصویر ضلعهای b و c روی ضلع BC را بترتیب ′b و ′c می‌گیریم. بنا به فرض داریم:

$$\frac{b^۲}{c^۲}=\frac{b'}{c'}$$

نقطهٔ E قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به نقطهٔ D پای ارتفاع AD به‌دست می‌آوریم. $AD = AC = b$ است. در مثلث ABE زاویه‌های B و E حاده‌اند و داریم: $\frac{AE^۲}{AB^۲}=\frac{DE}{DB}$. از این‌جا نتیجه می‌شود که $B\hat{A}E=۹۰^\circ$ است. بنابراین داریم:

$$\hat{E}+\hat{B}=۹۰^\circ,\ \hat{E}=\hat{C}_۱\Rightarrow \hat{B}+\hat{C}_۱=۹۰^\circ,\ \hat{C}_۱+\hat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$$

۶۷۱. فرض کنید D معرف وسط AC باشد. در D، عمودی بر AC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با BC را به M نشان می‌دهیم. AMC مثلثی متساوی‌الساقین است، از این‌رو $M\hat{A}C=B\hat{C}A$. بنابه فرض، ABD هم، مثلثی متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{B}D=B\hat{D}A$.

$A\hat{B}M>۹۰^\circ$ (بنابه فرض) و $A\hat{D}M=۹۰^\circ$، بنابراین $|MD|>|BM|$ و $M\hat{B}D>M\hat{D}B$.

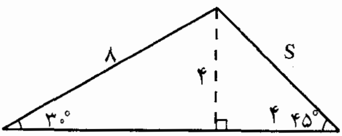
بنابراین، نتیجه می‌شود که $M\hat{A}D>M\hat{A}B$ (اگر B به‌طور قرینه، نسبت به خط راست

AM، نگاشته شود، آن وقت نقطه‌ای مثل B_1، در درون زاویهٔ MAD، به‌دست می‌آید، زیرا MD بر AD عمود است و $MD > MB = MB_1$؛ بنابراین، $\hat{C} > \hat{A} - \hat{C}$ و ($\hat{C} > \frac{۱}{۲}\hat{A}$.)

۳.۲.۷. ضلع

۱.۳.۲.۷. اندازهٔ ضلع

۶۷۲. گزینهٔ (ب) درست است.



۶۷۳. گزینهٔ (ب) درست است. فرض کنید S طول ضلع موردنظر باشد (شکل را ملاحظه کنید). ارتفاع وارد بر بزرگترین ضلع، از یک طرف، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ °۳۰ از مثلث قائم‌الزاویهٔ با وتر به طول ۸ در نتیجه طول آن $\frac{۸}{۲} = ۴$ است، از طرف دیگر یک ضلع مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر به طول S است. بنابراین، S، طول این وتر، $۴\sqrt{۲}$ است.

راه دیگر. بنا بر قانون سینوسها که ضلعهای هر مثلث با سینوسهای زاویه‌های روبه‌رو به آنها متناسبند، داریم:

$$\frac{S}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۸}{\sin ۴۵^\circ}, S = \frac{۸\sin ۳۰^\circ}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۸(\frac{۱}{۲})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

۶۷۴. ۱. شرط آن که زاویهٔ A منفرجه باشد، آن است که $a^۲ > b^۲ + c^۲$ باشد.

بنابراین: $a^۲ > ۲۲۵ + ۶۴ \Rightarrow a^۲ > ۲۸۹ \Rightarrow a > ۱۷$

۲. شرط آن که زاویهٔ A حاده باشد، آن است که $a^۲ < b^۲ + c^۲$ باشد.

بنابراین: $a^۲ < ۲۲۵ + ۶۴ \Rightarrow a^۲ < ۲۸۹ \Rightarrow a < ۱۷$

نکته. اگر $a = ۱۷$ باشد، مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

۲.۳.۲.۷. رابطهٔ بین ضلعها

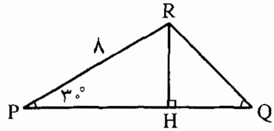
۶۷۵. اگر $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ باشد، داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$

۴.۲.۷. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۲.۷. اندازهٔ ارتفاع

۶۷۶. ارتفاع RH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PRH، داریم:

$$RH = \frac{PR}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

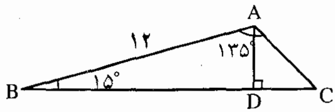


۶۷۷. مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) با زاویهٔ رأس °۱۲۰ را در نظر می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، $\hat{H} = ۹۰^\circ$ و $A\hat{B}H = ۳۰^\circ$ است، پس $AH = \frac{AB}{۲}$ است.

۵.۲.۷. پاره‌خط

۱.۵.۲.۷. اندازهٔ پاره‌خط

۶۷۸. پای ارتفاع رأس A را D می‌نامیم. زاویهٔ C از این مثلث برابر $۱۸۰^\circ - (۱۵^\circ + ۱۳۵^\circ) = ۳۰^\circ$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD داریم:



$$\cos\hat{B} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \cos۱۵^\circ = \frac{BD}{۱۲} \Rightarrow BD = ۱۲\cos۱۵^\circ = ۱۲\frac{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{۴}$$

$$\Rightarrow BD = ۳(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})cm$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \sin۱۵^\circ = \frac{AD}{۱۲} \Rightarrow AD = ۱۲\sin۱۵^\circ = ۱۲(\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴})$$

$$= ۳(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})cm$$

و در مثلث ADC، $\hat{C} = ۳۰^\circ$ است. بنابراین:

$$\cot g۳۰^\circ = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = ۳(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}) \times \sqrt{۳}cm$$

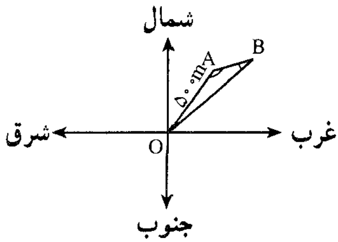
۶۷۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD، $\hat{B}=۴۵^\circ$ است. بنابراین مثلث ABD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و $AD=DB=\frac{۱۸\sqrt{۲}}{۲}=۹\sqrt{۲}cm$ است. مثلث ABE متساوی‌الساقین است؛ زیرا $B\hat{A}E=A\hat{B}E=۴۵^\circ-۱۵^\circ=۳۰^\circ$. از آن‌جا $A\hat{E}B=۳۰^\circ$ است. بنابراین $AE=AB=۱۸cm$ است.

۶.۲.۷. محیط

۱.۶.۲.۷. اندازهٔ محیط

۶۸۰. با نامگذاری زمین به‌صورت شکل داریم:

$$OA=۵۰۰\,,\ A\hat{O}B=۴۵^\circ-۳۰^\circ=۱۵^\circ\,,\ B\hat{A}O=۱۳۵^\circ\,,\ \hat{B}=۳۰^\circ$$



از آن‌جا:

$$\frac{AB}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{OB}{\sin ۱۳۵^\circ}=\frac{OA}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{OB}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۵۰۰}{\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow AB=۲۵۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

و $OB=۵۰۰\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow \text{محیط زمین}=۵۰۰+۲۵۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})+۲۵۰\sqrt{۲}=۲۵۰(\sqrt{۲}+\sqrt{۴}+\sqrt{۶})$$

۷.۲.۷. مساحت

۱.۷.۲.۷. اندازهٔ مساحت مثلث

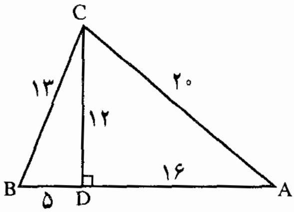
۶۸۱. با استفاده از فرمول $h_r=\frac{۲}{r}\sqrt{p(p-r)(p-x)(p-q)}$ اندازهٔ ارتفاع رأس R و از روی آن مساحت مثلث محاسبه می‌شود.

۶۸۲. داریم:

$$RQ^۲ = ۹ + ۱۰۰ - ۲ \times ۳ \times ۱۰ \cos ۴۵^\circ$$

$$RQ^۲ = ۱۰۹ - ۳۰\sqrt{۲} \Rightarrow RQ = \sqrt{۱۰۹ - ۳۰\sqrt{۲}}$$

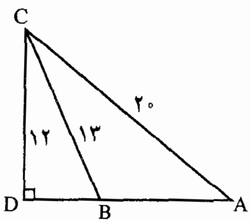
$$S = \frac{۱}{۲} PQ.PR \sin ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱۵\sqrt{۲}}{۲}$$



۶۸۳. اگر $A - D - B$ باشد، مثلث با زاویه‌های حاده است و داریم:

$$BD = ۵ , DA = ۱۶ \Rightarrow AB = ۲۱$$

$$\Rightarrow \text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \times ۲۱ \times ۱۲ = ۱۲۶$$



اگر $A - B - D$ مثلث در رأس C منفرجه‌الزاویه است و داریم:

$$CD = ۱۶, DB = ۵ \Rightarrow BC = ۱۶ - ۵ = ۱۱ \Rightarrow$$

$$\text{مساحت} = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۲ = ۶۶$$

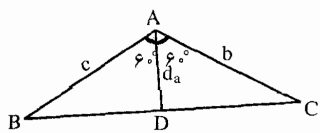
۲.۷.۲.۷. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجادشده

۶۸۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۸.۲.۷. رابطه‌های متری

۶۸۵. می‌دانیم که وقتی $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است، رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲ + bc$ بین ضلعها برقرار است.

از طرفی:



$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{d_a} = \frac{b+c}{۲\sqrt{(\frac{a+b+c}{۲})(\frac{b+c-a}{۲})bc}}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{d_a} = \frac{b+c}{۲\sqrt{\frac{b^۲ + c^۲ + ۲bc - a^۲}{۴}.bc}} = \frac{b+c}{۲\sqrt{\frac{bc}{۴}.bc}} = \frac{b+c}{bc}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{d_a}=\frac{۱}{c}+\frac{۱}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{AD}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{AC}$$

۹.۲.۷. ثابت کنید مثلث با زاویهٔ منفرجه است

۶۸۶. داریم :

$$\cos\hat{A}=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}=\frac{۱۶+۳۶-۸۱}{۲\times۴\times۶}=\frac{-۲۹}{۴۸}<۰\Rightarrow\hat{A}>۹۰^\circ$$

۶۸۷. با توجه به تعریف ضرب درونی دو بردار داریم :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos A\hat{C}B<۰\Rightarrow\cos A\hat{C}B<۰\Rightarrow A\hat{C}B>۹۰^\circ$$

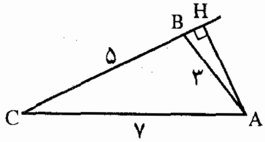
بنابراین مثلث با زاویهٔ منفرجه است.

۱۰.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی

۶۸۸. با توجه به این که $a=۵$ ، $b=۷$ و $c=۳$ است، داریم :

۱. $$\cos\hat{B}=\frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}=\frac{۲۵+۹-۴۹}{۲\times۵\times۳}=\frac{-۱۵}{۳۰}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow\hat{B}=۱۲۰^\circ$$

۲. پای ارتفاع رأس A را H می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH $(\hat{H}=۹۰^\circ)$، $A\hat{B}H=۶۰^\circ$ و $B\hat{A}H=۳۰^\circ$ است، بنابراین $BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۳}{۲}$.



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله های بخش ۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه و دایره

۱.۸. رابطه‌های متری در مثلث با زاویه‌های حاده و دایره

۲.۱.۸. زاویه

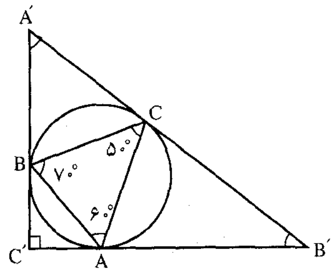
۱.۲.۱.۸. اندازهٔ زاویه

۶۸۹. ۱. زاویهٔ C از مثلث ABC برابر ۵۰° است. بنابراین $\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ$ ، $\overset{\frown}{BC}=۱۲۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AB}=۱۰۰^\circ$ است. از آن‌جا:

$$\hat{A}'=\frac{۱۴۰^\circ+۱۰۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

$$\hat{B}'=\frac{۱۲۰^\circ+۱۰۰^\circ-۱۴۰^\circ}{۲}=۴۰^\circ$$

$$\hat{C}'=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۰^\circ)=۸۰^\circ$$



۲. داریم:

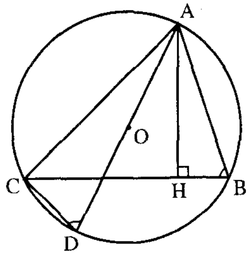
$$\hat{A}'=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}+\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\hat{B}+\hat{C}-\hat{A}$$

$$\hat{B}'=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AC}}{۲}=\hat{C}+\hat{A}-\hat{B}$$

$$\hat{C}'=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CB}-\overset{\frown}{AB}}{۲}=\hat{A}+\hat{B}-\hat{C}$$

۲.۲.۱.۸. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۶۹۱. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کنید، AO را امتداد دهید تا این دایره را در D قطع کند و



توجه کنید که دو زاویهٔ ADC و ABC برابرند.

۳.۱.۸. ضلع

۱.۳.۱.۸. اندازهٔ ضلع

۶۹۳. اندازهٔ زاویه‌های A ، B و C را، بترتیب، با α ، β و γ نشان می‌دهیم. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث و O مرکز دایره‌ای باشد که از A ، H و C می‌گذرد. در این صورت، $H\hat{O}C = ۲H\hat{A}C = ۲(۹۰^\circ - \gamma)$ و $H\hat{O}A = ۲H\hat{C}A = ۲(۹۰^\circ - \alpha)$.
اما $A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - \beta$ (چون BAOC چهارضلعیی محاطی است).

$$AC = ۲R\sin\beta = \sqrt{۳}, \beta = ۶۰^\circ ، ۲\beta = ۱۸۰^\circ - \beta ، ۳۶۰^\circ - ۲\alpha - ۲\gamma =$$

$$۱۸۰^\circ - \beta ، ۲(۹۰^\circ - \gamma) + ۲(۹۰^\circ - \alpha) = ۱۸۰^\circ - \beta$$

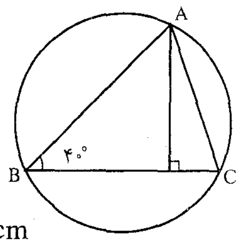
۶۹۴. قبل از هر چیزی ثابت می‌کنیم که مثلثهای ABC و MBD متشابه هستند. در حقیقت مثلثهای ABD و MBC قائم‌الزاویه بوده و هر دو در زاویهٔ حاده B مشترک هستند. از این‌رو آنها با هم متشابه بوده و در نتیجه $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BM}$ خواهد بود. آن‌گاه در مثلثهای ABC و MBD با زاویهٔ مشترک B ضلعهای این زاویه متناسب بوده و در نتیجه مثلثهای مزبور متشابه خواهند بود. حال از این نکته استفاده می‌کنیم که در مثلثهای متشابه، نسبت محیطها ونسبت شعاعهای دایره‌های محیطی با نسبت تشابه آنها برابر است. طبق فرض $P_{ABC} = ۱۵cm$ و $P_{MBD} = ۹cm$ بوده و از این‌رو نسبت تشابه برابر $\frac{۵}{۳}$ خواهد بود. به دلیل این که شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث MBD برابر $۱/۸cm$ است از این‌رو در می‌یابیم که شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث ABC برابر $۱/۸ \times \frac{۵}{۳} = ۳cm$ خواهد بود. اگر O را مرکز دایرهٔ محیط بر مثلث ABC و OP را عمود بر AC در نظر بگیریم، آن‌گاه $BH = ۲OP$ خواهد بود. ولی BH قطر دایره محیط بر مثلث MBD (به دلیل این که زاویهٔ BDH برابر ۹۰° است) بوده و از این‌رو

$BH = ۳/۶cm$ و در نتیجه $OP = ۱/۸cm$ خواهد بود. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOP دو ضلع یعنی $AO = ۳$ (شعاع دایرهٔ محیطی) و $OP = AO = ۳cm$ معلوم است. آن‌گاه $AP = \sqrt{۹ - (\frac{۹}{۵})^۲} = \frac{۱۲}{۵}cm$ و در نتیجه $AC = ۴/۸cm$ خواهد بود.

۴.۱.۸. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۱.۸. اندازهٔ ارتفاع

۶۹۵. رابطهٔ سینوسها را می‌نویسیم و مقدارهای داده شده را جایگزین می‌کنیم:



$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۲R$$

$$\Rightarrow \frac{۶\sqrt{۳}}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = ۱۲ \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \text{ یا } \hat{A} = ۱۲۰^\circ > ۹۰^\circ \text{ و } b = ۱۲\sin ۴۵^\circ = ۶\sqrt{۲}cm$$

از طرفی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ است. بنابراین $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۷۵^\circ$ است.
از آن‌جا:

$$\frac{c}{\sin ۷۵^\circ} = ۱۲ \Rightarrow c = ۳(\sqrt{۶} + \sqrt{۲}) \Rightarrow AH = c\sin ۴۵^\circ$$

$$= ۳(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow AH = ۳(\sqrt{۳} + ۱)cm$$

۵.۱.۸. پاره‌خط

۱.۵.۱.۸. اندازهٔ پاره‌خط

۶۹۶. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده و شعاع آن را با R (پارامتر کمکی) نشان می‌دهیم. سپس OP را بر BC عمود کرده و از تساوی $AH = ۲OP$ استفاده می‌کنیم که درآن H مرکز ارتفاعی است. مثلث OPB را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. از آن‌جا که اندازهٔ زاویهٔ KOB با کمان $\overset{\frown}{BK}$ اندازه گرفته می‌شود و $\overset{\frown}{BK} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BC}$ بوده و زاویهٔ

CAB برابر نصف کمان BC است. از این‌رو چنین داریم : $K\hat{O}B = C\hat{A}B = \hat{\alpha}$.
آن‌گاه $OP = R\cos\alpha$ بوده و بنابراین $AH = ۲R\cos\alpha$ خواهد بود. طبق قانون سینوسها $\frac{AC}{\sin A\hat{B}C} = ۲R$ بوده و از این‌رو $AC = ۲R\sin\beta$ را خواهیم داشت.
آن‌گاه از مثلث ACD درمی‌یابیم که $D = AC\sin A\hat{C}B = ۲R\sin\beta\sin\gamma$ بوده و در نتیجه چنین‌داریم : $AH = ۲R\cos\alpha$ و

$$HD = AD - AH = ۲R\sin\beta\sin\gamma - ۲R\cos\alpha$$

$$= ۲R(\sin\beta\sin\gamma - \cos(۱۸۰^{\circ} - (\beta+\gamma)))$$

$$= ۲R(\sin\beta\sin\gamma + \cos(\beta+\gamma))$$

$$= ۲R(\sin\beta\sin\gamma \times \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta \times \sin\gamma) = ۲R\cos\beta\cos\gamma$$

بدین ترتیب تساوی زیر نتیجه می‌شود :

$$\frac{AH}{HD} = \frac{۲R\cos\alpha}{۲R\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$$

۶.۱.۸. شعاع

۱.۶.۱.۸. اندازهٔ شعاع

۶۹۷. از آن‌جا که مساحت مثلث تشکیل شده با میانه‌های مثلث، $\frac{۳}{۴}$ مساحت مثلث اصلی است و به‌ازای هر مثلث $abc = ۴RS$ ، برای مثلث حاده باید ثابت کنیم نابرابری زیر درست است.

$$m_a m_b m_c > \frac{۵}{۸} abc \quad (۱)$$

برای راحتی محاسبه‌ها، فرض کنید طول یکی از ضلعها برابر ۲d و طول میانهٔ مرسوم به این ضلع m باشد. چون مثلث با زاویه‌های حاده است، داریم $m > d$. فرض کنید t معرف کسینوس زاویهٔ حادهٔ تشکیل شده با این میانه و ضلع با طول ۲d باشد، $۰ \le t < \frac{d}{m}$ ($t < \frac{d}{m}$ شرطی است برای این که مثلث، با زاویه‌های حاده باشد). با نشان دادن طول ضلعها و میانه بر حسب d، m و t و قرار دادن عبارتهای حاصل در نابرابری (۱)، پس از تبدیلها به‌دست می‌آوریم :

$$m^۲(۹d^۲ + m^۲)^۲ - ۲۵d^۲(d^۲ + m^۲)^۲ > t^۲d^۲m^۲(۶۴m^۲ - ۱۰۰d^۲)$$

سمت چپ این نابرابری، به شکل

$$(m^۲ - ۴dm + ۵d^۲)(m^۲ + ۴dm + ۵d^۲)(m^۲ - d^۲)$$

درمی‌آید. به‌ازای $m > d$، این عبارت مثبت است. بعلاوه، اگر $m = d$ (مثلث، قائم‌الزاویه باشد)، آن‌وقت سمت چپ نابرابری، از سمت راست آن کمتر نیست (به‌ازای $t = ۰$، تساوی به‌دست می‌آید). بعلاوه، اگر $d < m \leq \frac{۵}{۴}d$، آن‌وقت سمت راست نابرابری نامثبت است و نابرابری درست است. فرض کنید $m > \frac{۵}{۴}d$، در این حالت، سمت راست نابرابری، از مقدار به‌دست آمده به‌ازای $t = \frac{d}{m}$، کمتر است. اما به‌ازای $t = \frac{d}{m}$، مثلث اصلی قائم‌الزاویه است و برای مثلثهای قائم‌الزاویه، درستی نابرابری قبلاً ثابت شده است. (کافی است همین استدلال را برای ضلع دیگر مثلث تکرار کنید.) بنابراین، ثابت شده است که نابرابری (۱)، به‌ازای همهٔ مثلثهای غیرمنفرجه به استثنای مثلث متساوی‌الساقین درست است؛ به‌ازای مثلثهای اخیر، برابری رخ می‌دهد.

۸.۱.۶.۲. رابطهٔ بین شعاعها

۶۹۸. از رأس A پاره‌خطهای راست AD و AE را مماس بر دایرهٔ اوّل و دایرهٔ دوم رسم می‌کنیم. (D و E روی ضلع BC قرار دارند). روشن است که مثلثهای ACD و AEB مثلث ABC را می‌پوشانند. یعنی مجموع شعاعهای این دایره‌ها برابر است با:

$$\frac{۲S_{ACD}}{P_{ACD}} + \frac{۲S_{ABE}}{P_{ABE}} \geq \frac{۲(S_{ACD} + S_{ABE})}{P_{ABC}} \geq \frac{۲S_{ABC}}{P_{ABC}}$$

و عبارت اخیر، مقدار شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را بیان می‌کند.

۸.۱.۷. محیط

۸.۱.۷.۱. اندازهٔ محیط

۶۹۹. بنابه تعریف قوت نقطهٔ نسبت به‌دایره داریم:

$$P_A(C) = AC^۲ - CB^۲ \Rightarrow ۲۸ = AC^۲ - (۶)^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۶۴ \Rightarrow AC = ۸cm$$

حال در مثلث ACB که $\hat{C} = ۶۰°$ است، می‌توان نوشت:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ab \Rightarrow c^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۴۸ = ۵۲ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۳}cm$$

از آن‌جا: $\text{ABC محیط مثلث} = AB + BC + AC = ۲\sqrt{۱۳} + ۶ + ۸ = ۱۴ + ۲\sqrt{۱۳}$

۸.۱.۸. مساحت

۱.۸.۱.۸. اندازهٔ مساحت مثلث

۷۰۰. در چهارضلعی OB_1AC_1 داریم:

$$\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC(A\hat{B_1}C_1 = A\hat{B}C\,,\ \ A\hat{O}C = ۲A\hat{B}C)$$

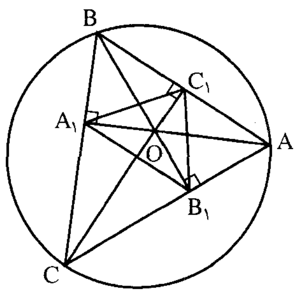
$$\Rightarrow O\hat{A}C = ۹۰^\circ - A\hat{B}C$$

$$۲O\hat{A}C = ۱۸۰^\circ - A\hat{O}C = ۱۸۰^\circ - ۲A\hat{B}C \Rightarrow A\hat{K}B_1 = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow OA \perp B_1C_1$$

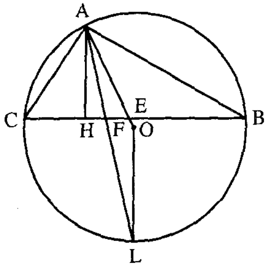
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OB_1AC_1} = \frac{۱}{۲}OA.B_1C_1 = \frac{۱}{۲}R.B_1C_1 \\ S_{OC_1BA_1} = \frac{۱}{۲}R.C_1A_1 \\ S_{OA_1CB_1} = \frac{۱}{۲}R.A_1B_1 \end{cases} \Rightarrow \text{مثلث } S = \frac{۱}{۲}R(B_1C_1 + A_1C_1 + A_1B_1)$$

که می‌دانیم شعاع دایرهٔ نه نقطه $\frac{۱}{۲}R$ است.



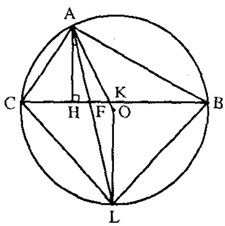
۲.۸.۱.۸. اندازه مساحت شکلهای ایجاد شده

۷۰۱. مثلث موردنظر، مثلث مرکزیهٔ مثلث ABC است که رأسهای آن I_a، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی برون مثلث ABC می‌باشند.



۷۰۲. چهارضلعی موردنظر را به عنوان تفاضل مثلثهای AOL و AFE مدّنظر قرار می‌دهیم. از این رو $S_{FEOL} = S_{AOL} - S_{AFE}$ را خواهیم داشت. بنابراین حل مسأله در واقع به محاسبهٔ عناصر گوناگون (زاویه‌ها، ضلعها) مثلثهای AOL و AFE تحویل می‌یابد. ثابت می‌کنیم که OL موازی AH است. برای این کار $C\hat{A}L = L\hat{A}B$ (طبق فرض) را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. بنابراین $\overset{\frown}{CL} = \overset{\frown}{BL}$ خواهد بود. آن‌گاه وترهای CL و BL نیز مساوی بوده و در نتیجه مثلث CBL متساوی‌الساقین خواهد بود (شکل). مرکز O مربوط به دایرهٔ محیطی مثلث CBL روی ارتفاع KL قرار دارد. بدیهی است که $KL \| AH$ بوده و از این رو $OL \| AH$ خواهد بود. آن‌گاه داریم:

$$H\hat{A}F = A\hat{L}O = L\hat{A}O = \frac{۱}{۲}H\hat{A}O = \frac{۱}{۲} \times ۳۰^\circ = ۱۵^\circ$$



و بدین ترتیب به عنوان مقدمه، مطالب را چنین خلاصه می‌کنیم: AOL، یک مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌های ۱۵°، ۱۵° و ۱۵۰° است. ضلع AL این مثلث برابر $۴\sqrt{۲}\,cm$ است. این امر برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است.

طبق قاعدهٔ کسینوسها (قضیه) چنین داریم:

$$AL^۲ = AO^۲ + OL^۲ - ۲AO.OL.\cos ۱۵۰^\circ$$

از این رابطه با قرار دادن $AO = OL = R$ چنین حاصل می‌شود:

$$(۴\sqrt{۲})^۲ = R^۲ + R^۲ + ۲R^۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } R^۲ = \frac{۳۲}{۲+\sqrt{۳}} = ۳۲(۲-\sqrt{۳})$$

از این گذشته داریم:

$$S_{AOL} = \frac{۱}{۲}AO.OL.\sin ۱۵۰^\circ = \frac{۱}{۲}R^۲.\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \times ۳۲(۲-\sqrt{۳}) = ۸(۲-\sqrt{۳})cm^۲$$

حال مساحت مثلث AFE را محاسبه می‌کنیم. چنین داریم:

$$HE = AH\tan ۳۰^\circ = \sqrt{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ ، } HF = AH\tan ۱۵^\circ = \sqrt{۲\sqrt{۳}}(۲-\sqrt{۳})$$

$$FE = HE - HF = \sqrt{۲\sqrt{۳}}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳} - ۲ + \sqrt{۳}\right) = \sqrt{۲\sqrt{۳}} \cdot \frac{۲(۲-\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{AFE}=\frac{۱}{۲}FE.AH=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲\sqrt{۳}}\,\frac{۲(۲-\sqrt{۳})}{\sqrt{۳}}\sqrt{۲\sqrt{۳}}=۲(۲-\sqrt{۳})cm^{۲}$$

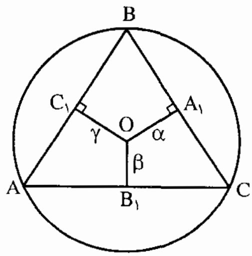
از این رو تساوی زیر نتیجه می‌شود :

$$S_{FEOL}=S_{AOL}-S_{AFE}=۸(۲-\sqrt{۳})-۲(۲-\sqrt{۳})=۶(۲-\sqrt{۳})cm^{۲}$$

۸ . ۱ . ۹ . رابطه‌های متری

۸ . ۱ . ۹ . ۱ . رابطه‌های متری (برابریها)

۷۰۳. در چهار ضلعی $AC_۱OB_۱$ داریم :



$$AO.B_۱C_۱=AB_۱.OC_۱+AC_۱.OB_۱ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow R\cdot\frac{a}{۲}=\frac{b}{۲}\cdot OC_۱+\frac{c}{۲}\cdot OB_۱$$

$$\Rightarrow R.a=b.OC_۱+c.OB_۱ \quad (۲)$$

$$R.b=c.OA_۱+a.OC_۱ \quad (۳)$$

$$R.c=b.OA_۱+a.OB_۱ \quad (۴)$$

$$r(a+b+c)=a.OA_۱+b.OB_۱+c.OC_۱ \quad (۵)$$

$$\Rightarrow (R+r)(a+b+c)\Rightarrow(a+b+c)\left(OA_۱+OB_۱+OC_۱\right)$$

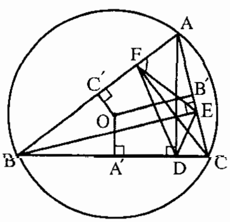
$$\Rightarrow OA_۱+OB_۱+OC_۱=R+r$$

$$\alpha+\beta+\gamma=R+r$$

۷۰۴. ارتباط بین کسرهای طرف چپ تساوی و کتانژانت زاویه‌های مثلث را به‌دست آورید.

۷۰۶. داریم :

$$\frac{EF}{BC}=\frac{OA'}{R}$$



همین‌طور :

$$\frac{DE}{AB}=\frac{OC'}{R} \text{ و } \frac{FD}{AC}=\frac{OB'}{R}$$

طرفین سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم، داریم :

$$\text{طرف اوّل}=\frac{OA'+OB'+OC'}{R}$$

اگر با استفاده از قضیهٔ کارنو به جای صورت مساویش $R+r$ را قرار دهیم، حکم ثابت می‌شود. $\frac{R+r}{R} =$ طرف اوّل

قضیهٔ کارنو. مجموع فاصله‌های مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث از سه ضلع، برابر است با شعاع دایرهٔ محیطی به علاوهٔ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی.

تبصره. در هر مثلث حاده‌الزاویه محیط مثلثی که پای ارتفاعهای مثلث رأسهای آنند برابر است با نسبت دو برابر مساحت مثلث به شعاع دایرهٔ محیطی آن.

حل. طبق مسأله داریم: $DE=\frac{OC'.c}{R} \quad FD=\frac{OB'.b}{R} \quad EF=\frac{OA'.a}{R}$

طرفین سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم. داریم:

$$\text{DEF محیط مثلث} = ۲P = \frac{OA'.a+OB'.b+OC'.c}{R} = \frac{۲S}{R}$$

۲.۹.۱.۸. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۷۰۷. می‌دانیم که قرینهٔ محل تلاقی سه ارتفاع نسبت به ضلعها، روی دایرهٔ محیطی است.

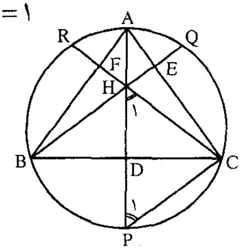
پس:

$\frac{AP}{AD} = ۱ + \frac{DP}{AD} = ۱ + \frac{HD}{AD}$ در نتیجه:

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF} = ۳ + \frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC}$$

یا:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{FC} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = ۱$$



پس:

$$\frac{AP}{AD}+\frac{BQ}{BE}+\frac{CR}{CF} = ۴$$

و با توجه به نامساوی $\frac{x+y+z}{۳} \geq \sqrt[۳]{xyz}$ $(x,y,z \geq ۰)$ داریم:

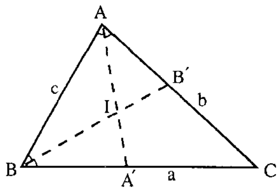
$$\frac{AP}{AD}\times\frac{BQ}{BE}\times\frac{CR}{CF} \leq \frac{۶۴}{۲۷}$$

پس: $$\frac{s^۳}{h^۳} \le \frac{۶۴}{۲۷} \Rightarrow \frac{h}{s} \ge \frac{۳}{۴} > \frac{۱۳۶۷}{۱۹۸۹}$$

۷۰۸. نیمسازهای داخلی مثلث را به d_a، d_b و d_c نشان می‌دهیم، در مثلث ABA'، $\frac{IA}{IA'} = \frac{c}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$ لذا $\frac{IA}{d_a} = \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b+c}{۲p}$ و به همین ترتیب، $\frac{IB}{d_b} = \frac{a+c}{۲p}$ و $\frac{IC}{d_c} = \frac{a+b}{۲p}$ پس، بنا به نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی داریم:

$$\frac{IA.IB.IC}{d_a d_b d_c} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(۲p)^۳} \le \frac{۱}{۲۷}\left(\frac{a+b}{۲p} + \frac{b+c}{۲p} + \frac{c+a}{۲p}\right)^۳$$

$$= \frac{۱}{۲۷}(۲)^۳ = \frac{۸}{۲۷}$$



برای اثبات طرف دیگر، از حکمهای زیر استفاده می‌کنیم:

۱) اگر $x + y = x_۱ + y_۱$ و $|x - y| < |x_۱ - y_۱|$ آن‌گاه $x^۳ + y^۳ < x_۱^۳ + y_۱^۳$، ($x$، y، $x_۱$ و $y_۱$ عددهای حقیقی مثبتند).

۲) برای هر سه عدد حقیقی a ، b و c تساوی زیر برقرار است:

$$۳(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)^۳ - a^۳ - b^۳ - c^۳$$

فرض می‌کنیم $a \ge b \ge c$، چون $\frac{a+b+c}{۲} > ۰$،

$\frac{a+b+c}{۲} - \frac{a+b-c}{۲} = c > |a-b|$ و $\frac{a+b+c}{۲} > \left|\frac{a+b-c}{۲} - c\right|$ بنابراین،

$$\frac{IA.IB.IC}{d_a.d_b.d_c} = \frac{(a+b+c)^۳ - a^۳ - b^۳ - c^۳}{۳(a+b+c)^۳} >$$

$$\frac{(a+b+c)^۳ - (\frac{a+b+c}{۲})^۳ - (\frac{a+b-c}{۲})^۳ - c^۳}{۳(a+b+c)^۳} >$$

$$\frac{(a+b+c)^۳ - (\frac{a+b+c}{۲})^۳ - (\frac{a+b+c}{۲})^۳ - ۰^۳}{۳(a+b+c)} = \frac{۱}{۴}$$

۸ . ۱ . ۱۰ . ثابت کنید مثلث با زاویه‌های حاده است

۷۰۹. بنا به رابطهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R \Rightarrow \frac{۱۲\sqrt{۳}}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{۶(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})}{\sin\hat{C}}=۲۴$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A}=۶۰^\circ \text{ یا } \hat{A}=۱۲۰^\circ$$

$$\sin\hat{C}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \hat{C}=۷۵^\circ \text{ یا } \hat{C}=۱۰۵^\circ>۰$$

زاویهٔ A نمی‌تواند برابر ۱۲۰ درجه باشد زیرا در آن صورت $\hat{A}+\hat{C}=۱۲۰^\circ+۷۵^\circ=۱۹۵^\circ>۱۸۰^\circ$ خواهد بود. بنابراین جواب قابل قبول ، $\hat{A}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۷۵^\circ$ است. از آن‌جا $\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۷۵^\circ)=۴۵^\circ$ است. بنابراین مثلث حاده‌الزاویه است.

۸ . ۱ . ۱۱ . سایرمسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۱۰. وقتی BM ارتفاع مثلث باشد.

۸ . ۱ . ۱۲ . مسأله‌های ترکیبی

۷۱۶. الف. در زاویهٔ ADB، زاویهٔ $A\hat{D}M=۹۰^\circ$ را به شرط $MD=AD$ جدا می‌کنیم. بنابراین $M\hat{D}B=\hat{C}$ پس $\Delta ACB \sim \Delta MDB$ (زیرا $M\hat{D}B=\hat{C}$ و $\frac{AC}{CB}=\frac{MD}{DB}$). بنابراین :

$$M\hat{B}D=\hat{B} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲ \quad (۱) \text{ و } \frac{MB}{AB}=\frac{BD}{BC} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\Delta BDC \sim \Delta MBA$. پس $\frac{CD}{MA}=\frac{BC}{AB}$. بنابراین چون $MA=\sqrt{۲}AD$. پس :

$$CD.AB=\sqrt{۲}.AD.BC \text{ و } \frac{CD.AB}{AD.BC}=\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{CD.AB}{AC.BD}=\sqrt{۲}$$

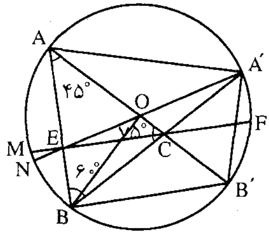
ب. اگر خطهای CX و CY بترتیب مماس بر دایرهٔ محیطی مثلثهای BCD و ACD باشند، خواهیم داشت :

$$D\hat{C}X=D\hat{A}C \Rightarrow X\hat{C}Y=D\hat{C}X+D\hat{C}Y=D\hat{B}C+D\hat{A}C=C\hat{B}A+C\hat{A}B$$

$$-D\hat{B}A-D\hat{A}B=(۱۸۰^\circ-A\hat{C}B)-(۱۸۰^\circ-A\hat{D}B)=۹۰^\circ \Rightarrow CX\perp CY$$

۷۱۷. ۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB یک زاویهٔ حادهٔ ۴۵ درجه است پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AO = BO$ یعنی دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OB از A می‌گذرد.

۲. نقطه‌های A' و E را به نقطهٔ O مرکز دایره وصل می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم که سه نقطهٔ E و O و A' بر یک استقامت قرار دارند. در چهارضلعی محاطی BEOC زاویهٔ EOC مکمل زاویهٔ B یعنی ۱۲۰ درجه است، از طرف دیگر اگر از نیمدایرهٔ $AA'B'$ کمان $AA' = ۱۲۰^\circ$ (مقابل به زاویهٔ محاطی $B = ۶۰^\circ$) را کم کنیم کمان $A'B'$ و در نتیجه زاویهٔ مرکزی $A'OB'$ مساوی با ۶۰ درجه می‌شود پس: $E\hat{O}C+A'\hat{O}C=۱۸۰^\circ$



یعنی $A'OE$ خط راست است. از این استدلال در ضمن نتیجه می‌شود که $A'B'$ وتر کمان ۶۰ درجه یعنی مساوی با شعاع دایره است. پس: $A'B' = OB$

مثلث $A'OB$ متساوی‌الساقین است $(OB = OA')$ پس: $O\hat{A'}C = O\hat{B}C'$ و در چهارضلعی محاطی OEBC داریم: $O\hat{E}C = O\hat{B}C$ پس: $O\hat{E}C = O\hat{A'}C$ و مثلث ECA' متساوی‌الساقین است. یعنی $CE = CA'$.

۳. اندازهٔ زاویهٔ $OA'C$ نصف اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BN}$ و اندازهٔ زاویهٔ $O\hat{E}C$ نصف مجموع اندازه‌های دو کمان $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{A'F}$ است چون این دو زاویه متساوی‌اند پس:

$$\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{A'F} + \overset{\frown}{MN}$$

و یا:

$$\overset{\frown}{A'F} = \overset{\frown}{BN} - \overset{\frown}{MN}$$

چنان که دیدیم زاویه‌های مثلث AEO، ۴۵، ۶۰ و ۷۵ درجه هستند. برای مثلث $A'B'C$ نیز که زاویه‌های آن با زاویه‌های مثلث ABC یا روبه‌رو هستند یا مقابل به کمانهای مشترکند، همین‌طور است در ضمن ضلعهای $A'B'$ و AO که مابین ۴۵ و ۶۰ درجه محصورند، در دو مثلث متساوی‌اند پس این دو مثلث با هم برابرند.

۴. اگر $AB = a\sqrt{۲}$ فرض شود چون AB در دایرهٔ مفروض $C_۴$ است پس معلوم می‌شود $R\sqrt{۲} = a\sqrt{۲}$ یعنی شعاع دایره a است پس : $A'B' = a$ و $AB' = ۲a$ و $BB' = C_۴ = a\sqrt{۲}$ و $AA' = C_۳ = a\sqrt{۳}$.

اگر رابطهٔ بطلمیوس را در چهارضلعی $ABB'A'$ بنویسیم، طول قطر BA' مشخص می‌شود :

$$AB' \times BA' = AB \times A'B' + AA' \times BB'$$

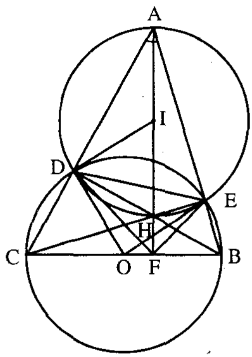
و یا :

$$۲a \times BA' = a\sqrt{۲} \times a + a\sqrt{۳} \times a\sqrt{۲}$$

و یا :

$$BA' = \frac{a}{۲}(\sqrt{۲} + \sqrt{۶})$$

۷۱۸. ۱. BD و CE دو ارتفاع مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی مثلث است پس AH سومین ارتفاع این مثلث و در نتیجه AH بر BC عمود است.



چهارضلعی ADHE که دو زاویهٔ قائمه روبه‌روی D و E را دارد در دایره‌ای به قطر AH و به مرکز نقطهٔ I وسط پاره‌خط AH محاطی است.

۲. مثلث ADB در رأس D قائم‌الزاویه و چون $B\hat{A}D = ۴۵^\circ$ است، پس $A\hat{B}D = ۴۵^\circ$ و در نتیجه این مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. زاویهٔ $E\hat{B}D$ محاط در دایرهٔ (O) و داریم :

$$E\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲} = ۴۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DE} = ۹۰^\circ$$

۳. مثلثهای DIA و DOB متساوی‌الساقین هستند و $AD = DB$ امّا زاویه‌های DAI و DBO که ضلعهایشان دو به دو بر هم عمودند، برابرند. دو زاویهٔ دیگر قاعده ADI و ODB نیز متساوی‌اند. بنابراین دو مثلث همنهشتند. از آن‌جا نتیجه می‌شود که $DI = DO$ و دو دایرهٔ (O) و (I) با هم مساوی‌اند. بعلاوه

$$O\hat{D}I = B\hat{D}I + O\hat{D}B = B\hat{D}I + I\hat{D}A = ۹۰^\circ$$

ID عمود بر OD و مماس بر دایرهٔ (O) و همچنین OD مماس به دایرهٔ (I) است.

۴. چهار ضلعی BEHF که دو زاویهٔ روبه‌روی قائمه E و F را دارد محاط در یک دایره است. از آن‌جا $H\hat{F}E = H\hat{B}E = ۴۵^\circ$. پس کمان $\overset{\frown}{DE}$ برابر ۹۰° است. همچنین می‌توان دید که $H\hat{F}D = ۴۵^\circ$ و از آن‌جا $D\hat{F}E = ۹۰^\circ$ است.

وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ DFE، پاره‌خط DE است. اما DE وتر نظیر کمان ۹۰° در دایره

است. بنابراین DE برابر ضلع مربع محاط در دایرهٔ (O) و در نتیجه $DE = R\sqrt{۲}$ است.

۸ . ۲ . رابطه‌های متری در مثلث با زاویهٔ منفرجه و دایره

۸ . ۲ . ۲ . زاویه

۸ . ۲ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۷۱۹. $\frac{۲\pi}{۳}$

۸ . ۲ . ۳ . ضلع

۸ . ۲ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۷۲۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB داریم :

$$AB = \sqrt{AH^{۲} + HB^{۲}} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲cm$$

$$\sin H\hat{A}B = \frac{HB}{AB} = \frac{۳(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})}{۱۲} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow H\hat{A}B = ۱۵^\circ = A\hat{C}B$$

$$\Rightarrow A\hat{B}H = ۹۰^\circ - ۱۵^\circ = ۷۵^\circ \Rightarrow A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ \Rightarrow B\hat{A}C = ۶۰^\circ$$

حال بنا به رابطهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{b}{\sin ۱۰۵^\circ} = \frac{۱۲}{\sin ۱۵^\circ}$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}} = \frac{۲۴\sqrt{۳}(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})}{۴} = ۶(۳\sqrt{۲} + \sqrt{۶})cm$$

$$b = \frac{۱۲(\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴})}{\frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}} = \frac{۱۲(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})^{۲}}{۴} = ۳(۸ + ۴\sqrt{۳})$$

۸ . ۲ . ۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۸ . ۲ . ۴ . ۱. اندازهٔ ارتفاع

۷۲۱. زاویهٔ A از مثلث ABC برابر $\frac{۲۴۰}{۲}=۱۲۰^\circ$ است. از آن‌جا : $\hat{C}=۴۵^\circ$ و در نتیجه با استفاده از رابطهٔ سینوسها داریم :

$$\frac{a}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{b}{\sin ۱۵^\circ}=\frac{۸}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow a=۴\sqrt{۶}\text{cm}\ ,\ b=\sqrt{۳}-۱\text{cm}$$

با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع، طول ارتفاعهای مثلث قابل محاسبه است.

۸ . ۲ . ۵. پاره‌خط

۸ . ۲ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۲۲. ۲۴ سانتیمتر

۸ . ۲ . ۵ . ۲. نسبت پاره‌خطها

۷۲۳. توجه کنید که PQ بر CB عمود است. فرض کنید T نقطهٔ برخورد MN و PQ باشد و L و K پای عمودهای وارد از C و B بر خط راست MN باشند (L و K روی دایره‌های با قطرهای CN و BM واقعند). از ویژگی وترهای متقاطع در دایره‌ها، به دست می‌آوریم :

$$|PT|.|TQ|=|NT|.|LT|$$

$$|PT|.|TQ|=|MT|.|TK|$$

اما $|LT|=|CD|$ و $|TK|=|DB|$ (زیرا CLKB مستطیل و PQ بر CB عمود است).

بنابراین، $|NT|.|CD|=|MT|.|DB|$. یا $\frac{|MT|}{|NT|}=\frac{|CD|}{|DB|}$ ، یعنی، خط راست PQ، CB و MN را به یک نسبت تقسیم می‌کند. بنابراین، PQ از نقطهٔ A می‌گذرد، و D پای ارتفاع است. جواب : $|BD|:|DC|=۱:\sqrt{۳}$

۸ . ۲ . ۶. شعاع دایره

۸ . ۲ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع

۷۲۴. ۴/۵ سانتیمتر

۸ . ۲ . ۷. محیط

۸ . ۲ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۷۲۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB، داریم : $AB=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰cm$ از طرفی داریم :

$HA^۲=HB.HC$ بنابراین :

$$۶۴=۶\times HC\Rightarrow HC=\frac{۳۲}{۳}cm \qquad BC=HC-HB=\frac{۳۲}{۳}-۶=\frac{۱۴}{۳}cm$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم :

$$AC=\sqrt{AH^۲+HC^۲}=\sqrt{۶۴+\frac{۱۰۲۴}{۹}}=\sqrt{\frac{۱۶۰۰}{۹}}=\frac{۴۰}{۳}cm$$

در نتیجه محیط مثلث برابر است با :

$$۲P=AB+BC+AC=۱۰+\frac{۱۴}{۳}+\frac{۴۰}{۳}=۲۸cm$$

۸ . ۲ . ۸. مساحت

۸ . ۲ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت

۷۲۶. با توجه به داده‌های مسأله در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ HAC و HAB داریم :

$$H\hat{C}A=۱۵^\circ\ ,\ H\hat{A}C=H\hat{C}B=۷۵^\circ$$

$$HA=HC.\tan۱۵^\circ=۱۲(۲-\sqrt{۳})\ ,$$

$$HB=HC.\tan۷۵^\circ=۱۲(۲+\sqrt{۳})$$

از آن‌جا :

$$\Rightarrow AB=HB-HA=۲۴\sqrt{۳}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times CH=\frac{۱}{۲}\times ۲۴\sqrt{۳}\times ۱۲=۱۴۴\sqrt{۳}cm^۲$$

۸ . ۲ . ۸ . ۲. نسبت مساحتها

۷۲۷. $\frac{۳\sqrt{۳}(\sqrt{۱۳}-۱)}{۳۲\pi}$

۸ . ۲ . ۹. ثابت کنید مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است

۷۲۸. با جایگزینی R و r با دستورهای $R=\frac{abc}{۴S}$ و $r=\frac{S}{P}$، برای محاسبهٔ S، از دستور

هرون و برابری

$$4S^2\left(P-\frac{abc}{S}-\frac{S}{P}\right)\left(P+\frac{abc}{2S}+\frac{S}{P}\right)=\frac{1}{8}(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)$$

استفاده کنید.

۷۲۹. فرض کنید c طول بزرگترین ضلع، روبه‌رو به رأس C، باشد. اگر $a^2+b^2+c^2-8R^2>0$ آن وقت $a^2+b^2>8R^2-c^2\geq c^2$ (زیرا $c\leq 2R$)، یعنی، مثلث حاده است. بعکس، فرض کنید مثلث حاده باشد، در این صورت، $a^2+b^2+c^2=2m_c^2+\frac{3}{2}c^2$ (m_c طول میانهٔ وارد بر ضلع با طول c است) ؛ از این‌رو، طول کوتاهترین میانهٔ، از مجموع $a^2+b^2+c^2$ کمتر است. اما، طول میانه ماکسیمال است، اگر که C وسط کمان باشد و با جابه‌جا شدن C روی کمان، کوتاه می‌شود. وقتی که مثلث قائم‌الزاویه باشد، مجموع $a^2+b^2+c^2-8R^2$ برابر با صفر است.

۸ . ۲ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی

۷۳۰. ۱. بنا به رابطهٔ کسینوسها در مثلث داریم :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}\,,\ \ \hat{A}=120^\circ\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos120^\circ$$

$$=b^2+c^2-2bc\left(-\frac{1}{2}\right)=b^2+c^2+bc\Rightarrow a^2=b^2+c^2+bc$$

۲. می‌دانیم که $r_b=\frac{S}{p-b}$ ، $r_c=\frac{S}{p-c}$ و $R=\frac{abc}{4S}$ است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $r_b+r_c=R$ است. داریم :

$$\frac{S}{p-b}+\frac{S}{p-c}=\frac{abc}{4S}\Rightarrow\frac{S(p-c+p-b)}{(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{4S}$$

$$\Rightarrow 4S^2\times a=abc(p-b)(p-c)\Rightarrow 4p(p-a)(p-b)(p-c)=bc(p-b)(p-c)$$

که این رابطه نیز برقرار است :

$$\Rightarrow(a+b+c)(b+c-a)=bc\Rightarrow a^2=b^2+c^2+bc$$

۳. $r_a-r=3R$. داریم :

$$\frac{S}{p-a}-\frac{S}{p}=\frac{3abc}{4S}$$

$$\Rightarrow \frac{S(p-p+a)}{p(p-a)}=\frac{۳abc}{۴S}\Rightarrow \frac{aS}{p(p-a)}=\frac{۳abc}{۴S}$$

$$\Rightarrow ۴S^۲=۳bc(p)(p-a)\Rightarrow ۴p(p-a)(p-b)(p-c)=۳bcp(p-a)$$

که این رابطه نیز درست است.

$$\Rightarrow (a+c-b)(a+b-c)=۳bc\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲+bc$$

۴. $\frac{۱}{d_a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$.

$$d_a=\frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}\Rightarrow \frac{b+c}{۲\sqrt{pbc(p-a)}}=\frac{b+c}{bc}$$

$$\Rightarrow ۴pbc(p-a)=b^۲c^۲\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)=bc\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲+bc$$

که این رابطه نیز برقرار است.

۵. داریم:

$$h_b.h_c=\frac{۳}{۴}bc\Rightarrow \frac{۲S}{b}\times\frac{۲S}{c}=\frac{۳}{۴}bc$$

$$\Rightarrow ۱۶S^۲=۳b^۲c^۲\Rightarrow ۱۶p(p-a)(p-b)(p-c)=۳b^۲c^۲$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=۳b^۲c^۲$$

$$\Rightarrow (b^۲+c^۲+۲bc-a^۲)(a^۲-b^۲-c^۲+۲bc)=۳b^۲c^۲$$

$$\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲+bc\Rightarrow (bc)(۳bc)=۳b^۲c^۲\Rightarrow ۳b^۲c^۲=۳b^۲c^۲$$

۶. $۸(m_b^۲+m_c^۲)-۴m_a^۲=۹a^۲$

$$\Rightarrow ۸\left(\frac{۲(a^۲+c^۲)-b^۲}{۴}+\frac{۲(a^۲+b^۲)-c^۲}{۴}\right)-۴\times\frac{۲(b^۲+c^۲)-a^۲}{۴}=۹a^۲$$

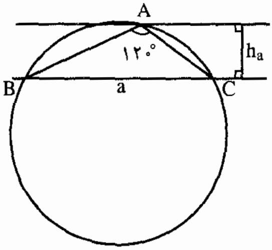
$$\Rightarrow ۴a^۲+۴c^۲-۲b^۲+۴a^۲+۴b^۲-۲c^۲-۲b^۲-۲c^۲-a^۲=۹a^۲\Rightarrow ۹a^۲=۹a^۲$$

۷. $d_b.d_c=۳R.d_a\Rightarrow \frac{۲}{a+c}\sqrt{pac(p-b)}.\frac{۲}{a+b}\sqrt{pab(p-c)}$

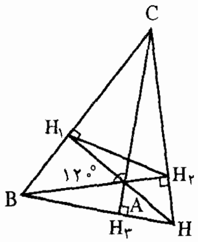
$$=۳R\times\frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$$

با مجذور کردن دو طرف و استفاده از شرطهای قبلی درستی رابطه را ثابت کنید.

۸. با معلوم بودن a و S، اندازهٔ h_a نیز محاسبه می‌شود. بنابراین مثلث با معلوم بودن ضلع a، زاویهٔ $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و h_a، قابل رسم است. بدین ترتیب که پاره‌خطی برابر a رسم



می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ °۱۲۰ روبه‌این پاره‌خط را رسم می‌کنیم. آن‌گاه دو خط موازی BC و به فاصلهٔ $h_a = \frac{2S}{a}$ از آن رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو خط با کمان درخور، رأس A از مثلث ABC است.



۹. نقطه‌های H_1، H_2 و H_3 را بترتیب پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C و H را نقطهٔ برخورد ارتفاعها می‌نامیم. چهارضلعی BHH_2H_1 محاطی است و داریم:

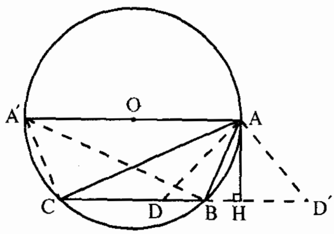
$$AH.AH_1 = AB.AH_2$$

امّا $AH_1 = \frac{2S}{a}$ و $AH_2 = \frac{a^2-b^2-c^2}{2c} = \frac{bc}{2c} = \frac{b}{2}$

و $AB = c$ است. پس داریم:

$$AH.\frac{2S}{a} = c\times\frac{b}{2} \Rightarrow AH = \frac{abc}{4S} = R$$

نکته. از مثلث قائم‌الزاویهٔ °۹۰ – °۶۰ – °۳۰، ACH_2 نیز رابطهٔ $AH_2 = \frac{b}{2}$ نتیجه می‌شود.



۷۳۱. ۱. در مثلث ABC دو رابطهٔ زیر را داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$$

اگر این دو رابطه را عضو به عضو از هم کم یا جمع کنیم حاصل می‌شود:

$$\hat{A}+2\hat{C}=90^\circ \quad \text{و یا} \quad \frac{\hat{A}}{2}+\hat{C}=45^\circ$$

زاویهٔ ADB زاویهٔ خارجی مثلث ADC است.

پس: $A\hat{D}B = \hat{C}+\frac{\hat{A}}{2} = 45^\circ$ و مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' متساوی‌الساقین است.

۲. زاویهٔ B زاویهٔ خارجی مثلث ABH است پس:

$B\hat{A}H + 90^\circ = \hat{B}$ و از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ $\hat{B} = 90^\circ + \hat{C}$ نتیجه می‌شود :

$B\hat{A}H = \hat{C}$ پس دو مثلث ACH و BAH متشابه‌اند و داریم :

$$\overline{AH}^2 = BH \times CH \quad \text{و یا} \quad \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

۳. از تساوی $A\hat{C}B = B\hat{A}H$ معلوم می‌شود که زاویهٔ BAH زاویه ظلی است و AH بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس است. پس قطر AA' که بر AH عمود است با BC موازی است.

۴. ذوزنقهٔ $AA'CB$ که در دایره محاط است متساوی‌الساقین است پس :

$BA' = AC = b$ و $CA' = AB = c$

الف. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACA' نتیجه می‌شود :

$$b^2 \times c^2 = \overline{AA'}^2 = 4R^2$$

ب. اگر حکم قضیهٔ بطلمیوس را در چهارضلعی $AA'CB$ بنویسیم حاصل می‌شود :

$$AC \times A'B = BC \times AA' + AB \times CA'$$

و یا : $b^2 = a \times 2R + c^2$ و یا بالاخره : $b^2 - c^2 = 2a \times R$

۷۳۲. ۱ و ۲. آسان است.

۳. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه و مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ را به کار بندید.

۴. ساده است.

فهرست منابع جلد ۶

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. هاورد. و ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن‌ماخر ـ رابوت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۶. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا...محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۷. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۸. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اوّل. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی.

۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشردانشگاهی.
۱۰. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د.فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات اینشتن.
۱۱. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل‌دانشجو.
۱۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ.س.م. کوکس‌تیرـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۳. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا.
۱۴. تاریخ ریاضیات. جلد اوّل. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری‌افشار.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری‌افشار.
۱۶. تاریخ هندسه. پی‌یرمارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۷. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اوّل و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۸. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۱۹. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۰. ۴۵۰ مسأله ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۳. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۴. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۵. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس‌ذوالقدر.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۹. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.

۳۰. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی - پرویز شهریاری - غلامرضا بهنیا - باقر امامی - علی‌اصغر شیخ‌رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمدعلمی.
۳۱. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۲. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۳. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو - و.ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری- ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۴. در پی فیثاغورس. شه‌پان‌النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۵. دوره حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اوّل و دوم. ابوالقاسم قربانی- دکترحسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۳۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.
۴۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۲. ریاضیات زنده. ی، پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۳. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل‌بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۵. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۴۶. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی.ال.برگرن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل - دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۷. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور. مؤسسهٔ انتشارات مدبر.
۴۸. محاسبه‌های برداری. تألیف پرویز شهریاری.
۴۹. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. موری.اس.کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. نشر بردار.
۵۰. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف. یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.

۵۱. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۲. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و.د.چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۵۳. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... . گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گسترده.
۵۴. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۵. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای.خ.سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اوّل. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمدقزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز.ت.سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت.سالکیند. جیمز.م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۹. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو. گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۰. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و.س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۳. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۶۴. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۵. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۶۶. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی ـ چنتسوف ـ یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۶۷. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۶۸. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. گازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۹. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۷۰. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۱. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۷۲. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۳. هندسهٔ تحلیلی. حسین عیوزـ محسن عیوز. انتشارات صفی‌علیشاه.
۷۴. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۵. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعه کتابهای سیمرغ.
۷۶. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۷۷. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده ـ حسین عیوز ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۷۸. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۷۹. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۸۰. هندسهٔ سالهای اوّل، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۸۱. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۲. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ۱. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۸۳. هندسهٔ موئیزـ لانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۴. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان وزارت آموزش و پرورش.
۸۵. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
86. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR F.G.M.
87. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR Th. CARONNET.

88. EXERCISES DE GÉOMÉTRIE MODERNE PAR G. PAPELIER.

89. GEOMETRYA HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE, GENE MURROW.

90. GIANT COLOUR BOOK OF MATHEMATICS BY IRVING ADLER.

91. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRÉ.

92. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.

93. LES NOMBRES ET LEURS MYSTÉRES. PAR ANDRE WARUSFEL.

94. MATHEMATICS AROUND US.

95. MÉMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR A. PONT.

96. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A. M. WELCHONS, W. R. KRICKENBERGER, HEIEN. R. PEARSON.

97. PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE PAR ANDRÉ VIEILLEFOND, P. TURMEL.

98. PRENTICE HALL GEOMETRY, BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

99. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.

100. RESOLUTION DES PROBLEMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE. PAR, E. J. HONNET.

101. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY MARTIN Mc. DONOUGH, ALVIN J. HANSEN.