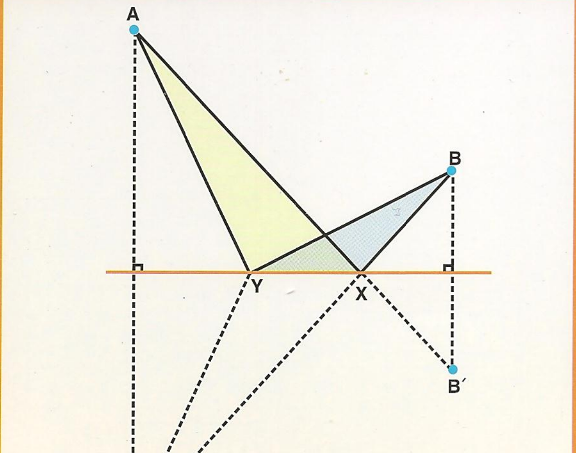
دایرة المعارف هندسه

۸

تبدیلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(انتقال، دوران، تقارن مرکزی، تقارن محوری و تجانس)



مؤلّف: محمد هاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرة المعارف هندسه

«جلد هشتم»

تبدیلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(انتقال، دوران، تقارن مرکزی، تقارن محوری و تجانس)

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ ـ
دایرةالمعارف هندسه / مؤلف محمدهاشم رستمی.ـ تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۹.
ج.: مصور.
ISBN 964-353-255-0 (ج. ۸).
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
از جلد دوم به بعد با عنوان دایرةالمعارف هندسه منتشر شده است.
مندرجات: ج.۱. ... ـ ج. ۸ تبدیلهای هندسی در هندسه مسطحه (انتقال، دوران، تقارن مرکزی، تقارن محوری و تجانس).
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

۲ د ۵ ر / QA ۵۰۱/۵ ۵۱۶/۰۰۷۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه

(جلد هشتم)

تبدیلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمدهاشم رستمی
طرح جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: زمستان ۱۳۷۹
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۰ ـ ۲۵۵ ـ ۳۵۳ ـ ۹۶۴
ISBN-964-353-255-0

فهرست

موضوع	صفحه	
پیشگفتار	۱۳	
	صورت	حل
تبدیل	۱۹	۲۰۸
بخش ۱. انتقال	۲۱_۳۹	۲۰۸_۲۳۲
۱.۱. تعریف و قضیه	۲۴	۲۰۸
۲.۱. انتقال در: نقطه، خط، زاویه	۲۵	۲۱۰
۱.۲.۱. بردار انتقال	۲۵	۲۱۰
۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۲۵	۲۱۰
۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۲۵	۲۱۰
۳.۲.۱. خطهای: همرس، موازی،...	۲۵	۲۱۰
۱.۳.۲.۱. خطها همرسند	۲۵	۲۱۰
۴.۲.۱. زاویه	۲۶	۲۱۱
۱.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه	۲۶	۲۱۱
۵.۲.۱. پاره‌خط	۲۶	۲۱۱
۱.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۲۶	۲۱۱
۶.۲.۱. رابطه‌های متری	۴۶	۲۱۱
۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند	۲۷	۲۱۱
۸.۲.۱. رسم شکلها	۲۷	۲۱۲
۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۲۸	۲۱۴
۱۰.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی	۲۸	۲۱۴
۳.۱. انتقال در مثلث	۲۹	۲۱۴
۱.۳.۱. بردار انتقال	۲۹	۲۱۴
۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۲۹	۲۱۵
۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند	۲۹	۲۱۵
۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی، ...	۲۹	۲۱۵
۱.۳.۳.۱. خطها موازی‌اند	۲۹	۲۱۵
۴.۳.۱. زاویه	۳۰	۲۱۵
۱.۴.۳.۱. اندازهٔ زاویه	۳۰	۲۱۵
۵.۳.۱. پاره‌خط	۳۰	۲۱۵
۱.۵.۳.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۳۰	۲۱۵
۶.۳.۱. رابطه‌های متری	۳۰	۲۱۶
۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند	۳۱	۲۱۶
۸.۳.۱. رسم شکلها	۳۱	۲۱۶

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۳۱	۲۱۷
۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی	۳۲	۲۱۷
۴.۱. انتقال در چندضلعیها	۳۲	۲۱۷
۱.۴.۱. بردار انتقال	۳۲	۲۱۷
۲.۴.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۳۳	۲۱۸
۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند	۳۳	۲۱۸
۳.۴.۱. خطهای: همرس، موازی،...	۳۳	۲۱۸
۱.۳.۴.۱. خطها همرسند	۳۳	۲۱۸
۴.۴.۱. زاویه	۳۳	۲۱۸
۱.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها	۳۳	۲۱۸
۵.۴.۱. پاره‌خط	۳۴	۲۱۹
۱.۵.۴.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۳۴	۲۱۹
۲.۵.۴.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۳۴	۲۱۹
۶.۴.۱. رابطه‌های متری	۳۴	۲۲۰
۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند	۳۴	۲۲۰
۸.۴.۱. رسم شکلها	۳۴	۲۲۰
۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۳۵	۲۲۱
۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی	۳۵	۲۲۲
۵.۱. انتقال در دایره	۳۶	۲۲۳
۱.۵.۱. بردار انتقال	۳۶	۲۲۳
۲.۵.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۳۶	۲۲۴
۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند	۳۶	۲۲۴
۳.۵.۱. خطهای: همرس، موازی،...	۳۶	۲۲۴
۱.۳.۵.۱. خطها همرسند	۳۶	۲۲۴
۴.۵.۱. زاویه	۳۶	۲۲۴
۱.۴.۵.۱. اندازهٔ زاویه	۳۶	۲۲۴
۵.۵.۱. پاره‌خط	۳۷	۲۲۵
۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۳۷	۲۲۵
۶.۵.۱. رابطه‌های متری	۳۷	۲۲۵
۷.۵.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند	۳۷	۲۲۶
۸.۵.۱. رسم شکلها	۳۸	۲۲۶
۹.۵.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۳۸	۲۳۰
۱۰.۵.۱. مسأله‌های ترکیبی	۳۹	۲۳۱
بخش ۲. دوران	**۴۱ـ۶۵**	**۲۳۳ـ۲۸۵**
۱.۲. تعریف و قضیه	۴۴	۲۳۳

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۲.۲. دوران در: نقطه، خط، زاویه	۴۶	۲۴۲
۱.۲.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران	۴۶	۲۴۲
۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۴۶	۲۴۲
۱.۲.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند	۴۶	۲۴۲
۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها بر هم منطبقند	۴۷	۲۴۳
۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی....	۴۷	۲۴۴
۱.۳.۲.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۴۷	۲۴۴
۴.۲.۲. زاویه	۴۷	۲۴۵
۱.۴.۲.۲. اندازهٔ زاویه	۴۷	۲۴۵
۵.۲.۲. پاره‌خط	۴۸	۲۴۵
۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط	۴۸	۲۴۵
۶.۲.۲. رابطه‌های متری	۴۸	۲۴۶
۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند	۴۸	۲۴۶
۸.۲.۲. رسم شکلها	۴۸	۲۴۶
۹.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۴۹	۲۴۸
۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی	۴۹	۲۴۹
۳.۲. دوران در مثلث	۵۰	۲۵۰
۱.۳.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران	۵۰	۲۵۰
۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۵۱	۲۵۱
۱.۲.۳.۲. نقطه ثابت است	۵۱	۲۵۱
۳.۳.۲. خطهای: همرس، موازی....	۵۱	۲۵۱
۱.۳.۳.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۵۱	۲۵۱
۴.۳.۲. زاویه	۵۱	۲۵۲
۱.۴.۳.۲. اندازهٔ زاویه	۵۱	۲۵۲
۵.۳.۲. پاره‌خط	۵۲	۲۵۳
۱.۵.۳.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۵۲	۲۵۳
۶.۳.۲. رابطه‌های متری	۵۲	۲۵۴
۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها دوران‌یافتهٔ یکدیگرند	۵۳	۲۵۸
۸.۳.۲. رسم شکلها	۵۳	۲۵۸
۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۵۴	۲۶۱
۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی	۵۵	۲۶۳
۴.۲. دوران در چندضلعیها	۵۷	۲۶۹
۱.۴.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران	۵۷	۲۶۹
۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۵۷	۲۶۹
۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند	۵۷	۲۶۹

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۳.۴.۲. خطهای: همرس، موازی،...	۵۷	۲۶۹
۱.۳.۴.۲. خطها بر هم عمودند	۵۷	۲۶۹
۴.۴.۲. زاویه	۵۷	۲۷۰
۱.۴.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها	۵۷	۲۷۰
۵.۴.۲. پاره‌خط	۵۸	۲۷۰
۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۵۸	۲۷۰
۶.۴.۲. رابطه‌های متری	۵۸	۲۷۰
۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند	۵۸	۲۷۱
۸.۴.۲. رسم شکلها	۵۸	۲۷۱
۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۵۹	۲۷۴
۱۰.۴.۲.مسأله‌های ترکیبی	۵۹	۲۷۴
۵.۲. دوران در دایره	۶۱	۲۸۰
۱.۵.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران	۶۱	۲۸۰
۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۶۲	۲۸۱
۱.۲.۵.۲. نقطه ثابت است	۶۲	۲۸۱
۳.۵.۲. خطهای: همرس، موازی،...	۶۳	۲۸۲
۱.۳.۵.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۶۳	۲۸۲
۴.۵.۲. زاویه	۶۳	۲۸۲
۱.۴.۵.۲. اندازه زاویه	۶۳	۲۸۲
۵.۵.۲. پاره‌خط	۶۳	۲۸۳
۱.۵.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط	۶۳	۲۸۳
۶.۵.۲. رابطه‌های متری	۶۴	۲۸۳
۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند	۶۴	۲۸۳
۸.۵.۲. رسم شکلها	۶۴	۲۸۳
۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۶۴	۲۸۴
۱۰.۵.۲.مسأله‌های ترکیبی	۶۵	۲۸۵
بخش ۳. تقارن مرکزی	**۶۷ـ۹۰**	**۲۸۶ـ۳۱۲**
۱.۳. تعریف و قضیه	۷۰	۲۸۶
۲.۳. تقارن مرکزی در: نقطه، خط، زاویه	۷۲	۲۹۱
۱.۲.۳. مرکز تقارن	۷۲	۲۹۱
۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۷۲	۲۹۱
۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند	۷۲	۲۹۱
۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۷۳	۲۹۱
۱.۳.۲.۳. خطها بر هم عمودند	۷۳	۲۹۱
۴.۲.۳. زاویه	۷۳	۲۹۱

موضوع	صفحه صورت	صفحه حل
۳.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه	۷۳	۲۹۱
۳.۲.۵. پاره‌خط	۷۳	۲۹۲
۳.۲.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۷۳	۲۹۲
۳.۲.۶. رابطه‌های متری	۷۴	۲۹۲
۳.۲.۷. ثابت کنید شکلها قرینه مرکزی یکدیگرند	۷۴	۲۹۲
۳.۲.۸. رسم شکلها	۷۵	۲۹۴
۳.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۷۵	۲۹۴
۳.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی	۷۵	۲۹۴
۳.۳. تقارن مرکزی در مثلث	۷۷	۲۹۶
۳.۳.۱. مرکز تقارن	۷۷	۲۹۶
۳.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۷۸	۲۹۶
۳.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۷۸	۲۹۶
۳.۳.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند	۷۸	۲۹۶
۳.۳.۲.۳. نقطه روی خط است	۷۸	۲۹۶
۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۷۸	۲۹۷
۳.۳.۳.۱. خطها موازی‌اند	۷۸	۲۹۷
۳.۳.۴. زاویه	۷۹	۲۹۷
۳.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه	۷۹	۲۹۷
۳.۳.۵. پاره‌خط	۷۹	۲۹۸
۳.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۷۹	۲۹۸
۳.۳.۶. رابطه‌های متری	۷۹	۲۹۸
۳.۳.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند	۸۰	۲۹۹
۳.۳.۸. رسم شکلها	۸۰	۲۹۹
۳.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۸۰	۲۹۹
۳.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی	۸۱	۳۰۰
۳.۴. تقارن مرکزی در چندضلعیها	۸۲	۳۰۰
۳.۴.۱. مرکز تقارن	۸۲	۳۰۰
۳.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۸۲	۳۰۱
۳.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۸۲	۳۰۱
۳.۴.۲.۲. نقطه‌ها بر هم منطبقند	۸۲	۳۰۱
۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۸۲	۳۰۱
۳.۴.۳.۱. خطها همرسند	۸۲	۳۰۱
۳.۴.۳.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۸۳	۳۰۲
۳.۴.۴. زاویه	۸۳	۳۰۲
۳.۴.۴.۱. اندازهٔ زاویه	۸۳	۳۰۲

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۵.۴.۳. پاره‌خط	۸۳	۳۰۲
۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۸۳	۳۰۲
۶.۴.۳. رابطه‌های متری	۸۳	۳۰۲
۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها قرینه مرکزی یکدیگرند	۸۴	۳۰۵
۸.۴.۳. رسم شکلها	۸۴	۳۰۵
۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۸۵	۳۰۷
۱۰.۴.۳.مسأله‌های ترکیبی	۸۵	۳۰۷
۵.۳. تقارن مرکزی در دایره	۸۶	۳۰۷
۱.۵.۳. مرکز تقارن	۸۶	۳۰۷
۲.۵.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۸۶	۳۰۸
۱.۲.۵.۳. نقطه‌ها همخطند	۸۶	۳۰۸
۳.۵.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۸۷	۳۰۸
۱.۳.۵.۳. خطها موازی‌اند	۸۷	۳۰۸
۴.۵.۳. زاویه	۸۷	۳۰۸
۱.۴.۵.۳. اندازه زاویه	۸۷	۳۰۸
۵.۵.۳. پاره‌خط	۸۷	۳۰۹
۱.۵.۵.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۸۷	۳۰۹
۶.۵.۳. رابطه‌های متری	۸۸	۳۰۹
۷.۵.۳. ثابت کنید شکلها قرینه مرکزی یکدیگرند	۸۸	۳۱۰
۸.۵.۳. رسم شکلها	۸۹	۳۱۰
۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۸۹	۳۱۱
۱۰.۵.۳.مسأله‌های ترکیبی	۹۰	۳۱۲
بخش ۴. تقارن محوری	**۹۱_۱۳۳**	**۳۱۳_۳۷۹**
۱.۴. تعریف و قضیه	۹۴	۳۱۳
۲.۴. تقارن محوری در: نقطه، خط، زاویه	۱۰۸	۳۲۹
۱.۲.۴. محور تقارن	۱۰۸	۳۲۹
۲.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۱۰۸	۳۳۰
۱.۲.۲.۴. نقطه‌ها همخطند	۱۰۸	۳۳۰
۲.۲.۲.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند	۱۰۸	۳۳۱
۳.۲.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۰۸	۳۳۱
۳.۲.۴. خطهای: همرس، موازی،...	۱۰۹	۳۳۲
۱.۳.۲.۴. خط امتداد ثابتی دارد	۱۰۹	۳۳۲
۴.۲.۴. زاویه	۱۱۰	۳۳۶
۱.۴.۲.۴. اندازهٔ زاویه	۱۱۰	۳۳۶
۲.۴.۲.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها	۱۱۰	۳۳۷

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۴.۲.۵. پاره‌خط	۱۱۱	۳۳۷
۴.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۱۱۱	۳۳۷
۴.۲.۶. رابطه‌های متری	۱۱۱	۳۳۷
۴.۲.۷. ثابت کنید شکلها قرینه محوری یکدیگرند	۱۱۱	۳۳۸
۴.۲.۸. رسم شکلها	۱۱۲	۳۳۸
۴.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۱۴	۳۴۴
۴.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی	۱۱۴	۳۴۵
۴.۳. تقارن محوری در مثلث	۱۱۵	۳۴۶
۴.۳.۱. محور تقارن	۱۱۵	۳۴۶
۴.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۱۱۶	۳۴۷
۴.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۱۱۶	۳۴۷
۴.۳.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند	۱۱۶	۳۴۸
۴.۳.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۱۶	۳۴۸
۴.۳.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۱۱۶	۳۴۹
۴.۳.۳.۱. خطها همرسند	۱۱۶	۳۴۹
۴.۳.۳.۲. خطها بر هم عمودند	۱۱۷	۳۵۰
۴.۳.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۱۱۷	۳۵۰
۴.۳.۳.۴. خط نیمساز است	۱۱۷	۳۵۱
۴.۳.۴. زاویه	۱۱۸	۳۵۱
۴.۳.۴.۱. رابطه بین زاویه‌ها	۱۱۸	۳۵۱
۴.۳.۵. پاره‌خط	۱۱۸	۳۵۲
۴.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۱۱۸	۳۵۲
۴.۳.۶. رابطه‌های متری	۱۱۸	۳۵۲
۴.۳.۷. ثابت کنید شکلها قرینه محوری یکدیگرند	۱۱۸	۳۵۲
۴.۳.۸. رسم شکلها	۱۱۹	۳۵۳
۴.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۱۹	۳۵۶
۴.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی	۱۲۰	۳۵۶
۴.۴. تقارن محوری در چندضلعیها	۱۲۲	۳۶۰
۴.۴.۱. محور تقارن	۱۲۲	۳۶۰
۴.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۱۲۳	۳۶۰
۴.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۱۲۳	۳۶۰
۴.۴.۳. خطهای: همرس، موازی،...	۱۲۳	۳۶۱
۴.۴.۳.۱. خطها همرسند	۱۲۳	۳۶۱
۴.۴.۳.۲. خطها موازی‌اند	۱۲۳	۳۶۲
۴.۴.۴. زاویه	۱۲۳	۳۶۳

موضوع	صفحه: صورت	صفحه: حل
۱.۴.۴.۴. رابطه بین زاویه‌ها	۱۲۳	۳۶۳
۵.۴.۴. پاره‌خط	۱۲۴	۳۶۳
۱.۵.۴.۴. اندازهٔ پاره‌خط	۱۲۴	۳۶۳
۶.۴.۴. رابطه‌های متری	۱۲۴	۳۶۴
۷.۴.۴. ثابت کنید شکلها قرینه محوری یکدیگرند	۱۲۴	۳۶۴
۸.۴.۴. رسم شکلها	۱۲۴	۳۶۴
۹.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۲۵	۳۶۵
۱۰.۴.۴.مسأله‌های ترکیبی	۱۲۵	۳۶۵
۵.۴. تقارن محوری در دایره	۱۲۷	۳۶۹
۱.۵.۴. محور تقارن	۱۲۷	۳۶۹
۲.۵.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۱۲۸	۳۶۹
۱.۲.۵.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند	۱۲۸	۳۶۹
۲.۲.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۲۸	۳۶۹
۳.۵.۴. خطهای: همرس، موازی،...	۱۲۸	۳۷۰
۱.۳.۵.۴. خطها همرسند	۱۲۸	۳۷۰
۲.۳.۵.۴. خطها موازی‌اند	۱۲۹	۳۷۰
۳.۳.۵.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۱۲۹	۳۷۱
۴.۳.۵.۴. خط نیمساز است	۱۲۹	۳۷۱
۴.۵.۴. زاویه	۱۲۹	۳۷۲
۱.۴.۵.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها	۱۲۹	۳۷۲
۵.۵.۴. پاره‌خط	۱۳۰	۳۷۲
۱.۵.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط	۱۳۰	۳۷۲
۶.۵.۴. رابطه‌های متری	۱۳۰	۳۷۳
۷.۵.۴. ثابت کنید شکلها قرینه محوری یکدیگرند	۱۳۰	۳۷۴
۸.۵.۴. رسم شکلها	۱۳۱	۳۷۴
۹.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۳۱	۳۷۶
۱۰.۵.۴.مسأله‌های ترکیبی	۱۳۱	۳۷۶
بخش ۵. تجانس (تشابه مرکزدار)	**۱۳۵ـ۲۰۵**	**۳۸۰ـ۵۰۲**
۱.۵. تعریف و قضیه	۱۳۹	۳۸۰
۲.۵. تجانس در: نقطه، خط، زاویه	۱۶۴	۴۲۱
۱.۲.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس	۱۶۴	۴۲۱
۲.۲.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره،...	۱۶۵	۴۲۲
۱.۲.۲.۵. نقطه‌ها همخطند	۱۶۵	۴۲۲
۳.۲.۵. خطهای: همرس، موازی،..	۱۶۵	۴۲۳
۱.۳.۲.۵. خطها همرسند	۱۶۵	۴۲۳

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۴.۲.۵. زاویه	۱۶۶	۴۲۳
۱.۴.۲.۵. اندازهٔ زاویه	۱۶۶	۴۲۳
۵.۲.۵. پاره‌خط	۱۶۶	۴۲۳
۱.۵.۲.۵. اندازهٔ پاره‌خط	۱۶۶	۴۲۳
۲.۵.۲.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۱۶۶	۴۲۳
۶.۲.۵. رابطه‌های متری	۱۶۷	۴۲۴
۷.۲.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند	۱۶۷	۴۲۵
۸.۲.۵. رسم شکلها	۱۶۷	۴۲۵
۹.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۶۸	۴۲۶
۱۰.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی	۱۶۹	۴۲۷
۳.۵. تجانس در: مثلث، مثلث و دایره	۱۷۰	۴۲۹
۱.۳.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس	۱۷۰	۴۲۹
۲.۳.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۱۷۰	۴۳۰
۱.۲.۳.۵. نقطه‌ها همخطند	۱۷۰	۴۳۰
۲.۲.۳.۵. نقطه‌ها همدایره‌اند	۱۷۱	۴۳۴
۳.۳.۵. خطهای: همرس، موازی....	۱۷۲	۴۳۵
۱.۳.۳.۵. خطها همرسند	۱۷۲	۴۳۵
۲.۳.۳.۵. خطها موازی‌اند	۱۷۲	۴۳۷
۳.۳.۳.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۱۷۳	۴۳۸
۴.۳.۵. زاویه	۱۷۳	۴۳۸
۱.۴.۳.۵. اندازهٔ زاویه	۱۷۳	۴۳۸
۵.۳.۵. پاره‌خط	۱۷۳	۴۳۸
۱.۵.۳.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۱۷۳	۴۳۸
۶.۳.۵. رابطه‌های متری	۱۷۴	۴۳۹
۷.۳.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند	۱۷۴	۴۴۳
۸.۳.۵. رسم شکلها	۱۷۶	۴۴۴
۹.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۷۷	۴۴۹
۱۰.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی	۱۷۸	۴۵۱
۴.۵. تجانس در چندضلعیها	۱۸۳	۴۶۴
۱.۴.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس	۱۸۳	۴۶۴
۲.۴.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۱۸۴	۴۶۴
۱.۲.۴.۵. نقطه‌ها همخطند	۱۸۴	۴۶۴
۳.۴.۵. خطهای: همرس، موازی....	۱۸۴	۴۶۵
۱.۳.۴.۵. خطها همرسند	۱۸۴	۴۶۵
۴.۴.۵. زاویه	۱۸۴	۴۶۵

موضوع	صفحه: صورت	صفحه: حل
۵.۴.۴.۱. اندازهٔ زاویه	۱۸۴	۴۶۵
۵.۴.۵. پاره‌خط	۱۸۵	۴۶۶
۵.۴.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۱۸۵	۴۶۶
۵.۴.۶. رابطه‌های متری	۱۸۶	۴۶۶
۵.۴.۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند	۱۸۶	۴۶۶
۵.۴.۸. رسم شکلها	۱۸۷	۴۶۶
۵.۴.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۸۷	۴۶۸
۵.۴.۱۰.مسأله‌های ترکیبی	۱۸۸	۴۶۸
۵.۵. تجانس در دایره	۱۹۰	۴۷۵
۵.۵.۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس	۱۹۰	۴۷۵
۵.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره....	۱۹۰	۴۷۵
۵.۵.۲.۱. نقطه‌ها همخطند	۱۹۰	۴۷۵
۵.۵.۲.۲. نقطه‌ها متقابل قطری هستند	۱۹۰	۴۷۶
۵.۵.۳. خطهای: همرس، موازی....	۱۹۱	۴۷۶
۵.۵.۳.۱. خطها موازی‌اند	۱۹۱	۴۷۶
۵.۵.۳.۲. خط نیمساز است	۱۹۱	۴۷۸
۵.۵.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۱۹۱	۴۷۸
۵.۵.۳.۴. خط مماس بر دایره است	۱۹۳	۴۸۰
۵.۵.۴. زاویه	۱۹۳	۴۸۱
۵.۵.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها	۱۹۳	۴۸۱
۵.۵.۵. پاره‌خط	۱۹۴	۴۸۲
۵.۵.۵.۱. اندازه پاره‌خط	۱۹۴	۴۸۲
۵.۵.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۱۹۴	۴۸۳
۵.۵.۶. رابطه‌های متری	۱۹۵	۴۸۶
۵.۵.۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند	۱۹۶	۴۸۶
۵.۵.۸. رسم شکلها	۱۹۶	۴۸۶
۵.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۹۸	۴۹۱
۵.۵.۱۰.مسأله‌های ترکیبی	۱۹۸	۴۹۳
فهرست منابع	۵۰۳	

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی و نه سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه.
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، دوران، تقارن، تجانس، انعکاس، ...).
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی).
۶. هندسهٔ فضایی.
۷. هندسهٔ تحلیلی.
۸. هندسه‌های نااقلیدسی.
۹. ...

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد ؛ به عنوان مثال رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد

به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ مثلث و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، ...) ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محیطی و محاطی، پنج ضلعیها، ...) ؛

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، (مگر درموارد ویژه مثل برخی مسأله‌های المپیادهای ریاضی که رسم شکل درست، جزء هدفهای مسأله است) تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند و غیر از مواردی خاص، یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه « مربع اندازهٔ وتر هرمثلث قائم‌الزاویه، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره خط AB، به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b، c و ... برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است ؛ به عنوان مثال گفته شده : «در مثلث abc، ضلعهای ab، bc، ac و ...».

● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به عنوان مثال، همه جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B، C

و ... ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB، و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

● شرح حال هندسه‌دانان بزرگ، پس از اوّلین قضیه و یا مسأله‌ای که به نام آنها مشهور است (مانند قضیهٔ تالس، قضیه دزارگ، قضیه پاپوس و ...) بعد از صورت آن قضیه یا مسأله آورده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، تبدیلهای هندسی است که شامل ۵ بخش زیر است :

بخش ۱. انتقال

بخش ۲. دوران

بخش ۳. تقارن (بازتاب) مرکزی

بخش ۴. تقارن (بازتاب) محوری

بخش ۵. تجانس

هر یک از این بخشها، چند زیربخش دارند ؛ به عنوان مثال، بخش ۵ تجانس شامل زیربخشهای زیر است :

۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۵. تجانس در نقطه، خط و زاویه

۳.۵. تجانس در مثلث

۴.۵. تجانس در چند ضلعیها

۵.۵. تجانس در دایره

۶.۵. تجانس در شکلهای دیگر

هر یک از زیربخشهای بالا خود شامل زیربخشهای جدیدی هستند. به عنوان مثال، زیربخش ۵.۵. تجانس در دایره، زیربخشهای زیر را دربر دارد :

۱.۵.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۲.۵.۵. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۳.۵.۵. خطهای : همرس، موازی، ...

۴.۵.۵. زاویه

۵.۵.۵. پاره‌خط

۶.۵.۵. رابطه‌های متری

۷.۵.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۸.۵.۵. رسم شکلها به کمک تجانس

۹.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

برخی از زیربخشهای بالا، خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند و در هر یک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب معینی ارائه گردیده‌اند.

ازآن‌جا که تبدیلهای هندسی از مباحث مهم هندسه است و در بخشهای مختلف آن از جمله : ترسیمهای هندسی، تعیین مکانهای هندسی، تبدیل مسأله‌ها به یکدیگر (اصل دوگانی) و ... کاربردهای فراوانی دارند، بعلاوه روش حل بسیاری از مسأله‌ها با استفاده از تبدیلها ساده‌تر و خلاصه‌تر می‌شود. به عنوان مثال مسألهٔ مشهور به خط اولر «در هر مثلث نقطهٔ برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی)، محل برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل) و محل تلاقی عمود منصفهای ضلعهای مثلث (مرکز دایرهٔ محیطی) روی یک خط راست قرار دارند.» با استفاده از ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی راه حلی طولانی دارد امّا با استفاده از تجانس بسادگی و به صورتی خلاصه حل می‌شود ؛ یک جلد از دایرةالمعارف هندسه به تبدیلها اختصاص یافته است تا مجموعهٔ کاملی از تبدیلها در دسترس علاقه‌مندان قرار داشته باشد. در این جلد تبدیلها از دید هندسی در صفحه و فضا بررسی شده‌اند و به تبدیلها در هندسهٔ مسطحه بیشتر پرداخته‌ایم. بررسی بیشتر تبدیلها در فضا و مطالعه تبدیلها از دید تحلیلی در جلدهای مربوط به خود صورت خواهد گرفت.

لازم به ذکر است که در این جلد از دایرةالمعارف، راهنماییها یا راه‌حلهای ارائه شده تنها با استفاده از ویژگیهای تبدیلها انجام شده است. بنابراین قضیه‌ها و مسأله‌هایی که راه‌حلهای دیگری نیز دارند، بر اساس نوع راه‌حل در جلد مربوط به خود راهنمایی یا حل خواهند شد.

امید است این مجموعه مورد استفاده دانش‌پژوهان ارجمند قرارگیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

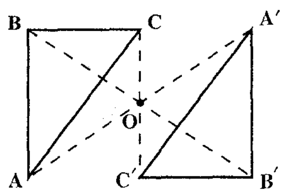
مؤلف مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

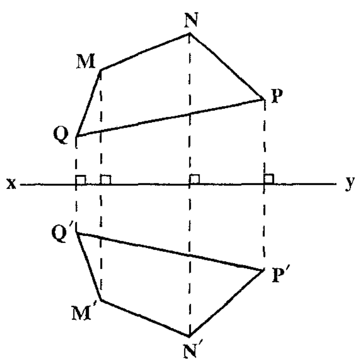
مؤلف

تبدیلهای هندسی

بخش ۱. انتقال
بخش ۲. دوران
بخش ۳. تقارن مرکزی
بخش ۴. تقارن محوری
بخش ۵. تجانس

تبدیل





تعریف. هرگاه از یک شکل هندسی مانند F، یک شکل هندسی دیگر مانند F' ، بر طبق قانون معین T، نتیجه شود، می‌گوییم که شکل F را به شکل F' تبدیل کرده‌ایم. شکل F' را تبدیل یافتهٔ شکل F می‌نامیم و می‌نویسیم : $T(F) = F'$. اگر تبدیل T نقطهٔ M از شکل F را به نقطهٔ M' از شکل F' تبدیل کند، به عنوان مثال، در شکل، مثلث $A'B'C'$ تبدیل یافتهٔ مثلث ABC ، بر طبق قانون تقارن مرکزی، و $M'N'P'Q'$ تبدیل یافتهٔ MNPQ ، بر طبق قانون تقارن محوری است.

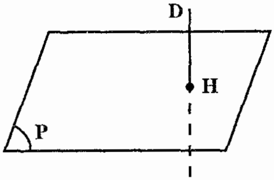
هر دو جزء در دو شکل F و F' ، که یکی تبدیل‌یافتهٔ دیگری در تبدیل T باشد، مانند A و A' و یا AB و $A'B'$ یا $M\hat{N}P$ و $M'\hat{N}'P'$ ، دو جزء متناظر می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$T(A) = A' \text{ و } T(AB) = A'B' \text{ و } \ldots$$

تبدیلها، نوعهای مختلف دارند ؛ در برخی از آنها شکل تغییر نمی‌کند، یعنی وضع جزءهای آن نسبت به یکدیگر و همچنین اندازه‌های جزءهای شکل پس از تبدیل محفوظ می‌مانند، مانند تقارن مرکزی. در بعضی از تبدیلها پاره‌ای از جزءهای متناظر، ممکن است کوچکتر یا بزرگتر شوند و گاهی، شکل به کلی تغییر می‌کند. تجانس، قطب و قطبی و انعکاس، از این نوع تبدیلها هستند.

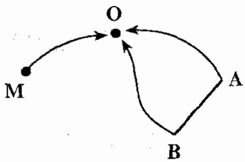
تبدیل همانی. تبدیلی است که تبدیل‌یافتهٔ هر نقطه، خود آن نقطه است. اگر این تبدیل را با T نمایش دهیم، برای هر نقطهٔ A داریم : $T(A) = A'$.

مانند انتقال با بردار انتقال صفر، یا تجانس با نسبت تجانس یک. در این نوع تبدیل، تبدیل‌یافتهٔ هر شکل مانند F بر خود آن شکل منطبق است.



تبدیل پایا. تبدیلی است که در آن تبدیل‌یافتهٔ همهٔ نقطه‌ها، یک نقطه معین است. مانند تصویر خطی عمود بر یک صفحه، روی آن صفحه، و یا تجانس با نسبت تجانس صفر. اگر این تبدیل را با T و نقطهٔ معین را با O نشان دهیم، داریم :

$$T(AB) = O \text{،} T(M) = O$$



تغییرمکان. تبدیلی است که در آن، شکل تغییر نمی‌کند. تغییر مکان شکل مستوی، ممکن است در صفحهٔ آن شکل، یا در فضا صورت پذیرد. در این‌جا تغییر مکان یک شکل مستوی را در صفحهٔ آن شکل مطالعه می‌کنیم و می‌گوییم که شکل در صفحهٔ خود می‌لغزد.

۱. **قضیه.** در تغییر مکان شکل در صفحهٔ خود، شناختن وضع جدید دونقطهٔ شکل برای مشخص ساختن وضع جدید آن شکل، کافی است.

بخش ۱. انتقال

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. انتقال در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. بردار انتقال

۲.۲.۱. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳.۲.۱. خطهای : همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۱. خطها همرسند

۴.۲.۱. زاویه

۱.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۲.۱. پاره‌خط

۱.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۲.۱. رابطه‌های متری

۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند

۸.۲.۱. رسم شکلها

۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

۳.۱. انتقال در مثلث

۱.۳.۱. بردار انتقال

۲.۳.۱. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند

۳.۳.۱. خطهای : همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۱. خطها موازی‌اند

۴.۳.۱. زاویه

۱.۴.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۳.۱. پاره‌خط

۱.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۱.۳.۶. رابطه‌های متری
۱.۳.۷. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند
۱.۳.۸. رسم شکلها
۱.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱.۴. انتقال در چهارضلعیها

۱.۴.۱. بردار انتقال
۱.۴.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...
۱.۴.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند
۱.۴.۳. خطهای : همرس، موازی، ...
۱.۴.۳.۱. خطها همرسند
۱.۴.۴. زاویه
۱.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۱.۴.۵. پاره خط
۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۱.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۱.۴.۶. رابطه‌های متری
۱.۴.۷. ثابت کنید شکلها انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند
۱.۴.۸. رسم شکلها
۱.۴.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱.۴.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

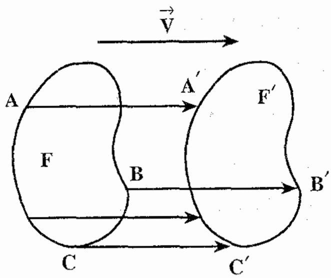
۱.۵. انتقال در دایره

۱.۵.۱. بردار انتقال
۱.۵.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...
۱.۵.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند
۱.۵.۳. خطهای : همرس، موازی، ...

۱.۵.۳.۱. خطها همرسند
۱.۵.۴. زاویه
۱.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه
۱.۵.۵. پاره‌خط
۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۱.۵.۶. رابطه‌های متری
۱.۵.۷. ثابت کنید شکلها انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند
۱.۵.۸. رسم شکلها
۱.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۱. انتقال

۱.۱. تعریف و قضیه



تعریف. هرگاه برداری مانند بردار $\vec{V}$ داده شده باشد، و از هر نقطهٔ شکل F، مانند A، بردار $\overrightarrow{AA'}$ را همسنگ بردار $\vec{V}$ رسم کنیم (شکل)، انتهای این بردارها، شکلی مانند F′ به‌وجود می‌آورند ؛ در این صورت می‌گوییم که F′ از انتقال F به اندازهٔ $\vec{V}$ به‌دست آمده است. $\vec{V}$ را بردار انتقال می‌نامند.

انتقال با $\vec{V}$ را با نماد $T_{\vec{V}}$ و گاهی با اختصار با نماد $\vec{T}$ نشان می‌دهند و آن را، انتقال با بردار $\vec{V}$ یا انتقال T، می‌خوانند ؛ بنابراین انتقال در فضا نیز به همین ترتیب تعریف می‌شود.

۲. **قضیه.** انتقال، شکل را تغییر نمی‌دهد ؛ یعنی تغییرمکان است.

۳. **قضیه.** هرگاه در تغییر مکانی هر دو پاره‌خط متناظر از دو شکل، متوازی، متساوی و در یک جهت باشند، آن تغییر مکان، یک انتقال است.

چند نکته. انتقال با بردار انتقال غیر صفر، تبدیلی در یک صفحه است که هر نقطهٔ A را به یک نقطهٔ دیگر A′ می‌برد. بدیهی است که با این تبدیل، هیچ نقطه‌ای در جای خودش باقی نمی‌ماند. به عبارت دیگر، انتقال نقطهٔ ثابت ندارد و هیچ نقطه‌ای را به خودش بدل نمی‌کند. ولی خطهای مستقیمی وجود دارند که بر اثر انتقال بر جای خود می‌مانند ؛ به عنوان مثال کلیهٔ خطهایی که با راستای بردار انتقال موازی‌اند. (خطها روی خودشان می‌لغزند) و بنابراین این خطها (و فقط همین خطها) خطهای ثابت انتقال هستند.

۴. **ترکیب انتقالها.** ممکن است شکلی را از وضع اوّلی F دو یا چند بار پی در پی انتقال دهیم تا به وضع نهایی $F^{(n)}$ برسد ؛ چون انتقال تغییر مکان است، شکل $F^{(n)}$، همنهشت شکل F است و می‌توان با یک انتقال شکل F را به شکل $F^{(n)}$ تبدیل کرد ؛ در این صورت، می‌گوییم این انتقال از ترکیب کردن آن چند انتقال نتیجه می‌شود.

نکتهٔ مهم. در برخی از کتابهای ریاضی، ترکیب تبدیلها را مجموع تبدیلها و در برخی دیگر حاصلضرب تبدیلها تعریف کرده‌اند. به طور کلی اگر تبدیلی هم‌ارز با چند تبدیل باشد یعنی با

انجام یک تبدیل بتوانیم به نتیجهٔ چند تبدیل برسیم، این تبدیل را مجموع یا حاصلضرب آن تبدیلها می‌نامند.
قضیه. تغییر مکانی که از چند انتقال نتیجه شده باشد، خود یک انتقال است ؛ یا به عبارت دیگر :از ترکیب چند انتقال، یک انتقال نتیجه می‌شود.

۱.۲. انتقال در: نقطه، خط، زاویه

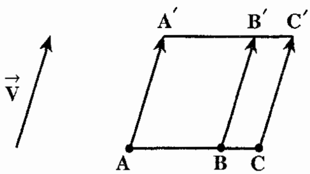
۱.۲.۱. بردار انتقال

۵. چند نقطه روی صفحه طوری قرار گرفته‌اند که فاصلهٔ بین هر دوتا از آنها، از ۲ بزرگتر باشد. ثابت کنید، هر مجموعه با مساحت کمتر از π را می‌توان با انتقال موازی، به اندازهٔ برداری کوچکتر از واحد، طوری جابه‌جا کرد که شامل هیچ‌کدام از این نقطه‌ها نباشد.
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۳

۱.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

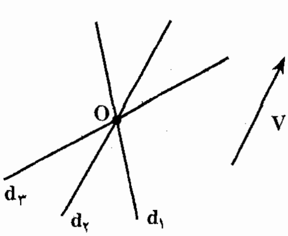
۶. سه نقطهٔ همخط A، B و C را به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم تا نقطه‌های A' ، B' و C' به‌دست آیند. ثابت کنید سه نقطهٔ A' ، B' و C' نیز همخطند.



۱.۲.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

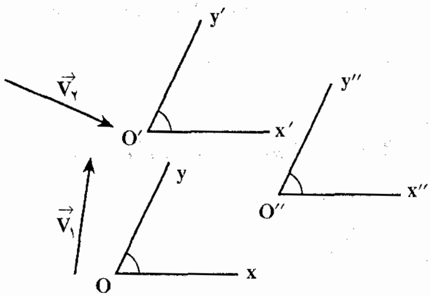
۱.۲.۳.۱. خطها همرسند

۷. ثابت کنید انتقال‌یافتهٔ چند خط همرس، خطهای همرسند.



۴.۲.۱. زاویه

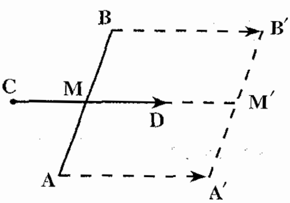
۱.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه



۸. زاویهٔ xOy را به اندازهٔ بردار $\vec{V}_۱$ انتقال داده‌ایم تا زاویهٔ $x'O'y'$ به‌دست آید. سپس زاویهٔ $x'O'y'$ را به اندازهٔ بردار $\vec{V}_۲$ انتقال داده‌ایم. زاویهٔ $x''O''y''$ به‌دست آمده است. اگر $x\hat{O}y = ۶۰°$ باشد، $x''\hat{O}''y''$ چند درجه است؟

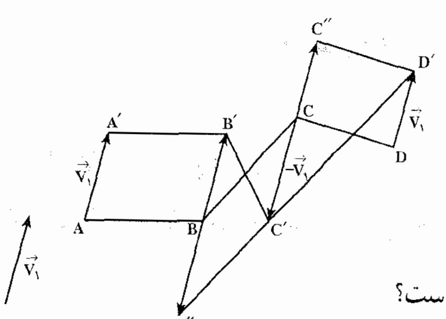
۵.۲.۱. پاره‌خط

۱.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها



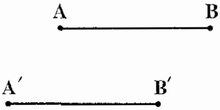
۹. پاره‌خط CD از نقطهٔ M وسط پارخط AB می‌گذرد اگر A' ، B' و M' انتقال یافته‌های نقطه‌های A، B و M به اندازهٔ بردار $\vec{CD}$ باشند. ثابت کنید M' وسط $A'B'$ است.

۶.۲.۱. رابطه‌های متری



۱۰. خط شکستهٔ ABCD داده شده است (شکل). پاره‌خط AB را به اندازهٔ بردار $\vec{V}_۱$ ، پاره‌خط BC را به اندازهٔ بردار $-\vec{V}_۱$ و پاره‌خط CD را به اندازهٔ بردار $\vec{V}_۱$ انتقال داده‌ایم. $A'B'C'D'$ چه‌قدر است؟

۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند



۱۱. دو پاره‌خط موازی و مساوی و همجهت AB و $A'B'$ را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید این دو پاره‌خط انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند.

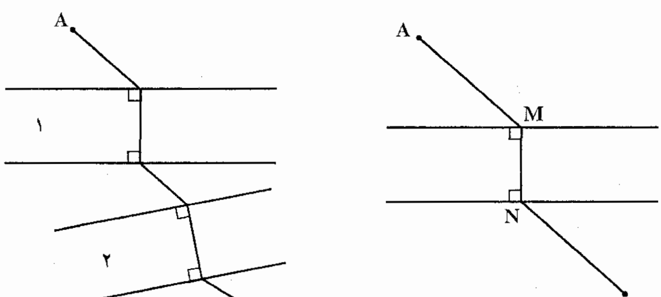
۸.۲.۱. رسم شکلها

۱۲. چهار نقطهٔ A ، B، C و D مفروضند. چهار خط موازی a ، b، c و d بترتیب طوری از این نقطه‌ها عبور دهید که فاصلهٔ بین خطهای a و b، با فاصلهٔ بین خطهای c و d برابر باشند.

۱۳. سه نقطهٔ A، B و C مفروضند. نقطهٔ C را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال دهید.

۱۴. الف. در کدام نقطه از رودخانه‌ای که دو شهر A و B را از هم جدا می‌کند (شکل الف) باید یک پل MN زده شود تا مسیر $AMNB$ از شهر A به شهر B، کوتاهترین مقدار ممکن باشد. با فرض این که ساحلهای رودخانه خطهای مستقیم و موازی باشند، و پل بر رودخانه عمود باشد؟

ب. همین مسأله را، برای وقتی که شهرهای A و B توسط چند رودخانه از هم جدا شده باشند حل و مشخص کنید که در چه نقطه‌هایی پلها باید ساخته شوند (شکل ب).



ب

الف

۱۵. دو خط l_1 و l_2 و نقطهٔ P ناواقع بر آنها مفروضند. از نقطهٔ P دو خط رسم کنید که پاره‌خطهای X_1Y_1 و X_2Y_2 را بر l_1 و l_2 جدا کنند و طولهای این پاره‌خطها مقدارهای مفروضی باشند؛ مثلاً $X_1Y_1 = a_1$ و $X_2Y_2 = a_2$.

۱۶. زاویهٔ xOy و پاره‌خط MN در صفحه مفروضند. پاره‌خطی موازی و مساوی MN رسم کنید که دو سر آن بر ضلعهای زاویه واقع باشند.

۱.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۷. هرگاه $\overline{A}$ یک نیمخط بسته و E مجموعهٔ انتقالهای t باشد، به گونه‌ای که $t(\overline{A}) \subset \overline{A}$ کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) E گروه است.   ب) E نامتناهی است.

ج) E تهی است.   د) E به یک همانی خلاصه می‌شود.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۴ و المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۱۸. دو رأس مثلثی به ابعاد ثابت، روی دو خط متوازی مفروض می‌لغزند، مکان هندسی رأس سوم را پیدا کنید.

۱۹. هرگاه سه خط متمایز X، Y و Z در یک صفحه واقع باشند و X و Y بر Z عمود باشند، آن‌گاه از تبدیلهای زیر کدامها گروهی نامتناهی را پدید می‌آورند؟

الف) انتقالهایی که X، Y و Z را پایا نگاه می‌دارند.

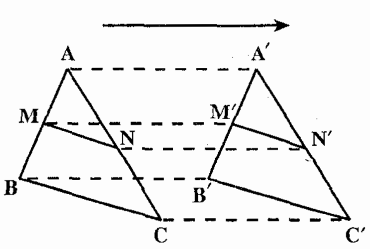
ب) انتقالهایی که X و Y را پایا نگاه می‌دارند.

ج) انتقالهایی که X را روی Y تصویر می‌کنند.

د) انتقالهایی که X را روی Y و Y را روی X تصویر می‌کنند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

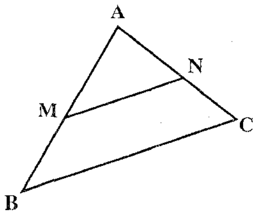
۱.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی



۲۰. انتقال‌یافتهٔ نقطه‌های A، B و C را به اندازهٔ بردار انتقال $\vec{V}$ بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. اگر M و N وسطهای دو پاره‌خط AB و AC، و M' و N' وسطهای دو پاره‌خط $A'B'$ و $A'C'$ باشند، ثابت کنید:
۱. نقطه‌های M و M' و همچنین N و N' انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند. ۲. مثلث AMN با مثلث $A'M'N'$ همنهشت است.

۳.۱. انتقال در مثلث

۱.۳.۱. بردار انتقال

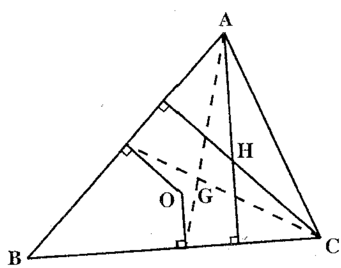


۲۱. نقطه‌های M و N وسطهای دو ضلع AB و AC از مثلث ABC می‌باشند. کدام انتقال نقطهٔ M را به نقطهٔ N تبدیل می‌کند؟

۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند

۲۲. نقطه‌های O ، H و G را که بترتیب مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز ثقل مثلث ABC می‌باشند به اندازهٔ بردار $\vec{V}$ انتقال می‌دهیم. ثابت کنید سه نقطهٔ انتقال یافته همخطند.



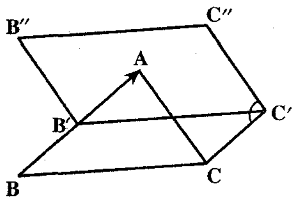
۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۱.خطها موازی‌اند

۲۳. ضلع BC از مثلث ABC را یک‌بار به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BA}$ و بار دیگر به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{CA}$ انتقال می‌دهیم. ثابت کنید این انتقال یافته‌ها بر رأس A می‌گذرند و با هم یک پاره‌خط راست موازی BC به‌وجود می‌آورند.

۴.۳.۱. زاویه

۱.۴.۳.۱.اندازهٔ زاویه



۲۴. مثلث ABC داده شده است. ضلع BC را به اندازهٔ بردار $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ انتقال می‌دهیم و انتقال‌یافتهٔ آن را $B'C'$ می‌نامیم. سپس $B'C'$ را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{CA}$ انتقال داده، انتقال یافتهٔ آن را $B''C''$ می‌نامیم. اندازهٔ زاویهٔ $C\hat{C'}C''$ را بر حسب زاویه‌های مثلث ABC تعیین کنید.

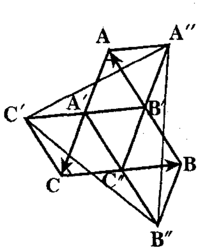
۵.۳.۱. پاره‌خط

۱.۵.۳.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۵. مثلث ABC داده شده است. روی ضلعهای این مثلث، متوازی‌الاضلاعهای ABKL ، BCMN و ACFG را ساخته‌ایم. ثابت کنید، با پاره‌خطهای راست KN ، MF و GL ، می‌توان یک مثلث ساخت.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

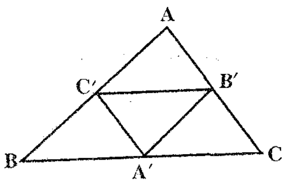
۶.۳.۱. رابطه‌های متری



۲۶. در مثلث ABC ، $\hat{A}=50°$ و $\hat{C}=70°$ است. ضلع BC را به اندازهٔ $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ و ضلع AB را به اندازهٔ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ و ضلع AC را به اندازهٔ $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ انتقال می‌دهیم و این انتقال یافته‌ها را بترتیب $B'C'$ ، $A'B''$ و $C''A''$ می‌نامیم. اندازهٔ مساحت مثلثهای $A'B''C'$ ، $A''B'C'$ و $A''B''C''$ را بر حسب اندازهٔ ضلعهای مثلث ABC به‌دست آورید.

۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند

۲۷. وسطهای ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم و این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کنیم.

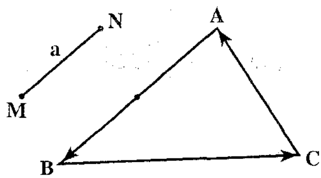


ثابت کنید دو مثلث $BA'C'$ و $AB'C'$ انتقال یافتهٔ یکدیگرند. مثلثهای دیگری را که هریک انتقال یافتهٔ دیگری است، پیدا کنید.

۸.۳.۱. رسم شکلها

۲۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به طور متوالی با بردارهای $k.\vec{AB}$، $k.\vec{BC}$ و $k.\vec{CA}$ انتقال می‌دهیم که k عدد صحیح نسبی است. قسمتی از شکل حاصل را رسم کنید.

۲۹. مثلث ABC و پاره‌خط MN به طول a داده شده است. در مثلث ABC پاره‌خطی چنان محاط کنید که با MN برابر و هم‌اندازه باشد.

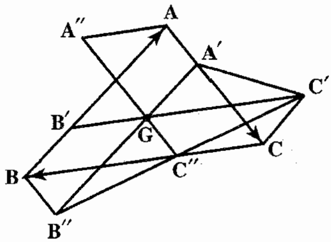


۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰. فرض کنیم نقطه‌های D، E و F بترتیب وسطهای ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC باشند. گیریم O_1، O_2 و O_3 بترتیب معرف مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای ADF، BDE و CEF؛ و Q_1، Q_2 و Q_3 مرکزهای دایره‌های محاطی همین مثلثها باشند. نشان دهید که مثلثهای $O_1O_2O_3$ و $Q_1Q_2Q_3$ با هم قابل انطباقند.

۱.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۱. ضلعهای BC، AB و AC از مثلث ABC را بترتیب به اندازهٔ $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$، $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ انتقال می‌دهیم تا پاره‌خطهای $B'C'$، $A'B''$ و $C''A''$ به‌دست آیند.



۱. ثابت کنید خطهای $B'C'$، $A'B''$ و $C''A''$ همرسند.
۲. محیط مثلث $A'B''C'$ را بر حسب اجزای ضلعهای مثلث ABC تعیین کنید.

۱.۴. انتقال در چند ضلعیها

۱.۴.۱. بردار انتقال

۳۲. M، چندضلعی کوژ و H، تجانس با ضریب $-\frac{1}{2}$ است. ثابت کنید، انتقال موازی T وجود دارد که چند ضلعی $T(H(M))$ در درون چند ضلعی M قرار می‌گیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

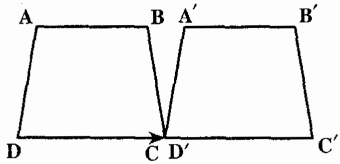
۳۳. با چهار رأس متوازی‌الاضلاع مفروض می‌توان ۱۶ جفت مرتب از نقطه‌ها را تشکیل داد. هریک از این جفتهای مرتب، یک انتقال را در صفحه مشخص می‌کند. تعداد انتقالهای متمایز که به این ترتیب مشخص می‌شوند، چندتاست؟

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۶

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۲.۴.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

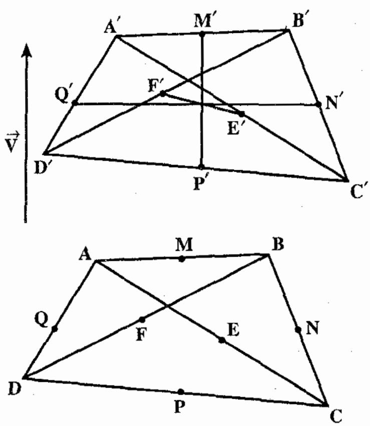
۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند



۳۴. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، AB∥CD را در نظر می‌گیریم. انتقال یافتهٔ این ذوزنقه در انتقال با بردار انتقال $\overrightarrow{DC}$ را A′B′C′D′ می‌نامیم. ثابت کنید چهار نقطهٔ A′، B′، C′ و D′ روی یک دایره واقعند.

۳.۴.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۱. خطها همرسند



۳۵. چهارضلعی ABCD داده شده است. نقطه‌های M، N، P، Q، E و F وسطهای ضلعها و قطرهای این چهارضلعی می‌باشند (شکل). ثابت کنید انتقال یافته‌های خطهای MP، NQ و EF به اندازهٔ بردار انتقال $\vec{V}$، همرسند.

۴.۴.۱. زاویه

۱.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۶. نقطهٔ M را در درون چهار ضلعی ABCD طوری درنظر می‌گیریم که ABMD متوازی‌الاضلاع شود. ثابت کنید، اگر $C\hat{B}M = C\hat{D}M$، آن وقت $A\hat{C}D = B\hat{C}M$.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۸

۱.۴.۵. پاره‌خط

۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳۷. قطرهای ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b برهم عمود هستند. ارتفاع این ذوزنقه چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد؟

۱.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

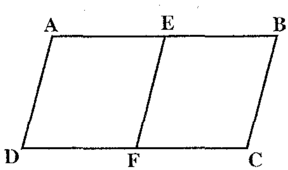
۳۸. امتداد ضلعهای جانبی ذوزنقه‌ای بر هم عمود هستند. ثابت کنید خط واصل میانگاههای قاعده‌ها در این ذوزنقه با نصف تفاضل قاعده‌ها برابر است.

۱.۴.۶. رابطه‌های متری

۳۹. مجموع قاعده‌های ذوزنقه‌ای برابر ۲۱cm و طول قطرهای آن، برابر ۱۳cm و ۲۰cm است. مساحت این ذوزنقه را محاسبه کنید.

۴۰. مساحت ذوزنقه‌ای را با معلوم بودن طول همهٔ ضلعهای آن تعیین کنید.

۱.۴.۷. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند



۴۱. در متوازی‌الاضلاع ABCD وسطهای دو ضلع AB و CD را E و F می‌نامیم. ثابت کنید دو متوازی‌الاضلاع AEFD و EBCF انتقال یافتهٔ یکدیگرند.

۱.۴.۸. رسم شکلها

۴۲. متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. خطی رسم کنید که این متوازی‌الاضلاع را به دو ذوزنقهٔ همنهشت تبدیل کند. مسأله چند جواب دارد؟

۴۳. چهارضلعی ABCD را رسم کنید که طول ضلعها و نیز طول پاره‌خط MN از آن معلوم است. این پاره‌خط میانگاههای ضلعهای AB و DC را به‌هم وصل می‌کند.

۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۴. ثابت کنید اگر در ذوزنقه‌ای، خط واصل میانگاههای قاعده‌ها، با امتداد ضلعهای جانبی آن زاویه‌های مساوی تشکیل دهد، در آن صورت، ذوزنقهٔ داده شده متساوی‌الساقین خواهد بود.

۴۵. O، مرکز تقارن چندضلعی کوژ F است. A_1 و A_2 و همچنین B_1 و B_2 را نقطه‌هایی از چندضلعی می‌گیریم که، نسبت به O، قرینهٔ هم باشند. می‌دانیم اجتماع چند ضلعیهایی که از F با انتقال موازی به اندازهٔ بردارهای OA_1 و OA_2 به‌دست می‌آیند، نقطه‌های B_1 و B_2 را نمی‌پوشاند. ثابت کنید، اجتماع چند ضلعیهایی که از انتقال موازی F به اندازهٔ بردارهای $\overrightarrow{OA_1}$، $\overrightarrow{OA_2}$، $\overrightarrow{OB_1}$ و $\overrightarrow{OB_2}$ به‌دست می‌آیند، تمامی چندضلعی F را می‌پوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

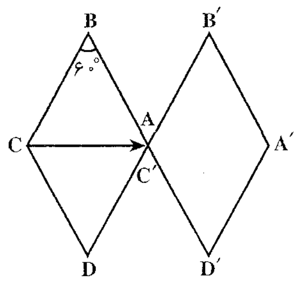
۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۶. لوزی ABCD با زاویه‌های حادهٔ $60°$ داده شده است.

۱. انتقال یافتهٔ این لوزی را به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{CA}$ رسم کنید و آن را $A'B'C'D'$ بنامید.

۲. ثابت کنید $BB'A'A$ لوزی است.

۳. $BB'A'D'$ چگونه شکلی است؟



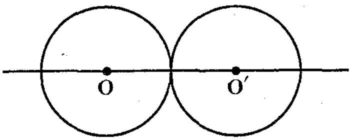
۴۷. در لوزی MNPQ قطرهای MP و NQ پیوسته از دو نقطهٔ ثابت A و B گذشته و امتداد NP و MQ و طولشان ثابت و بر AB عمود است.

۱. مکان هندسی رأسهای لوزی را بیابید.

۲. مکان هندسی وسطهای ضلعهای لوزی را تعیین کنید.

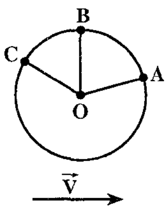
۱.۵. انتقال در دایره

۱.۱.۵. بردار انتقال



۴۸. دو دایرهٔ مساوی O و ′O مماس خارجند. انتقالی را که دایرهٔ O را به دایرهٔ ′O تبدیل می‌کند، مشخص کنید.

۲.۵.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...



۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۹. انتقال یافته‌های سه نقطهٔ A، B و C از دایرهٔ C(O,R) را بترتیب ′A، ′B و ′C می‌نامیم. ثابت کنید نقطه‌های ′A، ′B و ′C همدایره‌اند.

۳.۵.۱. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۵.۱. خطها همرسند

۵۰. چهار دایرهٔ مساوی ω_1، ω_2، ω_3 و ω_4 از نقطهٔ M عبور کرده و نیز همدیگر را مجموعاً در شش نقطه قطع می‌کنند: A_{12} نقطهٔ برخورد ω_1 و ω_2، A_{23} نقطهٔ برخورد دایره‌های ω_2 و ω_3 و... و A_{43} نقطهٔ برخورد دایره‌های ω_3 و ω_4 است. ثابت کنید که پاره‌خطهای $A_{12}A_{43}$، $A_{23}A_{14}$ و $A_{13}A_{24}$ دارای میانگاه مشترک هستند.

۴.۵.۱. زاویه

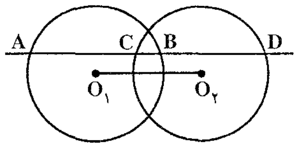
۱.۴.۵.۱. اندازهٔ زاویه

۵۱. دو دایرهٔ مساوی، در خارج هم، در نقطهٔ K مماس هستند. خط قاطعی به موازات خط‌المرکزین، دو دایره را در نقطه‌های A، B، C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که اندازهٔ زاویهٔ AKC، مستقل از انتخاب قاطع است.

۱.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

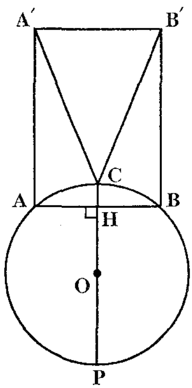
۵۲. طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع همشعاع برابر d است. خطی که به موازات خط‌المرکزین رسم کرده‌ایم دایرهٔ اوّل را در A و B و دایرهٔ دوم را در C و D قطع می‌کند. طول پاره‌خط AC را محاسبه کنید (شکل).



۱.۵.۶. رابطه‌های متری

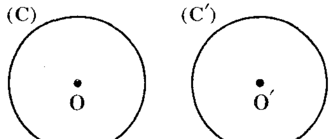
۵۳. در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر، وتر AB به طول ۸ سانتیمتر مفروض است. اگر این وتر را به‌اندازهٔ قطر Pc عمود بر آن انتقال دهیم (A' انتقال یافتهٔ A و B' انتقال یافتهٔ B) ثابت کنید:

$$A'C + B'C = 8\sqrt{5}$$



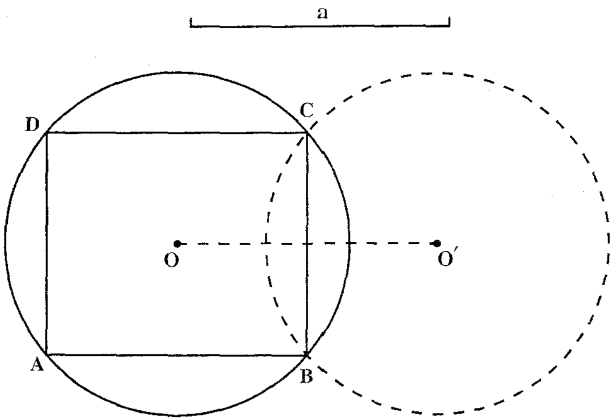
۱.۵.۷. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند

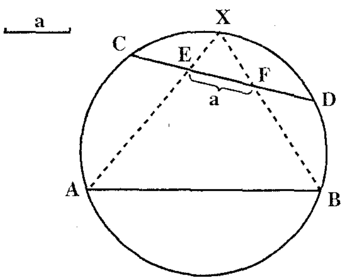
۵۴. دو دایرهٔ مساوی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. ثابت کنید که هر یک از این دو دایره، انتقال یافتهٔ دیگری است.



۱.۵.۸. رسم شکلها

۵۵. در دایرهٔ داده شده، مستطیلی چنان محاط کنید که ضلع آن با پاره‌خط مفروض a برابر و هم امتداد باشد.





۵۶. وترهای AB و CD از یک دایره مفروضند. بر این دایره نقطه‌ای مانند X پیدا کنید که وترهای AX و BX روی CD یک پاره‌خط EF به‌طول مفروض a جدا کنند (شکل).

۵۷. دو دایرهٔ S_1 و S_2 داده شده‌اند، خطی مانند l رسم کنید که:

الف. موازی خط مفروض l_1 باشد و S_1 و S_2 دو وتر مساوی بر l جدا کنند.

ب. موازی خط مفروض l_1 باشد، و مجموع (تفاضل) طولهای وترهایی که S_1 و S_2 روی l پدید می‌آورند مساوی مقدار مفروض a باشد.

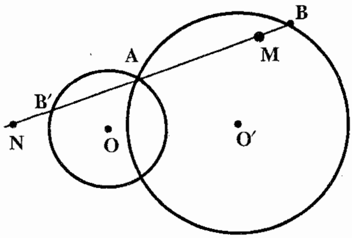
ج. از نقطهٔ مفروض A بگذرد و S_1 و S_2 وترهایی مساوی بر l جدا کنند.

۱.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸. دایره‌ای به شعاع معلوم به قسمی تغییر می‌کند که همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس است. مکان نقطهٔ تماس این دایره با مماسهای به امتداد ثابت را پیدا کنید.

۵۹. از A، نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متساوی، قاطع متغیری رسم می‌کنیم که دو دایره را بار دیگر در B و C قطع کند. از B خط Bx را عمود بر BC اخراج نموده و از C خطی به موازات خط‌المرکزین می‌کشیم تا Bx را در M قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی که BC تغییر می‌کند، پیدا کنید.

۶۰. از نقطهٔ A محل برخورد دو دایرهٔ (O,R) و (O′,R′) قاطع متغیری رسم می‌کنیم و روی این قاطع دو پاره‌خط AN=AM را برابر نصف مجموع وترهای حاصل در دو دایره جدا می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌های M و N را وقتی قاطع رسم شده از نقطهٔ A تغییر می‌کند، تعیین کنید.



۱.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۶۱. وتر ثابت AB و نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ (O) مفروضند.

۱. مکان هندسی نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث AMB را تعمین کنید.

۲. مکان هندسی نقطه‌های مشترک دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MH و دایرهٔ به مرکز H و به شعاع HM را به‌دست آورید.

بخش ۲. دوران

۱.۲. تعریف و قضیه

۲.۲. دوران در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۲.۲.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها بر هم منطبقند

۳.۲.۲. خطهای : همرس، موازی،...

۱.۳.۲.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۶.۲.۲. رابطه‌های متری

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند

۸.۲.۲. رسم شکلها

۹.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳.۲. دوران در مثلث

۱.۳.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۲.۳.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۱.۲.۳.۲. نقطه ثابت است

۳.۳.۲. خطهای : همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴.۳.۲. زاویه

۲.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه
۲.۳.۵. پاره‌خط
۲.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۲.۳.۶. رابطه‌های متری
۲.۳.۷. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند
۲.۳.۸. رسم شکلها
۲.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲.۴. دوران در چندضلعیها

۲.۴.۱. مرکز دوران، زاویهٔ دوران
۲.۴.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...
۲.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند
۲.۴.۳. خطهای : همرس، موازی،...
۲.۴.۳.۱. خطها برهم عمودند
۲.۴.۴. زاویه
۲.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۲.۴.۵. پاره‌خط
۲.۴.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۲.۴.۶. رابطه‌های متری
۲.۴.۷. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند
۲.۴.۸. رسم شکلها
۲.۴.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲.۴.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

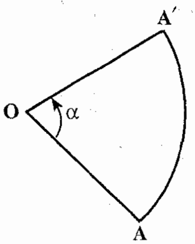
۲.۵. دوران در دایره

۲.۵.۱. مرکز دوران، زاویهٔ دوران
۲.۵.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...
۲.۵.۲.۱. نقطه ثابت است

۲.۵.۳. خطهای : همرس، موازی،...
۲.۵.۳.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد
۲.۵.۴. زاویه
۲.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه
۲.۵.۵. پاره‌خط
۲.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۲.۵.۶. رابطه‌های متری
۲.۵.۷. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند
۲.۵.۸. رسم شکلها
۲.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۲. دوران

۱.۲. تعریف و قضیه



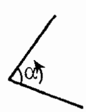
تعریف. نقطهٔ ثابت O و زاویهٔ جهت‌دار α را در یک صفحه در نظر می‌گیریم، متناظر با هر نقطهٔ A نقطه‌ای مانند A' می‌توان تعیین کرد، چنان که: $OA' = OA$ و $A\hat{O}A' = \alpha$ باشند. در این صورت نقطهٔ A' را تبدیل یافتهٔ نقطهٔ A در «دوران به زاویهٔ α گرد نقطهٔ O» می‌گوییم (شکل).

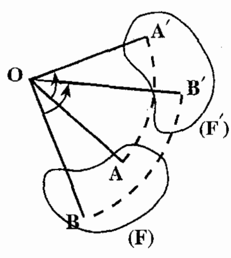
برای مشخص کردن نقطهٔ A'، نقطهٔ A را به نقطهٔ O وصل کرده و در نقطهٔ O بر نیمخط OA زاویه‌ای مساوی α و در جهت مناسب (برحسب آن که زاویهٔ α مثبت یا منفی یا صفر باشد) می‌سازیم و بر ضلع دیگر این زاویه، پاره‌خط OA' را مساوی OA جدا می‌کنیم.

در دوران، تبدیل یافتهٔ هر نقطهٔ A از حرکت آن نقطه بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA و به اندازهٔ α مشخص می‌شود. یعنی ضمن این حرکت فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دوران ثابت می‌ماند و نقطهٔ A بر دایره‌ای به این مرکز، کمانی می‌پیماید که زاویهٔ مرکزی مقابل آن به اندازهٔ α است.

هر دوران با مرکز آن و اندازهٔ جبری زاویهٔ α (زاویهٔ دوران)، مشخص می‌شود. زاویهٔ دوران ممکن است مثبت یا منفی یا صفر باشد. اگر اندازهٔ زاویهٔ دورانی صفر باشد، آن را دوران صفر می‌نامند. دوران صفر تبدیل همانی است.

دوران به مرکز O و به زاویهٔ α را با نماد R_O^α یا (O,α) نمایش می‌دهیم و آن را «دوران به اندازهٔ α گرد نقطهٔ O» می‌خوانیم.





دوران یافتهٔ یک شکل. دوران یافتهٔ هر شکل مانند (F) نسبت به مرکز دوران O و زاویهٔ دوران α، شکلی است مانند (F') به قسمی که، هر نقطه‌اش دوران یافتهٔ یک نقطه از شکل (F)، نسبت به مرکز دوران O و به اندازهٔ زاویهٔ دوران α باشد. اگر شکل (F') از دوران شکل (F) نسبت به مرکز دوران O و به زاویه دوران α به‌دست آمده باشد، به وارون، شکل (F) هم می‌تواند از دوران شکل (F') نسبت به مرکز O و با زاویهٔ دوران $-\alpha$ یا $360^\circ - \alpha$ و به‌طورکلی $2k\pi - \alpha$ $(k \in Z)$، به‌دست آید.

۶۲. قضیه. دوران، شکل را تغییر نمی‌دهد ؛ یعنی تغییر مکان است.

۶۳. قضیه. در دوران، تبدیل یافتهٔ هر خط راست، یک خط راست است.

رسم تبدیل یافتهٔ یک خط در دوران. از آنچه ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که برای تعیین تبدیل یافتهٔ یک خط راست در هر دوران، به یکی از راههای زیر می‌توان عمل کرد :

۱. تبدیل یافتهٔ دو نقطه از آن خط را تعیین کرده و آنها را به یکدیگر می‌پیوندیم.

۲. از مرکز دوران، خطی عمود بر خط مفروض رسم کرده و تبدیل یافتهٔ پای عمود را تعیین می‌کنیم. آن‌گاه در این نقطه، خطی عمود بر پاره‌خط واصل بین این نقطه و مرکز دوران رسم می‌کنیم. این خط تبدیل یافتهٔ خط موردنظر است.

۳. تبدیل یافتهٔ یک نقطه از خط را تعیین کرده و بر آن نقطه خطی می‌گذرانیم که با خط مفروض در جهت مناسب زاویه‌ای مساوی زاویهٔ دوران تشکیل دهد.

چنان که ملاحظه می‌شود در راههای ۲ و ۳ از ویژگیهای دوران برای تعیین تبدیل یافتهٔ خط استفاده می‌شود، یعنی تبدیل یافتهٔ یک نقطه از خط را تعیین کرده و با توجه به قضیه‌های قبل، تبدیل یافتهٔ خط را رسم می‌کنیم.

۶۴. قضیه. در دوران، زاویهٔ بین هر دو پاره‌خط متناظر یا امتدادشان، مساوی با زاویهٔ دوران است.

۶۵. قضیه. هر تغییر مکانی که یک شکل تغییرناپذیر در صفحهٔ خود انجام داده باشد، عبارت است از یک انتقال یا یک دوران.

۶۶. اگر شکل F طوری حرکت کند که همهٔ وضعیتهایش با وضعیت اوّلیهٔ آن متشابه باشند وسه نقطهٔ A، B و C از شکل، سه خط غیرهمرس را بپیمایند، آن‌گاه، هر نقطه از شکل، یک خط راست را می‌پیماید.

۶۷. ترکیب (مجموع) دورانها.

قضیه. مجموع دو دوران همسو به مرکز دوران مشترک O و به زاویه‌های دوران α و β ، دورانی است به مرکز دوران O و به زاویهٔ دوران $\alpha+\beta$.

۶۸. نتیجهٔ ترکیب (مجموع) دو دوران (O_1,α) و (O_2,β) واقع در یک صفحه، چه تبدیلی است؟

۶۹. حاصل جمع سه تغییر مکان زیر چیست؟

۱. انتقال $\overrightarrow{AB}$.

۲. دوران (O,α) .

۳. انتقال $\overrightarrow{BA}$.

۷۰. در صفحهٔ اقلیدسی، دو خط X و Y که هیچ نقطهٔ مشترک ندارند، مفروضند. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) فقط یک انتقال در صفحه وجود دارد که X را روی Y تصویر می‌کند.

ب) فقط یک دوران در صفحه وجود دارد که X را روی Y تصویر می‌کند.

ج) انتقالهایی به تعداد نامتناهی در صفحه وجود دارند که همهٔ آنها X را روی Y تصویر می‌کنند.

د) دورانهایی به تعداد نامتناهی در صفحه وجود دارند که همهٔ آنها X را روی Y تصویر می‌کنند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۲.۲. دوران در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۷۱. در یک صفحه چند عدد از دورانهای به مرکز نقطهٔ مفروض وجود دارند که زاویهٔ آنها مضرب صحیحی از °۴۸ باشد؟

الف) ۱۲ ب) ۱۵ ج) ۲۴ د) ۳۰

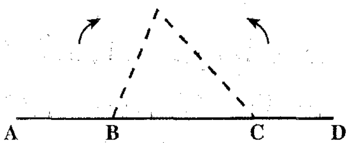
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۷۲. اگر A' و B' بترتیب نظیر نقطه‌های A و B در دوران (O,α) باشند و خط راست AB از نقطهٔ (O) بگذرد و نقطهٔ تقاطع AB و $A'B'$ را I بنامیم، ثابت کنید چهار نقطهٔ A و A' و O و I بر یک دایره واقعند (و همچنین B و B' و O و I بر یک دایره دیگر واقعند).

۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها بر هم منطبقند



۷۳. نقطه‌های متمایز A، B، C و D به همین ترتیب بر یک خط راست واقعند. پاره‌خطهای AB، AC و AD بترتیب دارای طولهای x، y و z هستند. اگر پاره‌خطهای AB و CD بترتیب حول نقطه‌های B و C دوران کنند، برای آن که A و D بر هم منطبق شوند و یک مثلث با مساحت مثبت پدید آید، از سه نابرابری زیر کدامها باید برقرار باشند؟

I) $x < \frac{z}{۲}$ II) $y < x + \frac{z}{۲}$ III) $y < \frac{z}{۲}$

الف) فقط I   ب) فقط II   ج) فقط I و II

د) فقط II و III   هـ) I و II و III

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۲.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۷۴. در صفحه‌ای دورانی به مرکز O و به زاویهٔ α و نقطهٔ ثابت A را در نظر می‌گیریم. مطلوب است بررسی نقطه‌های M به‌طوری که اگر M' تبدیل یافتهٔ M باشد، خط MM' بر A بگذرد. مورد استعمال نقطه‌های M را طوری معین کنید که اگر M_1 و M_2 قرینهٔ M نسبت به دو خط متقاطع D_1 و D_2 باشند، دو نقطه مفروض با A روی یک خط باشند.

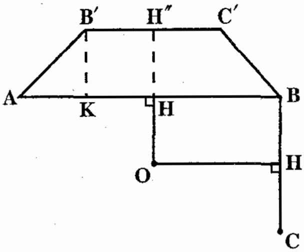
۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۷۵. دو خط d و d' که در نقطهٔ A متقاطعند، با هم زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند. خط d' را حول نقطهٔ ثابت O به اندازهٔ زاویهٔ ۷۰ درجه دوران می‌دهیم تا خط d'_1 به‌دست آید. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط d و d'_1 را تعیین کنید.

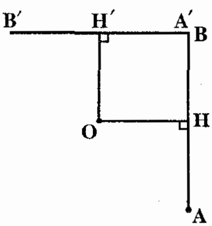
۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط



۷۶. دو پاره‌خط AB و BC به‌طولهای ۱۲ و ۶ بر هم عمودند. نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای این دو پاره‌خط را O می‌نامیم و پاره‌خط BC را حول نقطهٔ O به اندازهٔ ۹۰ درجه دوران می‌دهیم تا به وضع $B'C'$ درآید. اندازهٔ پاره‌خطهای AB' و BC' را به‌دست آورید.

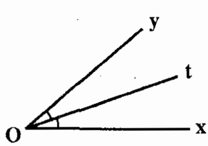
۶.۲.۲. رابطه‌های متری



۷۷. پاره‌خط AB به طول ۸ داده شده است. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم و طول $HO = ۴$ را روی آن جدا می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خط AB را حول نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم تا پاره‌خط $A'B'$ به‌دست آید. ثابت کنید:

$$AB + A'B' + AB' + A'B = ۸(۲ + \sqrt{۲})$$

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند



۷۸. Ot نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم. ثابت کنید هر یک از دو زاویهٔ به‌وجود آمده دوران یافتهٔ دیگری است.

۸.۲.۲. رسم شکلها

۷۹. فرض می‌کنیم سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ سه نقطهٔ A، B و C هر یک بر یکی از آنها داده شده باشند. خطی مانند m رسم کنید که خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ را در نقطه‌های X، Y و Z قطع کند و $AX = BY = CZ$.

۸۰. مثلث متساوی‌الاضلاعی را طوری رسم کنید که یکی از رأسهای آن بر نقطهٔ P، رأس دیگر به خط a و رأس سوم به خط b متعلق باشد.

۸۱. نقطهٔ P و دو خط متوازی D و D′ مفروضند، مثلث متساوی‌الساقین به رأس P را که زاویهٔ رأسش α باشد، چنان رسم کنید که دو رأس دیگرش روی خطهای D و D′ واقع شوند.

۸۲. مربعی رسم کنید که سه رأس آن، روی سه خط متوازی قرار گیرد.

۸۳. دو خط l_1 و l_2 ، یک نقطهٔ A، و یک زاویهٔ α مفروضند. دایره‌ای به مرکز A بیابید که دو خط l_1 و l_2 بر آن، کمانی به اندازهٔ α جدا کنند.

۹.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۴. روی ضلعهای زاویهٔ xOy دو پاره‌خط OM و OM′ را به قسمی جدا می‌کنیم که $OM + OM' = l$ باشد (l طول معلومی است). مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OMM′ را پیدا کنید.

۸۵. نقطهٔ ثابت A و خط Δ مفروضند. مکان هندسی رأس C از مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ را که در آن $B\hat{A}C = ۴۰^\circ$ است وقتی رأس B خط Δ را بپیماید، پیدا کنید.

۸۶. در فضا، دو دوران به زاویهٔ ۱۸۰ درجه حول دو خط متقاطع عمود بر هم را در نظر می‌گیریم. ترکیب این دو دوران عبارت است از :

الف) تقارنی نسبت به یک صفحه   ب) یک دوران به زاویهٔ ۱۸۰°

ج) تقارنی مرکزی   د) تبدیلی همانی

هـ) تبدیلی غیر از اینها

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۸۷. a. نقطه‌های A و B به‌طور یکنواخت و با سرعت زاویه‌ای برابر، بترتیب، روی محیط دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) حرکت می‌کنند. ثابت کنید، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هم به‌طور یکنواخت، روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند.

b. فاصلهٔ نقطهٔ ثابت P واقع در صفحهٔ مثلث ABC، تا دو رأس A و B از این مثلث برابر است با $AP = ۲$ و $BP = ۳$. حداکثر مقدار فاصلهٔ CP چه‌قدر است؟

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۱

۸۸. میلهٔ AB به طول ثابت ۲a به‌وسیلهٔ دو نخ AD و BC که طول هریک از آنها برابر l است از دو نقطهٔ ثابت C و D واقع در یک سطح افقی آویزان شده است $(CD = ۲a)$. میله را حول محور قائمی به اندازهٔ زاویهٔ $\theta < ۱۸۰^\circ$ دوران می‌دهیم. مطلوب است :

۱. تعیین مقدار فاصله‌ای که مرکز میله پس از دوران، به‌طور قائم می‌پیماید.

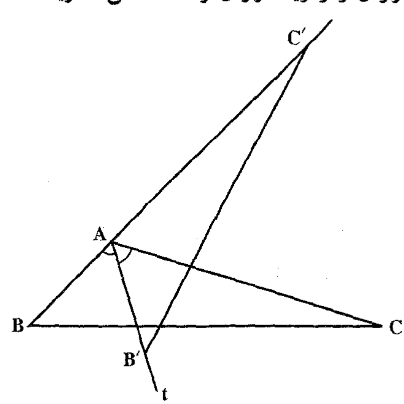
۲. فاصلهٔ AC پس از دوران.

۳.۲. دوران در مثلث

۱.۳.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۸۹. میانه‌های مثلث ABB' را از مثلث ABC به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ طول آنها بترتیب تا نقطه‌های A'' ، B'' و C'' امتداد می‌دهیم، تا مثلث $A''B''C''$ به‌دست آید. مرکز و زاویهٔ دورانی را که مثلث ABC را به مثلث $A''B''C''$ تبدیل می‌کند، تعیین کنید.

۹۰. مثلث ABC داده شده است، نیمخط At نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط $AB' = AB$ را جدا می‌کنیم. سپس در امتداد ضلع BA پاره‌خط $AC' = AC$ را جدا می‌نماییم و از B' به C' وصل می‌کنیم. اگر مثلث $AB'C'$ دوران یافتهٔ مثلث ABC باشد مرکز دوران و زاویهٔ دوران را مشخص سازید.



۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۳.۲. نقطه ثابت است

۹۱. ضلع AC از مثلث ABC را حول رأس A به اندازهٔ $+90^\circ$ و ضلع BC را حول رأس B به اندازهٔ -90° دوران می‌دهیم. ثابت کنید که موقعیت میانگاه پاره‌خط C_1C_2 مستقل از موقعیت رأس C است. نقطه‌های C_1C_2 نقطه‌های انتهایی پاره‌خطهای دوران داده شده است.

۳.۳.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۹۲. مثلث ABC مفروض است. M نقطهٔ متغیری از AB است روی AC. نقطهٔ N را چنان اختیار می‌کنیم که $CN = BM$ باشد. ثابت کنید عمودمنصف پاره‌خط MN از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴.۳.۲. زاویه

۱.۴.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۹۳. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC مربعهایی را با مرکزهای D و E طوری رسم می‌کنیم که نقطه‌های C و D در یک طرف AB، و نقطه‌های A و E در دو طرف ضلع BC قرار داشته باشند. ثابت کنید که زاویهٔ بین خطهای AC و DE برابر 45° است.

۹۴. فرض کنید M نقطهٔ دلخواهی درون مثلث ABC باشد. ثابت کنید که حداقل یکی از زاویه‌های MAB، MBC و MCA و حداقل یکی از زاویه‌های MAC، MCB و MCA از 30° بیشتر نیست.

۹۵. مثلث دلخواه ABC داده شده است. سه مثلث متساوی‌الساقین AKB، BLC و CMA با زاویهٔ رأسهای K، L و M، بترتیب، برابر با α، β و γ، $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$، به قاعدهٔ ضلعهای مثلث رسم شده‌اند. همهٔ مثلثها، یا در بیرون مثلث ABC و یا در درون آن قرار گرفته‌اند. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث KLM برابرند با $\frac{\alpha}{2}$، $\frac{\beta}{2}$ و $\frac{\gamma}{2}$.

۵.۳.۲. پاره‌خط

۱.۵.۳.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۹۶. مثلث ABC داده شده است. روی خطی که از رأس A می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است، دو نقطهٔ A_1 و A_2 طوری اختیار می‌شوند که $AA_1 = AA_2 = BC$ (A_1 از A_2 به خط BC نزدیکتر است). به همین ترتیب، روی خط عمود بر AC که از B می‌گذرد، نقطه‌های B_1 و B_2 طوری اختیار می‌شوند که $BB_1 = BB_2 = AC$. ثابت کنید که پاره‌خطهای A_1B_2 و A_2B_1 برابر و دو به دو بر هم عمودند.

۹۷. روی ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ CA و CB از مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC، بترتیب، نقطه‌های D و E را طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: $CD = CE$. امتداد عمودهای وارد از نقطه‌های D و C برخط راست AE، بترتیب، وتر AB را در K و L قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $KL = LB$.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۴

۹۸. از مرکز O مربوط به مثلث متساوی‌الاضلاع ABC دو خط مستقیم را رسم می‌کنیم که زاویهٔ بین آنها $60°$ است. ثابت کنید که قطعه‌های این دو خط واقع در درون مثلث دوبه‌دو با هم مساوی‌اند.

۹۹. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و روی هر یک از ضلعهای آن و در خارج مثلث، مثلثی متساوی‌الاضلاع بنا می‌کنیم که مثلثهای متساوی‌الاضلاع BPC، CQA و ARB به‌دست می‌آید. ثابت کنید که پاره‌خطهای AP، BQ و CR همرس و هم‌اندازه‌اند.

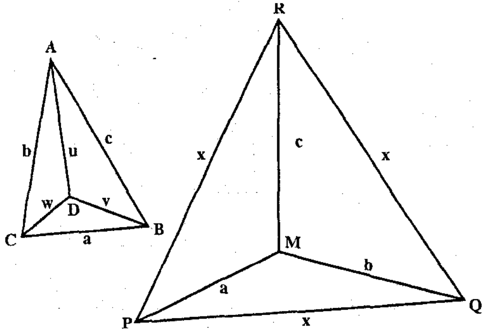
۶.۳.۲. رابطه‌های متری

۱۰۰. مثلثهای ABC و PQR را مطابق شکل در نظر می‌گیریم، در مثلث ABC می‌دانیم:

$$A\hat{D}B = B\hat{D}C = C\hat{D}A = 120°$$

ثابت کنید: $x = u + v + w$.

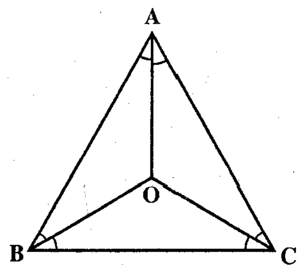
المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۴



۱۰۱. فرض می‌کنیم ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی باشد و M نقطه‌ای دلخواه در صفحهٔ آن؛ ثابت کنید که $MA + MC \geq MB$. تساوی $MA + MC = MB$ چه موقع برقرار است؟

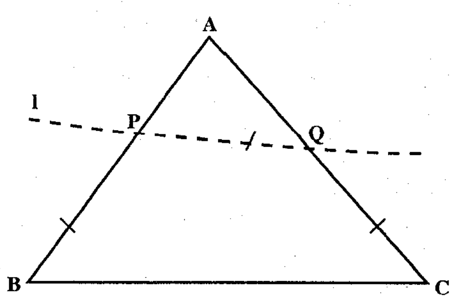
۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند

۱۰۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های مثلث را O می‌نامیم. ثابت کنید مثلثهای OBC، OAB و OAC دوران یافتهٔ یکدیگرند.



۸.۳.۲. رسم شکلها

۱۰۳. فرض می‌کنیم مثلث ABC داده شده باشد. خطی مانند l رسم کنید که ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های P و Q قطع کند و $BP = PQ = QC$ (شکل).



۱۰۴. در صفحهٔ مثلث ABC نقطه‌ای مانند M بیابید که مجموع فواصلش تا رأسها کمترین مقدار باشد.

۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

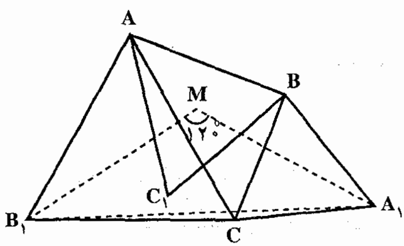
۱۰۵. دو مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$، روی صفحه داده شده‌اند؛ رأسهای این مثلثها، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، نامگذاری شده است. از نقطه‌ای مثل O، بردارهای $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ را، بترتیب، برابر بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$، $\overrightarrow{B_1B_2}$ و $\overrightarrow{C_1C_2}$ رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، نقطه‌های A، B و C هم، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاعند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۴

۱۰۶. مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC، CDE و EHK مفروضند. (رأسها را در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید) و طوری روی صفحه قرار گرفته‌اند که داریم: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$. ثابت کنید، مثلث BHD هم، متساوی‌الاضلاع است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

۱۰۷. بر ضلعهای مثلث دلخواه ABC مثلثهای متساوی‌الاضلاع BCA_1، ACB_1 و ABC_1 را طوری بنا کنید که رأسهای A_1 و A در دو طرف BC، B_1 و B در دو طرف AC، اما C_1 و C در یک طرف AB باشند. گیریم M مرکز مثلث ABC_1 باشد. ثابت کنید که A_1B_1M مثلثی است متساوی‌الساقین با زاویهٔ ۱۲۰° در رأس M (شکل).



۱۰۸. مثلث ABC مفروض است. از نقطه‌هایی مانند D و E در خارج از مثلث، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ADB و AEC را رسم می‌کنیم. ($\hat{D} = ۹۰^\circ$ و $\hat{E} = ۹۰^\circ$) اگر نقطهٔ F وسط BC باشد، ثابت کنید مثلث DEF نیز قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

چهاردهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۵

۱۰۹. روی ضلعهای AB و BC از مثلث ABC مربعهای ABMN و BCQP را رسم می‌کنیم. مرکز آنها را با O_1 و O_2، میانگاه ضلع AC را با K و میانگاه پاره‌خط MP را با L نشان می‌دهیم. ثابت کنید که چهارضلعی O_1LO_2K یک مربع است.

۱۱۰. هر ضلع مثلث ABC را حول نقطهٔ وسط همان ضلع به اندازهٔ زاویهٔ ثابت α دوران می‌دهیم (در همهٔ موارد در یک جهت)؛ فرض می‌کنیم $A'B'C'$ مثلث جدید حاصل از دوران ضلعها باشد. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ برخورد ارتفاعها، نقطهٔ برخورد نیمسازهای داخلی، و نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث $A'B'C'$ وقتی زاویهٔ α مقادیر مختلفی اختیار کند. ثابت کنید که مرکزهای دایره‌های محیطی همهٔ این مثلثها بر هم منطبقند.

۲.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱۱۱. فرض می‌کنیم l خط دلخواهی در صفحه باشد و l_1، l_2 و l_3 قرینه‌های آن نسبت به ضلعهای مثلث (غیر قائم‌الزاویهٔ) مفروض ABC باشند؛ مثلث حاصل از خطهای l_1، l_2 و l_3 را T می‌نامیم ثابت کنید که:

الف. همهٔ مثلثهای T، متناظر با وضعیتهای گوناگون خط اوّلیهٔ l، با یکدیگر متشابه‌اند.

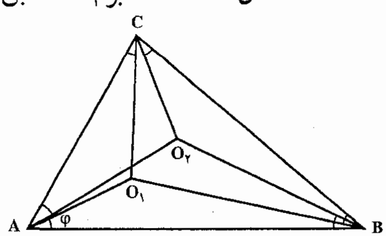
ب. همهٔ خطهای l که به‌ازای آنها l_1، l_2 و l_3 همگی در یک نقطهٔ مشترک P متقاطعند، از نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، می‌گذرند؛ مکان هندسی نقطه‌های P، محل برخورد l_1، l_2 و l_3، دایرهٔ محیطی بر مثلث ABC است.

ج. همهٔ خطهای l چنان که مساحت مثلث T مقدار مفروضی باشد، بر یک دایره به مرکز H مماسند.

۱۱۲. فرض می‌کنیم O_1 و O_2 اوّلین و دومین مرکز دوران مثلث ABC باشند و O را مرکز دایرهٔ محیطی می‌گیریم. ثابت کنید که:

الف. $$O_1\hat{A}B = O_1\hat{B}C = O_1\hat{C}A = O_2\hat{B}A = O_2\hat{C}B = O_2\hat{A}C$$

(شکل)؛ و بعکس، اگر، مثلاً $M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A$، آن‌گاه نقطهٔ M بر O_1 منطبق است؛



ب. O_1 بر O_2 منطبق است، اگر و تنها اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع باشد؛

ج. O_1 و O_2 از O به یک فاصله‌اند: $O_1O = O_2O$؛

د. مقدار مشترک (φ) زاویه‌های O_1AB، O_1BC، O_1CA، O_2BA، O_2CB و O_2AC از 30° بیشتر نیست؛ $\hat{\varphi} = 30^\circ$، اگر و تنها اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۱۳. فرض کنید O_1 یکی از مرکزهای دوران مثلث ABC باشد؛ نقطه‌های برخورد خطهای AO_1، BO_1 و CO_1 با دایرهٔ محیطی بر مثلث ABC را A'، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید که:

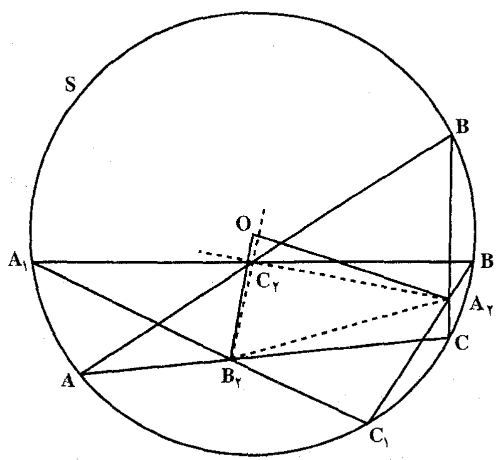
الف. مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC قابل انطباق است؛

ب. شش مثلث حاصل از تقسیم‌بندی شش ضلعی $AC'BA'CB'$ به توسط خطهای واصل بین رأسهای این شش ضلعی و نقطهٔ O_1، همه با مثلث ABC متشابه‌اند.

۱۱۴. دو مثلث مستقیماً همنهشت ABC و $A_1B_1C_1$ در دایرهٔ S محاط شده‌اند؛ نقطهٔ برخورد ضلعهای متناظر آنها را A_2، B_2 و C_2 می‌نامیم (شکل). ثابت کنید که:

الف. مثلث $A_2B_2C_2$ با مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ متشابه است.

ب. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_2B_2C_2$ بر مرکز دایرهٔ S منطبق است.



۱۱۵. روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث متساوی‌الاضلاعی بترتیب نقطه‌های M، N و P مفروض هستند. می‌دانیم که $BM:MC = CN:NA = AP:PB = k$ است.

a. ثابت کنید که ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است؛

b. اگر $BC = a$ و $k = 2$ باشد، MN را محاسبه کنید.

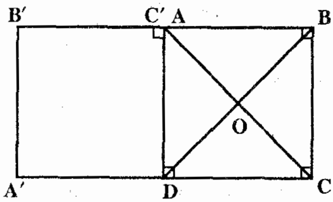
۴.۲. دوران در چند ضلعیها

۱.۴.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۱۱۶. تبدیل یافتهٔ مربع گرد مرکزش، در چه دورانی، خود مربع است. آیا در این دوران، تبدیل‌یافتهٔ هر نقطه بر خود آن نقطه منطبق می‌شود؟ در کدام دوران چنین وضعی پیش می‌آید؟

۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند



۱۱۷. مربع ABCD را حول رأس D به اندازهٔ °۹۰ دوران می‌دهیم. ثابت کنید نقطه‌های B، A، C′ و B′ همخطند.

۳.۴.۲. خطهای: همرس، موازی،...

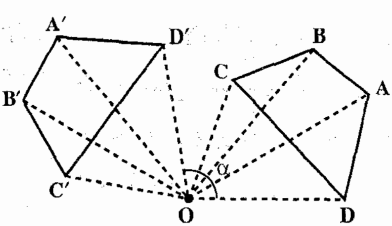
۱.۳.۴.۲. خطها بر هم عمودند

۱۱۸. مربعهای ABNM و ACQP را روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن رسم می‌کنیم. ثابت کنید که MC بر BP عمود است.

۱۱۹. دو مربع هم سوی MPOR و MUVW را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که دو خط PU و RW متعامد هستند.

۴.۴.۲ زاویه

۱.۴.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۱۲۰. چهارضلعی محاطی ABCD را حول مرکز دوران O و با زاویهٔ دوران α دوران داده‌ایم. ثابت کنید:

$\hat{A}+\hat{A'}+\hat{C}+\hat{C'}=360°$.

۵.۴.۲. پاره‌خط

۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۲۱. ضلعهای جانبی BC و AD از ذوزنقهٔ ABCD را حول میانگاههای آنها در جهت مثبت به اندازهٔ 90° دوران می‌دهیم تا در موقعیت B_1C_1 و A_1D_1 قرار گیرند. رابطهٔ $D_1C_1 = A_1B_1$ را ثابت کنید.

۱۲۲. چهارضلعی ABCD را حول نقطهٔ O واقع بر صفحهٔ آن به اندازهٔ 90° چرخش می‌دهیم تا در وضعیت $A_1B_1C_1D_1$ قرار گیرد. ثابت کنید اگر P، Q، R و S میانگاههای پاره‌خطهای A_1B ، B_1C ، C_1D و D_1A باشد، آن‌گاه پاره‌خطهای PR و QS عمود برهم و متساوی هستند.

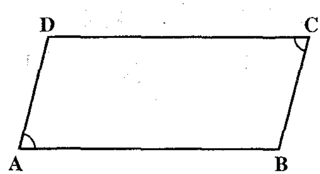
۶.۴.۲. رابطه‌های متری

۱۲۳. مرکز دایره‌ای بر ضلع AB از چهارضلعی محاطی ABCD قرار دارد. سه ضلع دیگر چهارضلعی بر این دایره مماسند. ثابت کنید که : $AD + BC = AB$ است.

بیست‌وششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۵

۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند

۱۲۴. متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید زاویهٔ BAD دوران یافتهٔ زاویهٔ BCD است.



۸.۴.۲. رسم شکلها

۱۲۵. در متوازی‌الاضلاع مفروض مربعی محاط کنید.

۱۲۶. یک n ضلعی رسم کنید که از آن، n رأس مثلثهای متساوی‌الساقینی که بر ضلعهای این n ضلعی و در بیرون آن ساخته می‌شوند و نیز α_1 ، α_2 ، ...، α_n زاویه‌های این رأسها در دست باشند.

۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲۷. روی ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع و در خارج آن چهار مربع می‌سازیم. ثابت کنید که مرکزهای این چهار مربع رأسهای یک مربع می‌باشند.

۱۲۸. یک چند ضلعی منتظم در دورانی به زاویهٔ ۶۰° و همچنین در دورانی به زاویهٔ ۴۵° بر خودش تصویر شده است. این چند ضلعی منتظم کدام شکل زیر می‌تواند باشد؟

الف) مثلث متساوی‌الاضلاع ب) شش‌ضلعی منتظم

ج) هشت ضلعی منتظم د) دوازده‌ضلعی منتظم

هـ) بیست‌وچهارضلعی منتظم

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۱۲۹. مربع ABCD مفروض است. در مرکز این مربع دو خط را (متفاوت با قطرهای AC و BD) برهم عمود رسم می‌کنیم. از برخورد این خطها با مربع، چهار، چهارضلعی به‌دست می‌آید. ثابت کنید این چهارضلعیها با هم مساوی هستند.

۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۳۰. الف. نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 بترتیب بر ضلعهای CD، DA، AB و BC از متوازی‌الاضلاع ABCD چنان واقعند که $\frac{CA_1}{CD}=\frac{DB_1}{DA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{BD_1}{BC}=\frac{۱}{۳}$. نشان دهید که مساحت چهارضلعی حاصل از خطهای AA_1 ، BB_1 ، CC_1 و DD_1 برابر یک سیزدهم مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD است.

ب. نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC هستند چنان که: $\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{AC_1}{AB}=\frac{۱}{۳}$. نشان دهید که مساحت مثلث حاصل از خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 برابر است با یک هفتم مساحت مثلث ABC.

۱۳۱. روی ضلعهای BC، CD، DA و AB از مربع ABCD نقطه‌های P، Q ، R و S بترتیب مفروض هستند. می‌دانیم که $BP:PC=CQ:QD=DR:RA=AS:SB=h$ است.

الف. ثابت کنید PQRS یک مربع است.

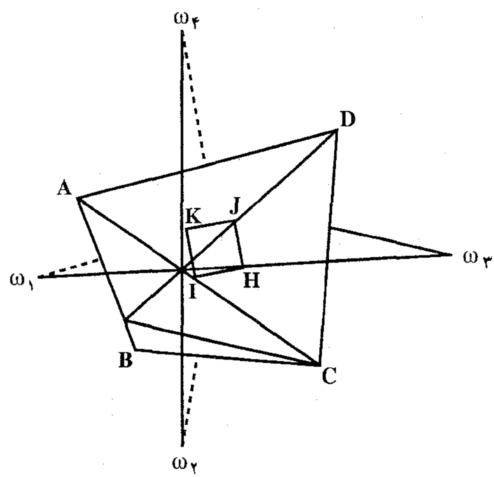
ب. اگر $AB=a$ و $h=۳$ باشد، PQ را محاسبه کنید.

۱۳۲. الف. مثلث ABC را، دور مرکز دایرهٔ محاطی آن، به اندازهٔ زاویه‌ای کوچکتر از ۱۸۰ درجه، دوران داده‌ایم تا مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست آید. پاره‌خطهای راست AB و A_1B_1 در نقطهٔ C_2، پاره‌خطهای راست BC و B_1C_1 در نقطهٔ A_2 و پاره‌خطهای راست CA و C_1A_1 در نقطهٔ B_2 یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید، دو مثلث $A_2B_2C_2$ و ABC متشابه‌اند.

ب. چهارضلعی $ABCD$ را که در دایره‌ای محاط شده است، دور مرکز دایرهٔ محیطی آن، به اندازهٔ زاویه‌ای کمتر از ۱۸۰ درجه دوران داده‌ایم تا چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ به‌دست آید. محل برخورد خطهای راست AB و A_1B_1، BC و B_1C_1، CD و C_1D_1 و DA و D_1A_1 را پیدا می‌کنیم. ثابت کنید، چهار نقطهٔ اخیر، رأسهای یک متوازی‌الاضلاعند.

نهمین المپیاد سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۵

۱۳۳. بر روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی محدب $ABCD$ و در خارج این چهارضلعی مربعهایی به مرکزهای ω_1، ω_2، ω_3 و ω_4 رسم کرده وسطهای AC و BD را I و J و وسطهای $\omega_1\omega_3$ و $\omega_2\omega_4$ را بترتیب H و K می‌نامیم.

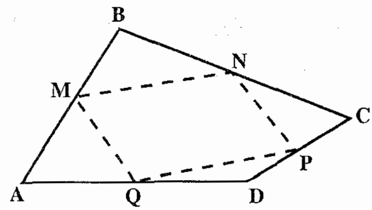


۱. نشان دهید که دو قطعهٔ $\omega_1\omega_3$ و $\omega_2\omega_4$ متساوی و بر هم عمودند و نوع چهارضلعی $IKJH$ را بیابید.

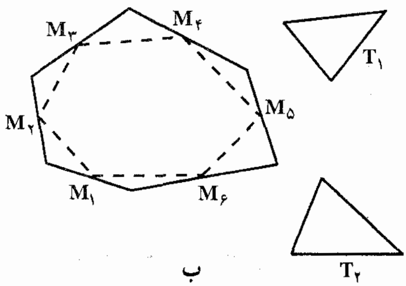
۲. شرطی بر چهارضلعی $ABCD$ پیدا کنید که چهارضلعی $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$ مربع باشد.

۱۳۴. الف. ثابت کنید که ۴ نقطهٔ وسط ضلعهای یک چهارضلعی دلخواه ABCD تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند (شکل الف).

ب. فرض می‌کنیم نقطه‌های M_1، M_2، M_3، M_4، M_5 و M_6 وسطهای ضلعهای یک شش‌ضلعی دلخواه باشند. ثابت کنید که مثلثی مانند T_1 وجود دارد که ضلعهای آن مساوی و موازی با پاره‌خطهای M_1M_2، M_3M_4 و M_5M_6 می‌باشند، و نیز یک مثلث T_2 وجود دارد که ضلعهای آن مساوی و موازی با M_2M_3، M_4M_5 و M_6M_1 هستند (شکل ب).



الف



ب

۵.۲. دوران در دایره

۱.۵.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۱۳۵. در دایره‌ای n قطاع را طوری رنگ کرده‌ایم که، زاویهٔ هر قطاع از $\frac{n}{n^2-n+1}$ کمتر باشد، ثابت کنید، دایره را می‌توان به نحوی چرخاند که همهٔ قطاعهای رنگی به بخش رنگ نشدهٔ دایره منتقل شود.

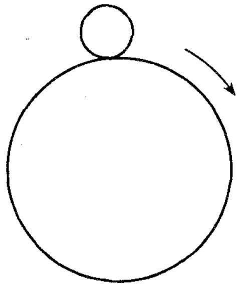
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۱۳۶. دو دایره با شعاع $R=\frac{1}{2\pi}$ مفروضند. روی یکی از دایره‌ها ۲۰ نقطه را نشان گذاشته‌ایم و روی دیگری چند کمان انتخاب کرده‌ایم که مجموع طولهای آنها از $\frac{1}{20}$ کمتر است. ثابت کنید، می‌توان یکی از دایره‌ها را طوری روی دیگری قرار داد که هیچ‌کدام از نقطه‌هایی که نشان گذاشته‌ایم، در درون کمانهای انتخابی، قرار نگیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

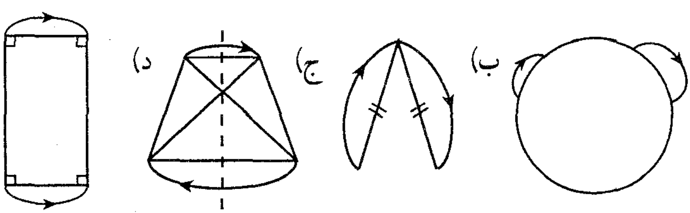
۱۳۷. دایرهٔ به شعاع ۱ روی دایرهٔ ثابت به شعاع ۴ بدون لغزش می‌غلتد. آن‌گاه که دایرهٔ کوچک به وضع اوّل خود بازگردد، چند بار دور خود چرخیده است؟

الف) ۷ ب) ۵ ج) ۳ د) ۱ هـ) عددی غیرصحیح



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۱۳۸. در هر یک از شکلهای زیر دو دوران مشخص شده است. در کدام شکل یا کدام شکلها هر دو دوران می‌توانند جزئی از یک دوران باشُند؟



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۵.۲. نقطه ثابت است

۱۳۹. دو دایره واقع در یک صفحه متقاطعند. فرض می‌کنیم B یکی از نقطه‌های تقاطعشان باشد. دو نقطه به‌طور هم‌زمان از نقطهٔ A با سرعتهای ثابت، هر نقطه در امتداد دایرهٔ خودش در جهت یکسان، حرکت می‌کنند. دو نقطه پس از یک دور به‌طور هم‌زمان به A باز می‌گردند. ثابت کنید که نقطهٔ ثابتی مانند P در صفحه چنان وجود دارد که، در هر لحظه، فاصله‌های P از دو نقطهٔ متحرک برابرند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۹

۳.۵.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۵.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۱۴۰. دو دایرهٔ متساوی در نقطهٔ A مماس خارجند. نقطهٔ M روی یک دایره و نقطهٔ M' روی دایرهٔ دیگر چنان تغییر می‌کند که همواره $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})=+\frac{\pi}{۲}$ است. ثابت کنید عمودمنصف MM' از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴.۵.۲. زاویه

۱.۴.۵.۲. اندازهٔ زاویه

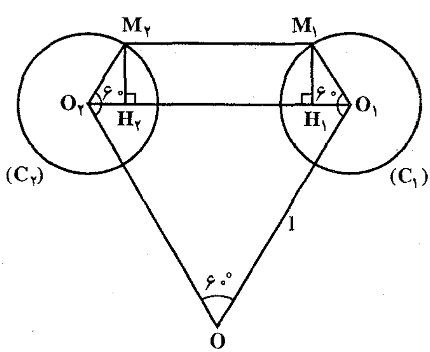
۱۴۱. وتر AB، دایره را به دو قطعه دایره تقسیم کرده است. M و N وسطهای دو کمان $\widehat{AB}$ از دایره‌اند. ضمن دوران دور نقطهٔ A، و به اندازهٔ زاویه‌ای، نقطهٔ B به B' و نقطهٔ M به نقطهٔ M' رفته است. ثابت کنید، پاره‌خطهای راستی که وسط پاره‌خط راست BB' را به نقطه‌های M' و N وصل می‌کنند، با هم زاویهٔ ۹۰ درجه می‌سازند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

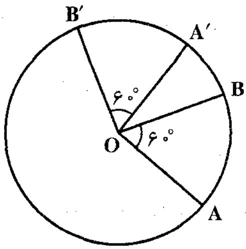
۵.۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۱۴۲. دایرهٔ $C_۱(O_۱,R)$ را حول نقطهٔ O به زاویهٔ $+۶۰^\circ$ دوران داده‌ایم، دایرهٔ $C_۲(O_۲,R)$ به‌دست آمده است. دو شعاع $O_۱M_۱$ و $O_۲M_۲$ را در دایره چنان رسم می‌کنیم که $M_۲\hat{O}_۲O_۱ = O_۲\hat{O}_۱M_۱ = ۶۰^\circ$ باشد. طول پاره‌خط $M_۲M_۱$ را برحسب $OO_۱ = l$ و R تعیین کنید.



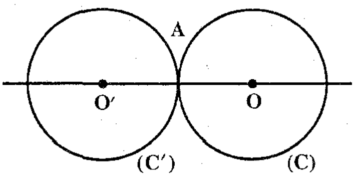
۶.۵.۲. رابطه‌های متری



۱۴۳. دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده است. زاویهٔ $A\hat{O}B = ۶۰°$ از این دایره را در نظر می‌گیریم و آن را حول مرکز دایره به زاویهٔ دوران $۹۰°$ دوران می‌دهیم تا زاویهٔ $A'OB'$ به‌دست آید. ثابت کنید:

$$AB + BA' + A'B' = ۶(۲ + \sqrt{۲})$$

۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند



۱۴۴. دو دایرهٔ مساوی، مماس خارجند. ثابت کنید این دو دایره دوران یافتهٔ یکدیگرند.

۸.۵.۲. رسم شکلها

۱۴۵. از نقطهٔ واقع در درون دایره‌ای وتری با طول معلوم رسم کنید.

۱۴۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که سه رأس آن روی سه دایرهٔ متحدالمرکز قرار گیرند.

۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۴۷. هرگاه پاره‌خطهای [ab] و [cd] دو قطر متمایز از یک دایرهٔ به مرکز O باشند، این دو قطر به هر وضعی که باشند:

الف) خط O، عمودمنصف پاره‌خط [ab] است.

ب) چهارضلعی abcd مربع مستطیل است.

ج) دو زاویهٔ acd و abd هم‌اندازه‌اند.

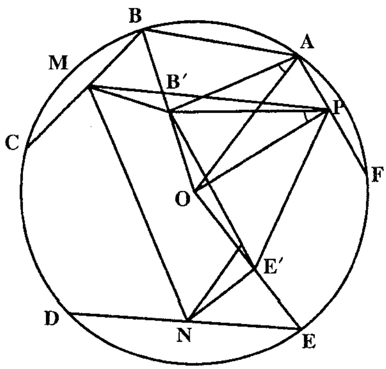
د) دوران به مرکز O که a را روی c تصویر کند، d را نیز روی b تصویر می‌کند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۱۴۸. نقطهٔ C روی قوس $\widehat{AB}$ از دایره‌ای تغییر می‌کند. روی AC نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $AD = BC$ شود. مکان نقطهٔ D را تعیین کنید.

۱۴۹. یک رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع ثابت و رأس دیگرش دایرهٔ مفروض را می‌پیماید. مکان رأس سوم را پیدا کنید.

۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی



۱۵۰. روی دایرهٔ O کمانهای $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF} = \frac{\pi}{3}$ را در نظر می‌گیریم. اگر B' و E' وسطهای شعاعهای OB و OF، M، N و P وسطهای BC، DE و FA باشند.

۱. نشان دهید مثلث $PB'E'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. ثابت کنید مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

بخش ۳. تقارن مرکزی

۱.۳. تعریف و قضیه

۲.۳. تقارن مرکزی در: نقطه، خط، زاویه

۳.۲.۱. مرکز تقارن

۳.۲.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۳.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳.۲.۳. خطهای : همرس، موازی،...

۳.۲.۳.۱. خطها بر هم عمودند

۳.۲.۴. زاویه

۳.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۳.۲.۵. پاره‌خط

۳.۲.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳.۲.۶. رابطه‌های متری

۳.۲.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۳.۲.۸. رسم شکلها

۳.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳.۳. تقارن مرکزی در مثلث

۳.۳.۱. مرکز تقارن

۳.۳.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۳.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳.۳.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۳.۳.۲.۳. نقطه روی خط است

۳.۳.۳. خطهای : همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۳. خطها موازی‌اند

۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۵.۳.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۳.۳. رابطه‌های متری

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۸.۳.۳. رسم شکلها

۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۴.۳. تقارن مرکزی در چند ضلعیها

۱.۴.۳. مرکز تقارن

۲.۴.۳. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۱.۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند

۲.۲.۴.۳. نقطه‌ها بر هم منطبقند

۳.۴.۳. خطهای : همرس، موازی،...

۱.۳.۴.۳. خطها همرسند

۲.۳.۴.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازهٔ زاویه

۵.۴.۳. پاره‌خط

۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۸.۴.۳. رسم شکلها

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۵.۳. تقارن مرکزی در دایره

۳ . ۵ . ۱. مرکز تقارن

۳ . ۵ . ۲. نقطه‌های : همخط، همدایره،...

۳ . ۵ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند

۳ . ۵ . ۳. خطهای : همرس، موازی،...

۳ . ۵ . ۳ . ۱. خطها موازی‌اند

۳ . ۵ . ۴. زاویه

۳ . ۵ . ۴ . ۱. اندازهٔ زاویه

۳ . ۵ . ۵. پاره‌خط

۳ . ۵ . ۵ . ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳ . ۵ . ۶. رابطه‌های متری

۳ . ۵ . ۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

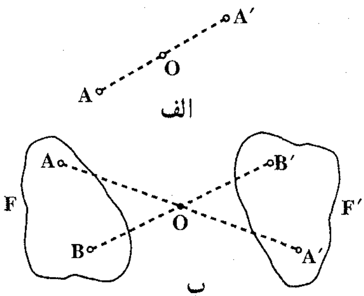
۳ . ۵ . ۸. رسم شکلها

۳ . ۵ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳ . ۵ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۳. تقارن مرکزی

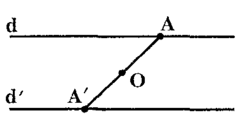
۱.۳. تعریف و قضیه



تعریف. می‌گوییم نقطهٔ A' از نقطهٔ A با یک تقارن مرکزی یا یک نیمدور حول نقطهٔ O (که مرکز تقارن نامیده می‌شود) به دست می‌آید، هرگاه نقطهٔ O وسط پاره خط AA' باشد (شکل الف). واضح است که اگر نقطهٔ A' از یک نیمدور نقطهٔ A حول O به دست آمده باشد، آن گاه به وارون، A نیز از یک نیمدور نقطهٔ A' حول O به دست می‌آید. با توجه به این واقعیت می‌توانیم از یک جفت نقطه‌های وابسته به هم، توسط یک نیمدور حول یک نقطه صحبت کنیم. اگر A' از یک نیمدور نقطهٔ A حول O به دست آید، آن‌گاه چنین نیز می‌گویند : A' از بازتابی A نسبت به نقطهٔ O به دست آمده است، یا A' قرینهٔ A است نسبت به نقطهٔ O، تقارن به مرکز O را با نماد S_O نشان می‌دهند و می‌نویسند $A' = S_O(A)$.

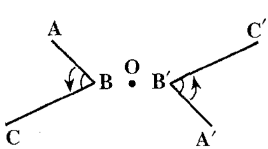
قرینهٔ مرکزی یک شکل. مجموعهٔ تمام نقطه‌هایی که از تقارن مرکزی شکل مفروض F حول نقطهٔ O به دست می‌آیند شکل F' را تشکیل می‌دهند، که از یک نیمدور شکل F حول O به دست می‌آید (شکل ب). در عین حال، شکل F از یک نیمدور شکل F' حول O به دست می‌آید.

چند نتیجه. چون تقارن مرکزی دوران به زاویهٔ ۱۸۰° گرد مرکز تقارن است، بنابراین تقارن مرکزی همهٔ ویژگیهای دوران را حفظ می‌کند. یعنی :



۱. قرینهٔ مرکزی هر خط راست، خطی راست و موازی آن خط است.

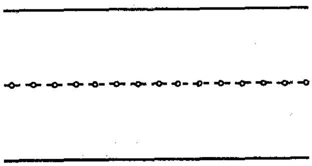
۲. قرینهٔ مرکزی هر زاویه، زاویه‌ای همنهشت و همجهت با آن زاویه است.



۳. قرینهٔ مرکزی هر شکل با آن شکل همنهشت است.

۴. در تقارن مرکزی قرینهٔ مرکز تقارن بر خودش منطبق است.

۱۵۱. واضح است که نوار متشکل از دو خط موازی دارای بینهایت مرکز تقارن است (شکل). آیا می‌توانید شکلی بیابید که بیش از یک مرکز تقارن، اما متناهی داشته باشد (مثلاً، آیا می‌تواند دو و تنها دو مرکز تقارن داشته باشد)؟



۱۵۲. ثابت کنید، اگر مجموعه‌ای واقع بر صفحه بیش از یک مرکز تقارن داشته باشد، آن وقت دارای بینهایت مرکز تقارن است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلژیک، ۱۹۷۷

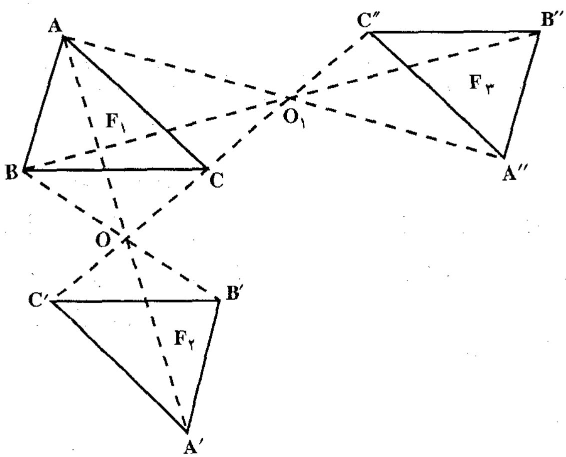
۱۵۳. **قضیه.** ثابت کنید که در هر تقارن مرکزی به مرکز O که شکل F را به شکل F' تبدیل می‌کند. هر دو پاره‌خط متناظر موازی، مساوی و مختلف‌الجهتند. بعکس، اگر هر دو پاره‌خط متناظر از دو شکل F و F' موازی، مساوی و مختلف‌الجهت باشند، آن‌گاه این دو شکل با یک تقارن مرکزی به هم وابسته‌اند.

۱۵۴. **قضیه.** ثابت کنید که مجموع دو تقارن مرکزی یک انتقال است.

۱۵۵. ثابت کنید مجموع سه تقارن مرکزی نسبت به سه مرکز متمایز، یک تقارن مرکزی است.

۱۵۶. **قضیه.** ثابت کنید مجموع چهار تقارن مرکزی یک انتقال است.

۱۵۷. ثابت کنید که اگر دو شکل F_2 و F_3 قرینه‌های F_1 نسبت به دو نقطهٔ O و O_1 باشند، ضلعهای متناظر آنها با هم موازی‌اند.



۱۵۸. از حرفهای بزرگ الفبای لاتین،

A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z

چند تا از آنها مرکز تقارن دارند؟

الف) ۴ ب) ۵

ج) ۶ د) ۷

هـ) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۵۹. کدام یک از شکلهای زیر مرکز تقارن ندارد؟

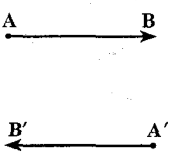
الف) دایره ب) مثلث متساوی‌الاضلاع

ج) مربع د) مربع مستطیل

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۲.۳. تقارن مرکزی در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۳. مرکز تقارن

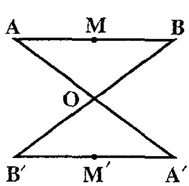


۱۶۰. دو پاره‌خط موازی AB و A′B′ موازی، مساوی و مختلف‌الجهتند. مرکز تقارنی که این دو پاره‌خط را به هم تبدیل می‌کند، تعیین کنید.

۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

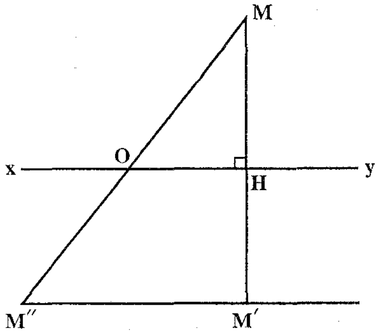
۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

۱۶۱. دو پاره‌خط AB و A′B′ موازی، مساوی و مختلف‌الجهتند. نقطهٔ برخورد AA′ و BB′ را O می‌نامیم. ثابت کنید که M وسط پاره‌خط AB، M′ وسط پاره‌خط A′B′ و نقطهٔ O روی یک خط راست قرار دارند.



۳.۲.۳. خطهای: همرس ، موازی، ...

۱.۳.۲.۳. خطها بر هم عمودند



۱۶۲. نقطهٔ O را روی خط xy و نقطهٔ M را در خارج آن در نظر می‌گیریم و قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به xy و نقطهٔ O بترتیب ′M و ″M می‌نامیم. ثابت کنید که ′MM بر ″M′M عمود است.

۴.۲.۳. زاویه

۱.۴.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۱۶۳. دو خط A و B در یک صفحه‌اند و با هم زاویهٔ °۱۸ می‌سازند. تقارن نسبت به A با S_A، و تقارن نسبت به B با S_B نشان داده می‌شود. ترکیب S_BOS_A دورانی است با زاویهٔ :

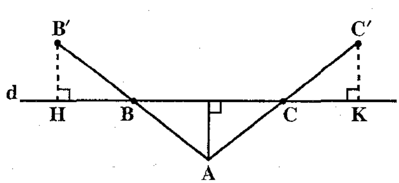
الف) °۳۶ ب) °۱۸ ج) °۹ د) °۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۶۴. خط d و دو نقطهٔ B و C روی آن و نقطهٔ A خارج آن مفروضند. پاره‌خطهای AB و AC را به اندازهٔ خود تا نقطه‌های ′B و ′C امتداد می‌دهیم. ثابت کنید، ′B و ′C از خط d متساوی‌الفاصله‌اند.



۱۶۵. وسط پاره‌خط $[bc]$ را با a، و قرینهٔ a نسبت به c را با d نشان می‌دهیم. در این صورت،

الف) c وسط $[bd]$ است. ب) $|bd|=2|ac|$

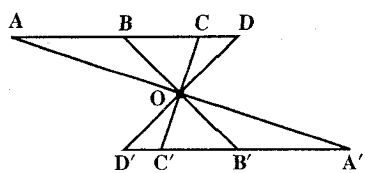
ج) a بین c و d واقع است. د) $|ba|=|cd|$

هـ) $|ba|=|ad|$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۶.۲.۳. رابطه‌های متری

۱۶۶. چهارنقطهٔ همخط A، B، C و D چنانند که $\frac{AB}{4}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{2}$ است. قرینه‌های این نقطه‌ها نسبت به نقطهٔ O را بترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید $\frac{A'B'+B'C'+C'D'}{9}=\frac{AB}{4}$.



۷.۲.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۱۶۷. دو خط Δ و Δ' در نقطهٔ O بر یکدیگر عمودند قرینهٔ محوری نقطهٔ M را نسبت به Δ، M' و نسبت به Δ'، M'' می‌نامیم. ثابت کنید نقطه‌های M' و M'' نسبت به نقطهٔ O قرینهٔ مرکزی یکدیگرند.

۱۶۸. چهار نقطهٔ A، B، C و D در یک صفحه مفروضند. خطهای AC و BD را که در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند، رسم می‌کنیم. روی AC بردار $\overrightarrow{AE}$ را هم‌ارز (همسنگ) با بردار $\overrightarrow{CO}$ اختیار می‌کنیم، و روی BD، بردار $\overrightarrow{BF}$ را هم‌ارز با بردار $\overrightarrow{DO}$. ثابت کنید که خط AB خطهای CD و EF را بترتیب در دو نقطهٔ G و H قطع می‌کند که این دو نقطه نسبت به وسط پاره‌خط AB قرینهٔ یکدیگرند.

۱۶۹. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ دو نقطه P و P' روی $x'Ox$ قرینه نسبت به O و دو نقطهٔ ثابت Q و Q' متقارن نسبت به O روی $y'Oy$ مفروضند. M نقطه‌ای است اختیاری از صفحه دو محور. از P و P' عمودهایی بر خطهای MP و MP' رسم می‌کنیم تا همدیگر را در S قطع کنند و از Q و Q' عمودهایی بر MQ و MQ' رسم می‌کنیم تا همدیگر را در S' قطع کنند. از S و S' خطهایی به موازات Oy و Ox رسم می‌کنیم تا همدیگر را در M' قطع کنند، نشان دهید M و M' نسبت به O قرینه‌اند.

۳.۲.۸. رسم شکلها

۱۷۰. یک خط مستقیم، یک پاره‌خط و نقطهٔ O مفروض است. پاره‌خطی را طوری رسم کنید که نقطه‌های انتهایی آن به خط مستقیم و پاره‌خط مفروض متعلق بوده و نقطهٔ O وسط آن باشد.

۳.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۷۱. در صفحهٔ π، دو خط A و B در نقطهٔ p مشترک و بر هم عمودند. تقارنهای نسبت به محورهای A و B را بترتیب با S_A و S_B، و تقارن نسبت به مرکز p را با S_p نشان می‌دهیم. دربارهٔ مجموعهٔ $E=\{S_A, S_B, S_C\}$ کدام گزارهٔ زیر درست است؟

الف) به ازای هر $x\in E$، ترکیب x^2 یک جایگشت همانی است.

ب) به ازای هر $x\in E$ دو تبدیل x و x^{-1} با هم برابرند.

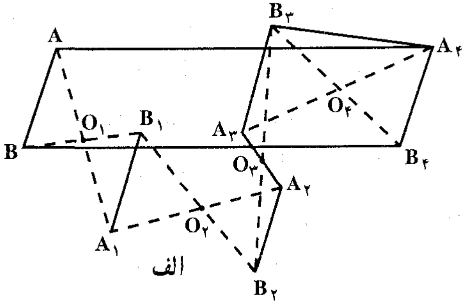
ج) به ازای هر $x\in E$ و هر $y\in E$ اگر $x\neq y$، آن گاه $xOy\in E$.

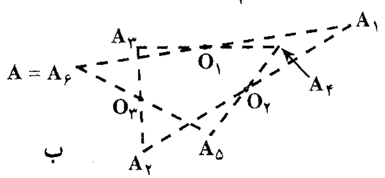
د) E با قانون ترکیب یک گروه است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۳.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱۷۲. الف. گیریم O_1، O_2، ...، O_n (n زوج) نقاطی در صفحه باشند، و AB پاره‌خطی دلخواه باشد؛ فرض کنیم پاره‌خط A_1B_1 از یک نیمدور AB حول O_1 به دست آمده



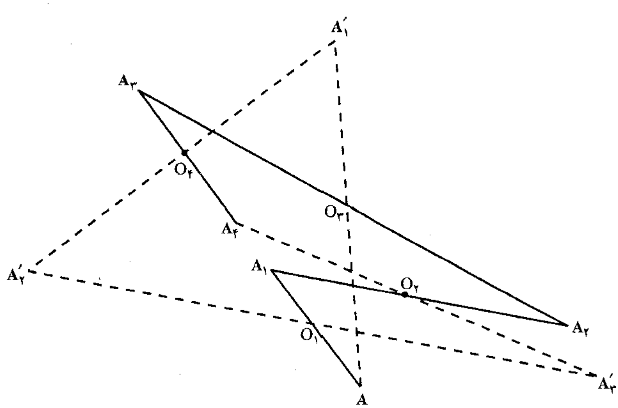


باشد، $A_۲B_۲$ از یک نیمدور $A_۱B_۱$ حول $O_۲$، $A_۳B_۳$ از یک نیمدور $A_۲B_۲$ حول $O_۳$، ....، و A_nB_n از یک نیمدور $A_{n-۱}B_{n-۱}$ حول O_n (شکل الف که در آن $n = ۴$ است). نشان دهید $AA_n = BB_n$. اگر n فرد باشد، آیا باز نتیجه‌گیری این تمرین صحیح است؟

ب. گیریم تعداد فردی از نقطه‌های $O_۱$، $O_۲$، ....، O_n در صفحه داده شده باشند (شکل ب با $n = ۳$). گیریم یک نقطهٔ دلخواه A مرتباً با نیمدورهایی حول $O_۱$، $O_۲$، ....، O_n حرکت کند تا A_n به دست آید، و سپس A_n به طور مرتب با نیمدورهایی حول $O_۱$، $O_۲$، ....، O_n حرکت کند تا $A_{۲n}$ به دست آید. نشان دهید که نقطهٔ $A_{۲n}$، که نتیجهٔ تأثیر $۲n$ نیمدور است، بر A منطبق است.

آیا حکم مسأله برای وقتی که n زوج باشد، برقرار است؟

۱۷۳. الف. گیریم $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$ چهار نقطه در صفحه باشند. فرض می‌کنیم نقطهٔ دلخواه پنجم A به طور متوالی نیمدورهایی حول $O_۱$، $O_۲$، $O_۳$ و $O_۴$ حرکت کند حال با شروع دوباره از نقطهٔ اوّلیهٔ A، فرض می‌کنیم این نقطه با نیمدورهایی حول همان چهار نقطه حرکت کند، اما به ترتیب زیر: $O_۳$، $O_۴$، $O_۱$ و $O_۲$. نشان دهید که در هر دو حالت جای نقطهٔ نهایی $A_۴$ یکی است (شکل).



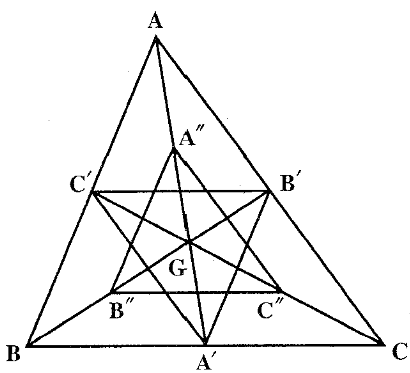
ب. گیریم O_1 ، O_2 ، O_3 ، O_4 و O_5 پنج نقطه در صفحه باشند. گیریم نقطهٔ دلخواه A به طور متوالی با نیمدورهایی حول این پنج نقطه حرکت کند. حال با شروع دوباره از نقطهٔ اوّلیهٔ A، فرض می‌کنیم نقطهٔ A به طور متوالی حول همان پنج نقطه، اما به ترتیب عکس، حرکت کند : O_5 ، O_4 ، O_3 ، O_2 و O_1 . نشان دهید که در هر دو حالت جای نقطهٔ نهایی A_5 یکی است.

ج. فرض کنید n نقطهٔ O_1 ، O_2 ، ... و O_n در صفحه داده شده‌اند. یک نقطهٔ دلخواه به طور متوالی با نیمدورهایی حول نقطه‌های O_1 ، O_2 ، ... و O_n حرکت می‌کند، سپس بار دیگر همان نقطهٔ اوّلیه به طور متوالی حول همان نقطه‌ها اما به ترتیب عکس حرکت می‌کند : O_n ، O_{n-1} ، ... و O_1 . به ازای چه مقدارهایی از n، جای نهایی در هر دو حالت یکی است؟

۳.۳. تقارن مرکزی در مثلث

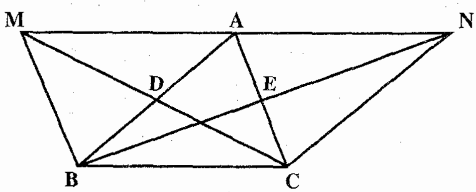
۱.۳.۳. مرکز تقارن

۱۷۴. نقطهٔ برخورد میانه‌های AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC را G و وسطهای پاره‌خطهای GA، GB و GC را بترتیب A'' ، B'' و C'' می‌نامیم. ثابت کنید، نقطهٔ G مرکز تقارن شکل حاصل از دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ است.



۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند



۱۷۵. مثلث ABC را در نظر گرفته، قرینهٔ رأس C را نسبت به D وسط AB، نقطهٔ M و قرینهٔ رأس B نسبت به نقطهٔ E وسط AC را نقطهٔ N می‌خوانیم. ثابت کنید نقطه‌های M، N و A بر یک استقامتند.

۱۷۶. سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت بر سه ضلع یک مثلث وجود دارد. قرینهٔ هریک از این سه نقطه را نسبت به وسط ضلعی که نقطه روی آن قرار دارد، پیدا می‌کنیم. ثابت کنید که این سه قرینه نیز واقع بر یک استقامتند. دو خطی را که از این دو سه نقطه تشکیل شده معکوس یکدیگر گویند.

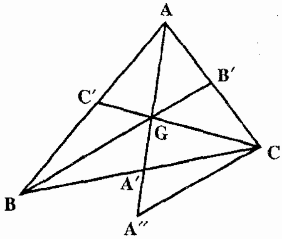
۲.۲.۳.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۱۷۷. ثابت کنید، نقطه‌های قرینهٔ مرکز دایره‌های محاطی خارجی مثلث نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی آن، روی دایره‌ای قرار دارند که با دایرهٔ محاطی مثلث هم مرکز و شعاعش برابر با قطر دایرهٔ محیطی مثلث است.

۳.۲.۳.۳. نقطه روی خط است

۱۷۸. ثابت کنید، قرینهٔ مرکزی دایره محیطی هر مثلث نسبت به وسط خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند روی ارتفاع رسم شده بر ضلع سوم واقع است.

۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...



۱.۳.۳.۳. خطها موازی‌اند

۱۷۹. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را G، و قرینهٔ رأس A نسبت به نقطهٔ G را نقطهٔ A″ می‌نامیم. ثابت کنید که A″C موازی BB′ است.

۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱۸۰. میانهٔ CM از مثلث ABC با ضلعهای AC و BC بترتیب زاویه‌های α و β تشکیل می‌دهد. اگر $AC < BC$ باشد، کدامیک از این زاویه‌ها بزرگتر از دیگری است؟

۵.۳.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۸۱. قرینهٔ مرکزی سه رأس A، B و C از مثلث ABC، نسبت به نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث را بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید : $BC' = CB'$.

۶.۳.۳. رابطه‌های متری

۱۸۲. روی ضلعهای AB، AC و BC از مثلث ABC، نقطه‌های C'، B' و A' را طوری انتخاب کرده‌ایم که، پاره‌خطهای راست AA'، BB' و CC'، در یک نقطه به هم رسیده‌اند. نقطه‌های A''، B'' و C'' را ، بترتیب، قرینهٔ نقطه‌های A، B و C، نسبت به نقطه‌های A'، B' و C' می‌گیریم. ثابت کنید : $S_{A''B''C''} = ۳S_{ABC} \cdot ۴S_{A'B'C'}$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، ۱۹۸۳

۱۸۳. هرگاه نقطه‌های (D,D') و (E,E') و (F,F') قرینهٔ یکدیگر نسبت به وسطهای ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دو مثلث DEF و $D'E'F'$ متعادلند.

۱۸۴. مثلث ABC به مساحت S مفروض است. فاصلهٔ دلخواه M واقع در داخل مثلث را از سه ضلع αh_a، βh_b و γh_c فرض می‌کنیم که در آن h_a، h_b و h_c ارتفاعهای مثلث ABC است.

مطلوب است محاسبهٔ مساحت S سطح واقع بین مثلث ABC و $A'B'C'$، قرینهٔ ABC نسبت به M. نقطهٔ M را چه‌طور باید انتخاب کرد تا سطح S ماکزیمم شود؟

۱۸۵. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و مرکز دایرهٔ محیطی آن را O می‌نامیم و فرض می‌کنیم محل برخورد ارتفاعهای آن در داخل مثلث واقع باشد و قرینه‌های نقطه‌های A، B و C را نسبت به نقطهٔ O بترتیب A' ، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید که مساحت مثلث ABC مساوی است با نصف مساحت شش ضلعی $AC'BA'CB'$.

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۱۸۶. در مثلث ABC میانه‌های AA_1 ، BB_1 و CC_1 را که در نقطهٔ M متقاطع هستند، رسم می‌کنیم. نقطه‌های P، Q و R میانگاه پاره‌خطهای AM، BM و CM است. ثابت کنید که دو مثلث PQR و $A_1B_1C_1$ قرینهٔ مرکزی یکدیگرند.

۱۸۷. خطی که موازی میانهٔ AA' از مثلث ABC رسم می‌شود ضلعهای BC، CA و AB را در H، N و D قطع می‌کند. ثابت کنید قرینه‌های H نسبت به وسطهای NC و BD قرینهٔ یکدیگر نسبت به رأس A می‌باشند.

۱۸۸. دایره‌ای که مرکزش به یک فاصله از دو رأس A و B از مثلث ABC است ضلعهای BC و CA را در نقطه‌های (P,P') و (Q,Q') قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای PQ و $P'Q'$ ، AB را در دو نقطهٔ قرینه نسبت به وسط آن قطع می‌کنند.

۸.۳.۳. رسم شکلها

۱۸۹. از نقطهٔ I که روی ضلعهای مثلث ABC قرار ندارد قاطعی را طوری رسم کنید که مثلثی با حداقل مساحت ممکن به دست آید.

۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۰. نقطه‌های M، N و K میانگاه پاره‌خطهایی هستند که یک سر آنها بر یکی از رأسهای مثلث ABC و سر دیگر آنها بر نقطهٔ تقاطع میانه‌های این مثلث منطبق است. ثابت کنید مثلثی که رأسهای آن محل برخورد خطهای موازی ضلعهای مثلث ABC بوده و نقطه‌های M، N و K روی ضلعهای آن قرار دارد با مثلث ABC برابر است.

۱۹۱. هرگاه T نمایانگر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x سانتیمتر باشد، کدام گزارهٔ زیر درست است؟

الف) T محور تقارن ندارد.

ب) T یک و فقط یک مرکز تقارن دارد.

ج) T حداقل دو مرکز تقارن دارد.

د) مساحت T بر حسب سانتیمتر مربع، $\frac{۱}{۲}x^{۲}$ است.

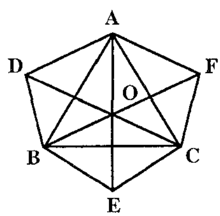
هـ) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی T از سه رأس آن به یک فاصله است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۱۹۲. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ که نسبت به نقطهٔ O متقارنند، یکدیگر را قطع کرده‌اند. تقاطع آنها چه وضعی خواهد داشت؟

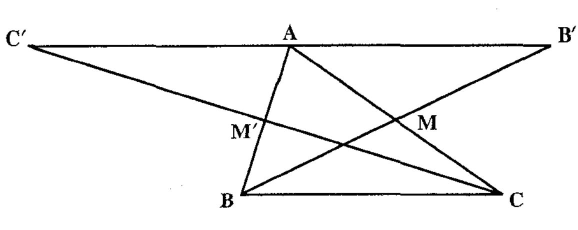
۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۱۹۳. محل تلاقی ارتفاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را O می‌نامیم. قرینهٔ O را نسبت به هریک از ضلعهای مثلث پیدا کنید. اگر این نقطه‌ها F، D و E باشند، ثابت کنید این نقطه‌ها نسبت به ارتفاعهای مثلث دو به دو قرینه‌اند و O مرکز تقارن AFCEBD است.



۱۹۴. در مثلث غیرمشخص ABC، میانهٔ BM را رسم کرده، به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ B' امتداد می‌دهیم. سپس میانهٔ CM' را به اندازهٔ خودش تا C' امتداد می‌دهیم.

ثابت کنید : ۱. $AB' = AC'$ ۲. $B'\hat{A}C' = ۱۸۰^{\circ}$



۴.۳. تقارن مرکزی در چندضلعیها

۱.۴.۳. مرکز تقارن

۱۹۵. ثابت کنید که محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، مرکز تقارن آن است.

۱۹۶. از چندضلعیهای زیر، کدامها مرکز تقارن دارند؟

الف) مثلث متساوی‌الاضلاع　　ب) مربع

ج) پنج ضلعی منتظم　　د) شش ضلعی منتظم

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند

۱۹۷. ثابت کنید قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی یک چهارضلعی محاطی نسبت به نقطهٔ تقاطع خطهایی که وسطهای ضلعهای آن را به هم وصل می‌کند با قرینه‌های مرکز دایرهٔ محیطی نسبت به دو ضلع مقابل چهارضلعی واقع بر یک استقامت است.

۲.۲.۴.۳. نقطه‌ها بر هم منطبقند

۱۹۸. ثابت کنید، قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی یک چهارضلعی محاطی، نسبت به نقطهٔ برخورد خطهایی که وسطهای ضلعهای آن را به هم وصل می‌کنند، بر نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلثی که رأسهایش وسطهای قطرها و محل برخورد آنها است، منطبق است.

۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۳. خطها همرسند

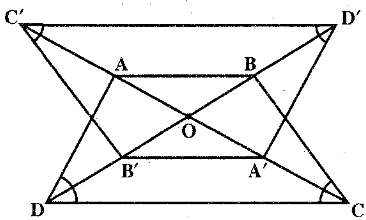
۱۹۹. چهارخطی که هر رأس یک چهارضلعی محاطی را به محل برخورد ارتفاعهای مثلثی که از سه رأس دیگر تشکیل می‌شود وصل می‌کند یکدیگر را نصف می‌کنند.

۲.۳.۴.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲۰۰. ثابت کنید، عمودی که از محل برخورد دو ضلع روبه‌روی یک چهارضلعی محاطی بر خطی که وسط این دو ضلع را به هم وصل می‌کند فرود آید، از قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی آن نسبت به محل برخورد خطهایی که وسطهای ضلعها را به هم وصل می‌کنند، می‌گذرد.

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازهٔ زاویه



۲۰۱. اندازه‌های دو قاعدهٔ AB و CD از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD برابر ۱۲ و ۶ و اندازهٔ هر ساقش برابر ۵ است. قرینهٔ این ذوزنقه را نسبت به نقطهٔ برخورد قطرهایش، A′B′C′D′ می‌نامیم. اندازهٔ یک زاویه از زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ این ذوزنقه را به‌دست آورید.

۵.۴.۳. پاره‌خط

۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۰۲. پاره‌خطی از محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD عبور کرده و روی ضلعهای آن پاره‌خطهای BE و DF را جدا می‌کند. ثابت کنید این پاره‌خطها برابر هستند.

۲۰۳. یک شش ضلعی را که ضلعهای متقابل آن موازی هستند بر یک دایره محیط کرده‌ایم. ثابت کنید که ضلعهای متقابل آن با هم مساوی هستند.

۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۲۰۴. مستطیل ABCD داده شده است. نقطهٔ دلخواهی در آن انتخاب و از آن جا، دو خط راست موازی با ضلعهای مستطیل رسم کرده‌ایم. این خطهای راست، مستطیل را به چهارمستطیل کوچکتر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، یکی از دو مستطیلی که شامل نقطه‌های A و C هستند، مساحتی دارد که از $\frac{۱}{۴}$ مساحت مستطیل اصلی تجاوز نمی‌کند.

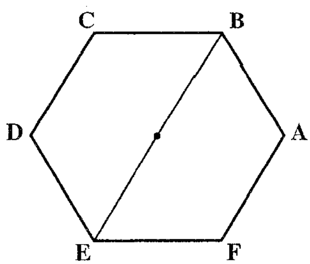
۲۰۵. ضلعهای متقابل شش ضلعی محدب ABCDEF دو به دو موازی و مساوی هستند. مساحت مثلث ACE چه قسمتی از مساحت شش ضلعی است؟

۲۰۶. در یک شش ضلعی منتظم، متوازی‌الاضلاعی محاط کرده‌ایم که مرکز تقارن آن، بر مرکز تقارن شش ضلعی واقع است. ثابت کنید، مساحت متوازی‌الاضلاع، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت شش ضلعی تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، لهستان، ۱۹۷۸

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۲۰۷. شش ضلعی ABCDEF را در نظر می‌گیریم و قطر BE را رسم می‌کنیم. ثابت کنید دو چهارضلعی ABEF و BCDE قرینهٔ مرکزی یکدیگرند.



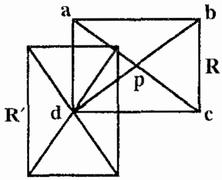
۸.۴.۳. رسم شکلها

۲۰۸. یک متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت هم ارز تقسیم کنید.

۲۰۹. فرض می‌کنیم n عددی است فرد (مثلاً $n = ۹$)، و n نقطه در صفحه داده شده است. رأسهای یک n ضلعی را پیدا کنید که نقطه‌های داده شده وسطهای ضلعهای آن باشند. حالتی را که n زوج باشد، بررسی کنید.

۲۱۰. در یک چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی را طوری محاط کنید که دو رأس آن ثابت و به (الف) ضلعهای مقابل، (ب) ضلعهای مجاور چهارضلعی ؛ متعلق باشد.

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۱۱. با توجه به شکل روبه‌رو، انتقالی را که با جفت مرتب (p,b) مشخص می‌شود با t، تقارن نسبت به مرکز p را با s، و دوران به مرکز d که نیمخط da] را روی نیمخط dc] می‌آورد با r نشان می‌دهیم. مستطیل R به مرکز p با کدام ترکیب زیر به مستطیل R′ به مرکز d تبدیل می‌شود؟

الف) rOsOt ب) tOrOs

ج) rOtOs د) sOtOr

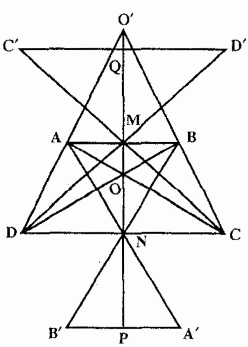
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۲۱۲. هرچند ضلعی محدب را که ضلعهای روبه‌رویش با هم موازی و با هم برابر باشند، چندضلعی متوازی‌الاضلاعی می‌نامیم. با این تعریف، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

الف) چند ضلعی متوازی‌الاضلاعی وجود ندارد.
ب) چندضلعی متوازی‌الاضلاعی با بیش از چهار ضلع وجود ندارد.
ج) هر چند ضلعی متوازی‌الاضلاعی منتظم است.
د) هر چند ضلعی متوازی‌الاضلاعی یک مرکز تقارن دارد.
هـ) هر چند ضلعی متوازی‌الاضلاعی حداقل یک محور تقارن دارد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی



۲۱۳. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD (AB||CD) داده شده است. وسط ضلع قاعدهٔ AB را M و وسط قاعدهٔ CD را N می‌نامیم. قرینه‌های دو رأس A و B نسبت به نقطهٔ N را A′ و B′ و قرینه‌های دو رأس C و D نسبت به نقطهٔ M را C′ و D′ می‌نامیم. ثابت کنید:

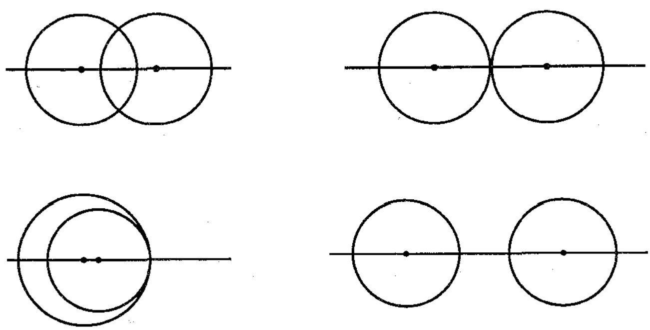
۱. A′B′ موازی C′D′ است.

۲. نقطه‌های M، N و O (محل برخورد قطرها) و نقطهٔ O′ (محل برخورد دو ساق ذوزنقه) با P و Q (وسطهای A′B′ و C′D′) همخطند.

۵.۳. تقارن مرکزی در دایره

۱.۵.۳. مرکز تقارن

۲۱۴. در هر یک از شکلهای زیر محورهای تقارن و مرکز تقارن را پیدا کنید. مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، لوزی، مستطیل، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زاویه، دو دایرهٔ متساوی و متقاطع، دو دایره متساوی و مماس خارج، دو دایره مماس داخل و دو دایره متساوی و متخارج.



۲.۵.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

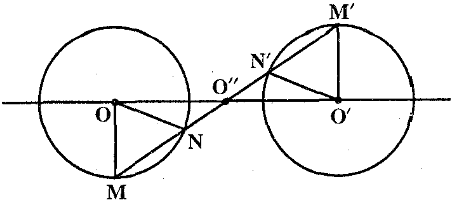
۱.۲.۵.۳. نقطه‌ها همخطند

۲۱۵. دو وتر BA و CD را از دو انتهای قطر BC از دایره‌ای به مرکز O طوری رسم می‌کنیم که BA و CD همدیگر را قطع نکرده و روی دو طرف BC واقع شوند. ثابت کنید که OA و OD به یک خط متعلق بوده و $DO = OA$ است.

۲۱۶. از انتهای A وتر AB در دایره‌ای به مرکز O مماسی بر آن رسم می‌کنیم. عمود BM را از نقطهٔ B بر این مماس وارد می‌آوریم. این عمود دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید، مرکز O و نقطهٔ N که وتر AB را به نسبت $AN:NB = ۱:۲$ تقسیم می‌کند و نیز نقطهٔ C' متقارن نقطهٔ C نسبت به نقطهٔ M روی یک خط مستقیم قرار دارند.

۳.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۵.۳. خطها موازی‌اند

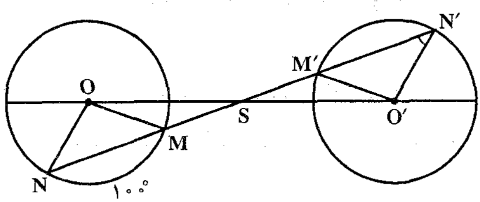


۲۱۷. دو دایرهٔ مساوی به مرکزهای O و O′ در یک صفحه داده شده‌اند. از نقطهٔ O″ وسط خط‌المرکزین OO′ خطی رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقطه‌های M، N، N′ و M′ قطع کند. ثابت کنید، OM‖O′M′ و ON‖O′N′ است.

۴.۵.۳. زاویه

۱.۴.۵.۳. اندازهٔ زاویه

۲۱۸. نقطهٔ S مرکز تقارنی است که دو دایرهٔ (O) و (O′) را به هم تبدیل می‌کند. از S خطی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) در نقطه‌های M و N و دایرهٔ (O′) را در نقطه‌های M′ و N′ قطع کند. اگر $\widehat{MN}=100^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $M'\hat{N}'O'$ چه قدر است؟



۵.۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۵.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۱۹. بر دایره‌ای، یک هشت ضلعی محیط شده است و ضلعهای متقابل این هشت ضلعی دو به دو موازی هستند. ثابت کنید که ضلعهای متقابل آن دو به دو مساوی هستند.

از لئوناردو داوینچی

۲۲۰. اگر دو دایرهٔ مساوی، یکدیگر را قطع کنند، هر نقطهٔ دلخواه از خط راستی که از نقطه‌های برخورد گذشته است، از دو مرکز به یک فاصله است.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۲۲۱. رأس B از زاویهٔ ABC در بیرون دایره‌ای قرار دارد و نیمخطهای راست BA و BC، دایره را قطع می‌کنند. از نقطهٔ K، محل برخورد نیمخط راست BA با محیط دایره، خط راستی عمود بر نیمساز زاویه کشیده‌ایم، که دایره را در نقطه‌های K و P، و نیمخط راست BC را در نقطهٔ M قطع کرده است. ثابت کنید، طول پاره‌خط راست PM، دو برابر طول عمودی است که از مرکز دایره بر نیمساز زاویهٔ ABC فرود آید.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

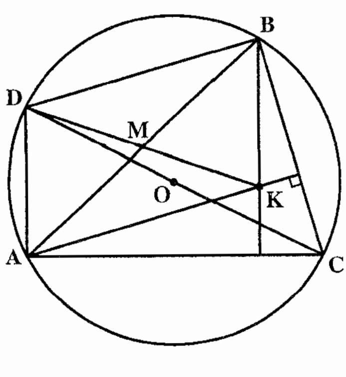
۶.۵.۳. رابطه‌های متری

۲۲۲. دو مثلث متساوی‌الاضلاع در دایره‌ای به شعاع r محاط شده‌اند. فرض می‌کنیم K مساحت مجموعهٔ شامل تمام نقطه‌های داخل دو مثلث باشد. ثابت کنید که:

$$۲K \geq r^{۲}\sqrt{۳}$$

۷.۵.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۲۲۳. اگر نقطهٔ D را روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC چنان اختیار کنیم که CD قطر دایره باشد. ثابت کنید، نقطهٔ D و نقطهٔ برخورد ارتفاعها، نسبت به وسط AB قرینه‌اند.

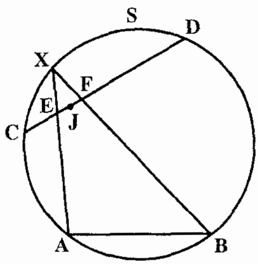


۸.۵.۳. رسم شکلها

۲۲۴. از نقطه‌ای واقع در درون دایره‌ای وتری را رسم می‌کنیم که توسط نقطهٔ مزبور نصف شود.

۲۲۵. نقطه‌های A و B روی یک دایره و نقطهٔ M روی یک خط مفروض است. روی دایره نقطهٔ X را طوری پیدا کنید که خطهای AX و BX خط l را در نقطه‌های هم فاصله از M قطع کنند.

۲۲۶. خط Δ و نقطهٔ O و دایرهٔ C داده شده‌اند. بر خط Δ نقطه‌هایی به دست آورید که قرینه‌هایشان نسبت به O روی دایرهٔ C باشند.



۲۲۷. دو وتر AB و CD در یک دایرهٔ S و یک نقطهٔ مفروض J روی وتر CD داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند X بر محیط دایره بیابید که وترهای AX و BX روی وتر CD، پاره‌خط EF را جدا کنند، و نقطهٔ J وسط EF باشد (شکل).

۲۲۸. دو دایرهٔ متساوی و مماس خارج به شعاع R مفروضند. قرینهٔ هریک را نسبت به مرکز دیگری پیدا کنید.

۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۹. یکی از دو دایرهٔ به شعاع R از رأسهای A و B و دیگری از رأسهای B و C از متوازی‌الاضلاع ABCD گذشته است. نقطهٔ برخورد دوم دو دایره را M می‌گیریم. ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMD برابر است با R.

۲۳۰. یک چند ضلعی غیرمحدب مفروض است. با آن، این عمل را انجام می‌دهیم: دو رأس غیرمجاور A و B از آن را انتخاب می‌کنیم، به نحوی که تمامی چند ضلعی در یک طرف خط راست AB واقع باشد و قرینهٔ بخشی از محیط چند ضلعی را، که بین دو نقطهٔ A و B قرار دارد، نسبت به وسط پاره‌خط راست AB پیدا می‌کنیم. اگر باز هم به یک چندضلعی غیرمحدب برسیم، عمل را تکرار می‌کنیم. ثابت کنید، بعد از چند عمل، چندضلعی مفروض، به یک چند ضلعی محدب تبدیل می‌شود.

۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۳۱. مجموعهٔ محدب بستهٔ F داخل دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. زاویه‌ای که F از هر نقطهٔ دایره به اندازهٔ آن رؤیت می‌شود °۹۰ است. ثابت کنید که O مرکز تقارن است. (بحث کنید.)

بخش ۴. تقارن محوری

۱.۴. تعریف و قضیه

۲.۴. تقارن محوری در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۴. محور تقارن

۲.۲.۴. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۴. نقطه‌ها همخطند

۲.۲.۲.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند

۳.۲.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۲.۴. خطهای : همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۴. خط امتداد ثابتی دارد

۴.۲.۴. زاویه

۱.۴.۲.۴. اندازهٔ زاویه

۲.۴.۲.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵.۲.۴. پاره خط

۱.۵.۲.۴. اندازهٔ پاره خط

۶.۲.۴. رابطه‌های متری

۷.۲.۴. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۸.۲.۴. رسم شکلها

۹.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳.۴. تقارن محوری در مثلث

۱.۳.۴. محور تقارن

۲.۳.۴. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۴. نقطه‌ها همخطند

۴.۳.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند
۴.۳.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۳.۳. خطهای : همرس، موازی، ...
۴.۳.۳.۱. خطها همرسند
۴.۳.۳.۲. خطها بر هم عمودند
۴.۳.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد
۴.۳.۳.۴. خط نیمساز است
۴.۳.۴. زاویه
۴.۳.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۴.۳.۵. پاره‌خط
۴.۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۴.۳.۶. رابطه‌های متری
۴.۳.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند
۴.۳.۸. رسم شکلها
۴.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴.۴. تقارن محوری در چند ضلعیها

۴.۴.۱. محور تقارن
۴.۴.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...
۴.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند
۴.۴.۳. خطهای : همرس، موازی، ...
۴.۴.۳.۱. خطها همرسند
۴.۴.۳.۲. خطها موازی‌اند
۴.۴.۴. زاویه
۴.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۴.۴.۵. پاره‌خط
۴.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۴.۴.۶. رابطه‌های متری

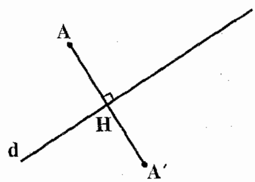
۴.۴.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند
۴.۴.۸. رسم شکلها
۴.۴.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۴.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴.۵. تقارن محوری در دایره

۴.۵.۱. محور تقارن
۴.۵.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...
۴.۵.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند
۴.۵.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۵.۳. خطهای : همرس، موازی، ...
۴.۵.۳.۱. خطها همرسند
۴.۵.۳.۲. خطها موازی‌اند
۴.۵.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد
۴.۵.۳.۴. خط نیمساز است
۴.۵.۴. زاویه
۴.۵.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها
۴.۵.۵. پاره‌خط
۴.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۴.۵.۶. رابطه‌های متری
۴.۵.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند
۴.۵.۸. رسم شکلها
۴.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۴. تقارن محوری

۱.۴. تعریف و قضیه

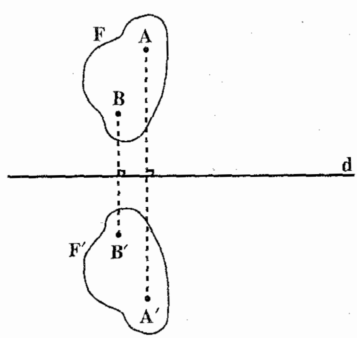


تعریف: خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن را در یک صفحه در نظر می‌گیریم. نقطهٔ A' را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d می‌گویند. هرگاه پاره‌خط AA' بر d عمود و توسط d نصف شود و به عبارت دیگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد.

اگر A' قرینهٔ محوری نقطهٔ A نسبت به خط d باشد، نقطهٔ A نیز قرینهٔ محوری نقطهٔ A' نسبت به خط d است. خط d را محور تقارن می‌نامند. اگر نقطه‌ای روی محور تقارن قرار داشته باشد، قرینه‌اش بر خودش منطبق است؛ مثل نقطهٔ B در شکل.

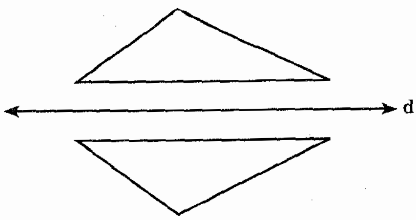
تقارن نسبت به خط d را با نماد S_d نشان می‌دهند، مانند $S_d(A) = A'$.

نکته. تقارن محوری را بازتاب نسبت به یک خط (بازتاب محوری) نیز می‌نامند و محور تقارن را محور بازتاب می‌گویند. در این مجموعه از هر دو واژه استفاده شده است.

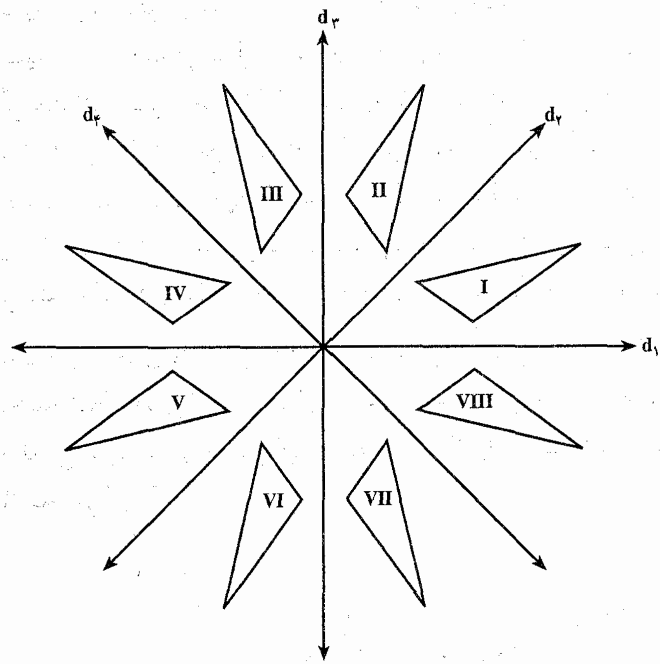


قرینهٔ محوری یک شکل. مجموعهٔ تمام قرینه‌های نقطه‌های شکل F نسبت به خط d، شکل جدید F' را تشکیل می‌دهند که قرینهٔ F بر اثر بازتاب نسبت به خط d است. بدیهی است که بعکس، F نیز قرینهٔ F' نسبت به d است. به عبارت دیگر، دو شکل نسبت به یک خط بازتاب محوری یکدیگرند، در صورتی که هر نقطه از یکی، قرینهٔ محوری یک نقطه از دیگری نسبت به یک خط ثابت باشند.

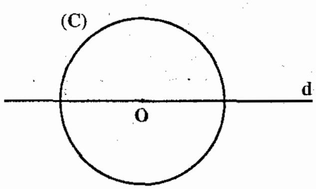
در شکل زیر مثلثها نسبت به خط d متقارنند.

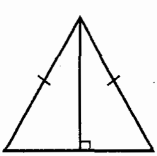


در شکل زیر تعداد زیادی از این نوع تقارن می‌بینید.



برای مثال I و II نسبت به d_2 متقارنند. این بیان را به صورت I ـ d_2 ـ II مختصر می‌کنیم؛ به طور مشابه VIII ـ d_1 ـ I، IV ـ d_3 ـ I و VI ـ d_4 ـ I. در این شکل چهار رابطهٔ تقارن دیگر هم وجود دارد.





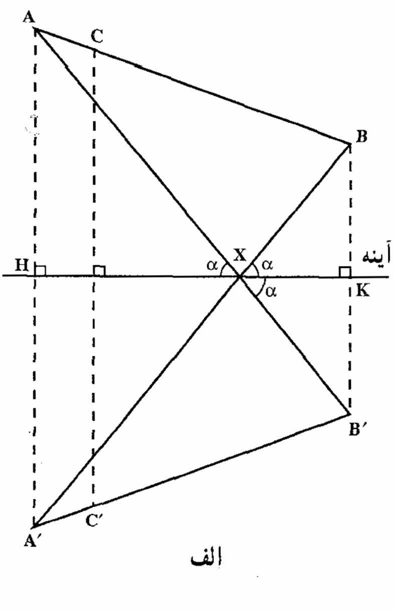
محور تقارن یک شکل. (C) را یک مجموعه از نقطه‌ها و d را یک خط، هر دو در یک صفحه در نظر می‌گیریم. اگر قرینهٔ هر نقطه از (C) نسبت به d روی (C) باشد، می‌گوییم که (C) نسبت به d متقارن است. خط d را محور تقارن (C) می‌نامیم و می‌گوییم که (C) متقارن محوری است. این مفهوم در شکلهای گوناگونی مثل خمها، مثلثها، چندضلعیها، رویه‌ها، حجمها و شکلهای بسیار دیگر به کار می‌رود. برای مثال، دایره نسبت به هر خطی که از مرکزش بگذرد، متقارن است. درون دایره نیز همین ویژگی را دارد. کره نسبت به هر خطی که از مرکزش بگذرد متقارن است. ارتفاع وارد بر قاعده در مثلث متساوی‌الساقین محور تقارن مثلث است.

۲۳۲. قضیه. در تقارن محوری، تبدیل یافتهٔ هر خط راست، یک خط راست است.

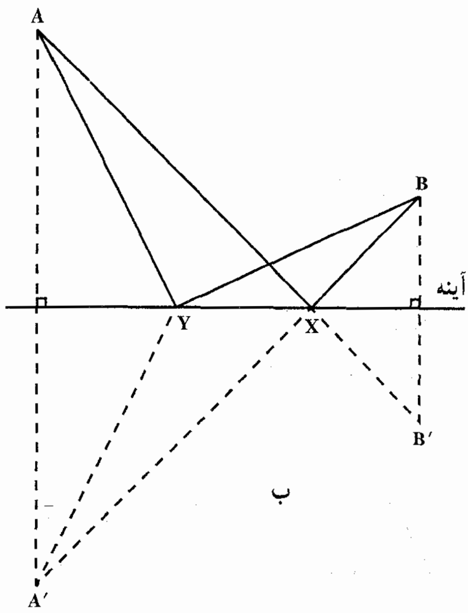
۲۳۳. قضیه. قرینهٔ محوری هر زاویه با آن زاویه مساوی است.

۲۳۴. قضیه. تبدیل یافتهٔ هر شکل در تقارن محوری با آن شکل همنهشت است.

۲۳۵. اگر خط AB تصویر خط $A'B'$ نسبت به آینه HK باشد، (شکل الف). تصویر هر نقطهٔ C از AB بر $A'B'$ واقع است که با C' نموده شده است و هر نقطهٔ C' تصویر نقطه‌ای مانند C از AB است. چهار گوشهٔ $ABB'A'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و دو قطر آن AB' و $A'B$ که تصویرهای یکدیگرند در نقطهٔ X روی محور تقارن برخورد می‌کنند. زاویه‌های AXH و $B'XK$ با هم برابرند. مثلث BXB' متساوی‌الساقین است و زاویه‌های BXK و $B'XK$ با هم برابرند. بنابراین : $A\hat{X}H = K\hat{X}B$. خط شکستهٔ AXB مسیر نوری را نشان می‌دهد که پس از خروج از A و بازتاب در سطح آینه از B می‌گذرد. مطابق شکل (ب)، نقطهٔ دیگر Y را بر سطح آینه در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که :



الف

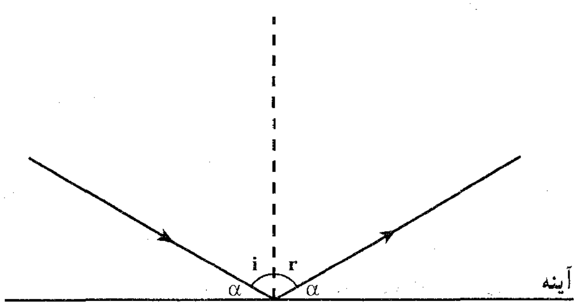


ب

$$AX + XB = A'X + XB = A'B$$
$$AY + YB = A'Y + YB > A'B$$

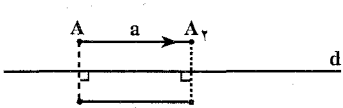
یعنی طول مسیر AXB کوتاهتر از طول مسیر AYB است، و چون نقطهٔ Y به اختیار برگزیده شده است، پس طول AXB کوتاهترین مسیری است که از A شروع می‌شود و پس از برخورد با سطح آینه به B می‌رسد.

آنچه گفته شد یکی از مسأله‌های مشهور مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم است که با استفاده از تقارن محوری، بدون نیاز به محاسبات پیچیده، بسادگی حل می‌شود. این مسأله مشهور هندسی از نظر فیزیکی چنین بیان می‌شود: مسیر نوری که پس از خروج از A و بازتاب در سطح آینه به B می‌رسد، چنان است که برای پیمودن آن کمترین زمان صرف می‌شود. به عبارت دیگر، مسیری که نور در یک محیط همگن می‌پیماید با زمانی که صرف پیمودن آن می‌شود، متناسب است. همچنین نتیجه می‌گیریم شعاع نوری که از A خارج و پس از بازتاب در سطح آینه به B می‌رسد، به هنگام رسیدن به سطح آینه زاویه‌ای با آن می‌سازد که برابر است با زاویه‌ای که پس از خروج با سطح آینه می‌سازد. هرگاه در نقطهٔ برخورد نور با سطح آینه عمودی بر این سطح اخراج کنیم، مطابق با شکل (پ) از برابری دو زاویهٔ α نتیجه می‌شود که زاویه‌های i و r نیز با هم برابرند. زاویهٔ i را زاویهٔ تابش و زاویهٔ r را زاویهٔ بازتاب می‌نامند. پس شعاع نور پس از برخورد با سطح آینهٔ تخت چنان منعکس می‌شود که زاویه‌های تابش و بازتاب با هم برابرند.



پ

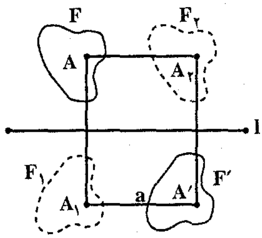
۲۳۶. لغزه. فرض می‌کنیم نقطهٔ A_1 قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d باشد، و نقطهٔ A' از انتقال A_1 در امتداد همان خط و به فاصلهٔ a به دست آمده باشد (شکل الف). در این حالت می‌گوییم نقطهٔ A' از تقارن لغزه‌ای نقطهٔ A در امتداد محور d و به فاصلهٔ a به دست آمده است. به عبارت دیگر لغزه (تقارن لغزه‌ای) مجموع یک تقارن نسبت به یک خط d و یک انتقال در



الف

امتداد همین خط است. (همان طور که در شکل (الف) دیده می‌شود نتیجهٔ ترکیب (مجموع)، می‌تواند به ترتیب عکس حاصل شود. در آن‌جا A_2 از انتقال A به فاصلهٔ a در امتداد d به دست آمده است و سپس A' از قرینهٔ A_2 نسبت به d.)

از این به بعد به جای تقارن لغزه‌ای واژهٔ لغزه را به کار خواهیم برد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی که از لغزهٔ نقطه‌های شکل F به دست می‌آیند، شکل F' را می‌سازند که از لغزه شکل F به دست می‌آید (شکل ب). به وارون واضح است که شکل F از لغزهٔ F' با همان محور d (و با جهت عکس در انتقال) به دست می‌آید. با توجه به این مطلب می‌توان از شکلهای وابسته به هم توسط یک لغزه صحبت کرد.



۲۳۷. **قضیه.** مجموع دو تقارن نسبت به یک خط، یک تبدیل همانی است.

۲۳۸. **قضیه.** مجموع دو تقارن نسبت به دو خط موازی، انتقالی است در امتداد عمود بر دو خط و به طولی مساوی دو برابر فاصلهٔ بین دو خط.

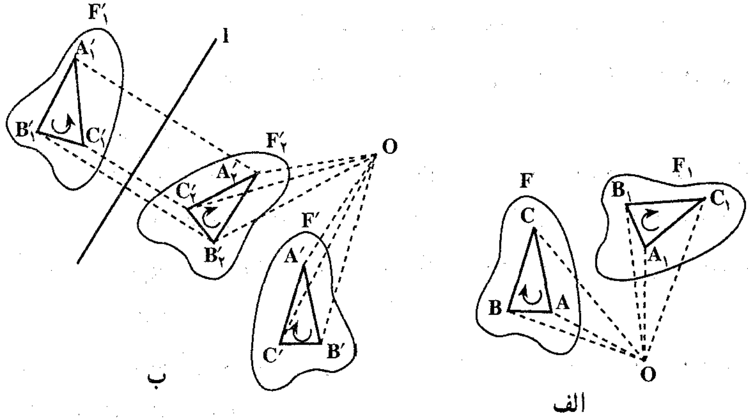
۲۳۹. **قضیه.** مجموع دو تقارن نسبت به دو خط متقاطع، دورانی است به مرکز نقطهٔ برخورد این دو خط، و به زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ بین آنها.

۲۴۰. **قضیه.** مجموع سه تقارن نسبت به سه خط موازی یا سه خطی که در یک نقطه متقاطعند، تقارنی است نسبت به یک خط.

۲۴۱. **قضیه.** مجموع سه تقارن نسبت به سه خط، که یکدیگر را در سه نقطه قطع می‌کنند و یا دو تا از آنها موازی‌اند و سومی آنها را قطع می‌کند، یک لغزه است.

۲۴۲. **قضیه.** مجموع تعداد زوجی تقارن محوری یک دوران یا یک انتقال است؛ مجموع تعداد فردی از این تقارنها یک تقارن محوری یا یک لغزه است.

۲۴۳. **شکلهای مستقیماً قابل انطباق با هم و معکوساً قابل انطباق با هم.** قابلیت انطباق یک جفت شکل در صفحه با هم می‌تواند به دو گونه صورت گیرد. ممکن است که دو شکل قابل انطباق با هم را با حرکت یکی، اما بدون خارج ساختن آن از صفحه‌ای که اوّل در آن واقع شده است، بر دیگری منطبق نمود؛ مثلاً شکلهای F و F_1 در شکل الف از این گونه هستند (می‌توانند با یک دوران حول نقطهٔ O بر هم منطبق شوند). اما همچنین ممکن است که دو شکل واقع در صفحه با هم قابل انطباق باشند، ولی برای منطبق کردن آنها لازم باشد که یکی از آنها را از صفحه بیرون آورد و پشت و رو کرد و «برطرف دیگرش» خواباند. شکلهای F' و F'_1 در شکل ب از این گونه‌اند؛ غیرممکن



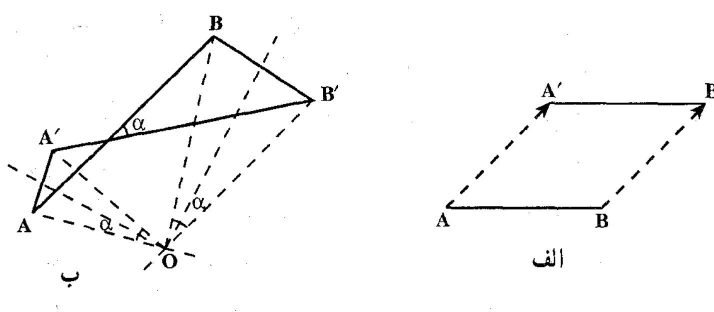
است که بتوان شکل F'_1 را با حرکت دادن در صفحه بر شکل F' منطبق کرد.
برای اثبات این امر، سه نقطهٔ A'_1، B'_1 و C'_1 از شکل F'_1 و نقطه‌های متناظر آنها از شکل F' یعنی A'، B' و C' را در نظر می‌گیریم. مثلثهای $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ «جهتهای متفاوت» دارند: در مثلث $A'B'C'$ جهت حرکت بر محیط از رأس A' به رأس B' و سپس به رأس C' در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعتسو) صورت می‌گیرد، در حالی که در مثلث $A'_1B'_1C'_1$ جهت حرکت بر محیط از رأس A'_1 به رأس B'_1 و سپس به رأس C'_1 در جهتِ مخالف حرکت عقربه‌های ساعت (پادساعتسو) است. و چون آشکارا دیده می‌شود که هر حرکت شکل F'_1، که به طور کامل در داخل صفحه باشد، نمی‌تواند جهت مثلث $A'_1B'_1C'_1$ را تغییر دهد، لذا نمی‌توانیم مثلث $A'_1B'_1C'_1$ را بر مثلث $A'B'C'$ منطبق کنیم. اما اگر «شکل F'_1 را برگردانیم و به طرف دیگرش بخوابانیم» ـ که برای این کار کافی است F'_1 را با یک تقارن نسبت به خط l به F'_2 تبدیل کنیم ـ آن‌گاه به آسانی می‌توانیم با حرکت دادن F'_2، آن را بر F' منطبق کنیم (یک دوران حول نقطهٔ O، شکل ب).
در آنچه که از پی می‌آید شکلهایی که می‌توانند پس از حرکت در داخل صفحه بر هم منطبق شوند مستقیماً قابل انطباق با هم گفته می‌شوند، شکلهای قابل انطباق با هم که نمی‌توانند با حرکت در داخل صفحه بر هم منطبق شوند معکوساً قابل انطباق با هم نامیده می‌شوند. از آنچه قبلاً گفته شد نتیجه می‌شود که به آسانی می‌توان تعیین کرد که دو شکل قابل انطباق F و F'، مستقیماً یا معکوساً با هم قابل انطباقند: کافی است که سه نقطهٔ A، B و C از شکل F و نقطه‌های متناظر آنها A'، B' و C' از شکل F' را انتخاب، و مشخص کنیم که جهتهای مثلثهای ABC و $A'B'C'$ (از A به B و به C، و

بترتیب از A' به B' و به C') یکی هستند یا مخالف. ما دو شکل را تنها وقتی «قابل انطباق با هم» گوییم که به طور مستقیم یا معکوس قابل انطباق بودن آنها با یکدیگر برای ما مطرح نباشد.

بنابراین، دو شکل هندسی مستقیماً قابل انطباق با هم گفته می‌شوند، هرگاه یکی از آنها بتواند با حرکت فقط در داخل صفحه، بر دیگری منطبق شود. این تعریف تقریباً کلمه به کلمه مشابه تعریف کیسلیوف برای قابلیت انطباق با هم است، اما این تعریف کاملاً برای هندسهٔ مسطحه است.

قضیه. هر دو شکل مستقیماً قابل انطباق با هم در صفحه می‌توانند با یک دوران یا یک انتقال بر هم منطبق شوند.

نخست باید دقت کنیم که هر دو پاره خط AB و $A'B'$ قابل انطباق با هم در صفحه می‌توانند با یک دوران یا یک انتقال بر هم منطبق شوند. در حقیقت، اگر پاره‌خطهای AB و $A'B'$ مساوی، موازی و در یک جهت باشند (شکل الف)، AB می‌تواند با یک انتقال بر $A'B'$ منطبق شود. فاصله و راستای این انتقال با پاره‌خط AA' مشخص شده است. اگر پاره‌خطهای AB و $A'B'$ زاویهٔ α با هم بسازند (شکل ب)، (وقتی که پاره‌خطهای AB و $A'B'$ نیز زاویهٔ $\alpha = ۱۸۰^\circ$ بسازند، یعنی وقتی که مساوی، موازی و مختلف‌الجهت باشند، باز هم این حالت صادق است.) آن‌گاه AB می‌تواند با یک دوران به زاویهٔ α بر $A'B'$ منطبق شود؛ مرکز این دوران، O، می‌تواند مثلاً نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای پاره‌خطهای AA' و BB' باشد. (اگر این عمودمنصفها بر هم

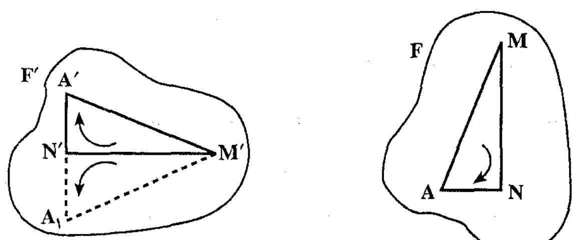


ب الف

منطبق شوند، O نقطهٔ برخورد خود پاره‌خطهای AB و $A'B'$ است و اگر این پاره‌خطها نیز بر هم منطبق شوند، یعنی A بر B' و B بر A'، آن‌گاه نقطهٔ O وسط مشترک AB و $A'B'$ است، همچنین O می‌تواند نقطهٔ برخورد عمودمنصف AA' با کمان حاوی زاویهٔ α گذرنده بر A و A' باشد.)

حال دو شکل F و F'، مستقیماً قابل انطباق با هم را در نظر می‌گیریم (شکل). فرض کنید M و N دو نقطهٔ دلخواه از شکل F، و M' و N' متناظرهای آنها از شکل F' باشند. چون شکلها با هم قابل انطباقند، پس $MN = M'N'$، و در نتیجه دورانی (یا انتقالی) وجود دارد که پاره‌خط MN را به پاره‌خط $M'N'$ بدل می‌کند.

اکنون می‌گوییم که تمام شکل F عملاً روی شکل F' برده می‌شود، یعنی هر نقطهٔ A از شکل F به نقطهٔ متناظرش A' از شکل F' منتقل می‌شود. اگر A_1 وضع جدید نقطهٔ A براثر دورانی (یا انتقالی) باشد که MN را به $M'N'$ بدل می‌کند، باید ثابت کنیم A_1 بر A' منطبق است. چون شکلهای F و F' باهم قابل انطباقند، پس $AM = A'M'$ و $AN = A'N'$؛ از سوی دیگر، واضح است که $AM = A_1M'$ و $AN = A_1N'$. از این‌جا نتیجه می‌شود که مثلثهای $A'M'N'$ و $A_1M'N'$ باهم قابل انطباقند و چون این مثلثها در ضلع $M'N'$ مشترکند، یا باید برهم منطبق و یا قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط $M'N'$ باشند. پس کافی است ثابت کنیم که حالت دوم غیر ممکن است. مثلثهای AMN و $A'M'N'$ جهتهای واحدی دارند زیرا شکلهای F و F' مستقیماً باهم قابل



ب　　　　　　　　　　الف

انطباقند؛ مثلثهای AMN و $A_1M'N'$ نیز یک جهت دارند؛ زیرا با یک دوران یا یک انتقال به‌هم وابسته‌اند. بنابراین مثلثهای $A'M'N'$ و $A_1M'N'$ یک جهت دارند و در نتیجه نمی‌توانند به‌طور معکوس باهم قابل انطباق باشند. این بدین معنی است که آنها برهم منطبق می‌شوند، و نقطهٔ A عملاً به کمک دوران (یا انتقال) به نقطهٔ A' برده می‌شود و اثبات قضیهٔ ۱ کامل است.

اگر شکلهای F و F' بتواند با یک دوران به مرکز O برهم قرار گیرند، آن‌گاه نقطهٔ O را مرکز دوران این دو شکل می‌گویند. برای یافتن این مرکز دوران، O، در دو شکل به‌طور مستقیم قابل انطباق باهم، کافی است که دو نقطهٔ دلخواه A و B از شکل اوّل و

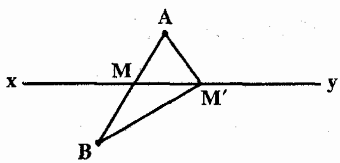
نقطه‌های متناظر آنها A' و B' از شکل دوم را اختیار کنیم، نقطهٔ تقاطع عمودمنصفهای AA' و BB' نقطهٔ O است.

۲۴۴. **قضیه.** هردو شکل به‌طور معکوس قابل انطباق با هم در صفحه را می‌توان با یک تقارن محوری یا یک لغزه برهم منطبق نمود.

۲۴۵. **قضیهٔ هرون.** در مورد دونقطهٔ واقع در یک طرف یک خط، کوتاهترین فاصله از نقطهٔ اوّل به خط و سپس به نقطهٔ دوم از طریق نقطهٔ برخورد خط و قطعه خط از نقطهٔ اوّل به قرینهٔ نقطهٔ دوم نسبت به آن خط است.

۲۴۶. **نکته ۱.** قضیهٔ هرون و تبدیل تقارن در عین حال کاربردهای دیگر هندسه در مسأله‌های اکسترمم را بنیان می‌نهد. در این مورد به مسأله‌های دیگر توجه کنید که بدون استفاده از حساب جامع و فاضل حل شده‌اند، به‌دست می‌دهیم.

نکته ۲. اگر دو نقطهٔ A و B در دوطرف خط xy باشند، M نقطهٔ برخورد پاره‌خط AB با xy نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B کمترین مقدار ممکن است؛ زیرا اگر M' نقطهٔ دیگری از xy باشد، داریم:



$$M'A + M'B > MA + MB = AB$$

قضیه. در مثلثی با سطح و ضلع معلوم، مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر، اگر و تنها اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، می‌نیمم است.

۲۴۷. **مسألهٔ فاگنانو.** در مثلث مفروض با زاویه‌های حاده مثلثی با محیط می‌نیمم محاط کنید.

۲۴۸. **مسألهٔ سه پیمانه.** یکی از موارد استعمال شگفت‌انگیز تقارن محوری، استفاده از آن در حل معماهایی است که موضوع آنها تقسیم مایع یک ظرف به قسمتهای معین با استفادهٔ فقط از دو پیمانهٔ معلوم است. امّا چون در این کاربرد تقارن، از مختصات مثلثی استفاده می‌شود، از این‌رو لازم است که قبلاً این نوع مختصات معرفی شود.

نوعی کاغذ معروف به شطرنجی را خوب می‌شناسیم که همه‌جا در دسترس است. روی این نوع کاغذ دو دسته خطهای متوازی عمود برهم رسم شده و باایجاد مربعهای متساوی مجاور هم صفحه را خانه‌بندی کرده‌اند. از این نوع کاغذهای شطرنجی در مختصات دکارتی استفاده می‌کنند. می‌توانیم روی یک صفحه مثلثی متساوی‌الاضلاع، به اندازه کافی بزرگ، رسم کرده و در داخل آن سه دسته خطهای متوازی و متساوی‌الفاصله به موازات ضلعهای آن رسم کنیم. به این طریق صفحهٔ مثلث را با ایجاد مثلثهای

متساوی‌الاضلاع مساوی و مجاور باهم خانه‌بندی می‌کنیم. از این صفحه کاغذ که به این نوع، خانه‌بندی شده است برای مختصات مثلثی (= مختصات سه‌خطی)، به شرح زیر، استفاده می‌کنیم :

اگر P نقطه‌ای از صفحهٔ مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a و به ارتفاع h باشد، فاصله‌های نقطهٔ P را از ضلعهای BC، CA و AB مختصات مثلثی P می‌نامیم و آنها را بترتیب با x ، y و z می‌نماییم و می‌نویسیم : $P(x,y,z)$.

با توجه به این که داریم :

$$\frac{۱}{۲}ax + \frac{۱}{۲}ay + \frac{۱}{۲}az = S(PBC) + S(PCA) + S(PAB) = S(ABC) = \frac{۱}{۲}ah$$

از این‌رو به دست می‌آید که : $x + y + z = h$

هرگاه مجموع سه مقدار متغیر مقدار ثابت باشد، استفاده از مختصات مثلثی کاملاً مناسبت دارد. هرگاه یکی از آنها ثابت و مجموع دو متغیر دیگر نیز مقدار ثابت باشد، نقطهٔ (x,y,z)روی خطی موازی با یک ضلع مثلث تغییر مکان می‌دهد، به‌ویژه در مختصات مثلثی، ضلعهای مثلث مبدأ به معادله‌های زیر می‌باشند :

$$x = ۰ \ , \ y = ۰ \ , \ z = ۰$$

و رأسهای مثلث به مختصات زیر می‌باشند :

$$A(h,۰,۰) \ , \ B(۰,h,۰) \ , \ C(۰,۰,h)$$

وقتی خواسته باشیم مقدار h لیتر از یک مایع را بین سه ظرف پخش کنیم به‌گونه‌ای که اولّی شامل x لیتر، دومی شامل y لیتر و سومی شامل z لیتر از آن باشد، در موقعیتی هستیم که می‌توانیم آنچه را در بالا گفته شد، درنظر داشته باشیم. چنان چه مایع درون ظرف اوّل را دست نزده اما مایع یکی از دو ظرف دیگر را در دیگری بریزیم، در این صورت نقطهٔ (x,y,z) دارای مکان به معادلهٔ : ثابت $= x$ می‌باشد. همچنین است هرگاه مایع ظرف اوّل را ثابت بداریم و از مایع ظرف دوم به‌طور متوالی برداشته، در ظرف سوم بریزیم. هرگاه هریک از ظرفها ظرفیت h لیتر را داشته باشد هریک از مختصات بین صفر و h می‌تواند تغییر کند. به این ترتیب مسألهٔ عمومی $[h:h,h,h]$ را خواهیم داشت که حوزهٔ تعریف جوابهای آن سطح مثلث ABC و با شرایط زیر می‌باشد :

$$۰ \leq x \leq h \ , \ ۰ \leq y \leq h \ , \ ۰ \leq z \leq h$$

یکی از مسأله‌های کاملاً جالب عبارت است از : $[h:a,b,c]$ با شرط : $h > a > b > c$.

در این حالت سه پیمانهٔ a و b و c لیتری داده شده‌اند و h لیتر از مایعی مفروض است و

مقصود به دست آوردن مقدار معین d لیتر از آن مایع با استفادهٔ فقط از سه پیمانهٔ مزبور است ؛ هرچند مرتبه می‌توانیم مقداری از مایع داده شده یا کل آن را در آن سه ظرف جابه‌جا کنیم. در این صورت متغیرها دارای حدهای زیر می‌باشند :

$$۰ \leq x \leq a \ , \ ۰ \leq y \leq b \ , \ ۰ \leq z \leq c$$

و حوزهٔ تعریف جوابها مساحت شش‌ضلعی منظم یا نامنظمی است که به شش خط زیر محدود است :

$$x = ۰ \ , \ x = a \ , \ y = ۰ \ , \ y = b \ , \ z = ۰ \ , \ z = c$$

در حالتهای ویژه ممکن است که این شش‌ضلعی به یکی از صورتهای زیر درآید : پنج‌ضلعی یا ذوزنقه یا متوازی‌الاضلاع و یا همان‌گونه که گفته شد تمام مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را دربرگیرد.

برای مثال این مسأله را درنظر می‌گیریم که ۸ لیتر مایع در اختیار داریم و با استفاده از سه پیمانهٔ ۷ لیتری، ۶ لیتری و ۳ لیتری می‌خواهیم ۴ لیتر از آن مایع را به دست آوریم.

این مسأله به صورت [۸:۷,۶,۳] نموده می‌شود و حدهای متغیرها چنین است :

$$۰ \leq x \leq ۷ \ , \ ۰ \leq y \leq ۶ \ , \ ۰ \leq z \leq ۳$$

حوزهٔ تعریف جوابها شش‌ضلعی است محدود به خطهای زیر :

$$x = ۷ \ , \ z = ۰ \ , \ y = ۶ \ , \ x = ۰ \ , \ z = ۳ \ , \ y = ۰$$

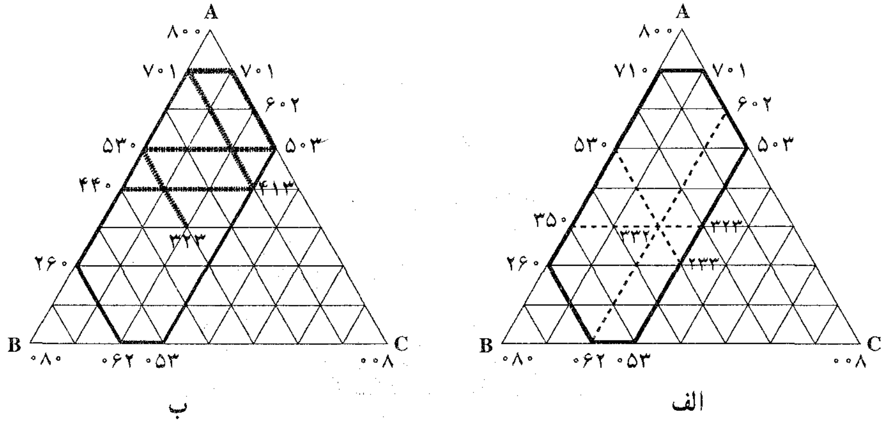
و رأسهای این شش‌ضلعی نقطه‌های با مختصات زیر می‌باشند :

$$(۷,۱,۰) \ , \ (۲,۶,۰) \ , \ (۰,۶,۲) \ , \ (۰,۵,۳) \ , \ (۵,۰,۳) \ , \ (۷,۰,۱)$$

که برای اختصار آنها را به صورتهای زیر می‌نویسیم :

۷۱۰ ,۲۶۰ ,۰۶۲ ,۰۵۳ ,۵۰۳ ,۷۰۱

در شکلهای زیر دو حالت از این مسأله نموده شده است. در شکل (الف) که نقطهٔ ۳۳۲ نموده شده، مبین آن است که در ظرف اوّل ۳ لیتر، درظرف دوم ۳ لیتر و در ظرف سوم ۲ لیتر از مایع وجود دارد. شش پاره‌خط واصل به این نقطه که نقطه‌چین رسم شده‌اند، شش حالت ممکن جابه‌جا کردن مایع را درون ظرفها برای رسیدن به آن وضع نشان می‌دهد. عبور از نقطهٔ ۳۳۲ به نقطهٔ ۵۳۰ به این معنی است که ظرف سوم را خالی کرده (۰ به جای ۲) و محتوی آن را درظرف اوّل می‌ریزیم (۵ به جای ۳) ؛ درحالی که مسیر از ۳۳۲ به ۲۳۳ نشان می‌دهد که ظرف سوم را از محتوای ظرف اوّل پر کرده‌ایم. همچنین مسیر از ۲۳۳ به ۲۶۰ به این معنی است که محتوای ظرف سوم را درظرف دوم، سپس محتوای ظرف اوّل را در ظرف سوم می‌ریزیم. در شکل (ب) خط شکسته‌ای که

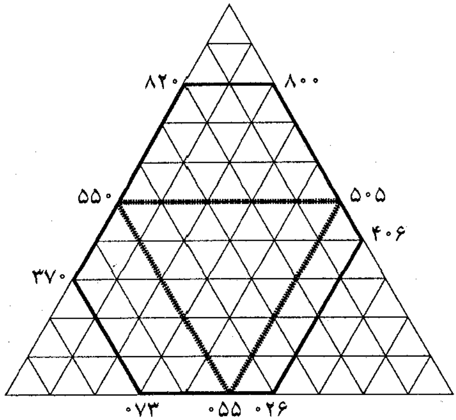


ب الف

با خطهای پرداز نموده شده و ۳۳۲ را به ۴۴۰ وصل کرده یکی از راههای متعدد و ممکن بین این دو نقطه را نشان می‌دهد، به عبارت دیگر راههای مختلف تقسیم ۸ لیتر را به دو بخش برابر می‌نمایاند. این مسیر خط شکسته در هر حال با یکی از ضلعهای مثلث مبدأ موازی است و فقط وقتی تغییر جهت می‌دهد که با محیط شش‌ضلعی حوزهٔ تعریف جوابها برخورد کند. هرگاه طبق قاعدهٔ مزبور مسیرهای دیگر را درنظر بگیریم به نقطه‌های با مختصات صحیح واقع بر مرز شش‌ضلعی می‌رسیم. از این‌رو در مسألهٔ [۸:۷,۶,۳] از راه جابه‌جا کردن مایع درون ظرفها می‌توانیم هر مقدار صحیح به حسب لیتر کمتر از ۸ لیتر را از مایع داده شده به دست آوریم.

شکل (پ) نظیر مسألهٔ [۱۰:۸,۷,۶] رسم شده است. در این مسأله با استفاده از سه پیمانهٔ ۸ لیتری، ۷ لیتری و ۶ لیتری می‌خواهیم بخشی معین از مقدار ۱۰ لیتر مایع مفروض را به دست آوریم. در این مسأله به دست آوردن ۱ لیتر، ۲ لیتر، ۳ لیتر و ۴ لیتر به آسانی انجام می‌گیرد؛ اما، مگر در حالتی که در ابتدا یکی از ظرفها شامل ۵ لیتر باشد، به دست آوردن ۵ لیتر غیر ممکن است؛ زیرا سه نقطهٔ ۵۵۰، ۰۵۵ و ۵۰۵ مسیر بسته‌ای به شکل مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می‌دهند و طبق قاعدهٔ مربوط از هیچ مسیر دیگری نمی‌توان به این مسیر راه یافت. این چنین وضعیتی در حالت کلی برای مسألهٔ [h:a,b,c] وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم: $h = 2d \geq a > b > c > d$

مسألهٔ [۱۰:۸,۶,۴] نیز دارای وضعیتی ویژه اما کمی متفاوت از مسألهٔ قبل می‌باشد. با توجه به شکل (ت) ملاحظه می‌شود که مسیرهای واصل به نقطهٔ ۵۵۰ شبکه‌ای بسته متشکل از مثلثهای متساوی‌الاضلاع و چندضلعیهای منتظم تشکیل می‌دهد. در این حالت ظرفیت هریک از پیمانه‌های مفروض عدد زوج است در حالی که مقدار مایعی که



پ

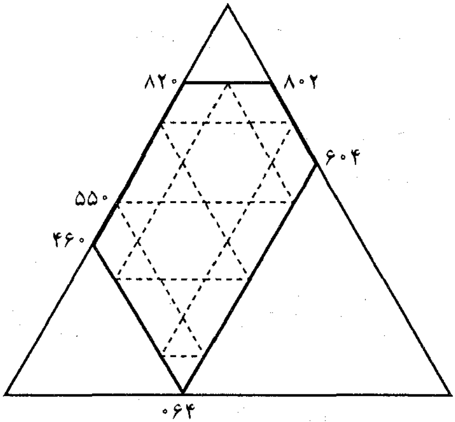
می خواهیم به دست آوریم عدد فرد است. این چنین مسأله‌هایی نیز جواب ندارند. یک چنین اشکالی در هر مسألهٔ [h:a,b,c] که در آن سه عدد a ، b و c دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از یک می‌باشند، وجود دارد.

مشهورترین مسأله‌های [h:a,b,c] به مشخصات زیر می‌باشند :

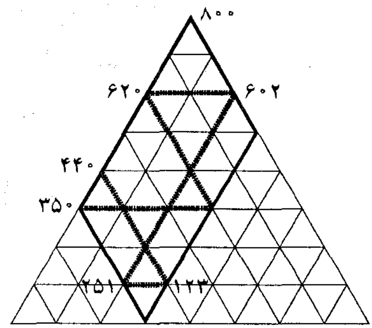
$h = a = ۲d = b + c$

در این مسأله‌ها حوزهٔ جوابها به شکل متوازی‌الاضلاعی است که a۰۰ ، cb۰ ، ۰bc و b۰c رأسهای آن می‌باشند. مسألهٔ [۸:۸,۵,۳] یک مثال عددی از این نوع مسأله‌ها است. راه حل هفت مرحله‌ای این مسأله در شکل(ت) و راه حل هشت مرحله‌ای آن در شکل (ج) نموده شده است. این مسأله معمولاً چنین بیان می‌شود : دو مرد یک ظرف شامل ۸ لیتر مایع و دو پیمانهٔ ۵ لیتری و ۳ لیتری در اختیار دارند. آنان چگونه می‌توانند آن مایع را به تساوی بین خود بخش کنند؟ اوّلین مرحلهٔ عمل، پرکردن پیمانه‌های ۵ لیتری و ۳ لیتری است (شکلهای ث و ج). به این ترتیب نقطهٔ ۳۵۰ یا ۵۳۰ به دست می‌آید. از این نقطه مسیری را تعقیب می‌کنیم که با ضلع مثلث مبدأ موازی است و هرگاه که به ضلع متوازی الاضلاع حوزهٔ جوابها برخورد می‌کند، به همان ترتیب که نور در برخورد با آینه منعکس می‌شود، تغییر جهت می‌دهد. هر ضلع این مسیر به شکل خط شکسته نشان می‌دهد که جابه‌جایی مایع درون پیمانه‌ها چگونه انجام می‌شود. به این ترتیب یک راه حل مسأله شامل هفت مرحلهٔ زیر به دست می‌آید.

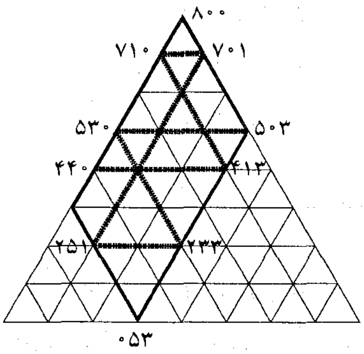
۸۰۰ ,۳۵۰ ,۳۲۳ ,۶۲۰ ,۶۰۲ ,۱۵۲ ,۱۴۳ ,۴۴۰



ت



ث



ج

یک راه حل دیگر شامل هشت مرحله به صورت زیر به دست می‌آید:

۴۴۰، ۴۱۳، ۷۱۰، ۷۰۱، ۲۵۱، ۲۳۳، ۵۳۰، ۵۰۳، ۸۰۰

باید توجه داشت که یک چنین مسأله (به فرض $a = b + c$) وقتی قابل حل است که دو عدد طبیعی b و c نسبت به هم اوّل باشند، یعنی مقسوم‌علیه مشترک غیر از یک نداشته باشند.

۲۴۹. ظرفی شامل ۱۲ لیتر مایع است. با دو پیمانهٔ ۹ لیتری و ۵ لیتری چگونه می‌توان آن مایع را به دو بخش متساوی تقسیم کرد.

۲۵۰. ۳ نفر ظرفی محتوی ۲۴ لیتر روغن دارند. اوّلی پیمانه‌ای ۱۳ لیتری، دومی پیمانه‌ای ۱۱ لیتری و سومی پیمانه‌ای ۵ لیتری در اختیار دارد. آنان با استفاده از این پیمانه‌ها چگونه می‌توانند روغن را به تساوی بین خود تقسیم کنند؟

۲۵۱. ثابت کنید، اجتماع L، محورهای تقارن مجموعهٔ M در صفحه، زیر مجموعه‌ای از اجتماع محورهای تقارن مجموعهٔ L است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلژیک، ۱۹۷۸

۲۵۲. ثابت کنید که قرینه‌های یک شکل نسبت به دو محور مفروض همنهشت و در یک جهت هستند.

۲.۴. تقارن محوری در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۴. محور تقارن

۲۵۳. زاویهٔ $x\hat{O}y = ۶۰^\circ$ مفروض است. برروی Ox پاره‌خطهای OA و AC را برابر a و بر روی Oy پاره‌خط OB را برابر ۳a جدا می‌کنیم. ثابت کنید، عمودی که از نقطهٔ B بر Ox وارد می‌شود، محور تقارن مثلث ABC است.

۲.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۴. نقطه‌ها همخطند

۲۵۴. نقطه‌های A_1 و A ، نسبت به خط l قرینه‌اند، همین‌طور، زوجهای B و B_1 ، C و C_1 و N نقطه‌ای دلخواه روی l است. ثابت کنید که خطهای AN ، BN و CN ، بترتیب خطهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 را در سه نقطه ، واقع بر یک خط راست، قطع می‌کنند.

۲.۲.۲.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۵۵. اگر P و Q نقطه‌های متقارن نقطهٔ L نسبت به ضلعهای Ox و Oy از زاویه‌ای مفروض باشند و $P' = (LQ, Ox)$ و $Q' = (LP, Oy)$ ، نشان دهید که P ، Q، P' و Q' روی دایره‌ای قرار دارند که از O می‌گذرد.

۳.۲.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۶. فرض می‌کنیم سه خط دلخواه l_1، l_2 و l_3 در صفحه داده شده باشند. قرینه‌های یک

نقطهٔ دلخواه A از صفحه را دوبار نسبت به این سه خط به دست می‌آوریم: اوّل نسبت به l_1، l_2 و l_3 و دوباره نسبت به l_1، l_2 و l_3. نتیجهٔ این ۶ تقارن نقطهٔ A_6 است. حال قرینه‌های نقطهٔ A_6 را باز نسبت به همین خطها اما به یک ترتیب دیگر به دست می‌آوریم: اوّل نسبت به l_2، l_3 و l_1 و دوباره نسبت به l_2، l_3 و l_1. حال دوباره کار را آغاز می‌کنیم، اما این بار قرینه‌های نقطهٔ اولیهٔ A را به‌طور متوالی اوّل نسبت به l_2، l_3 و l_1 و دوباره نسبت به l_2، l_3 و l_1 به دست می‌آوریم تا نقطهٔ A'_6، که نتیجهٔ ۶ تقارن است، به دست آید. حال قرینه‌های نقطهٔ A'_6 را دوبار نسبت به l_1، l_2 و l_3 به همین ترتیب، به دست می‌آوریم. نشان دهید که در هر مورد در پایان ۱۲ تقارن، به یک و فقط یک نقطهٔ A_{12} می‌رسیم.

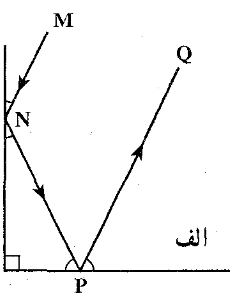
۲۵۷. خط راست l، نقطهٔ O در بیرون این خط راست و نقطهٔ دلخواه A، روی یک صفحه، داده شده‌اند. ثابت کنید، تنها با استفاده از تقارن نسبت به خط راست l و دوران به مرکز نقطهٔ O، می‌توان نقطهٔ O را به نقطهٔ A تبدیل کرد.

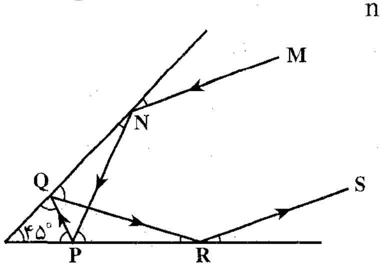
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۳.۲.۴. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۴. خط امتداد ثابتی دارد

۲۵۸. یک پرتو نوری از یک آینه، که به شکل خط مستقیمی است، چنان منعکس می‌شود که زاویهٔ تابش با زاویهٔ انعکاس برابر است (یعنی، با همان قانونی که توپ بیلیارد به کناره‌های میز بیلیارد برخورد می‌کند و برمی‌گردد. حال فرض کنید دو آینه به شکل خط مستقیم که با هم زاویهٔ α می‌سازند در صفحه داده شده باشند. ثابت کنید که اگر $\alpha = \frac{90^\circ}{n}$، n یک عدد طبیعی (و تنها در این حالت)، آن‌گاه هر پرتو نوری پس از چندین بار انعکاس در هر دو آینه، سرانجام، در امتدادی برمی‌گردد که درست مخالف امتدادی است که در وهلهٔ اوّل تابیده است (شکلهای الف و ب که برای





ب

حالتهای $n=1$، $\alpha=90^\circ$ و $n=2$، $\alpha=45^\circ$ نشان داده شده‌اند، در هر دوحالت راستای نهایی پرتوها (بترتیب PQ و RS) در جهت مخالف راستای اوّلیهٔ MN هستند).

۴.۲.۴. زاویه

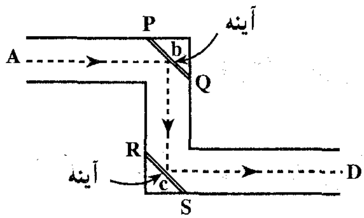
۴.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۲۵۹. نقطهٔ P را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم $PC=2BP$. زاویهٔ $\hat{ACB}$ چه‌قدر است به شرطی که بدانیم $\hat{APC}=60^\circ$ و $\hat{ABC}=45^\circ$ است؟

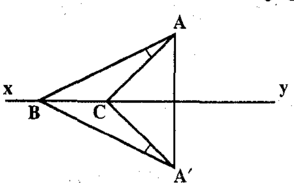
الف) 65° ب) 70° ج) 75° د) 80° هـ) 90°

مرحلهٔ اوّل دومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران

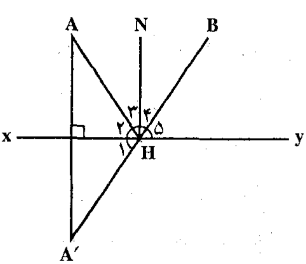
۴.۲.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها



۲۶۰. در ساختمان پریسکوپ یک جفت آینه تخت موازی وجود دارد. به این ترتیب شعاعهای نور که در بالا وارد پریسکوپ می‌شوند، موازی شعاعهای نوری هستند که در پایین از پریسکوپ خارج می‌شوند. زاویه‌های مساوی در شکل را نام ببرید. با توجه به این که زاویهٔ تابش شعاع نور به آینهٔ تخت، با زاویهٔ بازتاب آن برابر است.



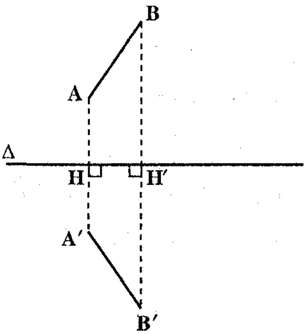
۲۶۱. دو نقطهٔ A و A' نسبت به خط xy متقارن هستند. این دو نقطه را به B و C که دو نقطه از خط xy هستند، وصل می‌کنیم. ثابت کنید : $\hat{BAC}=B\hat{A'}C$.



۲۶۲. نقطه‌های Aو A' نسبت به خط xy قرینهٔ یکدیگرند و نقطهٔ Bبا A در یک طرف xy هستند. پاره‌خط BA' خط xy را در H قطع می‌کند از نقطهٔ H عمود HN را برxy اخراج می‌کنیم، ثابت کنید $\hat{AHN}=\hat{BHN}$ است.

۵.۲.۴. پاره‌خط

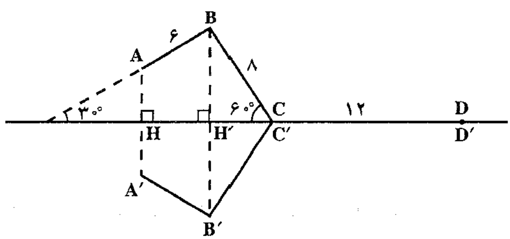
۱.۵.۲.۴. اندازهٔ پاره‌خط



۲۶۳. پاره‌خط AB با خط Δ زاویهٔ 60° می‌سازد. قرینهٔ محوری این پاره‌خط نسبت به خط Δ را $A'B'$ می‌نامیم. اگر HH' تصویر پاره‌خط AB روی خط Δ و $2AB + 3A'B' + HH' = 33$ باشد، اندازهٔ پاره‌خط AB چه‌قدر است؟

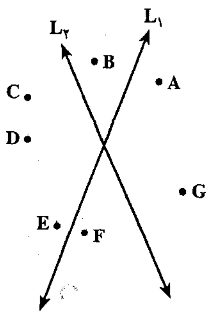
۶.۲.۴. رابطه‌های متری

۲۶۴. $A'B'C'D'$ قرینهٔ محوری خط شکستهٔ ABCD نسبت به خط CD را به دست آورید. و با توجه به شکل، اندازهٔ $AB + BC + CD + A'B' + B'C' + C'D' + HH' + H'C$ را تعیین کنید. (H و H' تصویرهای قائم A و B روی خط CD است.)



۷.۲.۴. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۲۶۵. در یک صفحه، دو زاویهٔ معکوس متساوی که دارای یک نقطهٔ متناظر مشترک باشند، نسبت به خطی که از این نقطه می‌گذرد، قرینه‌اند.



۲۶۶. در شکل کدام نقطه قرینهٔ

الف. A نسبت به L_1 است؟

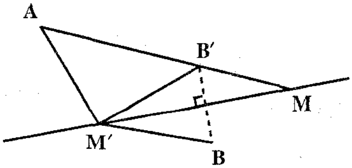
ب. A نسبت به L_2 است؟

پ. C نسبت به L_1 است؟

ت. D نسبت به L_2 است؟

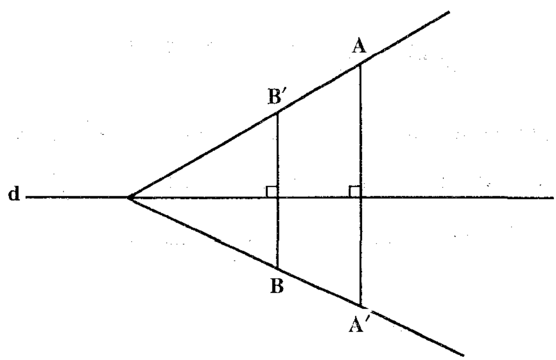
ث. F نسبت به L_2 است؟

۸.۲.۴. رسم شکلها

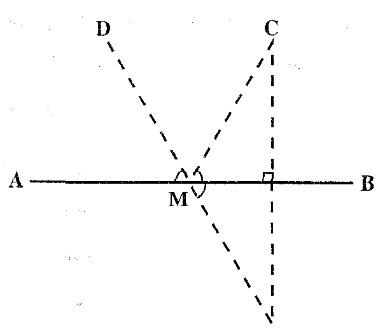


۲۶۷. دو نقطهٔ A و B در دوطرف خط Dقرار دارند، روی D نقطه‌ای پیدا کنید که تفاضل فاصله‌های آن از Aو B ماکزیمم باشد.

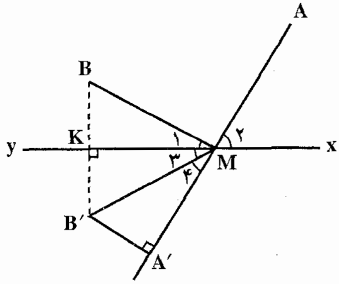
۲۶۸. دو نقطهٔ A و B دوطرف خط d واقعند. از این دو نقطه، دو خط رسم کنید که نسبت به D قرینهٔ یکدیگر باشند.



۲۶۹. دو نقطهٔ C و D در خارج خط AB در دست است. نقطه‌ای روی AB پیدا کنید که اگر از C و D به آن نقطه وصل کنیم دو زاویه‌ای که با خط AB تشکیل شده، باهم برابر باشند.



۲۷۰. محور xy و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند. برروی xy نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $A\hat{M}x = ۲B\hat{M}y$ باشد.



۲۷۱. الف. فرض می‌کنیم سه خط همرس $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ و نقطهٔ A بر یکی از این خطها داده شده باشند. یک مثلث ABC بسازید که خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ نیمسازهای آن باشند.

ب. فرض می‌کنیم یک دایرهٔ S، و سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ گذرنده بر مرکز آن داده شده باشند. یک مثلث ABC بیابید که رأسهای آن بر این خطها باشند، و دایرهٔ S دایرهٔ محاطی آن باشد.

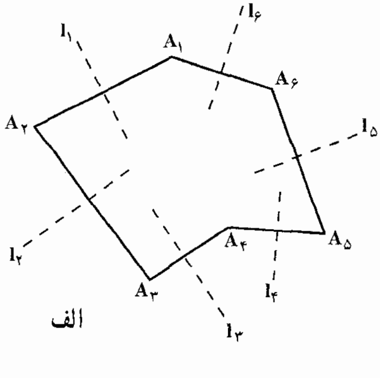
ج. فرض کنیم سه خط همرس $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ و نقطهٔ $A_۱$ بر یکی از آنها داده شده باشد. یک مثلث ABC پیدا کنید که در آن، نقطهٔ $A_۱$ وسط ضلع BC باشد و خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ عمودمنصفهای ضلعهای آن باشند.

۲۷۲. سه خط همرس p، q و r معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید که این سه خط، سه عمودمنصف ضلعهای آن باشند.

۲۷۳. نقطهٔ A واقع در داخل زاویهٔ xOy مفروض است. نقطه‌های B و C را روی ضلعهای Ox و Oy طوری تعیین کنید که محیط مثلث ABC کمترین مقدار خود را داشته باشد.

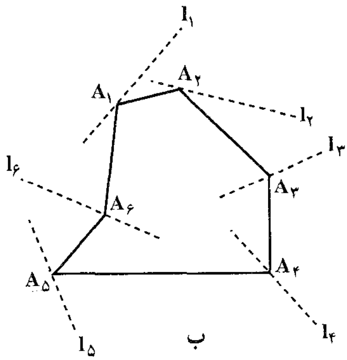
۲۷۴. n خط $l_۱$، $l_۲$، ...، l_n در صفحه داده شده‌اند. یک n ضلعی $A_۱A_۲\cdots A_n$ بسازید که این خطها:

الف. عمودمنصفهای ضلعهای آن باشند (شکل الف).



الف

ب. نیمسازهای خارجی یا داخلی زاویه‌های رأسهای آن باشند (شکل ب).
حالتهای n زوج و n فرد را جداگانه بررسی کنید. در کدام حالت مسأله جواب ندارد، یا جواب منحصر به فرد ندارد؟



ب

۹.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۷۵. دو نقطهٔ p و q در یک صفحه داده شده‌اند. خطهایی را که همه بر q می‌گذرند، و قرینهٔ p را نسبت به هریک از این خطها، درنظر بگیرید. مجموعهٔ این قرینه‌ها،
الف) خطی است که بر p می‌گذرد.
ب) خطی است که بر p نمی‌گذرد.
ج) دایره‌ای است به مرکز q که بر p می‌گذرد.
د) دایره‌ای است به مرکز q که بر p نمی‌گذرد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۲۷۶. روی صفحه‌ای، یک خط و یک نقطه در خارج این خط مفروضند. مکان هندسی مرکز مثلثی را پیدا کنید که یک رأس بر نقطه و رأس دیگر آن روی خط مفروض قرار دارد.

۲۷۷. بر روی صفحه‌ای، یک خط مستقیم و نقطه‌ای در خارج آن مفروض است. مکان هندسی رأس سوم مثلثی را بیابید که یک رأس آن بر روی نقطه و رأس دیگر آن بر روی خط مستقیم مفروض قرار دارد.

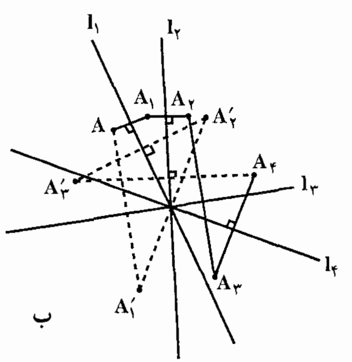
۱۰.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲۷۸. الف. فرض کنید سه خط همرس l_1، l_2 و l_3 داده شده باشند. فرض کنید قرینهٔ یک نقطهٔ دلخواه A از صفحه به‌طور متوالی نسبت به سه خط l_1، l_2 و l_3 به دست آمده باشد؛ سپس قرینهٔ نقطهٔ A_3 که بدین طریق به دست آمده است، دوباره به همان ترتیب به

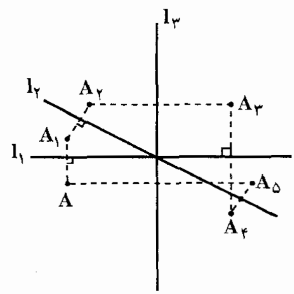
طور متوالی نسبت به این خطها به دست آید. نشان دهید که نقطهٔ نهایی A_6 که در نتیجهٔ شش تقارن به دست می‌آید بر همان نقطهٔ اوّلیهٔ A منطبق می‌شود (شکل الف).
آیا نتیجه‌گیری این تمرین برای n خط همرس (به جای سه خط همرس l_1، l_2 و l_3) باز معتبر است (شش تقارن اینک به $2n$ تقارن بدل می‌شود)؟

ب. فرض کنید سه خط همرس l_1، l_2 و l_3 در صفحه داده شده باشند. قرینهٔ یک نقطهٔ دلخواه A در صفحه به‌طور متوالی نسبت به l_1، l_2 و l_3 به دست می‌آید؛ سپس قرینهٔ A نسبت به همان سه خط اما به ترتیب عکس، اوّل نسبت به l_3، بعد نسبت به l_2، و بالاخره نسبت به l_1 به دست می‌آید. نشان دهید که در هردو حالت به یک، و تنها یک نقطهٔ نهایی A_3 می‌رسیم.

ج. چهار خط همرس l_1، l_2 ، l_3 و l_4 در صفحه داده شده‌اند. قرینهٔ یک نقطهٔ دلخواه A از صفحه را به‌طور متوالی نسبت به خطهای l_1، l_2 ، l_3 و l_4 به دست می‌آوریم، سپس قرینهٔ همین نقطهٔ A را به‌طور متوالی نسبت به همین خطها ولی به ترتیب دیگر به دست می‌آوریم: اوّل نسبت به l_3 ، آن‌گاه نسبت به l_4، بعد نسبت به l_1 ، و سرانجام نسبت به l_2 . نشان دهید که در هر دو حالت به یک، و تنها یک نقطهٔ نهایی A_4 می‌رسیم (شکل ب).



ب



الف

۳.۴. تقارن محوری در مثلث

۱.۳.۴. محور تقارن

۲۷۹. ثابت کنید که ارتفاع وارد بر قاعده در هر مثلث متساوی‌الساقین محور تقارن مثلث است.

۲.۳.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۴. نقطه‌ها همخطند

۲۸۰. نشان دهید که نقطه‌های متقارن پای ارتفاع وارد بر قاعدهٔ یک مثلث نسبت به دو ضلع دیگر روی ضلع متناظر با قاعده در مثلث پادک آن مثلث قرار دارند.

۲۸۱. ثابت کنید که قرینه‌های یک نقطه واقع بر دایرهٔ محیطی یک مثلث نسبت به ضلعهای آن روی خطی که محل تلاقی ارتفاعهای آن مثلث می‌گذرد، قرار دارند.

۲.۲.۳.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۸۲. ثابت کنید که قرینهٔ محل تلاقی ارتفاعهای هر مثلث نسبت به ضلعهای آن روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند.

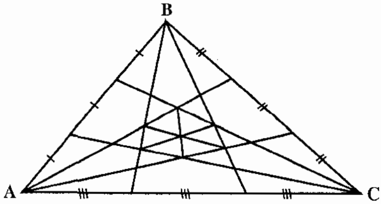
۳.۲.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۸۳. در مثلث ABC ، $AB = AC$ است. دایره‌ای به دایرهٔ محیطی مثلث ABC مماس داخلی، نیز به ضلعهای AB و AC بترتیب در P و Q مماس است. ثابت کنید که وسط پاره‌خط PQ مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۸

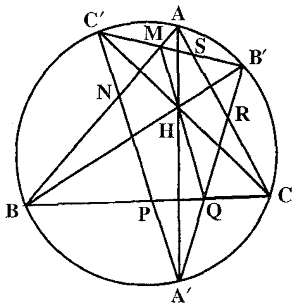
۲۸۴. در یک مثلث حاده‌الزاویه قرینهٔ ضلعهای مثلث ارتفاعیه نسبت به ضلعهای مقابل آن مثلث، مثلثی می‌سازند که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن منطبق بر مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث است.

۳.۳.۴. خطهای: همرس، موازی، ...



۱.۳.۳.۴. خطها همرسند

۲۸۵. از هریک از رأسهای مثلث ABC دو خط چنان رسم می‌کنیم که ضلع روبه‌رو را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند. این شش خط یک شش‌ضلعی پدید می‌آورند. (شکل) ثابت کنید قطرهایی که رأسهای روبه‌رو از این شش‌ضلعی را به‌هم وصل می‌کنند در یک نقطه همرسند.



۲۸۶. محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC را H نامیده، قرینه‌های H نسبت به ضلعهای BC ، AC و BA را بترتیب A′ ، B′ و C′ می‌نامیم. ضلعهای مثلث A′B′C′ ضلعهای مثلث ABC را در شش نقطهٔ M، N ، P ، Q ، R و S قطع می‌کند. ثابت کنید که هریک از خطهای MQ ، NR و PS از نقطهٔ H می‌گذرند.

۲۸۷. از رأسهای یک مثلث خطهایی موازی ضلعهای روبه‌روی هر رأس رسم می‌کنیم و قرینهٔ ضلعهای این مثلث را نسبت به سه خط موازی که از رأسهای مثلث اصلی گذشته‌اند را به دست می‌آوریم. ثابت کنید که سه‌خط حاصل یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث اصلی قطع می‌کنند. این خاصیت را با مراجعه به دایرهٔ نه نقطه و مثلثی که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث اصلی‌اند، توضیح دهید.

۲.۳.۳.۴. خطها برهم عمودند

۲۸۸. روی امتداد ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC پاره‌خطهای AD و AE را به ترتیب برابر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC جدا می‌کنیم. ثابت کنید خطی که شامل میانهٔ AM از مثلث ABC است، بر پاره‌خط DE عمود است.

۳.۳.۳.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲۸۹. مثلث ABC مفروض است. قرینه‌های خط راست AB و BC نسبت به AC، یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خط راست BK، از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۸

۴.۳.۳.۴. خط نیمساز است

۲۹۰. در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطه‌های B′ و C′ قرینه‌های نقطهٔ H را نسبت به AB و AC تعیین می‌کنیم. خط B′C′ ضلعهای AB و AC را در D و E قطع می‌کند. ثابت کنید AH نیمساز زاویهٔ $D\hat{H}E$ می‌باشد.

۴.۳.۴.زاویه

۱.۴.۳.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

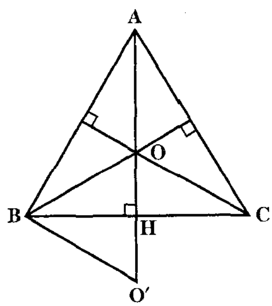
۲۹۱. چهارضلعی ABCD بر دایره‌ای به مرکز O محیط شده است. ثابت کنید که :

$$A\hat{O}B + C\hat{O}D = ۱۸۰^\circ$$

۵.۳.۴.پاره‌خط

۱.۵.۳.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۲۹۲. مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را درنظر می‌گیریم. قرینهٔ نقطهٔ O محل برخورد ارتفاعهای مثلث نسبت به ضلع BC را O' می‌نامیم. طول پاره‌خط BO' را بر حسب a به دست آورید.



۶.۳.۴.رابطه‌های متری

۲۹۳. بر مثلث ABC دایره‌ای محیط شده است که نیمساز زاویهٔ Cرا در نقطهٔ Mقطع می کند. عمود HDرا از مرکز ارتفاعی H مثلث بر نیمساز زاویه عبور می‌دهیم به‌طوری که نقطهٔ D به L_C متعلق باشد. ثابت کنید که : $CD:CM = \cos\hat{C}$.

۷.۳.۴. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۲۹۴. اگر عمودهایی که از نقطهٔ P واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر ضلعهای آن فرود می‌آیند. آن را در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کنند، ثابت کنید که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مساوی و قرینهٔ یکدیگر نسبت به یک محورند.

۲۹۵. در این شکل مثلثها همنهشت و متساوی‌الساقیند. قرینهٔ

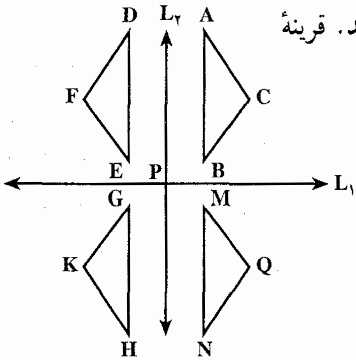
الف. $\overline{AC}$ نسبت به L_2 چیست؟

ب. $\overline{BC}$ نسبت به L_1 چیست؟

پ. $\overline{DF}$ نسبت به P چیست؟

ت. $\overline{GK}$ نسبت به L_1 چیست؟

ث. $\overline{GK}$ نسبت به P چیست؟



۸.۳.۴. رسم شکلها

۲۹۶. الف. در مثلث مفروض ABC مثلث دیگری محاط کنید که یک رأس آن بر نقطهٔ مفروض P از ضلع AB منطبق و اندازهٔ محیطش کمترین مقدار ممکن باشد.

ب. در مثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنید که محیطش دارای کمترین مقدار ممکن باشد.

۲۹۷. فرض می‌کنیم ضلعهای مثلث ABC همانند آینه، نور را منعکس می‌کنند. نقطهٔ P را بر ضلع AB چنان انتخاب کنید که شعاع نور خارج شده از P پس از بازتاب روی ضلعهای BC و CA به نقطهٔ P برگردد و پس از بازتاب روی ضلع AB همان مسیر قبلی را بپیماید.

۹.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۹۸. مثلث ABC_1 را حول وتر AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC متقارن این مثلث رسم می‌کنیم. اگر M میانگاه ارتفاع C_1D از مثلث ABC و N میانگاه ضلع BC باشد، آن‌گاه ثابت کنید مثلث AMN مشابه مثلث ABC است.

۲۹۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، از رأس قائمه ارتفاع CD را رسم کرده و نقطهٔ D_1 را متقارن نقطهٔ D نسبت به ضلع AC مشخص می‌کنیم. ثابت کنید نقطهٔ A و میانگاههای پاره‌خطهای D_1C و CB رأسهای یک مثلث مشابه با مثلث مفروضند.

۳۰۰. در مثلث ABC، ارتفاعهای AA_1 و BB_1 را رسم می‌کنیم. همچنین نقطهٔ A_2 را متقارن نقطهٔ A_1 نسبت به خط AC مشخص می‌کنیم. نقطه‌های M و N بترتیب میانگاههای پاره‌خطهای B_1A_2 و AB هستند. ثابت کنید CMN یک مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۰.۳.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۰۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = 90^\circ$) مفروض است. ارتفاع AH را رسم کرده و قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به AB و نسبت به AC را بترتیب D و E می‌نامیم.

۱. ثابت کنید D، A و E بر یک استقامتند.

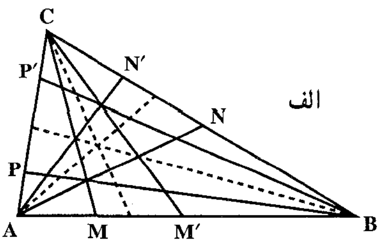
۲. ثابت کنید چهارضلعی CEDB ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه است.

۳۰۲. هرگاه قرینهٔ هریک از میانه‌های مثلثی را نسبت به نیمساز نظیر آن به دست آوریم.

۱. ثابت کنید که نسبت فاصله‌های نقطه‌های واقع بر هریک از این خطها از دو ضلع مجاور، مساوی نسبت همین دو ضلع است.

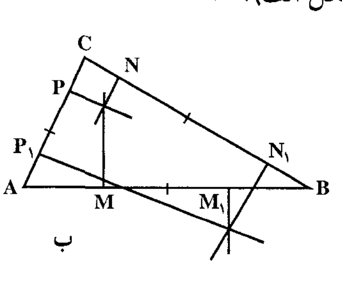
۲. ثابت کنید که این سه خط قرینه از یک نقطه می‌گذرند.

۳۰۳. الف. فرض کنید M ، N و P بترتیب نقطه‌هایی بر ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABCباشند. فرض کنید CM' ، AN' و BP' بترتیب قرینه‌های CM ، AN و BP نسبت به نیمسازهای زاویه‌های C ، A و Bی مثلث باشند. نشان دهید که اگر خطهای CM، AN و BP همدیگر را در یک نقطه قطع کنند یا همگی باهم موازی باشند، آن‌گاه خطهای CM' ، AN' و BP' نیز همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند یا همگی باهم موازی‌اند (شکل الف).



الف

ب. گیریم M، N و P نقطه‌هایی بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC باشند و M_1 ، N_1 ، P_1 قرینه‌های M، Nو P نسبت به وسطهای ضلعهای متناظر مثلث باشند (یعنی M_1 از یک نیمدور نقطهٔ M حول نقطهٔ وسط AB به دست آید، و به طریق مشابه برای دیگر نقطه‌ها). نشان دهید که اگر عمودهای رسم شده بر AB، BC و CA در نقطه‌های M، Nو P همدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه عمودهای رسم شده بر AB، BC و CA در نقطه‌های M_1 ، N_1 ، P_1 نیز همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (شکل ب).

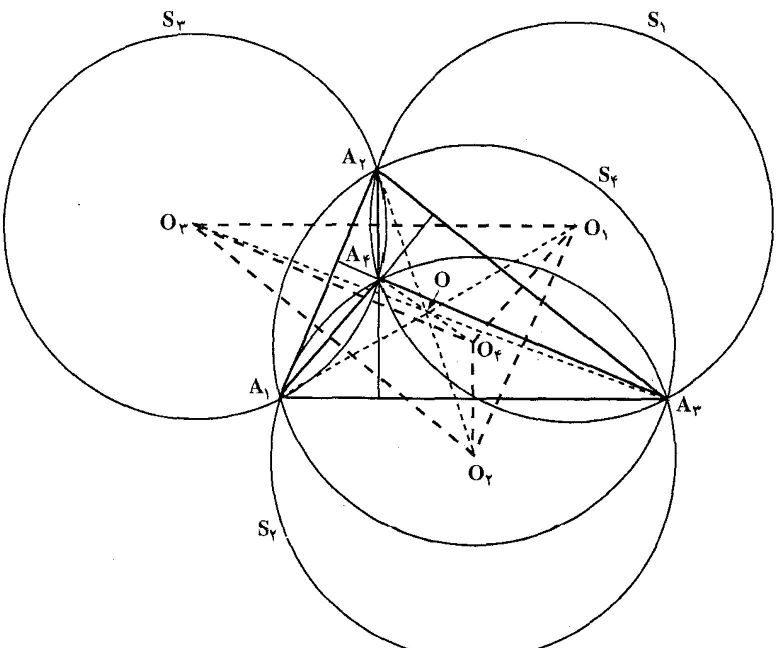


۳۰۴. فرض می‌کنیم چهار نقطهٔ A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 در صفحه چنان باشند که A_4 مرکز ارتفاع مثلث $A_1A_2A_3$ باشد. دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2A_3$ ، $A_1A_2A_4$ ، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را بترتیب با S_4 ، S_3 ، S_2 و S_1 نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم مرکزهای این دایره‌ها O_4 ، O_3 ، O_2 و O_1 باشند. ثابت کنید:

الف. A_1 مرکز ارتفاع مثلث $A_2A_3A_4$ ، A_2 مرکز ارتفاع مثلث $A_1A_3A_4$ ، A_3 مرکز ارتفاع مثلث $A_1A_2A_4$ است.

ب. دایره‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 همگی با هم قابل انطباقند.

ج. چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ از نیمدور چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ حول نقطه‌ای مانند O به دست می‌آید (شکل). (به عبارت دیگر، اگر نقطه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 چنان واقع شده باشند که هر نقطه مرکز ارتفاع مثلثی باشد که با سه نقطهٔ دیگر ساخته می‌شود، آن‌گاه چهار پاره‌خط واصل بین هر نقطه و مرکز دایرهٔ گذرنده بر سه نقطه دیگر، یکدیگر را در یک نقطهٔ O، که وسط هر پاره‌خط است، قطع می‌کنند.)



۳۰۵. نقطه‌های H و O محل برخورد ارتفاعها و مرکزهای دایرهٔ محیطی مثلث ABC و P و P' قرینهٔ یکدیگر نسبت به عمودمنصف ضلع BC هستند، عمودی که از P بر BC فرود می‌آید آن را در P_1 و OP' را در P'' قطع می‌نماید، نقطهٔ M وسط HP است ؛ ثابت کنید :

الف. $2MP_1 = AP''$

ب. قرینهٔ P_1 نسبت به وسط OM روی AP' قرار می‌گیرد.

۳۰۶. مثلث ABC و نقطهٔ M واقع در صفحهٔ آن مفروض است. قرینهٔ M را نسبت به ضلعهای BC ، CA و AB بترتیب A' ، B' و C' می‌نامیم.

۱. ثابت کنید که عمودهای رسم شده از A، B و C بر $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ در یک نقطهٔ O همرسند.

۲. اگر a، B و y بترتیب تصویرهای M روی ضلعهای BC، CA و AB و ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث aBy باشد، ثابت کنید که ω وسط MI است.

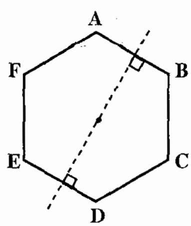
۳. در حالتی که M بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC منطبق باشد نقطه‌های ω و O چه وضعی خواهند داشت؟ در این حالت چه خاصیتی از مثلث را می‌توان نتیجه گرفت؟

۴. در حالتی که M بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع باشد، مثلثهای $A'B'C'$ و aBy چه وضعی را خواهند داشت؟

۴.۴. تقارن محوری در چندضلعیها

۱.۴.۴. محور تقارن

۳۰۷. ثابت کنید که عمودمنصف هر ضلع n ضلعی منتظم، محور تقارن آن است.



۳۰۸. حداکثر تعداد محورهای تقارنی که یک چهارضلعی می‌تواند داشته باشد، چند است؟

۲.۴.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۴. نقطه‌ها همخطند

۳۰۹. ثابت کنید که نقطهٔ برخورد امتداد ضلعهای جانبی یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، نقطهٔ برخورد قطرها بر میانگاههای قاعده‌های آن، روی یک خط مستقیم قرار دارد.

۳.۴.۴. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۴. خطها همرسند

۳۱۰. ثابت کنید که اگر یک چندضلعی چند (بیش از دو) محور تقارن داشته باشد، این محورها همگی در یک نقطه متقاطعند.

۲.۳.۴.۴. خطها موازی‌اند

۳۱۱. دو ضلع مقابل یک شش‌ضلعی با هم مساوی و موازی‌اند. ثابت کنید که قطرهای اصلی این شش‌ضلعی همرسند.

۳۱۲. دایره‌ای را بر مثلث ABC محیط کرده‌ایم. وترهایی که وسط کمان $\overset{\frown}{AC}$ را به وسط کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$ وصل کرده‌اند، ضلعهای AB و BC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید، پاره‌خط راست DE، با ضلع AC موازی است و از مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC می‌گذرد.

۴.۴.۴. زاویه

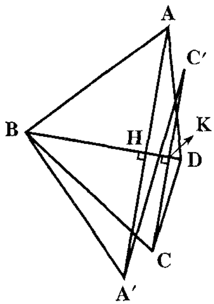
۱.۴.۴.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۱۳. در دایره‌ای به مرکز O چهارضلعی ABCD محاط شده است. خطهای OM، ON و OP و OQ را طوری رسم می‌کنیم که M ، N، P و Q میانگاه وترهای AB، BC ، CD و DA باشد. ثابت کنید که $\hat{MON}+\hat{COD}=180^\circ$ یا $\hat{MON}=\hat{POQ}$.

۳۱۴. روی میز مستطیل شکلی، توپی قرار دارد. در چه جهتی بایستی به آن ضربه بزنیم تا بعد از برخورد به دیواره‌های میز دوباره در مسیر حرکت اوّلیه، قرار بگیرد؟

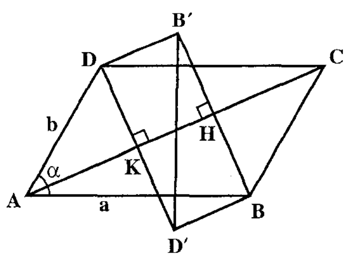
۴.۴ .۵. پاره‌خط

۴.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۳۱۵. در چهارضلعی $ABCD$، $AB = ۸$ ، $AD = ۶$ ، $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ ، $BC = ۸$ و $CD = ۴$ است. قرینهٔ رأس A نسبت به قطر BD را A' و قرینهٔ رأس C نسبت به این قطر را C' می‌نامیم. طول پاره‌خط $A'C'$ را به دست آورید.

۴.۴ .۶. رابطه‌های متری



۳۱۶. متوازی الاضلاع $ABCD$ به ضلعهای a و b و زاویهٔ حادهٔ α داده شده است. قرینه‌های دو رأس B و D را نسبت به قطر AC نقطه‌های B' و D' می‌نامیم. اندازهٔ مساحت چهارضلعی $BD'DB'$ را برحسب داده‌های مسأله، به دست آورید.

۴.۴ .۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۳۱۷. آیا قرینهٔ یک لوزی نسبت به خط مفروض در امتداد معین، یک لوزی است؟ (همین موضوع را در مورد یک مستطیل بررسی کنید.)

۴.۴.۸. رسم شکلها

۳۱۸. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، برابر ۹ و نصف اندازه‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه مساوی ۸ و ۴ سانتیمتر است. ذوزنقه را رسم کنید.

۹.۴.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۱۹. در یک صفحه، تبدیلهایی اندازه نگهدار (= طولپای= تبدیلهایی که اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهند.) در نظر می‌گیریم که مربع مفروض C را پایا نگاه بدارند. تعداد این تبدیلها برابر است با :

الف)۱ ب) ۴ ج)۸ د) نامتناهی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۳۲۰. تعداد تقارنهای محوری در یک صفحه که یک مربع را به خودش تبدیل می‌کند، چند است؟

الف)۰ ب) ۲ ج) ۴ د) نامتناهی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۳۲۱. مربع C در صفحهٔ π داده شده است. گروه تبدیلهای اندازه نگهدار (= طولپای) در π را که مربع C را پایا نگاه می‌دارند با G نشان می‌دهیم. در مجموعهٔ نقطه‌های π، رابطهٔ □ را تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که اگر و تنها اگر $g \in G$ وجود داشته باشد که $g(p) = q$ آن‌گاه $q \,\square\, p$ برقرار باشد. این رابطهٔ □ کدام ویژگی یا ویژگیهای زیر را دارد؟

الف) هم ارزی ب) ترتیبی

ج) انعکاسی، اما غیرتقارنی د) تقارنی، اما غیرانعکاسی

المپیادهای ریاضی بلژیک ، ۱۹۷۷

۱۰.۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۲۲. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی با قاعده‌های a و c و ارتفاع h مفروض است.

(a) بر محور تقارن این ذوزنقه، تمام نقطه‌های Pیی را، که هر دو ساق ذوزنقه از آنها به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند، بیابید.

(b) فاصلهٔ P را از هر یک از دو قاعده حساب کنید.

(c) معین کنید تحت چه شرایطی نقطه‌هایی چون P عملاً موجودند. (حالات گوناگونی را که ممکن است رخ دهند، مورد بحث قرار دهید.)

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۰

۳۲۳. در چهار ضلعی $ABCD$ داریم $AB = AD$ ، $\hat{A} = ۱۳۵^\circ$ و $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$.

۱. تقارنهای شکل را نشان دهید و ثابت کنید وسطهای ضلعها، رأسهای یک مستطیل هستند.

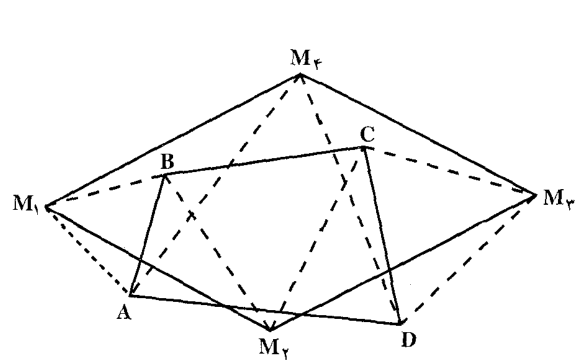
۲. ثابت کنید در داخل چهار ضلعی یک نقطه متساوی‌الفاصله از چهار رأس و یک نقطه متساوی الفاصله از چهار ضلع وجود دارد. این نقطه‌ها را پیدا کنید.

۳۲۴. الف. بر ضلعهای چهار ضلعی (محدب) غیر مشخص $ABCD$ مثلثهای متساوی‌الاضلاع $ABM_۱$ ، $BCM_۲$ ، $CDM_۳$ و $DAM_۴$ رسم شده‌اند، به طوری که اوّلی و سومی در بیرون چهارضلعی هستند و دومی و چهارمی در همان طرف ضلعهای BC و DA که خود چهارضلعی قرار دارد. ثابت کنید که چهارضلعی $M_۱M_۲M_۳M_۴$ یک متوازی‌الاضلاع است (شکل الف ؛ در حالتهای خاص، این متوازی‌الاضلاع ممکن است به یک بازه بدل شود).

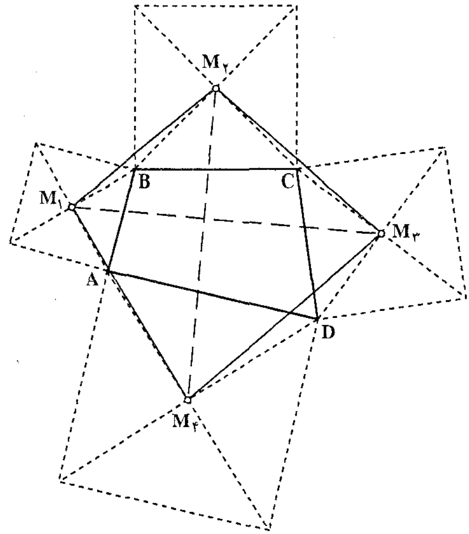
ب. بر ضلعهای یک چهار ضلعی (محدب) دلخواه $ABCD$ مربعهایی بنا شده‌اند، که همگی در خارج این چهارضلعی واقعند، مرکزهای این مربعها $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ و $M_۴$ هستند. نشان دهید $M_۱M_۳ = M_۲M_۴$ و $M_۱M_۳ \perp M_۲M_۴$ (شکل ب).

ج. بر ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع دلخواه $ABCD$ مربعهایی بنا شده‌اند که در خارج آن هستند. ثابت کنید که مرکزهای $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ ، $M_۴$ خود رأسهای یک مربع هستند (شکل ج).

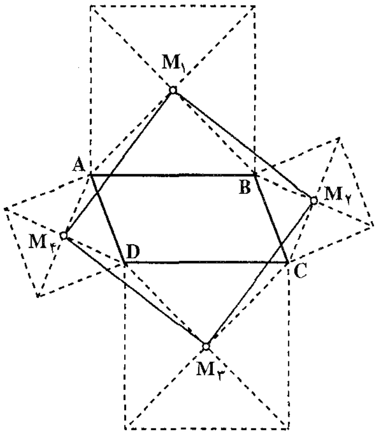
آیا حکم این مسأله باز هم درست است، وقتی که همهٔ مربعها در همان طرفی که خود ضلعهای متوازی‌الاضلاع واقعند، بنا شده باشند؟



الف



ب



ج

۳۲۵. الف. تمام انواع چهارضلعیهای مقعری که دارای محور تقارن هستند، نام ببرید.
ب. تمام انواع چهارضلعیهای مقعری که ۲ یا بیش از ۲ محور تقارن دارند، نام ببرید.

۳۲۶. الف. چهارضلعی کامل به یک چهارضلعی گویند که ضلعهای روبه‌روی آن با هم متقاطع باشند. تمام انواع چهارضلعیهای کامل را که دارای محور تقارن هستند، معین کنید.
ب. تمام انواع چهارضلعیهای کامل را که دارای ۲ یا بیش از ۲ محور تقارن هستند، معین کنید.

۴ . ۵. تقارن محوری در دایره

۱.۵.۴. محور تقارن

۳۲۷. دو دایره در A مشترکند. از A خطی چنان رسم کنید که توسط دو دایره به دو بخش برابر تقسیم شود.

۳۲۸. از حرفهای الفبایی زیر، کدامها دقیقاً دو محور تقارن دارند؟

الف) O　　ب) N　　ج) I　　د) X

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۲.۵.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند

۳۲۹. روی یک صفحه چهار دایرهٔ مساوی در یک نقطه مشترک بوده و برای بار دوم محوری در شش نقطه با همدیگر متقاطع هستند. ثابت کنید که هر یک از دایره‌ها از سه نقطه از شش نقطهٔ مزبور عبور می‌کنند.

۲.۲.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۰. در صفحه، دایره‌ای به شعاع ۱ سانتیمتر، خطهای راست a ، b ، c، d و e که دایره را قطع کرده‌اند، و همچنین، نقطهٔ X به فاصلهٔ ۱۱ سانتیمتر از مرکز دایره، داده شده است. قرینهٔ نقطهٔ X را، پشت سر هم نسبت به پنج خط راست پیدا کرده‌ایم؛ نقطهٔ E به دست آمده است. ثابت کنید، نقطهٔ E نمی‌تواند در درون دایره قرار گیرد.

۳۳۱. ثابت کنید که مرکز دایره‌ای که از قرینه‌های نقطهٔ دلخواهی در درون مثلث مفروض نسبت به ضلعهای آن مثلث می‌گذرد. درون آن مثلث خواهد بود.

۳۳۲. مجموعهٔ واقع بر صفحه، دارای دو محور تقارن است که تحت زاویهٔ α ، یکدیگر را قطع کرده‌اند و در ضمن، $\frac{\alpha}{\pi}$ ، عددی گنگ است. ثابت کنید اگر این مجموعه شامل بیش از یک نقطه باشد، شامل بینهایت نقطه است.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، آلمان، ۱۹۷۹

۳.۵.۴. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۵.۴. خطها همرسند

۳۳۳. ثابت کنید مماسهای مشترک خارجی (داخلی) دو دایره با خط المرکزین همرسند.

۲.۳.۵.۴. خطها موازی‌اند

۳۳۴. دایرهٔ F_1 دو دایره متحدالمرکز F_2 و F_3 را به ترتیب در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. ثابت کنید که وترهای AB و CD موازی هستند.

۳.۳.۵.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۳۳۵. ثابت کنید که خط واصل میانگاههای دو وتر موازی در دایره از مرکز آن می‌گذرد.

۳۳۶. از نقطهٔ مفروض M واقع در درون دایرهٔ O وتر دلخواهی مرور می‌دهیم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع نماید. اگر C قرینهٔ B نسبت به قطر OM باشد، ثابت کنید که AC همواره از نقطهٔ ثابتی که آن را تعیین می‌کنید، می‌گذرد.

۴.۳.۵.۴. خط نیمساز است

۳۳۷. نیمدایرهٔ γ در یک طرف خط راست L رسم شده است و مرکز آن روی این خط است. C و D نقطه‌هایی روی γ هستند. مماسهای Tدر نقطه‌های C و D خط L را به ترتیب در A و B قطع می‌کنند و مرکز نیمدایرهٔ γ بین A و B قرار می‌گیرد. E را محل تقاطع AC و BD و F را پای عمود وارد از E به L بگیرید. ثابت کنید، EF نیمساز $C\hat{F}D$ است.

مرحلهٔ دوم پنجمین المپیاد آزمایشی ایران

۴.۵.۴. زاویه

۱.۴.۵.۴. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۳۸. دو دایره در نقطه‌های P و Q متقاطعند. خط‌المرکزین آنها OO'، دایرهٔ O را در A و دایرهٔ O' را در B قطع می‌کند (A و B خارج از پاره خط OO' واقع هستند). ثابت کنید: $A\hat{P}B = A\hat{Q}B$.

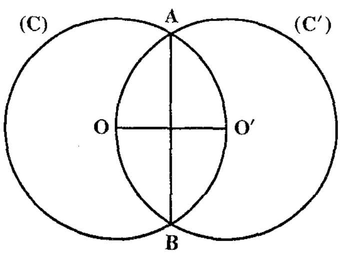
۴.۵.۵. پاره خط

۴.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۳۳۹. در دایره‌ای به شعاع ۱۰ دو وتر AB و AC به ترتیب به طولهای ۱۶ و ۱۲ را رسم می‌کنیم. قرینهٔ مرکز دایره نسبت به این دو وتر را D و E می‌نامیم. طول پاره خط DE را تعیین کنید.

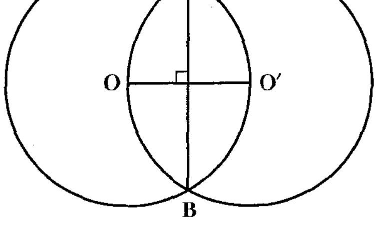
۴.۵.۶. رابطه‌های متری

۳۴۰. در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر $AB = C_3$ ضلع C_3) مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره است) را رسم می‌کنیم و قرینهٔ این دایره نسبت به محور تقارن AB را (C') می‌نامیم. مساحت قسمت مشترک بین دو دایرهٔ (C) و (C') را به دست آورید.

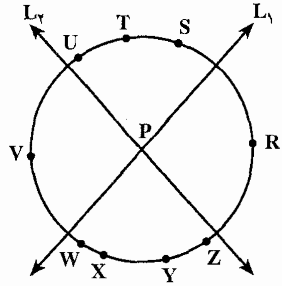


۴.۵.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۳۴۱. ثابت کنید دو دایرهٔ مساوی و متقاطع نسبت به وتر مشترکشان قرینهٔ یکدیگرند.



۳۴۲. در شکل $L_۱$ و $L_۲$ در مرکز دایره، نقطهٔ P، یکدیگر را قطع می‌کنند، کدام نقطه قرینهٔ



الف) R نسبت به $L_۱$ است؟
ب) R نسبت به P است؟
پ) S نسبت به P است؟
ت) S نسبت به $L_۲$ است؟
ث) Y نسبت به $L_۲$ است؟
ج) Y نسبت به P است؟

۸.۵.۴. رسم شکلها

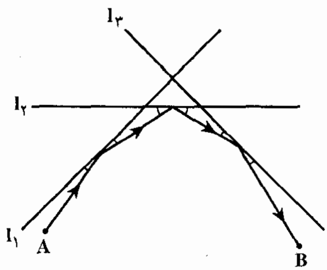
۳۴۳. در یک دایرهٔ مفروض، یک n ضلعی چنان محاط کنید که :
الف. ضلعهای آن موازی n خط داده شده در صفحه باشند.
ب. ضلع $A_۱A_n$ از یک نقطهٔ مفروض بگذرد، و بقیهٔ ضلعها موازی با $n-۱$ خط داده شده باشند.

۳۴۴. در دایرهٔ مفروضی یک پنج ضلعی را محاط کنید که ضلعهای آن با پنج خط معینی موازی باشند.

۹.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۴۵. سه دایرهٔ مساوی دارای یک نقطهٔ مشترک هستند. ثابت کنید که دایره دیگر گذرنده بر نقطه‌های برخورد دیگر این سه دایره با دایره‌های مفروض مساوی است.

۱۰.۵.۴. مسأله‌های ترکیبی



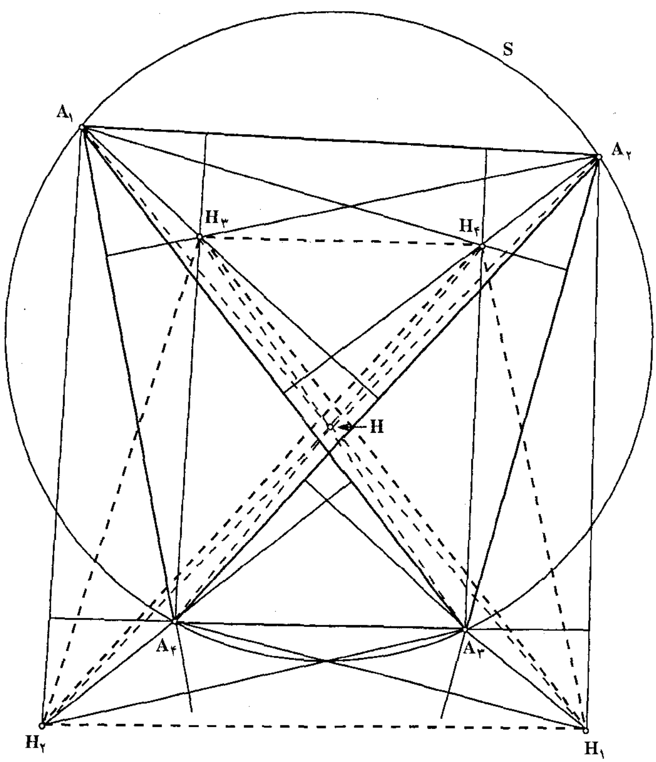
۳۴۶. الف. توپ بیلیاردی چنان به لبهٔ میز بیلیارد برخورد می‌کند که دو خطی که توپ پیش و پس از برخورد با آن لبه بر آنها حرکت می‌کند، زاویه‌های مساوی با آن لبه تشکیل می‌دهند. فرض کنید میز بیلیاردی دارای n لبهٔ $l_۱$، $l_۲$، ...، l_n و A و B دو نقطه

روی میز باشند. در چه راستایی باید به توپی که در نقطهٔ A واقع است، ضربه زد تا پس از برخوردهای متوالی به n لبهٔ l_1 ، l_2 ، ... ، l_n (با حفظ شرط بالا) از نقطهٔ B بگذرد (شکل، که در آن $n = 3$) ؟

ب. فرض کنید $n = 4$ ، و خطهای l_1 ، l_2 ، l_3 و l_4 تشکیل یک مستطیل داده باشند و B بر A منطبق باشد. ثابت کنید که در این حالت طول کل مسیری که توپ بیلیارد، در حرکت از نقطهٔ A و بازگشت به همان نقطه، طی می کند مساوی مجموع دو قطر مستطیل است (و البته مهم نیست که A در **کجا** واقع شده باشد). همچنین ثابت کنید که اگر توپ هنگام رسیدن به نقطهٔ A توقف نکرده، به حرکت خود ادامه دهد، بار دیگر در همان امتدادهای قبلی به چهار ضلع مستطیل برخورد می کند و به نقطهٔ A باز می گردد.

۳۴۷. فرض کنیم چهار نقطهٔ A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 که همگی بر یک دایرهٔ S واقعند، داده شده باشند. مرکزهای ارتفاع مثلثهای $A_1A_2A_3$ ، $A_1A_2A_4$ ، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را به ترتیب با H_4 ، H_3 ، H_2 و H_1 نشان می‌دهیم. ثابت کنید :

الف. چهار ضلعی $H_1H_2H_3H_4$ از نیمدور چهار ضلعی $A_1A_2A_3A_4$ حول نقطه‌ای



مانند H به دست می‌آید (شکل). به عبارت دیگر، اگر نقطه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 همگی بر یک دایره باشند، آن گاه چهار پاره خط واصل بین یکی از این نقطه‌ها و مرکز ارتفاع مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر، همدیگر را در یک نقطه، که وسط هر پاره‌خط است، قطع می‌کنند.

ب. هر یک از چهارگانه‌های A_1 ، A_2 ، H_3، H_4 ؛ A_1 ، A_3 ، H_2 ، H_4 ؛ A_1 ، A_4 ، H_2 ، H_3 ؛ A_2 ، A_3 ، H_1 ، H_4 ؛ A_2 ، A_4 ، H_1 ، H_3 ؛ A_3 ، A_4 ، H_1 ، H_2 ؛ و H_1 ، H_2 ، H_3 ، H_4 بر یک دایره واقعند. همچنین، هفت دایره‌ای که این چهارگانه‌ها بر آنها قرار دارند، همگی با S قابل انطباقند.

۳۴۸. ثابت کنید که اگر شکلی دارای تعداد محدودی محور تقارن باشد این محور تقارنها همرس خواهند بود و هر دو محور تقارنی که مجاور یکدیگرند، با هم زاویهٔ ثابتی می‌سازند.

۳۴۹. ثابت کنید که :

الف. دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ α ، هم ارز است با دو تقارن محوری متوالی که محورهایشان از نقطهٔ O می‌گذرد و زاویهٔ بین محورها $\frac{\alpha}{2}$ است ؛ انتقال هم‌ارز است با دو تقارن محوری با محورهای موازی ؛

ب. دو دوران متوالی در یک جهت، یکی دور نقطهٔ O_1 به اندازهٔ α و دیگری دور نقطهٔ O_2 به اندازهٔ زاویهٔ β ($2\pi > \alpha \geq 0$ و $2\pi > \beta \geq 0$) هم ارز است با یک دوران به اندازهٔ $\alpha+\beta$ دور نقطهٔ معلوم O، به شرطی که $\alpha+\beta \neq 2\pi$ ، زاویه‌های مثلث O_1O_2O را پیدا کنید.

بخش ۵. تجانس
(تشابه مرکزدار)

۱.۵.تعریف و قضیه

۲.۵.تجانس در: نقطه، خط، زاویه

۵.۲.۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵.۲.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۵.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۵.۲.۳. خطهای : همرس، موازی، ...

۵.۲.۳.۱. خطها همرسند

۵.۲.۴. زاویه

۵.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۲.۵. پاره‌خط

۵.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۵.۲.۵.۲. رابطهٔ بین پاره خطها

۵.۲.۶. رابطه‌های متری

۵.۲.۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵.۲.۸. رسم شکلها

۵.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳.۵. تجانس در: مثلث، مثلث و دایره

۵.۳.۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۵.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۵.۳.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۵.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۵.۳.۳.۱. خطها همرسند

۵.۳.۳.۲. خطها موازی‌اند

۵.۳.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵.۳.۴. زاویه

۵.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۳.۵. پاره خط

۵.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵.۳.۶. رابطه‌های متری

۵.۳.۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵.۳.۸. رسم شکلها

۵.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴.۵. تجانس در چند ضلعیها

۵.۴.۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۵.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۵.۴.۳. خطهای : همرس، موازی،...

۵.۴.۳.۱. خطها همرسند

۵.۴.۴. زاویه

۵.۴.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۴.۵. پاره خط

۵.۴.۵.۱. رابطهٔ بین پاره خطها

۵.۴.۶. رابطه‌های متری

۵.۴.۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵.۴.۸. رسم شکلها

۵.۴.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۴.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۵.۵. تجانس در دایره

۵.۵.۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵.۵.۲. نقطه‌های : همخط، همدایره، ...

۵.۵.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۵.۵.۲.۲. نقطه‌ها متقابل قطری هستند

۵.۵.۳. خطهای : همرس، موازی،...

۵.۵.۳.۱. خطها موازی‌اند

۵.۵.۳.۲. خط نیمساز است

۵.۵.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵.۵.۳.۴. خط مماس بر دایره است

۵.۵.۴. زاویه

۵. ۵. ۴. ۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵. ۵. ۵. پاره خط

۵. ۵. ۵. ۵. ۱. اندازهٔ پاره خط

۵. ۵. ۵. ۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵. ۵. ۶. رابطه‌های متری

۵. ۵. ۷. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵. ۵. ۸. رسم شکلها

۵. ۵. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵. ۵. ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۵. تجانس (تشابه مرکزدار)

۱.۵. تعریف و قضیه

تعریف. هرگاه نقطهٔ ثابتی مانند S و یک عدد ثابت جبری مانند $K(K \neq ۰)$ داشته باشیم، مجانس هر نقطه مانند A نسبت به مرکز تجانس S با نسبت تجانس K نقطه‌ای است مانند A' که با A و S بر یک امتداد باشد و نسبت اندازه‌های جبری S از A و A' برابر K باشد، یعنی داشته باشیم :

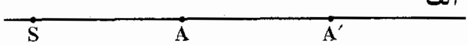
$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = K \text{ یا } \overline{SA'} = K.\overline{SA}$$

به بیان دیگر می‌توان گفت، نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس S و با نسبت تجانس K است، در صورتی که داشته باشیم : $\overrightarrow{SA'} = K.\overrightarrow{SA}$.

S را مرکز تجانس و K را نسبت تجانس می‌نامند.

تجانس به مرکز S و نسبت تجانس K را به صورت (S , K) یا H_S^K نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم : $A' = H_S^K(A)$.

الف



ب

اگر K مثبت باشد، نقطهٔ داده شده و مجانس آن در یک طرف مرکز تجانس می‌باشند (شکل الف) و در صورتی که K منفی باشد، نقطهٔ داده شده و مجانس آن در دو طرف مرکز تجانس واقع می‌شوند (شکل ب).

چند نکته

۱. وقتی که $K > ۰$ است، تجانس را مستقیم یا مثبت و هنگامی که $K < ۰$ است، تجانس را معکوس یا منفی می‌نامند.

۲. اگر $K = ۱$ باشد، مجانس هر نقطه بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، زیرا داریم :

$$\overline{SA'} = \overline{SA} \Rightarrow (A') = (A)$$

بنابراین تجانس با نسبت تجانس ۱، تبدیل همانی است.

۳. اگر $K=-1$ باشد، مجانس هر نقطه نسبت به آن نقطه قرینهٔ مرکزی آن نقطه نسبت به مرکز تجانس خواهد بود، زیرا :

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=-1 \Rightarrow \overline{SA'}=-\overline{SA}$$

بنابراین تجانس با نسبت تجانس ۱− ، تقارن مرکزی است.

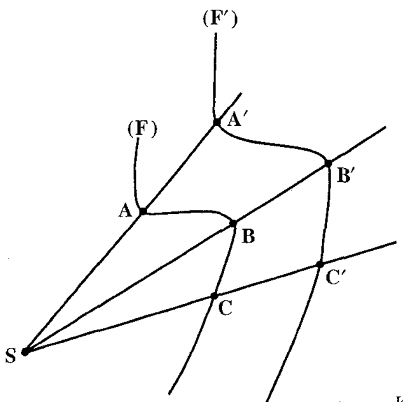
۴. اگر $K=0$ اختیار شود، مجانس هر شکل، مرکز تجانس خواهد بود و در این صورت تجانس، تبدیلی پایا می‌باشد.

۵. اگر $K>1$ باشد، تجانس را انبساط و اگر $0<K<1$ باشد، تجانس را انقباض می‌نامند.

۶. اگر نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس S و با نسبت تجانس K باشد، نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A نسبت به همان مرکز تجانس S و با نسبت تجانس $\frac{1}{K}$ است، زیرا داریم :

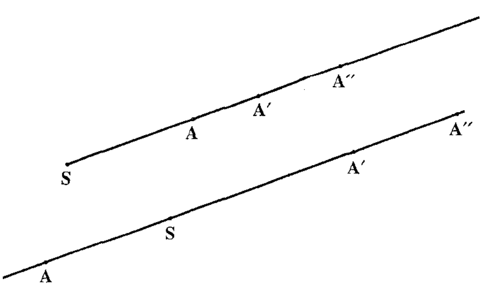
$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}=K \Rightarrow \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}=\frac{1}{K} \quad \text{یا} \quad A'=H_S^K(A) \Leftrightarrow A=H_S^{\frac{1}{K}}(A')$$

۷. تجانس در فضا قابل تعریف است.



مجانس یک شکل. مجانس یک شکل مانند F نسبت به مرکز تجانس S و با نسبت تجانس K، شکلی است مانند F' ، به قسمی که هر نقطهٔ آن، مجانس یک نقطه از شکل F نسبت به مرکز تجانس S و با نسبت تجانس K باشد ؛ به عبارت دیگر، مجانس هر شکل، مکان هندسی مجانسهای نقطه‌های آن شکل است. این تعریف را به صورت زیر می‌توان نمایش داد :

$$F'=H_S^K(F) \Leftrightarrow F'=\left\{A' \middle| A'=H_S^K(A), A\in F\right\}$$



تجانسهای هم مرکز. تجانسهای به مرکز S و نسبتهای K'', K', K ، ... را مجموعهٔ تجانسهای هم مرکز می‌گوییم. هر تجانس از یک مجموعه تجانسهای هم مرکز، با یک عدد جبری مشخص می‌شود.

۳۵۰. **قضیه.** مجانسهای یک شکل در دو تجانس هم مرکز، خود در تجانسی با همان مرکز، مجانس یکدیگرند.

۳۵۱. **قضیه.** مجانس خط راست، خط راستی است موازی با آن.

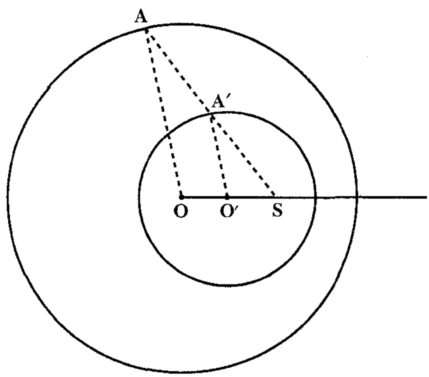
۳۵۲. **قضیه.** مجانس هر زاویه، زاویه‌ای است مساوی و هم جهت با آن.

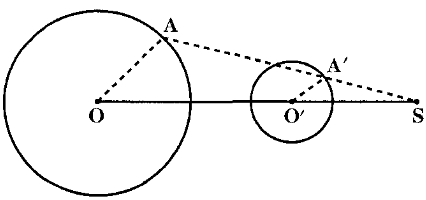
۳۵۳. **قضیه.** مجانس هر چند ضلعی، چند ضلعیی است که ضلعهایش با ضلعهای آن بر نسبت $|k|$ و زاویه‌هایش با زاویه‌های آن مساوی‌اند.

۳۵۴. **قضیهٔ عکس.** هرگاه در دو شکل متشابه، ضلعهای متناظر متوازی باشند، دو شکل مجانس یکدیگرند. یعنی خطهایی که رأسهای متناظر آنها را به هم وصل می‌کند، همه بر یک نقطه می‌گذرند.

۳۵۵. **قضیه.** مجانس دایره، دایره است.

۳۵۶. دو دایرهٔ واقع در یک صفحه، همواره هم مجانس مستقیم و هم مجانس معکوس یکدیگرند.

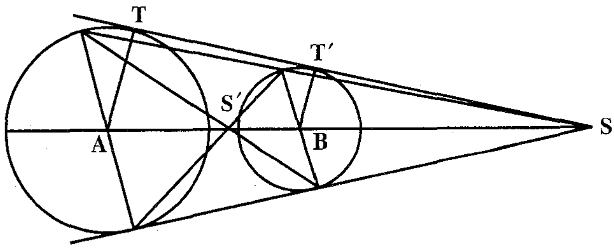




۳۵۷. **تعریف مرکز تشابه.** اگر دو نقطهٔ S و ′S مرکزهای تجانس دو دایرهٔ A و B باشند، نقطهٔ S، مرکز تجانس مستقیم دو دایره را مرکز تشابه خارجی یا مستقیم و نقطهٔ ′S، مرکز تجانس معکوس دو دایره را مرکز تشابه داخلی یا غیر مستقیم دو دایره می‌نامند.

مرکز تشابه خارجی با دو انتهای هر دو شعاع موازی همجهت در دو دایره، یعنی شعاعهایی از دو دایره که موازی و هر دو در یک طرف خط‌المرکزین دو دایره باشند، همخط است. مرکز تشابه داخلی با دو انتهای هر دو شعاع موازی مختلف‌الجهت، یعنی شعاعهایی در دو دایره که موازی و در دو طرف خط‌المرکزین باشند، همخط است.

مرکزهای دو دایره و دو مرکز تشابه این دو دایره دو جفت نقطهٔ همسازند؛ زیرا مرکزهای تشابه، خط‌المرکزین دو دایره را به نسبت شعاعهای این دو دایره تقسیم می‌کنند.



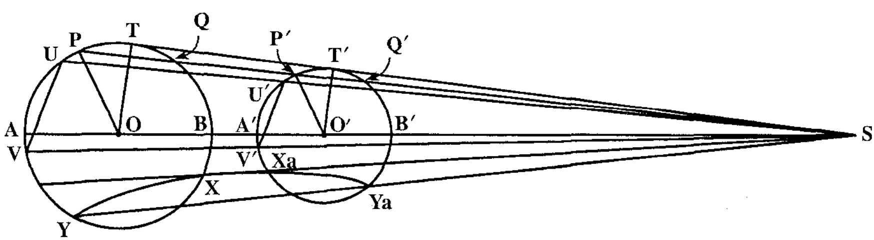
تبصرهٔ ۱. دو دایره برابر تنها یک مرکز تشابه دارند، که نقطهٔ وسط خط‌المرکزین آنهاست.

تبصرهٔ ۲. اگر دو دایره هم مرکز باشند، مرکز مشترکشان تنها مرکز تشابه آنهاست.

۳۵۸. چند تعریف. ۱. دایره‌ای که دو مرکز تشابه دو دایره دو سر یک قطر آن هستند، دایرهٔ تشابه دو دایره نامیده می‌شود.

نتیجه. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ متقاطع از نقطه‌های مشترک این دو دایره می‌گذرد.

۲. فرض کنید خطی که از یکی از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ (O) و (O′)، به عنوان مثال مرکز تشابه خارجی S، می‌گذرد (شکل)، دایرهٔ (O) را در P و Q و دایرهٔ (O′) را در P′ و Q′ قطع کند. چون S مرکز تجانس دو دایره است، برای هر نقطهٔ P از (O) یک نقطهٔ متناظر از (O′)، به عنوان مثال، P′ وجود دارد، به طوری که OP و O′P′ موازی‌اند. نقطه‌های P و P′ را نقطه‌های همتا روی دایره، نسبت به مرکز تجانس S می‌نامند. Q و Q′ نیز دو نقطهٔ همتا روی دو دایره نسبت به S هستند.



فرض کنید U و V دو نقطهٔ دلخواه روی (O) و U' و V' به ترتیب، نقطه‌های همتای این دو نقطه نسبت به یک مرکز تشابه باشند، وترهای UV و $U'V'$ را وترهای همتا در دو دایره می‌نامند.

دو وتر همتا موازی‌اند، زیرا دو خط متناظر از دو شکل متجانسند، مگر این که هر دو روی خطی که از مرکز تشابه می‌گذرد، قرار داشته باشند، مثل وترهای PQ و $P'Q'$ (شکل).

۳. دو نقطه از دو دایره را که با یک مرکز تشابه دو دایره همخط باشند، ولی شعاعهایی که از این دو نقطه می‌گذرد، موازی نباشند، دو نقطهٔ پادهمتا نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند؛ پس در شکل، دو نقطهٔ P و Q' ، و دو نقطهٔ P' و Q نسبت به S پادهمتا هستند.

اگر X و Yدو نقطه از دایرهٔ (O)، و X_a و Y_a نقطه‌های پادهمتای آنها، روی دایرهٔ (O') نسبت به یک مرکز تشابه باشند، دو وتر XY و X_aY_a را وترهای پادهمتا در دو دایره، نسبت به مرکز تشابه در نظر گرفته شده، می‌نامند. اگر دو دایره متقاطع باشند، در هر نقطهٔ مشترک دو دایره دو نقطهٔ پادهمتا از دو دایره بر هم منطبقند.

۳۵۹. قضیه. قاطعی که از مرکز تشابه دو دایره می‌گذرد، این دو دایره را در دو جفت نقطهٔ همتا قطع می‌کند. هر جفت از این نقطه‌های همتا پاره‌خطی را تعیین می‌کنند؛ حاصلضرب این دو پاره خط مقدار ثابتی است.

۳۶۰. قضیه. اگر یک دایره بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد، نقطه‌های تماس، نقطه‌های پادهمتا در این دو دایره مفروضند.

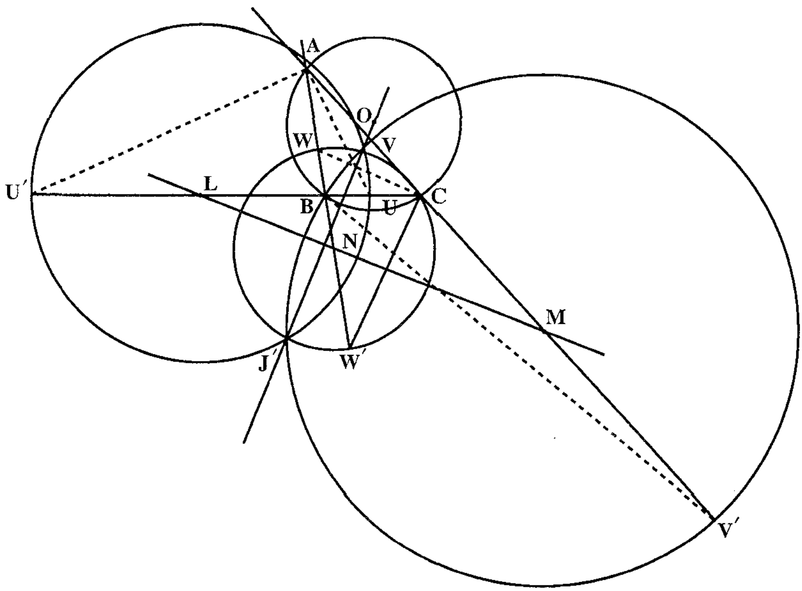
۳۶۱. قضیه. حاصلضرب فاصله‌های یک مرکز تشابه دو دایره از دو نقطهٔ پادهمتا نسبت به آن مرکز تشابه، مقداری ثابت است.

۳۶۲. قضیه. نسبت فاصله‌های هر نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض از مرکز این دو دایره با نسبت شعاعهای این دو دایره برابر است.

۳۶۳. قضیه. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض، با این دایره‌ها هم محور است.

۳۶۴. قضیه. هرگاه مرکزهای سه دایره بر یک امتداد نباشند، سه مرکز تجانس مستقیم آنها بر یک امتداد است؛ همچنین هر دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک امتداد است.

۳۶۵. قضیه. دایره‌های آپولونیوسی یک مثلث، دایره‌های تشابه سه دایره‌اند، که مرکزهایشان رأسهای مثلث مفروضند و شعاعهایشان با ارتفاعهای متناظر مثلث متناسبند.



۳۶۶. قضیه. وتر مشترک دایرهٔ محیطی و یک دایرهٔ آپولونیوسی یک مثلث بر میانهٔ متقارن متناظر با آن دایره منطبق است.

۳۶۷. قضیه. وتر مشترک دایرهٔ محیطی (O) و یک دایرهٔ آپولونیوسی (L) بر میانهٔ متقارن متناظر با آن دایرهٔ آپولونیوسی منطبق است.

۳۶۸. تعریف. مماسهایی که در رأسهای یک مثلث مفروض بر دایرهٔ محیطی آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی می‌سازند که مثلث مماسی آن مثلث خوانده می‌شود.

قضیه. مثلثهای مماسی و پادک (ارتفاعیه) یک مثلث مفروض، متجانسند.

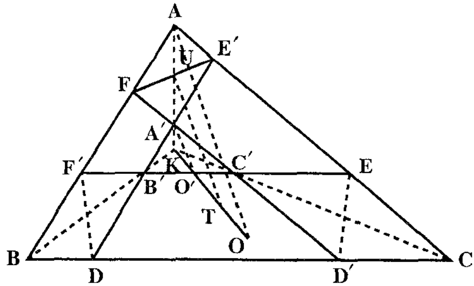
۳۶۹. مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که ضلعهایش مماسهایی از رأسهای یک مثلث بر دایرهٔ محیطی آن هستند، روی خط اولر آن مثلث قرار دارد (مثلث T).

۳۷۰. دایره‌های تاکر.

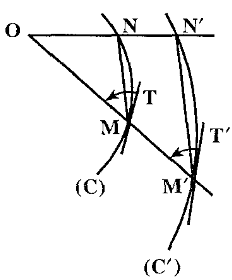
نقطه‌های همدایره. مثلث A′B′C′ را متجانس مستقیم مثلث ABC ، به مرکز تجانس نقطهٔ لوموان K در مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل). فرض کنید ضلعهای B′C′ ، C′A′ و A′B′ ضلعهای AC و AB ، BA و BC ، و CB و CA را به ترتیب در

نقطه‌های E و F′ ، F و D′ و D و E′ قطع کنند.

قضیه. شش نقطهٔ D، E، F ، D′ ، E′ و F′ همدایره‌اند.



۳۷۱. مماسهای بر دو منحنی متجانس در دو نقطهٔ متناظر با هم موازی‌اند.



۳۷۲. قضیه. مرکز تجانس مثلث پادک و مثلث مماسی هر مثلث روی خط اویلر آن مثلث قرار دارد.

۳۷۳. تعریف. از یک نقطه خطهایی به رأسهای یک مثلث رسم می‌کنیم و بر این خطها، عمودهایی در محل رأسها رسم می‌کنیم. این عمودها مثلثی تشکیل می‌دهند که مثلث پادپایی آن نقطه نسبت به مثلث مفروض خوانده می‌شود.

قضیه. اگر دو نقطه نسبت به یک مثلث هم‌زاویه باشند، مثلث پایی یک نقطه با مثلث پادپایی نقطهٔ دیگر متجانس است.

۳۷۴. قضیه. دایرهٔ نه نقطهٔ یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، با دایرهٔ نه نقطهٔ گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکز ثقلهای گروه مفروض، هم مرکز است.

۳۷۵. مثلث $A''B''C''$ که پاد مکمل مثلث ABC است، در تجانس (G , ۱:-۲) با مثلث ABC متناظر است. در این تجانس نقطهٔ P'' متجانس با نقطهٔ مفروض P، نقطهٔ پادمکمل P نامیده می‌شود.

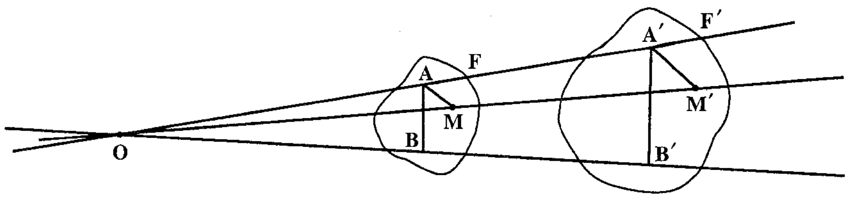
۳۷۶. قضیه. عمودهایی که از وسط ضلعهای مثلث اوّل بروکار بر ضلعهای متناظر مثلث مفروض رسم می‌شوند، یکدیگر را در مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۳۷۷. قضیه. ثابت کنید که در دو شکل متجانس F و F' ، پاره‌خطهای متناظر، متوازی‌اند و نسبتشان ثابت و مساوی با نسبت تجانس است. بعکس اگر به هر نقطه از شکل F بتوان نقطه‌ای از شکل F' را نظیر کرد، چنان که پاره‌خطهای متناظر با این نقطه‌ها در این دو شکل متوازی و دارای نسبت ثابت (از نظر اندازه و علامت) K، نامساوی با ۱ باشند، آن‌گاه F و F' مجانسند.

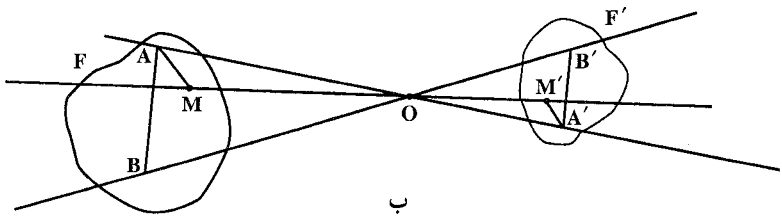
F و F' را دو شکل مجانس با نسبت تجانس K (مثبت یا منفی) می‌گیریم (شکلهای الف و ب). در این حالت پاره‌خطهای متناظر در دو شکل، موازی خواهند بود و نسبت طولهایشان به یکدیگر مقدار ثابت K خواهد بود ؛ این نتیجه‌ها از تشابه دو مثلث OAB و $OA'B'$ به دست می‌آید (با توجه به این که $\overline{OA'}/\overline{OA}=\overline{OB'}/\overline{OB}=K$). اکنون قرار می‌گذاریم که نسبت دو پاره‌خط متوازی AB و $A'B'$ را مثبت یا منفی اختیار می‌کنیم. بسته به این که همجهت باشند (از A به B و از A' به B') یا جهتهای مختلف داشته باشند ؛ این قرارداد مشابه قراردادی است که قبلاً در مورد نسبت پاره‌خطهای واقع بر یک خط راست بیان کردیم. پس همیشه می‌توان گفت که در دو شکل متجانس پاره‌خطهای متناظر متوازی‌اند و نسبتشان ثابت و مساوی با نسبت تجانس است. اکنون ثابت می‌کنیم که بعکس، اگر به هر نقطه از شکل F بتوان نقطه‌ای از شکل F' را نسبت داد. چنان که پاره‌خطهای متناظر با این نقطه‌ها در این دو شکل متوازی و دارای نسبت ثابت (از لحاظ اندازه و علامت) k ، نامساوی با ۱ باشند، آن‌گاه F و F' مجانسند.

برای اثبات، نقطهٔ دلخواه M را در F و نقطهٔ M' متناظر با آن را در F' اختیار و فرض می‌کنیم A و A' یک زوج دلخواه دیگر از نقطه‌های متناظر این دو شکل باشند و O را نقطهٔ برخورد خطهای MM' و AA' می‌گیریم (شکل). چون $MA\|M'A'$ ، مثلثهای OMA و $OM'A'$ متشابه‌اند ؛ بنا به فرض $\overline{M'A'}/\overline{MA}=K$ ؛ پس $\overline{OM'}/\overline{OM}=\overline{OA'}/\overline{OA}=K$. از این جا نتیجه می‌شود که اوّلاً نقطهٔ O به انتخاب زوج A و A' بستگی ندارد (نقطه‌ای است روی MM' که به ازای آن $\overline{OM'}/\overline{OM}=K$) و ثانیاً، هر زوج نقطه‌های متناظر A و A' از شکلهای F و F' مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس O و نسبت تجانس K و این همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. اگر K که همان نسبت پاره‌خطهای متناظر است ۱+ باشد، استدلال بالا معتبر نیست، زیرا در این حالت خطهای MM' و AA' متقاطع نیستند

(با هم موازی‌اند) ؛ در این حالت شکلهای F و F' مجانس نیستند بلکه به توسط یک انتقال از یکدیگر به دست می‌آیند.

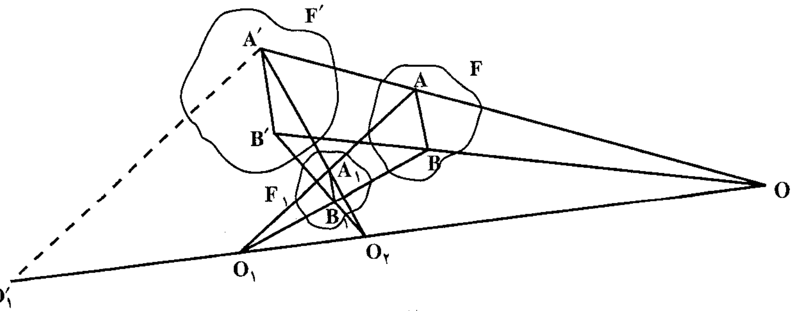


الف

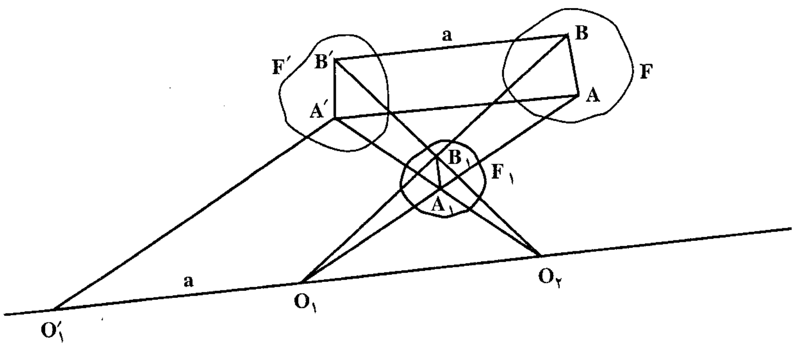


ب

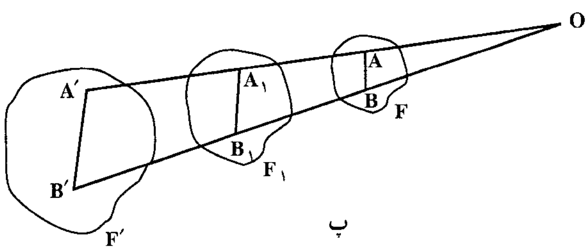
۳۷۸. ترکیب تجانسها. اکنون حاصلضرب (یا مجموع یا ترکیب) تجانسها را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم شکل F_1 مجانس شکل F با مرکز تجانس O_1 و نسبت تجانس K_1 باشد و نیز F' مجانس F_1 با مرکز تجانس O_2 و نسبت تجانس K_2 باشد (شکل. در این جا برای سادگی تجسم، حالتی با K_1 و K_2 مثبت را نشان داده‌ایم ؛ در اثبات زیر K_1 و K_2 عملاً می‌توانند مثبت یا منفی اختیار شوند). در این حالت پاره‌خطهای متناظر در F و F_1 موازی‌اند و نسبتشان مقدار ثابت K_1 است ؛ پاره‌خطهای متناظر در F_1 و F' نیز موازی و دارای نسبت ثابت K_2 خواهند بود. از این جا نتیجه می‌شود که پاره‌خطهای متناظر در F و F' موازی‌اند و نسبتشان مقدار ثابت K_1K_2 است (از ضرب معادله‌های $\overline{A_1B_1}/\overline{AB}=K_1$ و $\overline{A'B'}/\overline{A_1B_1}=K_2$ در هم نتیجه می‌شود $\overline{A'B'}/\overline{AB}=K_1K_2$). معنی این نتیجه‌گیری این است که F' مجانس شکل F است با نسبت تجانس K_1K_2. اگر $K_1K_2\neq 1$ و در صورتی که $K_1K_2=1$، F' به توسط یک انتقال از F به دست می‌آید. این نتیجه را چنین نیز می‌توان بیان کرد : حاصلضرب دو تجانس با نسبتهای K_1 و K_2 یک تجانس با نسبت K_1K_2 است، اگر $K_1K_2\neq 1$ و یک انتقال است، اگر $K_1K_2=1$.



الف



ب



پ

با داشتن مرکزهای O_1 و O_2 و نسبتهای K_1 و K_2 در دو تجانس، اکنون نشان می‌دهیم چگونه می‌توان نقطهٔ O، مرکز تجانس حاصلضرب، را پیدا کرد (یا در حالت $K_1K_2 = 1$ چگونه می‌توان اندازه و راستای انتقالی را که حاصلضرب آنهاست، پیدا کرد.) روشن است که اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، O نیز بر این نقطهٔ منطبق خواهد شد (شکل پ)؛ پس فرض می‌کنیم که مرکزهای O_1 و O_2 متفاوت باشند. تجانس اوّلی مرکز O_1 را در جای خود نگاه می‌دارد و تجانس دومی O_1 را به نقطهٔ O'_1 واقع بر خط O_2O_1 می‌برد،

چنان که $K_2 = \overline{O_2O_1} / \overline{O_2O'_1}$ (شکل الف، ب)؛ پس حاصلضرب این دو تبدیل O_1 را به O'_1 می‌برد. از این جا نتیجه می‌شود که اگر $K_1K_2 = 1$ (شکل ب)، آن گاه حاصلضرب این دو تبدیل انتقالی در راستای خط $O_1O'_1$ است (یعنی در راستای خط O_2O_1، زیرا O'_1 بر خط O_1O_2 واقع است.) به اندازهٔ طول $a = O_1O'_1$ و چون $K_2 = \overline{O_2O'_1} / \overline{O_2O_1}$، پس a را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$a = \overline{O_2O'_1} - \overline{O_2O_1} = \frac{\overline{O_2O'_1} - \overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1}} . \overline{O_2O_1} = (K_2 - 1)\overline{O_2O_1}$$

اگر $K_1K_2 \neq 1$ (شکل الف)، آن‌گاه مرکز خواسته شدهٔ O روی خط $O_1O'_1$، یعنی بر خط O_1O_2 واقع است و داریم $K_1K_2 = \overline{OO'_1} / \overline{OO_1}$. بیان مناسبتری هم برای موقعیت O می‌توان یافت. از رابطه‌های $K_2 = \overline{O_2O'_1} / \overline{O_2O_1}$ و $K_1K_2 = \overline{OO'_1} / \overline{OO_1}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{O_1O'_1}}{\overline{O_2O_1}} = \frac{\overline{O_2O'_1} - \overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1}} = K_2 - 1 \;,\quad \frac{\overline{O_1O'_1}}{\overline{OO_1}} = \frac{\overline{OO'_1} - \overline{OO_1}}{\overline{OO_1}} = K_1K_2 - 1$$

اکنون از تقسیم معادلهٔ اوّل بر معادلهٔ دوم خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{O_2O_1}} = \frac{K_2 - 1}{K_1K_2 - 1} \quad \text{یا بالاخره} \quad \overline{OO_1} = \frac{K_2 - 1}{K_1K_2 - 1} . \overline{O_2O_1} .$$

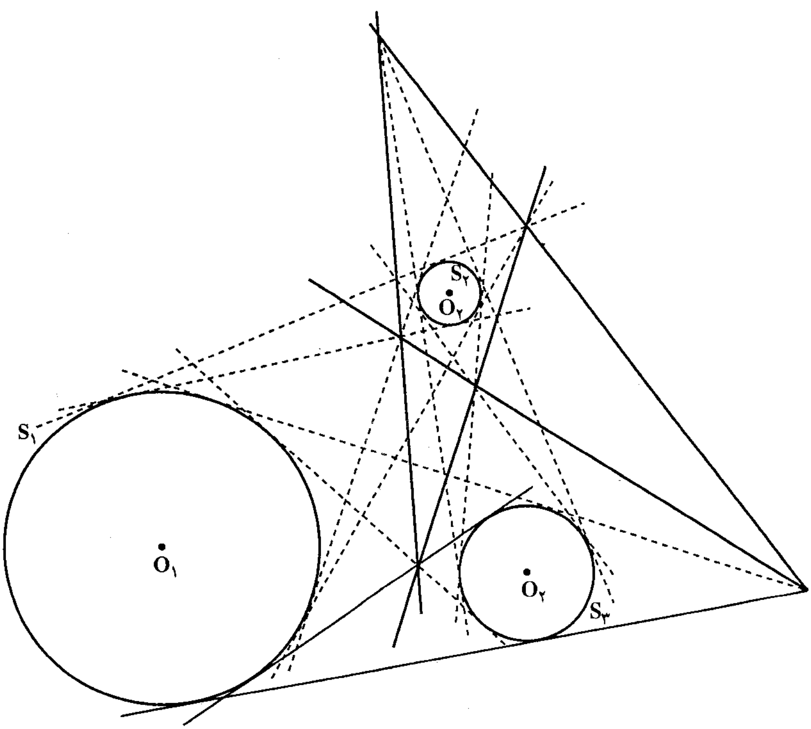
توجه کنید که طی این بحث، قضیهٔ مهم زیر را ثابت کرده‌ایم.

۳۷۹. قضیهٔ سه مرکز تجانس. فرض کنید شکل F_1 مجانس شکل F با مرکز تجانس O_1 باشد و در عین حال F_1 مجانس شکل F' با مرکز تجانس O_2 نیز باشد. اگر O_1 بر O_2 منطبق نباشد، خط O_1O_2 از نقطهٔ O مرکز تجانس شکلهای F و F' (شکل الف) می‌گذرد، یا موازی با راستای انتقالی است که F را به F' می‌برد (شکل ب). اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، O_1 مرکز تجانس F و F' نیز هست (شکل پ).

اگر O_1 غیر از O_2 باشد، خط O_1O_2 محور تجانس سه شکل F، F_1 و F' خوانده می‌شود؛ اگر O_1 بر O_2 منطبق باشد، این نقطه مرکز تجانس شکلهای F ، F_1 و F' خوانده می‌شود. معمولاً قضیهٔ سه مرکز تجانس به صورتی که در صفحهٔ بعد می‌آید و دقت کمتری دارد، بیان می‌شود:

سه مرکز تجانس سه شکل دو به دو متجانس بر یک خط راست واقعند.

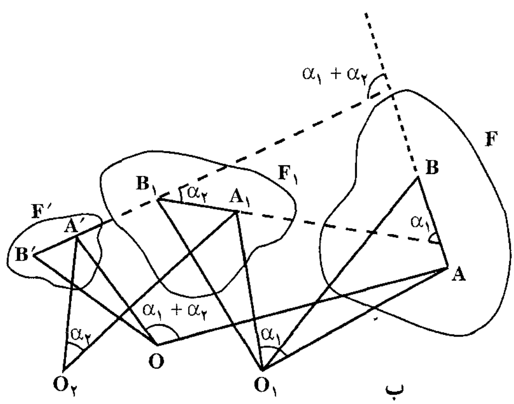
به عنوان مثال، حالتی با سه دایرهٔ S_1 ، S_2 و S_3 را در نظر می‌گیریم. در حالت کلی، هیچ دو تای آنها با هم قابل انطباق نیستند و هر زوج از دایره‌ها دو مرکز تجانس دارند، یک مرکز تجانس بیرونی و یک مرکز تجانس درونی ؛ لذا روی هم رفته، شش مرکز تجانس داریم که بر چهار محور تجانس قرار دارند (شکل ت)، اگر دو تا از دایره‌ها با هم قابل انطباق باشند، مرکز تجانس بیرونی ندارند. از این رو پنج مرکز تجانس داریم که بر چهار محور تجانس قرار دارند ؛ اگر هر سه دایره با هم قابل انطباق باشند، سه مرکز تجانس و سه محور تجانس داریم. همچنین اگر مرکزهای سه دایره بر یک خط نباشند، سه محور تجانس از یکدیگر متمایزند ؛ اگر این سه مرکز بر یک راستا باشند، آن گاه همهٔ محورهای تجانس بر هم منطبق می‌شوند که در این حالت ممکن است سه مرکز تجانس بر هم منطبق شوند، به طوری که یکی از چهار محور تجانس سه دایره به صورت یک مرکز تجانس در آید.



ت

۳۸۰. قضیه. ثابت کنید که در هر تجانس مارپیچی (به زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k)، که شکل F را به شکل F' تبدیل می‌کند. هر دو پاره‌خط متناظر دارای نسبت ثابت k هستند و با یکدیگر زاویهٔ ثابت α می‌سازند و بعکس. اگر به هر نقطهٔ F، نقطه‌ای از F' متناظر باشد چنان که پاره‌خطهای متناظر در این شکلها دارای نسبت ثابت k باشند و با هم زاویهٔ ثابت α بسازند، آن‌گاه دو شکل F و F' به توسط یک تجانس مارپیچی به هم مرتبطند.

۳۸۱. ترکیب تجانسهای مارپیچی. اکنون به آسانی می‌توان به این سؤال که: حاصلضرب دو تجانس مارپیچی چیست، پاسخ گفت. فرض کنید شکل F_1 از شکل F بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O_1 و نسبت تجانس k_1 و زاویهٔ دوران α_1 به‌دست آمده باشد (در این مورد و موردهایی که از این پس می‌آیند، همه جا زاویهٔ دوران در یک جهت ثابت، به عنوان مثال در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود.) و شکل F' هم از شکل F_1 بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O_2، و نسبت تجانس k_2 و زاویهٔ دوران α_2 حاصل شده باشد؛ AB، A_1B_1 و $A'B'$ را پاره‌خطهای متناظری در این سه شکل می‌گیریم (شکل ب). در این صورت $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = k_1$، و پاره‌خطهای AB و A_1B_1 باهم زاویهٔ α_1 می‌سازند؛ همچنین: $\frac{A'B'}{A_1B_1} = k_2$ و پاره‌خطهای A_1B_1 و



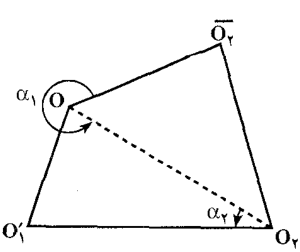
ب

$A'B'$ با هم زاویهٔ α_2 می‌سازند، پس:

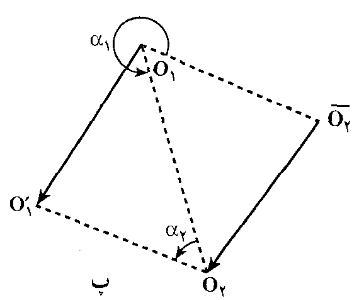
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot \frac{A'B'}{A_1B_1} = k_1 \cdot k_2$$

و پاره‌خطهای AB و $A'B'$ با هم زاویهٔ $\alpha_1+\alpha_2$ می‌سازند. بدین ترتیب پاره‌خطهای متناظر در شکلهای F و F' دارای نسبت ثابت k_1k_2 هستند و باهم زاویهٔ ثابت $\alpha_1+\alpha_2$ می‌سازند. بنابر آنچه قبلاً ثابت شد، این نتیجه به معنی آن است که شکل F' از F بر اثر یک تجانس مارپیچی با زاویهٔ دوران $\alpha_1+\alpha_2$ و نسبت تجانس k_1k_2 به‌دست می‌آید، یا در حالتی که $\alpha_1+\alpha_2=360^\circ$ و $k_1k_2=1$، بر اثر یک انتقال به‌دست می‌آید. بنابراین، حاصلضرب دو تجانس مارپیچی با نسبت تجانس k_1 و k_2 و زاویهٔ دوران α_1 و α_2، تجانس مارپیچی جدیدی است با نسبت تجانس k_1k_2 و زاویهٔ دوران $\alpha_1+\alpha_2$ ؛ در حالت استثنا، یعنی وقتی $k_1k_2=1$ و $\alpha_1+\alpha_2=360^\circ$، حاصلضرب دو تجانس مارپیچی یک انتقال است.

اکنون می‌خواهیم نقطهٔ O مرکز تجانس مارپیچی (یا راستا و اندازهٔ انتقال) حاصلضرب دو تجانس مارپیچی را بیابیم. اگر مرکزهای آنها یعنی O_1 و O_2 برهم منطبق باشند، روشن است که O نیز بر این نقطه منطبق است. حال فرض کنید که O_1 بر O_2 منطبق نباشد. حاصلضرب این دو تجانس مارپیچی، نقطهٔ O_1 را به نقطهٔ O_1' می‌برد و در واقع، دوران دوم به تنهایی O_1 را به این نقطه می‌برد (زیرا دوران اوّل O_1 را ثابت نگاه می‌دارد) ؛ پیدا کردن نقطهٔ O_1' دشوار نیست. حاصلضرب دو تبدیل، نقطه‌ای چون $\overline{O_2}$ را به نقطهٔ O_2 می‌برد و در واقع، اوّلین دوران به تنهایی این نقطه رابه O_2 می‌برد (زیرا دوران دوم O_2 را ثابت نگاه می‌دارد) ؛ پیدا کردن $\overline{O_2}$ آسان است ؛ پس اگر $k_1k_2=1$ و $\alpha_1+\alpha_2=360^\circ$، آن‌گاه پاره‌خطهای O_1O_1' و $\overline{O_2}O_2$ متساوی و متوازی‌اند و جهت واحدی دارند (شکل پ) ؛ هریک از این پاره‌خطها اندازه و راستای انتقالی را که حاصلضرب دو تجانس مارپیچی بالا است، معین می‌کند. اگر حاصلضرب دو تجانس مارپیچی، تجانس مارپیچی دیگری باشد، این تجانس مارپیچی جدید، پاره‌خط $O_1\overline{O_2}$ را به $O_1'O_2$ بدل می‌کند (شکل ت).

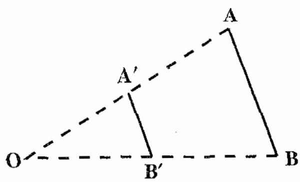


ت

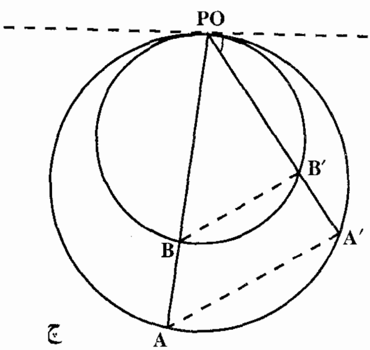


پ

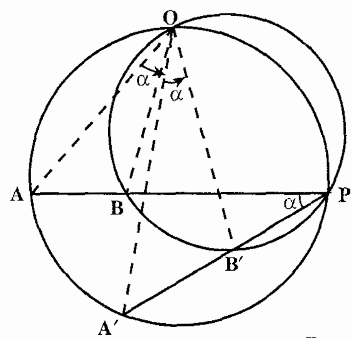
اکنون نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان نقطهٔ O مرکز تجانس مارپیچی را که پاره‌خط مفروض AB را به پاره‌خط مفروض دیگر $A'B'$ بدل می‌کند (در مورد بالا $O_1\overline{O_2}$ را به O'_1O_2 بدل می‌کند، پیدا کرد). اگر زاویهٔ بین پاره‌خطها ۱۸۰° یا ۳۶۰° باشد و پاره‌خطها متساوی نباشند، تجانس مارپیچی به‌صورت تجانس معمولی درمی‌آید؛ در این حالت O نقطهٔ برخورد خطهای AA' و BB' است (شکل ث). اکنون فرض کنید که زاویهٔ بین پاره‌خطها مضربی از ۱۸۰° نباشد، یعنی پاره‌خطهای AB و $A'B'$ متوازی نباشند؛ نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ را P می‌نامیم (شکل ج). در این صورت دایره‌های محیطی مثلثهای $AA'P$ و $BB'P$ از مرکز دوران O می‌گذرند؛ زیرا $A\hat{O}A' = A\hat{P}A'$ (زاویهٔ دوران AOA' با زاویهٔ APA'، بین پاره‌خطهای AB و $A'B'$ برابر است)؛ به همین ترتیب $B\hat{O}B' = B\hat{P}B'$، بنابراین مرکز O را می‌توان از دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای $AA'P$ و $BB'P$ به‌دست آورد (شکل ج).



ث



چ



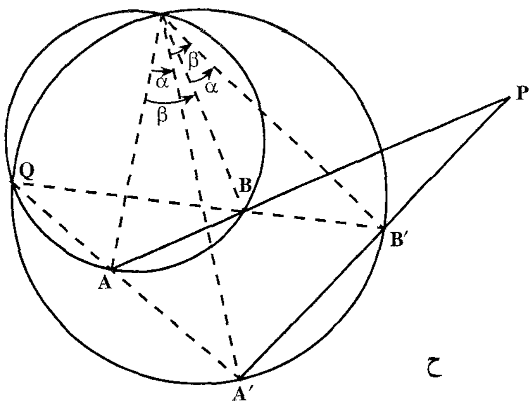
ج

اگر این دو دایره در P بر هم مماس باشند (شکل چ)، یعنی اگر $P\hat{A}A' = P\hat{B}B'$، (هر دوی این زاویه‌ها با زاویهٔ بین خط $PA'B'$ و مماس مشترک دایره‌ها در نقطهٔ P مساوی‌اند)، در این صورت $O = P$ (زیرا از تشابه مثلثهای PAA' و PBB' داریم: $\frac{PA'}{PA} = \frac{PB'}{PB}$).

به این نکته هم باید توجه داشت که مرکز آن تجانس مارپیچی که AB را به $A'B'$ بدل می‌کند، به مرکز آن تجانس مارپیچی که AA' را به BB' بدل می‌کند، منطبق است ؛ زیرا اگر

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=k \text{ و } A\hat{O}A'=B\hat{O}B'=\alpha$$

آن‌گـــاه $A\hat{O}B=A'\hat{O}B'=\beta$ (در شـــکـــل (ح) داریـــم : $\beta=\alpha+A'\hat{O}B$) و $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}=1$ ، از این‌جا نتیجه می‌شود که مرکز O را می‌توان از نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای ABQ و $A'B'Q$ که در آن Q نقطهٔ برخورد خطهای AA' و BB' است، جدا کرد (یا از نقطهٔ برخورد خطهای AB و $A'B'$ اگر $AA'\|BB'$ ؛ حالت اخیر که در شکل (چ) نشان داده شده، وقتی برقرار است که دایره‌های محیطی بر مثلثهای $AA'P$ و $BB'P$ در P بر هم مماس باشند).



ح

۳۸۲. قضیهٔ ۱. هر دو شکل مستقیماً متشابه در صفحه را می‌توان به وسیلهٔ یک تجانس مارپیچی یا یک انتقال برهم قرار داد.

۳۸۳. قضیهٔ ۲. هر دو شکل معکوساً متشابه در صفحه را با یک قرینه‌یابی تجانسی، یا با یک لغزه (قرینه‌یابی‌لغزه‌ای glide reflection) می‌توان برهم قرار داد.

۳۸۴. دو قضیهٔ قبلی را می‌توانیم به صورت حکم کلی بیان کنیم : هر دو شکل متشابه در صفحه را می‌توان به وسیلهٔ یک تجانس مارپیچی، یا یک قرینه‌یابی تجانسی یا یک انتقال یا یک لغزه به یکدیگر بدل کرد. بخصوص، هر دو شکل متشابه ولی غیرقابل انطباق باهم

را می‌توان با یک تجانس مارپیچی یا یک قرینه‌یابی تجانسی به یکدیگر بدل کرد.

نکته. این حکم را می‌توان مبنایی برای تعریف تبدیل تشابهی در صفحه قرار داد. به عبارت دیگر تبدیل تشابهی تبدیلی است که جزو یکی از چهار نوع زیر باشد:

۱) تجانس مارپیچی (ازجمله تجانس و دوران حول نقطه‌ها)؛

۲) قرینه‌یابی تجانسی؛

۳) انتقال؛

۴) لغزه، (ازجمله قرینه‌یابی نسبت به خط)؛

طبیعی است که می‌توانیم تبدیلهای نوع ۱) و ۳) را تشابه‌های مستقیم بنامیم (زیرا شکلهای متشابه را مستقیماً به یکدیگر بدل می‌کنند)، و تبدیلهای نوع ۲) و ۴) را تبدیلهای معکوس (که شکلهای متشابه را معکوساً به یکدیگر بدل می‌کنند).

از دو قضیهٔ قبلی نتیجه می‌شود که خواص مشترک همهٔ تبدیلهای تشابهی دقیقاً همان خواص مشترک تجانسهای مارپیچی، قرینه‌یابیهای تجانسی، انتقالها و لغزه‌ها هستند (تعریف تبدیل تشابهی در بالا). پس به عنوان مثال می‌توان گفت که، هر تبدیل تشابهی خط را به خط و دایره را به دایره بدل می‌کند و نیز، هر تبدیل تشابهی دارای یک نقطهٔ ثابت یا یک خط ثابت است، زیرا از این چهار نوع تبدیل تشابهی که نام بردیم، تنها تبدیلهای انتقال و لغزه نقطهٔ ثابت ندارند ولی در عوض خطهای ثابت دارند. بالاخره هر تبدیل تشابهی معکوس، حداقل یک خط ثابت دارد. در واقع، هر قرینه‌یابی تجانسی دقیقاً دو خط ثابت دارد، در صورتی که هر لغزه دقیقاً یک خط ثابت دارد مگر این که این لغزه به یک قرینه‌یابی نسبت به یک خط بدل شود که در آن صورت به تعداد نامتناهی خط ثابت دارد.

جالب توجه این که نخستین ویژگی از ویژگی‌های بیان شده، وجه مشخصهٔ تبدیلهای تشابهی است، یعنی می‌توان آن را به عنوان مبنایی برای تعریف (توصیفی) آنها به‌کار گرفت. تبدیلی در صفحه که هر خط را به خط و هر دایره را به دایره بدل کند، الزاماً یک تبدیل تشابهی است. به عبارت دیگر هر تبدیلی از این نوع، الزاماً نسبت فاصله‌های بین نقطه‌ها را ثابت نگاه می‌دارد. اگر نقطه‌های A، B، C و D بر اثر تبدیل به نقطه‌های A′، B′، C′ و D′ بدل شوند، آن‌گاه:

$$\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB}$$

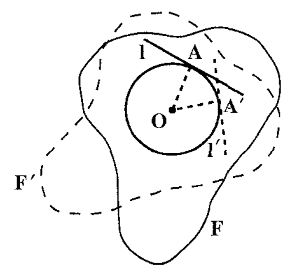
این مطلب تأکیدی بر نقش اساسی تبدیلهای تشابهی در هندسهٔ مقدماتی است که موضوع آن مطالعهٔ ویژگیهای خطها، دایره‌ها و شکلهایی است که مرزهای آنها خطها و کمانهایی از دایره هستند.

کاربردهای دیگر طولپاییها و تشابه‌ها

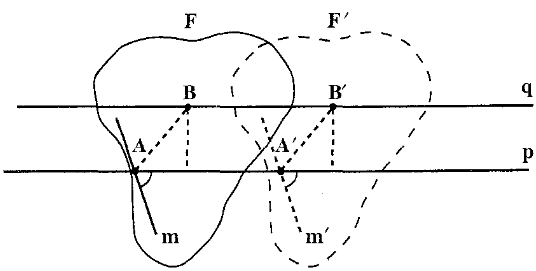
دستگاههای شکلهای دوبه‌دو متشابه

در این بخش دستگاههایی از شکلهای متقابلاً متشابه را که خواص جالبی دارند، بررسی می‌کنیم. ابتدا به دستگاههای شکلهای قابل انطباق با هم که ساده‌ترند، می‌پردازیم.

فرض کنید F و ′F دو شکل قابل انطباق با هم (منظور شکلهای مستقیماً قابل انطباق باهم است) در صفحه باشند. در بخشهای انتقال و دوران نشان دادیم که این شکلها را می‌توان به کمک یک دوران یا یک انتقال بر هم منطبق کرد و بر این اساس گفتیم که حرکتهای صلب در صفحه منحصر به دوران و انتقال هستند (منظور، شکلهای مستقیماً قابل انطباق باهم است)؛ امّا در آن جا به مواضع میانی که شکلی در جریان حرکت اختیار می‌کند، نپرداختیم، بلکه تمام توجه خود را به وضعیتهای ابتدایی و انتهایی معطوف داشتیم. ولی در این‌جا موضعهای میانی یک شکل متحرک مورد توجه ما خواهند بود؛ این موضعها دستگاهی از شکلهای دوبه‌دو متشابه پدید می‌آورند. به تعداد بی‌نهایت از این نوع دستگاهها، متناظر با راههای گوناگون ممکن برای حرکت دادن شکلی از وضعیت F به وضعیت ′F، وجود دارد. در این‌جا تنها برخی نمونه‌های سادهٔ این گونه دستگاه‌ها را بررسی می‌کنیم.



الف



ب

فرض کنید شکل F حول نقطهٔ O دوران می‌کند؛ یعنی طوری حرکت می‌کند که نقطهٔ خاص O، که آن را جزو شکل به شمار می‌آوریم، ثابت می‌ماند(شکل الف). در این حالت هر نقطهٔ A از F دایره‌ای به مرکز O می‌پیماید (زیرا فاصلهٔ OA ثابت می‌ماند)؛ هر خط l از F یا همواره بر دایره‌ای به مرکز O مماس است، یا همیشه از O می‌گذرد (زیرا فاصلهٔ O تا l ثابت می‌ماند). نقطهٔ O برای هردو وضعیت دلخواه شکل در حکم مرکز دوران است.

اکنون انتقال شکلی را در راستای خط مفروض p درنظر می‌گیریم (شکل ب)، یعنی حرکتی از شکل را که در آن خط p ثابت می‌ماند (بر خودش می‌لغزد). در این صورت هر نقطهٔ B از

شکل خطی موازی با p را می‌پیماید (زیرا فاصلهٔ B تا p ثابت می‌ماند)؛ هر خط m که با p موازی نباشد چنان حرکت می‌کند که با وضعیت اوّلیه‌اش موازی می‌ماند (زیرا زاویهٔ بین m و p تغییر نمی‌کند)؛ هر خط q موازی با p در امتداد خودش می‌لغزد (زیرا فاصله‌اش تا p تغییر نمی‌کند). هر دو وضعیتی از F را می‌توان با انتقالی در راستای p از یکدیگر به‌دست آورد.

اگر شکل F در صفحه طوری حرکت کند که در سراسر حرکت، دوخط متوازی p و q همیشه از دو نقطهٔ مفروض A و B از صفحه بگذرند، آن‌گاه خط p برخودش می‌لغزد (زیرا زاویهٔ بین p و پاره‌خط AB تغییر نمی‌کند: سینوس این زاویه برابر است با فاصلهٔ بین p و q تقسیم بر طول پاره‌خط AB). بدین ترتیب با انتقالی از شکل که قبلاً بررسی شد، سروکار پیدا می‌کنیم (شکل ب).

اگر دو خط ناموازی از شکل، همیشه از دو نقطهٔ مفروض بگذرند، وضع پیچیده‌تر خواهد بود؛ چنین حرکتی به صورت زیر می‌تواند پدید آید:

دو سنجاق در صفحه نصب کنید و زاویه‌ای به شکل بچسبانید؛ سپس زاویه را طوری حرکت دهید که دو ضلع آن همیشه با سنجاقها در تماس باشند. در این جا قضیهٔ زیر را داریم:

۳۸۵. قضیهٔ ۱. اگر شکل F در صفحه طوری حرکت داده شود که دو خط ناموازی p و q از F همواره از دو نقطهٔ مفروض A و B در صفحه بگذرند، آن‌گاه هر خط دیگری از F یا همیشه از نقطهٔ مفروضی در صفحه می‌گذرد یا همیشه بر دایرهٔ خاصی از صفحه مماس است.

۳۸۶. اگر پاره‌خط مفروضی از شکل طوری حرکت کند که دو سرش همواره بر دو خط ناموازی باشد، وضع پیچیده‌تر خواهد شد. در این مورد قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ ۲. اگر شکل F در صفحه چنان حرکت کند که دو نقطهٔ A و B از آن خطهای p و q، متقاطع در نقطهٔ O را بپیمایند، آن‌گاه یک دایرهٔ S متصل به شکل F وجود دارد که همهٔ نقطه‌هایش خطهایی را که از O می‌گذرند، می‌پیمایند.

۳۸۷. قضیهٔ ۳. اگر شکل F طوری حرکت کند که همهٔ وضعیتهایش با وضعیت اوّلیهٔ آن متشابه باشند و سه نقطهٔ A، B و C از شکل سه خط غیر همرس را بپیمایند، آن‌گاه هر نقطه از شکل، یک خط راست را می‌پیماید.

۳۸۸. قضیهٔ ۴. اگر شکل F طوری حرکت کند که همهٔ وضعیتهایش با وضعیت اوّلیه متشابه باشند و سه خط غیر متقارب l، m و n از F همواره از سه نقطهٔ مفروض بگذرند، آن‌گاه هر خط از F همواره از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد و هر نقطه از F یک دایره را می‌پیماید.

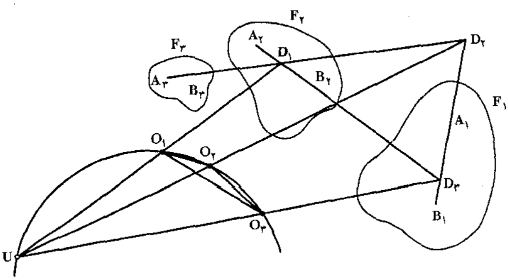
۳۸۹. قضیه. سه شکل متشکل F_1، F_2 و F_3 در صفحه مفروضند. فرض کنید A_1B_1، A_2B_2 و A_3B_3 سه پاره‌خط متناظر در این شکلها باشند و $D_1D_2D_3$ مثلثی باشد که

ضلعهایش خطهای A_1B_1 ، A_2B_2 و A_3B_3 هستند(شکل). ثابت کنید که :

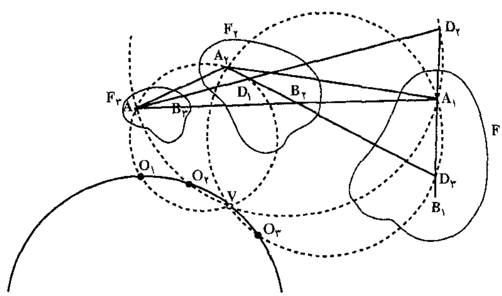
الف. D_1O_1 ، D_2O_2 و D_3O_3 در یک نقطهٔ U که روی دایرهٔ تشابهی شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 واقع است، یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل الف) ؛

ب. دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2D_3$ ، $A_1A_3D_2$ و $A_2A_3D_1$ در نقطهٔ V که روی دایرهٔ تشابهی شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 واقع است، متقاربند (شکل ب) ؛

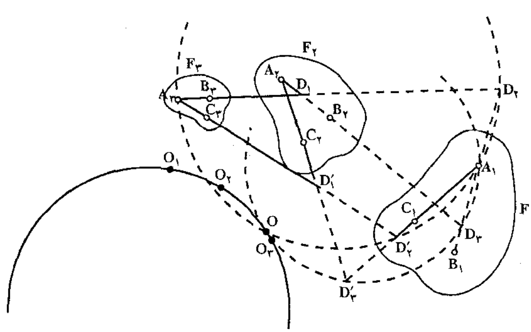
ج. فرض کنید $D'_1D'_2D'_3$ مثلثی غیر از $D_1D_2D_3$ باشد که ضلعهایش سه خط متناظر از شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 هستند. در این صورت مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ مستقیماً متشابه‌اند و نقطهٔ O مرکز تجانس این دو مثلث روی دایرهٔ تشابهی F_1 ، F_2 و F_3 قرار دارد (شکل ج).



الف



ب

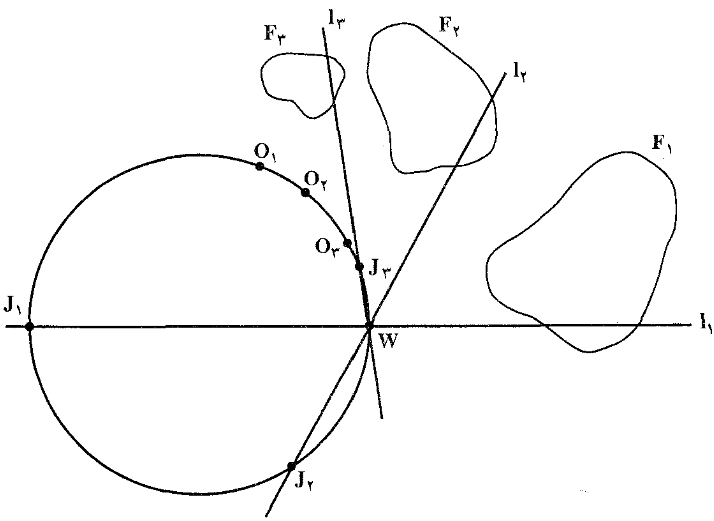


ج

۳۹۰. فرض کنید F_1 ، F_2 و F_3 سه شکل متشابه باشند و l_1 ، l_2 و l_3 خطهای متناظری در این شکلها و فرض کنید که l_1 ، l_2 و l_3 ، در یک نقطهٔ مشترک W همرسند (شکل). ثابت کنید که :

الف. W روی دایرهٔ تشابهی F_1 ، F_2 و F_3 واقع است ؛

ب. l_1 ، l_2 و l_3 از سه نقطهٔ ثابت J_1 ، J_2 و J_3 (یعنی مستقل از انتخاب خطهای l_1 ، l_2 و l_3) که روی دایرهٔ تشابهی F_1 ، F_2 و F_3 واقع‌اند، می‌گذرند.



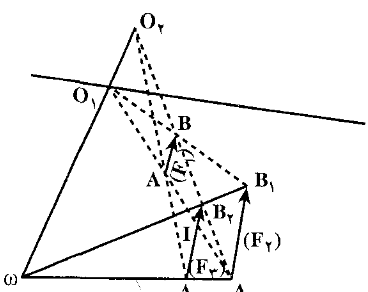
۳۹۱. حاصل جمع یک تجانس مستقیم و یک انتقال، یک تجانس است.

۳۹۲. استفاده از تجانس برای حل مسأله‌های ترسیمی در بخش کرانداری از صفحه مناسب است. در حل مسأله‌های ترسیمی معمولاً صفحه بی‌کران فرض می‌شود ؛ و در نتیجه مثلاً فرض می‌شود که هر خط را می‌توان از هر دو سو تا بینهایت امتداد داد. اما در عمل همیشه ترسیمها در ناحیهٔ کرانداری از صفحه، بر صفحهٔ کاغذ یا تخته سیاه انجام می‌شود، بنابراین در حین ترسیم ممکن است، نقطهٔ برخورد دو خط که در ترسیم وارد می‌شوند، خارج از محدودهٔ شکل واقع شود، یعنی قابل دسترس نباشد. این موارد موجب مطرح شدن مسأله‌هایی می‌شود که در آنها بخصوص ذکر می شود، ترسیم باید تماماً درون بخش کرانداری از صفحه صورت پذیرد. با استفاده از تجانس می‌توانیم این نکته مهم را ثابت کنیم که هر ترسیمی که در صفحهٔ بیکران قابل انجام است، در هر بخشی از صفحه، هر قدر هم کوچک باشد، نیز قابل انجام است.

ثابت کنید که به ازای هر توزیع مفروضی از نقطه‌ها، در یک جزء کراندار k از صفحه یا حتی خارج از آن به ازای هر مقداری از فاصله‌های داده شده، هر مسأله ترسیمی که در تمامی صفحه قابل حل باشد، بدون خروج از مرزهای k هم حل شدنی است [در این مورد، اگر یک نقطهٔ A که مفروض است یا باید از راه ترسیم پیدا شود، خارج از محدودهٔ k قرار گیرد، آن را به توسط دو خط واقع در محدوده که در A به هم می‌رسند، مشخص می‌کنیم؛ خط دور از دسترس به توسط دو نقطه‌اش مشخص می‌شود و دایرهٔ دور از دسترس توسط مرکز و یک نقطه‌اش یا مرکز و شعاعش مشخص می‌شود].

۳۹۳. در صفحه‌ای شکلی تغییر می‌کند به قسمی که همواره با شکل مفروض مستقیماً متشابه است. ثابت کنید اگر ضلعهای مثلث $A'B'C'$ از شکل متغیر از رأسهای مثلث مفروض ABC بگذرد، هر نقطه از شکل، یک دایره طی می‌کند و هر خط از شکل از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳۹۴. A، A' و B، B' دو جفت نقطهٔ متجانس از دو شکل متجانس F و F'، و M نقطه‌ای از شکل F است. از A' و B' دو خط بترتیب موازی AM و BM رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M' قطع کنند، ثابت کنید که M و M' دو نقطهٔ مجانس یکدیگر از دو شکل متجانس F و F' اند.



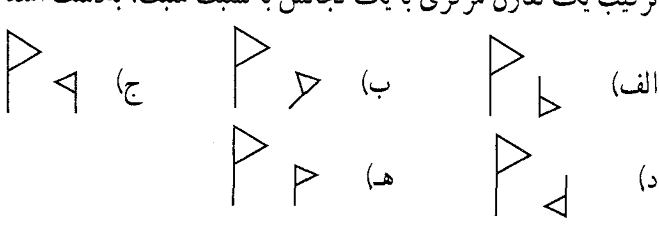
۳۹۵. اگر دو شکل (F_2) و (F_3) مجانسهای شکل (F_1) باشند، ثابت کنید:

۱. شکلهای (F_2) و (F_3) خود متجانسند.

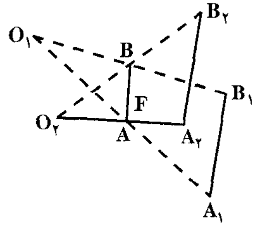
۲. سه مرکز تجانس بر یک استقامت است.

۳. نسبتهای تجانس در رابطهٔ زیر صدق می‌کند: $K_{(1,2)} \times K_{(2,3)} \times K_{(3,1)} = 1$

۳۹۶. در هر یک از پنج شکل زیر دو پرچم را می‌بینید که یکی از آنها کوچک شدهٔ دیگری به نسبت $\frac{1}{2}$ است، و به غیر از شکل «ب»، در شکلهای دیگر، میله‌های دو پرچم باهم موازی هستند. در کدام یک از این شکلها پرچم کوچک از روی پرچم بزرگ، از راه ترکیب یک تقارن مرکزی با یک تجانس با نسبت مثبت، به‌دست آمده است؟



۳۹۷. دو شکل متجانس با یک شکل و با نسبتهای مساوی مرکز تجانسهای مختلف دو شکل همنهشتند.



۳۹۸. در یک صفحه، بر اثر تجانس به نسبت مثبت و مخالف یک k، شکل مفروض A به شکل B، و بر اثر انتقال، شکل B به شکل C تبدیل می‌شود. شکل C را از روی شکل A بر اثر کدام تبدیل می‌توان به‌دست آورد؟

الف) یک انتقال ب) یک تقارن محوری
ج) یک تجانس با همان نسبت k د) یک تجانس با نسبتی غیر از k
هـ) یک تقارن مرکزی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳۹۹. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) هر تجانس به مرکز O، بر حسب نسبت خود طولها را چند برابر می‌کند.
ب) هر تجانس به مرکز O، بر حسب قدرمطلق نسبت خود طولها را چند برابر می‌کند.
ج) فقط یک تجانس به مرکز O وجود دارد که طولها را پایا نگاه می‌دارد.
د) دو تجانس به مرکز O وجود دارند که طولها را پایا نگاه می‌دارند.

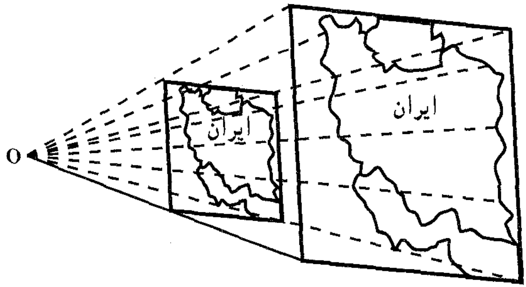
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

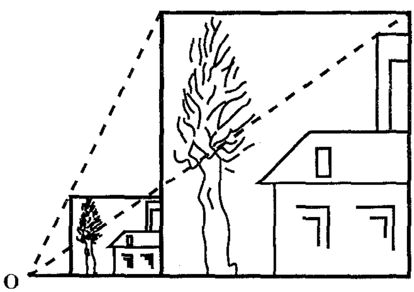
کاربردهایی عملی از تجانس

نمونهٔ ۱. شما همه با سینما آشنا هستید و تصویرهایی را که بر پرده می‌افتند، می‌شناسید. این تصویرها مجانسهای تصویرهای بسیار کوچکی هستند که روی فیلم چاپ شده‌اند. مرکز تجانس چراغ نورافکن و نسبت تجانس عددی است نسبتاً بزرگ، شاید ۱۰۰ یا ۲۰۰ یا ۱۰۰۰ و این عدد به فاصلهٔ پرده از دستگاه تصویراندازی بستگی دارد.

نمونهٔ ۲. عکس کوچکی را کنار بزرگ شدهٔ همان عکس بگذارید و با دقت به آنها نگاه کنید. آیا می‌دانید عکس بزرگ چگونه تهیه شده است؟ با ابزاری شبیه به دستگاه تصویرانداز

سینما، که در فن عکاسی آن را بزرگ کننده (آگراندیسور) می‌گویند، مجانس عکس را با نسبت معین تهیه می‌کنند (شکل).





نمونهٔ ۳. در ترسیم نقشه و تصویر برای کوچک کردن شکلها می‌توان از تجانس استفاده کرد. در این صورت نسبت تجانس را مقیاس نقشه می‌خوانند. فرض کنیم می‌خواهیم تصویری را سه بار کوچک کنیم. کافی است نقطه‌ای مانند O روی صفحهٔ شکل اختیار کنیم، (شکل) و آن را مرکز تجانس قرار دهیم و مجانسهای بعضی نقطه‌های اصلی و مشخص شکل را در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{1}{3}$ تعیین کنیم و آنها را به یکدیگر وصل نماییم.

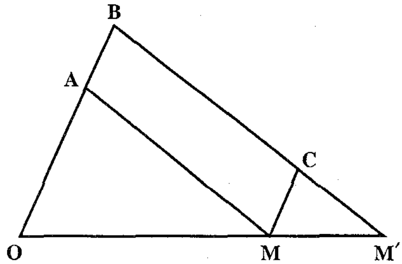
مجانس‌نگار. مجانس‌نگار یا پانتوگراف (Pantographe) وسیله‌ای است که برای رسم مجانسهای شکلها به‌کار می‌رود.

اصول ساختمان مجانس‌نگار بر ویژگیهای متوازی‌الاضلاع و مثلثهای متشابه بنیاد شده است. در شکل، متوازی‌الاضلاع ABCM را درنظر بگیرید. اگر نقطه‌های O، A، B، C، M و M′ چنان اختیار شده باشند که $\frac{OA}{AM}=\frac{OB}{BM'}$ باشد:

$$(\Delta OAM \sim \Delta OBM') \Rightarrow A\hat{O}M = B\hat{O}M'$$

بنابراین سه نقطهٔ O، M و M′ بر یک خط راست واقعند، از طرفی:

$$\frac{OM'}{OM}=\frac{BM'}{AM}=\frac{BM'}{BC}$$

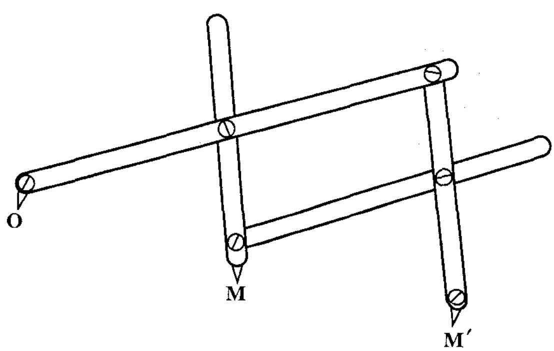


پس اگر نقطهٔ C را بر پاره‌خط BM' چنان اختیار کنیم که $\frac{BM'}{BC} = k$ باشد، در هرحال :

$\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ است، یعنی نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M در تجانس به مرکز O و نسبت معین k است. پس اگر نقطهٔ M بر یک شکل F تغییر مکان دهد، نقطهٔ M' مجانس آن شکل را به نسبت k رسم می‌کند.

در ساختمان پانتوگراف تیغه‌های فلزی یا پلاستیکی OA، BM'، AM و CM را چنان تعبیه می‌کنند که دو تیغهٔ کوچک در نقطه‌های A و C به دو تیغهٔ بزرگ مفصل می‌شوند و با پیچهایی در نقطه‌های معین از دو تیغهٔ اوّل محکم می‌شوند. در نقطهٔ O به این تیغه یک سوزن ثابت نصب است و در نقطهٔ M نیز سوزن متحرکی قرار دارد و در نقطهٔ M' جای قرار دادن مداد یا قلم تعبیه شده است.

برای ترسیم مجانس یک شکل با نسبت k، کافی است که دستگاه را چنان تنظیم کنیم که $AM = BC$ و $AB = CM$ باشد(تا ABCM متوازی‌الاضلاع باشد) و اندازه‌های پاره‌خطهای AB و BC چنان اختیار شوند که $\frac{OB}{OA} = k$ باشد، در این صورت وقتی سوزن Oی دستگاه را در نقطه‌ای از صفحهٔ شکل ثابت نگاه داریم و نقطهٔ M بر یک شکل F جابه‌جا شود، نوک مداد نصب شده در نقطهٔ M' مجانس آن شکل را با نسبت k رسم می‌کند (شکل).



نکته. تجانس در فضا نیز مانند تجانس در صفحه، تعریف می‌شود.

مجانس هر صفحه، صفحه‌ای است موازی با آن و بعکس، هر دو صفحهٔ متوازی به بینهایت شکل مجانس یکدیگرند.

مجانس هر دایره نسبت به نقطه‌ای که در صفحهٔ آن نباشد، دایره‌ای است در یک صفحه موازی صفحهٔ آن دایره و هر دو دایرهٔ واقع در دو صفحهٔ متوازی به دو طریق مجانس یکدیگرند.

مجانس هر کره، یک کره است، به عبارت دیگر مجانس کرهٔ $S_1(O_1, R_1)$ در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k، کرهٔ $S_2(O_2, R_2)$ است به قسمی که $\frac{\overline{OO_2}}{\overline{OO_1}} = k$ و $R_2 = |k|R_1$ است.

دو کره به دو طریق می‌توانند مجانس یکدیگر باشند و مرکزهای تجانس روی خط‌المرکزین دو کره قرار دارند.

۲.۵. تجانس در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۴۰۰. روی یک محور، سه نقطهٔ a، b و c بترتیب طولهای α، β و γ دارند. تجانس به مرکز a را درنظر می‌گیریم که b را به جای c ببرد. نسبت این تجانس برابر است با:

الف) $\frac{\alpha}{\beta}$ ب) $\frac{\beta}{\alpha}$

ج) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ د) $\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۴۰۱. در تجانس به مرکز O و نسبت k، نقطهٔ M′ مجانس نقطهٔ M می‌باشد. با همین مرکز و کدام نسبت تجانس، M مجانس M′ خواهد بود؟

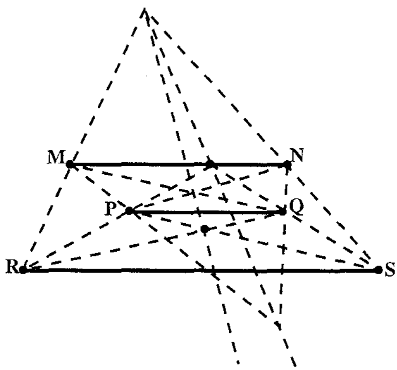
۱) $2k$ ۲) k ۳) $\frac{1}{k}$ ۴) $\frac{k}{2}$

کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی فیزیک، ایران، ۱۳۶۸

۵.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۵.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۰۲. سه پاره‌خط نامساوی MN ، PQ ، RS را به موازات هم رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقطهٔ برخورد MP و NQ ، MR و NS ، PR و QS روی یک خط و نقطه‌های تلاقی MQ و NP ، QR و PS ، MR و NS نیز روی یک خط دیگر قرار دارند (شکل).



۴۰۳. چند پاره‌خط مفروضند. این پاره‌خطها در یکی از نقطه‌های انتهایی مشترک بوده و نقطه‌های انتهایی دیگر آنها روی یک خط مستقیم قرار دارند. این پاره‌خطها را با نسبتهای یکسانی تقسیم می‌کنیم. ثابت کنید که نقطه‌های تقسیم آنها روی یک خط قرار دارند.

۴۰۴. چهار خط که هیچ سه تای آنها از نقطهٔ مشترکی نمی‌گذرند و هیچ دوتای آنها متوازی نیستند، در صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد ارتفاعهای چهار مثلث حاصل از این خطها، بر یک خط واقعند.

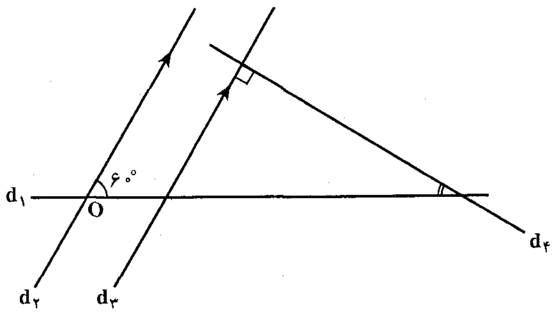
۵.۲.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۵.۲.۳.۱. خطها همرسند

۴۰۵. ثابت کنید مجانسهای خطهای همرس، نسبت به هر مرکز تجانس و هر نسبت تجانس مخالف صفر، در یک نقطه همرسند.

۴.۲.۵. زاویه

۱.۴.۲.۵. اندازهٔ زاویه



۴۰۶. در شکل $d_1 \cap d_2 = O$، $d_2 \| d_3$ و $d_4 \perp d_3$، $(\widehat{d_1, d_2}) = 60°$ است. اندازهٔ زاویهٔ بین مجانسهای دو خط d_1 و d_4 نسبت به مرکز تجانس O و با نسبت تجانس $k \neq 0$ چه‌قدر است؟

۵.۲.۵. پاره‌خط

۱.۵.۲.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۴۰۷. دو خط d و d' در نقطهٔ O با زاویهٔ $30°$ یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر نقطهٔ M روی خط d' به فاصلهٔ a از O باشد، آن‌گاه فاصلهٔ $S_dOS_{d'}(M)$ از O، کدام است؟

۱) a ۲) $a\sqrt{2}$ ۳) $a\sqrt{3}$ ۴) $2a$

کنکور سراسری رشتهٔ ریاضی‌فیزیک، ۱۳۶۵

۲.۵.۲.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

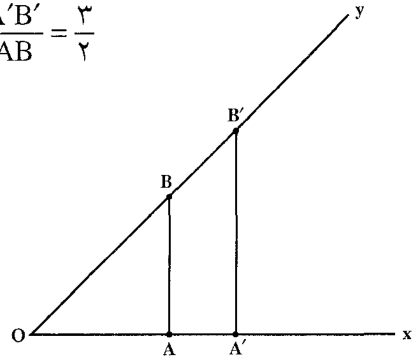
۴۰۸. دایره‌ای بر ضلعهای زاویه‌ای به رأس O مماس است. قطری از دایره را درنظر می‌گیریم که از نقطهٔ تماس دایره با یکی از ضلعها گذشته باشد و دو انتهای آن را A و B می‌نامیم. مماس بر دایره در نقطهٔ B، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های C و D و خط راست OA را در نقطهٔ E قطع کرده است. ثابت کنید: $BC = DE$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۶.۲.۵. رابطه‌های متری

۴۰۹. زاویهٔ xOy داده شده است، روی Ox نقطه‌های A و A' و روی Oy نقطه‌های B و B' را چنان اختیار می‌کنیم که $۲OA' = ۳OA$ و $OB' = \frac{۳}{۲}OB$ باشد. ثابت کنید:

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{OB'}{OA'} \quad \text{و} \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{۳}{۲}$$



۷.۲.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۴۱۰. شکل زیر و همهٔ تجانسهایی را درنظر بگیرید که a را به b تبدیل می‌کنند.

$(x, y) \uparrow (a, b)$

در این تجانسها، مجموعهٔ نقطه‌هایی که x به آنها تبدیل می‌شود، عبارت است از:

الف) خطی که بر a و b می‌گذرد، بدون نقطهٔ y

ب) پاره خط $[ab]$ ج) تک نقطهٔ $\{x\}$ د) نیمخط $[xa]$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۸.۲.۵. رسم شکلها

۴۱۱. دو خط متقاطع xy و $x'y'$ و نقطهٔ غیر مشخص M (که روی هیچ‌یک از دو خط نیست) مفروضند. از M خطی چنان رسم کنید که اگر xy را در A و $x'y'$ را در B قطع کند، نسبت $\frac{MA}{MB}$ برابر ۳ و یا $\frac{۱}{۳}$ و یا به طور کلی $\frac{p}{q}$ باشد.

۴۱۲. دو خط l_1 و l_2 و نقطهٔ A مفروضند. بر A خطی مانند l بگذرانید که پاره‌خط BC که l_1 و l_2 بر l جدا می‌کنند، چنان باشد که $AB:AC=m:n$.

۹.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۱۳. نشان دهید که هر تجانس را می‌توان با مفروض بودن :
الف. مرکز تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر ؛
ب. نسبت تجانس و یک جفت از نقطه‌های متناظر ؛
ج. دو جفت از نقطه‌های متناظر ؛ تعیین کرد.

۴۱۴. روی پاره‌خط راستی، پاره‌خطهای راست کوچکتری وجود دارند، که پاره‌خط راست اصلی را پوشانده‌اند. از هرکدام از این پاره‌خطهای راست کوچکتر، نیمی از آن را، نیمهٔ چپ یا نیمهٔ راست، کنار گذاشته‌ایم. ثابت کنید، نیمه‌های باقی‌مانده، دست کم، یک سوم پاره‌خط راست اصلی را می‌پوشانند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۴۱۵. در صفحهٔ xOy دو نقطهٔ ثابت A و B مفروضند. خط متغیری از A می‌گذرد و Ox را در M و Oy را در N قطع می‌کند. از N خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا MB را در P قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ P را تعیین کنید.

۴۱۶. هرگاه A و B دو خط بدون نقطهٔ مشترک از صفحهٔ π باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟
الف) تبدیلهای σ که A و B را پایا نگاه می‌دارند، یعنی $\sigma(A)=A$ و $\sigma(B)=B$ ، نسبت به قانون ترکیب، گروه تشکیل می‌دهند.
ب) یک تجانس وجود دارد که A را به B و B را به A تبدیل می‌کند.
ج) تبدیلهایی به تعداد نامتناهی وجود دارند که A را به B تبدیل می‌کنند.
د) تبدیلهایی که A را به B تبدیل می‌کنند، نسبت به قانون ترکیب، گروه تشکیل می‌دهند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۱۰.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۷. دو قطعه خط AB و $A'B'$ مفروضند. روی AA' نقطه‌های α و α' و روی BB' نقطه‌های β و β' را به قسمی اختیار می‌کنیم که:

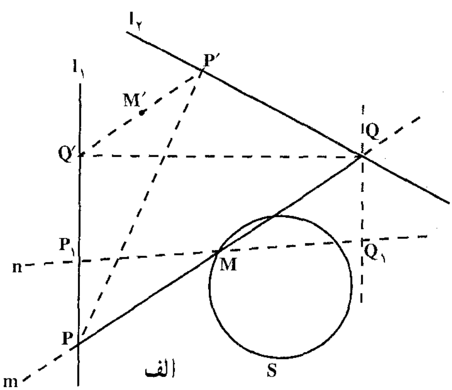
$$\frac{\overline{\alpha' A}}{\overline{\alpha' A'}}=\frac{\overline{\beta' B}}{\overline{\beta' B'}}=-\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\ ;\ \frac{\overline{\alpha A}}{\overline{\alpha A'}}=\frac{\overline{\beta B}}{\overline{\beta B'}}=-\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}\ ;$$

ثابت کنید:

۱. $\alpha\beta$ و $\alpha'\beta'$ موازی با نیمسازهای زاویه‌های خطهای AB و $A'B'$ می‌باشند.

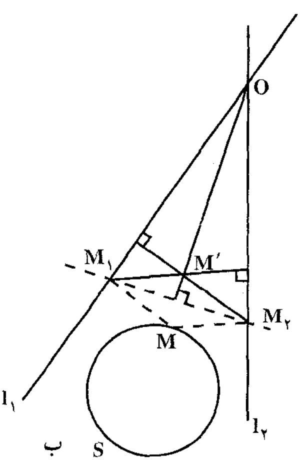
۲. خط Δ نقطهٔ برخورد $\alpha\beta$ و $\alpha'\beta'$ است. ثابت کنید، مثلثهای ΔAB و $\Delta A'B'$ معکوساً متشابه‌اند.

۴۱۸. دو خط l_1 و l_2 در صفحه مفروضند. به هر نقطهٔ M از صفحه، نقطهٔ جدید M' را به روش زیر نظیر می‌کنیم:



الف. از M خطی مانند m رسم می‌کنیم که خطهای l_1 و l_2 را بترتیب درنقطه‌های P و Q ببرد و نقطهٔ M وسط پاره‌خط PQ باشد. تصویر قائم P بر l_2 را P' و تصویر قائم Q بر l_1 را Q' و نقطهٔ M' را وسط $P'Q'$ می‌گیریم (شکل الف).

ب. نقطهٔ برخورد l_1 و l_2 را O، تصویرهای قائم M بر l_1 و l_2 را M_1 و M_2 و نقطهٔ برخورد ارتفاعها، یعنی مرکز ارتفاعی مثلث OM_1M_2 را M'، می‌نامیم (شکل ب).



اکنون فرض می‌کنیم که M یک دایرهٔ S را بپیماید؛ مکان هندسی نقطهٔ M' چه خواهد بود؟

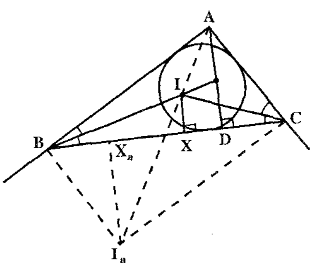
۳.۵. تجانس در: مثلث، مثلث و دایره

۱.۳.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۴۱۹. مثلث ABC و نقطهٔ X مفروض است. متوازی‌الاضلاع BXCY و سپس متوازی‌الاضلاع YXAZ را رسم کنید. ثابت کنید که تبدیل متجانس، نقطهٔ X را به نقطهٔ Z انتقال می‌دهد. نسبت و مرکز این تجانس را بیابید.

۴۲۰. مثلث مکمل و مثلث پادمکمل مثلث مفروضی متجانسند. مرکز و نسبت این تجانس را بیابید.

۴۲۱. اگر X_a نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC در مثلث ABC باشد، نشان دهید که X_a مرکز تشابه (تجانس) خارجی دایرهٔ محاطی داخلی و دایره‌ای است که ارتفاع AD قطر آن است.



۴۲۲. نشان دهید دوازده مرکز تشابه چهار دایرهٔ سه مماس یک مثلث که دو به دو درنظر گرفته شوند، عبارتند از:

الف. شش نقطهٔ برخورد ضلعهای مثلث با نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌های مقابل این ضلعها؛

ب. رأسهای مثلث مفروض که هرکدام دوبار به حساب می‌آیند.

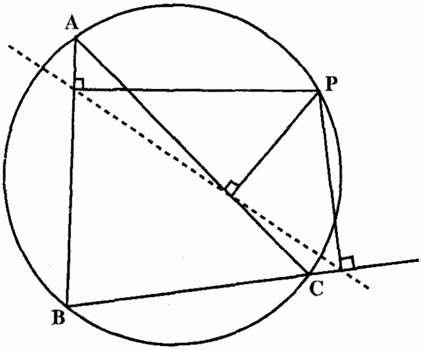
۲.۳.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۵. نقطه‌ها همخطند

۴۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید k خطی موازی با BC باشد که ضلعهای AC و AB را بترتیب در نقطه‌های K و L قطع کرده است. فرض کنید m خطی موازی با CA باشد که ضلعهای BA و BC را در نقطه‌های M و N قطع کرده است؛ همچنین p را

خطی موازی با AB بگیرید که ضلعهای CB و CA را در نقطه‌های P و Q قطع کند. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد AB و KN، BC و MQ، و همچنین CA و PL در صورتی که همه موجود باشند، بر یک خط قرار دارند.

۴۲۴. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای این که پای عمودهای وارد از یک نقطهٔ P بر ضلعهای مثلث ABC همه بر یک خط واقع باشند (خط سیمسون، شکل) این است که نقطهٔ P بر دایرهٔ محیطی ΔABC واقع باشد.



۴۲۵. ثابت کنید که مرکز ثقل مثلث، نقطهٔ برخورد ارتفاعها و مرکز دایرهٔ محیطی آن، بر یک خط مستقیم (خط اویلر) قرار دارند.

۴۲۶. ثابت کنید در هر مثلث قرینه‌های هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث نسبت به ضلعها و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث بر یک خط واقعند.

۴۲۷. ثابت کنید که وسط یکی از ارتفاعهای یک مثلث و نقطهٔ تماس ضلع مقابل به آن با دایرهٔ محاطی خارجی نظیرش و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، سه نقطهٔ واقع بریک استقامتند.

۴۲۸. سه دایرهٔ مساوی درنقطهٔ O مشترکند و داخل یک مثلث مفروض قرار دارند. هر دایره به یک زوج ضلع مثلث مماس است. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و نقطهٔ O بر یک استقامت واقعند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۷

۴۲۹. ضلع BC از مثلث ABC، بر دایرهٔ محاطی آن، در نقطهٔ D مماس است. ثابت کنید، مرکز دایره بر خط راستی قرار دارد که از وسط پاره‌خطهای راست BC و AD می‌گذرد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۷

۲.۲.۳.۵. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۳۰. در هر مثلث وسطهای ضلعها و پای ارتفاعها و وسطهای پاره‌خطهایی که نقطهٔ برخورد ارتفاعها را به سه رأس وصل می‌کنند، روی یک دایره واقعند (دایرهٔ نه نقطه یا دایرهٔ اولر).

۳.۳.۵. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۵. خطها همرسند

۴۳۱. تصویر نقطهٔ P بر ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC را بترتیب، A' ، B' و C' می‌نامیم. A'' ، B'' و C'' بترتیب نقطه‌های وسط پاره‌خطهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ هستند. از A'' ، B'' و C'' عمودهایی بر ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC رسم می‌کنیم. نشان دهید که این عمودها همرسند.

۴۳۲. ثابت کنید خطهای اولر سه مثلث AEF ، BED و CFD (E، F و D پای ارتفاعهای مثلث ABCاند) روی دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC متقاطعند (خط اولر خطی است که از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و مرکز ثقل آن و محل برخورد ارتفاعهای آن می‌گذرد).

۴۳۳. مثلث ABC و نقطهٔ P داده شده است؛ از D، E و F وسطهای ضلعهای BC، CA و AB، سه خط موازی با AP، BP و CP رسم می‌کنیم؛ ثابت کنید که این سه خط همرسند.

۴۳۴. مثلث غیر متساوی‌الساقین $A_1A_2A_3$ با ضلعهای a_1 ، a_2 و a_3 (a_i ضلع مقابل A_i است) مفروض می‌باشد. به ازای جمیع مقادیر : $i = 1, 2, 3$ ، نقطهٔ M_i وسط ضلع a_i و T_i نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با ضلع a_i است. قرینهٔ T_i نسبت به نیمساز داخلی زاویهٔ A_i را با S_i نمایش می‌دهیم. ثابت کنید خطهای M_1S_1 ، M_2S_2 و M_3S_3 همرسند.

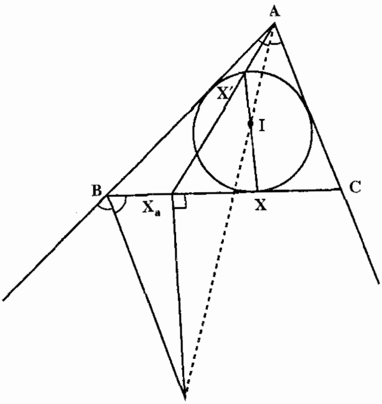
۲.۳.۳.۵. خطها موازی‌اند

۴۳۵. هرگاه دو مثلث مرکز همسانی داشته باشند و دو جفت از ضلعهای متناظر آنها با هم موازی باشند، یک جفت ضلعهای دیگر آنها نیز باهم موازی‌اند (در این حالت، دو مثلث متجانس نامیده می‌شوند).

۴۳۶. B_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) را قرینهٔ رأس A_i از مثلث غیر متساوی‌الساقین $A_1A_2A_3$ نسبت به نیمسازی که از رأس A_j گذشته است، فرض می‌کنیم. ثابت کنید، خطهای راست $B_{12}B_{21}$ ، $B_{13}B_{31}$ و $B_{23}B_{32}$ موازی‌اند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۲

۳.۳.۳.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۴۳۷. ضلع BC از مثلث ABC در X بر دایرهٔ محاطی داخلی (I) و در X_a بر دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به BC، یعنی (I_a) مماس است. نشان دهید خط AX_a از روبه‌روی قطری X در دایرهٔ (I)، که آن را X′ می‌نامیم، می‌گذرد. گزارهٔ مشابهی را در مورد روبه‌روی قطری X_a در (I_a) بیان کنید.

۴.۳.۵. زاویه

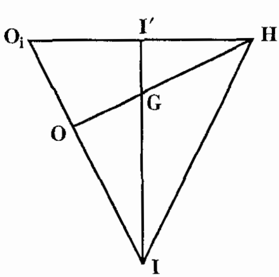
۱.۴.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۴۳۸. مثلث ABC، با ضلعهای برابر، مفروض است. خط راستی موازی با ضلع AC، خطهای راست AB و BC را بترتیب، در نقطه‌های M و P قطع کرده است. نقطهٔ D را مرکز مثلث PMB و نقطهٔ E را وسط پاره‌خط AP می‌گیریم. زاویه‌های مثلث DEC را پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۰

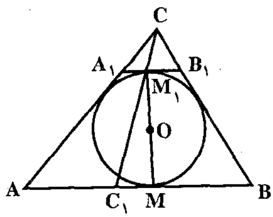
۵.۳.۵. پاره‌خط

۱.۵.۳.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۴۳۹. قطعه خطی که محل تلاقی ارتفاعهای یک مثلث را به مرکز دایرهٔ محیطی مثلثی که توسط مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی آن مثلث ساخته می‌شود، وصل می‌کند، توسط نیمساز داخلی مثلثی که رأسهایش پای ارتفاعهای آن مثلثند، نصف می‌شود.

۶.۳.۵. رابطه‌های متری

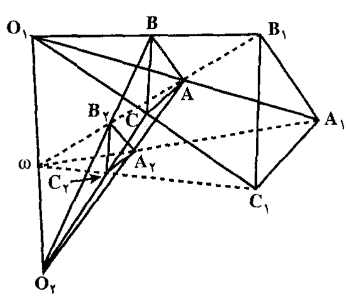


۴۴۰. در مثلث ABC دایره‌ای محاط شده است که بر ضلع AB در نقطهٔ M مماس است. نقطهٔ M_1 را انتهای قطری از این دایره در نظر می‌گیریم که انتهای دیگر آن بر نقطهٔ M منطبق است. ثابت کنید خط CM_1 خط AB را در نقطهٔ C_1 قطع می‌کند، به طوری که $AC + AC_1 = BC + BC_1$ را داریم (شکل).

۴۴۱. فرض کنید ABC مثلث متساوی‌الساقینی باشد که در آن $AC = BC > AB$. نقطهٔ M در کجای صفحهٔ مثلث باشد تا مجموع فاصله‌های M تا A و M تا B، منهای فاصلهٔ M تا C، یعنی کمیت $MA + MB - MC$ کمترین مقدار باشد؟

۴۴۲. مثلث $A'B'C'$ در داخل مثلث ABC قرار داشته و با آن متجانس می‌باشد. مثلث $\alpha\beta\gamma$ را در مثلث ABC چنان محاط می‌کنیم که ضلعهای آن از نقطه‌های A'، B' و C' بگذرند. اگر مساحت مثلثهای ABC، $A'B'C'$ و $\alpha\beta\gamma$ بترتیب S، S' و K فرض شود، ثابت کنید که: $K^2 = SS'$

۷.۳.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند



۴۴۳. ثابت کنید که هرگاه برای یک مثلث ABC دو مجانس نسبت به دو مرکز تجانس O_1 و O_2 با دو نسبت k و k_1 به دست آوریم دو شکل جدید، خود مجانس یکدیگرند و اگر مرکز تجانس آنها را (ω) بنامیم: O_1، O_2 و ω بر یک استقامتند.

۴۴۴. L، L' و M، M' را دو جفت نقطهٔ همنوا روی دو ضلع AC و AB از مثلث ABC در نظر بگیرید. L'' و M'' نقطه‌های برخورد خطهای BL و CM با ضلعهای $A'C'$ و $A'B'$ از $A'B'C'$، مثلث مکمل مثلث ABC، هستند. نشان دهید که مثلثهای $AL'M'$ و $A'L''M''$ دارای تجانس معکوس هستند. در شکل حاصل دیگر مثلثهای متجانس را نیز بیابید.

۴۴۵. نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB از یک مثلث ABC واقعند به طوری که $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AC_1}{C_1B}=k$ بعلاوه نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 بترتیب بر ضلعهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ واقعند، به طوری که $\frac{C_1A_2}{A_2B_1}=\frac{A_1B_2}{B_2C_1}=\frac{B_1C_2}{C_2A_1}=k$. نشان دهید که مثلث ABC با مثلث $A_2B_2C_2$ متشابه است.

۴۴۶. مرکزهای ثقل چهار مثلث گروه (HABC) چهار مثلث با خواص چهار مثلث اصلی می‌سازند.

۴۴۷. متقارنهای نقطه‌های برخورد میانه‌ها با دایرهٔ محیطی نسبت به ضلعهای متناظرشان رأسهای یک مثلث هستند. نشان دهید که این مثلث با مثلث دوم بروکار مثلث مفروض متجانس است.

۴۴۸. نشان دهید که خطهای سیمسون سه نقطهٔ برخورد امتداد ارتفاعهای یک مثلث با دایرهٔ محیطی مثلثی متجانس با مثلث پادک می‌سازند و مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث بر مرکز ارتفاعی مثلث پادک منطبق است.

۴۴۹. مثلث ABC داده شده است. فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 نقطه‌هایی از دایرهٔ محیطی مثلث ABC و بترتیب، مقابل قطری رأسهای A، B و C باشند. از A_1 ، B_1 و C_1 ، خطهای راستی، بترتیب، موازی با BC، CA و AB رسم می‌شوند. ثابت کنید، مثلثی که با این خطها تشکیل شده، با مثلث ABC، به نسبت تجانس ۲ و مرکز محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، متجانس است.

۴۵۰. اگر A' ، B' و C' بترتیب، وسط ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC باشند، نشان دهید که مرکزهای دایره‌های نه نقطهٔ مثلثهای $AB'C'$ ، $BC'A'$ و $CA'B'$ مثلثی متجانس با ABC، با نسبت تجانس ۲ :۱ را تشکیل می‌دهند ؛ ویژگیهای دیگر این شکل را بیابید.

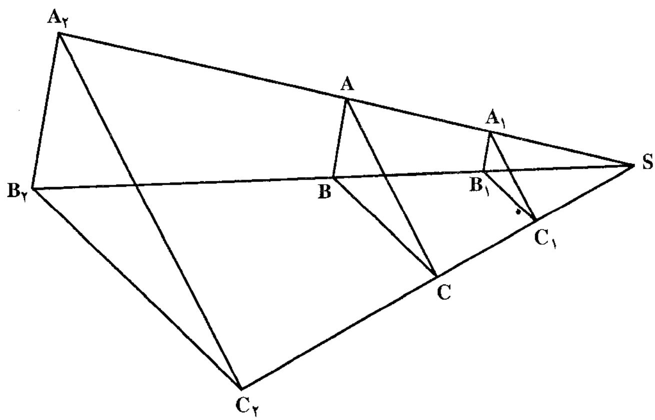
۴۵۱. نشان دهید که اگر دو مثلث متجانس باشند، مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی و ... نقطه‌های متناظر، و ارتفاعها، میانه‌ها و ... خطهای متناظر در شکلهای متجانس هستند.

۴۵۲. مثلثی که رأسهایش وسطهای ضلعهای یک مثلثند و مثلثی که ضلعهایش از خطهایی که از رأسهای یک مثلث موازی ضلع روبه‌روی آن رسم شده‌اند، تشکیل شده است، مجانس یکدیگرند.

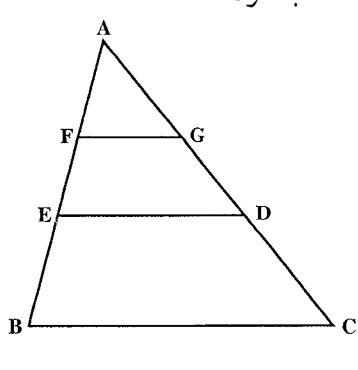
۸.۳.۵. رسم شکلها

۴۵۳. در صفحهٔ مثلث مفروض ABC نقطه‌ای مانند M بیابید که کمیت $a.MA+b.MB+c.MC$ که در آن a، b و c عددهای مثبت معلومی هستند، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در این مسأله می‌توان برخی از عددهای a، b و c را منفی اختیار کرد؛ اما در این صورت برای حل باید حالتهای متمایز متعددی را در نظر گرفت.

۴۵۴. مجانسهای مستقیم و معکوس یک مثلث را به مرکز یکی از رأسها و با نسبتهای ۱، $\frac{۱}{۲}$ و ۲ پیدا کنید.



۴۵۵. خط DE را به موازات قاعدهٔ BC از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا ذوزنقهٔ BCDE حاصل شود. در مثلث ADE خط FG را به موازات DE طوری رسم کنید که ذوزنقهٔ DEFG با ذوزنقهٔ BCDE متشابه شود.



۴۵۶. خطی رسم کنید تا ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را در نقطه‌های D و E قطع کند و داشته باشیم : $BD = DE = EC$.

۴۵۷. الف. در مثلث مفروض ABC مربعی محاط کنید که دو رأس آن بر قاعدهٔ AB و دو رأس دیگرش بر ضلعهای AC و BC قرار گیرند.

ب. در مثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنید که ضلعهایش با سه خط مفروض l_1 ، l_2 و l_3 موازی باشند (منظور از «محاط» بودن یک چند ضلعی در چندضلعی مفروض این است که همهٔ رأسهای چند ضلعی بر ضلعهای چند ضلعی مفروض (با حداقل یک رأس بر هر ضلع) یا بر امتداد آنها قرار گیرند).

۴۵۸. **تعریف.** مستطیل یا مربعی را که یک ضلع آن بر یکی از ضلعهای مثلثی منطبق باشد و دو رأس دیگرش بر دو ضلع دیگر مثلث واقع باشند، محاط در مثلث می‌گوییم. در حقیقت چهار رأس هر چهارضلعی محاط در یک مثلث بر ضلعهای مثلث واقع هستند و اما در هر حال دو رأس آن بر یک ضلع واقع خواهند بود.

در مثلث مفروض مستطیلی محاط کنید که اندازهٔ یک ضلع آن دو برابر اندازهٔ ضلع دیگرش باشد.

۴۵۹. در صفحهٔ یک مثلث دو امتداد طوری مشخص کنید که سه جفت خطی که موازی این دو امتداد از رأسهای مثلث رسم می‌شوند، ضلعهای مقابل را در شش نقطهٔ واقع بر یک دایره قطع کنند.

۹.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۰. مثلث ABC به قاعدهٔ ثابت BC در دایرهٔ ثابتی محاط است. ثابت کنید، دایرهٔ نه نقطهٔ این مثلث بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۴۶۱. نقطهٔ S مرکز تجانس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ است و A'' ، B'' و C'' نقطه‌های متقارن A' ، B' و C' نسبت به عمودمنصفهای BC، CA و AB هستند. خطهای AA'' ، BB'' و CC'' خطهایی را که از S به موازات BC، CA و AB رسم می‌شوند، بترتیب در A_1 ، B_1 و C_1 قطع می‌کنند. نشان دهید دایرهٔ $A_1B_1C_1$ از S می‌گذرد و مرکز آن روی خط اویلر مثلث ABC قرار دارد.

۴۶۲. شعاع دایرهٔ نه نقطه در هر مثلث برابر است با نصف شعاع دایرهٔ محیطی آن مثلث و مرکز آن روی خط اویلر و وسط OH قرار دارد.

۴۶۳. نشان دهید دایره‌ای که قطر آن نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث مفروضی است، دایرهٔ تشابه، دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی متناظر با آن نیمساز مثلث است. دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث را بیابید.

۴۶۴. دایرهٔ نه نقطهٔ مثلثهای گروه HABC، متحدالمرکز با دایرهٔ نه نقطهٔ مثلثهای گروه $GG_aG_bG_c$ است.

۴۶۵. مثلث ABC و دایرهٔ S، روی صفحه داده شده‌اند. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث برابر R و شعاع دایرهٔ مفروض برابر $\frac{1}{2}R$ است. ثابت کنید، نقطهٔ T وجود دارد به نحوی که پاره‌خطهای راست TA، TB و TC، محیط دایرهٔ S را نصف می‌کنند.

۴۶۶. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متساوی‌الساقینی را که یک ساق ثابت دارد، معین کنید.

۴۶۷. دو دایره در نقطهٔ A مماسند، از نقطهٔ M واقع بر یکی مماسی بر همین دایره رسم می‌کنیم تا دایرهٔ دیگر را در B و C قطع کند. ثابت کنید AM یکی از نیمسازهای زاویهٔ BAC است.

۴۶۸. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در I و دایرهٔ محیطی را در D قطع می‌کند، اگر مثلث طوری تغییر کند که نقطه‌های A، I و D ثابت بمانند، مکان مرکز ثقل مثلث را پیدا کنید.

۱۰.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۶۹. الف. P نقطهٔ دلخواهی است از صفحه و K، L و M بترتیب قرینه‌های آن نسبت به نقطه‌های D، E و F، وسطهای ضلعهای AB، BC و CA از مثلث مفروض ABC، هستند. ثابت کنید، پاره‌خطهای CK، AL و BM در نقطهٔ مشترک Q یکدیگر را قطع می‌کنند که وسط هریک از آنهاست.

ب. فرض کنید نقطهٔ P در قسمت (الف) بر دایرهٔ S حرکت کند، در این صورت مکان نقطهٔ Q چه خواهد بود؟

۴۷۰. فرض می‌کنیم M، N و P بترتیب سه نقطهٔ واقع بر AB، BC و CA از مثلث ABC (یا واقع بر امتدادهای آنها) باشند. ثابت کنید که:

الف. سه نقطهٔ M، N و P همخطند، اگر و تنها اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

(قضیهٔ منلائوس)

ب. سه خط CM، AN و BP همرس (متقارب) یا متوازی هستند، اگر و تنها اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$ (قضیهٔ سوا)

توجه کنید که دو قضیه باید ثابت شود:

۱. اگر M، N و P روی یک خط باشند، آن گاه:

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$ (شرط لازم)

۲. اگر

$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=1$$

آن‌گاه نقطه‌های M، N و P بر یک خط قرار می‌گیرند (شرط کافی).

۴۷۱. فرض می‌کنیم M، K و L سه نقطه بر ضلعهای AB، BC و AC از مثلث ABC باشند. ثابت کنید که:

الف. S_1، S_2 و S_3 دایره‌های محیطی بر مثلثهای LMA، MKB و KLC، در یک نقطه متقاطعند.

ب. مثلث حاصل از وصل کردن مرکزهای دایره‌های S_1، S_2 و S_3 با مثلث ABC متشابه است.

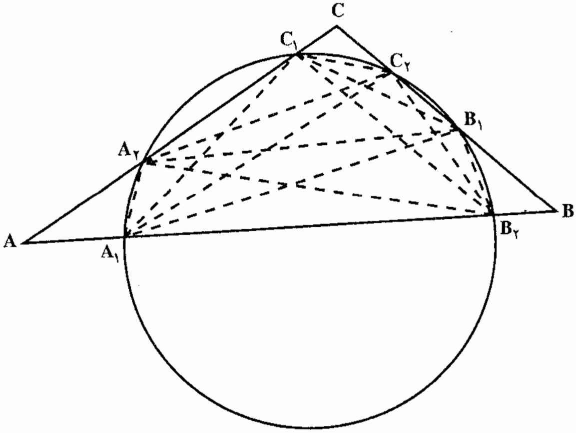
۴۷۲. ارتفاعهای AHD، BHE و CHF از مثلث ABC از آن طرف نقطه‌های D، E و F بترتیب به اندازهٔ طولهای AH، BH و CH امتداد داده شده‌اند تا سه نقطهٔ P، Q و R به دست آمده است. خطهایی که از نقطه‌های P، Q و R موازی ضلعهای BC، CA و AB رسم می‌شوند، مثلث $A_1B_1C_1$ را می‌سازند. ثابت کنید:

الف. H محل برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ است.

ب. مرکز تجانس مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مرکز دایرهٔ محیطی هر یک از دو مثلث است.

۴۷۳. فرض کنید $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ دو مثلث محاط در یک مثلث ABC و متشابه با آن باشند (ترتیب رأسها، ترتیب ضلعهای متناظر را نشان می‌دهد)، و چنان باشند که نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 بترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC و نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بترتیب بر ضلعهای CA، AB و BC از این مثلث قرار گیرند. بعلاوه، فرض کنید که ضلعهای A_1B_1 و A_2B_2 از مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با ضلع AB از مثلث ABC زاویه‌های متساوی بسازند (شکل). ثابت کنید که:

الف. مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با هم قابل انطباقند.

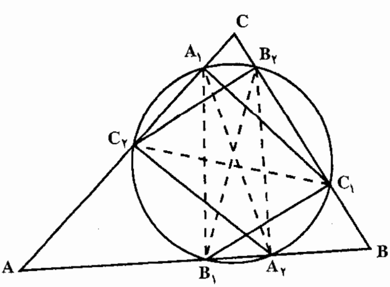


ب. خطهای B_2C_1 ، C_2A_1 و A_2B_1 با ضلعهای BC، CA و AB موازی هستند و خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 با این ضلعها پاد موازی.

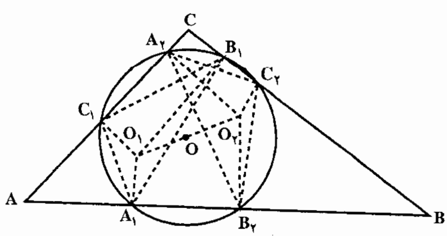
ج. شش نقطهٔ A_1 ، B_1 ، C_1 ، A_2 ، B_2 و C_2 بر یک دایره واقعند.

۴۷۴. الف. فرض کنید A_1 ، B_1 ، C_1 ، A_2 ، B_2 و C_2 تصویرهای اوّلین و دومین مرکز دوران مثلث ABC بر ضلعهای مثلث باشند. ثابت کنید که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ هر دو با مثلث ABC متشابه و با یکدیگر قابل انطباقند و شش نقطهٔ A_1 ، B_1 ، C_1 ، A_2 ، B_2 و C_2 بر دایره‌ای واقعند که مرکزش وسط پاره‌خط واصل بین اوّلین و دومین مرکز دوران مثلث ABC است (شکل الف).

ب. ثابت کنید که در مثلث مفروض ABC می‌توان دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ محاط کرد به طوری که ضلعهای این مثلثها بر ضلعهای مثلث ABC عمود باشند ؛ بعلاوه این دو مثلث با یکدیگر قابل انطباقند و سه پاره‌خط واصل بین رأسهای متناظر این دو مثلث با یکدیگر برابرند و در نقطهٔ مشترکی که وسط هریک از آنهاست یکدیگر را قطع می‌کنند (شکل ب).

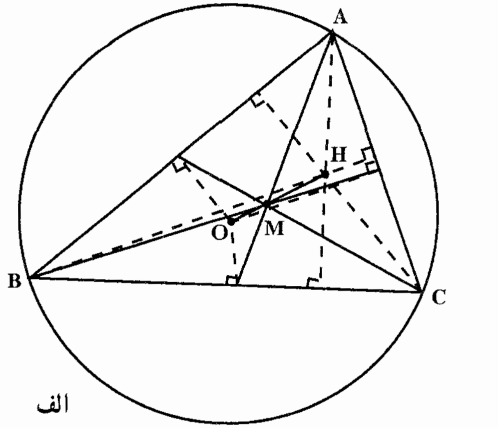


ب



الف

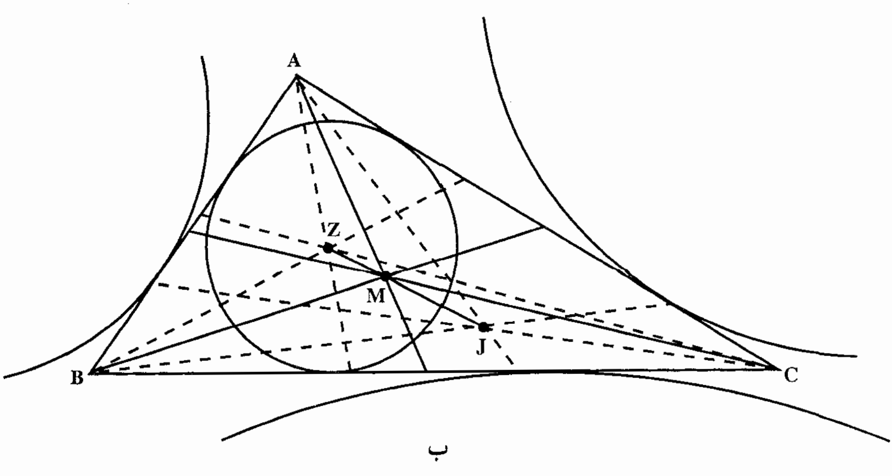
۴۷۵. الف. ثابت کنید که M نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC، O مرکز دایرهٔ محیطی، و H نقطهٔ برخورد ارتفاعها بر یک خط واقعند و داریم: $HM / MO = ۲/۱$ (شکل الف).



الف

ب. ثابت کنید، سه خطی که از نقطه‌های وسط ضلعهای یک مثلث و موازی با نیمسازهای زاویه‌های روبه‌رو رسم می‌شوند، در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

ج. ثابت کنید که خطهای واصل از رأسهای مثلث ABC به نقطه‌های تماس ضلع مقابل به هر رأس با دایرهٔ محاطی بیرونی نظیر به آن ضلع، در یک نقطهٔ واحد J یکدیگر را قطع می‌کنند. این نقطه با نقطهٔ M محل برخورد میانه‌ها و Z مرکز دایرهٔ محاطی بر یک راستاست و داریم: $JM / MZ = ۲/۱$ (شکل ب).

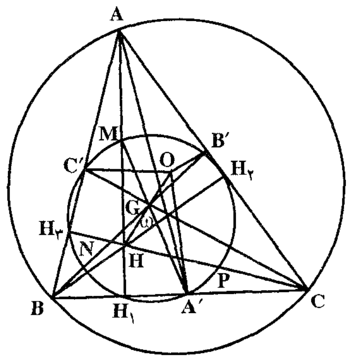


ب

۴۷۶. ۱. در هر مثلث وسطهای ضلعها و پای سه ارتفاع و وسطهای قطعه‌های محدود به رأسها و نقطهٔ برخورد سه ارتفاع، نه نقطه هستند واقع بر محیط یک دایره (دایرهٔ نه نقطه یا دایرهٔ اویلر).

۲. مرکز دایرهٔ اویلر بر خط اویلر واقع است و نسبت تجانس دایرهٔ اویلر و دایرهٔ محیطی مثلث $k = -\frac{1}{2}$ است.

۳. مرکز دایرهٔ اویلر و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و محل تلاقی میانه‌ها و ارتفاعهای مثلث تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.



۴۷۷. الف. نشان دهید خطهایی که از وسط ضلعهای مثلث (T) مماس بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث رسم می‌شوند، مثلثی متجانس با مثلث پادک مثلث (T) می‌سازند.

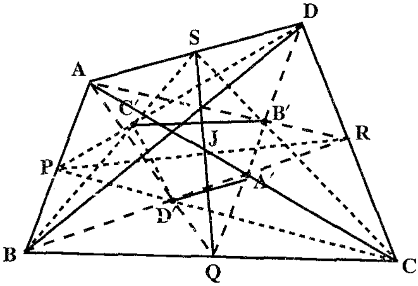
ب. نشان دهید که مرکز تجانس این دو مثلث روی خط اویلر مثلث (T) قرار دارد.

۴۷۸. M نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ مثلث ABC است. MA، MB و MC دایرهٔ محیطی را در A' ، B' و C' قطع می‌کنند و D، E و F تصویرهای M روی BC، CA و AB هستند. نشان دهید که مثلثهای $A'B'C'$ و DEF متشابه مستقیم هستند و M در $A'B'C'$ با مزدوج همزاویهٔ M در DEF متناظر است. با استفاده از این مطلب نشان دهید که مثلثهای هم میانهٔ متقارنی وجود دارند که ضلعهای هرکدام با میانه‌های دیگر متناسبند.

۴۷۹. نشان دهید که مرکزهای دایره‌های محیطی و مرکزهای ثقل یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، دو گروه نقطه‌های مرکز ارتفاعی هستند که مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ یکسانی دارند، این نقطه مرکز تجانس دو گروه و نسبت تجانس ۳ است.

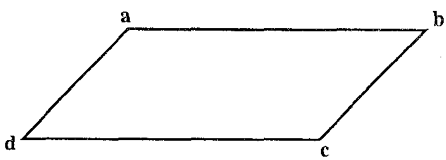
۴.۵. تجانس در چند ضلعیها

۱.۴.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس



۴۸۰. مرکز تجانس دو چهارضلعی متجانس ABCD و A′B′C′D′ که A′، B′، C′ و D′ بترتیب مرکزهای ثقل مثلثهای BCD، ADC، ABD و ABC می‌باشند، بر نقطهٔ J منطبق است (J نقطهٔ برخورد خطهایی است که وسطهای ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی ABCD را به هم وصل می‌کنند).

۴۸۱. در شکل زیر تجانسی انجام می‌گیرد که a را روی c و b را روی d تصویر می‌کند. نسبت این تجانس برابر است با:



الف) ۱−　　ب) ۰

ج) ۱　　د) ۲

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۴۸۲. رأسهای یک چهارضلعی را سه به سه برمی‌گزینیم و هر بار مرکز ثقل مثلثی را که این سه رأس مشخص می‌سازند، تعیین می‌کنیم. چهار مرکز ثقل به دست آمده، رأسهای یک چهارضلعی متجانس با چهارضلعی مفروض هستند. مرکز و نسبت این تجانس را بیابید.

۴۸۳. در صفحهٔ π دو مستطیل، یکی R با بعدهای ۹ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر، دیگری S با بعدهای ۶ سانتیمتر و ۱۰ سانتیمتر، داده شده است. در این صورت، از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) وضع نسبی دو مستطیل R و S به هرگونه که باشد، تجانسی در π وجود دارد که R را روی S تصویر می‌کند.

ب) هرگاه یک ضلع R با یک ضلع S موازی باشد، آن گاه تجانسی در π وجود خواهد داشت که R را روی S تصویر کند.

ج) وضع نسبی دو مستطیل R و S به هرگونه که باشد، در π تجانسی وجود ندارد که R را روی S تصویر کند.

د) هرگاه ضلع ۹ سانتیمتری از R با ضلع ۶ سانتیمتری از S موازی باشد، آن گاه در π تجانسی هست که R را روی S تصویر کند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۵.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

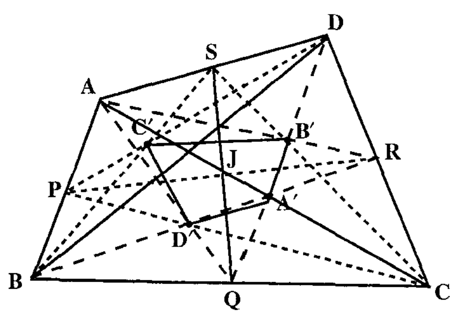
۵.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۸۴. ثابت کنید که در هر ذوزنقه خط واصل بین نقطه‌های وسط دو قاعده از نقطهٔ برخورد امتداد دو ساق و همچنین از محل برخورد قطرها می‌گذرد.

۵.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۵.۴.۳.۱. خطها همرسند

۴۸۵. در هر چهارضلعی چهار خطی که هر رأس را به مرکز ثقل مثلثی که از سه رأس دیگر به وجود می‌آید وصل می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

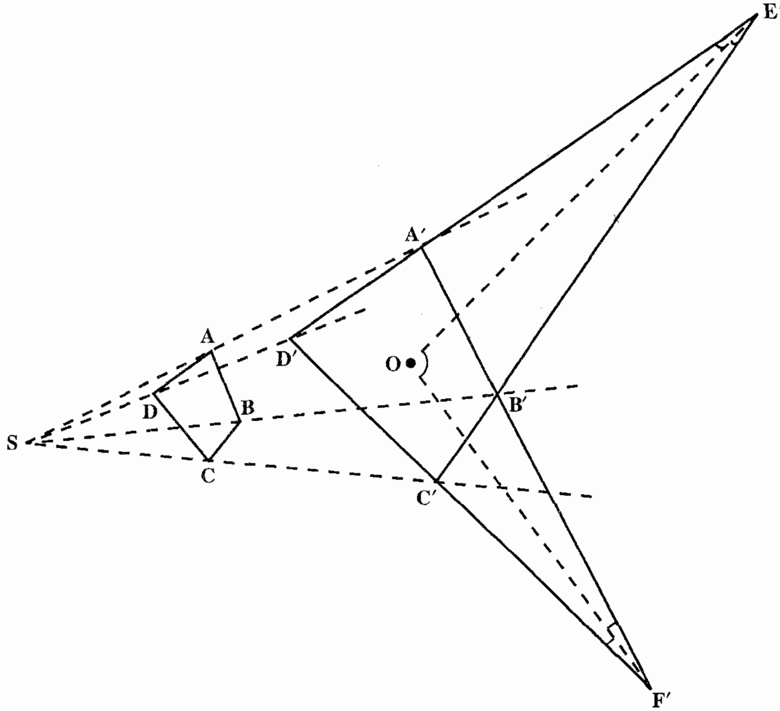


۵.۴.۴. زاویه

۵.۴.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۴۸۶. مجانس چهارضلعی محاطی ABCD را در تجانسی به مرکز S و نسبت k، چهارضلعی

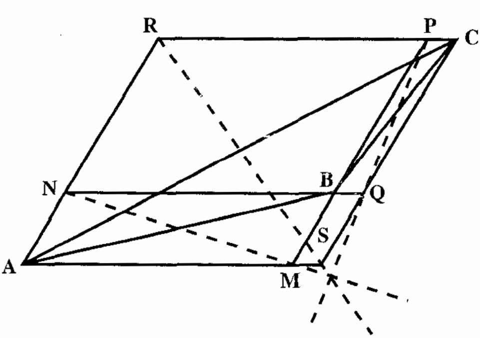
$A'B'C'D'$ می‌نامیم. ضلعهای روبه‌روی این چهارضلعی را E' و F' می‌نامیم. نیمسازهای دو زاویهٔ E' و F' را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کنند. اندازهٔ زاویهٔ $E'OF'$ را تعیین کنید.



۵.۴.۵. پاره‌خط

۱.۵.۴.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۸۷. نشان دهید که خط واصل بین وسطهای قطرهای یک چهارضلعی ABCD پاره‌خط واصل بین نقطه‌های تلاقی ضلعهای مقابل چهارضلعی را نصف می‌کند (شکل). (روشن است که برای متقاطع بودن ضلعهای مقابل لازم است که



چهارضلعی متوازی‌الاضلاع، یا ذوزنقه نباشد.)

صورت مسألهٔ بالا اغلب به گونهٔ دیگری بیان می‌شود. شکلی مسطح، تشکیل شده از چهار خط که هیچ سه تایی از آنها متقارب و هیچ دوتایی از آنها موازی نباشند، چهارضلعی کامل نامیده می‌شود. شش نقطهٔ تلاقی دو به دوی این چهار خط (ضلعهای چهارضلعی کامل) رأسها و خطهای واصل بین رأسهای مقابل (یعنی، بین رأسهای ناواقع بر یک ضلع)، قطرهای چهارضلعی نام دارند. با استفاده از این اصطلاحات می‌توانیم مسأله را چنین بیان کنیم : وسطهای قطرهای یک چهارضلعی کامل همخطند (قضیهٔ گاوس یا قضیهٔ چهارضلعی کامل).

۶.۴.۵. رابطه‌های متری

۴۸۸. مربعی به مساحت ۶ متر مربع مفروض است. تجانس h به نسبت ۳، این مربع را به مربعی تبدیل می‌کند که مساحت آن برحسب متر مربع برابر است با :

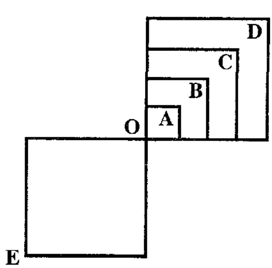
الف) ۲ ب) ۹ ج) ۱۸ د) ۵۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۷.۴.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۴۸۹. در شکل زیر هرگاه تجانس به مرکز O و به نسبت $\frac{1}{4}$ عمل شود،

الف) مربع D را به مربع A تبدیل می‌کند.
ب) مربع D را به مربع B تبدیل می‌کند.
ج) مربع A را به مربع D تبدیل می‌کند.
د) مربع E را به مربع A تبدیل می‌کند.



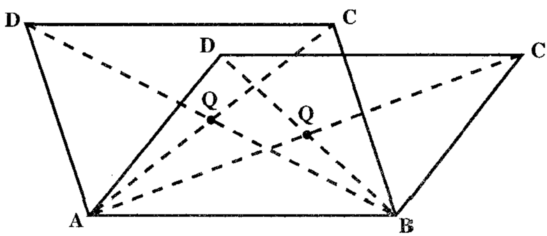
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۶

۴۹۰. مجانس یک متوازی‌الاضلاع چه شکلی خواهد داشت؟ مجانس یک مستطیل چه شکلی؟ مجانس یک مربع چه شکلی؟

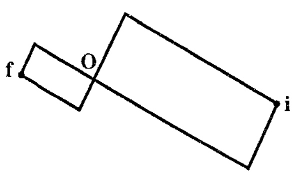
۸.۴.۵. رسم شکلها

۴۹۱. الف. در مثلث مفروض ABC مثلث PXY را که نقطهٔ Pی آن بر ضلع AB داده شده است، متشابه با مثلث مفروض LMN محاط کنید.
ب. در متوازی‌الاضلاع ABCD متوازی‌الاضلاعی متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض KLMN محاط کنید.

۹.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۹۲. «لولایی» به صورت متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. طولهای ضلعها و رأسهای A و B از آن ثابت هستند ولی رأسهای C و D متحرک (شکل). ثابت کنید که وقتی C و D حرکت کنند، Q نقطهٔ برخورد قطرها بر یک دایره حرکت می‌کند.



۴۹۳. در یک صفحه شش میله به گونه‌ای به هم وصل شده‌اند که مطابق شکل روبه‌رو، دو متوازی‌الاضلاع پدید آورده‌اند. رأس o که در هر دو مشترک است، ثابت می‌ماند، اما میله‌ها حول رأسها می‌توانند حرکت کنند و زاویه‌های متوازی‌الاضلاعها را تغییر دهند. در این تغییر شکل، سه نقطهٔ f، o و i همواره بر یک راستا هستند و اگر f روی شکلی مفروض حرکت کند، i شکلی پدید می‌آورد که مبدل شکل مفروض است. تبدیلی که با این ابزار انجام می‌گیرد، عبارت است از :

الف) یک انتقال	ب) یک تقارن مرکزی
ج) یک تقارن محوری	د) تجانس به نسبت مثبت
هـ) تجانس به نسبت منفی	

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۴۹۴. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) همهٔ مربعهای واقع در یک صفحه دو به دو مبدلهای اندازه نگهدار (= طولپای) یکدیگرند.

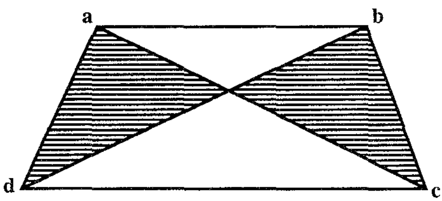
ب) همهٔ مربعهای واقع در یک صفحه چندضلعیهای منتظمند.

ج) در تجانس به نسبت مخالف یک، مجانس هر مربع یک مربع است.

د) دو مربع که در یک تبدیل اندازه نگهدار (= طولپای) مبدل هم باشند، ضلعهای برابر دارند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۴۹۵. ذوزنقهٔ abcd، شکل زیر، از هر نوع که باشد، دو مثلث هاشورخورده،



الف) مساحتهای برابر دارند.

ب) مجانس یکدیگرند.

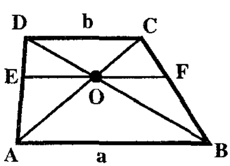
ج) هر کدام مبدل دیگری در یک دوران است.

د) هر کدام مبدل دیگری در یک تقارن مرکزی است.

هـ) هر کدام مبدل دیگری در یک تقارن محوری است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۴۹۶. در ذوزنقه ABCD ساقAD و اندازهٔ دو قاعدهٔ $AB = a$ و $CD = b$ ثابت است. محل برخورد قطرهای ذوزنقه و EOF موازی قاعده‌هاست (شکل). مکان هندسی نقطه‌های O و F را بیابید.



۱۰.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۹۷. الف. فرض کنید ABCD و MNPQ دو مربع باشند، ثابت کنید که اگر محیطهای این دو مربع در یک جهت پیموده شوند، آن گاه :

$$AM^2 + CP^2 = BN^2 + DQ^2$$

اگر به جای دو مربع، دو مستطیل متشابه بگذرانیم، آیا باز هم این نتیجه همچنان صادق خواهد بود؟ اگر شرط پیمایش محیطها در یک جهت خواسته نشود، چطور؟

ب. فرض کنید ABCDEF و MNPQRS دو شش ضلعی منتظم باشند. ثابت کنید که اگر محیطهای آنها در یک جهت پیموده شوند، آن گاه :

$$AM^2 + CP^2 + ER^2 = BN^2 + DQ^2 + FS^2$$

۴۹۸. الف. ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ دو مربع دلخواه هستند. فرض می‌کنیم که محیط دو مربع را در یک جهت می‌پیماییم، یعنی از A به B، سپس به C و بعد به D می‌رویم و از A' به B' سپس به C' و بعد به D' می‌رویم ؛ پس یا محیط هر دو مربع در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و یا هر دو در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. ثابت کنید که وسطهای پاره‌خطهای AA_1 ، BB_1 ، CC_1 و DD_1 نیز یا تشکیل مربع می‌دهند یا همه بر یکدیگر منطبقند.
اگر محیط دو مربع در جهتهای مخالف پیموده شوند، آیا باز هم نتیجهٔ بالا همچنان درست خواهد بود؟
ب. فرض می‌کنیم ABC و $A_1B_1C_1$ دو مثلث متساوی‌الاضلاع باشند. مثلثهای متساوی‌الاضلاعی به قاعده‌های AA_1 ، BB_1 و CC_1 رسم می‌کنیم و آنها را AA_1A^* ، BB_1B^* و CC_1C^* می‌نامیم. فرض می‌کنیم که محیط پنج مثلث ABC، $A_1B_1C_1$ ، AA_1A^* ، BB_1B^* و CC_1C^* همه در یک جهت (یا در جهت حرکت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن) پیموده شوند. ثابت کنید که سه نقطهٔ A^* ، B^* و C^* یا رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند یا هر سه بر هم منطبقند.
اگر شرط پیمایش در یک جهت ذکر نشود، آیا باز هم نتیجهٔ بالا همچنان درست خواهد بود؟

۴۹۹. فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقه‌ای باشد که نقطهٔ M محل برخورد امتدادهای ساقهای AD و BCی آن است و N نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BDی آن. ثابت کنید که :
الف. R و S، دایره‌های محیطی مثلثهای ABM و DCM، بر هم مماسند.
ب. R_1 و S_1 ، دایره‌های محیطی مثلثهای ABN و CDN، بر هم مماسند.
ج. نسبت شعاعهای R_1 و S_1 با نسبت شعاعهای R و S برابر است.

۵۰۰. الف. با استفاده از قاعده‌های موازی AB و CD از ذوزنقهٔ ABCD مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABE و CDF را رسم می‌کنیم. این مثلثها باید هر دو در یک طرف قاعده باشند (یعنی، اگر AB و CD را افقی فرض کنیم، یا هر دو مثلث در بالای قاعده یا هر دو در پایین قاعده باید رسم شوند). ثابت کنید که خط EF از نقطهٔ تقاطع ساقهای ذوزنقه می‌گذرد.

ب. بر ضلعهای متوازی AB و CD از ذوزنقه، مربعهایی در بیرون ذوزنقه بنا می‌کنیم. ثابت کنید که خط واصل بین مرکزهای آنها از نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه می‌گذرد.

۵۰۱. الف. هر قطر چهارضلعی محدب ABCD، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

ب. در شش ضلعی محدب ABCDEF می‌دانیم، هر یک از قطرهای AD، BE و CF، مساحت آن را نصف می‌کند. ثابت کنید، این قطرها، در یک نقطه به هم می‌رسند.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۳

۵.۵. تجانس در دایره

۱.۵.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵۰۲. دو دایرهٔ (C) و (C′) به شعاعهای ۵cm و ۲cm با خط‌المرکزین OO′ = ۱cm داده شده‌اند. فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم این دو دایره را تا یکی از دو مرکز (O یا O′)، به دست آورید.

۲.۵.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۵. نقطه‌ها همخطند

۵۰۳. دایرهٔ به مرکز O و سه وترMA، MB و MC از همان دایره مفروضند. نشان دهید محل برخورد سه دایره به قطرهای MA، MB و MC غیر از M دو به دو، سه نقطه بر یک استقامتند.

۵۰۴. مرکزهای سه دایرهٔ تشابه (S_{ab})، (S_{bc}) و (S_{ca}) روی محور اصلی دایره‌های (R) و (O) قرار دارند.

۲.۲.۵.۵. نقطه‌ها متقابل قطری هستند

۵۰۵. دو دایرهٔ (O) و (O′) مفروضند ؛ خطهایی که نقطهٔ M از دایرهٔ (O) را به دو مرکز تشابه (O) و (O′) وصل می‌کنند، (O′) را در چهار نقطه قطع می‌کنند. نشان دهید که از این چهار نقطه دو نقطه روبه‌روی قطری در (O′) هستند و دو نقطهٔ دیگر، مستقل از محل M، با یک نقطهٔ ثابت همخطند.

۳.۵.۵. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۵.۵. خطها موازی‌اند

۵۰۶. از M نقطهٔ تماس دایره‌های R و S دو قاطع h و l را طوری رسم می‌کنیم که دایرهٔ R را در نقطه‌های A و B (همچنین در نقطهٔ M) و دایرهٔ S را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید که پاره‌خطهای AB و CD موازی هستند.

۵۰۷. از نقطهٔ تماس دو دایره خط دلخواهی را عبور می‌دهیم تا دایره‌ها را قطع کند. ثابت کنید شعاع رسم شده از مرکزهای دایره‌ها به این نقطه‌های برخورد با هم موازی هستند.

۵۰۸. دو دایرهٔ مماس R و S مفروضند. فرض کنید l خطی است که از نقطهٔ تماس M رسم شده است و R را در نقطهٔ دیگر A و S را در نقطهٔ دیگر B قطع کرده است. نشان دهید که مماس بر R در A با مماس بر S در B موازی است.

۵۰۹. هرگاه سه دایره دو به دو مماس بر یکدیگر باشند، خطهایی که یکی از نقطه‌های تماس را به دو نقطهٔ دیگر وصل می‌کنند، از یکی از دایره‌ها، قطری موازی با خط المرکزین دو دایرهٔ دیگر جدا می‌کند.

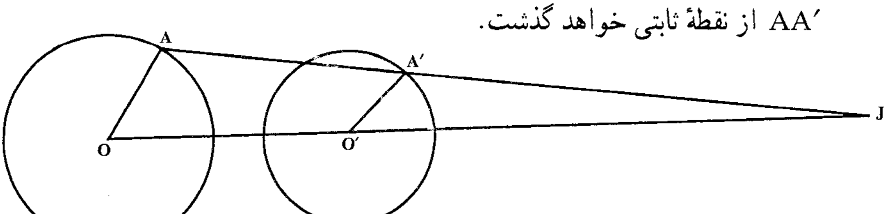
۲.۳.۵.۵. خط نیمساز است

۵۱۰. دو دایره، در نقطهٔ P، بر هم مماسند، خط راستی، مماس بر یکی از دایره‌ها در نقطهٔ A، دایرهٔ دیگر را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است. ثابت کنید، خط راست PA، نیمساز زاویهٔ BPC و یا زاویهٔ مجانب آن است.

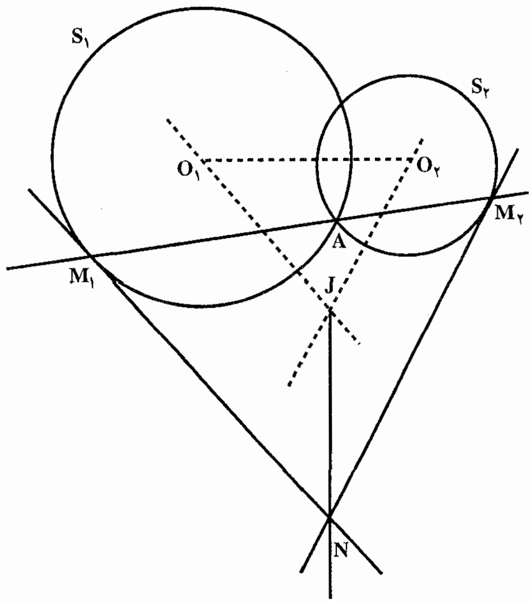
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، لوکزامبورگ، ۱۹۸۰

۳.۳.۵.۵. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵۱۱. دو دایرهٔ (O) و (O′) را در نظر گرفته، دو شعاع متوازی OA و O′A′ از آنها را در یک جهت رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی نقطهٔ A روی دایرهٔ (O) حرکت کند، خط AA′ از نقطهٔ ثابتی خواهد گذشت.



۵۱۲. دو دایرهٔ متقاطع S_1 و S_2 مفروضند و A یکی از نقطه‌های برخورد آنها است ؛ خطی از A رسم می‌کنیم تا S_1 و S_2 را بترتیب در M_1 و M_2 قطع کند ؛ نقطهٔ برخورد خطهای مماس بر دو دایره در M_1 و M_2 را N می‌نامیم ؛ از نقطه‌های O_1 و O_2 ، مرکزهای دو دایره، خطهایی موازی با M_1N و M_2N رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را J می‌نامیم (شکل). ثابت کنید که خط JN همواره از نقطه ثابتی می‌گذرد و طول پاره‌خط JN همواره مقدار معینی است که به انتخاب خط M_1AM_2 بستگی ندارد.

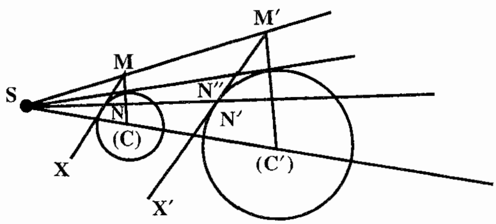


۵۱۳. دو دایره در نقطهٔ A مماس خارجند. از نقطهٔ ثابت B در صفحهٔ آنها قاطع BMN را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در M و N قطع کند. خطهای AM و AN دایرهٔ (O′) را در M′ و N′ قطع می‌کنند. ثابت کنید، خط M′N′ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

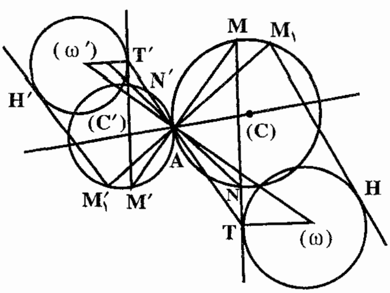
۵۱۴. فرض کنید دایرهٔ S بر هریک از دو دایرهٔ S_1 و S_2 مماس است. ثابت کنید که خط واصل بین نقطه‌های تماس از یکی از مرکزهای تجانس دایره‌های S_1 و S_2 می‌گذرد (که مرکز تجانس بیرونی است، اگر S بر هر دو دایرهٔ S_1 و S_2 مماس درونی یا مماس بیرونی باشد ؛ در غیر این صورت، مرکز تجانس درونی است).

۴.۳.۵.۵. خط مماس بر دایره است

۵۱۵. اگر S مرکز تجانس دو دایرهٔ (C) و (C′) و M و M′ دو نقطهٔ متجانس (غیرواقع بر دایره‌های C و C′) با مرکز تجانس S و نسبت تجانس $k=\frac{R}{R'}$ باشد، در صورتی که از M و M′ دو خط موازی رسم کنیم، چنانچه یکی از دو خط بر دایرهٔ (C) مماس باشد، دیگری نیز بر دایرهٔ (C′) مماس خواهد بود و نقطه‌های تماس، دو نقطهٔ متناظرند.



۵۱۶. دو دایره در A بر یکدیگر مماسند. دو قاطع که از A می‌گذرند، آنها را در M، M′، N و N′ قطع می‌کنند. ثابت کنید که اگر MN همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس باشد، M′N′ نیز بر دایرهٔ ثابت دیگری مماس خواهد بود.

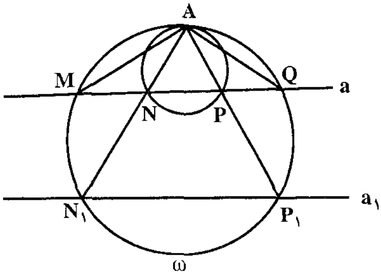


۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵۱۷. فرض می‌کنیم A یکی از دو نقطهٔ متمایز تقاطع دو دایرهٔ همصفحهٔ نامساوی C_1 و C_2 به مرکزهای بترتیب O_1 و O_2 باشد. یکی از مماسهای مشترک این دو دایره به C_1 در P_1 و به C_2 در P_2 مماس است، در حالی که دیگری به C_1 در Q_1 و به C_2 در Q_2 مماس می‌باشد. فرض می‌کنیم M_1 وسط P_1Q_1 و M_2 وسط P_2Q_2 باشد. ثابت کنید که $O_1\hat{A}O_2 = M_1\hat{A}M_2$ است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۳



۵۱۸. دو دایره در نقطهٔ A مماس داخلی هستند. قاطع a دایره‌ها را در نقطه‌های M، N، P و Q با همان ترتیبی که در شکل ملاحظه می‌کنید، قطع می‌کند. ثابت کنید که :

$$M\hat{A}N = P\hat{A}Q$$

۵.۵.۵. پاره‌خط

۵.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۵۱۹. دو دایره مفروضند. ثابت کنید، فاصلهٔ مرکز تجانس مستقیم آنها از یک مماس مشترک داخلی دو دایره بستگی به خط المرکزین آنها ندارد. همچنین است فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس دو دایره از یک مماس مشترک خارجی.

۵.۵.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۲۰. دو دایره بر هم مماسند. در دایرهٔ بزرگتر، مثلث متساوی‌الاضلاع محاط کرده‌ایم و سپس، از رأسهای این مثلث مماسهایی بر دایرهٔ کوچکتر کشیده‌ایم. ثابت کنید، از بین این سه مماس، طول یکی، برابر است با مجموع طولهای دو مماس دیگر.

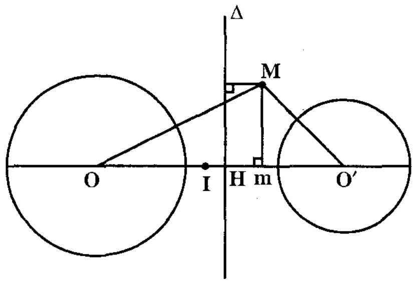
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، ۱۹۷۲

۵۲۱. نشان دهید مماسهایی که در یک نقطهٔ برخورد دو دایره بر آن دو دایره رسم می‌شوند، از هر دو مرکز تشابه دو دایره هم‌فاصله‌اند.

۵۲۲. سه دایرهٔ متساوی (A)، (B) و (C) به مرکزهای A، B و C دو به دو بر هم مماسند و T و T′ دو دایرهٔ متحدالمرکزند. بر این سه دایره که با T مماس داخل و با T′ مماس خارجند، نقطهٔ اختیاری M بر دایرهٔ T و یا بر T′ مماسهای MA′، MB′ و MC′ را بترتیب بر دایره‌های (A)، (B) و (C) رسم می‌کنیم. نشان دهید، یکی از سه قطعه خط MA′، MB′ و MC′ مساوی با مجموع دو قطعه خط دیگر است.

۶.۵.۵. رابطه‌های متری

۵۲۳. تفاضل قوتهای یک نقطه نسبت به دو دایره مساوی است با دو برابر حاصلضرب طول خط‌المرکزین در فاصلهٔ آن نقطه از محور اصلی دو دایره.



۵۲۴. نشان دهید که حاصلضرب قوتهای یک مرکز تشابه دو دایره نسبت به آن دو دایره، با توان چهارم شعاع دایرهٔ پاد متشابه آن دو دایره برابر است.

تعریف دایره‌های پاد متشابه دو دایره. دو دایرهٔ (S) و (S′) که با دایره‌های (A) و (B) هم محورند و مرکزهایشان مرکزهای تجانس دو دایرهٔ (A) و (B) است، دایره‌های پاد متشابه دایره‌های (A) و (B) نامیده می‌شوند.

مرکز تجانس مستقیم (خارجی) مرکز دایرهٔ پاد متشابه مستقیم یا خارجی است و مرکز تجانس داخلی یا غیرمستقیم (معکوس)، مرکز دایرهٔ پاد متشابه داخلی یا غیرمستقیم است. اگر دو دایرهٔ مفروض متقاطع باشند، هر دو دایرهٔ پاد متشابه حقیقی‌اند ولی اگر دو دایرهٔ مفروض غیرمتقاطع باشند، تنها یک دایره پاد متشابه حقیقی است.

۵۲۵. شازده کوچولو سیاره‌اش را یک دور کامل روی خط استوای آن می‌پیماید. در این گردش، سر او یک دایره و پای او دایرهٔ دیگری را طی می‌کند. اگر بلندی قد شازده کوچولو ۱/۲ متر باشد، مقدار تقریبی اختلاف محیطهای این دو دایره چند متر است؟

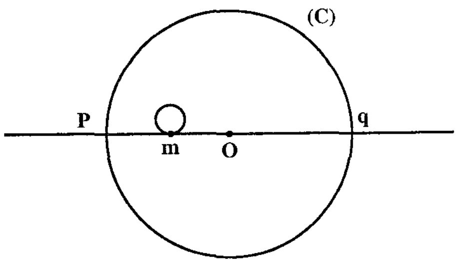
الف) ۱/۲ × ۳/۱۴ ب) $(۱/۲)^۲$ × ۳/۱۴

ج) ۱/۲ × ۶/۲۸ د) $(۱/۲)^۲$ × ۶/۲۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۷.۵.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵۲۶. در دایرهٔ C به مرکز O قطر pq رسم و نقطهٔ m در وسط Op' انتخاب می‌شود. تجانس به مرکز m که نقطهٔ p را روی نقطهٔ q تصویر کند، دایرهٔ C را به دایره‌ای تبدیل می‌کند که،



الف) بر دایرهٔ C منطبق است.
ب) جدا از دایرهٔ C است.
ج) با دایرهٔ C مماس داخل است. د) با دایرهٔ C مماس خارج است.
هـ) با دایرهٔ C در دو نقطه مشترک است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۸.۵.۵. رسم شکلها

۵۲۷. خط و دایره و نقطه‌ای داده شده است ؛ بر آن نقطه خطی مرور دهید که نسبت قطعه‌هایی از آن که بین نقطهٔ مذکور و خط و دایره محدود می‌شود، مساوی k باشد.

۵۲۸. به کمک تجانس خطی رسم کنید که از محل برخورد دو دایره بگذرد و وترهایی که در دایره ایجاد می‌کند، به نسبت معلومی باشد.

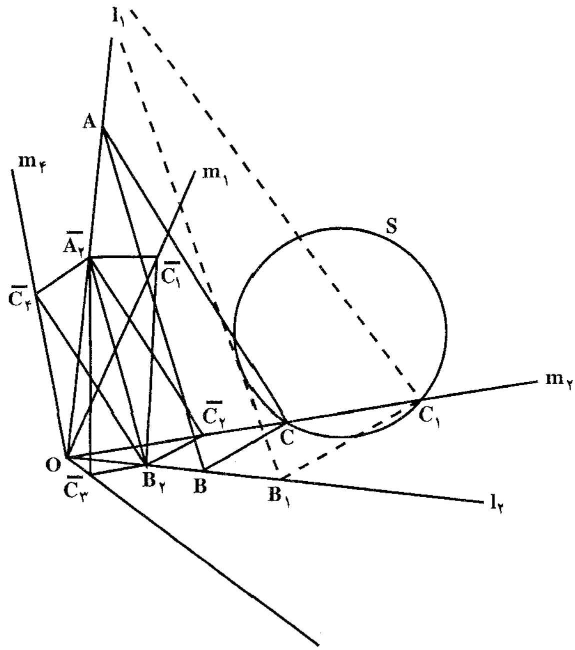
۵۲۹. وتر AB را در دایرهٔ (O) رسم کرده و از نقطهٔ غیرمشخص M واقع بر محیط دایرهٔ (O) وتری چنان رسم کنید که به وسیلهٔ AB به دو قسمت متساوی تقسیم شود.

۵۳۰. از نقطهٔ M واقع در داخل دایره‌ای وتری چنان رسم کنید که به وسیلهٔ نقطهٔ M به نسبت $\frac{P}{q}$ تقسیم شود.

۵۳۱. دایره‌ای به شعاع R' و مجانس با دایرهٔ مفروض (C) به مرکز تجانس S رسم کنید.

۵۳۲. دایره‌ای چنان رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A گذشته و مجانس دایرهٔ مفروض (C) به مرکز تجانس S باشد.

۵۳۳. دو خط متعامد l_1 و l_2 و دایرهٔ S مفروضند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با معلوم بودن یک زاویهٔ حادهٔ آن، α چنان رسم کنید که رأسهای A و B بر l_1 و l_2 واقع باشند و رأس قائمهٔ C بر S واقع باشد.



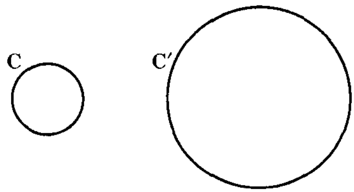
۵۳۴. الف. یک چهارضلعی ABCD قابل محاط در یک دایره رسم کنید که طولهای ضلعهایش معلوم باشند: $AB = a$ ، $BC = b$ ، $CD = c$ و $DA = d$.

ب. یک چهارضلعی ABCD رسم کنید که در آن مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو، B و D، معلوم باشد و طولهای ضلعهایش نیز داده شده باشند: $AB = a$ ، $BC = b$ ، $CD = c$ و $DA = d$.

۵۳۵. مجانسهای مستقیم و معکوس یک مستطیل را با نسبتهای ۱، $\frac{1}{2}$ و ۲، اولاً نسبت به مرکز یکی از رأسها و ثانیاً به مرکز محل برخورد قطرهای آن رسم کنید.

۹.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۳۶. دو دایرهٔ C و ′C به شکل زیر در نظر بگیرید. تعداد تجانسهایی که دایرهٔ C را روی دایرهٔ ′C تصویر می‌کنند، چند تاست؟



الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) نامتناهی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۵۳۷. دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاعهای R و ′R را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، هرگاه M و N مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس این دو دایره باشند، دایرهٔ به قطر MN با دو دایرهٔ مفروض دارای یک محور اصلی است.

۵۳۸. الف. دو دایرهٔ متعامد (A) و (B) مفروضند. نشان دهید که دایرهٔ اصلی (A) و (B) دایرهٔ تشابه دایره‌های پاد متشابه (A) و (B) است.

ب. دایره‌های (A) و (B) دایره‌های پاد متشابه دایره‌های پاد متشابه (A) و (B) هستند.

۵۳۹. نشان دهید هر دایره‌ای که از مرکزهای دو دایرهٔ مفروض بگذرد، با دایرهٔ تشابه این دو دایرهٔ مفروض متعامد است.

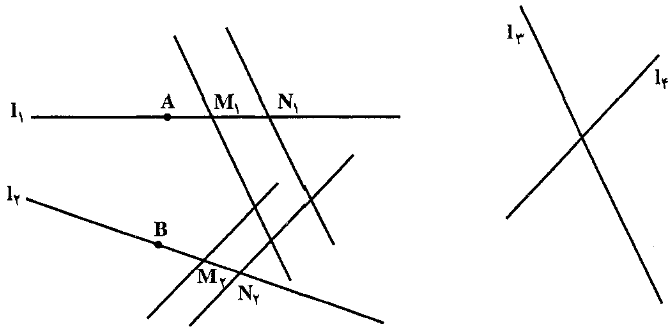
۵۴۰. سه نقطهٔ A، B و C به همین ترتیب روی خطی واقعند. دایره‌های به قطر BA و AC را رسم می‌کنیم، قاطعی که از A می‌گذرد، دو دایره را در ′B و ′C قطع می‌کند. مکان نقطهٔ P فصل مشترک B′C و C′B را پیدا کنید.

۵۴۱. نقطهٔ A از صفحهٔ دایرهٔ (O) را به نقطهٔ متغیر M از محیط آن وصل می‌کنیم. مکان نقطه‌های برخورد خط AM را با نیمسازهای زاویهٔ AOM پیدا کنید.

۱۰.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۵۴۲. الف. دو خط l_1 و l_2 و نقطه‌های A و B بترتیب واقع بر l_1 و l_2 مفروضند. بر l_1 و l_2

پاره‌خطهای AM_1 و BM_2 را با نسبت مفروض $AM_1 / BM_2 = m$ رسم می‌کنیم؛ و از نقطه‌های M_1 و M_2، خطهایی موازی با دو خط مفروض l_3 و l_4 رسم می‌کنیم (شکل). مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد این خطها.



ب. چندضلعی $A_1A_2...A_n$ چنان تغییر می‌کند که ضلعهایش با راستاهای مفروضی موازی می‌مانند و رأسهای A_1، A_2، ... و A_{n-1} بر خطهای l_1، l_2، ... و l_{n-1} حرکت می‌کنند. مطلوب است مکان هندسی رأس A_n.

ج. در چند ضلعی مفروضی چند ضلعی دیگری محاط کنید که ضلعهایش با خطهای مفروضی موازی باشند.

۵۴۳. A_1، A_2، A_3 و A_4 چهار نقطه بر دایرهٔ S هستند و H_4، H_3، H_2 و H_1 بترتیب نقطه‌های برخورد ارتفاعهای چهار مثلث $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$. از این هشت نقطه همهٔ سه‌تاییهای ممکن با این ویژگی را که اندیسهایشان متمایزند، انتخاب می‌کنیم و همهٔ مثلثهایی را که رأسهای آنها این سه‌تاییها هستند، در نظر می‌گیریم (مثلاً $\Delta A_1A_2A_4$ و $\Delta A_1H_2A_4$ قابل قبولند، ولی $\Delta A_1A_3H_3$ قابل قبول نیست، زیرا A_3 و H_3 اندیس واحدی دارند). تعداد این سه‌تاییها $۳۲ = ۶/(۴ \times ۶ \times ۸)$ است. دایرهٔ اویلر هریک از این مثلثها را می‌توان رسم کرد. ثابت کنید که:

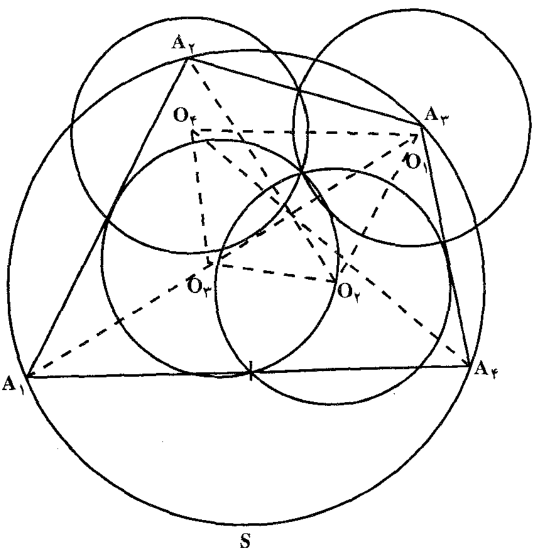
الف. تنها هشت دایره از این سی و دو دایره متمایزند.

ب. این هشت دایره همگی با هم قابل انطباق و در یک نقطه همرسند.

ج. این دایره‌ها را می‌توان به دو دستهٔ چهارتایی تقسیم کرد چنان که مرکزهای چهار دایرهٔ هر دسته، مجانس چهار نقطهٔ A_1، A_2، A_3 و A_4 با نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ و یا مجانس چهار نقطهٔ H_1، H_2، H_3 و H_4 با نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ باشند.

۵۴۴. الف. فرض کنیم که چهار نقطهٔ A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 همگی بر دایرهٔ داده شده‌اند و مرکزهای ارتفاعی مثلثهای $A_1A_2A_3$ ، $A_1A_2A_4$ ، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ را بترتیب H_4 ، H_3 ، H_2 و H_1 نشان می‌دهیم. ثابت کنید که چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ از نیمدور چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ حول نقطه‌ای مانند H به دست می‌آید.

ب. A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 چهارنقطه بر دایرهٔ S هستند ؛ فرض می‌کنیم نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 مرکزهای دایره‌های اویلر مثلثهای $A_2A_3A_4$ ، $A_1A_3A_4$ ، $A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_3$ باشند. نشان دهید که چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ مجانس چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ است و نسبت تجانس برابر $\frac{1}{2}$ است (شکل).



به عبارت دیگر، اگر نقطه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 همه بر یک دایره باشند، چهار پاره‌خطی که هریک از این نقطه‌ها را به مرکز دایرهٔ اویلر مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر وصل می‌کند، در یک نقطه همرسند و در این نقطه به نسبت ۱ :۲ تقسیم می‌شوند.

۵۴۵. R و S دو دایرهٔ متخارج هستند. m و n را مماسهای مشترک بیرونی R، S و M را نقطهٔ تقاطع آنها فرض می‌کنیم. از M خطی مانند l رسم می‌کنیم که دایرهٔ R را در نقطه‌های A و B و دایرهٔ S را در نقطه‌های C و D قطع کند. فرض می‌کنیم E نقطهٔ تماس m با R باشد و F نقطهٔ تماس m با S. ثابت کنید که :

الف. مثلث ABE با مثلث CDF متشابه است.

ب. نسبت مساحت مثلث ABE به مساحت مثلث CDF برابر است با مجذور نسبت شعاعهای R و S.

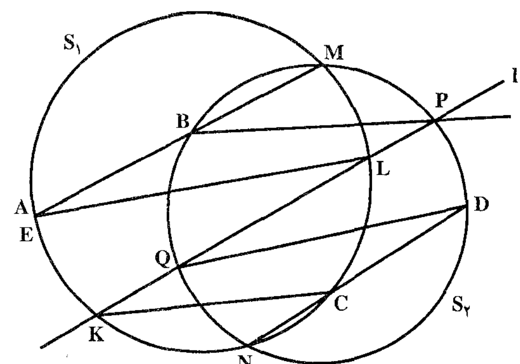
ج. خط واصل بین نقطه‌های برخورد میانه‌های دو مثلث ABE و CDF از نقطهٔ M می‌گذرد.

۵۴۶. S_1 و S_2 دو دایرهٔ متقاطع در نقطه‌های M و N هستند. A را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 می‌گیریم و دومین نقطهٔ برخورد خط AM با دایرهٔ S_2 را B، دومین نقطهٔ برخورد خط BN با S_1 را C، دومین نقطهٔ برخورد CM با S_2 را D و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد DN با S_1 را E می‌نامیم.

الف. ثابت کنید که طول AE به انتخاب نقطهٔ اولیهٔ A بر S_1 بستگی ندارد بلکه فقط به وضع دو دایرهٔ S_1 و S_2 وابسته است.

ب. S_1 و S_2 چگونه باید قرارگیرند تا E بر A منطبق شود؟

۵۴۷. S_1 و S_2 دو دایرهٔ متقاطع در نقطه‌های M و N هستند، l را یک خط و A را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 فرض می‌کنیم.

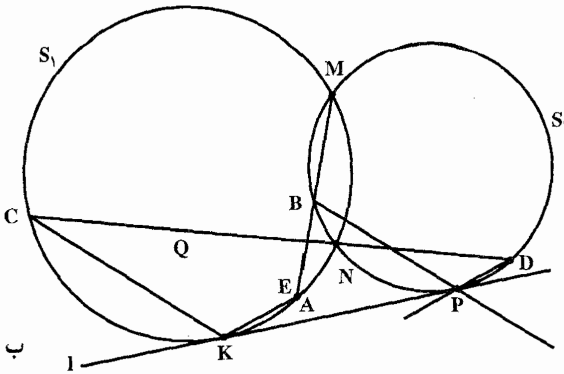


الف

الف. فرض کنید خط l دایرهٔ S_1 را در نقطه‌های K و L و S_2 را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کند (شکل الف). دومین نقطهٔ برخورد خط AM با دایرهٔ S_2 را B ؛ دومین نقطهٔ برخورد خط KC، رسم شده از K به موازات BP را با دایرهٔ S_1 ، C ؛ دومین نقطهٔ برخورد خط CN با S_2 را D و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد خط LE، رسم شده از L به موازات DQ را با S_1 ، E می‌نامیم. ثابت کنید که E بر A منطبق است.

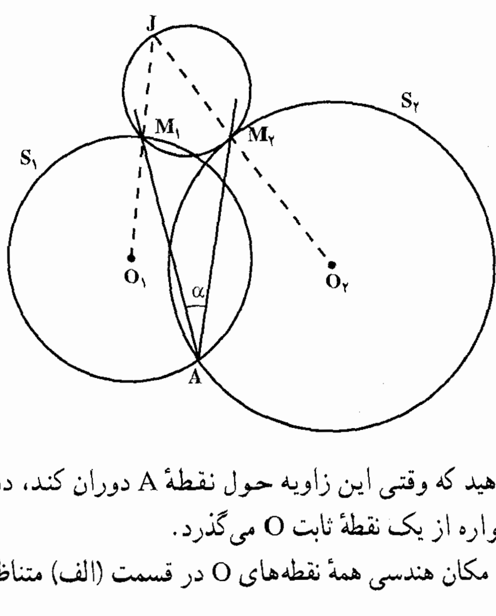
ب. فرض کنید خط l بر S_1 و S_2 در نقطه‌های K و P مماس باشد (شکل ب). دومین نقطهٔ برخورد خط AM با S_2 را B و دومین نقطهٔ برخورد خط KC، رسم شده از K به

موازات BP را با S_1، C، دومین نقطهٔ برخورد CN با S_2 را D و دومین نقطهٔ برخورد خط KE رسم شده از K به موازات DP را با S_1، E می‌نامیم. ثابت کنید که A و E بر هم منطبقند.



ب

۵۴۸. فرض می‌کنیم S_1 و S_2 دو دایره به مرکزهای O_1 و O_2 باشند که در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کرده‌اند. زاویهٔ ثابت α به رأس A را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد ضلعهای این زاویه با دایره‌های S_1 و S_2 را M_1 و M_2 و نقطهٔ برخورد خطهای O_1M_1 و O_2M_2 را J می‌نامیم (شکل).



الف. نشان دهید که وقتی این زاویه حول نقطهٔ A دوران کند، دایرهٔ محیطی مثلث M_1M_2J همواره از یک نقطهٔ ثابت O می‌گذرد.

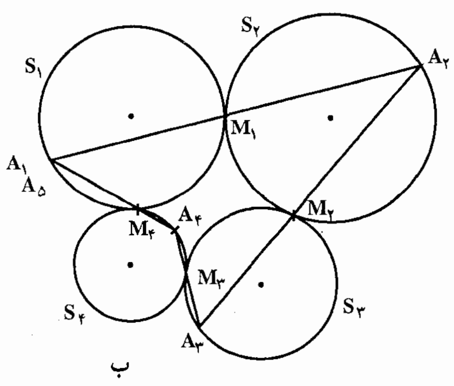
ب. پیدا کنید مکان هندسی همهٔ نقطه‌های O در قسمت (الف) متناظر با همهٔ زاویه‌های ممکن α را.

۵۴۹. سه دایرهٔ O_1 ، O_2 و O_3 به شعاعهای R_1 ، R_2 و R_3 در یک صفحه مفروضند. اگر S_1 و S_2 مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایرهٔ O_1 و O_2 و S_2 و S'_2 مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایرهٔ O_1 و O_3 و S_3 و S'_3 مرکزهای تجانس O_1 و O_3 باشند،

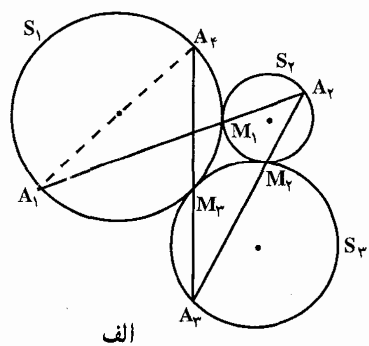
۱. سه مرکز تجانس مستقیم بر یک استقامتند (محور تجانس).
۲. دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک استقامتند.
۳. خطهایی که مرکز هر دایره را به مرکزهای تجانس دو دایرهٔ دیگر وصل می‌کنند، همرسند.

۵۵۰. الف. S_1 ، S_2 و S_3 سه دایرهٔ دوبه دو مماس بیرونی داده شده‌اند (شکل الف). نقطهٔ دلخواه A_1 از S_1 را به M_1 ، نقطهٔ تماس S_1 و S_2 ، وصل می‌کنیم تا S_2 را در نقطهٔ دیگر A_2 ببرد ؛ A_2 را به M_2 ، نقطهٔ تماس S_2 و S_3 ، وصل می‌کنیم تا S_3 را در نقطهٔ دیگر A_3 ببرد ؛ خط A_3M_3 که A_3 را به M_3 نقطهٔ تماس S_3 و S_1 وصل می‌کند، S_1 را در نقطهٔ دیگر A_4 می‌برد. ثابت کنید، A_1 و A_4 بر دو سر قطری از S_1 قرار دارند.
نتیجهٔ این تمرین را برای حالتی که تعداد فردی دایرهٔ دلخواه مماس بر هم وجود داشته باشند، تعمیم دهید.

ب. S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 چهار دایرهٔ دو به دو مماس بیرونی داده شده‌اند (شکل ب). نقطهٔ A_1 از S_1 را به M_1 ، نقطهٔ تماس S_1 و S_2 ، وصل می‌کنیم تا S_2 را در نقطهٔ دیگر A_2 ببرد ؛ A_2 را به M_2 ، نقطهٔ تماس S_2 و S_3 ، وصل می‌کنیم تا S_3 را در نقطهٔ دیگر A_3 ببرد ؛ A_3 را به M_3 ، نقطهٔ تماس S_3 و S_4 ، وصل می‌کنیم تا S_4 را در A_4 ببرد ؛ اگر A_5 نقطهٔ برخورد A_4M_4 ، خط واصل بین A_4 و نقطهٔ تماس S_4 و S_1 یعنی M_1 ، با دایرهٔ S_1 باشد، ثابت کنید، A_1 بر A_5 منطبق است.
نتیجهٔ این مسأله را برای حالتی که تعداد زوجی از دایره‌های مماس بیرونی وجود داشته باشند، تعمیم دهید.

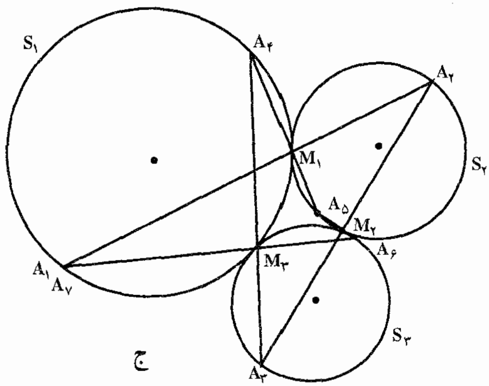


ب



الف

ج. با قراردادهای بخش (الف) دومین نقطهٔ برخورد خط A_4M_1 با S_2 را A_5 می‌نامیم و دومین نقطهٔ برخورد A_5M_2 با S_3 را A_6 و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد A_6M_3 با S_1 را A_7 می‌نامیم (شکل ج). نشان دهید که A_7 بر A_1 منطبق است. این نتیجه را به حالتی با تعداد دلخواه دایره‌های مماس بر هم تعمیم دهید.

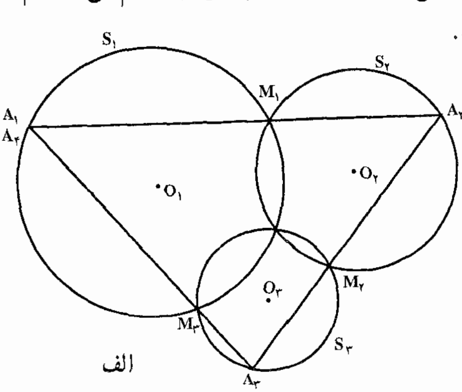


ج

د. اگر تأکید نکنیم که در هریک از حالتهای (الف)، (ب) و (ج) دایره‌ها حتماً باید بر یکدیگر مماس بیرونی باشند، نتیجه‌های حاصل از این سه جزء به چه صورتی درخواهد آمد؟

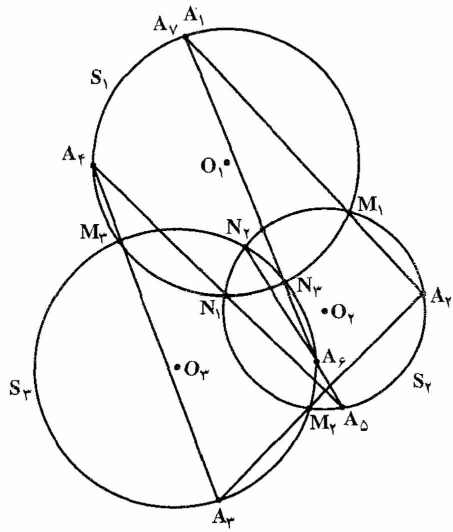
۵۵۱. فرض می‌کنیم S_1 ، S_2 و S_3 سه دایره باشند که هریک دوتای دیگر را قطع می‌کند. A_1 را نقطه‌ای دلخواه بر S_1 می‌گیریم.

الف. فرض کنید که سه دایره یک نقطهٔ برخورد مشترک N دارند و دومین نقطه‌های برخورد S_1 و S_2 ، S_2 و S_3 ، S_3 و S_1 را بترتیب M_1 ، M_2 و M_3 می‌نامیم (شکل الف). دومین نقطهٔ برخورد A_1M_1 با S_2 را A_2 ، دومین نقطهٔ برخورد A_2M_2 با S_3 را A_3 و بالاخره دومین نقطهٔ A_3M_3 با S_1 را A_4 نام می‌گذاریم. ثابت کنید که A_4 بر A_1 منطبق است.



الف

ب. اکنون فرض کنید که این سه دایره نقطهٔ برخورد مشترکی ندارند و دایره‌های S_1 و S_2 در نقطه‌های M_1 و N_1، S_2 و S_3 در نقطه‌های M_2 و N_2، S_3 و S_1 در نقطه‌های M_3 و N_3 متقاطعند (شکل ب). فرض کنید A_2 دومین نقطهٔ برخورد A_1M_1 با S_2، A_3 دومین نقطهٔ برخورد A_2M_2 با S_3، A_4 دومین نقطهٔ برخورد A_3M_3 با S_1، A_5 دومین نقطهٔ برخورد A_4N_1 با S_2، A_6 دومین نقطهٔ برخورد A_5N_2 با S_3 و بالاخره A_7 دومین نقطهٔ برخورد A_6N_3 با S_1 باشد. ثابت کنید که A_7 بر A_1 منطبق است.



ب

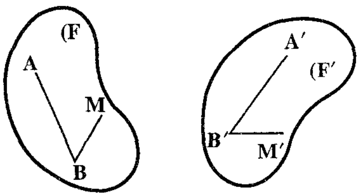
راهنمایی و حل

از آن جا که به گفتهٔ جورج پولیا J. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید ؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرة المعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه حل یا راهنمایی، نمی‌باشند ؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هر چه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

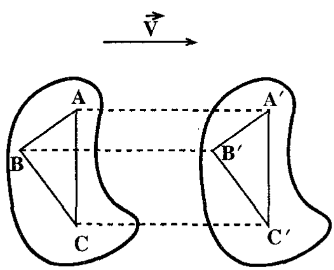
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱. انتقال



۱. در حقیقت اگر A' و B' وضع جدید دو نقطهٔ A و B از شکل F باشد (شکل) M' وضع جدید هر نقطهٔ دیگر مانند M، مشخص است؛ زیرا که چون شکل تغییرناپذیر است: $A'\hat{B'}M' = A\hat{B}M$. یعنی مقدار و جهت زاویهٔ $A'B'M'$ معلوم است و از این‌جا امتداد $B'M'$ معین می‌شود؛ و چون $B'M' = BM$، وضع M' به طور کامل مشخص می‌شود. پس وضع هر نقطه از شکل F'، و در نتیجه وضع خود آن شکل، مشخص است.

۱.۱. تعریف و قضیه

۲. اگر A، B و C سه نقطهٔ غیر مشخص از شکل F و A' ، B' و C' وضعهای جدید آنها پس از انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ باشند (شکل)، دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متساوی‌اند؛ به دلیل آن که:



در متوازی‌الاضلاع $AA'B'B$: $A'B' \underline{\underline{\parallel}} AB$

و نیز: $B'C' \underline{\underline{\parallel}} BC$

پس: $A'\hat{B'}C' = A\hat{B}C$ (به چه دلیل؟)

یعنی: $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$

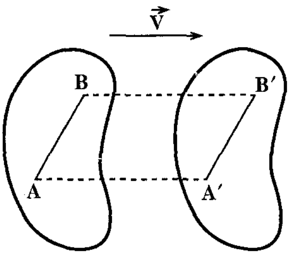
بنابراین، اگر $A'B'$ را بلغزانیم تا بر AB منطبق شود، C' نیز بر C منطبق خواهد شد؛ و به همین ترتیب، هر یک از نقطه‌های شکل F' بر نقطهٔ نظیرش از شکل F منطبق می‌شود؛ پس دو شکل F' و F همنهشتند.

نتیجهٔ ۱. در انتقال، هر دو پاره‌خط متناظر مانند $A'B'$ و AB، با هم موازی و مساوی و در یک جهتند ؛ زیرا که در شکل، $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است.

نتیجهٔ ۲. انتقال یافتهٔ هر خط راست، خطی راست است.

نتیجهٔ ۳. انتقال یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای است همنهشت و همجهت با آن.

نتیجهٔ ۴. انتقال یافتهٔ هر چند ضلعی، چند ضلعیی است همنهشت با آن.

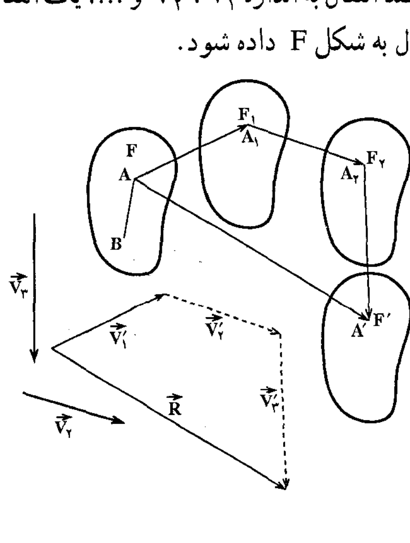


۳. اگر $A'B'$ و AB (شکل) موازی و مساوی و در یک جهت باشند، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است ؛ پس :

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

یعنی تمام نقطه‌های شکل، به اندازهٔ $\overrightarrow{V}$ که همسنگ با $\overrightarrow{AA'}$ رسم شده است، تغییر مکان داده‌اند، یا به عبارت دیگر، انتقال یافته‌اند.

۴. فرض می‌کنیم که شکل F را بر اثر انتقالی به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{V_1}$ به وضع F_1 (شکل)، و F_1 را بر اثر انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V_2}$ به وضع F_2، و F_2 را بر اثر انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{V_3}$ به وضع F' درآورده باشیم و A، A_1 ، و A_2 و A' چهار وضع متوالی یک نقطهٔ آن باشند ؛ چند ضلعی AA_1A_2A' ، مساوی آن چند ضلعیی است که برای تعیین مجموع هندسی $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ و $\overrightarrow{V_3}$ رسم کرده‌ایم ؛ پس $\overrightarrow{AA'}$ همسنگ $\overrightarrow{R}$ ، مجموع هندسی آن بردارها، می‌باشد ؛ یعنی اگر به شکل F انتقالی به اندازهٔ $\overrightarrow{R}$ ، برآیند بردارهای انتقال، بدهیم، شکل F' نتیجه می‌شود و کافی است به جای چند انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{V_1}$ ، $\overrightarrow{V_2}$ و ...، یک انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{R}$ ، مجموع هندسی بردارهای انتقال به شکل F داده شود.



۲.۱. انتقال در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. بردار انتقال

۵. M را مجموعهٔ به مساحت کوچکتر از π، و U_1، ...، U_n را دایره‌های به شعاع واحد و به مرکز نقطه‌های مفروض A_1، ...، A_n و $(i=1, \cdots, n)$ و $V_i = U_i \cap M$ فرض می‌کنیم. چون فاصلهٔ بین مرکزهای دایره‌ها، از ۲ بیشتر است، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی مجموعه‌های V_1، ...، V_n را هم قطع نمی‌کنند. از طرف دیگر داریم: $V_i \subset M$، بنابراین، مساحت مجموعهٔ $V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n \subset M$ از π کمتر است. بنابراین، اگر در ذهن خود، به کمک انتقال موازی، همهٔ دایره‌های U_i را (همراه با مجموعه‌های V_i که جزئی از آنها هستند) بر یک دایرهٔ به مرکز O منطبق کنیم، آن وقت در درون آن، می‌توان نقطهٔ B را طوری پیدا کرد که متعلق به هیچ یک از تبدیلهای مجموعه‌های V_i نباشد. در این صورت، بعد از انتقال موازی مجموعهٔ M به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BO}$، با طول کوچکتر از واحد، مرکزهای A_i همهٔ دایره‌های U_i هم، متعلق به این مجموعه نخواهند بود.

۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۶. خطی را که سه نقطهٔ A، B و C روی آن هستند Δ می‌نامیم. می‌دانیم که انتقال یافتهٔ هر پاره‌خط با آن موازی است. بنابراین $A'B' \| AB$ و $A'C' \| AC$ یا $A'B' \| \Delta$ و $A'C' \| \Delta$ است، پس نقطه‌های A'، B' و C' همخطند؛ زیرا، از یک نقطه بیش از یک خط، موازی خط مفروض نمی‌توان رسم کرد.

۳.۲.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۱. خطها همرسند

۷. انتقال یافتهٔ نقطهٔ همرسی خطهای داده شده به تمام خطهای انتقال‌یافته تعلق دارد؛ پس خطهای انتقال یافته همرسند.

۴.۲.۱. زاویه

۱.۴.۲.۱. اندازهٔ زاویه

۸. انتقال، زاویه‌ها را همنهشت نگه می‌دارد ؛ پس $x''\hat{O}''y'' = ۶۰^\circ$ است.

۵.۲.۱. پاره خط

۱.۵.۲.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۹. انتقال، طول پاره‌خطها را حفظ می‌کند ؛ پس $A'M' = M'B'$ است.

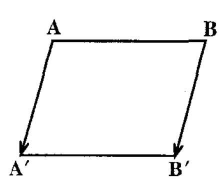
۶.۲.۱. رابطه‌های متری

۱۰. فرض می‌کنیم $A'B' = T_{\vec{V}_1}(AB)$ و $B''C' = T_{-\vec{V}_1}(BC)$ و $C''D' = T_{\vec{V}_1}(CD)$ باشد. چون انتقال، طول پاره‌خطها را ثابت نگه می‌دارد، داریم :

$$A'B'B''C'C''D' = \left|\vec{V}_1\right| + ۸ + \left|\vec{V}_1\right| + \left|\vec{V}_1\right| + ۶ + \left|\vec{V}_1\right| + ۵ = ۱۹ + ۴\left|\vec{V}_1\right|$$

۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند

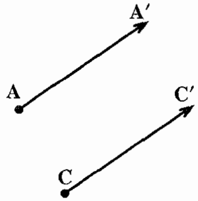
۱۱. از A به A' و از B به B' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی $ABB'A'$ که دو ضلع روبه‌روی آن AB و $A'B'$ موازی و مساوی‌اند، متوازی‌الاضلاع است ؛ پس AA' موازی و مساوی BB' است. بنابراین پاره‌خط $A'B'$ انتقال‌یافتهٔ پاره‌خط AB به اندازهٔ بردار انتقال AA' است.



۸.۲.۱. رسم شکلها

۱۲. فرض کنید که $T_{\overrightarrow{CD}}(B) = B'$ و E میانگاه پاره‌خط AB' است. از نقطه‌های A، B ، C و D خطهایی به موازات BE رسم کنید.

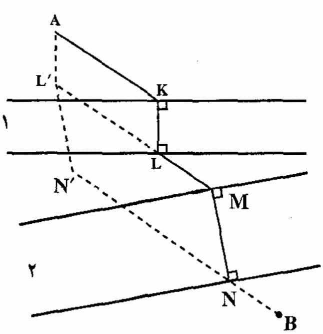
۱۳. از نقطهٔ C بردار $\overrightarrow{CC'}$ را مساوی بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم.
نقطهٔ C' انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ C به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ است.



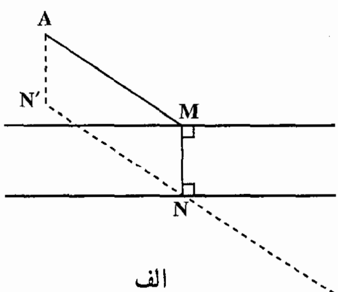
۱۴. **الف.** فرض کنید مسأله حل شده است، پاره‌خط MN را به وضع جدید AN' انتقال می‌دهیم به طوری که نقطهٔ M به نقطهٔ A برده شود (شکل الف). در این صورت $AM = N'N$ ، و بنابراین $AM + NB = N'N + NB$. پس مسیر AMNB کوتاهترین مسیر خواهد بود، اگر و تنها اگر، نقطه‌های N' ، N و B در یک امتداد باشند. از این رو ترسیم زیر را داریم : از نقطهٔ A پاره‌خط AN' را به طولی مساوی پهنای رودخانه، عمود بر رودخانه، و متوجه به آن رسم، و نقطه‌های N' و B را به هم وصل می‌کنیم ؛ گیریم N نقطهٔ برخورد این خط با آن لبهٔ رودخانه که به B نزدیکتر است، باشد. پل را در نقطهٔ N بر رودخانه می‌زنیم.

ب. برای سادگی، دو رودخانه در نظر می‌گیریم. فرض کنید مسأله حل شده باشد و KL و MN دو پل روی دو رودخانه باشند. پاره‌خط KL را به وضع جدید AL' انتقال می‌دهیم به طوری که نقطهٔ K به نقطهٔ A برده شود (شکل ب). آن‌گاه $AK = L'L$ و

$$AK + LM + NB = L'L + LM + LB$$



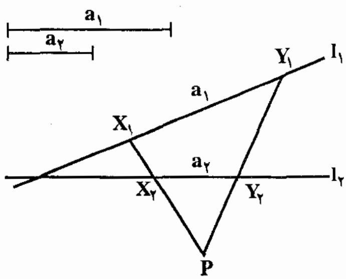
ب



الف

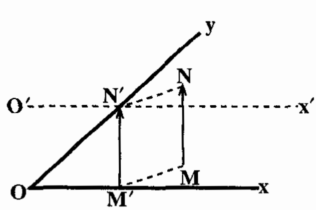
اگر AKLMNB کوتاهترین مسیر از A به B باشد، آن گاه L′LMNB کوتاهترین مسیر از L′ به B و LMNB کوتاهترین مسیر از L به B خواهد بود. اما L و B فقط توسط رودخانهٔ دومی از هم جدا شده‌اند، و بنابراین با توجه به قسمت (الف) می‌فهمیم که چگونه باید کوتاهترین مسیر میان آنها را رسم کنیم.

پس ترسیم زیر به دست می‌آید : از نقطهٔ A پاره‌خط AL′ را به طولی برابر پهنای رودخانهٔ اوّل و عمود بر آن، و متوجه به آن رسم می‌کنیم، از نقطهٔ L′ پاره خط L′N′ را به طولی مساوی پهنای دومین رودخانه، عمود بر آن، و متوجه به آن رسم می‌کنیم. نقطه‌های N′ و B را به هم وصل می‌کنیم ؛ گیریم N نقطهٔ تقاطع این خط با نزدیکترین لبهٔ رودخانهٔ دومی به B باشد. پل رودخانهٔ دومی باید در N بنا شود. گیریم نقطهٔ M انتهای دیگر این پل باشد. خطی از نقطهٔ M موازی خط N′B می‌گذرانیم، و فرض می‌کنیم L نقطهٔ برخورد این خط با نزدیکترین لبهٔ رودخانهٔ اوّلی به M باشد. پل رودخانهٔ اوّلی باید در L ساخته شود.



۱۵. تبدیل تصویری خط l_1 به شرح زیر را در نظر می‌گیریم : l_1 را بر l_2 از P تصویر می‌کنیم، سپس l_2 را به موازات خود به اندازهٔ a_2 انتقال می‌دهیم، بعد l_2 را بر l_1 از P تصویر می‌کنیم، و بعد l_1 را به موازات خود به فاصلهٔ a_1 انتقال می‌دهیم. روشن است که نقطهٔ مطلوب X_1 یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است ($X_1 \to X_2 \to Y_2 \to Y_1 \to X_1$ شکل)، و بنابراین می‌تواند پیدا شود. چون انتقال بر روی یک خط ممکن است در دو جهت صورت گیرد، مسأله ممکن است تا چهار جواب داشته باشد. در حالت استثنایی که تبدیل بالا به تبدیل همانی بدل می‌شود، مسأله ممکن است نامعین باشد (این حالت زمانی پیش می‌آید که خطهای l_1 و l_2 بر اثر تجانس به مرکز P و نسبت $\pm a_1/a_2$ متناظر شوند).

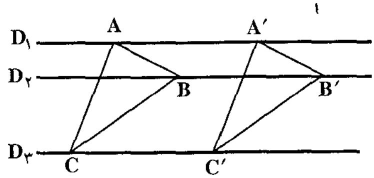
۱۶. اگر M′N′ پاره خط مورد نظر باشد، چهار ضلعی MM′N′N متوازی‌الاضلاع است، پس M′N′ موازی و مساوی MN است ؛ یعنی $N' = T_{\overrightarrow{MN}}(M')$. بنابراین برای حل مسأله ضلع Ox را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا ضلع Oy را در N′ قطع کند. از N′ موازی MN رسم می‌کنیم، M′ به دست می‌آید. و از آن جا پاره خط M′N′ جواب مسأله است.



۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۷. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۸. دو رأس A و B از مثلث ABC روی دو خط متوازی D_1 و D_2 می‌لغزند، مکان هندسی رأس C خط D_3 موازی آنها است. زیرا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ می‌باشد و $A'B'C'$ از ABC با انتقالی برابر $\overrightarrow{AA'}$ به دست می‌آید و $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.



۱۹. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۰.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۰. ۱. داریم $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{V}$، پس M' انتقال یافتهٔ نقطهٔ M و N' انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ N است.

۲. انتقال، طول پاره خطها را حفظ می‌کند پس دو مثلث AMN و $A'M'N'$ که ضلعهای متناظر برابر دارند، همنهشتند.

۳.۱. انتقال در مثلث

۱.۳.۱. بردار انتقال

۲۱. می‌دانیم که MN موازی BC و مساوی نصف آن است. بنابراین نقطهٔ N انتقال یافتهٔ نقطهٔ M به اندازهٔ بردار انتقال $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ است.

۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

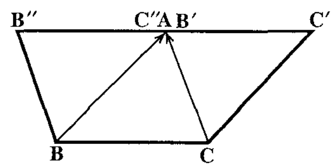
۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند

۲۲. چون در هر مثلث سه نقطهٔ O، H و G همخطند (خط اولر) بنابراین انتقال یافته‌های آنها به اندازهٔ هر بردار انتقال مخالف صفر نیز همخطند.

۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۱. خطها موازی‌اند

۲۳. انتقال یافتهٔ ضلع BC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BA}$ را $B'C'$ می‌نامیم و B' بر A منطبق می‌شود و $B'C'$ موازی و مساوی BC است. انتقال یافتهٔ ضلع BC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{CA}$ را $B''C''$ می‌نامیم. C'' بر A منطبق است و $C''B''$ موازی BC و مساوی آن است. بنابراین $B''AC'$ خط راستی موازی BC است.



۴.۳.۱. زاویه

۱.۴.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۲۴. با توجه به شکل بسادگی مشخص می‌شود که $C\hat{C'}C'' = \hat{B}+\hat{C}$ است.

۵.۳.۱. پاره خط

۱.۵.۳.۱. رابطهٔ بین پاره خطها

۲۵. ثابت کنید، با انتقالهای مناسب موازی، پاره خطهای راست KN، MF و GL، به ضلعهای یک مثلث تبدیل می‌شوند.

۶.۳.۱. رابطه‌های متری

۲۶. در مثلث $A'B''C'$ داریم :

$$B''\hat{A}'C' = \hat{A}+\hat{C} = ۵۰° + ۷۰° = ۱۲۰° \text{ و } A'B'' = AB = C \text{ و } A'C' = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{A'B''C'} = \frac{۱}{۲}A'B''.A'C' \sin B''\hat{A}'C' = \frac{۱}{۲}\times C \times \frac{a}{۲} \times \sin ۱۲۰° = \frac{\sqrt{۳}}{۸}ac$$

به همین ترتیب مساحت مثلثهای دیگر محاسبه می‌شود.

۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند

۲۷. چون $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BC'}$ است ؛ پس مثلث $AC'B'$ انتقال یافتهٔ مثلث $BA'C'$ به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{BC'} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BA}$ است. مثلثهای $A'B'C$ و $AC'B'$ نیز در انتقالی با بردار انتقال $\frac{۱}{۲}\overrightarrow{CA}$ انتقال‌یافتهٔ یکدیگرند. بقیهٔ مثلثهای متناظر را به سادگی می‌توان پیدا کرد.

۸.۳.۱. رسم شکلها

۲۸. شکل سنگفرش از آجرهای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید ؛ که در هر رأس آن، شش مثلث در کنار هم قرار گرفته‌اند.

۲۹. اگر $M'N'$ پاره‌خط جواب مسأله باشد به قسمی که M' روی AB و N' روی AC باشد، برای حل مسأله ضلع AB را به اندازهٔ بردار MN انتقال می‌دهیم. نقطهٔ N' به دست می‌آید و از آن جا با رسم خطی موازی MN، نقطهٔ M' حاصل می‌شود. شرط وجود جواب چیست؟

۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰. ملاحظه می‌کنیم که مثلث BDE از انتقال مثلث DAF (در راستای AB و به طول AD) به دست می‌آید. در نتیجه پاره خطهای واصل بین نقطه‌های متناظر این دو شکل، دو به دو مساوی و موازی یکدیگرند. پس :

$$O_1O_2 = Q_1Q_2 \quad , \quad Q_1Q_2 \| O_1O_2$$

به طریق مشابه داریم :

$$O_2O_3 = Q_2Q_3 \quad , \quad Q_2Q_3 \| O_2O_3$$

و

$$O_3O_1 = Q_3Q_1 \quad , \quad Q_3Q_1 \| O_3O_1$$

بنابراین مثلثهای $O_1O_2O_3$ و $Q_1Q_2Q_3$ با هم قابل انطباقند. (زیرا، ضلعهای متناظر موازی‌اند، یعنی، یک مثلث از انتقال مثلث دیگر به دست می‌آید.)

۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی

۳۱. ۱. نقطهٔ برخورد دو خط را G بنامید و ثابت کنید که خط سوم نیز از این نقطه می‌گذرد و این نقطه مرکز ثقل مثلث ABC است.

۲. در مثلث $A'B''C'$ داریم : معلوم $= B''\hat{A}'C' = \hat{A} + \hat{C}_1$ و $A'C' = \frac{2}{3}m_c$ و $A'B'' = C$ ؛ از آن جا اندازهٔ ضلع $B''C'$ محاسبه می‌شود. به همین ترتیب ضلعهای دیگر و از آن جا محیط مثلث مورد نظر به دست می‌آید.

۴.۱. انتقال در چند ضلعیها

۱.۴.۱. بردار انتقال

۳۲. مثلث K را طوری در نظر می‌گیریم که رأسهای آن بر رأسهای چند ضلعی M واقع و در ضمن، حداکثر ممکن مساحت را داشته باشد. در این صورت، چند ضلعی M در درون

مثلث K' واقع می‌شود که از تجانس K با ضریب ۲− به دست می‌آید. برای این منظور، باید از هر رأس مثلث، خط راستی موازی ضلع روبه‌روی آن رسم کرد. اکنون روشن است که M در تجانس به ضریب $-\frac{۱}{۲}$، به شکلی تبدیل می‌شود که می‌توان آن را طوری انتقال داد که در درون مثلث K قرار گیرد.

۳۳. گزینهٔ (ج) درست است.

۱.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۳۴. انتقال یافتهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با هر بردار انتقالی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. $A'B'C'D'$ نیز ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی محاطی است ؛ یعنی دایره‌ای وجود دارد که بر رأسهای آن می‌گذرد.

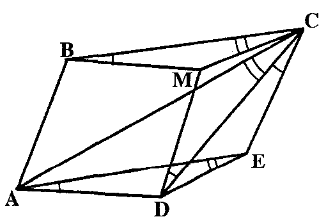
۱.۴.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۴.۱. خطها همرسند

۳۵. در چهار ضلعی $ABCD$ خطهای MP، NQ و EF همرسند. بنابراین انتقال یافته‌های آنها نیز همرسند.

۱.۴.۴. زاویه

۱.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها



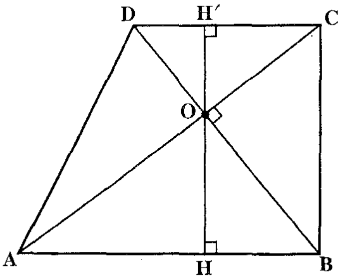
۳۶. E را رأس مثلث ADE می‌گیریم که از انتقال مثلث BMC به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{BA}$ به دست آمده باشد (شکل) ؛ در این صورت $MDEC$ متوازی الاضلاع است و زاویه‌های EAD، CBM، CDMو ECD برابر می‌شوند و نقطه‌های A، C ، E و D روی محیط یک دایره قرار می‌گیرند. بنابراین زاویه‌های ACD، AED و BCM هم برابر می‌شوند.

۱.۴.۵. پاره خط

۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۳۷. اگر در ذوزنقه‌ای دو قطر بر هم عمود باشند، $\frac{OH}{OH'}=\frac{a}{b}$ بعلاوه، داریم :

$\frac{OH'}{OH}=\frac{b}{a}$. از آن‌جا $\frac{OH}{HH'}=\frac{a}{a+b}$.



۱.۴.۵.۲. رابطهٔ بین پاره خطها

۳۸. AD و BC را قاعده‌های ذوزنقهٔ ABCD، M را میانگاه پاره خط BC و N را میانگاه پاره‌خط AD در نظر بگیرید. در انتقال $T_{\overrightarrow{BM}}$ نقطهٔ B به نقطهٔ M و نقطهٔ A به نقطهٔ A_1 منتقل می‌شود. در انتقال $T_{\overrightarrow{CM}}$ نقطهٔ C به نقطهٔ M و نقطهٔ D به نقطهٔ D_1 منتقل می‌گردد.

آن گاه داریم :

$$A_1N = AN - AA_1 = AN - BM \qquad (۱)$$

$$ND_1 = ND - D_1D = ND - MC \qquad (۲)$$

با جمع کردن تساویهای (۱) و (۲) به

$$A_1N + ND_1 = AN + ND - (BM + MC) = AD - BC$$

می‌رسیم. ولی $A_1N + ND_1 = A_1D_1$ بوده و از این رو $A_1D_1 = AD - BC$ (۳) حاصل می‌شود. به دلیل $A_1N = ND_1$ ، MN میانهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ A_1MD_1 است.

بدین ترتیب $MN = \frac{1}{2}A_1N + ND_1$ خواهد بود. با در نظر گرفتن تساوی (۳) در می‌یابیم

که :

$$MN = \frac{1}{2}A_1D_1 = \frac{1}{2}(AD - BC)$$

۶.۴.۱. رابطه‌های متری

۳۹. رأسهای ذوزنقه را با A، B، C و D نشان می‌دهیم ($AC=13cm$ ، $BD=20cm$ و $AD+BC=21cm$)، آن‌گاه $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC)h$ خواهد بود که در آن، h ارتفاع ذوزنقه است. انتقال $T_{\overrightarrow{BC}}$ را مورد ملاحظه قرار دهید.

این انتقال نقطهٔ B را به نقطهٔ C و نقطهٔ D را به نقطهٔ D' منتقل می‌سازد. مساحت مثلث ACD' برابر $\frac{1}{2}AD'h$ بوده و $AD'=AD+DD'=AD+BC$ است.

بنابراین مساحت ذوزنقهٔ ABCD نیز برابر مساحت مثلث ACD' خواهد بود.

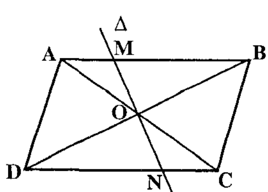
۴۰. یکی از ضلعهای جانبی ذوزنقه را به داخل آن انتقال دهید.

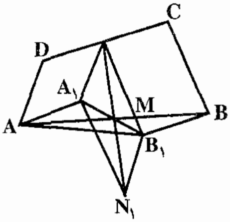
۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند

۴۱. چون $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ و $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FC}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ است، پس متوازی‌الاضلاع EBCF انتقال‌یافتهٔ متوازی‌الاضلاع AEFD به اندازهٔ بردار انتقال $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ است. همچنین متوازی‌الاضلاع AEFD انتقال یافتهٔ متوازی‌الاضلاع EBCF به اندازهٔ بردار انتقال $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ است.

۸.۴.۱. رسم شکلها

۴۲. هر خط که از مرکز متوازی الاضلاع بگذرد، اما بر قطرهای آن منطبق نباشد، جواب مسأله است. به عنوان مثال خط Δ که از نقطهٔ O مرکز متوازی الاضلاع ABCD گذشته و ضلعهای AB و CD را در نقطه‌های M و N قطع کرده است، دو ذوزنقهٔ همنهشت AMND و CNMB را ایجاد می‌کند.



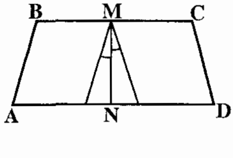


۴۳. فرض کنید که چهار ضلعی مطلوب ABCD رسم شده باشد (شکل). انتقال $T_{\overrightarrow{DN}}$ را روی ضلع DA و انتقال $T_{\overrightarrow{CN}}$ را روی ضلع CB انجام می‌دهیم. در این حالت از نقطهٔ N، سه پاره خط NA_1، NM و NB_1 ناشی می‌شود که طول آنها معلوم است. به آسانی می‌توان نشان داد که M میانگاه پاره خط A_1B_1 است. در حقیقت طول پاره‌خطهای AA_1 و BB_1 برابر $\frac{1}{2}DC$ بوده و این پاره خطها موازی DC هستند. بدین ترتیب چهارضلعی A_1AB_1B متوازی‌الاضلاع خواهد بود. نقطهٔ M میانگاه قطر AB بوده و از این رو M به قطر A_1B_1 متعلق بوده و میانگاه آن محسوب می‌شود. بدین ترتیب در مثلث NA_1B_1 ضلعهای NA_1 ، NB_1 و میانهٔ محصور بین آنها معلوم هستند. برای رسم این مثلث نقطهٔ N_1 را که متقارن N نسبت به مرکز تقارن M است، مشخص می‌کنیم. بدیهی است که $A_1N_1 = NB_1$ است. مثلث NN_1A_1 را می‌توان با سه ضلع معلوم یعنی $A_1N_1 = NB_1 = CB$ و $NA_1 = DA$ و $NN_1 = 2NM$ رسم کرد. حال چهار ضلعی خواسته شده را رسم می‌کنیم.

پاره خط NN_1 را به وسیلهٔ نقطهٔ M به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. با مرکز تقارن M، نقطهٔ B_1 را متقارن نقطهٔ A_1 رسم می‌کنیم. مثلثهای A_1MA و B_1MB را به وسیلهٔ سه ضلع معلوم رسم می‌کنیم. با انتقال پاره خط AA_1 به وسیلهٔ $T_{\overrightarrow{A_1N}}$ و پاره خط BB_1 به وسیلهٔ $T_{\overrightarrow{B_1N}}$ چهار رأس چهار ضلعی مطلوب ABCD به دست می‌آید. به آسانی می‌توان ثابت کرد که جواب منحصر به فرد است.

۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۴. رابطهٔ $BC \parallel AD$ را فرض کرده و تصویرهای پاره خطهای AB و CD را در انتقالهای $T_{\overrightarrow{BM}}$ و $T_{\overrightarrow{CM}}$ مورد ملاحظه قرار دهید. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ مثلث حاصله، در همان حال، میانه نیز هست.



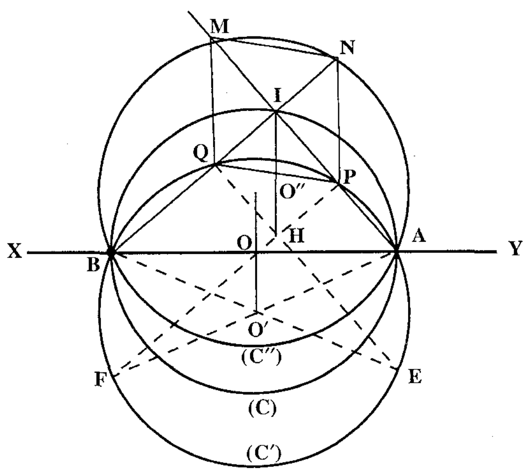
۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۶. ۱. از نقطه‌های A، B، C و D بردارهایی همسنگ بردار $\overrightarrow{CA}$ رسم می‌کنیم. لوزی $A'B'C'D'$ ایجاد می‌شود که C' بر A منطبق است.

۲. چهار ضلع این چهار ضلعی موازی و مساوی‌اند پس لوزی است.

۳. ذوزنقه متساوی‌الساقین است که در آن قاعدهٔ بزرگ دو برابر قاعدهٔ کوچک است.

۴۷. چون در لوزی قطرها بر هم عمودند، لذا اگر I محل تلاقی قطرهای لوزی باشد، $B\hat{I}A = 90°$ است و دایرهٔ (C) به قطر AB از I می‌گذرد و این دایره مکان I محل تلاقی قطرهای آن است. در صورتی که MNPQ یک وضع لوزی باشد چنانچه $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{AE}$ را همسنگ $\overrightarrow{MQ}$ رسم نماییم، چهار ضلعی AEQM و BFPN متوازی‌الاضلاع بوده و نقطه‌های E و F ثابت می‌باشند و $\overline{AM} \underline{\underline{\parallel}} \overline{EQ}$ و $BN \underline{\underline{\parallel}} FP$ و در نتیجه EQ بر BQ و



FP نیز بر AM عمود است و مثلثهای $B\overset{\Delta}{\hat{Q}}E$ و $A\overset{\Delta}{\hat{P}}F$ قائم‌الزاویه بوده و وترهای آنها با هم برابر و قطرهای مستطیل ABEF می‌باشند و دایرهٔ (C') به قطر $AF = BE$ و پیوسته از P و Q می‌گذرد و این دایره مکان رأسهای P و Q می‌باشد و مکان دو رأس دیگر M و N دایرهٔ دیگری مانند (C'') است که از انتقال دایرهٔ (C') همسنگ با بردار $\overrightarrow{QM} \underline{\underline{\parallel}} \overrightarrow{EA}$

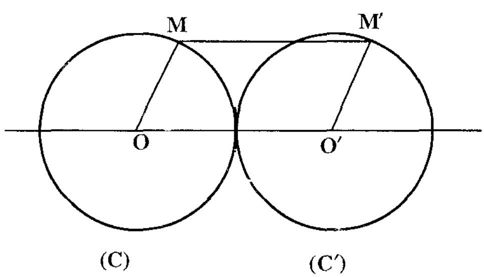
به دست می‌آید. (چون OO' وسط $\overline{BE}$ را به وسط $\overline{BA}$ وصل نموده، پس $\overline{OO'} \underline{\underline{\parallel}} \frac{\overline{AE}}{۲}$ یا $AE = O'O''$ و از آن جا می‌توان گفت دایرهٔ (C'') قرینهٔ دایرهٔ (C') نسبت به AB است.

۲. چهار ضلعی $IPHQ$ مستطیل بوده و $\overline{IH}$ از U وسط PQ می‌گذرد و در نتیجه $\overline{MQ} \underline{\underline{\parallel}} \overline{IH}$ و $\overline{IU} = \frac{\overline{MQ}}{۲}$ یعنی مکان U وسط PQ از انتقال دایرهٔ (C) به قطر AB (مکان I) به اندازهٔ بردار $\frac{\overrightarrow{MQ}}{۲}$ و مکان وسط $\overline{MN}$ با انتقال دایرهٔ به قطر AB، همسنگ با بردار $\frac{\overrightarrow{QM}}{۲}$ به دست می‌آید و همچنین مکان وسطهای $\overline{MQ}$ و $\overline{PN}$ با انتقال مکان P و Q همسنگ با بردار $\frac{\overrightarrow{QM}}{۲}$ به دست می‌آید.

۵.۱. انتقال در دایره

۱.۵.۱. بردار انتقال

۴۸. اگر دو شعاع موازی و همجهت OM و $O'M'$ را رسم کنیم، بردار ثابت $= \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM'}$ می‌باشد ؛ پس M' انتقال یافتهٔ نقطهٔ M به اندازهٔ بردار انتقال ثابت $\overrightarrow{OO'}$ است. بنابراین دایرهٔ O' انتقال یافتهٔ دایرهٔ O به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{OO'}$ می‌باشد.



۲.۵.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

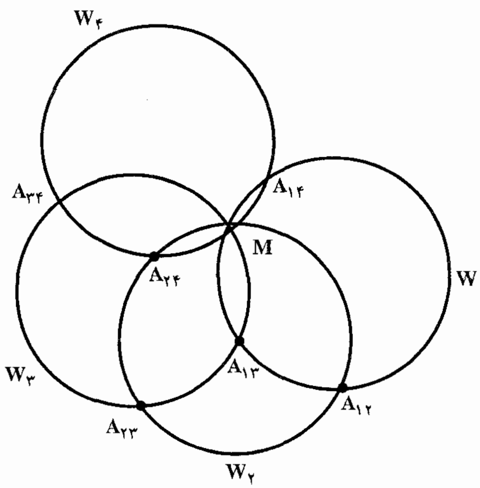
۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۹. انتقال یافتهٔ نقطهٔ O مرکز دایرهٔ داده شده را O' می‌نامیم (O' نقطهٔ ثابتی است) به دلیل برابری $OA = OB = OC$ و تبدیل انتقال $O'A' = O'B' = O'C'$ است ؛ پس سه نقطهٔ A' ، B' و C' همدایره‌اند.

۳.۵.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۵.۱. خطها همرسند

۵۰. به کمک شکل، مطلب را برای دو پاره خط به عنوان مثال $A_{12}A_{43}$ و $A_{23}A_{14}$ ثابت کنید.



۴.۵.۱. زاویه

۱.۴.۵.۱. اندازهٔ زاویه

۵۱. انتقال $T_{\overrightarrow{AC}}$ را در نظر بگیرید. نقطهٔ L متناظر به نقطهٔ K را رسم کرده و در می‌یابیم که : $CL \| AK$ ، $K\hat{C}L = 90^\circ$ ، در نتیجه $A\hat{K}C = 90^\circ$ خواهد بود.

۱.۵.۵. پاره خط

۱.۱.۵.۵. اندازهٔ پاره خط

۵۲. اگر مرکزهای دایره‌های مفروض را با O_1 و O_2 نشان دهیم، آن گاه انتقال $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$ دایرهٔ با مرکز O_1 را به دایره‌ای با مرکز O_2 منتقل می‌سازد. در این انتقال نقطهٔ A به نقطهٔ C و نقطهٔ B به نقطهٔ D می‌رود. در نتیجه $AC = BD = O_1O_2 = d$ خواهد بود.

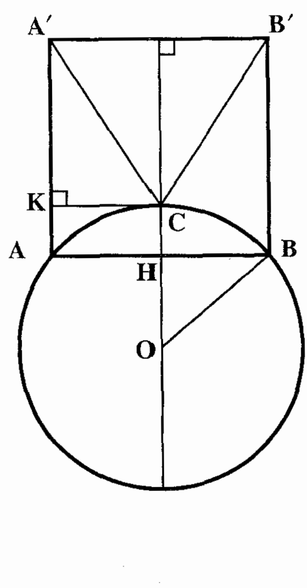
۱.۵.۶. رابطه‌های متری

۵۳. نقطهٔ برخورد AB با CD، قطر عمود بر آن را H می‌نامیم. و از C عمود CK را بر AA' فرود می‌آوریم. با توجه به برابری $AH = HB$ داریم:

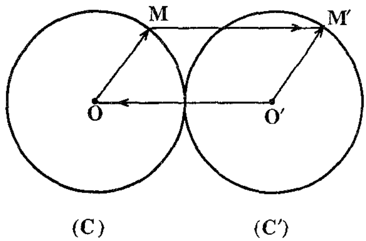
$$AH = HB = ۴\ ,\ OB = ۵ \Rightarrow OH = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = ۳$$

$$HC = AK = ۲ \Rightarrow A'K = ۱۰ - ۲ = ۸\ ,\ CK = ۴ \Rightarrow A'C = \sqrt{۶۴ + ۱۶} = ۴\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow A'C + B'C = ۸\sqrt{۵}$$



۷.۵.۱. ثابت کنید شکلها انتقال یافتهٔ یکدیگرند



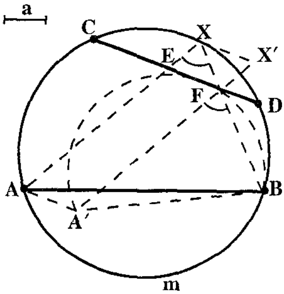
۵۴. دو شعاع دلخواه موازی و همجهت OM و $O'M'$ از دو دایره را رسم می‌کنیم و از M به M' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی $OMM'O'$ متوازی الاضلاع است؛ زیرا $OM \| O'M'$ و $OM = O'M'$ اســت.

بنابراین $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$ و نقطهٔ M' انتقال یافتهٔ نقطهٔ M به اندازهٔ بردار انتقال ثابت $\overrightarrow{OO'}$ است. پس دایرهٔ (C') انتقال یافتهٔ دایرهٔ (C) به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{OO'}$ می‌باشد. بدیهی است که دایرهٔ (C) نیز انتقال یافتهٔ دایرهٔ (C') به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{O'O}$ است.

۸.۵.۱. رسم شکلها

۵۵. این راه حل به این ترتیب است که دایرهٔ داده شدهٔ O را به بردار $\overrightarrow{a}$ انتقال می‌دهیم تا به دایرهٔ O' تبدیل شود. هرگاه C و B نقطه‌های برخورد دو دایره باشند، از این نقطه‌ها موازی با a رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در D و A قطع کنند.

۵۶. فرض کنید مسأله حل شده است. پاره خط AX را در راستای خط CD و به طول $EF = a$ انتقال می‌دهیم و فرض می‌کنیم $A'X'$ وضع جدید آن باشد (شکل). واضح است که $A'X'$ از نقطهٔ F مــی‌گــذرد. بــه عــلاوه چــون $A'\hat{F}B = A\hat{X}B = \frac{1}{2}\widehat{AmB}$؛ پس می‌توانیم زاویهٔ $A'FB$ را معلوم بگیریم.



بنابراین ترسیم زیر را داریم: نقطهٔ A را در راستای وتر CD و به طول a انتقال داده موقعیت جدیدش را A'

می‌نامیم. با استفاده از پاره خط $A'B$ به عنوان یک وتر، کمان درخور زاویهٔ AXB را بر روی آن رسم می‌کنیم (یعنی، اگر Y نقطه‌ای روی این کمان باشد، آن گاه $A'\hat{Y}B = A\hat{X}B = \frac{1}{2}\widehat{AmB}$).

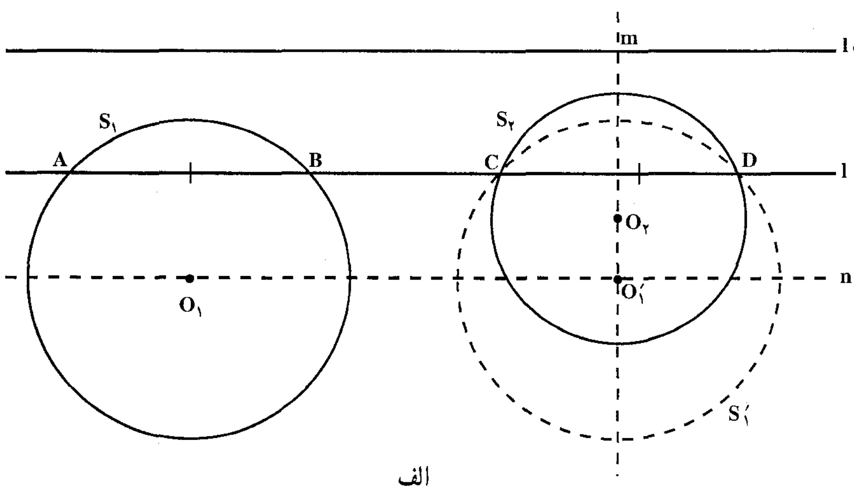
اگر این کمان وتر CD را در دو نقطه قطع کند، یکی از آن دو نقطه می‌تواند نقطهٔ F اختیار شود، و X می‌تواند از برخورد دایرهٔ اوّلی با خط BF به دست آید. در این حالت مسأله دو جواب دارد.

اگر این کمان بر CD مماس باشد، نقطهٔ F باید نقطهٔ تماس گرفته شود و مسأله در این حالت فقط یک جواب دارد.

اگر کمان اصلاً CD را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع کند (نقطه‌های E و F در خارج دایره بر امتداد وتر CD واقع باشند)، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (این امر ناشی از یک واقعیت است که A می‌تواند در هر دو جهت انتقال یابد.)

۵۷. الف. فرض کنید مسأله حل شده و خط l دایره‌های S_1 و S_2 را در نقطه‌های A، B و C، D قطع کرده است (شکل الف). دایرهٔ S_1 را به طول AC در راستای خط l انتقال داده، فرض می‌کنیم S'_1 وضع جدید آن باشد. چون $AB = CD$، پس پاره خط AB بر CD منطبق خواهد شد، و در نتیجه O_2 و O'_1، مرکزهای دایره‌های S_2 و S'_1، هر دو بر عمودمنصف پاره خط CD قرار می‌گیرند.

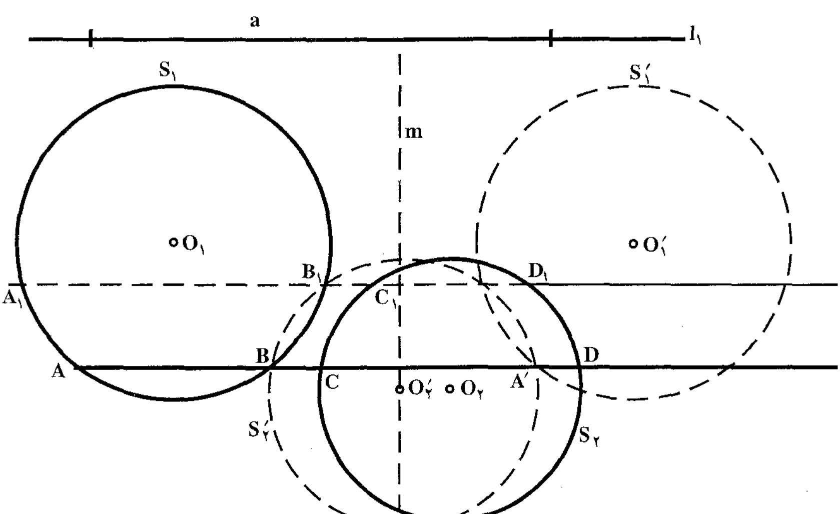


الف

پس ترسیم صفحه قبل به دست می‌آید: گیریم m خط عمود بر l_1 گذرنده بر O_2، مرکز دایرهٔ S_2 باشد. گیریم n خط موازی l_1 گذرنده بر O_1، مرکز دایرهٔ S_1 باشد؛ فرض می‌کنیم O'_1 نقطهٔ برخورد این دو خط باشد. S_1 را به وضع جدید S'_1 به مرکز O'_1 انتقال می‌دهیم. خط گذرنده بر نقطه‌های برخورد S_2 و S'_1 جواب مسأله است.

مسأله ممکن است، یک جواب داشته باشد و یا اصلاً جواب نداشته باشد.

ب. فرض کنید مسأله حل شده و خط l دایره‌های S_1 و S_2 را در نقطه‌های A، B و C، D قطع کرده است؛ پس $AB + CD = a$ (شکل ب). دایرهٔ S_1 را در راستای l به طول a انتقال داده، وضع جدیدش را با S'_1 نشان می‌دهیم؛ پس $AA' = a = AB + CD$، یعنی $BA' = CD$؛ بنابراین اگر دایرهٔ S_2 در راستای l به وضع جدید S'_2 چنان انتقال داده شود که مرکز آن O'_2 بر عمود منصف m از پاره خط $O_1O'_1$ قرار گیرد، (O_1 و O'_1 مرکزهای دایره‌های S_1 و S'_1 هستند) وتر CD از دایرهٔ S_2 به BA' منتقل می‌شود؛ پس ترسیم زیر به دست می‌آید: دایرهٔ S_1 را به طول a در راستای خط l_1 انتقال داده وضع جدیدش را S'_1 می‌نامیم؛ سپس S_2 را در راستای l_1 به وضع جدید S'_2 چنان انتقال می‌دهیم که مرکز آن بر خط m، عمود منصف پاره خط $O_1O'_1$، قرار گیرد. نقطه‌های برخورد دایره‌های S_1 و S'_2 (که در نمودار، نقطه‌های B و B_1 هستند) خطهای خواسته‌شده را مشخص می‌کنند. مسأله حداکثر دو جواب دارد؛ تعداد جوابها بستگی به تعداد نقطه‌های برخورد دایره‌های S_1 و S'_2 دارد (حالتی که دو جواب l و l' وجود دارند در شکل ب نشان داده شده است).



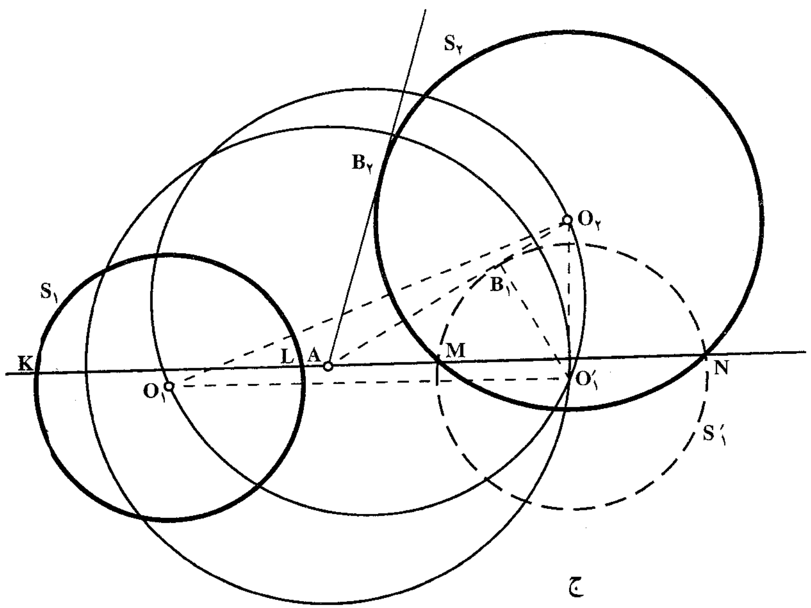
ب

قسمت دیگر مسأله را که مربوط به معلوم بودن تفاضل طولهای وترهایی است که S_1 و S_2 روی خط l پدید می‌آورند، می‌توان به طریقی مشابه حل کرد.

ج. فرض کنید مسأله حل شده است. دایرهٔ S_1 را در راستای خط KN چنان انتقال می‌دهیم که پاره خط KL بر MN منطبق شود؛ دایرهٔ جدید حاصل را با S'_1 نشان می‌دهیم (شکل ج). پس دایره‌های S_2 و S'_1 در وتر MN مشترک هستند.

گیریم AB_1 و AB_2 بترتیب مماسهای رسم شده از نقطهٔ A بر دایره‌های S'_1 و S_2 باشند (نقطه‌های تماس به ترتیب B_1 و B_2 هستند). پس

$$(AB_2)^2 = AM.AN \quad (AB_1)^2 = AM.AN$$



ج

و بنابراین

$$(AB_1)^2 = (AB_2)^2$$

حال می‌توانیم: AO'_1 را تعیین کنیم (O'_1 مرکز S'_1 است).

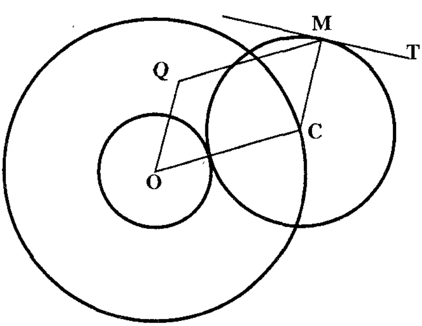
$$AO'_1 = \sqrt{(O'_1B_1)^2 + (AB_1)^2} = \sqrt{r_1^2 + (AB_2)^2}$$

که در آن r_1 شعاع S_1 است؛ افزون بر این، می‌دانیم که $O_1\hat{O'_1}O_2$ یک زاویهٔ قائمه است، زیرا خط O'_1O_2 گذرنده بر مرکزهای S'_1 و S_2 بر وتر مشترک آنها، MN، و بنابراین، بر $O_1O'_1$ که موازی با l است نیز عمود می‌شود. با توجه به این امر می‌توانیم

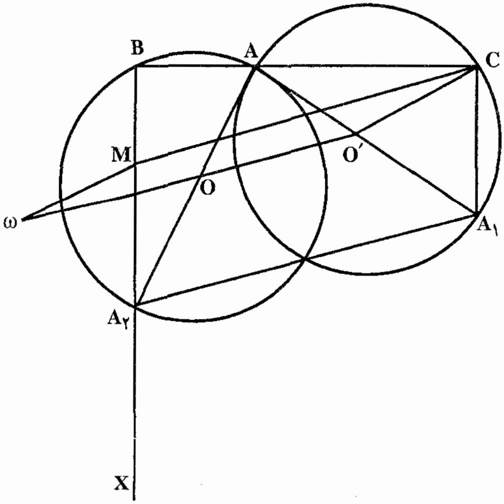
انتقالی که S_1 را به S'_1 بدل می‌کند، مشخص کنیم.

از ترسیم زیر استفاده می‌کنیم. دایره‌ای به شعاع $\sqrt{r_1^2+(AB_2)^2}$ و به مرکز A رسم می‌کنیم؛ دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم که O_1O_2 قطر آن باشد. از برخورد این دو دایره جای O'_1، مرکز دایرهٔ S'_1 با شعاع r_1، مشخص می‌شود. حال M و N نقطه‌های برخورد دایره‌های S_2 و S'_1 را مشخص کرده و خط MN را رسم می‌کنیم، که جواب مسأله خواهد بود. در واقع، نقطهٔ A بر خط MN قرار دارد؛ زیرا در غیر این صورت معادلهٔ $(AB_1)^2=(AB_2)^2$ نمی‌تواند برقرار باشد [اگر خط AM دایره‌های S_2 و S'_1 را در نقطه‌های متمایز N_2 و N_1 قطع کند، آن گاه داریم $(AB_2)^2 = AM.AN_2$ و $(AB_1)^2 = AM.AN_1$]. همچنین $O_2O'_1$ بر MN عمود است و $O_1O'_1$ بر $O_2O'_1$؛ پس $O_1O'_1 \| MN$، یعنی وترهای KL و MN از دایره‌های S_1 و S'_1 به یک فاصله از مرکزهای O_1 و O'_1 قرار دارند. اما این بدان معنی است که طول وترهای KL و MN مساوی‌اند، که همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

۹.۵.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۵۸. دایرهٔ ثابت (O) به شعاع R و دایرهٔ متغیر (C) را به شعاع R' که همواره بر دایرهٔ مفروض (O) و بر امتداد مفروض T نیز مماس می‌باشد، در نظر می‌گیریم. اگر M نقطهٔ تماس باشد، بردار $\overrightarrow{OQ}$ را همسنگ $\overrightarrow{CM}$ رسم می‌کنیم. چون امتداد T ثابت است، نقطهٔ Q ثابت می‌باشد و شکل OQMC متوازی‌الاضلاع است و $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OC}$ است. مکان نقطهٔ C دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $R+R'$ است. پس مکان M دایرهٔ به مرکز Q و به شعاع $R+R'$ می‌باشد که از مکان O با انتقالی برابر $\overrightarrow{OQ}$ به دست می‌آید و مکان دومی نیز وجود دارد که قرینهٔ اوّلی نسبت به O است.



۵۹. دو دایرهٔ متساوی (O) و (O′) متقاطع در A را در نظر می‌گیریم، BX را بر BC، قاطع متغیر گذرنده بر A عمود می‌کنیم که دایرهٔ (O) را در A_2 قطع می‌کند و AA_2 قطری از دایرهٔ (O) است. AO′ نیز دایرهٔ (O′) را در A_1 قطع می‌کند. A_1C بر BC عمود است پس A_1C با BX موازی است. از C خطی به موازات OO′ رسم می‌کنیم که BX را در M قطع می‌کند. شکل CMA_2A_1 متوازی‌الاضلاع است. پس اگر $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{A_1A_2}=2\overrightarrow{O'O}$ را همسنگ $\overrightarrow{A_2A_1}$ رسم کنیم، شکل O′CMω نیز متوازی‌الاضلاع می‌باشد. $\overrightarrow{\omega M}=\overrightarrow{O'C}$ است. نقطهٔ ω ثابت است؛ پس مکان M دایره‌ای است به مرکز ω و برابر با دایره‌های مفروض که از انتقال دایرهٔ (O′) با انتقالی برابر با $2\overrightarrow{O'O}$ یا $\overrightarrow{A_1A_2}$ به دست می‌آید.

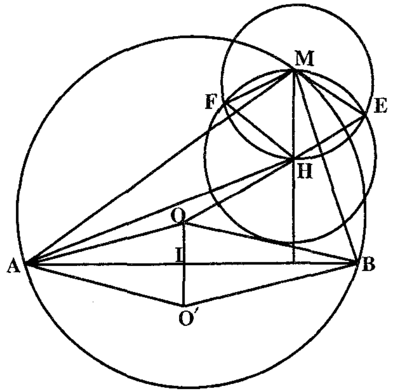
۶۰. مکان هندسی نقطه M انتقال‌یافتهٔ دایرهٔ به قطر OO′ به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OA}$ و مکان هندسی نقطهٔ M قرینهٔ مکان هندسی نقطهٔ M نسبت به نقطهٔ A است.

۱۰.۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۶۱. الف. می‌دانیم: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}$

و اگر I وسط AB باشد: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

پس: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MH}$ و از آن جا $\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{OI}$؛ بنابراین مکان H از مکان M با انتقالی برابر $2\overrightarrow{OI}$ یا $\overrightarrow{OO'}$ (O′ قرینهٔ O نسبت به AB) به دست می‌آید و



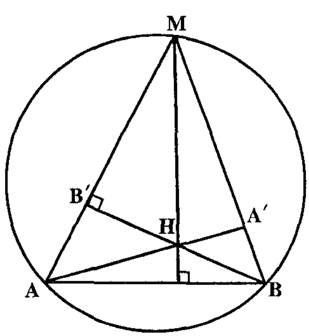
دایره‌ای است به مرکز O' و برابر با دایرهٔ (O).

ب. مثلثهای MEH و MFH متساوی الاضلاعند. بردارهای $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{MF}$ با $\overrightarrow{MH}$ برابر بوده و با آن زاویهٔ °۶۰ می‌سازد، از مکان M به مکان نقطه‌های E و F با انتقالی به طول OO' که با MH زاویهٔ °۶۰ می‌سازد، می‌توان رسید. پس مکان نقطه‌های E و F دو دایرهٔ برابر با دایرهٔ (O) می‌باشند که مرکزهای آنها رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی است که روی OO' ساخته شود.

راه دیگر. به روشی دیگر می‌توان مکان نقطهٔ H را به دست آورد : ثابت شد $\overrightarrow{MH} = ۲\overrightarrow{OI}$.

پس اگر قرینهٔ نقطهٔ O را نسبت به AB نقطهٔ O' بنامیم، $\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{HM}$ خواهد شد. در نتیجه چهار ضلعی $OMHO'$ متوازی‌الاضلاع می‌شود. پس $OA = O'H = R$ خواهد شد یعنی مکان نقطهٔ H دایره‌ای است به مرکز O' قرینهٔ O نسبت AB و به شعاع R یا به عبارت دیگر اگر دایرهٔ O را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OO'}$ انتقال بدهیم، مکان به دست می‌آید.

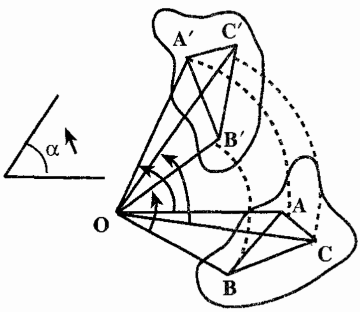
راه دیگر. چهار ضلعی $MB'HA'$ محاطی است و چون اندازهٔ زاویهٔ M همواره مقدار ثابتی است.



پس : $A'\hat{H}B' = B\hat{H}A = \pi - \hat{M}$ مقدار ثابتی خواهد بود یعنی مکان نقطهٔ H کمان درخور زاویهٔ $\hat{M}$ − °۸۰ مقابل به پاره‌خط ثابت AB است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲. دوران

۱.۲. تعریف و قضیه



۶۲. اگر A، B و C سه نقطهٔ دلخواه از شکل F و A′ ،B′ و C′ وضعهای جدید آنها پس از دوران در حول مرکز O به اندازهٔ α باشند (شکل)، دو مثلث A′B′C′ و ABC به حالت تساوی سه ضلع همنهشتند. اما دلیل آن که ضلعهای این دو مثلث با هم برابرند، چنین است :

۱. $\Delta OA'B' \cong \Delta OAB$ ، چون که :

$$OB' = OB \text{ و } OA' = OA$$

و

$$A'\hat{O}B' = A\hat{O}B = \alpha - A\hat{O}B'$$

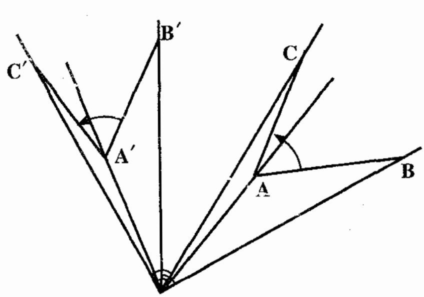
پس : $A'B' = AB$.

۲. به دلیل مشابه، $\Delta OA'C' \cong \Delta OAC$ ؛ پس : $A'C' = AC$.

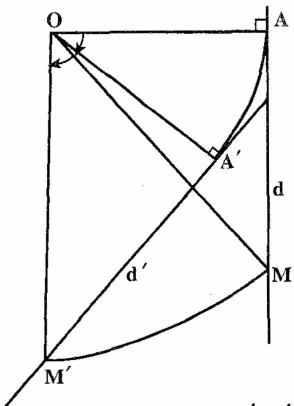
۳. به دلیل مشابه، $\Delta OB'C' \cong \Delta OBC$ ؛ پس : $B'C' = BC$.

حال اگر A′B′ (از مثلث A′B′C′) را به وسیلهٔ لغزاندن در صفحه بر AB (از مثلث ABC) منطبق سازیم، C′ هم بر C منطبق می‌شود ؛ و به همین ترتیب، هر یک از نقطه‌های شکل F′ بر نقطهٔ نظیرش از شکل F منطبق خواهد شد ؛ یعنی دو شکل همنهشتند.

نتیجهٔ ۱. دوران یافتهٔ هر پاره‌خط، پاره‌خطی همنهشت با آن است.



نتیجهٔ ۲. دوران یافتهٔ هر زاویه، زاویه‌ای همنهشت و همجهت با آن است (در صورتی که زاویه‌ها در صفحهٔ جهت‌دار باشند).



۶۳. دوران R_O^a و خط d را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ O (مرکز دوران) عمودی بر d رسم می‌کنیم تا آن را در A قطع کند (شکل). فرض می‌کنیم A' دوران یافتهٔ A است. نقطهٔ دلخواه M را روی d اختیار و M' (دوران یافتهٔ M) را تعیین می‌کنیم. بسادگی دیده می‌شود که :

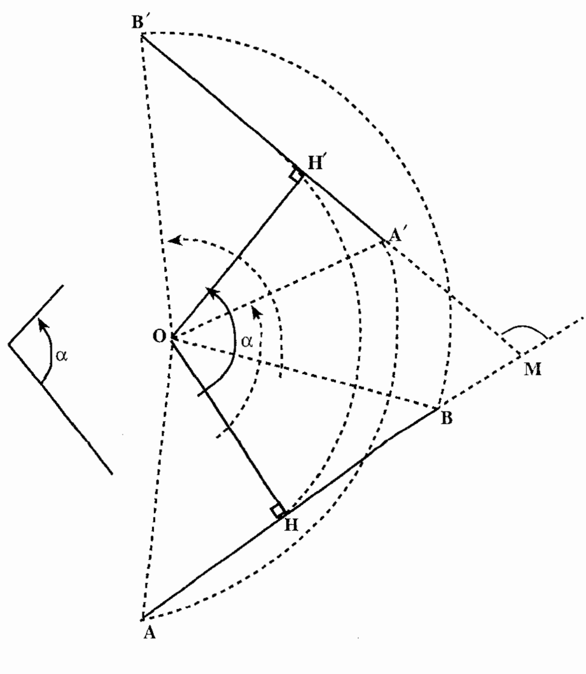
$$A\hat{O}M = A'\hat{O}M' \ , \quad OA = OA' \ , \quad OM = OM'$$

پس :

$$\Delta OAM = \Delta OA'M' \Rightarrow O\hat{A'}M' = O\hat{A}M$$

پس $A'M'$ بر OA' عمود است و در نتیجه دوران یافتهٔ هر نقطهٔ خط d بر خطی مانند d' که در A' بر OA' عمود است، قرار دارد. بعکس می‌توان ثابت کرد که هر نقطهٔ دلخواه N' از d' با دورانی گرد O به زاویهٔ $\alpha-$ بر نقطه‌ای مانند N از خط d منطبق می‌گردد. پس d' دوران یافتهٔ خط d گرد O به زاویهٔ α می‌باشد.

۶۴. هرگاه $A'B'$ و AB (شکل) دو پاره‌خط متناظر، در دوران به مرکز O و به زاویهٔ α



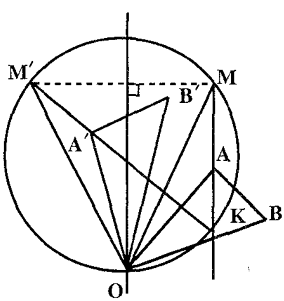
($-180^\circ \le \alpha \le 180^\circ$) باشند، و از مرکز دوران O عمودهای OH و OH' را بترتیب بر AB و $A'B'$ فرود می‌آوریم :

$$A'H' = AH$$

(به دلیل آن که در دو شکل همنهشت، همهٔ اجزای متناظر، متساوی‌اند.) پس H' وضع جدید H است و $H\hat{O}H' = \alpha$.

حال اگر M نقطهٔ برخورد $A'B'$ و AB باشد، چهارضلعی $OH'MH$ (که دو زاویهٔ روبه‌روی آن قائمه است) محاطی است و در آن، زاویه‌های M_1 و $\hat{O} = \alpha$ مکمل یکدیگرند ؛ اما زاویهٔ بین دو امتداد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ نیز مکمل $\hat{M}_1$ است ؛ پس با α مساوی است.

قضیهٔ عکس. اگر به هر نقطه از شکل F ، نقطه‌ای از شکل دیگر F' نظیر شده باشد و این شکلها چنان باشند که پاره‌خطهای متناظر، مساوی باشند و با یکدیگر زاویهٔ α بسازند (به‌طوری که پاره‌خطهای شکل F را، وقتی به زاویهٔ α و در جهت انتخاب شده دوران کنند، با پاره‌خطهای متناظر از شکل F' موازی شوند)، آن‌گاه F و F' با دورانی به زاویهٔ α و حول یک مرکز به هم وابسته‌اند. فرض می‌کنیم M و M' دو نقطهٔ متناظر از شکلهای F و F' باشند. روی پاره‌خط MM' کمان درخور زاویهٔ α را رسم و فرض می‌کنیم O نقطهٔ برخورد این کمان با عمودمنصف پاره‌خط MM' باشد. چون $OM = OM'$ ، و $M\hat{O}M' = \alpha$ است، نتیجه می شود که دوران به مرکز O و زاویهٔ α نقطهٔ M را به M' می‌برد. بعلاوه فرض می‌کنیم A و A' دو نقطهٔ دلخواه و متناظر از شکلهای



F و F' باشند. مثلثهای OMA و $OM'A'$ را درنظر می‌گیریم. داریم $OM = OM'$ ، $MA = M'A'$ و $O\hat{M}A = O\hat{M'}A'$ زیرا زاویه بین OM و OM' مساوی زاویهٔ بین MA و $M'A'$ است. یعنی نقطه‌های M ، M' ، O و K (K نقطهٔ برخورد AM و $A'M'$) بر یک دایره واقعند و زاویه‌های محاطی OMA و $OM'A'$ دارای یک کمان هستند. بنابراین مثلثهای OMA و $OM'A'$ با هم قابل انطباقند. از این‌جا نتیجه می‌شود که $OA = OA'$ ، بعلاوه $A\hat{O}A' = M\hat{O}M' = \alpha$ (زیرا $A'\hat{O}M' = A\hat{O}M$). در

نتیجه دوران به مرکز O و زاویهٔ α هر نقطهٔ Aاز شکل F را به نقطهٔ متناظرش A' از شکل F' می‌برد که همان حکم خواسته شده است.

۶۵. می‌دانیم که وضعهای جدید دو نقطهٔ یک شکل، برای مشخص کردن وضع جدید شکل، کافی است، پس وضع جدید دو نقطه را با وضع قدیم آنها می‌سنجیم.

اگر A' و B' بترتیب وضع جدید دو نقطهٔ A و B از شکل باشد، $A'B'$ و AB ممکن است یکی از این چند صورت را نسبت به هم داشته باشند :

۱. متوازی و در یک جهت باشند.

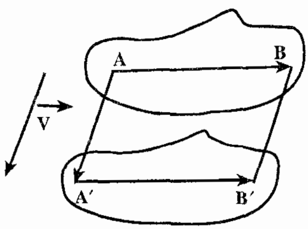
۲. متوازی و در دو جهت مخالف باشند.

۳. متوازی نباشند، اما AA' با BB' موازی باشد.

۴. متوازی نباشند و AA' هم موازی با BB' نباشد.

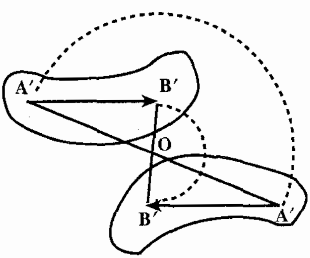
اینک قضیه را در مورد هر یک از این حالتها جداگانه ثابت می‌کنیم :

۱. $A'B'$ و AB متوازی و در یک جهتند (شکل).

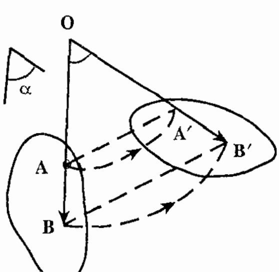


واضح است که انتقالی به اندازهٔ $\vec{V} = \overrightarrow{AA'}$ ، شکل F را به وضع F' درمی‌آورد.

۲. $A'B'$ با AB متوازی و در دو جهت مخالفند (شکل). اگر O مرکز متوازی‌الاضلاع $AB'A'B$ باشد، دورانی به مرکز O و به اندازهٔ 180° ، شکل F را به وضع F' درمی‌آورد.



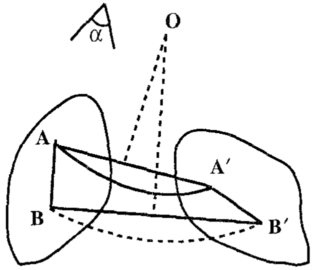
۳. AB با $A'B'$ موازی نیست، اما $AA' \| BB'$ (شکل).



امتدادهای دو ساق AB و $A'B'$ از ذوزنقهٔ متساوی الساقین $AA'B'B$ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند ؛ این نقطه بر روی خطی است که وسطهای دو قاعدهٔ AA' و BB' را به هم وصل می‌کند و بر آنها عمود است، پس دورانی به مرکز O و به اندازهٔ

$\hat{\alpha} = A\hat{O}A'$ ، شکل F را به وضع F' درمی‌آورد.

۴. $A'B'$ با AB و AA' با BB' موازی نیستند (شکل). عمودمنصفهای AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند و دوران به مرکز O و به اندازهٔ $\hat{\alpha} = A\hat{O}A'$ ، شکل F را به وضع F' درمی‌آورد ؛ زیرا که اولاً قوسهایی که به مرکز O و شعاعهای OA و OB رسم می‌کنیم، بترتیب بر A' و B' می‌گذرند، ثانیاً، با مراجعه به شکل می‌بینیم که :

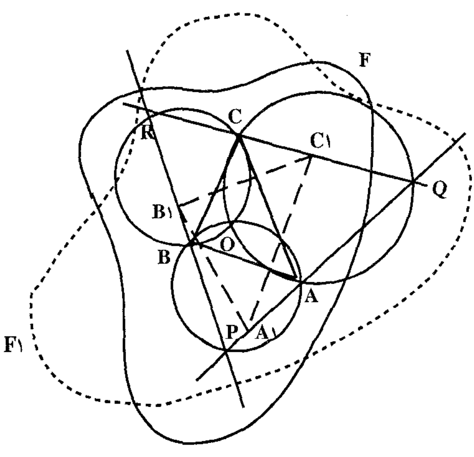


$$A\hat{O}A' = B\hat{O}A' + A\hat{O}B \quad , \quad B\hat{O}B' = B\hat{O}A' + A'\hat{O}B'$$

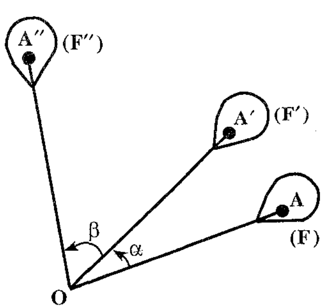
اما به مناسبت همنهشت بودن دو مثلث AOB و $A'OB'$ (به حالت سه‌ضلع)، $A\hat{O}B = A'\hat{O}B'$ ؛ پس : $B\hat{O}B' = A\hat{O}A' = \hat{\alpha}$.

نتیجه. در حالت اوّل، یعنی وقتی که AB با $A'B'$ موازی و در یک جهت است، عمودمنصفهای AA' و BB' باهم موازی‌اند. یا به عبارت دیگر، یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت دور قطع می‌کنند ؛ پس می‌توان گفت که : انتقال، حالت خاصی از دوران، که در آن، مرکز دوران در فاصلهٔ بینهایت دور قرار دارد.

۶۶. نشان می‌دهیم که هر دو وضعیت از F دارای یک مرکز دوران O هستند (یعنی، یک نقطهٔ O از Fطی حرکت F ثابت می‌ماند). از این‌جا نتیجه خواهد شد که همهٔ نقطه‌های F منحنیهایی می‌پیمایند که با خمی که A می‌پیماید، متشابه‌اند، یعنی خطهای راست هستند ؛ و این همان چیزی خواهد بود که می‌خواهیم ثابت کنیم. نقطه‌های برخورد خطهایی را که مسیر حرکت نقطه‌های A ، B و C هستند با حروف P، Q و R نشان می‌دهیم (شکل).



فرض می‌کنیم F و F_1 دو وضعیت از شکل F باشند ؛ وضعیتهای متناظر سه نقطهٔ مورد نظر را به A، B ، C و A_1 ، B_1 ، C_1 نشان می‌دهیم. نقطهٔ Oمرکز دوران شکلهای F و F_1 مرکز دوران پاره‌خطهای ABو A_1B_1 ، ACو A_1C_1 نیز هست. ولی همان‌طور که می‌دانیم مرکز دوران پاره‌خطهای AB و $A'B'$ ، روی دایره‌های محیطی مثلثهای ABQ و $A'B'Q$ قرار می‌گیرد، که در این‌جا Qنقطهٔ برخورد AA' و BB' است ؛ در حالت فعلی این بدان معنی است که O باید روی دایرهٔ محیطی ΔABP (و روی دایرهٔ محیطی ΔA_1B_1P) قرار گیرد. به همین ترتیب مرکز دوران پاره‌خطهای AC و A_1C_1 روی دایرهٔ محیطی مثلث ACQ (و روی دایرهٔ محیطی ΔA_1C_1Q) قرار می‌گیرد. پس مرکز دوران شکلهای F و F_1 همان نقطه برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای ABP و ACQ می‌شود و بنابراین به وضعیت خاص F_1 از شکل بستگی ندارد. اما تعبیر این مطلب این است که هر دو وضعیت دلخواه از شکل، یک مرکز دوران دارند و بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.



۶۷. درستی این قضیه با توجه به تعریف دوران، مشخص است. زیرا اگر نقطهٔ A' دوران‌یافتهٔ نقطهٔ دلخواه Aاز شکل F، نسبت به مرکز دوران O و زاویهٔ دوران α و A'' دوران یافتهٔ نقطهٔ A' نسبت به مرکز دوران O و زاویهٔ دوران β باشد، از رابطه‌های $OA = OA'$ ، $A\hat{O}A' = \alpha$ و $OA' = OA''$ ، $A'\hat{O}A'' = \beta$ و $OA'' = OA$ نتیجه می‌شود که $A''\hat{O}A = \alpha + \beta$ است ؛ و این نشان می‌دهد که نقطهٔ A'' دوران یافتهٔ نقطهٔ A نسبت به مرکز دوران O و زاویهٔ دوران $\alpha + \beta$ است.

۶۸. فرض می‌کنیم شکل F_1 از دوران شکل F به مرکز O_1 و زاویهٔ α به دست آمده باشد، و شکل F' از دوران F_1 به مرکز O_2 و زاویهٔ βدر همان جهت (شکل الف). اگر دوران اوّل، پاره‌خط AB از شکل F را به پاره‌خط A_1B_1 از شکل F_1 بدل کند و دوران دوم پاره‌خط A_1B_1 را به پاره‌خط $A'B'$ از شکل F' بدل کند، آن‌گاه پاره‌خطهای AB و A_1B_1 مساوی‌اند و باهم زاویهٔ α می‌سازند ؛ پاره‌خطهای $A'B'$ و A_1B_1 مساوی‌اند و با هم زاویهٔ β می‌سازند، پس پاره‌خطهای متناظر AB و $A'B'$ از شکلهای F و F' مساوی هستند و باهم زاویهٔ $\alpha + \beta$ می‌سازند ؛ اگر $\alpha + \beta$ برابر 360° باشد، معنای آن

این است که پاره‌خطهای متناظر شکلهای F و F' موازی هستند (اگر بخواهیم دقیقتر باشیم باید بگوییم که اگر $\alpha+\beta$ مضربی از 360° باشد، آن‌گاه پاره‌خطهای متناظر از دو شکل F و F' موازی‌اند. اما می‌توانیم همیشه فرض کنیم که α و β کمتر از 360° هستند، لذا در این حالت $\alpha+\beta$ فقط زمانی مضربی از 360° است که $\alpha+\beta=360^\circ$).

پس، بنابر آنچه قبلاً ثابت شد نتیجه می‌شود که شکلهای F و F' با یک دوران به زاویهٔ $\alpha+\beta$ به هم وابسته‌اند، هرگاه $\alpha+\beta\neq 360^\circ$، و با یک انتقال به هم وابسته‌اند هرگاه $\alpha+\beta=360^\circ$. پس مجموع دو دوران در یک جهت با مرکزهای O_1 و O_2 و زاویه‌های α و β یک دوران به زاویهٔ $\alpha+\beta$ است هرگاه $\alpha+\beta\neq 360^\circ$، و یک انتقال است هرگاه $\alpha+\beta=360^\circ$. چون یک دوران به زاویهٔ α با یک دوران به زاویهٔ $360^\circ-\alpha$ هم‌ارز است، اما در جهت عکس، قسمت آخر قضیه که ثابت کردیم می‌تواند بدین صورت بیان شود، مجموع دو دوران یک انتقال است هرگاه این دورانها زاویه‌های دوران مساوی داشته باشند، اما جهت دورانها عکس یکدیگر باشند.

حال نشان خواهیم داد، که چگونه با داشتن مرکزهای O_1 و O_2 و زاویه‌های α و βی دو دوران، می‌توان دوران یا انتقالی پیدا کرد که مجموع آنها را نشان دهد. ابتدا فرض می‌کنیم که $\alpha+\beta\neq 360^\circ$. در این حالت مجموع دورانها، دورانی است به زاویهٔ $\alpha+\beta$. حال مرکز آن را پیدا می‌کنیم. مجموع این دو دوران، مرکز O_1 اوّلی را به نقطهٔ O'_1 می‌برد به‌طوری که

$$O_1\hat{O}_2O'_1=\beta \quad , \quad O'_1O_2=O_1O_2$$

(شکل (ب) ؛ اوّلین دوران O_1 را ثابت نگه می‌دارد، و دومی O_1 را به O'_1 می‌برد.) مجموع دو دوران یک نقطهٔ O''_2 را به نقطهٔ O_2 می‌برد به‌طوری که

$$O''_2\hat{O}_1O_2=\alpha \quad , \quad O''_2O_1=O_2O_1$$

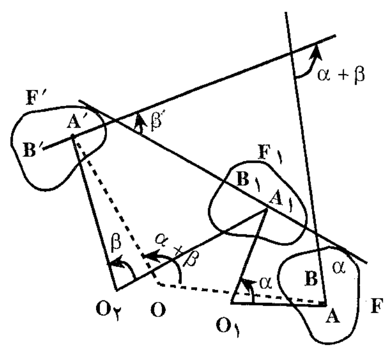
(دوران اوّل، O''_2 را به O_2 می‌برد و دوران دومی O_2 را ثابت نگه می‌دارد). از این‌جا نتیجه می‌شود که مرکز O ، که در پی آن هستیم، از O_2 و O''_2 و نیز از O_1 و O'_1 به یک فاصله است ؛ در نتیجه می‌تواند به صورت نقطهٔ تقاطع عمودمنصفهای پاره‌خطهای $O_2O''_2$ و O'_1O_1 ، که بترتیب با l_1 و l_2 نشان داده شده‌اند، به دست آید. اما با توجه به شکل (ب) به آسانی دیده می‌شود که l_1 از O_1 می‌گذرد و $l_1\hat{O}_1O_2=\frac{\alpha}{2}$ ، و l_2 از O_2 می‌گذرد و

$\frac{\beta}{۲} = O_۱\hat{O}_۲l_۲$. خطهای $l_۱$ و $l_۲$ با این شرایط به‌طور کامل معین می‌شوند ؛ لذا مرکز دوران موردنظر یعنی O، نقطهٔ برخورد این دو خط است.

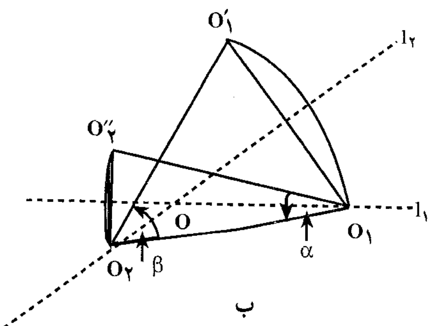
اگر $\alpha + \beta = ۳۶۰^\circ$ ، آن‌گاه انتقالی که مساوی مجموع دو دوران است ممکن است با این توجه که $O_۱$ را به $O'_۱$ (یا $O''_۲$ را به $O_۲$) می‌برد، تعیین شود ؛ در این‌جا نقطه‌های $O'_۱$ و $O''_۲$ دقیقاً مثل قبل تعریف شده‌اند (شکل پ) ؛ در تصویر واضح است که خطهای $l_۱$ و $l_۲$ که در ترسیم قبل پیدا شده‌اند، در این حال موازی‌اند ؛ بر راستای انتقال عمودند و فاصلهٔ بین آنها برابر نصف فاصلهٔ انتقال است.

با برهانی مشابه برهان قضیهٔ مجموع دو دوران، می‌توان نشان داد که مجموع یک انتقال و یک دوران (و مجموع یک دوران و یک انتقال) دورانی است که زاویهٔ آن مساوی زاویهٔ دوران اوّل است، اما با مرکزی دیگر. پیدا کردن مرکز $O_۱$ این دوران، وقتی مرکز O و زاویهٔ α از دوران اوّلیه و راستای انتقال داده شده باشند، به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. می‌توانید متن زیر را بخوانید.

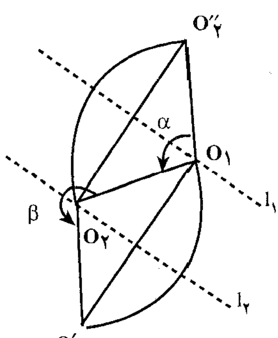
قضیهٔ مجموع یک انتقال و یک دوران را می‌توان به روش زیر نیز ثابت کرد. می‌دانیم که



الف



ب

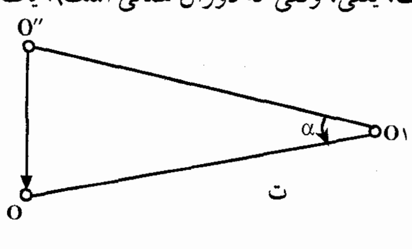


پ

مجموع دو دوران به یک زاویهٔ α اما با جهتهای مخالف، انتقالی است که یک نقطهٔ O''_2 را به مرکز O_2 ی دومین دوران می‌برد به‌طوری که $O_1O''_2 = O_1O_2$ و $O''_2\hat{O}_1O_2 = \alpha$ (شکل پ). حال انتقال داده شده را به صورت مجموع دو دوران نشان می‌دهیم، که مرکز دومی همان O و زاویهٔ دوران آن همان α باشد، ولی در جهت مخالف. (مرکز دوران اوّل، O_1 ، با شرطهای $O_1O = O_1O''$ و $O''\hat{O}_1O = \alpha$ تعیین می‌شود، که در آن O'' نقطه‌ای است که O با انتقال مفروض به آن برده شده است، (شکل ت)). بنابراین به جای مجموع یک انتقال و یک دوران، مجموع سه دوران گذاشته شده است. اما دو دوران آخر از این سه دوران همدیگر را خنثی می‌کنند و بنابراین تنها یک دوران منحصر به فرد به مرکز O_1 باقی می‌ماند.

به طریق مشابه می‌توان قضیهٔ مربوط به مجموع یک دوران و یک انتقال را ثابت کرد. تشابه زیاد موجود بین ویژگیهای دوران و ویژگیهای انتقال، که از مقایسهٔ برهانهای قضیه‌های مربوط به جمع انتقالها و برهانهای قضیه‌های مربوط به جمع دورانها به دست می‌آید، شگفت‌انگیز است. (از یک دیدگاه پیشرفته‌تر، انتقال را می‌توان حالت خاصی از دوران درنظر گرفت.) انتقال و دوران را روی هم تغییر مکان (یا حرکتهای خاص یا طولپاییهای مستقیم) می‌نامند.

نیمدور حالت خاصی است از دوران مربوط به زاویهٔ $\alpha = ۱۸۰^\circ$. حالت خاص دیگری را می‌توانیم از قرار دادن $\alpha = ۳۶۰^\circ$ به دست آوریم. دورانی به زاویهٔ $\alpha = ۳۶۰^\circ$ هر نقطهٔ صفحه را به همان وضع اوّلیه‌اش برمی‌گرداند ؛ این تبدیل که در آن هیچ نقطهٔ صفحه، تغییر وضع نمی‌دهد، همانی (یا تبدیل همانی) نامیده می‌شود. (به نظر می‌رسد که خود کلمهٔ «تبدیل» در این‌جا بی‌مورد باشد، زیرا تبدیل همانی هیچ شکلی را تغییر نمی‌دهد. با این حال این نام برای ما مناسب خواهد بود.) عیناً مانند حالت نیمدور، دوران می‌تواند به عنوان تبدیلی از تمام صفحه، که هر نقطهٔ A را به یک نقطهٔ جدید A' می‌برد، درنظر گرفته شود. تنها نقطهٔ ثابت این تبدیل مرکز دوران، O، است (تنها حالت استثنا، حالتی است که در آن زاویهٔ دوران α مضربی از ۳۶۰° است، یعنی، وقتی که دوران همانی است)، یک دوران در هیچ حالتی خط ثابت ندارد (به جز وقتی که α مضربی از ۱۸۰° باشد. یعنی، وقتی که دوران همانی، یا نیمدور باشد).



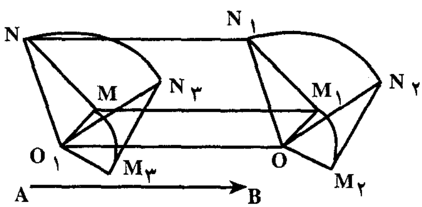
ت

۶۹. هرگاه $\overrightarrow{MN}$ بردار غیرمشخص باشد، $\overrightarrow{M_1N_1}$ متناظر آن در انتقال $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{M_2N_2}$ در دوران (O,α) و $\overrightarrow{M_3N_3}$ متناظر $\overrightarrow{M_2N_2}$ در انتقال $\overrightarrow{BA}$ می‌باشد. داریم:

$$\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}$$

$$M_2N_2 = M_1N_1 \quad , \quad (\overrightarrow{M_1N_1} \ \hat{,}\ \overrightarrow{M_2N_2}) = \alpha$$

$$\overrightarrow{M_3N_3} = \overrightarrow{M_2N_2}$$



و از آن‌جا $MN = M_3N_3$ و $(\overrightarrow{MN} \ \hat{,}\ \overrightarrow{M_3N_3}) = \alpha$ می‌باشد. بنابراین از $\overrightarrow{MN}$ به $\overrightarrow{M_3N_3}$ با دورانی به اندازهٔ α می‌توان رسید و مرکز این دوران نقطه‌ای است مانند O_1 به قسمی که $\overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{AB}$ باشد. در مجموع، سه تبدیل بالا نقطهٔ O_1 ثابت می‌ماند. پس حاصل سه تبدیل مذکور دوران (O_1,α) است.

۷۰. گزینهٔ (ج و د) درست است.

۲.۲. دوران در: نقطه، خط، زاویه

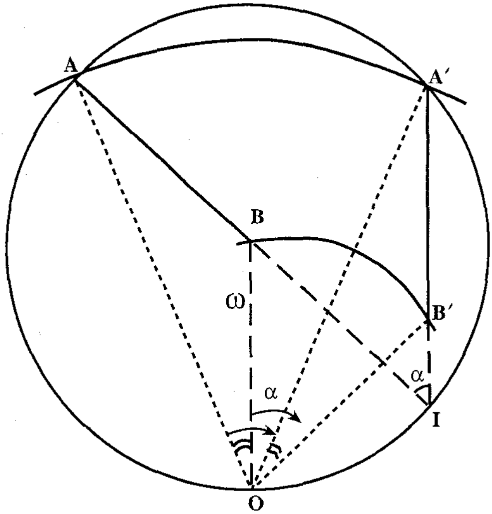
۲.۲.۱. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۷۱. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۲.۲.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

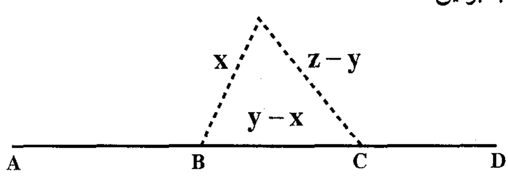
۷۲. می‌دانیم در دوران، زاویهٔ بین هر دو پاره‌خط متناظر مساوی زاویهٔ دوران است. پس $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = A\hat{I}A' = B\hat{I}B' = \alpha = \hat{I}$ ؛ در نتیجه کمان درخور زاویهٔ



$A\hat{O}A' = A\hat{I}A' = \alpha$ گذرنده بر OAA' و I می‌گذرد. و به همین طریق ثابت می‌شود چهار نقطهٔ B' و B ، O و I بر یک دایره واقع بوده و OI وتر مشترک یا محور اصلی آنهاست.

۲.۲.۲.۲.نقطه‌ها برهم منطبقند

۷۳. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا طول هر ضلع مثلث باید از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر باشد. بنابراین :



$$x < y - x + z - y = z - x \quad , \quad x < \frac{z}{۲}$$

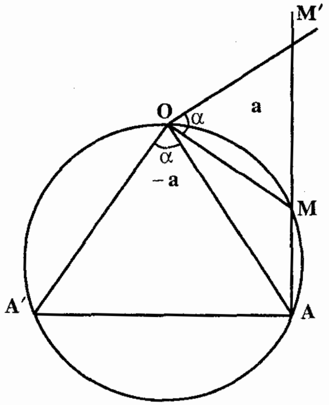
$$y - x < x + z - y \quad , \quad y < x + \frac{z}{۲}$$

$$z - y < x + y - x \quad , \quad y > \frac{z}{۲}$$

از این‌رو فقط گزاره‌های I و II صحیح هستند.

۲ . ۳ . ۲ . خطهای: همرس، موازی، ...

۲ . ۲ . ۳ . ۱ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۷۴. نقطه‌های M و M′ وقتی با H بر یک استقامتند که داشته باشیم:

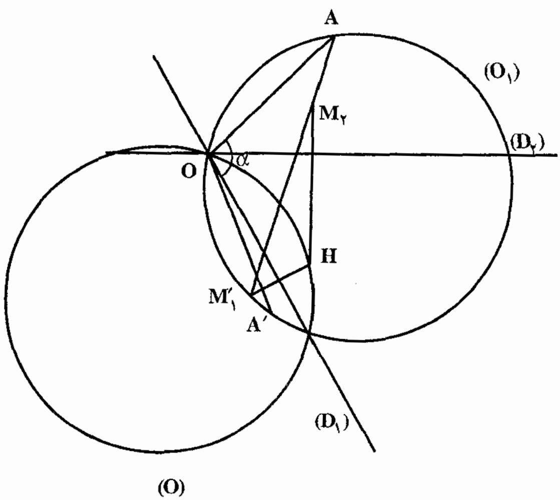
$$(MO \hat{,} MA) = (MO \hat{,} MM')(\text{mod}\,\pi)$$

فرض می‌کنیم A′ با زاویهٔ α− از دوران A به دست آمده باشد. مثلثهای متساوی‌الساقین OMM′ و OA′A متشابه‌اند و داریم:

$$(MO \hat{,} MM') = (AO' \hat{,} A'A)(\text{mod}\,\pi)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

$$(MO, MA) = (AO, A'A)(\text{mod}\,\pi)$$



این رابطه نشان می‌دهد باید نقطه‌های نظیر M روی دایرهٔ محیطی مثلث OAA′ باشد.

موارد استعمال. فرض می‌کنیم $(D_1 \hat{,} D_2) = \frac{\alpha}{2}$. محل تلاقی دو خط را O می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که دورانی به مرکز O و زاویهٔ $2(D_1 \hat{,} D_2) = \alpha$ از M_1 و M_2 می‌گذرد.

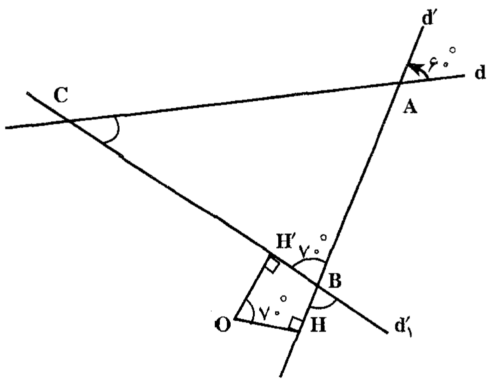
اگر در این دوران به دوران A را A' بنامیم با توجه به مسأله صفحه قبل داریم نقطه‌های نظیر M_1 روی دایره (O_1) دایرهٔ محیطی مثلث OAA' است؛ بنابراین نقطه‌های خواسته شده روی دایرهٔ محیطی مثلث OAA' که قرینهٔ دایرهٔ O نسبت به D_1 است، واقع می‌باشد.

۲.۲.۴. زاویه

۲.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۷۵. اگر نقطهٔ برخورد d'_1 و d' را B بنامیم، می‌دانیم که $\hat{B}=۷۰^\circ$ است. از آن‌جا داریم:

$$(d \hat{\ ,}\ d'_1)=\hat{C}=۱۸۰^\circ-(۷۰^\circ+۶۰^\circ)=۵۰^\circ$$



۲.۲.۵. پاره‌خط

۲.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۶. چهارضلعی $AB'C'B$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. با توجه به شکل داریم:

$$AH=HB=۱۲\div۲=۶\ \ ,\ \ H'B=H'C=H''B'=H''C'=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow AK=۶-۳=۳\ \ ,\ \ B'K=HH''=OH''-OH=OH'-OH=۶-۳=۳$$

$$\Rightarrow AB'=\sqrt{AK^۲+KB'^۲}=\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow AB'=BC'=۳\sqrt{۲}$$

۲ . ۶ . ۲. رابطه‌های متری

۷۷. چون $\frac{AB}{۲} = ۴ = OH$ و $OH \perp AB$ است، دوران یافتهٔ نقطهٔ A بر B منطبق شده و $A'B'$ عمود بر AB می‌باشد، بنابراین $A'B = ۰$ و $AB' = ۸\sqrt{۲}$ است؛ اما $A'B' = ۸$ است. بنابراین:

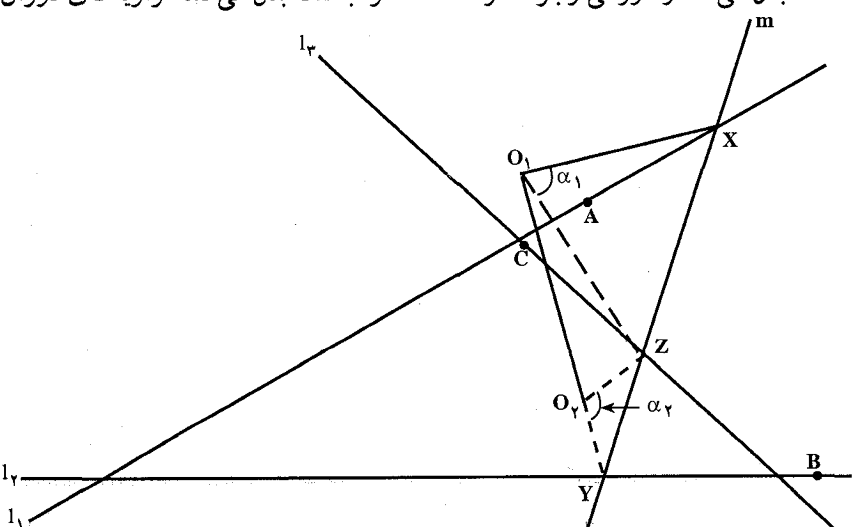
$$AB + A'B' + AB' + A'B = ۸ + ۸ + ۸\sqrt{۲} + ۰ = ۱۶ + ۸\sqrt{۲} = ۸(۲ + \sqrt{۲})$$

۲ . ۷ . ۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند

۷۸. مرکز دوران رأس زاویه و زاویهٔ دوران برابر $\pm\frac{x\hat{O}y}{۲}$ است.

۲ . ۸ . ۲. رسم شکلها

۷۹. فرض می‌کنیم که همهٔ خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ باهم موازی نیستند، مثلاً $l_۳$ موازی $l_۱$ یا $l_۲$ نیست. فرض می‌کنیم مسأله حل شده است (شکل). دورانی وجود دارد که AX را به CZ بدل می‌کند و دورانی وجود دارد که BY را به CZ بدل می‌کند. زاویه‌های دوران،



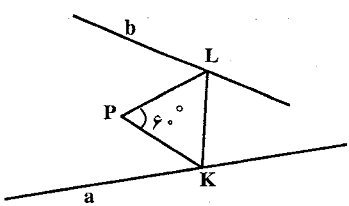
α_1 و α_2، بترتیب مساوی زاویه‌های بین l_1 و l_3 و بین l_2 و l_3 هستند. مرکزهای دوران، O_1 و O_2، دقیقاً می‌توانند پیدا شوند. از مثلثهای متساوی‌الساقین O_1XZ و O_2YZ که زاویه‌های O_1 و O_2 در آنها بترتیب مساوی α_1 و α_2 هستند، نتیجه می‌شود :

$$O_1\hat{Z}X = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1 \quad , \quad O_2\hat{Z}Y = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2$$

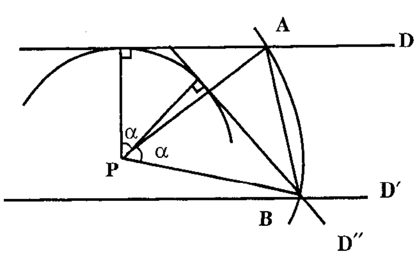
از این‌جا نتیجه می‌شود که $O_1\hat{Z}O_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 \pm \alpha_2)$.

و بنابراین Z می‌تواند از نقطهٔ برخورد l_3 با کمان درخور زاویهٔ معلوم $\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ یا $\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2}$ رسم شده بر پاره‌خط O_1O_2 پیدا شود.

هر یک از زاویه‌های α_1 و α_2، و هر یک از مرکزهای دوران O_1 و O_2 می‌تواند به دو روش متفاوت پیدا شود از این‌رو حداکثر ۱۶ جواب برای این مسأله وجود دارد.



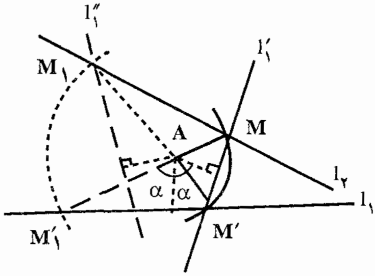
۸۰. فرض کنید که PKL، مثلث خواسته شده باشد (شکل). آن‌گاه نقطه‌های K و L از نقطهٔ P هم‌فاصله خواهند بود. آنها بترتیب به خطهای a و b متعلق بوده و از نقطهٔ P با زاویهٔ 60° دیده می‌شوند. از آن‌جا که نقطهٔ L تصویر نقطهٔ K به هنگام دوران حول P به اندازهٔ 60° است، از این‌رو این نقطه به تصویر خط a در دوران مزبور متعلق خواهد بود (یعنی نقطهٔ L نقطهٔ مشترک خط $a' = R_P^{60^\circ}(a)$ و خط b است).



۸۱. اگر PAB مثلث خواسته شده باشد، نقطهٔ B متناظر نقطهٔ A در دوران (P,α) است. پس مکان B الف) خط D' است ب) خط D'' می‌باشد که از دوران D حول P به زاویهٔ α به دست می‌آید؛ پس از تعیین B به سهولت می‌توان رأس A را معین کرد.

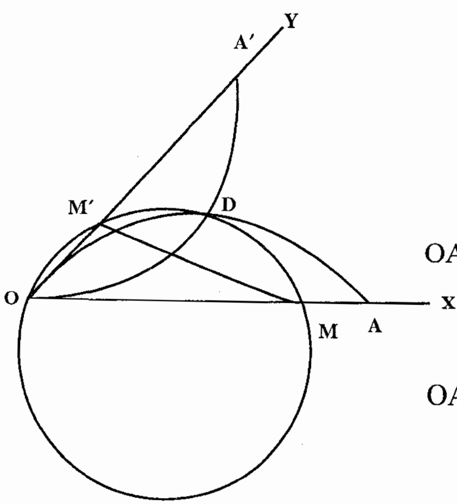
اگر دوران را در جهت دیگری انجام دهیم، جواب دیگری به دست می‌آید.

۸۲. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم، مربع را می‌توان در امتداد خطهای داده شده انتقال داد بدون آن که شکل آن تغییر کند. بنابراین یکی از رأسها را می‌توان به اختیار روی یکی از سه خط داده شده انتخاب کرد. اگر A این رأس باشد، با دوران $(A,\frac{\pi}{۲})$، نصف مربع را می‌توان ساخت و بعد آن را تکمیل نمود.



۸۳. خط l_1 را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران می‌دهیم، و فرض می‌کنیم l_1' معرف وضع جدید آن باشد. گیریم M نقطهٔ برخورد l_1' با l_2 باشد (شکل). دایرهٔ به مرکز A و گذرنده بر نقطهٔ M جواب مسأله خواهد بود؛ زیرا نقطهٔ برخورد این دایره با خط l_1، M'، با دوران به نقطهٔ M برده خواهد شد (یعنی، زاویهٔ مرکزی $\alpha = M\hat{A}M'$).
مسأله دو جواب دارد (بسته به دوران در دو جهت)، به شرطی که هیچ یک از زاویه‌های بین خطهای l_1 و l_2 مساوی α نباشند؛ اگر یکی از زاویه‌های بین خطهای l_1 و l_2 مساوی α باشد، مسأله دقیقاً یک جواب یا بینهایت جواب دارد؛ اگر l_1 و l_2 برهم عمود باشند و $\alpha = ۹۰^\circ$، مسأله یا اصلاً جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۲ .۹.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۴. اگر $X\hat{O}Y = \alpha$ باشد و روی OX و OY بترتیب طولهای $OA = OA' = l$ را جدا کنیم، نتیجه می‌شود:

$$OA = l = OM + OM' = OM + MA$$

پس: $MA = OM'$

به همین ترتیب:

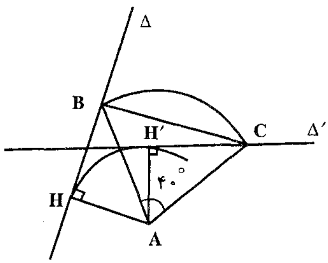
$$OA' = OM' + M'A' = OM' + OM$$

$$M'A' = OM$$

از طرف دیگر : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'O}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi - \alpha$

بنابراین از $\overrightarrow{MA}$ به $\overrightarrow{M'O}$ و از $\overrightarrow{MO}$ به $\overrightarrow{M'A'}$ با دورانی به اندازهٔ $\pi - \alpha$ می‌توان رسید. مرکز این دوران، نقطهٔ D، فصل مشترک کمان درخور زاویهٔ $\pi - \alpha$ است که روی OA و OA' رسم شوند. این نقطه همواره ثابت است و دایرهٔ مثلث OMM' همواره از D می‌گذرد. مکان مرکز این دایره، عمودمنصف OD است.

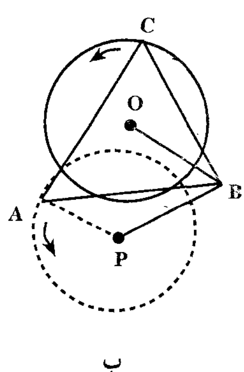
۸۵. اگر مثلث ABC یک وضع دلخواه از مثلث متساوی‌الساقین خواسته شده باشد، چون $B\hat{A}C = ۴۰^\circ$ است. مکان هندسی رأس C از دوران خط Δ حول مرکز دوران A با زاویهٔ دوران ۴۰° به دست می‌آید.

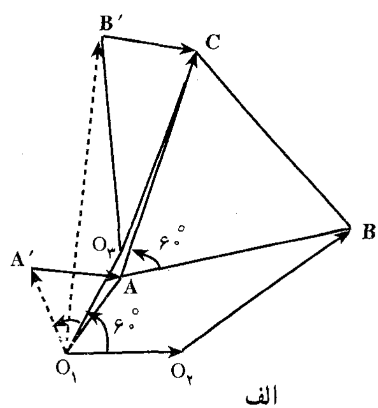


۸۶. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۸۷. الف. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{O_1O_3}$، برداری باشد که از دوران بردار $\overrightarrow{O_1O_2}$ به اندازهٔ ۶۰ درجه (در همان جهتی که از دوران $\overrightarrow{AB}$، بردار $\overrightarrow{AC}$ به دست می‌آید) به دست آمده است ؛ در همین دوران دور O_1، تصویر A و B را A' و B' می‌گیریم. ضمن دوران یکنواخت بردارهای $\overrightarrow{O_1A}$ و $\overrightarrow{O_2B}$، مثلث $O_1A'A$ هم، دور O_1، و بردارهای $\overrightarrow{O_3B'}$ و





$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{A'A}$ و در نتیجه مجموع آنها O_3C بردار هم، دور O_3 ، با همان سرعت زاویه‌ای دوران می‌کنند (شکل الف).

ب. پاسخ : ۵. نقطهٔ B را به فاصلهٔ ۳ از P تثبیت می‌کنیم (شکل ب). ضمن حرکت Aروی محیط دایرهٔ به شعاع ۲ و به مرکز P، رأس C روی محیط دایرهٔ به شعاع ۲، که مرکز آن به فاصلهٔ $OP = 3$ از P قرار دارد، حرکت می‌کند (مثلث OPB، متساوی‌الاضلاع است). دورترین نقطهٔ محیط این دایره از P به فاصلهٔ $CO + OP$ یعنی ۵، قرار دارد.

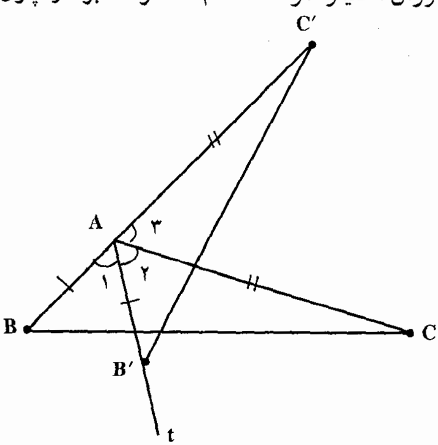
در نابرابری $PC \leq AP + PB$ هم (برای هر مثلث متساوی الاضلاع ABC و هر نقطهٔ P)، وقتی به برابری می‌رسیم که، نقطهٔ P ، روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل رأس C نیست) باشد.

۲ .۳.دوران در مثلث

۲.۳.۱. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

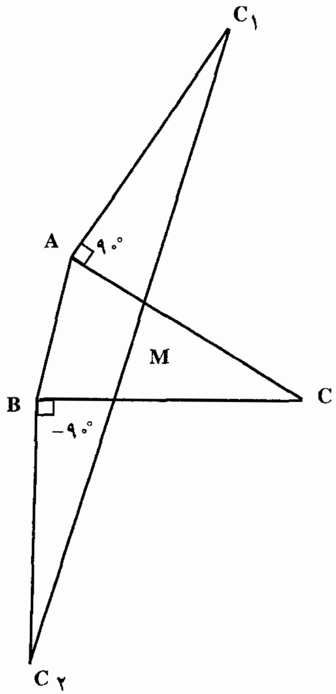
۸۹. نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC را G می‌نامیم. چون $GA'' = GA'$ ، $GB'' = GB'$ و $GC'' = GC'$ است، پس مثلث $A''B''C''$ دوران یافتهٔ مثلث ABC نسبت به مرکز دوران G و زاویهٔ دوران $A\hat{G}A'' = 180^\circ$.

۹۰. برابری $AB' = AB$ و $AC' = AC$ و ثابت بودن نقطهٔ A نشان می‌دهد که رأس A مرکز دوران است. حال اگر $\hat{A}_1 = \alpha$ زاویهٔ دوران اختیار شود، $\hat{A}_2 = \alpha$ خواهد بود و چون $AC = AC'$ یعنی C' دوران یافتهٔ نقطهٔ C نسبت به مرکز دوران A، $C\hat{A}C'$ برابر زاویهٔ دوران است، پس $\hat{A}_3 = \alpha$ خواهد بود. از آنجا با توجه به این که $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ است، یعنی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = 60^\circ$ ، زاویهٔ دوران برابر ۶۰ درجه است.



۲.۳.۲ . نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

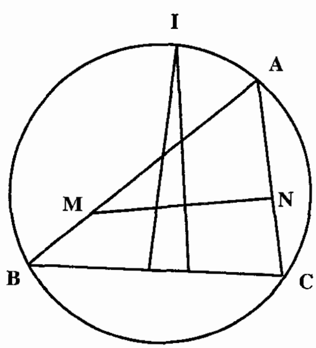
۱.۲.۳.۲ . نقطه، ثابت است



۹۱. با استفاده از شکل با توجه به این که $C\hat{A}C_1 = C_2\hat{B}C = 90^\circ$ و $AC_1 = AC$ و $BC_2 = BC$، ثابت کنید نقطهٔ M وسط پاره‌خط C_1C_2 به وضعیت نقطهٔ C بستگی ندارد.

۳.۳.۲ . خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۲ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



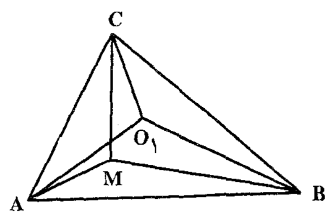
۹۲. بردارهای $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{CN}$ با رابطه‌های زیر با یکدیگر مربوطند $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ و $BM = CN$. بنابراین از $\overrightarrow{BM}$ به $\overrightarrow{CN}$ با دوران به اندازهٔ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ می‌توان رسید. در این دوران، نقطهٔ C متناظر B است. مرکز این دوران نقطهٔ I، محل برخورد عمودمنصف BC با دایرهٔ محیطی مثلث است (قوسی از دایرهٔ محیطی که شامل A است.) عمودمنصف MN نیز از نقطهٔ ثابت I می‌گذرد. اگر BM و CN مختلف‌الجهت باشند باید، I را روی قوس مقابل A اختیار نمود.

۴.۳.۲ . زاویه

۱.۴.۳.۲ . اندازهٔ زاویه

۹۳. ترکیب دو دوران $R_D^{90^\circ}$ و $R_E^{270^\circ}$ را مورد ملاحظه قرار دهید. انتقال $T_{\overrightarrow{AC}}$ را درنظر بگیرید که در آن نقطهٔ D به F منتقل می‌شود و $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC}$ است ولی $F\hat{D}E = 45^\circ$ بوده و از این‌رو زاویهٔ خواسته شده برابر ۴۵ درجه خواهد بود.

۹۴. نقطهٔ O_1 اوّلین مرکز دوران مثلث ABC را به همهٔ رأسهای مثلث وصل می کنیم (شکل). نقطهٔ M در داخل یکی از مثلثهای ABO_1 ، BCO_1 و CAO_1 قرار می گیرد. اگر مثلاً M درون (یا روی مرز) ΔABO_1 قرار گیرد (شکل)، آن‌گاه $M\hat{A}B \le O_1\hat{A}B \le 30^\circ$. به همین طریق اثبات می‌شود که حداقل یکی از زاویه‌های MBC ،MAC و MBA مساوی 30° یا بزرگتر از 30° است (علاوه بر مثلثهای ABO_1 ، BCO_1 و CAO_1 ، باید مثلثهای ACO_2 ، CBO_2 و BAO را نیز درنظر گرفت که در آنها O_2 دومین مرکز دوران مثلث است)، در واقع از این برهان نتیجه می‌شود که حداقل یکی از زاویه‌هایMAB، MBC و MCA همیشه اکیداً کوچکتر از 30° است و تنها استثنا در این مورد وقتی است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و M مرکز آن باشد (در این حالت $M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A = 30^\circ$).



۹۵. سه دوران متوالی دور نقطه‌های L ،K و M (یا دور K_1 ، L_1 و M_1) به اندازهٔ زاویه‌های α ، β و γ انجام می‌دهیم. چون $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ ، تبدیل حاصل یک انتقال است. اما، چون یکی از رأسهای مثلث اصلی، در این دورانها ثابت باقی می‌ماند، کلیهٔ نقطه‌های صفحه باید ثابت باقی بمانند. بنابراین، مرکز دوران سوم (نقطهٔ M) ، باید بر مرکز دوران حاصل از انجام متوالی دو دوران اوّل دور نقطه‌های K و L، منطبق شود.

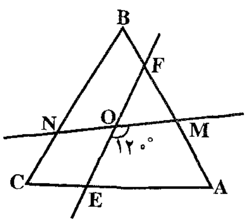
۵.۳.۲ . پاره‌خط

۱.۵.۳.۲ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۹۶. ثابت کنید که مثلثهای CB_1A_2 و CA_1B_2 ، هریک، از دیگری، با دوران دور نقطهٔ C به اندازهٔ زاویهٔ 90°، به دست می‌آید. در حقیقت $\Delta CAA_1 = \Delta CBB_1$ ($BB_1 = AC$ ، $BC = AA_1$ و $C\hat{B}B_1 = C\hat{A}A_1$)، و چون $AA_1 \perp BC$ و $BB_1 \perp AC$، داریم: $B_1C \perp A_1C$. به همین ترتیب، A_2C و B_2C با یکدیگر برابر و دوبه دو برهم عمودند.

۹۷. مثلث ABC را دور نقطهٔ C به اندازهٔ زاویهٔ 90° طوری دوران می‌دهیم که نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. در این صورت نقطهٔ E به نقطهٔ F واقع بر خط راست AC می‌رود که، برای آن داریم: $FC = BD$ و $FB \| CL \| DK$ ، بنابراین $BL = LK$.

۹۸. برای اثبات تساوی پاره‌خطها لازم است حرکتی پیدا شود که در آن یکی از پاره‌خطها به دیگری انتقال می‌یابد. از آن‌جا که زاویهٔ بین خطهای محتوی پاره‌خطهای مورد نظر برابر 60° است، از این‌رو دوران حول نقطهٔ O را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. از آن‌جا که دوران حول نقطهٔ O به اندازهٔ 120° مثلث را به خودش انتقال می‌دهد، از این‌رو مناسب است که دوران حول O به اندازهٔ 120° را مورد ملاحظه قرار دهیم. در این دوران نقطهٔ A به B، B به C، C به A ، AB به BC، BC به CA ، CA به AB انتقال می‌یابد. نقطهٔ E که به AC متعلق است به نقطهٔ M انتقال می‌یابد که به AB متعلق است (شکل) ؛ نقطهٔ F متعلق به AB به نقطهٔ N متعلق به BC انتقال می‌یابد ($E\hat{O}M = 120^\circ$ و $F\hat{O}N = 120^\circ$). درنتیجه EF نیز به MN منتقل می‌شود ؛ از این‌رو $EF = MN$ است.



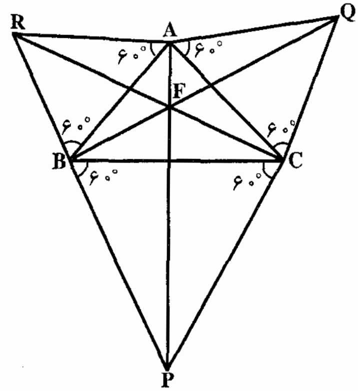
۹۹. با رسم خطهای BQ و CR ملاحظه می‌کنیم که در دوران به زاویهٔ 60° و به مرکز A مثلث ARC به مثلث ABQ تبدیل می‌شود. نتیجه می‌شود که :

$$RC = BQ \quad \text{و} \quad R\hat{F}B = 60^\circ$$

به روش مشابه نتیجه خواهد شد که $PA = CR$ و در نتیجه : $AP = BQ = CR$.

همچنین :

$$R\hat{F}B = 60^\circ = R\hat{A}B$$



$C\hat{F}Q = ۶۰^\circ = C\hat{A}Q$

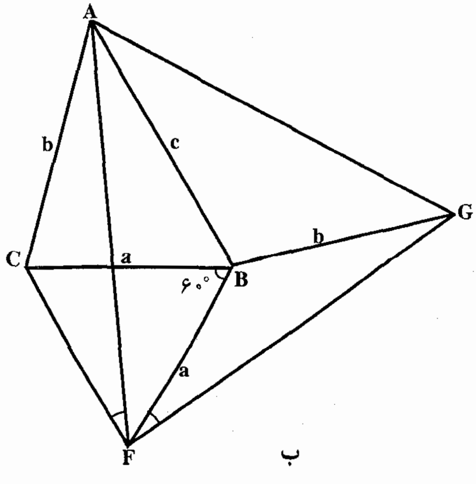
از این‌رو چهار گوشه‌های ARBF و CQAF محاطی‌اند. چون $B\hat{F}C = ۱۲۰^\circ$ و $C\hat{P}B = ۶۰^\circ$ پس چهار گوشهٔ BPCF نیز محاطی است. بنابراین دایره‌های محیطی مثلثهای BPC ، CQA و ARB در نقطهٔ F مشترکند که این نقطه را نقطهٔ فرما نظیر مثلث ABC می‌نامند.

از این که دایره‌های گفته شده در F مشترکند، نتیجه می‌شود که هریک از شش زاویهٔ به رأس F برابر ۶۰° است و چون F نقطهٔ برخورد BQ با CR انتخاب شده بود، پس AP نیز بر F می‌گذرد ؛ بنابراین سه خط AP، BQ و CR همرسند و با هم برابر می‌باشند.

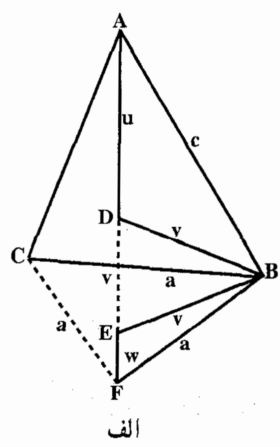
۶.۳.۲.رابطه‌های متری

۱۰۰. مثلث متساوی‌الاضلاع PQR را رسم و ثابت می‌کنیم طول هر ضلع آن، برابر است با $u + v + w$.

مثلث BCD را، دور نقطهٔ B ، به اندازهٔ ۶۰ درجه در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا مثلث BFE به دست آید (شکل الف).



ب



الف

ابتدا توجه می‌کنیم که مثلثهای BDE و BCF متساوی‌الاضلاعند. بنابراین $DE = v$ و $CF = a$. زاویه‌های ADE و DEF ، زاویه‌های نیمصفحه‌اند و هریک از آنها برابر است با $۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ$ ، بنابراین $AF = u + v + w$.

مثلث متساوی‌الاضلاع AFG را روی ضلع AF بنا می‌کنیم (شکل ب). داریم :

$$AF = FG \ , \ CF = BF \ , \ C\hat{F}A = B\hat{F}G = ۶۰^\circ - A\hat{F}B$$

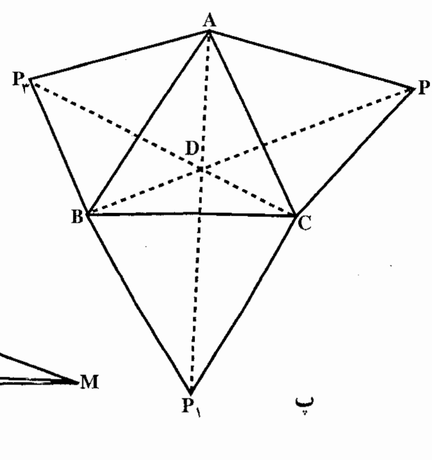
بنابراین، دو مثلث CFA و BFG برابرند و $BG = AC = b$. به این ترتیب، مثلث AFG، مثلث متساوی الاضلاع موردنظر است که ضلعی به طول $x = u + v + w$ دارد.

یادداشت: در شکل صورت مسأله، ویژگیهای جالب دیگری هم وجود دارد که در این‌جا، آنها را بدون اثبات می‌آوریم.

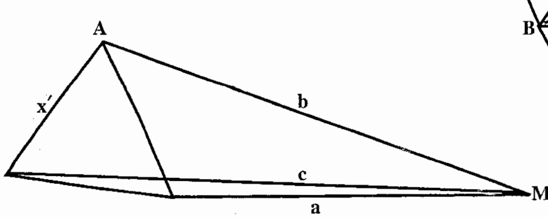
نقطهٔ D را، مرکز با زاویه‌ای برابر، در مثلث ABC گویند و آن را می‌توان با رسم مثلثهای متساوی‌الاضلاع $BCP_۱$ ، $CAP_۲$ و $ABP_۳$ در بیرون مثلث ABC پیدا کرد (شکل پ). پاره‌خطهای راست $AP_۱$ ، $BP_۲$ و $CP_۳$ ، طولهایی برابر دارند و در نقطهٔ D به هم می‌رسند. فرض بر این است که بزرگترین زاویهٔ مثلث ABC ، از ۱۲۰ درجه کمتر است. هر نقطهٔ دیگری در درون مثلث درنظر بگیریم، مجموع فاصله‌های آن از سه رأس A ، B و C از مجموع فاصله‌های نقطهٔ D تا این سه رأس بیشتر است. طول ضلع x را، می‌توان از این رابطه به دست آورد :

$$۲x^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۴[ABC]\sqrt{۳}$$

که در آن، [ABC] ، مساحت مثلث ABCاست.



پ



ت

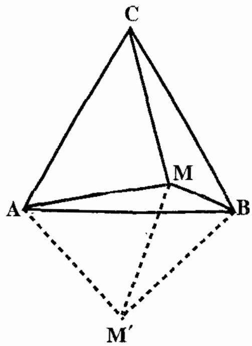
مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری هم می‌توان رسم کرد که نقطهٔ M ، در بیرون آن باشد ؛ x' ، طول ضلع این مثلث، از این رابطه به دست می‌آید :

$$۲x'^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۴[ABC]\sqrt{۳}$$

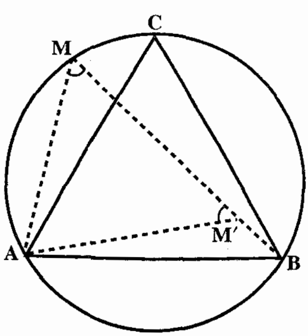
سرانجام، از خواننده می‌خواهیم، با توجه به شکل (ب)، ثابت کند :

$$A\hat{B}G - C\hat{A}B = A\hat{B}F - A\hat{B}C = F\hat{B}G - B\hat{C}A = ۶۰^\circ$$

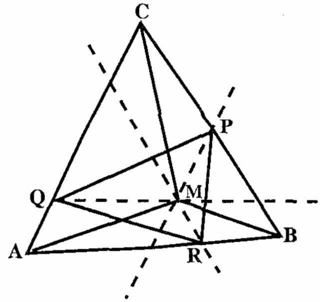
۱۰۱. **راه حل اوّل.** مثلث CAM را به اندازهٔ ۶۰° حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا به وضع ABM' درآید (شکل الف). در این صورت داریم $MM' = AM' = AM$ و $CM = BM'$ ، اما $BM \le BM' + MM'$ و بنابراین $BM \le AM + CM$.
بعلاوه، تساوی $BM = BM' + MM'$ تنها زمانی برقرار است که M' بر پاره‌خط BM واقع باشد. چون $A\hat{M}M' = ۶۰^\circ$ ، در این حالت داریم $A\hat{M}B = ۶۰^\circ$ ؛ یعنی M روی کمان $\overset{\frown}{AC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است (شکل ب).
راه حل دوم. خطهای MP ،MQ و MR را از نقطهٔ M به موازات ضلعهای AC ، AB و BC از مثلث ABC رسم می‌کنیم (شکل پ). روشن است که چهارضلعیهای MQAR ،MPBR و MPCQ ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین هستند ؛ در نتیجه $MA = QR$ ، $MB = PR$ ، $MC = PQ$. پس پاره‌خطهای MA ، MB و MC طولهایی برابر با ضلعهای مثلث PQR دارند و بنابراین $MA + MC \ge MB$. تساوی $MA + MC = MB$ تنها زمانی برقرار است که $RQ + QP = PR$ ، یعنی وقتی Q روی پاره‌خط PR باشد (شکل ت). در این حالت $R\hat{M}A = R\hat{Q}A$ ، $P\hat{M}C = P\hat{Q}C$ و $R\hat{Q}A = P\hat{Q}C$ ؛ یعنی $R\hat{M}A = C\hat{M}P$ و $A\hat{M}C = R\hat{M}P = ۱۲۰^\circ$ و بنابراین M بر کمان $\overset{\frown}{AC}$ از دایرهٔ



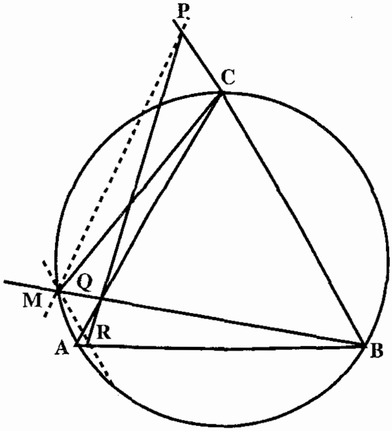
الف



ب



پ



ت

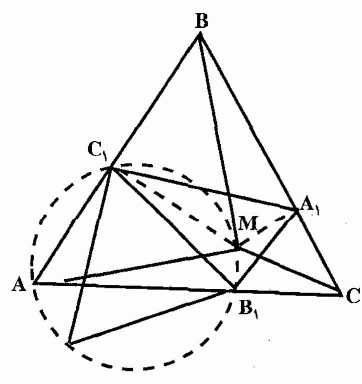
محیطی ΔABC واقع است.

راه حل سوم. عمودهای MA_1 ، MB_1 و MC_1 را از M بر ضلعهای ΔABC فرود می‌آوریم. (شکل ث). دایرهٔ به قطر AM بر چهارضلعی AC_1MB_1 محیط است؛ چون $B_1\hat{A}C_1 = 60^\circ$. از این‌جا نتیجه می‌شود که B_1C_1 ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره است. بنابراین $B_1C_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}).MA$ ؛ به همین ترتیب $A_1B_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}).MC$ و $A_1C_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}).MB$. اما در مثلث $A_1B_1C_1$ داریم:

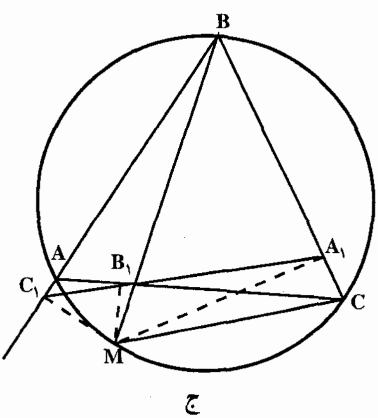
$$A_1C_1 \le A_1B_1 + B_1C_1$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$MB \le MA + MC$$



ث



ج

بعلاوه اگر نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بر یک خط باشند و B_1 بین A_1 و C_1 واقع باشد، داریم $MB = MA + MC$ (شکل ج). در این حالت می‌گوییم M روی کمان $\overset{\frown}{AC}$ از دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است. زیرا $C_1\hat{M}A = C_1\hat{B}_1A$ و $A_1\hat{M}C = A_1\hat{B}_1C$. اما چون در این حالت $C_1\hat{B}_1A = A_1\hat{B}_1C$ ، داریم $C_1\hat{M}A = A_1\hat{M}C$ و $A\hat{M}C = C_1\hat{M}A_1 = 120^\circ$ که به این ترتیب حکم موردنظر اثبات می‌شود.

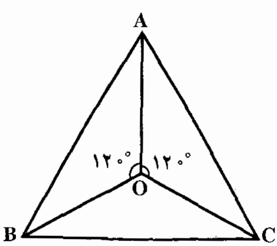
اشاره می‌کنیم که به‌طور کلی، پاهای عمودهای وارد از نقطهٔ دلخواه M بر ضلعهای یک مثلث دلخواه بر یک خط قرار دارند، اگر M بر دایرهٔ محیطی آن مثلث واقع باشد (خط سیمسون).

راه حل چهارم. قضیهٔ بطلمیوس را برای چهارضلعی MABC به کار می‌بریم این قضیه می‌گوید که در هر چهارضلعی با رأسهای متوالی A ، B ، C و D مجموع حاصلضربهای ضلعهای روبه‌رو، دوبه‌دو ناکوچکتر از حاصلضرب قطرهاست، یعنی :

$$AC.BD \le AB.CD + AD.BC$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی برقرار است که بتوان چهار ضلعی را در دایره‌ای محاط کرد.

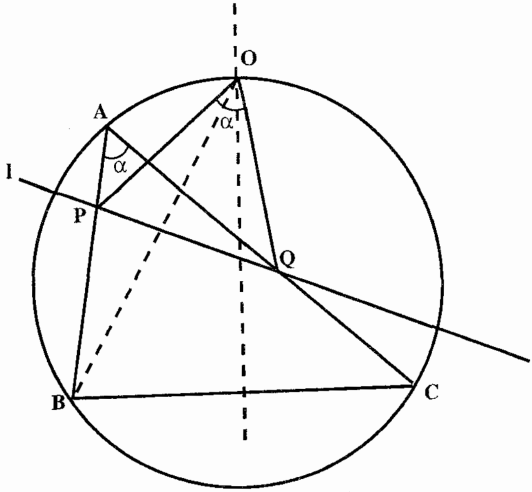
۳.۲. ۷. ثابت کنید شکلها دوران‌یافتهٔ یکدیگرند



۱۰۲. سه مثلث OBC ،OAC و OAB همنهشتند و $OA = OB = OC$ است. از طرفی $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}A = 120^\circ$ است. بنابراین دوران یافتهٔ هریک از این مثلثها با زاویهٔ دوران 120° یا 240° بر مثلثهای دیگر منطبق می‌شوند.

۳.۲. ۸. رسم شکلها

۱۰۳. فرض کنید مسأله حل شده است (شکل). بنابر قضیه‌ها، دورانی وجود دارد که BP را به CQ بدل می‌کند، زاویهٔ دوران α مساوی زاویهٔ بین AB و AC است و نقطهٔ O ، مرکز دوران، به راحتی پیدا می‌شود. چون در مثلث متساوی‌الساقین OPQ زاویهٔ رأس O،

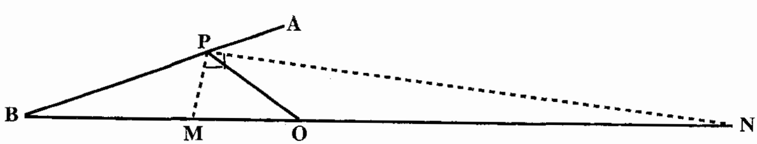


یعنی α ، معلوم است، پس نسبت $\frac{OP}{PQ} = k$ نیز برای ما معلوم است. اما بنابر شرایط مسأله، $PQ = BP$ ، بنابراین $\frac{OP}{BP} = k$

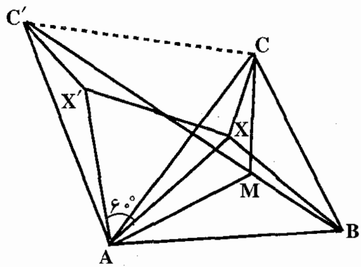
که با توجه به آن می‌توانیم P را از برخورد ضلع AB با دایره‌ای پیدا کنیم که مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌هایشان از O و B مساوی k است. این مکان هندسی، همان‌طور که دیده می‌شود یک دایره است ؛ زیرا، مثلاً معلوم است که نیمسازهای زاویه‌های درونی و بیرونی زاویهٔ P از مثلث OPB ، (که در آن P نقطه‌ای است که برای آن $OP/BP = k$) قاعدهٔ OB را در نقطه‌های ثابت (مستقل از P) M و N با شرطهای

$$\frac{OM}{MB} = \frac{ON}{BN} = k = \frac{OP}{BP}$$

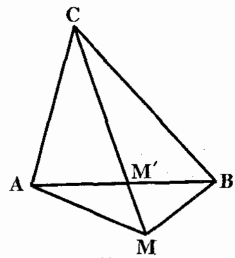
قطع می‌کنند، چرا که دو نیمساز برهم عمودند و P بر دایرهٔ به قطر MN قرار دارد. (دایرهٔ آپولونیوس)



۱۰۴. نقطهٔ مطلوب M نمی‌تواند در بیرون ΔABC باشد، زیرا در چنین حالتی بسادگی می‌توان یک نقطهٔ M' یافت چنان که $AM' + BM' + CM' < AM + BM + CM$ (شکل الف). اکنون فرض می‌کنیم X نقطهٔ دلخواهی درون ΔABC باشد (شکل ب). مثلث ACX را حول A به اندازهٔ زاویهٔ ۶۰° در جهت از B به C دوران می‌دهیم تا در وضعیت جدید $AC'X'$ قرار گیرد. چون $AX = XX'$.



ب



الف

(مثلث AXX' متساوی‌الاضلاع است) و $CX = C'X'$ ، معلوم می‌شود که مجموع فاصله‌های نقطهٔ X از رأسهای مثلث برابر است با طول خط شکستهٔ $BXX'C'$. اکنون کافی است نقطهٔ M را طوری انتخاب کنیم که خط شکستهٔ $BMM'C'$ کمترین طول را داشته باشد.

دو حالت متمایز را درنظر می‌گیریم.

حالت اوّل. پاره‌خط $C'B$ ضلع AC از ΔABC را قطع می‌کند ؛ این حالت وقتی پیش می‌آید که $B\hat{C}C' < ۱۸۰^\circ$ و $B\hat{A}C' < ۱۸۰^\circ$ ، یا چون داریم

$$B\hat{C}C' = B\hat{C}A + A\hat{C}C' = B\hat{C}A + ۶۰^\circ$$

و

$$B\hat{A}C' = B\hat{A}C + C\hat{A}C' = B\hat{A}C + ۶۰^\circ$$

وقتی زاویه‌های C و Aی مثلث، کوچکتر از ۱۲۰° باشند. در این حالت اگر یک نقطهٔ M را بتوان روی پاره‌خط $C'B$ طوری یافت که $A\hat{M}C' = ۶۰^\circ$ ، آن‌گاه به ازای این نقطه داریم

$$AM + MC + MB = C'B$$

و بنابراین، همان نقطه، نقطهٔ مطلوب خواهد بود. به ازای این نقطهٔ M خواهیم داشت $A\hat{M}B = C\hat{M}B = A\hat{M}C = ۱۲۰^\circ$ (M نقطه‌ای است که از آن همهٔ ضلعهای مثلث به زاویه‌های مساوی دیده می‌شوند) ؛ مسلماً برای آن که نقطه‌ای مانند M با این شرط روی

پاره‌خط $C'B$ موجود باشد. لازم است که $C\hat{B}A$ کوچکتر از 120° باشد. اگر زاویهٔ CAB ناکوچکتر از 120° باشد، نقطهٔ مطلوب رأس B از مثلث ABC خواهد بود.

حالت دوم. پاره‌خط $C'B$ ضلع AC از ΔABC را قطع نمی‌کند؛ مثلاً نقطهٔ C' در طرف دیگر خط BC از مثلث ABC قرار دارد $(\hat{C} \geq 120^\circ)$. در این حالت کوتاهترین خط شکستهٔ $C'X'XB$ همان خط $C'CB$ است و نقطهٔ مطلوب رأس C از ΔABC به همین طریق، اگر $\hat{A} \geq 120^\circ$، آن‌گاه نقطهٔ مطلوب رأس A خواهد بود.

۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۵. بردار $\overrightarrow{AB}$ از بردار $\overrightarrow{AC}$ با دوران ۶۰ درجه به دست می‌آید.

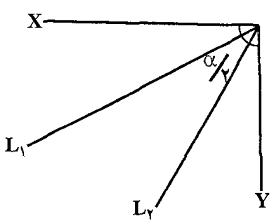
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B} \quad ، \quad \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_2C}$$

۱۰۶. اگر مثلث CAD را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور رأس C دوران دهیم، به مثلث CBE می‌رسیم؛ و اگر مثلث HBE را به اندازهٔ ۶۰ درجه دور H دوران دهیم، مثلث HDK به دست می‌آید.

۱۰۷. توالی سه دوران در یک جهت به زاویه‌های 60°، 60° و 240° حول نقطه‌های A_1 و B_1، و M نقطهٔ B را به خودش بدل می‌کند. بدین جهت مجموع این سه دوران تبدیلی است همانی، و بنابراین مجموع دو دوران اوّلی، دورانی به مرکز M است. از این جا حکم مسأله نتیجه می‌شود.

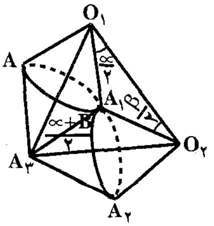
۱۰۸. برای حل این مسأله ابتدا یک قضیهٔ اساسی هندسه در مورد دوران را مطرح کرده و سپس نتیجهٔ آن را بیان می‌کنیم:

قضیه. هر دوران حول نقطهٔ A با زاویهٔ α قابل تبدیل به دو تقارن محوری می‌باشد که زاویهٔ بین دو خط تقارن $\frac{\alpha}{2}$ است. (اثبات مطابق شکل به عهدهٔ خواننده می‌باشد.)

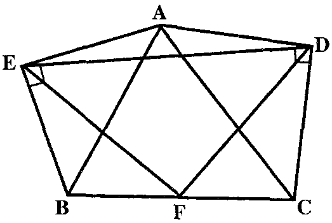


$(X\hat{A}Y = \alpha)$

حال فرض کنید نقطهٔ A را حول O_1 به اندازهٔ α و حول O_2 به اندازهٔ β دوران داده‌ایم تا A_1 و A_2 به دست آید و فرض کنید مطابق شکل یکی از محورهای تقارن O_1O_2



باشد. پس برای دوران اوّلی محور دیگر باید خطی باشد که با O_2 و O_1 زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ بسازد و برای دوران دومی خطی که با O_1O_2 زاویهٔ $\frac{\beta}{2}$ بسازد. اگر این دو محور یکدیگر را در O_3 قطع کنند، بسادگی دیده می‌شود که O_3 مرکز دوران A به اندازهٔ $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$ است که به A_2 تبدیل می‌شود. حال با استفاده از مطالب گفته شده مسأله را حل می‌کنیم:

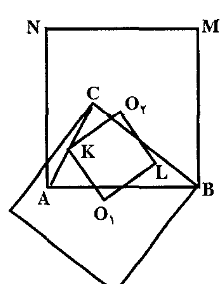


مطابق شکل اگر C را حول D به اندازهٔ °۹۰ دوران دهیم به نقطهٔ A می‌رسیم. پس طبق قضیهٔ بالا نقطه‌ای همانند X وجود دارد که اگر C را حول آن °۱۸۰ دوران دهیم به B برود و در ضمن DEX قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد. اما می‌دانیم نقطه‌ای که اگر C به اندازهٔ °۱۸۰ حول آن دوران کند به B می‌رود، وسط BC است. پس F همان مرکز دوران است و FED قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

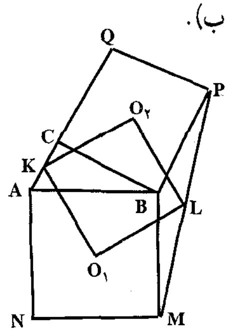
۱۰۹. حالتی را در نظر بگیرید که مربعها در بیرون مثلث ABC رسم شوند.

توجه دارید که ترکیب $R_{O_2}^{270^\circ} O R_{O_1}^{270^\circ}$ نقطهٔ A را به نقطهٔ C انتقال داده و از این رو $R_{O_2}^{270^\circ} O R_{O_1}^{270^\circ} = R_K^{180^\circ}$ خواهد بود. پس نتیجه می‌شود که مثلث O_1O_2K یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. به طریق مشابه $R_{O_2}^{90^\circ} O R_{O_1}^{90^\circ} = R_L^{180^\circ}$ بوده و از این‌رو مثلث O_1O_2L نیز قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ($\hat{L} = 90^\circ$) و بنابراین O_1LO_2K یک مربع خواهد بود (شکل الف).

در حالتی که مربعها به سوی داخل مثلث رسم می‌شوند نیز مسأله به روش مشابهی حل می‌شود (شکل ب).



ب



الف

۱۱۰. وقتی زاویهٔ α تغییر کند ؛ $\Delta A'B'C'$ تغییر می‌کند ولی با خودش (و با ΔABC) متشابه باقی می‌ماند. ضلعهای آن همواره از نقطه‌های ثابت خاصی که وسطهای ضلعهای مثلث ABC هستند، می‌گذرند ؛ بنابراین هریک از نقطه‌های آن (و بخصوص نقطهٔ برخورد ارتفاعها، یا نیمسازها یا میانه‌های آن) دایره‌ای را می‌پیمایند. حکم دوم مسأله از این جا به دست می‌آید که نقطهٔ O، مرکز دوران همهٔ مواضع مثلث $A'B'C'$ (از جمله ABC که متناظر است با مقدار $\alpha = ۰$) بر مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC منطبق است ؛ برای پی بردن به این موضوع کافی است توجه کنیم که به ازای $\alpha = ۹۰^\circ$ همهٔ خطهای مورد نظر از یک نقطهٔ منحصر O می‌گذرند.

۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۱۱. الف. $l_۲$ از $l_۱$ بر اثر حاصلضرب دو قرینه‌یابی نسبت به ضلعهای ΔABC به دست می‌آید ؛ پس زاویهٔ بین $l_۱$ و $l_۲$ دو برابر زاویهٔ بین این ضلعهای مثلث است. پس زاویه‌های مثلث T به توسط زاویه‌های ΔABC تعیین می‌شوند و به موضع l بستگی ندارند. (اگر ΔABC قائم‌الزاویه بود، دو خط از سه خط $l_۱$ ، $l_۲$ ، $l_۳$ موازی می‌شوند و در نتیجه $l_۱$ ، $l_۲$ ، $l_۳$ مثلثی تشکیل نمی‌دادند.)

ب. فرض می‌کنیم که خط l حول یک نقطهٔ M در صفحه دوران کرده است. پس ضلعهای مثلث T همیشه از نقطه‌های $M_۱$ ، $M_۲$ و $M_۳$ ، قرینه‌های M نسبت به ضلعهای ΔABC ، می‌گذرند ؛ به عبارت دیگر مثلث طوری تغییر می‌کند که متشابه با خودش باقی می‌ماند و ضلعهایش همیشه از سه نقطهٔ ثابت می‌گذرند. و می‌دانیم که در این حالت مرکز دوران هر دو وضعیت دلخواه از مثلث T، نقطهٔ ثابت O است. اگر $l_۱$ از O بگذرد (یعنی l از نقطهٔ O' ، قرینهٔ O نسبت به ضلع AB، بگذرد) در این صورت، و تنها در این صورت، مثلث T به یک نقطه بدل می‌شود (و در این حالت خطهای $l_۲$ و $l_۳$ نیز از O می‌گذرند). پس می‌بینیم که در حالت کلی بین خطهایی که از یک نقطهٔ مفروض M می‌گذرند تنها یک خط l وجود دارد که $l_۱$ ، $l_۲$ و $l_۳$ در یک نقطه متقاطع باشند ؛ اگر دو تا از این خطها وجود داشت، معنایش این بود که همهٔ خطهای گذرنده از M این خاصیت را داشتند. اکنون فرض کنید M و N دو نقطه باشند و l و $\bar{l}$ هم دو خط گذرنده از آنها، به طوری که سه خط $l_۱$ ، $l_۲$ و $l_۳$ و سه خط $\bar{l}_۱$ ، $\bar{l}_۲$ و $\bar{l}_۳$ به طور متناظر در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. اگر H نقطهٔ برخورد l و $\bar{l}$ باشد، به ازای هر خط

گذرنده از H، خطهای متناظر l_1 ، l_2 و l_3 در یک نقطه متقاطعند. (خطهای l و $\bar{l}$ نمی‌توانند متوازی باشند، زیرا اگر l_1 ، l_2 و l_3 در یک نقطهٔ O متقاطع باشند و اگر $\bar{l} \parallel l$ ، آن‌گاه خطهای $\bar{l}_1$ ، $\bar{l}_2$ و $\bar{l}_3$ با خطهای نظیرشان یعنی l_1 ، l_2 و l_3 موازی می‌شوند و فاصله‌شان از O مساوی با فاصلهٔ بین l و $\bar{l}$ خواهد شد؛ پس نمی‌توانند در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند.) اگر l از H بگذرد آن‌گاه l_1 و l_2 از نقطه‌های H_1 و H_2 ، قرینه‌های H نسبت به ضلعهای مثلث ABC، می‌گذرند؛ همچنین، چون اندازهٔ زاویهٔ بین l_1 و l_2 معین است، می‌بینیم که نقطهٔ P محل برخورد l_1 و l_2 یک دایرهٔ S را می‌پیماید (که بر دو نقطهٔ H_1 و H_2 می‌گذرد و حاوی زاویهٔ معینی است).

پس وجود نقطهٔ H را، که به ازای هر خط گذرنده از آن خطهای متناظر l_1 ، l_2 و l_3 در یک نقطه متقاطعند، نشان داده‌ایم. در این مورد دو نقطهٔ G و H نمی‌توانند موجود باشند، زیرا در چنین حالتی از هر نقطهٔ M دو خط MG و MH می‌گذرند که به ازای هریک از آنها سه خط متناظر l_1 ، l_2 و l_3 در یک نقطه متقاطع خواهند بود، و این شدنی نیست. برای این که ببینیم چرا H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای ΔABC و S دایرهٔ محیطی آن است، کافی است توجه کنیم که l_1 ، l_2 و l_3 خطهای متناظر با ارتفاعهای ΔABC ، در رأسهای آن یکدیگر را قطع می‌کنند.

ج. فرض کنید l خط دلخواهی باشد و $\bar{l}$ خطی موازی با آن که از H می‌گذرد. خطهای $\bar{l}_1$ ، $\bar{l}_2$ و $\bar{l}_3$ در یک نقطهٔ P متقاطعند؛ فاصله‌های خطهای l_1 ، l_2 و l_3 از نقطهٔ P، همان طور که در راه حل قسمت (ب) گفته شد، برابر است با فاصلهٔ بین $\bar{l}$ و l، یا به عبارت دیگر برابر با فاصلهٔ H از l. پس شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث T با فاصلهٔ H از l مساوی است؛ چون همهٔ مثلثهای T با یکدیگر متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که مساحت T تنها به فاصلهٔ H از l بستگی دارد.

۱۱۲. الف. چون O_1 مرکز دوران مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ است، داریم (شکل):

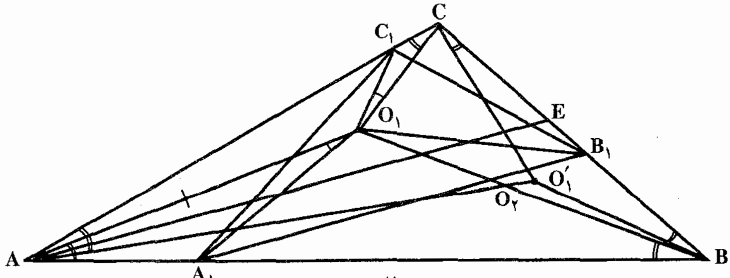
$$A\hat{O_1}A_1 = B\hat{O_1}B_1 = C\hat{O_1}C_1\ ,\ \frac{O_1A}{O_1A_1} = \frac{O_1B}{O_1B_1} = \frac{O_1C}{O_1C_1} \qquad (۱)$$

و بنابراین، مثلثهای AO_1A_1 ، BO_1B_1 و CO_1C_1 همه با یکدیگر متشابه‌اند. از این جا می‌بینیم که:

$$O_1\hat{A}B = O_1\hat{B}C = O_1\hat{C}A \qquad (۲)$$

به همین شیوه می‌توان نشان داد که:

$$O_2\hat{B}A = O_2\hat{C}B = O_2\hat{A}C \qquad (۳)$$



الف

همچنین بعکس، اگر نقطهٔ O_1 چنان باشد که شرط (۲) در آن صدق کند، آن‌گاه این نقطه اوّلین مرکز دوران ΔABC است. برای اثبات این گفته سه خط O_1A_1 ، O_1B_1 و O_1C_1 را از نقطهٔ O_1 می‌گذرانیم تا ضلعهای ΔABC را در نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 قطع کنند و با این ضلعها زاویه‌های متساوی بسازند. مثلثهای AO_1A_1 ، BO_1B_1 و CO_1C_1 (با توجه به تساوی زاویه‌ها) متشابه خواهند بود؛ بنابراین شرط (۱) برقرار است و O_1 مرکز دوران مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ است، یعنی O_1 اوّلین مرکز دوران ΔABC است. به همین طریق می‌توان نشان داد که نقطهٔ O_2 دومین مرکز دوران ΔABC است؛ اگر شرط (۳) برقرار باشد.

اکنون ثابت می‌کنیم که $O_1\hat{A}B = O_2\hat{A}C$. برای این کار قرینه‌های خطهای AO_1 ، BO_1 و CO_1 را نسبت به نیمسازهای زاویه‌های مربوطه رسم می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این سه خط در یک نقطهٔ مشترک O'_1 متقاطعند. فاصلهٔ O_1 از ضلعهای AB، BC و CA از ΔABC را به m، n و p نشان می‌دهیم. خط AO_1 مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصله‌هایشان از ضلعهای AB و AC از این مثلث به نسبت $p:m$ است (شکل الف). به همین ترتیب، قرینهٔ خط BO_1 نسبت به نیمساز زاویهٔ B مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصله‌هایشان از BA و AC به نسبت $m:n$ است و قرینهٔ خط CO_1 نسبت به نیمساز زاویهٔ C مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصله‌هایشان از CA و CB به نسبت $p:n$ است. از این جا نتیجه می‌شود که فاصلهٔ نقطهٔ O'_1 ، محل برخورد دو خط اخیر، از ضلعهای AB و AC به نسبت $m:p$ است، یعنی O'_1 به اوّلین خط از این سه خط نیز تعلق دارد.

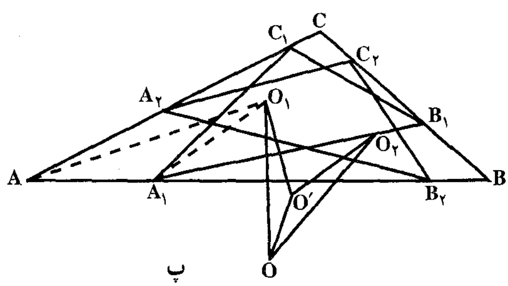
از شرط (۲) که نقطهٔ O_1 در آن صدق می‌کند، نتیجه می‌شود که O'_1 در رابطهٔ زیر صدق می‌کند.

$$O'_1\hat{B}A = O'_1\hat{C}B = O'_1\hat{A}C$$

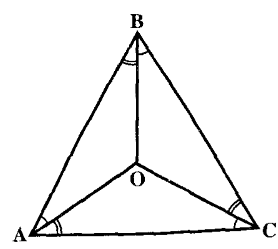
[زیرا $O_1\hat{C}A = O'_1\hat{C}B$ ، $O_1\hat{B}C = O'_1\hat{B}A$ ، $O_1\hat{A}B = O'_1\hat{A}C$]. بنابراین O'_1 بر نقطهٔ O_2 دومین مرکز دوران مثلث ABC منطبق است، و لذا $O_1\hat{A}B = O_2\hat{A}C$.

ب. فرض می‌کنیم نقطهٔ O هم اوّلین مرکز دوران و هم دومین مرکز دوران ΔABC باشد (شکل ب). چون O اوّلین مرکز دوران است، داریم $O\hat{A}B = O\hat{B}C = O\hat{C}A$ ؛ چون O دومین مرکز دوران نیز هست، همچنین داریم $O\hat{B}A = O\hat{C}B = O\hat{A}C$. پس از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ ، یعنی ΔABC متساوی‌الاضلاع است.

ج. می‌دانیم که نقطه‌های O'_1 و O'_2 مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای قابل انطباق $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ ، بر هم منطبقند. (در شکل پ این دو مرکز بر نقطهٔ O' منطبقند). چون $\Delta A_1B_1C_1$ از ΔABC بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O_1 ، زاویهٔ دوران α و یک نسبت k به دست می‌آید، داریم $O'\hat{O}_1O = \alpha$ و $O_1O'/O_1O = k$ ؛ چون $A_2B_2C_2$ از ABC بر اثر تجانس مارپیچی به مرکز O_2 ، با همان زاویهٔ دوران α (زیرا A_1B_1 و A_2B_2 با AB زاویه‌های متساوی می‌سازند)، و همان نسبت تجانس k (زیرا مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با هم قابل انطباقند). به دست می‌آید، داریم $O'\hat{O}_2O = \alpha$ و $O_2O'/O_2O = k$.



پ



ب

از این جا نتیجه می‌شود که مثلثهای O_1OO' و O_2OO' متشابه‌اند و چون یک ضلع مشترک OO' دارند، با هم قابل انطباقند ؛ پس $OO_1 = OO_2$.

توجه داشته باشید که از تشابه مثلثهای O_1OO' و O_1AA_1 نتیجه می‌شود که $O_1\hat{O}O' = O_1\hat{A}A_1$ و بنابراین، $O_1\hat{O}O_2 = ۲\varnothing$ که در آن $\varnothing$ مقدار مشترک زاویه‌های O_1AB ، O_1BC ، O_1CA ، O_2AC ، O_2CB و O_2BA است. از این جا و از نتیجهٔ

قسمت (د) نتیجه می‌شود که $O_۱O_۲ \le O_۱O = O_۲O$ (و علامت تساوی فقط برای مثلثهای متساوی‌الاضلاع صادق است که در آنها هر سه نقطهٔ $O_۱$ ، $O_۲$ و O بر هم منطبقند).

د. برای اثبات این قضیه ابتدا مقدار حاصلضرب

$$AO_۱ . O_۱A' = BO_۱ . O_۱B' = CO_۱ . O_۱C'$$

را بر حسب شعاع دایرهٔ محیطی R و زاویهٔ $\varnothing$ تعیین می‌کنیم. از تشابه مثلثهای $AO_۱C'$ و $A'BO_۱$ بسادگی نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO_۱}{AC'} = \frac{A'B}{A'O_۱}$$

و بنابراین

$$AO_۱ . O_۱A' = AC' . A'B$$

ولی از آن جا که $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{A'B} = ۲\varnothing$ ، داریم $AC' = A'B = ۲R\sin\varnothing$. پس می‌توان نوشت $AO_۱ . O_۱A' = ۴R^۲ \sin^۲ \varnothing$.

اما، از سوی دیگر، داریم:

$$AO_۱ . O_۱A' = MO_۱ . O_۱N = (R - OO_۱)(R + OO_۱) = R^۲ - OO_۱^۲ \le R^۲$$

از این جا نتیجه می‌شود که:

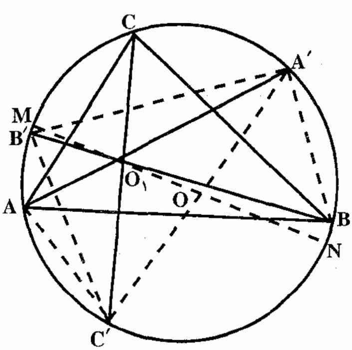
$$۴R^۲ \sin^۲ \varnothing \le R^۲ \; ; \; \sin^۲ \varnothing \le \frac{۱}{۴} \; , \; \varnothing \le ۳۰^\circ$$

تنها وقتی داریم $\varnothing = ۳۰^\circ$ که $O_۱$ بر O منطبق باشد $(OO_۱ = O)$ و ΔABC متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۱۳. الف. اندازهٔ زاویهٔ $A'AB$ را به $\varnothing$ نشان می‌دهیم، چون:

$$A'\hat{A}B = B'\hat{B}C = C'\hat{C}A = \varnothing$$

خواهیم داشت $\overset{\frown}{(BA')} = \overset{\frown}{(CB')} = \overset{\frown}{(AC')} = ۲\varnothing$ و مثلث $C'A'B'$ از ΔABC بر اثر دورانی به زاویهٔ $۲\varnothing$ حول نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی، به دست می‌آید (شکل).



ب. مثلاً در مثلث $AO_۱C'$ داریم:

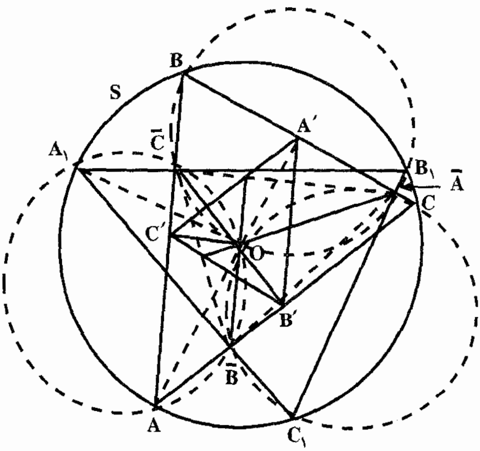
$$A\hat{O_۱}C' = \frac{\overset{\frown}{AC'} + \overset{\frown}{CA'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA'} + \overset{\frown}{CA'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = B\hat{A}C$$

$$C'\hat{A}O_1 = \frac{\overset{\frown}{C'B}+\overset{\frown}{BA'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{C'B}+\overset{\frown}{AC'}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = A\hat{C}B$$

بنابراین $\Delta AO_1C'$ با ΔABC متشابه است. نحوهٔ اثبات برای پنج مثلث دیگر نیز همین است.

۱۱۴. الف. مثلث $A_1B_1C_1$ از دوران مثلث ABC حول نقطهٔ O به اندازهٔ یک زاویهٔ α به دست می‌آید. از این جا نتیجه می‌شود که:

$$A\hat{B_2}A_1 = A\hat{C_2}A_1 = A\hat{O}A_1 = \alpha$$



یعنی نقطه‌های A، A_1، B_2، C_2 و O بر یک دایره واقعند (شکل). به همین طریق می‌توان نشان داد که پنج نقطهٔ B، B_1، A_2، C_2 و O بر یک دایره و همچنین پنج نقطهٔ C، C_1، A_2، B_2 و O بر یک دایره قرار دارند.

مثلث $A'B'C'$ حاصل از میانخطهای ΔABC را در نظر می‌گیریم. این مثلث را طوری تغییر می‌دهیم که همیشه با وضعیت اوّلیه‌اش (یعنی با ΔABC) متشابه بماند، و ضمناً رأسهایش بر ضلعهای ΔABC حرکت کنند. همهٔ وضعیتهای مثلث یک مرکز دوران مشترک دارند که همان نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$، $BA'C'$ و $CA'B'$ یعنی همان نقطهٔ O است. اکنون فرض می‌کنیم که یک رأس از مثلث متغیر A_2 باشد؛ دو رأس دیگر آن را B'_2 و C'_2 می‌نامیم. در این صورت B'_2 با نقطه‌های C، A_2 و O بر دایرهٔ مشترکی واقع خواهند بود؛ از این جا نتیجه می‌شود که $B'_2 = B_2$. به همین روش می‌توان نشان داد که رأس $C'_2 = C_2$.

ب. نقطهٔ O یک نقطهٔ ثابت مثلث متغیر $A_۲B_۲C_۲$ است ؛ پس باید برای همهٔ وضعیتهای این مثلث با خودش متناظر باشد. چون O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\Delta A'B'C'$ است لذا O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای $\Delta A_۲B_۲C_۲$ نیز هست.

۱۱۵. دوران حول مرکز مثلث به اندازهٔ ۱۲۰° نقطهٔ M را به N، نقطهٔ N را به P و نقطهٔ P را به M تبدیل می‌کند. چنین داریم : $MN = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$.

۴.۲. دوران در چند ضلعیها

۱.۴.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۱۱۶. در دورانهای به زاویهٔ ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° و به طورکلی $\frac{k\pi}{۲}$ رادیان در دورانهای ۹۰°، ۱۸۰° و ۲۷۰° دوران یافتهٔ هر نقطه بر خود آن نقطه منطبق نیست. تنها در دورانهای ۳۶۰° و به طورکلی $۳۶۰^\circ k$ یا $۲k\pi$ رادیان $(k \in Z)$ دوران یافتهٔ هر نقطه از مربع گرد مرکزش، بر خود آن نقطه منطبق است.

۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند

۱۱۷. دوران یافته مربع نسبت به مرکز دوران D و با زاویهٔ دوران ۹۰°، مربع $AB'A'D$ است. نقطهٔ C' بر A منطبق است و $B'\hat{A}D + D\hat{A}B = ۱۸۰^\circ$ است. پس سه نقطهٔ B، A و B' همخطند.

۳.۴.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۲. خطها بر هم عمودند

۱۱۸. عمود بودن دو خط وقتی ثابت می‌شود که یکی از آنها در دوران به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰°

روی دیگری قرار گیرد. در تجزیه و تحلیل شرایط مسأله توجه داشته باشید که نقطه‌های M و B از نقطهٔ A هم فاصله بوده و $M\hat{A}B = ۹۰°$ است. به طریق مشابه $AC = AP$ و $C\hat{A}P = ۹۰°$ است. از این رو دوران به اندازهٔ زاویهٔ $۹۰°$ در جهت عقربه‌های ساعت حول نقطهٔ A، نقطهٔ M را به نقطهٔ B و نقطهٔ C را به نقطهٔ P انتقال می‌دهد.

۱۱۹. دوران صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $۹۰°$ و حول نقطه M را مورد ملاحظه قرار دهید.

۲.۴.۴. زاویه

۲.۴.۴.۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

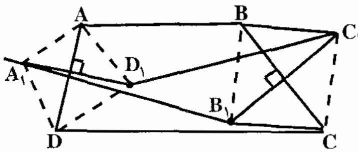
۱۲۰. چون ABCD چهارضلعی محاطی است، $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰°$ است و به دلیل تساویهای $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{C}=\hat{C}'$، داریم :

$$\hat{A}+\hat{A}'+\hat{C}+\hat{C}'=\hat{A}+\hat{C}+\hat{A}'+\hat{C}'=۱۸۰°+۱۸۰°=۳۶۰°$$

۲.۴.۵. پاره‌خط

۲.۴.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

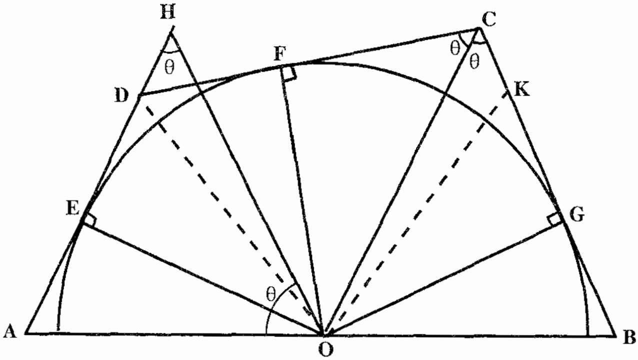
۱۲۱. با استفاده از شکل و ویژگی دوران، رابطهٔ مورد نظر را ثابت کنید.



۲.۴.۶. رابطه‌های متری

۱۲۳. در شکل صفحه بعد، O واقع بر AB مرکز دایره است، و E، F و G نقطه‌های تماسند. مثلث OFC، را برای به دست آوردن مثلث OEH، که در آن H بر خط AD واقع است حول O دوران می‌دهیم. θ را مساوی زاویه‌های OCF و OHE قرار می‌دهیم؛ در این صورت زاویهٔ OCG نیز برابر θ می‌شود.

از آن‌جا که چهارضلعی ABCD محاطی است :



$$O\hat{A}H = \pi - ۲\theta$$

است، بنابراین :

$$A\hat{O}H = \pi - (\theta + \pi - ۲\theta) = \theta = A\hat{H}O$$

و در نتیجه :

$$OA = AH = AE + FC = AE + GC \qquad (۱)$$

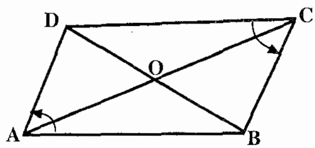
است. با همین استدلال، یعنی، با دوران ΔOFD حول O به ΔOGK، K واقع بر BC، و غیره به دست می‌آید.

$$OB = BK = BG + GK = BG + ED \qquad (۲)$$

با جمع (۱) و (۲)، خواهیم داشت :

$$AB = AD + BC$$

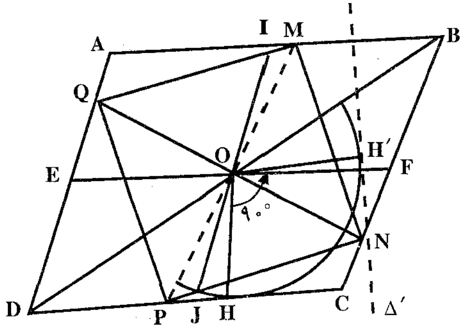
۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند



۱۲۴. این دو زاویه نسبت به محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع قرینهٔ مرکزی یکدیگرند. بنابراین دوران یافته به زاویه °۱۸۰ می‌باشند.

۸.۴.۲. رسم شکلها

۱۲۵. اگر MNPQ مربع محاط در متوازی‌الاضلاع ABCD باشد وسط قطر MP که دو نقطه از دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کند روی خط EF، خط واصل بین وسطهای AD و BC واقع است و به همین دلیل وسط قطر NQ بر خط IJ، خط واصل بین وسطهای



AB و DC واقع است. در نتیجه محل برخورد دو قطر مربع بر محل برخورد EF و IJ واقع است یا به عبارت دیگر مرکز مربع بر مرکز متوازی‌الاضلاع واقع است و چون $\overline{OP}=\overline{ON}$ و $\hat{PON}=90^\circ$ است، لذا اگر نقطهٔ P را حول O به اندازهٔ 90° دوران دهیم بر N منطبق می‌شود و از آن جا حل مسأله چنین است. ضلع DC را حول O به اندازهٔ 90° دوران می‌دهیم تا به صورت Δ' درآید. محل برخورد Δ' با BC، نقطهٔ N یک رأس مربع است و محل برخورد NO با AD نقطهٔ Q و عمودمنصف NQ ضلعهای AB و DC را بترتیب در M و P قطع می‌کند و MNPQ مربع مطلوب است.

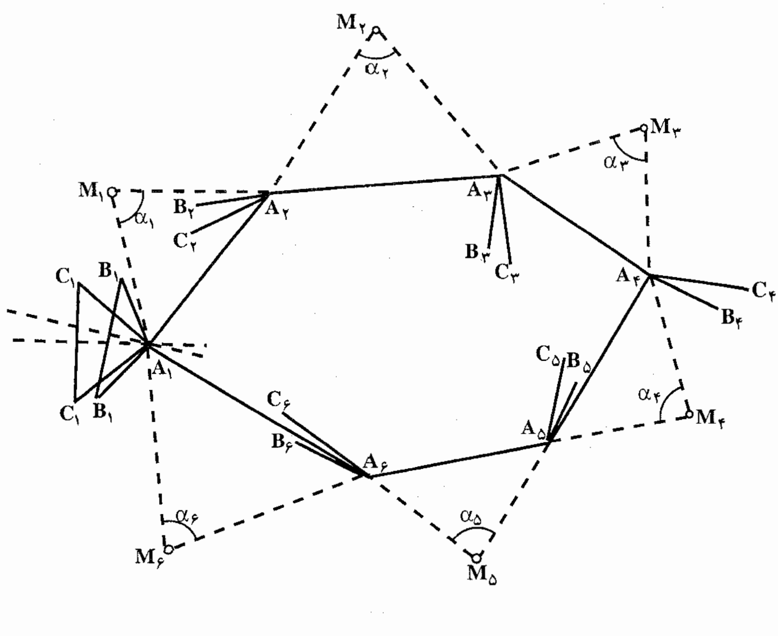
بحث. در صورتی که Δ' ضلع BC را قطع کند مسأله دارای جواب است. چنان که Δ' با BC موازی و یا آن را در امتداد BC قطع نماید، مسأله جواب ندارد.

۱۲۶. **راه حل اول.** فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $A_1A_2\dots A_n$ ، n ضلعی خواسته شده باشد (شکل با $n=6$). نقطهٔ دلخواه B_1 را در صفحه انتخاب می‌کنیم. یک رشته دوران نخست حول M_1 به زاویهٔ α_1 ، سپس حول M_2 به زاویهٔ α_2 ، ... ، و بالاخره حول M_n به زاویهٔ α_n ، پاره‌خط A_1B_1 را نخست به پاره‌خط A_2B_2 ، سپس A_2B_2 را به پاره‌خط A_3B_3... و بالاخره A_nB_n را به A_1B_{n+1} بدل می‌کند. همهٔ این پاره‌خطها با هم مساوی‌اند و از این رو A_1 ، رأس n ضلعی از نقطه‌های B_1 و B_{n+1} (که B_{n+1} از این n دوران B_1 به دست آمده) هم فاصله است. حال نقطهٔ دوم C_1 را در صفحه انتخاب می‌کنیم و به طور مرتب آن را حول نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ... و M_n به زاویه‌های α_1 ، α_2 ، ... و α_n دوران می‌دهیم. بدین ترتیب یک جفت نقطهٔ دوم C_1 و C_{n+1} متساوی‌الفاصله از A_1 به دست می‌آوریم. پس رأس A_1 از n ضلعی، می‌تواند محل برخورد عمودمنصفهای پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} باشد. پس از یافتن A_1 ، A_2 را می‌توان از دوران A_1 حول M_1 به زاویهٔ α_1 به دست آورد ؛ A_3 را از دوران

A_2 حول M_2 به زاویهٔ α_2 و ... و همین طور الی آخر. اگر عمودمنصفهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} یکدیگر را قطع کنند (یعنی پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند) مسأله یک جواب یکتا دارد. اگر این عمودمنصفها موازی باشند، مسأله جواب ندارد، و اگر بر هم منطبق باشند، مسأله بینهایت جواب دارد.

چندضلعی جواب این مسأله لزومی ندارد که محدب باشد و حتی ممکن است خودش را قطع کند.

راه حل دوم. رأس A_1 نقطهٔ ثابتی برای مجموع n دوران به مرکزهای M_1، M_2، ... و M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ... و α_n است (این دورانها A_1 را به A_2، A_2 را به A_3، A_3 را به A_4، ...، و بالاخره A_n را به A_1 می‌برند). اما مجموع n دوران به زاویه‌های α_1، α_2، ... و α_n دورانی است به زاویهٔ $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$.



به شرط این که $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ مضربی از 360° نباشد. در غیر این صورت این n دوران یک انتقال خواهد بود (این نتیجه‌گیری از قضیهٔ مجموع دو دوران حاصل می‌شود). تنها نقطهٔ ثابت یک دوران مرکز دوران است. پس اگر $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$ مضربی از 360° نباشد، آن‌گاه A_1 به صورت مرکز دوران حاصل از مجموع دورانهای حول نقطه‌های M_1، M_2، ... و M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ... و α_n پیدا خواهد شد. در عمل برای پیدا کردن A_1 می‌توان روش مذکور برای یافتن مرکز مجموع دو

دوران را به طور مکرر به کار برد.

انتقال نقطهٔ ثابت ندارد. پس اگر $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ مضربی از 360° باشد، مسأله در حالت کلی جواب ندارد. ولی در حالت خاص وقتی مجموع دورانها حول نقطه‌های M_1، M_2، ... و M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ... و α_n (که در آن مجموع $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ مضربی از 360° است) یک تبدیل همانی باشد، مسأله بینهایت جواب خواهد داشت (هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 انتخاب شود).

همچنین اگر $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=180^\circ$، مسأله وقتی n فرد باشد یک جواب یکتا دارد، و وقتی زوج باشد یا جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

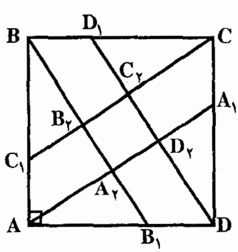
۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲۷. دورانهای به زاویهٔ 90° و به مرکزهای مربعها را در نظر بگیرید.

۱۲۸. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۲۹. فرض کنید که O نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD مربع ABCD، و MN و KL قطعات خطهای مفروض باشند که در داخل مربع قرار دارند (نقطه‌های M، N، K و L بترتیب به ضلعهای AB، CD، BD و AD مربع تعلق دارند). آن‌گاه $R_O^{90^\circ}(AB)=AD$ خواهد بود. تصویر نقطهٔ M عبارت از نقطهٔ M' از خط AD خواهد بود، به طوری که $\widehat{MOM'}=90^\circ$. یعنی این نقطه همان L خواهد بود. به طریق مشابه $R_O^{90^\circ}(N)=K$ بوده و در نتیجه $R_O^{90^\circ}(MN)=KL$ و $MN=KL$ درمی‌آید.

۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی



الف

۱۳۰. الف. بدون تردید کافی است حالتی را در نظر بگیریم که ABCD یک مربع واحد باشد. چهارضلعی $A_2B_2C_2D_2$ که از چهار خط AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 تشکیل شده یک مربع است. دلیل آن این است که ملاحظه می کنیم که یک دوران به زاویهٔ 90° حول مرکز مربع، نمودار را بر

خودش منطبق می‌کند، و همین ایجاب می‌کند که چهارضلعی $A_۲B_۲C_۲D_۲$ منتظم باشد. (در ضمن، این امر ایجاب می‌کند که اگر ABCD یک متوازی‌الاضلاع است $A_۲B_۲C_۲D_۲$ هم یک متوازی‌الاضلاع باشد.) مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $ABB_۱$ و $ABA_۲$ متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها k، برابر نسبت وترهای آنهاست:

$$k=\frac{BB_۱}{AB}=\frac{\sqrt{۱+(۲/۳)^۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}$$

چون
$$S_{ABB_۱}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

داریم:
$$S_{ABA_۲}=\frac{\frac{۱}{۳}}{k^۲}=\frac{۳}{۱۳}$$

بنابراین
$$S_{A_۲B_۲C_۲D_۲}=S_{ABCD}-S_{ABA_۲}-S_{BCB_۲}-S_{CDC_۲}-S_{DAD_۲}$$
$$=S_{ABCD}-۴S_{ABA_۲}=۱-\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۱}{۱۳}$$

یعنی
$$\frac{S_{A_۲B_۲C_۲D_۲}}{S_{ABCD}}=\frac{۱}{۱۳}$$

ب. **راه حل اول.** کافی است مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱/۱ در نظر بگیریم. مثلث $A_۲B_۲C_۲$ (متشکل از خطهای $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$) متساوی‌الاضلاع است، زیرا یک دوران ΔABC به زاویهٔ ۱۲۰° حول مرکزش، $\Delta A_۲B_۲C_۲$ را به خودش بدل می‌کند. برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مثلثهای $CB_۱C_۲$ و $CAC_۱$ (شکل ب، که مطابق راه حل دوم تکمیل شده است) متشابه‌اند و k نسبت تشابه آنها برابر است با

$$k=\frac{CB_۱}{CC_۱}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\sqrt{CK^۲+KC_۱^۲}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\sqrt{CA^۲-AK^۲+KC_۱^۲}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۳}}{\sqrt{۱-(۱/۲)^۲+(۱/۶)^۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۷}}$$

چون $S_{CAC_۱}=\frac{۱}{۳}S_{ABC}$، پس داریم:

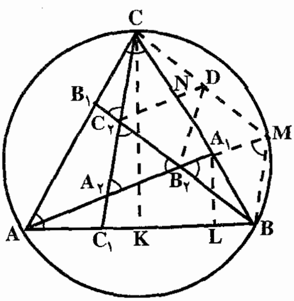
$$S_{CB_۱C_۲} = \frac{۱}{۳} S_{ABC} \cdot k^۲ = \frac{۱}{۲۱} S_{ABC}$$

بنابراین :

$$S_{A_۲B_۲C_۲} = S_{ABC} - S_{CAC_۱} - S_{ABA_۱} - S_{BCB_۱} + S_{CB_۱C_۲} + S_{AC_۱A_۲} + S_{BA_۱B_۲}$$
$$= S_{ABC} - ۳S_{CAC_۱} + ۳S_{CB_۱C_۲}$$
$$= S_{ABC} - ۳.\frac{۱}{۳} S_{ABC} + ۳.\frac{۱}{۲۱} S_{ABC} = \frac{۱}{۷} S_{ABC}$$

یعنی
$$\frac{S_{A_۲B_۲C_۲}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۷}$$

راه حل دوم. کافی است یک مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در نظر بگیریم. چنان که در راه حل اوّل نشان دادیم مثلث $A_۲B_۲C_۲$، که از خطهای $AA_۱$، $BB_۱$ و $CC_۱$ تشکیل می‌شود، متساوی‌الاضلاع است. فرض می‌کنیم S دایرهٔ محیطی ΔABC باشد و M نقطهٔ تلاقی S و $AA_۱$ (شکل ب). تساوی $B\hat{M}A = B\hat{C}A$ (مقابل به یک کمان) ایجاب می‌کند که $\Delta BMB_۲$ هم متساوی‌الاضلاع باشد $(B\hat{M}B_۲ = B\hat{B_۲}M = ۶۰^\circ)$ و $BM \| C_۱C$. همچنین $BM = BB_۲$ و $BB_۲ = CC_۲$ $(\Delta BB_۲A_۱ \cong \Delta CC_۲B_۱)$ ایجاب می‌کنند که $BM = C_۲C$، و لذا چهارضلعی $BMCC_۲$ متوازی‌الاضلاع باشد. حال از $C_۲$ خطی



ب

به موازات $MA_۱$ رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن را با BC به N نشان می‌دهیم. چون $\Delta CC_۲N \cong \Delta BMA_۱$، از آن جا نتیجه می‌شود $BA_۱ = NC$. این تساوی و این واقعیت که $BA_۱ = (۱/۳)BC$، به ما اجازه می‌دهند که نتیجه بگیریم $BA_۱ = A_۱N = NC$. برابری $B_۱A_۱ = A_۱N$، برابری $BB_۲ = B_۲C_۲$ را ایجاب می‌کنند و بالاخره $\Delta BB_۲M \cong \Delta A_۲B_۲C_۲$.

اکنون می‌توانیم به آسانی مساحت $\Delta A_۲B_۲C_۲$ را حساب کنیم. زیرا، اگر $B_۲D$ میانخط متوازی‌الاضلاع $BMCC_۲$ باشد، آن‌گاه :

$$S_{B_۲BM} = \frac{۱}{۲} S_{B_۲BMD} = \frac{۱}{۴} S_{C_۲BMC}$$

و چون $S_{BC_۲C} = \frac{۱}{۲} S_{BMCC_۲}$، پس :

$$S_{A_2B_2C_2} = S_{B_2BM} = \frac{1}{2} S_{BC_2C}$$

اما

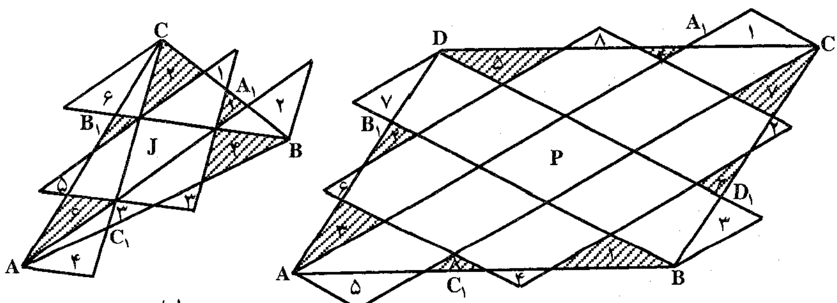
$$S_{ABC} = S_{BCC_2} + S_{CAA_2} + S_{ABB_2} + S_{A_2B_2C_2}$$
$$= 3S_{BCC_2} + S_{A_2B_2C_2} = 7S_{A_2B_2C_2}$$

و در نتیجه :

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{1}{7} S_{ABC}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم.

یادداشت. ملاحظه می‌کنیم که رابطه‌های $CC_2 = C_2A_2$ ، $BB_2 = B_2C_2$ و $AA_2 = A_2B_2$ که در مثلث متساوی‌الاضلاع صحیح است، باید مشابه‌هایی در هر مثلث ABC داشته باشد.



ب

الف

یادداشتهای ویراستار: راه‌حلهای زیرین برای قسمتهای (الف) و (ب) ی این مسأله به نظر پروفسور ب. گوردون رسیده است :

در شکلهای بالا هر ناحیهٔ «بیرونی» با ناحیهٔ سایه‌زدهٔ «درونی»، که با همان عدد شماره‌گذاری شده است، قابل انطباق است. مساحت سایه نخورده در شکل اوّل، به روشنی دیده می‌شود که ۱۳ برابر مساحت سایه نخوردهٔ متوازی‌الاضلاع p است، در حالی که مساحت سایه زده نشده در شکل دوم ۷ برابر مساحت سایه نخوردهٔ مثلث J است.

۱۳۱. دوران حول مرکز مربع به اندازهٔ 90° نقطهٔ P را به Q، Q را به R، R را به S و S را به P انتقال می‌دهد ؛ $PQ = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

۱۳۲. اگر ضمن دوران به اندازهٔ زاویهٔ α ، دور نقطهٔ O، وتر Q_1Q_2 از دایرهٔ به مرکز O، از وتر P_1P_2 به دست آید، آن وقت می‌توان نقطهٔ R، محل برخورد خطهای راست P_1P_2 و Q_1Q_2 را از نقطهٔ M وسط وتر P_1P_2 ، ضمن دوران به اندازهٔ $\frac{\alpha}{2}$ دور نقطهٔ O (در

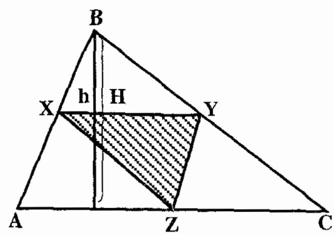
ضمن، نقطه M، به نقطهٔ M' از پاره‌خط راست OR می‌رود) تجانس به مرکز O و ضریب

$$k = \frac{۱}{\cos\frac{\alpha}{۲}} = OR:OM = OR:OM'$$

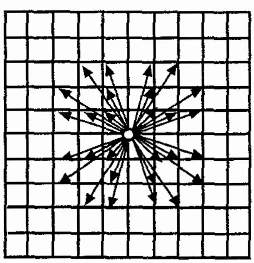
به دست می‌آید. از این نکته‌ها، برای حل مسأله استفاده می‌کنیم.

a) مثلث $A_۲B_۲C_۲$ با تبدیلهایی که شرح دادیم، از مثلث KLM به دست می‌آید که از وصل وسط ضلعهای مثلث ABC به دست آمده است. چون دو مثلث KLM و $A_۲B_۲C_۲$ و همچنین، دو مثلث KLM و ABC متشابه‌اند، بنابراین، مثلثهای ABC و $A_۲B_۲C_۲$ متشابه می‌شوند.

b) چهارضلعی مورد نظر مسأله، با تبدیل تشابهی، از چهارضلعی به دست می‌آید که وسط ضلعهای ABCD را به هم وصل کرده است. ولی از وصل وسط ضلعهای هر چهارضلعی، یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید.



الف


ب

۱۳۳. قبلاً این مسأله را حل می‌کنیم.

در خارج مثلث ABC دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $BAB_۱$ و $CAC_۱$ قائمه A را بنا می‌کنیم در دوران به مرکز A و به زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ نقطه‌های $B_۱$ و C بترتیب به نقطه‌های B و $C_۱$ تبدیل می‌شوند. بردار $\overrightarrow{B_۱C}$ تبدیل به بردار $\overrightarrow{BC_۱}$ می‌شود. از آن جا:

$$BC_۱ = B_۱C$$

$$(\overrightarrow{BC_۱}\,,\ \overrightarrow{CB_۱}) = \frac{\pi}{۲}$$

و یا

$$(\overrightarrow{B_۱C}\,,\ \overrightarrow{BC_۱}) = \frac{\pi}{۲}$$

اگر α و β وسطهای BB_1، CC_1 و O وسط BC باشد، داریم :

$$(\overrightarrow{O\gamma}\ ,\ \overrightarrow{O\beta})=\frac{\pi}{2}\ ,\ O\beta=O\gamma$$

$$\overrightarrow{O\gamma}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}$$

$$\overrightarrow{O\beta}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}$$

اگر دورانی به مرکز O و به زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ انجام دهیم β به γ تبدیل می‌شود. با استفاده از حل بالا در مثلث ABC نقطه‌های ω_1 و ω_2 و در مثلث ACD نقطه‌های ω_3 و ω_4 داده شده‌اند. بترتیب می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} I\omega_1=I\omega_2 \\ (\overrightarrow{I\omega_1}\ ,\ \overrightarrow{I\omega_2})=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I\omega_3=I\omega_4 \\ (\overrightarrow{I\omega_3}\ ,\ \overrightarrow{I\omega_4})=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

در دوران به مرکز I به زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ بردار $\overrightarrow{\omega_1\omega_4}$ به بردار $\overrightarrow{\omega_1\omega_3}$ تبدیل می‌شود. داریم :

$$(\overrightarrow{\omega_1\omega_3}\ ,\ \overrightarrow{\omega_2\omega_4})=\frac{\pi}{2}\ ,\ \omega_1\omega_3=\omega_2\omega_4$$

پس قطعه خطهای $\omega_1\omega_3$ و $\omega_2\omega_4$ مساوی و عمودمنصف یکدیگرند. (توجه کنید بردار $\overrightarrow{\omega_3\omega_1}$ در دوران به مرکز j و به زاویهٔ $\frac{\pi}{2}$ به بردار $\overrightarrow{\omega_2\omega_4}$ تبدیل می‌شود) نقطه‌های H و K وسطهای بردارهای $\overrightarrow{\omega_1\omega_3}$ و $\overrightarrow{\omega_2\omega_4}$ در دوران $(I\ ,\ \frac{\pi}{2})$ بر هم منطبق می‌شوند.

داریم :

$$(\overrightarrow{IH}\ ,\ \overrightarrow{IK})=\frac{\pi}{2}\ ,\ IK=IH$$

به همین ترتیب بردارهای $\overrightarrow{\omega_3\omega_1}$ و $\overrightarrow{\omega_2\omega_4}$ در دوران $(j\ ,\ \frac{\pi}{2})$ بر هم منطبق می‌شوند.

داریم:

$$(\overrightarrow{jK}, \overrightarrow{jH}) = \frac{\pi}{2}, \quad Kj = jH$$

این رابطه نشان می‌دهد که چهارضلعی IKjH مربع است.

۱۳۴. الف. اگر نقطه‌های M، N، P و Q وسطهای ضلعهای چهارضلعی ABCD باشند (شکل الف)، چهارنیمدوری که بترتیب حول نقطه‌های M، N، P و Q انجام می‌شوند نقطهٔ A را روی خودش می‌برند. اما این امر فقط زمانی امکان دارد که مجموع چهار نیمدور حول نقطه‌های M، N، P و Q که بترتیب مساوی مجموع دو انتقال در راستاهای MN و PQ و به طولهای ۲MN و ۲PQ است، تبدیل همانی باشد. ولی این به معنای آن است که پاره‌خطهای MN و PQ موازی، مساوی (از لحاظ طول) و مختلف‌الجهت هستند، یعنی چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است.

ب. درست مانند قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که مجموع سه انتقال در راستاهای M_1M_2 ، M_3M_4 و M_5M_6 به طولهای $2M_1M_2$ ، $2M_3M_4$ و $2M_5M_6$ یک تبدیل همانی است. بنابراین مثلثی وجود دارد که ضلعهایش با M_1M_2 ، M_3M_4 و M_5M_6 موازی و طولهای ضلعهایش مساوی $2M_1M_2$ ، $2M_3M_4$ و $2M_5M_6$ باشند؛ اما این بدان معنی است که مثلثی وجود دارد که ضلعهایش موازی و مساوی با پاره‌خطهای M_1M_2 ، M_3M_4 و M_5M_6 هستند.

عیناً به همین طریق می‌توان ثابت کرد که مثلثی وجود دارد که ضلعهایش مساوی و موازی با پاره‌خطهای M_2M_3 ، M_4M_5 و M_6M_1 هستند.

تذکر. با استفاده از روشی که در حل مسألهٔ بالا به کار بردیم می‌توان نشان داد که مجموعهٔ ۲n نقطهٔ M_1 ، M_2 ، ...، M_{2n} وسطهای ضلعهای یک ۲n ضلعی خواهد بود اگر و تنها اگر، یک n ضلعی وجود داشته باشد که ضلعهایش مساوی و موازی با پاره‌خطهای M_1M_2 ، M_3M_4 ، ...، $M_{2n-1}M_{2n}$ باشند، یا یک n ضلعی وجود داشته باشد که ضلعهایش موازی و مساوی با پاره‌خطهای M_2M_3 ، M_4M_5 ، ...، $M_{2n}M_1$ باشند.

۵.۲. دوران در دایره

۱.۵.۲. مرکز دوران، زاویهٔ دوران

۱۳۵. همهٔ گونه‌های ممکن زاویه‌های دوران دایره را، از ۰ تا 2π در نظر می‌گیریم. اگر یکی از

قطاعها، زاویه‌ای برابر α و دیگری زاویه‌ای برابر β داشته باشد، آن وقت زاویه‌های دوران، که به ازای آنها، نتیجهٔ دوران قطاع اوّل، دومی را قطع می‌کند، بازهٔ به طول $\alpha+\beta \le \frac{2\pi}{n^2-n+1}$ را پر می‌کند. اگر همهٔ این گونه زوجها را در نظر بگیریم (که تعداد آنها برابر است با $n(n-1)$)، می‌بینیم که بازه‌های متناظر، مجموعی به طول حداکثر برابر

$$\frac{2\pi n}{(n-1)(n^2-n+1)} < 2\pi$$

خواهد داشت. بنابراین زاویهٔ دوران مورد نظر، وجود دارد.

۱۳۶. دو دایره را، یکی فرض می‌کنیم و به جای قرار دادن بر یکدیگر، از دوران دایره استفاده می‌کنیم. همهٔ زاویه‌های ممکن دوران را، به عنوان عددهایی از بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ در نظر می‌گیریم، یعنی مقدار دوران، با طول کمانی اندازه گرفته می‌شود که نقطه‌ای از محیط دایره را، ضمن آن جابه‌جا می‌کند.

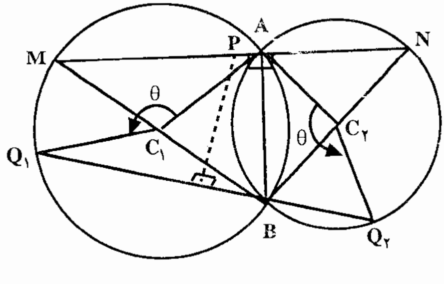
برای هر نقطهٔ نشان‌دار، مجموعهٔ زاویه‌هایی از این بازه را جدا می‌کنیم که، دوران به اندازهٔ آن، نقطهٔ ما را در درون یکی از کمانها قرار دهد. هریک از این مجموعه‌ها، از چندبازه تشکیل شده است که مجموع آنها، طول کمتر از $\frac{1}{20}$ دارد. چون تعداد این گونه مجموعه‌ها، برابر است با ۲۰، پس روی هم نمی‌توانند بازهٔ $[0,1]$ را بپوشانند و بنابراین، دورانی وجود دارد که به ازای آن، هیچ کدام از نقطه‌های ما، در درون کمان نشان شده قرار نمی‌گیرند.

۱۳۷. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۳۸. گزینهٔ (ب، ج و د) درست است.

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۲. نقطه ثابت است



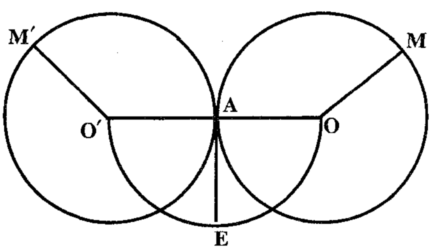
۱۳۹. هر دو نقطهٔ متحرک (از آن جا که هر دو پس از یک دور به A بازمی‌گردند) بر دایرهٔ C_2 هر دو در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ زاویهٔ دلخواه θ حرکت کرده‌اند. نیز،

B نقطهٔ برخورد دیگر دو دایره است، و MAN پاره‌خطی عمود بر AB است. از آن‌جا که: $A\hat{B}Q_1 = \theta/2$ و $A\hat{B}Q_2 = \pi - \theta/2$ است، خط Q_1Q_2 به ازاء جمیع مقدارهای θ از B می‌گذرد. از آن‌جا که: $M\hat{A}B = N\hat{A}B = 90^\circ$ است، MB و NB قطرند؛ و در نتیجه: $M\hat{Q_1}B = B\hat{Q_2}N = 90^\circ$ است. اکنون نتیجه می‌شود که MQ_1 و NQ_2 موازی‌اند. بنابراین عمودمنصف Q_1Q_2 (یعنی، مجموعهٔ نقطه‌های متساوی‌الفاصله از Q_1 و Q_2) پاره‌خط ثابت MN را به ازاء جمیع مواقع Q_1، Q_2 نقطه‌های متحرک، در نقطهٔ وسط آن قطع می‌کند.

۲.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۲.۵.۳.۱ خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۱۴۰. دو بردار $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{O'M'}$ در دوران به اندازهٔ $+\frac{\pi}{2}$، که در آن دایرهٔ (O') متناظر دایرهٔ (O) است، متناظرند. مرکز این دوران نقطه‌ای است مانند E که $EO = EO'$ و $(\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EO'}) = 90^\circ$ می‌باشد. یعنی نقطهٔ E محل برخورد عمودمنصف OO' با دایرهٔ به قطر OO' است. عمودمنصف MM' نیز همواره از نقطهٔ ثابت E می‌گذرد.



۲.۵.۴. زاویه

۲.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۱۴۱. وسط پاره‌خط راست BB' را D می‌نامیم. چون دو زاویهٔ AMM' و ABB' با هم برابرند، پس خطهای راست MM' و BB'، در نقطهٔ N' واقع بر محیط یکدیگر را قطع می‌کنند. محاسبه‌ای کوتاه نشان می‌دهد که

$$NM : MM' = NB : BD$$

و برابری زاویه‌های NMM' و NBD، از تشابه مثلثهای NMM' و NBD نتیجه می‌شود. بنابراین، دو زاویهٔ $MM'N$ و BDN، همچنین، دو زاویهٔ $NM'N'$ و NDN' با هم برابرند ؛ یعنی $M'DN'N$ یک چهارضلعی محاطی است و در نتیجه :

$$M'\hat{D}N = M'\hat{N}'N = M\hat{N}'N = ۹۰^\circ$$

۵.۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۱۴۲. مثلث $OO_۱O_۲$ متساوی‌الاضلاع است ؛ پس $O_۲O_۱ = 1$ است. اگر عمودهای $M_۲H_۲$ و $M_۱H_۱$ را بر $O_۲O_۱$ فرود آوریم، $O_۲H_۲ = O_۱H_۱ = R \times \cos ۶۰^\circ = \frac{R}{۲}$ است. پس :

$$M_۲M_۱ = 1 - ۲(\frac{R}{۲}) = 1 - R$$

۶.۵.۲. رابطه‌های متری

۱۴۳. مثلثهای AOB و $A'OB'$ متساوی‌الاضلاع و مثلث $A'OB$ قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس داریم :

$$AB = OA = ۶ = A'B' \ ; \ A'B = ۶\sqrt{۲}$$
$$\Rightarrow AB + BA' + A'B' = ۱۲ + ۶\sqrt{۲} = ۶(۲ + \sqrt{۲})$$

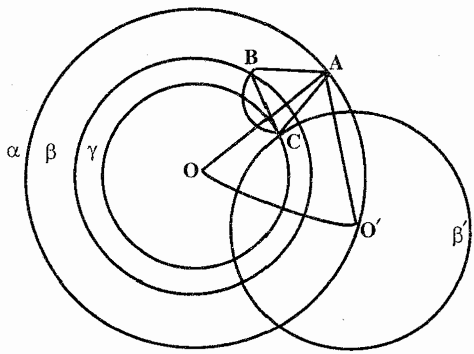
۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها دوران یافتهٔ یکدیگرند

۱۴۴. این دو دایره نسبت به مرکز دوران A و زاویهٔ دوران ۱۸۰°، دوران یافتهٔ یکدیگرند.

۸.۵.۲. رسم شکلها

۱۴۵. وتر مفروض مسأله را رسم کنید. دایرهٔ هم مرکز با دایره مفروض را که از نقطهٔ مفروض نیز می‌گذرد، رسم کنید.

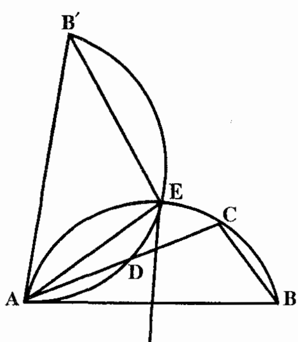
۱۴۶. یکی از رأسها، به عنوان مثال، A را روی محیط یکی از سه دایره به اختیار انتخاب می‌کنیم. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم، نقطهٔ C متناظر B در دوران $(A,60^\circ)$ است. بنابراین از نقطهٔ C دو مکان در دست است. یکی دایرهٔ (γ) و دیگری دایرهٔ (β') که از دوران دایرهٔ (β) در دوران بالا به دست می‌آید. پس از تعیین C، رأس B به سهولت به دست می‌آید. در دوران $(A,-60^\circ)$ جواب دیگری به دست می‌آید. اگر R، R' و R'' شعاعهای سه دایره باشند، شرط اینکه مسأله دارای جواب باشد، این است که $R'-R''\leq R<R'+R''$ باشد.



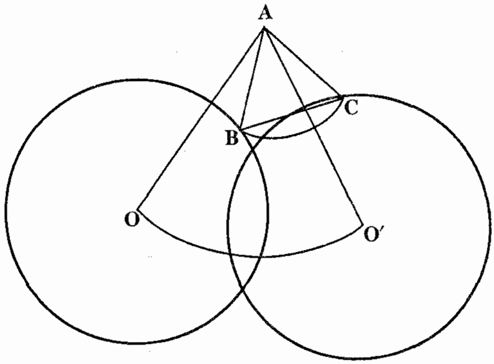
۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۴۷. گزینهٔ (ج) درست است.

۱۴۸. وقتی C روی قوس $\overset{\frown}{AB}$ تغییر می‌کند، زاویهٔ $A\hat{C}B$ مقداری است ثابت : $A\hat{C}B=\alpha$ و بردارهای $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AD}$ با توجه به این که $BC=AD$ است و $(\overrightarrow{BC}\,,\ \overrightarrow{AD})$ مساوی α می‌باشد، در دوران به اندازهٔ α متناظرند و مرکز این دوران نقطهٔ E وسط $\overset{\frown}{AB}$ است. مکان D از مکان C در دوران (E,α) به دست می‌آید و این مکان، کمان درخور زاویهٔ α است که روی AB'، مماس در نقطهٔ A بر قوس $\overset{\frown}{AB}$ رسم شود به قسمی که AB' با AB برابر باشد.



۱۴۹. اگر رأس A از مثلث ABC ثابت بوده و رأس B دایرهٔ (O) را بپیماید، از نقطهٔ B به نقطهٔ C همواره با دوران $(A,60^\circ)$ می‌توان رسید، پس مکان C دایرهٔ (O') است که از دوران دایرهٔ (O) به مرکز A و به زاویهٔ 60° به دست می‌آید.



۱۰.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۵۰. ۱. کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{EF}$ برابرند و OP عمودمنصف AF، در نتیجه عمودمنصف BE است. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است و $O\hat{B'}A = 90^\circ$، پس چهارضلعی $OPAB'$ در دایرهٔ به قطر OA محاط است.

از آن‌جا: $$(PB' \hat{,} PO) = (AB' \hat{,} AO) = \frac{\pi}{6}$$

از طرفی OP نیمساز زاویهٔ $B'PE'$ است، داریم:

$$(\overrightarrow{PB'} \hat{,} \overrightarrow{PE'}) = 2(PB' \hat{,} PO) = \frac{\pi}{3}$$

پس مثلث $PB'E'$ متساوی‌الاضلاع است.

۲. داریم: $$\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{E'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

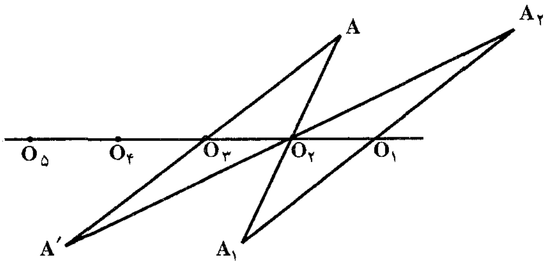
$$B'M = E'N, \quad (\overrightarrow{B'M} \hat{,} \overrightarrow{E'N}) = (\overrightarrow{OC'} \hat{,} \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$$

از طرفی داریم: $$PE' = PB', \quad (\overrightarrow{PB'} \hat{,} \overrightarrow{PE'}) = \frac{\pi}{3}$$

در نتیجه بردار $\overrightarrow{E'N}$، تبدیل یافتهٔ بردار $\overrightarrow{B'M}$، در دوران به مرکز P به زاویه $\frac{\pi}{3}$ است. نقطهٔ N تبدیل یافتهٔ M در این دوران است. از آن‌جا مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. تقارن مرکزی

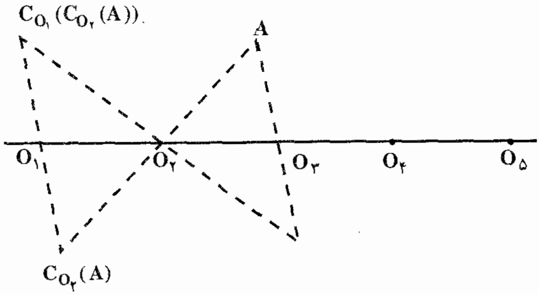
۱.۳. تعریف و قضیه



۱۵۱. فرض کنید شکل F دو مرکز تقارن، O_1 و O_2 دارد (شکل). پس نقطهٔ O_3 که از یک نیمدور O_1 حول O_2 به دست می‌آید نیز یک مرکز تقارن F است. زیرا، اگر A نقطه‌ای از شکل F باشد، آن‌گاه نقطه‌های A_1 ، A_2 و A' که در آن A_1 از یک نیمدور A حول O_2 و A_2 از یک نیمدور A_1 حول O_1 و A' از یک نیمدور حول O_2 به دست می‌آیند، نیز نقطه‌هایی از F خواهند بود (چون O_1 و O_2 مرکزهای تقارن هستند). اما نقطهٔ A' نیز از یک نیمدور A حول O_3 به دست آمده است ؛ چرا که پاره‌خطهای AO_3 و A_1O_1 ، A_1O_1 و A_2O_1 ، A_2O_1 و $A'O_3$ مساوی، موازی و مختلف‌الجهتند و درنتیجه پاره‌خطها AO_3 و O_3A' نیز مساوی، موازی و مختلف‌الجهت هستند. بنابراین اگر A نقطه‌ای از F باشد، نقطهٔ متقارن A' که از یک نیمدور A حول O_3 به دست آمده نیز نقطه‌ای از F است، یعنی، O_3 مرکز تقارن F است.

به همین طریق می‌توان نشان داد نقطهٔ O_4 ، که از یک نیمدور O_2 حول O_3 به‌دست آمده، و نقطهٔ O_5 که از یک نیمدور O_3 حول O_4 به دست آمده، و ....، مرکزهای تقارن هستند. پس می‌بینیم که اگر یک شکل F دو مرکز تقارن متمایز داشته باشد، بینهایت مرکز تقارن خواهد داشت.

۱۵۲. فرض می‌کنیم، مجموعهٔ M، دارای دو مرکز تقارن مختلف O_1 و O_2 باشد. در این صورت نقطهٔ O_3 ، قرینهٔ نقطهٔ O_1 نسبت به نقطهٔ O_2 هم، مرکز تقارن مجموعهٔ M است. در واقع اگر $C_O(A)$ را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O بگیریم، آن وقت، از این حقیقت که هم دو نقطهٔ A و $C_{O_2}(A)$ و هم دو نقطهٔ O_3 و O_1 نسبت به نقطهٔ O_2 قرینهٔ یکدیگرند، نتیجه می‌شود که دو نقطهٔ $C_{O_3}(A)$ و $C_{O_1}(C_{O_2}(A))$ هم نسبت به همان



نقطهٔ O_2 قرینهٔ یکدیگرند (شکل). بنابراین، برای هر نقطهٔ A، داریم :

$$C_{O_3}(A) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(A)))$$

و از آن‌جا

$$C_{O_3}(M) = C_{O_2}(C_{O_1}(C_{O_2}(M))) = C_{O_2}(C_{O_1}(M)) = C_{O_2}(M) = M$$

و به همین ترتیب، نقطه‌های

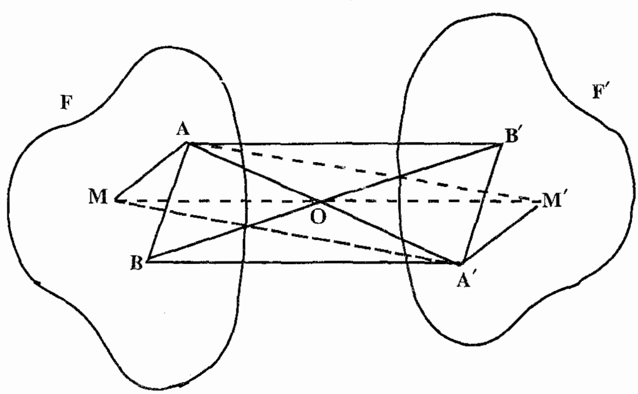
$$O_4 = C_{O_3}(O_2)\ ,\ O_5 = C_{O_4}(O_3)\ ,\ \ldots$$

مرکزهای تقارن مجموعهٔ M هستند. از آن‌جا که

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_3O_4} = \cdots$$

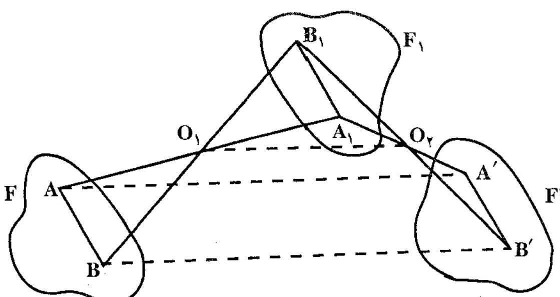
بنابراین، همهٔ این مرکزهای تقارن متمایزند، یعنی تعداد آنها، بینهایت است.

۱۵۳. اگر دو شکل F و F' با یک نیمدور حول نقطهٔ O به هم وابسته باشند، و اگر AB و $A'B'$ پاره‌خطهای متناظر این دو شکل باشند (شکل)، آن‌گاه چهارضلعی $ABA'B'$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود (چون قطرهای آن یکدیگر را در نقطهٔ تقاطعشان، O، نصف کرده‌اند). با توجه به این مطلب واضح است که پاره‌خطهای متناظر از دو شکلی که با یک نیمدور حول یک نقطه به هم وابسته‌اند، مساوی، موازی، و مختلف‌الجهت



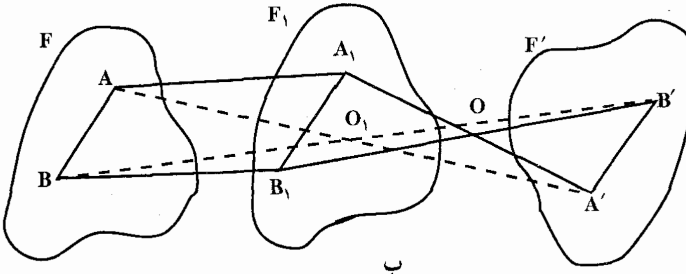
هستند. به وارون، نشان می‌دهیم که اگر به هر نقطه از شکل F بتوان یک نقطه از شکل F' چنان مربوط کرد که پاره‌خط واصل بین نقطه‌های متناظر این شکلها مساوی، موازی و مختلف‌الجهت باشند، آن‌گاه این دو شکل با یک نیمدور حول یک نقطه به هم وابسته‌اند. زیرا، فرض کنید M و M' یک جفت از نقطه‌های متناظر از شکلهای F و F' باشند و O وسط پاره‌خط MM' باشد. گیریم A و A' یک جفت دیگر از نقطه‌های متناظر این شکلها باشند (شکل). فرض این است که $AM \| M'A'$ و $AM = M'A'$ ؛ در نتیجه چهارضلعی $AMA'M'$ متوازی‌الاضلاع است و بنابراین وسط قطر AA' بر نقطهٔ O، وسط قطر MM'، منطبق است ؛ یعنی نقطهٔ A' با یک نیمدور نقطهٔ A حول نقطهٔ O به دست می‌آید و چون نقطه‌های A و A' یک جفت دلخواه از نقطه‌های متناظر بودند، نتیجه می‌شود که شکل F' از یک نیمدور شکل F حول O به دست می‌آید.

۱۵۴. حال سه شکل F، F_1 و F' را که در آن شکل F_1 از یک نیمدور F حول نقطهٔ O_1 و شکل F' از یک نیمدور F_1 حول O_2 به دست آمده است، در نظر می‌گیریم (شکل الف). فرض می‌کنیم A_1B_1 پاره‌خط دلخواهی از شکل F_1، و AB و $A'B'$ پاره‌خطهای



الف

متناظر آن از شکلهای F و F' باشند. در این صورت پاره‌خطهای A_1B_1 و AB مساوی، موازی و مختلف‌الجهت هستند ؛ پاره‌خطهای A_1B_1 و $A'B'$ نیز مساوی، موازی و مختلف‌الجهتند. در نتیجه پاره‌خطهای AB و $A'B'$ مساوی، موازی و متحدالجهت هستند. اما با متناظر کردن پاره‌خطهای شکلهای F و F'، که مساوی، موازی و متحدالجهت هستند، نتیجه می‌شود که F' با یک انتقال از F به دست می‌آید. پس مجموع دو نیمدور یک انتقال است. این مطلب به طور مستقیم نیز در شکل الف دیده می‌شود. چون O_1O_2 خطی است که نقطه‌های وسط ضلعهای AA_1 و $A'A_1$ از مثلث AA_1A' را به هم وصل می‌کند، پس $AA' \| O_1O_2$ و $AA' = 2O_1O_2$ ؛ یعنی هر

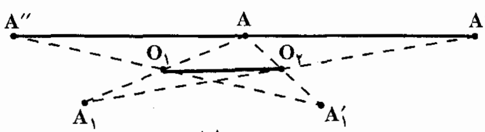


ب

نقطهٔ A' از شکل F' با یک انتقال نقطهٔ متناظر A در شکل F در راستای O_1O_2 و با طولی مساوی دو برابر O_1O_2 به دست می‌آید.

نکتهٔ ۱. دقیقاً با همان روش می‌توان نشان داد که مجموع یک انتقال و یک نیمدور حول یک نقطهٔ O (شکل ب)، یا یک نیمدور و یک انتقال، یک نیمدور حول یک نقطهٔ جدید O_1 است.

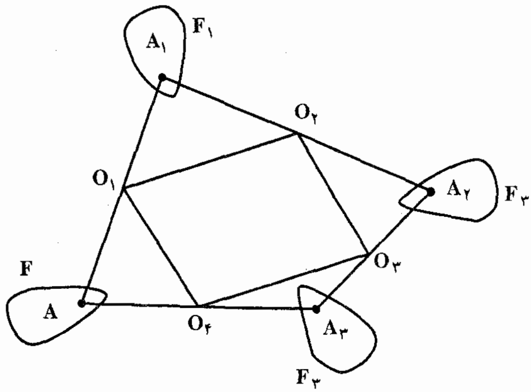
نکتهٔ ۲. می‌خواهیم به یک نکتهٔ مهم اشاره کنیم. دو نیمدور پیاپی حول نقطه‌های O_1 و O_2 (در شکل پ : $A \to A_1 \to A'$) هم‌ارز با انتقالی است به طول $2O_1O_2$ در راستای O_1 به O_2، در حالی که همین دو نیمدور پیاپی، با جهت عکس (شکل پ، $A \to A_1' \to A''$)، هم‌ارز با انتقالی است با همان طول در راستای O_2 به O_1. بنابراین، مجموع دو نیمدور به نحوهٔ ترتیب عمل این نیمدورها بستگی دارد. این پدیده، در حالت کلی، مشخص کنندهٔ مجموع تبدیلات است : مجموع دو تبدیل، در حالت کلی، به ترتیب تبدیلات بستگی دارد.



پ

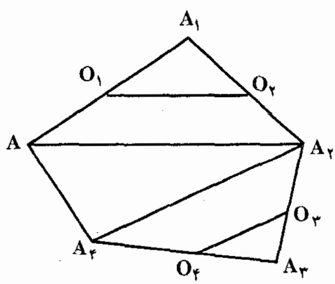
هنگامی که مجموع نیمدورها را بررسی کردیم، دیدیم که نیمدور، تبدیلی است از صفحه که هر نقطهٔ A را به یک نقطهٔ جدید A' می‌برد. به آسانی می‌توان دید که تنها نقطه‌ای که بر اثر یک نیمدور ثابت می‌ماند، مرکز O است که نیمدور حول آن صورت می‌گیرد و خطهای ثابت خطهایی هستند که از مرکز دوران می‌گذرند.

۱۵۵. سه تقارن مرکزی به مرکزهای O_1، O_2 و O_3 را در نظر می‌گیریم. اگر A_1 نقطه‌ای از شکل F باشد، انتقال یافتهٔ این نقطه نسبت به مرکزهای تقارن O_1، O_2 و O_3 را بترتیب A_1، A_2 و A_3 می‌نامیم. و وسط ضلع AA_3 از چهارضلعی $AA_1A_2A_3$ را O_4 می‌نامیم. چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ متوازی‌الاضلاع است. پس $\overrightarrow{O_3O_4}$ هم‌ارز با



بردار ثابت $\overrightarrow{O_2O_1}$ است. بنابراین O_4 نقطه‌ای ثابت و A_3 قرینهٔ مرکزی نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ ثابت O_3 است. پس مجموع سه تقارن مرکزی، یک تقارن مرکزی است.

۱۵۶. قرینه‌های مرکزی نقطهٔ دلخواه A از شکل F نسبت به مرکزهای تقارن O_1 ، O_2 ، O_3 و O_4 را بترتیب A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 می‌نامیم. با توجه به این که $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{O_1O_2}$ و $\overrightarrow{AA_4}=\overrightarrow{AA_2}+\overrightarrow{A_2A_4}$ و $\overrightarrow{A_2A_4}=2\overrightarrow{O_3O_4}$ است، پس



بردار ثابت $=2(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_4})=\overrightarrow{AA_4}$ پس نقطهٔ A_4 انتقال یافتهٔ نقطهٔ A به اندازهٔ بردار انتقال $2(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_3O_4})$ است. بنابراین شکل F_4 تبدیل یافتهٔ F به اندازهٔ بردار انتقال به دست آمده است.

۱۵۷. داریم :

$$AB \| A'B' \text{ و } AB \| A''B''$$
$$\Rightarrow A'B' \| A''B''$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود :

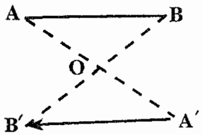
$$AC \| A'C' \;,\; AC \| A''C'' \Rightarrow A'C' \| A''C''$$
$$BC \| B'C' \;,\; BC \| B''C'' \Rightarrow B'C' \| B''C''$$

۱۵۸. گزینهٔ (د) درست است.

۱۵۹. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۳. تقارن مرکزی در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۳. مرکز تقارن

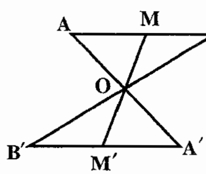


۱۶۰. نقطهٔ O محل برخورد پاره‌خطهای متناظر ′AA و ′BB جواب مسأله است.

۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

۱۶۱. نقطهٔ O مرکز تقارنی است که دو پاره‌خط AB و ′A′B را به هم تبدیل می‌کنند و نقطه‌های M و ′M، دو نقطهٔ متناظر در این تقارن مرکزی هستند. پس این دو نقطه و مرکز تقارن همخطند.



۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۳. خطها بر هم عمودند

۱۶۲. در مثلث $MM'M''$ خط OH وسطهای دو ضلع را به هم وصل کرده است. پس $OH \| M'M''$ است و چون $MH \perp OH$ است، پس $MM' \perp M'M''$ است.

۴.۲.۳. زاویه

۱.۴.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۱۶۳. گزینهٔ (الف) درست است.

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۶۴. به دلیل تقارن مرکزی A و C' نسبت C، و A و B' نسبت به B اگر از A عمود AA' را بر xy فرود آوریم، $AA' = B'H = C'K$ است.

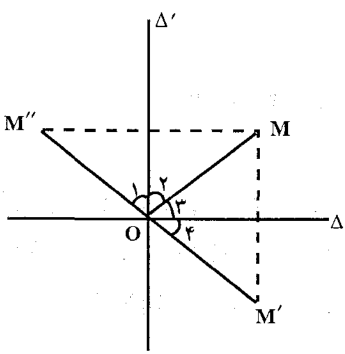
۱۶۵. گزینهٔ (د) درست است.

۶.۲.۳. رابطه‌های متری

۱۶۶. در تقارن مرکزی طول پاره‌خطها ثابت می‌ماند، پس $A'B' = AB$ ، $B'C' = BC$ و $C'D' = CD$ است. بنابراین داریم :

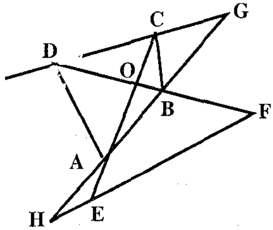
$$\frac{A'B'}{۴} = \frac{B'C'}{۳} = \frac{C'D'}{۲} \Rightarrow \frac{AB}{۴} = \frac{A'B'}{۴} = \frac{A'B'+B'C'+C'D'}{۹}$$

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند



۱۶۷. باید ثابت کنیم که $OM' = OM''$ و هر دو در یک امتداد هستند. Δ برای مثلث $OM'M$ و Δ' برای مثلث $OM''M$ عمودمنصف است. بنابراین OM' بر OM؛ OM'' بر OM' و OM بر OM'' ، Δ و Δ' غیر از عمودمنصف بودن، نیمساز هم هستند، بنابراین $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$ و $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$. این زاویه‌ها را جمع کنیم، می‌شود $۲\hat{O}_۲ + ۲\hat{O}_۳$ یا $۲(\hat{O}_۲+\hat{O}_۳)$، امّا $\hat{O}_۲+\hat{O}_۳ = ۹۰^\circ$ است. چون دو محور بر هم عمودند. بنابراین :

$$۲(\hat{O}_۲+\hat{O}_۳) = ۲\times ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$



۱۶۸. مثلث OAB را با موربهای CD و EF قطع می‌دهیم.

بنا بر قضیهٔ منلائوس داریم :

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DO}}\cdot\frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}=۱\ ,\quad \frac{\overline{HB}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EO}}\cdot\frac{\overline{FO}}{\overline{FB}}=۱$$

امّا پس از پیدا کردن نقطه‌های E و F داریم :

$$\overline{DB}=-\overline{FO}\ ,\ \overline{DO}=-\overline{FB}$$

$$\overline{CO}=-\overline{EA}\ ,\ \overline{CA}=-\overline{EO}$$

از دو رابطهٔ قبلی اینک رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود :

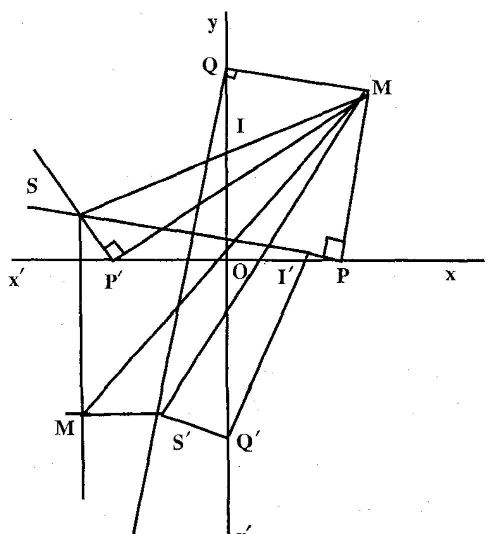
$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}}$$

و این رابطه درستی حکم مسأله را نشان می‌دهد.

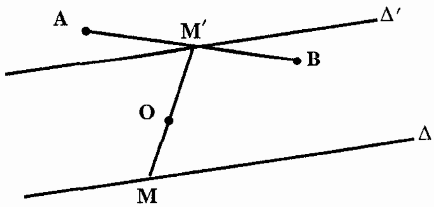
۱۶۹. دایرهٔ به قطر MS بر P و P′ می‌گذرد و نقطهٔ I وسط SM روی Oy واقع است. به همین ترتیب دایرهٔ به قطر MS′ بر Q و Q′ می‌گذرد و I′ وسط MS′ بر Ox واقع است. خطهای SM′ و S′M′ در تجانس (M,۲) مجانس هم و بر هم عمودند، پس M′ مجانس O در همین تجانس است ؛ بنابراین :

$$\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OM}\ \text{یعنی}\ \overrightarrow{MM'}=۲\overrightarrow{MO}$$

پس M و M′ نسبت به O قرینهٔ یکدیگرند.



۸.۲.۳. رسم شکلها



۱۷۰. خط Δ، پاره‌خط AB و نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. قرینهٔ مرکزی خط Δ را نسبت به نقطهٔ O به دست آورده Δ' می‌نامیم. نقطهٔ برخورد Δ' با پاره‌خط AB (در صورت وجود) را M' می‌نامیم M'_O خط Δ را در M قطع می‌کند. پاره‌خط MM' جواب مسأله است.

۹.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۷۱. گزینهٔ (الف، ب و ج) درست است.

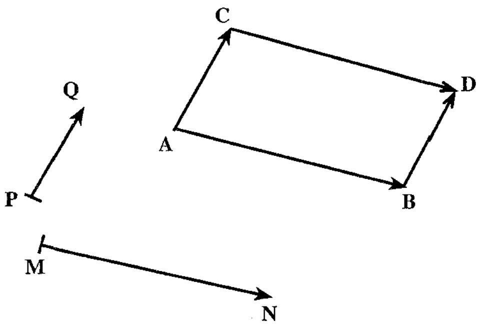
۱۰.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۱۷۲. الف. پاره‌خط A_nB_n از n نیمدور پیاپی AB حول نقطه‌های O_1، O_2، ... و O_n (n زوج) به دست آمده است. اما مجموع دو نیمدور حول O_1 و O_2 یک انتقال است، همچنین است مجموع دو نیمدور حول O_3 و O_4، مجموع دو نیمدور حول O_5 و O_6 و ....، بالاخره مجموع دو نیمدور حول O_{n-1} و O_n. پس A_nB_n، از $n/2$ انتقال متوالی AB به دست آمده است. چون مجموع هر تعداد انتقال، باز یک انتقال است، پس پاره‌خط A_nB_n از انتقال AB به دست آمده است، و بنابراین $AA_n = BB_n$. اگر n فرد باشد حکم مسأله درست نیست، زیرا مجموع تعداد فردی نیمدور برابر یک انتقال به اضافهٔ یک نیمدور، یا به عبارت دیگر، یک نیمدور حول یک نقطهٔ دیگر است؛ پس درحالت کلی $AA_n \neq BB_n$ (اگرچه $AB_n = BA_n$).

ب. چون مجموع تعداد فردی نیمدور باز یک نیمدور است (راه حل قسمت (الف) مسأله)، نقطهٔ A_n که از n نیمدور متوالی A حول نقطه‌های O_1، O_2، ... و O_n به

دست آمده است، نیز می‌تواند از تنها یک نیمدور A حول یک نقطهٔ O به‌دست آید. نقطهٔ A_{2n} که از همین n نیمدور A_n به دست می‌آید نیز می‌تواند از تنها یک نیمدور A_n حول نقطهٔ O به دست آید. اما این بدان معنی است که A_{2n} بر A منطبق است.
اگر n زوج باشد، A_n از یک انتقال A به دست می‌آید، و A_{2n} نیز با همان انتقال از A_n به دست می‌آید؛ بنابراین A_{2n} در حالت کلی بر A منطبق نخواهد بود (اگر این انتقال، انتقالی به طول صفر یعنی تبدیل همانی باشد، آن‌گاه A_{2n} بر A منطبق می‌شود).

۱۷۳. الف. مجموع دو نیمدور حول نقطه‌های O_1 و O_2 یک انتقال است و مجموع دو نیمدور حول نقطه‌های O_3 و O_4 انتقال دیگری است (که در حالت کلی با اوّلی متفاوت است). پس «اوّلین» نقطهٔ A_4 از ترکیب دو انتقال متوالی A به دست می‌آید؛ «دومین» نقطه (که آن را با A'_4



نشان می‌دهیم) از ترکیب همان دو انتقال A، اما به ترتیب عکس به دست می‌آید. ولی مجموع دو انتقال مستقل از ترتیب آنهاست. (برای اثبات این مطلب کافی است که شکل را در نظر بگیریم، که در آن نقطه‌های B و C از انتقالهای نقطهٔ A بترتیب در راستای پاره‌خطهای MN و PQ به دست آمده‌اند. نقطهٔ D از انتقال نقطهٔ B در راستای PQ به دست می‌آید و D نیز با انتقال C در راستای MN. از این مطلب حکم قضیه نتیجه می‌شود.)

ب. این مسأله عیناً نظیر مسأله‌ای به ازای $n = 5$ است، زیرا این مسأله به ما می‌گوید که نقطهٔ A_5 که از پنج نیمدور پیاپی نقطهٔ A حول نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 ، O_4 و O_5 به دست می‌آید، باز با همین پنج نیمدور و به همان ترتیب به نقطهٔ A بازمی‌گردد.

ج. وقتی که n فرد باشد، جای نهایی یکی خواهد بود [دو نقطهٔ حاصل از n نیمدور در حالتی که $n = 2k$ عددی زوج باشد، بر هم منطبق می‌شوند. یک k ضلعی $M_1M_2\ldots M_k$ وجود دارد که ضلعهای آن M_1M_2 ، M_2M_3 ، ...، M_kM_1 با پاره‌خطهای O_1O_2 ، O_3O_4 ، ...، $O_{n-1}O_n$ مساوی، موازی و متحدالجهت هستند (در این حالت مجموع n نیمدور حول نقطه‌های O_1 ، O_2 ، ...، O_n ، به همین ترتیب یا به ترتیب عکس، «انتقالی است به طول صفر»، یعنی یک تبدیل همانی).]

۳.۳. تقارن مرکزی در مثلثها

۱.۳.۳. مرکز تقارن

۱۷۴. بنا به ویژگی میانه‌ها، $GA'' = GA'$ ، $GB'' = GB'$ و $GC'' = GC'$ است. پس مثلث $A''B''C''$ قرینهٔ مرکزی مثلث $A'B'C'$ نسبت به مرکز تقارن G است. بنابراین حکم مسأله برقرار است.

۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند

۱۷۵. از ویژگی تقارن در متوازی‌الاضلاع و این خاصیت که از یک نقطه بیش از یک خط نمی‌توان موازی خط مفروضی رسم نمود، استفاده کنید.

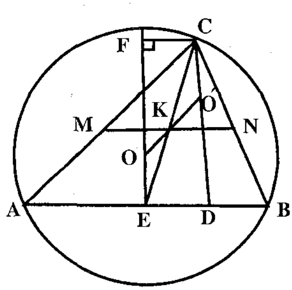
۲.۲.۳.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۱۷۷. ثابت کنید مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث از نقطه‌های قرینهٔ مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی آن، به یک فاصله است و این فاصله مساوی دو برابر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

۳.۲.۳.۳. نقطه روی خط است

۱۷۸. CE نیمساز و MN با AB موازی و مساوی است، پس داریم:

$MK = \frac{MN}{۲} \Leftarrow MN = \frac{AB}{۲}$ و $AE = \frac{AB}{۲}$ و $MK = \frac{AE}{۲}$ ، چون $CK = KE$.



حال مستطیل CDEF را در نظر می‌گیریم که ضلع EF از O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد، پس نقطهٔ K محل تلاقی قطرهای مستطیل می‌باشد یعنی قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به K روی ضلع دیگر مستطیل یعنی ارتفاع CD است.

۳.۳.۳. خطهای همرس، موازی، ...

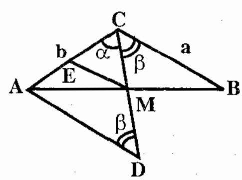
۱.۳.۳.۳. خطها موازی‌اند

۱۷۹. اگر A' وسط ضلع BC باشد، می‌دانیم که $GA = ۲GA'$ است. بنابراین $GA'' = ۲GA'$ یعنی A' وسط GA'' یا به‌عبارت دیگر A'' قرینهٔ نقطهٔ G نسبت به نقطهٔ A' است. از طرفی A' وسط پاره‌خط BC است. بنابراین چهارضلعی $BGCA''$ که قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند متوازی‌الاضلاع و درنتیجه $A''C$ موازی BG یا BB' است.

۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱۸۰. با در نظرگرفتن $BC = a$ و $AC = b$، آن‌گاه طبق فرض $a > b$ خواهد بود.

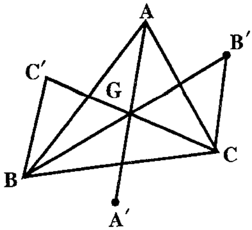


روش اول. نقطهٔ D متقارن نقطهٔ C را نسبت به نقطهٔ M (میانگاه ضلع AB) مشخص کرده و نقطهٔ D را به رأس A وصل می‌کنیم (شکل). مثلث ADM با مرکز تقارن M متقارن مثلث BCM است. درنتیجه $AD = BC = \alpha$ و $B\hat{C}M = A\hat{D}M = \beta$ خواهد بود. بدین ترتیب در مثلث ACD حاصله که محتوی زاویه‌های α و β است، ضلعهای متقابل به این زاویه‌ها یعنی ضلعهای AD و AC بترتیب برابر a و b خواهند بود. طبق فرض $a > b$ و $\alpha > \beta$ است.

روش دوم. میانگاه E مربوط به ضلع AC را به نقطهٔ M وصل کرده و مثلث CEM را به‌دست آورید. ضلعهای آن به‌صورت $EM = \frac{a}{۲}$ و $CE = \frac{b}{۲}$ است. زاویه‌های مثلث CEM که متقابل به این ضلعها هستند بترتیب برابر α و β است. این امر می‌تواند به‌آسانی با استفاده از میانخط مثلث ثابت شود.

۵.۳.۳. پاره‌خط

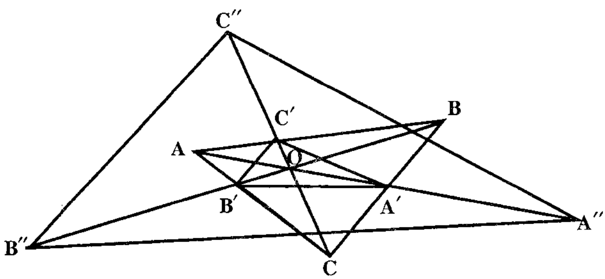
۱.۵.۳.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۱۸۱. پاره‌خطهای BC' و CB' در تقارن به مرکز G، دو پاره‌خط متناظرند، پس مساوی‌اند.

۶.۳.۳. رابطه‌های متری

۱۸۲. نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای راست AA'، BB' و CC' را O، و زاویهٔ AOB را برابر φ می‌گیریم (شکل). این برابریها روشن است :



$$۲S_{AOB} = AO.BO\sin\varphi,$$
$$۲S_{AOB'} = AO.B'O\sin\varphi,$$
$$۲S_{BOA'} = BO.A'O\sin\varphi,$$
$$۲S_{A'OB'} = A'O.B'O\sin\varphi,$$

از آن‌جا :

$$S_{A''OB''} = \frac{۱}{۲}A''O.B''O\sin\varphi = \frac{۱}{۲}(AO+۲A'O)(BO+۲B'O)\sin\varphi$$
$$= S_{AOB} + ۲S_{AOB'} + ۲S_{BOA'} + ۴S_{A'OB'}$$

به همین ترتیب، می‌توان به‌دست آورد :

$$S_{A''OC''} = S_{AOC} + ۲S_{AOC'} + ۲S_{COA'} + ۴S_{A'OC'}$$
$$S_{B''OC''} = S_{BOC} + ۲S_{BOC'} + ۲S_{COB'} + ۴S_{B'OC'}$$

به این ترتیب، خواهیم داشت :

$$S_{A''B''C''} = S_{A''OB''} = S_{A''OC''} + S_{B''OC''}$$
$$= S_{ABC} + ۲(S_{AOB'} + S_{B'OC} + S_{COA'} + S_{A'OB} + S_{BOC'} + S_{C'OA})$$
$$+ ۴S_{A'B'C'} = ۳S_{ABC} + ۴S_{A'B'C'}$$

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۱۸۶. مثلثهای $A_1B_1C_1$ و PQR نسبت به نقطهٔ M متقارن هستند.

۸.۳.۳. رسم شکلها

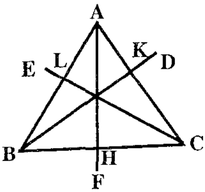
۱۸۹. خط مطلوب m از نقطه‌هایی عبور می‌کند که نسبت به نقطهٔ M متقارن بوده و به ضلعهای زاویهٔ ABC تعلق دارند. برای اثبات این گزاره نشان دهید که مساحت مثلث ایجادشده در اثر برش خط l که محتوی نقطهٔ M است و با خط m متفاوت است از مساحت مثلث حاصله به‌وسیلهٔ خط m بزرگتر است.

۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۰. ثابت کنید که نقطهٔ تلاقی مثلث، مرکز تقارنی است که مثلث ABC را به مثلث رسم شده انتقال می‌دهد.

۱۹۱. گزینهٔ (هـ) درست است.

۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی



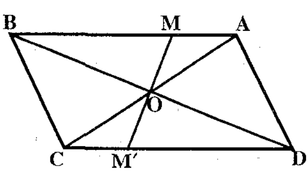
۱۹۳. چون AH، BKو CL با هم برابرند و OH، OK و OL ثلث هریک از ارتفاعها می‌باشند پس OA و OE و OF برابرند، از طرف دیگر بسادگی روشن می‌شود که زاویه‌ها حول نقطهٔ O هریک مساوی ۶۰ درجه بوده و با هم برابرند، و بنابراینD و E نسبت به AH، و E و F نسبت به BK، و F و D نسبت به LC متقارنند. و چون $OA=\frac{۲}{۳}AH$ و $OD=\frac{۲}{۳}AH$ می‌باشد، پس OA با OD و به همین ترتیب با OE و OB و OF و OC برابر است، پس O مرکز تقارن شکل AEBFCD می‌باشد.

۱۹۴. ۱. به دلیل این‌که B' قرینهٔ مرکزی B نسبت به نقطهٔ M و C' قرینهٔ مرکزی نقطهٔ C نسبت به نقطهٔ M' است، چهارضلعیهای $BAB'C$ و $CAC'B$ متوازی‌الاضلاعند. پس $AB'=BC$ و $AC'=BC$ ؛ یعنی $AB'=AC'$ است. از طرفی $B'\hat{A}C=A\hat{C}B$ و $C'\hat{A}B=A\hat{B}C$ است، پس داریم :

$$C'\hat{A}B'=C'\hat{A}B+B\hat{A}C+C\hat{A}B'=A\hat{B}C+B\hat{A}C+A\hat{C}B=۱۸۰^\circ$$

۴.۳. تقارن مرکزی در چندضلعیها

۱.۴.۳. مرکز تقارن



۱۹۵. می‌دانیم که قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند یعنی اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، $OA=OC$ و $OB=OD$ است. حال ثابت می‌کنیم هر خطی که از O بگذرد ضلعهای روبه‌روی متوازی‌الاضلاع را در دو نقطهٔ M و M' قطع می‌کند که قرینهٔ یکدیگر نسبت به نقطهٔ O می‌باشند. اثبات از همنهشتی مثلثهای OMA و $OM'C$ (یا OBM و $OM'D$) حاصل می‌شود.

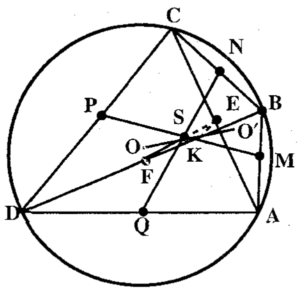
۱۹۶. گزینهٔ (ب و د) درست است.

۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند

۱۹۷. قرینهٔ نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی محاطی ABCD نسبت به نقطهٔ M محل برخورد خطهای PQ و RS که وسطهای ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی را به هم وصل می‌کنند M و قرینهٔ آن نسبت به دو ضلع AD و BC را O_2 و O_3 می‌نامیم. ثابت کنید سه نقطهٔ O_1، O_2 و O_3 همخطند.

۲.۲.۴.۳. نقطه‌ها بر هم منطبقند



۱۹۸. در شکل، M، N، P و Q بترتیب وسط ضلعهای AB، BC، CD و AD از چهارضلعی محاطی ABCD، S نقطهٔ برخورد MP و NQ، O مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی، O′ قرینهٔ O نسبت به نقطهٔ S، E و F وسط قطرهای AC و BD و K نقطهٔ برخورد آنهاست. ثابت کنید نقطهٔ O′ محل برخورد ارتفاعهای مثلث EFK است.

۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۳. خطها همرسند

۱۹۹. اگر H_d و H_a محل برخورد ارتفاعهای مثلثهای ABC و DBC باشد، داریم:

$$AH_d = 2OQ = DH_a$$

AH_d و DH_a هر دو بر BC عمودند، پس ADH_aH_d متوازی‌الاضلاع است و AH_a و DH_d قطرهای متوازی‌الاضلاع و درنتیجه منصف یکدیگرند. به همین ترتیب DH_d به‌وسیلهٔ خطهای BH_b و CH_c نصف می‌شود و برعکس، یعنی چهار خط یکدیگر را نصف می‌کنند. این نقطهٔ مشترک (نقطهٔ X) مرکز تقارن دو چهارضلعی ABCD و $H_aH_bH_cH_d$ است.

تبصره. نقطهٔ X بر نقطهٔ M منطبق است؛ زیرا در مثلث ADH_d خط SX موازی AH_d و درنتیجه عمود برBC است. پس از M عبور می‌کند، همین‌طور خطهای PX،QX وRX و حکم ثابت می‌شود و M مرکز تقارن دو چهارضلعی قرینهٔ ABCD و $H_aH_bH_cH_d$ می‌باشد.

۲.۳.۴.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲۰۰. اگر E نقطهٔ برخورد دو ضلع روبه‌روی AB و CD از چهارضلعی محاطی ABCD و نقطه‌های M، N، P و Q بترتیب وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و AD، S نقطهٔ برخورد MP و NQ و O مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی باشد از E عمود EH را بر MP فرود می‌آوریم. همچنین از O عمود OH' را بر MP رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط OH' قرینهٔ خط EH نسبت به نقطهٔ S است و یا ...

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازهٔ زاویه

۲۰۱. تقارن مرکزی ایزومتری است. $A'B'C'D'$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و یا ذوزنقهٔ ABCD همنهشت است، پس کافی است اندازهٔ یک زاویهٔ مجاور به قاعده از ذوزنقهٔ ABCD را تعیین کنیم. با توجه به داده‌های مسأله اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، داریم:

$$۲HD = ۱۲ - ۶ = ۶ \Rightarrow HD = ۳ \Rightarrow AH = \sqrt{۲۵ - ۹} = ۴$$

$$\Rightarrow \sin A\hat{D}C = \frac{AH}{AD} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow A\hat{D}C = \operatorname{Arc}\sin\frac{۴}{۵}$$

۵.۴.۳. پاره‌خط

۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره خطها

۲۰۲. از این موضوع استفاده کنید که نقطه تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع مرکز تقارن آن است.

۲۰۳. مرکز دایره، مرکز تقارن شش‌ضلعی محیطی است.

۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۲۰۴. محورهای تقارن مستطیل را رسم می‌کنیم. این محورهای تقارن، مستطیل را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنند. اگر نقطهٔ انتخابی، در یکی از دو بخشی که شامل نقطه‌های A و C است، یا بر محیط این بخشها قرار گیرد، آن وقت، درستی

$S_۱$	$S_۳$	$S_۱$
$S_۲$	$S_۰$	$S_۲$
$S_۱$	$S_۳$	$S_۱$

حکم مسأله، روشن است. اکنون فرض می‌کنیم، نقطهٔ مفروض، در یکی ازدو بخش دیگر مستطیل واقع باشد. قرینهٔ هر دو خط راستی را که رسم شده‌اند، نسبت به مرکزمستطیل، پیدا می‌کنیم. این چهار خط راست (دو خط راست تقسیم، و دو قرینهٔ آنها) مستطیل را به ۹ بخش تقسیم می‌کنند. چهار بخش به مساحت S_1، دو بخش به مساحت S_2، دو بخش به مساحت S_3 و یک بخش به مساحت S_0 (شکل). باید ثابت کنیم که، S_1+S_2 یا S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ تجاوز نمی‌کند (S را، مساحت مستطیل گرفته‌ایم). چون

$$4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$$

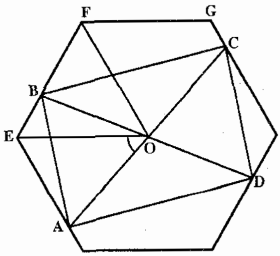
بنابراین

$$2S_1+S_2+S_3<\frac{1}{2}S \Rightarrow (S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{1}{2}S$$

یعنی یکی از عددهای S_1+S_2 و S_1+S_3 از $\frac{1}{4}S$ کوچکتر است (اگر هیچ کدام، از $\frac{1}{4}S$ کوچکتر نباشند، آن وقت مجموع آنها، از $\frac{1}{2}S$ کوچکتر نمی‌شود).

∇ مسألهٔ فضایی زیر، که با مسألهٔ بالا شباهت دارد، جالب است: فرض کنید $V_1 \le V_2 \le \cdots \le V_8$ حجمهای هشت‌بخشی باشند که از یک متوازی‌السطوح به حجم واحد، به‌وسیلهٔ سه‌صفحه‌ای که از یک نقطهٔ آن گذشته و با وجه های آن موازی‌اند، به‌دست آمده است؛ هریک از مقدارهای V_i، $(i=1,2,\cdots,8)$، در چه محدوده‌ای تغییر می‌کنند؟ مثلاً معلوم شده است که $0 \le V_4 \le \frac{1}{8}$، و برای هر مقدار V_4 از این فاصله، تقسیم متناظری از متوازی‌السطوح وجود دارد (برای اثبات نابرابری $V_4 \le \frac{1}{8}$، بهتر است از این حقیقت استفاده کنیم که دو بخش روبه‌رو، حجمهایی دارند که حاصلضرب آنها، از $\frac{1}{64}$ تجاوز نمی‌کند). همین مسأله را برای متوازی‌السطوح nبعدی به حجم واحد هم، می‌توان طرح کرد.

۲۰۵. ثابت کنید که نقطهٔ O محل تلاقی قطرهای AD و BE مرکز تقارن شش ضلعی $ABCDEF$ است. از این گذشته $S_{\Delta OAF}=S_{\Delta OEF}=S_{\Delta COE}$ و $S_{\Delta ODE}=S_{\Delta EOA}$ است. با جمع کردن این تساویها به رابطهٔ $S_{\Delta ACE}=\frac{1}{2}S_{ABCDEF}$ می‌رسیم.



۲۰۶. فرض می‌کنیم، متوازی‌الاضلاع ABCD، در شش‌ضلعی منتظم M محاط شده باشد و در ضمن، نقطهٔ O، مرکز شش‌ضلعی، بر محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع منطبق باشد. رأسهای E و F از شش‌ضلعی را طوری انتخاب می‌کنیم که همراه با نقطهٔ B، نسبت به خط راست OA، در یک نیمصفحه باشند و در ضمن، داشته باشیم:

$$A\hat{O}E < ۶۰^\circ \quad , \quad A\hat{O}F < ۱۲۰^\circ$$

(شکل) [یادآوری می‌کنیم که با این شرطها، رأسهای E و F، به‌صورت یک ارزشی معین می‌شوند.] در این صورت داریم:

$$۶۰^\circ \le A\hat{O}F \le ۱۲۰^\circ$$

به‌نحوی که، رأسهای E و G از شش‌ضلعی (و همراه با آنها، نقطهٔ B)، که در یک نیمصفحه قرار دارند، ازخط راست AO، فاصله‌ای بیشتر از فاصلهٔ رأس F ازاین خط راست، ندارند. بنابراین:

$$S_{AOB} \le S_{AOF} = S_{EOF}$$

چون نقطه‌های A و E بر یک ضلع شش‌ضلعی، که موازی OF است، قرار دارند، از خط راست OF به یک فاصله‌اند. با توجه به ویژگیهای متوازی‌الاضلاع و شش‌ضلعی منتظم، داریم:

$$S_{AOB} = S_{BOS} = S_{COD} = S_{DOA} = \frac{۱}{۴} S_{ABCD} ;$$

$$S_{EOF} = \frac{۱}{۶} S_M$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۴} S_{ABCD} \le \frac{۱}{۶} S_M$$

و از آن‌جا:

$$S_{ABCD} \le \frac{۲}{۳} S_M$$

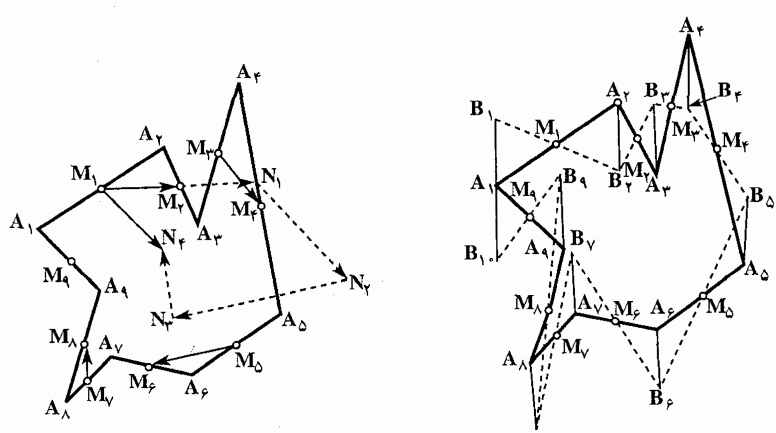
۳.۴.۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۲۰۷. وسط قطر BE مرکز تقارن دو چهارضلعی مورد نظر است.

۳.۴.۸. رسم شکلها

۲۰۸. از مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع خط مستقیمی عبور دهید.

۲۰۹. **راه حل اول.** فرض کنید مسأله حل شده است و $A_1A_2\cdots A_9$ نه‌ضلعی خواسته شده، و نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_9 وسطهای ضلعهای آن باشند (شکل الف ؛ در این جا $n=9$ گرفته شده است). گیریم B_1 نقطه‌ای ازصفحه و B_2 نقطهٔ حاصل از یک نیمدور آن حول M_1 باشد، و B_3 از یک نیمدور B_2 حول M_2 به‌دست آمده باشد. این عمل را به همین نحو ادامه می‌دهیم تا بالاخره B_{10} از یک نیمدور B_9 حول M_9 به دست آید. چون هریک از پاره‌خطهای A_2B_2 ، A_3B_3 ، ...، A_1B_{10} از یک نیمدور پاره‌خط قبل از خود به دست می‌آید، پس همگی موازی و دارای یک طول هستند. و هر کدام جهتی مخالف جهت پاره خط قبل از خود را دارند. بنابراین A_1B_1 و A_1B_{10} مساوی وموازی و مختلف‌الجهت هستند، که تعبیر آن این است که نقطهٔ A_1 وسط پاره‌خط B_1B_{10} است. چون با شروع از یک نقطهٔ دلخواه B_1 می‌توانیم B_{10} را بیابیم، پس A_1 را نیز می‌توانیم مشخص کنیم. سپس رأسهای باقیماندهٔ A_2 ، A_3 ، ...، A_9 از نیمدورهای متوالی حول M_1 ، M_2 ، ...، M_9 پیدا می‌شوند.

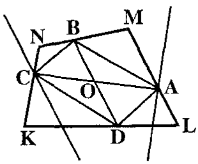


ب　　　　الف

مسأله همیشه یک جواب یکتا دارد ؛ اما به محدب‌بودن n‌ضلعی حاصل نیازی نیست ومی‌تواند خودش را قطع کند.
اگر n زوج باشد و اگر همان استدلال قبلی را تکرار، یعنی فرض کنیم مسأله حل شده است، می‌بینیم که A_1B_{n+1} و A_1B_1 مساوی، موازی و در یک جهت هستند، یعنی برهم منطبق می‌شوند. پس اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق نشود، مسأله جواب ندارد. اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق شود، نقطهٔ A_1 هر طورانتخاب شده باشد A_1B_1 بر AB_{n+1} منطبق خواهد شد. در این حالت بینهایت جواب وجود دارد ؛ هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود.
راه‌حل دوم. رأس A_1 از nضلعی مطلوب توسط مجموع نیمدورهایی حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_n روی خودش برده می‌شود، یعنی A_1 یک نقطهٔ ثابت مجموع این n نیمدور است (شکل ب، که در آن، حالت $n=9$ نشان داده شده است). اگر n زوج بود، مجموع n نیمدور یک انتقال می‌شد. چون انتقال نقطهٔ ثابت ندارد، نتیجه می‌شود که به‌ازای n زوج، مسأله در حالت کلی جواب ندارد. تنها استثنا، حالتی است که مجموع n نیمدور، یک تبدیل همانی (یک انتقال با طول صفر) باشد، یعنی تمام نقطه‌های صفحه را ثابت نگه دارد، مسأله در این حالت بینهایت جواب دارد ؛ در این حالت هر نقطهٔ صفحه می تواند رأس A_1 باشد. اگر n فرد (مثلاً $n=9$) باشد مجموع n نیمدور یک نیمدور خواهد بود. چون یک نیمدور دقیقاً یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز تقارن دارد، از این جا نتیجه می‌شود که رأس A_1 از n‌ضلعی خواسته شده باید بر مرکز تقارن منطبق باشد ؛ در این حالت مسأله تنها یک جواب دارد.
اکنون نشان می‌دهیم که چگونه باید مرکزتقارن مجموع نه نیمدور حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_9 را پیدا کنیم. مجموع دو نیمدور حول M_1 و M_2 انتقالی است در راستای M_1M_2 با طولی برابر $2M_1M_2$ ؛ مجموع دو نیمدور حول M_3 و M_4 انتقالی است در راستای M_3M_4 به طولی برابر $2M_3M_4$، و همین طور الی آخر. بنابراین مجموع هشت نیمدور اوّل بترتیب مساوی مجموع چهار انتقال در راستاهای M_1M_2 (یا M_1N_1)، ($\|N_1N_2$) M_3M_4، ($\|N_2N_3$) M_5M_6 و ($\|N_3N_4$) M_7M_8 و بترتیب با طولهایی برابر ($2M_1M_2(=M_1N_1$)، ($2M_3M_4(=N_1N_2$)، ($2M_5M_6(=N_2N_3$) و ($2M_7M_8(=N_3N_4$) خواهد بود (شکل ب) که انتقالی است در راستای M_1N_4 و به طولی برابر M_1N_4. نقطهٔ A_1 مرکز تقارن نیمدوری

است که مجموع یک انتقال در راستای M_1N_4 و به طولی برابر M_1N_4 است با نیمدوری حول نقطهٔ M_9. برای یافتن A_1 کافی است یک پاره‌خط M_9A_1 را با شروع از M_9، موازی N_4M_1 و به طول $M_1N_4/2$ رسم کنیم. با یافتن A_1، دیگر مشکلی برای یافتن بقیهٔ رأسهای نه‌ضلعی نداریم.

۲۱۰. (a) فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده محاط در چهارضلعی LMNK، O مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع و نقطه‌های B و D بترتیب به MN و KM متعلق باشند (شکل).



به دلیل $T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ و $T_{\overrightarrow{AB}}(D) = C$ نقطه C محل تلاقی ML و تصویر KL است.

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۱۱. گزینهٔ (الف) درست است.

۲۱۲. گزینهٔ (د) درست است.

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۱۳. ۱. چون $AB \parallel CD$، $A'B' \parallel AB$ و $C'D' \parallel CD$ است، پس $A'B' \parallel C'D'$ است.

۲. خط MN عمودمنصف پاره‌خطهای AB، CD، $A'B'$ و $C'D'$ است.

۵.۳. تقارن مرکزی در دایره

۱.۵.۳. مرکز تقارن

۲۱۴. در مثلث متساوی‌الاضلاع هر یک از میانه‌ها محور تقارن است و مرکز تقارن هم ندارد. در مربع، مرکز تقارن مرکز مربع است وهر قطر و همچنین هر خطی که وسطهای دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کند، محورهای تقارن است. در لوزی محل تلاقی دو قطر مرکز تقارن است و دو قطر محورهای تقارن می‌باشند. در مستطیل محل تلاقی دو قطر مرکز تقارن است و خطهایی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کند، محورهای

تقارن می‌باشد. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، محور تقارن است. محور تقارن هر زاویه نیمساز آن است. در دو دایرهٔ متساوی و متقاطع وتر مشترک و امتداد خط‌المرکزین محورهای تقارن ومحل برخورد آنها مرکز تقارن می‌باشد. در دو دایرهٔ متساوی ومماس خارج، مماس مشترک وامتداد خط‌المرکزین محورهای تقارن و نقطهٔ تماس، مرکز تقارن است. در دو دایرهٔ مماس داخل امتداد خط‌المرکزین، محور تقارن است و مرکز تقارن هم ندارد. در دو دایرهٔ متساوی و متخارج و وسط خط‌المرکزین مرکز تقارن و عمود موسوم از این نقطه بر خط‌المرکزین و خود خط‌المرکزین محورهای تقارن شکل است.

۲.۵.۳. نقطه‌های: همخط، همداریه، ...

۱.۲.۵.۳. نقطه‌ها همخطند

۲۱۵. از این نکته‌ها استفاده کنید که مرکز دایره مرکز تقارن آن بوده و خطهای متناظر در تقارن مرکزی موازی هستند.

۳.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۵.۳. خطها موازی‌اند

۲۱۷. نقطهٔ O'' مرکز تقارنی است که دو دایره را به هم تبدیل می‌کند و هر خطی که از مرکز تقارن بگذرد، دو دایره را در دو نقطهٔ متناظر قطع می‌کند. پس M متناظر M' و N متناظر N' (شکل) است؛ بنابراین $OM \| O'M'$ و $ON \| O'N'$ می‌باشد.

۴.۵.۳. زاویه

۱.۴.۵.۳. اندازهٔ زاویه

۲۱۸. به دلیل تقارن مرکزی کمان $\overset{\frown}{M'N'}$ نیز برابر ۱۰۰° است، پس $M'\hat{O}'N' = ۱۰۰^\circ$ است. اما مثلث $M'O'N'$ و رأس O' متساوی‌الساقین است. پس:

$$M'\hat{N}'O' = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ) = ۴۰^\circ$$

۵.۵.۳. پاره خط

۱.۵.۵.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

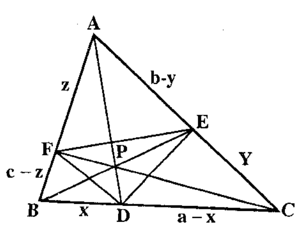
۲۱۹. از تقارنی استفاده کنید که مرکز آن بر مرکز دایره منطبق است.

۲۲۰. حل این مسأله ساده است؛ آن را خودتان حل کنید. این مسأله را از رسالهٔ «دربارهٔ تبدیلها» تألیف لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ ــ ۱۵۱۹) انتخاب کرده‌ایم. در این رساله، دربارهٔ موضوعهای مربوط به تبدیل یک جسم ــ بدون کم یا زیاد کردن مقدار مادهٔ آن ــ بحث شده است. به اعتقاد این دانشمند، «هیچ زمینه‌ای وجود ندارد که در آن‌جا، نشود از یکی از شاخه‌های ریاضی استفاده کرد». او عمیقاً باور داشت که هر بحثی را تنها ریاضیدان می‌تواند خاتمه دهد، زیرا تنها اوست که «قادر است مهر سکوت بر لب پرخاشگر بزند».

۲۲۱. فرض کنید، نیمساز زاویهٔ ABC و خط راست l ــ قرینهٔ نیمساز نسبت به مرکز دایره ــ خط راست PM را بترتیب، در نقطه‌های L و N قطع کنند. در این صورت:

$$NP = KL = LM\,,\ PM = LN$$

۶.۵.۳. رابطه‌های متری



۲۲۲. مثلثها را با ABC و PQR نمایش می‌دهیم، و فرض می‌کنیم D و E بترتیب نقطه‌های برخورد AB با PR و AB با PQ باشد. در این صورت بنا به تقارن دورانی کل شکل نسبت به خط OD، نیز خط OE متقارن است. گذشته از این داریم:

$$K = \text{مساحت } ABC - ۳\,(\text{مساحت } PDE)$$

بنابراین K وقتی مساحت ΔPDE ماکزیمم است، می‌نیمم می‌شود. به‌طور شهودی، شخص انتظار این واقعه را وقتی P وسط کمان AB باشد، می‌برد. برای اثبات این مطلب، توجه می کنیم که: $PD = AD$ و $PE = BE$ است، و بنابراین ΔPDE دارای محیط ثابت $AB = r\sqrt{۳}$ می‌باشد. این موضوع که از میان تمام مثلثهای با محیط معلوم مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت ماکزیمم است، نتیجه‌ای مقدماتی می‌باشد. درنتیجه، مثلث PDE چون P وسط کمان AB باشد دارای مساحت ماکزیمم است. دراین حالت ضلعهای مثلث PDE، یک سوم ضلعهای مثلث ABCاند، و بنابراین

مساحت مثلث PDE یک نهم مساحت مثلث ABC می باشد.

$$K \geq (\text{مساحت } ABC)\left(1-\frac{3}{9}\right)=\frac{2}{3}(r\sqrt{3})^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

به طریقی مشابه، شخص می‌تواند نامساوی مساحتی مشابهی در مورد دو nضلعی منتظم محاط در یک دایره به‌دست آورد. در این صورت K وقتی می‌نیمم است که یکی از nضلعیها بتواند از دیگری با دوران π/n حول مرکزشان حاصل شود.

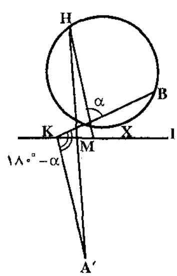
۷.۵.۳. ثابت کنید شکلها قرینهٔ مرکزی یکدیگرند

۲۲۳. داریم: $D\hat{A}C = D\hat{B}C = 90^\circ \Rightarrow AD \| BK \ , \ DB \| AK$

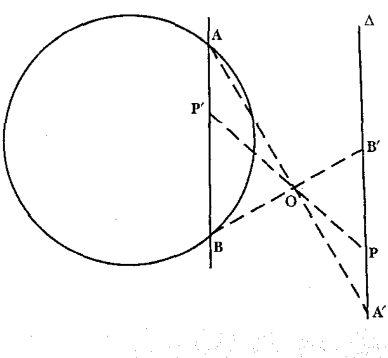
پس ADBK متوازی‌الاضلاع است و DK از وسط AB می‌گذرد.

۸.۵.۳. رسم شکلها

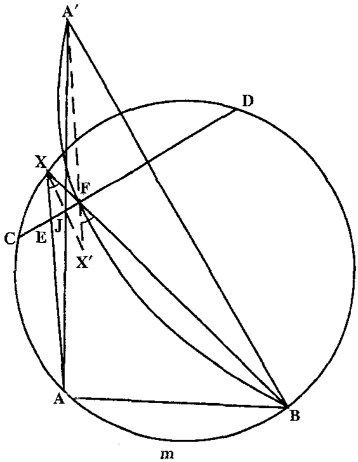
۲۲۴. دایرهٔ متقارنی را نسبت به دایرهٔ مزبور حول نقطهٔ مفروض رسم می‌کنیم. وتر مشترک دو دایره، وتر مطلوب خواهد بود.



۲۲۵. فرض کنید که نقطهٔ ′A متقارن نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد (شکل). آن‌گاه زاویهٔ ′BKA معلوم بوده (K نقطهٔ برخورد خطهای BX و I است) و مقدار آن برابر $180^\circ-\alpha$ خواهد بود. این مسأله دارای دو جواب است.



۲۲۶. قرینهٔ نقطهٔ اختیاری P را نسبت به P′O به‌دست می‌آوریم و از ′P خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند. (در صورت امکان) از A و B به O وصل می‌کنیم تا خط Δ را در نقطه‌های ′A و ′B قطع کنند. این دو نقطه جواب مسأله است.



۲۲۷. فرض کنید مسأله حل شده است (شکل)، و $A'X'$ پاره‌خط حاصل از یک نیمدور AX حول نقطهٔ J باشد. چون AX از E می‌گذرد، $A'X'$ از F خواهد گذشت. چون $X'A' \parallel AX$ ، می‌بینیم که

$$X'\hat{F}B = A\hat{X}B = \frac{1}{2}\widehat{AmB}$$

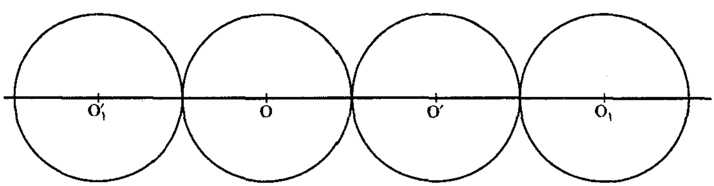
بنابراین، $A'\hat{F}B = 180^\circ - X'\hat{F}B$ و در نتیجه می‌توانیم

$$A'\hat{F}B = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AmB}$$

را معلوم بگیریم.

پس ترسیم زیر به دست می‌آید : گیریم A' نقطهٔ حاصل از یک نیمدور A حول J باشد. بر پاره‌خط $A'B$ کمانی در خور زاویهٔ $180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AmB}$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کمان با وتر CD نقطهٔ F، و نقطهٔ برخورد دیگر خط BF با دایره، نقطهٔ مطلوب X است. مسأله یک جواب یکتا دارد ؛ اما اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع می‌کند، در این صورت مسأله ممکن است دو جواب داشته باشد.

۲۲۸. اگر O و O' دو دایرهٔ مفروض باشند، دایره‌های به مرکزهای O'_1 و O_1 و به شعاع R که برای آنها داریم، $OO'_1 = OO'$ و $O'O = O'O_1$ جواب مسأله‌اند.



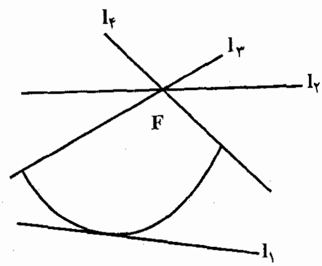
۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۹. اگر P را وسط وتر مشترک دو دایره بگیریم، نقطهٔ K، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به P، روی محیط دایره‌ای قرار دارد که از رأس A می‌گذرد و AKMD یک متوازی‌الاضلاع

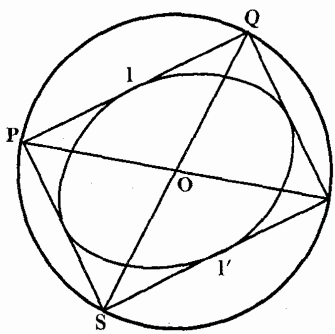
است، به نحوی که مثلثهای AKM و AMD برابرند.

۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۳۱. خط l خط حامل F نامیده می‌شود اگر l: (i) شامل حداقل یک نقطهٔ F باشد، (ii) F مشمول یکی از دو نیمصفحهٔ بستهٔ مشخص شده با l باشد. [شکل ۱ مجموعهٔ محدب بستهٔ F و چهار خط حامل آن را نشان می‌دهد.]
اگر l خط حامل F، و H نیمصفحه بستهٔ مشخص شده با l و شامل F باشد، در این صورت H را نیمصفحهٔ حامل F می‌نامیم.



شکل ۱

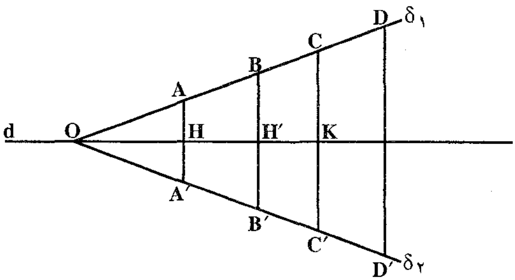


شکل ۲

در این مرحله حقایق اساسی زیر را در رابطه با مجموعه‌های محدب بستهٔ F به خاطر می‌آوریم:
(a) از هر نقطهٔ مرزی F حداقل یک خط حامل می‌گذرد.
(b) F تقاطع نیمصفحه‌های حامل خود است.
اکنون فرض می‌کنیم l خط حامل دلخواهی از F باشد، و فرض می‌کنیم دایرهٔ مفروض را در نقطه‌های P و Q قطع کند، شکل ۲ را ملاحظه کنید. بنابه فرض، خطهای گذرنده از P و Q و عمود بر l نیز خطهای حامل Fاند. این دو خط دایره را در نقطه‌های R و S قطراً مقابل P و Q قطع می‌کنند. باز بنا به فرض، خط : $l' = RS$ یکی از خطهای حامل F است. از آن جا که l' قرینهٔ l نسبت به O است، نشان داده‌ایم که مجموعهٔ خطهای حامل F تحت تقارن نسبت به O بسته است. بنابراین مجموعهٔ نیمصفحه‌های حامل F نیز تحت تقارن نسبت به O بسته است، و از آن‌جا که F تقاطع تمام این نیمصفحه‌ها است، آن نیز تحت تقارن نسبت به O بسته است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴. تقارن محوری

۱.۴. تعریف و قضیه



۲۳۲. اگر دو خط ناموازی d و δ_1 در صفحه و نقطه‌های A' و B' قرینه‌های دو نقطهٔ A و B از δ_1 نسبت به خط d باشند (شکل)، خطهای AB و $A'B'$ خط d را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کنند. زیرا که:

$$\frac{AH}{HA'}=\frac{BH'}{H'B'}=۱\ ,\ \ AA'\|BB'$$

اکنون از نقطهٔ دلخواه C روی δ_1 عمود CK را بر خط d فرود آورده و امتداد می‌دهیم تا خط δ_2 یعنی امتداد $A'B'$ را در نقطهٔ C' قطع کند؛

$$\left(\frac{CH}{KC'}=\frac{AH}{HA'}=۱\right)\Rightarrow KC'=CK$$

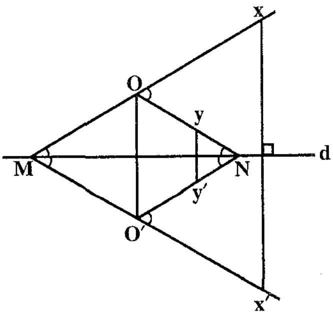
یعنی قرینهٔ هر نقطه از خط δ_1 نسبت به محور d بر خط δ_2 واقع است. بعکس می‌توان دید که هر نقطهٔ D' از δ_2 قرینهٔ نقطه‌ای مانند D از δ_1 است، پس:

$$\delta_2=S_d(\delta_1)$$

در حالتی که خط δ_1 موازی محور تقارن باشد، δ_2 نیز موازی آن محور است. (چرا؟)

نتیجهٔ ۱. قرینهٔ محوری هر پاره‌خط با آن پاره‌خط همنهشت است.

نتیجهٔ ۲. هر خط و قرینهٔ آن نسبت به یک محور، یا با آن محور همرسند و با محور تقارن زاویه‌های مساوی تشکیل می‌دهند و یا موازی محور هستند و به فاصلهٔ برابر از آن قرار دارند.



۲۳۳. اگر در شکل $x'\hat{O}'y'$ قرینهٔ $x\hat{O}y$ نسبت به محور d باشد:

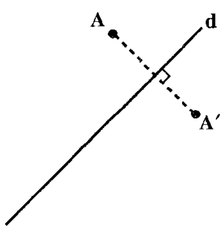
$$\left[(O\hat{M}N = O'\hat{M}N)\ ,\ (O\hat{N}M = O'\hat{N}M)\right]$$

$$\Rightarrow (x'\hat{O}'y' = x\hat{O}y)$$

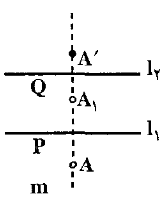
قضیه را در حالتی که یکی از ضلعهای زاویه با محور تقارن موازی است، ثابت کنید.

۲۳۴. در تقارن محوری اندازه‌های پاره‌خطها حفظ می‌شوند. پس برهان همانند برهان برابری هر شکل با انتقال‌یافتهٔ آن است.

هر شکل F و قرینهٔ محوری آن به‌صورت معکوس متساوی‌اند، زیرا برای انطباق آنها باید تبدیل‌یافتهٔ شکل از صفحه خارج شود و گرد محور تقارن بر خود شکل برگردانده شود.



۲۳۷. در واقع، اگر تقارن نسبت به خط d، نقطهٔ A را به نقطهٔ ′A ببرد (شکل)، آن‌گاه دومین تقارن نسبت به d نقطهٔ ′A را به A برمی‌گرداند، یعنی بر اثر دو تقارن وضع نقطهٔ A تغییر نمی‌کند. حکم گزاره می‌تواند بدین صورت نیز بیان شود:
دو تقارن نسبت به یک خط یکدیگر را خنثی می‌کنند.



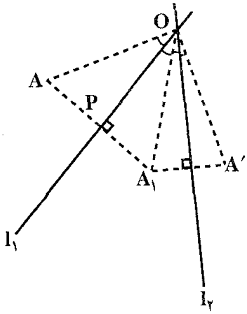
۲۳۸. فرض می‌کنیم A نقطه ای دلخواه در صفحه باشد، $A_{۱}$ قرینهٔ A نسبت به خط $l_{۱}$، و ′A قرینهٔ $A_{۱}$ نسبت به خط $l_{۲}$ باشد که موازی $l_{۱}$ است (شکل). پس $AA_{۱} \perp l_{۱}$ و $A_{۱}A' \perp l_{۲}$؛ درنتیجه نقطه‌های A، $A_{۱}$ و ′A بر خط m، عمود بر $l_{۱}$ و $l_{۲}$ قرار دارند. اگر P و Q نقطه‌های برخورد خط m با $l_{۱}$ و $l_{۲}$ باشند، آن‌گاه $AP = PA_{۱}$ و $A_{۱}Q = QA'$ و مثلاً در حالت شکل، داریم:

$$AA' = AP + PA_{۱} + A_{۱}Q + QA' = ۲PA_{۱} + ۲A_{۱}Q = ۲PQ$$

بنابراین، $AA' \perp l_{۱}$ و $AA' = ۲PQ$، که همان حکم مطلوب است، یعنی داریم:

$$S_{l_{۲}} O S_{l_{۱}} = T_{\overrightarrow{۲PQ}} \quad \text{و} \quad S_{l_{۱}} O S_{l_{۲}} = T_{\overrightarrow{۲QP}}$$

یعنی $S_{l_{۲}} O S_{l_{۱}}$ و $S_{l_{۱}} O S_{l_{۲}}$ وارون یکدیگرند. بنابراین ترکیب دو انتقال خاصیت جابه‌جایی ندارد. قضیهٔ قبلی را می‌توان حالت خاص قضیهٔ بالا تلقی کرد، یعنی حالتی که $PQ = ۰$.



۲۳۹. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای دلخواه از صفحه باشد، A_1 قرینهٔ A نسبت به خط l_1، و A' قرینهٔ A_1 نسبت به خط l_2 باشد که l_1 را در نقطهٔ O قطع می‌کند (شکل). اگر P و Q بترتیب نقطه‌های برخورد AA_1 با l_1 و A_1A' با l_2 باشند، آن‌گاه:

$$\Delta AOP \cong \Delta A_1OP \quad \text{و} \quad \Delta A_1OQ \cong \Delta A'OQ$$

پس داریم:

$$OA = OA_1 \qquad OA_1 = OA'$$

$$A\hat{O}P = P\hat{O}A_1 \qquad A_1\hat{O}Q = Q\hat{O}A'$$

مثلاً همان‌گونه که در تصویر شکل هویداست:

$$A\hat{O}A' = A\hat{O}P + P\hat{O}A_1 + A_1\hat{O}Q + Q\hat{O}A'$$
$$= ۲P\hat{O}A_1 + ۲A_1\hat{O}Q = ۲P\hat{O}Q$$

بنابراین، $OA = OA'$ و $A\hat{O}A' = ۲P\hat{O}Q$، که همان بود که می‌خواستیم. قضیه‌های اخیر می‌توانند برهانهای ساده‌ای برای قضیه‌های مربوط به ترکیب دورانها یا ترکیب یک دوران و یک انتقال به‌دست دهند.

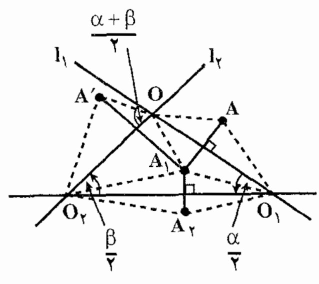
از برهانهای قضیه‌های اخیر به‌آسانی دیده می‌شود که مجموع دو تقارن نسبت به دو خط به ترتیبی که این تقارنها عمل می‌کنند، بستگی دارد (به استثنای وقتی که خطوط بر هم عمودند، که در این حالت مجموع تقارنها به هر ترتیب یک نیمدور حول نقطهٔ تقاطع است).

فرض کنید به‌عنوان مثال بخواهیم مجموع (ترکیب) دو دوران به مرکزهای O_1 و O_2 و زاویه‌های α و β را پیدا کنیم. بنابر قضیه، به جای دوران اوّلی می‌توان مجموع دو تقارن نسبت به خطهای l_1 و O_1O_2 را که در آن l_1 از O_1 می‌گذرد و $l_1\hat{O}_1O_2 = \alpha/۲$، جایگزین کرد، به جای دومین دوران نیز می‌توان مجموع دو تقارن نسبت به خطهای O_1O_2 و l_2 را که در آن l_2 از O_2 می گذرد و $O_1\hat{O}_2 l_2 = \beta/۲$، قرار دارد (شکلهای الف و ب). بنابراین به جای مجموع دو دوران، مجموع چهار تقارن نسبت به خطهای l_1، O_1O_2، O_1O_2، و l_2 جایگزین می‌شود. اما دو تقارن میانی، دارای یک محورند و بنابراین همدیگر را خنثی می‌کنند؛ پس مجموع چهار

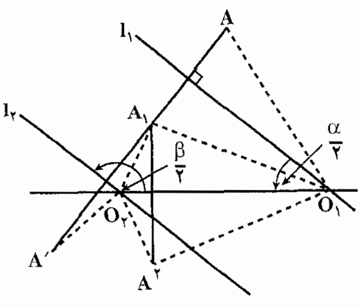
تقارن نسبت به خطهای l_1 ، O_1O_2 ، O_1O_2 ، و l_2 با مجموع دو تقارن نسبت به خطهای O_1O_2 و l_2 برابر است. اگر O نقطهٔ تقاطع l_1 و l_2 باشد، آن گاه مجموع این تقارنها دورانی است به مرکز O و زاویهٔ $2l_1\hat{O}O_2$ ، که همان‌گونه که از شکل (الف) پیداست، مساوی مجموع زاویه‌های $2O_1\hat{O}_2l_2=\beta$ و $2l_1\hat{O}_1O_2=\alpha$ است ($l_1\hat{O}O_2$ زاویهٔ خارجی مثلث O_1O_2O است).

اگر l_1 و l_2 موازی باشند (از شکل ب به‌آسانی دیده می‌شود که این حالت وقتی رخ می‌دهد که $l_1\hat{O}_1O_2+O_1\hat{O}_2l_2=180^\circ$ ، یعنی وقتی که $\alpha+\beta=360^\circ$)، مجموع دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 یک انتقال است. بنابراین می‌توانیم به همان نتیجهٔ قبل دست یابیم.

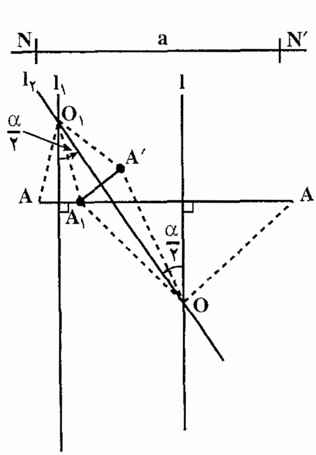
حال مجموع یک انتقال در راستای NN' به طول a و یک دوران به مرکز O و به زاویهٔ α را پیدا می‌کنیم. به جای انتقال مجموع دو تقارن نسبت به خطهای l_1 و l را که عمود بر NN' هستند، جایگزین می‌کنیم، به‌طوری که فاصلهٔ بین آنها $a/2$ باشد و l را طوری انتخاب می‌کنیم که از O بگذرد (شکل پ). به‌جای دوران مجموع دو تقارن نسبت به



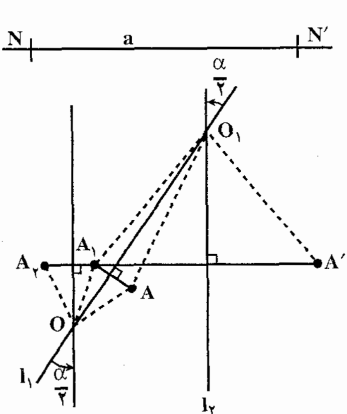
الف



ب



پ



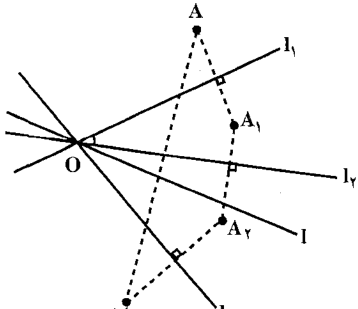
ت

خطهای l و $l_۲$ را که $l_۲$ از O می‌گذرد و $\frac{\alpha}{۲} = l\hat{O}l_۲$، می‌گذاریم. پس به جای مجموع یک انتقال و یک دوران مجموع چهار تقارن نسبت به خطهای $l_۱$، l، l، و $l_۲$ را قرار می‌دهیم. دو تقارن وسطی در این تقارنها همدیگر را خنثی می‌کنند، پس دو تقارن نسبت به خطهای $l_۱$ و $l_۲$ برای ما باقی می‌ماند، که دورانی است حول نقطهٔ $O_۱$، محل برخورد $l_۱$ و $l_۲$، و به زاویهٔ $\alpha = ۲l\hat{O}l_۲ = ۲l_۱\hat{O}_۱l_۲$ (شکل پ).

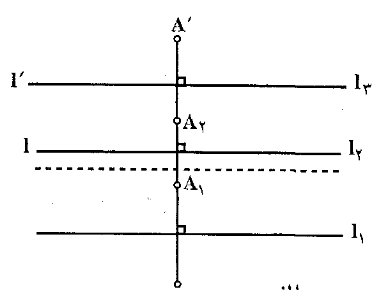
دقیقاً به همان طریق می‌توان نشان داد که مجموع یک دوران به مرکز O و به زاویهٔ α و یک انتقال در راستای NN' به طول a، دورانی است به همان زاویهٔ α. برای یافتن مرکز این دوران، $O_۱$، خطهای $l_۱$ و l را از O چنان می‌گذرانیم که $l \perp NN'$ و $\frac{\alpha}{۲} = l_۱\hat{O}l$، و سپس یک خط $l_۲$ موازی l و به فاصلهٔ $\frac{a}{۲}$ از l رسم می‌کنیم. در این صورت نقطهٔ تقاطع $l_۱$ و $l_۲$ نقطهٔ $O_۱$ است (شکل ت).

۲۴۰. نخست فرض می‌کنیم که سه خط $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ موازی باشند (شکل الف). بنابر قضیهٔ مجموع دو تقارن نسبت به خطهای $l_۱$ و $l_۲$ انتقالی است در راستای عمود بر $l_۱$ و $l_۲$ به فاصله‌ای مساوی دو برابر فاصلهٔ بین آنها، و با مجموع دوتقارن نسبت به دو خط دیگر l و l' موازی $l_۱$ و $l_۲$، که همان فاصله را دارا باشند، مساوی است. حال فرض می‌کنیم که l' بر $l_۳$ منطبق باشد. به‌جای مجموع سه تقارن، مجموع سه تقارن نسبت به خطهای l، l' و $l_۳$ را می گذاریم. دو تقارن آخری یکدیگر را خنثی می‌کنند و بنابراین تنها یک تقارن نسبت به l باقی می‌ماند.

حال فرض کنید خطهای $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ یکدیگر را درنقطهٔ O قطع کنند (شکل ب). بنابر قضیه مجموع دو تقارن نسبت به $l_۱$ و $l_۲$ دورانی است حول O به زاویهٔ $۲l_۱Ol_۲$ و با مجموع دو تقارن نسبت به خطهای l و $l_۳$، که l از O می‌گذرد و $l\hat{O}l_۳ = l_۱\hat{O}l_۲$، مساوی است. پس مجموع سه تقارن نسبت به $l_۱$، $l_۲$ و $l_۳$ مساوی مجموع سه تقارن نسبت به l، $l_۳$ و $l_۳$ یا یک تقارن تنها نسبت به l است (زیرا دو تقارن آخری نسبت به $l_۳$ یکدیگر را خنثی می‌کنند).

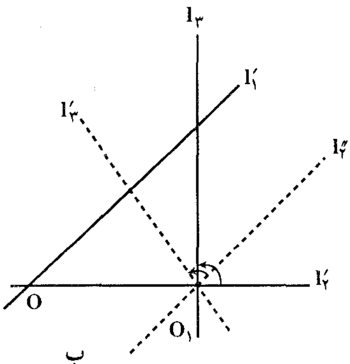


ب

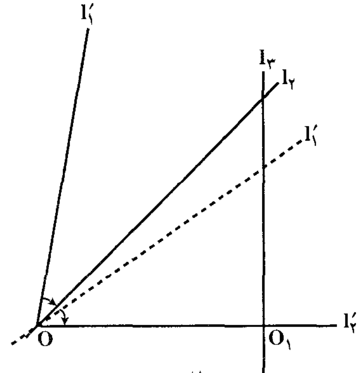


الف

۲۴۱. فرض کنیم خطهای l_1 و l_2 یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل الف). مجموع دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 دورانی است به مرکز O و زاویهٔ $2l_1\hat{O}l_2$، بنابراین به جای



ب



الف

مجموع این تقارنها، مجموع دو تقارن نسبت به دو خط دیگر l'_1 و l'_2 که یکدیگر را در همان نقطهٔ O قطع می‌کنند و همان زاویهٔ l_1 و l_2 را با هم می‌سازند، می‌تواند جایگزین شود. حال خطهای l'_1 و l'_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که $l'_2 \perp l_3$، و به‌جای مجموع سه تقارن نسبت به l_1، l_2 و l_3 مجموع سه تقارن نسبت به خطهای l'_1، l'_2 و l_3 را در نظر می‌گیریم (یعنی مجموع یک تقارن نسبت به l'_1 و یک نیمدور حول نقطهٔ O_1، محل برخورد l'_2 و l_3 یا مجموع یک تقارن نسبت به خط l'_1 و یک تقارن نسبت به نقطهٔ O_1، زیرا مجموع دو تقارن نسبت به دو خط عمود بر هم نیمدوری است حول نقطهٔ برخورد آنها).

بعد به جای مجموع دو تقارن نسبت به دوخط متعامد l'_2 و l_3، مجموع دو تقارن نسبت به دو خط متعامد جدید l''_2 و l'_3، متقاطع در همان نقطهٔ O_1 را با شرط $l'_1 \| l''_2$ می‌گذاریم (شکل ب. این تغییر مجاز است زیرا مجموع دو تقارن نسبت به l''_2 و l'_3 نیز نیمدوری است در حول O_1). در عین حال به جای مجموع سه تقارن نسبت به l'_1، l'_2 و l_3 مجموع سه تقارن نسبت به l'_1 گذاشته شده است. اما مجموع دو تقارن نسبت به خطهای موازی l'_1 و l''_2 انتقالی است در امتداد l'_3، عمود بر l'_1 و l'_2. پس مجموع سه تقارن نسبت به l'_1، l''_2 و l'_3 مساوی مجموع یک انتقال در راستای l'_3 و یک تقارن نسبت به l'_3، یعنی یک لغزه با محور l'_3 است.

در حالتی که l_1 و l_2 موازی باشند، و l_2 و l_3 یکدیگر را درنقطهٔ O قطع کنند، استدلال عیناً به روش مشابه صورت می‌گیرد. (در این حالت لازم است که نخست به جای

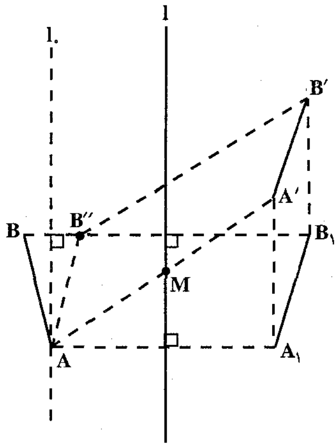
مجموع دو تقارن نسبت به l_2 و l_3، مجموع دو تقارن نسبت به l'_2 و l'_3، متقاطع در همان نقطهٔ O را با شرط $l_1 \perp l'_2$ قرار داد. سپس به جای مجموع دو تقارن نسبت به خطهای متعامد l_1 و l'_2، مجموع دو تقارن نسبت به خطهای متعامد l'_1 و l''_2 متقاطع در همان نقطهٔ O_1 را با شرط $l''_2 = l'_3$، گذاشت.)

۲۴۲. زیرا، به جای مجموع تعداد زوجی تقارن محوری مجموع تعداد دوران و انتقال می‌تواند جایگزین شود. اما مجموع هر تعدادی دوران و انتقال باز یا یک دوران است یا یک انتقال. بعلاوه، چون مجموع تعداد زوجی تقارن محوری یک دوران یا یک انتقال است، پس به جای مجموع تعداد فردی تقارن محوری می‌توان مجموع یک دوران یا یک انتقال، و یک تقارن محوری را قرار داد. به جای یک دوران یا انتقال مجموع دو تقارن محوری می‌تواند جایگزین شود. پس مجموع تعداد فردی تقارن محوری همیشه می‌تواند با مجموع سه تقارن محوری برابر باشد، پس، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

باید توجه کنیم که مجموع تعداد زوجی تقارن محوری، در حالت کلی، یک دوران است، حالتهایی را که ممکن است این مجموع به یک انتقال بینجامد می‌توان به‌عنوان استثنا در نظر گرفت (مجموع دو تقارن نسبت به خطهای l_1 و l_2 تنها وقتی یک انتقال است که $l_1 \| l_2$ ؛ مجموع دو دوران به زاویه‌های α و β تنها هنگامی یک انتقال است که $\alpha + \beta = 360°$ و ...). به طریق مشابه، مجموع تعداد فردی تقارن محوری، در حالت کلی، یک لغزه است ؛ حالتهایی را که ممکن است مجموع تعداد فردی تقارن محوری به یک تقارن محوری بینجامد باید به‌عنوان استثنا در نظر گرفت (مثلاً، مجموع سه تقارن نسبت به خطهای l_1، l_2 و l_3 تنها در حالتهایی یک تقارن است که خطهای l_1، l_2 و l_3 یا همگی موازی باشند یا همگی در یک نقطه متقاطع).

تقارن محوری و لغزه تبدیلاتی از صفحه هستند که هر نقطهٔ A را به یک نقطهٔ جدید A' می‌برند. نقطه‌های ثابت یک تقارن نسبت به l، نقطه‌های محور تقارن l هستند ؛ خطهای ثابت تقارن، محور l و همهٔ خطهای عمود بر l هستند. تنها خط ثابت یک لغزه، محور آن l است، لغزه به هیچ‌وجه نقطهٔ ثابتی ندارد.

۲۴۴. قبل از همه، نشان می‌دهیم که دو پاره‌خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند با لغزه‌ای به یک محور l (یا با تقارنی نسبت به یک خط l) بر هم قرار گیرند. زیرا، فرض کنید که این مطلب درست و l محور لغزه (یا محور تقارن) باشد. پاره‌خط $A'B'$ را به وضع جدید $A''B''$ انتقال می‌دهیم. چنانکه A' بر A منطبق شود (یعنی، $A'' = A$، شکل الف). چون پاره‌خط A_1B_1 از AB براثر تقارن نسبت به خط l به‌دست می‌آید باید با $A''B''$



موازی باشد (هر دو پاره‌خط، موازی $A'B'$ هستند)، که نتیجه می‌شود خط l باید موازی $l_\circ$، نیمساز زاویهٔ $B''AB$ باشد (زیرا مجموع دو تقارن نسبت به $l_\circ$ و l پاره‌خط $A''B''$ را بر پاره‌خط موازی A_1B_1 قرار می‌دهد). بعلاوه، نقطه‌های A و A' باید متساوی‌الفاصله ازخط l و در دو طرف آن باشند (زیرا نقطه‌های A و A_1 در دو طرف l و متساوی‌الفاصله از آن هستند، و نقطه‌های A_1 و A' به فاصله‌های مساوی از l و در یک طرف آن).

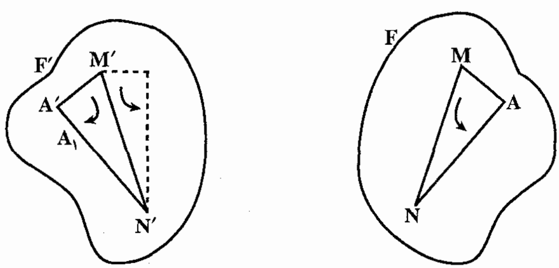
ازاین جا نتیجه می‌شود که خط l باید ازنقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' بگذرد. پس اگر پاره خطهای AB و $A'B'$ را داشته باشیم، می‌توانیم خط l را (که موازی $l_\circ$ است و از M می‌گذرد) رسم کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم پاره خط A_1B_1 قرینهٔ AB نسبت به خط l باشد. چون $l\|l_\circ$، داریم $A_1B_1\|A'B'$ ؛ چون l از M می گذرد، پس نقطه‌های A_1 و A' به یک فاصله از l و در یک طرف آن قرار دارند. درنتیجه، اگر پاره خط A_1B_1 بر $A'B'$ منطبق نباشد، می‌تواند با انتقالی در راستای خط l بر $A'B'$ قرار داده شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که پاره‌خط AB با یک لغزه (یا یک تقارن محوری) بر پاره خط مساوی $A'B'$ قرار داده می‌شود.

جزء پایانی برهان این قضیه تقریباً تکرار کامل آخرین جزء برهان قضیهٔ قبلی است. گیریم F و F' دو شکل به‌طور معکوس قابل انطباق با هم باشند و M، N و M'، N' دو جفت نقطهٔ متناظر از این شکلهای (ب و پ). یک لغزه (یا یک تقارن محوری) وجود دارد که MN را روی $M'N'$ می‌برد. حال نشان می‌دهیم که واقعاً تمام شکل F با این لغزه (یا تقارن) روی شکل F' برده می‌شود، یعنی، نقطهٔ A_1 که از نقطهٔ A بر اثر این لغزه (یا تقارن محوری) به‌دست آمده است بر نقطهٔ A' از شکل F'، که متناظر با نقطهٔ A از F است،منطبق می‌شود (F و F' به‌طور معکوس با هم قابل انطباقند، و بنابراین به هرنقطهٔ A از F یک نقطهٔ متناظر A' از F' نظیر می‌شود). زیرا، $\Delta A'N'M' \cong \Delta AMN$، چون شکلهای F و F' با هم قابل انطباقند ؛ $\Delta A_1M'N' \cong \Delta AMN$، چون $A_1M'N'$ بر اثر یک لغزه (یا یک تقارن) از AMN به‌دست می‌آید. بنابراین $\Delta A_1M'N'$ یا بر

$\Delta A'M'N'$ منطبق است یا قرینهٔ $\Delta A'M'N'$ نسبت به ضلع مشترک $M'N'$ ازاین دو مثلث است. اما مثلثهای $A_1M'N'$ و $A'M'N'$ نمی‌توانند قرینهٔ یکدیگر باشند، زیرا دارای یک جهت هستند. این مطلب ازاین واقعیت نتیجه می‌شود که مثلثهای $A'M'N'$ و AMN مختلف‌الجهت هستند (زیرا شکلها به‌طور معکوس بر هم منطبقند)؛ جهتهای مثلثهای $A_1M'N'$ و AMN نیزمخالف یکدیگرند (زیرا تقارن محوری و لغزه، جهت یک مثلث را عوض می‌کنند). بنابراین مثلث $A_1M'N'$ باید بر مثلث $A'M'N'$ منطبق شود، درنتیجه برهان قضیه کامل می‌شود.

طولپاییهایی که شکلهای مستقیماً قابل انطباق با هم را به یکدیگر تبدیل می‌کنند، طولپاییهای مستقیم (یا تغییر مکان) نامیده می‌شوند؛ برعکس، طولپاییهایی که دو شکل به‌طور معکوس قابل انطباق با هم را به یکدیگر تبدیل می‌کنند طولپاییهای معکوس نامیده می‌شوند. دو قضیهٔ اخیر چنین حکم می‌کنند که هر طولپایی مستقیم یا یک انتقال است یا یک دوران، در حالی که هر طولپایی معکوس یا یک انعکاس است یا یک لغزه (انعکاس در بخشهای بعدی خواهد آمد).



ب　　　　　　پ

از ترکیب نتیجه‌های این قضیه‌ها می‌توان حکم کلی زیر را به‌دست آورد:

هر دو شکل قابل انطباق با هم در صفحه، می‌توانند با یک انتقال یا یک دوران یا یک تقارن محوری یا یک لغزه بر هم منطبق شوند.

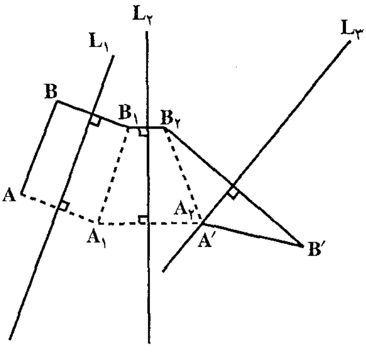
در عین حال اگر دو شکل به‌طور مستقیم قابل انطباق با هم باشند در حالت کلی می‌توان آنها را با یک دوران به هم وابسته کرد؛ حالتهایی را که شکلها به‌وسیلهٔ یک انتقال به هم وابسته‌اند می‌توان به‌صورت استثنا در نظر گرفت. اگر شکلها به‌طور معکوس با هم قابل انطباق باشند، در حالت کلی، با یک لغزه به هم وابسته خواهند بود؛ حالتهایی را که شکلها به‌وسیلهٔ یک تقارن محوری به هم وابسته می‌شوند، می‌توان مستثنی کرد. انتقال و دوران را می‌توان به‌عنوان مجموع دو تقارن نسبت به دو خط (موازی یا متقاطع)

درنظر گرفت، درحالی‌که تقارن نسبت به یک خط یا لغزه می‌تواند به‌صورت مجموع یک تقارن نسبت به یک خط و یک نقطه نمایش داده شود (تقارن نسبت به یک خط m مساوی است با مجموع سه تقارن نسبت به سه خط : $l \perp m$ و l و m، یعنی مساوی است با مجموع یک تقارن نسبت به خط l و یک تقارن نسبت به نقطهٔ O محل برخورد l و m. بنابراین نتیجه‌گیری ما می‌تواند به‌صورت زیر نیز بیان شود :

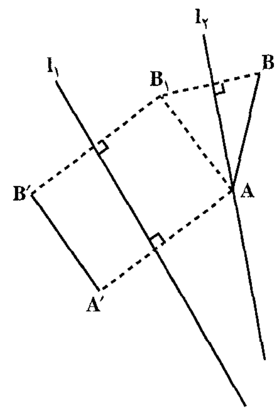
هر دو شکل قابل انطباق با هم در صفحه، می‌توانند توسط مجموع دو تقارن نسبت به دو خط l_1 و l_2 یا دو تقارن نسبت به یک خط l و یک نقطهٔ O بر هم منطبق شوند. وقتی که $l_1 \| l_2$ ، دارای یک انتقال هستیم، و وقتی نقطهٔ O بر خط l واقع باشد، تنها یک تقارن نسبت به یک خط داریم. قضیه‌های اخیر نیز می‌توانند از گزاره‌های مربوط به جمع (ترکیب) تقارنهای محوری نتیجه شوند. زیرا برهان قضیهٔ نخست بر پایهٔ این واقعیت استوار است که هر دو پاره‌خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند با یک دوران یا یک انتقال بر هم منطبق شوند ؛ اما واضح است که AB می‌تواند با دو تقارن متوالی نسبت به دو خط l_1 و l_2 به $A'B'$ بدل شود : کافی است که l_1 عمودمنصف پاره‌خط AA' باشد (اگر A' بر A منطبق باشد، آن‌گاه l_1 می‌تواند هر خط گذرنده بر A باشد) و l_2، نیمساز زاویهٔ B_1AB باشد، که نقطهٔ B_1 قرینهٔ B' نسبت به خط l_1 است (شکل ت).

برهان قضیهٔ دوم بر پایهٔ این واقعیت استوار است که دو پاره‌خط مساوی AB و $A'B'$ می‌توانند با یک لغزه یا یک تقارن محوری بر هم منطبق شوند. اما AB می‌تواند با دنباله‌ای از سه تقارن نسبت به خطهای l_1 ، l_2 و l_3 به $A'B'$ بدل شود. محور اوّلین تقارن، l_1 ، می‌تواند کاملاً اختیاری انتخاب شود، و سپس خطهای l_2 و l_3 می‌توانند چنان انتخاب شوند که مجموع تقارنها نسبت به این دو خط، پاره‌خط A_1B_1 را که قرینهٔ AB نسبت به l_1 است، روی $A'B'$ ببرد (شکل ث). برعکس، تمام گزاره‌های مربوط به جمع (ترکیب) طولپاییها می‌توانند از دو قضیهٔ اخیر به‌دست آیند. زیرا، قضیهٔ اوّل می‌گوید که هر جفت از شکلها به‌طور مستقیم قابل انطباق با هم می‌توانند با یک دوران یا یک انتقال از یکدیگر به‌دست آیند. اما اگر دو شکل F و F' به وسیلهٔ دو تقارن محوری، یا در حالت کلی به‌وسیلهٔ تعداد زوجی تقارن محوری به هم وابسته باشند، آن‌گاه این شکلها به‌طور مستقیم با هم قابل انطباقند (چون یک تقارن محوری تنها جهت مثلث را عوض می‌کند، اما دو تقارن محوری آن را تغییر نمی‌دهند). بنابراین F' می‌تواند با یک دوران یا یک انتقال از F به دست آید، یعنی مجموع دو تقارن محوری (یا در حالت کلی، تعداد زوجی تقارن محوری) یک دوران یا یک انتقال است. با

روشی کاملاً مشابه از قضیهٔ دوم نتیجه می‌شود که مجموع سه تقارن محوری (یا در حالت کلی تعداد فردی تقارن محوری) یک لغزه یا یک تقارن محوری است. از قضیهٔ اوّل نیز نتیجه می‌شود که مجموع دو دوران، یک دوران یا یک انتقال است، و نیز مجموع دو لغزه یک دوران است یا یک انتقال، و به همین ترتیب ...

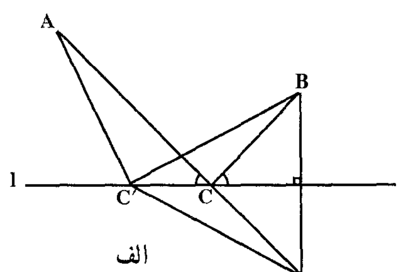


ث



ت

۲۴۵. در شکل (الف)، نیاز به اثبات می‌نیمم‌بودن $AC+CB$ داریم، و این به معنی این است که به ازای هرنقطهٔ C' واقع بر خط مفروض $AC+CB < AC'+C'B$ است. در مورد B' قرینهٔ B، $CB = CB'$ و $BC' = B'C'$ است. در این صورت:



الف

$$AC+CB = AC+CB' = AB'$$

و

$$AC'+C'B = AC'+B'C'$$

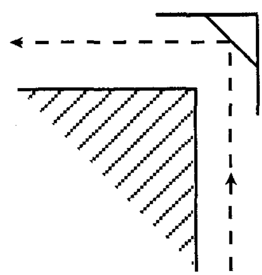
اما $AB' < AC'+B'C'$، زیرا $AC'B'$ مثلث است، بنابراین چنان‌که باید اثبات می‌کردیم $AC+CB < AC'+C'B$ است.

موارد استعمال فیزیکی قضیهٔ هرون بستگی به این اظهار دارد که زاویه‌هایی که AC و CB با خط l تشکیل می‌دهند، همنهشتند. به‌عنوان مثال، کوتاهترین فاصلهٔ A تا B از طریق نقطه‌ای واقع بر l مسیر شعاع نورانیی منعکس در آینه‌ای در خط l است. منعکس‌کنندهٔ گوشه‌ای، با زاویهٔ آینه‌ای، نشان داده شده در شکل (ب)، برای این که

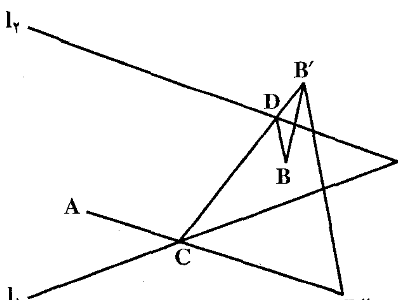
«دیدار اطراف یک کنج» برای شخص مجاز کند، از اصل فیزیکی انعکاس استفاده می‌کند.

مسألهٔ یافتن کوتاهترین مسیر را می‌توان به بیش از یک خط تعمیم، و به این ترتیب فایدهٔ نظریهٔ مورد بحث را افزایش داد. برای مثال، شکل (پ)، کوتاهترین مسیراز A تا Bی برخوردکننده با l_1 و بعد l_2 را نشان می‌دهد. B' قرینهٔ B نسبت به l_2 و B'' قرینهٔ B' نسبت به l_1 است. مسیر مذکور از A به‌طرف B''، سپس از C به‌سمت B' سوق می‌دهد. پریسکوپ ساده از این نظریه استفاده می‌کند.

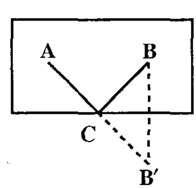
یکی از موارد استعمال نظریهٔ آمدوشدها، که از علاقهٔ رایج ریاضیات نیز از توجه زندگی روزمره برخورداراست، در رابطه با میز بیلیارد است. شکل (ت) نشان می‌دهد که چگونه می‌توان توپ در A را به منظور برخورد با توپ B با آمدوشدهایی در یک، دو، یا سه طرف میز در نظر گرفت. در شکل (ث)، AC و BD موازی‌اند و در شکل (ج)، AC و ED موازی‌اند و CD و BE نیز موازی‌اند.



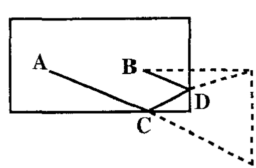
ب



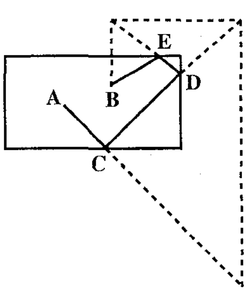
پ



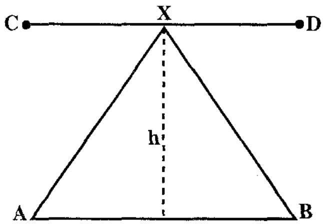
ت



ث

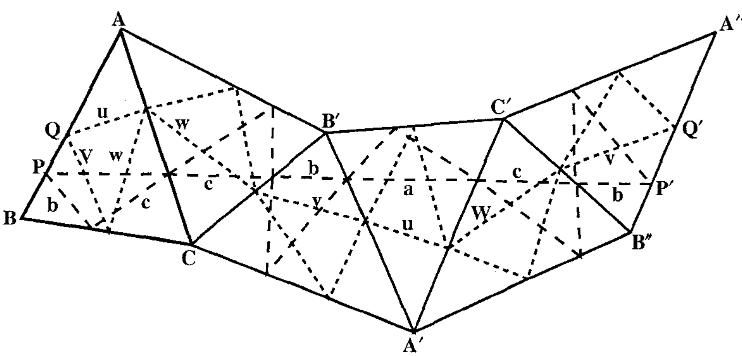


ج



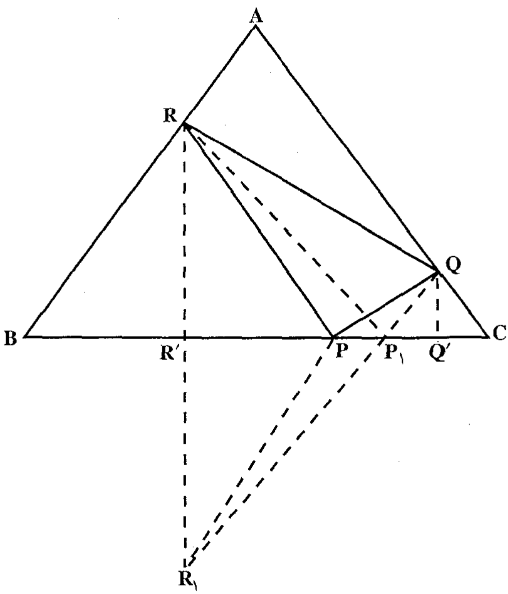
۲۴۶. اگر $\overline{AB}$ ضلع ثابت مورد بحث باشد، در این صورت رأس سوم X باید بر خط $\overline{CD}$ ی موازی با $\overline{AB}$ باشد. چرا؟ بنا به قضیهٔ هرون، $AX+XB$، اگر ΔAXB متساوی‌الساقین باشد، می‌نیمم است. چرا؟

۲۴۷. برای حل مسأله، مطابق با شکل (الف)، در مثلث مفروض و با زاویه‌های حاده ABC دو مثلث محاطی در نظر می‌گیریم: یکی مثلث ارتفاعی آن (که در شکل به‌صورت خط‌چین رسم شده) و دیگری مثلثی دلخواه (که در شکل به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است). مثلث ACB' قرینهٔ مثلث ABC را نسبت به ضلع AC رسم می‌کنیم، آن‌گاه مثلث $A'B'C$ قرینهٔ مثلث ACB' را نسبت به ضلع CB'، سپس مثلث $A'B'C'$ قرینهٔ مثلث $A'B'C$ را نسبت به $A'B'$، پس از آن مثلث $A'C'B''$ قرینهٔ مثلث $A'B'C'$ را نسبت به ضلع $A'C'$ و بالاخره مثلث $C'A''B''$ قرینهٔ مثلث $A'C'B''$ را نسبت به ضلع $C'B'$ رسم می‌کنیم.



اکنون شکل به‌دست آمده را بررسی می‌کنیم. صفحه را جهت‌دار می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که اندازه‌های زاویه‌های خط شکستهٔ $BAB'A'B''A''$ در رأس A برابر ۲A، در رأس B' برابر ۲B، در رأس A' برابر ۲A−، در رأس B'' برابر ۲B− است که مجموع آنها صفر می‌شود. نتیجه می‌شود که $B''A''$ با BA موازی است و در نتیجه چهارضلعی $PP'Q'Q$ متوازی‌الاضلاع است. می‌دانیم که ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی نظیر آن می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که در تبدیلهای تقارنی بالا ضلعهای مثلث ارتفاعی مثلث ABC، به‌طور متوالی بر خط PP' قرار دارند. در صورتی که در همین تبدیلهای تقارنی ضلعهای مثلث محاطی دیگر به‌طور

متوالی بر خط شکستهٔ QQ' واقع شده‌اند. اما PP' با QQ' برابر است و خط راست QQ' از خط شکستهٔ QQ' کوچکتر است. از طرفی طول PP' برابر است با دو برابر محیط مثلث ارتفاعی و طول خط شکستهٔ QQ' دو برابر محیط مثلث محاطی اختیاری است. بنابراین محیط مثلث ارتفاعی از محیط مثلث محاطی اختیاری کوچکتر است. پس از بین مثلثهای محاط در مثلث ABC، مثلث ارتفاعی کمترین محیط را دارد. دو نمونه راه‌حل دیگر برای مسألهٔ فاگنانو :



راه‌حل اول. برای آن که محیط مثلث PQR محاط در مثلث ABC می‌نیمم باشد، باید هر ضلع از مثلث ABC نیمساز زاویهٔ خارجی مثلث PQR باشد. با قبول این که مثلث PQR جواب مسأله است، فرض می‌کنیم ضلع BC نیمساز خارجی زاویهٔ QPR نباشد ؛ P_1 را روی ضلع BC طوری اختیار می‌کنیم که BC نیمساز خارجی زاویهٔ RP_1Q باشد.

برای این منظور R_1 قرینهٔ R نسبت به BC را به Q وصل می‌کنیم تا P_1 به‌دست آید. P_1 بین B و C است زیرا با فرض حاده بودن زاویه‌های مثلث، R' و Q' تصویرهای R و Q روی ضلع BC و P_1 بین R' و Q' است. از نامساوی $P_1Q+P_1R<PQ+RP$ نتیجه می‌شود که محیط مثلث P_1RQ از محیط مثلث PRQ کوچکتر است و این خلاف فرض است. پس باید هر ضلع از مثلث ABC نیمساز خارجی زاویهٔ نظیر از مثلث PQR باشد. نیمساز داخلی زاویهٔ P از مثلث PQR از طرفی بر BC عمود است و از طرف دیگر باید با نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ R و Q متقارب باشد، یعنی از A بگذرد، پس نیمساز داخلی زاویهٔ P، ارتفاع رأس A از مثلث ABC است. چون این استدلال را دربارهٔ دو رأس دیگر Q و R تکرار کنیم، معلوم می‌شود که مثلث PQR که محیط آن می‌نیمم است مثلث ارتفاعی مثلث ABC و منحصر به فرد است.

راه‌حل دوم. $A'B'C'$ مثلث ارتفاعی مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم محیط هر مثلث PMN محاط در مثلث ABC (با زاویه‌های حاده) از محیط مثلث $A'B'C'$ بزرگتر است.

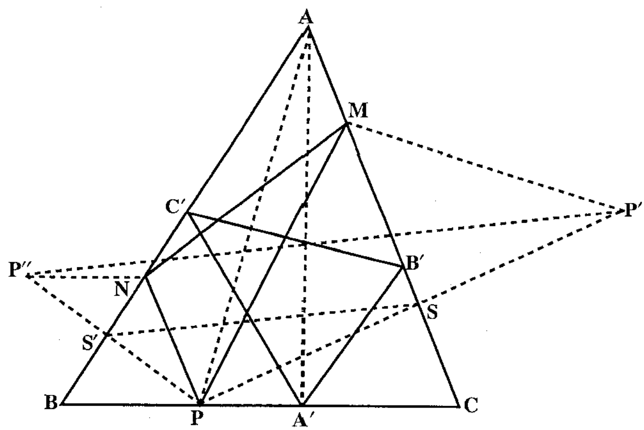
برای این کار P' و P'' قرینه‌های رأس P را نسبت به AC و AB تعیین کرده به هم وصل می‌کنیم و S و S' تصویرهای P بر AC و AB را نیز به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که:

$$PM + MN + NP = P'M + MN + NP'' \geq P'P'' \qquad (۱)$$

در مثلث ASS' بنا به قضیهٔ سینوسها داریم $SS' = AP\sin A$ و چون $SS' = \frac{۱}{۲}P'P''$

پس:

$$P'P'' = ۲AP\sin A \qquad (۲)$$



از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$PN + NM + MP \geq ۲AP\sin A \qquad (۳)$$

آنچه را دربارهٔ مثلث PNM عمل شد دربارهٔ مثلث ارتفاعی $A'B'C'$ انجام می‌دهیم. با توجه به این که قرینه‌های A' نسبت به AC و AB در راستای $B'C'$ واقع می‌شود، نتیجه می‌گیریم:

$$A'B' + B'C' + C'A' = ۲AA'\sin A \qquad (۴)$$

با توجه به این که $AA' < AP$ از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$A'B' + B'C' + C'A' < PN + NM + MP$$

[یعنی محیط مثلث $A'B'C'$ می‌نیمم است.]

۲۴۹. یکی از راه‌حلهای ممکن شامل مرحله‌های زیر است :

(۷,۰,۵) , (۲,۵,۵) , (۲,۱,۹)

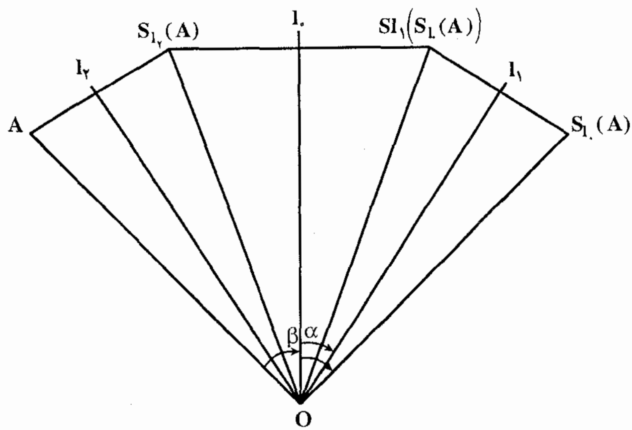
(۶,۰,۶) , (۲,۰,۰) , (۷,۵,۰)

(۱۱,۱,۰) , (۱۱,۰,۱) , (۶,۵,۱)

۲۵۰. نخست پیمانه‌های ۵ و ۱۱ لیتری را پر می‌کنند و ۸ لیتر باقیمانده را به یکی از ۳ نفر می‌دهند. حال باید مسألهٔ [۵، ۱۱، ۱۳، ۱۶] را حل کرد که شامل ۴ مرحله است.

۲۵۱. فرض کنیم مجموعهٔ M، دارای محورهای تقارن l_0 و l_1 باشد (الزامی ندارد که متمایز باشند). در این صورت خط راست l_2، قرینهٔ l_1 نسبت به l_0 هم، محور تقارن مجموعهٔ M است. در واقع، اگر قرینهٔ نقطهٔ A، نسبت به خط راست l را، $S_l(A)$ بنامیم، آن‌وقت، از قرینه بودن نقطه‌های A و $S_{l_0}(A)$ و همچنین l_2 و l_1، نسبت به خط راست l_0، نتیجه می‌شود که، دو نقطهٔ $S_{l_2}(A)$ و $S_{l_1}(S_{l_0}(A))$ هم، نسبت به همان خط راست l_0، قرینهٔ یکدیگرند (شکل). بنابراین برای هر نقطهٔ A داریم :

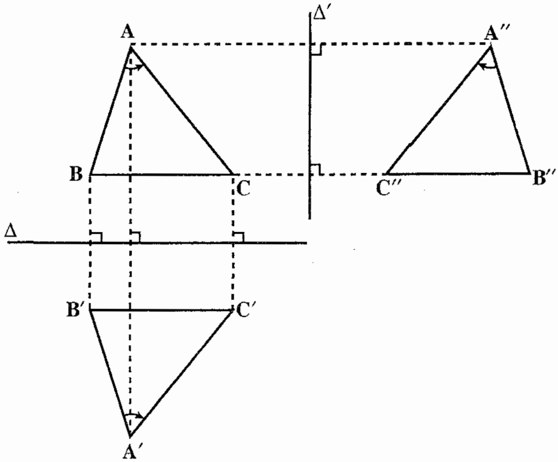
$$S_{l_2}(A)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(A)))$$



که از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$S_{l_2}(M)=S_{l_0}(S_{l_1}(S_{l_0}(M)))=S_{l_0}(S_{l_1}(M))=S_{l_0}(M)=M$$

به این ترتیب، هر محور تقارن l_0 مجموعهٔ M، محور تقارن مجموعهٔ L هم می‌باشد که از آن‌جا، درستی حکم مسأله روشن می‌شود.



۲۵۲. به‌عنوان مثال، مثلثهای $A'B'C'$ و $A''B''C''$ را قرینه‌های محوری مثلث ABC نسبت به دو خط Δ و ′Δ به‌دست می‌آوریم. بنا به ویژگی تقارن محوری دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ همنهشت هستند. اما زاویهٔ ′A جهتش مخالف جهت زاویهٔ A است؛ زاویهٔ ″A جهتش مخالف جهت زاویهٔ A است، بنابراین دو زاویهٔ ′A و ″A همجهت هستند. همین‌طور برای زاویه‌های دیگر، مطلب قابل اثبات است. پس دو مثلث $A'B'C'$ و $A''B''C''$ همجهتند.

۲.۴. تقارن محوری در: نقطه، خط، زاویه

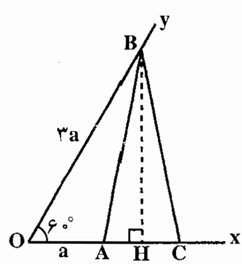
۱.۲.۴. محور تقارن

۲۵۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH، $\hat{O}=۶۰^\circ$، پس $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $OH=\frac{OB}{۲}=\frac{۳a}{۲}=۱/۵a$ ؛

در نتیجه :

$$AH=OH-OA=۱/۵a-a=\frac{a}{۲}$$

بنابراین BH عمودمنصف قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC یعنی محور تقارن این مثلث است.



۲.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۴. نقطه‌ها همخطند

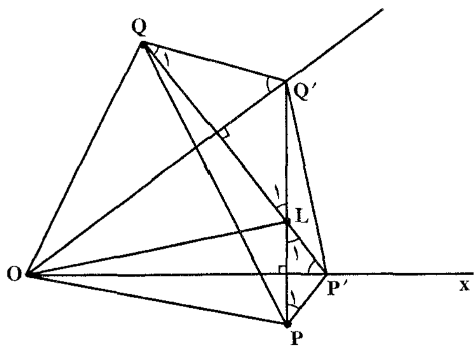
۲۵۴. نخست، حالت حدی را، وقتی که نقطهٔ N در بینهایت قرار دارد، در نظر می‌گیریم ؛ در این صورت، خطهای راست AN، BN و CN با خط راست l موازی‌اند. فرض کنید فاصلهٔ نقطه‌های A، B و C تا خط l برابر با a، b و c باشد. (برای سادگی، فرض می‌کنیم که A، B و C در یک طرف l هستند.) خطهای موازی با l که از A، B و C می‌گذرند، خطهای راست B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 را بترتیب، در نقطه‌هایی مانند A_2 ، B_2 و C_2 قطع می‌کنند، بسادگی می‌توان دید که، $\frac{A_1C_2}{C_2B_1}=\frac{a+c}{c+b}$ ، $\frac{B_1A_2}{A_2C_1}=\frac{b+a}{a+c}$ و $\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=\frac{c+b}{b+a}$.

با ضرب کردن این برابریها درهم، قانع می‌شویم که حکم قضیهٔ منلائوس برقرار است (همچنین لازم است مطمئن شویم که تعداد فردی نقطه از میان A_2 ، B_2 و C_2 بر امتدادهای ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ قرار دارند) ؛ بنابراین، نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 همخطند.

حالت کلی مسأله می‌تواند به حالت اوّل تحویل یابد، مثلاً اگر ترتیب مفروض مثلثها، از یک نقطه در فضا به صفحهٔ دیگری تصویر شود با انتخاب این نقطه، قرینه بودن مثلثها را حفظ خواهیم کرد و نقطهٔ N به سمت بینهایت می‌رود. همچنین می‌توان از بررسیهای فضایی اجتناب کرد. دستگاه مختصاتی با خط l به‌جای محور xها و مبدأ N در نظر می‌گیریم. تبدیل $x'=\frac{1}{x}$ و $y'=\frac{y}{x}$ را انجام می‌دهیم. در نتیجهٔ این تبدیل، نقطه‌های محور xها $(y=0)$ ، به نقطه‌هایی روی خط راست $y'=0$ تبدیل می‌شوند ؛ نقطه‌های قرینه نسبت به محور xها، به نقطه‌های قرینه نسبت به خط $y'=0$ تبدیل می‌شوند ؛ همچنین خطهای راست به خطهای راست تبدیل می‌شوند. خطهای راستی که از مبدأ می‌گذرند به خطهای راست موازی با $y'=0$ تبدیل می‌شوند (این تبدیل، به‌طور ذاتی، تصویر کردنی است که در بالا ذکر شد). با انجام دادن این تبدیل، بترتیبی که بررسی کردیم، می‌رسیم.

۲.۲.۲.۴. نقطه‌ها همدایره‌اند

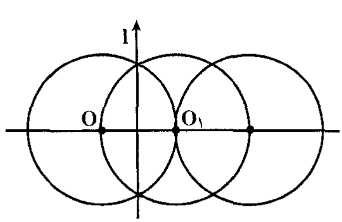
۲۵۵. چهارضلعی $PP'Q'Q$ محاطی است زیرا به‌دلیل برابری $\hat{L}_1 = \hat{L}_2$ و متساوی‌الساقین بودن مثلثهای LPP' و LQQ'، $\hat{Q}_1 = \hat{P}_1$ است. از طرفی $O\hat{P}'Q = O\hat{Q}'Q$ است. پس چهارضلعی $OP'Q'Q$ نیز محاطی است ؛ در نتیجه پنج نقطهٔ O، P، P′ ، Q′ و Q همدایره‌اند.



۳.۲.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۶. اگر مجموع سه تقارن نسبت به سه خط در صفحه را دوبار در نظر بگیریم، یا یک تبدیل همانی به‌دست می‌آوریم یا یک انتقال. پس «اوّلین» نقطهٔ A_{12} از A بر اثر مجموع دو انتقال (یک یا حتی هر دو آنها ممکن است «انتقالی به فاصلهٔ صفر باشند» یعنی تبدیل همانی) به‌دست می‌آید، «دومین» نقطه (که آن را A'_{12} می‌نامیم) از A بر اثر مجموع همان دو انتقال اما در جهت مخالف به‌دست می‌آید. پس حکم مسأله از این جا نتیجه می‌شود.

۲۵۷. $S_l(O) = O_1$ فرض می‌کنیم. به کمک تقارن S_l و دوران به مرکز O، می‌توان نقطهٔ O را به هر نقطه از محیط دایرهٔ ω به مرکز O_1 و شعاع $r = OO_1$ منتقل کرد. دایرهٔ ω را می‌توان به هر یک از دایره‌هایی که در شکل نشان داده شده است، منجر کرد. به کمک دوران دور نقطهٔ O، زنجیرهٔ دایره‌ها، از تمامی صفحه عبور می‌کند.



۳.۲.۴. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۲.۴. خط امتداد ثابتی دارد

۲۵۸. راه‌حل اول. واضح است که تنها زمانی یک پرتو نوری پس از تابش به یک آینه در راستایی درست در جهت مخالف راستای تابش برمی‌گردد که مسیر (تابش) عمود بر آینه باشد. از این پس فرض خواهیم کرد که پرتو نوری با ضلع اول زاویه (آینه‌ها) به زاویهٔ قائمه برخورد نمی‌کند. لذا فرض می‌کنیم که پرتو MN، پس از دوبار انعکاس در داخل زاویهٔ ABC، در مسیر PQ درست در جهت مخالف MN برمی‌گردد (شکل الف). در این حالت داریم:

$$P\hat{N}B + N\hat{P}B = ۱۸۰^\circ - N\hat{B}P = ۱۸۰^\circ - \alpha$$

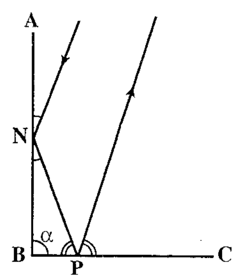
$$\begin{aligned} ۲(۱۸۰^\circ - \alpha) &= ۲\,P\hat{N}B + ۲\,N\hat{P}B \\ &= A\hat{N}M + P\hat{N}B + N\hat{P}B + C\hat{P}Q \\ &= ۱۸۰^\circ - M\hat{N}P + ۱۸۰^\circ - N\hat{P}Q \\ &= ۳۶۰^\circ - (M\hat{N}P + N\hat{P}Q) \end{aligned}$$

چون پرتوهای MN و PQ موازی و مختلف‌الجهت هستند، داریم:

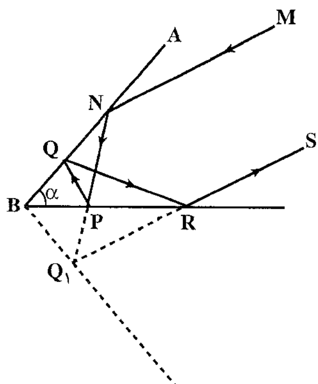
$$M\hat{N}P + N\hat{P}Q = ۱۸۰^\circ$$

پس: $\alpha = ۹۰^\circ \;,\; ۲(۱۸۰^\circ - \alpha) = ۳۶۰^\circ - ۱۸۰^\circ$

بعکس، اگر $\alpha = ۹۰^\circ$، آن‌گاه $M\hat{N}P + Q\hat{P}N = ۱۸۰^\circ$، یعنی، راستای پرتو تابش PQ عکس راستای MN است.



الف



ب

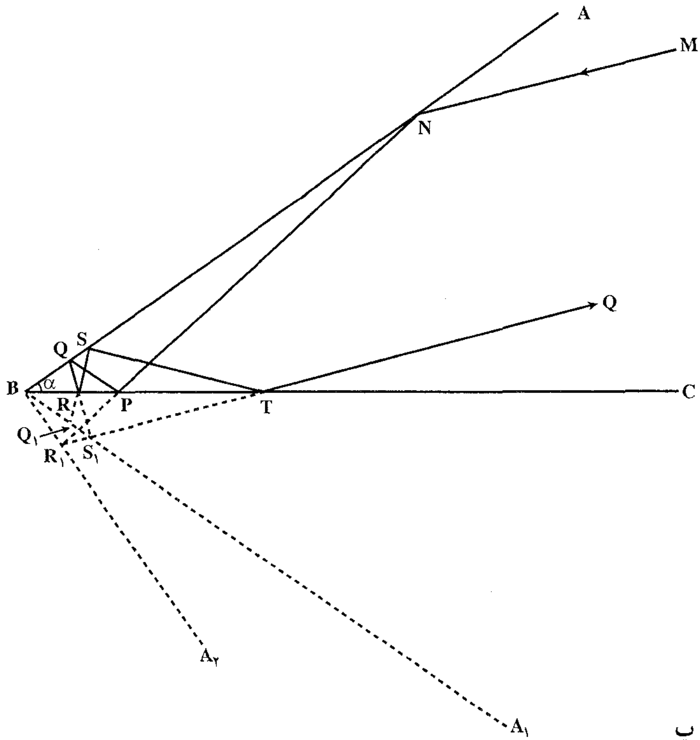
اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که پرتو تابش MN، پس از چهار بار انعکاس در ضلعهای زاویه، در راستای RS مخالف جهت MN برمی‌گردد (شکل ب ؛ تنها راهی که پرتو نوری می‌تواند در جهت عکس راستای تابش پس از دقیقاً سه‌بار انعکاس برگردد آن است که با دومین ضلع زاویه به زاویهٔ قائمه برخورد کند. این حالت نمی‌تواند برای هر پرتو تابش رخ دهد، زیرا در این حال، برای یک زاویهٔ مفروض α فقط یک زاویهٔ تابش وجود دارد). قرینهٔ خط AB و مسیر PQR را نسبت به خط BC پیدا می‌کنیم، خط BA_1 نگارهٔ BA و نقطهٔ Q_1 قرینهٔ Q نسبت به BC است. پس :

$$A\hat{B}A_1 = ۲A\hat{B}C = ۲\alpha$$

بعلاوه
$$Q\hat{P}B = Q_1\hat{P}B = N\hat{P}C$$

بنابراین NPQ_1 خط مستقیم است. به همین روش می‌توان نشان داد که Q_1RS خط مستقیم است (زیرا $Q\hat{R}B = Q_1\hat{R}B = S\hat{R}C$). بالاخره $B\hat{Q}_1P = A_1\hat{Q}_1R$، زیرا این زاویه‌ها بترتیب مساوی زاویه‌های BQP و AQR هستند، که مساوی‌اند. پس می‌بینیم که پرتو MN، که در نقطه‌های N و Q_1 به زاویهٔ $ABA_1 = ۲\alpha$ منعکس شده است، در راستای Q_1S برمی‌گردد که جهتش عکس راستای تابش است. اما در آن صورت بنا بر آنچه قبلاً ثابت شد $۲\alpha = ۹۰^\circ$، و بنابراین $\alpha = \frac{۹۰^\circ}{۲}$. بعکس اگر $\alpha = \frac{۹۰^\circ}{۲}$، آن‌گاه $A\hat{B}A_1 = ۹۰^\circ$ و لذا پرتو MN، پس از چهار بار انعکاس در ضلعهای زاویهٔ ABC در راستایی عکس راستای تابش برمی‌گردد.

اینک فرض کنیم که پرتو تابش MN شش بار در ضلعهای زاویه منعکس شده، سپس در طول TO، خلاف جهت مسیر تابش، برمی‌گردد (شکل پ ؛ در حالت کلی یک پرتو نوری نمی‌تواند پس از دقیقاً پنج بار انعکاس در مسیری خلاف جهت مسیر تابش برگردد). قرینه‌های خط AB و مسیر PQRST را نسبت به خط BC پیدا، و فرض می‌کنیم BA_1 قرینهٔ BA و Q_1 و S_1 قرینه‌های Q و S نسبت به خط BC باشند. درست مانند قبل می‌توانیم نتیجه بگیریم که NPQ_1 خط مستقیم است $(Q_1\hat{P}B = Q\hat{P}B = N\hat{P}C)$ و S_1TO خط مستقیم است $(S_1\hat{T}B = S\hat{T}B = O\hat{T}C)$ و $R\hat{Q}_1B = P\hat{Q}_1A_1$ و $Q_1\hat{R}B = S_1\hat{R}C$ و $R\hat{S}_1B = T\hat{S}_1A_1$ ؛ پس ملاحظه می‌کنیم پرتو MN پس از انعکاسهای پیاپی در خطهای AB، BA_1، BC و دوباره در BA_1 بترتیب



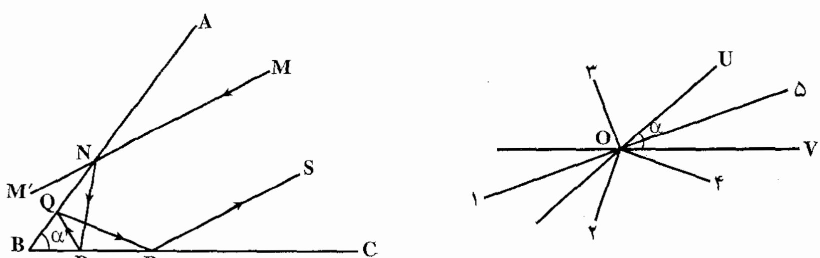
پ

در نقطه‌های N، Q، R و S_1 در راستای S_1O که مخالف راستای تابش MN است، باز می‌گردد.

حال قرینه‌های خط BC و مسیر Q_1RS_1 را نسبت به خط BA_1 پیدا می‌کنیم ؛ گیریم BA_2 نگارهٔ BC و R_1 نگارهٔ R نسبت به خط BA_1 باشد. پس NPQ_1R_1 یک خط مستقیم است (زیرا $R_1\hat{Q}_1B = R\hat{Q}_1B = P\hat{Q}_1A_1$)، همچنین R_1S_1TO خط مستقیم است (زیرا $R_1\hat{S}_1B = R\hat{S}_1B = T\hat{S}_1A_1$)، و $Q_1\hat{R}_1B = S_1\hat{R}_1A_2$ (زیرا بترتیب مساوی زاویه‌های Q_1RB و S_1RC هستند، که با هم مساوی‌اند). پس ملاحظه می‌کنیم که پرتو MN پس از انعکاس در ضلعهای زاویهٔ $ABA_2(=3\alpha)$ در نقطه‌های N و R_1 در راستای R_1O برمی‌گردد که در جهت مخالف راستای تابش MN است. اما بنابر آنچه ثابت شد باید داشته باشیم $3\alpha = 90°$ ، یعنی $\alpha = 90°/3$. برعکس، اگر $\alpha = 90°/3$ ، آن‌گاه $A\hat{B}A_2 = 90°$ ، و پرتو MN پس از شش بار انعکاس در ضلعهای زاویهٔ ABC، در راستای مخالف راستای تابش برمی‌گردد.

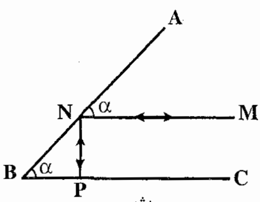
بالاخره، فرض کنید که پس از ۲n بار انعکاس در ضلعهای زاویهٔ $ABC = \alpha$ ، پرتو نوری در راستای مخالف راستای پرتو تابش برمی‌گردد [در حالت کلی یک پرتو نوری نمی‌تواند پس از (۱ − ۲n) بار انعکاس در ضلعهای زاویه، در راستای تابش برگردد]. همانند حالتهای قبل عمل می‌کنیم، یعنی، اگر پرتو تابش به AB برخورد کند، قرینهٔ مسیر پرتو را نسبت به خط BC پیدا، و فرض می‌کنیم BA_1 نگارهٔ AB پس از این قرینه‌یابی باشد. حال قرینهٔ BC را نسبت به خط BA_1 پیدا می‌کنیم تا BA_2 نگارهٔ BC پس از این قرینه‌یابی به‌دست آید. سپس قرینهٔ BA_1 را نسبت به BA_2 پیدا می‌کنیم تا BA_3 به‌دست آید، و این عمل را همین طور ادامه می‌دهیم تا این که پس از $n-1$ بار قرینه‌یابی BA_{n-1} را داشته باشیم. اکنون زاویهٔ ABA_{n-1} برابر $n\alpha$ است. سپس، ثابت می‌کنیم که پرتو تابش، وقتی بر اثر این تقارنهای خاص ادامه پیدا کند، خط مستقیمی تشکیل می‌دهد که پس از برخورد با $A_{n-1}B$ منعکس می‌شود، سپس به BA برخورد می‌کند به‌طوری که در راستایی مخالف با راستای ورودی باز می‌گردد. پس بنابر آنچه قبلاً ثابت شده بود، نتیجه می‌گیریم که $n\alpha = 90^\circ$ ، و از این‌رو $\alpha = \dfrac{90^\circ}{n}$.

راه‌حل دوم. گیریم ABC زاویهٔ مفروض باشد، و ... MNPQ مسیر پرتو نوری (شکل ت که در آن $n = 2$ و $\alpha = 45^\circ$). تنها به راستاهای مسیر علاقه‌مندیم، و بنابراین مناسبتر آن است که مبدأ تمام این راستاها را نقطهٔ منحصر به فرد O بگیریم (در شکل $O_1 \| MN$ ، $O_2 \| NP$ ، $O_3 \| PQ$ و الی آخر). چون $M\hat{N}A = P\hat{N}B$ ، از این‌جا نتیجه می‌شود که پرتو O_2 نگارهٔ O_1 است نسبت به خط $OU \| AB$ (برای اثبات این مطلب کافی است که به شکل ت توجه کنیم، NM' نگارهٔ NP است نسبت به NB). به طریق مشابه، پرتو O_3 نگارهٔ O_2 است نسبت به خط $OV \| BC$. لذا پرتو O_3 از پرتو O_1 با



ت

دوران به زاویهٔ $۲U\hat{O}V = ۲\alpha$ به‌دست می‌آید. به همین منوال $O_۵$ از پرتو $O_۳$ با دورانی به زاویهٔ ۲α در همان راستا به دست می‌آید؛ در نتیجه پرتو $O_۵$ از پرتو $O_۱$ با دورانی به زاویهٔ ۴α به‌دست می‌آید، و همین طور الی آخر. بنابراین، اگر $\alpha = ۹۰^\circ/n$، آن‌گاه پرتو $O(۲n+۱)$ که راستایش همان راستای بازگشت پرتو نوری پس از n انعکاس در هر دو ضلع زاویه است، با پرتو $O_۱$ زاویهٔ $n \times ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$ تشکیل خواهد داد، که حکم مسأله را ثابت می‌کند. [در این جا فرض می‌کنیم که $\alpha > M\hat{N}A > ۰$؛ اگر $M\hat{N}A > \alpha$، MN خط BC را قطع خواهد کرد، که بدین معنی است که پرتو نوری ورودی باید پیش از برخورد به ضلع BA، از ضلع BC منعکس شود. این مطلب گویای آن است که پرتوهای مربوط به راستاهای $O_۱$، $O_۳$، $O_۵$، ... و الی آخر، همگی به آینهٔ BA برمی‌خورند، در حالی که پرتوهای مربوط به راستاهای $O_۲$، $O_۴$، ... الی آخر، به آینهٔ BC برخورد می‌کنند. اگر $M\hat{N}A = \alpha$، یعنی، اگر پرتو تابش MN موازی ضلع BC باشد، جهت پرتو $O(۲n)$ در جهت عکس $O_۱$ خواهد بود:



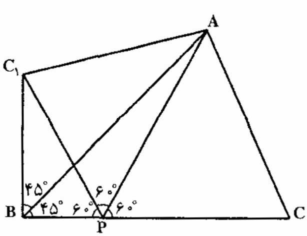
ث

در این حالت پرتو نهایی در مسیری مخالف مسیر پرتو تابش اوّلیه برمی‌گردد؛ ولی تعداد انعکاسها یکی کمتر از حالت کلی است؛ شکل (ث)، که در آن $A\hat{B}C = ۴۵^\circ$، $M\hat{N}A = ۴۵^\circ$]. این ملاحظات نشان می‌دهند که اگر $\alpha \neq ۹۰^\circ/n$، هر پرتو تابشی بعد از انعکاسهای پیاپی در ضلعها، در راستای مخالف راستای پرتو اوّلیه برنخواهد گشت.

۴.۲.۴. زاویه

۴.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۲۵۹. مطابق شکل قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط AP را $C_۱$ نام می‌دهیم و $C_۱$ را به A و B وصل می‌کنیم. داریم:



$$C_۱P = CP = ۲BP$$

و نیز

$$C_۱\hat{P}B - ۱۸۰^\circ - A\hat{P}C - A\hat{P}C_۱ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ - ۶۰^\circ = ۶۰^\circ$$

بنابراین در مثلث BC_1P یک زاویهٔ ۶۰° و یک ضلع نصف ضلع دیگر است، پس این مثلث قائم‌الزاویه است و لذا $C_1\hat{B}P = ۹۰^\circ$ و از آن‌جا $C_1\hat{B}A = ۴۵^\circ$ و $B\hat{C_1}P = ۳۰^\circ$ و در نتیجه:

$$A\hat{C}B = A\hat{C_1}P = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - B\hat{C_1}P) = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = ۷۵^\circ$$

۴.۲.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۶۰. با توجه به شکل زاویه‌های $A\hat{B}P = C\hat{B}Q$ و $B\hat{C}R = B\hat{C}S$ است.

۲۶۱. دو مثلث BAC و $BA'C$ نسبت به خط xy قرینهٔ محوری یکدیگر و دو زاویهٔ BAC و $BA'C$ زاویه‌های متناظر از این دو مثلثند، پس برابرند.

۲۶۲. به دلیل قرینه بودن دو نقطهٔ A و A' نسبت به xy، $\hat{H}_۲ = \hat{H}_۵$ است و چون $N\hat{H}x = N\hat{H}y = ۹۰^\circ$ می‌باشد، پس $\hat{H}_۳ = \hat{H}_۴$ است.

۴.۲.۵. پاره‌خط

۴.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

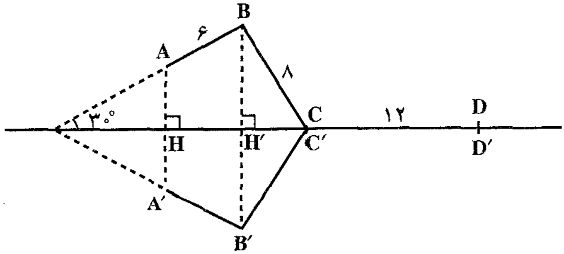
۲۶۳. با توجه به این که اندازهٔ پاره‌خط AB با قرینهٔ محوری آن $A'B'$ برابر است و با استفاده از اندازهٔ تصویر قائم یک پاره‌خط بر یک محور داریم:

$$HH' = AB\cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}AB$$

$$\Rightarrow ۲AB + ۳A'B' + HH' = ۲AB + ۳AB + \frac{۱}{۲}AB = \frac{۱۱}{۲}AB = ۳۳ \Rightarrow AB = ۶$$

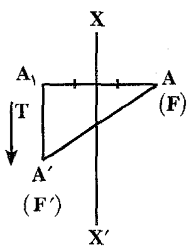
۴.۲.۶. رابطه‌های متری

۲۶۴. با توجه به این که $A'B' = AB$، $B'C' = BC$، $C'D' = CD$ و $HH' = \frac{۶\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$ و $H'C = ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴$ است، داریم:



$$۶+۸+۱۲+۶+۸+۱۲+۳\sqrt{۳}+۴=۵۶+۳\sqrt{۳}$$

۷.۲.۴. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند



۲۶۵. دو شکل (F) و (′F) را که به‌طور معکوس متساوی‌اند در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که ′F با تبدیل F به‌وسیلهٔ یک تقارن نسبت به ′XX و یک انتقال T موازی با ′XX به‌دست می‌آید. به این ترتیب نقطهٔ A از شکل (F) متناظر است با نقطهٔ ′A از شکل (′F). فرض کنیم که A بر ′A منطبق شود، بنابراین باید $AA_۱=۰$ و $A_۱A'=۰$، یعنی انتقال T مساوی صفر گردد. (در این صورت F و ′F نسبت به ′XX قرینه می‌شوند) و A باید روی ′XX قرار گیرد.

۲۶۶. الف. B

ب. D

پ. G

ت. A

ث. G

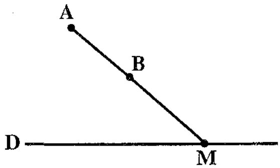
۸.۲.۴. رسم شکلها

۲۶۷. قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به محور D، ′B می‌نامیم. ′AB خط D را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ M جواب مسأله است؛ زیرا اگر نقطهٔ دیگری مانند ′M روی خط D در نظر بگیریم با توجه به این که $M'B=M'B'$ است، در مثلث $M'AB'$ داریم:

$$M'A-M'B'<AB'$$

و یا $M'A - MB' < MA - MB'$

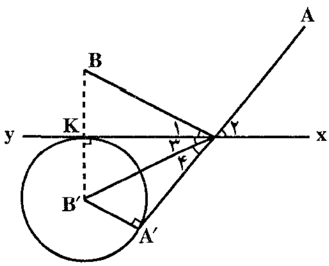
نکته. اگر دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط D باشند، M نقطهٔ برخورد امتداد AB با خط D جواب مسأله است.



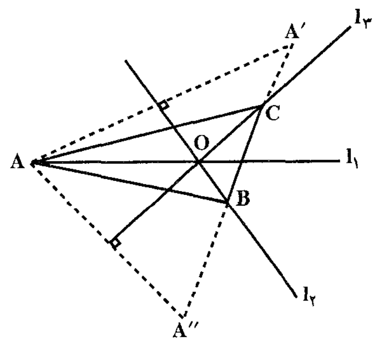
۲۶۸. قرینه‌های دو نقطهٔ A و B نسبت به خط d را بترتیب A' و B' می‌نامیم. خطهای AB' و BA' جواب مسأله‌اند. بدیهی است که نقطهٔ برخورد این دو خط روی محور تقارن d است.

۲۶۹. قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط AB را پیدا کرده، C' می‌نامیم. از C' به D وصل می‌کنیم تا خط AB را در نقطهٔ M قطع کند. این نقطه جواب مسأله است. زیرا اگر از M به C وصل کنیم بسادگی ثابت می‌شود که $A\hat{M}D = B\hat{M}C$ است.

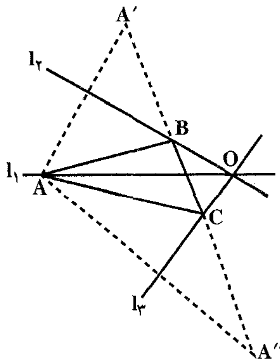
۲۷۰. قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به محور xy به‌دست می‌آوریم و B' می‌نامیم. به مرکز B' و به شعاع $B'K$ (K نقطهٔ برخورد BB' با xy است) دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A خطی بر این دایره مماس می‌کنیم. M نقطهٔ برخورد این خط با xy جواب مسأله است؛ زیرا اگر از M به B' وصل کنیم، داریم: $\hat{M}_1 = \hat{M}_3 = \hat{M}_4 = \hat{M}_2$؛ پس $A\hat{M}x = 2B\hat{M}y$.



۲۷۱. الف. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده، و l_2 زاویهٔ B، و l_3 زاویهٔ C را نصف کرده‌اند (شکل الف). پس خطهای BA و BC قرینه‌های یکدیگر نسبت به l_2، و خطهای BC و AC قرینه‌های یکدیگر نسبت به l_3 هستند، و بنابراین نقطه‌های A' و A''، که از A بر اثر تقارن نسبت به خطهای l_2 و l_3 به‌دست آمده‌اند، بر خط BC واقعند.
پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: قرینه‌های نقطهٔ A را نسبت به خطهای l_2 و l_3 پیدا می‌کنیم تا نقطه‌های A' و A'' به‌دست آیند. نقطه‌های برخورد خط $A'A''$ با خطهای l_2 و l_3، رأسهای B و C هستند.
اگر l_2 و l_3 متعامد باشند، خط $A'A''$ از نقطهٔ برخورد سه خط مفروض می‌گذرد و مسأله جوابی ندارد؛ اگر l_1 بر یکی از خطهای l_2 و l_3 عمود باشد، $A'A''$ با خط



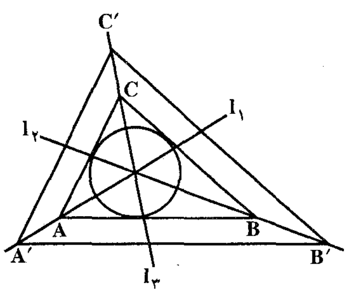
الف



ب

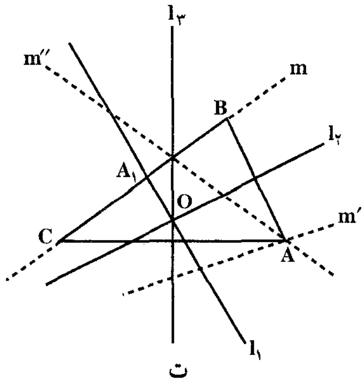
دیگر موازی خواهد شد و در این حالت نیز مسأله جواب ندارد. در حالتی که هیچ دو خطی از سه خط مفروض متعامد نباشند، مسأله جوابی یکتا دارد. در صورتی‌که هر یک از سه خط مفروض در داخل زاویهٔ منفرجه متشکل از دو خط دیگر باشد، سه خط زاویه‌های درونی مثلث ABC را نصف خواهند کرد؛ ولی اگر، مثلاً l_1 در داخل زاویهٔ حادهٔ حاصل از l_2 و l_3 باشد، این دو خط اخیر زاویه‌های خارجی مثلث را نصف می‌کنند (شکل ب). اثبات این حکم را به خواننده واگذار می‌کنیم.

ب. نقطهٔ دلخواه A' را بر یکی از خطها انتخاب و مثلث $A'B'C'$ را که در آن سه خط l_1، l_2 و l_3 نیمسازهای زاویه‌های درونی آن هستند، رسم می‌کنیم [قسمت (الف) همین مسأله]. بر S مماسهایی به موازات ضلعهای مثلث $A'B'C'$ رسم می‌کنیم (شکل پ). مثلثی که به‌دست می‌آید جواب مسأله است. اگر هر یک از سه خط l_1، l_2 و l_3 در زاویهٔ منفرجه متشکل از دوتای دیگر واقع شده باشد، مسأله یک جواب یکتا دارد؛ اگر یکی از آنها در داخل زاویهٔ حاده متشکل از دوتای دیگر واقع باشد، دایرهٔ مفروض دایرهٔ محاطی خارجی مثلث خواهد شد. هر مثلث یک دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد.



پ

هر دایرهٔ محاطی خارجی بر امتداد دو ضلع مثلث و ضلع سوم (در بیرون مثلث) مماس است. مرکز هر دایرهٔ محاطی خارجی محل تقاطع یک نیمساز زاویهٔ داخلی و نیمسازهای زاویه‌های خارجی دو رأس دیگر است.

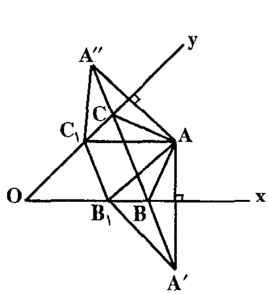


ج. فرض کنیم مثلث ABC پیدا شده است (شکل ت). چون نقطهٔ A قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط l_2 است، پس باید بر قرینهٔ BC نسبت به l_2 واقع باشد؛ و چون A قرینهٔ C نسبت به l_3 است، باید بر قرینهٔ BC نسبت به l_3 نیز واقع باشد.

پس راه ترسیم زیر به‌دست می‌آید: خط m را بر A_1 و عمود بر l_1 می‌گذرانیم، سپس خطهای m' و m'' را از قرینه‌های m نسبت به خطهای l_2 و l_3 به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ برخورد m' و m'' رأس Aی مثلث مطلوب خواهد بود؛ رأسهای B و C قرینه‌های این رأس نسبت به خطهای l_2 و l_3 هستند (شکل ت).

اگر خطهای l_2 و l_3 متعامد باشند، آن‌گاه یا خطهای m' و m'' که از قرینه‌های m نسبت به l_2 و l_3 به‌دست می‌آیند، موازی هستند (به شرطی که نقطهٔ A_1 بر O، محل تقاطع سه خط l_1، l_2 و l_3، منطبق نباشد) یا بر هم منطبقند (اگر A_1 بر O منطبق باشد). در حالت اول مسأله جواب ندارد، در صورتی‌که در حالت دوم جواب به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود. در کلیهٔ حالات دیگر جواب یکتاست.

۲۷۲. ترکیب تقارنهای محوری $S_rOS_qOS_p$ تقارنی با محور l بوده و $S_rOS_qOS_p(A)=A$– است. در نتیجه $S_l(A)=A$ بوده و A به l متعلق خواهد بود. خط l را رسم کرده و $(\hat{p,q})=(\hat{l,r})$ را منظور کنید. هر نقطهٔ خط l می‌تواند نقش A را ایفا کند.



۲۷۳. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به Ox و Oy به‌دست آورده A' و A'' می‌نامیم. از A' به A'' وصل می‌کنیم تا خط $A'A''$، Ox و Oy را بترتیب در B و C قطع کند. این دو نقطه جواب مسأله‌اند؛ یعنی اگر از A به B و C وصل کنیم، محیط مثلث ABC کمترین مقدار ممکن را داراست. زیرا اگر دو نقطهٔ دلخواه دیگر B_1 و C_1 را بترتیب روی Ox و Oy اختیار کنیم، ثابت می‌توان کرد که محیط مثلث AB_1C_1 از محیط مثلث ABC بیشتر است. برای اثبات از C_1 به A''

و از B_1 به A' وصل کنیم. به‌دلیل ویژگی تقارن محوری داریم:

$$C_1A = C_1A'' \ , \ B_1A = B_1A' \ , \ BA = BA' \ , \ CA = CA''$$

$$A'B_1C_1A'' > A'BCA'' \Rightarrow A'B + B_1C_1 + C_1A'' < A'B + BC + CA''$$

$$\Rightarrow AB_1 + B_1C_1 + C_1A > AB + BC + CA$$

$\Rightarrow AB_1C_1$ محیط مثلث $>$ ABC محیط مثلث

۲۷۴. الف. راه‌حل اول. گیریم n ضلعی موردنظر $A_1A_2...A_n$ باشد و B_1 نقطه‌ای در صفحه. قرینه‌های پاره‌خط A_1B_1 را بترتیب نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n پیدا می‌کنیم تا پاره‌خطهای A_2B_2 ، A_3B_3 ، ...، A_nB_n ، A_1B_{n+1} به‌دست آیند. چون این پاره‌خطها همگی با یکدیگر قابل انطباقند، نتیجه می‌شود که $A_1B_1 = A_1B_{n+1}$ ، یعنی نقطهٔ A_1 از نقطه‌های B_1 و B_{n+1} به یک فاصله است، و از این‌رو بر عمود منصف پاره‌خط B_1B_{n+1} قرار دارد.

حال نقطهٔ دیگر C_1 را در صفحه انتخاب و فرض می‌کنیم C_2 ، C_3 ، ...، C_n ، C_{n+1} نقطه‌های حاصل از قرینه‌یابیهای پیاپی C_1 نسبت به l_1 ، l_2 ...، l_{n-1} ، l_n باشند. واضح است که رأس A_1 در این n ضلعی نیز از نقطه‌های C_1 و C_{n+1} به یک فاصله است، و بنابراین بر عمودمنصف C_1C_{n+1} قرار دارد. پس A_1 می‌تواند به‌صورت فصل مشترک عمودمنصفهای پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} مشخص شود (وقتی دو نقطهٔ متمایز B_1 و C_1 انتخاب شدند، پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} را می‌توانیم رسم کنیم). از قرینه‌یابی پیاپی A_1 نسبت به n خط مفروض، بقیهٔ رأسهای n ضلعی را به‌دست می‌آوریم.

در صورتی که پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند (یعنی اگر عمودمنصفهای p و q در یک نقطه متقاطع باشند) مسأله جوابی یکتا دارد؛ اگر $B_1B_{n+1} \| C_1C_{n+1}$ ، آن‌گاه اگر p و q متمایز باشند، مسأله اصلاً جواب ندارد و اگر p و q منطبق باشند، مسأله بینهایت جواب دارد. n ضلعی حاصل از این راه‌حل ممکن است خودش را قطع کند. اشکال این راه‌حل این است که به تفاوت اساسی موجود میان حالتهای n زوج و n فرد هیچ‌گونه اشاره‌ای ندارد.

راه‌حل دوم. گیریم n ضلعی موردنظر $A_1A_2...A_n$ باشد (شکل الف). اگر قرینه‌های رأس A_1 را به‌طور مرتب نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_{n-1} ، l_n پیدا کنیم نقطه‌های A_2 ، A_3 ، ...، A_n و بالاخره دوباره A_1 را به‌دست خواهیم آورد. پس A_1 نقطهٔ ثابت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ...، l_n است.

حال دو حالت جداگانه را در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل: n زوج. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ،... l_n در حالت کلی، یک دوران حول یک نقطهٔ O است، که می‌تواند با توجه به ترسیمی که در جمع تقارنها به‌کار رفته، به‌دست آید. نقطهٔ O تنها نقطهٔ ثابت دوران است و بنابراین A_1 باید بر O منطبق باشد. با یافتن A_1 مشخص کردن بقیهٔ رأسهای n ضلعی آسان است. مسأله در این حالت یک جواب یکتا دارد.

در حالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ،... l_n یک انتقال یا تبدیلِ همانی (یک دوران به زاویهٔ صفر درجه، یا انتقال به فاصلهٔ (صفر) باشد، مسأله یا اصلاً جوابی ندارد (انتقال نقطهٔ ثابت ندارد) و یا بیش از یک جواب دارد، زیرا هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود (هر نقطه، یک نقطهٔ ثابت تبدیل همانی است).

حالت دوم: n فرد. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ،... l_n در حالت کلی یک لغزه است چون لغزه نقطهٔ ثابت ندارد. در حالت کلی وقتی n فرد باشد، جوابی وجود ندارد. در حالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ،... l_n تقارنی نسبت به یک خط l باشد (این خط را می‌توان رسم کرد)، جواب به صورت یکتا تعیین نمی‌شود، هر نقطه از خط l می‌تواند به‌عنوان رأس A_1 از n ضلعی انتخاب شود (هر نقطه از محور تقارن، یک نقطهٔ ثابت تقارن نسبت به این خط است).

پس، به‌ازای $n = 3$ مسأله در حالت کلی جوابی ندارد ؛ تنها حالتهای استثنا حالتهایی هستند که خطهای l_1 ، l_2 و l_3 یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند یا با هم موازی‌اند ؛ در این حالتها مسأله بیش از یک جواب دارد.

ب. این قسمت مسأله شبیه قسمت (الف) است. اگر nضلعی موردنظر ما $A_1A_2 \cdots A_n$ باشد (شکل ب)، خط A_nA_1 بر اثر تقارنهای پیاپی نسبت به l_1 ، l_2 ، ....، l_{n-1} ، l_n به خطهای $A_1A_2 , A_2A_3 , \ldots , A_{n-1}A_n$ تبدیل شده، سرانجام به روی A_nA_1 برمی‌گردد. پس A_nA_1 خط ثابت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ....، l_n است. دو حالت را درنظر می‌گیریم.

حالت اوّل. n زوج. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ....، l_n ، در حالت کلی، دورانی است حول یک نقطهٔ O، و بنابراین در حالت کلی خط ثابت ندارد. پس برای nزوج، در حالت کلی، مسأله جواب ندارد. در حالتهای خاص وقتی مجموع تقارنها یک نیمدور حول نقطهٔ O (دورانی به زاویهٔ 180°)، یا یک انتقال یا یک تبدیل همانی باشد، مسأله بیش از یک جواب دارد. در حالت اوّل می‌توان هر خط دلخواهی

را که از مرکز تقارن می‌گذرد خط A_nA_1 اختیار کرد؛ درحالت دوم می‌توان هر خط موازی راستای انتقال را A_nA_1 گرفت، در حالت سوم می‌توان هر خط صفحه را A_nA_1 گرفت.

حالت دوم. n فرد. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1، l_2، ...، l_n درحالت کلی، یک لغزه با محور l است، که این محور می‌تواند رسم شود. چون l تنها خط ثابت لغزه است، از این‌جا نتیجه می‌شود که ضلع A_nA_1 از n ضلعی موردنظر بر l قرار دارد؛ از پیدا کردن قرینه‌های پیاپی l نسبت به خطهای l_1، l_2، ...، l_{n-1} تمام ضلعهای دیگر nضلعی را به‌دست می‌آوریم. پس برای nفرد، مسأله در حالت کلی جواب یکتا دارد. استثنا زمانی رخ می‌دهد که مجموع تقارنها نسبت به خطهای مفروض، تقارنی نسبت به خط l باشد، در این حالت مسأله بیش از یک جواب دارد. برای ضلع A_nA_1، می‌توان خود خط l یا هر خط عمود بر آن را درنظر گرفت.

(پس به ازای $n = 3$، مسأله در حالت کلی یک جواب یکتا دارد؛ خطهای l_1، l_2 و l_3 یا همگی نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث هستند، یا دوتا از آنها نیمسازهای زاویه‌های داخلی هستند و سومی نیمساز زاویهٔ خارجی. تنها حالت استثنا وقتی است که سه خط l_1، l_2و l_3 یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند؛ در این حالت مسأله بیش از یک جواب دارد. خطهای l_1، l_2 و l_3 نیمساز زاویه‌های داخلی هستند، یا دوتا از آنها نیمسازهای زاویه‌های خارجی خواهند بود، و سومی نیمساز زاویهٔ داخلی.)

یافتن جوابی مشابه راه حل اوّل قسمت (الف) برای قسمت (ب) را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۹.۲.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۷۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۲۷۶. نقطهٔ مفروض را با A و خط مفروض را با l نشان می‌دهیم. رابطهٔ $AO \perp l$ را درنظر می‌گیریم. به آسانی می‌توان دریافت که مکان هندسی مطلوب F نسبت به خط AO متقارن بوده و بنابراین کافی است که فقط نیمصفحه واقع درطرف راست AO را مورد ملاحظه قرار دهیم. بدیهی است که نقطهٔ K (K به AO تعلق دارد) با شرط $AK = 2KO$ به مکان هندسی F متعلق خواهد بود. از نقطهٔ K خط m را به موازات خط l رسم می‌کنیم. M را مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و بالای خط m و AD را ارتفاع

مثلث ABC درنظر می‌گیریم. به دلیل این که AOB و ADB زاویه‌های قائمه هستند از این رو نقطه‌های O و D روی دایره‌ای با قطر AB واقع شده و بدین ترتیب $A\hat{O}D = A\hat{B}D = ۶۰^\circ$ خواهد بود. مثلثهای AOD و AKM متشابه بوده و از این رو $A\hat{K}M = ۶۰^\circ$ است. اگر نقطهٔ M زیر خط m واقع باشد، آن‌گاه به طریق مشابه $A\hat{K}M = ۱۲۰^\circ$ خواهد بود. عکس این امر نیز درست است: هر نقطه‌ای مانند M با شرط این که AKM یا مساوی ۶۰° و یا مساوی ۱۲۰° است به مکان هندسی F تعلق دارد. سرانجام مکان هندسی F دو خط مستقیم گذرنده بر نقطهٔ K را نشان می‌دهد که با خط AO زاویه‌های ۶۰° و ۱۲۰° و با خط l زاویه‌های ۳۰° و ۱۵۰° می‌سازند.

۲۷۷. A را نقطهٔ مفروض، l را خط مفروض، A' را متقارن A حول خط l و m را خط گذرنده بر نقطهٔ A' به موازات l درنظر بگیرید. به آسانی دریافت می‌شود که مکان هندسی F نسبت به خط AA' متقارن بوده و از این رو فقط نیمصفحهٔ واقع در طرف راست AA' را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم که C نقطه‌ای از مکان هندسی F بوده و در بالای خط m واقع باشد. همچنین تصور می‌کنیم که B رأس دوم مثلث ABC است. آن‌گاه دایره‌ای با شعاع AB و مرکز B از نقطه‌های A، A' و C می‌گذرد؛ از این رو نتیجه می‌شود که $A\hat{A'}C = ۳۰^\circ$ است. و اگر نقطهٔ C زیر خط m واقع باشد آن‌گاه $A\hat{A'}C = ۱۵۰^\circ$ خواهد بود. همچنین بدیهی است که فقط یک نقطهٔ A' وجود دارد که به مکان F روی خط m متعلق است. بدین ترتیب نقطه‌های مکان هندسی F که در نیمصفحهٔ راست AA' قرار دارند روی دو نیمخط ناشی از نقطهٔ A' واقع بوده و با AA' زاویه‌های ۳۰° و ۱۵۰° می‌سازند. ثابت کنید که این زوج نیمخطها واقع در نصفه طرف راست مجموعهٔ نقطه‌های F است. سرانجام مکان هندسی F دو خط مستقیم را ارائه می‌دهد که از نقطهٔ A' با زاویه‌های ۳۰° و ۱۵۰° با خط AA' و با زاویه‌های ۶۰° و ۱۲۰° با خط مفروض l عبور می‌کنند.

۴.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲۷۸. الف. چون مجموع سه تقارن نسبت به سه خط l_1، l_2 و l_3 همرس در یک نقطهٔ O، یک تقارن نسبت به یک خط l است (که این خط نیز از نقطهٔ O می‌گذرد)، از این‌جا نتیجه می‌شود که نقطهٔ A_3 از A بر اثر تقارن نسبت به l به‌دست می‌آید. اما A_6 از A_3

با تقارن نسبت به l به‌دست می‌آید، و بنابراین A_6 بر A منطبق می‌شود.

این نتیجه برای هر تعداد فردی خط همرس، معتبر است. اگر تعداد زوجی خط که بر یک نقطهٔ O می‌گذرند داشته باشیم، آن‌گاه مجموع n تقارن نسبت به این خطها، دورانی است حول نقطهٔ O به زاویهٔ α. و بنابراین نقطهٔ A_{2n} پس از $2n$ دوران تنها، در حالتی که α مضربی از $180°$ باشد، بر نقطهٔ اوّلیهٔ A منطبق خواهد شد.

نکته. نقطهٔ A_6 که با شش تقارن پیاپی نقطهٔ دلخواه A نسبت به خطهای l_1 و l_2 و l_3، l_1، l_2، l_3 به‌دست می‌آید بر نقطهٔ اوّلیهٔ A منطبق خواهد شد، اگر و تنها اگر l_1، l_2 و l_3 همرس یا همگی موازی باشند [اگر $l_3 \| l_2 \| l_1$، مجموع تقارنها نسبت به l_1، l_2 و l_3 تقارنی است نسبت به یک خط l، در همهٔ حالتهای دیگر مجموع سه تقارن نسبت به l_1، l_2 و l_3 یک لغزه است، و بنابراین نقطهٔ A_6 از A با دو لغزهٔ پیاپی در طول محور l، یعنی با انتقالی در راستای l، به‌دست می‌آید؛ پس A_6 نمی‌تواند بر A منطبق شود. [مجموع دو لغزهٔ (مانند هم) در طول یک محور l می‌تواند به‌صورت مجموع چهار تبدیل زیر نوشته شود: انتقال در طول l، تقارن نسبت به l، تقارن نسبت به l، و انتقال در طول l یعنی، مجموع دو انتقال (مانند هم) در طول l.]

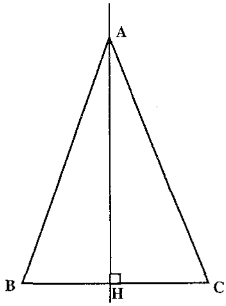
ب. این مسأله اساساً همان مسألهٔ قسمت (الف) است.

ج. مجموع دو تقارن نسبت به l_1 و l_2 دورانی است حول O، نقطهٔ تقاطع آنها، به زاویهٔ α؛ مجموع دو تقارن نسبت به l_3 و l_4 دورانی است حول O به زاویهٔ β. از این‌جا نتیجه می‌شود (که این تقارنها به هر ترتیبی انجام شوند) نقطهٔ A_4 از A، با دورانی حول O به زاویهٔ $\alpha+\beta$ به‌دست می‌آید، که این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳.۴. تقارن محوری در مثلث

۴.۳.۱. محور تقارن

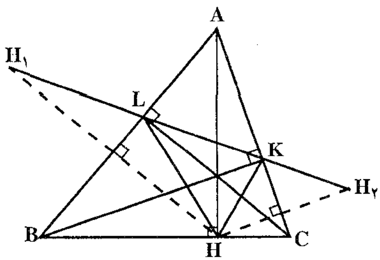
۲۷۹. ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = AC)$ را رسم می‌کنیم. چون AH عمودمنصف پاره‌خط BC است ($HC = HB$ و $AH \perp BC$). پس دو نقطهٔ B و



C قرینهٔ یکدیگر نسبت به ارتفاع AH می‌باشند. بنابراین خط AH محور تقارن مثلث ABC است.

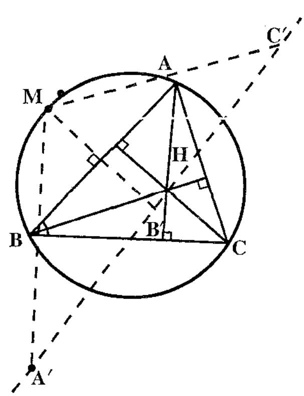
۴ . ۳ . ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۴ . ۳ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند

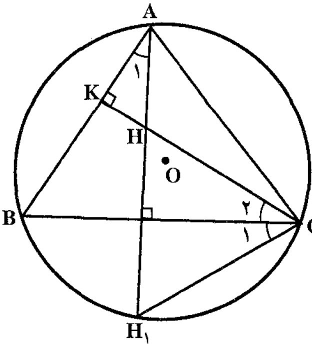


۲۸۰. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. ارتفاعهای AH، BK و CL را رسم می‌کنیم و مثلث پادک HKL را مشخص می‌سازیم. قرینه‌های نقطهٔ H نسبت به دو ضلع AB و AC را H_1 و H_2 می‌نامیم. باید ثابت کنیم این دو نقطه روی خط KL قرار دارند.

۲۸۱. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را درنظر می‌گیریم. قرینه‌های نقطهٔ M واقع بر این دایره نسبت به ضلعهای BC، AB و AC را بترتیب A' ، B' و C' و نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث را H می‌نامیم. باید ثابت کنیم چهار نقطهٔ H ، A' ، B' و C' همخطند.

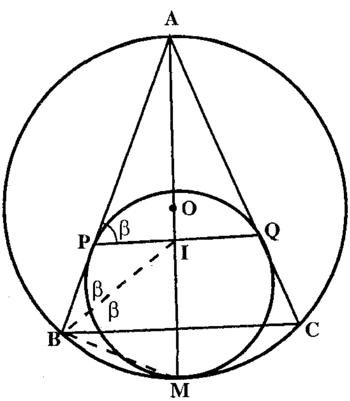


۴ . ۳ . ۲ . ۲ . نقطه‌ها همدایره‌اند



۲۸۲. ارتفاع AH از مثلث ABC را ادامه می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در نقطهٔ H_1 قطع کند. از H_1 به C وصل می‌کنیم. با توجه به شکل $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \frac{\overset{\frown}{BH_1}}{2}$ و $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$ (ضلعهایشان برهم عمودند). بنابراین $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و چون CB عمود بر HH_1 است. پس CB عمودمنصف HH_1 است. در نتیجه H_1 قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به ضلع BCاست. برای قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به ضلعهای دیگر نیز مطلب به همین روش ثابت می‌شود.

۴ . ۳ . ۲ . ۳ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۸۳. از آن‌جا که : AB = AC است، شکل، نسبت به قطر AM، که در آن M نقطهٔ تماس دو دایره می‌باشد، متقارن است. AM زاویهٔ A، زاویهٔ PMQ و پاره‌خط PQ را، که موازی BC است و وسطش را به I نمایش می‌دهیم، نصف می‌کند. با قرار

$$P\hat{M}Q = A\hat{P}Q = 2\beta$$

است، زیرا اندازهٔ هر دو نصف کمان PQ است.

به این ترتیب داریم :

$$P\hat{M}I = \frac{1}{2}P\hat{M}Q = \beta$$

از آن‌جا که $A\hat{B}M$ و $M\hat{I}P$ زاویه‌هایی قائمه‌اند، BMIP می‌تواند در دایره‌ای که در آن زاویه‌های PBI و PMI روبه‌روی یک کمان قرارمی‌گیرند، محاط شود. درنتیجه نیمسازهای زاویه‌های A و B از ΔABC در I متقاطع می‌شوند، و بنابراین I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC است.

۲۸۴. اگر O_a قرینهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC باشد، قطعه‌های OO_a و AH (شکل) مساوی و موازی‌اند. در نتیجه OA و HO_a موازی و مساوی‌اند، شعاع $OA = R$ عمود بر ضلع $d = EF$ از مثلث ارتفاعیهٔ DEF است. همین‌طور HO_a عمود بر d است؛ لذا HO_a ، d را در نقطهٔ L قطع می‌کند و قطعهٔ $HL = m$ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث DEF است.

اکنون اگر d' قرینهٔ d نسبت به ضلع BC باشد، فاصلهٔ O از d' برابر فاصلهٔ O_aL از d است؛ زیرا O و O_a نیز قرینه یکدیگر نسبت به BC می‌باشند.

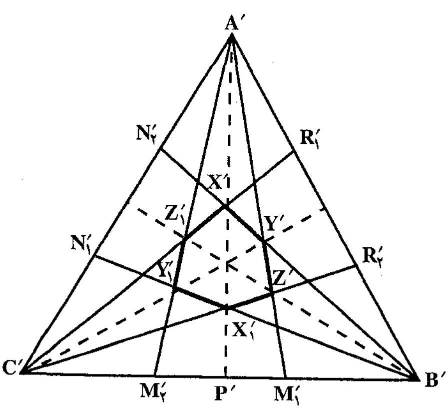
از این گذشته فاصلهٔ $O_aL = R + m$ به انتخاب ضلع d از مثلث DEF ارتباط ندارد؛ در نتیجه O به یک فاصله از سه ضلع d' ، e' و f' ازمثلث $d'e'f'$ که توسط d' و نظایر آن e' و f' ساخته می‌شود، است.

نتیجهٔ ۱. شعاع دایرهٔ محاطی مثلث $d'e'f'$ برابر است با مجموع شعاعهای دایرهٔ محیطی مثلث و دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ارتفاعیهٔ آن.

نتیجهٔ ۲. مثلث ABC مثلثی حادةالزاویه از گروه مثلثهای HABC که درمثلث ارتفاعیهٔ DEF مشترکند بود، دو خاصیت قبل ممکن است برای مثلثهای دیگر این گروه به‌کار رود.

۴ . ۳ . ۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۴ . ۳ . ۳ . ۱ .خطها همرسند



۲۸۵. کافی است که حکم خود را برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ ثابت کنیم. چون $A'N'_2 = \frac{1}{3}A'C'$ و $A'R'_1 = \frac{1}{3}(A'B')$ (شکل)، پس خطهای $C'R'_1$ و $B'N'_2$ نسبت به محور تقارن $A'P'$ از $\Delta A'B'C'$ قرینه هستند، و بنابراین X' ، نقطهٔ

تقاطع این خطها، بر $A'P'$ قرار دارد. و نیز از تساویهای $B'R'_2 = (\frac{1}{3})B'A'$ و $C'N'_1 = (\frac{1}{3})C'A'$ نتیجه می‌گیریم که X'_1، نقطهٔ برخورد خطهای $B'N'_1$ و $C'R'_2$ هم بر آن محور قرار دارد. لذا قطر $X'X'_1$ از شش‌ضلعی ما بر محور تقارن $A'P'$ از مثلث $A'B'C'$ منطبق است. به همین طریق ثابت می‌کنیم که قطرهای $Y'Y'_1$ و $Z'Z'_1$ از شش‌ضلعی ما بر دو محور تقارن دیگر مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ منطبقند. اما در آن صورت سه قطر موردنظر بایستی در یک نقطه، مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع، متلاقی باشند. ازآن‌جا نتیجه می‌شود که قطرهای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 شش‌ضلعی در یک نقطه متلاقی‌اند.

توجه: راه‌حل ما نشان می‌دهد که خطهای XX_1 و YY_1 و ZZ_1 میانه‌های مثلث ABC هستند و نقطهٔ تقاطع آنها نقطهٔ تقاطع میانه‌هاست.

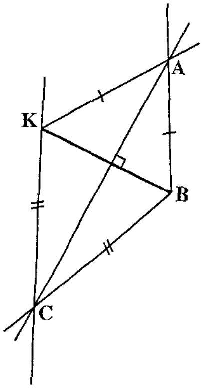
۲۸۶. نقطهٔ H را به M و Q وصل کنید. از این که نقطه‌های A'، B' و C' روی دایرهٔ محیطی مثلث هستند استفاده کنید و ثابت کنید که $\hat{H}_2 = \hat{H}_1$ است.

۴ . ۳ . ۳ . ۲ . خطها برهم عمودند

۲۸۸. پاره‌خطهای AD و AE را می‌توان به دو طریق جدا کرد. در یک حالت شرط مسأله برقرار نمی‌شود. در حالت دیگر دایره‌ای وجود دارد که از نقطه‌های B، C، D و E می‌گذرد (مرکز این دایره روی محور تقارن 1 پروانه $DEABC$ قرار دارد).

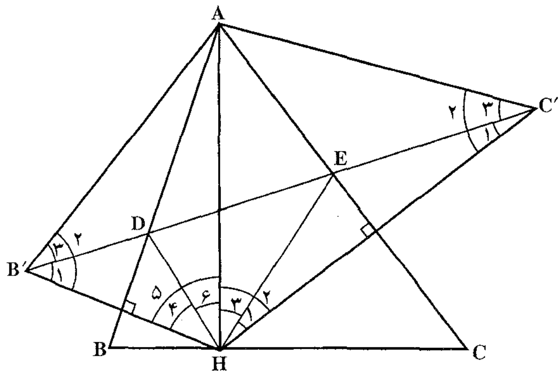
۴ . ۳ . ۳ . ۳ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۲۸۹. قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط AC را به‌دست می‌آوریم و K می‌نامیم. از K به A و C وصل می‌کنیم. خطهای AK و CK بترتیب قرینه‌های AB و BC نسبت به خط AC می‌باشند. چون $AK = AB$ و $CK = CB$ است. AC عمودمنصف پاره‌خط BK است. بنابراین خط AC از مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BCK یا ABK می‌گذرد!



۴. ۳. ۳. ۴. خط نیمساز است

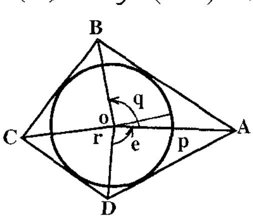
۲۹۰. نقطهٔ E روی عمود منصف HC' است. پس $EH = EC'$ ؛ یعنی $\hat{H}_1 = \hat{C}'_1$ (۱). نقطهٔ A روی عمودمنصف HC' است، پس $AH = AC'$ ؛ یعنی $\hat{H}_2 = \hat{C}'_2$ (۲). بنابراین تفاضل زاویه‌های رابطه‌های (۱) و (۲) با هم برابرند ؛ یعنی $\hat{H}_3 = \hat{C}'_3$. به همین ترتیب نقطهٔ D و A روی عمودمنصف $B'H$ هستند و $\hat{B}'_1 = \hat{H}_4$ و $\hat{B}'_2 = \hat{H}_5$. تفاضل آنها باهم برابرند یعنی $\hat{B}'_3 = \hat{H}_6$. از طرفی $AB' = AH$ و $AC' = AH$ است.
بنابراین $AB' = AC'$ و در نتیجه $\hat{B}'_3 = \hat{C}'_3$ پس نتیجه می‌شود $\hat{H}_3 = \hat{H}_6$ ؛ یعنی AH نیمساز زاویهٔ $D\hat{H}E$ است.



۴. ۳. ۴. زاویه

۴. ۳. ۴. ۱. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۹۱. ترکیب $\delta = S_l o S_r o S_q o S_p$ را مورد ملاحظه قرار دهید که در آن p، q، r و l خطهای محتوی نیمسازهای زاویه‌های چهارضلعی است. به دلیل $\delta(AD) = AD$ و $\delta(O) = O$ یک انتقال همانند محسوب می‌شود. $S_q o S_p = S_r o S_l$ بوده و از این رو $(\hat{p,q}) = (\hat{l,r})$ را داریم. در نتیجه $C\hat{O}D + A\hat{O}B = 180°$ (شکل) خواهد بود.

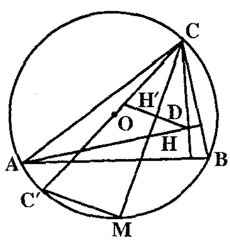


۴ . ۳ . ۵ . پاره‌خط

۴ . ۳ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

۲۹۲. اگر پای ارتفاع رأس A را H بنامیم $OH = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳} \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ است. از آن‌جا $OO' = ۲OH = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ است. اما مثلث BOO' متساوی‌الاضلاع است. زیرا $B\hat{O}O' = B\hat{O'}O = ۶۰°$ است ؛ بنابراین $BO' = OO' = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ است.

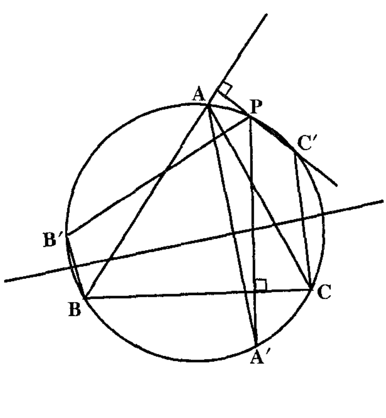
۴ . ۳ . ۶ . رابطه‌های متری



۲۹۳. فرض کنید که خط DH خط CO را در نقطهٔ H' قطع کرده و C' انتهای قطری باشد که سردیگر آن C است (شکل). نیمخطهای CH و CO نسبت به CM متقارن هستند. رابطه‌های زیر را داریم :

$$CD:CM = CH':CC' = CH:CC' = ۲R\cos C:۲R = \cos C$$

۴ . ۳ . ۷ . ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند



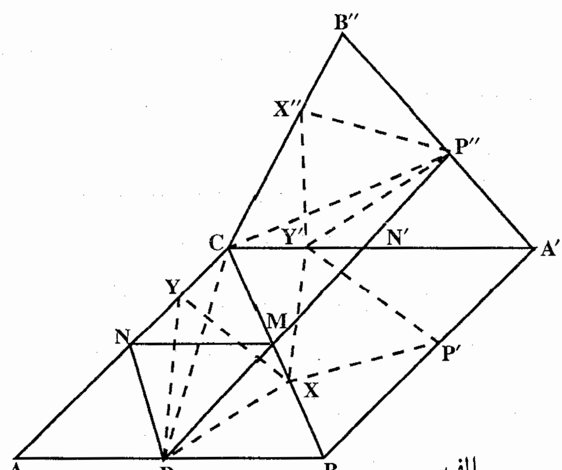
۲۹۴. با توجه به ویژگی قضیهٔ سیمسون، عمودمنصف پاره‌خط BB' را رسم کنید و ثابت کنید که این خط عمودمنصف CC' و AA' نیز هست.

۲۹۵. الف. DF ب. MQ پ. NQ ت. EF ث. BC

۴ . ۳ . ۸. رسم شکلها

۲۹۶. الف. راه حل اول. فرض کنید PXY مثلث دلخواهی محاط در ΔABC باشد چنان‌که P یکی از رأسهای آن باشد. قرینهٔ مثلث ABC را همراه با ΔPXY نسبت به خط BC می‌یابیم؛ قرینهٔ مثلث $A'BC$ را که به این طریق حاصل می‌شود همراه با $P'XY'$ که در آن محاط است نسبت به خط CA' پیدا می‌کنیم (شکل الف). چون با علایم شکل (الف) داریم $XY = XY'$ و $YP = YP''$، محیط ΔPXY برابر است با طول خط شکستهٔ $PXY'P''$.

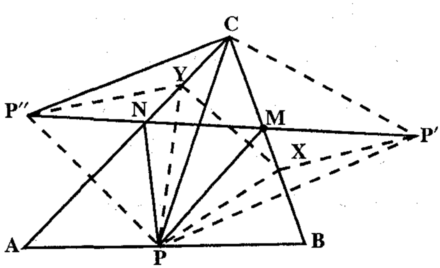
اکنون دو حالت امکان‌پذیر است. اگر پاره‌خط PP'' خط BC را بین نقطه‌های B و C (و بنابراین خط CA' را بین نقطه‌های C و A') قطع کند، در این صورت از هر خط شکستهٔ $PXY'P''$ دیگری کوتاهتر خواهد بود و مثلث مطلوب به‌دست آمده است. (مثلث PMN در شکل (الف)، که در آن M نقطهٔ برخورد PP'' با BC، و N قرینهٔ نقطهٔ N' نسبت به خط BC و N' نقطهٔ برخورد PP'' با CA' است.) اگر پاره‌خط PP'' خط BC را در خارج پاره‌خط BC قطع کند، آن‌گاه کوتاهترین خط شکستهٔ $PXY'P''$ خط شکسته‌ای است که به ازای آن X و Y' بر C منطبق باشند. در این صورت مثلث مطلوب به پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود، بدل می‌شود.



الف

اکنون مانده است مشخص کنیم که هریک از این حالتها چه موقع پیش می‌آید. برای این کار توجه می‌کنیم که $\Delta A'B''C$ از ΔABC براثر دورانی حول C به اندازهٔ زاویه‌ای دوبرابر زاویهٔ C به‌دست می‌آید (زیرا $A'B''C$ از ABC براثر دو قرینه‌یابی متوالی نسبت به خطهای BC و CA' که باهم زاویهٔ C می‌سازند به‌دست می‌آید؛ بنابراین $P\hat{C}P''=2\hat{C}$. از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر $\hat{C}<90^\circ$، آن‌گاه خط PP'' ضلع BCی مثلث را قطع می‌کند، ولی اگر $\hat{C}\geq 90^\circ$، PP'' خط BC را در C یا در نقطه‌ای واقع بر امتداد BC از طرف Cقطع می‌کند.

راه حل دوم. بار دیگر PXY را مثلث دلخواهی محاط در ΔABC می‌گیریم؛ قرینه‌های P نسبت به BC و CA را P' و P'' می‌نامیم (شکل ب). چون $PX=P'X$ و $PY=P''Y$، محیط ΔPXY برابر است با طول خط شکستهٔ $P'XYP''$. پس اگر $P'P''$ دو ضلع AC و BC از ΔABC را در نقطه‌های M و N قطع کند، ΔPMN مثلث مطلوب است. اگر $P'P''$ پاره‌خطهای AC و BC را قطع نکند، مثلث مطلوب به پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود بدل می‌شود. به طریقی مشابه آنچه در راه حل اوّل آمد، می‌توان نشان داد که حالت اوّل وقتی پیش می‌آید که زاویهٔ C از مثلث کمتر از 90° باشد و حالت دوم وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $\hat{C}\geq 90^\circ$.



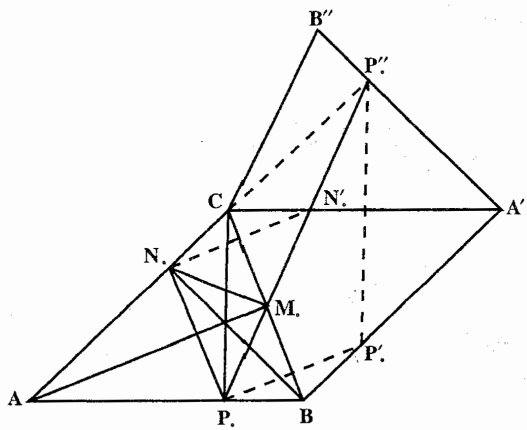
توجه دارید که راه‌حل دوم اساساً تفاوت زیادی با راه‌حل اوّل ندارد (شکلهای الف و ب مقایسه شوند).

ب. **راه حل اوّل.** فرض می کنیم که زاویهٔ رأس C درمثلث مفروض حاده است. P را نقطهٔ دلخواهی بر ضلع AB می‌گیریم؛ با استفاده از راه حل اوّل قسمت (الف) مثلث PMN را با کمترین محیط ممکن، برابر با طول پاره‌خط PP'' در مثلث ABC محاط می‌کنیم (شکل الف). اکنون کافی است نقطهٔ P را چنان انتخاب کنیم که پاره‌خط PP'' کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که $P\hat{C}P''=2\hat{C}$، یعنی این زاویه به انتخاب نقطهٔ P بستگی ندارد؛ بنابراین قاعدهٔ PP'' در مثلث متساوی‌الساقین PCP'' با زاویهٔ رأس معلوم $2\hat{C}$ وقتی کمترین اندازه را دارد که ضلع CP کمترین مقدارممکن را داشته باشد. در این جا باید دوحالت جداگانه را درنظر گرفت.

حالت اوّل. زاویه‌های رأسهای A و B از مثلث ABC هر دو حاده‌اند (مثلث حاده‌الزوایاست). در این حالت وقتی پاره‌خط CP کوتاهترین طول ممکن را داراست که نقطهٔ P همان $P_\circ$ یعنی پای ارتفاع $CP_\circ$ در مثلث ABC باشد (شکل پ). بسادگی می‌توان نشان داد که رأسهای $M_\circ$ و $N_\circ$ از مثلث $P_\circ M_\circ N_\circ$ حاصل از این انتخاب $P_\circ$ نیز پاهای ارتفاعهای مثلث ABC هستند. در واقع از شکل (پ) نتیجه می‌شود که :

$$N_\circ \hat{P}_\circ A = C\hat{P}_\circ A - C\hat{P}_\circ N_\circ$$

$$= ۹۰^\circ - CP''_\circ N'_\circ = ۹۰^\circ - \frac{۱۸۰^\circ - ۲\hat{C}}{۲}$$



پ

یعنی می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی $BCN_\circ P_\circ$ محیط کرد که

$$B\hat{N}_\circ C = C\hat{P}_\circ B = ۹۰^\circ$$

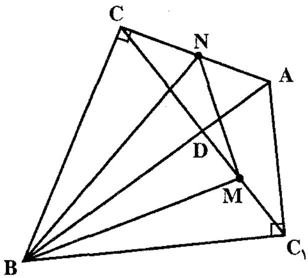
به همین روش می‌توان نشان داد که $AM_\circ \perp BC$.

حالت دوم. اگر مثلاً، A زاویهٔ قائمه یا منفرجه باشد، آن گاه پاره‌خط CP وقتی حداقل است که P بر رأس A منطبق باشد. در این حالت مثلث مطلوب به ارتفاع $AM_\circ$ که دوبار پیموده شود تبدیل می‌شود.

راه حل دوم. درحل قسمت (ب) می‌توان از راه حل دوم قسمت (الف) نیز آغاز کرد. چون محیط ΔMNP (شکل پ) برابر با $P'P''$ است و $CP' = CP'' = CP$ و $P'\hat{C}P'' = ۲\hat{C}$ ، مسأله تبدیل می‌شود به یافتن نقطهٔ P چنان که CP کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بقیهٔ این راه‌حل مثل راه‌حل اول است.

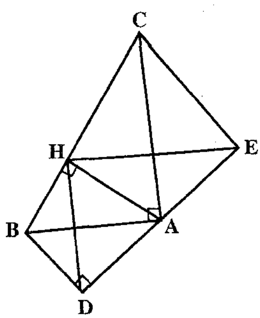
۲۹۷. بنا به ویژگیهای مثلث ارتفاعی، نقطهٔ P را باید در پای ارتفاع وارد از رأس C برگزید.

۴ . ۳ . ۹ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۹۸. برای متشابه بودن این دو مثلث یعنی AMN و ABC، لازم است که چهارضلعی AMNC محاطی باشد. بنابراین یکی از شرطهای محاطی بودن چهارضلعی را بررسی کنید.

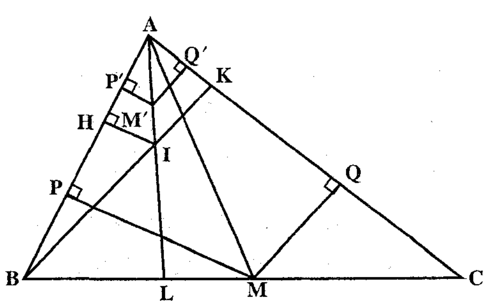
۴ . ۳ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی



۳۰۱. داریم :

$$A\hat{E}C = A\hat{H}C = ۹۰^\circ \text{ و } B\hat{D}A = B\hat{H}A = ۹۰^\circ$$

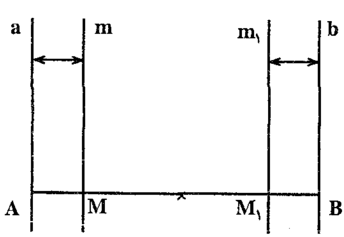
در نتیجه ذوزنقه قائم‌الزاویه است.



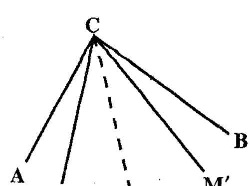
۳۰۲. ۱. فرض کنیم AM یک میانه مثلث و AI قرینهٔ آن نسبت به نیمساز زاویهٔ A باشد از نقطه اختیاری M′ واقع بر این خط دو عمود M′P′ و M′Q′ را بر ضلعهای مثلث فرود می‌آوریم. می‌خواهیم ثابت کنیم $\frac{M'P'}{M'Q'} = \frac{AB}{AC}$. برای اثبات از M عمودهای MP و MQ را بر ضلعها فرود آورده

ملاحظه می‌کنیم که $M'\hat{A}Q' = M\hat{A}P$ و $P'\hat{A}M' = M\hat{A}Q$ (زیرا هر دو زاویه نسبت به نیمساز A قرینه‌اند) پس $\Delta AQM \cong \Delta AP'M'$ و $\frac{M'P'}{MQ} = \frac{AM'}{AM}$ و $\Delta AMP \cong \Delta AM'Q'$ در نتیجه $\frac{M'Q'}{MP} = \frac{AM'}{AM}$ پس $\frac{M'Q'}{MP} = \frac{M'P}{MQ}$ یا $\frac{M'P'}{M'Q'} = \frac{MQ}{MP}$ از طرف دیگر دو مثلث AMB و AMC معادلند. لذا $AB \cdot MP = AC \cdot MQ$ پس $\frac{MQ}{MP} = \frac{M'P'}{M'Q'}$ لذا $\frac{M'P'}{M'Q'} = \frac{AB}{AC}$.

۳۰۳. الف. چون سه خط CM، AN و BP در یک نقطه همرسند، نتیجه می‌شود که مجموع تقارنها نسبت به خطهای CM، AN، BP، CM، AN و BP یک تبدیل همانی است. برای این که نشان دهیم خطهای CM'، AN' و BP' همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، کافی است نشان دهیم که مجموع تقارنها نسبت به خطهای CM'، AN'، BP'، CM'، AN' و BP' نیز یک تبدیل همانی است. اما تقارن نسبت به خط CM' با مجموع سه تقارن نسبت به خطهای CB، CM و CA که همه در نقطهٔ C متقاطعند، یکی است. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که دوران به زاویهٔ BCM' حول نقطهٔ C خط CM را به CA، و خط CB را به CM'، که قرینهٔ CM نسبت به نیمساز زاویهٔ BCA است، بدل می‌کند (شکل الف). به طریق مشابه، تقارن نسبت به AN' با مجموع سه تقارن نسبت به خطهای AC، AN و AB، و تقارن نسبت به BP' با مجموع سه تقارن نسبت به خطهای BA، BP و BC یکی است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مجموع سه تقارن نسبت به CM'، AN' و BP' با مجموع نه تقارن نسبت به خطهای زیر یکی است: CB، CM، CA، AC(=CA)، AN، AB، BA(=AB)، BP و BC. چون دو تقارن متوالی نسبت به یک خط یکدیگر را خنثی می‌کنند، پس این نه تقارن با مجموع پنج تقارن نسبت به خطهای CB، CM، AN، BP



ب



الف

و BC یکی می‌شود. حال این تبدیل را دوبار انجام می‌دهیم، مجموع تقارنها نسبت به ده خط : CB، CM ، AN، BP، BC، CB(= BC) ، CM ، AN، BP و BC، را به‌دست می‌آوریم که با مجموع تقارنها نسبت به هشت خط CB، CM ، AN، BP، CM ، AN، BP و BC یکی است. اما اگر مجموع تقارنها نسبت به شش خط «داخلی» تبدیل همانی باشد، مجموع هشت تقارن نسبت به هشت خط به مجموع دو تقارن نسبت به CB و BC(= CB) ، یعنی به تبدیل همانی منجر می‌شود.

ب. خطهای عمود بر ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABC، بترتیب در نقطه‌های M و M_1 ، N و N_1 ، P و P_1 را با m و m_1 ، n و n_1 ، p و p_1 نشان می‌دهیم. گیریم a و b خطهای عمود بر ضلع AB در نقطه‌های A و B باشند. باید نشان دهیم که اگر مجموع تقارنها نسبت به خطهای m، n، p، m، n، p یک تبدیل همانی باشد، مجموع تقارنها نسبت به خطهای m_1 ، n_1 ، p_1 ، m_1 ، n_1 ، p_1 نیز یک تبدیل همانی است؛ واضح است که عمودهای مرسوم بر دو ضلع مختلف مثلث نمی‌توانند با یکدیگر موازی باشند. اما تقارن نسبت به m_1 با مجموع تقارنها نسبت به نقطهٔ A، نسبت به خط m، و نسبت به نقطهٔ B یکی است. به طریق مشابه، تقارن نسبت به n_1 برابر با مجموع تقارنها نسبت به B، n و C است؛ و تقارن نسبت به p_1 برابر مجموع تقارنها نسبت به C، P و A است. برای اثبات اوّلین حکم، ملاحظه می‌کنیم که تقارن نسبت به A برابر مجموع دو تقارن نسبت به AB و a است، و تقارن نسبت به B برابر مجموع دو تقارن نسبت به b و AB است؛ پس مجموع تقارنها نسبت به A، m و B مساوی است با مجموع تقارنها نسبت به پنج خط AB ، a، m، b و AB . اما مجموع سه تقارن «داخلی» مساوی یک تقارن تنها نسبت به m_1 است. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که انتقال دو خط a و m که خط m را به b بدل می‌کند، a را به m_1 بدل خواهد کرد (چون m_1 قرینهٔ m نسبت به وسط پاره‌خط AB است؛ شکل (ب). پس مجموع پنج تقارن هم‌ارز است با مجموع سه تقارن نسبت به خطهای AB ، m_1 و AB ، یا هم‌ارز است با مجموع دو تقارن نسبت به M_1 و AB . تقارن نسبت به M_1 نیز مساوی مجموع تقارنها نسبت به m_1 و AB به همان ترتیب است. پس مجموع تقارنها نسبت به M_1 و AB مساوی است با مجموع تقارنها نسبت به m_1 ، AB و AB ، که با یک تقارن نسبت به m_1 برابر است.

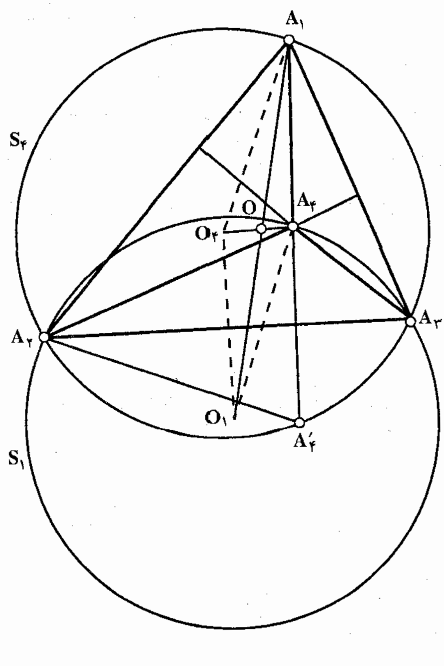
حال واضح است که مجموع تقارنها نسبت به شش خط m_1 ، n_1 ، p_1 ، m_1 ، n_1 ، p_1 ، مساوی مجموع تقارنها نسبت به نقطه‌ها و خطهای : A، m، B ؛ B، n، C؛ C، p، A ؛

A، m، B؛ B، n، C؛ C، p، A، یا مجموع تقارنها نسبت به A، m، n، p، m، n، p، A است. پس، اگر مجموع شش تقارن «داخلی» تبدیل همانی باشد، مجموع تمامی تقارنها (که در این حالت به دو تقارن نسبت به نقطهٔ A بدل می‌شود) نیز یک تبدیل همانی است [با راه حل قسمت (الف) مقایسه کنید].

۳۰۴. الف. واضح است که مثلاً، ارتفاعهای مثلث $A_2A_3A_4$ خطهای $A_1A_2 \perp A_3A_4$ و $A_1A_3 \perp A_2A_4$ و $A_1A_4 \perp A_2A_3$ هستند که A_1 نقطهٔ برخورد آنهاست.

ب. گیریم A'_4 قرینهٔ A_4 نسبت به خط A_2A_3 باشد (شکل). این نقطه بر S_4 دایرهٔ محیطی مثلث $A_1A_2A_3$، واقع است پس دایرهٔ محیطی مثلث $A_2A'_4A_3$ بر S_4 منطبق است، از این‌جا نتیجه می‌شود که S_1 دایرهٔ محیطی مثلث $A_2A_3A_4$، با S_4 قابل انطباق است (S_1 و S_4 قرینه‌های یکدیگر نسبت به خط A_2A_3 هستند). به طریق مشابه می‌توان نشان داد که دایره‌های S_2 و S_3 نیز با S_4 قابل انطباقند.

ج. حداقل یکی از مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$ و $A_2A_3A_4$ باید دارای زاویه‌های حاده باشد؛ زیرا، اگر مثلث $A_2A_3A_4$ یک زاویهٔ منفرجه در A_4 داشته باشد آن‌گاه مثلث $A_2A_3A_1$ (که A_1 نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_2A_3A_4$ است) دارای زاویه‌های حاده خواهد شد. پس فرض می‌کنیم که مثلث $A_1A_2A_3$ دارای زاویه‌های حاده است و نقطهٔ A_4 در داخل آن قرار دارد.



چهارضلعی $A_1A_4O_1O_4$ را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های O_1 و O_4 مرکزهای دایره‌های S_1 و S_4 قرینه‌های یکدیگر نسبت به خط A_2A_3 هستند(شکل). در نتیجه O_1 و O_4 قرینه‌های یکدیگر نسبت به A_2A_3 هستند، و بنابراین $O_1O_4 \perp A_2A_3$. پس در چهارضلعی $A_1A_4O_1O_4$ داریم :

$$O_4O_1 \| A_1A_4 \text{ و } O_1A_4 = O_4A_1 = R$$

(R شعاعهای دایره‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 است). لذا این چهارضلعی یا متوازی‌الاضلاع است یا ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین. اما ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین نمی‌تواند باشد زیرا A_2A_3 ، عمودمنصف ضلع O_4O_1 ، ضلع A_1A_4 را قطع نمی‌کند. از این رو $A_1A_4O_1O_4$ متوازی‌الاضلاع است و قطرهای آن، A_1O_1 و A_4O_4 ، یکدیگر را در نقطهٔ O، که وسط هریک از آنهاست قطع می‌کنند. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که نقطهٔ O وسط A_2O_2 و A_3O_3 است.

۴ . ۴. تقارن محوری در چندضلعیها

۴ . ۴ . ۱ . محور تقارن

۳۰۷. هر n ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره است و عمودمنصف هر ضلع از nضلعی منتظم از مرکز دایره می‌گذرد. یعنی قطر دایره است. بسادگی ثابت می‌شود که هریک از عمودمنصفها محور تقارن هستند. اگر تعداد ضلعهای n ضلعی زوج باشد، محور تقارنها بر وسطهای دو ضلع روبه‌رو که موازی می‌گذرند و اگر تعداد ضلعهای nضلعی منتظم فرد باشد، هر محور تقارن از یک رأس و وسط ضلع روبه‌رو به آن رأس می‌گذرد.

۳۰۸. چهار محور تقارن.

۴ . ۴ . ۲ . نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۴.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

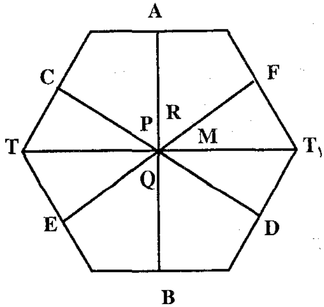
۳۰۹. قاعده‌های ذوزنقه، را با BC و AD و محور تقارن را با l نشان می‌دهیم. آن‌گاه $S_l(A) = D$ ، $S_l(B) = C$ و $S_l(AB) = DC$ خواهد بود. از این رو

$S_L(AB) = DC$ و $S_l(AC) = DB$ را داریم. ولی نقطهٔ برخورد خط مستقیم و تصویر آن نسبت به تقارن محوری به محور تقارن تعلق دارد. در نتیجه نقطه برخورد خطهای AB و DC به l و نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای BC و AC نیز به l تعلق خواهد داشت.

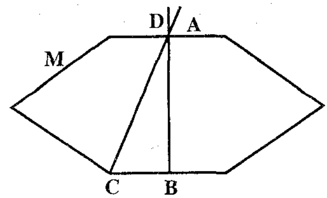
۴ . ۴ . ۳ . خطهای: همرس، موازی، ...

۴ . ۴ . ۳ . ۱ . خطها همرسند

۳۱۰. فرض می‌کنیم نقطهٔ A_1 قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط l باشد، و نقطهٔ A' از انتقال A_1 در امتداد همان خط و به فاصلهٔ a به‌دست آمده باشد (شکل الف). در این حالت می‌گوییم نقطهٔ A' از تقارن لغزه‌ای نقطهٔ A در امتداد محور l و به فاصلهٔ a به‌دست آمده است. به عبارت دیگر، لغزه (تقارن لغزه‌ای) مجموع یک تقارن نسبت به یک خط l و یک انتقال در امتداد همین خط است (همان‌طور که در شکل الف دیده می‌شود مجموع می‌تواند به ترتیب عکس حاصل شود، در آن‌جا A_2 از انتقال A به فاصلهٔ a در امتداد l به‌دست آمده است و سپس A' از قرینهٔ A_2 نسبت به l).
مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی که ازلغزهٔ نقطه‌های شکل F به‌دست می‌آیند، شکل جدید F' را می‌سازند که از لغزهٔ شکل F به‌دست می‌آید (شکل ب). به وارون، واضح است که شکل F از لغزهٔ F' با همان محور l (و با جهت عکس در انتقال) به‌دست می‌آید. با توجه به این مطلب می‌توان از شکلهای وابسته به‌هم توسط یک لغزه صحبت کرد.
قبل از هرچیز واضح است که در هر چندضلعی M، هر دو محور تقارن AB و CD باید درداخل M یکدیگر را قطع کنند؛ زیرا اگر چنین نباشد (شکل الف) نمی‌توانند شکل را به دو قسمت با مساحتهای مساوی تقسیم کنند. حال نشان می‌دهیم که اگر محور تقارن سومی مانند EF وجود داشته باشد، این محور نیز باید از محل برخورد اوّلی و دومی بگذرد. فرض کنید چنین نباشد؛ پس این سه محور تقارن AB، CD و EF یک مثلث PQR تشکیل می‌دهند (شکل ب). گیریم M نقطه‌ای در داخل این مثلث باشد. به آسانی دیده می‌شود که هر نقطهٔ صفحه در یک طرف حداقل یکی از این سه محور، در همان طرفی که نقطهٔ M قرار دارد، واقع شده است؛ گیریم T دورترین رأس چندضلعی از نقطهٔ M است (اگر بیش از یک رأس وجود داشته باشد، Tرا یکی از آنها می‌گیریم)، و T و M در یک طرف محور تقارن AB قرار دارند. پس اگر T_1 قرینهٔ Tنسبت به AB



ب



الف

(و در نتیجه T_1 رأس چندضلعی باشد)، آن‌گاه $MT_1 > MT$ (زیرا تصویر MT_1 بر روی TT_1 بزرگتر از تصویر MT بر روی TT_1 است ؛ شکل ب). با وجود این تناقض، قضیه ثابت می‌شود.

[به طریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر هر شکل کرانداری (نه لزوماً یک چندضلعی) چند محور تقارن داشته باشد همگی آنها باید از یک نقطهٔ مشترک بگذرند. برای شکلهای بیکران چنین نیست. مثلاً نوار مابین دو خط موازی l_1 و l_2 بینهایت محور تقارن عمود بر l_1 و l_2 دارد که همگی موازی یکدیگرند.]

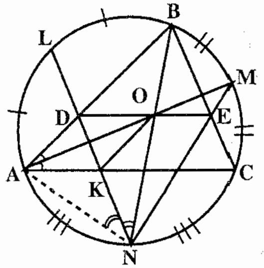
تذکر: حکم مسأله از دیدگاه مکانیک واضح است. مرکز گرانش یک جسم همگن چندضلعی ـ شکل، که محور تقارنی دارد، باید روی این محور قرار گیرد. در نتیجه اگر در شکلی چند محور تقارن وجود داشته باشد، همگی باید از مرکز گرانش بگذرند.

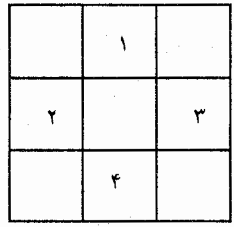
۴ . ۴ . ۳ . ۲ . خطها موازی‌اند

۳۱۱. تقارن نسبت به وسط یکی از قطرها را درنظر بگیرید.

۳۱۲. L، M و N را وسط ضلعهای AB، BC و CA، O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC، D و K را نقطه‌های برخورد پاره‌خط راست LN با ضلعهای ABو AC می‌گیریم (شکل). ثابت می‌کنیم، چهارضلعی ADOK، لوزی است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم، قطرهای AO و DK، محورهای تقارن این چهارضلعی هستند.

درواقع $AM \perp LN$ ، زیرا $\overset{\frown}{LB} + \overset{\frown}{BM} + \overset{\frown}{AN} = ۱۸۰^\circ$ ، بنابراین نقطه‌های D و K، نسبت به خط راست AM، قرینهٔ یکدیگرند (AM، نیمساز زاویهٔ BAC است) ؛ همچنین نقطه‌های A و O نسبت به خط راست LN، قرینهٔ یکدیگرند (LN، نیمساز زاویهٔ ANB است).





از این‌جا نتیجه می‌شود : $DO \| AC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد $EO \| AC$ که، در آن، E را نقطهٔ برخورد پاره‌خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب، نقطه‌های D، O و E، روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است.

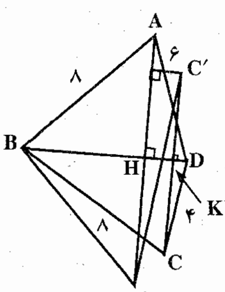
۴.۴.۴. زاویه

۴.۴.۴.۱.رابطهٔ بین زاویه‌ها

۳۱۳. اگر $OM = p$ ، $ON = q$ ، $OP = r$ و $OQ = l$ باشد، آن‌گاه به دلیل $\sigma(O) = O$ و $\sigma(A) = A$ ، $\sigma = S_l \circ S_r \circ S_q \circ S_p$ یک حرکت همانند خواهند بود. در نتیجه $S_q \circ S_p = S_r \circ S_l$ یا $(\widehat{p,q}) = (\widehat{l,r})$ خواهد بود.

۴.۴.۵. پاره‌خط

۴.۴.۵.۱.اندازهٔ پاره‌خط



۳۱۵. نقطه‌های برخورد AA' و CC' با قطر BD را بترتیب H و K می‌نامیم. اندازه‌های AH و BH با استفاده از مثلث ABD که در آن $BD = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲ - ۸ \times ۶} = \sqrt{۵۲}$ است، قابل محاسبه است. همچنین در مثلث BCD اندازهٔ $C'K = CK$ و DK قابل محاسبه است. حال اگر از C' عمود $C'E$ را بر AA' فرود آوریم، داریم :

$A'E = A'H + HE = A'H + C'K =$ مقدار معلوم

$HK = BD - (BH + DK) =$ مقدار معلوم

$\Rightarrow A'C' = \sqrt{A'E^{۲} + C'E^{۲}} =$ مقدار معلوم

۴ . ۴ . ۶. رابطه‌های متری

۳۱۶. چهارضلعی $BD'DB'$ مستطیل است. زیرا متوازی‌الاضلاعی است ($BB' \| DD'$ و $BB' = DD'$) که زاویه‌های قائمه دارد. مساحت این مستطیل برابر است با:

$S = BB' \cdot DB' = ۲BH \cdot DB' = ۲BH \cdot HK$

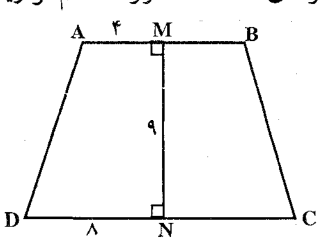
اما BH ارتفاع نظیر رأس B از مثلث ABC است که اندازهٔ آن با معلوم بودن $AB = a$، $BC = b$ و $A\hat{B}C = \pi - \alpha$ قابل محاسبه است. همچنین $AK = HC$ و از آن‌جا HK بر حسب داده‌های مسأله قابل محاسبه است. بنابراین مساحت مستطیل را بر حسب a، b و نسبتهای زاویهٔ α می‌توان به‌دست آورد.

۴ . ۴ . ۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۳۱۷. بلی. زیرا قرینهٔ محوری هر شکل با خود آن شکل همنهشت است. قرینهٔ محوری مستطیل نیز مستطیل است.

۴ . ۴ . ۸. رسم شکلها

۳۱۸. اگر M و N وسطهای دو قاعدهٔ AB و CD از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD باشد، MN محور تقارن این ذوزنقه است. بنابراین با مقدارهای داده شده ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ AMND را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن را نسبت به محور تقارن MN به‌دست می‌آوریم. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD رسم می‌شود.



نکته. برای رسم این ذوزنقه روشهای دیگری نیز وجود دارد.

۴ . ۴ . ۹ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۱۹. گزینهٔ (ج) درست است.
۳۲۰. گزینهٔ (ج) درست است.
۳۲۱. گزینهٔ (الف) درست است.

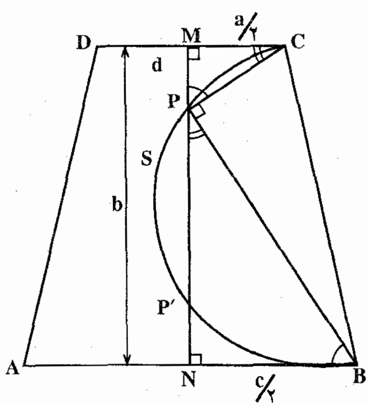
۴ . ۴ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی

۳۲۲. در شکل، فرض می‌کنیم MN محور تقارن ذوزنقهٔ ABCD، و P نقطه‌ای واقع بر MN به‌طوری که $B\hat{P}C$ قائمه شود باشد. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ CPM و PBN، از آن‌جا که ضلعهای روبه‌رویشان برهم عمودند، متشابه‌اند ؛ در نتیجه : $\frac{MP}{NB}=\frac{MC}{NP}$. با استفاده از : $MP=d$ ، $CD=a$ ، $AB=c$ و $MN=h$ ، می‌توانیم این رابطه را به صورت $d(h-d)=(\frac{a}{2})(\frac{c}{2})$ بنویسیم، بنابراین :

$$4d^2-4hd+ac=0$$

و

$$d=\frac{h}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{h^2-ac}$$

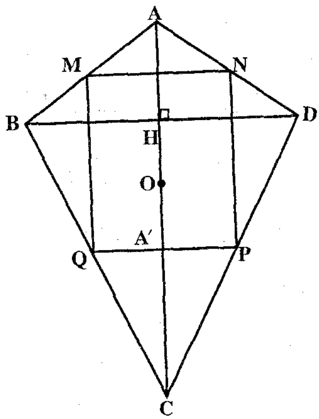


از آن‌جا که مجموع ریشه‌های این معادله برابر h است، یکی از این ریشه‌ها برابر PM، و دیگری برابر PN است.

۱) اگر $h^۲ - ac < ۰$ ، نقطهٔ Pیی وجود ندارد ؛
۲) اگر $h^۲ - ac = ۰$ ، یک نقطهٔ P، وسط ارتفاع MN، موجود است ؛
۳) اگر $h^۲ - ac > ۰$ ، دو نقطهٔ P و P' که شرایط داده شده را برقرار می‌کنند موجودند. در این صورت، واضح است که $NP' = PM$.

تبصره. تعبیر هندسی این سه حالت به طریق ذیل است. در حالت (۱)، دایرهٔ S به قطر BC، MN را قطع می‌کند، در حالت (۲)، S بر MN مماس است. در حالی که در حالت (۳)، S با MN در دو نقطهٔ P و P' تلاقی می‌کند.

۳۲۳. ۱. از تساوی دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ADC نتیجه می‌شود که $A\hat{C}D = A\hat{C}B$ پس AC محور تقارن شکل است و CD با CB برابر است و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که دو قطر چهارضلعی برهم عمودند و اگر وسطهای ضلعها را به هم وصل کنیم شکل MNPQ مستطیل است.

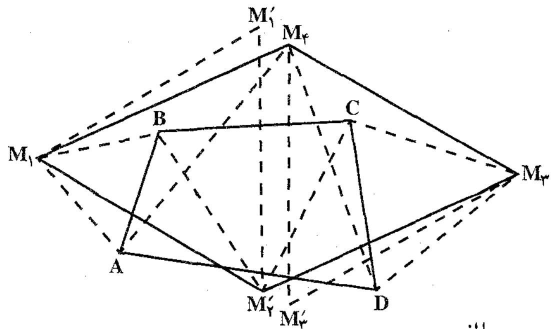


۲. چون در مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر مساوی با نصف وتر است، داریم :

$$OB = \frac{AC}{۲} = OA = OC \text{ و } OD = \frac{AC}{۲} = OA = OC$$

پس نقطهٔ O از چهار رأس به یک فاصله است. اگر A' قرینهٔ رأس A نسبت به قطر BD باشد چون : $A\hat{B}D = A\hat{D}B = ۲۲/۵^\circ$ و $B\hat{C}A = D\hat{C}A = ۲۲/۵^\circ$ می‌باشد، پس A' محل تلاقی نیمسازهای داخلی چهارضلعی است. و این نقطه از چهار ضلع به یک فاصله است.

۳۲۴. الف. مجموع چهار دوران به مرکزهای $M_۱$ ، $M_۲$ ، $M_۳$ و $M_۴$ هریک به زاویهٔ ۶۰° ، که در آن جهت اوّلی و جهت سومی مخالف جهتهای دومی و چهارمی است، رأس Aی چهارضلعی را به خودش بدل می‌کند (شکل الف، در صورت). اما مجموع دو دوران حول $M_۱$ و $M_۲$ انتقالی است به طول $M_۱M'_۱$ که در آن $M'_۱$ رأس مثلث متساوی‌الاضلاع $M_۱M_۲M'_۱$ است ($M_۲M_۱ = M_۲M'_۱$ ، $M_۱\hat{M}_۲M'_۱ = ۶۰^\circ$ ، و جهت دوران از $M_۲M_۱$ به $M_۲M'_۱$ بر جهت دوران از $M_۲B$ به $M_۲C$ منطبق است) ؛ (شکل الف). همچنین مجموع دو دوران حول $M_۳$ و $M_۴$ یک انتقال در راستای



الف

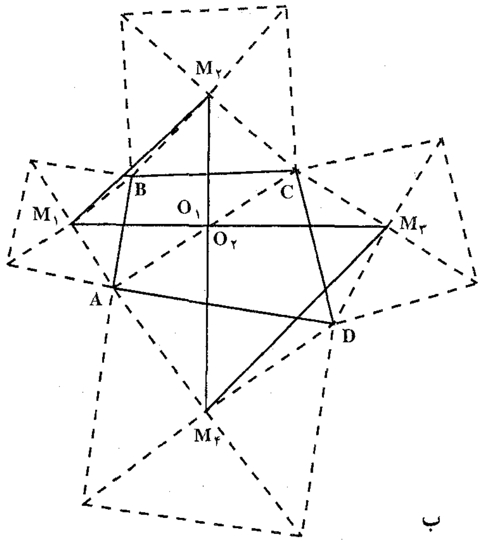
پاره‌خط $M_3M'_3$ است، که $M_3M_4M'_3$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است (و جهت دوران از M_4M_3 به $M_4M'_3$ همان جهت دوران از M_4D به M_4A است). پس مجموع دو انتقال ـ که با پاره‌خطهای $M_1M'_1$ و $M_3M'_3$ مشخص شده است ـ نقطهٔ Aرا به روی خودش می‌برد. اما اگر مجموع دو انتقال حتی یک نقطه را ثابت نگه‌دارد، آن‌گاه این مجموع باید تبدیل همانی باشد، یعنی دو پاره‌خطی که این دو انتقال را مشخص می‌کنند باید مساوی، موازی و مختلف‌الجهت باشند. اما اگر مثلثهای متساوی‌الاضلاع $M_1M_2M'_1$ و $M_3M_4M'_3$ چنان باشند که

$$M_1M'_1 = M_3M'_3 \text{ و } M_1M'_1 \| M_3M'_3$$

و $M_1M'_1$ و $M_3M'_3$ مختلف‌الجهت باشند، آن‌گاه ضلعهای M_1M_2 و M_3M_4 نیز مساوی، موازی و مختلف‌الجهت هستند، که از آن‌جا نتیجه می‌شود چهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ متوازی‌الاضلاع است (شکل الف).

ب. واضح است که مجموع چهار دوران حول نقطه‌های M_1 ، M_2 ، M_3 و M_4 هریک به زاویهٔ 90° ، رأس Aی چهارضلعی را به روی خودش می‌برد. از این مطلب نتیجه می‌شود که مجموع این چهار دوران یک تبدیل همانی است [با راه‌حل قسمت (الف) مسأله مقایسه شود]. اما مجموع دو دوران حول M_1 و M_2 نیمدوری است حول نقطهٔ O_1 ، رأس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $O_1M_1M_2$ ، (چون $O_1\hat{M}_1M_2 = O_1\hat{M}_2M_1 = 45^\circ$. همچنین مجموع دو دوران حول M_3 و M_4 نیمدوری است حول رأس O_2 از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $O_2M_3M_4$. با توجه به این مطلب که مجموع دو نیمدور حول O_1 و O_2 یک تبدیل همانی است، به‌آسانی نتیجه می‌شود که این دو نقطه برهم منطبقند. اما معنی این مطلب این است که مثلث $O_1M_1M_3$ از مثلث $O_1M_2M_4$ با دورانی به زاویهٔ 90° حول نقطهٔ $O_1 = O_2$

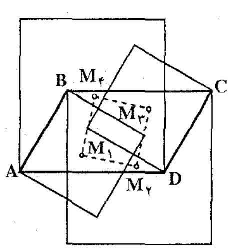
به‌دست آمده است، و بنابراین پاره‌خطهای M_1M_3 و M_2M_4 مساوی و متعامدند.



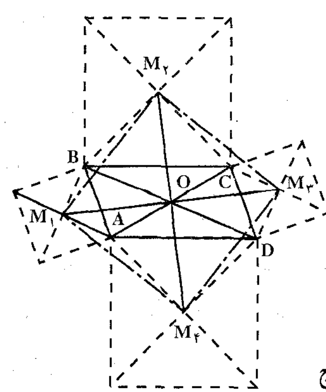
ب

ج. به موجب آنچه که قبلاً ثابت شده بود [قسمت (ب)ی مسأله]، قطرهای M_1M_3 و M_2M_4 از چهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ مساوی و متعامدند. افزون بر این، چون نقطهٔ O محل تقاطع قطرهای متوازی‌الاضلاع ABCD مرکز تقارن آن نیز هست، پس مرکز تقارن کل شکل ج، بالاخص مرکز تقارن چهارضلعی $M_1M_2M_3M_4$ نیز هست (که در نتیجه باید متوازی‌الاضلاع باشد چون متوازی‌الاضلاع، تنها چهارضلعیی است که مرکز تقارن دارد). اما متوازی‌الاضلاعی که قطرهایش مساوی و متعامد باشند، مربع است.

به همین طریق می‌توان نشان داد که مرکزهای تقارن چهار مربعی که در داخل متوازی‌الاضلاع بنا می‌شوند، یک مربع می‌سازند (شکل د).



د



ج

۴ . ۵ . تقارن محوری در دایره

۴ . ۵ . ۱. محور تقارن

۳۲۷. محور تقارن خطی خواهد بود که از A و از وسط خط‌المرکزین دو دایره می‌گذرد.
۳۲۸. گزینهٔ (ج) درست است.

۴ . ۵ . ۲ . نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۴.۵.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۳۲۹. نقطهٔ M را نقطهٔ مشترک دایره‌های ω_1، ω_2 و ω_3 فرض می‌کنیم. نقطه‌های A، B و C، دومین نقطه‌های تقاطع دایره‌های ω_2 و ω_3، ω_3 و ω_1، و ω_1 و ω_2 است. ترکیب سه تقارن محوری یعنی S_{MA}، S_{MB} و S_{MC} را که تقارنی با محور MO_2 است، مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. O_2 مرکز دایره ω_2 است. اگر نقطهٔ P انتهای قطری از دایرهٔ ω_2 باشد، که سر دیگر آن نقطهٔ M است. آن‌گاه $S_{MA}(P)=Q$، $S_{MB}(Q)=R$ و $S_{MC}(R)=P$ و $PA=AQ$، $QB=BR$ و $RC=CP$ خواهد بود. درنتیجه AB، BC و CA میانخطهای مثلث PQR بوده و بنابراین دایره محیطی مثلث ABC دارای همان شعاع دایره محیطی مثلث QAB خواهد بود.

۴.۵.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۰. ثابت کنید، اگر Q قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط راستی باشد که دایره را قطع کرده است، آن‌وقت $OQ \geq OP - 2$ که در آن O مرکز دایره است.

۳۳۲. فرض می‌کنیم l_0 و l_1 محورهای تقارن مجموعهٔ M، درنقطهٔ O به هم رسیده باشند و، در ضمن، اگر محور l_0 را به اندازهٔ زاویهٔ α، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دوران دهیم، بر محور l_1 منطبق شود. در این صورت، اگر قرینهٔ نقطهٔ A را، نسبت به خط راست l، با $S_l(A)$ نشان دهیم، آن‌وقت، هرنقطهٔ A، ضمن دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ 2α و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، به نقطهٔ $R(A)=S_{l_1}\left(S_{l_0}(A)\right)$

می‌رسد. درواقع، فاصلهٔ نقطهٔ O تا هریک از نقطه‌های A، $S_{l_0}(A)$ ، $S_{l_1}\left(S_{l_0}(A)\right)$ یکی است. (شکل را ببینید) و اگر زاویهٔ β ، بین خطهای راست OA و $l_0(A)$ $(O \neq A)$ را، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگیریم، آن‌وقت، زاویهٔ بین خطهای راست OA و $OS_{l_1}\left(S_{l_0}(A)\right)$ برابر $۲\beta - ۲(\beta - \alpha) = ۲\alpha$ می‌شود. چون مجموعهٔ M، شامل بیش از یک نقطه است، بنابراین، شامل نقطهٔ $A_0 \neq O$ است. به این ترتیب، داریم :

$$R(M) = S_{l_1}\left(S_{l_0}(M)\right) = S_{l_1}(M) = M$$

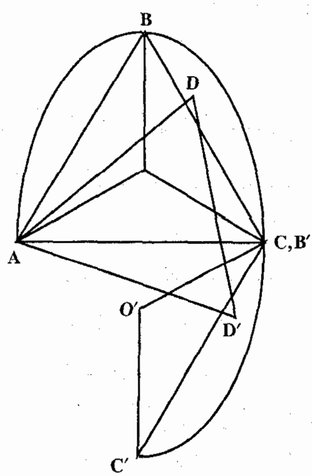
به این ترتیب، هریک از نقطه‌های

$A_0, A_1 = R(A_0)$ و $A_۲ = R(A_1)$ و $A_۳ = R(A_۲)$ و ...

عضوی از مجموعهٔ M هستند. در ضمن، همهٔ این نقطه‌ها متمایزند، زیرا اگر به ازای مقدارهای $i > j$ ، نقطه‌های A_i و A_j برهم منطبق باشند، آن‌وقت، باید داشته باشیم :

$۲\alpha(i-j) = ۲k\pi$ و $(k \in N)$

یعنی، عدد $\frac{\alpha}{\pi}$ ، عددی گویاست. بنابراین، مجموعهٔ M نامتناهی است.



۴ . ۵ . ۳ . خطهای: همرس، موازی، ...

۴ . ۵ . ۳ . ۱ . خطها همرسند

۳۳۳. دو مماس مشترک خارجی قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط‌المرکزین دو دایره‌اند. پس روی خط‌المرکزین متقاطعند. همین مطلب دربارهٔ دو مماس مشترک داخلی نیز درست است.

۴ . ۵ . ۳ . ۲ . خطها موازی‌اند

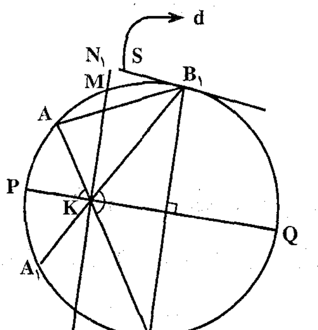
۳۳۴. O را مرکز دایره F_1 و O_1 را مرکز دایره‌های $F_۲$ و $F_۳$ فرض می‌کنیم. دایره‌های F_1

و F_2 همدیگر را در نقطه‌های A، B و دایره‌های F_1 و F_3 در نقطه‌های C و D همدیگر را قطع می‌کنند. آن‌گاه OO_1 که دایره‌های F_1 ، F_2 و F_3 را قطع می‌کند محور تقارن شکل خواهد بود.

۴ . ۵ . ۳ . ۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۳۳۵. نقطهٔ O را مرکز دایره، AB و CD را وترهای موازی از این دایره، M را میانگاه وتر AB و N را میانگاه وتر CD درنظر بگیرید. به‌دلیل $AO = OB$ و $AM = MB$ ، OM محور تقارن نقطه‌های A و B بوده و از این‌جا نتیجه می‌شود که $OM \perp AB$ است. به طریق مشابه ONمحور تقارن نقطه‌های C و D بوده و $ON \perp CD$ خواهد بود. با منظور کردن $AB \| CD$ ، $OM \| ON$ حاصل شده و بنابر آن $OM = ON$ خواهد بود.

۴ . ۵ . ۳ . ۴. خط نیمساز است



۳۳۷. لِم زیر را ابتدا ثابت می‌کنیم :

نقطه‌ای بر قطر PQ از دایرهٔ C فرض می‌کنیم مانند K. از K وتر AB را می‌گذرانیم. خط d را عمود بر PQ در K درنظر می‌گیریم. در A و B مماسهایی رسم می‌کنیم تا d را در M و N قطع کنند. KM و KN با هم برابرند.

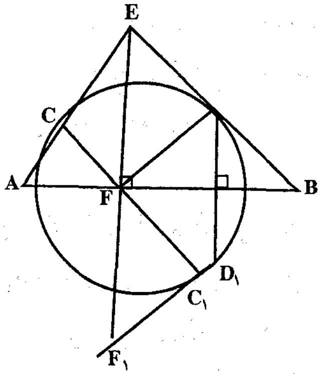
اثبات: B_1 را قرینهٔ B نسبت به PQ می‌گیریم و A_1 را قرینهٔ A نسبت به PQ. B_1 و K و A_1 بر یک خط هستند. بر B_1 مماسی رسم می‌کنیم تا d را در N_1 قطع کند. بدیهی است اگر $KN = KN_1$ فرض کنیم ؛ AM، B_1N_1 را در S قطع کند.

داریم :
$$S\hat{B}_1 A_1 = \frac{\overset{\frown}{B_1PA_1}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BPA}}{۲} = ۱۸۰^\circ - \frac{A\hat{Q}B}{۲} = ۱۸۰^\circ - S\hat{A}B$$

در نتیجه S، B_1 ، K و A روی یک دایره‌اند.

$$B_1B \| d \Rightarrow B_1 \hat{N}_1 K = ۱۸۰^\circ - N_1 \hat{B}_1 B = ۱۸۰^\circ - \frac{\overset{\frown}{B_1PB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{B_1QB}}{۲} = B_1 \hat{A} B$$

$$= B_1 \hat{A} K \Rightarrow A, K, B, N_1 \text{ روی یک دایره‌اند}$$



پس N_1 بر S و در نتیجه بر M منطبق است. بنابراین : $KN = KM$. حال از این لم برای حل مسأله استفاده می‌کنیم. CF را امتداد می‌دهیم تا دایره را در C_1 قطع کند. در C_1 مماسی رسم می‌کنیم تا EF را در E_1 قطع کند. طبق لم بالا $E_1F = EF$.

D_1 را قرینهٔ D نسبت به AB می‌گیریم. بر D_1 مماسی رسم می‌کنیم تا EF را در E_2 قطع کند. بنابراین $E_2F = EF$ اما $E_1F = EF$ بنابراین E_1 بر E_2 و در نتیجه D_1 بر C_1 منطبق است. یعنی C_1 قرینهٔ D نسبت به AB است که از آن‌جا $\begin{cases} D\hat{F}B = D\hat{F}C_1 \\ B\hat{F}C_1 = C\hat{F}A \end{cases}$ و بنابراین $D\hat{F}B = C\hat{F}A$. پس به حکم مسأله رسیدیم $E\hat{F}C = E\hat{F}D$.

۴ . ۵ . ۴. زاویه

۱.۴.۵.۴ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

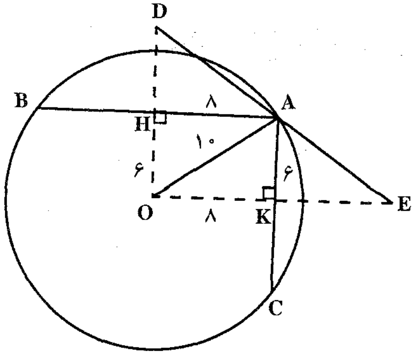
۳۳۸. خط AB محور تقارن شکل است و در زاویهٔ بالا نسبت به محور AB قرینه یکدیگرند، پس برابرند.

۴ . ۵ . ۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۴ . اندازهٔ پاره‌خط

۳۳۹. قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند پس با توجه به شکل ، داریم :

$$AH = \frac{AB}{۲} = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \text{ و } OA = ۱۰$$
$$\Rightarrow OH = HD = \sqrt{۱۰۰ - ۶۴} = ۶$$
$$AK = \frac{AC}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶ \text{ و } OA = ۱۰ \Rightarrow OK = KE = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$
$$\Rightarrow OD = ۲OH = ۱۲ \text{ و } OE = ۲OK = ۱۶$$



از طرفی در چهارضلعی محاطی AHOK اندازهٔ زاویهٔ HOC مشخص است. زیرا :

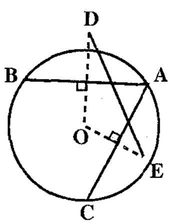
$$\operatorname{tg}\hat{O}_۱ = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳} \quad \text{و} \quad \operatorname{tg}\hat{O}_۲ = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴} = \operatorname{cotg}\hat{O}_۱$$

از آن‌جا $\Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۹۰^\circ$

$$\Rightarrow DE = \sqrt{OD^۲ + OE^۲} = \sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵۶} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

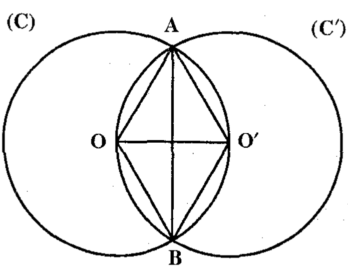
$\Rightarrow DE = ۲۰$ اندازهٔ پاره‌خط خواسته شده

نکته. در حالت کلی DE از A نمی‌گذرد. شکل را ببینید.



۴ . ۵ . ۶. رابطه‌های متری

۳۴۰. دو دایرهٔ (C) و (C′) مساوی و متقاطعند. بنابراین مرکز هریک روی دیگری و اندازهٔ خط‌المرکزین آنها $OO' = R$ است. دو مثلث AOO' و BOO' متساوی‌الاضلاع و اندازهٔ ضلع هریک برابر R است. مساحت موردنظر برابر مساحت لوزی $AOBO'$ به‌اضافهٔ مساحت چهار قطعه ایجاد شده در دایره‌ها که زاویهٔ قطاع نظیر قطعه برابر ۶۰° است.



۴ . ۵ . ۷. ثابت کنید شکلها قرینهٔ محوری یکدیگرند

۳۴۱. وتر مشترک دو دایرهٔ مساوی عمودمنصف خط‌المرکزین آن دو دایره است و مرکز هر دایره روی دایرهٔ دیگر قرار دارد.

۳۴۲. الف. S

ب. V

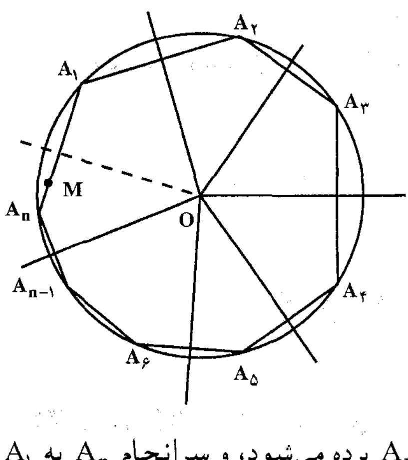
پ. K

ت. K

ث. R

ج. T

۴ . ۵ . ۸. رسم شکلها



۳۴۳. الف. گیریم n ضلعی موردنظر $A_۱ A_۲ A_۳ \cdots A_n$ باشد (شکل). قرینه‌های رأس $A_۱$ را به طور مرتب نسبت به خطهای رسم شده از O، مرکز دایره، و عمود بر ضلعهای $A_۱A_۲$ ، $A_۲A_۳$ ، ...، $A_{n-۱}A_n$ ، $A_nA_۱$ ، از nضلعی پیدا می‌کنیم (این خطها معلومند، چون راستاهای ضلعهای n ضلعی داده شده‌اند) ؛ نخست رأس $A_۱$ به $A_۲$ ، سپس $A_۲$ به $A_۳$ ، ... و بعد $A_{n-۱}$ به A_n برده می‌شود، و سرانجام A_n به $A_۱$ بازگردانیده می‌شود. پس $A_۱$ نقطهٔ ثابت مجموع n تقارن نسبت به خطهای معلوم است. دو حالت جداگانه درنظر می‌گیریم.

حالت اوّل. n فرد. چون مجموع سه تقارن نسبت به سه خط همرس، باز یک تقارن نسبت به خطی است که از نقطهٔ همرس می‌گذرد به آسانی دیده می‌شود که مجموع تعداد فردی تقارن نسبت به خطهایی که همه از یک نقطه می گذرند، باز یک تقارن نسبت به خطی است که از این نقطه می‌گذرد. (نخست به جای سه تقارن اوّلی یک تقارن تنها

می‌گذاریم، سپس به جای مجموع این تقارن و دو تقارن بعدی، همین‌کار را می‌کنیم، و همین‌طور الی آخر). پس مجموع این n تقارن، یک تقارن نسبت به خطی است که بر نقطهٔ O، مرکز دایره، می‌گذرد. دقیقاً دو نقطه بر دایره وجود دارند که براثر تقارن نسبت به l ثابت می‌مانند ؛ این نقطه‌ها، نقطه‌های برخورد دایره با l هستند. اگر یکی از اینها به عنوان رأس A_1 از چند ضلعی مطلوب درنظر گرفته شود، رأسهای دیگر با تقارنهای پیاپی این نقطه نسبت به n خط پیدا می‌شوند. مسأله دو جواب دارد.

حالت دوم. nزوج. مجموع هر دو تقارن نسبت به دو خط که از یک نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی است حول نقطهٔ O به یک زاویهٔ مشخص. از این‌جا نتیجه می‌شود که به جای مجموع تعداد زوجی، n، تقارن نسبت به خطهایی که بر یک نقطهٔ O می‌گذرند می‌توان مجموع $\frac{n}{2}$ دوران حول O را قرار داد ؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که این مجموع، خود دورانی حول O است. چون یک دوران O، در حالت کلی، نقطهٔ ثابتی بردایرهٔ به مرکز Oندارد، پس مسأله ما در حالت کلی جواب ندارد. استثنا زمانی است که مجموع n تقارن محوری بدل به یک تبدیل همانی شود ؛ در این حالت مسأله بینهایت جواب دارد. هر نقطه از دایره می‌تواند رأس A_1 از n ضلعی مطلوب باشد.

ب. فرض کنیم n ضلعی رسم شده است (شکل). قرینه‌های رأس A_1 را به طور مرتب نسبت به $(n-1)$ خط عمود بر ضلعهای A_1A_2 ، A_2A_3 ، ...، $A_{n-1}A_n$ که از O، مرکز دایره، می‌گذرند پیدا می‌کنیم (این خطها معلومند، زیرا نقطهٔ O و امتدادهای ضلعهای چندضلعی داده شده‌اند) ؛ این رشته عمل A_1 را به A_n می‌برد. دو حالت جداگانه درنظر می‌گیریم.

حالت اوّل. n فرد. در این حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به خطهایی که بر نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی است حول O به زاویهٔ α (که می‌توان پیدا کرد). پس زاویهٔ $A_1OA_n = \alpha$ زاویه‌ای است معلوم، و بنابراین طول وتر A_1A_n و فاصله‌اش از مرکز دردست‌اند. چون A_1A_n باید از نقطهٔ مفروض M بگذرد، تنها کافی است که مماسهایی از M بر دایرهٔ به مرکز Oو شعاعی مساوی فاصلهٔ وتر A_1A_n تا مرکز O، رسم کنیم. مسأله می‌تواند دو یا یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

حالت دوم. n زوج. در این حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به خطهایی که بر این نقطهٔ مشترک می‌گذرند، تقارنی است نسبت به خط l که براین نقطه می‌گذرد. پس A_1 و A_n قرینه‌های یکدیگر نسبت بهl هستند. چون A_1A_n باید از نقطهٔ معلوم M بگذرد، پس می‌توان آن را به آسانی از راه رسم عمود از M بر l به‌دست آورد. مسأله همواره یک جواب یکتا دارد.

۴ . ۵ . ۹ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

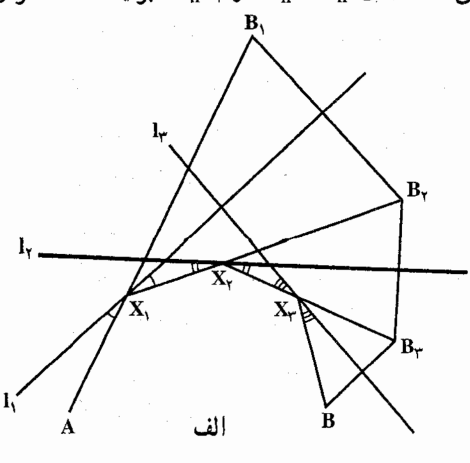
۳۴۵. نقطهٔ M را نقطهٔ مشترک دایره‌های ω_1 ، ω_2 و ω_3 فرض می‌کنیم. نقطه‌های A، B و C، دومین نقطه‌های برخورد دایره‌های ω_2 و ω_3 ، ω_3 و ω_1 ،ω_1 و ω_2 است. ترکیب سه تقارن محوری یعنی S_{MA} ، S_{MB} و S_{MC} را که تقارنی با محور MO_2 است مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. O_2 مرکز دایره ω_2 است. اگر نقطهٔ P انتهای قطری از دایرهٔ ω_2 باشد که سر دیگر آن نقطهٔ M است آن‌گاه $S_{MA}(P)=Q$ ، $S_{MB}(Q)=R$ و $S_{MC}(R)=R$ و $PA=AQ$ ، $QB=BR$ و $RC=CP$ خواهد بود. در نتیجه AB، BC و CA میانخطهای مثلث PQR بوده و بنابراین دایره محیطی مثلث ABC دارای همان شعاع دایره محیطی مثلث QAB خواهد بود.

۴ . ۵ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی

۳۴۶. الف. فرض کنید مسأله حل شده است، یعنی نقطه‌های X_1 ، X_2 ، ...، X_n بر خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n چنان مشخص شده‌اند که

$$AX_1X_2\cdots X_nB$$

مسیر یک توپ بیلیارد باشد (درشکل (الف) حالت $n=3$ نشان داده شده است). به آسانی دیده می‌شود که X_n نقطهٔ برخورد خط l_n با خط $X_{n-1}B_n$ است، که در آن B_n قرینهٔ B نسبت به l_n است، یعنی نقطه‌های B_n ، X_n و X_{n-1} بر یک خط قرار دارند. همچنین نقطهٔ X_{n-1} نقطهٔ برخورد خط l_{n-1} با خط $X_{n-2}B_{n-1}$ است، که B_{n-1} قرینهٔ B_n نسبت به l_{n-1} است. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که نقطهٔ X_{n-2} محل برخورد خطهای l_{n-2} و $X_{n-3}B_{n-2}$ است که B_{n-2} قرینهٔ B_{n-1} نسبت به l_{n-2} است ؛ نقطهٔ X_{n-3}



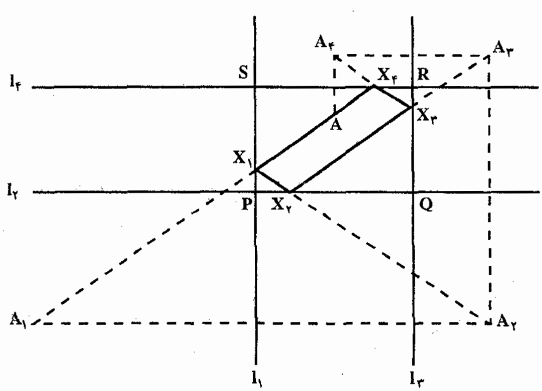
الف

برخورد خطهای l_{n-3} و $X_{n-4}B_{n-3}$ است، که در آن B_{n-3} قرینهٔ B_{n-2} نسبت به l_{n-3} است و الی‌آخر.

پس ترسیم زیر را در اختیار داریم: قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به l_n به‌دست می‌آوریم تا نقطهٔ B_n به‌دست آید، حال قرینهٔ B_n را نسبت به l_{n-1} پیدا می‌کنیم تا B_{n-1} به‌دست آید، و عمل را همین‌طور ادامه می‌دهیم، تا قرینهٔ نقطهٔ B_2 نسبت به l_1، یعنی نقطهٔ B_1 به‌دست آید. نقطهٔ X_1 که جهتی را مشخص می‌کند که توپ بیلیارد در A به میز می‌خورد، از برخورد خط l_1 با خط AB_1 به‌دست می‌آید. سپس به آسانی می‌توان نقطه‌های X_2، X_3، ...، X_n را به کمک نقطه‌های B_2، B_3، ...، B_n و X_1 به‌دست آورد.

ب. با دنبال کردن روش قسمت (الف)، نخست قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به l_4 به‌دست می‌آوریم تا A_4 به‌دست آید، سپس قرینهٔ A_4 را نسبت به l_3 به‌دست می‌آوریم تا A_3 به‌دست آید، و همین طور الی آخر، تا این که به A_1 برسیم (شکل ب). بسادگی می‌توان تحقیق کرد که تقارن نسبت به l_4 و درپی آن، تقارن نسبت به l_3، هم‌ارز با یک نیمدور حول R، نقطهٔ برخورد این دو خط، است. به طریق مشابه، دو تقارن بعدی هم‌ارز با یک نیمدور حول نقطهٔ P است. از این رو چهار تقارن با مجموع دو نیمدور حول R و P هم‌ارزند. اما چنان که می‌دانیم این، هم‌ارز با انتقالی است در راستای PR به طول دو برابر PR.

پس AA_1 دو برابر قطر PR و موازی با آن است. با درنظر گرفتن زاویه‌ها به آسانی دیده می‌شود که مسیر $AX_1X_2X_3X_4A$ متوازی‌الاضلاعی (ضلعهای مقابل موازی‌اند) است که ضلعهای آن موازی قطرها هستند. پس اگر توپ وقتی که به نقطهٔ A باز می‌گردد از حرکت نایستد یک بار دیگر دقیقاً همان مسیر را خواهد پیمود. بالاخره درشکل دیده می‌شود که طول کل مسیر مساوی AA_1، یعنی دو برابر طول قطر است.



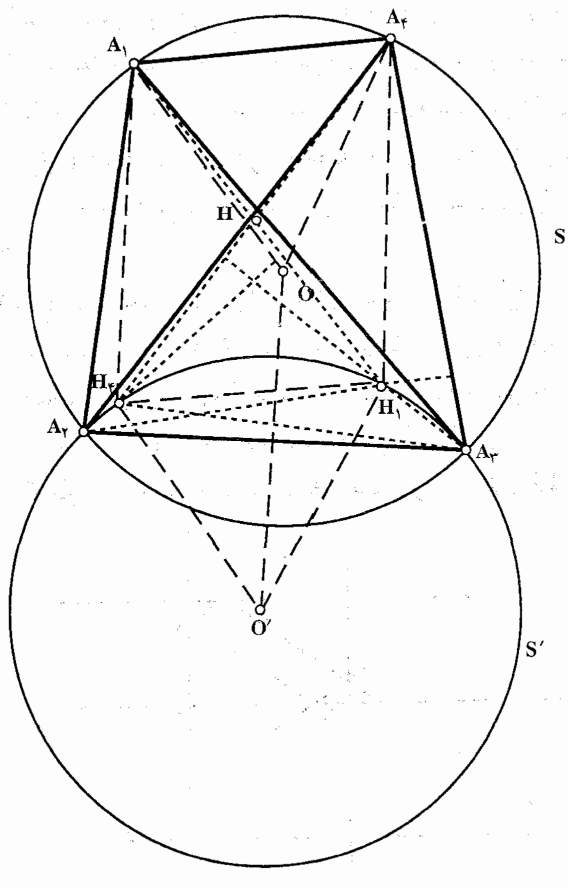
ب

۳۴۷. الف. گیریم O' قرینهٔ نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ S، نسبت به خط A_2A_3 باشد (شکل)، چهارضلعیهای $OO'H_4A_1$ و $OO'H_1A_4$ متوازی‌الاضلاع هستند. پس

$$A_1H_4 = OO' = A_4H_1 \text{ و } AH_4 \| OO' \| A_4H_1$$

و در نتیجه $A_1H_4H_1A_4$ متوازی‌الاضلاع است. از این‌جا نتیجه می‌شود که پاره‌خطهای A_1H_1 و A_4H_4 در یک نقطهٔ H، که وسط هر دو است، مشترکند. به همین طریق می‌توان نشان داد که نقطهٔ H وسط A_2H_2 و A_3H_3 نیز هست.

ب. می‌توان دید که مثلاً H_4 بر دایرهٔ S' قرینهٔ S نسبت به خط A_2A_3 واقع است؛ H_1 نیز روی همین دایره است. پس A_2 ، A_3 ، H_1 و H_4 همگی بر دایره‌ای قابل انطباق با S واقعند. بقیهٔ حکمهای قضیه به طریق مشابه ثابت می‌شوند.



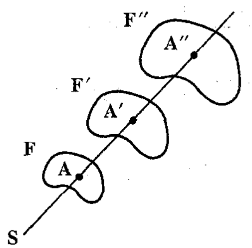
۳۴۹. (ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید. دوران دور O_1 را با دو نگاشت تقارن محوری، با انتخاب خط راست O_1O_2 به جای محور تقارن نگاشت دوم، و دوران دور O_2 را با دو نگاشت تقارن محوری، با انتخاب خط راست O_1O_2 به‌جای محور تقارن نگاشت اوّل جایگزین کنید.

تبصره. اگر $\alpha+\beta=2\pi$، آن‌وقت، به راحتی قانع می‌شویم که انجام دورانهای مفروض به توالی، با یک انتقال هم‌ارز است.

جواب: اگر $\alpha+\beta<2\pi$، آن‌وقت، زاویه‌های مثلث برابرند با $\frac{\alpha}{2}$، $\frac{\beta}{2}$ و $\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$، و اگر $\alpha+\beta>2\pi$، آن‌گاه این زاویه‌ها برابرند با $\pi-\frac{\alpha}{2}$، $\pi-\frac{\beta}{2}$ و $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵. تجانس

۱.۵. تعریف و قضیه



۳۵۰. اگر نقطه‌های A' و A'' مجانسهای نقطهٔ A از شکل F در دو تجانس به مرکز S و با نسبتهای تجانس k' و k'' باشند (شکل)، بنا به تعریف تجانس داریم:

$$\overrightarrow{SA'} = k'.\overline{SA}$$

$$\overrightarrow{SA''} = k''.\overline{SA}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{SA''}}{\overrightarrow{SA'}} = \frac{k''}{k'} = k_1 \Rightarrow \overrightarrow{SA''} = k_1.\overrightarrow{SA'}$$

یعنی نقطهٔ A'' از شکل F'' مجانس نقطهٔ A' از شکل F' نسبت به مرکز تجانس S و با نسبت تجانس $\frac{k''}{k'} = k_1$ است. بنابراین شکل F'' مجانس شکل F' در تجانس به مرکز S و نسبت k_1 می‌باشد. درحالتی که $k' = k''$ یا $k' = -k''$ باشد، نتیجه را بررسی کنید.

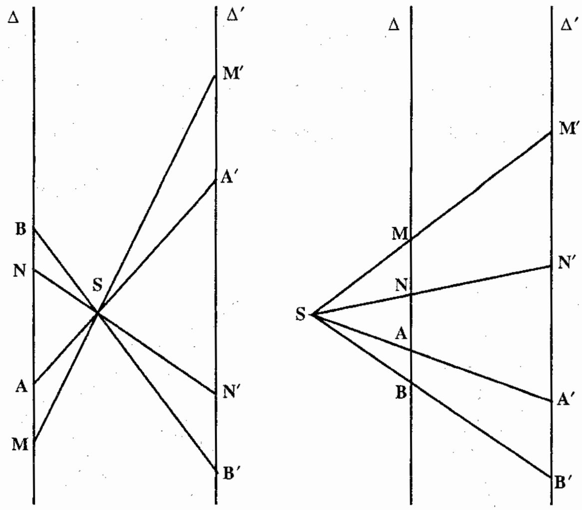
تبصره. در برخی کتابها نسبت تجانس را مثبت اختیار می‌کنند. بدیهی است در این صورت، تجانس مستقیم (مثبت) مورد نظر است.

۳۵۱. نقطهٔ S مرکز و k نسبت تجانس و خط Δ مفروضند (شکل)؛ A' و B' مجانسهای دو نقطهٔ A و B را یافته به هم وصل می‌کنیم تا خط راست Δ' به‌دست آید؛ ثابت می‌کنیم که Δ' مجانس Δ است، یعنی مجانس هر نقطه مانند M از خط Δ روی Δ' واقع است.

از تساویهای $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k$ و $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = k$

تساوی زیر را نتیجه می‌گیریم: $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB}$

از این تساوی معلوم می‌شود که خط $A'B'$ یعنی Δ' موازی با خط AB یا Δ می‌باشد. حال اگر M نقطه‌ای دیگر از خط Δ و M' مجانس آن باشد، به‌همین ترتیب ثابت می‌کنیم که باید $A'M'$ موازی با AM یعنی موازی با Δ باشد و چون از A' بیش



از یک خط به موازات Δ نمی‌توان رسم کرد، $A'M'$ منطبق بر Δ' یعنی M'، مجانس M، روی Δ' است.

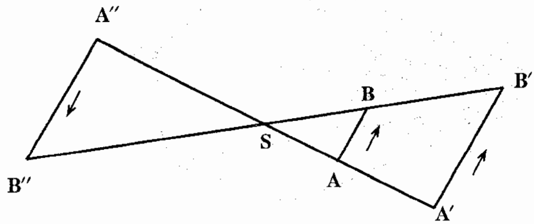
می‌توان به سهولت ثابت کرد بعکس، هر نقطهٔ مانند N' از خط Δ' مجانس یک نقطهٔ N از خط Δ است (N نقطهٔ تلاقی خط Δ با خط SN' است).

اگر نقطهٔ S (مرکز تجانس) روی Δ واقع باشد، Δ' بر Δ منطبق است. بعکس، هر دو خط راست متوازی Δ و Δ' را همواره می‌توان متجانس دانست، در این صورت، مرکز تجانس نقطهٔ دلخواهی است مانند S که روی هیچ یک از آنها واقع نباشد (نسبت تجانس چیست؟).

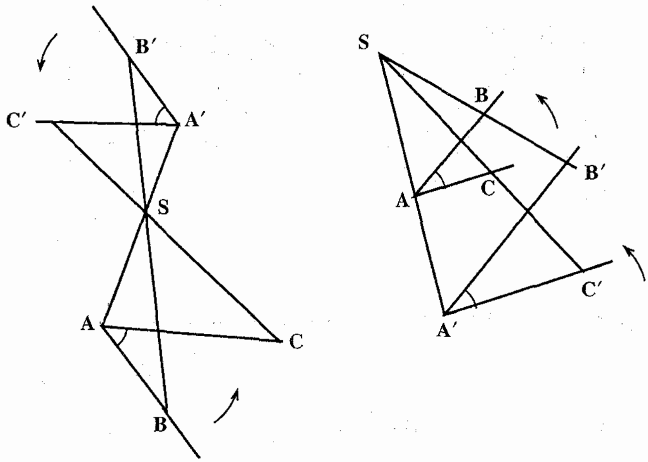
نتیجهٔ ۱. مجانس هر پاره‌خط، پاره‌خط دیگری است که نسبت اندازه‌اش به اندازهٔ آن پاره‌خط، مساوی قدر مطلق نسبت تجانس است.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=|k|$$

نتیجهٔ ۲. مجانس مستقیم هربردار، برداری است موازی و همجهت با آن و مجانس معکوس هربردار، برداری موازی و درجهت مخالف آن است (شکل).



۳۵۲. چنانچه در تجانسی زاویهٔ A' از زاویهٔ A نتیجه شده باشد، ضلعهای متناظر این دو زاویه با هم موازی‌اند، پس دو زاویه برابرند. در تجانس مستقیم، ضلعهای موازی و همجهت و در تجانس معکوس، موازی و غیر همجهتند، ولی در هر حال، جهت زاویه‌های A و A' یکی است (شکل).

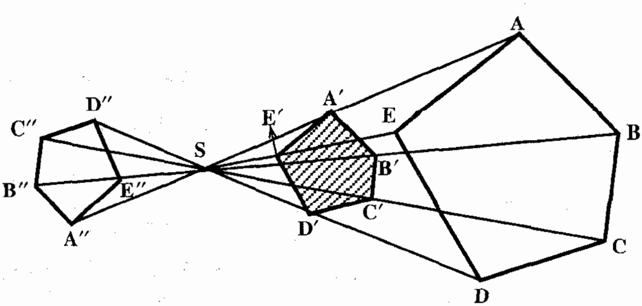


۳۵۳. اگر چند ضلعی $A'B'C'D'E'\cdots$ مجانس چند ضلعی $ABCDE\ldots$ باشد، می‌دانیم که (شکل ۱):

$$\frac{A'B'}{AB}=|k| \text{ و } \frac{B'C'}{BC}=|k| \text{ و } \ldots$$

پس: $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'D'}{CD}=\cdots=|k|$

و نیز می‌دانیم که: $\hat{A}'=\hat{A}$ و $\hat{B}'=\hat{B}$ و...



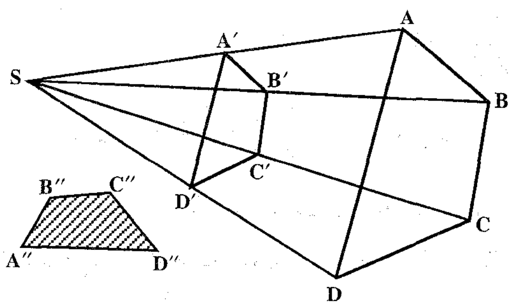
نقطهٔ S را مرکز تشابه یا مرکز تجانس دو چند ضلعی، و نسبت k را نسبت تشابه یا نسبت تجانس دو چندضلعی می‌نامند.

نتیجه. اگر $A'B'C'\ldots$ مجانس... ABC با نسبت K باشد، ... ABC نیز مجانس $A'B'C'\ldots$ است، اما با نسبت $\frac{1}{k}$ ؛ زیرا که :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots=\left|\frac{1}{k}\right|$$

یادآوری. می‌دانیم که هرگاه در دو شکل، ضلعهای متناظر متناسب و زاویه‌های متناظر متساوی باشند، دو شکل را متشابه می‌نامند ؛ پس قضیه‌ای را که گفتیم می‌توان به این صورت بیان کرد : مجانس هر شکل، شکلی است مشابه با آن که ضلعهای متناظرشان متوازی باشند.

تعریف جدیدی برای چندضلعیهای متشابه. هرگاه $A'B'C'D'$ مجانس ABCD باشد و $A''B''C''D''$ را مساوی $A'B'C'D'$ بسازیم، $A''B''C''D''$ با ABCD مشابه خواهد بود (شکل) ؛ پس : شکل مشابه هرچند ضلعی، چند ضلعیی است مساوی

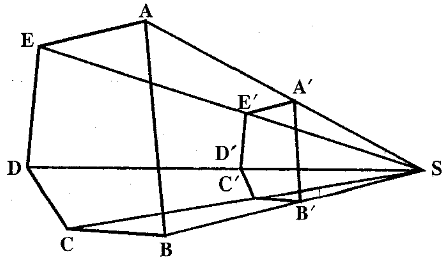


با یکی از مجانسهای آن. نسبت بین دو ضلع متناظر را نسبت تشابه می‌نامند. به این ترتیب، برای ساختن شکلی مشابه با یک چند ضلعی (که مجانس آن نباشند)، کافی است که مجانس چندضلعی را نسبت به یک مرکز اختیاری رسم کرده، سپس آن را در صفحه جابه‌جا کنیم.

۳۵۴. فرض این است که در شکل :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots=k$$

$$A'B'\parallel AB,\ B'C'\parallel BC,\cdots$$



برای سهولت بیان، فرض می‌کنیم ضلعهای متناظر همجهت باشند ؛ در این صورت، اگر امتداد AA' و EE' همدیگر را در S قطع کنند، A و A' در یک طرف S خواهند بود ؛ همچنین S خارج قطعه خط EE' است و داریم :

$$\frac{SA}{SA'}=\frac{SE}{SE'}=\frac{AE}{A'E'}=k$$

حال اگر یکی دیگر از خطهای واصل بین دو رأس متناظر، مثلاً DD'، امتداد EE' را در S' قطع کند، S' خارج قطعه خط EE' خواهد بود و داریم :

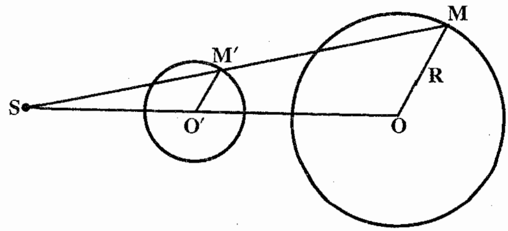
$$\frac{S'E}{S'E'}=\frac{ED}{E'D'}=k$$

از این‌جا لازم می‌آید که $k=\frac{SE}{SE'}=\frac{S'E}{S'E'}$ باشد و چون در خارج قطعه خط EE' بیش از یک نقطه وجود ندارد که آن را به نسبت k تقسیم کند، لزوماً S' بر S منطبق است ؛ بدین ترتیب می‌بینیم که جمیع خطهای AA' ، BB' ، CC' و ... بر یک نقطه می‌گذرند ؛ از طرف دیگر، $\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}$ مثبت و برابر $\frac{SA}{SA'}$ یعنی برابر k است ؛ پس A مجانس A' است در تجانسی که مرکزش S و نسبتش k باشد.

به‌همین ترتیب، دربارهٔ نقطه‌های دیگر می‌توان استدلال کرد و نتیجه گرفت که ...ABC مجانس $A'B'C'\cdots$ است.

اگر ضلعهای متناظر، مختلف‌الجهت باشند، نقطهٔ S بین A و A' خواهد بود و شکل ...ABC مجانس معکوس شکل $A'B'C'\cdots$ است در تجانسی که مرکزش S و نسبتش $-k$ باشد.

۳۵۵. نقطهٔ (O')(شکل) مجانس O، مرکز دایره و نقطهٔ M' مجانس یک نقطهٔ M از دایرهٔ O



را به دست می‌آوریم ؛ هرگاه k را مثبت فرض کنیم، از $\frac{O'M'}{OM} = k$ به‌دست می‌آید : $O'M' = kR$ یعنی فاصلهٔ مجانسهای نقطه‌های دایرهٔ O از نقطهٔ ثابت O'، مقدار ثابت kR است ؛ پس مکان M' دایره‌ای است به مرکز O' و شعاع kR. اگر k منفی باشد، در استدلال بالا به‌جای آن باید $|k|$ را قرار داد.

۳۵۶. اولاً. دایره‌های O و O' مفروضند. اگر دو شعاع دلخواه متوازی و همجهت OA و $O'A'$ را رسم کنیم و AA' و OO' را امتداد دهیم تا یکدیگر را در S قطع کنند، داریم :

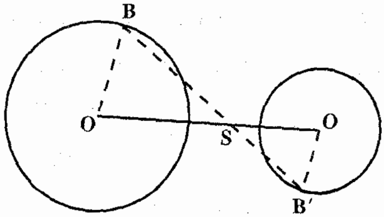
$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$

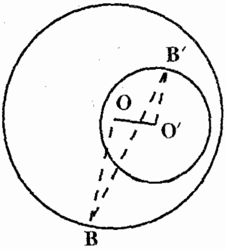
پس : $\frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'}$ ، یعنی S نقطه‌ای است ثابت از امتداد پاره خط OO' که آن را به نسبت $\frac{R}{R'}$ تقسیم می‌کند ؛ این نقطه را می‌توان مرکز تجانس مستقیم دو دایره دانست و نسبت آن، $\frac{R}{R'}$ است. بدیهی است که اگر دو دایره دارای مماس مشترک خارجی باشند، مماسهای مشترک خارجی آنها بر S خواهند گذشت.

ثانیاً. اگر دو شعاع دلخواه متوازی OB و $O'B'$ را در دو جهت مخالف رسم کنیم (شکل) و منتهای آنها را به یکدیگر وصل کنیم، خط واصل، خط‌المرکزین دو دایره را در S قطع می‌کند ؛ چون :

$$\frac{SB}{SB'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{R}{R'}$$

نقطهٔ S نقطه‌ای است ثابت بین O و O' که OO' را به نسبت $\frac{R}{R'}$ تقسیم کرده است ؛ این نقطه را می‌توان مرکز تجانس معکوس دو دایره دانست و نسبت این تجانس، برابر $-\frac{R}{R'}$ است. بدیهی است که اگر دو دایرهٔ متخارج باشند، مماسهای مشترک داخلی آنها بر مرکز تجانس معکوسشان خواهند گذشت.





نتیجه. مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس دو دایره، خط‌المرکزین را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند.

حالتهای خاص. ۱. در دو دایرهٔ مماس خارج، نقطهٔ تماس، مرکز تجانس معکوس دو دایره است.

۲. در دو دایرهٔ مماس داخل، نقطهٔ تماس، مرکز تجانس مستقیم دو دایره است.

۳. در دو دایرهٔ مساوی، مرکز تجانس مستقیم نقطهٔ بینهایت دور امتداد خط‌المرکزین دو دایره است (بنا به اصل دزارگ) و مرکز تجانس معکوس دو دایره وسط خط‌المرکزین آنهاست.

نکته. سه دایره به مرکزهای O، O′ و O″ و شعاعهای R، R′ و R″ را درنظر می‌گیریم؛ می‌دانیم که این سه دایره دوبه‌دو یک مرکز تجانس مستقیم و یک مرکز تجانس معکوس دارند؛ پس هر سه دایره با هم دارای سه مرکز تجانس مستقیم و سه مرکز تجانس معکوسند.

۳۵۹. داریم (شکل):

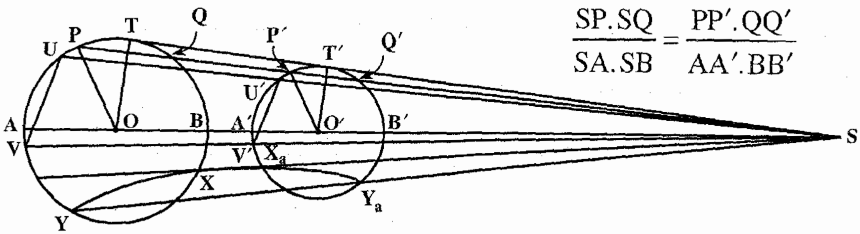
$$\frac{SP}{SA}=\frac{SP'}{SA'}=\frac{SP-SP'}{SA-SA'}=\frac{PP'}{AA'}$$

و به طور مشابه،

$$SQ:SB=QQ':BB'$$

پس با ضرب کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{SP.SQ}{SA.SB}=\frac{PP'.QQ'}{AA'.BB'}$$



چون سمت چپ این تساوی برابر یک است، پس :

$$PP'.QQ' = AA'.BB' \qquad (۱)$$

چون طرف راست تساوی رابطهٔ (۱) به قاطع SPP' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

نکته. اگر دایره‌ها مماس مشترکی داشته باشند که از S بگذرد و در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ها مماس باشد، می‌توانیم مماس STT' را به عنوان وضعیت حدی قاطع SP، وقتی دو پاره‌خط PP' و QQ' بر پاره‌خط TT' منطبق می‌شوند، درنظر بگیریم ؛ پس :

$$TT'^{۲} = PP'.QQ'$$

این رابطه را می‌توان مانند رابطهٔ (۱) به‌طور مستقیم هم‌به‌دست آورد.

۳۶۰. اگر U و V نقطه‌های تماس دایرهٔ (M) بترتیب، با دو دایرهٔ (A) و (B) باشند، U مرکز تشابه دایره‌های (M) و (A) و V مرکز تشابه دایره‌های (M) و (B) است ؛ پس خط UV از یک مرکز تشابه دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد.

خط UV، بسته به این که نقطه‌های U و V همانند یا ناهمانند باشند، از مرکز تشابه خارجی یا داخلی، دایره‌های (A) و (B) می‌گذرد.

۳۶۱. داریم (شکل) :

$$SP.SQ' = SP'.SQ \text{ یا } SP:SP' = SQ:SQ'$$

از طرف دیگر داریم :

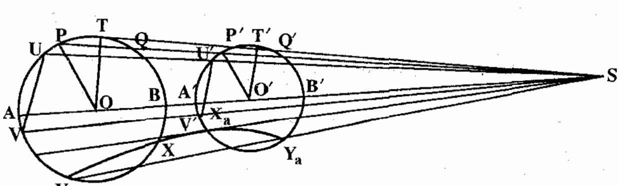
$$SP.SQ = SA.SB \,, SP'.SQ' = SA'.SB'$$

پس :

$$SA.SB.SA'.SB' = SP.SQ.SP'.SQ' = SP^{۲}.SQ'^{۲}$$

چون طرف چپ این تساوی به دو نقطهٔ پادهمتای برگزیده شدهٔ P و Q' بستگی ندارد، قضیه ثابت شده است.

نتیجه. هر دو جفت نقطهٔ پاد همتا نسبت به یک مرکز تشابه، یا همخط‌اند یا همدایره.



۳۶۳. اگر P یک نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض (A , a) و (B , b) باشد، داریم :

$$(PA^{۲} - a^{۲}):(PB^{۲} - b^{۲}) = a^{۲}:b^{۲} \text{ یا } PA:PB = a:b$$

پس نسبت قوتهای هر نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایرهٔ مفروض، نسبت به این دو دایره ثابت است ؛ پس قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه. یکی از دو مرکز تشابه دو دایرهٔ غیر متقاطع بین نقطه‌های حدی دو دایره قرار دارد.

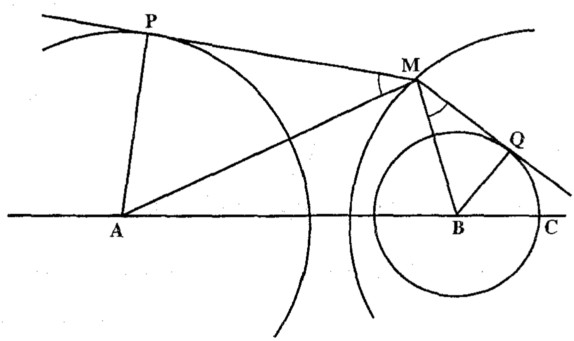
نقطه‌های حدی L و L' برای دو دایرهٔ (A) و (B) نسبت به هر دایرهٔ هم محور با (A) و (B) و به‌خصوص نسبت به دایرهٔ تشابه (A) و (B) وارون یکدیگرند. پس مرکزهای تشابه S و S' برای دایره‌های (A) و (B)، توسط نقطه‌های L و L' به‌طور همساز تقسیم می‌شوند.

نکتهٔ ۱. اگر از یک نقطهٔ دایرهٔ تشابه دو دایره، بتوان مماسهایی بر این دو دایره رسم کرد، نسبت این مماسها با نسبت شعاع دایره‌ها برابر است.

نکتهٔ ۲. دو دایره از هر نقطهٔ دایرهٔ تشابه آنها، با زاویه‌های برابر دیده می‌شوند، زیرا اگر MP و MQ (شکل) مماسهایی از نقطهٔ M روی دایرهٔ تشابه دایره‌های (A ، a) و (B ، b) برای دایره‌ها باشند، داریم :

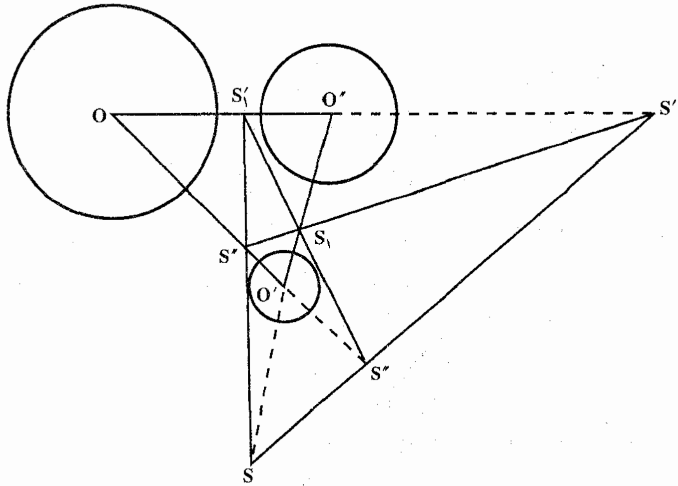
$$MP:MQ=a:b$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MPA و MQB متشابه‌اند.



۳۶۴. اولاً. S' مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O و O'' (شکل)، S'' مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O و O' و S مرکز تجانس مستقیم دایره‌های O' و O'' را به‌دست می‌آوریم. این سه نقطه، که هریک روی یکی از ضلعهای مثلث $OO'O''$ است، با رأسهای آن مثلث، رابطهٔ منلائوس را تشکیل می‌دهند ؛ زیرا در حقیقت، چون S'' خارج قطعه خط OO' است، داریم :

$$\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{S''O'}{S''O}=\frac{R'}{R} \qquad (۱)$$



همچنین (۲) $$\frac{\overline{S'O}}{\overline{S'O''}}=\frac{R}{R''}$$

و (۳) $$\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}}=\frac{R''}{R'}$$

حال اگر این سه رابطه را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{S'O}}{\overline{S'O''}}\cdot\frac{\overline{SO''}}{\overline{SO'}}\cdot\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{R}{R''}\cdot\frac{R''}{R'}\cdot\frac{R'}{R}=1$$

پس بنا به عکس قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ S، S' و S'' بر یک استقامتند.

ثانیاً. مرکزهای تجانس معکوس دایره‌ها را دوبه‌دو یافته S'_1 ، S''_1 و S_1 می‌نامیم (شکل) و ثابت می‌کنیم که هر دو نقطه از این سه نقطه (مثلاً S'_1 و S_1) با یکی از مرکزهای تجانس مستقیم (مثلاً S'') بر یک امتداد است. در حقیقت نقطه‌های S'_1 ، S_1 و S'' که بر ضلعهای مثلث $O''OO'$ واقعند، با رأسهای آن مثلث رابطهٔ منلائوس را تشکیل می‌دهند ؛ زیرا که :

$$\frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O'}}=\frac{-R''}{R'} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{S'_1O}}{\overline{S'_1O''}}=\frac{-R}{R''} \quad \text{و} \quad \frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=\frac{R'}{R}$$

و پس از ضرب سه رابطه در یکدیگر، خواهیم داشت :

$$\frac{\overline{S_1O''}}{\overline{S_1O'}}\times\frac{\overline{S'_1O}}{\overline{S'_1O''}}\times\frac{\overline{S''O'}}{\overline{S''O}}=1$$

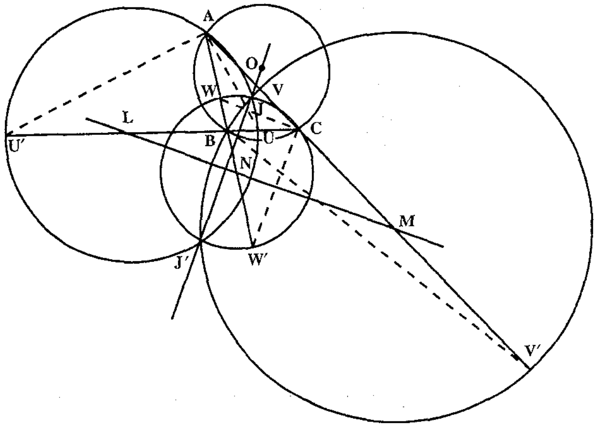
پس به موجب عکس قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ S_1 ، S'_1 و S'' بر یک استقامتند.

۳۶۵. داریم (شکل) :

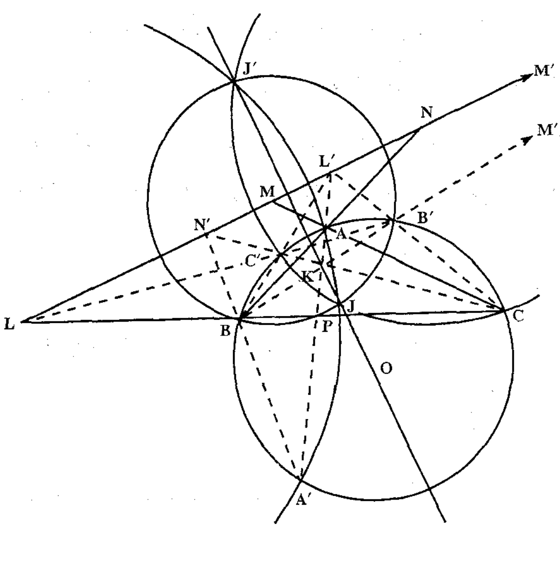
$$BU:CU = AB:AC = h_b:h_c = kh_b:kh_c$$

که در آن، k یک ضریب دلخواه است، پس U مرکز تشابه داخلی دو دایرهٔ (B, kh_b) و (C, kh_c) است و U' مرکز تشابه خارجی آنهاست.

به‌همین ترتیب، V و V' ، و W و W' مرکزهای تشابه جفت دایره‌های (C, kh_c) و (A, kh_a)، و (A, kh_a) و (B, kh_b) هستند.



۳۶۶. دایرهٔ محیطی (O) (شکل) و یک دایرهٔ آپولونیوسی، به‌عنوان مثال، (L) متعامدند ؛ پس وتر مشترکشان خط قطبی مرکز دایرهٔ (L) نسبت به (O) است ؛ درنتیجه اثبات قضیه کامل می‌شود.



نتیجه. نقطه‌های برخورد میانه‌های متقارن یک مثلث با دایرهٔ محیطی، روی دایره‌های آپولونیوسی متناظر نیز قرار دارند.

۳۶۷. درواقع، وتر مشترک دو دایرهٔ متعامد (O) و (L)، خط قطبی O نسبت به (L) نیز هست.
نتیجه. نقطه‌های همپوپای یک مثلث توسط مرکز دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان، به‌طور همساز تقسیم می‌شوند.

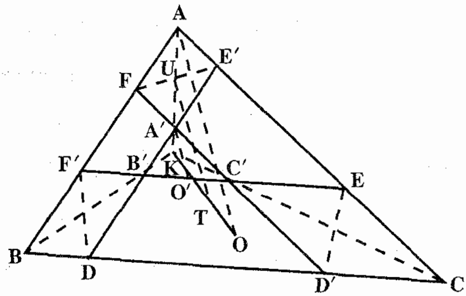
۳۶۸. درواقع، ضلعهای متناظر این دو مثلث بر شعاعهای یکسانی از دایرهٔ محیطی مثلث اصلی عمودند.

۳۶۹. O'' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث T و N مرکز دایرهٔ محیطی مثلث DEF مجانس یکدیگرند؛ زیرا دو مثلث T و DEF مجانس یکدیگرند. مرکز تجانس روی خط اولر قرار دارد. و همچنین نقطهٔ N و درنتیجه O'' روی این خط قرار دارد.
تبصره. اگر P شعاع دایرهٔ محاطی داخلی DEF و R و q شعاعهای دایره‌های محیطی ABC و T باشند:
نسبت تجانس شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی T و DEF برابر R:1 و شعاعهای دایره‌های محیطی آن دو $q:\frac{1}{2}R$ است.

در نتیجه $R:p=q:\frac{1}{2}R$ و یا $R^2=2pq$

۳۷۰. قطر $E'F$ از متوازی‌الاضلاع $AE'A'F$ در نقطهٔ U توسط قطر AA' نصف می‌شود، یعنی توسط میانهٔ متقارن $AA'K$ از مثلث ABC؛ پس $E'F$ با BC پاد موازی است.
به‌طور مشابه، $F'D$ با AC و $D'E$ با AB پاد موازی است.

دو خط موازی DD' و EF' و دو خط پادموازی $D'E$، DF' برای ضلعهای AC و AB، یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند؛ پس نقطه‌های D، D'، E و F' روی یک دایره‌اند. به‌طور مشابه نقطه‌های E، E'، F و D' روی یک دایره‌اند. نقطه‌های F، F'، D و E' نیز روی یک دایره‌اند. این دایره‌ها نمی‌توانند مجزا باشند، زیرا در این صورت محورهای اصلی آنها خطهای ED'، FE' و DF' هستند که یک مثلث تشکیل می‌دهند، حال آن که محورهای اصلی سه دایرهٔ مجزا همرسند، پس حداقل دو دایره از این سه دایره بر هم منطبقند و قضیه ثابت می‌شود.



تعریف. این دایره، دایرهٔ تاکر مثلث نامیده می‌شود.

نسبت تجانس مثلثهای ABC و A′B′C′ را به دلخواه می‌توان برگزید؛ پس مثلث ABC بینهایت دایرهٔ تاکر دارد.

اگر یکی از رأسهای A′B′C′ به‌عنوان مثال، A′ ، روی میانهٔ متقارن متناظرش AK انتخاب شود، نسبت تجانس تعیین می‌شود. اگر A′ همان A باشد، دایرهٔ تاکر متناظر همان دایرهٔ محیطی مثلث ABC خواهد بود. اگر A′ همان K باشد، یعنی وقتی پاد موازیهای D′F ، ... از K می‌گذرند، دایرهٔ تاکر بر دایرهٔ اوّل لوموان مثلث ABC منطبق است.

قضیه. مرکزهای دایره‌های تاکر روی قطر بروکار مثلث مفروض قرار دارند.

شعاع O′A′ از دایرهٔ محیطی مثلث A′B′C′ (شکل) با شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، موازی است و O′ با K و O همخط است؛ پس خط UT که از U، نقطهٔ وسط AA′ به موازات OA رسم می‌شود، از T نقطهٔ وسط OO′ می‌گذرد. OA بر E′F عمود است؛ پس UT عمودمنصف وتر E′F از دایرهٔ تاکر است. به‌طور مشابه، عمود منصفهای DF′ و D′E از T می‌گذرند و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه. مرکز T دایرهٔ تاکر (T) مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث A″B″C″ است، که با امتداد دادن خطهای E′F ، F′D و D′E تشکیل می‌شود.

پاره‌خطهای E′F ، F′D و D′E برابرند؛ بنابراین، این وترهای دایرهٔ تاکر از مرکز T دایره همفاصله‌اند و قضیه ثابت می‌شود.

قضیه. مثلث A″B″C″ با مثلث مماسی (Q) مثلث ABC متجانس است و نقطهٔ لوموان ABC مرکز تجانس است.

پاد موازیهای D′E و DF′ برای ضلعهای AB و AC برابرند، پس نقطهٔ برخوردشان،

یعنی رأس A'' مثلث $A''B''C''$، روی میانهٔ متقارن AK از مثلث ABC قرار دارد. چنین است برای B'' و C''. خطهای $D'E'$، $E'F'$ و $F'D'$ با ضلعهای (Q) موازی‌اند و رأسهای (Q) روی میانه‌های متقارن ABC قرار دارند؛ پس قضیه ثابت می شود.

۳۷۱. اگر دو منحنی (C) و (C') مجانس یکدیگر با مرکز تجانس (O) و نسبت تجانس k و (M',M) و (N',N) دو نقطهٔ متناظر از دو منحنی باشند، بنا به خاصیت تجانس داریم: $k = \frac{\overline{ON}}{\overline{ON'}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM'}}$ و درنتیجه $MN \| M'N'$ است و چون حد قاطع بریک منحنی به مماس بر آن منحنی تبدیل می‌شود، وقتی دو نقطهٔ تقاطع بینهایت به‌هم نزدیک شوند، لذا اگر N به‌سمت M میل کند، N' به سمت M' میل کرده و قاطعهای $\overline{MN}$ و درنتیجه $M'N'$ به مماسهای MT و $M'T'$ در نقطه‌های M و M' بر منحنیهای (C) و (C') تبدیل می‌شوند و چون MN موازی $M'N'$ است درحد نیز با هم موازی خواهند بود، یعنی $MT \| M'T'$ است.

۳۷۲. مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث مماسی (T) و مثلث پادک DEF از مثلث مفروض ABC، به ترتیب مرکز دایرهٔ محیطی O و مرکز ارتفاعی H از مثلث ABC هستند؛ پس نقطه‌های O و H نقطه‌های متناظر در دو شکل متجانس هستند و بنابراین، با مرکز تجانس این شکلها همخطند و قضیه ثابت می‌شود.

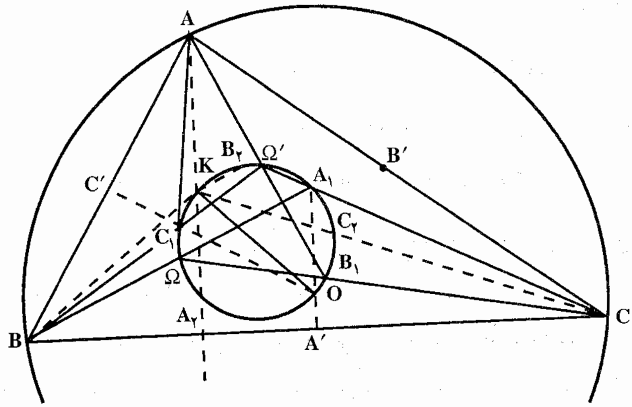
اگر ABC مثلثی با زاویهٔ منفرجه باشد، نقطه‌های O و H مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای (T) و DEF خواهند بود.

۳۷۳. اگر E و F پای عمودهایی باشند که از نقطهٔ مفروض M بر ضلعهای AC و AB از مثلث ABC رسم می‌شوند، خط EF بر مزدوج همزاویهٔ AM در زاویهٔ A عمود است؛ مزدوج AM از نقطهٔ M'، که مزدوج همزاویهٔ M نسبت به مثلث ABC است، می‌گذرد؛ پس EF با ضلعی از مثلث پادپایی M' که از A می‌گذرد، موازی است.

برای ضلعهای دیگر مثلث پایی M و مثلث پادپایی M' نیز مطلب مشابهی صادق است. پس اثبات قضیه کامل است.

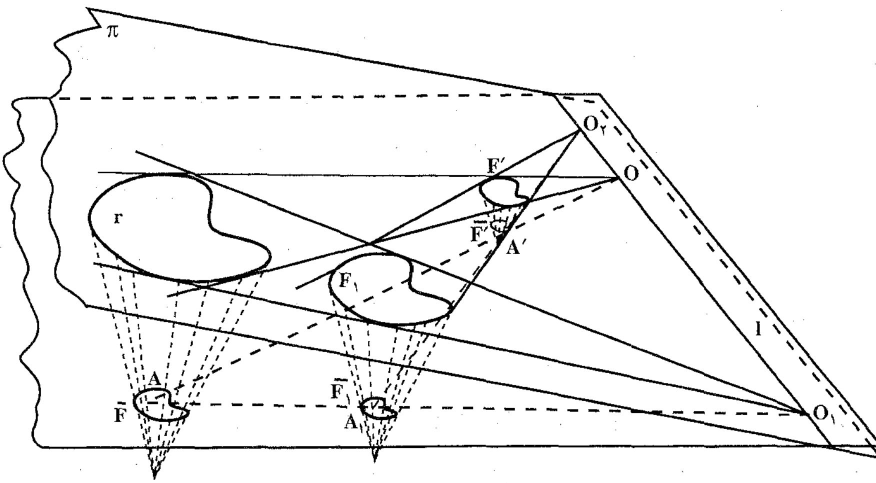
۳۷۴. درواقع، دایرهٔ نه نقطهٔ (N_g) از گروه مرکز ارتفاعی $GG_aG_bG_c$ در تجانس $(N, -\frac{۱}{۳})$ با دایرهٔ نه نقطهٔ (N) از گروه $HABC$ متناظر است؛ پس N مرکز مشترک دو دایرهٔ (N) و (N_g) است.

۳۷۶. عمودهایی که از وسط ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ (شکل) بر ضلعهای ABC رسم می‌شوند، با خطهای OA_1 ، OB_1 و OC_1 موازی‌اند؛ پس این عمودها یکدیگر را در نقطهٔ مکمل O برای مثلث $A_1B_1C_1$ قطع می‌کنند، یعنی در نقطهٔ O' برای آن داریم $GO':GO=-۱:۲$ ، که G مرکز ثقل $A_1B_1C_1$ است. G مرکز ثقل مثلث ABC نیز هست پس O' مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC است.



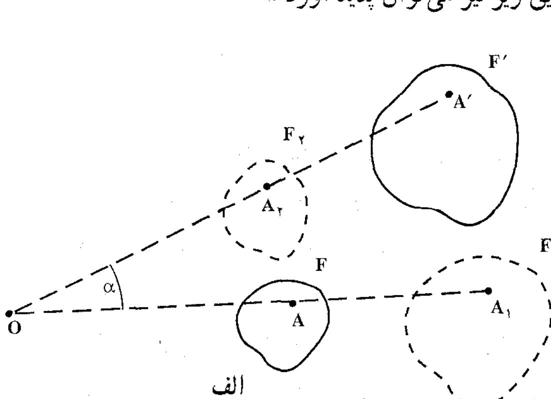
۳۷۹. برهان جالبی با استفاده از هندسهٔ فضایی برای قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس وجود دارد. صفحه‌ای را که سه شکل F، F_1 و F' در آن واقعند با حرف π نشان می‌دهیم. شکلهای F، F_1 و F' را تصویرهای مرکزی شکلهای فضایی $\overline{F}$ ، $\overline{F_1}$ و $\overline{F'}$ می‌گیریم که دو به دو مجانس یکدیگر باشند با همان مرکزهای تجانس O_1 ، O_2 و O (شکل). اگر $\overline{F'}$ مجانس F نباشد بلکه به توسط انتقال از F به‌دست آمده باشد، آن‌گاه $\overline{F'}$ هم به توسط همان انتقال از $\overline{F}$ به‌دست آمده است. فرض کنید A نقطهٔ دلخواهی از $\overline{F}$ باشد که در صفحهٔ π واقع نیست و A_1 و A' نقطه‌های متناظر آن در F_1 و F' باشند. در این صورت خط A_1A از O_1 می‌گذرد و A_1A' از O_2 و AA' از نقطهٔ O می‌گذرد (یا موازی با راستای انتقالی است که F را به F' می‌برد). پس اگر O_1 و O_2 بر هم منطبق باشند، خطهای A_1A و $A'A_1$ نیز بر هم منطبق می‌شوند؛ بنابراین خط AA' نیز بر AA_1 و A_1A' منطبق خواهد شد، یعنی نقطهٔ O که محل برخورد آنها با صفحهٔ

π است، بر O_1 و O_2 منطبق می‌شود. اگر $O_1 \neq O_2$، آن‌گاه صفحهٔ گذرنده از A، یا از O_1 و O_2 می‌گذرد و با راستای انتقالی که F را به F' می‌برد، موازی است.



تجانس مارپیچی و قرینه‌یابی تجانسی. شکلهای مشابه مستقیم و مشابه معکوس. فرض کنید شکل F_1 مجانس شکل F به مرکز O و نسبت تجانس مثبت k باشد. F_1 را به اندازهٔ زاویهٔ α حول نقطهٔ O دوران داده به وضعیت F' درمی‌آوریم (شکل الف). تبدیلی که F را به F' ببرد تجانس مارپیچی خوانده می‌شود. پس تجانس مارپیچی با دو اندازه مشخص می‌شود : نسبت تجانس k و زاویهٔ دوران α . نقطهٔ O مرکز تجانس مارپیچی خوانده می‌شود.

تجانسهای مارپیچی را به طریق زیر نیز می‌توان پدید آورد :

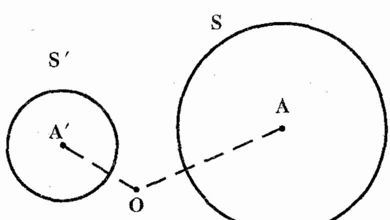


الف

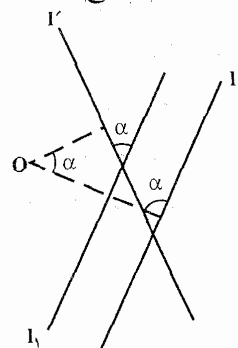
ابتدا باید F را حول مرکز O به زاویهٔ α دوران داد تا به وضعیت F_2 درآید، سپس با انجام تجانسی به مرکز O و نسبت k، شکل F_2 را به F' برد. به‌عبارت دیگر، هر تجانس مارپیچی به مرکز

O و زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k عبارت است از حاصلضرب (جمع) یک تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k و یک دوران حول O به زاویهٔ α، به هر ترتیبی که انجام می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر F' از F بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O و زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k به‌دست آید، آن‌گاه بعکس می‌توان F را از F' با یک تجانس مارپیچی (به‌همان مرکز تجانس O و زاویهٔ دوران $-\alpha$ و نسبت تجانس $1/k$) به‌دست آورد؛ پس می‌توان از شکلهایی سخن گفت که به توسط تجانسهای مارپیچی از یکدیگر به‌دست می‌آیند.

تجانس مارپیچی هر خط l را به خط جدید l' بدل می‌کند (شکل ب). برای ترسیم l' باید ابتدا خط l_1 را مجانس l به مرکز تجانس O و نسبت k رسم کرد، سپس l_1 را با دوران حول O به زاویهٔ α به وضعیت l' درآورد. دو خط l و l' با هم زاویهٔ α می‌سازند. هر دایرهٔ S براثر تجانس مارپیچی به یک دایرهٔ جدید S' بدل می‌شود (شکل پ)؛ نقطهٔ A' مرکز دایرهٔ S' نگارهٔ نقطهٔ A مرکز دایرهٔ S، بر اثر همان تجانس مارپیچی است، r' شعاع دایرهٔ S برابر است با kr که در آن r شعاع S و k نسبت تجانس است.



پ



ب

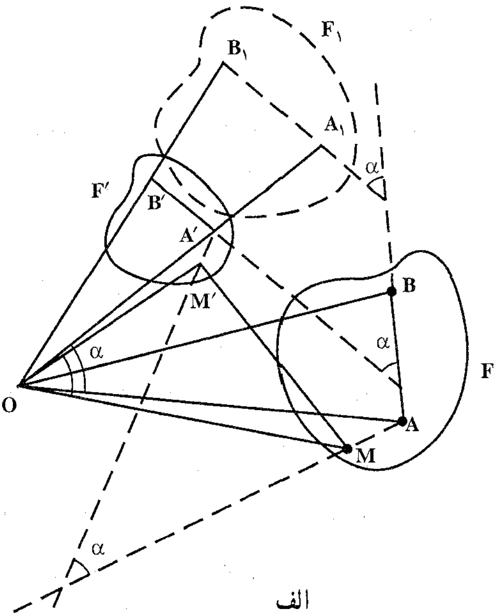
هر دوران حول یک نقطه حالت خاصی از تجانس مارپیچی است (با نسبت تجانس $k = 1$). بر این اساس می‌توان برخی از مسأله‌ها را که در حل آنها از دوران استفاده می‌شود، تعمیم داد؛ در حل مسأله‌های کلی‌تر باید به‌جای دوران، از تجانسهای مارپیچی استفاده کرد.

حالت خاص دیگر تجانس مارپیچی، تجانس است (تجانس با نسبت k یک تجانس مارپیچی به زاویهٔ $\alpha = 0^\circ$ است اگر $k > 0$، و به زاویهٔ $\alpha = 180^\circ$ است اگر $k < 0$).

تنها نقطهٔ ثابت هر تجانس مارپیچی (غیر از تبدیل همانی، که می توان آن را یک تجانس مارپیچی به زاویهٔ دوران °۰ و نسبت تجانس ۱ در نظر گرفت) نقطهٔ O یعنی مرکز تجانس است. هرگاه تجانس مارپیچی که تجانس مرکزی نباشد (یعنی هر تجانس مارپیچی به زاویهٔ دوران غیر از °۰ و °۱۸۰) هیچ خط ثابت ندارد.

۳۸۰. فرض می‌کنیم شکل F' از شکل F بر اثر یک تجانس مارپیچی به زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس k به‌دست آید (شکل الف). همچنین فرض می‌کنیم AB و $A'B'$ دو پاره‌خط متناظر دلخواه در این دو شکل باشند. در این حالت تساوی $A'B'/AB = k$ برقرار است (زیرا در شکل الف، که در آن F_1 از F براثر دورانی به اندازهٔ زاویهٔ α به‌دست آمده و F' از F_1 براثر تجانسی با نسبت k به‌دست آمده است، داریم $A_1B_1 = AB$ و $A'B'/A_1B_1 = k$) و زاویهٔ بین پاره‌خطهای $A'B'$ و AB برابر است با α (زیرا زاویهٔ بین AB و A_1B_1 برابر است با α و داریم $A'B' \| A_1B_1$)، پس پاره‌خطهای متناظر در شکلهای F' و F دارای نسبت ثابت k هستند و با یکدیگر زاویهٔ ثابت α می‌سازند. اکنون ثابت می‌کنیم که بعکس، اگر به هر نقطهٔ F نقطه‌ای از F' متناظر باشد، چنان که پاره‌خطهای متناظر در این شکلها دارای نسبت ثابت k باشند و با هم زاویهٔ ثابت α بسازند (پاره‌خطهای شکل F، اگر در جهت معینی به اندازهٔ زاویهٔ α دوران داده شوند، با پاره‌خطهای متناظرشان در F' موازی می‌شوند)، آن‌گاه F و F' به توسط یک تجانس مارپیچی به هم مرتبط‌اند؛ زیرا فرض می‌کنیم M و M' دو نقطهٔ متناظر دلخواه از F و F' باشند (شکل الف). روی پاره‌خط MM' مثلث $MM'O$ را طوری بنا می‌کنیم که $\overline{OM'}/\overline{OM} = k$ و $M\hat{O}M' = \alpha$. (اگر $\alpha > 180^\circ$، آن‌گاه مثلث را با زاویهٔ $M\hat{O}M' = 360^\circ - \alpha$ رسم می‌کنیم).

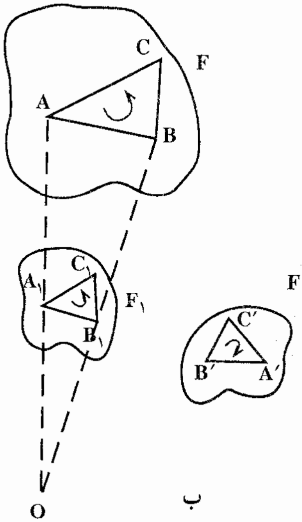
تجانس مارپیچی به مرکز O و زاویهٔ دوران α و نسبت k، نقطهٔ M را به نقطهٔ M' بدل می‌کند؛ اکنون ثابت می‌کنیم که این تجانس هر نقطهٔ A از F را به نقطهٔ متناظرش A' در F' می‌برد. مثلثهای OMA و $OM'A'$ را در نظر می‌گیریم. در این مثلثها داریم: $OM'/OM = M'A'/MA$ (زیرا بنا به ترسیم $OM'/OM = k$ و بنا به فرض $M'A'/MA = k$) و $O\hat{M}A = O\hat{M'}A'$ (زیرا زاویهٔ بین OM و OM' به موجب



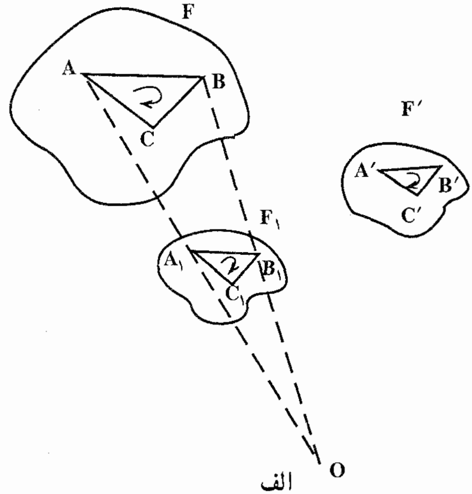
الف

ترسیم برابر با α است و زاویهٔ بین MA و $M'A'$ بنا به فرض برابر با α است ؛ پس این دو مثلث متشابه‌اند. از این‌جا نتیجه می‌شود که $OA'/OA = k$ ؛ همچنین $A\hat{O}A' = M\hat{O}M' = \alpha$ (زیرا $A\hat{O}M = A'\hat{O}M'$). این نتیجه به معنی آن است که تجانس مارپیچی بالا A را به A' می‌برد.

۳۸۲. ابتدا بسادگی نشان داده می‌شود که هر دو قطعهٔ AB و $A'B'$ را با یک تجانس مارپیچی با زاویهٔ دورانی مساوی با زاویهٔ بین پاره‌خطها و نسبت تجانسی مساوی با نسبت پاره‌خطها می‌توان برهم قرار داد ؛ تنها استثنا وقتی پیش می‌آید که پاره‌خطها متساوی، متوازی و همجهت باشند، که در این صورت می‌توان آنها را با یک انتقال بر یکدیگر قرار داد. اکنون به‌وسیلهٔ تجانس مارپیچی یا انتقال، پاره‌خط AB از شکل F را به پاره‌خط متناظر آن $A'B'$ در شکل F' که مستقیماً متشابه با F است، بدل می‌کنیم. به‌آسانی می‌توان نشان داد که تمامی شکل F به F' بدل شده است. اگر F و F' را بتوان با تجانس مارپیچی به مرکز O بر هم قرار داد، آن‌گاه O مرکز دوران (یا گاهی مرکز تجانس) F و F' خوانده می‌شود. برای یافتن مرکز دوران دو شکل مستقیماً F و F'، باید یک زوج پاره‌خطهای متناظر AB و $A'B'$ در این شکلها اختیار کرد. اگر خطهای AB و $A'B'$



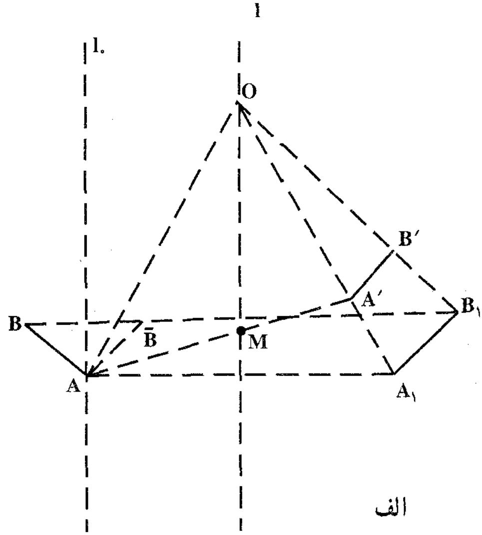
ب



الف

در نقطهٔ P متقاطع باشند و اگر AA' و BB' در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه O عبارت است از دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای PAA' و PBB'، یا دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای QAB و $QA'B'$. اگر $AB \| A'B'$، O بر Q منطبق است؛ اگر $AA' \| BB'$، O بر P منطبق است. بالاخره اگر $AB \| A'B'$ و $AA' \| BB'$، پاره‌خطهای AB و $A'B'$ متساوی، متوازی و همجهتند. در این حالت شکلهای F و F' با یک انتقال به یکدیگر بدل می‌شوند و مرکز دورانی وجود نخواهد داشت.

۳۸۳. فرض کنید A و B دو نقطهٔ دلخواه از F باشند و نقطه‌های متناظر آنها را در شکل F' که معکوساً متشابه با F است، A' و B' می‌نامیم. ثابت می‌کنیم که یک قرینه‌یابی تجانسی (یا یک لغزه) وجود دارد که پاره‌خط AB را به پاره‌خط $A'B'$ بدل می‌کند. زیرا فرض می‌کنیم l محور یک قرینه‌یابی تجانسی (یا محور یک لغزه) باشد که AB را به $A'B'$ بدل می‌کند (شکل الف). $A'B'$ را با انتقال به وضعیت جدید $A\bar{B}$ درمی‌آوریم. پاره‌خط A_1B_1، قرینهٔ محوری AB نسبت به l، مجانس $A'B'$ است یا از $A'B'$ بر اثر یک انتقال به‌دست آمده است؛ درنتیجه، پاره‌خطهای A_1B_1 و $A\bar{B}$ با $A'B'$ موازی‌اند. چون A_1B_1 قرینهٔ محوری AB نسبت به l است و با $A\bar{B}$ موازی است، نتیجه می‌شود که l با خط l_0، نیمساز زاویهٔ $\bar{B}AB$ موازی است.



الف

بعلاوه، فرض می‌کنیم که $A'B' \neq AB$ و O مرکز قرینه‌یابی تجانسی باشد که AB را به $A'B'$ بدل می‌کند. در این صورت l نیمساز زاویه‌ای از مثلث AOA_1 و بنابراین نیمساز زاویه‌ای از مثلث AOA' است، پس AA' خط l را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند، به‌طوری که

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OA'}{OA_1}=\frac{A'B'}{A_1B_1}$$

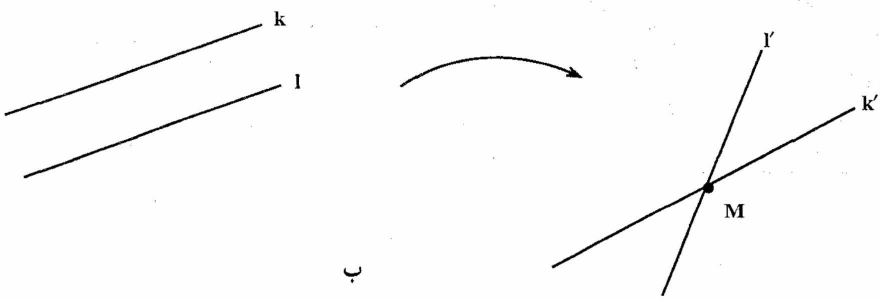
یا

$$\frac{A'M}{MA}=\frac{A'B'}{AB}$$

پس اگر پاره‌خطهای AB و $A'B'$ معلوم باشند، می‌توانیم خط l را رسم کنیم : این خط با نیمساز زاویهٔ $\bar{B}AB$ موازی است و پاره‌خط AA' را به نسبت $A'B'/AB$ تقسیم می‌کند (این ترسیم حتی وقتی که $AB' = AB$ عملی است). با یافتن قرینهٔ محوری پاره خط AB نسبت به l پاره‌خط A_1B_1 به‌دست می‌آید که با $A'B'$ موازی است. A_1B_1 را با تجانسی به مرکز O، نقطهٔ برخورد $A'A_1$ و l (زیرا $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'M}{MA}=\frac{OA'}{OA}=\frac{OA'}{OA_1}$)، یا با انتقالی درجهت خط l می‌توان به $A'B'$ بدل کرد. پس بدین ترتیب قرینه‌یابی تجانسی (یا لغزهٔ) مطلوب را که می‌خواستیم وجودش را نشان دهیم، یافته‌ایم.

۳۸۴. برای اثبات حکمهای بالا باید ثابت کنیم هر تبدیلی که خط راست را به خط راست و دایره را به دایره بدل می‌کند، هر دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ d واحد را نیز به دو نقطهٔ A′ و B′ به فاصلهٔ d′ واحدی بدل می‌کند که در این‌جا d′ تنها به d بستگی دارد، نه به انتخاب خاص نقطه‌های A و B. این مطلب را به‌عنوان مثال با استدلال زیر می‌توان نشان داد:

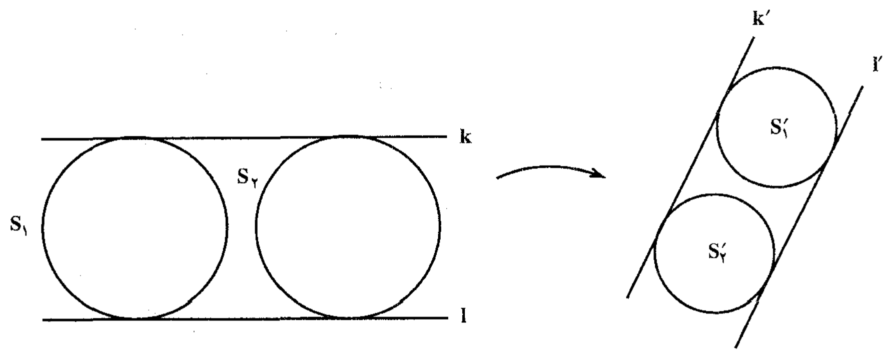
ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که تبدیلی از صفحه برروی خودش که خط را به خط بدل می‌کند، الزاماً باید خطهای متوازی را به خطهای متوازی بدل کند؛ زیرا، اگر تبدیل موردنظر بخواهد دو خط متوازی k و l را به دو خط k′ و l′ که در نقطهٔ M متقاطعند بدل کند (شکل ب)، پس نقطه‌ای که به M بدل شده باید بر هر دو خط k و l واقع باشد و چنین نقطه‌ای وجود ندارد.



ب

بعلاوه روشن است که اگر تبدیلی خط را به خط و دایره را به دایره بدل کند، آن‌گاه دو دایرهٔ متقاطع یا یک خط و یک دایرهٔ متقاطع را به دو دایرهٔ متقاطع یا به یک خط و یک دایرهٔ متقاطع بدل می‌کند. همچنین دو دایرهٔ مماس برهم یا یک دایره و یک خط مماس بر آن را، به دو دایرهٔ مماس یا به یک دایره و یک خط مماس بر آن بدل می‌کند. بالاخره، دو دایره یا دایره و خطی را که هیچ نقطهٔ مشترک ندارند به دو دایره یا دایره و خطی که هیچ نقطهٔ مشترک ندارند، بدل می‌کند. از همهٔ اینها نتیجه می‌شود که دو دایرهٔ قابل انطباق با هم یعنی دو دایره که مماسهای مشترک موازی دارند، به دایره‌های قابل انطباق با هم بدل می‌شوند (شکل پ). بعلاوه، اگر تبدیل موردنظر دایرهٔ S را به دایرهٔ S′ بدل کند، آن‌گاه باید نقطهٔ O مرکز S را به نقطهٔ O′ مرکز S′ بدل کند؛ زیرا نقطهٔ O دارای این‌وجه مشخصه است که هر دو دایره که از O بگذرند و بر S مماس باشند، با هم قابل انطباقند. به‌همین ترتیب، وجه مشخصهٔ O′ این است که دو دایره که از آن بگذرند و بر S′ مماس باشند، با هم قابل انطباقند (شکل ت). ولی قبلاً دیده‌ایم که دایره‌های

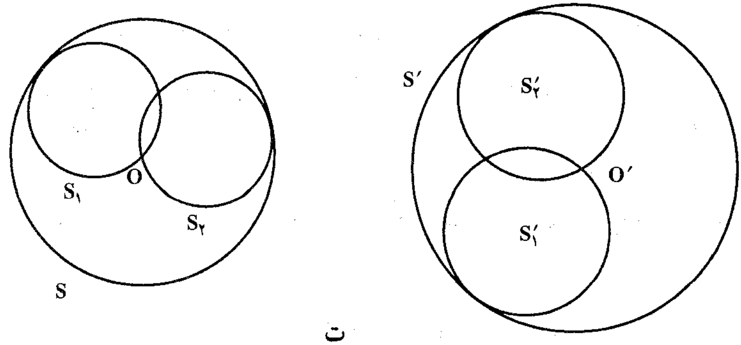
قابل انطباق با هم به دایره‌های قابل انطباق با هم بدل می‌شوند و دایره‌های مماس برهم به دایره‌های مماس بر هم، بنابراین O باید به O' بدل شود. ولی اکنون روشن است که اگر فاصله‌های AB و CD مساوی باشند، یعنی اگر دایرهٔ S_1 به مرکز A و به شعاع AB و دایرهٔ S_2 به مرکز C و شعاع CD با هم قابل انطباق باشند، آن‌گاه تبدیل باید نقطه‌های A، B، C و D را به نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' بدل کند. چنان که دایرهٔ S'_1 به مرکز A' و به شعاع $A'B'$ و دایرهٔ S'_2 به مرکز C' و به شعاع $C'D'$ با هم قابل انطباق باشند (شکل ث).



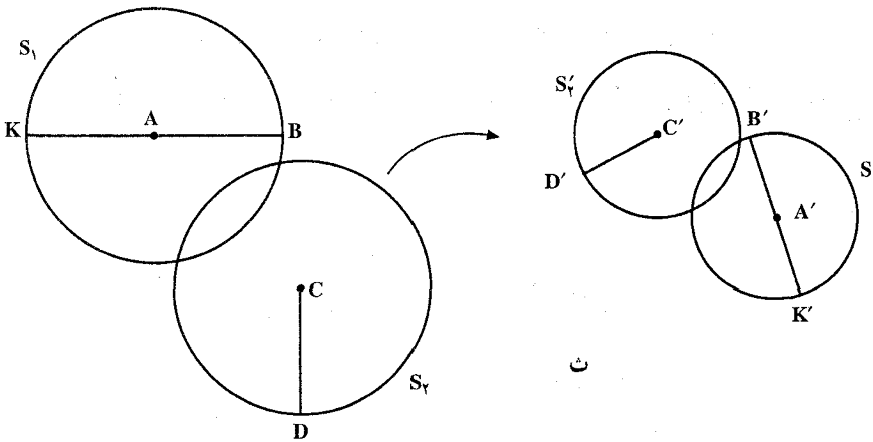
پ

بنابراین، اگر پاره‌خطهای AB و CD دارای طول متساوی باشند، طولهای پاره‌خطهای $A'B'$ و $C'D'$ حاصل از تبدیل هم با یکدیگر متساوی‌اند و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. بخش آخر این برهان کم و بیش به روال متعارف صورت می‌گیرد. در هندسه اغلب به این‌گونه استدلالها برمی‌خوریم. ابتدا باید توجه داشت که اگر سه نقطهٔ K، A و B بر یک خط چنان باشند که $KA = AB$ ، آن‌گاه تبدیل مورد نظر آنها را به سه نقطهٔ K' ، A' و B' واقع بر یک خط بدل خواهد کرد، چنان که $K'A' = A'B'$ ، این حکم از آن‌جا ناشی می‌شود که اگر دو پاره‌خط متساوی باشند، تبدیل موردنظر آنها را به دو پاره‌خط متساوی بدل می‌کند (شکل ث). از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر نسبت $CD/AB = m/n$ گویا باشد (m و n اعداد صحیح مثبتند)، تبدیل موردنظر، نقطه‌های A، B، C و D را به نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' بدل می‌کند، چنان که

$$\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB} \left(= \frac{m}{n}\right)$$



ت



ث

درواقع شرط $CD/AB = m/n$ هم ارز است با وجود $n-1$ نقطهٔ A_1 ، A_2 ، ...، A_{n-1} بر خط AB و $m-1$ نقطهٔ C_1 ، C_2 ، ...، C_{m-1} بر خط CD چنان که

$$AA_1 = A_1A_2 = \cdots = A_{n-1}B = CC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_{m-1}D$$

ولی روشن است که تبدیل موردنظر این نقطه‌ها را به نقطه‌های A'_1 ، A'_2 ، ...، A'_{n-1} و B'_1 ، B'_2 ، ...، B'_{m-1} بدل می‌کند که $n-1$ تای اوّل آنها بر خط $A'B'$ و $m-1$ تای آخر آنها بر خط $C'D'$ واقعند. چنان که (شکل ج)

$$A'A'_1 = A'_1A'_2 = \cdots = A'_{n-1}B' = C'C'_1 = C'_1C'_2 = \cdots = C'_{m-1}D$$

بعلاوه، تنها کافی است توجه کنیم که اگر $MN > PQ$ ، آن‌گاه N خارج دایرهٔ S به مرکز M و به شعاع PQ قرار می‌گیرد، یعنی از N دو مماس بر S می‌توانیم رسم کنیم ؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که تبدیل موردنظر، نقطه‌های M، N، P و Q با شرط $MN > PQ$

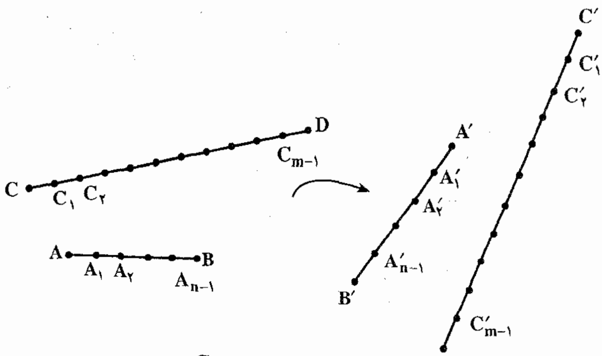
را به نقطه‌های M'، N'، P' و Q' می‌برد، چنان که $M'N' > P'Q'$ (شکل چ).
بنابراین اگر نسبت فاصله‌های AB و CD گویا نباشد و اگر

$$\frac{m}{n} < \frac{CD}{AB} < \frac{m+1}{n}$$

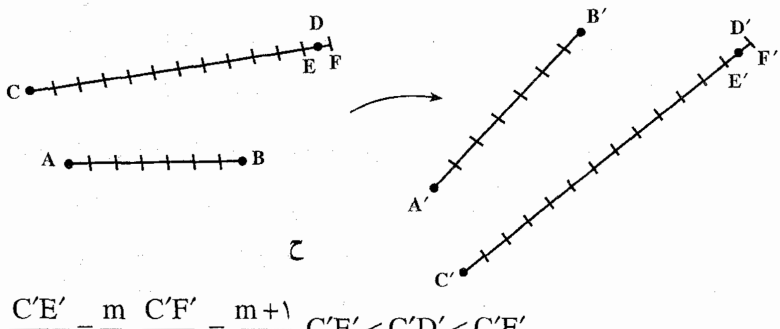
که در آن m و n اعداد صحیح مثبتند، آن گاه نقطه‌هایی مانند E و F بر خط C موجودند چنان که

$$\frac{CE}{AB} = \frac{m}{n}, \frac{CF}{AB} = \frac{m+1}{n}, CE < CD < CF$$

پس تبدیل موردنظر نقطه‌های A، B، C، D، E و F را به نقطه‌های A'، B'، C'، D'، E' و F' بدل می‌کند. چنان که E و F' بر خط $C'D'$ قرار می‌گیرند (شکل ح) و



چ



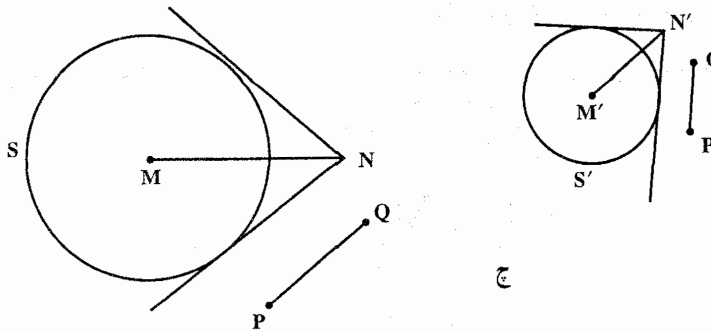
ح

$$\frac{C'E'}{A'B'} = \frac{m}{n}, \frac{C'F'}{A'B'} = \frac{m+1}{n}, C'E' < C'D' < C'F'$$

از این‌جانتیجه می‌شود که

$$\frac{m}{n} < \frac{C'D'}{A'B'} < \frac{m+1}{n}$$

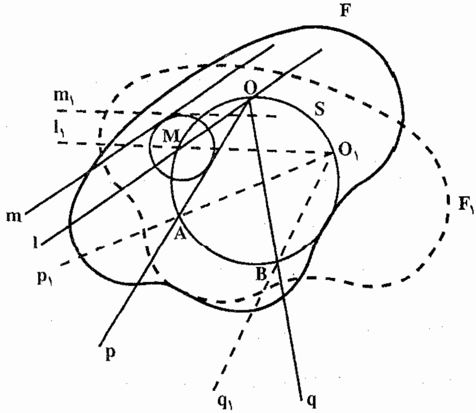
در این نامساوی ودر نامساوی مربوط به CD/AB مخرج n را می‌توان به‌اندازهٔ دلخواه بزرگ اختیار کرد؛ نتیجه می‌گیریم که $C'D'/A'B' = CD/AB$.



چ

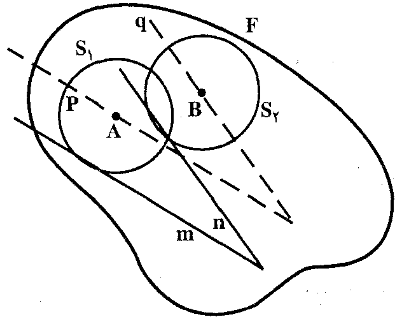
۳۸۵. فرض کنید F و F_1 دو وضعیت از F باشند، وضعیتهای متناظر خطهای p و q را p_1 و q_1 می‌نامیم و نقطه‌های برخورد p و q، p_1 و q_1 را O و O_1 می‌نامیم (شکل الف). نقطه‌های O و O_1 بر کمانی از دایرهٔ S واقعند که بر وتر AB بنا شده و حاوی زاویه‌ای برابر با زاویهٔ بین p و q باشد. وضع جدید خطی چون l را که از نقطهٔ O می‌گذرد، l_1 می‌نامیم که از O_1 می‌گذرد و فرض می‌کنیم M و M_1 نقطه‌های برخورد l و l_1 با محیط S باشند. چون $M\hat{O}A = M_1\hat{O}_1A$ (زیرا زاویهٔ بین خطهای l و p تغییر نمی‌کند). نتیجه می‌شود که (کمان $\widehat{AM_1}$) = (کمان $\widehat{AM}$) یعنی $M_1 = M_2$. پس نشان داده‌ایم که خط l در هر وضعیتی که باشد از یک نقطهٔ M می‌گذرد.

اکنون m را خطی بگیرید که از O نمی‌گذرد. خط l را از نقطهٔ O به موازات m رسم می‌کنیم. همان‌طور که دیده‌ایم خط l در هر وضعی که باشد از یک نقطهٔ M می‌گذرد. چون فاصلهٔ بین خطهای m و l ثابت می‌ماند، خط l در هر وضعی که باشد باید بر دایره‌ای به مرکز M و به شعاعی برابر فاصلهٔ l تا m مماس باشد. این نتیجه برهان قضیه را کامل می‌کند.



الف

اکنون فرض می‌کنیم که شکل F در صفحه طوری حرکت کند که دو خط ناموازی m و n از شکل همواره بر دو دایرهٔ مفروض S_1 و S_2 مماس باشند (شکل ب). از نقطه‌های A و B، مرکزهای دایره‌های S_1 و S_2، خطهای p و q را بترتیب موازی با m و n می‌گذرانیم. فاصلهٔ بین m و p برابر است با شعاع S_1؛ زیرا این فاصله طی حرکت



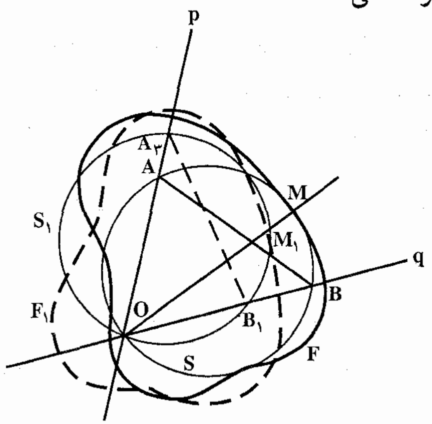
ب

شکل، تغییر نمی‌کند و خط l همواره از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد. به‌طور مشابه، خط q همواره از B می‌گذرد. بنابراین، قضیهٔ ۱ را می‌توانیم در این‌جا به‌کاربریم؛ و نیز می‌بینیم که در چنین حرکتی هر خط از شکل F یا همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس است یا همواره از نقطهٔ مفروضی می‌گذرد.

اگر شکل F در صفحه چنان حرکت کند که دو نقطهٔ مفروض A و B در شکل، خطهای متوازی p و q را بپیمایند، پس پاره‌خط AB در تمام وضعیتها با خودش موازی است (زیرا سینوس زاویهٔ بین AB و p تغییر نمی‌کند: مقدارش برابر است با نسبت فاصلهٔ بین p و q با طول پاره‌خط AB). پس هر دو وضعیت دلخواه شکل را می‌توان با انتقالی در راستای p از یکدیگر به دست آورد، بنابراین انتقالی از شکل در دست است، که این حالت را قبلاً مطالعه کردیم.

۳۸۶. فرض کنید F و F_1 دو وضعیت از شکل F باشند و AB و A_1B_1 دو وضعیت متناظر از یک پاره‌خط AB (شکل الف). دایره‌ای را که از نقطه‌های A، B و O می‌گذرد، رسم می‌کنیم. این دایره را چسبیده به شکل F در نظر می‌گیریم و S_1 را معرف وضعیت این دایره هنگامی که F به وضعیت F_1 درآمده باشد؛ روشن است که S_1 از O نیز می‌گذرد (زیرا کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ S برابر است با کمان $\overset{\frown}{A_1B_1}$ از دایرهٔ S_1 که مساوی با $2\,A\hat{O}B$ است. فرض می‌کنیم M نقطهٔ دلخواهی از S باشد و نقطهٔ متناظر آن در S_1 را M_1 می‌نامیم. از قابلیت انطباق شکلهای F و F_1 با هم نتیجه می‌شود که کمانهای $\overset{\frown}{AM}$ و

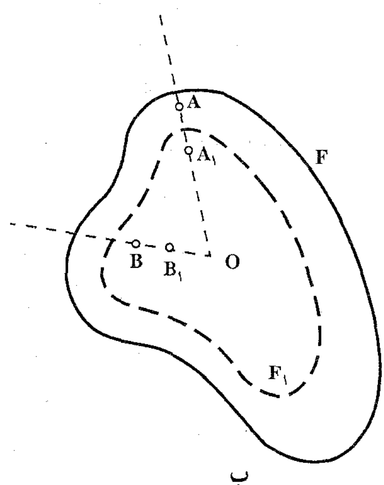
$\widehat{A_1M_1}$ متساوی‌اند؛ یعنی زاویه‌های محاطی AOM و A_1OM_1 رو به رو به این کمانها نیز متساوی‌اند. اما این بدان معنی است که خط OM_1 بر خط OM منطبق است. درنتیجه، همان طور که می‌خواستیم ثابت کنیم، هر نقطهٔ M از دایرهٔ S، بر طول خطی که از O می‌گذرد حرکت می‌کند.



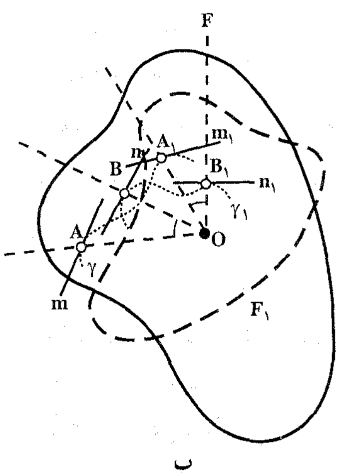
الف

همچنین یادآوری می‌کنیم که نقطهٔ N مرکز S بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاعی برابر با R، شعاع دایرهٔ S، حرکت می‌کند؛ این حکم از آن‌جا ناشی می‌شود که S در هر وضعی که باشد از نقطهٔ O می‌گذرد و بنابراین فاصلهٔ ON همیشه مساوی با R باقی می‌ماند.
اکنون فرض می‌کنیم F و F_1 دو شکل متشابه در صفحه باشند. می دانیم که F را می‌توان با یک تجانس مارپیچی به F' بدل کرد؛ ولی در آن‌جا وضعیتهای میانی حاصل، در حین حرکت از وضعیت F به وضعیت F' را بررسی نکردیم. اکنون دستگاه شکلهای دو به دو متشابه حاصل از کلیهٔ وضعیتهای شکل را هنگام حرکت از وضعیت F به وضعیت F' به‌طوری که همواره با وضعیت اوّلیه متشابه بمانند، درنظر می گیریم.
ابتدا فرض می‌کنیم که F طوری حرکت کند که همواره با وضعیت اوّلیه‌اش متشابه بماند و بعلاوه، یک نقطهٔ O از شکل به هیچ وجه حرکت نکند. اگر در همین حال، نقطهٔ دیگری از شکل مثلاً A، دایره‌ای به مرکز O را بپیماید، آن‌گاه فاصلهٔ بین O و A تغییر نمی‌کند. درنتیجه F همواره قابل انطباق (و نه صرفاً متشابه) با وضعیت اوّلیه‌اش باقی می‌ماند و همهٔ نقطه‌های F دایره‌هایی به مرکز O می‌پیمایند. اگر نقطهٔ A خطی را که از O می‌گذرد، بپیماید، هر نقطهٔ دیگر مثلاً B نیز خطی را می‌پیماید که از O می‌گذرد (زیرا وقتی F متشابه با وضعیت اوّلیه‌اش باقی‌بماند، زاویهٔ BOA نمی‌تواند تغییر

کند)؛ معنی این حرکت شکل آن است که همواره می‌توان آن را با یک تجانس به مرکز O، به وضعیت اوّلیه‌اش برگرداند (شکل پ). اکنون فرض می‌کنیم که نقطهٔ A از شکل F یک منحنی دلخواه γ را بپیماید؛ نشان خواهیم داد که در این صورت هر نقطهٔ دیگر B (بجز نقطهٔ O) یک منحنی متشابه با γ را می‌پیماید (شکل پ). زیرا فرض می‌کنیم F وضعیت اوّلیه و F_1 وضع غیرمشخص دیگری از شکل F باشد. A_1 و B_1 را وضعیتهای متناظر نقطه‌های A و B بگیرید. چون همهٔ وضعیتهای شکل با وضعیت اوّلیه متشابه‌اند و چون نقطهٔ O حرکت نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که مثلثهای OAB و OA_1B_1 متشابه‌اند، بنابراین $B_1\hat{O}A_1 = B\hat{O}A$ و $OB_1/OA_1 = OB/OA$ زاویهٔ BOA را مساوی α و نسبت OB/OA را مساوی k می‌گیریم؛ معادله‌های اخیر نشان می‌دهند که یک تجانس مارپیچی به مرکز O، نسبت تجانس k و زاویهٔ دوران α نقطهٔ B_1 را به A_1 بدل می‌کند. چون F_1 وضعیت دلخواهی از شکل بود، این بدان معنی است که این تجانس مارپیچی تمامی منحنی γ' را که نقطهٔ B پیموده است به منحنی γ که A پیموده است بدل می‌کند. حال اگر دو منحنی را بتوان با یک تبدیل مارپیچی به یکدیگر بدل کرد، آن دو متشابه‌اند و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



ب



پ

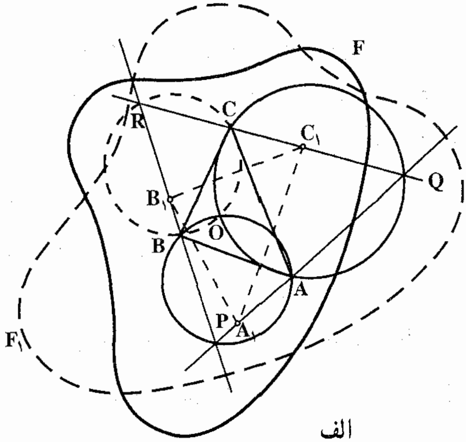
به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر یک خط m از شکل F که از O نمی‌گذرد، همواره بر یک منحنی γ مماس باشد، آن‌گاه هر خط n از شکل (که از O نگذرد) همواره بر یک منحنی متشابه با γ مماس است (شکل پ). این منحنی بر اثر یک

تجانس مارپیچی به مرکز O که m را به n بدل می‌کند از منحنی γ به‌دست می‌آید. بخصوص اگر یک خط m از شکل F که از O نمی‌گذرد همیشه از نقطهٔ مفروض M بگذرد، آن‌گاه هر خط دیگر n از شکل (که از O نمی‌گذرد) همواره از نقطهٔ ثابتی خواهد گذشت (این نقطه برای همهٔ خطها یکی نیست).

همچنین یادآوری می‌کنیم که اگر شکل F طوری حرکت کند که یکی از نقطه‌های آن (O) ثابت بماند، آن‌گاه O مرکز دوران هر دو وضعیت دلخواه از این شکل است. زیرا از تشابه مثلثهای AOB و A_1OB_1 (شکل پ) نتیجه می‌شود که مثلثهای AOA_1 و BOB_1 نیز متشابه‌اند ($A\hat{O}A_1 = B\hat{O}B_1$ زیرا $A\hat{O}A_1 = A\hat{O}B + B\hat{O}A_1$ و $B\hat{O}B_1 = A_1\hat{O}B_1 + B\hat{O}A_1$ ؛ بعلاوه $OA_1/OA = OB_1/OB$ زیرا $OB_1/OA_1 = OB/OA$). ولی این بدان معنی است که شکل F_1 بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز O، و زاویهٔ دوران A_1OA و نسبت تشابه OA_1/OA از شکل F به‌دست می‌آید.

بعکس، اگر F طوری حرکت کند که همیشه با وضعیت اوّلیه‌اش متشابه بماند و چنان که هر دو وضعیت غیر مشخص F دارای یک مرکز دوران O باشند، آن‌گاه نقطهٔ O که نقطه‌ای از F تلقی می‌شود حرکت نمی‌کند (زیرا مرکز دوران در تبدیل تجانسی نقطهٔ ثابتی است).

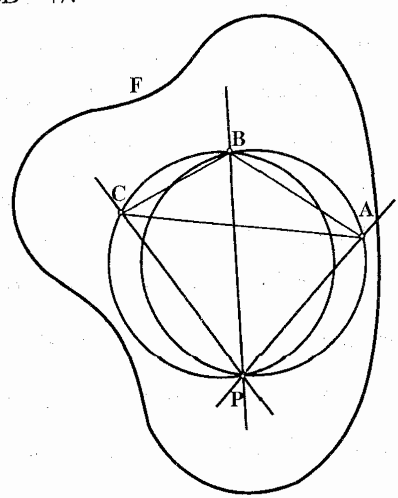
۳۸۷. نشان می‌دهیم که هر دو وضعیت از F دارای یک مرکز دوران O هستند (یعنی، یک نقطهٔ O از F طی حرکت F ثابت می‌ماند). از این‌جا نتیجه خواهد شد که همهٔ نقطه‌های F منحنیهایی می‌پیمایند که با خمی که A می‌پیماید متشابه‌اند، یعنی خطوط راست هستند ؛ و این همان چیزی خواهد بود که می‌خواهیم ثابت کنیم. نقطه‌های برخورد خطهایی را که مسیر حرکت نقطه‌های A، B و C هستند با حروف P، Q و R نشان می‌دهیم (شکل الف). فرض می‌کنیم F و F_1 دو وضعیت از شکل F باشند ؛ وضعیتهای متناظر سه نقطهٔ موردنظر را به A، B، C و A_1، B_1، C_1 نشان می‌دهیم. نقطهٔ O مرکز دوران شکلهای F و F_1 مرکز دوران پاره‌خطهای AB و A_1B_1، AC و A_1C_1 نیز هست. می‌دانیم که مرکز دوران پاره‌خطهای AB و $A'B'$ روی دایره‌های محیطی مثلثهای ABQ و $A'B'Q$ قرار می‌گیرد که در این جا Q نقطهٔ برخورد AA' و BB' است ؛ در حالت فعلی این بدان معنی است که O باید روی دایرهٔ محیطی ΔABP (و روی دایرهٔ محیطی ΔA_1B_1P) قرار گیرد. به همین ترتیب مرکز دوران پاره‌خطهای AC و A_1C_1 روی دایرهٔ محیطی مثلث ACQ (و روی دایرهٔ محیطی ΔA_1C_1Q) قرار می‌گیرد.



الف

اگر خطهایی که نقطه‌های A، B و C می‌پیمایند از یک نقطهٔ مشترک P بگذرند (شکل ب)، آن‌گاه حالت کلی حکم قضیهٔ بالا همچنان معتبر خواهد ماند. برهان آن هم با آنچه گفته شد تفاوتی نخواهد داشت؛ مرکز تجانس مشترک برای همهٔ وضعیتها اوّلاً باید بر نقطهٔ برخورد دایره‌های ABP و BCP، یعنی بر P منطبق باشد (که در این‌جا A، B و C وضعیتهای سه نقطهٔ موردنظر از F در یک لحظهٔ خاص هستند). تنها استثنا در این مورد حالتی است که در آن دایره‌های ABP و BCP بر هم منطبق باشند، یعنی نقطه‌های A، B و C با نقطهٔ P روی دایرهٔ مشترکی قرار گیرند، یا به بیان دیگر وقتی که

$$A\hat{P}B + A\hat{C}B = ۱۸۰^\circ$$



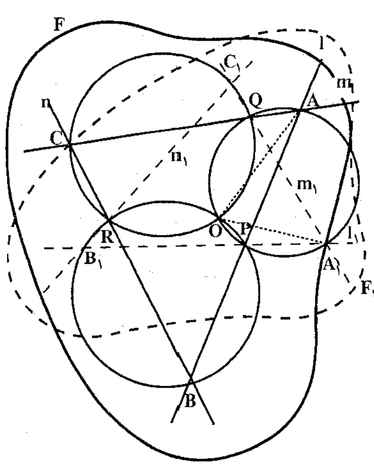
ب

و نقطه‌های P و C در دو طرف خط AB واقع باشند یا $A\hat{P}B = A\hat{C}B$ و C و P در یک طرف AB باشند. در این حالت لزومی ندارد، حکم قضیه معتبر باشد.

۳۸۸. نشان می‌دهیم که هر دو وضعیت F یک مرکز دوران دارند و هر نقطهٔ دلخواه A از F یک دایره می‌پیماید. در این صورت بنا بر آنچه گفته شد، نتیجه می‌شود که هر خط F همواره از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد (زیرا خط l از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد) و هر نقطهٔ F دایره‌ای را می‌پیماید (زیرا A دایره‌ای را می‌پیماید).

نقطه‌های برخورد خطهای l، m و n را با حروف A، B و C و نقطه‌های مفروضی را که این خطها همیشه از آنها می‌گذرند با حروف P، Q و R نمایش می‌دهیم (شکل). اوّلاً روشن است که A یک دایره را می‌پیماید، زیرا اندازهٔ زاویهٔ QAP باید طی حرکت محفوظ بماند (زاویهٔ بین خطهای l و m در شکل نمی‌تواند تغییر کند، زیرا F با وضعیت اوّلیه‌اش متشابه می‌ماند). بعلاوه، فرض می‌کنیم F و F_1 دو وضعیت از شکل باشند و l، m، n و l_1 ، m_1 ، n_1 وضعیتهای متناظر سه خط موردنظر باشند؛ همچنین فرض می‌کنیم A، B، C و A_1 ، B_1 و C_1 وضعیتهای متناظر نقطه‌های A، B و C باشند. اگر O مرکز دوران F و F_1 باشد، آن‌گاه زاویهٔ AOA_1 با زاویهٔ دوران تجانس مارپیچی که F را به F_1 بدل می‌کند و درنتیجه با زاویهٔ بین l و l_1 یا زاویهٔ بین m و m_1 برابر است.

بنابراین $A\hat{O}A_1 = A\hat{P}A_1 = A\hat{Q}A_1$ یعنی O بر دایره‌ای قرار می‌گیرد که از نقطه‌های A، A_1 ، P و Q می‌گذرد. به‌همین ترتیب ثابت می‌شود که O بر دایره‌ای که از B، B_1 ، P و R می‌گذرد، واقع است. از این‌جا معلوم می‌شود که نقطهٔ O مرکز دوران F و F_1



نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای APQ و BPR است و بنابراین به وضعیت خاص F_1 از شکل متحرک بستگی ندارد امّا تعبیر آن این است که مرکز دوران هر دو وضعیت دلخواه از F یکی است.

۳۸۹. الف)، ب). فرض می‌کنیم V نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2D_3$ و $A_1A_3D_2$، غیر از A_1 باشد (شکل الف). در این حالت اگر زاویه‌های مثلث $D_1D_2D_3$ را به D_1، D_2 و D_3 نشان دهیم، داریم (شکل الف):

$$A_1\hat{V}A_2 = \hat{D}_3 \quad \text{و} \quad A_1\hat{V}A_3 = 180^\circ - \hat{D}_2$$

و در نتیجه:

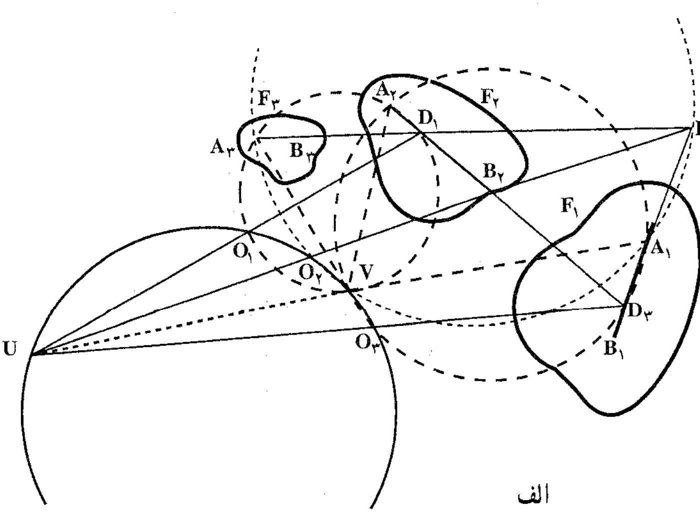
$$A_2\hat{V}A_3 = A_3\hat{V}A_1 - A_2\hat{V}A_1 = 180^\circ - \hat{D}_2 - \hat{D}_3 = \hat{D}_1$$

و بنابراین دایرهٔ محیطی $\Delta A_2A_3D_1$ از V نیز می‌گذرد.

باید توجه داشت که براساس نحوهٔ پیدا کردن مرکز دوران، O_1 بر دایرهٔ محیطی $\Delta A_2A_3D_1$ قرار دارد؛ و O_2 بردایرهٔ محیطی $\Delta A_1A_3D_2$ و O_3 بر دایرهٔ محیطی $\Delta A_1A_2D_3$؛ بعلاوه، همان‌طور که ثابت کردیم، همهٔ این دایره‌ها از نقطهٔ مشترک V می‌گذرند.

اکنون نقطهٔ برخورد خطهای D_2O_2 و D_3O_3 را به U نشان می‌دهیم. در این صورت داریم (شکل الف):

$$O_2\hat{V}O_3 = D_2\hat{O}_2V + D_3\hat{O}_3V - O_2\hat{U}O_3$$



الف

(برای اثبات کافی است چهارضلعی O_2VO_3U را به وسیلهٔ قطر UV به دو مثلث تقسیم کنیم و قضیهٔ زاویه‌های خارجی را در هریک از این مثلثها به‌کار بریم). از آن‌جا که نقطه‌های D_2 ، O_2 ، V و A_1 روی یک دایره واقعند، داریم :

$$D_2\hat{O}_2V = 180^\circ - D_2\hat{A}_1V$$

و به دلیل مشابه داریم :

$$D_3\hat{O}_3V = 180^\circ - D_3\hat{A}_1V$$

که از آنها نتیجه می‌شود :

$$D_2\hat{O}_2V + D_3\hat{O}_3V = 180^\circ$$

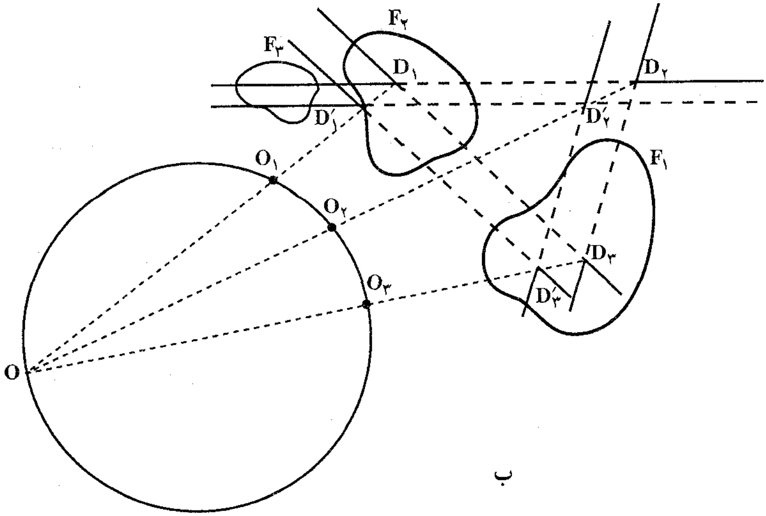
و بنابراین

$$O_2\hat{V}O_3 = 180^\circ - O_2\hat{U}O_3$$

یعنی نقطه‌های O_2 ، O_3 ، U و V بر یک دایره واقعند.

نقطهٔ برخورد مشترک دایره‌های محیطی مثلثهای $B_1B_2D_3$ ، $B_1B_3D_2$ و $B_2B_3D_1$ را $\overline{V}$ می‌نامیم. به روشی شبیه قسمت قبل نشان می‌دهیم که O_2 ، O_3 ، U و $\overline{V}$ بر یک دایرهٔ مشترک واقعند، پس می‌بینیم که پنج نقطهٔ O_2 ، O_3 ، V ، $\overline{V}$ و U بر یک دایره قرار دارند. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که نقطه‌های O_1 ، O_3 ، V و $\overline{V}$ بر یک دایره واقعند. اما با توجه به این که دو دستهٔ چهارتایی از نقطه‌های O_1 ، O_3 ، V ، $\overline{V}$ و O_2 ، O_3 ، V ، $\overline{V}$ هر کدام به‌طور جداگانه بر یک دایره واقعند، ملاحظه می‌کنیم که دو دایره باید بر یکدیگر و بر دایرهٔ تجانس شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 منطبق باشند ؛ به این ترتیب اثبات قسمت (ب) مسأله کامل می‌شود ؛ بعلاوه، می‌بینیم که U، نقطهٔ برخورد D_2O_2 و D_3O_3 بر این دایره قرار دارد.

به عبارت دیگر، خط D_2O_2 از نقطهٔ U (که متمایز از O_3 است) محل برخورد خط D_3O_3 با دایرهٔ تجانس شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 می‌گذرد ؛ به‌همین طریق می‌توان نشان داد که خط D_1O_1 نیز از همان نقطه می‌گذرد و بدین ترتیب برهان حکم قسمت (الف) کامل می‌شود. ج) ابتدا فرض می‌کنیم که ضلعهای $\Delta D'_1D'_2D'_3$ با ضلعهای متناظر $\Delta D_1D_2D_3$ موازی‌اند (شکل ب). از آن‌جا که O_3 مرکز دوران شکلهای F_1 و F_2



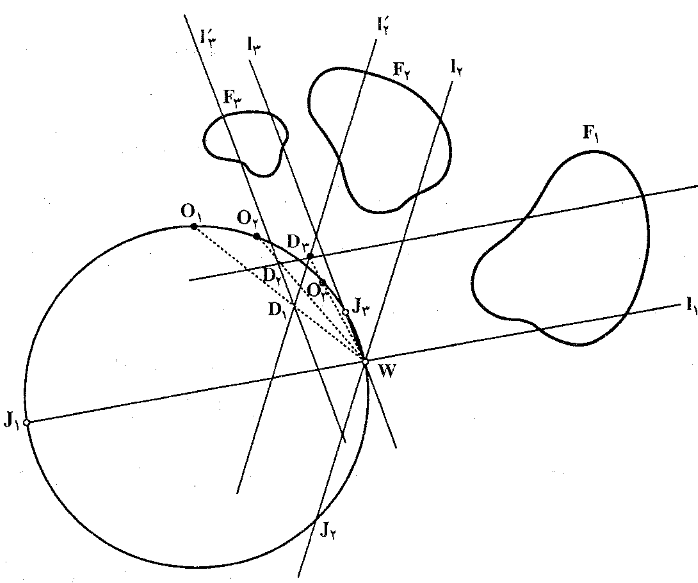
ب

است، بسادگی نتیجه می‌شود که فاصله‌های خطهای $D'_2D'_3$ و $D'_1D'_3$ از O_3 با فاصله‌های D_2D_3 و D_1D_3 از O_3 متناسبند. از این‌جا نتیجه می‌شود که D'_3 بر خط O_3D_3 واقع است. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که D'_2 بر O_2D_2 واقع است و D'_1 بر O_1D_1 با توجه به نتیجهٔ قسمت (الف) معلوم می‌شود که $D_1D'_1$، $D_2D'_2$ و $D_3D'_3$ در یک نقطهٔ O متقاطعند، که طبعاً همان مرکز تجانس مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ است؛ این نقطه بر دایرهٔ تجانس شکلهای F_1، F_2 و F_3 قرار دارد.

اکنون فرض می‌کنیم که ضلعهای $\Delta D'_1D'_2D'_3$ موازی با ضلعهای متناظر $\Delta D_1D_2D_3$ نیستند. پاره‌خطهای A_1B_1 و A_1C_1، A_2B_2 و A_2C_2، A_3B_3 و A_3C_3 را سه زوج پاره‌خط متناظر از شکلهای F_1، F_2 و F_3 می‌گیریم؛ همچنین $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ را مثلثهایی می‌گیریم که ضلعهای آنها بترتیب از خطهای A_1B_1، A_2B_2 و A_3B_3 و خطهای A_1C_1، A_2C_2 و A_3C_3 تشکیل شده‌اند. مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ متشابه‌اند؛ زیرا زاویهٔ بین خطهای A_1B_1 و A_1C_1 در شکل F_1 برابر است با زاویهٔ بین خطهای متناظر A_2B_2 و A_2C_2 در شکل F_2 و با زاویهٔ بین A_3B_3 و A_3C_3 در شکل F_3. مرکز دوران مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ بر دایره‌ای واقع است که از سه نقطهٔ D_3، D'_3 و A_1 می‌گذرد. اما چون $D_3\hat{A}_1D'_3 = D_3\hat{A}_2D'_3$ این دایره از نقطهٔ A_2 هم می‌گذرد، پس مرکز دوران مثلثهای $D_1D_2D_3$ و $D'_1D'_2D'_3$ بر دایرهٔ

محیطی $\Delta A_1A_2D_3$ قرار دارد. به‌دلیل مشابه، مرکز دوران، بر دایره‌های محیطی $A_1A_3D_2$ و $A_2A_3D_1$ واقع است. با توجه به قسمت (ب)، نقطهٔ برخورد این دایره‌ها بر دایرهٔ تجانس شکلهای F_1، F_2 و F_3 قرار دارد.

۳۹۰. الف. فرض کنید l_1، l_2 و l_3 سه خط متناظر از شکلهای F_1، F_2 و F_3 باشند که در یک نقطهٔ W متقاطعند؛ l'_1 را خطی از شکل F_1 موازی با l_1 و همچنین l'_2 و l'_3 را خطهای متناظر l'_1 در شکلهای F_2 و F_3 می‌گیریم و فرض می‌کنیم $D_1D_2D_3$ مثلثی باشد که ضلعهایش را خطهای l'_1، l'_2 و l'_3 تشکیل داده‌اند (شکل). بدیهی است که $l_2 \| l'_2$ و $l_3 \| l'_3$. بعلاوه، چون O_3 مرکز دوران F_1 و F_2 است، فاصلهٔ O_3 تا l_1 و l_2 با فاصلهٔ O_3 تا l'_1 و l'_2 متناسب است. از این‌جا نتیجه می‌شود که خط O_3D_3 از W می‌گذرد. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که خطهای O_2D_2 و O_1D_1 از W می‌گذرند.



ب. ابتدا توجه کنید که زاویهٔ D_1 از مثلث $D_1D_2D_3$ (شکل) به انتخاب خطهای l'_1، l'_2 و l'_3 بستگی ندارد؛ این همان زاویهٔ دوران تجانس مارپیچی است که F_2 را به F_3 بدل می‌کند. بعلاوه نسبت فاصله‌های خطهای l'_2 و l'_3 از نقطهٔ O_1 به انتخاب این خطها بستگی ندارد؛ این نسبت برابر است با نسبت تجانس شکلهای F_2 و F_3. از این‌جا

نتیجه می‌شود که زاویه‌های $O_1D_1D_2$ و $O_1D_1D_3$ اندازهٔ ثابتی دارند. حال اگر J_2 و J_3 نقطه‌های برخورد l_2 و l_3 با دایرهٔ تجانس F_1 ، F_2 و F_3 باشند، آن‌گاه $O_1\hat{W}J_2 = O_1\hat{D_1}D_3$ و $O_1\hat{W}J_3 = O_1\hat{D_1}D_2$ ؛ کمانهای $\widehat{O_1J_2}$ و $\widehat{O_1J_3}$ اندازهٔ ثابتی دارند و درنتیجه J_2 و J_3 به انتخاب خطهای l_1 ، l_2 و l_3 بستگی ندارند. به‌همین ترتیب، l_1 نیز دایرهٔ تجانس F_1 ، F_2 و F_3 را در نقطهٔ ثابت J_1 قطع می‌کند. اثبات این مطلب را به خواننده واگذار می‌کنیم که، بعکس اگر U نقطهٔ دلخواهی بر دایرهٔ تجانس F_1 ، F_2 و F_3 باشد، آن‌گاه خطهای UJ_1 ، UJ_2 و UJ_3 خطهای متناظری از این شکلها هستند.

نکته. بسیاری ویژگیهای جالب دیگر را در سه شکل متشابه F_1 ، F_2 و F_3 می‌توان ذکر کرد. در این‌جا به تعدادی از ویژگیهای مزبور اشاره می‌کنیم :

۱. مثلث $J_1J_2J_3$ با مثلث $D_1D_2D_3$ که ضلعهایش سه خط متناظر دلخواه از شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 هستند، معکوساً متشابه است.

۲. خطهای J_1O_1 ، J_2O_2 و J_3O_3 در یک نقطهٔ T متقاطعند.

۳. اگر سه نقطهٔ متناظر A_1 ، A_2 و A_3 از F_1 ، F_2 و F_3 بر یک خط l واقع باشند، آن‌گاه این خط از یک نقطهٔ ثابت T (همان نقطهٔ مذکور در (۲)) می‌گذرد. بعکس، هر خطی که از T می‌گذرد، متضمن سه نقطهٔ متناظر از F_1 ، F_2 و F_3 است.

۴. اگر A_1 ، A_2 و A_3 سه نقطهٔ متناظر از شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 باشند، آن‌گاه دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1O_2O_3$ ، $A_2O_1O_3$ و $A_3O_1O_2$ در یک نقطه مشترکند.

۵. منظور از مثلث اصلی نقطهٔ A_1 در شکل F_1 همان مثلث $A_1A_2A_3$ است که در آن، A_1 و A_3 نقطه‌هایی از F_2 و F_3 هستند که با نقطهٔ A_1 از F_1 متناظرند. در این صورت :

الف. مکان هندسی نقطه‌های A_1 در F_1 چنان که در مثلث اصلی متناظر به A_1 اندازهٔ زاویهٔ $A_2\hat{A_1}A_3$ (یا زاویهٔ $A_1A_2A_3$ یا زاویهٔ $A_1A_3A_2$) مقدار مفروضی باشد، یک دایره است.

ب. مکان هندسی نقطه‌های A_1 چنان که در مثلث اصلی $A_1A_2A_3$ طول ضلع A_2A_3 (یا ضلع A_1A_3 یا ضلع A_2A_1) مقدار مفروضی باشد، یک دایره است.

پ. مکان هندسی نقطه‌های A_1 چنان که در مثلث اصلی $A_1A_2A_3$ نسبت ضلعهای A_1A_2/A_1A_3 (یا ضلعهای A_1A_2/A_2A_3 یا ضلعهای A_1A_3/A_2A_3) مقدار مفروضی باشد، یک دایره است.

ت. مکان هندسی نقطه‌های A_1 چنان که مساحت مثلث اصلی $A_1A_2A_3$ مقدار مفروضی باشد، یک دایره است. یافتن برهان حکمهای بالا را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۳۹۱. اگر (F') مجانس (F) در تجانس (O , k) و F'' متناظر (F') در انتقال بردار $\vec{V}$ باشند و چنانچه $\overrightarrow{AB}$ یک بردار از شکل (F) و $(A'B')$ و $(A''B'')$ بترتیب بردارهایی از شکلهای (F') و (F'') باشند، داریم : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A''B''} \overset{\parallel}{=} \overrightarrow{A'B'}$، پس $\overrightarrow{A''B''} = k.\overrightarrow{AB}$ از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $A''B''$ مجانس $\overrightarrow{AB}$ با مرکز تجانس نقطهٔ مضاعف تبدیل بالا یعنی (ω) محل برخورد $\overline{AA''}$ و $\overline{BB''}$ و نسبت تجانس k است. چنانچه (ω) مرکز تجانس دوم باشد و اگر ω' متناظر ω در تجانس (O,k) باشد، داریم : $\overrightarrow{O\omega'} = k.\overrightarrow{O\omega}$. در این صورت (ω) باید متناظر (ω') در انتقال همسنگ با بردار $\vec{V}$ باشد که در این حالت داریم :

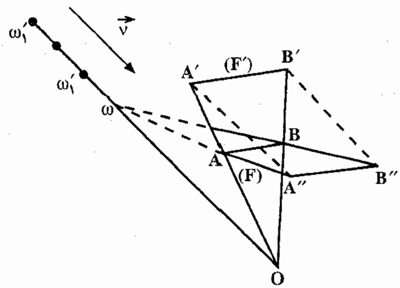
$$\overrightarrow{O\omega'} = k.\overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{O\omega}+\overrightarrow{\omega\omega'} = \overrightarrow{O\omega}-\vec{V} , \omega'\omega = \vec{V}$$

و از آن‌جا

$$O\omega = \frac{\vec{V}}{1-k}$$

یعنی ω روی خطی است که از (O) موازی $\vec{V}$ رسم می‌شود و می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{O\omega'} = \overrightarrow{O\omega}+\overrightarrow{\omega\omega'} = \overrightarrow{O\omega}-\overrightarrow{\omega'\omega} = \frac{\vec{V}}{1-k}-\vec{V} = \frac{k\vec{V}}{1-k}$$



اگر ابتدا انتقال و بعد مجانس $\overrightarrow{AB}$ را به‌دست آوریم باز خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{A''B''} = k.\overrightarrow{A'B'}$$

که در نتیجه داریم :

$$\overrightarrow{A''B''} = k.\overrightarrow{AB}$$

که باز هم نتیجه یک تجانس است و اگر k نسبت تجانس (ω_1) و مرکز تجانس باشد، داریم :

$$\overrightarrow{\omega_1\omega'_1} = \overrightarrow{V} \text{ و } O\omega_1 = k.\overrightarrow{O\omega'_1}$$

و

$$\overrightarrow{O\omega_1} = k[\overrightarrow{O\omega_1} + \overrightarrow{\omega_1\omega'_1}] = k[\overrightarrow{O\omega_1} + \overrightarrow{V}]$$

و یا

$$\overrightarrow{O\omega_1} = \frac{kV}{1-k} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{V}$$

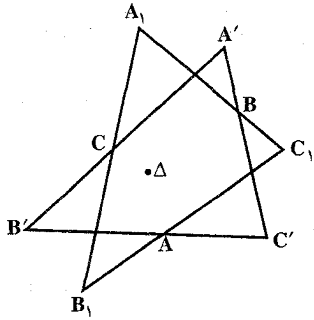
یعنی، ω و ω_1 مجزا هستند و $\omega\omega'_1$ بر هم منطبق می‌باشند، پس، در هر حالت ترکیب یک انتقال و یک تجانس، یک تجانس خواهد بود.

یادآوری. چون هر چند انتقال یک انتقال و هرچند تجانس یک تجانس می‌باشد، پس ترکیب چند انتقال و چند تجانس یک تجانس است.

۳۹۲. فرض کنید می‌خواهیم در بخش محدودی از صفحه که آن را K می‌نامیم، ترسیمی انجام دهیم و فرض کنید که شکل T که برای تکمیل این ترسیم لازم است به تمامی درون K نگنجد. یک تجانس به مرکز نقطهٔ دلخواه O در K و با نسبت k که به اندازهٔ کافی کوچک است انجام دهیم تا شکل تبدیل یافتهٔ T' تماماً در K قرار گیرد. در این صورت T' را می توان رسم کرد. اکنون T را هم می‌توان به دست آمده تلقی کرد ؛ زیرا مجانس شکل کامل شدهٔ T' با مرکز تجانس O و نسبت $\frac{1}{k}$ است (اگر یک نقطهٔ A از T مجانس نقطهٔ A' از T' باشد و اگر A در محدودهٔ مفروض از صفحه واقع نباشد، می‌توان آن را به وسیلهٔ دو خط l_1 و l_2 تعریف کرد که مجانس دو خط l'_1 و l'_2 هستند که از A' می‌گذرند ؛ بعلاوه، l'_1 و l'_2 را همیشه می‌توان طوری اختیار کرد که l_1 و l_2 از قسمتی از شکل موجود بگذرند : برای این کار، مثلاً کافی است که فاصلهٔ خطهای l'_1 و l'_2 از مرکز تجانس O به قدر کافی کوچک باشد).

۳۹۳. فرض کنیم $A_1B_1C_1$ وضع جدید مثلث $A'B'C'$ باشد. این مثلثها باهم مستقیماً متشابه‌اند و داریم :

$$(A_1B_1 \hat{,} A_1C_1) = (A'B' \hat{,} A'C')$$



از اینجا نتیجه می شود که A_1 دایرهٔ $(A'BC)$ را طی می کند. به طریق مشابه ملاحظه می‌کنیم که B_1 و C_1 دایره‌های $(B'CA)$ و $(C'AB)$ را طی می کنند. اکنون فرض می‌کنیم Δ نقطهٔ مضاعف همانی (اوّلین مرکز دوران) تعریف شده به وسیلهٔ دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'B'C'$ باشد. A_1B_1 ، $A'B'$ دو قطعه خط متناظرند. Δ نقطهٔ دیگر برخورد دو دایره : $(A'A_1C)$، $(B'B_1C)$ و یا دایره‌های $(A'BC)$ و $(B'CA)$ و به عبارت دیگر نقطهٔ مشترک سه دایرهٔ $(A'BC)$ ، $(B'CA)$ و $(C'AB)$ می‌باشد.
فرض کنیم M' نقطه‌ای وابسته به $A'B'C'$ و M_1 متناظر آن در $A_1B_1C_1$ باشد، مثلث ΔA_1M_1 درحالی که مستقیماً با مثلث $\Delta A'M'$ متشابه است تغییر می‌کند. پس Δ ثابت است و A_1 دایرهٔ گذرنده بر Δ را طی می‌کند. M_1 نیز دایره‌ای را که از Δ می‌گذرد، می‌پیماید.
اگر D' خطی وابسته به $A'B'C'$ و D_1 متناظر آن در $A_1B_1C_1$ باشد، δ_1 تصویر Δ روی D_1 همان‌طوری که ثابت کردیم. دایرهٔ گذرنده بر Δ را طی می‌کنند، پس D_1 از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد که نقطهٔ متقاطر Δ روی دایرهٔ مزبور است.

۳۹۵. ۱. این قسمت قبلاً ثابت شده است. یعنی می‌دانیم چنانچه (F_2) و (F_3) مجانسهای (F_2) در تجانسهای $(O_1, k_{(1,2)})$ و $(O_2, k_{(1,3)})$ و $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{A_1B_1}$ و $\overrightarrow{A_2B_2}$ بترتیب بردارهایی از شکلهای F_1 ، F_2 و F_3 باشند، داریم :

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{k_{(1,3)}}{k_{(1,2)}} . \overrightarrow{A_2B_2} \quad \text{و یا} \quad \overrightarrow{A_1B_1} = k . \overrightarrow{A_2B_2}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\overrightarrow{A_1B_1}$ و $\overrightarrow{A_2B_2}$ و در نتیجه (F_2) و (F_3) متجانس یکدیگرند.

۲. اگر (ω) محل برخورد $\overline{A_1A_2}$ و $\overline{B_1B_2}$ مرکز تجانس (F_2) و (F_3) باشد، خواهیم داشت (در مثلث $A_1\overset{\Delta}{O_1}O_2$ داریم):

$$\frac{\overline{O_2B}}{\overline{O_2B^{'}}}=\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1I}} \qquad (1)$$

و در مثلث $O_1\overset{\Delta}{B_1}A_1$ داریم:

$$\frac{\overline{O_1B_1}}{\overline{O_1B}}=\frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \qquad (2)$$

و همچنین در مثلث $\omega\overset{\Delta}{A_1}B_1$ و $\omega_1\overset{\Delta}{O_1}B_1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\overline{\omega B_2}}{\overline{\omega B_1}}=\frac{\overline{\omega A_2}}{\overline{\omega A_1}}=\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_1A_1}} \qquad (3)$$

از ضرب طرفین رابطه‌های (۱) ، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\overline{O_2B}.\overline{O_1B_1}.\overline{\omega B_2}}{\overline{O_2B_2}.\overline{O_1B}.\overline{\omega B_1}}-\frac{\overline{O_1A}.\overline{O_1A_1}.\overline{O_1I}}{\overline{O_1I}.\overline{O_1A}.\overline{O_1A_1}}=1$$

از این رابطه با توجه به عکس قضیهٔ منلائوس در مثلث $B\overset{\Delta}{B_1}B_2$ نتیجه می‌گیریم که (ω)، (O_2) و (O_1) سه مرکز تجانس بر یک استقامت قرار دارند.

۳.
$$\begin{cases} k_{(1,2)}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} \\ k_{(2,3)}=\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} \\ k_{(3,1)}=\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}} \end{cases}$$

از ضرب طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$k_{(1,2)}.k_{(2,3)}.k_{(3,1)}=\frac{\overline{AB}.\overline{A_1B_1}.\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}.\overline{A_2B_2}.\overline{AB}}=1$$

۳۹۶. گزینهٔ (د) درست است.

۳۹۷. اگر $\overrightarrow{AB}$ برداری از شکل (F) باشد، به نحوی که مجانسهای آن در تجانس (O_1, k) و (O_2, k) بترتیب $\overrightarrow{A_1B_1}$ و $\overrightarrow{A_2B_2}$ باشند، داریم:

$$\overline{A_2B_2} = k.\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overline{A_1B_1} = k.\overrightarrow{AB}$$

و از آن‌جا $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_1B_1}$ و در نتیجه $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$ است و چون می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2} = k.\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2A}$$

$$\overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2O_1} = (1-k)\overrightarrow{O_1O_2} \quad \text{و}$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2B_1} = k.\overrightarrow{BO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2B}$$

$$\overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2O_1} = (1-k)\overrightarrow{O_1O_2}$$

پس:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2} = (1-k)\overrightarrow{O_1O_2}$$

که می‌توان گفت از انتقال $\overrightarrow{A_1B_1}$ به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{V} = (1-k)\overrightarrow{O_1O_2}$ بردار $\overrightarrow{A_2B_2}$ به دست می‌آید.

۳۹۸. گزینهٔ (ج) درست است.

۳۹۹. گزینهٔ (ب،د) درست است.

۲.۵. تجانس در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۴۰۰. گزینهٔ (ج) درست است؛ زیرا نسبت تجانس برابر است با:

$$k = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{x_c - x_a}{x_b - x_a} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

۴۰۱. گزینهٔ (۳) درست است.

۲.۲.۵ . نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۵. نقطه‌ها همخطند

۴۰۲. نقطهٔ برخورد خطهای MP و NQ را با X ، نقطهٔ برخورد خطهای مستقیم MR و NS را با Y و نقطهٔ برخورد خطهای PR و QS را با Z نشان می‌دهیم. به آسانی استنباط می‌شود که ترکیب تبدیلات متجانس $H_X(M,P)$ و $H_Z(P,R)$ عبارت از تبدیل متجانس $H_Y(M,R)$ است. $H_X(M,P)$ تبدیل متجانسی با مرکز X را نشان می‌دهد که نقطهٔ M را به نقطهٔ P انتقال می‌دهد. اگر ترکیب دو تبدیل متجانس یک تبدیل متجانس باشد، آن‌گاه مرکزهای همهٔ سه تبدیل متجانس روی یک خط واقع بوده و Y به ZX متعلق خواهد بود. دومین قسمت نیز به طریق مشابه حل می‌شود.

۴۰۳. فرض کنید که M نقطهٔ انتهایی مشترک پاره‌خطها و A_1 ، A_2 ، A_3 و... نقطه‌های انتهای دیگر پاره‌خطها باشند که روی یک خط قرار دارند. M_1، M_2 ، M_3 و ... را نقطه‌هایی روی پاره‌خطهای MA_1 ، MA_2 ، MA_3 و ... درنظر بگیرید که آنها را به نسبت λ تقسیم می‌کنند، یعنی :

$$\frac{A_1M_1}{M_1M}=\frac{A_2M_2}{M_2M}=\frac{A_3M_3}{M_3M}=\cdots=\lambda$$

ثابت کنید که

$$\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{MM_3}{MA_3}=\cdots=\frac{MA_1}{MM_1}=\frac{MM_1+M_1A_1}{MM_1}=1+\frac{M_1A_1}{MM_1}=1+\lambda$$

بوده و آن‌گاه $\frac{MM_1}{MA_1}=\frac{1}{1+\lambda}$ است. به طریق مشابه داریم : $\frac{MM_2}{MA_2}=\frac{1}{1+\lambda}$ و غیره.

تبدیلات $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}$ ، $H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_1)=M_1, H_M^{\frac{1}{1+\lambda}}(A_2)=M_2$ و غیره را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. با منظور کردن این که تصویر یک خط مستقیم در یک تبدیل متجانس خط مستقیم است، درمی‌یابیم که نقطه‌های M_1، M_2 ، M_3 و غیره به یک خط مستقیم تعلق دارند.

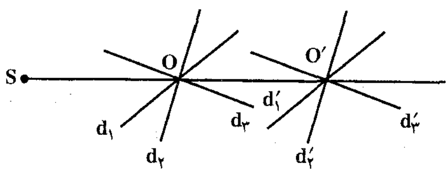
۴۰۴. دایره‌های محیطی چهار مثلث حاصل از این چهار خط در یک نقطهٔ مشترک P متقاطعند ؛ پاهای عمودهای وارد از P بر خطهای l_1 ، l_2 ، l_3 و l_4 بر یک خط m واقعند.

نقطه‌های H_1 ، H_2 ، H_3 و H_4 محل برخورد ارتفاعهای چهار مثلث موردنظر، مجانس نقطه‌های برخورد خطهای PH_1 ، PH_2 ، PH_3 و PH_4 با خط m، با مرکز تجانس P و نسبت تجانس ۲ هستند ؛ در نتیجه بر خطی که با m موازی باشد و از نقطهٔ P' ، قرینهٔ P نسبت به خط m بگذرد نیز قرار دارند.

۳.۲.۵ . خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۵. خطها همرسند

۴۰۵. چون نقطهٔ همرسی به همهٔ خطهای همرس تعلق دارد، بنابراین مجانس آن روی تمام خطها باید قرار داشته باشد، یعنی این خطها همرسند.



۴.۲.۵ . زاویه

۱.۴.۲.۵. اندازهٔ زاویه

۴۰۶. با توجه به داده‌های مسأله، اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط d_1 و d_4 برابر ۳۰ درجه است و چون در تجانس زاویه‌ها محفوظ می‌ماند، پس اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط d'_1 و d'_4 در هر تجانسی برابر همان ۳۰ درجه است.

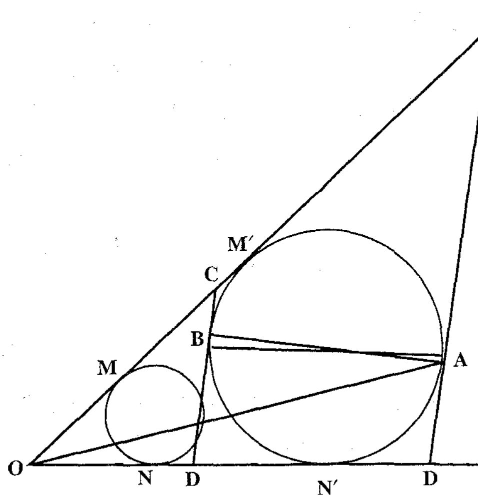
۵.۲.۵ . پاره‌خط

۱.۵.۲.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۴۰۷. گزینهٔ (۱) درست است.

۲.۵.۲.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۰۸. حالتی را درنظر می‌گیریم که دایره در بیرون مثلث OCD قرار دارد (شکل). نقطه‌های



برخورد ضلعهای زاویه را با مماس بر دایره در نقطهٔ A، با C' و D' نشان می‌دهیم، به نحوی که دایره، در مثلث $OC'D'$ محاط شده باشد. روشن است که در تجانس به مرکز O، مثلث $OC'D'$ مجانس مثلث OCD است. بنابراین نقطهٔ E عبارت است از نقطهٔ تماس دایرهٔ محاط در مثلث OCD با ضلع CD. نقطه‌های تماس این دو دایره را با خطهای راست OC و OD، با نقطه‌های M ، M' ، N و N' نشان می‌دهیم. با توجه به قضیهٔ برابری مماسها داریم :

$$۲BC + BE = BC + CE = M'C + CM = MM' = OM' - OM$$

$$= ON' - ON = NN' = N'D + DN = DB + DE = ۲DE + BE \Rightarrow BC = DE$$

۶.۲.۵ . رابطه‌های متری

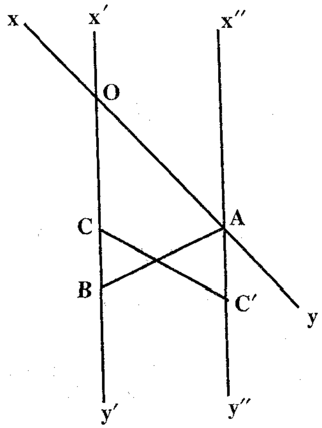
۴۰۹. داریم $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{۳}{۲}$. بنابراین دو نقطهٔ A' و B' مجانسهای دو نقطهٔ Aو B نسبت به مرکز تجانس Oو نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$ می‌باشند. یعنی $A'B' \| AB$ است و داریم :

$$\frac{OB'}{BB'} = \frac{OA'}{AA'} \Rightarrow \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'} \quad و \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{۳}{۲}$$

۷.۲.۵ . ثابت کنید دو شکل مجانسند

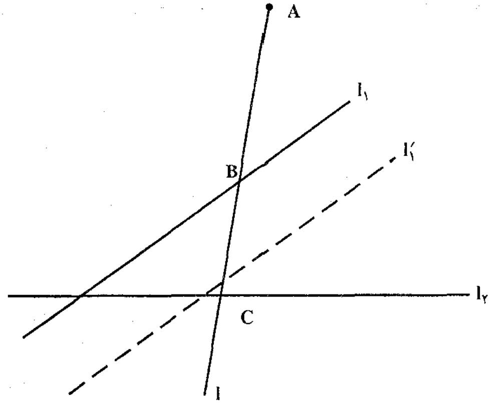
۴۱۰. گزینهٔ (الف) درست است.

۸.۲.۵ . رسم شکلها



۴۱۱. نسبت را به‌طور کلی $\frac{p}{q}$ فرض می‌کنیم، به قسمی که : $\frac{MA}{MB}=\frac{p}{q}$ باشد، پس A و B به مرکز M و به نسبت $\frac{p}{q}$ مجانس یکدیگرند، بنابراین کافی است مجانس $x'y'$ را به نسبت $\frac{p}{q}$ و به مرکز M پیدا کنیم تا xy را در Aقطع کند و برای این کار نقطهٔ دلخواه C را روی $x'y'$ اختیار می‌کنیم و C' را روی MC چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{MC'}{MC}=\frac{p}{q}$ باشد، از C' خط $x''y''$ را به موازات $x'y'$ رسم می‌کنیم تا xy را در A تلاقی کند. خط AMB جواب مسأله است.

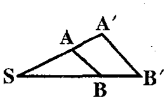
۴۱۲. فرض کنید که خط l رسم شده است (شکل). بنابه فرض نقطهٔ C مجانس نقطهٔ B به مرکز تشابه A و نسبت تجانس $\frac{n}{m}$ است ؛ بنابراین بر خط l'_1، مجانس l_1 به مرکز A و نسبت $\frac{n}{m}$ قرار می‌گیرد و می‌توان آن را از نقطهٔ برخورد خطهای l_2 و l'_1 به دست آورد. اگر l_1 با l_2 موازی نباشد، مسأله جوابی منحصر به فرد دارد ؛ اگر $l_1 \| l_2$ آن‌گاه l'_1 یا با l_2 موازی و یا بر آن منطبق است و درنتیجه یا مسأله جوابی ندارد و یا جواب آن نامعین است.



۹.۲.۵ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۱۳. الف. اگر S مرکز تجانس و A و A' دو نقطهٔ متناظر از یک تجانس باشد، $\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = k$ ، نسبت تجانس را مشخص می‌کند.

ب. با معلوم بودن دو نقطهٔ مجانس A و A' و نسبت تجانس k ، نقطهٔ S مرکز تجانس مشخص می‌شود. زیرا تنها یک نقطه وجود دارد که $\overline{SA'} = k.\overline{SA}$ باشد.



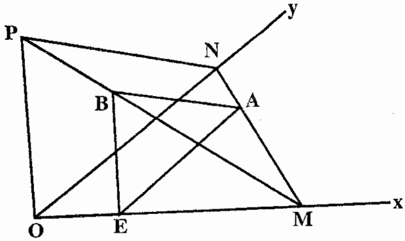
پ. اگر (A, A') و (B, B') جفت نقطه‌های متناظر از یک تجانس باشند، S نقطهٔ برخورد AA' و BB' مرکز تجانس و $\frac{A'B'}{AB} = k$ نسبت تجانس را مشخص می‌کند.

۴۱۴. پاره‌خطهای راستی را که به‌طور کامل در درون پاره‌خطهای راست دیگرند، حذف می‌کنیم. سپس همهٔ پاره‌خطهای راست باقی مانده را که با دیگران در بخش یا بخشهایی مشترکند درنظر می‌گیریم و مجانس آنها را، به نوبت، نسبت به نقطهٔ وسط خود و با ضریبی کوچکتر از واحد پیدا می‌کنیم، به نحوی که پاره‌خطهای راست جدید، باز هم پاره‌خط راست اصلی را پوشانده باشند. در این صورت، هر پاره‌خط راست، دارای نقطه‌های درونی مشترکی با بیش از یک پاره‌خط راست دیگر نخواهد بود و بنابراین، کافی است حکم را برای پاره‌خط راستی ثابت کنیم که به وسیلهٔ دو پاره‌خط راست کوچکتر پوشیده شده است.

۴۱۵. AE را به موازات ON رسم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{ME}{MO}=\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MP}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که EB با OP موازی است و چهارضلعی OPNM هموراه مجانس چهارضلعی EBAM است. پس مکان P خطی است که از O به موازات EB رسم شود.



۴۱۶. گزینهٔ (د) درست است.

۱۰.۲.۵ . مسأله‌های ترکیبی

۴۱۷. متوازی‌الاضلاع αABB_1 و $\alpha A'B'B'_1$ را رسم می‌کنیم. B_1B و B'_1B' موازی‌اند و داریم:

$$\frac{B_1B}{B'_1B'}=\frac{\alpha A}{\alpha A'}=\frac{\beta B}{\beta B'} \quad ;$$

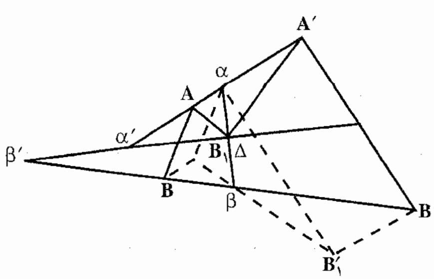
پس $B_1B'_1$ از β می‌گذرد و داریم:

$$\frac{\beta B_1}{\beta B'_1}=\frac{\beta B}{\beta B'}=\frac{AB}{A'B'} \quad ;$$

و همچنین:

$$\frac{\beta B_1}{\beta B'_1}=\frac{\alpha B_1}{\alpha B'_1}$$

پس $\alpha\beta$ نیمساز زاویهٔ $B_1\hat{\alpha}B'_1$ است و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\alpha'\beta'$ با نیمساز خارجی این زاویه موازی است، یعنی $\alpha\beta$ و $\alpha'\beta'$ برهم عمودند.



۲. فرض کنیم Δ محل برخورد $\alpha\beta$ و $\alpha'\beta'$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم ΔAB و $\Delta A'B'$ معکوساً متشابه‌اند. به موجب فرض اوّل $\alpha\beta$ و $\alpha'\beta'$ نیمسازهای زاویهٔ $A\hat{\Delta}A'$ می‌باشند.

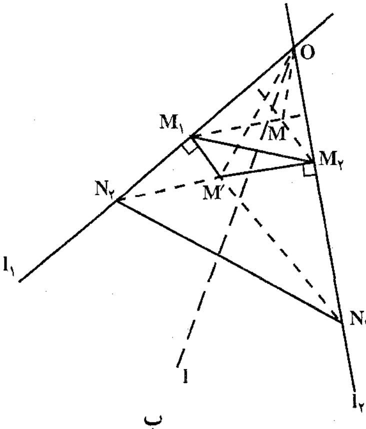
پس :
$$\frac{\Delta A}{\Delta A'}=\frac{\alpha A}{\alpha A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

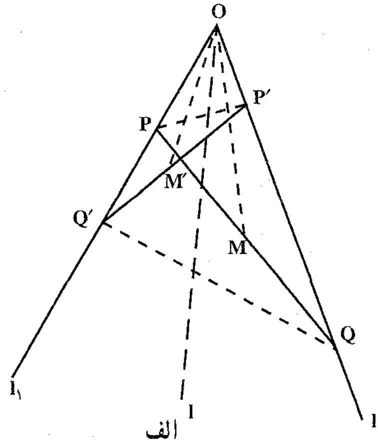
به همین ترتیب ملاحظه می‌شود که :
$$\frac{\Delta B}{\Delta B'}=\frac{\beta B}{\beta B'}=\frac{AB}{A'B'}$$

چون ضلعهای ΔAB و $\Delta A'B'$ متناسبند، پس متشابه‌اند و بعلاوه نتیجه می‌گیریم به موجب آنچه که بیان شد می‌توان یکی از آنها را با دوران دیگری حول $\alpha\beta$ یا $\alpha'\beta'$ همراه با تجانس به مرکز Δ به دست آورد، پس این مثلثها معکوساً متشابه‌اند.

۴۱۸. الف. فرض می‌کنیم l_1 و l_2 یکدیگر را در O قطع کنند و در این نقطه با هم زاویهٔ α بسازند (شکل الف) (اگر $l_1 \| l_2$، مسأله بی‌معنی است : در این حالت پاره‌خط PQ تنها وقتی وجود دارد که نقطهٔ M از l_1 و l_2 به یک فاصله باشد و بنابراین M نمی‌تواند دایره‌ای را بپیماید). مثلثهای OPP' و OQQ' متشابه‌اند (مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین) ؛ در نتیجه $\frac{OQ}{OQ'}=\frac{OP}{OP'}$. بنابراین $\frac{OP'}{OQ'}=\frac{OP}{OQ}$، یعنی مثلثهای OPQ و $OP'Q'$ نیز متشابه‌اند ؛ پس مثلثهای OPM و $OP'M'$ متشابه‌اند (OM و OM' میانه‌های مثلثهای OPQ و $OP'Q'$ هستند). به عبارت دیگر نسبت $OM'/OM = OP'/OP = \cos\alpha$ به انتخاب نقطهٔ M بستگی ندارد و $M'\hat{O}P' = M\hat{O}P$، یعنی OM و OM' با خط l ، نیمساز زاویهٔ POQ، زاویه‌های متساوی می‌سازند، پس M' از M براثر یک قرینه‌یابی تجانسی به مرکز O، محور l و نسبت $k=\cos\alpha$ به دست می‌آید : پس وقتی M دایرهٔ S را می‌پیماید، M' دایرهٔ S' ، نگارهٔ S، را طی می‌کند.

ب. اولاً روشن است که اگر $M_1\hat{O}M_2 = \alpha = 90^\circ$ ، هر نقطهٔ M از صفحه به همان نقطهٔ $M' = O$ بدل می‌شود ؛ پس تنها حالت جالب وقتی است که $\alpha \neq 90^\circ$ نقطهٔ برخورد MM_1 با l_2 را به N_1 و نقطهٔ برخورد MM_2 با l_1 را به N_2 نشان می‌دهیم (شکل ب). مانند راه حل قسمت (الف) نشان می‌دهیم که مثلثهای OM_1M_2 و ON_1N_2

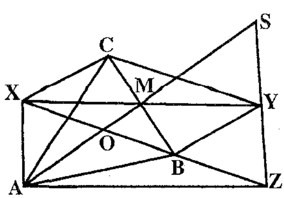




متشابه‌اند با نسبت تشابه $k = OM_1/ON_1 = \cos\alpha$ (اگر M_1 و M_2 را نقطه‌های P و Q در قسمت (الف) بگیریم، نقطه‌های P' و Q' آن بخش بترتیب در حکم N_1 و N_2 خواهند بود). چون M و M' نقطه‌های برخورد ارتفاعهای دو مثلث متشابه ON_1N_2 و OM_1M_2 هستند، نتیجه می‌شود که $OM'/OM = k = \cos\alpha$ و $M'\hat{O}M_1 = M\hat{O}M_2$. از این‌جا نتیجه می‌شود که خطهای OM و OM' نسبت به خط l ، نیمساز زاویهٔ M_1OM_2 ، قرینه‌اند. پس نقطهٔ M' قسمت (ب) از نقطهٔ M براثر همان قرینه‌یابی تجانسی به دست می‌آید که نقطهٔ M' در قسمت (الف) را معین می‌کرد؛ اگر M دایرهٔ S را بپیماید، M' نگارهٔ آن را که دایرهٔ S' است، می‌پیماید.

۳.۵. تجانس در: مثلث، مثلث و دایره

۱.۳.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس



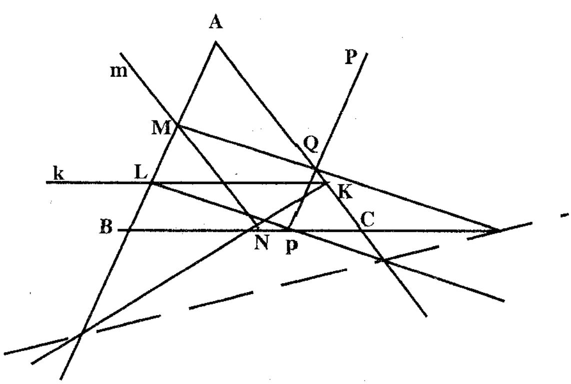
۴۱۹. میانگاه ضلع BC (نقطهٔ M) مرکز تقارن متوازی الاضلاع BXCY است (شکل). بنابراین تبدیلی که X را به Y انتقال می‌دهد، تقارنی نسبت به M یا تبدیل متجانس H_1 با نسبت تجانس $k_1 = -1$ و مرکز M است. به دلیل $\overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{AZ}$ و $\overrightarrow{AZ} = 2\overrightarrow{MY}$ است. در نتیجه تبدیلی که Y را به Z انتقال می‌دهد عبارت از تبدیل H_2 با مرکز S در

نقطهٔ تلاقی ZY و AM و نسبت $k_2 = 2$ است. ترکیب این تبدیلات متجانس یعنی H_2OH_1 عبارت از تبدیل متجانس و معین H با نسبت تجانس $k = k_1 . k_2 = -2$ است. مرکز این تجانس را به دست می‌آوریم.
به دلیل $H(M) = H_2(M).H_1(M) = H_2(M) = A, H_1(M) = M$ است. در نتیجه $\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OM}$ خواهد بود. این امر بدین‌معنی است که O مرکز تلاقی میانه‌های مثلث ABC است. بدین ترتیب $Z \to X$ تبدیلی با مرکز واقع بر محل تلاقی میانه‌های مثلث ABC و نسبت $k = -2$ است.

۲.۳.۵ . نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۵. نقطه‌ها همخطند

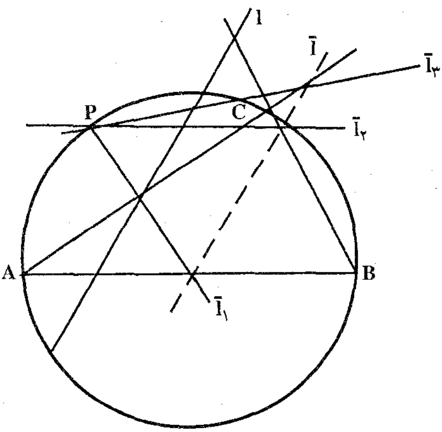
۴۲۳. روشن است که سه مثلث ALK، MBN و QPC که ضلعهای متناظرشان متوازی‌اند با یک تجانس از یکدیگر نتیجه می‌شود. مرکز تجانس مثلثهای ALK و MBN نقطهٔ برخورد AB و KN است، مرکز تجانس MBN و QPC نقطهٔ برخورد BC و MQ است و مرکز تجانس QPC و ALK نقطهٔ برخورد CA و PL (شکل). اکنون حکم مطلوب از این جا و از قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس اثبات می‌شود.



بیان دقیق قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس اصلاح حکم مذکور در مسأله را میسر می‌سازد، یا نقطه‌های برخورد AB و KN، BCو MQ، و CA و PL بر یک خط واقعند، یا دقیقاً یکی از این نقطه‌های برخورد وجود ندارد و دو خط موازی مربوط به آن با خط واصل بین دو نقطهٔ برخورد دیگر موازی‌اند، مثلاً $AB \| KN \| UV$ ، که درآن

U نقطهٔ برخورد BC و MQ است و V نقطهٔ برخورد CA و PL ، یا هیچ یک از نقطه‌های برخورد وجود ندارند، یعنی AB‖KN ، BC‖MQ و CA‖PL .

۴۲۴. راه حل اول. اگر پاهای عمودهای وارد از P بر ضلعهای ΔABC بر خط l واقع باشند، آن‌گاه خطهای $\bar{l}_1$ ، $\bar{l}_2$ و $\bar{l}_3$ ، قرینه‌های $\bar{l}$ نسبت به ضلعهای ΔABC ، در نقطهٔ P یکدیگر را قطع می‌کنند، در این‌جا $\bar{l}$ مجانس l با مرکز تجانس P و نسبت تجانس ۲ است (شکل الف). پس معلوم می‌شود که P باید بر دایرهٔ محیطی ΔABC قرار گیرد (و $\bar{l}$ باید از نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای ΔABC بگذرد.).



الف

راه حل دوم. پاهای عمودهای رسم شده از P بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC را بترتیب با N ، L و M نشان می‌دهیم (شکل ب). اکنون ثابت می‌کنیم که P مرکز دوران همهٔ مثلثهای $L'M'N'$ متشابه با مثلث LMN است که رأسهایشان بر ضلعهای BC، CA و AB از ΔABC واقعند. در واقع، با توجه به این که $P\hat{M}A = P\hat{N}A = 90^\circ$ ، نتیجه می‌شود که نقطه‌های A، M، N و P بر یک دایره واقعند، یعنی P بر دایرهٔ AMN واقع است. به همین طریق می‌توان نشان داد که P بر دایره‌های BNL و CLM قرار دارد. اما نقطهٔ برخورد این دایره‌ها مرکز دوران مطلوب نیز هست. بعلاوه، مثلاً در حالتی که در شکل (ب) دیده می‌شود،

$$A\hat{P}B = A\hat{P}N + N\hat{P}B = A\hat{M}N + N\hat{L}B$$

زیرا زاویه‌های $A\hat{P}N$ و $A\hat{M}N$ و همچنین زاویه‌های NPB و NLB محاط در یک دایره و روبه‌رو به یک کمان هستند. اما

$$\hat{AMN} = \hat{MCN} + \hat{MNC} \quad , \quad \hat{NLB} = \hat{NCB} - \hat{LNC}$$

زیرا
$$\hat{AMN} + \hat{NLB} = (\hat{MCN} + \hat{NCB}) + (\hat{MNC} - \hat{LNC})$$
$$= \hat{MCB} + \hat{MNL}$$

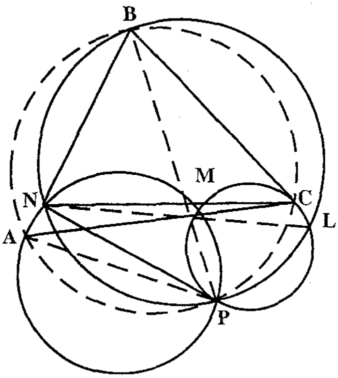
از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ قبلی، نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{APB} = \hat{MCB} + \hat{MNL}$$

به کمک این معادله می‌توانیم حکم مذکور در تمرین را ثابت کنیم. زیرا، اگر نقطهٔ P بر دایرهٔ محیطی مثلث ABCواقع باشد، آن‌گاه

$\hat{APB} = \hat{ACB}$ و $\hat{MNL} = ۰$ ، یعنی نقطه‌های M، N و L بر یک خط واقعند (شکل ب). همچنین بعکس، اگر نقطه‌های M، N و L بر یک خط واقع باشند؛ آن‌گاه $\hat{MNL} = ۰$ و

$\hat{APB} = \hat{ACB}$ ؛ بنابراین، نقطهٔ P بر دایره‌ای واقع است که از نقطه‌های A، B و C می‌گذرد.

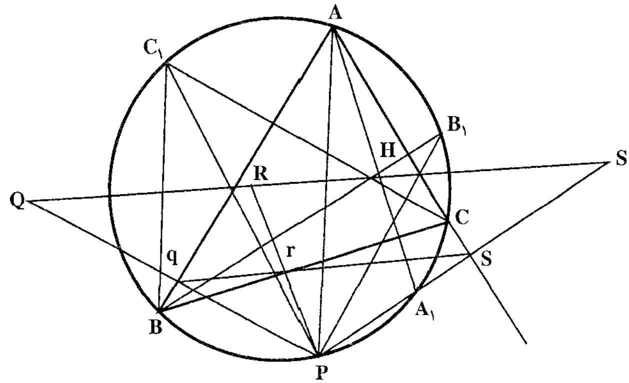


ب

۴۲۵. از رأسهای مثلث ABC ، خطهای راستی به موازات ضلعهای روبه‌رو رسم می‌کنیم تا مثلث $A_1B_1C_1$ ، متشابه با مثلث ABC، را به‌وجود آورند. این مثلث، از مثلث ABC با تبدیلی تجانسی به مرکز، مرکز ثقل مثلث که در مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مشترک است و نسبت تجانس برابر ۲− ، به دست می‌آید. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ است. در نتیجه، نقطهٔ O(مرکز دایرهٔ محیطی)، G (مرکز ثقل) و H (نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC) بر یک خط راست واقعند و $|OG| = \frac{۱}{۲}|GH|$ و G روی پاره‌خط OH قرار می‌گیرد.

۴۲۶. اگر P نقطه‌ای از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، تصویرهای این نقطه روی ضلعهای مثلث، q، r و s بر یک استقامت واقعند (خط سیمسون یا خط والاس). بنابراین R ، Q و S قرینه‌های نقطهٔ P نسبت به سه ضلع نیز بر یک استقامت خواهند بود و این خط مجانس خط قبلی در تجانس (P,۲) است.

اگر A_1 ، B_1 و C_1 قرینه‌های H ، محل تلاقی ارتفاعها نسبت به ضلعهای مثلث باشند،



داریم :

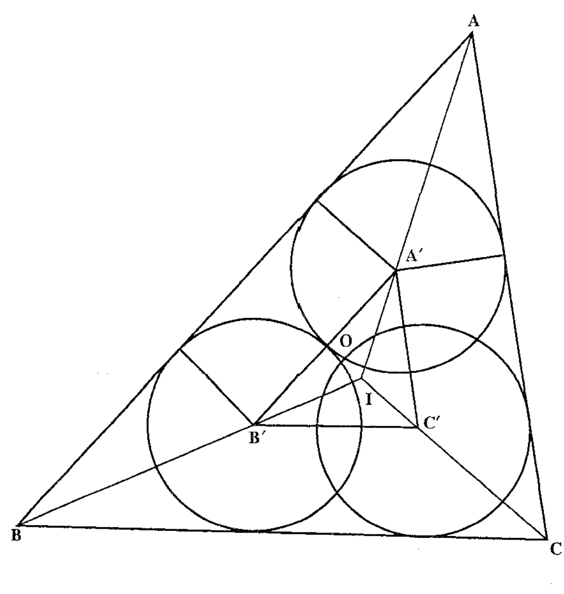
$$S\hat{H}B_1 = H\hat{B_1}P = B\hat{A}P \quad , \quad Q\hat{H}B = B\hat{C_1}P = B\hat{A}P$$

پس :

$$Q\hat{H}B = B_1\hat{H}S$$

و چون B ، H و B_1 بر یک استقامت قرار دارند، Q و H و S نیز چنینند.

۴۲۸. رأسهای مثلث را با A ، B و C و مرکزهای دایره‌ها را با A' ، B' و C' نمایش می‌دهیم ؛ شکل را ملاحظه کنید. از آن‌جا که سه دایره شعاعهای مساوی دارند، ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متجانسند. خاصیت مهم شکلهای متجانس این است که نقطه‌های متناظرشان برخطی که از مرکز تشابه (یا تجانس) می‌گذرد واقعند، خطهای AA' ،



BB' و CC' زاویه‌های A، B و C را نصف می‌کنند، آنها نقطه‌های متناظر مثلثهای متجانس مورد بحث را نیز به‌هم وصل می‌کنند. و در I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی $\Delta A'B'C'$ نیز هست، متلاقی می‌شوند. بنابراین I مرکز تشابه است. مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلث، نقطه‌های متناظرند و بنابراین بر خط گذرنده از I واقعند.

۴۲۹. فرض می‌کنیم، دایرهٔ محاطی، بر ضلعهای AB و AC بترتیب، در نقطه‌های E و F و دایرهٔ محاطی خارجی بر ضلع BC در نقطهٔ L و بر امتداد ضلعهای AB و AC ، بترتیب، در نقطه‌های M و N مماس باشند (شکل). داریم :

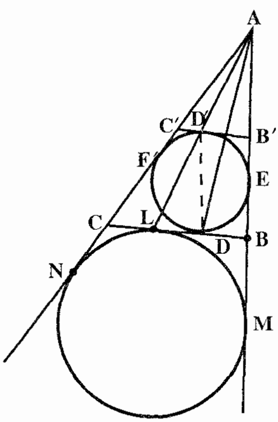
$$۲DB = DB + BE = CB - CD + AB - AE$$

$$= CB + AB - CF - AF = CB + AB - AC \text{ و}$$

$$۲CL = CL + CN = CB - LB + AN - AC$$

$$= CB - BM + AM - AC = CB + AB - AC$$

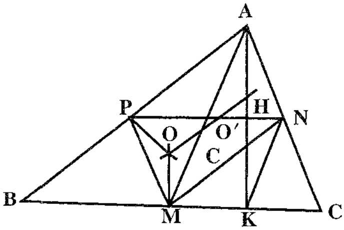
از آن‌جا
$$DB = \frac{۱}{۲}(CB + AB - AC) = CL$$



یعنی وسط پاره‌خط BC بر وسط پاره‌خط LD منطبق است. D' را سر دیگر قطری از دایرهٔ محاطی می‌گیریم که از D گذشته است و $C'B'$ را مماس بر این دایره در نقطهٔ D' فرض می‌کنیم. تجانس به مرکز A را طوری درنظر می‌گیریم که دایرهٔ محاطی خارجی را به دایرهٔ محاطی داخلی تبدیل کند. در این تجانس، نقطهٔ L به نقطهٔ D' تبدیل می‌شود. بنابراین، نقطه‌های L، D' و A روی یک خط راستند، در نتیجه، وسط پاره‌خطهای راست LD ، $D'D$ و AD هم روی یک خط راستند (خط راستی که وسط دو ضلع از مثلث ADL را به هم وصل می‌کند) و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳.۵.۲.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۳۰. اگر M، N و P وسطهای ضلعهای مثلث ABC فرض شوند. مثلث MNP مجانس مثلث



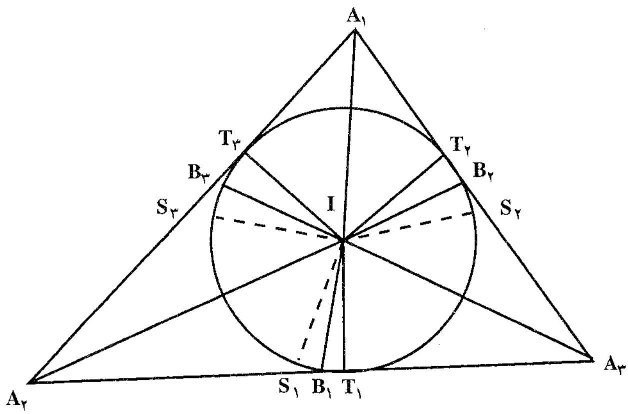
ABCدر تجانس $(G,-\frac{1}{2})$است. چرا؟ پس دایرهٔ محیطی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی مثلث MNPدر تجانس $(G,-\frac{1}{2})$ مجانس است. اگر O' مرکز دایرهٔ محیطی MNP باشد، اولاً، O' با O ، G و H بر یک استقامت بوده، ثانیاً $\frac{GO'}{GO}=-\frac{1}{2}$ است. اگر H' محل تلاقی سه ارتفاع مثلث MNPباشد، این نقطه نیز مجانس H، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث ABCدر تجانس $(G,-\frac{1}{2})$ است. اما H' بر O منطبق است، زیرا ارتفاعهای مثلث MNPعمودمنصفهای مثلث ABC می‌باشند. پس، $\frac{GO}{GH}=\frac{GO'}{GO}=-\frac{1}{2}$ و چون $OG=\frac{1}{3}OH$ و $GO'=\frac{1}{2}OG$ می‌باشد، پس، $GO'=\frac{1}{6}OH$ است و $OO'=OG+GO'=\frac{1}{3}OH+\frac{1}{6}OH=\frac{1}{2}OH$، یعنی نقطهٔ O' وسط OH می‌باشد، پس می‌توان گفت که $\frac{HO'}{HP}=\frac{1}{2}$ و دو نقطهٔ O و O' مجانس یکدیگر در تجانس مستقیم $(H,\frac{1}{2})$ می‌باشند. در این تجانس وسطهای HA، HB و HCمجانس رأسهای A ، B و C می‌باشند و چون A، B وC بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقعند، رأسهای HA، HB و HC بر دایرهٔ (O') دایرهٔ محیطی مثلث MNP قرار دارند. اگر Kپای ارتفاع رأس A باشد، شکل PNKM ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. چرا؟ و دایرهٔ محیطی مثلث MNP از نقطهٔ K و همچنین از پای دو ارتفاع دیگر نیز می‌گذرد.

۳.۳.۵ . خطهای: همرس، موازی، ...

۳.۵ . ۳ . ۱ . خطها همرسند

۴۳۱. دو دسته خط عمود موجود در این مسأله، خطهای متناظر یکدیگر در شکلهای متجانس $A'B'C'$ و $A''B''C''$ هستند.

۴۳۴. اگر بتوانیم نشان دهیم که مثلثهای : $M_1M_2M_3$ و $S_1S_2S_3$ متجانسند، در این صورت نتیجهٔ مطلوب نتیجهٔ بلافاصلهٔ آن خواهد بود. می‌دانیم که مثلثهای : $M_1M_2M_3$ و $A_1A_2A_3$ متجانسند و نشان خواهیم داد که $S_1S_2S_3$ و $A_1A_2A_3$ نیز هستند. در این صورت تجانس مثلثهای : $M_1M_2M_3$ و $S_1S_2S_3$ نتیجه می‌شود و می‌توان تساویهایشان را کنار گذاشت.



در شکل نیمسازهای زاویه‌های A_1 ، A_2 و A_3 را که ضلعهای روبه‌رویشان را در نقطه‌های B_1 ، B_2 و B_3 قطع می‌کنند، آورده، اما نقطه‌های وسط Mi را حذف کرده‌ایم. داریم :

$$T_1\hat{I}T_3 = 180^\circ - \hat{A}_2 \quad , \quad T_3\hat{B}_3A_3 = \hat{A}_2 + \frac{1}{2}\hat{A}_3$$

$$T_3\hat{I}B_3 = 90^\circ - (\hat{A}_2 + \frac{1}{2}\hat{A}_3) \quad , \quad T_3\hat{I}S_3 = 2T_3\hat{I}B_3 = 180^\circ - 2\hat{A}_2 - \hat{A}_3$$

به این ترتیب : $S_3\hat{I}T_1 = T_3\hat{I}T_1 - T_3\hat{I}S_3 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3$

و به‌طور مشابه : $S_2\hat{I}T_1 = \hat{A}_3 + \hat{A}_2$

در نتیجه، $S_2S_3 \| A_2A_3$ است. به همین ترتیب، $S_3S_1 \| A_3A_1$ و $S_1S_2 \| A_1A_2$ می‌باشد. بنابراین مثلثهای $S_1S_2S_3$ و $M_1M_2M_3$ دارای ضلعهای متناظر موازی‌اند. این مثلثها مساوی نیستند، زیرا S_1 ، S_2 و S_3 واقع بر دایرهٔ محاطی داخلی $\Delta A_1A_2A_3$ اند در حالی که M_1 ، M_2 و M_3 بر دایرهٔ نه نقطهٔ آن قرار دارند. این دایره‌ها شعاعهای متفاوت دارند، زیرا $\Delta A_1A_2A_3$ متساوی‌الاضلاع نیست. در این

صورت نتیجه می‌گیریم که مثلثهای : $S_1S_2S_3$ و $M_1M_2M_3$ متجانسند، و بنابراین : M_1S_1 ، M_2S_2 و M_3S_3 همرس می‌باشند.

۳.۵ .۲.۳ . خطها موازی‌اند

۴۳۵. هرگاه دو مثلث PQR و $P'Q'R'$ به مرکز O همسان باشند و علاوه بر آن QR با $Q'R'$ و RP با $R'P'$ موازی باشد، داریم :

$$\frac{OQ}{OQ'} = \frac{OR}{OR'} = \frac{OP}{OP'}$$

بنابراین PQ با $P'Q'$ موازی است.

۴۳۶. A_1C_1 را نیمساز مثلث $A_1A_2A_3$ می‌گیریم (شکل). چون از قرینهٔ پاره‌خط راست A_2A_3 ، نسبت به خط راست A_1C_1 ، پاره‌خط راست $B_{21}B_{31}$ به دست می‌آید، بنابراین دو خط راست A_2A_3 و $B_{21}B_{31}$ ، در نقطهٔ C_1 به هم می‌رسند. بنابر ویژگی نیمساز داریم :

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{C_1A_2}{C_1A_3}$$

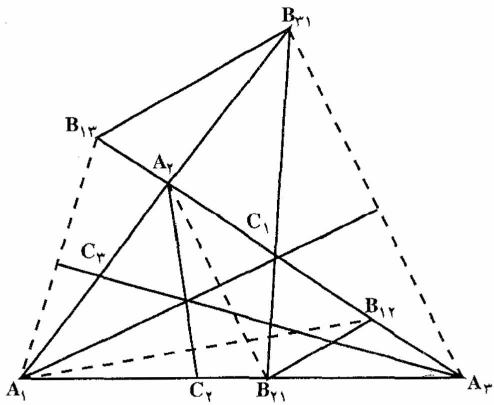
که از آن‌جا به دست می‌آید :

$$\frac{B_{12}C_1}{B_{13}C_1} = \frac{B_{12}A_2 - C_1A_2}{B_{13}A_3 - C_1A_3} = \frac{A_1A_2 - C_1A_2}{A_1A_3 - C_1A_3} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$

زیرا $B_{12}A_2 = A_1A_2$ و $B_{13}A_3 = A_1A_3$.

به همین ترتیب، به دست می‌آید :

$$\frac{B_{21}C_1}{B_{31}C_1} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$$



یعنی مثلثهای $B_{12}C_1B_{21}$ و $B_{13}C_1B_{31}$ متجانس و دو خط راست $B_{12}B_{21}$ و $B_{13}B_{31}$ باهم موازی‌اند. به همین ترتیب، موازی بودن دو خط راست $B_{23}B_{32}$ و $B_{13}B_{31}$ هم ثابت می‌شود.

نکته. می‌توان ثابت کرد که سه خط راست $B_{12}B_{21}$ ، $B_{13}B_{31}$ و $B_{23}B_{32}$ بر خط راستی که از مرکزهای دو دایرهٔ محاطی و محیطی مثلث $A_1A_2A_3$ می‌گذرد، عمودند.

۳.۵ . ۳.۳ . خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۴۳۷. ثابت کنید سه نقطهٔ X، I و X' همخطند.

۵.۳.۴ . زاویه

۳.۵ . ۴. ۱. اندازهٔ زاویه

۴۳۸. $D\hat{E}C = 90^\circ$ ، $E\hat{D}C = 60^\circ$ و $D\hat{C}E = 30^\circ$. اگر دوران دو نقطهٔ D، به اندازهٔ ۶۰ درجه و در جهت مناسب و سپس، تجانس به مرکز D و ضریب $\frac{1}{2}$ را درنظر بگیریم، نقطهٔ P به نقطهٔ Hوسط پاره‌خط راست MP، نقطهٔ B به نقطهٔ Kوسط پاره‌خط راست BPو خط راست BP به خط راست KH(که AP را در E قطع می‌کند) منجر می‌شود.

۵.۳.۵ . پاره‌خط

۳.۵ . ۵. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۳۹. O_i مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $I_aI_bI_c$ ساخته شده توسط مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABCقرینهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن نسبت به O مرکز دایرهٔ محیطی آن می‌باشد. اگر H و G محل تلاقی ارتفاعها و مرکز ثقل مثلث ABC باشند، نقطهٔ G همچنین مرکز ثقل مثلث HIO_i است، زیرا $HG = 2GO$ در نتیجه IG از نقطهٔ I' وسط HO_i عبور می‌کند و $IG = 2GI'$ ، I' مقابل I در تجانس $(G, -\frac{1}{2})$ است. در نتیجه I' نقطه‌ای است در مثلثی که رأسهایش وسطهای ضلعهای مثلث ABC یعنی $A'B'C'$ ، مجانس I از مثلث ABC و حکم ثابت است.

۶.۳.۵ . رابطه‌های متری

۴۴۰. بر دایره مماسی در نقطهٔ M_1 رسم می‌کنیم و این مماس AC را در A_1 و BC را در B_1 قطع می‌کند. آن‌گاه بدیهی است که $CA_1 + A_1M_1 = CB_1 + B_1M_1$ خواهد بود. همچنین از این حقیقت که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و ABC متجانس هستند، استفاده می‌کنیم. دلیل این امر این است که AB و A_1B_1 بر قطر MM_1 عمود بوده و از این‌رو $AB \| A_1B_1$ خواهد بود.

۴۴۱. ابتدا اشاره می‌کنیم که نقطهٔ مطلوب M باید در خارج ΔABC و درون زاویهٔ ACB واقع باشد، زیرا فرض کنید که M نقطه‌ای در داخل ΔABC باشد ؛ محل برخورد خط CM با ضلع AB را M' می‌نامیم (شکل ۱). در این صورت $AM' + BM' < AM + BM$ و $CM' > CM$ لذا :

$$AM' + BM' - CM' < AM + BM - CM$$

اکنون فرض کنید که Mدرون $\hat{ACB}$ واقع نباشد، در این صورت چندین امکان برای M وجود دارد. ابتدا فرض کنید که M در زاویهٔ متقابل به رأس نسبت به زاویهٔ ACB قرار دارد و نقطهٔ M' قرینهٔ M را نسبت به خط l، که از C به موازات AB رسم شده است، به دست می‌آوریم (شکل ۱ـ ب). در این صورت $M'C = MC$ و $M'A < MA$ ، $M'B < MB$ (این دو نامساوی اخیر از این‌جا ناشی می‌شوند که با قرارداد شکل (۱ـ ب)، داریم : $M'P < MP$ و بنابراین

$$AM' + BM' - CM' < AM + BM - CM$$

حال فرض کنید که M به زاویهٔ CABتعلق دارد (ولی روی خط ABنیست!) و درون مثلث ABC واقع نشده است و قرینهٔ Mنسبت به خط AB ، M' می‌نامیم (شکل ۱ـ ج). در این صورت $AM' = AM$ ، $BM' = BM$ و $CM' > CM$ (نامساوی اخیر از این‌جا نتیجه می‌شود که با نمادگذاری شکل (۱ ـ ج) داریم : $M'Q > MQ$) و بنابراین

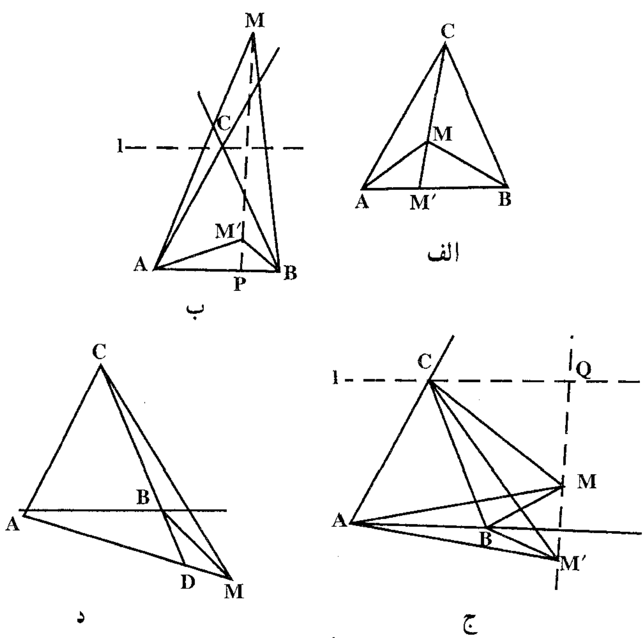
$$AM' + BM' - CM' < AM + BM - CM$$

به‌طور مشابه، این فرض که M به $\hat{CBA}$ تعلق دارد ولی به ΔABC متعلق نیست به تناقض می‌انجامد. سرانجام، فرض کنید که M در زاویه‌ای است که با زاویهٔ ABCمتقابل

به رأس است (یا روی خط AB است). در این صورت $MC - MB < BC$ و $MA > BA$ (نامساوی اخیر از این‌جا ناشی می‌شود که $M\hat{B}A > D\hat{B}A > 90^\circ$ ، شکل (۱ــ د)) و بنابراین

$$MA + MB - MC = MA - (MC - MB) > BA - BC = BA + BB - BC$$

به همین طریق می‌توان نشان داد که M نمی‌تواند در زاویه‌ای که با زاویهٔ BAC متقابل به رأس است قرار گیرد، پس این فرض که M درون زاویهٔ ACB نیست نیز به تناقض منتهی شده است. اکنون فرض کنید X نقطهٔ دلخواهی از زاویهٔ ACB باشد که به ΔABC تعلق ندارد. مثلث ACX را به اندازهٔ 60° حول نقطهٔ A و در جهت از C به Bدوران می‌دهیم تا به وضع $AC'X'$ قرار گیرد (شکل ۲ ــ الف). چون $AX = XX'$ (زیرا مثلث AXX' متساوی‌الاضلاع است) و $CX = C'X'$ ، نتیجه می‌گیریم که $AX + BX - CX$ برابر است با $X'X + BX - C'X'$ ؛



شکل (۱)

پس باید نقطهٔ X را طوری اختیار کنیم که کمیت $BX + XX' - C'X'$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. اما چون روشن است که $C'B + BX + XX' \geq C'X'$

بنابراین همواره داریم : $BX + XX' - C'X' \geq -C'B$

پس می‌توانیم نقطهٔ Mرا طوری بیابیم که

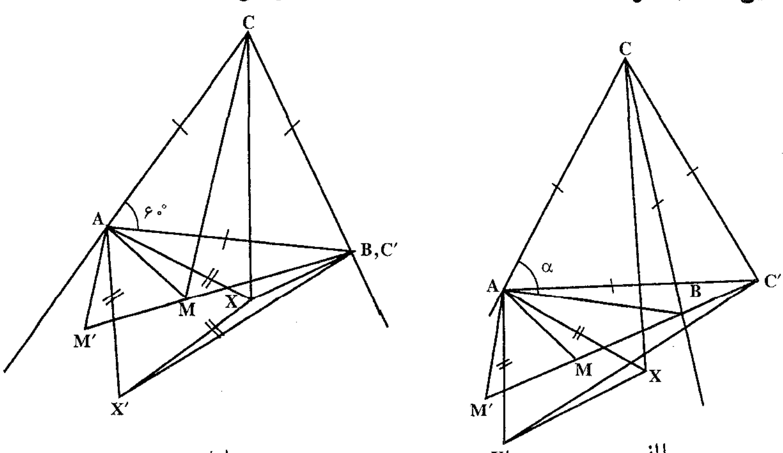
$$C'B + BM + MM' = C'M' \quad , \quad BM + MM' - C'M' = -C'B \ (*)$$

که در آن M' از M به همان طریقی که X' از X به دست آمد، به دست آمده است، پس M همان نقطهٔ مطلوب خواهد بود.

حالت اول. $\hat{A} = \alpha > ۶۰^\circ$ یعنی $AC = BC > AB$ و ΔABC متساوی‌الاضلاع نیست. در این حالت C' بر B منطبق نیست و معادله‌های (*) به شرطی برقرارند که نقطه‌های M و M' هردو بر خط $C'B$ واقع باشند (شکل ۲ــ الف). چون زاویهٔ C از مثلث ABC برابر است با $۱۸۰^\circ - ۲\alpha$ نتیجه می‌شود که زاویهٔ رأس C در مثلث BCC' برابر است با $۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - ۲\alpha) = ۲\alpha - ۱۲۰^\circ$ ؛ بنابراین $CC'B = CB\hat{C}' = ۱۵۰^\circ - \alpha$ و بنابراین $C'\hat{B}A = C'\hat{B}C + \alpha = ۱۵۰^\circ$. پس اگر M طوری اختیار شود که $C'\hat{B}M = ۱۸۰^\circ$، آن‌گاه خواهیم داشت: $A\hat{B}M = ۳۰^\circ$.
اگر علاوه بر این M طوری اختیار شود که داشته باشیم: $BM\hat{M}' = BM\hat{A} + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ$، آن‌گاه $BM\hat{A} = ۱۲۰^\circ$. از این‌جا نتیجه می‌شود که یک نقطهٔ M یکتا موجود است، چنان که M و M' هردو بر خط $C'B$ واقع باشند و داشته باشیم:

$$AM + BM - CM = BM + MM' - C'M = -C'B$$

این نقطه با شرط $M\hat{B}A = M\hat{A}B = ۳۰^\circ$ مشخص می‌شود (شکل ۳ــ الف).

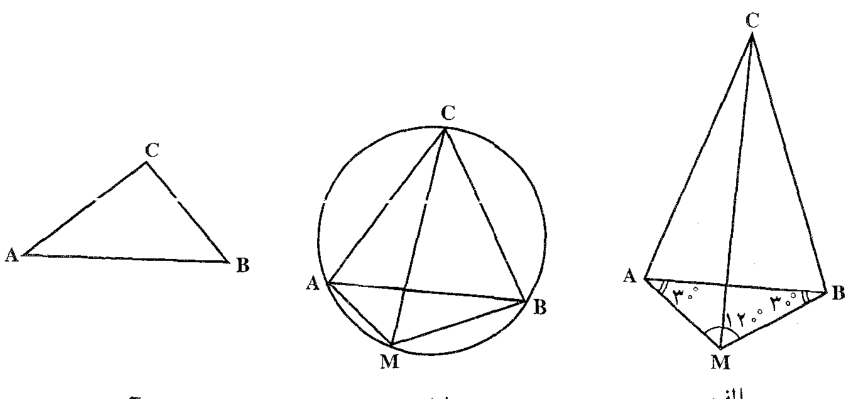


شکل (۲)

حالت دوم. $\hat{A} = ۶۰^\circ$ یعنی ΔABC متساوی‌الاضلاع است ؛ در این حالت $C' = B$ (شکل ۲ــ ب). همچنین داریم : $BM + MM' - C'M' = -C'B(=۰)$

اگر خط شکستهٔ BMM' عملاً پاره‌ای از یک خط باشد و بنابراین $B\hat{M}A = ۱۲۰^\circ$ (زیرا $A\hat{M}M' = ۶۰^\circ$). همهٔ این نقطه‌های M (شکل ۳ــ ب) بر کمان AB از دایرهٔ محیطی ΔABC واقعند ؛ هر نقطه‌ای با این خصوصیات در شرایط مسأله صدق می‌کند.

تذکر. راه حل بالا در حالتی که $AC = BC < AB$ و $\hat{A} = \alpha < ۶۰^\circ$ ، قابل استفاده نیست. در این حالت می‌توان نشان داد که کمترین مقدار عبارت $AM + BM - CM$ وقتی حاصل می‌شود که نقطهٔ M بر رأس A یا رأس B از ΔABC منطبق شود (شکل ۳ــ ج). مسأله را می‌توان بدین صورت نیز مطرح کرد که در مثلث نامشخص ABC نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که مقدار عبارت $MA + MB - MC$ حداقل ممکن را داشته باشد. در این‌جا هم معادلهٔ (*) برای یک نقطهٔ M واقع در زاویهٔ ACB و نه در ΔABC صادق است و بنابراین بسادگی معلوم می‌شود که اگر M در رابطهٔ $A\hat{M}C = B\hat{M}C = ۶۰^\circ$ هم صدق کند، خواهیم داشت $A\hat{M}B = ۱۲۰^\circ$ ، پس به ازای این نقطه، عبارت $MA + MB - MC(= -C'B)$ کمترین مقدار ممکن را خواهد داشت (در این‌جا نقطهٔ C' از C براثر دورانی حول A به زاویهٔ ۶۰° در جهت AC به AB به دست می‌آید ؛ این دوران، M را به نقطهٔ M' که در معادله‌های (*) ظاهر می‌شود بدل می‌کند). اما، بیان کامل شرایطی که در آن (*) امکان‌پذیر باشد، در حالت کلی بسیار مشکل است.

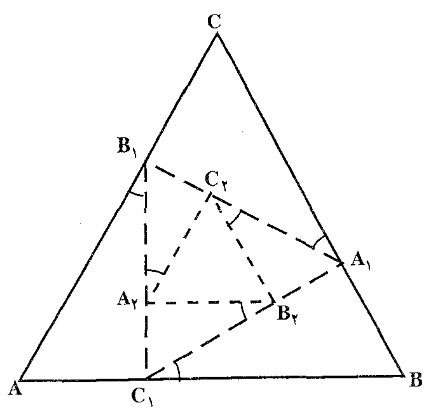


شکل (۳)

۷.۳.۵ . ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۴۴۳. اگر $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ و $A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ مجانسهای $A\overset{\Delta}{B}C$ در تجانسهای (O_1,k) و (O_2,k) باشند، بنابه خاصیت تجانس $AB = A_1B_1$ ، $AC\|A_1C_1$ ، $BC\|B_1C_1$ ، $AB\|A_2B_2$ ، $AC\|A_2C_2$ و $BC\|B_2C_2$ که در نتیجه $A_1B_1\|A_2B_2$ ، $A_1C_1\|A_2B_2$ و $B_1C_1 = B_2C_2$ یعنی دو مثلث $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ و $A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ که ضلعهایشان نظیر به نظیر موازی‌اند، مجانس بوده و خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 در یک نقطه مانند ω همرسند و ω را مرکز تجانس $A_1\overset{\Delta}{B_1}C_1$ و $A_2\overset{\Delta}{B_2}C_2$ می‌نامند و O_1 ، O_2 و ω بر یک استقامت قرار دارند.

۴۴۵. اگر ABCمثلثی متساوی‌الاضلاع باشد (شکل)، ضلعهای مثلثهای ABC و $A_2B_2C_2$ موازی‌اند (چرا؟)، یعنی این مثلثها متجانسند. از آن‌جا نتیجه می‌شود که در حالت کلی مثلثهای ABC و $A_2B_2C_2$ مجانس یکدیگر و بنابراین متشابه‌اند.



۴۴۶. اگر G، G_a ، G_b و G_c مرکزهای ثقل مثلثهای ABC، BCH، CHA و HABباشند، این نقطه‌ها مطابقند با (محل برخورد ارتفاعهای این مثلثها) یعنی نقطه‌های H، A، B و Cدر تجانس $(N,\frac{-1}{3})$ در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

۴۵۲. هر دو مثلث موردنظر، مجانس مثلث اصلی هستند، پس خود مجانس یکدیگرند.

۸.۳.۵.رسم شکلها

۴۵۳. ابتدا حالتی را درنظر می‌گیریم که مجموع دو عدد کوچکتر از سه عدد a، b و c از عدد سوم تجاوز نکند؛ مثلاً فرض کنید $a \ge b + c$. به ازای هر نقطهٔ X داریم :

$$a.XA + b.XB + c.XC \ge (b + c)XA + b.XB + c.XC$$

$$= b(XA + XB) + c(XA + XC) \ge b.AB + c.AC$$

(زیرا $XA + XB \ge AB$ ،$XA + XC \ge AC$)؛ لذا مجموع

$$a.XA + b.XB + c.XC$$

کمترین مقدار ممکن را وقتی اختیار می‌کند که نقطهٔ X بر نقطهٔ A منطبق باشد، پس اکنون مانده است، حالتی را در نظر بگیریم که مثلثی به ضلعهای a، b و c وجود دارد.

راه حل اوّل. فرض کنید $A_\circ B_\circ C_\circ$ مثلثی باشد با ضلعهای a، b و c و فرض کنید $\alpha = a/b$ و $\gamma = c/b$ ؛ X را نقطهٔ دلخواهی در صفحه می‌گیریم. تجانس مارپیچی به مرکز A و نسبت تجانس γ و زاویهٔ دورانی برابر با زاویهٔ $A_\circ$ از $\Delta A_\circ B_\circ C_\circ$ (دوران در جهت از B به C صورت می‌گیرد)، مثلث AXC را به مثلث $AX'C'$ بدل می‌کند (شکل الف). مثلثهای $AX'X$ و $A_\circ B_\circ C_\circ$ متشابه‌اند، زیرا بنا به فرض

$$\frac{AX'}{AX} = \gamma = \frac{A_\circ B_\circ}{A_\circ C_\circ}\ ,\ \ X\hat{A}X' = B_\circ\hat{A}_\circ C_\circ$$

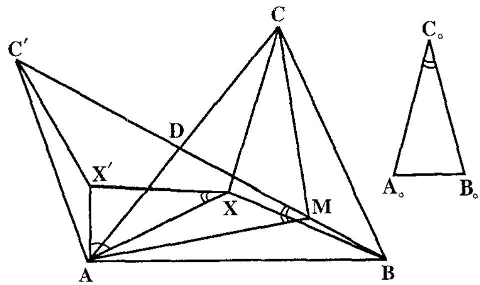
از تشابه آنها داریم $X'X/AX = a/b = \alpha$ ؛ $XX' = \alpha AX$ ؛ بعلاوه، با توجه به ترسیم، $C'X' = \gamma CX$. بنابراین

$$C'X' + X'X + XB = \gamma.CX + \alpha.AX + BX$$

$$= \frac{c.CX + a.AX + b.BX}{b}$$

و بنابراین کمیت $a.AX = b.BX + c.CX$ وقتی دارای کمترین مقدار است که خط شکستهٔ $BXX'C'$ کمترین طول را داشته باشد. در این جا حالتهای زیر ممکن است پیش بیاید :

حالت اوّل. خط BC' ضلع AC از مثلث داده شده را در یک نقطهٔ D قطع می‌کند. در این حالت کوتاهترین خط شکستهٔ واصل بین نقطه‌های B و C' که پاره‌خط AC را قطع می‌کند، پاره‌خط BC' است. با توجه به این که زاویهٔ AXX' برابر است با زاویهٔ $C_\circ$



الف

از مثلث $A_\circ B_\circ C_\circ$، نقطهٔ M را بسادگی می‌توان یافت. برای این کار بر پاره‌خط AD، در همان طرفی که نقطهٔ B قرار دارد، کمانی درخور زاویهٔ مذکور رسم می‌کنیم. اگر این کمان پاره‌خط BC' را قطع کند، نقطهٔ برخورد همان نقطهٔ مطلوب M خواهد بود. اگر این کمان پاره‌خط BC' را قطع نکند، آن‌گاه نقطهٔ مطلوب M بر B منطبق خواهد بود.

حالت دوم. اگر خط BC' ضلع AC از مثلث ABC را قطع نکند، کوتاهترین خط شکستهٔ $BXX'C'$ که ضلع AC را قطع کند یا خط شکستهٔ BCC' خواهد بود و یا خط شکستهٔ BAC' روشن است که در حالت اول $M = C$ و در حالت دوم $M = A$.

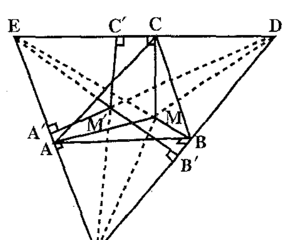
راه حل دوم. اگر در مثلث DEF داشته باشیم $EF:FD:DE = a:b:c$ ، آن‌گاه مجموع فاصله‌های ضلعهای مثلث DEF از نقطهٔ دلخواه M که بترتیب در اعداد a، b و c ضرب شده باشند، ثابت است. زیرا، با توجه به شکل (ب) داریم :

مساحت(ΔMDE)+ مساحت(ΔMFD) + مساحت(ΔMEF) = مساحت(ΔDEF)

یا اگر $EF = ak$ ، $FD = bk$ و $DE = ck$ ،

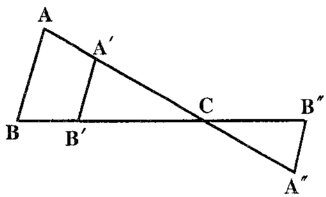
$$(\Delta DEF)\ \text{مساحت} = \frac{1}{2}MA.ka + \frac{1}{2}MB.kb + \frac{1}{2}MC.kc$$

$$\text{مقدار ثابت} = \frac{2 \times (\Delta DEF)\ \text{مساحت}}{k} = a.MA + b.BM + c.MC$$



ب

در این‌جا A، B و C پاهای عمودهای وارد از M بر ضلعهای مثلث DEF هستند. حال مثلث DEF را که نسبت ضلعهایش برابر a:b:c است بر مثلث ABC چنان محیط می‌کنیم که عمودهای رسم شده از نقطه‌های A، B و C بر ضلعهای DEF در نقطهٔ مشترک M یکدیگر را قطع کنند. اگر M درون ΔABC واقع باشد، همین M جواب مسأله کمترین مقدار است؛ اگر M خارج ΔABC باشد؛ یکی از رأسهای مثلث جواب مسأله خواهد بود.



۴۵۴. مجانس مستقیم مثلث ABC با نسبت $\frac{1}{2}$ و به مرکز رأس C، مثلث $CA'B'$ است به قسمی که:

$$\frac{CA'}{CA}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1}{2}$$

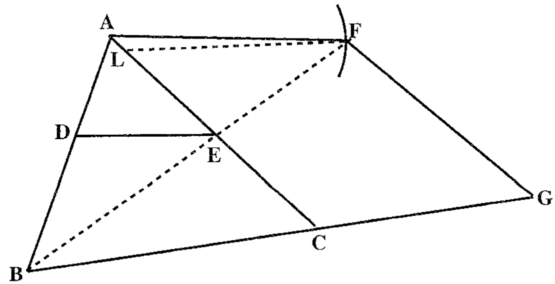
و مجانس معکوس مثلث ABC با نسبت $\frac{1}{2}$ و به مرکز رأس C مثلث $CA''B''$ می‌باشد، به قسمی که:

$$\frac{CA''}{CA}=\frac{CB''}{CB}=\frac{1}{2}$$

و به همین ترتیب، با نسبت ۱ و ۲ نیز می‌توان عمل نمود (مجانس مستقیم مثلث با نسبت ۱ و به مرکز C بر خود مثلث منطبق می‌شود) و مجانس معکوس مثلث با نسبت ۱ و به مرکز C قرینهٔ مرکزی مثلث به رأس C می‌شود.

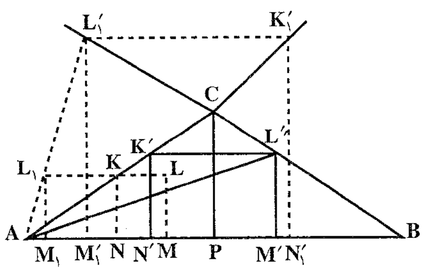
۴۵۵. برای این که ذوزنقهٔ DEFG با ذوزنقهٔ BCDF متشابه شود، کافی است، داشته باشیم: $\frac{ED}{BC}=\frac{FG}{ED}$. یعنی FG مجانس ED نسبت به مرکز تجانس A است با نسبت تجانس $\frac{ED}{BC}$ که مقداری است معلوم. پس مجانس ED را نسبت به A با نسبت $\frac{ED}{BC}$ رسم می‌کنیم، تا خط FG به دست آید و چون زاویه‌های دو ذوزنقه با هم برابرند پس دو شکل متشابه خواهند بود.

۴۵۶. اگر ABCDE شکل خواسته شده باشد، از A موازی DE رسم می‌کنیم تا BE را در F قطع کند و از F موازی AC تا BC را در G قطع کند. دو چهارضلعی BDEC و BAFG مجانس یکدیگر نسبت به مرکز تجانس B هستند، پس $BA = AF = FG$.
چهارضلعی BAFG بسادگی قابل رسم است. به این طریق که از C به اندازهٔ BA روی CA و در جهت آن جدا می‌کنیم تا L به دست آید و از L موازی BC رسم می‌نماییم تا



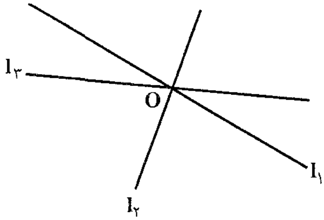
دایرهٔ به مرکز A و شعاع BA را در F قطع کند، BF خط AC را در E قطع می‌کند و اگر از E موازی FA رسم کنیم تا AB را در D قطع کند، DE خط مطلوب است.

۴۵۷. الف. مربع $KLMN$ را طوری رسم می‌کنیم که K بر ضلع AC و MN بر قاعدهٔ AB قرار گیرد (شکل الف)؛ اگر L' نقطهٔ برخورد خط AL با BC باشد، تجانس به مرکز A و



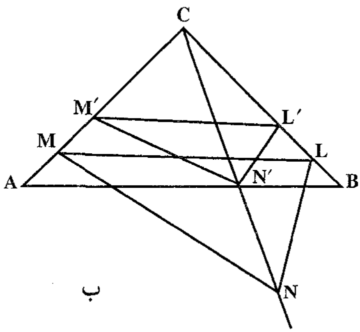
الف

نسبت $k = AL'/AL$ مربع $KLMN$ را به مربع خواسته شدهٔ $K'L'M'N'$ بدل می‌کند (اگر بخواهیم که مربع خواسته شده حتماً همهٔ رأسهایش بر خود ضلعهای مثلث ABC و نه بر امتداد آنها قرارگیرد، مسأله طبعاً برای حالتی که هر دو زاویهٔ A و B کمتر از 90° باشند یا یکی از آنها مساوی 90° باشد، جواب یکتایی دارد و اگر یکی از این زاویه‌ها از 90° بیشتر باشد، هیچ جوابی نخواهد داشت. اگر مجاز باشیم که رأسهای مربع را بر امتداد ضلعهای مثلث ABC بگیریم، در حالت کلی مسأله دو جواب خواهد داشت که به صورت دو مربع $K'L'M'N'$ و $K'_1L'_1M'_1N'_1$ در شکل (الف) نشان داده شده است. تنها در حالتی که $AL_1 \| BC$ (با توجه به حروف شکل (الف)) مسأله جوابی یکتا دارد. اکنون فرض کنید در شکل (الف) داریم $K = C$، لذا ارتفاع مثلث، CP، یک ضلع مشترک دو مربع $KLMN$ و KL_1M_1N، یعنی ضلع KN خواهد شد. در این صورت



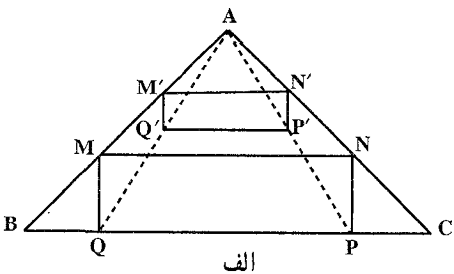
به آسانی می‌توانیم بپذیریم که مسأله جواب یکتایی دارد، یعنی $AL_1 \| BC$ ، اگر و تنها اگر ارتفاع CP در مثلث ABC با قاعدهٔ AB مساوی باشد).

ب. یک مثلث LMN رسم کنید که ضلعهایش موازی با l_1 ، l_2 و l_3 باشد و L روی BC و M روی CA قرار گیرد. اگر N' نقطهٔ برخورد خطهای CN و AB باشد، آن‌گاه تجانس به مرکز C و نسبت $k = CN'/CN$ مثلث LMN را به مثلث مطلوب $L'M'N'$ بدل می‌کند (شکل ب).



ب

۴۵۸. فرض می‌کنیم مستطیل MNPQ در مثلث ABC محاط باشد (شکل الف). در این صورت پاره‌خطهای AP و AQ را وصل می‌کنیم و بر پاره‌خط دلخواهی مانند $M'N'$ که موازی BC رسم می‌شود و دو سر آن بر ضلعهای AB و AC واقعند.



الف

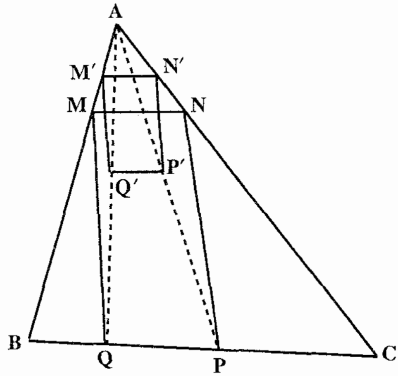
مستطیل $M'N'P'Q'$ را بنا می‌کنیم که رأس P' آن بر پاره‌خط AP واقع بوده و در نتیجه رأس Q' آن بر پاره‌خط AQ واقع شود. (چرا؟) این مستطیل مجانس مستطیل MNPQ در تجانس به مرکز A است (چرا؟) و در این صورت :

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{AN'}{AN} = \frac{N'P'}{NP} \Rightarrow \frac{M'N'}{N'P'} = \frac{MN}{NP} = ۲ \Rightarrow N'P' = \frac{۱}{۲}M'N'$$

است. از این‌جا راه حل مسأله به طریق زیر مشخص می‌شود.

خطی موازی ضلع BC از مثلث رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را در نقطه‌های M' و N' قطع کند. در این دو نقطه دو عمود بر $M'N'$ رسم می‌کنیم و بر آنها دو پاره‌خط $N'P'$ و $M'Q'$ را چنان جدا می‌کنیم که :

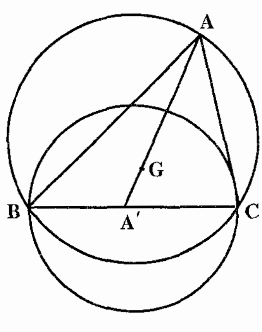
$$N'P' = M'Q' = \frac{۱}{۲}M'N'$$



ب

(شکل الف) پاره‌خطهای AP' و AQ' را رسم می‌کنیم تا BC را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. این دو نقطه دو رأس از مستطیل مطلوب هستند. اگر بر عمودهای رسم شده بر $M'N'$ دو پاره‌خط به اندازه‌هایی مساوی $۲M'N'$ جدا کنیم (شکل ب)، به همان ترتیب، مستطیل دیگری محاط در مثلث می‌توان رسم کرد که اندازهٔ یکی از ضلعهای آن دو برابر اندازهٔ ضلع دیگر است.

۹.۳.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۶۰. می‌دانیم دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث ABC مجانس دایرهٔ محیطی مثلث در تجانس $(G,\frac{۱}{۲})$ است، پس شعاع دایرهٔ نه نقطه $\frac{R}{۲}$ بوده و این دایره از نقطهٔ ثابت A' وسط BC می‌گذرد، پس همواره بر دایره‌ای به مرکز A' و به شعاع R مماس می‌باشد، زیرا خط‌المرکزین دو دایره است و با تفاضل دو شعاع برابر است.

۴۶۲. داریم:

$$OA' = \frac{۱}{۲}AH = AP = PH$$

در نتیجه $APA'O$ و $PHA'O$ متوازی‌الاضلاع هستند. از متوازی‌الاضلاع اوّل نتیجه می‌شود که قطر PA' از دایرهٔ N برابر شعاع OA از دایرهٔ محیطی مثلث ABC

است و از متوازی‌الاضلاع دوم قطر HO از N وسط قطر PA' عبور می‌کند و در N نصف می‌شود.

تبصرهٔ ۱. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مجانس یکدیگر به مرکز تجانس G و نسبت تجانس (۲−) هستند و در نتیجه ثابت می‌شود که نقطه‌های O و N مزدوج توافقی G و H هستند، زیرا N و O قطعه خط HG را داخلی و خارجی به نسبت ۱ :۲ تقسیم می‌کنند.

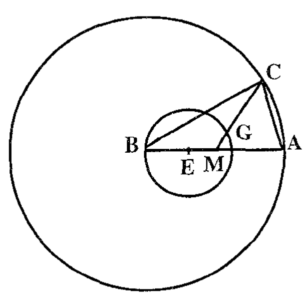
تبصرهٔ ۲. دایرهٔ نه نقطه، مجانس دایرهٔ O به مرکز تجانس H و نسبت ۱ :۲ یا به مرکز تجانس G و نسبت ۲:۱− است.

۴۶۴. زیرا N_a دایرهٔ نه نقطهٔ گروه $GG_aG_bG_c$ مطابق با N دایرهٔ نه نقطهٔ گروه HABC در تجانس $(N, \frac{-1}{3})$ است. N مرکز مشترک دو دایرهٔ N و N_a است.

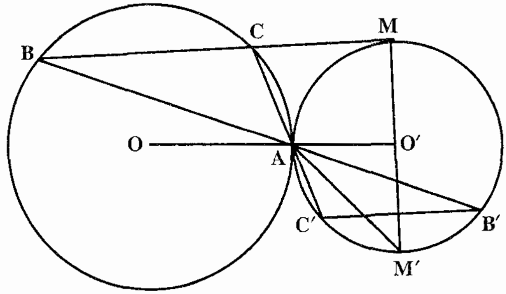
۴۶۵. چون دایرهٔ S را می‌توان نتیجهٔ تجانس دایرهٔ محیطی مثلث، با ضریب تجانس $\frac{1}{2}$ دانست، بسادگی می‌توانیم مرکز تجانس را پیدا کنیم. همین مرکز تجانس، نقطهٔ مورد نظر مسأله است.

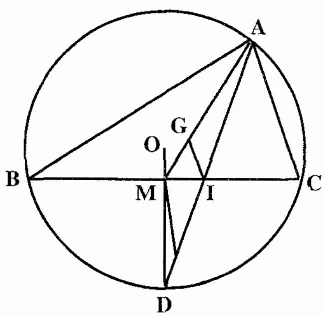
۴۶۶. فرض کنیم از مثلث متساوی‌الساقین ABC ساق AB ثابت باشد، مکان رأس C دایره‌ای است به مرکز B و به شعاع BA. اگر M وسط BA فرض شود، داریم: $\frac{\overrightarrow{MG}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{1}{3}$، پس نقطهٔ G مجانس نقطهٔ C در تجانس $(M, \frac{1}{3})$ است، بنابراین مکان G مجانس مکان C، یعنی دایرهٔ به مرکز E و به شعاع $\frac{AB}{3}$ است، به قسمی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$



۴۶۷. نقطهٔ A مرکز تجانس دو دایره است. وتر $B'C'$ محصور بین AB و AC با BC موازی است. $O'M$ که بر BC عمود است بر $B'C'$ نیز عمود می‌باشد و از وسط $\overset{\frown}{B'C'}$ می‌گذرد، پس AM' نیمساز داخلی زاویهٔ $B\hat{A}C$ می‌باشد، در نتیجه AM نیمساز خارجی این زاویه است. اگر دو دایره مماس داخلی باشند، AM نیمساز داخلی خواهد بود.

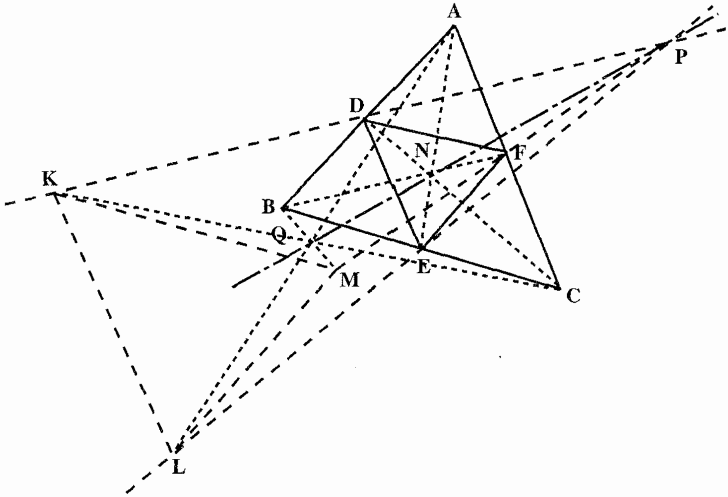




۴۶۸. اگر M وسط BC باشد، زاویهٔ IMD قائمه است، پس مکان هندسی M دایره‌ای به قطر ID است و چون $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{۲}{۳}$ می‌باشد، مکان G دایرهٔ مجانس مکان M در تجانس $(A, \frac{۲}{۳})$ خواهد بود.

۱۰.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۶۹. الف. مثلث EFD از مثلث مفروض ABC بر اثر تجانسی که مرکزش، مرکز هندسی ΔABC و نسبت آن $k_1 = -\frac{۱}{۲}$ است به دست می‌آید و ΔLMK بر اثر تجانسی به مرکز P و نسبت ۲ $k_2 =$ (شکل). چون $k_1 k_2 = -\frac{۱}{۲} \times ۲ = -۱$ ، مثلث LMK از مثلث ABC بر اثر تجانسی با نسبت $k = -۱$ یعنی از یک نیمدور حول نقطه‌ای به نام Q به دست می‌آید ؛ بدین ترتیب برهان کامل می‌شود.



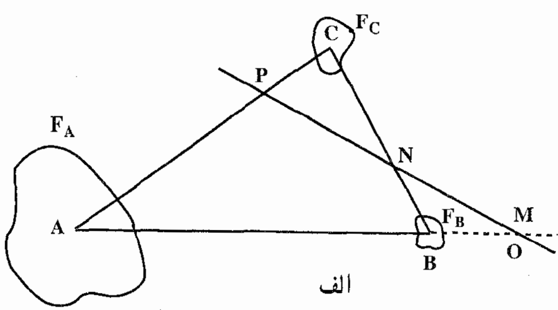
ب. داریم :
$$O_1O = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1} O_1O_2$$

با فرض
$$O_1 = N \ , \ O_2 = P \ , \ O = Q \ , \ k_1 = -\frac{1}{2} \ , \ k_2 = 2$$

خواهیم داشت :
$$NQ = \frac{2 - 1}{-1 - 1} NP = -\frac{1}{2} NP$$

یعنی، Q از P بر اثر یک تجانس به مرکز N و نسبت $-1/2$ به دست می‌آید، بنابراین وقتی P دایرهٔ S را بپیماید، Q نیز دایره‌ای را می‌پیماید که بر اثر تجانس بالا از S به دست می‌آید.

۴۷۰. الف. فرض کنید F_A شکلی باشد شامل رأس A از مثلث و F_C از F_A بر اثر تجانسی به مرکز P و نسبت $k_1 = PC/PA$ به دست آید و F_B از F_C بر اثر تجانسی به مرکز N



الف

و نسبت $k_2 = NB/NC$ (شکل الف). روشن است که نقطهٔ A از شکل F_A با نقطهٔ C از شکل F_C متناظر است که به نوبهٔ خود متناظر است با نقطهٔ B از شکل F_B. بنا به قضیهٔ مربوط به ضرب تجانسها، F_B از F_A بر اثر تجانسی به مرکز O و نسبت k به دست می‌آید. همچنین O بر خط BA (زیرا B و A نقطه‌های متناظری از دو شکل F_B و F_A هستند) و نیز بر خط PN واقع است (بنا به قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس)؛ و داریم:

$$k = k_1 k_2 = \frac{PC}{PA}.\frac{NB}{NC}$$

اگر $k_1 k_2 = 1$، آن‌گاه F_B از F_A با یک انتقال به دست می‌آید. اگر

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{AP} = 1$$

آن‌گاه:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{PC}{PA}.\frac{NB}{NC} = k_1 k_2 = k$$

چون $OB/OA = k$، پس M بر O منطبق است و بنابراین بر خط PN قرار دارد. بعکس، اگر نقطه‌های M، N و P بر یک راستا باشند، M نقطهٔ برخورد خطهای AB و PN است و لذا بر O منطبق خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{OB}{OA} = k = k_1 k_2 = \frac{PC}{PA}.\frac{NB}{NC}$$

و بنابراین:

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{AP} = 1$$

نکته. توجه کنید که در حل قسمت (الف) کافی بود که تنها لزوم یا کفایت شرایط مسأله را ثابت کنیم؛ در این صورت نیمهٔ دیگر برهان از آنچه ثابت شده به دست می‌آمد. زیرا مثلاً فرض کنید ثابت کرده‌ایم که اگر

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{CP}{AP}\right) = 1$$

نقطه‌های M، N و P بر یک خط واقعند، برای رسیدن به عکس آن فرض می‌کنیم M، N و P همخط باشند و در این صورت باید ثابت کنیم که $\left(\frac{AM}{BM}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{CP}{AP}\right) = 1$

برای این کار فرض می‌کنیم $\overline{M}$ نقطه‌ای از خط AB باشد چنان که

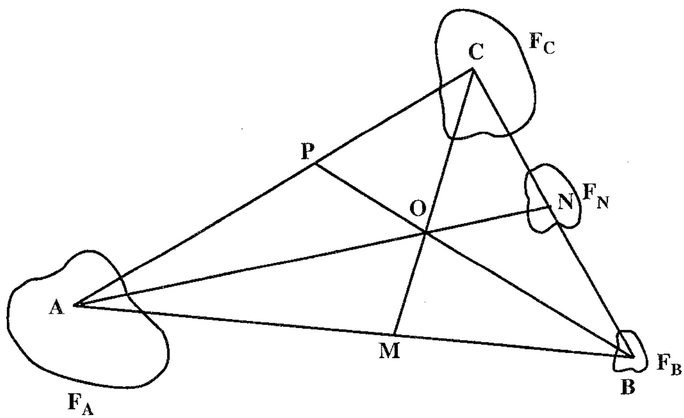
$$\left(\frac{A\overline{M}}{B\overline{M}}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{CP}{AP}\right) = 1$$

در این صورت بنا به قضیه‌ای که فرض می‌کنیم قبلاً ثابت شده است، نقطه‌های $\overline{M}$، N و P همخطند؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که $\overline{M}$ بر M منطبق است و بنابراین:

$$\left(\frac{AM}{BM}\right)\left(\frac{BN}{CN}\right)\left(\frac{CP}{AP}\right)=1$$

به طریق مشابه می‌توان کفایت شرط را از لزوم آن استنتاج کرد؛ این کار را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

ب. فرض می‌کنیم خطهای CM، AN و BP در یک نقطهٔ مشترک O متقاطعند (شکل ب). شکل دلخواه F_A را که شامل نقطهٔ A است در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تجانس به مرکز تجانس O و نسبت $k=\frac{ON}{OA}$، این شکل را به شکل F_N بدل



ب

می‌کند (نقطهٔ A از شکل F_A متناظر است با نقطهٔ N از شکل F_N)؛ فرض می‌کنیم تجانس به مرکز B و ضریب $k_1=\frac{BC}{BN}$ شکل F_N را به F_C بدل می‌کند (نقطهٔ N از شکل F_N متناظر است با نقطهٔ C از شکل F_C)؛ تجانس به مرکز C و نسبت $k_2=\frac{CB}{CN}$ شکل F_N را به F_B بدل می‌کند (نقطهٔ N از شکل F_N متناظر است با نقطهٔ B از شکل F_B). بنا به قضیهٔ مربوط به حاصلضرب تجانسها، شکل F_C مجانس F_A است؛ همچنین مرکز تجانس هم بر خط CA (C و A نقطه‌های متناظر شکلهای F_C و F_A هستند) و هم بر خط BO قرار دارد (بنا به قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس)، یعنی بر P منطبق است و نسبت تجانس برابر است با $\left(\frac{ON}{OA}\right)\left(\frac{BC}{BN}\right)=k_1k_2$.

به طور مشابه نشان داده می‌شود که F_B و F_A مجانس یکدیگرند به مرکز M و نسبت $k_1k_2 = (ON/OA)(CB/BN)$. بنابراین داریم :

$$\frac{PC}{PA} = \frac{ON}{OA}.\frac{BC}{BN}\ ,\ \frac{MB}{MA} = \frac{ON}{OA}.\frac{CB}{CN}$$

با تقسیم معادلهٔ اوّل بر دومی داریم :

$$\frac{PC}{PA}.\frac{MA}{MB} = -\frac{CN}{BN}\ \text{یا}\ \frac{MA}{MB}.\frac{NB}{NC}.\frac{PC}{PA} = -1$$

یعنی همان چه خواستیم اثبات کنیم.

اکنون فرض می‌کنیم که $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA) = -1$ و مثلاً خطهای AN و BP در نقطهٔ O متقاطعند. اگر $\overline{M}$ نقطهٔ برخورد CO با AB باشد، بنابر آنچه در بالا ثابت شد $(\overline{M}A/\overline{M}B)(NB/NC)(PC/PA) = -1$، یعنی $\overline{M}$ بر M منطبق است، پس می‌بینیم که $(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA) = -1$ ؛ پس یا BP ،AN و CM همرسند یا موازی. سرانجام، فرض می‌کنیم که AN، BP و CM همگی موازی باشند، $\overline{M}$ را نقطه‌ای بر خط AB می‌گیریم، چنان که

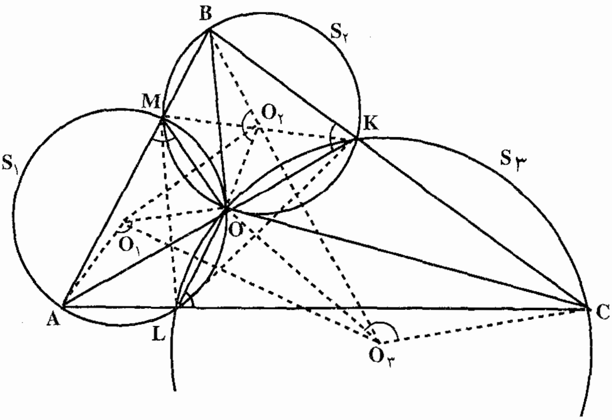
$$(\overline{M}A/\overline{M}B)(NB/NC)(PC/PA) = -1$$

در این حالت $C\overline{M}$ نمی‌تواند AN یا BP را قطع کند (زیرا در غیر این صورت هر سه خط BP ،AN و $C\overline{M}$ متقارب می‌بودند) ؛ پس $\overline{M}$ بر M منطبق است و داریم :

$$(MA/MB)(NB/NC)(PC/PA) = -1$$

تذکر. بسادگی می‌توان دید که برهانهای مختلف قضیهٔ سوا در کل عبارتند از دو کاربرد قضیهٔ منلائوس، ابتدا در مورد مثلث ANC (که نقطه‌های واقع بر ضلعها P، O و B هستند) و سپس در مورد ANB (با توجه به این که نقطه‌های واقع بر ضلعها، نقطه‌های M، O و C هستند).

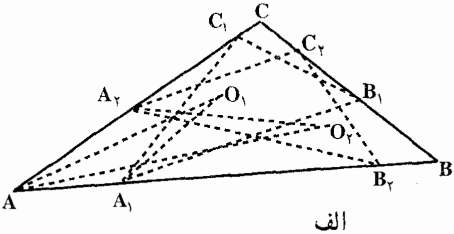
۴۷۱. الف. اگر ΔKLM تغییر کند و متشابه با خودش بماند، به طوری که رأسهای K، L و M از آن بر ضلعهای BC، CA و AB از ΔABC حرکت کنند، آن‌گاه همهٔ مواضع ΔKLM دارای مرکز دوران مشترک O خواهند بود که بر دایره‌های S_1 ، S_2 و S_3 واقع است. پس این سه دایره از نقطهٔ مشترک O می‌گذرند (شکل).



ب. مرکزهای دایره‌های S_1، S_2 و S_3 را O_1، O_2 و O_3 و نقطهٔ مشترک آنها را O می‌نامیم (شکل). چون چهارضلعی $ALOM$ محاطی است، داریم $A\hat{M}O + A\hat{L}O = 180^\circ$ و در نتیجه $A\hat{M}O = C\hat{L}O$؛ به طور مشابه داریم $C\hat{L}O = B\hat{K}O$. اما تساوی $A\hat{M}O = B\hat{K}O = C\hat{L}O$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم $A\hat{O_1}O = B\hat{O_2}O = C\hat{O_3}O$؛ پس مثلثهای OO_1A، OO_2B و OO_3C همه با یکدیگر متشابه‌اند و $\Delta O_1O_2O_3$ را می‌توان با یک تجانس مارپیچی از ΔABC به دست آورد (مرکز این تجانس مارپیچی نقطهٔ O، زاویهٔ دوران آن O_1OA و نسبت تجانس آن OO_1/OA است).

۴۷۳. الف. مثلث $A_1B_1C_1$ را می‌توان از ΔABC با دورانی حول O_1 به اندازهٔ زاویهٔ AO_1A_1 و به دنبال آن تجانسی با نسبت O_1A_1/O_1A به دست آورد؛ بنابراین زاویهٔ بین خطهای AB و A_1B_1 با زاویهٔ AO_1A_1 مساوی است (شکل الف). به همین طریق می‌توان نشان داد که زاویهٔ بین خطهای AB و A_2B_2 با زاویهٔ AO_2A_2 مساوی است، پس با توجه به شرایط مسأله می‌توان دید که

$$A\hat{O_1}A_1 = A\hat{O_2}A_2$$



الف

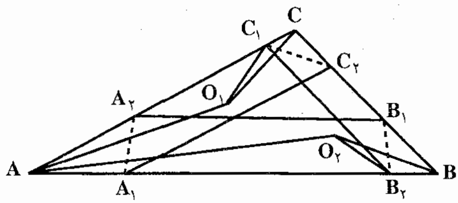
اما می‌دانیم که $O_1\hat{A}A_1 - O_2\hat{A}A_2$، پس مثلثهای AO_1A_1 و AO_2A_2 متشابه‌اند و بنابراین:

$$\frac{O_1A_1}{O_1A} = \frac{O_2A_2}{O_2A}$$

یعنی نسبت تشابه مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مساوی با نسبت تشابه مثلثهای ABC و $A_2B_2C_2$ است. از این‌جا نتیجه می‌شود که مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ با هم قابل انطباقند.

ب. ابتدا ثابت می‌کنیم که $B_2C_1 \| BC$ (شکل ب). مثلثهای CO_1C_1 و BO_2B_2 متشابه‌اند و بنابراین:

$$\frac{CC_1}{BB_2} = \frac{CO_1}{BO_2}$$



ب

بعلاوه، $O_1\hat{C}A = O_2\hat{B}A$ و $O_1\hat{A}C = O_2\hat{A}B$؛ بنابراین مثلثهای CO_1A و BO_2A متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{CO_1}{BO_2} = \frac{AC}{AB}$$

و از این‌جا داریم:

$$\frac{CC_1}{BB_2} = \frac{AC}{AB}$$

که حکم مورد نظر را ثابت می‌کند.

درست به همین طریق ثابت می‌شود که $C_2A_1 \| CA_1$ و $A_2B_1 \| AB$. اکنون این را هم ثابت می‌کنیم که خط A_1A_2 با ضلع BC از ΔABC پاد موازی است. از تشابه مثلثهای AO_1A_1 و AO_2A_2 داریم:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{O_1A}{O_2A}$$

از تشابه مثلثهای CO_1A و BO_2A داریم:

$$\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{AC}{AB}$$

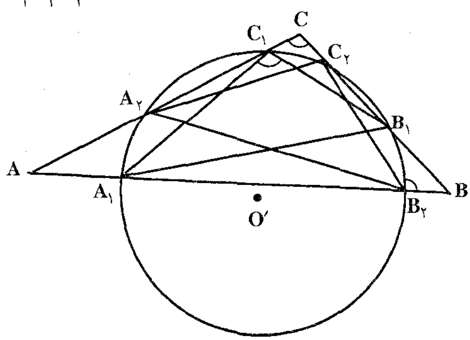
از مقایسهٔ دو تناسب بالا نتیجه می‌شود که :

$$\frac{AA_1}{AA_2}=\frac{AC}{AB}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم که مثلثهای AA_1A_2 و ACB متشابه‌اند و در نتیجه خطهای A_1A_2 و BC پاد موازی‌اند و به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که B_1B_2 با CA پادموازی است و C_1C_2 با AB پاد موازی است.

ج. چهارضلعی $B_1C_1A_1B_2$ را در نظر می‌گیریم. در این چهارضلعی $B_1\hat{C}_1A_1=\hat{C}$ ، زیرا مثلثهای $A_1B_1C_1$ و ABC متشابه‌اند ؛ بعلاوه $A_1\hat{B}_2B_1=180^\circ-B_1\hat{B}_2B$ (شکل پ). اما چون B_1B_2 با ضلع OA از ΔABC پاد موازی است، لذا داریم $B_1\hat{B}_2B=\hat{C}$ و در نتیجه :

$$B_1\hat{C}_1A_1+A_1\hat{B}_2B_1=180^\circ$$



از این‌جا می‌بینیم که B_2 بر دایرهٔ محیطی $\Delta A_1B_1C_1$ واقع است. به همین طریق می‌توان نشان داد که C_2 و A_2 بر این دایره قرار دارند.

۴۷۴. الف. چون در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AA_1O_1 ، BB_1O_1 و CC_1O_1 زاویه‌های O_1AA_1 ، O_1BB_1 و O_1CC_1 متساوی‌اند، همهٔ این مثلثها با هم متشابه‌اند (شکل الف). بنابراین

$$A\hat{O}_1A_1=B\hat{O}_1B_1=C\hat{O}_1C_1$$

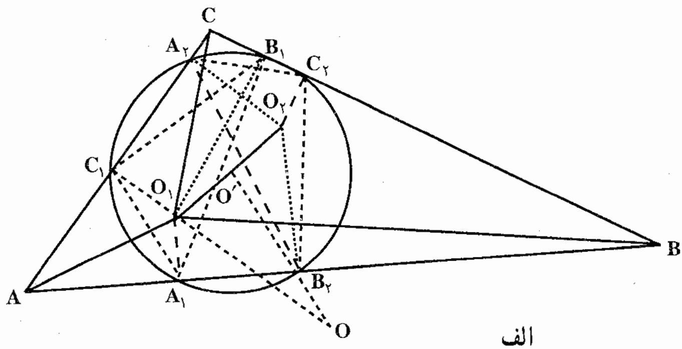
و

$$O_1A/O_1A_1=O_1B/O_1B_1=O_1C/O_1C_1$$

یعنی، $\Delta A_1B_1C_1$ را می‌توان از یک تجانس مارپیچی به مرکز O_1 از ΔABC به دست آورد. پس داریم $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta ABC$. به همین طریق می‌توان نشان داد که

. $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$

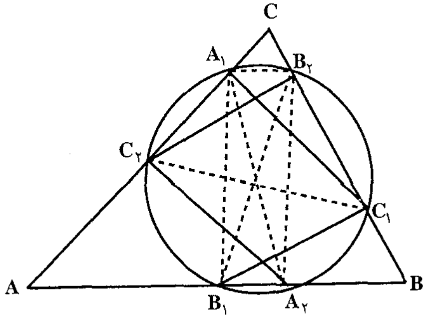
مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AA_1O_1 و AA_2O_2 متشابه‌اند ؛ در نتیجه، زاویه‌های AO_1A_1 و AO_2A_2 که بترتیب، مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ را اندازهٔ آنها داده بودیم، متساوی‌اند، بنابراین زاویه‌هایی که خطهای A_1B_1 و A_2B_2 با AB می‌سازند نیز متساوی‌اند و مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ که در ΔABC محاطند در شرایط مسألهٔ قبل صدق می‌کنند ؛ بدین ترتیب همهٔ نتایج آن مسأله را می‌توان برای آنها به کار برد. از تشابه مثلثهای O_1OO' و O_1AA_1، داریم $O_1\hat{O}'O = O_1\hat{A}_1A = 90^\circ$.



الف

این‌جا نتیجه می‌شود که نقطهٔ O'، مرکز مشترک دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ وسط O_1O_2 است.

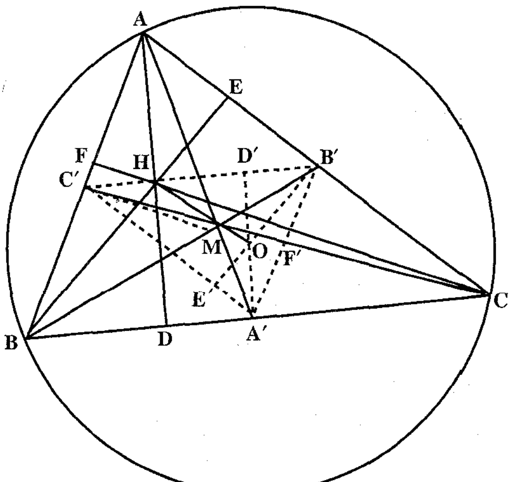
ب. اگر رأسهای $\Delta A_1B_1C_1$ که ضلعهایش با ارتفاعهای ΔABC موازی‌اند، ضلعهای مثلث ABC بترتیب رسم شده در شکل (ب) واقع باشند، آن‌گاه A_1B_1 می‌تواند با ارتفاع CF یا ارتفاع BE (ولی نه با ارتفاع AD!) موازی باشد. اگر $A_1B_1 \| CF$، آن‌گاه $A_1C_1 \| BE$ ؛ اگر $A_1B_1 \| BE$، آن‌گاه $B_1C_1 \| CF$. پس دو امکان برای محاط کردن مثلثی در مثلث مفروض ABC وجود دارد. به قسمی که ضلعهایش ارتفاعهای مثلث ABC موازی باشند، یعنی دو مثلث محاط با این مشخصات وجود دارد. در شکل (ب) این مثلثها به نام $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ خوانده شده‌اند. این مثلثها با ΔABC متشابه‌اند (رأسهای متناظر را با حروف حدی نشان می‌دهیم). بسادگی می‌توان پی برد که همهٔ شرایط مسألهٔ قبلی در مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ برقرار است ؛ پس این دو با هم قابل انطباقند. اکنون چهارضلعی $A_1B_1A_2B_2$ را در نظر می‌گیریم. در این چهارضلعی داریم : $A_1B_1 = A_2B_2$ ، $A_1B_1 \| A_2B_2$ و $A_1B_1 \perp B_1A_2$. در نتیجه این چهارضلعی



ب

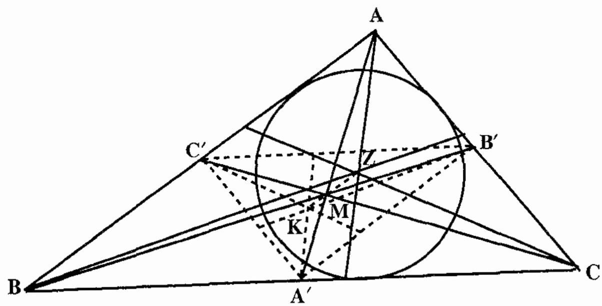
مستطیل است و قطرهایش متساوی‌اند و یکدیگر را نصف می‌کنند. به همین طریق می‌توان نشان داد که پاره‌خطهای B_1B_2 و C_1C_2 متساوی‌اند و در نقطهٔ برخورد، یکدیگر را نصف می‌کنند. بنابراین هر سه پاره‌خط واصل بین رأسهای متناظر مثلثهای $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ متساوی‌اند و در نقطهٔ برخورد مشترکشان نصف می‌شوند. این نقطه مرکز دایره‌ای است که در عین حال هم بر مثلث $A_1B_1C_1$ و هم بر مثلث $A_2B_2C_2$ محیط است.

۴۷۵. الف. بر اساس ویژگی معروف میانه‌ها، مثلث $A'B'C'$ حاصل از وصل کردن وسطهای ضلعهای مثلث ABC به هم، مجانس ABC است با مرکز تجانس M (مرکز هندسی ΔABC) و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ (شکل الف). ارتفاعهای AD، BE و CF از ΔABC متناظر خواهند بود با ارتفاعهای $A'D'$ ، $B'E'$ و $C'F'$ از $\Delta A'B'C'$ و نقطه‌های برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) در ΔABC متناظر خواهد بود با محل برخورد ارتفاعهای $\Delta A'B'C'$ ، یعنی نقطهٔ O (زیرا ارتفاعهای $\Delta A'B'C'$ عمودمنصفهای ضلعهای ΔABC هستند)، پس نقطه‌های H و O مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس M و نسبت $-\frac{1}{2}$ ، یعنی بر یک خط واحد که از M می‌گذرد واقعند و M پاره‌خط HO را به نسبت $\frac{HM}{MO} = 2$ تقسیم می‌کند.



الف

ب. برهان این قسمت مبتنی بر این نکته است که خطهایی که از وسطهای ضلعهای مثلث موازی با نیمسازهای زاویه رسم می‌شوند با نیمسازهای مثلث مجانسند و مرکز تجانس آنها M و ضریب تجانس $-\frac{1}{2}$ است (شکل ب)؛ بنابراین در یک نقطهٔ مشترک K به هم می‌رسند (که تصویر Z نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌هاست).



ب

ج. فرض کنید A' ، B' و C' وسط ضلعهای مثلث ABC باشند؛ نقطه‌های تماس ضلعها را با دایرهٔ محاطی بیرونی روبه‌رو به زاویهٔ A و با دایرهٔ محاطی داخلی بترتیب K، K_1 ، K_2 و P، Q، R می‌نامیم (شکل پ). اثبات می‌کنیم که $AK \| ZA'$. ضلعهای مثلث ABC را با حروف a، b و c، محیط آن را با 2p ، ارتفاع $A\bar{P}$ وارد بر ضلع BC را با h_a ، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی را با r و مساحت مثلث را با S نشان می‌دهیم. از آن‌جا که $ah_a = 2pr(=2S)$ ، داریم $h_a/r = 2p/a$. بنابراین:

$$\frac{A\bar{P}}{ZP} = \frac{2p}{a}$$

نشان خواهیم داد که نسبت $K\bar{P}/A'P$ با این مقدار مساوی است. در واقع:

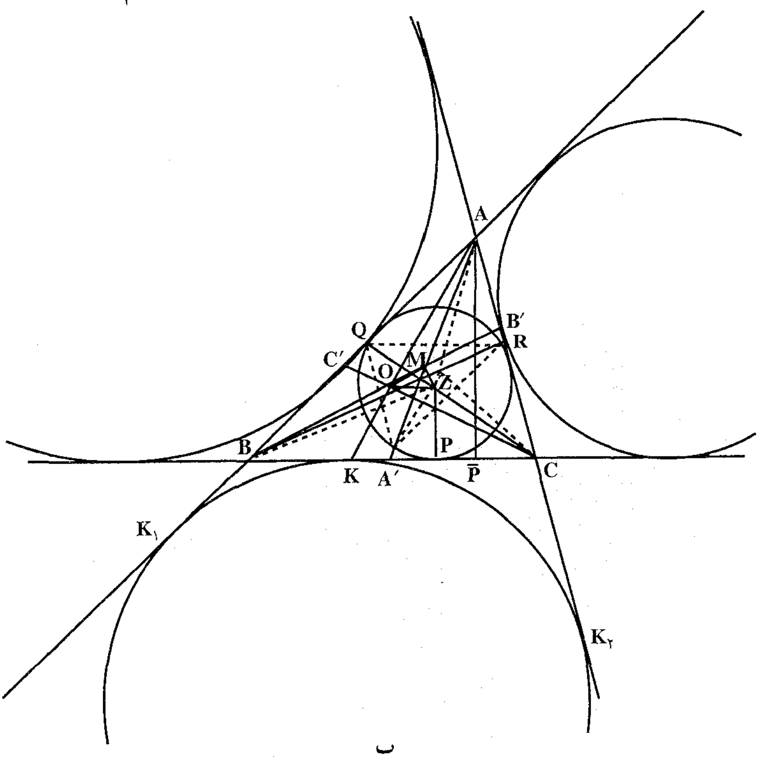
$$BP = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

زیرا $b^2 = a^2 + c^2 - 2aB\bar{P}$ ؛ از سوی دیگر

$$BK = BK_1 = AK_1 - AB = p - c = \frac{a+b+c}{2}$$

زیرا :

$$AK_۱ = \frac{۱}{۲}(AK_۱ + AK_۲)$$
$$= \frac{۱}{۲}(AB + BK_۱ + AC + CK_۲)$$
$$= \frac{۱}{۲}(AB + BK + AC + CK)$$
$$= \frac{۱}{۲}(a + b + c) = p$$



پ

در نتیجه، مثلاً در مورد حالتی که در شکل (پ) دیده می‌شود،

$$K\overline{P} = B\overline{P} - BK = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲a} - \frac{a + b - c}{۲} = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲ - a^۲ - ab + ac}{۲a}$$
$$= \frac{(c - b)(c + b + a)}{۲a} = \frac{p(c - b)}{a}$$

بعلاوه
$$BP=\frac{۱}{۲}(BP+BQ)=\frac{۱}{۲}(BC-CP+BA-AQ)$$
$$=\frac{۱}{۲}(BC+BA-CR-AR)=\frac{۱}{۲}(a+c-b)=p-b$$

و در نتیجه :
$$A'P=BP-BA'=p-b-\frac{a}{۲}=\frac{c-b}{۲}$$

و بدین ترتیب داریم :
$$\frac{K\overline{P}}{A'P}=\frac{p(c-b)}{a}\div\frac{c-b}{۲}=\frac{۲p}{a}=\frac{A\overline{P}}{ZP}$$

بنابراین مثلثهای $A\overline{P}K$ و ZPA' مشابه‌اند و در نتیجه خطهای AK و ZA' متوازی‌اند. بعلاوه، به طریقی کاملاً مشابه با راه‌حل تمرینهای قبلی می‌توان نشان داد که سه خط رسم شده از رأسهای مثلث به موازات خطهای $A'Z$ ، $B'Z$ و $C'Z$ (این خطها، چنان که نشان داده‌ایم، خطهای واصل از رأسهای مثلث به نقطه‌های تماس ضلعهای روبه‌رو با دایره‌های محاطی بیرونی هستند) در یک نقطهٔ J به هم می‌رسند که این نقطه مجانس Z است با مرکز تجانس M و نسبت تجانس ۲- .

۴۷۶. ۱. از تشابه مثلثهای $A'OB'$ و AHB نتیجه می‌گیریم که : $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{A'O}{AH}=-\frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $AH=۲A'O$ و اگر M وسط AH باشد، $AM \underline{\parallel} A'O$ و چهارضلعی $AMA'O$ متوازی‌الاضلاع است و لذا : $R=AE=MA'$ (R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است) و چنانچه (ω) را نقطهٔ برخورد MA' و HO بنامیم، دو مثلث $(\omega\overset{\Delta}{A'}O)$ و $(\omega\overset{\Delta}{H}M)$ متجانس هستند که مرکز تجانس آنها (ω) و نسبت تجانس $k=\frac{MH}{OA'}=\frac{\omega H}{\omega O}=\frac{\omega M}{\omega A'}=۱$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MH_۱A'$ داریم $\omega H_۱=\omega M=\omega A'=r$ و دایرهٔ به مرکز (ω) و شعاع $r=\omega A'=\frac{۱}{۲}R$ ، از نقطه‌های M، $M_۱$ و A' می‌گذرد و به همین طریق ثابت می‌کنیم (ω) دایرهٔ محیطی مثلث $NB'H_۲$ است که در آن $B'N$ از ω وسط OH می‌گذرد و $\omega N=\omega B'=\omega H_۲=r=\frac{۱}{۲}R$ و همچنین (ω) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $PC'H_۱$ است و PC' از (ω) وسط OH می‌گذرد و $\omega P=\omega C'=\omega H_۱=r=\frac{۱}{۲}R$: یعنی دایرهٔ به مرکز ω وسط HO از نه نقطهٔ بالا گذشته و شعاعش $r=\frac{۱}{۲}R$ است.

۲. چنانچه ملاحظه می‌شود (ω) وسط HO یعنی بر خط اولر واقع است و در آن با توجه به جهت آنها داریم :

$$\frac{r}{R} = -\frac{۱}{۲} \text{ و یا } r = \frac{۱}{۲}R$$

۳. به طوری که در بالا اثبات شد، نقطهٔ (ω) وسط OH است، پس $\frac{\overline{\omega H}}{\overline{HO}} = \frac{۱}{۲}$ (۱) و همچنین داریم : $-\frac{۱}{۲}\overline{GH} = \overline{GO}$ و یا $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{۱}{۲}$ (۲). از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{\overline{H\omega}}{\overline{HO}}$، یعنی H و G مزدوج توافقی O و ω می‌باشند.

۴.۵. تجانس در چندضلعیها

۱.۴.۵. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۴۸۰. زیرا میانهٔ QS از مثلث QAD قطعه خط $D'A'$ را که موازی DA است در S' نصف می‌کند در نتیجه S و S' دو نقطهٔ متجانس در دو چهارضلعی متجانسند و خط $SS'Q$ از مرکز تجانس دو شکل می‌گذرد و همین‌طور خط PR ؛ در نتیجه حکم ثابت می‌شود.
تبصره. از آن‌جا که $A'D'$ و AD مختلف‌الجهتند، دو چهارضلعی ABCD و $A'B'C'D'$ معکوساً متجانسند و در نتیجه دو نقطهٔ مجانس نظیر A و A' در طرفین J (مرکز تجانس) قرار می‌گیرند و داریم : $JA:JA' = -۳:۱$.

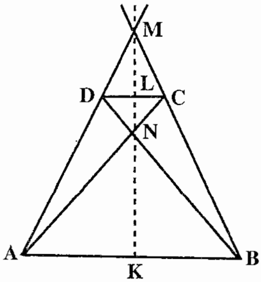
۴۸۱. گزینهٔ (الف) درست است.

۴۸۳. گزینهٔ (د) درست است.

۲.۴.۵. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۵. نقطه‌ها همخطند

۴۸۴. تجانس به مرکز M، نقطهٔ برخورد ساقهای AD و BC از ذوزنقهٔ ABCD و با نسبت DC/AB پاره‌خط AB را به پاره‌خط DC و نقطهٔ K وسط AB را به نقطهٔ L وسط



ضلع DC بدل می‌کند، بنابراین خط KL از نقطهٔ M مرکز تجانس می‌گذرد (شکل). نقطهٔ K نیز بر اثر تجانسی به مرکز N، نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD از ذوزنقه و با ضریب (منفی) CD/AB به نقطهٔ L بدل می‌شود. این تبدیل پاره‌خط AB را به CD بدل می‌کند، بنابراین خط KL نیز از N می‌گذرد.

۳.۴.۵. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۵. خطها همرسند

۴۸۵. اگر ABCD چهارضلعی مطلوب و A' ، B' ، C' و D' مرکزهای ثقل مثلثهای BCD، CDA، ABD و ABC باشد، داریم:

$$PC':PD = PD':PC = ۱:۳$$

در نتیجه $C'D'$ موازی CD است و داریم: $C'D':CD = ۱:۳$

به همین دلیل سایر ضلعهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ با ضلعهای نظیرشان در چهارضلعی ABCD موازی‌اند و نسبت ضلعهای این دو چهارضلعی ۳ : ۱ است و در نتیجه دو چهارضلعی متجانسند و خطهای AA' ، BB' ، CC' و DD' از یک نقطه که همان مرکز تجانس دو شکل است، می‌گذرند.

۴.۴.۵. زاویه

۱.۴.۴.۵. اندازهٔ زاویه

۴۸۶. در دو شکل مجانس زاویه‌های نظیر با هم برابرند؛ پس $\hat{B}=\hat{B}'$ و $\hat{D}=\hat{D}'$ است. اما بنا به فرض $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$ است. در نتیجه $\hat{B}'+\hat{D}'=۱۸۰^\circ$ می‌باشد؛ اما می‌دانیم که در هر چهارضلعی اندازهٔ زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های حاصل از نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو برابر نصف مجموع دو زاویهٔ روبه‌روی چهارضلعی است، یعنی داریم:

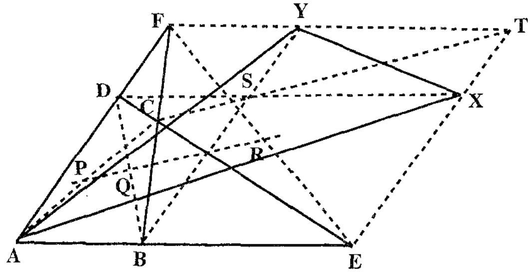
$$E'\hat{O}F' = \frac{\hat{B}'+\hat{D}'}{۲} \Rightarrow E'\hat{O}F' = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

بنابراین زاویهٔ مورد نظر مساوی ۹۰° است.

۵.۴.۵. پاره‌خط

۱.۵.۴.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۴۸۷. گیریم P، Q و R بترتیب وسطهای AC، BD و EF باشند (شکل). تجانس به مرکز A و نسبت ۲، نقطه‌های P، Q و R را بر نقطه‌های C، S و T می‌نگارد (ABSD و AFTE متوازی‌الاضلاع هستند). بنابراین برای اثبات همخطی P، Q و R کافی است، همخطی C، S و T و یا هم‌ارز با آن، گذشتن خط TS از نقطهٔ C، محل برخورد ED و BF را اثبات کنیم. ملاحظه می‌کنیم که در شکل، ADXE، XTYS و YFAB متوازی‌الاضلاعهایی هستند که ضلعهایشان دارای یک امتدادند و هر ضلع ΔAXY قطری از یکی از این متوازی‌الاضلاعهاست، پس قطرهای دیگر ED، TS و BF همرسند.



۶.۴.۵. رابطه‌های متری

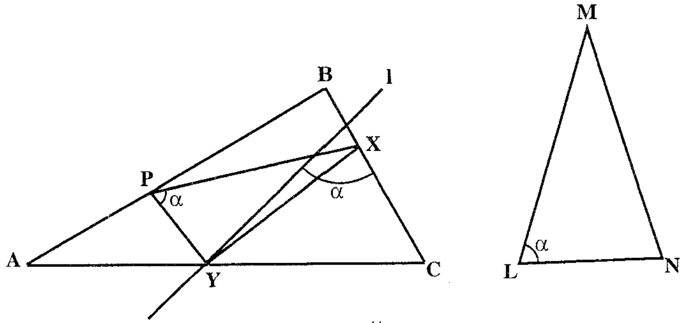
۴۸۸. گزینهٔ (د) درست است.

۷.۴.۵. ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۴۸۹. گزینهٔ (الف) درست است.

۸.۴.۵. رسم شکلها

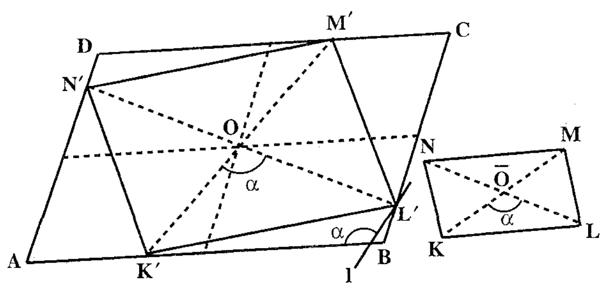
۴۹۱. الف. فرض کنید مثلث PXY را رسم کرده‌ایم (شکل الف). نقطهٔ Y از X بر اثر یک



الف

تجانس مارپیچی به مرکز دوران P، زاویهٔ دوران α مساوی با زاویهٔ L از مثلث LMN و نسبت تجانس k مساوی با نسبت ضلعهای LN/LM از این مثلث، به دست می‌آید. از این‌جا نتیجه می‌شود که Y بر خط l واقع است که از BC بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز P و زاویهٔ α و نسبت k به دست می‌آید و چون این نقطه بر ضلع AC قرار دارد، Y نقطهٔ برخورد l و CA است. اگر l با CA موازی باشد، مسأله جواب ندارد؛ اگر l بر CA منطبق باشد، جواب نامعین است.

ب. توجه کنید که اگر متوازی‌الاضلاع $K'L'M'N'$ در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط باشد (شکل ب)، نقطه‌های برخورد قطرها (مرکزها) یعنی O' و O در دو



ب

متوازی‌الاضلاع بر یکدیگر منطبق می‌شوند؛ زیرا وسطهای قطرهای $K'M'$ و $L'N'$ بر هر دو میانخط متوازی‌الاضلاع ABCD واقع، یعنی بر مرکز O منطبقند. اکنون فرض می‌کنیم که $K'L'M'N'$ متوازی‌الاضلاع خواسته شده باشد؛ در این حالت مثلث $K'O'L'$ متشابه است با مثلث $K\bar{O}L$ که در آن $\bar{O}$ مرکز KLMN است. تجانس مارپیچی به مرکز O و زاویهٔ دوران $K\bar{O}L$ و نسبت تجانس $\bar{O}L / \bar{O}K$ ضلع

AB از متوازی‌الاضلاع ABCD را به خط l بدل می‌کند که نقطهٔ برخوردش با خط BC رأس L' از متوازی‌الاضلاع مطلوب را معین می‌کند.

۹.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۹۲. چون طول ضلع BC تغییر نمی‌کند و B ثابت است، با حرکت متوازی‌الاضلاع «لولایی»، نقطهٔ C بر دایره‌ای به مرکز B حرکت می‌کند. ولی Q از C بر اثر یک تجانس به مرکز نقطهٔ ثابت A و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید، پس Q بر دایره‌ای حرکت می‌کند که بر اثر این تبدیل از دایره‌ای که C بر آن حرکت می‌کند، به دست می‌آید.

۴۹۳. گزینهٔ (هـ) درست است.

۴۹۴. گزینه‌های (ب، ج و د) درست هستند.

۴۹۵. گزینهٔ (الف) درست است.

۴۹۶. چون $\frac{EA}{ED}=\frac{a}{b}$ مقدار ثابتی است، پس E نقطهٔ ثابتی می‌باشد. از طرفی $EO=\frac{ab}{a+b}$ و $EF=۲EO$ است. پس مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز E و به شعاع EO است و مکان هندسی نقطهٔ F دایره‌ای است مجانس دایرهٔ (E, EO) نسبت به مرکز تجانس E و نسبت تجانس ۲.

۱۰.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۹۷. الف. چون این دو مربع شکلهایی مستقیماً متشابه‌اند، نتیجه می‌شود که MNPQ از ABCD یا بر اثر یک انتقال یا بر اثر یک تجانس مارپیچی به دست می‌آید. حکم مسأله در مورد انتقال بدیهی است، زیرا در این صورت، چهار پاره‌خط مورد نظر AM، BN، CP و DQ همگی یک طول دارند. پس فرض می‌کنیم که MNPQ از ABCD بر اثر یک تجانس مارپیچی به دست می‌آید. از یک نقطهٔ O پاره‌خطهای OT، OU، OV و OW را موازی و مساوی و همجهت با پاره‌خطهای AM، BN، CP و DQ جدا می‌کنیم. چهار نقطهٔ T، U، V و W، رأسهای یک مربع خواهند بود (شکل الف). فرض کنید Z مرکز مربع TUVW باشد. اگر قانون کسینوسها را در مثلثهای OTZ و

OVZ بنویسیم، داریم :

$$OT^2 = OZ^2 + ZT^2 - 2OZ.ZT\cos O\hat{Z}T$$

و

$$OV^2 = OZ^2 + ZV^2 - 2OZ.ZV\cos O\hat{Z}V$$

$$= OZ^2 + ZT^2 + 2OZ.ZT\cos O\hat{Z}T$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$OT^2 + OV^2 = 2OZ^2 + 2ZT^2$$

فرمول زیر هم درست به همین روش به دست می‌آید :

$$OU^2 + OW^2 = 2OZ^2 + 2ZU^2$$

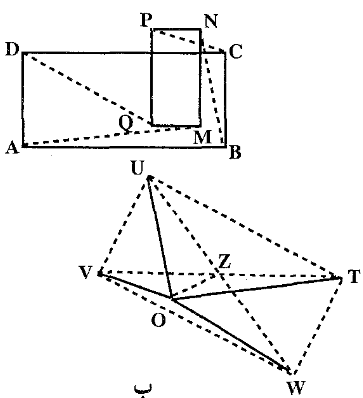
پس چون داریم $ZT = ZU$ ، بنابراین :

$$OT^2 + OV^2 = OU^2 + OW^2$$

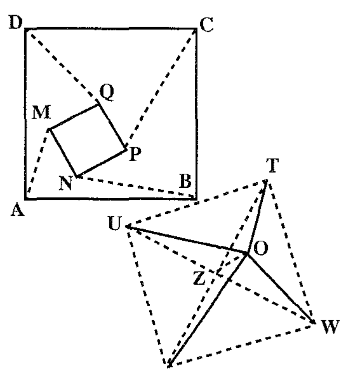
یعنی :

$$AM^2 + CP^2 = BN^2 = DQ^2$$

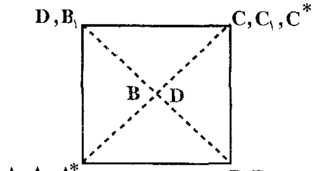
بسادگی می‌توان دید که این استدلال برای حالتی هم که ABCD و MNPQ دو مستطیل مستقیماً متشابه دلخواه باشند، صادق است (شکل ب). اما نتیجهٔ بالا را نمی‌توان برای حالتی که ABCD و MNPQ مستطیلها یا مربعهای معکوساً متشابه هستند، تعمیم داد ؛ پس مثلاً با علامتهای شکل (ج) داریم $AA_1 = CC_1 = 0$ ولی $BB_1 = DD_1 \neq 0$ و بنابراین $AA_1^2 + CC_1^2 \neq BB_1^2 + DD_1^2$.



ب



الف



ج

ب. در این‌جا هم مطابق قسمت (الف) عمل می‌کنیم. شش‌ضلعی منتظم دوم از اوّلی بر اثر یک انتقال یا تجانس مارپیچی به دست می‌آید. حکم مسأله در مورد انتقال بدیهی است، پس فرض می‌کنیم که شش ضلعی دوم از اوّلی بر اثر یک تجانس مارپیچی حاصل می‌شود.

اکنون از یک نقطهٔ دلخواه O پاره‌خطهای OT، OU، OV، OW، OX و OY را مساوی، موازی و همجهت با پاره‌خطهای AM، BN، CP، DQ، ER و FS جدا می‌کنیم. شش نقطهٔ T، U، V، W، X و Y رأسهای یک شش ضلعی منتظم هستند (شکل د). فرض کنید، نقطهٔ K وسط پاره‌خط TV باشد و نقطهٔ Z مرکز شش ضلعی TUVWXY، لذا Z مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع TVX نیز هست. روشن است که داریم $XZ:ZK = ۲:۱$. باز هم مثل راه‌حل قسمت (الف) ثابت می‌کنیم که :

$$OT^۲ + OV^۲ = ۲OK^۲ + ۲KT^۲$$

بعلاوه، با اعمال قانون کسینوسها در مثلثهای OZX و OZK، داریم :

$$OX^۲ = OZ^۲ + ZX^۲ - ۲OZ.ZX\cos O\hat{Z}X$$

و

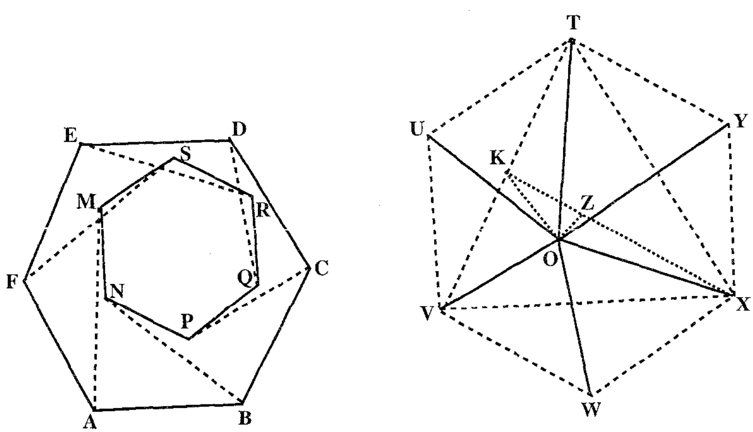
$$OK^۲ = OZ^۲ + ZK^۲ - ۲OZ.ZK\cos O\hat{Z}K$$

بنابراین داریم :

$$OT^۲ + OV^۲ = ۲OK^۲ + ۲KT^۲$$

$$= ۲OZ^۲ + ۲ZK^۲ - ۴OZ.ZK\cos O\hat{Z}K + ۲KT^۲$$

ولی $ZK = (۱/۲)ZX$ و $\cos O\hat{Z}K = -\cos O\hat{Z}X$ ؛ بنابراین :



د

$$4OZ.ZK\cos O\hat{Z}K = -2OZ.ZX\cos O\hat{Z}X$$

و بنابراین

$$OT^2 + OV^2 + OX^2 = 3OZ^2 + 2ZK^2 + 2KT^2 + ZX^2$$
$$= 3OZ^2 + 3ZT^2$$

که از آن، تساوی اخیر از این‌جا ناشی می‌شود که :

$$2(ZK^2 + KT^2) + ZX^2 = 2ZT^2 + ZX^2 = 3ZT^2$$

به همین طریق می‌توان نشان داد که :

$$OU^2 + OW^2 + OY^2 = 3OZ^2 + 3ZU^2 = 3OZ^2 + 3ZT^2$$

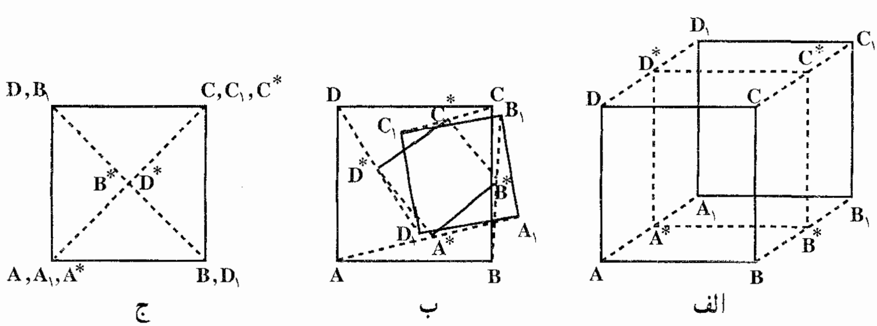
که از آن نتیجه می‌شود :

$$OT^2 + OV^2 + OX^2 = OU^2 + OW^2 + OY^2$$

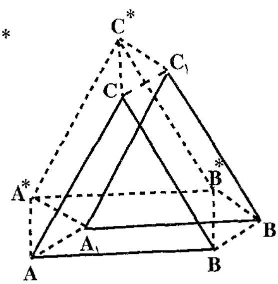
یا

$$AM^2 + CP^2 + ER^2 = BN^2 + DQ^2 + FS^2$$

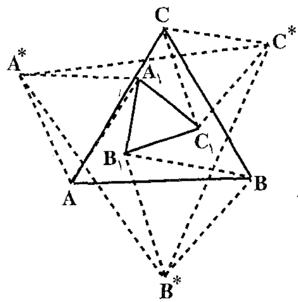
۴۹۸. الف. اگر پیرامون دو مربع $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ در جهت یکسان پیموده شوند، یعنی اگر این دو مربع مستقیماً متشابه باشند، آن‌گاه $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ یا بر اثر یک تجانس مارپیچی و یا بر اثر یک انتقال به دست می‌آید. اگر $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ بر اثر یک انتقال به دست آید و اگر نقطه‌های A^*، B^*، C^* و D^* وسطهای پاره‌خطهای AA_1، BB_1، CC_1 و DD_1 باشند، آن‌گاه $A^*B^*C^*D^*$ نیز از $ABCD$ بر اثر انتقالی در همان راستا و به اندازهٔ نصف مسافت آن به دست می‌آید (شکل الف). از سوی دیگر، اگر $A_1B_1C_1D_1$ از $ABCD$ بر اثر یک تجانس مارپیچی که نیمدور نباشد، به دست آید (در این حالت همهٔ نقطه‌های وسط یعنی A^*، B^*، C^* و D^* بر مرکز دوران منطبق می‌شوند)، آن‌گاه این نقطه‌های وسط، رأسهای یک مربع خواهند بود (شکل ب). اما اگر پیرامون مربعهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ در جهتهای مخالف پیموده شوند، نتیجهٔ بالا دیگر صادق نیست ؛ مثلاً می‌توان حالتی را در نظر گرفت که در آن، نقطه‌های $A_1 = A$ ،$C_1 = C$ ،$B_1 = D$ و $D_1 = B$ (شکل پ).



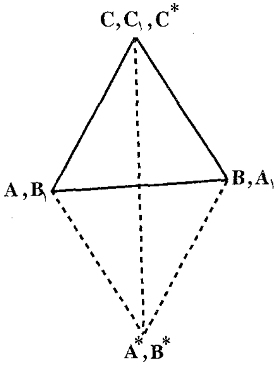
ب. حالتی که در آن $A_1B_1C_1$ از ABC بر اثر یک تبدیل به دست می‌آید، نیازمند توجه خاصی است. در این حالت $A^*B^*C^*$ از ABC بر اثر انتقالی به همان مسافت ولی در جهت AA^* به دست می‌آید (شکلهای ت، ث و ج).
اگر جهت پیمایش پیرامونهای ABC و $A_1B_1C_1$ با یکدیگر یکسان و با جهت پیمایش سه پیرامون AA_1A^* ، BB_1B^* و CC_1C^* مخالف باشد، حکم مسأله همچنان صادق است. اما در حالت کلی این حکم بدون وجود فرضی در مورد جهت پیمایش پیرامونها صادق نیست.



ت

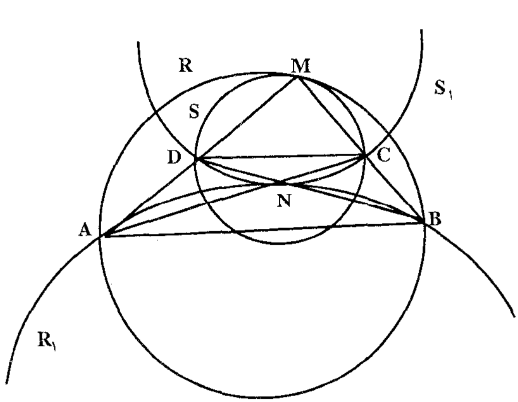


ث



ج

۴۹۹. الف. تجانس به مرکز M و نسبت $k=\frac{DC}{AB}=\frac{MD}{MA}=\frac{MC}{MB}$ (شکل) مثلث MAB را به مثلث MDC و دایرهٔ R محیط بر مثلث MAB را به دایرهٔ S محیط بر مثلث MDC بدل می‌کند. چون S از R بر اثر یک تجانس به دست می‌آید که مرکز آن نقطهٔ M روی R واقع است، نتیجه می‌شود که R و S در M بر هم مماسند.

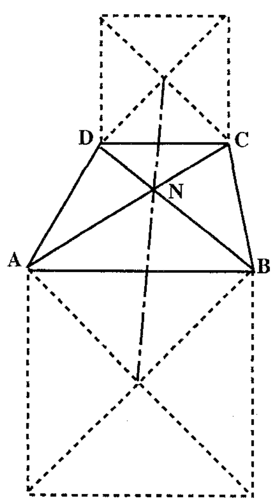


ب. تجانس به مرکز N و نسبت $k_1 = \frac{CD}{AB} = \frac{NC}{NA} = \frac{ND}{NB}$ (در این‌جا نسبت پاره‌خطهای جهت‌دار را در نظر می‌گیریم، به طوری که k_1 منفی است) مثلث NAB را به مثلث NCD و دایرهٔ R_1 محیط بر مثلث NAB را به دایرهٔ S_1 محیط بر مثلث NCD بدل می‌کند. چون نقطهٔ N مرکز تجانس روی R_1 واقع است، پس دو دایره در N بر یکدیگر مماسند.

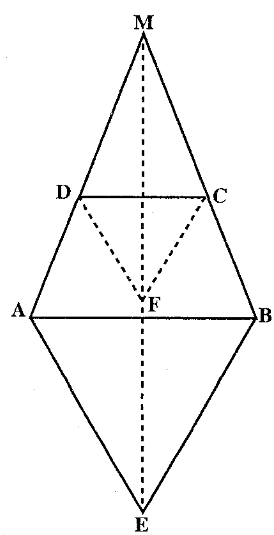
ج. نسبت شعاعهای R و S برابر است با $k = {}^{DC}\!/_{AB}$ (زیرا مثلثهای MAB و MDC متشابه‌اند. نسبت شعاع دایره‌های S_1 و R_1 برابر است با $|k_1| = \left|{}^{CD}\!/_{AB}\right|$. امّا روشن است که $\left|{}^{CD}\!/_{AB}\right| = {}^{DC}\!/_{AB}$ که همان حکم قسمت (ج) است.

۵۰۰. الف. اگر M نقطهٔ برخورد دو ساق AD و BC از ذوزنقه باشد (شکل الف)، آن‌گاه تجانس به مرکز M و نسبت ${}^{DC}\!/_{AB}$ پاره‌خط AB را به DC و ΔABE را به ΔCDF بدل می‌کند. حکم مسأله از این‌جا به دست می‌آید.

ب. اگر N نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD از ذوزنقهٔ ABCD باشد (شکل ب)، آن‌گاه تجانس به مرکز N و ضریب (منفی !) ${}^{CD}\!/_{AB}$ پاره‌خط AB را به CD و یکی از مربعها را به دیگری بدل می‌کند. حکم مسأله از این‌جا به دست می‌آید.

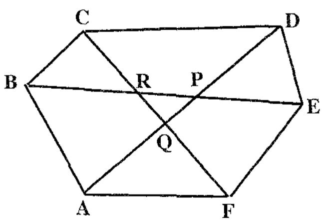


ب



الف

۵۰۱. الف. O را نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD می‌گیریم. چون دو مثلث ABD و BCD، مساحتهایی برابر دارند و در قاعدهٔ BD مشترکند، بنابراین، دو ارتفاع وارد بر این قاعده در دو مثلث، با هم برابرند، یعنی نقطه‌های A و C، از BD به یک فاصله‌اند که از آن‌جا، نتیجه می‌شود : $AO = OC$. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد : $BO = OD$. به این ترتیب، قطرهای چهارضلعی ABCD، یکدیگر را نصف کرده‌اند، یعنی این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



ب. فرض می‌کنیم در شش ضلعی محدب ABCDEF، قطرهایی که رأسهای روبه‌رو را به هم وصل کرده‌اند، مساحت آن را نصف کنند و در عین حال، از یک نقطه نگذرند. در این صورت، نقطه‌های برخورد این سه قطر، P، Q و R، رأسهای مثلثی را تشکیل می‌دهند ده در درون شش ضلعی واقع است (شکل). مساحتهای دو چهارضلعی ABCD و BCDE برابرند و بنابراین، دو مثلث ABP و EPD هم، مساحتهایی برابر دارند، زیرا :

$$S_{ABP} = S_{ABCD} - S_{BCDP} = S_{BCDE} - S_{BCDP} = S_{EPD}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد :

$$S_{BCR} = S_{EFR} \ , \ S_{AQF} = S_{CQD}$$

از برابری مساحتهای مثلثها، به دست می‌آید :

$$AP.BP = EP.DP \ ,$$

$$CQ.DQ = AQ.FQ \ ,$$

$$ER.FR = BR.CR$$

و اگر این رابطه‌ها را در هم ضرب کنیم :

$$AP.BP.CQ.DQ.ER.FR = AQ.BR.CR.DP.EP.FQ$$

ولی این، ممکن نیست، زیرا داریم :

$$AP > AQ \ , \ BP > BR \ , \ CQ > CR \ , \ DQ > DP \ , \ ER > EP \ , \ FR > FQ$$

یعنی، حاصلضرب سمت راست، از حاصلضرب سمت چپ کوچکتر است. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که قطرهای BE، AD و CF از یک نقطه می‌گذرند، یعنی $PQ = QR = RP = ۰$.

۵.۵. تجانس در دایره

۵ .۵. ۱. مرکز تجانس، نسبت تجانس

۵۰۲. اگر مرکز تجانس مستقیم دو دایره را S بنامیم، داریم:

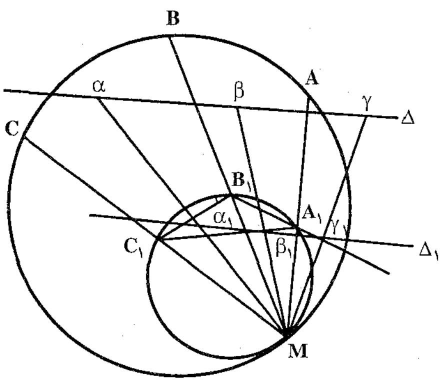
$$\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}}=\frac{R'}{R}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\frac{\overline{SO'}}{\overline{SO}-\overline{SO'}}=\frac{۲}{۵-۲}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\frac{\overline{SO'}}{\overline{OO'}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{\overline{SO'}}{۱}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\overline{SO'}=\frac{۲}{۳}$$

پس نقطهٔ S مرکز تجانس مستقیم دو دایره در خارج OO' در طرف نقطهٔ O' و به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ از O' واقع است.

۵ .۵. ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

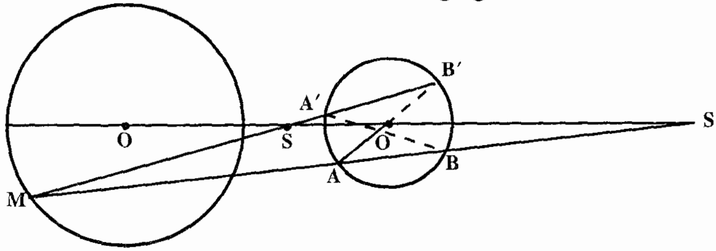
۵ .۵. ۲. ۱. نقطه‌ها همخطند



۵۰۳. وسطهای وترهای MA، MB و MC را بترتیب A_1 ، B_1 و C_1 می‌نامیم. α دومین نقطهٔ تلاقی دو دایره به قطرهای MB و MC و β محل برخورد دو دایره به قطرهای MC و MA و γ محل برخورد دو دایره به قطرهای MA و MB باشد. نقطه‌های α ، β و γ قرینهٔ M نسبت به ضلعهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ است، یعنی این نقطه‌ها مجانس تصویرهای نقطهٔ M، یعنی α_1 ، β_1 و γ_1 بر روی ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ در تجانس (M , C)اند. نقطه‌های α_1 ، β_1 و γ_1 بر روی خط موازی Δ_1 واقعند. درنتیجه α ، β و γ بر خط Δ که مجانس Δ_1 در تجانس (M , ۲) است واقعند، خواهند شد.

۵.۵.۲.۲. نقطه‌ها متقابل قطری هستند

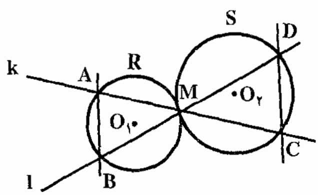
۵۰۵. با استفاده از شکل ثابت کنید که دو نقطهٔ A و ′B متقابل قطری‌اند و خط واصل بین دو نقطهٔ B و ′A از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



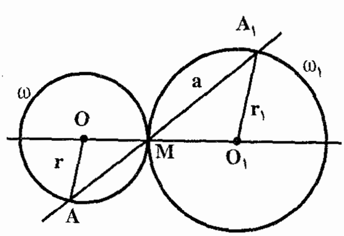
۵.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۵.۵.۳.۱. خطها موازی‌اند

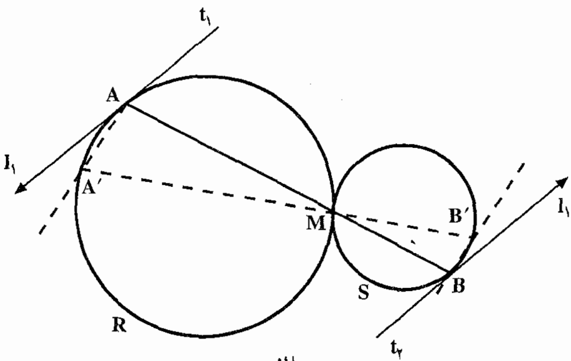
۵۰۶. دو دایرهٔ O_1 و O_2 که بر هم درنقطهٔ M مماس هستند، نسبت به این نقطه متجانس می‌باشند. تبدیل متجانسی را مورد ملاحظه قرار دهید که R را به S انتقال می‌دهد. این تبدیل نقطهٔ A را به نقطهٔ C (شکل) و نقطهٔ B را به نقطهٔ D منتقل می‌سازد. با استفاده از ویژگیهای تجانس $AB \| CD$ به‌دست می‌آید.



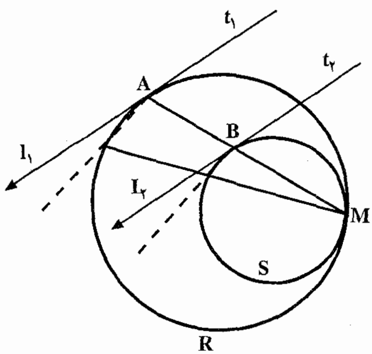
۵۰۷. فرض کنید M نقطهٔ تماس دایرهٔ ω به مرکز O و شعاع r با دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 و شعاع r_1 بوده و a قاطعی باشد که دایره‌ها را در نقطه‌های A و A_1 قطع می‌کند (شکل). اثبات $O_1A_1 \| OA$ مطلوب مسأله است. تبدیل متجانس H_M را در نظر بگیرید که نقطهٔ O را به نقطهٔ O_1 منتقل می‌سازد. در این تبدیل متجانس خط a به خودش منتقل می‌شود، زیرا از مرکز تبدیل می‌گذرد. این تبدیل دایرهٔ ω را به دایرهٔ ω_1 انتقال می‌دهد. نقطهٔ A که محل برخورد a و ω است به نقطهٔ برخورد a و ω_1 انتقال می‌یابد. این نقطه متفاوت با M بوده و از این‌رو، روی A_1 قرار می گیرد. از آن‌جا که O_1A_1 تصویر پاره‌خط OA در تبدیل متجانس است از این رو این پاره‌خطها موازی خواهند بود.



۵۰۸. تجانس به مرکز M ونسبت $\mp r_2/r_1$ را در نظر می گیریم که در آن r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره‌های R و S هستند و علامت منفی برای حالت تماس بیرونی دو دایره (شکل الف)



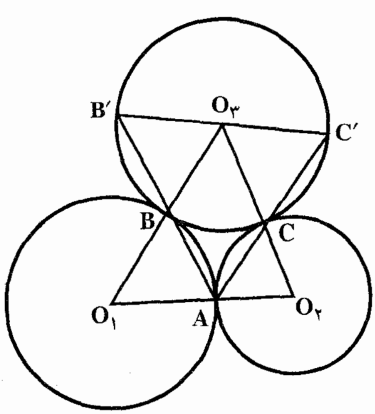
الف



ب

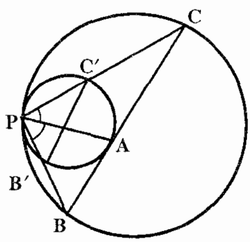
و علامت مثبت برای حالت تماس درونی دو دایره (شکل ب) اختیار می‌شود. این تبدیل دایرهٔ R به شعاع r_1 را به دایره‌ای به شعاع r_2 بدل می کند که در نقطهٔ M بر R مماس است، یعنی R را به S بدل می کند. نقطهٔ A از دایرهٔ R براثر این تبدیل به نقطهٔ B از دایرهٔ S و خط t_1 مماس بر R در A به خط t_2 مماس بر S در B بدل می‌شود. چون خط t_2 از t_1 براثر یک تجانس به‌دست می‌آید، پس این دو خط موازی‌اند.

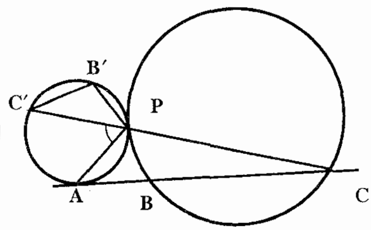
۵۰۹. وقتی دو دایره بر هم مماسند، نقطهٔ تماس مرکز تجانس است. شعاعهای O_1A و O_3B نسبت به B مجانسند، بنابراین متوازی‌اند. به‌همین ترتیب، شعاعهای O_2A و O_3C' نسبت به C مجانسند و با هم موازی می‌باشند، پس $B'C'$ قطر موازی O_1O_2 است (شکل).



۵.۵.۳.۲. خط نیمساز است

۵۱۰. تجانس به مرکز P را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آن، دایرهٔ شامل نقطه‌های B و C، به دایرهٔ دیگر تبدیل شود. در این تجانس، نقطه‌های B و C، به نقطه‌های B' و C'، بترتیب، روی خطهای راست BP و CP و خط راست BC به خط راست موازی آن $B'C'$ تبدیل می‌شود. بنابراین، دو کمان $\widehat{B'A}$ و $\widehat{C'A}$ برابرند، درنتیجه، دو زاویهٔ $B'PA$ و $C'PA$ یا برابرند (درحالتی که دو دایره، مماس داخل باشند ؛ شکل) و یا مجموعی برابر ۱۸۰ درجه دارند (درحالتی که دو دایره، مماس خارج باشند ؛ شکل). بنابراین، دو زاویهٔ BPA و $C'PA$ برابر می‌شوند. در هر دو حالت، خط راست PA، نیمساز یکی از دو زاویهٔ BPC و BPC' است.

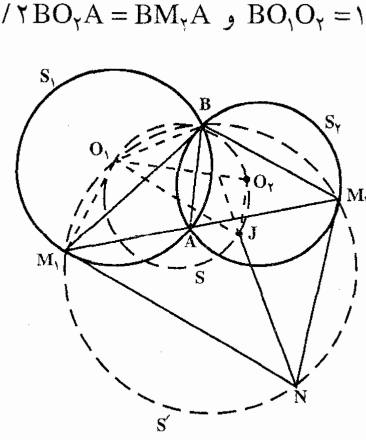




۵.۵.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۵۱۱. دو نقطهٔ A و A' مجانس یکدیگرند، بنابراین AA' همواره از مرکز تجانس مستقیم دو دایره که نقطهٔ ثابتی است، می‌گذرد.

۵۱۲. نقطهٔ B، دومین نقطهٔ برخورد S_1 و S_2 را به نقطه‌های M_1 و M_2 ، O_1 و O_2 وصل کنید (شکل). مثلث BM_1M_2 با مثلث BO_1O_2 متشابه است (زیرا $B\hat{O_1}O_2 = 1/2\, B\hat{O_1}A = B\hat{M_1}A$ و $B\hat{O_2}O_1 = 1/2\, B\hat{O_2}A = B\hat{M_2}A$).



بنابراین، ΔBM_1M_2 از ΔBO_1O_2 براثر یک تجانس مارپیچی به مرکز B و زاویهٔ دوران α مساوی با $M_1\hat{B}O_1$ و نسبت تجانس $k = BM_1/BD_1$ به‌دست می‌آید.

S و ′S دایره‌های محیطی مثلثهای BO_1O_2 و BM_1M_2 را رسم می‌کنیم ؛ از آن‌جا که

$$B\hat{M_1}N + B\hat{M_2}N = (B\hat{M_1}M_2 + B\hat{M_2}M_1) + (N\hat{M_1}M_2 + N\hat{M_2}M_1)$$

$$= (B\hat{M_1}M_2 + B\hat{M_2}M_1) + (M_1\hat{B}A + M_2\hat{B}A)$$

$$= B\hat{M_1}M_2 + B\hat{M_2}M_1 + M_1\hat{B}M_2 = 180^\circ$$

ملاحظه می‌کنیم که ′S از نقطهٔ N می‌گذرد و چون

$$O_1\hat{B}O_2 + O_1\hat{J}O_2 = M_1\hat{B}M_2 + M_1\hat{N}M_2 = 180^\circ$$

می‌بینیم که S از نقطهٔ J می‌گذرد. بعلاوه، داریم :

$$N\hat{B}M_1 = N\hat{M_2}M_1 \ , \ \ J\hat{B}O_1 = J\hat{O_2}O_1$$

پس تفاضل زاویه‌های NBM_1 و JBO_1 با تفاضل زاویه‌های NM_2M_1 و JO_2O_1 برابر است. این تفاضل با توجه به توازی M_2N و O_2J برابر است با زاویهٔ بین پاره‌خطهای M_2M_1 و O_2O_1 که با تجانس مارپیچی فوق‌الذکر به یکدیگر مربوط می‌شوند. بنابراین، تفاضل زاویه‌های NBM_1 و JBO_1 برابر است با زاویهٔ بین M_2M_1 و O_2O_1، یعنی زاویهٔ دوران α. اما با توجه به این که

$$N\hat{B}M_1 - J\hat{B}O_1 = \alpha = M_1\hat{B}O_1$$

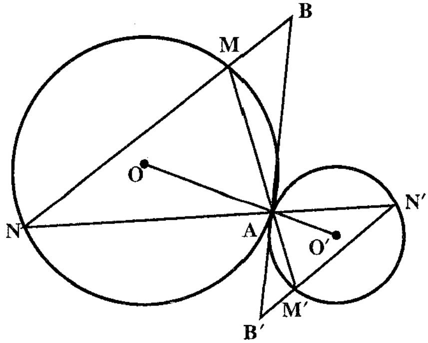
نتیجه می‌گیریم که خط NJ از B می‌گذرد، یعنی حکم اوّل اثبات می‌شود.

برای اثبات حکم دوم کافی است توجه کنیم که $JO_1 \| NM_1 \perp O_1M_1$ و $J\hat{N}M_1 = M_1\hat{M_2}B = O_1\hat{O_2}B$ ؛ بنابراین ملاحظه می‌کنیم که پاره‌خط JN با خط O_1M_1 زاویهٔ $90^\circ - O_1\hat{O_2}B$ تشکیل می‌دهد و تصویر قائم JN روی این خط پاره‌خط O_1M_1 با طول ثابت r_1 است (r_1 شعاع S_1 است). بنابراین :

$$JN = r_1 \cos(90^\circ - O_1\hat{O_2}B) = r_1 \sin O_1\hat{O_2}B$$

و روشن است که این امر بستگی به انتخاب خط M_1AM_2 ندارد.

۵۱۳. نقطهٔ A مرکز تجانس دو دایرهٔ مفروض است. در این تجانس نقطهٔ ′M مجانس M و نقطهٔ ′N مجانس N و خط ′M′N مجانس MN است که از نقطهٔ ′B مجانس نقطهٔ



ثابت B خواهد گذشت.

۵۱۴. این قضیه حالت خاصی از قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس است.

۴.۳.۵.۵. خط مماس بر دایره است

۵۱۵. اگر M و M′ دو نقطهٔ متجانس و MX و M′X′ دو خط رسم شده از M و M′ باشند، به‌نحوی که MX در نقطهٔ N بر دایرهٔ (C) مماس باشد، در این صورت داریم:

$\frac{SM}{SM'} = \frac{R}{R'} = k$ (۱) و چنانچه SN را وصل کرده و امتداد دهیم تا دایرهٔ C′ را در N′ و خط M′X′ مجانس خط MY را در N″ قطع کند، داریم:

$\frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} = \frac{SN}{SN''} = k$ از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می‌شود که $SN' = SN''$، یعنی N′ و N″ بر هم منطبق است و خط M′X′ در یک نقطه، دایرهٔ (C′) را قطع می‌کند، زیرا در غیر این صورت ثابت می‌کنیم نقطه‌های تقاطع M′X′ با دایرهٔ (C′) برهم منطبق می‌باشند، یا به‌عبارت دیگر M′X′ دو نقطهٔ N′ بر دایرهٔ(C′) مماس است.

۵۱۶. اگر A نقطهٔ تماس دایره‌های (C) و (C′) و MM′ و NN′ قاطعهای رسم شده از A باشد، اوّلاً. A مرکز تجانس معکوس دایره‌های (C) و (C′) است. ثانیاً. MN و M′N′ پیوسته مجانس معکوس یکدیگرند، با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k = -\frac{R}{R'}$ بوده که درنتیجه $MN \| M'N'$ است و اگر MN در نقطهٔ T بر دایرهٔ ثابت (ω) و به شعاع ωT مماس باشد، M′N′ در نقطهٔ T′ مجانس T بر دایرهٔ (ω′) و به

شعاع $\omega'T'$ مجانس دایرهٔ (ω) با مرکز تجانس A و نسبت تجانس

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{AT'}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AM'}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AN'}}=\frac{\omega T}{\omega T'}=k$$

مماس خواهد بود. حال بایستی ثابت کنیم وقتی MN مماس بر دایرهٔ (ω) تغییر نماید، $M'N'$ مماس بر دایرهٔ (ω') تغییر می‌نماید. چنانچه $M_1M'_1$ قاطع دلخواه گذرنده بر A باشد، درصورتی که از نقطهٔ M_1 مماس M_1H را بر دایرهٔ (ω) رسم کنیم، خطی که از M'_1 موازی M_1H رسم می‌شود، اوّلاً. مجانس M_1H است، زیرا : $\frac{AM_1}{AM'_1}=-\frac{R}{R'}$ و دو پاره‌خط متجانس موازی‌اند. ثانیاً. بر دایرهٔ (ω') در نقطهٔ H' متناظر H مماس است و به همین طریق برای سایر قاطعها ثابت می‌نماییم.

۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۵۱۷. فرض می‌کنیم O نقطهٔ برخورد P_2P_1، Q_2Q_1 و O_2O_1 باشد. دو دایره متجانسند و O مرکز تشابه آنهاست. فرض می‌کنیم B نقطهٔ تقاطع دیگر آنها، T نقطهٔ برخورد AB با P_2P_1 و C نقطهٔ برخورد دیگر OA با C_2 باشد. از آن جا که :

$$TA.TB=TP_2^2=TP_1^2$$

است، TA عمودمنصف M_2M_1 است، درنتیجه :

$$\alpha=A\hat{M_1}O_1=A\hat{M_2}O_2=B\hat{M_2}O_1$$

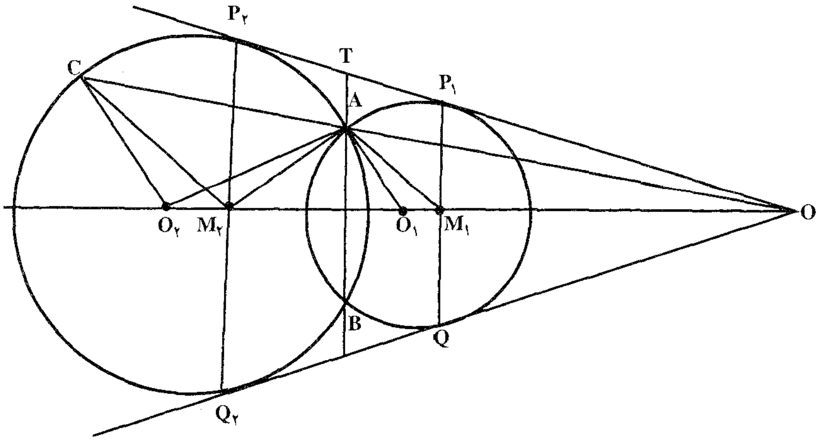
می‌باشد. با توجه به تجانس : $\alpha=C\hat{M_2}O_2$ است، درنتیجه : M_2، C و B بر یک استقامت قرار دارند. اما بنابه تقارن : $\beta=O_2\hat{A}M_2=O_2\hat{B}M_2$ است. از مثلث متساوی‌الساقین CO_2B :

$$O_2\hat{C}M_2=\beta$$

و از تجانس :

$$O_1\hat{A}M_1=\beta$$

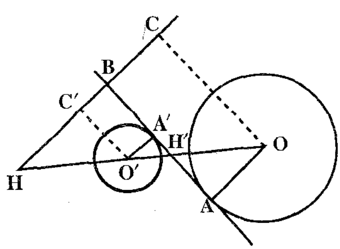
را به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب هردو زاویهٔ سؤال اصلی برابر : $\beta+M_2\hat{A}O_1$ می‌باشند.



۵۱۸. تبدیل متجانس H_A را مورد مطالعه قرار دهید که دایرهٔ ω را به ω_1 انتقال می‌دهد. در این حالت نقطه‌های M و N به نقطه های N_1 و P_1 (N_1 نقطهٔ برخورد دایرهٔ ω و خط AN و P_1 نقطهٔ برخورد دایرهٔ ω و خط AP است) انتقال می‌یابند. آن‌گاه خط N_1P_1 به‌عنوان تصویر خط VPموازی آن در تبدیل متجانس خواهد بود. براساس توازی خطهای MQ و M_1P_1، کمانهای $\widehat{MN_1}$ و $\widehat{QP_1}$ برابر بوده و از این‌رو زاویه‌های محاطی متناظر به آنها یعنی، زاویه‌های $M\hat{A}N_1$ و $Q\hat{A}P_1$ نیز برابر خواهند بود؛ یعنی $M\hat{A}N = Q\hat{A}P$ را خواهیم داشت.

۵.۵.۵. پاره خط

۱.۵.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط



۵۱۹. دو دایره به مرکزهای O و O′ و به شعاع r و r′ ($r > r'$) را در نظر می‌گیریم (شکل). H مرکز تجانس مستقیم دو دایره HB فاصلهٔ آن از مماس مشترک داخلی AA′ است. OC و O′C′ را بر HB عمود می‌کنیم. می‌دانیم H و H′ با OO′ مزدوج توافقی می‌باشند، پس H و B با CC′

مزدوج توافقی خواهند بود و داریم :

$$\frac{۲}{HB}=\frac{۱}{HC}+\frac{۱}{HC'}\ ;$$

$$\frac{۲}{HB}=\frac{۱}{HB+r}+\frac{۱}{HB-r'}$$

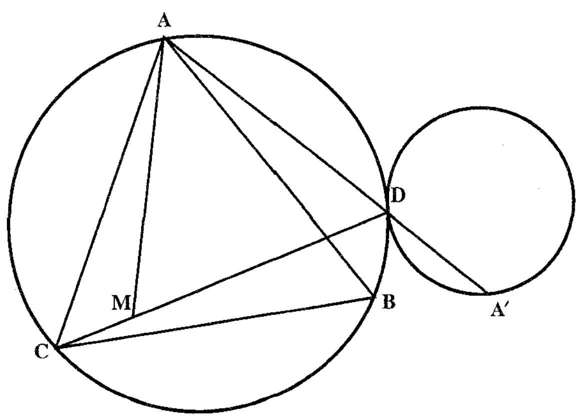
از رابطهٔ بالا HB را به‌دست می‌آوریم :

$$HB=\frac{۲rr'}{r-r'}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود HB مستقل از اندازهٔ OO' است. با استدلالی شبیه آنچه بیان شد، ثابت می‌شود که فاصلهٔ مرکز تجانس معکوس دو دایره از مماس مشترک خارجی آنها برابر است با : $\frac{۲rr'}{r+r'}$.

۲.۵.۵.۵. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۵۲۰. D را نقطهٔ تماس دو دایره و ABC را مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ بزرگتر فرض می‌کنیم. بدون این‌که به‌کلی‌بودن مسأله لطمه‌ای بخورد، می‌توان نقطهٔ D را روی کمان AB در نظر گرفت (شکل). ثابت می‌کنیم : $DC = DA + DB$.



نقطهٔ M را روی پاره‌خط راست DC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم : $DA = DM$ ؛ یادآوری می‌کنیم که $DC \geq BC = AB \geq AD$. مثلث ADM، متساوی‌الاضلاع است، زیرا متساوی‌الساقین است و درضمن، زاویهٔ ADM که با

زاویهٔ ABC برابر است، ۶۰ درجه می‌شود. بنابراین، ضمن دوران به‌اندازهٔ ۶۰ درجه، دور نقطهٔ A، نقطهٔ D بر M و نقطهٔ B بر C منطبق می‌شود، یعنی $BD = MC$ و $DC = DM + MC = AD + DB$.

R و r را بترتیب، شعاعهای دو دایرهٔ بزرگتر و کوچکتر و l_A، l_B و l_C را بترتیب، طول مماسهایی می‌گیریم که از نقطه‌های A، B و C بر دایرهٔ کوچکتر رسم شده‌اند؛ درضمن، نقطهٔ برخورد دیگر خط راست AD را با دایرهٔ کوچکتر، A' می‌نامیم (درحالتی که D بر A منطبق باشد، A' هم بر D منطبق می‌شود). نقطهٔ A' از نقطهٔ A، در تجانس به مرکز D و ضریب $\pm\frac{r}{R}$ به‌دست می‌آید (اگر دو دایره مماس خارج باشند، باید علامت «−» و در حالت مماس داخل، علامت «+» را در نظر گرفت). به این ترتیب

$$AA' = AD \pm DA' = AD(1 \pm \frac{r}{R})$$

و بنابر قضیهٔ مماس و قاطع، داریم:

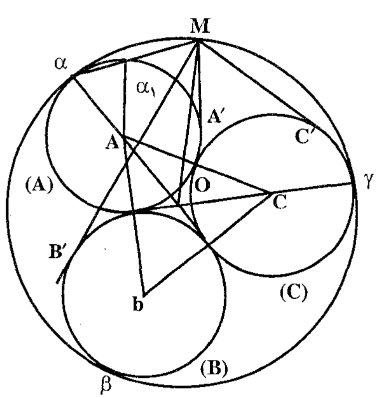
$$l_A = \sqrt{AD.AA'} = AD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد:

$$l_B = BD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}\ ,\ \ l_C = CD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$$

که از آن‌جا، برابری مورد نظر $l_C = l_A + l_B$ به‌دست می‌آید.

۵۲۲. فرض می‌کنیم α، β و γ نقطه‌های برخورد دایرهٔ T با دایره‌های A، B و C باشد. محل



برخورد $M\alpha$ را با دایرهٔ A، نقطهٔ α_1 می‌نامیم.

داریم :
$$MA'^2 = M\alpha M\alpha_1$$

و یا
$$\frac{MA'^2}{M\alpha^2} = \frac{M\alpha_1}{M\alpha}$$

و یا
$$\frac{MA'}{M\alpha} = \sqrt{\frac{M\alpha_1}{M\alpha}}$$

اما در مثلث $\alpha A\alpha_1$ و αOM نسبت به مرکز α مجانس یکدیگرند، داریم :
$$\frac{M\alpha_1}{M\alpha} = \frac{OA}{O\alpha}$$

با توجه به رابطهٔ قبل داریم :
$$\frac{MA'}{M\alpha} = \sqrt{\frac{OA}{OC}}$$

به همین‌ترتیب اگر دومین نقطهٔ برخورد $M\beta$ و $M\gamma$ بترتیب با دایره‌های B و C نقطه‌های β_1 و γ_1 باشند، مانند بالا می‌توان به نتیجهٔ زیر رسید.
$$\frac{MB'}{M\beta} = \sqrt{\frac{OB}{O\beta}} \ , \ \frac{MC'}{M\gamma} = \sqrt{\frac{OC}{O\gamma}}$$

چون
$$O\alpha = O\beta = O\gamma \ , \ OA = OB = OC$$

نتیجه می‌شود :
$$\frac{MA'}{M\alpha} = \frac{MB'}{M\beta} = \frac{MC'}{M\gamma} \qquad (1)$$

مثلث $\alpha\beta\gamma$ متساوی‌الاضلاع است و M نقطهٔ اختیاری بر روی دایرهٔ محیطی آن است بنابراین، یکی از قطعه‌خطهای $M\alpha$، $M\beta$ و $M\gamma$ مساوی است با مجموع دو تای دیگر با توجه به رابطهٔ D یکی از قطعه‌خطهای MA'، MB' و MC' مساوی با مجموع دوتای دیگر است. اگر M روی کمان کوچک $\beta\gamma$ باشد، داریم :

$M\alpha = M\beta + M\gamma$ پس $MA' = MB' + MC'$

اگر M روی کمان کوچک $\gamma\alpha$ باشد، بنابراین :
$$MB' = MC' + MA' \ , \ M\beta = M\gamma + M\alpha$$

اگر M روی کمان کوچک $\alpha\beta$ باشد :
$$M\gamma = M\alpha + M\beta$$

و
$$MC' = MA' + MB'$$

پس به همان ترتیب هر نقطه مانند M روی دایرهٔ T بگیریم و مماسهایی خارجی بر A، B و C رسم کنیم مسأله ثابت می‌شود.

۶.۵.۵ . رابطه‌های متری

۵۲۳. چنانچه M نقطهٔ مفروض باشد، داریم :

$$\begin{cases} P_{M(O)} = \overline{MO^{2}} - R^{2} \\ P_{M(O')} = \overline{MO'^{2}} - R'^{2} \end{cases}$$

از کم کردن این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که :

$$P_{M(O)} - P_{M(O')} = (MO^{2} - MO'^{2}) - (R^{2} - R'^{2}) \qquad (1)$$

در صورتی که H پای محور اصلی روی خط‌المرکزین و I وسط OO' باشد.

داریم : $IH = \frac{R^{2} - R'^{2}}{2OO'}$ و یا $R^{2} - R'^{2} = 2\overline{OO'}.\overline{IH}$ (۲)

و همچنین در هر مثلث تفاضل مربعات دو ضلع مساوی است با دو برابر ضلع سوم در تصویر میانه وارد بر ضلع سوم روی آن ضلع یعنی در مثلث $\overset{\Delta}{MOO'}$ می‌توان نوشت :

$$MO^{2} - MO'^{2} = 2OO'.I_{m} \qquad (3)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲)، (۳) نتیجه می‌شود :

$$P_{M(O)} - P_{M(O')} = 2OO'.IM - 2OO'.IH = 2OO'.HM$$

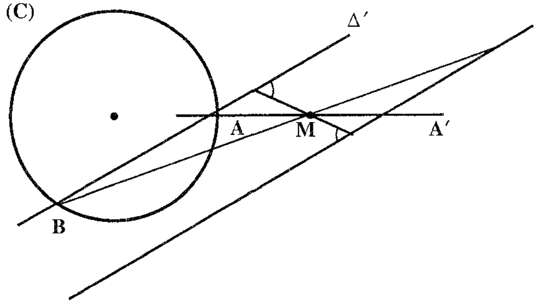
۵۲۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۷.۵.۵ . ثابت کنید شکلها مجانس یکدیگرند

۵۲۶. گزینهٔ (هـ) درست است.

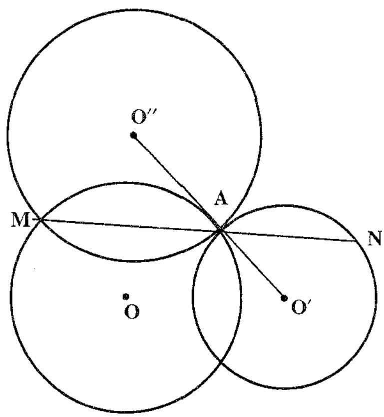
۸.۵.۵ . رسم شکلها

۵۲۷. اگر M نقطه، Δ خط و (C) دایره داده شده باشند، خط Δ' مجانس خط Δ نسبت به

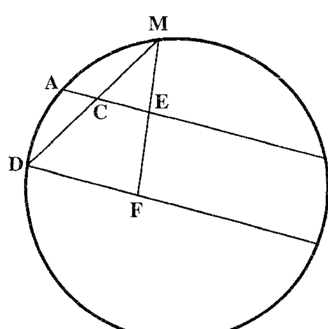


مرکز تجانس M و با نسبت تجانس k را به‌دست می‌آوریم و نقطه برخورد آن با دایرهٔ (C) را A و B′ می‌نامیم. خطهای MA و MB جواب مسأله‌اند : بدیهی است اگر خط Δ′ دایرهٔ (C) را قطع نکند مسأله جواب ندارد.

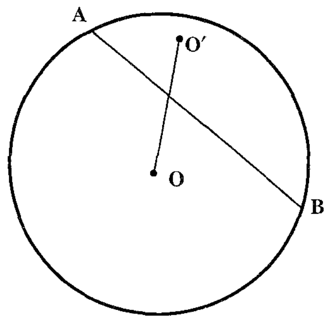
۵۲۸. مجانس دایرهٔ O را نسبت به مرکز A و با نسبت معلوم k پیدا می‌کنیم، نقطهٔ تقاطعش با دایرهٔ O (نقطهٔ M) یک سر وتر مطلوب است.



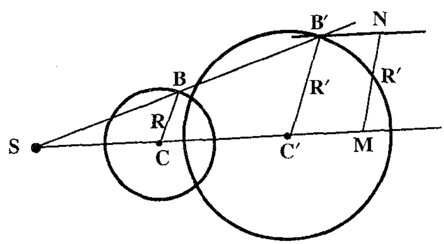
۵۲۹. مجانس AB را نسبت به مرکز M و با نسبت ۲ پیدا می‌کنیم، چون $\frac{MD}{MC} = ۲$ است.



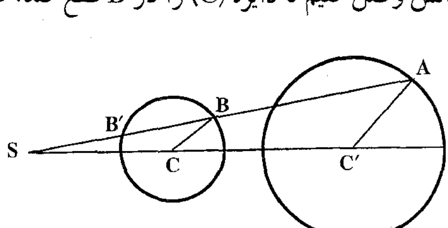
۵۳۰. $\frac{MA}{MB}=k$ ، پس A و B باید نسبت به M و با نسبت k مجانس یکدیگر باشند. لذا مجانس دایرهٔ (C) را نسبت به M و نسبت به k پیدا می‌کنیم. هرجا دایرهٔ (C) را قطع کند، نقطهٔ A است ؛ و وتر AMB جواب است (برای رسم دایرهٔ مجانس، شعاع دلخواه OC را رسم نموده و مجانس آن را پیدا می کنیم، $O'C'$).



۵۳۱. از نقطهٔ دلخواه B واقع بر دایرهٔ (C) به نقطهٔ S وصل کرده، امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر SC پاره‌خط $MN=R'$ و موازی CB رسم می‌نماییم و از N موازی SC رسم می‌کنیم تا SB را در B' قطع کند. خطی که از B' موازی BC رسم می‌شود، SC را در C' قطع می‌کند. نقطهٔ C' مرکز دایرهٔ خواسته شده است.



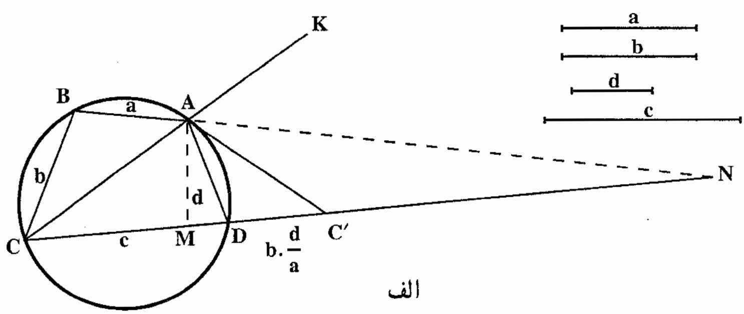
۵۳۲. می‌دانیم در تجانس، اولاً. هردو پاره‌خط متجانس موازی اند. ثانیاً. در دو دایره متجانس مرکزشان مجانس یکدیگرند. ثالثاً. نسبت تجانس برابر نسبت دو شعاع آنهاست. لذا اگر A را به S مرکز تجانس وصل کنیم تا دایرهٔ (C) را در B قطع کند، B مجانس A بوده و داریم :



$\frac{SB}{SA}=\frac{R}{R_1}=k$ و درنتیجه اگر از A موازی BC رسم کنیم تا SC را در C' قطع کند، نقطهٔ (C') مرکز دایرهٔ خواسته شده و $C'A=R_1$ شعاع آن است، زیرا:
$\frac{SB}{SA}=\frac{R}{R_1}=\frac{BC}{AC'}=k$ و یا $AC'=R_1$ شعاع دایره می‌باشد (اگر B' نقطهٔ دیگر تقاطع SA با دایرهٔ (C) مجانس A فرض کنیم مسأله دارای جواب دیگری نیز می‌باشد).

۵۳۳. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده است و $\Delta\overline{ABC}$ را با طول ثابت وتر آن $\overline{AB}=\alpha$ و مجانس با ΔABC با مرکز تجانس O، محل برخورد خطهای l_1 و l_2 در نظر می‌گیریم. رأس $\overline{C}$ بر یکی از خطهای m_1 ، m_2 ، m_3 ، و m_4 که بسادگی قابل ترسیمند واقع است. (برای ترسیم این خطها کافی است مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\overline{ABC_1}$ ، $\overline{ABC_2}$ ، $\overline{ABC_3}$ و $\overline{ABC_4}$ را با زاویهٔ حادهٔ مفروض α طوری رسم کنیم که رأسهای زاویه‌های حاده نقطه‌های دلخواهی از خطهای l_1 و l_2 باشند). مسلماً C نیز روی همین خط واقع خواهد شد. پس C از برخورد یکی از خطهای m_1 ، m_2 ، m_3 ، و m_4 با دایرهٔ S یافته می‌شود. مسأله می‌تواند حداکثر تا هشت جواب داشته باشد.

۵۳۴. الف. فرض کنید که چهارضلعی ABCD رسم شده است (شکل الف). تجانس مارپیچی

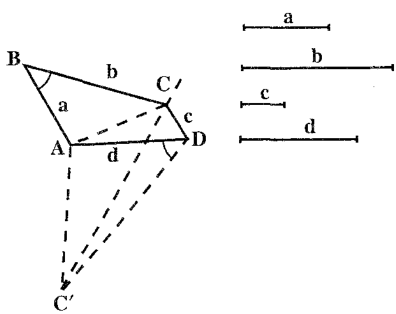


الف

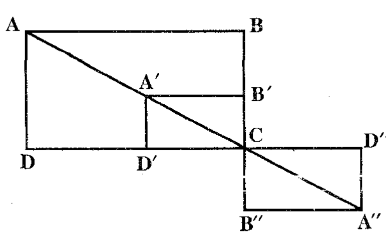
به مرکز A، نسبت تجانس d/a و زاویهٔ دوران BAD مثلث ABC را به مثلث ADC' بدل می‌کند که در آن C' بر امتداد CD واقع است (زیرا $A\hat{D}C+A\hat{B}C=180^\circ$). در مثلث ACC' پاره‌خطهای $CD=c$ ، $DC'=bd/a$ ، $DA=d$ و نسبت ضلعهای $AC'/AC=d/a$ معلومند؛ لذا مثلث را می‌توان رسم کرد (پاره‌خط CC' را جدا می‌کنیم. نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث ACC' در رأس A خط CC' را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند. به‌طوری که $C'M/CM=C'N/CN=d/a$ ؛

این نقطه‌ها را می‌توان به‌دست آورد. چون $M\hat{A}N = 90^\circ$ و از آن‌جا نتیجه می‌شود که A نقطهٔ برخورد دایرهٔ به قطر MN با دایرهٔ به مرکز D و شعاع d است). با ترسیم مثلث ABC به ضلعهای $AB = a$ و $CB = b$ روی پاره‌خط AC، چهارضلعی خواسته شده به‌دست می‌آید. مسأله یا دقیقاً یک جواب دارد یا اصلاً جوابی ندارد.

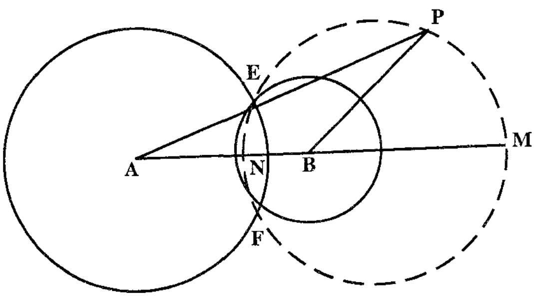
ب. راه حل این قسمت شبیه قسمت (الف) است. فرض کنید چهارضلعی ABCD رسم شده است (شکل ب)؛ تجانس مارپیچی به مرکز A، نسبت تجانس d/a و زاویهٔ دوران BAD مثلث ABC را به مثلث ADC' بدل می‌کند که در آن نقطهٔ C' با توجه به تساویهای $C\hat{D}C' = \hat{B} + \hat{D}$ و $DC' = b.d/a$ معین می‌شود. با رسم مثلث CDC' می‌توانیم A را از برخورد دایره‌ای به قطر پاره‌خط MN (که در آن M و N نقطه‌هایی از خط CC' هستند) چنان که $(C'M/CM) = C'N/CN = d/a$ و دایرهٔ به مرکز D و شعاع d به‌دست آوریم.



۵۳۵. مجانس مستقیم مستطیل ABCD با نسبت $\frac{1}{2}$ و به مرکز رأس C مستطیل $A'B'C'D'$ است. به‌قسمی که داشته باشیم: $\frac{CB'}{CB} = \frac{CA'}{CA} = \frac{CD'}{CD} = \frac{1}{2}$ و مجانس معکوس مستطیل ABCD با نسبت $\frac{1}{2}$ و به مرکز رأس C مستطیل $A''B''C''D''$ می‌باشد به‌قسمی که: $\frac{CB''}{CB} = \frac{CA''}{CA} = \frac{CD''}{CD} = \frac{1}{2}$ و به همین ترتیب با نسبت ۱ و ۲ می‌توان مجانس مستطیل را پیدا کرد.

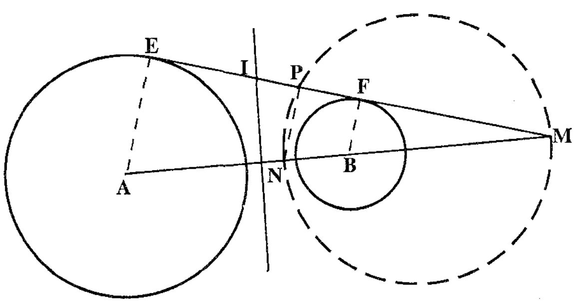


۹.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۵۳۶. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۳۷. می‌دانیم که دو نقطهٔ M و N قطعه خط AB را به قسمت $\frac{R}{R'}$ تقسیم می‌کنند، بنابراین چهار نقطهٔ A، N، B و M تقسیم توافقی می‌سازند و دایرهٔ به قطر MN مکان هندسی نقطه‌هایی است مانند P به‌طوری که $\frac{PA}{PB}=\frac{R}{R'}$ باشد. نخست فرض می‌کنیم دو دایره در E و F متقاطع باشند. باید ثابت کنیم که دایرهٔ به قطر MN نیز از E و F می‌گذرد. چون، $\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FB}=\frac{R}{R'}$ است، پس E و F نیز روی مکان بالا واقعند. سپس فرض کنیم دایره‌های A و B دارای مماس مشترکی باشند که از M گذشته در E و F بر آنها مماس باشد و محور اصلی را در I و دایرهٔ به قطر MN را بار دیگر در نقطهٔ P قطع کند. چون E، P و F بترتیب تصویرهای A، N و B بر این مماس مشترک می‌باشند، پس چهار نقطهٔ M، F، P و E تقسیم توافقی می‌سازند و چون I وسط EF است، بنابراین داریم :



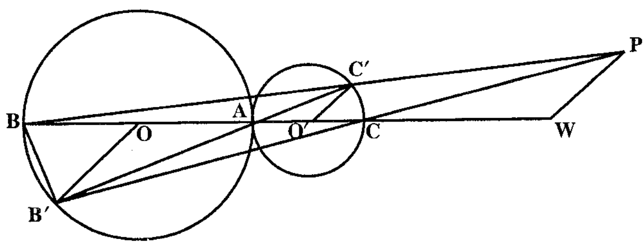
$$IE^2 = IF^2 = IP \times IM$$

از این تساوی معلوم می‌شود که نقطهٔ I و به همین طریق قرینهٔ آن نسبت به AB نسبت به دایرهٔ مفروض دارای یک قوتند، یعنی سه دایره یک محور اصلی دارند.

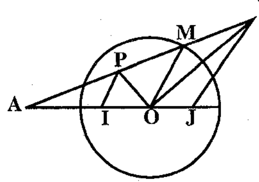
۵۴۰. نقطهٔ A مرکز تجانس دو دایره است، BB' و CC' موازی است، داریم :

$$\frac{PB}{PC'}=\frac{BB'}{CC'}=\frac{R}{R'} \quad \text{یا} \quad \frac{PB}{PB-PC'}=\frac{R}{R-R'}$$

و $\frac{PB}{BC'}=\frac{R}{R-R'}$ ، پس مکان نقطهٔ P، مجانس مکان C' در تجانس $(B,\frac{R}{R-R'})$ است و این مکان دایره‌ای است به مرکز ω و به شعاع $\frac{RR'}{R-R'}$ به قسمی که $BO'=\frac{R}{R-R'}(۲R+R')$ $B\omega=\frac{R}{R-R'}$ می‌باشد.

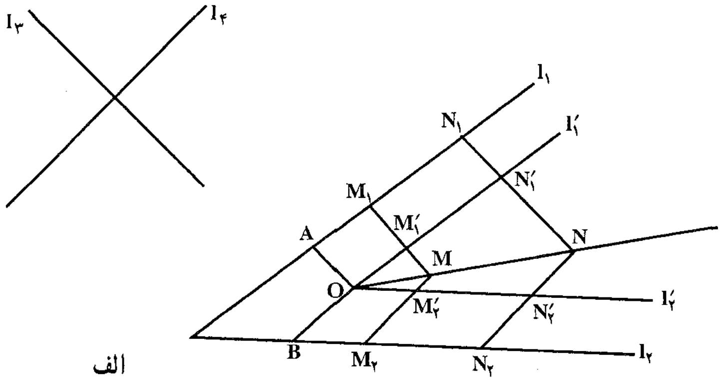


۵۴۱. فرض می‌کنیم $OA=d$ و $OM=R$. اگر پای نیمساز داخلی $A\hat{O}M$ را P بنامیم (شکل) داریم : $\frac{AP}{PM}=\frac{d}{R}$ ، $\frac{PA}{PM}=\frac{-d}{R}$ و $\frac{AP}{AM}=\frac{d}{d+R}$. پس نقطهٔ P دایرهٔ مجانس دایرهٔ (O) در تجانس $(A\ ,\ \frac{d}{R+d})$ را می‌پیماید که شعاع آن $\frac{dR}{d+R}$ و مرکز آن نقطهٔ I است که با رابطهٔ $\frac{AI}{AO}=\frac{d}{d+R}$ معین شده است و به‌همین ترتیب اگر Q پای نیمساز خارجی $A\hat{O}M$ باشد، $\frac{AQ}{MQ}=\frac{d}{R}$ و $\frac{AQ}{AM}=\frac{d}{d-R}$ و Q دایرهٔ مجانس دایرهٔ (O) را می‌پیماید که شعاع آن $\frac{dR}{d-R}$ و مرکز آن نقطهٔ J است که با رابطهٔ $\frac{AJ}{AO}=\frac{d}{d-R}$ معین می‌شود.



۵.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۵۴۲. الف. از A و B خطهایی بترتیب موازی با l_3 و l_4 رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O محل برخورد آنها خطهای l'_1 و l'_2 را موازی با l_1 و l_2 می‌کشیم (شکل الف). دو زوج



الف

نقطهٔ M_1 ، M_2 و N_1 ، N_2 را که در فرضهای مسأله صدق می‌کنند انتخاب می‌کنیم : M_1 و N_1 بر l_1 واقعند، M_2 و N_2 بر l_2 و $\frac{AM_1}{BM_2}=\frac{AN_1}{BN_2}=m$. نقطه‌های برخورد خطهایی را که از نقطه‌های M_1 ، N_1 به موازات l_3 رسم می‌شوند، با خط l'_1 ، M'_1 و N'_1 و نقطه‌های برخورد خطهایی که از M_2 ، N_2 به موازات l_4 ، رسم می‌شوند با خط l'_2 را M'_2 و N'_2 می‌نامیم. در این صورت

$$\frac{OM'_1}{OM'_2}=\frac{ON'_1}{ON'_2}(=m) \text{ یا } \frac{OM'_1}{ON'_1}=\frac{OM'_2}{ON'_2}$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که دو خط $M_1M'_1$ و $M_2M'_2$ مجانس دو خط $N_1N'_1$ و $N_2N'_2$ با مرکز تجانس O هستند. بنابراین، نقطهٔ M محل برخورد خطهای $M_1M'_1$ و $M_2M'_2$ ، مجانس نقطهٔ N محل برخورد خطهای $N_1N'_1$ و $N_2N'_2$ است به مرکز تجانس O ؛ به عبارت دیگر، هر دو نقطه از مکان خواسته شده بر یک خط واقعند که از O می‌گذرد. بنابراین، مکان خواسته شده یک خط است ؛ برای ترسیم آن کافی است توجه کنیم که این خط از نقطهٔ O و یک نقطهٔ دلخواه M که در شرایط مسأله صدق کند، می‌گذرد.

ب. فرض کنید $A_1^\circ A_2^\circ \ldots A_n^\circ$ وضعیت ثابتی از چندضلعی مورد نظر باشد (شکل ب، در این‌جا $n = 6$). چون ضلعهای چندضلعی اصلی همیشه با ضلعهای متناظر $A_1^\circ A_2^\circ \ldots A_n^\circ$ موازی‌اند و رأسهای A_1، A_2، ...، A_{n-1} روی خطهای l_1، l_2، ...، l_{n-1} می‌لغزند، از این‌جا نتیجه می‌شود که نسبتهای

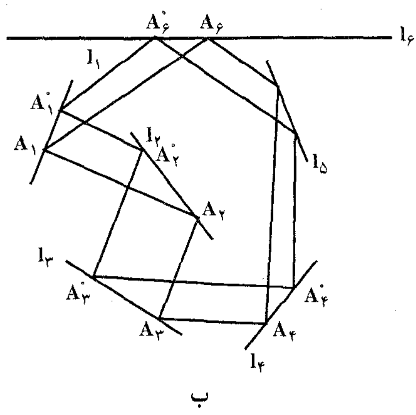
$$\frac{A_1^\circ A_1}{A_2^\circ A_2}, \frac{A_2^\circ A_2}{A_3^\circ A_3}, \ldots, \frac{A_{n-2}^\circ A_{n-2}}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}}$$

ثابت می‌مانند، پس نسبت

$$\frac{A_1^\circ A_1}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}} = \frac{A_1^\circ A_1}{A_2^\circ A_2} \cdot \frac{A_2^\circ A_2}{A_3^\circ A_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_{n-2}^\circ A_{n-2}}{A_{n-1}^\circ A_{n-1}}$$

نیز ثابت می‌ماند. با توجه به قسمت (الف) این بدان معنی است که رأس A_n نیز بر خط l_n (که با دو وضعیت دلخواه از این رأس مشخص می‌شود) حرکت می‌کند.

ج. فرض کنید l_1، l_2، ...، l_n خطهایی باشند که ضلعهای چندضلعی مفروض روی آنها واقعند. نقطهٔ دلخواه A_1 را بر خط l_1 انتخاب و یک چندضلعی مانند $A_1A_2 \ldots A_n$ رسم می‌کنیم که ضلعهایش با خطهای مفروض موازی و رأسهای A_2، ...، A_{n-1} آن

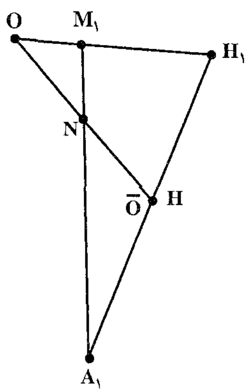


ب

بر خطهای l_2، ...، l_{n-1} واقع باشند. اگر رأسهای A_1، A_2، ...، A_{n-1} از این چندضلعی بر خطهای l_1، l_2، ...، l_{n-1} بلغزند به‌طوری که ضلعها با خطهای مفروض موازی بمانند، آن‌گاه با توجه به قسمت (ب)، رأس A_n نیز بر یک خط m می‌لغزد که با دو وضعیت دلخواه از رأس A_n مشخص می‌شود. پس وضعیت رأس $\overline{A}_n$ از چندضلعی مطلوب $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \ldots \overline{A}_n$ از برخورد خط m با خط l_n مشخص می‌شود. اگر l_n با

m موازی نباشد، مسأله جوابی یکتا دارد؛ اگر $l_n \| m$ ولی $l_n \neq m$، مسأله جواب ندارد؛ اگر $l_n = m$، مسأله نامعین است.

۵۴۳. چهار نقطهٔ A_1، A_2، A_3 و H_4 را در نظر می‌گیریم. با این نقطه‌ها می‌توان چهار مثلث $A_1A_2A_3$، $A_1A_2H_4$، $A_1A_3H_4$ و $A_2A_3A_4$ ساخت. نشان خواهیم داد که دایره‌های اویلر این مثلثها همه بر یکدیگر منطبقند. در واقع شعاعهای دایره‌های اویلر مثلثها $A_1A_2A_3$ و $A_2A_3H_4$ برابرند با نصف شعاع دایره‌های محیطی این مثلثها؛ پس با یکدیگر برابرند، زیرا دایره‌های محیطی مثلثهای $A_1A_2A_3$ و $A_2A_3H_4$ نسبت به خط A_2A_3 متقارنند. بعلاوه، مرکز اوّلین دایرهٔ اویلر در وسط پاره‌خط H_4O واقع است که در آن O مرکز S است؛ مرکز دایرهٔ دوم در وسط پاره‌خط A_1O_1 واقع است که در آن O_1 مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_2A_3H_4$ است (زیرا A_1 مرکز ارتفاعی $\Delta A_2A_3H_4$ است) و چون نقطه‌های وسط این پاره‌خطها بر هم منطبقند (چهارضلعی $A_1H_4O_1O$ متوازی‌الاضلاع است)؛ نتیجه می‌شود که مرکزهای دایره‌های اویلر و در نتیجه خود این دایره‌ها برهم منطبقند. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که دایره‌های اویلر مثلثهای $A_1A_2H_4$، $A_1A_3H_4$ و $A_1A_2A_3$ بر هم منطبقند. به شیوهٔ مشابه می‌توان نشان داد که هر یک از ۳۲ دایرهٔ اویلر موردنظر بر دایرهٔ اویلر یکی از مثلثهای $A_1A_2A_3$، $A_1A_2A_4$، $A_1A_3A_4$، $A_2A_3A_4$، $H_1H_2H_3$، $H_1H_2H_4$، $H_1H_3H_4$ و $H_2H_3H_4$ منطبق است.



ب. چهارتای این دایره‌ها در نقطهٔ مشترک $\overline{O}$ و چهارتایشان در نقطهٔ $\overline{O'}$ به‌هم می‌رسند. بعلاوه، نقطه‌های $\overline{O}$ و $\overline{O'}$ نسبت به نقطهٔ H که وسط پاره‌خط A_1H_1 است متقارنند. $\overline{O}$ بر امتداد ON از طرف نقطهٔ N قراردارد، به‌طوری که $ON = N\overline{O}$ (N نقطه‌ای است که پاره‌خط A_1M_1 را به نسبت $A_1N = NM_1 = 3:1$ تقسیم می‌کند، که در آن M_1 مرکز هندسی مثلث $A_1A_2A_3$ است؛ از این‌جا و با توجه به این که $OM_1 : M_1H_1 = 1:2$، نتیجه می‌شود که $\overline{O}$ بر H منطبق است (شکل را ببینید) و بنابراین $\overline{O'}$ و $\overline{O}$ منطبق است.

ج. این حکم ساده است.

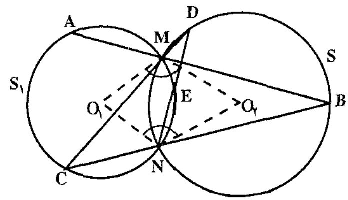
۵۴۴. الف. چهارضلعیهای $A_1A_2A_3A_4$ و $M_1M_2M_3M_4$ که در آن M_1، M_2، M_3 و M_4 مرکزهای هندسی مثلثهای $A_2A_3A_4$، $A_1A_3A_4$، $A_1A_2A_4$ و $A_1A_2A_3$

هستند، مجانس یکدیگرند با نسبت تجانس ۳ / ۱- (و مرکز تجانس آنها نقطهٔ N مرکز هندسی چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ است). بعلاوه، چهارضلعیهای $M_1M_2M_3M_4$ و $H_1H_2H_3H_4$ که در آن H_1 ، H_2 ، H_3 و H_4 مرکز ارتفاعی همان مثلثها هستند، مجانس یکدیگرند با مرکز تجانس O، مرکز دایرهٔ S و با نسبت تجانس ۳/۱ . پس چهارضلعی $H_1H_2H_3H_4$ را می‌توان از $A_1A_2A_3A_4$ بر اثر دو تجانس پیاپی با نسبتهای ۳ / ۱- = k_1 و ۳ = k_2 به‌دست آورد ؛ اما حاصلضرب این دو تجانس، تجانسی است با نسبت ۱- = k_1k_2 یعنی قرینهٔ نسبت به یک نقطه و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.
تذکر. از قضیهٔ مربوط به سه مرکز تجانس نتیجه می‌شود که نقطهٔ H، با نقطهٔ N مرکز هندسی، و نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی، بر یک خط واقعند ؛ بسادگی می‌توان نشان داد که N وسط OH است.

ب. راه‌حل قسمت (ب) شبیه راه‌حل قسمت (الف) است. در این جا باید از این موضوع استفاده کرد که نقطهٔ $\overline{O}$ مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی و H مرکز ارتفاعی آن سه نقطه‌اند واقع بر یک خط و $O\overline{O} / OH = ۱/۲$.

۵۴۵. تجانس به مرکز M و نسبت $k = r_2 / r_1$ را در نظر می‌گیریم که در آن r_1 و r_2 بترتیب شعاع دایره‌های R و S هستند. این تبدیل خطهای m و n را به خودشان بدل می‌کند و دایرهٔ R مماس برm و n به شعاع r_1 را به دایره‌ای مماس بر m و n به شعاع r_2 ؛ یعنی R را به S بدل می‌کند (شکل). خط l نیز به خودش و پاره‌خط AB به CD، نقطهٔ E به F و بالاخره مثلث ABE به مثلث CDF بدل می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که این مثلثها مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس $k = r_2 / r_1$ است ؛ بنابراین نسبت مساحت ΔCDF به مساحت ΔABE برابر است با $k^2 = (r_2 / r_1)^2$. بالاخره از آن جا که مثلث CDF از مثلث ABE بر اثر تجانسی به مرکز M به‌دست می‌آید، نتیجه می‌گیریم که خط واصل بین دو نقطهٔ متناظر، مثلاً دو مرکز هندسی، این مثلثها (محل برخورد میانه‌های آنها) از نقطهٔ M می‌گذرد.

۵۴۶. الف. نقطهٔ B از نقطهٔ A بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز N، نسبت تجانس $k_1 = r_2 / r_1$ ، (r_1 و r_2 شعاعهای دایره‌های S_1 و S_2) و با زاویهٔ دوران $O_1\hat{N}O_2$ که در آن O_1 و O_2 مرکزهای دایره‌های S_1 و S_2 هستند، به‌دست می‌آید. به همین ترتیب، نقطهٔ C از B بر اثر یک تجانس مارپیچی با مرکز M، نسبت $k_2 = r_1 / r_2$ و زاویهٔ دوران $O_2\hat{M}O_1$ به‌دست می‌آید (شکل). حاصلضرب این دو تبدیل تجانسی A را به C



بدل می‌کند، اما حاصلضرب دو تجانس مارپیچی نیز یک تجانس مارپیچی است با نسبت $k = k_1k_2 = (r_2 / r_1)(r_1 / r_2) = 1$ و زاویهٔ دوران $O_1\hat{N}O_2 + O_2\hat{M}O_1 = 2O_1\hat{N}O_2$ $(O_2\hat{M}O_1 = O_1\hat{N}O_2)$ زیرا M و N نسبت به خط O_1O_2 قرینه هستند. این تجانس مارپیچی در واقع یک دوران معمولی است؛ زیرا نسبت تجانس آن $k = 1$؛ مرکز این دوران نقطهٔ O_1 مرکز S_1 است، زیرا این دوران نقطهٔ دلخواه A از S_1 را به یک نقطهٔ C از S_1 بدل می‌کند، یعنی S_1 را به خودش بدل می‌کند. سرانجام، درست همان‌طور که C از A بر اثر دورانی حول O_1 به زاویهٔ $2O_1\hat{N}O_2$ به‌دست آمد، نقطهٔ E هم از C بر اثر دورانی حول O_1 به زاویهٔ $2O_1\hat{N}O_2$ به‌دست می‌آید. پس E از A بر اثر دورانی حول O_1 به زاویهٔ $4O_1\hat{N}O_2$ به‌دست می‌آید. حکم قسمت (الف) از این‌جا نتیجه می‌شود که زاویهٔ $4O_1\hat{N}O_2$ به محل A بستگی ندارد.

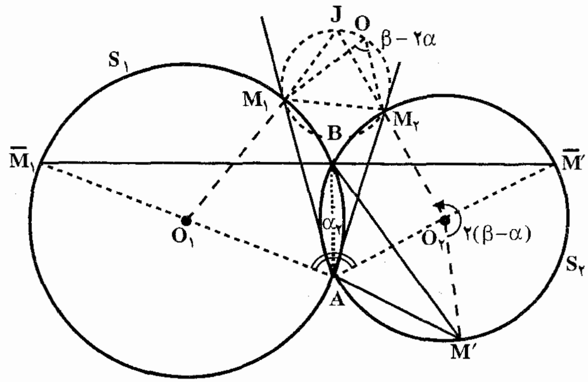
ب. اگر $4O_1\hat{N}O_2 = 360°$، یعنی اگر $O_1\hat{N}O_2 = 90°$، آن‌گاه، E بر A منطبق خواهد شد. به‌عبارت دیگر، E بر A منطبق است، اگر دو دایرهٔ S_1 و S_2 متعامد باشند، یعنی اگر زاویهٔ بین S_1 و S_2، $90°$ باشد.

۵۴۷. الف. ابتدا فرض می‌کنیم l دایره‌ای باشد با شعاعی بسیار بزرگتر از شعاع دایره‌های S_1 و S_2، اگر شعاع l را به‌طور نامحدود بزرگتر و بزرگتر کنیم به‌طوری که l بتدریج به‌صورت خط راستی متقاطع با دایره‌های S_1 و S_2 درآید، در حالت حدی نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

ب. نتیجهٔ بخش (الف) به‌صورت نتیجهٔ بخش (ب) درمی‌آید، اگر خط l را طوری حرکت دهیم که نقطه‌های K و L برهم و نقطه‌های P و Q بر هم منطبق شوند، یعنی اگر l را طوری حرکت دهیم که به مماس مشترک دایره‌های S_1 و S_2 بدل می‌شود.

۵۴۸. الف) چگونگی به دست آوردن نقطهٔ M_2 از نقطهٔ M_1 را نشان می‌دهیم. M_1 را به B، نقطهٔ برخورد دوم S_1 و S_2، وصل می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد M_1B و S_2 را M' می‌نامیم

(شکل). صرفنظر از جای زاویهٔ مفروض α ، M' همیشه از M بر اثر تجانس مارپیچی ثابتی به‌دست می‌آید ؛ زیرا شکل مثلث M_1AM' به‌جای M_1 بستگی ندارد (زاویهٔ AM_1M' نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$ از دایرهٔ S_1 است و زاویهٔ $AM'M_1$ نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$ از



دایرهٔ S_2). با ترسیم $\overline{M_1}\overline{M'} \perp AB$ (که در آن $A\overline{M_1}$ و $A\overline{M'}$ قطرهایی از دو دایره‌اند)، به‌آسانی می‌توان دید که مقدار β ، زاویهٔ دوران این تجانس مارپیچی، برابر است با $O_1\hat{A}O_2$ و نسبت تجانس آن AO_2 / AO_1 است. بعلاوه $M'\hat{A}M_2 = \beta - \alpha$ و $M'\hat{O}_2M_2 = 2(\beta-\alpha)$ ، پس M_2 از M_1 بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز A، زاویهٔ دوران β و نسبت تجانس k (که M_1 را به M' بدل می‌کند) و به دنبال آن، دورانی به مرکز O_2 و زاویهٔ دوران $2(\beta-\alpha)$ (که M' را به M_2 بدل می‌کند) به دست می‌آید. اما مجموع این دو تبدیل، یک تجانس مارپیچی است به مرکز O، با نسبت تجانس k و زاویهٔ دوران $-\beta + 2(\beta-\alpha) = \beta - 2\alpha$ (در شکل جهت دوران از AM_1 به AM' و از O_2M' به O_2M_2 خلاف یکدیگر است). اکنون تنها کافی است توجه کنیم که :

$$M_1\hat{J}M_2 = A\hat{M}_1M_2 + A\hat{M}_2M_1 = O_1\hat{M}_1A + O_2\hat{M}_2A - 180^\circ$$
$$= (180^\circ - M_1\hat{A}M_2) + (O_1\hat{A}M_1 + O_2\hat{A}M_2) - 180^\circ$$
$$= (180^\circ - \alpha) + (\beta - \alpha) - 180^\circ = \beta - 2\alpha$$

و در نتیجه، دایرهٔ محیطی ΔM_1M_2J از O می‌گذرد.

ب. تجانس مارپیچی به مرکز A و زاویهٔ دوران $\beta = O_1AO_2$ و نسبت تجانس $k = AO_2 / AO_1$ نقطهٔ O_1 را به O_2 بدل می‌کند ؛ دورانی دیگر حول O_2 و به اندازهٔ

زاویهٔ $2(\beta-\alpha)$ نقطهٔ O_2 را ثابت نگاه می‌دارد. بنابراین $OO_2 / OO_1 = AO_2 / AO_1$ و $O_1\hat{O}O_2 = \beta - 2\alpha$. چون نسبت $OO_2 / OO_1 = AO_2 / AO_1$ ثابت است، مکان هندسی نقطه‌های O یک دایره است؛ این دایره از نقطه‌های A (که در حالت $\alpha=\beta$، بر O منطبق است) و B (که در حالت $\alpha=0$، بر O منطبق است) می‌گذرد.

۵۴۹. می‌دانیم نقطه‌های S_1 و S'_1 روی خط O_2O_3 چنان قرار گرفته‌اند که $\frac{S_1O_2}{S_1O_3}=\frac{R_2}{R_1}$ (۱) و $\frac{S'_1O_2}{S'_1O_3}=-\frac{R_2}{R_3}$ (۲) به همین ترتیب، نقطه‌های S_2 و S'_2 روی O_3O_1 و نقطه‌های S_3 و S'_3 روی O_1O_3 قرار دارند و داریم:

$$\frac{S_2O_3}{S_2O_1}=\frac{R_3}{R_1} \ (3) \quad \text{و} \quad \frac{S'_2O_3}{S'_2O_1}=-\frac{R_3}{R_1} \ (4) \quad \text{و} \quad \frac{S_3O_1}{S_3O_2}=\frac{R_1}{R_2} \quad (5)$$

و $\frac{S'_3O_1}{S'_3O_2}=-\frac{R_1}{R_2}$ (۶) اولاً. طرفین رابطه‌های (۱)، (۳) و (۵) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\overline{S_1O_2}}{\overline{S_1O_3}}\times\frac{\overline{S_2O_3}}{\overline{S_2O_1}}\times\frac{\overline{S_3O_1}}{\overline{S_3O_2}}=1$$

پس S_1، S_2 و S_3 بر یک استقامت واقعند.

ثانیاً. طرفین رابطه‌های (۲)، (۴) و (۶) را در هم ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{S'_1O_2}{S'_1O_3}\times\frac{S'_2O_3}{S'_1O_1}\times\frac{S_3O_1}{S_3O_2}=1$$

پس S'_1، S'_2 و S_3 بر یک استقامت واقعند.

ثالثاً. طرفین رابطه‌های (۲)، (۴) و (۶) را درهم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{S'_1O_2}{S'_1O_3}\times\frac{S'_2O_3}{S'_2O_1}\times\frac{S'_3O_1}{S'_3O_2}=-1$$

به موجب عکس قضیهٔ سوا خطهای $O_1S'_1$، $O_2S'_2$ و $O_3S'_3$ متقاربند.

۵۵۰. حالت کلی n دایره را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دایره‌های S_1 و S_2 در M_1 بر هم مماس (بیرونی یا درونی) باشند، S_2 و S_3 در M_2، ....، S_{n-1} و S_n در M_{n-1} و S_n و S_1 در M_n. نقطهٔ دلخواهی از S_1 را A_1 می‌نامیم و دومین نقطهٔ برخورد A_1M_1 با S_2 را A_2، و دومین نقطهٔ برخورد A_2M_2 با S_3 را A_3، ....، دومین نقطهٔ برخورد $A_{n-1}M_{n-1}$ با S_n را A_n و بالاخره دومین نقطهٔ برخورد A_nM_n با S_1 را A_{n+1} نام

می‌گذاریم. فرض می‌کنیم r_1، r_2، ....، r_{n-1} و r_n بترتیب شعاع دایره‌های S_1، S_2، ....، S_{n-1} و S_n باشند. تجانس به مرکز M_1 و نسبت $k_1 = \mp r_2 / r_1$ دایرهٔ S_1 را به S_2 و نقطهٔ A_1 را به A_2 بدل می‌کند (علامت منفی وقتی اختیار می‌شود که S_1و S_2 مماس بیرونی باشند و علامت مثبت مربوط به حالت تماس درونی است)؛ تجانس به مرکز M_2 و نسبت $k_2 = \mp r_3 / r_2$ دایرهٔ S_2 را به S_3 و نقطهٔ A_2 را به A_3 (علامت منفی برای تماس بیرونی و مثبت برای تماس درونی)،... ؛ تجانس به مرکز M_{n-1} و نسبت $k_{n-1} = \mp r_n / r_{n-1}$ دایرهٔ S_{n-1} را به S_n و نقطهٔ A_{n-1} را به A_n و سرانجام، تجانس به مرکز M_n و نسبت $k_n = \mp r_1 / r_n$ دایرهٔ S_n را به S_1 و نقطهٔ A_n را به A_{n+1} بدل می‌کند. از آن‌جا که

$$k_1k_2\ldots k_{n-1}k_n = (\mp\frac{r_2}{r_1})(\mp\frac{r_3}{r_2})\ldots(\mp\frac{r_n}{r_{n-1}})(\mp\frac{r_1}{r_n}) = \mp 1$$

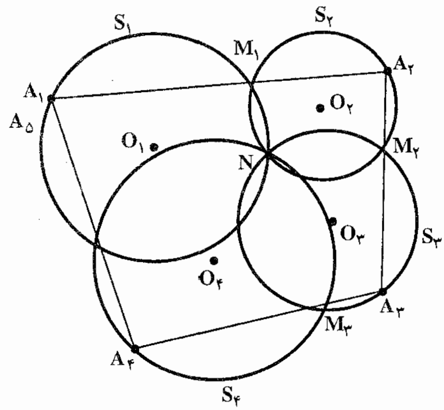
حاصلضرب همهٔ این تجانسها یا یک انتقال موازی است (که می‌تواند به مسافت صفر، یعنی تبدیل همانی باشد) یا یک تجانس با نسبت ۱- یعنی یک نیمدور. اما این را هم می‌دانیم که حاصلضرب این تجانسها دایرهٔ S_1 را به خودش بدل می‌کند و بنابراین حاصلضرب این تبدیلها یا باید تبدیل همانی باشد یا یک نیمدور حول مرکز S_1. حالت اوّل زمانی پیش می‌آید که $k_1k_2\ldots k_n = 1$، و این مربوط به وقتی است که تعداد تماسهای بیرونی زوج باشد، بخصوص وقتی همهٔ تماسها بیرونی باشند و تعداد کل دایره‌ها زوج باشد. حالت دوم وقتی پیش می‌آید که تعداد تماسهای بیرونی فرد باشد، بخصوص وقتی همهٔ تماسها بیرونی باشند و تعداد کل دایره‌ها فرد باشد. بدین ترتیب حکمهای (الف)، (ب) و (ج) ثابت می‌شود. روشن است که اگر دوباره همهٔ این تبدیلها را با همان ترتیب انجام دهیم، به تبدیل همانی می‌رسیم، پس اگر A_{2n+1} نقطه‌ای از S_1 باشد که از A_{n+1} به دست آمده است، به همان نحوی که A_{n+1} از A_1 به‌دست آمده است، آن‌گاه A_{2n+1} همیشه بر A_1 منطبق خواهد شد. حکم (ج) هم بدین ترتیب ثابت می‌شود.

۵۵۱. الف. A_2 از A_1 بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز N، نسبت $k_1 = r_2 / r_1$ و زاویهٔ دوران $O_1\hat{N}O_2$ به‌دست می‌آید؛ A_3 از A_2 بر اثر یک تجانس مارپیچی به همان مرکز و نسبت $k_2 = r_3 / r_2$ و زاویهٔ دوران $O_2\hat{N}O_3$ به‌دست می‌آید؛ A_4 از A_3 بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز N، نسبت $k_3 = r_1 / r_3$ و زاویهٔ دوران $O_3\hat{N}O_1$ به دست می‌آید؛ در این‌جا O_1، O_2 و O_3 مرکزهای دایره‌های S_1، S_2 و S_3، و r_1، r_2

و $r_۳$ شعاعهای آنها هستند. حاصلضرب این سه تجانس مارپیچی یک انتقال است، زیرا:

$$k_۱k_۲k_۳ = \frac{r_۲r_۳r_۱}{r_۱r_۲r_۳} = ۱ \quad \text{و}$$

$$O_۱\hat{N}O_۲ + O_۲\hat{N}O_۳ + O_۳\hat{N}O_۱ = ۳۶۰^\circ$$



بعلاوه، چون این انتقال هر نقطهٔ $A_۱$ از دایرهٔ $S_۱$ را به یک نقطهٔ $A_۴$ از همان دایره بدل می‌کند، یعنی $S_۱$ را به خودش بدل می‌کند، باید تبدیل همانی باشد، پس $A_۴$ از $A_۱$ بر اثر تبدیل همانی به‌دست می‌آید، یعنی $A_۴ = A_۱$. روشن است که نتیجهٔ این مسأله را می‌توان برای تعداد دلخواهی از دایره‌ها که در یک نقطهٔ مشترک متقاطعند، تعمیم داد. مثلاً در شکل چهار دایره نشان داده شده که در یک نقطهٔ مشترک متقاطعند. نقطهٔ $A_۵$ از نقطهٔ $A_۱$ بر اثر چهار تجانس مارپیچی به‌دست می‌آید، اما این حاصلضرب یک تبدیل همانی است و بنابراین $A_۵ = A_۱$.

ب. فرض می‌کنیم O_i معرف مرکز دایرهٔ S_i باشد و r_i معرف شعاع آن، که در آن اندیس i، می‌تواند هر یک از سه مقدار ۱، ۲ و ۳ را اختیار کند. نقطهٔ $A_۲$ از $A_۱$ بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز $N_۱$، نسبت $k_۱ = r_۲ / r_۱$ و زاویهٔ دوران $O_۱\hat{N}_۱O_۲$ به‌دست می‌آید. به همین ترتیب، نقطه‌های $A_۳$ از $A_۲$، $A_۴$ از $A_۳$، $A_۵$ از $A_۴$، $A_۶$ از $A_۵$ و $A_۷$ از $A_۶$ بر اثر یک تجانس مارپیچی به مرکز $N_۲$، نسبت $k_۲ = r_۳/r_۲$، زاویهٔ دوران $O_۲\hat{N}O_۳$؛ به مرکز $N_۳$، نسبت $k_۳ = r_۱/r_۳$ زاویهٔ دوران $O_۳\hat{N}_۳O_۱$؛

به مرکز M_1، نسبت $k_4 = r_2/r_1\ (= k_1)$، و زاویهٔ دوران $O_1\hat{M}_1O_2$ ؛ به مرکز M_2، نسبت $k_5 = r_3/r_2\ (= k_2)$، زاویهٔ دوران $O_2\hat{M}_2O_3$ ؛ به مرکز M_3، نسبت، $k_6 = r_1/r_3\ (= k_3)$ زاویهٔ دوران $O_3\hat{M}_3O_1$ به‌دست می‌آیند، پس A_7 از A_1 بر اثر شش تجانس مارپیچی متوالی به‌دست می‌آید. حاصلضرب سه تای اوّل اینها یک دوران معمولی است، زیرا $k_1k_2k_3 = \frac{r_2}{r_1}.\frac{r_3}{r_2}.\frac{r_1}{r_3} = 1$. این دوران نقطهٔ دلخواه A_1 از دایرهٔ S_1 را به نقطهٔ A_4 از همان دایره بدل می‌کند، یعنی S_1 را به خودش بدل می‌کند، پس حاصلضرب سه تجانس مارپیچی اوّل دورانی است حول O_1، به زاویهٔ $\alpha = O_1\hat{N}_1O_2 + O_2\hat{N}_2O_3 + O_3\hat{N}_3O_1$ به همین ترتیب، حاصلضرب سه تجانس مارپیچی آخر نیز دورانی است حول O_1 به زاویهٔ $\beta = O_1\hat{M}_1O_2 + O_2\hat{M}_2O_3 + O_3\hat{M}_3O_1$ حاصلضرب شش تجانس مارپیچی اوّلیه همان حاصلضرب این دو دوران است حول O_1، بنابراین خود نیز دورانی است حول O_1 به زاویهٔ $\alpha + \beta$. اکنون نشان می‌دهیم که $\alpha + \beta = 0$. در واقع

$$O_1\hat{N}_1O_2 = -O_1\hat{M}_1O_2\ ,\ \ O_2\hat{N}_2O_3 = -O_2\hat{M}_2O_3\ ,\ \ O_3\hat{N}_3O_1 = -O_3\hat{M}_3O_1$$

و بنابراین $\alpha = -\beta$. بنابراین حاصلضرب شش تجانس مارپیچی بالا، دورانی حول O_1 به زاویهٔ صفر، یعنی تبدیل همانی است. چون این تبدیل A_1 را به A_7 بدل می‌کنیم، پس نشان داده‌ایم که $A_1 = A_7$. نتیجهٔ این مسأله را می‌توان برای حالت مربوط به تعداد دلخواهی از دایره‌های دوبه‌دو متقاطع تعمیم داد.