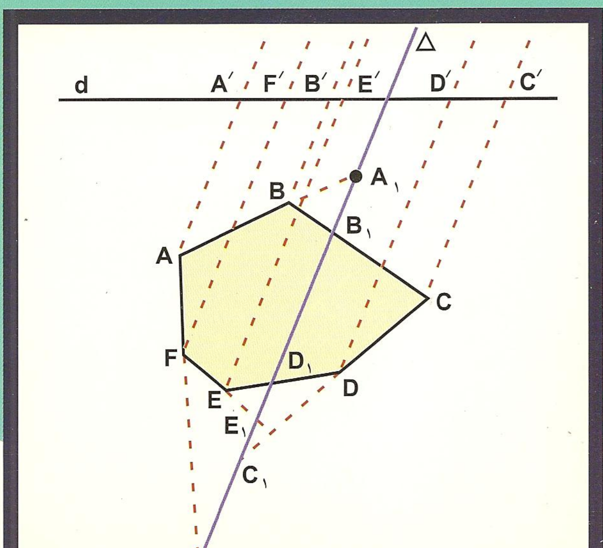
دایرة المعارف هندسه

۷

رابطه های متری در چندضلعیها

(چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی ومحیطی، پنج ضلعی، ...، چندضلعیهای منتظم)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرة‌المعارف هندسه

«جلد هفتم»

رابطه‌های متری در چندضلعیها

(چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی،
پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی،... و چندضلعیهای منتظم)

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

QA رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ -
۵۰۱/۵ دایرةالمعارف هندسه/ مؤلف محمدهاشم رستمی. - تهران: سازمان پژوهش و
۵ ر برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸.
۲ د ج.: مصور، جدول، نمودار.

ISBN 964-436-996-3 (ج. ۷).

فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).

ویرایش اول جلد اول با عنوان دایرةالمعارف مسائل هندسه در سال ۱۳۷۴ منتشر شده است.

کتابنامه.

مندرجات: ج. ۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه. ج. ۲. ... ج. ۷. رابطه‌های متری در چندضلعیها (چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی،... و چندضلعیهای منتظم).

۱. هندسه - مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف مسائل هندسه.

۵۱۶/۰۰۷۶ QA ۵۰۱/۵ ر ۵ د ۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه

(جلد هفتم)

رابطه‌های متری در چندضلعیها

مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اول: پاییز ۱۳۷۹
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۳-۹۹۶-۴۳۶-۹۶۴
ISBN-964-436-996-3

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.

از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی و هشت سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار یا در دسترس بود، برای تألیف دایرة المعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه.
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، ...).
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی).
۶. هندسهٔ تحلیلی.
۷. هندسهٔ فضایی.
۸. هندسه‌های نااقلیدسی.
...

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را در بر می‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است:

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛
جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛
جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛
جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...) ؛ و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛
جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعی، شش ضلعی، ...) ؛

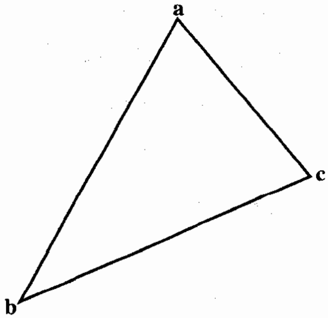
برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند ؛ و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی، آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره خط AB، به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده «در مثلث abc به ضلعهای ab، bc و ac، ...».



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به عنوان مثال، همه جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B و C و … ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB، و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، شامل رابطه‌های متری در چند ضلعیهاست، که دارای ۵ بخش است :

بخش ۱. رابطه‌های متری در چهارضلعی

بخش ۲. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه

بخش ۳. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محاطی و محیطی

بخش ۴. رابطه‌های متری در پنج ضلعی، شش ضلعی، …

بخش ۵. رابطه‌های متری در چند ضلعیهای منتظم

هر یک از بخشهای بالا به زیر بخشهایی تقسیم شده است. به عنوان مثال، بخش ۲. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه، دارای ۵ زیر بخش زیر است :

۲.۱. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع

۲.۲. رابطه‌های متری در مستطیل

۲.۳. رابطه‌های متری در مربع

۲.۴. رابطه‌های متری در لوزی

۲.۵. رابطه‌های متری در ذوزنقه

هر یک از این زیربخشها، خود زیربخشهای جدیدی دارند. به عنوان مثال، زیربخش ۲.۱. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع، دارای ۱۲ زیربخش زیر است :

۲.۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱.۲. زاویه

۲.۱.۳. ضلع

۲.۱.۴. قطر

۲.۱.۵. پاره‌خط

۲.۱.۶. شعاع دایره

۲.۱.۷. محیط

۲.۱.۸. مساحت

۲.۱.۹. رابطه‌های متری

۲.۱.۱۰. ثابت کنید شکل متوازی‌الاضلاع است

۲.۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۱.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

بیشتر زیربخشهای بالا نیز، زیربخشهای جدیدی دارند و در هر یک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه مورد استفادهٔ دانش پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرها و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها، و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رابطه‌های متری در چندضلعیها

بخش ۱. رابطه‌های متری در چهارضلعی
بخش ۲. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه
بخش ۳. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محیطی و محاطی
بخش ۴. رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی،...
بخش ۵. رابطه‌های متری در چندضلعیهای منتظم

بخش ۱

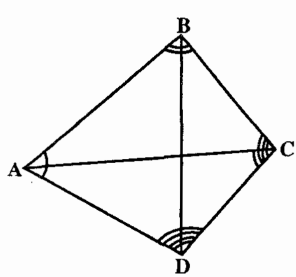
• رابطه‌های متری در چهارضلعی

بخش ۱. رابطه‌های متری در چهارضلعی

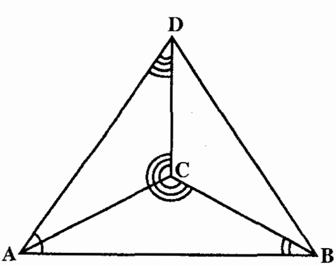
۱.۱. تعریف و قضیه

چهارضلعی را می‌شناسیم و می‌دانیم که چهارضلعی می‌تواند کوژ (محدب) باشد مانند چهارضلعی محدب ABCD، (شکل الف) و یا کاو (مقعر) باشد، مانند چهارضلعی مقعر ABCD، (شکل ب).

AB، BC، CD و DA ضلعهای چهارضلعی، AC و BD قطرهای آن و $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ و $\hat{D}$ ، اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی می‌باشند.



(الف)



(ب)

۱. **قضیهٔ اولر.** در هر چهارضلعی، مجموع مربعهای ضلعها مساوی است با مجموع مربعهای قطرها، به علاوهٔ چهار برابر مجذور پاره‌خط واصل بین وسطهای قطرها.

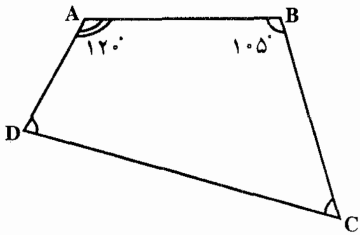
۲. فرض کنید a، b، c و d، طول ضلعهای یک چهارضلعی، m و n، طول قطرهای آن، و A و C دو زاویهٔ روبه‌رو به هم از آن باشند. در این صورت، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$m^{2}n^{2} = a^{2}c^{2} + b^{2}d^{2} - 2abcd\cos(\hat{A}+\hat{C})$$

(قضیهٔ برشنیدر یا قانون کسینوسها در چهارضلعی).

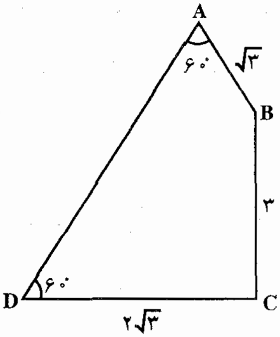
۲.۱. زاویه

۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۳. در چهارضلعی محدب ABCD، $\hat{A}=120^\circ$، $\hat{B}=105^\circ$ و $\hat{D}=2\hat{C}$ است. اندازهٔ زاویهٔ C را تعیین کنید.

۴. در چهارضلعی ABCD، $BC=3$ و $AB=\sqrt{3}$ و $\hat{A}=\hat{D}=60^\circ$ و $CD=2\sqrt{3}$ را داریم. زاویه‌های B و C را به دست آورید.



۵. در چهارضلعی محدب ABCD، $\hat{A}=2\hat{B}$، $\hat{B}=2\hat{D}$ و $3\hat{C}=2\hat{B}$ است. اندازهٔ زاویه‌های این چهارضلعی را بیابید.

۶. در چهارضلعی کوژ ABCD داریم:

$AB=BC$، $A\hat{D}C=130^\circ$، $C\hat{B}D=35^\circ$، $A\hat{B}D=65^\circ$، زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.

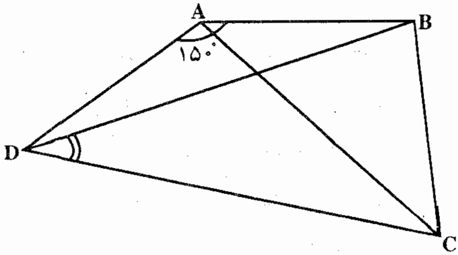
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

۷. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محدب باشد. ثابت کنید، دست‌کم یکی از چهار زاویهٔ BAC، DBC، ACD و BDA، از $\frac{\pi}{4}$ تجاوز نمی‌کند.

۸. مساحت یک چهارضلعی برابر ۳ سانتیمتر مربع و طول قطرهای آن، برابر ۶ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر است. زاویهٔ بین دو قطر را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۹. در چهارضلعی ABCD داریم: $D\hat{A}B=150^\circ$ ، $D\hat{A}C+A\hat{B}D=120^\circ$ و $D\hat{B}C-A\hat{B}D=60^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ BDC را پیدا کنید.



۱۰. در چهارضلعی محدب ABCD، می‌دانیم $C\hat{A}B=40^\circ$ ، $C\hat{A}D=30^\circ$ ، $D\hat{B}A=75^\circ$ و $D\hat{B}C=25^\circ$. مطلوب است تعیین اندازهٔ زاویهٔ BDC.

المپیادهای ریاضی ترکیه، ۱۹۹۵

۱۱. در چهارضلعی ABCD، B زاویهٔ قائمه بوده و $AB:BD=2:4\sqrt{2}$ است. امتدادهای ضلعهای BC و AD همدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. با شرط $A\hat{B}D=45^\circ$ ، اندازهٔ زاویهٔ DMC را به دست آورید.

۱۲. قطرهای چهارضلعی محدب ABCD در نقطهٔ O با زاویه‌های قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند و $BO=CO=1cm$ ، $AO=8cm$ و $DO=7cm$ است. امتداد ضلعهای AB و CD همدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند. زاویهٔ AMD را به دست آورید.

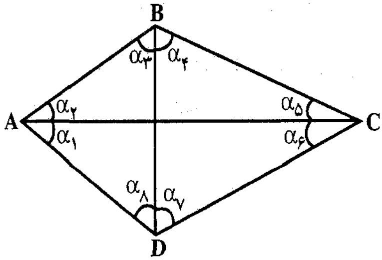
۱۳. در چهارضلعی محدب ABCD، $AB=AD$. در درون مثلث ABC، نقطه‌ای مانند M طوری اختیار می‌شود که $M\hat{B}A=A\hat{D}C$ و $M\hat{C}A=A\hat{C}D$. اگر $B\hat{A}C=\alpha$ ، $A\hat{D}C-A\hat{C}D=\varphi$ و $AM<AB$ باشد، $M\hat{A}C$ را پیدا کنید.

۱۴. در چهارضلعی ABCD، ضلع AB تا نقطهٔ E به طوری که $AB=BE$ امتداد یافته است. خطهای AC و CE رسم شده‌اند تا زاویهٔ ACE به دست آید. برای این که این زاویه قائمه باشد، لازم است که چهارضلعی دارای کدام ویژگی زیر باشد؟

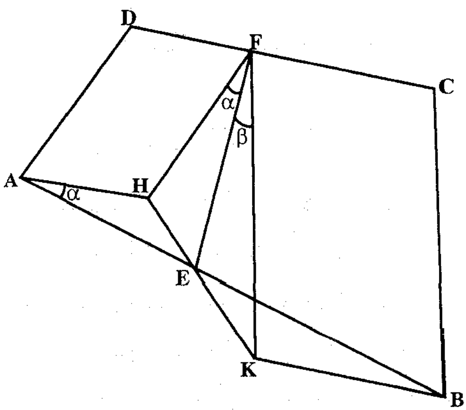
الف) همهٔ زاویه‌هایش با هم برابر باشند.
ب) همهٔ ضلعهایش با هم برابر باشند.
ج) ضلعهایش دو به دو برابر باشند.
د) دو ضلعش برابر باشند.
هـ) دو زاویه‌اش برابر باشند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۵

۲.۲.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۱۵. در یک چهارضلعی محدب، قطرها، زاویه‌های چهارضلعی را بترتیب و در یک جهت به زاویه‌های α_1 ، α_2 ، α_3 ، α_4 ، α_5 ، α_6 ، α_7 و α_8 تقسیم می‌کنند. چه رابطه‌ای بین حاصلضرب سینوس زاویه‌های زوج و حاصلضرب سینوس زاویه‌های فرد وجود دارد؟



۱۶. چهارضلعی ABCD داده شده است. روی ضلعهای مقابل AB و CD نقطه‌های E و F را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{EA}{EB} = \frac{FD}{FC} = \frac{AD}{BC}$ باشد، ثابت کنید، خط EF با ضلعهای BC و AD، زاویه‌های متساوی می‌سازند.

۳.۱. ضلع

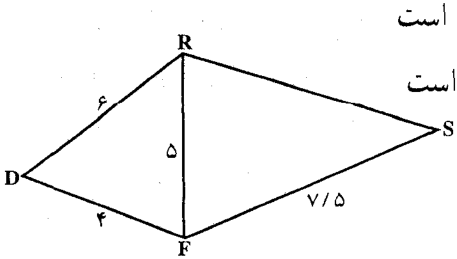
۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۱۷. در شکل زیر دو زاویهٔ RFS و FDR با هم برابرند و بر حسب سانتیمتر $FS = ۷\frac{۱}{۲}$ ، $FR = ۵$ ، $DR = ۶$ و $FD = ۴$. طول RS بر حسب سانتیمتر :

الف) غیرقابل تعیین است ب) ۴ است

ج) $۵\frac{۱}{۲}$ است د) ۶ است

هـ) $۶\frac{۱}{۴}$ است



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۴

۱۸. در چهارضلعی ABCD، قطرهای AC و BD در نقطهٔ O برخورد می‌کنند و داریم: BO = ۴ ، OD = ۶ ، AO = ۸ ، OC = ۳ و AB = ۶ . طول ضلع AD برابر است با :

الف) ۹ ب) ۱۰

ج) $۶\sqrt{۳}$ د) $۸\sqrt{۲}$

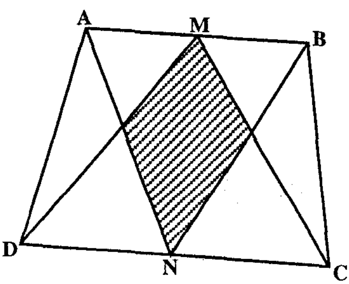
هـ) $\sqrt{۱۶۶}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۱۹. در چهارضلعی کوژ ABCD، دو زاویهٔ A و B با هم برابرند ؛ همچنین می‌دانیم : BC = ۱ و AD = ۳ . ثابت کنید، طول ضلع CD از ۲ بیشتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

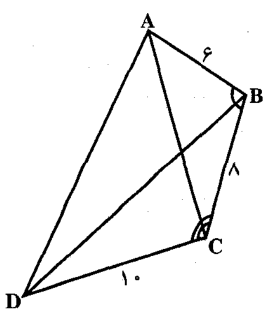
۱.۳.۲. نسبت ضلعها



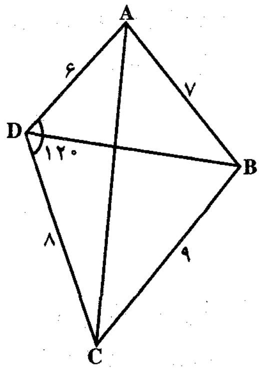
۲۰. ABCD چهارضلعیی محدب است. M وسط AB و N وسط CD است. می‌دانیم مساحت مثلثهای ABN و CDM برابر است، و مساحت بخش مشترکشان برابر با $\frac{1}{k}$ مساحت هر یک از آنهاست. نسبت طول ضلعهای BC و AD را پیدا کنید.

۱.۴. قطر

۱.۱.۴. اندازهٔ قطر



۲۱. در چهارضلعی ABCD، AB = ۶cm ، BC = ۸cm ، CD = ۱۰cm ، $A\hat{B}C = ۱۲۰^\circ$ و $B\hat{C}D = ۱۳۵^\circ$ است. اندازهٔ قطرهای این چهارضلعی را بیابید.



۲۲. در چهارضلعی ABCD داریم:
$AB = ۷cm$ ، $BC = ۹cm$ ، $CD = ۸cm$ و $DA = ۶cm$. در صورتی که $\hat{ADC} = ۱۲۰^\circ$ باشد، اندازهٔ قطرهای چهارضلعی را بیابید.

۲۳. در چهارضلعیی محدب، پاره‌خطهایی که وسط ضلعهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، برابر a و b اند و یکدیگر را در زاویهٔ ۶۰° قطع می‌کنند. طول قطرهای چهارضلعی را پیدا کنید.

۲۴. در یک چهارضلعی محدب مسطح به مساحت ۳۲، مجموع طولهای دو ضلع مقابل و یکی از قطرها برابر ۱۶ است. جمیع طولهای ممکن قطر دیگر را معین کنید.

هجدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۶

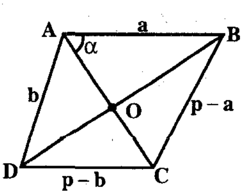
۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۵. مساحت چهارضلعی محدب ABCD برابر $۳۰۲۴\ cm^2$ و طول قطرهای آن برابر ۱۴۴cm و ۴۲cm است. طول پاره‌خطی را پیدا کنید که میانگاههای ضلعهای AB و CD را به هم وصل می‌کند.

۲۶. در چهارضلعی محدب ABCD، طول همهٔ ضلعها و قطرها، عددهایی گویا هستند. اگر O محل برخورد قطرهای چهارضلعی باشد، ثابت کنید، طول پاره‌خط راست AO، عددی گویاست.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

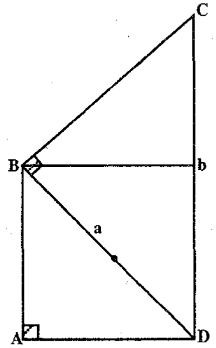


۲۷. در چهارضلعی محدب ABCD : $|AB| = a$ ، $|AD| = b$ ، $|BC| = p - a$ و $|DC| = p - b$. فرض کنید O محل برخورد قطرها باشد. اندازهٔ زاویهٔ BAC را با α نشان می‌دهیم. وقتی که $\alpha \to ۰$ ، $|OA|$ به چه میل می‌کند؟

۲۸. در چهارضلعی محدب ABCD ، ضلع AB برابر $\frac{۲۵}{۶۴}$، ضلع BC برابر $۱۲\frac{۲۵}{۶۴}$ و ضلع CD برابر $۶\frac{۱}{۴}$ است. می‌دانیم که زاویهٔ DAB حاده، زاویهٔ ADC منفرجه، $\sin D\hat{A}B = \frac{۳}{۵}$ و $\cos A\hat{B}C = \frac{-۶۳}{۶۵}$ است. دایره‌ای با مرکز O بر ضلعهای BC، CD و AD مماس است. طول پاره‌خط OC را پیدا کنید.

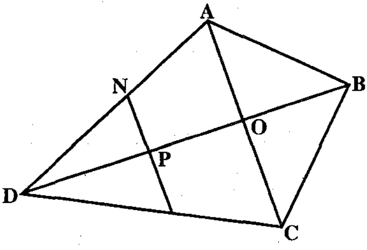
۲۹. در چهارضلعی ABCD : $AB = a$ و $AD = b$ ؛ ضلعهای BC، CD و AD بر دایره‌ای که مرکزش وسط AB است، مماسند. BC را پیدا کنید.

۳۰. در چهارضلعی ABCD، $D\hat{A}B = ۹۰^\circ$ ، $D\hat{B}C = ۹۰^\circ$ ، $DB = a$ ، $DC = b$. فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره را که یکی از آنها از نقطه‌های D، A و B و دیگری از نقطه‌های B، C و D می‌گذرد، پیدا کنید.



۲.۵.۱. نسبت پاره‌خطها

۳۱. نقطهٔ N روی ضلع AD از چهارضلعی ABCD چنان قرار دارد که $\frac{NA}{ND} = \frac{۱}{۲}$ است. از N خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطهٔ P قطع کند. اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی باشد، نسبت $\frac{AO}{NP}$ را بیابید.



۳۲. نقطه‌های P، Q، R و S ضلعهای چهارضلعی ABCD را با شرایط $AP:PB = DQ:QC = m$ و $AR:RD = BS:SC = n$ تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید که پاره‌خطهای PQ و RS نیز همدیگر را با همان نسبت قطع می‌کنند.

۳۳. در چهارضلعی ABCD، $AB = a$ ، $BC = b$ ، $CD = c$ ، $DA = d$ ، $a^۲ + c^۲ \neq b^۲ + d^۲$ و $c \neq d$. M نقطه‌ای روی BD و به فاصلهٔ برابر از A و C است. نسبت $BM:MD$ را پیدا کنید.

۳۴. ثابت کنید، برای هر چهارضلعی محدب، نسبت بزرگترین فاصلهٔ بین دو رأس آن، به کوچکترین فاصلهٔ بین دو رأس، از $\sqrt{۲}$ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۶۲

۱.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

۳۵. قطرهای AC و BD در چهارضلعی ABCD، یکدیگر را در O قطع کرده‌اند. محیطهای دو مثلث ABC و ABD برابرند. همچنین دو مثلث ACD و BCD نیز، محیطهایی برابر دارند. ثابت کنید : $|AO|=|BO|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۳۶. M وسط ضلع AB و N وسط ضلع CD از چهارضلعی ABCD است. خطهای راست AD و BC، خط راست MN را بترتیب در P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید : اگر $B\hat{Q}M = A\hat{P}M$، آن گاه $BC = AD$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

۳۷. در چهارضلعی کوژ ABCD، زاویهٔ B برابر ۹۰ درجه، قطر AC نیمساز زاویهٔ A و طول قطر AC برابر طول ضلع AD است. در مثلث ADC، ارتفاع DH را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خط راست BH، پاره خط راست CD را نصف می‌کند.

۳۸. چهارضلعی کوژ، به وسیلهٔ قطرهای خود، به چهار مثلث تقسیم شده است. مجموع مجذورهای مساحتهای دو مثلث رو به رو، برابر است با مجموع مجذورهای مساحتهای دو مثلث روبه‌روی دیگر. ثابت کنید، دست کم یکی از قطرها، در نقطهٔ برخورد خود با قطر دیگر، نصف می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۳۹. چهارضلعی ABCD و خط Δ موازی قطر BD از این چهارضلعی داده شده است. این خط، ضلعهای AB، BC، CD و DA را بترتیب در نقطه‌های E، F، G و H قطع می‌کند. AF و CD در نقطهٔ I و AG و BC در نقطهٔ K متقاطعند، و بالاخره EK و HI یکدیگر را در O قطع کرده‌اند. ثابت کنید که خط CO از وسط پاره‌خط EH می‌گذرد.

۴۰. در چهارضلعی ABCD، می‌دانیم : M وسط پاره خط راست AD، N وسط پاره خط راست BC، و $|AD|=|BC|$. عمود منصفهای پاره‌خطهای راست AB و CD، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده‌اند. ثابت کنید، نقطهٔ P، روی عمود منصف پاره خط راست MN هم واقع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۴۱. دو ضلع مقابل AB و CD از چهارضلعی ABCD از طرف نقطه‌های A و C بترتیب با نقطه‌های M و N به نسبتهای مساوی تقسیم شده‌اند. ثابت کنید، پاره‌خط MN، خط واصل میانگاه دو ضلع را به همان نسبت تقسیم کرده و خود نیز به وسیلهٔ آن نصف می‌شود.

۴۲. روی ضلع AB از چهارضلعی ABCD، متوازی‌الاضلاع $ABCC'$ را رسم کرده و میانگاه ضلع $C'D$ را O می‌نامیم. اگر M و N بترتیب میانگاههای ضلعهای AB و CD باشد، آن گاه ثابت کنید که پاره خط AO موازی و مساوی پاره خط MN است.

۴۳. در چهارضلعی کوژ ABCD، قطرها در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند و، در ضمن، می‌دانیم:

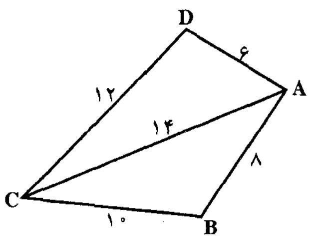
$$B\hat{A}C = C\hat{B}D\ ,\ \ B\hat{C}A = C\hat{D}B$$

ثابت کنید، مماسهایی که از نقطه‌های B و C بر دایرهٔ (AOD) رسم می‌شوند، طولی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

۶.۱. شعاع دایره

۴۴. در چهارضلعی ABCD، $AB = ۸cm$ ، $BC = ۱۰cm$ ، $CD = ۱۲cm$ ، $DA = ۶cm$ و $AC = ۱۴cm$ است. نسبت شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ACD را بیابید.

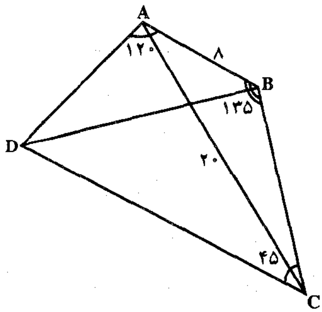


۴۵. نقطهٔ M را روی ضلع BC از چهارضلعی کوژ ABCD انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، بین دایره‌های محاطی مثلثهای ABD، ACD و AMD، دو دایره با شعاعهای نابرابر پیدا می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۷.۱. محیط

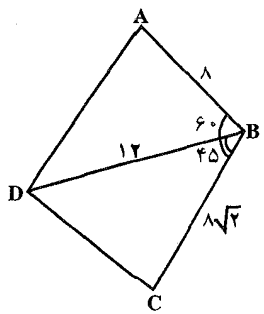
۱.۷.۱. اندازهٔ محیط



۴۶. در چهارضلعی محدب ABCD داریم:

$\hat{A}=۱۲۰^\circ$ ، $\hat{B}=۱۳۵^\circ$ ، $\hat{C}=۴۵^\circ$ ، $AB=۸cm$ و $AC=۲۰cm$. اندازهٔ محیط این چهارضلعی را بیابید.

۴۷. اندازهٔ محیط چهارضلعی ABCD را با توجه به مقدارهای داده شده بیابید.

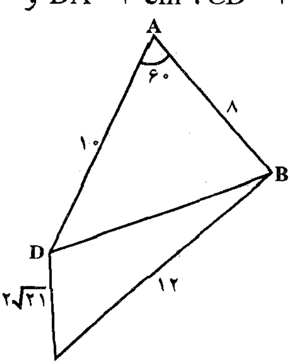


۸.۱. مساحت

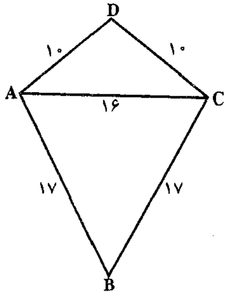
۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت چهارضلعی

۴۸. مساحت چهارضلعی ABCD (شکل داده شده) را بیابید، در صورتی که $AB=۸cm$ ، $BC=۱۲cm$ ، $CD=۲\sqrt{۲۱}cm$ ، $DA=۱۰cm$ و $D\hat{A}B=۶۰^\circ$ باشد.



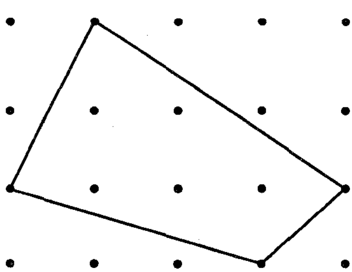
۴۹. بادبادکی مطابق شکل روبه‌رو در نظر بگیرید که از دو مثلث متساوی‌الساقین با قاعده‌های مشترک تشکیل شده است. اگر طول ضلعها مطابق شکل باشد، مساحت بادبادک چه‌قدر است؟



۵۰. در چهارضلعی ABCD نقطه‌های E، F، P و K بترتیب میانگاه ضلعهای AB، BC، CD و AD است. اگر $AC = ۱۵cm$ ، $BD = ۲۰cm$ و $EP = KF$ باشد، مساحت چهارضلعی ABCD را محاسبه کنید.

۵۱. قطرهای چهارضلعی ABCD همدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر مساحتهای مثلثهای AOB، BOC و COD برابر $۱۲cm^۲$، $۱۸cm^۲$ و $۲۴cm^۲$ باشند، مساحت چهارضلعی را محاسبه کنید.

۵۲. روی تخته‌ای در ردیفهای افقی و قائم و در فاصله‌های یک سانتیمتری میخهایی کوبیده شده‌اند. چهار تا از این میخها، آن گونه که در شکل نموده شده است، با یک نخ به هم وصل شده‌اند. مساحت ناحیهٔ محصور به این نخ بر حسب سانتیمتر مربع چه عددی است؟



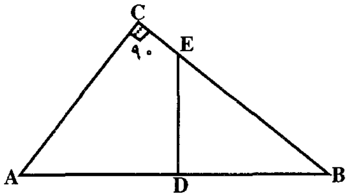
الف) ۴   ب) ۴/۵   ج) ۵

د) ۵/۵   هـ) ۶

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۵۳. طول قطرهای چهارضلعی محدبی a و b و پاره‌خطهایی که وسط ضلعهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، قابل انطباقند. مساحت چهارضلعی را پیدا کنید.

۵۴. ضلعهای AB و CD در چهارضلعی ABCD، دو به دو بر هم عمودند؛ این ضلعها، قطرهای دو دایرهٔ برابر به شعاع r و مماس بر یکدیگر، هستند. اگر $BC:AD = K$ ، مساحت چهارضلعی ABCD را پیدا کنید.



۵۵. در شکل روبه‌رو، $\hat{C} = ۹۰^\circ$ ، $AD = DB$ ، $DE \perp AB$ ، $AB = ۲۰$ و $AC = ۱۲$.
مساحت چهارضلعی ADEC برابر است با :

الف) ۷۵ ب) $۵۸\frac{۱}{۲}$ ج) ۴۸

د) $۳۷\frac{۱}{۲}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۵۶. بابلیها، برای محاسبهٔ مساحت یک چهارضلعی، نصف مجموع دو ضلع رو به رو را در نصف مجموع دو ضلع دیگر ضرب می‌کردند. روشن کنید، در چه نوع چهارضلعیهایی، این روش محاسبه، مساحت را به طور دقیق به دست می‌دهد. بابلیها همچنین، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، اغلب، طول یک ساق را در نصف قاعدهٔ مثلث ضرب می‌کردند. روشن کنید، با چه فرضی، رابطهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، حالتی حدی (یا حالتی خاص) از رابطهٔ تعیین مساحت چهارضلعی می‌شود.

۵۷. حداکثر مساحت یک چهارضلعی، با ضلعهای به طول ۷،۴،۱ و ۸ چه‌قدر می‌تواند باشد؟

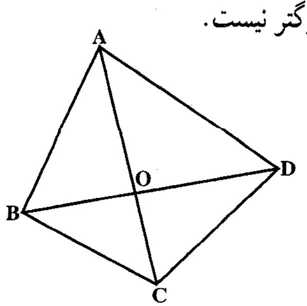
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۵۸. از بین چهارضلعیهایی که سه ضلع برابر واحد دارند، مساحت کدام یک حداکثر است؟

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

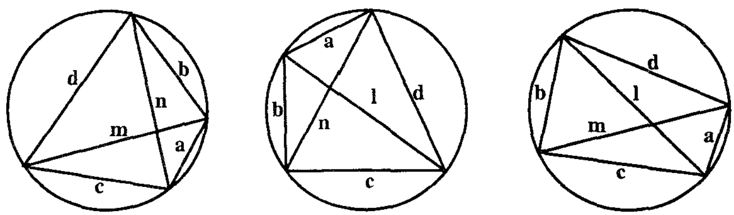
۵۹. ثابت کنید، مساحت یک چهارضلعی به ضلعهای a، b، c و d از $\frac{ac + bd}{۲}$ تجاوز نمی‌کند.

۶۰. اگر ضلعهای چهارضلعی ABCD را a، b، c و d بنامیم، ثابت کنید، مساحت چهارضلعی از $\frac{(a+c)(b+d)}{۴}$ بزرگتر نیست.



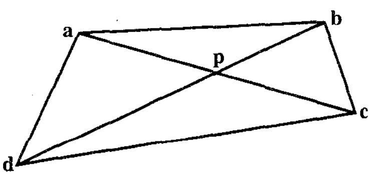
۶۱. با توجه به نامگذاریهای روی شکل، ثابت کنید که K، مساحت چهارگوشهٔ مزبور برابر است با :

$$K = \frac{lmn}{۴R}$$



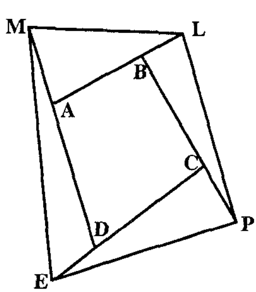
در حالت $d = ۰$ چه وضعی پیش می‌آید؟

۲.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۶۲. دو قطر چهارضلعی محدب abcd در نقطهٔ p برخورد می‌کنند. مساحت مثلثهای abp، bcp و cdp بترتیب ۱۲ سانتیمتر مربع، ۹ سانتیمتر مربع و ۱۵ سانتیمتر مربع است. مساحت مثلث dap چه‌قدر است؟

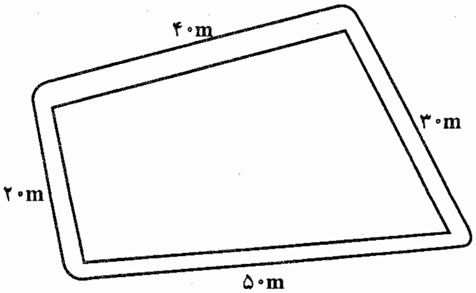
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷



۶۳. مساحت چهارضلعی محدب ABCD برابر $۲cm^۲$ است. ضلع AB را از طرف نقطهٔ B با شرط $BL = \frac{۱}{۲}AB$، ضلع BC را از طرف نقطهٔ C با شرط $CP = \frac{۱}{۲}BC$، ضلع CD را از طرف نقطهٔ D با شرط $DE = \frac{۱}{۲}CD$ و ضلع DA را از طرف نقطهٔ A با شرط $AM = \frac{۱}{۲}AD$ امتداد می‌دهیم. مساحت چهارضلعی MLPE را محاسبه کنید (شکل).

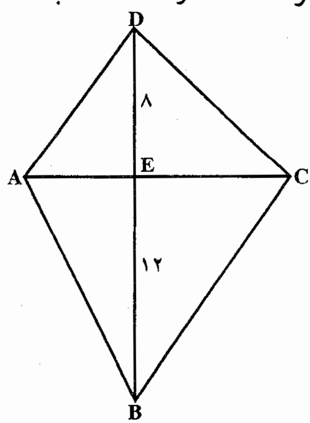
۶۴. مساحت چهارضلعی ABCD برابر $۱۲cm^۲$ است. نقطه‌های F، K، M و P را بترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA طوری انتخاب می‌کنیم که $CM:MD = ۱:۱$، $BK:KC = ۱:۳$، $AF:FB = ۲:۱$ و $DP:PA = ۱:۵$ باشد. مساحت شش ضلعی AFKCMP را محاسبه کنید.

۶۵. مساحت محوطه‌ای دور استخر. یک استخر به صورت چهارضلعی داریم، که طول ضلعهای آن ۲۰، ۴۰، ۳۰ و ۵۰ متر است. می‌خواهیم دورادور آن، محوطهٔ سیمانی بسازیم، که عرض محوطه، همه‌جا درست ۵ متر باشد و علاوه بر آن، گوشه‌ها نیز، مطابق شکل، دایره‌ای باشند. مساحت محوطهٔ سیمانی را بر حسب متر مربع حساب کنید. $(\pi = ۳/۱۴)$



۲.۸.۱. نسبت مساحتها

۶۶. در شکل، $AC \perp DB$. اگر $DE = ۸$ و $BE = ۱۲$ باشد، نسبت $a\Delta ACD$ به $a\Delta ABC$ چه‌قدر است؟



۶۷. هرگاه AD و BC دو ضلع رو به رو از چهار گوشهٔ ABCD در W برخورد کنند و X و Y بترتیب وسطهای قطرهای AC و BD باشند، مساحت مثلث WXY، یک چهارم مساحت چهارگوشهٔ ABCD است.

۶۸. از رأسهای یک چهارضلعی خطهایی را به موازات قطرهای آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت متوازی‌الاضلاع حاصله دو برابر مساحت چهارضلعی داده شده است.

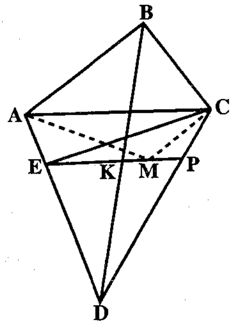
۶۹. هر یک از ضلعهای چهارضلعی محدبی، به $۲n + ۱$ بخش برابر تقسیم شده است. نقطه‌های تقسیم روی ضلعهای متقابل، متناظراً به هم وصل می‌شوند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی مرکزی، به اندازهٔ $\frac{۱}{(۲n+۱)^۲}$ مساحت تمام چهارضلعی است.

۱.۸.۳. رابطهٔ بین مساحتها

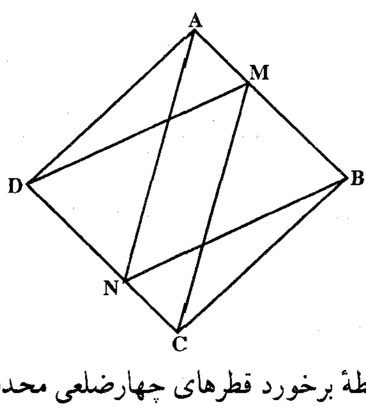
۷۰. زاویهٔ C، در چهارضلعی ABCD، بزرگترین زاویه است. K، نقطهٔ برخورد خط راست AD و خط راستی است که از C موازی AB رسم شود ؛ M، نقطهٔ برخورد خط راست AB و خط راستی که از C موازی AD رسم شود، P نقطهٔ برخورد خطهای راست BK و MD است. ثابت کنید مساحتهای چهارضلعیهای AMPK و BCDP با هم برابرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۷۱. از میانگاه قطر BD در چهارضلعی ABCD خطی به موازات قطر AC رسم می‌کنیم. این خط ضلع AD را در نقطهٔ E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط CE چهارضلعی ABCD را به دو قسمت هم‌ارز (هم مساحت) تقسیم می‌کند (شکل).



۷۲. نقطه‌های M و N بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی محدب ABCD طوری اختیار شده‌اند که آنها را به یک نسبت (با احتساب از رأسهای A و C) تقسیم می‌کنند. با وصل کردن این نقطه‌ها به همهٔ رأسهای چهارضلعی ABCD، آن را به شش مثلث و یک چهارضلعی تقسیم می‌کنیم. ثابت کنید که مساحت چهارضلعی حاصل، برابر است با مجموع مساحتهای دو مثلث مجاور به ضلعهای BC و AD.



۷۳. فرض کنید K معرف نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی محدب ABCD، L نقطه‌ای بر ضلع AD، N نقطه‌ای بر ضلع BC و M نقطه‌ای بر قطر AC باشد، KL و MN با AB، و LM با DC موازی است. ثابت کنید که KLMN متوازی‌الاضلاع و مساحت آن از ۸/۲۷ مساحت چهارضلعی ABCD کمتر است (قضیهٔ هاتوری Hattori).

۹.۱. رابطه‌های متری

۱.۹.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

۷۴. در یک چهارضلعی مجموع مربعهای دو ضلع غیرمتوالی منهای مجموع مربعهای دو ضلع دیگر مساوی است با دو برابر حاصلضرب طول یک قطر در تصویر قطر دیگر روی آن.

۷۵. در یک چهارضلعی مجموع مربعهای دو ضلع طرفین یک رأس، منهای مجموع مربعهای دو ضلع طرفین رأس مقابل مساوی است با ۴ برابر حاصلضرب طول قطر واصل بین این دو رأس در تصویر قطعه خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند، روی آن قطر.

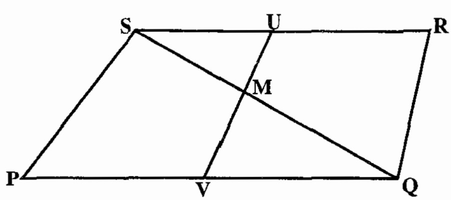
۷۶. در یک چهارضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند، مجموع مربعهای دو ضلع مقابل، برابر است با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر و بعکس.

۷۷. مجموع مربعهای قطرهای هر چهارضلعی برابر است با، دو برابر مجموع مربعهای دو خطی که وسطهای ضلعهای مقابل چهارضلعی را به هم وصل می‌کند.

۷۸. در چهارضلعی ABCD قطر AC عمود بر ضلع BC و قطر BD عمود بر ضلع AD می‌باشد. محل تلاقی دو قطر را نقطهٔ E می‌نامیم. ثابت کنید:

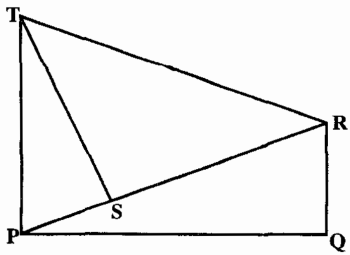
$$EB.ED = EA.EC$$

۷۹. در $\square PQRS$، $SR \| PQ$، SQ قطر، و U و V وسطهای SR و PQ هستند. ثابت کنید: $US.MQ = VQ.MS$.



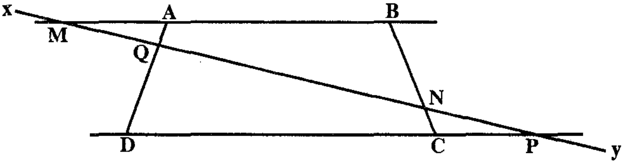
۸۰. در شکل، $RQ \perp PQ$، $PQ \perp PT$، و $ST \perp PR$. ثابت کنید:

$$ST.RQ = PS.PQ$$



۸۱. چهارضلعی ABCD و قاطع xy که ضلعهای AB، BC، CD و DA از این چهارضلعی را بترتیب در نقطه‌های M، N، P و Q قطع می‌کنند داده شده‌اند. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

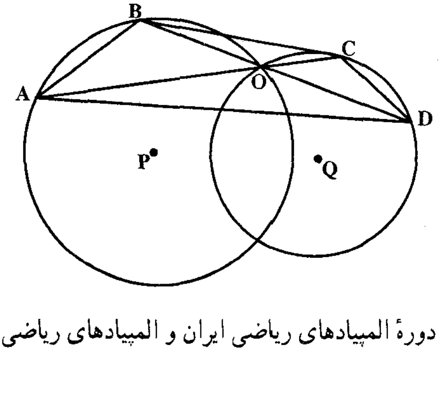
$$\frac{MA}{MB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{PC}{PD}\times\frac{QD}{QA}=۱$$



۸۲. ضلعهای متقابل AB و DC، AD و BC از چهارضلعی ABCD در نقطه‌های E و F همدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید پاره‌خطهای حاصله از این طریق در تساوی $\frac{AE.CE}{BE.DE}=\frac{AF.CF}{BF.DF}$ صدق می‌کنند.

۸۳. در چهارضلعی ABCD نقطهٔ E وسط خط واصل مابین وسطهای قطرها را مرکز قرار داده، دایرهٔ اختیاری رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع مجذورهای فاصله‌های هر نقطهٔ P از دایرهٔ مزبور از چهار رأس چهارضلعی مقداری است ثابت.

۸۴. در چهارضلعی کوژ ABCD نقطهٔ O محل برخورد قطرها است. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند، ثابت کنید: $PQ\geq\frac{AB+CD}{۴}$.



مرحله اوّل دهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران و المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۲.۹.۱. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۸۵. فرض می‌کنیم چهارضلعی محدب ABCD دارای خواص زیر باشد:

الف) ضلعهای AB، AD و BC در رابطهٔ $AB = AD + BC$ صدق کنند؛

ب) یک نقطهٔ P درون این چهارضلعی و به فاصلهٔ h از خط CD وجود داشته باشد، به طوری که

$$BP = h + BC \ , \ \ AP = h + AD$$

ثابت کنید:
$$\frac{۱}{\sqrt{h}} \geq \frac{۱}{\sqrt{AD}} + \frac{۱}{\sqrt{BC}}$$

سی‌امین المپیاد بین‌المللی ریاضی آلمان، ۱۹۸۹

۸۶. در چهارضلعی ABCD، نقطه‌های M و N بترتیب میانگاه ضلعهای AD و BC است. ثابت کنید که: $۲MN \leq AB + CD$.

۸۷. نقطهٔ M وسط ضلع BC در چهارضلعی کوژ ABCD است. می‌دانیم، مقدار زاویهٔ AMD برابر ۱۲۰ درجه است. ثابت کنید:

$$|AB| + \frac{۱}{۲}|BC| + |CD| \geq |DA|$$

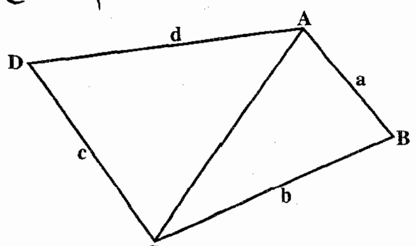
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۸۸. رأسهای چهارضلعی ABCD، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ شطرنجی (با خانه‌های به ضلع واحد) قرار دارند. در چهارضلعی، زاویه‌های A و C برابرند. ولی زاویه‌های B و D برابر نیستند. ثابت کنید:

$$AB.BC - CD.DA \geq ۱$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۸۹. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب، مساحت از $\frac{۱}{۴}$ مجموع مربعهای ضلعها بزرگتر نیست.



۹۰. ثابت کنید در هر چهارضلعی محدب، مساحت از $\frac{۱}{۴}$ مجموع مربعهای قطرها بزرگتر نیست.

۱۰.۱. شکلهای ایجاد شده

۹۱. روی ضلعهای چهارضلعی ABCD و در خارج آن مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABM و CDP ،BCN و DAQ($\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$) را رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاههای پاره‌خطهای MP و NQ و میانگاههای قطرهای چهارضلعی، رأسهای یک مربع هستند.

۹۲. روی ضلعهای یک چهارضلعی و در خارج آن مربعهایی را رسم می‌کنیم. ثابت کنید مرکزهای این مربعها، رأسهای یک چهارضلعی با قطرهای متساوی و متعامد هستند.

۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱.۱۱.۱. خطها موازی‌اند

۹۳. چهارضلعی ABCD داده شده است. بر خطهای AC و BD، بترتیب نقطه‌های K و M طوری اختیار می‌شوند که BK||AD و AM||BC . ثابت کنید که KM||CD .

۹۴. چهارضلعی ABCD داده شده است. خط راستی را از رأس A موازی ضلع BC رسم می‌کنیم و این خط قطر BD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. خط دیگری را نیز از رأس B به موازات ضلع AD رسم می‌کنیم و این خط نیز قطر AC را در نقطهٔ V قطع می‌کند. ثابت کنید که : MN||CD .

۹۵. ضلعهای BA و CD از چهارضلعی ABCD یکدیگر را در O و ضلعهای DA و CB یکدیگر را در O′ قطع می‌کنند. روی خطهای OA، OC، O′A و O′C بترتیب OE، OF، O′E′ و O′F′ را برابر AB، DC، AD و BC جدا می‌کنیم. ثابت کنید EF با E′F′ موازی است.

۲.۱۱.۱. خطها بر هم عمودند

۹۶. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محدب باشد. $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ، M و N پای عمودهای وارد از A، بترتیب، بر ضلعهای BC و CD باشند و K نقطهٔ برخورد خطهای راست MD و NB باشد. ثابت کنید که خطهای راست AK و MN دو به دو بر هم عمودند.

۹۷. چهارضلعی ABCD چنان است که داریم : AB = CD و $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$. نقطه‌های E و F بترتیب روی CD و BC چنان اختیار شده‌اند که DF⊥AE . ثابت کنید AF⊥BE .

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۹۵

۹۸. O محل برخورد قطرها، در چهارضلعی محدب ABCD است. ثابت کنید، خط راستی که از نقطه‌های برخورد میانه‌های دو مثلث AOB و COD می‌گذرد، بر خط راستی که از نقطه‌های برخورد ارتفاعهای دو مثلث BOC و AOD می‌گذرد، عمود است.

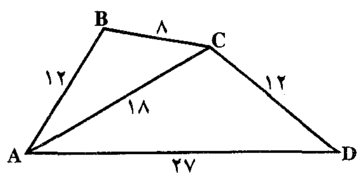
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۲

۱.۱۱.۳. خط نیمساز است

۹۹. نقطه‌های M و N بر ضلعهای روبه‌رو به هم BC و DA از چهارضلعی محدب طوری اختیار می‌شوند که BM:MC = AN:ND = AB:CD . ثابت کنید که خط MN با نیمساز زاویهٔ تشکیل شده با ضلعهای AB و DC، موازی است.

۱۰۰. اگر یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌روی مساوی داشته باشد، خطی که وسطهای دو ضلع دیگر را به هم وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ بین دو ضلع مساوی است.

۱۰۱. در شکل، طولهای ضلعها مشخص شده‌اند. ثابت کنید $\overline{AC}$ نیمساز زاویهٔ DAB است.



۱.۱۱.۴. خطها همرسند

۱۰۲. چهارضلعی ABCD داده شده است. فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 معرف نقطه‌های برخورد ارتفاعهای مثلثهای BCD، ACD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A، B و C، بترتیب، بر خطهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 ، در یک نقطه متقاطعند.

۱۰۳. ثابت کنید چهارخطی که از وصل کردن هر رأس یک چهارضلعی به مرکز ثقل مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند حاصل می‌شوند، همرسند.

۱۰۴. ABCD یک چهارضلعی، P، Q، R و S بترتیب وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA، U و V وسط قطرهای آن و O یک نقطهٔ دلخواه است. OP، OQ، OR، OS، OU و OV بترتیب در نقطه‌های P' ، Q' ، R' ، S' ، U' و V' به نسبت یکسان تقسیم می‌شوند. ثابت کنید که $P'R'$ ، $Q'S'$ و $U'V'$ همرسند.

۱۰۵. مربعهایی بر ضلعهای چهارضلعیی محدب و در بیرون آن رسم شده‌اند. ثابت کنید که اگر قطرهای چهارضلعی دو به دو بر هم عمود باشند، آن وقت پاره‌خطهایی که مرکز مربعهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی می‌گذرند.

۱۰۶. سه زاویه از یک چهارضلعی منفرجه‌اند. ثابت کنید از دو قطر چهارضلعی، قطر با طول بزرگتر، از رأس زاویهٔ حاده می‌گذرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۱۰۷. قطرهای چهارضلعیی دو به دو بر هم عمودند. ثابت کنید، چهار خط راست که هر کدام یک رأس چهارضلعی را به مرکز دایره‌ای که از آن رأس و دو رأس مجاور به آن می‌گذرد، وصل می‌کند، در یک نقطه متقاطعند.

۱.۱۱.۵. نقطه‌ها همخطند

۱۰۸. در چهارضلعی ABCD، P نقطهٔ برخورد BC و AD، Q نقطهٔ برخورد CA و BD، و R نقطهٔ برخورد AB و CD است. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد BC و QR، CA و RP، و AB و PQ همخطند.

۱۰۹. امتدادهای ضلعهای متقابل یک چهارضلعی همدیگر را دو به دو در یک نقطه قطع می‌کنند. ثابت کنید میانگاه خط واصل این نقطه‌ها بر روی خطی قرار دارد که از میانگاههای قطرهای چهارضلعی عبور می‌کند.

۱۱۰. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی با رأسهای نقطه‌های تماس دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC با دایره‌های محاطی و محاطی خارجی آن، بر میانخط مثلث قرار دارد.

۱.۱۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۱۱. چهارضلعی محدب Q_1 داده شده است. چهار خط راست که بر ضلعهای آن عمودند و از وسطهای آنها می‌گذرند، چهارضلعی Q_2 را تشکیل می‌دهند. چهارضلعی Q_3، به همین نحو برای چهارضلعی Q_2 تشکیل می‌شود. ثابت کنید که چهارضلعی Q_3 با چهارضلعی Q_1 متشابه است.

۱۱۲. طول هر ضلع چهارضلعی کوژ، از ۷ تجاوز نمی‌کند. ثابت کنید، چهار دایرهٔ با شعاع برابر ۵ و مرکزهای واقع در رأسهای چهارضلعی، به طور کامل، چهارضلعی را می‌پوشانند.

۱۱۳. ثابت کنید در چهارضلعی محدب به مساحت S و محیط P، می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{S}{P}$ قرار داد.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه

۱۱۴. فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی محدبی چنان باشد که خط CD ی آن بر دایرهٔ به قطر AB از آن مماس باشد. ثابت کنید که خط AB بر دایرهٔ به قطر CD مماس است، اگر و فقط اگر خطهای BC و AD موازی باشند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۴

۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۱۵. ۱. چهارضلعی ABCD را با معلومات ذیل رسم کنید :

الف. اندازهٔ زاویه‌های A، B، C و D بترتیب با عددهای ۳، ۶، ۷ و ۸ متناسب می‌باشند.

ب. طول AD برابر a و نسبت $\frac{CB}{CA}=\frac{1}{2}$ است.

۲. به فرض آن‌که چهارضلعی رسم شده باشد، اندازهٔ طولهای ضلعهای دیگر و قطرهای چهارضلعی را بر حسب a تعیین کنید.

۳. منصف زاویهٔ CAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطهٔ K و امتداد ضلع CD را در نقطهٔ E تلاقی کند. همچنین AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ F یکدیگر را قطع کنند و از نقطهٔ C عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در H قطع کند و از A عمودی بر امتداد CD فرود می‌آوریم. این دو خط یکدیگر را در نقطهٔ G تلاقی می‌کنند. ثابت کنید :

الف. سه نقطهٔ E، F و G بر یک استقامت واقعند و نقطهٔ F وسط قطعه خط GE بوده، خط ED محور تقارن مثلث AEG است.

ب. نقطهٔ D مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی AHEG می‌باشد و زاویهٔ CHD برابر $\frac{1}{3}$ زاویهٔ BAD است.

ج. مثلث AEG متساوی‌الاضلاع و مثلث ECK متساوی‌الساقین و HB برابر $\frac{1}{3}$AB می‌باشد.

د. خط HD موازی با EG بوده و خط HG زاویهٔ EGD را نصف می‌کند.

بخش ۲

• رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه

۱.۲. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع
۱.۱.۲. تعریف و قضیه
۲.۱.۲. زاویه
۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویه
۱.۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ متوازی‌الاضلاع
۲.۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویه‌های دیگر
۲.۲.۱.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۳.۱.۲. ضلع
۱.۳.۱.۲. اندازهٔ ضلع
۲.۳.۱.۲. نسبت ضلعها
۴.۱.۲. قطر
۱.۴.۱.۲. اندازهٔ قطر
۵.۱.۲. پاره‌خط
۱.۵.۱.۲. اندازهٔ پاره‌خط
۲.۵.۱.۲. نسبت پاره‌خطها
۳.۵.۱.۲. تساوی پاره‌خطها
۶.۱.۲. شعاع دایره
۱.۶.۱.۲. اندازهٔ شعاع دایره
۷.۱.۲. محیط
۱.۷.۱.۲. اندازهٔ محیط
۸.۱.۲. مساحت
۱.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت
۱.۱.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع

بخش ۲. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه

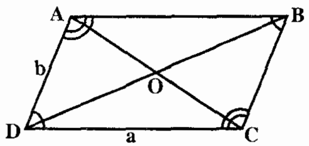
۱.۲. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۲. تعریف و قضیه

می‌دانیم که متوازی‌الاضلاع چهار ضلعیی است که ضلعهای آن دو به دو با هم موازی‌اند؛ مانند متوازی‌الاضلاع ABCD که در آن $AB \| CD$ و $BC \| AD$ است.

برخی ویژگیهای متوازی‌الاضلاع را یادآوری می‌کنیم:

۱. در هر متوازی‌الاضلاع، ضلعهای رو به‌رو مساوی یکدیگرند و بعکس.



۲. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های رو به رو متساوی و زاویه‌های مجاور، مکمل یکدیگرند و بعکس.

۳. هر قطر متوازی‌الاضلاع، آن را به دو مثلث همنهشت بخش می‌کند و بعکس.

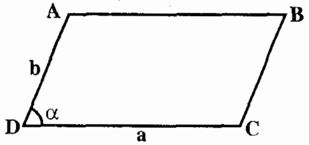
۴. در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند و بعکس.

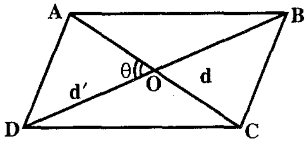
۵. در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو ضلع روبه‌رو متوازی‌و متساوی‌اند و بعکس.

۶. محیط متوازی‌الاضلاع به ضلعهای a و b برابر $۲(a+b)$ است.

۷. مساحت متوازی‌الاضلاع به ضلعهای a و b و ارتفاعهای نظیر آنها h و h′ برابر است با: $a \cdot h = b \cdot h'$

۱۱۶. قضیه. اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع به ضلعهای a و b که یک زاویهٔ آن برابر α است، مساوی است با $ab\sin\alpha$.



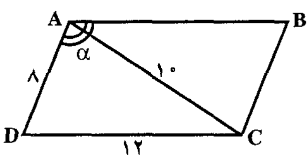


۱۱۷. قضیه. اگر اندازهٔ قطرهای متوازی الاضلاعی d و d' و اندازهٔ زاویهٔ بین این دو قطر مساوی θ باشد، اندازهٔ مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{1}{2}dd'\sin\theta$ است.

۲.۱.۲. زاویه

۲.۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۱.۲.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ متوازی‌الاضلاع



۱۱۸. در متوازی‌الاضلاع به ضلعهای ۸cm و ۱۲cm، اندازهٔ قطر کوچکتر مساوی ۱۰cm است. اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید.

۱۱۹. مطلوب است زاویه‌های متوازی‌الاضلاعی که دو ارتفاع آن h_1 و h_2 و محیط آن $2p$ است.

۱۲۰. نسبت محیط یک متوازی‌الاضلاع بر قطر بزرگتر آن برابر k است. اگر قطر بزرگتر زاویه‌های متوازی‌الاضلاع را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم کند، آن گاه اندازهٔ زاویه‌های آن را بیابید.

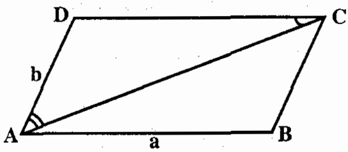
۱۲۱. نسبت ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع به صورت $p:q$ بوده و قطرهای آن نیز دارای نسبت $m:n$ است. زاویه‌های متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۱۲۲. خط راستی عمود بر دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع، آن را به دو ذوزنقه، که در هر یک از آنها می‌توان دایره‌ای محاط کرد، تقسیم می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید، به شرط این که طول ضلعهایش a و b ($a < b$) باشد.

۱۲۳. ضلعهای متوازی‌الاضلاعی برابرند با a و b($a \neq b$). خطهای راستی، از رأسهای زاویه‌های منفرجهٔ این متوازی‌الاضلاع، بر ضلعهای آن عمود رسم می‌شوند. ضمن برخورد، این خطها، متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع داده شده می‌سازند. کسینوس زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع داده شده را پیدا کنید.

۱۲۴. طول ضلعهای متوازی‌الاضلاعی برابرند با a و b ($a \neq b$). دامنهٔ تغییرات کسینوس زاویهٔ حادهٔ بین قطرهای آن چیست؟

۲.۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویه‌های دیگر

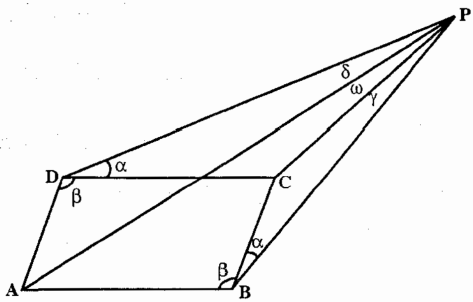


۱۲۵. اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاعی برابر α و طول ضلعهای غیرموازی آن برابر a و b است. تانژانت زاویه‌های حاده‌ای که با قطر بزرگتر و ضلعهای متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌شود، محاسبه کنید.

۲.۲.۱.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۲۶. قطرهای یک متوازی‌الاضلاع با ضلعهای غیرموازی آن متناسب است. ثابت کنید که زاویه‌های بین قطرها با زاویه‌های متوازی‌الاضلاع مساوی است.

۱۲۷. نقطهٔ P در خارج متوازی‌الاضلاع ABCD واقع شده است به قسمی که دو زاویهٔ PBC و PDC با هم برابرند. ثابت کنید که دو زاویهٔ APD و BPC با هم برابرند (شکل).

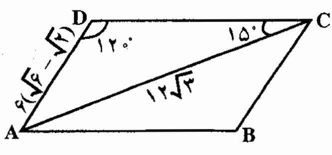


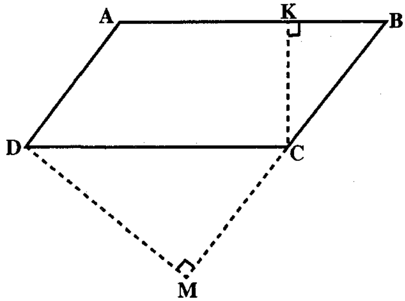
۱۲۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم : $AC = AD\sqrt{۲}$. ثابت کنید : $B\hat{A}C = A\hat{D}B$.

۳.۱.۲. ضلع

۱.۳.۱.۲. اندازهٔ ضلع

۱۲۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر $AC = ۱۲\sqrt{۳}$ ، ضلع $AD = ۶(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$ و $A\hat{D}C = ۱۲۰^\circ$ است. اندازهٔ ضلع AB را بیابید.



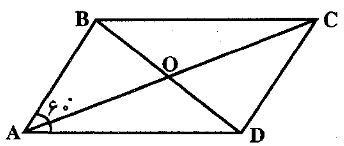


۱۳۰. چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. $CK \perp AB$ و زاویهٔ M قائمه است.

الف. اگر $DM = ۱۵$ ، $BC = ۱۲$ و $KC = ۹$ ، DC و CM را بیابید.

ب. اگر $KC = \sqrt{۲۴}$ ، $AK = \sqrt{۱۸}$ و $KB = \sqrt{۸}$ ، AD و DM را بیابید.

۲.۳.۱.۲. نسبت ضلعها



۱۳۱. متوازی‌الاضلاعی داریم که زاویهٔ حادهٔ آن مساوی ۶۰ درجه است. اگر نسبت مربعهای قطرهای متوازی‌الاضلاع مساوی $\frac{۱۹}{۷}$ باشد، نسبت ضلعهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۳۲. اگر در متوازی‌الاضلاع ABCD قطرها متناسب با ضلعها باشند، یعنی $AC : AD = BD : AB = k$ ، k چه مقدارهایی می‌تواند اختیار کند؟ نسبت ضلعها چه‌قدر می‌تواند باشد؟

۱۳۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD ، $(AB = DC)$ ، $B\hat{A}C = A\hat{D}B$ است. ثابت کنید :

$$AC = \sqrt{۲}AD \ , \ BO = \sqrt{۲}AB$$

۱۳۴. در متوازی‌الاضلاعی که مساحتش برابر با S است، نیمسازهای زاویه‌های داخلی رسم می‌شوند تا یکدیگر را قطع کنند. مساحت چهارضلعی حاصل برابر است با Q. نسبت طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۴.۱.۲. قطر

۱.۴.۱.۲. اندازهٔ قطر

۱۳۵. متوازی‌الاضلاع به ضلعهای ۸ و ۱۲ زاویهٔ حاده‌ای برابر °۶۰ دارد. اندازهٔ قطرهای آن را بیابید.

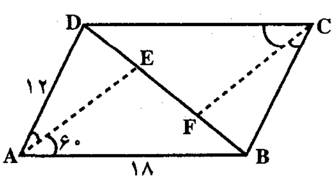
۱۳۶. ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع برابر a و b $(a < b)$ است. قطر کوچکتر متوازی‌الاضلاع با ضلع کوچکتر آن یک زاویهٔ منفرجه و با ضلع بزرگتر متوازی‌الاضلاع زاویه‌ای برابر α می‌سازد. اندازهٔ قطر بزرگتر متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۱۳۷. از یکی از زاویه‌های منفرجهٔ متوازی‌الاضلاعی دو ارتفاع بترتیب با طولهای p و q رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین این دو ارتفاع برابر α است. طول قطر بزرگتر متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.

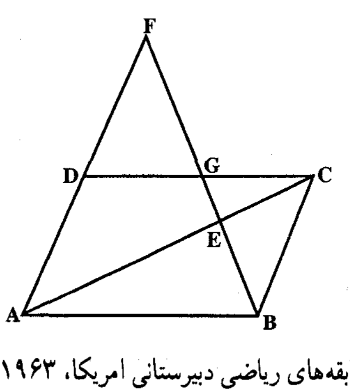
۱۳۸. در یک متوازی‌الاضلاع، عمود رسم شده از یک رأس آن بر یک قطر متوازی‌الاضلاع، قطر را به دو پاره‌خط به طولهای ۶cm و ۱۵cm تقسیم می‌کند. اگر تفاضل بین دو ضلع غیرمتوازی‌الاضلاع برابر ۷cm باشد، در آن صورت طول ضلعها و قطرهای متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.

۲.۱.۵. پاره خط

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره خط



۱۳۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AB = ۱۸cm$ ، $AD = ۱۲cm$ و $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ است. نیمسازهای زاویه‌های A و C قطر BD را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. اندازهٔ پاره خط EF را بیابید.



۱۴۰. در متوازی‌الاضلاع ABCD، شکل روبه‌رو، نقطهٔ F روی امتداد ضلع AD قرار دارد. BF قطر AC را در E و ضلع DC را در G قطع می‌کند. اگر $EF = ۳۲$ و $GF = ۲۴$ ، آن‌گاه، BE برابر است با :

الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۰

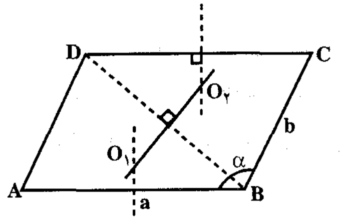
د) ۱۲ هـ) ۱۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۳

۱۴۱. متوازی‌الاضلاع ABCD که در آن $AB = k.BC$ داده شده است. k و L نقطه‌هایی روی خط CD هستند (k روی ضلع CD است). M نقطه‌ای روی BC، AD نیمساز زاویهٔ KAL و AM نیمساز زاویهٔ KAB است. $BM = a$ و $DL = b$ ، AL را پیدا کنید.

۱۴۲. دایره‌ای که از رأسهای A و B و Cی متوازی الاضلاع ABCD می‌گذرد، خطهای AD و CD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. نقطهٔ M، به فاصلهٔ ۴، ۳ و ۲، بترتیب، از رأسهای C،B وD قرار دارد. MN را پیدا کنید.

۱۴۳. در متوازی‌الاضلاع $ABCD: AB = a$ ، $BC = b$ و $A\hat{B}C = \alpha$. فاصلهٔ میان مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای BCD و DAB را پیدا کنید.



۲.۵.۱.۲. نسبت پاره خطها

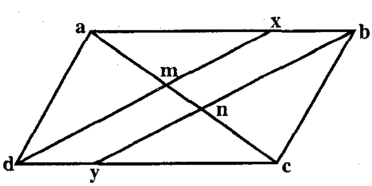
۱۴۴. در متوازی الاضلاع ABCD از نقطهٔ C خطی چنان رسم شده است که قطر BD را به نسبت ۴ و ۱ تقسیم نموده است. ثابت کنید همین خط ضلع AD را به نسبت ۳ : ۱ تقسیم می‌کند.

۱۴۵. متوازی‌الاضلاع OBCA داده شده است. خط راستی رسم کرده‌ایم که از ضلع OB یک سوم آن و از ضلع OA یک چهارم آن را، با محاسبهٔ از نقطهٔ O، جدا کرده است. این خط راست، چه بخشی از قطر OC را جدا می‌کند؟

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۴۶. در متوازی الاضلاع abcd، نقطهٔ x بر [ab] و نقطهٔ y بر [cd] چنان انتخاب می‌شوند که :

$$|ab| = ۴|xb| \ , \ |dc| = ۴|dy|$$



و خطهای xd و yb رسم می‌شوند. قطر ac با dx در m و با by در n برخورد می‌کند. نسبت $\frac{|mn|}{|ac|}$ چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۱۴۷. در متوازی‌الاضلاع ABCD، که لوزی نیست، نسبت طولهای دو قطر داده شده است : $AC : BD = K$. نیمخط راست AM را قرینهٔ نیمخط AD نسبت به خط راست AC، نیمخط راست BM را قرینهٔ نیمخط BC نسبت به خط راست BD و نقطهٔ M را، محل برخورد نیمخطهای راست AM و BM می‌گیریم. مطلوب است، محاسبهٔ نسبت $AM : BM$.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۲

۳.۵.۱.۲. تساوی پاره‌خطها

۱۴۸. نقطه‌های C و F بترتیب روی ضلعهای AE و BD از متوازی‌الاضلاع AEBD واقعند. خطهای CD و FA در M و خطهای EF و BC در N برخورد می‌کنند. هرگاه P نقطهٔ برخورد MN با DA و Q نقطهٔ برخورد MN با EB باشد، ثابت کنید که $AP = QB$.

۱۴۹. از نقطه‌ای واقع در درون یک متوازی‌الاضلاع خطهای مستقیمی را به موازات ضلعهای آن رسم می‌کنیم. این خطها، ضلعهای متوازی الاضلاع را در نقطه‌های A , C، B و D قطع می‌کنند. نقطهٔ O مرکز متوازی‌الاضلاع داده شده است. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد خطهای وصل شدهٔ میانگاههای ضلعهای روبه‌روی متوازی الاضلاع ABCD، میانگاه پاره‌خط OM است.

۶.۱.۲. شعاع دایره

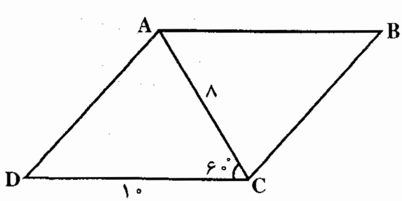
۱.۶.۱.۲. اندازهٔ شعاع دایره

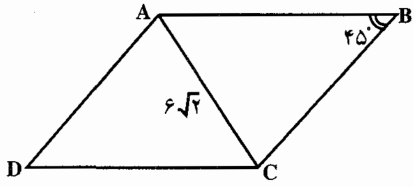
۱۵۰. در درون متوازی‌الاضلاع ABCD ، سه دایره دو به دو بر هم مماسند؛ بعلاوه، یکی از آنها بر ضلعهای AB و BC، دومی بر ضلعهای AB و AD و سومی بر ضلعهای BC و AD مماس است. اگر فاصلهٔ نقطه‌های تماس روی ضلع AB ، برابر با a باشد، شعاع دایرهٔ سوم را پیدا کنید.

۷.۱.۲. محیط

۱.۷.۱.۲. اندازهٔ محیط

۱۵۱. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $CD = ۱۰$، $AC = ۸$ و $A\hat{C}D = ۶۰^\circ$ است. اندازهٔ محیط این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید.





۱۵۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AB=\sqrt{۲}BC$ ، $AC=۶\sqrt{۲}$ و $\hat{B}=۴۵°$ است. اندازهٔ محیط این متوازی الاضلاع را بیابید.

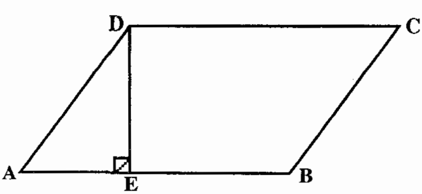
۱۵۳. ثابت کنید که محیط متوازی‌الاضلاع وارینیون هر چهارگوشه برابر است با مجموع طولهای دو قطر آن چهارگوشه.

۲.۱.۸. مساحت

۲.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۲.۱.۸.۱.۱. اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع

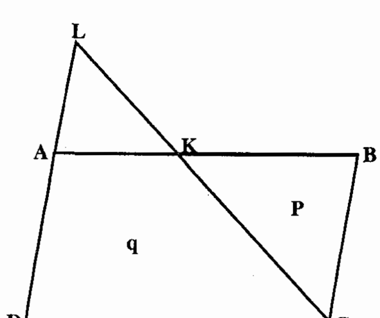
۱۵۴. طول دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع ۱۸ و ۸ و اندازهٔ یک زاویهٔ آن °۳۰ است. مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید.



۱۵۵. □ABCD متوازی‌الاضلاع است. $AD=۱۵$ و $AB=۲۱$. ارتفاع $\overline{DE}$، $\overline{AB}$ را در نقطه‌ای بین A و B قطع می‌کند، و $AE=۹$. a □ABCD چه قدر است؟

۱۵۶. اندازهٔ دو قطر یک متوازی‌الاضلاع و زاویهٔ حاده‌ای از متوازی‌الاضلاع معلوم است. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.

۱۵۷. در یک متوازی‌الاضلاع، ضلعهای a و b $(a>b)$ و α ، اندازهٔ زاویهٔ بین قطرها معلوم است. مساحت این متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.



۱۵۸. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. خط راستی که از رأس C می‌گذرد، ضلعهای AB و AD را، بترتیب در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. مساحت مثلثهای KBC و CDL، بترتیب برابرند با p و q. مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را پیدا کنید.

۱۵۹. زاویهٔ حادهٔ یک متوازی‌الاضلاع برابر α و فاصلهٔ محل تلاقی قطرهای آن از دو ضلع غیرمساوی برابر m و p است. مطلوب است طول هر یک از قطرها و مساحت متوازی‌الاضلاع.

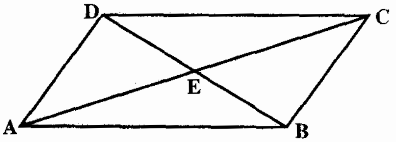
۲.۱.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۶۰. متوازی‌الاضلاع ABCD، با زاویهٔ حادهٔ DAB برابر با α که در آن $AB = a$ ، و $AD = b$ $(a < b)$ داده شده است. فرض کنید K معرف پای عمود وارد از رأس B بر AD و M پای عمود وارد از نقطهٔ K بر امتداد ضلع CD باشد. مساحت مثلث BKM را پیدا کنید.

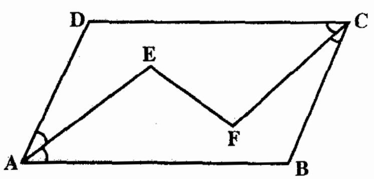
۱۶۱. طول ضلعهای غیرموازی متوازی‌الاضلاعی برابر a و b و زاویهٔ بین آنها برابر α است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید.

۱۶۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD، زاویهٔ حاده برابر است با α. دایره‌ای به شعاع r، از رأسهای A، B و C می‌گذرد و خطهای AD و CD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مساحت مثلث BMN را پیدا کنید.

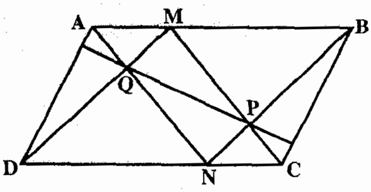
۲.۸.۱.۲. رابطهٔ بین مساحتها



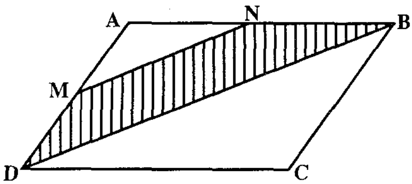
۱۶۳. قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD□ یکدیگر را در E قطع می‌کنند. ثابت کنید: $a\Delta AED = a\Delta BEC$.



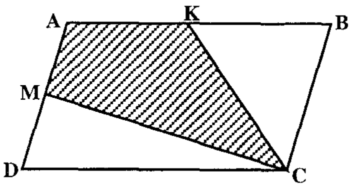
۱۶۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD□، نیمسازهای زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{C}$ قطر DB را بترتیب در E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید که مساحت ناحیه‌های ABCFE و AEFCD برابرند.



۱۶۵. از دو نقطه که هر یک از آنها روی دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند، چهار خط به رأسهای مقابل وصل شده است. ثابت کنید خط مستقیمی که نقطه‌های تقاطع این خطها را به هم وصل می‌کند، سطح متوازی‌الاضلاع را نصف می‌کند.



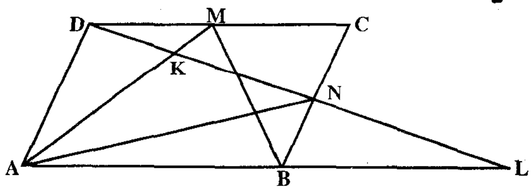
۱۶۶. ثابت کنید مساحت ذوزنقه‌ای که یک ضلع آن پاره‌خط وصل شده بین دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع و قاعدهٔ دیگرش قطری از متوازی‌الاضلاع است که با این پاره‌خط موازی است، مساوی $\frac{۳}{۸}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.



۱۶۷. در متوازی‌الاضلاع □ABCD، M وسط ضلع AD و K وسط ضلع AB است. ثابت کنید:

a□AKCM = $\frac{۱}{۲}$a □ABCD

۱۶۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD، رأسهای A، B، C و D، بترتیب به وسط ضلعهای CD، AD ، AB و BC وصل شده‌اند. ثابت کنید که مساحت چهارضلعیی که با این پاره‌خطها تشکیل شده، $\frac{۱}{۵}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.

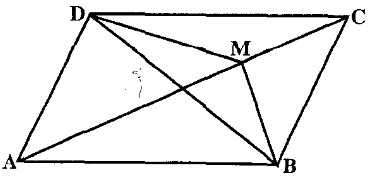


۱۶۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطهٔ E وسط قطر BD است. نقطهٔ F روی DA به‌گونه‌ای انتخاب شده است که $DF = \frac{DA}{۳}$، خط EF رسم شده است. نسبت مساحت مثلث DFE به مساحت چهارضلعی ABEF برابر است با:

الف) ۲ : ۱　　ب) ۳ : ۱　　ج) ۵ : ۱　　د) ۶ : ۱　　هـ) ۷ : ۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۴

۱۷۰. متوازی‌الاضلاع ABCD و نقطهٔ M را داخل آن در نظر می‌گیریم.

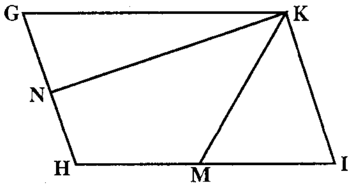


۱. ثابت کنید که:

مساحت MBC + مساحت MAD = مساحت MCD + مساحت MAB.

۲. مساحت مثلث MAC را با تفاضل مساحتهای MABC و MADC و همچنین با تفاضل مساحتهای MAB و MAD مقایسه کنید.

۱۷۱. □GHIK متوازی‌الاضلاع و N و M بترتیب وسطهای GH و HI اند. نشان دهید که :



الف) $a\Delta GKN = a\Delta KMI$

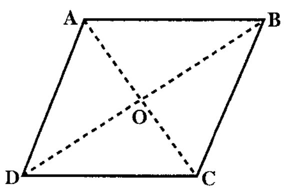
ب) $\frac{a\Delta GKN}{a\Box GHIK} = \frac{۱}{۴}$

پ) $a\Delta KMI = \frac{۱}{۲} a \Box NHMK$

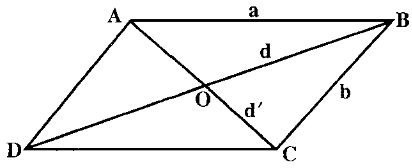
۲.۱.۹. رابطه‌های متری

۲.۱.۹.۱. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع

۱۷۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD ثابت کنید که :
مجموع مربعهای چهارضلع مساوی است با مجموع مربعهای دو قطر یعنی :
$AB^۲ + AD^۲ + BC^۲ + CD^۲ = BD^۲ + AC^۲$.



۱۷۳. ثابت کنید اگر در متوازی‌الاضلاعی یک زاویه °۴۵ باشد، مربع حاصلضرب قطرها مساوی با مجموع توان چهارم دو ضلع آن است.

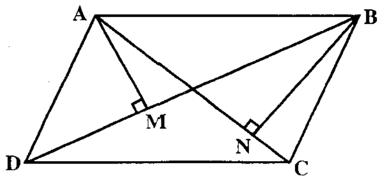


۱۷۴. هرگاه در داخل متوازی‌الاضلاع ABCD نقطهٔ P را چنان اختیار کنیم که مجموع زاویه‌های APB و CPD مساوی با ۱۸۰ درجه باشد، رابطهٔ زیر برقرار است :

$PA \cdot PC + PB \cdot PD = AB \cdot BC$

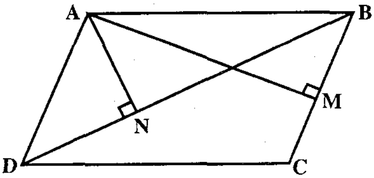
۱۷۵. از دو رأس A و B متوازی‌الاضلاع ABCD عمودهای AM و BN را بترتیب بر قطرهای BD و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید :

$AM.BD = AC.BN$

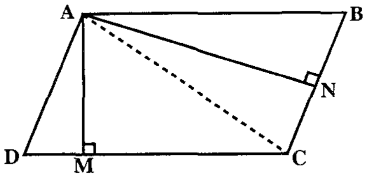


۱۷۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD، از رأس A عمود AM را بر ضلع BC و عمود AN را بر قطر BD فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$AM.BC = AN.BD$

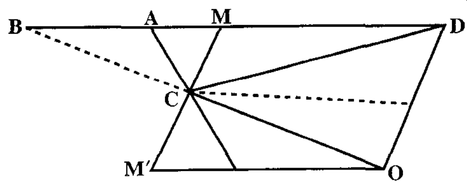


۱۷۷. از رأس A از متوازی‌الاضلاع ABCD عمودهای AM و AN را بترتیب بر ضلعهای مجاور CD و CB فرود می‌آوریم. ثابت کنید: $AM.CD = AN.CB$.

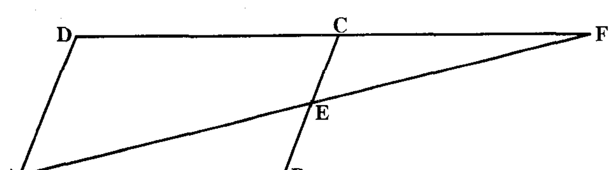


۱۷۸. از رأس A از متوازی‌الاضلاع ABCD قاطعی رسم می‌کنیم که قطر BD را در E و ضلعهای CB و CD را درF و G قطع کند. ثابت کنید: $EA^2 = EF \times EG$.

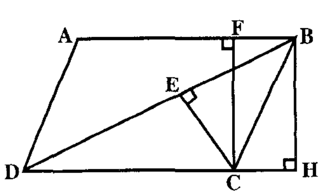
۱۷۹. متوازی‌الاضلاع $MDOM'$ داده شده است. رأس O را به نقطهٔ وسط MM'، یعنی نقطهٔ C ، وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ COD ضلع MD را در A و B قطع کنند، نشان دهید که $MD^2 = MA.MB$.



۱۸۰. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. قاطعی از رأس A رسم می‌کنیم تا خطهای BC و CD را بترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید وقتی این قاطع حول نقطهٔ A دوران کند، حاصلضرب BE.DF ثابت است.



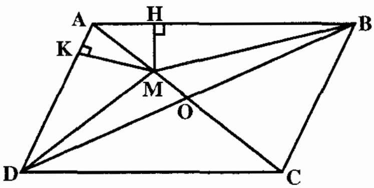
۱۸۱. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. از رأس C عمودهای CE و CF را بترتیب بر قطر DB و ضلع AB فرود می‌آوریم. با فرض $AC < BD$، ثابت کنید: $BE.DB = BC^2 + BA.BF$.



۱۸۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD که $AC > BD$ است، از رأس C عمودهای CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می‌کنیم. ثابت کنید : $AB.AE + AD.AF = AC^{۲}$.

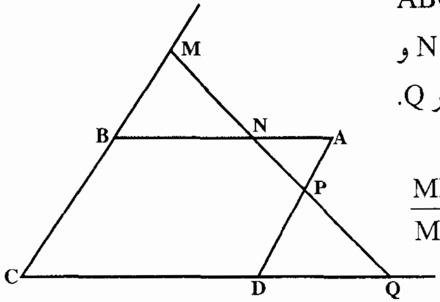
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۸ ـ مرحله اوّل ششمین دوره مسابقات ریاضی ایران، ۱۳۶۷

۱۸۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD نقطهٔ دلخواه M را روی قطر AC در نظر گرفته و دو عمود MH و MK را بر ضلعهای AB و AD فرود می‌آوریم. ثابت کنید :



$$\frac{MH}{MK} = \frac{AD}{AB}$$

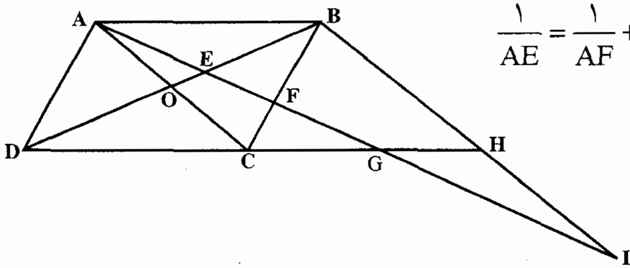
۱۸۴. خط قاطعی ضلعهای متوازی‌الاضلاع ABCD یا امتداد آنها را قطع می‌کند. AB را در N و AD را در P و BC را در M و CD را در Q. ثابت کنید که :



$$\frac{MN}{MP} = \frac{NB}{AB}$$

۱۸۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD از رأس A قاطعی رسم می‌کنیم تا BD را در E و BC و CD را بترتیب در F و G قطع کند. ثابت کنید :

$$\frac{۱}{AE} = \frac{۱}{AF} + \frac{۱}{AG}$$

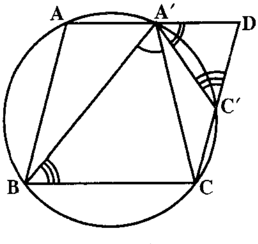


۱۸۶. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. از نقطهٔ C در خارج متوازی‌الاضلاع خطی رسم کنید که امتداد AB و AD را در E و F قطع کند. ثابت کنید : $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = ۱$.

۱۸۷. ثابت کنید، تفاضل مجذورهای طولهای ضلعهای مجاور متوازی‌الاضلاع، از حاصلضرب طولهای دو قطر آن کمتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۲. ۱. ۹. ۲. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع و دایره



۱۸۸. دایره‌ای که از رأسهای A، B و C از متوازی‌الاضلاع ABCD می‌گذرد، ضلع DA را در A′ و ضلع DC را در C′ قطع می‌کند. ثابت کنید که $A'D : A'C' = A'C : A'B$.

۱۸۹. از رأسهای متقابل B و D از متوازی‌الاضلاع ABCD عمودهای BH و DH′ را بر ضلعهای زاویهٔ A فرود آورده، دایرهٔ AHH′ را رسم می‌کنیم تا قطر AC را در E قطع کند. ثابت کنید اگر F قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ E باشد:

$$AC.FC = BD^2$$

۱۹۰. از نقطهٔ A رأس متوازی‌الاضلاع ABCD دایره‌ای اختیاری چنان رسم می‌کنیم که قطعه‌خطهای AC، AB و AD را به‌طور مرتّب در نقطه‌های L، M و N قطع کند. ثابت کنید که:

$$AC.AL = AB.AM + AD.AN$$

۲. ۱. ۱۰. ثابت کنید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است

۱۹۱. مجموع طولهای پاره‌خطهای راستی که وسط ضلعهای روبه‌رو را در یک چهار ضلعی به هم وصل می‌کنند برابر است با نصف محیط چهارضلعی. ثابت کنید که این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

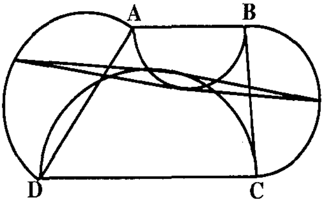
۱۹۲. اگر در یک چهارضلعی مجموع مربعهای قطرهای آن با مجموع مربعهای ضلعهای آن برابر باشد، آن‌گاه چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

۱۹۳. پاره‌خطهای راستی که وسط ضلعهای روبه‌رو را در چهارضلعی کوژ ABCD، به هم وصل کرده‌اند، چهارضلعی اصلی را به چهار چهارضلعی دیگر تقسیم کرده‌اند که محیطی برابر دارند. ثابت کنید، ABCD، یک متوازی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۱۹۴. مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درونی یک چهارضلعی کوژ تا خطهای راست، شامل ضلعها، مقداری ثابت است. ثابت کنید، این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

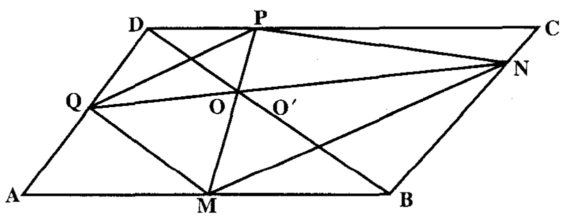
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱



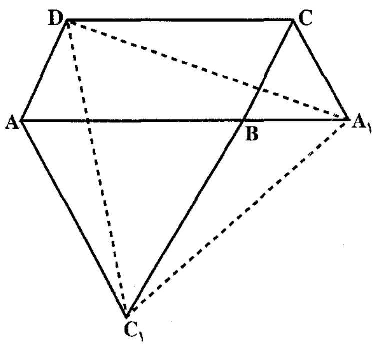
۱۹۵. روی ضلعهای یک چهارضلعی به عنوان قطر نیمدایره‌هایی رسم می‌کنیم. دو تا از این نیمدایره‌های متقابل در درون چهارضلعی و دو نیمدایرهٔ متقابل دیگر در بیرون آن قرار دارند. ثابت کنید میانگاه‌های کمانهای این نیمدایره‌ها رأسهای یک متوازی‌الاضلاع هستند.

۲.۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۶. یک متوازی‌الاضلاع و یک ذوزنقه که در آن محاط است داده شده است. ثابت کنید که نقطهٔ تلاقی قطرهای ذوزنقه روی یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع واقع است.

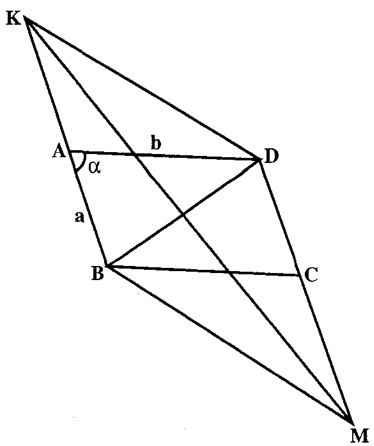


۱۹۷. روی دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع که در یک رأس مشترک هستند، دو مثلث متساوی‌الاضلاع (در داخل یا خارج متوازی‌الاضلاع) رسم می‌کنیم. آن گاه ثابت کنید مثلث حاصل از اتصال رأس رو به رو به این رأس متوازی‌الاضلاع و رأسهای آزاد مثلثهای رسم شده، تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند.



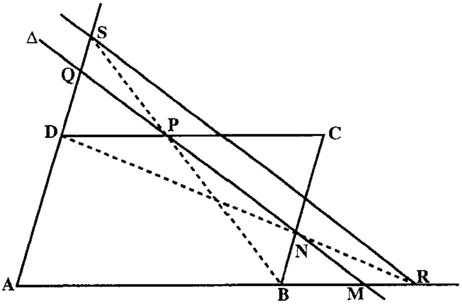
۱۹۸. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. روی ضلعهای AB و BC نقطه‌های H و K را طوری انتخاب می‌کنیم که مثلثهای KAB و HCB متساوی‌الساقین باشند ($KA = AB$ و $HC = CB$). ثابت کنید مثلث KDH نیز متساوی‌الساقین است.

۱۹۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD: $AB = a$ ، $AD = b$ $(b > a)$ و $B\hat{A}D = \alpha$ $(\alpha < 90^\circ)$. بر ضلعهای AB و DC ، نقطه‌های K و M طوری اختیار شده‌اند که BKDM لوزی است. طول ضلع این لوزی را بیابید.



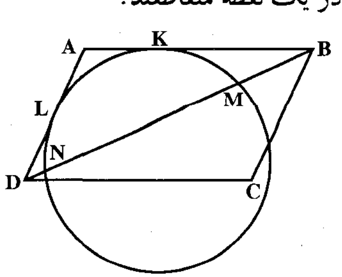
۲۰۰. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است، خط Δ خطهای AB، BC ، CD و DA را بترتیب در نقطه‌های M، N، P و Q قطع می‌کند. اگر نقطه‌های برخورد AB و DN را R و AD و BP را S بنامیم، ثابت کنید : $RS \| \Delta$.

مرحلهٔ نهایی هشتمین المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۹



۲۰۱. فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع باشد. دایره‌ای به قطر AC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد دایره با خطهای AB و AD را بترتیب M و N می‌نامیم. ثابت کنید که خطهای BD و MN و مماس بر دایره در نقطهٔ C، در یک نقطه متقاطعند.

۲۰۲. فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع باشد. دایره‌ای بر خطهای راست AB و AD مماس است و BD را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، دایره‌ای وجود دارد که از M و N می‌گذرد و بر خطهای CB و CD مماس است.



۲۰۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD (که لوزی نیست)، نیمساز زاویهٔ BAD را رسم کرده‌ایم که، خطهای راست BC و CD را، بترتیب، در نقطه‌های X و Y قطع کرده است. ثابت کنید، مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های C، X و Y می‌گذرد، روی محیط دایره‌ای قرار دارد که از نقطه‌های B ، C و D گذشته است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۲۰۴. در متوازی‌الاضلاع ABCD طول قطر AC از طول قطر BD بزرگتر است. نقطهٔ M، روی قطر AC چنان است که از رأسهای چهارضلعی BCDM می‌توان یک دایره گذراند. ثابت کنید خط راست BD ، مماس مشترک دایره‌های محیطی دو مثلث ABM و ADM است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۲۰۵. فرض می‌کنیم ABCD متوازی‌الاضلاعی با ضلعهای: $AB = a$ ، $AD = ۱$ و $B\hat{A}D = \alpha$ باشد. اگر مثلث ABD به زاویه‌های حاده باشد، ثابت کنید چهار دایره به شعاع ۱ و مرکزهای A ، B، C و D متوازی‌الاضلاع را اگر و فقط اگر: $a \le \cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha$ باشد، می‌پوشانند.

نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۷

۱۲.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۰۶. در متوازی‌الاضلاع ABCD، زاویهٔ $\hat{D} = ۶۰^\circ$، ضلع $AD = ۶cm$ و زاویهٔ $D\hat{C}A = ۳۰^\circ$ است.

۱. اندازهٔ ضلع CD را تعیین کنید.

۲. از نقطهٔ E واقع بر AB که برای آن نقطه ، $\frac{EA}{EB} = \frac{۱}{۲}$ است، خطی موازی AC رسم می‌کنیم. این خط ضلع DC را در نقطهٔ F و ضلع BC را در نقطهٔ G قطع می‌کند. EC و BF یکدیگر را در نقطهٔ I قطع می‌کنند. خطهای BC و EF برای مثلث BEI چه خطهایی هستند؟ خط IG را AD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اندازهٔ MA را بیابید.

۳. اندازهٔ مساحت ذوزنقهٔ محدب AEFD را تعیین کنید.

۲۰۷. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. دو ضلع مجاور AB و BC از این متوازی‌الاضلاع بترتیب برابر ۲a و a است. وسط ضلع AB را O و وسط ضلع CD را I می‌نامیم.

۱. ثابت کنید که مثلث DOC قائم‌الزاویه است.

۲. خطهای DO و CB در نقطهٔ E و خطهای CO و DA در نقطهٔ F متقاطعند. در مورد چهارضلعی CDFE چه می‌توان گفت؟

۳. فرض می‌کنیم $A\hat{D}C = ۱۲۰^\circ$ باشد. اندازهٔ CF و DE، همچنین مساحت چهارضلعی DCEF را بر حسب a حساب کنید.

۴. اگر G نقطهٔ برخورد CA و DO باشد، ثابت کنید که FG از نقطهٔ I می‌گذرد. FI و مساحت چهارضلعی OFAG را بر حسب a تعیین کنید.

۲۰۸. متوازی‌الاضلاع ABCD با ضلعهای $AD = a$ و $AB = b$ $(a < b)$ داده شده‌اند. نقطه‌های برخورد دو قطر این متوازی‌الاضلاع را O می‌نامیم.

۱. مکان هندسی رأسهای D و C را بیابید، در صورتی که رأسهای A و B ثابت بمانند و ضلعهای AD و BC بترتیب حول رأسهای A و B دوران کنند.

۲. با شرایط بالا مکان هندسی نقطهٔ O را تعیین کنید.

۳. فرض می‌کنیم $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ و D' تصویر D روی AB باشد. اندازهٔ DD' و قطرهای متوازی‌الاضلاع را بر حسب a و b تعیین کنید.

۴. حدود b را چگونه انتخاب کنیم که مکان هندسی دو نقطهٔ D و C متقاطع باشند؟ نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی را I و J ، مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD را S و مساحت چهارضلعی AIBJ را S' می‌نامیم. b را بر حسب a حساب کنید، در صورتی که $\frac{S'^۲}{S^۲} = \frac{۱}{۳}$ باشد. شکل را در این حالت رسم کنید.

۲.۲. رابطه‌های متری در مستطیل

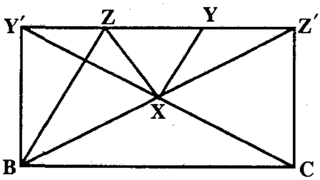
۱.۲.۲. تعریف و قضیه

می‌دانیم مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌هایش قائمه‌اند. مستطیل همهٔ ویژگیهای متوازی‌الاضلاع را داراست.

۲۰۹. **قضیه.** قطرهای مستطیل با هم برابرند.

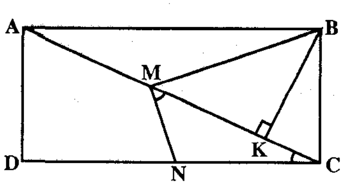
۲.۲.۲. زاویه

۱.۲.۲.۲. اندازهٔ زاویه



۲۱۰. در مستطیل $BCZ'Y'$ ضلع $Z'Y'$ را به وسیلهٔ نقطه‌های Z و Y به سه پارهٔ برابر تقسیم می‌کنیم. به گونه‌ای که $Z'Y = YZ = ZY'$. هرگاه X مرکز مستطیل با Y و Z مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل دهد، ثابت کنید که خطهای BX و BZ زاویهٔ B از مستطیل را به سه زاویهٔ برابر، هر یک 30°، تقسیم می‌کنند.

۲۱۱. در مستطیل $ABCD$ ، نقطهٔ K وسط ضلع AD است. اگر $AD:AB = \sqrt{2}$ باشد، زاویهٔ بین BK و AC را بیابید.



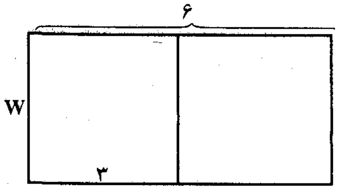
۲۱۲. در مستطیل $ABCD$ ، عمود BK را بر قطر AC رسم می‌کنیم. نقطه‌های M و N پاره‌خطهای AK و CD را نصف می‌کنند. ثابت کنید که $B\hat{M}N = 90^\circ$ است.

۲.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۱۳. در مستطیل $ABCD$، قاعدهٔ AD را با نقطه‌های M و P به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. اگر $AD = 3AB$ باشد، آن گاه ثابت کنید که حاصل‌جمع زاویه‌های AMB و APB برابر 90° است.

۳.۲.۲. ضلع

۱.۳.۲.۲. اندازهٔ ضلع



۲۱۴. می‌خواهیم یک کارت مستطیلی شکل به طول ۶ و عرض W ببریم، به نحوی که وقتی آن را به صورت نشان داده شده، از وسط تا کنیم شکلش عوض نشود. عرض این کارت چه قدر باید باشد؟

۲۱۵. طول مستطیلی ۵ سانتیمتر و عرض آن کمتر از ۴ سانتیمتر است. مستطیل را چنان تا می‌کنیم که دو رأس متقابل بر هم منطبق شوند. اگر طول خط تاخوردگی $\sqrt{6}$ باشد، عرض مستطیل برابر است با :

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) ۲ د) $\sqrt{5}$ هـ) $\sqrt{5/5}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۵

۲۱۶. مساحت یک مستطیل ۱۲ و پهنای آن $\frac{3}{4}$ درازا است. ابعاد آن چه قدر است؟

پاپیروس، مسکو

۲۱۷. مطلوب است ابعاد مستطیلی که درازای آن ۵ برابر پهنای آن و مساحت آن ۱۴۴۰ سانتیمتر مربع است.

۲۱۸. ضلعهای یک مستطیل به نسبت ۳ و ۴ هستند و مساحت آن ۳۰۰ سانتیمتر مربع است. طول ضلعهای مستطیل را بیابید.

۲۱۹. مساحت یک مستطیل ۳۲۰ سانتیمتر مربع و اندازهٔ محیطش ۷۲ سانتیمتر می‌باشد. طول و عرض این مستطیل را بیابید.

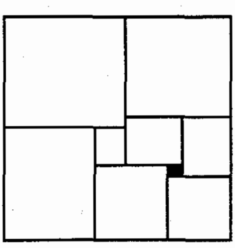
۲۲۰. دری وجود دارد که ارتفاع آن، به اندازهٔ ۶ «چی» و ۸ «تسون» از عرض آن بیشتر است. بزرگترین فاصلهٔ بین رأسهای آن (قطر) ۱ «چژان» است. ارتفاع و عرض در را پیدا کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، مسألهٔ چینی

۲۲۱. اگر مساحت و نسبت ضلعهای یک مستطیل معلوم باشد، طول ضلعهای آن را پیدا کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از پاپیروس مسکو

۲۲۲. مطابق شکل روبه‌رو، یک مستطیل به ۹ مربع تجزیه شده است. کوچکترین مربع، که در شکل سیاه شده، به ضلع ۱ است. اندازه‌های ضلعهای مستطیل داده شده چه قدر است؟



الف) ۳۲ و ۳۳ ب) ۳۱ و ۳۳

ج) ۳۱ و ۳۲ د) ۳۲ و ۳۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۲۲۳. در مستطیل به ضلعهای ۳ و ۴، مستطیل دیگری محاط کرده‌ایم که ضلعهای آن به نسبت ۱ و ۳ می‌باشند. ضلعهای این مستطیل را پیدا کنید.

۲۲۴. مصالح ساختمانی دیواری به طول ۳۰۰ متر موجود است. اگر بخواهیم با این مصالح وصل به انباری سالنی بسازیم که مساحتش ماکسیمم باشد، طول و عرض سالن را پیدا کنید.

۲.۳.۲.۲. نسبت ضلعها

۲۲۵. پسربچه‌ای به جای این که در طول دو ضلع مجاور یک مزرعهٔ مستطیل شکل حرکت کند، راه میان‌بر را انتخاب می‌کند و قطر مزرعه را می‌پیماید. به این ترتیب راهش به اندازهٔ نصف ضلع بزرگتر، کوتاهتر می‌شود. نسبت ضلع کوتاهتر مستطیل به ضلع بزرگتر برابر است با:

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) $\frac{۳}{۴}$ هـ) $\frac{۲}{۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۲۲۶. اگر محیط مستطیلی p و قطر آن d باشد، تفاضل بین طول و عرض مستطیل برابر است با:

الف) $\frac{\sqrt{۸d^۲-p^۲}}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۸d^۲+p^۲}}{۲}$ ج) $\frac{\sqrt{۶d^۲-p^۲}}{۲}$

د) $\frac{\sqrt{۶d^۲+p^۲}}{۲}$ هـ) $\frac{\sqrt{۸d^۲-p^۲}}{۴}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۴.۲.۲. قطر

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ قطر

۲۲۷. طول قطر مستطیلی را به دست آورید که طول ضلعهای آن برابر است با:

الف) ۳ و ۵ ب) ۴ و ۷ ج) ۳r و ۵r د) ۴r و ۷r

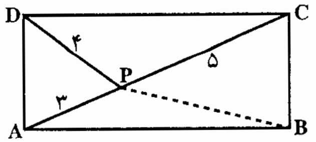
۲۲۸. در مستطیل ABCD، اگر محیط ۲۰ سانتیمتر باشد، کمترین مقدار قطر AC، بر حسب سانتیمتر برابر است با:

الف) ۰ ب) $\sqrt{۵۰}$ ج) ۱۰ د) $\sqrt{۲۰۰}$ هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲ . اندازهٔ پاره‌خط



۲۲۹. در شکل، نقطهٔ P درون مستطیل ABCD است و بر حسب سانتیمتر ۵ = PC ، ۴ = PD و ۳ = PA . آن گاه PB بر حسب سانتیمتر برابر است با :

الف) $۲\sqrt{۳}$ ب) $۳\sqrt{۲}$ ج) $۳\sqrt{۳}$ د) $۴\sqrt{۲}$ هـ) ۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۴

۲۳۰. یک مستطیل با طول و عرض ۴۸cm و ۳۶cm به وسیلهٔ قطر به دو مثلث تقسیم می‌شود. در هر یک از این مثلثها دایره‌ای را محاط می‌کنیم. فاصلهٔ بین مرکزهای این دو دایره را به دست آورید.

۲۳۱. مساحت مستطیل ABCD برابر $۴۸cm^۲$ و قطرهای آن نیز معادل ۱۰cm است. نقطهٔ O به فاصلهٔ ۱۳cm از رأسهای B و D قرار دارد. فاصلهٔ نقطهٔ O را از دورترین رأس مستطیل محاسبه کنید.

۲۳۲. گمشده‌ای در جنگل.

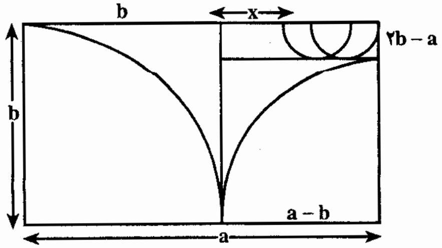
جنگلی است به شکل مستطیل، که در هر یک از چهارگوشهٔ آن یک دهکده قرار دارد، که ما آنها را A ، B، C و D می‌نامیم. یک نفر در این جنگل گم شده است. او از موقعیّت خود اطلاعی ندارد، ولی ما می‌دانیم که فاصلهٔ او از روستای A، چهار کیلومتر و از روستای B، هفت کیلومتر، و از روستای C، شش کیلومتر است. آیا می‌توانید بگویید، فاصلهٔ او از روستای D چه‌قدر است؟ پاسخ را تقریبی، و بر حسب متر بیابید.

۲۳۳. اندازهٔ پاره‌خطی که در شکل مقابل با x نموده شده است، چه‌قدر است؟

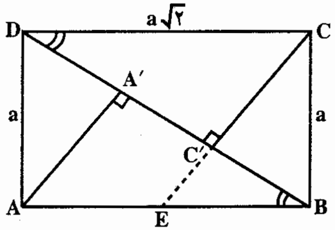
الف) ۴a − ۷b ب) ۳a − ۴b ج) ۲b − a

د) ۴a − ۳b هـ) ۴b − ۲a

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۲.۲.۵.۲ . تساوی پاره خطها



۲۳۴. در مستطیل ABCD ، طول ضلع $AD = a$ و $AB = a\sqrt{2}$ است. ثابت کنید عمودهایی که از رأسهای A و C بر BD فرود آیند، این قطر را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

۲۳۵. روی ضلعهای AB، BC و CD از مستطیل ABCD و در خارج آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABO_1، BCO_2 و CDO_3 را رسم می‌کنیم. ثابت کنید فاصله‌های بین پاره‌خطهای AB، O_1O_2 و BC، O_2O برابرند.

۲.۲.۶.شعاع دایره

۲.۲.۶.۱ . اندازهٔ شعاع دایره

۲۳۶. در مستطیل ABCD، به مساحت ۷۵ سانتیمتر مربع، اندازهٔ طول، سه برابر اندازهٔ عرض آن است. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مستطیل را بیابید.

۲۳۷. ABCD مستطیلی است که در آن $AB = 9$ و $BC = 7$ است. نقطهٔ M بر ضلع CD به طوری که $CM = 3$ ، و نقطهٔ N بر ضلع AD ، به طوری که $AN = 2/5$ ، اختیار می‌شود. شعاع بزرگترین دایره‌ای را پیدا کنید که در درون پنج ضلعی ABCMN جا می‌گیرد.

۲.۲.۷. محیط

۲.۲.۷.۱ . اندازهٔ محیط

۲۳۸. اندازهٔ قطر مستطیلی برابر $4\sqrt{13}$cm و نسبت طول به عرض آن مساوی $\frac{3}{2}$ است. اندازهٔ محیط این مستطیل را بیابید.

۲۳۹. مساحت مستطیلی برابر $32cm^2$ و طول آن ۲ برابر عرض آن است. محیط مستطیل را بیابید.

۲۴۰. ثابت کنید که محیط تمام متوازی‌الاضلاعهای محاط در یک مستطیل که ضلعهایشان موازی قطرهای مستطیل باشد، مقداری ثابت است.

۲.۷.۲.۲. نسبت محیطها

۲۴۱. مستطیلی با طول a و عرض b داده شده است. طول این مستطیل را نصف و عرض آن را دو برابر کرده‌ایم. نسبت محیط مستطیل حاصل به این مستطیل اوّلی چه قدر است؟

۲۴۲. قطر رسم شده از یک زاویهٔ مستطیلی، آن زاویه را به نسبت m:n تقسیم کرده است. نسبت محیط این مستطیل را بر قطر آن پیدا کنید.

۸.۲.۲. مساحت

۱.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت مستطیل

۲۴۳. اندازهٔ طول مستطیل ABCD برابر ۱۲ و اندازهٔ هر قطرش ۱۵ است. مساحت این مستطیل را تعیین کنید.

۲۴۴. مطلوب است مساحت مستطیلی که قاعدهٔ آن دو برابر ارتفاع، و عدد مساحت آن برابر عدد محیط آن باشد.

از کرجی، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

کرجی

در میان آخرین ریاضیدانان بزرگ دارالخلافه باید از ابوبکر محمدبن‌حسن (یا حسین) کرجی نام برد، که در حدود سال ۱۰۲۹ هجری درگذشت. نخستین تألیف مهمش الکافی فی‌الحساب نام دارد که احتمالاً در اثنای سالهای ۱۰۱۰ و ۱۰۱۶ نوشته شده، و بیشتر، اگر نه تماماً، اقتباس از مآخذ هندی است. در آن نه تنها مطالب ریاضی به صورتی که بسیاری از ریاضیدانان آن زمان بیان کرده‌اند آورده شده، بلکه قاعدهٔ مربع ربعی را هم به‌دست می‌دهد.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

قاعده‌ای که شاید متعلق به هند است. همچنین روشهای ضرب را به صورتی که با فرمول بیان شده، توصیف می‌کند.

$$(10a+a)(10b+b)=[(10a+a)b+ab]10+ab$$

و

$$(10a+b)(10a+c)=(10a+b+c)a\times 10+bc$$

کرجی مساحت شکلهای مسطح، بخصوص آنها را که مستلزم عددهای گنگ است، مورد بحث قرار می‌دهد، از جمله مسألهٔ مربوط به رابطهٔ هرون $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ را. این کتاب به بحث در معادله‌های درجهٔ دو و به توضیح اصطلاحهای جبر و مقابلهٔ متداول در ریاضیات اسلامی پرداخته است.

با این همه مهمترین تألیف کرجی در زمینهٔ جبر، کتاب الفخری است، که در آن عملهای متداول مقدارهای جبری، جذر، معادله‌های درجهٔ یک و دو، آنالیز سیال، و حل مسأله‌ها دیده می‌شود. معادله‌های درجهٔ دو از این قبیل است : $x^۴ + ۵x^۲ = ۱۲۶$ ، و حل معادله‌های درجهٔ دو به‌طور کلی براساس قاعدهٔ زیر است :

$$ax^۲ + bx = c \quad \text{و رابطهٔ} \quad x = [\sqrt{(\frac{b}{۲})^۲ + ac} - \frac{b}{۲}] : a$$

قاعده‌ها به طریق هندسی بیان شده، همچنانکه در آثار اسلامی پیش از آن دیده می‌شود. مسأله‌های متعددی که داده بظاهر به‌وسیلهٔ خوارزمی و دیوفانتوس قبلاً ذکر شده، و شامل مواردی است از قبیل یافتن جوابهای صحیح معادله‌های زیر :

$$x^۳ + y^۳ = z^۲ \text{ و}$$
$$x^۲ - y^۲ = z^۳ \text{ و}$$
$$x^۳y^۳ = z^۲ \text{ و}$$
$$x^۳ + ۱۰x^۲ = y^۲$$

و به دست آوردن جواب کسری برای این معادله‌ها :

$$x^۲ - y^۳ = z^۲$$
$$x^۳ + y^۲ = z^۳$$

این کتاب در شمار عالمانه‌ترین اثرهای جبر اسلامی است.

۲۴۵. نقطهٔ M را درون مستطیل ABCD طوری اختیار می‌کنیم که : $AM = \sqrt{۲}$ ، $BM = ۲$ و $CM = ۶$ باشد. اگر $AD = ۲AB$ باشد، مساحت مستطیل ABCD را محاسبه کنید.

۲۴۶. طبق مقررات FFC درازا و پهنای صفحهٔ تلویزیون باید به نسبت ۳ و ۴ باشد، اگر یک کمپانی، تلویزیون قابل‌حملی به بازار عرضه کند که قطر صفحهٔ آن ۲۵cm باشد،

الف) سطح دید تلویزیون چند سانتیمتر مربع است؟

ب) اگر اندازهٔ قطر دو برابر شود (یعنی ۵۰cm)، آیا سطح دید نیز دو برابر می‌شود؟ اگر پاسخ منفی است، چه تغییری می کند؟

۲۴۷. مستطیل R_1 داده شده است. طول یک ضلع آن ۲ سانتیمتر و مساحت آن $12cm^2$ است. مستطیل R_2 با R_1 متشابه است و قطر آن ۱۵ سانتیمتر است. مساحت R_2 به سانتیمتر مربع برابر است با :

الف) $\frac{9}{2}$ ب) ۳۶   ج) $\frac{135}{2}$

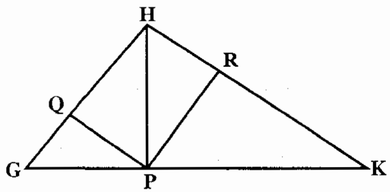
د) $9\sqrt{10}$ هـ) $\frac{27\sqrt{10}}{4}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۲۴۸. مساحت مستطیلی را تعیین کنید که اندازهٔ قطرش برابر d و اندازهٔ یک ضلعش برابر l است.

۲۴۹. در شکل $\square PRHQ$ مستطیل است و $HP \perp GK$. ثابت کنید :

$$a\square PRHQ = \sqrt{GQ.QH.HR.RK}$$



۲۵۰. دایره‌ای به شعاع r برضلعهای AB، AD و CD از مستطیل ABCD مماس است و از وسط قطر AC می‌گذرد. مساحت مستطیل، برحسب r، برابر است با :

الف) $4r^2$ ب) $6r^2$ ج) $8r^2$

د) $12r^2$ هـ) $20r^2$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۲۵۱. یک مزرعهٔ مستطیل شکل که عرض آن نصف طولش است تماماً با x متر نرده، محصور شده است. مساحت مزرعه برحسب x برابر است با :

الف) $\frac{x^2}{2}$ ب) $2x^2$ ج) $\frac{2x^2}{9}$

د) $\frac{x^2}{18}$ هـ) $\frac{x^2}{72}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۲۵۲. ثابت کنید، از میان همهٔ مستطیلهای با محیط برابر، حداکثر مساحت، متعلق به مربع است.

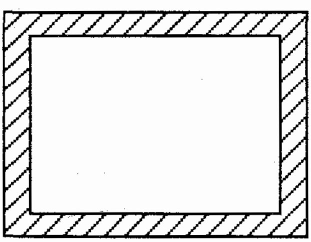
از والیس

والیس

مؤلف این مسأله، جرج والیس (۱۶۱۶، ۱۷۰۳)، ریاضیدان بزرگ انگلیسی و استاد دانشگاه آکسفورد است که رساله‌های زیادی در زمینهٔ ریاضیات دارد. والیس، در زمینهٔ پایه‌گذاری علمی هندسه، به‌عنوان یک دانش قیاسی و براساس اصول از قبل تعیین شده، کار می‌کرد. او توانست اصل توازی را ثابت کند و در ردیف قضیه‌ها قرار دهد. البته، این اثبات، با وارد کردن اصل دیگری انجام گرفته است، که به «اصل والیس» معروف است: برای هر شکلی، شکلی مشابه به آن و با اندازه‌های دلخواه وجود دارد.

۲.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۲۵۳. مستطیل ABCD داده شده است. روی قطر AC نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که $AE = \frac{AC}{6}$. از E خطی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا AD را در D' و AB را در B' قطع کند. مطلوب است محاسبهٔ مساحتهای مثلثهای CDD' و CBB' برحسب مساحت مستطیل.



۲۵۴. شخصی می‌خواهد دور تا دور یک باغ مستطیل شکل به ابعاد ۱۵m و ۲۰m پیاده‌روی به پهنای ۲ متر بسازد. مساحت این پیاده‌رو چه‌قدر خواهد بود؟

۲۵۵. مستطیل جدیدی می‌سازیم که قاعدهٔ آن برابر مجموع قطر و ضلع بزرگتر یک مستطیل داده شده باشد. اگر ارتفاع مستطیل جدید برابر تفاضل قطر و ضلع بزرگتر مستطیل داده شده باشد، آن‌گاه مساحت مستطیل جدید:

الف) بزرگتر از مساحت مستطیل داده شده است.

ب) مساوی مساحت مستطیل داده شده است.

ج) مساوی مساحت مربعی است، که ضلع آن برابر ضلع کوچکتر مستطیل داده شده است.

د) مساوی مساحت مربعی است، که ضلع آن برابر ضلع بزرگتر مستطیل داده شده است.

هـ) مساوی مساحت یک مستطیل است، که ابعاد آن قطر و ضلع کوچکتر مستطیل داده شده، می‌باشند.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲۵۶. ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، مربعی به‌وجود می‌آید که مساحتش مساوی است با نصف مجذور تفاضل دو بعد مستطیل.

۲۵۷. دایره‌ای بر ضلعهای AB و AD از مستطیل ABCD مماس بوده و از رأس Cی آن عبور می‌کند. این دایره ضلع DC را در نقطهٔ K قطع می‌کند. اگر AB = ۹cm و AD = ۸cm باشد، مساحت چهارضلعی ABKD را محاسبه کنید.

۲.۸.۲.۲. نسبت مساحتها

۲۵۸. طول و عرض مستطیلی بترتیب ۱۰٪ بیشتر و ۱۰٪ کمتر از ضلع مربع داده شده است. اگر R مساحت مستطیل و S مساحت مربع باشد، نسبت R:S برابر است با :

الف) ۹۹:۱۰۰ ب) ۱۰۱:۱۰۰ ج) ۱:۱

د) ۱۹۹:۲۰۰ هـ) ۲۰۱:۲۰۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

۳.۸.۲.۲. رابطهٔ بین مساحتها

۲۵۹. از بین مستطیلهایی که محیطشان ۴۰ سانتیمتر است، کدامیک مساحتش از همه بیشتر است؟

۲۶۰. ثابت کنید بین مستطیلهای به محیط ثابت P، مساحت وقتی ماکسیمم است که شکل مربع باشد.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از والیس

۲۶۱. هر دو بعد یک مستطیل را دو برابر می‌کنیم. مساحتش چه تغییری می‌کند؟

۲۶۲. از حکمهای زیر حکم نادرست کدام است؟

الف) دو برابر کردن طول قاعدهٔ مستطیل داده شده، مساحت آن را دو برابر می‌کند.

ب) دو برابر کردن طول ارتفاع یک مثلث، اندازهٔ مساحت آن را دو برابر می‌کند.

ج) دو برابر کردن طول شعاع دایرهٔ داده شده، اندازهٔ مساحت آن را دو برابر می‌کند.

د) دو برابر کردن مخرج یک کسر و تقسیم صورت کسر بر ۲، مقدار کسر را تغییر می‌دهد.

هـ) دو برابر کردن یک کمیّت داده شده، ممکن است اندازهٔ آن را کمتر از مقدار اصلی کند.

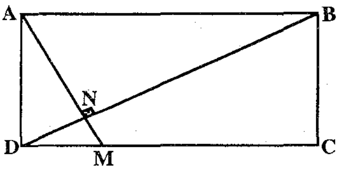
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۹.۲.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۲.۲. رابطه‌های متری در مستطیل

۲۶۳. مجموع مربعهای فاصله‌های هر نقطه از دو رأس مقابل مستطیل مساوی است با مجموع مربعهای فاصله‌های آن نقطه از دو رأس دیگر.

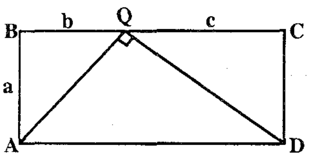
۲۶۴. درازای AB از مستطیل ABCD دو برابر پهنای BC است. از رأس A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم. این عمود قطر BD را در نقطهٔ N و ضلع CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که $AB = ۴DM$.



۲۶۵. در شکل روبه‌رو، ABCD یک مستطیل و AQD یک مثلث قائم‌الزاویه است. اگر $AB = a$ ، $BQ = b$ و $QC = C$ ثابت کنید :

الف. $AD = \sqrt{۲a^۲ + b^۲ + c^۲}$

ب. $a^۲ = bc$

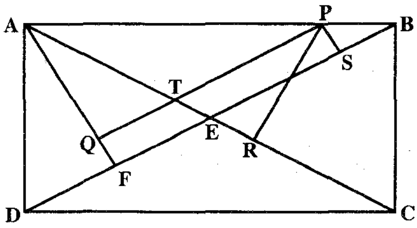


۲۶۶. ABCD یک مستطیل و P نقطه‌ای واقع بر AB است (شکل). $PS \perp BD$ و $PR \perp AC$ و $AF \perp BD$ و $PQ \perp AF$ آن‌گاه، $\overline{PR} + \overline{PS}$ برابر است با :

الف) $\overline{PQ}$ ب) $\overline{AE}$

ج) $\overline{PT} + \overline{AT}$ د) $\overline{AF}$

هـ) $\overline{EF}$



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۲۶۷. مستطیلی در یک مثلث محاط است، به قسمی که قاعدهٔ آن روی b، قاعدهٔ مثلث است. اگر ارتفاع مثلث h و x، ارتفاع مستطیل، نصف قاعدهٔ آن باشد، آن‌گاه :

الف) $x = \frac{۱}{۲}h$ ب) $x = \frac{bh}{b+h}$ ج) $x = \frac{bh}{۲h+b}$

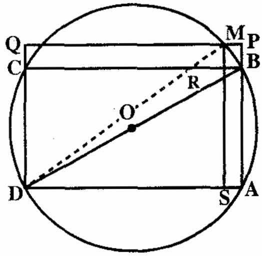
د) $x = \sqrt{\frac{hb}{۲}}$ هـ) $x = \frac{۱}{۲}b$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۲.۲.۹.۲. رابطه‌های متری در مستطیل و دایره

۲۶۸. قضیهٔ فرما. در مستطیل ABCD نسبت ضلع AB به ضلع مجاور CB مساوی $\sqrt{2}$ است. به قطر AB نیمدایره‌ای در خارج مستطیل رسم کرده، نقطهٔ دلخواه E از آن را به نقطه‌های C و D وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم F و G بترتیب نقطه‌های تقاطع ED و EC با AB باشند. ثابت کنید :
$$AG^2 + BF^2 = AB^2$$

۲۶۹. مستطیل ABCD و نقطهٔ M را روی دایرهٔ محیطی آن در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ M از چهار ضلع مستطیل وقتی نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی حرکت کند، ثابت می‌ماند.



۲۷۰. ABCD مستطیلی است که در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است ؛ PX، PX'، PY و PY' عمودهایی هستند که از یک نقطهٔ دلخواه P بر ضلعهای AB، CD، AD و BC رسم شده‌اند. ثابت کنید که $PX.PX' + PY.PY'$ با قوت P نسبت به دایرهٔ O برابر است.

۲.۲.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی، مستطیل است

۲۷۱. ثابت کنید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن مساوی باشند، مستطیل است.

۲.۲.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

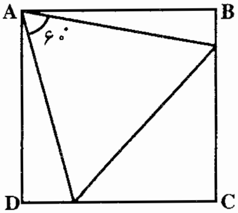
۲۷۲. طول و عرض مستطیل R بترتیب a و b است. می‌خواهیم مستطیلی با طول و عرض x و y به‌دست آوریم، چنان که $x < a$ و $y < b$ و محیط آن یک سوم محیط R و مساحت آن یک سوم مساحت R باشد. چند عدد از این مستطیلها وجود دارد؟

الف) ۰ — ب) ۱

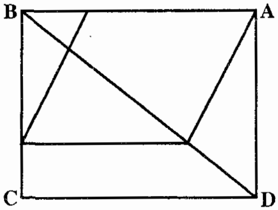
ج) ۲ — د) ۴

هـ) به تعداد بیشمار

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۳



۲۷۳. مستطیلی ۸×۷ داده شده است. یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی بر یکی از رأسهای مستطیل منطبق است و دو رأس دیگر آن بر ضلعهایی از این مستطیل که شامل این رأس نیستند، واقعند. طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را پیدا کنید.



۲۷۴. مستطیل ABCD که در آن AB = ۴ و BC = ۳، داده شده است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید که یک رأس آن بر A منطبق است و سه رأس دیگرش بر پاره خطهای AB، BC و BD (یک رأس روی هر پاره‌خط) قرار دارند.

۲۷۵. ضلع کوچکتر مستطیل ABCD برابر با ۱ است. چهار دایرهٔ هم مرکز، به مرکز A، را که، بترتیب از B، C و D و محل برخورد قطرهای مستطیل ABCD می‌گذرند، در نظر بگیرید. همچنین، مستطیلی با رأسهای روی این دایره‌ها وجود دارد (یک رأس روی هر دایره). ثابت کنید، مربعی وجود دارد که رأسهایش بر این دایره‌ها قرار دارند. طول ضلع مربع را پیدا کنید.

۲۷۶. در مستطیلی با ضلعهای ۲۰ و ۲۵، به تعداد ۱۲۰ مربع به ضلع واحد انداخته‌ایم. ثابت کنید، می‌توان در مستطیل دایره‌ای به قطر واحد قرار داد، به نحوی که حتی یکی از مربعها را قطع نکند.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۱

۲۷۷. فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ محیط بر یک مستطیل باشد. دو خط راست که از نقطهٔ P به موازات ضلعهای مستطیل می‌گذرند، ضلعهای مستطیل یا امتدادهای آنها را در نقطه‌های K، L، M و N قطع می‌کنند. ثابت کنید که N محل برخورد ارتفاعهای مثلث KLM است. همچنین، ثابت کنید که پای ارتفاعهای مثلث KLM، متمایز از P، بر قطرهای مستطیل قرار دارند.

۲۷۸. توپ بیلیارد از یک گوشهٔ میز مستطیلی بیلیارد با اندازه‌های ۸۶×۱۹، با زاویهٔ ۴۵ درجه حرکت می‌کند. در کدام یک از سوراخهایی که در گوشه‌های میز وجود دارند، می‌افتد و، قبل از آن، چندبار به کناره‌های میز می‌خورد (هم توپ و هم سوراخ را، نقطه به حساب می‌آوریم).

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲۷۹. از گوشهٔ میز بیلیارد مستطیلی با اندازه‌های $m \times n$ (m و n عددهای طبیعی‌اند)، توپ بیلیارد، تحت زاویهٔ ۳۰ درجه با دیوارهٔ میز آغاز به حرکت می‌کند. ثابت کنید، توپ بیلیارد، هرگز به گوشهٔ دیگری از میز نمی‌رسد (روشن است که توپ بیلیارد را، نقطه به حساب می‌آوریم).
آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲۸۰. ضلعهای زاویه‌ای برابر با α، لبه‌های یک میز بیلیارد را تشکیل می‌دهند. ماکسیمم تعداد بازگشتهایی که یک توپ (توپ بدون بعد فرض می‌شود) می‌تواند انجام دهد، چیست؟

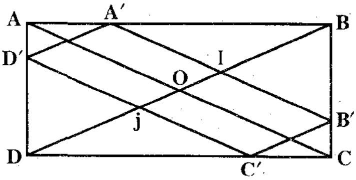
۲۸۱. مستطیلی را به قطعه‌هایی به اندازه‌های 2×2 و 4×1 تقسیم کرده‌ایم. برای بازسازی مستطیل، یکی از قطعه‌های 2×2 را کنار می‌گذاریم و به‌جای آن یک قطعهٔ 4×1 را انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید با این جابه‌جایی، مستطیل را نمی‌توان بازسازی کرد.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۲۸۲. مستطیل 60×24 را با رسم خطهای راست موازی ضلعها به مربعهای به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. اگر قطر مستطیل را هم رسم کنیم، چند بخش از مستطیل به‌وجود می‌آید؟
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲۸۳. گروه سربازان را به شکل مستطیلی به صف کرده‌ایم. از هر ردیف، بلندترین مرد را، و از بین این بلندترین‌ها، کوتاهترین مرد را انتخاب کرده‌ایم. سپس، از هر ستون کوتاهترین مرد را، و از بین این کوتاهترین‌ها، بلندترین مرد را انتخاب کردیم. کدام یک از این دو نفر بلندترند؟
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

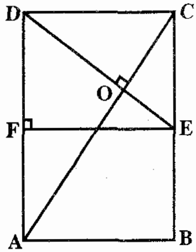
۱۲.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۸۴. مستطیل $ABCD$ داده شده است. از نقطهٔ O محل برخورد قطرهای این مستطیل روی قطر BD و در دو طرف نقطهٔ O طولهای $OI = OJ$ را جدا می‌کنیم و از این دو نقطه خطهایی به موازات قطر AC رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB، BC، CD و DA را بترتیب در نقطه‌های A'، B'، C' و D' قطع کنند. ثابت کنید:



۱. چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.
۲. اگر نقطه‌های I و J روی قطر AB، طوری تغییر کنند که همواره به یک فاصله از نقطهٔ O باشند، محیط متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ مقدار ثابتی است.

۲۸۵. در مستطیل ABCD ، $DE\perp AC$ و $EF\perp BC$ و نقطهٔ برخورد AC و DE نقطهٔ O است. ثابت کنید :



۱. $\Delta AOD \sim \Delta COE$

۲. $\Delta AOD \sim \Delta ADC$

۳. $\Delta ADC \sim \Delta DCE$

۴. $\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{CE}$

۵. FECD مستطیل ~ ABCD مستطیل

۲۸۶. مستطیل ABCD داده شده است. خطی که رأس B را به نقطهٔ I، وسط ضلع CD وصل می‌کند، قطر AC را در نقطهٔ M تلاقی می‌نماید.

۱. نسبت $\frac{MC}{MA}$ را حساب کنید و ثابت کنید که خط DM از وسط ضلع BC می‌گذرد.

۲. در خارج مستطیل، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABE$(\hat{E}=90^\circ)$ را می‌سازیم و در همهٔ قسمتهای بعدی مسأله فرض می‌کنیم $BC=BE=a$ باشد. خطی که از نقطهٔ I موازی AC رسم می‌شود، ضلع AB را در نقطهٔ F قطع می‌کند. ضلعهای مثلث BIF را برحسب a تعیین کنید و ثابت کنید که این مثلث قائم‌الزاویه است.

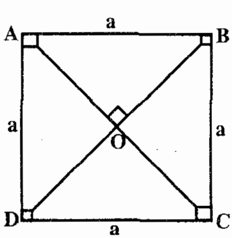
۳. ثابت کنید که ME نیمساز زاویهٔ AMB است.

۴. اندازهٔ مساحت چهارضلعی AEBM را بر حسب a به‌دست آورید.

۳.۲. رابطه‌های متری در مربع

۱.۳.۲. تعریف و قضیه

می‌دانیم مربع متوازی‌الاضلاعی است که چهارضلعش برابر و زاویه‌هایش همه قائمه‌اند. به‌عبارت دیگر، مربع، مستطیلی است که ضلعهایش برابرند.



مربع همهٔ ویژگیهای مستطیل را داراست، بعلاوه :

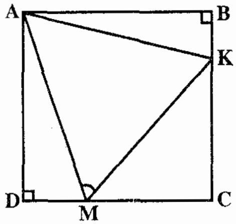
۱. در مربع قطرها عمود منصف یکدیگرند.

۲. در مربع قطرها نیمساز زاویه‌های درونی می‌باشند.

در مربع به ضلع a، اندازهٔ قطر برابر $a\sqrt{2}$ ، اندازهٔ محیط برابر $4a$ و اندازهٔ مساحت $S=a^2$ است.

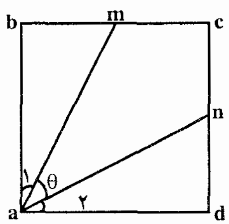
۲.۳.۲. زاویه

۲.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۲۸۷. در داخل مربع ABCD، مثلث AKM را طوری محاط کرده‌ایم که نقطهٔ K روی ضلع BC و نقطهٔ M روی ضلع CD قرار گرفته و $AM = AK$ است. اگر $\hat{AKM} = \beta$ باشد، در آن صورت اندازهٔ زاویهٔ MAD را به‌دست آورید.

۲۸۸. در شکل روبه‌رو، abcd مربع، m وسط [bc] و n وسط [cd] است. مقدار $\sin\theta$ برابر است با :



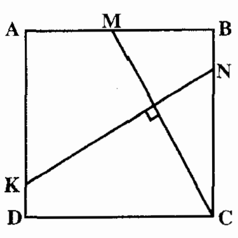
الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ب) $\frac{۳}{۵}$

ج) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$ د) $\frac{۴}{۵}$

هـ) مقداری غیر از اینها

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۲۸۹. نقطه‌های M، N و K بر ضلعهای مربع ABCD طوری اختیار شده‌اند که M وسط AB است، N برضلع BC قرار دارد $(NC = ۲BN)$ و K روی ضلع DA واقع است $(KA = ۲DK)$. سینوس زاویهٔ بین خطهای MC و NK را پیدا کنید.



۲.۳.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۹۰. نقطه‌های K و H را روی ضلعهای BC و CD از مربع ABCD طوری انتخاب کرده‌ایم که $HC = HD$ و $KC = ۲KB$، برابری دو زاویهٔ AKB و AKH را ثابت کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۲.۳.۳. ضلع

۲.۳.۳.۱. اندازهٔ ضلع

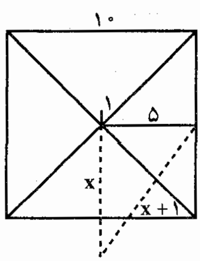
۲۹۱. مساحت یک مربع با مساحت دایره‌ای به قطر ۲ برابر است. طول ضلع مربع چه‌قدر است؟

۲۹۲. طول ضلع مربعی را بیابید که مساحت آن ۵ برابر مساحت مربعی به ضلع ۶ باشد.

۲۹۳. مطلوب است طول ضلع مربعی که مساحت آن با مساحت مستطیلی به ضلعهای ۸ و ۱۸ برابر است.

۲۹۴. شهری است به شکل مربع، با طول ضلع مجهول. در وسط هر کدام از ضلعهای آن یک دروازه قرار دارد. در فاصلهٔ ۲۰ «یو» از دروازهٔ شمالی یک ستون واقع است. اگر از دروازهٔ جنوبی به اندازهٔ ۱۴ «یو» به طرف جنوب برویم و بعد ۱۷۷۵ «یو» به طرف مغرب برگردیم، می‌توانیم ستون را ببینیم. مطلوب است طول ضلع شهر.

۲۹۵. برکهٔ آبی به ضلع ۱ «چژان» وجود دارد. در مرکز آن، یک نی روییده است که درست ۱ «چی» از آب بیرون زده است. اگر نی را به طرف کنار برکه خم کنیم، سر نی به کنار برکه می‌رسد. عمق برکه و ارتفاع نی را پیدا کنید. (هر «چژان» برابر است با ۱۰ «چی»).



مسأله‌های تاریخی ریاضیات، مسألهٔ چینی

۲۹۶. مطلوب است ضلع مربعی که مساحت آن معادل با مجموع یا تفاضل مساحتهای دو مربع داده شده باشد.

۲۹۷. مساحت مربعی با تقریب نزدیکترین ده هزارم سانتیمتر مربع ۱/۱۰۲۵ سانتیمتر مربع است. تعداد رقمهای معنی‌دار در اندازه‌گیری ضلع مربع برابر است با :

الف) ۲   ب) ۳   ج) ۴

د) ۵   هـ) ۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۲۹۸. مربعی به ضلع a در یک دایره محاط شده است. طول ضلع مربع محاط در یکی از قطعه دایره‌های به‌دست آمده را پیدا کنید.

۲۹۹. دو رأس مربعی روی دایره‌ای به شعاع R و دو ضلع دیگر آن نیز روی خط مماس بر این دایره قرار دارند. طول ضلع مربع را به‌دست آورید.

۳۰۰. دایره‌ای به شعاع R را از دو رأس مجاور مربعی عبور داده‌ایم، از رأس سوم مربع، مماسی را بر دایره رسم کرده‌ایم. طول این مماس دو برابر ضلع مربع است. طول ضلع مربع را به‌دست آورید.

۳۰۱. مربعی با حداقل اندازه‌ها را پیدا کنید، به نحوی که بتوان ۵ دایرهٔ به شعاع واحد در آن‌جا داد و، درضمن، هیچ دو دایره‌ای، دارای نقطه‌های مشترک درونی نباشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۳

۴.۳.۲. قطر

۱.۴.۳.۲. اندازهٔ قطر

۳۰۲. طول قطر مربعی را بیابید که طول ضلع آن ۳ ؛ ۵ ؛ ۷۸ ؛ $\sqrt{۲}$ ؛ a باشد.

۳۰۳. مساحت مربعی $۱۶۹cm^۲$ است. طول قطر مربع چه‌قدر است؟

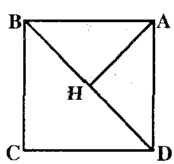
۳۰۴. یک مربع و یک مثلث متساوی‌الاضلاع محیطهای برابر دارند. مساحت مثلث $۹\sqrt{۳}$ متر مربع است و قطر مربع برحسب متر برابر است با :

الف) $\frac{۹}{۲}$ ب) $۲\sqrt{۵}$ ج) $۴\sqrt{۲}$

د) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

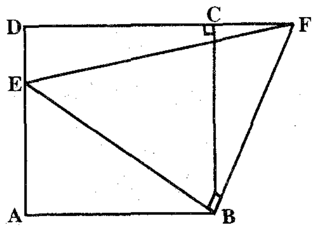
۳۰۵. با مراجعه به شکل زیر، ثابت کنید در مربعی به ضلع a، قطر آن، $a\sqrt{۲}$ است.



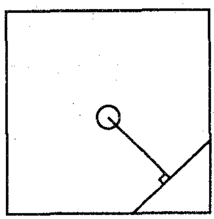
۳۰۶. طول ضلع مربعی ۴cm است. طول قطر مربعی را بیابید که طول ضلعش برابر طول قطر مربع اوّل باشد. سپس ثابت کنید طول قطر مربع دوم برابر نصف محیط مربع اوّل است.

۲.۳.۵. پاره‌خط

۲.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۳۰۷. □ABCD مربع است. E روی AD و F روی DC است، به نحوی که $EB \perp FB$. اگر $a\square ABCD = ۲۵۶$ و $a\Delta EBF = ۲۰۰$؛ CF را بیابید.



۳۰۸. استخری است به شکل مربع به ضلع ۲۰ متر که در وسط آن سکویی قرار دارد. برای رفتن روی سکو، از دو تختهٔ باریک با طولهای برابر، مطابق با شکل، استفاده می‌شود. طول هریک از این تخته‌ها چه‌قدر است؟

الف) $۱۰\sqrt{۲}$ متر ب) $\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳}$ متر ج) ۱۰ متر

د) $۵\sqrt{۳}$ متر هـ) $۴\sqrt{۵}$ متر

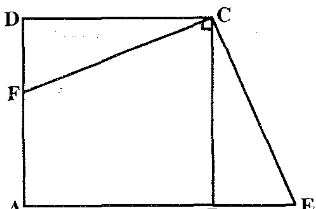
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۳۰۹. در یک صفحه، مربع ABCD به طول ضلع یک و نقطهٔ دلخواه P را در نظر بگیرید. فاصله‌های P از رأسهای A، B و C را بترتیب با u، v و w نشان دهید. هرگاه $u^۲ + v^۲ = w^۲$، بیشترین فاصلهٔ P تا رأس D چه‌قدر است؟

الف) $۱+\sqrt{۲}$ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) $۲+\sqrt{۲}$

د) $۳\sqrt{۲}$ هـ) $۳+\sqrt{۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳



۳۱۰. نقطهٔ F را روی ضلع AD از مربع ABCD در نظر بگیرید. از C عمودی بر CF رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند. ۲۵۶ سانتیمتر مربع مساحت ABCD و ۲۰۰ سانتیمتر مربع مساحت مثلث CEF است. اندازهٔ BE به سانتیمتر برابر است با:

الف) ۱۲ ب) ۱۴ ج) ۱۵ د) ۱۶ هـ) ۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۳

۳۱۱. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. فاصلهٔ میان وسط پاره‌خط AM، که در آن M وسط BC است، و نقطه‌ای مانند N بر ضلع CD، به‌طوری که $CN:ND = ۳:۱$ ، را پیدا کنید.

۳۱۲. طول ضلع مربعی، برابر با a و حاصلضربهای فاصله‌های دو رأس مقابل تا خطی مانند l، با هم برابر است. اگر بدانیم که هیچ ضلع مربع با l موازی نیست، فاصلهٔ مرکز مربع تا خط l را پیدا کنید.

۳۱۳. درون یا روی مربعی به ضلع ۱، پنج نقطهٔ دلخواه انتخاب شده‌اند. در انتخابهای ممکن این پنج نقطه، کوچکترین عددی که کمترین فاصلهٔ دو به دوی نقطه‌ها نابزرگتر از آن باشد، برابر است با :

الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ د) ۱ هـ) $\sqrt{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۱

۳۱۴. مربعی به ضلع S داده شده است. یک قطر مربع قاعدهٔ مثلثی است که ضلعهای آن نابرابر و مساحت آن با مساحت مربع برابر است. طول ارتفاع وارد بر این قاعدهٔ مثلث برابر است با :

الف) $S\sqrt{۲}$ ب) $\frac{S}{\sqrt{۲}}$ ج) $۲S$ د) $۲\sqrt{S}$ هـ) $\frac{۲}{\sqrt{S}}$

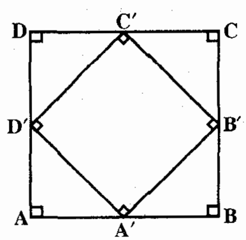
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۴

۳۱۵. نقطهٔ P واقع در درون مربع با ضلع به طول a، از دو رأس مجاور و نیز از ضلع مقابل این دو رأس به یک فاصله است. اگر این فاصلهٔ مشترک d باشد، d برابر است با :

الف) $\frac{۳a}{۵}$ ب) $\frac{۵a}{۸}$ ج) $\frac{۳a}{۸}$ د) $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ هـ) $\frac{a}{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۳

۳۱۶. روی ضلعهای مربع ABCD، طولهای مساوی AA' ، BB' ، CC' و DD' را در یک جهت جدا می‌کنیم. معین کنید به‌ازای چه‌مقدار AA' ، مساحت $A'B'C'D'$ می‌نیمم می‌شود.



۳۱۷. در داخل مربع ABCD، به ضلع S، مربع دایره‌های به مرکزهای A و B و به شعاع S، رسم شده‌اند. این ربع دایره‌ها در نقطهٔ X، در داخل مربع یکدیگر را قطع می‌کنند. X از CD چه‌قدر فاصله دارد؟

الف) $\frac{1}{2}S(\sqrt{3}+4)$ ب) $\frac{1}{2}S\sqrt{3}$ ج) $\frac{1}{2}S(1+\sqrt{3})$

د) $\frac{1}{2}S(\sqrt{3}-1)$ هـ) $\frac{1}{2}S(2-\sqrt{3})$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۲.۵.۳.۲. نسبت پاره‌خطها

۳۱۸. در مربعی، مربع دیگری محاط کرده‌ایم، به قسمی که رأسهای مربع دوم روی ضلعهای مربع اوّل قرار گرفته است. اگر نسبت مساحت مربع محاطی به مربع محیطی برابر $\frac{25}{49}$ باشد، مشخص کنید ضلعهای مربع اصلی به‌وسیلهٔ رأسهای مربع محاطی به چه نسبتی تقسیم می‌شوند.

۳۱۹. طول قاعدهٔ مثلثی دو برابر طول ضلع یک مربع است و مثلث و مربع یک مساحت دارند. نسبت ارتفاع مثلث به ضلع مربع برابر است با :

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) ۱ د) ۲ هـ) ۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۶.۳.۲. شعاع دایره

۱.۶.۳.۲. اندازهٔ شعاع دایره

۳۲۰. دایره‌ای بر دو ضلع مجاور مربعی مماس شده و هر یک از دو ضلع دیگر مربع را به قطعه‌هایی به طولهای ۲cm و ۲۳cm تقسیم می‌کند. شعاع دایره را پیدا کنید.

۳۲۱. در مربع داده شدهٔ ABCD، طول هر ضلع ۸ سانتیمتر است. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از A و D بگذرد و بر ضلع BC مماس باشد. شعاع دایره برحسب سانتیمتر برابر است با :

الف) ۴ ب) $4\sqrt{2}$ ج) ۵ د) $5\sqrt{2}$ هـ) ۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۳۲۲. طول ضلع AB از مربع ABCD، برابر با ۱ و وتری از یک دایره است، بقیهٔ ضلعهای مربع بیرون این دایره قرار دارند. طول مماس CD، رسم شده از رأس C بر دایره، برابر است با ۲. طول شعاع دایره را پیدا کنید.

۳۲۳. ضلع مربعی به اندازهٔ ۱/۵سانتیمتر است. چهار دایره به شعاعهای برابر با عددهای داده شده در گزینه‌های از الف تا د را در نظر بگیرید. کوچکترین این دایره‌ها که مساحتش بیشتر از مساحت مربع باشد، به کدام شعاع است؟

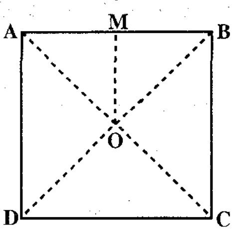
الف) ۰/۷ سانتیمتر　　　ب) ۰/۸ سانتیمتر

ج) ۰/۹ سانتیمتر　　　د) ۱ سانتیمتر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۳۲۴. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. شعاع دایره‌ای را پیدا کنید که از نقطه‌های زیر می‌گذرد :

M وسط ضلع AB، O مرکز مربع و رأس C.

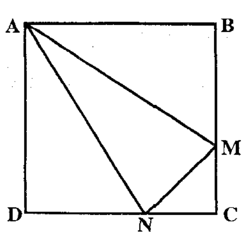


۳۲۵. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. نیمدایره به قطر BC را در داخل مربع رسم کرده و مرکز آن را O می‌نامیم.

۱. مطلوب است رسم دایره‌ای مماس بر نیمدایرهٔ مزبور و مماس بر خط AD در نقطهٔ D.

۲. طول شعاع این دایره را برحسب a حساب کنید.

۳۲۶. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. بر ضلع BC، نقطه‌ای مانند M به نحوی که BM = ۳MC و بر ضلع CD، نقطه‌ای مانند N به‌طوری که ۲CN = ND اختیار می‌شود. شعاع دایرهٔ محاط در مثلث AMN را پیدا کنید.



۲.۳.۷. محیط

۲.۳.۷.۱. اندازهٔ محیط

۳۲۷. قطر مربع I برابر $a+b$ است. محیط مربع II که مساحت آن دو برابر مساحت I است، برابر است با:

الف) $(a+b)^2$ ب) $\sqrt{2}(a+b)^2$ ج) $2(a+b)$

د) $\sqrt{8}(a+b)$ هـ) $4(a+b)$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۲.۳.۷.۲. نسبت محیطها

۳۲۸. دایره، مربع و مثلث متساوی‌الاضلاعی هم‌ارزند. نسبت محیطهای آنها را پیدا کنید.

۲.۳.۸. مساحت

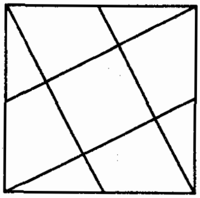
۲.۳.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۲.۳.۸.۱.۱. اندازهٔ مساحت مربع

۳۲۹. اندازهٔ مساحت مربعی به ضلع ۸ سانتیمتر را تعیین کنید.

۳۳۰. مساحت مربعی را که طول قطر آن $8\sqrt{2}$ است، به‌دست آورید.

۳۳۱. ضلع مربعی مساوی مجموع ضلعهای سه مربع به ضلعهای ۳، ۴ و ۱۲ است. اندازهٔ مساحت مربع را پیدا کنید.

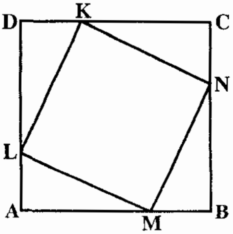


۳۳۲. در شکل مقابل، فرض کنید مساحت مربع بزرگ برابر ۱ باشد. هر رأس مربع را به وسط ضلع مقابلش وصل می‌کنیم. مساحت مربع کوچک چه‌قدر است؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{5}$ ج) $\frac{1}{6}$

د) $\frac{1}{7}$ هـ) $\frac{1}{8}$

مرحلهٔ اوّل چهاردهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۵

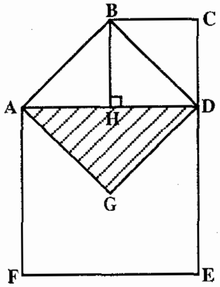


۳۳۳. ضلعهای مربعی به ضلع a را به نسبت n و m تقسیم کرده‌ایم، به‌طوری که هر رأس منتهی به یک قسمت بزرگتر و یک قسمت کوچکتر باشد، سپس نقطه‌های تقسیم را به هم وصل کرده‌ایم. مطلوب است مساحت چهارضلعی که به‌دست می‌آید.

۳۳۴. مساحت مشترک دو مربع برابر، به‌ضلع a، را اگر یکی از دوران به اندازهٔ زاویهٔ 45° دور یک رأس دیگری به دست بیاید، پیدا کنید.

۲.۱.۸.۳.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳۳۵. سه مربع چنان‌که در شکل نشان داده شده است یکدیگر را قطع می‌کنند. مساحت مثلث ADG را در هر یک از حالتهای زیر به‌دست آورید.



الف. $AF = ۱۰$

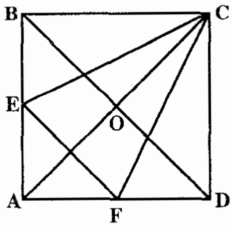
ب. $CE = ۱۸$

پ. $BD = ۳\sqrt{۲}$

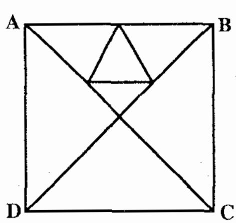
ت. ۲۷ = مساحت شکل AGDEF

ث. ۴۹ = مساحت مربع BCDH

۳۳۶. مساحت یک مربع ۸۱ و محیط آن با محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع برابر است. مساحت مثلث چه‌قدر است؟



۳۳۷. در مربع به ضلع a، وسطهای دو ضلع مجاور را به رأس روبه‌روی آنها وصل کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مثلثی که به‌دست می‌آید.



۳۳۸. مربعی به ضلع a داده شده است. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا کنید که یک رأسش بر وسط یکی از ضلعهای مربع منطبق است و دو رأس دیگرش روی قطرهای مربع قرار دارند.

۳۳۹. طول ضلع مربع ABCD یک واحد است. E و F بترتیب روی ضلعهای AB و AD قرار دارند. $AE = AF$ و مساحت چهارضلعی CDFE ماکزیمم است. این مساحت ماکزیمم برحسب واحد مربع برابر است با :

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۹}{۱۶}$ ج) $\frac{۱۹}{۳۲}$

د) $\frac{۵}{۸}$ هـ) $\frac{۲}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۳۴۰. در درون مربع به ضلع واحد، n ضلعی P قرار دارد. ثابت کنید می‌توان سه رأس A، B و C از n ضلعی P را پیدا کرد، به نحوی که داشته باشیم: $S_{ABC} \leq \frac{100}{n^2}$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

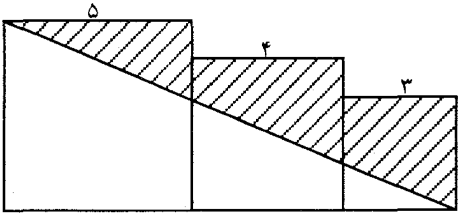
۳۴۱. طول ضلع مربع ABCD برابر ۶cm است. روی ضلعهای AD و AB نقطه‌های K و P را طوری انتخاب می‌کنیم که AK = ۳cm و AP = ۲cm باشد. ذوزنقه‌ای با قاعدهٔ KP را در این مربع محاط کنید. حداقل مساحت ممکن برای این ذوزنقه چه‌قدر است؟

۳۴۲. طول ضلع مربع ABCD معادل ۸cm است. روی ضلعهای AB و BC نقطه‌های P و E را بترتیب با شرط BP = BE = ۳cm اختیار می‌کنیم. روی ضلعهای CD و AD نیز نقطه‌های M و K را طوری اختیار می‌کنیم که ذوزنقهٔ PEMK دارای بیشترین مساحت ممکن باشد. بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ذوزنقه چه‌قدر است؟

۳۴۳. در مربع با مساحت ۵، ۹ چندضلعی قرار داده‌ایم، که مساحت هر یک برابر واحد است. ثابت کنید، دو تا از این چندضلعیها، سطح مشترکی دارند که از $\frac{1}{9}$ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۳۴۴. در شکل زیر، سه مربع به ضلعهای ۳، ۴ و ۵ در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیهٔ سایه‌زده شده چه‌قدر است؟



۳۴۵. دایره‌ای در مربعی به مساحت ۳۶ سانتیمتر مربع محاط شده است. از مقدارهای زیر کدام‌یک بهترین مقدار تقریبی مساحت دایره است؟

الف) ۱۸/۸۵ سانتیمتر مربع　　ب) ۹/۴۲ سانتیمتر مربع

ج) ۲۸/۲۷ سانتیمتر مربع　　د) ۲۷ سانتیمتر مربع

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

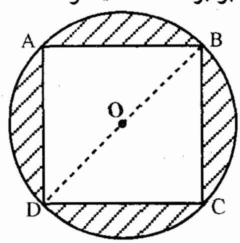
۳۴۶. دایره‌ای را در یک مربع به ضلع m محاط می‌کنیم. سپس مربعی را در آن دایره و دوباره دایره‌ای را در مربع بعدی محاط می‌کنیم و عمل را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر S_n مجموع مساحتهای نخستین n دایره باشد که بدین ترتیب محاط شده‌اند، هرگاه n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد S_n برابر است با :

الف) $\frac{\pi m^۲}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi m^۲}{۸}$ ج) $\frac{\pi m^۲}{۳}$

د) $\frac{\pi m^۲}{۴}$ هـ) $\frac{\pi m^۲}{۸}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۳۴۷. شعاع دایرهٔ محیط بر مربعی برابر ۱۰ سانتیمتر است. مساحت سطح بین دایره و مربع را تعیین کنید.



۳۴۸. از یک قطعه فلز مربعی شکل، یک قطعهٔ مدور به بزرگترین اندازه بریده‌اند. آن‌گاه از این قطعهٔ مدور، یک قطعهٔ مربعی دیگر به بزرگترین اندازه بریده‌اند. مقدار فلز به هدر رفته کلاً برابر است با :

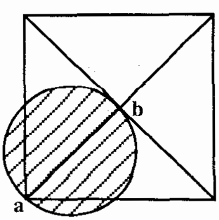
الف) $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع اوّلیه   ب) $\frac{۱}{۲}$ مساحت مربع اوّلیه

ج) $\frac{۱}{۲}$ مساحت قطعهٔ مدور   د) $\frac{۱}{۴}$ مساحت قطعهٔ مدور

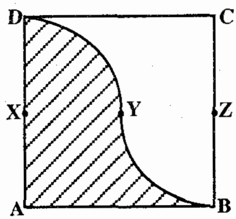
هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

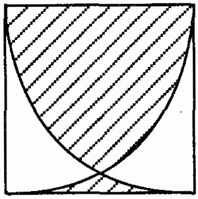
۳۴۹. مربع شکل روبه‌رو به ضلع یک است. مساحت دایره به قطر [ab]، که روی شکل با خطهای هاشور مشخص شده
الف. کمتر از ۰/۳۶ است.
ب. بین ۰/۳۶ و ۰/۳۸ واقع است.



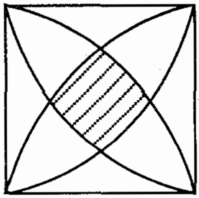
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱



۳۵۰. ABCD□ مربعی به ضلع S است. X و Z بترتیب وسطهای $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ هستند. مرکزهای دو کمان DY و BY بترتیب X و Zاند. مساحت سطح سایه زده را بیابید.



۳۵۱. مساحت قسمت وسط شکل. مرتعی داریم که طول هر ضلع آن ۱ واحد است. دو رأس مجاور آن را مرکز قرار داده‌ایم و دو کمان به شعاع واحد رسم کرده‌ایم. این دو کمان همدیگر را قطع کرده‌اند و قسمتی از سطح مرتع بین آنها محصور شده است. ما آن قسمت را در شکل با نقطه‌ها سایه زده‌ایم. مساحت قسمت سایه‌دار چه‌قدر است؟

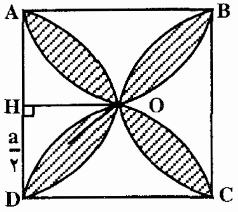


۳۵۲. چه‌قدر مساحت دارد؟

در یک مربع که طول ضلع آن واحد فرض می‌شود، چهار ربع دایره رسم شده است، که مرکزشان رأسهای مربع و طول شعاع آنها مساوی با ضلع مربع است. این ربع دایره‌ها بخشی از مربع را در وسط آن محصور کرده‌اند. مساحت این قسمت را بیابید.

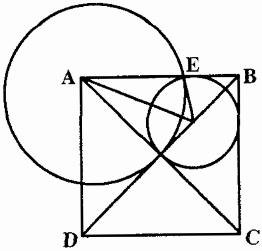
۳۵۳. روی ضلعهای مربعی به طول ضلع a، نیمدایره‌هایی در خارج مربع رسم می‌کنیم، به‌طوری که ضلعهای مربع قطر آنها محسوب می شوند. مساحت شکل گلبرگی حاصل را به‌دست آورید.

۳۵۴. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. چهار نیمدایره به قطرهای AB، BC، CD و AD در داخل مربع رسم می‌کنیم. مساحت شکل حاصل را حساب کنید.



۳۵۵. در داخل مربعی به ضلع a چهار دایرهٔ مساوی چنان رسم کرده‌ایم که هر یک از آنها بر دو ضلع مجاور مربع و دو دایره مماس باشد. مطلوب است مساحت چهارضلعی منحنی‌الخطی که ضلعهای آن قوسهای دایره‌های مماس و رأسهای آن نقطه‌های تماس دایره‌ها با یکدیگر باشند.

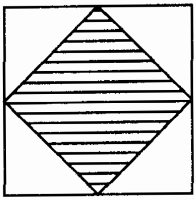
۳۵۶. مربع ABCD به ضلع a و دو دایره رسم شده‌اند. اوّلین دایره، به تمامی در درون مربع قرار دارد و بر ضلع AB در نقطهٔ E، و ضلع BC و قطر AC مماس است. دایرهٔ دوم با مرکز A، از نقطهٔ E می‌گذرد. مساحت بخش مشترک دو قرص محدود به این دایره‌ها را پیدا کنید.



۲.۸.۳.۲. نسبت مساحتها

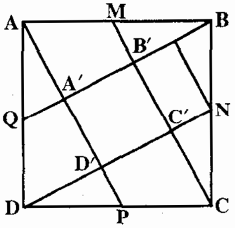
۳۵۷. اگر طول ضلع مربعی سه برابر طول ضلع مربع دیگری باشد، مساحت مربع اوّل چند برابر مساحت مربع دوم است؟

۳۵۸. از به هم وصل کردن وسطهای ضلعهای مربعی، یک مربع دیگر ایجاد شده است. نسبت مساحت مربع کوچکتر به مساحت مربع بزرگتر چه‌قدر است؟



۳۵۹. مربعی را در مربع دیگر محاط کرده‌ایم. به‌طوری که رأسهای مربع جدید روی مربع اصلی بوده و ضلعهای آن با مربع اصلی زاویه‌ای مساوی ۳۰ درجه بسازد. مطلوب است نسبت مساحت دو مربع.

۳۶۰. در شکل روبه‌رو، نقطه‌های M، N، P و Q بترتیب در وسط ضلعهای مربع ABCD قرار دارند. ثابت کنید مقدار مساحت چهارضلعی A′B′C′D′ برابر $\frac{1}{5}$ مساحت مربع ABCD است.



پنجمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۶

۳۶۱. یک دایره و یک مربع محیطهای برابر دارند. نسبت مساحت دایره به مساحت مربع برابر است با :

الف) $\frac{۴}{\pi}$ ب) $\frac{\pi}{\sqrt{۲}}$ ج) $\frac{۴}{۱}$ د) $\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$ هـ) $\frac{\pi}{۴}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۳.۸.۳.۲. رابطهٔ بین مساحتها

۳۶۲. ثابت کنید دایرهٔ محاطی یک مربع، مساحت دایرهٔ محیطی آن مربع را به دو قسمت متساوی تقسیم می‌کند.

۳۶۳. ثابت کنید، مساحت دایرهٔ محیطی یک مربع، دو برابر مساحت دایرهٔ محاطی آن است.

از ارشمیدس

ارشمیدس

مؤلف این مسأله، ارشمیدس سیراکوزی (۲۸۸، ۲۱۲ پیش از میلاد)، بزرگترین ریاضیدان و فیزیکدان همهٔ زمانهاست. زندگی او، آمیخته به افسانه‌هاست. طبق این افسانه‌ها، او در جریان دو سال، به کمک ماشین‌هایی که اختراع کرده بود، قلب دفاع از سیراکوز را در برابر ارتش بزرگ روم ـ که از خشکی و دریا شهر را محاصره کرده بود ـ تشکیل می‌داد. او «پیچ ارشمیدس» و «اهرمهای ارشمیدس» را اختراع و قانون هیدروستاتیک را ـ که به «قانون ارشمیدس» مشهور است ـ کشف کرد.

ارشمیدس، در محاسبه‌های خود، از روشهایی استفاده می‌کرد که به روشهای ریاضیات عالی امروزی ـ که براساس نظریهٔ حدها، بنیان‌گذاری شده است ـ بسیار نزدیک است.

(مسأله، از رسالهٔ «پیش قضیه‌ها» نوشتهٔ ارشمیدس، برداشته شده است.)

۳۶۴. محیط یک دایره و محیط یک مربع هر یک ۲۰cm است. مساحت کدام یک بیشتر است، چه‌قدر؟

۳۶۵. اگر یک دایره و یک مربع، محیطهای مساوی داشته باشند، آن‌گاه :

الف) مساحتهای آنها برابرند.
ب) مساحت دایره بیشتر است.
ج) مساحت مربع بیشتر است.
د) مساحت دایره، π برابر مساحت مربع است.
هـ) هیچ یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

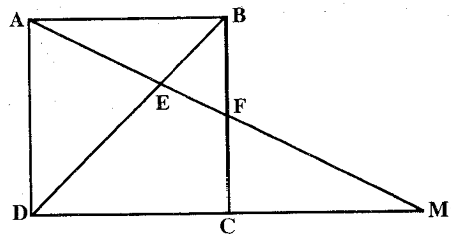
۹.۳.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۳.۲. رابطه‌های متری در مربع

۱.۱.۹.۳.۲. رابطه‌های متری در مربع (برابریها)

۳۶۶. مربع ABCD داده شده است. از رأس A خط غیرمشخصی رسم کرده‌ایم تا قطر BD را در E و ضلع BC را در F و امتداد ضلع CD را در M قطع کند. ثابت کنید :

$$EM.EF = EA^{۲}$$



۳۶۷. طول ضلع یک مربع برابر با واحد است. از مرکز این مربع خط راست دلخواهی عبور داده‌ایم. مطلوب است، مجموع مربعهای فاصله‌های چهار رأس مربع از این خط.

۳۶۸. اگر m ضلع مربعی باشد که طوری در مثلث ABC به ارتفاع h_a و ضلع $BC = a$ محاط شده، که دو رأسش روی BC قرار گرفته‌اند. ثابت کنید :

$$m(a+h) = ah$$

یا به‌طور کلی : ضلع مربع، نصف میانگین همساز قاعده و ارتفاع وارد بر این ضلع از مثلث است :

$$\frac{۱}{m} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{h}$$

۳۶۹. نقطه‌های P و Q را بترتیب، روی ضلعهای BC و CD از مربع ABCD، طوری در نظر گرفته‌ایم که مثلث APQ، متساوی‌الاضلاع باشد. خط راستی که از نقطهٔ P، عمود بر ضلع AQ رسم شده است، AD را در نقطهٔ E قطع کرده است. نقطهٔ F را در بیرون مثلث APQ طوری انتخاب می‌کنیم که مثلثهای PQF و AQE برابر باشند. ثابت کنید، پاره‌خط راست FE، دو برابر پاره‌خط راست FC طول دارد.

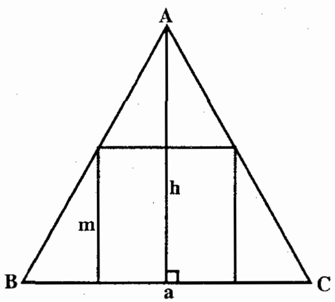
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۵

۳۷۰. دو مربع همجهت ABCD و $A_۱B_۱C_۱D_۱$ داده شده‌اند. رابطهٔ $AA_۱^۲ + CC_۱^۲ = BB_۱^۲ + DD_۱^۲$ را ثابت کنید.

۳۷۱. در مربعی، یک مستطیل (که طول و عرض نابرابر دارد) محاط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع یک طول و عرض آن (یعنی نصف محیط مستطیل)، برابر است با طول قطر مربع.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۳۷۲. مثلثی بر مربعی محیط شده است، به قسمی که ضلع BC از مثلث روی یک ضلع مربع است. اندازهٔ BC برابر a و اندازهٔ ارتفاع وارد بر BC برابر h، و اندازهٔ ضلع مربع برابر m است. نشان دهید که:



$$m(a+h)=ah$$

۲.۱.۹.۳.۲. رابطه‌های متری در مربع (نابرابریها)

۳۷۳. مربع واحد را به مستطیلهایی با ضلعهای موازی ضلعهای مربع تقسیم کرده‌ایم. در هر مستطیل، نسبت طول ضلع کوچکتر به طول ضلع بزرگتر را به‌دست آورده‌ایم. ثابت کنید، مجموع این نسبتها، کمتر از واحد نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۳۷۴. نقطهٔ O، در صفحهٔ مربع ABCD داده شده است. کمترین مقدار این کسر را پیدا کنید:

$$\frac{|OA|+|OC|}{|OB|+|OD|}$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۳۷۵. نقطه‌های K، L، M و N را، بترتیب، روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید:

$$|KL|+|LM|+|MN|+|NK|\geq ۲|AC|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

۳۷۶. نقطه‌های M و N را روی ضلعهای AB و CD از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. پاره‌خطهای راست CM و BN یکدیگر را در نقطهٔ P و پاره‌خطهای راست AN و MD یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

$$|PQ|\geq \frac{۱}{۲}|AB|$$

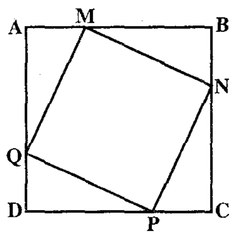
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۲.۳.۹.۲. رابطه‌های متری در مربع و دایره

۳۷۷. هرگاه P روی کمان CD از دایرهٔ محیطی مربع ABCD واقع باشد، ثابت کنید که :

$$PA(PA+PC)=PB(PB+PD)$$

۲.۳.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی مربع است



۳۷۸. مربع ABCD داده شده است. نقطه‌های M، N، P و Q را بترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA چنان اختیار می‌کنیم که :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PC}{PD}=\frac{QD}{QA}$$

باشد، ثابت کنید چهارضلعی MNPQ مربع است.

۳۷۹. دو مربع هم‌جهت $A_1B_1C_1D_1$ و $A_2B_2C_2D_2$ داده شده‌اند. پاره‌خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 ، C_1C_2 و D_1D_2 از طرف رأسهای یکی از این مربعها، به‌وسیلهٔ نقطه‌های A_0 ، B_0 ، C_0 و D_0 به نسبتهای مساوی تقسیم شده‌اند. ثابت کنید چهارضلعی $A_0B_0C_0D_0$ یک مربع است.

۳۸۰. ثابت کنید، اگر برای نقطهٔ O واقع در درون چهارضلعی ABCD، مساحت S چهارضلعی، در برابری زیر صدق کند :

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$$

آن وقت، چهارضلعی ABCD یک مربع و نقطهٔ O مرکز آن است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۸۲

۲.۳.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۳.۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به مربع

۳۸۱. ۱۳۷۳ شکل درون یک مربع به مساحت واحد قرار دارند. به‌طوری که مجموع مساحتهای آنها از ۱۳۷۲ بیشتر است. ثابت کنید این شکلها حداقل در یک نقطه مشترک هستند.

دومین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، ۱۳۷۳

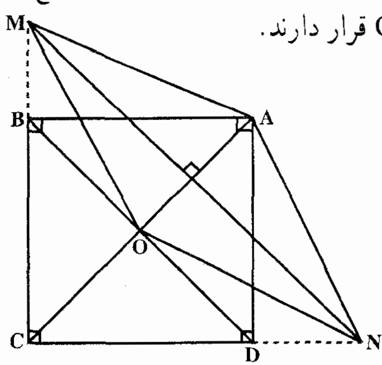
۳۸۲. در مربعی به ضلع واحد، ۱۹۷۳ شکل رسم کرده‌ایم که، مجموع مساحتهای آنها، از ۱۹۷۲ بیشتر است. ثابت کنید، همهٔ این شکلها، نقطهٔ مشترکی دارند.

۳۸۳. پروفسور اسمیت، در سالنی به شکل مربع، که دیوارهای آینه‌ای دارد، ایستاده است. پروفسور جونس، می‌خواهد چند صندلی در سالن، طوری قرار دهد که آقای اسمیت نتواند تصویر خودش را ببیند. آیا آقای جونس موفق می‌شود؟ (پروفسور و دانشجویان را، نقطه به حساب آورید. دانشجویان می‌توانند نزدیک دیوار، در گوشه‌ها ایستاده باشند.)

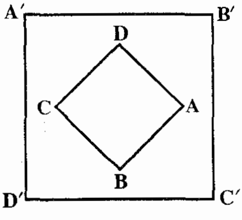
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۳۸۴. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. اندازهٔ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را بیابید که محاط در این مربع است به قسمی که یک رأس آن A، و دو رأس دیگرش بترتیب روی BC و CD است. ارتفاع این مثلث را نیز بیابید.

۳۸۵. مربع ABCD به ضلع ۱ داده شده است. طول ضلع لوزی را پیدا کنید که یک رأس آن بر A منطبق است، رأس روبه‌رو به آن بر خط BD واقع است و دو رأس باقیمانده، بر خطهای BC و CD قرار دارند.



۳۸۶. ABCD و A′B′C′D′، نگاشتهای مربع از یک ناحیه‌اند که با مقیاسهای مختلف رسم شده و شبیه شکل، روی هم قرار گرفته‌اند. ثابت کنید تنها یک نقطهٔ O از مربع کوچک وجود دارد که روی نقطهٔ O′ از مربع بزرگ واقع است و هر دو نقطهٔ O و O′، معرف یک نقطه از ناحیه هستند. با روشهای اقلیدسی، (یعنی به کمک پرگار و خط‌کش) راهی برای تعیین نقطهٔ O بیابید.



المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۸

۳۸۷. در یک مربع به ضلع واحد، یک چهارضلعی محاط کرده‌ایم که چهار رأس آن روی چهار ضلع مربع باشد. ثابت کنید، یکی از ضلعهای آن طولی دارد که از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۳۸۸. در مرکز یک زمین مربعی، گرگ و در هر گوشهٔ آن، یک سگ ایستاده است. گرگ می‌تواند به هر سمتی برود ولی سگها تنها روی ضلعهای مربع می‌توانند حرکت کنند. می‌دانیم، گرگ از عهدهٔ یک سگ برمی‌آید، ولی در برابر دو سگ مغلوب می‌شود. حداکثر سرعت سگ، یک و نیم برابر حداکثر سرعت گرگ است. ثابت کنید، سگها می‌توانند مانع فرار گرگ از درون مربع به بیرون آن شوند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

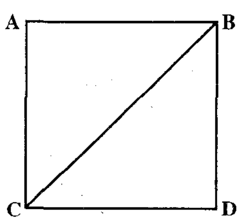
۳۸۹. قطعه زمین مربع شکلی را که حصاری به دور خود دارد، با حصارهای دیگری، به چند مربع کوچکتر تقسیم کرده‌ایم. طول ضلع هر یک از مربعهای کوچکتر با عدد درستی بیان می‌شود (برحسب متر). ثابت کنید، مجموع طولهای همهٔ حصارها، برحسب متر، بر ۴ بخشپذیر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۳۹۰. از مربع به ضلع ۱۰۰۰۰۰۰، مربعی به ضلع ۰/۰۰۱ را از گوشهٔ آن جدا و بخش باقیماندهٔ مربع را به ۱۰ مستطیل تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم در یکی از مستطیلها، نسبت طولهای دو ضلع از ۹ بزرگتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۳۹۱. کشف عددهای اندازه‌ناپذیر (عددهای گنگ). توجه فیثاغورس در این مورد به نسبت قطر مربع به ضلع آن، جلب شده بود (شکل). فیثاغورس از این فرض شروع کرد که پاره‌خطهای CB و AB قابل مقایسه باشند. این به معنای آن است که می‌توان پاره‌خط مشترکی پیدا کرد (مقیاس مشترک) که در پاره‌خط AB به اندازهٔ a مرتبه و در پاره‌خط CB به اندازهٔ b مرتبه جا بگیرد. اگر بزرگترین مقیاس مشترک پاره‌خطهای AB و CB را اختیار کرده باشیم، عددهای a و b نسبت به یکدیگر اوّل خواهند بود، یعنی مقسوم‌علیه مشترکی بجز واحد نخواهند داشت.



بین عددهای a و b این رابطه وجود دارد: $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

بنابراین عدد b باید زوج و به‌صورت $2n$ باشد، زیرا مجذور یک عدد فرد نمی‌تواند عددی زوج باشد. به این ترتیب $(2n)^2 = 2a^2$ و از آن‌جا $2n^2 = a^2$.

از این‌جا به این نتیجه می‌رسیم که a^2 و a باید عددی زوج باشند.
ولی a و b نسبت به هم اوّل بودند، بنابراین b باید عددی فرد باشد. به این ترتیب دو نتیجهٔ متضاد به‌دست می‌آید: عدد b باید در عین حال هم زوج و هم فرد باشد. بنابراین اشکال در فرض است که قبول کردیم CB و AB مقیاس مشترک دارند. به این ترتیب این پاره‌خطها مقیاس مشترک ندارند و قابل مقایسه نیستند.

۳۹۲. چهار روستا که در چهار رأس مربعی به ضلع برابر ۱۰ کیلومتر واقعند، یک شرکت تعاونی روستایی تشکیل داده‌اند. شرکت تعاونی، این امکان را دارد که ۲۸ کیلومتر راه بسازد. آیا شرکت تعاونی می‌تواند، جاده‌ها را طوری ایجاد کند که، از طریق آنها بتوان از هر روستایی به هر روستای دیگر رفت؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۳۹۳. کشوری دارای n^2 شهر است که به‌صورت مربع قرار گرفته‌اند و در ضمن فاصلهٔ بین هر دو شهر مجاور برابر ۱۰ کیلومتر است. شهرها به‌وسیلهٔ جاده‌ها به هم مربوطند. جاده‌ها خطهای راستی را تشکیل می‌دهند، که با ضلع مربع موازی‌اند. کمترین مقدار طول این دستگاه جاده‌ها چه‌قدر است؟ به شرطی که از هر شهر این کشور بتوانیم به هر شهر دیگری، از طریق جاده‌ها برویم.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۳۹۴. در صفحهٔ کاغذ شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰، همهٔ خطهای شکسته‌ای که ضلعهای خانه‌های صفحهٔ شطرنجی، ضلعهای آن را تشکیل می‌دهند و، درضمن، دو رأس متقابل مربع را با کوتاهترین مسیر به هم وصل می‌کنند، در نظر می‌گیریم. حداقل، چند مسیر از این‌گونه را باید درنظر گرفت تا، اجتماع آنها، همهٔ رأسهای خانه‌ها را دربرگیرد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

۳۹۵. یک مربع داده شده است. در داخل این مربع همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی را رسم می‌کنیم که یک رأس حادهٔ آنها بر یکی از رأسهای مربع و رأس قائمهٔ آنها بر روی قطرهای مربع منطبقند. مجموعهٔ رأسهای سوم این مثلثها را بیابید.

۳۹۶. روی کاغذ شطرنجی، مربع شامل ۱۱×۱۱ خانه رسم کرده‌ایم. می‌خواهیم مرکزهای برخی از خانه‌ها را طوری نشان‌گذاری کنیم که، مرکزهای هر دو خانهٔ دلخواه، روی پاره‌خط راستی باشد که دو نقطهٔ نشان‌دار را، به‌صورت قائم یا به‌صورت افقی به هم وصل کرده است. حداقل، چند خانه را باید نشان‌گذاری کرد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۳۹۷. در یک جدول مربعی ۱۰۰×۱۰۰، بعضی از خانه‌ها را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. هر خانهٔ رنگی، یا تنها خانهٔ رنگی در ستون خود و یا تنها خانهٔ رنگی در سطر خود است. حداکثر، چند خانه می‌تواند رنگی باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۳۹۸. مربع به ضلع واحد، n شکل را طوری پوشانده است که، هر نقطهٔ آن، دست کم متعلق به q شکل است. ثابت کنید، لااقل یک شکل وجود دارد که، مساحت آن، از $\frac{q}{n}$ کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۳۹۹. چهار رأس و یک نقطهٔ درونی مربع به ضلع واحد را نشان گذاشته‌ایم. ثابت کنید، سه نقطهٔ نشان‌دار وجود دارد که مساحت مثلث با رأسهایی در این سه نقطه، مساحتی بیشتر از $\frac{۱}{۸}$ ندارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

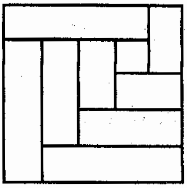
۴۰۰. ثابت کنید، نمی‌توان مربع را به مثلثهای متساوی‌الساقینی تقسیم کرد که، زاویهٔ رأس هرکدام از آنها، برابر ۱۰ درجه باشد.

۴۰۱. آیا می‌توان یک مربع را به ۱۹۷۷ مثلث طوری تقسیم کرد که روی ضلعهای مربع، به تعداد برابر از رأسهای مثلثها قرار گیرد و در ضمن، رأس هیچ مثلثی در درون ضلع مثلث دیگر نباشد؟

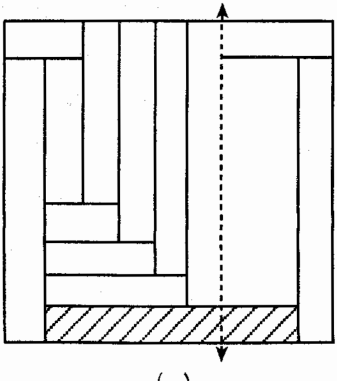
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

۴۰۲. «تجزیهٔ مربع» را به تقسیم آن، به مستطیلهایی می‌گوییم که ضلعهای آنها موازی با ضلعهای مربع و تعداد آنها محدود باشد. تجزیه را ساده می‌گوییم، وقتی از تقسیم بخشهای بزرگتر به دست نیامده باشد (یعنی دو یا چند مستطیل آن، نتوانند مستطیل بزرگتری تشکیل دهند). به ازای چه مقدارهایی از n، تجزیهٔ سادهٔ مربع به n مستطیل ممکن است؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶



(الف)



(ب)

۴۰۳. از مربعها مستطیل بسازید.
پدربزرگ توماس یک پازل خیلی قدیمی، و در عین حال فکری، به وی هدیه داده است. این پازل از ۹ مربع به ابعاد مختلف تشکیل یافته است، که طول هر ضلع آنها بترتیب عبارتند از: ۱۸، ۱۵، ۱۴، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۴ و ۱ سانتیمتر.
یک یادداشت جهت استفاده از این پازل نیز همراه آن است. بدین مضمون: اگر این مربعها را به روش خاصی کنار هم بچینند، یک مستطیل بزرگ حاصل می‌شود. با رسم یک «شما» از تلفیق آنها یک مستطیل بسازید.

۴۰۴. تعداد معماها آنقدر زیاد است (و بخصوص در هندسه) که واقعاً انتخاب کردن از بین آنها کار دشواری است. به همین مناسبت در این‌جا تنها از آنهایی نام ببریم که از نظر ریاضیات جالبند.
تقسیم فرش.
یک فرش مربع شکل به سه خواهر به ارث رسید، نگه‌داشتن این یادگار خانوادگی برای همهٔ آنها اهمیت داشت. به همین مناسبت تصمیم گرفتند آن‌را طوری تقسیم کنند که هرکدام یک فرش مربع شکل داشته باشند. چگونه توانستند به این نتیجه برسند.

۴۰۵. مسألهٔ ارشمیدس.
در یکی از کتابهای ریاضی عربی، مربوط به ریاضیدانهای اسلامی، نقل شده است که ارشمیدس روش بسیار جالبی برای تقسیم مربع به ۱۴ قسمت پیدا کرد که هر یک از آنها را بتوان با کسرهایی که مخرج مشترک ۴۸ دارند، بیان کرد.

۴۰۶. محمدبن موسی خوارزمی ریاضیدان بزرگ قرن نهم میلادی در بحث مربوط به استفاده از هندسه در محاسبه‌های جبری، ضمن مطالب دیگر، این مسأله‌ها را آورده است:
الف. عددی را پیدا کنید که مجذور آن به اضافهٔ ۱۰ برابر خود عدد، مساوی ۳۹ شود.
ب. عددی پیدا کنید که مجذور آن به اضافهٔ ۲۱ مساوی ۱۰ برابر خود عدد باشد.

۴۰۷. مجموع جمله‌های هر رشته‌ای از عددهای فرد متوالی، که از ۱ آغاز شده باشد، مجذور کامل است.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۴۰۸. هر عدد فرد، به جز واحد، تفاضلی از دو مجذور کامل است. در مکتب فیثاغوری، این حکم را، برای نمونه‌هایی خاص و به طریق هندسی، ثابت کرده بودند. ولی چگونه؟ کوشش کنید، این حکم را، بدون استفاده از شکلهای هندسی و در حالت کلی، ثابت کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۴۰۹. در مربع ABCD، O مرکز مربع، M و N، میانگاههای خطهای BO و CD است. ثابت کنید، مثلث AMN یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

۲. ۳. ۱۱. ۲. سایر مسأله‌های مربوط به مربع و دایره

۴۱۰. روی مربع ABCD، نقطه‌های K و N روی AB و AD بترتیب داده شده‌اند؛ طوری که: $AK \times AN = ۲BK \times DN$. ضلعهای CK و CN قطر BD را در نقطه‌های L و M قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطه‌های K، L، M، N و A روی یک دایره هستند.

دوازدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۲

۴۱۱. نقطهٔ E را روی ضلع BC، نقطه‌های K و M را روی ضلع CD و نقطهٔ H را روی ضلع AD از مربع ABCD انتخاب کرده‌ایم. در ضمن می‌دانیم:

$$|CE| = |CK| \quad , \quad |DM| = |DH|$$

ثابت کنید، بر چهارضلعی که از برخورد زاویه‌های HBM و EAK به دست می‌آید، می‌توان دایره‌ای مماس کرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۴۱۲. مربع ABCD داده شده است. روی ضلع AB، نقطهٔ K، روی ضلع CD، نقطهٔ H و روی پاره‌خط راست KH، نقطهٔ M را انتخاب کرده‌ایم. دایره‌های محیطی مثلثهای AKM و MHC را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطهٔ دوم برخورد این دایره‌ها (غیر از نقطهٔ M)، روی قطر AC از مربع قرار دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۴۱۳. در درون یک مربع به ضلع واحد، ۵۱ نقطه قرار دارد. ثابت کنید در بین آنها، سه نقطه پیدا می‌شود که در درون دایرهٔ به شعاع $\frac{۱}{۷}$ جا بگیرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۴۱۴. قرص دایره‌ای به قطر D روی یک صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ به پهنای D قرار گرفته است که مرکز قرص بر مرکز صفحه منطبق است. این قرص دایره‌ای چه تعداد از مربعهای صفحهٔ شطرنجی را به‌طور کامل می‌پوشاند؟

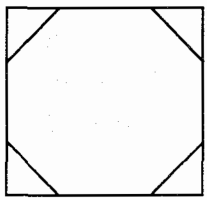
الف) ۴۸　　ب) ۴۴　　ج) ۴۰　　د) ۳۶　　هـ) ۳۲

مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی، ۱۹۷۲

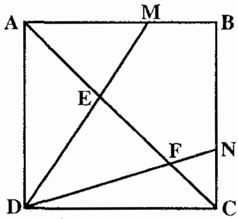
۴۱۵. پوشش میز مربعی.

می‌خواهیم یک میز مربعی، به ضلع ۹۰ سانتیمتر، را با دو تا رومیزی دایره‌ای ـ هر کدام به قطر یک متر ـ بپوشانیم. آیا این کار ممکن است؟

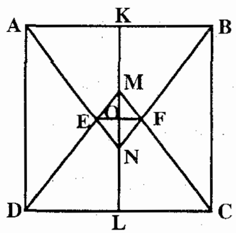
۲ . ۳ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی



۴۱۶. در شکل روبه‌رو یک هشت ضلعی منتظم در داخل یک مربع محاط شده است.
الف. اگر طول ضلع هشت‌ضلعی ۲ سانتیمتر باشد، طول ضلع مربع را پیدا کنید.
ب. اگر طول ضلع مربع ۱۰ سانتیمتر باشد، محیط هشت‌ضلعی را به‌دست آورید.



۴۱۷. روی ضلعهای AB و BC از مربعی، نقطه‌های M و N طوری اختیار می‌شوند که $|BM|+|BN|=|AB|$. ثابت کنید :
۱. خطهای DM و DN، قطر AC را به سه پاره‌خط که می‌توانند مثلثی تشکیل دهند، تقسیم می‌کنند.
۲. یکی از زاویه‌های این مثلث ۶۰ درجه است.



۴۱۸. مربعی به ضلع a داده شده است. روی دو ضلع روبه‌رو، و در داخل مربع، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی ساخته‌ایم. از تلاقی ضلعهای این دو مثلث یک چهارضلعی به دست می‌آید. نوع این چهارضلعی، زاویه‌ها، ضلعها و مساحت آن را به دست آورید.

۴۱۹. مربع ABCD به ضلع ۲a داده شده است. روی چهار ضلع AB، BC، CD و DA چهار پاره‌خط مساوی $AE = BF = CG = DH$ را اختیار می‌کنیم.
خطهای : AG و BH در نقطهٔ A' ، BH و CE در نقطهٔ B' ، CE و DF در نقطهٔ C' و DF و AG در نقطهٔ D' متقاطعند.
۱. ثابت کنید که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است.
۲. مکان هندسی نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' را وقتی نقطهٔ E از A تا B را بپیماید، تعیین کنید.
۳. در بقیهٔ مسأله نقطهٔ E را وسط AB فرض می‌کنیم. اندازهٔ BB' ، $B'A'$ و $A'H$ را برحسب a تعیین کنید.
۴. مساحت مثلث $BB'E$ را بیابید. همچنین مساحت ذوزنقهٔ محدب $AEB'A'$ و مساحت مربع $A'B'C'D'$ را به دست آورید.

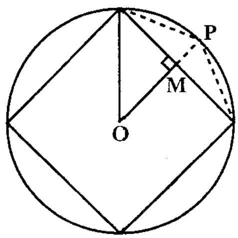
۴۲۰. مربعی در یک دایرهٔ به شعاع واحد محاط شده است.

الف. فاصلهٔ مرکز دایره تا نقطهٔ M وسط ضلع مربع را بیابید.

ب. طول MP را به دست آورید.

پ. طول ضلع هشت‌ضلعی منتظمی که در این دایره محاط می‌شود را حساب کنید.

ت. مسأله را در حالتی که یک شش ضلعی در دایره محاط شده باشد، در نظر بگیرید و طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره را به دست آورید.



۴۲۱. مربع ABCD با اندازهٔ ضلع ۲a داده شده است. دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم و مرکز آن را I می‌نامیم. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a دایرهٔ (I) را در نقطهٔ E درون مربع و در نقطهٔ G برون مربع قطع می‌کند. بالاخره دایرهٔ محاطی مربع که مرکز آن را O می‌نامیم، دایرهٔ (I) را در نقطهٔ F واقع بر کمان OB قطع می‌کند (رأسهای A، B، C و D به همین ترتیب قرار دارند).

۱. اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABE چه‌قدر است؟ ثابت کنید که AE بر دایرهٔ (B) مماس است.

۲. ثابت کنید که سه کمان OE، EF و FB با هم برابرند.

۳. ثابت کنید که FK موازی BE و مماس بر دایرهٔ (I) است (K وسط ضلع CD است).

۴. مساحت A بخشی از دایرهٔ (I) را که در خارج دایرهٔ (B) قرار دارد، برحسب a تعیین کنید. محاسبهٔ عددی $a = 6cm$ و A را تا ۱ سانتیمتر مربع تقریب استفاده کنید.

۴۲۲. مربع ABCD به ضلع ۴ سانتیمتر داده شده است. روی ضلع AD، نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که $AE = 3cm$ باشد و عمود AH را بر BE فرود می‌آوریم. این عمود CD را در نقطهٔ F قطع می‌کند.

۱. نشان دهید که $DF = AE$ و اندازه‌های AH، EH و BH را تعیین کنید.

۲. حال فرض می‌کنیم که نقطهٔ E بین A و D تغییر مکان دهد. مکان هندسی نقطهٔ H را بیابید.

۳. خط BE امتداد CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نشان دهید که چهارضلعی AHDM قابل محاط شدن در یک دایره است. مکان هندسی مرکز این دایره وقتی E از A تا D را می‌پیماید، تعیین کنید. شعاع این دایره را وقتی AE = ۳cm است را تعیین کنید.

۴. با فرض این که همواره AE = ۳cm باشد، مساحت چهارضلعی محدب BCFH را بیابید.

۴۲۳. از هر رأس مربع ABCD به ضلع a و در درون مربع دایره‌ای به شعاع a رسم می‌کنیم.
کمانهای به مرکز C و D یکدیگر را در نقطهٔ M قطع می‌کنند.
کمانهای به مرکز D و A یکدیگر را در نقطهٔ N قطع می‌کنند.
کمانهای به مرکز A و B یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند.
کمانهای به مرکز B و C یکدیگر را در نقطهٔ Q قطع می‌کنند.
اندازهٔ هر یک از کمانهای $\overset{\frown}{AM}$، $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{NC}$ را بر حسب a مشخص کنید و محیط چهارضلعی محدب MNPQ را پیدا کنید.

۴۲۴. مربع ABCD به ضلع ۲a داده شده است. یک دایره مرکزش، نقطهٔ O روی DC، و مماس در نقطهٔ D بر ضلع AD است، و دایرهٔ دیگری، مرکزش، نقطهٔ ′O، روی ضلع BC و مماس درونی به دایرهٔ اوّلی در نقطهٔ I و مماس به ضلع AB در نقطهٔ B است.

۱. اندازهٔ زاویهٔ BID را تعیین کنید و مکان هندسی نقطهٔ I را هنگامی که O روی ضلع CD جابه‌جا می‌شود، مشخص سازید. پاره‌خط ′OO نسبت به این مکان هندسی چه وضعی دارد؟ چه نتیجه‌ای در مورد مماس مشترک دو دایره در نقطهٔ I می‌توان گرفت؟

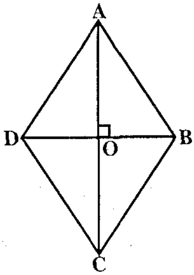
۲. اگر دایرهٔ (O) داده شده باشد، دایرهٔ (′O) چگونه رسم می‌شود؟
آیا دایرهٔ (′O) وجود دارد که در B مماس بر AB و مماس درونی به دایرهٔ (O) باشد؟

۳. اگر نقطهٔ O روی امتداد DC (از نقطهٔ C) باشد. ثابت کنید که دو دایرهٔ (′O) وجود دارد که در B بر AB مماس است و مماس درونی با دایرهٔ (O) است (یکی از این دایره‌ها مرکزش روی امتداد CB از طرف B است).

۴. دایرهٔ (O) به قطر CD و دایرهٔ (′O) مماس خارجی با (O) و مماس بر AB در B را در نظر می‌گیریم. اندازهٔ پاره‌خط AO را برحسب a بیابید، همچنین شعاع دایرهٔ (′O) و مساحت چهارضلعی محدب ′BDOO را به‌دست آورید.

۲. ۴. رابطه‌های متری در لوزی

۲. ۴. ۱. تعریف و قضیه



می‌دانیم لوزی متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلعش برابر باشند. لوزی همهٔ ویژگیهای متوازی‌الاضلاع را دارد، علاوه بر آن:

۴۲۵. قضیه. ۱. قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند.

۲. قطرهای لوزی نیمسازهای زاویه‌های درونی لوزی می‌باشند.

۲. ۴. ۲. زاویه

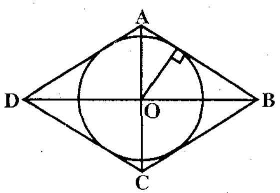
۲. ۴. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۴۲۶. زاویهٔ حادهٔ یک لوزی را که ضلعش واسطهٔ هندسی قطرهای آن است، پیدا کنید.

۴۲۷. نسبت محیط یک لوزی به مجموع قطرهای آن برابر k است. زاویه‌های لوزی را بیابید.

۴۲۸. اگر در لوزی $ABCD$ خط مستقیم رسم شده از رأس A زاویهٔ BAD را به نسبت ۱:۳ و ضلع BC را به نسبت ۳:۵ قطع کند، آن‌گاه اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ لوزی را پیدا کنید.

۴۲۹. زاویه‌های یک لوزی را، اگر مساحت دایرهٔ محاطی آن نصف مساحت لوزی باشد. پیدا کنید.



۴۳۰. مساحت یک لوزی مساوی Q و مساحت دایرهٔ محاطی آن مساوی S می‌باشد. مطلوب است زاویهٔ لوزی.

۲. ۴. ۳. ضلع

۲. ۴. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۴۳۱. دو قطر یک لوزی ۱۲cm و ۱۶cm می‌باشند. اندازهٔ ضلع این لوزی را بیابید.

۴۳۲. مساحت یک لوزی برابر $۱۲۰ cm^2$ و اندازهٔ یک قطرش برابر ۲۴cm است. اندازهٔ ضلع این لوزی را بیابید.

۴۳۳. ضلع لوزی را پیدا کنید که مساحت آن مساوی Q و نسبت قطرهایش مساوی m:n باشد ($Q = ۸۰$ و $m:n = ۰/۸$).

۴۳۴. ضلع لوزی را حساب کنید، به شرطی که بدانیم قطر کوچکتر لوزی مساوی ضلع آن و مساحت لوزی مساوی مساحت دایره‌ای به شعاع R است.

۴۳۵. در لوزی داده شده، یکی از قطرها، دو برابر دیگری است. اگر K مساحت لوزی برحسب متر مربع باشد، طول ضلع لوزی برحسب K برابر است با :

الف) $\sqrt{K}$ ب) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲K}$ ج) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳K}$

د) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۴K}$ هـ) عددی غیر از اینها

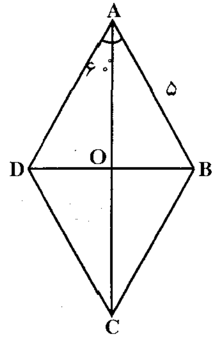
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۱

۲ . ۴ . ۴. قطر

۲ . ۴ . ۴ . ۱. اندازهٔ قطر

۴۳۶. هر ضلع یک لوزی به طول ۵cm و یک قطر آن به طول ۸cm است. طول قطر دیگر این لوزی چه‌قدر است؟

۴۳۷. اندازهٔ یک زاویهٔ یک لوزی ۶۰ و طول ضلع آن ۵ است. طول هر یک از قطرهای این لوزی را بیابید.

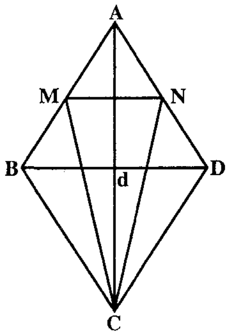


۴۳۸. در یک لوزی ارتفاع وارد بر یک ضلع آن را به دو پاره‌خط به طول m و n تقسیم می‌کند. قطرهای لوزی را محاسبه کنید.

۲ . ۴ . ۵. پاره‌خط

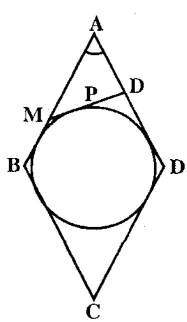
۲ . ۴ .۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۳۹. از رأس زاویهٔ حادهٔ یک لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ α ، دو خط چنان رسم کرده‌ایم که لوزی را به سه قسمت معادل تقسیم نموده است. مطلوب است طول قطعه‌خطهایی که رسم شده است.



۴۴۰. بر ضلعهای AB و AD از لوزی ABCD، نقطه‌های M و N طوری اختیار شده‌اند که خطهای راست MC و NC، لوزی را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند. اگر $|BD| = d$ ، $|MN|$ را پیدا کنید.

۴۴۱. در لوزی ABCD به ضلع a، زاویهٔ رأس A برابر با $120°$ است. نقطه‌های E و F، بترتیب، بر ضلعهای BC و AD قرار دارند. پاره‌خط EF و قطر AC از لوزی در نقطهٔ M متقاطعند. نسبت مساحتهای چهارضلعیهای BEFA و ECDF، ۱:۲ است. اگر $|AM|:|MC| = 1:3$ ، $|EM|$ را پیدا کنید.



۴۴۲. در لوزی ABCD با ضلع ۴cm و با زاویهٔ BAD مساوی $60°$ دایره‌ای محاط شده است. مماس رسم شده بر این دایره ضلع AB را در نقطهٔ M و ضلع AD را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر M = ۲cm باشد، MB و PD را به دست آورید.

۲ . ۴ . ۶. شعاع دایره

۲ . ۴ .۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۴۴۳. لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ α داده شده است. شعاع دایره‌ای را که از دو رأس مجاور لوزی می‌گذرد و بر ضلع روبه‌رو به آنها و یا امتداد آن مماس است، پیدا کنید.

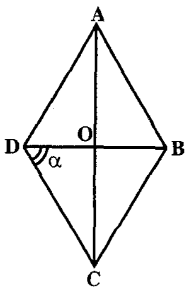
۴۴۴. دایره‌ای در یک لوزی به ارتفاع h و زاویهٔ حادهٔ α محاط شده است. شعاع بزرگترین دایره، از دو دایرهٔ ممکن، را که هر یک بر دایرهٔ داده شده و دو ضلع لوزی مماس است، پیدا کنید.

۴۴۵. اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ لوزی ABCD برابر α است. نسبت شعاع دایرهٔ محاطی لوزی به شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۲ . ۴ . ۷. محیط

۲ . ۴ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۴۴۶. مساحت یک لوزی برابر $60\,cm^2$ و اندازهٔ یک قطر آن برابر $12\,cm$ است. محیط این لوزی را بیابید.



۴۴۷. اگر $2p$ محیط لوزی و l مجموع قطرهایش باشند، ثابت کنید k نسبت محیط لوزی به مجموع قطرهایش، بین ۲ و $\sqrt{2}$ است.

۲ . ۴ . ۸. مساحت

۲ . ۴ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت

۲ . ۴ . ۸ . ۱ . ۱. اندازهٔ مساحت لوزی

۴۴۸. در یک لوزی طول هر ضلع $10\,cm$ و طول یک قطر $12\,cm$ است. مساحت لوزی را بیابید.

۴۴۹. بر یک نقشه، که مقیاس آن ۴۰۰ میل به یک و نیم اینچ است، قطعه زمینی به صورت یک لوزی است که یک زاویهٔ آن $60°$ است. قطر مقابل زاویهٔ $60°$ برابر ۳/۱۶ اینچ است. مساحت این قطعه زمین برحسب میل مربع برابر است با :

الف) $\frac{2500}{\sqrt{3}}$　　ب) $\frac{1250}{\sqrt{3}}$　　ج) ۱۲۵۰

د) $\frac{5625\sqrt{3}}{2}$　　هـ) $1250\sqrt{3}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۴۵۰. ضلع یک لوزی مساوی ۲ متر و نسبت قطرهایش مساوی ۳:۴ می‌باشد. مساحت آن را به دست آورید.

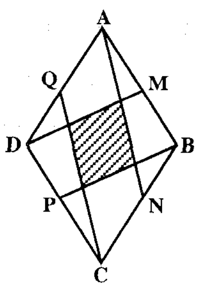
۴۵۱. محیط یک لوزی مساوی ۲p است و مجموع دو قطر آن مساوی m می‌باشد. مطلوب است مساحت لوزی.

۴۵۲. از رأسهای زاویهٔ منفرجهٔ یک لوزی، عمودهایی بر ضلعهای آن فرود آورده‌ایم. طول هریک از عمودها مساوی a و فاصلهٔ بین پای این عمودها مساوی با b می‌باشد. مطلوب است مساحت لوزی.

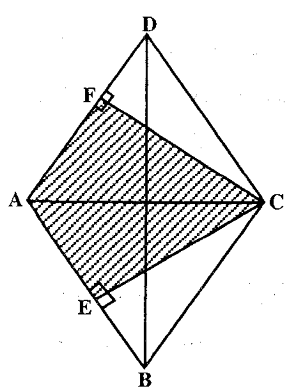
۴۵۳. مساحت لوزی ABCD را، اگر شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای ABC و ABD بترتیب R و r باشد، پیدا کنید.

۲ . ۴ . ۸ . ۱ . ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۵۴. در لوزی ABCD نقطه‌های M، N، P و Q بترتیب میانگاههای ضلعهای AB، BC، CD و AD است. اگر مساحت لوزی برابر $100 cm^2$ باشد، مساحت چهارضلعی محصور با خطهای AN، BP، DM و CQ را محاسبه کنید.



۴۵۵. در لوزی ABCD که قطرهای آن، $d_1 = 15$ و $d_2 = 20$ است، از رأس زاویهٔ منفرجهٔ C دو ارتفاع CE و CF را رسم کرده‌ایم. مطلوب است مساحت AECF.



۴۵۶. یک زاویه از لوزی که قطر بزرگش a است، مساوی $30°$ می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مستطیل محاط در این لوزی که یکی از قطرهایش قطر کوچک لوزی باشد.

۴۵۷. در یک لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ ۶۰ درجه، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. مطلوب است مساحت مستطیلی که رأسهای آن نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای لوزی باشد.

۴۵۸. دایره‌ای به شعاع R در یک لوزی محاط است. قطر بزرگ لوزی مساوی ۴R است. مطلوب است سطح هر یک از شکلهایی که به‌وسیلهٔ دو مماس متقاطع و قوس کوچکتر دایره که بین نقطه‌های تماس واقع است، محدود شده باشد.

۴۵۹. دایره‌ای به محیط ۴π در یک لوزی به محیط ۲۰ محاط شده است. مساحت تمام ناحیهٔ محصور بین لوزی و دایره را بیابید.

۲ . ۴ . ۸ . ۲. نسبت مساحتها

۴۶۰. قطرهای یک لوزی بر نسبت ۳:۴ هستند، مطلوب است نسبت مساحت لوزی به مساحت دایرهٔ محاطی آن.

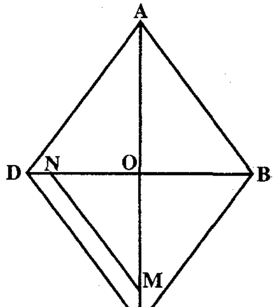
۲ . ۴ . ۹. رابطه‌های متری

۴۶۱. نقطهٔ O را در بیرون لوزی ABCD به ضلع داده شدهٔ a، طوری انتخاب کرده‌ایم که از دو رأس A و C، به فاصلهٔ $b > a$ باشد. ثابت کنید، حاصلضرب OB.OD، به اندازهٔ زاویهٔ BAD بستگی ندارد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۶۴

۲ . ۴ . ۱۰. ثابت کنید چهارضلعی لوزی است

۴۶۲. در یک چهارضلعی محدب ABCD، محل تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. اگر محیط مثلثهای ABO، BCO، CDO و ADO با هم برابر باشند، ثابت کنید این چهارضلعی «لوزی» است.



دومین المپیاد مقدماتی ریاضی ایران، ۱۳۷۲

۴۶۳. ABCD یک لوزی است و P، Q، R و S بترتیب، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC هستند. ثابت کنید که وسط پاره‌خطهای AP، BQ، CR و DS رأسهای یک لوزی مشابه با لوزی ABCD هستند.

۴۶۴. ثابت کنید، اگر قطرهای یک چهارضلعی، آن را به چهار مثلث با محیطهای برابر تقسیم کنند، این چهارضلعی، یک لوزی است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۲ . ۴ . ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۵. مربعهایی روی ضلعهای یک لوزی و در بیرون لوزی ساخته‌ایم و مرکزهای آنها را M، N، L و K نامیده‌ایم. ثابت کنید، چهارضلعی KLMN، یک مربع است.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۶

۴۶۶. مژده از رأسهای مربع ABCD چهار خط راست به موازات قطرهای آن رسم کرد و مربع محیطی را به دست آورد. بعد از اندازه‌گیری و محاسبه گفت :

عددی که مساحت مربع ABCD را نشان می‌دهد برابر است با عددی که محیط مربع محیطی را نشان می‌دهد! خواهر او توکا، وسط ضلعهای همان مربع ABCD را به هم وصل کرد و مربع محاطی را به دست آورد. بعد از اندازه‌گیری و محاسبه گفت :

عددی که مساحت مربع ABCD را نشان می‌دهد برابر است با عددی که محیط مربع محاطی را نشان می‌دهد! چه‌طور چنین چیزی ممکن است؟ در هر دو حالت مربع ABCD مساحت ثابتی دارد، امّا محیط مربع محیطی دو برابر محیط مربع محاطی است. چه‌طور دو مقدار نامساوی با یک مقدار، مساوی شده‌اند؟ مطلب را چگونه می‌توان روشن کرد؟

۲ . ۴ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۶۷. لوزی ABCD به قطرهای $AC = ۸a$ و $BD = ۶a$ داده شده است.

۱. اندازهٔ ضلع لوزی را برحسب a تعیینِ کنید.

۲. نقطهٔ E را روی AB با فرض $AE = x$ در نظر می‌گیریم. EF را موازی AC و EH را موازی BD و سپس FG را موازی BD (F روی BC، G روی CD و H روی AD) رسم می‌کنیم. چهارضلعی EFGH چگونه است؟ اندازهٔ ضلعهای آن را برحسب a و x به‌دست آورید.

x را چنان بیابید که محیط چهارضلعی EFGH برابر مقدار معلوم P باشد.

در قسمت آخر، به ازای $a = ۱cm$ در مورد جواب مسأله بحث کنید.

۴۶۸. لوزی ABCD به ضلع a داده شده است. BA را به طول AM = BA و BC را به طول CN = BC امتداد می‌دهیم.

۱. ثابت کنید که سه نقطهٔ N، D و M روی یک خط راست قرار دارند.

۲. از A به N وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این خط با قطر لوزی را P می‌نامیم. نسبت $\frac{AP}{AN}$ را بیابید. حال فرض می‌کنیم اندازهٔ زاویهٔ C از لوزی برابر ۶۰° باشد.

۳. اندازه‌های PD، AP، AN و PR (R نقطهٔ برخورد CD و AN) را برحسب a تعیین کنید.

۴. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MNB و شعاع این دایره را بیابید.

۴۶۹. لوزی ABCD را که از دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و BDC به ضلع a تشکیل شده است در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ D قاطعی رسم می‌کنیم که AB را در E و AC را در F قطع کند و CE و BF را وصل می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند.

۱. ثابت کنید که دو مثلث EBC و FBC متشابه‌اند و از آن‌جا نتیجه بگیرید که: $EB.CF = BC^۲$.

۲. ثابت کنید که نقطهٔ M بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است.

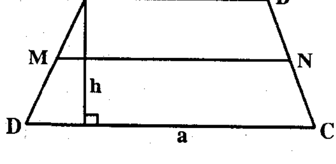
۳. مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلث BME و CMF.

۴. ثابت کنید که حاصلضرب شعاعهای این دو دایره همواره مساوی با $\frac{a^۲}{۳}$ است.

۲ . ۵ . رابطه‌های متری در ذوزنقه

۲ . ۵ . ۱ . رابطه‌های متری در ذوزنقه در حالت کلی

۲ . ۵ . ۱ . ۱ . تعریف و قضیه



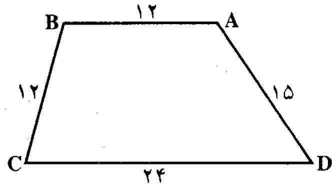
می‌دانیم ذوزنقه چهارضلعیی است که تنها دو ضلع آن با هم موازی‌اند. این دو ضلع موازی را قاعده‌ها و دو ضلع ناموازی را ساقهای ذوزنقه می‌نامند. مانند ذوزنقهٔ ABCD که در آن $AB \| CD$ است. فاصلهٔ بین دو قاعدهٔ ذوزنقه را ارتفاع ذوزنقه می‌نامند. مساحت ذوزنقه به قاعده‌های a و b و ارتفاع h برابر است با: $S = \frac{a+b}{۲} \times h$ پاره‌خط وصل شده بین وسطهای دو ساق ذوزنقه را میانهٔ ذوزنقه می‌نامند.

۴۷۰. قضیه. ثابت کنید میانهٔ هر ذوزنقه برابر نصف مجموع دو قاعده است.

۲. ۵. ۱. ۲. زاویه

۲. ۵. ۱. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۴۷۱. ذوزنقهٔ ABCD به ضلعهای AB = ۱۲ ، BC = ۱۲ ، CD = ۲۴ و DA = ۱۵ داده شده است. اندازهٔ زاویه‌های این ذوزنقه را بیابید.



۴۷۲. اندازهٔ زاویهٔ A از ذوزنقهٔ ABCD برابر α و طول ضلع جانبی AB دو برابر قاعدهٔ کوچکتر BC است. زاویهٔ BAC را به دست آورید.

۲. ۵. ۱. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۷۳. در ذوزنقهٔ ABCD (با قاعده‌های BC و AD)، روی ضلعهای AB و CD، بترتیب، نقطه‌های K و L را انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دو زاویهٔ BAL و CDK برابر باشند، آن‌وقت دو زاویهٔ BLA و CKD با هم برابرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۲. ۵. ۱. ۳. ضلع

۲. ۵. ۱. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

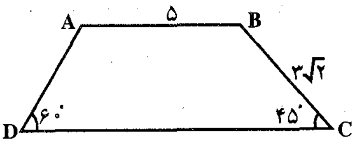
۴۷۴. طول یکی از قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۲۴cm و فاصلهٔ بین وسطهای قطرهای آن نیز معادل ۴cm است. طول قاعدهٔ دیگر ذوزنقه را پیدا کنید.

۴۷۵. طول خطی که دو نقطهٔ وسط قطرهای یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، برابر ۳ است. اگر طول قاعدهٔ بزرگتر ۹۷ باشد، طول قاعدهٔ کوچکتر برابر است با :

الف) ۹۴   ب) ۹۲   ج) ۹۱   د) ۹۰   هـ) ۸۹

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۹

۴۷۶. در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ AB، به اندازهٔ ۵ و ساق BC به اندازهٔ $۳\sqrt{۲}$ و زاویهٔ C، به اندازهٔ °۴۵ و زاویهٔ D به اندازهٔ °۶۰ است. اندازهٔ قاعدهٔ CD چه‌قدر است؟



الف) $۷+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ب) ۸ ج) ۹/۵

د) $۸+\sqrt{۳}$ هـ) $۸+۳\sqrt{۳}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴۷۷. طول قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقه برابر a و طول ضلعهای جانبی آن برابر b و c ($b<c$) و نسبت زاویه‌های مجاور به قاعده بزرگتر عبارت از ۲:۱ است. طول قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقه را محاسبه کنید.

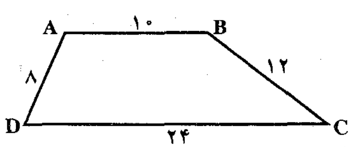
۴۷۸. طول ضلعهای جانبی و طول یکی از قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۱۵cm است. برای به حداکثر رسیدن مساحت این ذوزنقه، قاعدهٔ دیگر آن چه‌قدر باید باشد؟

۴۷۹. نقطه تلاقی نیمسازهای زاویه‌های منفرجهٔ ذوزنقه‌ای روی قاعدهٔ مقابل قرار دارد و طول آنها ۱۳cm و ۱۵cm است. اگر طول ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲cm باشد، آن‌گاه طول ضلعهای ذوزنقه را بیابید.

۲. ۵. ۱. ۴. قطر

۲. ۵. ۱. ۴. ۱. اندازهٔ قطر

۴۸۰. ذوزنقهٔ ABCD به ضلعهای $AB=۱۰$، $BC=۱۲$، $CD=۲۴$ و $DA=۸$ داده شده است. اندازهٔ قطرهای این ذوزنقه را بیابید.



۴۸۱. دو قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به طولهای a و b و ساقهای آن به طولهای c و d می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ قطرهای آن، m و n.

۲. ۵. ۱. ۵. پاره‌خط

۲. ۵. ۱. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۸۲. قطرهای یک ذوزنقه، مساوی و عمود بر هم هستند و طول ارتفاع آن برابر ۱۵cm است. طول میانهٔ ذوزنقه را پیدا کنید.

۴۸۳. یک مثلث و یک ذوزنقه مساحتهای برابر و همچنین ارتفاعهای برابر دارند. اگر قاعدهٔ مثلث ۱۸ سانتیمتر باشد، اندازهٔ میانهٔ ذوزنقه (پاره‌خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کند) چند سانتیمتر است؟

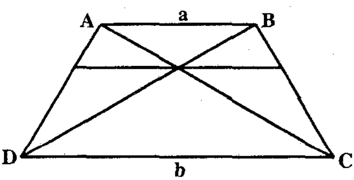
الف) ۳۶ ب) ۹ ج) ۱۸

د) از این داده‌ها به دست نمی‌آید هـ) هیچ یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۴۸۴. نقطهٔ M را روی یکی از دو ساق ذوزنقه چنان اختیار می‌کنیم که ساق را به نسبت ۲ و ۵ قطع کند، و از آن‌جا خطی به موازات دو قاعده می‌کشیم تا ساق دیگر را در N قطع کند. اگر طولهای دو قاعدهٔ ذوزنقه را a و b فرض کنیم، طول MN را برحسب a و b پیدا کنید.

۴۸۵. ضلعهای موازی ذوزنقه‌ای مساوی با a و b هستند، مطلوب است محاسبهٔ طول پاره‌خطی که به موازات دو قاعده رسم شده و ذوزنقه را به دو قسمت معادل تقسیم می‌کند.



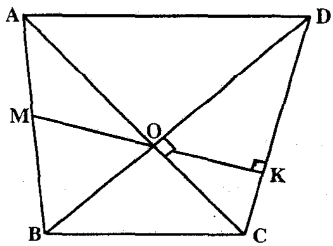
۴۸۶. طول پاره‌خط موازی با قاعده‌های یک ذوزنقه را که از نقطهٔ برخورد قطرهای آن می‌گذرد، پیدا کنید، به شرط اینکه طول قاعده‌های ذوزنقه برابر a و b باشد.

۴۸۷. قاعده‌های ذوزنقه‌ای عبارت از a و b هستند. طول پاره‌خطی که وسط قطرهای آن را به هم وصل می‌کند، پیدا کنید.

۴۸۸. B، b و h، دو قاعده و ارتفاع ذوزنقه‌ای داده شده‌اند؛ ارتفاع مثلثهایی را که بر نقطهٔ تلاقی دو ساق ذوزنقه و قاعده‌های آن به‌وجود می‌آیند، به دست آورید.

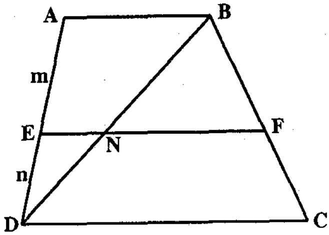
۴۸۹. ABCD یک ذوزنقه است ($BC \parallel AD$). نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ A و B را M، و نقطهٔ برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ C و D را N می‌نامیم. با معلوم بودن طول ضلعهای ذوزنقه، طول پاره‌خط راست MN را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲



۴۹۰. از نقطهٔ O، محل تلاقی قطرهای عمود برهم ذوزنقه ABCD ($AD \parallel BC$) خط MK را عمود بر ضلع CD رسم می‌کنیم (نقطهٔ M روی AB و نقطهٔ K روی CD قرار دارد). اگر $AD = 40\,cm$ و $BC = 30\,cm$ باشد، آن‌گاه MK را پیدا کنید.

۴۹۱. در ذوزنقهٔ ABCD نقطهٔ E را بر ساق AD چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{EA}{ED}=\frac{m}{n}$ شود. از E خطی موازی با قاعده‌ها می‌کشیم تا ساق دیگر را در F قطع کند، ثابت کنید:



$$EF=\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$$

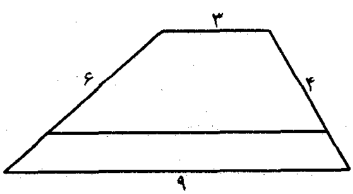
۲.۵.۱.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۴۹۲. دو قاعدهٔ یک ذوزنقه برابر ۳ و ۹ و دو ساق آن برابر ۴ و ۶ هستند. خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه، آن را به دو ذوزنقه با محیطهای مساوی تقسیم می‌کند. در این صورت دو ساق به چه نسبت تقسیم می‌شوند؟

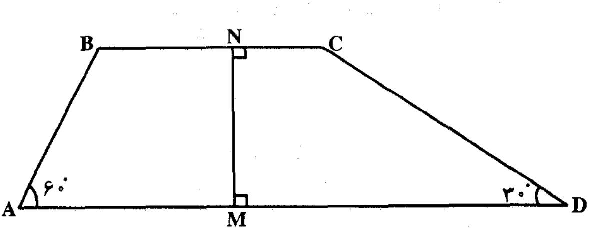
الف) ۴:۳   ب) ۳:۲   ج) ۴:۱

د) ۳:۱   هـ) ۶:۱

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷



۴۹۳. در ذوزنقهٔ ABCD، زاویه‌های A و D، مجاور به قاعدهٔ AD، بترتیب برابرند با °۶۰ و °۳۰. نقطهٔ N روی قاعدهٔ BC قرار دارد و BN:NC = ۲. نقطهٔ M بر قاعدهٔ AD واقع است. خط راست MN، بر قاعده‌های ذوزنقه عمود است و مساحت آن را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند. AM:MD را پیدا کنید.



۴۹۴. در هر ذوزنقه نیمساز زاویه‌ای که دو ضلع غیرموازی تشکیل می‌دهند، قاعده را به نسبت ضلعهای غیرموازی تقسیم می‌کند.

۴۹۵. نقطهٔ K روی قاعدهٔ AD از ذوزنقهٔ ABCD طوری قرار دارد که $|AK| = \lambda |AD|$. نسبت $|AM| : |MD|$ را پیدا کنید، که در آن، M محل برخورد قاعدهٔ AD با خطی است که از نقطه‌های برخورد خطهای AB و CD، و خطهای BK و AC می‌گذرد.

با قرار دادن $\lambda = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$)، پاره‌خط مفروضی را به کمک یک خط‌کش تنها و خط راست مفروضی موازی این پاره‌خط، به n بخش برابر تقسیم کنید.

۲ . ۵ . ۱ . ۵ . ۳. تساوی پاره‌خطها

۴۹۶. در ذوزنقهٔ ABCD از نقطهٔ O محل تلاقی دو قطر AC و BD دو خط به موازات AD و BC رسم می‌کنیم که در نقطه‌های A' و B' قاعدهٔ AB را قطع می‌کنند. ثابت کنید: $AA' = BB'$.

۴۹۷. در ذوزنقهٔ ABCD قاعده‌های $AB = a$ و $CD = b$ می‌باشند، خطی از نقطهٔ O محل تلاقی دو قطر به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساقها را در M و N قطع کند.

۱. ثابت کنید: $OM = ON$.

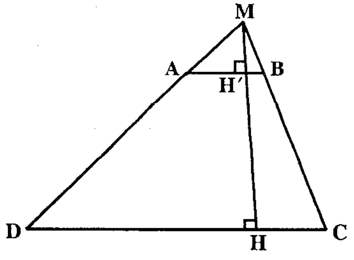
۲. طول MN را بر حسب a و b حساب کنید.

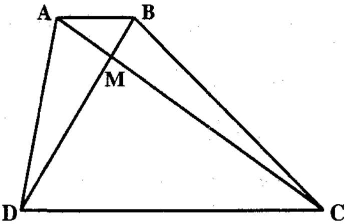
۴۹۸. از نقطهٔ O محل تلاقی ضلعهای غیرموازی ذوزنقه خطی به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا امتداد قطرها را در M و N قطع کند. ثابت کنید O وسط MN است.

۴۹۹. در هر ذوزنقه، هر خط که به موازات قاعده‌ها رسم شود و قطرها و ضلعهای غیرموازی را قطع کند، قطعه‌هایی از این خط محصور بین قطرها و ضلعهای غیرموازی با هم برابرند.

۲ . ۵ . ۱ . ۵ . ۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۰۰. در ذوزنقهٔ ABCD می‌دانیم که قاعدهٔ CD، چهار برابر قاعدهٔ AB است. ثابت کنید که ارتفاع ذوزنقه، ۳ برابر ارتفاع مثلث ANB است (N محل تلاقی دو ساق ذوزنقه است).

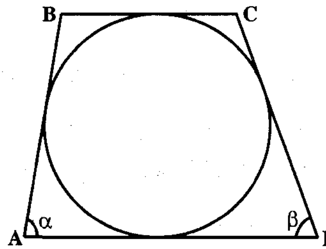




۵۰۱. در ذوزنقه ABCD قاعدهٔ CD چهار برابر قاعدهٔ AB است. ثابت کنید که ارتفاع ذوزنقه پنج برابر ارتفاع مثلث AMB است (M محل تلاقی دو قطر ذوزنقه).

۲. ۵. ۱. ۶. شعاع دایره

۲. ۵. ۱. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره



۵۰۲. در ذوزنقه‌ای که زاویه‌های حادهٔ مجاور به قاعدهٔ آن α و β و مساحت آن Q می‌باشد، دایره‌ای محاط کرده‌ایم. مطلوب است شعاع دایره.

۲. ۵. ۱. ۷. محیط

۲. ۵. ۱. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۵۰۳. در ذوزنقهٔ ABCD، هر یک از قاعده‌های AD و BC را در هر دو جهت امتداد می‌دهیم. نیمساز زاویه‌های خارجی A و B در نقطهٔ K و نیمساز زاویه‌های خارجی C و D در نقطهٔ E همدیگر را قطع می‌کنند. محیط ذوزنقه را با توجه به $KE = ۲۰cm$ به‌دست آورید.

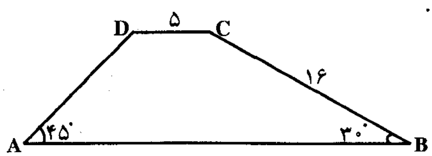
۲. ۵. ۱. ۸. مساحت

۲. ۵. ۱. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۲. ۵. ۱. ۸. ۱. ۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه

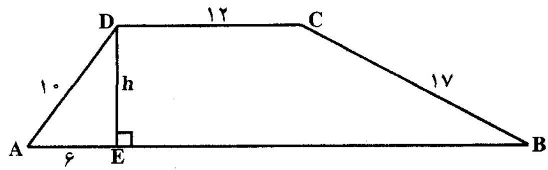
۵۰۴. طول قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۶۲cm و ۲۰cm، و طول ضلعهای غیرموازی آن برابر ۴۵cm و ۳۹cm است. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۰۵. در ذوزنقهٔ □ABCD اندازهٔ زاویه‌های قاعده ۴۵ و ۳۰ است و $BC = ۱۶$ ، $DC = ۵$. a □ ABCD را بیابید.



۵۰۶. طول قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۳۰cm و ۱۲cm، و طول قطرهای آن نیز برابر ۲۰cm و ۳۴cm است. مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۰۷. ABCD ☐ ذوزنقه‌ای است که AB∥DC . اگر طول پاره‌خطها مطابق شکل باشد، مساحت ذوزنقه را بیابید.

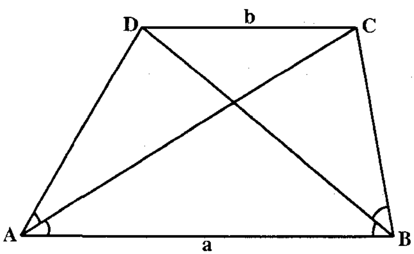


۵۰۸. طول قطرهای ذوزنقه‌ای برابر با ۳ و ۵ و طول پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، برابر با ۲ است. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۵۰۹. در ذوزنقهٔ ABCD، نقطهٔ K میانگاه قاعدهٔ AD، نقطهٔ M میانگاه قاعدهٔ BC، BK نیمساز زاویهٔ ABC و DM نیز نیمساز زاویهٔ ADC است. اگر محیط ذوزنقهٔ ABCD برابر ۳۰cm و $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ باشد، مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۱۰. محیط ذوزنقه‌ای برابر ۵۲cm و طول قاعدهٔ کوچکتر آن برابر ۱cm است. اگر قطرهای ذوزنقه نیمساز زاویه‌های منفرجهٔ آن باشد، مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۱۱. در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ AB برابر با a و قاعدهٔ CD برابر با b است. اگر بدانیم که قطرهای ذوزنقه، نیمساز زاویه‌های DAB و ABC هستند، مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.



۵۱۲. قاعدهٔ بزرگتر یک ذوزنقه a، قاعدهٔ کوچکتر آن b و زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ بزرگتر ۳۰ درجه و ۴۵ درجه می‌باشند. مطلوب است مساحت ذوزنقه.

۵۱۳. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که چهار ضلع آن بترتیب مساوی a، b، c و d باشند.

۵۱۴. قطرهای ذوزنقهٔ ABCD(AD∥BC) همدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. اگر مساحت مثلث AOD برابر a^2 و مساحت مثلث BOC برابر b^2 باشد مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۱۵. مساحت مثلثهای تشکیل شده با قطعه‌های قطرهای یک ذوزنقه و قاعده‌های آن، برابرند با S_1 و S_2 . مساحت ذوزنقه را بیابید.

۵۱۶. در ذوزنقهٔ ABCD به قاعده‌های AD و CB مساحت ذوزنقه را پیدا کنید در صورتی که $S_{AOD} = P^2, S_{BOC} = q^2$ باشد (O محل برخورد قطرهای ذوزنقه است).

۵۱۷. طول یکی از قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۷cm است. دایرهٔ محاط در ذوزنقه یکی از ضلعهای جانبی آن را به دو پاره‌خط به طولهای ۴cm و ۹cm تقسیم می‌کند. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

۵۱۸. دایره‌ای در یک ذوزنقه محاط شده است. مساحت ذوزنقه را با داده‌های طول یک قاعده برابر با a و طول پاره‌خطهایی که نقطهٔ تماس، یک ضلع جانبی را تقسیم می‌کند، برابر با b و d، پیدا کنید (پاره‌خط به طول b، مجاور قاعدهٔ به طول a است).

۵۱۹. دایره‌ای به شعاع R بر ذوزنقه‌ای محیط شده است. خطهای راستی که از دو سر یک قاعده به موازات ضلعهای جانبی ذوزنقه می‌گذرد، یکدیگر را در مرکز دایره قطع می‌کنند. یک ضلع جانبی از مرکز دایره به زاویهٔ α دیده می‌شود. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۵۲۰. مساحت ذوزنقه‌ای را معین کنید که تفاضل طولهای دو قاعدهٔ آن مساوی d و طول دو ضلع غیرموازی آن بترتیب a و b باشد. به شرطی که بدانیم در ذوزنقه می‌توان دایره‌ای محاط کرد.

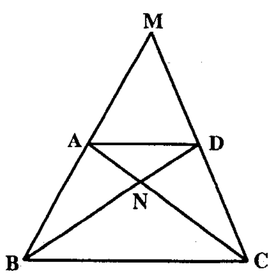
۲. ۵. ۱. ۸. ۱. ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۲۱. در ذوزنقه‌ای $b = 3$ (قاعدهٔ کوچک)، $B = 6$ (قاعدهٔ بزرگتر) و $h = 5$. مساحت چهار مثلث حادث از تقاطع قطرها را حساب کنید.

۵۲۲. مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های AD و BC، برابر S است و $AD:BC = 3$؛ روی خط راستی که امتداد قاعدهٔ AD، از طرف D، را قطع می‌کند، پاره‌خط EF طوری قرار گرفته که $AE \| DF$ ، $BE \| CF$ و $AE:DF = CF:BE = 2$. مساحت مثلث EFD را پیدا کنید.

۲. ۵. ۱. ۸. ۲. نسبت مساحتها

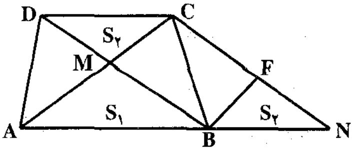
۵۲۳. ذوزنقهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم امتداد ساقهای AB و DC در M و قطرهای AC و BD در N متقاطع باشند. اگر طول قاعده‌های AD و BC را بترتیب مساوی a و b قرار دهیم، نسبت مساحتهای مثلثهای AMD و AND را برحسب a و b محاسبه کنید.



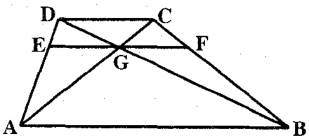
مرحلهٔ نهایی چهارمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۶

۵۲۴. دایره‌ای در ذوزنقه‌ای با زاویه‌های حادهٔ α و β محاط شده است. نسبت مساحت ذوزنقه را به مساحت دایره محاسبه کنید.

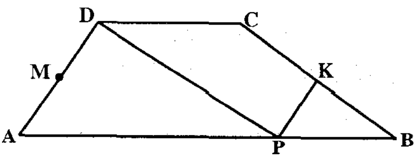
۲ . ۵ . ۱ . ۸ . ۳ . رابطهٔ بین مساحتها



۵۲۵. در ذوزنقهٔ ABCD قطرهای AC و BD در نقطهٔ M همدیگر را قطع می‌کنند (AB و CD قاعده‌های ذوزنقه هستند). مساحتهای مثلثهای ABM و CDM را با S_1 ، S_2 و مساحت ذوزنقه را با S نشان می‌دهیم. ثابت کنید که بین این مساحتها، رابطهٔ $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$ برقرار است (شکل).



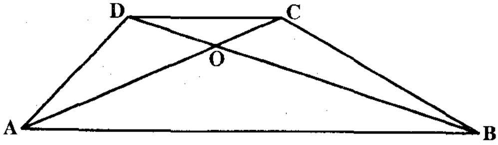
۵۲۶. مطابق شکل، ABCD□ ذوزنقه است. اگر EF∥AB ، نشان دهید $a\Delta EGD = a\Delta GCF$.



۵۲۷. ABCD□ ذوزنقه است به‌طوری که AB∥CD . M و K بترتیب وسطهای AD و BC هستند و PK∥AD . ثابت کنید :

$$a\Delta APD = a\square PBCD = \frac{1}{2} a\square ABCD$$

۵۲۸. قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ ABCD در نقطهٔ O متقاطعند. اگر AB∥DC و $AB = 3DC$ باشد، مساحت مثلثهای AOB و COD، همچنین مساحت دو مثلث AOD و BOC را مقایسه کنید.



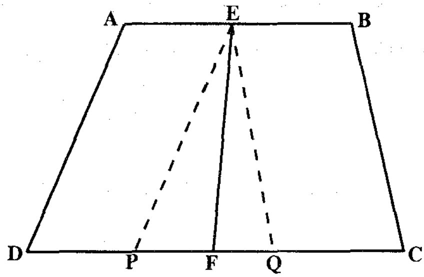
۲ . ۵ . ۱ . ۹ . رابطه‌های متری

۲ . ۵ . ۱ . ۹ . ۱ . رابطه‌های متری در ذوزنقه

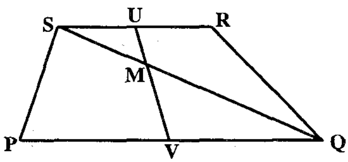
۵۲۹. ثابت کنید که مجموع مربعهای قطرهای یک ذوزنقه برابر است با دو برابر حاصلضرب قاعده‌ها به اضافهٔ مجموع مربعهای ضلعهای جانبی.

۵۳۰. ثابت کنید که در هر ذوزنقه، مجموع مربعهای دو ساق، برابر است با نصف مربع تفاضل دو قاعده، به علاوهٔ دو برابر مربع قطعه خطی که وسطهای قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند.

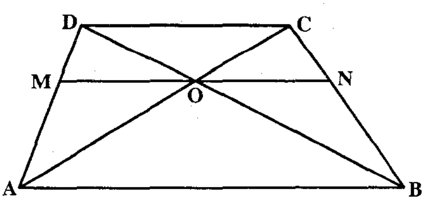
یعنی : $BC^۲ + DA^۲ = \frac{۱}{۲}(CD - AB)^۲ + ۲EF^۲$.



۵۳۱. در $\square PQRS$ ، $SR \| PQ$ ، SQ قطر و U و V وسطهای SR و PQ هستند. ثابت کنید : $US.MQ = VQ.MS$.

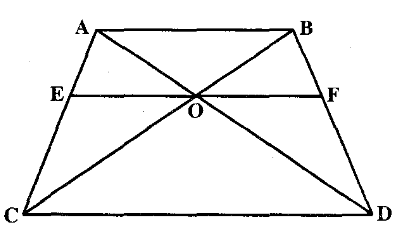


۵۳۲. در ذوزنقهٔ ABCD مجموع $AB + CD$ (دو قاعده) مساوی است با مجموع $BC + AD$ (دو ساق). هرگاه از نقطهٔ تلاقی قطرها خطی موازی با دو قاعده رسم کنیم تا ضلعهای AD و BC را بترتیب در M و N قطع کند؛ ثابت کنید : $DM + CN = DC$ و $AM + BN = AB$.



۵۳۳. در ذوزنقهٔ ABDC دو قطر یکدیگر را در O قطع می‌کنند. از نقطهٔ O خط EF محدود به دو ساق را به موازات دو قاعدهٔ AB و CD رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

$\frac{۲}{EF} = \frac{۱}{AB} + \frac{۱}{CD}$.



۵۳۴. روی قاعدهٔ AD از ذوزنقهٔ ABCD، نقطهٔ E را چنان پیدا کرده‌ایم که مثلثهای ABE، BCE و CDE، محیطهایی برابر داشته باشند. ثابت کنید : $|BC| = \frac{۱}{۲}|AD|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۵۳۵. ثابت کنید در ذوزنقهٔ ABCD با قاعده‌های AB و CD، نامساوی زیر برقرار است.

$$AC^2 + BD^2 > AD^2 + BC^2 + 2AB.DC$$

۲. ۵. ۱. ۹. ۲. رابطه‌های متری در ذوزنقه و دایره

۵۳۶. ABCD، یک ذوزنقهٔ محیطی است؛ E را نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD، و r_1، r_2، r_3 و r_4 را، بترتیب، شعاع دایره‌های محاط در مثلثهای ABE، BCE، CDE و DAE می‌گیریم. ثابت کنید: $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.

۵۳۷. ذوزنقه‌ای با قاعده‌های به طولهای a و b داریم که بر دایره‌ای به شعاع R محیط شده است. ثابت کنید: $ab \geq 4R^2$.

۲. ۵. ۱. ۱۰. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است

۵۳۸. ثابت کنید اگر در یک متوازی‌الاضلاع خط واصل میانگاههای دو ضلع مقابل، با نصف مجموع دو ضلع دیگر برابر باشد، آن‌گاه چهارضلعی مزبور یک ذوزنقه خواهد بود.

۵۳۹. اگر طول خط واصل میانگاههای دو ضلع مقابل یک چهارضلعی محدب، برابر نصف مجموع دو ضلع دیگر باشد، آن‌گاه ثابت کنید این چهارضلعی، یک ذوزنقه، یا یک متوازی‌الاضلاع است.

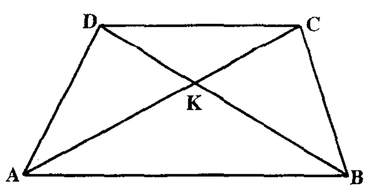
۵۴۰. در چهارضلعی ABCD، قطرهای AC و BD، در نقطهٔ O به هم برخورده‌اند. می‌دانیم:

$$|AB| = |OD| \quad , \quad |AD| = |CO| \quad , \quad B\hat{A}C = B\hat{D}A$$

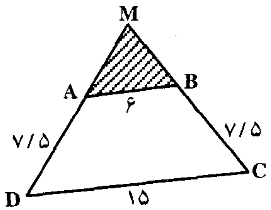
ثابت کنید، ABCD، یک ذوزنقه است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

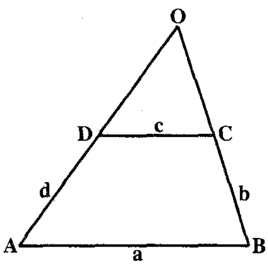
۵۴۱. در چهارضلعی محدب ABCD، نقطهٔ K محل برخورد قطرهای آن است. اگر مساحت مثلث BKC واسطهٔ هندسی بین مساحتهای دو مثلث AKB و CKD باشد، ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است.



۲. ۵. ۱. ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۵۴۲. در ذوزنقهٔ ABCD، اندازه‌های ضلعهای AB = ۶ ، BC = ۷ / ۵ ، CD = ۱۵ و DA = ۷ / ۵ سانتیمتر است. اندازه‌های ضلعهای مثلثی را که بین امتدادهای دو ساق و قاعدهٔ کوچک ذوزنقه تشکیل می‌شود، تعیین کنید.



۵۴۳. طول چهارضلع یک ذوزنقه در دست است. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلعهای مثلثی که از تقاطع امتداد دو ساق و قاعدهٔ کوچکتر پدید می‌آید.

۵۴۴. ABCD یک چهارضلعی است ؛ به‌طوری که BC∥AD . نقطهٔ وسط CD را M، نقطهٔ وسط MA را P و نقطهٔ وسط MB را Q می‌نامیم. خطهای DP، CQ در نقطهٔ N متقاطعند. ثابت کنید که N در خارج از مثلث ABC نیست.

مسألهٔ پیشنهادی المپیاد ریاضی هنگ‌کنگ، ۱۹۹۴

۵۴۵. قطر AC از ذوزنقهٔ ABCD، مثلث متساوی‌الاضلاع ACD را تشکیل می‌دهد. از نقطهٔ E واقع بر قطر AC (یا روی امتداد آن)، قاعدهٔ BC با زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شود. ثابت کنید میانگاههای پاره‌خطهای AE، BC و CD رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند.

۵۴۶. قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ ABCD(AD∥BC)، در نقطهٔ O همدیگر را قطع می‌کنند و زاویهٔ AOD از آن برابر ۶۰° است. ثابت کنید که نقطه‌های K، M و P که بترتیب میانگاه پاره‌خطهای AO، BO و CD هستند، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۵۴۷. ثابت کنید در هر ذوزنقهٔ محیط بر دایره، قطرها، با خطی که نقطه‌های تماس قاعده را به هم وصل می‌کند، از یک نقطه می‌گذرند.

۵۴۸. نقطهٔ M بر ضلع جانبی AB از ذوزنقهٔ ABCD را به رأسهای C و D وصل می‌کنیم. از رأسهای A و B خطهای مستقیم AN و BN را بترتیب موازی خطهای CM و DM رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطهٔ N محل تلاقی این خطها، به ضلع CD تعلق دارد.

۲ . ۵ . ۱ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۵۴۹. در ذوزنقهٔ ABCD طول دو قاعده عبارت است از $AB = ۴a$ و $DC = ۲a$ و طول دو ساق $AD = ۲a$ و $CB = a$.

۱. دایره‌ای به قطر AB را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که این دایره از رأس C عبور می‌کند و اگر O مرکز دایره باشد، OD بر قطر AC عمود است.

۲. AD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در M و CB را در E قطع کند و DC را امتداد می‌دهیم تا دایره را در F قطع کند. ثابت کنید که مثلث MCE با مثلث BAE متشابه است و دو مثلث DMC و DFA متساوی‌اند.

۳. مطلوب است محاسبهٔ طولهای CE، EM، AC و DF برحسب a.

۵۵۰. در ذوزنقهٔ ABCD با قاعده‌های $AD = a$ و $BC = b$ $(a > b)$ وسط قطرها را $B_۱$ و $C_۱$ می‌گیریم. در چهارضلعی $AB_۱C_۱D$ دوباره وسط قطرها را $B_۲$ و $C_۲$ می‌نامیم. بعد از n مرحله نقطه‌های B_n و C_n به دست می‌آید.

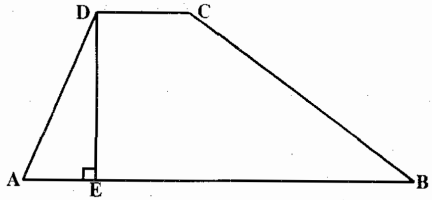
a) طول B_nC_n را پیدا کنید.

b) اگر $n \to \infty$ ، حد B_nC_n چه قدر است؟

c) برای چه ذوزنقه‌ای پاره‌خطهای B_nC_n با هم برابرند؟

مسأله‌های ریاضی آسان، ولی...

۵۵۱. در ذوزنقهٔ ABCD داریم : $AB = ۲۷$ و $CD = ۶$ و دوساق $BC = ۲۰$ و $DA = ۱۳$. مطلوب است محاسبهٔ تصویر AD روی AB و ارتفاع و مساحت ذوزنقه.



۵۵۲. ذوزنقهٔ ABCD را در نظر می‌گیریم و فصل مشترک دو قطر AC و BD از آن را نقطهٔ I و فصل مشترک امتداد ضلعهای غیرمتوازی AD و BC از آن را نقطهٔ J و وسط ضلع AD را نقطهٔ M و تصویر M را روی خط BC نقطهٔ H می‌نامیم.

۱. ثابت کنید که دو مثلث IAD و IBC با هم و دو مثلث JAC و JBD با هم معادل هستند.

۲. ثابت کنید که مساحت مثلث JAC واسطهٔ هندسی است مابین مساحتهای دو مثلث JAB و JCD.

۳. مطلوب است محاسبهٔ مساحت ذوزنقه برحسب BC و MH.

۵۵۳. فرض کنید که a و b ($a > b$)، طولهای قاعده‌های پایینی و بالایی یک ذوزنقه را نشان دهد. آن‌گاه هر پاره‌خط موازی قاعده و محصور بین دو ساق ذوزنقه، نوعی میانگین قاعده‌های a و b است. نشان دهید که :

۱. میانگین حسابی ساقهای ذوزنقه را نصف می‌کند.

۲. میانگین هندسی ذوزنقه را به دو ذوزنقهٔ متشابه تقسیم می‌کند.

۳. میانگین همساز بر نقطهٔ تلاقی قطرها می‌گذرد.

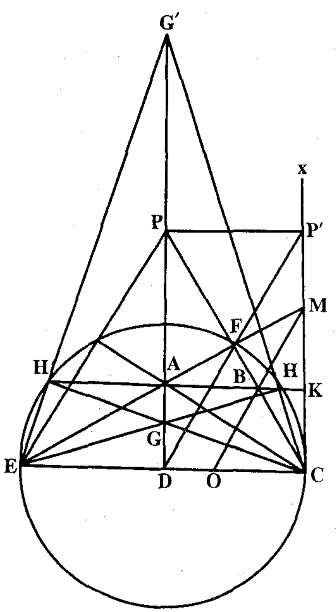
۴. میانگین هرونی در ثلث راه بین میانگین حسابی و میانگین هندسی قرار دارد.

۵. میانگین پادهمساز به اندازه‌ای که میانگین همساز بالای میانگین حسابی قرار دارد، از این میانگین پایین‌تر است.

۶. جذر میانگین مربعی، مساحت ذوزنقه را نصف می‌کند.

۷. میانگین مرکز ثقلی از مرکز هندسی سطح ذوزنقه می‌گذرد.

۵۵۴. ۱. ذوزنقهٔ ABCD را که در آن زاویهٔ بین دو ساق 30° و دو قاعدهٔ AB و CD بترتیب برابر a و $\frac{3a}{2}$ و فاصلهٔ رأس A از ساق BC برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (پای عمود F) است، رسم کنید، و از دو جواب، شکلی را انتخاب کنید که F خارج ذوزنقه باشد.



۲. زاویه‌ها و قطرها و ضلعهای ذوزنقه را حساب کرده، ثابت کنید که دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\frac{3a}{2}$ از نقطهٔ F می‌گذرد.

۳. ثابت کنید خط AF شعاع CD را در نقطهٔ E واقع بر روی این دایره قطع می‌کند، و در ضمن خط AC بر PE عمود است (P محل تلاقی دو ساق است).

۴. ثابت کنید نقطهٔ A از E، C و P به یک فاصله بوده و مثلث EPC متساوی‌الاضلاع است.

۵. از نقطهٔ C مماس Cx را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ O را روی DC به فاصلهٔ $\frac{a}{2}$ از D اختیار کنیم، خطهای OB، EF و Cx همرس بوده و نقطهٔ برخورد آنها روی دایرهٔ محیطی مثلث EPD است؛ در ضمن شکل DFBO ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

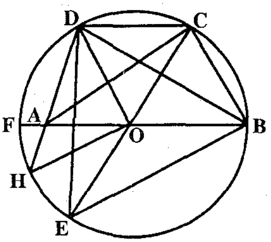
۶. دایره‌ای به مرکز D قاعدهٔ AB را در نقطه‌های H و H′ قطع می‌کند و از P خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا مماس Cx را در نقطهٔ P′ قطع کند. ثابت کنید:

الف. امتداد DF نیز از نقطهٔ P′ می‌گذرد و F وسط DP′ است.

ب. خطهای CH، EH′ و DP همرسند.

پ. خطهای HE، H′C و DP همرسند.

۵۵۵. در ذوزنقهٔ ABCD طول قاعدهٔ CD و همچنین طول ساق BC برابر a بوده و $\hat{B}=۶۰^\circ$ و طول قطر BD برابر قاعدهٔ AB است:



۱. این ذوزنقه را رسم کنید.

۲. به فرض آن که ذوزنقه رسم شده باشد، طول ضلعهای دیگر ذوزنقه و طول قطر AC را برحسب a، و همچنین زاویه‌های دیگر آن را تعیین کنید.

۳. از رأس C عمودی بر BD فرود آورده و امتداد می‌دهیم تا AB را در O قطع کند. ثابت کنید این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث DBC بوده و طول شعاع آن برابر a است.

۴. دایرهٔ مزبور را رسم می‌کنیم تا امتدادهای AB، AD و OC را در نقطه‌های F، H و E قطع کند. ثابت کنید:

۱. ارتفاع رأس Dی ذوزنقه از E می‌گذرد.

۲. خط OH بر OD عمود است.

۳. نقطهٔ H وسط کمان EF است.

۴. مثلث DBE متساوی‌الاضلاع است.

۵۵۶. ذوزنقهٔ محدب ABCD را که در آن قاعده‌های AB و CD بترتیب ۵ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر، و ساقهای آن BC و AD بترتیب ۷/۵ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر است، در نظر می‌گیریم.

۱. نقطهٔ M را روی AD چنان بیابید که $\frac{AM}{MD}=\frac{۲}{۳}$ باشد.

۲. خطی که از نقطهٔ M موازی قاعده‌ها رسم می‌شود، BC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. اندازهٔ BN و NC را تعیین کنید.

۳. خطی که از نقطهٔ N موازی AD رسم می‌شود CD را در نقطهٔ P قطع می‌کند. نشان دهید که AC موازی MP است.

۵۵۷. در ذوزنقهٔ محدب ABCD، قاعده‌ها $AB = 8cm$ و $CD = 18cm$، و ساقها $BC = 12cm$ و $DA = 8cm$ است.

۱. ذوزنقه را با خط‌کش و پرگار رسم کنید.

۲. نقطهٔ M را روی AD چنان بیابید که $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = -\frac{3}{5}$ باشد.

۳. خطی که از نقطهٔ M موازی قاعده‌ها رسم می‌شود، BC را در نقطهٔ P قطع می‌کند. اندازهٔ BP و PC را حساب کنید.

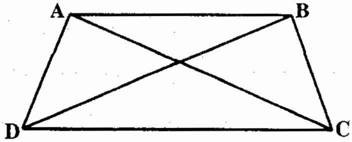
۴. از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم که CD را در نقطهٔ R قطع می‌کند، و از نقطهٔ P خطی موازی AD رسم می‌کنیم که CD را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. اندازهٔ RC و QC را بیابید.

۵. امتدادهای AD و BC در نقطهٔ S متقاطعند. اندازهٔ SA و SB را به دست آورید.

۲ . ۵ . ۲. رابطه‌های متری در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۲ . ۵ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

می‌دانیم ذوزنقه‌ای که دو ساق آن برابر باشند، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین نامیده می‌شود؛ مانند ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، که در آن $AB \parallel CD$ و $AD = BC$ است. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، تمام ویژگیهای ذوزنقه را دارد.



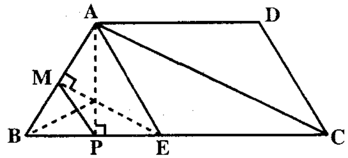
۵۵۸. **قضیهٔ ۱.** در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند و بعکس.

قضیهٔ ۲. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به هر قاعده برابرند و بعکس.

۲ . ۵ . ۲ . ۲. زاویه

۲ . ۵ . ۲ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۵۵۹. در ذوزنقهٔ ABCD، نیمساز زاویهٔ A قاعدهٔ BC (یا امتداد آن) را در نقطهٔ E قطع می‌کند. دایرهٔ محاطی مثلث ABE بر ضلع AB در نقطهٔ M و بر ضلع BE در نقطهٔ P مماس است. اگر AB:MP = ۲ باشد، در آن صورت زاویهٔ BAD را پیدا کنید.



۵۶۰. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط بر یک دایره، نسبت طول ضلعهای موازی، k است. اندازهٔ زاویهٔ مجاور به قاعده را پیدا کنید.

۵۶۱. نسبت شعاع دایرهٔ محیطی ذوزنقه‌ای به شعاع دایرهٔ محاطی آن برابر k است. زاویهٔ حادهٔ ذوزنقه را به‌دست آورید.

۵۶۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر دایره‌ای محیط شده است. اگر نسبت ساق ذوزنقه بر قاعدهٔ کوچکتر آن برابرk باشد، زاویه‌های ذوزنقه را به‌دست آورید.

۲ . ۵ . ۲ . ۳. ضلع

۲ . ۵ . ۲ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۵۶۳. بر دایره‌ای به شعاع ۲ سانتیمتر، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی به مساحت ۲۰ سانتیمتر مربع محیط کرده‌ایم. ضلعهای ذوزنقه را پیدا کنید.

۵۶۴. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که بر یک دایره محیط شده است، مساوی S می‌باشد. مطلوب است طول ساق این ذوزنقه، در صورتی که زاویهٔ حادهٔ مجاور به قاعدهٔ ذوزنقه برابر با $\frac{\pi}{۶}$ باشد.

۵۶۵. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، اندازه‌های دو قاعده ۱۴ و ۲۶ سانتیمتر و اندازهٔ هر قطر ۲۴ سانتیمتر است.

۱. روش ترسیم ذوزنقه را بیان کنید.

۲. اندازه‌های ارتفاع و هر یک از دو ساق را تعیین کنید.

۵۶۶. از نقطهٔ P واقع در درون یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، به چهار رأس آن وصل کرده‌ایم. ثابت کنید با چهار پاره‌خطی که به دست می‌آید، می‌توان یک چهارضلعی قابل محاط در ذوزنقه ساخت (یعنی چهارضلعی که بتواند هر رأس آن روی یکی از ضلعهای ذوزنقه باشد).

۲. ۵. ۲. ۳. ۲. نسبت ضلعها

۵۶۷. اگر قاعدهٔ بزرگتر یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قطر آن، و قاعدهٔ کوچکتر با ارتفاع آن برابر باشد، آن‌گاه نسبت قاعدهٔ کوچکتر به قاعدهٔ بزرگتر برابر است با :

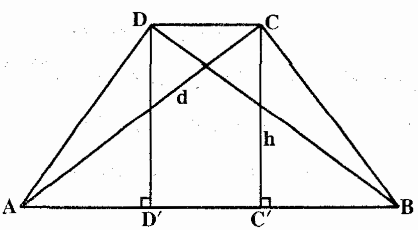
الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) $\frac{۳}{۴}$ د) $\frac{۳}{۵}$ هـ) $\frac{۲}{۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۳

۲. ۵. ۲. ۴. قطر

۲. ۵. ۲. ۴. ۱. اندازهٔ قطر

۵۶۸. مطلوب است محاسبهٔ ارتفاع و قطرهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، بنابر آن که می‌دانیم : AB = ۵۰ و CD = ۱۴ و دو ساق آن هر یک ۳۰ می‌باشند.



۲. ۵. ۲. ۵. پاره‌خط

۲. ۵. ۲. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۶۹. طول ارتفاع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی برابر h و زاویهٔ حادهٔ بین قطرهای آن نیز برابر 2α است. طول میانهٔ ذوزنقه را پیدا کنید.

۵۷۰. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD $(AD \| BC)$ داده شده است. زاویهٔ حادهٔ مجاور به قاعدهٔ بزرگترش، برابر با $۶۰°$ و طول قطرش برابر با $\sqrt{۳}$ است. نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱ و ۳ بترتیب، از رأسهای A و D قرار دارد. MC را پیدا کنید.

۵۷۱. نقطه‌های P و Q، بترتیب، بر ضلعهای KL و MN از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین KLMN، طوری انتخاب می‌شوند که پاره‌خط PQ به موازات قاعده‌های ذوزنقه است. در هر یک از ذوزنقه‌های KPQN و PLMQ، می‌توان دایره‌ای محاط کرد که شعاعهای آنها، بترتیب، برابر با R و r است. اندازهٔ پاره‌خطهای LM و KN را پیدا کنید.

۲. ۵. ۲. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۵۷۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های AD و BC داده شده است. $AB = CD = a$، $AC = BD = b$، $BC = c$ و M نقطه‌ای دلخواه روی کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایرهٔ محیط بر ABCD است. نسبت $\dfrac{BM + MC}{AM + MD}$ را پیدا کنید.

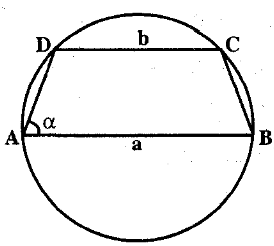
۲. ۵. ۲. ۶. شعاع دایره

۲. ۵. ۲. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۵۷۳. قاعده‌های ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی برابر ۲۱cm و ۹cm و ارتفاع آن برابر ۸cm است. شعاع دایرهٔ محیطی آن را به‌دست آورید.

۵۷۴. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، نسبت دو قاعده مساوی ۰/۷۵ و پاره‌خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند، مساوی ۷ متر است. مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ذوزنقه.

۵۷۵. قاعده‌های ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی برابر a و b و اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ آن برابر α است. شعاع دایرهٔ محیطی ذوزنقه را پیدا کنید.

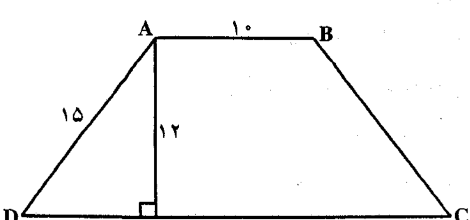


۵۷۶. مطلوب است محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD که در آن، طول دو قاعدهٔ $BC = ۲b$ و $AD = ۲a$ و طول ساق $AB = CD = c$ معلوم است.

۲. ۵. ۲. ۷. محیط

۲. ۵. ۲. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۵۷۷. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، ساق $AD = ۱۵cm$، قاعده $AB = ۱۰cm$ و ارتفاع $AH = ۱۲cm$ است. اندازهٔ محیط این ذوزنقه را بیابید.



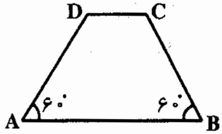
۲. ۵. ۲. ۷. ۲. نسبت محیطها

۵۷۸. بر ذوزنقه‌ای با زاویه‌های حادهٔ α و β دایره‌ای محیط شده است. نسبت محیط ذوزنقه بر محیط دایره را بیابید.

۲. ۵. ۲. ۸. مساحت

۲. ۵. ۲. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۲. ۵. ۲. ۸. ۱. ۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه



۵۷۹. $ABCD$ □ذوزنقه است، $AB \| CD$. $\hat{A} = \hat{B} = ۶۰°$ ،
$AB = ۱۲$ و $BC = ۸$.
$ABCD$ □ a را بیابید.

۵۸۰. مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی را پیدا کنید که زاویهٔ حادهٔ آن مساوی ۶۰ درجه و دو قاعدهٔ آن بترتیب مساوی a و b باشند.

۵۸۱. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر یک دایره محیط شده است. طول ساق ذوزنقه l و یکی از قاعده‌های آن برابر با a است. مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۵۸۲. مطلوب است مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که یکی از زاویه‌های آن ۶۰° بوده و یک قاعده و ارتفاع از آن معلوم باشد.

۵۸۳. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، خط واصل بین وسطهای دو ساق مساوی m است. اگر قطرهای این ذوزنقه بر هم عمود باشند، مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.

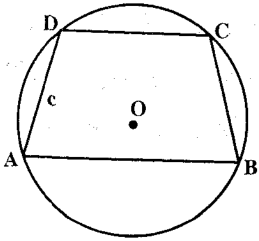
۵۸۴. طول بزرگترین ضلع یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین برابر ۱۳ و محیط آن برابر۲۸ می‌باشد.
۱. اگر مساحت ذوزنقه برابر ۲۷ باشد، طول ضلعهای آن را پیدا کنید؛
۲. آیا مساحت این ذوزنقه، می‌تواند برابر ۲۷/۰۰۱ باشد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۸۰

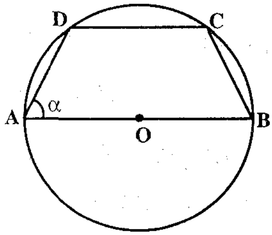
۵۸۵. مصریها، برای محاسبهٔ مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، حاصلضرب نصف مجموع دو قاعدهٔ آن را، در یکی از ساقها به‌دست می‌آوردند. اگر از این راه، مساحت ذوزنقه‌ای را به‌دست آوریم که قاعدهٔ پایین آن برابر ۶، قاعدهٔ بالای آن برابر ۴ و یکی از ساقهای آن برابر ۲۰ باشد، درصد اشتباه را پیدا کنید.

از مسأله‌های مصری، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

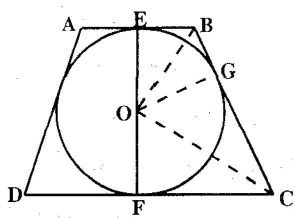
۵۸۶. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنید که در دایره‌ای به شعاع r محاط و ساق آن مساوی c باشد.



۵۸۷. در ذوزنقه‌ای، یکی از قاعده‌ها، قطر دایره‌ای به شعاع R محسوب می‌شود که بر ذوزنقه محیط است. اندازهٔ یکی از زاویه‌های حاده در این ذوزنقه برابر α است. مساحت ذوزنقه را محاسبه کنید.



۵۸۸. مطلوب است بررسی تغییرات سطح ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که بر دایرهٔ مفروضی محیط باشد. نشان دهید سطح در چه حالتی می‌نیمم است؟



۲.۱.۸.۲.۵.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۸۹. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، قاعدهٔ AD برابر با a و قاعدهٔ BC برابر با b است و AB=d. از رأس B، خط راستی رسم می‌شود که قطر AC را نصف و AD را در نقطهٔ K قطع می‌کند. مساحت مثلث BDK را پیدا کنید.

۵۹۰. در ذوزنقهٔ ABCD، AB=BC=CD=a و DA=۲a. نقطه‌های E و F، متمایز از رأسهای ذوزنقه، بترتیب بر خطهای راست AB و AD طوری اختیار شده‌اند که محل برخورد ارتفاعهای مثلث CEF بر محل برخورد قطرهای ذوزنقهٔ ABCD منطبق است. مساحت مثلث CEF را پیدا کنید.

۲.۸.۲.۵.۲. نسبت مساحتها

۵۹۱. دایره‌ای بر یک ذوزنقه محیط شده است. زاویهٔ بین یکی از قاعده‌های ذوزنقه و یک ضلع جانبی آن، برابر با α و زاویهٔ بین این قاعده و یکی از قطرهای ذوزنقه، برابر با β است. نسبت مساحت دایره به مساحت ذوزنقه را پیدا کنید.

۲.۵.۲.۹. رابطه‌های متری

۲.۵.۲.۹.۱. رابطه‌های متری در ذوزنقه

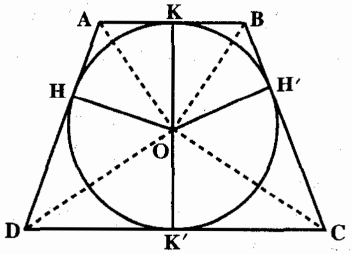
۵۹۲. ثابت کنید که در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، حاصلضرب دو قاعده مساوی است با تفاضل مجذورهای یک قطر و یک ساق.

۵۹۳. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های یک نقطهٔ واقع بر صفحهٔ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تا سه رأس این ذوزنقه، بزرگتر است از فاصلهٔ همین نقطه از رأس چهارم.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

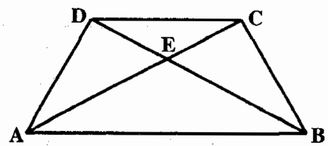
۲.۵.۲.۹.۲. رابطه‌های متری در ذوزنقه و دایره

۵۹۴. اگر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محیط بر یک دایره باشد، حاصلضرب دو قاعدهٔ آن، برابر مجذور قطر آن دایره می‌باشد.



۲.۵.۲.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است

۵۹۵. در ذوزنقهٔ $ABCD$، $AB\|CD$، $\Delta AED \sim \Delta BEC$، و $\Delta AEB \sim \Delta CED$. ثابت کنید: $AD=BC$.



۵۹۶. در ذوزنقه‌ای، طول یکی از قطرها، با مجموع طولهای دو قاعده برابر است. اگر زاویهٔ بین دو قطر برابر ۶۰ درجه باشد، ثابت کنید، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

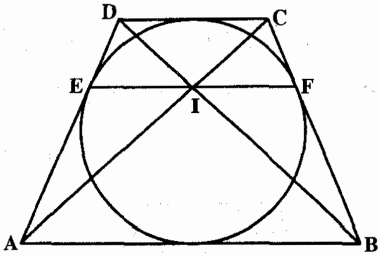
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۱۱.۲.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

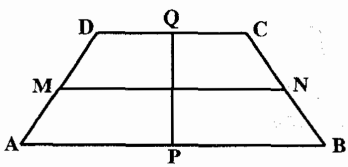
۵۹۷. ABCD□ را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی فرض کنید که AB و DC قاعده‌هایش باشند و قطرها یکدیگر را در E قطع کنند. سه جفت مثلث متشابه نام ببرید.

۵۹۸. قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD(AB∥CD) در نقطهٔ O با زاویهٔ °۶۰ همدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید میانگاههای پاره‌خطهای OA، OD و BC رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۵۹۹. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی بر یک دایره محیط است. ثابت کنید که نقطهٔ تقاطع قطرها و نقطه‌های تماس دو ساق با دایره، روی یک خط موازی با قاعده واقعند.



۶۰۰. رابطهٔ بین سه ضلع ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را طوری بیابید که اگر وسطهای آن را به هم وصل کنیم، شکل حاصل مربع شود.



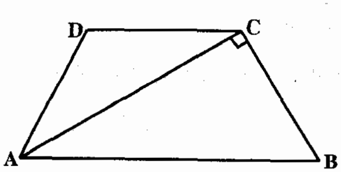
۱۲.۲.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۶۰۱. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD(AD=BC) قطر AC بر ساق BC عمود بوده و طول ساق BC نصف قاعدهٔ AB می‌باشد.

۱. زاویه‌های ذوزنقه را حساب کنید.

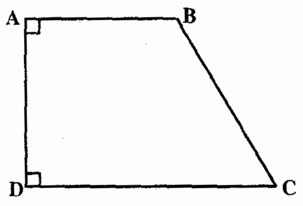
۲. ثابت کنید : $CD = \frac{AB}{۲}$.

۳. ساقها را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند. ثابت کنید OC=BC است.



۳.۵.۲. رابطه‌های متری در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۱.۳.۵.۲. تعریف و قضیه



می‌دانیم ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، ذوزنقه‌ای است که یک ساق آن بر قاعده‌ها عمود باشد ؛ در این صورت این ساق قائم ارتفاع ذوزنقه است. مانند ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD که در آن $AB \| CD$ و ساق AD بر دو قاعده عمود است.

۲.۳.۵.۲. زاویه

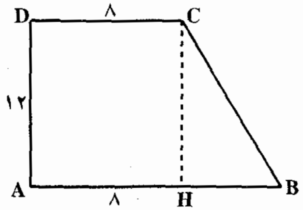
۱.۲.۳.۵.۲. اندازهٔ زاویه

۶۰۲. در ذوزنقهٔ ABCD، ضلع جانبی AB، بر AD و BC عمود است و $AB = \sqrt{AD.BC}$. فرض کنید E معرف نقطهٔ برخورد ضلعهای ناموازی ذوزنقه، O محل برخورد قطرها و M وسط AB باشد. $E\hat{O}M$ را پیدا کنید.

۳.۳.۵.۲. ضلع

۱.۳.۳.۵.۲. اندازهٔ ضلع

۶۰۳. در ذوزنقهٔ ABCD زاویهٔ A قائمه است و AB=۱۳، CD=۸ و AD=۱۲. حساب کنید طول BC را.



۶۰۴. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای داده شده است. خط راستی که به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌شود، آن را به دو بخش طوری تقسیم می‌کند که در هریک از آنها می‌توان دایره‌ای محاط کرد. طول قاعده‌های ذوزنقهٔ اصلی را، اگر طول ضلعهای جانبی آن برابر با c و d باشد، پیدا کنید. (d>c)

۶۰۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای یکی از زاویه‌ها برابر 30° است. قاعدهٔ بزرگتر برابر a و ارتفاع برابر h است. مطلوب است طول قاعدهٔ کوچکتر و ساق مایل.

۶۰۶. یکی از زاویه‌های ذوزنقه‌ای برابر 30° بوده و ضلعهای جانبی آن بر هم عمود هستند. اگر طول میانهٔ ذوزنقه برابر ۱۰cm و طول یکی از قاعده‌های آن برابر ۸cm باشد، در این صورت طول ضلع جانبی کوچکتر آن را پیدا کنید.

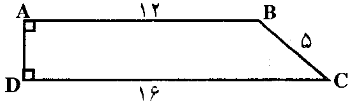
۶۰۷. در یک ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه، طول قاعده‌ها و ضلع جانبی کوچکتر برابر a، b و c است. طول ضلع جانبی کوچکتر و فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی قطرها از قاعده‌های ذوزنقه را پیدا کنید.

۶۰۸. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌ها 135° و قاعدهٔ کوچکتر b و ساق مایل c می‌باشد. مطلوب است طول قاعدهٔ بزرگتر و ساق قائم.

۲.۵.۳.۴. قطر

۲.۵.۳.۴.۱. اندازهٔ قطر

۶۰۹. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، $AB \parallel CD$، $AD \perp AB$، داریم:
AB=۱۲cm، DC=۱۶cm و BC=۵cm. اندازهٔ قطرهای این ذوزنقه را تعیین کنید.



۲.۵.۳.۵. پاره‌خط

۲.۵.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

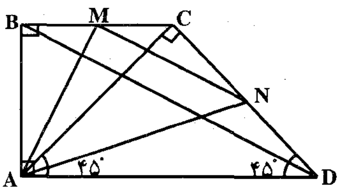
۶۱۰. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای داده شده است که قاعده‌های آن مساوی a و b و طول ساق کوچکتر آن مساوی c می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ محل تلاقی قطرها، از قاعدهٔ a و از ساق c.

۲.۵.۳.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۶۱۱. در ذوزنقهٔ ABCD، زاویه‌های A و B قائمه بوده و AB=۵cm، BC=۱cm و AD=۴cm است. نقطهٔ M را روی ضلع AB طوری اختیار می‌کنیم که زاویهٔ AMD دو برابر $\widehat{BMC}$ شود. نسبت AM:MB را بیابید.

۳.۵.۳.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

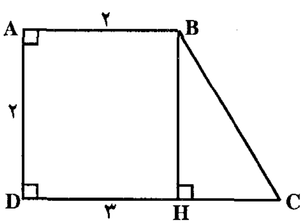
۶۱۲. ذوزنقهٔ ABCD، که ضلع جانبی آن CD، بر قاعده‌های AD و BC ی آن عمود است، داده شده است. دایره‌ای به قطر AB، AD را در نقطهٔ P قطع می‌کند (P غیر از A است). مماس بر دایره در نقطهٔ P، CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مماس دیگری از M بر دایره رسم می‌شود که در نقطهٔ Q بر آن مماس است. ثابت کنید که خط BQ، CD را نصف می‌کند.



۶۱۳. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD با زاویهٔ حادهٔ ۴۵°، قطر AC برابر ضلع CD است. ثابت کنید میانگاه قاعدهٔ کوچکتر، از رأس A و از میانگاه ضلع CD به یک فاصله است.

۶.۳.۵.۲. شعاع دایره

۱.۶.۳.۵.۲. اندازهٔ شعاع دایره



۶۱۴. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = ۹۰^\circ$) داریـــــــم: $BH \perp DC$ و $DC = ۳$ و $AB = AD = ۲$. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث BHC را بیابید.

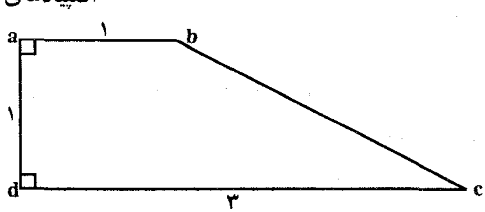
۷.۳.۵.۲. محیط

۱.۷.۳.۵.۲. اندازهٔ محیط

۶۱۵. محیط ذوزنقهٔ شکل زیر چه‌قدر است؟

الف) $۲+\sqrt{۵}$ ب) $۳+\sqrt{۵}$ ج) $۳\sqrt{۵}$ د) $۵+\sqrt{۵}$ هـ) $۵\sqrt{۵}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷



۸.۳.۵.۲. مساحت

۱.۸.۳.۵.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۳.۵.۲. اندازهٔ مساحت ذوزنقه

۶۱۶. طول قاعده‌های یک ذوزنقه ۱۳ و ۲۱ است. طول ساق بزرگتر ۱۷ است و ساق دیگر بر قاعده عمود است. مساحت این ذوزنقه چه‌قدر است؟

۶۱۷. مساحت ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه را در حالتهای زیر معین کنید.

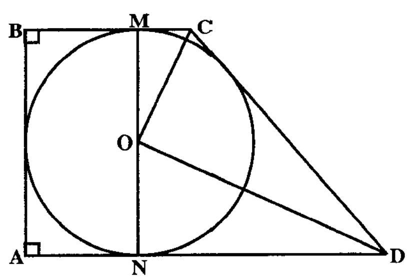
۱. یکی از زاویه‌ها برابر ۶۰°، قاعدهٔ کوچکتر ۲/۵ و قاعدهٔ بزرگتر ۴ سانتیمتر

۲. یکی از زاویه‌ها ۱۲۰°، قاعدهٔ کوچکتر ۳ و ارتفاع $۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر

۳. یکی از زاویه‌ها ۶۰°، قاعدهٔ بزرگتر ۴/۵cm و ساق مایل ۳ سانتیمتر

۶۱۸. مرکز دایره‌ای از دو انتهای ساق مایل ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ محیطی آن برابر با ۲ سانتیمتر و ۴ سانتیمتر شده است. مطلوب است مساحت ذوزنقه.

۶۱۹. بر دایره‌ای به شعاع r ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای محیط کرده‌ایم. اگر کوچکترین ضلع ذوزنقه مساوی $\frac{۳}{۲}r$ باشد، مساحت ذوزنقه را معین کنید.



۲.۱.۸.۳.۵.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۶۲۰. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای با قاعده‌های a و b و ارتفاع h داده شده است. مستطیلی با بیشترین مساحت ممکنه از این ذوزنقه جدا می‌کنیم. اگر (a) a=۸۰cm و b=۶۰cm و h=۱۰۰cm، (b) a=۲۴cm، b=۸cm و h=۱۲cm باشد، مساحت این سطح را محاسبه کنید.

۶۲۱. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای به ارتفاع h به قطر ساق مایل دایره‌ای رسم کرده‌ایم و دیده‌ایم که این دایره بر ساق قائم مماس شده است. مطلوب است مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه‌اش مساوی دو قاعدهٔ این ذوزنقه باشد.

۹.۳.۵.۲. رابطه‌های متری

۶۲۲. ثابت کنید در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای که قطرهای آن برهم عمودند، ارتفاع واسطهٔ هندسی مابین دو قاعده است.

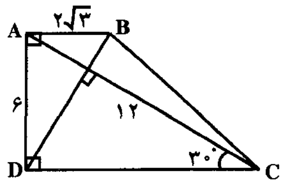
۶۲۳. در هر ذوزنقهٔ قائم، نیمدایره‌ای که به قطر ساق مایل رسم شود و ساق قائم را قطع کند، حاصلضرب دو قطعهٔ جدا شده از این ساق، با حاصلضرب دو قاعدهٔ ذوزنقه برابر است.

۱۰.۳.۵.۲. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است

۶۲۴. در ذوزنقهٔ ABCD قاعدهٔ کوچکتر AB=۴۰cm و قاعدهٔ بزرگتر CD=۸۰cm و دو ضلع غیرمتوازی BC=۵۰cm و AD=۳۰cm است. ثابت کنید که این ذوزنقه قائم‌الزاویه است.

۱۱.۳.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۲۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD، $AB \parallel DC$ و $AD \perp AB$ ، $AB = ۲\sqrt{۳}$ ، AD=۶ و AC=۱۲ است. ثابت کنید دو قطر این ذوزنقه بر هم عمودند.



۱۲.۳.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

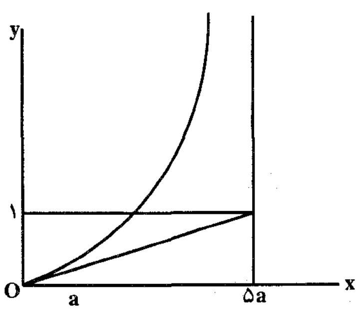
۶۲۶. ذوزنقهٔ محدب قائم‌الزاویهٔ ABCD به قاعده‌های AB و CD و ارتفاع AD داده شده است. فرض می‌کنیم AB=a و AD=CD=۲a باشد.

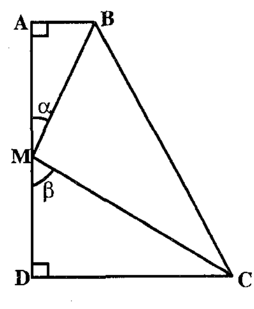
۱. اگر نقطهٔ I وسط AD باشد، ثابت کنید که مثلث BCI متساوی‌الساقین است. اندازهٔ ضلعهای این مثلث را برحسب a به‌دست آورید.

۲. اگر Q نقطهٔ برخورد BI و AC باشد، نشان دهید که AC عمود بر BI است. نسبت $\frac{AO}{OC}$ و همچنین مساحت مثلث BIC را برحسب a تعیین کنید.

۶۲۷. ذوزنقهٔ محدب ABCD قائم‌الزاویه در رأسهای A و B است. ارتفاع AB(AB=a) برابر نصف قاعدهٔ کوچک AD، و قطر BD عمود بر CD است. CD امتداد AB را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اندازهٔ BD، قاعدهٔ بزرگ BC، ساق CD، همچنین AE و DE را برحسب a تعیین کنید.
نیمدایره‌هایی به قطرهای BC و BE و گذرنده از نقطهٔ D را رسم می‌کنیم. اندازهٔ مساحت بین این دو نیمدایره و قطعه‌های وتر CE را بیابید، با افزودن مساحت حلقهٔ BD.

۶۲۸. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) با فرض AB=a، CD=۴a و AD=۵a نقطهٔ M را روی قطعه خط AD به فاصلهٔ AM=x و $A\hat{M}B = \alpha$ و $C\hat{M}D = \beta$ درنظر می‌گیریم. مطلوب است محاسبهٔ $tg\alpha$ و $tg\beta$ برحسب a و x ؛ و x را طوری معین کنید که $B\hat{M}C = 90^\circ$ باشد. (الف) M را طوری بگیرید که $\beta = 2\alpha$. (ب) فرض می‌کنیم $y = \frac{AM}{DM}$. مقدار y را برحسب x به‌دست آورید و وقتی که M خط AD را طی کند و منحنی نمایش y را رسم کنید.





۶۲۹. ذوزنقهٔ ABCD که در آن $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ و $\hat{B} = 60^\circ$ و قطر AC برابر ساق AD می‌باشد داده شده است:

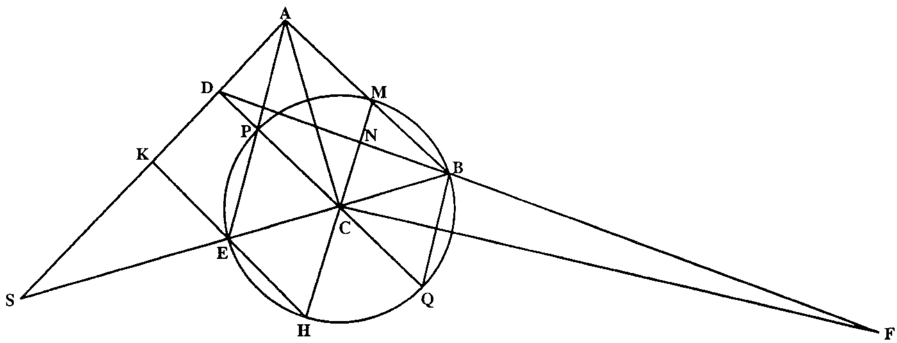
۱. ثابت کنید که قطر AC بر ساق BC عمود است.

۲. به مرکز C و به شعاع CB دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره AB را در M و CD را در P و Q (P بین C و D است) و CB را در E قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی ABPQ متوازی‌الاضلاع است و سه نقطهٔ E، P و A بر یک استقامتند و عمودمنصف CP از E و M می‌گذرد.

۳. از E خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در H و AD را در نقطهٔ K قطع کند. ثابت کنید E وسط پاره‌خط HK قرار دارد.

۴. ساق BC و AD در S یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید دو مثلث SAB و APD متشابه‌اند.

۵. قطر BD خط CM را در N و خط Cx عمود بر CM را در F قطع می‌کند. ثابت کنید $\frac{FD}{FB}=\frac{ND}{NB}$ و اگر AD=a باشد، مقدار این نسبت را پیدا کنید.



۶۳۰. در ذوزنقهٔ ABCD دو زاویهٔ A و B قائمه هستند و طول قاعدهٔ AD برابر $2a$ و طول قاعدهٔ BC و ساق AB هریک برابر $a\sqrt{2}$ می‌باشد.

۱. قطر AC را رسم می‌کنیم. طول این قطر و طول ساق DC را برحسب a و همچنین اندازهٔ زاویه‌های C و D را به‌دست آورید.

۲. نیمساز زاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ BC را در F قطع کند و از A عمودی بر DC و از D عمودی بر AF فرود می‌آوریم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند و G و H را دو موقع عمود فرض می‌کنیم. ثابت کنید نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقهٔ AFCD می‌باشد که چون آن را رسم کنیم، ضلع AB را در E قطع می‌کند که وسط قوس $\widehat{AF}$ است و بر امتداد خط DG قرار دارد. شکل BGOH ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و دو شکل HGBC و HDGB متوازی‌الاضلاع می‌باشند.

۳. سه خط AF، AC و AH زاویهٔ قائمهٔ A را به چهار جزء برابر با $\frac{\pi}{8}$ تقسیم می‌کنند.

نقطهٔ G محل تلاقی ارتفاعهای مثلث HBA است و از چهار نقطهٔ A، B، F و O به یک فاصله است. نقطهٔ K محل تلاقی قطر AC و خط HB محل تلاقی دو قطر ذوزنقهٔ ADCF می‌باشد و خط HG زاویهٔ BHA را نصف می‌کند و دو مثلث GBA و OHG با هم برابرند.

۴. طول قطعه‌های CK، HK ، BF و شعاع OA دایره را برحسب a تعیین کنید.

بخش ۳

• رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محاطی و محیطی

۳.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳.۳.۶. شعاع دایره

۳.۳.۶.۱. اندازهٔ شعاع دایره

۳.۳.۷. محیط

۳.۳.۷.۱. اندازهٔ محیط

۳.۳.۸. مساحت

۳.۳.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۳.۳.۹. رابطه‌های متری

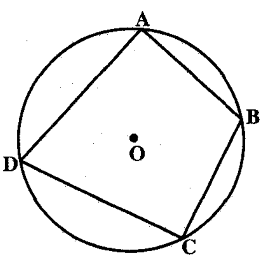
۳.۳.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی محاطی و محیطی است

بخش ۳. رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محاطی و محیطی

۱.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محاطی

۱.۱.۳. تعریف و قضیه

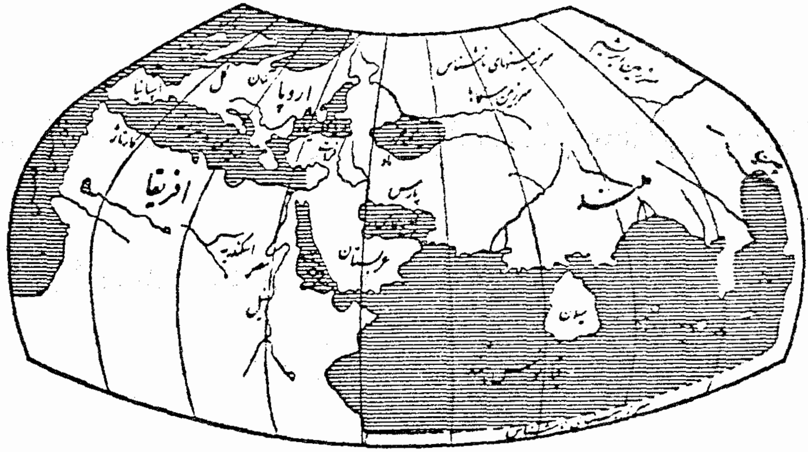
می‌دانیم چهارضلعی ABCD محاطی است، درصورتی که بر چهار رأس آن یک دایره بگذرد. این دایره را دایرهٔ محیطی چهارضلعی می‌نامند. برخی ویژگیهای چهارضلعی محاطی را قبلاً دیدیم. اینک رابطه‌های متری مربوط به چهارضلعی محاطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



۶۳۱. قضیهٔ بطلمیوس. ثابت کنید، در هر چهارضلعی محاطی، حاصلضرب دو قطر، برابر است با مجموع حاصلضربهای دوبه‌دوی ضلعهای روبه‌رو.

بطلمیوس

بطلمیوس قنوذی Claudius Ptolemaeus (متولد ح ۸۵، متوفی ح ۱۶۵ م)، که دوران بزرگترین فعالیتش در سالهای ۱۴۰ـ۱۶۰ بود، در نجوم همان کاری را کرد که اقلیدس در هندسه، آپولونیوس در مخروطات، و نیکوماخوس در حساب کرده بودند. وی کشفهای پیشینیانش را در کتاب واحدی گرد آورد، آنها را به‌صورت اصولی مرتب کرد، و مانند اقلیدس و آپولونیوس دارای چنان نبوغی بود که تألیفش تا قرنهای متمادی به‌صورت ملاک و معیار کار درآمد. در مورد زندگیش فقط این را می‌دانیم که در آتن و اسکندریه تدریس کرد. مهمترین تألیفش معروف به مجسطی Almagest دارای اطلاعات زیادی راجع به نجوم باستان است. وی راجع به تسطیح کره، موسیقی و ریاضیات عملی هم آثاری نوشت. در مورد کتابی راجع به اوپتیک که به وی نسبت می‌دهند، بحثهای زیادی شده است.



نقشهٔ جهان بطلمیوس

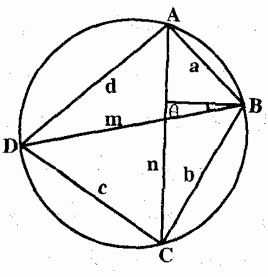
این نقشه افزایش چشمگیر معلومات جغرافیایی را از زمان اراتوستنس به بعد نشان می‌دهد. از تاریخ برستد.

در مجسطی خلاصه‌ای از محاسبات اراتوستنس، پوزیدونیوس و دیگران راجع به اندازهٔ زمین، موضع نقطه‌های مختلف، و مساحت جزیره‌ها و کشورها آمده است. بطلمیوس در مورد کاربرد حساب در نجوم و جغرافیا در پیشاپیش دانشمندان یونانی جای دارد. او استفاده از کسرهای شصتگانی را بسط داد و جدول قوسهایی را، که قبلاً مورد استفادهٔ هیپارخوس قرار گرفته بود؛ تکمیل کرد. کتابی هم در باب مصادرهٔ خطهای موازی، و کتابی راجع به علم احکام نجوم نوشت که در عربی به ثمرهٔ بطلمیوس معروف است.

۶۳۲. عکس قضیهٔ بطلمیوس. ثابت کنید هر چهارضلعی که در آن حاصلضرب دو قطر آن برابر با مجموع حاصلضربهای دوبه‌دوی ضلعهای روبه‌رویش باشد، محاطی است.

۶۳۳. تعمیم قضیهٔ بطلمیوس. ثابت کنید در هر چهارضلعی، مجموع حاصلضربهای دوبه‌دوی ضلعهای روبه‌رو، بزرگتر یا برابر حاصلضرب دو قطر آن است.

۶۳۴. قضیه. در چهارضلعی محاطی ABCD، شعاع دایرهٔ محیطی را با R و اندازهٔ ضلعهای AB، BC، CD و DA را بترتیب با a، b، c و d و اندازهٔ قطرهای BD و AC را بترتیب با m و n و زاویهٔ یکی از قطرها با خط عمود بر دیگری را با θ نشان می‌دهیم.



ثابت کنید:

$$2mR\cos\theta = ab + cd \quad \text{و} \quad 2nR\cos\theta = ad + bc$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$$

۶۳۵. قضیهٔ پاپوس. حاصلضرب فاصله‌های هر نقطهٔ دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی از دو ضلع مقابل، مساوی حاصلضرب فاصله‌های این نقطه است از دو ضلع مقابل دیگر.

۶۳۶. قضیه. ثابت کنید، اگر در یک چهارضلعی؛ قطرها بر هم عمود باشند، جذر مجموع مربعهای هر دو ضلع روبه‌رو، برابر است با قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، پارامادیس وارا. از مسأله‌های هندی

۶۳۷. دستور دقیق مساحت چهار گوشهٔ محاطی برحسب اندازه‌های ضلعهای آن، نخستین بار توسط ریاضیدان هندی براهماگوپتا که در قرن هفتم میلادی می‌زیسته به شرح زیر به‌دست آمده است:

قضیه. هرگاه a، b، c و d اندازه‌های ضلعهای یک چهارگوشهٔ محاطی و s نصف محیط آن باشد، K مساحت آن از دستور زیر به‌دست می‌آید:

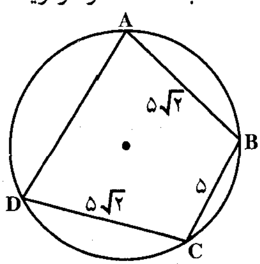
$$K^{۲} = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

۶۳۸. قضیهٔ نیوتن. اگر با سه طول معین a، b و c چهارضلعی به سطح ماکزیمم بنا کنیم، ضلع چهارم قطر دایره‌ای است که چهارضلعی در آن محاط است.

۲.۱.۳. زاویه

۱.۲.۱.۳. اندازهٔ زاویه

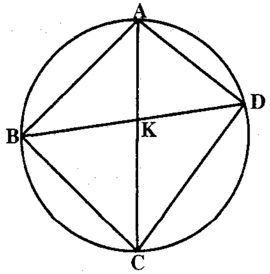
۶۳۹. شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی ABCD برابر ۵cm است. اگر $AB = ۵\sqrt{۲}cm$، BC=۵cm و $CD = ۵\sqrt{۲}cm$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی را تعیین کنید.



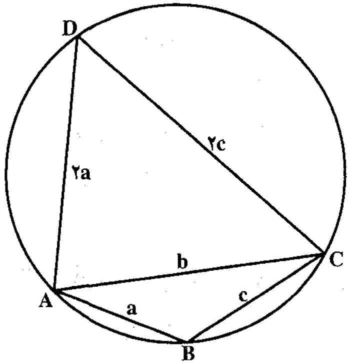
۳.۱.۳. ضلع

۱.۳.۱.۳. اندازهٔ ضلع

۶۴۰. اندازهٔ دو ضلع متوالی چهارضلعی محاطی ABCD برابر ۶ و ۶ و اندازهٔ دو قطر آن برابر ۱۲ و $۶\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ دو ضلع دیگر آن را بیابید.



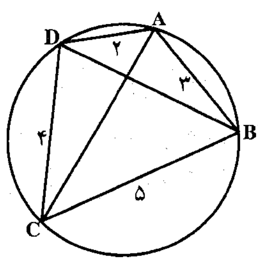
۶۴۱. در چهارضلعی محاطی ABCD که در آن AB=BC، K محل برخورد قطرهاست. اگر BK=b و KD=d، اندازهٔ ضلع AB را پیدا کنید.



۶۴۲. در چهارضلعی محاطی ABCD ضلعهای AB و BC بترتیب نصف AD و CD می‌باشند و AB=a و AC=b. مطلوب است محاسبهٔ BC و نیز تعیین رابطهٔ a و b برای این که ضلع AB شعاع دایرهٔ محیطی این چهارضلعی باشد.

۴.۱.۳. قطر

۱.۴.۱.۳. اندازهٔ قطر

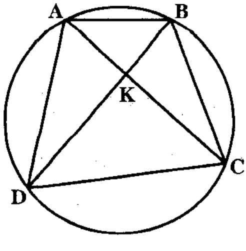


۶۴۳. در چهارضلعی محاطی ABCD، AB=۳، BC=۵، CD=۴ و DA=۲ است. اندازهٔ قطرهای این چهارضلعی را بیابید.

۶۴۴. ضلعهای متوالی یک چهارضلعی محاطی ۲۵، ۳۹، ۵۲ و ۶۰ می‌باشند. طول قطر دایرهٔ محیطی این چهارضلعی برابر است با :

الف) ۶۲ ب) ۶۳ ج) ۶۵ د) ۶۶ هـ) ۶۹

مسأله‌های مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲



۶۴۵. در چهارضلعی محاطی ABCD، که قطرهایش درنقطهٔ K متقاطعند، AB=a، BK=b، AK=c و CD=d. اندازهٔ قطر AC را پیدا کنید.

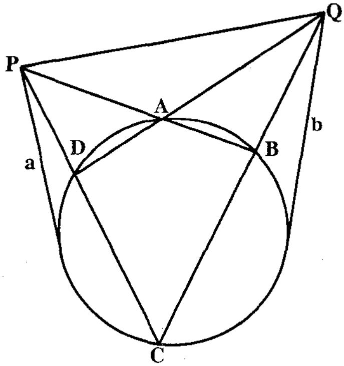
۶۴۶. اگر ضلعهای یک چهارضلعی محاطی مساوی a، b، c و d باشند، طول قطرهای آن را به‌دست آورید.

۶۴۷. در چهارضلعیی محاطی در یک دایره، دو ضلع روبه‌رو به هم، بر هم عمودند. طول یکی از آنها برابر با a است و یکی از قطرها، زاویهٔ حادهٔ مجاور به این ضلع را به زاویه‌هایی به اندازهٔ α و β تقسیم می‌کند. طول قطرهای چهارضلعی را پیدا کنید (زاویهٔ به اندازهٔ α، مجاور به ضلع داده شده است).

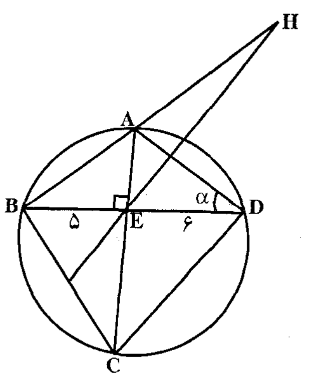
۶۴۸. در دایره‌ای به شعاع R کمانهای $\widehat{AB}=60^\circ$، $\widehat{BC}=90^\circ$ و $\widehat{CD}=120^\circ$ را دنبال یکدیگر جدا می‌کنیم. طول ضلعها و قطرهای چهارضلعی ABCD را برحسب R حساب کنید.

۳.۱.۵. پاره‌خط

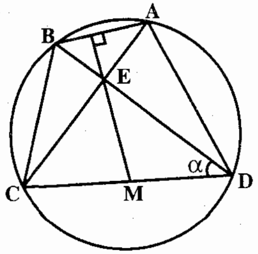
۳.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۶۴۹. دو ضلع روبه رو در چهارضلعیی محاط در یک دایره، در نقطه‌های P و Q متقاطعند. اگر طول مماسهای رسم شده از P و Q بر دایره، بترتیب، برابر با a و b باشد، اندازهٔ پاره‌خط PQ را پیدا کنید.



۶۵۰. در درون دایره‌ای چهارضلعی ABCD را محاط می‌کنیم که قطرهای آن بر هم عمود بوده و در نقطهٔ E همدیگر را قطع می‌کنند. خط گذرنده از نقطهٔ E و میانگاه ضلع CD، ضلع AB را در نقطهٔ H قطع می‌کند. اگر BE=5cm، ED=6cm و $A\hat{D}B=\alpha$ باشد، HB را به‌دست آورید.



۶۵۱. بر چهارضلعی ABCD که قطرهای آنها در نقطهٔ E بر هم عمود هستند، دایره‌ای را محیط می‌کنیم. خط عمود بر AB از نقطهٔ E ضلع CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اگر AB=۴cm، AD=۸cm و $\widehat{CDB} = \alpha$ باشد، EM را به‌دست آورید.

۲.۵.۱.۳. تساوی پاره‌خطها

۶۵۲. چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط است. خطهای راست AB و CD در نقطهٔ M و خطهای راست BC و AD در نقطهٔ N یکدیگر را قطع کرده‌اند. می‌دانیم BM=DN. ثابت کنید CM=CN.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۶۵۳. یکی از قطرهای چهارضلعی محدب محاطی قطر دایره است. ثابت کنید تصویرهای هر دو ضلع مقابل روی قطر دیگر، برابرند.

۶۵۴. می‌دانیم، برای چهارضلعی محاطی ABCD، داریم:

$$|AB|:|BC| = |AD|:|DC|$$

خط راستی که از رأس B و نقطهٔ وسط قطر AC می‌گذرد، دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ $M \neq B$ قطع می‌کند. ثابت کنید: $|AM| = |CD|$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۶۵۵. ثابت کنید طول پاره‌خطی که وسطهای قطرهای یک چهارضلعی محاطی که قطرهایش بر هم عمودند را به هم وصل می‌کند، برابر است با طول پاره‌خطی که محل تلاقی قطرهای آن را به مرکز دایرهٔ محیطی آن وصل می‌کند.

۶.۱.۳. شعاع دایره

۱.۶.۱.۳. اندازهٔ شعاع دایره

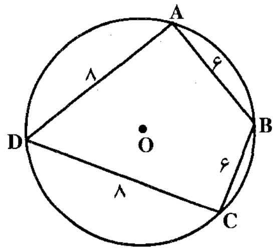
۶۵۶. قطرهای چهارضلعیی محاطی دوبه‌دو بر هم عمودند. ثابت کنید که وسط ضلعهای آن و پای عمودهای وارد از نقطهٔ برخورد قطرها بر ضلعهای آن، بر یک دایره واقعند. شعاع این دایره را پیدا کنید، به‌شرطی که شعاع دایرهٔ مفروض R و فاصلهٔ مرکز آن تا نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی، d باشد.

۶۵۷. ثابت کنید، پای عمودهای وارد از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعیی محاطی بر ضلعهای آن، رأسهای چهارضلعیی هستند که در آن دایره‌ای قابل محاط شدن است. شعاع این دایره را پیدا کنید، به‌شرطی که قطرهای چهارضلعی محاطی دوبه‌دو بر هم عمود باشند و شعاع دایرهٔ مفروض R و فاصلهٔ مرکز آن تا نقطهٔ برخورد قطرها، d باشد.

۷.۱.۳. محیط

۱.۷.۱.۳. اندازهٔ محیط

۶۵۸. قطر BD از چهارضلعی محاطی محیطی ABCD، از مرکز دایرهٔ محیطی این چهارضلعی می‌گذرد. اگر AB = ۶cm ، BC = ۶cm و AD = ۸cm باشد، اندازهٔ محیط این چهارضلعی چه‌قدر است؟



۸.۱.۳. مساحت

۱.۸.۱.۳. اندازهٔ مساحت

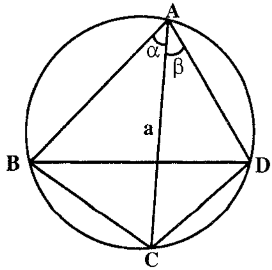
۶۵۹. برهماگوپتا ریاضیدان هندی (۶۲۸ میلادی) فرمول صحیح $K=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ را در مورد مساحت چهارضلعی محاطی با s نیم محیط و a، b، c و d‌ی ضلعهای آن به‌دست داد. مساحت چهارضلعی مربوطه را، درصورتی که ضلعهایش به طولهای داده شدهٔ زیر باشند، بیابید.

الف. a=۱۶، b=۱۵، c=۲۳، d=۲۹

ب. a=۴۰، b=۲۸، c=۱۵، d=۱۳

۶۶۰. چهار گوشهٔ با ضلعهای به اندازهٔ a، b، c و d در دایرهٔ به شعاع R محاط است. ثابت کنید که K مساحت آن از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$K^2=\frac{(bc+ad)(ca+bd)(ab+cd)}{16R^2}$$

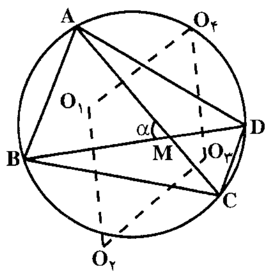


۶۶۱. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محاطی باشد. طول قطر AC برابر با a است و با ضلعهای AB و AD، بترتیب، زاویه‌های α و β تشکیل می‌دهد. ثابت کنید که اندازهٔ مساحت این چهارضلعی، بین

$$\frac{a^{۲}\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{۲\sin\alpha} \quad و \quad \frac{a^{۲}\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{۲\sin\beta}$$

قرار دارد.

۲.۸.۱.۳. نسبت مساحتها



۶۶۲. قطرهای چهارضلعی ABCD، در نقطهٔ M متقاطعند و زاویهٔ بین آنها برابر با α است. فرض کنید $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$، بترتیب، معرف مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABM، BCM، CDM و DAM باشند. نسبت مساحتهای چهارضلعیهای ABCD و $O_۱O_۲O_۳O_۴$ را پیدا کنید.

۳.۸.۱.۳. رابطهٔ بین مساحتها

۶۶۳. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط شده است. فرض کنید $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$، بترتیب، مرکز دایره‌های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB، و $H_۱$، $H_۲$، $H_۳$ و $H_۴$ نقطه‌های برخورد ارتفاعهای همان مثلثها باشند. ثابت کنید، چهارضلعی $O_۱O_۲O_۳O_۴$ مستطیل است و مساحت چهارضلعی $H_۱H_۲H_۳H_۴$ برابر است با مساحت چهارضلعی ABCD.

۹.۱.۳. رابطه‌های متری

۱.۹.۱.۳. رابطه‌های متری (برابریها)

۶۶۴. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای به شعاع R محاط است به قسمی که قطرهای AC و BD بر یکدیگر عمودند. ثابت کنید:

$$AB^{۲}+BC^{۲}+CD^{۲}+DA^{۲}=۸R^{۲}$$

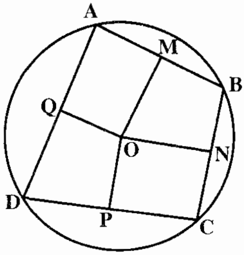
۶۶۵. هرگاه در یک چهارضلعی محاطی یکی از دو قطر از وسط دیگری بگذرد، دو برابر مجذور اوّلی، مساوی است با مجموع مجذورهای چهارضلع.

۶۶۶. ثابت کنید که در یک چهارضلعی محاطی، نسبت فاصله‌های محل برخورد قطرها از دو ضلع مقابل، برابر نسبت این دو ضلع است.

۶۶۷. اگر وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی محاطی ABCD را بترتیب M، N، P و Q بنامیم و R شعاع و O مرکز دایرهٔ محیطی آن باشد، ثابت کنید رابطهٔ زیر را :

$$(AB+CD)(ON+OQ)+(AD+BC)(OM+OP)=۲R(AC+BD)$$

۶۶۸. در چهارضلعی محاطی ABCD، نقطه‌های M، N، P و Q بترتیب وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA می‌باشند. درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید (O مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی است).



$$AB.OQ+AD.OM=CB.OP+CD.ON$$

$$AB.ON+BC.OM=AD.OP+CD.OQ$$

۶۶۹. **قضیه.** مجموع مربع فاصله‌های پاد مرکز چهارضلعی محاطی از چهار رأس آن، برابر است با مربع قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی.

پاد مرکز چهارضلعی محاطی. قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی نسبت به مرکز ثقل چهارضلعی (وسط پاره‌خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند) است.

۶۷۰. فرض کنید، a، b، c و d طول ضلعهای چهارضلعیی محاطی (ضلع به طول a روبه‌رو به ضلع با طول c است) و h_a، h_b، h_c و h_d فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلعهای نظیرشان باشند ؛ اگر مرکز دایره در درون چهارضلعی باشد، آن‌وقت ثابت کنید که $ah_c+ch_a=bh_d+dh_b$.

۶۷۱. نشان دهید که تصویرهای هر نقطه از دایرهٔ محیطی یک چهارضلعی محاطی بر روی ضلعهای چهارضلعی، این ضلعها را به هشت پاره‌خط تقسیم می‌کنند که حاصلضرب چهار پاره‌خط غیرمجاور، با حاصلضرب چهار پاره‌خط دیگر برابر است.

۶۷۲. چهارضلعی محدب و محاطی ABCD داده شده است. ثابت کنید دایره‌ای که از C بگذرد و در نقطهٔ A بر خط AD مماس باشد، خط AB را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کند به‌طوری‌که داریم :

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC\times BD}{BC\times AD}$$

۶۷۳. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است. ثابت کنید، اگر نقطه‌های برخورد دو مماسی که از A و C بر دایره رسم می‌شوند، روی خط راست BD باشد، آن‌وقت :

$$|AB|.|CD| = |BC|.|AD|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۶۷۴. در چهارضلعی محاطی ABCD ضلعهای متقابل را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع کنند. ثابت کنید که مجموع مجذورهای طول مماسهای MT و NT′ که می‌توان از M و N بر دایره رسم کرد، مساوی است با مجذور طول MN.

۶۷۵. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محاطی باشد. چهار دایره، α، β، γ و δ، بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD، بترتیب، در نقطه‌های A، B، C و D مماسند. فرض کنید $t_{\alpha\beta}$ معرف طول قطعه‌ای از مماس بر دایره‌های α و β باشد، $t_{\alpha\beta}$ طول پاره‌خط مماس مشترک خارجی است، اگر α و β به یک نحو (درونی یا بیرونی) بر دایرهٔ مفروض مماس باشند، و طول پاره‌خط مماس مشترک داخلی است، اگر α و β به‌طور متفاوت بر دایرهٔ مفروض مماس باشند (مقدارهای $t_{\beta\gamma}$، $t_{\alpha\delta}$، و غیره، به روش مشابه تعریف می‌شوند). ثابت کنید که :

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta}$$

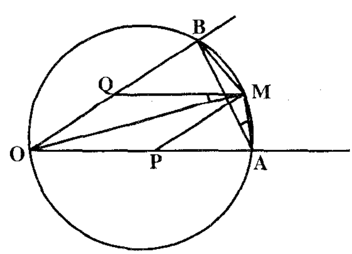
(قضیهٔ تعمیم یافتهٔ بطلمیوس)

۶۷۶. اگر چهارضلعی در دایرهٔ دارای جهت محاط باشد، بین قطرها و ضلعها رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\overline{AC}.\overline{AD}.\overline{CD} + \overline{AB}.\overline{AD}.\overline{BD} + \overline{AB}.\overline{AC}.\overline{CB} + \overline{DC}.\overline{BD}.\overline{CB} = 0$$

وترهای دایره (ضلعها و قطرهای چهارضلعی) برحسب جهت دایره (در قوسهای حاده) مثبت یا منفی می‌باشند.

۶۷۷. زاویهٔ AOB در دایره‌ای محاط است. نقطهٔ اختیاری M از کمان داخلی $\overset{\frown}{BA}$ را به A، O و B وصل کرده، خطهای موازی ضلعهای زاویه رسم می‌کنیم تا ضلعهای دیگر را در P و Q قطع کنند. ثابت کنید : $OM^2 = OP.OA + OQ.OB$.



۲.۹.۱.۳. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۶۷۸. چهارضلعی محدبی در دایره‌ای به شعاع ۱ محاط شده است. ثابت کنید که u تفاضل (مثبت) بین محیط و مجموع طولهای قطرهایش در $0 < u < 2$ صادق است.

۶۷۹. رأسهای یک چهارضلعی محاطی، در نقطه‌های گرهی یک صفحهٔ شطرنجی، با خانه‌هایی با ضلع به طول واحد، قرار دارند. می‌دانیم ABCD، ذوزنقه نیست. ثابت کنید:

$$AC.AD - BC.BD \geq 1$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۶۸۰. قطرهای چهارضلعی محاطی ABCD، در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند. ثابت کنید:

$$\frac{|AB|}{|CD|}+\frac{|CD|}{|AB|}+\frac{|BC|}{|AD|}+\frac{|AD|}{|BC|} \leq \frac{|OA|}{|OC|}+\frac{|OC|}{|OA|}+\frac{|OB|}{|OD|}+\frac{|OD|}{|OB|}$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۶۸۱. فرض کنید a، b، c و d طول ضلعهای متوالی یک چهارضلعی باشند. ثابت کنید که هرگاه S مساحت آن باشد، آن‌وقت $S \leq (ac+bd)/2$، برابری، تنها در چهارضلعیی محاطی که قطرهایش دوبه‌دو بر هم عمودند، رخ می‌دهد.

۳.۱.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی محاطی است

۶۸۲. در مثلث ABC روی نیمساز زاویهٔ A و روی امتداد آن دو نقطهٔ P و Q اختیار می‌کنیم به قسمی که $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = AB \times AC$ باشد. ثابت کنید که چهارضلعی BPCQ محاطی است.

۶۸۳. در چهارضلعی محدب ABCD قطرهای AC و BD بر هم عمودند و ضلعهای مقابل AB و DC موازی نیستند. فرض کنیم نقطهٔ P محل تلاقی عمودمنصفهای AB و DC درون چهارضلعی ABCD باشد. ثابت کنید چهارضلعی ABCD محاطی است اگر و فقط اگر، مثلثهای ABP و CDP مساحتهای مساوی داشته باشند.

سی‌ونهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی تایپه، ۱۹۹۸

۶۸۴. ثابت کنید اگر $n \geq 4$ باشد، هر چهارضلعی محاطی را می‌توان به n چهارضلعی محاطی تجزیه کرد.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۲

۶۸۵. ثابت کنید، چهارضلعی محاطی، $A_1A_2A_3A_4$، برابر است با چهارضلعی که رأسهای آن H_1، H_2، H_3 و H_4، عبارتند از نقطه‌های برخورد ارتفاعها در مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$.

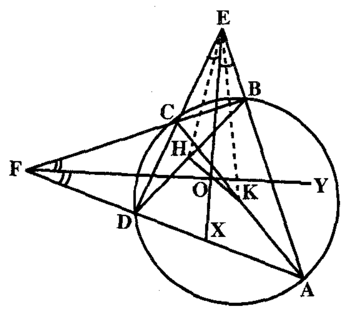
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بالکان، ۱۹۸۴

۱۱.۱.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۸۶. یک چهارضلعی در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است. فرض کنید P، Q و M، بترتیب، معرف نقطه‌های برخورد امتداد ضلعهای روبه‌رو و قطرهای این چهارضلعی باشند. اگر فاصلهٔ P، Q و M از مرکز دایره، بترتیب، a، b و c باشد، طول ضلعهای مثلث PQM را پیدا کنید.

۶۸۷. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محاطی، E نقطه‌ای دلخواه بر خط راست AB و F نقطه‌ای دلخواه بر خط DC باشد. خط راست AF، دایره را در نقطهٔ M، و خط DE، دایره را در نقطهٔ N قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای BC، EF و MN، همرس و یا موازی‌اند.

۶۸۸. در چهارضلعی محاطی ABCD خط HK وسطهای دو قطر را به هم وصل کرده است. EX و FY نیمسازهای زاویه‌های E و F می‌باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم EX، FY و HK همرسند.

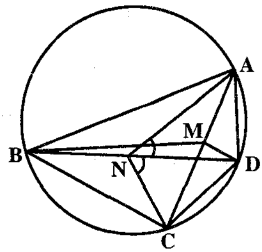


۶۸۹. ثابت کنید، چهار خط که هر یک از پاهای دو عمود وارد از یک رأس چهارضلعیی محاطی بر ضلعهایی که شامل این رأس نیستند، می‌گذرند، در یک نقطه متقاطعند.

۶۹۰. چهارضلعی محاطی ABCD را درنظر گرفته، محل تلاقی قطرهای آن را O می‌نامیم. اگر نقطه‌های L و K بترتیب پای عمودهای وارد از نقطهٔ O بر ضلعهای AD و BC بوده و نقطه‌های M و N بترتیب وسطهای ضلعهای AB و CD باشند، ثابت کنید عمودمنصف KL از نقطه‌های M و N می‌گذرند.

سومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، ۱۳۷۲

۶۹۱. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محاطی باشد و M و N، بترتیب، وسطهای AC و BD باشند. ثابت کنید که اگر DB نیمساز زاویهٔ ANC باشد، آن‌وقت AC نیمساز زاویهٔ BMD است.



۶۹۲. یک چهارضلعی محاط در یک دایره داده شده است. اگر این چهارضلعی را با چرخاندن سه ضلع آن حول سه نقطهٔ ثابت واقع بر یک خط راست، تغییر مکان دهیم؛ ثابت کنید چهارمین ضلع این چهارضلعی نیز از نقطهٔ ثابتی واقع بر همین خط راست می‌گذرد.

۶۹۳. فرض کنید P، Q و M، بترتیب، نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیی محاطی و امتداد ضلعهای مقابل آن باشند. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث PQM، بر مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی مفروض منطبق است (**قضیهٔ بروکار**).

۶۹۴. دایره‌های نه نقطهٔ مثلثهایی که به‌وسیلهٔ چهار رأس یک چهارضلعی محاطی تعریف می‌شوند، از نقطهٔ M می‌گذرند.

۶۹۵. در چهارضلعی ABCD، قطرهای AC و BD را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ADC بر هم مماس باشند، آن‌وقت دایره‌های محاط در مثلثهای BAD و BCD هم مماس بر یکدیگرند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد ، ۱۹۶۴

۱۲.۱.۳. مسأله‌های ترکیبی

۶۹۶. چهارضلعی محدب ABCD داده شده است و می‌دانیم : AB=AD و CB=CD. ثابت کنید :

الف. می‌توان دایره‌ای در آن محاط کرد ؛

ب. وقتی، و تنها وقتی، می توان دایره‌ای بر آن محیط کرد که داشته باشیم : $AB \perp BC$ ؛

ج. درحالت $AB \perp BC$ ، مجذور فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ محاطی (به شعاع r) تا مرکز دایرهٔ محیطی (به شعاع R) برابر است با : $R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۷۳

۶۹۷. الف) قطر یک چهارضلعی محاطی، آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. ثابت کنید، مجموع طولهای دو شعاع دایره‌های محاطی این دو مثلث، بستگی به انتخاب قطر ندارد.

ب) ثابت کنید، بزرگترین ارتفاع در مثلثی که زاویهٔ منفرجه ندارد، کمتر از مجموع دو شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث نیست. در چه حالتی، این ارتفاع، برابر با مجموع دو شعاع می‌شود؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۲، مجارستان، ۱۹۷۸

۶۹۸. چهارضلعیهای برهمگوپته

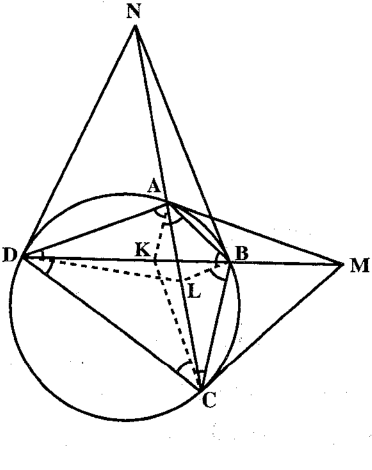
الف) برهمگوپته فرمول $K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ را برای K، مساحت یک چهارضلعی محاطی به ضلعهای a، b، c، d و نیم‌محیط s داد. نشان دهید که فرمول هرون برای مساحت یک مثلث حالت خاصی از این فرمول است.

ب) نشان دهید که یک چهارضلعی دارای قطرهای متعامد است اگر و فقط اگر مجموع مربعهای دو ضلع مقابل برابرباشد با مجموع مربعهای دو ضلع مقابل دیگر.

ج) برهمگوپته نشان داد که اگر $a^2+b^2=c^2$ و $A^2+B^2=C^2$، آن‌گاه هر چهارضلعی به ضلعهای متوالی aC، cB، bC، cA دارای قطرهای متعامد است. این را ثابت کنید.

د) ضلعها، قطرها، قطر دایرهٔ محیطی، و مساحت شبه ذوزنقهٔ برهمگوپته را پیدا کنید که با دو سه‌تایی فیثاغورسی (۳،۴،۵) و (۵،۱۲،۱۳) معین می‌شود.

۶۹۹. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط شده است. فرض کنید M نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره که از A و C می‌گذرند، N نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره که از B و D می‌گذرند، K نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های A و C‌ی چهارضلعی و L نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های B و D باشد. ثابت کنید که هرگاه یکی از چهار گزارهٔ:



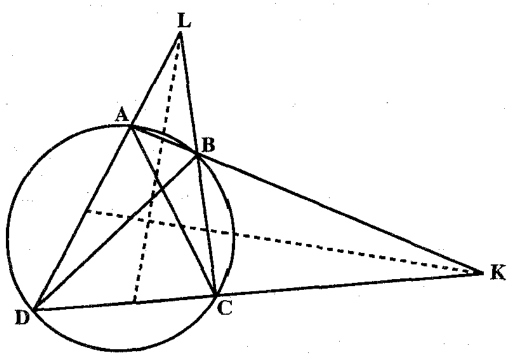
الف) M متعلق به خط راست BD است ؛

ب) N متعلق به خط راست AC است ؛

ج) K روی BD واقع است ؛

د) L روی AC واقع است، درست باشد، آن‌وقت سه گزارهٔ باقیمانده هم درست است.

۷۰۰. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محاطی باشد. امتداد ضلعهای روبه‌رو به هم AB و CD، در نقطهٔ K و امتدادهای ضلعهای BC و AD، در نقطهٔ L متقاطعند.
ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌های BKC و BLA دو به دو برهم عمودند و نقطهٔ برخوردشان بر خط راستی قرار دارد که وسطهای AC و BD را به هم وصل می‌کند.



۷۰۱. ۱. چهارضلعی محاطی ABCD را که در آن AB=۲a و زاویهٔ $\hat{A}=۶۰°$ و زاویهٔ $\hat{B}=۷۵°$ و ضلع $CD=a\sqrt{۲}$ می‌باشد، رسم کنید.
۲. به فرض آن‌که این چهارضلعی رسم شده باشد، ثابت کنید:
الف. دایرهٔ محیطی آن به قطر AB است.
ب. طولهای ضلعهای AD و BC و طولهای قطرهای AC و BD را برحسب a و همچنین مقدار زاویهٔ بین دو قطر چهارضلعی را به‌دست آورید.
۳. امتدادهای AB و CD در E و امتدادهای BC و AD در F یکدیگر را قطع می‌کنند.
ثابت کنید:
الف. نقطهٔ C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AEF است.
ب. نقطهٔ D از B و F به یک فاصله است.
ج. طولهای EC و EB بترتیب با قطرهای AC و BD برابرند.
۴. از نقطهٔ O عمودی بر CD فرود می‌آوریم و موقع آن را H فرض می‌کنیم.
الف. ثابت کنید این نقطه، مرکز دایره‌ای است که بر پاهای ارتفاعهای مثلث ABF و همچنین بر نقطهٔ O می‌گذرد.
ب. اگر K پای ارتفاع رأس F از مثلث ABF باشد، مثلث HCK متساوی‌الاضلاع است.

۷۰۲. چهارضلعی ABCD که قطرهای آن AC و BD یکدیگر را در P قطع می‌کنند و بر یکدیگر عمودند، در دایره‌ای به شعاع R محاط است. فرض می‌کنیم OP=d باشد.

۱. ثابت کنید عمودی که از مرکز دایره بر یکی از ضلعهای این چهارضلعی فرود آید، مساوی با نصف ضلع مقابل است.

۲. از این موضوع نتیجه بگیرید که مجموع مجذورهای دو ضلع متقابل چهارضلعی، مساوی است با مجذور قطر دایره.

۳. هرگاه AC و BD حول نقطهٔ P دوران کنند، مکان هندسی وسطهای ضلعهای چهارضلعی را معین کنید.

۴. مساحت چهارضلعی را S نامیده آن را برحسب R و d و x یعنی فاصلهٔ O از AC حساب کنید (بهتر است $x^۲$ را مساوی با y اختیار کنید). درحالت مخصوص R=۳ ، $d=۲\sqrt{۲}$ و S=۸ . مقدار x را حساب کنید.

۵. هرگاه $CB=C_۵$ و $CD=C_۳$ باشد، طول ضلعها و قطرهای چهارضلعی ABCD را برحسب R و اندازهٔ زاویه‌های آن را حساب کنید.

۷۰۳. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است. ضلعهای روبه‌روی آن را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در E و F قطع کنند. ثابت کنید :

۱. نیمسازهای داخلی زاویه‌های E و F بر یکدیگر عمودند.

۲. اگر این نیمسازها ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی را در نقطه‌های M، N، L و S قطع کنند، چهارضلعی MLNS لوزی است.

۳. ضلعهای این لوزی با دو قطر چهارضلعی ABCD موازی هستند.

۴. اگر طول ضلع لوزی a و طول دو قطر چهارضلعی ABCD مساوی با b و c باشند داریم :

$$\frac{۱}{a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}$$

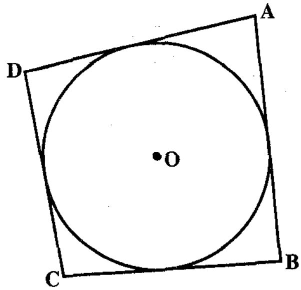
۵. نیمسازهای زاویه‌های E و F یکدیگر را روی خطی که وسط دو قطر چهارضلعی ABCD را به هم متصل می‌سازد، قطع می‌کنند.

۶. اگر وسط دو قطر را H و K بنامیم، خط EF مماس مشترک دایرهٔ محیطی دو مثلث EKH و FKH است.

۷. مجموع مجذورهای طول مماسهایی که از E و F بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD رسم شود، مساوی است با مجذور طول EF.

۲.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محیطی

۱.۲.۳. تعریف و قضیه



چهارضلعی ABCD را که ضلعهایش بر دایرهٔ به مرکز O مماسند، چهارضلعی محیطی، و دایرهٔ (O) را دایرهٔ محاطی آن می‌نامند. در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به چهارضلعیهای محیطی را بررسی می‌کنیم.

۷۰۴. **قضیه.** در هر چهارضلعی محیطی مجموع اندازه‌های ضلعهای روبه‌رو، با هم برابر است و بعکس. یعنی در چهارضلعی محیطی ABCD داریم:

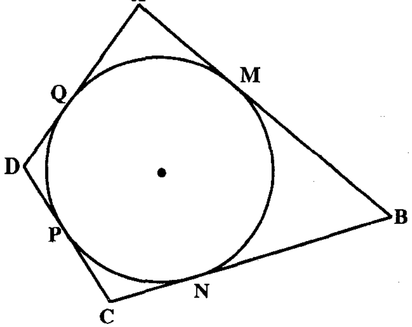
$$AB+CD=BC+AD$$

۷۰۵. **قضیهٔ پاسکال.** یک چهارضلعی بر دایره‌ای محیط است. با وصل کردن پی در پی نقطه‌های تماس یک چهارضلعی محاط در دایره به‌دست می‌آید. ضلعهای مقابل هر چهارضلعی دو به دو یکدیگر را در چهار نقطه واقع در یک خط راست قطع می‌کنند.

۷۰۶. **قضیهٔ نیوتن.** قطرهای یک چهارضلعی محیطی، از نقطهٔ تلاقی وترهای نقطه‌های تماس می‌گذرند.

۲.۲.۳. زاویه

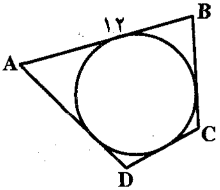
۱.۲.۲.۳. اندازهٔ زاویه



۷۰۷. ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی ABCD بترتیب در نقطه‌های M، N، P و Q بر دایرهٔ O مماسند. اگر $\widehat{QM}=100^\circ$، $\widehat{MN}=120^\circ$ و $\widehat{NP}=80^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های چهارضلعی ABCD را تعیین کنید.

۳.۲.۳. ضلع

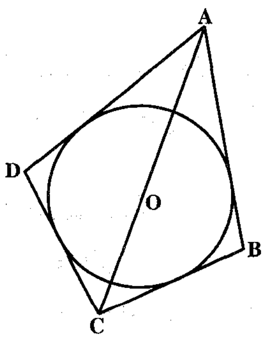
۱.۳.۲.۳. اندازهٔ ضلع



۷۰۸. اندازهٔ محیط چهارضلعی محیطی ABCD برابر ۳۶cm است. ضلع AB=۱۲cm است. اندازهٔ ضلع CD را تعیین کنید.

۴.۲.۳. قطر

۱.۴.۲.۳. اندازهٔ قطر

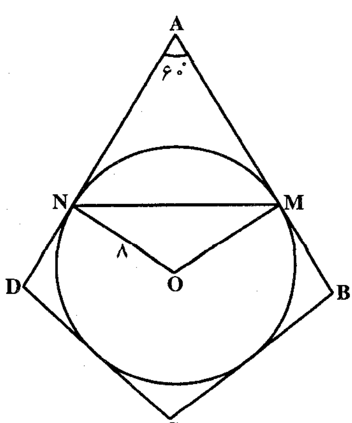


۷۰۹. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۱۲cm محیط است. قطر AC از مرکز دایره می‌گذرد. اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ و $\hat{C}=۹۰^\circ$ باشد، اندازهٔ قطر AC را تعیین کنید.

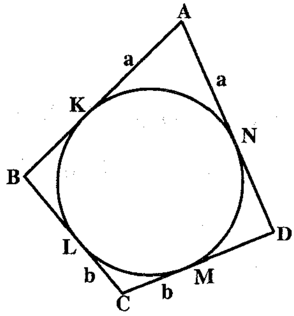
۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۷۱۰. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۸ مماس است. اگر $\hat{A}=۶۰^\circ$ باشد، اندازهٔ پاره‌خطی را که نقطه‌های تماس دو ضلع زاویهٔ A با دایره را به هم وصل می‌کند، تعیین کنید.



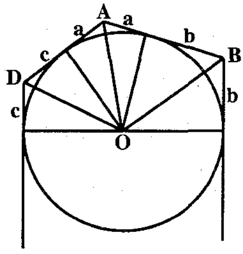
۳.۲.۵.۲. نسبت پاره‌خطها



۷۱۱. در چهارضلعی محیطی ABCD، طول هر پاره‌خط از A تا نقطه‌های تماس، برابر با a و طول هر پاره‌خط از C تا نقطه‌های تماس، برابر با b است. قطر BD، قطر AC را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۳.۲.۶. شعاع

۳.۲.۶.۱. اندازهٔ شعاع



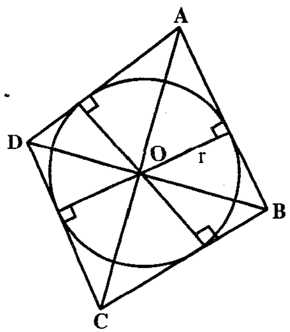
۷۱۲. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ای به شعاع r محیط شده است. نقطهٔ تماس دایره با ضلع AB، آن را به قطعه‌هایی با طولهای a و b و نقطهٔ تماس دایره با ضلع AD، آن را به قطعه‌هایی با طولهای a و c تقسیم می‌کند. دامنهٔ تغییرات r چیست؟

۳.۲.۷. محیط

۳.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط

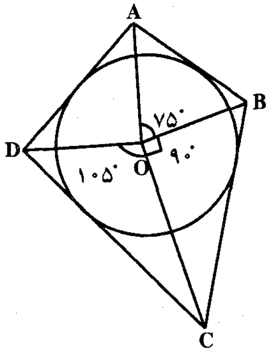
۷۱۳. مجموع دو ضلع روبه‌رو از یک چهارضلعی محیطی برابر ۱۸cm است. اندازهٔ محیط این چهارضلعی چه‌قدر است؟

۷۱۴. اندازهٔ مساحت چهارضلعی ABCD که محیط بر دایره‌ای به شعاع r است، برابر S می‌باشد. اندازهٔ محیط این چندضلعی را بیابید.



۸.۲.۳. مساحت

۱.۸.۲.۳. اندازهٔ مساحت



۷۱۵. نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی محیطی ABCD را به رأسهای A، B، C و D وصل کرده‌ایم. اگر $OA=۲\sqrt{۲}$، $OB=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$، $OC=۴$ و $A\hat{O}B=۷۵^\circ$ ، $B\hat{O}C=۹۰^\circ$ و $C\hat{O}D=۱۰۵^\circ$ باشد، اندازهٔ مساحت چهارضلعی ABCD را تعیین کنید.

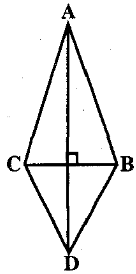
۷۱۶. چهارضلعی محدب ABCD، محیط بر دایره‌ای به قطر ۱، داده شده است. در درون ABCD، نقطهٔ M طوری است که $MA^۲+MB^۲+MC^۲+MD^۲=۲$. مساحت ABCD را پیدا کنید.

۹.۲.۳. رابطه‌های متری

۷۱۷. فرض کنید ۲φ، مجموع دو زاویهٔ مقابل از چهارضلعیی محیطی، a، b، c و d طول ضلعهای آن و S مساحت آن باشد. ثابت کنید که $S=\sqrt{abcd}\sin\varphi$.

۱۰.۲.۳. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است

۷۱۸. در چهارضلعی ABCD قطر AC عمودمنصف قطر DB است. ثابت کنید این چهارضلعی محیطی است.



۱۱.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

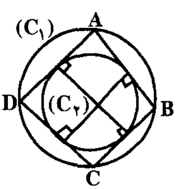
۷۱۹. فرض کنید ABCD چهارضلعیی محیطی، K نقطهٔ برخورد خطهای راست AB و CD، و L نقطهٔ برخورد AD و BC باشد. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث تشکیل شده با خطهای KL، AC و BD، برمرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی ABCD منطبق است.

۷۲۰. اگر در چهارضلعی محیطی ABCD، I وسط قطر AC، J وسط قطر BD و O مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی باشد، ثابت کنید نقطه‌های I، J و O بر یک استقامتند.

مرحلهٔ نهایی ششمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۳.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محاطی و محیطی

۱.۳.۳. تعریف و قضیه

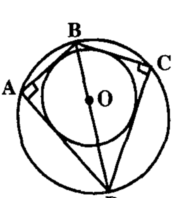


چهارضلعیی که در دایره‌ای محاط و بر دایرهٔ دیگری محیط است، چهارضلعی محاطی، محیطی نامیده می‌شود. مانند چهارضلعی ABCD که در دایرهٔ (C_1) محاط و بر دایرهٔ (C_2) محیط است. این چهارضلعی را چهارضلعی دو مرکزی نیز می‌نامند.

در این قسمت به بررسی رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محاطی، محیطی می‌پردازیم.

۲.۳.۳. زاویه

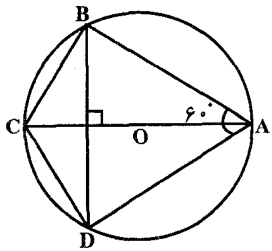
۱.۲.۳.۳. اندازهٔ زاویه



۷۲۱. قطر BD از چهارضلعی محاطی و محیطی ABCD، از مرکز دایرهٔ محاطی آن می‌گذرد. اگر $\hat{B}=120^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های دیگر این چهارضلعی را تعیین کنید.

۳.۳.۳. ضلع

۱.۳.۳.۳. اندازهٔ ضلع



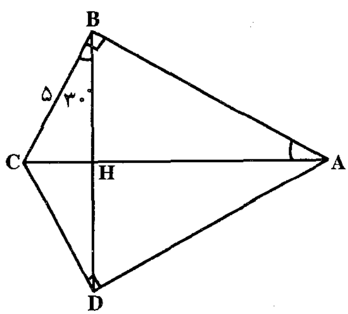
۷۲۲. در چهارضلعی محاطی ABCD، قطر AC عمودمنصف قطر BD است. ثابت کنید:

۱. این چهارضلعی محیطی است.

۲. اگر شعاع دایرهٔ محیطی ۱۰cm و $B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ باشد، اندازهٔ ضلعهای چهارضلعی را تعیین کنید.

۴.۳.۳. قطر

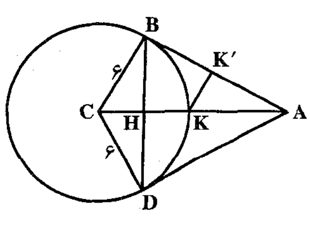
۱.۴.۳.۳. اندازهٔ قطر



۷۲۳. در چهارضلعی محاطی محیطی ABCD، $BC = CD$ و $A\hat{B}C = A\hat{D}C = ۹۰^\circ$ است. اگر $BC = ۵cm$ و $D\hat{B}C = ۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ قطرهای چهارضلعی را بیابید.

۵.۳.۳. پاره‌خط

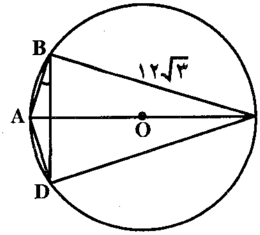
۱.۵.۳.۳. اندازهٔ پاره‌خط



۷۲۴. شبه لوزی ABCD داده شده است. در این شبه لوزی $BC = CD = ۶cm$ و $A\hat{B}C = ۹۰^\circ$ و $B\hat{C}D = ۱۲۰^\circ$ است. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع CB رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ K قطع کند. از K خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را در K′ قطع کند. اندازهٔ پاره‌خط AK′ را بیابید.

۶.۳.۳. شعاع دایره

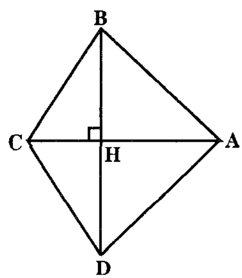
۱.۶.۳.۳. اندازهٔ شعاع دایره



۷۲۵. در چهارضلعی محاطی، محیطی عمود قطر ABCD، AC قطر دایرهٔ محیطی چهارضلعی است. اگر $\widehat{ABD}=۱۵^\circ$ و $BC=۱۲\sqrt{۳}cm$ باشد، اندازهٔ شعاع این دایره و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی این چهارضلعی را تعیین کنید.

۷.۳.۳. محیط

۱.۷.۳.۳. اندازهٔ محیط



۷۲۶. در چهارضلعی محاطی محیطی ABCD، قطر AC عمود منصف قطر BD است. اگر $BD=۴\sqrt{۶}cm$ و $HC:HA=۲:۳$ باشد، اندازهٔ محیط چهارضلعی را بیابید.

۸.۳.۳. مساحت

۱.۸.۳.۳. اندازهٔ مساحت

۷۲۷. چهار گوشه‌ای که اندازه‌های ضلعهایش a، b، c و d است، در یک دایره محاط است و بر دایرهٔ دیگر محیط می‌باشد. ثابت کنید که k مساحت این چهارگوشه از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$k^۲=abcd$$

۹.۳.۳. رابطه‌های متری

۷۲۸. هرگاه چهارضلعی HKLN محاط در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R و محیط بر دایره‌ای به مرکز I و به شعاع r باشد، رابطهٔ بین R، r و d خط‌المرکزین این دو دایره را بیابید.

۱۰.۳.۳. ثابت کنید چهارضلعی محاطی و محیطی است

۷۲۹. ثابت کنید که اگر چهارضلعیی، هم محاط در دایره‌ای به شعاع R و هم محیط بر دایره‌ای به شعاع r باشد، و فاصلهٔ میان مرکزهای این دایره‌ها d باشد، آن وقت رابطهٔ

$$\frac{۱}{(R+d)^{۲}}+\frac{۱}{(R-d)^{۲}}=\frac{۱}{r^{۲}}$$

درست است. در این حالت، بینهایت چهارضلعی، محاط در دایرهٔ بزرگتر و محیط بر دایرهٔ کوچکتر وجود دارد (هر نقطهٔ دایرهٔ بزرگتر را می‌توان یکی از رأسها اختیار کرد).

بخش ۴

• رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...

۱.۴. رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی
۱.۱.۴. تعریف و قضیه
۲.۱.۴. زاویه
۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه
۲.۲.۱.۴. تساوی زاویه‌ها
۳.۱.۴. ضلع
۱.۳.۱.۴. اندازهٔ ضلع
۴.۱.۴. قطر
۱.۴.۱.۴. اندازهٔ قطر
۵.۱.۴. پاره‌خط
۱.۵.۱.۴. اندازهٔ پاره‌خط
۲.۵.۱.۴. تساوی پاره‌خطها
۳.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۶.۱.۴. شعاع دایره
۱.۶.۱.۴. اندازهٔ شعاع دایره
۷.۱.۴. محیط
۱.۷.۱.۴. اندازهٔ محیط
۲.۷.۱.۴. رابطهٔ بین محیطها
۸.۱.۴. مساحت
۱.۸.۱.۴. اندازهٔ مساحت
۹.۱.۴. رابطه‌های متری
۱۰.۱.۴. شکلهای ایجاد شده
۱۱.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲.۴. رابطه‌های متری در شش‌ضلعی
- ۱.۲.۴. تعریف و قضیه
- ۲.۲.۴. زاویه
  - ۱.۲.۲.۴. اندازهٔ زاویه
- ۳.۲.۴. ضلع
  - ۱.۳.۲.۴. اندازهٔ ضلع
- ۴.۲.۴. قطر
  - ۱.۴.۲.۴. اندازهٔ قطر
  - ۲.۴.۲.۴. تساوی قطرها
  - ۳.۴.۲.۴. همرسی قطرها
- ۵.۲.۴. پاره‌خط
  - ۱.۵.۲.۴. اندازهٔ پاره‌خط
  - ۲.۵.۲.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها
- ۶.۲.۴. شعاع دایره
  - ۱.۶.۲.۴. اندازهٔ شعاع دایره
- ۷.۲.۴. محیط
- ۸.۲.۴. مساحت
  - ۱.۸.۲.۴. اندازهٔ مساحت
  - ۲.۸.۲.۴. رابطهٔ بین مساحتها
- ۹.۲.۴. رابطه‌های متری
- ۱۰.۲.۴. شکلهای ایجاد شده
- ۱۱.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

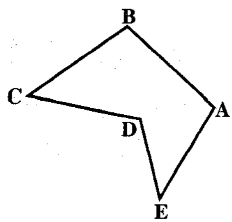
۳.۴. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی، هشت‌ضلعی، ...
- ۱.۳.۴. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی
  - ۱.۱.۳.۴. زاویه
    - ۱.۱.۱.۳.۴. اندازهٔ زاویه
  - ۲.۱.۳.۴. مساحت
  - ۳.۱.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

بخش ۴. رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...

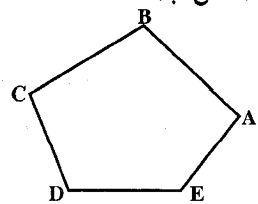
۱.۴. رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

در این بخش رابطه‌های متری مربوط به پنج‌ضلعیهای غیرمنتظم را بررسی می‌کنیم. پنج‌ضلعی می‌تواند محدب باشد مانند پنج‌ضلعی ABCDE (شکل الف) و یا مقعر، مانند پنج‌ضلعی ABCDE (شکل ب).



(ب)



(الف)

۲.۱.۴. زاویه

۱.۲.۱.۴. اندازهٔ زاویه

۷۳۰. زاویه‌های یک پنج‌ضلعی، یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند. یکی از این زاویه‌ها برحسب درجه ناگزیر برابر است با :

الف) ۱۰۸ ب) ۹۰ ج) ۷۲ د) ۵۴ هـ) ۳۶

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۷۳۱. در پنج‌ضلعی کوژ ABCDE، همهٔ ضلعها طولی برابر دارند. اگر بدانیم زاویهٔ ACE برابر نصف زاویهٔ BCD است، مقدار زاویهٔ ACE را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۷۳۲. در یک پنج‌ضلعی، که ضلعهایی با طولهای برابر دارد، همهٔ زاویه‌ها از °۱۲۰ کوچکترند. ثابت کنید، همهٔ این زاویه‌ها منفرجه‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۴.۱.۲.۲. تساوی زاویه‌ها

۷۳۳. ثابت کنید، اگر، در پنج‌ضلعی محدب ABCDE داشته باشیم:

$$A\hat{B}C = A\hat{D}E\ ,\ \ A\hat{E}C = A\hat{D}B$$

آن‌وقت داریم: $B\hat{A}C = D\hat{A}E$.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

۷۳۴. پنج‌ضلعی محدب ABCDE با شرایط زیر مفروض است:

$$DC = DE \text{ و } D\hat{C}B = D\hat{F}A = 90^\circ$$

فرض کنید F نقطه‌ای روی AB باشد که $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{BC}$. نشان دهید: $F\hat{E}C = B\hat{D}C$ و $F\hat{C}E = A\hat{D}E$.

۴.۱.۳. ضلع

۴.۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۷۳۵. قطر BD به طول ۱۰، نیمساز زاویه‌های B و D از پنج‌ضلعی محدب ABCDE است. اگر $\hat{B} = 120^\circ$، $\hat{D} = 60^\circ$ و $CD = 8cm$ باشد، اندازهٔ ضلع BC را بیابید.

۴.۱.۴. قطر

۴.۱.۴.۱. اندازهٔ قطر

۷۳۶. آیا پاره‌خطهای راست به طولهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳و ۱۵، می‌توانند ضلعها و قطرهای یک پنج‌ضلعی کوژ باشند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۴.۱.۵. پاره‌خط

۴.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۳۷. پنج‌ضلعی ABCDE در دایره‌ای محاط شده است. نقطه‌های M، Q، N و P، پای عمودهای وارد از رأس E، بترتیب، بر ضلعهای AB، BC و CD (یا امتدادهای آنها) و قطر AD هستند. می‌دانیم که $EP = d$ و نسبت مساحتهای مثلثهای MQE و PNE برابر با k است. EM را پیدا کنید.

۲.۵.۱.۴. تساوی پاره‌خطها

۷۳۸. در پنج‌ضلعی کوژ ABCDE، قطرهای BE و BD، بترتیب، قطر AC را در نقطه‌های K و M قطع کرده‌اند. ثابت کنید، اگر داشته باشیم:

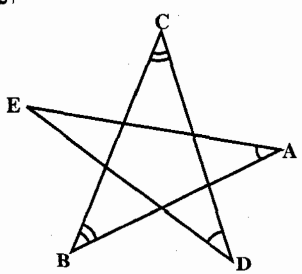
$$|AE| = |EK| = |KB|\ ,\ |AK| = |MC|$$

آن‌وقت $|EM| = |BC|$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۷۳۹. در پنج‌ضلعی ستاره‌ای که در شکل نشان داده شده است، دو زاویهٔ A و D با هم و دو زاویهٔ B و C با هم برابرند؛ همچنین، دو پاره‌خط راست AB و CD، طولهایی برابر دارند. ثابت کنید، پاره‌خطهای راست AE و DE هم، طولی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳



۳.۵.۱.۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷۴۰. در پنج‌ضلعی ABCDE، وسط ضلع AB را K، وسط ضلع BC را L، وسط ضلع CD را M، وسط ضلع DE را N، وسط پاره‌خط راست KM را P و وسط پاره‌خط راست LN را Q می‌نامیم. ثابت کنید، پاره‌خط راست PQ با پاره‌خط راست AE موازی است و طولی برابر یک چهارم طول آن دارد.

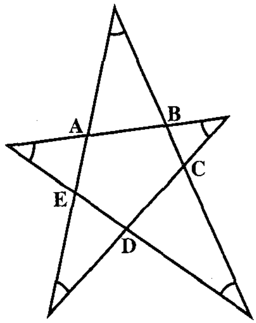
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۶.۱.۴. شعاع دایره

۱.۶.۱.۴. اندازهٔ شعاع دایره

۷۴۱. قطر BD به طول ۱۰، نیمساز زاویه های B و D از پنج‌ضلعی محدب ABCDE است. اگر $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$، $\hat{D} = ۶۰^\circ$ و $CD = ۸cm$ باشد، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث BCD را بیابید.

۷.۱.۴. محیط



۱.۷.۱.۴. اندازهٔ محیط

۷۴۲. خط شکستهٔ بسته‌ای، که پنج ضلع دارد، یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای با پنج زاویهٔ برابر ساخته است (شکل). اگر طول خط شکسته، برابر واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی درونی ABCDE چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۲.۷.۱.۴. رابطهٔ بین محیطها

۷۴۳. نقطه‌های H، I، K، M و O را، بترتیب وسط ضلعهای AB، BC، CD، DE و EA از پنج‌ضلعی ABCDE انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید، طول خط شکستهٔ HKOIMH از طول خط شکستهٔ ACEBDA کمتر است.

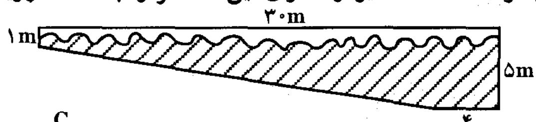
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

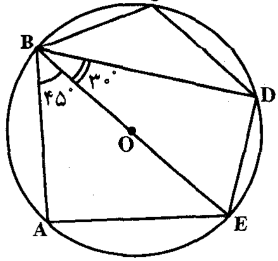
۸.۱.۴. مساحت

۱.۸.۱.۴. اندازهٔ مساحت

۷۴۴. یک پنج‌ضلعی بر دایره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر محیط است. مساحت این پنج ضلعی را به‌دست آورید، درصورتی که اندازهٔ ضلعهایش بترتیب ۴، ۶، ۸، ۹ و ۱۰/۵ سانتیمتر باشد.

۷۴۵. طول یک استخر شنا ۳۰ متر و گودی آن در قسمت کم‌عمق یک متر است. عمق استخر تا ۵ متر زیاد می‌شود. مساحت دیوار کناری این استخر را به‌دست آورید.

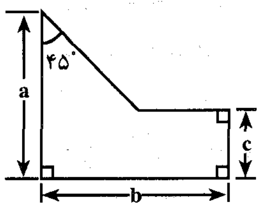




۷۴۶. در پنج‌ضلعی ABCDE معلومهای $BC = CD$، $AB = \sqrt{2}$، $A\hat{B}E = 45°$ و $D\hat{B}E = 30°$ را داریم (شکل). اگر دایره‌ای به شعاع ۱cm را بتوان بر این پنج‌ضلعی محیط کرد در آن صورت، مساحت پنج‌ضلعی را به‌دست آورید.

۷۴۷. مساحت پنج‌ضلعی را پیدا کنید که به خطهای BC، CD، AN، AM و BD محدود است، به‌طوری که A، B، C و D رأسهای مربع ABCD هستند، N وسط ضلع BC است، و M ضلع CD را به نسبت ۱ :۲ (با محاسبه از رأس C) تقسیم می‌کند. ضلع مربع ABCD برابر با a است.

۷۴۸. فرمولی برای یافتن مساحت شکل روبه‌رو، برحسب a، b و c به‌دست آورید.



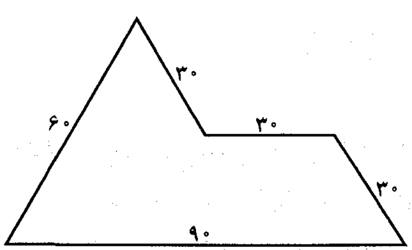
۹.۱.۴. رابطه‌های متری

۷۴۹. رأسهای پنج‌ضلعی منتظم ABCDE را که در دایره‌ای محاط است، به نقطهٔ اختیاری M از کمان $\overset{\frown}{AE}$ وصل می‌کنیم، ثابت کنید:

$$MA + ME + MC = MB + MD$$

۱۰.۱.۴. شکلهای ایجاد شده

۷۵۰. **هنگام تقسیم مزرعه:** یک دهقان مزرعه‌ای به ابعاد ۹۰، ۶۰، ۳۰، ۳۰ و ۳۰ متر، مطابق شکل، داشت. پس از مرگ او، به هنگام تقسیم این مزرعه، چهار پسر او با هم به نزاع پرداختند. زیرا آنها می‌خواستند مساحت ۴ مزرعه، مساوی هم، و شکل آنها یکسان (قرینهٔ یکدیگر، و یا قابل انطباق بر هم)، و در ضمن متشابه با شکل مزرعهٔ اوّلیه باشد! اگر شما مسؤول تقسیم این مزرعه باشید، آیا می‌توانید نظر آنها را تأمین کنید؟



المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۷۵۱. نقطهٔ O را در درون پنج‌ضلعی کوژ ABCDE انتخاب کرده‌ایم. معلوم شد، هر پنج مثلثی که، به این ترتیب، به دست می‌آید، با هم برابرند. ثابت کنید، یا همهٔ این مثلث متساوی‌الساقین و یا همهٔ آنها قائم‌الزاویه‌اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۷۵۲. چرخ دور پنج‌ضلعی

۱. پنج‌ضلعی ABCDE را با مشخصات زیر رسم کنید و چگونگی رسم آن‌را توضیح دهید :

$$AB = ۵cm,\ \ BC = ۴cm,\ \ CD = ۳cm,\ \ DE = ۳cm,\ \ EA = ۵cm$$

۲. یک چرخ کوچک به شعاع ۱ سانتیمتر را در نظر بگیرید، که دور پنج‌ضلعی ABCDE از طرف خارج حرکت می‌کند، همواره بر ضلعهای پنج‌ضلعی مماس است. اگر این چرخ یکبار پنج‌ضلعی را به‌طور کامل دور بزند، مرکز چرخ چه مسیری را طی می‌کند، و طول این مسیر چند سانتیمتر است؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۱۱.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۵۳. در پنج‌ضلعی محدب ABCDE می‌دانیم : زاویه‌های دو رأس B و E قائمه و در ضمن، دو زاویهٔ BAC و EAC با هم برابرند. ثابت کنید، اگر قطرهای BD و CE در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کرده باشند، خطهای راست AO و BE بر هم عمودند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، روسیه، ۱۹۸۲

۱۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۴. قطرهای پنج‌ضلعی محدب ABCDE، ضمن برخورد با هم، پنج‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ و یک پنج‌ضلعی ستاره‌ای را به وجود آورده‌اند :

الف) مجموع زاویه‌های پنج‌ضلعی ستاره‌ای را در رأسهای A، B، C، D و E پیدا کنید.

ب) نسبت مساحت پنج‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ را به مساحت پنج‌ضلعی ABCDE پیدا کنید، به‌شرطی که پنج‌ضلعی اخیر، منتظم باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۰

۷۵۵. پنج‌ضلعی ABCDE در دایره‌ای محاط است. مماسهای بر دایره درنقطه‌های A و C با یکدیگر در L برخورد می‌کنند و M نقطهٔ برخورد AB با CE و N نقطهٔ برخورد AE با BC است. ثابت کنید که سه نقطهٔ L، M و N بر یک خط راست واقعند.

۷۵۶. رأسهای پنج‌ضلعی محدب ABCDE، طوری قرار دارند که، مثلثهای ABC و CDE متساوی الاضلاع شده‌اند. ثابت کنید، اگر O مرکز مثلث ABC و نقطه‌های M و N، بترتیب، وسط پاره‌خطهای راست BD و AE باشند، آن‌وقت، دو مثلث OME و OND متشابه‌اند.

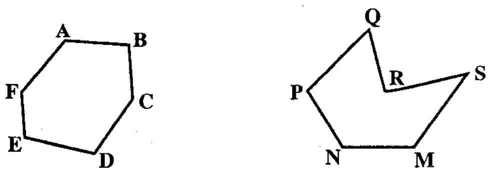
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۷۹

۲.۴. رابطه‌های متری در شش‌ضلعی

۱.۲.۴. تعریف و قضیه

تعریف شش‌ضلعی را می‌دانیم. در این قسمت به بررسی مسأله‌های مربوط به شش‌ضلعیها می‌پردازیم. این شش‌ضلعیها می‌توانند محدب یا مقعر باشند. مانند شش‌ضلعی محدب ABCDEF و یا شش‌ضلعی مقعر MNPQRS.

اینک نکته‌های بیشتری در مورد شش‌ضلعیها :



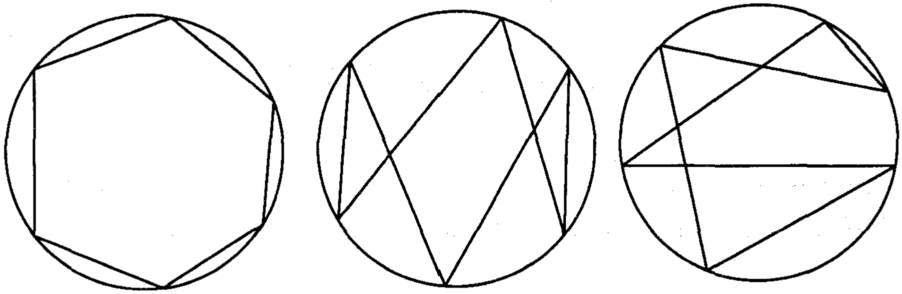
شش‌ضلعیها

در هر شش‌ضلعی، دو رأس را مجاور، یک در میان روبه‌رو می‌گوییم برحسب آن که یک ضلع، دو ضلع یا سه ضلع بین آنها واقع باشد. در شش‌ضلعی ABCDEF نسبت به رأس A، رأسهای B و F با آن مجاورند، رأسهای C و E با آن یک درمیانند. و رأس D با آن روبه‌روست. پاره‌خط واصل بین دو رأس روبه رو را قطر و ضلعهای واقع بین دو جفت رأسهای روبه رو را ضلعهای روبه رو می‌نامیم. در شش‌ضلعی گفته شده قطرها عبارتند از AD، BE و CF و ضلعهای روبه‌رو عبارتند از AB و DE، BC و EF، CD و FA.

یک شش‌ضلعی داده شده را با شش حرف A، B، C، D، E و F به دوازده نوع می‌توانیم نامگذاری کنیم ؛ هر رأس را که A بنامیم برحسب این که کدامیک از رأسهای مجاورش را B بنامیم، شش‌ضلعی را می‌توانیم به دو گونه نامگذاری کنیم و چون برای رأس A شش انتخاب داریم، پس روی هم به دوازده گونه می‌توانیم رأسها را نامگذاری کنیم.

هرگاه شش نقطهٔ غیرواقع بر یک خط داده شده باشد، با $720 = !6$ حالت می‌توان حرفهای A، B، C، D، E و F را به آنها نسبت داد و چون شش‌ضلعی را به ۱۲ گونه می‌توانیم نامگذاری کنیم، پس تعداد شش‌ضلعیهای متمایز که با شش نقطهٔ معلوم می‌توانیم بسازیم برابر می‌شود با : $\frac{720}{12} = 60$.

در شکل (الف) سه گونه از ۶۰ گونه شش‌ضلعیهایی که از به هم وصل کردن شش نقطهٔ واقع بر یک دایره به‌دست می‌آید مشاهده می‌شود.



شکل (الف)

شکل سمت چپ که شش‌ضلعی محدب است برای ما آشناتر از دو شکل دیگر، و به‌طور کلی آشناتر از ۵۹ گونهٔ دیگر، می‌باشد.

قبلاً گفته شده است که در یک چندضلعی هیچ‌یک ازمجموعه‌های سه رأس متوالی نمی‌توانند بر یک خط راست واقع باشند. اما برای مجموعه‌های سه تایی رأسهای یک در میان شش‌ضلعی وضع چنین نیست و به ویژه می‌توانیم از قضیهٔ پاپوس نام ببریم.

۷۵۷. قضیهٔ پاسکال. ثابت کنید، اگر یک شش‌ضلعی قابل محیط بر دایره باشد و در ضمن، ضلعهای متقابل آن، با هم موازی نباشند، سه نقطهٔ برخورد این ضلعهای متقابل، روی یک خط راست قرار می‌گیرند (خط راست پاسکال).

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۷۵۸. حالت حدی مسألهٔ بالا را تنظیم کنید و از آن‌جا، قضیه‌های جالبی دربارهٔ پنج‌ضلعی محاطی و چهارضلعی محاطی و مثلث به‌دست آورید.

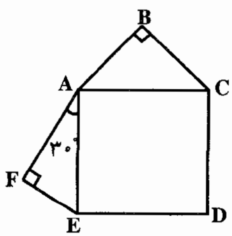
۴.۲.۲. زاویه

۴.۲.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۷۵۹. نقطه‌های A_1، A_3 و A_5 بر یک خط راست و نقطه‌های A_2، A_4 و A_6 بر خط راست دیگری که اولّی را قطع می‌کند، واقعند. اگر بدانیم که ضلعهای شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ برابرند (ممکن است یکدیگر را قطع کنند)، اندازهٔ زاویهٔ بین این خطها را پیدا کنید.

۴.۲.۳. ضلع

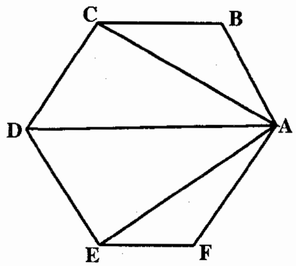
۴.۲.۳.۱. اندازهٔ ضلع



۷۶۰. قطرهای AC و AE از شش ضلعی محدب ABCDEF، آن را به مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC، مربع ACDE و مثلث قائم‌الزاویهٔ AEF ($\hat{F}=90^\circ$) با زاویهٔ $E\hat{A}F=30^\circ$ تبدیل می‌کنند. اگر $AC=12\sqrt{2}cm$ باشد، اندازهٔ ضلعهای شش‌ضلعی را به‌دست آورید.

۴.۲.۴. قطر

۴.۲.۴.۱. اندازهٔ قطر



۷۶۱. در شش‌ضلعی محدب ABCDEF داریم: $BC \parallel AD$ و $AB=6$، $BC=8$، $CD=12$ و $\hat{B}=120^\circ$ است. اندازهٔ قطر AC را تعیین کنید.

۴.۲.۴.۲. تساوی قطرها

۷۶۲. در شش‌ضلعی ABCDEF، مثلثهای ABC، ABF، FEA، FED، CDB و CDE، با هم برابرند. ثابت کنید، قطرهای AD، BE و CF، طولی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۴ .۲ .۴ .۳. همرسی قطرها

۷۶۳. برای این که قطرهای AD، BE و CF از شش‌ضلعی ABCDEF، که در دایره‌ای محاط شده است، در یک نقطه به هم برسند، لازم و کافی است که برابری

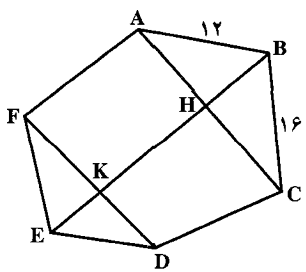
$$AB.CD.EF = BC.DE.FA$$

برقرار باشد.

۴ .۲ .۵. پاره‌خط

۴ .۲ .۵ .۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۶۴. در شش‌ضلعی محدب ABCDEF قطرهای AC و DF موازی‌اند و قطر BE را بترتیب درنقطه‌های H و K قطع می‌کنند. اندازهٔ پاره‌خط HK را بیابید درصورتی که HB = KE، $BE = ۷\sqrt{۲۱}$ ، AB = ۱۲ ، BC = ۱۶ و AC = ۲۱ وBE نیمساز زاویهٔ ABC باشد.



۴ .۲ .۵ .۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

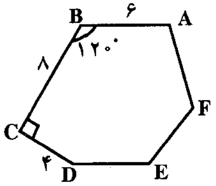
۷۶۵. میدان بزرگ مسابقه‌های دو، به شکل یک شش‌ضلعی است که هریک از زاویه‌های آن برابر ۱۲۰ درجه است و طول هر ضلع آن، برحسب کیلومتر، با عددی درست بیان می‌شود. هر مرحله از مسابقه، در طول یکی از ضلعها انجام می‌شود ؛ در ضمن، مرحله‌های اوّل، سوم و پنجم به خانمها و مرحله‌های دوم، چهارم و ششم به آقایان مربوط است. بعد از پایان مسابقه‌ها، خانمها ادعا کردند که، مجموع طولهای قطعه‌های مربوط به آنها، ۳ کیلومتر از مجموع طولهای قطعه‌های مربوط به مردان بیشتر بوده است ؛ ولی مردان ادعا داشتند که مجموع طول قطعه راههای مربوط به آنها، از مجموع طول قطعه راههای مربوط به خانمها، ۵ کیلومتر بیشتر بوده است. کدام یک از دو طرف، به روشنی دروغ می‌گوید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۶.۲.۴. شعاع دایره

۱.۶.۲.۴. اندازهٔ شعاع دایره

۷۶۶. در شش‌ضلعی محدب ABCDEF، $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ ، $CD = ۴$ ، $\hat{ABC} = ۱۲۰°$ و زاویهٔ $\hat{BCD} = ۹۰°$ است. اندازهٔ شعاع دایره‌ای را که بر سه نقطهٔ A، C و D می‌گذرد، تعیین کنید.



۷.۲.۴. محیط

۷۶۷. **شش‌ضلعی و مارپیچ.**
یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۶ سانتیمتر داریم، که آن‌را H نامیده‌ایم و رأسهای آن بترتیب عبارتند از A، B، C، D، E و F. یک مارپیچ ـ به کمک کمانها ـ به این شش‌ضلعی رسم کنید. برای این کار :

۱. سه رأس A، C و E را مرکز دایره قرار دهید، و به شعاع ۳ سانتیمتر سه کمان در داخل دایره رسم کنید، که از یک ضلع شروع و به ضلع مجاور ختم بشود.

۲. سه رأس B، D و F را مرکز دایره قرار دهید و به شعاع ۳ سانتیمتر سه کمان در خارج دایره رسم کنید، به‌طوری که از یک ضلع شروع و به ضلع مجاور ختم شود.

در عمل خواهید دید که یک خط مارپیچ بسته حاصل می‌شود، که قسمتهایی از آن در داخل و بخشهایی نیز در خارج شش‌ضلعی قرار دارند.

مسأله عبارت از این است :

۱. نسبت طول مارپیچ به طول قسمتهایی از آن، که در خارج شش‌ضلعی قرار دارند، چه‌قدر است؟

۲. مساحت کل داخل مارپیچ را بیابید.

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۸.۲.۴. مساحت

۴. ۲. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۷۶۸. یک شش‌ضلعی بر دایره‌ای به قطر ۱۰ محیط است. اگر محیط شش‌ضلعی ۳۸ باشد، مساحت آن چه‌قدر است؟

۷۶۹. یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک شش‌ضلعی منتظم محیطهای برابر دارند. اگر مساحت مثلث ۲ باشد، آن‌گاه مساحت شش‌ضلعی برابر است با :

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ هـ) ۱۲

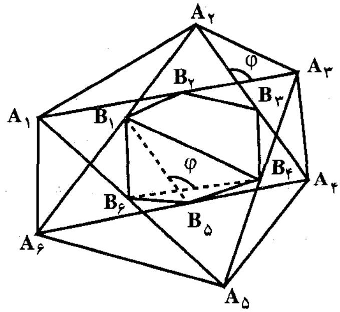
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۰

۷۷۰. بین شش‌ضلعیهای با شش ضلع دو به دو متقاطع، متوازی و مساوی، آن که محاطی است، بیشترین سطح را دارد (قضیهٔ نیوتن).

۴. ۲. ۸. ۲. رابطهٔ بین مساحتها

۷۷۱. در شش‌ضلعی محدب $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$، وسط قطرهای A_6A_2، A_1A_3، A_2A_4، A_3A_5، A_4A_6 و A_5A_1 را، بترتیب، B_1، B_2، B_3، B_4، B_5 و B_6 می‌نامیم. ثابت کنید، اگر شش‌ضلعی $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ محدب باشد، مساحت آن، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت شش‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ است.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۷۵



۷۷۲. ثابت کنید، اگر ضلعهای شش‌ضلعی محاطی ABCDEF در برابریهای :

$$AB = BC \ , \ CD = DE \ , \ EF = FA$$

صدق کنند، آن وقت، مساحت مثلث ACE از مساحت مثلث BDF تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۴

۴ .۲ .۹. رابطه‌های متری

۷۷۳. برای شش‌ضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$، نقطهٔ O وجود دارد، به نحوی که همهٔ ضلعهای شش‌ضلعی، از آن جا با زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شوند. ثابت کنید اگر داشته باشیم:

$$|OA_۱|>|OA_۳|>|OA_۵| \ , \ |OA_۲|>|OA_۴|>|OA_۶|$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$|A_۱A_۲|+|A_۳A_۴|+|A_۵A_۶| \ < \ |A_۲A_۳|+|A_۴A_۵|+|A_۶A_۱|$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۷۷۴. فرض کنیم ABCDEF یک شش‌ضلعی محدب (کوژ) باشد به‌طوری که $B\hat{C}D = E\hat{F}A = ۶۰^\circ$، $DE = EF = FA$ و $AB = BC = CD$. فرض کنیم G و H دو نقطه در درون این شش‌ضلعی باشند به‌طوری که $A\hat{G}B = D\hat{H}E = ۱۲۰^\circ$. نشان دهید:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

سی و ششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی کانادا، ۱۹۹۵

۷۷۵. فرض کنیم ABCDEF یک شش‌ضلعی محدب باشد به‌طوری که AB موازی ED، BC موازی FE و CD موازی AF باشد. فرض کنیم R_A، R_C و R_D شعاع دایره‌های محیطی مثلثهای FAB، BCD و DEF بوده و P محیط شش‌ضلعی باشد. ثابت کنید:

$$R_A + R_C + R_D \geq \frac{۱}{۲}P$$

سی و هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی هند، ۱۹۹۶

۷۷۶. در شش‌ضلعی محدب ABCDEF : $EF = FA$، $CD = DE$ و $AB = BC$. ثابت کنید:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{۳}{۲}$$

۷۷۷. نقطه‌ای را که در درون یک شش‌ضلعی منتظم قرار دارد، به وسیلهٔ پاره‌خطهای راست، به رأسها وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، با این پاره‌خطهای راست، می‌توان یک شش‌ضلعی ساخت که، مساحت آن، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت شش‌ضلعی نخستین، کمتر نباشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۴ .۲ .۱۰. شکلهای ایجاد شده

۷۷۸. هرگاه سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای روبه رو از یک شش‌ضلعی بر یک خط راست واقع باشند، و هرگاه دایره‌ای بر پنج رأس آن بگذرد، ثابت کنید که این دایره بر رأس دیگر آن نیز می‌گذرد.

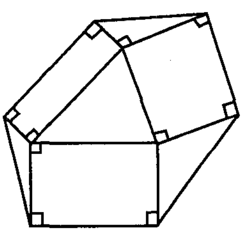
۷۷۹. در شش ضلعی ABCDEF، زاویه‌های رأسهای A، C و E با هم برابرند و هیچ کدام، از ۱۸۰ درجه تجاوز نمی‌کنند. در ضمن، می‌دانیم:

$$A\hat{B}F = C\hat{B}D\ ,\quad A\hat{F}B = E\hat{F}D$$

ثابت کنید، اگر A' قرینهٔ A نسبت به قطر BF باشد و بر خط راست CE قرار نگیرد، آن‌وقت، چهارضلعی $A'CDE$، متوازی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۸۳

۷۸۰. یک شش‌ضلعی کوژ چنان است که، روی سه ضلع «زوج» آن می‌توان مستطیلهایی در درون شش‌ضلعی طوری ساخت که، رأسهای آنها، به‌صورتی که در شکل نشان داده شده است، باشند. ثابت کنید، روی سه ضلع دیگر شش‌ضلعی هم می‌توان چنین مستطیلهایی ساخت.



المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۴ .۲ .۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۸۱. شش‌ضلعی کوژ ABCDEF داده شده است. M_1 وسط AB، M_2 وسط CD، M_3 وسط M_1M_2، M_4 وسط EF، M_5 وسط AF، M_6 وسط DE، M_7 وسط M_5M_6 و M_8 وسط BC است. ثابت کنید، پاره‌خطهای راست M_3M_4 و M_7M_8، به‌ناچار یکدیگر را قطع می‌کنند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۷۸۲. آیا روی صفحه، می‌توان یک شش‌ضلعی (که ممکن است کوژ هم نباشد) پیدا کرد، به‌نحوی که، همهٔ قطرهای آن به جز یکی، با هم برابر باشند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

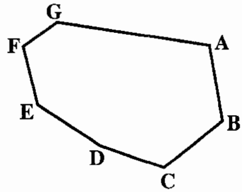
۳.۴. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی، هشت‌ضلعی، ...

۱.۳.۴. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی

۱.۱.۳.۴. زاویه

۱.۱.۱.۳.۴. اندازهٔ زاویه

۷۸۳. هفت‌ضلعی کوژ ABCDEFG داده شده است. اگر $AD \parallel BC$ و $AB = BC = CD = a$ و $AD = ۲a$ باشد، اندازهٔ زاویه‌های B و C از این هفت‌ضلعی را بیابید.



۷۸۴. مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت واحد، در درون هفت‌ضلعی کوژ با مساحت برابر ۱/۰۰۰۰۰۰۱ قرار دارد. ثابت کنید، دست کم یکی از زاویه‌های هفت‌ضلعی از ۱۳۹ درجه بیشتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۲.۱.۳.۴. مساحت

۷۸۵. می‌دانیم $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶A_۷$ ، $B_۱B_۲B_۳B_۴B_۵B_۶B_۷$ و $C_۱C_۲C_۳C_۴C_۵C_۶C_۷$ هفت‌ضلعیهایی با مساحتهای بترتیب S_A ، S_B و S_C می‌باشند و نیز $A_۱A_۲ = B_۱B_۳ = C_۱C_۴$. ثابت کنید : $\frac{۱}{۲} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < ۲ - \sqrt{۲}$.

المپیادهای ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵

۳.۱.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

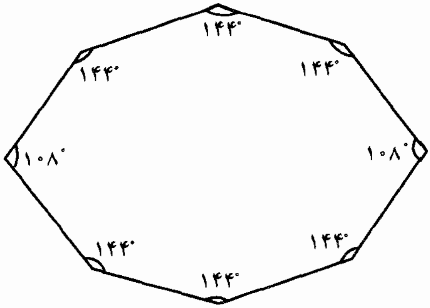
۷۸۶. قلعه‌ای به شکل هفت‌ضلعی است و در هر رأس آن، یک برج نگهبانی وجود دارد. هر نگهبانی که در برج انتهای یکی از هفت دیوار قلعه است، از دیوار مراقبت می‌کند. در برجها، دست کم چند نگهبان باید باشد تا هر دیوار حداقل زیر مراقبت هفت نگهبان قرار گیرد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۲.۳.۴. رابطه‌های متری در هشت‌ضلعی

۱.۲.۳.۴. مساحت

۷۸۷. مزرعهٔ هشت‌ضلعی



باز هم معمای مزرعه، و تقسیم آن، مطرح است. یک کشاورز مزرعه‌ای به شکل هشت‌ضلعی دارد، که طول ضلعهایش مساوی یکدیگرند، اما زاویه‌های آن مساوی نیستند، بلکه دو نوع زاویه در آن می‌توان تشخیص داد : ۱۴۴ و ۱۰۸ درجه‌ای. او ۶ پسر دارد، که بعد از مرگش می‌خواهند، آن‌را طوری به ۶ قسمت تقسیم کنند، که علاوه بر مساوی بودن مساحتشان، مزرعه‌ها قابل انطباق بر یکدیگر نیز باشند. شما نیز ذوق خود را بیازمایید و شکلی را که در اینجا ملاحظه می‌کنید، فقط به کمک یک خط‌کش، و با خطهای نقطه‌چین، طوری به ۶ بخش مساوی تقسیم کنید، که قطعه‌های حاصل قابل انطباق بر یکدیگر نیز باشند.

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۳.۳.۴. رابطه‌های متری در نه‌ضلعی

۱.۳.۳.۴. نسبت پاره‌خطها

۷۸۸. یک نه‌ضلعی، که طول همهٔ ضلعهای آن، عددهای درستند، بر دایره‌ای محیط کرده‌ایم. اگر طولهای دو ضلع اوّل و سوم، برابر واحد باشد، پاره‌خط راست ضلع دوم در نقطهٔ تماس خود با دایره، به چه پاره خطهای راستی تقسیم می‌شود؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۴.۳.۴. رابطه‌های متری در بیست‌ضلعی

۱.۴.۳.۴. تعداد قسمتهای بیست‌ضلعی

۷۸۹. در یک بیست‌ضلعی محدب تمام قطرها را رسم کرده‌ایم. اگر هیچ سه قطری از یک نقطه نگذرد، بیست‌ضلعی به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

۵.۳.۴. رابطه‌های متری در ۱۹۷۳ ضلعی

۱.۵.۳.۴. ثابت کنید ۱۹۷۳ ضلعی منتظم است

۷۹۰. یک ۱۹۷۳ ضلعی کوژ، نقطهٔ O در درون این چندضلعی و زاویهٔ α داده شده است. می‌دانیم به هر صورتی که زاویهٔ α را به رأس O بسازیم، مساحت بخش مشترک چندضلعی و زاویه، ثابت می‌ماند. ثابت کنید، این چندضلعی منتظم است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۶.۳.۴. رابطه‌های متری در ۱۹۹۰ ضلعی

۷۹۱. ثابت کنید یک ۱۹۹۰ ضلعی محدب با خواص زیر وجود دارد.

الف) تمام زاویه‌های آن باهم مساوی باشند.

ب) طول ضلعهای آن بدون در نظرگرفتن ترتیب، اعداد $۱^۲$، $۲^۲$، ... و $۱۹۹۰^۲$ باشند.

سی‌و یکمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، پکن، ۱۹۹۰

۴.۴. رابطه‌های متری در n ضلعی و ۲n ضلعی

۱.۴.۴. تعریف و قضیه

در این بخش رابطه‌های متری مربوط به n ضلعیهای غیرمنتظم را (در حالت کلی) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۴.۴. زاویه

۱.۲.۴.۴. اندازهٔ زاویه

۷۹۲. ۴ زاویهٔ متوالی از یک n ضلعی محدب، تصاعدی عددی با قدر نسبت ۱۰ تشکیل می‌دهند. اگر مجموع این چهار زاویه برابر ۴۲۰° باشد، اندازهٔ این زاویه‌ها را بیابید.

۲.۲.۴.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۹۳. ثابت کنید، برای هر چهار زاویه از یک چندضلعی کوژ، مجموع دو زاویه، از تفاضل دو زاویهٔ دیگر، بزرگتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۷۹۴. فرض کنید، S، مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی P است که در آن هر زاویهٔ داخلی، ۷/۵ برابر زاویهٔ خارجی با همان رأس است. در این صورت:

الف) $S = 2660^\circ$ و P ممکن است منتظم باشد.

ب) $S = 2660^\circ$ و P منتظم نیست.

ج) $S = 2700^\circ$ و P منتظم است.

د) $S = 2700^\circ$ و P منتظم نیست.

هـ) $S = 2700^\circ$ و P ممکن است منتظم و یا نامنتظم باشد.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۳.۴.۴. ضلع

۷۹۵. یک نقطهٔ P درون یک ۲n ضلعی محدب قرار دارد. از هر رأس به نقطهٔ P وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا یکی از ضلعها را قطع کند. ثابت کنید یک ضلع وجود دارد که هیچ‌یک از این خطها، آن‌را قطع نمی‌کند (قطع کردن امتداد ضلعها، مورد نظر نیست).

مرحلهٔ اوّل دوازدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۷۹۶. nضلعی کوژی داده شده است ($n \geq 5$). ثابت کنید، می‌توان سه ضلع nضلعی را طوری انتخاب کرد که، با ادامهٔ آنها، مثلثی به‌دست آید که تمامی nضلعی را در بربگیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۴.۴.۴. قطر

۷۹۷. ثابت کنید در چندضلعی کوژ، که تعداد ضلعهای آن عددی زوج است، قطری وجود دارد که، هیچ یک از ضلعهای آن موازی نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۷۹۸. همهٔ زاویه‌های یک n ضلعی کوژ، منفرجه‌اند. ثابت کنید، در این n ضلعی، مجموع طولهای قطرها، از مجموع طولهای ضلعها بیشتر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۴.۴.۵. پاره‌خط

۴.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۹۹. به کمک خم کردن سیم، یک چندضلعی مسطح کوژ ساخته‌ایم. ثابت کنید، با این سیم، نمی‌توان چندضلعی دیگری (که همنهشت با اوّلی نباشد) درست کرد، به‌نحوی که فاصلهٔ بین هردو نقطهٔ سیم، بزرگتر نشده باشد.

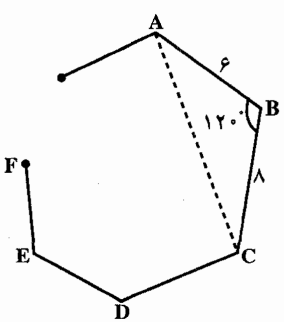
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۰

۴.۴.۵.۲. تساوی پاره‌خطها

۸۰۰. نقطه‌های همگو (homologues) در دو شکل معکوساً مساوی از خط میانی به یک فاصله‌اند.

۴.۴.۶. شعاع دایره

۴.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع دایره



۸۰۱. در n ضلعی کوژ ...ABCDEF داریم : $AB = ۶$ ، $BC = ۸$ و $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بیابید.

۴.۴.۷. محیط

۴.۴.۷.۱ . اندازهٔ محیط

۸۰۲. مساحت n ضلعی کوژ محیط بر دایره‌ای به شعاع ۴ cm برابر $۱۴۴cm^۲$ است. اندازهٔ محیط این n ضلعی را بیابید.

۸.۴.۴. مساحت

۱.۸.۴.۴ . اندازهٔ مساحت

۸۰۳. بین کثیرالاضلاعهای با ضلعهای متساوی، آن که محاطی است (بنابراین منتظم است) حداکثر سطح را دارد.

۲.۸.۴.۴ . رابطهٔ بین مساحتها

۸۰۴. یک n ضلعی کوژ، در مربع ۱ × ۱ قرار دارد. ثابت کنید، سه رأس متوالی از این n ضلعی وجود دارد که مساحت مثلثی که تشکیل می‌دهند، از $\frac{۸}{n^۲}$ بیشتر نیست.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۵

۸۰۵. روی سطح یک چندضلعی به مساحت $\frac{n(n-۱)^۲}{۲}$ را n چندضلعی به مساحت مساوی $(n-۱)^۲$ پوشانده‌اند. ثابت کنید دوتا از این چندضلعیها حداقل یک واحد سطح مشترک دارند.

۸۰۶. T_n را بیشترین مساحتی می‌گیریم که یک n ضلعی محاط در یک k ضلعی کوژ می‌تواند داشته باشد $(۳<n<k)$. ثابت کنید برای هر $n<k$ داریم:

$$T_{n-۱}+T_{n+۱}\le ۲T_n$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۹.۴.۴. رابطه‌های متری

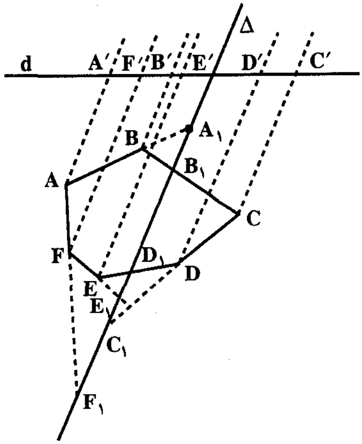
۱.۹.۴.۴ . رابطه‌های متری (برابریها)

۸۰۷. هرگاه خطی تمام ضلعهای یک چندضلعی محدب را قطع کند، حاصلضرب قطعه‌هایی را که رأس مشترک ندارند، برابر است با حاصلضرب قطعه‌های دیگر. (کارنو)

کارنو

لازارنیکلامارگارت‌کارنو L. N. M. Carnot (۱۸۲۳ ـ ۱۷۵۳) ریاضیدان فرانسوی مسألهٔ بالا را طرح و حل نموده است. وی از شاگردان مونژ دانشمند مشهور فرانسوی است. کارنو در مبحث موربّات قضیه‌های زیادی دارد و بخصوص Ge´ometrie de position را بنیان گذاشته است.

اولین تعمیم قضیهٔ منولائوس



۸۰۸. یک چندضلعی مسطح با تعداد دلخواهی ضلع داده شده است. مثلاً یک شش‌ضلعی ABCDEF و مورب Δ که ضلعهای متوالی AB، BC ، CD، EFو FA از این شش‌ضلعی را بترتیب در نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 ، D_1 ، E_1 و F_1 قطع کرده است. ثابت کنید رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}}\cdot\frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}}\cdot\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}}\cdot\frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}}=1 \qquad (1)$$

۸۰۹. نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... ، A_n را متناظر با ضریبهای a_1 ، a_2... ، a_n $(a_1+a_2+...+a_n\neq 0)$ درنظر می‌گیریم. اگر G باری‌سانتر این نقطه‌ها و M نقطهٔ غیرمشخصی باشد، ثابت کنید:

$$\sum a_i\overline{MA_i^2}=\overline{GM^2}\sum a_i+\sum a_i\overline{GA_i^2}$$

۸۱۰. ثابت کنید که اگر عمودهای مرسوم بر ضلعهای $2n$ ضلعیِ محاطی، نقطه‌ای دلخواه از دایره را تشکیل دهند، آن وقت حاصلضربهای یکی در میان طول عمودها باهم برابرند.

۸۱۱. $2n$ ضلعی محاطی $A_1A_2....A_{2n}$ و نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ محیطی آن داده شده است. چنانچه H_1 ، H_2 ، ... ، H_{2n} تصویرهای نقطهٔ M بر ضلعهای چندضلعی مذکور باشد، رابطهٔ زیر مسلم است:

$$MH_1.MH_3.\,....\,MH_{2n-1}=MH_2.MH_4.\,....\,MH_{2n}$$

۸۱۲. فرض کنید $A_1\ A_2\ ...\ A_n$ چندضلعیی با محیط $2P$ ، محیط بر دایره‌ای به شعاع r باشد. B_1 ، B_2 ، ... و B_n نقطه‌های تماس دایره، بترتیب، با ضلعهای A_1A_2 ، A_2A_3 ، ... و A_nA_1 هستند و M نقطه‌ای به فاصلهٔ d از مرکز دایره است. ثابت کنید که

$$MB_1^2.A_1A_2+MB_2^2.A_2A_3+...+MB_n^2.A_nA_1=2P(r^2+d^2)$$

۲.۹.۴.۴.رابطه‌های متری (نابرابریها)

۸۱۳. n ضلعی کوژ، روی صفحه داده شده است. a_k را طول ضلع kام و d_k را طول تصویر چندضلعی بر خط راستی می‌گیریم که از ضلع k ام گذشته است (برای k از ۱ تا n). ثابت کنید :

$$۲<\frac{a_۱}{d_۱}+\frac{a_۲}{d_۲}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}\le ۴$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۸۱۴. فرض می‌کنیم d مجموع طولهای تمام قطرهای چندضلعی محدب مسطحی با n رأس $(n>۳)$، و P محیط آن باشد. ثابت کنید که :

$$n-۳<\frac{۲d}{P}<\left[\frac{n}{۲}\right]\left[\frac{n+۱}{۲}\right]-۲$$

که در آن [x] بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از x را نمایش می‌دهد، است.

بیست‌و پنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۴

۸۱۵. بر دایره‌ای به شعاع واحد، یک n ضلعی، محیط کرده‌ایم. حداقل مقدار حاصلضرب ضلعهای n ضلعی را به دست آورید.

۱۰.۴.۴. شکلهای ایجادشده

۸۱۶. رأسهای یک چندضلعی کوژ را، که تعداد ضلعهای آن عددی فرد است، به سه رنگ مختلف طوری درآورده‌ایم که، هر دو رأس مجاور، رنگهای متفاوتی داشته باشند. ثابت کنید، چندضلعی را می‌توان به وسیلهٔ قطرهای غیرمتقاطع خود، طوری به صورت مثلثها برید که، در هر مثلث، رأسها به سه رنگ مختلف باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۸۱۷. اگر از هریک از رأسهای کثیرالاضلاع محاطی P' عمودی بر ضلع آن فرود آوریم، در مرکز آن کثیرالاضلاع منتظمی مساوی با P'' ساخته می‌شود.

۱۱.۴.۴.تعیین n

۸۱۸. بین n زوج ضلعهای روبه‌رو در ۲nضلعی محاطی $(n>۱)$ ، $n-۱$ زوج را باهم موازی گرفته‌ایم. مطلوب است همهٔ مقدارهای n، که به ازای آنها زوج ضلعهای باقیمانده به ناچار باهم موازی باشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، فنلاند، ۱۹۸۰

۸۱۹. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 5$ ، یک n ضلعی کوژ، وجود دارد، به نحوی که طول ضلعهای آن متفاوت باشد و در ضمن، مجموع فاصله‌ها هر نقطهٔ درونی nضلعی تا ضلعهای آن (و یا امتداد ضلعها) به جای این نقطه بستگی نداشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۸۲۰. آیا چندضلعی کوژی وجود دارد که درست ۱۹۷۴ قطر داشته باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۱۲.۴.۴.سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۲۱. یک چندضلعی را به یاری قطرهای آن به مثلثهایی تقسیم و سپس، مثلثها را به رنگهای سیاه و سفید طوری درآورده‌ایم که هر دو مثلثی که ضلع مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف باشند. ثابت کنید، تعداد مثلثهای سیاه، از سه برابر تعداد مثلثهای سفید تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۸۲۲. ثابت کنید، یک چندضلعی کوژ (به جز متوازی‌الاضلاع) را، می‌توان در مثلثی که از ادامهٔ سه ضلع دلخواه چندضلعی به دست می‌آید، جا داد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۱

۸۲۳. یک n ضلعی با ضلعهای به طولهای a_1 ، a_2 ،...، a_n در دایره‌ای محاط شده است؛ در ضمن، مرکز دایره در درون چندضلعی واقع است. ثابت کنید، این دایره را می‌توان به‌وسیلهٔ n دایره با شعاعهای $\frac{na_1}{6}$ ، $\frac{na_2}{6}$ ، ...، $\frac{na_n}{6}$ پوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۸۲۴. ثابت کنید، برای هر چندضلعی محدب، می‌توان سه رأس مجاور پیدا کرد، به نحوی که اگر دایره‌ای از آنها بگذرانیم، سطح دایره، تمامی چندضلعی را بپوشاند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۷۸

۸۲۵. در رأسها و محل برخورد قطرهای یک چندضلعی، ایستگاههای تراموا قرار دارد. در ضمن می‌دانیم، هیچ سه قطری از چند ضلعی، در یک نقطه به هم نمی‌رسند. روی برخی از قطرهای چندضلعی، خط حرکت تراموا وجود دارد، به نحوی که از کنار هر ایستگاه، دست‌کم یک خط می‌گذرد. ثابت کنید، از هر ایستگاه به هر ایستگاه دیگر می‌توان با حداکثر دوبار عوض کردن تراموا رسید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۸۲۶. همهٔ عددهای طبیعی k را پیدا کنید که دارای این ویژگی باشند: یک k ضلعی وجود نداشته باشد که خط راستی که از ادامهٔ هر ضلع آن به دست می‌آید، روی ضلع دیگر این k ضلعیها قرار گیرد. تنها چندضلعیهایی را درنظر بگیرید که ضلعهای مجاور موازی نداشته باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۸۲۷. قطر یک مجموعه، به بزرگترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ آن گفته می‌شود (اگر چنین فاصله‌ای وجود داشته باشد). می‌دانیم، مجموع قطرهای چندضلعیهای $M_۱$ ، $M_۲$ ، ...، M_n از قطر اجتماع آنها کمتر است. ثابت کنید، خط راستی وجود دارد که هیچ کدام از چندضلعیها را قطع نمی‌کند و، در هر سمت آن، دست‌کم یکی از چندضلعیها قرار دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۸۲۸. در یک nضلعی کوژ (محدب)، همهٔ ضلعها و قطرها را امتداد داده‌ایم تا به صورت خطهای راست درآیند. در ضمن، از این خطهای راست، هیچ دو خط راستی موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی‌گذرند. این خطهای راست، در درون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ بیرون n ضلعی، در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۸۲۹. فرض می‌کنیم G یک شکل متصل باشد که دارای K پاره‌خط راست است. ثابت کنید می‌توان پاره‌خطهای G را با عددهای ۱، ۲، ۳، ...، k طوری نامگذاری کرد به‌طوری که در هر رأس که از آن دو یا بیشتر پاره‌خط می‌گذرد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک تمام عددهای وابسته به این پاره‌خطها برابر ۱ باشد. (یک شکل G از مجموعه‌ای از نقاط به نام رأسها و مجموعه‌ای از پاره‌خطها که برخی از رأسهای متمایز را به هم وصل می‌کند تشکیل شده است، و از هر دو رأس u و v حداکثر یک پاره‌خط می‌گذرد.) G یک شکل متصل است اگر برای هر دو رأس متمایز $\{x,y\}$ دنباله‌ای از رأسها مانند

$$x = V_۰, V_۱, \ldots, V_m = y$$

وجود داشته باشد به‌طوری که از هر دورأس V_i و $V_{i+۱}$ ، $(۰ \le i < m)$ یک پاره‌خط واقع در G بگذرد.

۸۳۰. روی یک صفحه، یک m ضلعی و یک nضلعی کوژ داده شده است $(m > n)$. این دو چندضلعی صفحه را حداکثر به چند بخش تقسیم می‌کنند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۸۳۱. روی سطح یک چندضلعی به مساحت $\frac{n(n-1)^2}{2}$ را n چندضلعی به مساحت مساوی $(n-1)^2$ پوشانده‌اند. ثابت کنید دوتا از این چند ضلعیها حداقل یک واحد سطح مشترک دارند.

۸۳۲. ثابت کنید، در هر چندضلعی، ضلع BC و رأس A(غیر از دو رأس B و C) پیدا می‌شود که، اگر از نقطهٔ A بر خط راست BC عمود کنیم، پای عمود روی ضلع BC قرار گیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۸۳۳. در جنگلی به وسعت یک کیلومتر مربع و به شکل چند ضلعی کوژ، مردی راه را گم کرده است. ثابت کنید، این مرد، با پیمودن ۲۵۰۷ متر، می‌تواند از جنگل خارج شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

۸۳۴. نقطهٔ O، در درون چندضلعی کوژ P واقع است و می‌دانیم، هر خط راستی که از O بگذرد، چندضلعی P را به دو بخش هم‌ارز (با مساحتهای برابر) تقسیم می کند. ثابت کنید، نقطهٔ O، مرکز تقارن چندضلعی P است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

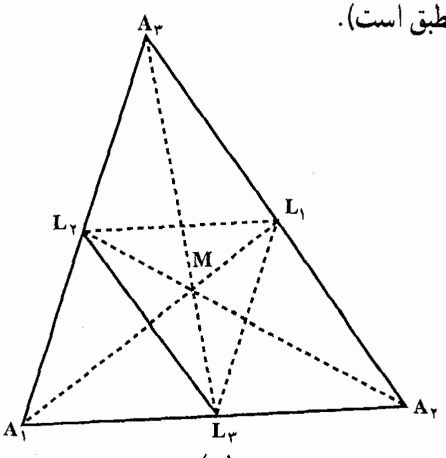
۱۳.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۸۳۵. الف. دو مماس، بر دایره‌ای مفروض رسم شده‌اند. فرض کنید A و B معرف نقطه‌های تماس و C نقطهٔ برخورد مماسها باشد. خط راست دلخواه l را که بر دایرهٔ مفروض مماس است و از نقطه‌های A و B نمی گذرد، رسم می کنیم. فرض کنید u و v، بترتیب، فاصلهٔ A و B تا l باشند و wفاصلهٔ C تا l باشد. اگر $A\hat{C}B=\alpha$ ، $\frac{uv}{w^2}$ را پیدا کنید.

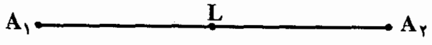
ب. یک چندضلعی بر دایره‌ای محیط شده است. فرض کنید l خط دلخواهی مماس بر دایره باشد و بر هیچ ضلع چندضلعی منطبق نباشد. ثابت کنید که نسبت حاصلضرب فاصله‌های رأسهای چندضلعی تا خط l، به حاصلضرب فاصله‌های نقطه‌های تماس ضلعهای چندضلعی با دایره تا l ، مستقل از جای خط l است.

ج. فرض کنید $A_1A_2\ldots A_{2n}$ ، ۲n ضلعیی محیط بر یک دایره، و l مماس دلخواهی بر دایره باشد. ثابت کنید که حاصلضرب فاصله‌های رأسهای فرد تا خط l ، و حاصلضرب فاصله‌های رأسهای زوج تا خط l، دارای نسبتی ثابت، مستقل از lهستند (فرض می‌شود خط l شامل هیچ رأس از چندضلعی نیست).

۸۳۶. الف. مرکز هندسی یک چندضلعی. منظور از مرکز هندسی یک پاره‌خط، نقطهٔ وسط آن است (شکل الف). مرکزهای هندسی ضلعهای هر مثلث، مثلث جدیدی می‌سازند که مجانس مثلث اولیه است با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ و مرکز تجانس نقطهٔ برخورد میانه‌ها، که نقطهٔ اخیر مرکز هندسی مثلث نیز خوانده می‌شود (شکل ب). ثابت کنید که مرکزهای هندسی چهار مثلثی که رأسهای آنها بر رأسهای چهارضلعی دلخواه مفروضی منطبقند، چهارضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس چهارضلعی اولیه است با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۳}$ ؛ در این حال نقطهٔ N، مرکز تجانس (شکل پ)، مرکز هندسی چهارضلعی خوانده می‌شود. به‌همین ترتیب ؛ مرکزهای هندسی پنج چهارضلعی که رأسهای آنها بر رأسهای یک پنج‌ضلعی دلخواه مفروض منطبقند، پنج‌ضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس پنج‌ضلعی مفروض است با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۴}$ و مرکز تجانس، نقطه‌ای موسوم به مرکز هندسی پنج‌ضلعی ؛ مرکزهای هندسی شش پنج ضلعی که رأسهای آنها بر رأسهای یک شش‌ضلعی دلخواه مفروض منطبقند، شش‌ضلعی جدیدی می‌سازند که مجانس شش‌ضلعی مفروض است با نسبت تجانس $-\frac{۱}{۵}$ و مرکز تجانس، نقطه‌ای که مرکز هندسی شش‌ضلعی خوانده می‌شود ؛ و به همین قیاس (به آسانی می‌توان ثابت کرد که مرکز هندسی که بدین گونه برای هر nضلعی تعریف شد، بر مرکز هندسی مادی یا گرانیگاه (مرکز ثقل) n جرم متساوی واقع در رأسهای آن منطبق است).

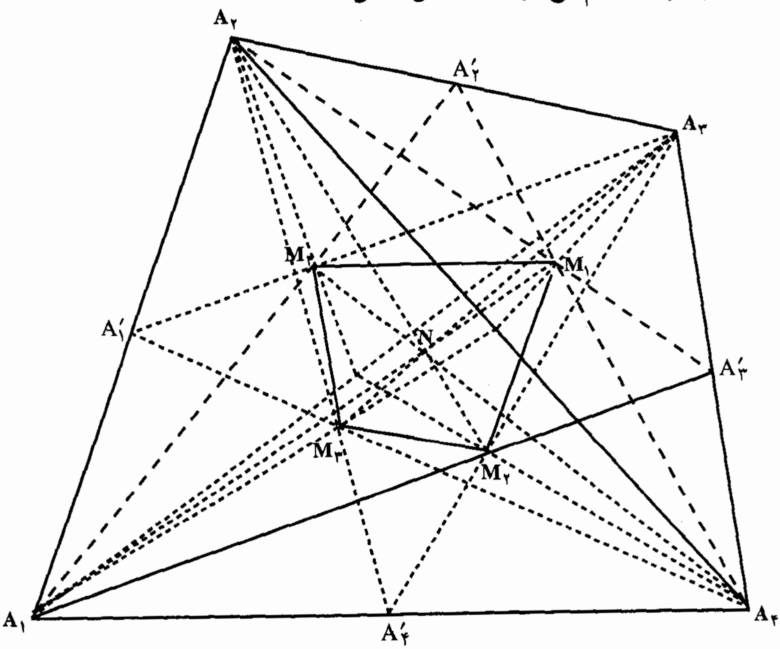


(ب)



(الف)

[به عبارت دیگر، سه خط واصل رأسهای هر مثلث به مرکزهای هندسی ضلعهای روبه‌رو در یک نقطه (مرکزهندسی مثلث) به هم می‌رسند و توسط این نقطه به نسبت ۱ :۲ (ابتدا از رأس) تقسیم می‌شوند ؛ چهار خط واصل از رأسهای هر چهارضلعی به مرکز هندسی مثلث حاصل از سه رأس دیگر در یک نقطه (مرکز هندسی چهارضلعی)، به هم می‌رسند و توسط این نقطه به نسبت ۱ :۳ (ابتدا از رأسها) تقسیم می‌شوند، به همین قیاس].

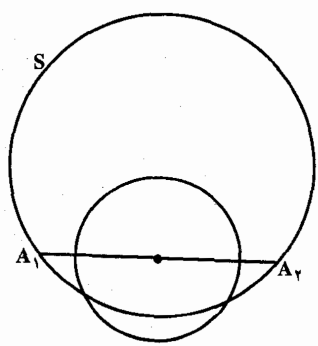


(پ)

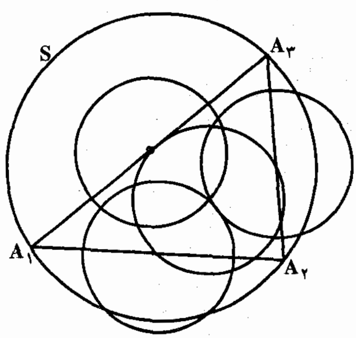
ب. دایرهٔ اویلر چندضلعی محاط در دایره. منظور ما از دایرهٔ اویلر یک وتر از دایرهٔ Sبه شعاع Rدایره‌ای است به شعاع $\frac{R}{2}$ به مرکز وسط این وتر (شکل ت). مرکزهای سه دایرهٔ اویلر سه ضلع هر مثلث (محاط در دایره‌ای به شعاع R) بر دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$ (و به مرکز نقطهٔ برخورد این سه دایره)، موسوم به دایرهٔ اویلر مثلث مفروض، واقعند (شکل هـ را با شکل الف مقایسه کنید). ثابت کنید که مرکزهای چهاردایرهٔ اویلر چهار مثلثی که رأسهای آنها رأسهای یک چهارضلعی دلخواه محاط در دایرهٔ

S به شعاع R است، بر دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ (و به مرکز نقطهٔ برخورد این چهار دایره) واقعند ؛ این دایره، دایرهٔ اویلر چهارضلعی مفروض خوانده می‌شود (شکل ج). به همین ترتیب، مرکزهای دایره‌های اویلر پنج چهارضلعی که رأسهایشان رأسهای یک پنج ضلعی دلخواه محاط در دایرهٔ S به شعاع R هستند، بر دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{۲}$ (به مرکز نقطهٔ برخورد این پنج دایره) موسوم به دایرهٔ اویلر پنج ضلعی مفروض، واقعند، و به همین قیاس.

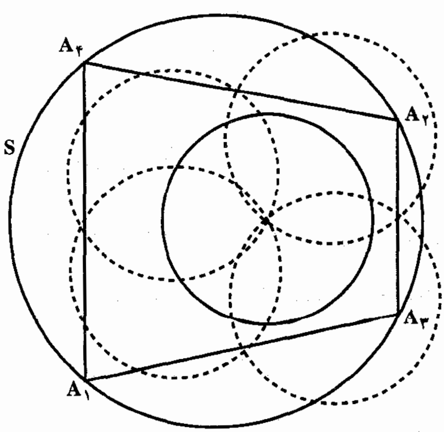
ج. ثابت کنید که مرکز هندسی هر n ضلعی محاط در دایره [← مسألهٔ (الف)] بر پاره‌خطی



(ت)



(ث)



(ج)

واقع است که مرکز دایرهٔ محیطی را به مرکز دایرهٔ اویلر وصل می‌کند [→ مسألهٔ (ب)] و این پاره‌خط را به نسبت $(n-2):2$ تقسیم می‌کند.

استفاده از تجانس برای حل مسأله‌های ترسیمی در بخش کرانداری از صفحه مناسب است. در حل مسأله‌های ترسیمی معمولاً صفحه بی‌کران فرض می‌شود؛ و در نتیجه مثلاً فرض می‌شود که هر خط را می‌توان از هردوسو تا بینهایت امتداد داد. امّا در عمل همیشه ترسیمها در ناحیهٔ دقیقاً کرانداری از صفحه ـ بر صفحهٔ کاغذ یا تخته سیاه ـ انجام می‌شود. بنابراین درحین ترسیم مثلاً ممکن است نقطهٔ برخورد دو خط که در ترسیم وارد می‌شوند خارج از محدودهٔ شکل واقع شود یعنی قابل دسترس نباشد. این موارد موجب مطرح شدن مسأله‌هایی می‌شود که در آنها بخصوص ذکر می‌شود که ترسیم باید تماماً درون بخش کرانداری از صفحه صورت گیرد. باید توجه کرد که در هندسه اصراری نیست که در هر مسألهٔ ترسیمی شکل واقعاً کامل شود: همین که راه درست به سوی حل آن معلوم شود، یعنی اگر به گفتهٔ ی.اشتاینر هندسه‌دان سویسی (۱۷۹۶ ـ ۱۸۶۳) ترسیم «به کمک کلمات» انجام گیرد، مسأله حل شده قلمداد می‌شود. بنابراین، کراندار بودن شکل محدودیت واقعی برای حل مسأله‌های ترسیمی به‌شمار نمی‌آید و در نتیجه ترسیمهای مقید به بخش کرانداری از صفحه را باید در ردیف آن نوع مسأله‌هایی دانست که در صورت آنها شرط خاصی وجود دارد که امکانات ترسیم را محدود می‌کند(مثل ترسیمهایی که در آنها استفاده از خط‌کش مجاز نیست یا پرگار را نباید به کار گرفت.)

می‌توان ثابت کرد هر ترسیمی که در صفحهٔ بی‌کران قابل انجام باشد، در هر بخشی از صفحه، هرقدر هم که کوچک باشد، نیز قابل انجام است.

بخش ۵

• رابطه‌های متری در چند ضلعیهای منتظم

۱.۵. رابطه‌های متری در n ضلعی منتظم و ۲n ضلعی منتظم

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۱.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵. اندازهٔ زاویه

۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم

۲.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع ۲n ضلعی منتظم

۴.۱.۵. سهم

۱.۴.۱.۵. اندازهٔ سهم n ضلعی منتظم

۲.۴.۱.۵. اندازهٔ سهم ۲n ضلعی منتظم

۳.۴.۱.۵. رابطهٔ بین سهم و شعاع

۵.۱.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۲.۵.۱.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۱.۵. شعاع دایره

۱.۶.۱.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۷.۱.۵. محیط

۱.۷.۱.۵. اندازهٔ محیط

۲.۷.۱.۵. نسبت محیطها

۳.۷.۱.۵. رابطهٔ بین محیطها

۸.۱.۵. مساحت

۱.۸.۱.۵. اندازهٔ مساحت

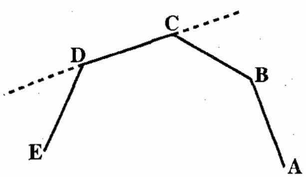
۱.۱.۸.۱.۵. اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم

بخش ۵. رابطه‌های متری در چندضلعیهای منتظم

۱.۵.رابطه‌های متری در nضلعی منتظم و ۲nضلعی منتظم

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

تعریف. خط شکستهٔ منتظم، خط شکسته‌ای است که همهٔ ضلعهایش باهم و همهٔ زاویه‌هایش نیز باهم مساوی باشند و اگر هریک از ضلعهای آن را امتداد دهیم، دو ضلع مجاور آن در یک طرف خط حاصل واقع شوند (شکل). وجود خط شکستهٔ منتظم از قضیهٔ زیر محقق می‌شود :



۸۳۷. قضیه. اگر روی یک دایره کمانهای متساوی و متوالی AB ، $\overset{\frown}{BC}$ ، $\overset{\frown}{CD}$، $\overset{\frown}{DE}$ و ... را جدا کنیم و وترهای AB ، BC ، CD و ... را رسم کنیم خط شکستهٔ ... ABCDE منتظم است.

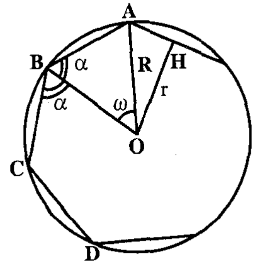
۸۳۸. تعریف. اگر جمیع رأسهای یک خط شکسته روی یک دایره واقع باشند، می گویند خط شکستهٔ مزبور در آن دایره محاط و دایرهٔ مزبور بر این خط شکسته محیط است. چنین دایره‌ای را دایرهٔ محیطی خط شکسته می‌نامند.(شکل)

اگر جمیع ضلعهای یک خط شکسته بر یک دایره مماس باشند، می‌گویند خط شکستهٔ مزبور بر این دایره محیط و دایرهٔ مزبور در این‌خط شکسته محاط است و چنین دایره‌ای را دایرهٔ محاطی خط شکسته می‌نامند. (دایرهٔ به شعاع OIدر شکل)

قضیه. هر خط شکستهٔ منتظم را می‌توان :

۱. در یک دایره محاط و ۲. بر یک دایره محیط کرد، و این دو دایره متحدالمرکزند.

۸۳۹. تعریف. مرکز و شعاع دایرهٔ محیطی خط شکستهٔ منتظم را بترتیب، مرکز و شعاع خط شکستهٔ منتظم و شعاع دایرهٔ محاطی آن را سهم خط شکستهٔ منتظم و هر زاویه را که رأسش مرکز خط شکستهٔ منتظم باشد و دو ضلعش از دو سر یک ضلع خط شکستهٔ منتظم بگذرند، زاویهٔ مرکزی خط شکستهٔ منتظم می‌نامند. به عبارت دیگر زاویهٔ مرکزی خط شکستهٔ منتظم، زاویه‌ای است که هرضلع خط شکستهٔ منتظم از مرکز خط شکسته به آن زاویه دیده می‌شود.



اگر طول ضلع خط شکستهٔ منتظم را a و طول شعاع آن را R و طول سهم آن را r بنامیم. رابطهٔ (۱) $R^۲=(\frac{a}{۲})^۲+r^۲$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAH نتیجه می‌شود.

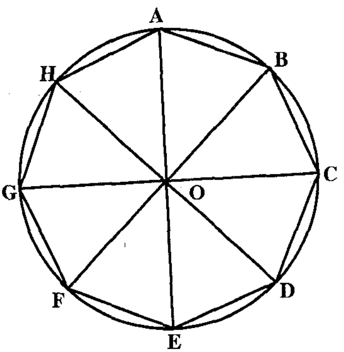
زاویهٔ ABC از خط شکستهٔ منتظم که آن را α می‌نامیم، دو برابر زاویهٔ OBA یعنی مساوی با مجموع زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین OAB است و بنابراین مکمل زاویهٔ مرکزی AOB می‌باشد و اگر این زاویه را ω بنامیم، داریم:

$$\alpha+\omega = ۲\text{قائمه} \qquad (۲)$$

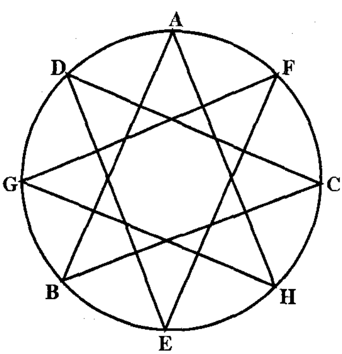
۸۴۰. چندضلعیهای منتظم

تعریف. چندضلعی منتظم عبارت است از یک خط شکستهٔ منتظم مسدود.

وقتی که کمانهای متساوی و متوالی $\overset{\frown}{AB}$ ، $\overset{\frown}{BC}$ ، $\overset{\frown}{CD}$ و ... را روی یک دایره جدا می‌کنیم، ممکن است انتهای یکی از این کمانها بر نقطهٔ A منطبق شود. در این صورت خط شکستهٔ منتظم ...ABCD مسدود می‌شود و یک چندضلعی منتظم به‌دست می‌آید. ممکن است چندضلعی منتظم محدب باشد، در صورتی که چندضلعی منتظم محدب نباشد، آن را ستاره‌ای می‌نامند.



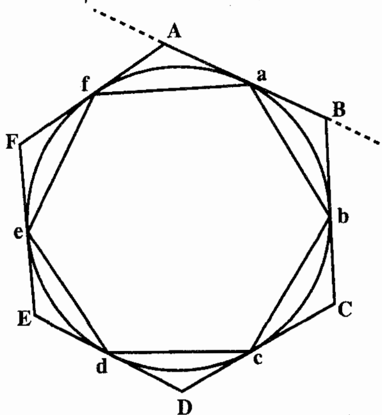
«هشت ضلعی منتظم محدب»



«هشت ضلعی منتظم ستاره‌ای»

وجود چندضلعیهای منتظم از قضیهٔ زیر محقق می‌شود:

قضیه. اگر یک دایره به n کمان متساوی تقسیم شده باشد و نقطه‌های تقسیم را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم یک n ضلعی منتظم محدب به دست می‌آید.

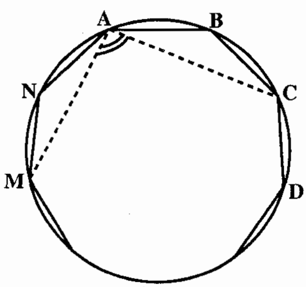


۸۴۱. **قضیه.** اگر یک دایره به n کمان متساوی تقسیم شده باشد و در هر یک از نقطه‌های تقسیم مماسی بر دایره رسم کنیم و این مماسها را امتداد دهیم تا هردو مماس متوالی یکدیگر را قطع کنند، یک n ضلعی منتظم محدب به دست می‌آید.

۸۴۲. **قضیه.** هر n ضلعی منتظم محدب یا ستاره‌ای در یک دایره محاط و بر یک دایره محیط است و این دو دایره متحدالمرکز می‌باشند.

۸۴۳. **بررسی چندضلعیهای منتظم ستاره‌ای.**
اگر دایره‌ای به n کمان متساوی تقسیم شده باشد و نقطه‌های تقسیم را به‌طور متوالی به هم وصل کنیم یک n ضلعی منتظم محدب به دست خواهد آمد. اکنون می‌خواهیم این مسأله را مورد مطالعه قرار دهیم که اگر یک دایره به n کمان متساوی تقسیم شده باشد و نقطه‌های تقسیم را P به P به هم وصل کنیم، به چه شرطی یک n ضلعی منتظم ستاره‌ای حاصل خواهد شد.

۲.۱.۵.زاویه



۱ . ۲.۱.۵ . اندازهٔ زاویه

۸۴۴. در n ضلعی منتظم محاطی ABCD ... MN ، اندازهٔ زاویهٔ CAM چند درجه است؟

۸۴۵. ضلعهای یک n ضلعی منتظم، که $n > 4$ ، از هر طرف امتداد می‌یابند تا یک چندضلعی ستاره‌ای تشکیل شود. اندازهٔ زاویهٔ هر رأس این چندضلعی ستاره‌ای چند درجه است؟

الف) $\frac{360^\circ}{n}$ ب) $\frac{(n-4)180^\circ}{n}$ ج) $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$

د) $180^\circ - \frac{90^\circ}{n}$ هـ) $\frac{180^\circ}{n}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۸۴۶. روی محیط دایرهٔ محاطی یک ۲n ضلعی منتظم، دو نقطهٔ A و Bرا درنظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، اگر قطرهایی از ۲n ضلعی که رأسهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، از نقطهٔ A به زاویه‌های α_1، ...، α_n و از نقطهٔ B، به زاویه‌های β_1، ...، β_n دیده شوند، آن وقت :

$$\tan^2\alpha_1+\ldots+\tan^2\alpha_n=\tan^2\beta_1+\ldots+\tan^2\beta_n$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۱

۸۴۷. دو چندضلعی منتظم P_1 و P_2 را که تعداد ضلعهای آنها یکی نیست، درنظر بگیرید. هریک از زاویه‌های P_1 برابر x درجه و هریک از زاویه‌های P_2 برابر kx درجه است (k عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است). تعداد حالتهای ممکن زوج (x.k) برابر است با :

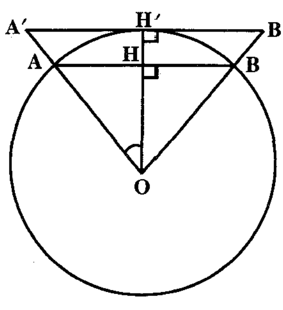
الف) بینهایت ب) متناهی امّا بزرگتر از دو ج) دو د) یک هـ) صفر

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۱

۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع nضلعی منتظم

۸۴۸. اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R و اندازهٔ ضلع nضلعی منتظم محیط بر این دایره را برحسب R تعیین کنید.



۲.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع ۲n ضلعی منتظم

۸۴۹. به فرض آن که ضلع n ضلعی منتظم محدب محاط در دایرهٔ به شعاع R معلوم باشد، اندازهٔ ضلع ۲n ضلعی منتظم محدب محاط در همان دایره را حساب کنید.

۴.۱.۵ .سهم

۴.۱.۵ .۱.اندازهٔ سهم n ضلعی منتظم

۸۵۰. سهم n ضلعی منتظم محاطی و سهم n ضلعی منتظم محیطی، در دایره‌ای به شعاع R را پیدا کنید.

۴.۱.۵ .۲.اندازهٔ سهم ۲n ضلعی منتظم

۸۵۱. اندازهٔ سهم ۲n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع R را برحسب R و C_n و C'_n تعیین کنید.

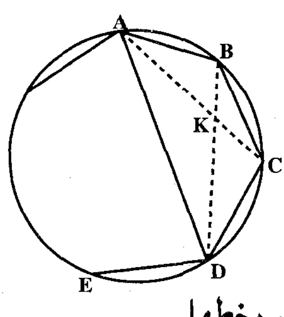
۴.۱.۵ .۳. رابطهٔ بین سهم و شعاع

۸۵۲. سهم یک چندضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محاطی آن را مقایسه کنید. (یعنی کدام بزرگتر است؟) همچنین سهم یک چندضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محیطی آن را مقایسه کنید.

۵.۱.۵ . پاره‌خط

۵.۱.۵ .۱.اندازهٔ پاره‌خط

۸۵۳. n ضلعی منتظم ...ABCDE در دایره‌ای به شعاع ۱۲cm محاط است. دو قطر AC و BD در نقطهٔ K متقاطعند. اندازهٔ پاره‌خطهای AK و KC را تعیین کنید.



۵.۱.۵ .۲.رابطهٔ بین پاره‌خطها

۸۵۴. مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ واقع در داخل چندضلعی منتظم از ضلعهای آن مقداری است ثابت، مساوی n برابر ارتفاع چندضلعی.

۸۵۵. خط راستی از مرکز n ضلعی منتظمی محاط در دایرهٔ واحد رسم شده است. مجموع مربعهای فاصله‌های این خط تا رأسهای nضلعی را پیدا کنید.

۶.۱.۵ . شعاع دایره

۶.۱.۵ . ۱ . اندازهٔ شعاع دایره

۸۵۶. در یک دایره، ۲n ضلعی منتظم محاطی و n ضلعی منتظم محیطی را رسم کرده‌ایم. اگر اختلاف مساحتهای این چند ضلعیها مساوی P باشد، شعاع دایره را حساب کنید.

۷.۱.۵ . محیط

۷.۱.۵ . ۱ . اندازهٔ محیط

۸۵۷. اندازهٔ محیط n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲cm، همچنین اندازهٔ محیط nضلعی منتظم محیط بر این دایره را تعیین کنید.

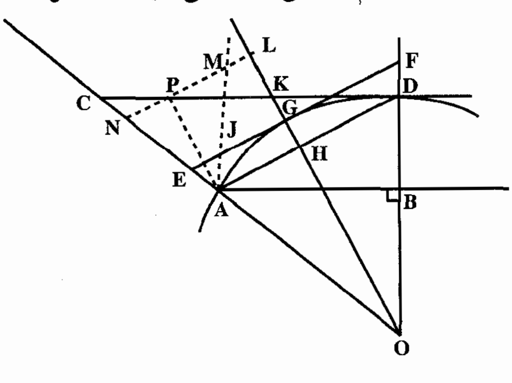
۷.۱.۵ . ۲ . نسبت محیطها

۸۵۸. قضیه. نسبت محیطهای دو n ضلعی منتظم محدب مساوی است با نسبت شعاعهای آنها. (محیط هر چندضلعی عبارت است از مجموع ضلعهای آن)

۷.۱.۵ . ۳ . رابطهٔ بین محیطها

۸۵۹. هرگاه دایره‌ای بر یک چندضلعی منتظم محیط و در چندضلعی منتظمی مشابه با آن محاط باشد، طول محیط این دایره، واسطهٔ هندسی است مابین طول محیط دایرهٔ محیطی چندضلعی خارجی و محیط دایرهٔ محاطی چندضلعی داخلی.

۸۶۰. تفاضل محیطهای دو ۲n ضلعی منتظم محاطی و محیطی در یک دایره از $\frac{1}{4}$ اختلاف محیطهای n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی در همان دایره کمتر است.



۸.۱.۵ . مساحت

۸.۱.۵ .۱ .اندازهٔ مساحت

۸.۱.۵ .۱.۱ .اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم

۸۶۱. اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم به ضلع a و سهم r را تعیین کنید.

۸۶۲. مطلوب است محاسبهٔ :

الف. اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R ؛

ب. اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R.

۸۶۳. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی منتظم، ۶ ضلعی منتظم، و ۷ضلعی منتظم و ۸ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R را تعیین کنید.

۸۶۴. n ضلعی منتظمی با طول ضلع a داده شده است. n دایره را در درون این n ضلعی طوری رسم می‌کنیم که هریک از آنها بر دو دایره و یک ضلع n ضلعی مماس باشد. مساحت «شکل ستاره‌ای» تشکیل شده در درون n ضلعی را بیابید.

۸۶۵. n ضلعی منتظمی با طول ضلع a داده شده است. n دایره را در درون این nضلعی طوری رسم می‌کنیم که هریک از آنها بر دو دایره و دو ضلع مجاور از n ضلعی مماس باشد. مساحت «شکل ستاره‌ای» درون n ضلعی را محاسبه کنید.

۸۶۶. n ضلعی منتظمی را در n ضلعی منتظم مفروضی محاط کرده‌ایم $(n > ۳)$. ثابت کنید، برای این که، مساحت n ضلعی محاطی کمترین مقدار ممکن باشد، باید رأسهای آن را در وسط ضلعهای n ضلعی محیطی انتخاب کرد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، نیویورک، ۱۹۷۹

۸.۱.۵ .۱.۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۸۶۷. n ضلعی منتظمی به ضلع a داده شده است، دایره‌ای در آن محاط و دایرهٔ دیگری بر آن محیط کرده‌ایم. مطلوب است، مساحت سطح بین دو دایره و عرض آن.

۸.۱.۵ .۲ .نسبت مساحتها

۸۶۸. وسطهای ضلعهای n ضلعی منتظمی را به هم وصل کرده‌ایم تا n ضلعی منتظم دیگری به‌دست آید. مطلوب است نسبت مساحتهای آنها.

۹.۱.۵. رابطه‌های متری

۸۶۹. یک k ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R داده شده است. اگر h_k، فاصلهٔ مرکز چندضلعی تا یکی از ضلعهای آن باشد، ثابت کنید:

$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > R$$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۹

۱۰.۱.۵. ثابت کنید چندضلعی منتظم است

۸۷۰. ثابت کنید هر چند ضلعی متساوی‌الزوایا که بر دایره‌ای محیط باشد، منتظم است.

۸۷۱. ثابت کنید هر چند ضلعی متساوی‌الاضلاع که در دایره‌ای محاط باشد، منتظم است.

۸۷۲. ثابت کنید چند ضلعی محیطی که ضلعهایش برابرند، منتظم است، به شرطی که تعداد ضلعهای آن فرد باشد.

۸۷۳. ثابت کنید که اگر زاویه‌های یک چندضلعی محدب محاطی که عدهٔ ضلعهایش فرد باشد، باهم مساوی باشند، آن چندضلعی منتظم است. اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی مزبور زوج باشد، ممکن است منتظم نباشد. یک مثال از این نوع پیدا کنید.

۸۷۴. دو چندضلعی منتظم و هم‌جهت $A_1A_2\ldots A_n$ و $B_1B_2\ldots B_n$ داده شده‌اند. پاره‌خطهای A_1A_2، B_1B_2، ...، A_nB_n از طرف رأسهای یکی از این چند ضلعی بترتیب با نقطه‌های C_1، C_2، ...، C_n به نسبتهای مساوی تقسیم شده‌اند. ثابت کنید چندضلعی $C_1C_2\ldots C_n$ منتظم است.

۱۱.۱.۵. تعیین n (تعداد ضلعها)

۸۷۵. مطلوب است، تعداد ضلعهای چندضلعی منتظمی که برای چهار رأس متوالی A، B، C و D از آن، داشته باشیم:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۶۶

۸۷۶. در یک n ضلعی منتظم $(n > 5)$، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین قطر برابر با ضلع n ضلعی است. n را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۸۷۷. اگر n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R دارای مساحت $3R^2$ باشد n برابر است با:

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۵ هـ) ۱۸

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۱

۸۷۸. عدهٔ ضلعهای چندضلعی منتظمی، یکی بیش از عدهٔ ضلعهای چندضلعی منتظم دیگری است، و هریک از زاویه‌های آن ۴ درجه بزرگتر از زاویه‌های اوّلی می‌باشند. مطلوب است عدهٔ ضلعهای هریک از دو چندضلعی.

۸۷۹. n ضلعی منتظمی M را دور مرکز خود و به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{\pi}{n}$ دوران داده‌ایم تا چندضلعی M' به دست آید. حداقل، چه تعداد چندضلعی کوژ می‌توان از شکل $M \cup M'$ برید؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۸۸۰. در چندضلعی منتظم محدب، اندازهٔ زاویهٔ بین هردوضلع مجاور، برحسب درجه، با x نشان داده می‌شود. همهٔ عددهای صحیح x را تعیین کنید که به ازای آنها چنین چندضلعیهایی وجود داشته باشند. نظیر هر مقدار x ، تعداد ضلعهای چندضلعی را نیز مشخص کنید.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۲.۱.۵.سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۸۱. می‌خواهیم هر ضلع و هر قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رنگ کنیم که هردو پاره‌خط راستی که نقطهٔ مشترکی دارند، به دو رنگ مختلف درآمده باشند. برای این‌منظور، دست‌کم، به چند رنگ نیاز داریم؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۸۸۲. هر انتخابی از n رأس ۲n ضلعی منتظم را، «نمونه» می‌نامیم. آیا این حکم درست است که: ۱۰۰ دوران ۲n ضلعی وجود دارد، به نحوی که تصویرهای «نمونه» در این دورانها (یعنی نقطه‌هایی که از n رأس انتخابی، بعد از ۱۰۰ دوران به دست می‌آید)، همهٔ رأسهای ۲n ضلعی را می‌پوشانند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۸۸۳. ثابت کنید می‌توان روی رأسهای یک n ضلعی منتظم، عددهایی مخالف صفر، طوری قرار داد که مجموع عددهای واقع در رأسهای هر k ضلعی منتظم، که رأسهای آن بر رأسهای nضلعی منطبق است $(k \leq n)$، برابر صفر شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۸۸۴. در رأسهای یک n ضلعی منتظم، $(n-1)$ صفر و یک واحد گذاشته‌ایم. به رأسهای هر k ضلعی منتظم محاط در چندضلعی اصلی، می‌توان یک واحد اضافه کرد. آیا با این عمل می‌توان همهٔ عددهای واقع در رأسهای nضلعی را برابر کرد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۳

۸۸۵. زاویه‌های داخلی دو چندضلعی منتظم به نسبت ۲ :۳ هستند. چند جفت از این چندضلعیها وجود دارد؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) بینهایت

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

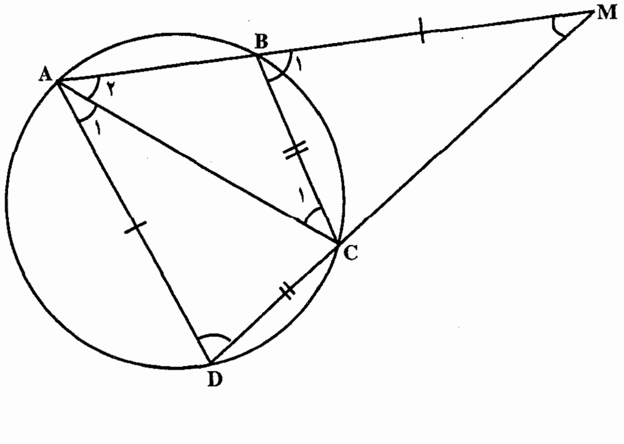
۱۳.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۶. A ، B ، C و D چهار رأس متوالی چندضلعی منتظم محدب ...ABCD هستند. ضلع AB را از طرف B به اندازهٔ $BM = AD$ امتداد می‌دهیم.

۱. ثابت کنید مثلث ACD با مثلث MBC همنهشت است.

۲. ثابت کنید : $B\hat{M}C = B\hat{C}A$

۳. ثابت کنید : $AC^2 = AB.AM$ و $AC^2 - AB^2 = AB.AD$



۸۸۷. دایره‌ای که در آن $۲n+۱$ ضلعی منتظم $A_۱A_۲...A_{۲n+۱}$ محاط شده است، درنظر بگیرید. فرض کنید A نقطه‌ای دلخواه از کمان $A_۱A_{۲n+۱}$ باشد.

الف. ثابت کنید، مجموع فاصله‌های A تا رأسهای زوج، برابر است با مجموع فاصله‌های A تا رأسهای فرد.

ب. دایره‌هایی برابر که به یک طریق بر دایرهٔ مفروض در نقطه‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{۲n+۱}$ مماسند، رسم می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع طول مماسهای مرسوم از A بر دایره‌های مماس بر دایرهٔ مفروض در رأسهای زوج، برابر است با مجموع طول مماسهای مرسوم از A بر دایره‌های مماس بر دایرهٔ مفروض در رأسهای فرد.

۲.۵. رابطه‌های متری در ۳ ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)

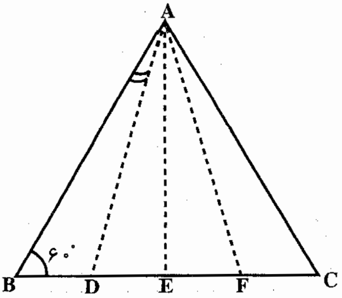
۱.۲.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مثلث متساوی الاضلاع را به عنوان یک ۳ ضلعی منتظم بررسی می‌کنیم.

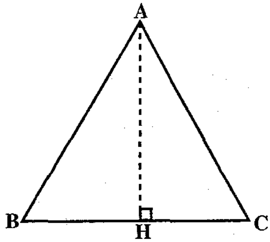
۲.۲.۵. زاویه

۱.۲.۲.۵. اندازهٔ زاویه

۸۸۸. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، نقطه‌های D، E و F ضلع BC را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اندازهٔ زاویهٔ BAD را بیابید.



۳.۲.۵. ضلع



۱.۳.۲.۵. اندازهٔ ضلع

۸۸۹. در مثلث متساوی‌الاضلاعی، طول ارتفاع برابر با $\sqrt{۳}$ است. طول ضلع آن را به‌دست آورید.

۲.۳.۲.۵. نسبت ضلعها

۸۹۰. مطلوب است تعیین نسبت ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایره، به ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محیط در همان دایره.

۴.۲.۵. شعاع دایره

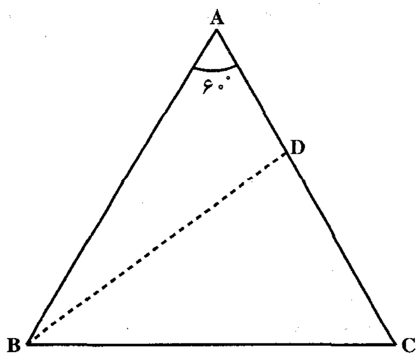
۱.۴.۲.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۸۹۱. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی $m^۲$ است، شعاع دایره را پیدا کنید.

۵.۲.۵. پاره‌خط

۱.۵.۲.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۸۹۲. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر $۳۶\sqrt{۳}cm^۲$ است. نقطهٔ D روی ضلع AC چنان قرار دارد که $AD = \frac{۲}{۳}DC$ است. طول پاره‌خط BD را تعیین کنید.



۶.۲.۵. محیط

۱.۶.۲.۵. اندازهٔ محیط

۸۹۳. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $۹\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع است. اندازهٔ محیط این مثلث را بیابید.

۷.۲.۵. مساحت

۱.۷.۲.۵. اندازهٔ مساحت

۸۹۴. اندازهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۶ سانتیمتر را تعیین کنید.

۲.۷.۲.۵. نسبت مساحتها

۸۹۵. در مثلث متساوی‌الاضلاع abc به ضلع یک، مثلث متساوی‌الاضلاع $a'b'c'$ چنان محاط می‌شود که:

$$a' \in [ab],\ b' \in [bc],\ c' \in [ca],$$

$$|aa'| = |bb'| = |cc'| = k$$

در این صورت، نسبت مساحت $a'b'c'$ به مساحت abc برابر می‌شود با:

الف) $k^۲$ ب) $k^۲ - ۲k + ۱$ ج) $۲k^۲ - ۲k + ۱$

د) $۱ - ۳k^۲$ هـ) $۳k^۲ - ۳k + ۱$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۸.۲.۵. رابطه‌های متری

۸۹۶. در مثلث ABC، نقطهٔ M روی ضلع AB، نقطهٔ N روی ضلع BC و نقطهٔ O، محل برخورد پاره‌خطهای راست CM و AN است. می‌دانیم: $AM + AN = CM + CN$.

ثابت کنید:

$$AO + AB = CO + CB$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۳.۵. رابطه‌های متری در ۴ ضلعی منتظم (مربع)

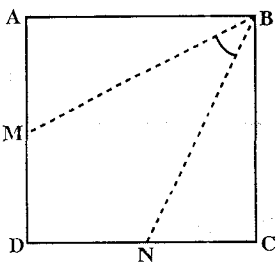
۱.۳.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به مربع را به‌عنوان ۴ ضلعی منتظم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۳.۵. زاویه

۱.۲.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۸۹۷. رأس B از مربع ABCD را به نقطه‌های M و N که بترتیب **وسطهای** AD و DC می‌باشند، وصل می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ MBN را بیابید.



۳.۳.۵. ضلع

۱.۳.۳.۵. اندازهٔ ضلع

۸۹۸. با استفاده از دستورهای مربوط به محاسبهٔ ضلعهای چند ضلعیهای محاطی و محیطی دایره، اندازه‌های ضلعهای مربعهای محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتیمتر را حساب کنید.

۸۹۹. محیط یک دایره، ۱۰۰ سانتیمتر است. طول ضلع مربع محاط در این دایره، برحسب سانتیمتر، برابر است با :

الف) $\frac{۲۵\sqrt{۲}}{\pi}$ ب) $\frac{۵۰\sqrt{۲}}{\pi}$ ج) $\frac{۱۰۰}{\pi}$

د) $\frac{۱۰۰\sqrt{۲}}{\pi}$ هـ) $۵۰\sqrt{۲}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

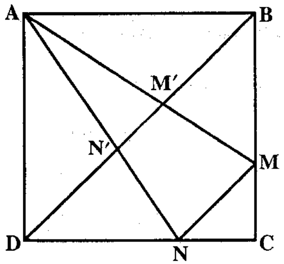
۴.۳.۵. قطر

۱.۴.۳.۵. اندازهٔ قطر

۹۰۰. اندازهٔ مساحت مربعی ۱۴۴ سانتیمترمربع است. اندازهٔ قطر آن را بیابید.

۵.۳.۵. پاره‌خط

۱.۵.۳.۵. اندازهٔ پاره‌خط



۹۰۱. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. نقطه‌های M و N را روی ضلعهای BC و CD چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MB}{MC} = K_۱$ و $\frac{NC}{ND} = K_۲$ باشد. از A به M و N وصل می‌کنیم تا قطر BD را در M′ و N′ قطع کنند. اندازهٔ پاره‌خط M′N′ را برحسب a تعیین کنید.

۶.۳.۵. شعاع دایره

۱.۶.۳.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۹۰۲. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مربعی به ضلع ۱۲cm را تعیین کنید.

۲.۶.۳.۵. نسبت شعاعها

۹۰۳. یک مربع و یک مثلث متساوی‌الاضلاع که در هر کدام مقدار عددی مساحت با مقدار عددی محیط برابر است، داده شده‌اند. نسبت شعاع دایرهٔ محاطی مربع به شعاع دایرهٔ محاطی مثلث برابر است با :

الف) ۱   ب) $\frac{۴}{۳}$ ج) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

د) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ هـ) مقداری که مشخص نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۷.۳.۵. محیط

۱.۷.۳.۵. اندازهٔ محیط

۹۰۴. اندازهٔ قطر مربع دو برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۱۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر است. اندازهٔ محیط مربع را حساب کنید.

۸.۳.۵. مساحت

۱.۸.۳.۵. اندازهٔ مساحت

۹۰۵. درازای قطر مربعی از درازي ضلع آن، یک واحد بیشتر است. مساحت این مربع برابر است با :

الف) ۶ ‏ ‏ ‏ ب) $۱+\sqrt{۲}$ ‏ ‏ ‏ ج) $۵+\sqrt{۲}$

د) $۳+۲\sqrt{۲}$ ‏ ‏ ‏ هـ) $۱+۴\sqrt{۲}$

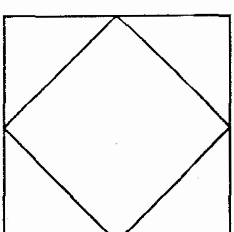
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۹۰۶. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای مساوی ۹ سانتیمتر است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت مربع محاط در همین دایره.

۹۰۷. در شکل زیر، مساحت مربع داخلی ۶ سانتیمترمربع است. مساحت مربع خارجی برحسب سانتیمترمربع برابر است با :

الف) ۹ ‏ ‏ ‏ ب) ۱۲ ‏ ‏ ‏ ج) ۲۴ ‏ ‏ ‏ د) ۳۶

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

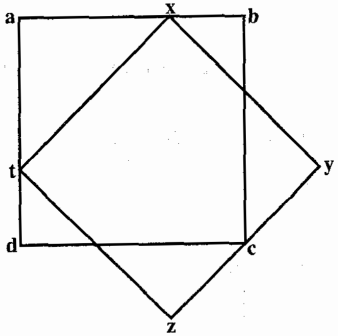


۹۰۸. در صورتی که طول قطر یک مربع $(a+b)$ باشد، آن‌گاه مساحت این مربع برابر است با :

الف) $(a+b)^۲$ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{۱}{۲}(a+b)^۲$ ‏ ‏ ‏ ج) $a^۲+b^۲$

د) $\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲)$ ‏ ‏ ‏ هـ) هیچ‌یک از اینها

۲.۸.۳.۵. نسبت مساحتها



۹۰۹. در شکل روبه‌رو، نسبت مساحت مربع abcd به مساحت مربع txyz چه‌قدر است؟

الف) ۱/۰۶ ب) ۱/۱

ج) ۱/۱۲۵

د) $\frac{۳}{\sqrt{۲}}$ هـ) عددی غیر از اینها

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۹۱۰. نسبت اندازهٔ مساحت مربع محاط در یک نیمدایره به اندازهٔ مساحت مربع محاط در تمامی دایره برابر است با :

الف) ۱:۲ ب) ۲:۳ ج) ۲:۵

د) ۳:۴ هـ) ۳:۵

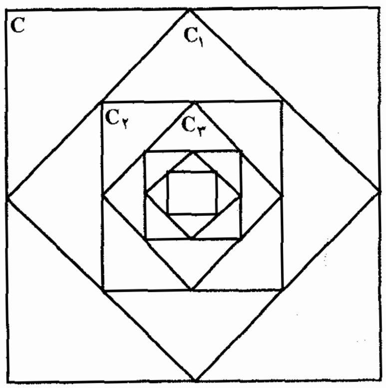
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳.۸.۳.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۱۱. یک مربع و یک مثلث را، بر دایره‌ای به شعاع واحد محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت بخش مشترک مربع و مثلث از ۳/۴ بیشتر است. آیا می‌توان گفت که، این مساحت، از ۳/۵ بیشتر است؟

۹۱۲. در شکل روبه‌رو، مساحت مربع c برابر a است و ... $c \supset c_۱ \supset c_۲ \supset c_۳ \supset$.

مساحت مربع c_n چه‌قدر می‌شود؟



الف) $\sqrt[n]{a}$ ب) $\frac{a}{۲n}$

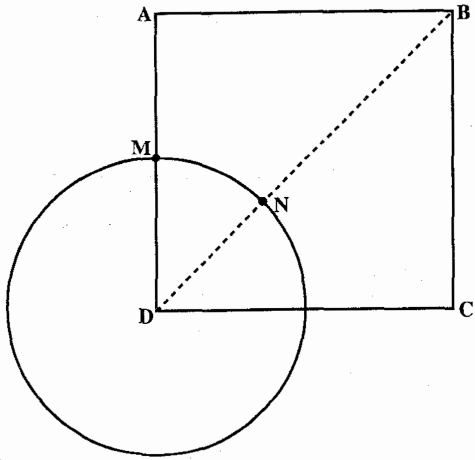
ج) $\frac{a}{۲^n}$ د) $\frac{a}{n^۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۹.۳.۵. رابطه‌های متری

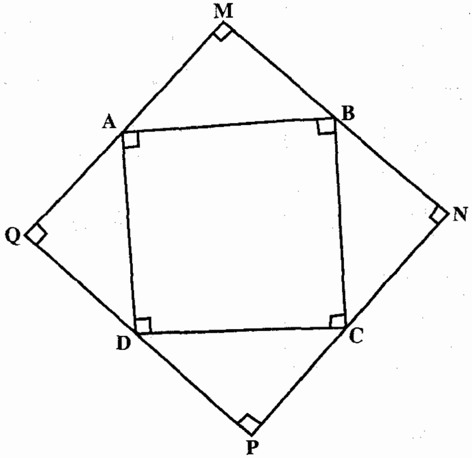
۹۱۳. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\frac{a}{2}$ رسم می‌کنیم تا ضلع AD را در نقطهٔ M و قطر BD را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید:

$$ND^2 + BN^2 = \frac{a^2}{2}(2-\sqrt{2}) \quad \text{و} \quad AD^2 - AM^2 = \frac{3a^2}{4}$$



۱۰.۳.۵. ثابت کنید چهارضلعی مربع است

۹۱۴. مربع ABCD داده شده است. روی ضلعهای این مربع و در خارج آن مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABM، BCN، CDP و ADQ را می‌سازیم. ثابت کنید، MNPQ مربع است.



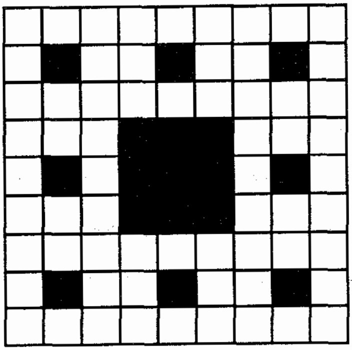
۱۱.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۱۵. ثابت کنید، چهار فاصلهٔ هر نقطه از محیط دایره، تا چهار رأس مربع محاط در آن، نمی‌توانند، به‌طور همزمان گویا باشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، نیویورک، ۱۹۷۵

۹۱۶. روی مربع ABCD نقطه‌های K و N روی AB و AD بترتیب داده شده‌اند؛ طوری که: $AK.AN = 2BK.DN$. ضلعهای CK و CN قطر BD را در نقطه‌های L و M قطع می‌کند. ثابت کنید، چهارضلعی AKLM محاطی است.

۱۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی



۹۱۷. مربع به ضلع واحد را به کمک خطهای راستی که موازی با ضلعهای مربع رسم شده‌اند، به ۹ مربع برابر تقسیم می‌کنیم (شکل). مربع وسط را حذف و، سپس، همین عمل را با ۸ مربع باقیمانده انجام می‌دهیم. اگر این عمل را n بار تکرار کنیم:

الف) چند مربع به ضلع $\frac{1}{3^n}$ باقی می‌ماند؟

ب) اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند $(n \to \infty)$، حد مجموع مساحتهای مربعهای وسط را (که حذف شده‌اند)، به‌دست آورید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۵

۴.۵. رابطه‌های متری در پنج ضلعی منتظم

۱.۴.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت به بررسی رابطه‌های متری مربوط به پنج ضلعی منتظم می‌پردازیم. پنج‌ضلعی منتظم می‌تواند محدب و یا ستاره‌ای باشد. پنج ضلعی منتظم به‌دلیل داشتن ویژگیهای زیاد، از زمان باستان، مورد توجه ریاضیدانان قرار داشته است. بویژه آن که قطرهای پنج‌ضلعی منتظم یکدیگر را به نسبت طلایی تقسیم می‌کنند. فیثاغوریان برای شناسایی یکدیگر از این علامت استفاده می‌کردند.

۲.۴.۵. زاویه

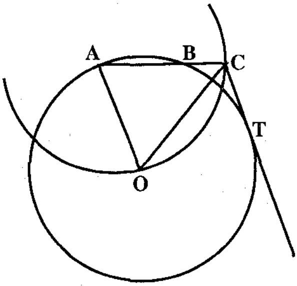
۱.۲.۴.۵. اندازهٔ زاویه

۹۱۸. اندازهٔ زاویهٔ پنج ضلعی منتظم محدب و اندازهٔ زاویهٔ پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای را بیابید.

۳.۴.۵. ضلع

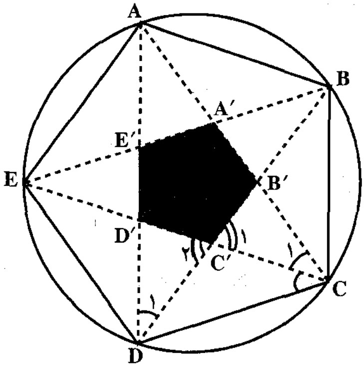
۱.۳.۴.۵. اندازهٔ ضلع

۹۱۹. مطلوب است محاسبهٔ ضلع پنج ضلعی منتظم محاطی، برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن.



۲.۳.۴.۵. نسبت ضلعها

۹۲۰. ثابت کنید که از برخورد قطرهای پنج‌ضلعی منتظم، پنج‌ضلعی منتظم دیگری تشکیل می‌شود. نسبت بین ضلعهای آنها را به‌دست آورید.



۴.۴.۵. قطر

۱.۴.۴.۵. اندازهٔ قطر

۹۲۱. در پنج ضلعی منتظم ABCDE، طول ضلع AB برابر واحد است. اندازهٔ قطر این پنج‌ضلعی را به‌دست آورید.

۹۲۲. اندازهٔ قطر پنج‌ضلعی منتظم به ضلع a را برحسب a تعیین کنید.

۵.۴.۵. پاره‌خط

۱.۵.۴.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۹۲۳. پنج‌ضلعی منتظمی در دایرهٔ به شعاع R محاط است. مطلوب است، محاسبهٔ فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی از نقطهٔ برخورد دو قطر دلخواه از پنج ضلعی.

۶.۴.۵. شعاع

۱.۶.۴.۵. اندازهٔ شعاع

۹۲۴. اگر ضلع یک پنج‌ضلعی منتظم برابر a باشد، شعاع دایرهٔ محیطی آن را محاسبه کنید.

۷.۴.۵. محیط

۱.۷.۴.۵. اندازهٔ محیط

۹۲۵. اندازهٔ مساحت یک پنج‌ضلعی منتظم برابر $20\cot g 36^\circ cm^2$ است. اندازهٔ محیط آن را بیابید.

۲.۷.۴.۵. نسبت محیطها

۹۲۶. مطلوب است تعیین نسبت محیط پنج‌ضلعی منتظم محیطی به محیط پنج‌ضلعی منتظم محاطی در دایره‌ای به شعاع R.

۸.۴.۵. مساحت

۱.۸.۴.۵. اندازهٔ مساحت

۹۲۷. اگر طول ضلع یک پنج‌ضلعی منتظم برابر a باشد، مساحت آن را تعیین کنید.

۲.۸.۴.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۲۸. ثابت کنید، اختلاف مساحتهای دایره‌های محاطی و محیطی یک پنج‌ضلعی منتظم برابر است با مساحت دایره‌ای که قطر آن مساوی ضلع همین پنج‌ضلعی باشد.

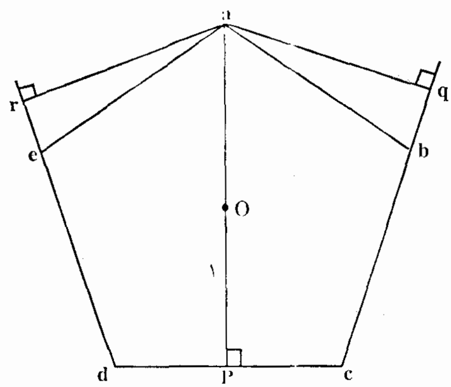
۹.۴.۵. رابطه‌های متری

۹۲۹. نقطه‌های A_0، A_1، A_2، A_3 و A_4، پیرامون دایرهٔ به شعاع واحد را به پنج کمان برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، برای وترهای A_0A_1 و A_0A_2 داریم:

$$(A_0A_1 . A_0A_2)^2 = 5$$

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۹

۹۳۰. قطرهای یک پنج‌ضلعی منتظم یکدیگر را به نسبت طلایی تقسیم می‌کنند.



۹۳۱. در پنج‌ضلعی منتظم abcde به مرکز o، عمود ap بر [cd] و عمودهای aq و ar بترتیب بر امتدادهای [bc] و [de] رسم شده‌اند. اگر $|op| = 1$، آنگاه $|ao| + |aq| + |ar|$ برابر است با:

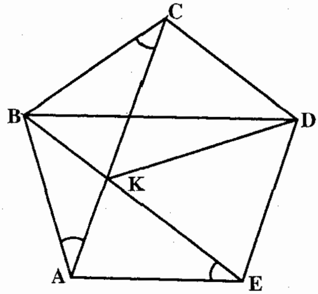
الف) ۳ ب) $1 + \sqrt{5}$ ج) ۴ د) $2 + \sqrt{5}$ هـ) ۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۱۰.۴.۵. ثابت کنید پنج‌ضلعی منتظم است

۹۳۲. بر دایره‌ای پنج نقطهٔ A، B، C، D و E را به‌طور متوالی چنان اختیار کرده‌ایم که کمانهای $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و $\overset{\frown}{DE}$ هر یک ۷۲° است. آیا چند ضلعی محاطی ABCDE چند ضلعی منتظم است؟

۹۳۳. ثابت کنید، اگر جمیع ضلعها و سه زاویهٔ متوالی یک پنج‌ضلعی مساوی باشد، آن پنج‌ضلعی منتظم است.



۹۳۴. ثابت کنید، اگر یک پنج‌ضلعی دارای زاویه‌های برابر و قابل محاط در یک دایره باشد، یک پنج‌ضلعی منتظم است (یعنی ضلعهایی برابر دارد).

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۴

۹۳۵. ثابت کنید اگر برای زاویه‌های یک پنج‌ضلعی محدب ABCDE با ضلعهای برابر، داشته باشیم :

$$\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C} \geq \hat{D} \geq \hat{E}$$

این پنج‌ضلعی، منتظم است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، ۱۹۸۱

۱۱.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۳۶. پنج‌ضلعی منتظمی داده شده است. M، نقطهٔ دلخواهی واقع در درون یا روی محیط این پنج‌ضلعی است. فاصله‌های نقطهٔ M را از ضلعهای پنج‌ضلعی (و یا امتداد آنها)، بترتیب مقدارهای صعودی آنها شماره‌گذاری می‌کنیم :

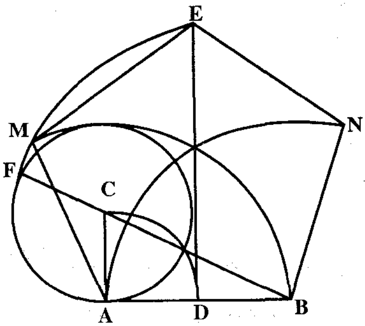
$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4 \leq r_5$$

همهٔ موضعهای نقطهٔ M را پیدا کنید، که، به‌ازای آنها، r_3 کمترین مقدار ممکن را قبول کند ؛ همچنین، همهٔ موضعهای M را پیدا کنید که، برای آنها، r_3 بیشترین مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۲

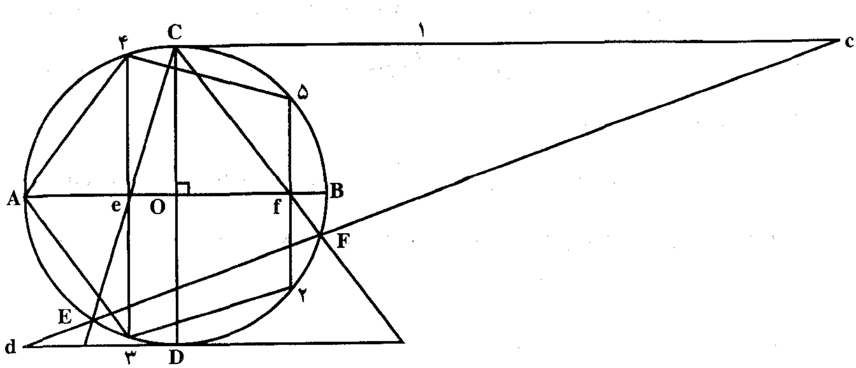
۹۳۷. چند روش جالب برای ساختن پنج‌ضلعیهای منتظم.

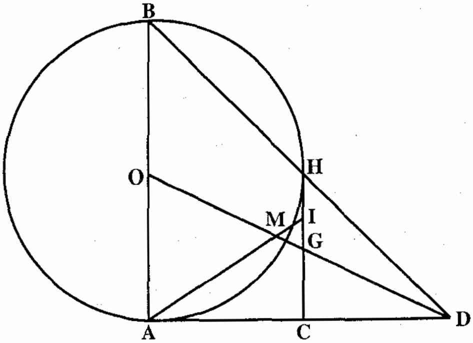
ما کم‌وبیش از روشهای ساختن چندضلعیهای منتظم (که همیشه مورد علاقهٔ ریاضیدانها بوده است)، وقتی که ضلع یا شعاع دایرهٔ محیطی آن معلوم باشد، صحبت کرده‌ایم؛ ولی بد نیست از چند روش دیگر، که بعد از دیورر پیدا شده است، دربارهٔ ترسیم چندضلعیهای منتظم و برای مثال پنج‌ضلعی، گفتگو کنیم.



ضلع AB داده شده است (شکل). از نقطهٔ D، وسط AB، و از نقطهٔ A عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم. به مرکز A و شعاع AD قوسی رسم می‌کنیم تا عمود نقطهٔ A را در C قطع کند. به همین شعاع و به مرکز C دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. B را به C وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا این دایره را در F قطع کند. به مرکز B و شعاع BF قوس EF را رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را قطع کند. نقطهٔ E رأس بالای پنج‌ضلعی خواهد بود. به مرکز A و شعاع AB قوسی می‌کشیم تا قوس FE را در M قطع کند، که یکی دیگر از رأسهای پنج‌ضلعی خواهد بود. پیدا کردن رأس پنجم N دیگر کار مشکلی نیست و این هم روش محاط کردن پنج‌ضلعی منتظم در دایره، که به‌وسیلهٔ ریاضیدان و منجم آلمانی، اوگان شریوتر (سدهٔ هفدهم) داده شده است.

AB و CD را دو قطر عمود برهم دایره فرض می‌کنیم (شکل). پاره‌خط Cc مساوی ۴OA و موازی AB است. پاره‌خط Dd مساوی BO و باز موازی AB است. خطی که دو نقطهٔ c و d را به‌هم وصل می‌کند، دایره را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. این دو نقطه را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم و از نقطه‌های تلاقی این دو خط با AB، یعنی از





نقطه‌های c و f عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو عمود با دایره، چهار رأس پنج‌ضلعی را می‌دهند (نقطه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵).

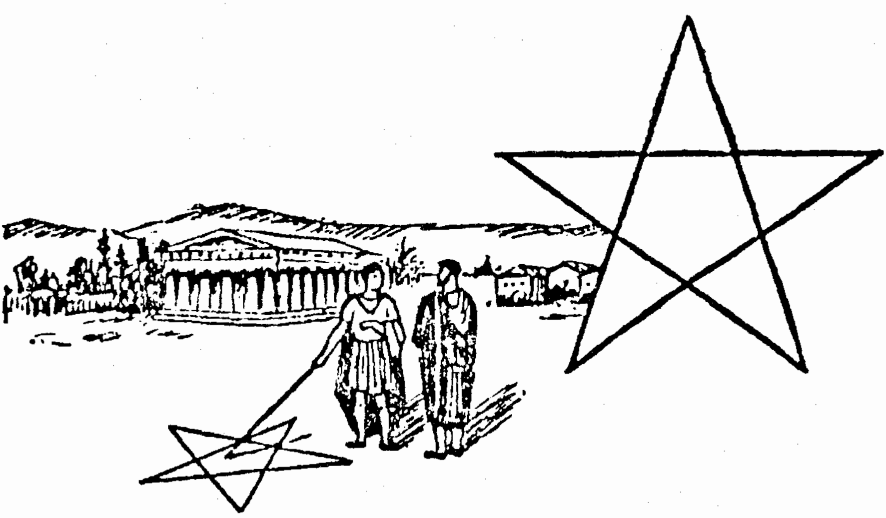
راه‌حل دیگر این مسأله، که از همین مؤلف است، خیلی جالب است.

روی مماس بر دایره، AC را مساوی شعاع و AD را مساوی قطر جدا می‌کنیم (شکل). D را به نقطه‌های O و B وصل می‌کنیم؛ خطهای DO و DB دایره را در نقطه‌های G و H قطع می‌کنند. سپس به مرکز D و شعاع مساوی DG قوسی رسم می‌کنیم تا خط CH را در نقطهٔ I قطع کند. I را با خط راستی به A وصل می‌کنیم، تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. وتر AM ضلع مجهول پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به قطر AB است.

اثبات صحت این شکل را، که بسادگی براساس استفاده از تقسیم طلایی انجام می‌گیرد، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

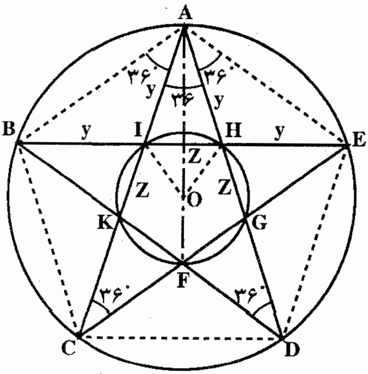
۹۳۸. ستارهٔ فیثاغورسی.

فیثاغورس یکی از بزرگترین ریاضیدانهای باستان و اهل کروتون بود. شاگردان فیثاغورس به او به چشم یک مقدس نگاه می‌کردند.



یکی از زیباترین شکلهای فیثاغورسی ستارهٔ پنج پر است که به ستارهٔ فیثاغورسی هم مشهور است. این ستاره را می‌توان با امتداد دادن ضلعهای یک پنج‌ضلعی منتظم تا جایی که یکدیگر را قطع کنند، به‌دست آورد. وقتی که فیثاغورسیان به هم می‌رسیدند برای تهنیت گفتن به هم و شناختن یکدیگر، این شکل را روی زمین رسم می‌کردند.

این شکل در واقع فوق‌العاده جالب است و دارای خاصیتهایی است که آن را از سایر ستاره‌ها ممتاز می‌کند. همان‌طور که در این‌جا خواهیم دید، مجموع زاویه‌های ستارهٔ پنج پر مساوی دو قائمه است و بنابراین مثلث را به خاطر می‌آورد که مجموع زاویه‌های آن هم مساوی ۱۸۰ درجه است (شکل).



ضلعهای پنج پر هم خاصیتهای بسیار جالبی دارد (شکل).

در پنج پر ABCDE طول پاره‌خطهای $AI = BK = CF = \ldots$ را به y و طول پاره‌خطهای $HI = IK = KF = \ldots$ را به z نشان می‌دهیم. مثلث IAH متساوی‌الساقین و هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن مساوی ۷۲ درجه است. زاویهٔ BAH هم مساوی ۷۲ درجه است، بنابراین مثلث HBA متساوی‌الساقین و متشابه با مثلث IAH می‌شود. داریم: $AB = y + z$. پاره‌خط AB عبارت است از ضلع پنج‌ضلعی منتظم ABCDE که رأسهای بیرونی پنج پر را به هم وصل کرده است. مثلث ADB متساوی‌الساقین و با مثلثهای IAH و BAH متشابه است، زیرا زاویهٔ رأس آن مساوی ۳۶ درجه است.

به این ترتیب براساس این مثلثهای متشابه، می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{HA}{AB} = \frac{IH}{HA}$$

یا

$$\frac{y+z}{۲y+z} = \frac{y}{y+z} = \frac{z}{y}$$

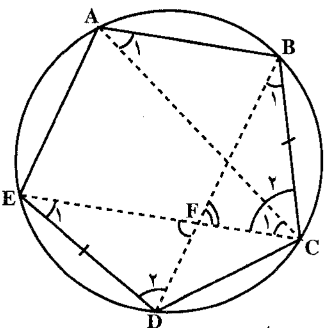
و این به معنای آن است که:

$$AK:AC = KC:AK\,,\ AI:AK = IK:AI$$

بنابراین ضلع AC در نقطهٔ K به نسبت طلایی تقسیم شده است (یک پاره‌خط وقتی به نسبت طلایی تقسیم می‌شود که نسبت قطعهٔ بزرگتر به تمام پاره‌خط برابر باشد با نسبت

قطعهٔ کوچکتر به قطعهٔ بزرگتر). به همین ترتیب پاره‌خط AK هم در نقطهٔ I به نسبت طلایی تقسیم شده است (در زمان باستان نسبت طلایی اهمیت فوق‌العاده‌ای در نسبتهای ترکیبی داشته است). این طلایی‌ترین تقسیمی است که بسادگی در همهٔ نقطه‌های برخورد ضلعهای ستارهٔ فیثاغورسی به‌دست می‌آید.

۱۲.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی



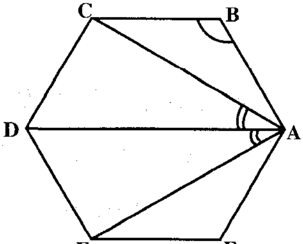
۹۳۹. پنج‌ضلعی منتظم ABCDE داده شده است. ثابت کنید که:
الف. هر قطر آن، موازی است با یکی از ضلعها.
ب. ضلعهای AE و AB با قطرهای EC و BD یک لوزی می‌سازند.

۵.۵. رابطه‌های متری در شش‌ضلعی منتظم

۱.۵.۵. تعریف و قضیه

شش ضلعی منتظم به دلیل ویژگیهایش یکی از شکلهای پرکاربرد هندسه است. در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به شش‌ضلعی منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۵.۵. زاویه



۱.۲.۵.۵. اندازهٔ زاویه

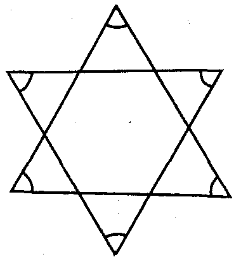
۹۴۰. اندازهٔ هر زاویهٔ درونی شش‌ضلعی منتظم محدب را، همچنین اندازهٔ زاویهٔ بین هر دو قطر متوالی را که از یک رأس شش‌ضلعی رسم می‌شود، تعیین کنید.

۲.۲.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۹۴۱. در یک شش‌ضلعی ستاره‌ای منتظم، مجموع زاویه‌های رأسهای بیرونی چند درجه است؟

الف) 90° ب) 120° ج) 180° د) 360° هـ) 540°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۳.۵.۵. ضلع

۱.۳.۵.۵. اندازهٔ ضلع

۹۴۲. اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۸cm را تعیین کنید.

۲.۳.۵.۵. نسبت طول ضلع به طول کمان

۹۴۳. یک شش‌ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط است. نسبت طول یک ضلع از شش‌ضلعی به طول کمان کوچکتر روبه‌رو به آن ضلع برابر است با :

الف) $1:1$ ب) $1:6$ ج) $1:\pi$ د) $3:\pi$ هـ) $6:\pi$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۵

۴.۵.۵. قطر

۱.۴.۵.۵. اندازهٔ قطر

۹۴۴. شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۶cm داده شده است. اندازهٔ قطرهای این شش‌ضلعی را تعیین کنید.

۵.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۹۴۵. پارکی است به شکل شش‌ضلعی منتظم که طول هر ضلع آن ۲ کیلومتر است. شخصی ابتدا از یک رأس پارک و روی محیط آن، مسافت ۵ کیلومتر را می‌پیماید، آن‌گاه به خط مستقیم به نقطه‌ای که از آن حرکت کرده است، باز می‌گردد. این شخص در مراجعت چند کیلومتر مسافت را پیموده است؟

الف) $\sqrt{۱۳}$ ب) $\sqrt{۱۴}$ ج) $\sqrt{۱۵}$ د) $\sqrt{۱۶}$ هـ) $\sqrt{۱۷}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲.۵.۵.۵. نسبت پاره‌خطها

۹۴۶. در شش‌ضلعی منتظم ABCDEF ثابت کنید:

۱. قطر BF، قطر AD را به دو قسمت تقسیم می‌کند که یکی از آنها سه برابر دیگری است.

۲. قطرهای FD و EC یکدیگر را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که یکی از آنها دو برابر دیگری است.

۶.۵.۵. شعاع دایره

۱.۶.۵.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۹۴۷. شش‌ضلعی منتظمی در درون یک دایره محاط و شش‌ضلعی منتظم دیگری بر آن محیط شده است. شعاع دایره را، اگر تفاوت محیط شش‌ضلعیها برابر با a باشد، پیدا کنید.

۷.۵.۵. محیط

۱.۷.۵.۵. اندازهٔ محیط

۹۴۸. مساحت شش‌ضلعی منتظمی برابر $۳۶\sqrt{۳}\text{cm}^۲$ است. اندازهٔ محیط این شش‌ضلعی منتظم را تعیین کنید.

۲.۷.۵.۵. نسبت محیطها

۹۴۹. ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع ۴ برابر ضلع یک شش‌ضلعی منتظم است. محیط این مثلث متساوی‌الاضلاع k برابر محیط این شش‌ضلعی منتظم است. مقدار k چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۶

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۸.۵.۵. مساحت

۱.۸.۵.۵. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۵.۵. اندازهٔ مساحت شش‌ضلعی منتظم

۹۵۰. اندازهٔ مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را تعیین کنید.

۹۵۱. مساحت شش‌ضلعی منتظم، محاط در دایرهٔ به شعاع ۱۰ سانتیمتر چند سانتیمتر مربع است؟

الف) $۱۵۰\sqrt{۳}$ ب) ۱۵۰ ج) $۲۵\sqrt{۳}$ د) ۶۰۰ هـ) $۳۰۰\sqrt{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۹۵۲. اگر مساحت دایرهٔ محاط در یک شش‌ضلعی منتظم ۱۰۰π باشد، آن‌گاه مساحت شش‌ضلعی برابر است با :

الف) ۶۰۰ ب) ۳۰۰ ج) $۲۰۰\sqrt{۲}$ د) $۲۰۰\sqrt{۳}$ هـ) $۱۲۰\sqrt{۵}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

۲.۱.۸.۵.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۹۵۳. ضلعهای شش‌ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۵ سانتیمتر نظیر به نظیر موازی یکدیگرند. مساحت سطح محصور بین دو شش‌ضلعی را حساب کنید. صورت کلی مساحت سطح مزبور را، برحسب R، شعاع دایره، تعیین کنید. آیا اگر ضلعهای شش‌ضلعیها موازی نباشند، این مساحت تغییر می‌کند؟

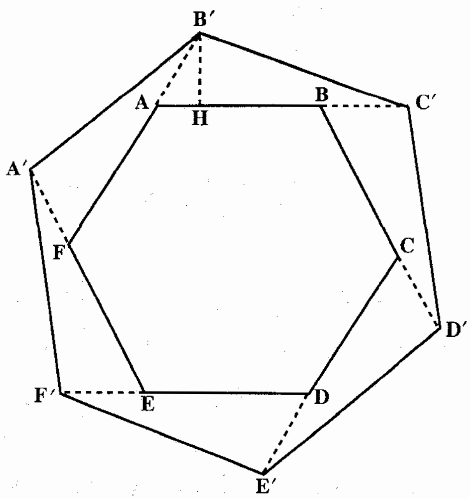
۹۵۴. رأسهای شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a، مرکز دایره‌هایی به شعاع $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ هستند. مساحت آن قسمت از شش‌ضلعی را که این دایره‌ها محصور نکرده‌اند، پیدا کنید.

۹۵۵. طول ضلع شش‌ضلعی منتظم ABCDEK برابر a و مرکز آن نیز نقطهٔ O است. سه دایره رسم می‌کنیم: دایرهٔ اوّل به مرکز A از نقطه‌های E و C عبور می‌کند، دایرهٔ دوم با مرکز B از نقطه‌های O و C می‌گذرد، و دایرهٔ سوم به مرکز K از نقطه‌های O و E عبور می‌کند. مساحت شکلی را که در درون شش‌ضلعی با این دایره‌ها محدود شده است، محاسبه کنید.

۲.۸.۵.۵. نسبت مساحتها

۹۵۶. مساحت هر شش‌ضلعی منتظم محاطی در یک دایره، $\frac{۳}{۴}$ مساحت شش‌ضلعی محیط بر آن است.

۹۵۷. شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a داده شده است. همهٔ ضلعهای آن را از یک طرف رأس به‌اندازهٔ m.a امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که از وصل کردن این نقطه‌ها، شش‌ضلعی منتظمی به‌وجود می‌آید که سطحش $(m^۲+m+۱)$ برابر سطح شش‌ضلعی داده شده است.

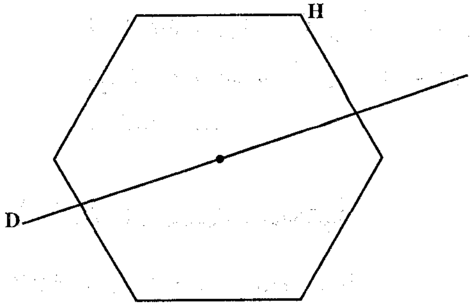


۳.۸.۵.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۵۸. نسبت مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره به مساحتهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی همان دایره را تعیین کنید.

۹۵۹. ثابت کنید که مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره واسطهٔ هندسی است، بین مساحتهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره و محیط بر این دایره.

۹۶۰. H یک شش‌ضلعی منتظم و D خطی است که بر مرکز آن می‌گذرد. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟



الف. D یک محور تقارن H است.
ب. D در H دو ناحیهٔ با مساحتهای برابر پدید می‌آورد.
ج. D در H دو ناحیهٔ با محیطهای برابر پدید می‌آورد.
د. D در H دو ناحیهٔ هم‌اندازه پدید می‌آورد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۹۶۱. مربع c، مثلث متساوی‌الاضلاع t، و شش‌ضلعی منتظم h، محیطهای برابر دارند. مساحتهای این چند ضلعیها را، برحسب یک واحد سطح، بترتیب با A_c ، A_t و A_h نشان می‌دهیم. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) $A_c = A_t = A_h$ ب) $A_c > A_t$

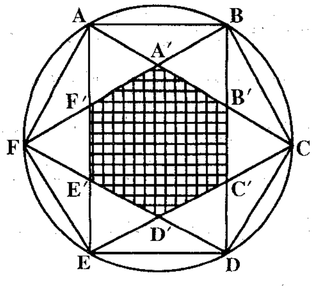
ج) $A_c > A_h$ د) $A_t < A_h$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۹.۵.۵. رابطه‌های متری

۹۶۲. شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R داده شده است. امتداد ضلعهای BA و EF در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کرده‌اند. درستی رابطهٔ $MA.MB = ME.MF$ ، را با محاسبهٔ طول این پاره‌خطها بررسی کنید.

۱۰.۵.۵. ثابت کنید شش‌ضلعی منتظم است



۹۶۳. از تقاطع قطرهای شش‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم دیگری به‌وجود می‌آید.

۹۶۴. شش‌ضلعی «مرکز تقارن» دلخواهی مفروض است. روی ضلعهای آن به‌عنوان قاعده، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی رسم می‌کنیم. ثابت کنید میانگاههای پاره‌خطهایی که هر دو رأس مجاور این مثلثها را به هم وصل می‌کند، رأسهای یک شش‌ضلعی منتظم است.

۱۱.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۶۵. قطرهای AC و CE از شش‌ضلعی منتظم ABCDEF بترتیب، توسط نقطه‌های داخلی M و N چنان تقسیم شده‌اند که:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$$

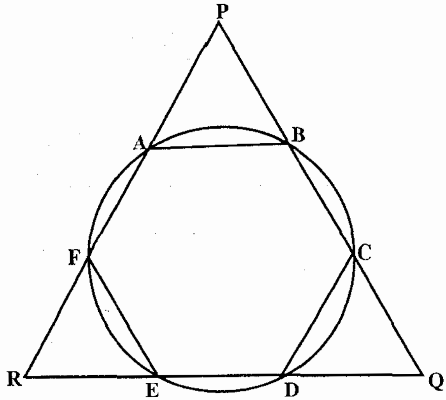
در صورتی که B، M و N بر یک استقامت باشند، r را تعیین کنید.

۹۶۶. نسبت محیط یک شش‌ضلعی منتظم به محیط دایرهٔ محیطی به صورت ۰/۵۷۳۶ داده شده است. نشان دهید که این مقدار به ۳/۷۳۰ تا $۳\frac{۱}{۸}$ به‌عنوان تقریبی برابر π منتهی می‌شود.

از لوحهای شوش، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۹۶۷. شکل حاصل از شش زوج ثلث‌ساز مجاور یک شش‌ضلعی منتظم را بررسی کنید.

۹۶۸. روی ضلعهای AB، CD و EF از شش‌ضلعی «مرکز تقارن» مثلثهای متساوی‌الاضلاع هم‌جهت ABP، CDQ و EFR را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مثلث PRQ متساوی‌الاضلاع است.

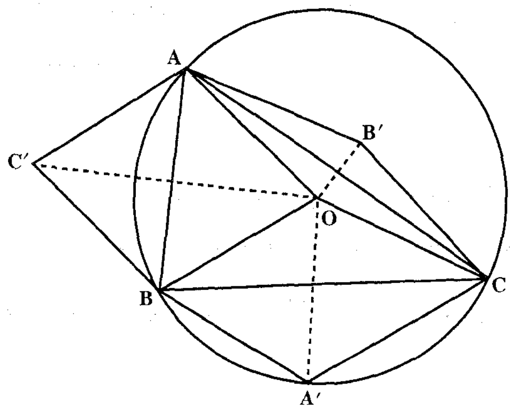


۱۲.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۹۶۹. اگر قرینه‌های نقطهٔ Q مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلعهای BC، AC و AB بترتیب A' ، B' و C' باشد.

۱. ثابت کنید ضلعهای شش‌ضلعی BC' ، CA' و AB' با یکدیگر مساوی‌اند.

۲. مثلث ABC چه نوعی باشد تا شش‌ضلعی منتظم گردد؟



۶.۵. رابطه‌های متری در هفت ضلعی منتظم

۱.۶.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به هفت ضلعی منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۶.۵. زاویه

۱.۲.۶.۵. اندازهٔ زاویه

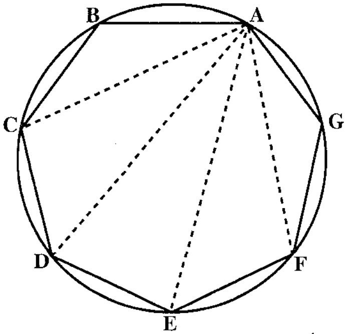
۹۷۰. اندازهٔ هر زاویهٔ درونی یک هفت ضلعی منتظم را بیابید.

۳.۶.۵. ضلع

۱.۳.۶.۵. اندازهٔ ضلع

۹۷۱. اندازهٔ ضلع هفت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۲cm را تعیین کنید.

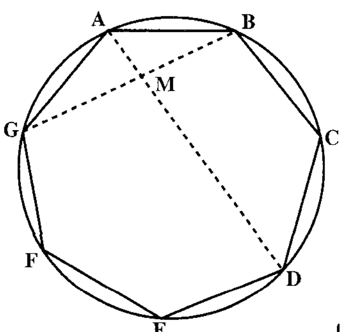
۵.۶.۴. قطر



۵.۶.۴.۱. اندازهٔ قطر

۹۷۲. اندازهٔ کوچکترین قطر رسم شده از یک رأس هفت‌ضلعی منتظمی به ضلع a را تعیین کنید.

۵.۶.۵. پاره‌خط



۵.۶.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۹۷۳. هفت‌ضلعی منتظم ABCDEFG به ضلع a، داده شده است. نقطهٔ برخورد دو قطر AD و BG را M می‌نامیم. اندازهٔ پاره‌خطهای AM و BM را بیابید.

۵.۶.۶. شعاع

۵.۶.۶.۱. اندازهٔ شعاع

۹۷۴. محیط هفت‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره برابر $۷۰\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$ است. اندازهٔ شعاع این دایره را بیابید.

۵.۶.۷. محیط

۵.۶.۷.۱. اندازهٔ محیط

۹۷۵. اندازهٔ محیط هفت‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع ۱۲cm را تعیین کنید.

۵.۶.۷.۲. نسبت محیطها

۹۷۶. نسبت مساحتهای دو هفت ضلعی منتظم، $۶\frac{۱}{۴}$ است. نسبت محیط این دو هفت ضلعی چه‌قدر است؟

۸.۶.۵. مساحت

۱.۸.۶.۵. اندازهٔ مساحت

۹۷۷. اندازهٔ محیط هفت‌ضلعی منتظمی $\text{۸۴}\sin\frac{\text{۱۸۰}^\circ}{\text{۷}}$ سانتیمتر است. اندازهٔ مساحت این هفت‌ضلعی منتظم را بیابید.

۹.۶.۵. رابطه‌های متری

۹۷۸. در هر هفت‌ضلعی منتظم ABCDEFG داریم:

$$\frac{\text{۱}}{AB}=\frac{\text{۱}}{AC}+\frac{\text{۱}}{AD}$$

۹۷۹. در هر هفت‌ضلعی منتظم که طول ضلع آن a و طول قطرهای آن b و c باشد $(c>b)$ داریم:

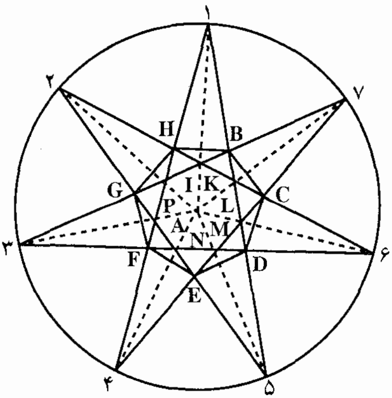
$$a=\frac{(b+c)^{\text{۲}}-\text{۲}c^{\text{۲}}}{\text{۲}c+b}$$

۱۰.۶.۵. رسم هفت‌ضلعی

۹۸۰. آنچه را که در این‌جا از تاریخ ریاضیات می‌آوریم، به قصد این است که از یان بروژک ریاضیدان بزرگ لهستانی و عضو آکادمی کراکوو (۱۵۸۵ ـ ۱۶۵۲) یادی کرده باشیم. نام بروژک به خاطر تحقیقاتی که در زمینهٔ فلسفه، ریاضیات و نجوم کرده است، تحقیقاتی که با افکار خلاقه‌ای، دید ریاضی آن زمان را وسعت بسیار بخشید، در همهٔ جهان مشهور است.

در حقیقت، او فرهنگ بزرگی از تفکرات آدمی بود، زیرا شاعر، فیلسوف و دانشمند بود و به همهٔ مسأله‌هایی که در زمان او مطرح بود، علاقه داشت و به‌طور جدی در حل آنها می‌کوشید.

بروژک در زمینهٔ ریاضیات به هر مطلبی که مطرح بود پرداخت: برای نخستین‌بار به عددهای متحابه، دو عدد ۱۸۴۱۶ و ۱۷۲۹۶ را اضافه کرد؛ به‌طور وسیعی مسألهٔ مربوط به ساختمان خانه‌های کندوی عسل را مورد مطالعه قرار داد، برای نخستین‌بار کاربرد جدولهای نپر را در لهستان معمول کرد و غیره.



تازه‌ترین افکار ریاضی بروژک در کتاب او به نام «دفاع از ارسطو و اقلیدس» آمده است که در پایان زندگی او چاپ شد. در این کتاب مطالب تازهٔ زیادی در زمینهٔ هندسه دارد و بخصوص روشهای تازه‌ای دربارهٔ ستاره‌های چند پر، که رشتهٔ از یاد رفته‌ای در هندسه بود، ارائه کرده است. بروژک برای نخستین‌بار ثابت کرد که بین ستاره‌های چندپر که تعداد رأسهای آنها عددی فرد باشد، همیشه یک وضع حاکم است : مجموع زاویه‌های آنها برابر است با دو قائمه. بروژک برای نخستین‌بار، روش ساختن انواع ستاره‌های چند پر را با معلوم بودن تعداد رأسهای آنها، مشخص کرد. او روش کاملاً تازه‌ای برای تشکیل چند ضلعیهای منتظم به کمک یک چند ضلعی که همان تعداد رأس را دارد، پیدا کرد.

۷.۵. رابطه‌های متری در هشت‌ضلعی منتظم

۱.۷.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به هشت‌ضلعی منتظم را بررسی می‌کنیم.

۲.۷.۵. زاویه

۱.۲.۷.۵. اندازهٔ زاویه

۹۸۱. در یک هشت‌ضلعی منتظم مسطح، زاویهٔ بین دو ضلع متوالی برابر است با :

الف) 90° ب) 120° ج) 135° د) 150°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۳.۷.۵. ضلع

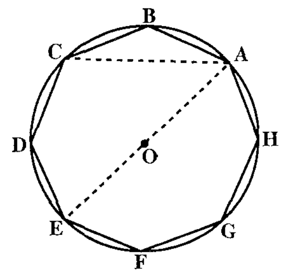
۱.۳.۷.۵. اندازهٔ ضلع

۹۸۲. اندازهٔ ضلع هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲۴cm را تعیین کنید.

۴.۷.۵. قطر

۱.۴.۷.۵. اندازهٔ قطر

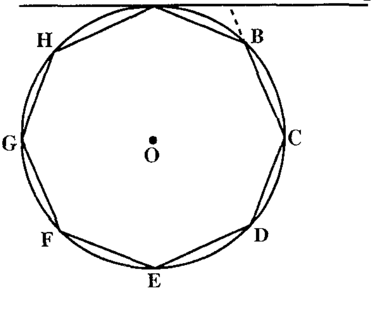
۹۸۳. اندازهٔ کوچکترین قطر و اندازهٔ بزرگترین قطر یک هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۲cm را تعیین کنید.



۵.۷.۵. پاره‌خط

۱.۵.۷.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۹۸۴. هشت‌ضلعی منتظم ABCDEFGH در دایره‌ای به شعاع R داده شده است. خط مماس بر دایره در نقطهٔ A امتداد ضلع CB را در نقطهٔ M قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خطهای AM و BM را بیابید.



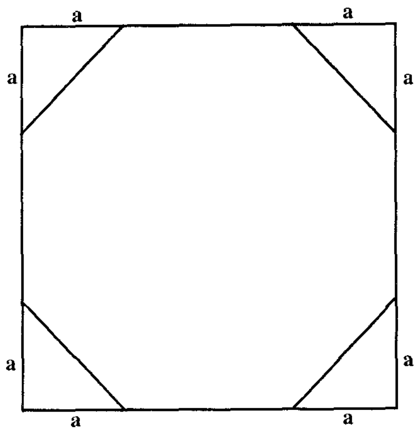
۲.۵.۷.۵. نسبت پاره‌خطها

۹۸۵. در شکل روبه‌رو، مساحت هشت‌ضلعی سه چهارم مساحت مربع است. نسبت طول a به طول ضلع مربع برابر است با :

الف) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{4}$

هـ) $\frac{\sqrt{2}}{8}$



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۶.۷.۵. شعاع دایره

۱.۶.۷.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۹۸۶. مساحت هشت‌ضلعی منتظم محیط بر یک دایره برابر $72(\sqrt{2}-1)\text{cm}^2$ است. اندازهٔ شعاع این دایره را بیابید.

۷.۷.۵. محیط

۱.۷.۷.۵. اندازهٔ محیط

۹۸۷. محیطهای هشت‌ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را حساب کنید. نصف مجموع این دو محیط را تعیین کنید و اختلاف آن را با محیط دایره به‌دست آورید.

۸.۷.۵. مساحت

۱.۸.۷.۵. اندازهٔ مساحت

۹۸۸. مطلوب است محاسبهٔ مساحت هشت‌ضلعی منتظم برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن.

۹۸۹. دایره‌ای را با نقطه‌های A، B، C، D، E، F، P و K به هشت قسمت تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم که $AB = CD = EF = PK$ ، $BC = DE = FP = KA$ و $AB = ۲BC$ است. اگر مساحت دایره برابر $۲۸۹\pi cm^۲$ باشد، مساحت هشت‌ضلعی ABCDEFPK را محاسبه کنید.

۹۹۰. روی گوشه‌های مربعی به ضلع a، قطعه‌هایی را طوری می‌بریم که یک هشت‌ضلعی منتظم به‌دست آید. مساحت این هشت‌ضلعی را محاسبه کنید.

۲.۸.۷.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۹۱. یک هشت‌ضلعی منتظمی در دایره‌ای به شعاع ۶ محاط شده است. مساحت بخشی از ناحیهٔ مستدیری را حساب کنید که بیرون هشت‌ضلعی است.

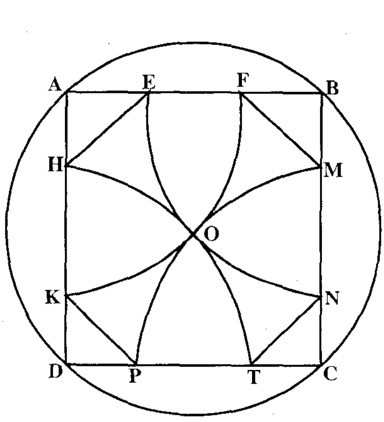
۹.۷.۵. رابطه‌های متری

۹۹۲. Q را نقطه‌ای از محیط دایره و $P_۱P_۲P_۳...P_۸$ را هشت‌ضلعی منتظم محاط در این دایره می‌گیریم. ثابت کنید: مجموع توانهای چهارم فاصله‌های نقطهٔ Q از قطرهای $P_۱P_۵$ ، $P_۲P_۶$ ، $P_۳P_۷$ ، $P_۴P_۸$ هشت‌ضلعی، به انتخاب جای نقطهٔ Q بر محیط دایره، بستگی ندارد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۱

۱۰.۷.۵. ثابت کنید هشت‌ضلعی منتظم است

۹۹۳. مربع ABCD به ضلع a را در نظر گرفته و مرکز آن را O می‌نامیم. به مرکزهای A، B، C و D چهار ربع دایره رسم می‌کنیم که از نقطهٔ O گذشته و با ضلعهای مربع محدود گردند.
ثابت کنید انتهای این کمانها رأسهای یک هشت‌ضلعی منتظم می‌باشند.



۱۱.۷.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۹۴. با بریدن مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه، از گوشه‌های مربعی، یک هشت‌ضلعی منتظم تشکیل می‌شود. اگر طول هر ضلع مربع یک واحد باشد، طول ساق هر یک از مثلثها برابر است با :

الف) $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۳}$ ب) $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}$

د) $\frac{۱+\sqrt{۲}}{۳}$ هـ) $\frac{۲-\sqrt{۲}}{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۹۹۵. یک هشت‌ضلعی منتظم را به کمک دو خط راست، به چهار بخش با مساحتهای برابر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید، این دو خط راست بر هم عمودند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۷

۱۲.۷.۵. مسأله‌های ترکیبی

۹۹۶. ضلعهای مربعی را از طرفین امتداد داده، روی امتداد هر یک طول معین l را جدا می‌کنیم :

۱. l را طوری انتخاب کنید که هشت نقطهٔ حاصل رأسهای یک هشت‌ضلعی منتظم باشند.

۲. از این راه طول ضلع و شعاع دایرهٔ محاطی هشت‌ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن حساب کنید.

۹۹۷. مربع ABCD به مرکز O را در نظر می‌گیریم.

۱. ثابت کنید که مرکزهای دایره‌های محاطی هشت مثلث AOB، BOC، COD، DOA، ABC، BCD، CDA و DAB رأسهای یک هشت‌ضلعی منتظم می‌باشند.

۲. مساحت این هشت ضلعی را برحسب a ضلع مربع حساب کنید.

۸.۵. رابطه‌های متری در ۹ ضلعی منتظم

۱.۸.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت به بررسی رابطه‌های متری مربوط به ۹ ضلعی منتظم می‌پردازیم.

۲.۸.۵ زاویه

۱.۲.۸.۵. اندازهٔ زاویه

۹۹۸. در یک نه ضلعی محدب، هرگاه اندازه‌های زاویه‌ها تصاعد حسابی تشکیل دهند، لازم می‌آید که اندازهٔ یکی از زاویه‌ها برابر باشد با :

الف) 108° ب) 120° ج) 135° د) 140° هـ) 144°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۹.۵. رابطه‌های متری در ۱۰ ضلعی منتظم

۱.۹.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت رابطه‌های متری مربوط به ۱۰ ضلعی منتظم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۹.۵. زاویه

۱.۲.۹.۵. اندازهٔ زاویه

۹۹۹. اندازهٔ هر زاویهٔ ده ضلعی منتظم چند درجه است؟

الف) 36° ب) 72° ج) 120° د) 144° هـ) 170°

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۳.۹.۵. ضلع

۱.۳.۹.۵. اندازهٔ ضلع

۱۰۰۰. طول ضلع ده ضلعی منتظم را برحسب R، شعاع دایرهٔ محیطی آن، بیان کنید.

۱۰۰۱. ثابت کنید که ضلع ۱۰ ضلعی منتظم محاطی برابر است با قطعهٔ بزرگتر شعاع، به شرطی که به نسبت ذات وسط و طرفین (نسبت طلایی) تقسیم شده باشد.

۱۰۰۲. نقطهٔ D را روی ضلع AB و نقطهٔ E را روی ضلع AC از مثلث ABC گرفته‌ایم. در ضمن، می‌دانیم:

$$DE \parallel BC\,,\ AD = DE = AC\,,\ BD = AE$$

ثابت کنید، طول BD برابر است با طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $R = AC$.

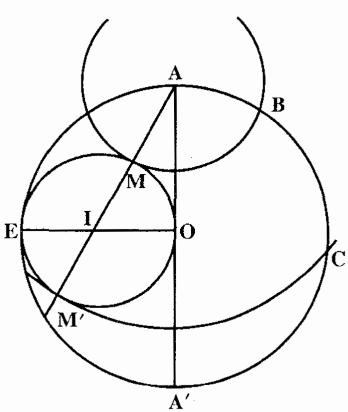
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸

۱۰۰۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = 90^\circ)$ ضلع BC دو برابر ضلع AB است. نیمساز داخلی زاویهٔ CAB را رسم می‌کنیم، تا BC را در D قطع کند. ثابت کنید که BD و AD بترتیب عبارتند از ضلع ده ضلعی و پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع AB.

۱۰۰۴. هرگاه AOA' و BOB' دو قطر عمود برهم از یک دایره و M و N نقطه‌های برخورد AA' با دایرهٔ به مرکز I وسط OA که از نقطهٔ B می‌گذرد، فرض شوند (M نقطه‌ای است که داخل دایره واقع است)، ثابت کنید که OM و BM عبارتند از ضلعهای ده‌ضلعی و پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ داده شده.

۱۰۰۵. ضلع AB از مربع محاط در دایرهٔ به مرکز O را به طول BC مساوی با آن امتداد داده، خط OC را وصل می‌کنیم تا دایره را در D و E قطع کند. ثابت کنید که CD مساوی دو برابر طول ده ضلعی منتظم محاط در دایره است.

۱۰۰۶. **رسم ده ضلعی منتظم.**



در دایرهٔ به شعاع R، قطر AA' و شعاع OE را عمود بر آن رسم می‌کنیم و وسط OE را I می‌نامیم و به قطر OE دایره‌ای رسم می‌کنیم. خط AI این دایره را در نقطه‌های M و M' قطع می‌کند (شکل). به‌طوری که:

$$AM = C_{10} \quad \text{و} \quad AM' = C'_{10}$$

برای تقسیم کردن دایره به ده کمان متساوی کافی است، کمانهای متوالی که وتر روبه‌روی آنها مساوی با AM باشد، رسم کنیم (از نقطه‌های A و A' و در دو جهت شروع می‌کنیم و AM' را برای امتحان صحت عمل به‌کار می‌بریم).

۱۰۰۷. محاسبهٔ C_{10} و C'_{10}. اندازهٔ ضلع ده ضلعی منتظم محاطی و اندازهٔ ضلع ده ضلعی منتظم محیطی نظیر دایرهٔ به شعاع R را حساب کنید.

۲.۳.۹.۵. رابطهٔ بین ضلعها

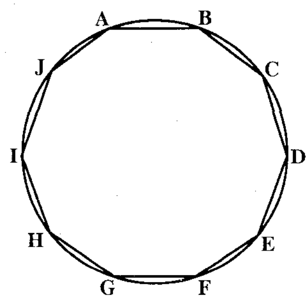
۱۰۰۸. ده ضلعی منتظم را می‌توان با یکی از دو روش زیر، در دایره محاط کرد :

۱. محیط دایره را به ۱۰ کمان برابر تقسیم و، سپس، نقطه‌های تقسیم متوالی را با پاره‌خطهای راست به هم وصل کنیم ؛

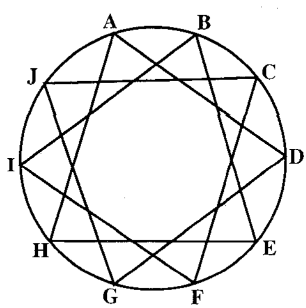
۲. نقطه‌های تقسیم را دو در میان با پاره‌خطهای راست به‌هم وصل کنیم (شکلهای الف و ب).

ثابت کنید تفاضل ضلعهای این دو ده ضلعی، برابر است با شعاع دایرهٔ محیطی آنها.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۸



(الف)



(ب)

۱۰۰۹. قضیه. تفاضل ضلعهای ده ضلعیهای محدب و ستاره‌ای محاط در یک دایره مساوی است با شعاع آن دایره و واسطهٔ هندسی آنها نیز مساوی است با شعاع همان دایره.

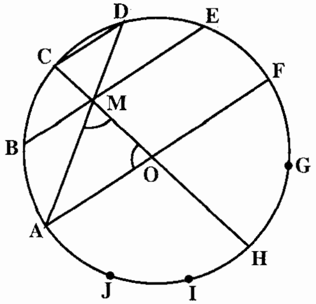
۴.۹.۵. قطر

۱.۴.۹.۵. اندازهٔ قطر

۱۰۱۰. اندازهٔ کوچکترین قطر در ده ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۸cm را بیابید.

۵.۹.۵. پاره‌خط

۱.۵.۹.۵. اندازهٔ پاره‌خط

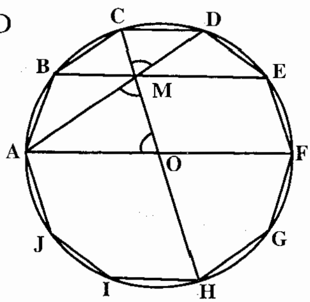


۱۰۱۱. در ده ضلعی منتظم ...ABCDEF محاط در دایرهٔ به شعاع R، نقطهٔ برخورد AD و BE را M می‌نامیم. اندازهٔ پاره‌خط AM را تعیین کنید.

۲.۵.۹.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۰۱۲. اندازهٔ وتر نظیر سه کمان متوالی از دایرهٔ محیطی یک ۱۰ ضلعی منتظم برابر است با شعاع دایرهٔ محیطی ۱۰ ضلعی منتظم به اضافهٔ یک ضلع ۱۰ ضلعی منتظم. یعنی در ده ضلعی ...ABCDEFGH محاط در دایرهٔ O داریم :

$$AD = AO + CD$$



۶.۹.۵. شعاع دایره

۱.۶.۹.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۱۰۱۳. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی ۱۰ ضلعی منتظمی به مساحت $320 \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cos 18^\circ$ را تعیین کنید.

۷.۹.۵. محیط

۱.۷.۹.۵. اندازهٔ محیط

۱۰۱۴. اندازهٔ محیط ۱۰ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع 18cm را تعیین کنید.

۸.۹.۵. مساحت

۱.۸.۹.۵. اندازهٔ مساحت

۱۰۱۵. اندازهٔ مساحت ۵ ضلعی منتظم و ۱۰ ضلعی منتظم محاطی را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن محاسبه کنید.

۹.۹.۵. رابطه‌های متری

۱۰۱۶. هرگاه AB و AC ضلعهای پنج‌ضلعی و ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به مرکز O باشند (C وسط کمان AB است) و نیمساز زاویهٔ AOC ضلع AB را در D قطع کند، ثابت کنید که دو مثلث ABC و AOB بترتیب با دو مثلث ACD و ODB متشابه‌اند و از آن‌جا نتیجه بگیرید :

$$AB^{۲} - AC^{۲} = R^{۲}$$

۱۰۱۷. ثابت کنید که شعاع یک دایره و ضلع ده ضلعی منتظم ستاره‌ای محاط در آن دایره و ضلع پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای محاط در آن دایره ضلعهای یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

$$R^{۲} + C_{۱۰}^{۲} = C_{۵}^{۲}$$

۱۰.۹.۵. شکلهای ایجاد شده

۱۰۱۸. ثابت کنید که اگر ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه مساوی با ضلعهای ده‌ضلعیهای منتظم محدب و ستاره‌ای محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد وتر آن مثلث مساوی با ضلع مثلث منتظم محاط در همان دایره خواهد بود.

$$C_{۳}^{۲} = ۲C_{۱۰}^{۲}$$

۱۰۱۹. ثابت کنید که اگر ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه، مساوی با شعاع یک دایره و ضلع ده ضلعی منتظم محدب محاط در آن دایره باشد، وتر آن مثلث، مساوی با ضلع پنج‌ضلعی منتظم محدب محاط در آن دایره خواهد بود.

$$R^{۲} + C_{۱۰}^{۲} = C_{۵}^{۲}$$

۱۱.۹.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۲۰. دو ۱۰ ضلعی منتظم داده شده است که در هر رأس از هر ده ضلعی، یک عدد طبیعی قرار دارد. می‌دانیم، مجموع عددها در هر ۱۰ ضلعی، برابر است با ۹۹. ثابت کنید، در دو چند ضلعی، می‌توان چند رأس پشت‌سرهم را (و نه همهٔ رأسها را) طوری انتخاب کرد که، مجموعهایی برابر داشته باشند.

۱۰.۵. رابطه‌های متری در ۱۱ ضلعی منتظم، ۱۲ ضلعی منتظم، ...

۱.۱۰.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت به بررسی رابطه‌های متری مربوط به ۱۱ ضلعی منتظم، ۱۲ ضلعی منتظم، ۱۳ ضلعی منتظم، ... و به‌طورکلی n ضلعیهای منتظم با تعداد ضلعهای محدود می‌پردازیم.

۲.۱۰.۵. زاویه

۱.۲.۱۰.۵. اندازهٔ زاویه

۱۰۲۱. اندازه‌های هر یک از زاویه‌های چهارضلعی، شش‌ضلعی، هشت‌ضلعی و دوازده‌ضلعی منتظم را حساب کنید.

۱۰۲۲. یک چند ضلعی محدب ۱۳ ضلع دارد. مجموع اندازه‌های ۱۳ زاویهٔ برونی این چندضلعی چه‌قدر است؟

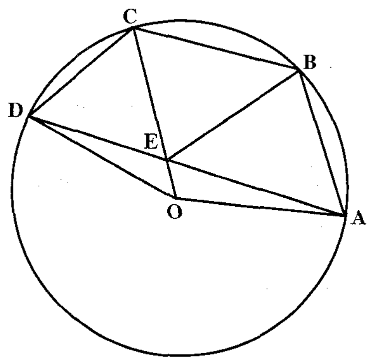
۳.۱۰.۵. ضلع

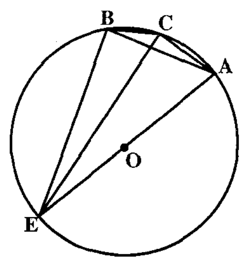
۱.۳.۱۰.۵. اندازهٔ ضلع ۱۲ ضلعی منتظم

۱۰۲۳. مطلوب است محاسبهٔ ضلع ۱۲ ضلعی منتظم محیطی برحسب شعاع دایرهٔ محاطی آن.

۵.۱۰.۳.۲. محاسبهٔ ضلع ۱۵ ضلعی منتظم

۱۰۲۴. در دایره‌ای وتر AB را برابر R و وتر AC را برابر C_{10} جدا می‌کنیم (C روی قوس کوچکتر وتر AB است). ثابت کنید وتر CB برابر C_{15} می‌باشد و به این ترتیب راهی برای رسم ۱۵ ضلعی منتظم پیدا کنید. همچنین ضلع ۱۵ ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن به‌دست آورید.





۵.۱۰.۳.۳. اندازهٔ ضلع ۱۶ ضلعی منتظم

۱۰۲۵. طول ضلع ۱۶ ضلعی منتظم محاطی در دایرهٔ به شعاع R را به‌دست آورید.

۵.۱۰.۳.۴. اندازهٔ ضلع ۲۰ ضلعی منتظم

۱۰۲۶. ضلع بیست ضلعی منتظم محاطی را برحسب R، شعاع دایرهٔ محیطی آن، محاسبه کنید.

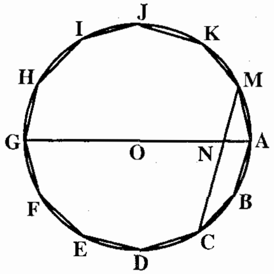
۵.۱۰.۴. قطر

۵.۱۰.۴.۱. اندازهٔ قطر

۱۰۲۷. مساحت یک ۱۲ ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای برابر $۲۴۳cm^2$ است. اندازهٔ بزرگترین قطر این ۱۲ ضلعی منتظم را بیابید.

۵.۱۰.۵. پاره‌خط

۵.۱۰.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۱۰۲۸. در دوازده ضلعی منتظم ABCDEFG…M قطر AG که از مرکز دایره می‌گذرد قطر MC را در N قطع می‌کند. اندازهٔ پاره‌خطهای ایجاد شده روی این دو قطر را برحسب R تعیین کنید.

۵.۱۰.۶. شعاع دایره

۵.۱۰.۶.۱. اندازهٔ شعاع دایره

۱۰۲۹. محیط ۱۲ ضلعی منتظم محاط در یک دایره برابر $۸(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$ است. اندازهٔ شعاع این دایره را تعیین کنید.

۵.۱۰.۷. محیط

۵.۱۰.۷.۱. اندازهٔ محیط

۱۰۳۰. مساحت ۱۲ ضلعی منتظم محاط در یک دایره برابر $۷۵cm^۲$ است. اندازهٔ محیط این دایره را بیابید.

۵.۱۰.۸. مساحت

۵.۱۰.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۱۰۳۱. مربعی با ضلع a معلوم است. روی هر یک از ضلعهای مربع و خارج آن ذوزنقه‌هایی را طوری رسم می‌کنیم که قاعده‌های بالایی و ضلعهای جانبی آنها یک دوازده ضلعی منتظم تشکیل دهند. مساحت این دوازده ضلعی را محاسبه کنید.

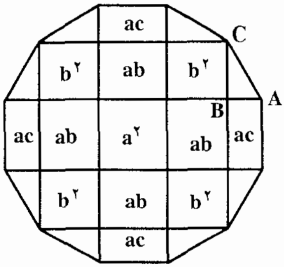
۱۰۳۲. مساحت دوازده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع r سانتیمتر، برحسب سانتیمتر برابر است با:

الف) $۳r^۲$ ب) $۲r^۲$ ج) $\frac{۳r^۲\sqrt{۳}}{۴}$ د) $r^۲\sqrt{۳}$ هـ) $۳r^۲\sqrt{۳}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۱۰۳۳. محاسبهٔ مساحت دوازده‌ضلعی منتظم

ایتالوجرسی ریاضیدان و مهندس معاصر ایتالیایی روش ساده‌ای برای پیدا کردن مساحت دوازده‌ضلعی منتظم به‌دست آورده است.



دوازده‌ضلعی را به نحوی که در شکل نشان داده شده است، تقسیم می‌کنیم. در مثلث ABC، ضلع AC را که مساوی ضلع دوازده‌ضلعی است مساوی a، ضلع CB را مساوی b و ضلع AB را مساوی c می‌گیریم. روشن است $c=\frac{a}{2}$، زیرا:

$B\hat{A}C=150^\circ-90^\circ=60^\circ$ و در ضمن $b=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. تمام مساحت دوازده‌ضلعی با این معادله بیان می‌شود:

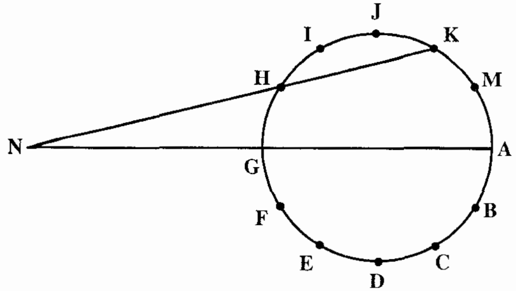
$$S=a^2+4ac+4b^2+4ab+8\times\frac{bc}{2}$$

از این‌جا، پس از قرار دادن مقدارهای b و c برحسب a، به‌دست می‌آید:

$$S=3a^2(2+\sqrt{3})$$

۹.۱۰.۵. رابطه‌های متری

۱۰۳۴. دوازده‌ضلعی منتظم ABCDEFGHK...M (شکل زیر) در دایره‌ای به شعاع 8cm محاط است. نقطهٔ برخورد AG و KH را N می‌نامیم. قوت نقطهٔ N نسبت به این دایره را بیابید.



۵.۱۰.۱۰. ثابت کنید چندضلعی منتظم است

۵.۱۰.۱۰.۱. ثابت کنید چندضلعی ۱۲ ضلعی منتظم است

۱۰۳۵. روی هر یک از ضلعهای شش‌ضلعی منتظمی روبه خارج مربعی می‌سازیم. ثابت کنید که دوازده نقطهٔ حاصل رأسهای یک دوازده‌ضلعی منتظم می‌باشند و از این‌رو طول ضلع و شعاع دایرهٔ محاطی دوازده‌ضلعی منتظم را برحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن حساب کنید.

۱۰۳۶. مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM، DAN را داخل مربع ABCD رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، وسطهای چهار پاره‌خط : KL، LM، MN و NK و وسطهای هشت پاره‌خط : AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN دوازده رأس یک دوازده ضلعی منتظم‌اند.

نوزدهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۷

۵.۱۰.۱۰.۲. ثابت کنید چندضلعی ۱۸ ضلعی منتظم است

۱۰۳۷. هر زاویهٔ بین دو قطر دلخواه یک ۱۸ ضلعی، برحسب درجه، با عددی درست بیان می‌شود. ثابت کنید، با یک ۱۸ ضلعی منتظم سر و کار داریم.

۵.۱۰.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۳۸. ۹ رأس یک ۲۰ ضلعی منتظم را علامت گذاشته‌ایم. ثابت کنید، مثلث متساوی‌الساقینی می‌توان پیدا کرد که، رأسهای آن، در نقطه‌های نشان‌دار باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۱۰۳۹. ۴۵ ضلعی منتظم داده شده است. آیا می‌توان رأسهای آن را، با عددهای از ۰ تا ۹ طوری شماره‌گذاری کرد که، برای هر دو عدد مختلف، ضلعی وجود داشته باشد که دو انتهای آن با این عددها شماره‌گذاری شده باشد؟

۱۰۴۰. در رأسهای یک ۱۰۰ ضلعی منتظم، عددهای درستی گذاشته‌ایم. جهت را سمت حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. هر دقیقه، هر یک از عددها، تغییر می‌کند و به تفاضل این عدد با عدد بعد از خودش تبدیل می‌شود. ثابت کنید، بعد از پنج دقیقه، مجموع عددهای رأسهای ۱۰۰ ضلعی، بر ۵ بخشپذیر است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۱۰۴۱. آیا عدد طبیعی k وجود دارد، به‌نحوی که از هر ۱۸۰ رأس دلخواه یک ۳۶۰ ضلعی منتظم، به مرکز O، بتوان دو رأس A و B را طوری انتخاب کرد که، مقدار زاویهٔ AOB، برابر k درجه باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۱۰۴۲. ۴۰۰ ضلعی منتظم را به‌صورت متوازی‌الاضلاعهایی بریده‌ایم. ثابت کنید، در بین این متوازی‌الاضلاعها، دست‌کم ۱۰۰ مستطیل وجود دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳

۱۰۴۳. در ۱۹۷۶ ضلعی منتظم، وسط همهٔ ضلعها و وسط همهٔ قطرها را علامت گذاشته‌ایم. از این نقطه‌ها، حداکثر چند نقطه روی محیط یک دایره‌اند؟

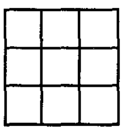
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۶

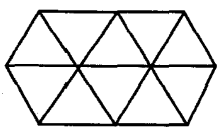
۱۲.۱۰.۵. مسأله‌های ترکیبی

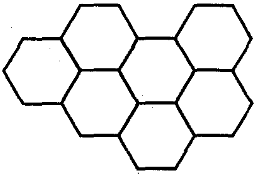
۱۰۴۴. ۱. سهم یک چند ضلعی منتظم به مساحت ۲۲۵ و محیط ۶۰ را بیابید.
۲. تعداد ضلعهای این چند ضلعی را تعیین کنید.

۱۱.۵. صفحه‌بندی

تعریف. صفحه‌بندی (Tessellation) نمونه‌ای از چند ضلعیهایی است که برای پوشاندن یک صفحهٔ کامل، بدون روی هم افتادن، پهلوی یکدیگر قرار داده می‌شوند. صفحه‌بندیهای منتظم (Regular Tessellations) صفحه‌بندیهایی هستند که در آنها همهٔ چند ضلعیها همنهشت و منتظم، با رأسهای مشترکند.


(الف)

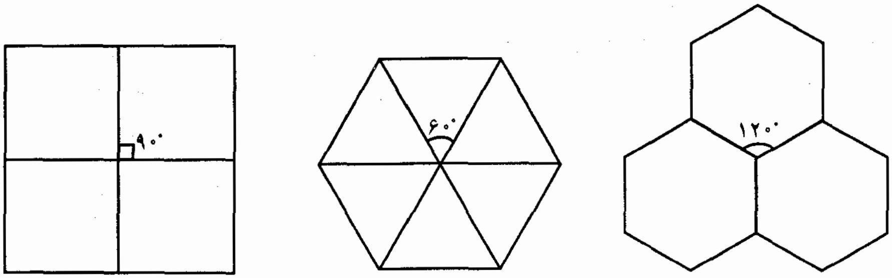

(ب)


(پ)

شکل صفحه‌بندیهای منتظمی را با مربعها، مثلثهای متساوی‌الاضلاع، و شش‌ضلعیهایی منتظم نشان می‌دهد. اما این که این سه، تنها صفحه‌بندیهای منتظمند، در اثبات قضیهٔ بعد ثابت شده است.

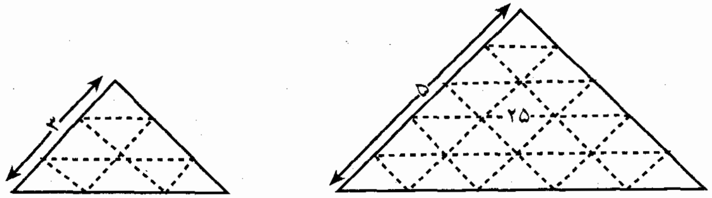
۱۰۴۵. **قضیه.** تنها سه صفحه‌بندی منتظم صفحه، صفحه‌بندیهای با مربع، مثلث متساوی‌الاضلاع، و شش‌ضلعی منتظمند.

نکته. می‌گویند که فیثاغورس برای نخستین‌بار به این مطلب توجه کرد که صفحه را دور یک نقطه تنها با سه نوع چندضلعیهای منتظم می‌توان پوشاند، یعنی: مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم (شکل الف).



(الف)

بالاخره فیثاغورس این قضیهٔ مهم را می‌دانست که مساحتهای دو شکل متشابه نسبتی مساوی مجذور نسبت دو ضلع متناظر با آنها دارند (شکل ب).



(ب)

اگر این قضیه را واقعاً فیثاغورس کشف کرده باشد، این قدرت را هم داشته است که مسأله‌هایی از این قبیل را حل کند: شکل مسطحه‌ای بسازید که متشابه با یک شکل داده شده و هم‌ارز با شکل داده شدهٔ دیگر باشد. این فرض خیلی به حقیقت نزدیک است، زیرا ساختن شکلها، و نه تنها شکلهای مسطحه، یکی از سرگرمیهای خاص فیثاغورس بوده است.

نکته‌هایی بیشتر در مورد صفحه‌بندی

۱۰۴۶. چیدن کف‌پوش چوبی (پارکت).

بسیاری از خواننده‌ها تعجب خواهند کرد که همین کف‌پوشهای چوبی و تخته‌ای که هر روز در سرسراها و راهروها از روی آنها عبور می‌کنیم، می‌توانند موضوع جالبی برای بررسی ریاضی باشند.

شکل این تخته‌ها معمولاً خیلی ساده است و مجموعهٔ ترکیبی آنها هم به‌ندرت ما را دچار شگفتی می‌کند، ولی به‌هرحال ولو برای مدتی کوتاه می‌تواند از نظر رابطهٔ کف‌پوش با ریاضیات مورد توجه قرار گیرد. به‌طور معمول در این مورد سر و کار ما با قانونهای مربوط به مثلث، مربع، شش‌ضلعی، هشت‌ضلعی و دوازده‌ضلعی منتظم است.

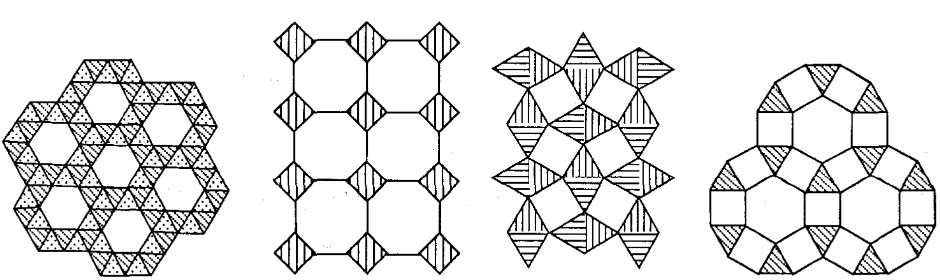
اینهاست نمونه‌هایی که اغلب در مجموعه‌های ترکیبی کف‌پوشها به آنها برخورد می‌کنیم (شکل الف).

۱. از تخته‌هایی با دو شکل : مثلث و شش‌ضلعی، مربع و هشت‌ضلعی، مثلث و مربع.

۲. از تخته‌هایی با سه شکل : مثلث، مربع و شش‌ضلعی.

می‌دانیم که فیثاغورس باید نخستین کسی باشد که معلوم کرد که سطح اطراف یک نقطه را روی یک صفحه، تنها با سه نوع از شکلهای منتظم می‌توان، بدون فاصله، پوشانید : مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم. ولی در این جا ما با مسألهٔ کلی‌تری روبه‌رو هستیم و می‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که در اطراف یک نقطه، چگونه می‌توان با چند ضلعیهای مختلف منتظم، سطح صفحه را بدون وجود شکاف و فاصله پوشانید.

اگر تعداد ضلعهای چند ضلعی منتظم را n فرض کنیم، مجموع همهٔ زاویه‌های داخلی آن مساوی $۱۸۰(n-۲)$ درجه و اندازهٔ هر زاویهٔ آن مساوی $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$ درجه می‌شود.



(الف)

برای این که بتوانیم تعداد چند ضلعیهای منتظمی که می‌توانند در یک نقطه، صفحه را بپوشانند، گروه‌بندی کنیم، باید توجه کنیم که مجموع زاویه‌هایی که دور این نقطه قرار گرفته‌اند، مساوی چهار زاویهٔ قائمه، یعنی ۳۶۰ درجه، می‌شوند. کمترین تعداد گروه چند ضلعیهای منتظمی که می‌توانند صفحه را دور یک نقطه پر کنند، مساوی ۳ و بیشترین تعداد مساوی ۶ است.

در اوّلین نوع از این شکلها فرض می‌کنیم سه نوع چند ضلعی منتظم بترتیب n_1 ، n_2 و n_3 ضلع داشته باشند، در ضمن $n_1 \le n_2 \le n_3$. در این صورت اندازهٔ هر یک از زاویه‌های داخلی این چند ضلعیها بترتیب چنین است (برحسب درجه) :

$$\frac{180(n_1-2)}{n_1};\frac{180(n_2-2)}{n_2};\frac{180(n_3-2)}{n_3}$$

و بنابراین مجموع این سه زاویه (برحسب درجه) چنین می‌شود :

$$180\left[\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right]$$

مجموع این سه زاویه باید مساوی ۳۶۰ درجه باشد، از آن‌جا خواهیم داشت :

$$\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}=2$$

که بعد از تبدیلهای لازم چنین می‌شود :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

البته ساده‌ترین چند ضلعی منتظم مثلث است.

بنابراین فرض می‌کنیم که $n_1 = 3$ و سعی می‌کنیم ببینیم کدام چند ضلعیها را می‌توان در یک نقطه به مثلث وصل کرد.

تساوی (۱) به این صورت درمی‌آید :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

و از آن‌جا :

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{6}$$

باید داشته باشیم $12 \le n_2 \le 6$ ، زیرا به‌ازای $n_2 \le 6$ برای n_3 جوابی به‌دست نمی‌آید و یا این که منفی می‌شود، و برای $n_2 > 12$ شرط $n_3 > n_2$ برقرار نمی‌شود، زیرا زاویهٔ دوازده‌ضلعی منتظم مساوی ۱۵۰ درجه است و زاویهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع

هم ۶۰ درجه بود، مجموع این دو زاویه ۲۱۰ درجه می‌شود و $360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$،
یعنی بزرگترین مقدار n_2 مساوی ۱۲ است.
براساس آنچه که گفتیم نتیجه می‌شود که:

$n_2 = 7;\quad n_3 = 42$

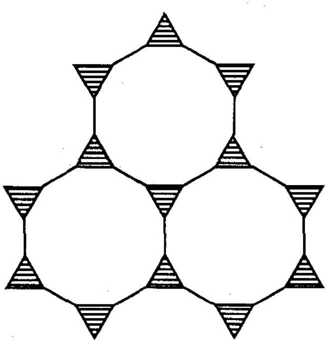
$n_2 = 8;\quad n_3 = 24$

$n_2 = 9;\quad n_3 = 18$

$n_2 = 10$؛ برای n_3 عدد صحیحی به‌دست نمی‌آید

$n_2 = 12;\quad n_3 = 12$

به‌ازای ترکیب اوّل: $n_1 = 3$، $n_2 = 7$ و $n_3 = 42$ نمی‌توانیم کف‌پوش را روی صفحه قرار دهیم. در حقیقت در طرف یکی از ضلعها یا در کنار دو زاویهٔ مثلث می‌توان صفحه را بدون وجود فاصله با این سه نوع چند ضلعی پوشانید، ولی این ترکیب را نمی‌توان در اطراف رأس سوم مثلث به نتیجه رسانید. ترکیبهای دوم و سوم هم نتیجهٔ خوبی نمی‌دهند. تنها ترکیبی که به کمک آن می‌توان نه تنها اطراف یک نقطه، بلکه تمام دور مثلث را، بدون وجود فاصله، پوشانید عبارت است از ترکیب $n_1 = 3$، $n_2 = 12$ و $n_3 = 12$ (شکل ب).



(ب)

حالا به بررسی معادلهٔ (۱) با فرض $n_1 = 4$ می‌پردازیم. در این حالت:

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}$$

این معادله، با توجه به شرط $n_2 \le n_3$ منجر به شرط $4 \le n_2 \le 8$ می‌شود.
دوباره به این ترکیبها می‌رسیم:

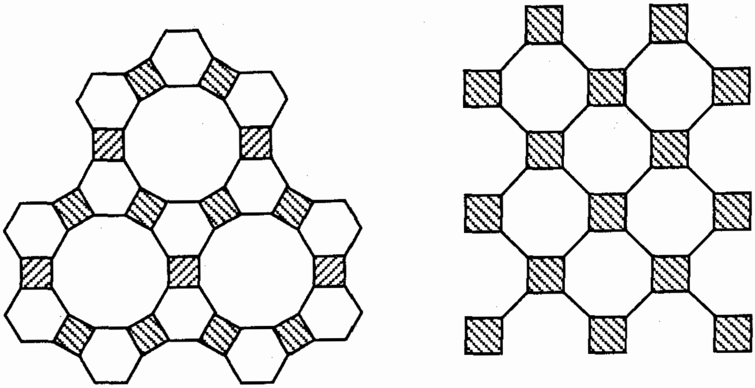
$n_2 = 5;\quad n_3 = 20$

$n_2 = 6;\quad n_3 = 12$

$n_2 = 7$؛ برای n_3 عدد صحیحی به‌دست نمی‌آید

$n_2 = 8;\quad n_3 = 8$

که از بین این حالتها دو حالت : $n_1 = ۴$ ، $n_2 = ۶$ ، $n_3 = ۱۲$ و همچنین $n_1 = ۴$ ، $n_2 = ۸$ ، $n_3 = ۸$ قابل قبول است. در این دو حالت می‌توان صفحه را در تمام رأسهای مربع به‌طور کامل پوشانید (شکل پ).



(پ)

به‌ازای $n = ۵$ هیچ‌یک از ترکیبها ممکن نمی‌شود و این به معنای آن است که اگر بخواهیم در کف‌پوش، پنج‌ضلعی منتظم داشته باشیم، باید برای پر کردن صفحه از چندضلعیهای غیرمنتظم استفاده کنیم. به این ترتیب، با توجه به این شرط که در هر رأس تنها سه چند ضلعی منتظم وجود داشته باشد، تنها چهار حالت ممکن به‌دست می‌آید : مثلث، دوازده‌ضلعی و دوازده‌ضلعی ؛ مربع، شش‌ضلعی و دوازده‌ضلعی ؛ مربع، هشت‌ضلعی و هشت‌ضلعی ؛ شش‌ضلعی، شش‌ضلعی و شش‌ضلعی و حالا به حالت ترکیب چهارتایی می‌پردازیم، یعنی وقتی که در نقطهٔ اتصال تخته‌ها باید چهار چندضلعی منتظم وجود داشته باشد. معادلهٔ قبل در این‌جا به این صورت درمی‌آید :

$$\frac{۱}{n_1}+\frac{۱}{n_2}+\frac{۱}{n_3}+\frac{۱}{n_4}=۱$$

و در ضمن $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$.

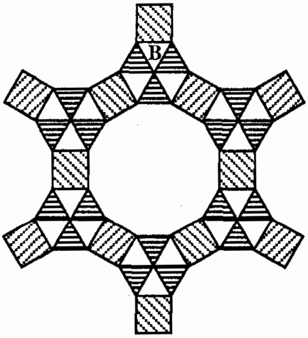
بعد از استدلالی شبیه حالت قبل، به ترکیبهای زیر می‌رسیم :

$n_1 = ۳,\quad n_2 = ۳,\quad n_3 = ۴,\quad n_4 = ۱۲$

$n_1 = ۳,\quad n_2 = ۳,\quad n_3 = ۶,\quad n_4 = ۶$

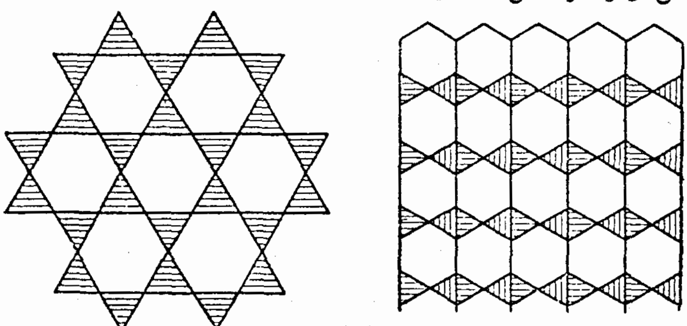
$n_1 = ۳,\quad n_2 = ۴,\quad n_3 = ۴,\quad n_4 = ۶$

$n_1 = ۴,\quad n_2 = ۴,\quad n_3 = ۴,\quad n_4 = ۴$

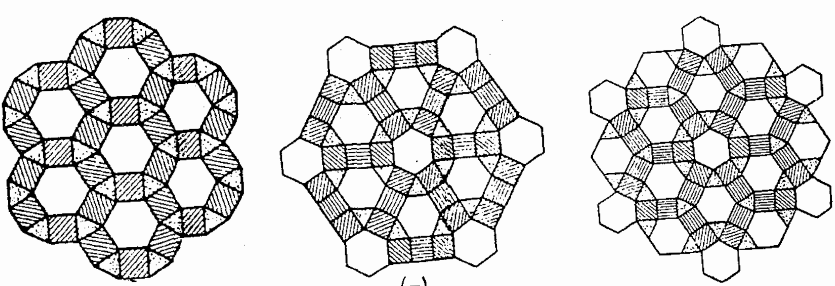


(ت)

ترکیب اول قابل اجرا نیست. ولی اگر رأس سوم مثلث را تنها با مثلثهایی پر کنیم، نقشی شبیه شکل (ت) به‌دست می‌آید.
ولی در این نقش، مثلثهایی که دور نقطهٔ B گرد آمده‌اند، یک شش‌ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند و در نتیجه همان ترکیب سه تایی (۴، ۶، ۱۲) به‌دست می‌آید.
ترکیب دوم ممکن است و می‌توان دو حالت ممکن آن را در شکل (ث) دید.


(ث)

ترکیب سوم سه نوع نقش جالب می‌دهد (شکل ج).


(ج)

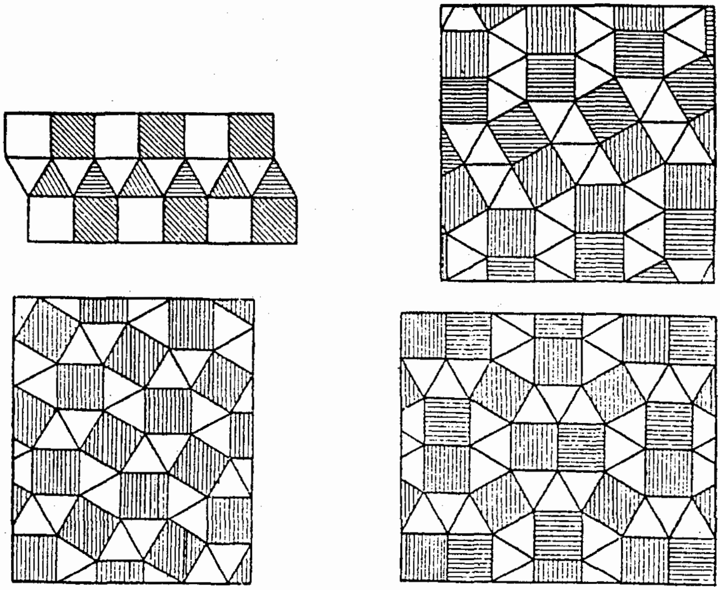
متذکر می‌شویم که در این سه نقش، با وجودی که از لحاظ قرار گرفتن تخته‌ها با هم اختلاف دارند، در هر نقطهٔ گرهی وضع قرار گرفتن چند ضلعیها با هم فرق دارد.
حالا به حالت ترکیب پنج‌تایی می‌پردازیم، یعنی حالتی که در هر نقطه، پنج چند ضلعی منتظم به‌هم وصل شده باشند. شبیه حالتهای قبل در این‌جا به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

و در ضمن $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le n_5$. در این حالت تنها دو ترکیب پیدا می‌شود :

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 4, \quad n_5 = 4$$

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 3, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 3, \quad n_5 = 6$$

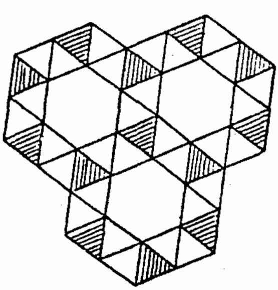


(چ)

ترکیب اوّل چهار نقش مختلف به‌وجود می‌آورد (شکلِ چ).

نوع دوم از حالت ترکیب پنج‌تایی تنها یک نقش می‌دهد (شکل ح).

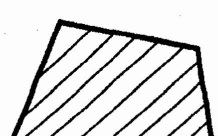
ترکیب شش‌تایی، یعنی حالتی که در هر نقطه شش چند ضلعی به هم وصل شده باشند، تنها یک حالت دارد :



(ح)

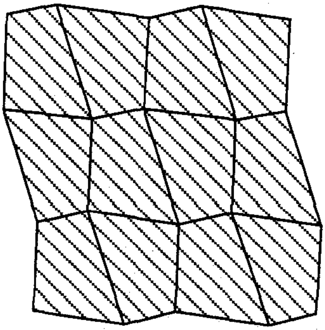
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 3$$

در یک کارخانهٔ چوب‌بری مقدار زیادی پاره‌تخته‌های اضافی به شکل یک چهارضلعی محدب نامنظم (شکل خ) روی هم جمع شده بود.



(خ)

به نظر می‌رسید که این پاره‌تخته‌ها مصرفی نداشته باشند، تا این که یک کارگر به این مطلب توجه کرد که مجموع زاویه‌های این چهارضلعی مساوی ۳۶۰ درجه، یعنی همان مقداری است که برای پرکردن صفحه دور یک نقطه لازم است. از همین نکته خوشحال شد و فکر کرد که می‌شود که از این پاره‌تخته‌ها به‌عنوان کف‌پوش استفاده کرد. البته نقشهٔ کف‌پوش نامنظم می‌شود، ولی همین که برای پاره تخته‌های اضافی مورد مصرفی پیدا می‌شود، می‌تواند صرفه‌جویی جالبی باشد (شکل خ).

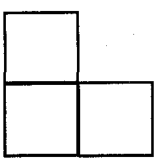


(خ)

۱۰۴۷. آیا می‌توان تمامی صفحه را، با مربعهایی پوشاند که، در بین آنها تنها دو مربع مساوی وجود داشته باشد؟

۱۰۴۸. آیا ممکن است مربعی به ضلع ۵/۴ را با سه مربع به ضلع واحد پوشاند؟

۱۰۴۹. شکل روبه‌رو یک کاشی را نشان می‌دهد که از سه مربع ۱×۱ تشکیل شده است.



الف. آیا با استفاده از این کاشیها می‌توان یک مستطیل ۵ در ۴ را فرش کرد؟

ب. آیا با شش کاشی از این نوع می‌توان مستطیل ۵ در ۴ را که دو مربع از گوشه‌های مقابلش حذف شده باشد، فرش کرد؟

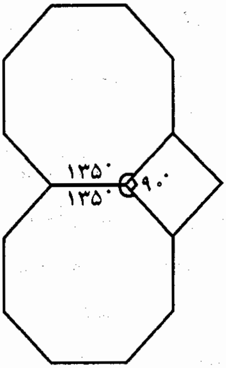
پ. آیا با این کاشیها می‌توان یک مربع ۶ در ۶ را فرش کرد؟

ت. آیا با ۲۴ کاشی از این نوع می‌توان یک مستطیل ۶ در ۱۲ را فرش کرد؟ یک مستطیل ۸×۹ را چطور؟

۱۰۵۰. بررسی کنید برای پوشاندن یک صفحه با مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت، باید هر چند مثلث در یک رأس مشترک باشند؟

۱۰۵۱. بررسی کنید، از کدام چندضلعیهای منتظم غیر از مثلث متساوی‌الاضلاع، برای پوشاندن یک صفحه می‌توان استفاده کرد؟ در هر مورد در هر رأس چه تعداد چندضلعی کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱۰۵۲. دو هشت‌ضلعی منتظم و یک مربع وقتی مطابق این شکل قرار می‌گیرند بخشی از صفحه را که حول یک نقطه قرار دارد می‌پوشانند. ترکیبهای دیگری ارائه کنید که با سه چند ضلعی منتظم (دو تای آنها یک جور باشند) بتوان چنین کرد. باید بتوانید دو ترکیب دیگر پیدا کنید.



۱۰۵۳. تحقیق کنید که چه مکانهایی برای پوشاندن یک سطح با چند ضلعیهای منتظم وجود دارند. جدولی از اندازهٔ زاویه‌های چند ضلعیهای منتظم، می‌تواند در کشف ترکیبهای ممکن کمک مؤثری باشد.

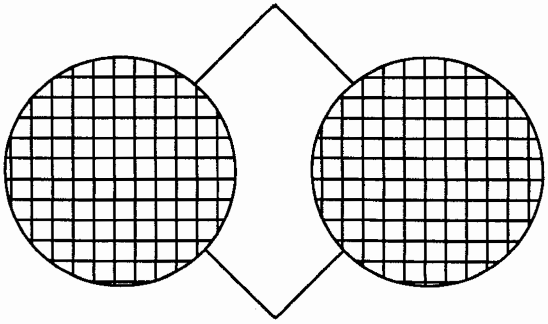
۱۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۰۵۴. تعداد محورهای تقارن n ضلعیهای منتظم را تعیین کنید.

۱۰۵۵. پوشش میز مربعی.

می‌خواهیم یک میز مربعی، به ضلع ۹۰ سانتیمتر، را با دو تا رومیزی دایره‌ای، هر کدام به قطر یک متر، بپوشانیم. آیا این کار ممکن است؟

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه



۱۰۵۶. از مربعها، مستطیل بسازید.

پدر بزرگ توماس یک پازل خیلی قدیمی، و در عین حال فکری، به وی هدیه داده است. این پازل از ۹ مربع به ابعاد مختلف تشکیل یافته است، که طول هر ضلع از آنها بترتیب عبارتند از: ۱۸، ۱۵،۱۴، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۴ و ۱ سانتیمتر.
یک یادداشت جهت استفاده از این پازل نیز همراه آن داشت. بدین مضمون: اگر این مربعها را به روش خاصی کنار هم بچینید، یک مستطیل بزرگ حاصل می‌شود. با رسم یک «شما» از تلفیق آنها یک مستطیل بسازید.

المپیادهای ریاضی برای همه، مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی فرانسه

۱۰۵۷. E. تبدیل یک پنج ضلعی منتظم به مربع (پیچیده‌ترین نوع تبدیل).

۱۰۵۸. چگونه می‌توان یک شش‌ضلعی منتظم را به مربع تبدیل کرد؟

۱۰۵۹. با رسم و توضیح عددی نشان دهید که چرا هشت‌ضلعی منتظم نمی‌تواند برای صفحه‌بندی منتظم به‌کار رود.

۱۰۶۰. a) در رأس A_1 از دوازده‌ضلعی منتظم $A_1A_2...A_{12}$ ، علامت منفی، و در بقیهٔ رأسها، علامت مثبت گذاشته‌ایم. تصمیم می‌گیریم، به‌طور هم‌زمان، علامت رأسهای شش رأس متوالی را، عوض کنیم. ثابت کنید، نمی‌توان با تکرار چند بار این عمل، به جایی رسید که علامت رأس A_2 منفی و علامت بقیهٔ رأسها مثبت باشد.

b) همین حکم را، برای حالتی که به جای شش رأس متوالی، علامتهای چهار رأس متوالی چند ضلعی را عوض کنیم، ثابت کنید.

c) همین حکم را برای موردی ثابت کنید که، تصمیم بگیریم، به‌طور هم‌زمان، علامتهای سه رأس متوالی چند ضلعی را عوض کنیم.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

راهنمایی و حل

از آن جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید ؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

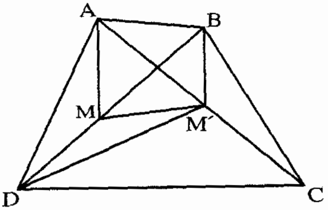
بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل، یا راهنمایی، نمی‌باشند ؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هرچند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، اما ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱

رابطه‌های متری در چهارضلعی

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. M و M′ را وسطهای قطرهای چهارضلعی اختیار می‌کنیم (شکل). در مثلث ABC می‌نویسیم:

$$AB^۲ + BC^۲ = ۲BM'^۲ + \frac{AC^۲}{۲} \qquad (۱)$$

در مثلث ADC می‌نویسیم:

$$AD^۲ + DC^۲ = ۲DM'^۲ + \frac{AC^۲}{۲} \qquad (۲)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت:

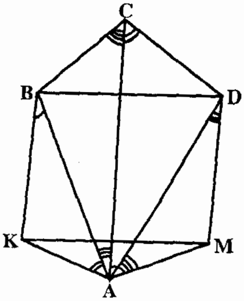
$$AB^۲ + BC^۲ + AD^۲ + DC^۲ = ۲(DM'^۲ + BM'^۲) + AC^۲ \qquad (۳)$$

در مثلث DBM′ می‌نویسیم:

$$DM'^۲ + BM'^۲ = ۲MM'^۲ + \frac{BD^۲}{۲}$$

پس رابطهٔ (۳) چنین می‌شود:

$$AB^۲ + BC^۲ + AD^۲ + DC^۲ = ۴MM'^۲ + AC^۲ + BD^۲$$



۲. در چهارضلعی ABCD (شکل): $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$، $DA = d$، $AC = m$ و $BD = n$. روی ضلع AB و در بیرون آن، مثلث AKB را متشابه با مثلث ACD رسم می‌کنیم، که در آن $B\hat{A}K = D\hat{C}A$ و $A\hat{B}K = C\hat{A}D$، و روی ضلع AD، مثلث AMD را متشابه با مثلث ABC رسم می‌کنیم، که در آن $D\hat{A}M = B\hat{C}A$ و $A\hat{D}M = C\hat{A}B$. از تشابه

مثلثهای متناظر، به دست می‌آوریم : $AK = \frac{ac}{m}$ ، $AM = \frac{bd}{m}$ و $KB = DM = \frac{ad}{m}$.
بعلاوه :

$$K\hat{B}D + M\hat{D}B = C\hat{A}D + A\hat{B}D + B\hat{D}A + C\hat{A}B = ۱۸۰^\circ$$

یعنی چهارضلعی KBDM متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، $KM = BD = n$. اما :
$K\hat{A}M = \hat{A} + \hat{C}$. بنابرقانون کسینوسها در مثلث KAM، داریم :

$$n^۲ = (\frac{ac}{m})^۲ + (\frac{bd}{m})^۲ - ۲(\frac{ac}{m})(\frac{bd}{m})\cos(\hat{A} + \hat{C})$$

که از آن جا :

$$m^۲n^۲ = a^۲c^۲ + b^۲d^۲ - ۲abcd\cos(\hat{A} + \hat{C})$$

۲.۱. زاویه

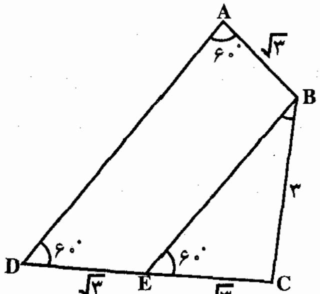
۱.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۳. می‌دانیم که در هر چهارضلعی محدب مجموع زاویه‌های داخلی برابر ۳۶۰° است. بنابراین با توجه به شرط مسأله داریم :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲۰^\circ + ۱۰۵^\circ + \hat{C} + ۲\hat{C} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\hat{C} = ۱۳۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۴۵^\circ$$

۴. از رأس B خطی موازی AD رسم کنید تا CD را در E قطع کند. $DE = EC = \sqrt{۳}$ ، و از آن جا ABED ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌باشد. در مثلث BEC، $\hat{E} = ۶۰^\circ$ و با استفاده از رابطهٔ سینوسها $E\hat{B}C = ۳۰^\circ$ به دست می‌آید. در نتیجه $\hat{C} = ۹۰^\circ$ و $A\hat{B}C = ۱۵۰^\circ$ است.



۵. می‌دانیم که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$. امّا $\hat{A}=۲\hat{B}$ ، $\hat{C}=\frac{۲}{۳}\hat{B}$ و $\hat{D}=\frac{\hat{B}}{۲}$ است. بنابراین داریم :

$$۲\hat{B}+\hat{B}+\frac{۲}{۳}\hat{B}+\frac{\hat{B}}{۲}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \frac{۲۵'\hat{B}}{۶}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=\frac{۴۳۲}{۵}=۸۶^\circ,۲۴'$$

$$\Rightarrow \hat{A}=۱۷۲^\circ,۴۸' \ , \ \hat{C}=۵۷^\circ,۳۶' \ , \ \hat{D}=۴۳^\circ,۱۲'$$

۶. $D\hat{A}B=۵۷^\circ,۳۰'$ ، $A\hat{B}C=۱۰۰^\circ$ و $B\hat{C}D=۷۲^\circ,۳۰'$.

از این موضوع استفاده کنید که نقطه‌های A، C و D روی محیط دایره‌ای به مرکز B قرار دارند.

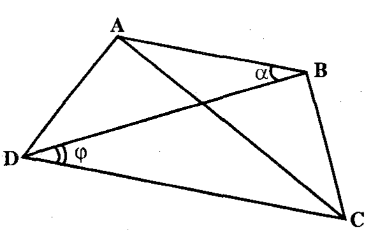
۷. فرض کنید O معرف نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD باشد. فرض کنید تمامی زاویه‌های مشخص شده در صورت مسأله، از $\frac{\pi}{۴}$ بزرگتر باشند. در این صورت، روی پاره‌خطهای OB و OC، می‌توانیم، بترتیب نقطه‌های $B_۱$ و $C_۱$ را طوری انتخاب کنیم که $B_۱\hat{A}O=O\hat{B_۱}C_۱=\frac{\pi}{۴}$. فرض کنید $B\hat{O}A=\hat{a}>\frac{\pi}{۴}$. داریم :

$$OC>OC_۱=\frac{OB_۱}{\sqrt{۲}\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})}=\frac{OA}{۲\sin(\alpha-\frac{\pi}{۴})\sin(\alpha+\frac{\pi}{۴})}=\frac{-OA}{\cos ۲\alpha}\geq OA$$

به همین روش، نابرابری $OA>OC$ را اثبات می‌کنیم. به این ترتیب، به تناقض می‌رسیم.

۸. می‌دانیم که مساحت هر چهارضلعی به قطرهای d و ´d و زاویهٔ بین دو قطر θ برابر است با : $\frac{۱}{۲}dd'\sin\theta$. بنابراین داریم :

زاویهٔ حادهٔ بین دو قطر $\quad ۳=\frac{۱}{۲}\times۶\times۲\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=۳۰^\circ$



۹. فرض کنید : $A\hat{B}D=\alpha$ و $B\hat{D}C=\varphi$.

بنا به فرض، $D\hat{A}C=۱۲۰^\circ-\alpha$ ، $B\hat{A}C=۳۰^\circ+\alpha$ ، $A\hat{D}B=۳۰^\circ-\alpha$ ، و $D\hat{B}C=۶۰^\circ+\alpha$. بنا به قانون سینوسها در مثلثهای ABC، BCD و ACD، به دست می‌آوریم :

$$\frac{DC}{BC}=\frac{\sin(۶۰^\circ+\alpha)}{\sin\varphi} \ , \ \frac{BC}{AC}=\frac{\sin(۳۰^\circ+\alpha)}{\sin(۶۰^\circ+۲\alpha)}=\frac{۱}{۲\cos(۳۰^\circ+\alpha)} \ ,$$

$$\frac{AC}{DC}=\frac{\sin(۳۰^\circ-\alpha+\varphi)}{\sin(۱۲۰^\circ-\alpha)}$$

با ضرب کردن این برابریها در هم، داریم:

$$\sin(30^\circ-\alpha-\varphi)=2\cos(30^\circ+\alpha)\sin\varphi$$
$$\Rightarrow 2\cos(60^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\varphi)=0$$

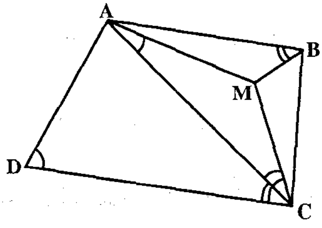
بنابراین، $B\hat{D}C=\varphi=30^\circ$.

۱۱. $\operatorname{Arc}\tan\frac{1}{2}$. عبارتهای $BC=3x$، $AB=2x$ و $BD=4\sqrt{2}x$ را در نظر بگیرید. از مثلث ABD، AD را بر حسب x بیان کنید و قانون کسینوسها را مورد استفاده قرار دهید. ثابت کنید که زاویهٔ BAD منفرجه است. این زاویه را به وسیلهٔ قانون سینوسها پیدا کنید.

۱۲. $\operatorname{Arc}\tan\frac{11}{3}$. تانژانت زاویه‌های BAO و OAD، ODA و ODC را محاسبه کرده و به‌وسیلهٔ آنها تانژانت زاویهٔ M را به دست آورید.

۱۳. روی نیمخط MC، نقطه‌ای مانند N، طوری اختیار می‌کنیم که $AN=AB=AD$.

چون: $\frac{\sin A\hat{D}C}{\sin A\hat{C}D}=\frac{AC}{AD}=\frac{AC}{AN}=\frac{\sin M\hat{N}A}{\sin M\hat{C}A}$ و $M\hat{C}A=A\hat{C}D$، داریم

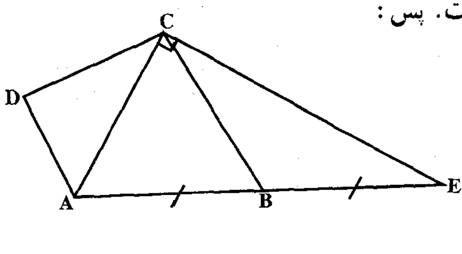


$\sin M\hat{N}A=\sin A\hat{D}C=\sin A\hat{B}M$، یعنی، زاویه‌های ABM و MNA یا برابرند و یا مجموعشان 180° است. ولی M در درون مثلث ABN است. بنابراین $A\hat{B}M=M\hat{N}A$. اکنون می‌توانیم ثابت کنیم $\Delta ABM=\Delta AMN$ ؛ $N\hat{A}C=M\hat{N}A-N\hat{C}A=A\hat{D}C-A\hat{C}D=\varphi$.

جواب: $\frac{\alpha+\varphi}{2}$.

۱۴. گزینهٔ «د» درست است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEC، میانهٔ CB وارد بر وتر با نصف وتر برابر است. پس:

$$CB=\frac{1}{2}AE=AB$$



۱.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۵. در مثلثهای OAD، OAB، OBC و OCD داریم:

$$\frac{OA}{OD}=\frac{\sin\alpha_8}{\sin\alpha_1}\ ,\ \frac{OB}{OA}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3}\ ,\ \frac{OC}{OB}=\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}\ ,\ \frac{OD}{OC}=\frac{\sin\alpha_6}{\sin\alpha_7}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha_2\sin\alpha_4\sin\alpha_6\sin\alpha_8=\sin\alpha_1\sin\alpha_3\sin\alpha_5\sin\alpha_7$$

۱۶. فرض می‌کنیم $H\hat{F}E=\alpha$ و $K\hat{F}E=\beta$ باشد.

متوازی‌الاضلاعهای ADEH و BCFK را می‌سازیم. خواهیم داشت $HA=FD$ و $KB=FC$. به فرض، $\frac{EA}{EB}=\frac{FD}{FC}$، داریم: $\frac{EA}{EB}=\frac{HA}{KB}$. در نتیجه $\Delta AHE\sim\Delta BKE$. زیرا دو زاویهٔ α و β نیز برابرند. پس K، E و H بر یک استقامتند، در نتیجه:

$$\frac{EH}{EK}=\frac{HA}{KB}=\frac{EA}{EB}\ \text{و}\ \frac{EA}{EB}=\frac{AD}{BC}\ \text{یا}\ \frac{EA}{EB}=\frac{FH}{FK}\Rightarrow\frac{EH}{EK}=\frac{FH}{FK}$$

پس EF نیمساز HEK است یا $\alpha=\beta$، در نتیجه خط EF با ضلعهای BC و AD زاویه‌های متساوی می‌سازد.

۱.۳. ضلع

۱.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۱۷. گزینهٔ (هـ) درست است.

$\Delta RFD\sim\Delta SRF$ (یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر است و ضلعهای این دو زاویه متناسبند).

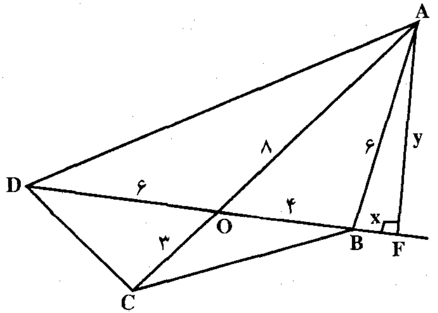
$$\therefore\frac{RS}{RF}=\frac{SF}{RD}\ ,\ \frac{RS}{5}=\frac{7\frac{1}{2}}{6}\ ,\ RS=6\frac{1}{4}$$

از قانون کسینوسها داریم:

$$5^2=4^2+6^2-2\times4\times6\cos\hat{D}\ ,$$

$$\therefore\cos\hat{D}=\frac{27}{28}=\cos R\hat{F}S$$

$$\therefore RS^2=5^2+(7\frac{1}{2})^2-2(7\frac{1}{2})(5)(\frac{27}{48})\ ,\ \therefore RS=6\frac{1}{4}$$



۱۸. گزینهٔ «هـ» درست است.

پای عمود فرود آمده از A بر امتداد قطر DB را با F و طولهای BF و FA را بترتیب با x و y نشان می‌دهیم (شکل را ملاحظه کنید). بنابراین $x^2+y^2=6^2$ و $(x+4)^2+y^2=8^2$، از تفریق معادلهٔ نخست از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود:

$8x+16=28$ پس $x=\frac{3}{2}$، این مقدار را در معادلهٔ نخست قرار می‌دهیم و آن را نسبت به y^2 حل می‌کنیم:

$$(\frac{3}{2})^2+y^2=6^2\ ,\ \ y^2=\frac{135}{4}$$

بنابراین

$$AD^2=(10+x)^2+y^2=(\frac{23}{2})^2+\frac{135}{4}=\frac{664}{4}=166$$

$$AD=\sqrt{166}$$

راه دیگر. با استفاده از قانون کسینوسها در مثلث AOB، داریم:

$$\cos A\hat{O}B=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2(OA)(OB)}=\frac{8^2+4^2-6^2}{2\times8\times4}=\frac{11}{16}$$

چون زاویه‌های AOB و AOD مکمل یکدیگرند،

$$\cos A\hat{O}D=-\cos A\hat{O}B$$

و با به کار بردن قانون کسینوسها در مثلث AOD نتیجه می‌شود:

$$AD^2=OA^2+OD^2-2(OA)(OD)\cos A\hat{O}D$$

$$=8^2+6^2-2\times8\times6(-\frac{11}{6})=166\ ,\ \ AD=\sqrt{166}$$

راه دیگر. اگر دو وتر در داخل دایره‌ای یکدیگر را قطع کنند، حاصلضرب پاره‌خطهای یکی برابر حاصلضرب پاره‌خطهای دیگری است. عکس این قضیه چنین است: اگر پاره‌خطهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، به طوری که $AO.OC=BO.OD$، آن گاه نقطه‌های A، B، C و D روی یک دایره قرار دارند. اثبات این قضیه مشکل نیست؛ از تشابه مثلثهای DOC و AOB و همچنین مثلثهای AOD و BOC استفاده می‌کنیم. در مورد حاضر، از تشابه دو مثلث نخست نتیجه می‌شود که: $\frac{AD}{BC}=\frac{8}{4}=2$ در نتیجه $BC=\frac{AD}{2}$. چون نقطه‌های A، B، C و D

روی یک دایره واقعند، که می‌توانیم از قضیهٔ بطلمیوس استفاده کنیم که : «در یک چهارضلعی محاطی، مجموع حاصلضربهای ضلعهای روبه‌رو برابر حاصلضرب قطرهاست». این مطلب ایجاب می‌کند که :

$$AD.BC + AB.CD = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰$$

$$AD.\frac{AD}{۲} + ۶ \times \frac{۹}{۲} = \frac{۱}{۲}AD^۲ + ۲۷ = ۱۱۰$$

$$AD^۲ = ۱۶۶ \;,\; AD = \sqrt{۱۶۶}$$

۱.۳.۲. نسبت ضلعها

۲۰. برابری $S_{ABN} = S_{CDM}$ ، نتیجه می‌دهد که $S_{MBN} = S_{MCN}$ ، زیرا MN میانهٔ مثلثهای ABN و CDM است. بنابراین، $BC \| MN$ و $AD \| MN$ ، یعنی، ABCD ذوزنقه‌ای با قاعده‌های AD و BC است.

جواب : $\dfrac{۵K - ۲ \pm ۲\sqrt{۲K(۲K-۱)}}{۲ - ۳K}$.

۱.۴. قطر

۱.۱.۴. اندازهٔ قطر

۲۱. در مثلث ABC که $A\hat{B}C = ۱۲۰^\circ$ است، داریم :

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ + AB.BC$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۳۶ + ۴۸ + ۶ \times ۸ = ۱۳۲ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۳۳}cm$$

و در مثلث BDC که زاویهٔ $B\hat{C}D = ۱۳۵^\circ$ است، داریم :

$$BD^۲ = BC^۲ + CD^۲ - ۲BC.CD\cos ۱۳۵^\circ$$

$$\Rightarrow BD^۲ = ۶۴ + ۱۰۰ - ۲ \times ۸ \times ۱۰ \times (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = ۱۶۴ + ۸۰\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow BD = ۲\sqrt{۴۱ + ۲۰\sqrt{۲}}cm$$

۲۲. قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم. در مثلث ACD با توجه به این که $A\hat{D}C = ۱۲۰^\circ$ است، داریم :

$$AC^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ + ۶ \times ۸ \Rightarrow AC^۲ = ۱۴۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۳۷}$$

زاویهٔ DAC از مثلث ADC قابل محاسبه است و زاویهٔ CAB را با معلوم بودن سه ضلع مثلث ABC می‌توان محاسبه نمود، بنابراین اندازهٔ زاویهٔ DAB مشخص است. از آن جا در مثلث ADB طول قطر BD را می‌توان به دست آورد.

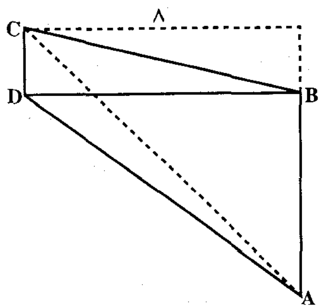
۲۳. $\sqrt{a^۲+b^۲-ab}$ و $\sqrt{a^۲+b^۲+ab}$.

۲۴. فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعیی با :

$$AB+BD+DC=۱۶ \qquad (۱)$$

باشد. در این صورت، K، مساحت آن، که به صورت :

$$K=\frac{۱}{۲}AB.BD\sin A\hat{B}D+\frac{۱}{۲}DC.BD\sin C\hat{D}B \qquad (۲)$$



بیان می‌شود، به زاویه‌های ABD و CDB وابسته است. برای تعیین طولهای ممکن AC، به ازای $K=۳۲$ ، ابتدا بیشترین مقدار K را تحت شرط داده شده (۱) معین می‌کنیم. K، بی‌توجه به این که طولهای جداگانهٔ AB، BD و DC چه قدرند، محققاً وقتی بیشترین است که : $A\hat{B}D=C\hat{D}B=۹۰^\circ$ باشد. شکل را ملاحظه کنید. بنابراین به دست آوردن ماکزیمم مساحت (۲) تحت شرط (۱) معادل به دست آوردن ماکزیمم :

(۳) $BD(AB+DC)$ با توجه به : $AB+BD+DC=۱۶$

است، بنا به نامساوی واسطهٔ هندسی و واسطهٔ حسابی ($\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$) نتیجه می‌شود که حاصلضرب دو عدد مثبتی (در حالت مورد بحث BD و AB + DC) که مجموعشان ثابت باشد وقتی بزرگترین است که این عددها مساوی باشند ؛ یعنی وقتی که : $BD=AB+DC$ باشد. بنا به (۱) :

$$BD=AB+DC=۸ \qquad (۴)$$

و بنا به (۲) :

$$K=\frac{۱}{۲}BD(AB+DC)=۴\times۸=۳۲$$

بنابراین شرطهای مسأله تنها اگر (۴) برقرار باشد، برآورده می‌شود، و در این حالت، قطر AC، دارای طول : $AC=\sqrt{(AB+DC)^۲+BD^۲}=\sqrt{۱۲۸}=۸\sqrt{۲}$

که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه شده است. شکل را ملاحظه کنید.

۵.۱. پاره‌خط

۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۵. ۷۵cm.

۲۶. $\hat{ABC}=\beta$ ، $\hat{ABD}=\beta_۱$ و $\hat{DBC}=\beta_۲$ می‌گیریم. اگر از قضیهٔ سینوسها در دو مثلث AOB و BOC استفاده کنیم، به دست می‌آید :

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AO}{AB}\cdot\frac{BC}{OC}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{\sin\beta_۱}{\sin\beta_۲}$$

چون AB و BC گویا هستند، کافی است گویا بودن نسبت سینوسها را ثابت کنیم. به کمک قضیهٔ کسینوسها و با توجه به گویا بودن طول ضلعها و قطرها، نتیجه می‌شود که $\cos\beta$ ، $\cos\beta_۱$ و $\cos\beta_۲$ عددهایی گویا هستند. به عنوان نمونه $\cos\beta=\frac{AB^۲+BC^۲-AC^۲}{۲AB.BC}$. به این ترتیب، عدد $\sin\beta_۱\sin\beta_۲$ هم گویا درمی‌آید، زیرا :

$$\cos\beta=\cos\beta_۱\cos\beta_۲-\sin\beta_۱\sin\beta_۲$$

و در نتیجه، با توجه به برابری $\sin^۲\beta_۲=۱-\cos^۲\beta_۲$ ، نسبت $\frac{\sin\beta_۱}{\sin\beta_۲}$ هم، عددی گویا می‌شود.

۲۷. ابتدا، $\lim\limits_{a\to ۰}\frac{AO}{OC}$ را پیدا کنید. فرض کنید $\hat{C}=\beta$ ، داریم :

$$\frac{AO}{OC}=\frac{S_{ABD}}{S_{BDC}}=\frac{\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha}{\frac{۱}{۲}(p-a)(p-b)\sin\beta}$$

ولی بنابر قانون کسینوسها

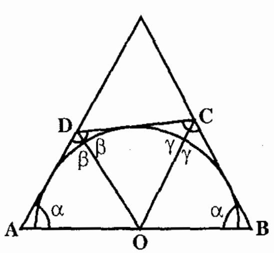
$$a^۲+b^۲=۲ab\cos\alpha=(p-a)^۲+(p-b)^۲-۲(p-a)(p-b)\cos\beta$$

$$\Rightarrow\cos\beta=\frac{p(p-a-b)+ab\cos\alpha}{(p-a)(p-b)}$$

که از آن جا :
$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)}$$
$$=\frac{\sqrt{ab(1-\cos\alpha)(2p^2-2ap-2bp+ab+ab\cos\alpha)}}{(p-a)(p-b)} \qquad (2)$$

اگر $\alpha\to 0$، آن وقت $\cos\alpha\to 1$ ؛ در نتیجه وقتی که $\alpha\to 0$،
$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}}=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\to\sqrt{2}.$$
با این ملاحظات، از (۱) و (۲) به دست می‌آوریم :
$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{AO}{OC}=\sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}}$$
از آن جا که $AC\to p$
$$\lim_{\alpha\to 0}AO=\frac{p\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+\sqrt{(p-a)(p-b)}}$$

۲۸. $\sqrt{\frac{65}{2}}$. ثابت کنید $\sin(\hat{A}+\hat{B})<0$ است. این امر بدین معنی است که خطهای مستقیم AD و BC در نقطهٔ K یکدیگر را قطع می‌کنند که طرف چپ AB قرار دارد. زاویه‌های مثلث ODC را به دست آورید.



۲۹. DO و CO نیمساز زاویه‌های ADC و DCB هستند. فرض کنید α، β و γ معرف اندازهٔ زاویه‌های متناظر باشند (شکل). اما، $\alpha+2\beta+2\gamma+\alpha=2\pi$ ؛ بنابراین، $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ ؛ به این ترتیب، نتیجه می‌شود که $D\hat{O}A=\gamma$ و $C\hat{O}B=\beta$ و مثلث AOD با مثلث COB متشابه است ؛ در نتیجه $AD.CB=AO.OB=\frac{AB^2}{4}$.

جواب : $\frac{a^2}{4b}$.

۳۰. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2-a^2}$.

۲.۵.۱. نسبت پاره‌خطها

۳۱. داریم:

$$\frac{NA}{ND}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{AD}{ND}=\frac{۳}{۲}\ ,\ \ \frac{AO}{NP}=\frac{AD}{DN}\Rightarrow\frac{AO}{NP}=\frac{۳}{۲}$$

۳۳. قرار می‌گذاریم: $BM=x$ ، $DM=y$ ، $AM=l$ و $A\hat{M}B=\varphi$. فرض کنید M روی پاره‌خط BD واقع باشد. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای AMB و AMD و حذف کردن $\cos\varphi$ به دست می‌آوریم: $l^۲(x+y)+xy(x+y)=a^۲y+d^۲x$. به همین ترتیب، رابطهٔ $l^۲(x+y)+xy(x+y)=b^۲y+c^۲x$ را به دست می‌آوریم. بنابراین

$$(a^۲-b^۲)y=(c^۲-d^۲)x$$

جواب: $\left|\frac{a^۲-b^۲}{c^۲-d^۲}\right|$.

۳۴. بزرگترین فاصلهٔ بین رأسهای چهارضلعی را M و کوچکترین این فاصله‌ها را m می‌نامیم. از آن جا که، دست کم یکی از زاویه‌های چهارضلعی، و مثلاً زاویهٔ ABC، زاویه‌ای حاده نیست، بنا بر قضیهٔ کسینوسها داریم:

$$M^۲\ge AC^۲\ge AB^۲+BC^۲\ge m^۲+m^۲=۲m^۲$$

و از آن جا:

$$M\ge\sqrt{۲}m\Rightarrow\frac{M}{m}\ge\sqrt{۲}$$

۳.۵.۱. تساوی پاره‌خطها

۳۵. از برابریهای فرض نتیجه می‌شود:

$$AC=BD\ ,\ \ AD=BC$$

بنابراین، دو مثلث ABC و BAD برابرند. برابری زاویه‌های OCB، ACB، BDA و ODA، برابری مثلثهای OAD و ABC را نتیجه می‌دهد که، از آن جا، برابری طولهای پاره‌خطهای راست OB و OA به دست می‌آید.

۳۶. قرینهٔ نقطه‌های B و C را نسبت به خط راست MN پیدا می‌کنیم. نقطه‌های B' و C' به‌دست می‌آیند. خطهای راست AD و $B'C'$ موازی‌اند. دو خط راست AB' و DC' هم، با خط راست MN موازی‌اند، بنابراین چهارضلعی $AB'C'D$ متوازی‌الاضلاع است، یعنی:

$$AD=B'C'=BC$$

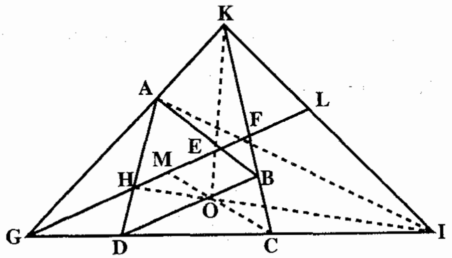
۳۷. از برابری دو مثلث AHD و ABC، نتیجه می‌شود : AB = AH . از آن جا، دو مثلث متساوی‌الساقین ABH و ACD متشابه می‌شوند و بنابراین

$$H\hat{C}D = B\hat{H}A = C\hat{H}K \Rightarrow CK = HK$$

چون :
$$K\hat{D}H = ۹۰^\circ - H\hat{C}D = ۹۰^\circ - C\hat{H}K = K\hat{H}D$$

پس HK = KD ، یعنی CK = HK = KD .

۳۹. اگر نقطه‌های M و L محل تلاقی خط GF با خطهای CO و IK باشد، ثابت می‌کنیم که نقطهٔ M وسط EH است و برای این منظور نسبت $\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}$ را محاسبه می‌کنیم.



در مثلثهای CMG و CMF که به وسیلهٔ موربهای IOH و OEK قطع شده‌اند، داریم :

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{OC}}{\overline{OM}}\cdot\frac{\overline{KF}}{\overline{KC}}=۱\ ,\quad \frac{\overline{HG}}{\overline{HM}}\cdot\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{IC}}{\overline{IG}}=۱$$

از ضرب عضوهای نظیر این دو رابطه با قرار دادن $\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}$ به جای $\frac{\overline{EM}}{\overline{HM}}$، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{HG}}\cdot\frac{\overline{IG}}{\overline{IC}}\cdot\frac{\overline{KC}}{\overline{KF}}$$

اما مورب ILK مثلث CGF را قطع کرده است، پس داریم :

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{IC}}\cdot\frac{\overline{LF}}{\overline{LG}}\cdot\frac{\overline{KC}}{\overline{KF}}=۱$$

از این رابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{IC}}\cdot\frac{\overline{KC}}{\overline{KF}}=\frac{\overline{LG}}{\overline{LF}}$$

در نتیجه مقدار $\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}$ به صورت (۱) $\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{HG}}\cdot\frac{\overline{LG}}{\overline{LF}}$ محاسبه می‌شود.

اینک مثلثهای AHF و AGE را که به وسیلهٔ موربهای GDI و BFK قطع شده‌اند، در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GF}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{DH}}\cdot\frac{\overline{IF}}{\overline{IA}}=۱\ ،\quad \frac{\overline{FG}}{\overline{FE}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{KA}}{\overline{KG}}=۱$$

از ضرب عضوهای نظیر این دو رابطه و توجه به این که $\frac{\overline{DA}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BE}}$ است، نتیجه می‌شود :

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{FE}}\cdot\frac{\overline{IF}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{KA}}{\overline{KG}}=-۱ \qquad (۲)$$

از طرف دیگر مورب ILK ضلعها و امتداد ضلعهای مثلث AGF را قطع کرده است، پس :

$$\frac{\overline{IF}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{KA}}{\overline{KG}}=\frac{\overline{LF}}{\overline{LG}}$$

رابطهٔ (۲) اینک به صورت $\frac{\overline{GH}}{\overline{FE}}\cdot\frac{\overline{LF}}{\overline{LG}}=-۱$ درمی‌آید و رابطهٔ (۱) نسبت $\frac{\overline{ME}}{\overline{MH}}=-۱$ را به دست می‌دهد که این نیز نشان می‌دهد که نقطهٔ M وسط پاره‌خط EH است.

۴۰. برابری دو مثلث ADP و BCP را ثابت کنید.

۶.۱. شعاع دایره

۴۴. با توجه به دستور $R=\frac{abc}{۴S}$، در مثلث ABC داریم :

$$۲P=۸+۱۰+۱۴=۳۲\Rightarrow p=۱۶$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{۱۶\times ۸\times ۶\times ۲}=۱۶\sqrt{۶}cm^۲$$

$$R_۱=\frac{abc}{۴S}=\frac{۸\times ۱۰\times ۱۴}{۶۴\sqrt{۶}}=\frac{۳۵}{\sqrt{۶}}$$

و در مثلث ACD داریم :

$$۲p=۱۴+۱۲+۶=۳۲\Rightarrow p=۱۶$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۶\times ۲\times ۴\times ۱۰}=۱۶\sqrt{۵}cm^۲$$

$$R_۲=\frac{abc}{۴S}=\frac{۱۴\times ۱۲\times ۶}{۶۴\sqrt{۵}}=\frac{۶۳}{۴\sqrt{۵}}\Rightarrow\frac{R_۱}{R_۲}=\frac{\frac{۳۵}{\sqrt{۶}}}{\frac{۶۳}{۴\sqrt{۵}}}=\frac{۱۴۰\sqrt{۵}}{۶۳\sqrt{۶}}=\frac{۱۰\sqrt{۳۰}}{۳}$$

۱.۷. محیط

۱.۷.۱. اندازهٔ محیط

۴۶. زاویهٔ چهارم این چهارضلعی برابر است با :

$$\hat{D} = ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۱۳۵^\circ + ۴۵^\circ) = ۶۰^\circ$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ سینوسها در دو مثلث ABC و ADC اندازهٔ سه ضلع چهارضلعی و از آن جا اندازهٔ محیط آن قابل محاسبه است.

۴۷. در دو مثلث ABD و BDC با استفاده از رابطهٔ کسینوسها داریم :

$$AD^۲ = ۱۲^۲ + ۸^۲ - ۲ \times ۱۲ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۱۱۲ \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۷}$$

$$DC^۲ = ۱۲^۲ + (۸\sqrt{۲})^۲ - ۲ \times ۱۲ \times ۸\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۸۰ \Rightarrow DC = ۴\sqrt{۵}$$

$\Rightarrow$ محیط چهارضلعی $= ۸ + ۸\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۷} + ۴\sqrt{۵} = ۴(۲ + ۲\sqrt{۲} + \sqrt{۷} + \sqrt{۵})cm$

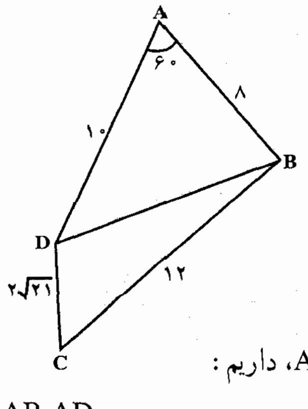
۱.۸. مساحت

۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۸.۱.۱. اندازهٔ مساحت چهارضلعی

۴۸. قطر BD را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث ABD برابر است با :

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} AB.AD \sin \hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۰ \times \sin ۶۰^\circ = ۲۰\sqrt{۳}$$



از طرفی در مثلث ABD، داریم :

$$DB^۲ = AB^۲ + AD^۲ - AB.AD$$

$$\Rightarrow DB^۲ = ۶۴ + ۱۰۰ - ۸ \times ۱۰ = ۸۴ \Rightarrow DB = ۲\sqrt{۲۱}$$

اکنون می‌توان مساحت مثلث CDB را به دست آورد. داریم :

$$۲p = ۲\sqrt{۲۱} + ۲\sqrt{۲۱} + ۱۲ \Rightarrow p = ۲\sqrt{۲۱} + ۶ \ , \ p - a = ۶ \ , \ p - b = ۶ \ ,$$

$$p - c = ۲\sqrt{۲۱} - ۶$$

$$S = \sqrt{(۲\sqrt{۲۱} + ۶) \times ۶ \times ۶ \times (۲\sqrt{۲۱} - ۶)} = ۲۴\sqrt{۳}$$

از آن جا :
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = ۲۰\sqrt{۳} + ۲۴\sqrt{۳} = ۴۴\sqrt{۳}cm^۲$$

۴۹. مساحت شکل مورد نظر (شبه لوزی) برابر ۱۶۸ است.

۵۰. $۱۵۰cm^۲$.

۵۱. $۷۰cm^۲$. از تساوی $\frac{AO}{OC} = \frac{S_{AOD}}{S_{COD}}$ استفاده کنید.

۵۲. گزینهٔ «هـ» درست است.

۵۳. $\frac{ab}{۲}$

۵۴. $۳r^۲ \frac{|۱ - K^۲|}{۱ + K^۲}$

۵۵. از آن جا که $AB = ۲۰$ و $AC = ۱۲$ ، پس $BC = ۱۶$. از تشابه دو مثلث BCA و BDE نتیجه می‌شود که، $\frac{۱۰^۲}{۱۶^۲} = \frac{\Delta BDE \text{ مساحت}}{\Delta BCA \text{ مساحت}}$. پس $۹۶ = ۱۶ \times ۱۲ \times \frac{۱}{۲} =$ مساحت ΔBCA . در نتیجه :

$$\Delta BDE \text{ مساحت } = ۳۷\frac{۱}{۲}$$

و از آن جا مساحت خواسته شده برابر است با :
$$۹۶ - ۳۷\frac{۱}{۲} = ۵۸\frac{۱}{۲}$$

یادداشت. روش بالا، براساس تفریق مساحت ΔBDE از مساحت ΔBCA است. پیدا کردن مساحت چهارضلعی از طریق تجزیهٔ آن به دو مثلث قائم‌الزاویه، تمرین با ارزشی است.

۵۶. بنا بر روش بابلیها، مساحت چهارضلعی برابر است با :

$$S = \frac{a + b}{۲} \cdot \frac{c + d}{۲}$$

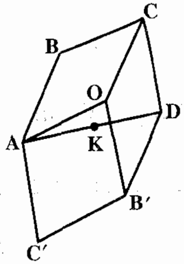
که در آن، a و b طولهای دو ضلع رو به رو، و c و d طولهای دو ضلع دیگر رو به رو، در چهارضلعی‌اند. این رابطه، تنها در مورد مستطیل دقیق است، زیرا در مورد مستطیل

داریم :

$$a = b \ , \ c = d \ , \ S = ac$$

دستور بابلیها، برای محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الساقین، در واقع، همان دستور محاسبهٔ مساحت چهارضلعی است، منتها در این‌جا، طول یکی از ضلعها برابر صفر است.

۱۸ .۵۷



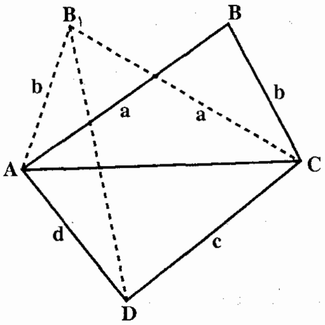
.۵۸ پاسخ : $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$. (این مساحت متعلق به ذوزنقه‌ای است که طول قاعدهٔ کوچکتر و هر یک از ساقهای آن برابر ۱ و طول قاعدهٔ بزرگ آن برابر ۲ باشد.)

فرض کنید در چهارضلعی ABCD (که البته می‌توان آن را محدب در نظر گرفت) داشته باشیم : $AB = BC = CD = ۱$. وسط ضلع AD را K می‌نامیم (شکل). اگر $DB'C'A$ ، قرینهٔ خط شکستهٔ ABCD را نسبت به نقطهٔ K پیدا کنیم، یک شش ضلعی با مرکز تقارن K به دست می‌آید که، طول هر یک از ضلعهای آن، برابر واحد است. این شش‌ضلعی را می‌توان به سه لوزی ABCO، $CDB'O$ و $B'C'AO$ تقسیم کرد ؛ در ضمن مساحت این شش ضلعی برابر می‌شود با $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ که، در آن، α ، β و γ عبارتند از زاویه‌های بین پاره‌خطهای راست OA، OC و OB' که مجموعی برابر ۲π دارند. این مساحت نمی‌تواند از $۳\sin\frac{۲\pi}{۳}$ ، یعنی $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ تجاوز کند و تنها وقتی برابر این مقدار می‌شود که داشته باشیم : $\alpha = \beta = \gamma = \frac{۲\pi}{۳}$. یعنی، وقتی که، این شش ضلعی، منتظم باشد.

نکته. می‌توان ثابت کرد، بین همهٔ n ضلعهایی که طول ضلعهای آن، به ردیف، برابر $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، $a_{n-۱}$ ، باشند (به جز یکی از ضلعها، AZ، که نامعلوم است)، مساحت آن nضلعی حداکثر مقدار ممکن است که، همهٔ رأسهای آن، روی محیط نیمدایره‌ای به قطر AZ واقع باشند و این در واقع، حالتی از «مسألهٔ دی بون» است : چگونه می‌توان دو انتهای نخی به طول معلوم را روی خط راست مفروضی قرار داد تا مساحت شکل محدود به نخ و خط راست، حداکثر مقدار ممکن باشد (جواب این مسأله این است که، نخ را، باید به صورت یک نیمدایره درآورد).

اگر هم، طول همهٔ ضلعهای یک n ضلعی معلوم باشند، حداکثر مساحت مربوط به آن

n ضلعی است که قابل محاط در یک دایره باشد (و اگر ردیف ضلعهای n ضلعی مشخص باشد، جواب منحصر به فرد است). به همین ترتیب، حداکثر مساحت در بین شکلهای با محیط ثابت، متعلق به دایره است.



۵۹. ABCD را چهارضلعی داده شده، با ضلعهای a، b، c و d فرض کنید (شکل)، روی قطر AC، مثلث AB_1C را، با ضلعهای $AB_1 = b$ و $CB_1 = a$ می‌سازیم. مساحتهای چهارضلعیهای ABCD و AB_1CD با هم برابرند. از طرف دیگر مساحت AB_1CD از مجموع مساحتهای مثلثهای DAB_1 و DB_1C تشکیل شده است که بترتیب نمی‌توانند از $\frac{1}{2}bd$ و $\frac{1}{2}ac$ تجاوز کنند (زیرا، مثلاً مساحت مثلث DAB_1 برابر است با : $(\frac{1}{2}bd.\sin(B_1AD)$).

۶۰. ثابت می‌کنیم مساحت هر مثلث به ضلعهای a و b بزرگتر از $\frac{ab}{2}$ نیست، زیرا اگر a را قاعده فرض کنیم، b کوچکتر از h نیست، در نتیجه $\frac{ah}{2} \le \frac{ab}{2}$ است. اگر مساحت ۴ مثلث حاصل از دو ضلع مجاور و یک قطر چهارضلعی را با هم جمع کنیم، دو برابر مساحت ۴ ضلعی به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}(ab+ad+bc+cd)=\frac{a}{2}(b+d)+\frac{c}{2}(b+d)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$$

و مساحت چهارضلعی از $\frac{(a+c)(b+d)}{2}$ بزرگتر نیست.

۶۱. داریم :

$$K=\frac{abn}{4R}+\frac{cdn}{4R}=\frac{(ab+cd)n}{4R}=\frac{lmn}{4R}$$

در حالت $d=0$ داریم :

$$l=a\ ,\ m=b\ ,\ n=c\ ,\ k=\frac{abc}{4R}$$

۲.۱.۸.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۶۲. گزینهٔ (د) درست است.

۶۳. نمادهای $CD = c$ ، $BC = b$ ، $AB = a$ و $DA = m$ را منظور می‌کنیم. در مثلث AML، $AM = \frac{۱}{۲}m$ و $AL = \frac{۳}{۲}a$ بوده و آن گاه مساحت $S_۱$ با $\frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}m.\frac{۳}{۲}a.\sin\alpha$ برابر می‌شود که در آن $\alpha = M\hat{A}L$ است. این عبارت را با مساحت مثلث ABD مقایسه می‌کنیم:

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.AD.\sin(۱۸۰^\circ - \alpha) = \frac{۱}{۲}am\sin\alpha$$

توجه داریم که $S_۱ = \frac{۳}{۴}S_{ABD}$ است. به روش مشابه مساحت $S_۳$ مربوط به مثلث CPE با مساحت مثلث BCD با فرمول $S_۳ = \frac{۳}{۴}S_{BCD}$ ارتباط پیدا می‌کند. از این رو داریم:

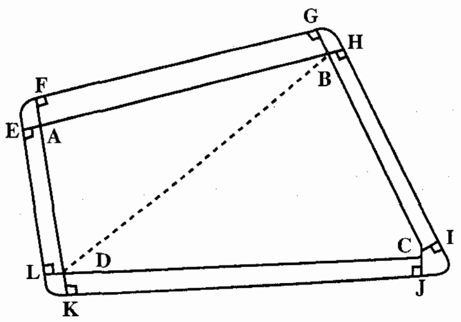
$$S_۱ + S_۳ = \frac{۳}{۴}(S_{ABD} + S_{BCD}) = \frac{۳}{۴}S_{ABCD} = \frac{۳}{۴}.۲ = ۱/۵cm^۲$$

به همین طریق اگر $S_۲ = S_{BLP}$ و $S_۴ = S_{MDE}$ را منظور کنیم به $S_۲ + S_۴ = ۱/۵cm^۲$ می‌رسیم. در نتیجه تساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$S_{MLPE} = S_{ABCD} + S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ = ۲ + ۱/۵ + ۱/۵ = ۵cm^۲$$

۶۴. $۱۱cm^۲$. عبارتهای $BF = x$ ، $AF = ۲x$ ، $BK = y$ و $CK = ۳y$ را منظور کرده و مساحتهای مثلثهای BKF و ABC را مقایسه کنید.

۶۵. مساحت محوطه‌ای دور استخر.



دور استخر اولاً چهار مستطیل، مطابق شکل، خواهیم داشت، که مساحت آنها چنین محاسبه می‌شود:

$$۵\times(۲۰+۴۰+۵۰+۳۰) = ۷۰۰m^۲$$

ثانیاً به طوری که در تصویر می‌بینید در هر گوشهٔ استخر چهار زاویه وجود دارد، که مجموع این چهار زاویه همه جا ۳۶۰ درجه است. و اگر دو زاویهٔ ۹۰ درجه‌ای در هر مورد از آنها کم کنیم، برای هر زاویهٔ داخلی استخر و زاویهٔ خارجی چسبیده به آن (بین دو مستطیل) ۱۸۰ درجه باقی می‌ماند. پس مجموع ۴ زاویهٔ داخلی استخر، و ۴ زاویهٔ مربوط به چهار قطاع، در کل ۱۸۰×۴ درجه است. حال برای پیدا کردن مجموع چهار زاویهٔ مربوط به قطاعها، بایستی ابتدا مجموع زاویه‌های داخلی استخر را بیابیم. اگر

مطابق شکل، دو گوشهٔ رو به رو را در استخر به هم وصل کنیم، دو مثلث به دست می‌آید که مجموع زاویه‌های داخلی هر کدام ۱۸۰ درجه است. پس مجموع زاویه‌های استخر ۱۸۰×۲ درجه می‌شود که آن را از ۱۸۰×۴ کم می‌کنیم، تا ۱۸۰×۲ درجه، مجموع زاویه‌های رأس چهار قطاع به دست می‌آید. از اینجا نتیجه می گیریم، ۴ قطاع یک دایرهٔ کامل به شعاع ۵ متر تشکیل می‌دهند، و مساحت چهار قطاع برابر است با :

$$۳/۱۴\times ۵\times ۵ = ۷۸/۵m^۲$$

پس مساحت کل محوطهٔ سیمانی ۷۷۸/۵ متر مربع می‌شود.

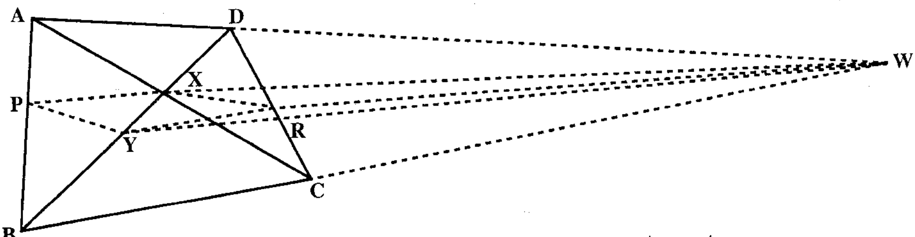
۲.۸.۱. نسبت مساحتها

۶۶. این دو مثلث در قاعدهٔ AC مشترکند. پس نسبت مساحت آنها به نسبت ارتفاعهای نظیر این قاعده‌هاست. یعنی

$$S_{ABC}:S_{ACD} = ۱۲:۸ = ۳:۲$$

۶۷. P وسط AB و R وسط CD را در نظر می‌گیریم و خطهای PX، PY، RX، RY و RW را رسم می‌کنیم. در مثلث BCD خط RY موازی با BC است و از وسط DW قطر دیگر چهار گوشهٔ DYWR می‌گذرد. بنابراین داریم :

$$S(RYW) = S(YRD) = \frac{۱}{۴}S(BCD)$$



همچنین خواهیم داشت :

$$S(RWX) = \frac{۱}{۴}S(CDA)$$

همچنین با توجه به قضیهٔ وارینیون برای چهار گوشهٔ ABCD خواهیم داشت :

$$S(RXY) = \frac{۱}{۲}S(PYRX) = \frac{۱}{۴}S(ABCD) = \frac{۱}{۴}S(CAB) + \frac{۱}{۴}S(BDC)$$

$$= \frac{۱}{۴}S(ABC) - \frac{۱}{۴}S(BCD)$$

از جمع نظیر به نظیر دو طرف سه رابطهٔ بالا به دست می‌آید :

$$S(WXY)=S(RXY)+S(RYW)+S(RWX)$$
$$=\frac{۱}{۴}S(ABC)-\frac{۱}{۴}S(BCD)+\frac{۱}{۴}S(BCD)+\frac{۱}{۴}S(CDA)$$
$$=\frac{۱}{۴}S(ABC)+\frac{۱}{۴}S(CDA)$$
$$=\frac{۱}{۴}S(ABCD)$$

۶۹. حکم مسأله، از دو نتیجهٔ زیر واضح است :

(۱). اگر بر ضلعهای چهارضلعی ABCD، نقطه‌های K، L، M و N طوری اختیار شوند که ضلعهای AB، BC، CD و DA را به یک نسبت تقسیم کنند ($\frac{BK}{KA}=\frac{CM}{MD}=\frac{BL}{LC}=\frac{AN}{ND}$)، آن وقت پاره‌خطهای KM و LN را هم، نقطهٔ P محل برخورد آنها، به همین نسبت تقسیم می‌کند. در حقیقت، از اینکه خطهای راست KL و NM با قطر AC موازی‌اند، نتیجه می‌شود که :

$$\frac{KP}{PM}=\frac{KL}{NM}=\frac{KL}{AC}.\frac{AC}{NM}=\frac{BK}{BA}.\frac{AD}{ND}=\frac{BK}{BA}.\frac{BA}{KA}=\frac{BK}{KA}$$

(۲). اگر بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی، نقطه‌های $K_۱$ و K، و $M_۱$ و M طوری اختیار شوند که : $\frac{K_۱K}{AB}=\frac{M_۱M}{CD}=\frac{۱}{m}$، $AK_۱=KB$ و $DM_۱=CM$، آن وقت مساحت چهارضلعی $K_۱KMM_۱$ برابر با $\frac{۱}{m}$ مساحت چهارضلعی ABCD است. در حقیقت :

$$S_{AM_۱D}=\frac{M_۱D}{CD}S_{ACD}=\frac{BK}{BA}S_{ACD}\ ،\ S_{BKC}=\frac{BK}{BA}S_{ABC}$$

در نتیجه :
$$S_{AKCM_۱}=(۱-\frac{BK}{BA})S_{ABCD}=\frac{AK}{BA}S_{ABCD}$$

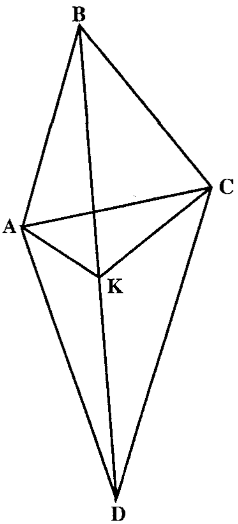
به همین ترتیب، $S_{K_۱KMM_۱}=\frac{K_۱K}{AK}S_{AKCM_۱}$. بنابراین،

$$S_{K_۱KMM_۱}=\frac{K_۱K}{AB}S_{ABCD}=\frac{۱}{m}S$$

۳.۸.۱. رابطهٔ بین مساحتها

۷۰. اگر برابریهای $S_{CDK} = S_{MDK}$ و $S_{BCK} = S_{MKA}$ را با هم جمع می‌کنیم و سپس بخش مشترک را از دو طرف برابری حذف می‌کنیم و به برابری مورد نظر می‌رسیم.

۷۱. بایستی ثابت کنیم که مساحت چهارضلعی ABCE برابر نصف مساحت چهارضلعی ABCD است. این نکته دقیقاً به معنی تساوی مساحتهای دو شکل ABCE و CED یا هم ارزی آنها خواهد بود. توجه داشته باشید که چهارضلعی، ABCE با چهارضلعی ABCM هم‌ارز است که در آن M نقطه‌ای روی خط EP است: در حقیقت مثلثهای ACE و ACM دارای قاعدهٔ مشترک و ارتفاعهای مساوی هستند؛ زیرا نقطه‌های E و M روی خط مستقیم موازی با قاعدهٔ AC قرار دارد. این حقیقت، اندیشهٔ تعویض چهارضلعی ABCK با چهارضلعی ABCE هم ارز با آن را تسریع می‌بخشد که در آن K نقطهٔ اختیاری خاصی روی EP است. میانگاه قطر BD را به عنوان نقطهٔ K در نظر می‌گیریم (شکل). چنین داریم:



$$S_{ABCK} = \frac{1}{2} AC.BK.\sin\alpha$$

به طوری‌که α زاویهٔ بین قطرهاست. طبق فرض $BK = \frac{1}{2}BD$ را داریم. بدین ترتیب رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که اثبات آن مطلوب مسأله بود:

$$S_{ABCK} = \frac{1}{2} AC.\frac{1}{2} BD.\sin\alpha = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

۷۲. ثابت کنید، $S_{BNA} = S_{BMC} + S_{AMD}$. اگر $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = \lambda$، آن وقت $S_{BMC} = (1-\lambda)S_{BAC}$ و $S_{AMD} = \lambda S_{BAD}$. از طرف دیگر، با نشان دادن فاصلهٔ C، D و N تا AB، بترتیب با h_1، h_2 و h، به دست می‌آوریم: $h = \lambda h_2 + (1-\lambda)h_1$. در نتیجه:

$$S_{ABN} = \frac{1}{2} AB.h = \frac{1}{2}\lambda.AB.h_2 + (1-\lambda)\frac{1}{2}.AB.h_1$$
$$= \lambda S_{ABD} + (1-\lambda)S_{BAC} = S_{AMD} + S_{BMC}$$

۷۳. داریم : $\frac{BN}{NC}=\frac{AM}{MC}=\frac{AL}{LD}=\frac{BK}{KD}$ ، یعنی KN با CD موازی است و چهارضلعی KLMN متوازی‌الاضلاع است. فرض کنید $AK=a$ ، $KC=b$ ، $BK=x$ ، $KD=y$ و $\frac{x}{y}\geq\frac{a}{b}$ ؛ در این صورت :

$$S_{KLM}=S_{ALM}-S_{AKL}=\left(\frac{x}{x+y}\right)^{۲}S_{ADC}-\frac{x}{x+y}\cdot\frac{a}{a+b}S_{ADC}$$

$$=\frac{x}{x+y}\left(\frac{x}{x+y}-\frac{a}{a+b}\right)\frac{y}{y+x}S_{ABCD}<\frac{x^{۲}y}{(x+y)^{۳}}S_{ABCD}$$

قرار می‌گذاریم : $\frac{y}{x}=t$. بسادگی می‌توان ثابت کرد که $\frac{۴}{۲۷}$ ، بیشترین مقدار تابع $\frac{t}{(۱+t)^{۳}}$ به ازای $t=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید (به طور مثال، با مشتق گرفتن از این تابع). بنابراین

$$S_{KLMN}=۲S_{KLM}<\frac{۸}{۲۷}S_{ABCD}$$

۹.۱. رابطه‌های متری

۱.۹.۱. رابطه‌های متری (برابریها)

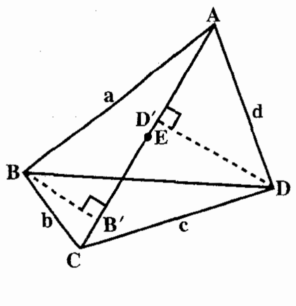
۷۴. در چهارضلعی ABCD، فرض کنیم E وسط قطر AC، B' و D' تصویرهای B و D روی AC باشند. در مثلثهای BAC و DAC داریم :

$$a^{۲}-b^{۲}=۲AC\times EB' \;;$$
$$d^{۲}-c^{۲}=۲AC\times ED'$$

طرفین دو رابطه را از هم تفریق می‌کنیم :

$$(a^{۲}+c^{۲})-(b^{۲}+d^{۲})=۲AC\times(EB'-ED')=۲AC\times D'B'$$

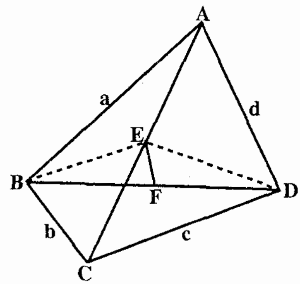
از این رابطه نتیجه می‌شود که شرط لازم و کافی برای اینکه قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، این است که مجموع مربعهای دو ضلع غیر متوالی با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر برابر باشد (شکل).



۷۵. فرض کنیم E و F وسطهای قطرهای AC و BD از چهارضلعی ABCD باشد. به موجب قضیهٔ اوّل میانه‌ها در دو مثلث ABC و ADC (شکل) داریم :

$$a^۲ + b^۲ = ۲BE^۲ + \frac{AC^۲}{۲} \;;$$

$$d^۲ + c^۲ = ۲DE^۲ + \frac{AC^۲}{۲} \;;$$



از تفریق دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$(a^۲ + b^۲) - (c^۲ + d^۲) = ۲(BE^۲ - DE^۲) \qquad (۱)$$

اما به موجب رابطهٔ دوم میانه‌ها در مثلث EBD داریم :

$BE^۲ - DE^۲ = ۲BD \times$ تصویر EF روی BD

و رابطه (۱) چنین می‌شود :

$(a^۲ + b^۲) - (c^۲ + d^۲) = ۴BD \times$ تصویر EF روی BD

۷۶. اگر ABCD چهارضلعی مطلوب و AC و BD قطرهای عمود بر هم آن و O محل برخورد قطرهای آن باشند، خواهیم داشت :

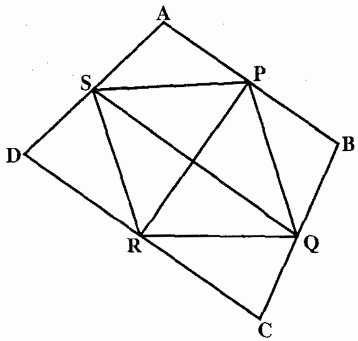
$$AB^۲ + CD^۲ = OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ + OD^۲$$

$$AD^۲ + BC^۲ = OA^۲ + OC^۲ + OB^۲ + CD^۲$$

در نتیجه $\quad (۱)\;\; AB^۲ + CD^۲ = AD^۲ + BC^۲$

برعکس، از رابطهٔ (۱) داریم : $\quad AB^۲ - AD^۲ = BC^۲ - CD^۲$

و از این رابطه معلوم می‌شود که خطی که نقطهٔ A را به C وصل می‌کند بر BD عمود است. زیرا مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل مربعهای فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ ثابت مقداری ثابت است، خطی است عمود بر خطی که آن دو نقطهٔ ثابت را به هم وصل می‌کند.



۷۷. PR و QS همانطور که ثابت کردیم قطرهای متوازی‌الاضلاع PQRS می‌باشند. ضلعهای این متوازی‌الاضلاع بترتیب نصف قطرهای چهارضلعی‌اند و داریم :

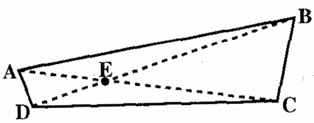
$$PR^2 + QS^2 = 2SR^2 + 2PS^2$$

$$PR^2 + QS^2 = 2 \times \frac{AC^2}{4} + 2 \times \frac{BD^2}{4}$$

$$PR^2 + QS^2 = \frac{AC^2}{2} + \frac{BD^2}{2}$$

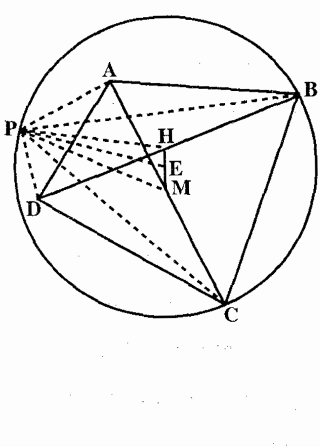
و یا :

$$AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2)$$



۷۸. دو مثلث EBC و AED با هم متشابه‌اند (زیرا $A\hat{E}D = B\hat{E}C$ ، $E\hat{C}B$ و $A\hat{D}E = 90^\circ$) در نتیجه :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{ED} \Rightarrow EB \times ED = EA \times EC$$



۸۳. فرض کنیم M و N بترتیب وسط قطرهای AC و BD و R شعاع دایره باشد. حکم قضیهٔ میانه‌ها را در مورد دو مثلث PAC و PBD می‌نویسیم :

$$PA^2 + PC^2 = 2PM^2 + \frac{AC^2}{2} \ ,$$

$$PD^2 + PB^2 = 2PN^2 + \frac{BD^2}{2}$$

این دو رابطه را عضو به عضو جمع می‌کنیم، حاصل می‌شود :

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 2(PM^2 + PN^2) + \frac{AC^2 + BD^2}{2}$$

حال در مثلث PMN حکم قضیهٔ میانه‌ها را می‌نویسیم، حاصل می‌شود :

$$PM^۲ + PN^۲ = ۲R^۲ + \frac{MN^۲}{۲}$$

بنابراین داریم :

$$PA^۲ + PB^۲ + PC^۲ + PD^۲ = ۴R^۲ + \frac{۲MN^۲ + AC^۲ + BD^۲}{۲}$$

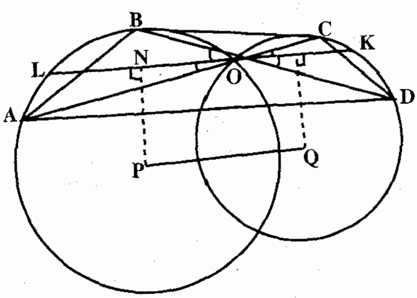
چون R، MN، AC و BD مقدارهای ثابت می‌باشند، پس مجموع طرف اوّل مقدار ثابتی است.

۸۴. نیمساز زاویهٔ O را رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را در K و L قطع کند. به طوری که ملاحظه می‌شود :

$$\overset{\frown}{OK} > \overset{\frown}{BK} \Rightarrow OK > BK$$

و یا :

$$۲OK > ۲BK = BK + BK$$



و یا $۲OK > BK + BK > AB$، پس : $OK > \frac{۱}{۲}AB$.

به همین ترتیب $OL > \frac{۱}{۲}CD$. اکنون می‌نویسیم :

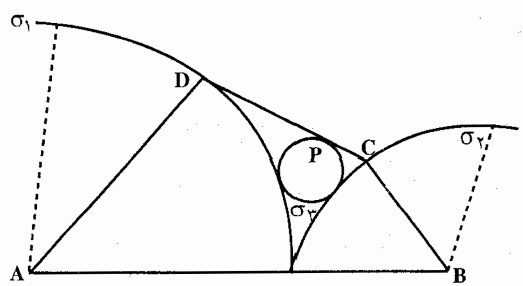
$$PQ \geq MN = \frac{۱}{۲}KL = \frac{۱}{۲}(OK + OL) > \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}AB + \frac{۱}{۲}CD)$$

و بالاخره :

$$PQ \geq \frac{۱}{۴}(AB + CD)$$

۲.۹.۱. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۸۵. اجازه دهید ساختار چهارضلعی مفروض با دو خاصیت داده شده را برای مقدارهای مختلف h در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم $AD = R$ و $BC = r$. ابتدا ABP را با ضلعهای $R+r$ و $R+h$ و $r+h$ می‌سازیم. سپس (شکل) دایرهٔ $\sigma_۱$ را به مرکز A و شعاع R، دایرهٔ $\sigma_۲$ را به مرکز B و شعاع r و بالاخره دایرهٔ $\sigma_۳$ را به مرکز P و شعاع h رسم می‌کنیم. نقطه‌های C و D بترتیب بر دو دایرهٔ $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ قرار دارند و خط CD مماس بر $\sigma_۳$ می‌باشد. از این جا مشخص است که ماکزیمم مقدار h که در آن این ساختار موجود باشد وقتی است که خط CD بر دایره‌های $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ نیز مماس باشد. بالطبع در این حالت زاویه‌های C و D قائمه خواهند بود. نشان خواهیم داد که وقتی CD بر سه دایره مماس



باشد، رابطهٔ $\frac{۱}{\sqrt{BC}}+\frac{۱}{\sqrt{AD}}=\frac{۱}{\sqrt{h}}$ برقرار خواهد بود. از این رابطه و با توجه به ماکزیمم بودن h در این حالت نامساوی مورد نظر نتیجه خواهد شد. پای عمود رسم شده از نقطهٔ P بر CD را M می‌نامیم. از قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت :

$$CD=\sqrt{(R+r)^۲-(R-r)^۲}=۲\sqrt{Rr}$$

$$CD=CM+MD=\sqrt{(r+h)^۲-(r-h)^۲}+\sqrt{(R+h)^۲-(R-h)^۲}$$

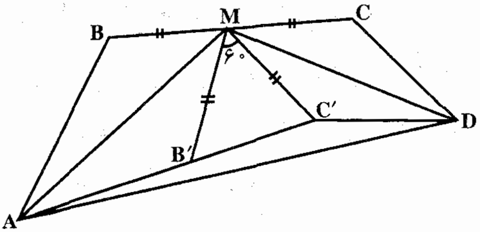
$$=۲\sqrt{rh}+۲\sqrt{Rh}$$

بنابراین :

$$\sqrt{Rr}=\sqrt{rh}+\sqrt{Rh}$$

و با تقسیم کردن طرفین بر $\sqrt{Rrh}$ داریم :

$$\frac{۱}{\sqrt{h}}=\frac{۱}{\sqrt{R}}+\frac{۱}{\sqrt{r}}$$



۸۷. B' را قرینهٔ B نسبت به خط راست AM و C' را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست MD می‌گیریم. زاویهٔ $B'MC'$ برابر ۶۰ درجه و مثلث $B'MC'$ متساوی‌الاضلاع است (شکل). طول خط شکستهٔ $AB'C'D$ برابر است با $AB+\frac{1}{2}BC+CD$ ولی طول این خط شکسته، از طول پاره‌خط راست AD، که دو انتهای آن را به هم وصل کرده، بزرگتر است.

۸۹. داریم :

$$S=S_{ABC}+S_{ADC}=\frac{1}{2}(ab\sin\hat{B}+cd\sin\hat{D})$$
$$=\frac{2}{4}(ab\sin\hat{B}+cd\sin\hat{D})\le\frac{(a-b)^2+2ab}{4}+\frac{(c-d)^2+2cd}{4}$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

چنانچه چهارضلعی مربع باشد، به جای نامساوی، تساوی خواهیم داشت.

۹۰. داریم :

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha=\frac{2d_1d_2\sin\alpha}{4}\le\frac{(d_1-d_2)^2+2d_1d_2}{4}=\frac{d_1^2+d_2^2}{4}$$

اگر $d_1=d_2$ و $d_1\perp d_2$ باشد، نامساوی، تساوی خواهد شد.

۱.۱۰. شکلهای ایجادشده

۹۱. از ویژگی مربع استفاده کنید

۱.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱.۱۱.۱. خطها موازی‌اند

۹۳. فرض کنید O نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD باشد؛ با استفاده از تشابه مثلثهای مناسب، به دست می‌آوریم :

$$\frac{OK}{OC}=\frac{OK}{OB}\cdot\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OD}\cdot\frac{OM}{OA}=\frac{OM}{OD}$$

۲.۱۱.۱. خطها بر هم عمودند

۹۶. قرار می‌گذاریم: $D\hat{A}N = M\hat{A}B = \varphi$. فرض کنید L نقطهٔ برخورد AM و NB، P نقطهٔ برخورد AN و DM، و Q نقطهٔ برخورد AK و MN باشد. بنا بر قضیهٔ سوا در مثلث AMN داریم:

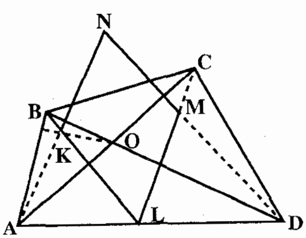
$$\frac{NQ}{QM} = \frac{AL}{LM} \cdot \frac{NP}{PA} = \frac{S_{NAB}}{S_{NMB}} \cdot \frac{S_{DNM}}{S_{DAM}}$$

$$= \frac{\frac{AN}{۲} \cdot \frac{AM}{\cos\varphi} \sin N\hat{A}B \frac{AN}{۲} . NM \tan\varphi \cos A\hat{N}M}{\frac{AM}{۲} . NM \tan\varphi \cos A\hat{M}N . \frac{AN}{۲\cos\varphi} . AM \sin M\hat{A}D}$$

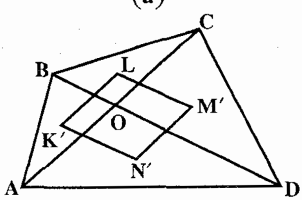
$$= \frac{AN \cos A\hat{N}M}{AM \cos A\hat{M}N}$$

یعنی Q، NM را به همان نسبت تقسیم می‌کند که ارتفاع رسم شده از A بر NM.

۹۸. K، L، M و N را، بترتیب، محل برخورد ارتفاعهای مثلثهای AOB، BOC، COD و DOA می‌گیریم. این نقطه‌ها، رأسهای یک متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند، زیرا دو ضلع آن روی خطهای راستی قرار دارند که از A و C بر BD عمود شده‌اند و دو ضلع دیگر آن روی خطهای راستی که از B و D بر AC عمود شده‌اند (شکل a). نقطه‌های K'، L'، M' و N'، محل برخورد میانه‌های مثلثهای AOB، BOC، COD و DOA، رأسهای متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند که دو ضلع آن موازی BD هستند و پاره‌خط راست AC را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند و دو ضلع دیگر آن با AC موازی‌اند و BD را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند (شکل b). روشن است که، ضلعهای متناظر این دو متوازی‌الاضلاع، بر هم عمودند. ثابت می‌کنیم که متوازی‌الاضلاعها متشابه‌اند، از آن جا نتیجه می‌گیریم که، اگر یکی از



(a)



(b)

آنها را به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران دهیم، نه تنها ضلعها، بلکه قطرهای آنها هم با هم موازی می‌شوند، یعنی $K'M' \perp KM$ (و $L'N' \perp LN$). برای اثبات تشابه دو متوازی‌الاضلاع، باید نسبت ضلعها برابر باشند. طول ضلعهای $K'L'$ و KN برابرند با $\frac{1}{3}AC$ و $\frac{1}{3}BD$.

تصویر ضلع KL بر BD، بر تصویر پاره‌خط راست AC بر BD، منطبق است. بنابراین،

$$KL = AC.\cot g\varphi$$

که در آن φ، زاویهٔ حادهٔ بین خطهای راست AC و BD است. به همین ترتیب

$$KN = BD.\cot g\varphi$$

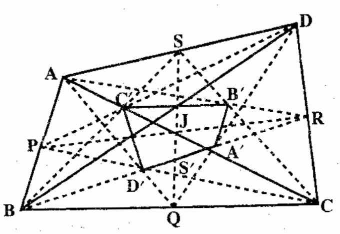
به این ترتیب، ضلعهای دو متوازی‌الاضلاع به نسبت $AC:BD$ هستند، یعنی با هم متشابه‌اند. در حالتی که φ، زاویه‌ای قائمه باشد، نقطه‌های K، L، M و N بر هم منطبق می‌شوند و مسأله مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱.۱۱.۳. خط نیمساز است

۹۹. متوازی‌الاضلاعهای $ABMK$ و $DCML$ را در نظر بگیرید و ثابت کنید که KL، DA را به همان نسبت تقسیم می‌کند که نقطهٔ N آن را قسمت می‌کند، و خط راست MN نیمساز زاویهٔ KML است.

۱.۱۱.۴. خطها همرسند

۱۰۲. خاطر نشان می‌کنیم که عمودهای وارد از A_1، B_1 و C_1، بترتیب، بر BC، CA و AB، در نقطه‌ای مانند D متقاطعند.



۱۰۳. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی داده شده (شکل) و A'، B'، C' و D' بترتیب مرکز ثقل مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC باشند. داریم:

$$PC':PD = PD':PC = 1:3$$

پس $C'D'$ با CD موازی است و $C'D':CD = 1:3$. پس ضلعهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ با ضلعهای متناظر چهارضلعی $ABCD$ متوازی و متناسبند؛ پس دو چهارضلعی متجانسند و خطهای AA'، BB'، CC' و DD' یکدیگر را در مرکز تجانس دو شکل قطع می‌کنند.

نکته. (الف) مرکز تجانس دو چهارضلعی بر J، یعنی مرکز ثقل چهارضلعی ABCD منطبق است. میانهٔ QS از مثلث QAD (شکل) پاره‌خط $D'A'$ را که با قاعدهٔ DA موازی است در S' قطع می‌کند؛ پس، S و S' نقطه‌های متناظر در دو شکل متجانس هستند، و خط $SS'Q$ از مرکز تجانس دو چهارضلعی می‌گذرد. برای خط PR هم رابطهٔ مشابهی صادق است و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

(ب) همان‌طور که به آسانی از شکل دیده می‌شود، جهتهای خطهای $A'D'$ و AD عکس هم هستند؛ پس دو چهارضلعی تجانس معکوس دارند و نقطه‌های متناظر، مثل A و A'، در دو طرف نقطهٔ J قرار دارند، و $JA:JA' = -3:1$.

۱۰۷. فرض کنید ABCD چهارضلعی داده شده و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد. O_1 و O_2 مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای DAB، BCD، و K و L، بترتیب وسط ضلعهای AB و BC هستند. نقطه‌های O_1 و O_2، بترتیب، روی OK و OL قرار دارند و $\frac{OO_2}{O_2L} = \frac{O_1O_2}{O_1K}$. این امر از این حقیقت که O_1O_2 بر DB عمود، و در نتیجه، با LK موازی است (LK بر AC عمود است)، نتیجه می‌شود. بنابراین، خطهای راست AO_1 و CO_2، OB را به یک نسبت تقسیم می‌کنند ((قضیهٔ منلائوس) را در مثلثهای OKB و OLD به کار می‌بریم).

۱.۱۱.۵. نقطه‌ها همخطند

۱۰۸. قضیهٔ منلائوس را در مورد مثلثهای ABD، BDC و DCA به کار می‌بریم:

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CN}{NA}=-1\,,\quad \frac{BM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DQ}{QB}=-1\,,\quad \frac{AL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DP}{PA}=-1$$

(L، M و N، بترتیب، نقطه‌های برخورد AB و PQ، BC و QR، و AC و PR هستند). با ضرب کردن این برابریها در هم، به دست می‌آوریم: $\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AL}{LB}\cdot\frac{BM}{MC}=-1$ ، یعنی، نقطه‌های L، M و N همخطند.

۱۱۰. برای روشنی وضع، در مثلث ABC فرض کنید $a \le b \le c$. وسط ضلعهای BC، CA و AB را، بترتیب با A_1، B_1 و C_1، و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی و محاطی خارجی با دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC را، بترتیب با F، F_a، F_b و F_c نشان دهید. باید ثابت کنیم که در شش ضلعی $C_1F_cFA_1F_aF_b$ (نقطه‌های اختیار شده بترتیب مشخص شده، یک شش ضلعی تشکیل می‌دهند، زیرا $a \le b \le c$) قطرهای C_1A_1، F_cF_a و

FF_a در یک نقطه به هم می‌رسند. برای اثبات حکم اخیر، کافی است ثابت کنیم که :

$$C_۱F_c.FA_۱.F_aF_b = F_cF.A_۱F_a.F_bC_۱ \quad (۱)$$

داریم :

$$C_۱F_c = \frac{b-a}{۲}\sqrt{\frac{R}{R+۲r_c}}$$

$$FA_۱ = \frac{c-b}{۲}\sqrt{\frac{R}{R-۲r}}$$

$$F_aF_b = \frac{(a+b)R}{\sqrt{R+۲r_a}.\sqrt{R+۲r_b}}$$

$$F_cF = \frac{(b-a)R}{\sqrt{R-۲r}.\sqrt{R+۲r_c}}$$

$$A_۱F_a = \frac{c-b}{۲}\sqrt{\frac{R}{R+۲r_a}}$$

$$F_bC_۱ = \frac{a+b}{۲}\sqrt{\frac{R}{R+۲r_b}}$$

اکنون، برابری (۱) بسادگی تحقیق می‌شود.

تبصره. می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی چهارضلعیی که رأسهایش نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی و محاطی خارجی مثلث داده شده با دایرهٔ نه نقطهٔ آن هستند، بر امتدادهای میانخطهای این مثلث قرار دارند.

۱.۱۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۱۱. زاویه‌های میان ضلعها، و نیز میان ضلعها و قطرهای چهارضلعی $Q_۲$، برحسب زاویه‌های میان ضلعها، و نیز میان ضلعها و قطرهای چهارضلعی $Q_۱$ حساب می‌شوند. (قطرهای چهارضلعی $Q_۲$ بر قطرهای نظیر چهارضلعی $Q_۱$ عمودند و از وسط آنها می‌گذرند.)

۱۱۲. O را نقطهٔ دلخواهی از درون چهارضلعی ABCD می‌گیریم. روشن است که، یکی از زاویه‌های AOB، BOC، COD و DOA، از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند؛ برای مشخص بودن وضع، این زاویه را AOB فرض می‌کنیم. در این صورت

$$AO^۲ + BO^۲ \le AB^۲ = ۷^۲ = ۴۹$$

بنابراین یا $AO^{2} < 25$ و یا $BO^{2} < 25$، یعنی نقطهٔ O، در درون دایره‌ای به شعاع ۵ است که به مرکز نقطهٔ A یا نقطهٔ B رسم شده باشد.

۱۱۳. حکم مسأله را، برای هر n ضلعی محدب به مساحت S و محیط P ثابت می‌کنیم. طول ضلعهای این n ضلعی را a_1، a_2، ...، a_n می‌گیریم:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = p$$

مستطیلی با مساحت S و قاعدهٔ به طول P در نظر می‌گیریم؛ ارتفاع این مستطیل برابر $\frac{S}{P}$ می‌شود. اکنون این مستطیل را، به کمک پاره‌خطهای راست قائم، به n مستطیل با قاعده‌های برابر: a_1، a_2، ...، a_n تقسیم می‌کنیم و هر یک از آنها را، متناظر با یک n ضلعی و در درون آن قرار می‌دهیم. بعضی از مستطیلها، در بخشی، روی هم قرار می‌گیرند و بعضی‌ها ممکن است به بیرون از n ضلعی بروند؛ بنابراین، از آن جا که مجموع مساحتهای آنها برابر S و مساحت چند ضلعی هم برابر S است، این مستطیلها نمی‌توانند، به طور کامل سطح چند ضلعی را بپوشانند. هر نقطه‌ای از سطح چندضلعی را، که به وسیلهٔ این مستطیلها پوشیده نشده باشد، می‌توان به عنوان مرکز دایرهٔ به شعاع $\frac{S}{P}$ انتخاب کرد.

۱۱۴. حل (از: Loren Larson & Bruce Hanson). ابتدا اشعهٔ OL و OM که زاویهٔ حادهٔ: $\theta = L\hat{O}M$ را تشکیل می‌دهند، و دو نقطهٔ E و F بر یکی از آنها، برای مثال OL، با E بین O و F، را در نظر می‌گیریم؛ شکل را ملاحظه کنید. فرض می‌کنیم: $C(E,F)$ دایرهٔ با قطر EF را نمایش دهد. در این صورت بنا به تشابه $C(E,F)$ به OM مماس است اگر و فقط اگر نسبت:

$$\frac{EF}{OF} = K(\theta)$$

مستقل از انتخاب خاص E، F باشد، یعنی، اگر و فقط اگر $K(\theta)$ به ازای ثابت θ ثابت باشد. اکنون مسأله‌مان را در نظر می‌گیریم و ابتدا فرض می‌کنیم که AB و CD موازی نباشند. OL و OM را اشعهٔ گذرنده بترتیب از: A، B، C و D در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که: $C(A,B)$ بر OM مماس است:

$$\frac{AO}{OB} = K(\theta)$$

است، و دایرهٔ $C(C,D)$ بر OL مماس است اگر و فقط اگر:

$$\frac{DC}{OC} = K(\theta)$$

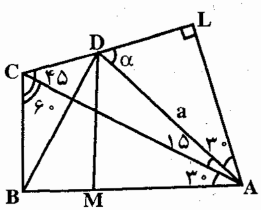
باشد، نسبتهای بالا، یعنی $\frac{AB}{OB}$ و $\frac{DC}{OC}$ مساویند اگر و فقط اگر BC موازی AD باشد.

در حالتی که AB و CD موازی باشند، دایرهٔ C(C،D) بر AB مماس است اگر و فقط اگر: $AB = CD$ باشد، و این رابطه برقرار است اگر و فقط اگر ABCD متوازی‌الاضلاع باشد، یعنی اگر و فقط اگر BC و AD نیز موازی باشند.

۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱.۱۱۵. مجموع نسبتها $۲۴ = ۸ + ۷ + ۶ + ۳$ است:

$\hat{A} = \frac{۳۶۰^\circ \times ۳}{۲۴} = ۴۵^\circ$ و به همین ترتیب $\hat{B} = ۹۰^\circ$، $\hat{C} = ۱۰۵^\circ$ و $\hat{D} = ۱۲۰^\circ$. اگر مسأله را حل شده بینگاریم، از تناسب $\frac{CB}{CA} = \frac{۱}{۲}$ معلوم می‌شود که در مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB زاویهٔ CAB مساوی با ۳۰ درجه و زاویهٔ ACB مساوی با ۶۰ درجه است، بنابراین $A\hat{C}D = ۴۵^\circ$ و $C\hat{A}D = ۱۵^\circ$ است، پس مثلث ADC را با معلومات یک ضلع و زاویه‌ها می‌سازیم و سپس AB و CB را که با AC بترتیب زاویه‌های ۳۰ درجه و ۶۰ درجه می‌سازند، رسم می‌کنیم تا رأس B به دست آید.



۲. در مثلث ADC ارتفاع AL را رسم می‌کنیم چون $A\hat{D}L = ۶۰^\circ$ است پس:

$DL = \frac{a}{۲}$ و $AL = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$. از تساوی $CL = AL$ نتیجه می‌شود:

$$CD = CL - DL = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} - \frac{a}{۲} = \frac{a}{۲}(\sqrt{۳} - ۱)$$

$$AC = AL\sqrt{۳} = \frac{a\sqrt{۶}}{۲}$$

$$CB = \frac{AC}{۲} = \frac{a\sqrt{۶}}{۲}\ ,\ \ AB = AC \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳a\sqrt{۲}}{۴}$$

برای محاسبهٔ BD عمود DM را بر AB فرود می‌آوریم.

داریم :

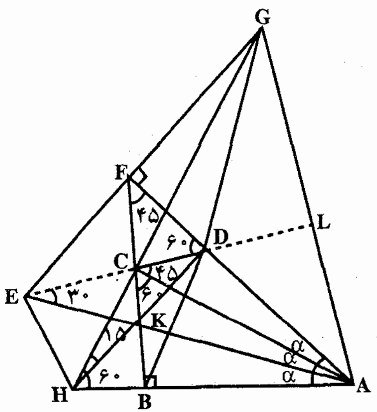
$$AM = DM = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$BM = \frac{۳a\sqrt{۲}}{۴} - \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a\sqrt{۲}}{۴} \ ,$$

پس :

$$DB^{۲} = BM^{۲} + DM^{۲} = \frac{a^{۲}}{۸} + \frac{a^{۲}}{۲} = \frac{۵a^{۲}}{۸}$$

$$DB = \frac{a\sqrt{۱۰}}{۴}$$



۳. الف. در مثلث AFB زاویهٔ $\hat{F} = ۴۵^\circ$ و در مثلث AHG زاویهٔ $\hat{G} = ۴۵^\circ$ پس چهارضلعی ACFG محاطی است و داریم : $A\hat{F}G = A\hat{C}G = ۹۰^\circ$. از طرف دیگر در مثلث ACG خط CL که بر AG عمود است و نیمساز زاویهٔ $A\hat{C}G$ می‌باشد، عمودمنصف AG است. پس $DA = DG$ و نیز در مثلث ADE داریم : $DE = DA$ پس : $DE = DG$. بنابراین دو مثلث CFG و DFE بنابر تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع متساویند و داریم : $EF = FG$ و $E\hat{D}F = ۹۰^\circ$ ، یعنی D، E و F بر یک خط راست واقعند و ED که عمود منصف AG است محور تقارن مثلث AEG می‌باشد.

ب. مثلث AEG متساوی‌الاضلاع است و چنانکه دیدیم D مرکز دایرهٔ محیطی آن است. $(DG = DE = DA)$ ، بعلاوه $A\hat{E}H = ۶۰^\circ$ و اما داریم $A\hat{H}G = ۶۰^\circ$ ، پس چهارضلعی AHEG محاطی و دایره‌ای که از G ،E و A می‌گذرد از H نیز عبور می‌کند بنابراین $DH = DG$ و چون $D\hat{G}H = ۱۵^\circ$ است، پس $D\hat{H}C = ۱۵^\circ$ و $D\hat{H}C = \frac{۱}{۳} B\hat{A}D$.

ج. دیدیم که مثلث DEG متساوی‌الاضلاع است و مثلث ECK که در آن دو زاویهٔ C و K هر یک ۷۵ درجه هستند متساوی‌الساقین است. در مثلث HBC داریم :

$$HB = \frac{۱}{۲}CH \ , \ \ CH = \frac{۱}{۲}HA \Rightarrow HB = \frac{۱}{۴}HA \ , \ \ AB = \frac{۳}{۴}HA$$

$$\Rightarrow HB = \frac{۱}{۳}AB$$

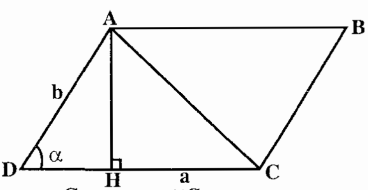
د. از تساوی $D\hat{H}G = E\hat{G}H = ۱۵^\circ$ معلوم می‌شود که EG با DH موازی است و هریک از زاویه‌های EGH و HGD مساوی با ۱۵ درجه هستند.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲

رابطه‌های متری در چهارضلعیهای ویژه

۱.۲. رابطه‌های متری درمتوازی‌الاضلاع

۱.۱.۲. تعریف و قضیه



۱۱۶. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. قطر AC و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$S_{ABCD} = ۲S_{\Delta ACD}$$

امّا:

$$S_{\Delta ACD} = \frac{۱}{۲}DC.AH = \frac{۱}{۲}a.AH \ , \ \ AH = b\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

درنتیجه داریم:

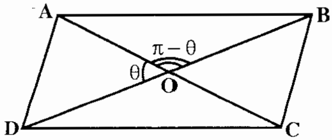
$$S_{ABCD} = ۲(\frac{۱}{۲}ab\sin\alpha) = ab\sin\alpha$$

۱۱۷. متوازی‌الاضلاع ABCD به قطرهای $AC = d$ و $BD = d'$ و زاویهٔ بین دو قطر $A\hat{O}D = \theta$ را در نظر می‌گیریم. اگر نقطهٔ برخورد قطرها را O بنامیم، داریم:

$$S_{AOD} = S_{AOB} = S_{OBC} = S_{OCD} \Rightarrow S_{ABCD} = ۴S_{AOD}$$

$$S_{AOD} = \frac{۱}{۲}AO.OD.\sin A\hat{O}D = \frac{۱}{۲}(\frac{d}{۲})(\frac{d'}{۲})\sin\theta = \frac{۱}{۸}dd'\sin\theta$$

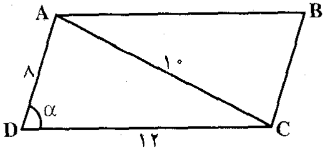
$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۴(\frac{۱}{۸})dd'\sin\theta = \frac{۱}{۲}dd'\sin\theta$$



۲.۱.۲.زاویه

۲ . ۱ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۲ . ۱ . ۲ . ۱ . ۱ . اندازهٔ زاویهٔ متوازی‌الاضلاع



۱۱۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AD=۸cm$ ، $DC=۱۲cm$ و $AC=۱۰cm$ است. می‌دانیم که قطر کوچک متوازی‌الاضلاع، روبه‌رو به زاویهٔ حادهٔ آن است. اگر این زاویه را α بنامیم، در مثلث ACD داریم :

$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ - ۲AD.DC\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۶۴ + ۱۴۴ - ۲\times۸\times۱۲\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arc}\cos\frac{۹}{۱۶}$$

از آن‌جا اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ متوازی‌الاضلاع برابر است با :

$$\pi - \alpha = \pi - \operatorname{Arc}\cos\frac{۹}{۱۶}$$

۱۱۹. α را زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع فرض می‌کنیم، از آن‌جا :

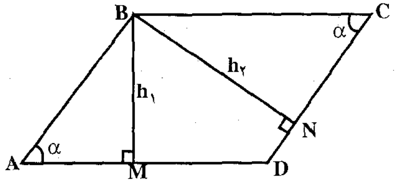
$$\begin{cases} h_۱ = BM = AB\sin\alpha \\ h_۲ = BN = BC\sin\alpha \end{cases}$$

یا :

$$\Rightarrow h_۱ + h_۲ = (AB + BC)\sin\alpha = P\sin\alpha$$

از آن‌جا :

$$\sin\alpha = \frac{h_۱ + h_۲}{P}$$



و اگر α زاویهٔ حاده‌ای باشد : $\alpha = \operatorname{Arc}\sin\frac{h_۱ + h_۲}{P}$ خواهد شد و زاویهٔ منفرجه برابر $\pi - \operatorname{Arc}\sin\frac{h_۱ + h_۲}{P}$ خواهد بود.

تبصره. اگر $h_۱ + h_۲ > P$ باشد مسأله جواب ندارد و در حالتی که $h_۱ + h_۲ \le P$ باشد، مسأله دارای جواب است (برای $h_۱ + h_۲ = P$ مستطیل خواهیم داشت).

۱۲۰. اگر $k > ۲$ باشد، آن‌گاه $۳\mathrm{Arc}\cos\frac{۲+k}{۲k}$ و $\pi - ۳\mathrm{Arc}\cos\frac{۲+k}{۲k}$ خواهد بود. اگر $k \le ۲$ باشد، جواب وجود نخواهد داشت.

۱۲۱. $\mathrm{Arc}\cos\frac{(p^۲+q^۲)(n^۲-m^۲)}{۲pq(n^۲+m^۲)}$ و $\pi - \mathrm{Arc}\cos\frac{(p^۲+q^۲)(n^۲-m^۲)}{۲pq(n^۲+m^۲)}$.
ضلعهای متوازی‌الاضلاع را با px و qx و قطرهای آن‌را با my و ny نشان دهید. از فرمولی که قطرها و ضلعهای آن را به هم مربوط می‌سازد، استفاده کرده و سپس قانون کسینوسها را برای بیان یکی از قطرها برحسب ضلعها به کار ببرید.

۱۲۲. $\mathrm{Arc}\sin(\frac{b}{a}-۱)$.

۱۲۳. دو حالت در نظر بگیرید: (الف). پای عمودها، بر ضلعهای متوازی‌الاضلاع واقع باشند و (ب). یکی از عمودها، ضلعی را که بر آن فرود می‌آید، قطع نمی‌کند. در حالت اوّل، به تناقض می‌رسیم. در حالت دوم، به‌دست می‌آوریم $\cos\alpha = \frac{۲ab}{a^۲+b^۲}$، که در آن، α زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع داده شده است.

۱۲۴. از $\frac{|a^۲-b^۲|}{a^۲+b^۲}$ تا ۱.

۲.۱.۲.۱.۲. اندازهٔ زاویه‌های دیگر

۱۲۵. $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$ و $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$.

۲.۲.۱.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۲۶. ضلعهای متوازی‌الاضلاع را با a و ka، قطرهای آن‌را با d و kd نشان دهید. با استفاده از فرمولی که ضلعها و قطرهای متوازی‌الاضلاع را به هم مربوط می‌سازد، رابطهٔ بین a و d را پیدا کرده و سپس از قانون کسینوسها دوباره استفاده کنید.

۱۲۷. با توجه به شکل، رابطه‌های زیر را داریم:

$$\frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{CD}{PC}\cdot\frac{PC}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{AD}$$
$$= \frac{AB}{PA}\cdot\frac{PA}{AD} = \frac{\sin(\gamma+\varepsilon)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\delta} = \frac{\sin(\gamma+\varepsilon)}{\sin\delta}$$
$$\sin\gamma\sin(\gamma+\varepsilon) = \sin\delta\sin(\delta+\varepsilon)$$
$$\cos\varepsilon - \cos(۲\gamma+\varepsilon) = \cos\varepsilon - \cos(۲\delta+\varepsilon)$$
$$\Rightarrow \gamma = \delta$$

۳.۱.۲. ضلع

۱.۳.۱.۲. اندازهٔ ضلع

۱۲۹. با توجه به این که $AB = CD$ است، در مثلث ADC رابطهٔ سینوسها را می‌نویسیم.

$$\frac{AC}{\sin A\hat{D}C} = \frac{DC}{\sin D\hat{A}C} = \frac{AD}{\sin A\hat{C}D} \Rightarrow \frac{12\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{DC}{\sin D\hat{A}C} = \frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\sin A\hat{C}D}$$

$$\Rightarrow \sin A\hat{C}D = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \sin 15^\circ \Rightarrow A\hat{C}D = 15^\circ \Rightarrow D\hat{A}C = 45^\circ$$

$$\Rightarrow 24 = \frac{DC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow DC = 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB = CD = 12\sqrt{2}$$

۱۳۰. الف. CK و DM ارتفاعهای متناظر با ضلعهای DC و BC می‌باشند. بنابراین داریم:

$$DC.CK = BC.DM \Rightarrow DC \times 9 = 12 \times 15 \Rightarrow DC = 20$$

$$MC = \sqrt{DC^2 - DM^2} = \sqrt{400-225} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$$

ب) داریم:

$$AB = AK + KB = \sqrt{18} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = CD$$

$$BC = \sqrt{KC^2 + KB^2} = \sqrt{24+8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = AD$$

$$BC.DM = AB.CK \Rightarrow 4\sqrt{2} \times DM = 5\sqrt{2} \times \sqrt{24} \Rightarrow DM = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

۲.۳.۱.۲. نسبت ضلعها

۱۳۱. داریم:

$$\begin{cases} BD^2 = a^2 + b^2 - ab \\ AC^2 = a^2 + b^2 + ab \end{cases}$$

چون $AC > BD$ است، طبق فرض داریم:

$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab} = \frac{(\frac{a}{b})^2 + 1 + \frac{a}{b}}{(\frac{a}{b})^2 + 1 - \frac{a}{b}} = \frac{19}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ یا } \frac{3}{2}$$

۱۳۲. بنابر قضیهٔ کسینوسها داریم :

$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} - ۲AB.AD\cos\hat{A}$$
$$AC^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} + ۲AB.AD\cos\hat{A}$$

از جمع تساویهای بالا و با قراردادن $BD = kAB$ و $AC = kAD$ داریم :

$$k^{۲}(AB^{۲} + AD^{۲}) = ۲(AB^{۲} + AD^{۲}) \Rightarrow k = \sqrt{۲}$$

به این ترتیب اگر در متوازی‌الاضلاعی، قطرها متناسب با ضلعها باشند، نسبت قطر بزرگ به ضلع بزرگ (یا نسبت قطر کوچک به ضلع کوچک) فقط می‌تواند $\sqrt{۲}$ باشد.

اکنون نسبت ضلعها را پیدا می‌کنیم :

اگر $AD = a$ ، $AB = b$ ، آن‌گاه $AC = a\sqrt{۲}$ و از مثلث ACD داریم :

$$a\sqrt{۲} - a < b < a + a\sqrt{۲}$$

یا

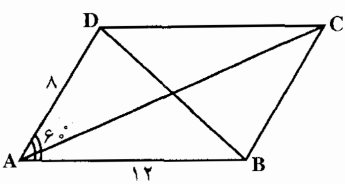
$$\sqrt{۲} - ۱ < \frac{b}{a} < \sqrt{۲} + ۱$$

۱۳۴. نیمسازهای زاویه‌های درونی متوازی‌الاضلاع، ضمن برخورد با هم، مستطیلی تشکیل می‌دهند که قطرهایش با ضلعهای متوازی‌الاضلاع موازی‌اند و با تفاضل ضلعهای متوازی‌الاضلاع برابرند. درنتیجه، اگر a و b طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع و α زاویهٔ بین آنها باشد، آن وقت، $S = ab\sin\alpha$ ، $Q = \frac{۱}{۲}(a-b)^{۲}\sin\alpha$ و $\frac{S}{Q} = \frac{۲ab}{(a-b)^{۲}}$.

جواب : $\frac{S + Q + \sqrt{Q^{۲} + ۲QS}}{S}$.

۲.۱.۴. قطر

۲.۱.۴.۱. اندازهٔ قطر



۱۳۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD ، قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم. اگر $AB = ۱۲$ ، $AD = ۸$ و $D\hat{A}B = ۶۰^{\circ}$ باشد، در مثلث ABD داریم :

$$BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} - AB.AD = ۱۴۴ + ۶۴ - ۹۶ = ۱۱۲$$
$$\Rightarrow BD = \sqrt{۱۱۲} = ۴\sqrt{۷}$$

و در مثلث ADC، $\hat{ADC}=120^\circ$ است و از آنجا :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + AD.DC = 144+64+96 = 204$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{204} = 2\sqrt{51}$$

۱۳۶. $\sqrt{a^2+b^2+2b\sqrt{a^2-b^2\sin^2\alpha}\cos\alpha+b\sin^2\alpha}$.

برای پیدا کردن زاویهٔ منفرجه بین ضلع کوچکتر و قطر کوچکتر از قانون سینوسها استفاده کرده و سپس با استفاده از قانون کسینوسها قطر را پیدا کنید.

۱۳۷. $\dfrac{\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

۱۳۸. 17cm، 10cm، 21cm و $\sqrt{337}$cm .

۲.۱.۵. پاره خط

۲.۱.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳۹. در مثلث ABD داریم :

$$\hat{BAD}=60^\circ \Rightarrow BD^2 = AB^2 + AD^2 - AB.AD$$
$$\Rightarrow BD^2 = 324+144-216 = 252 \Rightarrow BD = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}\text{cm}$$

از طرفی بنا به ویژگی نیمساز زاویه، می‌توان نوشت :

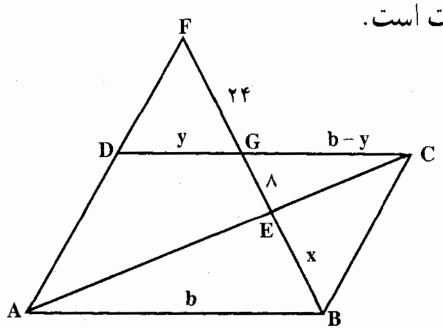
$$DE = \frac{DB.AD}{AD+AB} = \frac{6\sqrt{7}\times 12}{12+18} = \frac{12\sqrt{7}}{5}$$

امّا به دلیل همنهشت بودن دو مثلث ADE و BCF (یا به دلیل تقارن)، FB = DE است. بنابراین :

$$EF = DB - 2DE = 6\sqrt{7} - \frac{24\sqrt{7}}{5} = \frac{6\sqrt{7}}{5}$$

$$\Rightarrow EF = \frac{6\sqrt{7}}{5}\text{cm}$$

۱۴۰. گزینهٔ (هـ) درست است.



فرض می‌کنیم $BE = x$، $DG = y$ و $AB = b$ چون $\Delta BEA \sim \Delta GEC$.

$$\frac{۸}{x} = \frac{b-y}{b} \ , \ b-y = \frac{۸b}{x} \ , \ y = b - \frac{۸b}{x} = \frac{b(x-۸)}{x}$$

و چون $\Delta FDG \sim \Delta BCG$،

$$\frac{۲۴}{x+۸} = \frac{y}{b-y} \ , \ \frac{۲۴}{x+۸} = \frac{b(x-۸)}{x(\frac{۸b}{x})} = \frac{x-۸}{۸},$$

$$x^۲ - ۶۴ = ۱۹۲ \ , \ x = ۱۶$$

توصیه می‌شود رابطهٔ $\frac{۱}{BE} = \frac{۱}{BG} + \frac{۱}{BF}$ را در حالت کلی ثابت کنید.

۱۴۱. نقطهٔ N را روی BC طوری اختیار می‌کنیم که مثلث ABN با مثلث ADL متشابه باشد. در این صورت،

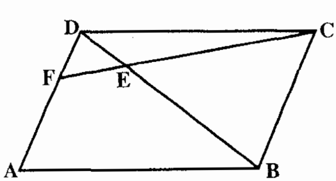
$$N\hat{M}A = M\hat{A}K + K\hat{A}D = M\hat{A}B + D\hat{A}L = M\hat{A}N$$

درنتیجه، $MN = AN = k.AL$. جواب : $\frac{a}{K} + b$.

۱۴۲. $۲\frac{۲}{۳}$

۱۴۳. $\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos\alpha}.\cot\alpha$

۲.۵.۱.۲. نسبت پاره‌خطها



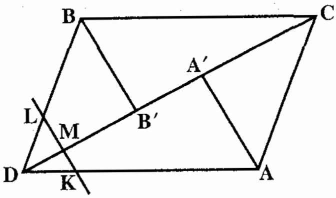
۱۴۴. در دو مثلث EBC و EDF می‌نویسیم (شکل) :

$$\frac{BC}{DF} = \frac{BE}{DE} = ۴$$

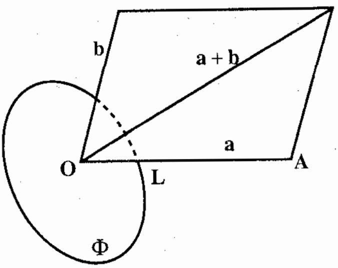
پس $BC = ۴DF$ یا $AD = ۴DF$ ، بنابراین : $AF = ۳DF$.

۱۴۵. $\frac{۱}{۷}$.

نقطه‌های برخورد خط راست رسم شده را، با ضلعهای OA، OB و با قطر OC بترتیب K، L و M می‌گیریم (شکل). ساختمانهای زیر را انجام می‌دهیم که به ما امکان می‌دهند، همهٔ نسبتهای لازم را به‌صورت نسبت پاره‌خط راست روی قطر OC در نظر بگیریم.



(الف)



(ب)

پاره‌خطهای راست ′BB و ′AA را موازی خط راست داده شده، رسم می‌کنیم، درضمن ′B و ′A، نقطه‌هایی از قطر OC هستند. مثلثهای ′OBB و ′CAA برابرند (این دو مثلث، نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع، متقارنند)، بنابراین $OB' = CA'$. از برابریهای:

$$۳ = OB:OL = OB':OM,$$

$$۴ = OA:OK = OA':OM,$$

$$OC = OB' + OA'$$

به‌دست می‌آید:

$$OC:OM = ۳ + ۴ = ۷$$

▽ به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که، اگر خط راستی از دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع، بترتیب $\frac{۱}{\lambda}$ و $\frac{۱}{\mu}$ آنها را جدا کند، آن وقت $\frac{۱}{\lambda+\mu}$ قطر آن را جدا خواهد کرد.

با تکیه بر این حقیقت، می‌توان نابرابری معروف و مهم مربوط به نُرم بردارها را ثابت کرد. این نابرابری را می‌توان این‌طور توضیح داد (شکل ب). φ را مجموعهٔ بستهٔ محدودی با مرکز تقارن O فرض می‌کنیم.

برای هر بردار $a = \overrightarrow{OA}$ و نماد $\|a\|$ را برابر با نسبت $\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OL}|}$ می‌گیریم که، در آن، L،

عبارت است از نقطهٔ برخورد نیمخط راست OA با محیط شکل ϕ . در این صورت، اگر ϕ محدب باشد، «نابرابری مثلثی» زیر برقرار است :

$$\|a+b\| \le \|a\|+\|b\|$$

در حالت خاص، اگر ϕ ، دایره‌ای به شعاع واحد به مرکز O، در صفحهٔ xOy باشد، آن‌وقت «نرم بردار» همان طول عادی می‌شود و «نابرابری مثلثی» برای بردارهای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) به این صورت درمی‌آید :

$$\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} \le \sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

۱۴۶. گزینهٔ (ب) درست است.

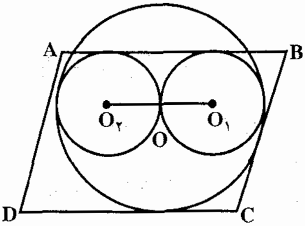
۱۴۷. $MA:MB = K^2$. نقطهٔ O را مرکز متوازی‌الاضلاع بگیرید. دو مثلث AOM و MOB متشابه‌اند.

۲.۱.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

۱۴۸. بنا به قضیهٔ پاپوس خط MN از مرکز متوازی‌الاضلاع می‌گذرد، پس روی ضلعهای رو به رو پاره‌خطهایی پدید می‌آورد که نظیر به نظیر با هم برابرند.

۲ . ۱ . ۶ . شعاع دایره

۲.۱.۶.۱. اندازهٔ شعاع دایره



۱۵۰. فرض کنید O_1 ، O_2 ، O معرف مرکز دایره‌ها (دو دایرهٔ اوّل بر AB مماسند) و x، y و R بترتیب شعاعهای آنها باشند. طول مماسهای مشترک دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 ، O_1 و O و O_2 و O بترتیب برابرند با $2\sqrt{xy}$ ، $2\sqrt{Rx}$ و $2\sqrt{Ry}$. بنابه فرض، $2\sqrt{xy} = a$. مثلث قائم‌الزاویهٔ O_1MO_2 با رأس قائمهٔ M را در نظر بگیرید. O_1M با BC موازی است، $O_1O_2 = x+y$ ، $O_2M = 2R-(x+y)$ و $O_1M = 2\sqrt{Rx}-\sqrt{Ry}$ (طول O_1M ، برابر است با تفاضل بین طول مماسهای مشترک دایره‌های به مرکزهای O، O_1 و O ، O_2). بنابراین $(x+y)^2 = (2R-x-y)^2+(2\sqrt{Rx}-\sqrt{Ry})^2$ ، که از آن جا $R = 2\sqrt{xy} = a$.

۷.۱.۲ . محیط

۱.۷.۱.۲. اندازهٔ محیط

۱۵۱. در مثلث ACD، AD ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° است. بنابراین داریم :

$$AD^۲ = AC^۲ + CD^۲ - AC.CD \Rightarrow AD^۲ = ۶۴ + ۱۰۰ - ۸۰ = ۸۴$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{۸۴} = ۲\sqrt{۲۱}$$

از آن‌جا :

$$\text{محیط} : ABCD = ۲(AD + CD) = ۲(۲\sqrt{۲۱} + ۱۰) = ۴(\sqrt{۲۱} + ۵)$$

۱۵۲. بنا به رابطهٔ کسینوسها در مثلث ABC می‌توان نوشت :

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB.BC.\cos ۴۵^\circ$$

امّا $AB = \sqrt{۲}BC$ و $AC = ۶\sqrt{۲}$ است، پس :

$$(۶\sqrt{۲})^۲ = (\sqrt{۲}BC)^۲ + BC^۲ - ۲(\sqrt{۲}BC).BC \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow BC^۲ = ۷۲$$

$$\Rightarrow BC = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow AB = ۶\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۱۲$$

بنابراین :

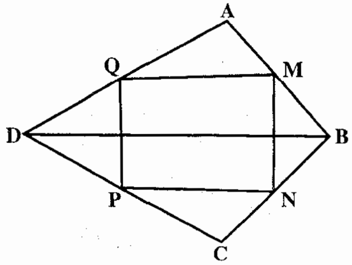
$$\text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۲(AB + BC) = ۲(۱۲ + ۶\sqrt{۲}) = ۱۲(۲ + \sqrt{۲})$$

۱۵۳. چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم و متوازی‌الاضلاع وارینیون نظیر این چهارضلعی را MNPQ می‌نامیم (M وسط AB، N وسط BC، P وسط CD و Q وسط AD است).

می‌دانیم که :
$$MQ = NP = \frac{BD}{۲} \ , \ MN = PQ = \frac{AC}{۲}$$

بنابراین داریم :

$$MNPQ\ \text{محیط} = ۲(MQ + MN) = ۲(\frac{BD}{۲} + \frac{AC}{۲}) = BD + AC$$



۸.۱.۲ . مساحت

۱.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت

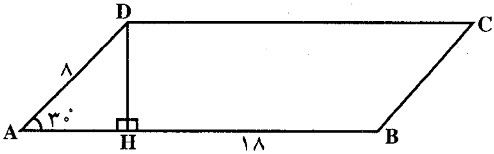
۱.۱.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع

۱۵۴. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $AB=۱۸$ ، $AD=۸$ و $\hat{A}=۳۰^\circ$ باشد، ارتفاع DH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH داریم :

$$\hat{A}=۳۰^\circ \Rightarrow DH=\frac{AD}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

از آن‌جا :

$$S_{ABCD}=AB.DH=۱۸\times۴=۷۲$$



۱۵۵. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADE داریم :

$$DE=\sqrt{AD^۲-AE^۲}=\sqrt{۲۲۵-۸۱}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

از آن جا مساحت متوازی‌الاضلاع برابر است با :

$$S_{ABCD}=AB.DE=۲۱\times۱۲=۲۵۲$$

۱۵۶. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. با فرض $AC=p$، $BD=q$، $B\hat{A}D=\alpha$، $AD=BC=x$ و $AB=CD=y$. در مثلثهای ABD و ACD داریم :

$$q^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos\alpha \qquad (۱)$$

$$p^۲=x^۲+y^۲-۲xy\cos(\pi-\alpha)\Rightarrow p^۲=x^۲+y^۲+۲xy\cos\alpha \qquad (۲)$$

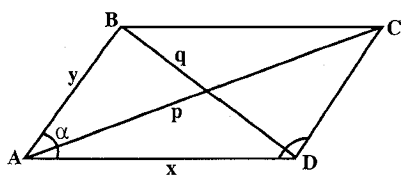
$$(۲)-(۱)\Rightarrow xy=\frac{p^۲-q^۲}{۴\cos\alpha}$$

اما :

$$S_{ABCD}=xy\sin\alpha$$

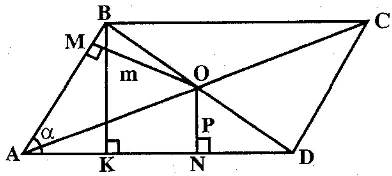
بنابراین داریم :

$$S_{ABCD}=\frac{p^۲-q^۲}{۴\cos\alpha}.\sin\alpha=\frac{p^۲-q^۲}{۴}\tan\alpha$$



۱۵۷. $\frac{۱}{۲}(a^۲ - b^۲)\tan\alpha$

۱۵۸. $۲\sqrt{pq}$



۱۵۹. ارتفاع BK از متوازی‌الاضلاع ABCD برابر است با $۲ON = ۲P$.

از آن جا که $B\hat{A}K = \alpha$ می‌باشد

بنابراین: $AB = \frac{۲P}{\sin\alpha}$. به همین ترتیب داریم: $AD = \frac{۲m}{\sin\alpha}$.

درنتیجه: $S = AD.BK = \frac{۴mp}{\sin\alpha}$

قطرها را نیز می‌توان به کمک قضیهٔ کسینوسها به‌دست آورد:

$$BD = \frac{۲\sqrt{p^۲ + m^۲ - ۲mp\cos\alpha}}{\sin\alpha} \ , \ AC = \frac{۲\sqrt{p^۲ + m^۲ + ۲mp\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

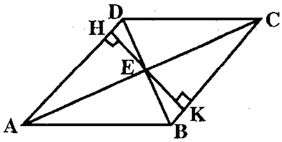
۲. ۱. ۸. ۱. ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۱۶۰. $\frac{۱}{۲}a(b - a\cos\alpha)\sin^۳\alpha$

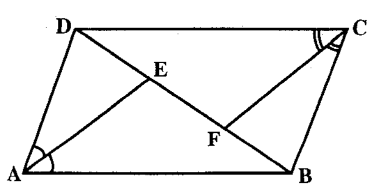
۱۶۱. $\frac{(a-b)^۲\sin\alpha}{۲}$

۱۶۲. $۲r^۲\sin^۲\alpha\sin ۲\alpha$

۲.۸.۱.۲. رابطهٔ بین مساحتها



۱۶۳. خطی که از نقطهٔ E عمود بر ضلعهای AD و BC رسم شود و محدود به این دو ضلع باشد، در نقطهٔ E نصف می‌شود، یعنی $EH = EK$ است. امّا $AD = BC$ است. بنابراین: $\frac{۱}{۲}AD.EH = \frac{۱}{۲}BC.EK \Rightarrow S_{\Delta AED} = S_{\Delta BCE}$



۱۶۴. مثلثهای ABD و BCD همچنین دو مثلث ADE و BCF همنهشتند.

۱۶۶. مساحت مثلث ABD نصف مساحت متوازی‌الاضلاع و مساحت مثلث AMN برابر $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABD است. بنابراین مساحت ذوزنقهٔ MNBD، $\frac{3}{4}$ مساحت مثلث ABD و درنتیجه $\frac{3}{8}$ مساحت متوازی‌الاضلاع است.

۱۶۷. از A به C وصل کنید. مساحت هریک از مثلثهای ACK و ACM بترتیب نصف مساحت مثلثهای ABC و ACD است.

۱۶۸. اگر M وسط DC و N وسط BC باشد و K و L نقطه‌های برخورد DN، بترتیب با AM و AB باشند، آن وقت $\frac{KM}{AK}=\frac{DM}{AL}=\frac{1}{4}$، یعنی، $AK=\frac{4}{5}AM$ ؛درنتیجه $S_{ADK}=\frac{4}{5}S_{ADM}=\frac{4}{5}.\frac{1}{4}S=\frac{1}{5}S$ (S، مساحت متوازی‌الاضلاع است). بنابراین، مساحت شکل مطلوب، برابر است با : $S-4S_{ADK}=\frac{1}{5}S$.

۱۶۹. گزینهٔ (ج) درست است. چون $DF=\frac{DA}{3}$ ، مساحت مثلث DFE یک سوم مساحت مثلث DEA است. چون E وسط DB است، مساحت مثلث DEA نصف مساحت مثلث DBA است. بنابراین مساحت مثلث DFE یک ششم مساحت مثلث DBA است ؛ از این نتیجه می‌شود که مساحت چهارضلعی ABEF پنج ششم مساحت مثلث DBA است. بنابراین نسبت مساحت مثلث DFE به مساحت چهارضلعی ABEF برابر با ۵ : ۱ است.

۱۷۱. قطر HK، متوازی‌الاضلاع را به دو مثلث معادل KHG و KHI تقسیم می‌کند و در این مثلثها میانه‌های KN و KM هر مثلث را به دو مثلث معادل بخش می‌کند. بنابراین رابطه‌های الف، ب و پ درست است.

۹.۱.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۱.۲. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع

۱۷۲. نقطهٔ برخورد قطرها را O می‌نامیم. در مثلثهای ABD و BCD بنا به رابطهٔ میانه‌ها داریم :

$$AD^2+AB^2=2OA^2+\frac{DB^2}{2}$$

$$BC^2+CD^2=2OA^2+\frac{DB^2}{2}$$

از جمع کردن طرفهای نظیر دو رابطه داریم :

$$AB^{۲} + AD^{۲} + BC^{۲} + CD^{۲} = AC^{۲} + DB^{۲}$$

نکته: اگر اندازهٔ ضلعهای مجاور در متوازی‌الاضلاع را a و b و اندازهٔ قطرهای آن‌را d و d' بنامیم، این ویژگی متوازی‌الاضلاع را به صورت $۲(a^{۲} + b^{۲}) = d^{۲} + d'^{۲}$ می‌توان نوشت.

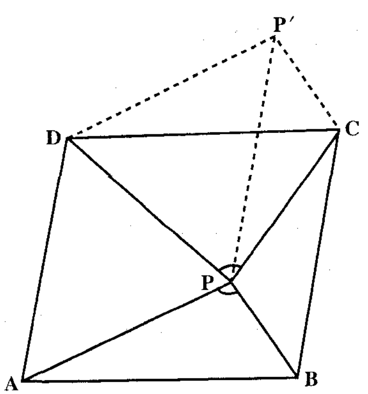
۱۷۳. اندازهٔ دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع را a و b و اندازهٔ قطرهای آن‌را d و d' می‌نامیم،

داریم :

$$\begin{cases} d^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + ۲ab\cos ۴۵^\circ = a^{۲} + b^{۲} + \sqrt{۲}ab \\ d'^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos ۴۵^\circ = a^{۲} + b^{۲} - \sqrt{۲}ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow d^{۲} \times d'^{۲} = (a^{۲} + b^{۲})^{۲} - (ab\sqrt{۲})^{۲} = a^{۴} + b^{۴}$$

۱۷۴. برای تعیین یک نقطهٔ P در داخل متوازی‌الاضلاع که در شرط بالا صدق کند، روی AB و به‌طرف داخل متوازی‌الاضلاع کمان درخور زاویهٔ اختیاری α و روی PC و به‌طرف داخل متوازی‌الاضلاع کمان درخور زاویهٔ مکمل α را رسم می‌کنیم. این دو کمان عموماً یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P در داخل متوازی‌الاضلاع قطع می‌کنند که جواب مسأله است. حال مطابق شکل از P قطعه خط PP' را موازی و مساوی با AD رسم کرده، $P'C$ و $P'D$ را وصل می‌کنیم. واضح است که :



$$P'D = PA \ , \ P'C = PB \ , \ APB = DP'C$$

پس چهارضلعی $PDP'C$ محاطی است و رابطهٔ بطلمیوس را می‌توان در مورد آن نوشت :

$$P'C.PD + P'D.PC = PP'.DC$$

و یا

$$PB.PD + PA.PC = AB.BC$$

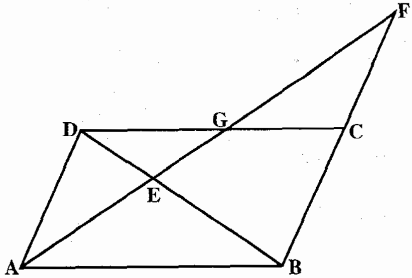
و حکم مسأله ثابت است.

۱۷۵. مثلثهای ABD و ABC معادلند. زیرا در قاعدهٔ AB مشترکند و ارتفاعهای دو رأس C و D از آنها با هم برابر است.

۱۷۶. اگر قطر AC را رسم کنیم، دو مثلث ABC و ABD معادل یکدیگرند.

۱۷۷. دو مثلث ABC و ADC معادلند.

۱۷۸. به موجب قضیهٔ تالس می‌نویسیم :



$$\frac{EA}{EF}=\frac{ED}{EB}\ ,\ \frac{EG}{EA}=\frac{ED}{EB}$$

پس :

$$\frac{EA}{EF}=\frac{EG}{EA}$$

یا :

$$EA^{۲}=EF.EG$$

۱۸۰. داریم :

$$\overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{ADF}\Rightarrow\frac{AB}{DF}=\frac{BE}{AD}\Rightarrow AB.AD=BE.DF=\text{مقدار ثابت}$$

۱۸۱. از رأس B عمود BH را بر امتداد DC فرود می‌آوریم. در مثلث BDC دو رابطهٔ زیر را داریم :

$$BD^{۲}=BC^{۲}+CD^{۲}+۲CD.CH$$

$$DC^{۲}=BC^{۲}+BD^{۲}-۲BD.BE$$

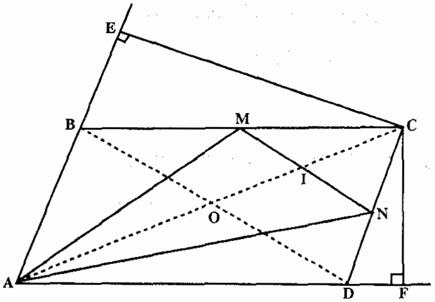
از جمع دو رابطهٔ بالا داریم :

$$BD.BE=BC^{۲}+CD.CH$$

با ملاحظهٔ آن که $CH=BF$ و $CD=AB$، رابطهٔ ذکر شده به‌دست می‌آید.

۱۸۲. در دایره‌ای به قطر BC (که مرکزش M است) داریم :

$$P_A(M)=AB.AE=AM^{۲}-\frac{BC^{۲}}{۴}$$



در دایره‌ای به قطر CD (که مرکزش N است) داریم :

$$P_A(N)=AD.AF=AN^{۲}-\frac{CD^{۲}}{۴}$$

طرفین رابطه‌های بالا را جمع می‌کنیم :

$$AB.AE+AD.AF=(AM^{۲}+AN^{۲})-\frac{۱}{۴}(BC^{۲}+CD^{۲})$$

$$=\frac{۱}{۲}MN^{۲}+AI^{۲}-\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{۲}BD^{۲}+۲CD^{۲})$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{BD}{۲})^۲+۲(\frac{۳}{۴}AC)^۲-\frac{۱}{۸}BD^۲-\frac{۱}{۲}(\frac{AC}{۲})^۲$$
$$=\frac{۱}{۸}BD^۲+\frac{۱۸}{۱۶}AC^۲-\frac{۱}{۸}BD^۲-\frac{۱}{۸}AC^۲$$
$$=\frac{۹}{۸}AC^۲-\frac{۱}{۸}AC^۲$$

پس :
$$AB.AE+AD.AF=AC^۲$$

۱۸۳. قطر BD را رسم کرده، محل تلاقی دو قطر را O می‌نامیم و از M به B و D وصل می‌کنیم. AMO در دو مثلث ABD و MBD میانه است و هریک را به دو مثلث معادل هم تقسیم می‌کند و اگر از دو شکل معادل هم دو قسمت معادل هم را برداریم، دو قسمت باقیمانده، با هم معادل می‌شود، یعنی :

$$S_{AMD}=S_{AMB}$$

مساحتهای آن دو را می‌نویسیم و تساوی را به تناسب تبدیل می‌کنیم :

$$MH\times AB=MK\times AD\Rightarrow\frac{MH}{MK}=\frac{AD}{AB}$$

۱۸۴. دو مثلث BMN و APN متشابه‌اند.

$$\frac{NM}{NP}=\frac{BN}{AN}\Rightarrow\frac{NM}{NM+NP}=\frac{BN}{BN+AN}\Rightarrow\frac{NM}{MP}=\frac{BN}{AB}$$

۱۸۵. اگر قطر AC را رسم کنیم و از B موازی آن رسم نماییم تا امتداد DC را در H و امتداد AG را در I قطع کند، چون O وسط AC و AC موازی BI است، پس چهار شعاع BA، BO، BC و BI شعاعهای توافقی می‌باشند و درنتیجه (AFEI) تقسیم توافقی است و می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{۱}{AE}+\frac{۱}{AI}=\frac{۲}{AF}\Rightarrow\frac{۱}{AE}=\frac{۱}{AF}+\frac{۱}{AF}-\frac{۱}{AI}$$
$$\frac{۱}{AE}=\frac{۱}{AF}+\frac{AI-AF}{AF.AI}=\frac{۱}{AF}+\frac{FI}{AF.AI}$$

از طرفی دو مثلث AFC و BFI متشابه‌اند، پس :

$$\frac{AF}{FI}=\frac{AC}{BI}$$

و همچنین دو مثلث ABI و GHI متشابه‌اند. پس :

$$\frac{AG}{AI}=\frac{BH}{BI}$$

و چون $AC=CH$ است (زیرا ABHC متوازی‌الاضلاع است)، پس :

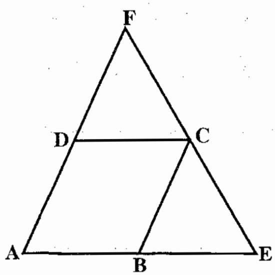
$$\frac{FI}{AF.AI}=\frac{۱}{AG}$$

و یا

$$\frac{AG}{AI}=\frac{AF}{FI}$$

و به‌جای آن در رابطه، مقدارش را قرار می‌دهیم و حکم ثابت می‌شود.

۱۸۶. در دو مثلث FDC و FAE می‌نویسیم :



$\frac{DC}{AF}=\frac{FC}{FE}$ و همچنین در دو مثلث EBC و EAF، می‌نویسیم :

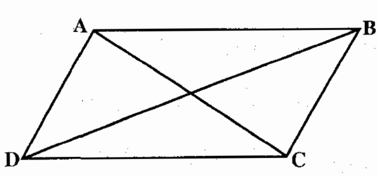
$\frac{BC}{AF}=\frac{EC}{FE}$. از جمع دو رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$\frac{DC}{AE}+\frac{BC}{AF}=\frac{FC}{FE}+\frac{EC}{FE}=\frac{FC+EC}{FE}=۱$$

یا :

$$\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$$

۱۸۷. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. در این صورت :



$$AC.BD>|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}|=|(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})|>AB^۲-BC^۲$$

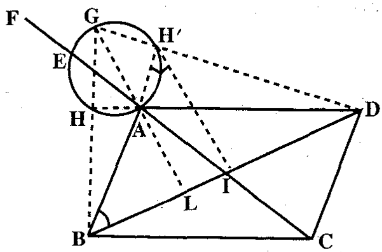
۲.۹.۱.۲. رابطه‌های متری در متوازی‌الاضلاع و دایره

۱۸۸. دو مثلث $A'C'D$ و $A'BC$ متشابه‌اند، زیرا :

$$A\hat{B}C=A'\hat{C}'D=\frac{\widehat{A'C}}{۲}\ ,\ \ B\hat{A}C=\frac{\widehat{BC}}{۲}=C'\hat{A}'D=\frac{\widehat{AC'}}{۲}$$

($\widehat{AC'}=\widehat{BC}$ است). بنابراین داریم :

$$\frac{A'D}{A'C'}=\frac{A'C}{A'B}$$



۱۸۹. هرگاه G محل تقاطع ارتفاعهای مثلث ABD باشد، دایرهٔ ′AHH از G می‌گذرد و زاویه‌های ′AGH و ABI که هردو متمم H′DB هستند، متساوی می‌باشند، اما در مثلث قائم الزاویهٔ BH′D میانهٔ H′I نصف وتر است، پس مثلث BH′I متساوی‌الساقین است و داریم : $I\hat{B}H' = I\hat{H'}B$. بنابراین حاصل می‌شود : $I\hat{H'}B = A\hat{G}H'$ و از این تساوی معلوم می‌شود که ′IH بر دایرهٔ داده شده مماس است. پس :

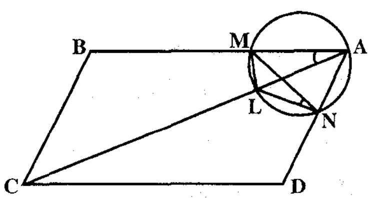
$$IH'^{2} = IA \times IE$$

امّا

$$IE = \frac{FC}{2} \quad IH' = \frac{BD}{2}\ ,\ IA = \frac{AC}{2}$$

پس :

$$AC \times FC = BD^{2}$$



۱۹۰. در چهارضلعی محاطی AMLN حکم قضیهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم :

$$AL.MN = AM.LN + AN.ML$$

اما دو مثلث ADC و MLN متشابه‌اند ؛

زیرا $M\hat{N}L = M\hat{A}L$ (هردو در کمان مقابل مشترکند)، و $M\hat{A}L = A\hat{C}D$ و از طرف دیگر $M\hat{L}N = A\hat{C}D$ (هردو مکمل زاویهٔ A می‌باشند) و از تشابه آنها نتیجه می‌شود :

$$\frac{AC}{MN} = \frac{DC}{LN} = \frac{AD}{ML}$$

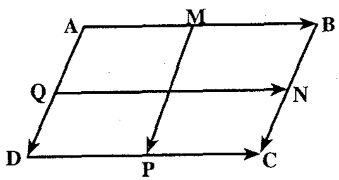
هرگاه هریک از سه جملهٔ رابطهٔ بطلمیوس را بترتیب در یکی از این سه نسبت متساوی ضرب کنیم، حاصل می‌شود :

$$AC.AL = AM.DC + AD.AN$$

و با مراعات آن که CD = AB است، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$AC.AL = AB.AM + AD.AN$$

۱۰.۱.۲. ثابت کنید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است



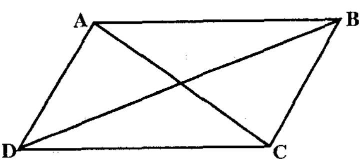
۱۹۱. ABCD را چهارضلعی داده شده و M، N، P و Q را بترتیب وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA می‌گیریم. این برابریهای برداری روشنند:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=۲\overrightarrow{QN}\ ;\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=۲\overrightarrow{MP}$$

بنابراین برابری:

$$|AB|+|BC|+|CD|+|DA|=۲(QN+PN)$$

تنها وقتی برقرار می‌شود که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ با $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{BC}$ با $\overrightarrow{AD}$ موازی باشند که، در این صورت، ABCD متوازی‌الاضلاع است.



۱۹۲. چهارضلعی ABCD را که در آن رابطهٔ

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+DA^۲=AC^۲+BD^۲$$

برقرار است، در نظر می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که وسط قطرهای AC و BD بر هم منطبقند (یعنی قطرهای چهارضلعی یکدیگر را نصف کرده‌اند). وسط قطر AC را M می‌نامیم، داریم:

$$\Delta ABC:\ AB^۲+BC^۲=\frac{AC^۲}{۲}+۲BM^۲$$

$$\Delta ADC:\ AD^۲+CD^۲=\frac{AC^۲}{۲}+۲DM^۲$$

با توجه به دو رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$AB^۲+BC^۲+CD^۲+AD^۲=AC^۲+۲BM^۲+۲DM^۲$$

از مقایسهٔ این رابطه با فرض مسأله نتیجه می‌شود:

$$AC^۲+۲(BM^۲+DM^۲)=AC^۲+BD^۲\Rightarrow BD^۲=۲(BM^۲+MD^۲)$$

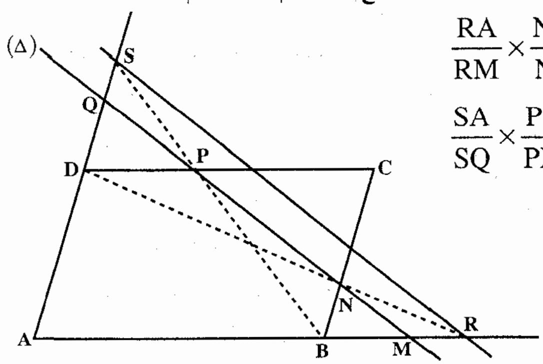
و این رابطه درصورتی برقرار است که $BM=DM$ و BMD خط راست باشد. یعنی قطرهای چهارضلعی یکدیگر را نصف کرده‌اند. پس چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۱۱.۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۶. متوازی‌الاضلاع ABCD و ذوزنقهٔ MNPQ را که در آن محاط است در نظر می‌گیریم. چون $MN \| PQ$ است، پس $\frac{OM}{OP}=\frac{MN}{PQ}$. از طرفی $\overset{\Delta}{BMN} \sim \overset{\Delta}{DPQ}$، پس $\frac{MN}{PQ}=\frac{MB}{PD}$. از این دو رابطه نتیجه می‌شود $\frac{OM}{OP}=\frac{MB}{PD}$. حال فرض می‌کنیم قطر DB را رسم کرده‌ایم و O' نقطهٔ تلاقی آن با MP باشد، در این صورت $\overset{\Delta}{O'DP} \sim \overset{\Delta}{O'BM}$ خواهد شد، و داریم: $\frac{O'M}{O'P}=\frac{MB}{PD}$، پس $\frac{O'M}{O'P}=\frac{OM}{OP}$ و چون O و O' هردو داخل قطعه‌خط واقعند، پس بر هم منطبق هستند و O روی قطر BD است.

۱۹۹. $\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}{2(b-a\cos\alpha)}$.

۲۰۰. مثلث AMQ را با موربهای DNR و BPS قطع می‌دهیم. خواهیم داشت:



$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=1$$

و

$$\frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA}=1$$

و از مساوی هم قراردادن آنها نتیجه می‌شود:

$$\frac{RA}{RM}\times\frac{NM}{NQ}\times\frac{DQ}{DA}=\frac{SA}{SQ}\times\frac{PQ}{PM}\times\frac{BM}{BA} \qquad (1)$$

چون $BN \| AQ$ است، پس:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{NM}{NQ}=\frac{BM}{BA} \\ \frac{DQ}{DA}=\frac{PQ}{PM} \end{cases}$$

و $DP \| AB$، پس: از مقایسهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت: $\frac{RA}{RM}=\frac{SA}{SQ}$، یعنی $RS \| (\Delta)$ است.

۲۰۱. برای روشنی وضع، فرض می‌کنیم نقطه‌های B و D، در درون دایره قرار گیرند. فرض کنید P و Q معرف نقطه‌های برخورد خط راست BD و دایره باشند (P به B نزدیکتر است)، L نقطهٔ برخورد CB و دایره، و L مماس بر دایره است که از نقطهٔ C می‌گذرد. مثلث PCN را، که از رأسهایش خطهای راست PQ، NM و L خارج می‌شوند، در نظر بگیرید. به کمک قضیهٔ سوا نتیجه می‌گیریم، برای اینکه خطهای PQ، NM و l در یک نقطه متقاطع باشند، لازم و کافی است که برابری زیر برقرار باشد:

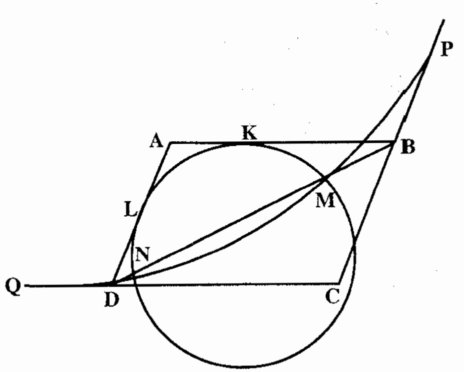
$$\frac{PM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QN}\cdot\frac{NC}{CP}=1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر، در شش‌ضلعی ALPMCQ، قطرهای AM، LC و PQ در یک نقطه متقاطعند. بنابراین:

$$AL.PM.CQ = LP.MC.QA \qquad (2)$$

به روشنی، $NC = AL$، $QN = LP$ و $CP = QA$. بدین ترتیب، از درستی برابری (۲)، درستی برابری (۱) نتیجه می‌شود.

۲۰۲. فرض کنید K و L معرف نقطه‌های تماس دایرهٔ داده شده با خطهای راست AB و AD باشند. برای روشنی وضع، فرض کنید K و L در درون پاره‌خطهای AB و AD قرار گیرند. روی خط راست CB، یک نقطهٔ P طوری اختیار می‌کنیم که $BP = BK$، B بین P و C قرار می‌گیرد، و روی خط CD، یک نقطهٔ Q اختیار می‌کنیم، به‌طوری که $DQ = DL$، D بین C و Q قرار دارد. داریم:



$$CP = CB + BK = CB + AB - AK = CQ$$

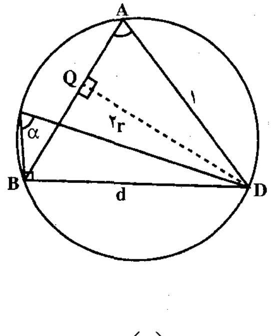
دایره‌ای که از نقطه‌های P و Q می‌گذرد و بر خطهای CB و CD مماس است، BD را در نقطه‌هایی مانند M_1 و N_1 قطع می‌کند، که برای آنها، برابریهای $BM_1.BN_1 = BM.BN$ و $CN_1.CM_1 = CN.CM$، درست است. این برابریها ایجاب می‌کنند که M_1 و N_1 باید بترتیب، بر M و N منطبق باشند. حالتهای دیگر ترتیب نقطه‌ها، به همین روش بررسی می‌شود. می‌توان با تعیین جهتهای مثبت روی

خطهای AB، BC، CD و DA، و در نظرگرفتن پاره‌خطهای جهت‌دار روی این خطها، از بررسی حالتهای مختلف اجتناب کرد.

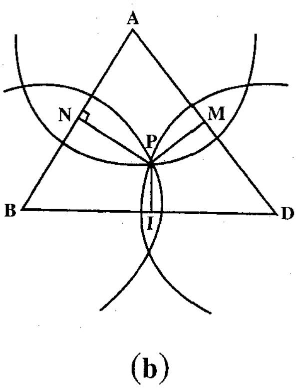
۲۰۴. ثابت می‌کنیم، خط راست BD، بر دایرهٔ محیطی مثلث ABM در نقطهٔ B مماس است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم اندازهٔ زاویهٔ ABD برابر است با اندازهٔ نصف کمان $\overset{\frown}{AMB}$ از این دایره. دو زاویهٔ BMC و BDC برابرند (چهارضلعی BCDM، محاطی است)؛ درضمن، چون ABCD متوازی‌الاضلاع است، پس $A\hat{B}D = B\hat{D}C$. بنابراین $A\hat{B}M = B\hat{M}C$ و $A\hat{B}D + A\hat{M}B = 180^\circ$ و چون $A\hat{M}B$ برابر است با نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ ABM، پس $A\hat{B}D$ برابر نصف کمان $\overset{\frown}{AMB}$ از همین دایره می‌شود. به همین ترتیب ثابت می‌شود که BD در نقطهٔ D بر دایرهٔ محیطی مثلث ADM مماس است.

۲۰۵. به‌طور وضوح، دایره‌های واحد به مرکز رأسهای متوازی‌الاضلاع آن‌را می‌پوشاند، اگر و فقط اگر دایره‌های واحد به مرکزهای A، B، D، مثلث ABD را بپوشانند. برای ملاحظهٔ چگونگی رخ دادن این مطلب، ابتدا لم زیر را اثبات می‌کنیم:

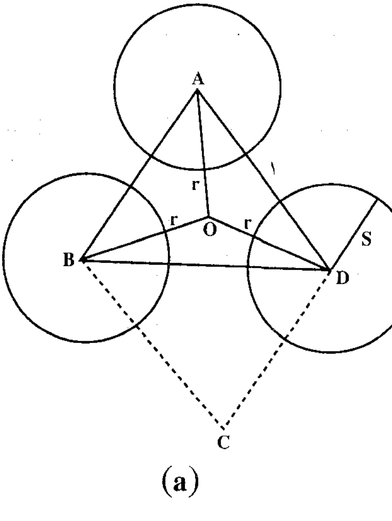
لم. فرض می‌کنیم مثلث ABD یک مثلث حاده‌الزاویه، و r شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد، در این صورت سه دایرهٔ به شعاع s و مرکزها در A، B و C، اگر و فقط اگر $s \ge r$ باشد، مثلث ABD را می‌پوشانند.



(c)



(b)



(a)

اثبات. از آن‌جا که مثلث ABD حاده‌الزوایا است، O، مرکز دایرهٔ محیطی آن، داخل مثلث واقع می‌شود. فاصله‌های OA، OB و OD همه مساوی r اند، بنابراین اگر $s < r$ باشد، O بر هیچ یک از سه دایرهٔ به شعاع r و مرکزهای A، B و D واقع نمی‌شود (شکل a را ملاحظه کنید). بنابراین تنها باقی می‌ماند که ثابت کنیم که دایره‌های به شعاع r و

مرکزهای A، B و D در واقع این مثلث را می‌پوشانند (در این صورت دایره‌های به شعاع بزرگتر از r، از آن‌جا که اجتماعشان شامل اجتماع دایره‌های به شعاع r است، نیز همین عمل را انجام می‌دهند).

از آن جا که سه دایرهٔ به شعاع r در O متقاطعند، کافی است که این نتیجهٔ عمومی‌تر را، که اگر P نقطهٔ دلخواهی داخل مثلث ABD باشد، سه دایرهٔ به مرکزهای A، B و D و گذرنده از نقطهٔ P مثلث را می‌پوشانند، اثبات کنیم. برای نشان دادن این مطلب، شکل b را در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم L، M و N بترتیب پاهای عمودهای از P بر ضلعهای BD، DA و AB، باشند. در این صورت $AN < AP$، زیرا AN عمود از A بر خط NP است. به همین ترتیب، $AM < AP$ می‌باشد، و درنتیجه چهارضلعی AMPN، داخل دایرهٔ گذرنده از P به مرکز A قرار می‌گیرد. به همین ترتیب، چهارضلعی‌های BLPN و DLPM بترتیب داخل دایره‌های به مرکزهای B و D و گذرنده از P واقع می‌شوند، و نتیجه می‌شود که مثلث ABD، اجتماع این سه چهارضلعی، مشمول اجتماع سه دایرهٔ مورد بحث است، و به این ترتیب اثبات لم بالا تکمیل می‌شود.

یکی از نتیجه‌های بلافاصلهٔ لم بالا این است که دایره‌های واحد به مرکز A، B و D مثلث ABD را می‌پوشانند، اگر و فقط اگر $r \geq ۱$ باشد. در این صورت نشان می‌دهیم که این شرط معادل : $a \leq \cos\alpha + \sqrt{۳}\sin\alpha$ است.

فرض می‌کنیم d طول ضلع BD را نمایش دهد (شکل C را ملاحظه کنید). بنا به قانون کسینوسها داریم :

$$d^{۲} = ۱ + a^{۲} - ۲a\cos\alpha \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، در شکل ذکرشده ملاحظه می‌کنیم که : $\frac{d}{۲r} = \sin\alpha$ و درنتیجه $d^{۲} = ۴r^{۲}\sin\alpha$ است. با قراردادن این رابطه در (۱) به‌دست می‌آوریم :

$$۴r^{۲}\sin^{۲}\alpha = ۱ + a^{۲} - ۲a\cos\alpha \qquad (۲)$$

بنابراین $r \leq ۱$ اگر و فقط اگر :

$$۴\sin^{۲}\alpha \geq ۱ + a^{۲} - ۲a\cos\alpha \qquad (۳)$$

باشد. در سمت راست (۳)، به جای (۱) عبارت : $\cos^{۲}\alpha + \sin^{۲}\alpha$ را قرار می‌دهیم. در این صورت (۳) معادل :

$$۳\sin^{۲}\alpha \geq a^{۲} - ۲a\cos\alpha + \cos^{۲}\alpha = (a - \cos\alpha)^{۲}$$

می‌شود، که خود معادل نامساوی زیر است :

$$\sqrt{3}\sin\alpha \geq |a-\cos\alpha|$$

در این صورت، از آن جا که شرط ذکرشده در گزارهٔ مسأله :

$$\sqrt{3}\sin\alpha \geq a-\cos\alpha$$

است، تنها باقی می‌ماند که نشان دهیم که : $a-\cos\alpha \geq 0$ است. برای انجام این کار، ارتفاع DQ از D به AB را رسم می‌کنیم (شکل C را ملاحظه کنید). از آن جا که زاویه‌های مثلث ABD حاده است، Q داخل پاره‌خط AB قرار می‌گیرد، بنابراین $AQ < AB$ می‌شود.

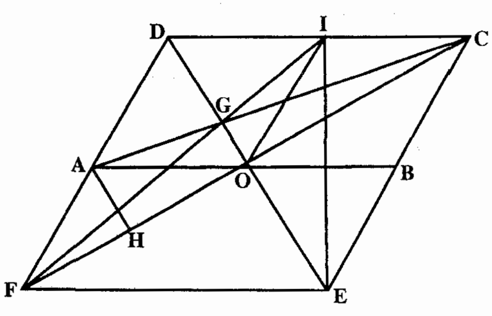
اما : $AQ = \cos\alpha$ و $AB = a$ است ؛ بنابراین : $\cos\alpha < a$ است، و به این ترتیب راه حل مسأله تکمیل می‌شود.

۱۲.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۰۶. راهنمایی. ۱. از ویژگیهای مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ استفاده کنید.

۲. وضع نقطهٔ G را مورد توجه قرار دهید. برای محاسبهٔ MA، مثلثهای متشابه را مورد استفاده قرار دهید.

۳. آسان است.



۲۰۷. ۱. از O به I وصل می‌کنیم. DI موازی و مساوی AO است. از آن‌جا، DIOA متوازی‌الاضلاع است. امّا DA = AO است، بنابراین DIOA لوزی است. همچنین ICBO لوزی است ؛ درنتیجه OI = ID = IC.

در مثلث DOC، میانهٔ OI نصف ضلع DC است ؛ بنابراین، این مثلث قائم‌الزاویه است. می‌توان گفت که OD نیمساز زاویهٔ AOI و OC نیمساز زاویهٔ BOI است ؛ پس COD زاویهٔ قائمه است، چون AOI و IOB مکمل و مجاور یکدیگرند.

۲. در مثلث CDF، DO هم ارتفاع و هم نیمساز است. بنابراین مثلث CDF متساوی‌الساقین است و DF = DC است. همچنین مثلث DCE متساوی‌الساقین است، زیرا CO ارتفاع و نیمساز است ؛ پس DC = CE است ؛ درنتیجه DF = CE است، اما DF موازی CE است. بنابراین، DCEF متوازی‌الاضلاع است و چون دو ضلع مجاور برابر DF = DC را دارد، لوزی است.

۳. مثلث DCE متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲a است. از آن جا DE = ۲a و FC = ۲OC . از آن‌جا

$$OC = \frac{DC\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲a\sqrt{۳}}{۲} = a\sqrt{۳} \Rightarrow FC = ۲a\sqrt{۳} \;\; ;$$

$$\text{aire} \;\; DCEF = \frac{۱}{۲} FC.DE = \frac{۱}{۲} \times ۲a\sqrt{۳} \times ۲a = ۲a^{۲}\sqrt{۳}$$

۴. DO و CA دو میانهٔ مثلث DCF هستند، بنابراین FG سومین میانهٔ آن است و از نقطهٔ I وسط CD می‌گذرد. IE ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع DEC است. از آن‌جا IE عمود بر DC و عمود بر موازی آن FE است.

$$FI^{۲} = IE^{۲} + FE^{۲} = (a\sqrt{۳})^{۲} + (۲a)^{۲} = ۷a^{۲} \Rightarrow FI = a\sqrt{۷}$$

$$\text{aire} \;\; OFAG = \text{aire}\,\Delta CFA - \text{aire}\,\Delta COG$$

$$\text{aire} \;\; \Delta CFA = \frac{۱}{۲} CF.AH \;\; (\text{ارتفاع رسم شده از رأس } A \text{ } AH)$$

از طرفی OAH یک نیمه مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a است ؛ پس $AH = \frac{a}{۲}$

و چون :

$$CF = ۲a\sqrt{۳} \;\; ; \;\; \text{aire} \;\; CFA = \frac{۱}{۲} \times ۲a\sqrt{۳} \times \frac{a}{۲} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲}$$

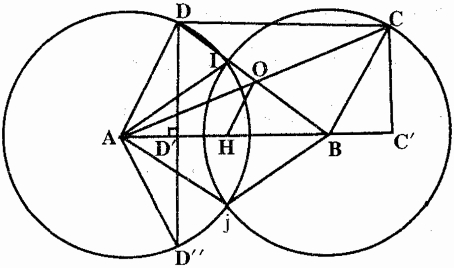
$$\text{aire} \;\; \Delta COG = \frac{۱}{۲} CO.OG$$

اما :

$$CO = a\sqrt{۳} \;\; , \;\; OG = \frac{OD}{۳} = \frac{a}{۳}$$

$$\text{aire} \;\; COG = \frac{۱}{۲} \times a\sqrt{۳} \times \frac{a}{۳} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\Rightarrow \text{aire} \;\; OFAG = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۲} - \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۶} = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۳}$$



۲۰۸. ۱. $AD = a$ ثابت است. D دایرهٔ به مرکز A و به شعاع a را می‌پیماید. نیمخط AD می‌تواند به‌طور کامل دور نقطهٔ A بچرخد. تمام دایرهٔ (A) بخشی از مکان را نمایش می‌دهد. همچنین مکان هندسی نقطهٔ C دایره‌ای به مرکز B و به شعاع a است.

۲. نقطهٔ O وسط AC را به نقطهٔ H وسط AB وصل می‌کنیم:

$$HO = \frac{AD}{۲} = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$

بنابراین نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز H و به شعاع HO را می‌پیماید. اگر BC به اندازهٔ ۳۶۰ درجه حول نقطهٔ B بچرخد، HO به اندازهٔ ۳۶۰° حول نقطهٔ H دوران می‌کند و تمام دایره نمایش‌دهندهٔ بخشی از مکان هندسی است.

۳. زاویهٔ $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ است. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' یک نیمه مثلث متساوی‌الاضلاع است. $DD' = \frac{AD\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$، در مثلث قائم‌الزاویهٔ DBD':

$$DB^۲ = DD'^۲ + D'B^۲$$

امّا: $D'B = AB - AD' = b - \frac{a}{۲}$ است. از آن جا:

$$DB^۲ = (\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (b - \frac{a}{۲})^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} + b^۲ + \frac{a^۲}{۴} - \frac{۲ab}{۲} = a^۲ - ab + b^۲$$

$$\Rightarrow DB = \sqrt{a^۲ - ab + b^۲}$$

نقطهٔ C' را تصویر قائم نقطهٔ C روی AB می‌نامیم. داریم:

$$AC^۲ = CC'^۲ + AC'^۲ \; ; \; CC' = DD' = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \; , \; AC' = D'C' + AD' = b + \frac{a}{۲};$$

$$AC^۲ = (\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ + (b + \frac{a}{۲})^۲ = a^۲ + ab + b^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{a^۲ + ab + b^۲}$$

۴. دایره‌ها متقاطعند؛ زیرا طول خط‌المرکزین آنها بین مجموع دو شعاع و تفاضل دو

شعاع است. امّا تفاضل دو شعاع صفر است، زیرا دو دایره برابرند و مجموع دو شعاع برابر $2a$ است. از آن‌جا داریم:
$0 < b < 2a$ و برای وتر، $a < b$ را داریم. پس درنتیجه باید داشته باشیم:
$a < b < 2a$.

$$S = AB.DD' = b \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \ , \ S^2 = \frac{3a^2b^2}{4} \ ,$$

$$S' = 2\text{aire} \ \ AIB = 2 \times \frac{AB.IH}{2} = AB.IH$$

امّا:

$$IH^2 = AI^2 - AH^2 = a^2 - (\frac{b}{2})^2,$$

$$IH^2 = \frac{4a^2 - b^2}{4} \ , \ S'^2 = AB^2.IH^2 = \frac{b^2(4a^2 - b^2)}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{S'^2}{S^2} = \frac{\frac{b^2(4a^2-b^2)}{4}}{\frac{3a^2b^2}{4}} = \frac{4a^2 - b^2}{3a^2}$$

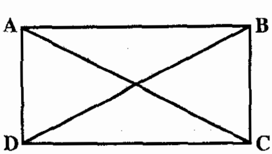
می‌توانیم داشته باشیم:

$$\frac{4a^2 - b^2}{3a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4a^2 - b^2 = \frac{3a^2}{3} \Rightarrow b^2 = 3a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{3}$$

ساختمان. اگر D'' نقطهٔ برخورد DD' با دایرهٔ (A) باشد، $D\hat{A}D'' = 120°$. وتر $DD'' = a\sqrt{3}$، ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع a است. برای اینکه نقطهٔ B را داشته باشیم، کافی است نقطهٔ B را به اندازهٔ $AB = DD''$ انتقال دهیم: بالاخره آن‌چه باقی می‌ماند، کامل کردن متوازی‌الاضلاع است.

۲.۲. رابطه‌های متری در مستطیل

۱.۲.۲. تعریف و قضیه



۲۰۹. مستطیل $ABCD$ را در نظر می‌گیریم. از تساوی مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABD و ABC نتیجه می‌شود که $AC = BD$ است.

۲.۲.۲. زاویه

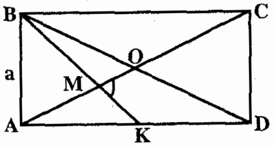
۱.۲.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۲۱۰. طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع XYZ را واحد می‌گیریم. داریم:

$$BC = Y'Z' = ۳\ ,\ BY' = CZ' = \sqrt{۳},$$

$$\tan C\hat{B}X = \tan C\hat{B}Z' = \frac{\sqrt{۳}}{۳}\ ,\ \tan Z\hat{B}Y' = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\ ,\ C\hat{B}X = Z\hat{B}Y' = ۳۰^\circ$$

۲۱۱. از روش پارامتر کمکی استفاده می‌کنیم. منظورکردن $AB = a$ به $AD = a\sqrt{۲}$ منجر می‌شود. طرح کلی حل مسأله به‌شرح زیر است:



همهٔ ضلعهای مثلث AMK را برحسب a بیان کرده و سپس در مورد ضلع AK قانون کسینوسها را به‌کار می‌بریم. این امر محاسبهٔ کسینوس زاویهٔ AMK را که با X نشان داده می‌شود، ممکن می‌سازد. پاره‌خطهای AO و BK میانه‌های مثلث ABD هستند. از این رو $MK = \frac{۱}{۳}BK$ و $AM = \frac{۲}{۳}AO$ را داریم.

بدین ترتیب نتیجه می‌شود که:

$$MK = \frac{۱}{۳}BK = \frac{۱}{۳}\sqrt{AB^۲ + AK^۲} = \frac{۱}{۳}\sqrt{a^۲ + (\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{a\sqrt{۶}}{۶}$$

$$AM = \frac{۲}{۳}AO = \frac{۱}{۳}AC = \frac{۱}{۳}\sqrt{AD^۲ + CD^۲} = \frac{۱}{۳}\sqrt{(a\sqrt{۲})^۲ + a^۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$$

در مثلث AMK نیز چنین داریم: $AK = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و $AM = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و $MK = \frac{a\sqrt{۶}}{۶}$

طبق قانون کسینوسها $AK^۲ = AM^۲ + MK^۲ - ۲AM.MK.\cos x$ ، یعنی:

$$(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲ = (\frac{a\sqrt{۳}}{۳})^۲ + (\frac{a\sqrt{۶}}{۶})^۲ - ۲\frac{a\sqrt{۳}}{۳}.\frac{a\sqrt{۶}}{۶}\cos x$$

و سرانجام $\frac{a^۲}{۲} = \frac{a^۲}{۳} + \frac{a^۲}{۶} - \frac{a^۲\sqrt{۲}}{۳}\cos x$ نتیجه می‌شود که از آن نیز $\cos x = ۰$ و درنتیجه $x = ۹۰^\circ$ حاصل می‌شود. بدین ترتیب BK و AC با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند.

۲۱۲. ثابت کنید: $N\hat{M}C = M\hat{B}K$.

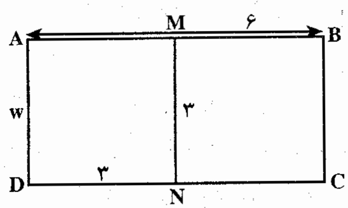
۲.۲.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۱۳. با قراردادن $\hat{APB} = \alpha$ ، $\hat{ADB} = \beta$ ، ثابت کنید که $\tan(\alpha + \beta) = ۱$ است.

۳.۲.۲. ضلع

۱.۳.۲.۲. اندازهٔ ضلع

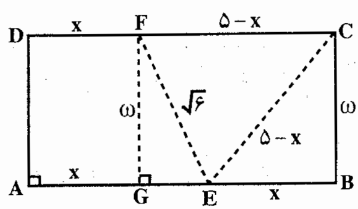
۲۱۴. هر یک از دو قسمت مستطیل، یک مربع خواهند بود، بنابراین $W = ۳$ است.



۲۱۵. گزینه (د) درست است.

فرض می‌کنیم مطابق شکل زیر مستطیل حول خط EF تا شود و AE در امتداد EC قرار گیرد. گیریم $EB = x$ ، داریم :

$$AE = EC = ۵ - x \ , \ DF = x$$



پس :

$$AG = x \ , \ GE = ۵ - ۲x$$

$$\therefore \omega^۲ = (۶^{۱/۲})^۲ - (۵ - ۲x)^۲$$

و همچنین :

$$\omega^۲ = (۵ - x)^۲ - x^۲ \ ; \ \therefore ۶ - ۲۵ + ۲۰x - ۴x^۲ = ۲۵ - ۱۰$$

از این معادله $x = ۲$ یا $x = ۱۱/۲$ به‌دست می‌آید. مقدار ۱۱/۲ قابل قبول نیست و به‌ازای $x = ۲$ داریم: $\omega = ۵^{۱/۲}$.

۲۱۶. درازا و پهنای مستطیل را بترتیب a و b می‌نامیم. داریم :

$$S_{\text{مستطیل}} = ab \Rightarrow ۱۲ = a \times \frac{۳}{۴} a \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow b = ۳$$

۲۱۷. اگر پهنای مستطیل b باشد، درازای آن $5b$ است و از آن‌جا:

$$1440 = 5b \times b = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 288 \Rightarrow b = 12\sqrt{2} \Rightarrow 5b = 60\sqrt{2}$$

۲۱۸. ضلعهای مستطیل را $3k$ و $4k$ اختیار می‌کنیم. داریم:

$$3k.4k = 300 \Rightarrow 12k^2 = 300 \Rightarrow k^2 = 25 \Rightarrow k = 5$$

$\Rightarrow$ درازا $= 20$ و پهنا $= 15$

۲۱۹. طول و عرض مستطیل را بترتیب a و b می‌نامیم، داریم:

$$\begin{cases} a.b = 320 \\ 2(a+b) = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 320 \\ a+b = 36 \end{cases}$$

$$a(36-a) = 320 \Rightarrow a^2 - 36a + 320 = 0 \Rightarrow a = 20 \ , \ \ b = 16$$

۲۲۰. برای این مسأله هم، مثل همهٔ موردهای دیگر، تنها قاعدهٔ عمل داده شده است: «۱ چژان را در خودش ضرب کن، می‌شود «شی»، نصف اضافی را در خودش ضرب کن، دوبرابر کن و از «شی» کم کن. نصف باقی‌مانده را بردار، از آن جذر بگیر، از آن چه به‌دست می‌آید، نصف اضافی را کم کن، این عرض در می‌شود. و اگر نصف اضافی را با آن جمع کنی، ارتفاع در پیدا می‌شود». اگر عرض در را x و طول آن را y بگیریم و فرض کنیم $y - x = m$ (اضافی)، بعد قطر را به d نشان دهیم، مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 \\ m = x - y \end{cases}$$

برای پیدا کردن x، به این معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم:

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2d^2 - m^2}{4}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2(\frac{m}{2})^2}{2}}$$

از آن جا که دانشمندان چینی، به جوابهای منفی توجهی نداشتند، برای عرض در، باید نتیجه گرفت:

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2(\frac{m}{2})^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

و این، همان چیزی است که در قاعدهٔ رساله، برای تعیین مقدار x آمده است.

روشن است که، با در دست داشتن x، می‌توان y را از رابطهٔ زیر پیدا کرد :

$$y = x + m$$

ولی در رساله برای پیدا کردن مقدار y، این رابطه داده شده است.

$$y = \sqrt{\frac{d^۲ - ۲(\frac{m}{۲})^۲}{۲}} + \frac{m}{۲}$$

که ریشهٔ مثبت این معادله است :

$$۲y^۲ - ۲my + m^۲ - d^۲ = ۰$$

۲۲۱. طول ضلعهای مجهول را x و y می‌گیریم. حل مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود :

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n}\ ,\ \ x.y = s$$

که اگر دو معادله را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید :

$$x^۲ = \frac{m}{n}.s \Rightarrow x = \sqrt{\frac{m}{n}.s}$$

و از آن‌جا :

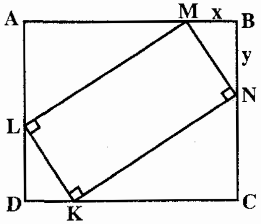
$$y = \frac{n}{m}\sqrt{\frac{m}{n}.s} = \sqrt{\frac{n}{m}.s}$$

۲۲۲. گزینهٔ (الف) درست است.

۲۲۳. $MB = x$ و $BN = y$ فرض می‌کنیم، بنابراین $AB = ۴ - x$ خواهد شد (شکل). از تساوی دو مثلث DLK و BMN نتیجه می‌شود :

$$LA = ۳ - y\ ,\ DL = BN = y$$

از تشابه دو مثلث ALM و BMN نتیجه می‌گیریم که :

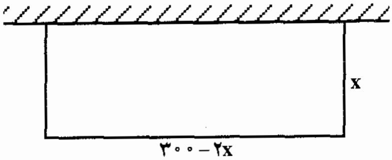


$$\begin{cases} ۳ - y = ۳x \\ ۴ - x = ۳y \end{cases}$$

و از آن جا : $x = \frac{۵}{۸}$ و $y = \frac{۹}{۸}$ خواهد شد، اکنون داریم :

$$MN = \sqrt{(\frac{۵}{۸})^۲ + (\frac{۹}{۸})^۲} = \frac{\sqrt{۱۰۶}}{۸} \# ۱/۲۹$$

$$ML = \frac{۳\sqrt{۱۰۶}}{۸} \# ۳/۸۷$$



۲۲۴. عرض سالن را x فرض می‌کنیم و طول آن، ۳۰۰−۲x خواهد بود، از آن‌جا داریم:

$$\text{سالن } S = x(300-2x) = 2x(150-x) = 2\times x(150-x)$$

چون $x+(150-x)=150$ مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب $x(150-x)$ وقتی ماکزیمم مقدار خود را داراست که $x=150-x$ یا $x=75$ باشد، و از آن‌جا:

$$\text{عرض سالن} = 75 \quad \Rightarrow \quad \text{طول سالن} = 150$$

۲.۳.۲.۲. نسبت ضلعها

۲۲۵. گزینهٔ (د) درست است.

$$\sqrt{s^2+l^2} = s+l-l/2 = s+l/2\ ,$$
$$\Rightarrow 3/4\,l^2 = sl \quad ; \quad \therefore\ s/l = 3/4$$

۲۲۶. گزینهٔ (الف) درست است.

$$l^2+\omega^2 = d^2 \quad , \quad l+\omega = p/2$$
$$(l+\omega)^2 = l^2+2l\omega+\omega^2 = p^2/4$$
$$2l\omega = p^2/4-d^2 \ ,(l-\omega)^2 = l^2-2l\omega+\omega^2 = 2d^2-p^2/4$$
$$l-\omega = \frac{\sqrt{8d^2-p^2}}{4}$$

۴.۲.۲. قطر

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ قطر

۲۲۷. الف) $\sqrt{34}$ ب) $\sqrt{65}$ پ) $\sqrt{34}\,r$ ت) $\sqrt{65}\,r$

۲۲۸. گزینهٔ (ب) درست است.

اگر طول ضلع AB را به x نشان دهیم، طول ضلع مجاور آن، BC می‌شود $(10-x)$. ضلعهای AB و BC از مستطیل ABCD، ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه ABC، هستند که وتر آن، قطر AC است. پس بنابر قضیهٔ فیثاغورس:

$$AC^2 = AB^2+BC^2 = x^2+(10-x)^2 = 2(x^2-10x+50) = 2\left[(x-5)^2+25\right]$$

که حداقل مقدار آن، وقتی به‌دست می‌آید که $(x-5)^2=0$، یعنی $x=AB=5$ و از

آن‌جا، $BC = ۵ = (۱۰ - x)$، بنابراین مستطیل به محیط ۲۰ با کوتاهترین قطر، یک مربع است و طول قطر آن، AC، برابر است با $۵\sqrt{۲} = \sqrt{۵۰}$ سانتیمتر.

یادآوری. اگر طولهای AB، BC و AC بترتیب با عددهای مثبت a، b و c نشان داده شوند، محیط مستطیل برابر است با $p = ۲(a + b)$. کمینه ساختن c هم‌ارز کمینه ساختن:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab = \frac{p^۲}{۴} - ۲ab$$

است. اگر P ثابت باشد، $c^۲$ وقتی کمترین مقدار را دارد که ab بیشترین مقدار را داشته باشد. حال نابرابری میانگین هندسی ـ حسابی $\frac{P}{۴} = \frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ را به‌کار می‌بریم، که در آن برابری تنها و تنها وقتی برقرار است که $a = b$ ؛ چون مقدار طرف چپ ثابت است، $\sqrt{ab}$ (و از آن‌جا ab)، وقتی بیشترین مقدار را دارد که $a = b$. بنابراین مستطیل داده شده یک مربع است، و این مطلب به‌ازای هر مقدار داده شدهٔ محیط صادق است.

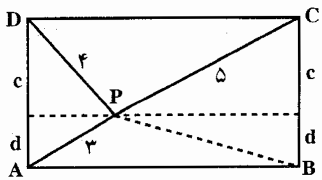
۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۲۹. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا :

از نقطهٔ P مطابق شکل، خطی موازی با ضلع AB رسم می‌کنیم، داریم :

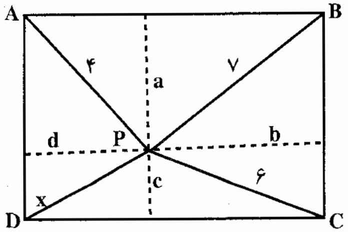
$$۱۶ - c^۲ = ۹ - d^۲$$
$$۲۵ - c^۲ = x^۲ - d^۲ \quad \therefore ۹ = x^۲ - ۹ \quad \therefore x = ۳\sqrt{۲}$$



۲۳۰. $۱۲\sqrt{۵}cm$.

۲۳۱. $\frac{۷\sqrt{۱۴۵}}{۵}cm$.

۲۳۲. گم‌شده‌ای در جنگل.



مستطیل فرضی ABCD را رسم می‌کنیم و یک نقطهٔ دلخواه، مانند P، به‌عنوان محلّ شخص گم شده، قرار می‌دهیم. فاصلهٔ این نقطه را از چهار ضلع مستطیل، مطابق شکل، a، b، c و d می‌نامیم.

فاصلهٔ P از سه نقطه معلوم است، امّا فاصلهٔ مطلوب معما را x می‌گیریم. با توجه به شکل و با استفاده از مثلثهای قائم‌الزاویه در چهار مورد از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$x^۲ = c^۲ + d^۲$$

$$c^۲ = ۳۶ - b^۲$$

$$d^۲ = ۱۶ - a^۲$$

$$۴۹ = a^۲ + b^۲$$

اگر دو طرف این چهار معادله را، عضو به عضو، با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$x^۲ + ۴۹ = ۵۲$$

و از آن‌جا پاسخ تقریبی ۱۷۳۲ متر به‌دست خواهد آمد.

۲۳۳. گزینهٔ (الف) درست است.

۲.۵.۲.۲. تساوی پاره‌خطها

۲۳۴. CC' را امتداد می‌دهیم تا AB را در E قطع کند، E وسط AB است؛ زیرا $E\hat{B}C \sim D\hat{A}B$ و $\frac{EB}{AD} = \frac{BC}{AB}$ و یا $\frac{EB}{a} = \frac{a}{a\sqrt{۲}}$ ؛ پس $EB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{AB}{۲}$ و چون $AA' \| EC'$ است، پس C' وسط $A'B$ است، یعنی $BC' = C'A'$. از طرفی از تساوی $B\hat{C}C' = D\hat{A}A'$ حاصل می‌شود، $BC' = DA'$ ؛ پس $BC' = C'A' = A'D$.

۶.۲.۲. شعاع دایره

۱.۶.۲.۲. اندازهٔ شعاع دایره

۲۳۶. اگر اندازهٔ عرض مستطیل را k فرض کنیم، اندازهٔ طول آن ۳k است، و داریم:

$$۳k.k = ۷۵ \Rightarrow ۳k^۲ = ۷۵ \Rightarrow k^۲ = ۲۵ \Rightarrow k = ۵$$

$$\Rightarrow \text{طول} = ۱۵cm \text{ و } \text{عرض} = ۵cm \Rightarrow \text{قطر مستطیل} = \sqrt{۱۵^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۲۵۰} = ۵\sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایرهٔ محیطی} = \frac{۱}{۲} \times \text{قطر مستطیل} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۱۰}cm$$

۲۳۷. $۳\frac{۱}{۱۲}$.

۷.۲.۲. محیط

۱.۷.۲.۲. اندازهٔ محیط

۲۳۸. طول و عرض مستطیل را بترتیب a و b می‌نامیم، داریم :

$$\begin{cases}\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}\\ \sqrt{a^{۲}+b^{۲}}=۴\sqrt{۱۳}\end{cases}$$

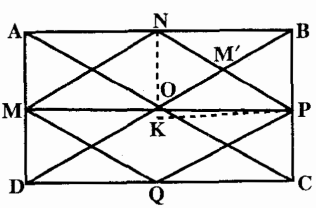
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{۹}{۴}b^{۲}+b^{۲}}=۴\sqrt{۱۳}\Rightarrow \frac{b}{۲}\sqrt{۱۳}=۴\sqrt{۱۳}\Rightarrow b=۸cm$$

$$\Rightarrow a=۱۲cm \quad \Rightarrow \text{محیط مستطیل}=۲(a+b)=۲(۸+۱۲)=۴۰cm$$

۲۳۹. عرض مستطیل را a فرض می‌کنیم، طول آن ۲a و مساحت آن $S=۲a \;.\; a=۲a^{۲}$ است. از آن‌جا :

$$S=۲a^{۲}=۳۲\Rightarrow a^{۲}=۱۶\Rightarrow a=۴cm\Rightarrow ۲a=۸cm$$

$$\text{محیط}=۲(a+۲a)=۶a=۲۴cm$$



۲۴۰. ۱. ثابت می‌کنیم که می‌توان متوازی‌الاضلاعهای بی‌شماری با شرایط مسأله به‌دست آورد.
برای این کار MN را موازی BD رسم کرده و از M و N به O وصل می‌کنیم تا ضلعهای مستطیل را در P و Q قطع کند. دو مثلث MOD و BOD در حالت دو زاویه و ضلع بین برابرند، پس OM = OP، همچنین دو مثلث NOB و DOQ درهمان حالت برابرند ؛ پس ON = OQ و چهارضلعی MNPQ که قطرهایش منصف یکدیگرند متوازی‌الاضلاع است.
برای این‌که ثابت کنیم NP موازی AC است، می‌دانیم خطی که از برخورد قطرهای موازی یک ضلع متوازی‌الاضلاع رسم شود، ضلع دیگر را نصف می‌کند ؛ پس OB که موازی MN از O رسم شده است، NP را در وسط قطع می‌کند ؛ یعنی BM′ میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ NBP است و نصف وتر.

پس : $M'\hat{N}B = M'\hat{B}N$ است، از طرفی : $M'\hat{B}N = O\hat{A}N$

می‌باشد پس $O\hat{A}N = M'\hat{N}B$ می‌شود، یعنی NP موازی CA است.
اگر $M'B$ را به‌اندازهٔ خودش امتداد دهیم تا K به‌دست آید، NBPK مستطیل است و $NP = KB$ و MNKD متوازی‌الاضلاع است، پس $MN = DK$ و $MN + NP = DK + KB = DB$، و محیط برابر مجموع دو قطر مستطیل که مقداری ثابت است می‌شود.

۲.۷.۲.۲. نسبت محیطها

۲۴۱. $\frac{a+۴b}{۲a+۲b}$.

۲۴۲. $۲\sqrt{۲}\cos\frac{\pi(m-n)}{۴(m+n)}$.

۸.۲.۲. مساحت

۱.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۲.۲. اندازهٔ مساحت مستطیل

۲۴۳. اگر طول و عرض مستطیل را بترتیب a و b فرض کنیم، داریم :

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲} \Rightarrow ۱۵ = \sqrt{۱۴۴ + b^۲} \Rightarrow b^۲ = ۸۱ \Rightarrow b = ۹$$

$\Rightarrow$ مساحت مستطیل $= a \cdot b = ۱۲ \times ۹ = ۱۰۸$

۲۴۴. اگر عرض مستطیل را x بگیریم، طول آن برابر $۲x$، مساحت آن برابر $۲x^۲$ و محیط آن برابر $۶x$ می‌شود، و بنا به فرض مسأله، باید داشته باشیم : $۲x^۲ = ۶x$
بنابراین $x = ۳$ و مساحت مستطیل موردنظر برابر ۱۸ واحد مربع می‌شود.

۲۴۵. $۲۰cm^۲$ و $۱۰/۴cm^۲$. عبارتهای $AB = x$، $BC = ۲x$ و $A\hat{B}M = \alpha$ را منظور کنید. قانون کسینوسها را در مورد AM (در مثلث ABM) و CM (در مثلث BMC) بنویسید و سپس از فرمول $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ استفاده کنید.

۲۴۶. الف. ۱۲ سانتیمتر مربع.
ب. ۴ برابر می‌شود.

۲۴۷. گزینهٔ (ج) درست است ؛ زیرا :

ضلعهای مستطیل R_1، ۲ سانتیمتر و ۶ سانتیمتر و مجذور قطر آن، d^2، برابر $(40 =) 2^2 + 6^2$ است چون دو مستطیل متشابه‌اند.

$$\frac{\text{مساحت } R_2}{\text{مساحت } R_1} = \frac{D^2}{d^2} \qquad \therefore R^2 \text{ مساحت } = \frac{225}{40} \times 12 = \frac{135}{2}$$

۲۴۸. ضلع دیگر مستطیل را b می‌نامیم، داریم :

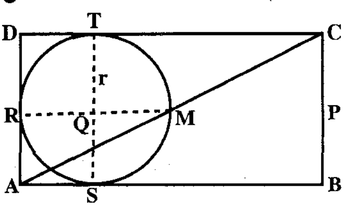
$$d = \sqrt{l^2 + b^2} \Rightarrow d^2 = l^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{d^2 - l^2}$$

$$\Rightarrow \text{مستطیل } S = l \cdot b = l\sqrt{d^2 - l^2}$$

۲۴۹. داریم :

$$PQ = \sqrt{GQ \cdot QH} \text{ و } PR = \sqrt{HR \cdot RK}$$

$$\text{مستطیل } S = PQ \cdot PR = \sqrt{GQ \cdot QH \cdot HR \cdot RK}$$



۲۵۰. گزینهٔ (ج) درست است. اگر Q مرکز دایرهٔ داده شده و R، S و T بترتیب نقطه‌های تماس آن با ضلعهای AD، AB و CD باشند (شکل را ملاحظه کنید)، نقطه‌های T، Q و S همراستا هستند و ST به طول ۲r قطر دایره و یک ارتفاع مستطیل است. RQ با ضلعهای AB و CD موازی و از آنها به یک فاصله است، بنابراین هر قاطعی، به‌ویژه قطر AC را نصف می‌کند. در نتیجه، M، وسط AC، روی خط RQ قرار دارد، چون M نیز روی دایره قرار دارد، RM قطر دایره است. از این رو، $RM = 2r$ و از آن‌جا که $AD = 2AR$ است، داریم $DC = 2RM = 4r$ و مساحت مستطیل برابر است با حاصلضرب قاعده در ارتفاع و برابر است با $4r \times 2r = 8r^2$.

۲۵۱. گزینهٔ (د) درست است ؛ زیرا :

فرض کنید، طول و عرض مزرعه، 2ω و ω باشند، آن‌گاه :

$$6\omega = x, \omega = \frac{x}{6}, 2\omega = \frac{x}{3}$$

$$\therefore A = \omega \times 2\omega = \frac{x^2}{18}$$

۲۵۲. **راه حل جبری.** یکی از ضلعهای مستطیل را x و نصف محیط آن را p می‌گیریم. در این صورت، مساحت مستطیل S، چنین خواهد شد :

$$S = x(p - x)$$

یا

$$x^2 - px + S = 0$$

با حل این معادله به‌دست می‌آید :

$$x=\frac{p}{۲}\pm\sqrt{\frac{p^{۲}}{۴}-S}$$

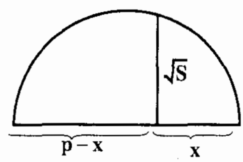
روشن است که x، تنها با شرط $S\le\frac{p^{۲}}{۴}$ ، یک عدد حقیقی است ؛ درضمن حداکثر مقدار S برابر است با $\frac{p^{۲}}{۴}$ ، یعنی :

$$S_{max}=\frac{p^{۲}}{۴}\Rightarrow x=\frac{p}{۲}$$

به این ترتیب، از میان مستطیلهایی که محیط برابر دارند، مساحت مربع، حداکثر مقدار ممکن است.

راه‌حل هندسی. نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم که قطر آن برابر با p، یعنی نصف محیط مستطیل باشد (شکل). قطر نیمدایره را به دو قسمت x و $p-x$ تقسیم و از نقطهٔ تقسیم، عمودی بر قطر رسم می‌کنیم. طول این عمود، ازنظر عددی برابر است با $\sqrt{S}$ ، زیرا باید رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$(p-x)\cdot x=S$$



روشن است که مساحت S، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که طول این عمود، برابر با شعاع دایره باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم :

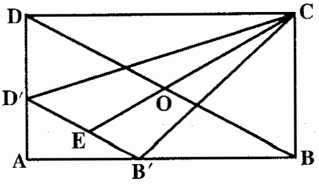
$$S=\frac{p^{۲}}{۴}$$

و این، تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم :

$$p-x=x\Rightarrow x=\frac{p}{۲}$$

یعنی، وقتی که مستطیل به صورت مربع درآید.

۲.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۲۵۳. اگر مساحت مستطیل را S فرض کنیم، مساحت (شکل) مثلث ADC برابر $\frac{S}{۲}$ است، و دو مثلث CDD′ و CDA در قاعده مشترکند، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{CDD}' \text{ مساحت}}{\text{CDA} \text{ مساحت}}=\frac{D'D}{AD} \,,\, \frac{D'D}{AD}=\frac{EO}{AO}=\frac{AO-AE}{AO}$$

$$\frac{\text{CDD}' \text{ مساحت}}{\frac{S}{۲}}=\frac{\frac{AC}{۲}-\frac{AC}{۶}}{\frac{AC}{۲}}=\frac{۳AC-AC}{۳AC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\text{CDD}' \text{ مساحت}=\frac{S}{۲}\times\frac{۲}{۳}=\frac{S}{۳}$$

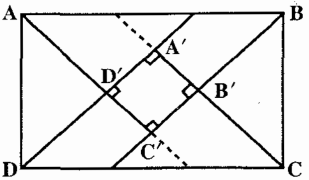
و به همین ترتیب ثابت می‌شود که: $\frac{S}{۳}=$ مساحت CBB′ .

۲۵۴. مستطیل درونی به ضلعهای ۱۳m و ۱۸m خواهد بود. پس مساحت پیاده‌رو برابر است با:

$$۲۰\times۱۵-(۱۳\times۱۸)=۳۰۰-۲۳۴=۶۶m^۲$$

۲۵۵. گزینهٔ (ج) درست است؛ زیرا:

مساحت (جدید) برابر است با $(d+l)(d-l)=d^۲-l^۲=\omega^۲$ ؛ بنابراین (ج) انتخاب صحیح است.



۲۵۶. مستطیل به ضلعهای a و b $(a>b)$ را درنظر بگیرید. اگر A′B′C′D′ مربع حاصل باشد، با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، ثابت کنید: $S=a^۲-b^۲$ است.

۲۵۷. $۴۰cm^۲$. KD را با x نشان دهید (P و M بترتیب نقطه‌های تماس دایره با AD و AB است). تساوی $PD^۲=CD.KD$ را به کار گرفته، پاره‌خطهای PD، OP و MK را بر حسب x بیان کنید.

۲ . ۲ . ۸ . ۲. نسبت مساحتها

۲۵۸. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا :

اگر S طول ضلع مربع باشد، طول و عرض مستطیل بترتیب ۱/۱S و ۰/۹S و مساحت آن $۰/۹۹S^۲$ است،

$$\therefore \frac{R}{S} = \frac{۰/۹۹S^۲}{S^۲} = \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

۲ . ۲ . ۸ . ۳. رابطهٔ بین مساحتها

۲۵۹. مستطیلی که طول و عرض آن برابر باشند، یعنی مربعی به ضلع ۱۰ سانتیمتر :

$۲(a+b) = ۴۰$ و $a + b = ۲۰ \Rightarrow a = b = ۱۰$

۲۶۰. طول و عرض مستطیل را بترتیب $a = \frac{P}{۲} + x$ و $b = \frac{P}{۲} - x$ فرض می‌کنیم، داریم :

$$S_{\text{مستطیل}} = a \cdot b = (\frac{P}{۲}+x)(\frac{P}{۲}-x) = \frac{P^۲}{۴} - x^۲$$

$$\Rightarrow S' = -۲x، S' = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow S = \frac{P^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow a = b = \frac{P}{۲}$$

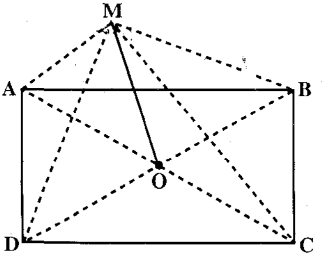
۲۶۱. ۴ برابر می‌شود.

۲۶۲. گزینهٔ (ج) نادرست است ؛ زیرا دوبرابر کردن شعاع دایرهٔ داده شده، مساحت آن را چهار برابر می‌کند.

۲ . ۲ . ۹. رابطه‌های متری

۲ . ۲ . ۹ . ۱. رابطه‌های متری در مستطیل

۲۶۳. نقطهٔ M را در صفحهٔ مستطیل ABCD درنظر گرفته، از M به O، محل برخورد قطرهای آن وصل می‌کنیم، داریم :



$$MD^۲ + MB^۲ = ۲OM^۲ + \frac{DB^۲}{۲}$$

$$AM^۲ + CM^۲ = ۲OM^۲ + \frac{AC^۲}{۲}$$

چون AC = DB ، بنابراین نتیجه می‌شود :

$$MD^۲ + MB^۲ = MA^۲ + MC^۲$$

۲۶۴. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM و ABD متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{DM}{AD}=\frac{AD}{AB}$$

امّا $AB=۲AD$ است. پس :

$$\frac{DM}{\frac{AB}{۲}}=\frac{\frac{AB}{۲}}{AB}\Rightarrow AB=۴DM$$

۲۶۵. داریم :

الف.

$$AQ=\sqrt{a^۲+b^۲}\ ,\ DQ=\sqrt{c^۲+a^۲}$$

$$\Rightarrow AD=\sqrt{AQ^۲+QD^۲}=\sqrt{۲a^۲+b^۲+c^۲}$$

ب. ارتفاع رأس Q در مثلث قائم‌الزاویهٔ AQD برابر a و دو قطعهٔ ایجاد شده روی AD برابر b و c است، پس $a^۲=bc$ است.

۲۶۶. گزینهٔ (د) درست است.

$$\Delta PTR\sim\Delta ATQ\ ;\ \frac{PR}{AQ}=\frac{PT}{AT}$$

$$PT=AT(P\hat{A}T=P\hat{B}S=A\hat{P}T)\ ;\ PR=AQ\ ;\ PS=QF\ ;$$

$$PR+PS=AQ+QF=AF\ ;\ \text{یا}$$

$S\hat{B}P=T\hat{P}A=T\hat{A}P$ ، A، Q، R و P بر یک دایره واقعند :

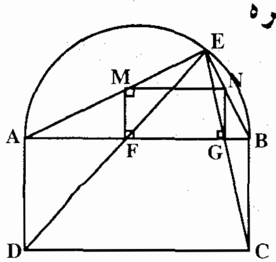
$$\overset{\frown}{PR}=\overset{\frown}{AQ}\ ,\ PR=AQ\ ,\ PS=QF\ ;\ PR+RS=AF$$

۲۶۷. گزینهٔ (ج) درست است.

با استفاده از تشابه مثلثها :

$$\frac{(h-x)}{h}=\frac{۲x}{b}\ ,\ \therefore x=\frac{bh}{۲h+b}$$

۲ . ۲ . ۹ . ۲ . رابطه‌های متری در مستطیل و دایره



۲۶۸. فرض کنیم $AF=a$ ، $FG=b$ و $BG=c$. باید ثابت کنیم : $AG^۲+BF^۲=AB^۲$ یا

$$(a+b)^۲+(b+c)^۲=(a+b+c)^۲$$

$$a^۲+۲ab+b^۲+b^۲+c^۲+۲bc=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲bc+۲ac$$

و بالاخره باید ثابت کنیم :

$$b^۲=۲ac$$

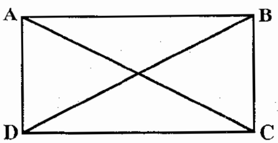
از F و G دو عمود بر AB اخراج می‌کنیم. مستطیل FMNG با مستطیل ABCD متشابه است، زیرا :

$$\frac{FM}{AD}=\frac{EF}{ED}=\frac{EG}{EC}=\frac{GN}{BC}=\frac{FG}{DC}$$

پس $FM=NG$ است و $b^۲=FG^۲=۲MF^۲$. زیرا به فرض داشتیم $AB^۲=۲BC^۲$
و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMF و NBG متشابه‌اند و خواهیم داشت $\frac{NG}{c}=\frac{a}{MF}$ یا $ac=MF^۲$ ؛ پس $b^۲=۲ac$.

.۲۶۹
$$MP^۲+MR^۲=MP^۲+PB^۲=MB^۲,$$
$$MQ^۲+MS^۲=SD^۲+MS^۲=MD^۲,$$
$$MP^۲+MR^۲+MQ^۲+MS^۲=MB^۲+MD^۲\ ,\ \ MB^۲+MD^۲=BD^۲=۴r^۲$$
$$D\hat{M}B=۹۰^\circ \Rightarrow MP^۲+MQ^۲+MR^۲+MS^۲=۸r^۲=$$ مقدار ثابت

۲ . ۲ . ۱۰ . ثابت کنید چهارضلعی مستطیل است



۲۷۱. متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر می‌گیریم. اگر $AC=BD$ باشد، دو مثلث ABD و ACD همنهشتند (به دلیل برابری سه ضلع) ؛ بنابراین $B\hat{A}D=A\hat{D}C$ و چون این دو زاویه مکمل یکدیگرند، پس شکل مستطیل است.

۲ . ۲ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۷۲. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا :

بنابر شرطهای داده شده داریم :

$$(۱)\ \ ۳(x+y)=a+b \qquad\qquad (۲)\ \ ۳xy=ab$$

طرف چپ معادلهٔ (۱) را بر $۳xy$ و طرف راست آن را بر ab تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{۱}{y}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}$$

امّا این برابری ممکن نیست، زیرا $x<a<b$ و $y<a<b$.

۲۷۳. $113 - 56\sqrt{3}$.

۲۷۴. $\frac{16}{9}(4 - \sqrt{17})$.

۲۷۵. اگر رأسهای مستطیل روی دایره‌های هم‌مرکز قرار گیرد (دو رأس روبه‌رو به هم، بر دایره‌های با شعاعهای R_1 و R_2، و دو رأس دیگر، بر دایره‌های با شعاعهای R_3 و R_4)، آن وقت برابری $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2 + R_4^2$ برقرار خواهد بود. این برابری را ثابت می‌کنیم. فرض کنید A معرف مرکز دایره‌ها باشد و رأسهای K و M مستطیل KLMN، بترتیب، روی دایره‌های با شعاعهای R_1 و R_2 و L و N، بترتیب، روی دایره‌های با شعاعهای R_3 و R_4 قرار گیرند. در مثلثهای AKM و ALN، میانه‌هایی که از رأس A خارج می‌شوند، برابرند، همچنین ضلعهای KM و LN برابرند. این بدان معنی است که حکم ما درست است.

فرض کنید طول ضلع دوم مستطیل x باشد و $x > 1$. شعاعهای R_1، R_2، R_3 و R_4 بترتیب برابرند با ۱، x، $\sqrt{x^2+1}$ و $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$. با بررسی ترتیبهای ممکن، به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 = 7,\ R_1 = 1,\ R_2 = 2\sqrt{2},\ R_3 = \sqrt{2},\ R_4 = \sqrt{7}$$

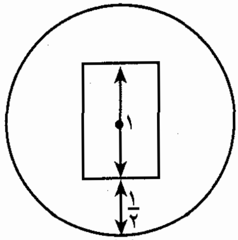
مربع $K_1L_1M_1N_1$ به ضلع y را که رأسهایش روی دایره‌های به شعاعهای $R_1 = 1$، $R_3 = \sqrt{2}$، $R_2 = 2\sqrt{2}$ و $R_4 = \sqrt{7}$ واقعند، درنظر بگیرید. فرض کنید: $A\hat{K_1}L_1 = \varphi$. در این صورت $\varphi \pm 90^\circ$ یا $A\hat{K_1}N_1 = 90^\circ \pm \varphi$. با نوشتن قانون کسینوسها در مثلثهای AK_1L_1 و AK_1N_1 به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 1 + x^2 - 2x\cos\varphi = 2 \\ 1 + x^2 \pm 2x\sin\varphi = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x\cos\varphi = x^2 - 1 \\ \pm 2x\sin\varphi = x^2 - 6 \end{cases}$$

با مربع کردن دو برابری آخری و جمع کردن حاصلها با هم، به‌دست می‌آوریم:

$$2x^4 - 10x^2 + 37 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 = 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

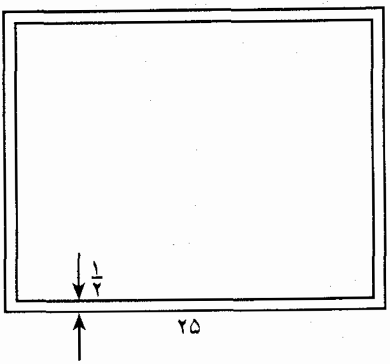
جواب: $\sqrt{5 \pm 2\sqrt{26}}$.



(a)

۲۷۶. مرکز دایرهٔ به قطر واحد، باید در درون مستطیلی باشد که ضلعهای آن، به فاصله‌ای بیش از $\frac{1}{2}$ از ضلعهای مستطیل اصلی قرار دارند و در ضمن، در درون مستطیل اصلی باشد؛ یعنی این مرکز، باید در درون چارچوبی باشد که در شکل (a) نشان داده شده است. مساحت این مستطیل درونی، برابر است با: $۱۹ \times ۲۴ = ۴۵۶$.

به‌جز این، مرکز این دایره، باید به فاصلهٔ بیش از $\frac{1}{2}$ از محیط هریک از مربعها باشد، یعنی در بیرون هر شکلی به مساحت $۳ + \frac{\pi}{۴}$، که در شکل (b) دیده می‌شود.



(b)

حتی اگر این شکلها یکدیگر را قطع نکنند، مجموع مساحتهای آنها چنین می‌شود:

$$۱۲۰(۳ + \frac{\pi}{۴}) = ۳۶۰ + ۳۰\pi < ۳۶۰ + ۳۰ \times ۳/۲ = ۴۵۶$$

بنابراین، این شکلها، نمی‌توانند مستطیل به مساحت ۴۵۶ را بپوشانند و در نتیجه، دایره‌ای با قطر واحد پیدا می‌شود که هیچ‌کدام از مربعها را قطع نکند.

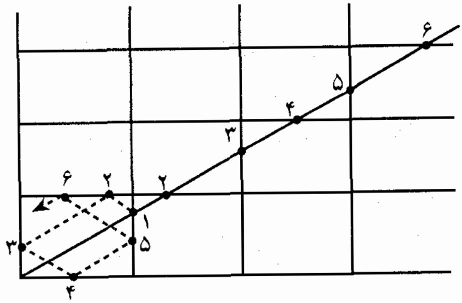
۲۷۷. فرض کنید ABCD معرف مستطیل داده شده باشد و فرض کنید نقطه‌های K، L، M و N، بترتیب، روی خطهای راست AB، BC، CD و DA واقع باشند. فرض کنید P_1 دومین نقطهٔ برخورد خط راست LN با دایرهٔ محیطی مثلث داده شده باشد (P نقطهٔ اوّل است). دراین صورت $BP_1 \| KN$، $P_1D \| LM$ و $B\hat{P_1}D = ۹۰^\circ$؛ بنابراین، $KN \perp LM$. بعلاوه، $LN \perp KM$؛ بدین ترتیب، N نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث KLM است. اکنون، برای روشنی وضع، فرض کنید L و N روی ضلعهای BC و DA باشند. قرار می‌گذاریم:

$AB = a$، $BC = b$، $KP = x$، $PN = y$

خط راست KN، BD را به نسبت $\frac{(a+y)x}{(b-x)y}$، با احتساب از رأس B، تقسیم می‌کند.
خط راست LM، BD را به همین نسبت تقسیم می‌کند.

۲۷۸. بهتر است برگشت از دیوارهٔ خود شکلها را درنظر بگیریم : برای این مسأله ابتدا میز بیلیاردی با اندازه‌های ۵×۳ را درنظر بگیرید و شکل را رسم کنید.

۲۷۹. به جای توپ بیلیارد، خود مستطیل (میز بیلیارد) را منعکس می‌کنیم. بعد از همهٔ انعکاسهای ممکن مستطیل، نسبت به ضلعها (بهتر است، همهٔ اینها را در یک صفحهٔ کاغذ شطرنجی انجام دهیم)، به شبکه‌ای از خطهای راست می‌رسیم که صفحه را به مستطیلهای m×n تقسیم کرده است. برای این که مسیر توپ بیلیارد را روی میز بسازیم، می‌توان خط راستی رسم کرد که از مبدأ O بگذرد و با یکی از ضلعها، زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه بسازد. باید ببینیم، این خط راست، چگونه با این مستطیلها برخورد می‌کند و سپس آنها را روی هم قرار دهیم، تا مسیر توپ بیلیارد روی مستطیل اصلی میز پیدا شود (شکل).



اکنون ثابت می‌کنیم، خط راستی که از گرهٔ O شبکه، با زاویهٔ ۳۰ درجه نسبت به دیوارهٔ میز بیلیارد گذشته است، از هیچ گرهٔ دیگری نمی‌گذرد. از این‌جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود.

اگر توپ بیلیارد از گرهٔ دیگری عبور کند، آن‌وقت مثلث قائم‌الزاویه‌ای با زاویهٔ ۳۰ درجه به‌دست می‌آید که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، عددهایی درستند ; ولی عدد $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (که عددی گنگ است)، نمی‌تواند برابر با نسبت دو عدد درست باشد.

برای علاقه‌مندان. مسیر توپ بیلیارد در مسألهٔ بالا، همهٔ سطح میز را به صورتی متراکم، «می‌پوشاند». اگر چه همیشه، با یکی از ضلعهای میز، زاویه‌ای برابر ۳۰ درجه می‌سازد. اگر میز بیلیارد به شکل دایره یا بیضی باشد، آن وقت، مسیر توپ همه‌جا متراکم نیست و حوزه‌ای را تشکیل می‌دهد که توپ از آن‌جا می‌گذرد. به طور کلی، رفتار مسیر توپ روی میز بیلیارد، در صفحه یا در فضای چندبعدی، ارتباط نزدیکی با شکل میز بیلیارد دارد. برای میزهایی که همهٔ کناره‌های آنها، تحدّبی به درون داشته باشد، مسیر توپ همه‌جا متراکم است و از همسایگی هر نقطهٔ دلخواه میز می‌گذرد، در ضمن، در جهتهای مختلف. در این حالت، مسأله، به مدل ریاضی گازی که «اتم‌های» آن به هم برخورد می‌کنند، منجر می‌شود.

برای میزهای محدّب و بخصوص، وقتی که دیواره‌های مستقیم دارند، معمولاً، این ویژگی وجود ندارد و شرح مسیر توپ، در این حالت، تنها در برخی موردهای خاص ممکن است.

۲۸۰. مسیر توپ را «یکسو» می‌کنیم. برای این منظور، به جای «بازگرداندن» توپ از ضلع بیلیارد، خود بیلیارد را نسبت به این ضلع آیینه‌وار منعکس می‌کنیم. در نتیجه، دستگاهی از نیمخطهای با رأس مشترک، به‌دست می‌آوریم؛ هر دو تا نیمخط مجاور، با هم زاویهٔ α می‌سازند. ماکسیمال تعداد نیمخطها در دستگاه، که یک خط راست می‌تواند آنها را قطع کند، دقیقاً ماکسیمال تعداد انعکاسهای توپ است. این عدد، برابر است با $[\frac{\pi}{a}]+1$، به شرطی که $\frac{\pi}{a}$ عدد درستی نباشد ($[x]$ بخش درست عدد x است)؛ اگر $\frac{\pi}{a}$، عدد درستی باشد، آن وقت این عدد، برابر است با ماکسیمال تعداد انعکاسها.

۲۸۱. فرض می‌کنیم، مستطیل را، به مربعهای واحد تقسیم کرده باشیم. در این صورت، هر قطعهٔ ۲×۲، درست یکی از مربعهایی را که نشان گذاشته‌ایم می‌پوشاند، ولی هر قطعهٔ ۴×۱ یا دو مربع نشان دار را می‌پوشاند و یا مربع نشان‌داری را نمی‌پوشاند، یعنی برای این که قطعه‌های ۲×۲ تعویض شود، باید برای هر قطعهٔ ۲×۲، دو قطعهٔ ۴×۱ متناظر باشد، در حالی که با تبدیل یک قطعهٔ ۲×۲ با یک قطعهٔ ۴×۱، یک خانهٔ نشان‌دار با ۰ یا ۲ خانهٔ نشان‌دار عوض می‌شود که ممکن نیست.

۲۸۲. ۱۵۱۲ = ۷۲ + ۶۰×۲۴.

۲۸۳. کوتاهترین مردان بین بلندترها را A و بلندترین مردان از بین کوتاهترین‌ها را B می‌نامیم. ردیفی را که در آن A قرار دارد و ستونی را که شامل B است، درنظر می‌گیریم. در نقطهٔ برخورد این ردیف و این ستون، سربازی ایستاده است که از A کوتاهتر و از B بلندتر است؛ یعنی A از B بلندتر است.

۲.۲.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۸۴. ۱. داریم:

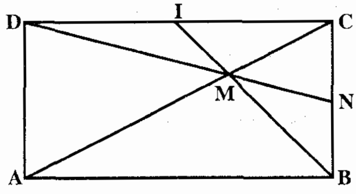
$$\frac{C'D'}{AC}=\frac{DJ}{DO},\ \frac{A'B'}{AC}=\frac{BI}{BO}$$

امّا $BO=OD$ و $BI=DJ$ است، پس $A'B'=C'D'$ و چون $A'B'\|C'D'$ است، پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.

۲. اگر نقطه‌های تقاطع $A'D'$ و $B'C'$ با قطر AC را H و K بنامیم، $A'B' = HK$ و $B'K = KC$ است. پس محیط متوازی‌الاضلاع برابر $۲AC$ است، که مقدار ثابتی است.

۲۸۵. ساده است.

۲۸۶. ۱. مثلثهای IMC و BMA متشابه‌اند؛ زیرا زاویه‌های آنها دو به دو با هم برابرند. از آن‌جا:

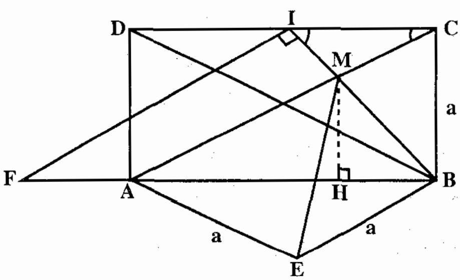


(الف)

$$\frac{MC}{MA} = \frac{IC}{AB} = \frac{IM}{BM}$$

امّا IC نصف AB است. بنابراین:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{۱}{۲}$$



(ب)

DM ضلع BC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. دو مثلث CMN و AMD متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های متناظرشان برابرند، پس: $\frac{CN}{AD} = \frac{MC}{MA} = \frac{MN}{MD}$؛

امّا $\frac{۱}{۲} = \frac{CN}{CB} = \frac{CN}{AD}$. بنابراین $\frac{۱}{۲} = \frac{MC}{MA}$. در نتیجه نقطهٔ N وسط BC است.

۲. ضلعهای مثلث IBF را بر حسب a حساب می‌کنیم.

محاسبهٔ IB:

$$IC = \frac{AB}{۲} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

زیرا در مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویهٔ AEB داریم:

$$AB = a\sqrt{۲} \text{ و } IB^۲ = BC^۲ + IC^۲ = a^۲ + \frac{۲a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow IB = \frac{a\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}} = \frac{a\sqrt{۶}}{۲}$$

محاسبهٔ BF:

چهارضلعی $ICAF$ متوازی‌الاضلاع و $AF = IC = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$.

$$BF = AB + AF = a\sqrt{۲} + \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow BF = \frac{۳a\sqrt{۲}}{۲}$$

محاسبهٔ IF :

$IF = AC$ ، امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم :

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ = (a\sqrt{۲})^۲ + a^۲ = ۳a^۲ \Rightarrow AC = a\sqrt{۳} \Rightarrow IF = a\sqrt{۳}$$

$$IF^۲ + IB^۲ = ۳a^۲ + \frac{۳a^۲}{۲} = \frac{۹a^۲}{۲} \Rightarrow BF^۲ = (\frac{۳a\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۹a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow IF^۲ + IB^۲ = BF^۲$$

در نتیجه، مثلث IBF قائم‌الزاویه است.

$$\frac{BC}{IC} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲} \ ,\ \frac{CD}{AD} = \frac{a\sqrt{۲}}{a} = \sqrt{۲} \ ;\ \frac{BC}{IC} = \frac{CD}{AD}$$

مثلثهای قائم‌الزاویهٔ BCI و CDA متشابه‌اند : $B\hat{I}C = C\hat{A}D$.

$$I\hat{C}M + C\hat{I}M = D\hat{C}A + B\hat{I}C = D\hat{C}A + C\hat{A}D = ۹۰^\circ$$

پس مثلث CIM قائم‌الزاویه در رأس M است. در نتیجه IF که موازی CM است، عمود بر IB است.

۳. چهارضلعی MAEB قابل محاط شدن در دایرهٔ به قطر AB است ($\hat{M} = \hat{E} = ۹۰^\circ$) . زاویه‌های AME و BME مساوی‌اند ؛ زیرا روبه‌رو به دو کمان هستند که وترهای نظیر آنها، AE و BE برابرند.

۴. $\text{aire } AMBE = \text{aire } AEB + \text{aire } AMB$

$$\text{aire } AEB = \frac{۱}{۲} AE \cdot BE = \frac{۱}{۲} a^۲$$

$$\text{aire } AMB = \frac{۱}{۲} AB \cdot MH$$

امّا نسبت تشابه دو مثلث AMH و ACB برابر $\frac{۲}{۳}$ است. از آن‌جا :

$$\frac{MH}{CB} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MH = \frac{۲a}{۳} \Rightarrow \text{aire } AMB = \frac{۱}{۲} a\sqrt{۲} \times \frac{۲}{۳} a = \frac{a^۲\sqrt{۲}}{۳}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\text{aire } AMBE = \frac{۱}{۲} a^۲ + \frac{a^۲\sqrt{۲}}{۳} = \frac{a^۲(۳ + ۲\sqrt{۲})}{۶}$$

۲. ۳. رابطه‌های متری در مربع

۲. ۳. ۲. زاویه

۲. ۳. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۲۸۷. مثلث AMK متساوی‌الساقین است، پس:

$$A\hat{K}M = A\hat{M}K = \beta$$

بنابراین:

$$K\hat{A}M = ۱۸۰^\circ - ۲\beta$$

از آن‌جا:

$$M\hat{A}D = B\hat{A}K = \frac{۱}{۲}(۹۰^\circ - ۱۸۰^\circ + ۲\beta) = \beta - ۴۵^\circ$$

۲۸۸. گزینهٔ (ب) درست است. داریم:

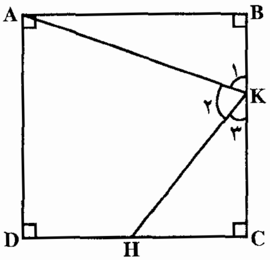
$$\tan\hat{a}_۱ = \frac{bm}{ab} = \frac{۱}{۲}$$

$$\theta = ۹۰^\circ - ۲\hat{a}_۱ \Rightarrow \sin\theta = \sin(۹۰^\circ - ۲\hat{a}_۱) = \cos ۲\hat{a}_۱ = \frac{۱ - \tan^۲ a_۱}{۱ + \tan^۲ a_۱}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{۱ - \frac{۱}{۴}}{۱ + \frac{۱}{۴}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۳}{۵}$$

۲۸۹. $\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$.

۲. ۳. ۲. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۲۹۰. اگر ضلع مربع را a فرض کنیم، $BK = \frac{a}{۳}$ و $CK = \frac{۲a}{۳}$ و $HC = \frac{a}{۲}$ است. با فرض $A\hat{K}B = K_۱$، $A\hat{K}H = K_۲$ و $H\hat{K}C = K_۳$، داریم:

$$\tan K_۱ = \frac{a}{\frac{a}{۳}} = ۳, \tan K_۳ = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{۲a}{۳}} = \frac{۳}{۴}$$

$$K_۲ = ۱۸۰ - (K_۱ + K_۳) \Rightarrow \tan K_۲ = -\tan(K_۱ + K_۳) = -\frac{\tan K_۱ + \tan K_۳}{۱ - \tan K_۱ \tan K_۳}$$

$$\tan K_۲ = -\frac{۳ + \frac{۳}{۴}}{۱ - \frac{۹}{۴}} = \frac{\frac{۱۵}{۴}}{\frac{۵}{۴}} = ۳ \Rightarrow K_۱ = K_۲$$

۲ . ۳ . ۳. ضلع

۲ . ۳ . ۳ . ۱. اندازهٔ ضلع

۲۹۱. داریم :

$۲R=۲ \Rightarrow R=۱ \Rightarrow$ دایره $S=\pi R^{۲}=\pi$

مربع $S=a^{۲} \Rightarrow a^{۲}=\pi \Rightarrow a=\sqrt{\pi}$

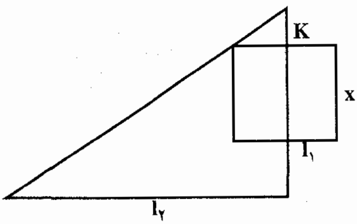
۲۹۲. نسبت مساحت دو مربع به نسبت مجذور نسبت ضلعهای آنهاست. پس :

$$\frac{S'}{S}=(\frac{a'}{a})^{۲}=۵ \Rightarrow \frac{a'}{a}=\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{a'}{۶}=\sqrt{۵} \Rightarrow a'=۶\sqrt{۵}$$

۲۹۳. ضلع مربع را a فرض می‌کنیم، داریم :

$$a^{۲}=۸\times۱۸ \Rightarrow a^{۲}=۱۴۴ \Rightarrow a=۱۲$$

۲۹۴. قاعدهٔ چینی، برای حل این مسأله می‌گوید :



«مقدار «بو»، فاصلهٔ تا دروازهٔ شمالی را در دو برابر مقدار «بو» که به غرب می‌رویم ضرب کن، این می‌شود مقسوم. با مقدار «بو» که از دروازهٔ جنوبی رفته‌ایم، جمع کن، این هم می‌شود مقسوم علیه. جذر بگیر، ضلع مربع را خواهی داشت». این مسأله را می‌توان به کمک شکل روشن کرد (شکل). با استفاده از علامتگذاریهای شکل، می‌توان مسأله را، به حل معادلهٔ درجهٔ دوم زیر منجر کرد :

$$x^{۲}+(K+l_{۱})x-۲Kl_{۲}=۰$$

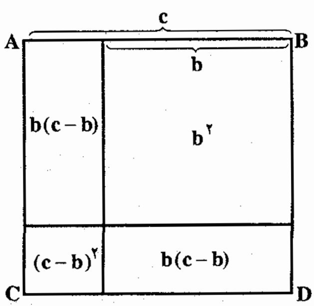
۲۹۵. به سختی می‌توان زمانی را پیدا کرد که چینی‌ها، برای نخستین بار، از قانون مربوط به ضلعهای مثلث قائم‌الزاویه، یعنی قضیهٔ فیثاغورس، استفاده کرده‌اند. ولی این مطلب روشن است که آنها، از زمانهایی بسیار دور، با این قضیه آشنا بوده‌اند. آن‌طور که سندها گواهی می‌دهند، چینی‌ها در حدود ۲۲۰۰ سال پیش از میلاد، از قضیهٔ فیثاغورس، در مورد مثلثی که ضلعهای آن ۴،۳و۵ باشد، آگاهی داشتند. در «ریاضیات در نه کتاب»، از قضیهٔ فیثاغورس، به نام «هواوهو» نام برده شده است. طبق این قاعده، می‌توان با معلوم بودن وتر و یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه، ضلع دیگر مثلث قائم‌الزاویه را به‌دست آورد. همچنین، می‌توان وتر را، با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه محاسبه کرد.

قاعدهٔ «هواوهو»، این‌طور بیان می‌شود : «هرکدام از ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن، جمع کن، از این مجموع جذر بگیر. حاصل برابر وتر می‌شود.

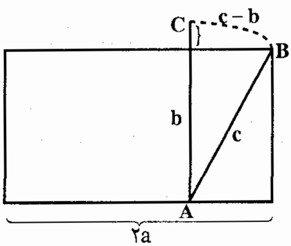
به همین ترتیب، ضلع افقی مجاور به زاویهٔ قائمه را در خودش ضرب کن، آن را از ضرب وتر در خودش کم کن، از باقی‌مانده جذر بگیر. ضلع قائم مجاور به زاویهٔ قائمه به‌دست می‌آید».

اصطلاحهای «هواو» و «هو» به معنای ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه هستند. ضمناً «هواو» به ضلع قائم و معمولاً کوچکتر، و «هو» به ضلع افقی و معمولاً بزرگتر، اطلاق می‌شده است. معنای تحت‌اللفظی «هواو» قلاب ـ و «هو» ـ دنده یا رابط است.

از قاعدهٔ «هواوهو»، در تمام ۲۴ مسألهٔ کتاب نهم رسالهٔ «ریاضیات در نه کتاب» استفاده شده است و به همین مناسبت، کتاب نهم را «هواوهو» می‌نامند.



(ب)



(الف)

در رساله، برای حل مسأله، این‌طور گفته شده است :«نصف ضلع برکه را در خودش ضرب کن، قسمت بالای آب، یعنی ۱ «چی» را در خودش ضرب کن ؛ از اوّلی کم کن، باقی‌مانده را بر ۲ برابر قسمت روی آب نی تقسیم کن، عمق آب را به‌دست آور. قسمت بالای آب را به آن اضافه کن، طول نی پیدا می‌شود».

رساله، جواب را نداده است ؛ ولی با این راهنمایی، می‌توان جواب را بسادگی به‌دست آورد.

طول برکه را $۲a$ ، ارتفاع نی را c و عمق برکه را b می‌گیریم (شکل الف). باید b و c را پیدا کنیم. با استفاده از قاعدهٔ چینی، می‌توان رابطه‌های زیر را، برای این دو مجهول، نوشت :

$$b = \frac{a^۲ - (c-b)^۲}{۲(c-b)}$$

$$c = b + (c-b) = \frac{a^۲ + (c-b)^۲}{۲(c-b)}$$

در رساله، نتیجهٔ این قاعده داده نشده است، بنابراین به سختی می‌توان فهمید که ریاضیدانان چین باستان، از چه راهی، این رابطه‌ها را به‌دست می آوردند. با وجود این، با استدلالهای عادی می‌توان به راحتی، به این رابطه‌ها رسید. با شروع از شرطهای مسأله و به‌کار بردن قاعدهٔ «هواوهو»، یعنی قضیهٔ فیثاغورس، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} b = c - k \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases}$$

که در آن، برای سادگی کار، قسمت بالای آب را که برای ما معلوم است، یعنی $c - b$ را، به k نشان داده‌ایم. با حل این دستگاه، به‌دست می‌آید :

$$\left| \begin{aligned} b &= \frac{a^2 - k^2}{2k} \\ c &= \frac{a^2 + k^2}{2k} \end{aligned} \right. \quad (k = c - b)$$

«لیو هوای» ضمن بحث دربارهٔ «ریاضیات در نه کتاب»، به‌طور قانع‌کننده‌ای روشن می‌کند که چینی‌ها قاعده‌ای به‌دست آورده بودند که می‌شد از آن، دو رابطهٔ اخیر را نتیجه گرفت. او معتقد است این رابطه‌ها را که به‌طور شفاهی داده شده است، براساس تصورهای هندسی به‌دست آورده‌اند. ظاهراً، دانشمندان چین باستان، در این مورد، از شکلی شبیه شکل (ب) استفاده می‌کرده‌اند. قبل از همه، بنا به قاعدهٔ «هواوهو» داریم :

$$a^2 = c^2 - b^2$$

سپس، از روی شکل معلوم است :

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)^2 + 2b(c - b)$$

و از آن‌جا :

$$b = \frac{a^2 - (c - b)^2}{2(c - b)}$$

۲۹۶. ضلعهای دو مربع داده شده را a_1 و a_2 و ضلع مربع خواسته شده را a می‌نامیم، داریم :

الف . $a^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

ب . $a^2 = |a_1^2 - a_2^2| \Rightarrow a = \sqrt{|a_1^2 - a_2^2|}$

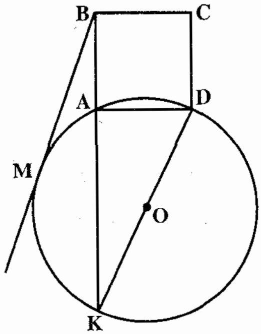
۲۹۷. گزینهٔ (د) درست است.

برای توضیح، به مبحث عددهای تقریبی مراجعه کنید.

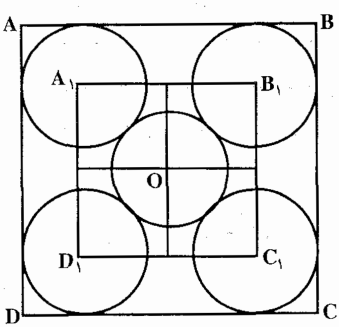
یادداشت. برای درک کامل موضوع، اطلاعاتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد نیاز است.

۲۹۸. $\frac{a}{۵}$.

۲۹۹. $\frac{۸R}{۵}$.



۳۰۰. بعد از منظور کردن $AB = x$ و $BM = ۲x$ (شکل)، پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ k قطع کند، آن‌گاه $BK \cdot AB = BM^۲$، یعنی $BK \cdot x = ۴x^۲$ را خواهیم داشت که از آن نیز $BK = ۴x$ و در نتیجه $AK = ۳x$ استنتاج می‌شود. زاویهٔ KAD معادل ۹۰° بوده و در نتیجه KD قطر دایره خواهد بود. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ADK، به تساوی $AD^۲ + AK^۲ = KD^۲$، یعنی $x^۲ + ۹x^۲ = ۴R^۲$ می‌رسیم، که از آن نیز، $x = \frac{R\sqrt{۱۰}}{۵}$ به‌دست می‌آید.



۳۰۱. مربع ABCD را به مرکز O و به ضلع a درنظر می‌گیریم که شامل ۵ دایرهٔ غیرمتقاطع و به شعاع واحد باشد. در این صورت، مرکز دایره‌ها، در مربع درونی $A_۱B_۱C_۱D_۱$ به مرکز O و به ضلع $a - ۲$ قرار می‌گیرند ($A_۱B_۱ \| AB$ ؛ شکل). اگر وسط ضلعهای روبه‌رو را در مربع $A_۱B_۱C_۱D_۱$ به هم وصل کنیم، آن را به چهار مربع کوچکتر تقسیم می‌کند که بنابر اصل دیریکله، در یکی از آنها، دست کم دو تا از مرکزها قرار دارد. در این صورت، فاصلهٔ بین آنها، از یک طرف، از قطر مربع کوچک تجاوز نمی‌کند و از طرف دیگر، کمتر از ۲ نیست. چون:

$$۲ < OA_۱ = \frac{A_۱B_۱}{۲} \cdot \sqrt{۲} = \frac{a - ۲}{۲}\sqrt{۲}$$

بنابراین: $a \geq ۲\sqrt{۲} + ۲$

در ضمن، اگر $a = ۲\sqrt{۲} + ۲$ و مرکز دایره‌ها بر نقطه‌های O، $A_۱$، $B_۱$، $C_۱$ و $D_۱$ منطبق باشند، آن‌گاه همهٔ شرطهای موردنظر برقرارند. به این ترتیب، مربع مجهول، ضلعی برابر $۲ + ۲\sqrt{۲}$ دارد.

۲ . ۳ . ۴. قطر

۲ . ۳ . ۴ . ۱. اندازهٔ قطر

۳۰۲. $۳\sqrt{۲}$ ، $۵\sqrt{۲}$ ، $۷۸\sqrt{۲}$ ، ۲ و $a\sqrt{۲}$.

۳۰۳. ضلع مربع را a فرض می‌کنیم، داریم :

$$a^{۲}=۱۶۹ \Rightarrow a=۱۳ \Rightarrow \text{قطر} = a\sqrt{۲}=۱۳\sqrt{۲}$$

۳۰۴. گزینهٔ (د) درست است.

طول ضلع مثلث را S می‌گیریم. بنابراین مساحت آن برابر است با $۹\sqrt{۳} = S^{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۴})$ ، پس $S=۶$. چون محیط مثلث یعنی $۳S=۱۸$ با محیط مربع برابر است، طول ضلع مربع $\frac{۹}{۲}=\frac{۱۸}{۴}$ و بنابراین قطر مربع $۹\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۳۰۵. داریم :

$$S_{ABCD}=a^{۲} \text{ و } AH=\frac{BD}{۲}$$

$$S_{ABD}=\frac{a^{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}BD\cdot AH=BD\cdot\frac{BD}{۴}=\frac{BD^{۲}}{۴}$$

$$\frac{a^{۲}}{۲}=\frac{BD^{۲}}{۴} \text{ و } a^{۲}=\frac{BD^{۲}}{۲} \text{ و } BD^{۲}=۲a^{۲} \Rightarrow BD=a\sqrt{۲}$$

۳۰۶. ضلع و قطر مربع اوّل را بترتیب a و d و ضلع و قطر مربع دوم را بترتیب a' و d' می‌نامیم. داریم :

$$a=۴ \Rightarrow d=۴\sqrt{۲} \text{ و } a'=d=۴\sqrt{۲} \Rightarrow d'=d\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۸$$

$$\text{محیط مربع اوّل} = ۴\times۴=۱۶ \Rightarrow d'=۸=\frac{۱}{۲}\times۱۶ \Rightarrow ۸=۸$$

۲ . ۳ . ۵. پاره‌خط

۲ . ۳ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳۰۷. دو زاویهٔ ABE و CBF برابرند و $AB=BC$ است. پس دو مثلث ABE و BCF همنهشتند ؛ بنابراین $EB=BF$. یعنی مثلث EBF قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

از آن‌جا داریم :

$$a\Delta EBF = \frac{۱}{۲}FB^{۲} = ۲۰۰ \Rightarrow FB = ۲۰$$

$$a\square ABCD = ۲۵۶ \Rightarrow BC^{۲} = ۲۵۶ \Rightarrow BC = ۱۶$$

$$\Rightarrow CF = \sqrt{BF^{۲} - BC^{۲}} = \sqrt{۴۰۰ - ۲۵۶} = ۱۲$$

۳۰۸. گزینهٔ (ب) درست است.

۳۰۹. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۱۰. گزینهٔ (الف) درست است.

$$\Delta CDF = \Delta CBE (CD = CB, D\hat{C}F = B\hat{C}E)$$

$$\therefore CF = CE$$

$$(\Delta CEF)\ \text{مساحت} = \frac{۱}{۲}CE \times CF = \frac{۱}{۲}CE^{۲} = ۲۰۰$$

$$\therefore CE^{۲} = ۴۰۰$$

$$\text{مساحت (مربع)} = CB^{۲} = ۲۵۶$$

$$\therefore BE^{۲} = CE^{۲} - CB^{۲} = ۴۰۰ - ۲۵۶ = ۱۴۴; BE = ۱۲$$

۳۱۱. $\frac{a\sqrt{۱۰}}{۴}$.

۳۱۲. فرض کنید x فاصلهٔ مرکز مربع تا خط راست l، و φ زاویهٔ حادهٔ تشکیل‌شده با یکی از قطرهای مربع و خط l باشد. فاصلهٔ رأسهای مربع تا l (بترتیب دوری) برابرند با :

$$x + a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\varphi\ ,\ x + a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\varphi\ ,\ \left|x - a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin\varphi\right|\ ,\ \left|x - a\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos\varphi\right|$$

بنابر فرض مسأله، $\left|x^{۲} - \frac{a^{۲}}{۲}\sin^{۲}\varphi\right| = \left|x^{۲} - \frac{a^{۲}}{۲}\cos^{۲}\varphi\right|$، که از آن‌جا، یا $\tan^{۲}\varphi = ۱$،

که ناممکن است، و یا $x^{۲} = \frac{a^{۲}}{۴}$.

جواب : $\frac{a}{۲}$.

۳۱۳. گزینهٔ (ب) درست است.

باید حالتی را درنظر بگیریم که نقطه‌ها دوبه‌دو بیشترین فاصلهٔ ممکن را از هم داشته باشند. نقطه‌های اوّل و دوم، $P_۱$ و $P_۲$، آن‌گاه بیشترین فاصله را دارند که دو سر یک

قطر از مربع باشند، که در این حالت فاصلهٔ آنها $\sqrt{۲}$ است. نقطهٔ سوم، $P_۳$ برای آنکه بیشترین فاصله را هم از $P_۱$ و هم از $P_۲$ داشته باشد، باید در یکی از دو رأس دیگر مربع واقع باشد. نقطهٔ چهارم، $P_۴$، نیز در رأس دیگر مربع واقع می‌شود. نقطهٔ پنجم، $P_۵$، برای آنکه از هر یک از چهار نقطهٔ دیگر بیشترین فاصلهٔ ممکن را داشته باشد، باید در مرکز مربع باشد. در این حالت، فاصلهٔ $P_۵$ از هریک از چهار نقطهٔ دیگر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

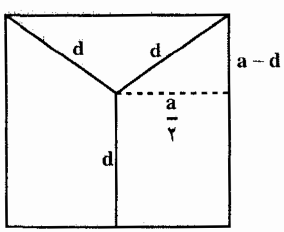
در هر انتخاب دیگر نقطه‌ها، کمترین فاصلهٔ ممکن بین یک جفت از آنها، کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۳۱۴. گزینهٔ (الف) درست است.

ضلع مربع S، قطر آن $S\sqrt{۲}$ و مساحت آن $S^۲$ است. ارتفاع مثلث h، قاعدهٔ آن $S\sqrt{۲}$ و مساحت آن $\frac{۱}{۲}(S\sqrt{۲})h$ است. پس:

$$\frac{۱}{۲}(S\sqrt{۲})h = S^۲ \ , \ \therefore h = S\sqrt{۲}$$

۳۱۵. گزینهٔ (ب) درست است.



$$(\frac{a}{۲})^۲ + (a-d)^۲ = d^۲ \ ; d = \frac{۵a}{۸}$$

۳۱۶. راه اول. با فرض $AB = k$ و $AA' = x$، داریم:

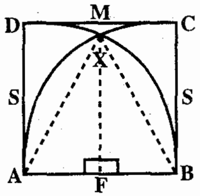
$$AB - AA' = A'B = k - x$$

$$A'B'C'D' \text{ مربع } S = A'B'^۲ = x^۲ + (k-x)^۲, S' = ۲x - ۲(k-x) \ , \ S' = ۰$$

$$\Rightarrow ۴x - ۲k = ۰ \Rightarrow x = \frac{k}{۲} \Rightarrow AA' = \frac{۱}{۲}AB$$

راه دوم. مساحت مربع $A'B'C'D'$ وقتی کمترین مقدار ممکن است که مساحت مثلثهای کناری ماکسیمم باشد و مساحت این مثلثها وقتی ماکزیمم است که قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشند، یعنی $A'B = \frac{AB}{۲}$ ؛ یا به عبارت دیگر $AA' = \frac{AB}{۲}$ باشد.

۳۱۷. گزینهٔ (هـ) درست است.



کمانهای ربع دایرهٔ AXC و BXD به شعاعهای S، یکدیگر را در X قطع می‌کنند. بنابراین مثلث ABX متساوی‌الاضلاع است. خطی که از X موازی با AD رسم می‌شود، ضلعهای AB و DC را بترتیب در نقطه‌های F و M با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. فاصلهٔ از X تا CD عبارت است از :

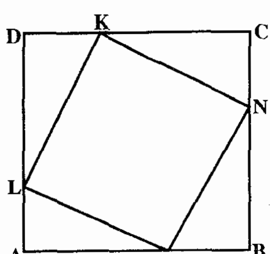
$$MX = S - MF = S - \frac{۱}{۲} S\sqrt{۳}$$

زیرا XF ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABX به ضلع S است و طول آن $\frac{S\sqrt{۳}}{۲}$ است، در نتیجه $MX = S\frac{(۲-\sqrt{۳})}{۲}$.

۲.۵.۳.۲. نسبت پاره‌خطها

۳۱۸. اگر ضلع مربع ABCD را a و AM را مساوی x فرض کنیم، داریم : $AL = MB = a - x$ و از آن‌جا :

$$S_{KLMN} = LM^{۲} = AL^{۲} + AM^{۲} = (a-x)^{۲} + x^{۲}$$



و در نتیجه با توجه به فرض مسأله داریم :

$$\frac{(a-x)^{۲} + x^{۲}}{a^{۲}} = \frac{۲۵}{۴۹}$$

با حل این معادله مقدار x به‌دست می‌آید.

جواب. ضلع مربع به نسبت ۳ و ۴ تقسیم می‌شود.

۳۱۹. گزینهٔ (ج) درست است.

فرض کنید s، ضلع مربع باشد و h ارتفاع مثلث، آن‌گاه :

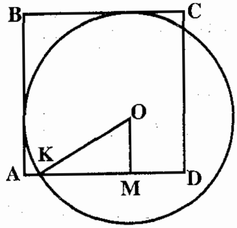
$$\frac{۱}{۲} h \cdot ۲s = ۲s^{۲} \text{ و } h = s$$

$$\therefore \frac{h}{s} = ۱$$

۲ . ۳ . ۶. شعاع دایره

۲ . ۳ . ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

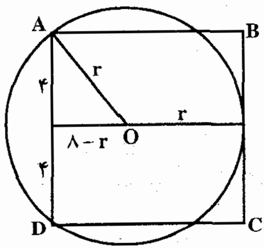
۳۲۰. ۱۷cm . قضیهٔ فیثاغورس را در مورد مثلث OKM به‌کار بگیرید.



۳۲۱. گزینهٔ (ج) درست است.

$$r^{۲} = ۴^{۲} + (۸ - r)^{۲}$$

$$۱۶r = ۸۰ \Rightarrow r = ۵$$



۳۲۲. $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$.

۳۲۳. گزینهٔ (ج) درست است.

مربع $S = (۱/۵)^{۲} = ۲/۲۵cm^{۲}$

دایره $S_{۱} = \pi R^{۲} = \pi(۰/۷)^{۲} = ۳/۱۴ \times ۰/۴۹ = ۱/۵۳ < ۲/۲۵$

دایره $S_{۲} = \pi(۰/۸)^{۲} = ۳/۱۴ \times ۰/۶۴ = ۲/۰۰۹ < ۲/۲۵$

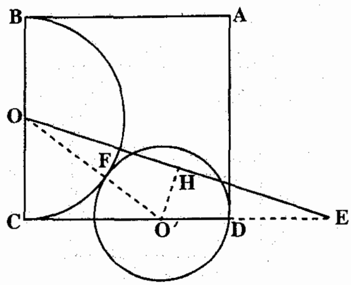
دایره $S_{۳} = \pi(۰/۹)^{۲} = ۳/۱۴ \times ۰/۸۱ = ۲/۵۴ > ۲/۲۵$

۳۲۴. مثلث OMC به ضلعهای $\frac{a}{۲}$، $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{a\sqrt{۵}}{۲}$ است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث برابر است با :

$$R = \frac{a.b.c}{۴S} = \frac{\frac{a}{۲}.\frac{a\sqrt{۲}}{۲}.\frac{a\sqrt{۵}}{۲}}{۴\left(\frac{۱}{۲}.\frac{a}{۲}.\frac{a\sqrt{۲}}{۲}.\sin ۱۳۵^{\circ}\right)} = \frac{\frac{a^{۳}\sqrt{۱۰}}{۸}}{\frac{a^{۲}\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{a\sqrt{۱۰}}{۴}$$

۳۲۵. CD را از طرف D به اندازهٔ $\frac{a}{۲}$ تا نقطهٔ E رسم می‌کنیم تا خط OE را کشیده و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم، تا CDرا در نقطهٔ O' قطع کند. اگر از O' به O وصل کنیم، $OE = OF$ و در نتیجه $OO' = FO'$ می‌شود، یعنی دایرهٔ مزبور بر خط AD و دایرهٔ BC مماس می‌باشد، پس می‌توان OE را به دست آورد : $OE = \frac{a}{۲}\sqrt{۱۰}$.

از تشابه دو مثلث OCE و $O'HE$ رابطهٔ $\frac{HE}{CE} = \frac{O'E}{OE}$ به دست می‌آید و از آن‌جا $O'E = \frac{۵}{۴}a$ و بعد $O'O = \frac{a}{۳}$ به دست می‌آید.



۳۲۶. $\frac{۳a}{۲(۵+\sqrt{۱۳})}$.

۷.۳.۲. محیط

۱.۷.۳.۲ . اندازهٔ محیط

۳۲۷. گزینهٔ (هـ) درست است.

فرض کنید s طول ضلع مربع I و S ، طول ضلع مربع II باشد.

$$\text{مساحت I} = s^۲ \ ،\ \text{مساحت II} = S^۲ \quad ; \quad S^۲ = ۲s^۲$$

$$\therefore S = s\sqrt{۲}$$

امّا :

$$s = \frac{d}{\sqrt{۲}} = \frac{a+b}{\sqrt{۲}} \quad , \quad \therefore S = \left[\frac{a+b}{\sqrt{۲}}\right]\sqrt{۲} = a+b \quad ;$$

$$\therefore \text{محیط II} = ۴S = ۴(a+b)$$

۲.۷.۳.۲ . نسبت محیطها

۳۲۸. شعاع دایره را R ، ضلع مربع را $a_۴$ و ضلع مثلث متساوی الاضلاع را $a_۳$ می‌نامیم، داریم :

$$\pi R^۲ = a_۴^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} a_۳^۲$$

$$\Rightarrow a_۴ = R\sqrt{\pi} \quad , \quad a_۳ = \frac{۲R\sqrt{\pi}}{\sqrt[۴]{۳}}$$

جواب : $\sqrt{\pi} : ۲ : \sqrt[۴]{۲۷}$

۸.۳.۲. مساحت

۱.۸.۳.۲ . اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۳.۲.اندازهٔ مساحت مربع

۳۲۹. مساحت مربع به ضلع a برابر $a^۲$ است، بنابراین مساحت مربع خواسته شده برابر $۸^۲ = ۶۴cm^۲$ است.

۳۳۰. اندازهٔ قطر مربع به ضلع a برابر $a\sqrt{۲}$ است ؛ پس :

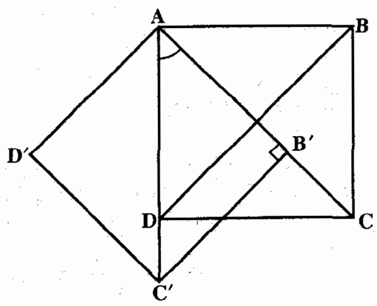
$$a\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۸ \Rightarrow S_{\text{مربع}} = ۶۴$$

۳۳۱. ضلع مربع خواسته شده ۱۹= ۱۲+۴+۳ و مساحت آن ۳۶۱ = $۱۹^۲$ است.

۳۳۲. گزینهٔ (ب) درست است. هر ذوزنقهٔ کناری و یک مثلث کوچک، معادل مربع وسطی هستند.

۳۳۳. شکل حاصل مربع است. برای تعیین مساحت آن، اندازهٔ ضلع را برحسب a ، m و n محاسبه کنید. با توجه به این که $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ و $AB = a$ است.

۳۳۴. $a^۲(\sqrt{۲}-۱)-۱۱۵$.



۲.۱.۸.۳.۲ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۳۳۵. مساحت مثلث ADG برابر است با :

الف. ۲۵ ب.۳۶ پ. ۹ ت. ۹ ث. ۴۹

۳۳۶. ضلع مربع را a و ضلع مثلث را b فرض می‌کنیم، داریم :

$$a^{۲}=۸۱ \Rightarrow a=۹ \quad , \quad \text{محیط مربع} = ۳۶ = \text{محیط مثلث} = ۳b$$

$$\Rightarrow b=۱۲ \ \text{اندازهٔ ضلع مثلث} \Rightarrow \text{مثلث}\ S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=۳۶\sqrt{۳}$$

۳۳۷. در مربع به ضلع a اندازهٔ قطر مربع $d=a\sqrt{۲}$ است. در مثلث ABD داریم :

$$EF=\frac{d}{۲}=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

در مثلث متساوی‌الساقین AOE داریم :

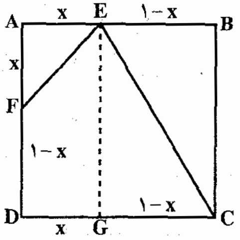
$$AO=OE=\frac{a\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow OC=d-AO=\frac{۳a\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{مثلث مورد نظر}\ S=\frac{۱}{۲}EF.OC=\frac{۳}{۸}a^{۲}$$

۳۳۸. $\frac{a^{۲}\,۲\sqrt{۳}-۳}{۸}$ (به‌طور کلی، دو مثلث ممکن است، اما یکی از آنها، دو رأسش روی امتدادهای قطرها واقع است.)

۳۳۹. گزینهٔ (د) درست است.

طول مشترک AE و AF را x می‌گیریم. مطابق شکل :



$$\text{مساحت}\ (EGC)=\frac{۱}{۲}(۱-x)(۱)$$

$$\text{مساحت}\ (DFEG)=x\left[\frac{(۱-x)+۱}{۲}\right]=\frac{۱}{۲}x(۲-x)$$

$$\therefore\ \text{مساحت}\ (CDFE)=\frac{۱}{۲}(۱+x-x^{۲})=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۵}{۴}-(x^{۲}-x+\frac{۱}{۴})\right]=\frac{۵}{۸}-\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲})^{۲}$$

مقدار ماکسیمم این عبارت $\frac{۵}{۸}$ است.

۳۴۱. $\frac{۷۵}{۴}cm^۲$. فرض کنید PKME ذوزنقهٔ محاطی، نقطهٔ E روی BC، و نقطهٔ M روی CD واقع باشد. مثلثهای PAK و ECM متشابه هستند. با درنظر گرفتن این حقیقت، عبارت $CM = ۲x$ و $CE = ۳x$ را منظور کنید.

۳۴۲. $KD = MD = ۵cm$ و $S = ۳۲cm^۲$.

۳۴۳. این نتیجه را می‌توان از نابرابری زیر نتیجه گرفت:

$$۵ \geq S_۱ + ... + S_۹ - S_{۱۲} - S_{۲۳} - ... - S_{۸۹}$$

که در آن S_i مساحت iامین چندضلعی و S_{ij}، مساحت بخش مشترک چندضلعی iام با چندضلعی jام است.

۳۴۴. از مجموع مساحت ۳ مربع، مساحت مثلث را کم می‌کنیم.

$$\text{مجموع مساحت مربعها} = ۲۵ + ۱۶ + ۹ = ۵۰$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}(۵ + ۴ + ۳) \times ۵ = ۳۰$$

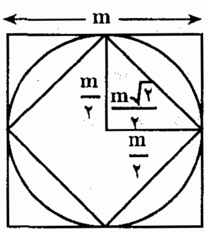
$$S = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰ \text{ موردنظر}$$

۳۴۵. داریم:

$$a^۲ = ۳۶ \quad \therefore a = ۶ = ۲R \Rightarrow R = ۳ \Rightarrow S = \pi R^۲$$

$$S = ۳/۱۴۱۶ \times ۹ = ۲۸/۲۷۲۵cm^۲ \# ۲۸/۲۷cm^۲$$

۳۴۶. گزینهٔ (الف) درست است.



طول ضلع دو مربع $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ برابر مربع قبلی است: $S_۱ = m$ و $S_k = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)S_{k-۱}$ (شکل را ملاحظه کنید). شعاع هر دایره، $\frac{۱}{۲}$ طول ضلع مربع محیطی آن است.

$$r_۱ = \frac{۱}{۲}S_۱ = \frac{۱}{۲}m \quad , \quad r_۲ = \frac{۱}{۲}S_۲ = \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{\sqrt{۲}}m \quad , \quad r_k = \frac{۱}{۲}S_k = \frac{m}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{k-۱}$$

مساحت دایرهٔ kام $A_k = \pi(\frac{m}{۲})^۲(\frac{۱}{۲})^{k-۱}$ و مجموع مورد نظر

$$S_n = A_۱ + A_۲ + ... + A_n$$

$$= (\frac{m}{۲})^۲\pi + \frac{۱}{۲}(\frac{m}{۲})^۲\pi + \frac{۱}{۴}(\frac{m}{۲})^۲\pi + ... + \frac{۱}{۲^{n-۱}}(\frac{m}{۲})^۲\pi$$

$$= \frac{m^۲\pi}{۴}\left[۱ + \frac{۱}{۲} + ... + \frac{۱}{۲^{n-۱}}\right] = \frac{m^۲\pi}{۴} \times ۲\left[۱ - (\frac{۱}{۲})^n\right]$$

اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند، $(\frac{۱}{۲})^n$ به سمت صفر، و بنابراین مجموعهٔ موردنظر به سمت $\frac{m\pi^۲}{۲}$ میل می‌کند.

۳۴۷. شعاع دایره، قطر مربع است. ضلع مربع را a فرض کنید.

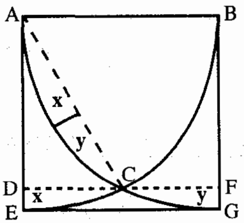
۳۴۸. گزینهٔ (ب) درست است.

یک ضلع مربع اصلی را s می‌نامیم. آن‌گاه شعاع دایرهٔ محاطی r، برابر $\frac{s}{۲}$ است. ضلع مربع دوم (محاط در دایره)، برابر $r\sqrt{۲} = \frac{s}{\sqrt{۲}}$ است. بنابراین مساحت مربع دوم $\frac{s^۲}{۲}$ است، در حالی که مساحت مربع اصلی $s^۲$ می‌باشد. بنابراین (ب) انتخاب صحیح است.

۳۴۹. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۵۰. $\frac{x^۲}{۲}$.

۳۵۱. مساحت قسمت وسط شکل.

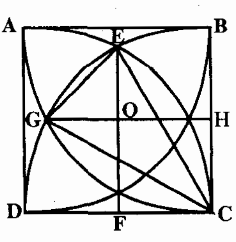


ABC قسمتی است از شکل موردنظر، که پاره‌خطهای AB و AC و کمان BC آن را مشخص کرده‌اند. مساحت این قسمت یک ششم دایره است، که بایستی به آن مساحتهای x و y و همچنین باریکهٔ پایین شکل را بیفزاییم.

مجموع مساحتهای x و y (پایینی) و باریکهٔ مزبور مساوی با مساحت مستطیل DFGE است، که برابر $۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد. و برای محاسبهٔ مساحت مطلوب مسأله باید یک ششم دایره را به آن افزوده تا پاسخ تقریبی معما ۰/۶۵ واحد به دست آید.

$$\frac{\pi}{۶}+۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳۵۲. چه‌قدر مساحت دارد؟



شکل مسأله را کامل می‌کنیم. در این شکل، اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ CGH را از یک ششم مساحت دایره کم کنیم، مساحت BGH به دست می‌آید، که بعد از محاسبه خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۶}-\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

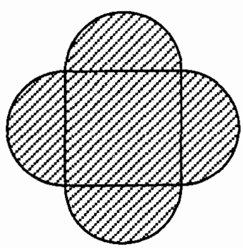
با توجه به شکل نیز معلوم می‌شود، که یک چهارم سطح موردنظر را اگر با یک چهارم مساحت دایره جمع کنیم، مجموع مساحت مربع OFCH ، و دو برابر مساحت BHG به دست خواهد آمد. به جای مساحتهای معلوم مقدار قرار می‌دهیم :

$$2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}$$

$$S=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1$$

و از آن‌جا S محاسبه می‌شود، که مقدار تقریبی آن ۰/۳۱ است.

۳۵۳. $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$.



۳۵۴. داریم :

$$S_{\text{قطعه}}=S_{\text{قطاع } 90^\circ}-S_{\overset{\Delta}{DHO}}$$

$$S_{\text{قطعه}}=\frac{\pi a^2}{4}\cdot\frac{90}{360}-\frac{a^2}{8}$$

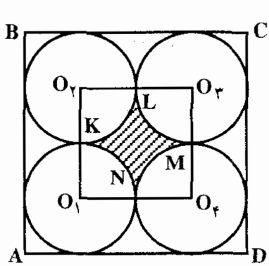
$$S_{\text{قطعه}}=\frac{\pi a^2}{16}-\frac{a^2}{8}=\frac{a^2(\pi-2)}{16}$$

$$S_{\text{شکل}}=8\times S_{\text{قطعه}}$$

$$S_{\text{شکل}}=8\times\frac{a^2(\pi-2)}{16}=\frac{a^2(\pi-2)}{2}$$

۳۵۵. مساحت موردنظر برابر است با تفاضل مساحت مربع $O_1O_2O_3O_4$ و مساحت یک دایره.

جواب : $S=\frac{a^2(4-\pi)}{16}$.



.۳۵۶ $\frac{a^۲}{۸}(\sqrt{۲}-۱)\left[(۲\sqrt{۲}-۱)\pi-۴\right]$

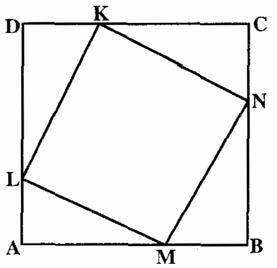
۲.۸.۳.۲. نسبت مساحتها

.۳۵۷ ۹ برابر.

.۳۵۸ ضلع مربع بزرگتر را a می‌نامیم. اندازهٔ ضلع مربع کوچکتر $a'=\sqrt{\frac{a^۲}{۴}+\frac{a^۲}{۴}}=\frac{a}{\sqrt{۲}}$ است، بنابراین $S=a^۲$ و $S'=\frac{a^۲}{۲}$ است. بنابراین:

$$\frac{S'}{S}=\frac{\frac{a^۲}{۲}}{a^۲}=\frac{۱}{۲}$$

.۳۵۹ با توجه به شکل داریم:



$$AL=\frac{۱}{۲}ML\ ,\quad AM=\frac{\sqrt{۳}}{۳}ML$$

یعنی:

$$AB=AM+MB=AM+AL=\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۳})ML$$

و در نتیجه اگر مساحت مربع LMNK را S' و مساحت مربع ABCD را S فرض کنیم، داریم:

$$\frac{S'}{S}=\frac{۴}{(۱+\sqrt{۳})^۲}=۲(۲-\sqrt{۳})\#۰/۵۴$$

.۳۶۰ به سهولت دیده می‌شود که چهارضلعی $A'B'C'D'$ مربع است و $A'B'=B'B$ و $MB'=\frac{۱}{۲}AA'$. واضح است که مثلثهای MBC، AQB، ADP و DCN برابرند.

پس:

$$S_{ABCD}=۴\times S_{MBC}-۴S_{MBB'}+S_{A'B'C'D'}$$

واضح است که مساحت مثلث MBB' برابر $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع $A'B'C'D'$ است،

پس:

$$S_{ABCD} = ۴ \times S_{MBC}$$

همچنین بدیهی است که:

$$S_{MBC} = ۵S_{MBB'}$$

پس: $$S_{ABCD} = ۴ \times ۵S_{MBB'} = ۵S_{A'B'C'D'}$$

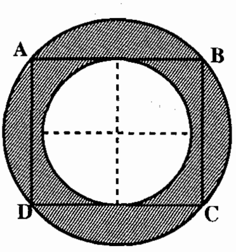
۳۶۱. گزینهٔ (الف) درست است.

فرض کنید s ، r و p بترتیب ضلع مربع، شعاع دایره و محیط مشترک آنها باشد. بنابراین، $p = ۴s = ۲\pi r$ ، و در نتیجه $s = \frac{p}{۴}$ و $r = \frac{p}{۲\pi}$. حال اگر $A_{\circ}$ و A_S بترتیب مساحتهای دایره و مربع را نشان دهند:

$$\frac{A_{\circ}}{A_S} = \frac{\pi r^۲}{s^۲} = \frac{\pi(\frac{p}{۲\pi})^۲}{(\frac{p}{۴})^۲} = \frac{۴}{\pi}$$

۳.۲ .۸ .۳.رابطهٔ بین مساحتها

۳۶۲. ضلع مربع را a می‌نامیم. شعاع دایرهٔ محیطی این مربع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن $\frac{a}{۲}$ است. بنابراین:



$$S_{\text{دایرهٔ محیطی}} = \pi(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{\pi a^۲}{۲}$$

$$S_{\text{مربع محاطی}} = \pi(\frac{a}{۲})^۲ = \frac{\pi a^۲}{۴}$$

$$\frac{S_{\text{مربع محاطی}}}{S_{\text{مربع محیطی}}} = \frac{\pi a^۲}{۴} : \frac{\pi a^۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۳۶۳. اگر ضلع مربع را برابر a بگیریم، شعاع دایره محاطی $r=\frac{a}{۲}$، و دایرهٔ محیطی $R=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ می‌شود. از آن‌جا اگر مساحت دایرهٔ محاطی را s و مساحت دایرهٔ محیطی را S بگیریم، داریم:

$$s=\pi r^{۲}=\frac{۱}{۴}\pi a^{۲} \quad , \quad S=\pi R^{۲}=\frac{۱}{۲}\pi a^{۲}$$

و بنابراین: $S=۲s$.

۳۶۴. ضلع مربع را a و شعاع دایره را R می‌نامیم. در این صورت محیط مربع ۴a و محیط دایره ۲πR است. بنابراین:

$$۴a=۲۰\Rightarrow a=۵\Rightarrow S_{\text{مربع}}=۲۵cm^{۲}$$

$$۲\pi R=۲۰\Rightarrow R=\frac{۱۰}{\pi}\Rightarrow S_{\text{دایره}}=\pi R^{۲}=\pi(\frac{۱۰}{\pi})^{۲}=\frac{۱۰۰}{\pi}\# ۳۱/۸cm^{۲}$$

۳۶۵. گزینهٔ (ب) درست است.

بین شکلهای با محیطهای برابر، دایره بزرگترین مساحت را دارد. یا:

فرض کنید P پیرامون مشترک و $A_۱$ و $A_۲$ بترتیب مساحتهای دایره و مربع باشند؛ آن‌گاه:

$$P=۲\pi r \ , \ r=\frac{P}{۲\pi} \ , \ A_۱=\frac{P^{۲}}{۴\pi} \quad ;$$

$$P=۴S \ , \ S=\frac{P}{۴} \ , \ A_۲=\frac{P^{۲}}{۱۶} \quad ;$$

$$۴\pi<۱۶ \quad , \quad \therefore A_۱>A_۲$$

۹.۳.۲. رابطه‌های متری

۱.۹.۳.۲ . رابطه‌های متری در مربع

۱.۱.۹.۳.۲ . رابطه‌های متری در مربع (برابریها)

۳۶۶. دو مثلث AEB و EDM متشابه‌اند؛ همچنین دو مثلث AED و BEF نیز متشابه‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{DE}{EB}=\frac{ME}{EA} \quad (۱)$$

$$\frac{EB}{DE}=\frac{EF}{EA} \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow ۱=\frac{ME.EF}{EA^{۲}}\Rightarrow EA^{۲}=EM.EF$$

۳۶۷. قطرهای مربع را رسم کنید و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، ثابت کنید که مجموع موردنظر مساوی واحد است.

۳۶۸. راهنمایی. فرض کنید m ضلع یک مربع محاط در داخل یک مثلث قائم‌الزاویه است، که یک زاویهٔ آن بر زاویهٔ قائمهٔ مثلث منطبق باشد. نشان دهید که m ، نصف میانگین همساز ساقهای مثلث است.

۳۷۱. ثابت کنید، دو وتر موازی از یک مربع، تنها وقتی با هم برابرند که یا نسبت به مرکز مربع قرینهٔ یکدیگر باشند و یا وترهایی باشند که دو ضلع روبه‌رو را در مربع به هم وصل کرده‌اند.

۲.۳.۹.۱.۲. رابطه‌های متری در مربع (نابرابریها)

۳۷۳. چون ضلعهای این مستطیلها، طولی بیشتر از واحد ندارند، عددی که از نسبت ضلع کوچکتر به ضلع بزرگتر به دست می‌آید، از عدد مساحت آن مستطیل کمتر نیست؛ درضمن، مجموع مساحتهای مستطیلها برابر واحد است.

۳۷۴. ثابت می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}(OA+OC)\geq OB+OD$$

اگر دوطرف را مجذور کنیم، به دست می‌آید:

$$۲(OA^{۲}+OC^{۲}+۲OA.OC)\geq OB^{۲}+OD^{۲}+۲OB.OD$$

که با توجه به برابری معلوم:

$$OA^{۲}+OC^{۲}=OB^{۲}+OD^{۲}$$

به این صورت قابل تبدیل است.

$$OB^{۲}+OD^{۲}+۴OA.DC\geq ۲OB.OD$$

که درستی آن روشن است. زیرا مجموع مجذورهای دو عدد کمتر از دو برابر حاصلضرب آنها نیست. اگر O را روی A بگیریم، کمترین مقدار موردنظر، یعنی $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ به دست می‌آید.

۳۷۵. راهنمایی. مرکز مربع داده شده را O می‌نامیم. پاره‌خطهای راست KL، LM، MN و NK را روی قطرهای AC و BD تصویر می‌کنیم. در این صورت تصویرها بر اجتماع تصویرهای پاره‌خطهای راست OK ، OL، OM و ON بر همین قطرها منطبق می‌شوند. این باقی می‌ماند که از این قضیه استفاده کنیم:
برای هر نقطهٔ X واقع بر محیط مربع، مجموع طولهای تصویرهای OX بر دو قطر، برابر $\frac{۱}{۲}AC$ است. از آن‌جا، مجموع تصویرهای چهار پاره‌خط راست ما، از ۲AC کمتر نمی‌شود و این، به معنای آن است که این حکم، برای خود پاره‌خطهای راست هم درست است.

۲.۹.۳.۲ .رابطه‌های متری در مربع و دایره

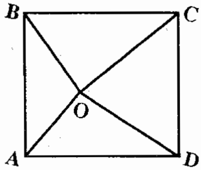
۳۷۷. قضیهٔ بطلمیوس را برای چهارضلعیهای PABC و PDAB به‌کار ببرید و نتیجه بگیرید :

$PA + PC = \sqrt{۲}PB \;,\; PB + PD = PA\sqrt{۲}$

۱۰.۳.۲. ثابت کنید چهارضلعی مربع است

۳۷۸. چون ضلعهای مربع با هم برابرند، پس $MA = BN = CP = DQ$ و $MB = NC = PD = QA$. بنابراین چهار مثلث کناری همنهشتند ؛ یعنی : $MN = NP = PQ = QM$ و به دلیل برابری زاویه‌های متناظر، زاویه‌های این چهارضلعی قائمه‌اند ؛ پس MNPQ مربع است.

۳۸۰. چون داریم :



$$OA^۲ + OB^۲ + OC^۲ + OD^۲ = \frac{۱}{۲}(OA^۲ + OB^۲) + \frac{۱}{۲}(OB^۲ + OC^۲) +$$
$$\frac{۱}{۲}(OC^۲ + OD^۲) + \frac{۱}{۲}(OD^۲ + OA^۲) \geq OA.OB + OB.OC + OC.OD +$$
$$OD.OA \geq ۲S_{AOB} + ۲S_{BOC} + ۲S_{COD} + ۲S_{DOA} = ۲S$$

و درضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم :

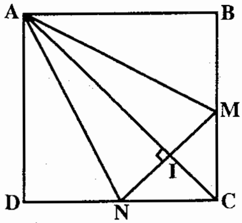
$$OA = OB = OC = OD \;,\; A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A$$

بنابراین، قطرهای AC و BD از چهارضلعی داده شدهٔ ABCD برهم عمودند و در نقطهٔ O یکدیگر را نصف می‌کنند، یعنی ABCD ، مربعی است به مرکز O.

۱۱.۳.۲ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۱۱.۳.۲ .سایر مسأله‌های مربوط به مربع

۳۸۱. متمم هریک از این شکلهای داخل مربع را درنظر می‌گیریم. مجموع مساحت هر شکل با مساحت متمم آن ۱ می‌شود ؛ پس مجموع مساحتهای این شکلها با مساحتهای متممهای آنها برابر با ۱۳۷۳ می‌شود ؛ پس طبق فرض، مجموع مساحتهای این متممها از ۱ کمتر می‌شود، در نتیجه یک نقطه در داخل مربع وجود دارد که متعلق به هیچ یک از این متممها نیست، بنابراین، این نقطه در همهٔ شکلهای اوّلیه وجود دارد.



۳۸۴. مثلث متساوی‌الاضلاع AMN را که M و N بترتیب روی ضلعهای BC و CD واقعند، درنظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد AC با NM را I می‌نامیم. AI ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع AMN است، زیرا به دلیل برابری دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM و ADN، $D\hat{A}N = M\hat{A}B$ است. و چون قطر AC نیمساز زاویهٔ BAD است، پس AC نیمساز زاویهٔ MAN، و در نتیجه عمودمنصف MN، یعنی ارتفاع این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع AMN را x فرض می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین CMN، $CI = IM = IN = \frac{x}{۲}$ است از طرفی $AI = \frac{x\sqrt{۳}}{۲}$ است.

در نتیجه با توجه به رابطه‌های $AI + IC = AC$ و $AC = a\sqrt{۲}$، داریم:

$$\frac{x\sqrt{۳}}{۲} + \frac{x}{۲} = a\sqrt{۲} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}\right)x = a\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲\sqrt{۲}a}{\sqrt{۳}+۱} = \sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)a$$

$$\Rightarrow AI = h = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}-۱)a \times \sqrt{۳}}{۲} = \frac{a}{۲}(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶})$$

۳۸۵. $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$.

۳۸۸. از نقطه‌ای که گرگ ایستاده است، دو خط راست، موازی با قطرهای مربع رسم می‌کنیم. برای این که گرگ نتواند فرار کند، سگها باید در نقطه‌های برخورد این خطهای راست با ضلعها، مستقر شوند. بسادگی دیده می‌شود که در این حالت، کافی است سرعت سگها از $\sqrt{۲}$ برابر سرعت گرگ کمتر نباشد.

۳۸۹. $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را اندازهٔ ضلعهای مربعهای کوچک؛ n را طول ضلع مربع بزرگ و S را مجموع طولهای حصارهای درونی فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$۴\sum a_i = ۲S + ۴n \;,\; \sum a_i^۲ = n^۲$$

از برابری دوم نتیجه می‌شود که $\sum a_i$ و n یا هر دو زوج و یا هر دو فردند؛ یعنی $۲\sum a_i$ و $۲n$ در تقسیم بر ۴ به یک باقی‌مانده می‌رسند و این، به معنای آن است که

$$S = ۲\sum a_i - ۲n$$

بر ۴ بخش‌پذیر و بنابراین، مجموع طولهای همهٔ حصارها، یعنی $S + ۴n$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۳۹۲. بله، می‌تواند. نقطه‌های P و Q را در درون مربع ABCD طوری انتخاب می‌کنیم که مثلثهای ABP و CDQ ، متساوی‌الساقین باشند و در آنها، هرکدام از زاویه‌های P و Q برابر ۱۲۰ درجه شود. در این صورت، دستگاه جاده‌های AP، BP ، PQ ، CQ و DQ، به تقریب، طولی برابر ۲۷ کیلومتر و ۳۲۱ متر خواهد داشت.

۳۹۳. $10(n^2-1)$.

راهنمایی. پاره‌خط راستی از این دستگاه جاده‌ها را درنظر بگیرید، که از شهری آغاز یا به شهری ختم نشده باشد. فرض می‌کنیم، به یک سمت آن،a پاره‌خط راست و به سمت دیگر آن، b ، پاره خط راست، متصل باشد ؛ درضمن $a \geq b$. اگر آن را به سمت اوّل حرکت دهیم، به طول دستگاه جاده‌ها، افزوده نمی‌شود. اگر حرکت به جایی ختم شود که روی پاره‌خط راست دیگری قرار گیرد، آن وقت طول جاده‌ها کمتر می‌شود ؛ و اگر به پاره‌خط راستی با طول بزرگتر تبدیل شود، می‌توان باز هم، به سمتی حرکت کرد (البته به شرطی که، از هیچ طرفی به شهر ختم نشده باشد). اگر به همین ترتیب عمل کنیم، به جایی می‌رسیم که تبدیل یافتهٔ جاده‌ها، از حالت نخستین خود، طول بیشتری ندارد، ولی در ضمن، همهٔ جاده‌های آن، از شهری آغاز و به شهری ختم می‌شوند.

۳۹۴. ۱۰۱ خط شکسته.

۳۹۶. ۲۲ خانه.

۳۹۷. ۱۹۸. برای هر خانهٔ رنگی، خطی را درنظر می‌گیریم که در امتداد آن، این خانه، تنها خانهٔ رنگی است. همهٔ ستونها، در بین این خطها نیستند، زیرا در غیر این صورت، تعداد خانه‌های رنگی از ۱۰۰ تجاوز نمی‌کند. به همین ترتیب، همهٔ سطرها هم، جزو سطرهای خط‌دار نیستند. بنابراین، تعداد خطهایی که رسم کرده‌ایم، از ۱۹۸ تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، اگر همهٔ خانه‌های یک سطر دلخواه و یک ستون دلخواه را، به جز خانه‌ای که در برخورد این سطر و این ستون است، رنگ کنیم، ۱۹۸ خانهٔ رنگی به دست می‌آید.

۳۹۸. مربع را به بخشها، طوری تقسیم می‌کنیم که شامل برخوردهای شکلهای داده شده باشند، در این صورت، اگر مساحت مربع را S بگیریم :

$$S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

که در آن، s_i به معنای مساحت iامین بخش است. چون هر بخش، دست کم q شکل را پوشانده است، بنابراین مجموع مساحتهای همهٔ شکلها از

$$qs_1 + qs_2 + \ldots + qs_n = qS$$

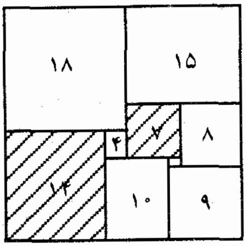
کمتر نیست. بنابراین، یکی از شکلها، مساحتی دارد که از

$$\frac{1}{n}qS = \frac{q}{n}$$

کمتر نیست (بنابر فرض $S=1$).

۴۰۰. ثابت کنید اگر چنین تقسیمی ممکن باشد، آن‌وقت باید تعداد زاویه‌های ۱۰ درجه از یک سوم تعداد کل زاویه‌ها بیشتر باشند.

۴۰۲. به ازای $n = ۵$ و به ازای $n \geq ۷$. روی شکل (الف) تقسیم به تعدادی فرد و دلخواه (بیشتر از ۴) مستطیل، برای مثال برای $n = ۹$، داده شده است. روی شکل (ب) نیمهٔ چپ مربع، متناظر با شکل (الف) تقسیم شده است، ولی تقسیم نیمهٔ راست آن، به چهار مستطیل تثبیت شده است.



۴۰۳. از مربعها مستطیل بسازید.

ابتدا مساحت ۹ مربع را یک‌به یک پیدا می‌کنیم :

$۱۸^۲ = ۳۲۴\ ,\ ۱۵^۲ = ۲۲۵\ ,\ ۱۴^۲ = ۱۹۶\ ,\ ۱۰^۲ = ۱۰۰\ ,\ ۹^۲ = ۸۱\ ,$

$۸^۲ = ۶۴\ ,\ ۷^۲ = ۴۹\ ,\ ۴^۲ = ۱۶\ ,\ ۱^۲ = ۱$

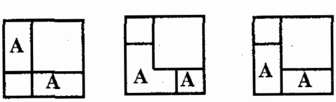
مساحت کل آنها (۱۰۵۶) را تجزیه می‌کنیم :

$۱۰۵۶ = ۳۳ \times ۳۲$

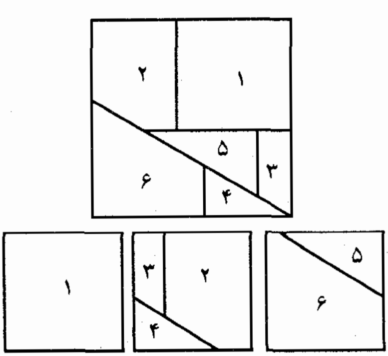
البته آن را به عاملهای ضرب دیگری هم می‌توان تجزیه کرد. ولی باید هیچکدام کمتر از ۱۸ سانتیمتر نباشند. اما تنها راه حل صحیح در شکل دیده می‌شود، و احتیاج به توضیح ندارد.

۴۰۴. خواهرها مدتی با هم بحث کردند. بالاخره تصمیم گرفتند که از تقسیم مساوی صرفنظر کنند و به این ترتیب مشکل خود را حل کردند که دو خواهر بزرگتر (که دوقلو بودند) هرکدام $\frac{۴}{۹}$ فرش را بردارند و خواهر کوچکتر، سومی، $\frac{۱}{۹}$ آن را.

برای این‌منظور هم سه راه حل پیدا کردند (شکل الف) : یکی مربع بزرگتر را برداشت، دومی مربعی به همان اندازه از دو قسمت A و A برداشت و سومی مربع کوچکتر را انتخاب کرد. ولی یک ریاضیدان ماهر، دخترهای غمگین را تسلی داد و گفت که می‌تواند فرش را به شش قسمت چنان

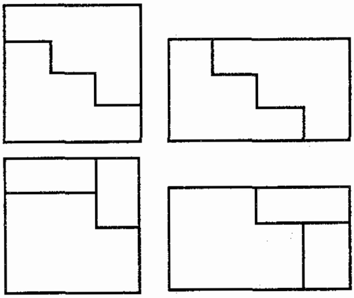


(الف)



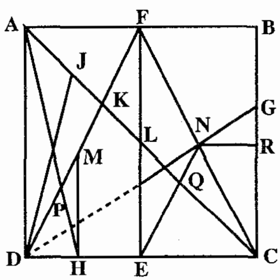
(ب)

تقسیم کند، که از آنها بتوان سه مربع مساوی درست کرد. راه‌حل این ریاضیدان در شکل (ب) مشخص شده است، در این شکل یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ۴ مساوی ۳۰ درجه است و ارتفاع ذوزنقهٔ ۶، برابر است با ضلع هریک از سه مربع کوچک فرش.


(ج)

یکی از خواهرها سهم خود را به صورت یک قطعهٔ کامل، ولی دو خواهر دیگر به صورت چند قطعه تحویل گرفتند. ولی آن که فرش یک تکه گرفته بود، خواست آن را به صورت مستطیلی درآورد که نسبت طول و عرض آن مثل ۹ :۱۶ باشد. این مشکل را هم ریاضیدان حل کرد و دو راه حل مختلف برای آن ارائه داد (شکل ج).

۴۰۵. در مربع (الف)، روش این تقسیم و در مربع (ب) مقدار صورت این کسرها داده شده است. اگر مربع ABCD را واحد بگیریم، به دست می‌آید:

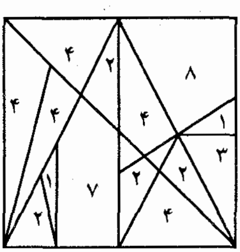


(الف)

مثلث AJD $=\frac{۴}{۴۸}$

مثلث PMH $=\frac{۱}{۴۸}$

چهارضلعی FBGN $=\frac{۸}{۴۸}$ ، و غیره.



(ب)

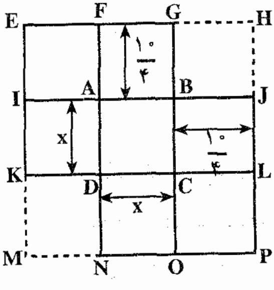
معمای جالبی خواهد بود که اگر بخواهیم قسمتهای این مربع را (بدون تغییر جای آنها) طوری گروه‌بندی کنند که:

۱. مربع به سه قسمت مساوی تقسیم شود، هر قسمت مساوی $\frac{۱۶}{۴۸}$ ؛

۲. مربع به شش قسمت مساوی و هر قسمت مساوی $\frac{۸}{۴۸}$ تقسیم شود؛

۳. مربع به سه قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای آنها سه عدد متوالی باشد، یعنی $\frac{۱۵}{۴۸}$ ، $\frac{۱۶}{۴۸}$ ، $\frac{۱۷}{۴۸}$ ؛

۴. مربع به نه قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای متناظر آنها عددهای طبیعی از ۱ تا ۸ و عدد ۱۲ باشد.



(الف)

۴۰۶. الف. با زبان جبر، این مسأله به وسیلهٔ معادلهٔ زیر، بیان می‌شود:

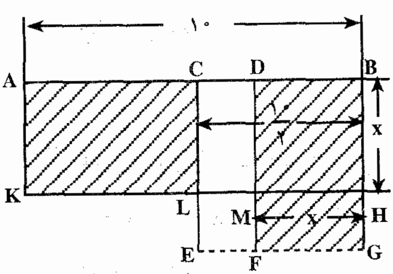
$$x^۲ + ۱۰x = ۳۹$$

خوارزمی مربع $ABCD = x^۲$ را می‌سازد (شکل الف)، و روی هریک از ضلعهای آن مستطیلی می‌سازد که ضلع دیگر آن مساوی $\frac{۱۰}{۴}$ باشد. در این صورت مساحت صلیب AFGBILCONDKJ مساوی $x^۲ + ۱۰x$، یعنی ۳۹ می‌شود. این صلیب را تا مربع EHPM به وسیلهٔ چهار مربع کوچک AFEJ ، BGHI، CLPO و DNMK، پر می‌کنیم؛ مجموع مساحتهای این چهار مربع مساوی $۴ \times (\frac{۱۰}{۴})^۲ = ۲۵$ می‌شود؛ به این ترتیب مساحت مربع EHPM مساوی ۲۵+۳۹ یعنی ۶۴ می‌شود.

از این‌جا بسادگی معلوم می‌شود که ضلع این مربع مساوی ۸ است، بنابراین:

$$AB = x = IJ - ۲BJ = ۸ - ۲ \times \frac{۱۰}{۴} = ۳$$

یعنی عدد مجهول، مساوی ۳ است.



(ب)

ب. با زبان جبری داریم: $x^۲ + ۲۱ = ۱۰x$

فرض کنید شکل ABHK (ب) مستطیلی به ضلعهای ۱۰ و x، و BDMH مربع $x^۲$ باشد. در این صورت مستطیل ADMK مساوی $۱۰x - x^۲ = ۲۱$ خواهد شد.

روی نصف پاره‌خط AB مربع CBGE را می‌سازیم. بنابراین پاره‌خط LM مساوی $\left(\frac{۱۰}{۲} - x\right)$ خواهد شد. محاسبه می‌کنیم:

$$LMFE = CBGE - CDML - DBGF = CBGE - CDML - ACLK$$

چون دو مستطیل ABGF و ACLK برابرند، می‌توان نوشت:

$$LMFE = CEGB - ADMK$$

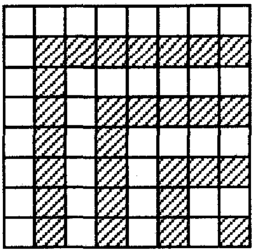
یا:

$$LMFE = (\frac{۱۰}{۲})^۲ - ۲۱ = ۴$$

از آن‌جا $LM^۲ = ۴$ و $LM = ۲$ می‌شود و بالاخره :

$$x = DB = \frac{۱۰}{۲} - ۲ = ۳$$

در حقیقت : $۳^۲ + ۲۱ = ۳ \times ۱۰$.



۴۰۷. ظاهراً در مکتب فیثاغوری، این مسأله را به طریق هندسی حل می‌کرده‌اند. در شکل، اثبات مسأله، بسادگی دیده می‌شود. ۱ را به صورت مربعی نشان می‌دهیم و بعد، عددهای فرد متوالی، به شکل ⅂ درمی‌آیند، و از روی شکل ⅂ دیده می‌شود که :

$$۱ + ۳ = ۴ = ۲^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ = ۹ = ۳^۲$$

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۶ = ۴^۲$$

حل این مسأله، با روش جبری هم، خیلی ساده است. عددهای فرد متوالی، با شروع از ۱، یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند :

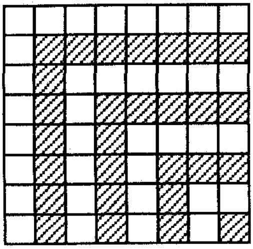
$$۱, ۳, ۵, ۷, \ldots, (۲n + ۱)$$

تعداد جمله‌های این تصاعد برابر است با $(n + ۱)$. مجموع همهٔ جمله‌های این تصاعد چنین می‌شود :

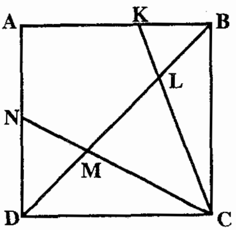
$$S = \frac{(۱ + ۲n + ۱)(n + ۱)}{۲} = (n + ۱)^۲$$

۴۰۸. فیثاغوریان، این مسأله را به طریق هندسی حل می‌کردند. اگر در شکل، (که یک مربع است)، بزرگترین علامت ⅂ را (که یک عدد فرد است) برداریم، باز هم یک مربع باقی می‌ماند، یعنی :

$$۲n + ۱ = (n + ۱)^۲ - n^۲$$



۲.۱۱.۳.۲ .سایر مسأله‌های مربوط به مربع و دایره



۴۱۰. ضلع مربع را برابر یک واحد می‌گیریم. داریم :

$$B\hat{K}C+D\hat{N}C=\frac{۳\pi}{۴}$$

زیرا اگر :

$$a=BK=\cot(B\hat{K}C)$$

$$b=DN=\cot(D\hat{N}C)$$

ولی $۲ab=(۱-b)(۱-a)$. از آن‌جا :

$$\tan(B\hat{K}C+D\hat{N}C)=\frac{a+b}{ab-۱}=-۱=\tan\frac{۳\pi}{۴}$$

یعنی :

$$B\hat{K}C+D\hat{N}C=\frac{۳\pi}{۴}$$

حال داریم :

$$B\hat{L}K=\frac{۳\pi}{۴}-B\hat{K}L=D\hat{N}C=B\hat{C}M=B\hat{A}M$$

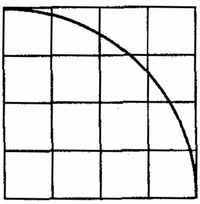
$$K\hat{L}M+K\hat{A}M=\pi$$

پس M، L ،K و A روی یک دایره هستند. همچنین L، M، N و A روی یک دایره هستند. بنابراین، N ، M ،L ،K و A روی یک دایره هستند.

۴۱۲. ثابت کنید $N\hat{C}H=K\hat{A}N$.

۴۱۳. مربع واحد را به ۲۵ مربع کوچکتر، هریک به ضلع برابر $\frac{۱}{۵}$، تقسیم می‌کنیم. بنابه اصل دیریکله، در یکی از این مربعها، دست‌کم ۳ نقطه قرار می‌گیرد، چون هریک از مربعهای کوچک را می‌توان با دایره‌ای به شعاع برابر $\frac{۱}{۷}$ پوشاند، حکم مسأله ثابت است.

۴۱۴. گزینهٔ (هـ) درست است.

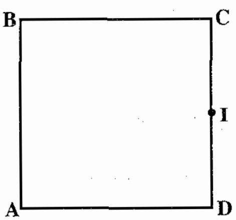


هیچ کدام از ۲۸ = ۸ + ۸ + ۶ + ۶ مربع حاشیه را قرص به تمامی نپوشانده است. همچنین در صفحهٔ شطرنجی ۶×۶ متشکل از مربعهای داخلی، چهار مربع گوشه، تماماً پوشیده نشده‌اند ؛ زیرا فاصلهٔ هرگوشهٔ صفحهٔ شطرنجی اخیر، تا مرکز صفحه $\frac{۳\sqrt{۲}D}{۸}=\frac{D}{۸}\times\sqrt{۳^۲+۳^۲}$ و شعاع قرص $\frac{D}{۲}$ است و $\frac{۱}{۲}<\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}$. تعداد

$۳۶ - ۴ = ۳۲$ مربع داخلی باقیمانده را قرص به تمامی می‌پوشاند، چرا که همهٔ آنها در دایره‌ای به شعاع $\frac{D}{۲} < \frac{\sqrt{۱۳}D}{۸} = \frac{D}{۸}\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}$ حول مرکز صفحه قرار دارند.

راه دیگر. مرکز صفحه، مبدأ دستگاه مختصات متعامد و محورها را در طول ضلعهای مربعهای صفحهٔ شطرنج و $\frac{D}{۸}$ را واحد طول درنظر می‌گیریم. با ملاحظهٔ شکل می‌توانیم تنها در ربع اوّل تعداد مربعهای پوشیده شده را بشماریم و نتیجه را در ۴ ضرب کنیم. اگر به هر مربع پوشیده شده، رأس طرف راست بالای آن را نظیر کنیم، تنها باید این رأسها را بشماریم. این رأسها از نقطه‌های (x,y) با مختصات صحیح (موسوم به نقطه‌های شبکه) تشکیل شده‌اند که در آن $x > ۰$، $y > ۰$ و $x^۲ + y^۲ \leq ۴^۲$. هشت نقطهٔ (۱،۱)، (۱،۲)، (۱،۳)، (۲،۱)، (۲،۲)، (۲،۳)، (۳،۱) و (۳،۲) در این شرطها صدق می‌کنند. بنابراین در تمام چهار ربع، تعداد $۴ \times ۸ = ۳۲$ مربع پوشیده شده وجود دارد.

۴۱۵. پوشش میز مربعی.



میز مربعی به ضلع ۹۰ سانتیمتر را با ABCD مشخص کرده‌ایم. دو رومیزی x و x' را در دسترس داریم. مسلماً دو گوشهٔ روبه‌رو از میز را هرگز نمی‌توان با یکی از «رومیزی»ها پوشاند، زیرا قطر مربع از یک متر بیشتر است. پس باید دو گوشهٔ مجاور را با یک رومیزی پوشاند.

مثلاً A و D را با x و B و C را با x'. ولی حالا وسط CD را، که با I نشان داده‌ایم، چگونه بپوشانیم، در صورتی که فاصلهٔ آن از A یا B بیش از ۱ متر است (با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس ۱/۰۰۶ متر به دست می‌آید). پس امکان پوشاندن تمام سطح میز مربعی با دو رومیزی مورد بحث ممکن نیست.

۱۲.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۶. ضلع هشت‌ضلعی منتظم را b و ضلع مربع را a فرض کرده‌ایم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ایجاد شده در گوشه‌ها داریم:

$$b^۲ = ۲\left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲ \Rightarrow ۲b^۲ = (a-b)^۲$$

الف. اگر $b = ۸cm$ باشد،

$$۲ \times ۶۴ = (a-۸)^۲ \Rightarrow a - ۸ = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۸(\sqrt{۲}+۱)$$

ب. اگر $a = 10cm$ باشد، آن‌گاه:

$$2b^2 = (10-b)^2 \Rightarrow b\sqrt{2} = 10 - b \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{2}+1} = 10(\sqrt{2}-1)$$

$$\text{محیط هشت‌ضلعی منتظم} = 80(\sqrt{2}-1)$$

۴۱۷. فرض کنید $AM = x$، $CN = y$ و $x + y = a$، که در آن a طول ضلع مربع است. نقطه‌های برخورد MD و DN با AC را به E و F نشان می‌دهیم. طول پاره‌خطهای AE، EF و CF، بسادگی برحسب a، x و y محاسبه می‌شوند، که در نتیجهٔ آن، می‌توان برابری:

$$EF^2 = AE^2 + FC^2 - AE.FC$$

را تحقیق کرد.

۴۱۸. چهارضلعی موردنظر لوزی است، با زاویه‌های مساوی 60° و 120°. ارتفاع مثلث DMC، $ML = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ و پاره‌خط $MK = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. پس قطر لوزی چنین می‌شود:

$$MN = LK - 2MK = a(\sqrt{3}-1)$$

مثلث EMF متساوی‌الاضلاع است، زیرا: $EM = MF = EF$. از مثلث قائم‌الزاویهٔ EOM داریم:

$$EM^2 - OE^2 = OM^2$$

ولی:

$$OE = \frac{1}{2}EM \;,\; OM = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$$

پس:

$$EM^2 - \frac{1}{4}ME^2 = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow EM = \frac{a(3-\sqrt{3})}{3}$$

ولی ضلع لوزی مساوی با قطر کوچکتر نیست، پس مساحت لوزی چنین می‌شود:

$$S = \frac{1}{2}EF.MN = \frac{1}{2}EM.MN \Rightarrow S = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3}-3)$$

۴۱۹. ۱. ثابت کنید به عنوان مثال که $BB'E$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. $A'B'$ و $B'C'$ را با هم مقایسه کنید.

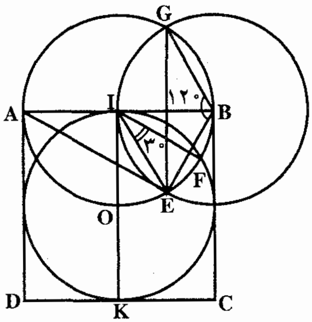
۲. نقطهٔ A' را به نقطه‌های ثابت مسأله وابسته کنید، به اندازهٔ زاویهٔ A' توجه کنید.

۳. به رابطه‌های متری در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه توجه کنید.

۴. آسان است.

۴۲۰. ضلع مربع محاط در یک دایره به شعاع R برابر است با $C_4 = R\sqrt{2}$. پس در این مسأله داریم:

الف) $OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $MP = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$



۴۲۱. ۱. مثلث AEB محاط در نیمدایرهٔ به قطر AB، قائم‌الزاویه در رأس E است. مثلث IBE، متساوی‌الاضلاع به ضلع a است.

$A\hat{B}E = 60°$ و متمم آن $B\hat{A}E = 30°$ است. AE عمود بر شعاع BE، مماس بر دایرهٔ (B) است.

۲. زاویهٔ OIE متمم زاویهٔ EIB برابر ۳۰ درجه است. مثلث IOF متساوی‌الاضلاع است، زیرا هر سه ضلع آن برابر a است. $O\hat{I}F = 60°$ و از آن جا $E\hat{I}F = 30°$ است، از آن‌جا:

$$\overset{\frown}{OE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FB}$$

۳. IF نیمساز زاویهٔ BIE و عمود بر BE است. زاویهٔ IFK که محاط در نیمدایرهٔ به قطر IK است، قائمه است. FK عمود بر IF و از آن‌جا، BE و FK بر یک خط (IF) عمودند، بنابراین موازی‌اند و FK مماس بر دایرهٔ (I) است.

۴. حلقهٔ EIGBE از دو قطعهٔ مساوی EIG و EBG تشکیل شده است، از آن‌جا:

A = (I) مساحت دایرهٔ − EIG ۲ برابر مساحت قطعهٔ

اما مساحت دایرهٔ (I) برابر πa^2 است و

EIG مساحت قطعهٔ = GBEI مساحت قطاع − GBE مساحت مثلث

$$\Rightarrow \text{EIG قطعه } S = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \pi a^2 - 2\left(\frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{3} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

محاسبهٔ عددی:

$a = 6\text{cm}\ ,\ \pi = ۳/۱۴۲\ ,\ \sqrt{3} = ۱/۷۳۳\ ,\ A = ۶۸/۸۹۸$

$a = 6\text{cm}\ ,\ \pi = ۳/۱۴۱\ ,\ \sqrt{3} = ۱/۷۳۲\ ,\ A = ۶۸/۸۶۸$

A برابر ۶۸cm^2 با کمتر از ۱ سانتیمتر تقریب است.

۴۲۲. ۱. مثلثها را با هم مقایسه کنید، رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه.

۲، ۳ و ۴ آسان است.

۲ . ۴. رابطه‌های متری در لوزی

۲ . ۴ . ۱. تعریف و قضیه

۴۲۵. ۱. برابری ضلعهای لوزی این ویژگی را نشان می‌دهد.
۲. از همنهشتی مثلثها و یا ویژگی مثلث متساوی‌الساقین استفاده کنید.

۲ . ۴ . ۲. زاویه

۲ . ۴ . ۲ . ۱. اندازهٔ زاویه

۴۲۶. ۳۰°

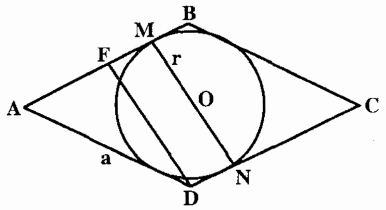
۴۲۷. $\text{Arc}\sin\frac{۴-k^۲}{k^۲}$ ، $-\pi-\text{Arc}\sin\frac{۴-k^۲}{k^۲}$ در صورت $\sqrt{۲}\le k<۲$ ؛ اگر $k<\sqrt{۲}$ یا $k\ge ۲$ باشد، جواب وجود نخواهد داشت.

۴۲۸. $\text{Arc}\cos\frac{۷}{۱۸}$

۴۲۹. $\text{Arc}\sin\frac{۲}{\pi}$ و $\pi-\text{Arc}\sin\frac{۲}{\pi}$

۴۳۰. از شکل داریم:

$$\sin B\hat{A}D=\frac{DE}{AD}=\frac{MN}{AD}=\frac{۲r}{a}$$



از طرف دیگر داریم:

$$۲r.a=Q\quad,\quad \pi r^۲=S$$

از تقسیم رابطهٔ دوم بر رابطهٔ اوّل خواهیم داشت:

$$\frac{r}{a}=\frac{۲S}{\pi Q}$$

جواب:

$$B\hat{A}D=\text{Arc}\sin\frac{۴S}{\pi Q}$$

۲. ۴. ۳. ضلع

۲. ۴. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۴۳۱. $۱۰cm$

۴۳۲. $۱۳cm$

۴۳۳. قطرهای لوزی را $۲x$ و $۲y$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} ۲xy = Q \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\dfrac{mQ}{۲n}} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{m}{n} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{\dfrac{nQ}{۲m}} \end{cases}$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس:

$$a = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{Q.\dfrac{m^۲ + n^۲}{۲mn}}$$

۴۳۴. $a = \dfrac{R}{۳}\sqrt{۶\pi\sqrt{۳}}$

۴۳۵. گزینهٔ (هـ) درست است.

طول قطرها را d و $۲d$ و طول ضلع لوزی را s می‌گیریم، داریم:

$$\frac{۱}{۲}d.۲d = k \Rightarrow d^۲ = k$$

بنابراین:

$$s^۲ = d^۲ + (\frac{d}{۲})^۲ = k + \frac{k}{۴} = \frac{۵k}{۴} \quad , \quad s = \frac{۱}{۲}(۵k)^{\frac{۱}{۲}}$$

۲.۴.۴. قطر

۲.۴.۴.۱. اندازهٔ قطر

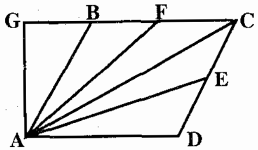
۴۳۶. $۶cm$

۴۳۷. قطر کوچک برابر ۵ و قطر بزرگ برابر $۵\sqrt{۳}$ است.

۴۳۸. $\sqrt{۲n(m+n)}$ و $\sqrt{۲(۲m^۲ + ۳mn + n^۲)}$

۲ . ۴ . ۵. پاره‌خط

۲ .۴ .۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط



۴۳۹. طبق فرض مساحت مثلث ABF مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت لوزی ABCD یا $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث ABC می‌باشد (شکل). از آن‌جا که دو مثلث ABC و ABF ارتفاع مشترک AG را دارند، خواهیم داشت :

$$BF = \frac{۱}{۳}BC = \frac{۲}{۳}a$$

بنابراین :

$$AF^{۲} = AB^{۲} + BF^{۲} - ۲AB.BF\cos(۱۸۰^{\circ} - \alpha) = a^{۲} + \frac{۴}{۹}a^{۲} + \frac{۴}{۳}a^{۲}\cos\alpha$$

جواب : $AF = AE = \frac{a}{۳}\sqrt{۱۳+۱۲\cos\alpha}$

۴۴۰. $\frac{d}{۳}$

۴۴۱. $\frac{a\sqrt{۷}}{۴}$

۴۴۲. ۲cm و ۲cm . از این موضوع استفاده کنید که محیط مثلث AMP از انتخاب نقطهٔ تماس مستقل است. قانون کسینوسها را در مورد AMP اعمال کنید.

۲ . ۴ . ۶. شعاع دایره

۲ .۴ .۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۴۴۳. $\frac{a(۴\sin^{۲}\alpha+۱)}{۸\sin\alpha}$

۴۴۴. $\frac{h}{۲}\tan^{۲}\frac{\pi-\alpha}{۴}$

۴۴۵. $۲\cos^{۲}\frac{\alpha}{۴}$

۲ . ۴ . ۷. محیط

۲ . ۴ .۷. ۱. اندازهٔ محیط

۴۴۶. قطر دیگر لوزی ۱۰cm و اندازهٔ ضلع آن $\sqrt{۶۱}$ است. پس محیط لوزی برابر $۴\sqrt{۶۱}$ است.

۴۴۷. داریم :

$$AC = ۲a\sin\alpha \quad , \quad BD = ۲a\cos\alpha \quad ,$$

$$k = \frac{۴a}{AC+BD} = \frac{۴a}{۲a(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{۲}{\sqrt{۲}\sin(\alpha + ۴۵^\circ)} \qquad (۱)$$

چون :

$$۰ \le \alpha \le ۴۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \sin(\alpha + ۴۵^\circ) \le ۱ \qquad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \ \Rightarrow \sqrt{۲} < k < ۲$$

۲ . ۴ . ۸. مساحت

۲ . ۴ .۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۲ . ۴ . ۸. ۱ . ۱. اندازهٔ مساحت لوزی

۴۴۸. قطر دیگر لوزی برابر ۱۶cm و درنتیجه مساحت لوزی برابر است با :

$$\frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۶ = ۹۶\,cm^۲$$

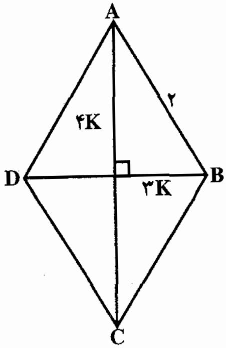
۴۴۹. گزینهٔ (هـ) درست است.

این قطر لوزی را به دو مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کند.

$$\text{مساحت لوزی} = ۲ \times S^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲\times(۳/۱۶)^۲ \times \sqrt{۳}}{۴}$$

چون مقیاس نقشه، ۴۰۰ میل به $۱\frac{۱}{۲}$ اینچ، معرف $\frac{۲}{۳}\times ۴۰۰$ میل بوده و ۱ اینچ مربع، $(\frac{۲}{۳}\times ۴۰۰)^۲$ میل مربع را نشان می‌دهد، لذا مساحت قطعه زمین :

$$\frac{۲\times ۳^۳\sqrt{۳}}{۱۶^۲ \times ۴} \times \frac{۸۰۰^۲}{۳^۲} = ۱۲۵۰\sqrt{۳} \quad \text{(میل مربع)}$$



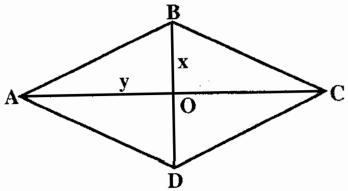
۴۵۰. نسبت نصف قطرهایش نیز برابر ۳:۴ است. پس داریم:

$$(۳k)^۲ + (۴k)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow ۲۵k^۲ = ۴ \Rightarrow k = \frac{۲}{۵}$$

$$\text{قطر کوچک} = \frac{۱۲}{۵} \text{ و } \text{قطر بزرگ} = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت لوزی} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۲}{۵} \times \frac{۱۶}{۵} = \frac{۹۶}{۲۵} \ m^۲$$

۴۵۱. $BO = x$ و $AO = y$ ، فرض می‌کنیم (شکل) و بنابراین مساحت S لوزی مساوی $۲xy$ خواهد بود. اکنون با توجه به رابطه‌های:

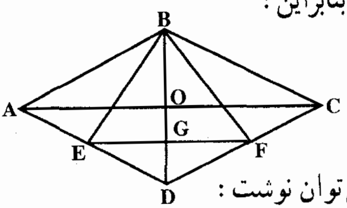


$$\begin{cases} x + y = \frac{m}{۲} \\ x^۲ + y^۲ = (\frac{p}{۲})^۲ \end{cases}$$

بسادگی $S = ۲xy$ به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{m^۲ - p^۲}{۴}$$

۴۵۲. طبق فرض، $BE = BF = a$ و $EF = b$ می‌باشد، بنابراین:



$$BG = \sqrt{a^۲ - (\frac{b}{۲})^۲} \ , \ EG = \frac{b}{۲}$$

با توجه به این که مثلث BDE قائم‌الزاویه است، می‌توان نوشت:

$$BD = \frac{BE^۲}{BG} = \frac{a^۲}{\sqrt{a^۲ - (\frac{b}{۲})^۲}}$$

اکنون از تشابه دو مثلث ABD و BEF می‌توان نتیجه گرفت:

$$AD:BD = BE:EF$$

یعنی: $AD:\frac{a^۲}{\sqrt{a^۲ - (\frac{b}{۲})^۲}} = a:b$.

.۴۵۳ $\frac{8R^3r^3}{(R^2+r^2)^2}$

۲ . ۴ . ۸ . ۱ . ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

.۴۵۴ $20cm^2$. خطهای مستقیم، لوزی را به نه قسمت تقسیم می‌کنند. چهار تا از این قسمتها مثلث است. مساحت هر یک از مثلثها را با x نشان داده و ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی مجاور به ضلع لوزی برابر ۳x است. مساحت مثلث ABN را برحسب مساحت لوزی بیان کنید.

.۴۵۵ ضلع لوزی چنین است:

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2}$$

مساحت لوزی را می‌توان چنین نوشت:

$$S=a.CE=a.CF=\frac{1}{2}d_1d_2$$

به دست می‌آید:

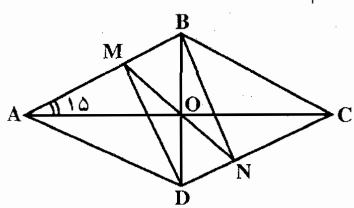
$$CE=CF=\frac{d_1d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$$

بنابراین، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ACF و ACE در ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه (CE = CF) و وتر AC مساوی‌اند. برای محاسبهٔ مساحت مجهول، AE را محاسبه می‌کنیم:

$$AE=\sqrt{d_1^2-CE^2}=\frac{d_1^2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}$$

$$\Rightarrow \text{مجهول}\ S'=AE.CE=\frac{d_1^3d_2}{d_1^2+d_2^2}$$

.۴۵۶ با توجه به شکل داریم:

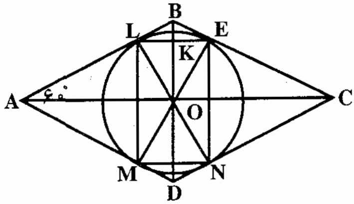


$$\overset{\Delta}{AOB}: A\hat{B}O=75^\circ\ ,\ BO=\frac{A}{2}\tan 15^\circ\ ,\ O\hat{A}B=15^\circ\ ,\ A\hat{O}B=90^\circ$$

در مثلث MOB چون MO و OB قطرهای مستطیل هستند و مساوی‌اند:

$$A\hat{B}O=O\hat{M}B=75^\circ \Rightarrow B\hat{O}M=30^\circ \Rightarrow S_{BMND}=\frac{1}{2}BD.MN.\sin 30^\circ\ ,$$

$$BD=MN=a\tan 15^\circ \Rightarrow S=\frac{a^2}{4}\tan^2 15=\frac{a^2}{4}(2-\sqrt{3})^2$$



۴۵۷. LM که نقطه‌های تماس با دو ضلع موازی را به هم وصل کرده است (شکل)، قطر دایره است، بنابراین زاویه‌های محاطی LEN و LMN (و به همین ترتیب زاویه‌های MLE و MNE) قائمه‌اند. درنتیجه چهارضلعی LENM مستطیل است. مثلث ABD، متساوی‌الاضلاع است و LN (ارتفاع لوزی) مساوی ارتفاع مثلث ABD می‌باشد، درنتیجه :

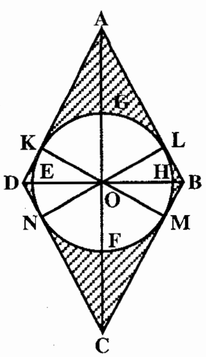
$$LN = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

مساحت S مستطیل برابر است با :

$$S = LN^{۲}.\sin L\hat{O}E = LN^{۲}.\sin B\hat{A}D$$

(ضلعهای دو زاویهٔ LOE و BAD نظیر به نظیر بر هم عمودند.)

جواب : $S = \frac{۳a^{۲}\sqrt{۳}}{۱۶}$



۴۵۸. بایستی مساحت $S_۱$ شکل MCNF (شکل)، و مساحت $S_۲$ شکل KDNE را به دست آورد (مساحتهای KALG و LBMH بترتیب مساوی $S_۱$ و $S_۲$ هستند).

چون طبق فرض AC = ۴R می‌باشد، OC = ۲OM شده و زاویهٔ OCM مساوی ۳۰ درجه می‌شود. بنابراین داریم :

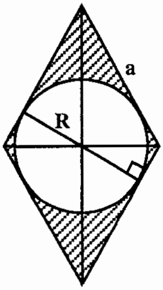
$$K\hat{O}N = ۶۰^\circ \quad , \quad M\hat{O}N = ۱۲۰^\circ$$

و مساحت چهارضلعی CMON مساوی $R^{۲}\sqrt{۳}$ و مساحت قطاع MONF مساوی $\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}$، و از آن‌جا مساحت $S_۱$ و به همان ترتیب $S_۲$، به دست می‌آید :

جواب :

$$S_۱ = \frac{R^{۲}(۳\sqrt{۳} - \pi)}{۳}$$

$$S_۲ = \frac{R^{۲}۲(\sqrt{۳} - \pi)}{۶}$$



۴۵۹. شعاع دایره را R و ضلع لوزی را a فرض می‌کنیم، داریم:

$۲\pi R = ۴\pi \Rightarrow R = ۲ \Rightarrow$ مساحت دایره $= \pi R^۲ = ۴\pi$

$۴a = ۲۰ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow$ مساحت لوزی $= a \times ۲R$

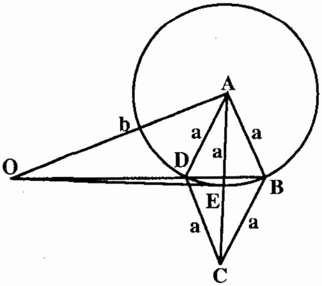
$\Rightarrow$ مساحت لوزی $= ۵ \times ۴ = ۲۰$

موردنظر $S = ۲۰ - ۴\pi$

۲ . ۴ . ۸ . ۲. نسبت مساحتها

۴۶۰. قطرهای لوزی را $۳x$ و $۴x$ فرض می‌کنیم. مساحت لوزی $۶x^۲$ و ضلع لوزی $a = ۲/۵x$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن $r = \frac{S}{۲a} = ۱/۲x$، و مساحت دایرهٔ محاطی برابر $S_۱ = \pi(۱/۲x)^۲$ است. از آن‌جا: $\frac{S}{S_۱} = \frac{۲۵}{۶\pi}$.

۲ . ۴ . ۹. رابطه‌های متری



۴۶۱. چون، هر یک از نقطه‌های D، O و B، از رأسهای A و C به یک فاصله‌اند، بنابراین: این سه نقطه، روی یک خط راستند.

دایرهٔ به مرکز A و به شعاع a را در نظر می‌گیریم (شکل). می‌دانیم که حاصلضرب DB.OD، برابر است با مجذور طول مماس OE، که از نقطهٔ O بر این دایره رسم شده است. طول این مماس، برابر است با $b^۲ - a^۲$، که به مقدار زاویهٔ BAD بستگی ندارد.

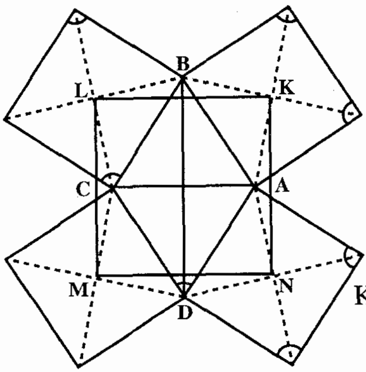
۲ . ۴ . ۱۰. ثابت کنید چهارضلعی لوزی است

۴۶۲. فرض می‌کنیم $AO \le OC$ و $BO \le OD$. اگر M و N دو نقطه روی OC و OD باشند، به‌طوری که $AO = OM$ و $BO = ON$، در این صورت ABMN، یک متوازی‌الاضلاع است.

محیط ABO و MNO برابرند، بنابراین محیط CDO و MNO برابرند؛ پس $M = C$

و N = D ؛ یعنی خود ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. حال محیط ABO و BCO برابرند، پس AB = BC و شکل لوزی است.

۲. ۴. ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۶۵. چهار مثلث BKL، CML، DMN و ANK، به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند ؛ زیرا اگر اندازهٔ زاویهٔ ABC از لوزی مساوی α° باشد. داریم :

$$K\hat{B}L = L\hat{C}M = M\hat{D}N = N\hat{A}K = ۹۰^\circ + \alpha^\circ$$

از طرفی چون چهار مربع ایجاد شده با هم برابرند، پس نیمه قطرهای آنها نیز با هم برابرند یعنی :

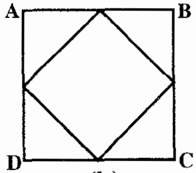
$$BK = BL = LC = CM = MD = DN = AN = AK$$

از تساوی این مثلثها نتیجه می‌شود که KL = LM = MN = NK ، است. یعنی چهارضلعی KLMN لوزی است. امّا زاویه‌های آن قائمه می‌باشند ؛ زیرا به عنوان مثال داریم :

$$\hat{L}_۱ = \hat{L}_۲ \,,\ \ B\hat{L}C = ۹۰^\circ$$

پس $K\hat{L}M = ۹۰^\circ$ است، درنتیجه KLMN لوزی است.

تبصره. مسألهٔ بالا نه تنها برای لوزی، بلکه برای هر متوازی‌الاضلاع نیز درست است.

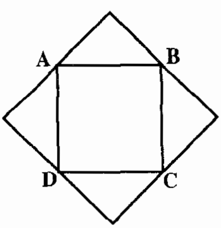


(b)

۴۶۶. همهٔ مطلب این است که مژده و توکا، با واحدهای مختلفی اندازه‌گیری کرده‌اند.

طول ضلع مربع ABCD را a می‌گیریم، در این صورت، مساحت آن با عدد $a^۲$ نشان داده می‌شود.

ضلع مربع محیطی مساوی $a\sqrt{۲}$ و محیط آن مساوی $۴a\sqrt{۲}$ می‌شود (شکل a). طبق اندازه‌گیری مژده $a^۲ = ۴a\sqrt{۲}$ و از آنجا $a = ۴\sqrt{۲}$ ، یعنی ضلع مربع محیطی برابر است با $a\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}$ ، یعنی ۸ واحد انتخابی مژده.



(a)

ضلع مربع محاطی برابر است با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a$ و محیط آن $۲a\sqrt{۲}$.

طبق اندازه‌گیری توکا $a^{۲} = ۲\sqrt{۲}$ و از آن‌جا $a = ۲\sqrt{۲}$ ، یعنی ضلع مربع محاطی برابر است با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}a = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۲\sqrt{۲}$ ، یعنی ۲ واحد انتخابی توکا.

با واحدی که مژده انتخاب کرده است، طول ضلع مربع ABCD مساوی $۴\sqrt{۲}$ و با واحدی که توکا انتخاب کرده است، طول ضلع این مربع مساوی $۲\sqrt{۲}$ شده است. بنابراین واحد انتخابی مژده نصف واحد انتخابی توکا بوده است.

برای مژده عدد مساحت مربع ABCD و عدد محیط مربع محیطی آن یکی شده است :

$$۴\sqrt{۲} \times ۴\sqrt{۲} = ۳۲ \quad ; \quad ۴ \times ۸ = ۳۲$$

برای توکا هم عدد مساحت مربع ABCD و عدد محیط مربع محاطی آن یکی شده است :

$$۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} = ۸ \quad ; \quad ۴ \times ۲ = ۸$$

۲ . ۴ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۶۷. ۱ . آسان است.

۲ . از مثلثهای متشابه استفاده کنید و ببینید حدود تغییرات x چه‌قدر است.

۴۶۸. ۱ . ساده است.

۲ . AN و BD خطهای قابل توجه دو مثلث.

۳ . برخی مثلثهای متشابه را به کار گیرید.

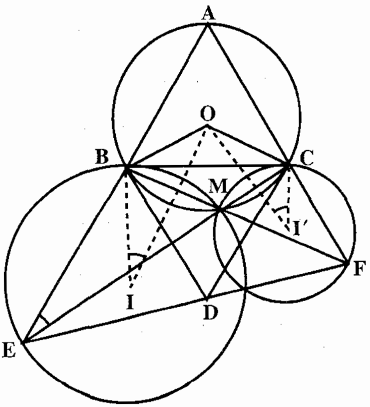
۴ . ساده است.

۴۶۹. ۱ . دو مثلث EBD و DCF متشابه‌اند. زیرا ضلعهای آنها نظیر به نظیر متوازی هستند، پس :

$$\frac{EB}{DC} = \frac{BD}{CF}$$

و چون $DC = BD = BC$ ، پس می‌توان نوشت :

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{CF} \qquad (۱)$$



پس دو مثلث EBC و BCF که دو ضلع آنها متناسب و زاویهٔ بین این دو ضلع در هر دو مثلث ۱۲۰ درجه است، متشابه‌اند و از تناسب (۱) نتیجه می‌شود :

$$BC^{۲} = EB.CF$$

۲. از تشابه دو مثلث بالا نتیجه می‌شود:

$$C\hat{B}M = B\hat{E}C\,,\ \ B\hat{C}M = B\hat{F}C$$

و چون:

$$B\hat{C}M + B\hat{E}M = ۶۰^\circ$$

پس: $B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - (B\hat{C}M + M\hat{B}C) = ۱۸۰^\circ - (B\hat{C}M + B\hat{E}M) = ۱۲۰^\circ$

یعنی چهارضلعی ABMC محاطی است و نقطهٔ M روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است. در حالتی که مثل مورد شکل، قاطع از خارج لوزی عبور کند و امتداد ضلعهای AB و AC را قطع کند، نقطهٔ M کمان کوچکتر BC را می‌پیماید و اگر قاطع از داخل لوزی بگذرد، M کمان بزرگتر BC را طی می‌کند.

۳. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را O و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث EBM را I می‌نامیم. واضح است که خط‌المرکزین OI بر وتر مشترک BM عمود است، پس اندازهٔ زاویه‌های مرکزی BOI و BIO بترتیب مساوی با اندازهٔ زاویه‌های محاطی BCM و BEM است، به‌طوری که داریم:

$$O\hat{B}I = ۱۸۰^\circ - (B\hat{C}M + B\hat{E}M) = ۱۲۰^\circ$$

و چون $O\hat{B}C = ۳۰^\circ$، پس $C\hat{B}I = ۹۰^\circ$، یعنی نقطهٔ I بر عمودی واقع است که از نقطهٔ B بر ضلع BC اخراج شود. اگر قاطع خارج زاویهٔ BDC واقع باشد، نقطهٔ E در زیر BC واقع است و I که روی عمود رسم شده بر BE در وسط آن واقع است، در زیر BC قرار دارد و اگر قاطع داخل زاویهٔ BDC واقع شود، I روی قسمت بالایی عمود مزبور قرار خواهد گرفت.

با همین روش معلوم می‌شود که مکان نقطهٔ I' خط عمودی است که از نقطهٔ C بر ضلع BC اخراج می‌شود.

۴. از تساوی زاویه‌های:

$$B\hat{I}O = B\hat{E}C\ \ ,\ \ O\hat{B}I = ۱۲۰^\circ = E\hat{B}C$$

معلوم می‌شود که دو مثلث BIO و BEC متشابه‌اند و به همین ترتیب معلوم می‌شود که دو مثلث CFB و $CI'O$ نیز متشابه‌اند و چون دو مثلث BEC و CBF، چنان که قبلاً دیدیم متشابه می‌باشند، پس دو مثلث BIO و COI' متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{OB}{IB} = \frac{I'C}{OC}$$

و یا:

$$IB.I'C = OB.OC$$

اما OB و OC عبارتند از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی که ضلع آن a است، پس :

$$OB = OC = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$$

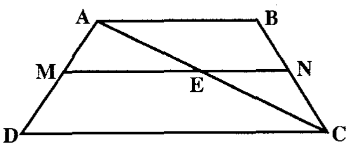
بنابراین :

$$IB.I'C = \frac{a^{۲}}{۳}$$

۲ . ۵. رابطه‌های متری در ذوزنقه

۲ . ۵. ۱. رابطه‌های متری در ذوزنقه در حالت کلی

۲ . ۵. ۱. ۱. تعریف و قضیه

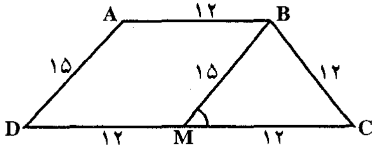


۴۷۰. ذوزنقهٔ ABCD را در نظر گرفته، میانهٔ MN از این ذوزنقه و قطر AC را رسم می‌کنیم، تا در نقطهٔ E یکدیگر را قطع کنند. داریم :

$$\begin{cases} ME = \dfrac{DC}{۲} \\ EN = \dfrac{AB}{۲} \end{cases} \Rightarrow ME + EN = MN = \frac{AB + CD}{۲}$$

۲ . ۵. ۱. ۲. زاویه

۲ . ۵. ۱. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه



۴۷۱. از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا CD را در M قطع کند. چهارضلعی ABMD متوازی‌الاضلاع به ضلعهای ۱۲ و ۱۵ و مثلث MBC به ضلعهای ۱۲، ۱۲ و ۱۵ است. در این مثلث داریم :

$$\cos B\hat{M}C = \frac{۱۲^{۲} + ۱۵^{۲} - ۱۲^{۲}}{۲ \times ۱۲ \times ۱۵} = \frac{۱۵}{۲۴} \Rightarrow B\hat{M}C = \text{Arc}\cos\frac{۱۵}{۲۴}$$

$$\Rightarrow A\hat{D}C = B\hat{M}C = \text{Arc}\cos\frac{۱۵}{۲۴} \Rightarrow D\hat{A}B = \pi - \text{Arc}\cos\frac{۱۵}{۲۴}$$

$$B\hat{C}D = ۱۸۰^{\circ} - ۲(\text{Arc}\cos\frac{۱۵}{۲۴}) \;,\; A\hat{B}C = ۲\text{Arc}\cos\frac{۱۵}{۲۴}$$

۴۷۲. $\operatorname{Arc\,tan}\left(\dfrac{\sin\alpha}{۲+\cos\alpha}\right)$

۲ .۵ .۱ .۲ .۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۴۷۳. از شرط می‌توان نتیجه گرفت که چهارضلعی AKLD، محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{ABL}+\widehat{AKL}=۱۸۰^\circ$$

در این صورت روشن است که:

$$\widehat{BKL}+\widehat{BCL}=۱۸۰^\circ$$

یعنی چهارضلعی BCLK هم محاطی است. از آن‌جا:

$$\widehat{ABL}=\widehat{LCK}\Rightarrow \widehat{BLA}=\widehat{CKD}$$

۲ .۵ .۱ .۳. ضلع

۲ .۵ .۱ .۳ .۱. اندازهٔ ضلع

۴۷۴. ۱۶cm.

۴۷۵. گزینهٔ (ج) درست است.

میانهٔ ذوزنقه (= خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کند.) از وسط قطرها می‌گذرد. فرض کنید x طول قاعدهٔ کوچکتر باشد،

$$\therefore \text{طول میانه} = \frac{x}{۲}+۳+\frac{x}{۲}\ ;\quad \therefore \frac{۱}{۲}(x+۹۷)=\frac{x}{۲}+۳+\frac{x}{۲}\ ;\quad \therefore x=۹۱$$

۴۷۶. گزینهٔ (د) درست است.

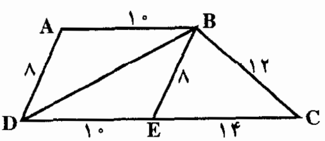
۴۷۷. $\dfrac{b^۲+ab-c^۲}{b}$

۴۷۸. ۳۰ سانتیمتر.

۴۷۹. ۱۴، ۱۲/۵، ۲۹/۴ و ۱۶/۹ سانتیمتر.

۲ .۵ .۱ .۴. قطر

۲ .۵ .۱ .۴ .۱. اندازهٔ قطر



۴۸۰. از رأس B، خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا CD را در نقطهٔ E قطع کند. مثلث BCE به ضلعهای ۱۲، ۱۴ و ۸ است، در این مثلث اندازهٔ کسینوس زاویهٔ C برابر است با:

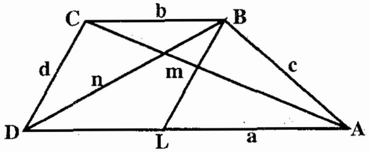
$$\cos\hat{C}=\frac{۱۴^۲+۱۲^۲-۸^۲}{۲\times۱۲\times۱۴}=\frac{۲۷۶}{۲\times۱۲\times۱۴}=\frac{۲۳}{۲۸}$$

حال قطر BD را رسم می‌کنیم، در مثلث BDC داریم :

$$DB^{۲} = ۲۴^{۲} + ۱۲^{۲} - ۲\times۱۲\times۲۴\times\frac{۲۳}{۲۸} \Rightarrow DB^{۲} = \frac{۱۷۲۸}{۷} \Rightarrow DB = \frac{۲۴\sqrt{۲۱}}{۷}$$

به همین روش قطر AC، قابل محاسبه است.

۴۸۱. در مثلث ABC داریم :



$$m^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos\hat{B}$$

و یا :

$$m^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + ۲bc\cos\hat{A}$$

و در مثلث ADC داریم :

$$m^{۲} = a^{۲} + d^{۲} - ۲ad\cos\hat{D}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$۲bc\cos\hat{A} + ۲ad\cos\hat{D} = a^{۲} - b^{۲} + d^{۲} - c^{۲} \quad (۱)$$

به همین ترتیب با توجه به مثلثهای ABD و CBD داریم :

$$۲ac\cos\hat{A} + ۲bd\cos\hat{D} = a^{۲} - b^{۲} - (d^{۲} - c^{۲}) \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲)، $\cos\hat{A}$ و $\cos\hat{D}$ به دست می‌آید و سپس با کمک آنها $m^{۲}$ و $n^{۲}$ محاسبه می‌شود. اگر طرفین معادلهٔ (۱) را در b وطرفین معادلهٔ (۲) را در a ضرب کرده و سپس معادلهٔ اوّل را از دوم کم کنیم، خواهیم داشت :

$$۲(a^{۲} - b^{۲})c\cos\hat{A} = (a^{۲} - b^{۲})(a - b) - (d^{۲} - c^{۲})(a + b)$$

اگر طرفین معادله را بر $a^{۲} - b^{۲}$ (که مخالف صفر است) تقسیم کنیم، چنین می‌شود :

$$۲c\cos\hat{A} = a - b - \frac{d^{۲} - c^{۲}}{a - b}$$

اکنون می‌نویسیم :

$$m^{۲} = b^{۲} + c^{۲} + (۲c\cos\hat{A})b$$

$$= c^{۲} + ab - \frac{(d^{۲} - c^{۲})b}{a - b} = \frac{a(c^{۲} - b^{۲}) + b(a^{۲} - b^{۲})}{a - b}$$

به همین ترتیب می‌توان به دست آورد:

$$2d\cos\hat{D} = a - b + \frac{d^2 - c^2}{a - b}$$

و درنتیجه:

$$x^2 = \frac{a(d^2 - b^2) + b(a^2 - c^2)}{a - b}$$

توضیح. پاره‌خط $AD = a$ از خط شکستهٔ ABCD کوچکتر است. بنابراین مسأله تنها در حالتی که $a < b + c + d$ باشد جواب دارد، ولی این شرط به تنهایی کافی نیست. فرض کنیم $a > b$ و $c \geq d$ باشد (اگر این نامساویها برقرار نباشد، می‌توان با تغییر اساسی ضلعها، آنها را برقرار کرد)، BL را موازی با ضلع CD رسم می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع DCBL به‌دست می‌آید که در آن، $BL = CD = d$ و $DL = CB = b$. در مثلث ALB ضلع $AL = a - b$ از تفاضل دو ضلع $AB = c$ و $BL = d$ بزرگتر است و بنابراین شرط دوم $a - b > c - d$ را پیدا می‌کنیم. اگر یکی از این دو شرط برقرار نباشد، لااقل یکی از عبارتهای m^2 یا n^2 منفی خواهد شد.
دو شرط $a < b + c + d$ و $a - b > c - d$ کافی است، زیرا با این شرطها، مسأله‌ها دارای جواب است، در حقیقت نامساوی اوّل را می‌توان به‌صورت $a - b < c + d$ نوشت. بنابراین با این شرایط می‌توان مثلث ABL را با ضلعهای $AL = a - b$ و $AB = c$ و $BL = d$ ساخت، آن‌وقت اگر AL را به اندازهٔ $LD = b$ امتداد داده و متوازی‌الاضلاع DLBC را بسازیم، چهارضلعی ABCD به‌دست خواهد آمد که ذوزنقه‌ای خواهد بود با قاعده‌های $AD = a$ و $BC = b$ و ساقهای $AB = c$ و $DC = d$.

۲. ۵. ۱. ۵. پاره‌خط

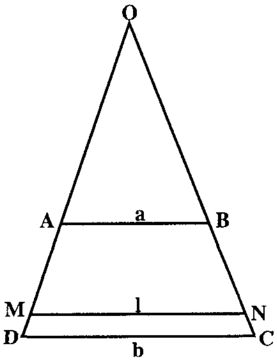
۲. ۵. ۱. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۸۲. ۱۰cm

۴۸۳. گزینهٔ (ب) درست است.

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \quad ; \quad \therefore b_1 + b_2 = b = 18$$

$$\therefore m = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) = 9$$



۴۸۴. داریم :

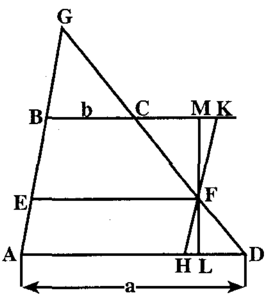
$$\frac{l}{b}=\frac{OM}{OD} \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad \frac{l}{a}=\frac{OM}{OA} \quad (۲)$$

$$\Rightarrow \frac{b-l}{a}=\frac{AM}{OA}=\frac{۵}{OA}\ , \quad (۳)$$

$$\frac{b-l}{b}=\frac{۲}{CD} \quad (۴)$$

$$\frac{(۳)}{(۴)} \Rightarrow \frac{l-a}{b-l}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow l=\frac{۲a+۵b}{۷}$$

۴۸۵. راه حل اوّل. فرض کنیم $EF=x$. سطح ذوزنقهٔ ABCD، ($AD=a$ و $BC=b$) را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، بنابراین :



$$(a+x)FL=(x+b)FM \quad (۱)$$

دو ارتفاع FL و FM را به‌طور جداگانه نمی‌توان به‌دست آورد (طول یکی از آنها را می‌توان دلخواه انتخاب کرد.) ولی نسبت FL:FM مقدار مشخصی دارد.

از تشابه دو مثلث FHD و FKC (که در آنها $HD=a-x$ و $CK=x-b$ می‌باشد)، داریم :

$$\frac{a-x}{FL}=\frac{x-b}{FM} \quad (۲)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

$$a^۲-x^۲=x^۲-b^۲$$

و از آن‌جا :

$$x=\sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}$$

راه‌حل دوم. اگر ضلعهای غیرموازی ذوزنقه را امتداد دهیم، سه مثلث متشابه BGC، EGF و AGD به‌دست می‌آید که اگر مساحتهای آنها را بترتیب به $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$S_۱=qb^۲ \ , \quad S_۲=qx^۲ \ , \quad S_۳=qa^۲$$

(q ضریبی است که به ارتفاع ذوزنقه مربوط است.)

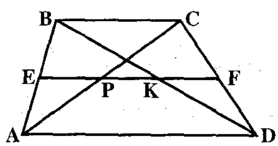
اکنون با توجه به این که $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$ می‌باشد، خواهیم داشت :

$$q(x^2 - b^2) = q^2(a^2 - x^2)$$

و از آن‌جا :

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

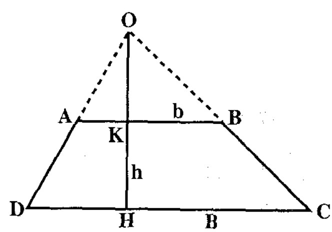
۴۸۶. $\frac{2ab}{a+b}$



۴۸۷. از آن‌جا که نقطهٔ P وسط قطر AC و نقطهٔ K وسط قطر BD است، از این‌رو نقطه‌های P و K روی میانهٔ EF ذوزنقه واقع خواهد بود. چون خط EK دو ضلع مثلث ABD را به هم وصل می‌کند، از این‌رو $EK = \frac{a}{2}$ خواهد بود. به دلیل این که خط EP نیز وسط دو ضلع از مثلث ABC را به هم وصل می‌کند، $EP = \frac{b}{2}$ استنتاج می‌شود. بدین ترتیب $PK = EK - EP = \frac{a-b}{2}$ به‌دست می‌آید.

۴۸۸. داریم : $\Delta AOB \sim \Delta ODC$

بنابراین :



$$\frac{DC}{AB} = \frac{DO}{AO} = \frac{OC}{OB} = \frac{OH}{OK}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{OH}{OK}, \quad \frac{B}{B-b} = \frac{OH}{OH-OK}$$

$$\frac{B}{B-b} = \frac{OH}{h}, \quad OH = \frac{h.B}{B-b}$$

$$OK = \frac{h.B}{B-b} - h = \frac{h.B - h.B + h.b}{B-b} = \frac{h.b}{B-b}$$

۴۸۹. اگر $AB = a$ ، $BC = b$ ، $CD = c$ و $DA = d$ باشد، آن‌وقت :

$$MN = \frac{1}{2}(b + c - a - d)$$

۴۹۰. $\frac{49\sqrt{2}}{2}$cm . پاره‌خط OK را از مثلث قائم‌الزاویهٔ OCD به‌دست آورید. در مثلث OAB خطهایی به‌صورت $OP \perp AP$ رسم کرده و زاویه‌های تشکیل شده از این رسم را مورد ملاحظه قرار دهید. ثابت کنید که $OM = AM$ و $OM = BM$ است.

۴۹۱. داریم :

$$\frac{EN}{AB}=\frac{n}{m+n}\quad ; \quad EN=\frac{n.AB}{m+n}$$

$$\frac{FN}{CD}=\frac{m}{m+n}\quad ; \quad FN=\frac{m.CD}{m+n}$$

$$EF=EN+FN=\frac{n.AB+m.CD}{m+n}$$

۲. ۵. ۱. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۴۹۲. گزینهٔ (ج) درست است.

فرض کنید x و y دو پاره‌خط فوقانی ساقها باشند، در این صورت :

$$۳+y+x=۹+۶-y+۴-x\quad ; \quad \therefore x+y=۸$$

چون، $x:y=۴:۶=۲:۳$ ،

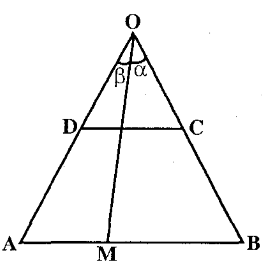
$$\frac{۲y}{۳}+y=۸\quad , \quad y=\frac{۲۴}{۵}$$

و

$$y:(۶-y)=\frac{۲۴}{۵}:\frac{۶}{۵}=۲۴:۶=۴:۱$$

۴۹۳. ۳:۴

۴۹۴. در مثلث OAB (شکل)، چون $\alpha=\beta$:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{OA}{OB}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت :

$$\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{BO}\quad \text{بنابراین}\quad \frac{AM}{MB}=\frac{AD}{BC}$$

۴۹۵. فرض کنید P و Q، بترتیب، نقطه‌های برخورد BK و AC، و AB و DC باشند. خط راست QP، AD را در نقطهٔ M و BC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. با استفاده از تشابه مثلثهای متناظر، به دست می‌آوریم :

$$\frac{AM}{MD}=\frac{BM}{NC}=\frac{MK}{AM}=\frac{AK-AM}{AM}$$

اگر $AM = x(AD)$، آن وقت :

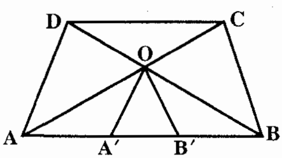
$$\frac{AM}{MD} = \frac{AM}{AD - AM} = \frac{x}{1-x}$$

و $\frac{\lambda - x}{x} = \frac{x}{1-x}$، که از آن جا : $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

جواب : $\frac{\lambda}{\lambda+1}$.

اگر $\lambda = \frac{1}{n}$، آن‌گاه $AM = \frac{1}{n+1}AD$ ؛ بنابراین، ابتدا با اختیار کردن K، منطبق بر D، ($\lambda = 1$)، به وسط AD، نقطه‌ای مثل M_1 می‌رسیم ؛ با اختیار کردن K منطبق بر M_1، M_2 را در $\frac{1}{3}$ طول AD به‌دست می‌آوریم و غیره.

۲. ۵. ۱. ۵. ۳. تساوی پاره‌خطها



۴۹۶. در مثلث ADB (شکل)، می‌نویسیم :

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{DO}{DB}$$

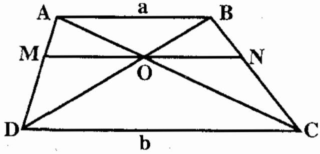
در مثلث ACB می‌نویسیم :

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CO}{CA}$$

می‌دانیم : $\frac{CO}{CA} = \frac{DO}{DB}$، پس :

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{AB} \quad , \quad AA' = BB'$$

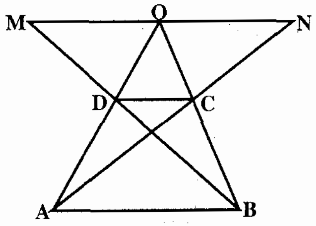
۴۹۷. ۱. این دو خط در یک نقطه متقاربند، پس داریم :



$$\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{DB} = \frac{CO}{CA} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

۲. می‌دانیم $\frac{DO}{DB} = \frac{OM}{AB}$ و $\frac{DO}{DB} = \frac{b}{c}$،

پس $\frac{OM}{a} = \frac{DO}{BD} = \frac{b}{b+c}$ ، $OM = \frac{ab}{a+b}$ ، $MN = \frac{2ab}{a+b}$



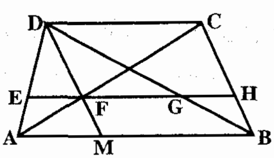
۴۹۸. در مثلث AON (شکل) می‌نویسیم :

$$\frac{AO}{AD}=\frac{ON}{DC}$$

و در مثلث MBO می‌نویسیم : $\frac{BO}{BC}=\frac{OM}{DC}$ و چون داریم :

$$\frac{BO}{BC}=\frac{AO}{AD}$$

پس : $\frac{OM}{DC}=\frac{ON}{DC}$ ؛ بنابراین : $OM = ON$.



۴۹۹. در مثلث ADC (شکل) می‌نویسیم :

$$\frac{EF}{DC}=\frac{AE}{AD}$$

و در مثلث BDC می‌نویسیم : $\frac{BH}{BC}=\frac{CH}{DC}$ و چون $\frac{BH}{BC}=\frac{AE}{AD}$ ، پس :

$\frac{EF}{DC}=\frac{GH}{DC}$ یا $EF = GH$

تذکر. از حل مسأله بالا می‌توان راهی پیدا کرد که خطی موازی دو قاعدهٔ ذوزنقه چگونه رسم شود تا از برخورد با قطرها و ضلعهای غیرموازی به سه قسمت مساوی تقسیم شود. گوییم $\frac{AM}{MB}=\frac{EF}{FG}$. اگر بخواهیم $EF = FG$ شود، باید $AM = MB$ گردد و بنابراین D را به وسط AB وصل می‌کنیم تا قطر AC را در F قطع کند و از F به موازات قاعده‌ها، خط مطلوب را رسم می‌کنیم.

۲. ۵. ۱. ۵. ۴. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۰۰. داریم :

$$\overset{\Delta}{MAB} \sim \overset{\Delta}{MCD} \Rightarrow HH' = ۳MH'$$

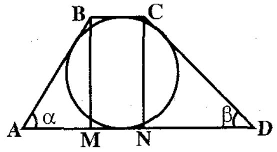
۵۰۱. از تشابه مثلثها استفاده کنید.

۲ . ۵ . ۱ . ۶. شعاع دایره

۲ . ۵ . ۱ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۵۰۲. مساحت Q ذوزنقه (شکل) چنین است :

$$Q=\frac{BC+AD}{۲}.BM=(BC+AD)R$$



(R شعاع دایرهٔ محاطی است). از آن‌جا که ذوزنقه محیطی است، $BC+AD=AB+CD$ می‌باشد، از طرف دیگر $AB=\frac{۲R}{\sin\alpha}$ و $CD=\frac{۲R}{\sin\beta}$ است و بنابراین :

$$Q=۲R^۲\left(\frac{۱}{\sin\alpha}+\frac{۱}{\sin\beta}\right)=۲R^۲\,\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{۴R^۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}.\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin\alpha.\sin\beta}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{Q\sin\alpha.\sin\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}}$$

۲ . ۵ . ۱ . ۷. محیط

۲ . ۵ . ۱ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۵۰۳. ۴۰cm . ثابت کنید که AKB و CED زاویه‌های قائمه بوده و میانهٔ ذوزنقه، روی خط KE قرار دارد.

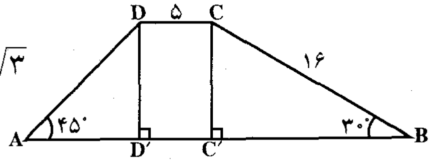
۲ . ۵ . ۱ . ۸. مساحت

۲ . ۵ . ۱ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت

۲ . ۵ . ۱ . ۸ . ۱ . ۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه

۵۰۴. $۱۴۷۶\,cm^۲$

۵۰۵. ارتفاعهای CC' و DD' را رسم می‌کنیم. داریم :



$CC' = ۸ = DD'$

$C'B = ۱۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۸\sqrt{۳}$

$C'D' = CD = ۵$

$AD' = DD' = ۸$

$AB = AD' + D'C' + C'B = ۸ + ۵ + ۸\sqrt{۳} = ۱۳ + ۸\sqrt{۳}$

$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}(۵ + ۱۳ + ۸\sqrt{۳}) \times ۸ = ۷۲ + ۳۲\sqrt{۳}$

۵۰۶. $۳۳۶\,cm^۲$

۵۰۷. ارتفاع CC' را رسم می‌کنیم. داریم :

$DE = h = ۸ \Rightarrow CC' = ۸$, $EC' = DC = ۱۲$, $C'B = \sqrt{۲۸۹ - ۶۴} = ۱۵$

$AB = ۶ + ۱۲ + ۱۵ = ۳۳$

$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{۱}{۲}(۳۳ + ۱۲) \times ۸ = ۱۸۰$

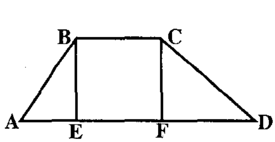
۵۰۸. ۶

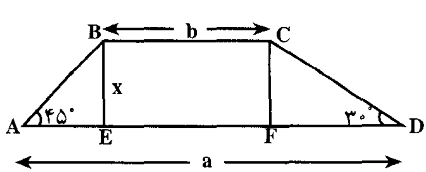
۵۰۹. $۲۵\sqrt{۳}\,cm^۲$

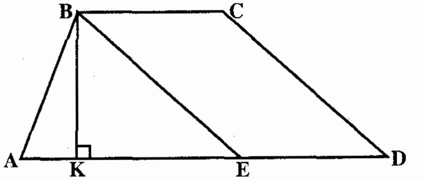
۵۱۰. $۱۳۵\,cm^۲$

۵۱۱. $\frac{a+b}{۴}\sqrt{۳b^۲ + ۲ab - a^۲}$

۵۱۲. اگر $BE = x$ فرض کنیم، $AE = x$ و $FD = x\sqrt{۳}$ خواهد شد (شکل)، و با توجه به تساوی $AD = AE + EF + FD$ ، داریم $a = x + b + x\sqrt{۳}$ و از آن‌جا $x = \frac{a-b}{\sqrt{۳}+۱}$ خواهد شد ؛ درنتیجه $S = \frac{(a^۲ - b^۲)(\sqrt{۳} - ۱)}{۴}$.







۵۱۳. از B خط BE را موازی ساق CD رسم می‌کنیم و ارتفاع BK را نیز رسم می‌نماییم. داریم :

$$S=\frac{a+b}{۲}.h\ ,\ BK=h\ ,\ BE\|CD\ ,$$

$$\Delta ABE: c^۲=d^۲+(a-b)^۲-۲(a-b).KE$$

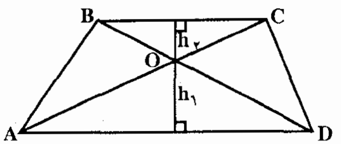
$$\Rightarrow KE=\frac{d^۲-c^۲+(a-b)^۲}{۲(a-b)}\ ,$$

$$\Delta BKE\Rightarrow h=\sqrt{a^۲-KE^۲}=\sqrt{d^۲-(\frac{d^۲-c^۲+(a-b)^۲}{۲(a-b)})}$$

$$\Rightarrow S=\frac{a+b}{۲}.h$$

$$=\frac{a+b}{۴(a-b)}\times\sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a+b+c-d)(c-a-b+d)}$$

۵۱۴. $(a+b)^۲$. ثابت کنید که $S_{AOB}=S_{COD}$ است. رابطهٔ $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{BO}{OD}=\frac{b}{a}$ را به کار بگیرید.



۵۱۵. $(\sqrt{S_۱}+\sqrt{S_۲})^۲$

۵۱۶. داریم :

$$\overset{\Delta}{AOD}\sim\overset{\Delta}{BOC}\Rightarrow \text{نسبت تشابه}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{AD}{BC}=\frac{AO}{OC}=\frac{OD}{OB}=\frac{p}{q}$$

$$S_{DOC}:S_{BOC}=DO:OB=\frac{p}{q}\ ,\ S_{OCD}=pq$$

$$S_{AOB}=pq\Rightarrow \text{ذوزنقه}\ S=(p+q)^۲$$

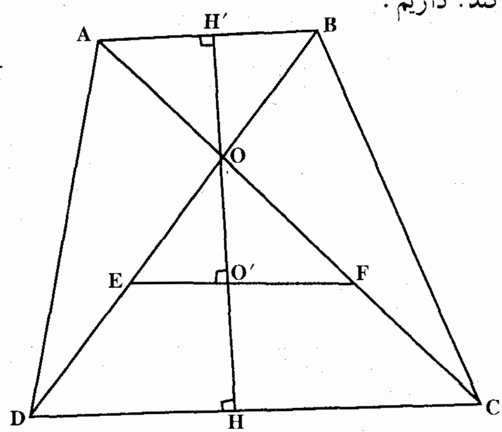
۵۱۷. $۱۶۸cm^۲$

۵۱۸. $\frac{a^۲+a(d-b)}{a-b}\sqrt{bd}$

۵۱۹. اگر $\alpha < \frac{\pi}{3}$ ، آن وقت مسأله دو جواب دارد : $R^2 \sin\alpha(1 \pm \sin\frac{\alpha}{2})$ ؛ اگر $\frac{\pi}{3} \le \alpha < \pi$ ، تنها جواب، $R^2 \sin\alpha(1 + \sin\frac{\alpha}{2})$ است.

۲. ۵. ۱. ۸. ۱. ۲. ۱. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۲۱. از O' وسط OH خطی به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا قطرها را در E و F قطع کند. داریم :



$$OH' = OO' = O'H = \frac{5}{3}$$

$$S_{AOB} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = 2/5$$

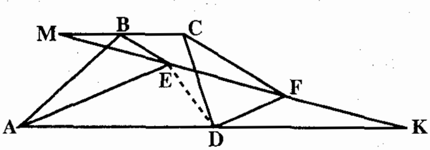
$$S_{DOC} = \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} = 10$$

$$S_{OBC} = S_{BDC} - S_{DOC}$$

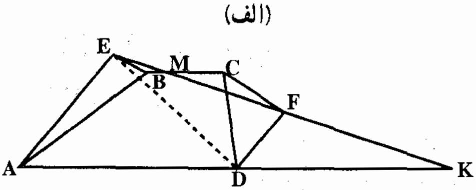
$$S_{OBC} = \frac{6}{2} \times 5 - 10 = 5$$

$$S_{OBC} = S_{AOD} = 5$$

۵۲۲. نقطه‌های برخورد خط راست EF با AD و BC را بترتیب، با K و M نشان می‌دهیم.



(الف)



(ب)

فرض کنید M بر امتداد BC، از طرف نقطهٔ B، واقع باشد. اگر $BC = a$ و $AD = 3a$ ، آن‌وقت از تشابه مثلثهای نظیر، نتیجه می‌شود که $MB = BC = a$ و $DK = AD = 3a$ (شکل الف) ؛ بعلاوه، $ME = EF = FK$. اگر h طول ارتفاع ذوزنقه باشد، آن‌وقت فاصلهٔ E تا AD، برابر با $\frac{2}{3}h$ است، $S_{EDK} = ah$ و $S_{EDF} = \frac{1}{2}S_{EDK} = \frac{ah}{4} = \frac{1}{4}S$.

اگر خط EF، قاعدهٔ BC را در نقطهٔ M قطع کند، آن‌وقت $BM = \frac{1}{3}a$ (شکل ب).

در این حالت $\frac{۶}{۵}=\frac{۵}{۳}:۲=\frac{|EK|}{|MK|}$ و فاصلهٔ E تا AD، برابر است با $\frac{۶}{۵}h$، به این ترتیب :

$$S_{EFD}=\frac{۱}{۲}S_{EDK}=\frac{۱}{۴}.۳a.\frac{۶}{۵}h=\frac{۹}{۲۰}S$$

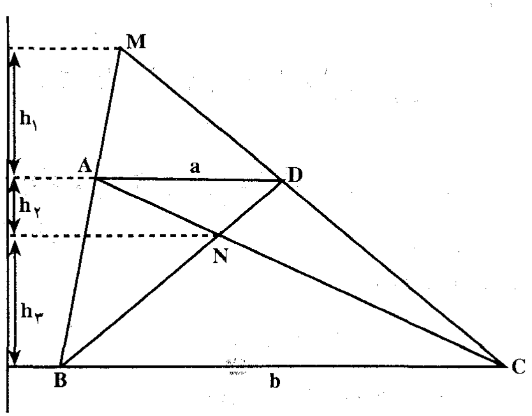
جواب : $\frac{۱}{۴}S$ یا $\frac{۹}{۲۰}S$.

۲. ۵. ۱. ۸. ۲. نسبت مساحتها

۵۲۳. داریم :

$$\frac{S_{AMD}}{S_{AND}}=\frac{ah_۱}{ah_۲}=\frac{h_۱}{h_۲}=x$$

$$\frac{a}{b}=\frac{h_۱}{h_۱+h_۲+h_۳}=\frac{\frac{h_۱}{h_۲}}{\frac{h_۱}{h_۲}+۱+\frac{h_۳}{h_۲}}=\frac{x}{x+۱+\frac{b}{a}}$$



پس :
$$\frac{a}{b-a}=\frac{x}{۱+\frac{b}{a}}\Rightarrow x=\frac{b+a}{b-a}\quad (b>a)$$

۵۲۴. $$\frac{۴\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$$

۲. ۵. ۱. ۸. ۳. رابطهٔ بین مساحتها

۵۲۵. محل برخورد خط AB و خط گذرنده بر C به موازات DB را با N نشان می‌دهیم. مساحت مثلث ACN با S، مساحت ذوزنقه داده شده، برابر است. خط BF را به موازات AC رسم می‌کنیم. مساحت مثلث BFN با S_2، مساحت مثلث DMC برابر است. مثلثهای AMB و BFN با نسبتهای k_1 و k_2 مجانس مثلث ACN هستند و بین این نسبتها رابطهٔ $k_1 + k_2 = 1$ برقرار است. ولی $k_1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$ و $k_2 = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$ را داریم؛ و از این‌رو $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ خواهد بود.

۵۲۶. قاعده‌های برابر دارند ($EG = GF$)، و ارتفاعهای نظیر این قاعده‌ها نیز برابرند.

۵۲۷. از این ویژگی استفاده کنید که پاره‌خط MK، میانهٔ ذوزنقهٔ ABCD است و ارتفاع ذوزنقه را نصف می‌کند (اگر H نقطهٔ برخورد MK با PD باشد، HK میانهٔ ذوزنقه PBCD است).

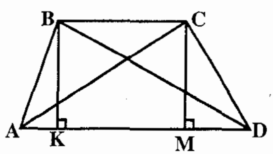
۵۲۸. داریم:

$$S_{AOB} = 9S_{COD}$$
$$S_{AOD} = S_{BOC}$$

۲. ۵. ۱. ۹. رابطه‌های متری

۲. ۵. ۱. ۹. ۱. رابطه‌های متری در ذوزنقه

۵۲۹. با توجه به شکل داریم:



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\hat{A}$$

و

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD.CD.\cos\hat{D}$$

این تساویها را جمع کرده و AK و MD را برحسب AB، CD و زاویه‌های A و D بیان کرده و رابطهٔ $MD + AK = AD - BC$ را به کار بگیرید.

۵۳۰. از نقطهٔ E وسط قاعدهٔ AB موازی ساقهای ذوزنقه رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در P و Q قطع کند. در مثلث EPQ داریم:

$$(1)\quad EP^2 + EQ^2 = \frac{1}{2}PQ^2 + 2EF^2\ ,$$

$$(2)\quad PQ = CD - (DP + QC) + CD = (AE + EB) = CD - AB$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) و با توجه به شکل نتیجه می‌شود :

$$\overline{AD}^۲+\overline{BC}^۲=\frac{۱}{۲}(CD-AB)^۲+۲EF^۲$$

۵۳۱. از تشابه دو مثلث SMU و MVQ استفاده کنید.

۵۳۲. داریم :

$$AB=a \quad , \quad BC=b \quad , \quad CD=c \quad , \quad DA=d \quad ,$$

$$AB\|MN\|CD \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{DC}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{AM}{a}=\frac{MD}{c}=\frac{AM+MD}{a+c}=\frac{d}{a+c}\Rightarrow MD=\frac{cd}{a+c} \quad , \quad MA=\frac{ad}{a+c}$$

همین‌طور داریم :

$$\frac{BN}{NC}=\frac{BO}{OD}=\frac{a}{c} \quad , \quad \frac{BN}{a}=\frac{NC}{c}=\frac{BN+NC}{a+c}=\frac{b}{a+c}:BN=\frac{ab}{a+c} \quad ,$$

$$NC=\frac{bc}{a+c}\Rightarrow AM+BN=\frac{a(d+b)}{a+c} \quad , \quad a+c=b+d\Rightarrow AM+BM=a$$

به همین طریق نتیجه می‌شود :

$$MD+NC=\frac{cd+bc}{a+c}=c$$

۵۳۳. می‌دانیم که OE = OF ؛ پس کافی است طول OE را حساب کرده، دو برابر کنیم تا طول EF به دست آید.

$$\Delta OEC \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{OE}{AB}=\frac{CO}{CB} \qquad (۱)$$

$$\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \frac{CO}{OB}=\frac{CD}{AB}\Rightarrow \frac{CO}{CB}=\frac{CD}{AB+CD} \qquad (۲)$$

$$(۱) \ , \ (۲)\Rightarrow \frac{OE}{AB}=\frac{CD}{AB+CD}\Rightarrow OE=\frac{AB.CD}{AB+CD}\Rightarrow EF=\frac{۲\times AB.CD}{AB+CD}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{EF}=\frac{AB+CD}{AB.CD}\Rightarrow \frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$$

۵۳۴. نقطهٔ X را روی پاره‌خط راست AD، طوری انتخاب می‌کنیم که خط راست BX موازی خط راست CD باشد. اکنون، اگر P(T) را به معنای محیط مثلث T بگیریم، روشن است که :

$$P(ABX)=P(BCX)$$

از طرف دیگر، بنا به فرض داریم :

$$P(ABE)=P(BCE)$$

بنابراین :

$$P(ABX)-P(BCX)=|XE|\pm||CE|-|CX||$$

و با توجه به نابرابری مثلثی، معلوم می‌شود که این تفاضل محیطها، از $|XE|-|XE|=0$ بیشتر است. تناقض حاصل، به این معناست که $X=E$. به همین ترتیب CX موازی AB می‌شود. بنابراین، نقطهٔ E وسط ضلع AD است و $|AE|=|BC|$.

۲ . ۵ . ۱ . ۹ . ۲. رابطه‌های متری در ذوزنقه و دایره

۵۳۶. S_1، S_2، S_3، S_4 و $2P_1$، $2P_2$، $2P_3$، $2P_4$ را، بترتیب، مساحت و محیط مثلثهای ABE، BCE، CDE و DAE فرض می‌کنیم، باید ثابت کنیم :

$$\frac{P_1}{S_1}+\frac{P_3}{S_3}=\frac{P_2}{S_2}+\frac{P_4}{S_4}$$

چون ABCD، ذوزنقه است، بنابراین $S_1=S_3=S$. چون ABCD یک چهارضلعی محیطی است، پس $AB+CD=BC+AD$. اگر به دو طرف این برابری، مجموع دو قطر را اضافه کنیم، به‌دست می‌آید :

$$2P_1+2P_3=2P_2+2P_4$$

برای این که به برابری مورد نظر برسیم، کافی است دو طرف برابری اخیر را، بر $2S$ تقسیم و از رابطه‌های ناشی از برابریهای زیر استفاده کنیم :

$$\frac{S_2}{S}=\frac{S}{S_4}=\frac{AE}{EC}=\frac{BE}{ED}=\frac{AB}{CD}=\frac{P_2}{P_4}$$
$$\frac{P_2}{S}=\frac{P_4}{S_4}\ ;\ \frac{P_4}{S}=\frac{P_2}{S_2}$$

۲ . ۵ . ۱ . ۱۰. ثابت کنید چهارضلعی ذوزنقه است

۵۳۸. قطر را رسم کرده و ثابت کنید میانگاه آن روی پاره‌خط داده شده قرار دارد.

۵۴۱. داریم :

$$\frac{S_{AKB}}{S_{BKC}}=\frac{KA}{KC}\quad,\quad S_{BKC}:S_{DKC}=\frac{BK}{KD}$$

$$S_{BAK}:S_{BKC}=S_{BKC}:S_{DKC}\ \text{بنا به فرض}\ \Rightarrow\frac{AK}{KC}=\frac{BK}{KD}$$

چون زاویه‌های AKB و DKC متقابل به رأسند، پس $\Delta AKB \sim \Delta CKD$. از آن‌جا $A\hat{B}D = B\hat{D}C$ ، درنتیجه $AB \| CD$ ؛ پس ABCD ذوزنقه است.

۲ . ۵ . ۱ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۴۲. داریم :

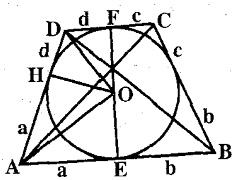
$$\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{DC}$$
$$\Rightarrow \frac{MA}{MA + ۷/۵} = \frac{MB}{MB + ۷/۵} = \frac{۶}{۱۵}$$
$$\Rightarrow ۱۵MA = ۶MA + ۴۵ \Rightarrow MA = ۵$$
$$۱۵MB = ۶MB + ۴۵ \Rightarrow MB = ۵$$

۵۴۳. داریم :

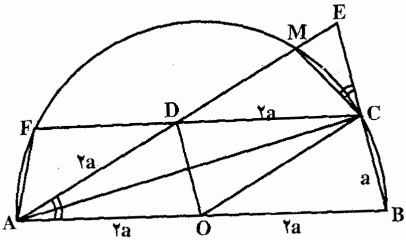
$$\frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{c}{a} \Rightarrow OC = \frac{bc}{a-c} \quad , \quad OD = \frac{cd}{a-c}$$

۵۴۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع AOD، خط KD بر AC عمود بوده و $KP = ۰/۵CD$ است. نتیجهٔ مشابهی را می‌توان در مورد MP به دست آورد.

۵۴۷. فرض کنیم a، b، c و d طول مماسهای رسم شده از رأسهای A، B، C، و D بر دایره باشند (شکل). اگر O مرکز دایرهٔ محاطی، و R شعاع آن باشد، OA و OD نیمساز زاویه‌های HOE و HOF می‌باشند که برهم عمودند (چرا؟). پس $AH \times HD = OH^۲$ یا $a.d = R^۲$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $b.c = R^۲$ ؛ پس $ad = bc$ یا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و از آن جا، سه خط AC، BD و EF همرسند.



۲ . ۵ . ۱ . ۱۲ . مسأله‌های ترکیبی



۵۴۹. ۱. OC را وصل می‌کنیم. چهارضلعی ADCO که در آن دو ضلع DC و AO متساوی و متوازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است و چون دو ضلع مجاور AD و DC متساوی‌اند، پس این چهارضلعی لوزی است؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که قطر DO بر قطر AC عمود است و $OC = ۲a$ ؛ یعنی دایرهٔ داده شده از C می‌گذرد.

۲. دو مثلث MEC و BEA در زاویهٔ $\hat{E}$ مشترک هستند و زاویه‌های ECM و EAB نیز که هر دو با زاویهٔ BCM مکمل هستند، متساوی‌اند. بنابراین دو مثلث مزبور متشابه‌اند. دو مثلث DMC و DFA متساوی‌اند؛ زیرا داریم:

$$A\hat{D}F = C\hat{D}M \quad , \quad AD = DC = ۲a$$

۳. مثلث ABE متساوی‌الساقین است؛ زیرا AC هم ارتفاع آن، و هم نیمساز زاویهٔ EAB است. پس

$$EA = AB = ۴a \quad , \quad CE = CB = a$$

از طرف دیگر داریم:

$$EM.EA = EC.EB$$

و یا $EM.۴a = a.۲a$ ، پس $EM = \frac{a}{۲}$.

و

$$AM = AE - AD - EM = \frac{۳a}{۲}$$

و از تساوی دو مثلث DMC و DFA معلوم می‌شود که $DF = \frac{۳a}{۲}$.

بالاخره از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB نتیجه می‌شود:

$$\overline{AC}^۲ = ۱۶a^۲ - a^۲ = ۱۵a^۲ \quad \text{و یا} \quad AC^۲ = \overline{AB}^۲ - \overline{BC}^۲$$

و یا

$$AC = a\sqrt{۱۵}$$

۵۵۰. a. ثابت کنید که $B_۱C_۱$ قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقهٔ $AB_۱C_۱D$ برابر است با $\frac{۱}{۲}(a-b)$. از این، نتیجه می‌شود که چهارضلعی AB_nC_nD ذوزنقه‌ای است با قاعدهٔ کوچکتر

B_nC_n ؛ که ضمناً برابر است با $\frac{۱}{۲}(a-B_{n-۱}C_{n-۱})$. حالا با روش استقرا ریاضی ثابت کنید: $B_nC_n=\frac{a}{۳}+\frac{۳b-a}{۳}(-\frac{۱}{۲})^n$.

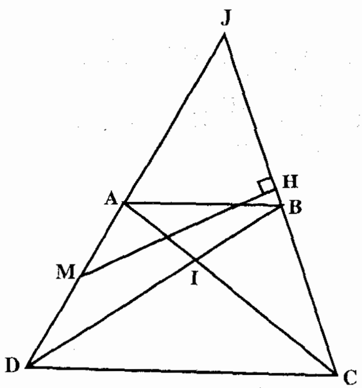
b. روشن است که B_nC_n به سمت $\frac{a}{۳}$ میل می‌کند.

c. روشن است که همهٔ پاره‌خطهای B_nC_n با هم (و با BC)، وقتی برابرند که $a=۳b$ باشد.

۵۵۱. فرض می‌کنیم $DE\perp AB$ و $DF\|CB$ باشد. در مثلث AFD داریم:

$$DF^۲=AD^۲+AF^۲-۲AF.AE$$
$$\Rightarrow AE=۵\ ,\ \Delta ADE\Rightarrow DE^۲=AD^۲-AE^۲=۱۴۴$$
$$\Rightarrow DE=۱۲\Rightarrow \text{ذوزنقه}\ S=۱۹۸$$

۵۵۲. ۱. دو مثلث ACD و BCD معادلند. از مساحت این دو مثلث، مساحت مثلث IDC را کم می‌کنیم. از معادل بودن دو مثلث IAD و IBC نتیجه می‌شود: دو مثلث JAC و JBD نیز معادلند، زیرا دو مثلث ADC و BCD معادل می‌باشند؛ پس می‌توان نوشت:



$$S_{JCD}-S_{ADC}=S_{JCD}-S_{BCD}\Rightarrow S_{JAC}=S_{JBD}$$

۲. داریم: (۱) $\frac{S_{AJC}}{S_{JCD}}=\frac{JA}{JD}$ و (۲) $\frac{S_{AJC}}{S_{JAB}}=\frac{JC}{JB}$. از ضرب کردن این دو رابطه با توجه به برابری $\frac{JA}{JD}=\frac{JB}{JC}$ نتیجه می‌شود: $S^۲_{AJC}=S_{JAB}\cdot S_{JCD}$.

۳. از A و D عمودهای AK و DK′ را بر JC فرود می‌آوریم. از ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ DK′KA داریم: $MH=\frac{۱}{۲}(AK+DK')$. حال می‌توان نوشت:

$$S_{ABCD}=S_{JCD}-S_{JAB}=\frac{۱}{۲}JC.DK'-\frac{۱}{۲}JB.AK \qquad (۱)$$

از طرفی به دلیل معادل بودن مثلثهای JAC و JBD داریم:

$$\frac{1}{2}JC.AK=\frac{1}{2}JB.DK'\Rightarrow\frac{1}{2}JC.AK-\frac{1}{2}JB.DK'=0 \quad (2)$$

با توجه به (۲) رابطهٔ (۱) را چنین می‌توان نوشت:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}JC.DK'-\frac{1}{2}JB.AK+\frac{1}{2}JC.AK-\frac{1}{2}JB.DK'$$

$$=\frac{1}{2}(AK+AK')(JC-JB)=MH.BC$$

۵۵۳. به مرکز C و شعاع CB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. شکل AECD متوازی‌الاضلاع است و $DC=AE$. قوت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ رسم شده، از دستور d^2-R^2 می‌نویسیم.

$$AE.AB=AC^2-CB^2$$

$$AB.DC=AC^2-CB^2$$

۵۵۴. ۱. در مثلث APF یکی از زاویه‌ها $30°$ است، لذا $AP=2AF$ یا $AP=a\sqrt{3}$. در ضمن از رابطهٔ $\frac{AB}{DC}=\frac{AP}{PD}$ خواهیم داشت:

$$PD=\frac{AP\times DC}{AB} \quad \text{و} \quad PC=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$$

یا

$$AD=PD-AP$$

یا

$$AD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

اکنون برای رسم ذوزنقه، ابتدا مثلث APF را رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع AF دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد AP را در نقطهٔ D قطع کند. از نقطه‌های A و D دو خط بر PD عمود می‌کنیم تا ضلع PF را قطع کند، نقطه‌های برخورد B و C می‌باشد.

۲. معلوم شد، $AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ و $AB=a$ و $DC=\frac{2a}{2}$ و $BC^2=AD^2+(DC-AB)^2$

یا $BC=a$ و $\hat{A}=\hat{D}=90°$ و $\hat{C}=60°$ و $\hat{B}=120°$ است.

$BD^2=AD^2+AB^2$ ـــــ یـــــ $DB=\frac{a}{2}\sqrt{7}$ و $AC^2=AD^2+DC^2$ ـــــ یـــــ $AC=a\sqrt{3}$ ؛ از مثلث APF نتیجه می‌شود:

$$\overline{PF}^2=\overline{AP}^2-\overline{AF}^2=3\overline{AF}^2$$

پس $PF = \frac{3a}{2}$. از مثلث PDC نتیجه می‌شود: $PC = 2DC$ یا $PC = 3a$ ؛ بنابراین $CF = PC - PF = \frac{3a}{2}$ ، لذا در مثلث CFD چون زاویهٔ $\hat{C}$ مساوی $60°$ است، لذا متساوی‌الاضلاع می‌شود، یعنی دایرهٔ به مرکز D و به شعاع $\frac{3a}{2}$ از نقطهٔ F می‌گذرد.

۳. چون در مثلث EFC زاویهٔ $\hat{F}$ قائمه است و دو نقطهٔ C و F روی دایره واقعند، به ناچار مقابل به قطر باید باشد، یعنی E روی دایره واقع است؛ در مثلث PEC چون خطهای PD و EF دو ارتفاع، یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند واضح است امتداد AC (ارتفاع سوم) بر ضلع سوم PE عمود خواهد شد؛ پای عمود هم باید به دلیل فوق‌الذکر روی محیط دایره باشد.

۴. نقطهٔ A چون روی عمودمنصف EC است، لذا از E و C به یک فاصله است؛ بعلاوه $AP = AC = a\sqrt{3}$ است، لذا A از P، C و E به یک فاصله خواهد بود. در مثلث متساوی‌الساقین EPC چون PD (ارتفاع، نیمساز و میانه) است، لذا مثلث متساوی‌الساقین می‌شود و چون زاویهٔ $\hat{C} = 60°$ است، لذا متساوی‌الاضلاع خواهد شد.

۵. می‌دانیم $AB = a$ ، $BK = \frac{a}{2}$ ، $EO = 2a$ و $OC = a$ می‌باشد؛ چون $\frac{AB}{EO} = \frac{BK}{OC} = \frac{1}{2}$ می‌باشد و بعلاوه خطهای AK و EC به ناچار موازی‌اند، سه‌خط AE و OB و CX همرسند. بعلاوه در مثلث ECM چون خط AD از وسط EC موازی قاعده رسم شده، لذا ضلع دیگر را هم نصف می‌کند؛ پس $AE = AM$. لذا دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AE از چهار نقطهٔ C، M، P و E می‌گذرد. مثلث OBC متساوی‌الاضلاع است؛ زیرا $OC = BC$ و $\hat{C} = 60°$ ، همچنین مثلث CDF به همان دلیل متساوی‌الاضلاع است؛ لذا $CF - CB = CD - CO$ یا $FB = OD$ ، بعلاوه دو خط OB و DF موازی‌اند (زاویه‌های $\hat{O}$ و $\hat{D}$ هر یک $60°$ اند). درنتیجه چهارضلعی FDOB ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خواهد شد.

۶. الف) چهارضلعی $PP'CD$ مستطیل است، در مستطیل قطرها منصف یکدیگر و مساوی‌اند. چون $FC = PF = \frac{۳a}{۲}$ است، لذا نقطهٔ F وسط قطر PC است، ناچار قطر DF از رأس P' می‌گذرد، یعنی سه نقطهٔ P' ، F و D بر یک خط واقع می‌باشند و بعلاوه نقطهٔ F وسط قطر DP' می‌باشد.

ب) چون ذوزنقهٔ $HH'EC$ متساوی‌الساقین است، $\hat{C} = \hat{E} = ۶۰^\circ$ ؛ لذا مثلث EHH' هم متساوی‌الساقین خواهد بود و در این مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف HH' از رأس خواهد گذشت ؛ پس سه خط CH و EH' و DP در نقطهٔ G' همرسند.

پ) می‌دانیم در هر ذوزنقه، محل تلاقی قطرها و ساقها و وسطهای دو قاعده بر یک خط واقعند. ناچار دو قطر EH و CH' باید روی خط DG' واصل بین وسطهای دو قاعده و محل تلاقی ساقها قرار گیرد.

ت) ضمناً می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های A و P مزدوج نقطه‌های G و G' می‌باشد (G و G' بترتیب محل برخورد خطهای HE و HC با DP هستند) :

خط DH' را وصل می‌کنیم، $H\hat{H'}C = H\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{HC}}{۲}$. اما خط CH' بر EG' عمود است، لذا زاویهٔ H' ۹۰ درجه است و از آن‌جا چهارضلعی $H'GDE$ محاطی است ؛ یعنی $C\hat{H'}D = H\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{GD}}{۲}$ ، از آن‌جا $C\hat{H'}D = H\hat{H'}C$ ؛ یعنی خط $H'G$ نیمساز مثلث $AH'D$ است و چون $H'G'$ بر $H'G$ عمود است، نیمساز خارجی خواهد بود و می‌دانیم نیمساز داخلی و خارجی ضلع مقابل را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند، لذا نقطه‌های D و A مزدوج توافقی نقطه‌های G و G' می‌باشند.

۵۵۵. ۱. برای رسم ذوزنقه، زاویهٔ B را برابر ۶۰ درجه رسم کرده و روی یک ضلع آن $BC = a$ را جدا می‌کنیم، سپس از C پاره‌خط $CD = a$ را موازی ضلع دیگر زاویهٔ ۶۰ درجه رسم کرده و روی همین ضلع دوم زاویه، $BA = BD$ را رسم می‌کنیم، ذوزنقهٔ $ABCD$ به‌دست می‌آید.

۲. چون $\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ می‌باشد، پس $\hat{C} = ۱۲۰^\circ$ خواهد شد. مثلث DCB متساوی‌الساقین است و بنابراین هر یک از زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ آن مساوی ۳۰ درجه خواهد شد و BD نیمساز زاویهٔ B می‌شود، با توجه به متساوی‌الساقین

بودن مثلث ADB خواهیم داشت: $\hat{A}=75^\circ$ و $\hat{D}=105^\circ$، طول ضلعها و قطرهای ذوزنقه هم بسادگی به‌دست خواهد آمد:

$$AB=DB=a\sqrt{3}$$

$$AD=\frac{a\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{3})$$

$$AC=a\sqrt{4-\sqrt{3}}$$

۳. زاویهٔ B از مثلث قائم‌الزاویهٔ BCK(K پای عمود از C بر BD) برابر ۳۰ درجه است و بنابراین زاویهٔ C از این مثلث مساوی 60° می‌شود؛ درنتیجه بسادگی مثلث OBC متساوی‌الاضلاع شده و خواهیم داشت: $OB=OC=a$، همچنین چون تمام زاویهٔ C مساوی ۱۲۰ درجه بوده زاویهٔ $D\hat{C}O=60^\circ$ شده و بنابر تساوی $CD=CO=a$ مثلث OCD هم متساوی‌الاضلاع شده و خواهیم داشت $OC=OD=a$، و این به معنی آن است که دایرهٔ به مرکز O و به شعاع a از سه نقطهٔ B، C و D می‌گذرد.

۴. ۱. داریم $\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{FE}$ (زاویه‌های مرکزی روبه‌روی به آنها هر یک مساوی ۶۰ درجه است) و بنابراین DE بر OF عمود خواهد بود.

۲. داریم: $H\hat{D}O=H\hat{D}C-O\hat{D}C=105^\circ-60^\circ=45^\circ$، از طرف دیگر با توجه به تساوی $OD=OH$ (شعاعهای دایره) داریم $O\hat{H}D=45^\circ$ و بنابراین OH بر OD عمود می‌شود.

۳. هر یک از این دو کمان مساوی ۳۰ درجه می‌شود.

۴. هر یک از قوسهای DB، DE و BE مساوی ۱۲۰ درجه است.

۵۵۶. ۱. ساده است.

۲ و ۳. از قضیهٔ تالس استفاده کنید.

۵۵۷. از قضیهٔ تالس استفاده کنید. برای ساختن ذوزنقه، نخست مثلث BCR را بسازید.

۲.۵.۲. رابطه‌های متری در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۱.۲.۵.۲. تعریف و قضیه

۵۵۸. ۱ و ۲. ارتفاعهای ذوزنقه را رسم کنید و از همنهشتی مثلثها استفاده کنید.

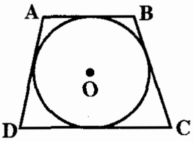
۲.۲.۵.۲. زاویه

۱.۲.۲.۵.۲. اندازهٔ زاویه

۵۵۹. ۱۲۰°

۵۶۰. $\arccos\frac{۱-k}{۱+k}$

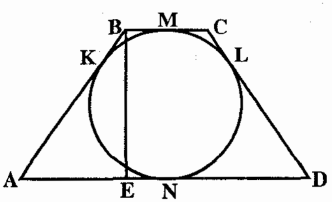
۵۶۱. اگر $k \geq \sqrt{۲}$ باشد، $\arcsin\frac{۱}{k}\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱+۴k^۲}}{۲}}$ خواهد بود. شعاع دایرهٔ محاطی را با r و زاویهٔ حادهٔ ذوزنقه را با x نشان دهید. ضلعهای ذوزنقه، قطر و سپس شعاع دایرهٔ محیطی را برحسب r و x بیان کنید.



۵۶۲. $\arccos\frac{k-۱}{k}$؛ در صورت $k \geq ۱$، $\pi - \arccos\frac{k-۱}{k}$.

۳.۲.۵.۲. ضلع

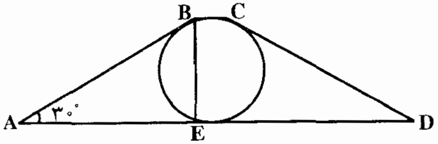
۱.۳.۲.۵.۲. اندازهٔ ضلع



۵۶۳. با توجه به این که $S = ۲۰\text{cm}^۲$ و $BE = ۲r = ۴\text{cm}$ است، می‌توان نصف مجموع دو قاعده را به‌دست آورد. از آن‌جا خواهیم داشت: $AB = CD = ۵\text{cm}$؛ از طرف دیگر $AE = \sqrt{AB^۲ - BE^۲} = ۳\text{cm}$ امّا AE مساوی نصف تفاضل دو قاعده است. پس $AB = CD = ۵\text{cm}$ و $BC = ۲\text{cm}$ و $AD = ۸\text{cm}$.

۵۶۴. چون زاویهٔ $\hat{A} = ۳۰^\circ$ است (شکل)، بنابراین ارتفاع $BE = h$ ذوزنقه، مساوی با $\frac{۱}{۲}AB$ خواهد بود. از طرف دیگر طبق خاصیت چهارضلعیهای محیطی، داریم :

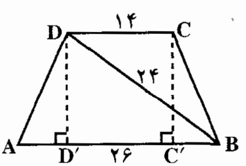
$$BC + AD = AB + CD = ۲AB$$



بنابراین $S = \frac{AB + CD}{۲}.h = \frac{۱}{۲}AB^{۲}$

جواب : $AB = \sqrt{۲S}$

۵۶۵. ۱ و ۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD\,(AB \parallel DC)$ رسم شده در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $AB = ۲۶$ ، $CD = ۱۴$ ، $AC = BD = ۲۴$ باشد، ارتفاع DD' را رسم می‌کنیم. داریم :



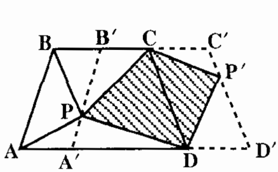
$$AD' = \frac{۲۶ - ۱۴}{۲} = ۶ \Rightarrow D'B = ۲۰$$

$$DB = ۲۴ \Rightarrow DD' = \sqrt{۵۷۶ - ۴۰۰} = \sqrt{۱۷۶} = ۴\sqrt{۱۱}$$

$$\Delta ADD' : AD = \sqrt{AD'^{۲} + DD'^{۲}} = \sqrt{۳۶ + ۱۷۶} = \sqrt{۲۱۲} = ۲\sqrt{۵۳}$$

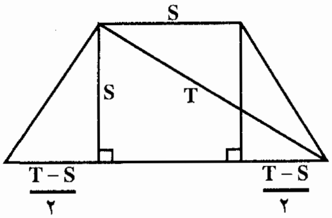
با معلوم بودن مقدارهای بالا رسم ذوزنقه ساده است.

۵۶۶. از نقطهٔ P پاره‌خط $A'B'$ را مساوی و موازی AB رسم می‌کنیم (شکل). متوازی‌الاضلاع $AA'B'B$ را روی ضلع CD به نحوی قرار می‌دهیم که نقطهٔ A بر نقطهٔ C و نقطهٔ B بر نقطهٔ D قرار بگیرد.



۲.۵.۲.۳.۲. نسبت ضلعها

۵۶۷. گزینهٔ (د) درست است.



با توجه به داده‌های مسأله داریم :

$$T^۲ = S^۲ + \left(S + \frac{T-S}{۲}\right)^۲ \Rightarrow ۵S^۲ + ۲TS - ۳T^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (۵S - ۳T)(S + T) = ۰ \Rightarrow \frac{S}{T} = \frac{۳}{۵}$$

۲.۵.۲.۴.قطر

۲.۵.۲.۴.۱. اندازهٔ قطر

۵۶۸. داریم : $BC' = ۱۸, CC' = ۲۴ = h, AC = ۴۰$

۲.۵.۲.۵. پاره‌خط

۲.۵.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۶۹. $h\cot g\alpha$

۵۷۰. داریم $AD \geq DM - AM = ۲$. از طرف دیگر $AD \leq \frac{BD}{\sin ۶۰^\circ} = ۲$ ، درنتیجه $AD = ۲$ ، AD بزرگترین قاعده است و نقطهٔ M روی خط AD قرار دارد.
جواب : $\sqrt{۷}$

۵۷۱. عمودهایی از مرکز دایره‌ها به یکی از ساقها رسم می‌کنیم، و از مرکز دایرهٔ کوچکتر، خط راستی به موازات این ساق می‌کشیم. با این کار، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر به طول $R + r$ و یک ساق برابر با $R - r$ و یک زاویهٔ حادهٔ برابر با α مجاور به این ساق، و برابر با زاویهٔ حادهٔ مجاور به قاعدهٔ ذوزنقه، به‌دست می‌آوریم، بنابراین، $\cos\alpha = \frac{R-r}{R+r}$. قاعدهٔ بزرگتر، برابر است با $۲R\cot\frac{\alpha}{۲} = ۲R\sqrt{\frac{R}{r}}$. قاعدهٔ کوچکتر، برابر است با $۲r\tan\frac{\alpha}{۲} = ۲r\sqrt{\frac{r}{R}}$.

۲.۵.۲.۵.۲. نسبت پاره‌خط

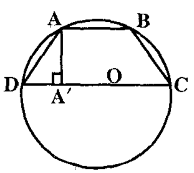
۵۷۲. فرض کنید $B\hat{A}C = B\hat{D}C = \alpha$ ، $C\hat{B}A = B\hat{C}D = \beta$ و $B\hat{A}M = \varphi$. در این صورت

$$\frac{BM + MC}{AM + MD} = \frac{\sin\varphi + \sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \alpha - \varphi) + \sin(\beta + \varphi)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{۲}\cos(\frac{\alpha}{۲} - \varphi)}{\sin(\beta + \frac{\alpha}{۲})\cos(\frac{\alpha}{۲} - \varphi)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta + \alpha) + \sin\beta} = \frac{c}{a + b}$$

۶.۲.۵.۲. شعاع دایره

۱.۶.۲.۵.۲. اندازهٔ شعاع دایره



۵۷۳. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD با داده‌های مسأله را درنظر می‌گیریم و دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. اندازهٔ ساق این ذوزنقه برابر ۱۰cm و اندازهٔ هر قطرش ۱۷cm است. بنابراین شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با :

$$R = \frac{۲۱ \times ۱۷ \times ۱۰}{۴S_{ADC}} = \frac{۲۱ \times ۱۷ \times ۱۰}{۴ \times ۸۴} = \frac{۸۵}{۸}$$

۵۷۴. طبق فرض نسبت دو قاعده $\frac{a}{b} = \frac{۳}{۴}$ است. فرض می‌کنیم $a = ۳x$ و $b = ۴x$ باشد. با توجه به معلوم بودن خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند، داریم :

$$\frac{۳x + ۴x}{۲} = ۷ \Rightarrow x = ۲$$

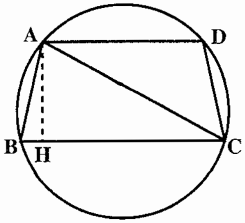
پس قاعده‌ها $a = ۶$ و $b = ۸$ می‌شود. مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه بر ارتفاعی قرار دارد که از محل تلاقی قطرها می‌گذرد. شعاع این دایره را R فرض می‌کنیم. از مثلثهای قائم AON و BOM، به‌دست می‌آید :

$$R^۲ = Z^۲ + ۴^۲, R^۲ = (۷ - Z)^۲ + ۳^۲ \Rightarrow Z = ۳, R = ۵$$

۵۷۵. $\frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos^۲\alpha}}{۲\sin ۲\alpha}$

۵۷۶. در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که در هر مثلث رابطهٔ زیر برقرار است :

$$AB.AC = ۲R.AH$$



پس $R = \frac{c}{۲}.\frac{AC}{AH}$. برای محاسبهٔ AC حکم قضیهٔ بطلمیوس را در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD می‌نویسیم. حاصل می‌شود :

$AC^۲ = c^۲ + ۴ab$ و یا $AC^۲ = AB^۲ + AD.BC$

برای محاسبهٔ AH، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم :

$$AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ = c^۲ - (d-a)^۲$$

$$R = \frac{c\sqrt{c^۲ + ۴ab}}{۲\sqrt{c^۲ - (b-a)^۲}}$$

این مقدار وقتی حقیقی است که $c \geq b-a$ باشد.

۲.۵.۲.۷. محیط

۲.۵.۲.۷.۱. اندازهٔ محیط

۵۷۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH، $DH = \sqrt{۱۵^۲ - ۱۲^۲} = ۹$

$$DC = AB + ۲DH = ۱۰ + ۱۸ = ۲۸$$

$$\text{محیط ذوزنقه} = ۱۰ + ۲۸ + ۲ \times ۱۵ = ۶۸cm$$

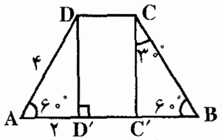
۲.۵.۲.۷.۲. نسبت محیطها

۵۷۸. $\dfrac{۴\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$

۸.۲.۵.۲. مساحت

۱.۸.۲.۵.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۲.۵.۲. اندازهٔ مساحت ذوزنقه



۵۷۹. هر ساق این ذوزنقه برابر ۴ و ارتفاع این ذوزنقه برابر است با :

$$h=\sqrt{۱۶-۴}=۲\sqrt{۳}$$

از آن جا، مساحت ذوزنقه برابر است با :

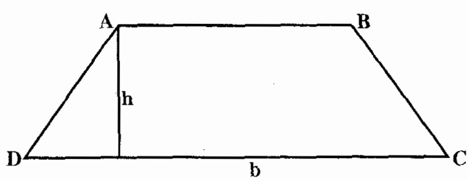
$$\frac{۱}{۲}(۱۲+۸)\times ۲\sqrt{۳}=۲۰\sqrt{۳}$$

۵۸۰. $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(a^{۲}-b^{۲})$

۵۸۱. $l\sqrt{a(۲l-a)}$

۵۸۲. داریم :

$$h=\frac{AD\sqrt{۳}}{۲}$$



از آن جا :

$$۲h=AD\sqrt{۳}$$

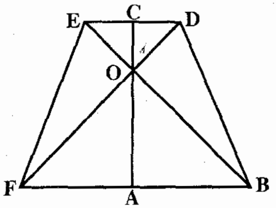
$$\Rightarrow AD=\frac{۲h}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۲h\sqrt{۳}}{۳}$$

$$b-a=AD, b-a=\frac{۲h\sqrt{۳}}{۳}, a=b-\frac{۲h\sqrt{۳}}{۳}$$

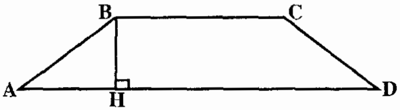
$$a=\frac{۳b-۲h\sqrt{۳}}{۳}$$ قاعدهٔ کوچک

$$S_{ABCD}=\frac{\frac{۳b-۲h\sqrt{۳}}{۳}+b}{۲}.h=\frac{\frac{۳b-۲h\sqrt{۳}+۳b}{۳}}{۲}.h=\frac{۶b-۲h\sqrt{۳}}{۶}.h$$

$$S_{ABCD}=\frac{۳b-h\sqrt{۳}}{۳}.h=\frac{h(۳b-h\sqrt{۳})}{۳}$$



۵۸۳. O را محل تلاقی قطرها گرفته، ارتفاع ذوزنقه را از O رسم می‌کنیم و نقطه‌های A و C را محل تلاقی ارتفاع با قاعده‌ها می‌نامیم. مثلثهای AOB و COD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند، لذا $AC = AO + OC = AB + CD = m$ ؛ یعنی مساحت ذوزنقه $S = m^۲$ است.



۵۸۴. AD را قاعدهٔ بزرگتر و BH را ارتفاع ذوزنقهٔ داده شدهٔ ABCD فرض می‌کنیم (شکل). در این صورت $AD = ۱۳$ (اگر یکی از ساقها را بزرگترین ضلع ذوزنقه بگیریم، یعنی $AB = CD = ۱۳$ ، آن وقت $AD + BC = ۲۸ - ۲ \times ۱۳ = ۲$ و مساحت ذوزنقه $S_{ABCD} = AH(AD + BC) \times \frac{۱}{۲} \leq ۱۳ < ۲۷$ می‌شود که با فرض مسأله سازگار نیست).

$$AB = x, BC = ۲۸ - ۱۳ - ۲x = ۱۵ - ۲x,$$

$$AH = \frac{۱۳ - (۱۵ - ۲x)}{۲} = x - ۱, BH = \sqrt{AB^۲ - AH^۲} = \sqrt{۲x - ۱}$$

ضمن استفاده از قضیهٔ مربوط به واسطه‌ها به‌دست می‌آید :

$$S_{ABCD} = \sqrt{۲x - ۱} \times \frac{۲۸ - ۲x}{۲} = \sqrt{(۲x - ۱)(۱۴ - x)^۲} \leq$$

$$\sqrt{\left(\frac{(۲x - ۱) + (۱۴ - x) + (۱۴ - x)}{۳}\right)^۳} = \sqrt{\left(\frac{۲۷}{۳}\right)^۳} = ۲۷$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$۲x - ۱ = ۱۴ - x \Rightarrow x = ۵$$

و $AB = BC = CD = ۵$. برابری $S_{ABCD} = ۲۷/۰۰۱$ ممکن نیست.

۵۸۵. بنا به روش مصری داریم :

$$S_۱ = \frac{a + b}{۲}.c$$

که در آن، a و b بترتیب قاعده‌های پایین و بالای ذوزنقه، و c طول ساق آن است. اگر ارتفاع ذوزنقه را با h نشان دهیم، به‌دست می‌آید :

$$h = c\sqrt{۱ - (\frac{a - b}{۲c})^۲}$$

و مقدار درست مساحت ذوزنقه، چنین می‌شود :

$$S_2 = S_1\sqrt{1-(\frac{a-b}{2c})^2}$$

از آن‌جا :
$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1-(\frac{a-b}{2c})^2}$$

اکنون باید مقدارهای عددی را قرار داد و با محاسبه‌های مقدماتی، نتیجه را به‌دست آورد. که در آن، a طول قاعده و b طول ساق مثلث متساوی‌الساقین است. ارتفاع مثلث را h می‌گیریم، داریم :

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b\sqrt{1-(\frac{a}{2b})^2}$$

درنتیجه، مقدار دقیق مساحت مثلث، چنین می‌شود :

$$S_2 = \frac{1}{2}a.b\sqrt{1-(\frac{a}{2b})^2} = S_1\sqrt{1-(\frac{a}{2b})^2}$$

و از آن‌جا
$$\frac{S_2}{S_1} = \sqrt{1-(\frac{a}{2b})^2} = \sqrt{1-(\frac{4}{2\times 10})^2} = 0/98$$

یعنی، مقدار اشتباه، بیشتر از ۲٪ نیست.

۵۸۶. با استفاده از خاصیت چهار ضلعی محیطی روشن می‌شود که پاره‌خط واصل بین وسطهای دو ساق ذوزنقه برابر با ساق ذوزنقه، یعنی c، و ارتفاع ذوزنقه برابر با قطر دایرهٔ محاطی یعنی $2r$ می‌شود.

جواب : $S = 2cr$

۵۸۷. $2R^2 \sin 2\alpha \sin^2\alpha$

۵۸۸. فرض می‌کنیم ذوزنقهٔ ABCD بر دایرهٔ به شعاع R محیط بوده و نصف قاعده‌های BE و CF بترتیب برابر با x و y باشد. خطهای OB و OG و OC را رسم می‌کنیم ؛ داریم $\hat{BOC} = 90°$ ؛ چون این خطها نیمسازهای دو زاویهٔ مکملند، داریم :

$$BG.GC = OG^2$$

و یا
$$xy = R^2$$

$$S_{ABCD} = (x+y)\times 2R$$

چون $xy = R^2$ مقداری است ثابت، پس $x+y$ وقتی می‌نیمم است که $x = y = R$ باشد. به ازاء $x = 0$ داریم $y = \infty$ و برعکس، سطح ذوزنقه می‌نیمم است و مقدار می‌نیمم آن $4R^2$ است و این مقدار، مساحت مربع محاط در دایره است.

۲.۵.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۵۸۹. $\frac{|b-a|}{۴}\sqrt{۴d^۲-(b-a)^۲}$

۵۹۰. چون EF بر CO (O نقطهٔ برخوردقطرهاست) عموداست، و شرطهای مسأله ایجاب می‌کندکه AC نیمساز زاویهٔ ۶۰درجهٔ A است،داریم : $AE = AF = EF$. اگر K وسط EF باشد، آن وقت $AO = ۲a\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ، $CO = a\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $CK.OK = EK^۲ = \frac{۱}{۳}AK^۲$

جواب : $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و $۲a^۲\sqrt{۳}$

۲.۵.۲.۸.۲. نسبت مساحتها

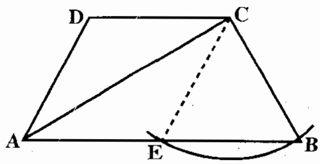
۵۹۱. $\frac{\pi}{۲\sin^۲\alpha\sin ۲\beta}$

۲.۵.۲.۹. رابطه‌های متری

۲.۵.۲.۹.۱. رابطه‌های متری در ذوزنقه

۵۹۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را در نظر گرفته، می‌خواهیم ثابت کنیم که :

$$AB.DC = AC^۲ - BC^۲$$



برای این کار CE را موازی با DA رسم می‌کنیم در متوازی‌الاضلاع ADCE داریم : $AE = DC$ و $CE = AD = CB$ ، بنابراین هرگاه دایرهٔ به مرکز c و به شعاع CE یا CB را در نظر بگیریم، داریم : $AB \times AE = d^۲ - r^۲$ که در آن $r = CB$ شعاع دایره و $d = AC$ فاصلهٔ A از مرکز دایره است.

پس $AB . AE = AC^۲ - CB^۲$ و یا $AB . DC = AC^۲ - CB^۲$. همین نتیجه را می‌توان به سهولت از رابطهٔ بطلمیوس به‌دست آورد.

۵۹۳. A، B، C و D را رأسهای ذوزنقهٔ داده شده و $|AD| = |BC|$ می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، برای هر نقطهٔ O، داریم :

$$|OA| + |OB| + |OC| > |OD|$$

در واقع $|OA| + |OB| \geq |AB|$ و $|AB| = |CD|$. از طرف دیگر $|OC| + |CD| \geq |CD|$ در ضمن، یکی از نابرابریها، اکید است. بقیهٔ حالتها هم، با روشی مشابه ثابت می‌شوند.

۲.۵.۲.۹.۲. رابطه‌های متری در ذوزنقه و دایره

۵۹۴. چون مرکز دایرهٔ محاطی محل برخورد نیمسازها می‌باشد و زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ با هم و $\hat{D}$ و $\hat{C}$ با هم برابر می‌باشند، نصفهای آنها نیز با هم برابرند ؛ درنتیجه چهار مثلث پنج‌ضلعی OHABH′ با هم برابرند، همچنین چهار مثلث دیگر برابرند ؛ پس قطعه‌های HA ، AK، KB و BH′ با هم و قطعات H′C ، CK′ ، K′D و DH با هم برابرند. مثلث AOD چون دو ضلع آن نیمسازهای دو زاویهٔ متقابل داخلی هستند، قائم‌الزاویه است و می‌توانیم رابطهٔ زیر را بنویسیم :

$$OH^{۲} = HA.HD$$

اگر طرفین این رابطه را در چهار ضرب کنیم و به‌جای ۲AH مساویش AB و به‌جای ۲DH مساویش DC را قرار دهیم، حکم ثابت می‌شود.

$$AB.CD = (۲R)^{۲} = ۴R^{۲}$$

۲.۵.۲.۱۰. ثابت کنید چهارضلعی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است

۵۹۵. از تشابه مثلثهای داده شده، برابری زاویه‌های $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$ نتیجه می‌شود ؛ پس ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۵۹۶. روی خط راست AD، پاره‌خط راست DE را برابر قاعدهٔ BC جدا کنید.

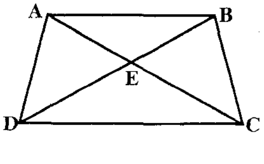
۲.۵.۲.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۹۷. سه جفت مثلثهای متشابه عبارتند از :

الف) ADE و EBC

ب) ABE و CDE

ج) BCD و ADC



۵۹۹. نقطه‌های تماس دایره با دو قاعده، وسطهای دو قاعده‌اند : زیرا به‌عنوان مثال OA و OB نیمسازهای زاویه‌های A و B از ذوزنقه می‌باشند و چون $\hat{A}=\hat{B}$ ؛ پس $\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{B}}{۲}$ و مثلث OAB متساوی‌الساقین است و ارتفاع OH عمودمنصف AB است و به همین دلیل داریم : $\frac{AB}{CD}=\frac{AI}{IC}$ ؛ پس $\frac{AI}{IC}=\frac{AE}{ED}$ ، درنتیجه $IE \| CD$ و همین‌طور $IF \| DC$.
پس سه نقطه بر یک استقامتند.

۶۰۰. لازم و کافی است نشان دهیم که قطرهای چهارضلعی MPNQ با هم مساوی است و یا $MN=\frac{a+b}{۲}$. از طرف دیگر ارتفاع PQ ذوزنقهٔ داده شده چنین است.

$$PQ^{۲}=a^{۲}-(\frac{a-b}{۲})^{۲}$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$\frac{(a+b)^{۲}}{۲}=c^{۲}-\frac{(a-b)^{۲}}{۴} \quad \text{و یا} \quad a^{۲}+b^{۲}=۲c^{۲}$$

c ضلع مربعی است که قطرهای آن وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلعهای زاویهٔ قائم آن a و b است.

۱۲.۲.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۶۰۱. ۱. زاویهٔ $B\hat{A}C=۳۰^\circ$ و زاویهٔ $A\hat{B}C=B\hat{A}D=۶۰^\circ$ و AC نیمساز زاویهٔ DAB است. زاویه‌های منفرجهٔ ذوزنقه ۱۲۰ درجه است.
۲. از مثلث ACD با نوشتن رابطهٔ سینوسها، رابطهٔ موردنظر ثابت می‌شود.
۳. مثلث OCD متساوی‌الاضلاع و $DC=BC$ است.

۳.۵.۲. رابطه‌های متری در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۲.۳.۵.۲. زاویه

۱.۲.۳.۵.۲. اندازهٔ زاویه

۶۰۲.فرض کنید $AD = a$ و $BC = b$. از O، عمود OK را بر AB رسم کنید. اکنون، داریم :

$$BK=\sqrt{ab}\frac{b}{b+a}\text{، } BE=\sqrt{ab}\frac{b}{a-b}\text{، } MK=\frac{\sqrt{ab}}{۲}-\sqrt{ab}\frac{b}{b+a}=\sqrt{ab}\frac{a-b}{۲(a+b)}\text{،}$$

$EK = BE + BK = \sqrt{ab} - \frac{۲ab}{(a-b)(a+b)}$ و $OK = \frac{ab}{a+b}$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $OK^۲ = EK.MK$.

جواب : ۹۰°.

۳.۳.۵.۲. ضلع

۱.۳.۳.۵.۲. اندازهٔ ضلع

۶۰۳. داریم :

$$BC^۲ = CH^۲ + BH^۲$$
$$BC^۲ = ۱۴۴ + ۲۵$$
$$BC^۲ = ۱۶۹$$
$$BC = ۱۳$$

۶۰۴. با امتداد دادن ضلعهای ناموازی ذوزنقه تا نقطهٔ برخورد آنها، سه مثلث متشابه به‌دست می‌آوریم. نسبت تشابه مثلث میانی و مثلث بزرگتر، و مثلث کوچکتر و مثلث میانی یکی است. این نسبت را با λ ، طول قاعدهٔ بزرگتر را با x و شعاع دایرهٔ محاطی بزرگتر را با R نشان می‌دهیم. در این صورت، طول پاره‌خطهای موازی با قاعدهٔ بزرگتر، بترتیب، برابرند با λx و $\lambda^۲ x$ ، طول بزرگترین ساق ذوزنقهٔ پایینی، برابر با $۲R\frac{d}{c}$ و شعاع دایرهٔ محاطی دوم، برابر با λR است، بنابراین، $R + \lambda R = \frac{c}{۲}$. بنابر ویژگی چهارضلعی

محیطی، $x+\lambda x=2R+2R\frac{d}{c}$ و بالاخره، با وارد کردن عمودی از انتهای قاعدهٔ کوچکتر ذوزنقهٔ اصلی بر قاعدهٔ بزرگتر، مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساقهای c و $x-\lambda^2x$ و وتر d به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب، به دستگاه معادله‌های

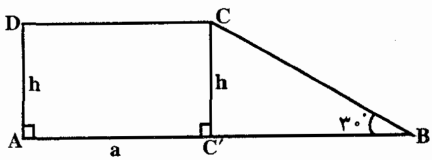
$$\begin{cases} x(1+\lambda)=2R\dfrac{c+d}{c} \\ x(1-\lambda^2)=\sqrt{d^2-c^2} \\ R(1+\lambda)=\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

می‌رسیم، که از آن‌جا $\lambda=\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c}$.

جواب: قاعده‌ها برابرند با $\frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{c}$ و $\frac{d+\sqrt{d^2-c^2}}{c}$.

۶۰۵. ارتفاع CC' را رسم می‌کنیم. $CC'=AD=h$ است. از آن‌جا:

$BC=2h, BC'=h\sqrt{3}, DC=AC'=a-h\sqrt{3}$

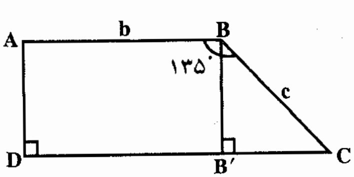


۶۰۶. ۲cm

۶۰۷. $\frac{ac}{a+b}$ ، $\frac{ab}{a+b}$ ، $\frac{bc}{a+b}$

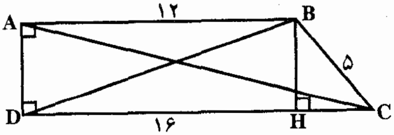
۶۰۸. ارتفاع BB' را رسم می‌کنیم. مثلث $BB'C$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است که وتر آن $BC=c$ است. پس $AD=BB'=B'C=\frac{c}{\sqrt{2}}=\frac{c\sqrt{2}}{2}$.

از آن‌جا: $DC=b+\frac{c\sqrt{2}}{2}$



۴.۳.۵.۲. قطر

۱.۴.۳.۵.۲. اندازهٔ قطر



۶۰۹. قطرهای BD و AC و ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. داریم :

$$CH = ۱۶ - ۱۲ = ۴\ , BC = ۵ \Rightarrow BH = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳ \Rightarrow AD = ۳\text{cm}$$

$$\Delta ABD: BD = \sqrt{AB^۲ + AD^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۹} = \sqrt{۱۵۳} = ۳\sqrt{۱۷}\text{cm}$$

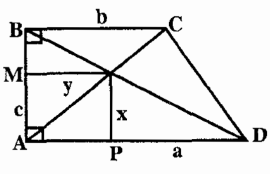
$$\Delta ADC: AC = \sqrt{AD^۲ + DC^۲} = \sqrt{۹ + ۲۵۶} = \sqrt{۲۶۵}\text{cm}$$

۵.۳.۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۳.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۶۱۰. باید فاصله‌های $NP = x$ ، نقطهٔ N از AD، و $NM = y$ ، نقطهٔ N از AB را به‌دست آورد. از تشابه دو مثلث AMN و ABC داریم :

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad \text{یا} \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{c}$$



و از تشابه دو مثلث NPD و BAD داریم : $\frac{NP}{BA} = \frac{PD}{AD}$ یا $\frac{x}{c} = \frac{a - y}{a}$

با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، خواهیم داشت : $x = \frac{ac}{a+b}\ , y = \frac{ab}{a+b}$

۲.۵.۳.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۶۱۱. ۱/۵

۲.۵.۳.۵.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶۱۲. فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد BQ و CD، O مرکز دایره و R شعاع آن باشد. توجه کنید که : $N\hat{B}C = \frac{1}{2}P\hat{M}Q$ (اگر Q بر پاره‌خط NB قرار گیرد، آن‌وقت $N\hat{B}C = 90^\circ - Q\hat{B}P = 90^\circ - \frac{1}{2}Q\hat{O}P = \frac{1}{2}P\hat{M}Q$.)

بنابراین، مثلثهای NBC و POM متشابه‌اند و

$$CN = BC\frac{R}{PM} = R\frac{PO}{PM} = R\frac{BP}{AB} = \frac{1}{2}BP = \frac{1}{2}CD$$

۲.۵.۳.۶. شعاع دایره

۲.۵.۳.۶.۱. اندازهٔ شعاع دایره

۶۱۴. داریم :

$$BH = AD = 2\,,\, HC = 3-2 = 1$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۲.۵.۳.۷. محیط

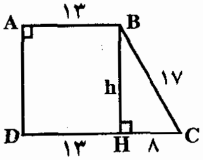
۲.۵.۳.۷.۱. اندازهٔ محیط

۶۱۵. گزینهٔ (د) درست است.

۲.۵.۳.۸. مساحت

۲.۵.۳.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۲.۵.۳.۸.۱.۱. اندازهٔ مساحت ذوزنقه



۶۱۶. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC، داریم :

$$h = BH = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$

از آن‌جا :

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{1}{2}(21+13)\times 15 = 255$$

۱.۶۱۷. $\frac{۳۹\sqrt{۳}}{۸}$ سانتیمترمربع

۲. $۸\sqrt{۳}$ سانتیمترمربع

۳. $\frac{۴۵\sqrt{۳}}{۸}$ سانتیمترمربع

۶۱۸. دو مثلث OMC و OND متشابه‌اند ؛ و چون داریم $\frac{OD}{OC}=\frac{۴}{۲}=۲$، پس $\frac{ND}{OM}=۲$ و $\frac{ON}{MC}=۲$ ؛ یعنی $ND=۲OM=۲r$ و $MC=\frac{ON}{۲}=\frac{۱}{۲}r$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OND داریم : $r^۲+(۲r)^۲=۴^۲$.

و از آن‌جا : $r=\frac{۴}{\sqrt{۵}}cm$

و از طرف دیگر داریم :

$$AD=AN+ND=r+۲r=۳r=\frac{۱۲}{\sqrt{۵}}cm \text{ و } BC=\frac{۶}{\sqrt{۵}}cm$$

جواب : $MN=۲r=\frac{۸}{\sqrt{۴}}cm$ و $S=۱۴/۴cm^۲$

۶۱۹. داریم :

$$AB=۲r, CD>۲R \Rightarrow BC=\frac{۳r}{۲}$$

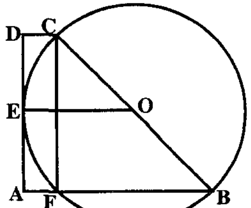
$$O\overset{\Delta}{D}N \sim O\overset{\Delta}{C}M \Rightarrow MD:ON=OM:MC \Rightarrow MD:r=r:\frac{r}{۲}$$

$$\Rightarrow ND=۲r \text{ و } AD=AN+ND=۳r$$

$$S=\frac{۹r^۲}{۲}$$

۲.۱.۸.۳.۵.۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۶۲۰. $۶۰۰۰cm^۲(a)$ ؛ $۱۰۸cm^۲(b)$.

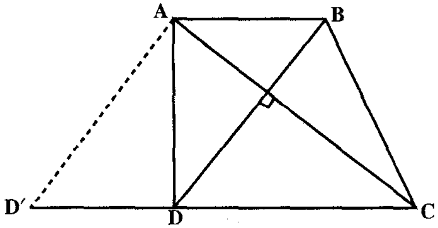


۶۲۱. منظور محاسبهٔ $S=\frac{۱}{۲}AB.DC$ (شکل) می‌باشد. زاویهٔ CFB قائمه است و بنابراین $DC=AF$ می‌شود. پس داریم :

$$AB.DC=AB.AF=AE^۲=(\frac{h}{۲})^۲$$

جواب : $S=\frac{h^۲}{۸}$

۹.۳.۵.۲. رابطه‌های متری

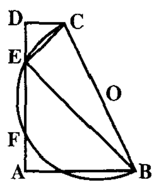


۶۲۲. اگر از نقطهٔ A خطی موازی BD رسم کنیم تا امتداد DC را در D' قطع کند، چهارضلعی $ABDD'$ چون ضلعهایش دو به دو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است و درنتیجه: $AB = DB'$ ؛ چون قطر CA بر قطر BD عمود است، بر موازیش AD' نیز عمود است و درنتیجه مثلث $AD'C$ قائم‌الزاویه‌ای است که AD ارتفاع آن است، و خواهیم داشت $AD^2 = DD'.DC$ و اگر به‌جای DD' مساویش AB را قرار دهیم، حکم ثابت می‌شود.

۶۲۳. در ذوزنقهٔ قائم ABCD، نیمدایره‌ای به قطر CB رسم می‌کنیم که AD را در E و F قطع می‌کند (شکل). می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$AE.ED = AB.DC$$

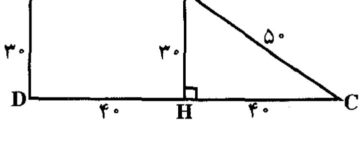
$$AF.FD = AB.DC$$



B و C را به E وصل می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE و EAB متشابه‌اند، زیرا ضلعهای زاویهٔ E بر ضلعهای زاویهٔ B عمودند؛ پس $\frac{DC}{AE} = \frac{ED}{AB}$، یا $AE.ED = AB.CD$ و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد: $AF.FD = AB.CD$.

۱۰.۳.۵.۲. ثابت کنید چهارضلعی، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است

۶۲۴. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. مثلث BHC به ضلعهای ۵۰، ۳۰ و ۴۰ است که قائم‌الزاویه است، بنابراین ذوزنقه قائم‌الزاویه است.



۱۱.۳.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

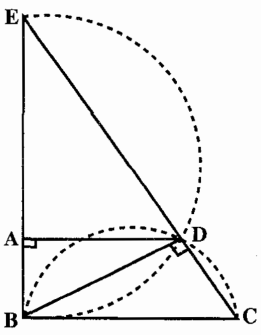
۶۲۵. نقطهٔ برخورد دو قطر را O می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC زاویهٔ $A\hat{C}D = ۳۰^\circ$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ، $A\hat{D}B = ۳۰^\circ$ می‌باشد، پس $B\hat{D}C = ۶۰^\circ$ و از آن‌جا زاویهٔ سوم مثلث ODC، ۹۰°است ؛ یعنی دو قطر AC و BD بر هم عمودند.

۱۲.۳.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۶۲۶. ۱. دو مثلث را با هم مقایسه کنید. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه.

۲. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه. برای محاسبهٔ مساحت، قاعده را BI اختیار کنید.

۶۲۷. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه را به کار بندید.
مساحت موردنظر مربوط می‌شود به محاسبهٔ بخشی از مساحت دو نیمدایره که در خارج مثلث CBE قرار دارند و مساحت یک حلقهٔ ایجاد شده بین همین دو نیمدایره با وتر مشترک BD .



۶۲۸. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ MAB و MDC می‌توان نوشت :

$$tg\alpha = \frac{AB}{AM} = \frac{a}{x}$$

و :

$$tg\beta = \frac{DC}{MD} = \frac{۴a}{۵a - x}$$

الف) پیدا کردن x وقتی $B\hat{M}C = ۹۰^\circ$ باشد، لازم و کافی است که $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$ باشد.

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{۱ - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{a}{x} - \frac{۴a}{۵a - x}}{۱ - \frac{a}{x} \times \frac{۴a}{۵a - x}}$$

$$\frac{a(۵a - x) + ۴ax}{x(۵a - x) - ۴a^۲} = \frac{a(۳x + ۵a)}{-(x^۲ - ۵ax + ۴a^۲)} = \infty$$

از آن‌جا :
$$x^{2}-5ax+4a^{2}=0\to x=a, x=4a$$

ب) تعیین x وقتی که $\beta=2\alpha$ باشد، از آن‌جا $\beta-2\alpha=0$.

$$tg(\beta-2\alpha)=\frac{tg\beta-tg2\alpha}{1+tg\beta tg2\alpha}=0\to tg\beta-tg2\alpha=0$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^{2}\alpha}=\frac{\frac{2a}{x}}{1-\frac{a^{2}}{x^{2}}}=\frac{2ax}{x^{2}-a^{2}}$$

با شرط بالا داریم :
$$\frac{4a}{5a-x}-\frac{2ax}{x^{2}-a^{2}}=0$$

۱.۶۲۹. چون بنا به فرض $AC=2AD$ است، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC ناچار $A\hat{C}D=30^\circ$ می‌شود. از طرف دیگر مجموع زاویه‌های داخلی ذوزنقه چهار قائمه است که با استفاده از فرض، زاویهٔ C مساوی 120° می‌شود ؛ لذا $A\hat{C}B=90^\circ$ خواهد شد یعنی AC بر BC عمود است.

۲. از مثلث CMB نتیجه می‌شود که $CB=CM=MB$ ، زیرا مثلث متساوی‌الساقینی است که یک زاویهٔ آن 60° است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC یکی از زاویه‌ها 30° است، لذا $AB=2CB$ و $PQ=2CB$ می‌باشد (قطر)، در چهارضلعی MAPQ دو ضلع مقابل موازی و مساوی است، لذا شکل متوازی‌الاضلاع است. چهارضلعی BMPC متوازی‌الاضلاع است، لذا $M\hat{P}C=60^\circ$ است ؛ از آن‌جا $A\hat{M}P=60^\circ$ می‌شود. چون در مثلث متساوی‌الساقین CMP یکی از زاویه‌ها 60° است ؛ لذا متساوی‌الاضلاع می‌شود $MP=BC$ و ثابت شده بود $AB=2BC$ و $MB=BC$ ؛ پس $AM=BC$ می‌شود یعنی مثلث AMP هم متساوی‌الاضلاع است، لذا $A\hat{P}M=60^\circ$ خواهد شد، در نتیجه $A\hat{P}C=120^\circ$ است. خط PF را وصل می‌کنیم چون در متوازی‌الاضلاع BMPC زاویهٔ $\hat{B}=60^\circ$ است، پس $P\hat{C}E=60^\circ$ می‌شود ؛ یعنی مثلث PCE هم متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا $C\hat{P}E=60^\circ$ خواهد شد. چون مجموع $A\hat{P}C+C\hat{P}E=180^\circ$ است، لذا سه

نقطه بر یک استقامتند. چهارضلعی CMPE لوزی است و در لوزی قطرها متعامد بوده و یکدیگر را نصف می‌کنند. درنتیجه عمودمنصف قطر PC قطر ME لوزی خواهد بود.

۳. چهارضلعی AMEK مستطیل است پس دو قطر مساوی و منصف یکدیگرند، یعنی $MK = AE$ ولی از مثلث متساوی‌الاضلاع AEB داریم $AE = BE$، پس $MK = BE$. شکل MKEB متوازی‌الاضلاع است لذا $KE = BC$ می‌شود.
چهارضلعی AMHE متوازی‌الاضلاع است، لذا $EH = BC$ پس نقطهٔ E وسط KH می‌باشد.

۴. زاویه‌های مثلث APD، ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° و زاویه‌های مثلث SAB نیز همان مقدار است، لذا متشابه‌اند.

۵. خط CM نیمساز داخلی مثلث DCB می‌شود و خط Cx عمود بر CM ناچار نیمساز خارجی آن و می‌دانیم که ضلع مقابل را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنیم، لذا $\frac{ND}{NB} = \frac{FD}{FB}$ می‌شود.

اگر $AD = a$ فرض شود از رابطهٔ $\overline{AP}^۲ = \overline{AD}^۲ + \overline{DP}^۲$ نتیجه می‌شود: $۳\overline{DP}^۲ = a^۲$ یا $DP = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$؛ پس شعاع دایره مساوی $\frac{۲a\sqrt{۳}}{۳}$ خواهد شد. از طرف دیگر $CD = CP + PD = a\sqrt{۳}$. اما مقدار نسبت مساوی است با $\frac{CD}{CB}$ یا $\frac{a\sqrt{۳} \times ۳}{۲a\sqrt{۳}}$ و یا $\frac{۳}{۲}$.

۱.۶۳۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACB داریم:

$$AC^۲ = ۲a^۲ + ۲a^۲ = ۴a^۲ \Rightarrow AC = ۲a$$

اگر از C عمود CL را بر AD فرود آوریم:

$$CL = a\sqrt{۲} \quad , DL = ۲a - a\sqrt{۲}$$

و از مثلث قائم‌الزاویهٔ DCL حاصل می‌شود:

$$\overline{DC}^۲ = ۲a^۲ + a^۲(۲ - \sqrt{۲})^۲ = ۴a^۲(۲ - \sqrt{۲})$$

پس:

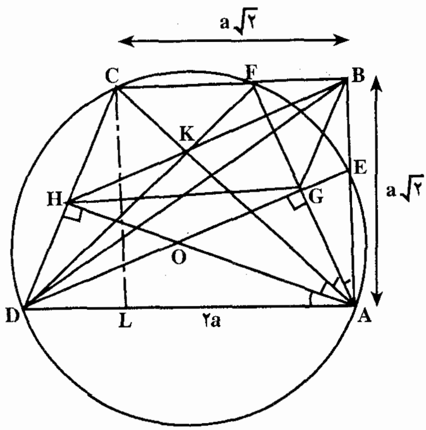
$$DC = ۲a\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

مثلث ACD متساوی‌الساقین ($AC = AD$) و زاویهٔ رأس آن CAD مساوی با ۴۵ درجه است (زیرا شکل ABCL مربع است).

پس :
$$A\hat{C}D = A\hat{D}C = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67^\circ, 30'$$

و
$$D\hat{C}B = 67^\circ, 30' + 45^\circ = 112^\circ, 30'$$

۲. چون نیمساز زاویهٔ CAB را رسم کنیم، $B\hat{A}F = 22^\circ, 30'$ و $D\hat{A}F = 67^\circ, 30'$ یعنی مساوی با زاویهٔ ADC می‌باشد، پس ذوزنقهٔ ADCF که در آن زاویه‌های مجاور به قاعده متساوی‌اند، متساوی‌الساقین و قابل محاط شدن در دایره است. در مثلث متساوی‌الساقین ACD عمود AH، نیمساز زاویهٔ CAD، و عمودمنصف CD است و به همین دلیل DG نیز عمودمنصف AF است، پس نقطهٔ تقاطع آنها مرکز دایرهٔ محیطی است. چون زاویهٔ EAD قائمه است ED قطر دایره و بر DOG منطبق است و چون DG در مثلث ADF نیمساز زاویهٔ رأس است، نقطهٔ E وسط کمان AF می‌باشد.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF قطعه‌خط BG میانهٔ وارد بر وتر است و با GA و GF و درنتیجه با CH برابر است و چون مثلث BGF متساوی‌الساقین است، $F\hat{B}G = B\hat{F}G = 67^\circ, 30'$ یعنی مکمل زاویهٔ BCH است و BG و CH متساوی‌و متوازی‌اند و چهارضلعی BCHG متوازی‌الاضلاع است و به همین استدلال BG و DH نیز متوازی و متساوی‌اند و HDGB متوازی‌الاضلاع است.

چون زاویهٔ محاطی DAC مساوی با ۴۵ درجه است، زاویهٔ مرکزی DOH نیز ۴۵ درجه بوده مثلث ODH متساوی‌الساقین است، یعنی : $OH = HD = BG$ و ذوزنقهٔ OGBH متساوی‌الساقین است.

۳. تقسیم زاویهٔ قائمه A به چهار جزء متساوی قبلاً ثابت گردید. خط HG که وسط دو ساق ذوزنقه را به هم متصل می‌سازد با AD موازی و بر AB عمود است و AF که

بر DG عمود است، بر موازی آن HB نیز عمود است. پس G نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث HAB است.

می‌دانیم که $GA = GB = GF$ و مثلث OAG نیز مانند OHD قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس $OG = GA$.

چون قطر AC با BC زاویهٔ ۴۵° می‌سازد، برای اثبات آن که FK قطر ذوزنقهٔ ABCD است، کافی است ثابت کنیم $C\hat{F}K = ۴۵^\circ$. در چهارضلعی KFBA خط AF بر KB عمود است و زاویهٔ BAK را نصف کرده است، پس عمودمنصف KB و محور تقارن شکل است، و چون زاویهٔ B قائمه است چهارضلعی AKFB محاطی است و داریم:

$$K\hat{F}C = ۱۸۰^\circ - K\hat{F}B = B\hat{A}K = ۴۵^\circ$$

دیدیم که HG بر AB عمود است و چون از وسط دو ساق ذوزنقه می‌گذرد، عمودمنصف AB است، پس نیمساز زاویهٔ رأس مثلث AHB نیز می‌باشد.

دو مثلث متساوی‌الساقین ABG و GHO متساوی‌اند، زیرا ساقهای آنها برابرند $(GA = GO)$ و زاویه‌های دو طرف قاعده در هر کدام، $۲۲^\circ\ ۳۰'$ می‌باشند.

۴. دیدیم که:
$$CK = KF = FB = DL$$

پس:
$$CK = FB = AD - AL = ۲a - a\sqrt{۲} = a(۲ - \sqrt{۲})$$

برای محاسبهٔ HK ملاحظه می‌کنیم که این قطعه‌خط میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ DKC است، پس:
$$HK = \frac{CD}{۲} = a\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$$

برای محاسبهٔ شعاع OA می‌توان ملاحظه کرد که این شعاع، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی است که DH که برابر HK است، ضلع آن می‌باشد.

پس:
$$OD = HK\sqrt{۲} = a\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$$

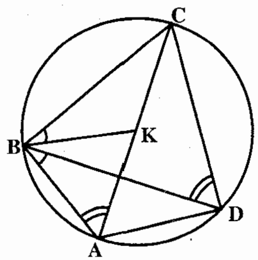
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳

رابطه‌های متری در چهارضلعیهای محاطی و محیطی

۱.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محاطی

۱.۱.۳. تعریف و قضیه

۶۳۱. باید ثابت کرد (شکل) $AB.CD + AD.BC = AC.BD$. زاویهٔ KBC را برابر زاویهٔ ABD می‌سازیم. دو مثلث ABK و BCD متشابه‌اند، زیرا دو زاویهٔ ABK و DBC با هم و دو زاویهٔ BAC و BDC با هم برابرند ؛ درنتیجه $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{CD}$ و یا



$$AB.CD = AK.BD \qquad (۱)$$

دو مثلث ABD و KBC هم متشابه‌اند (دو زاویهٔ ABD و KBC با هم و دو زاویهٔ ADB و BCK با هم برابرند). بنابراین

$$\frac{AD}{KC} = \frac{BD}{BC}$$

و یا

$$AD.BC = KC.BD \qquad (۲)$$

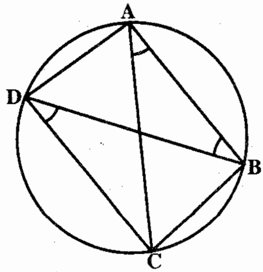
رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید :

$$AB.CD + AD.BC = (AK + KC)BD$$

و یا

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

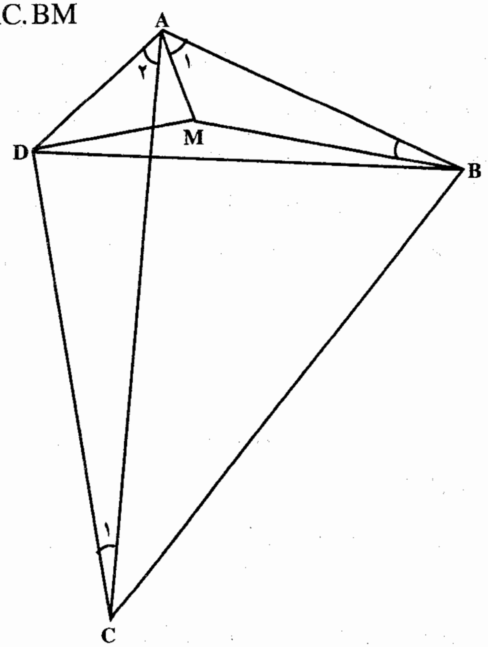


۶۳۲. چهارضلعی ABCD را که در آن رابطهٔ $AB.CD + BC.AD = AC.BD$ برقرار است درنظر می‌گیریم. بسادگی ثابت می‌شود دایره‌ای که از سه رأس A، B و C می‌گذرد، از رأس چهارم این چهارضلعی نیز می‌گذرد، به عنوان مثال می‌توان ثابت کرد که $B\hat{A}C = B\hat{D}C$ است.

۶۳۳. چهارضلعی ABCD را در نظر می‌گیریم و در این چهارضلعی، زاویهٔ A_1 را برابر با زاویهٔ A_2 و زاویهٔ B_1 را برابر با زاویهٔ C_1 جدا می‌کنیم که از برخورد ضلعهای غیرمشترک این دو زاویه، نقطهٔ M به‌دست آمده است. از تشابه دو مثلث AMB و ADC نتیجه می‌شود:

$$\frac{BM}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AD} \qquad (۱)$$

$$AB.DC = AC.BM \qquad (۲)$$



دو مثلث AMD و ABC در حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویهٔ بین آن دو ضلع متشابه‌اند و خواهیم داشت:

$$BC.AD = AC.MD \qquad (۳)$$

از جمع دو طرف تساویهای (۲) و (۳) به‌دست می‌آید :

$$AB.DC + BC.AD = AC(MB + MD) \quad (۴)$$

اگر چهارضلعی محاطی باشد زاویهٔ ABD با زاویهٔ C_1 برابر بوده و M روی DB واقع می‌شود و رابطهٔ (۴) چنین می‌شود :

$$AB.DC + BC.AD = AC.BD \quad (۵)$$

اگر چهارضلعی محاطی نباشد $MB + MD > DB$ و از رابطهٔ (۴) نتیجه می‌شود :

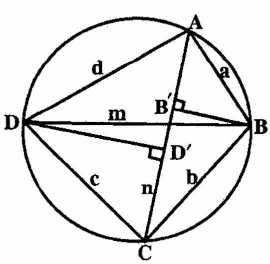
$$AB.DC + BC.AD > AC.BD \quad (۶)$$

در هر چهارضلعی، $AB.DC + BC.AD \ge AC.BD$

عکس قضیهٔ بطلمیوس. هرگاه در چهارضلعی ABCD رابطهٔ (۵) برقرار باشد چهارضلعی محاطی است، زیرا اگر چهارضلعی محاطی نباشد، رابطهٔ (۶) برقرار خواهد بود که خلاف فرض است.

بعد از این روش مقدماتی، بهترین روش اثبات قضیهٔ بطلمیوس و عکس و تعمیم آن با انعکاس انجام می‌گیرد.

۶۳۴. می‌دانیم که در هر مثلث حاصلضرب اندازه‌های هر دو ضلع برابر است با حاصلضرب اندازهٔ ارتفاع وارد بر ضلع سوم و قطر دایرهٔ محیطی آن مثلث. ارتفاعهای BB' و DD' از مثلثهای ABC و ADC را رسم می‌کنیم. در این مثلثها داریم :



$$ab = ۲R.BB' \quad (۱)$$

$$cd = ۲R.DD' \quad (۲)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم :

$$ab + cd = ۲R(BB' + DD') \quad (۳)$$

حال اگر نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی را O بنامیم، داریم :

$$BB' = OB\cos\theta,$$

$$DD' = OD\cos\theta \Rightarrow BB' + DD' = \cos\theta(OB + OD)$$

$$\Rightarrow BB' + DD' = DB.\cos\theta \quad (۴)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) با توجه به فرض $DB = m$ نتیجه می‌شود :

$$ab + cd = ۲R.DB\cos\theta \Rightarrow ab + cd = ۲R.m.\cos\theta \quad (۵)$$

به روش مشابه با رسم ارتفاعهای AA' و CC' از مثلثهای ABD و CBD رابطهٔ $ad + bc = ۲nR\cos\theta$ (۶) نتیجه می‌شود.

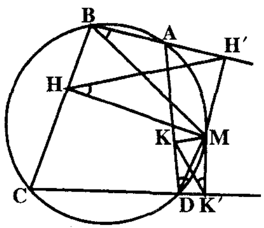
از تقسیم کردن رابطه‌های (۵) و (۶) داریم:

$$\frac{n}{m} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \quad \text{و یا} \quad \frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{ab+bc}$$

و یا

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB.BC + CD.DA}{AB.AD + BC.CD}$$

۶۳۵. راه اول. چهارضلعی ABCD در دایره محاط است (شکل). می‌خواهیم ثابت کنیم:

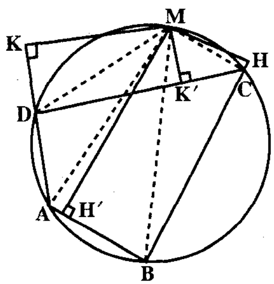


$$MH.MK = MH'.MK'$$

دو مثلث MKK' و MHH' متشابه‌اند؛ زیرا از چهارضلعی محاطی $MKD'K'$ نتیجه می‌گیریم که $\hat{D} = \hat{K'}$ و همچنین از چهارضلعی محاطی $MHBH'$ نتیجه می‌شود $\hat{B} = \hat{H}$ و چون $\hat{D}$ با $\hat{B}$ برابر است، پس $\hat{H} = \hat{K'}$. به همین‌ترتیب ثابت می‌شود که زاویهٔ $M\hat{K}K'$ با زاویهٔ $H\hat{H'}M$ برابر است. از تشابه دو مثلث نتیجه می‌شود: $\frac{MH}{MK'} = \frac{MH'}{MK}$ یا

$MH.MK = MH'.MK'$.

راه دوم. می‌دانیم در هر مثلث حاصلضرب دو ضلع برابر است با حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی در ارتفاع وارد بر ضلع سوم. این قضیه را در مورد مثلثهای MAB، MBC، MCD و MDA (شکل) به‌کار می‌بریم:



$$MA.MB = ۲R \times MH';$$
$$MB.MC = ۲R \times MH;$$
$$MC.MD = ۲R \times MK';$$
$$MD.MA = ۲R \times MK$$

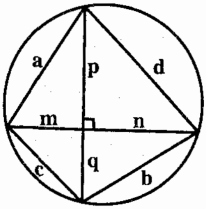
و از آن‌جا:

$$MA.MB.MC.MD = ۴R^۲ \times MH' \times MK' = ۴R^۲ \times MH \times MK$$

یا:

$$MH' \times MK' = MH \times MK$$

۶۳۶. باید ثابت کنیم:



$$a^{2}+b^{2}=D^{2}, c^{2}+d^{2}=D^{2}$$

D را قطر چهارضلعی محیطی در نظر گرفته‌ایم.

حتی در قدیم، ارشمیدس هم، از این رابطه آگاه بود. $m^{2}+n^{2}+p^{2}+q^{2}=D^{2}$
(این رابطه را، خودتان ثابت کنید.)

از طرف دیگر، بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم: $m^{2}+p^{2}=a^{2}, n^{2}+q^{2}=b^{2}$

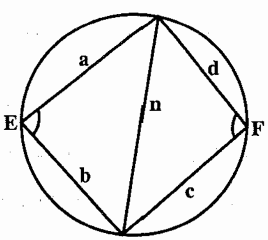
بنابراین: $a^{2}+b^{2}=D^{2}$

به همین ترتیب: $m^{2}+q^{2}=c^{2}, a^{2}+p^{2}=d^{2}$

و بنابراین: $c^{2}+d^{2}=D^{2}$

۶۳۷. یک روش سادهٔ اثبات این دستور استفاده از مثلثات است. هرگاه E رأس مشترک ضلعهای a و b، و f رأس مشترک ضلعهای c و d، و n طول قطری باشد که دو رأس دیگر را به هم وصل می‌کند (شکل)، از $E+F=\pi$ برمی‌آید که:

$$\sin\hat{E}=\sin\hat{F}, \cos\hat{E}=-\cos\hat{F}$$



اما داریم:
$$n^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos\hat{E}$$
$$n^{2}=c^{2}+d^{2}-2cd\cos\hat{F}$$

پس خواهیم داشت:
$$a^{2}+b^{2}-2ab\cos\hat{E}=c^{2}+d^{2}+2cd\cos\hat{E}$$

$$2(ab+cd)\cos\hat{E}=a^{2}+b^{2}-c^{2}-d^{2} \qquad (1)$$

از طرف دیگر برای مساحت چهار گوشه داریم:

$$K=\frac{1}{2}ab\sin\hat{E}+\frac{1}{2}cd\sin\hat{F}=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\hat{E}$$

$$2(ab+cd)\sin\hat{E}=4k \qquad (2)$$

دو طرف هر یک از تساویهای (۱) و (۲) را به توان دو رسانده و بعد نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم، به دست می‌آید: $۴(ab+cd)^۲ = (a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲+۱۶k^۲$

$$۱۶k^۲ = (۲ab+۲cd)^۲-(a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)^۲$$

$$۱۶k^۲ = (۲ab+۲cd+a^۲+b^۲-c^۲-d^۲)$$

$$\times(۲ab+۲cd-a^۲-b^۲+c^۲+d^۲)$$

$$=\left[(a+b)^۲-(c-d)^۲(c+d)^۲-(a-b)^۲\right]$$

$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

با توجه به این که $۲s=a+b+c+d$ ، خواهیم داشت:

$$۱۶k^۲ = (۲s-۲d)(۲s-۲c)(۲s-۲b)(۲s-۲a)$$

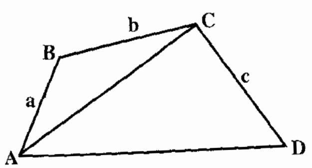
$$k^۲ = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

هرگاه در این دستور $d=۰$ اختیار شود، دستور هرون مربوط به مساحت مثلث به‌دست می‌آید:

$$[S(ABC)]^۲ = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

هر چند که این دستور به هرون اسکندرانی (سال ۶۰ میلادی) منسوب است اما به گمان وان درویردن، متعلق به ارشمیدس (قرن سوم پیش از میلاد) می‌باشد.

۶۳۸. اگر فرض کنیم که چهارضلعی ABCD چهارضلعی ماکزیمم باشد، در این صورت قطر AC باید بر ضلع CD عمود شود، زیرا اگر چنین نباشد، می‌توان قطعه‌های ABC و ACD را با عمود کردن CD بر AC بنا کرد، که سطح افزوده می‌شود، و بنابراین برخلاف فرض، چهارضلعی داده شده ماکزیمم نمی‌شود، زیرا ABC در هر دو شکل مشترک خواهد بود؛ ولی مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD در شکل دوم از شکل ACD که زاویهٔ C آن قائمه نیست، بزرگتر است. به همین دلیل ثابت می‌شود که قطر BD نیز بایستی بر AB عمود باشد یعنی، AD قطر دایره‌ای خواهد بود که چهارضلعی در آن محاط است. البته مسأله قابل ترسیم هندسی نیست زیرا معادلهٔ آن از درجهٔ سوم است. اگر فرض کنیم که $AD=۲R$ مجهول مسأله باشد، لازم است که $b\times ۲R+ac=BD\times AC$ باشد ولی:



$$BD=\sqrt{۴R^۲-a^۲}, AC=\sqrt{۴R^۲-c^۲}$$

پس:

$$(۲bR+ac)^۲=(۴R^۲-a^۲)(۴R^۲-c^۲)$$

و یا : $۴R^۳-(a^۲+c^۲+b^۲)R-abc=۰$

و قابل حل نیست. اگر $a=c$ باشد در این صورت معادله به صورت :

$$۴R^۳-(۲a^۲+b^۲)R-a^۲b=۰$$

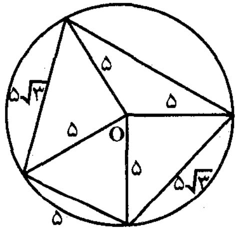
یا $(۲bR+a^۲)^۲=(۴R^۲-a^۲)^۲$ به معادلهٔ درجهٔ دوم : $۲R^۲-bR-a^۲=۰$

تبدیل می‌شود که قابل حل است یعنی یک جواب غیرقابل‌قبول معادلهٔ درجهٔ سوم $R=-\frac{b}{۲}$ است.

همچنین است اگر $a=b$ باشد. حل این حالت دوم با طریقهٔ جبری بسی مشکلتر از حالت قبل است در صورتی که با به کار بستن قضیهٔ نیوتن هر دو مانند هم حل می‌شوند.

۲.۱.۳. زاویه

۱.۲.۱.۳. اندازهٔ زاویه



۶۳۹. نقطهٔ O مرکز دایره را به رأسهای A، B، C و D وصل می‌کنیم. در مثلثهای AOB، BOC و COD داریم :

$$\cos A\hat{O}B=\frac{۲۵+۲۵-۵۰}{۲\times۵\times۵}=۰\Rightarrow A\hat{O}B=۹۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$$

$$\cos B\hat{O}C=\frac{۲۵+۲۵-۲۵}{۲\times۵\times۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow B\hat{O}C=۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۶۰^\circ$$

$$\cos C\hat{O}D=\frac{۲۵+۲۵-۵۰}{۲\times۵\times۵}=۰\Rightarrow C\hat{O}D=۹۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۹۰^\circ$$

در نتیجه اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AD}$ برابر است با : $\overset{\frown}{AD}=۳۶۰^\circ-(۹۰^\circ+۶۰^\circ+۹۰^\circ)=۱۲۰^\circ$

اکنون زاویه‌های چهارضلعی را محاسبه می‌کنیم :

$$D\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲}=\frac{۶۰^\circ+۹۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

$$A\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}=\frac{۹۰^\circ+۱۲۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$$

$$B\hat{C}D=\frac{\overset{\frown}{DAB}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ+۹۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ$$

$$A\hat{D}C=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{۲}=\frac{۹۰^\circ+۶۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$$

نکته. برای محاسبهٔ زاویه‌های $B\hat{C}D$ و $A\hat{D}C$ می‌توان از مکملهای آنها استفاده کرد.

۳.۱.۳. ضلع

۱.۳.۱.۳. اندازهٔ ضلع

۶۴۰. اگر ضلعهای متوالی چهارضلعی را a، b، c و d و دو قطر آن را m و n فرض کنیم، داریم:

$$a.c = b.d = m.n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{ab+cd}{ac+bd}$$

(بنا به قضیهٔ بطلمیوس)

از آن‌جا اندازهٔ دو ضلع دیگر چهارضلعی محاسبه می‌شود.

۶۴۱. اگر O وسط AC باشد، آن‌گاه

$$AB^۲ = BO^۲ + AO^۲ = BK^۲ - KO^۲ + AO^۲$$

$$= BK^۲ + (AO - AK)(AO + AK) = BK^۲ + AK.CK = b^۲ + bd$$

جواب: $\sqrt{b^۲ + bd}$.

۶۴۲. بنا به قضیهٔ بطلمیوس می‌توان نوشت: $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

و

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB.AD + CB.CD}{BA.BC + DA.DC}$$

با فرض $AB = a$، $AD = ۲a$، $BC = c$، $CD = ۲c$ و $AC = b$ رابطه‌های بالا چنین نوشته می‌شود.

$$b.BD = ۴ca$$

$$\frac{b}{BD} = \frac{۲(a^۲ + c^۲)}{۵ac}$$

از آن‌جا

$$b^۲ = \frac{۸(a^۲ + c^۲)}{۵}$$

درنتیجه

$$c^۲ = \frac{۵b^۲ - ۸a^۲}{۸}$$

از طرفی شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD مساوی است با شعاع دایرهٔ محیطی

مثلث ABC. داریم :

$$a = R = \frac{abc}{۴S} \to ۴S = bc$$

$$۴S = \sqrt{۲a^۲b^۲ + ۲b^۲c^۲ + ۲c^۲a^۲ - a^۴ - b^۴ - c^۴}$$

بنابراین

$$bc = \sqrt{۲a^۲b^۲ + ۲b^۲c^۲ + ۲c^۲a^۲ - a^۴ - b^۴ - c^۴}$$

طرفین را مجذور کرده و مقدار $c^۲$ را به جایش قرار می‌دهیم، داریم :

$$b^۲ = \frac{۱۶a^۲}{۷}$$

در نتیجه :

$$c^۲ = \frac{۳a^۲}{۷}$$

۳. ۱. ۴. قطر

۳. ۱. ۴. ۱. اندازهٔ قطر

۶۴۳. طول قطرهای چهارضلعی را m و n فرض می‌کنیم. داریم :

$$m.n = ۳\times۴ + ۵\times۲ \Rightarrow m.n = ۲۲ \qquad (۱)$$

$$\frac{m}{n} = \frac{AB.AD + BC.CD}{AB.BC + CD.DA} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{۶ + ۲۰}{۱۵ + ۸} = \frac{۲۶}{۲۳}$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{\frac{۵۷۲}{۲۳}} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{۲۵۳}{۱۱}}$$

۶۴۴. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا مطابق شکل، دایرهٔ محیطی چهار ضلعی ABCD دایرهٔ محیطی هر یک از مثلثهای BAD، BCD، ABC و ADC نیز هست. ۲R = قطر دایرهٔ محیطی هر مثلث برابر است با طول هر ضلع تقسیم بر سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع. مثلثهای BAD و BCD در ضلع BD مشترکند و زاویه‌های A و C روبه‌رو به BD، زاویه‌های روبه‌روی چهارضلعی محاطی می‌باشند، بنابراین :

$$\cos\hat{C} = -\cos\hat{A} \quad , \quad \hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

بنابر قانون کسینوسها

$$BD^۲ = AB^۲ + AD^۲ - ۲AB.AD\cos\hat{A} \qquad (۱)$$

$$= CB^۲ + CD^۲ - ۲CB.CD\cos\hat{C}$$

در نتیجه $AB^۲ + AD^۲ - ۲AB.AD\cos\hat{A} = CB^۲ + CD^۲ + ۲CB.CD\cos\hat{A}$

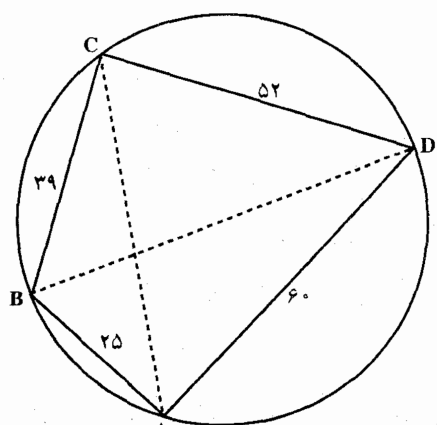
و از آن جا
$$\cos\hat{A} = \frac{CB^۲ + CD^۲ - AB^۲ - AD^۲}{۲(CB.CD + AB.AD)} \qquad (۲)$$

$\cos\hat{A}$ که از این رابطه حساب شود، BD را هم از (۱) به‌دست می‌آوریم و بنابراین می‌توانیم $۲R = BD/\sin\hat{A} = BD/\sqrt{۱-\cos^۲ A}$ را محاسبه کنیم. این روش کلی را می‌توان به همین ترتیب برای مثلثهای ABC و ADC با ضلع مشترک AC به کار برد و به‌دست آورد:

$$\cos\hat{D} = \frac{DA^۲ + DC^۲ - BA^۲ - BC^۲}{۲(DA.DC + BA.BC)} \quad (۳)$$

طولهای مفروض در مسأله طوری هستند که یک خوانندهٔ باهوش می‌تواند راه میانبر مناسبی را برای این رابطه‌ها کشف کند.

$$BC = ۳۹ = ۳\times۱۳ \quad , \quad CD = ۵۲ = ۴\times۱۳$$
$$AB = ۲۵ = ۵\times۵ \quad , \quad DA = ۶۰ = ۱۲\times۵$$
$$BC^۲ + CD^۲ = ۱۳^۲(۳^۲ + ۴^۲) = ۱۳^۲ \times ۵^۲$$
$$AB^۲ + DA^۲ = ۵^۲(۵^۲ + ۱۲^۲) = ۵^۲ \times ۱۳^۲$$



بنابراین: $BC^۲ + CD^۲ = AB^۲ + DA^۲$

که می‌رساند مثلثهای BAD و BCD قائم‌الزاویه هستند با وتر مشترک BD به طول $BD = \sqrt{۵^۲ \times ۱۳^۲} = ۶۵$ و $BD = ۲R$ قطر دایرهٔ مطلوب است. اگر داده‌های مسأله

را در رابطهٔ (۲) بگذاریم، درمی‌یابیم که $\cos\hat{A}=۰$ و نتیجه می‌گیریم $\hat{A}=\hat{C}=۹۰^\circ$، پس $BD=۲R$، از طرف دیگر، با استفاده از رابطهٔ (۳) داریم:

$$\cos\hat{D}=\frac{۶۰^۲+۵۲^۲-۲۵^۲-۳۹^۲}{۲(۶۰\times۵۲+۲۵\times۳۹)}=\frac{۵^۲(۱۲^۲-۵^۲)+۱۳^۲(۴^۲-۳^۲)}{۲\times۵\times۱۳(۶۳)}$$

$$=\frac{۵^۲\times۷\times۱۷+۱۳^۲\times۷}{۲\times۳^۲\times۵\times۷\times۱۳}=\frac{۳۳}{۶۵}$$

که از آن جا $AC^۲=۵۲^۲+۶۰^۲-۲\times۵۲\times۶۰\cos\hat{D}=۵۶^۲$ و مانند قبل:

$$۲R=\frac{AC}{\sin\hat{D}}=\frac{۵۶}{\sqrt{۱-(۳۳/۶۵)^۲}}=\frac{۵۶}{۵۶/۶۵}=۶۵$$

۶۴۵. $\dfrac{ac+bd}{a}$

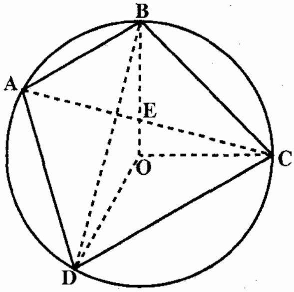
۶۴۶. طول قطرهای چهار ضلعی محاطی را x و y فرض کنید و از رابطهٔ بطلمیوس استفاده کنید.

$$xy=ac+bd \quad , \quad \frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}\Rightarrow y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

۶۴۷. $\dfrac{a\cos(\alpha+\beta)}{\cos(۲\alpha+\beta)}$ و $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{\cos(۲\alpha+\beta)}$

۶۴۸. داریم:



$AB=C_۶=R$

$BC=C_۴=R\sqrt{۲}$

$DC=C_۳=R\sqrt{۳}$

$AD=AB$

زاویهٔ $A\hat{E}B=D\hat{E}C=\dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DC}}{۲}=۹۰^\circ$، در این دو مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین می‌توان EC و EA را به‌دست آورد و از جمع آنها $AC=\dfrac{R}{۲}(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$ به‌دست می‌آید.

۵.۱.۳. پاره‌خط

۱.۵.۱.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۶۴۹. فرض کنید ABCD چهار ضلعیی محاطی باشد. AB و CD در نقطهٔ P متقاطعند، A و D، بترتیب، روی پاره‌خطهای BP و CP واقعند. BC و AD در نقطهٔ Q متقاطعند، C و D روی پاره‌خطهای BQ و AQ واقعند. دایره‌ای بر مثلث ADP محیط می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این دایره با خط راست PQ را به M نشان می‌دهیم. (ثابت کنید M بر پاره‌خط PQ قرار دارد.) داریم : $D\hat{M}Q = D\hat{A}P = B\hat{C}D$ ؛ در نتیجه، CDMQ چهارضلعیی محاطی است. بنابه فرض، چون طول مماسهای مرسوم بر دایرهٔ اصلی از نقطه‌های P و Q، بترتیب، برابر a و b است، داریم $QM.QP = QD.QA = b^۲$ و $PM.PQ = PD.PC = a^۲$. با جمع کردن این تساویها با هم، به‌دست می‌آوریم $PQ^۲ = a^۲ + b^۲$.

جواب : $\sqrt{a^۲ + b^۲}$.

۶۵۰. $\dfrac{۳۰\tan\alpha}{\sqrt{۲۵ + ۳۶\tan^۲\alpha}}$ ثابت کنید EH بر AB عمود است.

۶۵۱. $۲\sqrt{۴\tan^۲\alpha + ۳}$. ثابت کنید EM میانهٔ مثلث CED بوده و بنابرآن $EM = \frac{۱}{۲}CD$ است.

۲.۵.۱.۳. تساوی پاره‌خطها

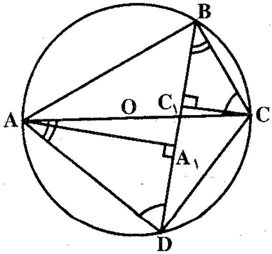
۶۵۲. بنابه قضیهٔ سینوسها داریم : $\dfrac{CN}{\sin C\hat{D}N} = \dfrac{DN}{\sin D\hat{C}N}$ و $\dfrac{CM}{\sin C\hat{B}M} = \dfrac{BM}{\sin B\hat{C}M}$

ولی بنابر شرط، همهٔ این عبارتها به روشنی برابرند و اگر توجه کنیم که :

$$\sin C\hat{B}M = \sin A\hat{B}C = \sin A\hat{D}C = \sin C\hat{D}N$$

برابری $MC = NC$ به‌دست می‌آید.

۶۵۳. با توجه به شکل داریم :



حکم : $DA_۱ = BC_۱$

$$: \ \hat{ADB} = \hat{ACB} \Rightarrow A\overset{\Delta}{A_۱}D \sim A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{A_۱D}{AD} = \frac{BC}{AC}$$

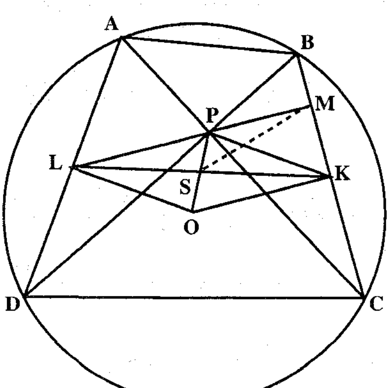
$$\Rightarrow A_۱D = \frac{AD.BC}{AC} \ ,$$

$$C\hat{A}D = C\hat{B}D \Rightarrow B\overset{\Delta}{C}C_۱ \sim A\overset{\Delta}{C}D \Rightarrow \frac{BC_۱}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow BC_۱ = \frac{AD.BC}{AC}$$

$$\Rightarrow DA_۱ = BC_۱$$

۶.۱.۳. شعاع دایره

۱.۶.۱.۳. اندازهٔ شعاع دایره



۶۵۶. فرض کنید ABCD چهارضلعی مفروض، P نقطهٔ برخورد قطرهای آن، K وسط BC و L وسط AD باشد (شکل). ثابت می‌کنیم که خط راست LP بر BC عمود است ؛ با نشان دادن نقطهٔ برخورد LP و BC با M، داریم :

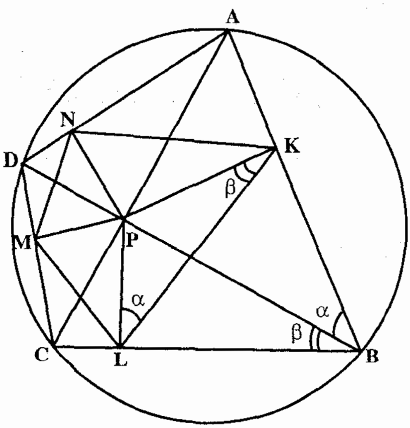
$B\hat{P}M = L\hat{P}D = A\hat{D}P = P\hat{C}B$. در نتیجه، PM بر BC عمود است بنابراین، OK با LP موازی است. به همین ترتیب، PK با LO موازی و KOLP متوازی‌الاضلاع است و

$$LK^{۲} + PO^{۲} = ۲(LP^{۲} + PK^{۲}) = ۲(\frac{AD^{۲}}{۴} + \frac{BC^{۲}}{۴}) = ۲R^{۲}$$

(اگر وترهای AD و BC به وضعیتی درآیند که یک نقطهٔ انتهایی مشترک داشته باشند و کمانهای متناظرشان به‌دنبال یکدیگر باشند، آن وقت مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ساقهای به

طول AD و BC و وتر به طول ۲R به‌وجود می‌آید، بنابراین، $AD^۲ + BC^۲ = ۴R^۲$.) در نتیجه، $LK^۲ = ۲R^۲ - d^۲$ ، و نقطه‌های L و K روی دایرهٔ با مرکز S (وسط PO) و شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - d^۲}$ ، واقعند ؛ اما LMK مثلثی قائم‌الزاویه است، MS میانهٔ آن است و $MS = \frac{۱}{۲}LK = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - d^۲}$ ، یعنی، M روی همین دایره قرار دارد.

جواب : $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - d^۲}$.



۶۵۷. فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد قطرها باشد و K، L، M و N پای عمودهای وارد از P، بترتیب، بر AB، BC ، CD و DA باشند (شکل). چون PKBL چهارضلعیی محاطی است، داریم : $P\hat{K}L = P\hat{B}C$ ، به همین ترتیب، $P\hat{K}N = P\hat{A}D$ ؛ اما، $P\hat{B}C = P\hat{A}D$ ، زیرا مقابل به یک کمانند، در نتیجه، KP نیمساز زاویهٔ NKL است ؛ بنابراین، نیمساز زاویه‌های چهارضلعی KLMN، در نقطهٔ P، که همان مرکز دایرهٔ محاطی چهارضلعی KLMN است، متقاطعند. اکنون، فرض کنید AC و BD دو به دو بر هم عمود باشند، R شعاع دایرهٔ داده شده و d فاصلهٔ P تا مرکز آن است، $r.AP.PC = R^۲ - d^۲$ ، شعاع دایرهٔ مطلوب، به‌ویژه، برابر است با فاصلهٔ P تا KL. به فرض $K\hat{L}P = A\hat{B}P = \alpha$ و $P\hat{B}C = \beta$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$r = PL\sin\alpha = PB\sin\beta\sin\alpha = PB\frac{PC}{BC}.\frac{AP}{AB}$$

$$= (R^۲ - d^۲)\frac{PB.AC}{BC.AB\sin(\alpha+\beta)}.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AC}$$

$$= (R^۲ - d^۲)\frac{۲S_{ABC}}{۲S_{ABC}}.\frac{۱}{۲R} = \frac{R^۲ - d^۲}{۲R}$$

جواب : $\frac{R^۲ - d^۲}{۲R}$.

۷.۱.۳. محیط

۱.۷.۱.۳. اندازهٔ محیط

۶۵۸. داریم :

$$DB=\sqrt{۳۶+۶۴}=۱۰$$

$$\Rightarrow DC=\sqrt{۱۰۰-۳۶}=۸$$

$$\text{محیط}=۲(۶+۸)=۲۸\text{cm}$$

۸.۱.۳. مساحت

۱.۸.۱.۳. اندازهٔ مساحت

۶۵۹. الف.

$$۲S=۱۶+۱۵+۲۳+۲۹=۸۳\Rightarrow S=\frac{۸۳}{۲}$$

$$K=\sqrt{(\frac{۸۳}{۲}-۱۶)(\frac{۸۳}{۲}-۱۵)(\frac{۸۳}{۲}-۲۳)(\frac{۸۳}{۲}-۲۹)}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{\frac{۵۱}{۲}\times\frac{۵۳}{۲}\times\frac{۳۷}{۲}\times\frac{۲۵}{۲}}=\frac{۵}{۴}\sqrt{۱۰۰۰۱۱}$$

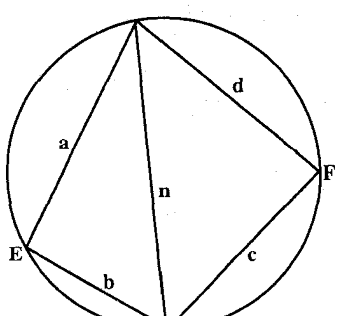
ب.

$$۲S=۴۰+۲۸+۱۵+۱۳=۹۶\Rightarrow S=۴۸$$

$$K=\sqrt{(۴۸-۴۰)(۴۸-۲۸)(۴۸-۱۵)(۴۸-۱۳)}$$

$$\Rightarrow K=\sqrt{۸\times۲۰\times۳۳\times۳۵}=۲۰\sqrt{۴۶۲}$$

۶۶۰. مساحت را یک‌بار با استفاده از شکل برای دو مثلث و افزودن آنها به هم به‌دست آورید، و بار دیگر با استفاده از همان روش اما برای دو مثلثِ قطر EF به‌دست آورید. آن گاه آنها را در هم ضرب کرده و قضیهٔ بطلمیوس را به‌کار ببرید.



۶۶۱. برای روشنی وضع، فرض کنید $\sin\alpha \geq \sin\beta$ ؛ بر امتداد AB، نقطهٔ K را طوری اختیار می‌کنیم که $B\hat{K}C=\beta$. از آن‌جا که $C\hat{B}K=A\hat{D}C$ (زیرا ABCD چهارضلعی محاطی است)، مثلث KBC با مثلث ACD متشابه می‌شود. اما، $BC \geq CD$ ، در نتیجه، $S_{BCK} \geq S_{ADC}$ و $S_{AKC} \geq S_{ABCD}$. اما، $S_{AKC}=\frac{a^{2}\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}$ ، از این‌رو، $S_{ABCD} \leq \frac{a^{2}\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{2\sin\beta}$. به همین روش، می‌توانیم ثابت کنیم که

$$S_{ABCD} \geq \frac{a^{2}\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$$

۲.۸.۱.۳. نسبت مساحتها

۶۶۲. توجه کنید که $O_1O_2O_3O_4$ متوازی‌الاضلاعی است با زاویه‌های α و $\pi-\alpha$ ($O_1O_4 \perp AC$ و $O_2O_3 \parallel AC$ ، بنابراین $O_1O_4 \parallel O_2O_3$ ، و غیره). اگر K وسط AM و L وسط MC باشد، آن‌وقت

$$O_3O_4=\frac{KL}{\sin\alpha}=\frac{AC}{2\sin\alpha}$$

به همین ترتیب، $O_2O_3=\frac{BD}{2\sin\alpha}$ ؛ در نتیجه

$$S_{O_1O_2O_3O_4}=\frac{AC.BD\sin\alpha}{4\sin^{2}\alpha}=\frac{S_{ABCD}}{2\sin^{2}\alpha}$$

جواب : $2\sin^{2}\alpha$.

۳.۸.۱.۳. رابطهٔ بین مساحتها

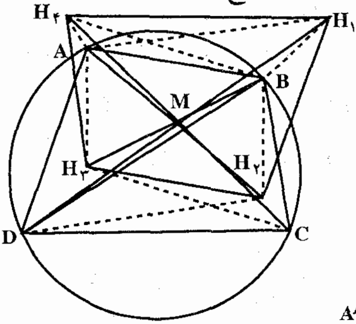
۶۶۳. ۱. چون O_1 مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC است، داریم: $B\hat{O_1}A=90^\circ+\frac{1}{2}B\hat{C}A$.

بنابراین $B\hat{O_1}A=B\hat{O_4}A$ و ABO_1O_4 چهارضلعی محاطی است (شکل الف را ببینید) ؛ در نتیجه، زاویهٔ مجاور به زاویهٔ BO_1O_4 ، برابر است با $B\hat{A}O_4=\frac{1}{2}B\hat{A}D$.

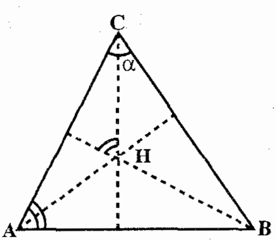
به همین ترتیب، زاویهٔ مجاور به $B\hat{O_1}O_2$ ، برابر است با $\frac{1}{2}B\hat{C}D$. اما، $\frac{1}{2}(B\hat{A}D+B\hat{C}D)=90^\circ$ ؛ بنابراین، $O_4\hat{O_1}O_2=90^\circ$.

۲. برای اثبات بخش دوم حکم، نخست، نشان دهید که فاصلهٔ هر رأس مثلث تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن را اندازهٔ زاویهٔ این رأس و طول ضلع روبه‌رو به آن، به تمامی معلوم می‌کنند، مثلاً (شکل ب): $CH = CB\dfrac{\cos\alpha}{\sin C\hat{A}B} = \dfrac{AB}{\sin\alpha}\cos\alpha = AB\cot\alpha$.

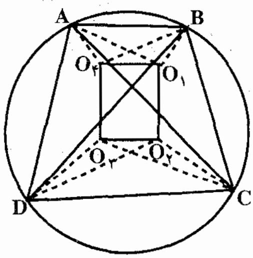
چون ABCD چهارضلعیی محاطی است، $AH_3 = BH_2$ و AH_3 با BH_2 موازی است؛ بنابراین، ABH_2H_3 متوازی‌الاضلاع است. بدین ترتیب، نقطهٔ برخورد AH_2 و BH_3، این پاره‌خطها را نصف می‌کند. با در نظر گرفتن متوازی‌الاضلاعهای دیگر، مشاهده می‌کنیم که پاره‌خطهای H_2A، H_3B، H_4C و H_1D در همان نقطه (M) متقاطعند و این نقطه، آنها را نصف می‌کند، یعنی، چهارضلعیهای ABCD، $H_1H_2H_3H_4$ نسبت به نقطهٔ M، متقارن مرکزی‌اند (شکل ج).



(ج)



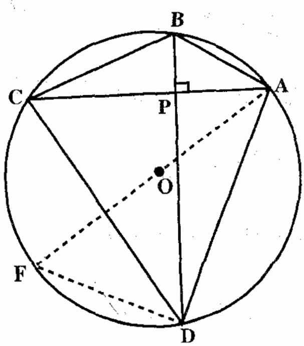
(ب)



(الف)

۹.۱.۳. رابطه‌های متری

۱.۹.۱.۳. رابطه‌های متری (برابریها)



۶۶۴. نقطهٔ تقاطع قطرها را P می‌نامیم. چون زاویه‌های حول P هر یک 90° درجه‌اند، پس برای مثال مجموع دو کمان $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BC}$ مساوی یک نیمدایره است، بنابراین هر گاه قطر AF از دایره را رسم کنیم. کمان $\overset{\frown}{DF}$ مساوی کمان $\overset{\frown}{BC}$ خواهد بود، پس وتر DF نیز مساوی وتر BC می‌باشد.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF داریم:

$$AD^2 + DF^2 = 4R^2$$

پس:

$$AD^2 + BC^2 = 4R^2$$

با همین استدلال معلوم می‌شود که BF و در نتیجه وتر این کمان بترتیب با کمان $\overset{\frown}{DC}$ و وتر آن مساوی می‌باشند. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABF نیز داریم:

$$AB^۲ + DC^۲ = ۴R^۲ \quad \text{و یا} \quad AB^۲ + BF^۲ = ۴R^۲$$

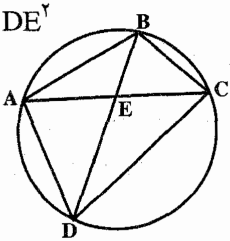
پس:

$$AB^۲ + BC^۲ + CD^۲ + DA^۲ = ۴R^۲$$

۶۶۵. فرض کنیم در چهارضلعی محاطی ABCD قطر BD از نقطهٔ E وسط BC بگذرد. حکم قضیهٔ میانه‌ها را در مورد دو مثلث ABC و ADC می‌نویسیم، حاصل می‌شود:

$$AB^۲ + BC^۲ = ۲AE^۲ + ۲BE^۲$$

$$CD^۲ + DA^۲ = ۲AE^۲ + ۲DE^۲$$



از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود:

$$AB^۲ + BC^۲ + CD^۲ + DA^۲ = ۲(۲AE^۲ + ۲BE^۲ + DE^۲)$$

اما

$$AE^۲ = BE \times ED$$

پس

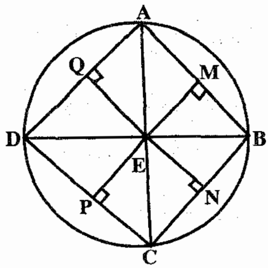
$$AB^۲ + AC^۲ + CD^۲ + DA^۲ = ۲(۲BE.ED + BE^۲ + ED^۲)$$

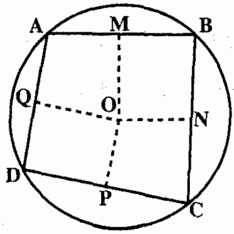
$$= ۲(BE + ED)^۲ = ۲BD^۲$$

۶۶۶. محل برخورد قطرهای چهارضلعی محاطی ABCD را E می‌نامیم و عمودهای EM، EN، EP و EQ را بترتیب بر ضلعهای AB، BC، CD و DA فرود می‌آوریم. باید ثابت کنیم:

$$\frac{OM}{OP} = \frac{AB}{CD} \quad , \quad \frac{ON}{OQ} = \frac{BC}{AD}$$

این رابطه‌ها از تشابه مثلثهای EAB و ECD ؛ EBC و EAD نتیجه می‌شود.





۶۶۷. هر یک از چهارضلعیهای OMBN و ... چون دو زاویه رو به رویشان هر یک 90° است، محاطی هستند. طبق قضیهٔ بطلمیوس می‌توانیم بنویسیم: (به جای AM مساوی آن را $\frac{AB}{2}$ و ... قرار می‌دهیم).

در OQAM: $OQ.\frac{AB}{2}+OM.\frac{AD}{2}=R.MQ$

در OMBN: $ON.\frac{AB}{2}+OM.\frac{BC}{2}=R.MN$

در ONCP: $ON.\frac{DC}{2}+OP.\frac{BC}{2}=R.PN$

در OPDQ: $OQ.\frac{DC}{2}+OP.\frac{AD}{2}=R.PQ$

طرفین چهار رابطه را در ۲ ضرب کرده و به‌جای ۲MQ مساویش DB و ... قرار می‌دهیم (زیرا خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را وصل می‌کند نصف ضلع سوم است).

بعد طرفین چهار رابطه را جمع کرده فاکتورگیریهای لازم را انجام می‌دهیم؛ حکم ثابت می‌شود.

۶۶۸. در چهارضلعی محاطی OQAM، قضیهٔ بطلمیوس را نوشته به‌جای AM مساویش $\frac{AB}{2}$ و ... را قرار می‌دهیم: $\frac{AB}{2}.OQ+\frac{AD}{2}.OM=R.MQ=R.\frac{BD}{2}$

همچنین در چهارضلعی محاطی ONCP

$$\frac{BC}{2}.OP+\frac{CD}{2}.ON=R.PN=R.\frac{BD}{2}$$

اگر طرفین دو رابطه را در ۲ ضرب کنیم، چون طرف دومشان مساوی است، طرف اوّلشان نیز مساوی می‌شود و در نتیجه حکم ثابت می‌شود.
برای رابطهٔ دوم دو چهارضلعی دیگر را در نظر می‌گیریم و اثبات به همین ترتیب است.

۶۶۹. در مثلث MAD (شکل) داریم: (۱) $MA^2+MD^2=2MS^2+\frac{1}{2}AD^2$ ، $MS=OQ$ ، زیرا این دو، ضلعهای مقابل یک متوازی‌الاضلاع هستند؛ پس با درنظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویهٔ OQB و نشان دادن شعاع دایرهٔ محیطی ABCD با R، معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$MA^2+MD^2=2R^2+\frac{1}{2}AD^2-\frac{1}{2}BC^2$$

ضلعهای AB، BC و CD از چهارضلعی ABCD سه رابطهٔ دیگر متناظر با رابطهٔ بالا به‌دست می‌دهند و با جمع کردن این چهار رابطه، نتیجهٔ بیان شده به آسانی حاصل می‌شود.

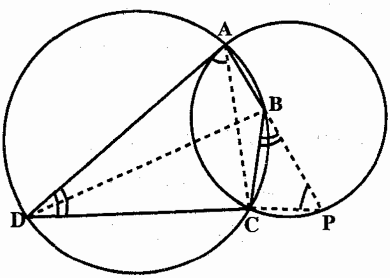
۶۷۰. اگر α، β، γ و δ اندازهٔ کمانهای نظیر ضلعهای به طول a، b، c و d باشند، آن وقت برابری که باید ثابت شود، متناظر با برابری مثلثاتی :

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}+\cos\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}=\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\delta}{۲}+\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\delta}{۲}$$

یا $\sin\frac{\alpha+\gamma}{۲}=\sin\frac{\beta+\delta}{۲}$ است.

۶۷۱. خطهای سیمسون را خطهای مورب در نظر بگیرید.

۶۷۲. دو مثلث ADC و PBC متشابه‌اند زیرا زاویه‌های ظلی DAC و محاطی BPC متساوی‌اند و نیز زاویه‌های $C\hat{B}P$ و $A\hat{D}C$ هر دو مکمل $A\hat{B}C$ اند.



پس داریم : $\frac{BC}{PB}=\frac{DC}{AD}$ طرفین این رابطه را در BA ضرب می‌کنیم تا حاصل شود :

$$\frac{BA}{PB}=\frac{DC.BA}{BC.AD} \quad \text{و یا} \quad \frac{BC.BA}{PB}=\frac{DC.BA}{AD}$$

و با ترکیب نسبت در صورت نتیجه می‌شود :

$$\frac{PB+BA}{PB}=\frac{PA}{PB}=\frac{DC.BA+BC.AD}{BC.AD}$$

امّا به موجب قضیهٔ بطلمیوس، صورت این کسر مساوی با BD.AC است ؛ بنابراین :

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC.BD}{BC.AD}$$

۶۷۳. چون $\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}}=\frac{|AD|.\sin(A\hat{D}B)}{|CD|.\sin(C\hat{D}B)}$ و همچنین، از طرف دیگر

$$\frac{S_{ADB}}{S_{CDB}}=\frac{|AB|.\sin(A\hat{B}D)}{|CB|.\sin(C\hat{B}D)}$$

بنابراین، کافی است ثابت کنیم :

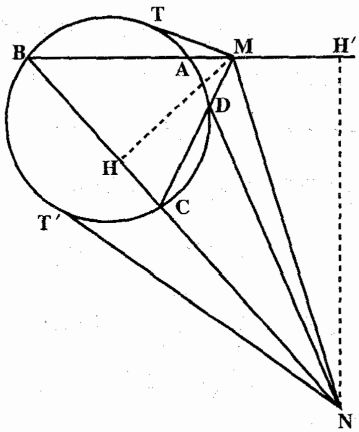
$$\sin(A\hat{D}B):\sin(A\hat{B}D)=\sin(C\hat{D}B):\sin(C\hat{B}D)$$

اگر از رابطهٔ سینوسها در مثلثهای ABX و CBX استفاده کنیم (X، نقطهٔ برخورد مماسهای بر دایره، در نقطه‌های A و B)، معلوم می‌شود که، این نسبتهای سینوسها، برابر است با :

$$|BX|:|AX|,|BX|:|CX|$$

(فرض کرده‌ایم، روی خط راست BD، نقطهٔ B بین نقطه‌های X و D باشد.) چون $|AX|=|CX|$، قضیه ثابت است.

۶۷۴. مثلث AMN را در نظر گرفته ضلع MN را روی BM و BN تصویر می‌کنیم. بنا به حکم مسأله داریم :



$$\overline{MN}^2=NB\times NH-MB\times MH'$$

حال ملاحظه می‌کنیم که :

$$NH=NC+CH$$

و

$$MH'=AH'-AM$$

بنابراین رابطهٔ بالا چنین نوشته می‌شود :

$$\overline{MN}^2=NC\times NB+MA\times MB+(BN\times CH-MB\times AH') \qquad (۱)$$

امّا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ′ANH و CMH متشابه‌اند و داریم : $\frac{CH}{AH'}=\frac{MH}{NH'}$ و نیز دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BMH و ′BNH متشابه‌اند و داریم: $\frac{BM}{BN}=\frac{MH}{NH'}$. از این دو تساوی نتیجه می‌شود $\frac{CH}{AH'}=\frac{BM}{BN}$ و یا $BN\times CH=BM\times AH'$. از تساوی اخیر معلوم می‌شود که در مقدار $\overline{MN}^2$ که از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید مقدار داخل پرانتز صفر است ؛ پس داریم :

$$\overline{MN}^2=NC\times NB+MA\times MB=\overline{NT'}^2+MT^2$$

۶۷۵. در عبارت

$$t_{\alpha\beta}t_{\gamma\delta}+t_{\beta\gamma}t_{\delta\alpha}=t_{\alpha\gamma}t_{\beta\delta} \qquad (۱)$$

با قرار دادن طول قطعهٔ مماسها، به کمک دستورهای به‌دست آمده قانع می‌شویم که اگر رابطهٔ (۱) برای برخی دایره‌های α، β، γ و δ، که در نقطه‌های A، B، C و D بر دایرهٔ مفروض مماسند، برقرار باشد، آن وقت، برای هر نوعی از این دایره‌ها هم، برقرار است. می‌ماند اینکه درستی رابطهٔ (۱) را برای حالتی خاص تحقیق کنیم. اگر α، β، γ و δ دایره‌هایی با شعاع صفر باشند، آن وقت به قضیهٔ بطلمیوس معمولی می‌رسیم. برای این که به قضیهٔ بطلمیوس نپردازیم، می‌توانیم دایره‌های α و δ را با شعاع صفر، و دایره‌های β و γ را، که بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD و وتر AD مماسند، اختیار کنیم. در این حالت، درستی رابطهٔ (۱) بسادگی تحقیق می‌شود. بنابراین، بر طبق ملاحظات انجام شده، درستی (۱) را در همهٔ حالتها به‌دست می‌آوریم (از این راه، به‌طور همزمان، خود قضیهٔ بطلمیوس را ثابت کرده‌ایم).

۶۷۷. AB را وصل کرده در چهارضلعی OAMB رابطهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم:

$$OM.AB=BM.OA+AM.OB$$

$$\overset{\Delta}{ABM}\sim\overset{\Delta}{OMQ}\ (M\hat{A}B=M\hat{O}B\,,\ M\hat{B}A=M\hat{O}A=O\hat{M}Q)$$

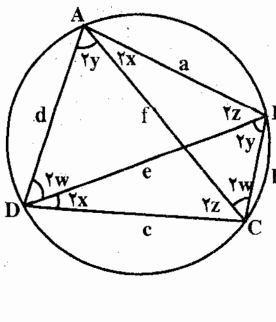
$$\Rightarrow\frac{OM}{AB}=\frac{OP}{BM}=\frac{OQ}{AM}\ \ (MQ=OP)$$

هرگاه هر یک از این سه نسبت مساوی را در یکی از سه جملهٔ رابطهٔ بطلمیوس ضرب کنیم. حاصل می‌شود:

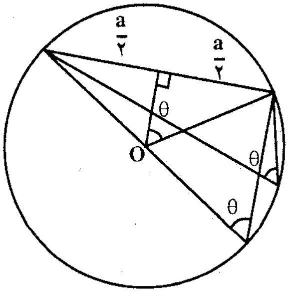
$$OM^{۲}=OP.OA+OQ.OB$$

۲.۹.۱.۳. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۶۷۸. در شکل، طولها و زاویه‌های مربوطه را با برچسب مشخص کرده‌ایم. بنا به نامساوی مثلث داریم:



$$a+d>e\,,d+c>f\,,c+b>e\,,b+a>f$$



به این ترتیب : $a+b+c+d>e+f$

یا : $u>0$ است.

حداقل یکی از زاویه‌های چهارضلعی ABCD، برای مثال A، کوچکتر از یا مساوی با $\frac{\pi}{2}$ است ؛ بنابراین می‌توان فرض کرد که : $x+y\le\frac{\pi}{4}$ است. نیز :

$$x+y+z+\omega=\frac{\pi}{2}$$

می‌باشد. همچنین می‌توانیم، بی آن که کلیت مسأله از بین برود، فرض کنیم که : $z\le\omega$ است. از آن‌جا که شعاع دایره ۱ است، (شکل)

$$a=2\sin 2\omega\,,\ b=2\sin 2x\,,\ c=2\sin 2y\,,\ d=2\sin 2z$$

$$e=2\sin 2(x+y)\,,\ f=2\sin 2(\omega+x)$$

بنابراین نامساوی $u>2$ معادل نامساوی زیر است :

$$1+\sin 2(x+y)+\sin 2(\omega+x)>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z+\sin 2\omega \quad (1)$$

در این مورد نامساوی دقیق‌تر :

$$\sin 2(x+y)+\sin 2(y+z)+\sin 2(z+x)>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z+$$

$$\sin 2(x+y+z) \qquad (2)$$

را، که در آن به‌جای ۱ در (۱) : $\sin 2(z+x)$ و به‌جای : $\sin 2(\omega+x)$ ، $\sin 2\omega$ بترتیب مقدارهای معادل : $\sin 2(y+z)$ ، $\sin 2(x+y+z)$ قرار داده شده است، اثبات خواهیم کرد. با استفاده از اتحاد : $\sin 2\alpha+\sin 2\beta=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ و فرمول جمع سینوسها در (۲)، نامساوی معادل زیر :

$$\sin(x+y)\cos(x+y)+\sin(x+y+2z)\cos(x-y)>$$

$$\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(x+y+2z)\cos(x+y)$$

که به صورت زیر ساده می‌شود :

$$\left[\sin(x+y+2z)-\sin(x+y)\right]\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]>0$$

را به دست می‌آوریم. این نامساوی به علت این که : $x+y<x+y+2z\le\frac{\pi}{2}$ است، برقرار می‌باشد.

اگر چهارضلعیهای زوال یافته را مجاز کنیم، نامساوی $u<2$ و نامساوی دقیق‌تر (۲) می‌توانند به تساوی تبدیل شوند ؛ در این مورد، برای مثال، ABCD را مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ائتلاف C و D در رأس زاویهٔ قائمه در نظر می‌گیریم.

۶۷۹. از این قضیه، که بسادگی ثابت می‌شود، استفاده می‌کنیم :

مساحت هر مثلثی که رأسهای آن، در نقطه‌های گرهی شبکهٔ شطرنجی قرار دارد، به‌صورت $\frac{n}{2}$ بیان می‌شود که، در آن، n عددی طبیعی است. در این صورت :

$$|AC|.|AD|.\sin(D\hat{A}C)\,,\,|BC|.|BD|.\sin(D\hat{B}C)$$

عددهایی درستند. بنابراین :

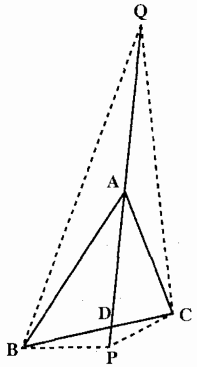
$$\left\||AC|.|AD|-|BC|.|BD|\right\|=\frac{m}{\sin\alpha}$$

که در آن $\alpha=D\hat{A}C=D\hat{B}C$ و m، عدد درستی مخالف صفر است.

از همین جا، نابرابری مطلوب، ثابت می‌شود.

۶۸۱. فرض کنید ABCD چهارضلعی مفروض باشد. چهارضلعی AB_1CD را در نظر بگیرید، که در آن، B_1 قرینهٔ B نسبت به عمودمنصف قطر AC است. به روشنی، مساحتهای ABCD و AB_1CD با یکدیگر برابرند و ضلعهای چهارضلعی AB_1CD ، بترتیب دوری، برابرند با b، a ، c و d. در این چهارضلعی، نابرابری $s\le\frac{1}{2}(ac+bd)$ بدیهی است، و برابری هنگامی رخ می‌دهد که $D\hat{A}B_1=B_1\hat{C}D=90^\circ$ ، یعنی، AB_1CD چهارضلعیی محاطی با دو زاویهٔ روبه‌رو هر کدام برابر با 90° است. بنابراین، چهارضلعی ABCD هم، محاطی (در همان دایره) است و قطرهایش دوبه‌دو بر هم عمودند.

۱۰.۱.۳. ثابت کنید چهارضلعی محاطی است



۶۸۲. فرض کنیم D پای نیمساز زاویهٔ A باشد، می‌دانیم که

$$AB.AC = \overline{AD}^2 + BD.DC$$

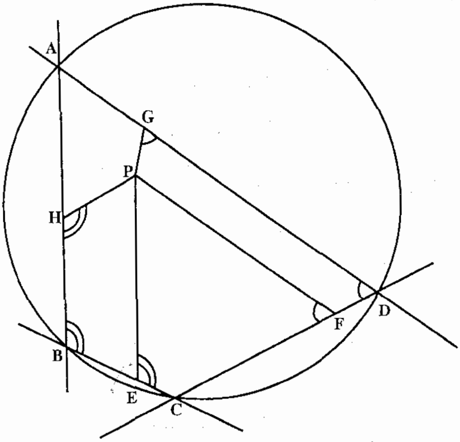
بنابراین :
$$\overline{AP}^2 = \overline{AD}^2 + BD.DC$$

و یا
$$\overline{AP}^2 - \overline{AD}^2 = BD.DC$$

و یا بالاخره $BD.DC = (AP+AD)(AP-AD) = (AQ+AD)DP = PD.DQ$

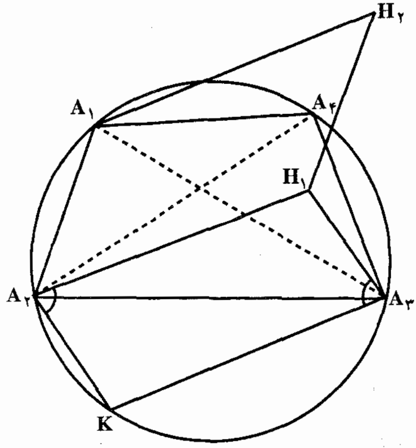
از این رابطه معلوم می‌شود که چهار نقطهٔ B، P، C و Q بر محیط یک دایره واقعند.

۶۸۴. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محاطی، و زاویهٔ A کوچکترین زاویهٔ آن باشد. (اگر در این مورد چند زاویهٔ کوچکترین موجود باشد، ABCD ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین است و می‌تواند صرفاً با $n-1$ پاره‌خط موازی قاعده‌هایش به nچهارضلعی محاطی تقسیم شود.) فرض می‌کنیم P نقطه‌ای داخل چهارضلعی مورد بحث باشد، و $PE \| AB$ ، $PF \| AD$ را رسم می‌کنیم. اگر P به قدر کافی به A نزدیک باشد، در این صورت، همان‌طور که در شکل نشان داده شده، E بین B و C ؛ و F بین C و D قرار می‌گیرد. نیز PG را چنان که $P\hat{G}D = \hat{D}$ و PH را چنان که $P\hat{H}B = \hat{B}$ باشد، رسم می‌کنیم. از آن‌جا که $\hat{B} > \hat{A}$ است، اگر P به قدر کافی به A نزدیک باشد، H بین A و B و به همین ترتیب G بین A و D واقع می‌شود. چهارضلعی PECF محاطی است، زیرا دارای همان زاویه‌های ABCD است. AHPG محاطی است، زیرا :



$$A\hat{H}P + A\hat{G}P = (180^\circ - \hat{B}) + (180^\circ - \hat{D}) = 180^\circ$$

PHBE و PFDG ذوزنقه‌هایی متساوی‌الساقین، و در نتیجه محاطی‌اند. به این ترتیب ABCD را به ۴، چهارضلعی محاطی تقسیم کرده‌ایم. برای تقسیم آن به چهارضلعیهای محاطی بیشتر، تنها خطهایی موازی قاعده‌های یکی از ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین حاصل رسم می‌کنیم.



۶۸۵. ابتدا ثابت می‌کنیم، وسط پاره‌خطهای راست A_1H_1 و A_2H_2 بر هم منطبقند. برای این منظور، از نقطهٔ A_3، خط راستی عبور می‌دهیم که بر پاره‌خط راست A_3A_4 عمود باشد و محل برخورد دوم این عمود را با دایرهٔ محیطی چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$، با K نشان می‌دهیم (شکل). در این صورت، A_2H_1 با KA_3 موازی می‌شود، زیرا $K\hat{A_2}A_4 = 90^\circ$ و $A_2H_1 \perp A_2A_4$ (KA_4 قطر دایره است). بنابراین، چهارضلعی $KA_2H_1A_3$ متوازی‌الاضلاع است؛ از آن‌جا $\overrightarrow{A_2H_1} = \overrightarrow{KA_3}$. به همین ترتیب، ثابت می‌شود که چهارضلعی $A_1H_2A_3K$ متوازی‌الاضلاع است و $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{KA_3}$. به این ترتیب، $\overrightarrow{A_2H_1} = \overrightarrow{A_1H_2}$، و پاره‌خطهای راست A_1H_1 و A_2H_2، قطرهای متوازی‌الاضلاع $A_1H_2H_1A_2$ هستند، یعنی یکدیگر را نصف می‌کنند. با روشی مشابه ثابت می‌شود که وسط پاره‌خط A_2H_2 بر وسط پاره‌خط A_3H_3 منطبق است، که به نوبهٔ خود، بر وسط پاره‌خط A_4H_4 منطبق می‌شود. بنابراین، اگر با توجه به تقارن، این بحث را برای موردهای لازم دیگر ادامه دهیم، چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ بر چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ منتقل می‌شود و این، همان، چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱۱.۱.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۸۶. طول پاره‌خط QP برابر است با $\sqrt{(b^2-R^2)+(c^2-R^2)} = \sqrt{b^2+c^2-2R^2}$.
فرض کنید ABCD چهارضلعی مفروض و Q نقطهٔ برخورد AB و CD باشد (A بر پاره‌خط BQ قرار دارد).
برای پیدا کردن طول PQ، دایره‌ای بر مثلث QCA محیط می‌کنیم و نقطهٔ برخورد QP با این دایره را به N نشان می‌دهیم. چون $A\hat{N}P = A\hat{C}Q = A\hat{B}P$، نقطه‌های A، B، N و P هم، بر یک دایره واقعند. داریم:

$$QP.QN = QA.QB = b^2 - R^2$$

$$PN.PQ = CP.PA = R^2 - a^2$$

با کم کردن تساوی دوم از اولّی، به‌دست می‌آوریم $QP^{۲} = b^{۲} + a^{۲} - ۲R^{۲}$. به همین ترتیب، $PM^{۲} = c^{۲} + a^{۲} - ۲R^{۲}$.

جواب : $QM = \sqrt{b^{۲} + c^{۲} - ۲R^{۲}}$ ، $QP = \sqrt{b^{۲} + a^{۲} - ۲R^{۲}}$ و

$PM = \sqrt{c^{۲} + a^{۲} - ۲R^{۲}}$

۶۸۷. از قضیهٔ پاسکال استفاده کنید.

۶۸۸. یک چهارضلعی محدب در دایره‌ای محاط است. نیمسازهای زاویه‌های بین ضلعهای مقابل و خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند، در یک نقطه همرسند.

فرض کنیم O محل تلاقی EX و HK باشد. مثلثهای EAC و EDB به‌طور معکوس متشابه‌اند. میانه‌های EK و EH متناظرند و EX با خودش متناظر است، پس زاویه‌های OEK و OEH به‌طور معکوس متساوی‌اند و به‌عبارت دیگر EO نیمساز مثلث HEK می‌باشد و داریم :

$$\frac{OK}{OH} = \frac{EK}{EH} = \frac{AC}{DB}$$

با استدلالی شبیه آنچه بیان شد، از دو مثلث FAC و FBD، اگر O' محل تلاقی FY و KH باشد، نتیجه می‌شود :

$$\frac{O'K}{O'H} = \frac{AC}{DB}$$

پس :

$$\frac{OK}{OH} = \frac{O'K}{O'H}$$

بنابراین O بر O' منطبق است.

۶۸۹. فرض کنید ABCD چهارضلعی مفروض باشد. فرض می‌کنیم زاویه‌های A و D منفرجه و B و C حاده باشند. پای عمودهای فرود آمده از رأس A را، با M و N و از رأس C را، با K و L نشان دهید (شکل الف)، R نقطهٔ برخورد MN و LK است. توجه کنید که نقطه‌های A، K، N، C، L و M روی دایرهٔ به قطر AC واقعند. نشان می‌دهیم که $MK \| LN$

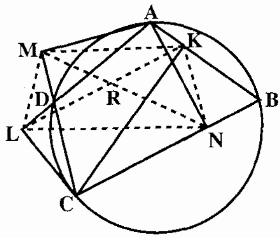
$$M\hat{K}L = M\hat{A}L = ۹۰^{\circ} - \hat{B} = K\hat{C}B = K\hat{L}N$$

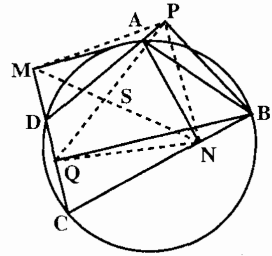
بنابراین

$$\frac{MR}{RN} = \frac{MK}{LN} = \frac{\sin M\hat{C}K}{\sin L\hat{A}N} = \frac{\sin(\hat{C} + \hat{B} - ۹۰^{\circ})}{\sin(\hat{A} + \hat{B} - ۹۰^{\circ})} = \frac{\cos(\hat{A} - \hat{B})}{\sin(\hat{A} + \hat{B} - ۹۰^{\circ})}$$

اکنون فرض کنید P و Q پای عمودهای وارد از رأس B باشند، S نقطهٔ برخورد MN و PQ است (شکل ب). چون $P\hat{N}B = P\hat{A}B = \hat{C}$ ، PN با DC موازی است، یعنی، MQNP ذوزنقه است (ANBP چهارضلعیی محاطی با قطر AB است). بنابراین

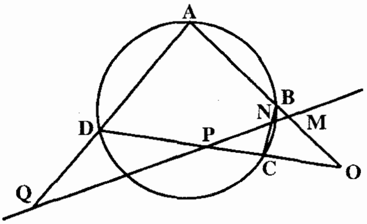
$$\frac{MS}{SN}=\frac{MQ}{PN}=\frac{AB\cos(\hat{A}+\hat{D}-۱۸۰^\circ)}{AB\sin(\hat{B}+\hat{A}-۹۰^\circ)}=\frac{\cos(\hat{A}-\hat{B})}{\sin(\hat{A}+\hat{B}-۹۰^\circ)}$$





(از این حقیقت که MQ تصویر AB روی DC است، استفاده کرده‌ایم ؛ زاویهٔ میان AB و DC برابر است با $\hat{A}+\hat{D}-۱۸۰^\circ$.) بنابراین، نقطه‌های R و S، MN را به یک نسبت تقسیم می‌کنند، یعنی، برهم منطبقند ؛ بنابراین، سه خط راست، در یک نقطه متقاطعند. اکنون، بسادگی می‌توان نشان داد که هر چهار خط راست، در همین نقطه متقاطعند.

۶۹۱. ثابت می‌کنیم هر دو ادعا (BD نیمساز زاویهٔ ANC و AC نیمساز زاویهٔ BMD است) با برابری $AB.CD = AD.BC$ هم‌ارزند. روی کمان $\overset{\frown}{BAD}$، نقطه‌ای مانند $A_۱$ طوری اختیار می‌کنیم که $DA_۱ = AB$. شرطهای مسأله ایجاب می‌کنند که خط راست $A_۱C$ ، از N، وسط BD، بگذرد، یعنی، مساحت مثلثهای $DA_۱C$ و $A_۱BC$ برابرند، که از آن‌جا $DA_۱.DC = BA_۱.BC$ ، یعنی، $AB.CD = AD.BC$.

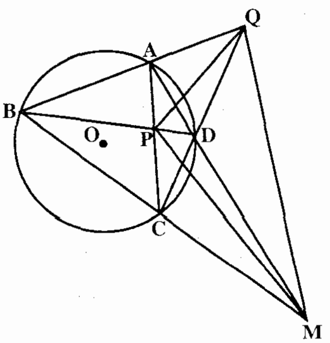


۶۹۲. چهارضلعی ABCD را که ضلعهای AB، BC و CD از آن بترتیب از سه نقطهٔ ثابت M، N و P واقع بر یک خط راست، می‌گذرند در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ثابت کنیم که نقطهٔ Q محل برخورد ضلع AD با خط راست MNP، نقطهٔ ثابتی است.

اگر O نقطهٔ برخورد AB و CD باشد ؛ موربهای BC و AD مثلث PMO را قطع کرده‌اند ؛ پس، بنابه رابطهٔ منلائوس داریم :

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AO}}\cdot\frac{\overline{DO}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{QP}}{\overline{QM}}=۱ \quad و \quad \frac{\overline{BM}}{\overline{BO}}\cdot\frac{\overline{CO}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{NP}}{\overline{NM}}=۱$$

از ضرب عضوهای نظیر این دو رابطه با توجه به این که حاصلضرب $\overline{CO}.\overline{OD}$ و $\overline{AO}.\overline{BO}$ قوت نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ محیطی چهارضلعی با هم برابرند، نتیجه می‌شود که: $\dfrac{\overline{BM}.\overline{NP}.\overline{AM}.\overline{QP}}{\overline{CP}.\overline{NM}.\overline{DP}.\overline{QM}}=1$ و یا $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BM}}.\dfrac{\overline{DP}}{\overline{AM}}.\dfrac{\overline{NM}}{\overline{NP}}=\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QM}}$. امّا در این رابطه، نسبت $\dfrac{\overline{NM}}{\overline{NP}}$ مقدار ثابتی است. زیرا نقطه‌های M و N و P ثابت می‌باشند و حاصلضربهای $\overline{DP}.\overline{CP}$ و $\overline{AM}.\overline{BM}$ یعنی قوت نقطه‌های P و M نسبت به دایره ثابت می‌باشند؛ زیرا نقطه‌های P و M ثابتند. در نتیجه نسبت $\dfrac{\overline{QP}}{\overline{QM}}$ مقدار ثابتی است، یعنی نقطهٔ Q نقطهٔ ثابتی می‌باشد.



۶۹۳. فرض کنید R معرف شعاع دایره باشد و a، b و c، بترتیب، فاصلهٔ P، Q و M تا مرکز آن باشند. در این صورت $QP^2=a^2+b^2-2R^2$، $QM^2=b^2+c^2-2R^2$ و $PM^2=c^2+a^2-2R^2$. اگر O مرکز دایره باشد، آن وقت برای این که QO بر PM عمود باشد، لازم و کافی است که برابری $QP^2-QM^2=OP^2-OM^2$ یا $(a^2+b^2-2R^2)-(b^2+c^2-2R^2)=a^2-c^2$ برقرار باشد. عمود بودن بقیهٔ خطهای راست، به روش مشابه تحقیق می‌شود.

۶۹۴. نقطهٔ D روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد. در نتیجه نقطهٔ M وسط خطی که D را به H_d (محل برخورد ارتفاعهای ABC) وصل می‌کند روی دایرهٔ نه نقطهٔ ABC قرار دارد. به همین ترتیب برای مثلثهای دیگر ثابت می‌شود.

تبصره. مجموع مربعهای فاصله‌های M از چهار رأس هر چهارضلعی محاطی برابر است با مربع قطر دایرهٔ محیطی آن چهار ضلعی.

در مثلث MAD داریم:

$$(1)\quad MA^2+MD^2=2MS^2+\frac{1}{2}AD^2$$

چون $MS=OQ$ است (زیرا ضلعهای مقابل یک متوازی‌الاضلاعند) و با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ OQB، رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(2)\quad MA^2+MD^2=2R^2+\frac{1}{2}AD^2-\frac{1}{2}BC^2$$

ضلعهای AB، BC و CD از چهارضلعی محاطی ABCD، سه رابطهٔ نظیر رابطهٔ (۲) به‌دست می‌دهند که از جمع این چهار رابطه حکم ثابت می‌شود.

۶۹۵. فرض کنید، دایره محاط در مثلث ABC بر قطر AC در نقطهٔ X و دایرهٔ محاط در مثلث ADC بر قطر AC و نقطهٔ Y مماس باشد (در مسألهٔ ما $X = Y$). در این صورت داریم:

$$|AX| = |AB| + |AC| - |BC| ,$$

$$|AY| = |AC| + |AD| - |CD|$$

با برابر قرار دادن $|AX|$ و $|AY|$ ، به‌دست می‌آید:

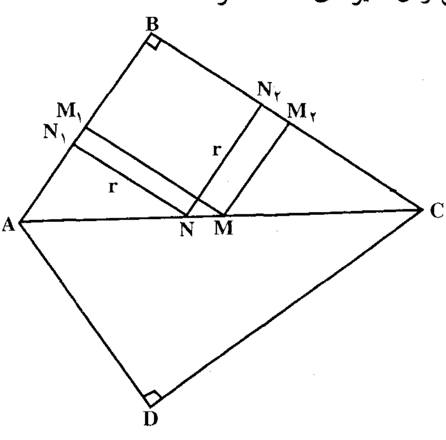
$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

۱۲.۱.۳. مسأله‌های ترکیبی

۶۹۶. الف. بنابر شرط مسأله داریم:

$$AB + CD = AD + BC$$

بنابراین، در چهارضلعی ABCD، می‌توان دایره‌ای محاط کرد.



ب. از برابری مثلثهای ABC و ADC نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ B و D با هم برابرند؛ بنابراین، تنها وقتی می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی ABCD محیط کرد، که داشته باشیم:

$$\hat{B} = \frac{۱}{۲}(\hat{B} + \hat{D}) = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

یعنی $AB \perp BC$.

ج. فرض می‌کنیم، دایرهٔ محاطی به مرکز N، در نقطه‌های $N_۱$ و $N_۲$ ، بر ضلعهای AB و BC مماس باشد؛ در ضمن، تصویرهای نقطهٔ M، مرکز دایرهٔ محیطی، بر ضلعهای AB و BC، در وسط این ضلعها قرار می‌گیرند (شکل؛ یادآوری می‌کنیم که نقطه‌های N و M، روی AC، محور تقارن چهارضلعی ABCD قرار دارند).

$AB = x$ و $BC = y$ می‌گیریم، در این صورت، از تشابه مثلثهای AN_1N و ABC به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{y} = \frac{AB}{BC} = \frac{AN_1}{N_1N} = \frac{x-r}{r} \Rightarrow xy = r(x+y)$$

سپس، اگر به حساب آوریم که

$$x^2 + y^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 4R^2$$

خواهیم داشت:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 4R^2 + 2r(x+y)$$

از آن‌جا

$$x + y = r + \sqrt{r^2 + 4R^2}$$

سرانجام، با توجه به ویژگی تصویرها، داریم:

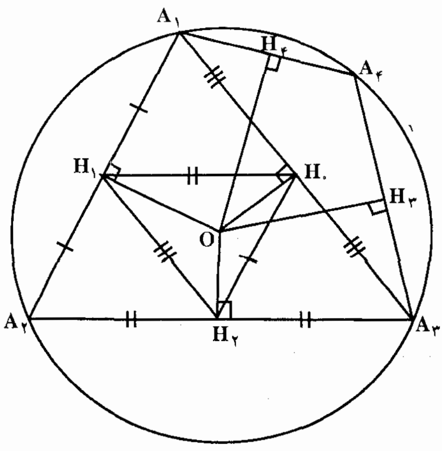
$$NM^2 = N_1M_1^2 + N_2M_2^2 = (BN_1 - \frac{AB}{2})^2 + (BN_2 - \frac{BC}{2})^2$$

$$= (r - \frac{x}{2})^2 + (r - \frac{y}{2})^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - r(x+y) + 2r^2$$

$$= R^2 - r(r + \sqrt{r^2 + 4R^2}) + 2r^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$$

یادداشت. برابری بخش (ج)، برای هر چهارضلعی، که در عین حال هم محیطی و هم محاطی باشد، درست است.

۶۹۷. الف. چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را محاط در دایرهٔ به مرکز O و شعاع R درنظر می‌گیریم و تصویر نقطهٔ O بر وترهای A_1A_3، A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4 و A_4A_1 را بترتیب، H_0، H_1، H_2، H_3 و H_4 می‌نامیم. h_i را طول $OH_i\ (i = 0, \ldots, 4)$، s_1، s_2 و p_1، p_2 را مساحتها و نصف محیطهای مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_3A_4A_1$ و r_1، r_2 را شعاعهای دایره‌های محاطی این دو مثلث فرض می‌کنیم. مثلثی را در نظر می‌گیریم که شامل نقطهٔ O باشد (اگر چنین مثلثی وجود داشته باشد، یعنی اگر نقطهٔ O در درون چهارضلعی اصلی باشد)، برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، نقطهٔ O، در مثلث $A_1A_2A_3$ واقع باشد (شکل). با استفاده از قضیهٔ بطلمیوس، برای چهارضلعیهای محاطی $A_3H_0OH_2$، $A_1H_1OH_0$،



و با توجه به این که H_1H_2 ، H_0H_1 ، H_0H_2 ، $A_2H_2OH_1$ وسط ضلعهای مثلث $A_1A_2A_3$ را به‌هم وصل کرده‌اند، به‌دست می‌آید :

$$(R+r_1)p_1 = R.H_0H_2 + R.H_0H_1 + R.H_1H_2 + s_1$$

$$= (h_0.H_2A_3 + h_2.H_0H_3) + (h_0.H_1A_1 + h_1.H_0A_1) + (h_2.H_1A_2 + h_1.H_2A_2)$$

$$+\frac{1}{2}(h_1.A_1A_2 + h_2.A_2A_3 + h_0.A_3A_1) = (h_1 + h_2 + h_0)p_1$$

و از آن‌جا $R + r_1 = h_1 + h_2 + h_0$

اکنون به حالتی می‌پردازیم که، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی، در بیرون مثلث باشد. در این حالت، درست یکی از رأسهای مثلث با نقطهٔ O، در دو نیمصفحهٔ مختلف نسبت به ضلع مقابل به این رأس، قرار گرفته‌اند. برای مشخص بودن وضع، این رأس را A_4 در مثلث $A_3A_4A_1$ می‌گیریم (شکل). در این صورت، چهارضلعیهای $A_1H_4H_0O$ ، $A_3H_3H_0O$ ، $A_4H_4OH_3$ ، محاطی‌اند و بنابراین

$$(R+r_2)p_2 = R.H_0H_4 + R.H_0H_3 + R.H_3H_4 + s_2$$

$$= (h_4.H_0A_1 - h_0.H_4A_1) + (h_3.H_0A_3 - h_0.H_3A_3) +$$

$$(h_4.H_3A_4 + h_3.H_4A_4) + \frac{1}{2}(h_3.A_3A_4 + h_4.A_4A_1 - h_0.A_1A_3)$$

$$= (h_3 + h_4 - h_0)p_2$$

و از آن‌جا $R + r_2 = h_3 + h_4 - h_0$

به این ترتیب، در حالتی که روی شکل نشان داده‌ایم، داریم :

$$r_1 + r_2 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 2R$$

در حالت کلی هم، مجموع $r_1 + r_2$ ، مجموعی از مقدارهای h_1 ، h_2 ، h_3 ، h_4 و $2R$ خواهد بود که، علامتهای بین آنها، تنها بستگی به جای نقطهٔ O نسبت به چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ دارد. بنابراین، **مجموع شعاعهای دایره‌های محاطی، بستگی به این ندارد که کدام قطر را رسم کرده‌ایم.**

ب. $A_1A_2A_3$ را مثلثی می‌گیریم که زاویهٔ منفرجه ندارد و k_1 ، k_2 و k_3 ، طول ارتفاعهای مثلث، که بترتیب از رأسهای A_1 ، A_2 و A_3 رسم شده‌اند، باشند. برای بقیهٔ عنصرها و پارامترهای مثلث $A_1A_2A_3$ ، همان نام‌گذاریهای بخش (الف) را حفظ می‌کنیم. بدون این که لطمه‌ای به کلی بودن وضع وارد شود، فرض می‌کنیم : $k_1 \le k_2 \le k_3$. چون

$$k_1.A_2A_3 + k_2.A_1A_3 = k_3.A_1A_2 = 2s_1$$

بنابراین $A_۲A_۳ \geq A_۱A_۳ \geq A_۱A_۲$. به این ترتیب داریم :

$$k_۳ = \frac{۲s_۱}{A_۱A_۲} = \frac{h_۲.A_۲A_۳ + h_۰.A_۱A_۳ + h_۱.A_۱A_۲}{A_۱A_۲} \geq$$

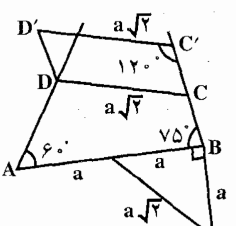
$$\frac{h_۲.A_۱A_۲ + h_۰.A_۱A_۲ + h_۱.A_۱A_۲}{A_۱A_۲} = h_۱ + h_۲ + h_۰ = R + r_۱$$

[برابری آخر را، در بخش (الف) ثابت کردیم]. بنابراین، نابرابری موردنظر ثابت شد. در ضمن، اگر هر سه زاویهٔ مثلث حاده باشند، نقطهٔ O در درون آن واقع می‌شود و $h_۲ > ۰$ ؛ و علامت برابری وقتی برقرار خواهد بود که داشته‌باشیم : $h_۱ = h_۳$ ، یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. در حالت مثلث قائم‌الزاویه، داریم : $\hat{A}_۱ = ۹۰^\circ$ ، $h_۲ = ۰$ ، $h_۱ > ۰$ و برابری به شرط $h_۲ = h_۳$ پیش می‌آید، یعنی برای مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین.

۶۹۹. شرط لازم و کافی برای این‌که هر چهار قسمت برقرار باشد، برابری $AB.CD = AD.BC$ است. برای قسمتهای (الف) و (ب)، این، از قضیهٔ مربوط به نیمساز یک زاویهٔ داخلی مثلث، و برای قسمتهای (ج) و (د)، از تشابه مثلثها استفاده کنید.

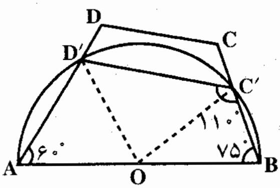
۷۰۰. عمود بودن نیمسازها به آسانی ثابت می‌شود. ادعای دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید M معرف وسط AC و N وسط BD باشد. از تشابه مثلثهای AKC و BKD نتیجه می‌شود که $M\hat{K}A = N\hat{K}D$ و $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$ ، یعنی، نیمساز زاویهٔ BKC، نیمساز زاویهٔ MKN هم، هست و پاره‌خط MN را به نسبت $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$ تقسیم می‌کند. به روشنی، نیمساز زاویهٔ ALB، پاره‌خط MN را به همین نسبت تقسیم می‌کند.

۷۰۱. ۱. قطعه‌خط $AB = ۲a$ را رسم کرده، از طرفین آن دو نیمخط رسم می‌کنیم که با آن زاویه‌های $\hat{A} = ۶۰^\circ$ و $\hat{B} = ۷۵^\circ$ ایجاد کنند. اکنون باید قطعه‌خطی به طول $a\sqrt{۲}$ مابین این دو نیمخط محصور کنیم که با نیمخط رسم شده از B زاویهٔ ۱۲۰° بسازد. برای این کار از نقطهٔ C واقع بر نیمخط رسم شده از B خطی رسم می‌کنیم که با آن زاویهٔ ۱۲۰ درجه بسازد (با رعایت آن که چهارضلعی داده شده محدب است.) و روی آن $C'D' = a\sqrt{۲}$



را جدا کرده از D' خطی به موازات BC' رسم می‌کنیم تا نیمخط رسم شده از A را در D قطع کند. از D خطی به موازات $D'O'$ رسم می‌کنیم تا BC' را در C قطع کند. ABCD که شامل تمام شرایط مسأله است همان چهارضلعی خواسته شده می‌باشد.

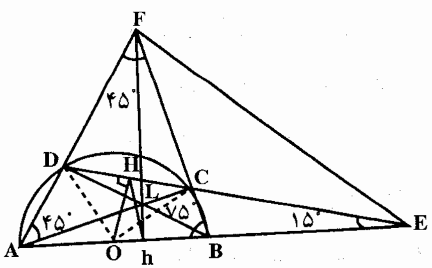
۲. الف. نیمدایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم. اگر این نیمدایره از C و D نگذرد، ضلعهای AD و BC با امتداد آنها را در دو نقطهٔ C' و D' قطع می‌کند. چهارضلعی



$ABC'D'$ محاطی است و زاویهٔ $\hat{C'} = ۱۲۰°$ و $\hat{D'} = ۱۰۵°$ و $C'D'$ با CD موازی است؛ اما در این نیمدایره از دو مثلث متساوی‌الساقین COB' و AOD' نتیجه می‌شود:

$C'OD' = ۹۰°$ و یا: $C'D' = C_۴ = a\sqrt{۲}$، پس: $C'D' = CD$.

یعنی چهارضلعی $C'D'DC$ متوازی‌الاضلاع است که چون BC و AD غیرمتوازی‌اند این نتیجه فقط در صورتی ممکن است که CD بر $C'D'$ منطبق باشد.



ب. چون چهارضلعی ABCD تمام شرطهای چهارضلعی مسأله را داراست، طول ضلعها و قطرهای آن به همان ترتیب حساب می‌شوند. زاویهٔ مابین دو قطر، ۱۳۵ درجه است.

۳. الف. مثلث قائم‌الزاویهٔ ACF که در آن $C\hat{A}F = ۴۵°$ است، متساوی‌الساقین است، پس $AC = CF$. در مثلث ACE داریم: $C\hat{A}B = ۱۵°$ و زاویهٔ E نیز زاویهٔ سوم مثلث DAE است که دو زاویهٔ آن $۶۰°$ و $۱۰۵°$ اند. پس $\hat{E} = ۱۵°$ و در نتیجه $CA = CE$، پس $CF = CA = CE$ و نقطهٔ C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AFE است.

ب. در مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین DFB داریم: $DB = DF$.

ج. تساوی $AC = EC$ ثابت گردید. از طرف دیگر زاویهٔ BDC مقابل به کمان $\overset{\frown}{BC}$ مساوی با ۱۵ درجه است، پس مثلث DBE متساوی‌الساقین است و داریم: $BD = BE$.

۴. الف. مثلث OCD قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و H وسط وتر آن است؛ پس، $OH = HD = HC$. از طرفی اگر محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABF را L بنامیم در چهارضلعی محاطی LKBC داریم:

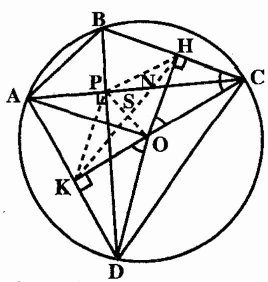
$L\hat{B}C = L\hat{K}C = ۴۵^\circ$، و در چهارضلعی محاطی AKLD نیز داریم:

$$D\hat{K}L = L\hat{A}D = ۴۵^\circ$$

یعنی مثلث DCK قائم‌الزاویه است و HK نصف وتر است. $HC = HK$، یعنی H مرکز دایره‌ای است که از K، C و D پای ارتفاعها و همچنین از نقطهٔ O می‌گذرد.

ب. دیدیم $HK = HC$ و در چهارضلعی محاطی DOKC زاویهٔ DCK مکمل زاویهٔ DOK، یعنی ۶۰ درجه است، پس مثلث CHK متساوی‌الاضلاع است.

۷۰۲. ۱. از مرکز دایره عمودهای OH و OK را بر دو ضلع متقابل BC و AD فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC و OKD متساوی‌اند، زیرا وترهای آنها متساوی است و از طرفی چون زاویهٔ P قائمه است، مجموع دو کمان $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ مساوی



با ۱۸۰ درجه است، پس $D\hat{O}K + H\hat{O}C$ مساوی با ۹۰ درجه است، به‌طوری که $D\hat{O}K = O\hat{C}H$. از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود:

$$OH = DK = \frac{AD}{۲}$$

و

$$OK = HC = \frac{BC}{۲}$$

و حکم ثابت است.

۲. از مثلث قائم‌الزاویهٔ COH حاصل می‌شود $\overline{CH}^۲ + \overline{OH}^۲ = R^۲$

امّا $OH = \frac{AD}{۲} \quad , \quad CH = \frac{BC}{۲}$

پس $\frac{\overline{BC}^۲}{۴} + \frac{\overline{AD}^۲}{۴} = R^۲$ و یا $\overline{BC}^۲ + \overline{AD}^۲ = ۴R^۲$

به همین استدلال ثابت می‌شود که: $\overline{AB}^۲ + \overline{DC}^۲ = ۴R^۲$

۳. نقطهٔ P را به نقطه‌های H و K وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BPC، میانهٔ PH نصف وتر است، پس $PH = OK$، و به همین دلیل $PK = OH$ و چهارضلعی OHPK متوازي‌الاضلاع است و HK و OP یکدیگر را در نقطهٔ ثابت S وسط OP قطع می‌کنند. در مثلث PHO قضیهٔ میانه‌ها را می‌نویسیم:

$$\overline{PH}^۲ + \overline{OH}^۲ = ۲\overline{SH}^۲ + ۲\overline{PS}^۲$$

چون $PH = OK$، طرف چپ مساوی با $R^۲$ است.

پس:

$$R^۲ = ۲SH^۲ + \frac{d^۲}{۲}$$

و

$$SH = \frac{\sqrt{۲R^۲ - d^۲}}{۲}$$

فاصلهٔ نقطهٔ S از H مقدار ثابتی است و مکان H دایره‌ای است به مرکز S و به شعاع SH. این دایره در عین حال، مکان وسطهای سایر ضلعهای چهارضلعی نیز می‌باشد و اگر دو قطر حول P یک دور کامل دوران کنند، وسطهای ضلعهای مزبور یک دور کامل این دایره را خواهند پیمود.

۴. مساحت چهارضلعی عبارت است از:

$$S = \frac{AP \times BD}{۲} + \frac{CP \times BD}{۲} = \frac{۱}{۲}BD(AP + CP) = \frac{۱}{۲}AC \times BD$$

اگر فاصلهٔ O را از AC مساوی با x فرض کنیم، داریم:

$$ON = x \quad , \quad AC = ۲\sqrt{R^۲ - x^۲} \quad , \quad \overline{OM}^۲ = d^۲ - x^۲$$

$$\overline{BD}^۲ = ۴(R^۲ - d^۲ + x^۲)$$

$$BD = ۲\sqrt{R^۲ + x^۲ - d^۲}$$

$$S = ۲\sqrt{(R^۲ - y)(R^۲ - d^۲ + y)}$$

در حالت مخصوص $R = ۳$، $d = ۲\sqrt{۲}$ و $S = ۸$ معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۱۶ = (۹ - y)(۱ + y) \qquad \text{و یا} \qquad y^۲ - ۸y + ۷ = ۰$$

و یا بالاخره $(y - ۱)(y - ۷) = ۰$

باید مقدار y مثبت و از $\overline{OP}^۲$ یعنی ۸ کوچکتر باشد، بنابراین دو ریشهٔ $y = ۱$ و

$y=7$ هر دو قابل قبول هستند، پس $x=1$ و $x=\sqrt{7}$. دو چهارضلعی حاصل نسبت به OP قرینه‌اند، زیرا اگر $x=1=ON$ فرض شود، $OM=\sqrt{7}$ خواهد شد، و اگر $x=\sqrt{7}$ فرض شود، $OM=1$ می‌گردد.

۵. اگر $CB=C_5$ و $CD=C_3$ باشد، کمان $\overset{\frown}{CB}=72^\circ$، $\overset{\frown}{CD}=120^\circ$، $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ و $\overset{\frown}{AD}=108^\circ$ است؛ بنابراین:

$$A\hat{B}C=\frac{120^\circ+108^\circ}{2}=114^\circ$$

$$A\hat{D}C=180^\circ-114^\circ=66^\circ$$

$$B\hat{A}D=\frac{120^\circ+72^\circ}{2}=96^\circ$$

$$B\hat{C}D=180^\circ-96^\circ=84^\circ$$

برای محاسبهٔ طول ضلعها واضح است که:

$$AB=C_6=R \quad , \quad CD=C_3=R\sqrt{3}$$

$$BC=C_5=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

و برای محاسبهٔ AD ملاحظه می‌کنیم که:

$$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=4R^2$$

$$\overline{AD}^2=4R^2-\frac{10R^2}{4}+\frac{R^2}{2}\sqrt{5}=\frac{6R^2}{4}+\frac{2R^2\sqrt{5}}{4}$$

$$AD=\frac{R}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

برای محاسبهٔ قطرها ملاحظه می‌کنیم که در مثلث BPC، زاویه‌های حاده ۳۰ درجه و ۶۰ درجه هستند، پس:

$$BP=\frac{BC}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$PC=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{30-6\sqrt{5}}$$

و در مثلث APD نیز زاویه‌های حاده ۳۰ و ۶۰ درجه هستند.

پس:

$$AP=\frac{AD}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

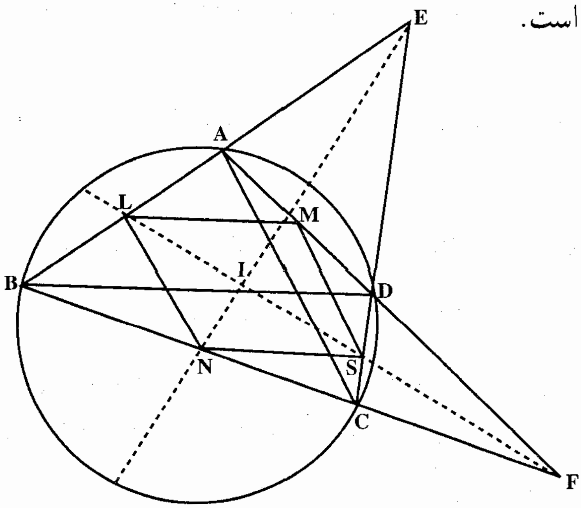
و

$$DP=\frac{AD\sqrt{3}}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$$

پس :
$$AC = \frac{R}{۴}(\sqrt{۶+۲\sqrt{۵}} + \sqrt{۳۰-۶\sqrt{۵}})$$
$$BD = \frac{R}{۴}(\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}} + \sqrt{۱۸+۶\sqrt{۵}})$$

۷۰۳. ۱. ساده است.

۲. هر یک از دو مثلث ELS و FMN که در آنها ارتفاع و نیمساز برهم منطبقند، متساوی‌الساقین می‌باشند و داریم : $IL = IS$ و $MI = IN$.
پس چهارضلعی MLNS متوازی‌الاضلاع است و چون قطرهای آن برهم عمودند، لوزی است.



۳. در دو مثلث FDC و EAD خطهای FS و EM نیمساز داخلی زاویه‌های F و E می‌باشند، پس داریم :
(۱) $\frac{FD}{FC} = \frac{SD}{SC}$ و (۲) $\frac{ED}{EA} = \frac{MD}{MA}$. از طرف دیگر از تشابه دو مثلث FCA و FDB $(D\hat{A}C = D\hat{B}C)$ حاصل می‌شود (۳) $\frac{DB}{AC} = \frac{FD}{FC}$ ، و همچنین از تشابه دو مثلث EAC و EDB نتیجه می‌شود (۴) $\frac{DB}{AC} = \frac{ED}{EA}$. از مقایسهٔ رابطه‌های (۳) و (۴)، رابطهٔ $\frac{ED}{EA} = \frac{FD}{FC}$ به‌دست می‌آید و سپس از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) با رابطهٔ اخیر حاصل می‌شود $\frac{MD}{MA} = \frac{SD}{SC}$ و از این رابطه به موجب عکس

قضیهٔ تالس معلوم می‌شود که خط MS با AC موازی است، و با استدلالی نظیر استدلال بالا معلوم می‌شود که ML نیز با BD موازی می‌باشد.

۴. از تشابه دو مثلث DMS و DAC داریم $\frac{DM}{DA}=\frac{a}{b}$، و از تشابه دو مثلث AML و ADB داریم $\frac{AM}{AD}=\frac{a}{c}$ و از جمع دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{AM+DM}{AD}=۱$$

و از تقسیم طرفین این رابطه بر a داریم:

$$\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}=\frac{۱}{a}$$

۵. دیدیم که دو مثلث EAC و EDB متشابه‌اند، پس داریم:

$$\frac{EA}{ED}=\frac{AC}{DB}$$

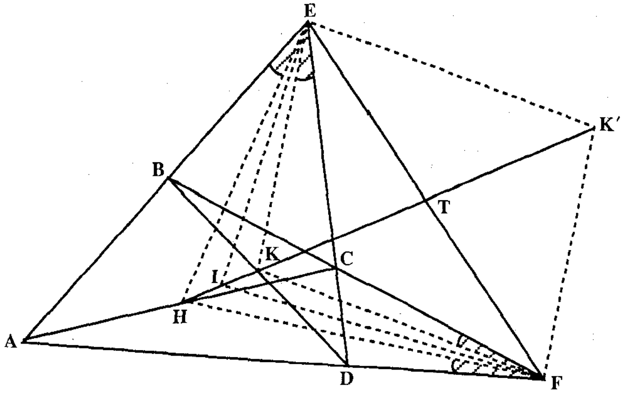
اگر H وسط AC و K وسط BD باشد رابطهٔ فوق چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{EA}{ED}=\frac{۲AH}{۲KD}=\frac{AH}{KD}$$

و از این جا نتیجه می‌شود که دو مثلث AEH و DEK که در آنها دو ضلع متناسب و زاویهٔ مابین آن دو ضلع متساوی‌اند $(E\hat{A}H=E\hat{D}K)$، متشابه‌اند، و از تشابه آنها نتیجه می‌شود $A\hat{E}H=D\hat{E}K$. پس خط EI که نیمساز زاویهٔ AEC بود، نیمساز زاویهٔ HEK نیز می‌باشد و اگر نقطهٔ تقاطع آن را با HK نقطهٔ I' بنامیم، داریم:

$$\frac{I'H}{I'K}=\frac{EH}{EK}=\frac{AH}{KD}=\frac{AC}{BD}$$

به همین استدلال معلوم می‌شود که خط FI نیمساز زاویهٔ HFK می‌باشد، و اگر نقطهٔ برخورد آن را با خط HK نقطهٔ I'' بنامیم، داریم: $\frac{I''H}{I''K}=\frac{AC}{BD}$.



از اینجا معلوم می‌شود که $\frac{I'H}{I'K}=\frac{I''H}{I''K}$، یعنی I' و I'' بر یکدیگر منطبقند و خطهای FI و EI یکدیگر را روی خط HK واصل بین وسطهای دو قطر قطع می‌کنند.

۶. قطعه‌خط HK را امتداد می‌دهیم تا EF را درنقطهٔ T قطع کند. می‌دانیم که نقطهٔ T وسط قطعه‌خط EF است. حال KT را به‌قدر TK' مساوی با خودش امتداد می‌دهیم. چهارضلعی $EKFK'$ متوازی‌الاضلاع است. اکنون ثابت می‌کنیم $EK'FH$ محاطی است. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که :

$$T\hat{K}F=F\hat{I}K+I\hat{F}K \quad , \quad E\hat{K}T=E\hat{I}K+I\hat{E}K$$

از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود :

$$E\hat{K}F=۹۰^\circ+I\hat{E}K+I\hat{F}K$$

و نیز به همین روش معلوم می‌شود که :

$$E\hat{H}F=۹۰^\circ-I\hat{E}H-I\hat{F}H$$

از جمع این دو رابطه با ملاحظهٔ آن که خطهای IE و IF نیمسازهای زاویه‌های HEK و HFK هستند، معلوم می‌شود که $E\hat{K}F+E\hat{H}F=۱۸۰^\circ$ و چون $E\hat{K'}F=E\hat{K}F$، پس $E\hat{H}F+E\hat{K'}F=۱۸۰^\circ$، یعنی چهارضلعی $EK'FH$ محاطی است و داریم :

$$TE.TF=TH.TK'$$

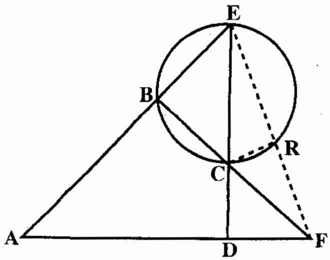
و یا

$$\overline{TE}^۲=\overline{TF}^۲=TH.TK$$

از این رابطه معلوم می‌شود که TE و TF بر دایره‌های محیطی دو مثلث EHK و FHK مماس هستند.

۷. قبلاً این رابطه را در مسأله‌ای ثابت کرده‌ایم. اکنون راه‌حل دیگری برای آن ذکر می‌کنیم :

چون مجذور طول مماسهای رسم شده از E و F بر دایرهٔ محیطی ABCD بترتیب مساوی با $EC\times ED$ و $FC\times FB$ می‌باشند ؛ بنابراین کافی است ثابت کنیم :



$$\overline{EF}^۲=BC.ED+AC.FB$$

دایرهٔ محیطی مثلث EBC را رسم می‌کنیم تا خط EF را در نقطهٔ R قطع کند. زاویهٔ $E\hat{R}C$ مکمل $E\hat{B}C$ است، یعنی مساوی با $\hat{B}$ می‌باشد. پس زاویهٔ مکمل آن $C\hat{R}F$ با $\hat{B}$ مکمل بوده با $\hat{D}$ مساوی است، یعنی چهارضلعی DCRF نیز چهارضلعی محاطی است. حال برای این که استدلال در تمام حالتهای شکل، صحت داشته باشد، قطعه خطهای ER، FR و FE را قطعه‌های جبری فرض کرده ملاحظه می‌کنیم که از F و E بترتیب دو قاطع بر دایره‌های EBCR و DCRF رسم شده است، پس داریم:

$$\overline{ER}.\overline{EF} = \overline{EC}.\overline{ED} \ , \ \ \overline{FR}.\overline{FE} = \overline{FC}.\overline{FB}$$

از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود:

$$\overline{EF}(\overline{ER} - \overline{FR}) = \overline{FC}.\overline{FB} + \overline{EC}.\overline{ED}$$

و یا

$$\overline{EF}(\overline{ER} + \overline{RF}) = FC.FB + EC.ED$$

$$\overline{EF} \times \overline{EF} = FC.FB + EC.ED$$

و یا بالاخره

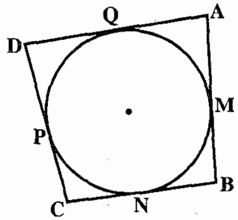
$$\overline{EF}^{۲} = FC.FB + EC.ED$$

۲.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محیطی

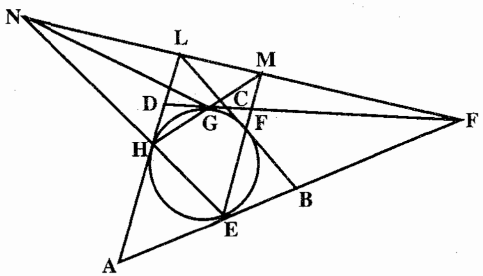
۱.۲.۳. تعریف و قضیه

۷۰۴. اثبات این قضیه را در جلد دوم دایرةالمعارف داریم، امّا به‌دلیل اهمیت آن، بار دیگر به یادآوری آن می‌پردازیم.

چهارضلعی محیطی ABCD را که بر دایرهٔ O در نقطه‌های M، N، P و Q مماس است، در نظر می‌گیریم. رابطهٔ $AB + CD = BC + AD$ با استفاده از ویژگی برابری طول مماسهای رسم شده از یک نقطه بر دایره ثابت می‌شود.

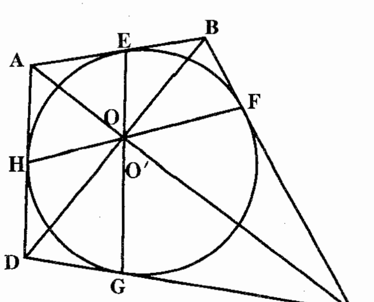


برای اثبات عکس قضیه، ثابت می‌کنیم که نیمسازهای زاویه‌های A، B، C و D از چهارضلعی، از یک نقطه می‌گذرند.



۷۰۵. فرض کنیم ABCD چهارضلعی محیطی و EFGH چهارضلعی محاطی حاصل از وصل نقطه‌های تماس باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم K، L، M و N بر یک استقامتند. می‌توان خطهای AB، EF، FG، CD، GH و HE را شش‌ضلع یک شش‌ضلعی محاط در دایره دانست که به موجب قضیهٔ پاسکال، نقطه‌های تقاطع AB با CD و FE با GH و FG با HE، یعنی، نقطه‌های K، M و N بر یک استقامتند. به همین ترتیب DA، HE، EF، BC، FG و GH ضلعهای متوالی یک ۶ ضلعی محاطی می‌باشند و باز هم به موجب قضیهٔ پاسکال، نقطه‌های L، N و M بر یک استقامتند. بنابراین N، M، L و K بر یک خط راست واقعند.

۷۰۶. می‌دانیم وقتی دو مثلث دارای دو زاویهٔ مساوی و دو زاویهٔ مکمل باشند، ضلعهای مقابل به زاویه‌های متساوی، متناسبند با ضلعهای مقابل به زاویه‌های مکمل. فرض کنیم AC و HF در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند. در دو مثلث AHO و COF دو زاویهٔ $\hat{F}$ و $\hat{H}$ مکملند و $A\hat{O}H = F\hat{O}C$. پس $\frac{AO}{CO} = \frac{AH}{CF}$ و اگر O' محل برخورد AC و EG باشد، خواهیم داشت $\frac{AE}{CG} = \frac{AO'}{CO'}$ ولی $AE = AH$ و $CG = CF$ است، پس $\frac{AO'}{CO'} = \frac{AO}{CO}$ و این تناسب ممکن نیست صحیح باشد، مگر آن که O و O' بر هم منطبق باشند. پس AC از نقطهٔ تلاقی HF و EG می‌گذرد و به همین ترتیب DB نیز از O خواهد گذشت.



۲.۲.۳. زاویه

۱.۲.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۷۰۷. اندازهٔ کمان $\widehat{PQ}$ برابر است با :

$$\widehat{PQ}=۳۶۰^\circ-(۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ+۸۰^\circ)=۶۰^\circ$$

از آن‌جا :

$$\hat{A}=\frac{\widehat{MNPQ}-\widehat{MQ}}{۲}=\frac{۱۲۰^\circ+۸۰^\circ+۶۰^\circ-۱۰۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$$

$$\hat{B}=\frac{۸۰^\circ+۶۰^\circ+۱۰۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

$$\hat{C}=\frac{۶۰^\circ+۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ-۸۰^\circ}{۲}=۱۰۰^\circ$$

$$\hat{D}=\frac{۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ+۸۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۲۰^\circ$$

۳.۲.۳. ضلع

۱.۳.۲.۳. اندازهٔ ضلع

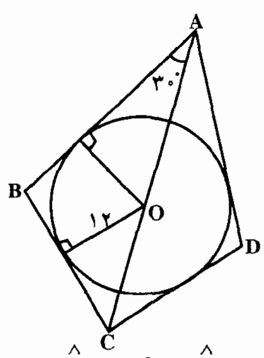
۷۰۸. می‌دانیم که $AB+CD=BC+AD$ است. پس $AB+CD=\frac{۳۶}{۲}=۱۸cm$ است و چون $AB=۱۲cm$ می‌باشد، اندازهٔ ضلع CD برابر است با :

$$CD=۱۸-۱۲=۶cm$$

۴.۲.۳. قطر

۱.۴.۲.۳. اندازهٔ قطر

۷۰۹. نقطه‌های تماس AD و DC با دایره را M و N می‌نامیم و از O مرکز دایره به M و N وصل می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AOM و ONC داریم :



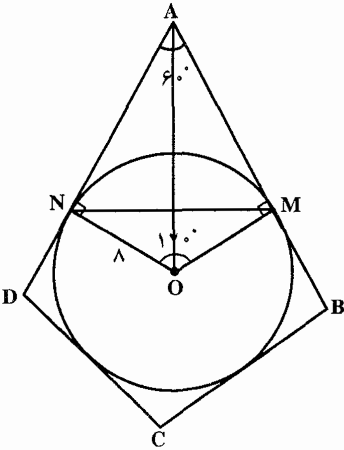
$$\hat{M}=۹۰^\circ\,,\ O\hat{A}M=۳۰^\circ\,,\ OM=۱۲cm\Rightarrow OA=۲۴cm$$

$$\hat{N}=۹۰^\circ\,,\ O\hat{C}N=۴۵^\circ\,,\ ON=۱۲cm\Rightarrow OC=۱۲\sqrt{۲}cm$$

$$\Rightarrow AC=AO+OC=۲۴+۱۲\sqrt{۲}=۱۲(۲+\sqrt{۲})cm$$

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. اندازهٔ پاره‌خط



۷۱۰. این نقطه‌های تماس را M و N می‌نامیم. از O مرکز دایره به نقطه‌های M و N وصل می‌کنیم.

OA نیمساز زاویهٔ MON و نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$، و چهارضلعی OMAN محاطی است ؛ بنابراین داریم :

$$\hat{M}=\hat{N}=۹۰^\circ \Rightarrow M\hat{O}N=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$$

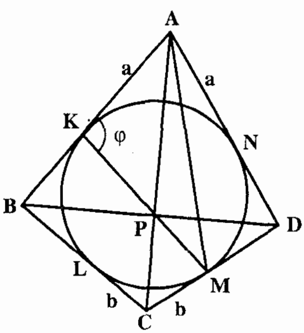
چون در مثلث متساوی‌الساقین OMN به ضلع ۸cm اندازهٔ زاویهٔ رأس برابر ۱۲۰ درجه است، بنابراین خواهیم داشت :

$$MN^۲=OM^۲+ON^۲+OM.ON$$

$$\Rightarrow MN^۲=۶۴+۶۴+۸\times۸=۱۹۲$$

$$\Rightarrow MN=۸\sqrt{۳}\text{cm}$$

۲.۵.۲.۳. نسبت پاره‌خطها



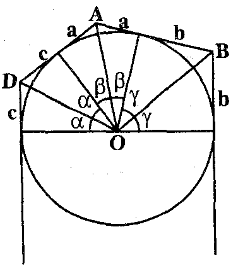
۷۱۱. فرض کنید K، L، M و N، بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای AB، BC، CD و DA با دایرهٔ محاطی باشند. فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد AC و KM باشد. اگر $A\hat{K}M=\varphi$، آن‌گاه $K\hat{M}C=۱۸۰^\circ-\varphi$ ؛ بنابراین :

$$\frac{AP}{PC}=\frac{S_{AKM}}{S_{KMC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AK.KM\sin\varphi}{\frac{۱}{۲}KM.MC\sin(۱۸۰^\circ-\varphi)}=\frac{AK}{MC}=\frac{a}{b}$$

امّا، خط راست NL، AC را به همین نسبت تقسیم می‌کند. بنابراین، خطهای AC، KM و NL در یک نقطه به هم می‌رسند. با در نظر گرفتن قطر BD، و همین نحوهٔ استدلال، ثابت می‌کنیم که BD هم از نقطهٔ P می‌گذرد. نسبت مطلوب، برابر است با $\frac{a}{b}$.

۶.۲.۳. شعاع دایره

۱.۶.۲.۳. اندازهٔ شعاع دایره



۷۱۲. شعاع دایرهٔ محاطی، بین مقدارهای شعاعهای دو حالت حدی قرار دارد. این شعاع نمی‌تواند از شعاع دایرهٔ محاط در مثلث به ضلعهای $a+b$، $b+c$، $c+a$، که برابر است با $\frac{S}{p}$، که در آن S مساحت و p نصف محیط مثلث است، کمتر باشد؛ بنابراین

$$r > \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(a+b+c)abc}}{a+b+c} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$$

از طرف دیگر، r از شعاع دایرهٔ نشان داده شده در شکل، کمتر است (در این شکل، مماسهای روبه‌رو موازی‌اند و نقطهٔ C به بینهایت میل می‌کند). چون برای زاویه‌های α، β و γ که در شکل مشخص شده‌اند، برابری $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲}$، برقرار است، $\tan\alpha=\frac{c}{p}$، $\tan\beta=\frac{a}{p}$ و $\tan\gamma=\frac{b}{p}$، که در آنها p شعاع دایرهٔ نشان داده شده است، $\tan(\alpha+\beta)=\cot\gamma$ یا $\frac{(c+p)p}{p^{۲}-ac}=\frac{p}{b}$، که از آن‌جا $p=\sqrt{ab+bc+ca}$.

بنابراین، $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}} < r < \sqrt{ab+bc+ca}$.

۷.۲.۳. محیط

۱.۷.۲.۳. اندازهٔ محیط

۷۱۳. ۳۶ سانتیمتر

۷۱۴. اگر نقطهٔ O مرکز دایره را به رأسهای چهارضلعی وصل کنیم، داریم:

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}$$

$$\Rightarrow S = \frac{۱}{۲}(AB+BC+CD+DA)\times r$$

$$\Rightarrow AB+BC+CD+DA = \frac{۲S}{r}$$

۸.۲.۳. مساحت

۱.۸.۲.۳. اندازهٔ مساحت

۷۱۵. اندازهٔ OD برابر $۲\sqrt{۲}$ و $D\hat{O}A = ۹۰^\circ$ است، بنابراین:

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{OAD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۲} \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \times \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}) + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} \times ۴ \times ۱ + \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times ۱ = ۱۲ + \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} + \frac{۱۴\sqrt{۶}}{۳}$$

۷۱۶. ثابت کنید که بین کلیهٔ چهارضلعیهای محیط بر دایرهٔ داده شده، مربع کمترین مساحت را دارد (برای مثال، می‌توانید از نابرابری $\tan\alpha + \tan\beta \geq ۲\tan[(\alpha+\beta)/۲]$ استفاده کنید، که در آن α و β زاویه‌هایی حاده‌اند). از طرف دیگر

$$S_{ABCD} \leq \frac{۱}{۲}(MA.MB + MB.MC + MC.MD + MD.MA) \leq$$
$$\frac{۱}{۴}(MA^۲ + MB^۲) + \frac{۱}{۴}(MB^۲ + MC^۲) + \frac{۱}{۴}(MC^۲ + MD^۲) +$$
$$\frac{۱}{۴}(MD^۲ + MA^۲) = ۱$$

در نتیجه، ABCD مربعی با مساحت یک است.

۹.۲.۳. رابطه‌های متری

۷۱۷. فرض کنید شعاع دایره r باشد و زاویه‌های بین شعاعهای رسم شده به نقطه‌های تماس مجاور، به‌طور دوری، برابر با ۲α، ۲β، ۲γ و ۲δ $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi)$ باشند. در این صورت

$$S = r^۲(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma + \tan\delta) \quad (۱)$$

طول ضلعهای چهارضلعی (یکی از آنها را پیدا می‌کنیم) برابرند با:

$$r(\tan\alpha + \tan\beta) = r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

و غیره. چون $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\gamma+\delta)$ و $\sin(\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\delta)$، دستور داده شده در صورت مسأله، به

$$S = r^۲\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta} \quad (۲)$$

ساده می‌شود. می‌ماند این که برابری طرفهای راست (۱) و (۲) را، به شرط این که $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ ثابت کنید.

۱۰.۲.۳. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است

۷۱۸. چون AC عمودمنصف پاره‌خط DB است؛ بنابراین داریم:

$AB = AD$ (۱)

$CD = CB$ (۲)

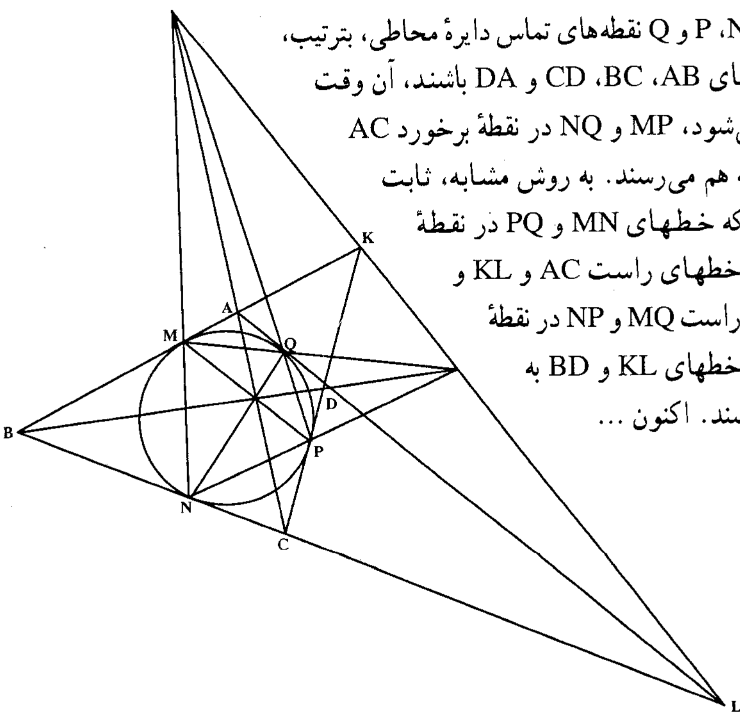
از جمع کردن این دو رابطه نتیجه می‌شود: $AB + CD = AD + BC$

بنابراین چهارضلعی ABCD محیطی است.

نکته. این چهارضلعی کایت یا، شبه لوزی نامیده می‌شود.

۱۱.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۱۹. اگر M، N، P و Q نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی، بترتیب، با ضلعهای AB، BC، CD و DA باشند، آن وقت نتیجه می‌شود، MP و NQ در نقطهٔ برخورد AC و BD به هم می‌رسند. به روش مشابه، ثابت می‌کنیم که خطهای MN و PQ در نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و KL و خطهای راست MQ و NP در نقطهٔ برخورد خطهای KL و BD به هم می‌رسند. اکنون ...

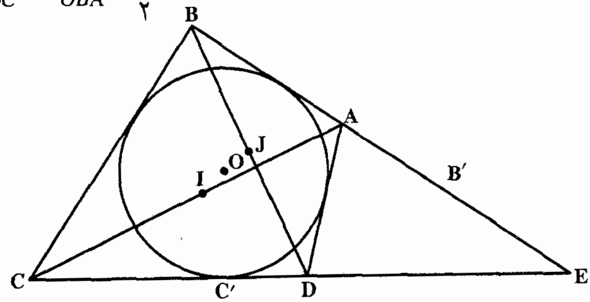


۷۲۰. مساحت چهارضلعی ABCD را به S، و مساحت هر مثلث مانند IAB را به S_{IAB} نمایش می‌دهیم. واضح است که :

$$(۱)\ S_{IDC}+S_{IBA}=\frac{۱}{۲}S$$

$$(۲)\ S_{JDC}+S_{JBA}=\frac{۱}{۲}S$$

$$(۳)\ S_{ODC}+S_{OBA}=\frac{۱}{۲}S$$



می‌دانیم که در چهارضلعی محیطی ABCD، $AB+DC=AD+BC$.
AB و CD را امتداد می‌دهیم تا در E یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه روی خط AB نقطهٔ B′ و روی خط CD نقطهٔ C′ را طوری انتخاب می‌کنیم که $EB'=AB$ و $EC'=DC$ باشد، داریم :

$$S_{IEC'}+S_{IEB'}=\frac{۱}{۲}S$$

و

$$S_{IC'EB'}=S_{IC'B'}+S_{EC'B'}$$

در نتیجه

$$(۱')\ \ S_{IC'B'}=\frac{۱}{۲}S-S_{EC'B'}$$

چون نظیر عملیات بالا را نسبت به J انجام دهیم تساوی (۲′) و (۳′) زیر به‌دست می‌آید یعنی،

$$(۲')\ \ S_{JC'B'}=\frac{۱}{۲}S-S_{EC'B'}$$

و

$$(۳')\ \ S_{OC'B'}=\frac{۱}{۲}S-S_{EC'B'}$$

از (۱′)، (۲′) و (۳′) نتیجه می‌شود : $S_{IC'B'}=S_{JC'B'}=S_{OC'B'}$

از این‌رو سه نقطهٔ J، O و I بر یک استقامتند.

۳.۳. رابطه‌های متری در چهارضلعی محاطی و محیطی

۲.۳.۳. زاویه

۱.۲.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۷۲۱. چون چهارضلعی محاطی است، بنابراین داریم :

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}=۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ=۶۰^\circ$$

از طرفی زاویه‌های A و C، زاویه‌های محاطی روبه‌رو به قطر دایره‌اند، پس هر یک برابر ۹۰ درجه‌اند.

۳.۳.۳. ضلع

۱.۳.۳.۳. اندازهٔ ضلع

۷۲۲. ۱. با توجه به شرط داده شده، $AB=AD$ و $CD=BC$ است. پس $AB+CD=AD+BC$ ؛ یعنی چهارضلعی ABCD محیطی است.

۲. قطر AC نیمساز زاویهٔ BAD است، پس $C\hat{A}B=۳۰^\circ$ و از آن‌جا $B\hat{C}A=۶۰^\circ$ است. زاویهٔ $A\hat{B}C$ نیز ۹۰° است. داریم :

$$BC=\frac{AB}{۲}=\frac{۲R}{۲}=\frac{۲۰}{۲}=۱۰cm=CD$$

$$AB=AC.\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۰\sqrt{۳}cm=AD$$

۴.۳.۳. قطر

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ قطر

۷۲۳. با توجه به شرطهای داده شده، قطر AC عمودمنصف قطر BD است. نقطهٔ برخورد دوقطر را H می‌نامیم. پس دو زاویهٔ $C\hat{B}D$ و $B\hat{A}C$ باهم برابرند ؛ بنابراین $C\hat{A}B=C\hat{B}H=۳۰^\circ$ است و داریم :

$$AC=۲BC=۱۰cm \text{ ، } CH=\frac{۵}{۲}\Rightarrow BH=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow BD=۵\sqrt{۳}cm$$

۳ . ۳ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۳ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

۷۲۴. داریم :

$$B\hat{A}C = ۳۰^\circ \Rightarrow AC = ۲BC = ۱۲cm$$
$$CK = BC = ۶cm \Rightarrow AK = AC - CK = ۱۲ - ۶ = ۶cm$$
$$KK' \| BC \Rightarrow \frac{KK'}{BC} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{KK'}{۶} = \frac{۶}{۱۲} \Rightarrow KK' = ۳cm$$

نکته. در این مسأله چون K وسط AC و $KK' \| BC$ است، پس $KK' = \frac{BC}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳cm$ است.

۳ . ۳ . ۶. شعاع دایره

۳ . ۳ . ۶ . ۱ . اندازهٔ شعاع دایره

۷۲۵. با شرطهای داده شده، $A\hat{C}B = A\hat{B}D = ۱۵^\circ$ است. بنابراین اگر نقطهٔ برخورد دوقطر چهارضلعی را H بنامیم، ارتفاع BH برابر $\frac{AC}{۴}$ است. امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC داریم :

$$\sin H\hat{C}B = \frac{HB}{BC} \Rightarrow \sin ۱۵^\circ = \frac{BH}{۱۲\sqrt{۳}} \Rightarrow BH = ۱۲\sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}\right)$$
$$\Rightarrow BH = ۳(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶}) \Rightarrow AC = ۴BH = ۱۲(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶})cm$$
$$\Rightarrow R = \frac{AC}{۲} = ۶(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶})$$

راه دیگر. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{B} = ۹۰^\circ)$، $A\hat{C}B = ۱۵^\circ$ است. پس

$$\cos A\hat{C}B = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{\cos ۱۵^\circ} = \frac{۱۲\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}}$$
$$\Rightarrow AC = ۴۸\sqrt{۳} \times \left(\frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۶ - ۲}\right) = ۱۲(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶})cm$$
$$\Rightarrow R = \frac{AC}{۲} = ۶(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۶})$$

برای محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محاطی چهارضلعی، نیمساز زاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم تا AC را در I قطع کند. از I عمود IK را بر ضلع AB فرود می‌آوریم، $IK = r$ است.
برای محاسبهٔ r در مثلث IAB داریم:

$$I\hat{A}B = ۷۵^\circ \text{ و } I\hat{B}A = ۴۵^\circ \Rightarrow A\hat{I}B = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow B\hat{I}K = ۳۰^\circ \text{ ، } BK = \frac{AB}{۲} = \frac{AC\sin ۱۵^\circ}{۲}$$

$$\Rightarrow BK = \frac{۱۲\sqrt{۳}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\times(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۸} = \frac{۱۲\sqrt{۳}(۸-۴\sqrt{۳})}{۸}$$

$$BK = r = ۳\sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳}) = (۶\sqrt{۳}-۹)cm$$

$$\Delta IBK: \tan ۳۰^\circ = \frac{KB}{IK} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۳(۲\sqrt{۳}-۳)}{IK}$$

$$\Rightarrow r = IK = \frac{۹(۲\sqrt{۳}-۳)}{\sqrt{۳}} = ۳\sqrt{۳}(۲\sqrt{۳}-۳)cm$$

۳. ۳. ۷. محیط

۳. ۳. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۷۲۶. با توجه به شرطهای داده شده، $A\hat{B}C = A\hat{D}C = ۹۰^\circ$ است. پس اگر H نقطهٔ برخورد دوقطر چهارضلعی باشد، $BH = \frac{BD}{۲} = ۲\sqrt{۶}cm$ خواهد بود و داریم:

$$BH^۲ = HC \cdot HA \Rightarrow ۲۴ = ۲K \cdot ۳K = ۶K^۲ \Rightarrow K^۲ = ۴ \Rightarrow K = ۲$$

$$\Rightarrow HC = ۴ \text{ و } HA = ۶ \Rightarrow BC = CD = \sqrt{BH^۲ + HC^۲} = \sqrt{۲۴+۱۶} = ۲\sqrt{۱۰}cm$$

$$\Rightarrow \text{محیط چهارضلعی} = ۲(AB+BC) = ۲(۲\sqrt{۱۵}+۲\sqrt{۱۰})$$

$$\Rightarrow \text{محیط چهارضلعی} = ۴(\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۰})cm$$

۳. ۳. ۸. مساحت

۳. ۳. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

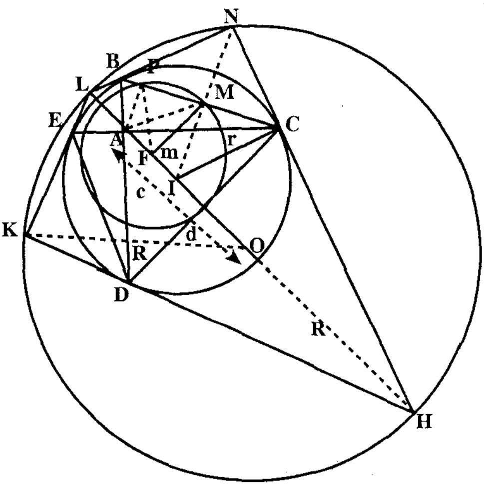
۷۲۷. ۱. از این ویژگی استفاده کنید که اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره‌ای رسم کنیم طولهای آنها با هم برابرند.

۲. قضیهٔ «هرگاه a، b، c و d اندازه‌های ضلعهای یک چهارگوشهٔ محاطی و s نصف محیط آن باشد، k مساحت آن از دستور $k^۲ = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ به‌دست می‌آید.» را به کار ببرید با توجه به این که :

$s = a + c = b + d$

۳. ۳. ۹. رابطه‌های متری

۷۲۸. پاسخ : $(d^۲ - R^۲)^۲ - ۲r^۲(R^۲ + d^۲) = ۰$. دو دایرهٔ متداخل (O , R) و (I , r) را با فرض $OI = d$ درنظر می‌گیریم. در دایرهٔ I چهارضلعی عمود قطر BCDE را رسم می‌کنیم. $AI = c$ فرض می‌کنیم و در رأسهای B، C، D و E مماسهایی بر این دایره می‌کشیم. ثابت می‌شود که این مماسها در دایرهٔ O چهارضلعی HKLN را به وجود می‌آورند که در دایرهٔ O محاط و بر دایرهٔ I محیط است.



مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر BM دایره‌ای است به مرکز F وسط AI.

این دایره از نقطهٔ P تصویر نقطهٔ P روی BC نیز می‌گذرد. AM میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برابر MC است. خط IMN عمودمنصف BC است. از آن‌جا داریم :

$$IM^۲ + MC^۲ = IC^۲ \Rightarrow IM^۲ = \frac{r^۲}{۲} \text{ و } m^۲ = FM^۲ = IM^۲ - IF^۲$$

$$\Rightarrow m^۲ = FM^۲ = \frac{r^۲}{۲} - \frac{c^۲}{۴} \Rightarrow FM = \frac{\sqrt{۲r^۲ - c^۲}}{۲}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ ICN نتیجه می‌شود $IN = \frac{r^۲}{IM}$ ؛ بنابراین معکوس نقطهٔ M، نقطهٔ N است با قوت انعکاس $r^۲$ نسبت به مرکز انعکاس I و از آن‌جا، نقطهٔ N دایره‌ای را می‌پیماید که معکوس دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ M است.

می‌دانیم که اگر دایرهٔ (B', b') منعکس دایرهٔ (B,b) نسبت به مرکز انعکاس A با قوت انعکاس $k^۲$ باشد، داریم:

$$a' = \frac{ak^۲}{a^۲ - b^۲} \quad (۱)\ ,\ b' = \frac{bk^۲}{a^۲ - b^۲} \quad (۲)$$

اکنون برای محاسبهٔ d و R دررابطه‌های (۱) و (۲) باید a' را با d، a را با $\frac{c}{۲}$، b' را با R، b را با m و قوت $k^۲$ را با $r^۲$ جایگزین کنیم. محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{\frac{c}{۲}\cdot r^۲}{\frac{c^۲}{۴} - (\frac{r^۲}{۴} - \frac{c^۲}{۴})} \Rightarrow d = \frac{cr^۲}{c^۲ - r^۲} \quad (۳)$$

$$R = \frac{r^۲\sqrt{۲r^۲ - c^۲}}{۲(\frac{c^۲}{۴} - \frac{۲r^۲ - c^۲}{۴})} \Rightarrow R = \frac{r^۲\sqrt{۲r^۲ - c^۲}}{c^۲ - r^۲} \quad (۴)$$

$$(۳) \Rightarrow (d^۲ - R^۲)^۲ - ۲r^۲(R^۲ + d^۲) = ۰$$

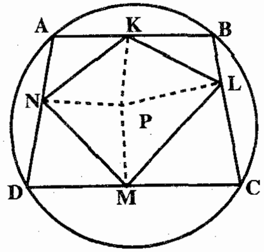
$$\frac{(۳)}{(۴)} \Rightarrow \frac{d}{R} = \frac{cr^۲}{r^۲\sqrt{۲r^۲ - c^۲}} \Rightarrow c^۲ = \frac{۲r^۲d^۲}{R^۲ + d^۲}$$

۳ . ۳ . ۱۰ . ثابت کنید چهارضلعی محاطی و محیطی است

۷۲۹. می‌دانیم که اگر قطرهای چهارضلعی محاطی دوبه‌دو برهم عمود باشند، آن وقت تصویرهای نقطهٔ برخورد قطرهای این چهارضلعی روی ضلعهای آن، رأسهای چهارضلعیی به حساب می‌آیند که دایره‌ای قابل محاط شدن در آن و بر آن دایره‌ای قابل محیط شدن است. شعاعهای این دایره‌های محاطی و محیطی و فاصلهٔ میان مرکزهای آنها، به تمامی بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی اصلی و فاصلهٔ مرکز آن تا نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی محاط شده در آن، قابل محاسبه است. در نتیجه، وقتی که قطرهای چهارضلعی اصلی، دور نقطهٔ برخوردشان دوران داده شوند، چهارضلعی تشکیل شده با تصویرهای این نقطه، با باقی ماندن محاط در یک دایره و محیط بر یک دایره، دوران می‌کند، با درنظر گرفتن عبارتهای به‌دست آمده برای شعاع دایره‌های محاطی و محیطی به‌سادگی می‌توان نشان داد رابطه‌ای که می‌خواستیم ثابت کنیم، برای چنین چهارضلعیهایی

درست است. برای تکمیل اثبات، می‌ماند اینکه ثابت کنیم هر چهارضلعی «محاطی ـ محیطی» قابل حصول از چهارضلعیی محاطی با قطرهای دوبه‌دو بر هم عمود، با استفاده از روش بالا است. در حقیقت، اگر KLMN چهارضلعیی «محاطی ـ محیطی» و P مرکز دایرهٔ محاطی آن باشد، آن‌وقت با رسم کردن خطهایی عمود بر نیمسازهای KP، LP، MP و NP، که بترتیب، از نقطه‌های K، L، M و N می‌گذرند، به چهارضلعی ABCD می‌رسیم (شکل را ببینید). در این حالت، $B\hat{P}K = K\hat{L}B = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}M\hat{L}K$ (در این جا، از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که در چهارضلعی PKBL زاویه‌های روبه‌رو قائمه‌اند، و در نتیجه، چهارضلعیی محاطی است). به همین ترتیب، $K\hat{P}A = K\hat{N}A = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}M\hat{N}K$، و بدین ترتیب

$$B\hat{P}A = B\hat{P}K + K\hat{P}A = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(M\hat{L}K + M\hat{N}K) = ۹۰^\circ$$



بنابراین، کلیهٔ زاویه‌های BPA، APD، DPC و CPB قائمه‌اند، P نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD است و خود قطرها، دوبه‌دو برهم عمود می‌شوند. بسادگی می‌توان نشان داد که ABCD چهارضلعیی محاطی است، زیرا:

$$\begin{aligned} A\hat{B}C + A\hat{D}C &= P\hat{B}L + P\hat{B}K + P\hat{D}N + P\hat{D}M \\ &= P\hat{K}L + P\hat{L}K + P\hat{M}N + P\hat{N}M \\ &= \frac{۱}{۲}(N\hat{K}L + K\hat{L}M + L\hat{M}N + M\hat{N}K) = ۱۸۰^\circ \end{aligned}$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴

رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...

۴ . ۱ . رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی

۴ . ۱ . ۲ . زاویه

۴ . ۱ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۷۳۰. گزینهٔ (الف) درست است؛ زیرا فرض می‌کنیم اندازه‌های زاویه‌ها بر حسب درجه چنین باشند $a-2d$ ، $a-d$ ، a ، $a+d$ و $a+2d$ ؛ پس $5a=540°$ و $a=108°$.

۷۳۱. ۳۰ درجه. مثلث DCA' را برابر مثلث CBA و وصل به پنج‌ضلعی بسازید.

۴ . ۱ . ۲ . ۲ . تساوی زاویه‌ها

۷۳۳. F را نقطهٔ برخورد قطرهای BD و CE بگیرید. نقطه‌های A، F، D و E روی محیط یک دایره‌اند. نقطه‌های A، B، C و F هم روی محیط یک دایره قرار دارند.

۴ . ۱ . ۳ . ضلع

۴ . ۱ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۷۳۵. با توجه به داده‌های مسأله، مثلث BCD قائم‌الزاویه و از آن‌جا $BC=6cm$ است.

۴ . ۱ . ۴ . قطر

۴ . ۱ . ۴ . ۱ . اندازهٔ قطر

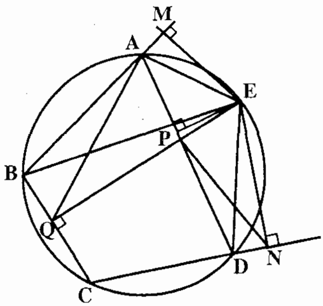
۷۳۶. نه، نمی‌توانند. از نابرابری مثلثی استفاده کنید.

۴ . ۱ . ۵. پاره‌خط

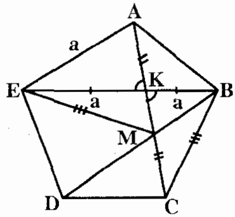
۴ . ۱ . ۵ . ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۳۷. نقطه‌های E، M، B و Q، روی دایره‌ای به قطر BE، و نقطه‌های E، P، D و N، بر دایره‌ای به قطر ED واقعند (شکل). بنابراین، $E\hat{M}Q = E\hat{B}Q = ۱۸۰^\circ - E\hat{D}C = E\hat{D}N = E\hat{P}N$، به همین ترتیب، $E\hat{Q}M = E\hat{N}P$، یعنی، مثلث EMQ با مثلث EPN، با نسبت تشابه $\sqrt{k}$، متشابه است (برای تکمیل حل، لازم است که حالتهای‌دیگر ترتیب نقطه‌ها را درنظر بگیرید).

جواب : $d\sqrt{k}$



۴ . ۱ . ۵ . ۲. تساوی پاره‌خطها



۷۳۸. از ویژگی میانه بودن AK در مثلث AEB، متساوی‌الساقین بودن مثلث AEK و برابری $AK = MC$ استفاده کنید.

۴ . ۱ . ۵ . ۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷۴۰. $PQ = \frac{۱}{۴}AE$

۴ . ۱ . ۶. شعاع دایره

۴ . ۱ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۷۴۱. مثلث BCD قائم‌الزاویه است. داریم :

$BC = ۶cm$

$r = \frac{S}{p} = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲ \Rightarrow r = ۲cm$

۴ . ۱ . ۷. محیط

۴ . ۱ . ۷ . ۱. اندازهٔ محیط

۷۴۲. این محیط برابر است با $\frac{۱}{۱+\sin ۱۸^\circ}-۱$

۴ . ۱ . ۷ . ۲. رابطهٔ بین محیطها

۷۴۳. هر ضلع خط شکستهٔ HKOIMH، از مجموع طولهای دو پاره‌خط راستی که وسط ضلعهای مجاور پنج‌ضلعی را به‌هم وصل می‌کنند، تجاوز نمی‌کند. یعنی از نصف مجموع طولهای دو قطر مشخص پنج‌ضلعی بیشتر نیست.

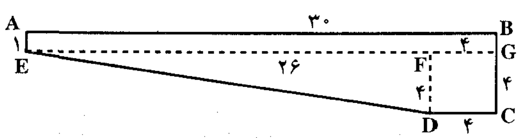
۴ . ۱ . ۸. مساحت

۴ . ۱ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت

۷۴۴. داریم :

$S = \frac{۱}{۲}(۴+۶+۸+۹+۱۰/۵)\times ۵$ پنج‌ضلعی

$\Rightarrow S = \frac{۳۷۵}{۴}\mathrm{cm}^۲$



۷۴۵. از انتهای عمق ۱ متر خطی موازی طول استخر رسم می‌کنیم، ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه‌ای به‌دست می‌آید که قاعده‌های آن ۳۰m و ۴m و ساق قائم آن ۴m است. با توجه به شکل داریم :

$S = S_{ABGE} + S_{EGCD} = ۳۰\times ۱ + \frac{۴+۳۰}{۲}\times ۴ = ۹۸\mathrm{m}^۲$ دیوار

۷۴۶. به محاسبهٔ مساحت پنج‌ضلعی داده شده به صورت محاسبهٔ حاصل‌جمع مساحتهای مثلثهای ABE، BDE و BCD می‌پردازیم. طبق قانون سینوسها در مورد مثلث ABE به $\frac{AE}{\sin ۴۵^\circ} = ۲R$ ، یعنی $AE = \sqrt{۲}$ می‌رسیم. از این رو ABE، مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه خواهد بود که در آن $AB = AE = \sqrt{۲}$ است. بنابراین $BE = ۲$ و

$AB\cdot AE=1$ $S_{ABE}=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، به دلیل $BE=2$ ، خط BE قطر دایره خواهد بود؛ از این رو BDE مثلث قائم‌الزاویه بوده و از آن $DE=1$ ، $BD=\sqrt{3}$ و $S_{BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ نتیجه می‌شود.

سرانجام مثلث BCD را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که در آن $BD=\sqrt{3}$ است. طبق قانون سینوسها، $\frac{BD}{\sin B\hat{C}D}=2R$ یعنی $\sin B\hat{C}D=\frac{\sqrt{3}}{2}$ را داریم.

از این رو چنین حاصل می‌شود، $B\hat{C}D=120^\circ$ و $C\hat{B}D=C\hat{D}B=30^\circ$.

به دلیل $\frac{BC}{\sin 30^\circ}=2R$ نتیجه می‌شود که :

$$BC=CD=1\ ,\ S_{BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin B\hat{C}D=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

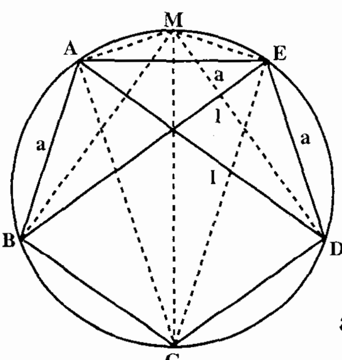
بدین ترتیب داریم : $S_5=1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$.

۷۴۷. $\frac{3a^2}{8}$

۷۴۸. مساحت موردنظر برابر است با مساحت یک مستطیل به ضلعهای c و b و یک مثلث قائم‌الزاویه به ساقهای $a-c$. بنابراین مساحت شکل موردنظر برابر است با :

$$bc+\frac{1}{2}(a-c)^2$$

۴ . ۱ . ۹. رابطه‌های متری



۷۴۹. طول ضلع و قطر پنج‌ضلعی منتظم محاطی را a و b نامیده، رابطهٔ بطلمیوس را در مورد دوچهارضلعی MABE و MADE می‌نویسیم :

$$a\cdot MB=a\cdot ME+b\cdot MA$$
$$a\cdot MD=b\cdot ME+a\cdot MA$$

از جمع این دو رابطه حاصل می‌شود :

$$a(MB+MD)=(a+b)(ME+MA) \qquad (1)$$

حال در چهارضلعی MACE رابطهٔ بطلمیوس را می‌نویسیم :

$$a\cdot MC=b(ME+MA)$$

به جای حاصلضرب $b(ME+MA)$ در رابطهٔ (۱)، طرف اوّل تساوی را قرار می‌دهیم تا حاصل شود:

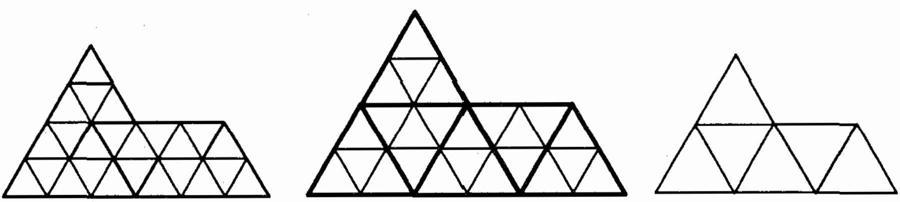
$$a(MB+MD)=a(ME+MA)+a\cdot MC$$

و یا

$$MB+MD=ME+MA+MC$$

۴. ۱. ۱۰. شکلهای ایجاد شده

۷۵۰. بلی، این کار ساده است. ابتدا مطابق شکل «الف»، مزرعهٔ اصلی را به ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم می‌کنیم تا شکل «ب» حاصل شود. اگر در شکل «الف» هر مثلث را به ۴ مثلث کوچک تقسیم کنیم، کلاً ۴×۶ یعنی ۲۴ مثلث کوچک خواهیم داشت. آن‌گاه مطابق شکل «ج» سهم هرفرزند، شامل ۶ مثلث را طوری جدا می‌کنیم که متشابه با مزرعهٔ اصلی باشند. در این صورت این ۴ سهم قرینهٔ هم یا قابل انطباق بر یکدیگر نیز خواهند بود.



(ج) (ب) (الف)

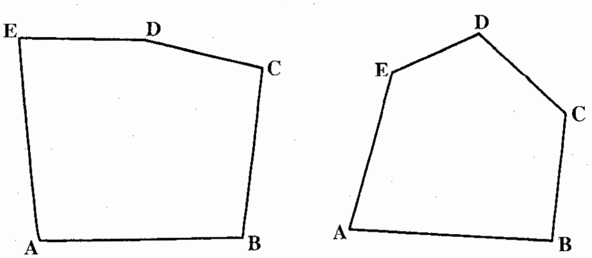
۷۵۲. ۱. خط شکسته EABC را با مشخصات زیر رسم می‌کنیم:

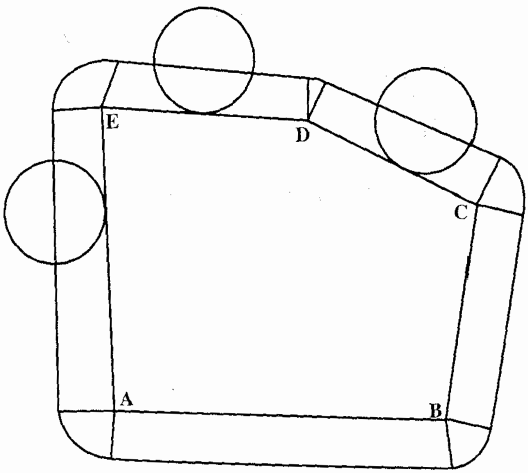
(EA = ۵cm , AB = ۵cm , BC = ۴cm)

البته طول EC باید کوچکتر از ۶ سانتیمتر باشد. حال مثلث EDC را رسم می‌کنیم، به‌طوری که:

DE = CD = ۳cm

یادآوری می‌کنیم که پنج‌ضلعیهای گوناگون زیادی با محیطهای یکسان خواهیم داشت:

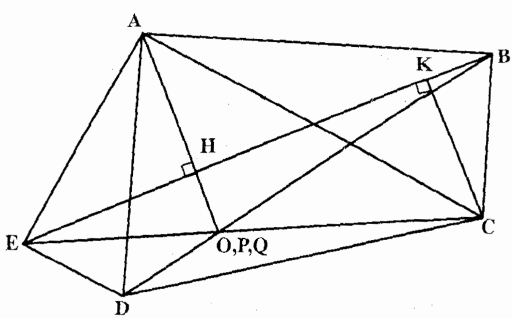




۲. برای تعیین مسیر چرخ نیز به موازات هر ضلع از پنج‌ضلعی، و فاصلهٔ ۱ سانتیمتر از آنها، در خارج شکل رسم می‌کنیم. پنج مستطیل به طولهای ۳،۴،۵،۵ و۳ سانتیمتر و عرض ۱ سانتیمتر حاصل می‌شود. این مستطیلها دو به دو با هم زاویه تشکیل می‌دهند. شمار این زاویه‌ها ۵ تاست. رأس هریک از این زاویه‌ها را مرکز قرار می‌دهیم و کمانی به شعاع ۱ سانتیمتر رسم می‌کنیم. طول مجموع این پنج کمان، برابر یک دایرهٔ کامل می‌شود. پس طول مسیر مرکز چرخ در دور پنج‌ضلعی چنین است:

$$۵+۴+۳+۳+۵+۲\pi=۲۶/۲۸\text{cm}$$

۴. ۱. ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۷۵۳. AH را بر خط راست BE عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خطهای راست CE و BD را بترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کنند. ثابت می‌کنیم AP = AQ که از آن‌جا، روشن می‌شود که سه نقطهٔ Q، P و O برهم منطبقند. عمود CK را بر خط راست BE رسم می‌کنیم (شکل)؛ آن‌وقت، از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CKB و BHA (که در آنها، ضلعهای AB و CK، بترتیب، بر ضلعهای BC و BH عمودند)، داریم:

$$\frac{CK}{BH}=\frac{BK}{AH}=\frac{BC}{AB}=tg(B\hat{A}C)$$

و از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ EHP و EKC به‌دست می‌آید :

$$PH = \frac{EH \cdot CK}{EK} = \frac{EH \cdot BH \cdot tg(B\hat{A}C)}{EB - BK} = \frac{EH \cdot BH \cdot tg(B\hat{A}C)}{EB - AH \cdot tg(B\hat{A}C)}$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود :

$$QH = \frac{BH \cdot EH \cdot tg(E\hat{A}D)}{EB - AH. tg(E\hat{A}D)}$$

از آن‌جا، و با توجه به برابری دو زاویهٔ BAC و EAD، نتیجه می‌شود : $PH = QH$

حکم ثابت شد.

۴ . ۱ . ۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۴. الف. مجموع زاویه‌های داخلی پنج‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1$ و ده‌ضلعی $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$، بترتیب، برابر $۳ \times ۱۸۰^\circ$ و $۸ \times ۱۸۰^\circ$ است. علاوه بر این، اگر هر زاویهٔ این پنج‌ضلعی را با زاویهٔ ده‌ضلعی در همان رأس، جمع کنیم، ۳۶۰ درجه به‌دست می‌آید. بنابراین داریم :

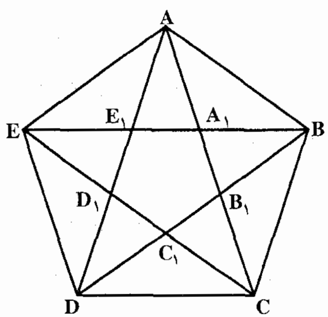
$$A_1\hat{B}B_1 + B_1\hat{C}C_1 + C_1\hat{D}D_1 + D_1\hat{E}E_1 + E_1\hat{A}A_1 = ۸ \times ۱۸۰^\circ + ۳ \times ۱۸۰^\circ - ۵ \times ۱۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

ب. اگر ABCDE، یک پنج‌ضلعی منتظم باشد، با توجه به تقارن (نسبت به نیمساز هریک از زاویه‌های آن) داریم :

$$AA_1 = AE_1 = EE_1 \text{ و } AC \parallel ED$$

از آن‌جا

$$A\hat{A}_1E = A_1\hat{E}D = C\hat{E}A = E\hat{A}A_1$$



یعنی، مثلث AEA_1 متساوی‌الساقین است.

$a = AE$ و $x = A_1E_1$ می‌گیریم. در این صورت، از تشابه مثلثهای متساوی‌الساقین A_1AE_1 ، A_1EA (که در زاویهٔ مجاور به قاعده، مشترکند)، به‌دست می‌آید :

$$\frac{AA_1}{A_1E_1} = \frac{A_1E}{AA_1} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{a}{a-x}$$

از آن‌جا $x^۲ - ۳ax + a^۲ = ۰$

بنابراین $\frac{x}{a} = \frac{۱}{۲}(۳ - \sqrt{۵})$ (زیرا $x < a$)

و در نتیجه $\frac{S_{A_۱B_۱C_۱D_۱E_۱}}{S_{ABCDE}} = (\frac{x}{a})^۲ = \left[\frac{۱}{۲}(۳ - \sqrt{۵})\right]^۲ = \frac{۱}{۲}(۷ - ۳\sqrt{۵})$

۷۵۵. پنج‌ضلعی ABCDE را می‌توان به صورت شش‌ضلعی AABCCE یا به صورت شش‌ضلعی ABCCEA درنظر گرفت و از قضیهٔ پاسکال استفاده کرد.

۷۵۶. وسط پاره‌خطهای راست BC و AC را، بترتیب، P و Q می‌نامیم. اگر مثلث OPM را دور نقطهٔ O و به اندازهٔ ۶۰ درجه دوران دهیم (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت ؛ شکل) و سپس از تجانس به مرکز O و ضریب ۲، در مورد آن استفاده کنیم، آن‌وقت، بر مثلث OCE منطبق می‌شود. در واقع، از آن‌جا که :

$$C\hat{O}P = ۶۰^\circ \ , \ CO = ۲OP$$

(زیرا، نقطهٔ O، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است)، آن‌وقت، نقطهٔ P، در اثر این تبدیلها، بر نقطهٔ C منطبق می‌شود. سپس، چون

$$PM \| DC, D\hat{C}E = ۶۰^\circ \ , \ EC = DC = ۲PM$$

(زیرا PM، وسط دوضلع از مثلث BCD را به‌هم وصل کرده است)، بنابراین، در این تبدیلها، پاره‌خط راست PM به پاره‌خط راست CE، و مثلث OPM به مثلث OCE منجر می‌شود. به این ترتیب، داریم :

$$E\hat{O}M = ۶۰^\circ \ , \ EO = ۲MO$$

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که، در نتیجهٔ دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ ۶۰ درجه (و در جهت مثلثاتی)، و تجانس به مرکز O و ضریب ۲، مثلث OQN منجر به مثلث OCD می‌شود. از آن‌جا

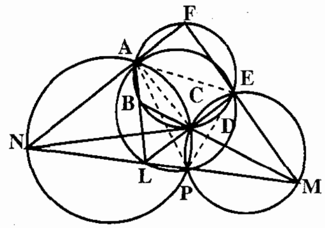
$$N\hat{O}D = ۶۰^\circ \ , \ DO = ۲NO$$

بنابراین دو مثلث MOD و MOE متشابه‌اند.

۴ . ۲. رابطه‌های متری در شش‌ضلعی

۴ . ۲ . ۱. تعریف و قضیه

۷۵۷. نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی AB و DE، BC و EF، CD و FA را بترتیب، L، M و N می‌نامیم. باید ثابت کنیم، نقطه‌های L، M و N روی یک خط راست (خط راست پاسکال) قرار دارند. نقطهٔ A را به C و A را به E وصل می‌کنیم (روی شکل، این خطها را به صورت خط‌چین نشان داده‌ایم). دایره‌های محیطی مثلثهای ACN، ECM



و AEL را رسم می‌کنیم. دو دایرهٔ اوّل، به‌جز C، در نقطهٔ P همیکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت می‌کنیم، دایرهٔ سوم هم از P می‌گذرد. برای این منظور کافی است ثابت کنیم: $A\hat{P}E = A\hat{L}E$. داریم:

$$A\hat{P}E = A\hat{P}C + C\hat{P}E = \frac{\overset{\frown}{DEF} - \overset{\frown}{ABC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{FAB} - \overset{\frown}{CDE}}{۲}$$

$$= \frac{\overset{\frown}{EF} - \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{FA} - \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{EFA} - \overset{\frown}{BCD}}{۲} = A\hat{L}E$$

اکنون، ثابت می‌کنیم، نقطه‌های N، M و P روی یک خط راست قرار دارند. برای این منظور ثابت می‌کنیم:

$$C\hat{P}M + C\hat{P}N = ۱۸۰^\circ$$

بترتیب داریم:

$$C\hat{P}M = ۱۸۰^\circ - C\hat{E}M = C\hat{E}F = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FABC}$$

$$C\hat{P}N = ۱۸۰^\circ - C\hat{A}N = C\hat{A}F = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CEF}$$

$$C\hat{P}M + C\hat{P}N = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FABC} + \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{CEF} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{FABCEF} = ۱۸۰^\circ$$

به همین ترتیب، ثابت می‌کنیم، نقطه‌های P، L و M هم، روی یک خط راست قرار دارند. برای این منظور ثابت می‌کنیم: $E\hat{P}M + E\hat{P}L = ۱۸۰^\circ$.

بترتیب داریم :

$$E\hat{P}M = E\hat{C}M = 180^\circ - B\hat{C}E = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{EFAB}$$

$$E\hat{P}L = 180^\circ - B\hat{A}E = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCDE}$$

$$E\hat{P}M + E\hat{P}L = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{EFAB} + 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCDE}$$

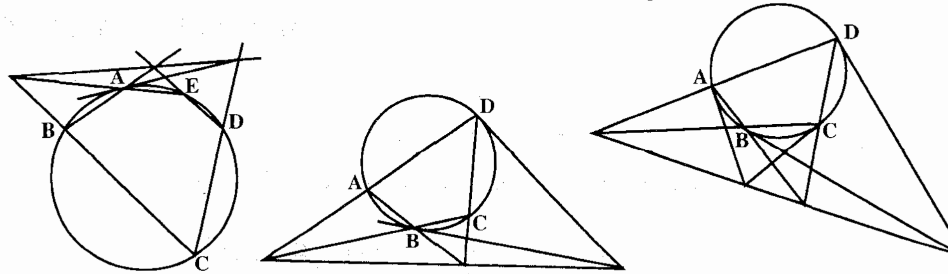
$$= 360^\circ - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCDEFAB} = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

به این ترتیب، هم سه نقطهٔ M، P و N و هم سه نقطهٔ L، P و M، بر یک خط راست واقعند. بنابراین، نقطه‌های M، L و N روی یک خط راست قرار می‌گیرند.

۷۵۸. حالت حدی زیر را، از مسألهٔ پاسکال، مورد بررسی قرار می‌دهیم : **حالت اوّل.** فرض کنید، دو رأس شش‌ضلعی محاطی بر هم منطبق شوند، در این صورت، ضلعی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کرد، به مماس تبدیل می‌شود (شکل a). در این حالت، حکم مسأله چنین می‌شود : در هر پنج‌ضلعی قابل محاط در دایره، نقطه‌های برخورد دو جفت ضلعهای غیرمجاور، و نقطهٔ برخورد ضلع پنجم با مماس در رأس روبه‌رو (بر دایرهٔ محیطی)، روی یک خط راست واقعند.

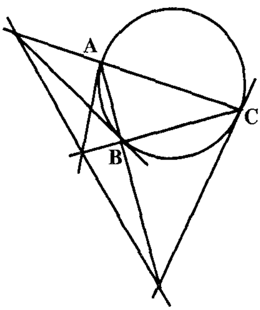
حالت دوم. به همین ترتیب، چهارضلعی محاطی را می‌توان همچون یک شش‌ضلعی درنظر گرفت که در آن، دو جفت رأس بر هم منطبق شده باشند. در این حالت، این حکم به‌دست می‌آید : در هر چهارضلعی محاطی، دو جفت ضلعهای روبه‌رو و یک جفت مماسهای دو رأس روبه‌رو (بر دایرهٔ محیطی چهارضلعی)،در نقطه‌هایی یکدیگر را قطع می‌کنند، که روی یک خط راست قرار دارند (شکل b).

با رسم مماسها، در همهٔ رأسهای چهارضلعی، به سادگی ثابت می‌شود : در هر چهارضلعی محاطی، دو جفت ضلعهای روبه‌رو و دو جفت مماسهای در رأسهای روبه‌رو، در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند که روی یک خط راست قرار دارند (شکل c).



(a) (b) (c)

حالت سوم. سرانجام مثلث را می‌توان یک شش‌ضلعی محاطی دانست که در آن همهٔ رأسها مضاعفند (یعنی، رأسها دوبه‌دو بر هم منطبقند). در این حالت، این حکم درست است : در هر مثلثی که در یک دایره محاط باشد، سه نقطهٔ برخورد هر ضلع با مماس در رأس روبه‌رو، بر یک خط راست قرار دارند (شکل d).



(d)

۴ . ۲ . ۲ . زاویه

۴ . ۲ . ۲ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۷۵۹. ۶۰ درجه.

۴.۲.۳. ضلع

۴ . ۲ . ۳ . ۱ . اندازهٔ ضلع

۷۶۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC داریم : $AB = BC = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = ۱۲\,\text{cm}$

و در مربع ACDE: $CD = DE = AC = ۱۲\sqrt{۲}\,\text{cm}$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEF: $EF = \frac{AE}{۲} = \frac{AC}{۲} = ۶\sqrt{۲}\,\text{cm}$

$AF = ۱۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۶}\text{cm}$

۴ . ۲ . ۴ . قطر

۴ . ۲ . ۴ . ۱ . اندازهٔ قطر

۷۶۱. در مثلث ABC داریم :

$AC^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲} + ۶ \times ۸ = ۱۴۸ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۳۷}$

بنابراین اندازهٔ زاویه ACB مقدار معلومی است که اگر آن را α بنامیم، در مثلث ACD داریم :

$$\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin A\hat{C}D} = \frac{AC}{\sin A\hat{D}C} \Rightarrow \frac{۱۲}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin A\hat{C}D} = \frac{۲\sqrt{۳۷}}{\sin A\hat{D}C}$$

از آن‌جا اندازهٔ زاویه‌های ADC و ACD و از روی آنها طول قطر AD محاسبه می‌شود.

۴ . ۲ . ۴ . ۲. تساوی قطرها

۷۶۲. از همنهشتی مثلثها استفاده کنید.

۴ . ۲ . ۴ . ۳. همرسی قطرها

۷۶۳. مثلث ACE را، که رأسهایش خطهای راست AD، CF و EB رسم شده‌اند، درنظر بگیرید. سینوس زاویه‌های تشکیل شده با این خطها و ضلعهای مثلث ACE، با طول وترهای مقابل به آنها متناسبند؛ در نتیجه، شرط $R=۱$، با شرط داده شده در مسأله هم‌ارز است.

۴ . ۲ . ۵. پاره‌خط

۴.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۶۴. اندازهٔ پاره‌خط BH به دلیل نیمساز بودن آن در مثلث ABC محاسبه می‌شود. ($BH=۲\sqrt{۲۱}$) از آن‌جا با توجه به برابری BH و EK طول پاره‌خط $KH=۳\sqrt{۲۱}$ به‌دست می‌آید.

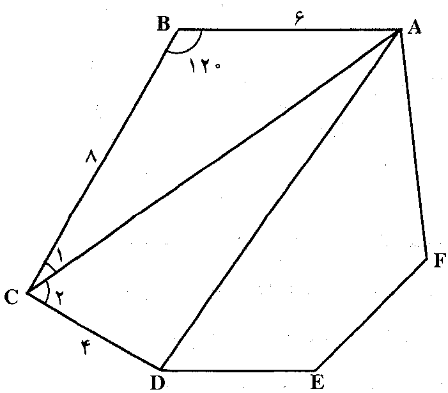
۴ . ۲ . ۵ . ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷۶۵. به‌طور حتم، حق با مردها نیست. ثابت کنید اضافه یکی از مجموعها نسبت به مجموع دیگر باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۴ . ۲ . ۶. شعاع دایره

۴ . ۲ . ۶ . ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۷۶۶. در مثلث ABC داریم:

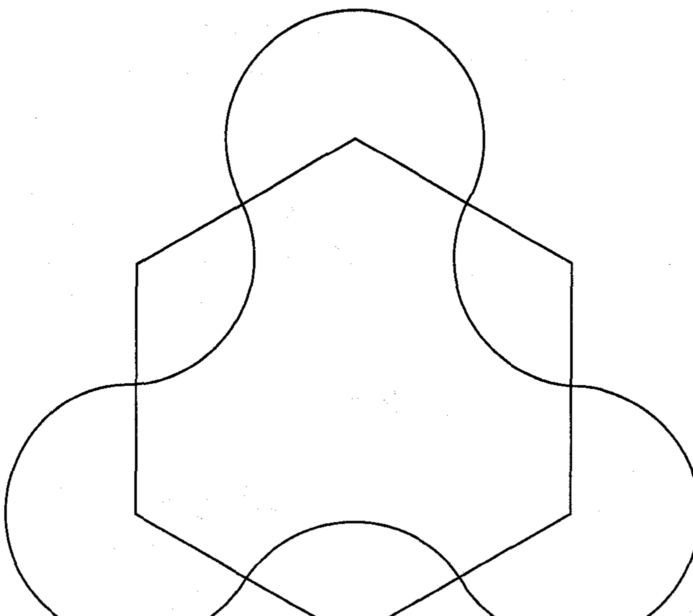


$$\hat{B}=۱۲۰^\circ \Rightarrow AC^۲=۶^۲+۸^۲+۶\times۸$$
$$=۳۶+۶۴+۴۸ \Rightarrow AC^۲=۱۴۸$$
$$\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳۷}$$
$$\frac{۶}{\sin\hat{C}_۱}=\frac{۲\sqrt{۳۷}}{\sin۱۲۰^\circ} \Rightarrow \sin\hat{C}_۱=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳۷}}$$

از آن‌جا زاویهٔ C_1 و از روی آن اندازهٔ زاویهٔ C_2 به‌دست می‌آید. در مثلث ACD با معلوم بودن دو ضلع AC و CD و زاویهٔ C_2 اندازهٔ ضلع AD و از روی آن اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث قابل محاسبه است.

۴ . ۲ . ۷. محیط

۷۶۷. ۱. اگر مارپیچ را به روشی که در معمّا توضیح داده شده است، رسم کنیم، شکل زیر را خواهیم داشت، که در آن کمانهای داخلی روبه‌رو به زاویه‌های ۱۲۰ درجه و کمانهای خارجی روبه‌رو به زاویه‌های ۲۴۰ درجه هستند، پس طول هرکمان خارجی ۲ برابر طول هر کمان داخلی است. یعنی اگر طول هر کمان داخلی را یک واحد فرض کنیم، طول هر کمان خارجی دو واحد است. پس نسبت طول تمام کمانها (۹ واحد) به طول کمانهای خارجی (۶ واحد) مساوی ۱/۵ است.



۲. مساحت هر قطاع داخلی یک سوم مساحت دایره، و مساحت هر قطاع خارجی دو سوم مساحت یک دایره است؛ پس مساحت کل محصور شده در داخل مارپیچ برابر خواهد بود با مساحت شش‌ضلعی، به اضافهٔ مساحت یک دایره به شعاع ۳ سانتیمتر و چون مساحت شش‌ضلعی نیزمساوی مساحت ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع

به ضلع ۶ سانتیمتر است، پس مساحت کل چنین خواهد بود :

$$۶\times(۹\sqrt{۳})+\pi\times ۳^{۲}\approx ۱۲۱/۸۰\text{cm}^{۲}$$

۴ . ۲ . ۸. مساحت

۴ . ۲ . ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۷۶۸. شعاع دایره ۵ است و از آن‌جا :

$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{۱}{۲}\,(\text{محیط شش‌ضلعی})\times ۵ \Rightarrow$$

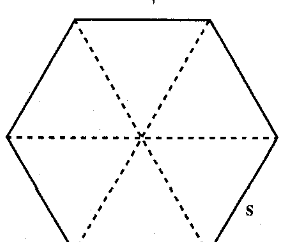
$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{۱}{۲}(۳۸)\times ۵ = ۹۵$$

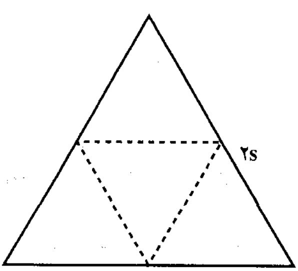
۷۶۹. (ب). اگر s طول یک ضلع شش‌ضلعی باشد، محیط آن، و همچنین محیط مثلث، ۶s و طول هر ضلع مثلث ۲s است. اما مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲s را می‌توان به ۴مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع s، و شش‌ضلعی به ضلع s را می‌توان به شش عدد از آن مثلثها تقسیم کرد (شکل را ببینید). بنابراین :

$$\frac{\text{مساحت شش‌ضلعی}}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

و اگر مساحت مثلث ۲ باشد،

$$\text{مساحت شش‌ضلعی} = \frac{۳}{۲}\times ۲ = ۳$$



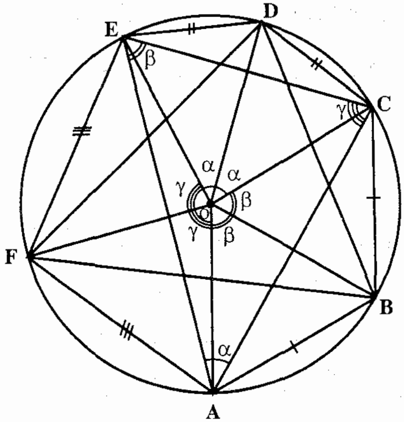


۴ . ۲ . ۸. ۲. رابطهٔ بین مساحتها

۷۷۱. مساحت چهارضلعی $B_۱B_۴B_۵B_۶$ (شکل)، برابر است با $\frac{۱}{۴}$ مساحت چهارضلعی $A_۱A_۲A_۳A_۴$، زیرا قطرهای چهارضلعی اوّل موازی قطرهای چهارضلعی دوم و برابر نصف آنها هستند : $B_۱B_۵$ موازی $A_۲A_۴$ و برابر نصف آن، $B_۴B_۶$ موازی $A_۱A_۳$ و برابر نصف آن. در ضمن، می‌دانیم، اگر طول قطرهای یک چهارضلعی محدب را $d_۱$ و

d_2 و زاویهٔ بین دو قطر را φ بنامیم، مساحت چهارضلعی با دستور $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$ بیان می‌شود. به همین ترتیب، ثابت می شود که، مساحت چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$ هم، برابر $\frac{1}{4}$ مساحت چهارضلعی $A_1A_4A_5A_6$ است.

۷۷۲. O را مرکز دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی ABCDEF، و R را شعاع آن می‌گیریم (شکل)، و فرض می‌کنیم $\gamma = A\hat{C}E$ و $\beta = A\hat{E}C$ و $\alpha = C\hat{A}E$. با توجه به برابری ضلعهایی که در مسأله آمده است، داریم:



$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = \beta\ ,\ C\hat{O}D = D\hat{O}E = \alpha$$

$$E\hat{O}F = F\hat{O}A = \gamma$$

مساحتهای مثلثهای ACE و BDF را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{ACE} = \frac{EC \cdot CA \cdot AE}{4R} = \frac{2R\sin\alpha \cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\sin\gamma}{4R}$$
$$= 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

و به همین ترتیب

$$S_{BDF} = 2R^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

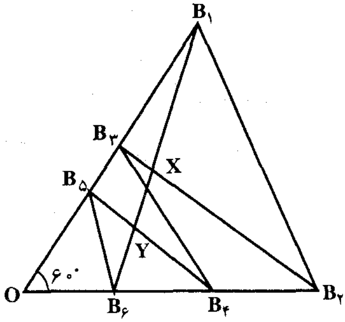
از طرف دیگر، برای مقدارهای مثبت α، β و γ که مجموعی برابر ۱۸۰ درجه داشته باشند، داریم:

$$\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma = (\sin\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\sin\gamma)(\sin\beta\sin\gamma)$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \cdot \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\gamma) - \cos(\alpha+\gamma)] \times$$
$$\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)] \le \frac{1}{2}[1 - \cos(\alpha+\beta)] \cdot \frac{1}{2}[1-\cos(\alpha+\gamma)] \cdot$$
$$\frac{1}{2}[1-\cos(\beta+\gamma)] = \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} \sin^2\frac{\beta+\gamma}{2} \sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

یعنی $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma < \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

که از آن‌جا، نابرابری مطلوب، نتیجه می‌شود.

۴ . ۲ . ۹. رابطه‌های متری



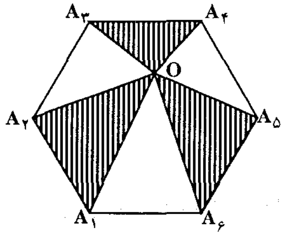
۷۷۳. زاویه‌ای برابر $۶۰°$ را درنظر می‌گیریم و نقطه‌های B_i را روی ضلعهای این زاویه و به فاصلهٔ برابر $|OA_i|$ از رأس نشان می‌گذاریم، به نحوی که نقطه‌های با اندیس زوج روی یک ضلع، و نقطه‌های با اندیس فرد روی ضلع دیگر زاویه باشند (شکل).

به این ترتیب، باید ثابت کنیم:

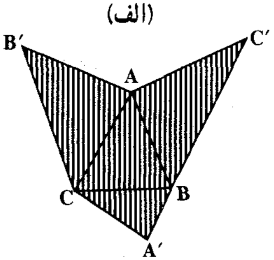
$$|B_1B_2|+|B_3B_4|+|B_5B_6|<|B_2B_3|+|B_4B_5|+|B_6B_1|$$

ولی این نابرابری، از مجموع سه نابرابری روشن زیر به‌دست می‌آید:

$$|B_1B_2|<|B_1X|+|XB_2|;$$
$$|B_3B_4|<|B_3X|+|XY|+|YB_4|;$$
$$|B_5B_6|<|B_5Y|+|YB_6|$$



(الف)



(ب)

۷۷۷. مساحت شش‌ضلعی منتظم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ را برابر S می‌گیریم (شکل الف). برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$S_{A_1OA_2}+S_{A_3OA_4}+S_{A_5OA_6}\geq\frac{1}{2}S$$

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ضلعی برابر ضلع شش‌ضلعی منتظم درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مثلثهای $AC'B$، $BA'C$ و $AB'C$، بترتیب برابر باشند با مثلثهای A_1OA_2، A_3OA_4 و A_5OA_6. در این صورت، مساحت شش‌ضلعی $AB'CA'BC'$ (شکل ب را ببینید) از $\frac{1}{2}S+S_{ABC}=\frac{2}{3}S$ کمتر نیست.

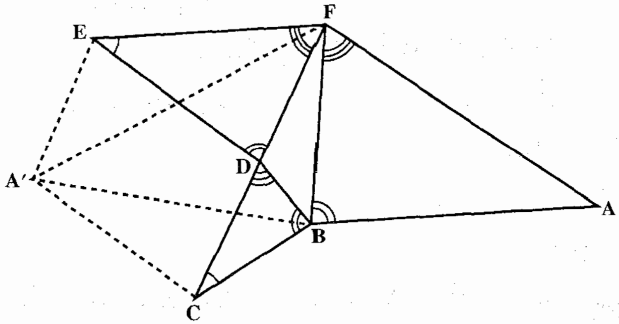
۴ . ۲ . ۱۰ . شکلهای ایجاد شده

۷۷۸. فرض می‌کنیم پنج رأس A، B ، C، D و E از شش‌ضلعی ABCDEF روی یک دایره واقع باشند و نقطهٔ برخورد این دایره را با ضلع AF علاوه بر A به F' نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم که خطهای AB و DE در L، خطهای CD و FA در M، خطهای BC و EF در N برخورد کرده و سه نقطهٔ L، M و N بر یک خط راست واقع باشند. بنابه قضیهٔ پاسکال هریک از خطهای EF و EF' باید بر نقطهٔ N (نقطهٔ برخورد BC با LM) بگذرند. بنابراین F' بر F واقع است.

۷۷۹. توجه می‌کنیم که دو مثلث $A'EF$ و BDF متشابه‌اند. در واقع، داریم (شکل):

$$E\hat{F}D = B\hat{F}A = B\hat{F}A'$$

$$F\hat{E}D = F\hat{A}B = F\hat{A}'B$$



بنابراین: $A'\hat{F}E = |E\hat{F}B - A'\hat{F}B| = |E\hat{F}B - E\hat{F}D| = D\hat{F}B$

و از تشابه مثلثهای EDF و $A'BF$ به‌دست می‌آید:

$$EF:FD = A'F:BF$$

به همین ترتیب، می‌توان تشابه مثلثهای $AC'B$ و BDF را ثابت کرد. در نتیجه، دو مثلث $A'EF$ و BCA' هم، با یکدیگر متشابه می‌شوند و

$$\frac{A'C}{EF} = \frac{A'B}{A'F} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow A'C = DE$$

به همین ترتیب $A'E = CD$ یعنی $A'CDE$ متوازی‌الاضلاع است.

۷۸۰. به جای شرط وجود مستطیلهای سه‌گانه، می‌توان دو شرط زیر را، که برقراری هر دوی آنها با هم، با شرط مسأله هم‌ارز است، درنظر گرفت: اول، باید مجموع بردارهای $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}$ برابر بردار صفر باشد؛ دوم، اگر زاویه‌های شش‌ضلعی را در رأسهای A، B، ...، F، بترتیب، α_A، α_B، ...، α_F بگیریم، آن‌وقت

$$\cos\alpha_A \cdot \cos\alpha_C \cdot \cos\alpha_E = \cos\alpha_B \cdot \cos\alpha_D \cdot \cos\alpha_F$$

اکنون، تنها باید به این نکته توجه کنیم که این شرطها «متقارنند»، یعنی با عبور از یکی از ضلعهای سه‌گانه، به ضلعهای سه‌گانهٔ دیگر شش‌ضلعی، تغییر نمی‌کنند.

۴. ۲. ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۸۱. گرانیگاه مجموعهٔ رأسهای شش‌ضلعی روی هر دو پاره‌خط راست است.

۷۸۲. نه، چنین شش‌ضلعیی وجود ندارد.

۴. ۳. رابطه‌های متری در هفت ضلعی، هشت‌ضلعی، ...

۴. ۳. ۱. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی

۴. ۳. ۱. ۱. زاویه

۴. ۳. ۱. ۱. ۱. اندازهٔ زاویه

۷۸۳. $\hat{B}=\hat{C}=۱۲۰^\circ$

۴. ۳. ۱. ۲. مساحت

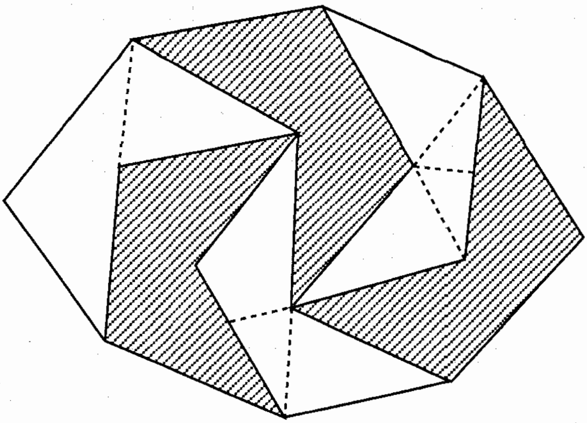
۷۸۵. نامساوی مضاعف را به دو نامساوی تبدیل و از شرط داده شده، استفاده کنید.

۴. ۳. ۱. ۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۸۶. ۲۵ نگهبان.

۴ . ۳ . ۲ . رابطه‌های متری در هشت‌ضلعی

۴ . ۳ . ۲ . ۱ . مساحت



۷۸۷. ناپلئون معروف گفته است: گاهی ارزش یک نقشهٔ خوب از صدها گفتار و نوشتار بیشتر است. اکنون در مورد حل معمای ما این نظریه صدق می‌کند. کافی است، که یک لحظه به تصویر نگاه کنید تا به چگونگی کار پی‌ببرید.

۴ . ۳ . ۳ . رابطه‌های متری در نه‌ضلعی

۴ . ۳ . ۳ . ۱ . نسبت پاره‌خطها

۷۸۸. یک نه‌ضلعی با شرایط مسأله درنظر بگیرید و نسبت خواسته شده را پیدا کنید. (مثال عددی)

۴ . ۳ . ۴ . رابطه‌های متری در بیست‌ضلعی

۴ . ۳ . ۴ . ۱ . تعداد قسمتهای بیست‌ضلعی

۷۸۹. یک n ضلعی محدب درنظر می‌گیریم، به نحوی که هیچ سه‌قطر آن، در یک نقطهٔ داخلی متقاطع نباشند. اگر در آن تمام قطرها را رسم کنیم، n ضلعی به‌جزءهای کوچکتری تقسیم می‌شود. فرض کنید، تعداد سه‌ضلعیهایی که به‌دست می‌آید مساوی $P_۳$ ، تعداد چهارضلعیها مساوی $P_۴$ ، ... و تعداد k ضلعیها مساوی P_k باشد. مسأله به اینجا منجر می‌شود که حاصل جمع زیر را به‌دست آوریم:

$$N = P_۳ + P_۴ + \cdots + P_k$$

ابتدا تعداد کلی نقطه‌های داخلی را، که محل برخورد قطرهای یک nضلعی محدب

هستند، معین می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که هر چهار رأس nضلعی، یک چهارضلعی محدب تشکیل می‌دهد که قطرهای آن در داخل nضلعی یکدیگر را قطع می‌کنند. از آن‌جا که از n رأس می‌توان، چهار نقطه را به $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ طریق جدا کرد (امتحان کنید!)، بنابراین همهٔ قطرهای n ضلعی به اندازهٔ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ نقطهٔ برخورد داخلی می‌دهند. حالا مجموع کل زاویه‌های چندضلعیهایی را که در تقسیم n ضلعی به‌دست می‌آید، پیدا می‌کنیم. معلوم است که در هر نقطهٔ داخلی برخورد قطرها، ۴ زاویه به‌وجود می‌آید که روی هم ۳۶۰ درجه‌اند؛ علاوه بر آنها، باید زاویه‌هایی را هم به حساب آورد که رأس آنها بر یکی از رأسهای nضلعی منطبق است. بنابراین داریم:

$$\left[P_3(3-2)+P_4(4-2)+\cdots+P_k(k-2)\right]\times180^\circ=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times360+(n-2)\times180^\circ \quad (1)$$

تعداد کلی رأسهای چندضلعیهای تقسیم را پیدا می‌کنیم. هر نقطهٔ داخلی برخورد قطرها، رأس چهار چندضلعی تقسیم است، و هریک از رأسهای n ضلعی مفروض، برای $(n-2)$ چندضلعی، بنابراین:

$$3P_3+4P_4+\cdots+kP_k=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times4+n(n-2) \quad (2)$$

از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$3P_3+4P_4+\cdots+kP_k-2N=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\times2+(n-2) \quad (3)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۲) و (۳)، بعد از تبدیلهای ساده، به‌دست می‌آید:

$$N=\frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

و در حالت خاص، وقتی که $n=20$ باشد، داریم: $N=5016$.

۴ . ۳ . ۵ . رابطه‌های متری در ۱۹۷۳ضلعی

۴ . ۳ . ۵ . ۱ . ثابت کنید ۱۹۷۳ضلعی منتظم است

۷۹۰. از ویژگی چندضلعی منتظم استفاده کنید.

۴ . ۳ . ۶. رابطه‌های متری در ۱۹۹۰ ضلعی

۷۹۱. فرض کنیم ۱۹۹۰ ضلعی $A_۰A_۱A_۲ \cdots A_{۱۹۸۹}$ دارای خواص (الف) و (ب) باشد. بردار $\overrightarrow{A_rA_{r+1}}$ را به عنوان عدد مختلط $n_re^{ir\alpha}$ درنظر می‌گیریم که $\alpha = \frac{۲\pi}{۱۹۹۰}$، $r \in \{۰,۱,\cdots,۱۹۸۹\}$ و $A_{۱۹۹۰}$ به طور نمایشی $A_۰$ است.

در این صورت، $n_{۱۹۸۹}$، ....، $n_۱$، $n_۰$ باید یک جایگشت اعداد $۱۹۹۰^۲$، ....، $۲^۲$، $۱^۲$ باشد. مسأله را می‌توان به صورت زیر فرموله کرد:

یک جایگشت $(n_۰, n_۱, \cdots, n_{۱۹۸۹})$ از اعداد $۱۹۹۰^۲$، ....، $۲^۲$، $۱^۲$ پیدا کنید به‌طوری که

$$\sum_{r=۰}^{۱۹۸۹} n_re^{ir\alpha} = ۰$$

برای سادگی، ما n_rها را «وزن» می‌نامیم.

فرض کنیم یک دیسک واحد به وسیلهٔ یک سوزن در مبدأ به طور افقی نگه داشته شده باشد. مسأله این است که:

چگونه می‌توان وزنهای $۱^۲$، $۲^۲$، ....، $۱۹۹۰^۲$ را روی مرز دیسک در نقطه‌هایی قرار داد به‌طوری که محیط آن را به قوسهای مساوی تقسیم کنند تا دستگاهی متعادل به‌دست آید.

با تقسیم ۱۹۹۰ وزن به ۹۹۵ جفت شروع می‌کنیم، و $(۱۹۹۰^۲، ۱۹۸۹^۲)$... و $(۳^۲، ۴^۲)$ و $(۲^۲، ۱^۲)$ و هر زوج را در دو سر یک قطر معلوم قرار می‌دهیم. حالا مسأله به‌صورت ساده‌تر تبدیل یافته است که:

چگونه می‌توان ۹۹۵ وزنه

$$۲^۲ - ۱^۲ = ۳ \quad \text{و} \quad ۴^۲ - ۳^۲ = ۷ \quad \text{و}$$

$$۶^۲ - ۵^۲ = ۱۱ \; , \; \ldots \; , \; ۱۹۹۰^۲ - ۱۹۸۹^۲ = ۳۹۷۹$$

را در نقطه‌هایی قرار داد که محیط دایرهٔ واحد را به ۹۹۵ کمان مساوی تقسیم کنند تا دستگاه در حال تعادل باشد.

توجه داریم: $۹۹۵ \equiv ۵ \times ۱۹۹$

۹۹۵ وزنه را به ۱۹۹ گروه تقسیم می‌کنیم:

$$* \begin{cases} (۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹), (۲۳,۲۷,۳۱,۳۵,۳۹), \\ \cdots, (۳۹۶۳, ۳۹۶۷, ۳۹۷۱, ۳۹۷۵, ۳۹۷۹). \end{cases}$$

فرض کنید : $\beta=\frac{2\pi}{199}$ و $\gamma=\frac{2\pi}{5}$

پنج‌ضلعی به رأسهای ۱، e^{ir}، e^{2ir}، e^{3ir}، e^{4ir}، را به F_1 و پنج‌ضلعی $e^{ik\beta}$ را به F_{k+1} نشان می‌دهیم. پنج وزن از گروه $(k+1)$ام در (*) را در رأسهای پنج‌ضلعی F_{k+1} می‌گذاریم، $(k+1)$امین گروه اعداد مختلط به‌دست می‌آیند :

$$(20k+3)e^{ik\beta} \text{ و } (20k+7)e^{i(k\beta+\gamma)} \text{ و}$$
$$(20k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)} \text{ و } (20k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)} \text{ و}$$
$$(20k+19)e^{i(k\beta+3\gamma)} \text{ و } (40k+19)e^{(k\beta+4\gamma)}$$

که در آن $k=0,1,2,\cdots,198$

با توجه به این‌که : $1+e^{i\gamma}+e^{2i\gamma}+e^{3i\gamma}+e^{4i\gamma}=0$

می‌توانیم مجموع عددهای مختلط $(k+1)$ امین گروه را به صورت ، $\eta e^{ik\beta}$ بنویسیم که در آن

$$\eta=3+7e^{i\gamma}+11e^{2i\gamma}+15e^{3i\gamma}+19e^{4i\gamma}$$

حاصلجمع تمام ۱۹۹ گروه اعداد مختلط برابر است با

$$\bar{\eta}(1+e^{i\beta}\times\cdots+e^{198i\beta})=0$$

ما به این نتیجه رسیدیم که به‌طور یقین یک ۱۹۹۰ ضلعی با خواص لازم وجود دارد. در خاتمه، خاطرنشان می‌کنیم که می‌توان به روش زیر حل را سرراست نمود :

$$0=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}(20k+4l+3)e^{i(k\beta+l\gamma)}$$

$$=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}\left[(10k+2l+2)^2-(10k+2l+1)^2\right]e^{i(k\beta+l\gamma)}$$

$$=\sum_{k=0}^{198}\sum_{l=0}^{4}\sum_{m=1}^{2}(10k+2l+m)^2 e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}$$

وقتی که k در بین عددهای ۰، ۱، ...، ۱۹۸، l در بین ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، و m در بین ۱، ۲، تغییر می‌کنند، عبارت $10k+2l+m$ در بین عددهای ۱، ۴، ...، ۱۹۹۰ تغییر می‌کند، هر مقداری را دقیقاً یک بار می‌گیرد، و عبارت

$$e^{i(k\beta+l\gamma+m\pi)}=e^{i(\frac{10k+398l+995m}{1990})2\pi}$$

هریک از ۱، $e^{i\alpha}$، ...، $e^{1989i\alpha}$ را یک‌بار می‌گیرد.

تذکر. در آخر نشان می‌دهیم ۱۹۹۰ ضلعی که در بالا ساخته شد، محدب است. آن‌چه می‌خواهیم انجام دهیم، آن است که نشان دهیم به ازای هر ضلع این چند ضلعی تمام رأسهای دیگر در یک طرف خط مستقیمی که از این ضلع می‌گذرد، قرار دارند.

یک ضلع دلخواه ۱۹۹۰ ضلعی را با $A_۰A$ نشان می‌دهیم. در ۱۹۹۰ ضلعی $A_۰A_۱\cdots A_{۱۹۸۹}$.

چون

$$I_m(A_k)=\begin{cases}\sum\limits_{m=۰}^{k-۱} n_m I_m(e^{im\alpha})\geq n_۱\sin\dfrac{۲\pi}{۱۹۹۰}>۰\\ ۲\leq k\leq ۹۹۵;\\ -\sum\limits_{m=k}^{۱۹۸۹} n_m I_m(e^{im\alpha})\geq n_{۱۹۸۹}\sin\dfrac{۲\pi}{۱۹۹۰}>۰\\ ۹۹۶\leq k\leq ۱۹۸۹\end{cases}$$

همهٔ A_k ها $(k\equiv ۲,۳,\cdots,۱۹۸۹)$ در یک طرف ضلع $A_۰A_۱$ قرار دارد.

۴.۴. رابطه‌های متری در **n**ضلعی و ۲**n** ضلعی

۴.۴.۲. زاویه

۴.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۷۹۲. کوچکترین زاویه را α فرض می‌کنیم، داریم:

$$\alpha+(\alpha+۱۰^\circ)+(\alpha+۲۰^\circ)+(\alpha+۳۰^\circ)=۴۲۰^\circ \Rightarrow ۴\alpha+۶۰^\circ=۴۲۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۴\alpha=۳۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۹۰^\circ$$

بنابراین این چهار زاویهٔ متوالی برابرند با: ۹۰°، ۱۰۰°، ۱۱۰°و ۱۲۰°.

۴.۴.۲.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۹۳. کافی است ثابت کنیم، مجموع سه زاویهٔ رأسهای A، B و C، از زاویهٔ رأس D بزرگتر است. در واقع، مجموع سه زاویهٔ A، B و C، از مجموع زاویه‌های مثلث ABC، یعنی از ۱۸۰ درجه کمتر نیست، در حالی که زاویهٔ D از ۱۸۰ درجه کمتر است.

۷۹۴. (د). مجموع هر زاویهٔ داخلی و زاویهٔ خارجی نظیرش برابر ۱۸۰° است. بنابراین، داریم:

$$n\times ۱۸۰^\circ = ۲۶۶۰ \Rightarrow n=\frac{۱۳۳}{۹}\notin N$$ غیرقابل قبول

$$n\times ۱۸۰^\circ = ۲۷۰۰ \Rightarrow n=۱۵$$

بنابراین، شکل ۱۵ ضلعی است که می‌تواند منتظم یا نامنتظم باشد.

۴ .۴ .۳. ضلع

۷۹۵. از یک رأس به P وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم که یکی از ضلعها را قطع کرده باشد. $۲n-۱$ رأس باقی می‌ماند که در دوطرف این خط واقعند. بنابراین، تعدادی از رأسها در یک طرف و تعدادی در طرف دیگر قرار می‌گیرند و تعداد رأسهای یک طرف بیش از طرف دیگر است. خطهایی که از رأسهای طرف کمتر به P وصل می‌شوند، ضلعهای طرف دیگر را که بیشتر هستند، قطع می‌کنند؛ لذا در این طرف یک ضلع وجود دارد که به وسیلهٔ خطها قطع نمی‌شوند.

۴ .۴ .۴. قطر

۷۹۷. تعداد همهٔ قطرهای یک $۲k$ ضلعی، برابر است با:

$$k(۲k-۳)$$

بنابراین، اگر هر قطر با یکی از ضلعها موازی باشد، آن وقت ضلعی وجود دارد که با $\frac{۱}{۲}(۲k-۳)$ قطر، یعنی دست‌کم با $(k-۱)$ قطر موازی است. ولی این به معنای آن است که هریک از $۲k$ رأس چندضلعی، انتهایی از این ضلع است، و این قطرها، و بنابراین یکی از آنها، بر یک ضلع منطبق است.

۷۹۸. چون همهٔ زاویه‌ها منفرجه‌اند، پس $n\geq ۵$، اکنون، همهٔ قطرهایی را درنظر می‌گیریم که همهٔ رأسهای nضلعی را، یک در میان به هم وصل کرده‌اند. اینها، یک nضلعی ستاره‌ای را تشکیل می‌دهند که، مجموع طولهای پاره‌خطهای راست مرزی آن، به روشنی از محیط n ضلعی بیشتر است. بنابراین، به‌طور مسلم، حکم مسأله هم درست است.

۴. ۴. ۵. پاره‌خط

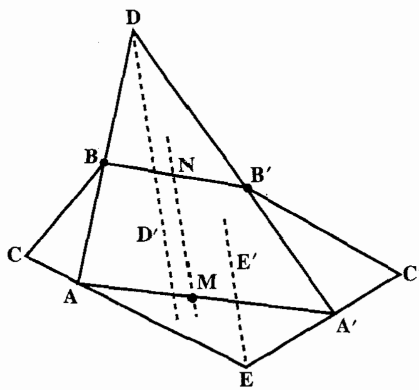
۴. ۴. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۹۹. مسأله را برای چهارضلعی و پنج‌ضلعی حل کنید و از آن‌جا، آن را تعمیم دهید.

۴. ۴. ۵. ۲. تساوی پاره‌خطها

۸۰۰. ABC و A′B′C′ را دو شکل معکوساً مساوی دلخواه درنظر می‌گیریم و DD′ نیمساز زاویهٔ تشکیل شده با ضلعهای متناظر AB و A′B′ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که EE′ نیمساز زاویهٔ بین AC و A′C′ نیز با DD′ موازی است. وسط AA′ را نقطهٔ M ، وسط پاره‌خط BB′ را N می‌نامیم. MN خط میانی است. بسادگی ثابت می‌شود که دو نقطهٔ C و C′ از خط MN به یک فاصله قرار دارند. همچنین نقطه‌های A و A′ ؛ و B و B′ از این خط به یک فاصله‌اند.

در مورد MN به قضیهٔ زیر توجه کنید :



قضیه. مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خطهایی که دو نقطهٔ همگو از دو شکل معکوساً مساوی را به‌هم وصل می‌کنند، خطی است موازی با نیمسازهای زاویه‌های ایجاد شده به وسیلهٔ خطهای متناظر.

۶.۴.۴ . شعاع دایره

۱.۶.۴.۴ . اندازهٔ شعاع دایره

۸۰۱. اندازهٔ ضلع AC از مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم و آن‌گاه اندازهٔ شعاع دایرهٔ خواسته شده را به دست می‌آوریم :

$$\hat{B}=۱۲۰^\circ \Rightarrow AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ + AB.BC$$
$$\Rightarrow AC^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ + ۶\times ۸ = ۳۶+۶۴+۴۸=۱۴۸$$
$$\Rightarrow AC = ۲\sqrt{۳۷}$$

$$R=\frac{AB.BC.AC}{۴S_{ABC}} \ , \ S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow R=\cdots$$

۷.۴.۴. محیط

۱.۷.۴.۴ . اندازهٔ محیط

۸۰۲. اگر محیط n ضلعی را p فرض کنیم، داریم :

مساحت n ضلعی $= \frac{۱}{۲}$(محیط n ضلعی) $\times$ ۴

$$\Rightarrow ۱۴۴=\frac{۱}{۲}(p)\times ۴ \Rightarrow p=۷۲cm$$

۸.۴.۴.مساحت

۱.۸.۴.۴ . اندازهٔ مساحت

۸۰۳. باید ثابت کنیم که با شرط داده شده، حداکثر مساحت چند ضلعی وقتی است، که زاویه‌های آن نیز مساوی باشند.

۲.۸.۴.۴ . رابطهٔ بین مساحتها

۸۰۴. x_i را زاویهٔ بین iامین و $(i+۱)$امین ضلع و a_i را طول ضلع iام چند ضلعی می‌گیریم. سه رأس متوالی چند ضلعی، مثلثی تشکیل می‌دهند که مساحتی برابر

$$\frac{۱}{۲}a_i a_{i+۱}\sin\alpha_i$$

دارد. حاصلضرب این مساحتها، برابر است با :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1a_2\ldots a_n)^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (a_1a_2\ldots a_n)^2$$

و با توجه به نابرابری واسطه‌ها :

$$a_1a_2\ldots a_n < \left[\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right]^n \leq \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

زیرا $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ، محیط n ضلعی است که نمی‌تواند از محیط مربع، که برابر ۴ است، تجاوز کند. به این ترتیب، حاصلضرب مساحتهای مورد نظر، از $\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{4}{n}\right)^{2n}$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، یکی از مساحتها، نمی‌تواند از $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}\right)^2$، یعنی $\frac{8}{n^2}$ تجاوز کند.

۹.۴.۴. رابطه‌های متری

۱.۹.۴.۴. رابطه‌های متری (برابریها)

۸۰۷. چند ضلعی محدب را پنج ضلعی ABCDE فرض می‌کنیم که خطی ضلعهای آن را بترتیب در H، K ، L، M و N قطع کرده است. شکل را روی خط xy که در صفحهٔ پنج‌ضلعی واقع است به موازات خط قاطع تصویر می‌کنیم. اگر O محل برخورد xy با خط قاطع باشد، a، b، c، d و e تصویرهای A ، B ، C ، D و E باشند، رابطهٔ زیر محقق است :

$$\frac{ao}{bo}\cdot\frac{bo}{co}\cdot\frac{co}{do}\cdot\frac{do}{eo}\cdot\frac{eo}{ao} = 1$$

ولی می‌دانیم :

$$\frac{EN}{AN} = \frac{eo}{ao},\ \frac{DM}{EM} = \frac{do}{eo},\ \frac{CL}{DL} = \frac{co}{do},\ \frac{BK}{CK} = \frac{bo}{co},\ \frac{AH}{BH} = \frac{ao}{bo}$$

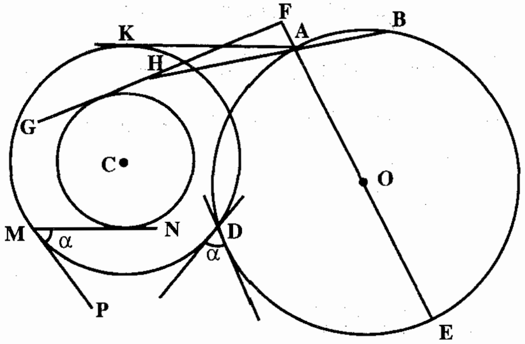
پس :

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CL}{DL}\cdot\frac{DM}{EM}\cdot\frac{EN}{AN} = 1$$

یا :

$$AH.BK.CL.DM.EN = BH.CK.DL.EM.AN$$

می‌توان این قضیه را برای هر چند ضلعی محدب تعمیم داد، و اثبات به طریق فوق است. (۱)



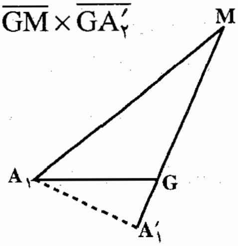
۸۰۸. حل این مسأله شبیه قضیهٔ منلائوس است. خط دلخواه d را غیر موازی با خط Δ رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع d و Δ را I می‌نامیم. سپس از رأسهای A ، B، C و ... چندضلعی، خطهای به موازات خط Δ رسم می‌کنیم تا خط d را بترتیب در نقطه‌های A' ، B' ، C' و ... قطع کنند. خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}=\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}},\ \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}},\ \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}}=\frac{\overline{IC'}}{\overline{ID'}},\ \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}}=\frac{\overline{ID'}}{\overline{IE'}},\ \frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}}=\frac{\overline{IE'}}{\overline{IF'}},\ \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}}=\frac{\overline{IF'}}{\overline{IA'}}$$

از ضرب عضوهای نظیر این رابطه‌ها، رابطهٔ (۱) به دست می‌آید. عکس مسأله (یا قضیه) درست نیست. زیرا اگر رابطهٔ (۱) برقرار باشد، نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 و ... و F_1 ، الزاماً روی یک خط راست نیستند. عکس این قضیه فقط در مورد مثلث درست است.

۸۰۹. فرض کنیم A'_1 ، A'_2 ، ...، A'_n تصویرهای A_1 ، A_2 ، ...، A_n روی MG باشند. در مثلثهای MGA_1 ، MGA_2 ... (شکل) داریم:

$$\overline{MA_1}^2=\overline{GM}^2+\overline{GA_1}^2-2\overline{GM}\times\overline{GA'_1}\ ;$$
$$\overline{MA_2}^2=\overline{GM}^2+\overline{GA_2}^2-2\overline{GM}\times\overline{GA'_2}$$



پس از ضرب طرفین رابطه‌های بالا بترتیب در a_1 و a_2 و ... و جمع عضو به‌عضو آنها خواهیم داشت:

$$\sum a_i \overline{MA}_i^2 = \overline{GM}^2 . \sum a_i + \sum a_i \overline{GA}_i^2 - 2\overline{GM}. \sum a_i \overline{GA'}_i ;$$

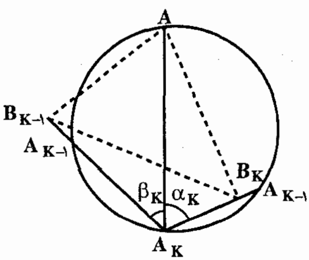
کافی است ثابت کنیم که $\sum a_i \overline{GA'} = 0$. برای این منظور G را روی محور GM به مبدأ G اختیار می‌کنیم طول G صفر است امّا این طول برابر است با:

$$\frac{\sum a_i \overline{GA'_i}}{\sum a_i} \quad \text{پس؛} \quad \sum a_i \overline{GA'_1} = 0$$

و خواهیم داشت:

$$\sum a_i \overline{MA}_i^2 = \overline{GM}^2 . \sum a_i + \sum a_i \overline{GA}_i^2$$

۸۱۰. فرض کنید A (شکل) نقطهٔ مفروض و A_k یک رأس از ۲n ضلعی باشد، B_{k-1} و B_k پای عمودهای وارد از نقطهٔ A بر روی ضلعهای حامل A_k؛ α_k و β_k زاویه‌های تشکیل شده با خط راست AA_k و این ضلعها، هستند $(\alpha_k = A\hat{A}_k B_k$ و $\beta_k = A\hat{A}_k B_{k-1})$ چون



چهارضلعی $AB_{k-1}A_kB_k$ محاطی است، داریم: $A\hat{B}_{k-1} B_k = \alpha_k$ و $A\hat{B}_k B_{k-1} = \beta_k$ (یا مکمل این زاویه‌ها)؛ از این رو، بنابر قانون سینوسها، $\frac{AB_{k-1}}{AB_k} = \frac{\sin\beta_k}{\sin\alpha_k}$ و $\frac{AB_{k-1}.AB_{k+1}}{AB_k^2} = \frac{\sin\beta_k \sin\alpha_{k+1}}{\sin\alpha_k \sin\beta_{k+1}}$. با ضرب کردن این تساویها به ازای $k = 2, 4, ..., 2n$ درهم، و جایگزینی اندیس $2n+1$ با ۱، به نتیجهٔ مورد نظر می‌رسیم.

۸۱۲. برای روشنی وضع، حالتی را در نظر بگیرید که M در درون چند ضلعی قرار دارد. فرض کنید u و v معرف فاصله‌های M، بترتیب، تا A_1A_2 و A_1A_n ، و x و y اندازهٔ تصویرهای A_1M روی A_1A_2 و A_1A_n باشند (اگر این تصویرها، روی نیمخطهای A_1A_2 و A_1A_n واقع باشند، x و y مثبت و در غیر این صورت منفی گرفته می‌شوند). $A_1B_1 = A_1B_n = a$ و $A_2\hat{A}_1 A_n = \alpha$. فاصله‌های u و v را می‌توان بر حسب x و

y نشان داد : $u=\frac{y}{\sin\alpha}-x\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ و $v=\frac{x}{\sin\alpha}-y\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ؛ به این ترتیب :

$$u+v=(x+y)\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=(x+y)\tan\frac{\alpha}{2}=(x+y)\frac{r}{a}$$

اکنون، داریم :

$$(MB_1^2+MB_n^2)a=\left((x-a)^2+u^2+(y-a)^2+v^2\right)a$$
$$=((x-a)^2+(u-r)^2+(y-a)^2+(v-r)^2+r(u+v)-r^2)a$$
$$=2d^2a+2ra(u+v)-2r^2a$$
$$=2d^2a+2r^2(x+y)-2r^2a$$

با نوشتن رابطه‌هایی مشابه برای هر رأس و جمع کردن آنها با هم، به حکم مسأله می‌رسیم.

۲.۹.۴.۴. رابطه‌های متری (نابرابریها)

۸۱۳. $A_1A_2\ldots A_n$ را چند ضلعی داده شدهٔ M می‌گیریم. ضلع iام این چند ضلعی، عبارت است از $(A_{n+1}\equiv A_1)A_iA_{i+1}$، بردارهای $\vec{V_i}=\vec{A_i\,A_{i+1}}$ را در نظر می‌گیریم و گروه بردارهای $-\vec{V}=\vec{A_{i+1}A_i}$ را هم به آنها اضافه می‌کنیم. اکنون، این بردارها را، آغاز از مبدأ مختصات در نظر می‌گیریم و، با آغاز از $\vec{V_1}$، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، شماره‌گذاری می‌کنیم :

$$\vec{u_1},\vec{u_2},\vec{u_3},\ldots,\vec{u_{2n}}$$

به انتهای این بردارها توجه می‌کنیم :

$$\vec{u_1},\ \vec{u_1}+\vec{u_2}\ ;\ \vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3},\ldots,\vec{u_1}+\vec{u_2}+\ldots+\vec{u_{2n}}=0$$

بسادگی دیده می‌شود که اینها، 2n ضلعی کوژ N را، که نسبت به مرکز خود متقارن است، تشکیل می‌دهند ؛ در ضمن، هر ضلع چند ضلعی M متناظر است با دو ضلع برابر و متوازی در چند ضلعی N ؛ از این گذشته، طول تصویر N بر هر خط راست، دو برابر طول تصویر M بر همان خط راست است. از این جا نتیجه می‌شود که، عبارت $\Sigma\frac{a_i}{d_i}$ برای N، همان مقدار این عبارت را برای M به ما می‌دهد. بنابراین، کافی است نابرابری مورد نظر را، برای چند ضلعی کوژ N، که تقارن مرکزی دارد، ثابت کنیم. فرض کنید :

$N=B_1B_2\ldots B_{2n}$

تصویر N را بر امتداد عمود بر ضلع iام N، با h_i نشان می‌دهیم. در این صورت

$d_i h_i \ge S(N)$ (S نشانهٔ مساحت است) و به دست می‌آید :

$\text{۴} = \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}n} \frac{\text{۴}S(OB_iB_{i+\text{۱}})}{S(N)} = \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}n} \frac{a_i h_i}{S(N)} \le \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}n} \frac{a_i}{d_i}$ (O، مرکز تقارن N است). سمت چپ نابرابری، به این ترتیب ثابت می‌شود :

$$\sum \frac{a_i}{d_i} \ge \frac{\sum a_i}{D}$$

که در آن D، قطر چند ضلعی، یعنی بزرگترین فاصلهٔ بین رأسهاست. چون $\sum a_i$ محیط است، روشن است که $\sum a_i > \text{۲}D$.

۸۱۴. چند ضلعی محدب : $A_{\circ}A_{\text{۱}}A_{\text{۲}}\dots A_{n-\text{۱}}$ ، با اندیسهای تحویل شده (modn) را، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم : A_iA_j قطر باشد. در این صورت بنا به نامساوی مثلث داریم :

$$A_iA_j + A_{i+\text{۱}}A_{j+\text{۱}} > A_iA_{i+\text{۱}} + A_jA_{j+\text{۱}}$$

چون این نامساویها را در مورد تمام : $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}n(n-\text{۳})$ قطر A_iA_j جمع کنیم، هر قطر دوبار در چپ، و هر ضلع : $n-\text{۳}$ بار در راست رخ می‌دهد ؛ بنابراین حاصل می‌کنیم :

$$\text{۲}d > (n-\text{۳})p \text{ یا } n-\text{۳} < \frac{\text{۲}d}{p}$$

برای به دست آوردن حدّ فوقانی، قطر A_iA_j را در نظر می‌گیریم. از آن جا که این قطر کوتاهترین مسیر واصل A_i به A_j است، کوتاهتر از هر مسیر چند ضلعی شکل وصل کنندهٔ دو سر آن می‌باشد. بنابراین هر دو نامساوی زیر را داریم :

$$A_iA_j < A_iA_{i+\text{۱}} + \dots + A_{j-\text{۱}}A_j \ , \ A_iA_j < A_jA_{j+\text{۱}} + \dots + A_{i-\text{۱}}A_i$$

اگر n فرد، به طور مثال $n = \text{۲}k - \text{۱}$ ، باشد، در مورد هر قطر A_iA_j از دو نامساوی بالا، نامساوی با جملات کمتر در سمت راستش را به کار می‌بریم. چون این $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}n(n-\text{۳})$ نامساوی را جمع کنیم، در سمت چپ d، و در سمت راست مجموع طولهای ضلعها، که در آن هر ضلع به طور دقیق :

$$\text{۲} + \text{۳} + \dots + k - \text{۱} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}k(k-\text{۱}) - \text{۱}$$

بار ظاهر می‌شود، را حاصل می‌کنیم، بنابراین داریم :

$$d < \frac{p}{\text{۲}}(k(k-\text{۱}) - \text{۲}) = \frac{p}{\text{۲}}(\frac{n+\text{۱}}{\text{۲}} . \frac{n-\text{۱}}{\text{۲}} - \text{۲})$$

اگر n زوج، مثلاً $n = ۲k$ ، باشد، همان نامساویهای بالا به استثنای نامساویهای مربوط به قطرهای A_iA_{i+k} را به کار می‌بریم، و در مورد این k «قطر» از نامساویهای :

$$A_iA_{i+k} \le \frac{۱}{۲}p$$

استفاده می‌کنیم. با جمع این : $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ نامساوی حاصل می‌کنیم :

$$d < k.\frac{۱}{۲}p + \frac{۱}{۲}p(k(k-۱)-۲) = \frac{p}{۲}(k(k-۱)-۲+k)$$

$$= \frac{p}{۲}(k^۲-۲) = \frac{p}{۲}(\frac{n^۲}{۴}-۲)$$

سرانجام نشان دادن این موضوع بسیار آسان است که به ازاء n زوج :

$$\frac{n^۲}{۴} = \left[\frac{n}{۲}\right]\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$$

و به ازاء n فرد :

$$\frac{n^۲-۱}{۴} = \left[\frac{n}{۲}\right]\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$$

که در آنها : $[x]$ جزء صحیح x را نمایش می‌دهد، است. بنابراین می‌توان حد فوقانی را در جمیع حالات به صورت زیر نوشت :

$$d < \frac{p}{۲}\left(\left[\frac{n}{۲}\right]\left[\frac{n+۱}{۲}\right]-۲\right)$$

۸۱۵. قبل از آن که به حل مسأله بپردازیم، چند لم را ثابت می‌کنیم.

لم ۱. به ازاء هر x و y اگر $\frac{\pi}{۲} > y$ و $x > ۰$ ، آن گاه

الف. $\sin x \sin y \le \sin^۲ \frac{x+y}{۲}$

ب. $\cos x \cos y \le \cos^۲ \frac{x+y}{۲}$

برهان. واضح است که

$$(۱)\quad \cos(x-y) \le ۱ = \sin^۲\frac{x+y}{۲} + \cos^۲\frac{x+y}{۲}$$

با اضافه کردن $\sin^۲\frac{x+y}{۲} - \cos^۲\frac{x+y}{۲}$ برطرفین نامساوی (۱)، نامساوی (الف)

حاصل می‌شود ؛ زیرا،
$$\cos(x-y)-\cos(x+y)\le ۲\sin^{۲}\frac{x+y}{۲}$$
$$\sin x\sin y\le \sin^{۲}\frac{x+y}{۲}$$

با اضافه کردن $\cos^{۲}\frac{x+y}{۲}-\sin^{۲}\frac{x+y}{۲}$ بر طرفین نامساوی (۱)، نامساوی (ب) حاصل می‌شود ؛ زیرا،
$$\cos(x-y)+\cos(x+y)\le ۲\cos^{۲}\frac{x+y}{۲}$$
$$\cos x\cos y\le \cos^{۲}\frac{x+y}{۲}$$

لم ۲. تابع کتانژانت در ناحیهٔ اوّل، یعنی، در $(۰ \ , \ \frac{\pi}{۲})$ محدب است. به عبارت دیگر ؛ به ازی هر x و y از $(۰ \ , \ \frac{\pi}{۲})$، داریم :
$$۲\cot\frac{x+y}{۲}\le \cot x+\cot y$$

برهان. طرفین نامساوی الف (لم ۱) را در $۲\cos\frac{x+y}{۲}$ ضرب می‌کنیم و چون در ناحیهٔ اول نسبتهای مثلثاتی مثبت هستند، داریم :
$$\frac{۲\cos\frac{x+y}{۲}}{\sin\frac{x+y}{۲}}\le\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y} \ , \ ۲\cot\frac{x+y}{۲}\le \cot x+\cot y$$

لم ۳. اگر $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ سه زاویه باشند به طوری که $۰\le \hat{A},\hat{B},\hat{C}\le\pi$، آن‌گاه :
$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}\le \sin^{۳}\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}$$

برهان. با توجه به نامساوی الف در لم ۱ به ازاء x و y اگر $۰<x<\pi$ ، داریم :
$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}\le \sin^{۲}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$
$$\sin\hat{C}.\sin\hat{D}\le \sin^{۲}\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲}$$

از ضرب طرفین متناظر دو نامساوی در یکدیگر داریم (چون طرفین نامساویها نامنفی است).
$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}.\sin\hat{D}\le \sin^{۲}\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}\sin^{۲}\frac{\hat{C}+\hat{D}}{۲}\le \sin^{۴}\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}}{۴}$$

بدون آن که خللی در کلیت برهان وارد شود، با انتخاب $\hat{D}=\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}$ ، داریم :

$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}.\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}\le\sin^{۴}\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}$$

چون $\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}$ مثبت است داریم :

$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}\le\sin^{۳}\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}{۳}$$

به عنوان تمرین، قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیهٔ ۱. اگر A_i $(i=۱,۲,\ldots,n)$ زاویه‌ای بین ۰ و π باشد، آن‌گاه :

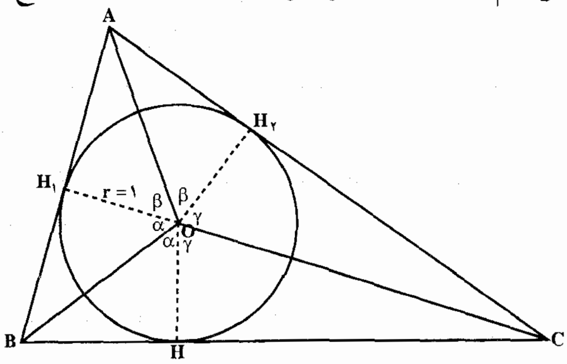
$$\prod_{i=۱}^{n}\sin A_i\le\sin^{n}\frac{\sum_{i=۱}^{n}A_i}{n}$$

نتیجهٔ ۱. اگر $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلث باشند، آن گاه :

$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}\le\sin^{۳}۶۰^\circ$$

$$\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}\le\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۳}$$

لم ۴. در بین تمام مثلثهای محیط بر دایره‌ای، مثلث متساوی‌الاضلاع، حداقل مساحت را دارد.



برهان. جهت سهولت در کار، شعاع دایرهٔ محاطی را واحد در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در این حالت مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $۳\sqrt{۳}$ است.

$$S_{ABC}=۲S_{BOH_۱}+۲S_{AOH_۲}+۲S_{COH}\quad (۱)$$

$$S_{ABC}=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$

که در آن، $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

ابتدا، ثابت می‌کنیم که مقدار $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$، با توجه به این که $0<\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma<\frac{\pi}{2}$، دارای مینیمم است و از آن جا مینیمم، مساحت را به دست خواهیم آورد.

با توجه به [نامساوی ب لم ۱] و ضرب طرفین نامساوی در $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ با محاسبات مقدماتی، خواهیم داشت :

$$2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\leq \tan\alpha+\tan\beta$$

حال با توجه به آنچه که در برهان لم ۳ دیده شد، رابطهٔ بالا برای چهار زاویهٔ α، β، γ و γ' نیز برقرار است و به ازاء $\gamma'=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ داریم :

$$3\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\leq \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$

حال اگر $\alpha+\beta+\gamma=\pi$، خواهیم داشت :

$$3\tan 60^\circ\leq \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$$

و با توجه به (۱) داریم :

$$S_{ABC}\geq 3\sqrt{3}$$

در نتیجه، در بین مثلثهای محیط بر یک دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع، حداقل مساحت را دارد. به عنوان تمرین قضیهٔ زیر را ثابت کنید.

قضیهٔ ۲. در بین تمام n ضلعیهای محیط بر یک دایره، n ضلعی منتظم، حداقل مساحت را دارد.

مسأله. ثابت کنید در بین مثلثهای محیط بر یک دایره، حداقل مساحت، فقط و فقط، از آن، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

«مسألهٔ بالا را برای n ضلعیهای محیط بر یک دایره، تعمیم دهید.»

با تعریف زیر و مقدمات لازم حل مسأله را به اتمام می‌رسانیم.

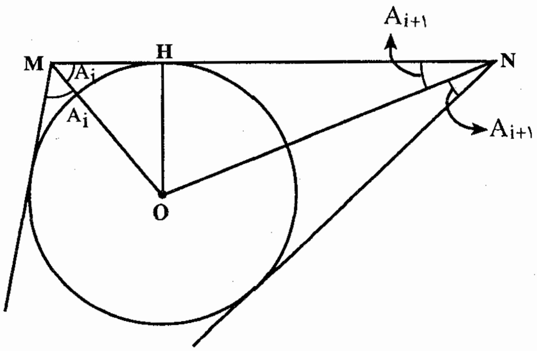
تعریف. فرض کنید A یک مجموعه از عددهای حقیقی باشد. a را مینیمم A خوانیم در صورتی که :

۱. $a\in A$.

۲. به ازاء هر x از A، $a\leq x$.

اگر مجموعهٔ A دارای مینیمم باشد، همان عضو نقش اینفیموم را نیز بازی می‌کند امّا وجود اینفیموم، وجود مینیمم را تضمین نمی‌کند.
برای مثال؛ در $[0, 1]$، 0 ، هم مینیمم و هم اینفیموم است. اما در $]0, 1]$ ، 0، اینفیموم هست امّا مینیمم نیست. اینک به حل مسألهٔ اصلی می‌پردازیم :
فرض می‌کنیم ضلعهای متوالی n ضلعی، بترتیب، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n باشند و زاویه‌های متوالی آن را با $2\hat{A}_1$ ، $2\hat{A}_2$ ، ... ، $2\hat{A}_n$ نمایش می‌دهیم و با توجه به شکل (الف)، داریم :

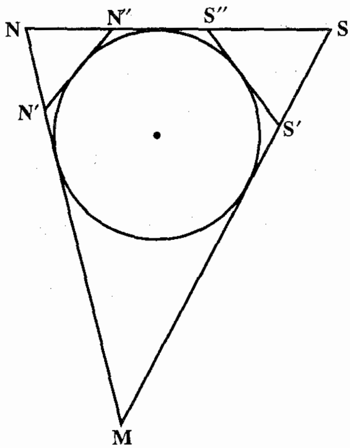
$$a_i = MN = MH + HN = \cot\hat{A}_i + \cot\hat{A}_{i+1} \quad (1)$$



(الف)

فرض می‌کنیم : $$P \equiv \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n}(\cot\hat{A}_i + \cot\hat{A}_{i+1})$$

که در آن، حاصلضربها و حاصلجمعها به صورت متوالی روی i دوری هستند و $\sum_{i=1}^{n} A_i = (n-2)\frac{\pi}{2}$ که $\hat{A}_i < \frac{\pi}{2}$. البته لازم به ذکر است که $\hat{A}_{n+1} = \hat{A}_1$.
ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $n > 4$ با در نظر گرفتن دو زاویهٔ متوالی، بسیار نزدیک به π ، مانند زاویه‌های $2\hat{A}_i$ و $2\hat{A}_{i+1}$، خواهیم داشت : $\hat{A}_i \to \frac{\pi}{2}$ و $\hat{A}_{i+1} \to \frac{\pi}{2}$. پس با توجه به برابری (۱) اندازهٔ ضلع a_i بسیار نزدیک به صفر خواهد بود.



(ب)

«به عنوان مثال آنچه را که گفتیم برای حالت $n = ۵$ بررسی می‌کنیم. به شکل (ب) مراجعه کنید. در مثلث MNS، نقطه‌های N' و S' را بترتیب بر ضلعهای MN و MS و بسیار نزدیک به نقطه‌های N و S درنظر می‌گیریم و از آن نقطه‌ها مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم تا ضلع NS را بترتیب در نقطه‌های N'' و S'' قطع کنند. حال در پنج ضلعی $MN'N''S''S'$، هر چه نقطه‌های N' و S' بترتیب به نقطه‌های N و S نزدیک باشند، اندازهٔ دو زاویهٔ متوالی N'' و S'' افزایش پیدا می‌کنند و به سمت π میل می‌نمایند و در این حالت اندازهٔ ضلع $N''S''$ به صفر میل می‌کند.»

پس، توجه داریم که برای حالت $n > ۴$، مقدار مینیمم موجود نیست یعنی به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم آن را کوچک کنیم.

(لازم به ذکر است که، صفر، یک کران پایین خواهد بود. یعنی حاصلضرب P، در این حالت اینفیموم دارد، ولی مینیمم ندارد.) اینک حالت $n = ۴$ را بررسی می‌کنیم. برای این حالت داریم:

$$P = a_۱ . a_۲ . a_۳ . a_۴$$

با توجه به (۱) و لم ۲، داریم:

$$P \geq ۱۶ \cot \frac{\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲}{۲} . \cot \frac{\hat{A}_۲ + \hat{A}_۳}{۲} . \cot \frac{\hat{A}_۳ + \hat{A}_۴}{۲} . \cot \frac{\hat{A}_۴ + \hat{A}_۱}{۲}$$

از طرف دیگر چون:

$$\frac{۱}{۲}(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ + \hat{A}_۴) = \frac{\pi}{۲}$$

پس:

$$\cot \frac{\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲}{۲} . \cot \frac{\hat{A}_۳ + \hat{A}_۴}{۲} = ۱$$

و

$$\cot \frac{\hat{A}_۲ + \hat{A}_۳}{۲} . \cot \frac{\hat{A}_۴ + \hat{A}_۱}{۲} = ۱$$

بنابراین مقدار زیر را به دست می‌آوریم :

$$a_۱.a_۲.a_۳.a_۴ \geq ۱۶۰$$

برای این که حاصلضرب ضلعهای یک چهار ضلعی محیطی بر دایره‌ای مینیمم شود، آن است که این چهارضلعی، مربع باشد (قضیهٔ ۲ را در حالت $n = ۴$ بررسی کنید).

اینک حالت $n = ۳$ را بررسی می‌کنیم. شروع کار را با دانستن نامساوی

$$(۲) \quad (a_۱.a_۲.a_۳)^۲ \geq \left(\frac{۴S}{\sqrt{۳}}\right)^۳$$

آغاز می‌کنیم، که در آن S مساحت مثلث است، و تساوی وقتی برقرار است که $a_۱ = a_۲ = a_۳$. چون، $a_۱.a_۲.a_۳ = ۴RS$ و طبق قضیهٔ سینوسها: $a = ۲R\sin\hat{A}$. (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است) و با توجه به آنچه که گفته شد و نتیجهٔ ۱، نامساوی (۲) به دست می‌آید.

تعبیر هندسی این نامساوی، این است که کوچکترین مساحت مثلث محیطی در یک دایره، مثلث‌متساوی‌الاضلاع است که در لم۴، بیان گردیده است.

حال با توجه به آنچه که در لم ۴ دیدیم، $(S_\Delta \geq ۳\sqrt{۳})$ داریم :

$$(a_۱.a_۲.a_۳)^۲ \geq ۱۷۲۸$$

$$a_۱.a_۲.a_۳ \geq ۲۴\sqrt{۳}$$

بار دیگر یادآوری می‌کنیم که در این‌جا تساوی تنها برای مثلث متساوی‌الاضلاع است.

در نتیجه، مینیمم برابر است با :

$$a_۱.a_۲.a_۳ = ۲۴\sqrt{۳}$$

جمع بندی :

الف. $n > ۴$ مقدار مینیمم موجود نیست.

ب. $n = ۴$ مقدار مینیمم برابر ۱۶ است.

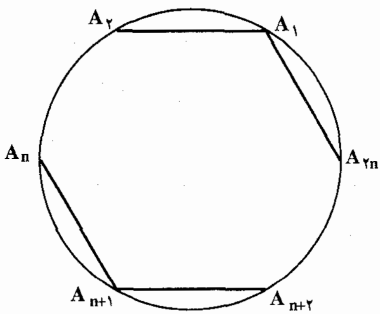
ج. $n = ۳$ مقدار مینیمم برابر $۲۴\sqrt{۳}$ است.

۴.۴. ۱۰. شکلهای ایجاد شده

۸۱۶. تعداد رأسهای چند ضلعی را n می‌گیریم و، به کمک استقرای ریاضی، حکمی را که اندکی قویتر است، ثابت می‌کنیم : این برش را می‌توان انجام داد، به شرطی که بدانیم از هر سه رنگ استفاده شده است و n، عددی طبیعی است. برای $n = ۳$، وضع روشن

است. رأس A را در نظر می‌گیریم که رأسهای مجاور آن B و C، رنگهای متفاوتی دارند (چنین رأسی، حتماً وجود دارد). با جدا کردن مثلث ABC، یک $(n-1)$ ضلعی می‌ماند که یا در رأسهای آن، از سه رنگ استفاده شده (که در این صورت، باید از فرض استقرا استفاده کرد) و یا از دو رنگ. در این حالت، باید به این ترتیب عمل کرد: مثلث ABC را به جای خود برمی‌گردانیم و n ضلعی را به مثلثهایی می‌بریم که یکی از رأسهای هر کدام از آنها، همان نقطهٔ A و دو رأس دیگر آن، دو رأس دیگر (و مجاور) n ضلعی باشد.

۱۱.۴.۴. تعیین n



۸۱۸. ثابت می‌کنیم مقدار مجهول n، عبارت است از همهٔ عددهای فرد $n>۱$، n را عددی فرد می‌گیریم و فرض می‌کنیم، در ۲n ضلعی $A_۱...A_{۲n}$، همهٔ زوج ضلعهای روبه‌رو، به جز احتمالاً، $A_۱A_{۲n}$ و $A_nA_{n+۱}$، پاره‌خطهای راستی، موازی هم باشند. اگر داشته باشیم (شکل):

$$\overset{\frown}{A_۱A_۲A_{n+۱}} = ۱۸۰^\circ + \alpha$$

آن وقت

$$A_۲\overset{\frown}{A_{n+۱}}A_{n+۲} = \overset{\frown}{A_۲A_nA_{n+۱}} + \overset{\frown}{A_{n+۱}A_{n+۲}} = \overset{\frown}{A_۱A_{۲n}A_{n+۲}} + \overset{\frown}{A_{n+۲}A_{n+۱}}$$
$$= ۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{A_۱A_۲A_{n+۱}} = ۱۸۰^\circ - \alpha$$

(زیرا $A_۱A_۲ \| A_{n+۱}A_{n+۲}$). به همین ترتیب، می‌توان تحقیق کرد که:

$$A_۳\overset{\frown}{A_{n+۲}}A_{n+۳} = ۱۸۰^\circ + \alpha, \cdots, A_n\overset{\frown}{A_{n+۱}}A_{۲n} = ۱۸۰^\circ + (-۱)^{n+۱}\alpha = ۱۸۰^\circ + \alpha$$

بنابراین:

$$\overset{\frown}{A_۱A_۲A_n} = ۱۸۰^\circ + \alpha - \overset{\frown}{A_nA_{n+۱}} = A_{n+۱}\overset{\frown}{A_{n+۲}}A_{۲n}$$

که از آن‌جا $A_nA_{n+۱} \| A_۱A_{۲n}$.

اکنون ثابت می‌کنیم که برای همین مقدارهای n (یعنی وقتی n، عددی فرد باشد)، $۲(n-۱)$ ضلعی وجود دارد، به نحوی که با شرط مسأله نسازد. ۲n ضلعی $A_۱\cdots A_{۲n}$ را طوری در نظر

می‌گیریم که، در آن، ضلعهای روبه‌رو با هم موازی باشند، ولی داشته باشیم:

$$\widehat{A_1A_2A_{n+1}} \neq 180^\circ$$

برای این منظور، کافی است کمان $\widehat{A_1A_{n+1}} < 180^\circ$ را به وسیلهٔ نقطه‌های $A_2, \ldots, A_n$، به n کمان برابر تقسیم و پشت سرهم، این وترها را رسم کنیم:

$$A_{n+1}A_{n+2} \| A_1A_2, \cdots, A_{2n-1}A_{2n} \| A_{n-1}A_n$$

که در این صورت، بنا بر آنچه ثابت کردیم، شرط $A_{2n}A_1 \| A_nA_{n+1}$ برقرار خواهد بود و در ضمن،

$$\widehat{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \widehat{A_1A_2A_{n+1}} = \widehat{A_{2n}A_1A_n} \neq 180^\circ$$

بنابراین،

$$\widehat{A_2A_3A_n} - \widehat{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}} = \widehat{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \widehat{A_{2n}A_{n+1}A_n} =$$
$$\widehat{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - (360^\circ - \widehat{A_{2n}A_1A_n}) \neq 0$$

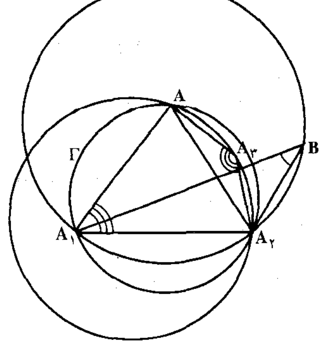
یعنی پاره‌خطهای راست A_2A_{2n} و A_nA_{n+2} موازی نیستند و $2(n-1)$ ضلعی $A_2 \cdots A_nA_{n+2}$ درست دارای $n-2$ ضلع روبه‌رو است که با هم موازی‌اند.

۸۱۹. یک n ضلعی کوژ دلخواه که زاویه‌هایی برابر زاویه‌های n ضلعی منتظم داشته باشد، در نظر بگیرید.

۸۲۰. نه، وجود ندارد. اگر چند ضلعی کوژ، دارای n رأس باشد، دارای $\frac{1}{2}n(n-3)$ قطر خواهد بود و عدد ۱۹۷۴ را نمی‌توان به صورت $\frac{1}{2}n(n-3)$ نوشت.

۱۲.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۲۱. چون هر مثلث سیاه، دست‌کم با یک مثلث سفید تماس دارد، پس تعداد آنها، از تعداد کل ضلعهای مثلثهای سفید تجاوز نمی‌کند، تعداد این ضلعها هم برابر است با سه برابر تعداد مثلثهای سفید.



۸۲۴. مجموعه‌ای را در نظر می‌گیریم که هر عضو آن، شامل سه رأس دلخواه از چند ضلعی داده شده باشد، به نحوی که دو تا از این رأسها در مجاورت هم باشند و در ضمن، ضلع بین این دو رأس، از رأس سوم با زاویه‌ای که از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند، دیده شود (این مجموعه، تهی نیست، زیرا هر سه رأس مجاور چند ضلعی

هم، یک عضو آن است). از بین دایره‌هایی که از سه رأس با این فرضها می‌گذرند، دایرهٔ Γ را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین شعاع R را داشته باشد.

برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم، این دایره، از رأسهای مجاور A_1 و A_2 و رأس دیگری از چند ضلعی مثل A گذشته باشد؛ در ضمن زاویهٔ A_1AA_2 از ۹۰ درجه تجاوز نمی‌کند (شکل). ثابت می‌کنیم، این دایره، همهٔ رأسهای چند ضلعی داده شده را محصور می‌کند، فرض کنید، رأسی مثل B در بیرون دایرهٔ Γ واقع باشد. چون نقطهٔ B، نسبت به خط راست A_1A_2، در همان نیمصفحه‌ای قرار دارد که نقطهٔ A واقع است، بنابراین،

$$A_1\hat{B}A_2 < A_1\hat{A}A_2 \leq 90^\circ$$

و (بنا بر قضیهٔ سینوسها)، شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث A_1A_2B، از R بزرگتر می‌شود که مخالف با فرض ما، مبنی بر نوع انتخاب دایرهٔ Γ است. بنابراین، دایرهٔ Γ، تمامی چند ضلعی را می‌پوشاند. ثابت می‌کنیم که، رأس A_3، مجاور رأس A_2 (و غیر از رأس A_1)، بر محیط همین دایرهٔ Γ قرار دارد. فرض کنیم، چنین نباشد، یعنی نقطهٔ $A_3 \neq A$ در داخل قطعه‌ای از دایرهٔ Γ باشد که متناظر با وتر A_2A است (شکل). در این‌صورت داریم:

$$A_2\hat{A}_3A > 180^\circ - A_2\hat{A}_1A \geq 90^\circ$$

و (بنا بر قضیهٔ سینوسها)، دوباره شعاع دایرهٔ محیطی مثلث A_2A_3A از R بزرگتر می‌شود، که نوع انتخاب دایرهٔ Γ را نقض می‌کند. به این ترتیب، سه رأس، A_1، A_2 و A_3 با شرط مسأله سازگارند.

۸۲۵. دو ایستگاه A و B را در نظر می‌گیریم؛ فرض می‌کنیم، خط XY از ایستگاه A و خط MN از ایستگاه B عبور کند. اگر این دو قطر یکدیگر را قطع کنند، آن وقت می‌توان با یک جابه‌جایی از A به B رسید، در حالتی که این دو قطر یکدیگر را قطع نکنند، آن وقت در چهارضلعی XYMN، دو قطر، و برای مثال XN و YM، در نقطه‌ای مثل O به هم می‌رسند. در این صورت، در مسیر یکی از این قطرها (برای مثال YM) تراموا عبور می‌کند و می‌توان از A به B، با دو جابه‌جایی و بترتیب زیر رسید:

$$A \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow B$$

۸۲۶. همهٔ عددهای زوج بزرگتر از ۹ و همهٔ عددهای فرد بزرگتر از ۱۴.

خط راستی را در نظر می‌گیریم که دست‌کم دو ضلع AB و CD از k ضلعی داده شده، روی آن باشد. در این صورت، حداقل چهارخط راست وجود دارد که ضلعهای k ضلعی

روی آنها واقعند. به طور مشخص، آن ضلعهایی که یکی از دو انتهای آنها نقطه‌های A، B، C و D باشند (و البته، غیر از ضلعهای AB یا CD). بنابراین، از این گونه خطهای راست، حداقل پنج تا و تعداد ضلعها، دست‌کم ده‌تا می‌شود.

اگر هم k، عددی فرد باشد، آن وقت روی یکی از این خطهای راست، باید دست کم سه ضلع k ضلعی قرار گیرد؛ و این به معنای آن است که تعداد خطهای راست از هفت کمتر نیست و $k \geq ۱۵$.

جست‌وجوی k ضلعیهای مشخص از این گونه را، به عنوان تمرین، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۸۲۹. از رأسی مانند $v_۰$ شروع می‌کنیم.

در طول ضلعهای متمایز شکل حرکت کرده و آنها را با ۱، ۲ و ... طوری شماره‌گذاری می‌کنیم که از روی تمام آنها عبور کرده باشیم، و امکان جلو رفتن روی شکل میسر نباشد، مگر آن که از یک ضلع دوبار عبور کنیم.

اگر هنوز ضلعهایی وجود داشته باشند که شماره‌گذاری نشده باشند، یکی از آنها رأسی دارد که از آن عبور کرده‌ایم، چه در غیر این صورت G نمی‌تواند متصل باشد.

از این رأس شروع می‌کنیم، حرکت را روی ضلعهایی که به‌کار نرفته بودند، ادامه می‌دهیم، شماره‌گذاری را از قسمتهایی که جا افتاده باشند از سر می‌گیریم. سرانجام متوقف می‌شویم. این عمل را همان‌گونه که توضیح داده شد، تکرار می‌کنیم تا تمام ضلعها شماره‌گذاری شوند.

فرض کنیم v رأسی باشد که از آن e ضلع گذشته باشد، که $e \geq ۲$. اگر $v = v_۰$، آن گاه v روی ضلع ۱ است، بنابراین، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک در v برابر ۱ است. اگر $v \neq v_۰$، فرض کنیم اوّلین دفعه که به رأس v می‌رسیم در انتهای ضلع r باشد. در این موقع $e-۱ \geq ۱$ ضلع به کار نرفته وجود دارد که با v متقاطعند، بنابراین، یکی از آنها $r+۱$ شماره‌گذاری شده است. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر مجموعه شامل r و $r+۱$ برابر ۱ است.

۸۳۰. $۲n+۲$ تعداد نقطه‌های برخورد دو چند ضلعی را ارزیابی کنید.

۸۳۳. این مرد باید روی محیط نیمدایره‌ای به شعاع $\frac{۲۵۰۷}{\pi}$ متر حرکت کند.

۸۳۴. اگر M رأسی از چند ضلعی باشد، در آغاز ثابت کنید، رأس N وجود دارد، به نحوی که $O \in MN$؛ سپس، ثابت کنید؛ برای این دو رأس داریم: $|OM| = |ON|$.

۱۳.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۸۳۵. الف) فرض کنید l، AC و BC را، بترتیب، در نقطه‌های K و N قطع کند و بر دایره در نقطهٔ M مماس باشد (شکل). قرار می‌گذاریم : $|AC|=|BC|=a$، $|AK|=|KM|=x$ و $|BN|=|NM|=y$.

به روشنی، $\dfrac{w^{۲}}{uv}=\dfrac{(a-x)(a-y)}{xy}$، امّا، بنابر قانون کسینوسها، در مثلث CKN تساوی زیر درست است.

$$(x+y)^{۲}=(a-x)^{۲}+(a-y)^{۲}-۲(a-x)(a-y)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{xy}{(a-x)(a-y)}$$

بنابراین، $\dfrac{uv}{w^{۲}}=\sin^{۲}\dfrac{\alpha}{۲}$. (بقیهٔ حالتهای جای خط l، به روش مشابه بررسی می‌شود.)

ب) از نتیجهٔ (الف) استفاده می‌کنیم. با ضرب کردن تساویهای نظیر، به ازای همهٔ زاویه‌های n ضلعی، درهم، به مربع نسبت مطلوب، که خود برابر است با :

$$\frac{۱}{\sin\frac{\alpha_{۱}}{۲}\sin\frac{\alpha_{۲}}{۲}\cdots\sin\frac{\alpha_{n}}{۲}}$$

می‌رسیم، که در آن، $\alpha_{۱}$ ، $\alpha_{۲}$ ، ...، α_{n} زاویه‌های چند ضلعی‌اند.

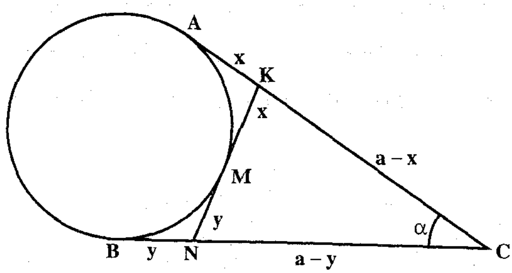
ج) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. نقطه‌های تماس ضلعهای $A_{۱}A_{۲}$ ، $A_{۲}A_{۳}$ ، ...، $A_{۲n-۱}A_{۲n}$ و $A_{۲n}A_{۱}$ با دایره را، بترتیب، با $B_{۱}$ ، $B_{۲}$ ، ...، $B_{۲n-۱}$ و $B_{۲n}$ فاصله‌های $A_{۱}$ ، $A_{۲}$ ، ...، $A_{۲n}$ تا l را، بترتیب، با $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، ...، $x_{۲n-۱}$ و $x_{۲n}$ ؛ فاصله‌های $B_{۱}$ ، $B_{۲}$ ، ... ، $B_{۲n}$ تا l را، بترتیب، با $y_{۱}$ ، $y_{۲}$ ، ... و $y_{۲n}$ ، نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{x_{۱}^{۲}}{y_{۲n}y_{۱}}=\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\alpha_{۱}}{۲}}\ ,\ \frac{x_{۲}^{۲}}{y_{۱}y_{۲}}=\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\alpha_{۲}}{۲}}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{x_{۲n}^{۲}}{y_{۲n-۱}y_{۲n}}=\frac{۱}{\sin^{۲}\frac{\alpha_{۲n}}{۲}}$$

که در آنها، $\alpha_{۱}$ ، $\alpha_{۲}$ ، ... و $\alpha_{۲n}$ زاویه‌های چند ضلعی‌اند. با ضرب کردن برابریهای

شامل x_1، x_3، ... و x_{2n-1} درهم، و تقسیم کردن آنها بر حاصلضرب تساویهای باقیمانده، به دست می‌آوریم:

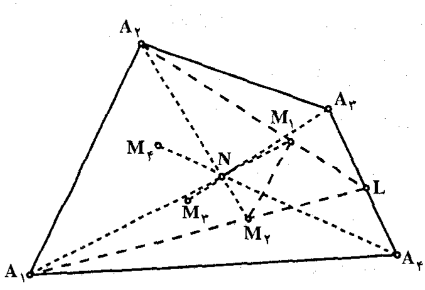
$$\left(\frac{x_1x_3\cdots x_{n-1}}{x_2x_4\cdots x_{2n}}\right)^2=\left(\frac{\sin\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_4}{2}\cdots\sin\frac{\alpha_{2n}}{2}}{\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3}{2}\cdots\sin\frac{\alpha_{2n-1}}{2}}\right)^2$$



۸۳۶. الف) چهار ضلعی دلخواه $A_1A_2A_3A_4$ را در نظر می‌گیریم و مرکزهای هندسی مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را بترتیب M_4، M_3، M_2 و M_1 می‌نامیم (شکل الف). کافی است ثابت کنیم که پاره‌خطهای A_1M_1، A_2M_2، A_3M_3 و A_4M_4 دوبه‌دو در نقطهٔ برخوردشان به نسبت ۱ :۳ تقسیم می‌شوند؛ زیرا در این صورت نتیجه می‌شود که همهٔ این پاره‌خطها در نقطهٔ منحصر به فردی متقاطعند. نقطهٔ برخورد A_1M_1 و A_2M_2 را N می‌نامیم و نقطهٔ وسط A_3A_4 را L. در این صورت:

$$\frac{A_1M_2}{M_2L}=\frac{A_2M_1}{M_1L}=\frac{2}{1}$$

در نتیجه، مثلثهای A_1LA_2 و M_2LM_1 متشابه‌اند و $M_1M_2\|A_1A_2$ و $A_1A_2/M_2M_1=3/1$.

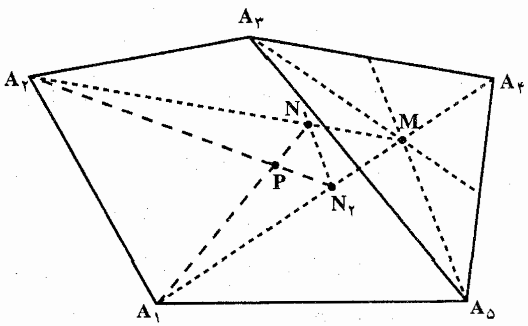


(الف)

اکنون دیده می‌شود که مثلثهای A_1NA_2 و M_1NM_2 متشابه‌اند؛ بنابراین $A_1N/NM_1=A_2N/NM_2=3/1$ که همان حکم مسأله است.

این قضیه را می‌توان به شیوهٔ مشابهی برای هر چند ضلعی دلخواه نیز اثبات کرد. مثلاً، اگر N_1 و N_2 مرکز هندسی

چهار ضلعیهای $A_۱A_۳A_۴A_۵$ و $A_۲A_۳A_۴A_۵$ باشند، M مرکز هندسی مثلث $A_۳A_۴A_۵$ باشد و اگر P نقطهٔ برخورد $A_۱N_۱$ و $A_۲N_۲$ باشد (شکل ب)، آن گاه $A_۱N_۲/N_۲M = A_۲N_۱/N_۱M = ۳/۱$ بنابراین مثلثهای $A_۱MA_۲$ و $N_۲MN_۱$ متشابه‌اند، پس $N_۲N_۱ \| A_۱A_۲$ و $A_۱A_۲/N_۲N_۱ = ۴/۱$. از این جا نتیجه می‌شود که مثلثهای $A_۱PA_۲$ و $N_۱PN_۲$ متشابه‌اند و $A_۱P/PN_۱ = A_۲P/PN_۲ = ۴/۱$. به این ترتیب، هر دو پاره‌خط واصل بین رأسهای یک پنج ضلعی و مرکز هندسی چهارضلعیهای حاصل از چهار رأس باقیمانده، در نقطهٔ برخورد به نسبت ۱ :۴ تقسیم می‌شوند و براین اساس حکم مربوط به پنج ضلعیها بلافاصله ثابت می‌شود.



(ب)

(ب) و (پ) از قسمت (الف) نتیجه می‌شود که مرکزهای هندسی چهار مثلثی که رأسهای آنها رأسهای یک چهارضلعی محاط در دایرهٔ S هستند بر یک دایرهٔ S' به شعاع $R/۳$ واقعند ؛ می‌توان نتیجه گرفت که مرکزهای دایره‌های اویلر این مثلثها مجانس مرکزهای هندسی آنها هستند با مرکز تجانس O، مرکز دایرهٔ S، و با نسبت تجانس ۳/۲ ؛ بنابراین مرکزهای این دایره‌ها روی دایرهٔ $\overline{S}$ به شعاع $R/۲ = (R/۳)(۳/۲)$ واقعند و از این‌جا حکم (ب) در مورد چهارضلعیها نتیجه می‌شود. بعلاوه، اگر N مرکز هندسی چهارضلعی باشد، O' مرکز دایرهٔ S' و $\overline{O}$ مرکز دایرهٔ $\overline{S}$، آن گاه O ، N و O' بر یک خط واقعند و $ON:NO' = ۳:۱$ ، همچنین O، O' و $\overline{O}$ بر یک خط واقعند و $O\overline{O}:OO' = ۳:۲$ پس O، N و $\overline{O}$ بر یک خط واقعند و $ON:N\overline{O} = ۲:۲$ ، چیزی که می‌خواستیم در قسمت (پ) برای چهارضلعیها ثابت کنیم. حال با همین نحوهٔ استدلال می‌توان حکمهای (ب) و (پ) را برای پنج ضلعیها و غیره ثابت کرد ؛ این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم که آن را برای خودش انجام دهد.

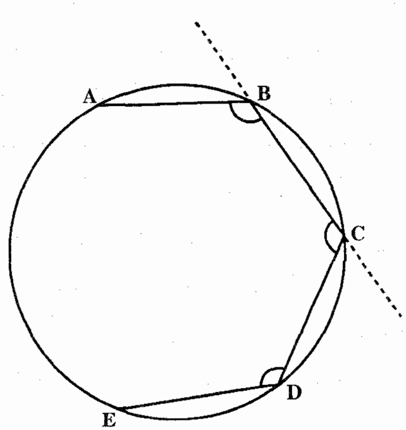
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵

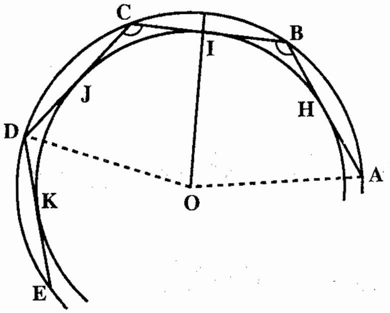
رابطه‌های متری در چند ضلعیهای منتظم

۱.۵. رابطه‌های متری در n ضلعی منتظم و ۲n ضلعی منتظم

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

۸۳۷. زیرا وترهای AB، BC ، CD و ... که روبه‌رو به کمانهای متساوی کوچکتر از نیمدایرهٔ $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و ... هستند، متساوی‌اند (شکل) و اگر اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ را برحسب درجه α بنامیم ($\alpha < 180^\circ$)، اندازهٔ هریک از زاویه‌های محاطی ABC، BCD، CDE و ... برحسب درجه عبارت است از $\frac{360 - 2\alpha}{2}$ و این زاویه‌ها همه با هم مساوی هستند. بعلاوه واضح است که اگر هریک از ضلعهای خط شکستهٔ ... ABCD مثلاً CD را امتداد دهیم، ضلعهای مجاور آن در یک طرف خط حاصل واقع می‌شوند.



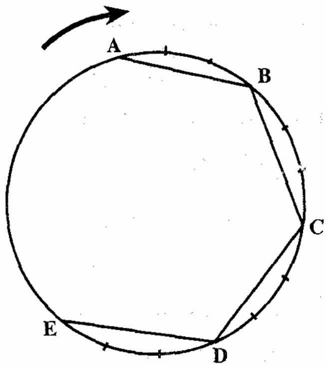


۸۳۸. ۱. خط شکستهٔ منتظم ... ABCDE را درنظر می‌گیریم و از سه نقطهٔ A ، B و C یک دایره می‌گذرانیم و مرکز آن را O می‌نامیم (شکل). کافی است، ثابت کنیم که این دایره از نقطهٔ D نیز می‌گذرد. نقطهٔ وسط قطعه خط BC را I می‌نامیم. خط OI عمودمنصف قطعه خط BC است و اگر صفحهٔ شکل را حول OI تا کنیم تا دو نیمصفحه‌ای که مرز مشترکشان خط OI است، برهم منطبق شوند IC بر IB و نقطهٔ C بر نقطهٔ B منطبق می‌شود و چون $\hat{B} = \hat{C}$ و ضلعهای AB و CD در یک طرف خط BC واقع هستند. خط CD بر خط BA منطبق می‌شود و نقطه‌های A و D در یک طرف نقطهٔ C قرار می‌گیرند و چون AB = CD، نقطهٔ D بر نقطهٔ A منطبق می‌شود، یعنی OD = OA و لذا نقطهٔ D روی دایرهٔ ABC واقع است.

۲. چون ضلعهای AB، BC، CD و ... وترهای متساوی از دایرهٔ محیطی (ABC) هستند، مرکز این دایره یعنی O از این وترها به یک فاصله است و این ضلعها همه بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OI مماس می‌باشد.

۸۴۰. n ضلعی حاصل دارای ضلعهای برابر و زاویه‌های برابر است، پس منتظم است. با توجه به این قضیه، ترسیم یک n ضلعی محدب محاط در یک دایره، و تقسیم آن دایره به nکمان متساوی، دو صورت مختلف از یک مسأله هستند.

۸۴۱. فرض می‌کنیم یک دایره مثلاً به شش کمان متساوی تقسیم شده باشد و نقطه‌های تقسیم را a،b، c، d، e و f می‌نامیم (شکل) و در هریک از این نقطه‌ها مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و فصل مشترک مماسهای متوالی را مطابق شکل A،B، C، D، E و F می‌نامیم. مثلثهای aBb ، bCc ، cDd و... متساوی‌الساقین هستند و همهٔ این مثلثها باهم مساوی‌اند (در حالت دو زاویه و ضلع بین آنها) و از تساوی آنها نتیجه می‌شود که زاویه‌های A،B، Cو ... باهم و قطعه خطهای AB، BC، CD و ... باهم مساوی هستند و بنابراین شش‌ضلعی ABCDEFمنتظم است و این شش‌ضلعی محدب می‌باشد، زیرا مثلاً چون مماس در نقطهٔ a بر دایره را درنظر بگیریم، همهٔ نقطه‌های تقسیم مانند b، c ، d و ... و بنابراین فصل مشترکهای مماسهایی که در دو نقطهٔ متوالی از این نقطه‌ها بر دایره رسم شوند، همه در یک طرف مماس مزبور واقع می‌شوند.



۸۴۳. فرض می‌کنیم، دایرهٔ O به n کمان متساوی تقسیم شده باشد و از یکی از نقطه‌های تقسیم که آن را Aمی‌نامیم (شکل) و همواره در یک جهت دوران (جهت سهم روی شکل) نقطه‌های تقسیم را p به p به هم وصل می‌کنیم یعنی از A در جهت سهم p کمان می‌شماریم و A را به انتهای کمان pام وصل می‌کنیم و عمل را در همان جهت ادامه می‌دهیم تا نقطه‌های B، C، D و ... به دست آیند ؛ به این ترتیب یک خط شکستهٔ منتظم حاصل می‌شود. حال گوییم اگر به اندازهٔ کافی عمل را ادامه دهیم :

۱. این خط شکستهٔ منتظم مسدود خواهد شد ؛ زیرا عدهٔ نقطه‌های تقسیم معین و محدود است.

۲. این خط شکسته در همان نقطهٔ A(نقطهٔ عزیمت) بسته خواهد شد.

در واقع ممکن نیست قبل از این که به A برسیم به یکی دیگر از نقطه‌های B، C، D و... برای مثال به نقطهٔ B مراجعت کنیم، زیرا چون همواره در یک جهت دوران حرکت می‌کنیم و نقطه‌های تقسیم را p به p به هم وصل می‌کنیم، برای رسیدن به B ناچار باید از Aحرکت کنیم پس قبل از آن که به B مراجعت کنیم به A خواهیم رسید.

حال ملاحظه می‌کنیم که می‌توانیم بدون آن که از کلی بودن بحث چیزی بکاهیم، عددهای n و p را نسبت به هم اوّل فرض کنیم، زیرا اگر نسبت به هم اوّل نباشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکی مانند d خواهند داشت و مطلب درست مثل این است که دایره را به $\frac{n}{d}$ کمان متساوی تقسیم و نقطه‌های تقسیم را $\frac{p}{d}$ به $\frac{p}{d}$ به هم وصل کرده باشیم (برای مثال اگر دایره را به ۱۵ قسمت متساوی تقسیم و نقطه‌های تقسیم را ۳ به ۳ به هم وصل کنیم درست مثل این است که دایره را به ۵ قسمت متساوی تقسیم و نقطه‌های تقسیم را پشت سرهم به هم وصل کرده باشیم.) و دیگر بحث در مورد عددهای n و p مورد نخواهد داشت.

۳. به فرض آن که p و n نسبت به هم اوّل باشند، عدهٔ ضلعهای چندضلعی منتظم حاصل همان n خواهد بود.

زیرا چون هر ضلع روبه‌روی کمانی است که شامل p قسمت می‌باشد وقتی k ضلع رسم می‌کنیم از kp قسمت از قسمتهای دایره عبور می‌کنیم و از طرف دیگر وقتی

به نقطهٔ A مراجعت خواهیم کرد که یک یا چند مرتبه کامل دایره را طی کرده باشیم یعنی برای آن که به نقطهٔ عزیمت A مراجعت کنیم باید kp مضربی از n باشد اما چون n با p اوّل است پس باید k مضربی از n باشد. بنابراین اوّلین دفعه‌ای که به نقطهٔ A مراجعت می‌کنیم k کوچکترین مقدار خود را داراست یعنی $k = n$. از آنچه گذشت نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

اگر عددهای صحیح n و p نسبت به هم اوّل باشند $(p < n)$ ، و یک دایره را به n قسمت متساوی تقسیم و نقطه‌های تقسیم را p به p به هم وصل کنیم، یک n ضلعی منتظم به دست خواهد آمد.

اگر $p = ۱$ یا $p = n - ۱$ باشد، n ضلعی حاصل محدب است و در غیر این صورت n ضلعی ستاره‌ای به دست می‌آید.

حال ملاحظه می‌کنیم که هر وتری که از یک طرف روبه‌روی p قسمت از قسمتهای دایره باشد از طرف دیگر روبه‌روی $n - p$ قسمت خواهد بود. پس خواه نقطه‌های تقسیم را p به p به هم وصل کنیم و خواه $n - p$ به $n - p$ فقط یک n ضلعی معین به دست خواهد آمد، بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم: $p < \frac{n}{۲}$

یعنی: عدهٔ n ضلعیهای منتظم محدب یا ستاره‌ای که به روش بالا یعنی تقسیم کردن دایره به n قسمت متساوی و وصل کردن نقطه‌های تقسیم p به p ، به دست می‌آید مساوی است با عدهٔ عددهای صحیحی که با n اوّل و از آن کوچکتر باشند.

مثال:

$n = ۳$ — $p = ۱$ مثلث متساوی‌الاضلاع

$n = ۴$ — $p = ۱$ مربع

$n = ۵$:
- $p = ۱$ پنج‌ضلعی منتظم محدب
- $p = ۲$ پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای

$n = ۶$ — $p = ۱$ شش‌ضلعی منتظم محدب

$n = ۸$:
- $p = ۱$ هشت‌ضلعی منتظم محدب
- $p = ۳$ هشت‌ضلعی منتظم ستاره‌ای

$$n=10 \begin{cases} p=1 & \text{ده ضلعی منتظم محدب} \\ p=3 & \text{ده ضلعی منتظم ستاره‌ای} \end{cases}$$

$$n=12 \begin{cases} p=1 & \text{دوازده‌ضلعی منتظم محدب} \\ p=5 & \text{دوازده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای} \end{cases}$$

$$n=15 \begin{cases} p=1 & \text{پانزده ضلعی منتظم محدب} \\ p=2 & \text{پانزده ضلعی منتظم ستاره‌ای} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=4 & \text{پانزده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای} \\ p=7 & \text{پانزده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای} \end{cases}$$

تبصره. در مثال بالا دیدیم که عدهٔ پانزده ضلعیهای منتظم محدب یا ستاره‌ای که به روش بالا به دست می‌آیند، چهار است ولی هنوز نمی‌توانیم حکم کنیم که عدهٔ پانزده ضلعیهای منتظم منحصر به همین عدد می‌باشد، زیرا در وهلهٔ اوّل چنین به نظر می‌آید که می‌توان به روشهای دیگری پانزده ضلعیهای منتظمی غیر از این چهار پانزده‌ضلعی به دست آورد، برای رفع این اشکال ثابت می‌کنیم که:

اگر یک دایره را به n قسمت متساوی تقسیم و نقطه‌های تقسیم را p به p به هم وصل کنیم، همهٔ n ضلعیهای منتظم محدب یا ستاره‌ای به این ترتیب (با تغییردادن p) به دست می‌آیند.

n ضلعی منتظم (محدب یا ستاره‌ای) ... ABCD را درنظر می‌گیریم. این n ضلعی در یک دایره محاط است. فرض کنیم نقطهٔ متحرکی روی دایرهٔ محیطی n ضلعی از A حرکت کند، و کمانهای کوچکتر از نیمدایرهٔ $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{BC}$، $\overset{\frown}{CD}$ و ... را همواره در یک جهت بپیماید و به A مراجعت کند، اگر اندازهٔ مشترک این کمانهای متساوی را (مثلاً برحسب درجه) α بنامیم، نقطهٔ متحرک مزبور کمانی که اندازهٔ آن $n\alpha$ می‌باشد (این کمان ممکن است از دایره بزرگتر باشد)، پیموده است و چون به نقطهٔ عزیمت خود یعنی A مراجعت کرده است اندازهٔ کمانی که پیموده است مساوی است با اندازهٔ دایره‌ای که

آن را C می‌نامیم ضرب در یک عدد صحیح مانند p. پس داریم :

$$n\alpha = pC$$

و یا

$$\alpha = p\frac{C}{n}$$

بنابراین هریک از کمانهای $\widehat{AB}$ ، $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ و ... مساوی هستند با p برابر کمان $\frac{C}{n}$ یعنی p برابر کمانی که از تقسیم دایره به n قسمت متساوی به دست می‌آید و قضیه ثابت است.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ زیر را بیان کنیم :

قضیه. عدهٔ n ضلعیهای منتظم ستاره‌ای مساوی است با عدهٔ عددهای صحیحی (غیر از واحد) که از $\frac{n}{۲}$ کوچکتر و با n اول باشند.

تبصره. اصطلاحهای مرکز و سهم و شعاع و زاویهٔ مرکزی و رابطه‌های (۱) و (۲) که دربارهٔ خط شکستهٔ منتظم دیدیم، در مورد چندضلعیهای منتظم نیز برقرارند.

اندازهٔ زاویهٔ مرکزی n ضلعی منتظم برحسب درجه مساوی است با :

$$\omega = ۳۶۰^\circ \times \frac{p}{n}$$

در این دستور n عدهٔ تقسیمهای دایرهٔ محیطی و p عده‌ای از این تقسیمها است که روبه‌روی به یک ضلع می‌باشند و در مورد n ضلعی محدب داریم :

$$\omega = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

این نکته شایستهٔ توجه است که : مقدار زاویهٔ مرکزی ω و یا مقدار نسبت $\frac{p}{n}$ نوع چندضلعی را مشخص می‌کند و اگر شعاع یا سهم چندضلعی نیز معلوم باشد، چندضلعی منتظم کاملاً مشخص می‌شود.

۲.۱.۵. زاویه

۱.۲.۱.۵ . اندازهٔ زاویه

۸۴۴. اندازهٔ هر کمان ایجاد شده در دایره، $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه است و زاویهٔ CAM زاویهٔ محاطی روبه‌رو به $(n-۴)$ تا از این کمانهاست. پس داریم :

$$C\hat{A}M = \frac{۱}{۲}(n-۴) \times \frac{۳۶۰^\circ}{n} = \frac{۱۸۰^\circ(n-۴)}{n}$$

۸۴۵. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا :

زاویهٔ رأس n ضلعی منتظم ستاره‌ای، زاویهٔ رأس یک مثلث متساوی‌الساقین است که هریک از دو زاویهٔ قاعدهٔ آن برحسب درجه برابر است با :

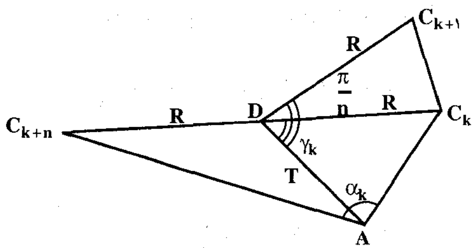
$$۱۸۰^\circ - (n-۲)\times\frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

بنابراین اندازهٔ مزبور برحسب درجه برابر است با :

$$۱۸۰^\circ - \frac{۷۲۰^\circ}{n} = \frac{۱۸۰^\circ n - ۷۲۰^\circ}{n} = \frac{۱۸۰^\circ (n-۴)}{n}$$

۲.۲.۱.۵ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۸۴۶. O را مرکز ۲n ضلعی منتظم $C_۰C_۱ \ldots C_{۲n-۱}$ و R را شعاع دایرهٔ محیطی آن می‌گیریم. نقطهٔ دلخواه A را به فاصلهٔ $r \neq R$ از نقطهٔ O انتخاب می‌کنیم و قرار می‌گذاریم :



$$\alpha_k = C_k\hat{A}C_{k+n} \ , \quad \gamma_k = A\hat{O}C_k$$

(برای $k = ۰,۱,\ldots,n-۱$). در این صورت، بنابه قضیهٔ کسینوسها، داریم (شکل) :

$$AC_k^۲ = R^۲ + r^۲ - ۲Rr\cos\gamma_k$$

$$AC_{k+n}^۲ = R^۲ + r^۲ + ۲Rr\cos\gamma_k$$

$$\cos\alpha_k = \frac{AC_k^۲ + AC_{k+n}^۲ - C_kC_{k+n}^۲}{۲AC_kAC_{k+n}} = \frac{r^۲ - R^۲}{\sqrt{(R+r)^۲ - ۴R^۲r^۲\cos^۲\gamma_k}}$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید :

$$\tan^۲\alpha_k = \frac{۱}{\cos^۲\alpha_k} - ۱ = \frac{۱}{(R^۲-r^۲)^۲}\left[(R^۲+r^۲)^۲ - (R^۲-r^۲)^۲ - ۴R^۲r^۲\cos^۲\gamma_k\right]$$

$$= \frac{۴R^۲r^۲}{(R^۲-r^۲)^۲}\sin^۲\gamma_k$$

بدون این که لطمه‌ای به کلی بودن مسأله وارد شود، می‌توان فرض کرد :

$$\gamma_k = \gamma_0 + \frac{k\pi}{n}$$

(در ضمن، تنها ممکن است لازم شود که رأسهای ۲n ضلعی داده شده را به ردیف دیگری شماره‌گذاری کنیم). بنابراین داریم :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tan^2 \alpha_k = \frac{2R^2r^2}{(R^2-r^2)^2} \sum_{k=0}^{n-1} (1-\cos 2\gamma_k) = \frac{2R^2r^2n}{(R^2-r^2)^2}$$

زیرا، $\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\gamma_k = 0$. برای اثبات برابری اخیر، بردارهای واحد d_k را با مختصات

$$(\sin 2\gamma_k \; , \; \cos 2\gamma_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

درنظر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که زاویهٔ بین بردارهای d_k و d_{k+1} $(d_n = d_0)$ برابر $\frac{2\pi}{n}$ است. بنابراین، nضلعی منتظم $D_0D_1\ldots D_{n-1}$ وجود دارد که، برای آن

$$\overrightarrow{D_kD_{k+1}} = d_k \quad (D_n = D_0)$$

یعنی، مجموع بردارهای d_0، d_1، ...، d_k که برابر مجموع تصویرهای آنها بر محور دلخواهی است، برابر صفر است. به این ترتیب، ثابت شد، برای هر دو نقطهٔ A و B که از نقطهٔ O به فاصله‌ای غیر از R باشند، مجموع مورد نظر، یکی است و، از این‌جا، درستی حکم مسأله ثابت می‌شود (زیرا، شعاعهای دو دایرهٔ محاطی و محیطی، برابر نیستند).

۸۴۷. گزینهٔ (ج) درست است، زیرا :

یک چندضلعی دست‌کم ۳ ضلع دارد، پس $60°$ کمترین مقدار x است. کوچکترین مقدار بعدی x ، $90°$ است که از آن چهارضلعی است. در یک چندضلعی (محدب)، هر زاویه از $180°$ کوچکتر است. پس $kx < 180°$. چون k عدد صحیح بزرگتر از ۱ است، زوج $x = 60°$ ، $k = 2$ یکی از جوابهاست : $x = 60°$ ، $kx = 120° < 180°$. P_1 مثلث و P_2 شش‌ضلعی است. اما اگر $x > 60°$ یا اگر $k > 2$ ، آن‌گاه $kx \geq 180°$. بنابراین جواب دیگری وجود ندارد.

۳.۱.۵. ضلع

۱.۳.۱.۵ . اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم

۸۴۸. اگر ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع R را به C_n و ضلع n ضلعی منتظم محیط بر این دایره را با C'_n نمایش دهیم، داریم :

$$C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$C'_n = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

زیرا اگر $AB = C_n$ و $A'B' = C'_n$ ، $A'B' \parallel AB$ فرض شود و O مرکز دایره باشد، از نقطهٔ O عمود OH را بر AB فرود می‌آوریم و نقطهٔ تقاطع OH با $A'B'$ را H' می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم :

$$A\hat{O}B = \frac{۳۶۰^\circ}{n} \Rightarrow A\hat{O}H = \frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow AH = R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow$$

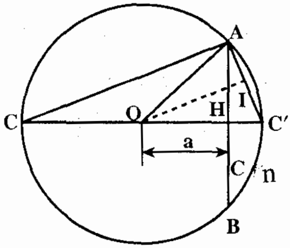
$$\frac{AB}{۲} = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow AB = C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OA'H'$ داریم :

$$A'OH' = \frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow A'H = OH'\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow \frac{A'B'}{۲} =$$

$$R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow A'B' = C'_n = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

۲.۳.۱.۵. اندازهٔ ضلع ۲n ضلعی منتظم



۸۴۹. اگر AB مساوی با C_n باشد و قطر COC' را عمود بر AB رسم کنیم. به فرض آن که کمان $\overset{\frown}{ACB}$ کوچکتر از نیمدایره باشد، AC مساوی با $C_{۲n}$ خواهد بود و از مثلث قائم‌الزاویهٔ CAC' حاصل می‌شود :

$$\overline{AC}^۲ = CC'.CH \quad \text{و یا} \quad \overline{AC}^۲ = ۲R(R - OH)$$

امّا

$$OH = r_n = \sqrt{R^۲ - \frac{(C_n)^۲}{۴}}$$

پس
$$\overline{AC}^۲ = ۲R\left(R - \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{۴}}\right)$$

و یا
$$C_{۲n} = \sqrt{R(۲R - \sqrt{۴R^۲ - C_n^۲})}$$

نکتهٔ ۱. محاسبهٔ $r_{۲n}$. برای محاسبهٔ سهم ۲n ضلعی یعنی OI (I وسط AC است)، ملاحظه می‌کنیم که $OI = \frac{AC'}{۲}$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ CAC' حاصل می‌شود :

$$\overline{AC'}^۲ = CC'.C'H \quad \text{و یا} \quad \overline{AC'}^۲ = ۲R(R + OH)$$

پس
$$\overline{AC'}^۲ = ۲R\left(R + \sqrt{R^۲ - \frac{C_n^۲}{۴}}\right)$$

و از آن‌جا
$$r_{۲n} = \frac{۱}{۲}\sqrt{R(۲R + \sqrt{۴R^۲ - C_n^۲})}$$

نکتهٔ ۲. به فرض معلوم بودن $C_{۲n}$ و R مقدار C_n را حساب کنید.

جواب :
$$C_n = \frac{C_{۲n}\sqrt{۴R^۲ - C_{۲n}^۲}}{R}$$

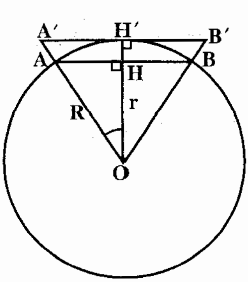
۴.۱.۵. سهم

۱.۴.۱.۵. اندازهٔ سهم n ضلعی منتظم

۸۵۰. اگر سهم n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R را با r_n و سهم n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R را با r'_n نمایش دهیم، در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAH و $OA'H'$ داریم :

$$OH = r_n = R\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$OH' = r'_n = R$$



۲.۴.۱.۵ . اندازهٔ سهم ۲n ضلعی منتظم

۸۵۱. قبلاً دیدیم که سهم ۲n ضلعی منتظم محاطی در دایرهٔ به شعاع R ، برابر است با :

$$r_{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{R(2R + \sqrt{4R^2 - C_n^2})}$$

و سهم ۲n ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R برابر $r'_{2n} = R$ است.

۳.۴.۱.۵. رابطهٔ بین سهم و شعاع

۸۵۲. دایره‌ای به شعاع R، n ضلعی منتظم محاط در آن، n ضلعی منتظم محیط بر آن و سهم آنها را رسم کنید و سپس مقایسه نمایید.

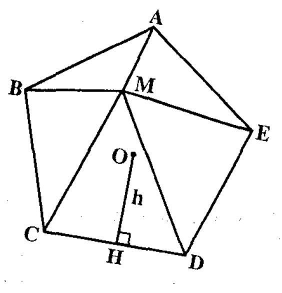
۵.۱.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۸۵۳. چهارضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی است که در آن $BC \parallel AD$ و $AB = BC = CD = C_n$ است. نقطهٔ k محل برخورد قطرهای این ذوزنقه است، بنابراین طول AC و AD و از روی آنها زاویه‌های آن نیز مشخص است. AK و KC قابل محاسبه است.

۲.۵.۱.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۸۵۴. اگر M نقطه‌ای در داخل چندضلعی منتظم اختیار شود و فاصله‌های این نقطه را از ضلعهای d_1 و d_2 و ... d_n فرض کنیم، M را به رأسهای چندضلعی وصل می‌کنیم. n مثلث تشکیل می‌گردد که مجموع مساحتهای آنها با مساحت چندضلعی برابر است (شکل). اگر S مساحت چندضلعی و a طول ضلع آن و h ارتفاع چندضلعی باشد، خواهیم داشت :



$$S = a\times\frac{d_1}{2} + a\times\frac{d_2}{2} + \ldots + a\times\frac{d_n}{2}$$

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \frac{2s}{a} = \frac{2\times n\times\frac{1}{2}a.h}{a} = n.h = \text{مقدار ثابت}$$

۸۵۵. توجه کنید که اگر دستگاه بردارهایی را درنظر بگیریم که نقطهٔ ابتدای آنها، در مرکز n ضلعی منتظم و نقطهٔ انتهایی آنها، روی رأسهای آن قرار گیرد، آن وقت مجموع این بردارها صفر است. در حقیقت، اگر همهٔ این بردارها را به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{2\pi}{n}$ دوران دهیم، آن وقت مجموعشان تغییری نمی‌کند، از طرف دیگر بردار مجموع آنها، به اندازهٔ همان زاویه دوران می‌کند. به این ترتیب، مجموع تصویرهای این بردارها روی هر محور دلخواه هم، صفر می‌شود.

به مسألهٔ خودمان باز می‌گردیم. اگر φ زاویهٔ میان خط راست مفروض (آن را با l نشان می‌دهیم) و یکی از بردارها باشد، آن وقت بقیهٔ بردارها با آن، زاویه‌های $\varphi+\frac{2\pi}{n}$، $\varphi+2\times\frac{2\pi}{n}$، ... و $\varphi+(n-1)\frac{2\pi}{n}$ می‌سازند. مربع فاصلهٔ رأس kام تا l، برابر است با :

$$\sin^2(\varphi+k\frac{2\pi}{n})=\frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi+k\frac{4\pi}{n}))$$

اما مقدارهای $\cos(2\varphi+k\frac{4\pi}{n})$، تصویرهای دستگاهی از n بردار که با l زاویه‌های $2\varphi+k\frac{4\pi}{n}$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ می‌سازند، روی آن هستند. اگر n فرد باشد، این بردارها یک n ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند، و اگر n زوج باشد، آنها، یک $\frac{n}{2}$ ضلعی دوبار تکرار شده، می‌سازند.

جواب : $\frac{n}{2}$.

۶.۱.۵. شعاع دایره

۱.۶.۱.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۸۵۶. مساحت ۲n ضلعی منتظم محاطی برابر با $\pi R^2\sin\frac{180^\circ}{n}$ و مساحت n ضلعی منتظم محیطی مساوی $\pi R^2\tan\frac{180^\circ}{n}$ می‌باشد و بنابراین طبق فرض داریم :

$$\pi R^2(\tan\frac{180^\circ}{n}-\sin\frac{180^\circ}{n})=p$$

از آن‌جا :
$$R=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n(\tan\alpha-\sin\alpha)}}$$

که در آن $\alpha=\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ می‌باشد. جملهٔ $\tan\alpha-\sin\alpha$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\tan\alpha-\sin\alpha=\tan\alpha(۱-\cos\alpha)=۲\tan\alpha\sin^۲\frac{\alpha}{۲}$$

جواب :
$$R=\frac{۱}{\sin\frac{۹۰^\circ}{n}}\sqrt{\frac{p\cot\frac{۱۸۰^\circ}{n}}{۲n}}$$

۵.۱.۷. محیط

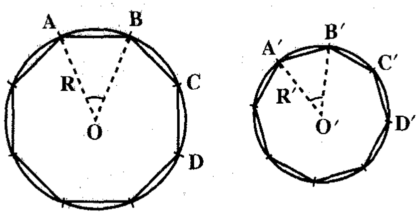
۵.۱.۷.۱. اندازهٔ محیط

۸۵۷. با توجه به $C_n=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $C'_n=۲R\text{tg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $R=۲$ داریم :

$$۲p=nC_n=n\times۲\times۲\times\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}=۴n\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$۲p'=nC'_n=n\times۲\times۲\times\text{tg}\frac{۱۸۰^\circ}{n}=۴n\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

۵.۱.۷.۲. نسبت محیطها



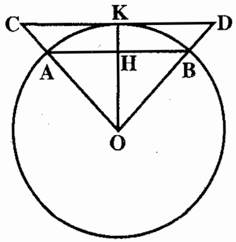
۸۵۸. دو n ضلعی منتظم محدب ... ABCD و ... A′B′C′D′ را درنظر می‌گیریم (دقت کنید که عدهٔ ضلعهای این دو چندضلعی یکی است) و مرکز آنها را به ترتیب O و O′ و طول محیطشان را P و P′ می‌نامیم. داریم :

$$P'=n\times A'B' \quad , \quad P=n\times AB$$

دو مثلث متساوی‌الساقین OAB و O′A′B′ متشابه‌اند، زیرا زاویه‌های AOB و A′O′B′ هریک مساوی با $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه است و داریم :

$$\frac{n\times AB}{n\times A'B'}=\frac{OA}{O'A'} \quad \text{و یا} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'} \quad \text{و یا} \quad \frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$$

۳.۷.۱.۵. رابطهٔ بین محیطها



۸۵۹. فرض کنیم AB و CD بترتیب ضلع چندضلعی منتظم محاط در یک دایره، و چندضلعی منتظم محیط بر دایره، و مشابه با اوّلی باشد، شعاع OHK را رسم می‌کنیم. OH شعاع دایرهٔ محاطی اوّلی و OC شعاع دایرهٔ محیطی دومی است. بنابراین، می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$4\pi^2 OA^2 = 2\pi \times OH \times 2\pi \times OC$$

و یا

$$\overline{OA}^2 = OC \times OH$$

دو مثلث OAH و OCK متشابه‌اند. پس داریم:

$$\frac{OH}{OK} = \frac{OA}{OC}$$

و چون $OK = OA$

پس رابطهٔ بالا پس از طرفین و وسطین کردن، چنین نوشته می‌شود: $\overline{OA}^2 = OC \times OH$

و حکم مسأله ثابت است.

۸۶۰. AB و CD را نصف ضلعهای n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی در دایرهٔ به شعاع R و AD و EF را ضلعهای n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی در همین دایره درنظر می‌گیریم.

شعاع OG را عمود بر EF ، AP را موازی این شعاع، AJM موازی با CD و PML را موازی با AD ، EJ تفاضل ضلعهای ۲n ضلعی منتظم محاطی و محیطی است. CR تفاضل نصف ضلعهای n ضلعیهای منتظم محاطی و محیطی است. کافی است، ثابت کنیم که $EJ < \frac{1}{4} CR$.

به دلیل همنهشتی مثلثهای OGF ، ODK دو پاره‌خط DF و GK برابرند. امّا عمود GH از مایل DF کوچکتر است. از طرفی HK = LK ، زیرا FK = DK از آن‌جا HG < GK و از آن‌جایی که:

$$HG < \frac{1}{2} HK \quad \text{یا} \quad HG < \frac{1}{2} AP$$

امّا مثلثهای متشابه MAN و EAJ قاعده‌های متناسب با ارتفاعهای نظیرشان دارند. از آن جا:

$$EJ < \frac{1}{2} NM$$

از طرفی عمود MPN رسم شده بر نیمساز AP کوچکتر از CR است. در نتیجه $EJ < \frac{1}{4}CR$.

۸.۱.۵. مساحت

۱.۸.۱.۵. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۸.۱.۵. اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم

۸۶۱. اگر ضلع n ضلعی منتظم را a و اندازهٔ سهم آن را r فرض کنیم، مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}nar_n$$

زیرا با وصل کردن مرکز n ضلعی به رأسهای آن، n مثلث همنهشت به قاعدهٔ a و ارتفاع نظیر r به دست می‌آید.

۸۶۲. الف) می‌دانیم که اندازهٔ ضلع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R، با $C_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$، و اندازهٔ سهم آن $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$ است. بنابراین، اندازهٔ مساحت n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$S_n = \frac{1}{2}nC_n.r_n \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}n \times 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \times R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}$$

ب) می‌دانیم که اندازهٔ ضلع و سهم n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R، بترتیب برابر است با:

$$r'_n = R \quad , \quad C'_n = 2R\tan\frac{180^\circ}{n}$$

بنابراین داریم:

$$S'_n = \frac{1}{2}nC'_n.r'_n \Rightarrow S'_n = \frac{1}{2}n \times 2R\tan\frac{180^\circ}{n} \times R$$

$$\Rightarrow S'_n = nR^2\tan\frac{180^\circ}{n}$$

۸۶۳. می‌دانیم که $S_n = \frac{۱}{۲} nR^۲ \sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است. بنابراین، داریم:

$$n = ۳ \Rightarrow S_۳ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times R^۲ \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۳} = \frac{۳}{۲} R^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow S_۳ = \frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۴}$$

$$n = ۴ \Rightarrow S_۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times R^۲ \sin ۹۰^\circ = ۲R^۲$$

$$n = ۵ \Rightarrow S_۵ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times R^۲ \sin ۷۲^\circ = \frac{۵}{۲} R^۲ \times \frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴} = \frac{۵\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۸} R^۲$$

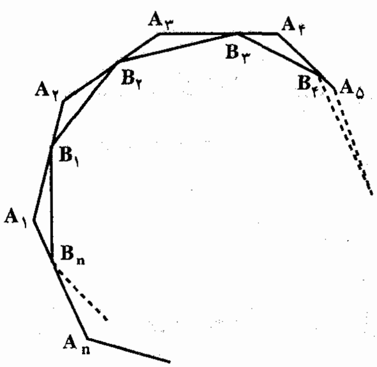
$$n = ۶ \Rightarrow S_۶ = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times R^۲ \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲}$$

$$n = ۷ \Rightarrow S_۷ = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times R^۲ \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۷} = \frac{۷}{۲} R^۲ \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۷}$$

$$n = ۸ \Rightarrow S_۸ = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times R^۲ \sin ۴۵^\circ = ۲\sqrt{۲}R^۲$$

۸۶۴. $\frac{na^۲}{۱ + \tan^۲\alpha}(\cot\alpha + \pi - \frac{\pi n}{۲})$؛ در این رابطه $\alpha = \frac{\pi}{n}$ است. مساحت شکل «ستاره‌ای» عبارت از تفاضل مساحت nضلعی با رأسهای واقع بر مرکزهای دایره‌ها و مساحت nتا قطاع است.

۸۶۵. $\frac{na^۲\cos^۲\alpha}{۴(۱ + \sin\alpha)^۲}(\cot\alpha + \pi - \frac{\pi n}{۲})$. در این رابطه $\alpha = \frac{\pi}{n}$ است.



۸۶۶. فرض کنید، n ضلعی منتظم $B_۱ \ldots B_n$ به مساحت S_B را در nضلعی منتظم $A_۱ \ldots A_n$ به مساحت S_A محاط کرده باشیم. در این صورت، اگر دو n ضلعی برهم منطبق نباشند، روی هر ضلع $A_iA_{i+۱}$ (برای $i = ۱, \ldots, n$ ؛ $A_{n+۱} = A_۱$)، درست یک رأس، و برای مثال B_i، قرار دارد. در واقع، در غیر این صورت، بنابر اصل دیریکله دست‌کم روی یک ضلع، برای مثال $A_۱A_۲$، دو نقطهٔ $B_۱$ و $B_۲$ قرار می‌گیرد (برای درستی $A_۱B_۲ > A_۱B_۱$)، در این صورت رأس

B_3 (که در مثلث $A_1A_2A_3$ ،متشابه با مثلث $B_1B_2B_3$ ، قرار دارد) و رأس B_n (در مثلث $A_1A_2A_n$) تنها می‌توانند، بترتیب روی ضلعهای A_2A_3 و A_1A_n قرار گیرند (با توجه به $n > 3$ ، پاره‌خطهای راست A_1A_3 و A_2A_n قطرهای n ضلعی $A_1 \ldots A_n$ هستند و نه ضلعهای آن)، یعنی $B_1 = A_1$ و $B_2 = A_2$. ثابت می‌کنیم :

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_nB_n$$

در واقع، مثلثهای $B_1A_2B_2$ و $B_2A_3B_3$ برابرند (شکل)، زیرا :

$$B_1\hat{A}_2B_2 = B_2\hat{A}_3B_3 = B_1\hat{B}_2B_3 = 180^\circ \times \frac{n-2}{n}$$

$$A_2\hat{B}_1B_2 = 180^\circ - B_1\hat{A}_2B_2 = A_2\hat{B}_2B_1 = 180^\circ - B_1\hat{B}_2B_3 - A_2\hat{B}_2B_1 =$$

$$A_3B_2B_3 \;,\; B_1B_2 = B_2B_3$$

بنابراین $A_2B_2 = A_3B_3$ ؛ به همین ترتیب، بقیهٔ برابریها هم ثابت می‌شوند. مقدار

$$S_B = S_A - S_{B_1A_2B_2} - S_{B_2A_3B_3} - \ldots - S_{B_nA_1B_1} = S_A - nS_{B_1A_2B_2}$$

وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که، مساحت مثلث $B_1A_2B_2$ ، حداکثر مقدار ممکن باشد. فرض کنید :

$$A_1A_2 = a \quad , \quad A_1B_1 = x$$

در این صورت، مقدار

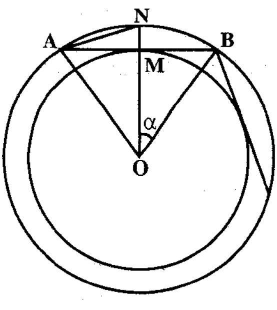
$$S_{B_1A_2B_2} = \frac{1}{2}B_1A_2 . A_2B_2 . \sin(B_1\hat{A}_2B_2) = \frac{1}{2}(a-x)x\sin(B_1\hat{A}_2B_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{4} - (x - \frac{a}{2})^2\right]\sin(B_1\hat{A}_2B_2)$$

به ازای $x = \frac{a}{2}$ به حداکثر خود می‌رسد، یعنی وقتی که داشته باشیم :

$$A_1B_1 = B_1A_2$$

۲.۱.۸.۱.۵ . اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده



۸۶۷. $AB = a$ را ضلع n ضلعی فرض می‌کنیم (شکل)، بنابراین داریم :

$$B\hat{O}N = \alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

$$N\hat{A}M = \frac{\alpha}{2} = \frac{90^\circ}{2}$$

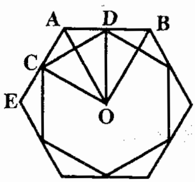
مساحت Q حلقه خواهد شد :

$$Q=\pi(OA^2-OM^2)=\pi.AM^2=\pi(\frac{a}{2})^2$$

عرض d حلقه را می‌توان از مثلث NAM به دست آورد.

جواب :
$$Q=\frac{\pi a^2}{4}\quad,\quad d=\frac{a}{3}\tan\frac{90^\circ}{n}$$

۲.۸.۱.۵. نسبت مساحتها



۸۶۸. دوچندضلعی منتظمی که دارای ضلعهای مساوی باشند، متشابه‌اند، بنابراین (شکل)، داریم :

$$S_1 : S_2=OD^2:OA^2$$

(S_1 مساحت n ضلعی محاطی و S_2 مساحت n ضلعی محیطی است.)

اکنون از مثلث OAD داریم :

$$\frac{OD}{OA}=\cos D\hat{O}A=\cos\frac{180^\circ}{n}$$

جواب :
$$S_1 : S_2=\cos^2\frac{180^\circ}{n}$$

۵.۱.۹. رابطه‌های متری

۸۶۹. نابرابری مسأله را می‌توان این‌طور نوشت :

$$(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}-n\cos\frac{\pi}{n}>1$$

و یا
$$n(\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{\pi}{n})>1-\cos\frac{\pi}{n+1}$$

یعنی
$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}.\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}$$

و نابرابری اخیر درست است، زیرا :

$$\sin\frac{\pi(2n+1)}{2n(n+1)}>\sin\frac{2\pi n}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{n+1}>\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

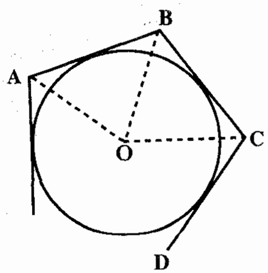
$$n\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}\geq\sin\frac{n\pi}{2n(n+1)}=\sin\frac{\pi}{2(n+1)}$$

در این‌جا، از نابرابری $|n \sin\alpha| \geq |\sin n\alpha|$ استفاده کرده‌ایم که بسادگی، و به کمک استقرا ثابت می‌شود.

۵.۱.۱۰. ثابت کنید چندضلعی منتظم است

۸۷۰. فرض کنیم ...ABCD چند ضلعی محدب محیط بر دایرهٔ به مرکز O باشد که تمام زاویه‌های آن متساوی‌اند. برای اثبات آن که این چندضلعی منتظم است، کافی است ثابت کنیم که تمام ضلعهای آن متساوی‌اند. می‌دانیم که OA ، OB و OC عبارتند از نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از چندضلعی بنابراین :

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A = O\hat{B}C = O\hat{C}B = \ldots$$



بنابراین تمام مثلثهای متساوی‌الساقین OAB و OBC و غیره که دوبه‌دو در یک ضلع مشترک و زاویه‌هایشان یکی است متساوی‌اند. بنابراین :

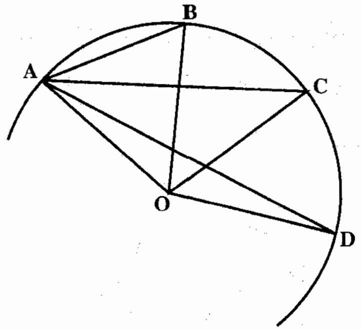
$$AB = BC = \ldots$$

۸۷۱. فرض کنیم ... ABCD یک n ضلعی محاط در دایره‌ای باشد. چون ضلعها متساوی‌اند، پس تمام کمانهایی که به وسیلهٔ ضلعها بر دایرهٔ محیطی جدا می‌شوند، برابرند. از طرف دیگر هر زاویه از چندضلعی $n-2$ عدد از این کمانها را دربردارد. بنابراین تمام زاویه‌های چندضلعی برابر یکدیگرند و چندضلعی داده شده منتظم است.

۸۷۲. ثابت کنید که طول مماسهای بر دایره، مرسوم از رأسهایی که بین آنها یکی از رأسهای چندضلعی قرار دارد، با یکدیگر برابرند. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که در چندضلعی با تعداد ضلعهای فرد، نقطه‌های تماس، وسط ضلعهای آن هستند.

۱۱.۱.۵. تعیین n (تعداد ضلعها)

۸۷۵. دایرهٔ محیطی چندضلعی را، به مرکز O و به شعاع R، درنظر می‌گیریم (شکل). $\hat{AOB} = \alpha$ فرض می‌کنیم؛ $0 < \alpha < 120^\circ$ و $AD = 2R\sin\frac{3\alpha}{2}$ و $AC = 2R\sin\alpha$ و $AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$.



از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$$

بنابراین، به دست می‌آید:

$$0 = \sin\alpha\sin\frac{3\alpha}{2} - (\sin\alpha + \sin\frac{3\alpha}{2}) \times \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}) - \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}) - \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos\frac{3\alpha}{2} + \cos 2\alpha) - (\cos\alpha + \cos\frac{5\alpha}{2})\right]$$

$$= \cos\frac{7\alpha}{4}(\cos\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{3\alpha}{4}) = 2\cos\frac{7\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}$$

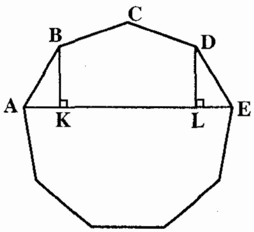
از آن‌جا:

$$\frac{7\alpha}{4} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{7}$$

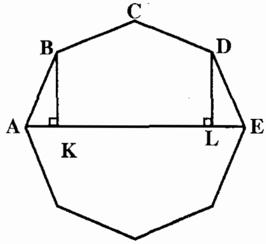
یعنی، چندضلعی منتظم مجهول دارای ۷ ضلع است.

۸۷۶. $n=۹$. a_n را طول ضلع و D_n و d_n را بترتیب؛ طول بزرگترین و کوچکترین قطر n ضلعی می‌گیریم. برای $n=۴$ و $n=۵$ ، همهٔ قطرها برابرند. برای $n=۶$ و $n=۷$ داریم: $D_n - d_n < a_n$. برای $n=۸$ (شکل الف)، عمودهای BK و DL را از دو انتهای قطر کوچکتر BD بر قطر بزرگتر AE فرود می‌آوریم. بسادگی روشن می‌شود که $A\hat{B}K = ۲۲/۵^\circ < ۳۰^\circ$. بنابراین، $AB = a_۸ > ۲AK = D_۸ - d_۸$. برای $n=۹$ (شکل ب) داریم: $A\hat{B}K = ۳۰^\circ$ و بنابراین، $AB = a_۹ = ۲AK = D_۹ - d_۹$ سپس، فرض می‌کنیم، n ضلعی منتظم در دایره‌ای محاط باشد. روشن است که، به ازای $n > ۹$ ، داریم: $D_n \geq D_۹$ و $d_n < d_۹$. بنابراین:

$$D_n - d_n > D_۹ - d_۹ = a_۹ > a_n$$



(ب)



(الف)

۸۷۷. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا:

مساحت چندضلعی منتظم $\frac{۱}{۲}ap$ است، که در آن

$$p = ns = n \times ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \quad , \quad a = R\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$۳R^۲ = \frac{۱}{۲}R\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n} \times ۲nR\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$\frac{۶}{n} = ۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}\cos\frac{۱۸۰^\circ}{n} = \sin\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

که در آن n عدد صحیح مثبت و ناکوچکتر از ۳ است. تنها زاویه‌ای که سینوس آن عددی گویاست ۳۰° است. پس، $n=۱۲$. برای بررسی درستی این نتیجه، آن را در رابطهٔ بالا قرار می‌دهیم:

$$\frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲} = \sin ۳۰^\circ$$

مساحت چندضلعی منتظم n برابر مساحت مثلثی است که یک رأس آن مرکز دایره و دو رأس دیگرش دو رأس مجاور چندضلعی باشند :

$$۳R^۲ = n \times \frac{۱}{۲} R^۲ \sin \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

و همان‌گونه که قبلاً به دست آوردیم :

$$\frac{۶}{n} = \sin \frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

۸۷۸. فرض کنیم عدهٔ ضلعهای چندضلعی اوّلی n و عدهٔ ضلعهای چندضلعی دومی n+۱ باشد، مجموع زاویه‌های اوّلی $۹۰ \times (۲n - ۴)$ درجه و مجموع زاویه‌های دومی $[۲(n+۱) - ۴]۹۰^\circ$ یا $۹۰ \times (۲n - ۲)$ درجه می‌باشد. بنابه فرض مسأله معادلهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{۲(n-۴)۹۰^\circ}{n} + ۴ = \frac{(۲n-۲)۹۰^\circ}{n+۱}$$

که پس از اختصار چنین نوشته می‌شود :

$$n^۲ + n - ۹۰ = ۰$$

ریشهٔ مثبت این معادله عبارت است از $n = ۹$. بنابراین دوچندضلعی داده شده یکی ۹ ضلعی منتظم و دیگری ده‌ضلعی منتظم می‌باشند.

۸۷۹. n+۱ . مثال روشن است.

ثابت می‌کنیم، تعداد کمتری چندضلعی نمی‌توان جدا کرد. برای این منظور، همهٔ رأسهای بیرونی شکلهای MUM' را درنظر می‌گیریم، و آن چندضلعیهایی را که، آن را، روی آنها بریده‌ایم، شماره‌گذاری می‌کنیم و، فرض می‌کنیم، این رأسها، با رنگهای متناظر، مشخص شده باشند. از خواننده می‌خواهیم، به عنوان تمرین، ابتدا پیش‌قضیهٔ زیر را ثابت کند و سپس، حکم مسأله را نتیجه بگیرد.

پیش‌قضیه. n نقطه را روی دایره نشان گذاشته و آنها را، طوری به چند رنگ درآورده‌ایم که، هردو نقطهٔ مجاور، به دو رنگ مختلف باشند ؛ و اگر دو نقطهٔ A و B از یک رنگ‌اند و نقطه‌های C و D از یک رنگ دیگر، پاره‌خطهای راست AB و CD ، نقطهٔ برخورد نداشته باشند. در این صورت، تعداد رنگهای لازم، از $\left[\frac{۱}{۲}(n+۳)\right]$ تجاوز نمی‌کند.

۱۲.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۸۱. n رنگ.

A، B و C را، سه رأس متوالی می‌گیریم. هردو پاره‌خط از n پاره‌خط راست BA ، BC، AC و (n − ۳) قطری که از B گذشته‌اند، دارای نقطهٔ مشترکند. سپس، باید همهٔ

ضلعها و قطرهایی را که با ضلع AB ، زاویه‌ای برابر $\frac{k.180^\circ}{n}$ می‌سازند $(k=0,1,2,\ldots,n-1)$ ، به یک رنگ درآورد.

۸۸۲. نه، این حکم درست نیست. راهنمایی. $2n=102^p$ ، که در آن، P عددی طبیعی و به اندازهٔ کافی بزرگ است. همهٔ رأسهای ۲n ضلعی را، به ردیف، شماره‌گذاری کنید و، در «نمونهٔ» خود، همهٔ رأسهایی را قرار دهید که شمارهٔ آنها، در عددنویسی، به مبنای ۱۰۲، دست‌کم دارای یک رقم برابر صفر باشد.

۸۸۳. رأسها را از ۰ تا $n-1$ شماره‌گذاری می‌کنیم و در رأس kام، عدد $\cos(\frac{1}{n}k\pi+\alpha)$ را قرار می‌دهیم که در آن، k برابر یکی از عددهای از صفر تا $n-1$ و α زاویه‌ای است که، به ازای آن، هیچ کدام از این عددها برابر صفر نشود.

راهنمایی. این عددها، عبارتند از تصویرهای بردارهایی که از مرکز n ضلعی به رأسهای آن می‌روند، بر محوری که از مرکز چندضلعی می‌گذرد.

۸۸۴. O را مرکز n ضلعی و a_i را عددی می‌گیریم که در رأس iام n ضلعی وجود دارد. فرض می‌کنیم :

$$\overrightarrow{S}=\sum_{i=1}^{n}a_i\,\overrightarrow{OA_i}$$

بسادگی دیده می‌شود که، به ازای هر عملی که در صورت مسأله از آن یاد شده است، بردار $\overrightarrow{S}$ تغییر نمی‌کند. در ابتدا $\overrightarrow{S}=\overrightarrow{OA_1}$ ؛ و اگر همهٔ عددهای رأسها باهم برابر باشند، آن وقت $\overrightarrow{S}=\overrightarrow{0}$. چون $\overrightarrow{OA}\neq\overrightarrow{0}$ ، پس پاسخ به پرسش مسأله، منفی است.

۸۸۵. گزینهٔ (ج) درست است ؛ زیرا :

تعداد ضلعهای دوچندضلعی را بترتیب N و n می‌گیریم. آن‌گاه بین زاویه‌های آنها، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{(N-2)180^\circ}{N}=\frac{3}{2}\times\frac{(n-2)180^\circ}{n}\Rightarrow N=\frac{4n}{6-n}$$

n تنها می‌تواند ۳، ۴ یا ۵ باشد (چرا؟). بنابراین داریم : $n=3$ و $N=4$ ؛ $n=4$ و $N=8$ ؛ $n=5$ و $N=20$ و در مجموع سه جفت چندضلعی داریم.

۱۳.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۶. ۱ و ۲ و ۳. مثلثهای MBC و ACD همنهشت می‌باشند، زیرا :

$$\hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}\ ,\ \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}$$

$$BM=AD\ ,\ BC=DC$$

چون $AB=CD$ پس $BC \| AD$. بنابراین $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$ و چون دو مثلث بالا برابرند، پس $\hat{M}=\hat{A}_۱$ و $\hat{C}_۱=\hat{M}$ و $\hat{A}_۲$ در هر دو مشترک است. پس $\Delta ABC \sim \Delta AMC$. نسبت تشابه را می‌نویسیم :

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow AC^۲=AM.AB$$

$$AC^۲-AB^۲=AM.AB-AB^۲=AB(AM-AB)=AB.BM$$

$$=AB-AD$$

نکته. برای اثبات رابطهٔ $AC^۲-AB^۲=AB.AD$ از قضیهٔ بطلمیوس برای چهارضلعی ABCD می‌توان استفاده نمود با توجه به این که $BD=AC$ است.

۸۸۷. الف. فرض کنید A نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد (A روی کمان $\overset{\frown}{A_۱A_{۲n+۱}}$ است).
فرض کنید a معرف طول ضلع چند ضلعی، و b طول قطر واصل بین هر دو رأس باشد.
بنا بر قضیهٔ بطلمیوس، در چهارضلعی $AA_KA_{K+۱}A_{K+۲}$ داریم :
$|\overline{AA_K}|a+|\overline{AA_{K+۲}}|a=|\overline{AA_{K+۱}}|b$ ، $(k=۱,۲,\dots,۲n-۱)$. برای چهارضلعیهای $A_{۲n}A_{۲n+۱}AA_۱$ و $A_{۲n+۱}AA_۱A_۲$ هم، می‌توان رابطه‌هایی مشابه نوشت :

$$|\overline{AA_۱}|a+|\overline{AA_{۲n+۱}}|b=|\overline{AA_{۲n}}|a$$

$$|\overline{AA_{۲n+۱}}|a+|\overline{AA_۱}|b=|\overline{AA_۲}|a$$

با جمع کردن این تساویها با هم و نگهداشتن رأسهای زوج در طرف راست و رأسهای فرد در طرف چپ، به حکم مطلوب می‌رسیم.

ب. حکم، از قسمت (الف) نتیجه می‌شود (می‌توان دستور مشابهی برای حالت مماس بودن درونی دایره‌ها به دست آورد).

۲.۵. رابطه‌های متری در ۳ ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)

۲.۲.۵. زاویه

۱.۲.۲.۵. اندازهٔ زاویه

۸۸۸. در مثلث ABD داریم: $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $AB=a$ و $BD=\frac{a}{۴}$. بنابراین:

$$AD^۲=AB^۲+BD^۲-AB.BD=a^۲+\frac{a^۲}{۱۶}-a.\frac{a}{۴}=\frac{۱۳a^۲}{۱۶}\Rightarrow AD=\frac{a\sqrt{۱۳}}{۴}$$

حال با استفاده از رابطهٔ سینوسها در این مثلث داریم:

$$\frac{BD}{\sin B\hat{A}D}=\frac{AD}{\sin\hat{B}}\Rightarrow\frac{\frac{a}{۴}}{\sin B\hat{A}D}=\frac{\frac{a\sqrt{۱۳}}{۴}}{\sin ۶۰^\circ}\Rightarrow\sin B\hat{A}D=\frac{\sqrt{۳۹}}{۲۶}$$

$$\Rightarrow B\hat{A}D=\operatorname{Arc}\sin(\frac{\sqrt{۳۹}}{۲۶})$$

۳.۲.۵. ضلع

۱.۳.۲.۵. اندازهٔ ضلع

۸۸۹. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ ارتفاع برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس:

$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow a=۲$$

۲.۳.۲.۵. نسبت ضلعها

۸۹۰. نسبت خواسته شده برابر ۲ است.

۴.۲.۵. شعاع دایره

۱.۴.۲.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۸۹۱. $r=\frac{۲}{۳}m\sqrt[۴]{۳}$

۵.۲.۵. پاره خط

۱.۵.۲.۵. اندازهٔ پاره خط

۸۹۲. نخست اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳۶\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۱۴۴\Rightarrow a=۱۲\text{cm}$$

حال اندازهٔ AD را به دست می‌آوریم :

$$\frac{AD}{DC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{AD}{۱۲}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow AD=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸\text{cm}$$

در مثلث ABD داریم :

$$\hat{A}=۶۰^\circ\Rightarrow BD^۲=AB^۲+AD^۲-AB.AD$$

$$\Rightarrow BD^۲=۱۴۴+۲۳/۰۴-۱۲\times ۴/۸=۲۲۴/۶۴\Rightarrow BD=\frac{۱۲\sqrt{۳۹}}{۵}\text{cm}$$

۶.۲.۵. محیط

۱.۶.۲.۵. اندازهٔ محیط

۸۹۳. می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. بنابراین، داریم :

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=۹\sqrt{۳}\Rightarrow a^۲=۳۶\Rightarrow a=۶\text{cm}\Rightarrow \text{محیط مثلث}=۳\times ۶=۱۸\text{cm}$$

۵.۲.۷. مساحت

۵.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۸۹۴. داریم : $۹\sqrt{۳}cm^۲$

۵.۲.۷.۲. نسبت مساحتها

۸۹۵. گزینهٔ (هـ) درست است.

۵.۲.۸. رابطه‌های متری

۸۹۶. برابریهای $|AM|+|AN|=|CM|+|CN|$ و $|AO|+|AB|=|CO|+|CB|$، به معنای آن است که در «چهارضلعی» XAOCY (شکل را ببینید) می‌توان دایره‌ای محاط کرد، یعنی دایرهٔ «محاطی بیرونی» برای چهارضلعی OMBN (یا ABCO) وجود دارد.

۵.۳. رابطه‌های متری در ۴ ضلعی منتظم (مربع)

۵.۳.۲. زاویه

۵.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۸۹۷. اندازهٔ زاویهٔ ABM را محاسبه می‌کنیم، و دو برابر آن را از $۹۰°$ کم می‌کنیم. در مثلث ABM داریم :

$$\tan A\hat{B}M = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A\hat{B}M = \text{Arc}\tan(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow M\hat{B}N = ۹۰ - ۲\text{Arc}\tan(\frac{۱}{۲})$$

۵.۳.۳. ضلع

۵.۳.۳.۱. اندازهٔ ضلع

۸۹۸. داریم :

$$C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰°}{n} \Rightarrow C_۴ = ۲\times۱۰\times\sin۴۵° = ۱۰\sqrt{۲}cm$$

$$C'_n = ۲R\tan\frac{۱۸۰°}{n} \Rightarrow C'_۴ = ۲\times۱۰\times\tan۴۵° = ۲۰cm$$

۸۹۹. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا، داریم :

$$2\pi R = 100 \Rightarrow R = \frac{50}{\pi}\ ,\ \ C_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow C_4 = 2\times\frac{50}{\pi}\times\sin 45^\circ$$

$$= \frac{100}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi}$$

۴.۳.۵. قطر

۱.۴.۳.۵. اندازهٔ قطر

۹۰۰. داریم : $a^2 = 144 \Rightarrow a = 12\text{cm}$ و قطر مربع $= a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\text{cm}$

۵.۳.۵. پاره خط

۱.۵.۳.۵. اندازهٔ پاره خط

۹۰۱. پاره خطهای MN، AM و AM' و . . . را بر حسب a حساب کنید و . . . .

۶.۳.۵. شعاع دایره

۱.۶.۳.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۹۰۲. 6cm و $6\sqrt{2}\text{cm}$.

۲.۶.۳.۵. نسبت شعاعها

۹۰۳. گزینهٔ (الف) درست است. زیرا اگر ضلع مربع را به x و ضلع مثلث را به y نشان دهیم، داریم :

شعاع دایرهٔ محاطی مربع $\quad 4x = x^2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow r_4 = \frac{x}{2} = 2$

$$3y = \frac{y^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \Rightarrow r_3 = \frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}\times y\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}\times 4\sqrt{3} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{r_4}{r_3} = \frac{2}{2} = 1$$

۷.۳.۵. محیط

۱.۷.۳.۵. اندازهٔ محیط

۹۰۴. اندازهٔ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین، داریم:

$$h_{۹}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱۲\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}{۲}=۱۸\text{cm}$$

از آن‌جا، اگر ضلع مربع را a' فرض کنیم، داریم:

$$\text{قطر مربع}=۳۶\text{cm}=a'\sqrt{۲}\Rightarrow a'=۱۸\sqrt{۲}\text{cm}\ \text{ضلع مربع}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع}=۷۲\sqrt{۲}\text{cm}$$

۸.۳.۵. مساحت

۱.۸.۳.۵. اندازهٔ مساحت

۹۰۵. گزینهٔ (د) درست است. زیرا:

$$a\sqrt{۲}=a+۱\Rightarrow a=۱+\sqrt{۲}\Rightarrow S=a^{۲}=(۱+\sqrt{۲})^{۲}=۳+۲\sqrt{۲}$$

۹۰۶. با استفاده از $C_{۳}=R\sqrt{۳}$ و $C_{۴}=R\sqrt{۲}$، داریم:

$$۹=R\sqrt{۳}\Rightarrow R=۳\sqrt{۳}\Rightarrow C_{۴}=۳\sqrt{۶}\Rightarrow S_{\text{مربع}}=(۳\sqrt{۶})^{۲}=۵۴\text{cm}^{۲}$$

۹۰۷. گزینهٔ (ب) درست است.

۹۰۸. گزینهٔ (ب) درست است. زیرا مساحت مربع به قطر d برابر است با $\frac{۱}{۲}d^{۲}$.

۲.۸.۳.۵. نسبت مساحتها

۹۰۹. گزینهٔ (ج) درست است.

۹۱۰. گزینهٔ (ج) درست است.

۳.۸.۳.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۱۱. هر مماسی مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ φ و مساحت $۱-\frac{۲}{\cos\varphi+\sin\varphi+۱}\leq(\sqrt{۲}-۱)^{۲}$ را قطع می‌کند. مساحت S بخش مشترک مربع و مثلث، در این نابرابری صدق می‌کند:

$$S\geq ۴-۳(\sqrt{۲}-۱)^{۲}>۳/۴$$

۹۱۲. گزینهٔ (ج) درست است.

۹.۳.۵. رابطه‌های متری

۹۱۳. قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ به مرکز D را می‌نویسیم. داریم:

$$AD^۲ - DM^۲ = a^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴}$$

حال BN را محاسبه می‌کنیم:

$$BD = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}\ ,\ \ DN = \frac{a}{۲} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} - \frac{a}{۲} = \frac{a}{۲}(\sqrt{۲}-۱)$$

$$DN^۲ + NB^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + \frac{a^۲}{۴}(\sqrt{۲}-۱)^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴}(۳-۲\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow DN^۲ + NB^۲ = \frac{a^۲}{۴}(۴-۲\sqrt{۲}) = \frac{a^۲}{۲}(۲-\sqrt{۲})$$

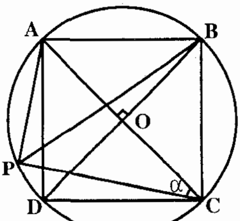
۱۰.۳.۵. ثابت کنید شکل مربع است

۹۱۴. MBN، NCP، PDQ و QAM خطهای راست هستند، زیرا مجموعه زاویه‌های ایجاد شده در نقطه‌های B، C، D و A برابر ۱۸۰° است. به عنوان مثال:

$$M\hat{B}A + A\hat{B}C + C\hat{B}N = ۴۵^\circ + ۹۰^\circ + ۴۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$

از طرفی به دلیل برابر بودن ضلعهای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ایجاد شده روی ضلعها، $MN = NP = PQ = QM$ است و چون $\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = \hat{Q} = ۹۰^\circ$ است، پس MNPQ مربع است.

۱۱.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۹۱۵. مربع ABCD را محاط در دایرهٔ به قطر d، و نقطهٔ P را واقع بر کمان AD در نظر می‌گیریم (شکل). زاویهٔ ACP را α می‌نامیم. در این صورت، اگر عددهای $CP = d\cos\alpha$ و $AP = d\sin\alpha$ گویا باشند، آن وقت عدد

$$BP = d\sin(P\hat{D}B) = d\sin(A\hat{D}B + A\hat{D}P) = d\sin(۴۵^\circ + \alpha)$$

$$= d(\sin\alpha + \cos\alpha)\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(AP + CP)$$

عددی گنگ می‌شود.

۹۱۶. ضلع مربع را برابر ۱ واحد می‌گیریم. داریم :

$$B\hat{K}C + D\hat{N}C = \frac{۳\pi}{۴}$$

زیرا اگر : $a = BK = \cot(B\hat{K}C)\ ,\ \ b = DN = \cot(D\hat{N}C)$

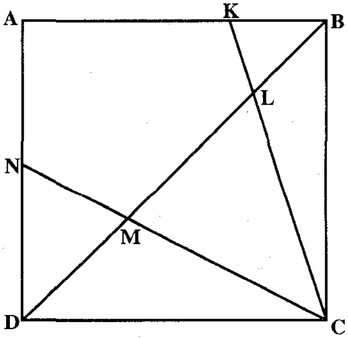
ولی $(۱-a)(۱-b) = ۲ab$

از آن‌جا : $\tan(B\hat{K}C + D\hat{N}C) = \dfrac{a+b}{ab-۱} = -۱ = \tan\dfrac{۳\pi}{۴}$

یعنی : $B\hat{K}C + D\hat{N}C = \dfrac{۳\pi}{۴}$

حال داریم :

$$B\hat{L}K = \frac{۳\pi}{۴} - B\hat{K}L = D\hat{N}C = B\hat{C}M = B\hat{A}M\ ,\ \ K\hat{L}M + K\hat{A}M = \pi$$



پس M، L، K و A روی یک دایره هستند. یعنی چهارضلعی AKLM محاطی است.

۱۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۹۱۷. الف. در مرحلهٔ اوّل، ۸ مربع با ضلع به طول $\frac{۱}{۳}$ باقی می‌ماند و در مرحلهٔ دوم از هر یک از ۸ مربع قبلی، ۸ مربع کوچکتر و روی هم $۸^۲$ مربع به ضلع $\frac{۱}{۳^۲}$ باقی می‌ماند، به همین ترتیب بعد از مرحلهٔ سوم $۸^۳$ مربع به ضلع $\frac{۱}{۳^۳}$ و بالاخره بعد از مرحلهٔ nام، ۸^n مربع باقی می‌ماند که ضلع هر کدام از آنها برابر $\frac{۱}{۳^n}$ است.

ب. مجموع مساحتهای ۸^n مربعی که باقی می‌ماند برابر است با $۸^n(\frac{۱}{۳^n})^۲ = (\frac{۸}{۹})^n$. بنابراین مجموع مساحتهای مربعهای حذف شده برابر است با $۱-(\frac{۸}{۹})^n$. با بزرگ

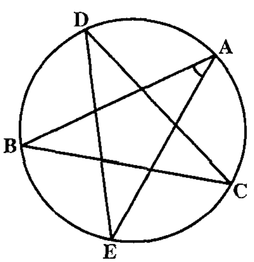
شدن n، مقدار $\left(\frac{۸}{۹}\right)^n$ کوچک می‌شود و در حالت حدی داریم : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۸}{۹}\right)^n = ۰$. یعنی مجموع مساحتهای مربعهای حذف شده برابر است با واحد $\lim_{n\to\infty}\left[۱-\left(\frac{۸}{۹}\right)^n\right]=۱$.

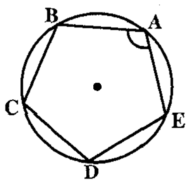
۴.۵. رابطه‌های متری در پنج‌ضلعی منتظم

۲.۴.۵. زاویه

۱.۲.۴.۵. اندازهٔ زاویه

۹۱۸. پنج ضلعی منتظم محدب ABCDE را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که مجموع زاویه‌های درونی آن ۵۴۰° است. بنابراین، اندازهٔ هر زاویهٔ آن برابر $۵۴۰^\circ \div ۵ = ۱۰۸^\circ$ است.





برای پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای ؛

پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای ABCDE را در نظر می‌گیریم. اندازهٔ هر زاویهٔ آن، برای مثال زاویهٔ $B\hat{A}E$ برابر $\frac{۱}{۲}\times\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$ است.

۳.۴.۵. ضلع

۱.۳.۴.۵. اندازهٔ ضلع

۹۱۹. فرض می‌کنیم AB ضلع ده‌ضلعی منتظم باشد و آن را x می‌نامیم. به مرکز A و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در C قطع کند، چون :

$$O\hat{A}B = ۷۲^\circ$$

(نصف زاویهٔ ده‌ضلعی) پس OC در دایرهٔ A ضلع پنج ضلعی منتظم است که با نظیرش در دایرهٔ O یکی است (چون دایره‌ها مساوی‌اند).

قوت نقطهٔ C را نسبت به دایرهٔ O می‌نویسیم :

$$\overline{CT}^۲ = \overline{CB}.\overline{CA} = R(R-x)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ COT داریم:

$$\overline{CO}^{2}=\overline{OT}^{2}+\overline{CT}^{2}=R^{2}+R(R-x)$$

به جای x مساویش $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ قرار می‌دهیم:

$$CO=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

۲.۳.۴.۵. نسبت ضلعها

۹۲۰. مثلث $DC'C$ متساوی‌الساقین است، زیرا دو زاویهٔ آن روبه‌رو به دو کمان مساوی می‌باشند. پس $DC'=CC'$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ و $\hat{D}_1=\hat{C}_1=\frac{\text{یک کمان}}{2}$.

پس دو مثلث $DD'C'$ و $CC'B'$ در حالت دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند. از برابری این دو مثلث نتیجه می‌گیریم که $D'C'=B'C'$؛ و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که ضلعهای این چند ضلعی با هم برابرند و هر زاویهٔ داخلی این پنج ضلعی مساوی با $\frac{\text{۱ کمان}+\text{۲ کمان}}{2}$ است.

پس این چند ضلعی (پنج ضلعی) منتظم است.

$$AB=a$$

$$BD=d$$

$$BB'=d-a$$

پس $\Delta BAB'\sim\Delta BED$

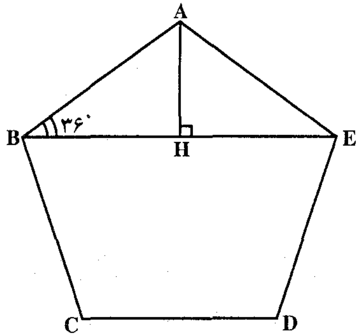
$$\frac{A'B'}{ED}=\frac{BB'}{BD}\Rightarrow\frac{A'B'}{ED}=\frac{d-a}{d}$$

$$B'D^{2}=BD.BB'\Rightarrow a^{2}=d(d-a)\Rightarrow a^{2}=d^{2}-a.d$$

$$d^{2}-a.d-a^{2}=0\Rightarrow d=\frac{a+\sqrt{5a^{2}}}{2}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{A'B'}{ED}=\frac{\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}-\frac{2a}{2}}{\frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{a(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\frac{(\sqrt{5}-1)^{2}}{4}$$

۴.۴.۵. قطر



۱.۴.۴.۵. اندازهٔ قطر

۹۲۱. قطر BE را رسم می‌کنیم و از رأس A عمود AH را بر BE فرود می‌آوریم. داریم:

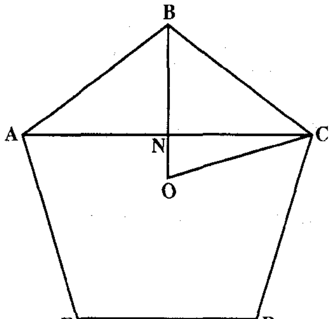
$$A\hat{B}E = ۳۶° = \frac{\pi}{۵}$$

$$BE = ۲BH \ , \ \ BH = AB\cos\frac{\pi}{۵}$$

$$\Rightarrow BE = ۲AB\cos\frac{\pi}{۵} = ۲\times۱\times\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴} \Rightarrow BE = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین، اندازهٔ هر قطر این پنج ضلعی برابر عدد طلایی است.

نکته. به طورکلی در هر پنج ضلعی منتظم، نسبت اندازهٔ قطر به اندازهٔ ضلع، برابر عدد طلایی است.



۹۲۲. قطر AC از پنج ضلعی منتظم ABCDE را رسم می‌کنیم و $AC = x$ اختیار می‌کنیم. نقطهٔ O مرکز پنج ضلعی را به رأسهای B و C وصل می‌نماییم و نقطهٔ برخورد OC با AC را N می‌نامیم. در مثلثهای BNC و ONC داریم:

$$BN = \sqrt{BC^۲ - CN^۲} \ ,$$

$$ON = \sqrt{OC^۲ - NC^۲} \ , \ \ R = BN + ON$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{a^۲}{۴} - \frac{x^۲}{۴}} + \sqrt{R^۲ - \frac{x^۲}{۴}} \Rightarrow a^۴ = R^۲(۴a^۲ - x^۲) \qquad (۱)$$

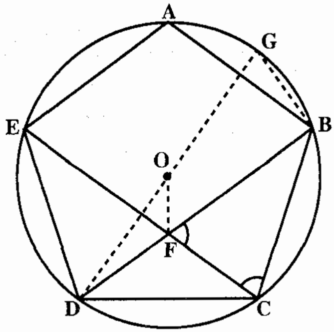
از طرف دیگر داریم:

$$a = \frac{R}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}} \qquad (۲)$$

با حذف R بین دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$AC = x = \frac{a(۵+\sqrt{۵})}{۲\sqrt{۵}}$$

۵.۴.۵. پاره خط



۱.۵.۴.۵. اندازهٔ پاره خط

۹۲۳. اگر F نقطهٔ برخورد دو قطر DB و EC از پنج ضلعی منتظم ABCDE باشد، می‌خواهیم فاصلهٔ $OF = d$ را حساب کنیم. می‌دانیم که:

$$R^2 - d^2 = FD \times FB$$

بنابراین:

$$d^2 = R^2 - DF \times FB = R^2 - FB \times (DB - FB) = R^2 + FB^2 - DB \times BF$$

به سهولت واضح می‌شود که مثلث BFC متساوی‌الساقین است و داریم: $BF = BC$.

از طرف دیگر از تشابه دو مثلث DFC و BCD نتیجه می‌شود:

$$\frac{DB}{BC} = \frac{DC}{DF} \quad \text{و یا} \quad \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{DB - BC}$$

و یا

$$\overline{DB}^2 - \overline{BC}^2 = DB \times BC = DB \times FB$$

پس

$$d^2 = R^2 + 2\overline{BC}^2 - \overline{DB}^2$$

هرگاه قطر DG از دایره را رسم کنیم،

$$BG = C_{10}$$

پس

$$\overline{DB}^2 = 4R^2 - C_{10}^2$$

و نیز می‌دانیم که:

$$\overline{BC}^2 = C_5^2 = R^2 + C_{10}^2$$

بنابراین:

$$d^2 = R^2 + 2R^2 + 2C_{10}^2 - 4R^2 + C_{10}^2 = 3C_{10}^2 - R^2$$

و

$$C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$C_{10}^2 = \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

پس

$$d^2 = \frac{3R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) - R^2 = R^2\left(\frac{14 - 6\sqrt{5}}{4}\right)$$

و

$$d = \frac{R(3 - \sqrt{5})}{2}$$

حل این مسأله با در نظر گرفتن طول ضلع چندضلعیهای ستاره‌ای، به روش ساده‌تری انجام می‌گیرد.

۶.۴.۵. شعاع دایره

۱.۶.۴.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۹۲۴. $R = a\sqrt{\frac{۵+\sqrt{۵}}{۱۰}}$

۷.۴.۵. محیط

۱.۷.۴.۵. اندازهٔ محیط

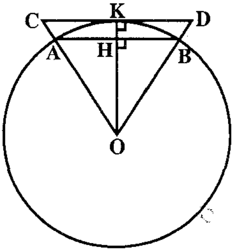
۹۲۵. اندازهٔ ضلع پنج ضلعی منتظم را a فرض می‌کنیم، می‌دانیم که مساحت آن برابر است با :

$$S = \frac{۵a^۲}{۴}\cot ۳۶^\circ \Rightarrow ۲۰\cot ۳۶^\circ = \frac{۵a^۲}{۴}\cot ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴\text{cm} \Rightarrow \text{محیط پنج ضلعی منتظم} = ۵\times ۴ = ۲۰\text{cm}$$

۲.۷.۴.۵. نسبت محیطها

۹۲۶. هرگاه AB ضلع پنج ضلعی منتظم محاطی و OHK شعاع عمود بر آن باشد، می‌دانیم که مماس در نقطهٔ K، امتداد شعاعهای OA و OB را در C و D قطع می‌کند، به طوری که CD، ضلع پنج ضلعی منتظم محیطی است. بنابراین داریم : $\frac{CD}{AB} = \frac{R}{OH}$ ، اما



$$\overline{OH}^۲ = R^۲ - \frac{\overline{AB}^۲}{۴} = R^۲ - \frac{R^۲(۱۰-۲\sqrt{۵})}{۱۶} = \frac{R^۲(۶+۲\sqrt{۵})}{۱۶}$$

و یا

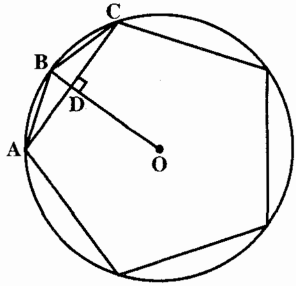
$$OH = \frac{R}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$$

بنابراین :

$$\frac{CD}{AB} = \frac{۴}{\sqrt{۵}+۱} = \sqrt{۵}-۱$$

۸.۴.۵. مساحت

۱.۸.۴.۵. اندازهٔ مساحت



۹۲۷. فرض می‌کنیم $AB = a_{۱۰}$ و $AC = a$ باشد. ضلع AC برابر ۲AD یعنی دو برابر ارتفاع مثلث AOB می‌باشد و داریم: $AO = OB = R$ و $AB = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$.

با این مفروضات به دست می‌آید:

$$a_{۵} = \frac{R}{۲}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}$$

از این رابطه مقدار R محاسبه می‌شود و مساحت مورد نظر چنین است:

جواب: $$S = \frac{۵}{۲}.a_{۵}.OD = \frac{۵}{۲}a_{۵}\sqrt{R^{۲} - \frac{۱}{۴}a_{۵}^{۲}} \Rightarrow S = \frac{a^{۲}}{۴}\sqrt{۲۵-۱۰\sqrt{۵}}$$

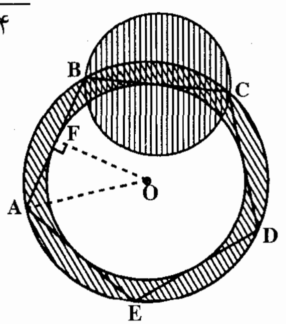
۲.۸.۴.۵. رابطه‌ای در مساحتها

۹۲۸. OA را شعاع دایرهٔ محیطی، و OF را شعاع دایرهٔ محاطی پنج ضلعی می‌گیریم؛ براساس خاصیت مثلث قائم‌الزاویهٔ OFA داریم:

$$OA^{۲} = OF^{۲} + AF^{۲} = OF^{۲} + \frac{AB^{۲}}{۴}$$

و از آن‌جا

$$\pi(OA^{۲} - OF^{۲}) = \pi.\frac{AB^{۲}}{۴}$$



و این به معنای آن است که اختلاف مساحتهای دایره‌های محاطی و محیطی یک پنج‌ضلعی منتظم، برابر است با مساحت دایره‌ای که قطر آن مساوی ضلع همین پنج ضلعی است.

۹.۴.۵. رابطه‌های متری

۹۲۹. راه حل اول. در دایرهٔ به شعاع واحد، طول هر وتر برابر است با دو برابر سینوس نصف زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به آن، بنابراین (شکل الف و ب):

$$A_0A_1 = 2\sin 36^\circ = 4\sin 18^\circ.\cos 18^\circ \ ,$$

$$A_0A_2 = 2\sin 72^\circ = 2\cos 18^\circ \ ,$$

$$A_0A_1.A_0A_2 = 8\sin 18^\circ,\cos^2 18^\circ$$

ولی $2\sin 18^\circ$، برابر است باطول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد و می‌دانیم که، این طول، برابر $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ است. بنابراین:

$$\cos^2 18^\circ = 1-\sin^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}+1}{8}$$

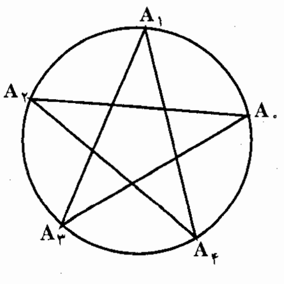
و از آن‌جا

$$8\sin 18^\circ.\cos^2 18^\circ = 8\sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}+1}{8}.\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sqrt{5}$$

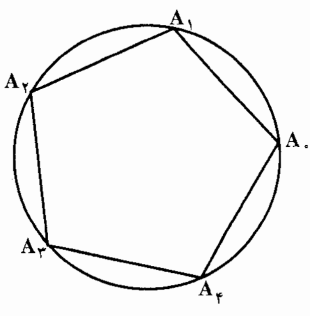
و در نتیجه:

$$(A_0A_1.A_0A_2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

یادداشت. چندضلعیهای منتظم. در مسألهٔ بالا A_0A_1 یک ضلع پنج ضلعی در شکل (الف) و A_0A_2 یک ضلع پنج ضلعی در شکل (ب) است، هر دو شکل، یک پنج ضلعی منتظم را نشان می‌دهند؛ زیرا یک n ضلعی منتظم را به این ترتیب، می‌توان تعریف کرد: از نقطه‌ای مثل A_0 واقع بر محیط دایره آغاز و، پشت سرهم، وترهایی به طول a رسم می‌کنیم. اگر بعد از n مرحله، دوباره به نقطهٔ A_0 برسیم و تمام n رأس متمایز باشند، یک n ضلعی منتظم با ضلع به طول a رسم شده است.



(ب)



(الف)

برای هر عدد طبیعی n، می‌توانیم همهٔ n ضلعیهای منتظم را رسم کنیم، به شرطی که طول وتر روبه‌رو به کمان $\frac{k}{n}\times 360^\circ$ را برابر a بگیریم. در این‌جا، k باید نسبت به n اول و، در ضمن، از $\frac{n}{2}$ کوچکتر باشد.

اگر k و n، نسبت به هم اول نباشند: $(n,k)\neq 1$، ضمن رسم زودتر از n مرحله، به A_0 می‌رسیم. برای مثال، برای $n=10$ و $k=4$، چندضلعی منتظمی به دست می‌آید که، به جای ۱۰ رأس، ۵ رأس دارد.

برای $k=1$، چندضلعی منتظمی به دست می‌آید که، ضلعهای آن، یکدیگر را تنها در نقطه‌های انتهایی خود قطع می‌کنند.

برای $k>1$، در چند ضلعی منتظم حاصل، ضلعها، یکدیگر را در نقطه‌های دیگری غیر از رأسها هم، قطع می‌کنند. اگر n عددی اول و بزرگتر از ۲، مثل p، باشد، k می‌تواند همهٔ مقدارهای درست از ۱ تا $\frac{1}{2}(p-1)$ را قبول کند. در این حالت، تعداد p ضلعهای منتظم مختلف محاط در دایره، برابر $\frac{1}{2}(p-1)$ می‌شود. اگر n عددی مرکب باشد، تعداد n ضلعیهای منتظم، کمتر از $\frac{1}{2}(n-1)$ می‌شود. برای مثال، برای $n=24$، تنها ۴ نوع مختلف ۲۴ ضلعی منتظم به دست می‌آید.

راه حل دوم. اگر 5φ را مضرب فردی از ۹۰ درجه بگیریم، یعنی داشته باشیم: $\cos 5\varphi=0$، بسادگی می‌توانیم پاره‌خطهای A_0A_1 و A_0A_2 را با کسینوس زاویه‌های φ مربوط کنیم. کافی است مقدارهایی از φ را در نظر بگیریم که بین ۰ و ۱۸۰ قرار دارند، زیرا برای مقدارهای $\varphi>180^\circ$، همیشه می‌توان زاویه‌ای بین ۰ و ۱۸۰ درجه پیدا کرد که دارای همان کسینوس باشد. اکنون، این کسینوسها را در نظر می‌گیریم:

$$\cos(\frac{1}{5}90^\circ)=\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\frac{1}{2}A_0A_2\ ,$$

$$\cos(\frac{3}{5}90^\circ)=\cos 54^\circ=\sin 36^\circ=\frac{1}{2}A_0A_1\ ,$$

$$\cos(\frac{5}{5}90^\circ)=\cos 90^\circ=0\ ,$$

$$\cos(\frac{7}{5}90^\circ)=\cos 126^\circ=-\sin 36^\circ=-\frac{1}{2}A_0A_1\ ,$$

$$\cos(\frac{9}{5}90^\circ)=\cos 162^\circ=-\sin 72^\circ=-\frac{1}{2}A_0A_2$$

اگر بتوانیم، معادلهٔ $\cos 5\varphi = 0$ را، به صورت یک معادلهٔ چند جمله‌ای بر حسب $\cos\varphi$ (که آن را با x نشان خواهیم داد) بنویسیم، مقدارهایی که در بالا به دست آوردیم، ریشه‌های این معادله می‌شوند و، در نتیجه، حاصل $(A_0A_1 . A_0A_2)^2$، بسادگی به دست می‌آید.

برای این منظور، مقدارهای $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ را، پشت سرهم، به ازای $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$، بر حسب $x = \cos\varphi$ بیان می‌کنیم [به جای $\sin(n+1)\varphi$، از عبارت $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ استفاده کرده‌ایم، تا عبارتهای حاصل گنگ نباشند]. عبارتهای $T_n(x)$ و $U_n(x)$، برای $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$، برحسب $x = \cos\varphi$، به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\cos 0 = T_0(x) = 1 \ , \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} = U_0(x) = 1 \ ,$$

$$\cos\varphi = T_1(x) = x \ , \quad \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi = U_1(x) = 2x$$

و در حالت کلی، از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(n+1)\varphi = \cos\varphi\cos n\varphi - \sin\varphi\sin n\varphi$$

$$= \cos\varphi\cos n\varphi - (1-\cos^2\varphi)\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

که می‌توان آن را، با نمادهای انتخابی ما، این‌طور نوشت:

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - (1-x^2)U_n(x) \qquad (1)$$

همچنین، اگر اتحاد

$$\frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi}\left[\sin\varphi\cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\sin(n+1)\varphi\right]$$

را به این صورت بنویسیم:

$$U_{n+1}(x) = T_{n+1}(x) + xU_n(x) \qquad (2)$$

می‌توانیم با استفادهٔ مکرر از (۱) و (۲)، به دست آوریم:

$$T_2(x) = xT_1(x) - (1-x^2)U_0(x) = 2x^2 - 1 \ ,$$

$$U_2(x) = T_2(x) + xU_1(x) = 4x^2 - 1 \ ,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \ , \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x \ ,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \ , \quad U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$T_5(x) = x(16x^4 - 20x^2 + 5) = x\left[(2x)^4 - 5(2x)^2 + 5\right]$$

در نمادگذاری ما، $T_5(x)=\cos 5\varphi$ و $\cos 5\varphi = 0$ ؛ بنابراین، ریشه‌های معادلهٔ $T_5(x)=0$، عبارتند از :

$$-\frac{1}{2}A_0A_1 \ , \ -\frac{1}{2}A_0A_1 \ , \ 0 \ , \ \frac{1}{2}A_0A_1 \ , \ \frac{1}{2}A_0A_2$$

ریشهٔ صفر معادلهٔ $T_5(x)=0$ روشن است. اگر $2x=u$ قرار دهیم، به معادلهٔ درجهٔ دوم $u^2-5u+5=0$ می‌رسیم که ریشه‌های آن، $(A_0A_1)^2$ و $(A_0A_2)^2$ هستند. چون ضریب درجهٔ دوم، برابر واحد است، حاصلضرب دو ریشهٔ آن برابر مقدار ثابت معادله می‌شود، یعنی :

$$(A_0A_1 . A_0A_2)^2 = 5$$

در این‌جا، یک نتیجهٔ اضافی هم به دست می‌آید :

$$(A_0A_1)^2 + (A_0A_2)^2 = 5$$

یادداشت ۱. چند جمله‌ایهای «چه بیشف». تعمیم مسألهٔ ۹۲۹.

مسألهٔ ۹۲۹ حالت خاصی از مسألهٔ زیر است :

اگر $n=p^k$ و p عددی اول و k عددی درست و مثبت باشد، و اگر n ضلعیهای منتظم مختلف محاط در دایرهٔ واحد، ضلعهایی به طولهای a_1 ، a_2 ، ... ، a_t داشته باشند، آن وقت :

$$(a_1.a_2 \dots a_t)^2 = p$$

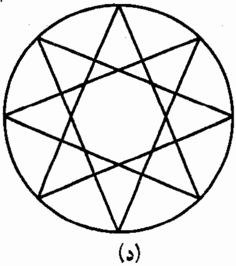
برای مثال برای $n=2^3$ ، طول ضلع هر یک از دو ۸ ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد، چنینند (شکلهای ج و د) :

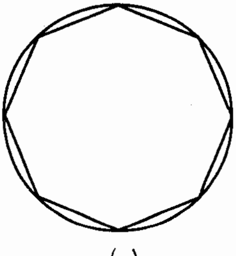
$$a_1 = 2\sin\frac{45^\circ}{2} \ , \ a_2 = 2\sin\frac{135^\circ}{2} = 2\cos\frac{45^\circ}{2}$$

و بنابراین، حاصلضرب a_1a_2 ، چنین می‌شود :

$$a_1a_2 = 4\sin\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ = \sqrt{2} \ ;$$

$$(a_1a_2)^2 = 2$$


(د)


(ج)

اثبات این مسأله، درحالت کلی، به کمک همان معادله‌های $T_n(x)=\text{۰}$ و $U_n(x)=\text{۰}$ انجام می‌شود.

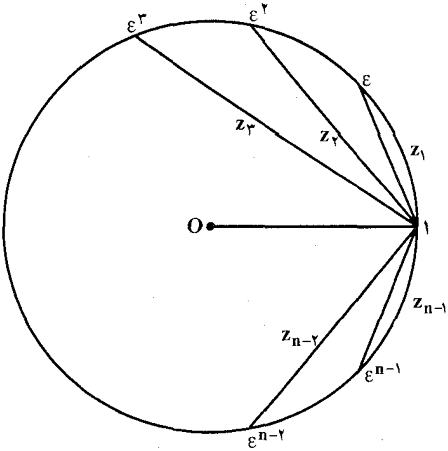
چند جمله‌ایهای $T_n(x)$ و $U_n(x)$ که $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+\text{۱})\varphi}{\sin\varphi}$ را به صورت تابعی از $x=\cos\varphi$ بیان می‌کنند، چند جمله‌ایهای «چه بیشف» می‌نامند.

یادداشت ۲. کاربردهای هندسی عددهای مختلط. قضیهٔ زیر، برای هر چندضلعی منتظم، با هر تعداد ضلع، درست است:

اگر $A_\text{۰}$ ، $A_\text{۱}$ ، ...، $A_{n-\text{۱}}$ ، رأسهای یک n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد باشند، داریم:

$$A_\text{۰}A_\text{۱}.A_\text{۱}A_\text{۲}. \ \dots \ .A_\text{۰}A_{n-\text{۱}}=n$$

در این‌جا، برهان ساده‌ای را، برای کسانی که با عددهای مختلط آشنایی دارند، می‌آوریم.



(هـ)

n ضلعی منتظم را در صفحهٔ عددهای مختلط در نظر می‌گیریم. مرکز دایرهٔ واحد را در مبدأ و رأس $A_\text{۰}$ را در نقطهٔ ۱، روی محور حقیقی انتخاب می‌کنیم (شکل هـ). اگر رأس مجاور $A_\text{۰}$ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (یعنی در جهت مثلثاتی) با عدد مختلط ε و رأس مجاور بعدی را با عدد مختلط $\varepsilon^\text{۲}$ و غیره نشان دهیم، برای رأسهای nضلعی منتظم، به عددهای مختلط $\text{۱}, \varepsilon, \varepsilon^\text{۲}, \dots, \varepsilon^{n-\text{۱}}$ می‌رسیم که، هر کدام از آنها، قدرمطلقی برابر واحد دارند و زاویه‌های متناظر این عددهای مختلط (زاویه‌ای که بردار معرف عدد مختلط، با جهت مثبت محور افقی می‌سازند) بترتیب، چنینند:

$$\text{۰}^\circ \ , \ \frac{\text{۳۶۰}^\circ}{n} \ , \ \text{۲}\times\frac{\text{۳۶۰}^\circ}{n} \ , \ \dots \ , \ (n-\text{۱})\frac{\text{۳۶۰}^\circ}{n}$$

طول پاره‌خطهایی که $A_\text{۰}$ را به رأسهای دیگر وصل می‌کنند، بترتیب، برابرند با قدرمطلق عددهای مختلط

$$\text{۱}-\varepsilon \ , \ \text{۱}-\varepsilon^\text{۲} \ , \ \text{۱}-\varepsilon^\text{۳} \ , \ \dots \ , \ \text{۱}-\varepsilon^{n-\text{۱}}$$

بنابراین، قضیهٔ ما، با بیان عددهای مختلط، به این صورت درمی‌آید که باید ثابت کنیم:

$$\left|(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^{2})\ \ldots\ (1-\varepsilon^{n-1})\right| = n \qquad (1)$$

برای اثبات درستی رابطهٔ (۱)، توجه می‌کنیم که $\varepsilon^n = 1$، و در حالت کلی، برای هر عدد درست k داریم:

$$(\varepsilon^{k})^{n} = (\varepsilon^{n})^{k} = 1$$

بنابراین، عددهای ۱، ε، ε^2، ...، ε^{n-1}، ریشه‌های چند جمله‌ای زیر هستند:

$$z^{n} - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$$

عدد ۱، ریشهٔ معادلهٔ $z-1=0$ است، بنابراین، عددهای ε، ε^2، ...، ε^{n-1}، عبارتند از ریشه‌های چند جمله‌ای $f(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1$، یعنی، می‌توان f(z) را به این صورت تجزیه کرد:

$$f(z) = (z-\varepsilon)(z-\varepsilon^{2})\ldots(z-\varepsilon^{n-1})$$

که اگر به جای z، در عبارت f(z)، عدد ۱ را قرار دهیم، به دست می‌آید:

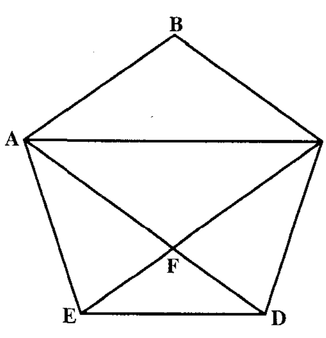
$$f(1) = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^{2})\ldots(1-\varepsilon^{n-1}) = n$$

و این، از رابطهٔ (۱) قویتر است، زیرا نشان می‌دهد که، نه تنها حاصلضرب قدرمطلق عدد، بلکه حاصلضرب خود عددها، برابر است با n.

۹۳۰. پنج ضلعی منتظم ABCDE را در نظر گرفته، نقطهٔ برخورد دو قطر AD و CE را F می‌نامیم. باید ثابت کنیم که AF/FD، نسبت طلایی است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ACDE، $\overset{\Delta}{ACF} \sim \overset{\Delta}{DEF}$، بنابراین $AF/FD = AC/ED$. اما $ED = BC$ و $BC = AF$ است، زیرا ABCF لوزی است. بنابراین:

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AC}{AF} \quad \text{یا} \quad \frac{AF}{FD} = \frac{AD}{AF} \Rightarrow AF^{2} = AD.FD$$

لذا AF/FD نسبت طلایی است. اگر ضلعهای پنج ضلعی منتظمی ۱ واحد باشد، در این صورت طول قطرهای آن مقدار عددی نسبت طلایی است.



۹۳۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۰.۴.۵. ثابت کنید پنج ضلعی منتظم است

۹۳۲. کمان $\widehat{EA} = ۷۲^\circ$ و پنج ضلعی ABCDE منتظم است.

۹۳۳. قطرهای BD ،AC و BE را رسم می‌کنیم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ و $AB = BC = CD = DE = EA$

$\Delta ABE \cong \Delta ABC \Rightarrow AC = BE \ , \ A\hat{C}B = A\hat{E}B = A\hat{B}E = B\hat{A}C$

$\Rightarrow AKB$ مثلث متساوی‌الساقین $\Rightarrow AK = BK \ , \ CK = AC - AK \ ,$

$EK = BE - BK$

$\Rightarrow CK = EK \Rightarrow DKE = DKC(ED = DC \ , \ EK = CK \ , \ KD = KD)$

$\Rightarrow K\hat{E}D = K\hat{C}D \Rightarrow \hat{D} = \hat{E} \Rightarrow$ پنج ضلعی منتظم است

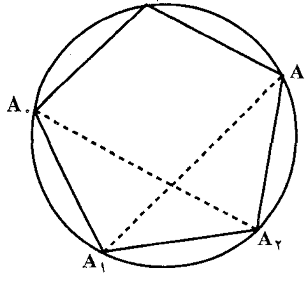
۹۳۴. در پنج ضلعی $A_۰A_۱A_۲A_۳A_۴$ (شکل)، دو مثلث به رأسهای $A_۰$ ، $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ ، $A_۲$ ، $A_۱$ همنهشتند (یعنی قابل انطباق بر یکدیگرند)، زیرا در ضلع $A_۱A_۲$ مشترکند، به فرض داریم:

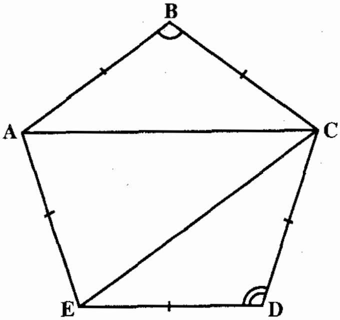
$A_۰\hat{A}_۱A_۲ = A_۲\hat{A}_۳A_۱$ و، در ضمن، $A_۱\hat{A}_۰A_۲ = A_۲\hat{A}_۳A_۱$ (دو زاویهٔ محاطی روبه‌رو به یک کمان در دایره).

بنابراین، نتیجه می‌گیریم: $A_۰A_۱ = A_۲A_۳$. به همین ترتیب، با در نظر گرفتن زوج مثلثهای همنهشت دیگر، به دست می‌آید:

$A_۰A_۱ = A_۱A_۲ = A_۲A_۳ = A_۳A_۴ = A_۴A_۰$

این قضیه، برای هر چند ضلعی که، تعداد ضلعهای آن فرد باشد، درست است ($۲n+۱$ ضلعی) و شبیه همین استدلال را برای آن، می‌توان به کار برد، ولی، اگر تعداد ضلعهای چند ضلعی، زوج باشد ($۲n$ ضلعی)، این قضیه درست نیست؛ برای مثال، مستطیل که زاویه‌هایی برابر دارد و در دایره هم قابل محاط است، چهارضلعی منتظم نیست.





۹۳۵. چون $AC = ۲AB\sin\frac{\hat{B}}{۲} \geq ۲CD\sin\frac{\hat{D}}{۲} = CE$ (شکل)، بنابراین در مثلث ACE، دو زاویهٔ AEC و EAC برابر می‌شوند. از طرف دیگر، داریم :

$$E\hat{A}C = \hat{A} - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{B}) = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{۲} - ۹۰^\circ \geq \hat{E} + \frac{\hat{D}}{۲} - ۹۰^\circ$$

$$= \hat{E} - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{D}) = A\hat{E}C$$

بنابراین، باید برابری $E\hat{A}C = A\hat{E}C$ برقرار باشد که تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم :

$$\hat{A} = \hat{E}\,,\ \ \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\hat{D}}{۲}$$

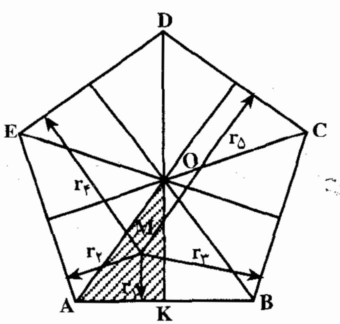
یعنی :

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E}$$

و بنابراین، پنج ضلعی ABCDE، منتظم است.

۱۱.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۳۶. بیشترین مقدار برای رأس پنج ضلعی، و کمترین مقدار برای وسط یکی از ضلعها به دست می‌آید. پنج ضلعی منتظم ABCDE را به وسیلهٔ محورهای تقارن آن به ۱۰ مثلث تقسیم می‌کنیم. کافی است، نقطهٔ M را تنها درون یکی از این مثلثها برای مثال مثلث AOK، مورد بررسی قرار دهیم. برای این که فاصلهٔ نقطهٔ M واقع در درون زاویه‌ای را تا ضلعهای آن با هم مقایسه کنیم، کافی است روشن کنیم که نقطهٔ M در کدام طرف نیمساز این زاویه قرار دارد. با توجه به این نکته، قانع می‌شویم که فاصلهٔ نقطهٔ M تا ضلعهای پنج ضلعی : AB ، AE،



BC، DE و CD ، بترتیب، صعودی است :

$r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4 \le r_5$. اکنون دیگر روشن است که فاصلهٔ r_3 وقتی به حداکثر خود می‌رسد که نقطهٔ M روی رأس A قرار گیرد و وقتی به حداقل مقدار خود می‌رسد که نقطهٔ M بر نقطهٔ K منطبق باشد.

۱۲.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۹۳۹. چون کمانهای وترهای پنج ضلعی منتظم با هم برابرند پس $A_1 = C_1$ و بنابراین $AB \| EC$ ، و به همین قضیهٔ بالا $BF \| AE$ پس چهارضلعی ABEF متوازی‌الاضلاع است و فقط باید ثابت کنیم که دو ضلع مجاور با هم برابرند. برای این منظور از تساوی دو مثلث BFC و EFD استفاده می‌کنیم :

$$\hat{E}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}\ ,\ \ \hat{D}_2 = \hat{C}_2 = \frac{\overset{\frown}{EB}}{2}$$

و $ED = BC$ پس دو مثلث با هم مساوی‌اند یعنی، $EF = BF$ یعنی چهارضلعی ABFE لوزی است.

۵.۵. رابطه‌های متری در شش‌ضلعی منتظم

۲.۵.۵. زاویه

۱.۲.۵.۵. اندازهٔ زاویه

۹۴۰. مجموع زاویه‌های درونی هر شش ضلعی منتظم برابر $(2 \times 6 - 4) \times 90^\circ = 720^\circ$ است. بنابراین، اندازهٔ هر زاویهٔ درونی آن برابر است با $720^\circ \div 6 = 120^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ بین هر دو قطر متوالی رسم شده از یک رأس برابر 30° است. به عنوان مثال $C\hat{A}D = D\hat{A}E = 30^\circ$.

۲.۲.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۹۴۱. گزینهٔ (د) درست است.

۳.۵.۵. ضلع

۱.۳.۵.۵. اندازهٔ ضلع

۹۴۲. داریم:

$$C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow C_۶ = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۲R\sin ۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow C_۶ = ۲\times ۱۸\times\frac{۱}{۲} = ۱۸cm$$
$$C'_n = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow C'_۶ = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۲R\tan ۳۰^\circ \Rightarrow C'_۶ = ۲\times ۱۸\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\Rightarrow C'_۶ = ۱۲\sqrt{۳}cm$$

نکته. در هر دایرهٔ به شعاع R، همواره $C_۶ = R$ است. بنابراین $C_۶$ را می‌توان با استفاده از این ویژگی به‌دست آورد.

۲.۳.۵.۵. نسبت طول ضلع به طول کمان

۹۴۳. گزینهٔ (د) درست است.

شعاع دایره را r فرض می‌کنیم. طول یک ضلع شش‌ضلعی r و طول کمان کوچکتر مقابل آن ضلع $۲\pi r/۶$ است. بنابراین نسبت مطلوب $r:(۲\pi r/۶)$ یا $۳:\pi$ است.

۴.۵.۵. قطر

۱.۴.۵.۵. اندازهٔ قطر

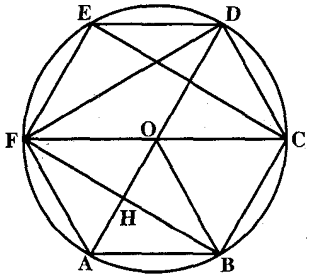
۹۴۴. شش‌ضلعی دارای ۹ قطر است که سه قطر آن برابر قطر دایرهٔ محیطی آن یعنی ۱۲cm است و ۶ قطر آن هر یک برابر $C_۳$ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در آن، یعنی $R\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳}$ سانتیمتر است.

۵.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۹۴۵. گزینهٔ (الف) درست است.

۵. ۵. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها



۹۴۶. ۱. قطر DA از شش ضلعی، یکی از قطرهای دایره و بنابراین، چهارضلعی OFAB لوزی است ؛ زیرا FA و AB مساوی با شعاع دایره‌اند، پس $AH = \frac{R}{۲}$ و $HD = \frac{۳R}{۲}$ و یا $HD = ۳AH$.

۲. قطر FC از شش‌ضلعی نیز یکی از قطرهای دایره است و با ضلع ED موازی است، زیرا کمانهای EF و DC متساوی‌اند. بنابراین دو مثلث EDK و CFK متشابه‌اند (K نقطهٔ تلاقی FD و EC است) و داریم :

$$\frac{CK}{KE} = \frac{FC}{ED} = \frac{۲R}{R} = ۲$$ و یا $CK = ۲KE$

۵. ۵. ۶. شعاع دایره

۵. ۵. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۹۴۷. $a(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{۱}{۲})$

۵. ۵. ۷. محیط

۵. ۵. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۹۴۸. اندازهٔ مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a، برابر $\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}$ است. بنابراین، داریم :

$$\frac{۳\sqrt{۳}a^{۲}}{۲} = ۳۶\sqrt{۳} \Rightarrow a^{۲} = ۲۴ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۶}cm$$

$\Rightarrow$ اندازهٔ محیط شش‌ضلعی $= ۶a = ۱۲\sqrt{۶}cm$

۵. ۵. ۷. ۲. نسبت محیطها

۹۴۹. گزینهٔ (ب) درست است.

۵ .۵ .۸. مساحت

۵ .۵ .۸. ۱. اندازهٔ مساحت

۵ .۵ .۸. ۱. ۱. اندازهٔ مساحت شش‌ضلعی منتظم

۹۵۰. چون $C_6 = R$ است، پس، $a = C_6 = 12\text{cm}$ و از آن‌جا:

$$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \Rightarrow S = \frac{3\sqrt{3}\times 12^2}{2} = 216\sqrt{3}\text{cm}^2$$ مساحت‌شش‌ضلعی منتظم

۹۵۱. گزینهٔ (الف) درست است.

۹۵۲. گزینهٔ (د) درست است.

۵ .۵ .۸. ۱. ۲. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۹۵۳. مساحت شش‌ضلعی منتظم محاطی را با S_6 و مساحت شش‌ضلعی منتظم محیطی را با S'_6 و شعاع دایره را با R نشان می‌دهیم، داریم:

$$S_6 = \frac{1}{2}\times 6\times 15\times\frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{675\sqrt{3}}{2}$$

$$S'_6 = \frac{1}{2}\times 6\times 10\sqrt{3}\times 15 = 450\sqrt{3}$$

$$S'_6 - S_6 = 450\sqrt{3} - \frac{675\sqrt{3}}{2} = \frac{225\sqrt{3}}{2}$$

اگر ضلعها موازی نباشند سطح موردنظر تغییر نمی‌کند.

در حالت کلی داریم:

$$S_6 = \frac{1}{2}\times 6\times R\times\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$ و $$S'_6 = \frac{1}{2}\times 6\times\frac{2R\sqrt{3}}{3}\times R = 2\sqrt{3}R^2$$

$$\Rightarrow S'_6 - S_6 = 2\sqrt{3}R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$$

۹۵۴. $\frac{a^2}{4}(6\sqrt{3} - 6 - \pi)$

۹۵۵. $\frac{\pi a^2}{6}$

۵ .۵ .۸. ۲. نسبت مساحتها

۹۵۶. $C_6 = R$ و $C'_6 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ (ضلع شش‌ضلعی محیطی). نسبت مساحت دو چندضلعی منتظم محاطی و محیطی که عدهٔ ضلعهای آنها برابر باشد، مساوی است با مربع نسبت

ضلعهای آنها :

$$\frac{S}{S'}=\left(\frac{C_۶}{C'_۶}\right)^۲=\frac{R^۲}{\frac{۴R^۲}{۳}}\Rightarrow\frac{S}{S'}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S=\frac{۳}{۴}S'$$

۹۵۷. همهٔ مثلثهای به‌وجود آمده با هم برابرند، در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین، نتیجه می‌گیریم که ضلعهای آنها با هم برابرند و همین‌طور زاویه‌ها با هم برابرند، پس شش‌ضلعی منتظم است. مساحت شش‌ضلعی ABCDEF را $S_۶$ و مساحت شش‌ضلعی A′B′C′D′E′F′ را $S'_۶$ می‌نامیم. داریم :

$$B'H=\frac{\sqrt{۳}}{۲}m.a$$

$$S_{\text{مثلثها}}=(a+ma)\frac{\sqrt{۳}}{۴}ma=m^۲a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}+ma^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}(m^۲+m)$$

$$S_۶=۶a.a\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow S'_۶=\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}(m^۲+m+۱)\Rightarrow$$

$$S'_۶:S_۶=(m^۲+m+۱)$$

۵. ۵. ۸. ۳. رابطه‌ای در مساحتها

۹۵۸. اگر شعاع دایره R باشد، داریم :

$$S_۶=\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } S_۳=\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۴} \text{ و } S'_۳=۳R^۲\sqrt{۳}$$

$$S_۶:S_۳=۲\ ,\ \ S_۶:S'_۳=\frac{۱}{۲}$$

۹۵۹. شعاع دایره را R، مساحت شش‌ضلعی منتظم را $S_۶$، مساحتهای مثلثهای متساوی‌الاضلاع محاطی و محیطی را $S_۳$ و $S'_۳$ فرض می‌کنیم ؛ داریم :

$$C_۶=R \text{ و } S_۶=\frac{۳\sqrt{۳}C_۶^۲}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲}$$

$$C_۳=R\sqrt{۳} \text{ و } S_۳=\frac{C_۳^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳R^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$C'_۳=۲R\sqrt{۳} \text{ و } S'_۳=\frac{۱۲R^۲\sqrt{۳}}{۴}=۳\sqrt{۳}R^۲$$

$$S_۶^۲=S_۳\times S'_۳\Rightarrow\left(\frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۲}\right)^۲=\left(\frac{۳\sqrt{۳}R^۲}{۴}\right)(۳\sqrt{۳}R^۲)$$

$$\frac{۲۷R^۴}{۴}=\frac{۲۷R^۴}{۴}$$

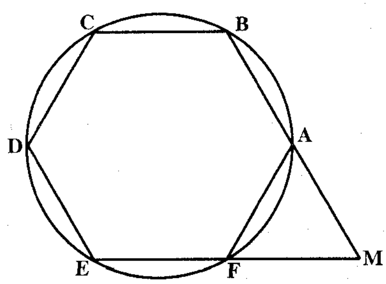
بنابراین حکم مسأله درست است.

۹۶۰. گزینه‌های (ب، ج، د) درست هستند.
۹۶۱. گزینه‌های (ب و د) درست هستند.

۵ . ۵ . ۹ . رابطه‌های متری

۹۶۲. مثلث MAF متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $MA = AF = FM = R$ است. از آن‌جا، $MB = ME = ۲R$ و در نتیجه:

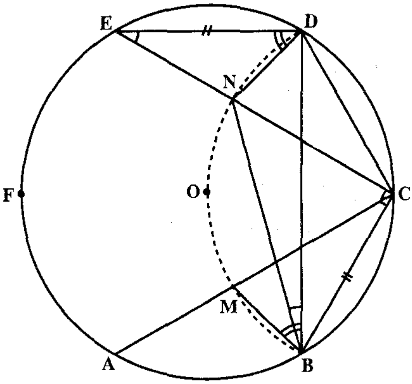
$$MA \cdot MB = MF \cdot ME = R \cdot ۲R = ۲R^۲$$



۵ . ۵ . ۱۰ . ثابت‌کنید شش‌ضلعی منتظم است

۹۶۳. باید ثابت کنیم که زاویه‌ها، همچنین ضلعهای شش‌ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ باهم برابرند.
زاویه‌های این شش‌ضلعی هریک مساوی $\frac{\text{۱ کمان} + \text{۳ کمان}}{۲}$ است، پس زاویه‌ها با هم برابرند و مساوی ۶۰ درجه هستند. از تساوی مثلثهایی که قاعده‌های آن ضلعهای شش‌ضلعی داخلی هستند، نتیجه می‌گیریم که قاعده‌های آنها یعنی ضلعهای شش‌ضلعی باهم برابرند. زیرا زاویه‌های رأس آنها هریک محاطی روبه‌رو به دو کمان ۶۰ درجه است و همگی این مثلثها متساوی‌الساقین با ساقهای برابر می‌باشند. پس شش‌ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ که زاویه‌هایش برابر و ضلعهایش نیز مساوی‌اند منتظم است.

۵ . ۵ . ۱۱ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



(الف)

۹۶۵. راه‌حل اوّل. از آن‌جا که $AC = EC$ است، از تناسب مفروض نتیجه می‌گیریم که $CM = EN$ و مثلث $BMC \cong$ مثلث DNE است، شکل (الف) را ملاحظه کنید. به این ترتیب $M\hat{B}C = E\hat{D}N$ است. ازآن‌جا که $E\hat{C}B = ۹۰^\circ$ و $C\hat{E}D = ۳۰^\circ$ است، داریم :

$$B\hat{N}D = B\hat{N}C + C\hat{N}D = (۹۰^\circ - N\hat{B}C) + (C\hat{E}D + N\hat{D}E)$$
$$= ۹۰^\circ - N\hat{B}C + ۳۰^\circ + N\hat{B}C = ۱۲۰^\circ$$

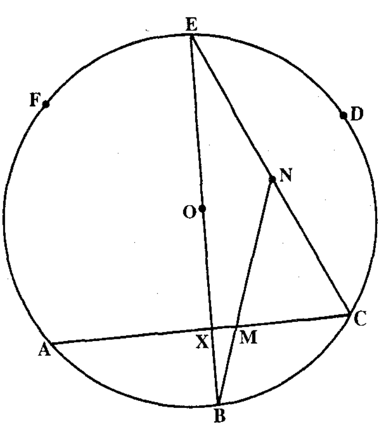
به این ترتیب، BD از N و نیز از O مرکز دایرهٔ محیطی شش‌ضلعی به زاویهٔ ۱۲۰° دیده می‌شود. بنابراین، N بر دایره‌ای به مرکز C و شعاع : $CD = CB = CN$ قرار دارد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCE :

$$E\hat{B}C = ۶۰^\circ$$

$$r = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

راه‌حل دوم. فرض می‌کنیم هر ضلع شش‌ضلعی به طول یک باشد، و B ، M و N بر یک استقامت قرار داشته باشند، و فرض می‌کنیم X تقاطع AC و BE را نمایش دهد، شکل (ب) را ملاحظه کنید. از آن‌جا که N بر CE، B بر EX و M بر XC واقع است، می‌توانیم قضیهٔ منلائوس را در مورد مثلث CEX به کار بریم :

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{XM}}{\overline{MC}} = -۱$$



(ب)

اکنون هر یک از فاصله‌های موجود در این فرمول را بر حسب r به‌دست می‌آوریم. CE ضلع مقابل به زاویهٔ ۱۲۰° در مثلث متساوی‌الساقین با دو ضلع به طول ۱ است ؛

بنابراین، داریم :

$$\overline{CE}=\sqrt{۳}\ ,\ \overline{CN}=\sqrt{۳}r\ ,\ \overline{EB}=۲\ ,\ \overline{BX}=\frac{-۱}{۲}\ ,\ \overline{AM}=\sqrt{۳}$$

$$\overline{MC}=\overline{AC}-\overline{AM}=\sqrt{۳}(۱-r)r$$

$$\overline{XM}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\overline{MC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۳}+r\sqrt{۳}=\sqrt{۳}(r-\frac{۱}{۲})$$

با قراردادن این مقدارها در فرمول منلائوس، داریم :

$$\frac{\sqrt{۳}r}{\sqrt{۳}(۱-r)}\cdot\frac{۲}{\frac{-۱}{۲}}\cdot\frac{\sqrt{۳}(r-\frac{۱}{۲})}{\sqrt{۳}(۱-r)}=-۱$$

که : $r=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ را به‌دست می‌دهد.

۹۶۸. زاویه‌های مثلث حاصل هرکدام برابر ۶۰° است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است.

۵ .۵ .۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۹۶۹. چهارضلعیهای $AC'BO$ ، $AB'CO$ و $BA'CO$ لوزی می‌باشند، زیرا قطرها، عمودمنصف یکدیگر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که ضلعهای شش‌ضلعی $AB'CA'BC'$ همه با هم برابر است، و مثلث ABC باید متساوی‌الاضلاع باشد تا شش‌ضلع به وجود آمده، منتظم باشد.

۶.۵. رابطه‌های متری در هفت‌ضلعی منتظم

۵ .۶ .۲. زاویه

۵ .۶ .۲ .۱. اندازهٔ زاویه

۹۷۰. مجموع زاویه‌های درونی هر هفت‌ضلعی منتظم برابر است با $۹۰۰^\circ = ۹۰^\circ \times (۲\times۷-۴)$.

بنابراین، اندازهٔ هر زاویهٔ درونی آن برابر $\frac{۹۰۰^\circ}{۷}=۱۲۸\frac{۴^\circ}{۷}$ است.

۵. ۶. ۳. ضلع

۵. ۶. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۹۷۱. با استفاده از دستور $C_n = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ داریم:

$$C_۷ = ۲ \times ۱۲ \sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷} = ۲۴\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$$

۵. ۶. ۴. قطر

۵. ۶. ۴. ۱. اندازهٔ قطر

۹۷۲. این قطر، قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که دو ساق آن برابر ضلع ۷ضلعی منتظم، و زاویهٔ رأس آن، برابر $۵ \times \frac{۳۶۰^\circ}{۷}$ است.

۵. ۶. ۵. پاره‌خط

۵. ۶. ۵. ۱. اندازهٔ پاره‌خط

۹۷۳. در مثلث ABM، اندازهٔ ضلع AB و اندازهٔ دو زاویهٔ ABM و AMB را داریم. بنابراین، به کمک رابطهٔ سینوسها، طول پاره‌خطهای MB و AM قابل محاسبه است.

۵. ۶. ۶. شعاع دایره

۵. ۶. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۹۷۴. با توجه به این که اندازهٔ ضلع ۷ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R، $C_۷ = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷}$ است، داریم:

$$۷ \times ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷} = ۷۰\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۷} \Rightarrow ۱۴R = ۷۰ \Rightarrow R = ۵$$

۵. ۶. ۷. محیط

۵. ۶. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۹۷۵. چون $C'_{7} = 2R\tan\frac{180^\circ}{7}$ است. بنابراین، داریم:

$$2P' = 7\times 2\times 12\tan\frac{180^\circ}{7} = 168\tan\frac{180^\circ}{7}$$

۵. ۶. ۷. ۲. نسبت محیطها

۹۷۶. چون هر دو هفت‌ضلعی منتظم متشابه‌اند. بنابراین، نسبت محیطهای آنها جذر نسبت مساحتهایشان است، یعنی نسبت محیطها برابر است با:

$$\frac{S}{S'} = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = \frac{5}{2}$$

۵. ۶. ۸. مساحت

۵. ۶. ۸. ۱. اندازهٔ مساحت

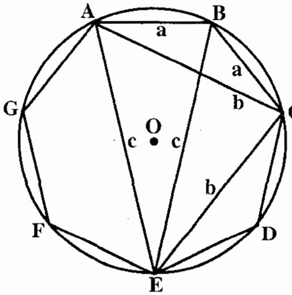
۹۷۷. با توجه به این که $C_{7} = 2R\sin\frac{180^\circ}{7}$ است، داریم:

$7\times 2R\sin\frac{180^\circ}{7} = 84\sin\frac{180^\circ}{7} \Rightarrow R = 6$ شعاع دایرهٔ محیطی

بنابراین با توجه به دستور $S_n = \frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}$، داریم:

$$S_{7} = \frac{1}{2}\times 7\times 6^2\times\sin\frac{360^\circ}{7} = 126\sin\frac{360^\circ}{7}$$

۵. ۶. ۹. رابطه‌های متری

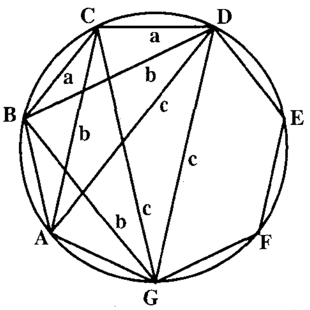


۹۷۸. چهارضلعی ABCE را درنظر گرفته $AB = BC$ را a و $AC = CE$ را b و $AE = BE$ را c می‌نامیم و حکم قضیهٔ بطلمیوس را در مورد این چهارضلعی می‌نویسیم تا حاصل شود:

$$cd = ac + ab$$

طرفین این تساوی را بر حاصلضرب abc تقسیم می‌کنیم تا حاصل شود: $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

با ملاحظهٔ این که $AD = BE$ است، رابطهٔ بالا به‌صورت $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ درمی‌آید.



۹۷۹. دایرۀ محیطی هفت ضلعی ABCDEFG را رسم کرده، در دو چهارضلعی محاطی ABCD و GBCD حکم قضیۀ بطلمیوس را می‌نویسیم. با ملاحظۀ آن که :

$$AB = BC = CD = a$$

$$AC = BD = GB = b$$

$$AD = GC = GD = c$$

می‌باشد، داریم : $bc = ac + ab = a(c + b)$ و $b^2 = ac + a^2 = a(c + a)$ از تقسیم این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$\frac{b}{c} = \frac{c+a}{c+b} \quad \text{و یا} \quad a = \frac{b^2 + bc - c^2}{c}$$

اما از رابطۀ $bc = a(c + b)$ حاصل می‌شود : $a = \frac{bc}{a+b}$

پس :
$$a = \frac{b^2 + bc - c^2}{c} = \frac{bc}{b+c} = \frac{a^2 + 2bc - c^2}{2c+b} = \frac{(b+c)^2 - 2c^2}{2c+b}$$

۵. ۶. ۱۰. رسم هفت‌ضلعی منتظم

بروزک برای اثبات این که مجموع زاویه‌های هر ستاره با تعداد رأسهای فرد، دو قائمه است، ابتدا از ستارۀ هفت‌پر شروع می‌کند و سپس اثبات را برای سایر ستاره‌های چندپر تعمیم می‌دهد. او دایره را به هفت قسمت مساوی تقسیم می‌کند و با شروع از نقطۀ ۱، هر نقطه را به نقطۀ سوم وصل می‌کند (شکل). به این ترتیب ستارۀ هفت‌پر به وجود می‌آید که مجموع زاویه‌های داخلی آن ($1A_2$، $2A_3$، ...، $7A_1$) مساوی چهار قائمه می‌شود، و چون هر زاویۀ محاطی مساوی نصف زاویۀ نظیر مرکزی است، مجموع هفت زاویۀ ستاره مساوی دو قائمه خواهد شد.

همین روش استدلال را در مورد ستاره‌های نه پر، یازده پر و غیره هم می‌توان به‌کار برد.

۵ .۷. رابطه‌های متری در هشت‌ضلعی منتظم

۵ .۷ .۲. زاویه

۵ .۷ .۲ .۱. اندازهٔ زاویه

۹۸۱. گزینهٔ (ج) درست است.

۵ .۷ .۳. ضلع

۵ .۷ .۳ .۱. اندازهٔ ضلع

۹۸۲. داریم :

$$C_{۸} = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۸} = ۲R\sin ۲۲^\circ \text{ و } ۳۰'$$

با توجه به این که $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = $ ۳۰′ و $\sin ۲۲^\circ$ است، داریم :

$$C_{۸} = ۲\times ۲۴\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = ۲۴\sqrt{۲-\sqrt{۲}}\,\text{cm}$$

۵ .۷ .۴. قطر

۵ .۷ .۴ .۱. اندازهٔ قطر

۹۸۳. کوچکترین قطر هشت‌ضلعی منتظم، قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که دو ساق آن ضلعهای هشت‌ضلعی منتظم ($C_{۸}$)، و زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ هریک ۳۰′ و ۲۲° می‌باشند ؛ و اندازهٔ بزرگترین قطر هشت‌ضلعی منتظم برابر قطر دایرهٔ محیطی آن است.

۵ .۷ .۵. پاره‌خط

۵ .۷ .۵ .۱. اندازهٔ پاره‌خط

۹۸۴. در مثلث AMB، اندازهٔ ضلع AB بر حسب R مشخص است.

$$C_{۸} = ۲R\sin ۲۲^\circ \text{ و } ۳۰' = ۲R\times\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

و دو زاویهٔ این مثلث نیز برابرند با $M\hat{B}A = ۴۵^\circ$ و $M\hat{A}B = \frac{۴۵^\circ}{۲} = ۲۲^\circ$ و $۳۰'$،
بنابراین، با استفاده از رابطهٔ سینوسها اندازهٔ پاره‌خطهای AM و BM قابل محاسبه است.

۵. ۷. ۵. ۲. نسبت پاره‌خطها

۹۸۵. گزینهٔ (ب) درست است.

۵. ۷. ۶. شعاع دایره

۵. ۷. ۶. ۱. اندازهٔ شعاع دایره

۹۸۶. با توجه به این‌که اندازهٔ مساحت هشت ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R، برابر $S'_۸ = ۸R^۲ \tan ۲۲^\circ$ و $۳۰' = ۸R^۲(\sqrt{۲} - ۱)$ است، پس داریم :

$$۸R^۲(\sqrt{۲} - ۱) = ۷۲(\sqrt{۲} - ۱) \Rightarrow R^۲ = ۹ \Rightarrow R = ۳cm$$

۵. ۷. ۷. محیط

۵. ۷. ۷. ۱. اندازهٔ محیط

۹۸۷.

$$C_۸ = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۸} = ۲R\sin ۲۲^\circ \text{ و } ۳۰' \Rightarrow C_۸ = ۲ \times ۱۲ \times \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = ۱۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \text{محیط } ۲P = ۹۶\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$C'_۸ = ۲R\tan ۲۲^\circ \text{ و } ۳۰' \Rightarrow C'_۸ = ۲ \times ۱۲(\sqrt{۲} - ۱) = ۲۴(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$\Rightarrow ۲P' = ۱۹۲(\sqrt{۲} - ۱)$$

$$۲P' - ۲P = ۱۹۲(\sqrt{۲} - ۱) - ۱۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}} = ۱۲\left[۱۶(\sqrt{۲} - ۱) - \sqrt{۲-\sqrt{۲}}\right] \# ۷۰/۳۰۸$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi R = ۲۴ \times ۳/۱۴ = ۷۵/۳۸۴$$

$$\text{اختلاف} = ۷۵/۳۸۴ - ۷۰/۳۰۸ = ۵/۰۷۶$$

۵ . ۷ . ۸. مساحت

۵ . ۷ . ۸ . ۱. اندازهٔ مساحت

۹۸۸. اگر شعاع دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی منتظم را R بنامیم، داریم :

$$C_۸ = ۲R\sin ۲۲^\circ\ و\ ۳۰' = ۲R\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} = R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$r_۸ = R\cos ۲۲^\circ\ و\ ۳۰' = \frac{R\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$S_n = \frac{۱}{۲}nC_n \cdot r_n \Rightarrow S_۸ = \frac{۱}{۲}\times ۸ \times R\sqrt{۲-\sqrt{۲}} \times \frac{R\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\Rightarrow S_۸ = ۲\sqrt{۲}R^۲$$

۹۸۹. $(\sqrt{۳}+۱)cm^۲$

۹۹۰. $۲a^۲(\sqrt{۲}-۱)$

۵ . ۷ . ۸ . ۲. رابطه‌ای در مساحتها

۹۹۱. داریم :

مساحت هشت‌ضلعی منتظم $= S_۸ = ۲\sqrt{۲}R^۲ = ۷۲\sqrt{۲}$

دایره $S = \pi R^۲ = ۳۶\pi$ ، سطح موردنظر $= ۳۶\pi - ۷۲\sqrt{۲} = ۳۶(\pi - ۲\sqrt{۲})$

۵ . ۷ . ۹. رابطه‌های متری

۹۹۲. راه حل اوّل. Q را نقطه‌ای از کمان $P_۲P_۳$ می‌گیریم و پای عمودهای وارد از نقطهٔ Q بر خطهای راست $P_۱P_۵$ ، $P_۲P_۶$ ، $P_۳P_۷$ و $P_۴P_۸$ را، بترتیب، A ،B ،C و D می‌نامیم (شکل الف). O، مرکز دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی است.

زاویه‌های QAO ،QBO، QCO و QDO قائمه‌اند، بنابراین، چهارضلعی ABCD قابل محاط در دایرهٔ K به قطر OQ است ؛ و چون هریک از زاویه‌های AOB ،BOC و COD برابر ۴۵ درجه‌اند، چهارضلعی ABCD مربع است.

قطر دایرهٔ K برابر است با شعاع دایرهٔ مفروض (دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی)، بنابراین اندازهٔ ضلع مربع ABCD، بستگی به جای نقطهٔ Q ندارد. اکنون کافی است ثابت کنیم :

اگر Q نقطه‌ای از محیط دایرهٔ محیطی مربع باشد، مجموع توانهای چهارم نقطهٔ Q از رأسهای مربع، به جای نقطهٔ Q بستگی ندارد. اگر این مجموع را S بگیریم، داریم :

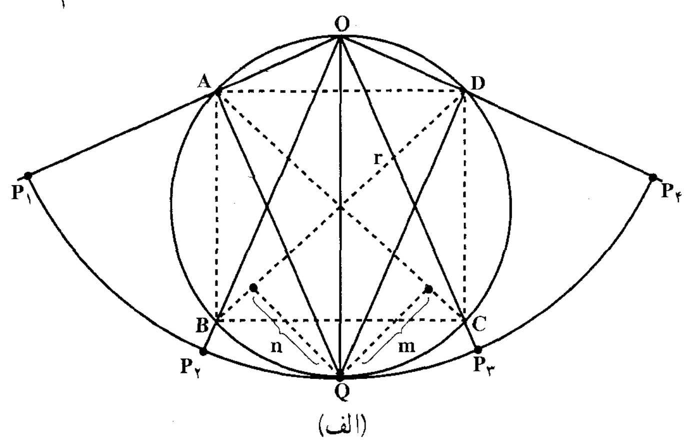
$$S = QA^۴ + QB^۴ + QC^۴ + QD^۴ = (QA^۲ + QC^۲)^۲(QB^۲ + QD^۲)^۲$$
$$-۲\left[(QA \cdot QC)^۲ + (QB \cdot QD)^۲\right]$$

اگر قطر مربع را برابر r فرض کنیم :

$$S = r^۴ + r^۴ - ۲\left[(QA \cdot QC)^۲ + (QB \cdot QD)^۲\right]$$

$QA \cdot QC$ برابر با دو برابر مساحت مثلث AQC و $QB \cdot QD$ برابر با دو برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ BQD است. اگر ارتفاعهای وارد از رأس Q در این دو مثلث را m و n بگیریم، می‌بینیم که، این دو ارتفاع، دو ضلع یک مستطیل را تشکیل می‌دهند (دو ضلع دیگر مستطیل، بر امتدادهای AC و BD واقعند). هر قطر این مستطیل، برابر است با $\frac{r}{۲}$ (r قطر دایرهٔ K است)، یعنی :

$$m^۲ + n^۲ = (\frac{r}{۲})^۲$$



(الف)

اکنون می‌توانیم بنویسیم :

$$(QA \cdot QC)^۲ + (QB \cdot QD)^۲ = (m \cdot AC)^۲ + (n \cdot BD)^۲ = r^۲(m^۲ + n^۲) = r^۲(\frac{r}{۲})^۲$$

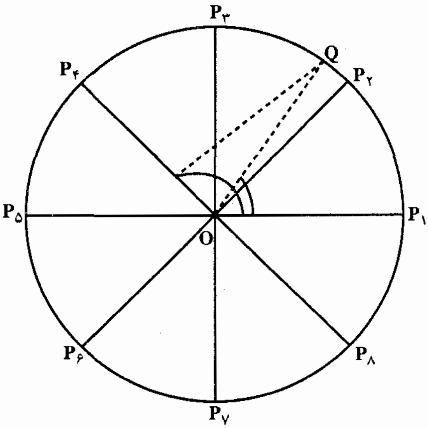
بنابراین :
$$S = ۲r^۴ - ۲ \times \frac{r^۴}{۴} = \frac{۳}{۲}r^۴$$

که تنها به r (شعاع دایرهٔ مفروض) بستگی دارد.

راه حل دوم. بدون آن‌که به کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم شعاع دایرهٔ

مفروض را واحد بگیریم. اگر زاویه‌های بین OQ، OP_1، OP_2، OP_3 و OP_4 را با شعاع OP_1، بترتیب، φ، α_1، α_2، α_3 و α_4 فرض کنیم، داریم (شکل ب):

$$\alpha_1 = 0\ ,\ \alpha_2 = 45^\circ\ ,\ \alpha_3 = 90^\circ\ ,\ \alpha_4 = 135^\circ$$



(ب)

اگر فاصلهٔ نقطهٔ Q را تا هر خط راست OP (که با OP_1 زاویه‌ای برابر α می‌سازد)، برابر d بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$d = |\sin(\varphi - \alpha)|$$

به این ترتیب، مجموع مورد نظر مسأله، چنین می‌شود:

$$f(\varphi) = \sin^4(\varphi - \alpha_1) + \sin^4(\varphi - \alpha_2) + \sin^4(\varphi - \alpha_3) + \sin^4(\varphi - \alpha_4)$$

اکنون، توجه می‌کنیم که:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$\frac{1}{4}\left[(1 - \cos 2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right]$$

یعنی:

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (1)$$

اکنون اگر، با توجه به دستور (۱)، $f(\varphi)$ را، برای مقدارهای متناظر α، محاسبه کنیم، به دست می‌آید:

$$f(\varphi) = \frac{3}{2}$$

یادداشت. قضیه‌ای دربارهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی.

تابع $P(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + \cdots + a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi$ را، نسبت به φ، چند جمله‌ای درجهٔ kام مثلثاتی گویند (تابع $f(\varphi)$ در حل مسأله، حالت خاصی ازاین تابع است). قضیهٔ کلی زیر را، بدون اثبات می‌آوریم. ولی از خواننده می‌خواهیم، خود راه اثبات آن را پیدا کند.

قضیه. اگر $P(\varphi)$ یک چندجمله‌ای مثلثاتی از درجهٔ k، با مقدار ثابت $a_\circ$ باشد، و اگر $\theta = \frac{۲\pi}{n}$، برای $n > k$، آن‌وقت:

$$P(\varphi+\theta)+P(\varphi+۲\theta)+\cdots+P(\varphi+n\theta)=na_\circ$$

$f(\varphi)$ که در حل مسأله از آن استفاده کردیم، حالت خاصی از این قضیه، به ازای $k = ۴$ و $n = ۸$ است.

۵. ۷. ۱۰. ثابت کنید هشت‌ضلعی منتظم است

۹۹۳. داریم:

$$a = R\sqrt{۲} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$FB = a - \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲a - a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{a(۲-\sqrt{۲})}{۲}$$

$$FM = a\sqrt{۲} - a = a(\sqrt{۲}-۱)$$

$$EF = a - a(۲-\sqrt{۲}) = a(۱-۲+\sqrt{۲}) = a(\sqrt{۲}-۱)$$

بنابراین $EF = FM$ و به همین ترتیب نتیجه می‌گردد که تمام ضلعها با هم برابرند؛ و هرکدام از زاویه‌ها ۱۳۵° می‌باشند، زیرا مکمّل زاویه‌های ۴۵° مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند، پس این هشت‌ضلعی، منتظم است.

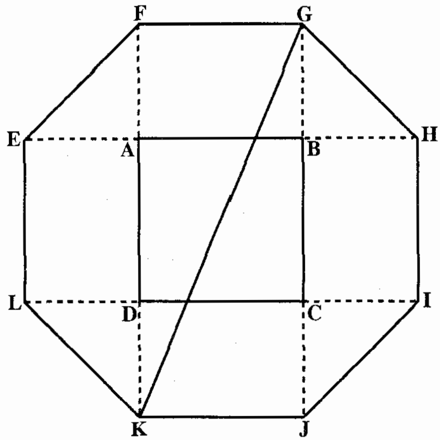
۵. ۷. ۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۹۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۹۹۵. اگر خطهای راست از مرکز ۸ضلعی نگذرند، آنها را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا، در وضع تازهٔ خود، از مرکز هشت‌ضلعی بگذرد و، در این صورت، مساحتهای هر دو بخش روبه‌رو، با هم برابر خواهند بود. ولی روشن است که، ضمن این انتقال خطهای راست، مساحت یکی از بخشها بزرگتر و مساحت دیگری کوچکتر می‌شود. پیدایش این تناقض، به معنای آن است که، این خطهای راست، در مرکز هشت‌ضلعی به یکدیگر برخورده‌اند. اگر این دو خط راست بر هم عمود نباشند، یکی از خطهای راست را دور مرکز می‌چرخانیم تا بر دیگری عمود شود که، در این صورت، چهار بخش با مساحتهای برابر به دست می‌آید و، مثل قبل، با تناقض روبه‌رو می‌شویم.

۵ .۷ .۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۹۹۶. فرض کنیم a طول ضلع مربع و EFGHIJKL هشت‌ضلعی حاصل باشد.



۱. چون چهارضلع این هشت‌ضلعی از قبیل FG مساوی با a هستند، برای آن که هشت‌ضلعی منتظم باشد، باید سایر ضلعها از قبیل GH نیز مساوی a باشند، اما در مثلث قائم‌الزاویهٔ HGB داریم:

$$GH=\sqrt{GB^{۲}+BH^{۲}}=l\sqrt{۲} \quad \text{پس باید} \quad l\sqrt{۲}=a$$

و یا $l=\dfrac{a}{\sqrt{۲}}=\dfrac{a\sqrt{۲}}{۲}$ باشد، یعنی l را باید نصف قطر مربع اختیار کرد.

۲. هرگاه قطر GK از هشت‌ضلعی را رسم کنیم، این قطعه خط، قطر دایرهٔ محیطی نیز می‌باشد و مساوی است با وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک ضلع آن a، و ضلع دیگرش $a+۲l$ است، بنابراین، داریم:

$$۴R^{۲}=a^{۲}+(a+a\sqrt{۲})^{۲}=۴a^{۲}+۲a^{۲}\sqrt{۲}=a^{۲}(۴+۲\sqrt{۲})$$

و از آن‌جا، می‌توان a، یعنی، طول ضلع هشت‌ضلعی را بر حسب R به‌دست آورد.

$$a^{۲}=\frac{۲r^{۲}}{۲+\sqrt{۲}}=R^{۲}(۲-\sqrt{۲}) \quad \text{پس} \quad a=R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

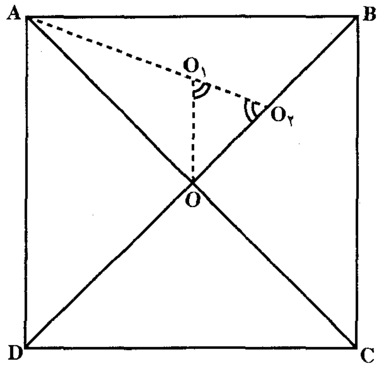
شعاع دایرهٔ محاطی نصف GJ است، پس:

$$r=\frac{a+۲l}{۲}=\frac{a(۱+\sqrt{۲})}{۲}=\frac{R\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

۱.۹۹۷. نیمساز زاویهٔ BAC، نیمساز زاویهٔ AOB را در نقطهٔ O_1 و خط OB را در نقطهٔ O_2 قطع می‌کند که مرکزهای دایره‌های محاطی دو مثلث AOB و ABC می‌باشند و داریم :

$$O\hat{O_2}A = 90^\circ - \frac{45^\circ}{2} = \frac{3}{2} \times 45^\circ$$

$$O_1\hat{O}O_2 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$ و



بنابراین : $O\hat{O_1}O_2 = 180^\circ - 45^\circ - \frac{3}{2} \times 45^\circ = \frac{3}{2} \times 45^\circ$

پس مثلث OO_1O_2 متساوی‌الساقین است. حال اگر مرکزهای سایر دایره‌های محاطی را در نظر بگیریم، حول نقطهٔ O هفت مثلث دیگرمساوی با OO_1O_2 به‌دست می‌آید، که یک هشت ضلعی منتظم به مرکز O می‌سازند.

۲. مساحت هشت‌ضلعی، بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی عبارت است از :

$$S = 2\overline{OO_2^2}\sqrt{2}$$

اما چون AO_2 نیمساز زاویهٔ OAB است، پس :

$$\frac{OO_2}{OA} = \frac{O_2B}{AB} = \frac{OB}{OA + AB}$$

بنابراین، با ملاحظهٔ این که $OA = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ؛ حاصل می‌شود :

$$OO_2 = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$$

در نتیجه :

$$S = \frac{a^2(6 - 4\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = a^2(3\sqrt{2} - 4)$$

۵. ۸. رابطه‌های متری در نه‌ضلعی منتظم

۵. ۸. ۲. زاویه

۵. ۸. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۹۹۸. گزینهٔ (د) درست است.

۵. ۹. رابطه‌های متری در ۱۰ ضلعی منتظم

۵. ۹. ۲. زاویه

۵. ۹. ۲. ۱. اندازهٔ زاویه

۹۹۹. گزینهٔ (د) درست است.

۵. ۹. ۳. ضلع

۵. ۹. ۳. ۱. اندازهٔ ضلع

۱۰۰۰. در مثلثی متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $\frac{\pi}{۵}$، نیمساز یک زاویهٔ مجاور به قاعده، مثلث را به دو مثلث، که یکی با مثلث اصلی متشابه است، تقسیم می‌کند.

جواب: $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}R$

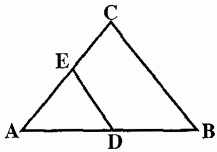
۱۰۰۱. فرض می‌کنیم $AB = x$ باشد. از A و B به نقطهٔ O مرکز دایره وصل کرده، نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا OB را در نقطهٔ D قطع کند. دو مثلث ADB و ADO متساوی‌الساقیند، لذا داریم: $AD = AB = OD$

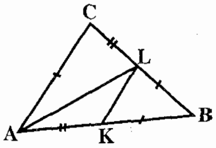
با استفاده از خاصیت نیمساز در مثلث داریم:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BD}{OD} \Rightarrow \frac{CD}{BO} = \frac{BD}{OD} \Rightarrow AB^{۲} = OD^{۲} = OB \cdot BD$$

$$\Rightarrow x^{۲} = R(R-x) \Rightarrow x^{۲} + Rx - R^{۲} = ۰ \Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^{۲} + ۴R^{۲}}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$$



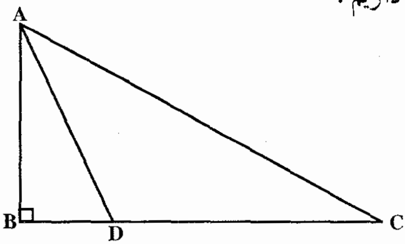


۱۰۰۲. با انتقال موازی، نقطهٔ D را به نقطهٔ B می‌رسانیم، در این صورت مثلث ADE منجر به مثلث KBL می‌شود که در آن $KB = LB$ و به‌جز آن، $KL \| AC$ است. اگر فرض کنیم $K\hat{A}L = K\hat{L}A = \alpha$، آن‌وقت خواهیم داشت:

$$B\hat{K}L = ۲\alpha \text{ و } B\hat{A}C = B\hat{C}A = ۲\alpha$$

دو مثلث ACL و BKL باهم برابرند و $A\hat{L}C = K\hat{L}B = ۲\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۵}$

۱۰۰۳. چون AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، بنابراین، داریم:



$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BC}{AB + AC}$$

پس
$$BD = \frac{AB \times BC}{AB + AC}$$

از طرف دیگر
$$BC = ۲AB$$

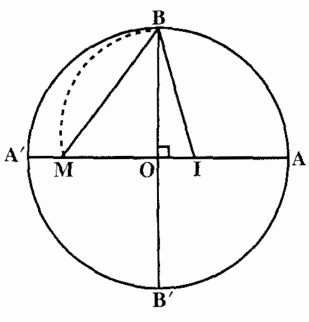
بنابراین، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:

$$AC = \sqrt{AB^۲ + (۲AB)^۲} = AB\sqrt{۵}$$

پس
$$BD = AB \times \frac{۲}{۱ + \sqrt{۵}} = \frac{AB}{۲}(\sqrt{۵} - ۱)$$

که طول ضلع ده ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع AB است. AD که عبارت است از وتر مثلثی که یک ضلع آن $C_{۱۰}$ و ضلع دیگرش شعاع دایره می‌باشد. اندازهٔ $C_۵$ را نشان می‌دهد.

۱۰۰۴. ۱. اگر R شعاع دایره باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBI داریم:



$$BI^۲ = R^۲ + \frac{R^۲}{۴} = \frac{۵R^۲}{۴}$$

پس
$$BI = \frac{R\sqrt{۵}}{۲}$$

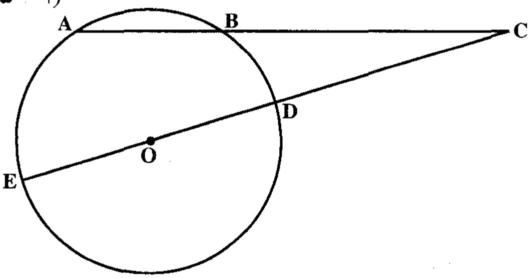
و چون
$$IM = BI$$

بنابراین : $OM = MI - OI = \frac{R\sqrt{۵}}{۲} - \frac{R}{۲} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} - ۱) = C$

۲. BM وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ آن، یکی $C_{۱۰}$ و دیگری شعاع دایره یا $C_۶$ است. بنابراین، BM مساوی با $C_۵$ می‌باشد.

۱۰۰۵. می‌دانیم که $C_{۱۰} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} - ۱)$. بنابراین، کافی است، ثابت کنیم که :

$CD = R(\sqrt{۵} - ۱)$



از نقطهٔ C دو خط قاطع با دایره رسم شده است.

بنابراین : $CA.CB = CD.CE$

امّا $CA = ۲C_۴ = ۲R\sqrt{۲}$ و $AB = C_۴ = R\sqrt{۲}$

و $CE = (CD + ۲R)$

پس داریم : $CD(CD + ۲R) = ۴R^۲$ و یا $CD^۲ + ۲R \times CD - ۴R^۲ = ۰$

ریشهٔ مثبت این معادله عبارت است از $CD = R(\sqrt{۵} - ۱)$ و قضیه ثابت است.

۱۰۰۷. داریم :

$\overline{AI}^۲ = \overline{AO}^۲ + \overline{OI}^۲ = R^۲ + (\frac{R}{۲})^۲ = \frac{۵R^۲}{۴}$ پس $AI = \frac{R}{۲}\sqrt{۵}$

و $C_{۱۰} = AM = AI - IM = \frac{R}{۲}\sqrt{۵} - \frac{R}{۲} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} - ۱)$

$C'_{۱۰} = AM' = AI + IM' = \frac{R}{۲}\sqrt{۵} + \frac{R}{۲} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵} + ۱)$

محاسبهٔ $r_{۱۰}$ و $r'_{۱۰}$: از دستور $r^۲ = R^۲ - \frac{C^۲}{۴}$ نتیجه می‌شود :

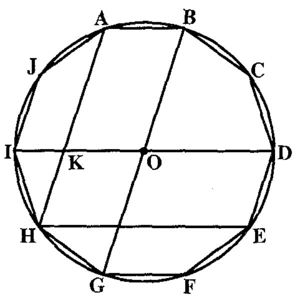
$$(r_{۱۰})^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۱۶}(\sqrt{۵} - ۱)^۲ = \frac{R^۲}{۱۶}[۱۶ - (۵ - ۲\sqrt{۵} + ۱)] = \frac{R^۲}{۱۶}(۱۰ + ۲\sqrt{۵})$$

$$(r'_{۱۰})^۲ = R^۲ - \frac{R^۲}{۱۶}(\sqrt{۵} + ۱)^۲ = \frac{R^۲}{۱۶}(۱۰ - ۲\sqrt{۵})$$

پس: $r_{۱۰}=\frac{R}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$ و $C_{۱۰}=\frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$

$r'_{۱۰}=\frac{R}{۴}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}$ و $C'_{۱۰}=\frac{R}{۲}(\sqrt{۵}+۱)$

۲.۳.۹.۵. رابطهٔ بین ضلعها

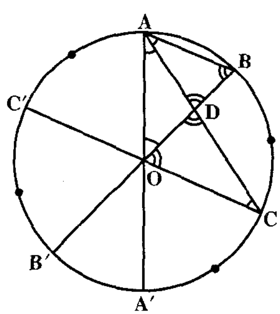


۱۰۰۸. به شکل روبه‌رو توجه کنید. قطر IOD با ضلع AB از ده ضلعی ساده و با ضلع HE از ده ضلعی ستاره‌ای، موازی است. به‌همین ترتیب، قطر BOG با ضلعهای DE و AH موازی است. بنابراین، چهارضلعیهای ABOK و DEHK متوازی‌الاضلاعند و داریم:

$AB = KO$ و $HE = KD$

یعنی: $HE - AB = KD - KO = OD$

که همان شعاع دایرهٔ محیطی ده ضلعی است.



۱۰۰۹. ضلع ده ضلعی منتظم محدب را $AB = C_{۱۰}$ و ضلع ده ضلعی منتظم ستاره‌ای را $AC = C'_{۱۰}$ می‌نامیم و قطرهای AA'، BB' و CC' را رسم می‌کنیم و فصل مشترک AC و BB' را D و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ را α می‌نامیم. ($\alpha = ۳۶°$)

نظر به خواص زاویه‌های مرکزی و محاطی و داخل و خارج دایره داریم:

$$A\hat{O}B = A'\hat{A}C = A\hat{C}C' = B\hat{A}C = \alpha$$

$$B\hat{O}C = A\hat{B}B' = A\hat{D}B = C\hat{D}B' = ۲\alpha$$

در نتیجه دو مثلث ABD و COD متساوی‌الساقین هستند و داریم:

$CD = CO$ و $AD = AB$

امّا $AC - AD = CD$ پس $AC - AB = CO$

یعنی: $C'_{۱۰} - C_{۱۰} = R$

از طرف دیگر دو مثلث متساوی‌الساقین ADO و AOC متشابه‌اند. زیرا زاویه‌های

مجاور به قاعدهٔ هر یک از آنها α است. پس :

$$\frac{AD}{AO}=\frac{AO}{AC} \quad \text{و یا} \quad AB\times AC=\overline{AO}^{۲}$$

یعنی :
$$C_{۱۰}\times C'_{۱۰}=R^{۲}$$

نظر به قضیهٔ بالا ترسیم ضلع ده ضلعیهای منتظم محدب و ستاره‌ای محاط در دایرهٔ به شعاع R منجر به مسألهٔ ترسیم دو قطعه خط که تفاضل آنها R و واسطهٔ هندسی آنها R است، می‌شود.

۴.۹.۵. قطر

۱.۴.۹.۵. اندازهٔ قطر

۱۰۱۰. اندازهٔ کوچکترین قطر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که دو ساق آن $C_{۱۰}$ و زاویه‌های مجاور به قاعده‌اش ۱۸° می‌باشند که با معلوم بودن $C_{۱۰}$، اندازهٔ این قطر قابل محاسبه است.

۵.۹.۵. پاره‌خط

۱.۵.۹.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۱۰۱۱. قطرهای AOF و CMOH را رسم می‌کنیم. مثلث AOM متساوی‌الساقین است، زیرا :

$$A\hat{O}M=\frac{۴\times ۳۶^\circ}{۲}=۷۲^\circ$$

$$A\hat{M}O=\frac{۴\times ۳۶^\circ}{۲}=۷۲^\circ$$

بنابراین، $AM=AO=R$ است.

۲.۵.۹.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۰۱۲. زاویه‌های DCM و DMC برابرند ؛ همچنین زاویه‌های M و O برابر می‌باشند. بنابراین مثلثهای CDM و MOA متساوی‌الساقین هستند. بنابراین :

$$AD=AO+CD$$

۶.۹.۵. شعاع دایره

۱.۶.۹.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۱۰۱۳. می‌دانیم که $S_n = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$

از آن‌جا داریم :

$$320 \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \times 10 R^2 \sin 36^\circ$$

$$\Rightarrow 160 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 5R^2 \sin 36^\circ$$

$$\Rightarrow 80 \sin 36^\circ = 5R^2 \sin 36^\circ \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

۷.۹.۵. محیط

۱.۷.۹.۵. اندازهٔ محیط

۱۰۱۴. داریم : $C_{10} = 2R \sin 18^\circ \Rightarrow$

$$C_{10} = 2 \times 18 \times \sin 18^\circ = 36 \sin 18^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = 9(\sqrt{5} - 1)$$

$$\text{محیط} = 2P = 10 \times 36 \times 9(\sqrt{5} - 1) = 3240(\sqrt{5} - 1)$$

۸.۹.۵. مساحت

۱.۸.۹.۵. اندازهٔ مساحت

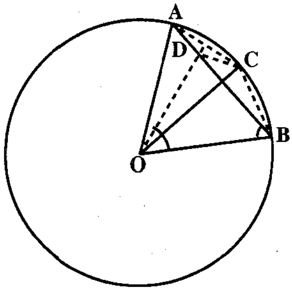
۱۰۱۵. داریم : $a_5 = \sqrt{R^2 - \frac{C_5^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}(1 - 2\sqrt{5})} = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1)$

$$S_5 = \frac{5C_5 \times a_5}{2} = \frac{5R^2}{16}(\sqrt{5} - 1) \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$a_{10} = \sqrt{R^2 - \frac{C_{10}^2}{4}} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow S_{10} = 10 \times \frac{1}{2} \times a_{10} \times C_{10}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{5R^2}{8}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

۹.۹.۵. رابطه‌های متری



۱۰۱۶. ۱. نیمساز OD عمود منصف ضلع AC است. پس مثلث ADC متساوی‌الساقین است و چون در یک زاویه با مثلث ABC مشترک است، پس این دو مثلث متشابه‌اند. و به‌همین ترتیب، مثلث AOB متساوی‌الساقین و زاویه‌های آن ۷۲ ، ۵۴ و ۵۴ درجه‌اند و در مثلث ODB نیز $O\hat{B}D = ۵۴^\circ$ و $D\hat{O}B = ۳۶^\circ + \frac{۳۶^\circ}{۲} = ۵۴^\circ$.

پس این مثلث نیز متساوی‌الساقین است و با مثلث ACB متشابه می‌باشد.

۲. از تشابه دو مثلث ACB و ADC نتیجه می‌شود :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$$ و یا (۱) $$AC^۲ = AB \times AD$$

و نیز از تشابه دو مثلث AOB و BOD نتیجه می‌شود : $\frac{AB}{R} = \frac{R}{BD}$ و یا

$$R^۲ = AB \times BD \quad (۲)$$

از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$AC^۲ + R^۲ = AB(AD + BD) = AB^۲$$

و یا

$$AB^۲ - AC^۲ = R^۲$$

۱۰.۹.۵. شکلهای ایجاد شده

۱۰۱۸. $C_۳$ و $C_{۱۰}$ را برحسب R حساب کنید.

۱۱.۹.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۲۰. دایره‌ای را درنظر می‌گیریم که، محیط آن، به ۹۹ کمان برابر تقسیم شده باشد. در بین نقطه‌های پایانی این کمانها، ۱۰ نقطه را نشان می‌گذاریم که دایره را به ۱۰ کمان تقسیم کرده و، درضمن، طولهای این کمانها، برابر همان ۱۰ عددی باشد که در رأسهای ده‌ضلعی اوّل قرار داده‌ایم (و البته، با همان ردیف). به‌همین ترتیب، دایرهٔ دوم را، برای

ده ضلعی دوم می‌سازیم. اکنون، دایرهٔ دوم را، روی دایرهٔ اوّل طوری قرار می‌دهیم که نقطه‌های تقسیم آنها، بر یکدیگر قرار گیرند و، سپس، ۹۹ دوران آن را به‌اندازهٔ مضربهای $\frac{۲\pi}{۹۹}$ درنظر می‌گیریم. اگر بعد از هر دوران، بیش از یک نقطهٔ نشان‌دار دایرهٔ اوّل بر نقطهٔ نشان‌داری از دایرهٔ دوم قرار نگیرد، آن وقت، در مجموع، بیش از ۹۹ انطباق پیدا نمی‌کنیم که ممکن نیست، زیرا روشن است که تعداد همهٔ این انطباقها، باید درست برابر ۱۰۰ باشد. یعنی، دست‌کم در یکی از این دورانها، باید لااقل دو نقطهٔ نشان‌دار دایرهٔ اوّل بر دو نقطهٔ نشان‌دار دایرهٔ دوم منطبق باشد؛ طول کمانهای بین این دو نقطه، در دو دایره یکی است و این، همان مجموع چند عدد پشت سرهم است.

۵.۱۰. رابطه‌های متری در ۱۱ضلعی منتظم، ۱۲ضلعی منتظم، ...

۵.۱۰.۲. زاویه

۵.۱۰.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۱۰۲۱. داریم:

۹۰° = اندازهٔ هر زاویهٔ چهارضلعی منتظم

۱۲۰° = اندازهٔ هر زاویهٔ شش ضلعی منتظم

۱۳۵° = اندازهٔ هر زاویهٔ هشت ضلعی منتظم

۱۵۰° = اندازهٔ هر زاویهٔ دوازده ضلعی منتظم

۱۰۲۲. ۴ قائمه.

۵.۱۰.۳. ضلع

۵.۱۰.۳.۱. اندازهٔ ضلع دوازده ضلعی منتظم

۱۰۲۳. داریم:

$$C'_n = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$C'_{۱۲} = ۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲} = ۲R\tan۱۵^\circ = ۲R(۲-\sqrt{۳}) = ۲(۲-\sqrt{۳})R$$

۵.۱۰.۳.۲. اندازهٔ ضلع پانزده ضلعی منتظم

۱۰۲۴. در چهارضلعی ACBE داریم:

$$AC.BE + AE.BC = AB.CE$$

$$AC = C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1) \text{ و } BE = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

$$CE = \sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{2}(6-2\sqrt{5})} = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \Rightarrow BC = C_{10}$$

$$= \frac{R}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})$$

۵.۱۰.۳.۳. اندازهٔ ضلع ۱۶ ضلعی منتظم

۱۰۲۵. می‌دانیم $C_6 = R$ و $C_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$C_{16} = \sqrt{2R(R - \sqrt{R^2 - \frac{(2-\sqrt{2})R^2}{4}})}$$

$$C_{16} = \sqrt{2R(R - \sqrt{\frac{R^2(\sqrt{2}+2)}{4}})}$$

$$C_{16} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$C_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

۵.۱۰.۳.۴. اندازهٔ ضلع ۲۰ ضلعی منتظم

۱۰۲۶. داریم:

$$C_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - C_n^2})}$$

$$C_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \Rightarrow C_{20} = \frac{R}{2}\sqrt{2(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$$

۵.۱۰.۴. قطر

۵.۱۰.۴.۱. اندازهٔ قطر

۱۰۲۷. این قطر، برابر قطر دایرهٔ محیطی ۱۲ ضلعی منتظم است. بنابراین، داریم:

$$S_{12} = 6R^2 \sin 30^\circ = 3R^2$$

$$243 = 3R^2 \Rightarrow R^2 = 81 \Rightarrow R = 9 \Rightarrow d = 2R = 18\text{cm}$$

۵.۱۰.۵. پاره‌خط

۱.۵.۱۰.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۱۰۲۸. از A به M، و از C به G وصل می‌کنیم. در مثلثهای AMN و NCG داریم:

$$CG = R_۳ = \frac{R\sqrt{۳}}{۲} \quad و \quad AM = C_{۱۲} = ۲R(\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}) = \frac{R}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

$$A\hat{N}M = C\hat{N}G = ۷۵^\circ \quad و \quad \hat{C} = \hat{A} = ۷۵^\circ \Rightarrow NG = CG = \frac{R\sqrt{۳}}{۲} \quad و$$

$$MA = NM = \frac{R}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

برای محاسبهٔ AC و AN از رابطهٔ سینوسها در مثلثهای ACG و AMN استفاده می‌کنیم.

$$\frac{NC}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\frac{R\sqrt{۳}}{۲}}{\sin ۷۵^\circ} \Rightarrow NC = \frac{R}{۴}(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}) \quad و$$

$$\frac{NA}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\frac{R}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{\sin ۷۵^\circ} \Rightarrow NA = \frac{R}{۴}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})^۲$$

۶.۱۰.۵. شعاع دایره

۱.۶.۱۰.۵. اندازهٔ شعاع دایره

۱۰۲۹. داریم:

$$\text{محیط ۱۲ ضلعی منتظم} = ۲P = ۱۲ \times C_{۱۲} = ۱۲ \times ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲} = ۲۴R\sin ۱۵^\circ$$

$$\Rightarrow ۸(\sqrt{۶}-\sqrt{۲}) = ۲۴R(\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}) \Rightarrow R = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

۷.۱۰.۵. محیط

۱.۷.۱۰.۵. اندازهٔ محیط

۱۰۳۰. داریم:

$$S_{۱۲} = \frac{۱}{۲} \times ۱۲R^۲ \sin\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲}$$

از آن‌جا:

$$۷۵ = ۶R^۲ \sin ۳۰^\circ \Rightarrow R^۲ = ۲۵ \Rightarrow R = ۵cm$$

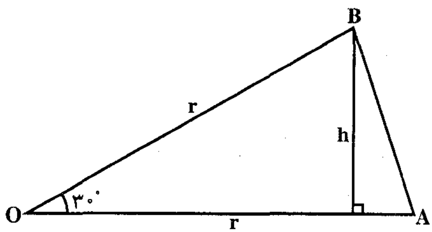
$$C_{۱۲} = ۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{۱۲} \Rightarrow C_{۱۲} = ۲\times ۵\times \sin ۱۵^\circ = ۱۰\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\text{محیط ۱۲ ضلعی منتظم} = ۱۲\times ۱۰\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} = ۳۰(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\text{cm}$$

۵.۱۰.۸. مساحت

۵.۱۰.۸.۱. اندازهٔ مساحت

۱۰۳۱. $S_{۱۲} = \frac{۳}{۲}a^{۲}$



۱۰۳۲. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا :
دوازده ضلعی منتظم را می‌توان به ۱۲ مثلث برابر، نظیر مثلث OAB (که در آن AB ضلعی از دوازده ضلعی است) تقسیم کرد.

$$\text{مساحت } O\overset{\Delta}{A}B = \frac{۱}{۲}rh = \frac{۱}{۲}r\times r\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}r\times\frac{r}{۲} = \frac{r^{۲}}{۴}$$

$$\text{مساحت دوازده ضلعی} = ۱۲\times\frac{r^{۲}}{۴} = ۳r^{۲}$$

۵.۱۰.۹. رابطه‌های متری

۱۰۳۴. AK و GH را رسم می‌کنیم. در مثلث NGH داریم :

$\hat{N} = ۱۵^\circ$ و $N\hat{H}G = ۶۰^\circ$ و

$$HG = C_{۱۲} = ۲R\sin ۱۵^\circ = ۲\times ۸\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} = ۴(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\text{cm}$$

$$\frac{NG}{\sin ۶۰^\circ} = \frac{HG}{\sin ۱۵^\circ} \Rightarrow NG = ۸\sqrt{۳}\text{cm} \Rightarrow NA = ۱۶+۸\sqrt{۳}\text{cm}$$

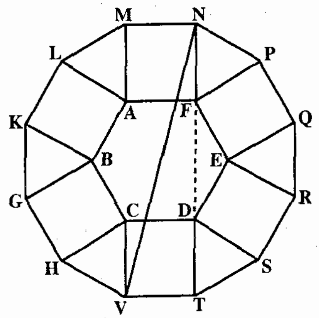
از آن‌جا داریم :

$$PN(O) = NG.NA = ۸\sqrt{۳}(۱۶+۸\sqrt{۳}) = ۱۲۸\sqrt{۳}+۱۹۲$$

۵.۱۰.۱۰. ثابت کنید چندضلعی منتظم است

۵.۱۰.۱۰.۱. ثابت کنید چندضلعی، ۱۲ ضلعی منتظم است

۱۰۳۵. شش ضلعی منتظم ABCDEF را درنظر گرفته، مربعهای داده شده را می‌سازیم تا دوازده ضلعی ... LKGHVTS حاصل شود.



۱. ملاحظه می‌کنیم که برای مثال مثلث AML متساوی‌الاضلاع است، زیرا هر زاویه از شش ضلعی منتظم °۱۲۰ است.

پس $M\hat{A}L = ۳۶۰^\circ - (۹۰^\circ + ۹۰^\circ + ۱۲۰^\circ) = ۶۰^\circ$

و چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس متساوی‌الاضلاع می‌باشد و بنابراین، داریم: $LM = AL = LK = ...$ و هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی ۱۵۰ درجه است. بنابراین، دوازده ضلعی مزبور منتظم است. مرکز این دوازده ضلعی، همان مرکز شش‌ضلعی است.

۲. هرگاه دو رأس N و V را که شش ضلع مابین آنها فاصله است به هم وصل کنیم، NV قطر دایرهٔ محیطی، و مساوی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یک ضلع آن a، ضلع شش ضلعی، و یک ضلع آن NT یا $۲a + a\sqrt{۳}$ می‌باشد، پس داریم:

$$۴R^۲ = a^۲ + a^۲(۲+\sqrt{۳})^۲ = a^۲(۸ + ۴\sqrt{۳})$$

$$a = C_{۱۲} = R\sqrt{۲-\sqrt{۳}} \text{ و } a^۲ = \frac{R^۲}{۲+\sqrt{۳}}$$

شعاع دایرهٔ محاطی نصف طول NT است. بنابراین:

$$r = \frac{۲a + a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{R}{۲}(۲+\sqrt{۳})(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})$$

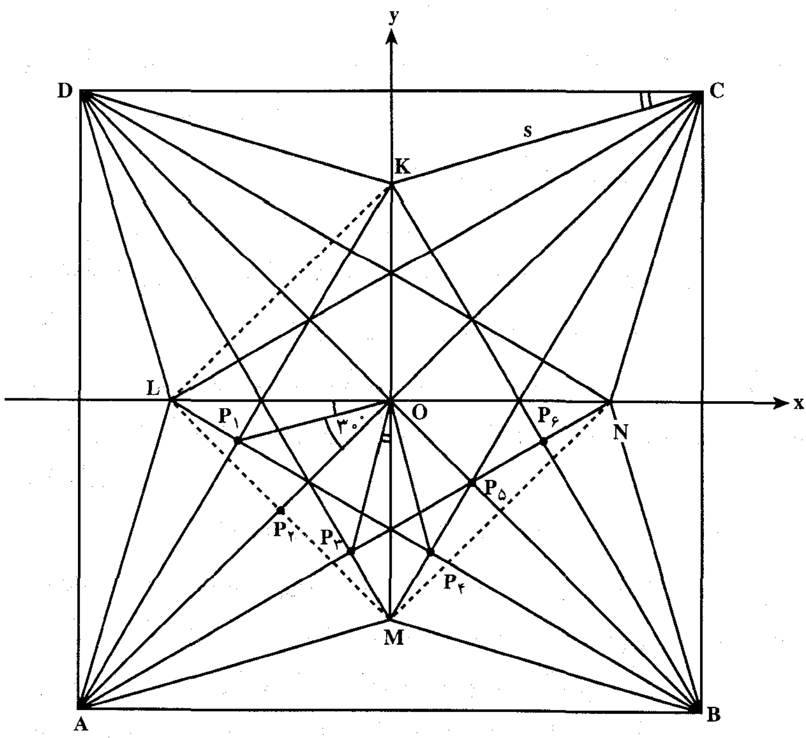
و یا

$$r = \frac{R}{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

۱۰۳۶. راه حل اوّل. در شکل، O مرکز مربع است. قطرهای AC و BD محورهای تقارنند، و خطهای گذرنده از M، K و از L، N نیز چنینند. دوران حول O و به اندازهٔ هر مضرب 90° نیز شکل را بی‌تغییر باقی می‌گذارد. بنابراین کافی است که در قسمتی از صفحه که توسط شعاعهای OA و OL محدود است، کارمان را انجام دهیم. در این صورت تقارن محور نسبت به OA، بعد OM و سرانجام LN مابقی شکل را به‌وجود می‌آورد. در شکل وسطهای : AK، LM، AN و... را بترتیب با : P_1، P_2، P_3 و... نمایش داده‌ایم.

از آن‌جا که $AK = AD$ و $D\hat{A}K = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ است، داریم :

$$A\hat{D}K = A\hat{K}D = 75^\circ$$



در این صورت مثلثهای متساوی‌الساقین مساوی CDK، BCN، ABM و DAL دارای زاویهٔ قاعدهٔ : $75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ اند، و نتیجه می‌شود که مثلثهای مساوی : AML، BNM، CKN و DLK متساوی‌الاضلاعند. طول ضلعهایشان را با S نمایش

می‌دهیم. OP_1 پاره‌خط واصل وسطهای ضلعهای AK و AC در مثلث AKC موازی KC و دارای طول : $\frac{1}{2}KC = \frac{1}{2}S$ است. بنا به تقارن، $OL \| DC$، بنابراین :

$$L\hat{O}P_1 = D\hat{C}K = 15^\circ$$

است. $A\hat{O}L = 45^\circ$ بنابراین : $P_1\hat{O}P_2 = 30^\circ$ می‌باشد. پاره‌خطهای AO و BO متعامدند ؛ BO زاویهٔ MBN را نصف می‌کند و بنابراین بر MN عمود است. درنتیجه : $MN \| AO$ و $OP_2 = MP_5 = \frac{1}{2}S$ است، و به‌عبارت دیگر $OP_1 = OP_2$ می‌باشد.

اکنون، بنابه تقارن محوری نسبت به خط OA داریم :

$$OP_3 = OP_1 \text{ و } P_2\hat{O}P_3 = 30^\circ \text{ و } P_3\widehat{OM} = 15^\circ$$

بعد تقارن محوری نسبت به خط OM را انجام داده OP_4، OP_5 و OP_6 را به فهرست پاره‌خطهای مساوی، و :

$$P_3\hat{O}P_4 (= 2.15^\circ) = P_4\hat{O}P_5 = P_5\hat{O}P_6$$

را به فهرست زاویه‌های 30° می‌افزاییم.

سرانجام تقارن نسبت به LN باقیماندهٔ شکل را تولید می‌کند، و به این ترتیب دوازده نقطهٔ : P_1، P_2، ...، P_{12} را، واقع بر دایرهٔ به شعاع S/2 به‌طوری که کمان هر دو نقطهٔ متوالی 30° است، داریم. این نقطه‌ها، دوازده رأس یک دوازده ضلعی منتظمند.

راه حل دوم. O مرکز مربع را بر مبدأ یک دستگاه مختصات طوری قرار می‌دهیم که نقطه‌های :

$$A = (-2,-2) \text{ و } B = (2,-2) \text{ و } C = (2,2) \text{ و } D = (-2,2)$$

رأسهای مثلث باشند. توجه داشته باشید که B، C و D را می‌توان از A با دورانهای متوالی به اندازهٔ زاویهٔ 90° در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت حول مبدأ به‌دست آورد.

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABK با ضلع به طول ۴، برابر $2\sqrt{3}$ است، بنابراین، مختصات نقطهٔ K عبارت از : $K = (0, 2\sqrt{3} - 2)$ می‌باشند، شکل را ملاحظه کنید.

دورانهای متوالی به اندازهٔ 90° حول O نقطهٔ K را به L، M و N می‌برد ؛ بنابراین :

$$K = (0, 2\sqrt{3} - 2) \text{ و } L = (2 - 2\sqrt{3}, 0)$$

$$M = (0, 2 - 2\sqrt{3}) \text{ و } N = (2\sqrt{3} - 2, 0)$$

مختصات $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ وسطهای بترتیب قطعه‌های : AK، LM و AN را با استفاده از میانگین مختصات نقطه‌های دو سر پاره‌خط محاسبه می‌کنیم. در این صورت به‌دست می‌آوریم :

$$P_۱ = (-۱, \sqrt{۳} - ۲) \text{ و } P_۲ = (۱ - \sqrt{۳}, ۱ - \sqrt{۳}) \text{ و } P_۳ = (\sqrt{۳} - ۲, -۱)$$

اما : $۰ > ۲ - \sqrt{۳}$ و $۰ > \sqrt{۳} - ۱$ است، بنابراین $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ در ربع سوم قرار دارند. ۹ وسط دیگر را می‌توان از $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ با دورانهای متوالی به اندازهٔ ۹۰° حول O به‌دست آورد. برای اثبات این که دوازده نقطهٔ وسط مورد بحث یک دوازده ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند، با توجه به تقارن، کفایت می‌کند که نشان دهیم که $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ متساوی‌الفاصله از Oاند و ضلعهای : $P_۱P_۲$ ، $P_۲P_۳$ و $P_۳P_۴$ از دوازده ضلعی مورد بحث دارای طول یکسانند ؛ در این‌جا $P_۴$ تصویر $P_۱$ تحت دوران ۹۰° است و در نتیجه مختصات : $P_۴ = (۲ - \sqrt{۳}, -۱)$ را داراست. (تساوی : $P_۱P_۲ = P_۲P_۳$ از تقارن نسبت به قطر ACی مربع نتیجه می‌شود.) به این مقصود با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه نائل می‌شویم :

$$OP_۱^۲ = ۱ + (\sqrt{۳} - ۲)^۲ = ۸ - ۴\sqrt{۳} \text{ و } OP_۲^۲ = ۲(۱ - \sqrt{۳})^۲ = ۸ - ۴\sqrt{۳} \text{ و}$$

$$OP_۳^۲ = (\sqrt{۳} - ۲)^۲ + ۱ = ۸ - ۴\sqrt{۳} \text{ و}$$

در حالی که :

$$P_۱P_۲^۲ = (\sqrt{۳} - ۲)^۲ + (۲\sqrt{۳} - ۳)^۲ = ۲۸ - ۱۶\sqrt{۳}$$

$$P_۳P_۴^۲ = (۲\sqrt{۳} - ۴)^۲ = ۲۸ - ۱۶\sqrt{۳}$$

این نشان می‌دهد که تمام نقطه‌های وسط مورد بحث فاصلهٔ : $۲(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$ از O دارند و تمام ضلعهای دوازده ضلعی دارای طول $۲\sqrt{۷} - ۴\sqrt{۳}$ می‌باشند.

تبصره. اثبات دیگر شامل در معرض سه دوران متوالی به زاویهٔ ۳۰° قرار دادن بردار $P_۱$ ، برای مثال : با ضرب آن در ماتریس دوران :

$$R = \begin{pmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{۳}/۲ & -۱/۲ \\ ۱/۲ & \sqrt{۳}/۲ \end{pmatrix}$$

و بعد اثبات این که :

$$RP_۱ = P_۲ \, , \; R^۲P_۱ = P_۳ \, , \; R^۳P_۱ = P_۴$$

برقرار می‌باشد، است.

۵.۱۰.۱۰.۲. ثابت کنید چندضلعی، ۱۸ ضلعی منتظم است

۱۰۳۷. ثابت کنید زاویه‌های برابر همچنین ضلعهای برابر دارد.

۵.۱۰.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۳۸. مجموعهٔ رأسهای ۲۰ ضلعی منتظم را، می‌توان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های رأسهای چهار پنج ضلعی منتظم درنظر گرفت. روشن است، در یکی از آنها، دست‌کم سه رأس نشان‌دار وجود دارد. تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، هر سه رأس دلخواه از یک پنج‌ضلعی منتظم، تشکیل یک مثلث متساوی‌الساقین می‌دهند.

۱۰۳۹. نمی‌توان. زیرا :

با رقم a، ۹ زوج تشکیل می‌شود (با هر یک از ۹ رقم بقیه). اگر بخواهیم، برای هر زوج، ضلعی از ۴۵ ضلعی را متناظر با آن داشته باشیم، باید α را دست‌کم در پنج رأس آن قرار داد. چون با ده رقم سر و کار داریم، بنابراین، برای جا دادن آنها، به ۵۰ رأس نیاز داریم. به این ترتیب، نمی‌توان رقمهای از ۰ تا ۹ را بترتیبی که مسأله خواسته است، قرار داد. از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، عددهای ۰، ۱، ...، n را می‌توان در رأسهای یک $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ ضلعی منتظم، طوری قرار داد که، برای هر دو عدد، ضلعی پیدا شود که این دو عدد در دو انتهای آن باشند.

۱۰۴۰. اگر شش عدد متوالی واقع بر رأسها را

$$a_k, a_{k+۱}, \ldots, a_{k+۵}$$

بنامیم، بعد از پنج دقیقه، به جای عدد a_k، عدد

$$a_{k-۵}a_{k+۱} + ۱۰a_{k+۲} + ۱۰a_{k+۳} + ۵a_{k+۴} - a_{k+۵}$$

خواهد بود. اگر همهٔ عبارتهای مشابه را جمع و جمله‌های بخشپذیر بر ۵ را در آنها، حذف کنیم، به‌دست می‌آید :

$$\sum_k (a_k - a_{k+۵}) = ۰$$

(در این‌جا $a_۱ = a_{۱۰۱}$، $a_۲ = a_{۱۰۲}$ و غیره). بنابراین، این مجموع بر ۵ بخشپذیر است.

۱۰۴۲. دو ضلع روبه‌رو را در ۴۰۰ ضلعی درنظر می‌گیریم. روشن است که آنها را می‌توان با زنجیره‌ای از متوازی‌الاضلاعها به هم وصل کرد. اکنون، دو ضلع روبه‌روی دیگر را در نظر می‌گیریم که بر دو ضلع انتخابی قبلی عمود باشند و آنها را هم، با زنجیره‌ای از

متوازی‌الاضلاعها به هم وصل می‌کنیم. این دو زنجیرهٔ متوازی‌الاضلاعها، یکدیگر را قطع می‌کنند و، بنابراین، به ناچار در برخورد خود با یکدیگر مستطیلی به‌وجود می‌آورند که ضلعهای آن، با همان چهار ضلع انتخاب شده در ۴۰۰ ضلعی موازی‌اند. از این گونه گروه‌های شامل چهارضلع، ۱۰۰ بار می‌توان در چند ضلعی انتخاب کرد، درضمن، مستطیلهای متناظر با آنها، بر هم منطبق نیستند.

۱۰۴۳. ۱۹۷۶

همهٔ این نقطه‌های علامتگذاری شده، به جز نقطهٔ O (مرکز ۱۹۷۶ ضلعی) روی محیط ۹۸۷ دایرهٔ به مرکز O، و روی هریک از ۱۹۷۶ نقطه، قرار دارد. هر دایرهٔ دیگر γ، هریک از این ۹۸۷ دایره را در دو نقطه قطع می‌کند؛ به‌جز این نقطه‌های برخورد، ممکن است نقطهٔ O هم (که یکی از نقطه‌های علامت‌دار است) روی محیط دایرهٔ γ قرار گیرد. بنابراین، روی چنین دایره‌ای، بیش از $۱+۲\times۹۸۷$، یعنی ۱۹۷۵ (از نقطه‌های مورد نظر ما) نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۵.۱۰.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴۴. داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}(۲P)\times r_n \Rightarrow ۲۲۵=\frac{۱}{۲}(۶۰)\times r_n$$

$$\Rightarrow r_n=۷/۵ \qquad S=\frac{۱}{۲}n.r_n \Rightarrow ۲۲۵=\frac{۱}{۲}n\times۷/۵\Rightarrow n=۶۰$$

۵.۱۱. صفحه‌بندی

۱۰۴۵. اثبات. راه اوّل. فرض می‌کنیم x تعداد ضلعهای هرچندضلعی و y تعداد چندضلعیهای با هم آینده در هر رأس باشد. در این صورت دو عبارت مربوط به اندازهٔ هر زاویه در یک رأس را می‌توان مساوی هم قرار داد:

$$\frac{\pi(x-۲)}{x}=\frac{۲\pi}{y}$$

$$\pi xy-۲\pi y=۲\pi x\Rightarrow xy-۲x-۲y=۰$$

به دو طرف، ۴ اضافه کرده‌ایم:

$$xy-۲x-۲y+۴=۴$$

$$(x-۲)(y-۲)=۴$$

در تجزیهٔ ۴ (با به‌حساب آوردن تغییر ترتیب عوامل) تنها سه طریق موجود است، و این سه، به سه صفحه‌بندی که قبلاً ذکر شده منجر می‌شوند.

صفحه‌بندی	y	x	y − ۲	x − ۲
شکل پ	۳	۶	۱	۴
شکل الف	۴	۴	۲	۲
شکل ب	۶	۳	۴	۱

صفحه‌بندیهای دیگری جز منتظم نیز وجود دارند. در این مورد چه نوع صفحه‌بندی دیگر می‌توانید کشف کنید؟ گاهی، تعریف صفحه‌بندی برای دربرگرفتن شکلهایی غیر از چندضلعیها نیز به‌کار رفته است.

راه دوم. در هر n ضلعی منتظم داریم:

$$\text{اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی} = \frac{(2n-4)\times 90^\circ}{n}$$

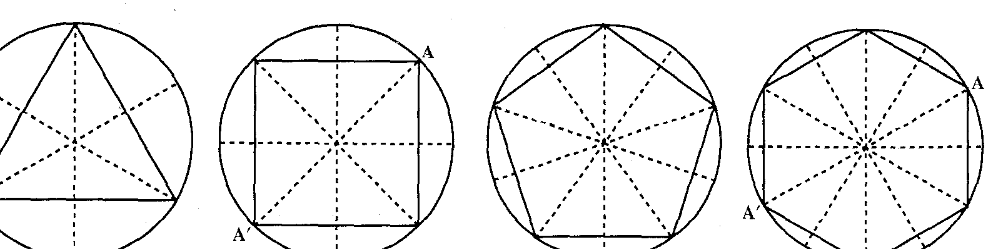
$$\text{تعداد چندضلعیهای مشترک در یک رأس } p: \frac{2n-4}{n}\times 90 p = 360^\circ$$

$$p = \frac{2n}{n-2} \Rightarrow n = 3, 4, 6$$

۱۰۴۸. ممکن است. شکل، سه مربع به ضلع واحد را نشان می‌دهد که مربعی به ضلع $\frac{5}{4}$ را پوشانده‌اند.

۱۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

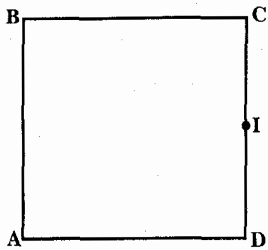
۱۰۵۴. خطهای راستی که مرکز یک چندضلعی منتظم را به رأسها یا به وسطهای ضلعهای آن وصل می‌کنند، محور تقارن چندضلعی هستند.



اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی منتظم زوج باشد (مانند مربع و شش‌ضلعی)؛
۱. نقطهٔ A' قرینهٔ یک رأس دلخواه مانند A نسبت به مرکز چندضلعی نیز یکی از رأسهای چندضلعی است زیرا اگر چنین نباشد، رأسهای دیگر که دو به دو نسبت به خط AA' قرینهٔ یکدیگر هستند عده‌شان فرد خواهد بود و این ممکن نیست.
۲. عمودمنصف هریک از ضلعهای عمودمنصف یک ضلع دیگر که قرینهٔ اولی نسبت به مرکز چندضلعی است نیز می‌باشد. بنابراین در این حالت nضلعی منتظم دارای n محور تقارن است که $\frac{n}{2}$ آنها از رأسها می‌گذرند و $\frac{n}{2}$ آنها بر ضلعها عمودند و بعلاوه در این حالت مرکز n ضلعی مرکز تقارن آن می‌باشد.

اگر عدهٔ ضلعهای چندضلعی منتظم فرد باشد (مانند مثلث متساوی‌الاضلاع و پنج‌ضلعی) هریک از محورهای تقارن چندضلعی از یک رأس می‌گذرند زیرا اگر چنین نباشد رأسها دو به دو نسبت به این محور قرینهٔ یکدیگرند و عدهٔ آنها زوج خواهد بود و این ممکن نیست. در این حالت نیز nضلعی منتظم دارای n محور تقارن است که هریک از این محورها از یک رأس می‌گذرند و بر یک ضلع عمود است. در این حالت مرکز nضلعی مرکز تقارن آن نیست. n هرچه باشد، اگر n ضلعی منتظم را حول مرکز آن به زاویه‌ای مساوی با زاویهٔ مرکزیش دوران دهیم، n ضلعی بر خودش منطبق می‌شود.

۱۰۵۵. میز مربعی به ضلع ۹۰ سانتیمتر را با $ABCD$ مشخص کرده‌ایم. دو رومیزی x و x' را در دسترس داریم. مسلماً دو گوشهٔ روبه‌رو از میز را هرگز نمی‌توان با یکی از رومیزیها پوشاند، زیرا قطر مربع از یک بیشتر است. پس باید دو گوشهٔ مجاور را با یک رومیزی پوشاند. مثلاً A و D را با x و B و C را با x'. ولی حالا وسط CD را که با I نشان داده‌ایم، چگونه بپوشانیم، درصورتی که فاصلهٔ آن از A یا B بیش از ۱ متر است. (با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس ۱/۰۰۶ متر بدست می‌آید.) پس امکان پوشاندن تمام سطح میز مربعی با دو رومیزی مورد بحث، ممکن نیست.



۱۰۵۶. ابتدا مساحت ۹ مربع را یک به یک پیدا می‌کنیم:

$$۱۸^۲ = ۳۲۴ \; ; \; ۱۵^۲ = ۲۲۵ \; ; \; ۱۴^۲ = ۱۹۶ \; ; \; ۱۰^۲ = ۱۰۰ \; ;$$

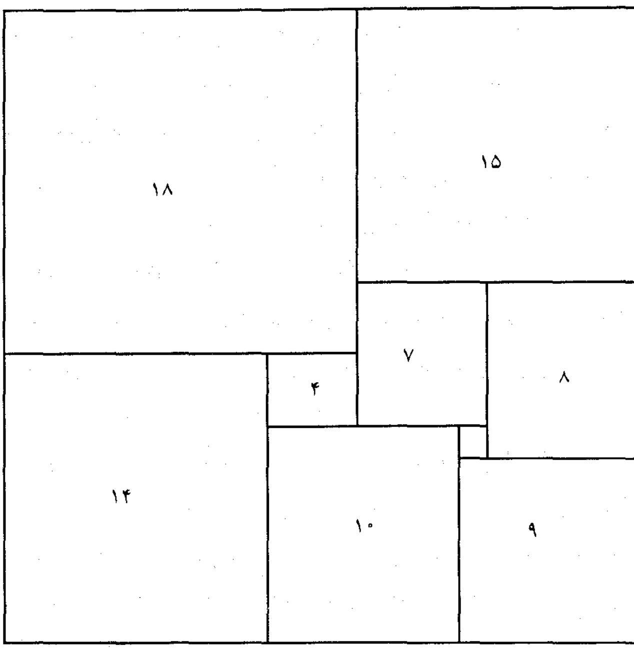
$$۹^۲ = ۸۱ \; ; \; ۸^۲ = ۶۴ \; ; \; ۷^۲ = ۴۹$$

$$۴^۲ = ۱۶ \; ; \; ۱^۲ = ۱$$

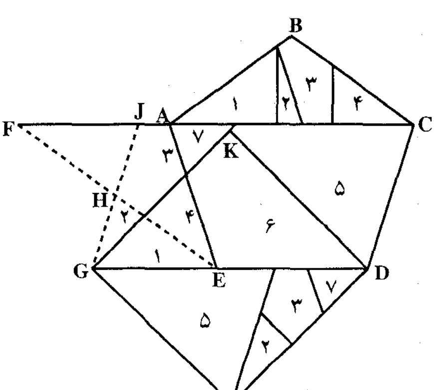
مساحت کل آنها (۱۰۵۶) را تجزیه می‌کنیم:

$$۱۰۵۶ = ۳۳ \times ۳۲$$

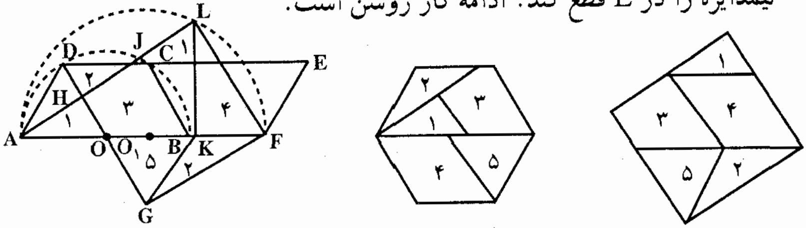
البته آن‌را به عاملهای ضرب دیگری هم می‌توان تجزیه کرد، ولی باید هیچ‌کدام کمتر از ۱۸ سانتیمتر نباشد. اما تنها راه حل صحیح در شکل دیده می‌شود و احتیاج به توضیح ندارد.



۱۰۵۷. قطر CA را امتداد می‌دهیم و AF = AB جدا می‌کنیم (شکل)؛ نقطه‌های F و E را به‌هم وصل می‌کنیم. ذوزنقهٔ FEDC هم‌ارز پنج‌ضلعی ABCDE می‌شود. از نقطهٔ H وسط FE خط GJ را موازی CD رسم می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع JGDC هم‌ارز پنج‌ضلعی اوّلیه می‌شود. بنابراین از این‌جا به بعد باید مثل مسألهٔ قبل عمل کرد.



۱۰۵۸. قبل از همه باید از دو نیمهٔ شش‌ضلعی، یعنی ABCD و BCEF، متوازی‌الاضلاع AFED را ساخت (شکل). به قطر پاره‌خط AF نیمدایره‌ای می‌کشیم؛ به مرکز F و شعاع مساوی واسطهٔ هندسی AF و ارتفاع متوازی‌الاضلاع، قوسی رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در L قطع کند. ادامهٔ کار روشن است.



۱۰۵۹. زاویه‌های داخلی آن هریک °۱۳۵ است و این عدد عامل °۳۶۰ نیست.

۱۰۶۰. a) ۱۲ رأس دوازده‌ضلعی را، به ۶ جفت رأس روبه‌رو تقسیم می‌کنیم: A_1A_7، A_2A_8، A_3A_9، ...، A_6A_{12}. در هر عمل، در هر زوج، تنها یکی از رأسها تغییر علامت می‌دهد. بنابراین، در جفتهای A_2A_8، ...، A_6A_{12}، بعد از عمل $(2k-1)$ام علامتهای مختلف و بعد از عمل $(2k)$ام علامتهای یکسان وجود خواهد داشت (در جفت A_1A_7، همه چیز برعکس است). به این ترتیب، حالتی پیش نمی‌آید که در جفت A_2A_8 علامتهای مختلف و در جفت A_3A_9 علامتهای یکسان داشته باشیم.

b) چهار گروه و در هر گروه سه رأس را در نظر می‌گیریم: $A_1A_5A_9$، $A_2A_6A_{10}$، $A_3A_7A_{11}$ و $A_4A_8A_{12}$ و مثل حالت قبل استدلال می‌کنیم. فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی هر گروه، در هر عمل تغییر می‌کند و در دو گروه $A_2A_6A_{10}$ و $A_3A_7A_{11}$ فرد یا زوج بودن تعداد عددهای منفی، یکسان است.

c) رأسها را به سه گروه $A_1A_4A_7A_{10}$، $A_2A_5A_8A_{11}$ و $A_3A_6A_9A_{12}$ تقسیم و به همان ترتیب استدلال می‌کنیم.

به‌طورکلی می‌توان روشن کرد، اگر در هر عمل k رأس متوالی یک n ضلعی را تغییر علامت دهیم، پشت سر هم چه وضعی پیش می‌آید. پاسخ این است: هر گروه ε_1، ε_2، ...، ε_n از عددهای $\varepsilon_k = \pm 1$ در رأسهای n ضلعی را با گروه d عدد

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d)$$

بترتیب زیر مقایسه می‌کنیم (d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک n و k است):

$$x_i = \varepsilon_i \varepsilon_{i+d} \cdots \varepsilon_{i+n-d}$$

در این صورت، دو گروه (ε_i) و (ε'_i)، تنها در حالتی به یکدیگر منجر می‌شوند که یا گروه‌های متناظر آنها (x_i) و (x'_i) یکی باشند و یا $\frac{k}{d}$ عددی زوج و گروه‌های (x_i) و (x'_i) متقابل باشند: $x_i = -x'_i$ (برای هر i).

فهرست منابع جلد ۷

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلداول. هاورد . و . ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابوت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اوّل. ساموئل‌ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلمکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس ـ نشر نام.
۶. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا . . . محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۷. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۸. المپیادهای ریاضی بین المللی. جلد اوّل. ساموئل‌ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلددوم. مورای کلمکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۱۰. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۱. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س. م. کوکس تیر ـ س. ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۳. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا.
۱۴. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۷. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول، دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۸. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.

۱۹. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۰. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۳. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۴. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۵. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۲۸. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۹. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرق.
۳۰. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۱. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۲. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۳. خطهای راست و منحنیها. ن. ب. واسی لی یو ـ و. ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۴. در پی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن‌صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۳۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان.

۴۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۳. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. سرگرمیهای هندسه.ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۵. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۴۶. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۷. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور. مؤسسهٔ انتشارات مدبر.
۴۸. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای. اس. کلمکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۹. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۵۰. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۱. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۵۲. مسأله های ریاضی آسان ولی ... گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۵۳. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۴. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ سید حسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز . ت. سالکیند ـ جیمز . م. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو ـ گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۹. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.

۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک، ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۲. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۶۳. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی- پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۴. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۶۵. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی ـ چنتسوف ـ یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۶۶. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۷. نابرابریهای هندسی. نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۶۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۷۱. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمد باقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۲. هندسهٔ تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۷۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۷۵. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. از انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۷۶. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه‌ده ـ حسین غیور ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۷۷. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۷۸. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۷۹. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۸۰. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۱. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. اِدوین. اِ. موئیز. ترجمهٔ دکترامیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۸۲. هندسهٔ موئیز ـ لانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۳. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.
۸۴. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

85. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR, F.G.M.
86. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE PAR Th.CARONNET.
87. EXERCICES DE GÉOMÉTRIE MODERNE. PAR G. PAPELIER.
88. GEOMETRY A HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE, GENE MURROW.
89. GIANT COLOUR BOOK OF MATHEMATICS BY IRVING ADLER
90. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRÉ.
91. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.
92. LES NOMBRES ET LEURS MYSTÉRES. PAR ANDRÉ WARUSFEL.
93. MATHEMATICS AROUND US.
94. MÉMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR A. PONT.
95. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS, W.R. KRICKENBERGER, HEIEN. R. PEARSON.
96. PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE PAR ANDRÉ VIEILLEFOND, P. TURMEL.
97. PRENTICE HALL GEOMETRY. BY, ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.
98. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY. BY BARNETT RICH.
99. RESOLUTION DES PROBLEMES ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE. PAR, E. J. HONNET.
100. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN Mc DONOUGH, ALVIN, J. HANSEN.