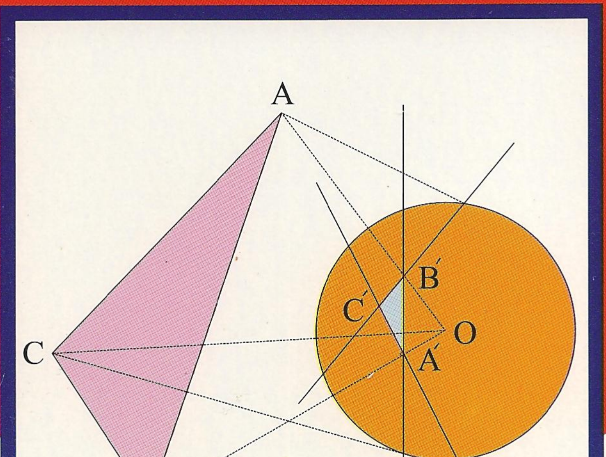
دایرة المعارف هندسه

۹

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

(قطب و قطبی، انعکاس، تبدیلهای آفین و تصویری)



مؤلّف: محمد هاشم رستمی

دایرةالمعارف هندسه

«جلد نهم»

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

(قطب و قطبی، انعکاس، تبدیلهای آفین و تصویری)

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ -
دایرةالمعارف هندسه/ مؤلف محمدهاشم رستمی.- تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸-
ج.: مصور، جدول.
ISBN 964-353-341-7 (ج. ۹).
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
ویرایش قبلی این کتاب تحت عنوان دایرةالمعارف مسائل هندسه منتشر شده است.
کتابنامه.
مندرجات: ج.۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه... . ج. ۹. تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا (قطب و قطبی، انعکاس تبدیلهای آفین و تصویری).
۱. هندسه - مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف مسائل هندسه.
QA ۵۰۱/۵/ ر ۵ د ۲ ۵۱۶/۰۰۷۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه
(جلد نهم)
تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

مؤلف: محمدهاشم رستمی
یونیفرم جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: تابستان ۱۳۸۰
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۷ - ۳۴۱ - ۳۵۳ - ۹۶۴
ISBN-964-353-341-7

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود چهل سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه.
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، ...).
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی).
۶. هندسهٔ تحلیلی.
۷. هندسهٔ فضایی.
۸. هندسه‌های نااقلیدسی.

...

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد ؛ به عنوان مثال رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد

به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...) ؛ و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعی، شش ضلعی، ...) ؛

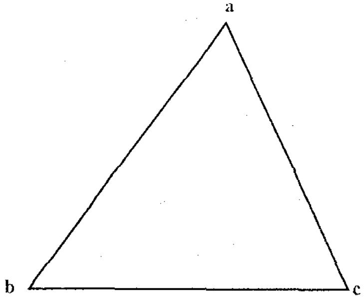
برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه « در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره‌خط AB، به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است ؛ به عنوان مثال گفته شده : «در مثلث abc، ضلعهای ab، bc، ac و ...».



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است؛ به عنوان مثال، همه جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B، C و ...؛ و پاره‌خط AB به صورت AB، و اندازهٔ زاویهٔ A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف هندسه، قسمت دیگری از تبدیلهای هندسی است که دارای سه بخش است:

بخش ۱. قطب و قطبی

بخش ۲. انعکاس

بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

هر یک از بخشهای بالا، شامل چند زیربخش است؛ به عنوان مثال، بخش ۱. قطب و قطبی، دارای ۶ زیربخش است:

۱.۱.تعریف و قضیه

۱.۲. قطب و قطبی در: نقطه،خط،زاویه

۱.۳. قطب و قطبی در مثلث

۱.۴. قطب و قطبی در چند ضلعی

۱.۵. قطب و قطبی در دایره

۱.۶. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکلهای دیگر

زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال، زیربخش ۱.۳. قطب و قطبی در مثلث، شامل زیربخشهای زیر است:

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴. زاویه

۱.۳.۵. پاره‌خط

۱.۳.۶. رابطه‌های متری

۱.۳.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۱.۳.۸. رسم شکلها با استفاده از قطب و قطبی

۱.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۳.۱۰.مسأله‌های ترکیبی

بیشتر زیربخشهای بالا نیز، زیربخشهای جدیدی دارند، و در هر یک از این زیربخشها،

مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

تبدیلهای هندسی، دنیایی از شگفتیها و زیباییها، در ارائه راه حلهای بدیع و جالب، برای بسیاری از قضیه‌ها و مسأله‌های هندسه است.

امید است این مجموعه مورد استفاده دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است، لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرها و پیشنهادات اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها، و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

بخش ۱. قطب و قطبی
بخش ۲. انعکاس
بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

بخش ۱

• قطب و قطبی

۶.۱. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکلهای دیگر

۱.۶.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۲.۶.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، همصفحه،...

۱.۲.۶.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۳.۶.۱. خطها یا صفحه‌های: همرس، موازی، همصفحه،...

۱.۳.۶.۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازهٔ زاویه

۵.۶.۱. پاره‌خط

۱.۵.۶.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۶.۶.۱. رابطه‌های متری

۷.۶.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۸.۶.۱. رسم شکلها

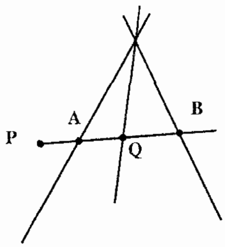
۹.۶.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۶.۱. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۱. قطب و قطبی

۱.۱. تعریف و قضیه

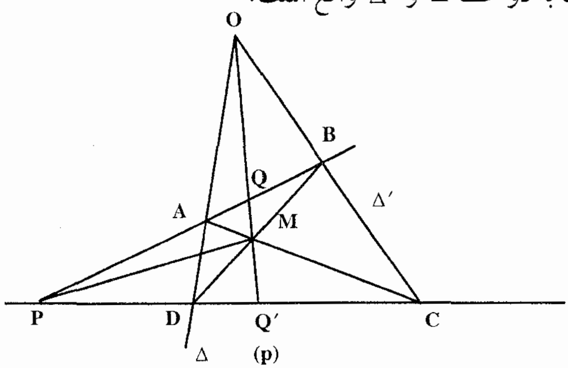
الف. قطب و قطبی نسبت به دو خط متقاطع



تعریف. قطبی نقطه‌ای مانند P (شکل) نسبت به دو خط Δ و D، عبارت است از مکان هندسی مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به نقطه‌های برخورد Δ و D با خط غیر مشخصی که بر P می‌گذرد. P را قطب این مکان می‌نامند.

۱. **قضیه.** قطبی هر نقطه نسبت به دو خط متقاطع D و Δ خط راستی است که بر O، نقطهٔ برخورد آن دو خط، می‌گذرد.

۲. **قضیه.** هرگاه از نقطه‌ای مانند P (شکل) دو خط رسم کنیم تا دو خط دادهٔ شدهٔ Δ و ′Δ را در چهار نقطهٔ A، B، C و D قطع کنند، نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD، بر قطبی p نسبت به دو خط Δ و ′Δ واقع است.



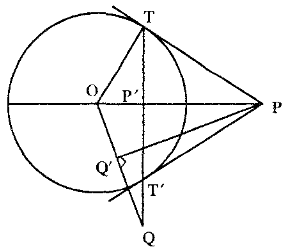
ب. قطب و قطبی نسبت به دایره

تعریف. قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ O، مکان هندسی مزدوجهای توافقی P است نسبت به نقطه‌های برخورد دایره با هر خط غیر مشخصی که بر P بگذرد. p را قطب مکان ذکر شده می‌نامند.

۳. **قضیه.** قطبی هر نقطه نسبت به دایره، خطی است مستقیم، عمود بر قطری که از آن نقطه می‌گذرد.

۴. الف. خط قطبی یک نقطهٔ داده شده نسبت به یک دایره، بر قطری از دایره که از آن نقطهٔ داده شده می‌گذرد، در نقطه‌ای عمود است که این نقطهٔ برخورد، وارون آن نقطه نسبت به دایره است.

ب. قطب یک خط داده شده نسبت به یک دایره، وارون پای عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم می‌شود.



نکتهٔ ۱. خط قطبی یک نقطه از دایره، خطی است که در آن نقطه بر دایره مماس می‌شود. قطب خط مماس بر دایره، نقطهٔ تماس خط با دایره است؛ زیرا وارون یک نقطه واقع بر دایره بر خود آن منطبق است.

نکتهٔ ۲. هر نقطه‌ای از صفحهٔ یک دایره نسبت به آن دایره، یک خط قطبی دارد، به جز مرکز دایره. هر خطی واقع در صفحهٔ یک دایره، نسبت به آن دایره یک قطب دارد، به‌جز خطهایی که از مرکز دایره می‌گذرند.

نکتهٔ ۳. اگر قطب داخل دایره باشد، خط قطبی دایره را قطع نمی‌کند.
اگر قطب خارج دایره باشد، خط قطبی آن خطی است که از نقطه‌های تماس مماسهایی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شوند، می‌گذرد.

۵. **قضیه.** اگر خط قطبی نقطهٔ P از نقطهٔ Q بگذرد، خط قطبی نقطهٔ Q هم از نقطهٔ P خواهد گذشت.

۶. **تعریف.** دو نقطه را که خط قطبی یکی از دیگری بگذرد، نقطه‌های مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر نقطهٔ داده شده، بینهایت نقطهٔ مزدوج دارد، که عبارتند از همهٔ نقطه‌های واقع بر خط قطبی آن نقطه.

اگر دو نقطهٔ مزدوج با مرکز دایره همخط باشند، آن‌گاه نسبت به دایره، وارون یکدیگرند.

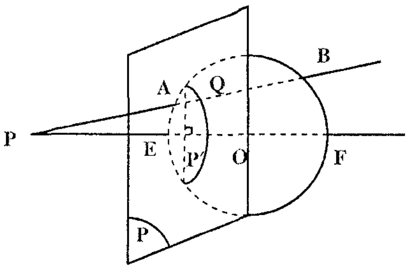
قضیه. اگر قطب خط p روی خط q باشد، آن‌گاه قطب خط q نیز روی خط p قرار دارد.

تعریف. دو خط را که قطب هر یک روی دیگری قرار دارد، خطهای مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر خط داده شده، بینهایت خط مزدوج دارد، که عبارتند از همهٔ خطهایی که از قطب آن خط داده شده می‌گذرند.

۷. **قضیه.** قطبهای تمام خطهایی که بر یک نقطه می‌گذرند، بر قطبی این نقطه قرار دارند.

۸. **قضیهٔ عکس.** قطبیهای تمام نقطه‌هایی که روی یک خط باشند، بر قطب این خط می‌گذرند، یعنی همرسند.

۹. **قضیه.** اگر دو خط مزدوج، یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند، این دو خط نسبت به دو مماسی که از نقطهٔ برخورد آنها بر دایره رسم می‌شوند، مزدوج همسازند.



پ. قطبی یک نقطه نسبت به یک کره. اگر از نقطهٔ P قاطع PAB را نسبت به یک کره رسم کنیم، مکان هندسی نقطهٔ Q، مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به دو نقطهٔ A و B، صفحه‌ای است عمودبر قطری که از نقطهٔ P می‌گذرد. این صفحه را، قطبی نقطهٔ P نسبت به کره و P را قطب این صفحه می‌گویند.

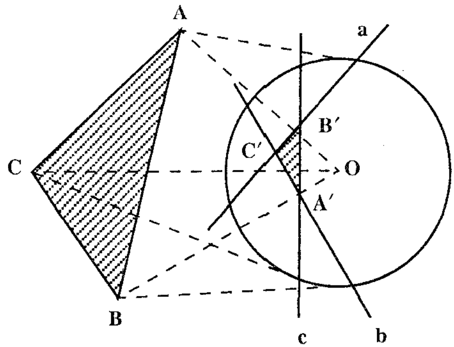
اگر R شعاع کره باشد، داریم $\overline{OP}.\overline{OP'} = R^2$ ؛ که OP و OP′ فاصلهٔ مرکز کره، از قطب و صفحهٔ قطبی است.

اگر نقطه‌ای در صفحهٔ P واقع باشد، صفحهٔ قطبی آن، از قطب صفحهٔ P می‌گذرد. اگر صفحه‌ای از نقطهٔ A بگذرد، قطب آن، در صفحهٔ قطبی نقطهٔ A قرار می‌گیرد. دو نقطه را نسبت به یک کره مزدوج گویند، وقتی که یکی از آنها در صفحهٔ قطبی دیگری واقع باشد. دو صفحه را نسبت به یک کره مزدوج گویند، وقتی که قطب یکی از آنها در صفحهٔ دیگر واقع باشد. قطبهای صفحه‌های گذرنده بر خط D، روی یک خط D′ قرار دارند. بعکس قطبهای صفحه‌های گذرنده بر خط D′ روی خط D واقعند. دو خط D و D′ را نسبت به کره مزدوج گویند. دو خط مزدوج بر یک قطر کره عمود، و آن را به توافق تقسیم می‌کنند.

قطبی معکوس

تبدیل به وسیلهٔ قطب و قطبی

هرگاه یک چند ضلعی... ABC را در نظر گرفته، (a)، (b)، (c) و... قطبیهای رأسهای آن را نسبت به دایره‌ای به‌دست آوریم (شکل)، چند ضلعی دیگری به‌دست می‌آید که ضلعهای متوالی آن، (a)، (b)، (c) و... است ؛ واضح است که تعداد رأسها و ضلعهای این دو چندضلعی با هم مساوی است ؛ می‌گوییم شکل اوّل را به وسیلهٔ قطب و قطبی به شکل دوم تبدیل کرده‌ایم. چون (چنان که بعداً ثابت خواهیم کرد) در این دو چند ضلعی، هر رأس یکی، قطب یک ضلع از



دیگری، و هر ضلع یکی، قطبی یک رأس از دیگری است، دو شکل را قطبی متقابل یا قطبی معکوس می‌خوانند.

۱۰. **قضیه.** در دو شکل قطبی متقابل، هر رأس یکی، قطب یک ضلع دیگری، و هر ضلع یکی، قطبی یک رأس دیگری است.

۱۱. **قضیه.** اگر دو دایره متعامد باشند، دو نقطهٔ انتهایی هر قطری از یک دایره نسبت به دایرهٔ دیگر مزدوجند و بعکس، اگر دو نقطهٔ انتهایی قطری از یک دایره نسبت به دایرهٔ دیگر مزدوج باشند، آن دو دایره مزدوجند.

تعریف. یک مثلث را نسبت به یک دایره، خود مزدوج یا مزدوج، یا خود قطبی، یا قطبی می‌نامند، اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.

بسادگی می‌توان دید که با مفروض بودن دایرهٔ (O) بینهایت مثلث از این نوع را می‌توان رسم کرد.

فرض کنید P نقطهٔ دلخواهی از صفحه، و Q نقطهٔ دلخواهی روی خط p، یعنی خط قطبی P نسبت به (O) باشد ؛ q، یعنی خط قطبی Q نیز از P می‌گذرد و p را در رأس سوم مثلث خواسته شدهٔ PQR، یعنی R، قطع می‌کند. دو خط RQ و RP بترتیب خطهای قطبی P و Q هستند، و قطب PQ بر R منطبق است.

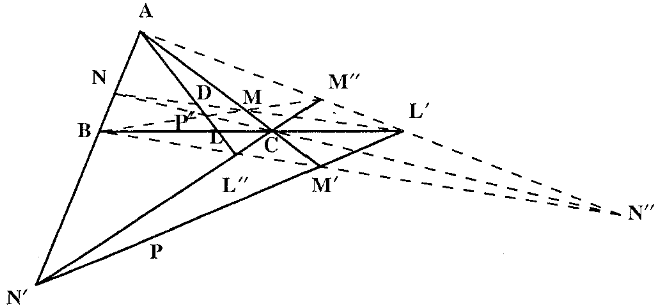
۱۲. **قضیه.** از سه رأس یک مثلث قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر، خارج دایره قرار دارند.

۱۳. **قضیه.** اگر مثلثی نسبت به یک دایره قطبی باشد، مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث منطبق است.

۱۴. **قضیه.** برای هر مثلث منفرجه‌الزاویه، یک دایرهٔ مزدوج وجود دارد که نسبت به این دایره، دایره‌های محیطی و نه نقطهٔ مثلث مزبور منعکس یکدیگرند.

به عبارت دیگر، دایرهٔ مزدوج مثلث یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های محیطی و نه نقطهٔ مثلث می‌باشد. نتیجه می‌شود که این سه دایره به یک دسته دایره تعلق دارند (که مرکزهای آنها بر خط اویلر واقع است)؛ و بنابراین در مثلث منفرجه‌الزاویه، دایرهٔ نه نقطه نه تنها بر نه نقطه بلکه بر یازده نقطهٔ مهم می‌گذرد و دو نقطهٔ دیگر آن عبارتند از نقطه‌های برخورد دایرهٔ محیطی با دایرهٔ مزدوج مثلث.

۱۵. **قطب و خط قطبی نسبت به یک مثلث. رابطه‌های همساز.** الف. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC باشد (شکل) و L، M و N نقطه‌های برخورد خطهای AP، BP و CP با ضلعهای BC، CA و AB؛ و L'، M' و N' مزدوجهای همساز L، M و N نسبت به جفت رأسهای متناظر مثلث ABC باشند.



قضیه. نقطه‌های L'، M' و N' همخطند.

ب. فرض کنید p خطی در صفحهٔ مثلث ABC باشد که امتداد ضلعهای BC، CA و AB را در نقطه‌های L'، M' و N' قطع کند و L، M و N مزدوجهای همساز L'، M' و N' نسبت به جفت رأسهای متناظر ABC باشند.

قضیه. خطهای AL، BM و CN همرسند.

۱۶. **چند تعریف.** خط $p = L'M'N'$ را قطبی سه خطی یا خط همساز نقطهٔ P برای مثلث ABC و P را قطب سه خطی یا قطب همساز خط p برای مثلث ABC می‌نامند.

قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث محور منظری آن مثلث، و مثلث سوایی نقطهٔ داده شده برای مثلث داده شده است، و بعکس.

۱۷. **تعریف.** رأسهای $L''=(BM', CN')$، $M''=(CN', AL')$ و $N''=(AL', BM')$ از مثلثی را که از خطهای AL'، BM' و CN' تشکیل می‌شود، وابسته‌های همساز P برای مثلث ABC می‌نامند.

قضیه. وابسته‌های همساز نقطهٔ P روی خطهای AP، BP و CP قرار دارند، و بترتیب با نقطه‌های A و L، B و M، و C و N به‌طور همساز از نقطهٔ P تقسیم می‌شوند.

۱۸. **قضیه.** نقطهٔ P و سه وابستهٔ همساز آن نسبت به یک مثلث ABC چهار نقطه هستند، که هر سه‌تایی از آنها مثلثی محیط بر ABC و منظری نسبت به آن را تشکیل می‌دهند، و نقطهٔ چهارم مرکز منظری است.
محورهای منظری خطهای $L'MN$، $LM'N$ و LMN' هستند.

۱۹. **تعریف.** هر خط مماس بر دایرهٔ محیطی در یک رأس مثلث ضلع روبه‌روی آن رأس را در یک نقطه قطع می‌کند. سه نقطه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آیند. روی یک خط قرار دارند که محور لوموان مثلث خوانده می‌شود.
قضیه. نقطهٔ لوموان یک مثلث قطب محور لوموان مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث است.

۲۰. **قضیه.** نقطهٔ لوموان یک مثلث، قطب سه خطی محور لوموان برای آن مثلث است.

۲۱. **قضیه.** نقطهٔ لوموان یک مثلث، نقطهٔ برخورد خطهایی است که وسط هر ضلع مثلث را به وسط ارتفاع وارد بر آن ضلع وصل می‌کنند.

۲۲. **قضیه.** خطهایی که رأسهای یک مثلث را به رأسهای متناظر دایرهٔ اوّل بروکار وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطهٔ همنوای نقطهٔ لوموان نسبت به مثلث، قطع می‌کنند.

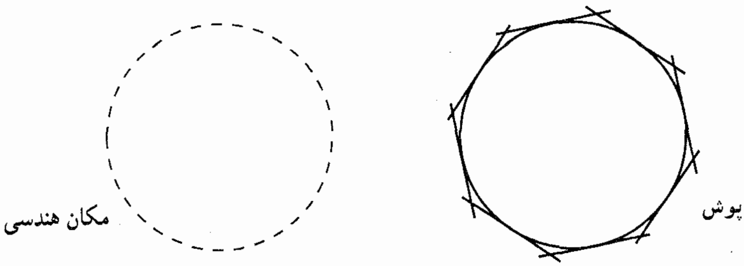
۲۳. قاطعی که دو دایرهٔ متعامد بر روی آن دو وتر همساز جدا می‌کنند، از مرکز حداقل یکی از دایره‌ها می‌گذرد.

اصل دوگانی یا دوگانگی

با توجه به تعریف قطبی معکوس، اصل دوگانی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

به هر شکل مرکب از خطها و نقطه‌ها که در آن بعضی از نقطه‌ها بر بعضی از خطها واقعند، متقابلاً شکلی مرکب از نقطه‌ها و خطها نظیر است که در آن بعضی از خطها بر بعضی از نقطه‌ها می‌گذرند. به‌عنوان مثال، به یک چهار گوشهٔ ABCD (که شامل چهار نقطه است که هیچ یک از سه‌تای آنها بر یک خط واقع نیستند و شامل شش خط می‌باشد که بترتیب بر جفتهای نقطه‌های D، A و D، B و D، C و C، B و A، C و B، A می‌گذرند)، متقابلاً یک چهارخطی abcd نظیر می‌شود (که شامل چهار خط است بدون آن که هیچ سه‌تای آنها همرس باشند و شامل شش نقطه است که بترتیب محل برخورد جفتهای خطهای d، a و d، b و d، c و c، b و c، a و b، a می‌باشند). دایره را می‌توان مکان هندسی نقطه‌ها یا این که پوش خطها (مماسهای

بر آن) درنظر گرفت، (شکل). هر مماس بر دایره وضع حدی قاطعی است که دو نقطهٔ تقاطع آن با دایره بر هم منطبق گردند. متقابلاً هر نقطه از دایره را می‌توان وضع حدی نقطهٔ تقاطع دو مماس بر آن دانست که این دو مماس بر هم منطبق گردند.



بنابراین، تبدیل قطبی معکوس، مکان هندسی و پوش را نظیر هم قرار می‌دهد. هرگاه دایرهٔ ω را مکان هندسی نقطه‌ها بگیریم، مبدل آن در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω، همان دایره است ؛ اما به‌عنوان پوش خطها و بعکس. همچنین اگر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r داشته باشیم، مبدل قطبی معکوس آن نسبت به دایرهٔ ω به مرکز O و به شعاع k، دایره‌ای خواهد بود به مرکز O و شعاع $\frac{k^2}{r}$.

فرهنگچهٔ زیر مفاهیم متناظر را در تبدیل قطبی معکوس نشان می‌دهد و در به کار بردن آن در قضیه‌ها و ترسیمها، کافی است که هر مفهوم از یک ستون را با مفهوم مقابل آن از ستون دیگر جانشین ساخت.

نقطه	خط
واقع است بر	می‌گذرد بر
خط واصل بین دو نقطه	نقطهٔ تقاطع دو خط
همرس	واقع بر یک استقامت
چهارگوشه	چهار خطی
قطب	قطبی
مکان هندسی	پوش
مماس	نقطهٔ تماس

۲۴. قضیه. قطب هر خط که در A و B با دایرهٔ ω برخورد کند (بدون آن‌که بر مرکز دایره بگذرد)، نقطهٔ برخورد مماسهایی است که در A و B بر دایره رسم می‌شوند. قطبی هر نقطهٔ واقع در خارج دایره، عبارت است از خط واصل بین نقطه‌های تماس دو مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شوند. قطب هر خط (که بر مرکز دایره نگذرد) نقطهٔ تلاقی قطبیهای دو نقطه از آن می‌باشد. قطبی هر نقطه (غیر از O) خط واصل بین قطبهای دو قاطع است که از آن نقطه بر دایره رسم شوند.

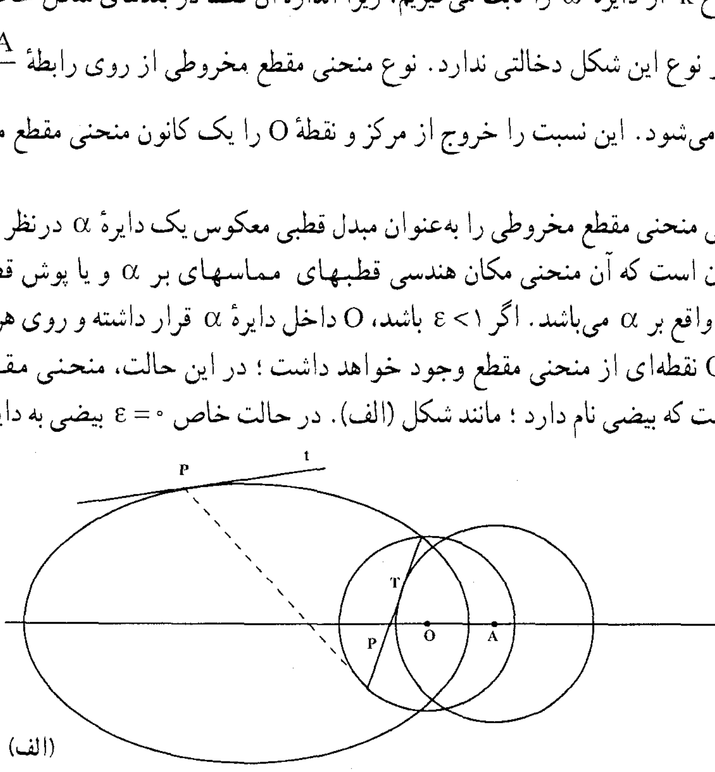
مقطعهای مخروطی

برای بررسی منحنیهای مقطعهای مخروطی روشهای مختلف وجود دارد.

یکی از روشهایی که به‌کار می‌رود این است که هر یک از منحنیهای مزبور را به‌عنوان مبدل قطبی معکوس دایره درنظر بگیریم. به این ترتیب که نسبت به دایرهٔ ω به مرکز O و به شعاع k، مبدل قطبی معکوس دایرهٔ α به مرکز A و به شعاع r را بررسی کنیم.

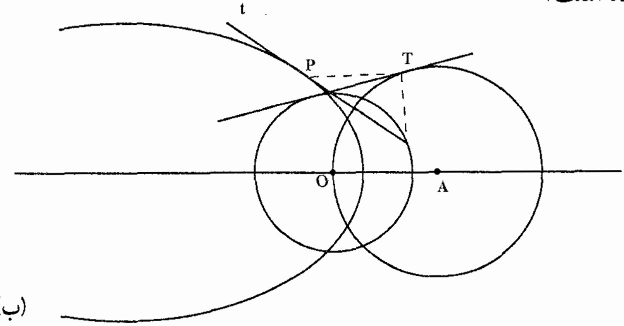
شعاع k از دایرهٔ ω را ثابت می‌گیریم، زیرا اندازهٔ آن فقط در بعدهای شکل حاصل تأثیر دارد و در نوع این شکل دخالتی ندارد. نوع منحنی مقطع مخروطی از روی رابطهٔ $\varepsilon = \frac{OA}{r}$ مشخص می‌شود. این نسبت را خروج از مرکز و نقطهٔ O را یک کانون منحنی مقطع مخروطی می‌نامند.

وقتی منحنی مقطع مخروطی را به‌عنوان مبدل قطبی معکوس یک دایرهٔ α درنظر می‌گیریم به معنی آن است که آن منحنی مکان هندسی قطبهای مماسهای بر α و یا پوش قطبیهای نقطه‌های واقع بر α می‌باشد. اگر $\varepsilon < 1$ باشد، O داخل دایرهٔ α قرار داشته و روی هر نیمخط ابتدا از O نقطه‌ای از منحنی مقطع وجود خواهد داشت؛ در این حالت، منحنی مقطع یک مرغانه است که بیضی نام دارد؛ مانند شکل (الف). در حالت خاص $\varepsilon = 0$ بیضی به دایره تبدیل می‌شود.



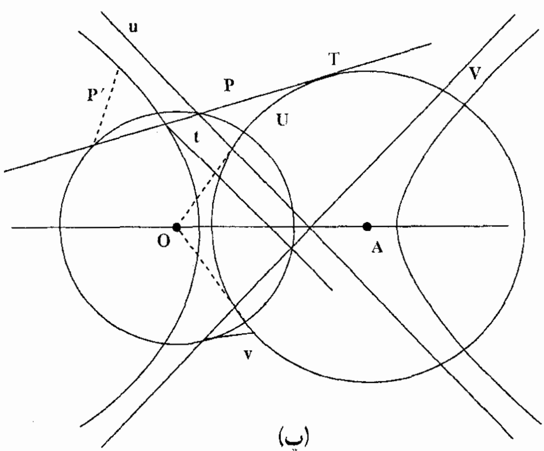
(الف)

با ترقی کردن مقدار ε منحنی به‌تدریج از شکل دایره خارج شده و کشیده‌تر می‌شود. وقتی $\varepsilon = ۱$ باشد، داریم $OA = r$ و نقطهٔ O بر دایرهٔ α قرار دارد؛ در این حال همهٔ نقطه‌های واقع بر α به استثنای نقطهٔ O دارای قطبی می‌باشند و تنها نقطهٔ O قطبی ندارد. همچنین همهٔ مماسهای بر α دارای قطب می‌باشند مگر مماس در O که قطب ندارد. در این حالت منحنی حاصل در امتداد OA دارای نقطهٔ بینهایت دور می‌باشد. این منحنی سهمی نام دارد و در شکل (ب) نموده شده است.



(ب)

در حالت $\varepsilon > ۱$ نقطهٔ O در خارج دایرهٔ α واقع است که از آن دو مماس می‌توان بر دایرهٔ α رسم کرد. اگر نقطه‌های تماس این مماسها را با دایره با U و V نشان دهیم، مماسهای OU و OV قطب ندارند، در صورتی که نقطه‌های U و V دارای قطبی می باشند. منحنی حاصل هذلولی نام دارد که u و v قطبی‌های نقطه‌های U و V مجانبهای آن می‌باشند. این مجانبها بر منحنی مماس می‌باشند اما نقطه‌های تماس در فاصلهٔ محدود وجود ندارند. مطابق با شکل (پ) هرچه منحنی دورتر شود، به مجانبها نزدیکتر می‌گردد تا در فاصلهٔ بینهایت دور بر آن مماس می‌شود.



(پ)

می‌دانیم که مشاهدات نجومی کپلر که توسط نیوتن توجیه گردید، معلوم ساخت که مسیر هر یک از سیاره‌ها یک بیضی است که خورشید در یکی از دو کانون آن واقع است. خروج از مرکز مدارهای سیاره‌ها و همچنین ستارگان دنباله‌دار که تاکنون حساب شده، طبق جدول زیر است :

سیاره‌ها		ستارگان دنباله‌دار		
عطارد	۰/۲۰۵۶	انک	Encke	۰/۸۵
زهره	۰/۰۰۶۸	بیلا	Biela	۰/۷۶
زمین	۰/۰۱۶۷	هلم	Holmes	۰/۴۱
مریخ	۰/۰۹۳۴	بروکس	Brooks	۰/۴۷
مشتری	۰/۰۴۸۴	هالی	Halley	۰/۹۶۷
زحل	۰/۰۵۵۷	دناتی	Donati	۰/۹۹۶۳
اورانوس	۰/۰۴۷۲	کگژیا	Coggia	۰/۹۹۸۸
نپتون	۰/۰۰۸۶	دانیل	Daniel	۱/۰۰۰
پلوتن	۰/۲۴۸۱	مورهوز	Morehouse	۱/۰۰۰

کانونها و خطهای هادی

منحنی مقطع مخروطی را، شکل قطبی معکوس دایرهٔ α به مرکز A نسبت به دایرهٔ ω به مرکز O در نظر می‌گیریم ؛ قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ ω را خط هادی نظیر کانون O منحنی و پاره‌خط واصل بین O و نقطهٔ دلخواه P از منحنی را شعاع حامل نقطهٔ P می‌نامیم. اکنون یکی از ویژگیهای بسیار مهم و جالب مقطع مخروطی را به‌صورت قضیهٔ زیر بیان می‌کنیم که نخستین‌بار در قرن چهارم میلادی توسط پاپوس اسکندرانی، و شاید هم ششصد سال زودتر توسط اقلیدس اثبات شده است.

۲۵. قضیه. منحنی مقطع مخروطی با خروج از مرکز ε داده شده است. اگر O یک کانون و a خط هادی نظیر این کانون و P نقطهٔ دلخواهی از منحنی باشد، طول OP، شعاع حامل نقطهٔ P، برابر است با حاصلضرب ε در فاصلهٔ نقطهٔ P از خط a.

قضیهٔ عکس. نقطهٔ O و خط a که بر O نمی‌گذرد و مقدار مثبت ε داده شده است، مکان هندسی نقطه‌هایی است که فاصلهٔ آنها از O برابر است با حاصلضرب ε در فاصلهٔ آنها از a، یک مقطع مخروطی است.

صفحهٔ تصویری

در تبدیل قطبی معکوس اگر نقطهٔ O و خطهای گذرنده بر آن را کنار بگذاریم، آن‌گاه به‌طور دقیق می‌توانیم بگوییم که هر نقطه به یک خط و هر خط به یک نقطه تبدیل می‌شود. در مورد انعکاس نیز یک چنین استثنایی وجود داشت که برای آن نقطهٔ بینهایت را پذیرفتیم و صفحهٔ انعکاس را به‌دست آوردیم. برای آن که در تبدیل قطبی معکوس نیز استثناهایی وجود نداشته باشد. خط بینهایت l_∞ منحصر به فرد را می‌پذیریم که قطبی نقطهٔ O باشد و درنتیجه نقطه‌های آن (نقطه‌های بینهایت) قطبهای خطهایی خواهند بود که بر O می‌گذرند. با پذیرفتن این عنصرهای جدید، یعنی خط بینهایت و نقطه‌های بینهایت، می‌توان به‌طور قاطع حکم کرد که هر خط دلخواه a یک قطب A دارد که قطبیهای همهٔ نقطه‌های واقع بر a بر A می‌گذرند. هرگاه a بر O بگذرد، قطبیهای نقطه‌های آن که همه بر a عمودند، یک دسته خطهای متوازی را تشکیل می‌دهند و در عین حال قطب a که نقطهٔ بینهایت است، نقطهٔ مشترک همهٔ این دسته خطها می‌باشد. **صفحهٔ شامل خط بینهایت را صفحهٔ تصویری می‌نامیم** و در این صفحه بیان زیر بدون استثنا صحیح می باشد :

هر دو خط دلخواه و متمایز a و b یک نقطهٔ مشترک دارند.

۲۶. قضیه. قطب هر خط که در A و B با دایرهٔ ω برخورد کند (بدون آن که از مرکز دایره بگذرد) نقطهٔ برخورد مماسهایی است که از A و B بر دایره مماس می‌شوند. قطبی هر نقطه واقع در خارج دایره عبارت است از خط واصل بین نقطه‌های تماس دو مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شود. قطب هر خط (که بر مرکز دایره نگذرد) نقطهٔ تلاقی قطبهای دو نقطه از آن می‌باشد. قطبی هر نقطه (غیر از O) خط واصل بین قطبهای دو قاطع است که از آن نقطه بر دایره رسم شوند.

۲۷. قضیه. منحنی مقطع مخروطی و نقطهٔ P غیرواقع بر آن داده شده است. هرگاه از P دو قاطع AD و BE رسم شود و L نقطهٔ برخورد AB و DE به M نقطهٔ برخورد AE و BD وصل شود، خط حاصل قطبی نقطهٔ P نسبت به منحنی مزبور می‌باشد.

۲۸. در هر منحنی مقطع مخروطی، خط هادی نظیر یک کانون، قطبی آن کانون نسبت به منحنی می‌باشد.

مقطعهای مخروطی مرکزدار

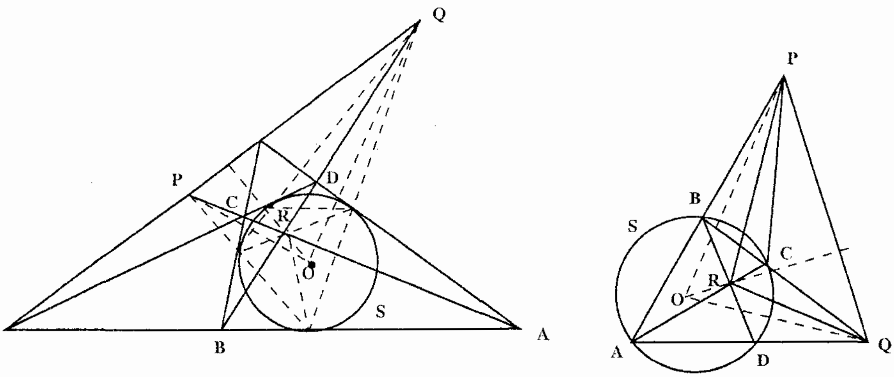
در ترسیم منحنیهای بیضی و هذلولی و ملاحظهٔ وضع عنصرهای هرکدام از آنها نسبت به هم، به‌طور مثال وضع متشابه دو رأس کانونی بیضی یا وضع متشابه دو شاخهٔ هذلولی، چنین

به‌نظر می‌آید که این منحنیها دارای تقارن می‌باشند. از این رو طبیعی خواهد بود که به بررسی ویژگیهای تقارنی در این منحنیها بپردازیم. بحث زیر وجود تقارن کامل را در این منحنیها آشکار می‌سازد.

۲۹. قضیه. مقطع مخروطی مرکزدار نسبت به مرکزش متقارن است، یعنی با تبدیل نیمدور حول مرکزش به خودش تبدیل می‌شود.

اصل دوگانی با بیان دیگر

اگر یک چهارضلعی را در یک دایرهٔ S محاط کنیم، مثلثی که رأسهای آن نقطه‌های برخورد قطرهای این چهارضلعی و نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی آن هستند، نسبت به S قطبی معکوس خودش است (شکل (الف)). همچنین اگر یک چهارضلعی را بر یک دایرهٔ S محیط کنیم، مثلثی که دو ضلعش بر قطرهای این چهارضلعی و ضلع سومش بر خط واصل بین نقطه‌های تلاقی ضلعهای مقابل آن واقعند، نسبت به S قطبی معکوس خودش می‌باشد (شکل (ب)).



(ب) (الف)

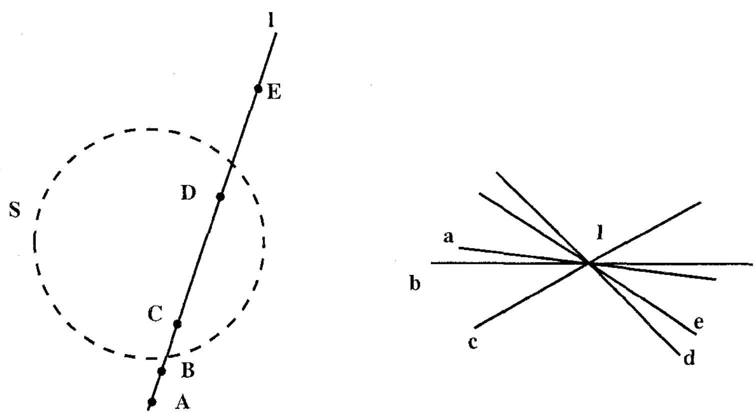
[اگر نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی محیط بر دایرهٔ S در شکل (ب)، رأسهای چهارضلعی محاط در S شکل (الف) گرفته شوند، آن‌گاه ΔPQR در شکل (ب) بر ΔPQR در شکل (الف) منطبق می‌شود؛ اثبات این حکم به عهدهٔ خواننده گذارده می‌شود.] این دو مثلث هر دو منفرجه‌الزاویه می‌باشند و نقطه‌های برخورد ارتفاعهای آنها بر مرکز S منطبق می‌باشد.

مفهوم قطبی نقطه نسبت به دایره به ما اجازه می‌دهد که نوعی تبدیل از صفحه را، که در

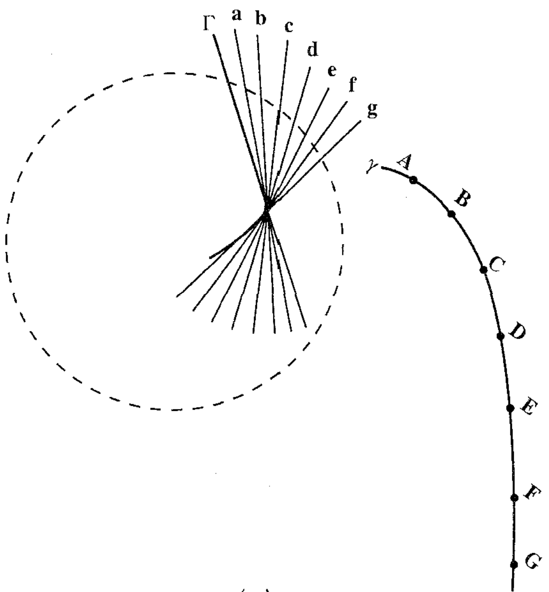
اثبات بسیاری از قضیه‌ها مفید است، تعریف کنیم. فرض می‌کنیم S دایرهٔ ثابتی باشد و F شکل مسطحی که از نقطه‌ها و خطها تشکیل شده است. شکل F' را که هر نقطه‌اش قطب یک خط F و هر خطش قطبی یک نقطهٔ F نسبت به دایرهٔ S است، درنظر می‌گیریم. تبدیلی که شکل F' را با شکل F متناظر می‌سازد قطبی معکوس‌سازی یا تبدیل قطب و قطبی می‌نامیم. بعضی اوقات ما اصطلاح تبدیل قطبی را نیز به‌کار خواهیم برد.

البته قطب و قطبی تبدیلی به معنایی که ما تاکنون به‌کار برده‌ایم یعنی، نگاشتی که نقطه‌ها را به نقطه‌ها بدل کند (تبدیل نقطه‌ای) نیست. بنا بر تعریف، قطب و قطبی نگاشتی است که خطها و نقطه‌ها را با هم عوض می‌کند. از این قرار، با همهٔ تبدیلهایی که تاکنون دیده‌ایم (حرکتها، تشابه‌ها و تصویرها) تفاوت دارد. در آن چه که در زیر می‌آید ما به موارد دیگری از تبدیلها برخواهیم خورد که تبدیلهای نقطه‌ای نیستند.

تعریفی که از قطب و قطبی کردیم، تا آن‌جا که به مسأله‌های زیرین مربوط می‌شود، کاری رضایت‌بخش است. به‌علاوه قطب و قطبی را باید تبدیل صفحه به خودش، یا بهتر بگوییم، تبدیلی در مجموعه‌ای از نقطه‌ها و خطهای صفحه بگیریم که هر نقطه را به یک خط و هر خط را به یک نقطه بدل می‌کند؛ به‌علاوه، نقطه‌هایی که بر یک خط l قرار دارند به خطهایی بدل می‌شوند که از یک نقطهٔ L و نگارهٔ خط l، می‌گذرند (شکل (الف)). در قطب و قطبی، یک منحنی γ، که به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌هایش تلقی می‌شود، به یک منحنی جدید Γ بدل می‌شود که باید پوش مماسهایش انگاشته شود (شکل (ب)).



(الف)



(ب)

این یک مثال مناسب و جالبی است. روشن است که قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S به مرکز O و شعاع ۱، یک دایرهٔ s به مرکز O و به شعاع r را به یک دایرهٔ ′s به شعاع ۱/r بدل می‌کند، که s مجموعهٔ نقطه‌های آن و ′s مجموعهٔ مناسبی از مماسهای آن انگاشته می‌شود، یا بعکس (یک نقطهٔ A به فاصلهٔ r از O به خط a به فاصلهٔ ۱/r از O بدل می‌شود). حال فرض می‌کنیم B مرکز دایرهٔ s (که در این مقام مناسب است آن را با مجموعهٔ مماسهای a یکی بگیریم) بر O منطبق نباشد (مانند قبل، شعاع s برابر r گرفته شده است). اگر b و A بترتیب نگاره‌های B و a بر اثر قطب و قطبی نسبت به s باشند، آن‌گاه داریم:

$$OA / AP = OB / BQ (= OB / r)$$

که AP فاصلهٔ A از b و BQ = r فاصلهٔ B از a است. بنابراین مجموعهٔ خطهای a (یعنی دایرهٔ s) به مجموعهٔ («مکانها») ′s از نقطه‌های A بدل می‌شود، به‌طوری که:

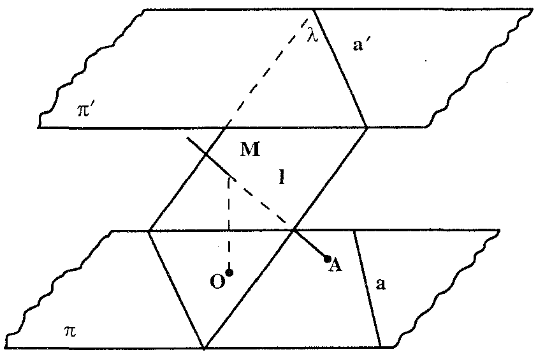
$OA / AP =$ مقدار ثابت $(= OB / r)$

یعنی به مکان نقطه‌های A بدل می‌شود که نسبت فاصله‌هایش از O و b ثابت (و مساوی OB / r) است. اما چنان که می‌دانیم این مکان یک بیضی است (اگر $OB / r < ۱$، یعنی اگر O داخل s باشد)، یک سهمی است (اگر $OB / r = ۱$، یعنی اگر O بر s باشد)، یا هذلولی است (اگر

$OB/r > ۱$ ، یعنی اگر O خارج s باشد). از این‌جا نتیجه می‌شود که در قطب و قطبی، یک دایرهٔ S یا به یک دایره (حالتی که مرکز s بر مرکز دایرهٔ S منطبق است)، یا به یک بیضی، سهمی، یا هذلولی بدل می‌شود. این واقعیت بسیاری از ویژگیهای مقطعهای مخروطی را ایجاب می‌کند.) یادآوری می‌کنیم که تبدیل قطب و قطبی یک صفحه به خودش را می‌توان بدون توسل به قضیهٔ ۱. با استفاده از ترسیم گنجسنجی به شرح زیر، تعریف کرد :

گیریم π و π' دو صفحهٔ موازی باشند و M نقطه‌ای متساوی‌الفاصله از هر دو (شکل (پ)). به هر نقطهٔ A از π (بجز O، پای عمود رسم شده از M)، یک خط a را که به طریق زیر به دست می‌آید، مربوط کنیم :

بر نقطه‌های N و A خط l را می‌گذرانیم ؛ از نقطهٔ M صفحهٔ λ را بر l عمود می‌کنیم، فصل مشترک صفحهٔ λ و π' را a' می‌نامیم. حال π' را بر صفحهٔ π «می‌چکانیم» (یعنی تصویر قائم π' را بر صفحهٔ π به‌دست می‌آوریم)، بدین ترتیب a' را به خط a در صفحهٔ π بدل می‌کنیم.



(پ)

به‌آسانی می‌توان نشان داد که تبدیلی که خط a را با نقطهٔ A متناظر می‌سازد، قطب و قطبی نسبت به دایرهٔ به مرکز O و شعاع OM است. در این‌جا فرصتی نیست که ما از این نتیجه استفاده کنیم و اثبات آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. به آسانی می‌توان همهٔ ویژگیهای قطب و قطبی را از تعریفی که هم اکنون کردیم، استخراج کنیم ؛ توصیه می‌کنیم که خواننده سعی کند خود آن را آزمایش کند.

تبدیل قطب و قطبی اغلب می‌تواند یک مسأله را به مسألهٔ ساده‌تری بدل کند. واقعیت مهمتر این که قطب و قطبی به‌عنوان وسیله‌ای برای به‌دست آوردن نتایجی تازه از نتایج قدیم به‌کار می‌رود. برای روشن ساختن این مطلب، اشاره می‌کنیم که وقتی ما تصویرهای مرکزی یا موازی را برای حل مسأله‌ها در بخشهای پیشین به‌کار بردیم، منظور ما تبدیل یک مسألهٔ مفروض به حالت خاص ساده‌ای از همان مسأله بود (به‌طور مثال، به‌جای یک مثلث دلخواه، یک مثلث متساوی‌الاضلاع گذاشت و یا به‌جای دو خط دلخواه، دو خط موازی). وقتی ما از قطب و قطبی استفاده می‌کنیم، معمولاً به حالت خاصی از مسألهٔ مفروض نمی‌رسیم، زیرا تبدیل قطب و قطبی با گذاردن خط به‌جای نقطه، و نقطه به‌جای خط، یک شکل را به شکل کاملاً متفاوتی بدل می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود که هرگاه تبدیل قطب و قطبی را برای شکلی که به گزاره‌ای مربوط می‌شود، به‌کار بریم، شکلی به‌دست می‌آوریم که به گزارهٔ تازه‌ای مربوط می‌شود. این گزارهٔ تازه ممکن است از گزارهٔ اصلی ساده‌تر باشد و با اثبات آن، گزارهٔ اصلی را نیز ثابت کرده باشیم. اگر گزارهٔ تازه ساده‌تر از گزارهٔ اصلی نباشد، باز هم استفاده می‌کنیم؛ زیرا یک برهان برای یکی از آن گزاره‌ها، برهانی معتبر برای دیگری نیز هست.

تعریف. هر دو قضیهٔ حاصل از یکدیگر به کمک قطب و قطبی، قضیه‌های دوگان نامیده می‌شوند. وجود جفتهای قضایایی که هریک از آنها دوگان دیگری است به اصل دوگانی معروف است، که ما بعداً به وسیلهٔ مثالهای زیاد آن را نشان خواهیم داد.

اصل دوگانی، که بر اساس مفهوم قطب و قطبی در صفحه نهاده شده، به ما امکان می‌دهد که با تعویض واژه‌های «نقطه» و «خط» از یک قضیه، قضیهٔ تازه‌ای به‌دست آوریم. در آغاز این بخش در تعریف قطب و قطبی استفاده کردیم. اهمیت آن، آن قدرها در این نیست که به ما امکان می‌دهد با هر نقطه یک خط معین و با هر خط نقطهٔ معینی را متناظر می‌سازیم، این‌گونه تناظرها کاملاً عادی هستند (مثلاً ما می‌توانیم به یک نقطهٔ P محور تقارن p را که با P و نقطهٔ ثابتی چون O معین می‌شود، مربوط کنیم. با O مثلاً خط بینهایت را، و با یک نقطه در بینهایت خط گذرنده بر O، عمود بر امتدادی را که نقطهٔ بینهایت به‌وسیلهٔ آن معین می‌شود، مربوط سازیم)، بلکه در این است که به ما اجازه می‌دهد به یک نقطهٔ واقع بر یک خط، خطی گذرنده بر نقطهٔ متناظرش را مربوط کنیم. از آن‌جا نتیجه می‌شود که هر تناظری از نوع اخیر، یعنی تناظری که به یک نقطه (خط) یک خط (نقطهٔ) منحصر به فرد، و به یک نقطه و خط گذرنده بر آن یک خط و یک نقطه واقع بر آن را مربوط سازد، می‌تواند به‌وسیلهٔ یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S و احتمالاً یک تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش، یا یک نیمدور و یک تصویر مرکزی تحقق یابد.

یک توضیح دیگر. ما ممکن است این اثر را بر خواننده گذاشته باشیم که تبدیلهای قطب و قطبی اصولاً وسیله‌ای برای به‌دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیمند، در حالی که تصویرهای موازی و مرکزی منحصراً به‌عنوان تکنیکهایی برای اثبات حکمهای هندسی به‌کار می‌روند. این تشخیص کاملاً درستی نیست، زیرا چنان که در بالا متذکر شدیم، تبدیلهای قطب و قطبی می‌توانند اغلب برای اثبات حکمهای هندسی داده شده مورد استفاده قرار گیرند و چنان که توضیح خواهیم داد، تصویرهای مرکزی و موازی، به‌طور تصادفی برای به‌دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم به‌کار می‌روند: با استفاده از یک تصویر مرکزی یا موازی برای نمودار یک قضیه، اغلب به قضیهٔ تازه‌ای هدایت می‌شویم. قضیه‌ای را درنظر بگیرید که فقط متضمن مفاهیمی باشد که بر اثر تصویرهای موازی محفوظ می‌مانند. روشن است که به‌کاربردن تصویر موازی برای چنین قضیه‌ای نمی‌تواند قضیهٔ تازه‌ای به‌دست دهد (درست مانند حرکت، که وقتی برای نمودار یک قضیه به کار برده می‌شود، هرگز ما را به قضیهٔ تازه‌ای هدایت نمی‌کند.) ولی ممکن است ما را به حالت خاص ساده‌ای از همین قضیه هدایت کند. از سوی دیگر، استعمال یک تصویر موازی برای نمودار قضیه‌ای که شامل مفاهیمی غیر از مفاهیم آفین باشد، ممکن است قضیهٔ تازه‌ای بدهد؛ به‌طور مثال از تصویر یک مثلث قائم‌الزاویه بر یک مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌توانیم از هر قضیه‌ای که به یک مثلث قائم‌الزاویه مربوط می‌شود، قضیهٔ تازه‌ای به‌دست آوریم. همچنین استفاده از تصویر مرکزی برای قضیه‌های آفین ممکن است ما را به قضیه‌های تازه‌ای سوق دهد؛ مثالهای مناسب قبلاً داده شده‌اند. روی هم رفته، بهتر است بگوییم که تصویرهای موازی و مرکزی بیشتر وقتها برای اثبات قضیه‌ها به‌کار روند، و تبدیلهای قطب و قطبی برای به‌دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم.

نکتهٔ مهمی که باید به آن اشاره کنیم این است که اصل دوگانی فقط در صفحهٔ تصویری، یعنی در صفحه‌ای که با «عنصرهای بینهایت» تکمیل شده، صدق می‌کند (تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S، مرکز S را به خط بینهایت و قطرهای آن را به نقطه‌های بینهایت بدل می‌کند). علت آن این است که اصل دوگانی به ما اجازه می‌دهد در گزاره‌های هندسی نقطه‌ها و خطها را با هم عوض کنیم و بنابراین، به تعبیری، هم ارزی نقطه‌ها و خطها را پدید می‌آورد. پیش از معرفی عنصرهای بینهایت، نقطه‌ها و خطها به هیچ وجه هم ارز نبودند؛ زیرا اگر هم ارز بودند، وجود خطهای موازی (خطهای بدون نقطهٔ مشترک) وجود نقطه‌های «موازی»، (نقطه‌هایی بدون یک «خط مشترک»)، یعنی نقطه‌هایی بی آن که خطی بر آنها بگذرد)، را موجب می‌شد و چنین نقطه‌هایی وجود ندارند. وارد کردن عنصرهای بینهایت، حالت خاص خطهای موازی را از بین می‌برد؛ در صفحهٔ تصویری دو خط همواره در یک نقطهٔ منحصر به فرد (یک نقطهٔ معین

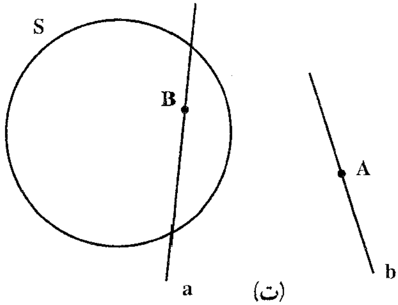
یا یک نقطهٔ بینهایت) اشتراک دارند، و دو نقطه همواره خط منحصر به فردی را مشخص می‌کنند که بر هر دوی آنها می‌گذرد.

می‌توان نشان داد که تقارن ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطهای صفحهٔ تصویری که در بالا ذکر شد، اصل دوگانی، یعنی امکان به‌دست آوردن یک قضیهٔ جدید (دوگان) از یک قضیهٔ قدیمی را، با تعویض اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرار دارد بر» و «می‌گذرد بر» ایجاب می‌کند. زیرا در اثبات یک قضیهٔ هندسی آن را به قضیهٔ ساده‌تری بدل می‌کنیم که به نوبهٔ خود باز به قضیهٔ ساده‌تری بدل می‌شود و هکذا، تا اینکه به ساده‌ترین گزاره‌های هندسی، یعنی اصول موضوعه، که بدون اثبات مسلم گرفته شده‌اند، می‌رسیم. اما در صفحهٔ تصویری ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطها کاملاً هم ارزند، یعنی اگر در اصل موضوع مفروضی اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرار دارد بر» و «می‌گذرد بر» را با هم عوض کنیم، گزارهٔ معتبری به دست می‌آوریم. شایسته است که این گزاره‌ها را در شمار اصول موضوع بگذاریم. وقتی فهرست حاصل از اصول موضوع طولانی باشد، خود، دوگان نیز هست. ولی در آن صورت دوگان هر قضیهٔ (معتبر) یک قضیهٔ جدیدی است معتبر، عیناً مثل قضیهٔ اصلی قابل اثبات است، جز این که حالا فرآیند برهان به اصول موضوع دوگان، به آن اصول موضوعی که در برهان قضیهٔ اصلی به آنها رسیده‌ایم، برمی‌گردد.

یک توضیح دیگر. وقتی از تبدیلهای قطب و قطبی استفاده کنیم، بیشتر از موقعی که از قضیه‌های هم‌ارزی ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطها استفاده می‌کنیم، می‌توانیم به قضیه‌های دوگان دست یابیم، زیرا استفاده از این هم ارزی (که در وجود جفتهای اصول موضوع دوگان نهاده شده) به‌منظور به‌دست آوردن قضیه‌های دوگان به قضیه‌هایی محدود شده است که متضمن زاویه یا فاصله نیستند (زیرا این مفاهیم دوگان ندارند، به‌عبارت دیگر، هم ارزی ویژگیهای اصلی نقطه‌ها و خطهای صفحهٔ تصویری به ما اجازه می‌دهد اصل دوگانی را فقط برای قضیه‌های هندسهٔ تصویری به‌کار بریم). از سوی دیگر، ویژگیهای (ب) و (ج) تبدیل قطب و قطبی که بعداً داده خواهد شد، به ما امکان می‌دهند که اصل دوگانی را برای ردهٔ بیشتری از قضیه‌ها به‌کار بریم.

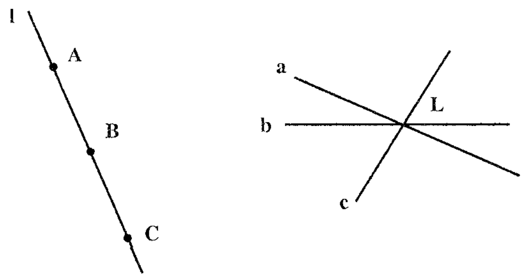
اکنون برخی از ویژگیهای تبدیل قطب و قطبی را درنظر می‌گیریم. مهمترین آنها عبارت است از: الف. تبدیل قطب و قطبی، یک نقطهٔ A و یک خط b گذرنده بر A را به یک خط a و یک نقطهٔ B واقع بر a بدل می‌کند (شکل ت).

ویژگی (الف) ایجاب می‌کند که تبدیل قطب و قطبی، سه نقطهٔ A، B و C واقع بر یک خط l را به سه خط a، b و c گذرنده بر یک نقطهٔ L بدل کند (شکل (ث) و نیز شکل (الف)) و بعکس،



(ت)

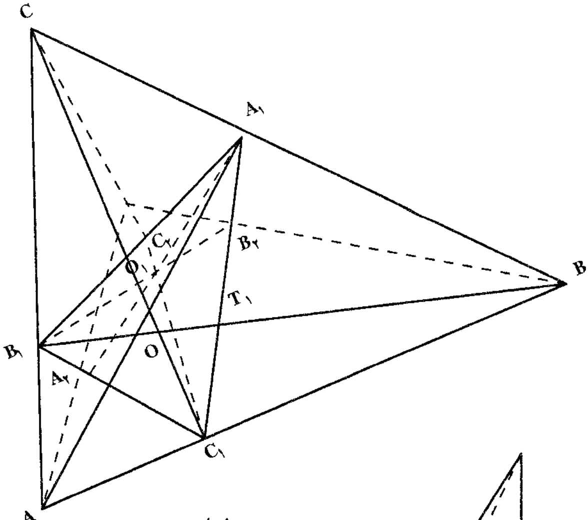
سه خط متقارب (گذرنده بر یک نقطهٔ معین یا یک نقطه در بینهایت) را به سه نقطهٔ همخط بدل می‌کند.



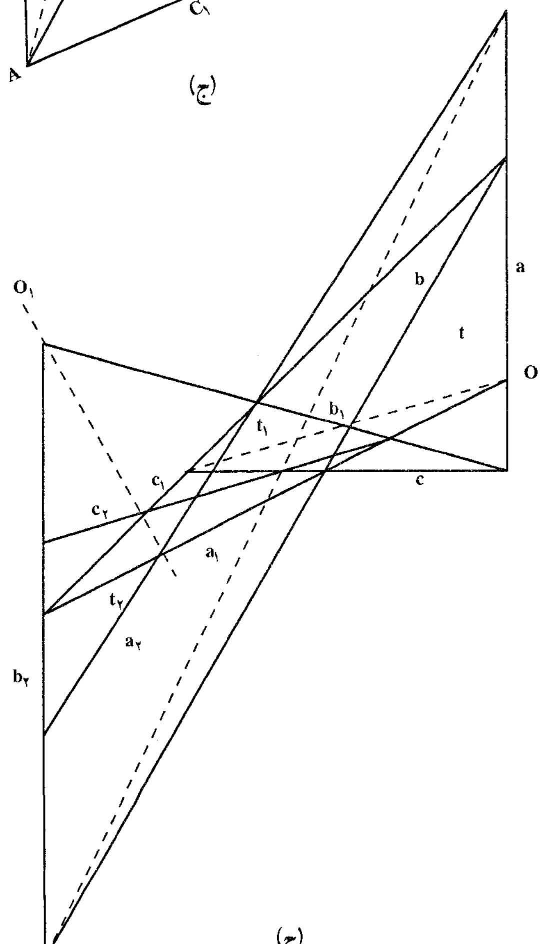
(ث)

این واقعیت به ما اجازه می‌دهد که قضیه‌های تازه‌ای از قضیه‌های داده شده به‌دست آوریم. به طور مثال قضیهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

قضیه. هرگاه A_1 ، B_1 و C_1 نقطه‌هایی بر ضلعهای ΔABC (که آن را برای اختصار با ΔT می‌نماییم) باشند، چنان که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 در یک نقطهٔ O همرس باشند و هرگاه A_2 ، B_2 و C_2 نقطه‌هایی بر ضلعهای $\Delta A_1B_1C_1$ (ΔT_1) باشند، به‌طوری که خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 در O_1 همرس باشند، آن‌گاه خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه همرس خواهند بود (شکل (ج)). ما یک تبدیل قطب و قطبی بر این قضیه اعمال می‌کنیم. در این حال مثلث T به یک مثلث t بدل می‌شود که ضلعهای a، b و c در آن، قطبیهای رأسهای مثلث T هستند ؛ نقطهٔ O به یک خط o بدل می‌شود و مثلث T_1 به یک مثلث t_1 که ضلعهای آن، a_1 ، b_1 و c_1 ، خطهای واصل بین رأسهای مثلث t و نقطه‌های تلاقی o با ضلعهای متقابل مثلث t هستند ؛ نقطهٔ O_1 به خط o_1 بدل می‌شود و نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 به خطهای a_2 ، b_2 و c_2 واصل بین رأسهای t_1 و نقطه‌های تلاقی o_1 با ضلعهای مثلث t_1 (شکل (چ)).



(ج)



(چ)

چون طبق قضیهٔ بالا (الف) خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 همرسند، از آن جا نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های برخورد جفتهای خطهای a و a_2 ، b و b_2 ، c و c_2 همخطند ؛ لذا به قضیهٔ زیر هدایت می‌شویم :

اگر t_1 مثلثی باشد که ضلعهایش بر خطهای واصل بین رأسهای مثلث t و محل برخورد یک خط o با ضلعهای مقابل t قرار داشته باشند، و t_2 مثلثی که ضلعهایش بر خطهای واصل بین رأسهای مثلث t_1 و نقطه‌های برخورد یک خط o_1 با ضلعهای متقابل t_1 واقع باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای t و t_2 ، همخطند. این قضیه، قضیه‌ای است کاملاً تازه که با یک نمودار تازه شرح داده شده است، ولی ما به ارائهٔ برهان مستقلی برای اثبات آن نیاز نداریم ؛ صحت آن از قضیهٔ بالا و ویژگی (الف) از تبدیل قطبی و قطب نتیجه می‌شود.

۲.۱. قطب و قطبی در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۳۰ـ زاویهٔ xOy و نقطهٔ P داده شده‌اند. از P دو خط چنان رسم می‌کنیم که Ox و Oy را بترتیب در A، B و A' ، B' قطع کنند. قطب خط OP کدام نقطه است؟

۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳۱. از نقطه O واقع در صفحهٔ دو خط متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ سه خط رسم می‌کنیم تا بترتیب آنها را در A، B، C و A' ، B' و C' قطع کنند. ثابت کنید نقطه‌های برخورد زوج خطهای (AB' ، $A'B$)، (BC' ، $B'C$) و (AC' ، $A'C$) با نقطهٔ O روی یک خط راست واقعند.

۳.۲.۱. خطهای: موازی، همرس، ...

۱.۳.۲.۱. خطها موازی‌اند

۳۲. زاویهٔ $X\hat{O}Y$ و نقطهٔ P داده شده‌اند. از نقطهٔ P قاطع غیرمشخص و دلخواهی رسم

می‌کنیم تا OX و OY را بترتیب در A و B قطع کند. از A به M وسط OP وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا OY را در C برخورد نماید. اگر D محل برخورد CP با OX باشد، ثابت کنید : $BD \| OP$ است.

۱.۲.۳.۲. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

۳۳. ثابت کنید قطبیهای ۴ نقطه که تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، یک دستگاه توافقی می‌سازند.

۱.۲.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۳۴. زاویهٔ XOY و نقطهٔ ثابت P واقع بر ضلع OX داده شده‌اند. دایرهٔ متغیر (ω) را مماس بر ضلعهای زاویهٔ بالا رسم می‌نماییم و از نقطهٔ P مماس PC بر این دایره رسم می‌کنیم. در صورتی که A و B بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای OX و OY با دایره (ω) باشند ؛ ثابت کنید که BC پیوسته از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱.۲.۴. زاویه

۱.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۳۵. زاویهٔ $x\hat{O}y = \alpha$ و نقطهٔ A در برون این زاویه داده شده‌اند. اندازهٔ زاویه‌هایی را که قطبی نقطهٔ A نسبت به دو خط Ox و Oy، با این دو خط می‌سازد، تعیین کنید ؛ در صورتی که $A\hat{O}x = \beta$ باشد.

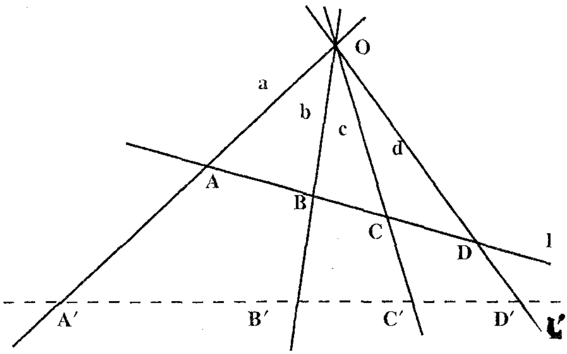
۱.۲.۵. پاره‌خط

۱.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳۶. نقطهٔ A به فاصلهٔ h از خط Δ و دو خط متوازی Δ و Δ' به فاصلهٔ l از یکدیگر داده شده‌اند. قطبی نقطهٔ A نسبت به این دو خط را D می‌نامیم. از A خطی رسم می‌کنیم که Δ، D و Δ' را بترتیب در نقطه‌های M، N و P قطع کند و با Δ زاویهٔ α بسازد. اندازهٔ پاره‌خطهای MN و NP را به‌دست آورید.

۱.۲.۶. رابطه‌های متری

۳۷. یک ویژگی دیگر تبدیل قطب و قطبی را که نقش اساسی در کارهای پیشرفته‌تر شامل این تبدیلها دارد نیز متذکر می‌شویم. برای بیان این ویژگی نخست باید مشابه نسبت ناهمساز

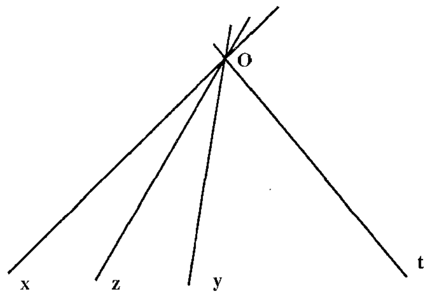


چهارنقطهٔ همخط، نسبت ناهمساز چهار خط همرس a، b، c و d را وارد، و به‌صورت نسبت ناهمساز A و B ؛ C و D ی نقطه‌های برخورد چهار خط همرس داده شده با یک خط پنجم l (که از نقطهٔ مشترک چهار خط مفروض نمی‌گذرد) تعریف کنیم. روشن است که نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d مستقل از انتخاب خط l است ؛ زیرا اگر یک خط ′l خطهای a، b، c و d را در نقطه‌های ′A ، ′B ، ′C و ′D ببرد، آن‌گاه نسبت ناهمساز نقطه‌های ′A و ′B ؛ ′C و ′D مساوی است با نسبت ناهمساز نقطه‌های A و B ؛ C و D . اکنون می‌توانیم ویژگی دیگری از قطب و قطبی را بیان کنیم :

اگر یک تبدیل قطب و قطبی چهار نقطهٔ A، B، C و D واقع بر یک خط l را به چهار خط a، b، c و d (که به موجب ویژگی (الف) تبدیلهای قطب و قطبی در یک نقطهٔ L همرسند) بدل کند، آن‌گاه نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d با نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D مساوی است.

۱.۲.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۳۸. دستگاه توافقی O-xyzt داده شده است. ثابت کنید که هر نقطه از دو شعاع مزودج Ox و Oy بترتیب قطب شعاع Oy و Ox، نسبت به دو شعاع Oz و Ot است و بعکس.



۱.۲.۸. رسم شکلها

۳۹. قطبی نقطهٔ P را نسبت به نقطهٔ C (دایرهٔ به شعاع صفر) و نسبت به خط Δ (دایرهٔ به شعاع بینهایت) معین کنید.

۴۰. دایره‌ای بر نقطهٔ داده شدهٔ A بگذرانید که قطبی نقطهٔ معین B نسبت به آن، خط مفروض d باشد.

۴۱. خطهای D و Δ و نقطهٔ A داده شده‌اند. دایره‌ای چنان رسم کنید که بر خط D مماس بوده و خط Δ قطبی A نسبت به آن دایره باشد.

۱.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۲. نقطه‌های M، A و B به همین ترتیب روی یک خط راست قرار دارند. بر نقطه‌های A و B دایرهٔ متغیری رسم می‌کنیم. اگر P نقطهٔ برخورد مماسهای رسم شده بر دایرهٔ (O) در نقطه‌های A و B باشد، مطلوب است :

۱. مکان هندسی نقطهٔ H، تصویر نقطهٔ P بر روی خط MO.

۲. مکان هندسی نقطه‌های برخورد PH با دایرهٔ (O).

۱.۳. قطب و قطبی در مثلث

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۴۳. نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث، قطب ارتفاعی ضلعهای مثلث، نسبت به مثلث است.

۴۴. نشان دهید که مرکز تجانس مثلثهای ارتفاعی و مماسی مثلث مفروض (T) قطب محور ارتفاعی (T) نسبت به دایرهٔ محیطی (T) است.

۱.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

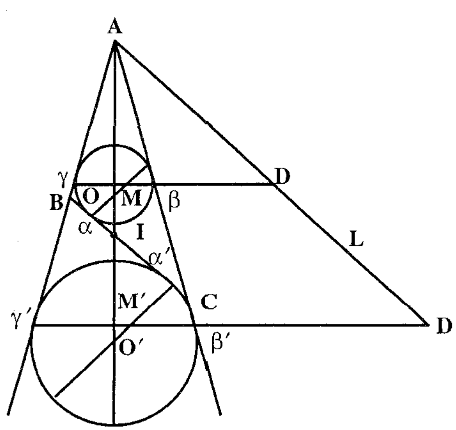
۱.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۵. قضیه‌ای را که از کاربرد تبدیل قطب و قطبی برای قضیهٔ مربوط به خط سیمسون نتیجه می‌شود، بیان کنید.

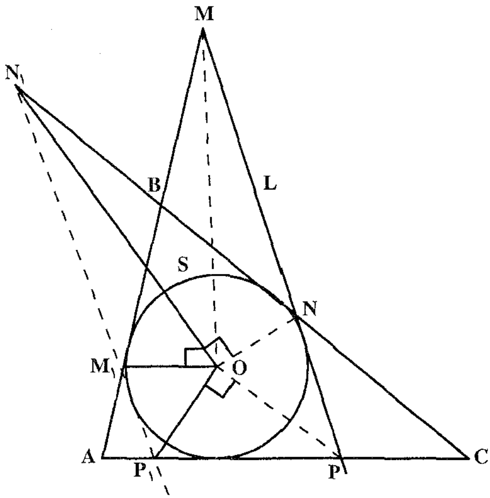
نکته. تصویرهای هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث روی ضلعها یا امتداد ضلعهای آن مثلث، سه نقطه‌اند واقع بر یک خط راست به نام سیمسون.

۴۶. **قضیه.** هرگاه از یک نقطهٔ واقع در صفحهٔ مثلثی به سه رأس مثلث وصل کنیم و از آن نقطه بر خط واصل به هر رأس، عمودی اخراج کنیم و امتداد دهیم تا ضلع مقابل به آن رأس را در نقطه‌ای قطع کند، سه نقطه‌ای که به این ترتیب به‌دست می‌آیند، بر یک استقامتند.

۴۷. مثلث ABC داده شده است. دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس بر ضلع BC رسم می‌کنیم. اگر α ، β و γ نقطه‌های تماس ضلعهای مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی و α' ، β' و γ' نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی خارجی با ضلعهای مثلث باشند و اگر M و M' نقطه‌های برخورد قطرهایی از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث با γB و $\gamma' B'$ باشند که بر BC عمودند: ثابت کنید نقطه‌های A، M و M' بر یک خط راست واقعند که از نقطهٔ I وسط BC می‌گذرد.



۴۸. دایرهٔ S در مثلث ABC محاط شده است. خط l بر دایرهٔ S مماس است و ضلعهای مثلث را در نقطه‌های M، N و P قطع می‌کند (شکل). از O، مرکز S، عمودی بر خطهای OM، ON و OP اخراج می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آنها را با ضلعهای متناظر مثلث، M_1، N_1 و P_1 نام می‌گذاریم. ثابت کنید که نقطه‌های M_1، N_1 و P_1 بر یک خط قرار دارند.



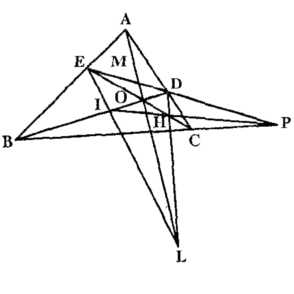
۴۹. از ویژگی (ب) در تبدیل قطب و قطبی برای اثبات قضیهٔ دزارگ استفاده کنید.

۵۰. L، M و N نقطه‌های برخورد خطهای AP، BP و CP با ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC، و L'، M' و N' نقطه‌های برخورد همین ضلعها با قطبی سه خطی P برای ABC هستند. نشان دهید که نقطه‌های وسط LL'، MM' و NN' همخطند.

۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۱. خطها همرسند

۵۱. در مثلث ABC، نقطه‌های D و E را بترتیب روی AC و AB در نظر می‌گیریم. محل برخورد BD و CE را O می‌نامیم. روی OA نقطهٔ اختیاری L را در نظر می‌گیریم. خطهای LD و LE را رسم می‌کنیم تا CE و BD را در H و I قطع کنند. نشان دهید خطهای DE، IH و BC همرسند.

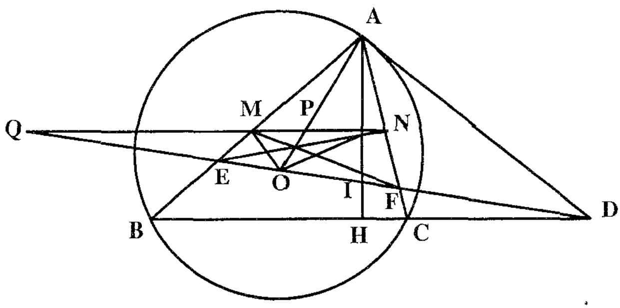


۵۲. خاصیت همرس بودن ارتفاعهای مثلثی را به‌وسیلهٔ قطبی متقابل آن نسبت به دایرهٔ محیطی آن اثبات کنید.

۵۳. خاصیت همرس بودن میانه‌های مثلثی را به‌وسیلهٔ تعیین قطبی متقابل آن نسبت به دایرهٔ محیطی آن ثابت کنید.

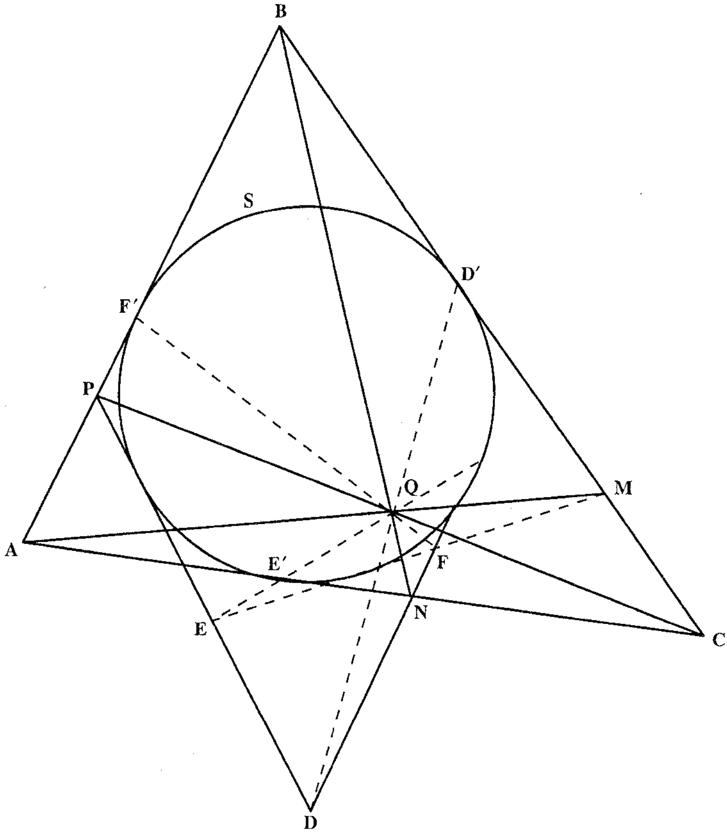
۵۴. قضیه‌های حاصل از کاربرد تبدیل قطب و قطبی را برای قضیهٔ زیر بیان کنید:
نیمسازهای زاویه‌های یک مثلث همرسند.

۵۵. مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) داده شده است. مماسی بر دایره در نقطهٔ A رسم می‌نماییم تا امتداد BC را در نقطهٔ D قطع نماید. خط OD را رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در E و F قطع نماید. اگر M و N بترتیب وسطهای AB و AC باشد، ثابت کنید که AO، MF و NE همرسند.



۵۶. نشان دهید که موربهای معکوس دو قطر عمود بر هم دایرهٔ محیطی یک مثلث، یکدیگر را روی خط قطبی مرکز دایرهٔ محیطی نسبت به دایرهٔ نه نقطه، قطع می‌کنند.

۵۷. به‌وسیلهٔ تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره‌ای که در مسألهٔ زیر آمده است، چه مسأله‌هایی به‌دست می‌آید؟
مثلث ABC و نقطهٔ Q داده شده‌اند. گیریم M، N و P محل برخورد خطهای AQ، BQ و CQ با ضلعهای BC، CA و AB باشند (شکل). هرگاه S دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و D′، E′ و F′ نقطه‌های تماس آن با ضلعهای BC، CA و AB باشند و مماسهای رسم شده از M، N و P بر S مثلث DEF را پدید آورند، نشان دهید که سه خط واصل بین رأسهای متناظر در دو مثلث DEF و D′E′F′ در Q همرسند.



۵۸. نشان دهید که خطهای واصل بین رأسهای مثلث ABC و نقطه‌های ′A ، ′B و ′C ، قطبهای ضلعهای مقابل به این رأسها نسبت به یک دایرهٔ S، همرسند.

این قضیه را می‌توان بترتیب زیر بیان کرد:

دو مثلث ABC و ′A′B′C را نسبت به یک دایره قطبی معکوس یکدیگر گوییم هرگاه ضلعهای ′ΔA′B′C قطبیهای رأسهای متناظر ΔABC باشند و بعکس. ضلعهای ΔABC نیز قطبیهای رأسهای ′ΔA′B′C می‌باشند. پس حکم این قضیه این است که مثلثهای قطبی معکوس همواره تصویر منظری یکدیگرند. از این‌جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و ′A′B′C همخطند.

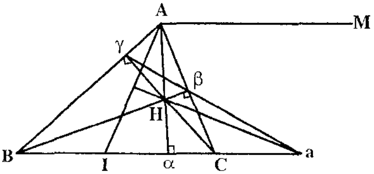
۵۹. با استفاده از قطبی متقابل ثابت کنید که اگر ضلعهای مثلثی بر دایره‌ای مماس باشند، خطهای واصل بین هر نقطهٔ تماس به رأس مقابل آن، سه خط همرسند.

۶۰. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و یک دایرهٔ S داده شده‌اند. ثابت کنید که اگر خطهای واصل بین رأسهای متناظر این دو مثلث همرس باشند، خطهای واصل بین قطبهای ضلعهای ΔABC (نسبت به S) و قطبهای متناظر به ضلعهای $\Delta A_1B_1C_1$ نیز همرسند (به عبارت دیگر اگر دو مثلث تصویر منظری یکدیگر باشند، مثلثهای قطبی معکوس آنها نیز تصویر منظری یکدیگرند).

۱.۳.۳.۲. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

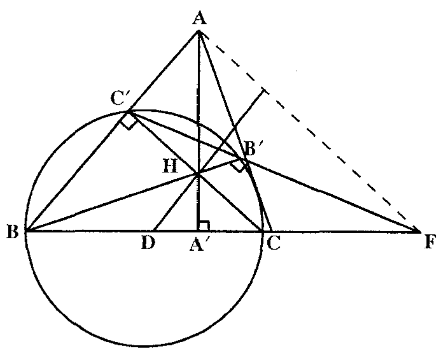
۶۱. اگر نقطهٔ I محل برخورد دو خط مزدوج Δ و D نسبت به دایرهٔ (C) در خارج این دایره واقع شود، ثابت کنید مماسهایی که از I بر دایره رسم می‌شوند، با D و Δ یک دستگاه شعاعهای توافقی می‌سازند.

۱.۳.۳.۳. خطها بر هم عمودند



۶۲. ارتفاعهای مثلث ABC یعنی $A\alpha$ ، $B\beta$ و $C\gamma$ در H متقاطعند و I وسط BC و محل برخورد BC با $\beta\gamma$ نقطهٔ a است. نشان دهید AI بر aH عمود است.

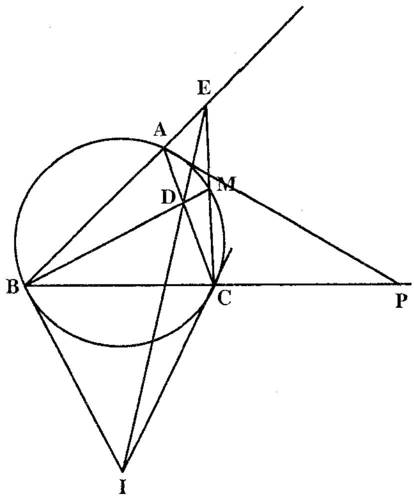
۶۳. در مثلث ABC ارتفاعهای BB' و CC' را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در H قطع کنند. $B'C'$ پای ارتفاعهای مثلث را به هم وصل می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در F قطع کند. خط واصل بین نقطهٔ (O) وسط BC و نقطهٔ H بر AF عمود است.



۱.۳.۳.۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۴. مثلث غیرمشخص ABC داده شده است. نقطهٔ M بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در

نظر گرفته، آن را به رأسهای B و C وصل می‌کنیم تا AC و AB را بترتیب در D و E قطع کند. ثابت کنید وقتی M بر محیط دایرهٔ محیطی مثلث تغییر می‌نماید، DE از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



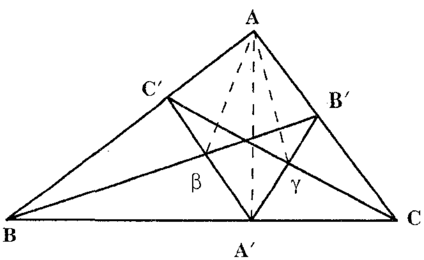
۶۵. اگر در مثلث ABC، $B'C'$ با BC پاد موازی باشد و از پای میانهٔ متقارن رسم شده از A بگذرد، نشان دهید که خط قطبی A نسبت به دایره‌ای که BC قطر آن است، از مرکزهای ارتفاعی مثلثهای ABC و $A'B'C'$ می‌گذرد.

۶۶. مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) داده شده است. ثابت کنید قرینهٔ میانهٔ AM نسبت به نیمساز AD از قطب وتر BC نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث می‌گذرد.

۶۷. چهار دایره می‌توان رسم کرد که بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC و دایرهٔ محیطی مثلث (O) مماس باشند. نشان دهید هر یک از چهار خط قطبی A نسبت به این چهار دایره، از یکی از مرکزهای سه مماس مثلث ABC می‌گذرد.

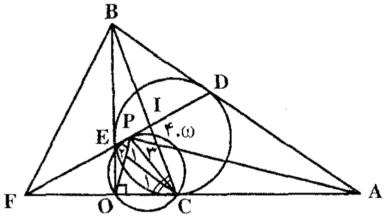
۱.۳.۳.۵. خط نیمساز است

۶۸. AA'، BB' و CC' نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC می‌باشند. محل برخورد BB' و $A'C'$ را β و $A'B'$ و CC' را γ می‌نامیم. نشان دهید AA' نیمساز زاویهٔ βAγ است.



۱.۳.۴. زاویه

۱.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه



۶۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ($\hat{O}=90^\circ$) و دایرهٔ محاطی داخلی آن داده شده است. چنانچه C، D و E بترتیب نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای OA، AB و OB باشد، از نقطهٔ C عمود CP را بر DE فرود می‌آوریم. ثابت کنید $O\hat{P}A = 90^\circ$ است.

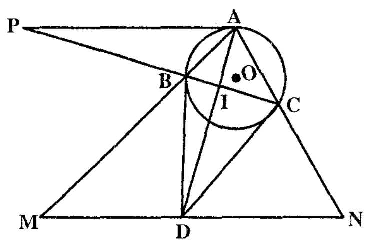
۱.۳.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۰. زاویهٔ دایرهٔ محیطی مثلث منفرجه‌الزاویه با دایرهٔ مزدوج آن را به θ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که :

$$\cos\hat{\theta} = \cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}$$

۱.۳.۵. پاره‌خط

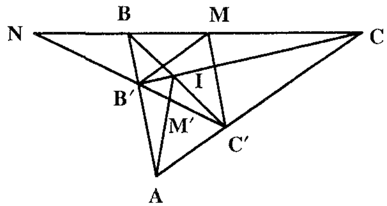
۱.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها



۷۱. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن داده شده‌اند. مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و C یکدیگر را در D قطع می‌کنند. از D خطی به موازات مماس در A رسم می‌نماییم تا امتدادهای AB و AC را در M و N برخورد نماید. ثابت کنید D وسط MN است.

۱.۳.۶. رابطه‌های متری

۷۲. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر ضلع BC از مثلث ABC خطهایی به موازات AC و AB رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در B' و C' قطع کنند. BC' و CB' همدیگر را در I



و AI خط $B'C$ را در M' قطع می‌کند.
ثابت کنید:

$$\frac{M'B'}{M'C'}=\frac{MB}{MC}$$

۷۳. با استفاده از تبدیل قطب و قطبی، قضیهٔ سوا را از قضیهٔ منلائوس و بعکس قضیهٔ منلائوس را از قضیهٔ سوا به‌دست آورید.

۷۴. نشان دهید که مربع شعاع دایرهٔ قطبی یک مثلث با نصف قوت مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث برابر است.

۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۷۵. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید که این مثلث و مثلث مماسی آن $(A'B'C')$ نسبت به دایرهٔ محیطی، قطبی معکوس یکدیگرند.

۸.۳.۱. رسم شکلها

۷۶. ۱. مثلث ABC داده شده است. دایرهٔ (A) را به مرکز A چنان رسم کنید که B و C نسبت به آن مزدوج باشند.
۲. اگر (B) و (C) دایره‌های شبیه دایرهٔ (A) باشند، سه دایره (A)، (B) و (C) دو به دو برهم عمودند.

۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۷. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. مماسهای نقطه‌های B و C بر دایرهٔ مزبور در نقطهٔ M متقاطعند. ثابت کنید خط AM قرینهٔ میانهٔ رأس A نسبت به نیمساز زاویهٔ همین رأس است.

۷۸. مثلثی را نسبت به یک دایره، قطبی معکوس خودش گویند هرگاه ضلعهای آن قطبیهای رأسهای مقابلش باشند. ثابت کنید که به ازای هر مثلث منفرجه‌الزاویهٔ ABC دایرهٔ منحصر به فردی وجود دارد که این مثلث نسبت به آن قطبی معکوس خودش است؛ و نیز مرکز این دایره نقطهٔ برخورد ارتفاعهای ΔABC است. یک مثلث قائم‌الزاویه یا حادة‌الزاویه نسبت به هیچ دایره‌ای قطبی معکوس خودش نیست.

۷۹. نشان دهید خط قطبی مرکز دایرهٔ محیطی یک مثلث نسبت به دایرهٔ دوم لوموان، محور اصلی دایره و دایرهٔ بروکار است.

۸۰. نشان دهید که دایرهٔ قطبی یک مثلث، ضلعهای مثلث را به صورت همساز قطع می‌کند.

۸۱. نشان دهید که محور ارتفاعی یک مثلث، قطبی سه خطی مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به آن مثلث و نسبت به مثلث ارتفاعی آن است و رأسهای مثلث مفروض وابسته‌های همساز مرکز ارتفاعی نسبت به مثلث ارتفاعی هستند.

۸۲. X نقطهٔ دلخواهی روی ضلع BC از مثلث ABC است. نشان دهید دایره‌ای که AX قطر آن است با دایرهٔ قطبی مثلث متعامد است.

۸۳. اگر A' نقطهٔ برخورد ضلع BC از مثلث ABC با قطبی سه‌خطی نقطه P واقع بر دایرهٔ محیطی ABC باشد، نشان دهید که دایرهٔ APA' از نقطهٔ وسط ضلع BC می‌گذرد.

۱.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۸۴. ضلع AB از مثلث غیر مشخص ABC و امتداد آن را محوری می‌انگاریم که مبدأ آن نقطهٔ A و جهت مثبتش اختیاری باشد؛ روی این محور دو نقطهٔ E و F را به طولهای $\overline{AE} = m.\overline{AB}$ و $\overline{AF} = n.\overline{AB}$ اختیار می‌کنیم (m و n اعدادی جبری و معلومند)؛ نقطهٔ دلخواه D را نیز در صفحهٔ ABC اختیار کرده، محل برخورد دو خط نامحدود DE و DF را با ضلع AC (یا امتداد آن) بترتیب G و H می‌نامیم؛ دو خط EH و FG (یا امتداد آنها) یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که آن را به I نمایش می‌دهیم؛ خط DI (یا امتداد آن) با محور AB در نقطه‌ای برخورد می‌کند که آن را K می‌نامیم.

۱. ثابت کنید: $\overline{EK} = \dfrac{m(n-m)}{n+m} \cdot \overline{AB}$

۲. با فرض: $m = \frac{1}{4}$ و $n = \frac{-3}{4}$، تحقیق کنید که $2KF + 3AB = 0$ باشد.

۸۵. در مثلث ABC خطهای AD و AD' نیمسازهای زاویهٔ A و AE قرینهٔ میانهٔ رأس نسبت به نیمساز داخلی AD و AT مماس در نقطهٔ A بر دایرهٔ محیطی مثلث است. خطهای AD، AD' ، AE و AT ضلع BC را در D، D' ، E و T قطع کرده‌اند. ثابت کنید:

۱. $AT = \frac{DD'}{۲}$

۲. T و E مزدوج توافقی B و C می‌باشند.

۸۶. الف. M و M' دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث (T) هستند؛ نشان دهید که ضلعهای مثلثهای پادک نقطه‌های M و M' نسبت به (T)، یعنی مثلثهای PQR و $P'Q'R'$ ، خطهای قطبی نقطه‌های M' و M نسبت به دایره‌های (A)، (B) و (C) هستند. (A)، (B) و (C) دایره‌هایی هستند که رأسهای A، B و C از مثلث (T) مرکزهایشان هستند و بر دایرهٔ پادک M و M' نسبت به (T) عمودند.

ب. نشان دهید سه خطی که رأسهای A، B و C را بترتیب به نقطه‌های $P_\circ = (QR, Q'R')$ ، $Q_\circ = (RP, R'P')$ و $R_\circ = (PQ, P'Q')$ وصل می‌کنند، موازی‌اند.

۸۷. ۱. نشان دهید که قطبی سه خطی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث، از پای نیمسازهای خارجی می‌گذرد، و بر خط واصل بین مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز دایرهٔ محاطی داخلی عمود است؛ همچنین نشان دهید که مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی وابسته‌های همساز مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هستند.

۲. بینهایت مثلث می‌توان رسم کرد که نسبت به یک دایرهٔ مفروض قطبی باشند و نقطهٔ مفروضی رأس مشترک همهٔ آنها باشد. نشان دهید که:

الف. مرکز ثقل این مثلثها روی یک خط راست قرار دارد.

ب. مرکز ارتفاعی این مثلثها نقطهٔ ثابتی است.

ج. مرکزهای دایره‌های محیطی آنها روی یک خط ثابت قرار دارد.

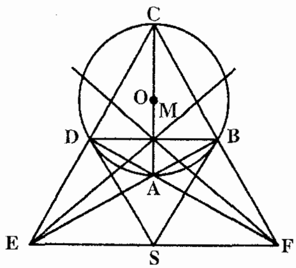
۱ . ۴. قطب و قطبی در چند ضلعی

۱ . ۴ . ۱. قطب خط، قطبی نقطه

۸۸. ثابت کنید قطبیهای نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو در هر چهارضلعی محدب، بر نقطهٔ برخورد قطرهای آن چهارضلعی می‌گذرند.

۱.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند



۸۹. چهارضلعی ABCD محاط در دایرهٔ (O) داده شده است. اگر E و F بترتیب نقطه‌های تقاطع ضلعهای (CD و AB) و (BC و AD) و S نقطهٔ تقاطع مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و D باشد، ثابت کنید S، E و F بر یک استقامت قرار دارند.

۱.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۴.۳.۱. خطها همرسند

۹۰. اگر از نقطهٔ برخورد قطرهای AB' و BA' یک ذوزنقهٔ محاط در دایره، خط CC' را به موازات دو قاعدهٔ AA' و BB' رسم کنیم، ثابت کنید مماسهای نقطه‌های C و C' از محل برخورد دو ضلع AB و $A'B'$ می‌گذرند.

۹۱. قطرهای یک چهارضلعی محیطی و وترهایی که نقطه‌های تماس مقابل را وصل می‌کند، همرسند.

۹۲. خطهایی که رأسهای روبه‌روی یک شش‌ضلعی محیطی را به‌هم وصل می‌کنند در یک نقطه همرسند. (بریانشن)

۱.۴.۳.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۹۳. چهارضلعی $ABA'B'$ در دایرهٔ (O) محاط است. AB ثابت و $A'B'$ تغییر می‌کند. AA' و BB' یکدیگر را در E و AB' و BA' یکدیگر را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید که EF از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

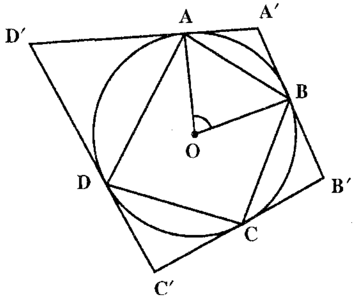
۱.۴.۳.۳. خط نیمساز است

۹۴. قضیهٔ حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای قضیهٔ زیر بیان کنید :

اگر قطرهای متوازی‌الاضلاعی بر هم عمود باشند، زاویه‌های رأسها را نصف می‌کنند.

۱.۴.۴. زاویه

۱.۱.۴.۴. اندازهٔ زاویه



۹۵. چهارضلعی ABCD داده شده است. قطبی معکوس این چهارضلعی نسبت به دایرهٔ (S) به مرکز O را A′B′C′D′ می‌نامیم. اگر $A\hat{O}B = 50°$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ بین قطبیهای دو رأس A و B چند درجه است؟

۱.۴.۵. پاره‌خط

۱.۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۹۶. چهارضلعی محاطی ABCD داده شده است. قطبیهای دو نقطهٔ A و C نسبت به دایرهٔ محیطی این چهارضلعی در نقطهٔ E متقاطعند. طول پاره‌خطهای EB و ED را به‌دست آورید.

۱.۴.۶. رابطه‌های متری

۹۷. این خاصیت را که هر قطر چهارضلعی کامل به‌وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، به وسیلهٔ قطبی متقابل مورد مطالعه قرار دهید.

۱.۴.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

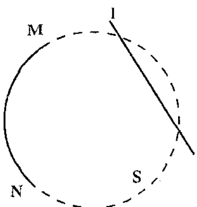
۹۸. ثابت کنید که مبدل قطبی معکوس مستطیل به مرکز O یک لوزی است.
۹۹. ثابت کنید قطبی متقابل هر چهارضلعی کامل یک چهارضلعی کامل است.

۱۰۰. ثابت کنید که در تبدیل قطبی معکوس، مبدلهای رأسها و ضلعهای یک n ضلعی منتظم به مرکز O بترتیب ضلعها و رأسهای یک nضلعی منتظم می‌باشند.

۱۰۱. در چهارضلعی توافقی ABCD به قطرهای AB و CD، خط CD شبه میانهٔ مثلثهای CAB، DAB و خط AB شبه میانهٔ مثلثهای ACD و BCD است.

تعریف. چهار نقطهٔ A، B، C و D را روی یک دایره درنظر می‌گیریم. گفته می‌شود که تقسیم (ABCD) توافقی است. هرگاه نقطهٔ M را که روی دایره اختیار کنیم، (M.ABCD)، یک دستگاه توافقی باشد. در این صورت برای هر نقطه‌ای مانند M′ از دایره، تقسیم (M′ ـ ABCD) توافقی است. چهارضلعی ABCD را چهارضلعی توافقی یا همساز می‌نامند. در این چهارضلعی جفت نقطه‌های (C و D) و (B و A) را نقطه‌های دوبه‌دو مزدوج می‌نامند.

۸.۴.۱. رسم شکلها



۱۰۲. گیریم MN قوسی از یک دایرهٔ S باشد، و l خطی نامتقاطع با آن (شکل). با استفاده از یک ستارهٔ تنها نقطه‌های تقاطع l و S را پیدا کنید.

۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۳. می‌دانیم که یک چهارضلعی که رأسهایش وسطهای ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع باشد، یک متوازی‌الاضلاع است. از به‌کار بردن تبدیل قطب و قطبی برای این قضیه چه گزاره‌ای می‌توانیم به‌دست آوریم.

۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴. الف. گیریم ABCD یک چهارضلعی محاط در دایرهٔ S باشد. نشان دهید که عمود رسم شده از مرکز S بر خط واصل بین نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل این چهارضلعی از نقطهٔ برخورد قطرهایش می‌گذرد.

ب. حکم بالا را با این فرض که چهارضلعی ABCD محیط بر S باشد، ثابت کنید.

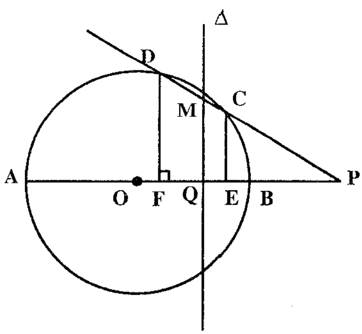
۵.۱. قطب و قطبی در دایره

۱.۵.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۰۵. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳R از مرکز دایره‌ای به شعاع R قرار دارد. قطبی A نسبت به این دایره چیست؟

۱۰۶. ثابت کنید قطبی نقطهٔ P نسبت به یک دایره به مرکز O، محور اصلی این دایره و دایرهٔ به قطر OP است.

۱۰۷. در صفحهٔ دایرهٔ (O) نقطهٔ P روی قطر AOB و Δ قطبی آن نسبت به دایره که AB را در Q قطع می‌کند، داده شده است. از نقطهٔ P قاطع PCD را رسم می‌کنیم. اگرE و F تصویرهای C و D روی AB باشند، ثابت کنید خطهای CE و DF، قطبیهای نقطه‌های E و F نسبت به دایرهٔ به قطر PQ می‌باشند.



۱۰۸. قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) در تجانس به مرکز P و با نسبت ۲ متناظر است با محور اصلی دایرهٔ (O) و نقطهٔ P.

۱۰۹. ثابت کنید قطب خطی که از دو نقطهٔ مزدوج می‌گذرد، مرکز ارتفاعی مثلثی است که این دو نقطهٔ مفروض و مرکز دایره رأسهای آن هستند.

۱۱۰. نشان دهید اگر دایرهٔ (L) با دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) متعامد باشد، محورهای اصلی (L) و (A)، و (L) و (B) یکدیگر را در قطب خط AB نسبت به (L) قطع می‌کنند و نقطه‌های برخوردشان با خط AB قطبهای محور اصلی (A) و (B) نسبت به این دو دایره هستند.

۱.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۵.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۱۱۱. دایرهٔ (O) و نقطه‌های A، B و C بر محیط آن مفروضند. نقطه‌های A' ، B' و C' را بترتیب وسطهای کمانهای $\widehat{BC}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{AB}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مماسهای بر دایره در نقطه‌های (A', A) ، (B', B) و (C', C) در سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت، متقاطعند.

۱۱۲. به وسیلهٔ تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره‌ای که در مسألهٔ زیر آمده است، از این مسأله چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
گیریم سه وتر AA_1 ، BB_1 و CC_1 از یک دایرهٔ S در یک نقطهٔ O همرس باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد، نشان دهید که P، Q و R، نقطه‌های برخورد خطهای XA_1 ، XB_1 و XC_1 با ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر نقطهٔ O واقع است.

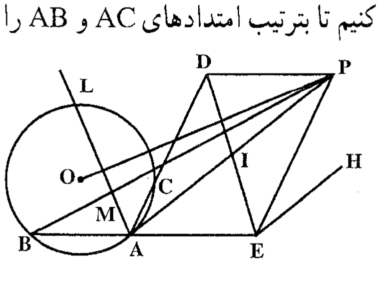
۱.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۵.۳.۱. خطها همرسند

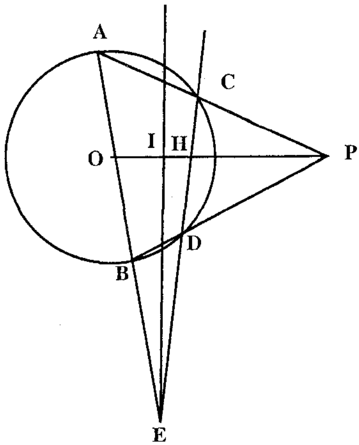
۱۱۳. خطهای قطبی یک نقطه نسبت به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور، همرسند.

۱.۵.۳.۲. دو خط بر هم عمودند

۱۱۴. از نقطهٔ ثابت P واقع در خارج دایرهٔ مفروض (O) مماس PA و قاطع PCB، بر آن دایره رسم نموده و از P موازی AB و AC رسم می‌کنیم تا بترتیب امتدادهای AC و AB را در D و E قطع نماید. ثابت کنید وقتی قاطع PCB تغییر می‌نماید، ED بر OP عمود است.



۱.۵.۳.۳. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۱۱۵. دایرهٔ (O) و نقطهٔ P خارج آن داده شده‌اند. از P به دو سر قطر متغیر AB وصل کرده، PA و PB را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های دیگر C و D قطع نماید. ثابت کنید خط CD از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۱۶. از نقطهٔ M دو قاطع MAA' و MBB' را نسبت به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. اگر AB از نقطهٔ ثابت P بگذرد، ثابت کنید $A'B'$ نیز از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۱۷. دایرهٔ (O) و دو نقطهٔ ثابت A و B بر آن را در نظر می‌گیریم و همچنین نقطه‌های C و D را مجدداً بر آن دایره انتخاب می‌کنیم. اگر AC و DB در نقطهٔ M و AD و BC نیز در نقطهٔ N متقاطع باشند، ثابت کنید وقتی C و D بر دایره تغییر می‌نمایند، خط MN از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۱۸. دو نقطهٔ ثابت A و B و دایره‌ای داده شده است. بر A خطی می‌گذرانیم تا دایره را در M و N قطع کند. BM و BN بار دیگر دایره را در M' و N' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که $M'N'$ بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۱۹. دایرهٔ (O) به شعاع R و خط xy که دایره را قطع نمی‌کند، داده شده است. از نقطهٔ غیرمشخص A واقع بر xy دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط BC قطر عمود بر xy را در نقطهٔ ثابتی قطع می‌کند.

۱۲۰. دو دایرهٔ متقاطع داریم که یک دایرهٔ متغیر بر آنها مماس است. نشان دهید که خط قطبی یک نقطهٔ مشترک دو دایرهٔ متقاطع نسبت به دایرهٔ متغیر از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد (فرض می‌کنیم که دایرهٔ متغیر به یک شیوه بر دو دایرهٔ متقاطع مماس باشد، یعنی هر دو مماس داخلی هستند یا خارجی). نشان دهید اگر دو دایرهٔ مفروض مماس باشند، این قضیه برای نقطهٔ تماس آن دو دایره نیز صادق است.

۱.۵.۳.۴. خط نیمساز است

۱۲۱. در دایرهٔ (O) وسطهای دو وتر AB و CD را M و N می‌نامیم. اگر AB یکی از نیمسازهای زاویهٔ $C\hat{M}D$ باشد، ثابت کنید CD یکی از نیمسازهای زاویهٔ ANB است.

۱.۵.۳.۵. خط مماس بر دایره است

۱۲۲. تصویر نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ مفروض (O) روی دو قطر عمود برهم u و v، بترتیب، نقطه‌های A و B هستند. قطب خط AB نسبت به دایرهٔ (O) را بر u و v تصویر می‌کنیم. نشان دهید خطی که از این دو تصویر می‌گذرد، بر دایره مماس است.

۱.۵.۴. زاویه

۱.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۱۲۳. ثابت کنید که یکی از زاویه‌های بین قطبیهای دو نقطهٔ A و B نسبت به یک دایره، با زاویهٔ $A\hat{O}B$ برابر است.

۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

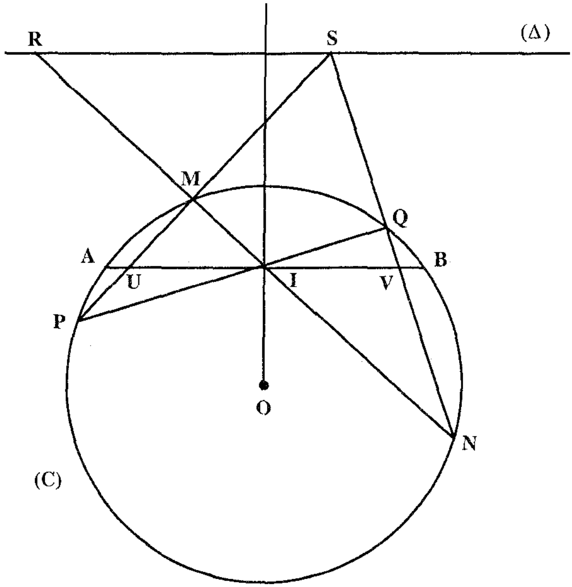
۱۲۴. قضیهٔ حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای قضیهٔ زیر بیان کنید:
زاویه‌های محاط در یک دایره و متقابل به یک کمان، با هم برابرند.

۱.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

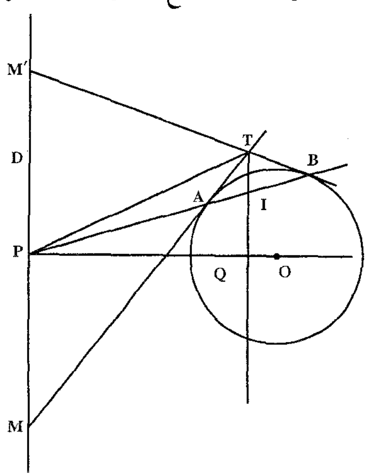
۱۲۵. دایرهٔ به مرکز O و نقطهٔ I وسط وتر AB از آن داده شده است. بر نقطهٔ I دو وتر اختیاری

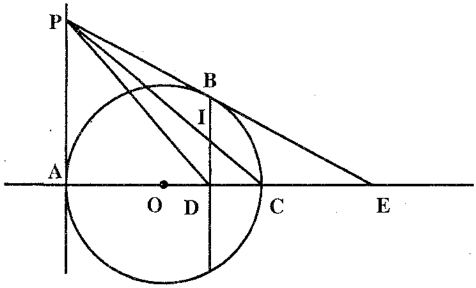
MN و PQ را می‌گذرانیم. خطهای MP و NQ خط AB را در U و V قطع می‌کنند. ثابت کنید I وسط U.V است.



۱۲۶. دایره‌ای به قطر AOB داده شده است. از نقطهٔ T واقع بر مماس در نقطهٔ A قاطع TCD را رسم می‌کنیم. خطهای BC و BD خط OT را در M و M′ قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطهٔ O وسط MM′ است.

۱۲۷. دایرهٔ (O) و نقطهٔ P واقع در خارج آن داده شده‌اند. از نقطهٔ P قاطع دلخواه APB بر دایره و خط D عمود بر PO رسم می‌نماییم. ثابت کنید مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و B، خط D را در دو نقطهٔ M و M′ که نسبت به P قرینه‌اند، قطع می‌کنند.





۱۲۸. دایرهٔ (O) و نقطهٔ P واقع در خارج آن داده شده‌اند. از P مماسهای PA و PB را بر دایره رسم نموده و قطر AOC را رسم می‌کنیم تا امتداد مماس PB را در E قطع نماید. از B خطی موازی مماس PA رسم می‌کنیم. ثابت کنید PC از وسط BD می‌گذرد.

۱۲۹. قطبیهای مرکز تجانس دو دایره را نسبت به این دو دایره پیدا می‌کنیم. ثابت کنید که این دوقطبی از محور اصلی به یک فاصله‌اند.

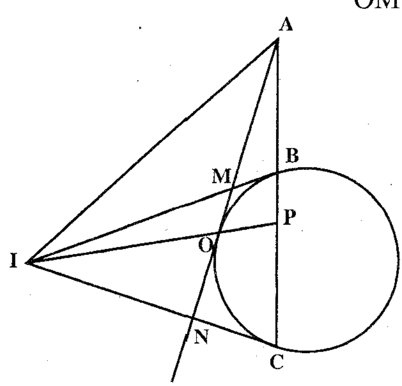
۶.۵.۱. رابطه‌های متری

۱۳۰. ثابت کنید که اگر فاصلهٔ یک نقطهٔ A از O، مرکز دایرهٔ S به شعاع ۱، برابر d باشد، فاصلهٔ O از قطبی نقطهٔ A نسبت به S، یعنی از خط a، مساوی $\frac{1}{d}$ خواهد بود.

۱۳۱. ثابت کنید که نسبت فاصله‌های دو نقطه ازمرکز دایره‌ای، مساوی است با نسبت فاصله‌های هر نقطه از قطبی نقطهٔ دیگر.

۱۳۲. نقطه‌های ثابت A و O داده شده‌اند. از نقطهٔ (O) دایرهٔ دلخواهی مماس بر AO رسم می‌نماییم و از نقطهٔ A قاطع غیرمشخص ABC را بر آن دایره رسم می‌کنیم. مماسهای بر دایره درنقطه‌های B و C یکدیگر را در I و OA را بترتیب در M و N قطع می‌نماید.

ثابت کنید $\frac{1}{ON}+\frac{1}{OM}$ مقداری است ثابت.



۷.۵.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۱۳۳. دایرهٔ (S) به مرکز O داده شده است. چهارضلعی ABCD را محاط در این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید مثلثی که رأسهای آن نقطهٔ برخورد قطرهای این چهارضلعی و نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی آن است، قطبی متقابل خودش نسبت به دایرهٔ (S) می‌باشد.

۸.۵.۱. رسم شکلها

۱۳۴. قطب یک خط نسبت به یک دایره را پیدا کنید.

۱۳۵. قطبی P را نسبت به دایرهٔ O رسم کنید.

۱۳۶. از دو نقطهٔ واقع بر یک قطر دایره دو وتر متساوی رسم کنید که یکدیگر را روی دایره قطع کنند.

۹.۵.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۳۷. دایرهٔ ثابت (O) و نقطهٔ ثابت A داده شده است. ثابت کنید که دایره‌هایی که بر نقطهٔ A بگذرند و بر دایرهٔ (O) عمود باشند، بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

۱۳۸. سه نقطهٔ A، B و C را درنظر می‌گیریم. اگر هر دایره که از A بگذرد و دو نقطهٔ B و C نسبت به آن نقطه‌های مزدوج باشند، این دایره از نقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرد.

۱۳۹. همهٔ دایره‌هایی که قطبی نقطهٔ مفروض A نسبت به آنها یک خط BC باشد، یک دستگاه از دایره‌ها تشکیل می‌دهند.

۱۴۰. اگر S یک مرکز تشابه دو دایرهٔ متعامد متقاطع در نقطه‌های A و C باشد، و اگر B و D نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین دایره‌ها با خطهای قطبی S نسبت به این دو دایره باشند، ثابت کنید که ABCD یک مربع است.

۱۴۱. برای اینکه دو نقطهٔ A و B نسبت به دایرهٔ (O) مزدوج باشند، لازم و کافی است که دایرهٔ به قطر AB بر دایرهٔ (O) عمود باشد.

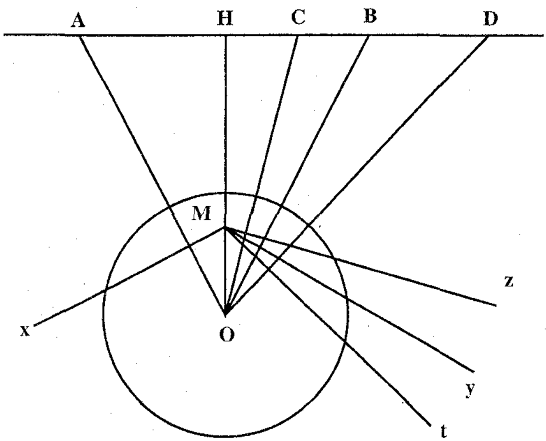
۱۴۲. شکل قطبی معکوس دایرهٔ α نسبت به دایرهٔ ω یک محور تقارن دارد که همان خط‌المرکزین دو دایره است. آیا این شکل می‌تواند یک محور تقارن دیگر داشته باشد؟

۱۴۳. دو دایرهٔ (O) و (O′) و خط Δ عمود بر خط‌المرکزین آنها مفروضند. قطبیهای نقطهٔ P واقع بر Δ نسبت به دو دایره، یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. مطلوب است مکان هندسی Q وقتی P بر Δ تغییر می‌نماید.

۱.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱۴۴. ۱. اگر چهار نقطهٔ A، B،C و D تشکیل یک تقسیم توافقی بدهند، ثابت کنید قطبیهای آنها نسبت به دایرهٔ مفروض (O) تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.

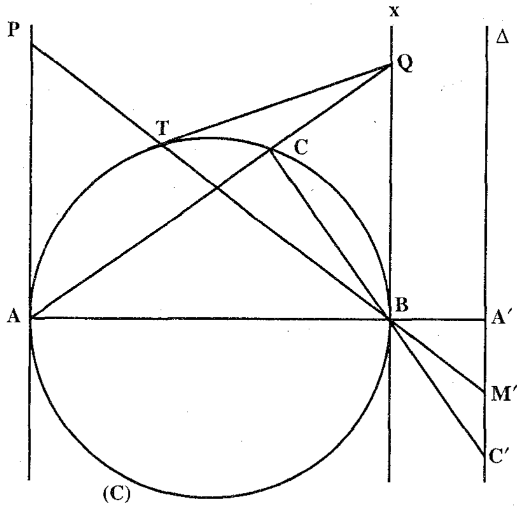
۲. قطبهای شعاعهای یک دستگاه توافقی نسبت به دایرهٔ مفروض(O) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.



۱۴۵. قطر AB از دایرهٔ C، وتر AD از این دایرهٔ مفروضند. روی AC نقطهٔ متغیر M را درنظر می‌گیریم و محل برخورد BA، BC و BM را با Δ نقطه‌های A′ ، C′ و M′ می‌نامیم (Δ عمود بر AB است).

۱. مکان M را طوری روی AC بیابید که M′ وسط A′C′ باشد.

۲. نشان دهید هرگاه M سمت بالای مکان فوق را طی کند و P قطب AC نسبت به دایرهٔ C باشد، نقطه‌های P، M و B روی یک خط خواهند بود.



۱۴۶. نقطهٔ ثابت A و قطر متغیر MN از دایرهٔ (O) را درنظر می‌گیریم. AM و AN دایره را در ′M و ′N قطع می‌کنند. خطهای ′MN و ′NM یکدیگر را در E، و MN و ′M′N یکدیگر را در F تلاقی می‌کنند.

۱. مکان نقطهٔ E را تعیین کنید.

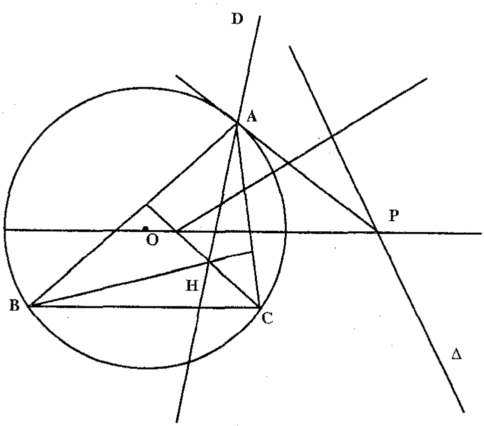
۲. ثابت کنید دایرهٔ AMN از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳. ثابت کنید خط ′M′N از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۱۴۷. دایرهٔ ثابت (O) و نقطهٔ ثابت A بر روی آن دایره داده شده است. BC وتری از این دایره است که همواره به موازات خود تغییر مکان می‌دهد.

۱. ثابت کنید که قطبی نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC همواره بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

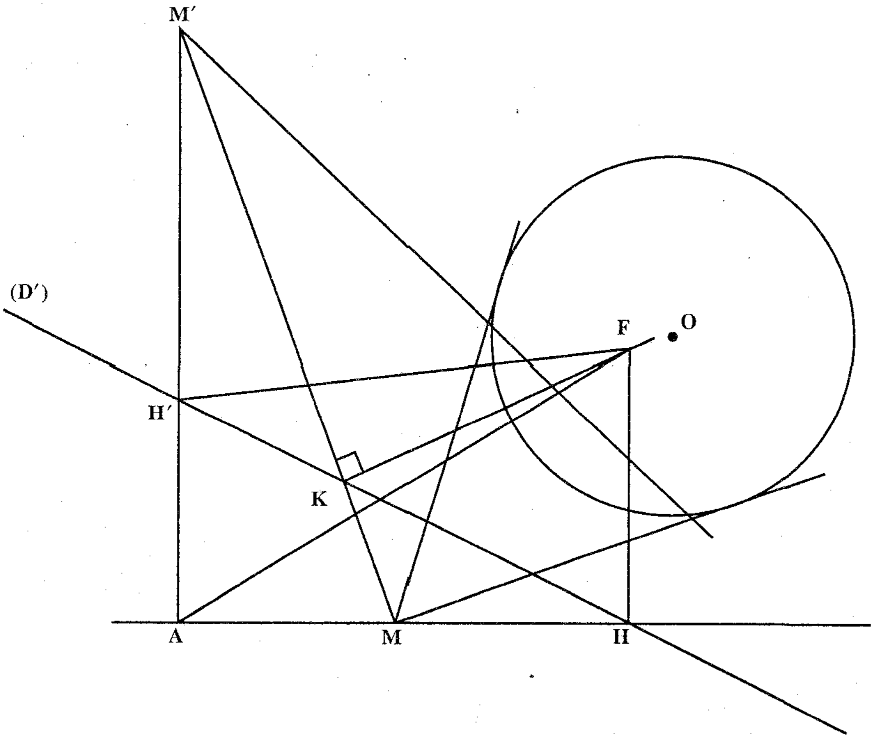
۲. مکان هندسی این نقطهٔ ثابت را وقتی که A روی دایره تغییر مکان دهد، به‌دست آورید.



۱۴۸. دو خط D و D′ در نقطهٔ A بر هم عمودند و دایرهٔ ثابت O در صفحهٔ آنها داده شده است. نقطهٔ متغیر M را بر D قطبی M نسبت به دایرهٔ (O) خط D′ را در M′ قطع می‌کند.

۱. نشان دهید که نقطهٔ ثابت چون F یافت می‌شود، به طریقی که قطعه خط MM′ تحت زاویهٔ قائمه دیده شود.

۲. پوش MM′ را پیدا کنید.



۱۴۹. در صفحهٔ دایرهٔ (O) نقطهٔ ثابت D و دایرهٔ متغیر (C) که از دو نقطهٔ O و D می‌گذرد، مفروضند. دایرهٔ (C)، دایرهٔ (O) را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. از A و B دو مماس بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم که یکدیگر را در M قطع می‌کنند.

۱. مکان نقطهٔ M را معین کنید.

۲. ثابت کنید AB حول نقطهٔ ثابتی حرکت می‌کند.

۱۵۰. در یک صفحه نقطهٔ ثابت O و (C) دایرهٔ متغیر به مرکز I و به شعاع $\frac{1}{2}OI$ مفروض است، چنانچه (Δ) قطبی نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ (C) و J فصل مشترک خط (Δ) با OI باشد :

۱. مطلوب است محاسبهٔ $\frac{OJ}{OI}$.

۲. فرض می‌کنیم که (Δ) از نقطهٔ ثابت A بگذرد :

a) ثابت کنید (C) همواره بر یک دایرهٔ ثابت عمود است.

b) مطلوب است مکان نقطهٔ I.

c) مطلوب است مکان نقطه‌های مشترک (Δ) و (C).

۳. فرض می‌کنیم که (C) از نقطهٔ ثابت B بگذرد :

a) مطلوب است مکان نقطه‌های I و J.

b) محاسبهٔ پوش خط (Δ).

۴. رسم دایرهٔ (C) با معلوم بودن یکی از نقطه‌های آن B و یک نقطهٔ A از (Δ). بحث در تعداد جوابها در بحث موضعیت نقطهٔ A در صفحه : نقطه‌های O و B ثابتند.

۱۵۱. شعاعهای دو دایرهٔ α و β تقریباً با هم برابرند و مرکزهای آنها بسیار نزدیک به‌هم می‌باشند و α داخل β واقع است. نقطه‌های A_1، A_3، A_5، ... را روی α و نقطه‌های B_0، B_2، B_4، ... را روی β چنان تعیین کنید که خطهای B_0B_2، B_2B_4، ... در A_1، A_3، ... بر α مماس باشند. خطهای A_1A_3، A_3A_5، ... را به ترتیب با b_2، b_4، ... و نقطه‌های برخورد مماسهای بر β در B_0، B_2 و در B_2، B_4، ... را بترتیب با C_1، C_3، ... نشان می‌دهیم. ثابت کنید که :

اولاً. خطهای b_2، b_4، ... بر شکل قطبی معکوس β نسبت به α مماسند.

ثانیاً. نقطه‌های C_1، C_3، ... بر شکل قطبی معکوس α نسبت به β واقعند.

۱۵۲. ثابت کنید در هر دایره :

الف. زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر، برابر 90° است.

ب. زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان برابرند.

۱۵۳. نشان دهیدکه :

الف. دو قطب وتر مشترک دو دایرهٔ متعامد نسبت به این دایره‌ها بر مرکزهای این دو دایره منطبقند.

ب. اگر AB و CD دو پاره‌خط همساز باشند، مزدوج همساز نقطهٔ وسط AB نسبت به C و D بر مزدوج همساز نقطهٔ وسط CD نسبت به A و B منطبق است.

۱۵۴. الف. TP و TQ در دو انتهای وتر PQ از یک دایره بر آن دایره مماسند. خطی که در نقطهٔ دلخواه R بر دایره مماس است، PQ را در S قطع می‌کند؛ ثابت کنید که TR خط قطبی S است.
ب. دو نقطهٔ ثابت R و S مفروضند؛ دایرهٔ دلخواه(O) را طوری رسم می‌کنیم که در R بر RS مماس باشد، و از S قاطع دلخواهی رسم می‌کنیم تا (O) را در P و Q قطع کند. اگر مماسهایی که در P و Q بر (O) رسم می‌شوند، خط RS را در U و V قطع کنند، نشان دهید که $\frac{1}{RU}+\frac{1}{RV}$ مقداری ثابت، مستقل از دایرهٔ (O) و قاطع RPQ است.

۱.۶. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکلهای دیگر

۱.۶.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۵۵. ثابت کنید خطهای هادی هر بیضی، قطبیهای کانونهای آن بیضی نسبت به دایرهٔ اصلی آن بیضی می‌باشند.

۱.۶.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۶.۲.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۵۶. کرهٔ (O) و نقطهٔ A داده شده‌اند. ثابت کنید قطبیهای تمام صفحه‌هایی که بر نقطهٔ A می‌گذرند، روی یک صفحه قرار دارند.

۱.۶.۳. خطها یا صفحه‌های: همرس، موازی، ...

۱.۶.۳.۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۱۵۷. صفحه‌های قطبی یک نقطهٔ P نسبت به کره‌های یک دستگاه کره از یک خط می‌گذرند.

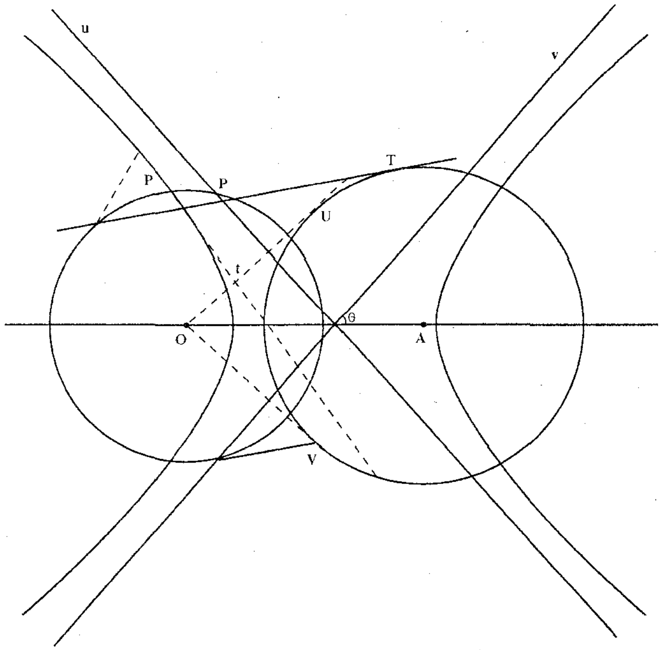
۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازهٔ زاویه

۱۵۸. هر یک از مجانبهای هذلولی با خط OA (شکل) زاویهٔ θ می‌سازد. ثابت کنید که :

$$\cos\theta = \frac{1}{\varepsilon}$$

از این رابطه مقدار خروج از مرکز هذلولی متساوی‌القطرین را به دست آورید.



۵.۶.۱. پاره‌خط

۱.۵.۶.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۵۹. نقطهٔ A و خط Δ نسبت به بیضی، قطب و قطبی نسبت به هم می‌باشند و می‌دانیم که نقطهٔ A بر روی محور بزرگتر بیضی قرار دارد. نقطه‌ای مانند M از بیضی در دست است. با تعیین کانونهای بیضی، فاصلهٔ کانونی آن را بیابید.

۱.۶.۶. رابطه‌های متری

۱۶۰. نقطهٔ P بر بیضی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد. ثابت کنید که مجموع شعاعهای حامل آن، یعنی $OP + O_1P$ مقدار ثابتی است.

۱.۶.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۱۶۱. در چه صورتی، یک منحنی مقطع مخروطی، مبدّل قطبی معکوس یک دایرهٔ (α) است.

۱.۶.۸. رسم شکلها

۱۶۲. نقطهٔ A و صفحهٔ P داده شده‌اند. کره‌ای به شعاع R چنان رسم کنید که نقطهٔ A و صفحهٔ P نسبت به آن قطب و قطبی باشند.

۱.۶.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. ثابت کنید که منحنی مقطع مخروطی ؛ بیضی، سهمی یا هذلولی است، بر حسب آن که خط بینهایت در خارج آن واقع باشد، بر آن مماس باشد، یا آن را قطع کند.

۱۶۴. ثابت کنید خط‌هادی سهمی، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آن نقطه‌ها دو مماس عمود بر هم، می‌توان بر آن سهمی رسم کرد.

۱.۶.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱۶۵. بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ داده شده است.

الف. قطبی کانون F نسبت به دایرهٔ اصلی بیضی را تعیین کنید.

ب. قطبی کانون F نسبت به دایرهٔ فرعی بیضی را پیدا کنید.

پ. وضع این دو قطبی نسبت به هم را مشخص کنید.

بخش ۲

• انعکاس

۲. ۵. انعکاس در دایره

۲.۵.۱. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۲.۵.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲.۵.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲.۵.۲.۳. نقطه‌ها غیرمتناظرند

۲.۵.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۲. ۵. ۳. ۱. خطها بر هم عمودند

۲.۵.۴. زاویه

۲. ۵.۴. ۱. اندازهٔ زاویه

۲. ۵. ۵. پاره خط

۲. ۵. ۵. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲. ۵. ۶. رابطه‌های متری

۲.۵.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲. ۵.۸. رسم شکلها

۲. ۵. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲.۶. انعکاس در مقطعهای مخروطی

بخش ۲. انعکاس

۱.۲. تعریف و قضیه

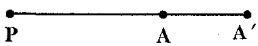
انعکاس

تعریف. هرگاه نقطهٔ ثابتی مانند P و عددی جبری مانند a (مخالف با صفر) داشته باشیم، منعکس هر نقطه مانند A نقطه‌ای است مانند A' که با A و P بر یک استقامت باشد و حاصلضرب اندازه‌های جبری فاصله‌های P از A و A' برابر a باشد، یعنی داشته باشیم :

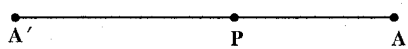
$$\overline{PA}.\overline{PA'} = a$$

P را قطب یا مرکز انعکاس و a را قوت انعکاس یا ثابت انعکاس می‌نامند.

اگر قوت انعکاس مثبت باشد، دو نقطهٔ منعکس در یک طرف قطب انعکاسند و می‌گوییم انعکاس مثبت است و A' منعکس مثبت A است (شکل الف) و اگر قوت انعکاس منفی باشد، دو نقطهٔ منعکس در دو طرف قطب انعکاسند و می‌گوییم انعکاس منفی است و A' منعکس منفی A است (شکل ب).

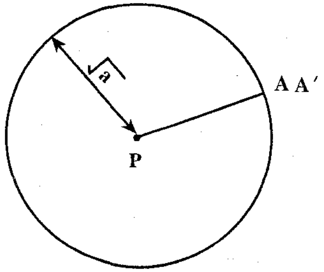


(الف)



(ب)

به‌طوری که از تعریف انعکاس نتیجه می‌شود، خاصیت انعکاس متقابل است، یعنی اگر A' منعکس A با قوت a باشد، A نیز منعکس A' با همان قوت است.

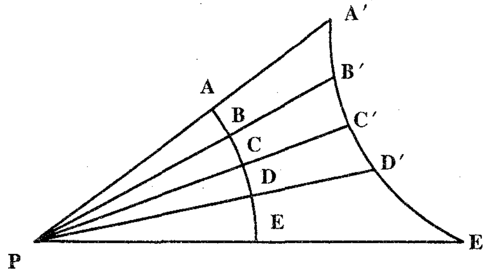


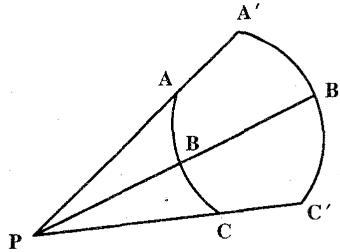
در انعکاس مثبت، هرگاه فاصلهٔ نقطه‌ای از قطب انعکاس مساوی جذر قوت انعکاس باشد، منعکس نقطه بر خود آن منطبق است. پس : در انعکاس مثبت، مکان هندسی نقطه‌هایی که منعکسشان بر خودشان منطبق است، محیط دایره‌ای است به مرکز قطب انعکاس و به شعاع جذر قوت انعکاس. این دایره را دایرهٔ انعکاس و شعاع آن را شعاع انعکاس می‌نامند.

$$PA.PA' = a > 0$$

در انعکاس منفی، هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند بر منعکس خود منطبق باشد.

تعریف. منعکس یک شکل نسبت به یک قطب و با یک قوت معین، شکلی است که هر نقطه‌اش منعکس یکی از نقطه‌های آن شکل باشد. به‌عبارت دیگر، منعکس هر شکل نسبت به





یک قطب و با یک قوت انعکاس، مکان هندسی منعکسهای نقطه‌های آن شکل است نسبت به همان قطب و با همان قوت انعکاس.

نتیجهٔ ۱. هرگاه دو منحنی متقاطع باشند، منعکسهایشان هم متقاطعند و دو نقطهٔ تقاطع منعکس یکدیگرند (چرا؟).

نتیجهٔ ۲. هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، منعکسهایشان نیز بر هم مماسند و دو نقطهٔ تماس منعکس یکدیگرند (چرا؟).

۱۶۶. قضیه. چهار نقطهٔ دو به دو منعکس، بر روی محیط یک دایره قرار دارند.

۱۶۷. قضیه. فاصلهٔ بین منعکسهای دو نقطه مساوی است با حاصلضرب قدرمطلق قوت انعکاس در فاصلهٔ بین آن دو نقطه، تقسیم بر حاصلضرب فاصله‌های قطب انعکاس از همان دو نقطه.

۱۶۸. قضیه. منعکسهای یک شکل، نسبت به یک قطب و با قوتهای مختلف مجانسهای یکدیگرند. مرکز تجانس آنها قطب انعکاس و نسبت تجانس آنها مساوی است با خارج‌قسمت قوتهای انعکاس.

۱۶۹. قضیه. مماسهای بر دو منحنی منعکس، در دو نقطهٔ منعکس، با خط واصل بین آن دو نقطه، زاویه‌های متساوی می‌سازند.

چند تعریف. اگر دو خم یک نقطهٔ مشترک، مانند P داشته باشند، زاویهٔ بین مماسهایی که در P بر دو خم رسم می‌شوند، زاویهٔ برخورد دو خم خوانده می‌شود.

زاویهٔ برخورد یک خم و یک خط راست، زاویهٔ بین خط راست و مماسی است که نقطهٔ برخورد بر خم رسم می‌شود.

به‌عنوان مثال زاویهٔ برخورد یک خط راست و یک دایره تنها و تنها به شرطی قائمه است که آن خط از مرکز دایره بگذرد.

۱۷۰. **قضیه**. زاویهٔ بین دو منحنی، مساوی است با زاویهٔ بین منعکسهای آنها. یا به عبارت دیگر، در انعکاس، زاویه‌ها تغییر نمی‌کنند.

۱۷۱. **منعکسهای خط و دایره**

قضیه. منعکس خط راستی که بر قطب انعکاس بگذرد، بر خود آن منطبق است، یعنی خطی است راست.

۱۷۲. **قضیه**. منعکس خط راستی که بر قطب انعکاس نگذرد، دایره‌ای است که بر قطب انعکاس می‌گذرد.

مرکز این دایره بر روی عمودی است که از قطب انعکاس بر آن خط فرود آید و شعاعش نصف فاصلهٔ قطب انعکاس است از منعکس نقطهٔ تقاطع خط با عمودی که از قطب انعکاس بر آن فرود آمده است.

۱۷۳. **قضیه عکس**. منعکس دایره‌ای که بر قطب انعکاس بگذرد، خطی است مستقیم عمود بر قطر گذرنده بر مرکز انعکاس (این خط بر منعکس انتهای قطر مذکور می‌گذرد).

۱۷۴. **قضیه**. منعکس دایره‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، دایره است.

۱۷۵. **قضیه**. یک خط و یک دایره، به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، منعکس یکدیگرند.

۱۷۶. **قضیه**. دو دایره، به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، منعکس یکدیگرند.

۱۷۷. **قضیه**. قوت انعکاس دو دایره نسبت به یکدیگر، مساوی است با جذر حاصلضرب قوتهای مرکز تجانس آن دو دایره نسبت به آنها.

۱۷۸. مرکزهای دو دایرهٔ منعکس، مجانس یکدیگرند و منعکس یکدیگر نیستند. منعکس مرکز دایره از قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود:

قضیه. منعکس مرکز دایره‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، مزدوج توافقی قطب انعکاس است نسبت به دو انتهای قطری از منعکس آن دایره که بر قطب انعکاس مرور کند.

۱۷۹. **جفت نقطه‌های جداساز**. نخست به قضیهٔ زیر توجه کنید:

قضیه. هرگاه چهار نقطهٔ A، B، C و D نه بر یک خط و نه بر یک دایره واقع باشند، دو دایرهٔ بدون نقطهٔ مشترک وجود خواهد داشت که یکی از آنها بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد.

۱۸۰. **قضیه**. بین فاصله‌های هر چهار نقطهٔ A، B، C و D از یکدیگر رابطهٔ زیر برقرار است:

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD$$

تساوی وقتی برقرار است که $AC\|BD$ باشد.

۱۸۱. **قضیه.** برای آن که نسبتهای ناهمساز چهار نقطهٔ جدا از هم در رابطهٔ

$$(ADBC)+(ABDC)=1$$

صدق کند لازم و کافی است که $AC\|BD$ باشد.

۱۸۲. انعکاس، نسبت ناهمساز چهار نقطه را محفوظ می‌دارد یعنی، هرگاه A' ، B' ، C' و D' بترتیب، منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D باشند، داریم:

$$(A'B'C'D')=(ABCD)$$

۱۸۳. **قضیه.** هرگاه A' ، B' ، C' و D' بترتیب منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D باشند و اگر داشته باشیم $AC\|BD$ ، خواهیم داشت: $A'C'\|B'D'$

۱۸۴. **قضیه بطلمیوس و بسط آن.** در هر چهارضلعی مجموع حاصلضربهای دو ضلع روبه‌روی هم، بسته به محاطی نبودن یا بودن چهارضلعی، بزرگتر یا برابر حاصلضرب قطرهاست.

۱۸۵. **قضیه.** اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایرهٔ محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد، خطی که از نقطه‌های تماس آن با ضلعها می‌گذرد، از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی (یا دایرهٔ محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

۱۸۶. **قضیه.** اگر دو دایره به زاویهٔ θ با یکدیگر برخورد کرده باشند، منعکسهای آنها نیز به زاویهٔ θ با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اگر دو دایره در نقطهٔ برخوردشان با یکدیگر زاویهٔ قائمه بسازند، یعنی مماسهای بر دو دایره در نقطهٔ برخورد آنها بر هم عمود باشند، می‌گوییم که آن دو دایره بر هم عمودند. از این‌رو حالت ویژهٔ قضیهٔ بالا به‌صورت زیر بیان می‌شود:

منعکسهای دو دایرهٔ عمود بر هم، دو دایرهٔ عمود بر هم می‌باشند.

۱۸۷. **قضیه.** هر دایره که بر دو نقطهٔ متمایز منعکس یکدیگر بگذرد، منعکس خودش می‌باشد و بر دایرهٔ انعکاس ω عمود است.

بر عکس، هر دایره که بر دایرهٔ ω عمود باشد، منعکس خودش است، زیرا اگر آن دایره در T با ω برخورد داشته و A نقطهٔ دلخواهی از آن باشد، خط OA در نقطهٔ دیگر A' با آن برخورد می‌کند، به‌گونه‌ای که داریم:

$$OA\times OA'=\overline{OT}^2=k^2$$

همچنین، هرگاه دو دایرهٔ عمود بر ω با یکدیگر برخورد داشته باشند، نقطه‌های مشترک آنها منعکس یکدیگرند، زیرا اگر A نقطهٔ مشترک این دو دایره باشد، خط OA باید هر یک از دو دایره را در A' منعکس A تلاقی کند، پس هر دو دایره در A' مشترکند.

از آنچه گذشت می‌توانیم انعکاس را برحسب دایره‌های عمود بر هم به‌صورت زیر بیان کنیم :

با انتخاب دایرهٔ ω به‌عنوان دایرهٔ انعکاس، منعکس هر نقطهٔ واقع بر ω خودش واقع است و منعکس هر نقطهٔ P غیرواقع بر ω عبارت است از نقطهٔ دیگر برخورد دو دایره که بر P می‌گذرند و بر ω عمودند.

۱۸۸. **قضیه.** چهار نقطه، سه به سه، چهار دایره را تعیین می‌کنند ؛ اگر از این چهار دایره دو دایره متعامد باشند، آن‌گاه دو دایرهٔ دیگر نیز متعامدند.

۱۸۹. **قضیه فوئرباخ.** به کمک انعکاس ثابت کنید که دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث بر هر یک از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی آن مماس است.

دسته دایره. یک دسته دایره شامل دو دایرهٔ α و β، که آن را دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ می‌نامیم، عبارت است از مجموعهٔ دایره‌هایی که محور اصلی هر دو عدد از آنها همان محور اصلی دو دایرهٔ α و β باشد. بنابراین هر دسته دایره یک محور اصلی مشترک دارد و هر نقطهٔ P متعلق به این محور اصلی نسبت به همهٔ دایره‌های آن دسته دارای یک قوت است. هرگاه این قوت مقدار مثبت باشد، جذر آن طول مماسی را معین می‌کند که از نقطهٔ P بر هر دایرهٔ دلخواه از دسته دایره رسم می‌شود و این مماسها عبارتند از شعاعهای دایره‌ای به مرکز P که بر همهٔ دایره‌های آن دسته دایره عمود است. با توجه به این که نقطهٔ P بر محور اصلی به دلخواه انتخاب شده است، پس دایره‌های بی‌شمار می‌توان رسم کرد که همه بر دایره‌های یک دسته دایره عمود می‌باشند ؛ این دایره‌ها نیز یک دسته دایره تشکیل می‌دهند که اگر γ و δ دو دایرهٔ غیرمشخص از آن باشند آن را با $\gamma\delta$ مشخص می‌کنیم. دو دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ چنانند که هر یک از دایره‌های هر کدام از آنها بر همهٔ دایره‌های دیگری عمود است و به‌علاوه، محور اصلی هردسته عبارت است از خط‌المرکزین دستهٔ دیگر : پس این دو خط، که هر کدام خط‌المرکزین یک دسته دایره و محور اصلی دستهٔ دیگر است، بر هم عمودند. هرگاه این دو خط عمود بر هم را محورهای مختصات بگیریم، در این صورت معادله‌های دو دسته دایره عبارت خواهند بود از :

$$x^{۲}+y^{۲}-۲ax+c=۰\ ,\ \ x^{۲}+y^{۲}-۲by-c=۰$$

که در آنها c مقدار ثابت اما a و b مقدارهای متغیرند. اگر $c>۰$ باشد، دستهٔ نخست دایره‌های بدون نقطه‌های مشترک را در بردارد، در حالی که دایره‌های دستهٔ دیگر در دو نقطهٔ حد به مختصات $(\pm\sqrt{c},۰)$ مشترکند که این دو نقطه را می‌توان دو دایرهٔ به شعاع

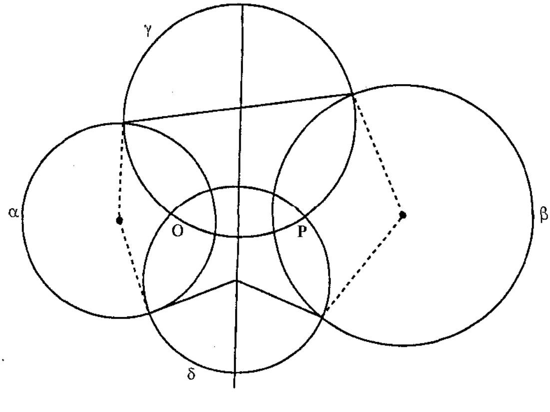
صفر متعلق به دستهٔ نخست دانست که معادله‌های آنها عبارتند از :

$$(x-\sqrt{c})^2+y^2=0 \ , \ (x+\sqrt{c})^2+y^2=0$$

اگر $c>0$ باشد، پس از دوران حول محورهای مختصات به زاویهٔ ۹۰ درجه باز هم همان وضع بالا را خواهیم داشت ؛ به عبارت دیگر دایره‌های دستهٔ نخست همه در دو نقطهٔ حد مشترکند و دایره‌های دستهٔ دیگر نقطهٔ مشترک ندارند. اگر $c=0$ باشد، دو دسته دایره متماس عمود برهم داریم، یعنی همهٔ دایره‌های هر دسته در مبدأ مختصات بترتیب بر یکی از دو محور مماس می‌باشند.

ترتیب دایره‌های هر دسته دایره برحسب ترتیب نقطه‌های برخورد آنها با خطی که بر نقطه‌های حد می‌گذرد، مشخص می‌شود و از این راه معلوم می‌شود که مثلاً از هر سه دایره کدام دایره بین دو دایرهٔ دیگر واقع است. با توجه به عکس مطلب، می‌توان هر دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ را به‌عنوان مجموعه دایره‌هایی که همه بر دو دایرهٔ γ و δ از دسته دایرهٔ $\gamma\delta$ عمودند، تعریف کرد و همچنین دسته دایرهٔ $\gamma\delta$ را مجموعهٔ دایره‌هایی که همه بر دو دایرهٔ متمایز α و β عمود می‌باشند، تعریف نمود. به عبارت دیگر، دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ شامل همهٔ دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ متمایز عمود بر α و β می‌باشد.

هر گاه دو دایرهٔ γ و δ در دو نقطهٔ O و P متقاطع باشند، انعکاس نسبت به هر دایرهٔ به مرکز O دو خط به‌دست می‌دهد که بر P' منعکس نقطهٔ P می‌گذرند. دایره‌های عمود بر این خط دسته دایره‌های هم مرکز به مرکز P' تشکیل می‌دهند و مجموعهٔ قطرهای این دایره‌ها منعکسهای دسته دایرهٔ $\gamma\delta$ می‌باشند. هرگاه دو دایرهٔ بدون نقطهٔ مشترک در نظر گیریم، باز هم همین نتیجه را خواهیم داشت. بسادگی می‌توانیم دو دایرهٔ متقاطع γ و δ را چنان رسم کنیم که هر کدام بر دایره‌های α و β عمود باشند، یعنی دو دایره چنان رسم کنیم که مرکزهای آنها بر محور اصلی دو دایرهٔ α و β واقع باشد، مطابق شکل (الف).



۱۹۰. **قضیه.** به‌وسیلهٔ انعکاس می‌توان دو دایرهٔ غیرمشخص غیرمتقاطع را به دو دایرهٔ هم‌مرکز تبدیل کرد.

۱۹۱. **انحراف انعکاسی.** زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع در واقع انحراف آنها از یکدیگر است و چون در تبدیل انعکاسی، نیمساز زاویه به نیمساز زاویه تبدیل می‌شود، پس هر یک از دو دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔ متقاطع، در واقع انحراف بین آن دو دایره را نصف می‌کند. برای این که این ویژگی را دربارهٔ دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔ غیرمتقاطع تعمیم دهیم، نوعی انحراف را بین آن دو دایره تصور می‌کنیم که دایرهٔ نیمساز آنها، آن را به تساوی بین آن دو بخش می‌کند. برای تحقق چنین تصوری، برای هر دو دایرهٔ α و β انحرافی به‌نام انحراف انعکاسی و با نماد (α,β) در نظر می‌گیریم به‌گونه‌ای که اگر دایرهٔ γ به دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ تعلق داشته و β بین α و γ واقع باشد، رابطهٔ زیر را داشته باشیم:

$$(\alpha,\beta)+(\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma) \qquad (۱)$$

در انعکاسی که مرکزش یکی از نقطه‌های حد دسته دایرهٔ $\alpha\beta$ باشد، سه دایرهٔ مزبور به سه دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای a، b و c تبدیل می‌شوند که یکی از دو رابطهٔ $a>b>c$ یا $a<b<c$ و همچنین رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

با توجه به این که لگاریتم، عمل ضرب را به عمل جمع تبدیل می‌کند، این رابطه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\log\frac{a}{b})+(\log\frac{b}{c})=(\log\frac{a}{c})$$

از این‌رو، انحراف انعکاسی دو دایرهٔ α و β را به‌صورت زیر اختیار می‌کنیم:

$$(\alpha,\beta)=\left|\log\frac{a}{b}\right| \qquad (۲)$$

که اگر $a>b$ باشد، داریم $(\alpha,\beta)=\log\frac{a}{b}$ و اگر $a<b$ باشد، داریم $(\alpha,\beta)=\log\frac{b}{a}$ و به این ترتیب رابطهٔ (۱) برای سه دایرهٔ هم‌مرکز مزبور به‌وضوح محقق می‌باشد.

علامت log که برای خواننده آشنا می‌باشد به معنی لگاریتم به پایهٔ ۱۰ می‌باشد؛ یعنی رابطهٔ $x=\log y$ به معنی $y=۱۰^x$ می‌باشد. پایهٔ ۱۰ در عددنویسی از این جهت به‌کار رفته است که انسان ده انگشت دارد. در ریاضیات لگاریتم را با پایهٔ e به‌کار می‌برند که e عدد متعالی است برابر با:

$$e=\sum_{\circ}^{\infty}\frac{۱}{n!}=۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹\circ\cdots$$

در این صورت $x=\log_e y$ (که آن را به‌صورت x=Lny یا به صورت x=Lgy نیز می‌نویسند و آن را «لگاریتم طبیعی» y می‌نامند) به معنی آن است که :

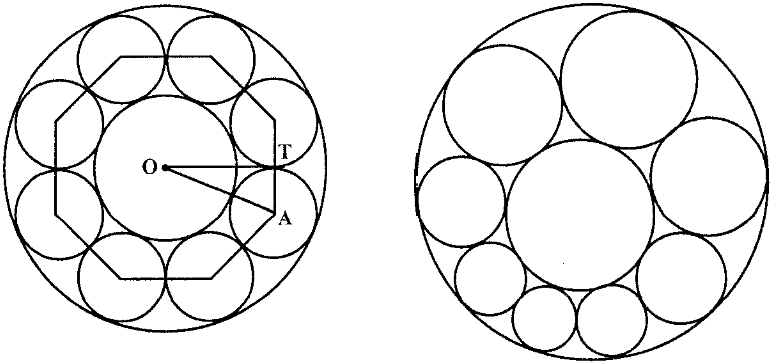
$$y=e^x=\sum_{\circ}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

همچنین لگاریتم طبیعی به‌صورت سری زیر مشخص می‌شود :

$$Lg(۱+t)=t-\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۳}{۳}-\frac{t^۴}{۴}+\cdots$$

بنا به تعریف، انحراف انعکاسی دو دایرهٔ غیرمشخص غیرمتقاطع عبارت است از لگاریتم طبیعی نسبت شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکزی که دو دایرهٔ مفروض را می‌توان به آنها تبدیل کرد (در نسبت شعاعها آن را که بزرگتر است، صورت می‌گیریم).
با توجه به این که دایره‌های هم مرکز مبدلهای دایره‌های متعلق به یک دسته دایره می‌باشند، یک چنین «انحراف» برای دایره‌های آن دسته دایره دارای ویژگی جمعی خواهد بود. به‌ویژه، دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔ غیرمتقاطع انحراف انعکاسی آنها را نصف می‌کند. همچنین با قبول این که دو خط متوازی حالت حدی دو دایرهٔ هم‌مرکز می‌باشند، مجاز خواهیم بود که انحراف انعکاسی دو دایرهٔ مماس بر هم را صفر بگیریم.
اکنون دو دایرهٔ متداخل با مرکزهای متفاوت را در نظر می‌گیریم. مطابق با شکل (الف) می‌توانیم یک سلسله دایره رسم کنیم که به‌طور متوالی بر هم مماس باشند و هر کدام از آنها بر دو دایرهٔ مفروض نیز مماس باشد. در این سلسله دایره‌ها، که تعداد آنها را n می‌گیریم، می‌توانیم هر یک از آنها را اوّلین دایره بگیریم که بر دومین دایره و بر آخرین دایره مماس می‌باشد. شکل حاصل به چیستان اشتینر (Porisme de Steiner) معروف است و بسادگی می‌توان ثابت کرد که انجام‌پذیر است. برای این کار کافی است که دایره‌های متداخل مفروض را به دایره‌های هم‌مرکز تبدیل کنیم که در این صورت سلسله دایره‌های موردنظر به دایره‌هایی برابر با هم تبدیل می‌شوند که مرکزهای آنها رأسهای یک n ضلعی منتظم خواهند بود، مطابق با شکل (ب). اگر A مرکز یکی از این دایره‌های متساوی و T نقطهٔ تماس آن با دایرهٔ متوالیش و O مرکز مشترک مبدلهای دو دایرهٔ مفروض باشد با فرض آن که شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز آن که بزرگتر است a و دیگری b باشد، خواهیم داشت :

$$OA=\frac{a+b}{۲} \quad و \quad AT=\frac{a-b}{۲}$$



(ب) (الف)

اندازهٔ زاویهٔ AOT برابر با $\frac{\pi}{n}$ رادیان و انحراف انعکاسی دو دایره برابر با $\delta = Lg\frac{a}{b}$ است و داریم :

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{AT}{OA} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}-۱}{\frac{a}{b}+۱} = \frac{e^{\delta}-۱}{e^{\delta}+۱}$$

بنابراین چیستان اشتینر در حالتی محقق است که انحراف انعکاسی دو دایرهٔ مفروض در رابطهٔ زیر صدق کند :

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{e^{\delta}-۱}{e^{\delta}+۱}$$

این معادله را برحسب δ حل می‌کنیم :

$$e^{\delta} = \frac{۱+\sin\frac{\pi}{n}}{۱-\sin\frac{\pi}{n}} = \left(\frac{۱+\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{۲} = \left(\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right)^{۲}$$

$$\delta = ۲Lg\left(\sec\frac{\pi}{n}+\tan\frac{\pi}{n}\right)$$

اگر به‌ویژه n=۴ باشد، انحراف انعکاسی دو دایره برابر می‌شود با : $\delta = ۲Lg(\sqrt{۲}+۱)$ و در این حالت شکل نظیر شامل شش دایره است که هر کدام از آنها بر چهار دایرهٔ دیگر

مماس می‌باشد. این شش دایره به سه جفت دایره‌های «متقابل» بخش می‌شوند که هر دایره بر همهٔ دایره‌های دیگر، مگر بر دایرهٔ متقابلش مماس است. انحراف انعکاسی دو دایرهٔ متقابل برابر با $۲\mathrm{Lg}(\sqrt{۲}+۱)$ است در حالی که انحراف انعکاسی هر دو دایرهٔ غیرمتقابل صفر است.

هرگاه سلسله دایره‌های چیستان اشتینر پس از d دور شکل گیرد، در این صورت باید در رابطه‌های گذشته n را با $\frac{n}{d}$ جانشین سازیم.

هر دایره با مرکز و شعاعش مشخص می‌شود و چون در صفحه مرکز دایره با دو مختص معین می‌گردد، پس مجموعهٔ همهٔ دایره‌های صفحهٔ اقلیدسی و منعکسهای آنها با معادله‌ای سه پارامتری مشخص می‌گردند که هر یک از پارامترها می‌تواند تغییراتی تا بینهایت داشته باشد. هرگاه چنین تعبیر کنیم که این سه تاییهای نامحدود از دایره‌های متعلق به صفحهٔ انعکاسی، صفحه‌های فضای سه بعدی را مشخص می‌کنند، می‌توانیم به هندسهٔ نااقلیدسی مشهور گؤس، بولیایی، لوباچفسکی دست یابیم که بین سالهای ۱۸۲۰ و ۱۸۳۰ هر کدام از آنان مستقلاً به کشف آن نایل آمدند. زاویه‌های متشکل از دو دایرهٔ متقاطع در این هندسه به زاویه‌های بین دو صفحه که در یک خط متقاطعند، تبدیل می‌شوند؛ دو دایرهٔ مماس بر هم به دو صفحهٔ متوازی تبدیل می‌شوند؛ انحراف انعکاسی دو دایرهٔ غیرمتقاطع عبارت می‌شود از فاصلهٔ بین دو صفحهٔ غیرمتقاطع که یک عمود مشترک دارند و طول آن فاصلهٔ مزبور را معین می‌کند.

۱۹۲. **تابعهای هذلولوی.** تابعهای مثلثاتی زاویه، زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع را می‌شناسیم. تابعهایی از انحراف انعکاسی دو دایرهٔ غیرمتقاطع تعریف شده است که به مناسبت این که هندسهٔ نااقلیدسی گؤس، بولیایی و لوباچفسکی، به هندسهٔ هذلولوی معروف است آنها را تابعهای هذلولوی (تابعهای هیپربولیک) می‌نامند. این تابعها عبارتند از: سینوس هیپربولیک با نماد sh، کسینوس هیپربولیک با نماد ch، تانژانت هیپربولیک با نماد th و برحسب تابع نمایی e^x طبق فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\ ,\ \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\ ,\ \mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

از این فرمولها رابطه‌های مختلف به‌دست می‌آید، از جمله:

$$\mathrm{ch}x+\mathrm{sh}x=e^x\ ,\ \mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x=e^{-x}$$

اکنون طبق جدول زیر تشابهات موجود بین دو نوع تابعهای مثلثاتی و هذلولوی را

ملاحظه می‌کنیم :

$\sin 0 = 0 \;,\; \cos 0 = 1$	$sh0 = 0 \;,\; ch0 = 1$
$\tan 0 = 0 \;,\; \tan\frac{\pi}{4} = 1$	$th0 = 0 \;,\; th\infty = 1$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$ch^2 x - sh^2 x = 1$
$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$	$\frac{shx}{chx} = thx$
$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$	$sh^2\frac{x}{2} = \frac{chx-1}{2}$
$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$	$ch^2\frac{x}{2} = \frac{chx+1}{2}$
$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$	$th\frac{x}{2} = \frac{chx-1}{shx}$

با توجه به ملاحظات بالا معادلهٔ $\delta = 2Lg(\sec\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n})$ به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$th\frac{\delta}{2} = \sin\frac{\pi}{n} \text{ یا } sh\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\pi}{n} \text{ یا } ch\frac{\delta}{2} = \sec\frac{\pi}{n}$$

شاید خوانندگان به اهمیت نقش ریشهٔ NH_4 آمونیم در شیمی وقوف داشته باشند ؛ این ریشه مانند یک اتم سدیم یا یک اتم پتاسیم عمل می‌کند و در عین حال به اتمهای ازت و هیدروژن قابل تجزیه است. در مقام مقایسه می‌توان گفت که نقش تابعهای هذلولوی در ریاضیات نیز از یک چنین اهمیتی برخوردار است ؛ این تابعها مانند تابعهای مثلثاتی عمل می‌کنند و در عین حال برحسب تابعهای نمایی قابل بیان می‌باشند وانگهی، برای خوانندگانی که با تابعهای با یک متغیر مختلط آشنایی دارند و معنی فرمولهای :

$$i\cos x = chix \;،\; i\sin x = shix$$

را درمی‌یابند دیگر گفتگو از شیمی و مقایسه موردی نخواهد داشت.

از موضوع خارج نشویم و همان بحث مربوط به زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع و انحراف بین آنها را دنبال کنیم. دو دایره به شعاعهای a و b و به طول خط‌المرکزین c را درنظر می‌گیریم. هرگاه هر یک از سه مقدار a، b و c از مجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطهٔ متقاطع می‌باشند که هر یک از این نقطه‌های تقاطع با مرکزهای دو دایره مثلثی تشکیل می‌دهد. زاویهٔ بین دو ضلع a و b از این مثلث همان زاویهٔ بین دو دایره است و مقدار کسینوس آن برابر است با :

$$\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

اگر یکی از سه مقدار a، b و c از مجموع دوتای دیگر بزرگتر باشد، دو دایره متقاطع نیستند و مثلثی تشکیل نمی‌شود. در این حالت سعی می‌کنیم تا تعبیری هندسی برای عبارت بالا، یعنی :

$$\gamma=\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

به‌دست دهیم. هرگاه این دو دایره هم مرکز باشند، یعنی $c=۰$ و AA' و BB' قطرهایی از دو دایره باشند که در امتداد یکدیگرند، رابطهٔ $AB'||A'B$ برقرار می‌باشد، مطابق شکل (الف). انحراف انعکاسی این دو دایره $\delta=Lg\frac{a}{b}$ است و نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' برحسب δ عبارت می‌شود از :

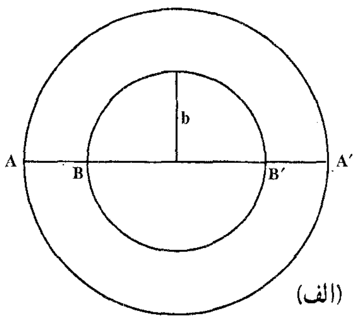
$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}\times\overline{A'B'}}{\overline{AB'}\times\overline{A'B}}=\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}\right)^{۲}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{۲}$$

$$=\left(\frac{e^{\delta}-۱}{e^{\delta}+۱}\right)^{۲}=\frac{e^{۲\delta}+۱-۲e^{\delta}}{e^{۲\delta}+۱+۲e^{\delta}}=\frac{e^{\delta}+e^{-\delta}-۲}{e^{\delta}+e^{-\delta}+۲}$$

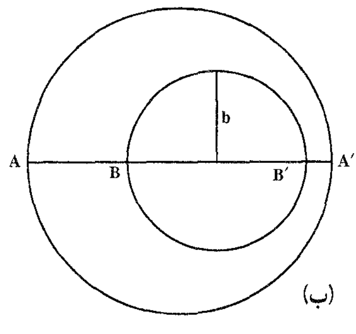
$$=\frac{ch\delta-۱}{ch\delta+۱}$$

هرگاه این دو دایره را منعکسهای دو دایرهٔ غیرمتقاطع به خط‌المرکزین به طول c درنظر بگیریم و شعاعهای آنها a و b و نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین با آنها A، A' ، B و B' باشد (که داشته باشیم $AB'||A'B$)، بنا به قضیه‌های قبلی نسبت ناهمساز و جداسازی محفوظ بوده و باز هم خواهیم داشت :

$$(AA'BB')=\frac{ch\delta-۱}{ch\delta+۱}$$



(الف)



(ب)

که باید آن را برحسب a، b و c به‌دست آوریم. مطابق با شکل (ب)، یعنی در حالت $a-b>c$ داریم :

$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}.\overline{A'B'}}{\overline{AB'}.\overline{A'B}}=\frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)}=\frac{(a-b)^{2}-c^{2}}{(a+b)^{2}-c^{2}}$$

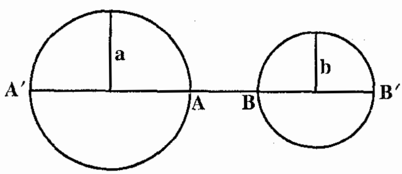
$$=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}-2ab}{a^{2}+b^{2}-c^{2}+2ab}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

بنابراین داریم : $ch\delta=\gamma$. در حالتی که داشته باشیم $a+b<c$، مطابق با شکل (پ) داریم :

$$(AA'BB')=\frac{\overline{AB}.\overline{A'B'}}{\overline{AB'}.\overline{A'B}}=\frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)}=\frac{c^{2}-(a+b)^{2}}{c^{2}-(a-b)^{2}}$$

$$=\frac{-a^{2}-b^{2}+c^{2}-2ab}{-a^{2}-b^{2}+c^{2}+2ab}=\frac{-\gamma-1}{-\gamma+1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

و در نتیجه داریم : $ch\delta=-\gamma$.



(پ)

از آن‌چه گذشت رویهم اثبات قضیهٔ زیر انجام گرفته است :

قضیه. مقدار انحراف انعکاسی δ بین دو دایره غیرمتقاطع به شعاعهای a و b و به‌طول خط‌المرکزین c در رابطهٔ زیر صدق می‌کند :

$$ch\delta=\left|\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}\right|$$

هرگاه دو دایره به طول خط‌المرکزین c چنان باشند که اوّلی به شعاع a بر یک چهارگوشه محیط و دومی به شعاع b در همان چهارگوشه محاط باشد، چنان که می‌دانیم رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{1}{(a-c)^{2}}+\frac{1}{(a+c)^{2}}=\frac{1}{b^{2}}$$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت :

$$\left|a^2+b^2-c^2\right| = b\sqrt{4a^2+b^2}$$

و برای δ انحراف انعکاسی دو دایره خواهیم داشت :

$$\mathrm{ch}\delta = \frac{\left|a^2+b^2-c^2\right|}{2ab} = \frac{\sqrt{4a^2+b^2}}{2a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

و چون داریم $\mathrm{ch}^2\delta = 1+\mathrm{sh}^2\delta$، بنابراین در مورد دو دایرهٔ مزبور داریم :

$$\mathrm{ch}\delta = \frac{b}{2a}$$

یادآوری. منحنی نمایش تابع $y=\mathrm{ch}x$ به زنجیره موسوم است و در واقع شکل زنجیر یا نخی است که دو سرش را گرفته و به حالت آویزان قرار داده باشند.

۱۹۳. **قضیه.** ثابت کنید که یک دسته دایرهٔ هم محور به یک دسته دایرهٔ هم محور منعکس می‌شود.

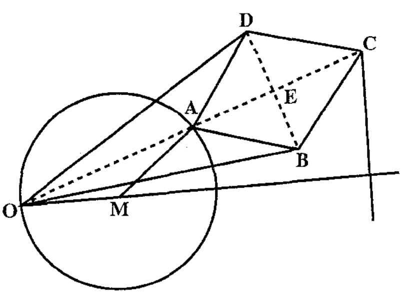
۱۹۴. **قضیه.** دو دایرهٔ منعکس و دایرهٔ انعکاس هم‌محورند.

۱۹۵. **قضیه.** در هر مثلث، دایرهٔ محیطی، دایرهٔ نه نقطه، دایرهٔ قطبی و دایرهٔ محیطی مثلث مماسی هم‌محورند.

۱۹۶. **حجرهٔ پوسُلیه (Paucellier).** فرض کنید ABCD (شکل) یک لوزی متشکل از چهار میلهٔ صلب هم طول لولا شده به یکدیگر باشد و فرض کنید که لولاهای B و D با دو میلهٔ صلب به نقطهٔ ثابت O لولا شده‌اند.

نقطه‌های O، A، C و E، یعنی نقطهٔ وسط BD، روی عمودمنصف BD قرار دارند و داریم :

$$\begin{aligned} OA.OC &= (OE-AE)(OE+AE) = OE^2 - AE^2 \\ &= (OD^2-DE^2)-(AD^2-DE^2) = OD^2 - AD^2 \end{aligned}$$



پس A و C منعکس هم هستند، مرکز دایرهٔ انعکاس نقطهٔ O است و شعاع آن یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که وتر و ضلع قائمهٔ دیگرش دارای طولهای ثابت OD و AD هستند. پس اگر نقطهٔ A را روی یک خم حرکت دهیم، نقطهٔ C روی خم منعکس آن حرکت خواهد کرد.

در حالت خاص، اگر A با یک میلهٔ صلب به نقطهٔ ثابت M متصل باشد و MA=MO، نقطهٔ A روی دایره‌ای که از O می‌گذرد، حرکت می‌کند؛ بنابراین نقطهٔ C روی خط راستی عمود بر MO حرکت می‌کند. این مکانیسم، که حجرهٔ پوسُلیه نامیده می‌شود، حرکت دایره‌ای را به حرکت مستقیم‌الخط تبدیل می‌کند.

نکته. وقتی شکل (F) در یک انعکاس به شکل (F′) تبدیل می‌شود، رابطه‌های موجود در شکل (F) به‌صورتی کم و بیش تغییر یافته، در شکل (F′) ظاهر می‌شود. این خاصیت انعکاس به ما امکان می‌دهد، بدانیم برای این که شکل (F′) دارای ویژگی (P′) باشد، شکل (F) باید کدام ویژگی (P) را داشته باشد و برعکس.

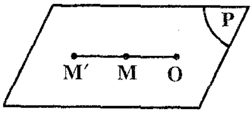
این رابطهٔ بین ویژگیهای دو شکل (F) و (F′) را می‌توان به‌صورت زیر به‌کار برد. برای این که ثابت کنیم شکل (F) ویژگی خاصی دارد، آن را با انعکاسی مناسب به شکل (F′) تبدیل می‌کنیم. غالباً چنین می‌شود که در شکل جدید به آسانی می‌توان یک ویژگی مشاهده کرد که ویژگی متناظرش در شکل (F) همان است که درصدد اثباتش هستیم. این تناظر دو شکل اثبات مطلوب است. مطلب مشابهی در مورد ترسیمهای هندسی صادق است.

۱۹۷. ثابت کنید که اگر قوت انعکاس مثبت باشد، هر دایره که بر دو نقطهٔ منعکس بگذرد بر دایرهٔ انعکاس عمود است.

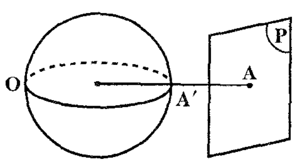
۱۹۸. نشان دهید مماسهایی که از مرکز انعکاس بر یک خم رسم می‌شوند، بر خم منعکس نیز مماسند.

۱۹۹. اگر یک منحنی، منحنی منعکس خود را قطع کند، نقطه‌های تقاطع کجایند؟

انعکاس در فضا. انعکاس در فضا هم مانند انعکاس در صفحه تعریف می‌شود. در مورد انعکاس در فضا داریم:



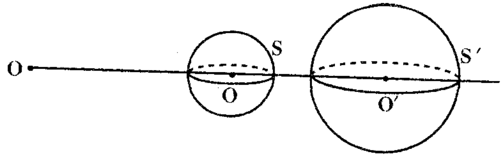
۱. منعکس صفحه‌ای که از قطب انعکاس بگذرد، صفحه‌ای است که بر خود آن صفحه منطبق است.



۲. منعکس صفحه‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، کره‌ای است که بر قطب انعکاس می‌گذرد و بعکس.

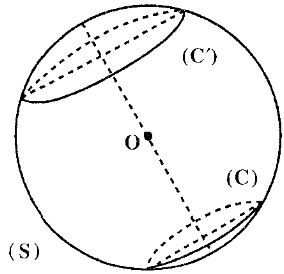
۳. یک صفحه و یک کره را عموماً می‌توان به دو طریق منعکس یکدیگر دانست.

۴. منعکس کرهٔ S که از نقطهٔ O قطب انعکاس نگذشته باشد، کرهٔ S' است. S و S' نسبت به O مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس $\frac{k}{P}$ است. P قوت نقطهٔ O نسبت به کرهٔ S است. مرکز کرهٔ S' پای صفحهٔ قطبی نقطهٔ O نسبت به کرهٔ S است.



۵. دو کره را عموماً می‌توان به دو طریق منعکس یکدیگر دانست.

۶. منعکس دایرهٔ (C) نسبت به نقطهٔ O واقع در خارج صفحهٔ دایره، دایرهٔ (C') است. (C) و (C') بر یک کره قرار دارند.



۷. دو دایره واقع بر یک کره را عموماً به دو طریق می‌توان منعکس یکدیگر دانست.

تصویر جسم نمایی (رسم الجسمی). تصویر مرکزی

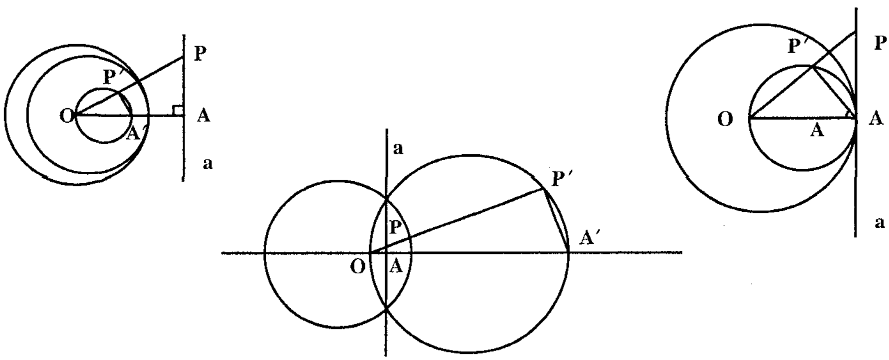
در انعکاس نسبت به دایره ملاحظه کردیم که تنها نقطهٔ O مرکز دایرهٔ انعکاس ω دارای منعکس نمی‌باشد. برای از بین بردن این نارسایی، یعنی برای آن که انعکاس یک تبدیل نقطه به نقطه برای کل نقطه‌های صفحه باشد، با افزودن خط بینهایت (که مبدل انعکاسی نقطهٔ O است) به صفحهٔ اقلیدسی، صفحهٔ انعکاسی را به دست آوردیم. به عبارت دیگر، صفحهٔ اقلیدسی را به صفحهٔ انعکاسی گسترش دادیم.

همچنین چنان که قبلاً دیدیم، در صفحهٔ اقلیدسی تنها نقطه‌ای که قطبی ندارد، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ هادی است. برای از بین بردن این نارسایی، یعنی برای آن که تبدیل قطبی معکوس نیز همهٔ نقطه‌های صفحه را دربرگیرد، خط بینهایت را به صفحهٔ اقلیدسی اضافه کردیم و صفحهٔ تصویری را به دست آوردیم. در این حالت هم صفحهٔ اقلیدسی را به صفحهٔ تصویری گسترش دادیم.

بنابراین دو روش متفاوت اما متشابه وجود دارد که بدان وسیله می‌توان صفحهٔ اقلیدسی را گسترش داد، در این جا نکتهٔ مهمی وجود دارد که خیلی کمتر از آن چه لازم بوده به آن توجه شده است. هرگاه استدلال را نه تنها در صفحه بلکه در فضا تعمیم دهیم و دوگونهٔ بسیار سادهٔ گسترش کره‌روی صفحه را مورد مقایسه قرار دهیم، می‌توانیم به توجیه دقیقتر دو روش گفته شده، دست یابیم.

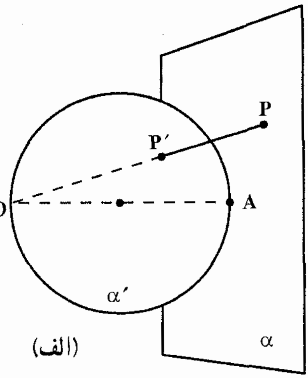
نخست، تعریفی را که قبلاً دربارهٔ انعکاس نسبت به یک دایره به‌کار بردیم، در مورد یک کره تعمیم می‌دهیم: کرهٔ به مرکز O و به شعاع k و نقطهٔ P متمایز از نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم؛ بنا به تعریف، نقطهٔ P' را که بر نیمخط OP قرار داشته و فاصلهٔ آن از O طبق رابطهٔ زیر مشخص می‌شود، منعکس نقطهٔ P می‌نامیم.

$$\overline{OP}.\overline{OP'} = k^{2}$$



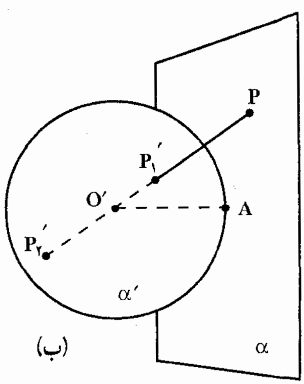
اگر در شکلهای بالا صفحهٔ شکل را متعلق به فضای سه‌بعدی بدانیم و آن را حول خط OA دوران دهیم و درضمن صفحه را کرهٔ به شعاع بینهایت درنظر بگیریم، در این صورت بسادگی می‌توانیم نتیجه بگیریم که انعکاس، هر کره را به کرهٔ دیگر تبدیل می‌کند. به ویژه اگر α صفحه‌ای باشد که در A بر کرهٔ انعکاس ω مماس باشد، منعکس آن کرهٔ α' به قطر OA خواهد بود. از این رو می‌توانیم با واسطهٔ ω بین نقطه‌های صفحهٔ α و نقطه‌های کرهٔ α' تناظری برقرار سازیم: اگر P نقطه‌ای از صفحهٔ α باشد، نقطهٔ P' نظیر آن عبارت است از نقطهٔ تلاقی OP با کرهٔ α' (شکل (الف)). برعکس، نظیر هر نقطهٔ P' از کرهٔ α'، به استثنای O، نقطهٔ P از صفحهٔ α وجود دارد که همان نقطهٔ برخورد OP' با α است. در این جا هم استثنایی وجود دارد که برای برطرف کردن آن، صفحهٔ α را با افزودن یک نقطهٔ بینهایت به آن به صفحهٔ انعکاسی تبدیل می‌کنیم که این یک نقطه وضع P خواهد بود، وقتی که P' روی O واقع باشد.

این روش نمایش کرهٔ α' روی صفحه α به تصویر جسم نمایی موسوم است. با ملاحظهٔ آن که این گونه تصویر شیوهٔ ویژه‌ای از انعکاس است، بسادگی نتیجه می‌گیریم که تصویر هر دایره باز هم یک دایره می‌باشد. منعکس هر کره، یک کره (یا یک صفحه) است و هر دایره فصل مشترک دو کره است؛ بنابراین منعکس هر دایره (به هر وضعی که در فضا واقع باشد و حتی اگر بر کرهٔ α' قرار داشته باشد) یک دایره می‌باشد.



(الف)

برای نمایش کرهٔ α' روی صفحهٔ α مماس بر آن، روش دیگری وجود دارد که تصویر مرکزی نامیده می‌شود. در این روش نقطهٔ دید را مرکز کرهٔ α' اختیار می‌کنند که وسط OA است. هر صفحه‌ای که بر این نقطه بگذرد کرهٔ α' را در یک دایرهٔ عظیمه و صفحهٔ α را در یک خط قطع می‌کند؛ بنابراین هر خط از صفحهٔ α با یک دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' معین می‌شود، همچنین هر نقطه از α با یک جفت نقطه‌های واقع در دو سر یک قطر از کرهٔ α' مشخص می‌گردد، چنان که در شکل (ب) ملاحظه می‌شود، دو نقطهٔ P'_1 و P'_2 از کرهٔ α' نظیر



(ب)

نقطهٔ P از صفحهٔ α می‌باشند. برعکس، هر دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' را، به استثنای دایرهٔ عظیمه‌ای که صفحهٔ آن با α موازی است، که درنظر بگیریم نظیر آن در صفحهٔ α خطی وجود دارد که محل برخورد صفحهٔ آن دایرهٔ عظیمه با صفحهٔ α می‌باشد. در این‌جا هم برای از بین بردن استثنا، با افزودن یک خط بینهایت به صفحهٔ α آن را به‌صورت صفحهٔ تصویری درمی‌آوریم که این خط بینهایت نظیر دایرهٔ عظیمه‌ای از کرهٔ α' است که صفحهٔ آن با صفحهٔ α موازی است. هریک از نقطه‌های این خط ـ نقطه‌های بینهایت ـ نظیر یک جفت نقطهٔ واقع در دو سر قطری از دایرهٔ عظیمهٔ مزبور می‌باشند. هر دو خط از صفحه یک نقطهٔ مشترک دارند و مؤکد آن است که هر دو دایرهٔ عظیمه واقع بر کره در دو نقطه واقع در دو سر یک قطر مشترک خواهند بود، درواقع هر دو صفحه که بر مرکز کره بگذرند، در یک خط متقاطع می‌باشند.

با توجه به آن چه که گفته شد، نتیجه می‌گیریم که هریک از نقطه‌های صفحهٔ تصویری (با درنظر گرفتن نقطهٔ بینهایت) تصویر یک جفت نقطهٔ واقع در دو سر قطری از کره است ؛ از این‌رو با درنظر گرفتن کره به‌صورت مجموعه‌ای از جفت نقطه‌ها می‌توان آن را به صفحهٔ تصویری تبدیل کرد که در این تبدیل هر جفت نقطه از کره به یک نقطه از صفحهٔ تصویری تبدیل می‌شود.

از نظر علمی می‌توان روش تبدیل کره به صفحه را در رسم نقشهٔ جغرافیایی کرهٔ زمین روی یک صفحه به‌کار برد. در این باره هیچ یک از روشهای تصویر جسم‌نمایی و تصویر مرکزی مطلوب واقعی نخواهد بود، اما هریک از آنها دارای امتیازهایی است. روش نخست زاویه‌هایی بین هر دو نیمخط به مبدأ مشترک را محفوظ می‌دارد و درنتیجه به‌عنوان مثال دوره‌های جزیره‌های کوچک تغییر شکل نمی دهند. با استفاده از روش دوم می‌توان کوتاهترین راه بین دو نقطه از کره را به‌صورت خط مستقیم نمایش داد.

قبلاً دیده‌ایم که انعکاس، نسبتهای ناهمساز را محفوظ می‌دارد. این ویژگی در تبدیل قطبی معکوس فقط درمورد نقطه‌های واقع بر یک خط وجود دارد. به عبارت دقیقتر، نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ واقع بر یک خط P برابر است با نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ای که از برخورد قطبیهای نقطه‌های مزبور با هر خط غیر گذرنده بر P، قطب خط p، به‌دست می‌آیند. اثبات این ویژگی طولانی است و متأسفانه در این جا مجال آن وجود ندارد.

خوانندهٔ دقیق که مفاهیم گذشته را درک کرده باشد، توانایی آن را خواهد داشت که بیان اصولی هندسهٔ تصویری را حدس بزند : این‌بار قضیه‌های دزارگ، پاپوس و پاسکال را از نظر کاملاً متفاوتی درخواهد یافت، اما باز هم در آنها دوستان قدیمی را باز خواهد شناخت.

۲.۲. انعکاس در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

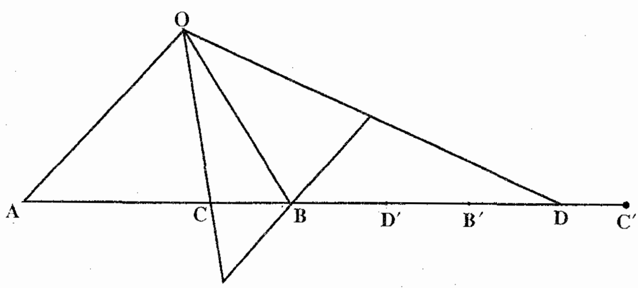
۲۰۰. قطب انعکاس را چگونه باید انتخاب نمود، برای این که منعکسهای سه نقطهٔ مفروض A، B و C رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع باشند؟

۲۰۱. ثابت کنید قطب انعکاس را می‌توان چنان اختیار کرد که هر چهار نقطهٔ دلخواه متمایز را به چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ تبدیل کرد (که ممکن است در حالت خاص چهار نقطهٔ A'، B'، C' و D' بر یک خط راست واقع باشند، اما داشته باشیم: $A'B' = D'C'$ و $A'D' = B'C'$).

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۲. جای نقطه

۲۰۲. چهار نقطهٔ A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. چنانچه A را قطب انعکاس اختیار نماییم، ثابت کنید منعکس نقطهٔ B مزدوج A وسط پاره‌خط واصل بین منعکسهای دو نقطهٔ دیگر واقع است.



۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۰۳. منعکسهای چهار نقطهٔ A، B، C و D که یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند در انعکاسی که قطبش روی خط AB باشد، نیز یک تقسیم توافقی پدید می‌آورند.

۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۲.۲. خطها همرسند

۲۰۴. ثابت کنید منعکسهای یک دسته خط (مجموعهٔ خطهایی که در یک نقطه همرسند) در انعکاسی که قطبش نقطهٔ همرسی دسته خط و قوت انعکاسش مخالف صفر باشد، یک دسته خط است.

۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۲۰۵. سه نقطهٔ ناهمخط P، A، B و نقطهٔ متغیر M، همخط با A و B مفروضند. ثابت کنید زاویهٔ برخورد دو دایرهٔ PAM و PBM ثابت است.

۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط

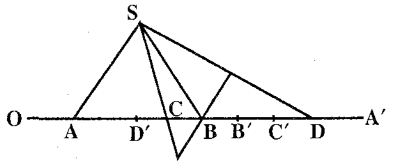
۲۰۶. پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر را در انعکاس (O,۲) به پاره‌خط $A'B'$ تبدیل شده است. طول پاره‌خط $A'B'$ چه‌قدر است در صورتی که $OA = ۸cm$ و $OB = ۶cm$ باشند؟

۲۰۷. اگر فاصلهٔ مرکز انعکاس تا نقطهٔ A برابر $\frac{۹}{۸}$ و شعاع دایرهٔ انعکاس $\frac{۳}{۷}$ باشد، فاصلهٔ مرکز انعکاس تا نقطهٔ A'، منعکس نقطهٔ A چه‌قدر است؟

۲۰۸. شعاع دایرهٔ انعکاس در یک انعکاس برابر $\frac{۹}{۵}$ و فاصلهٔ نقطهٔ منعکس از مرکز انعکاس برابر $\frac{۶}{۷}$ است. فاصلهٔ مرکز انعکاس از نقطهٔ اصلی چه‌قدر است؟

۶.۲.۲. رابطه‌های متری

۲۰۹. منعکسهای چهار نقطهٔ A، B، C و D که تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، نسبت به یک نقطهٔ غیرمشخص (O) واقع بر خط گذرنده بر نقطه‌های مزبور تشکیل یک تقسیم



توافقی می‌دهند، یعنی اگر A' ، B' ، C' و D' منعکسهای آنها و a' ، b' ، c' و d' طول این نقطه‌ها باشند، داریم :

$$۲(a'b'+c'd')=(a'+b')(c'+d')$$

۲۱۰. **رابطهٔ کلی شال.** اگر چهار نقطهٔ A، B، C و D بر روی یک خط مستقیم جهتدار (یک محور) واقع باشند، ثابت کنید که عبارت :

$$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{AD}+\overline{CA}.\overline{BD}$$

همواره صفر است. اگر نقطهٔ D به بینهایت دور منتقل شود، رابطهٔ اختصاصی شال Chasles به‌دست می‌آید.

با انعکاسی به قطب O (بیرون خط مستقیم مفروض) و قوت دلخواهی خط را منعکس می‌کنیم تا نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' به‌دست آیند. رابطه‌های شال چه رابطه‌هایی ایجاد می‌کنند.

۲۱۱. نشان دهید اگر نقطه‌های P و Q با مرکز انعکاس همخط باشند، باز رابطهٔ (f) صادق است.

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۱۲. با فرض این که هر خط را می‌توان حالت خاص دایره دانست، آیا دو خط متقاطع را می‌توان به دو دایرهٔ مماس یا دو دایرهٔ متقاطع تبدیل کرد؟ جواب را برحسب تعداد نقطه‌های مشترک دو خط مفروض تفسیر کنید.

۲۱۳. دو خط راست در نقطه‌ای غیر از مرکز انعکاس متقاطعند. تصویرهای این دو خط تحت انعکاس چیست؟

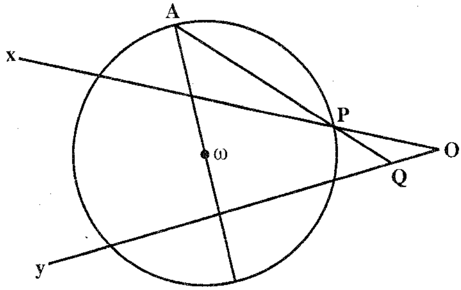
۸.۲.۲. رسم شکلها

۲۱۴. به‌وسیلهٔ انعکاس، سه نقطهٔ مفروض را به سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست تبدیل کنید، به‌طوری که یکی از آنها وسط قطعه خطی باشد که دو نقطهٔ دیگر را به هم وصل می‌کند.

۲۱۵. بر نقطهٔ مفروض A خطی رسم کنید که ضلعهای زاویهٔ مفروض $x\hat{O}y=\alpha$ را در P و Q

قطع کند و داشته باشیم :

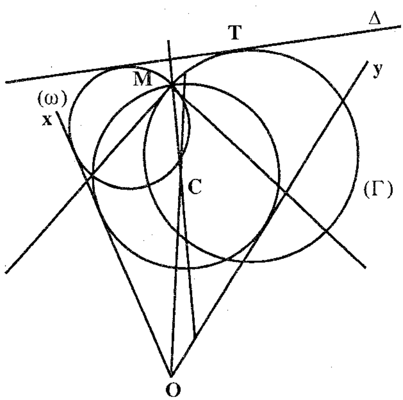
$AP.AQ = a^2$



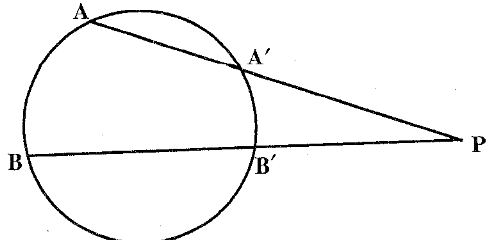
۲۱۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ مفروض A و B بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس باشد. واضح است که A و B باید در یک طرف Δ باشند.

۲۱۷. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و خط مفروض را به زاویهٔ α قطع کند.

۲۱۸. نقطهٔ M در داخل زاویهٔ xOy واقع است. بر M دایره‌ای بگذرانید که بر دو ضلع زاویه مماس شود.



۲۱۹. منعکس نقطه‌ای را از راه ترسیم به‌دست آورید.



۹.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۰. در یک صفحه زاویهٔ XOY به مقدار ثابت α حول O رأس خود دوران می‌کند. مطلوب است تعیین پوش (لفاف) دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل شده از OX و OY و خط مفروض D واقع در صفحه.

۲۲۱. فاصلهٔ مرکز انعکاس تا نقطهٔ اصلی $\frac{۲}{۳}$ و فاصلهٔ نقطهٔ منعکس از مرکز انعکاس، برابر $\frac{۵}{۶}$ است. شعاع دایرهٔ انعکاس چه‌قدر است؟

۲۲۲. چهار نقطه در یک صفحه مفروضند. منعکس هر دستهٔ سه‌تایی را نسبت به نقطهٔ چهارم می‌یابیم، نشان دهید که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.

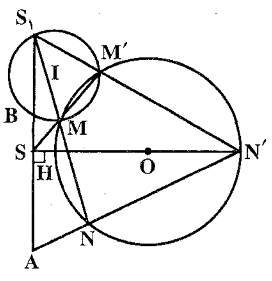
۲۲۳. سه نقطهٔ A، B و C بر یک خط راست قرار دارند. بر A و B و نقطهٔ متغیر E واقع بر عمودمنصف AB، دایره‌ای می‌گذرانیم تا خط CF را در M قطع کند. مکان M چیست؟

۲۲۴. سه نقطهٔ A، B و C مفروضند. مکان قطب انعکاس را چنان تعیین کنید که A'، B' و C' منعکسهای نقطه‌های مفروض رأسهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای به رأس A' باشند.

۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۲۵. نقطه‌های ثابت S و S_1 و عددهای ثابت k و k_1 مفروضند. اگر M' منعکس نقطهٔ غیرمشخص M در انعکاس (S,k) و N و N' بترتیب منعکسهای M و M' در انعکاس (S_1, k_1) باشند، ثابت کنید:

۱. خط NN' از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۲. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی $MM'NN'$ خط مستقیم ثابتی است.

۲۲۶. نقطه‌های A، B و C را به وسیلهٔ انعکاس به نقطه‌های A'، B' و C' به قسمی تبدیل کنید که مثلث $A'B'C'$:

۱. متساوی‌الساقین باشد.

۲. متوازی‌الاضلاع باشد.
۳. در رأس A' قائم‌الزاویه باشد.

۲۲۷. بر روی دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ xOy به‌طور مرتب نقطه‌های A و B را چنان انتخاب می‌کنیم که رابطهٔ:

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{a}$$

که در آن a طول ثابتی است، همواره برقرار باشد:
۱. ثابت کنید که خط AB بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.
۲. اگر C چهارمین رأس مستطیلی باشد که AB قطر آن است و $A'B'$ قرینهٔ AB نسبت به نیمساز خارجی xOy خطی که از C بر $A'B'$ عمود می‌شود، از نقطهٔ ثابتی مرور می‌کند.
۳. دایره‌های به قطرهای OA و OB رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ P تلاقی کنند، مکان نقطهٔ P را تعیین کنید.
۴. ثابت کنید که منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OAB نسبت به قطب O بر سهمی ثابتی مماس است.
۵. ثابت کنید که مماس مشترک دایره‌های قسمت ۳ بر دایرهٔ ثابتی مماس است.

۲۲۸. چهار نقطهٔ A، B، C و D و چهار نقطهٔ A'، B'، C' و D' نسبت به قطب O منعکس یکدیگرند. ثابت کنید که در چهار ضلعیهای $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مجموع زاویه‌های مقابل برابر است، یعنی:

$$\hat{B}+\hat{D}=\hat{B}'+\hat{D}',\quad \hat{A}+\hat{C}=\hat{A}'+\hat{C}'$$

و همچنین عبارتهای

$$\frac{A'B'.D'C'}{A'C'.B'D'},\ \frac{AB.DC}{AC.BD}$$

با هم برابرند، اگر شکل $DABC$ را به قطب D منعکس کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$ و با انعکاس $D'A'B'C'$ با قطب D' مثلث $A'_1B'_1C'_1$ به‌دست می‌آیند. این دو مثلث با هم چگونه‌اند؟

۲.۳. انعکاس در مثلث

۲.۳.۱. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۲۹. دو مثلث ABC و DEF داده شده است. با ترسیمی اجمالی مرکز O و شعاع k از دایرهٔ

انعکاس را به قسمی تعیین کنید که اگر A'، B' و C' منعکسهای A، B و C باشند مثلث $A'B'C'$ با مثلث DEF برابر باشد.

۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۳۰. در صفحهٔ مثلث ABC، نقطه‌ای مانند (O) در نظر می‌گیریم. موربی ضلعهای AB، BC و AC را بترتیب در γ، α و β قطع می‌کند. خطهای $O\alpha$، $O\beta$ و $O\gamma$ دایره‌های OBC، OCA و OBA را در نقطه‌های A'، B' و C' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که چهار نقطهٔ O، A'، B' و C' بر یک دایره قرار دارند.

۳.۳.۲. خطهای: موازی، همرس،...

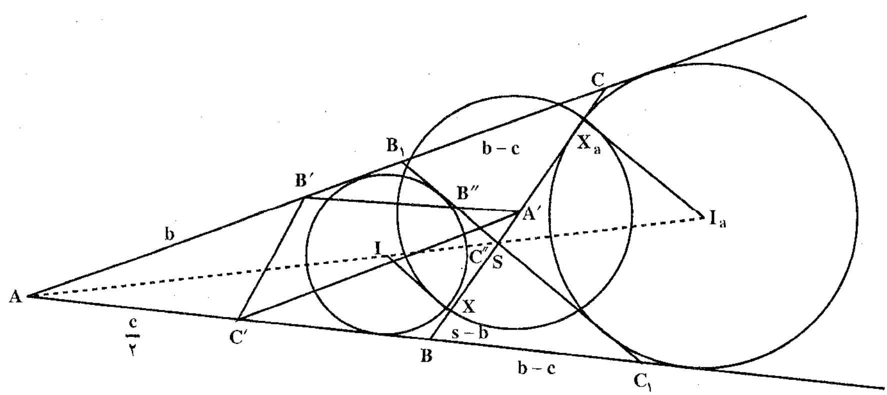
۱.۳.۳.۲. خطها همرسند

۲۳۱. به کمک انعکاس ثابت کنید، ارتفاعهای هر مثلث همرسند.

۴.۳.۲. زاویه

۱.۴.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۲۳۲. با توجه به شکل، ثابت کنید که زاویهٔ B_1C_1 با BC برابر است با $\hat{B}-\hat{C}$.



۲۳۳. شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را R و r می‌نامیم. ثابت کنید که δ، انحراف انعکاسی این دو دایره در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{sh}\frac{\delta}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{r}{R}}$$

۲.۳.۵. پاره‌خط

۲.۳.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۳۴. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC را H و بر روی HA، HB و HC سه نقطهٔ A'، B' و C' را به قسمی تعیین می‌کنیم که:

$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$$

ثابت کنید که H از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

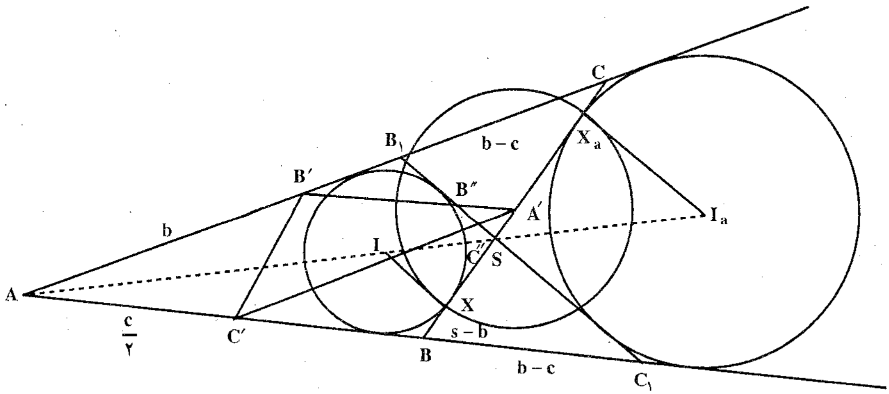
۲.۳.۶. رابطه‌های متری

۲۳۵. در مثلث ABC، رابطهٔ $AB + AC = ۳AM$ (M وسط ضلع BC است) برقرار است. اگر منعکس این مثلث نسبت به قطب انعکاس A و با قوت انعکاس $k \neq ۰$ را پیدا کنیم، رابطهٔ بالا به چه صورت درمی‌آید؟

۲.۳.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۳۶. منعکسهای دو نقطهٔ A و B را نسبت به قطب انعکاس C، A' و B' می‌نامیم. ثابت کنید، منعکس نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC نقطهٔ I' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $CA'B'$ مماس به ضلع $A'B'$ است.

۲۳۷. با توجه به شکل، اگر D پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید که نسبت به دایرهٔ ω نقطه‌های S و D منعکسهای یکدیگرند.



۲۳۸. نشان دهید محور لوموان و دایرهٔ بروکار نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث منعکس یکدیگرند.

۸.۳.۲. رسم شکلها

۲۳۹. مثلث ABC داده شده است. منعکس این مثلث نسبت به محل برخورد میانه‌های آن و با قوت انعکاس $k > 0$ را رسم کنید. شکل حاصل چیست؟

۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۴۰. اگر A' و A''، B' و B''، C' و C'' پای نیمسازهای زاویه‌های A، B و C از مثلث ABC باشند، ثابت کنید دایره‌های به قطرهای $A'A''$، $B'B''$ و $C'C''$ دو نقطهٔ مشترک دارند و دو به دو یکدیگر را تحت زاویهٔ $120°$ قطع می‌کنند (دایره‌های آپولونیوس).

۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۴۱. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را (O) می‌نامیم. A'، B' و C' قرینه‌های رأسهای مثلث را نسبت به O، A''، B'' و C'' قرینه‌های رأسها را نسبت به عمودمنصفهای

ضلعهای مثلث به‌دست آورید. ثابت کنید:
اولاً. دایره‌های محیطی مثلث $OA'A''$، $OB'B''$ و $OC'C''$ نقطهٔ مشترک دیگری مانند I دارند.
ثانیاً. اگر رأس A بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC تغییر نماید و B و C ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ I.

۲۴۲. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ اگر D نقطه‌ای از قاعدهٔ BC باشد، رابطهٔ زیر محقق است:

$$AB^۲ = AD^۲ + BD.DC$$

و اگر $BC^۲ + ۲AD^۲ = ۴AB^۲$ باشد، زاویهٔ AD و BC برابر $۴۵°$ می‌باشد. به‌طورکلی اگر رابطهٔ $BC^۲ + kAD^۲ = ۴AB^۲$ صادق باشد، (k عددی مثبت یا منفی) امکان صحت آن را بحث کنید. در صورت امکان زاویهٔ AD را با قاعدهٔ BC مشخص سازید. اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC رأسهای A و B (طرفین یک ساق) ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ D از قاعدهٔ BC به قسمی که اولاً. BD.BC ثابت بماند و ثانیاً. همان مکان به فرض این که BD.DC، ثابت بماند.

۲۴۳. از رأسهای A، B و C یک مثلث مفروض بترتیب خطهای D_A، D_B و D_C را طوری رسم می‌کنیم که سه زاویهٔ (BC, D_A)، (CA, D_B) و (AB, D_C) با $k\pi$ تقریب برابر α باشند. فرض می‌کنیم $C'B'A'$ مثلث حاصل از این خطها و $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ مثلث نظیر $\alpha = ۰$ باشد.

۱. مکان نقطه‌های $A'_\circ$، $B'_\circ$ و $C'_\circ$ را وقتی که α تغییر می‌کند، به‌دست آورید. ثابت کنید که $A'B'C'$ با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه مساوی $۲\cos\alpha$ می‌باشد.
۲. ثابت کنید، برای یک مقدار معین α با یک تشابه می‌توان از مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ به مثلث $A'B'C'$ رسید که مرکز آن (یا نقطهٔ مضاعف) و در عین حال محل تلاقی ارتفاعهای H مثلث ABC و نیز مرکز دایرهٔ $A'B'C'$ است.
۳. ثابت کنید خطهای واصل بین وسطهای ضلعهای $A'B'C'$ به‌ازای جمیع مقادیر α از نقطه‌های ثابت می‌گذرند.
۴. ثابت کنید، از مثلث ABC به $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ با یک تجانس و از $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ به $A'B'C'$ با تشابهی که در قسمت ۲ ذکر شد، می‌توان رسید. ثابت کنید که برای یک مقدار مفروض α مثلث $A'B'C'$ را از ABC با تشابهی که نقطهٔ مضاعف S آن را تعیین خواهد کرد، می‌توان به‌دست آورد. مطلوب است مکان S وقتی α تغییر کند.

۵. فرض می‌کنیم A'' ، B'' و C'' منعکسهای A' ، B' و C' در انعکاس به قطب H و قوت HA'^{2} باشند. مطلوب است پوش ضلعهای مثلث $A''B''C''$.

۲۴۴. نقطهٔ P در سطح مثلث ABC مفروض است. خطهای PA، PB و PC را رسم می‌کنیم سپس خطهای PA' ، PB' و PC' را چنان رسم می‌کنیم که هر یک قرینهٔ نظیر خود نسبت به نیمساز زاویهٔ رأس مشترک باشد. ثابت کنید که خطهای اخیر در نقطه‌ای مانند P' متقاطع می‌باشند که آن را اصطلاحاً منعکس متحدالزوایای نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC می‌نامند.

ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث پدر نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC همان دایرهٔ محیطی مثلث پدر نقطهٔ P نسبت به ABC می‌باشد. اگر نقطهٔ P بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، نقطهٔ P' کجا خواهد بود؟

۲۴۵. الف. ثابت کنید که منعکس دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC نسبت به دایرهٔ محاطی داخلی (I)، به‌عنوان دایرهٔ انعکاس، دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث XYZ است. X، Y و Z نقطه‌های تماس دایرهٔ (I) با ضلعهای مثلث ABC هستند.

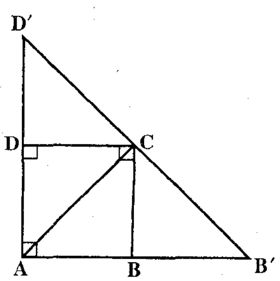
ب. با استفاده از انعکاس رابطهٔ اویلر، $d^{2} = R^{2} - 2Rr$ را ثابت کنید.

ج. عبارتهای مشابه مربوط به دایره‌های محاطی خارجی را بیان و آنها را با استفاده از انعکاس ثابت کنید.

۴.۲. انعکاس در چندضلعی

۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۴۶. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. قطر AC را رسم کرده و خطی در C بر AC عمود رسم می‌کنیم تا امتداد ضلعهای AB و AD را در نقطه‌های B' و D' قطع کند. در چه انعکاسی نقطه‌های B' ، C و D' منعکسهای رأسهای B، C و D می‌باشند.



۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

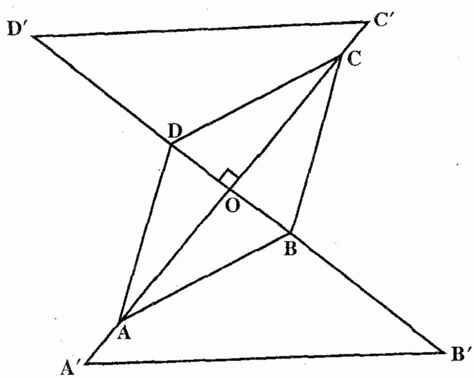
۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند

۲۴۷. چهارضلعی محاطی $ABCD$ داده شده است. منعکسهای نقطه‌های B، C و D را نسبت به قطب انعکاس A و با قوت انعکاس k ($k>0, k>AC^2$) به‌دست می‌آوریم، بترتیب B'، C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید، این سه نقطه همخطند.

۳.۴.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۲. خطها موازی‌اند

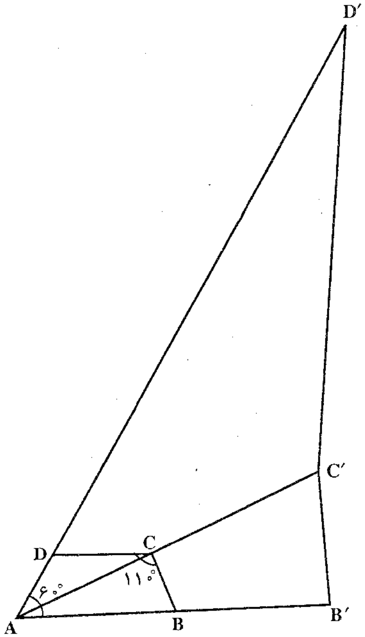
۲۴۸. نقطهٔ برخورد قطرهای لوزی $ABCD$ را O می‌نامیم. منعکسهای رأس A، B، C و D نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس k ($k>OC^2$) را بترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید که $A'B' \| C'D'$ است.



۴.۴.۲. زاویه

۱.۴.۴.۲. اندازهٔ زاویه

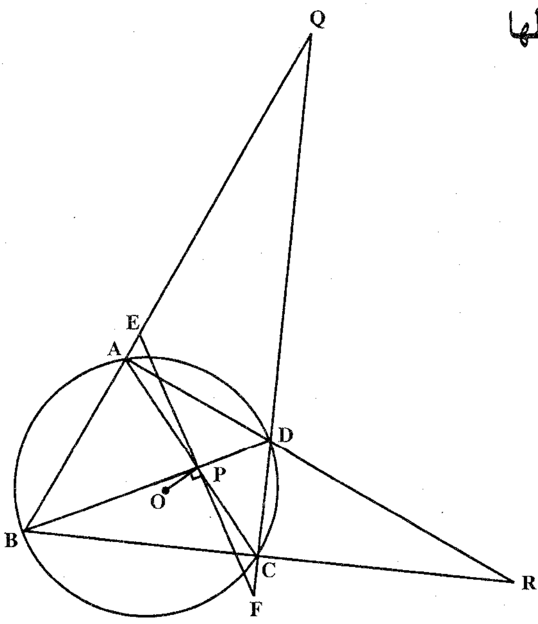
۲۴۹. در ذوزنقهٔ $ABCD$ ($AB \| CD$)، $\hat{A}=60^\circ$ و $\hat{C}=110^\circ$ است. منعکس رأسهای B، C و D را نسبت به قطب انعکاس A و با قوت انعکاس $k\ (k > 0, k > AC^2)$ به‌دست می‌آوریم. اندازهٔ زاویهٔ محدب $B'C'D'$ را تعیین کنید.



۵.۴.۲. پاره‌خط

۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۵۰. چهارضلعی ABCD محاط در دایرهٔ O داده شده است. نقطهٔ برخورد دو قطر آن را P می‌نامیم و در این نقطه خطی بر OP عمود رسم می‌کنیم تا خطهای AC و BD را در E و F قطع کند. ثابت کنید که $PE = PF$ است.



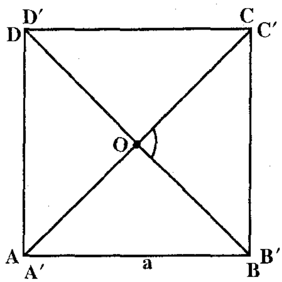
۶.۴.۲. رابطه‌های متری

۲۵۱. چهارضلعی ABCD مفروض است. اگر دایره‌های محیطی دو مثلث ABC و ADC بر هم عمود باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و CBD بر هم عمود خواهند بود و مجموع مربعات حاصلضربهای ضلعهای روبه رو، مساوی است با مربع حاصلضرب دو قطر.

۲۵۲. با استفاده از انعکاس، اثبات بسیار سادهٔ قضیهٔ: بین فاصله‌های چهار نقطهٔ A، B، C و D از یکدیگر رابطهٔ $AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$ برقرار است؛ تساوی وقتی برقرار است که $AC \| BD$، را بیان کنید.

۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۵۳. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. محل برخورد قطرهای آن را O می‌نامیم. ثابت کنید، منعکسهای رأسهای A، B، C و D نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس $\frac{a^2}{2}$ بر خود این نقطه‌ها منطبقند.



۸.۴.۲. رسم شکلها

۲۵۴. در یک متوازی‌الاضلاع یک لوزی به مساحت $2k^2$ محاط کنید.

۲۵۵. نقطهٔ K را در درون مربع ABCD انتخاب کنید. از رأسهای A، B، C و D بترتیب، بر خطهای راست BK، CK، DK و AK عمودهایی رسم کنید. ثابت کنید، این خطهای راست عمود، از یک نقطه می‌گذرند.

۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۶. ثابت کنید که اگر در یک چهارضلعی، حاصلضرب دو قطر، مساوی با مجموع حاصلضربهای ضلعهای متقابل باشد، چهارضلعی محاطی است (عکس قضیهٔ بطلمیوس).

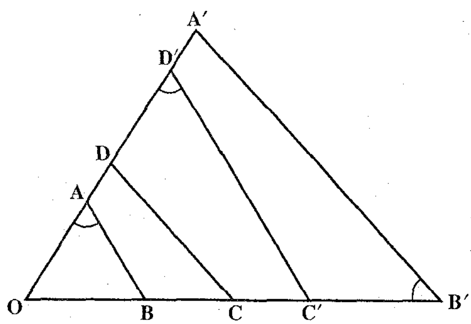
فرض: $BD.AC = BC.AD + AB.DC$

حکم: ABCD چهارضلعی محاطی است.

۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۵۷. چهارضلعی محاطی ABCD داده شده است. نقطهٔ برخورد ضلعهای AD و BC را O می‌نامیم و منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D را نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس بترتیب A'، B'، C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید:

۱. نقطه‌های A'، D'، A، D و O همچنین B'، C'، C، B و O همخطند.



۲. $AB \| C'D'$ و $CD \| A'B'$ است.

۳. چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است.

۵.۲. انعکاس در دایره

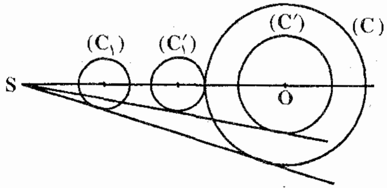
۱.۵.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۵۸. انعکاسی بیابید که سه دایرهٔ مفروض با مرکزهای ناهمخط را به سه دایره که مرکزهایشان روی خط مفروضی باشند، تبدیل کند.

۲۵۹. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایرهٔ (C) و (C') به دو دایرهٔ متساوی تبدیل شوند.

۲۶۰. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایرهٔ C و C' به دو دایرهٔ متحدالمرکز تبدیل شوند.

۲۶۱. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایرهٔ متحدالمرکز به دو دایرهٔ مساوی تبدیل شوند.



۲۶۲. انعکاسی بیابید که سه دایرهٔ مفروض را به خودشان منعکس کند.

۲۶۳. مرکز انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که سه دایرهٔ مفروض به سه دایرهٔ متساوی تبدیل شوند.

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۶۴. ثابت کنید که در چیستان اشتینر، نقطه‌های تماس دایره‌های متوالی بر دایرهٔ نیمساز دو دایرهٔ مفروض واقعند (در واقع دایرهٔ نیمساز، یا دایره‌های نیمساز، دو دایرهٔ دلخواه α و β را می‌توان مکان هندسی نقطهٔ P دانست که این نقطهٔ P نقطهٔ تماس دو دایره‌ای است که هر کدام از آنها بر دایره‌های α و β نیز مماسند).

۲.۵.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۶۵. قطبهای محور اصلی دو دایره نسبت به هر یک از آنها، خط واصل بین دو مرکز تجانس دو دایره را به توافق تقسیم می‌کنند.

۲.۵.۲.۳. نقطه‌ها غیرمتناظرند

۲۶۶. از نقطهٔ I واقع بر محور اصلی دو دایره، دو مماس بر دو دایره، رسم می‌کنیم. ثابت کنید، نقطه‌های تماس، نقطه‌های غیرمتناظر می‌باشند.

۲.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۲.۵.۳.۱. خطها بر هم عمودند

۲۶۷. یکی از ضلعهای یک مثلث مزودج نسبت به یک دایره، خط بینهایت است. دو ضلع دیگر این مثلث چگونه‌اند؟

۲.۵.۴. زاویه

۲.۵.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۲۶۸. خطی به فاصلهٔ p از مرکز دایرهٔ به شعاع b واقع است. هرگاه $p < b$ باشد، خط با دایره، یک زاویهٔ δ می‌سازد که ثابت کنید $\cos\delta = \pm\frac{p}{b}$ ؛ اگر $p > b$ باشد. ثابت کنید که انحراف انعکاسی بین خط و دایره از فرمول $\mathrm{ch}\delta = \frac{p}{b}$ به‌دست می‌آید.

۲۶۹. ثابت کنید که انحراف انعکاسی بین دایره‌های سدی (Soddy) در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{ch}\frac{\delta}{۲} = ۲$$

۲۷۰. ثابت کنید که معادلهٔ $\delta = ۲\mathrm{Lg}(\sec\frac{\pi}{۵} + \tan\frac{\pi}{n})$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta = ۲\mathrm{Lg}\tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۲n})$$

۲۷۱. دایره‌های به معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 - 2ax + d^2 = 0 \ , \ a > d > 0$$

$$x^2 + y^2 - 2bx + d^2 = 0 \ , \ b > d > 0$$

و فرض می‌کنیم $\text{th}\alpha = \frac{d}{a}$ و $\text{th}\beta = \frac{d}{b}$. ثابت کنید که انحراف انعکاسی این دایره‌ها برابر است با: $|\alpha - \beta|$.

۲۷۲. اگر دایرهٔ متغیر (γ) همواره بر دو دایرهٔ مفروض (C) و (C') به یک طریق مماس باشد، ثابت کنید همواره دایرهٔ ثابت (C'') را که متعلق به دستگاه دایره‌های (C) و (C') است، به یک زاویه قطع می‌کند.

۲.۵.۵. پاره‌خط

۲.۵.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۷۳. دایرهٔ O به قطر AB و خط Δ عمود بر این قطر مفروض است. دایرهٔ دیگری به مرکز A دایرهٔ O را در C و خط Δ را در D' قطع می‌کند. خط AC دایرهٔ Δ را در C' و خط AD' دایرهٔ O را در D قطع می‌کند. ثابت کنید: $CC' = DD'$.

۲.۵.۶. رابطه‌های متری

۲۷۴. نسبت به دایرهٔ انعکاس ω به مرکز O و به شعاع k دایرهٔ a به دایرهٔ a' تبدیل شده است. بین قوتهای O نسبت به دایره‌های a و a' چه رابطه‌ای برقرار است؟

۲۷۵. دایرهٔ انعکاس ω و نقطهٔ متغیر P را واقع بر آن و نقطهٔ دلخواه A را در خارج آن در نظر بگیرید، ثابت کنید که نسبت $\frac{PA}{PA'}$ مقدار ثابت است. برعکس، اگر دو نقطهٔ B و C بر AA' واقع باشند که یکی از آنها بین A و A' و دیگری در خارج AA' باشد و نسبتهای فاصله‌های آنها از A و A' با هم برابر و مخالف با یک باشند، ثابت کنید که دایرهٔ به قطر BC مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌های آنها از A و A' با آن نسبتها برابر است (این مکان هندسی را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند).

۲۷۶. برای این که خط مستقیم AB بر دایرهٔ (C) مماس باشد. لازم و کافی است که یکی از سه مقدار AB ، $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ مساوی مجموع دو مقدار دیگر گردد (α و β قوتهای نقطه‌های A و B نسبت به دایرهٔ (C) می‌باشند).

۲۷۷. برای این که دو دایرهٔ (Γ) و (Γ') برهم مماس شوند، لازم و کافی است یکی از سه مقدار $BC\sqrt{\alpha}$ ، $CA\sqrt{\beta}$ و $AB\sqrt{\gamma}$ مساوی مجموع دو مقدار دیگر باشد، A، B و C سه نقطهٔ غیر مشخص از دایره‌اند، به قسمی که هریک از آنها در خارج دایرهٔ دیگر اختیار شود و α ، β و γ قوتهای این نقطه‌ها نسبت به دایرهٔ دیگر می‌باشند.

۲۷۸. در انعکاس به مرکز O و به قوت k نقطه‌های A و A' و دایره‌های (C) و (C') منعکس یکدیگرند. اگر α و α' بترتیب قوتهای نقطه‌های A و A' نسبت به دو دایرهٔ (C) و (C') و ω قوت نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ (C) باشد، ثابت کنید :

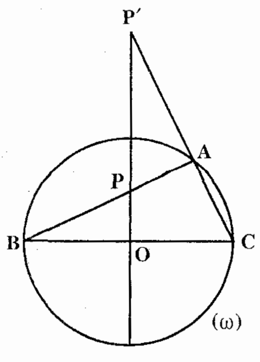
$$\alpha' = \overline{OA'^{۲}} \times \frac{\alpha}{\omega}$$

۲۷۹. می‌دانیم که دو دایرهٔ متخارج دارای چهار مماس مشترک می‌باشند. اگر δ انحراف انعکاسی این دو دایره باشد، ثابت کنید که نسبت بین طولهای بزرگترین و کوچکترین مماس مشترک برابر است با $\mathrm{th}\frac{\delta}{۲}$.

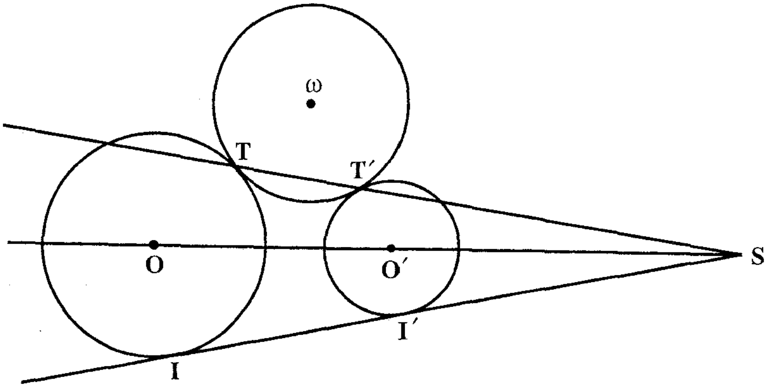
۲۸۰. دو دایره نسبت به هم مماس داخلی‌اند. ثابت کنید که شعاع دایرهٔ نیمساز آنها برابر است با واسطهٔ توافقی شعاعهای آن دو دایره.

۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند

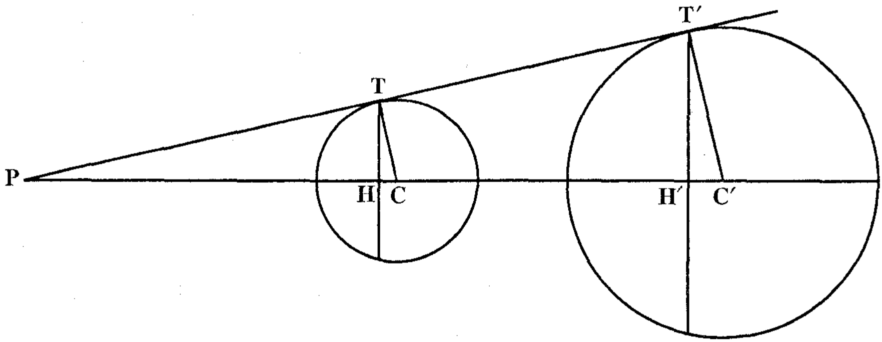
۲۸۱. بر دایرهٔ انعکاس ω نقطهٔ A و قطر BC از آن را درنظر می‌گیریم. قطر عمود بر BC با خطهای AB و AC در P و P' برخورد می کند. ثابت کنید که P' منعکس P است.



۲۸۲. اگر دایره‌ای بر دو دایرهٔ مفروض مماس باشد، نقطه‌های تماس متناظرند (یعنی خط واصل بین نقطه‌های تماس از قطب انعکاس دو دایره می‌گذرد).



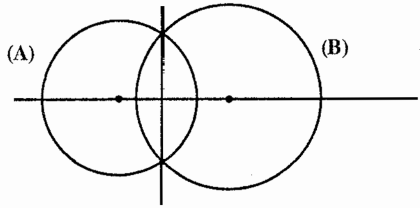
۲۸۳. پای قطبی قطب انعکاس دو دایره نسبت به یکی از آنها، منعکس مرکز دایرهٔ دیگری است.



۲۸۴. نشان دهید دایرهٔ تشابه و محور اصلی دو دایره نسبت به دایرهٔ پاد متشابه آن دو دایره، منعکس یکدیگرند.

۲۸۵. دایرهٔ انعکاس ω به مرکز O و دایرهٔ α گذرنده بر O مفروض است. ثابت کنید که خط منعکس دایرهٔ α عبارت است از محور اصلی دو دایرهٔ ω و α .

۲۸۶. اگر دایرهٔ (B) از مرکز دایرهٔ (A) بگذرد، نشان دهید که محور اصلی (A)و (B) ، منعکس (B) ، در انعکاس با دایرهٔ انعکاس (A) است.



۲۸۷. اگر دو دایره نسبت به مرکز دلخواهی منعکس شوند، خط‌المرکزین آنها به چه شکلی منعکس می‌شود؟

۲۸۸. ثابت کنید که منعکس محور اصلی دو دایرهٔ متساوی غیرمشخص، دایرهٔ نیمساز آنها است.

۲۸۹. دو دسته دایرهٔ مماس عمود بر هم را درنظر بگیرید. هرگاه نقطهٔ مشترک همهٔ این دایره‌ها مرکز دایرهٔ انعکاس انتخاب شود و دایره‌ها نسبت به این دایرهٔ انعکاس تبدیل گردند، نتیجهٔ حاصل چه خواهد بود؟

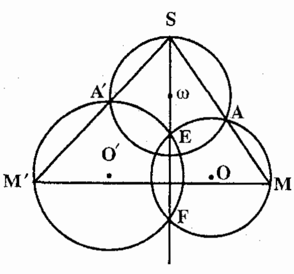
۲۹۰. منعکس یک دسته دایره، یک دسته دایره و یا استثنائاً یک دسته خط است.

۲۹۱. منعکس دایره‌ای خارج دایرهٔ انعکاس (O,K) و هم‌مرکز با آن چه شکلی است؟

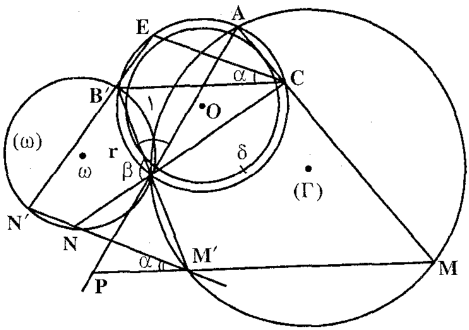
۲۹۲. هرگاه دو دایرهٔ عمود بر دایرهٔ انعکاس یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، این دو نقطه، نقطه‌های منعکسند.

۸.۵.۲.رسم شکلها

۲۹۳. دایره‌های (O) و ('O) و نقطه‌های A و 'A بترتیب بر آنها مفروضند. نقطهٔ S واقع بر محور اصلی دو دایره را به A و 'A وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره‌های (O) و ('O) را بترتیب در نقطه‌های دیگر M و 'M قطع کند. نقطهٔ S را بر محور اصلی به نحوی انتخاب کنید که 'MM بر محور اصلی دو دایره عمود باشد.



۲۹۴. در دایرهٔ مفروض مثلثی محاط کنید که ضلعهایش بر سه نقطهٔ معین M، N و P بگذرد.



۲۹۵. منعکس دایرهٔ (C) را با قطب انعکاس P و قوت انعکاس a رسم کنید.

۲۹۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ A و B بگذرد و بر دایرهٔ مفروض (C)مماس باشد.

۲۹۷. دایره‌ای رسم کنید که بر نقطهٔ مفروض M بگذرد و بر دو دایرهٔ مفروض (C)و (D) مماس شود.

۲۹۸. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض (C) ، (C_1) و (C_2) مماس باشد.

۲۹۹. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و به خط Δ مماس شود و بر دایرهٔ معلوم (C) عمود شود.

۳۰۰. دو دایرهٔ غیر متقاطع داده شده است. دایرهٔ نیمساز آنها را رسم کنید.

۳۰۱. اوّلاً سه دایرهٔ متساوی رسم کنید که برهم مماس باشند. ثانیاً سه دایرهٔ دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هرکدام از آنها بر دو دایره از مجموعهٔ اوّل نیز مماس باشند. انحرافهای انعکاسی بین این شش دایره را تعیین کنید.

۳۰۲. ثابت کنید که بر دو نقطهٔ واقع در داخل یک دایره بیش از دو دایره نمی‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند.

۳۰۳. دو دایره برروی یک کره مفروضند. به وسیلهٔ انعکاس آنها را به دو دایرهٔ متحدالمرکز واقع در یک صفحه تبدیل کنید.

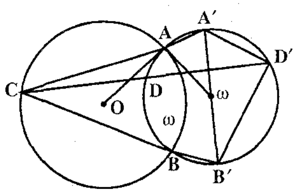
۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۴. مماس متغیری بر دایره‌ای به مرکز A، دایرهٔ دیگری به مرکز B را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرهٔ BCD بر یک دایرهٔ ثابت مماس است.

۳۰۵. دایرهٔ نه نقطهٔ هر مثلث بر دایرهٔ محاطی داخلی و سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث مماس است. (فویرباخ)

۳۰۶. دایرهٔ دلخواه a، نقطهٔ P واقع بر a و نقطهٔ O غیر واقع بر a داده شده است. ثابت کنید که فقط یک دایره وجود دارد که بر O بگذرد و بر a در P مماس باشد.

۳۰۷. ثابت کنید دایره‌های (γ) عمود بر دایرهٔ (C) و مماس بر دایرهٔ (C') مماس بر یک دایرهٔ دیگر نیز می‌باشند.



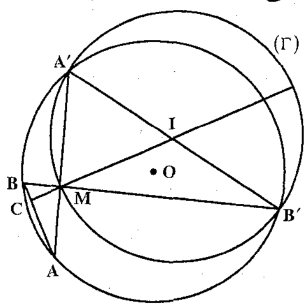
۳۰۸. دو دایرهٔ عمود برهم (O) و (ω) که در نقطه‌های A و B متقاطعند، مفروضند. نقطه‌های C و D را بترتیب بر دایره‌های (O) و (ω) انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، دایره‌های ACD و BCD برهم عمودند.

۳۰۹. سه نقطهٔ جدا از هم به فاصله‌های a، b و c از یکدیگر واقعند (ممکن است بر یک خط واقع باشند یا این که مثلثی را تشکیل دهند). به مرکزهای این سه نقطه سه دایرهٔ دوبه‌دو برهم مماس می‌توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s-a$ ، $s-b$ و $s-c$ می‌باشد که s نصف مجموع $a+b+c$ است. ثابت کنید که دو دایرهٔ مماس بر این هر سه دایره وجود دارد که باهم نقطهٔ مشترک ندارند. این دو دایره را دایره‌های سدی (Soddy) می‌نامند.

۳۱۰. دایرهٔ (O) و نقطه‌های ثابت A و B بر آن مفروض است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P قطب انعکاس، به‌طوری که اگر A' و B' بترتیب، منعکسهای A و B و (O') منعکس دایرهٔ (O) باشد. خط $A'B'$ قطری از دایرهٔ (O') باشد.

۳۱۱. دو نقطهٔ P'_1 و P'_2 واقع در دو سر قطری متغیر از کرهٔ α' را درنظر می‌گیریم و تصویرهای جسم نمایی آنها را روی صفحهٔ α با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. نوع تبدیلی را بیابید که به وسیلهٔ آن بتوان در صفحهٔ α از P_1 به P_2 رسید.

۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی



۳۱۲. ازنقطهٔ M در داخل دایره‌ای دو وتر AA' و BB' را عمود برهم رسم کنید و عمود MC را بر AB فرود آورید.

الف. ثابت کنید که MC از I وسط $A'B'$ می‌گذرد.

ب. ثابت کنید $MC.MI$ مقداری ثابت است.

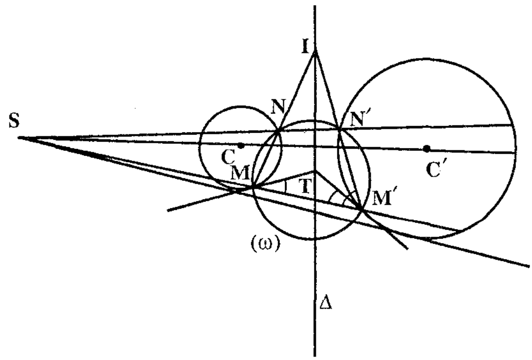
۳۱۳. دایرهٔ به مرکز O و نقطهٔ ثابت P مفروض است. AOB قطر متغیری از دایره است. PA و PB دایره را در نقطه‌های دیگر A' و B' قطع می‌کنند. ثابت کنید:
۱. دایرهٔ (PAB) از نقطهٔ ثابت دیگری غیر از P می‌گذرد.
۲. دایرهٔ $(PA'C')$ نیز از نقطهٔ ثابت دیگری غیر از P می‌گذرد.
۳. خط $A'B'$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳۱۴. نقطهٔ A در سطح دایرهٔ O ثابت است. وترهای BC به طول ثابت a برروی دایرهٔ O می‌لغزند. خطهای AB و AC به‌طور مرتب دایره را در نقطه‌های B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید که:
۱. دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ بر دایرهٔ ثابتی مماس است. اگر BC به قطر بدل شود، این دایره‌ها بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.
۲. مکان هندسی مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$ را تعیین کنید.
۳. مکان هندسی مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC را تعیین کنید.

هندسهٔ دوایر، دکتر محسن هشترودی

۳۱۵. در یک صفحه، دایرهٔ مفروض (C) به مرکز O و به شعاع R را درنظر می‌گیریم:
۱. M یک نقطهٔ غیرمشخص از صفحه و (D) خط گذرنده بر M در این صفحه می‌باشد. دایره‌های α و β گذرنده بر M و مماس بر (D) و (C)را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم A و B، نقطه‌های تماس این دایره‌ها با (C) باشد (با استفاده از انعکاس به قطب M). ثابت کنید دایرهٔ (ABM) بر خط (D) و دایرهٔ (C) عمود است.
۲. فرض می‌کنیم M' نقطهٔ متقاطر M روی دایرهٔ (ABM) باشد. ثابت کنید مکان M' وقتی که (D) حول نقطهٔ M که ثابت فرض می‌شود، دوران کند خط (m) می‌باشد. در همین شرایط مکان هندسی فصل مشترک مماسهای در Aو B بر دایرهٔ (C) را به دست آورید.
۳. فرض می‌کنیم (D) یک خط ثابت و فاصلهٔ آن از O یعنی $HO = \frac{R}{۲}$ و M یک نقطه از خط (D) با فاصلهٔ $HM = x$ از H باشد. مطلوب است برحسب R و x شعاع دایره‌های (α) و (β) و تعیین تغییرات نسبت شعاعهای این دایره‌ها وقتی که M خط D را می‌پیماید. مکان مرکزهای دایره‌های (α) و (β) را به دست آورید.

۳۱۶. اگر M و N دو نقطه از دایرهٔ (C) و M' و N' نقطه‌های متناظر آنها از دایرهٔ (C') در انعکاس به قطب (O) باشند، ثابت کنید:

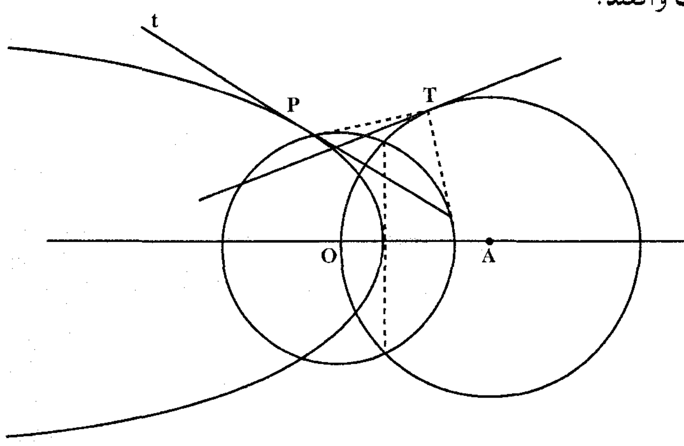


۱. نقطهٔ تقاطع وترهای MN و M′N′ روی محور اصلی دو دایره است.
۲. نقطهٔ تقاطع مماسهای بر دو دایره در دو نقطهٔ متناظر بر محور اصلی دو دایره واقع است.

۳۱۷. دایره‌های (O) و (O′) که در نقطه های A و B متقاطعند، مفروضند. نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایرهٔ (O) را به A و B وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (O′) را در A′ و B′ قطع کند.
۱. ثابت کنید MO بر A′B′ عمود است.
۲. پوش A′B′ را تعیین کنید.

۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی

۳۱۸. ثابت کنید که تصویرهای قائم کانون سهمی بر مماسهای رسم شده بر آن، روی یک خط راست واقعند.



بخش ۳

• تبدیلهای آفین و تصویری

۳.۱. تعریف و قضیه

۳.۲. تبدیلهای آفین و تصویری در: نقطه، خط، زاویه

۳.۲.۱. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۳.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
۳.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند
۳.۲.۲.۲. تعیین نقطه‌های برخورد
۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۳.۲.۳.۱. خطها موازی‌اند
۳.۲.۴. زاویه
۳.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه
۳.۲.۵. پاره‌خط
۳.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۳.۲.۶. رابطه‌های متری
۳.۲.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند
۳.۲.۸. رسم شکلها
۳.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث

۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
۱.۲.۳.۳.نقطه‌ها همخطند
۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۱.۳.۳.۳. خطها همرسند
۴.۳.۳. زاویه
۱.۴.۳.۳.اندازهٔ زاویه
۵.۳.۳. پاره‌خط
۱.۵.۳.۳. اندازهٔ پاره خط
۶.۳.۳. رابطه‌های متری
۷.۳.۳.ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند
۸.۳.۳. رسم شکلها
۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۴.۳. تبدیلهای آفین و تصویری درچندضلعیها

۱.۴.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
۱.۲.۴.۳.نقطه‌ها همخطند
۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۱.۳.۴.۳. خطها همرسند
۴.۴.۳. زاویه
۱.۴.۴.۳.اندازهٔ زاویه
۵.۴.۳. پاره‌خط
۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۶.۴.۳. رابطه‌های متری
۷.۴.۳.ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۳.۵. تبدیلهای آفین و تصویری در دایره

۳.۶. تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۳.۶.۵. پاره‌خط

۳.۶.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۳.۶.۶. رابطه‌های متری

۳.۶.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۳.۶.۸. رسم شکلها

بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

۱.۳. تعریف و قضیه

تبدیلهای آفین و تصویری که در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند، عبارتند از:

۱. تصویر قائم روی خط و صفحه

۲. تصویر موازی یک صفحه بر یک صفحه. تبدیلهای آفین صفحه

۳. تصویر مرکزی یک صفحه بر یک صفحه. تبدیل تصویری یک صفحه

۴. تصویر مرکزی که یک دایره را به دایره بدل می‌کند. تصویر گنجنگاشتی

۵. تبدیل تصویر یک خط و یک دایره. ترسیم به کمک ستاره

در این قسمت تعریفها و قضیه‌های مربوط به این تبدیلها را می‌آوریم.

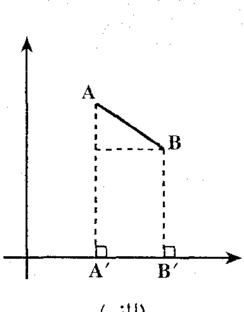
هندسهٔ تصویری

(از دیدگاه جیمز. ار. اسمارت. نویسندهٔ کتاب هندسه‌های جدید)

هندسهٔ تصویری یکی از هندسه‌های جدیدی است که در اوایل قرن نوزدهم معرفی شده است. هندسهٔ اقلیدسی، به این مفهوم که گروه حرکتهای اقلیدسی، زیرگروه گروه تبدیلات تصویری‌اند، حالت خاصی از هندسهٔ تصویری است.

هندسهٔ تصویری شامل مفاهیم ریاضی بسیاری است، که در هندسه‌های قبلی با آنها مواجه نشده‌ایم، و کاربردهای عملی‌ای بیش از حد انتظار دارد.

در هندسهٔ تحلیلی معمولی، از تصویر یک قطعه خط بر یک محور استفاده می‌شود، و چنان که در شکل (الف) به تصویر آمده، AB بر محور xها با وارد کردن عمودهای AA' و BB' بر آن تصویر شده است، و گرچه AB و $A'B'$ معمولاً مساوی نیستند، بین نقطه‌های آنها به وسیلهٔ تصویر ذکر شده، تناظری یک‌به یک به‌وجود آمده است.

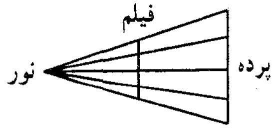


(الف)

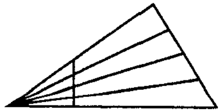
کاربرد آشنای دیگری از کلمهٔ تصویر (Projection)، در رابطه با پروژکتور تصویر متحرک است. در این مورد، چنان که در شکل (ب. ۱) مطرح شده، تصویر فیلم بر پرده مصور می‌شود. باید آشکار باشد که تصویرهای فیلم و پرده، از آن‌جا که شکل، هنگامی که اندازه به طور یکنواخت تغییر می‌کند، بدون تغییر می‌ماند، مشابه یکدیگرند. اما، در شکل (ب.۲) تصویر پرده به علت این‌که فیلم و پرده موازی نیستند، تغییر شکل داده است. در این حالت، دیگر

شکلها متشابه نیستند، و آشکار نیست که کدام یک از خواص آنها بی‌تغییر باقی می‌ماند. حتی نسبتهای فاصله‌ها نیز دیگر بدون تغییر نیستند.

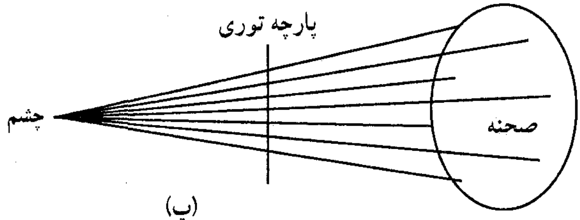
شکل (ب) نیز می‌تواند رابطهٔ بین تصویر و مفهوم پرسپکتیو را چنان که در هنر نقاشی به کار می‌رود، مطرح کند. بسیاری از نقاشان معروف، بخصوص طی دورهٔ رنسانس، کوشیدند که از مفاهیم ریاضی، برای کمک به خلق، توهم عمق (Illusion of Depth) در نقاشی استفاده کنند.



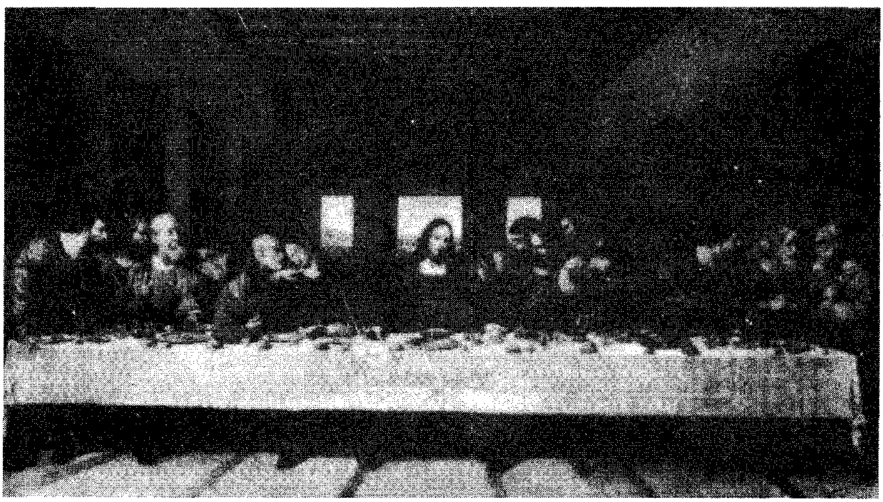
(ب ۱)



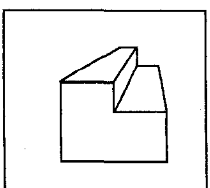
(ب ۲)



(پ)

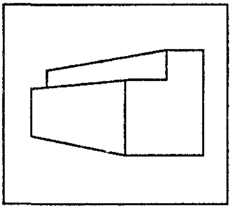


(ت)



(ث ۱)

یکی از تدبیرهای به‌کار رفته در این مورد، چنان که در شکل (پ) به تصویر آمده، تصویر جای اشیای موجود در نقاشی به این صورت که توسط نقطهٔ تقاطع پارچه‌ای توری و خط از چشم به شیء مشخص



(ث ۲)

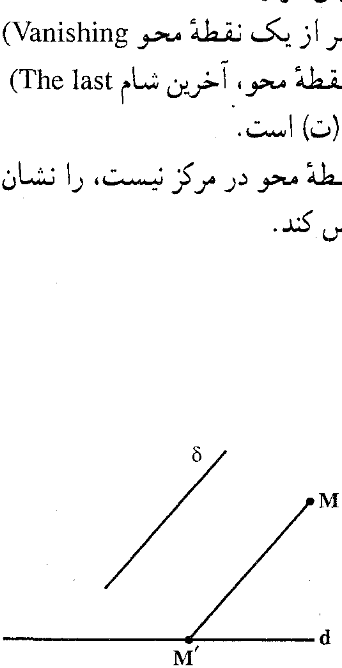
شده باشند، بود.

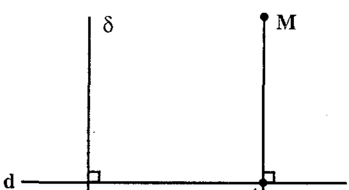
دومین استفاده از هندسه در به دست دادن توهم عمق در نقاشی، پرسپکتیو خطی (Linear Perspective) نام دارد. این مفهوم شامل این اصل که خطهای موازی چون توسط ناظر دریافت شوند، همرس به نظر می‌رسند، است؛ به عنوان مثال ریلهای راه‌آهن، ملاقی در خط افق به چشم می‌خورند. نقاشان این معنی را با همرس قرار دادن خطهای متوازی (در صحنهٔ واقعی) در یک یا بیشتر از یک نقطهٔ محو (Vanishing point) به کار می‌برند. یکی از مثالهای مشهور نقاشی با نقطهٔ محو، آخرین شام (The last supper) اثر لئوناردو داوینچی، نشان داده شده در شکل (ت) است.

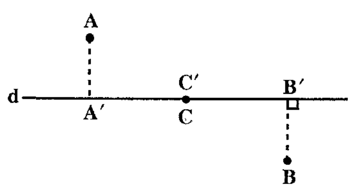
شکلهای (ث.۱) و (ث.۲)، طرحهایی که در آنها نقطهٔ محو در مرکز نیست، را نشان می‌دهد. بیننده باید بتواند در هر حالت این نقطه را مشخص کند.

۱. تصویر قائم روی خط و صفحه

تصویر روی خط به موازات امتداد معین

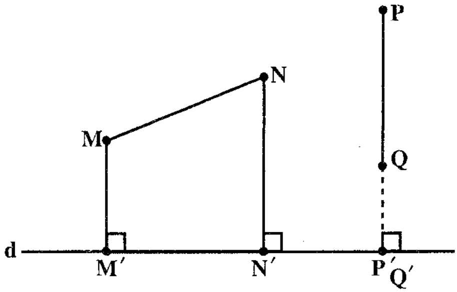






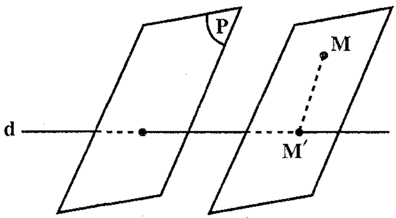
خط ثابت d و امتداد δ غیر موازی با d را درنظر می‌گیریم. تبدیل T را چنان تعریف می‌کنیم که هر نقطهٔ Mرا به نقطهٔ برخورد خط d با خطی که از M موازی امتداد δ رسم شده است، تبدیل کند. اگر این نقطه را M' بنامیم، M' را تصویر نقطهٔ M روی خط d به موازات امتداد δ می‌نامند. اگر امتداد δ بر خط d عمود باشد، M'، تصویر قائم نقطهٔ M روی خط d نامیده می‌شود. تبدیل T را تصویر به موازات امتداد معین (یا تصویر قائم) بر خط d می‌نامیم. بعد از این فرض می‌کنیم که امتداد δ بر خط d عمود باشد، بنابراین منظور از تصویر روی خط، تصویر قائم است. شکل، تبدیل‌یافته‌های نقطه‌های A، B و C را که بترتیب با A'، B' و C' نمایش داده شده‌اند، نشان می‌دهد.

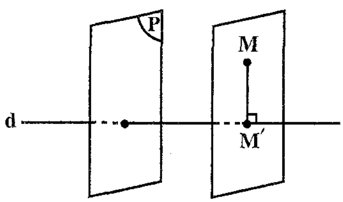
بسادگی دیده می‌شود که اگر پاره‌خط MN بر خط

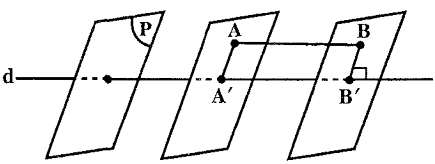


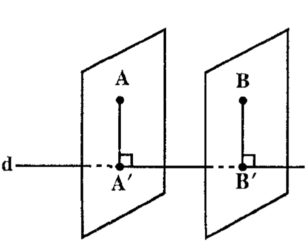
d عمود نباشد، تصویر MN بر خط d (یعنی تبدیل یافتهٔ پاره‌خط MN) همان پاره‌خط $M'N'$ است که M' تصویر M و N' تصویر N می‌باشند. چنانچه خط PQ بر d عمود باشد، تصویر PQ بر d یک نقطه خواهد شد (شکل).

تصویر روی خط به موازات یک صفحه





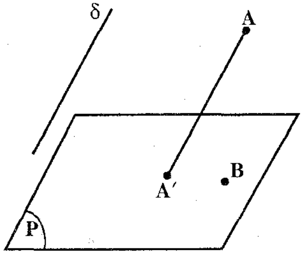




خط d و صفحهٔ P غیرموازی با d را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ M صفحه‌ای موازی صفحهٔ P رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ M' قطع کند. M' را تصویر نقطهٔ M روی خط d به موازات صفحهٔ P می‌نامیم ؛ اگر صفحهٔ P بر خط d عمود باشد، تصویر قائم نامیده می‌شود.

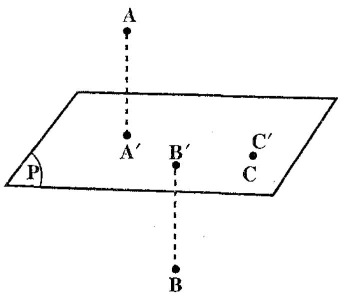
برای پیدا کردن تصویر پاره خط AB بر خط d، به موازات صفحهٔ P، از A و B دو صفحهٔ موازی صفحهٔ P رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌های A' و B' قطع کنند. پاره‌خط $A'B'$ تصویر پاره‌خط AB به موازات صفحهٔ P روی خط d است. برای تعیین تصویر قائم پاره‌خط AB بر خط d از A و B دو صفحه بر خط d عمود می‌کنیم. A' و B' نقطه‌های برخورد این دو صفحه با خط d، تصویرهای قائم دو نقطهٔ A و B بر خط d می‌باشند. بدیهی است AB و d می‌توانند متنافر باشند.

تصویر روی صفحه به موازات امتداد معین



صفحهٔ P و امتداد δ غیرموازی با صفحهٔ P را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A خطی موازی امتداد δ رسم می‌کنیم تا صفحهٔ P را در نقطهٔ A' قطع کند. A' را تصویر نقطهٔ A روی صفحهٔ P به موازات امتداد δ می‌نامند. اگر نقطه روی صفحه باشد، تصویرش برخودش منطبق است، مانند نقطهٔ B در شکل.

تصویر قائم روی صفحه



صفحهٔ ثابت P را درنظر می‌گیریم، تبدیل T را در فضای سه‌بعدی چنان تعریف می‌کنیم که هر نقطهٔ دلخواه M از فضا را به نقطهٔ برخورد صفحهٔ P با خطی که از M می‌گذرد و بر P عمود است، تبدیل کند. این تبدیل را تصویر بر صفحه (یا دقیقتر بگوییم، تصویر قائم بر صفحه) می‌نامیم. در شکل تبدیل یافته‌های نقطه‌های A، B و C بترتیب با A' ، B' و C' نمایش داده شده‌اند.

۳۱۹. قضیه. اگر خط δ بر صفحه P عمود نباشد، تصویر δ بر P یک خط راست است.

۳۲۰. قضیه. اگر دو خط باهم موازی باشند، ولی بر صفحهٔ P عمود نباشند، تصویرهای آنها بر صفحهٔ P باهم موازی یا بر هم منطبقند.

۳۲۱. قضیه. تصویرهای دو پاره‌خط متوازی که بر صفحه تصویر عمود نیستند، با آن پاره‌خطها متناسبند.

تصویر زاویهٔ قائمه بر صفحه

تصویر هر زاویه بر هر صفحهٔ موازی با صفحهٔ آن زاویه، با خود زاویه مساوی است (چرا؟). و در سایر حالتها، ممکن است کوچکتر یا بزرگتر از آن باشد.

تصویر (قائم) زاویهٔ قائمه بر یک صفحه در حالت خاصی ممکن است زاویهٔ قائمه باشد. در این بخش حالتی را که تصویر زاویهٔ قائمه بر صفحهٔ ناموازی با صفحه آن، زاویهٔ قائمه است بررسی می‌کنیم.

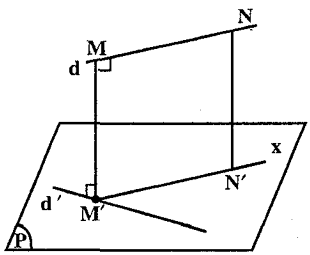
۳۲۲. قضیه. تصویر زاویهٔ قائمه بر صفحه‌ای که با یک ضلع آن موازی و بر ضلع دیگر آن عمود نباشد، یک زاویهٔ قائمه است.

۳۲۳. هرگاه تصویرهای دو خط بر یک صفحه عمود برهم باشند و یکی از آنها دو خط با صفحهٔ تصویر موازی باشد، آن دو خط بر یکدیگر عمودند.

۳۲۴. قضیه. هرگاه تصویر زاویهٔ قائمه‌ای بر یک صفحه زاویهٔ قائمه باشد، دست‌کم یکی از ضلعهای آن زاویه با صفحهٔ تصویر موازی است.

۳۲۵. عمود مشترک دو خط متنافر. تعریف. عمود مشترک دو خط متنافر پاره‌خطی است که بر هر دو خط عمود باشد و دوسر آن بر دو خط مزبور واقع باشند.

برای مشخص کردن عمود مشترک دو خط متنافر به طریق زیر عمل می‌شود:



اگر d و ′d را دو خط متنافر و پاره‌خط ′MM را عمود مشترک آن دو فرض کنیم (شکل) و از نقطهٔ ′M خط M′x را موازی d درنظر بگیریم، دو خط ′d و M′x صفحه‌ای مانند P مشخص می‌کنند. M′x تصویر خط d بر این صفحه است (چرا؟)؛ بنابراین تصویر هر نقطهٔ N از خط d بر صفحهٔ P روی خط M′x واقع است. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر بر خط ′d صفحهٔ P را موازی خط d مرور دهیم و نقطهٔ ′N تصویر نقطهٔ غیرمشخص N از خط d را بر صفحهٔ P تعیین کنیم، و از نقطهٔ ′N خطی موازی d رسم کنیم، این خط با ′d در نقطهٔ ′M تلاقی می‌کند و عمودی که از نقطهٔ ′M بر صفحهٔ P اخراج شود، خط d را در نقطهٔ M قطع می‌کند و ′MM عمود مشترک دو خط داده شده است.

طول پاره‌خط ′MM (عمود مشترک دو خط متنافر d و ′d) را که کوتاهترین پاره‌خط متکی بر d و ′d است، فاصلهٔ دو خط متنافر d و ′d می‌نامند.

۲. تصویر موازی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیلهای آفین صفحه

گیریم π و π' دو صفحهٔ متمایز (موازی یا متقاطع) و خط a امتدادی غیر موازی با این دو صفحه باشند. منظور از تصویر موازی π بر π' در امتداد a، نگاشتی است از π بر π' که به هر نقطهٔ P از π، یک نقطهٔ ′P از π' را به‌گونه‌ای مربوط کند که خط ′PP به موازات

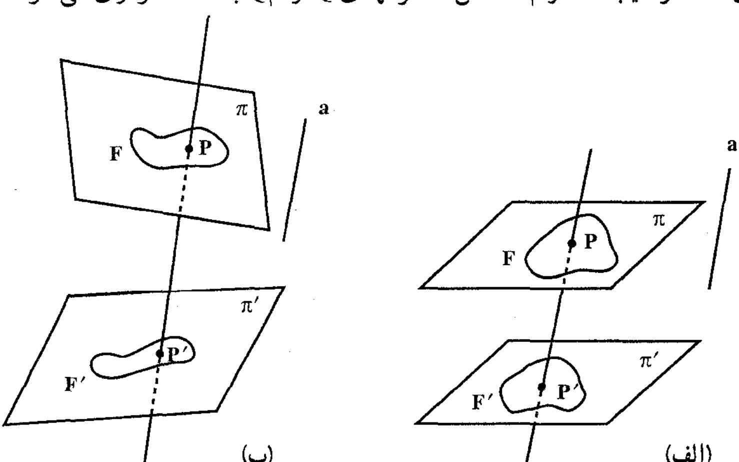
a باشد. (شکلهای (الف) و (ب)) این نگاشت هر شکل F از صفحهٔ π را به شکلی مانند F' در π' بدل می‌کند. نگارهٔ (سایه یا تصویر) یک پنجره بر کف اتاق بر اثر تابش نور خورشید (شکل پ) می‌تواند به عنوان نتیجهٔ یک تصویر موازی انگاشته شود.

هرگاه صفحه‌های π و π' موازی باشند، تصویر موازی، یک شکل واقع در صفحهٔ π را، به شکلی قابل انطباق با آن در π' بدل می‌کند (در این حال تصویر موازی به یک انتقال در امتداد خط a در فضا بدل می‌شود؛ (شکل (الف))) اگر صفحات π و π' موازی نباشند، تصویر موازی، شکل اصلی شکلها را، بیقواره می‌کند (شکل ب)؛ (توجه خواننده را به بیقوارگی سایه‌های اجسام به هنگام طلوع و غروب خورشید جلب می‌کنیم).

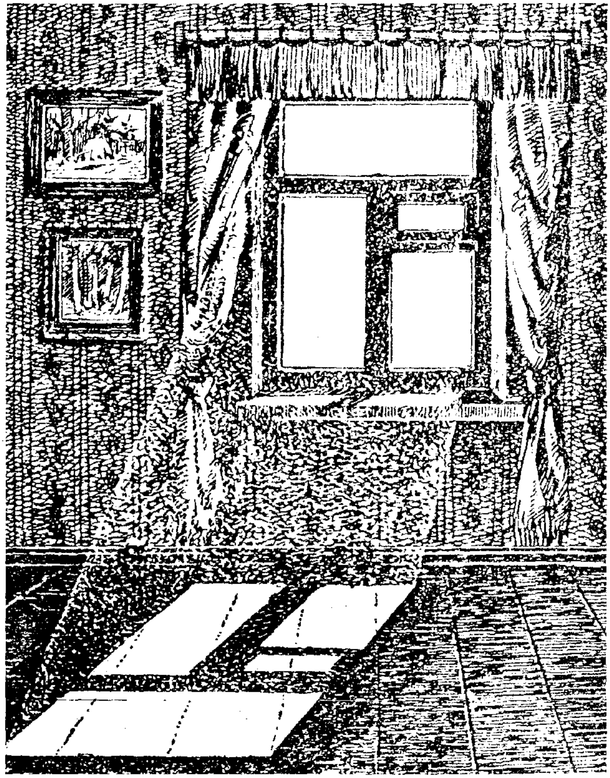
اغلب می‌توان با انتخاب تصویر موازی مناسب و درنظر گرفتن نگارهٔ (تصویر) پیکربندیها بر اثر آن، حل مسأله‌های هندسی را ساده کرد. این بخش به این روش حل مسأله‌ها تخصیص داده شده است. ولی، ابتدا باید ویژگیهای بنیادی تصویر موازی را بررسی کنیم.

الف) در تصویر موازی، خطهای صفحهٔ π بر خطهای صفحهٔ π' نگاشته می‌شوند. زیرا خطهای موازی با a که از نقطه‌های یک خط l از صفحهٔ π رسم شوند، یک صفحهٔ Q (گذرنده بر l و موازی با a) تشکیل می‌دهند. در نتیجه نگارهٔ l بر اثر تصویر موازی، خط l' فصل مشترک صفحهٔ Q با π خواهد بود (شکل ت). بعکس، هرخط در π'، نگارهٔ خطی از صفحهٔ π است.

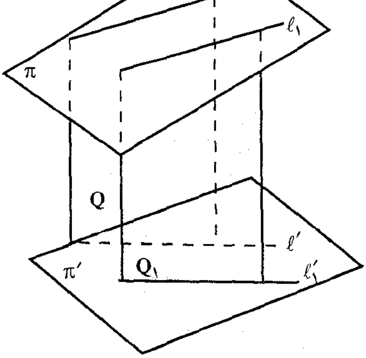
ب) در تصویر موازی، خطهای موازی، به خطهای موازی بدل می‌شوند. زیرا هرگاه l و l_1 دو خط موازی واقع در صفحهٔ π باشند، صفحه‌های Q و Q_1 موازی با a و گذرنده بر l و l_1 موازی‌اند. در نتیجه l' و l'_1 فصل مشترکهای Q و Q_1 با π'، موازی می‌شوند (شکل ث).



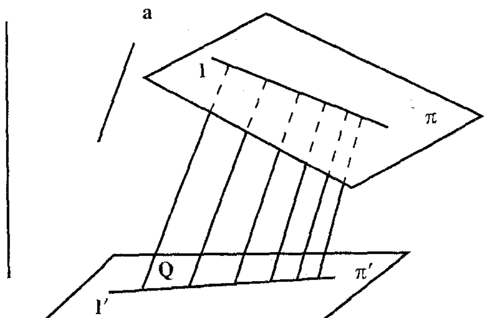
(ب)　　　　(الف)



(پ)

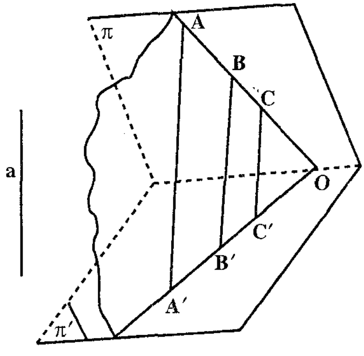


(ث)

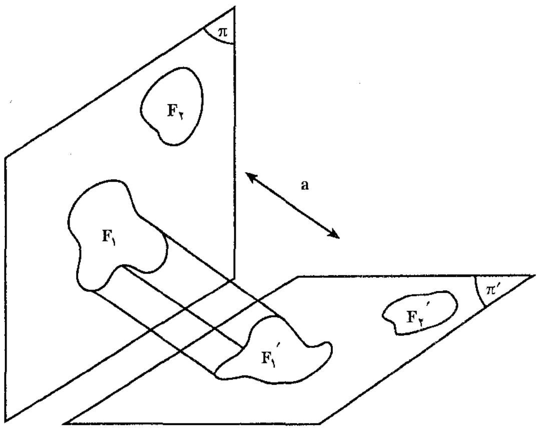


(ت)

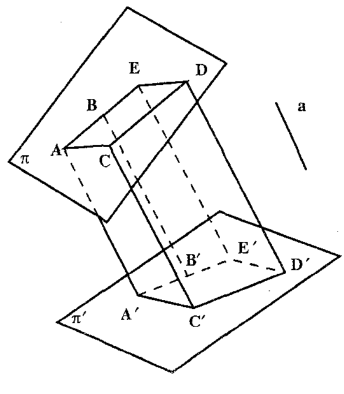
ج) در تصویر موازی، نسبت طولهای دو پاره‌خط همخط، محفوظ می‌ماند. این نتیجهٔ بلافصل این قضیه است که: خطهای موازی، از ضلعهای یک زاویه، پاره‌خطهای متناسب جدا می‌کنند (شکل ج)؛ که $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$. در تصویر موازی، نسبت طولهای دو پاره‌خط واقع بر دو خط موازی نیز محفوظ می‌ماند؛ زیرا فرض می‌کنیم AB و CD دو



(ج)



(ح)



(چ)

پاره‌خط در صفحه π باشند، به طوری که $AB \| CD$، و فرض می‌کنیم E نقطه‌ای باشد بر AB، چنان که $ED \| AC$ (شکل چ). یک تصویر موازی متوازی‌الاضلاع ACDE را به متوازی الاضلاع $A'C'D'E'$ بدل می‌کند (زیرا پاره‌خط AB به پاره‌خط $A'B'$، و خطهای موازی به خطهای موازی بدل می‌شوند). لذا (با توجه به این که در تصویر موازی نسبت طولهای دو پاره‌خط همخط، محفوظ می‌ماند) می‌بینیم که:

$$\frac{CD}{AB}=\frac{AE}{AB}=\frac{A'E'}{A'B'}=\frac{C'D'}{A'B'}$$

د) در تصویر موازی، نسبت بین مساحتهای دو شکل مسطح محفوظ می‌ماند. برای اثبات این حکم، در صفحهٔ π شبکه‌ای از مربعهای قابل انطباق باهم رسم می‌کنیم. ویژگیهای (ب) و (ج) ایجاب می‌کنند که تصویر موازی، این شبکه از مربعها را به شبکه‌ای از متوازی‌الاضلاعهای

قابل انطباق باهم، واقع در π' بدل کند (شکل ح).

گیریم $F_۱$ و $F_۲$ دو شکل در π و $F'_۱$ و $F'_۲$ نگاره‌های آنها در π' بر اثر یک تصویر موازی باشند. اگر مربعهای شبکه به قدر کافی ریز باشند، تفاوت نسبت تعداد مربعهای داخل $F_۱$ به تعداد مربعهای داخل $F_۲$ با نسبت $\frac{S_۱}{S_۲}$ ی مساحتهای شکلهای $F_۱$ و $F_۲$ از هر عدد دلخواهی کوچکتر است و نیز تفاوت نسبت تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل $F'_۱$ به تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل $F'_۲$ با نسبت $\frac{S'_۱}{S'_۲}$ ی مساحتهای $F'_۱$ و $F'_۲$ از هر عدد دلخواهی کوچکتر است. چون تعداد مربعهای $F_۱$ با تعداد متوازی‌الاضلاعهای $F'_۱$ برابر است و تعداد مربعهای $S_۲$ با تعداد متوازی‌الاضلاعهای $F'_۲$ ، در نتیجه $\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{S'_۱}{S'_۲}$ و حکم ثابت می‌شود.

اکنون به اثبات قضیهٔ بنیادی تصویرهای موازی می‌پردازیم.

۳۲۶. قضیه ۱. گیریم A، Bو C سه نقطهٔ ناهمخط در یک صفحهٔ π باشند و M، N و P، سه نقطهٔ ناهمخط در یک صفحهٔ π'. صفحه‌های πو π' را می‌توان در فضا چنان قرار داد که بر اثر تصویری موازی از π بر π' مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث MNP بدل شود.

نگاشت موازی صفحه بر خودش

تاکنون همواره فرض کرده‌ایم که دوصفحهٔ π و π' متمایزند. به همین دلیل است که در این بخش از نگاشتهای یک صفحهٔ π بر یک صفحهٔ π' صحبت کردیم، نه از تبدیلهای یک صفحه بر روی خودش (که مثالهایی از طولپاییها و تشابه‌ها هستند).

حال تبدیلی از صفحهٔ π بر خودش را درنظر می‌گیریم که از حرکت π در فضا و نگاشت آن بر اثر تصویری موازی بر وضعیت اوّل خود نتیجه می‌شود. این تبدیل را یک نگاشت موازی صفحه بر خودش می‌نامیم. هر طولپایی، حالت خاصی از این تبدیل صفحه است. یک تصویر موازی صفحه بر خودش یک طولپایی است به شرطی که وضع جدید صفحه در فضا با وضع اوّلیه‌اش موازی باشد.

ویژگی (الف) از تصویر موازی ایجاب می‌کند که بر اثر تصویر موازی یک صفحه بر خودش خط به خط بدل شود. **یک تبدیل یک‌به یک از صفحه بر خودش که خط را به خط بدل کند، یک تبدیل آفین نام دارد.** طولپاییها و تشابه‌های یک صفحه، ساده‌ترین مثال

برای تبدیل آفین هستند. تصویر موازی یک صفحه بر خودش، تبدیل آفینی کلیتر از طولپاییها و تشابه‌ها است ؛ زیرا نیاز به حفظ نسبت طولهای پاره‌خطها ندارد و از این‌رو، در حالت کلی ریخت یک شکل را دگرگون می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود که هر تبدیل آفین از یک صفحه اساساً یک تصویر موازی از آن صفحه است بر خودش.

۳۲۷. قضیه ۲. هر تبدیل آفین از یک صفحه می‌تواند براثر یک تصویر موازی از صفحه بر خودش و متعاقب آن یک تشابه تحقق یابد.

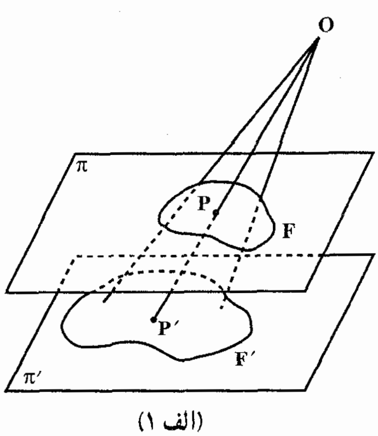
این قضیه نشان می‌دهد که مطالعهٔ ویژگیهای تبدیل آفین با مطالعهٔ ویژگیهای مشترک بین تصویر موازی یک صفحه بر خودش و تشابه‌های مترادف است ؛ به‌ویژه این امر ایجاب می‌کند که تبدیلهای آفین یک صفحه ویژگیهای (ب) ، (ج) و (د) را داشته باشند، زیرا اینها ویژگیهایی هستند که بین تصویرهای موازی یک صفحه بر خودش و تشابه‌ها مشترکند، و نیز قضیهٔ ۲ ماهیت حاصلضرب دو یا چند تصویر موازی صفحه بر خودش را روشن می‌سازد ؛ یعنی نشان می‌دهدکه چنین حاصلضربی مجدداً یک تصویر موازی صفحه بر خودش و احتمالاً متعاقب آن یک تشابه است (زیرا چنین حاصلضربی، روشن است که یک تبدیل آفین از صفحه است).

۳۲۸. قضیه ۳. یک تبدیل آفین منحصر به فرد از صفحه وجود دارد که ۳ نقطهٔ ناهمخط A، B و C را به سه نقطهٔ ناهمخط A'، B' و C' بدل می‌کند.

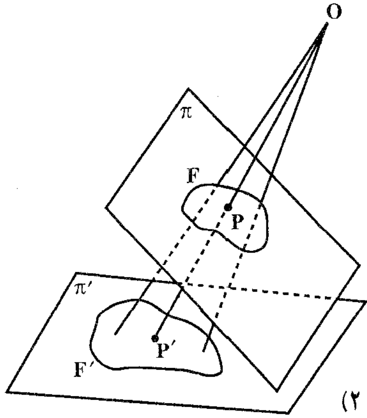
۳. تصویر مرکزی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیل تصویری یک صفحه

فرض می‌کنیم π و π' دو صفحه در فضا باشند. یک نقطهٔ O که بر هیچ یک از این دو صفحه نباشد، انتخاب و از این نقطه، صفحهٔ π را بر صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، یعنی به هر نقطهٔ P در π ، نقطهٔ P' واقع بر π' را چنان مربوط می‌کنیم که P' بر OP واقع باشد. (شکلهای الف ۱ و ۲).



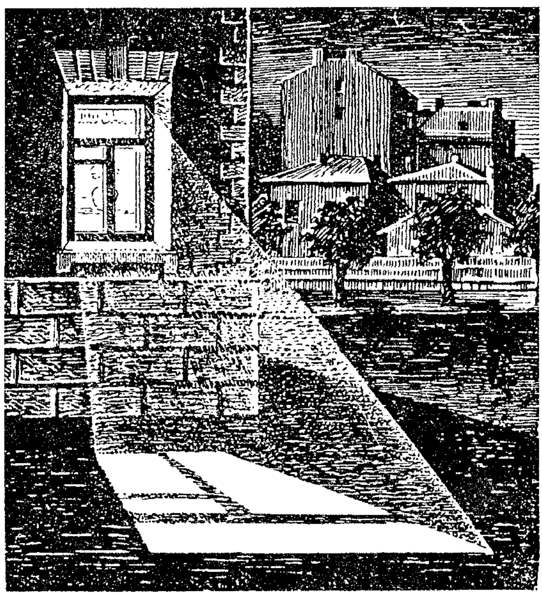
(الف ۱)



(الف ۲)

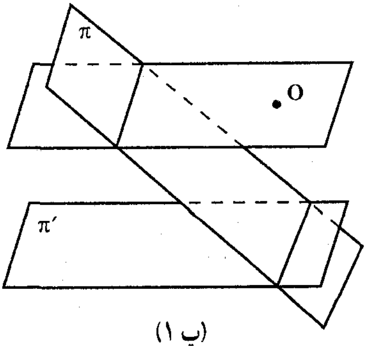
نگاشتی که چنین تعریف کردیم، تصویر مرکزی (π بر π') به مرکز O نامیده می‌شود. بر اثر تصویر مرکزی، نگارهٔ یک شکل F از π ، شکل F' از π' است (مثلاً، سایه‌ای را مجسم کنید که در شب از چارچوب پنجرهٔ یک اتاق بسیار روشن بر خیابان افتاده است (شکل ب)).

اگر صفحه‌های π و π' موازی باشند، یک تصویر مرکزی از π بر π' هر شکل F از π را به شکل مشابهش F' در π' بدل می‌کند (در این حالت یک تجانس به مرکز O پدید می‌آورد شکل (الف ۱)). در نتیجه قبل از همه سر و کار ما با حالتی است که π و π' موازی نباشند (شکل الف ۲).

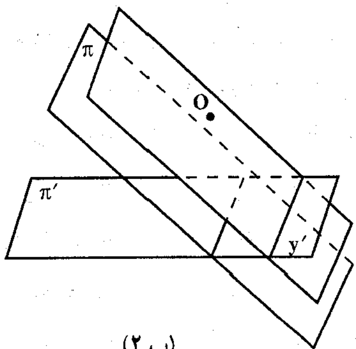


(پ)

ملاحظه می‌کنیم که در حالت اخیر در π خطی وجود دارد که نقطه‌های آن نگاره‌ای در π' ندارند، و آن خط، x فصل مشترک π با صفحه‌ای است که بر O می‌گذرد و با π' موازی است (شکل پ۱)؛ و نیز در π' خطی وجود دارد که نقطه‌های آن پیشنگاشتی در صفحهٔ π ندارند، و آن، خط y'، فصل مشترک π' با صفحه‌ای است که بر O می‌گذرد و با π موازی است (شکل پ ۲).



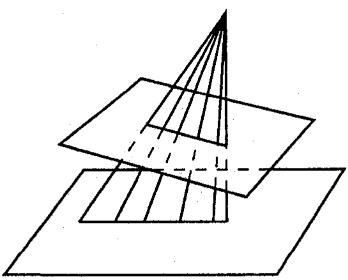
(پ ۱)

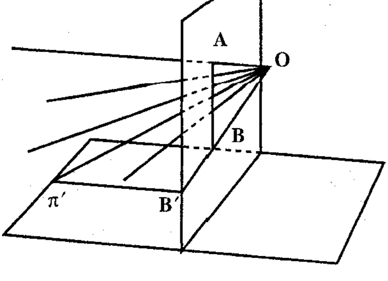


(پ ۲)

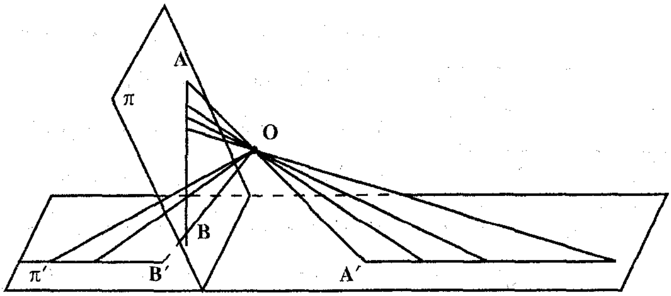
بنابراین در تصویر مرکزی یک صفحهٔ π بر یک صفحهٔ π'، دو خط استثنایی (یکی در π و دیگری در π') وجود دارند که آنها را خطهای خاص صفحه‌های π و π' می‌نامیم (روشن است که x با z' موازی و هر دو با فصل مشترک صفحه‌های π و π' موازیند).

در تصویر مرکزی، خیلی بیشتر از تصویر موازی، ریخت شکلها تغییر می‌کند.


(ت ۱)



(ت ۲)



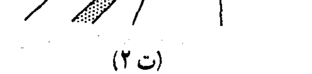
(ت ۳)

نگارهٔ یک پاره‌خط بر اثر تصویر مرکزی، ممکن است یک پاره خط یا دو نیمخط (شکل ت)، و نگاره‌های یک مثلث، ممکن است یکی از شکلها در شکل (ث ۱ـ۵) باشد.

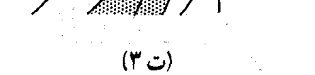
اغلب ممکن است یک نمودار پیچیده را به وسیلهٔ یک تصویر مرکزی مناسب ساده کرد و بدین ترتیب حل بعضی مسأله‌های مربوط به آن نمودار را آسانتر نمود. در این گونه موارد از ویژگیهای تصویر مرکزی به شرح زیر استفاده خواهیم کرد :

الف) در تصویر مرکزی خطهای صفحهٔ π به خطهای صفحهٔ π' بدل می‌شوند (به استثنای خط خاص x در صفحهٔ π که نقطه‌هایش، چنان که قبلاً اشاره شد، به هیچ یک از نقطه‌های π' بدل نمی‌شوند). زیرا، خطهای وصل شده بین نقطهٔ O و نقطه‌های خط l از صفحهٔ π، یک

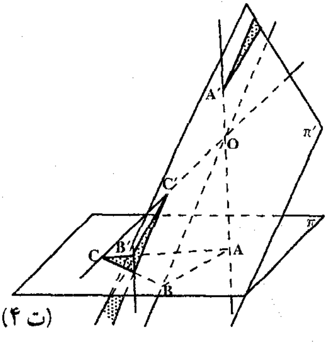
(ت ۱)



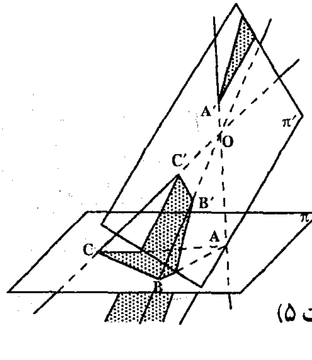
(ت ۲)



(ت ۳)



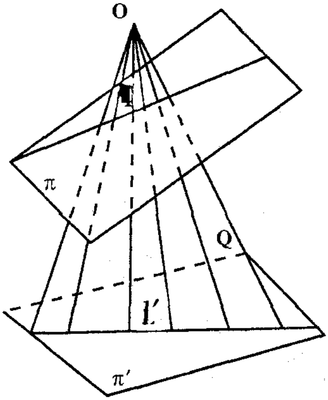
(ت ۴)



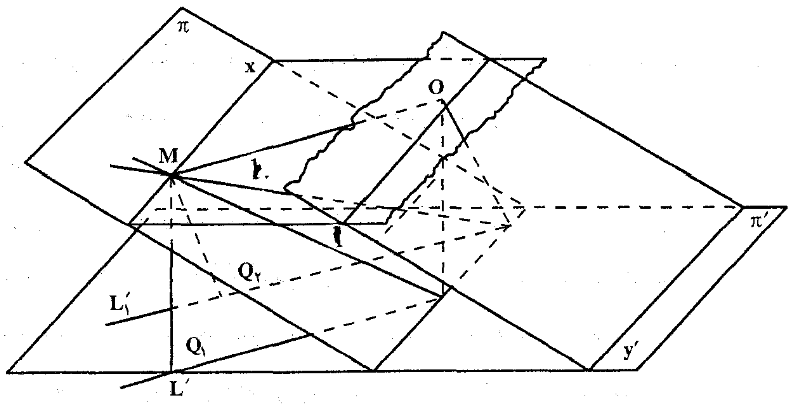
(ت ۵)

صفحهٔ Q پدید می‌آورند. تصویر به مرکز O، خط l را به خط l' فصل مشترک Q و π' بدل می‌کند (شکل ج).

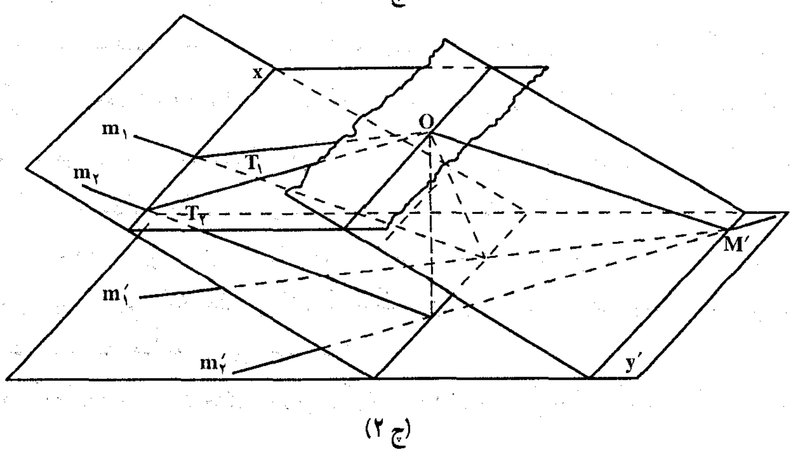
بعکس، هر خط l' از صفحهٔ π' (به‌استثنای خط خاص y') نگارهٔ یک خط l از صفحهٔ π است.



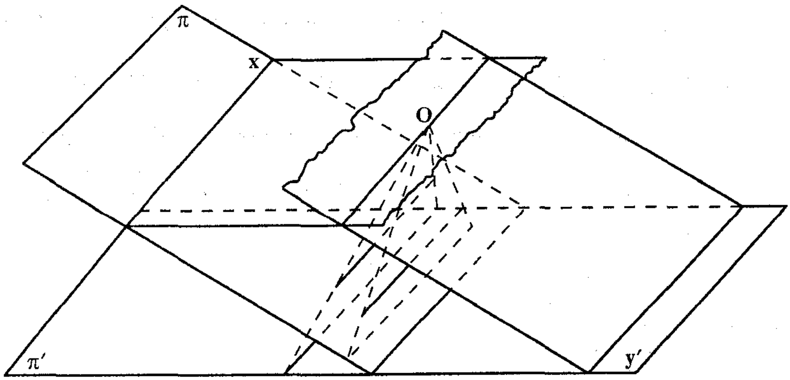
(ج)



(چ ۱)



(چ ۲)



(چ ۳)

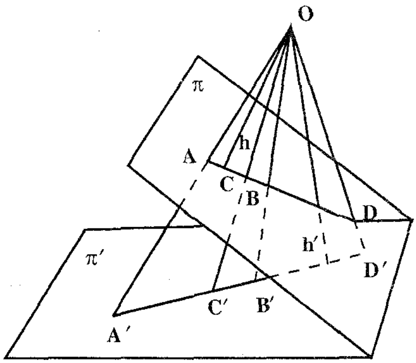
ب) گیریم که خطهای l_1 و l_2 از صفحهٔ π یکدیگر را در یک نقطهٔ M روی خط خاص x ببرند. در این حالت نگارهٔ آنها بر اثر یک تصویر مرکزی، دو خط موازی l'_1 و l'_2 از π' خواهد شد.

زیرا در این حال صفحه‌های Q_1 و Q_2 که از نقطهٔ O و خطهای l_1 و l_2 تشکیل می‌شوند، یکدیگر را در OM که موازی π' است، می‌برند. از آن‌جا نتیجه می شود که l'_1 و l'_2، نگاره‌های l_1 و l_2، خطهایی موازی در صفحهٔ π' هستند (شکل چ ۱).

در تصویر مرکزی، دو خط موازی m_1 و m_2 از π به دو خط متقاطع m'_1 و m'_2 از π' بدل می‌شوند که نقطهٔ تلاقی آنها M'، بر خط خاص y' واقع است. این نکته از این واقعیت نتیجه می‌شود که صفحه‌های T_1 و T_2 که بترتیب از O و خطهای m_1 و m_2 تشکیل می‌شوند، یکدیگر را در خط OM' قطع می‌کنند که با π موازی است و π' را در یک نقطهٔ M' واقع بر خط خاص y' تلاقی می‌کند (شکل چ ۲). استثنا بر این قاعده خطهای موازی با x هستند ؛ این خطها بر خطهای موازی با y' نگاشته می‌شوند (شکل چ ۳).

با استفاده از ویژگیهای (الف) و (ب) از تصویر مرکزی، می‌توانیم یک عده قضیه‌های جالب را اثبات کنیم. (ملاحظه می‌کنیم که حکمهای برخی از این قضیه‌ها متضمن برخی اشتباهها است که بعداً به آنها پرداخته خواهد شد.)

ویژگیهای (الف) و (ب)ی تصویر مرکزی تا حدی با ویژگیهای (الف) و (ب)ی تصویر



(ح)

موازی مشابه‌اند. حال سعی می کنیم یک مشابهت جزئی برای ویژگی (ج) به آنها پیدا کنیم.

اثر تصویر مرکزی را بر طول یک پاره‌خط درنظر می گیریم. فرض می کنیم AB پاره‌خطی در صفحهٔ π و A′B′ نگارهٔ آن بر یک صفحهٔ π′ بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشد (شکل ح). یادآور می‌شویم که نسبت مساحتهای دو مثلثی که یک زاویهٔ مشترک دارند، مساوی است با نسبت حاصلضربهای ضلعهای این دو زاویه (این مطلب، مثلاً از فرمول معروف $S=(\frac{1}{2})ab\sin\hat{C}$ ، برای مساحت مثلث ABC نتیجه می‌شود.) ؛ بنابراین اگر فاصله‌های نقطهٔ O را از ضلعهای AB و A′B′ بترتیب به h و h′ نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$\frac{\text{مساحت}\ \Delta OA'B'}{\text{مساحت}\ \Delta OAB}=\frac{h'.A'B'}{h.AB}=\frac{OA'.OB'}{OA.OB}$$

$$A'B'=AB.\frac{OA'.OB'}{OA.OB}.\frac{h}{h'}$$

حال اگر A، B و C سه نقطه بر یک خط l از π ، و A′ ، B′ و C′ نگاره‌های آنها بر اثر تصویر بر π′ باشند، آن‌گاه، از استدلال فوق چنین برمی‌آید که :

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC[(OA'.OC')/(OA.OC)](h/h')}{BC[(OB'.OC')/(OB.OC)](h/h')}=\frac{AC}{BC}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB}$$

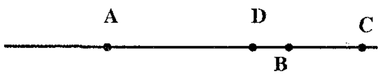
این رابطه نشان می‌دهد که در این‌جا برخلاف تصویر موازی، نسبتهای $A'C'/B'C'$ و AC/BC در حالت کلی نامساوی‌اند. ولی اگر نسبت دو نسبت حاصل از تقسیم پاره‌خط AB به وسیلهٔ دو نقطهٔ D و C را (شکل ح) تشکیل دهیم، آن‌گاه روشن است که :

$$\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'D'}{B'D'}=\frac{AC}{BC}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB}\Big/\frac{AD}{BD}.\frac{OA'/OA}{OB'/OB}=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$$

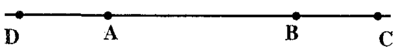
عبارت $\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$ نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A، B، C و D نامیده می‌شود.

خلاصه کنیم :

ج) در تصویر مرکزی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D واقع بر یک خط محفوظ می‌ماند. نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ (همخط)، نسبت دو نسبت سادهٔ AC/BC و AD/BD است. از آن‌جا که نسبتهای ساده می‌توانند مثبت یا منفی باشند، طبیعی است که یک علامت مثبت یا منفی به نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ همخط تخصیص دهیم. روشن است که نسبت ناهمساز $(AC/BC/AD/BD)$ برای چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D مثبت است، اگر C و D هر دو در داخل یا هر دو در خارج پاره‌خط AB باشند (زیرا در این صورت نسبتهای سادهٔ AC/BC و AD/BD دارای یک علامتند)، و منفی است، اگر یکی از نقطه‌های C و D در داخل AB و دیگری در خارج آن واقع باشد (زیرا در این صورت نسبتهای سادهٔ AC/BC و AB/BD علامتهای مختلف دارند). به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D منفی است اگر جفتهای A و B ؛ C و D جداساز یکدیگر باشند (شکل خ ۱)، و مثبت است اگر این جفتها جداساز یکدیگر نباشند (شکل خ ۲).



(خ ۱)



(خ ۲)

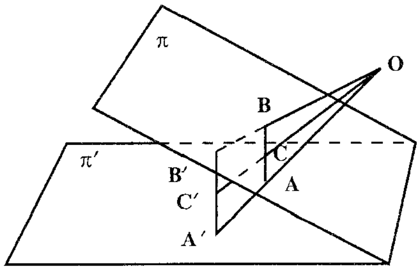
از این‌جا نتیجه می‌شود که تصویر مرکزی علامت نسبت ناهمساز را حفظ می‌کند، یعنی ویژگی (ج) معتبر است، حتی اگر علامت نسبت ناهمساز را در نظر بگیریم.

برای اثبات این حکم، ملاحظه می‌کنیم که اگر جفتهای نقطه‌های A، B ؛ C، D جداساز یکدیگر باشند (یا نباشند)، آن‌گاه جفتهای خطهای OA، OB و OC، OD جداساز یکدیگر هستند (یا نیستند) ؛ اما در این صورت جفتهای نقطه‌های A' ، B' و C' ، D' نگاره‌های A، B و C، D بر اثر تصویر به مرکز O، جداساز یکدیگر هستند (نیستند).

همچنین یادآور می‌شویم که تصویر موازی سه نقطهٔ همخط A، B و C، نه تنها اندازهٔ نسبت سادهٔ AC/BC ، بلکه علامت آن را نیز حفظ می‌کند.

متذکر می‌شویم که هرگاه AB با خط خاص صفحهٔ π (یعنی با فصل مشترک π و π') موازی باشد (شکل د)، آن‌گاه واضح است که $AB \| A'B'$ و $OA'/OA = OB'/OB$ ؛ لذا در این مورد دستور (۱) خواهد داد :

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$$

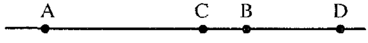


(د)

به عبارت دیگر، در تصویر مرکزی، نسبت سادهٔ دو پاره‌خط از یک خط موازی با خط خاص صفحه، محفوظ می‌ماند.

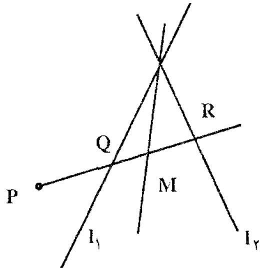
در تصویر مرکزی، ویژگی (ج) نسبتاً پیچیده است، در گفتار مقدماتی ما نقش مهمی بازی خواهد کرد و در کتابهای پیشرفته‌ای که با تصویر مرکزی سر و کار دارند، نقش قاطعی ایفا می‌کند.

نسبت AC / BC را در نظر می‌گیریم که در آن C نقطه‌ای است که پاره‌خط AB را تقسیم می‌کند. حالتی که C وسط AB باشد، یعنی وقتی AC و BC طولهای مساوی و جهتهای مختلف داشته باشند، به قسمی که $AC / BC = -۱$ مورد علاقهٔ خاص ماست؛ همچنین وقتی برای چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D نسبت ناهمساز $(AC / BC)/(AD / BD)$ را در نظر می‌گیریم، حالت $(AC / BC)/(AD / BD) = -۱$ را مجزا می‌کنیم. در این حالت یکی از دو نقطهٔ C و D داخل پاره‌خط AB و دیگری بیرون آن است، همچنین نسبتهای AC / BC و AD / BD از لحاظ قدرمطلق مساوی‌اند (شکل ذ). برای تشخیص این وضعیت می‌گوییم، نقطه‌های C و D پاره‌خط AB را به نسبت همساز (= نسبت توافقی) تقسیم می‌کنند (یا، نقطه‌های C و D مزدوجهای همساز نقطه‌های A و B هستند).



(ذ)

در پیش دیدیم که مسأله‌های متضمن تصویرهای موازی، مرکزهای پاره‌خطها به نحو بارزی مجسم می‌شوند. (برهان قضیهٔ ۳، که در آنها خطهای وصل شده بین وسطهای ضلعهای مقابل برخی متوازی الاضلاعها و غیره نقش اساسی بازی می‌کردند.) همچنین در مسأله‌هایی که تصویرهای موازی را دربر دارند، اغلب جفتهای نقطه‌هایی پیدا می‌شوند که برخی پاره‌خطها را به نسبت همساز تقسیم می‌کنند. بدین ترتیب مثلاً قطبی یک نقطهٔ P نسبت به یک جفت خط l_1 و l_2، می‌تواند به‌عنوان مکان نقطه‌هایی مانند M تعریف شود که

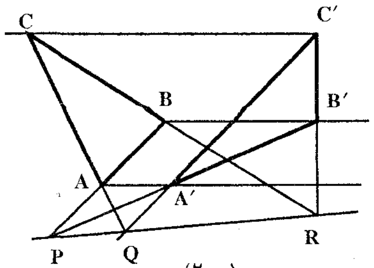


نقطه‌های P و M پاره‌خطی را که PM دو خط l_1 و l_2 را قطع می‌کند و دو سرش بر l_1 و l_2 هستند، به توافق تقسیم می‌کنند.

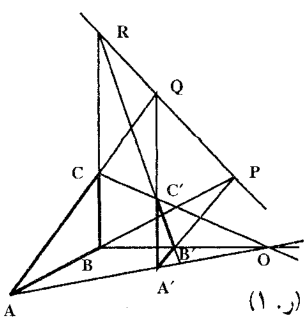
و یا این قضیه که:

هر دو قطر یک چهارضلعی کامل، قطر سوم را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند. کلیهٔ این حکمها بلافاصله از روی ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی اثبات می‌شوند.

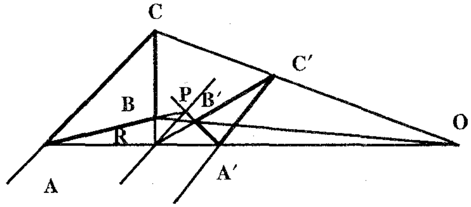
اکنون برخی از بی دقتیهای گفتار خود را اصلاح می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که وقتی یک صفحهٔ π بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌شود، هریک از دو صفحه خط خاصی پیدا می‌کند؛ نقطه‌های خط خاص صفحهٔ π نگاره‌ای در π' ندارند و نقطه‌های خط خاص صفحهٔ π' نگاره‌های هیچ نقطه‌ای از π نیستند. به همین دلیل صورت گزاره‌هایی که متضمن تصویرهای مرکزی هستند، همواره حالتهای خاص را باید دربرگیرند. بی‌دقتیهایی که هم اکنون متذکر شدیم، ناشی از این واقعیت بود که تاکنون، علی‌الاصول چنین حالتهای خاص را نادیده می‌گرفتیم. از این رو، مثلاً، حکم قضیهٔ دزارگ، دقیق بگوییم نادرست است؛ زیرا این امکان را که یک تصویر مرکزی ممکن است خطهای متقارب (مثل AA_1، BB_1 و CC_1 یا AB و A_1B_1 و PQ،...) را یا به خطهای همرس و یا به خطهای موازی بدل کند، درنظر نمی‌گیرد. یک بیان دقیق قضیهٔ دزارگ بدین صورت است: اگر دو مثلث همصفحه چنان باشند که خطهای وصل شده به رأسهای متناظر همرس یا موازی باشند، آن‌گاه یا نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثها همخطند (شکلهای (ر. ۱) و (ر. ۲))، یا یک جفت از ضلعهای متناظر با خط وصل شده به نقطه‌های برخورد دو جفت ضلع دیگر موازی هستند. (شکل (ر. ۳) و (ر. ۴))، بالاخره یا این که ضلعهای متناظر دو مثلث موازی‌اند (شکل (ر. ۵) و (ر. ۶)) و بعکس. ملاحظه می‌کنیم که وقتی صورت قضیه دقیق بیان شود، ظرافتش را از دست می‌دهد و درک آن دشوار می‌شود. این گفته برای بسیاری از قضیه‌های دیگر نیز صحیح است.



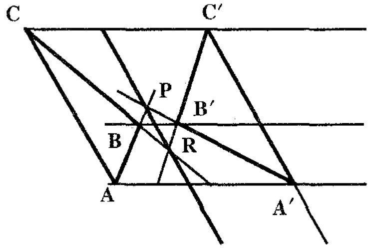
(ر. ۲)



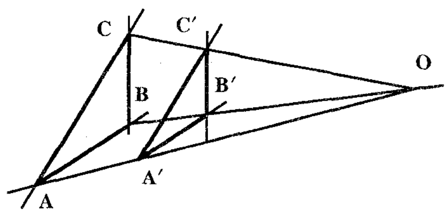
(ر. ۱)



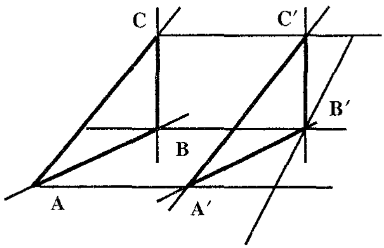
(ر. ۳)



(ر. ۴)



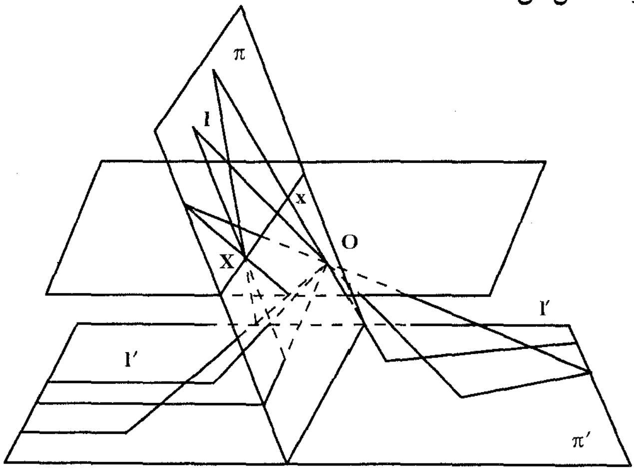
(ر. ۵)



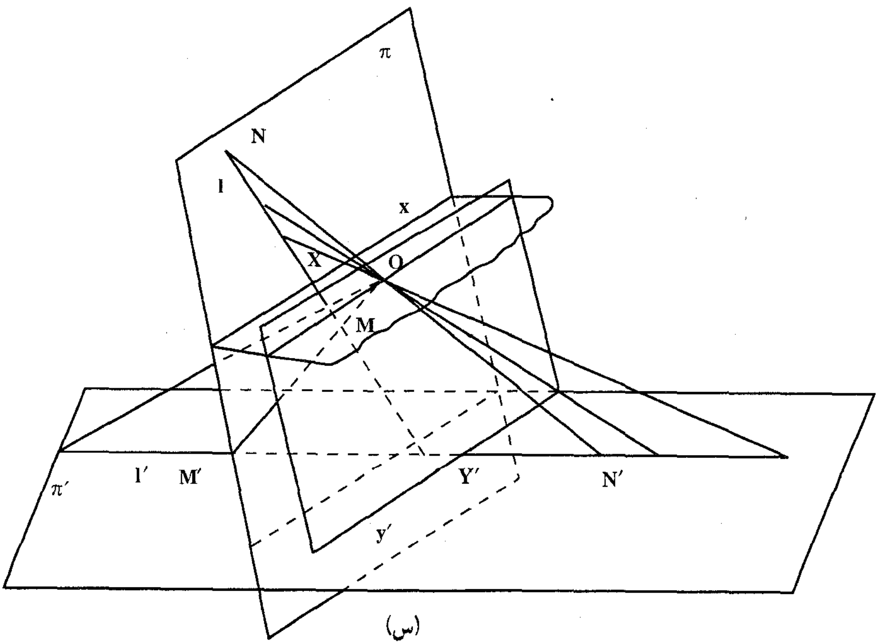
(ر. ۶)

برای از بین برداشتن پیچیدگیهای ناشی از ماهیت استثنایی خطهای خاص، باید بگوییم که خط خاص x در صفحهٔ π بر «خط بینهایت» صفحهٔ π' تصویر شده است. و «خط بینهایت» صفحهٔ π بر خط خاص y' از π' تصویر می‌شود. تأکید می‌کنیم که این اصطلاح موضوعی است قراردادی؛ عبارت «خط x بر خط بینهایت تصویر می‌شود»، با عبارت «خط x بر چیزی تصویر نمی‌شود» هم ارز است. ما از هر نقطهٔ خاص X از خط خاص x صحبت خواهیم کرد که به یک «نقطهٔ بینهایت» از صفحه π' تصویر شده است. ما از ردهٔ خطهای موازی حاصل از تصویر ردهٔ خطهای گذرنده از X (شکل ز)، به‌عنوان ردهٔ خطهایی که «در یک نقطهٔ بینهایت برخورد می‌کنند» صحبت خواهیم کرد. (این واقعیت که به هر نقطهٔ بینهایت یک رده از خطهای موازی مربوط می‌شود «که از آن نقطه می‌گذرند»، به ما امکان می‌دهد که نقطه‌های بینهایت را با امتدادهای صفحه مشخص کنیم. مثلاً عبارت: «خطی که نقطهٔ داده شدهٔ A را به نقطهٔ داده شدهٔ B واقع در بینهایت وصل می‌کند»، به معنی خطی است که از A در امتداد متناظر به نقطهٔ بینهایت B رسم می‌شود و همین‌طور برای نقطه‌های دیگر). لذا هر خط l یک نقطه در بینهایت دارد (برخلاف آنچه که احساس می‌کنیم، چنین برمی‌آید که تخصیص یک نقطهٔ تکین در بینهایت به یک خط امری است بجا)، که «نقطهٔ تلاقی» l با هر خط موازی با آن است. کلیهٔ نقطه‌های واقع در بینهایت خطهای یک صفحه، «خط بینهایت» آن صفحه را تشکیل می‌دهند.

حال به توجیه این اصطلاح می‌پردازیم. هرگاه یک نقطهٔ M بر خط l به نقطهٔ X، محل برخورد l و x، نزدیک شود، تصویرش بر خط l' از صفحهٔ π' [در یک امتداد، بسته به امتدادی که M در آن به X نزدیک می‌شود (شکل س)] بینهایت دور می‌شود. همچنین اگر M در یکی از دو جهت بر l بینهایت دور شود، تصویرش به نقطهٔ Y'، محل برخورد l' و y' نزدیک می‌شود (شکل س).



(ز)



(س)

وارد کردن نقطه‌های بینهایت ما را ملزم می‌سازد که تعریف نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ همخط را تکمیل کنیم. اشاره می‌کنیم که اگر D نقطهٔ بینهایت خط AB باشد، مساوی قرار دادن نسبت AD / BD با یک، طبیعی خواهد بود. (زیرا نسبت AM / BM وقتی نقطهٔ M به نقطهٔ بینهایت D نزدیک شود، یعنی وقتی M در یکی از دو جهت بر AB بینهایت دور شود، به حد یک نزدیک می‌شود). لذا اگر D نقطه‌ای در بینهایت باشد، نسبت ناهمساز $(AC / BC)/(AD / BD)$ با نسبت سادهٔ AC / BC یکی خواهد شد. به آسانی دیده می‌شود که ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی، حتی اگر یکی از نقطه‌های A، B، C و D یا تصویرش، نقطه‌ای در بینهایت باشد، باز صادق خواهد بود.

وارد کردن خط و نقطه‌های بینهایت به ما امکان می‌دهد که یک عده از گزاره‌های خاص را، که همه به طریق مشابهی قابل اثبات هستند، در یک گزارهٔ واحد بگنجانیم. علت آن این است که تا آن‌جا که به تصویرهای مرکزی مربوط است، نقطه‌های فرضی در بینهایت با نقطه‌های واقعی موقعیتی یکسان دارند. نقطه‌های یک نوع را می‌توان به نقطه‌های نوع دیگر بدل کرد. مثلاً حالتهای ویژهٔ قضیهٔ دزارگ که قبلاً برشمردیم همه در حکم اصلی آن گنجانده شده‌اند. (**قضیه دزارگ.** ثابت کنید که هرگاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 همرس باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خطهای AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، و BC و B_1C_1 همخطند. بعکس اگر نقطه‌های برخورد خطهای AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، و BC و B_1C_1 همخط باشند، آن‌گاه خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 همرسند)، به شرطی که نقطهٔ تقاطع خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 و همچنین نقطه‌های تقاطع ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ نقطه‌های معمولی یا نقطه‌های بینهایت تعبیر شوند.

صفحه‌ای که بدین ترتیب با افزودن نقطه‌های فرضی و خط فرضی در بینهایت تکمیل شده است، صفحهٔ تصویری نام دارد.

می‌خواهیم به یک تفاوت اصلی بین دو استفاده‌ای که از نقطه‌های بینهایت کرده‌ایم اشاره کنیم :

۱. اصطلاح مناسبی برای بیان برخی حقایق مربوط به تصویرهای مرکزی ایجاد کنیم.
۲. صفحهٔ تصویری را ایجاد کنیم.

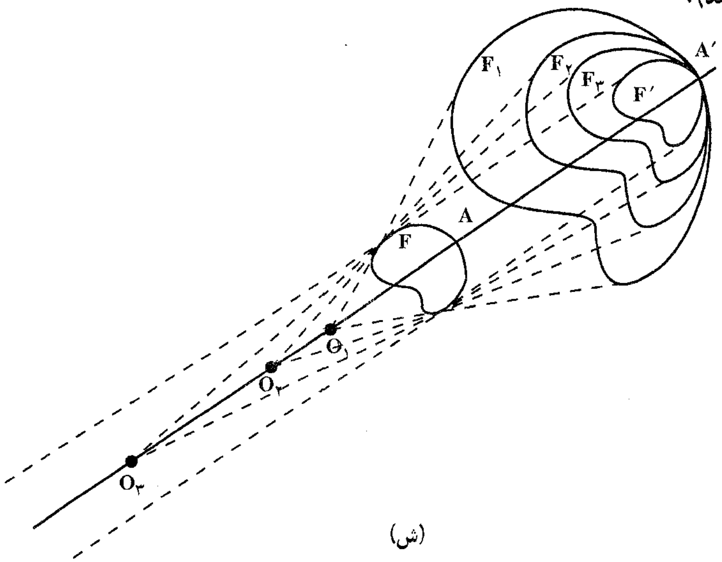
مفهوم صفحهٔ تصویری گامی است فراتر از اصطلاح تنها. گامی است در راه تجرید ریاضی که به یک مفهوم جدید ریاضی منجر می‌شود : صفحه‌ای که علاوه بر نقطه‌های معمولی هندسهٔ دبیرستانی، دارای نقطه‌های اضافی دیگر، یعنی نقطه‌های بینهایت است. (در این صفحه

نقطه‌های بینهایت با نقطه‌های دیگر همترازند؛ زیرا تصویر مرکزی می‌تواند نقطه‌های یک نوع را به نوع دیگر بدل کند). باید تأکید کنیم که یک صفحهٔ تصویری همان اعتبار صفحهٔ «اقلیدسی» معمولی (یا «صفحهٔ انعکاسی» مذکور در فصل ۶) را دارد. روی هم رفته، مفهوم صفحهٔ اقلیدسی یا خطهایی که می‌توانند تا بینهایت ادامه داده شوند، تجریدی است ریاضی، بی‌آن که همتایی در واقعیت فیزیکی داشته باشد، و توصیف مناسب آن به وسیلهٔ مجموعه‌ای از اصل موضوعها که هندسهٔ مسطحهٔ اقلیدسی را می‌سازند، انجام گرفته است. تعبیرهای متفاوت از مفهوم «صفحه»، به انتخابهای متفاوت اصل موضوعها منجر می‌شود. مثلاً اصل موضوع زیر، که در صفحهٔ اقلیدسی معتبر نیست، در صفحهٔ تصویری صادق است: «هر دو خط (متمایز) یکدیگر را در یک نقطهٔ منحصر می‌برند.» (درواقع، دو خط موازی به تعبیر اقلیدسی در یک نقطهٔ واقع در بینهایت در صفحهٔ تصویری یکدیگر را می‌برند، و یک خط معمولی و خط واقع در بینهایت، یکدیگر را در نقطهٔ بینهایت خط معمولی). هریک از راههای متفاوت پذیرفتنی، نزدیک شدن به مفهوم صفحه با یک انتخاب خاص اصل موضوعها مشخص می‌شود. بسته به نوع مسأله‌هایی که حل آنها را مطرح می‌کنیم، ممکن است تعبیر اصطلاح «صفحه» را به یکی از راهها مناسب بدانیم. یک مورد مناسب، مطالعهٔ انعکاسهایی است که ما در آن‌جا از «نقطه‌های بینهایت» به طریقی متفاوت با طریق معمول در صفحهٔ تصویری، استفاده می‌کنیم. «صفحهٔ» حاصل با هر دو صفحهٔ اقلیدسی و تصویری، متفاوت است، ولی «برتر» یا «پایینتر» از یکی از آنها نیست.

بجاست اشاره کنیم که وارد کردن نقطه‌ها و خطهای «بینهایت دور» ممکن است در حل مسأله‌هایی که تصویرهای مرکزی در آنها دخالتی ندارند، مفید باشد. مثلاً بسهولت می‌توانیم انتقال را تجانسی بگیریم که مرکزش نقطهٔ بینهایت دور در امتداد محور انتقال و نسبت آن ۱ باشد. [برای دیدن این نکته، یک رشته تجانس در نظر می‌گیریم که یک شکل F را به شکلهای $F_۱$ و $F_۲$ و $F_۳$ و ... و نقطه‌ای مانند A از F را به نقطهٔ A' بدل می‌کند؛ در این حال وقتی $O_i(i=۱,۲,۳,\cdots)$، مرکزهای این تجانسها، در امتداد AA' بینهایت دور می‌شوند، نسبتهای $\frac{O_iA'}{O_iA}(i=۱,۲,۳,\cdots)$ به مقدار ۱، و شکلهای F_i به یک شکل F' نزدیک می‌شوند که از شکل F بر اثر انتقال با بردار AA' حاصل شده است (شکل ش). درنتیجهٔ این شناسایی، دیگر لازم نیست حالتهای خاصی را که در عده‌ای از قضیه‌های متضمن شکلهای مجانس پیدا می‌شوند، جدا کنیم. مثلاً، بگوییم که هر دو دایره به دو طریق، مجانس یکدیگرند، حاصلضرب دو تجانس باز یک تجانس است (با مرکزی در فاصلهٔ متناهی یا نامتناهی). قضیهٔ در باب سه

مرکز تجانس نیز حالا می‌تواند به‌صورت خلاصهٔ زیر بیان شود:

سه مرکز تجانس سه جفت شکل متجانس، همخطند. این قضیه شامل حالتی است که یکی از مرکزها نقطه‌ای در بینهایت است (دو شکل از سه شکل قابل انطباقند)، شامل حالتی است که هر سه مرکز (تجانس) نقطه‌هایی واقع در بینهایتند و محور (تجانس) خطی در بینهایت است (هر سه شکل دو به دو قابل انطباقند) و سرانجام، شامل حالتی است که هر سه مرکز بر هم منطبقند. اگر دیدگاه فعلی خود را حفظ کنیم، سه دایره همواره شش مرکز تجانس دارند که در مجموعه‌های سه‌تایی بر چهار محور تجانس قرار دارند (برای حالتهای خاصی که این قضیه را می‌پوشانند).



(ش)

اکنون می‌توانیم به تقارن لغزه‌ای (یا لغزه) به‌صورت حالت یک تقارن تجانسی (یا تجانس) بنگریم، و لذا حالتی که F بر اثر یک تقارن لغزه‌ای بر ′F نگاشته می‌شود، مستلزم ملاحظات جداگانه نیست. بعضی وقتها هم مناسب است که انتقال را دورانی تلقی کنیم که مرکزش در بینهایت باشد و امتدادش عمود بر امتداد انتقال در مسأله، در این صورت همهٔ قضیه‌های حاصلضربهای مستقیم حرکتهای (یعنی دوران و انتقال) زیر پوشش یک قضیهٔ تنها درمی‌آیند.

حال قضیهٔ مهم زیر را اثبات می‌کنیم:

۳۲۹. قضیهٔ ۱. گیریم A، B، C و D چهار نقطه در یک صفحهٔ π چنان باشند که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نباشند و M، N، P و Q چهار نقطه در صفحهٔ π' چنان که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نباشند. π و π' را می‌توان طوری قرار داد که یک تصویر مرکزی (یا

موازی) از π به π' وجودداشته باشد که چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی A'B'C'D' که مشابه با MNPQ است، بدل کند (صحیحتر بگوییم، رأسهای چهارضلعی ABCD را می‌توان بر رأسهای چهارضلعی A'B'C'D' متشابه با MNPQ نگاشت).

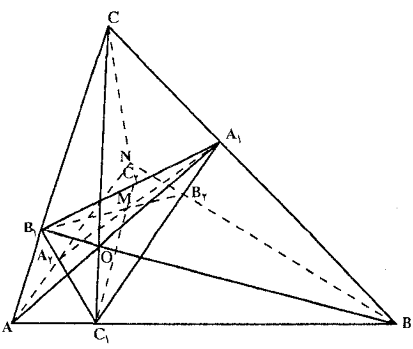
۴. تصویر مرکزی صفحه برخودش

تاکنون فقط نگاشتهایی از یک صفحهٔ π بر صفحهٔ دیگر π' را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. حال تبدیلی را که π را برخودش بدل کند درنظر می‌گیریم که به شرح زیر تعریف می‌شود:

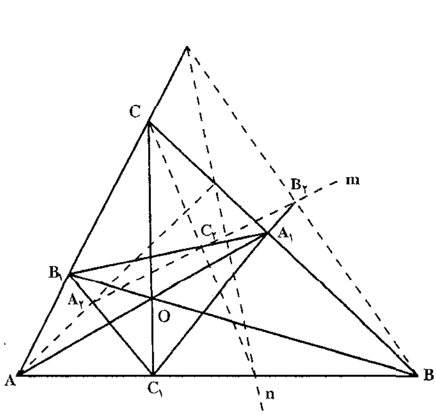
صفحهٔ π را در فضا به طریق دلخواهی حرکت می‌دهیم، و سپس آن را بر وضع اوّلیه‌اش از مرکز O تصویر می‌کنیم. این تبدیل را تصویر مرکزی صفحهٔ π بر خودش می‌نامیم. یک مورد این تبدیل، تشابه است. تصویر مرکزی یک صفحه بر خودش یک تشابه است اگر، وضع جدید صفحه درست پیش از تصویر با وضعیت اصلیش موازی باشد.

ویژگیهای تصویر مرکزی ایجاب می‌کنند که تصویر مرکزی صفحهٔ π برخودش، خط را به خط بدل کند، به استثنای خط خاص، که به خط بینهایت بدل می‌شود. هر خط از این قسمت صفحهٔ π که شامل خط خاص نباشد، به یک خط بدل می‌شود.

تبدیلی از صفحه که خطهای گذرنده بر قسمت معینی از صفحه را به خط بدل کند، تبدیل تصویری نامند (یک تبدیل تصویری می‌تواند به‌صورت تبدیل یک‌به‌یک از صفحهٔ تصویری π بر روی خودش تعریف شود که خط را به خط تبدیل می‌کند. این تعریف با تعریف یک تبدیل آفین متفاوت است، از این لحاظ که در این‌جا π معرف یک صفحهٔ تصویری است، نه یک



(ط ۱)



(ط ۲)

صفحهٔ معمولی). هر تبدیل آفین یک تبدیل تصویری است، ولی عکس آن درست نیست؛ مثلاً تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش یک تبدیل تصویری است، ولی در حالت کلی، آفین نیست.

قضیهٔ بنیادی زیر ماهیت تبدیل تصویری صفحه را روشن می‌سازد.

۳۳۰. گیریم A، B و C سه نقطهٔ ناهمخط در یک صفحهٔ π باشند و M، N و P سه نقطهٔ ناهمخط در یک صفحهٔ π'. ثابت کنید صفحه‌های π و π' را می‌توان در فضا چنان قرار داد که بر اثر تصویری موازی از π بر π'، مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث MNP بدل شود.

۳۳۱. هر تبدیل تصویری صفحه می‌تواند با یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه بر خودش و به دنبال آن، یک تشابه تحقق یابد.

۵. تصویر مرکزی که یک دایره را به دایره بدل می‌کند

تصویر گنجنگاشتی

در هندسهٔ مقدماتی خواص شکلهایی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که از خطها و دایره‌ها درست شده‌اند. تصویر مرکزی، خطها را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی دایره‌ها را حفظ نمی‌کند. این مطلب ممکن است این احساس را پدید آورد که کاربرد تصویر مرکزی به ردهٔ نسبتاً کوچکی از مسأله‌ها، که شامل دایره‌ها نیستند، محدود می‌شود. این احساس درست نیست؛ در واقع در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که تصویرهای مرکزی چگونه می‌توانند برای حل مسأله‌های متضمن دایره‌ها نیز به‌کار روند. بدین منظور دو قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

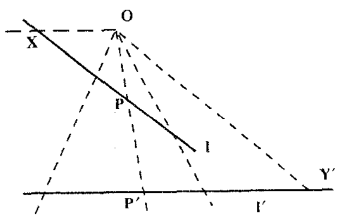
۳۳۲. قضیهٔ ۱. گیریم S دایره‌ای در صفحهٔ π و Q نقطه‌ای در داخل S باشد. در این صورت یک تصویر مرکزی از π بر یک صفحهٔ π' چنان موجود است که S را به یک دایرهٔ S' در π' بدل می‌کند و Q را به Q' مرکز S'.

قضیهٔ ۲. گیریم S دایره‌ای در صفحهٔ π و l خطی در π باشد که با S متقاطع نیست. در این صورت یک تصویر مرکزی از π بر یک صفحهٔ مناسب π' موجود است، چنان که S را به یک دایرهٔ S' در π' بدل می کند و l را به یک خط بینهایت π'.

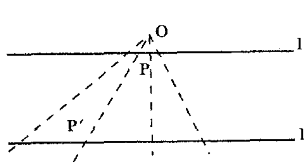
۶. تبدیل تصویری یک خط و یک دایره

ترسیم به کمک ستاره

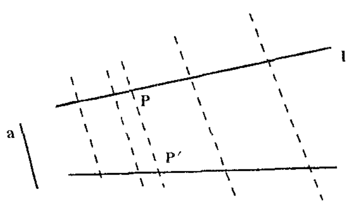
در یک صفحه دو خط متمایز l و l' و یک نقطهٔ O ناواقع بر آن دو خط را در نظر می‌گیریم. l را از نقطهٔ O بر l' تصویر می‌کنیم، یعنی به هر نقطهٔ P واقع بر l یک نقطهٔ P'، محل تلاقی OP با l'، را مربوط می‌کنیم (شکل (الف)). ملاحظه می‌کنیم که اگر l با l' موازی نباشد، نقطهٔ X، محل برخورد l با خطی که از O به موازات l' رسم می‌شود، بر هیچ نقطهٔ l' تصویر نمی‌شود. برای این که نقطهٔ X را با نقطه‌های دیگر همپایه قرار دهیم، می‌گوییم که این نقطه بر نقطهٔ بینهایت l' تصویر شده است. به همین روش نقطهٔ Y'، محل برخورد l' با خطی را که از O به موازات l رسم می‌شود، نگارهٔ نقطهٔ بی‌نهایت l بر اثر این تصویر گوییم. اگر خطهای l و l' موازی باشند (شکل (ب))، گوییم که این تصویر نقطهٔ بینهایت l را به نقطهٔ بینهایت l' بدل می‌کند. عین همین اصطلاح، هرگاه تصویر از l بر l' یک تصویر موازی باشد (شکل (پ)) نیز به‌کار برده می‌شود. تصویر مرکزی (یا موازی) تبدیلی از یک خط بر خودش نیست، بلکه نگاشتی است از یک خط بر خط دیگر. حال یک خط l را از یک نقطهٔ O بر یک خط l_1 تصویر می‌کنیم، سپس l_1 را از یک نقطهٔ O_1 بر خط l_2، بعد l_2 را از یک نقطهٔ O_2 بر یک خط l_3، و این عمل را همین‌گونه ادامه می‌دهیم تا بالاخره خط l_n را از نقطهٔ O_n بر l برمی‌گردانیم (شکل (ت)). این رشته تصویرها، یک نقطهٔ A از l را به یک نقطهٔ A_1 از l_1، و سپس به یک نقطهٔ A_2 از l_2، و بعد به یک نقطهٔ A_3 از l_3 و...، و سرانجام به یک نقطهٔ A' از خط اوّلی l بدل می‌کند. بدین ترتیب این رشته از تصویرهای مرکزی، معرف تبدیلی است از l بر روی خودش که نقطهٔ A را به نقطهٔ A' بدل می‌کند. این چنین تبدیل از



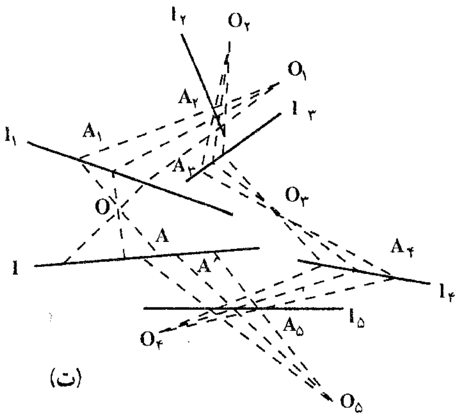
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

یک خط را یک تبدیل تصویری می‌نامیم و نیز در این رشته تصویرها وقتی یک یا چند تصویر، به‌جای تصویر مرکزی، تصویر موازی باشند، باز هم آن را تبدیل تصویری خواهیم گفت (همین که مفهوم نقطهٔ بینهایت یک صفحه را وارد کردیم، می‌توانیم تصویر موازی یک خط بر روی یک خط را یک تصویر مرکزی به مرکز واقع در بینهایت بینگاریم).

ویژگی زیر یک ویژگی بنیادی تبدیلهای تصویری است: تبدیل تصویری یک خط، نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند. زیرا تصویر مرکزی یک خط بر خط دیگر نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند (ویژگی (ج) از تصویر مرکزی). همچنین تصویر موازی یک خط بر یک خط، نسبت ناهمساز چهار نقطه (حتی نسبت سادهٔ $\frac{AC}{BC}$ از سه نقطهٔ A، B و C) را حفظ می‌کند. از این‌جا نتیجه می‌شود که تبدیل تصویری یک خط (که بر اثر یک رشته تصویرها حاصل می‌شود) چهار نقطه را به چهار نقطه با همان نسبت ناهمساز بدل می‌کند.

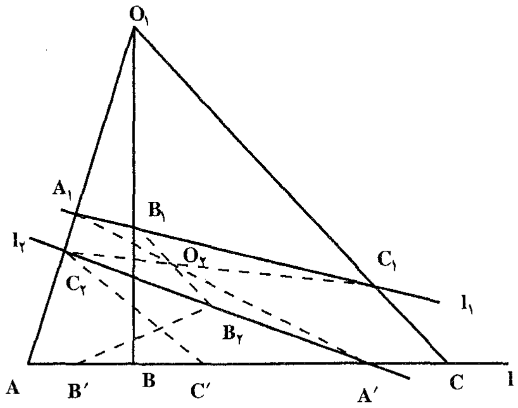
این ویژگی بنیادی ایجاب می‌کند که تبدیل تصویری یک خط با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملاً معین شود. زیرا اگر نگاره‌های سه نقطهٔ A، B و C از خطی بر اثر یک تبدیل تصویری، سه نقطهٔ معلوم A'، B' و C' باشند، آن‌گاه نگارهٔ هر نقطهٔ M از این خط نقطه‌ای است مانند M' به‌طوری که:

$$\frac{AC}{BC} \Big/ \frac{AM}{BM} = \frac{A'C'}{B'C'} \Big/ \frac{A'M'}{B'M'} \qquad (۱)$$

که این رابطه موضع نقطهٔ M' را به‌گونهٔ منحصری مشخص می‌کند.

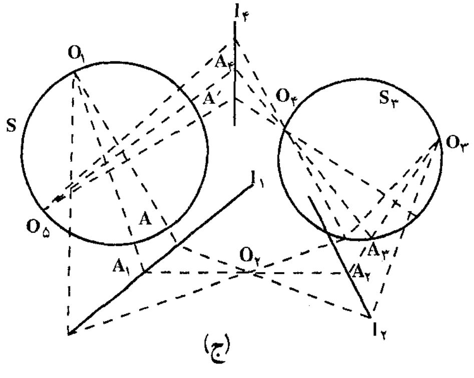
از سوی دیگر یک تبدیل تصویری از خط وجود دارد که سه نقطهٔ دادهٔ شدهٔ A، B و C را بر سه نقطهٔ قبلاً مشخص شدهٔ A'، B' و C' ببرد. برای تحقق بخشیدن به چنین تبدیلی، اوّل این خط را بر یک خط اختیاری l_1 تصویر می‌کنیم به‌طوری که نقطه‌های A، B و C به نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 واقع بر l_1 بدل شوند؛ سپس خط l_1 را بر یک خط l_2 که خط l را در A' می‌برد، تصویر می‌کنیم به‌طوری که A_1 به A' و نقطه‌های B_1 و C_1 به نقطه‌های B_2 و C_2 واقع بر l_2 بدل شوند. بالاخره l_2 را با استفاده از O، نقطهٔ برخورد خطهای $B'B_2$ و

$C'C_2$، به‌عنوان مرکز تصویر (شکل (ث)) بر خط l تصویر می‌کنیم. مطابق معمول، O ممکن است نقطه‌ای در فاصلهٔ متناهی یا نقطه‌ای در بینهایت باشد.



(ث)

حال به آسانی می‌توان نشان داد که هر تبدیلی از یک خط که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ واقع بر آن را حفظ کند، تبدیلی است تصویری (یعنی می‌تواند به‌وسیلهٔ یک رشته از تصویرها تحقق یابد). زیرا تبدیلی از یک خط را در نظر بگیرید که نسبت ناهمساز هر چهار نقطه‌ای را حفظ کند و فرض کنید که سه نقطهٔ A ، B و C را به نقطه‌های A' ، B' و C' بدل کند. می‌دانیم که یک تبدیل تصویری وجود دارد که A ، B و C را به A' ، B' و C' بدل می‌کند. ولی اگر دو تبدیل از یک خط، که هر دو حافظ نسبت ناهمساز چهار نقطه هستند، در یک مجموعهٔ سه نقطه‌ای از یک خط تطابق داشته باشند، آن‌گاه هر دو یک نقطهٔ چهارم M را به یک نقطهٔ M' بدل می‌کنند (که وضعش از فرمول (۱) صفحهٔ قبل مشخص می‌شود)، یعنی هر دو تبدیل یکی هستند.



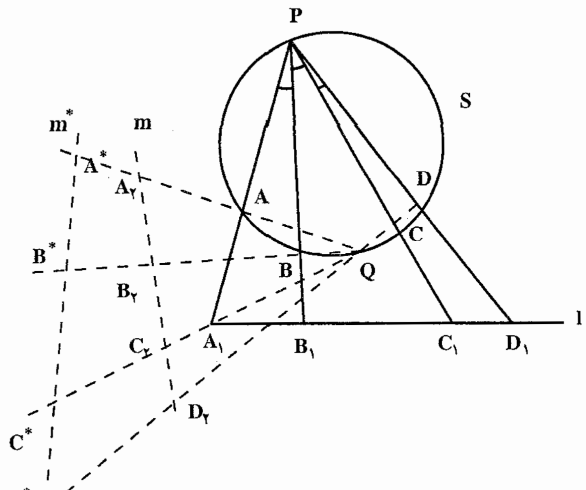
(ج)

حال یک رشته از تصویرها را که شامل خطها و دایره‌ها باشند در نظر می‌گیریم. به‌طور مثال یک دایرهٔ S را، از یک نقطهٔ O_1 واقع بر S، بر یک خط l_1 تصویر می‌کنیم؛ سپس l_1 را از یک نقطهٔ O_2 بر یک خط l_2، بعد l_2 را از یک نقطهٔ O_3 واقع بر یک دایرهٔ S_3 بر آن

دایره تصویر می‌کنیم؛ بعد S_3 از یک نقطهٔ دیگر O_4 واقع بر S_3 بر یک خط l_4؛ و سرانجام l_4 را از یک نقطهٔ O_5 از S بر دایرهٔ S (شکل (ج)) تصویر می‌کنیم. نخستین تصویر، یک نقطهٔ A از S را به یک نقطهٔ A_1 از l_1 بدل خواهد کرد، تصویر دوم A_1 را به یک نقطهٔ A_2 از l_2، تصویر سوم A_2 را به یک نقطهٔ A_3 از S_3، تصویر چهارم A_3 را به یک نقطهٔ A_4 از l_4، و بالاخره آخرین تصویر نقطهٔ A_4 را به یک نقطهٔ A' از S بدل می‌کند.

بدین ترتیب این رشته تصویرها یک تبدیل از دایرهٔ S بر خودش را مشخص می‌کند که A را به A' بدل می‌کند. تبدیلی از یک دایره را که بتواند با یک رشته تصویرها از نوع ذکر شده در بالا تحقق یابد، یک تبدیل تصویری (روی دایرهٔ داده شده) می‌نامیم.

منظور از نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و D واقع بر یک دایرهٔ S، نسبت ناهمساز نگاره‌های این چهار نقطه، A_1 و B_1؛ C_1 و D_1 است که بر اثر تصویر از یک نقطهٔ P از S بر یک خط l به‌دست آمده‌اند (شکل (چ)). به‌آسانی می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز

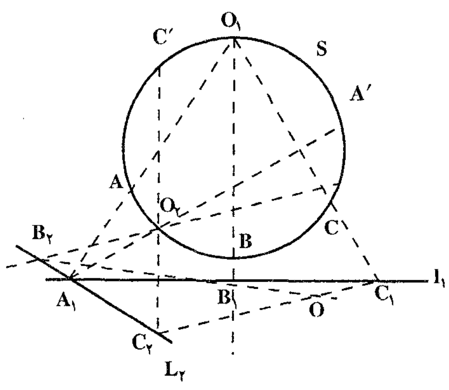


(چ)

چهارنقطهٔ واقع بر یک دایرهٔ S، مستقل از انتخاب نقطهٔ P بر S و مستقل از خط l است؛ یعنی مقدار آن به وسیلهٔ چهار نقطهٔ A، B، C و D کاملاً معین می‌شود؛ زیرا فرض می‌کنیم A_1، B_1، C_1 و D_1 نگاره‌های نقطه‌های A، B، C و D بر اثر یک تصویر S از نقطهٔ P بر خط l باشند و A_2، B_2، C_2 و D_2 نگاره‌های همان نقطه‌ها بر اثر یک تصویر S از نقطهٔ Q از S بر خطی مانند m (شکل (چ)). به موجب یک ویژگی کاملاً معروف مربوط به زاویه‌های محاطی، زاویه‌هایی که خطهای PA، PB، PC و PD با هم می‌سازند برابر (یا مکمل) زاویه‌هایی هستند که خطهای

QA، QB، QC و QD با هم می‌سازند. حال بر خطهای QA، QB، QC و QD پاره‌خطهای $QA^* = PA_1$، $QB^* = PB_1$، $QC^* = PC_1$ و $QD^* = PD_1$ را جدا می‌کنیم. شکلهای $QA^*B^*C^*D^*$ و $PA_1B_1C_1D_1$ قابل انطباقند (می‌توان با یک حرکت آنها را بر هم منطبق کرد: Q را به P منتقل می‌کنیم و نیمخطهای QA^* و QB^* را بر امتداد نیمخطهای PA_1 و PB_1 قرار می‌دهیم). این عمل ایجاب می‌کند که نقطه‌های A^*، B^*، C^* و D^* بر یک خط m^* واقع باشند، و نسبت ناهمساز چهارنقطهٔ A^* و B^* ؛ C^* و D^* با نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A_1 و B_1 ؛ C_1 و D_1 یکی باشد. از سوی دیگر A^*، B^*، C^* و D^* نگاره‌های A_2، B_2، C_2 و D_2 بر اثر تصویر خط m، به مرکز Q، بر روی خط m^* هستند. بنابراین نسبتهای ناهمساز A^* و B^* ؛ C^* و D^*، و A_2 و B_2 ؛ C_2 و D_2 مساوی‌اند، و از آن‌جا تساوی نسبتهای ناهمساز A_2 و B_2 ؛ C_2 و D_2، با A_1 و B_1 ؛ C_1 و D_1 نتیجه می‌شود.

چون تصویر یک خط بر روی یک دایره (یا یک دایره بر روی یک خط) نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل تصویری بر روی یک دایره نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند. چنان که در مورد تبدیل تصویری یک خط دیدیم، حال می‌توانیم بگوییم که یک تبدیل تصویری بر روی یک دایره با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملاً معین می‌شود. بالاخره به آسانی می‌توان نشان داد که هر تبدیل از یک دایره که نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ کند، یک تبدیل تصویری است (یعنی می‌تواند با یک رشته از تصویرها عملی شود). برای این منظور کافی است نشان دهیم که یک تبدیل تصویری وجود دارد که سه نقطهٔ داده شدهٔ A، B و C از دایرهٔ S را به سه نقطهٔ قبلاً مشخص شدهٔ A'، B' و C' از آن دایره بدل کند. برای تحقق بخشیدن به چنین تبدیلی، S را از یک نقطهٔ O_1 بر روی یک خط l_1، تصویر می‌کنیم و نگاره‌های نقطه‌های A، B و C را به A_1، B_1 و C_1 نشان می‌دهیم؛ از نقطهٔ O_2، محل تلاقی مجدد خط گذرنده بر A' و A_1 با S، S را بر یک خط l_2 گذرنده بر A_1 تصویر می‌کنیم و نگاره‌های A'، B' و C' را به A_1، B_2 و C_2 نشان می‌دهیم. بالاخره l_1 را بر l_2 چنان تصویر می‌کنیم که A_1، B_1 و C_1 به نقطه‌های A_1، B_2 و C_2 بدل شوند (شکل (ح))؛ مرکز این تصویر را به O نشان می‌دهیم. روشن است



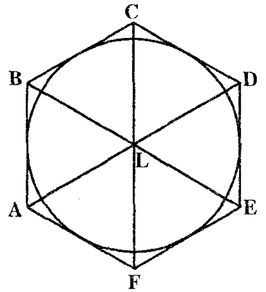
(ح)

که رشته تصویرهای : S بر روی l_1 از O_1 ؛ l_1 بر روی l_2 از O، و l_2 بر روی S از O_2 ، نقطه‌های A، B و C را به نقطه‌های A' ، B' و C' بدل می‌کند، همان‌گونه که می‌خواستیم.

۳۳۳. قضیه. ثابت کنید که تصویر جسم نمایی زاویه‌ها را محفوظ می‌دارد.

۳۳۴. قضیهٔ دزارگ. ثابت کنید که هر گاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 همرس باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خطهای AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، همخطند. را که به هندسهٔ تصویری برگردانیم، به چه صورت بیان خواهد شد؟

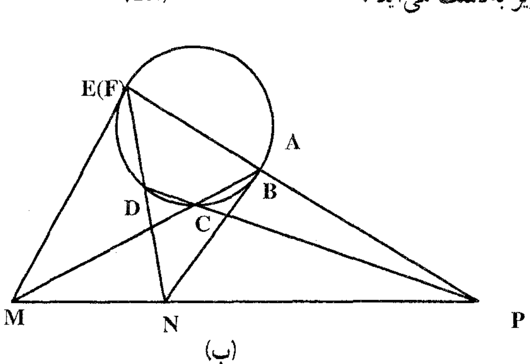
۳۳۵. قضیهٔ بریانشن. ثابت کنید که سه قطر واصل به رأسهای مقابل یک شش‌ضلعی محیط بر یک دایره همرسند (شکل (الف)).



(الف)

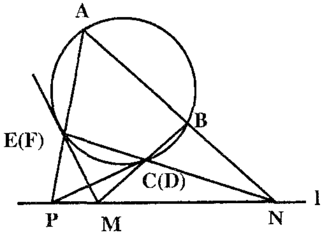
برخی حکمها مربوط به پنج‌ضلعیها، چهارضلعیها و سه‌ضلعیهای محیطی و محاطی، حالتهای خاص قضیه‌های بریانشن و پاسکال هستند. از این‌رو، به‌طور مثال فرض می‌کنیم که رأس F از شش ضلعی محاطی ABCDEF بر دایرهٔ محیطی آن حرکت کند و به نقطهٔ E نزدیک شود. در این صورت ضلع EF به سمت مماس بر دایره در E میل می‌کند و در حالت حد قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید :

نقطهٔ تلاقی ضلع BC از پنج‌ضلعی ABCDE محاط در یک دایره و مماس بر دایره در E، با نقطه‌های تلاقی ضلعهای AB و DE، CD و AE (شکل (ب)) همخطند. همچنین اگر فرض کنیم که در شش‌ضلعی محاطی ABCDEF رأس F بر E منطبق باشد و رأس D بر C، قضیهٔ زیر به‌دست می‌آید :



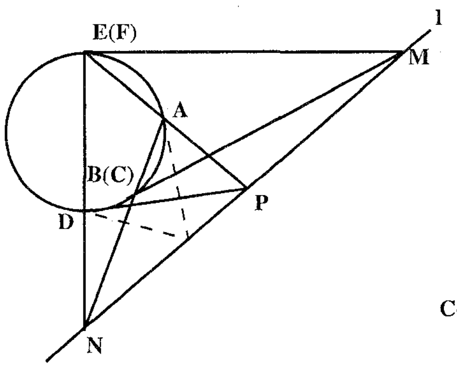
(ب)

نقطهٔ تلاقی ضلعهای AB و CE از چهارضلعی محاطی ABCE با نقطه‌ای که BC مماس بر دایره در E را می‌برد، و نقطه‌ای که AE مماس بر دایره در C را می‌برد، سه

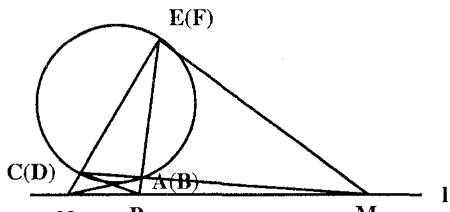


(پ)

نقطهٔ همخطند (شکل (پ)). اگر در شش ضلعی انطباق رأسهای F و E، C و B، را فرض کنیم، بلافاصله می‌بینیم که نقطهٔ تلاقی مماسهای بر دایره در رأسهای E و B از یک چهارضلعی محاطی ABDE با نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل بر یک خط واقعند. روشن است که نقطهٔ تلاقی مماسهای رسم شده بر دایره در نقطه‌های A و D نیز بر همان خط قرار دارد (شکل (ت)). بالاخره فرض منطبق بودن رأسهای A و B، C و D، و E و F، از یک شش ضلعی نتیجه می‌دهد که : نقطه‌های تلاقی ضلعهای مثلث ACE با مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی آن در رأسهای مقابل، همخطند (شکل (ث)). می‌توانستیم همهٔ این قضیه‌ها را حالتهای خاص قضیهٔ پاسکال تلقی کنیم، که در آنها طولهای یک یا چند ضلع صفر شده‌اند و همهٔ آنها را به روش قضیهٔ پاسکال ثابت کنیم (و در برخی موارد برهان بسیار ساده است).

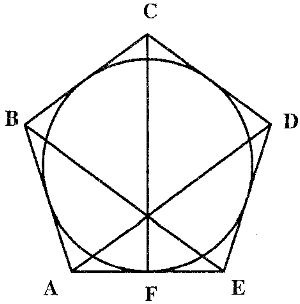


(ت)

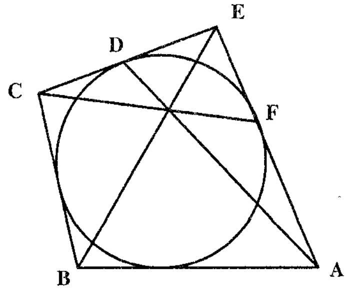


(ث)

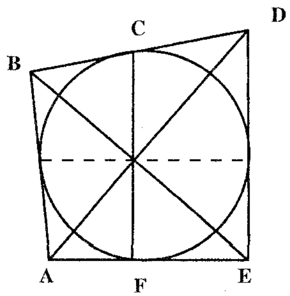
به همین طریق ممکن است تعدادی قضیهٔ تازه از قضیهٔ بریانشن استخراج کنیم. بدین منظور کافی است که فقط فرض کنیم شش‌ضلعی محیطی یک یا چند زاویهٔ °۱۸۰ دارد. شکلهای ج ـ خ حکمهای چندی را به ذهن القا می‌کنند که بیان آنها را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.



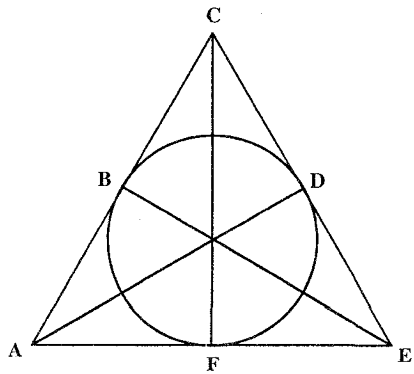
(ج)



(چ)



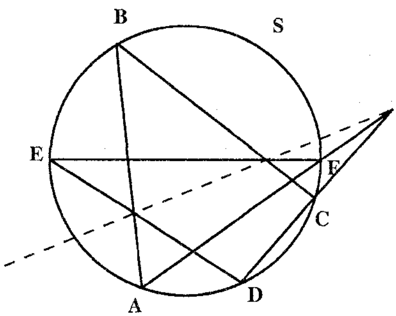
(ح)



(خ)

۳۳۶. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک خط، قضیهٔ پاپوس را ثابت کنید.

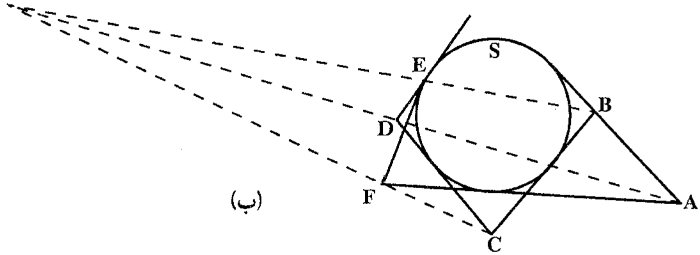
۳۳۷. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری بر روی یک دایره، قضیهٔ پاسکال را ثابت کنید: اگر A، B، C، D، E و F شش نقطه بر یک دایره باشند، نقطه‌های برخورد AB و DE، BC و EF، و CD و FA همخطند (شکل (الف)).



(الف)

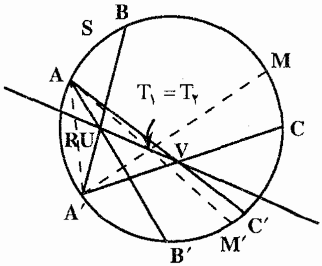
اشاره می‌کنیم که این قضیه قویتر از مسأله‌ای است که در آن شش ضلعی ABCDEF محاط در یک دایره، محدب فرض شده بود؛ در حالی که در این قضیه، شش‌ضلعی ABCDEF ممکن است خود، متقاطع باشد.

به‌ازای هر شش ضلعی که در مسألهٔ (نشان دهید که سه نقطهٔ تقاطع ضلعهای مقابل یک شش‌ضلعی محاط در دایره همخطند (قضیهٔ پاسکال)) در نظر گرفتیم، ۶۰ شش ضلعی با همان رأسهای این مسأله وجود دارند که به ۶۰ جایگشت ممکن رأسها مربوط می‌شوند و در نتیجه به ۶ نقطهٔ واقع بر یک دایره، ۶۰ «خط پاسکال» مربوط می‌شوند.
ملاحظه می‌کنیم که چون قضیهٔ بریانشن می‌تواند از قضیهٔ پاسکال استخراج شود، این قضیه ایجاب می‌کند که قضیهٔ بریانشن به علت خود ـ متقاطع بودن شش‌ضلعی (شکل (ب)) صادق باشد.



(ب)

نکتهٔ ۱. ۶۰ شش ضلعی وجود دارد که رأسهای آنها ۶ نقطهٔ مفروضی باشند. زیرا، با شروع از هر یک از رأسها می‌توانیم رأس دوم را به ۵ طریق، رأس سوم را به ۴ طریق، رأس چهارم را به سه طریق، رأس پنجم را به دو طریق انتخاب کنیم و رأس آخر به طریق منحصری تعیین می‌شود. عدد حاصل $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ است که به موجب این واقعیت که هر شش ضلعی دو بار (به‌دلیل دو نحوهٔ ممکن عبور آنها) در نظر گرفته شده، این تعداد بایستی نصف شود.
نکتهٔ ۲. مجموعهٔ ۶۰ خط حاصل به روش ذکر شده، ویژگیهای بسیار جالبی دارد که مورد مطالعهٔ هندسه‌دانان سدهٔ اخیر قرار گرفته است. بدین ترتیب که به‌طور مثال، این ۶۰ خط در ۴۵ نقطه در گروههای ۴ تایی یکدیگر را می‌برند (هر خط پاسکال سه نقطه از این نقطه‌ها را بر خود دارد) و در ۸۰ نقطه در گروههای سه تایی (هر خط پاسکال چهار نقطه از این نقطه‌ها را بر خود دارد). این ۸۰ نقطهٔ اخیر، علاوه بر خطهای پاسکال، در ۲۰ خط جدید که به نوبهٔ خود در گروهای ۴ تایی در ۱۵ نقطهٔ جدید یکدیگر را می برند و هکذا. همهٔ این نتیجه‌ها را می‌توان به نحو نسبتاً ساده‌ای از قضیه‌های دزارگ، پاسکال و بریانشن، استخراج کرد. ولی اثبات آنها ما را از زمینهٔ اصلی خیلی دور می‌سازد.



۳۳۸. نکتهٔ مهم. تعیین نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایره، یعنی پیدا کردن نقطه‌هایی که بر اثر تبدیل مفروض به خود بدل می‌شوند، غالباً لازم می‌آید. فرض می‌کنیم که تبدیل تصویری با این شرط مشخص شده باشد که سه نقطهٔ A، B و C واقع بر S را به سه نقطهٔ معلوم ′A، ′B و ′C واقع بر S بدل کند. می‌توانیم فرض کنیم که نقطه‌های A، B و C بر ′A، ′B و ′C منطبق نباشند، چون در غیر این صورت تبدیل تصویری یک همانی خواهد شد و همهٔ نقطه‌های دایره، نقطه‌های ثابت خواهند شد (زیرا یک تبدیل تصویری در یک دایره منحصراً به‌وسیلهٔ نگاره‌های سه نقطه مشخص می‌شود. تبدیلی که سه نقطه را ثابت نگه دارد، لزوماً باید یک همانی باشد.)؛ بنابراین، فرض می‌کنیم، به‌طور مثال، ′A با A یکی نباشد، سپس فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از دایرهٔ S باشد و ′M نگارهٔ آن بر اثر تبدیل تصویری (شکل).

می‌خواهیم نشان دهیم که خطهای ′AM و A′M روی خطی یکدیگر را می‌برند که بر U، نقطهٔ برخورد ′AB و A′B، و بر V نقطهٔ برخورد ′AC و A′C می‌گذرد.

فرض می‌کنیم که چنین نباشد، و نقطه‌های برخورد A′M، ′AM و ′AA با UV را بترتیب T_1، T_2 و R می‌گیریم. از تصویر S بر روی UV ابتدا از ′A و سپس از A، ملاحظه می‌کنیم که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B؛ C و M روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ R و U؛ V و T_1 روی UV است، و نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ ′A و ′B؛ ′C و ′M روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ R و U؛ V و T_2، روی UV است. اما به موجب وجود یک تبدیل تصویری که A، B، C و M را به ′A، ′B، ′C و ′M بدل می‌کند، نسبت ناهمساز این دو چهارتایی از نقطه‌ها بایستی مساوی باشند. این مطلب تساوی نسبت ناهمساز R و U؛ V و T_1، با نسبت ناهمساز R و U؛ V و T_2 و در نتیجه یکی بودن T_1 و T_2 را ایجاب می‌کند. همان که ادعا شده بود...

اکنون می‌بینیم که برای به‌دست آوردن نقطهٔ ′M، نگارهٔ یک نقطهٔ مفروض M، اثر تبدیل تصویری باید A را به T، نقطهٔ برخورد A′M با UV، (در این‌جا U نقطهٔ برخورد ′AB و ′BA است و V نقطهٔ برخورد ′AC و A′C) وصل کنیم. در این حال ′M نقطهٔ برخورد خط AT با S خواهد شد. این ترسیم ایجاب می‌کند که نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایره، نقطه‌های برخورد خط UV با S باشند. از آن‌جا نتیجه می‌شود

که این تبدیل دارای دو نقطهٔ ثابت یا دارای یک نقطهٔ ثابت است و یا هیچ نقطهٔ ثابت ندارد برحسب این که UV با دایرهٔ S را در دو نقطه ببرد (حالتی که در شکل اختیار شده است) یا بر آن مماس باشد و یا کاملاً در خارج آن قرار گیرد.
ملاحظه می‌کنیم که تعیین نقطهٔ ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایرهٔ S که سه نقطهٔ A، B و C را به سه نقطهٔ A'، B' و C' بدل می‌کند، می‌تواند به وسیلهٔ یک ستارهٔ تنها انجام گیرد.

۳۳۹. صفحهٔ π و امتداد D متقاطع با π و شکل مسطح F واقع در خارج π داده شده است. تصویر در امتداد D شکل F روی π یک مربع است. شکل F به‌طور حتم :

الف. یک مربع است. ب. مربع نیست.
ج. یک مستطیل است. د. متوازی‌الاضلاع است.
هـ. لوزی است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

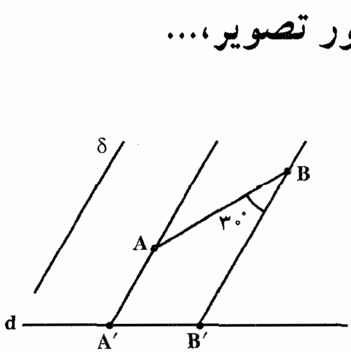
۳۴۰. فرض می‌کنیم S یک دایره و AB و CD دو وتر آن باشند. بر S نقطه‌ای مانند X چنان تعیین کنید که خطهای AX و BX بر وتر CD :
الف. پاره‌خطی را به‌طول a مشخص سازند ؛
ب. پاره‌خطی را مشخص سازند که وسطش نقطهٔ مفروض E بر CD باشد.

۳۴۱. ثابت کنید که در تصویر جسم نمایی هر دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' به یک دایره (یا یک خط) از صفحهٔ α تبدیل می‌شود که با دایرهٔ معینی در دو نقطهٔ واقع در دو سر یک قطر متقاطع می‌باشند.

۲.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۳. مرکز تصویر، محور تصویر،...

۳۴۲. تصویر پاره‌خط AB به طول $12\sqrt{2}$ سانتیمتر در امتداد δ روی خط d، پاره‌خط $A'B'$ به‌طول ۱۲ سانتیمتر است. اگر $A\hat{B}B' = 30^\circ$ باشد، امتداد δ را مشخص سازید.



۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۴۳. در صفحه‌ای چهار خط چنان داده شده‌اند که هیچ دو تا از آنها با هم موازی و یا هیچ سه تا از آنها همرس نیستند. ثابت کنید که در چهار مثلث حاصل از این خطها، نقطه‌های برخورد ارتفاعها همخطند.

۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه‌های برخورد

۳۴۴. نقطه‌های برخورد خط مفروض l و یک دایرهٔ S را پیدا کنید، در صورتی که مرکز A و شعاع BC از آن معلوم باشد.

۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۲.۳. خطها موازی‌اند

۳۴۵. تصویر مرکزی به مرکز O و دو صفحهٔ π و π' را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم l_1 و l_2 دو خط از صفحهٔ π، یکدیگر را در یک نقطهٔ M روی خط خاص x از صفحهٔ π قطع کنند. در این صورت تصویرهای آنها روی صفحهٔ π' بر اثر تصویر مرکزی به مرکز O، دو خط متوازی‌اند.

۴.۲.۳. زاویه

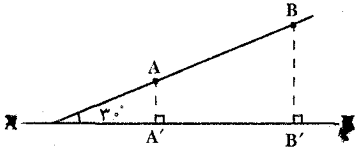
۱.۴.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۳۴۶. دو خط d و d' در صفحهٔ π با هم زاویهٔ ۳۰° ساخته‌اند. این دو خط را روی صفحهٔ π' موازی صفحهٔ π، به موازات امتداد داده شدهٔ δ (غیر موازی با π و π') تصویر می‌کنیم. اندازهٔ زاویهٔ بین تصویرهای این دو خط را تعیین کنید.

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۳۴۷. پاره‌خط AB به طول ۵ سانتیمتر داده شده است و می‌دانیم که امتداد آن با خط xy زاویهٔ



30° می‌سازد. مطلوب است اندازهٔ تصویر AB بر xy.

۳۴۸. ثابت کنید عمود مشترک دو خط متنافر، کوتاهترین پاره‌خطی است که دو سر آن بر دو خط مزبور واقع است.

۳۴۹. ثابت کنید عمود مشترک دو خط متنافر منحصر به یک پاره‌خط است.

۶.۲.۳. رابطه‌های متری

۳۵۰. تصویرهای سه نقطهٔ همخط A، B و C را روی خط راست Δ بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید که $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{AC}$ است.

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۳۵۱. برای آن که تصویر نیمساز یک زاویه، نیمساز تصویر آن زاویه باشد، لازم و کافی است که نیمساز زاویهٔ مزبور و یا نیمساز خارجی این زاویه، با صفحهٔ تصویر موازی باشد.

۸.۲.۳. رسم شکلها

۳۵۲. دو خط l_1 و l_2 و یک نقطهٔ A بر l_1 و یک نقطهٔ B بر l_2 و یک نقطهٔ P ناواقع بر l_1 و l_2 داده شده‌اند. از P خطی رسم کنید که l_1 و l_2 را در نقطه‌های X و Y ببرد، به‌طوری که :

الف. $\frac{AX}{BY}$ برابر با نسبت معلوم $\frac{m}{n}$ باشد.

ب. $AX.BY = k^2$ ، که k داده شده است.

۳۵۳. دو خط l_1 و l_2 و دو نقطهٔ A و B ناواقع بر آنها داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند X بر l_1 چنان پیدا کنید که پاره‌خطی که بر l_2 به‌وسیلهٔ خطهای AX و BX مشخص می‌شوند :

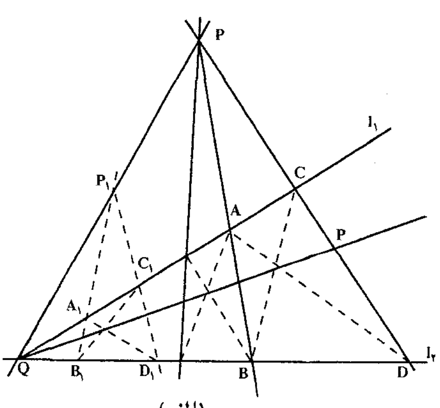
الف. دارای طول مفروض a باشد.
ب. نقطهٔ مفروض E واقع بر l_2 وسط آن باشد.

۹.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

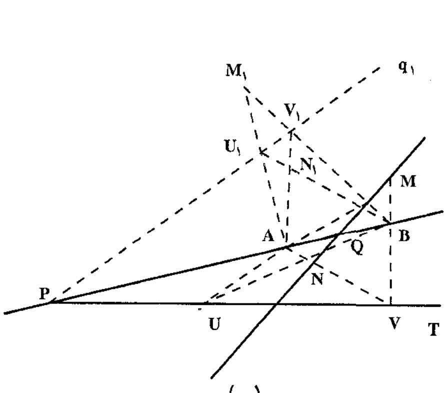
۳۵۴. الف. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای طوری می‌لغزد که دو سرش همواره بر دو خط عمود بر هم حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس قائمهٔ آن را بیابید.
ب. بزرگترین ضلع مثلث متساوی‌الساقینی به زاویهٔ رأس °۱۲۰ چنان می‌لغزد که دو سرش همواره بر ضلعهای یک زاویهٔ °۶۰ قرار دارند. پیدا کنید مکان هندسی رأسی را که زاویه‌اش از همه بزرگتر است.

۱۰.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۵. الف. در یک صفحه، دو خط l_1 و l_2 و یک نقطهٔ P ناواقع بر هیچ یک از آنها داده شده‌اند. از P دو خط می‌گذرانیم که یکی از آنها l_1 و l_2 را در نقطه‌های A و B ببرد و دیگری آنها را در نقطه‌های C و D (شکل (الف)). نشان دهید که:
(i) مکان هندسی نقطهٔ برخورد AD و BC (به ازای کلیهٔ جفت خطهایی که از P می‌گذرند) یک خط p است.
(ii) به‌ازای l_1 ناموازی با l_2، خط p از نقطهٔ Q، محل برخورد l_1 و l_2 می‌گذرد.
(iii) p تغییر نمی‌کند، هرگاه به‌جای P یک نقطهٔ P_1 از خط PQ را قرار دهیم.



(الف)



(ب)

ب. خط q و دو نقطهٔ A و B ناواقع بر q در یک صفحه داده شده‌اند. فرض می‌کنیم U و V دو نقطه بر q، M نقطه برخورد خطهای UA و VB، و N نقطهٔ برخورد خطهای UB و VA باشد (شکل (ب)). به ازای هر انتخاب نقطه‌های U و V بر q، یک خط MN پدید می‌آید.

نشان دهید که همهٔ این خطها در یک نقطهٔ Q واقع بر خط AB متقاطعند؛ همچنین نشان دهید که هرگاه به‌جای q یک خط q_1 قرار دهیم که بر P، نقطهٔ تلاقی q و AB بگذرد، نقطهٔ Q عوض نمی‌شود.

۳۵۶. الف. فرض می‌کنیم l یک خط و P نقطه‌ای ناواقع بر آن باشد. بر l پاره‌خطی مانند XY پیدا کنید که از P به زاویهٔ معین α دیده شود.

ب. گیریم l_1 و l_2 دو خط باشند، و P و Q دو نقطهٔ ناواقع بر این خطها. بر l_1 نقطه‌ای مانند X و بر l_2 نقطه‌ای مانند Y چنان تعیین کنید که پاره‌خط XY از نقطهٔ P به زاویهٔ مفروض α، و از Q به زاویهٔ مفروض β دیده شود.

۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث

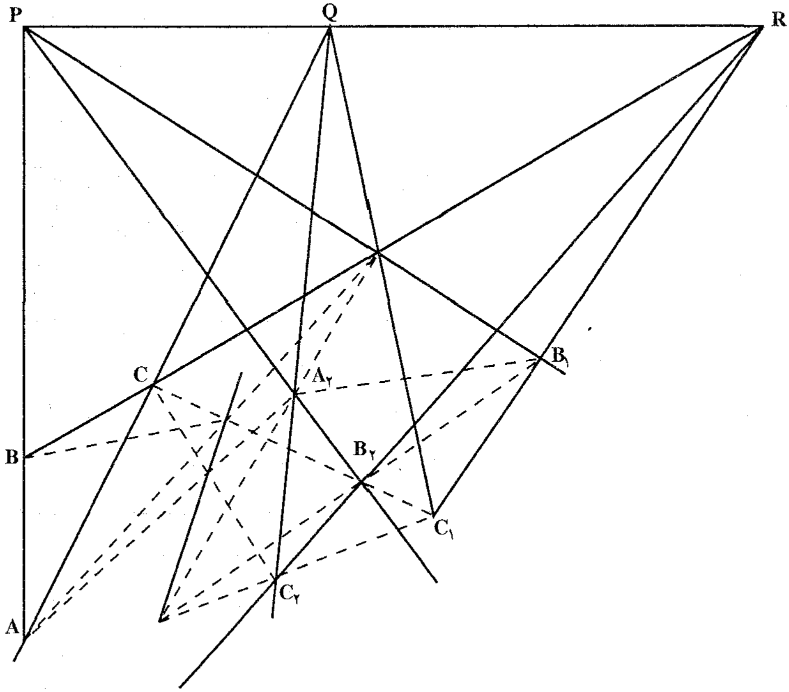
۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر،...

۳۵۷. در چه نوع تصویری، تصویر مثلث ABC روی صفحهٔ π یک پاره‌خط است؟

۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۵۸. سه مثلث ABC، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ داده شده‌اند به قسمی که خطهای AB، A_1B_1 و A_2B_2 در یک نقطهٔ P، و خطهای AC، A_1C_1 و A_2C_2 در یک نقطهٔ Q، و خطهای BC، B_1C_1 و B_2C_2 در یک نقطهٔ R یکدیگر را می‌برند و P، Q و R، همخطند. به موجب قضیهٔ دزارگ، در هر یک از سه‌تاییهای AA_1، BB_1 و CC_1؛ AA_2، BB_2 و CC_2؛ A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2، خطها در یک نقطه همدیگر را می‌برند. ثابت کنید که این سه نقطه همخطند (شکل).



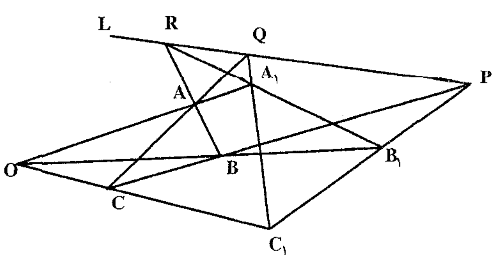
۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۳. خطها همرسند

۳۵۹. قضیهٔ سوا را ثابت کنید : اگر نقطه‌های M، N و P بترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC (ولی نه بر امتدادشان) واقع باشند، و اگر :

$$\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$$

آن گاه خطهای AN، BP و CM همرسند.

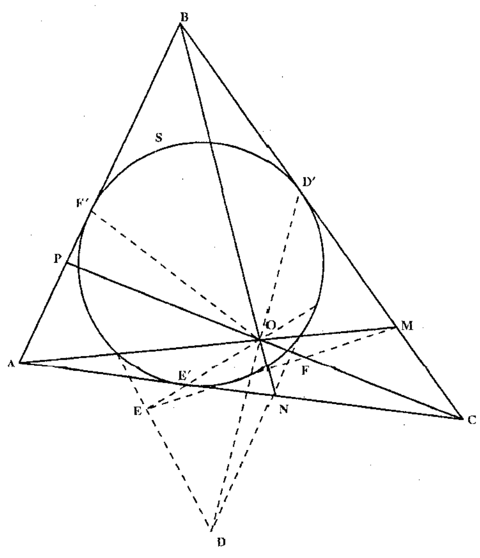


۳۶۰. قضیهٔ دزارگ. ثابت کنید که هرگاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 همرس باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خطهای AB

و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، همخطند (شکل). بعکس، اگر نقطه‌های برخورد خطهای AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، همخط باشند، آن‌گاه خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 همرسند.

مثلثهایی که در مفروضات قضیهٔ دزارگ صدق می‌کنند، مثلثهای منظری نامیده می‌شوند. نقطهٔ همرسی خطهای واصل به رأسهای متناظر آنها، O، مرکز تصویر منظری و خطی که شامل نقطه‌های برخورد جفتهای ضلعهای متناظر آنها باشد، محور تصویر منظری نام دارد. ملاحظه می‌کنیم که قضیهٔ دزارگ مبین یک ویژگی مشترک خطها و نقطه‌های یک صفحه است که الزاماً به یک جفت مثلث بستگی ندارند. تکیه‌ای که بر برخی عنصرهای شکل شده است به خاطر سپردن قضیه را آسانتر می‌سازد ولی تقارن آن را از نظر می‌پوشاند؛ زیرا این واقعیت را که همهٔ خطها و نقطه‌های قضیهٔ دزارگ همسنگ هستند، از نظر پنهان می‌سازد. از این‌رو، به‌طور مثال در شکل، خط OCC_1 ممکن است به‌عنوان محور تصویر منظری (برای مثلثهای PBB_1 و QAA_1) در نظر گرفته شود، و نقطهٔ B به‌عنوان مرکز تصویر منظری (برای مثلثهای PRB_1 و CAO).

۳۶۱. مثلث ABC و نقطهٔ Q داده شده‌اند. گیریم M، N و P محل برخورد خطهای AQ، BQ و CQ با ضلعهای BC، CA و AB باشند (شکل). هرگاه S دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC و D' ، E' و F' نقطه‌های تماس آن با ضلعهای BC، CA و AB باشند و مماسهای رسم شده از M، N و P بر S مثلث DEF را پدید آورند، نشان دهید که سه خط واصل بین رأسهای متناظر در دو مثلث DEF و $D'E'F'$ در Q همرسند.



۳۶۲. ثابت کنید که سه میانهٔ مثلث همرسند (یعنی هر سه در یک نقطه همدیگر را می‌برند).

۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۳۶۳. اندازهٔ مساحت مثلث $A'B'C'$، تصویر قائم مثلث ABC روی صفحهٔ P، مساوی $۱۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر مربع است. اگر مساحت مثلث ABC مساوی ۲۴ سانتیمتر مربع باشد، زاویهٔ بین صفحهٔ تصویر و صفحهٔ مثلث ABC را تعیین کنید.

۵.۳.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۳۶۴. ضلع BC از مثلث ABC روی صفحهٔ P واقع است. زاویهٔ بین صفحهٔ این مثلث و صفحهٔ P مساوی ۳۰° است. اگر A' تصویر رأس A روی صفحهٔ P باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس A' از مثلث $A'BC$ را بیابید. در صورتی که اندازهٔ ارتفاع AH از مثلث ABC مساوی $۱۲\sqrt{۳}$ سانتیمتر باشد.

۶.۳.۳.رابطه‌های متری

۳۶۵. الف. قضیهٔ منلائوس را ثابت کنید: سه نقطهٔ M، N و P بترتیب واقع بر ضلعهای AB، BC و CA (یا بر امتداد آنها، شکل (الف)) از مثلث ABC، همخطند اگر و فقط اگر:

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{AP}=۱$$

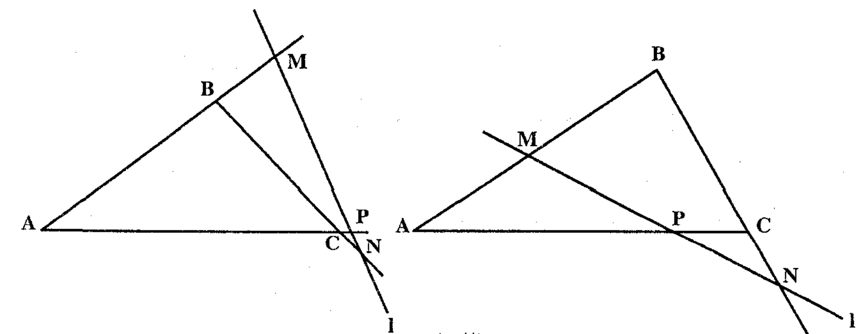
ب. قضیهٔ سوا را ثابت کنید: سه خط AN، BP و CM که نقطه‌های M، N و P بترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA (یا بر امتداد آنها، (شکل (ب)) از مثلث ABC قرار دارند، همرس یا موازی‌اند، اگر و تنها اگر:

$$\frac{AM}{BM}.\frac{BN}{CN}.\frac{CP}{AP}=-۱$$

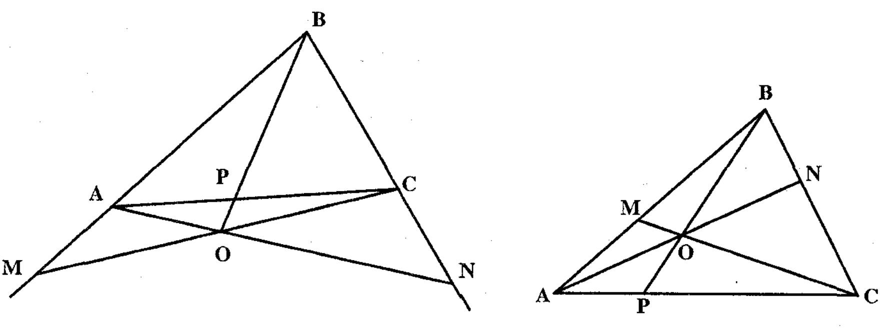
به آسانی دیده می‌شود که هرگاه نقطه‌های M، N و P همخط باشند، آن‌گاه به‌ازای هر مثلث ABC، یا دو نقطه از این سه نقطه بر ضلعهای مثلث قرار دارند و یا هر سه

نقطه بر امتداد ضلعها واقعند (شکل (الف)). بنابراین از سه نسبت $\frac{AM}{BM}$، $\frac{BN}{CN}$ و $\frac{CP}{AP}$ یا دو تا از آنها منفی‌اند یا هیچ‌یک منفی نیست؛ پس حاصلضرب هر سه نسبت، الزاماً مثبت خواهد بود. همچنین اگر خطهای AN، BP و CM متقارب یا موازی باشند (شکل (ب))، آن‌گاه از سه نقطهٔ M، N و P یا هر سه بر ضلعهای مثلث واقعند، یا تنها یکی از آنها. بنابراین از سه نسبت $\frac{AM}{BM}$، $\frac{BN}{CN}$ و $\frac{CP}{AP}$ یا دو تا مثبتند یا هیچ‌یک مثبت نیست. پس حاصلضرب سه نسبت منفی می‌شود.

قضیه‌های منلائوس و سوا اغلب زمانی به‌کار برده می‌شوند که اثبات همخطی سه نقطه یا تقارب سه خط مطلوب باشد.



(الف)



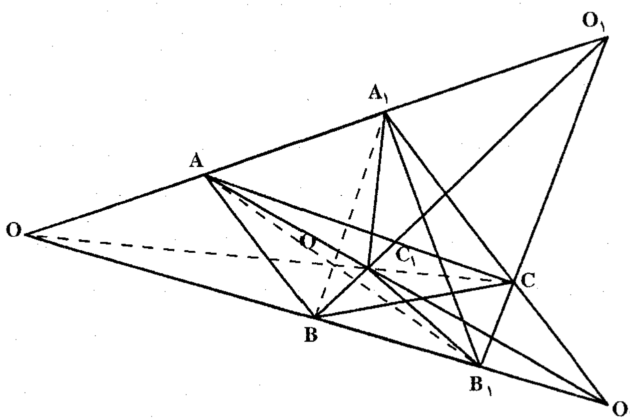
۳۶۶. نقطه‌های M، N و P بر ضلعهای AB، BC و AC از مثلث ABC و M_1، N_1 و P_1 بترتیب قرینه‌های M، N و P نسبت به وسطهای ضلعهای AB، BC و AC می‌باشند. نشان دهید که مساحت مثلثی به ضلعهای AN، BP و CM با مساحت مثلثی به ضلعهای

AN_1 ، BP_1 و CM_1 برابر است (به‌ویژه، هرگاه خطهای AN، BP و CM همرس باشند، خطهای AN_1 ، BP_1 و CM_1 نیز همرسند).

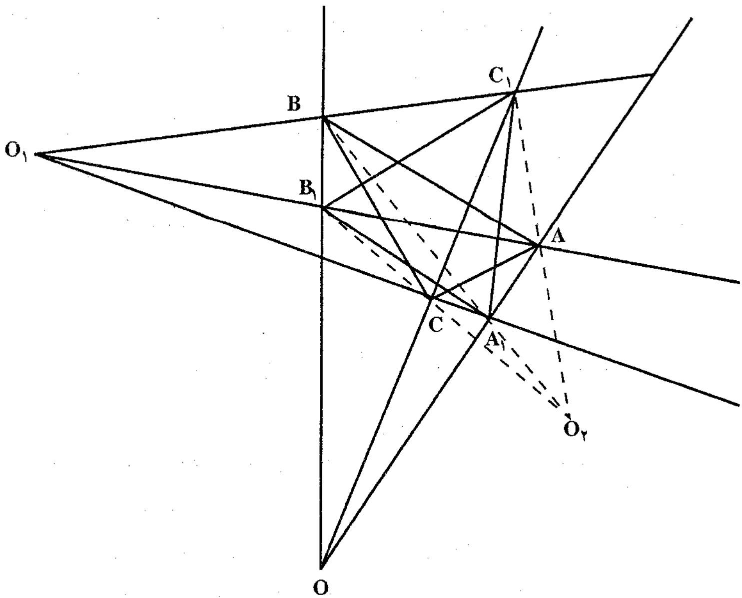
۳۶۷. نقطه‌های K، L و M بر ضلعهای مثلث ABC، به مساحت ۱ واقعند، چنان‌که این ضلعها را به نسبتهای مفروض k_1 ، k_2 و k_3 تقسیم می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث KLM فقط به عددهای k_1 ، k_2 و k_3 بستگی دارد و نه به این که کدام ضلع به چه نسبتی تقسیم شده است.

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۳۶۸. قضیه در باب مثلثهای منظری سه‌گانه. فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان باشند که AA_1 ، BB_1 و CC_1 در نقطهٔ O، خطهای AA_1 ، BC_1 و CB_1 در نقطهٔ O_1 ، و خطهای AC_1 ، BB_1 و CA_1 در نقطهٔ O_2 یکدیگر را ببرند (شکل). ثابت کنید که خطهای AB_1 ، BA_1 و CC_1 نیز در یک نقطهٔ O_3 همرسند (به‌عبارت دیگر، دو مثلث منظری سه‌گانه، به تعبیر مسألهٔ ما الزاماً منظری چهارگانه‌اند).



۳۶۹. قضیه دربارهٔ مثلثهای منظری دوگانه. مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان داده شده‌اند که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 یکدیگر را در یک نقطهٔ O می‌برند و خطهای AB_1 ، BC_1 و CA_1 در یک نقطهٔ O_1 (شکل). ثابت کنید که خطهای AC_1 ، BA_1 و CB_1 نیز یکدیگر را در یک نقطهٔ O می‌برند، به عبارت دیگر دو مثلث منظری دوگانه (به تعبیر حکم مسأله ما) در واقع منظری سه‌گانه‌اند.



۳۷۰. مثلث $(Q) = DEF$ در مثلث $(P) = ABC$ و مثلث $(R) = KLM$ درمثلث Q محاط شده است. نشان دهید که اگر دو تا از این مثلثها نسبت به مثلث سوم منظری باشد، نسبت به یکدیگر نیز منظری هستند.

۳۷۱. (Q) مثلث سوایی نقطهٔ M برای مثلث (P) است. اگر از هر رأس (P) خطی به موازات ضلع متناظر مثلث (Q) رسم کنیم، سه خط رسم شده یک مثلث تشکیل می‌دهند. نشان دهید که این مثلث با مثلث (P) منظری است.

۳۷۲. از هر رأس مثلث مفروض (Q) خطی به موازات ضلع متناظر در مثلث مفروض (P') رسم می‌کنیم، تا مثلث (P) تشکیل شود. همچنین از هر رأس مثلث (P') خطی به موازات ضلع متناظر در مثلث (Q) رسم می‌کنیم تا مثلث (Q') تشکیل شود. نشان دهید که اگر دو مثلث (P) و (Q) یا دو مثلث (P') و (Q')، منظری باشند، دو مثلث دیگر هم منظری هستند.

۸.۳.۳. رسم شکلها

۳۷۳. مثلث ABC داده شده است. نقطهٔ M را در داخل مثلث ABC چنان پیدا کنید که مثلثهای ABM، BCM و CAM مساحتهای مساوی داشته باشند.

۳۷۴. در مثلث ABC مستطیلی به مساحت δ محاط کنید که دو رأس آن بر ضلع AB واقع باشند و دو رأس دیگر بر ضلعهای CA و CB.

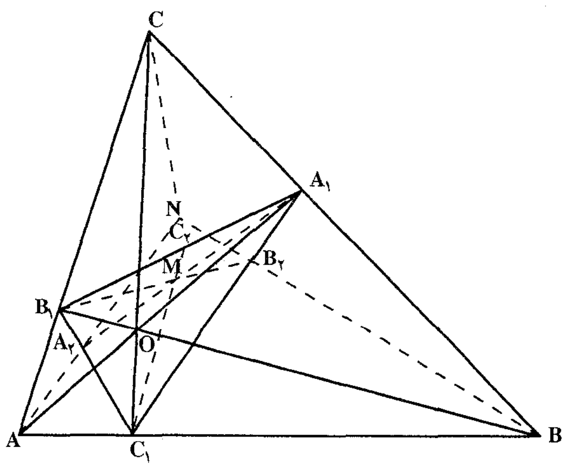
۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۵. مثلث $A'BC$ تصویر قائم مثلث ABC روی صفحهٔ P است. اگر H و H' بترتیب نقطه‌های برخورد ارتفاعهای دو مثلث ABC و $A'BC$ باشند، ثابت کنید که خط HH' بر صفحهٔ $A'BC$ عمود است.

۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

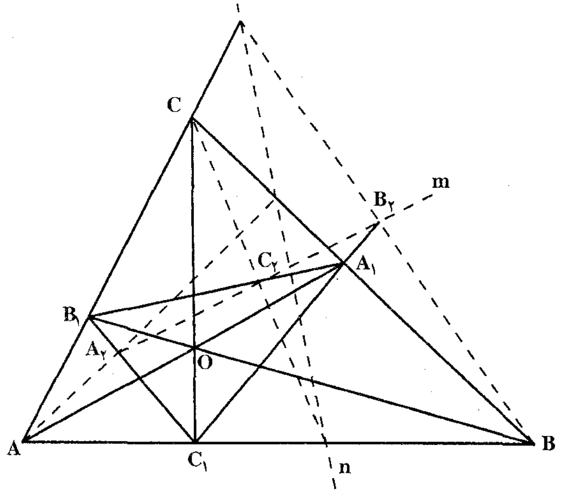
۳۷۶. O نقطه‌ای است در صفحهٔ ΔABC و A_1، B_1 و C_1 نقطه‌های برخورد خطهای AO، BO و CO با ضلعهای روبه‌رو به رأسهای A، B و C در مثلث هستند (شکل). نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 را بر ضلعهای B_1C_1، C_1A_1 و A_1B_1 از $\Delta A_1B_1C_1$ درنظر می‌گیریم. ثابت کنید که:

الف. اگر سه خط A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 همرس باشند، خطهای AA_2، BB_2 و CC_2 نیز همرسند (شکل (الف)).



(الف)

ب. اگر نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 همخط باشند، نقطه‌های برخورد خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 با ضلعهای مقابل ΔABC نیز همخطند (شکل (ب)).



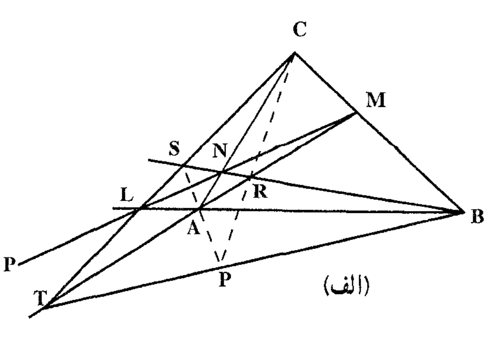
(ب)

۳۷۷. الف. مثلث ABC و سه نقطهٔ همخط P ، Q و R داده شده‌اند. در این مثلث یک مثلث XYZ چنان محاط کنید که ضلعهایش بترتیب از نقطه‌های P، Q و R بگذرند.

ب. در یک n ضلعی $A_1A_2 \cdots A_n$ ، n ضلعی دیگری محاط کنید که ضلعهایش از nنقطهٔ همخط مفروض بگذرند.

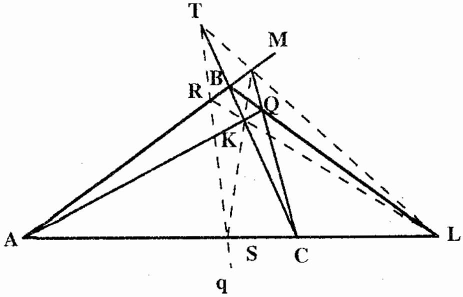
ج. سه خط همرس l_1 ، l_2 و l_3 و سه نقطهٔ A، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. مثلثی مانند XYZ چنان رسم کنید که ضلعهایش از نقطه‌های A، B و C بگذرند و رأسهایش بر خطهای l_1 ، l_2 و l_3 واقع باشند.

۳۷۸. الف. خط p ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC (یا امتداد آنها) را در نقطه‌های L، M و N بریده است. مانند شکل (الف)، نقطهٔ برخورد AM و BN را به R، نقطهٔ برخورد BN و CL را به S و نقطهٔ برخورد AM و CL را به T نشان می‌دهیم. نشان دهید که خطهای AS، BT و CR همرسند.



(الف)

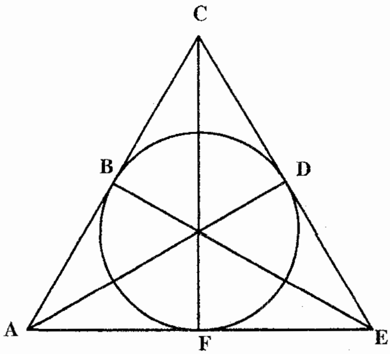
ب. مثلث ABC و یک نقطهٔ Q داده شده‌اند. مانند شکل (ب)، نقطه‌های برخورد خطهای QA، QB و QC را با ضلعهای مثلث ABC(یا امتداد آنها) به K، L و M نشان می‌دهیم و نقطه‌های برخورد جفتهای خطهای KL و AB، KM و AC، LM و BC را به R، S و T. نشان دهید که نقطه‌های R، S و T همخطند.



(ب)

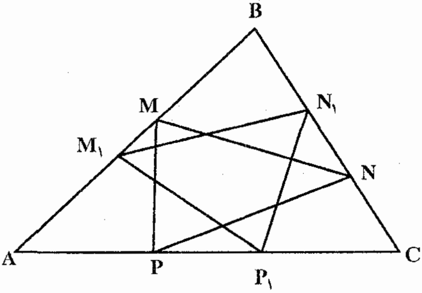
۳۷۹. الف. ثابت کنید که در هر مثلث خطهای واصل از سه رأس به نقطه‌های تماس ضلعهای مقابل با دایرهٔ محاطی داخلی همرسند(شکل).

ب. گیریم ABC یک مثلث و S دایره‌ای باشد که ضلعهای AB، BC و CAی آن را بترتیب در M، N، P و Q، R و T می‌برد. فرض می‌کنیم C_1، A_1 و B_1 بترتیب نقطه‌های برخورد مماسهای رسم شده بر S در نقطه‌های M و N، P و Q، و R و T باشند. نشان دهید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 همرسند.



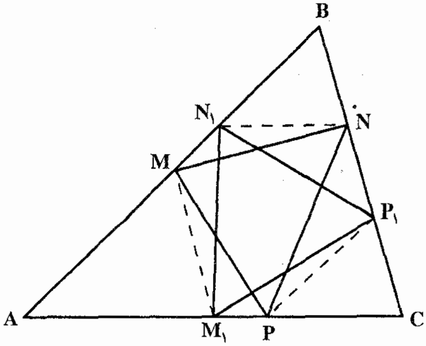
۳۸۰. نقطه‌های M، N و P بترتیب بر ضلعهای AB، BC و AC از مثلث ABC واقعند، نشان دهید که :

الف. هرگاه M_1، N_1 و P_1 بترتیب قرینه‌های M، N و P نسبت به وسطهای ضلعهای AB، BC و AC باشند (شکل (الف))، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$ مساحتهای مساوی دارند (به‌ویژه، اگر نقطه‌های M، N و P همخط باشند، نقطه‌های M_1، N_1 و P_1 نیز همخطند).



(الف)

ب. اگر M_1، N_1 و P_1 بترتیب بر ضلعهای AC، BA و CB از مثلث ABC چنان باشند که $MM_1 \| BC$، $NN_1 \| CA$ و $PP_1 \| AB$ (شکل (ب))، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$ مساحتهای مساوی دارند (به‌ویژه هرگاه نقطه‌های M، N و P همخط باشند، نقطه‌های M_1، N_1 و P_1 نیز همخطند).



(ب)

۴.۳. تصویرهای آفین و تصویری در چندضلعی

۳.۴.۱. مرکز تصویر، محور تصویر،...

۳۸۱. چهارضلعی چپ $ABCD$ داده شده است. صفحه‌های تصویر را به قسمی بیابید که تصویر این چهارضلعی مستطیل $A'B'C'D'$ گردد.

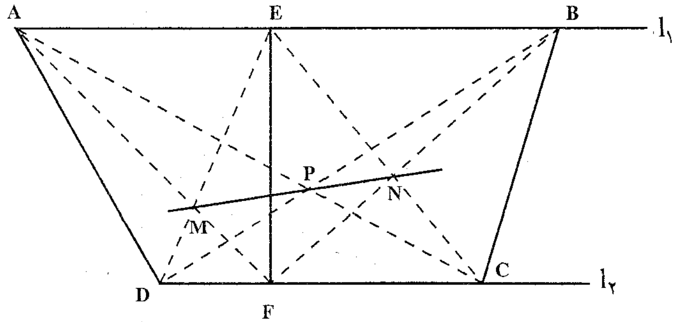
۳.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۳.۴.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳۸۲. قضیهٔ پاپوس. نشان دهید که اگر یک خط EF چهارضلعی $ABCD$ را به دو چهارضلعی $AEFD$ و $BCFE$ (شکل) تقسیم کند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد قطرهای سه‌چهار ضلعی $ABCD$، $AEFD$ و $BCFE$ همخطند.

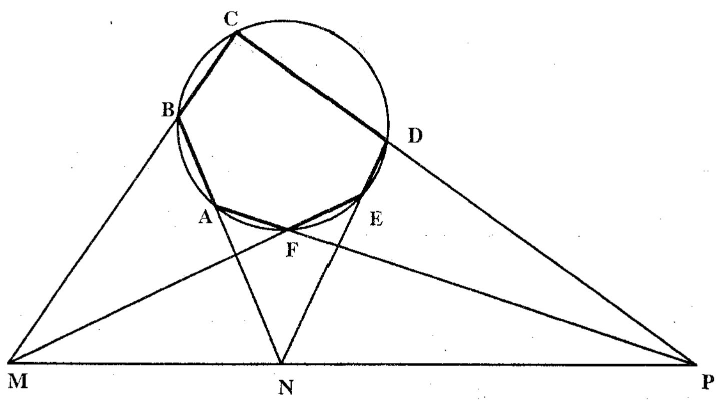
یادآور می‌شویم که این مسأله می‌تواند به دو طریق زیر نیز بیان شود(شکل) :

الف. هرگاه رأسهای A، E و B از شش‌ضلعی $AFBDEC$ (که ممکن است نامحدب و حتی خود ـ متقاطع باشد) بر یک خط l_1، و رأسهای D، E و F بر یک خط l_2 واقع باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل این شش‌ضلعی همخطند.

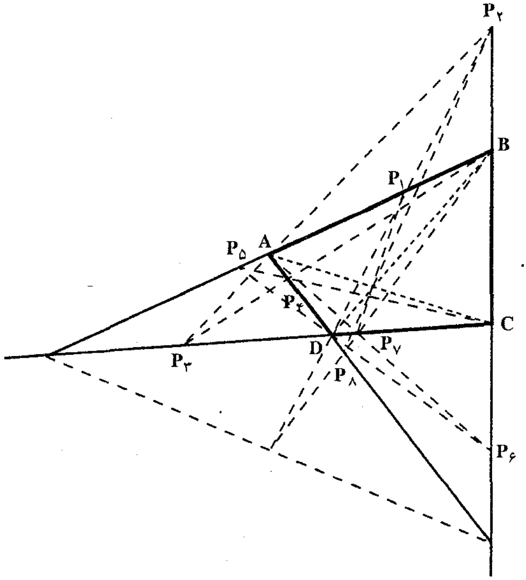


ب. هرگاه ضلعهای AB، CN و DM از شش‌ضلعی ABNCDM (که ممکن است نامحدب یا حتی خود ـ متقاطع باشد) در یک نقطهٔ E، و ضلعهای CD، BN و AM در یک نقطهٔ F متقاطع باشند، قطرهای AC، BD و MN از این شش‌ضلعی نیز همرسند.

۳۸۳. قضیهٔ پاسکال. نشان دهید که سه نقطهٔ برخورد ضلعهای مقابل یک‌شش‌ضلعی محاط در دایره همخطند (شکل).

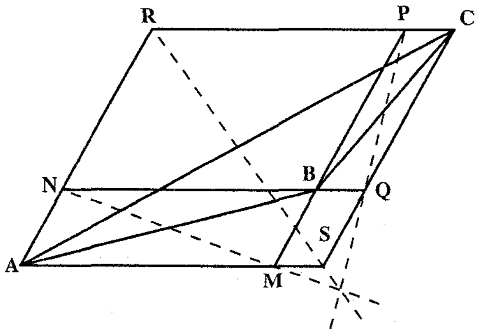


۳۸۴. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک خط، قضیهٔ زیر را ثابت کنید:
فرض می‌کنیم P_1 نقطه‌ای بر ضلع AB از چهارضلعی ABCD باشد (شکل). گیریم P_2 تصویر P_1 از مرکز D بر خط BC باشد، P_3 تصویر P_2 از مرکز A بر خط CD، P_4 تصویر P_3 از مرکز B بر خط DA، و P_5 تصویر P_4 از مرکز C بر خط AB، و ... . ثابت کنید که:
نقطهٔ P_{13} (که پس از سه بار دور زدن چهارضلعی) بر ضلع AB به‌دست آمده بر نقطهٔ مفروض P_1 منطبق است (و در نتیجه P_{14} بر نقطهٔ P_2 و P_{15} بر P_3 و ...).



۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۳.۴.۳.۱. خطها همرسند



۳۸۵. ضلعهای مثلث ABC قطرهای سه متوازی‌الاضلاعی هستند که ضلعهای آنها بر یک امتدادند (شکل). نشان دهید که قطرهای دیگر این متوازی‌الاضلاعها همرسند.

۳۸۶. چهارضلعی EFGH در چهارضلعی ABCD محاط شده است (E بر AB و F بر BC و غیره). نشان دهید اگر نقطهٔ برخورد ضلعهای EF و GH بر قطر AC از ABCD باشد، نقطهٔ برخورد EH و FG بر قطر BDی آن است.

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازهٔ زاویه

۳۸۷. چهارضلعی چپ ABCD را درنظر می‌گیریم و تصویر رأس C روی صفحهٔ ABD را C' می‌نامیم. درصورتی که CH و $C'H$ ارتفاعهای دو مثلث BCD و $BC'D$ و $C'H = \frac{1}{2}CH$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ صفحه BCD با صفحهٔ ABC را تعیین کنید.

۵.۴.۳. پاره‌خط

۱.۵.۴.۳. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳۸۸. ثابت کنید که خط واصل بین نقطهٔ برخورد امتدادهای ساقهای ذوزنقه و نقطهٔ برخورد قطرهای آن، قاعدهٔ ذوزنقه را نصف می‌کند.

۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۳۸۹. نشان دهید که هرگاه E و F نقطه‌های برخورد ضلعهای متقابل AB ، CD ، AD و BC از یک چهارضلعی دلخواه باشند، آن‌گاه :

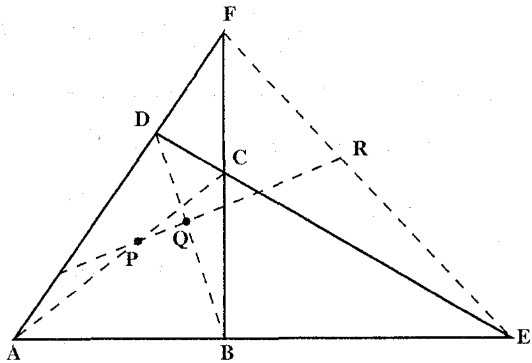
$$\frac{AE \cdot CE}{BE \cdot DE} = \frac{AF \cdot CF}{BF \cdot DF}$$

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند

۳۹۰. ثابت کنید تصویر هر متوازی‌الاضلاع روی صفحه‌ای که بر صفحهٔ آن عمود نباشد، یک متوازی‌الاضلاع است.

۸.۴.۳. رسم شکلها

۳۹۱. قضیهٔ چهارضلعی کامل به چه شکلی درخواهد آمد، هرگاه شکل روبه‌رو را طوری تصویر کنیم که خط ABE خط خاص آن باشد؟

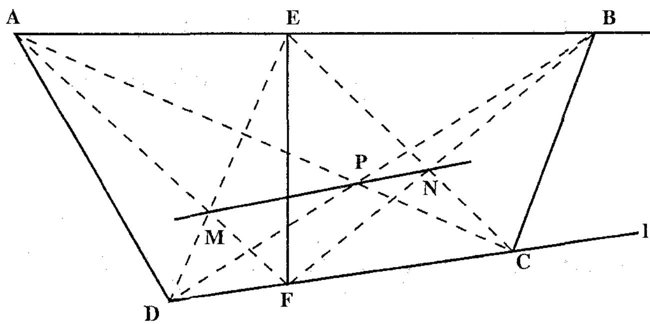


۳۹۲. صفحهٔ π ی چهارضلعی ABCD در مسألهٔ (چهارضلعی EFGH در چهارضلعی ABCD محاط شده است (E بر AB و F بر BC، و غیره). نشان دهید که اگر نقطهٔ برخورد ضلعهای EF و HG بر قطر ACی ABCD باشد، نقطهٔ برخورد EH و FG بر قطر BDی آن است.) را بر صفحهٔ جدید π' تصویر کنید به قسمی که:

(i) ضلع AB خط خاص π باشد؛

(ii) قطر AC خط خاص π باشد.

۳۹۳. در شکل زیر، صفحهٔ π را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر کنید به قسمی که:



(i) خط AB خط خاص π باشد؛

(ii) خط AD خط خاص π باشد.

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۹۴. چهارضلعی محاطی ABCD (محاط در دایرهٔ S) داده شده است. ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q و قطرهای چهارضلعی در نقطهٔ O متقاطعند. ثابت کنید که بینهایت چهارضلعی محاط در دایرهٔ S وجود دارد که نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی آنها بر P و Q منطبقند.

۳۹۵. در صفحه، تبدیلهایی اندازه‌نگهدار (= طولپای) را درنظر می‌گیریم که یک شش‌ضلعی منتظم را روی خودش تصویر می‌کنند. این تبدیلها مجموعه‌ای پدید می‌آورند با :

الف) ۱۱ عضو ب) ۷ عضو ج) ۱۲ عضو د) ۱۳ عضو

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

ب. حکم بالا را با این فرض که چهارضلعی ABCD محیط بر S باشد، ثابت کنید.

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

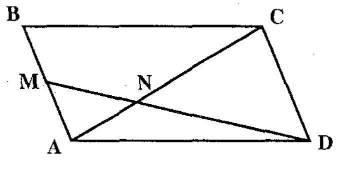
۳۹۶. الف. خط l بر M نقطهٔ برخورد سه میانهٔ مثلث ABC، می‌گذرد و ضلعهای آن را در نقطه‌های R، S و T می‌برد (R و S در یک طرف M قرار دارند). نشان دهید که :

$$\frac{۱}{MR}+\frac{۱}{MS}=\frac{۱}{MT}$$

ب. خط l بر رأس M از متوازی‌الاضلاع MNPQ می‌گذرد و خطهای NP، PQ و NQ را بترتیب در نقطه‌های R، S و T می‌برد. نشان دهید که :

$$\frac{۱}{MR}+\frac{۱}{MS}=\frac{۱}{MT}$$

۳۹۷. الف. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. ثابت کنید که هرگاه خط DM از ضلع AB پاره‌خط $AM=\frac{AB}{n}$ را جدا کند، از قطر AC پاره‌خط $AN=\frac{AC}{(n+۱)}$ را جدا خواهد کرد (شکل حالت $n=۲$ را نشان می‌دهد). اگر صفحهٔ شکل را بر یک صفحهٔ دیگر چنان تصویر کنیم که خط AB با خط خاص آن صفحه موازی باشد، این گزاره به چه

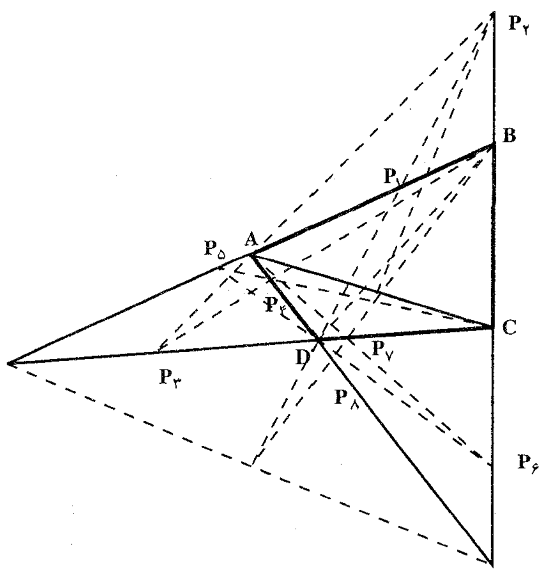


شکلی درخواهد آمد؟

ب. دو خط موازی l_1 و l_2 و پاره‌خط AB بر l داده شده‌اند. پاره‌خط AB را به وسیلهٔ ستارهٔ تنها به n جزء مساوی تقسیم کنید.

۳۹۸. فرض می‌کنیم P_1 نقطه‌ای بر ضلع AB از چهارضلعی ABCD باشد (شکل). گیریم P_2 تصویر P_1 از مرکز D بر خط BC باشد، P_3 تصویر P_2 از مرکز A بر خط CD، P_4 تصویر P_3 از مرکز B بر خط DA، و P_5 تصویر P_4 از مرکز C بر خط AB، و ....
ثابت کنید:

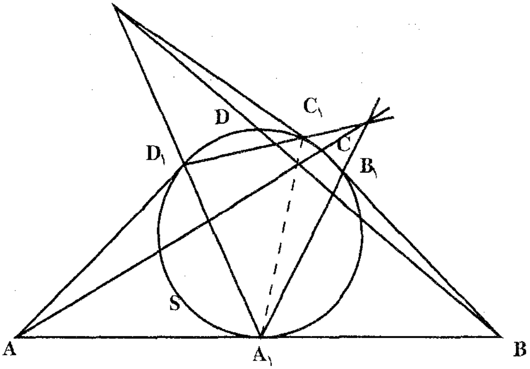
الف. نقطهٔ P_{13} (که پس از سه بار دور زدن چهارضلعی) بر ضلع AB به‌دست آمده بر نقطهٔ مفروض P_1 منطبق است (و در نتیجه P_{14} بر نقطهٔ P_2 و P_{15} بر P_3، و ...).



ب. خطهای P_1P_7، P_2P_8، P_3P_9 و غیره از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی می‌گذرند.

ج. نقطه‌های برخورد خطهای P_1P_2 و P_7P_8، P_2P_3 و P_8P_9، و P_3P_4 و P_9P_{10} و غیره، بر خط واصل بین نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی واقعند.

۳۹۹. ضلعهای چهارضلعی ABCD در نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 بر یک دایرهٔ S مماس هستند (شکل). نشان دهید که:



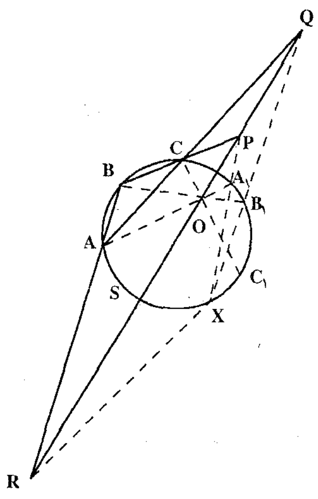
الف. نقطه‌های تقاطع قطرهای چهارضلعیهای ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ بر هم منطبقند.

ب. امتداد قطرهای چهارضلعی ABCD از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ می‌گذرند.

۴۰۰. چهارضلعی ABCD در یک دایرهٔ S محاط است و ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q و قطرها در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید که:

الف. بینهایت مثلث محاط در S وجود دارند که ضلعهای آنها (یا امتدادشان) از نقطه‌های P، Q و O می‌گذرند (دقیقتر بگوییم، اگر دو ضلع یک مثلث محاط در S از دوتا از نقطه‌های P، Q و O بگذرند، الزاماً ضلع سوم از نقطهٔ سوم خواهد گذشت).

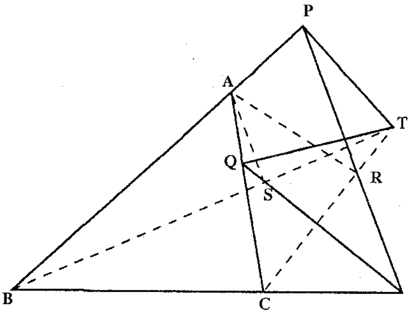
ب. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های تقاطع قطرهای آنها بر O منطبقند. یکی از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل بر P منطبق است (دقیقتر بگوییم، اگر نقطهٔ برخورد قطرهای یک چهارضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یک ضلع آن از P بگذرد، آن‌گاه ضلع مقابل به آن هم از P خواهد گذشت)، و دومین نقطهٔ برخورد ضلعهای مقابل (در همهٔ این گونه چهارضلعیها) بر Q منطبق است.



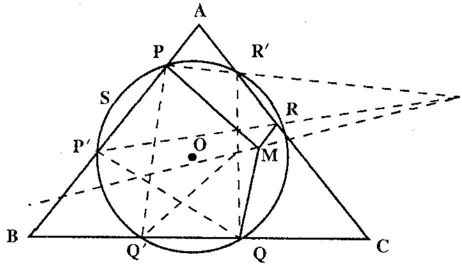
۴۰۱. از قضیهٔ پاسکال حکم قضیهٔ (گیریم سه وتر AA_1، BB_1 و CC_1 از یک دایرهٔ S در یک نقطهٔ O متقاطع باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد. نشان دهید که P، Q و R نقطه‌های برخورد خطهای XA_1، XB_1 و XC_1 با ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر S واقع است (شکل)) را نتیجه بگیرید.

ب. از یک نقطهٔ T در صفحهٔ یک مثلث ABC عمودهای TP و TQ را بر ضلعهای AB و AC وارد می‌کنیم. سپس T را به رأسهای B و C

وصل و عمودهای AR و AS را بر خطهای TC و TB وارد می‌کنیم (شکل (الف)). نشان دهید که نقطهٔ تقاطع خطهای PR و QS بر خط BC واقع است.



(الف)



(ب)

ج. فرض می‌کنیم MP، MQ و MR عمودهای رسم شده از یک نقطهٔ M بر ضلعهای مثلث ABC باشند و P′ ، Q′ و R′ دومین نقطه‌های برخورد ضلعهای مثلث با دایرهٔ S گذرنده بر P، Q و R (شکل (ب)). نشان دهید که نقطه‌های برخورد PQ′ و P′Q ؛ PR′ و P′R ؛ QR′ و Q′R بر خط OM قرار دارند، O مرکز S است.

۴۰۲. یک نقطهٔ M_1 واقع بر ضلع A_1A_2 از یک nضلعی منتظم $A_1A_2\cdots A_n$ از نقطهٔ A_n بر یک نقطهٔ M_2 از ضلع A_2A_3 تصویر شده است. سپس M_2 از A_1 بر یک نقطهٔ M_3 از ضلع A_3A_4 تصویر شده است. بعد M_3 از نقطهٔ A_2 به یک نقطهٔ M_4 از ضلع A_4A_5 تصویر شده است و این عمل به همین نحو ادامه یافته است. ثابت کنید:

الف. اگر $n = 4$ ، آن‌گاه نقطهٔ M_{13} ، که پس از ۳ دور تکرار عمل روی nضلعی به‌دست آمده است، بر نقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است و M_{15} بر M_3 و ...).

ب. اگر $n = 6$ ، آن‌گاه نقطهٔ M_{13} ، که پس از سه دور تکرار عمل روی n ضلعی به‌دست آمده است، بر نقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است، M_{15} بر M_3 و ...).

ج. اگر $n = 10$ ، آن‌گاه نقطهٔ M_{11} ، که پس از یک دور عمل روی n ضلعی به‌دست آمده است، بر نقطهٔ اولیهٔ M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{12} بر M_2 منطبق است، M_{13} بر M_3 و ...).

۴۰۳. در چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ فرض می‌کنیم N نقطهٔ برخورد قطرها، و P و Q نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو و B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 نقطه‌های برخورد ضلعهای چهارضلعی با خطهای NP و NQ باشند. گیریم ضلعهای چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ ضلعهای چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$ محاط در خود را در نقطه‌های M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ، M_5 ، M_6 ، M_7 و M_8 ، نظیر شکل ببرند، ثابت کنید که :

الف. خطهای M_1M_5 ، M_2M_6 ، M_3M_7 و M_4M_8 از N می‌گذرند.

ب. خطهای M_2M_3 و M_6M_7 از P می‌گذرند و خطهای M_1M_8 و M_4M_5 از Q.

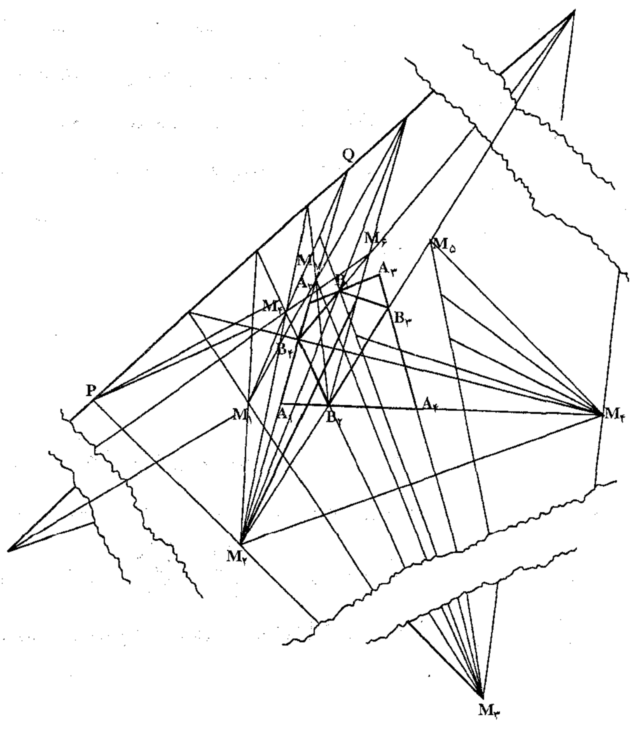
ج. خطهای M_1M_2 ، M_3M_8 ، M_4M_7 و M_5M_6 از نقطهٔ برخورد PQ با قطر A_2A_4 می‌گذرند و M_3M_4 ، M_2M_5 ، M_1M_6 و M_7M_8 از نقطهٔ برخورد PQ و قطر A_1A_3 .

د. خطهای هریک از چهارتاییهای :

M_1M_3 ، M_5M_7 ، B_4M_4 ، B_2M_8 ؛ M_2M_4 ، M_6M_8 ، B_4M_5 ، B_2M_1 ؛

M_3M_5 ، M_1M_7 ، B_1M_6 ، B_3M_2 ؛ M_4M_6 ، M_2M_8 ، B_1M_7 ، B_3M_3

در یک نقطه یکدیگر را می‌برند و این چهار نقطهٔ حاصل بر خط PQ واقعند.



۵.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در دایره

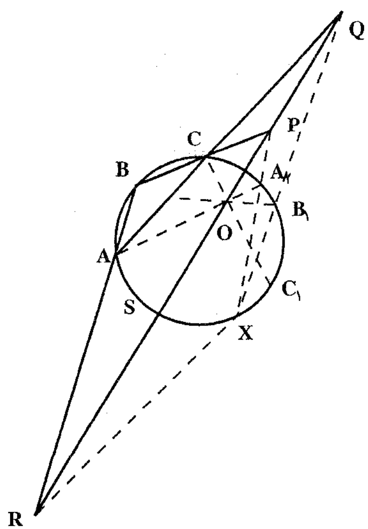
۱.۵.۳. مرکز تصویر، محور تصویر،...

۴۰۴. در یک تصویر مرکزی که دو صفحهٔ π و π' با هم موازی‌اند، تصویر دایرهٔ (C) دایرهٔ (C′) است. مرکز این تصویر را تعیین کنید.

۲.۵.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۳ . ۵ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند

۴۰۵. گیریم سه وتر AA_1، BB_1 و CC_1 از یک دایرهٔ S در یک نقطهٔ O متقاطع باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد. نشان دهید که Q، P و R نقطه‌های برخورد ضلعهای XA_1، XB_1 و XC_1 با ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر نقطهٔ O واقع است (شکل).



۳ . ۵ . ۲ . ۲. نقطه‌ها برهم منطبقند

۴۰۶. گیریم سه نقطهٔ M، N و P بترتیب بر ضلعهای AB، BC و AC از مثلث ABC باشند به قسمی که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$. نشان دهید که :

الف. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث MNP بر نقطهٔ تلاقی میانه‌های مثلث ABC منطبق است.

ب. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث حاصل از خطهای AN، BP و CM بر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلثABC منطبق است.

۳.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۳ . ۵ . ۳ . ۱ . خطها موازی‌اند

۴۰۷. در درون دایرهٔ به شعاع $n \in N$، به تعداد $4n$ پاره‌خط، که طول هرکدام برابر واحد است، قرار داده‌ایم. ثابت کنید، اگر خط راستی مفروض باشد، خط راست دیگری را می‌توان پیدا کرد که یا موازی با آن و یا عمود بر آن است و در ضمن، دست‌کم دو پاره‌خط را قطع می‌کند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، ۱۹۷۷

۴.۵.۳. زاویه

۳ . ۵ . ۴ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۴۰۸. تصویر دایرهٔ $C(O\ ,\ 4)$ روی صفحهٔ P که با صفحه دایره موازی نیست، یک بیضی به قطرهای ۸ و ۶ است. اندازهٔ زاویهٔ بین صفحهٔ دایره و صفحهٔ تصویر P را تعیین کنید.

۵.۵.۳. پاره‌خط

۳ . ۵ . ۵ . ۱ . اندازهٔ پاره‌خط

۴۰۹. الف. فرض می‌کنیم O وسط وتر AB از یک دایرهٔ S باشد، و MN و PQ دو وتر باشند که بر O می‌گذرند. اگر E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با AB باشند، نشان دهید که O وسط پاره‌خط EF است.

ب. فرض می‌کنیم O پای عمود وارد از مرکز دایرهٔ S بر یک خط l، و MN و PQ وترهایی از S باشند که l را در نقطه‌های C و D قطع کرده‌اند به طوری که $OC = OD$.

هرگاه E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با l باشند، نشان دهید که O وسط وتر EF است.

۶.۵.۳. رابطه‌های متری

۴۱۰. تصویرهای جسمی بر دو صفحه، دایره شده است. ثابت کنید، این دو دایره، شعاعهایی برابر دارند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۷.۵.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۴۱۱. تصویر گنجنگاشتی، هر دایرهٔ واقع بر کره σ را به یک دایره، یا یک خط در صفحهٔ π' بدل می‌کند و بعکس، پیشنگاشت یک خط یا یک دایرهٔ صفحهٔ π'، دایره‌ای است واقع بر σ.

۸.۵.۳. رسم شکلها

۴۱۲. نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت به دو دایره دارای یک خط قطبی باشد.
۴۱۳. چگونه می‌توان هر تعداد دلخواه نقطه از یک دایره را پیدا کرد، در صورتی که مرکز A و شعاع آن داده شده باشد؟
۴۱۴. در دایرهٔ مفروض یک چهارضلعی محاط کنید که:
الف. نقطهٔ برخورد قطرهای آن، M، و دو نقطهٔ K و L از دو ضلع مقابل آن داده شده باشند.
ب. نقطهٔ برخورد دو ضلع مقابل و یک نقطه از هریک از دو ضلع دیگر داده شده باشد.

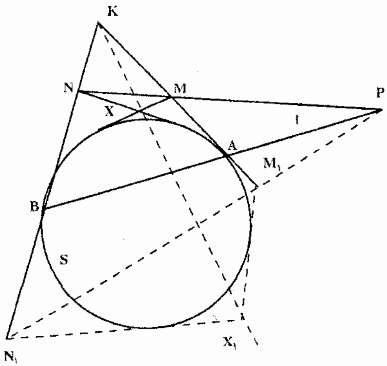
۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۱۵. S یک دایره و P نقطه‌ای در صفحهٔ S است. کلیهٔ قاطعهای S گذرنده بر P را درنظر می‌گیریم. هریک از این قاطعها یک جفت نقطه از S را مشخص می‌کند. به هر جفت از

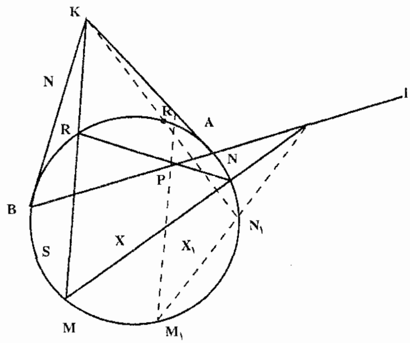
این نقطه‌ها، نقطهٔ برخورد مماس در آنها بر دایره را مربوط می‌کنیم. مکان این نقطه‌های برخورد را پیدا کنید.

۳.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۶. دایرهٔ S و نقطهٔ P در یک صفحه داده شده‌اند. خط l بر P می‌گذرد و با S در نقطه‌های A و B برخورد می‌کند. فرض می‌کنیم K نقطهٔ برخورد مماسهای بر S در A و B باشد.



(الف)



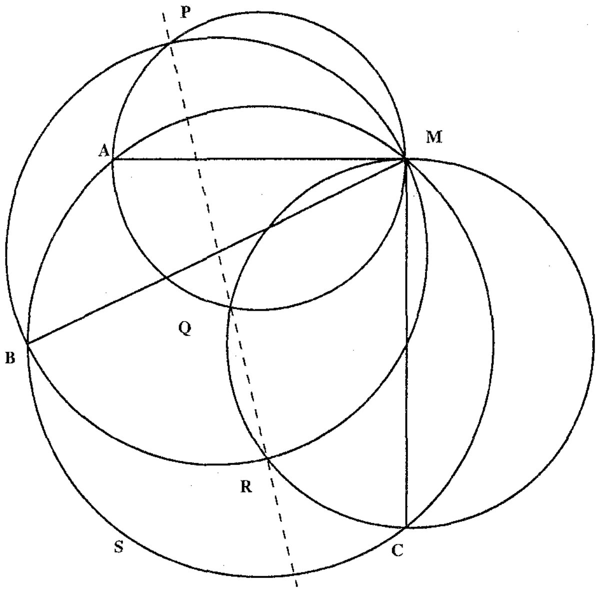
(ب)

الف. یک خط متغیر گذرنده بر P، خطهای AK و BK را در نقطه‌های M و N می‌برد (شکل (الف)). ثابت کنید که مکان X، نقطهٔ تقاطع دومین مماسهای بر S مرسوم از M و N، خطی است که بر K می‌گذرد (دقیقتر بگوییم، جزیی از این خط که در بیرون S قرار دارد).

ب. یک نقطهٔ متغیر R از دایرهٔ S را به نقطه‌های P و K وصل می‌کنیم (شکل (ب)). نشان دهید که x، خط واصل بین نقطه‌های M و N دومین نقطه‌های تقاطع خطهای RK و RP با S، از نقطهٔ ثابتی (مستقل از انتخاب R) واقع بر l می‌گذرد.

۴۱۷. الف. چهار دایرهٔ محیطی بر چهار مثلث حاصل از چهار خط دلخواه در صفحه (که هیچ سه‌تای آنها همرس و هیچ‌دوتای آنها متوازی‌نیستند) از یک نقطه می‌گذرند.

ب. فرض می‌کنیم دایرهٔ S و سه وتر آن MA، MB و MC مفروضند. سه دایره به قطرهای این وترها رسم می‌کنیم. هر جفت از این سه دایره در نقطهٔ دیگری غیراز M



متقاطعند ؛ ثابت کنید که همهٔ این نقطه‌ها بر یک خط واقعند (شکل).

ج. اگر a، b، c و d طولهای ضلعهای متوالی یک چهارضلعی محاطی ABCD و e و f طولهای قطرهای آن باشند، آن‌گاه :

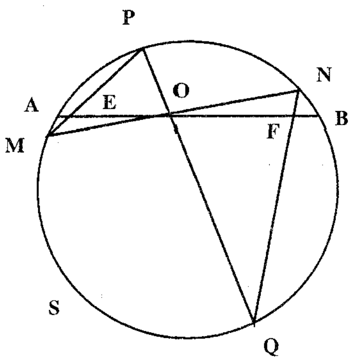
$$ac + bd = ef$$ (قضیهٔ بطلمیوس)

۴۱۸. نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ S_1 و S_2 را پیدا کنید. در صورتی که مرکزهای آنها A_1 و A_2 و شعاعهای آنها، B_1C_1 و B_2C_2 مفروض باشند.

اشاره می کنیم که هرگاه به جای دایرهٔ کمکی S، یک قوس کوچک دلخواه MN از S و مرکز آن، O، داده شده باشد، باز هم می‌توانیم همهٔ ترسیمهای با پرگار و ستاره را با ستارهٔ تنها انجام دهیم. علت آن، این است که نقطه‌های تقاطع یک خط l و یک دایرهٔ S را می‌توان با ستارهٔ تنها تعیین کرد، به شرطی که یک قوس MN از S به ما داده شده باشد. O مرکز دایرهٔ کمکی S (یا قوس کمکی $\overparen{MN}$) حتماً باید داده شده باشد. می‌توانیم به‌طور نسبتاً ساده‌ای نشان دهیم که اگر مرکز S داده نشده باشد، نمی‌توانیم بدون پرگار آن را تعیین کنیم. برای اثبات این حکم عیناً همان راهی را می‌رویم که برای اثبات این که «در رسم خطی موازی با یک خط مفروض، رسم با ستارهٔ تنها وجود ندارد» رفته بودیم. فرض کنید که یک ترسیم با ستارهٔ تنها برای تعیین O ، مرکز یک دایرهٔ S، وجود داشته باشد. نمودار این ترسیم فرضی دستگاهی از خطها است که به نحوی با دایرهٔ S مربوط است، و دوتا از این خطها در O، مرکز S، یکدیگر را می‌برند. صفحهٔ π ی

نمودار خود را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایرهٔ S'، و مرکز Oی آن به یک نقطهٔ O'، که مرکز S' نیست، بدل شود. انجام این عمل ممکن است. نمودار در π' کاملاً مشابه نمودار π است جز این که نقطهٔ O' مرکز S' نیست. این نشان می‌دهد که ترسیم با ستارهٔ تنها برای تعیین مرکز یک دایرهٔ دلخواه وجود ندارد. خلاصه این که: اگر مرکز دایرهٔ کمکی S داده نشده باشد، نمی‌توانیم همهٔ ترسیمهای با ستاره و پرگار را به کمک ستارهٔ تنها انجام دهیم (به‌ویژه ممکن است مرکز S را با ستاره و پرگار تعیین کرد ولی نه با ستارهٔ تنها).

به علاوه، حتی اگر دو دایرهٔ نامتقاطع با مرکزهای نامعلوم در صفحه داده شده باشند، تعیین این مرکزها با ستارهٔ تنها میسر نیست (جز وقتی که بدانیم دایره‌ها هم‌مرکزند). آنچه که می‌توان نشان داد این است که ترسیمهای با ستارهٔ تنها برای تعیین مرکزهای دو دایرهٔ متقاطع یا مماس، یا سه دایرهٔ غیرمشخص که به یک دسته دایره متعلق نباشند، وجود ندارد.



ب. فرض می‌کنیم O پای عمود وارد از مرکز دایرهٔ S بر یک خط l، و MN و PQ وترهایی از S باشند که l را در نقطه‌های C و D می‌برند به طوری که $OC = OD$. هرگاه E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با l باشند، نشان دهید که O وسط وتر EF است.

۴۱۹. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک دایره، قضیه‌های الف ـ ج را ثابت کنید:
چهارضلعی ABCD در یک دایرهٔ S محاط است و ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q، و قطرها در نقطهٔ O یکدیگر راقطع می‌کنند.

الف. بینهایت مثلث محاط در S وجود دارند که ضلعهای آنها (یا امتدادشان) از نقطه‌های P، Q و O می‌گذرند. (دقیقتر بگوییم، اگر دو ضلع از یک مثلث محاط در S از دو تا از نقطه‌های P، Q و O بگذرند، الزاماً ضلع سوم از نقطهٔ سوم خواهد گذشت.)

ب. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل آنها بر P و Q منطبقند (دقیقتر بگوییم، اگر دو ضلع مقابل یک چهارضلعی محاط در S یکدیگر را در P ببرند، و ضلع سوم از Q بگذرد، آن‌گاه ضلع مقابل به آن نیز از Q خواهد گذشت.) و نقطه‌های برخورد قطرهای همهٔ این نوع چهارضلعیها بر O منطبقند.

ج. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های برخورد قطرهای آنها بر O منطبقند، یکی از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل بر Pمنطبق است (دقیقتر بگوییم، اگر نقطهٔ برخورد قطرهای یک چهارضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یک ضلع آن از P بگذرد، آن‌گاه ضلع مقابل به آن هم از P خواهد گذشت)، و دومین نقطهٔ برخورد ضلعهای مقابل (درهمهٔ این گونه چهارضلعیها) بر Qمنطبق است.

۴۲۰. الف. در دایرهٔ مفروض S، یک مثلث ABC محاط کنید که از آن، ضلع AB، امتداد ضلع BC و یک نقطه از ضلع AC معلوم باشند.

ب. در دایرهٔ مفروض S، یک چهارضلعی ABCD محاط کنید که دو نقطه از دو ضلع مقابل آن و طولهای دو ضلع دیگر آن معلوم باشند.

۶.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۱.۶.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۴۲۱. شکل قطبی معکوس دایرهٔ α نسبت به دایرهٔ ω یک محور تقارن دارد که همان خط‌المرکزین دو دایره است. آیا این شکل می‌تواند یک محور تقارن دیگر داشته باشد؟

۴۲۲. دو نقطهٔ P'_1 و P'_2 واقع در دو سر قطری متغیر از کرهٔ α' را در نظر می‌گیریم و تصویرهای جسم نمایی آنها را روی صفحهٔ α با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. تبدیلی را بیابید که به وسیلهٔ آن بتوان در صفحهٔ α از P_1 به P_2 رسید.

۲.۶.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۶.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۲۳. ثابت کنید که در مقطع مخروطی مرکزدار، تصویرهای کانونها بر خطهای مماس برمنحنی

روی دایرهٔ ثابتی (دایرهٔ اصلی) واقعند.

۳.۶.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۳.۶.۳.۱. خطها موازی‌اند

۴۲۴. در تصویر موازی، تصویرهای دو خط هادی یک مقطع مخروطی، دو خط موازی‌است.

۳.۶.۴.زاویه

۳.۶.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۴۲۵. ثابت کنید که تصویر جسم‌نمایی، زاویه‌ها را محفوظ نگه می‌دارد.

۳.۶.۵.پاره خط

۳.۶.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۴۲۶. MN وتری است از یک سهمی به طول ۶ سانتیمتر، واقع در صفحهٔ مفروض π . صفحهٔ π' موازی صفحهٔ π و به فاصلهٔ ۸ سانتیمتر از صفحهٔ π و نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر از صفحهٔ π داده شده است. طول تصویر مرکزی MN روی صفحهٔ π' را تعیین کنید.

۳.۶.۶. رابطه‌های متری

۴۲۷. نقطهٔ P بر هذلولی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد. ثابت کنید که تفاضل شعاعهای حامل آن، یعنی $|OP - O_1P|$ مقدار ثابتی است.

۳.۶.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۴۲۸. ثابت کنید که در تصویر جسم‌نمایی، هر دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' به یک دایره (یا یک خط) از صفحهٔ α تبدیل می‌شود که با دایرهٔ معینی در دو نقطهٔ واقع در دو سر یک قطر متقاطع می‌باشند.

۳.۶.۸. رسم شکلها

۴۲۹. با استفاده از تصویر جسم‌نمایی، شش دایرهٔ مورد نظر در تمرین (اوّلاً سه دایرهٔ متساوی رسم کنید که بر هم مماس باشند. ثانیاً سه دایرهٔ دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هر کدام از آنها بر دو دایره از مجموعهٔ اوّل نیز مماس باشند. انحرافهای بین این شش دایره را تعیین کنید.) را از روی شش دایرهٔ محاط در شش وجه یک مکعب به‌دست آورید.

راهنمایی و حل

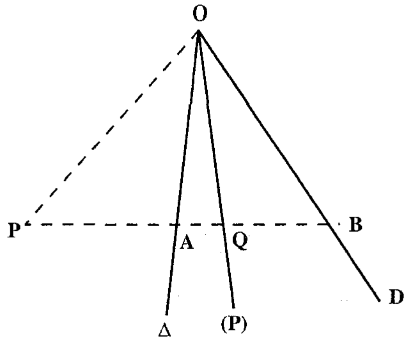
از آن جا که به گفتهٔ جورج پولیا J. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید ؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه حل یا راهنمایی، نمی‌باشند ؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هر چه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱. قطب و قطبی

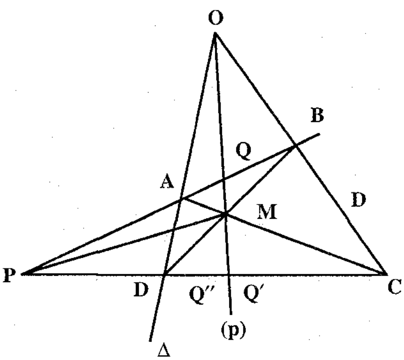
۱.۱. تعریف و قضیه



۱. از P (شکل) خطی رسم می‌کنیم تا خطهای Δ و D را در A و B قطع کند و Q مزدوج P را نسبت به A و B به‌دست می‌آوریم.
دستگاه (O ـ PQAB) توافقی است و هر خط که آن‌را قطع کند، به نسبت توافقی تقسیم می‌شود. بخصوص مزدوج P نسبت به نقطه‌های برخورد Δ و D با هر خط که بر P بگذرد، روی OQ قرار دارد. از طرفی هر نقطه مانند M از خط OQ مزدوج توافقی P است، نسبت به نقطه های برخورد PM با D و Δ ، زیرا که دستگاه (O ـ PQAB) توافقی است ؛ پس OQ قطبی P است نسبت به Δ و D.

نتیجه. قطبی هر نقطه نسبت به دو خط متوازی، با آنها موازی است.

قرارداد. قطبی هر نقطه را با همان حرف، ولی کوچک، نام می‌گذاریم. به‌طور مثال خط (p) قطبی نقطهٔ P است، همچنان که نقطهٔ P قطب خط (p) است.

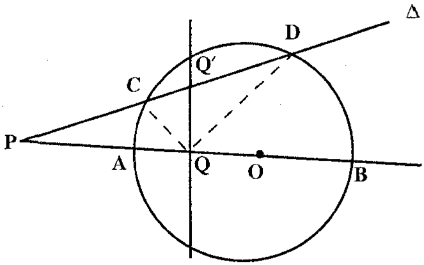


۲. خط (p) قطبی p را نسبت به Δ و D به‌دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که بر M می‌گذرد.
می‌دانیم که نقطهٔ Q و نقطهٔ ′Q ، نقطه‌های برخورد (p) با دو قاطع، مزدوجهای توافقی P نسبت به نقطه های برخورد قاطعها با Δ و D هستند. حال می‌گوییم که اگر خط (p) بر نقطهٔ M نگذرد، چنان‌چه از Q به M وصل کنیم و امتداد دهیم تا قاطع PDC را در ″Q قطع کند، از آن‌جا که دستگاه (M ـ PQAB) توافقی است و قاطع PDC آن‌را در P، D، ″Q و C قطع کرده است، ″Q باید مزدوج توافقی P نسبت به D و C باشد، یعنی باید بر ′Q منطبق باشد. پس QM بر ′Q می‌گذرد، یعنی بر (p) منطبق است یا به‌عبارت دیگر، (p) از M می‌گذرد.

نکته. با استفاده از قضیهٔ بالا راه حل ساده‌ای برای ترسیم قطبی هر نقطه نسبت به دو خط به‌دست می‌آید.

تعریف. دو نقطه را نسبت به دو خط مزدوج گویند، وقتی که قطبی یکی از آنها از نقطهٔ دیگر بگذرد.

۳. دایرهٔ O و نقطهٔ P داده شده‌اند (شکل). قطری که بر P گذشته، دایره را در A و B قطع کرده است و Q مزدوج توافقی P را نسبت به A و B به‌دست آورده‌ایم. حال از نقطهٔ P قاطع غیرمشخصی مانند Δ رسم می کنیم، تا دایره را در C و D قطع کند و Q′ مزدوج P را نسبت به C و D به‌دست می‌آوریم. مطابق تعریف، Q′ و Q روی قطبی نقطهٔ P قرار دارند. اگر ثابت کنیم که QQ′ بر AB عمود است، قضیه ثابت می‌شود. چون A و B پاره‌خط PQ را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند و C و D بر روی دایره‌ای به‌قطر AB واقعند، داریم :



$$\frac{CP}{CQ}=\frac{AP}{AQ} \qquad (۱)$$

و

$$\frac{DP}{DQ}=\frac{AP}{AQ} \qquad (۲)$$

پس :

$$\frac{CP}{CQ}=\frac{DP}{DQ}$$

و پس از عوض کردن جای دو وسط :

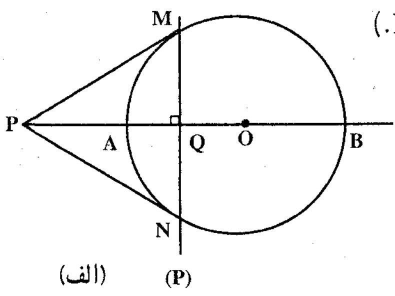
$$\frac{CP}{DP}=\frac{CQ}{DQ}$$

یا :

$$\frac{QC}{QD}=\frac{PC}{PD}=\frac{Q'C}{Q'D} \qquad (۳)$$

(زیرا که Q′ مزدوج توافقی P است نسبت به C و D.)

از رابطهٔ (۳)، نتیجه می‌گیریم که در مثلث CQD دو خط QP و QQ′ ضلع CD را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم کرده‌اند، پس نیمسازهای داخلی و خارجی مثلثند، و بر هم عمودند، یعنی QQ′ بر AB عمود است.



(الف)

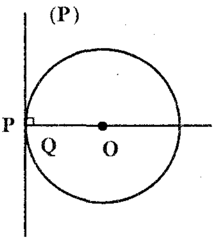
نتیجهٔ ۱. چون مماس حد قاطع است، مماسهایی که از نقطهٔ P بر دایره رسم شوند، در نقطهٔ تماس، قطب نقطهٔ P را قطع می‌کنند (شکل (الف)).

نتیجهٔ ۲. بین OP، فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ P، و OQ، فاصلهٔ مرکز دایره از قطبی P این رابطه است : $OP.OQ = R^2$

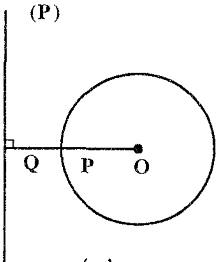
از این رابطه نتیجه می‌شود که :

۱. اگر داشته باشیم : $OP > R$ ، داریم $OQ < R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که خارج دایره باشد، دایره را قطع می‌کند (شکل (الف)).

۲. اگر داشته باشیم : $OP = R$ ،داریم : $OQ = R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که روی دایره باشد، در همان نقطه بر دایره مماس است (شکل (ب)).



(ب)



(پ)

۳. اگر داشته باشیم : $OP < R$ ، داریم : $OQ > R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که داخل دایره باشد، در خارج دایره واقع است (شکل (پ)).

باید توجه داشت که در حالت اوّل، یعنی وقتی که P خارج دایره باشد (شکل (الف))، فقط جزء MN از خط نامحدود (p) در تعریف قطبی صادق است، یعنی مکان مزدوجهای توافقی P است.

در حالت دوم، یعنی وقتی که P بر روی دایره است (شکل (ب))، فقط نقطهٔ P در تعریف قطبی صادق است.

در حالت سوم، تمام نقطه‌های خط (p) در تعریف قطبی صدق می‌کنند. با وجود این، در حالتهای اوّل و دوم هم، با مسامحه در لفظ، تمام خط (p) را قطبی P می‌گویند.

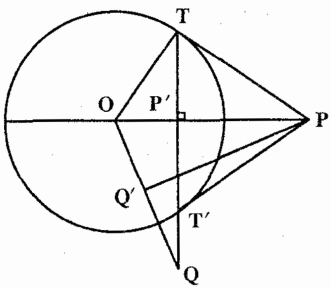
بنابرآنچه گذشت، اگر دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و نقطه‌ای مانند P و خطی مانند (p) چنان باشند که (p) بر OP عمود باشد و آن‌را در Q قطع کند و $OP.OQ = R^2$ باشد، خط (p) را قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ ذکرشده و نقطهٔ P را قطب خط (p) نسبت به همان دایره می‌نامیم.

تبصره. از رابطهٔ $OP.OQ = R^2$ ، معلوم می‌شود که بردارهای OP و OQ متحدالجهتند و

درنتیجه قطبی هر نقطه نسبت به این دایره با خود آن نقطه همیشه یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

۴. در واقع، اگر محل برخورد وتر TT' را، که از دو نقطهٔ تماس می‌گذرد، با قطر OP، که از قطب P می‌گذرد، P' بنامیم (شکل در صورت)، P' وارون P نسبت به دایره است، زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP داریم :

$$OT^{2} = OP.OP'$$



۵. اگر خط PQ دایره را در دو نقطهٔ C و D قطع کند، برقراری قضیه تقریباً روشن است. درواقع اگر خط قطبی نقطهٔ P از Q بگذرد، داریم $(PQCD) = -1$، پس P مزودج همساز Q نسبت به D است و خط قطبی نقطهٔ Q هم از P خواهد گذشت.

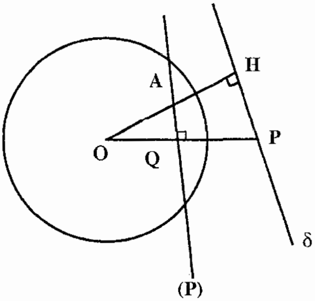
اثبات زیر، چه خط PQ دایره را قطع کند و چه قطع نکند، معتبر است.

دو نقطهٔ P و Q، و P' و Q'، وارون آنها نسبت به دایرهٔ $(O\ ,\ R)$، چهار نقطهٔ همدایره‌اند ؛ زیرا :

$$OP.OP' = R^{2} = OQ.OQ'$$

پس زاویه‌های $PP'Q$ و $PQ'Q$ در چهارضلعی محاطی $PQQ'P'$ (شکل) برابرند. QP' خط قطبی نقطهٔ P است ؛ زیرا از Q و وارون P، یعنی P'، می‌گذرد. پس $P\hat{P'}Q = 90°$ و درنتیجه، $P\hat{Q'}Q = 90°$. پس خط PQ' از وارون Q، یعنی Q'، می‌گذرد و بر OQ عمود است، یعنی PQ' خط قطبی نقطهٔ Q است، و چون PQ' از P می‌گذرد، قضیه ثابت شده است.

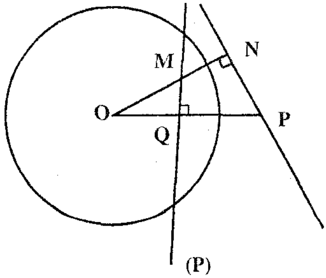
۶. فرض کنید P و Q بترتیب قطبهای دو خط p و q باشند، بنابر فرض، P روی q است، یعنی خط قطبی Q از نقطهٔ P می‌گذرد ؛ پس خط قطبی P، یعنی خط p، نیز از Q می‌گذرد.



۷. نقطهٔ P و قطبی آن (p) نسبت به دایرهٔ O داده شده‌اند (شکل) ؛ خط غیرمشخص δ را بر P می‌گذرانیم و ثابت می‌کنیم که قطب آن روی (p) است ؛ اگر از O عمودی بر δ فرود آوریم تا آن‌را در H و (p) را در A قطع کند، چهارضلعی $AHPQ$ محاطی است و داریم :

$$OA.OH = OQ.OP = R^{2}\ ;$$

یعنی A قطب δ است.



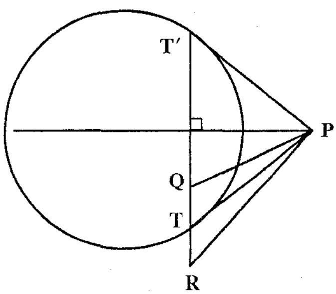
۸. خط (p) و قطب آن P نسبت به دایرهٔ O داده شده‌اند (شکل)؛ نقطه‌ای مانند M بر روی (p) اختیار می‌کنیم و از P عمود PN را بر OM فرود می‌آوریم؛ چون چهارضلعی QMNP محاطی است، داریم:

$$OM.ON = OQ.OP = R^{2}$$

یعنی خط PN قطبی نقطهٔ M است.

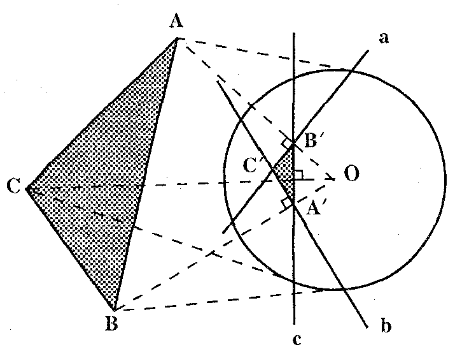
نتیجهٔ ۱. خطی که قطبهای دو خط را به هم مربوط سازد، قطبی نقطهٔ تقاطع آن دو خط است.

نتیجهٔ ۲. نقطهٔ تقاطع دو خط، قطب خطی است که قطبهای آن دو خط را به هم مربوط کند.



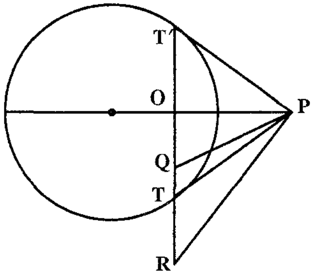
۹. فرض کنید دو خط مزدوج PQ و PR وتر TT' را در Q و R قطع کنند (شکل)، که T و T' نقطه‌های تماس مماسهایی هستند که از P بر دایره رسم می‌شوند. قطب PR روی PQ و روی خط قطبی P، یعنی TT' قرار دارد؛ زیرا PR از P می‌گذرد؛ بنابراین، Q قطب PR است. پس $(TT'QR) = -1$؛ و بنابراین، $P(TT'QR)$ یک دسته خط همساز است.

۱۰. اولاً، بنابه فرض، هر ضلع از شکل دوم، منطبق بر قطبی یک رأس از شکل اوّل است. ثانیاً، چون (a) قطبی A و (b) قطبی B می‌باشد (شکل)، C' نقطهٔ تقاطع (a) و (b)، قطب خطی است که بر A و B می‌گذرد، یعنی C' قطب ضلع AB است. به همین ترتیب، هر



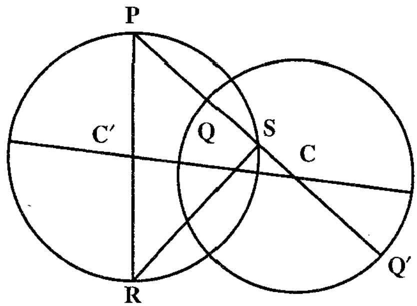
رأس شکل دوم، قطب یکی از ضلعهای شکل اوّل می‌شود، به‌عبارت دیگر، هر ضلع شکل اوّل، قطبی یکی از رأسهای شکل دوم است.

۱۱. خط PC (شکل (الف)) که از P به مرکز دایرهٔ (C) رسم می‌شود، ('C) را مجدداً در وارون P نسبت به (C)، یعنی نقطهٔ S قطع می‌کند ؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) در S بر PC عمود است و ('C) را مجدداً در R که انتهای دیگر قطری از ('C) است که از P می‌گذرد، قطع می‌کند.



(الف)

بعکس، بنابر فرض، خط قطبی P نسبت به (C) از نقطهٔ R می‌گذرد (شکل (ب)) و همچنین، بر PC عمود است. پس این خط قطبی بر RS منطبق است، یعنی S وارون P نسبت به (C) است. درنتیجه دو دایره متعامدند.



(ب)

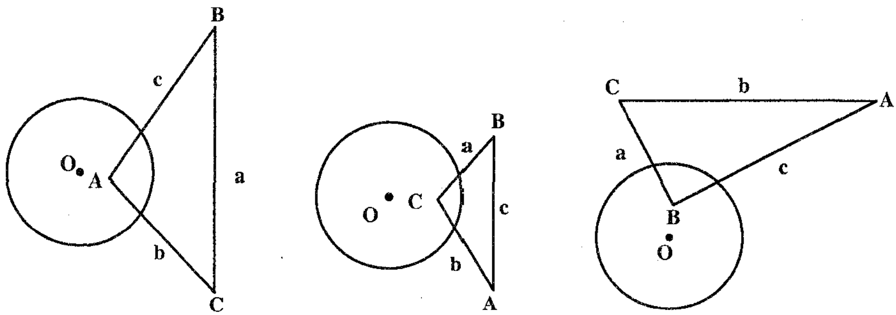
۱۲. اگر رأس P از مثلث PQR، که نسبت به دایرهٔ (O) قطبی است، داخل (O) باشد، دو رأس دیگر Q و R روی خط قطبی P، و بنابراین خارج دایرهٔ (O) قرار دارند.
اگر P را خارج (O) بگیریم، خط قطبی P دایرهٔ (O) را در دو نقطه مانند E و F، قطع می‌کند. رأسهای Q و R نسبت به (O) مزدوجند ؛ بنابراین توسط E و F به‌صورت همساز تقسیم می‌شوند، و درنتیجه، یکی از آنها داخل و دیگری خارج دایرهٔ (O) قرار دارد.

۱۳. اگر مثلث PQR نسبت به دایرهٔ (O) قطبی باشد، عمودهایی که از P، Q و R بر خطهای قطبی این نقطه‌ها، یعنی QR، RP و PQ رسم می‌شوند، از مرکز (O) می‌گذرند ؛ پس قضیه ثابت شده است.

۱۴. در شکل (الف) سه حالت ممکن مثلث مزدوج ABC نشان داده شده است و ملاحظه می‌شود که در هریک از سه حالت، یک رأس در داخل دایره و دو رأس دیگر در خارج دایره واقعند و زاویهٔ نظیر رأس واقع در داخل دایره، منفرجه می‌باشد (زیرا مرکز ارتفاعی مثلث همان O، مرکز دایرهٔ ω می‌باشد). بعکس، اگر مثلث ABC در یک زاویه منفرجه و O مرکز ارتفاعی آن و A'، B' و C' بترتیب پاهای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C باشند، داریم:

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC' = k^2$$

بنابراین نسبت به دایرهٔ ω به مرکز O و به شعاع k، مثلث مزبور مزدوج می‌باشد. این دایره را که برای مثلث منفرج‌الزاویهٔ ABC منحصربه‌فرد است، دایرهٔ مزدوج آن مثلث می‌نامند.



(الف)

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که در انعکاس نسبت به دایرهٔ ω، نقطه‌های A، B و C بترتیب به نقطه‌های A'، B' و C' تبدیل می‌شوند، به‌عبارت دیگر، دایرهٔ محیطی مثلث ABC به دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌شود. از این‌رو قضیه ثابت شده است.

۱۵. در هر مورد (الف) و (ب)، بنابر مطالب گفته شده در ترسیم، با درنظرگرفتن اندازه و علامت، داریم:

$$\frac{BL'}{L'C} = -\frac{BL}{LC} \quad و \quad \frac{CM'}{M'A} = -\frac{CM}{MA} \quad و \quad \frac{AN'}{N'B} = -\frac{AN}{NB}$$

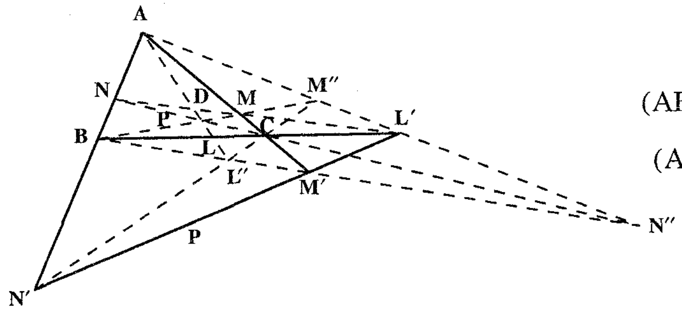
پس با ضرب کردن این برابریها به‌دست می‌آوریم:

$$-\frac{BL'.CM'.AN'}{L'C.M'A.N'B} = \frac{BL.CM.AN}{LC.MA.NB}$$

در حالت (الف)، سمت راست رابطهٔ بالا، بنابر قضیهٔ سوا، برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیهٔ منلائوس، نتیجه می‌شود که نقطه‌های L'، M' و N' همخطند.

در مورد (ب)، بنابر قضیهٔ منلائوس، سمت چپ رابطهٔ بالا برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیهٔ سوا، نتیجه می‌شود که خطهای AL، BM و CN همرسند.

۱۶. داریم (شکل) :



$(ABNN') = -1$ و

$(ACMM') = -1$

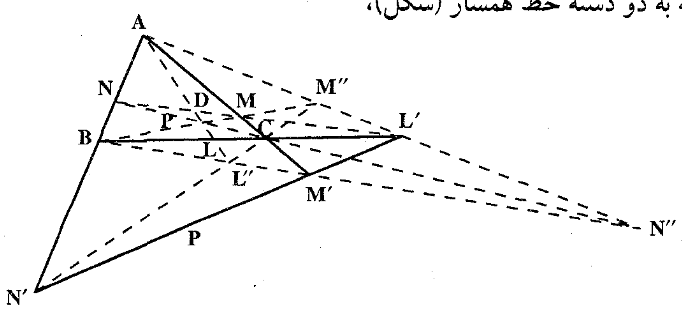
و دو گسترهٔ همساز در نقطهٔ A مشترکند. پس خطهای BC، MN و $M'N'$ همرسند؛ یعنی نقطهٔ L' با M و N همخط است. به‌طور مشابه، M' با L و N، و N' با L و M همخط است، و قضیه ثابت می‌شود.

نکته. مثلث ABC و نقطهٔ P مفروضند. قضیهٔ بالا راه ساده‌ای برای ترسیم قطبی سه‌خطی P برای مثلث ABC، یعنی خط p، تنها با استفاده از خط‌کش به‌دست می‌دهد.

قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث، قطبی سه خطی مثلث سوایی این نقطه نسبت به مثلث مفروض نیز هست.

داریم $A(BCLL') = -1$ (شکل) ؛ پس نقطهٔ L' مزدوج همساز D، نقطهٔ برخورد APL و $L'MN$، نسبت به M و N است. پس L' نقطه‌ای از قطبی سه خطی P برای مثلث LMN است. برای M' و N' نیز چنین است، پس قضیه ثابت می‌شود.

۱۷. با توجه به دو دسته خط همساز (شکل)،



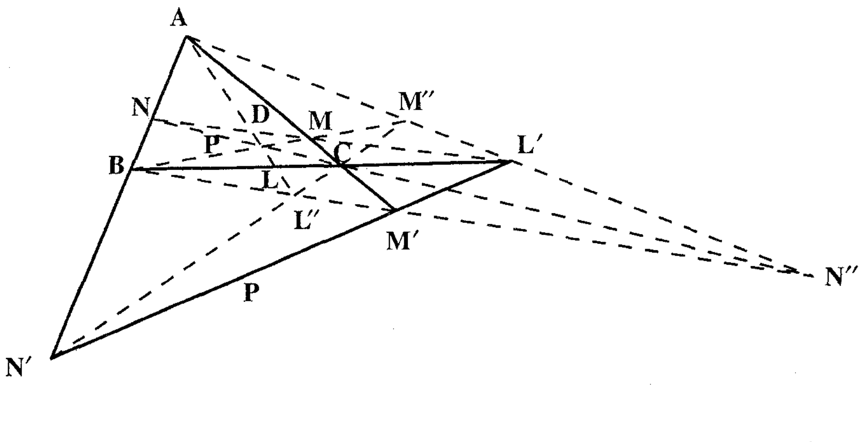
$B(ACMM')=-۱$ و $C(ABNN')=-۱$

که توسط خط APL قطع می‌شوند، نتیجه می شود که BM' و CN' از مزدوجهای همساز P نسبت به A و L می گذرند؛ پس این مزدوج همساز نقطهٔ L'' بین دو خط BM' و CN' مشترک است. در مورد M'' و N'' نیز گزاره‌های مشابهی برقرارند.

نتیجه. وابسته‌های همساز نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC رأسهای یک مثلث منظری نسبت به ABC هستند؛ نقطهٔ P مرکزمنظری، و قطبی سه‌خطی P برای ABC محور منظری است.

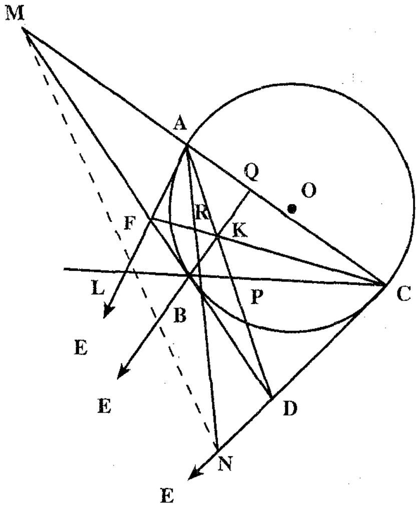
نکته. اگر مثلث ABC و خط $p=L'M'N'$ مفروض باشند، خطهای AL'، BM' و CN' نقطه‌های L''، M'' و N'' را تعیین می کنند و خطهای AL''، BM'' و CN'' یکدیگر را در قطب همساز خط p برای مثلث ABC، یعنی نقطهٔ P، قطع می کنند.

۱۸. اثبات به‌آسانی با توجه به شکل به‌دست می‌آید.

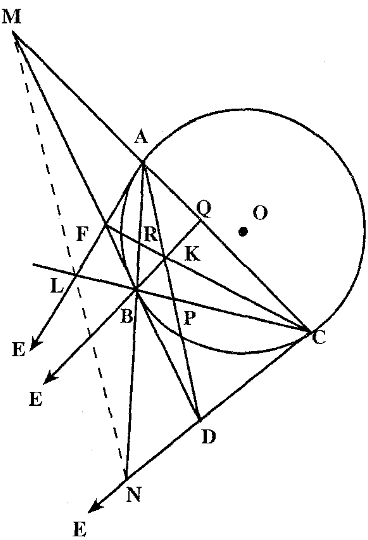


نکته. شکل با مفروض‌بودن ABC و نقطهٔ P رسم شده است. ولی اگر به جای P یکی از وابسته‌های همساز آن نسبت به ABC، مثلاً L'' را نیز داشته باشیم، باز هم می‌توانیم همین شکل را به‌دست آوریم؛ زیرا مزدوج همساز L'' نسبت به A و L نقطهٔ P است و بقیهٔ شکل به همان صورت قبل رسم می‌شود.

۱۹. اگر مماس AL بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC در رأس A، ضلع BC را در L قطع کند (شکل)، خط قطبی L نسبت به (O) از A و D، یعنی قطب BC، می گذرد؛ پس این خط قطبی همان میانهٔ متقارن AD است. برای نقطه‌های مشابه



M و N نیز وضعیت چنین است. چون نقطه‌های L، M و N همخطند، نتیجه می‌شود که سه میانهٔ متقارن AD، BE و CF همرسند، و نقطهٔ مشترکشان قطب LMN است. توجه کنید که چون نقطهٔ لوموان داخل مثلث، و بنابراین داخل دایرهٔ محیطی است، محور لوموان دایرهٔ محیطی را قطع نمی‌کند.

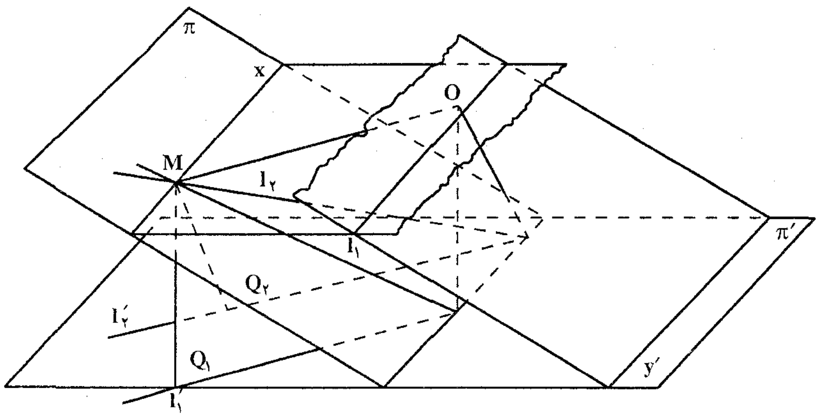


۲۰. نقطهٔ برخورد محور لوموان LMN با ضلع BC، نقطهٔ L و پای میانهٔ متقارن AP از مثلث ABC نقطهٔ P است (شکل). مزدوج همساز L نسبت به B و C نقطهٔ P است. نتیجهٔ مشابهی برای دو نقطهٔ M و Q و همچنین برای دو نقطهٔ N و R صادق است. بنابراین، هم می‌توان نتیجه گرفت که میانه‌های متقارن AP، BQ و CR همرسند و هم این که نقطهٔ مشترک میانه‌های متقارن، یعنی K، قطب سه‌خطی LMN برای ABC است.

نتیجه. رأسهای مثلث مماسی یک مثلث مفروض، وابسته‌های همساز نقطهٔ لوموان مثلث مفروض هستند.

۲۱. فرض کنید A رأس مثلث، P پای میانهٔ متقارن AP، K نقطهٔ لوموان، و D قطب BC نسبت به دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC باشد ؛ A و P پاره‌خط KD را به‌طور همساز تقسیم می‌کنند ؛ پس $A'(APKD) = -1$ ، که در آن A' وسط BC است. ارتفاع AA_h با $A'D$ موازی است ؛ پس $A'K$ از نقطهٔ وسط AA_h می‌گذرد. برای دو ارتفاع دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۲۲. خط A_1OA' (شکل) از قطب U برای ضلع BC نسبت به دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC می‌گذرد؛ میانهٔ متقارن AK نیز همین‌طور است. اگر K' نقطهٔ برخورد AK و BC



باشد، خط KA_1 موازی با شعاع $A'K'$ از دسته خط همساز $A'(AK'KU)$، خط $A'A$ را در نقطهٔ وسط پاره‌خط KA_1 قطع می‌کند، یعنی خطهای AA_1 و AK همنوا هستند. برای دو خط BB_1 و BK، و همچنین دو خط CC_1 و CK نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه برقرار است.

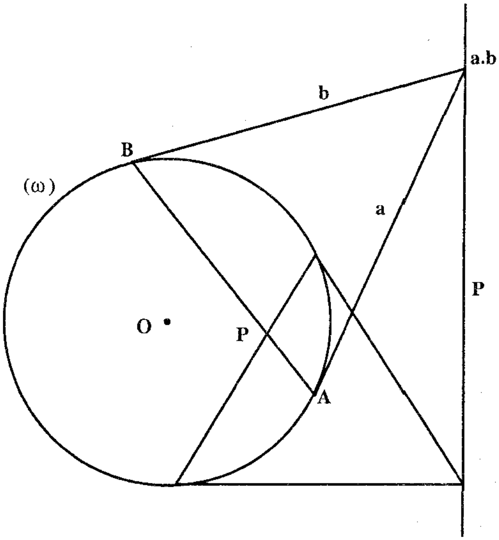
نکته. مثلث اوّل بروکار با مثلث اصلی به سه طریق منظری است، و مرکزهای منظری دو نقطهٔ بروکار و نقطهٔ همنوای نقطهٔ لوموان هستند.

۲۳. زیرا اگر دایره‌های مفروض متعامد باشند، مرکزهایشان روی دایرهٔ اصلی آنها قرار دارد و اگر M نقطه‌ای روی دایرهٔ اصلی (L) باشد، و A و B مرکزهای دو دایرهٔ مفروض باشند، عمودی که در M بر AM رسم می‌شود، از روبه‌روی قطری A در دایرهٔ (L)، یعنی B می‌گذرد.

۲۴. اگر دو نقطه چنان باشند که هرکدام از آنها بر قطبی دیگری واقع باشد، آنها را نقطه‌های مزدوج و قطبیهای آنها را خطهای مزدوج می‌نامند. هرگاه a قطبی نقطهٔ A بر نقطهٔ B بگذرد، خط b قطبی B نیز بر A می‌گذرد؛ بنابراین A و B نقطه‌های مزدوج و a و b خطهای مزدوج می‌باشند. با توجه به این که می‌توانیم نقطه را دایرهٔ به شعاع صفر بگیریم، قطبی هر نقطه، مکان هندسی مزدوجهای آن نقطه، و قطب هر خط، پوش مزدوجهای آن خط می‌باشد.

اگر خط a در نقطهٔ A بر دایرهٔ ω مماس باشد، هر نقطهٔ واقع بر a مزودج نقطهٔ A و در عین حال نقطهٔ A مزدوج خودش نیز می‌باشد، همچنین در این حالت هر خط که بر A بگذرد، مزدوج a و بخصوص خط a مزدوج خودش نیز می‌باشد.

قطب هر خط که بر دو نقطهٔ A و B بگذرد (بدون آن‌که بر O بگذرد)، بر نقطهٔ برخورد a و b، قطبیهای A و B واقع است. در شکل (ت) دو نقطهٔ A و B بر دایرهٔ ω واقعند؛ پس a و bقطبیهای آنها که بترتیب در A و B بر ω مماسند، در قطب خط AB، که آن را با a.b نشان داده‌ایم متقاطع می‌باشند.

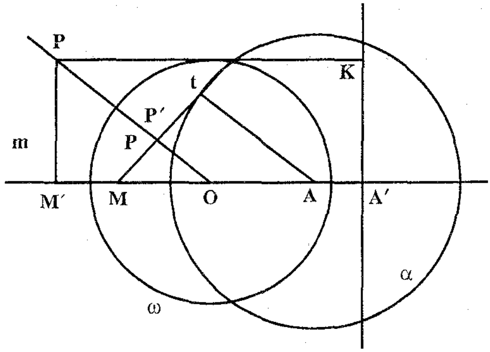


بعکس، هرگاه از نقطهٔ خارج ω دو مماس a و b را بر آن رسم کنیم، خطی که A و B، نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کند، قطبی نقطهٔ مفروض می‌باشد.

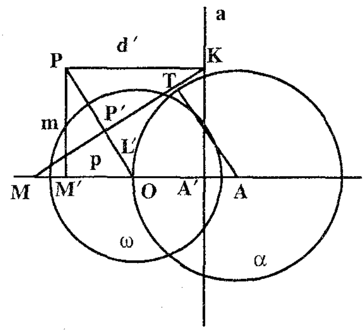
هرگاه بر خط p دو نقطه انتخاب کنیم و قطبیهای آنها را رسم کنیم، در P قطب خط p برخورد می‌کنند. در عمل این دو نقطه را در خارج ω انتخاب کرده، از هریک از آنها دو مماس بر دایره رسم و نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کنیم که از برخورد دو خط حاصل، قطب خط مفروض مشخص می‌شود. بعکس، هرگاه P داده شده باشد و از آن دو قاطع نسبت به دایره رسم کنیم و قطبهای این دو قاطع را به یکدیگر وصل کنیم، قطبی نقطهٔ P مشخص می‌شود.

نکتهٔ قابل توجه این است که با معلوم بودن دایرهٔ هادی ω و همهٔ مماسهایی که می‌توان بر آن رسم کرد، ترسیمهای مربوط به تبدیل قطبی معکوس فقط به‌وجود خود نقطه‌ها و خطها بستگی دارد و فاصله‌های بین آنها مطرح نیست. این نکته از ویژگیهای سرشتی هندسهٔ تصویری است.

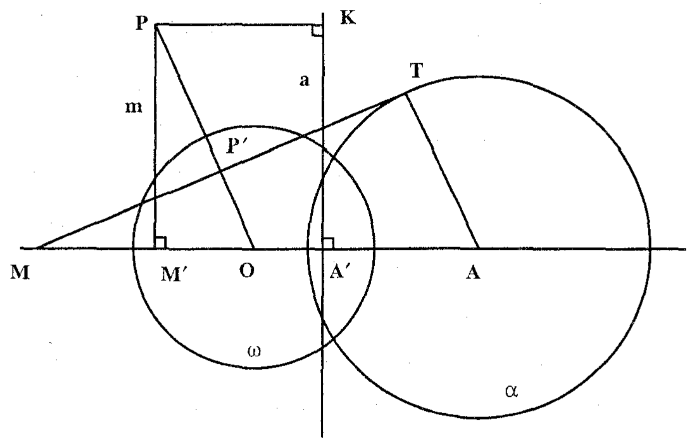
۲۵. در شکلهای (الف، ب و پ)، P نقطه‌ای از منحنی مقطع مخروطی است و p قطبی P (نسبت به دایرهٔ ω) است که در T بر α مماس می‌باشد و با OA در M برخورد کرده



(ب)



(الف)



(پ)

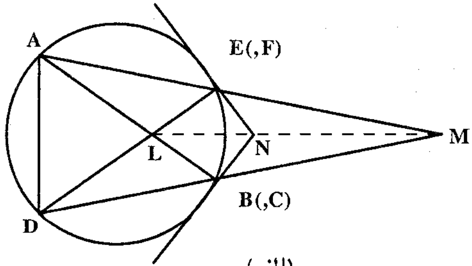
است. خط p با OP در ′P برخورد می‌کند که منعکس P می‌باشد. همچنین خط هادی a (نظیر کانون O) با OA در ′A برخورد می‌کند که منعکس نقطهٔ A است و بالاخره خط m قطبی نقطهٔ M نیز با OA در ′M منعکس نقطهٔ M برخورد می‌کند. از P عمود PK را بر خط a رسم می‌کنیم و می‌خواهیم ثابت کنیم که : $OP = \varepsilon . PK$. برای آن که اثبات در حالتهای مختلف را یکجا انجام دهیم، خط حامل OA را جهت‌دار می‌گیریم و جهت مثبت آن را همان جهت از O به A اختیار می‌کنیم. با توجه به این‌که K شعاع دایرهٔ ω و

r شعاع دایرهٔ α است، می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{Pk}{OP}=\frac{OA'-OM'}{OP}=\frac{k}{OP}(\frac{OA'}{k}-\frac{OM'}{k})$$
$$=\frac{OP'}{k}(\frac{k}{OA}-\frac{k}{OM})=\frac{OP'}{OM}(\frac{OM}{OA}-۱)$$
$$=\frac{AT}{AM}.\frac{AM}{AO}=\frac{r}{OA}=\frac{۱}{\varepsilon}$$

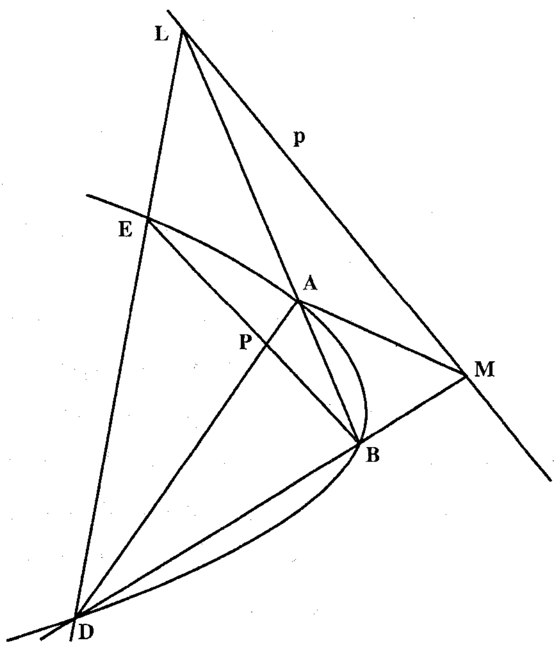
هرگاه بترتیب عکس عمل کنیم، عکس قضیه نیز ثابت می‌شود.
بسادگی معلوم می‌شود که هرگاه دایرهٔ ω به مرکز O مماس بر a انتخاب شود و A نقطهٔ تماس باشد، دایرهٔ α به مرکز A و به شعاع $\frac{OA}{\varepsilon}$ خواهد بود.

۲۶. با توجه به تبدیل قطبی معکوس، هر قضیهٔ مربوط به خطها و نقطه‌ها را که در نظر بگیریم، می‌توانیم نظیر آن قضیه‌ای مربوط به نقطه‌ها و خطها بیان کنیم که این نقطه‌ها و خطها بترتیب قطبها و قطبیهای خطها و نقطه‌های قضیهٔ اوّل می‌باشند. برای مثال، شش‌ضلعی محیطی دایرهٔ ω را در نظر می‌گیریم، نقطه‌های تماس ضلعهای این شش‌ضلعی با دایره، شش‌ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند و این دو شش‌ضلعی در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω مبدل یکدیگرند. بنابراین قضیهٔ پاسکال و قضیهٔ بریانشن نظیر یکدیگرند و می‌توان با استفاده از تبدیل قطبی معکوس هرکدام را از دیگری نتیجه گرفت. در حالت کلی که دایرهٔ ω غیر از دایرهٔ محیطی یا محاطی شش‌ضلعی انتخاب شود، هریک از دو قضیهٔ مزبور را که در مورد دایره در نظر بگیریم، به‌صورت قضیهٔ دیگری در مورد یک منحنی مقطع مخروطی بیان خواهد شد که این منحنی مبدل قطبی معکوس آن دایره خواهد بود.
اکنون می‌خواهیم قضیه را با کنارگذاردن استثناهای آن (که در داخل پرانتزها قرار داشتند) به‌صورت کلی و ساده بیان کنیم. قضیه را برای دایرهٔ دلخواه α در نظر می‌گیریم و اگر α' منحنی مقطع مخروطی باشد که نسبت به دایرهٔ ω مبدل قطبی معکوس دایرهٔ α است، در این صورت قضیه را برای α' نیز نتیجه خواهیم گرفت. به این ترتیب ترسیمهایی که برای قطبها و قطبیها نسبت به α خواهیم داشت، به ترسیمهای مربوط به قطبیها و قطبها نسبت به α' تبدیل می‌شوند. از این‌رو می‌توانیم قطب و قطبی نسبت به دایره را به‌صورت کلی قطب و قطبی نسبت به یک مقطع مخروطی تعمیم دهیم. این قضیه با کنارگذاشتن استثناهای آن شامل چهار بخش می‌باشد که هریک از آنها متقابلاً نظیر بقیه است؛ هرگاه به جای ω یک منحنی مقطع مخروطی در نظر بگیریم، باز هم قضیه درست خواهد بود.



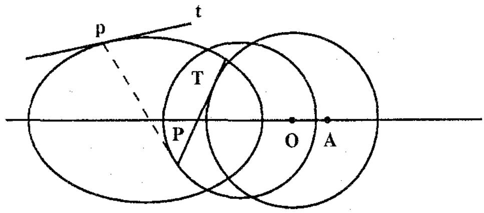
(الف)

۲۷. در شکل (الف) خط LM از N، نقطهٔ برخورد b و c و همچنین نقطهٔ برخورد a و d می‌گذرد. با توجه به این نکته و با درنظرگرفتن بخش آخر قضیهٔ بالا و تعمیم آن، روش سادهٔ ترسیم قطبی یک نقطهٔ دلخواه P نسبت به یک منحنی مقطع مخروطی، و مطابق با نمونهٔ شکل (ب)، قضیهٔ فوق نتیجه می‌شود.

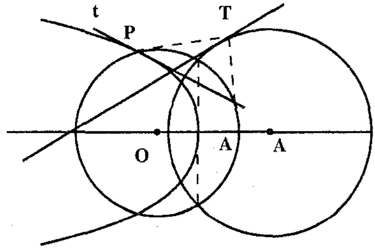


(ب)

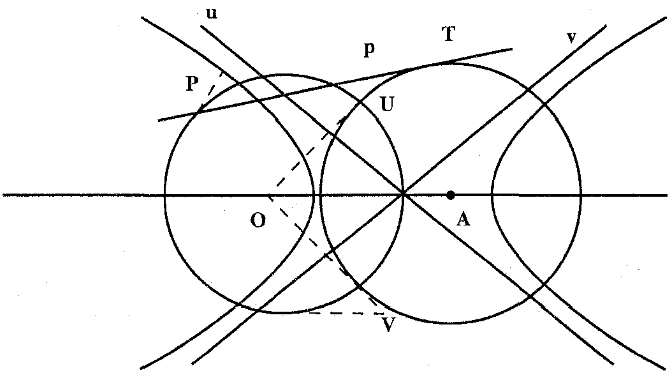
۲۸. با توجه به این‌که اگر قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ α را در نظر بگیریم و آن را نسبت به دایرهٔ هادی ω تبدیل قطبی معکوس کنیم، قطبی و قطب نسبت به مقطع مخروطی α' را به‌دست خواهیم آورد. در شکلهای (الف، ب و پ) نقطهٔ A و خط بینهایت l_∞ نسبت به دایرهٔ α قطب و قطبی می‌باشند، هرگاه α' مبدل قطبی معکوس α نسبت به ω باشد، خط a و نقطهٔ O نسبت به α' قطبی و قطب خواهند بود.



(الف)

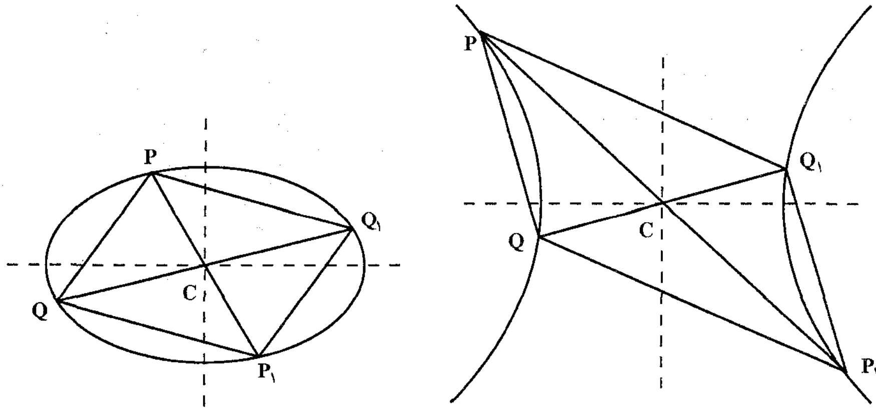


(ب)

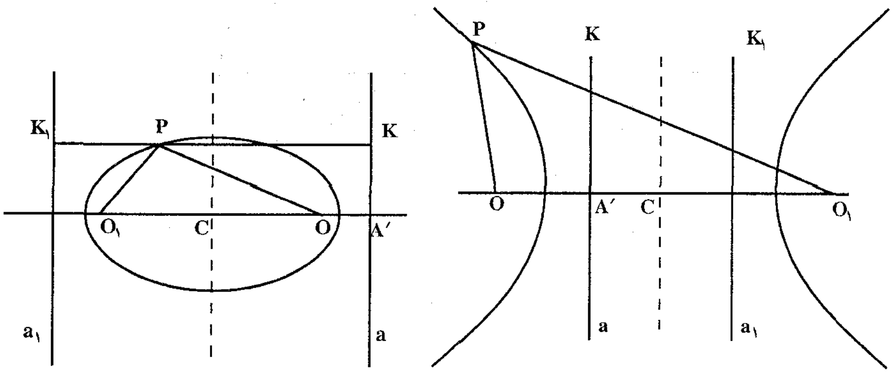


(پ)

۲۹. اگر C نقطه‌ای غیرواقع بر مقطع مخروطی و PP_1 و QQ_1 دو قاطع دلخواه گذرنده بر آن باشند، قطبی نقطهٔ C نسبت به مقطع مخروطی، خطی است که بر نقطهٔ برخورد دو خط PQ و P_1Q_1 و همچنین نقطهٔ برخورد دو خط PQ_1 و P_1Q می‌گذرد. هرگاه قطبی نقطهٔ C خط بینهایت باشد، مانند شکل (الف)، در این صورت چهار گوشهٔ محاطی PQP_1Q_1 متوازی‌الاضلاع می‌باشد؛ نقطهٔ C که بر مقطع مخروطی واقع نیست، قطبی آن (یعنی خط بینهایت l_∞) بر این مقطع مخروطی مماس نمی‌باشد و درنتیجه این منحنی سهمی نخواهد بود و بعلاوه، نقطهٔ C که قطب خط بینهایت است، در وسط هریک از پاره خطهای PP_1 و QQ_1 قرار دارد و بنابراین PQP_1Q_1 متوازی الاضلاع است. قاطعهای PP_1 و QQ_1 به دلخواه انتخاب شده‌اند؛ پس C مرکز تقارن منحنی است و آن‌را مرکز مقطع مخروطی (بیضی و هذلولی) می‌نامند. از این‌رو منحنیهای بیضی و هذلولی، مقطعهای مخروطی مرکزدار نامیده می‌شوند.



(الف)



(ب)

هرگاه O کانون و a خط هادی نظیر آن در یک مقطع مخروطی مرکزدار باشد، قرینه‌های آنها نسبت به C، یعنی نقطهٔ O_1 و خط a_1 نیز بترتیب کانون و خط هادی نظیر آن در آن مقطع مخروطی خواهد بود (شکل (ب)). همچنین در تبدیل نیمدور به مرکز C دایره‌های ω و α به دایره‌های جدید ω_1 و α_1 تبدیل می‌شوند، به‌گونه‌ای که قطبی متقابل α_1 نسبت به ω_1 باز همان مقطع مخروطی به مرکز C خواهد بود.

صرف نظر از حالتی که O و A بر هم منطبق باشند، خط OA محور تقارن هر مقطع مخروطی است. بدیهی است که در مقطعهای مخروطی مرکزدار، مرکز آنها بر این محور تقارن قرار دارد. بنابراین تبدیل نیمدور به مرکز C را می‌توان ترکیب دو تقارن محوری دانست که محورهای آنها در C بر هم عمودند؛ یکی از این محورهای تقارن، خط OA است؛ پس در مقطعهای مخروطی مرکزدار، خطی که در C عمود بر OA است نیز محور

تقارن منحنی می‌باشد. می‌توان گفت که مقطع مخروطی مرکزدار دارای همان نوع تقارنهایی است که لوزی یا مستطیل دارا می‌باشد.

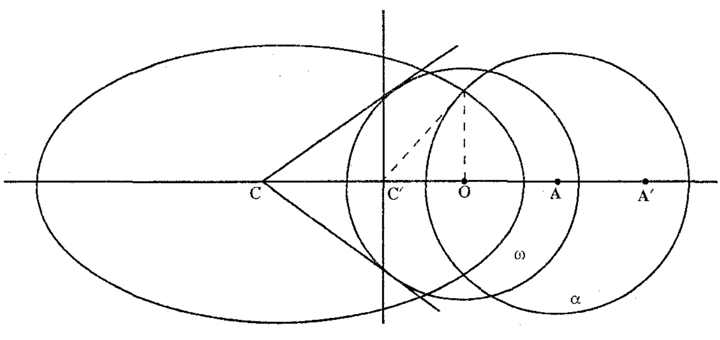
قطبی C را نسبت به دایرهٔ ω با c نشان می‌دهیم که در شکلهای (پ) و (ت) نموده شده است. نقطهٔ C و خط بینهایت l_∞، نسبت به دایرهٔ α' قطب و قطبی یکدیگرند، خط c و نقطهٔ O نیز باید قطبی و قطب یکدیگر نسبت به دایرهٔ α باشند. پس نقطهٔ C قطب خط c است نسبت به دایرهٔ ω، درحالی که همین خط c قطبی نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ α است. اگر C' نقطهٔ برخورد c با OA باشد، نقطهٔ C' از یک طرف منعکس C نسبت به ω و از طرف دیگر منعکس O نسبت به α است، یعنی داریم:

$$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC'} = k^۲ = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$$

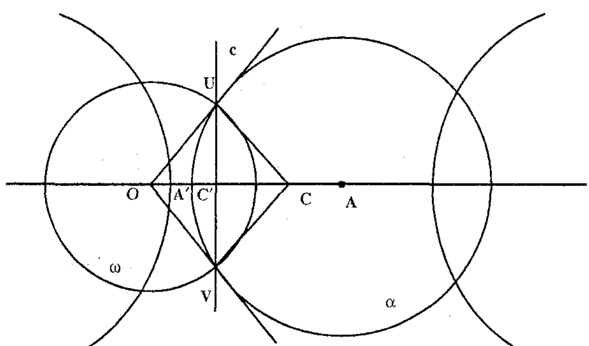
$$r^۲ = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{C'A}$$

بنابراین:

$$\frac{OC}{OA'} = \frac{OA}{OC'} = \frac{OA}{OA - C'A} = \frac{OA^۲}{OA^۲ - OA.C'A} = \frac{OA^۲}{OA^۲ - r^۲} = \frac{\varepsilon^۲}{\varepsilon^۲ - ۱}$$



(پ)



(ت)

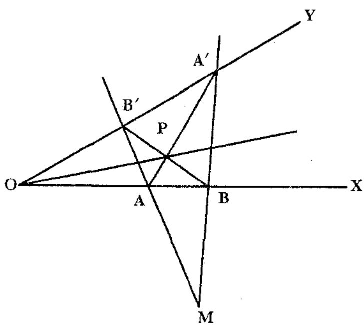
برحسب آن که $1 > \varepsilon$ یا $1 < \varepsilon$ باشد، نسبت بالا مثبت یا منفی خواهد بود، بنابراین در بیضی مرکز C و خط هادی a در دو طرف O قرار دارند، درحالی‌که در هذلولی در یک طرف O واقعند، همچنان که در شکلهای (ب) نموده شده است. به‌عبارت دیگر در بیضی دو کانون در درون منحنی واقعند و منحنی به تمامی بین دو خط هادی قرار دارد. اما در هذلولی دو خط هادی در بخشی از صفحه واقعند که بین دو شاخهٔ هذلولی واقع شده است.

در مکانیک ثابت می‌شود که اگر از مقاومت هوا صرفنظر گردد، مسیر یک گلوله که از دهانهٔ توپ پرتاب می‌گردد، کمانی از سهمی خواهد بود که تعیین کانون آن بسادگی میسر می‌باشد. از آن‌جا که می‌توان برای حداقل چند ثانیه، گلوله را همچون یک سیارهٔ کوچک تصور کرد، در این صورت مسیر آن، که به نظر می‌رسد سهمی است، درواقع یک بیضی بسیار کشیده خواهد بود که خروج از مرکز آن بسیار نزدیک به یک می‌باشد. در این صورت کانون دیگر این بیضی در کجا قرار دارد؟ ... در مرکز زمین!

۲.۱. قطب و قطبی در نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۳۰. نقطهٔ برخورد AB' و $A'B$ را M می‌نامیم.
این نقطه، قطب خط OP است.



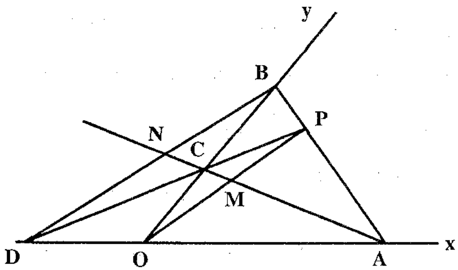
۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳۱. این نقطه‌ها، روی قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ قرار دارند.
بنابراین روی خط راستی قرار دارد که از O می‌گذرد.

۳.۲.۱. خطهای: موازی، همرس،...

۱.۳.۲.۱. خطها موازی‌اند



۳۲. می‌دانیم در چهار ضلعی کامل BPAODC وسطهای قطرها بر یک استقامت می‌باشند، یعنی خط واصل بین وسطهای قطرهای CA و OP از وسط قطر BD می‌گذرد و چون قطر CA از M وسط OP می‌گذرد، پس خط واصل بین وسطهای CA و OP همان قطر CA بوده که از نقطهٔ N وسط BD می‌گذرد و از آن‌جا داریم:

$$\frac{ND}{NB}=\frac{OM}{MP}$$

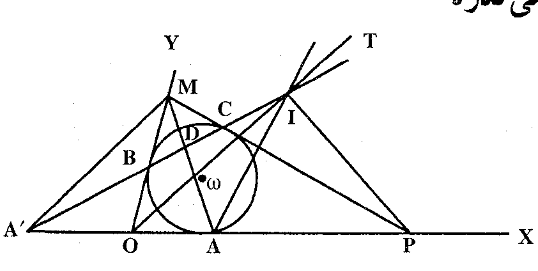
و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که BD∥OP است.

نتیجه. (در هر چهار ضلعی کامل که یک قطر از وسط قطر دیگر بگذرد، از وسط قطر سوم گذشته و آن دو قطر موازی‌اند.)

۲.۳.۲.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

۳۳. چون تقسیم توافقی (ABCD) شامل چهار نقطهٔ واقع بر یک خط راست است، بنابراین قطبیهای این چهار نقطه نسبت به دایرهٔ به مرکز O، چهار خط همرس می‌باشند. از طرفی این خطها بر خطهایی که مرکز دایره (نقطهٔ O) را به نقطه‌های A، B، C و D وصل می‌کنند، عمودند. امّا (O ـ ABCD) دستگاهی توافقی است. بنابراین دستگاه حاصل از قطبیهای چهار نقطهٔ A، B، C و D نیز توافقی می‌باشد.

۳.۳.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

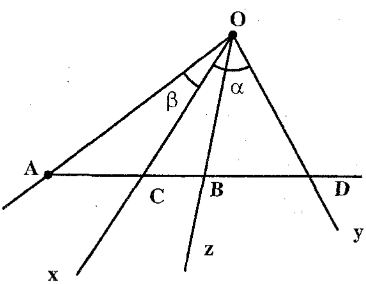


۳۴. خط BC قطبی نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (ω) می‌باشد. درنتیجه قطب خطهای گذرنده بر M بر BC واقع است. از جمله، قطب خط

MA بر BC قرار دارد. همچنین OX قطبی نقطهٔ A نسبت به دایره است. پس قطب کلیهٔ خطهای گذرنده بر A، بر OX واقع است. از جمله، AM بر OX واقع است و از آن‌جا قطب MA بر محل برخورد BC و OX قرار دارد؛ یعنی A' قطب AM است و درنتیجه نقطه‌های $(A'DBC)$ تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند و دستگاه (M.ADBC) توافقی بوده و چون هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه‌های برخورد، تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، پس $(A'BOP)$ تقسیم توافقی و دستگاه $(I.A'AOP)$ توافقی است. از طرفی چون دو مثلث ΔOBI و ΔOAI به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها مساوی‌اند، پس IO نیمساز داخلی زاویهٔ $A'\hat{I}A$ بوده و در نتیجه شعاع مزدوجش، IP، نیمساز خارجی آن است و چون نیمسازهای داخلی و خارجی بر هم عمودند، پس $O\hat{I}P = 90°$ یا به عبارت دیگر I تصویر P روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ بوده که چون زاویهٔ $x\hat{O}y$ و درنتیجه نیمساز آن OT و همچنین نقطهٔ P ثابت است، تصویرش روی نیمساز OT ثابت بوده و BC از نقطهٔ ثابت I می‌گذرد.

۱.۲.۴. زاویه

۱.۲.۴.۱. اندازهٔ زاویه



۳۵. قطبی نقطهٔ A نسبت به Ox و Oy را Oz می‌نامیم و از A خطی رسم می‌کنیم که Ox، Oy و Oz را بترتیب در C، B و D قطع کند. (ABCD) یک تقسیم توافقی است و داریم:

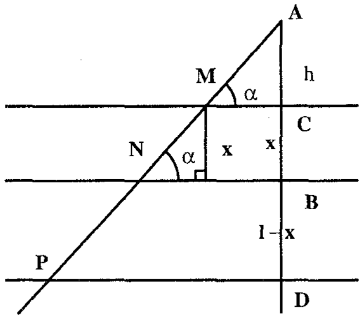
$$\frac{\sin(OA\hat{,}OC)}{\sin(OB\hat{,}OC)} = -\frac{\sin(OA\hat{,}OD)}{\sin(OB\hat{,}OD)}$$

با فرض $C\hat{O}B = \theta$ داریم:

$\frac{\sin\beta}{\sin\theta} = -\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\theta)}$. از این رابطه با محاسبهٔ یک نسبت از زاویهٔ θ، اندازهٔ زاویهٔ θ به دست می‌آید.

۵.۲.۱. پاره‌خط

۱.۵.۲.۱. اندازهٔ پاره‌خط



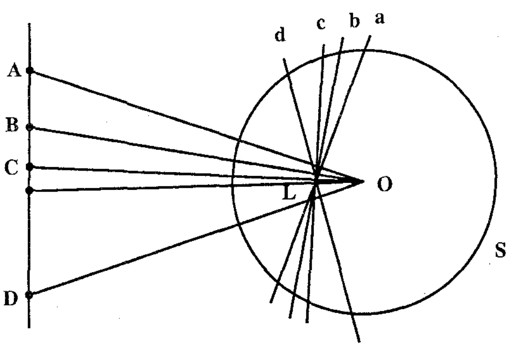
۳۶. اگر فاصله بین دو خط Δ و D را x بگیریم (شکل)، داریم:

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}\Rightarrow\frac{h}{x}=\frac{l+h}{l-x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{lh}{l+2h}$$

با محاسبهٔ x، MN و NP بسادگی محاسبه می‌شوند.

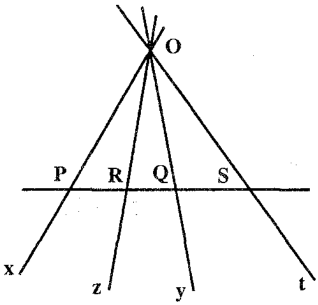
۶.۲.۱. رابطه‌های متری



۳۷. اثبات کاملاً ساده است. چهار نقطهٔ A، B، C و D واقع بر یک خط و قطبیهای آنها a، b، c و d نسبت به یک دایرهٔ S را در نظر می‌گیریم (شکل). تعریف نسبت ناهمساز چهار خط ایجاب می‌کند که نسبت ناهمساز نقطه‌های A و B ؛ C و D با نسبت ناهمساز خطهای OA و OB ؛ OC و OD، (O مرکز S)، مساوی باشد. چون قطبی یک نقطه نسبت به یک دایرهٔ S، بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز S عمود است ؛ پس خطهای OA، OB، OC و OD بترتیب برخطهای a، b، c و d عمود می‌شوند. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که دو چهارخطی a، b ، c و d و OA، OB، OC و OD، می‌توانند با یک حرکت مناسب بر هم منطبق شوند ؛ زیرا این عمل را می‌توان ابتدا با انتقال خطهای OA، OB، OC و OD، به‌طوری که O بر L منطبق شود، و سپس دوران این خطها به زاویهٔ °۹۰ حول L، انجام داد. از این جا نتیجه می‌شود که نسبت ناهمساز چهار خط OA و OB ؛ OC و OD با نسبت ناهمساز چهارخط a و b ؛c و d مساوی است ؛ اما در

این حالت نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ C و D نیز با نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d مساوی است، و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۱.۲.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

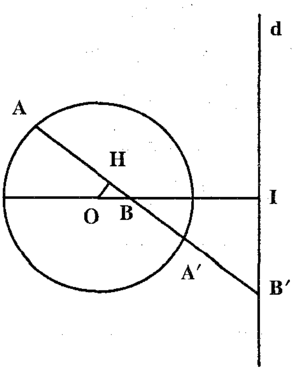


۳۸. اگر از نقطهٔ دلخواه P واقع بر Ox، خطی رسم کنیم تا سه شعاع Oy، Oz و Ot را بترتیب در Q، R و S قطع کند، (PQRS) تقسیم توافقی است ؛ بنابراین بنا به تعریف شعاع Oy قطبی نقطهٔ P نسبت به دو شعاع Oz و Ot است. به‌همین ترتیب هر نقطه از شعاع Oy قطب شعاع Ox است.

۱.۲.۸. رسم شکلها

۱.۳۹. قطبی P نسبت به نقطهٔ C (دایرهٔ به شعاع صفر) خطی است که از C بر PC عمود شود.

۲. قطبی P نسبت به خط Δ (دایرهٔ به شعاع بینهایت) خطی است به موازات Δ و مکان قرینه‌های P نسبت به نقطه‌های مختلف Δ ؛ زیرا می‌دانیم در یک تقسیم توافقی (ABCD)، اگر یکی از نقطه‌ها، به عنوان مثال D، در بینهایت واقع شود، نقطهٔ C وسط AB واقع خواهد شد.



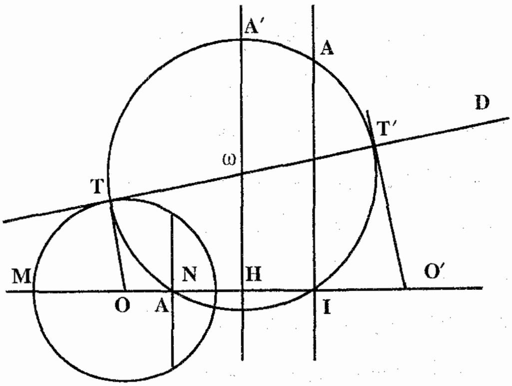
۴۰. اگر O دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A باشد که در آن، d قطبی B نسبت به آن دایره باشد، چنانچه خط AB دایره را در ′A و خط d را در ′B قطع کند، نقطهٔ ′A مزدوج A نسبت به ′B و B خواهد بود و از طرفی مرکز دایره بر عمودی واقع است که از B بر d فرود می‌آید و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

از نقطهٔ B عمودی بر خط d فرود می‌آوریم و AB را امتداد داده تا خط d را در ′B قطع کند. نقطهٔ ′A را مزدوج توافقی A نسبت به B و ′B تعیین می‌نماییم. محل برخورد عمود منصف ′AA با

خط BI نقطهٔ (O) مرکز دایرهٔ خواسته شده و $OA = OA'$ شعاع آن می‌باشد.

بحث. اگر AB بر d عمود باشد، مرکز دایره بر نقطهٔ H وسط AA' واقع است، در صورتی که $AB \| d$ باشد، A' قرینهٔ A نسبت به B روی دایره بوده و چون B وسط AA' است، B' در بینهایت بوده و IA در A بر دایره مماس است و از آن‌جا عمودی که در A بر IA رسم می‌شود، هرجا BI عمود رسم شده از B بر d قطع کند، نقطهٔ (O) مرکز دایرهٔ خواسته شده و $OA = R$ شعاع آن است.

۴۱. اگر (O) دایرهٔ مطلوب باشد که در نقطهٔ T بر خط D مماس بوده و Δ قطبی نقطهٔ A نسبت به آن دایره باشد، در این صورت مرکز دایرهٔ (O) بر خطی واقع است که از A بر Δ عمود می‌شود و از آن‌جا اگر نقطهٔ تماس دایره با خط D معلوم باشد، می‌توان (O)، مرکز دایره را تعیین کرد.



بدین طریق که از نقطهٔ تماس بر خط D عمود اخراج می‌کنیم تا عمود رسم شده از A بر Δ را قطع کند و چون A مزدوج توافقی I نسبت به MN می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$OT^2 = OM^2 = ON^2 = OA.OI$$

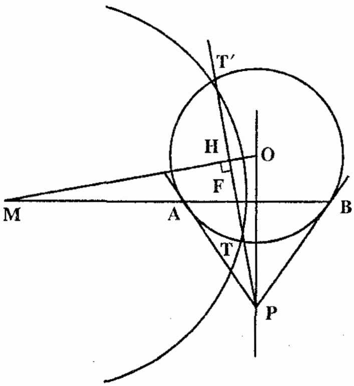
که در این حالت دایرهٔ گذرنده بر A، I و T بر دایرهٔ (O) عمود است و مرکزش بر D واقع می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

ابتدا از نقطهٔ A عمود AI را بر Δ وارد آورده و Δ' عمودمنصف AI را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. دایره به مرکز ω و شعاع $R' = \omega I = \omega A$ دایره‌ای است که بر دایرهٔ (O) عمود است. نقطهٔ تقاطع این دایره با خط D، نقطه‌های T و T', نقطه‌های تماس می‌باشند و عمودهای رسم شده از T و T' بر خط D، خط AI را در نقطه‌های O و O' قطع می‌کنند. دایره به مرکز (O) و شعاع $R = OT$ و یا به مرکز (O') و شعاع $O'T' = R'$ جواب مسأله است.

بحث. اگر عمود رسم شده از T یا T' بر D خط AI را قطع کند، مسأله دارای جواب

است، وگرنه مسأله جواب ندارد و همچنین لازم است که Δ' با D متقاطع باشد. در صورتی که $D \| \Delta$ باشد، T بر M منطبق بوده و درنتیجه A، I و M معلوم بوده و N مزدوج M نسبت به AI را تعیین کرده و (O) وسط MN مرکز و $OM = ON = R$ شعاع آن دایره است.

۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۴۲. ۱. خط MAB قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) است. و چون قطبی نقطهٔ P از M می‌گذرد، قطبی M نیز از نقطهٔ P خواهد گذشت. و چون قطبی هر نقطه بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز دایره عمود است؛ پس PH قطبی نقطهٔ M نسبت به دایره می‌باشد و از آن‌جا اگر F نقطهٔ برخورد MAB با PH باشد، نقطهٔ F مزدوج توافقی M نسبت به AB است، که چون نقطه‌های M، A و B ثابت هستند، با تغییر دایره، خط PH تغییر کرده، ولی نقطهٔ F ثابت می‌ماند و چون $M\hat{H}F = 90°$ است، پس مکان H تصویر P بر روی MO دایره‌ای است به قطر MF.

۲. چون PH قطبی M نسبت به دایرهٔ (O) است، پس MT و MT' پیوسته بر دایرهٔ (O) مماس است و درنتیجه پیوسته داریم:

$$MT^2 = MT'^2 = MA.MB = P_M(O) = \text{مقدار ثابت}$$

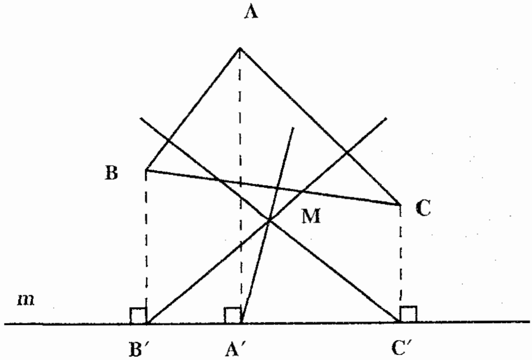
یعنی مکان T و T' دایره‌ای است به مرکز M و شعاع $R = \sqrt{MA.MB}$.

۳.۱. قطب و قطبی در مثلث

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۴۳. عمودهایی که از تصویرهای رأسهای یک مثلث برروی خط m، بر ضلعهای روبه‌روی آن

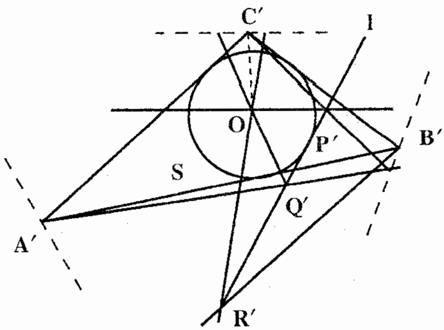
رأسها رسم می‌شوند، در یک نقطه مانند M همرسند، که M را قطب ارتفاعی خط m نسبت به مثلث ABC می‌نامند.



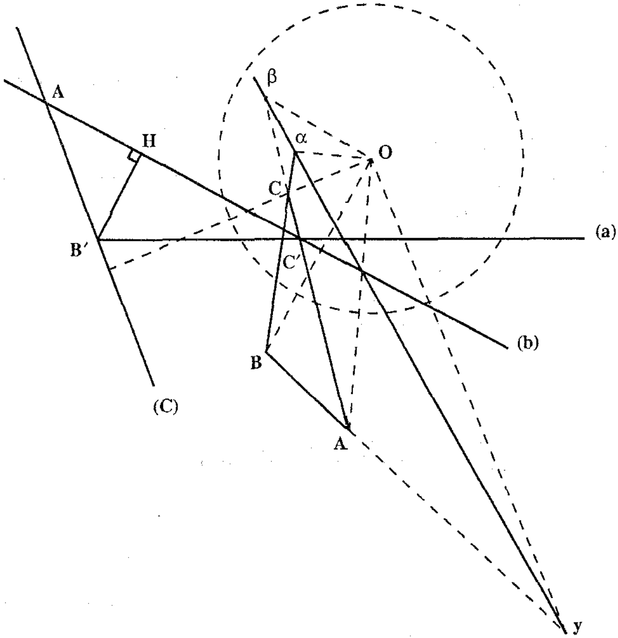
۱.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۵. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S، یک مثلث محاطی ABC به یک مثلث محیطی $A'B'C'$ بدل می‌شود، یک نقطهٔ L از S به یک مماس l، و P، پای ارتفاع رسم شده از L بر AB، به خط $C'P'$ بدل می‌شود که P' نقطه‌ای است از l به طوری که $C'\hat{O}P' = 90^\circ$، یعنی P' نقطهٔ برخورد l و خط گذرنده بر O به موازات نیمساز زاویهٔ خارجی در رأس C' است ($O'C'$ نیمساز زاویهٔ داخلی، شکل). بنابراین به قضیهٔ زیر می‌رسیم: خطهای واصل از رأسهای یک مثلث $A'B'C'$ به نقطه‌های برخورد یک مماس l بر دایرهٔ محاطیش S، با خطهای گذرنده بر O، مرکز S، و موازی با نیمسازهای زاویه‌های خارجی در این رأسها، همرسند (شکل).



۴۶. مثلث ABC و نقطهٔ O مفروضند (شکل)؛ از O به A وصل کرده و خطی از O بر OA عمود می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در α قطع کند؛ به طریق مشابه، β و γ را به‌دست می‌آوریم، حال باید ثابت کنیم که α، β و γ بر یک استقامتند.



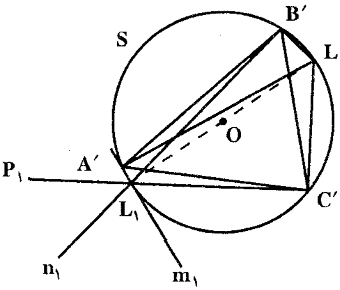
به مرکز O دایره‌ای به شعاع اختیاری می‌کشیم و $A'B'C'$، شکل قطبی متقابل ABC را نسبت به دایرهٔ O به‌دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که هریک از نقطه‌های α، β و γ قطب یکی از ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ است، و درنتیجه، چون سه ارتفاع همرسند، α، β و γ بر یک استقامت خواهند بود.

از طرفی یکی از ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ به‌طور مثال ارتفاع رأس B'، را درنظر می‌گیریم ؛ قطب این ارتفاع که موازی با OB است (چرا؟)، بر قطبی B' یعنی بر AC واقع است، و از طرف دیگر، قطب هر خط بر روی عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم شود، یعنی قطب ارتفاع $B'H$ واقع است برروی خطی که از O بر $B'H$، یا بر OB عمود شود ؛ پس β قطب ارتفاع رأس B' از مثلث $A'B'C'$ است ؛ همین‌طور ثابت می‌شود که α و γ قطبهای ارتفاعهای رأسهای A' و C' آن مثلثند و قضیه ثابت می‌شود.

۴۷. خط γβ که دو نقطهٔ تماس رسم شده از A بر دایرهٔ (O) را به هم وصل می‌کند، قطبی A نسبت به دایرهٔ (O) است. درنتیجه قطبی کلیه نقطه‌های واقع بر خط γβ از نقطهٔ A می‌گذرند ؛ پس قطبی نقطهٔ M از نقطهٔ A گذشته و بر خطی که از مرکز دایره به M وصل می‌شود عمود است، و چون MO بر BC در نقطهٔ α عمود می‌باشد، پس اگر از A خط

AL را موازی BC رسم کنیم، بر MO عمود بوده و قطبی نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (O) خواهد بود، و D نقطهٔ تقاطع AL و $\gamma\beta$ قطب AM بوده و درنتیجه M مزدوج توافقی D نسبت به $\gamma\beta$ بوده و دستگاه $(A.DM\gamma\beta)$ توافقی است، و به‌همین دلیل دستگاه $(A.D'XM'\gamma'\beta')$ توافقی بوده و چون در این دو دستگاه توافقی ADD' ، $A\beta\beta'$ و $A\gamma\gamma'$ خطهای مستقیم هستند، پس AMM' نیز خط مستقیم می‌باشد، و چون که در دستگاه توافقی $(A.D'M'\gamma'\beta')$ ، خط BC موازی شعاع AL رسم شده به‌وسیلهٔ سه شعاع دیگر، به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود و یا به عبارت دیگر، AMM' از I وسط BC می‌گذرد که درنتیجه نقطه‌های A، M، I و M' بر یک استقامت می‌باشند.

۴۸. تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایرهٔ S را به‌کار می‌بریم. ضلعهای BC، CA و ABی ΔABC به نقطه‌های A' ، B' و C' واقع بر S بدل می‌شوند و مثلث محیطی ABC به مثلث محاطی $A'B'C'$ بدل می‌شود (یعنی ضلعهای ΔABC به رأسهای $\Delta A'B'C'$ بدل می‌شود و بعکس). مماس l به



یک نقطهٔ L واقع بر S بدل می‌شود؛ نقطه‌های M، N و P به خطهای LA' ، LB' و LC' بدل می‌شوند، و نقطه‌های M_1 ، N_1 و P_1 به خطهای m_1 ، n_1 و p_1 گذرنده بر A' ، B' و C' و عمود بر $A'L$ ، $B'L$ و $C'L$ ؛ نتیجه‌گیری اخیر از ویژگی (ج) مربوط به تبدیلات قطب و قطبی حاصل می‌شود (شکل). قضیه‌ای که در مسأله بیان شده است، به قضیهٔ زیر بدل می‌شود:

خطهای m_1 ، n_1 و p_1 در یک نقطه از S برخورد می‌کنند. کافی است یکی از این دو قضیه را اثبات کنیم. اما این مطلب که خطهای m_1 ، n_1 و p_1 در نقطه‌ای از S برخورد می‌کنند، کاملاً روشن است. زیرا $m_1 \perp A'L$ ایجاب می‌کند که m_1 دایرهٔ S را در نقطهٔ L_1 متقاطر L، ببرد. همچنین، خطهای n_1 و p_1 هم باید از L_1 بگذرند.

۴۹. گیریم ABC و $A_1B_1C_1$ دو مثلث منظری از O، نقطهٔ برخورد AA_1 ، BB_1 و CC_1 باشند. تبدیل قطب و قطبی II نسبت به یک دایرهٔ S به مرکز O را در نظر می‌گیریم. به‌موجب ویژگی (ب) از تبدیل قطب و قطبی، II مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ را به مثلثهایی

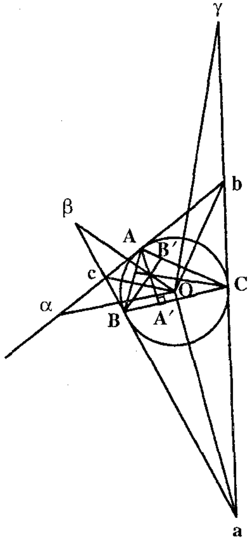
که ضلعهایشان دو به دو موازی هستند بدل می‌کند. این‌گونه مثلثها با یک انتقال یا یک تجانس به‌هم مربوط می‌شوند. ولی در این صورت خطهای واصل به رأسهای این مثلثها همرس یا موازی هستند؛ اما ویژگی (الف) تبدیل قطب و قطبی به ما اجازه می‌دهد که نتیجه بگیریم که نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ همخطند.

قسمت دوم قضیه دزارگ که می‌گوید اگر دو مثلث به‌جای این که تصویر منظری از یک نقطه باشند، تصویر منظری از یک خط باشند، از قسمت اوّل بر اثر اصل دوگانی نتیجه می‌شود (برای این که این را نشان دهیم، یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ دلخواه را برای نمودار مربوط به قسمت اوّل قضیه به‌کار می‌بریم).

۱.۳.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۱. خطها همرسند

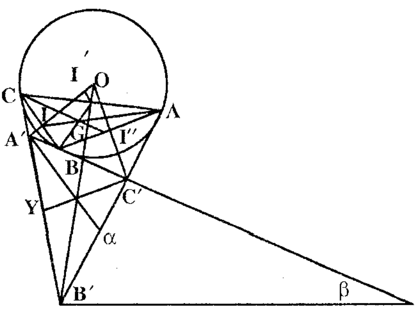
۵۱. محل برخورد DE و BC را P می‌نامیم. نشان می‌دهیم که IH بر P می‌گذرد. OA قطبی O نسبت به زاویهٔ A است؛ بنابراین M یعنی محل برخورد این قطبی با DE، مزدوج P نسبت به D و E است. از طرفی در چهارضلعی کاملی که از چهار خط EC، EL، DB و DL تشکیل شده قطر ED به‌وسیلهٔ دو قطر دیگر OL و IHبه توافق بخش شده؛ چون OL بر M می‌گذرد، پس IH هم بر P می‌گذرد.



۵۲. اگر (O) دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، مماسهای بر دایره را در نقطه‌های A، B و C بر دایره رسم می‌کنیم تا دو به دو یکدیگر را در نقطه‌های a، b و c قطع نمایند، مثلث Δabc قطبی معکوس مثلث ABC خواهد بود.

چنانچه AA′ ارتفاع وارد بر bc باشد، قطب AA′ بر قطبی نقطهٔ A، یعنی خط cb واقع است و از طرف دیگر قطب AA′ بر خطی واقع است که از مرکز دایره بر AA′ عمود می‌شود و از آن‌جا قطب AA′ بر محل برخورد bc با عمودی است که از

(O)، مرکز دایره، بر AA' رسم می‌شود، یعنی نقطهٔ α است. از طرفی می‌دانیم که AA' و Oa بر BC عمودند، پس $O\alpha$ بر Oa عمود خواهد بود و به‌همین دلیل ثابت می‌شود نقطهٔ β محل برخورد ab و عمودی که از (O) بر OC رسم می‌شود، قطب CC' و γ محل برخورد ac با عمودی که از O بر Ob رسم می‌شود، قطب BB' است و چون از نقطهٔ O واقع بر صفحهٔ مثلث Δadc بر خطهای واصل بین آن نقطه رأسهای مثلث عمود کرده‌ایم تا ضلعهای مقابل را بترتیب در α، β و γ قطع کنند و این سه نقطه بر یک استقامت می‌باشند؛ پس قطبیهای آنها که همان ارتفاعهای مثلث می‌باشند همرس خواهند بود.

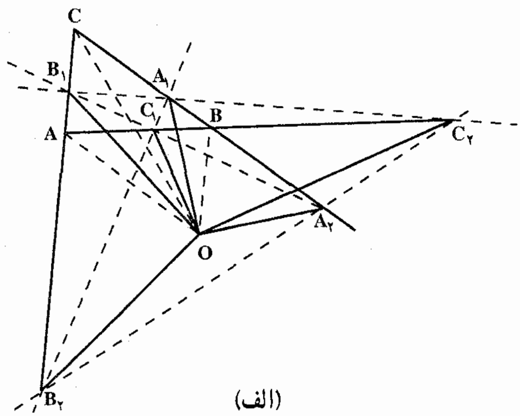


۵۳. اگر (O) دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، مماسهای بر دایره در نقطه‌های A، B و C دو به دو یکدیگر را بترتیب در نقطه‌های A'، B' و C' قطع می‌کنند. مثلث $A'B'C'$ قطبی معکوس مثلث ABC می‌باشد. درنتیجه BC قطبی نقطهٔ A' بوده و A' پای قطبی BC خواهد بود و از طرفی $A'O$ نیمساز $C\hat{A'}C'$ بوده و نیمساز خارجی آن یعنی $A'\alpha$ بر $A'O$ عمود است و $A'\alpha$ قطبی نقطه I وسط BC می‌باشد و درنتیجه قطبهای کلیهٔ خطهای گذرنده بر I، بر خط $A'\alpha$ واقع است، از جمله قطب میانهٔ AI که بر $A'\alpha$ قرار دارد.

همچنین چون AB' مماس بر دایره در نقطهٔ A قطبی نقطهٔ A است نسبت به دایره، پس قطبهای خطهای گذرنده از A بر AB' واقع است؛ از جمله قطب میانهٔ AI. پس قطب AI از یک طرف بر $A'\alpha$ و از طرف دیگر بر AB' واقع است؛ یعنی قطب میانه AI نقطهٔ α می‌باشد و به‌همین طریق ثابت می‌شود که β قطب میانهٔ BI' و γ قطب میانهٔ CI'' است و چون α، β و γ پای دو نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی مثلث $A'B'C'$ است، و این سه نقطه بر یک استقامت می‌باشند، قطبهای آنها، یعنی میانه‌های مثلث ABC همرسند.

۵۴. گیریم l نیمساز یکی از زاویه‌های حاصل از خطهای m و n باشد. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S به مرکز O، خطهای l، m و n به نقطه‌های همخط M، N و L بدل می‌شوند، به‌طوری که پاره‌خطهای ML و NL به دو زاویهٔ مساوی یا مکمل در O

مقابلند (ویژگی (ج) از تبدیل قطبی) ؛ به عبارت دیگر، L نقطهٔ برخورد MN است با نیمساز یکی از دو زاویهٔ حاصل از خطهای OM و ON.



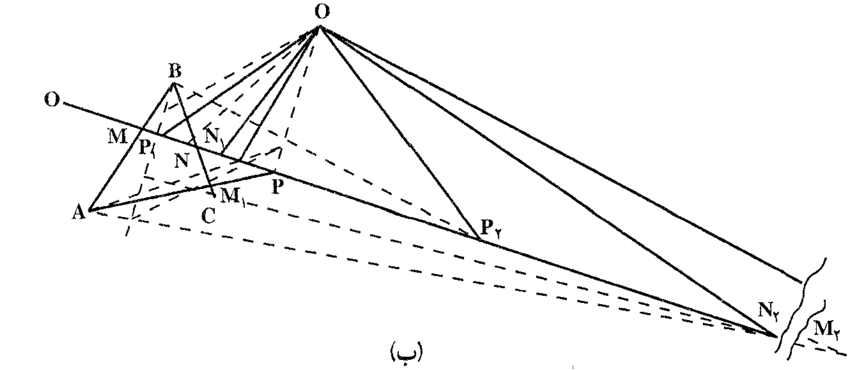
(الف)

چون نمی‌دانیم که L روی کدام یک از این دو نیمساز واقع است، هر دو نیمساز زاویه‌های حاصل از خطهای m و n را در نظر می‌گیریم. این خطها به نقطه‌های برخورد MN با نیمسازهای دو زاویهٔ مجاور حاصل از OM و ON بدل می‌شوند. بنابراین بجاست که نیمسازهای خارجی ΔABC را درهم درنظر بگیریم و قضیهٔ مربوط به نقطه‌های برخورد نیمسازها را چنین تنظیم کنیم :

شش نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی یک مثلث ABC سه به سه در چهار نقطه همرسند. بر اثر تبدیل قطب و قطبی، این قضیه به قضیهٔ زیر بدل می‌شود :

گیریم A، B، C و O، چهار نقطه باشند که هیچ سه‌تایی از آنها بر یک خط نباشند. نقطه‌های برخورد شش نیمساز زاویه‌های حاصل از خطهای OA و OB، OB و OC، OC و OA، با ضلعهای متناظر مثلث ABC سه به سه بر چهار خط قرار دارند (شکل (الف)).

یادداشت. استفاده از تبدیل قطب و قطبی برای شکل (الف) به قضیهٔ زیر منجر می‌شود : گیریم o یک خط، و O نقطه‌ای در صفحهٔ یک مثلث ABC باشد، و M، N و P نقطه‌های برخورد خط o با ضلعهای AB، BC و CA. اگر M_1 و M_2، N_1 و N_2، P_1 و P_2 نقطه‌های برخورد o با نیمسازهای زاویه‌های حاصل از ON و OP، OP و OM، OM و ON باشند، آن‌گاه سه خط AN_1 و AN_2، BP_1 و BP_2، CM_1 و CM_2، سه به سه در چهار نقطه همرسند (شکل (ب)).

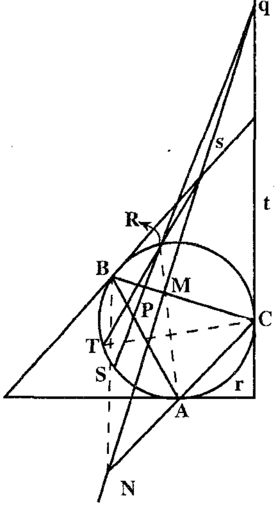


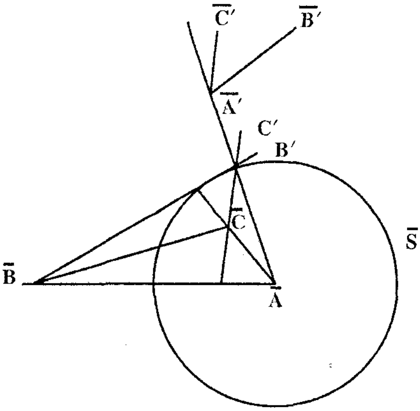
(ب)

۵۵. خط AI که از نقطهٔ تماس A بر خط OD عمود شده است، قطبی نقطهٔ D نسبت به دایرهٔ (O)است، پس (BCHD) تقسیم توافقی بوده و در نتیجه دستگاه (A.BCHD) و از آن‌جا (A.EFID) توافقی هستند و چون OA، OD، OM و ON بترتیب بر AD، AL، AB و AC عمودند، پس دستگاه (O.MNAD) توافقی است و چون هرگاه خطی شعاعهای یک دستگاه توافقی را قطع نماید، نقطه‌های برخورد تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، پس (QPMN) تقسیم توافقی است و از آن‌جا AO قطبی نقطهٔ Q نسبت به ABو AC است و در نتیجه قطبی Q نسبت به AB و AC از نقطهٔ تقاطع قطرهای چهارضلعی MNFE می‌گذرد و یا به عبارت دیگر AO، MF و NE همرسند.

۵۷. این مسأله به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود :

فرض می‌کنیم r، s و t مماسهای رسم شده بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC در رأسهای A، B و C باشند و M، N و P سه نقطهٔ واقع بر ضلعهای BC، CA و AB واقع بر یک خط q. اگر دومین نقطه‌های برخورد خطهای AM، BN و CP با دایرهٔ محیطی را بترتیب با R، S و T نشان دهیم، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خطهای RS و t، ST و r، TR و s، بر q واقعند.



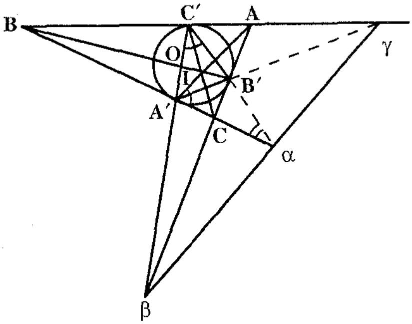


۵۸. گیریم a قطبی A نسبت به دایرهٔ S باشد. اگر از یک تصویر مرکزی برای تصویر S بر یک دایرهٔ $\overline{S}$ و تصویر A بر یک نقطهٔ $\overline{A}$ استفاده کنیم، آن‌گاه خط a به خط $\overline{a}$، قطبی $\overline{A}$ نسبت به S، بدل خواهد شد. به طریق مشابه، یک خط b، قطبی B نسبت به S، براثر این تصویر به خط $\overline{b}$، قطبی $\overline{B}$ نسبت به $\overline{S}$ بدل می‌شود، که $\overline{b}$ نگارهٔ b است. حال اوضاع مختلف و ممکن مثلثهای ABC و $A'B'C'$ رانسبت به S درنظر می‌گیریم.

۱. فرض می‌کنیم دست کم یکی از رأسهای ΔABC، به‌طور مثال A، در داخل دایرهٔ S باشد. صفحهٔ π ی نمودار را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به‌گونه‌ای که S به یک دایرهٔ $\overline{S}$ بدل شود و A به $\overline{A}$، مرکز $\overline{S}$. براثر این تصویر نمودار ما به نمودار شکل بدل می‌شود، که در آن $\overline{A'}$ قطب $\overline{BC}$ است؛ B' و C'، قطبهای AC و AB، به قطبهای قطرهای $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ از دایرهٔ $\overline{S}$، یعنی به نقطه‌های بینهایت $\overline{B'}$ و $\overline{C'}$ مربوط به امتدادهای عمود بر $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ بدل می‌شوند (شکل). از این‌جا نتیجه می‌شود که $\overline{B}\overline{B'}$ و $\overline{C}\overline{C'}$ ارتفاعهای $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ هستند. چون $\overline{A}\overline{A'}$ سومین ارتفاع $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ است $\overline{A'}$ (قطب $\overline{BC}$ برعمود رسم شده از $\overline{A}$، مرکز $\overline{S}$، بر خط $\overline{BC}$ واقع است)، خطهای $\overline{A}\overline{A'}$، $\overline{B}\overline{B'}$ و $\overline{C}\overline{C'}$ همرسند. در نتیجه AA'، BB' و CC' همرس هستند.

۲. فرض می‌کنیم دست‌کم یکی از ضلعهای مثلث ABC دایرهٔ S را نبرد. دراین حال رأسهای مربوط به $\Delta A'B'C'$ در داخل S قرار دارند، و می‌توانیم همان برهانی را که در حالت ۱ آوردیم، برای $\Delta A'B'C'$ بیاوریم.

۳. بالاخره فرض می‌کنیم همهٔ رأسهای ΔABC در خارج S باشند و هیچ‌یک از ضلعها کاملاً در خارج S نباشند، در این حالت قضیه ما به قضیهٔ (گیریم ABC یک مثلث و S دایره‌ای باشد که ضلعهای AB، BC و CAی آن را بترتیب در M و N، P و Q، R و T می‌برد. فرض می‌کنیم C_1، A_1 و B_1 بترتیب نقطه‌های برخورد مماسهای رسم شده بر S در نقطه‌های M و N، P و Q، R و T باشند. نشان دهید که خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 همرسند) بدل می‌شود.



۵۹. مثلث $A'B'C'$ قطبی متقابل مثلث ABC است ؛ زیرا خط $B'C'$ قطبی نقطهٔ A است، و در نتیجه قطبهای کلیهٔ خطهای گذرنده بر A، بر قطبی نقطهٔ A یعنی $B'C'$ واقع می‌باشد. یعنی قطبی AA' بر $B'C'$ قرار دارد، و همچنین خط BC قطبی نقطهٔ A' است، در نتیجه قطب خط AA' بر BC واقع است ؛ پس قطب خط AA' بر محل برخورد $B'C'$ و BC قرار دارد. یعنی نقطهٔ α قطبی AA' می‌باشد، و به همین دلیل نقطهٔ β محل برخورد AC و $A'C'$ قطب خط BB' و γ نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ قطب خط CC' است.

حال برای اثبات این که AA' ، BB' و CC' همرسند، کافی است ثابت کنیم α ، β و γ بر یک خط راست واقعند.

دو مثلث $\Delta\alpha A'B'$ و $\Delta\alpha A'C'$ متشابه‌اند ($\hat{A}'_1 = \hat{C}'_1 = \frac{B'\hat{A}'}{2}$ و $\hat{\alpha}$ در هردو مشترکند)، پس داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha B'}{\alpha A'} = \dfrac{A'B'}{A'C'} \\[2mm] \dfrac{\alpha A'}{\alpha C'} = \dfrac{A'B'}{A'C'} \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \frac{\alpha B'}{\alpha C'} = \frac{A'B'^2}{A'C'^2} \qquad (1)$$

و به همین دلیل در دو مثلث متشابه $\Delta\beta A'C'$ و $\Delta\beta A'B'$ می‌توان نوشت :

$$\frac{\beta C'}{\beta A'} = \frac{B'C'^2}{A'B'^2} \qquad (2)$$

و همچنین در دو مثلث متشابه $\gamma B'C'$ و $\gamma A'C'$ می‌توان نوشت :

$$\frac{\gamma A'}{\gamma B'} = \frac{A'C'^2}{B'C'^2} \qquad (3)$$

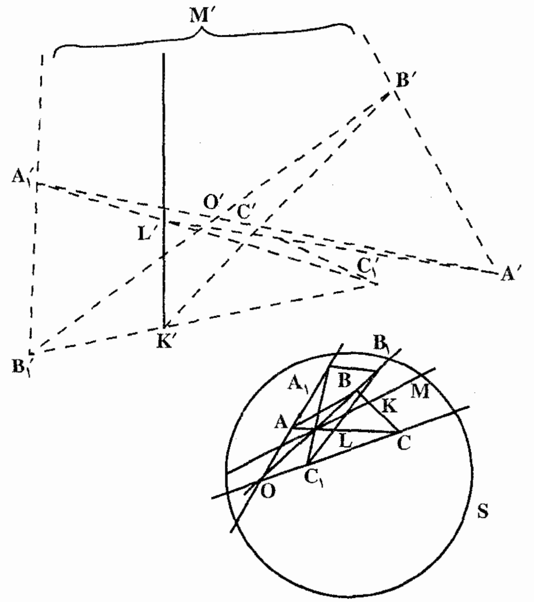
از ضرب دو طرف رابطه‌های (۱) ، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که :

$$\frac{\alpha B' \cdot \beta C' \cdot \gamma A'}{\alpha C' \cdot \beta A' \cdot \gamma B'} = \frac{A'B'^2 \cdot B'C' \cdot A'C'^2}{A'C'^2 \cdot A'B'^2 \cdot B'C'^2}$$

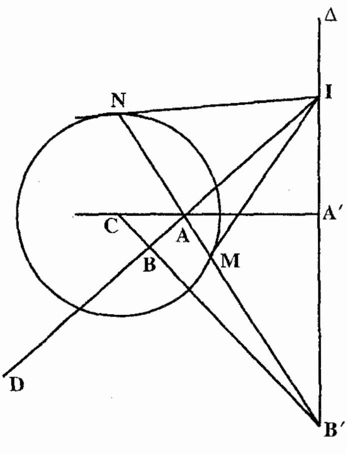
از این رابطه نتیجه می گیریم که در مثلث $A'B'C'$ ، نقطه‌های α ، β و γ بر یک استقامتند (عکس قضیهٔ منلائوس).

۶۰. گیریم A' ، B' و C' قطبهای ضلعهای ΔABC و A'_1 ، B'_1 و C'_1 قطبهای ضلعهای

$\Delta A_1B_1C_1$ نسبت به دایرهٔ S باشند (شکل). $B'C'$ قطبی A است و K'، نقطهٔ برخورد $B'C'$ و $B_1'C_1'$، قطب خط AA_1. به طریق مشابه، L' و M'، نقطه‌های برخورد خطهای $A'C'$ و $A_1'C_1'$، $A'B'$ و $A_1'B_1'$، قطبهای خطهای BB_1 و CC_1 هستند. بنابراین $K'L'$ قطبی O، نقطهٔ برخورد AA_1 و BB_1 خواهد شد. چون، بنابر فرض، CC_1 از O می‌گذرد، M'، قطب CC_1 بر خط $K'L'$ قرار دارد. از این رو نقطه‌های K'، L' و M' همخطند؛ پس به موجب قضیهٔ دزارگ، خطهای $A'A_1'$، $B'B_1'$ و $C'C_1'$ همرسند، که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



۱. ۳. ۳. ۲. خطها دستگاه توافقی می‌سازند



۶۱. وقتی دو خط Δ و D مزدوج باشند، نقطهٔ A، قطب Δ روی D، و نقطهٔ B'، قطب D روی Δ قرار دارد. چون I روی Δ واقع است، قطبی این نقطه، خط MN، از A می‌گذرد و شامل B' است. پس تقسیم $(NMAB')$ توافقی است و دستگاه $(I.NMAB')$ توافقی می‌باشد.

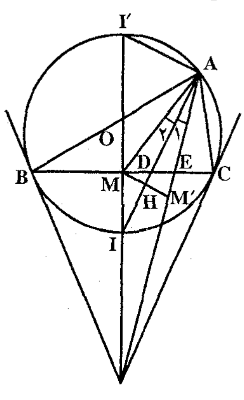
۱. ۳. ۳. ۳. خطها برهم عمودند

۶۲. AM را به موازات BCرسم می‌کنیم. ABو AC نسبت به AM وAI مزدوج توافقی یکدیگرند. ازطرفی خط $A\alpha$ قطبی α نسبت به زاویهٔ $B\hat{A}C$ است و HC و HB نسبت به $H\alpha$ و Ha مزدوج یکدیگرند. از دو دستگاه توافقی $(H.CB\alpha a)$ و $(A.BCMI)$، شعاعهای ($H\alpha$ و AM) و (HB و AC) و (HC و AB) دوبه‌دو برهم عمودند. در نتیجه AI بر Ha عمود است.

۶۳. دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه‌های B' و C' می‌گذرد و خط AH قطبی نقطهٔ F نسبت به خطهای AB و AC و در نتیجه قطبی F نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد، و همچنین خط FH قطبی نقطهٔ A نسبت به خطهای CA و CB، و در نتیجه نسبت به دایرهٔ (O) است، و از آن‌جا خط AF که قطبهای دوخط AH و FH را به‌هم وصل می‌کند، قطبی نقطهٔ برخورد آنها می‌باشد؛ یعنی AF قطبی نقطهٔ H است، و از طرفی می‌دانیم قطبی هر نقطه نسبت به یک دایره، بر خطی که از مرکز دایره برآن خط عمود می‌شود واقع است، پس OH بر AF عمود می‌باشد.

۱. ۳. ۳. ۴. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۶۴. اگر P نقطهٔ برخورد خط AM با BC باشد، خط DE قطبی نقطهٔ P نسبت به خطهای EC و EB و درنتیجه نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌باشد. درصورتی که M بر دایره تغییر نماید، نقطهٔ P بر BC تغییر نموده و قطبی P تغییر می‌نماید. ولی چون قطبیهای کلیهٔ نقطه‌های واقع بر یک خط، بر قطب آن‌خط می‌گذرند، پس با تغییر P بر BC، خط DE پیوسته از قطب مکان نقطهٔ P، یعنی قطب خط BC می‌گذرد، و این نقطهٔ ثابت، نقطهٔ I، محل برخورد مماسهای رسم شده بر دایره در نقطه‌های B و C می‌باشند.



۶۶. اگر AM و AD بترتیب میانه و نیمساز وارد بر ضلع BC، و AE قرینه میانهٔ AM نسبت به نیمساز AD باشد، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ بوده و اگر از M عمودی بر AD وارد کنیم تا AE را در M' قطع کند، $MH = MH'$ خواهد بود؛ چون AD نیمساز $B\hat{A}C$ است، نقطهٔ برخورد آن با دایره، نقطهٔ I وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ بوده و MI از مرکز دایره گذشته و اگر MI دایره را در نقطهٔ دیگر I' و AE قطر II' را در P قطع کنند، چون AI

نیمساز داخلی زاویهٔ $M\hat{A}P$ است، AI' نیمساز خارجی آن بوده و نقطه‌های $(I'IMP)$ تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند ؛ یعنی P مزدوج M نسبت به II' بوده و چون MP بر BC عمود است، نقطهٔ Pقطب خط BC بوده و در نتیجه AE ازقطب خط BC می گذرد.

۱. ۳. ۳. ۵. خط نیمساز است

۶۸. خط $A\beta$ قطبیC نسبت به زاویهٔ BAA' است، پس دستگاه $(A.BA'C\beta)$ توافقی است. به همین ترتیب $(A.CA'B\gamma)$ نیز توافقی است. در این دو دستگاه شعاعهای (AC و AB)، ($A'A$ و AA') و (AB و AC) نسبت به AA' قرینه‌اند و از آن‌جا شعاعهای ($A\gamma$ و $A\beta$) نسبت به AA' قرینهٔ یکدیگرند.

۱. ۳. ۴. زاویه

۱. ۳. ۴. ۱. اندازهٔ زاویه

۶۹. خط ED قطبی نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ (ω)است. در نتیجه قطبی کلیهٔ نقطه‌های واقع بر ED از نقطهٔ B، قطب خط ED می گذرد. از جمله قطبی نقطهٔ F که از B می گذرد. همچنین قطبی نقطهٔ F از نقطهٔ C می گذرد، پس خط BC قطبی نقطهٔ F نسبت به دایرهٔ (ω) بوده و نقطهٔ مزدوج توافقی F نسبت به DE می‌باشد، و از آن‌جا دستگاه $(B.FIED)$ و در نتیجه دستگاه $(P.FCOA)$ توافقی است، و چون در مثلث ΔAOB زاویهٔ $\hat{O}=۹۰^\circ$ است، پس $\hat{E}_۱=\hat{C}_۱=۴۵^\circ$ (۱) است، و ازطرفی دایرهٔ به قطرEC از نقطه‌های O و P می‌گذرد، زیرا $\hat{O}=\hat{P}=۹۰^\circ$ ؛ پس :

$$\hat{P}_۱=\hat{E}_۱=\frac{\overset{\frown}{OC}}{۲} \qquad (۲)$$

و

$$\hat{P}_۲=\hat{C}_۱=\frac{\overset{\frown}{EO}}{۲} \qquad (۳)$$

از مقایسه رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که :

$$\hat{P}_۲=\hat{P}_۱=۴۵^\circ \qquad (۴)$$

یعنی در دستگاه توافقی $(P.FCOA)$ شعاع PO که مزدوج شعاع PA است می‌باشد، نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای PC و PF می‌باشد و چون دو شعاع PC و PF برهم عمودند، پس

PO نیمساز خارجی $F\hat{P}C$ بوده و $\hat{P}_3 = \hat{P}_4 = 45^\circ$ و در نتیجه $\hat{P}_3 + \hat{P}_1 = O\hat{P}A = 90^\circ$ است.

۱ . ۳ . ۴ . ۲ . رابطهٔ بین زاویه‌ها

۷۰. می‌دانیم که مماس بر دایرهٔ مزدوج، عبارت است از نیمساز یکی از دو زاویهٔ مکملی که بین دایرهٔ محیطی، با دایرهٔ نه نقطه تشکیل می‌شود ؛ وقتی یکی ازاین دو زاویه به سمت صفر میل کند، دیگری به سمت 180° میل خواهد کرد. بنابراین داریم :

$$\theta = \frac{1}{2}(180^\circ - \delta)$$

۱ . ۳ . ۵ . پاره‌خط

۱ . ۳ . ۵ . ۱ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۷۱. خط PBC قطبی نقطهٔ D نسبت به دایرهٔ (O) است. درنتیجه قطب کلیه خطهای گذرنده بر نقطهٔ D بر خط PBC واقع است ؛ پس قطبی نقطهٔ P از نقطهٔ D می‌گذرد و همچنین قطبی نقطهٔ P از نقطهٔ A می‌گذرد. یعنی خط AD قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) بوده که در نتیجه بنا به تعریف قطب و قطبی نسبت به دایره، نقطه‌های (PIBC) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، و از آن‌جا دستگاه (A.PIBC) توافقی است و چون خط MN موازی شعاع AP، رسم شده به وسیلهٔ سه شعاع دیگر، به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود ؛ یعنی $MD = DN$ است.

۱ . ۳ . ۶ . رابطه‌های متری

۷۲. محل برخورد BC و $B'C'$ با خط AI، قطبی نقطهٔ N نسبت به زاویهٔ A است، درنتیجه M' و N نسبت به B' و C' مزدوج یکدیگرند و می‌توان نوشت :

$$\frac{M'B'}{M'C'} = -\frac{NB'}{NC'} \qquad (1)$$

از طرفی چون $B'N$ موازی با AC و $C'M$ موازی با AB است، بترتیب می‌توان نوشت :

$$\frac{NB'}{NC'}=\frac{B'M}{C'C}=\frac{AC'}{C'C}=\frac{BM}{MC}$$

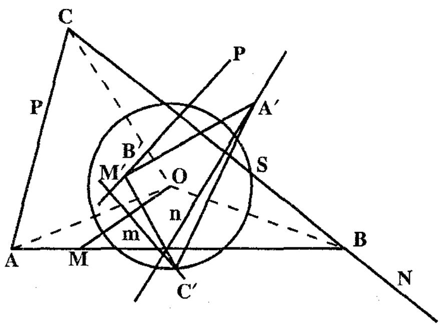
و یا :

$$\frac{NB'}{NC'}=-\frac{MB}{MC}$$

باتوجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{M'B'}{M'C'}=\frac{MB}{MC}$$

۷۳. فرض می‌کنیم M، N و P سه نقطه واقع بر ضلعهای AB، BC و CA، یا بر امتداد آنها، از یک مثلث ABC باشند (شکل). در نتیجه تبدیل قطب و قطبی مثلث ABC به یک مثلث $A'B'C'$، که ضلعهای a، b و c ی آن، قطبیهای نقطه‌های A، B و C هستند، بدل می‌شود و نقطه‌های M، N و P به خطهای m، n و p گذرنده بر نقطه‌های C'، A' و B'. فرض می‌کنیم M'، N' و P' نقطه‌های برخورد خطهای m، n و p با ضلعهای $\Delta A'B'C'$ باشند. سعی می‌کنیم بین عبارتهای :



$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

رابطه‌ای برقرار کنیم.

ملاحظه می‌کنیم که نسبت $A'M'/B'M'$ مساوی است با خارج‌قسمت $(A'M'/C'M')/(B'M'/C'M')$ مطابق قانون سینوسها داریم :

$$\left|\frac{B'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin B'\hat{C}'M'}{\sin C'\hat{B}'M'} \text{ و } \left|\frac{A'M'}{C'M'}\right|=\frac{\sin A'\hat{C}'M'}{\sin C'\hat{A}'M'}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود، $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدرمطلق برابر است با :

$$\frac{\sin A'\hat{C}'M'}{\sin C'\hat{A}'M'}\Big/\frac{\sin B'\hat{C}'M'}{\sin C'\hat{B}'M'}=\frac{\sin C'\hat{B}'M'}{\sin C'\hat{A}'M'}\Big/\frac{\sin B'\hat{C}'M'}{\sin A'\hat{C}'M'}$$

می‌دانیم که قطبی A بر OA عمود است، که O مرکز دایرهٔ S درتبدیل قطب و قطبی است. بنابراین $C'B' \perp OA$ ، $C'A' \perp OB$ و $A'B' \perp OC$ ، و در نتیجه :

$$\sin C'\hat{A}'M' = \sin B\hat{O}C \quad \text{و} \quad \sin C'\hat{B}'M' = \sin A\hat{O}C$$

(زاویه‌های $C'B'M'$ و AOC و نیز زاویه‌های $C'A'M'$ و BOC ضلعهایشان برهم عمودند، و بنابراین مساوی یا مکملند، پس دارای سینوسهای مساوی هستند). از این‌رو داریم :

$$\frac{\sin C'\hat{B}'M'}{\sin C'\hat{A}'M'} = \frac{\sin A\hat{O}C}{\sin B\hat{O}C}$$

چون $C'M' \perp OM$ ، همچنین داریم :

$$\frac{\sin B'\hat{C}'M'}{\sin A'\hat{C}'M'} = \frac{\sin A\hat{O}M}{\sin B\hat{O}M}$$

حال عبارت اخیر را تبدیل می‌کنیم. برای این‌منظور مساحتهای مثلثهای AOM و BOM را از دو راه حساب، و نسبت آنها را پیدا می‌کنیم :

$$\frac{S_{AOM}}{S_{BOM}} = \left|\frac{\frac{۱}{۲}AO \cdot OM \cdot \sin A\hat{O}M}{\frac{۱}{۲}BO \cdot OM \cdot \sin B\hat{O}M}\right| = \left|\frac{\frac{۱}{۲}AM \cdot h_{AB}}{\frac{۱}{۲}BM \cdot h_{AB}}\right|$$

(دراین‌جا h_{AB} ارتفاع مشترک مثلثهای AOM و BOM است). از تساوی اخیر بلافاصله به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{\sin A\hat{O}M}{\sin B\hat{O}M} = \left|\frac{OB}{OA} \cdot \frac{AM}{BM}\right|$$

بنابراین نسبت $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدرمطلق برابر است با :

$$\frac{\sin A\hat{O}C}{\sin B\hat{O}C} \Big/ \left(\frac{OB}{OA} \cdot \frac{AM}{BM}\right) = \frac{۱}{AM/BM} \cdot \left(\frac{\sin A\hat{O}C}{\sin B\hat{O}C} \cdot \frac{OA}{OB}\right)$$

با استدلالی مشابه نشان داده می‌شود که نسبتهای $B'N'/C'N'$ و $C'P'/A'P'$ از لحاظ قدرمطلق بترتیب برابرند با :

$$\frac{1}{CP/AP}\cdot\frac{\sin C\hat{O}B}{\sin A\hat{O}B}\cdot\frac{OC}{OA} \text{ و } \frac{1}{BN/CN}\cdot\frac{\sin B\hat{O}A}{\sin C\hat{O}A}\cdot\frac{OB}{OC}$$

از ضرب این سه عبارت در یکدیگر معلوم می‌شود که قدرمطلقهای عبارتهای

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

عکس یکدیگرند.

مانده است که علامتهای آنها را با هم مربوط کنیم. برای سادگی، فرض می‌کنیم که O، مرکز S، در داخل ΔABC باشد. داریم $OA\perp B'C'$ ، $OB\perp A'C'$ و $OM\perp C'M'$. این رابطه‌ها ایجاب می‌کنند که اگر OM بین OA و OB باشد، آن‌گاه $C'M'$ درخارج زاویهٔ $A'C'B'$ باشد، و اگر OMخارج زاویهٔ AOB باشد، آن‌گاه $C'M'$ بین $C'A'$ و $C'B'$ باشد. از آن‌جا نتیجه می‌شود که نسبتهایAM/BM و $A'M'/B'M'$ علامتهایشان مخالف یکدیگرند. عیناً به همین‌طریق نشان داده می‌شود که نسبتهای BN/CN و $B'N'/C'N'$ ، CP/AP و $C'P'/A'P'$ ، مختلف‌العلامه‌اند. این مطلب نتیجه‌گیری ما را که عبارتهای :

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}$$

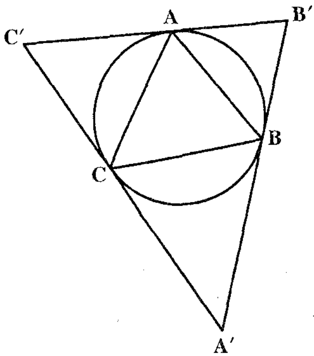
مختلف‌العلامه هستند، موجه می‌سازد. روی هم‌رفته داریم :

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=-\frac{1}{\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}} \qquad (1)$$

به موجب ویژگی (الف) از تبدیل قطب و قطبی خطهای$A'N'$ ، $B'P'$ و$C'M'$ در یک نقطه متقاطع (یاموازی) هستند، اگر و فقط اگر، M، N و P همخط باشند. این امر فرمول (۱) ایجاب می‌کنند که براثر تبدیل قطب و قطبی، قضیه‌های سوا و منلائوس به یکدیگر بدل شوند. ازاین‌جا نتیجه می‌شود که ، کافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم.

۱ . ۳ . ۷. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند

۷۵. می‌دانیم که اگر نقطه‌ای روی یک دایره قرارداشته باشد، قطبی آن نقطه نسبت به آن دایره خطی است که در همان نقطه بر دایره مماس می‌شود ؛ بنابراین نقطه‌های A' ، B' و C'

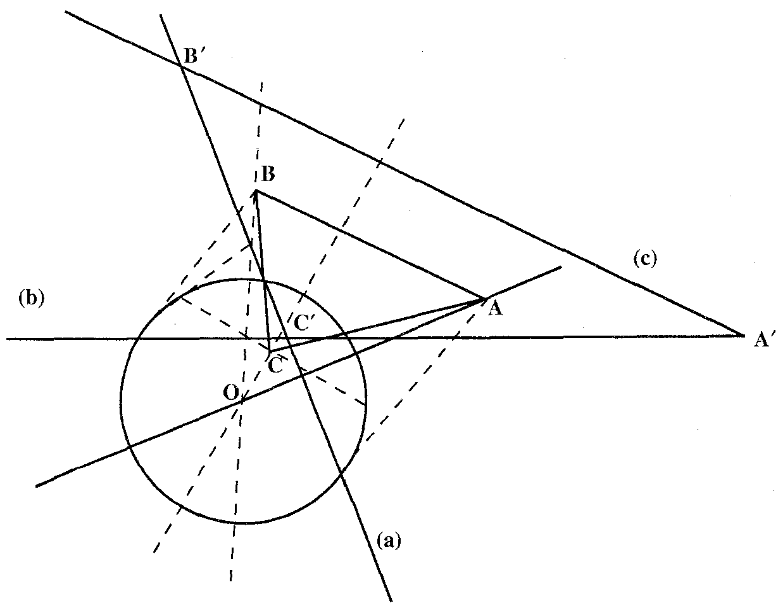


بترتیب قطب خطهای BC، ACو AB از مثلث ABC می‌باشند. بنابراین در دو مثلث ABC و A′B′C′ هر رأس یکی قطب یک ضلع ازدیگری و هرضلع یکی قطبی یک رأس از دیگری است. پس دو مثلث قطبی معکوس یکدیگرند.

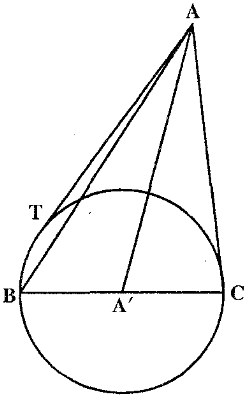
به‌طور کلی داریم :

قضیه. اگر خطهای قطبی رأسهای مثلث (P) نسبت به دایرهٔ (O)، ضلعهای مثلث (Q) باشند، نشان دهید که خطهای قطبی رأسهای مثلث(Q) نسبت به دایرهٔ (O)، ضلعهای مثلث(P) هستند ؛ یعنی دو مثلث (P) و (Q) قطبی معکوس یکدیگرند.

برای اثبات، مثلث ABC (مثلث P) و دایرهٔ (S) را درنظر می‌گیریم. قطبیهای رأسهای A، B و C نسبت به دایره را a، b و c می‌نامیم. اگر نقطه‌های برخورد این سه خط را A′، B′ و C′ بنامیم، بدیهی است که قطبیهای رأسهای مثلث A′B′C′ (مثلث Q)، ضلعهای مثلث ABC می‌باشند ؛ زیرا قطبی رأس A′، خط BC، قطبی رأس B′، خط AC و قطبی رأس C′، خط AB ازمثلث ABC است.



۱. ۳. ۸. رسم شکلها



۱.۷۶. دایرهٔ (A) (شکل) بر دایرهٔ به قطر BC عمود است. اگر از نقطهٔ A مماس AT را بر دایرهٔ مزبور رسم کنیم، شعاع دایرهٔ (A) به‌دست می‌آید. برای این‌که این دایره موجود باشد، لازم است که زاویهٔ A حاده یا قائمه باشد، درحالی که A قائمه است. دایرهٔ (A) به نقطهٔ A تبدیل می‌شود. شعاع AT را بر حسب a، b و c، ضلعهای مثلث ABC محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$AT^۲ = AA'^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

و به موجب قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AA'^۲ + \frac{a^۲}{۲};$$

پس

$$AT^۲ = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲};$$

یا

$$AT = \sqrt{\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲}}$$

۲. فرض کنیم مثلث ABC زاویهٔ منفرجه ندارد، دراین صورت دایره‌های (A)، (B) و (C) موجودند و این دایره‌ها دوبه‌دو برهم عمودند؛ زیرا اگر دو دایرهٔ (A) و (B) را درنظر بگیریم، فاصلهٔ مرکزهای آنها برابر c می‌باشد. به‌موجب قسمت اوّل مربع شعاع آنها عبارتند از:

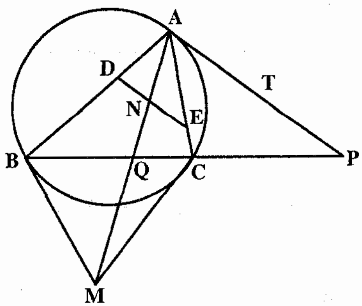
$$\frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۲} \quad و \quad \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲}$$

و داریم:

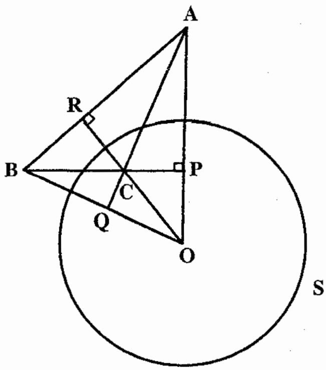
$$c^۲ = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲} + \frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{۴}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که دو دایرهٔ (A) و (B) برهم عمودند.

۱ . ۳ . ۹ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



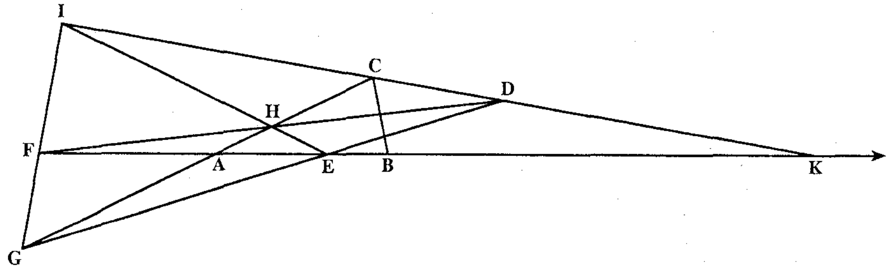
۷۷. مماس AT با BC نسبت به زوج AB و AC متباین است. خط DNE که با AT موازی است نیز با BC نسبت به زوج مزبور متباین است. برای این‌که ثابت کنیم AM شبه میانه در ABC است، باید ثابت کنیم که AN میانه در ADE می‌باشد، ولی دستگاه (A·BCPQ) توافقی است ؛ زیرا AM قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث است (A و M دو نقطهٔ این قطبی می‌باشند) و DE که موازی با AP می‌باشد، به وسیلهٔ شعاع مزدوج AQ نصف می‌شود (شکل).



۷۸. مثلث ABC را، که قطبی معکوس خود نسبت به دایرهٔ S به مرکز O است، درنظر می‌گیریم (شکل). چون BC، قطبی A، بر OA عمود است، O بر ارتفاع AP از ΔABC واقع است. همچنین O بر دو ارتفاع دیگر BQ و CR نیز واقع است. بنابراین O محل برخورد سه ارتفاع ΔABC است. بعلاوه، چون هر سه جفت از نقطه‌های A و P، B و Q، C و R در یک طرف O قرار دارند، ΔABC منفرج‌الزاویه است. منحصر به فرد بودن دایرهٔ S ، که مثلث منفرج‌الزاویهٔ T نسبت به آن قطبی معکوس خود است، از این امر ناشی می‌شود که مرکزش O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای T است، و شعاعش، R، با رابطهٔ $r^2 = OA \cdot OP = OB \cdot OQ = OC \cdot OR$ مشخص می‌شود. [تساوی سه حاصلضرب اخیر از تشابه مثلثهای OAQ و OBP، OAR و OCP، نتیجه می‌شود. می‌توان به آسانی تحقیق کرد که، $r = 2R\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$ ، که R شعاع دایرهٔ محیطی ΔABC است.]

۱ . ۳ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی

۸۴. ۱. چهارضلعی EGFH، چهارضلعی کامل است. و قطر EF از این چهارضلعی به وسیلهٔ



دو قطر دیگرش به نسبت توافقی تقسیم می‌شود یعنی (FEAK) تقسیم توافقی است. پس داریم:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = -\frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} \Rightarrow \frac{m\overline{AB}}{n\overline{AB}} = \frac{-\overline{KE}}{\overline{KF}} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} = \frac{-m}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}-\overline{KE}} = \frac{-m}{-m-n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{EF}} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{AF}-\overline{AE}} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{KE}}{n\overline{AB}-m\overline{AB}} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{(n-m)\overline{AB}} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow \overline{KE} = \frac{m(n-m)}{m+n}\overline{AB}$$

بنابراین حکم مسأله ثابت است.

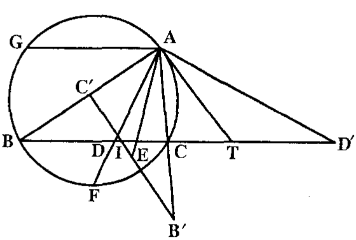
۲. داریم:

$$\overline{EK} = \frac{\frac{۱}{۴}(-\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۴})}{\frac{۱}{۴}-\frac{۳}{۴}}\overline{AB} = \frac{۱}{۲}\overline{AB} \Rightarrow \overline{KE} = -\frac{۱}{۲}\overline{AB}$$

$$\overline{EA} = -m\overline{AB} = -\frac{۱}{۲}\overline{AB} \text{ و } \overline{AF} = n\overline{AB} = -\frac{۳}{۴}\overline{AB} \text{ و } ۲\overline{KF}+۳\overline{AB} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(\overline{KE}+\overline{EA}+\overline{AF})+۳\overline{AB} = ۰ \Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲}\overline{AB}-\frac{۳}{۴}\overline{AB}-\frac{۱}{۴}\overline{AB})+۳\overline{AB} = ۰$$

$$\Rightarrow -۳\overline{AB}+۳\overline{AB} = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$$



۸۵. ۱. AG را به موازات BC رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم F محل برخورد نیمساز AD با دایرهٔ محیطی مثلث باشد، F وسط قوسهای BFC و GFA خواهد بود؛ پس AD نیمساز زاویهٔ

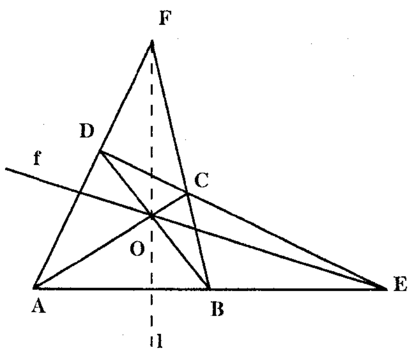
$G\hat{A}T$ نیز می‌باشد، و در نتیجه دستگاه $(A\cdot GTDD')$ توافقی است. قاطع DD' که به موازات AG است، به وسیلهٔ AT به دو قسمت متساوی تقسیم می‌شود. (شکل)

۲. فرض می‌کنیم قرینهٔ مثلث ABC نسبت به AD، مثلث $A'B'C'$ باشد، شبه‌میانهٔ وارد از A در مثلث ABC، میانهٔ AI از مثلث $AB'C'$ است، اما $B'C'$ و AT هردو با خط BC نسبت به زوج (AC و AB) متباینند، پس باهم موازی‌اند و از آن‌جا نتیجه می‌شود که دستگاه $(A\cdot C'B'IT)$ یا $(A\cdot BCET)$ توافقی است. بنابراین T و E مزدوج توافقی نسبت به BG می‌باشند.

۱ . ۴. قطب و قطبی در چندضلعی

۱ . ۴ . ۱. قطب خط، قطبی نقطه

۸۸. از تعریف قطبی یک نقطه، نسبت به دو خط متقاطع، درستی این مسأله روشن است.



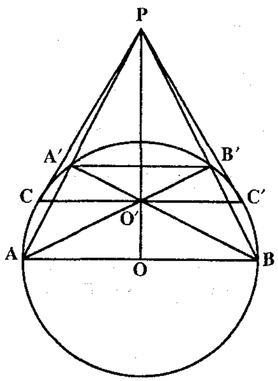
۱ . ۴ . ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱ . ۴ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند

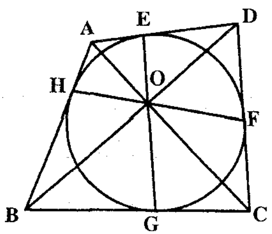
۸۹. قطر BD از چهارضلعی $ABCD$ قطبی S نسبت به دایرهٔ (O) است. در صورتی که M نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی باشد، خط FM قطبی نقطهٔ E نسبت به خطهای (FC و FD)، و در نتیجه نسبت به دایره است، و همچنین خط EM قطبی نقطهٔ F نسبت به خطهای (EC و EB)، و همچنین نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد، و چون قطبیهای نقطه‌های S، E و F در نقطهٔ M همرسند، قطبهایشان بر یک استقامت می‌باشند.

۳.۴.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

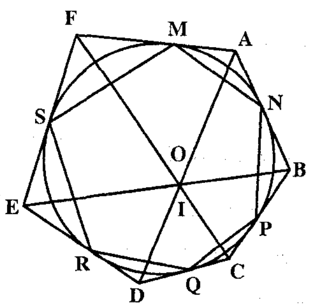
۱.۳.۴.۱. خطها همرسند



۹۰. اگر P محل برخورد AA' و BB' ، و O' محل برخورد AB' و BA' باشد، قطبی نقطهٔ P باید از O' بگذرد و بر PO عمود شود، پس CC' قطبی P و نقطهٔ P قطب CC' است. از طرف دیگر قطب CC' در محل برخورد مماسهای رسم شده از C و C' بر دایره است. پس این مماسها در نقطهٔ P باهم برخورد می‌کنند.

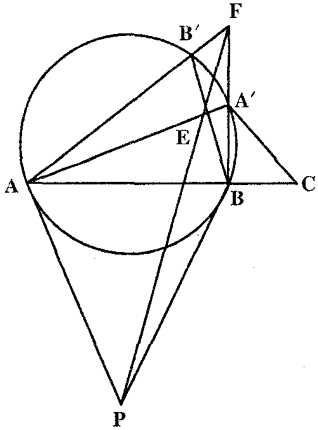


۹۱. فرض کنیم چهارضلعی ABCD محیط بر یک دایره باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که قطرهایش AC و BD ، و خطهای EG و FH که نقطه‌های تماس ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، همرسند (شکل).
می‌توان AHBCFD را یک شش‌ضلعی محیطی دانست که به موجب قضیهٔ بریانشن AC ، BD و HF همرسند؛ پس HF از O نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD می‌گذرد و چنانچه شکل ABGCDE را شش‌ضلعی محیطی فرض کنیم، بترتیب بالا ثابت می‌شود که AC ، BD و GE همرسند.



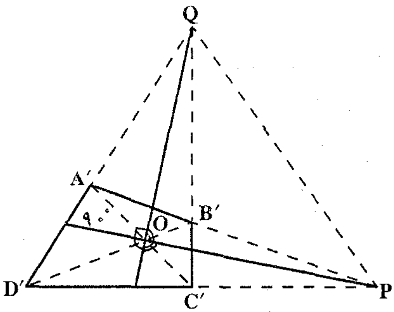
۹۲. شش‌ضلعی ABCDEF بر دایرهٔ (O) محیط است. نقطه‌های تماس را به هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی محاطی MNPQRSبه دست آید. به موجب قضیهٔ پاسکال MN در نقطهٔ α و NP با SR در نقطهٔ β و PQ با MS در نقطهٔ γ متقاطعند. و α ، β و γ بر یک استقامت واقعند. چون A قطب MN و D قطب RQ می‌باشد؛ پس α قطب AD است و به همین دلیل β قطب BE و γ قطب FC است. چون α ، β و γ بر یک استقامتند، پس، قطبیهای این نقطه‌ها یعنی AD ، BE و CF از یک نقطه می‌گذرند.

۲.۳.۴.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۹۳. اگر A′B′ ضلع AB را در Gقطع کند، این نقطه قطب EFخواهد بود. نقطهٔ Pقطب AB است که نقطه‌ای است ثابت. چون G روی AB تغییر می‌کند، پس EF همواره از قطب AB ، یعنی نقطهٔ ثابت P می‌گذرد (شکل).

۳.۳.۴.۱. خط نیمساز است



۹۴. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرهٔ S، یک متوازی‌الاضلاع ABCD به یک چهارضلعی A′B′C′D′ بدل می‌شود که O، مرکز S، نقطهٔ برخورد قطرهای آن است (ویژگی (ب)ی تبدیل قطب و قطبی). P و Q، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی A′B′C′D′ ، با قطرهای AC و BDی متوازی الاضلاع ABCD متناظر می‌شود. اگر قطرهای متوازی‌الاضلاع برهم عمود باشند (یعنی اگر متوازی‌الاضلاع یک لوزی باشد)، پاره‌خط PQ از O به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. براثر تبدیل قطب و قطبی قضیهٔ مذکور در مسأله به قضیهٔ زیر بدل می‌شود :

اگر پاره‌خط واصل بین P و Q، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل یک چهارضلعی A′B′C′D′ ، از O، محل برخورد قطرهایش، به زاویهٔ قائمه دیده شود، آن‌گاه OP و OQنیمسازهای زاویه‌های بین قطرهای آن خواهد شد.

۴.۴.۱. زاویه

۱.۴.۴.۱ .اندازهٔ زاویه

۹۵. می‌دانیم که زاویهٔ بین قطبیهای دو نقطهٔ A و B نسبت به دایرهٔ (O)، مکمل زاویهٔ بین

خطهای واصل از مرکز دایره به دو نقطهٔ A و B است ؛ یعنی زاویهٔ حاده بین دو خط موردنظر همان ۵۰° و زاویهٔ منفرجه بین آنها $۱۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۱۳۰^\circ$ است.

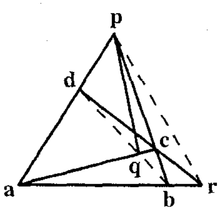
۱.۴.۵. پاره‌خط

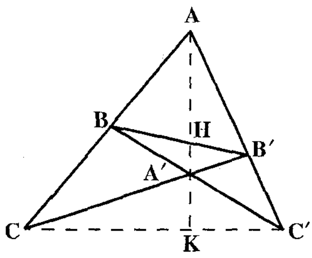
۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۹۶. نقطهٔ E محل برخورد مماسهای بر دایره در دو نقطه A و C نقطهٔ ثابتی است. بنابراین مثلثهای EAB و EAD مشخص می‌باشند. از آن‌جا پاره‌خطهای EB و ED را می‌توان برحسب اجزاء داده شده به‌دست آورد.

۱.۴.۶. رابطه‌های متری

۹۷. اگر abcpqr شش‌ضلعی متقابل شش‌ضلعی کامل $ABCA'B'C'$ باشد که در آن قطر AA' قطرهای BB' و CC' را بترتیب در Hو K قطع نموده باشد، برای اثبات این که $(AA'HK)$ یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، بایستی ثابت کنیم، قطبیهای نقطه‌های A، A'، H و K تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.



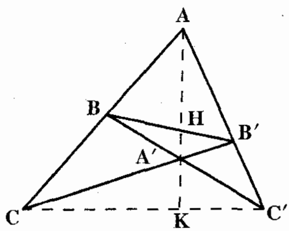


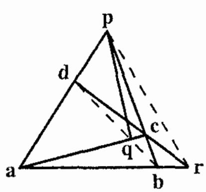
می‌دانیم pqقطبی نقطهٔ H، محل برخورد AA' و BB' است و خط ad قطبی A ، نقطهٔ برخورد $\overline{ABC}$ و $\overline{A'B'C'}$ و خط bc قطبی نقطهٔ A' ، محل برخورد $BA'C'$ و $CA'B'$ است، و چون A، H ، A' و K بر یک استقامت می‌باشند، قطبیهای آنها همرس بوده و از نقطهٔ P می‌گذرند، و در چهارضلعی کامل abcpqr ، خط pqقطبی نقطهٔ r نسبت به pd و pa بوده و درنتیجه دستگاه (p.aqbr) توافقی است.

۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند

۹۸. قطبهای دو ضلع روبه‌روی مستطیل عبارتند از دو نقطهٔ متساوی‌الفاصله از O که روی یک خط D واقعند. قطبهای دو ضلع روبه‌روی دیگر نیز عبارتند از دو نقطهٔ متساوی‌الفاصله از Oکه روی یک خط D′ قرار دارند. دو خط D و D′ در O برهم عمودند. بنابراین چهار نقطهٔ حاصل یک چهارگوشه تشکیل می‌دهند که دو قطر آن عمودمنصف یکدیگرند، پس این چهارگوشه یک لوزی است. همچنین می‌توان از این ویژگی استفاده کرد که محورهای تقارن مستطیل روی مماسهایی که در رأسهای مستطیل بر دایرهٔ محیطی آن رسم می‌شوند، پاره‌خطهای برابر جدا می‌کنند.

۹۹. اگر ABCA′B′C′ یک شش‌ضلعی کامل به ضلعهای ABC ، AB′C′ و BA′C′ و به قطرهای AA′ ، BB′ و CC′ باشد، در این صورت اگر قطبی متقابل آن را رسم کنیم، قطب هر ضلع نسبت به هر دایرهٔ دلخواه یک نقطه، و قطبی هر رأس، یک خط است. به نحوی که هردو خط متقاطع، قطبهایشان بر قطبی نقطهٔ تقاطعشان واقع است و همچنین خطهای همرس، قطبهایشان بر یک استقامت واقع است و برعکس قطبیهای نقطه‌های واقع بر یک استقامت همرسند، چنانچه به‌طور خلاصه می توان نوشت :





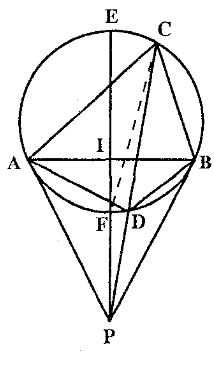
اجزای چهارضلعی معکوس آن		اجزای چهارضلعی کامل	
رأس	a	AB′C′	ضلع
رأس	b	BC′A′	ضلع
رأس	c	CA′B′	ضلع
رأس	d	ABC	ضلع
ضلع	ad	A	رأس
ضلع	bd	B	رأس
ضلع	ac	B′	رأس

ضلع	cd	C	رأس
ضلع	ab	C′	رأس
ضلع	bc	A′	رأس
p(ad,bc)	نقطهٔ برخورد قطرها	AA′	قطر
q(bd,ac)	نقطهٔ برخورد قطرها	BB′	قطر
r(cd,ad)	نقطهٔ برخورد قطرها	CC′	قطر

از روی رابطه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که هر ضلع چهار ضلعی متقابل، سه ضلع دیگر را قطع کرده و دارای سه قطر است، به‌طوری که هر قطر با دو قطر دیگر متقاطع است، یعنی قطبی متقابل هر چهارضلعی کامل، یک چهارضلعی کامل است.

۱۰۰. شکل دلخواه F را درنظر می‌گیریم، قطبیهای معکوس F نسبت به یک دایرهٔ ω به مرکز O و نسبت به دایرهٔ دیگر به همان مرکز باهم متشابهند ؛ بنابراین می‌توان دایرهٔ ω را همان دایرهٔ محاطی چندضلعی منتظم مفروض ...ABC اختیار کرد. در این صورت قطبهای هریک از ضلعهای AB ، BC ، ... وسطهای این ضلعها و قطبیهای رأسهای A ، B،... عبارتند از خطهایی که وسطهای دو ضلع مجاور به آن رأس را به هم وصل می‌کنند. هرگاه دایرهٔ محیطی چندضلعی را به عنوان دایرهٔ ω انتخاب کنیم، مبدل قطبی معکوس چندضلعی عبارت است از چندضلعی دیگری که ضلعهایش بر دایرهٔ محیطی در رأسهای چندضلعی اوّل مماس می‌باشند.

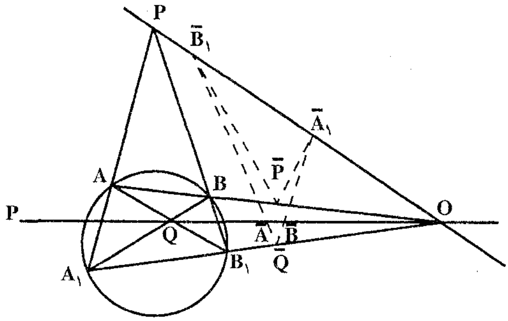
۱۰۱. قطری از دایره را که از نقطهٔ P قطب وتر AB می‌گذرد رسم می‌کنیم. این قطر دایره را در نقطه‌های E و F و وتر AB را در وسط وتر AB، قطع می‌کند. خطهای CFو CE برهم عمودند و نیمسازهای زاویهٔ ACB می‌باشند ؛ پس (۱) $A\hat{C}F = F\hat{C}B$. از طرف دیگر چون AB قطبی نقطهٔ P است، نقطه‌های I و P مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به نقطه‌های E و F می‌باشند ؛ پس (C.EFIP) دستگاه توافقی است. در این دستگاه توافقی CE و CF برهم عمودند، پس نیمسازهای زاویه‌های ICP می‌باشند و داریم (۲) $I\hat{C}F = F\hat{C}P$. از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم : $A\hat{C}I = D\hat{C}B$ و این نشان می‌دهد که CH شبه میانه



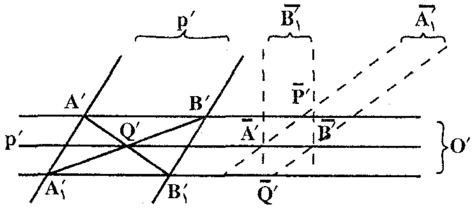
مثلث CAB است. به روش مشابه ثابت می‌شود که DH شبه میانهٔ مثلث DAB است. همچنین AB شبه میانه مثلثهای ACD و BCD است.

۸.۴.۱. رسم شکلها

۱۰۲. فرض می‌کنیم که ABB_1A_1 یک چهارضلعی محاطی در یک دایرهٔ S باشد. اگر ضلعهای AA_1 و BB_1 در P متقاطع باشند، و ضلعهای AB و A_1B_1 در O و قطرهای AB_1 و BA_1 در Q، آن‌گاه p، قطبی P، خط OQ خواهد شد (شکل الف) . از این‌جا نتیجه می‌شود که p قطبی P نسبت به دو خط AB و A_1B_1 است. پس p قطبی هر نقطه از خط OPنسبت به خطهای AB و A_1B_1 است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که A_1B_1 قطبی هر نقطهٔ AB نسبت به خطهای OP و p است. [برای اثبات، چهار خط AB و A_1B_1 ، OP و p از صفحهٔ π را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که OPخط خاص π باشد. در این صورت AB و A_1B_1 به خطهای موازی $A'B'$ و $A'_1B'_1$ و OPبه



(الف)

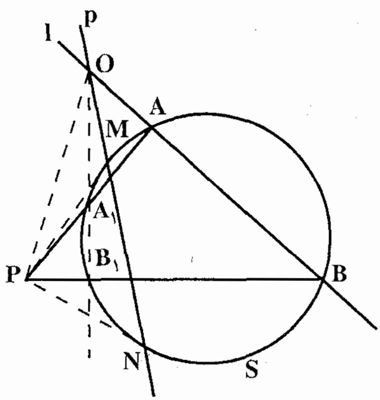


(ب)

$O'P'$. خط بینهایت صفحه π' ، و p به میانخط p' از نوار حاصل به وسیلهٔ $A'B'$ و $A'_1B'_1$ (شکل ب) بدل می‌شوند. بنابر تعریف قطبی یک نقطه نسبت به دو خط، $A'_1B'_1$ قطبی هر نقطهٔ P' واقع بر خط $A'B'$ است نسبت به خطهای p' و $O'P'$. اما در این صورت A_1B_1 قطبی پیشنگار نقطهٔ P، واقع بر خط AB ، نسبت به خطهای p و OP است.] بنابراین، وقتی خطهای OP و p و AB داده شده باشند، می‌توانیم خط A_1B_1 را به وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم کنیم، یعنی دو خط $\overline{PAA_1}$ و $\overline{PBB_1}$ متقاطع در $\overline{P}$ بر AB را رسم می‌کنیم ($\overline{A}$ و $\overline{B}$ بر p واقعند، درحالی که $\overline{A_1}$ و $\overline{B_1}$ بر OPواقعند)، و $\overline{Q}$ ، نقطهٔ

برخورد خطهای $\overline{AB_1}$ و $\overline{BA_1}$ را به O ، نقطهٔ برخورد خطهای p و AB، وصل می‌کنیم.

اکنون به حل مسألهٔ خود باز می‌گردیم. فرض می‌کنیم p خطی اختیاری باشد که l را در نقطه‌ای مانند O ، و کمان مفروض را در نقطه‌های M و N بریده است. (نقطه‌های برخورد p با کمان مفروض می‌توانند بر دو سر کمان منطبق باشد. آنچه که ما می‌خواهیم، این است که خط p موازی با l نباشد و کمان MN کمتر از یک نیمدایره باشد.) قطب P ی p نسبت به S ، نقطهٔ برخورد مماسهای بر S در نقطه‌های M و N است، و می‌تواند به وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم شود. حال فرض می‌کنیم که l دایرهٔ S را در نقطه‌های A و B (که می‌خواهیم تعیین کنیم) ببرد. خطهای PA و PB دایرهٔ S را در دو نقطهٔ دیگر A_1 و B_1 می‌برند (شکل پ).



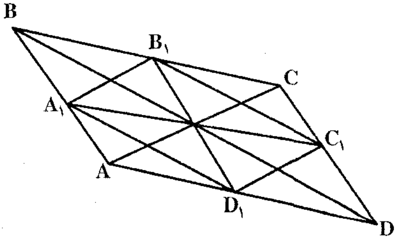
(پ)

چنانچه در بالا نشان دادیم، وقتی خطهای AB (یعنی l) و p داده شده باشند، می‌توانیم A_1B_1 را با ستارهٔ تنها رسم کنیم. یادآور می‌شویم که اگر l در خارج زاویهٔ MOP باشد (که در این حال، l دایرهٔ S را می‌برد ولی کمان MN را نمی‌برد)، آن‌گاه A_1B_1 از داخل زاویهٔ MOP می‌گذرد و درنتیجه، یا S را نمی‌برد (در این صورت l دایرهٔ S را نمی‌برد، و نقطه‌های A و B وجود ندارند). یا کمان MN را در نقطه‌های A_1 و B_1 می‌برد. نقطه‌های برخورد PA_1 و PB_1 با l ، نقطه‌های مطلوبند.

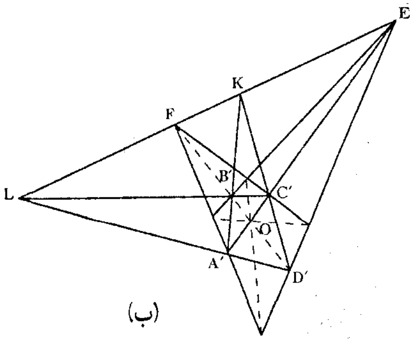
بررسی مشروح حالتی که A_1 و B_1 برهم منطبقند، یعنی خط A_1B_1 بر S در A_1 مماس است، به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود. در این حال l بر S در A، نقطهٔ برخورد PA_1 و l، مماس است، p قطبی P نسبت به خطهای OA و OA_1 است.

۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۳. نخست باید نقطه‌های وسط ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع را برحسب موجوداتی که نگاره‌های آنها بر اثر تبدیل قطب و قطبی معلومند، تعریف کنیم (زیرا نگارهٔ وسط یک



(الف)



(ب)

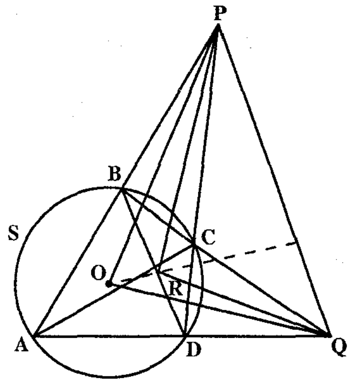
پاره‌خط در یک تبدیل قطب و قطبی بر ما معلوم نیست). تعریف زیر یکی از این تعریفها است :

وسطهای ضلعهای یک متوازی‌الاضلاع نقطه‌های برخورد ضلعها و میانخطهای آن است. میانخطها خطهایی هستند که از نقطهٔ برخورد قطرها به موازات ضلعها کشیده می‌شوند. این تعریف، تعریفی است که ما می‌پذیریم. به موجب ویژگی (ب)ی تبدیل قطب و قطبی، متوازی‌الاضلاع ABCD به چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود که محل برخورد قطرهایش بر O، مرکز S، منطبق است (شکل ب). رأسهای مقابل متوازی‌الاضلاع به ضلعهای مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، قطرهای متوازی‌الاضلاع به نقطه‌های Kو L ، محل برخورد جفتهای ضلعهای مقابل چهارضلعی، و نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی الاضلاع به خط KL. به موجب ویژگیهای (ب) و (ج) از یک تبدیل قطب و قطبی، میانخطهای متوازی‌الاضلاع به نقطه‌های Eو F، محل برخورد خط KL با قطرهای $A'C'$ و $B'D'$ از چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود. این نکته‌ها ایجاب می‌کنند که وسطهای ضلعهای متوازی‌الاضلاع به خطهای EB' و FC' و FA'، ED' بدل شوند، پس گزارهٔ اصلی مایهٔ پیدایش گزارهٔ دوگان آن به شرح زیر می‌شود :

نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعیی که ضلعهایش بر خطهای FA'، EB' ، FC' و ED' واقعند، بر نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ منطبق است (شکل ب).

۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴. الف. فرض می‌کنیم P و Q نقطه‌های برخورد ضلعهای چهارضلعی محاط در S باشند، و R نقطهٔ برخورد قطرهای آن. از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود که R قطب PQ است (شکل)



که این امر قضیهٔ ما را ایجاب می‌کند.
ب. اگر A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD محیط بر دایرهٔ S باشد، آن‌گاه نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ برهم منطبقند. همچنین خطهای واصل بین نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعیها برهم منطبقند. قضیهٔ موردبحث از قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

۱ . ۵. قطب و قطبی در دایره

۱ . ۵ . ۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۰۵. خطی است متقاطع با دایره که به فاصله $\frac{R}{3}$ از مرکز دایره واقع است؛ زیرا اگر A' پای قطبی باشد، $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=R^2$ است.

۱۰۶. فرض کنیم r شعاع دایرهٔ(O) و I محل برخورد OP و قطبی نقطهٔ P نسبت به دایره باشد. داریم:

$$OI\times OP=r^2$$

یا

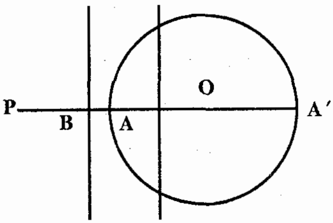
$$OI\times(OI+IP)=r^2$$

و ازآن‌جا

$$OI^2-r^2=IO\times IP$$

این رابطه نشان می‌دهد که I قوتهای متساوی نسبت به دایرهٔ (O)و دایرهٔ به قطر OP دارد، پس قطبی نقطهٔ P محور اصلی دو دایرهٔ مزبور است که باید از I بر OP عمود شود.

۱۰۷. چون Δ قطبی نقطهٔ P است، تقسیم (PMCD) توافقی است. پس تصویرهای چهارنقطه روی AB تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، یعنی تقسیم (PQEF) نیز توافقی است؛ بنابراین قطبی F نسبت به دایرهٔ به قطر PQ خط CE و قطبی E نسبت به دایرهٔ مزبور خط DF می‌باشد.



۱۰۸. فرض کنید P' پای قطبی نقطهٔ P و B وسط PP' باشد (شکل). کافی است ثابت کنیم که B پای محور اصلی نقطهٔ P و دایرهٔ (O) است و یا ثابت کنیم:

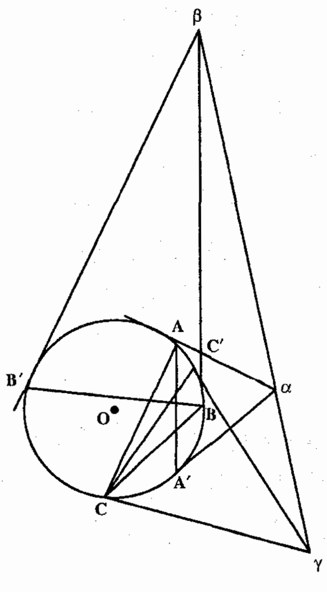
$$BP^2 = BA \times BA'$$

رابطهٔ بالا محقق است؛ زیرا P و P' نسبت به AA' مزدوج توافقی بوده و B وسط PP' است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که صفحه قطبی نقطهٔ P نسبت به کره (O) در تجانس به مرکز P و با نسبت ۲ متناظر با صفحهٔ اصلی نقطهٔ P و کرهٔ (O) است.

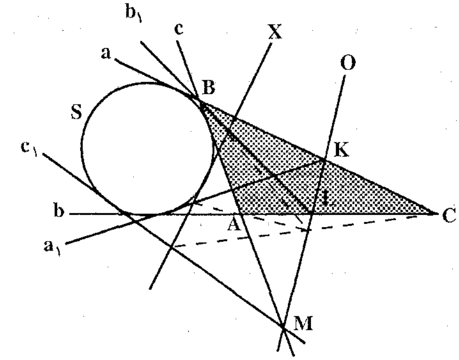
۱ . ۵ . ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱ . ۵ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند



۱۱۱. چون A' وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ واقع است، پس AA' نیمساز داخلی زاویهٔ $B\hat{A}C$ است و به همین دلیل BB' و CC' بترتیب نیمسازهای داخلی زاویه‌های $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$ می‌باشند، و چون سه نیمساز داخلی یک مثلث همرسند، پس AA'، BB' و CC' در یک نقطهٔ مانند I همرسند.

از طرفی چون از α مماسهای αA و $\alpha A'$ را بر دایره رسم نموده و نقطه‌های تماس را به‌هم وصل کرده‌ایم؛ پس قطب AA' و به همین دلیل β قطب BB' و γ قطب CC' بوده که چون AA'، BB' و CC' همرسند، قطبهای آنها که عبارت از α، β و γ می‌باشند، بر یک استقامت واقعند.



۱۱۲. این مسأله به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود: فرض می‌کنیم، a، a_1 ؛ b، b_1 ؛ c، c_1 مماسهای رسم شده بر یک دایرهٔ S از نقطه‌های K، L و M واقع بر یک خط O باشد و x مماسی دلخواه بر S، در این صورت خطهای واصل بین رأسهای مثلث حاصل از a، b و c و نقطه‌های متناظر a_1، b_1 و c_1 در یک نقطه واقع بر O برخورد می‌کنند.

۱. ۵. ۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱. ۵. ۳. ۱. خطها همرسند

۱۱۳. فرض کنید خطهای قطبی نقطهٔ داده شدهٔ P نسبت به دودسته دایرهٔ مفروض (U)، به‌طور مثال (A) و (B)، یکدیگر را در Q قطع کنند. در این صورت، دایرهٔ (PQ) که PQ قطر آن است با (A) و (B) متعامد است ؛ پس (PQ) با هردایرهٔ دیگری از (U)، به‌طور مثال (C) متعامد است، و بنابراین، P و Q نسبت به (C) مزدوجند ؛پس خط قطبی P نسبت به (C) نیز از Q می‌گذرد و قضیه ثابت می‌شود.

تبصره. دایرهٔ (PQ) به دسته دایرهٔ مزدوج دسته دایرهٔ (U)، یعنی دسته دایرهٔ (W)متعلق است ؛ پس Q روبه‌روی قطری P، در دایره‌ای است که از P می‌گذرد و به دسته دایرهٔ (W) متعلق است. این راهی برای تعیین نقطهٔ Q است.

همچنین می‌توان مشاهده کرد که چون دایرهٔ (P) از نقطهٔ P می‌گذرد و به دسته دایرهٔ مفروض (U) تعلق دارد، با (PQ) متعامد است، خط PQ در P بر (P) مماس است، و Q متقارن P نسبت به نقطهٔ برخورد این مماس با محور اصلی (U) است. این راه دیگری برای تعیین نقطهٔ Q است.

۱. ۵. ۳. ۲. خطها برهم عمودند

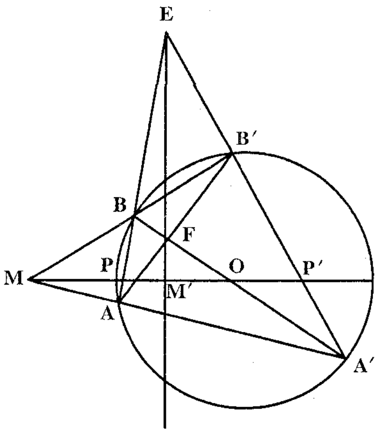
۱۱۴. در متوازی‌الاضلاع ADPE قطرها منصف یکدیگرند، یعنی: IP = IA ، پس اگر از E خط EH را موازی AP رسم کنیم، دستگاه (E·HDPA) توافقی است، و چنانچه

خط AL را موازی ED رسم کنیم، دستگاه (A·LPDB) که شعاعهایش نظیربه‌نظیر موازی شعاعهای دستگاه توافقی (E·APDE) می‌باشند، توافقی خواهد بود، درنتیجه نقطهٔ M مزدوج توافقی P نسبت به CB است، و درنتیجه خط AL قطبی P نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد و از آن‌جا AL و درنتیجه موازیش ED بر OP عمود خواهد بود.

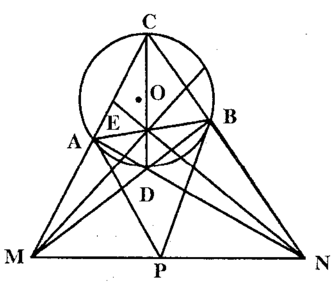
۱. ۵. ۳. ۳.خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۱۱۵. چنانچه از نقطهٔ E، محل برخورد AB و CD بر OP عمود کنیم، این خط قطبی نقطهٔ P نسبت به خطهای EBA و EDC و یا دایرهٔ (O) است. و درنتیجه (PIHO) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند. چون دایرهٔ (O) و نقطهٔ P ثابت است، OP و قطبی P نسبت به دایره و درنتیجه I پای قطبی و نقطه‌های O و P ثابت بوده، و از آن‌جا H ثابت است و می‌توان نتیجه گرفت که H مزدوج توافقی D نسبت به PI ثابت بوده و یا به‌عبارت دیگر، CD از نقطهٔ ثابت H می‌گذرد.

۱۱۶. فرض کنیم قطبی M نسبت به دایرهٔ(O)، خط EF باشد. اگر MP خط EF را در M′ و A′B′ را در P′ قطع کند، دستگاه (E·MFAA′) توافقی است و تقسیم (MM′PP′) توافقی می‌باشد. در این تقسیم سه نقطهٔ M، P و M′ ثابتند، پس P′ نیز نقطهٔ ثابتی است و A′B′ حول آن حرکت می‌کند.

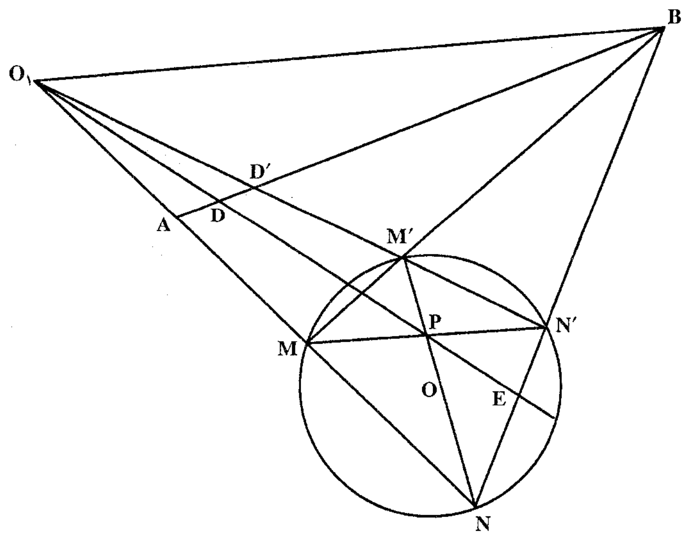


۱۱۷. خط NE قطبی نقطهٔ M نسبت به دو خط NA و NC و درنتیجه نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد و همچنین خط ME قطبی N نسبت به دوخط MB و MC و درنتیجه نسبت به دایره است و از آن‌جا خط MN قطبهای دو خط ME و NE را به‌هم وصل می‌کند، قطبی نقطهٔ برخورد آنها می‌باشد، پس خط MNقطبی نقطهٔ E واقع بر AB می‌باشد.

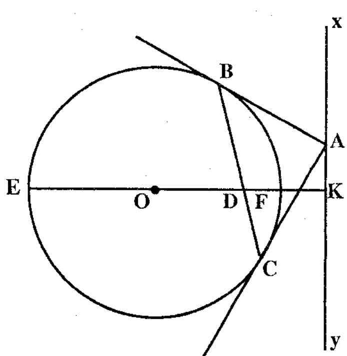


وقتی نقطه‌های Cو D بر محیط دایرهٔ (O) تغییر نماید، نقطهٔ E بر خط ثابت AB تغییر می‌نماید، و چون قطبیهای کلیهٔ نقطه‌های واقع بر یک خط بر قطب آن خط می‌گذرد، پس وقتی C و D تغییر نماید، MN قطبی E تغییر نموده، لیکن پیوسته از قطب خط AB نسبت به دایرهٔ (O) می‌گذرد و برای تعیین آن در نقطه‌های A و B، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخوردشان، P واقع بر MN بوده، و این نقطه ثابت است.

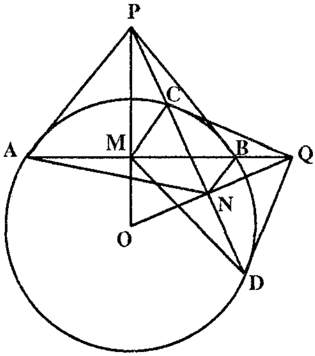
۱۱۸. DP قطبی نقطهٔ B نسبت به دایرهٔ O است. چون B ثابت است، قطبی آن نیز نسبت به دایره ثابت است ؛ پس D نقطه‌ای است ثابت. از طرفی دستگاه $(O_1 \cdot NN'EB)$ توافقی است ؛ چون AB شعاعهای این دستگاه را قطع کرده است. پس چهار نقطهٔ B، D، 'D و A تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند. چون سه نقطهٔ A، D و B از این تقسیم توافقی ثابت است، پس 'D نقطه‌ای است ثابت.



۱۱۹. می‌دانیم قطبیهای نقطه‌هایی که بر یک خط راست واقعند، از قطب آن خط می‌گذرند. BC قطبی نقطهٔ متغیر A واقع بر خط xy است، پس BC از قطب xy می‌گذرد و قطب x نقطه‌ای است مانند D که روی قطر EF، عمود بر xy واقع است.



۱. ۵. ۳. ۴. خط نیمساز است



۱۲۱. محل برخورد CD را با OM، نقطهٔ P و محل برخورد AB را با ON، نقطهٔ Q می‌نامیم. AB و OP که برهم عمودند، نیمسازهای زاویهٔ CMD می‌باشند. پس دستگاه (M·PBCD) توافقی است و P قطب AB می‌باشد؛ چون CD از P می‌گذرد، پس قطب CD روی AB، قطبی P، قرار دارد؛ یعنی نقطهٔ Q قطب CD است، و دستگاه (N.ABCQ) توافقی می‌باشد. در این دستگاه دو شعاع NC و NQ برهم عمودند. بنابراین این دو شعاع نیمسازهای زاویهٔ ANB می‌باشند.

۱. ۵. ۳. ۵. خط مماس بر دایره است

۱۲۲. ثابت کنید فاصلهٔ این خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

۱. ۵. ۴. زاویه

۱. ۵. ۴. ۱. اندازهٔ زاویه

۱۲۳. قطبیهای نقطه‌های A و B بترتیب بر OA و بر OB عمودند.

۱. ۵. ۴. ۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۲۴. قطعه مماسی که به وسیلهٔ دو مماس ثابت a و b از یک مماس متغیر سوم بر دایره جدا می‌شود، از مرکز دایره به زاویهٔ ثابتی دیده می‌شود.

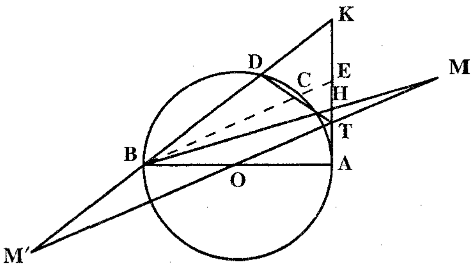
۱. ۵. ۵. پاره‌خط

۱. ۵. ۵. ۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۲۵. فرض می‌کنیم Δ موازی با AB، قطبی I نسبت به دایرهٔ O باشد. محل برخورد Δ را

با MN نقطهٔ R و محل برخورد آن را با MP و NQ، نقطهٔ S می‌نامیم. قطبی نقطهٔ I از S می‌گذرد؛ پس تقسیم (RIMN) توافقی است. از آن‌جا دستهٔ خطهای (SN، SM، SR، SI) متساویند؛ چون AB موازی با شعاع SR است، نقطهٔ I وسط uV خواهد بود که به وسیلهٔ شعاعهای SM و SN قطع شده است.

۱۲۶. BE را به موازات OT رسم می‌کنیم (شکل). برای این‌که ثابت کنیم O وسط MM′ است، کافی است ثابت کنیم دستگاه (B·AEHK) توافقی است و یا این که تقسیم AEHK توافقی



است و چون T وسط AE است، پس کافی است ثابت کنیم $TA^2 = TH \cdot TK$. اما $TA^2 = TC \times TD$، و از طرف دیگر نسبت به زوج (BK و BH)CD و مماس در نقطهٔ B متبایننند، پس CD و مماس در نقطهٔ A نسبت به زوج مزبور متبایننند. به‌عبارت دیگر DCHK قابل محاط شدن در دایره است و خواهیم داشت:

$$TC \times TD = TH \times TK \;;$$

بنابراین:

$$TA^2 = TH \times TK$$

۱۲۷. از نقطهٔ T محل برخورد مماسهای بردایره در نقطه‌های A و B خطی بر PO عمود می‌کنیم. اگر Q پای عمود باشد، TQ قطبی P نسبت به دایره است؛ زیرا قطب نقطهٔ P نسبت به دو خط TM′ و TB از نقطهٔ برخورد آنها، یعنی نقطهٔ T می‌گذرد. همچنین نسبت به دایرهٔ (O)، و چون بر OP عمود است، پس TQ قطبی P نسبت به دایره است و درنتیجه نقطه‌های (PIAB) تشکیل تقسیم توافقی داده و دستگاه (T·PQAB) توافقی است و چون خط D موازی شعاع TQ، سه شعاع دیگر TM′ ، TM و TP را قطع نموده، پس $PM = PM'$ است.

۱۲۸. خطBD قطبی نقطهٔ E نسبت به دایرهٔ (O) است. در نتیجه نقطه‌های (EDCA) تشکیل یک تقسیم توافقی داده و از آن‌جا دستگاه (P·DECA) توافقی است. و چون BD موازی شعاع PA رسم شده، به وسیلهٔ سه شعاع دیگر به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود؛ یعنی $BI = ID$ است.

۱۲۹. راه اول. می‌دانیم، اوّلاً مماس مشترک دو دایره در یک نقطه واقع بر محور اصلی دو دایره متقاطعند که آن را مرکز تجانس دو دایره می‌نامند.

ثانیاً. اگر S مرکز تجانس دایره‌های (O) و (O′) باشد، $T'I'$ و TI قطبیهای S نسبت به دایره‌های O و O′ می‌باشند.

ثالثاً. محور اصلی دو دایره از وسط مماس مشترک دو دایره می‌گذرد، در نتیجه :

$$MT = MT'$$

چون $T'I' \| TI \| \Delta$ است، و داریم :

$$\frac{MT}{MT'} = \frac{IH}{I'H}$$

نتیجه می‌شود که $IH = I'H$ ؛ یعنی قطبیهای مرکز تجانس مستقیم دو دایره از محور اصلی آنها به یک فاصله‌اند و به همین طریق نسبت به مرکز تجانس معکوس دو دایره ثابت می‌کنیم.

راه دوم. اگر H وسط II' باشد، ثابت می‌کنیم که H پای محور اصلی دو دایره روی خط‌المرکزین است.

چون S مرکز تجانس دو دایره است، پس :

$$\frac{O'S}{OS} = \frac{R'}{R} \quad \text{و یا} \quad \frac{O'S}{OO'} = \frac{R'}{R-R'}$$

یا

$$O'S = \frac{R' \cdot d}{R-R'}$$

و

$$OS = OO' + O'S = d + \frac{R'd}{R-R'} = \frac{Rd}{R-R'}$$

و از طرفی چون D قطبی S نسبت به دایرهٔ (O) است، داریم :

$$OI \cdot OS = R^2 \quad \text{و یا} \quad OI = \frac{R^2}{OS} = \frac{R(R-R')}{OO'}$$

و

$$O'I' = \frac{R'(R-R')}{OO'}$$

و یا

$$OI' = OO' + \frac{R'(R-R')}{OO'}$$

و یا

$$OH = \frac{OI + OI'}{2} = \frac{OO'}{2} + \frac{R(R-R')}{2OO'} + \frac{R'(R-R')}{2OO'}$$

و اگر N وسط OO' باشد،

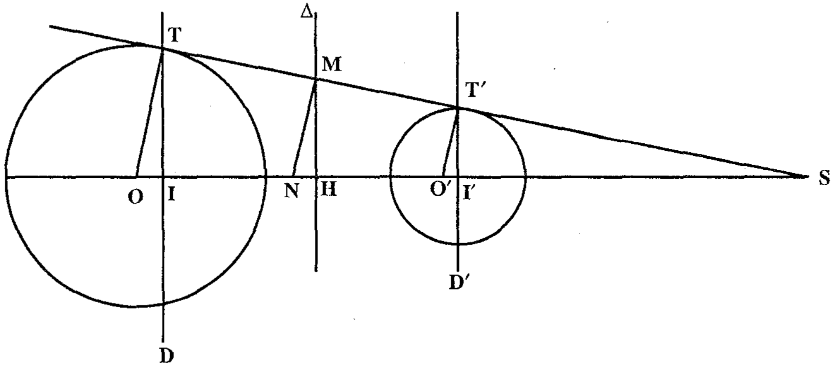
$$OH = ON + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$$

یا

$$NH = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$$

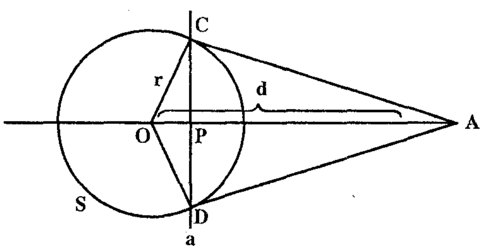
از این رابطه نتیجه می‌گیریم که H پای محور اصلی دو دایره است و چون H وسط II'

فرض شده، نتیجه می‌گیریم که D' و D از Δ به یک فاصله‌اند.

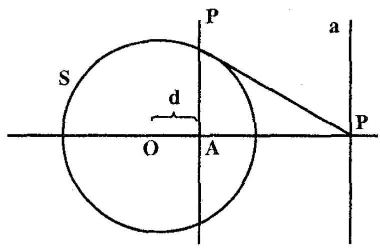


۱ . ۵ . ۶. رابطه‌های متری

۱۳۰. اگر A در بیرون دایرهٔ S $(d > 1)$ باشد و AC و AD مماسهای رسم شده از A بر S باشند، آن گاه a، قطبی نقطهٔ A، بر CD منطبق است و $a \perp OA$. فرض می‌کنیم P نقطهٔ برخورد CD و OA باشد (شکل الف). چون مثلثهای OCA و OPC متشابهند، $OA/OC = OC/OP$ یا $OP = OC^2/OA = 1/d$ که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



(الف)

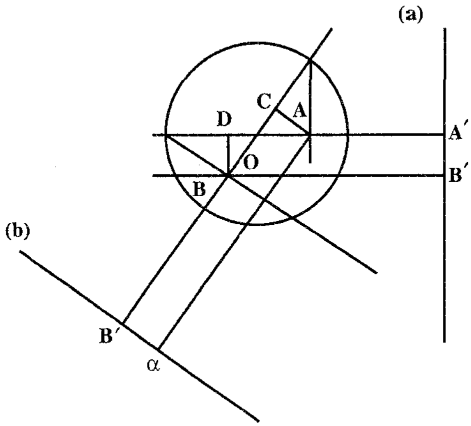


(ب)

اگر A بر S $(d = 1)$ باشد، قضیه بدیهی است. اگر A در داخل $S(d < 1)$ باشد، P خطی است گذرنده بر A و عمود بر OA، و P قطب p است، پس P بر خط OA، در بیرون S واقع است (شکل (ب)). مانند بالا نتیجه می‌گیریم که $OA = 1/OP$ یا $OP = 1/OA = 1/d$.

a ، قطبی A، عمودی است که از P بر OA رسم می‌شود. بنابراین OP برابر فاصلهٔ O از a است، اما این فاصله درست $1/d$ است.

یادداشت. به همین طریق، می‌توانیم ثابت کنیم که، اگر فاصلهٔ A از O برابر d و شعاع دایره r باشد، فاصلهٔ a، قطبی A، از O برابر r^2/d است.



۱۳۱. اگر خطهای (a) و (b) بترتیب قطبیهای A و B نسبت به دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطه‌های A′ و B′ پای قطبیهای آنها باشند، بنابه تعریف داریم :

$$OA \cdot OA' = OB' \cdot OB = R^2$$

و یا :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \qquad (1)$$

و در صورتی که از A و B عمودهای AC و BD را بترتیب بر OB′ و OA′ فرود آوریم، از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ΔOAC و ΔOBD ، نتیجه می‌شود که :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \qquad (2)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OC}{OD} = \frac{OB'+OC}{OA'+OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{A\alpha}{B\beta}$$

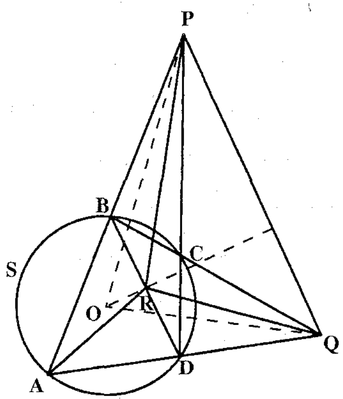
۱۳۲. خط BC که نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از I بر دایره را به‌هم وصل کرده، قطبی I نسبت به دایره است. درنتیجه قطب کلیهٔ خطهای گذرنده بر I، بر قطبی I واقع است، پس قطب IO بر BC قرار دارد، و همچنین نقطهٔ O قطب خط AO است و در نتیجه قطب OI بر خط AO قرار دارد. پس A قطب خط IO نسبت به دایرهٔ (ω) بوده و نقطه‌های (APBC) تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، و از آن‌جا دستگاه (I·APBC) توافقی بوده و چون هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، تشکیل تقسیم توافقی می‌دهد، پس (AOMN) یک تقسیم توافقی است و داریم :

$$\frac{2}{OA} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$$

و چون A و O ثابت هستند، $\frac{2}{OA}$ و از آن‌جا $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ ثابت است.

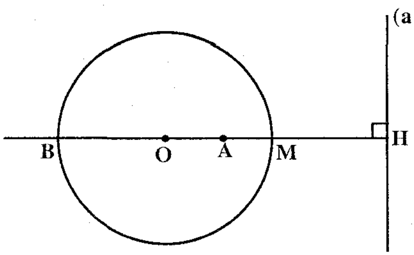
۱.۵.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۱۳۳. اگر R نقطهٔ برخورد قطرها، و P و Q نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی محاطی ABCD باشند، قطبی معکوس مثلث PQR نسبت به دایره بر خودش منطبق است، یعنی قطب هر ضلع آن رأس مقابل به آن ضلع و قطبی هر رأسش، ضلع روبه‌روی آن است.

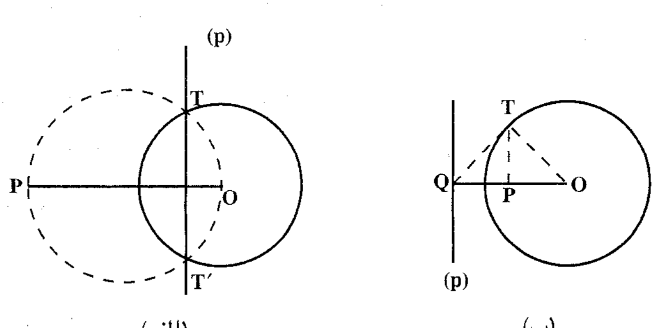


۱.۵.۸. رسم شکلها

۱۳۴. از مرکز دایره به خط مفروض عمود می‌کنیم و مزدوج توافقی پای عمود نسبت به دو سر قطر ایجاد شده به وسیلهٔ خط عمود را به دست می‌آوریم. این نقطه قطبی خط داده شده است.

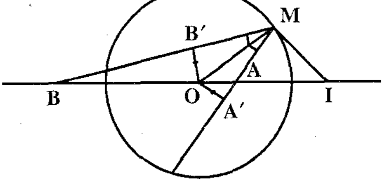


۱۳۵. اوّلاً. P خارج دایره است (شکل (الف)) ؛ دایره‌ای به قطر OP رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در دو نقطهٔ T و T′ قطع کند ؛ این دو نقطه، نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از نقطهٔ P بر دایرهٔ O هستند (چرا؟) ؛ پس TT′ قطبی P نسبت به دایرهٔ O است (چرا؟).



ثانیاً. P روی دایره است ؛ مماس بر دایره در P را رسم می‌کنیم.
ثالثاً. P داخل دایره است ؛ از آن، عمودی بر OP اخراج می‌کنیم تا دایره را در T قطع کند (شکل (ب)) ؛ در نقطهٔ T مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد OP را در Q قطع کند ؛ از Q خط (p) را بر OQ عمود می‌کنیم.

۱۳۶. دو نقطهٔ A و B (شکل) را روی یک قطر در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دو وتر گذرنده بر A و B در نقطهٔ M واقع بر محیط دایره متقاطع باشند. برای این که دو وتر متساوی باشند، لازم و کافی است که



فاصله‌های OA' و OB' آنها از مرکز دایره به یک اندازه باشد و به عبارت دیگر یکی از نیمسازهای زاویه بین دو وتر از O بگذرد، و در این صورت نیمساز دیگر، یعنی MI، مماس بر دایره در نقطهٔ M خواهد بود. پس دستگاه (M.ABOI) توافقی است. بنابراین بایستی نقطهٔ I، مزدوج توافقی O را نسبت به AB رسم نمود و از این نقطه مماسی بر دایره رسم کرد.

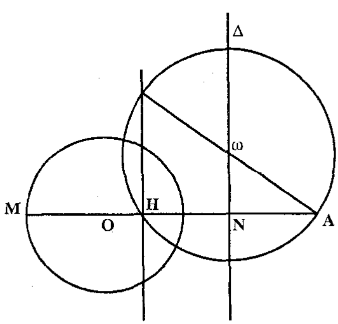
برای M دو جواب قرینه نسبت به AB به‌دست می‌آید و برای این که مسأله ممکن باشد، باید $OI \geq r$ باشد.

اگر محوری روی AB در نظر بگیریم، داریم :

$$\frac{۲}{\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OA}} + \frac{۱}{\overline{OB}}$$

۹.۵.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۳۷. اگر (ω) یکی از دایره‌های گذرنده بر نقطهٔ A و عمود بر دایرهٔ (O) باشد، قطری از دایرهٔ (O) که از A می‌گذرد، به وسیلهٔ دایرهٔ (ω) به نسبت توافقی تقسیم می‌شود. چنانچه دایرهٔ (ω) ضمن تغییر پیوسته از A گذشته و عمود بر دایرهٔ (O) باشد. قطری از دایرهٔ (O) که از A می‌گذرد پیوسته ثابت بوده و در نتیجه مزدوج توافقی A نسبت به MN دو سر قطر دایرهٔ (O)، یعنی نقطهٔ

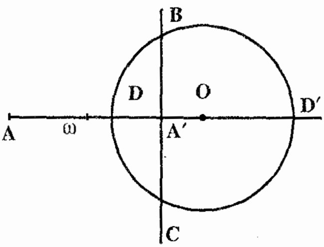


(a)

H ثابت بوده و بر دایره‌های (ω) واقع است، زیرا در تقسیم توافقی $(AHMN)$ سه نقطهٔ ثابت است. پس H نیز ثابت خواهد ماند و این نقطه پای قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد. یعنی تمام دایره‌های گذرنده بر نقطهٔ A و عمود بر دایرهٔ (O) از پای قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) می‌گذرند.

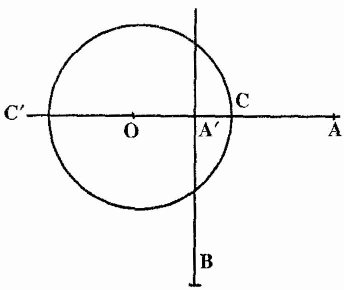
۱۳۸. زیرا تمام دایره‌هایی که از A می‌گذرند، B و C نسبت به هریک از آنها مزدوجند، دایره‌هایی می‌باشند که از A گذشته و بر دایره به قطر BC عمودند. اما همان‌طوری که می‌دانیم، تمام این دایره‌ها از پای قطبی A نسبت به دایرهٔ به قطر BC می‌گذرند.

۱۳۹. برای تعیین دایره‌ای که قطبی نقطهٔ مفروض A نسبت به آن خط مفروض BC باشد، لازم و کافی است که عمود AA' رسم شده از A بر BC، دایره را در قطر قطع کند و این قطر به وسیلهٔ AA' تقسیم توافقی شود، و اگر ω وسط AA'، و D و D' دو سر قطر مزبور فرض شوند،



باید $\omega A^2 = \omega D \times \omega D'$ و برای این که این رابطه محقق باشد، لازم و کافی است دایرهٔ به قطر DD' متعلق به دستگاه دایره‌ای به قاعدهٔ AA' باشد که نقطهٔ اصلی آن، ω، به قوت ωA^2 است (شکل).

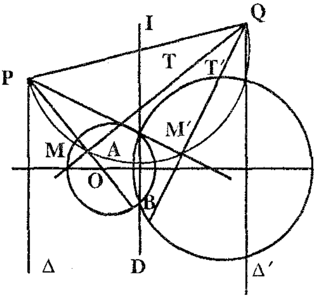
۱۴۱. A و B نسبت به دایرهٔ (O) مزدوجند. B روی قطبی A نسبت به دایره واقع است. فرض کنیم A' محل برخورد OA با قطبی A نسبت به دایره بوده و C و C' فصل مشترک دایره با OA باشند. دایره به قطر AB از A و A' می‌گذرد و CC' را به توافق تقسیم می‌کند؛ پس این دایره بر دایرهٔ (O) عمود است. بعکس



فرض کنیم AB قطری از یک دایرهٔ عمود بر دایرهٔ (O) باشد. اگر A' محل دیگر برخورد OA با دایرهٔ اوّل و CC' قطری از دایرهٔ (O) گذرنده بر A باشد، A و A' نسبت به CC' مزدوج توافقی می‌باشند و بعلاوه $B\hat{A'}A = 1^d$؛ پس BA' قطبی A و در نتیجه A و B نسبت به دایرهٔ (O) مزدوجند (شکل).

۱۴۲. بله، و این در صورتی است که دو دایره مساوی باشند.

۱۴۳. اگر P نقطهٔ دلخواهی از Δ و خطهای T و T' قطبیهای آن نسبت به دایره‌های (O) و



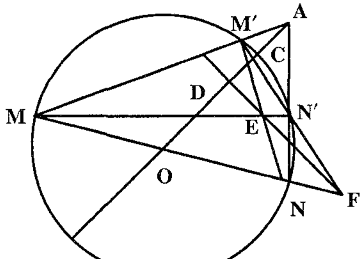
(O′) باشد که در نقطهٔ Q متقاطعند، چنانچه P بر Δ تغییر نماید، T و T′ ، و در نتیجه Q تغییر نموده، لیکن پیوسته $\hat{M'} = \hat{M} = ۹۰^\circ$ بوده و دایره به قطر PQ، اوّلاً از M و M′ گذشته، ثانیاً این دایره بر دایره‌های (O) و (O′) عمود است ؛ زیرا پای قطبی مزدوج قطب انعکاس است، نسبت به دو سر قطری از دایره که از قطب انعکاس گذشته باشد، و از طرف دیگر می‌دانیم که دایره‌هایی که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد، مرکزش بر محور اصلی دو دایره واقع است.
و از آن‌جا مرکز دایره به قطر PQ بر خط D محور اصلی دو دایره واقع بوده و از آن‌جا نقطهٔ Q قرینهٔ P نسبت به I، مرکز دایرهٔ عمود بر دایره‌های (O) و (O′) می‌باشد و چون I بر محور اصلی واقع است، می‌توان گفت Q قرینهٔ P نسبت به یکی از نقطه‌های محور اصلی دو دایره است، پس مکان Q خط Δ′ قرینهٔ Δ نسبت به محور اصلی دو دایره می‌باشد.

۱۰.۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۴۴. ۱. چون چهار نقطهٔ تقسیم توافقی (ABCD) بر یک استقامت می‌باشند، قطبیهای آنها همرسند و نقطهٔ همرسی آنها خط واصل بین آن چهار نقطه است. اگر نقطهٔ M قطب خط AD باشد، قطبیهای A، B، C و D از M گذشته و بر خط واصل بین آن نقطه‌ها و مرکز دایره عمودند. و چون دستگاه (O.ABCD) توافقی است، دستگاه (M.xyzt) که شعاعهایش نظیر به نظیر بر شعاعهای دستگاه توافقی (O.ABCD) عمود است، توافقی خواهد بود.
۲. اگر دستگاه (M.xyzt) توافقی باشد، قطبهای شعاعهای این دستگاه بر خطی راست واقع است که این قطبی نقطهٔ همرسی آنها می‌باشد. پس اگر A، B، C و D بترتیب قطبهای شعاعهای Mx ، My ، Mz و Mt باشند، این خطها بترتیب بر OA، OB، OC و OD عمود بوده و چون دستگاه (M.xyzt) توافقی است، پس دستگاه (O.ABCD) که شعاعهایش بر شعاعهای دستگاه اوّل عمود است، توافقی می‌باشد، و از آن‌جا نقطه‌های (ABCD) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.
۱۴۵. محل برخورد AB و Bx را Q می‌نامیم (Bx مماس در B بر دایره است). M′ وسط

$A'C'$ خواهد بود ؛ یعنی M باید روی قطبی Q نسبت به دایرهٔ C باشد، یعنی M روی خط TB است. T محل برخورد تماس وارد از Q بر C است، ثانیاً خط AC بر نقطهٔ Q، قطب BM نسبت به دایره، می‌گذرد. همچنین MC بر P که قطب AC نسبت به دایره است می‌گذرد ؛ پس از نقطه‌های P، M، Q و B می‌گذرد.

۱۴۶. ۱. مکان E و F قطبی A نسبت به دایرهٔ (O) است.



۲. دایرهٔ AMN خط OA را در نقطهٔ ثابت B قطع می‌کند، زیرا داریم :

$OM.ON = OA.OB =$ ثابت

۳. وتر $M'N'$ خط OA را در نقطهٔ ثابت C قطع می‌کند، زیرا اگر D محل برخورد EF با OA باشد، دستگاه (F.OCAD) توافقی است و نقطهٔ C مزدوج توافقی O نسبت به A و D می‌باشد.

۱۴۷. ۱. وقتی BC به موازات خود تغییر کند، نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC بر خطی مستقیم مانند D، گذرنده بر A و عمود بر BC تغییر می‌نماید. و چون قطبیهای کلیه نقطه‌های واقع بر یک خط همرس بوده و از قطب آن خط می‌گذرند، پس قطبیهای نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاعهای مثلث از نقطهٔ P، قطب خط D می‌گذرند.

۲. چون قطب هر خط بر خطی واقع است که از مرکز دایره بر آن خط عمود می‌شود، پس وقتی A بر دایرهٔ (O) تغییر می‌نماید، D به موازات خود و یا عمود بر BC تغییر نموده و نقطهٔ P قطب آن، بر خطی که از (O) بر D عمود یا موازی BC رسم می‌شود، تغییر می‌نماید. یا به عبارت دیگر مکان P خطی است مستقیم که از (O)، مرکز دایره، موازی BC رسم می‌شود.

۱۴۸. ۱. چون M و M' نسبت به O توافقی یکدیگرند، پس دایرهٔ به قطر $M'M$ بر دایرهٔ O عمود است، و چون بر A می‌گذرد، پس بر F می‌گذرد و F پای قطبی A نسبت به O است ؛ پس MM' تحت زاویهٔ قائمه از نقطهٔ ثابت F دیده می‌شود.

۲. فرض می‌کنیم H، H' و K تصویر F روی D، D'، MM' و F روی دایرهٔ محیطی مثلث AMM' خواهد بود. نقطه‌های H، H' و K روی خط سیمسون از F دیده می‌شوند ؛ پس پوش MM' سهمی به کانون F و خط HH' بر رأس آن مماس است.

۱۴۹. ۱. زاویه‌های $O\hat{A}M$ و $O\hat{D}M$ هریک 90° می‌باشند، پس مکان M خطی است که از

D بر OD عمود شود.

۲. اگر D' پای قطبی D نسبت به دایرهٔ (O) باشد، MP قطبی D' خواهد بود و چون همواره AB قطبی M است، پس AB همواره از نقطهٔ D' می‌گذرد و حول این نقطه حرکت می‌کند.

۱۵۰. ۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ OIT طوری است که $IT = \frac{IO}{۲}$ و یکی از زاویه‌های آن °۶۰ است (زاویهٔ I). پس:

$$OJ = OT \sin\frac{\pi}{۳} = OI \sin\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{OJ}{IO} = \sin ۲\frac{\pi}{۳} = \frac{۳}{۴}$$

۲. a) نقطه‌های O و A نسبت به دایرهٔ (C) مزدوجند، و دایره به قطر OA بر دایرهٔ (O) عمود است.

b) دایرهٔ به قطر OA پیوسته از J می‌گذرد $(\widehat{OJA} = \frac{\pi}{۲})$ و چون $\frac{OJ}{OI} = \frac{۳}{۴}$، بنابراین I یک دایرهٔ متجانس دایرهٔ به قطر OA در تجانس $(O, \frac{۴}{۳})$ را طی می‌کند (شکل (الف)).

بنابراین مکان I دایره‌ای است به قطر OE که در آن E با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

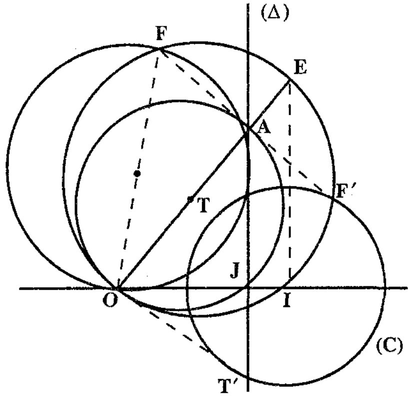
$$\overrightarrow{OE} = \frac{۴}{۳}\overrightarrow{OA}$$

c) چون $\widehat{IOT} = \frac{\pi}{۶}$ و $OT = OI\cos\frac{\pi}{۶} = OI\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، از I به T با یک همسانی $(O, \frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ می‌رسیم.

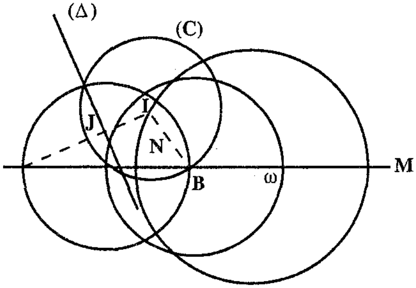
و مکان T از مکان I با این تبدیل نتیجه می‌شود؛ یعنی آن دایره‌ای است به قطر OF که در آن OF به وسیلهٔ رابطه‌های زیر داده می‌شود:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = \frac{\pi}{۶}\ ,\ \ OF = OE\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(نقطهٔ F از برخورد مماس در A بر مکان J و دایره به قطر OE به دست می‌آید). مکان نقطهٔ T' از مکان I، به واسطهٔ همسانی $(O, -\frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نتیجه می‌شود؛ یعنی دایرهٔ به قطر OF' که در آن F' قرینهٔ F است، نسبت به OA (دایره در شکل رسم نشده).



(الف)



(ب)

۳. a) $\frac{IB}{IO}=\frac{۱}{۲}$ ، بنابراین I مکان نقطه‌هایی را طی می‌کند که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ O و B مساوی ۲ است (شکل (ب)) ؛ یعنی دایره به قطر MN به طوری که

$$\frac{MO}{MB}=-\frac{NO}{NB}=۲$$

مرکزش ω به واسطهٔ رابطهٔ

$$O\omega=\frac{OM+ON}{۲}=\frac{۱}{۲}(۲OB+\frac{۲}{۳}OB)=\frac{۴}{۳}OB$$

و شعاعش از رابطهٔ :

$$\rho=\frac{OM-ON}{۲}=\frac{۲}{۳}OB$$

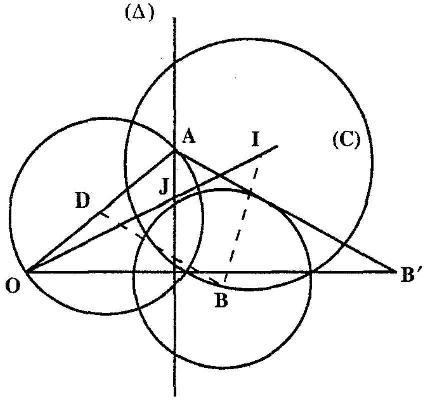
به‌دست می‌آید. مکان J از قبل در تجانس $(O,\frac{۳}{۴})$ به‌دست می‌آید ؛ پس مکان J، دایرهٔ به مرکز B و به شعاع $\frac{OB}{۲}$ می‌باشد.

b) (Δ) پوشش یک هذلولی است ــ(H)ــ است به کانون O و دایرهٔ اصلی مکان J.

۴. دایره مفروض است، اگر ما نقطهٔ J را بدانیم. ما دو مکان از این نقطه را داریم :

a) دایره به مرکز B و به شعاع $\frac{OB}{۲}$.

b) دایره به قطر OA.



(پ)

مسأله ممکن است، اگر دو دایره دارای نقطه‌های مشترک یا اگر :

$$\left|OD-\frac{OB}{۲}\right|\le DB\le OD+\frac{OB}{۲}\;;$$

یا :

$$\left|\frac{OA}{۲}-\frac{OB}{۲}\right|\le DB<\frac{OA}{۲}+\frac{OB}{۲}$$

برای نمایش هندسی این نامساوی، B' را قرینهٔ O نسبت به B اختیار می‌کنیم :

$$AB'=۲DB$$

و می‌توانیم بنویسیم :

$$|OA-OB|\le ۲DB\le OA+OB$$

یا :

$$|OA-OB|\le AB'\le OA+OB$$

و نامساویهای زیر نتیجه می‌شود :

$$OB\le OA+AB'$$

$$AO-AB'\le OB\Rightarrow AB'-AO\le OB$$

در مثلث OAB' داریم :

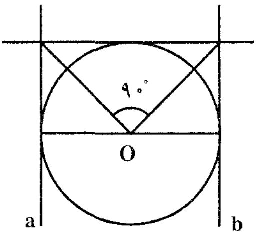
$$OA+AB'\ge OB'$$

چون $OB'=۲OB$ ، نامساوی اوّل همواره برقرار است. دوتای دیگر را می‌توان به صورت $|AO-AB'|\le OB$ نوشت. این نامساوی بیان می‌کند که نقطهٔ A نبایستی داخل هذلولی به کانون O و B' و محور قاطع OB، یعنی هذلولی پوش (Δ) قرار گیرد (شکل (پ)).

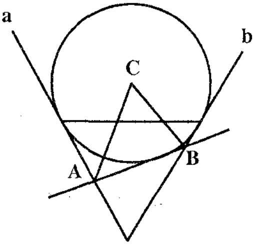
پس : اگر A خارج هذلولی باشد، دو جواب وجود دارد. و اگر A روی هذلولی باشد، یک جواب وجود دارد.

۱۵۱. خط $b_۲$ قطبی نقطهٔ $B_۲$ نسبت به دایرهٔ α است، و غیره. نقطهٔ $C_۱$ قطب خط $B_۰B_۲$

نسبت به دایرهٔ β است، و غیره.



۱۵۲. الف. یک تبدیل قطب و قطبی سه نقطهٔ A، B و C را به سه خط a، b و c تبدیل می‌کند که چون AB قطر دایره است، a و b موازی‌اند و پاره‌خطی که از c، که بین a و b محصور است، از O به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود.

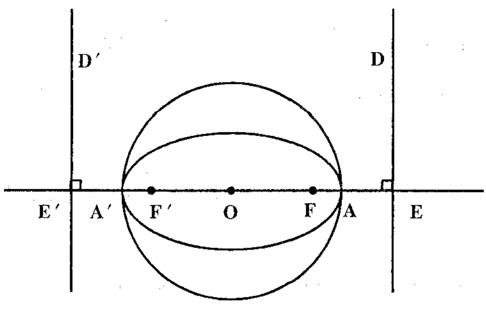


ب. قطعه مماسی که به وسیلهٔ دو مماس ثابت a و b از یک مماس متغیر سوم بر دایره جدا می‌شود، از مرکز دایره به زاویهٔ ثابتی دیده می‌شود.

۶.۱. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکلهای دیگر

۱.۶.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۵۵. بیضی به کانونهای F و F' و قطر بزرگ $AA' = 2a$ را در نظر می‌گیریم و دایرهٔ اصلی آن، یعنی دایرهٔ به قطر AA' را رسم می‌کنیم. مزدوج توافقی کانون F نسبت به دو رأس A و A' را به‌دست می‌آوریم و E می‌نامیم. در این نقطه، خط D را بر AA' عمود می‌کنیم. این خط که خط هادی وابسته به کانون F نامیده می‌شود، قطبی کانون F نسبت به دایرهٔ اصلی بیضی است. به‌طور مشابه قطبی کانون F' نسبت به دایرهٔ اصلی بیضی، خط هادی بیضی وابسته به کانون F' است.



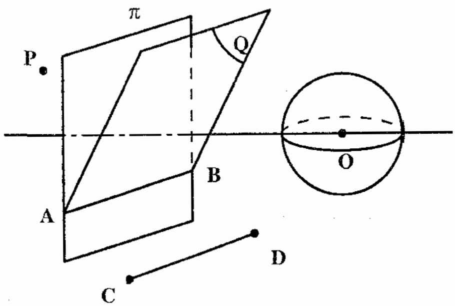
۲.۶.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، همصفحه، ...

۱. ۶. ۲. ۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۵۶. این نقطه‌ها در صفحهٔ قطبی نقطهٔ A نسبت به کرهٔ (O) قرار دارند.

۳.۶.۱. خطهای یا صفحه‌های: همرس، موازی، ...

۱.۳.۶.۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند



۱۵۷. دستگاه کره‌های تعریف شده با صفحهٔ اصلی π و کرهٔ (O) را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم صفحهٔ Q صفحهٔ اصلی نقطهٔ P و کرهٔ (O) باشد. اگر Q_1 صفحهٔ اصلی کرهٔ متغیر (O_1) متعلق به دستگاه کره‌ها و نقطهٔ P باشد؛ Q و Q_1 روی صفحهٔ اصلی (O) ، (O_1) یعنی صفحهٔ π متقاطع می‌شوند. فرض می‌کنیم AB فصل مشترک باشد. در این‌صورت صفحهٔ π قطبی P نسبت به (O_1) از خط CD که متناظرش AB در تجانس به مرکز P و با نسبت تجانس ۲ می‌باشد، خواهد گذشت.

۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازهٔ زاویه

۱۵۸. همان‌گونه که از شکل صورت مسأله برمی‌آید، مجانب u که قطبی نقطهٔ U است بر ضلع OU از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAU عمود است. بنابراین زاویهٔ $\hat{A}=\theta$ از این مثلث در رابطهٔ روبه‌رو صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{\cos\theta}=\frac{OA}{AU}=\frac{OA}{r}=\varepsilon$$

برای هذلولی متساوی‌القطرین $\theta=۴۵^\circ$ و $\varepsilon=\sqrt{۲}$ می‌باشد.

۵.۶.۱. پاره‌خط

۱.۵.۶.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۱۵۹. با استفاده از این ویژگی که در هر منحنی مقطع مخروطی، خط هادی نظیر یک کانون، قطبی آن کانون نسبت به منحنی می‌باشد، مسأله را حل کنید.

۶.۶.۱. رابطه‌های متری

۱۶۰. داریم:

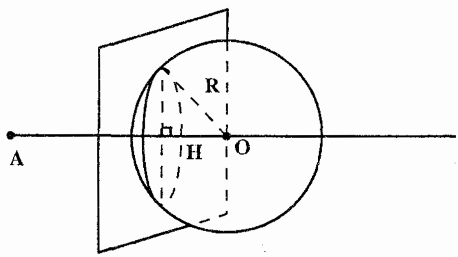
$$OP + O_1P = \varepsilon_0 PK + \varepsilon_0 K_1P = \varepsilon_0 K_1K$$

که K_1K فاصلهٔ دو خط هادی است.

۷.۶.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۱۶۱. در صورتی که آن منحنی، مکان هندسی قطبهای مماسهای بر(α) و یاپوش قطبیهای نقطه‌های واقع بر α باشند.

۸.۶.۱. رسم شکلها



۱۶۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و کرهٔ (O) جواب مسأله باشد. مرکز این کره روی خطی است که از نقطهٔ A بر صفحهٔ P عمود می‌شود. پای این عمود را نقطهٔ H می‌نامیم. در این‌صورت داریم:

$$OH.OA = R^2 \qquad (1)$$

$$(2) \quad \text{مقدار معلوم} = OA - OH = AH$$

از رابطه‌های (۱) و (۲)، دو پاره‌خط OA و OH مشخص می‌شوند. بنابراین نقطهٔ O مشخص می‌گردد و کره را می‌توان رسم کرد.

۹.۶.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. خط بینهایت l قطبی نقطهٔ O مرکز دایرهٔ ω است، پس هر نقطه از مقطع مخروطی که در بینهایت باشد، قطب (نسبت به دایرهٔ ω) یک مماس بر دایرهٔ α است که از O می‌گذرد. بنابراین بر حسب آن که O داخل α، روی α یا خارج α باشد، تعداد نقطه‌های بینهایت مقطع ۰، ۱ یا ۲ می‌باشد.

۱۶۴. خط هادی سهمی قطبی نقطهٔ A است و هر نقطه از این خط قطب قطری از دایرهٔ α است و مماسهایی که از این نقطه بر سهمی رسم شوند، قطبیهای دوسر قطر نظیر می‌باشند. هر دو نقطهٔ دوسر هر قطر از دایرهٔ α بر دو ضلع یک زاویهٔ قائمه به رأس O واقعند. بنابراین قطبیهای آنها برهم عمودند.

۱۰.۶.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۶۵. دایرهٔ اصلی بیضی دایره‌ای به مرکز O (مرکز بیضی) و به شعاع a، و دایرهٔ فرعی بیضی، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع b است. با توجه به این مطلب داریم:

الف. مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و A' از بیضی را به دست می‌آوریم و E می‌نامیم. خط D که در نقطهٔ E بر AA' عمود می‌شود، قطبی نقطهٔ F نسبت به دایرهٔ اصلی بیضی است. فاصلهٔ این خط از نقطهٔ F برابر است با $FE = \frac{b^2}{c}$، زیرا داریم:

$$OF.OE = OA^2 = OA'^2 \Rightarrow c.OE = \frac{a^2}{c} \Rightarrow FE = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

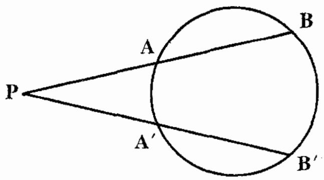
ب. مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو نقطهٔ N و N' دو سر قطر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع b (دایرهٔ فرعی بیضی) را E_1 می‌نامیم. خط D_1 که در E_1 بر NN' عمود شود، قطبی نقطهٔ F نسبت به دایرهٔ فرعی بیضی است. برای این خط داریم:

$$OF.OE_1 = b^2 \Rightarrow OE_1 = \frac{b^2}{c}$$

پ. با توجه به این که دو خط D و D' هردو بر AA' یا NN' عمودند، باهم موازی می‌باشند.

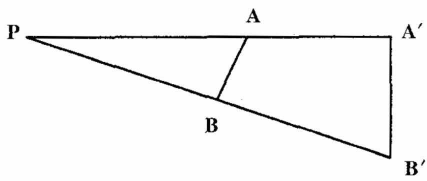
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲. انعکاس

۱.۲. تعریف و قضیه



۱۶۶. هرگاه A' (شکل) منعکس A و B' منعکس B با یک قوت انعکاس و قطب P باشد، چون داریم $PA.PA' = PB.PB'$، دایره‌ای که بر A، A' و B بگذرد، بر B' هم خواهد گذشت (به چه دلیل؟)

نکته. اگر خط AB از قطب انعکاس بگذرد، نقطه‌های A' و B' هم روی خط AB واقع می‌شوند، یعنی دو نقطهٔ A و B و نقطه‌های منعکسشان همخطند.



۱۶۷. اگر A' و B' بترتیب منعکسهای A و B باشند (شکل)، چون چهارضلعی $AA'B'B$ محاطی است، دو مثلث PAB و $PA'B'$ متشابه‌اند (چرا؟)،

پس : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{PA'}{PB}$

حال اگر صورت و مخرج طرف دوم این تساوی را در PA ضرب کنیم، خواهیم داشت : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{PA.PA'}{PA.PB} = \dfrac{|a|}{PA.PB}$

و از آن‌جا حاصل می‌شود : $A'B' = \dfrac{|a|.AB}{PA.PB}$

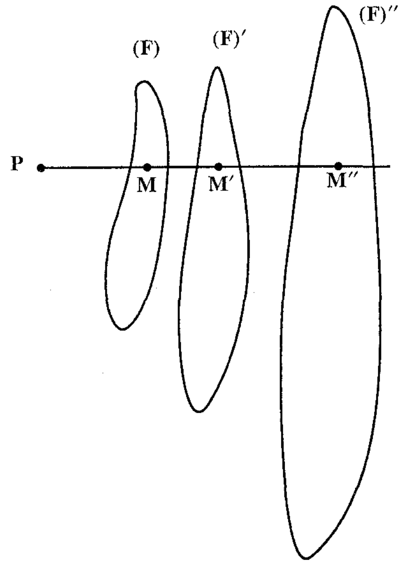
۱۶۸. فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای غیرمشخص از شکل (F) و M' منعکس آن در انعکاسی به قطب P با قوت a و M'' منعکس دیگر آن در انعکاسی به همان قطب P و با قوت a' باشد (شکل) بنا به تعریف :

$$\overline{PM}.\overline{PM'} = a \qquad (۱)$$

$$\overline{PM}.\overline{PM''} = a' \qquad (۲)$$

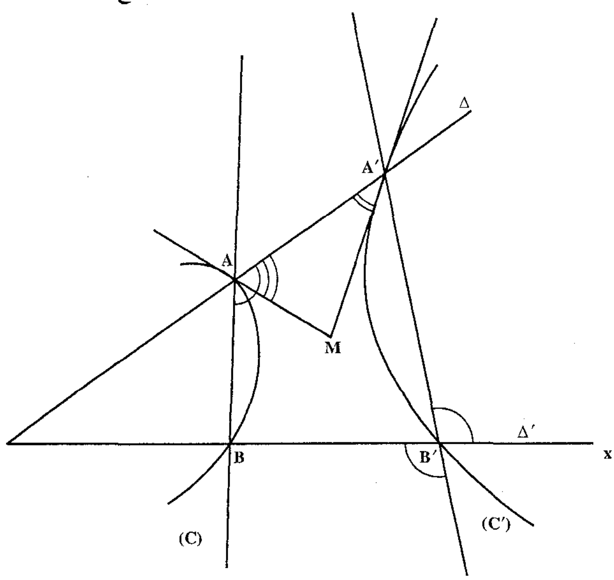
چون این دو رابطه را عضو به عضو بر هم تقسیم کنیم، خواهیم داشت : $\dfrac{\overline{PM'}}{\overline{PM''}} = \dfrac{a}{a'}$ ؛

یعنی M' مجانس M''، نسبت به مرکز تجانس P، با نسبت تجانس $\dfrac{a}{a'}$ می‌باشد ؛ یا



M'' مجانس M'، نسبت به همان مرکز، با نسبت تجانس $\frac{a'}{a}$ می‌باشد و چون نظیر این رابطه‌ها برای تمام نقطه‌های دو شکل F' و F'' برقرار است، دو شکل مذکور با آن نسبتها مجانس یکدیگرند.

۱۶۹. فرض می‌کنیم که C' منعکس C باشد (شکل)؛ دو قاطع Δ و Δ' که بر قطب انعکاس می‌گذرند، C و C' را بترتیب در A و A' و در B و B' قطع می‌کنند. AB و $A'B'$



را وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. چون چهار نقطهٔ A، A' ، B و B' بر روی یک دایره‌اند، $B\hat{A}A' = A'\hat{B}'x$ ، یعنی یک زاویهٔ بین AB و خط Δ مساوی است با یک زاویهٔ بین $A'B'$ و خط Δ' . حال اگر خط Δ' را در حول P دوران داده بتدریج به Δ نزدیک کنیم، تساوی دو زاویهٔ مذکور همواره محفوظ است ؛ اما اگر B، ضمن تغییر مکان بر منحنی C، آن‌قدر به A نزدیک شود که با آن مشتبه گردد، یعنی قاطع AB در حول A آن‌قدر بچرخد که B بر A منطبق شود، قاطع AB در آن وضع، به مماس بر منحنی C در نقطهٔ A تبدیل می‌شود و در همان حال، B' که روی منحنی C' تغییر مکان می‌دهد، بر A' منطبق و قاطع $A'B'$ نیز به مماس بر C' در نقطهٔ A' تبدیل خواهد شد و Δ' هم بر Δ منطبق می‌شود و زاویه‌های BAA' و $A'B'x$ که همواره با هم مساوی بودند، به زاویه‌های بین Δ و مماسهای بر دو منحنی در A و A' تبدیل می‌شوند ؛ بنابراین : $M\hat{A}A' = M\hat{A}'A$.

با توجه به این که جهت این دو زاویه مختلف است، قضیهٔ بالا را می‌توان چنین بیان کرد : مماسهای بر دو منحنی منعکس در دو نقطهٔ منعکس A و A' ، نسبت به عمودمنصف AA' ، قرینهٔ یکدیگرند. از این‌جا می‌توان دریافت که اگر در A تقعر منحنی C به طرف قطب باشد، در A' تحدب C' به طرف قطب است و بعکس.

۱۷۰. منحنیهای (C) و (γ) و منعکسهایشان (C') و (γ') را در نظر می‌گیریم (شکل) ؛ A یکی از نقطه‌های برخورد دو منحنی، A' منعکس A و Ax مماس بر (γ) ، Ay مماس بر (C) ، $A'x'$ مماس بر (γ') و $A'y'$ مماس بر (C') فرض می‌شود ؛ می‌دانیم که :

$$x\hat{A}A' = x'\hat{A}'A$$

و

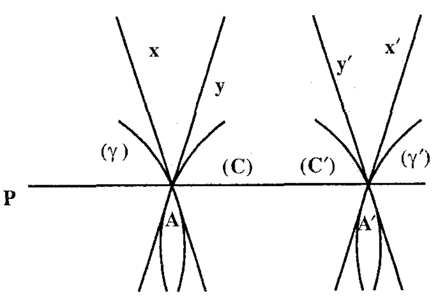
$$y\hat{A}A' = y'\hat{A}'A$$

از تفریق این دو رابطه خواهیم داشت :

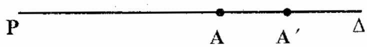
$$x\hat{A}A' - y\hat{A}A' = x'\hat{A}'A - y'\hat{A}'A$$

یعنی :

$$x\hat{A}y = x'\hat{A}'y'$$



۱۷۱. زیرا که اگر خط Δ (شکل) بر قطب P بگذرد، منعکس هر نقطهٔ A از آن، بر روی امتداد PA یعنی بر روی همان خط است.

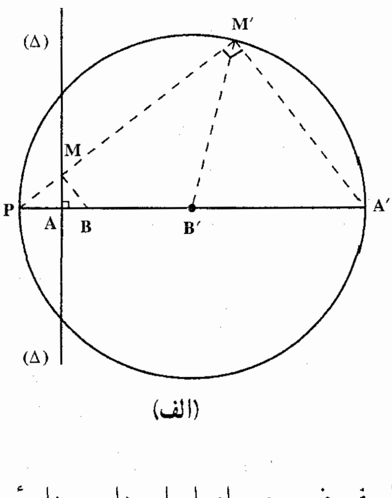


۱۷۲. فرض کنید A پای عمودی باشد که از P بر خط مفروض Δ رسم می‌شود؛ فرض کنید M نقطهٔ دلخواهی از Δ باشد و A' و M' منعکس A و M باشند (شکل الف). خطهای AM و AM' نسبت به خطهای PAA' و PMM' پادموازی‌اند؛ پس $A'\hat{M'}M = M\hat{A}P = 90^\circ$ و مکان هندسی M' دایرهٔ (PA') است که PA' قطری از آن است.

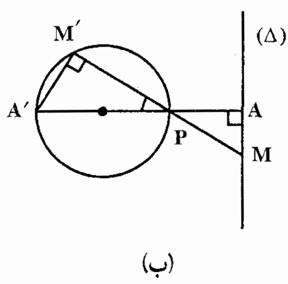
راه دیگر. فرض کنید B متقارن P نسبت به Δ و B' منعکس B باشد (شکل الف). چهار نقطهٔ B، B'، M و M' همدایره‌اند، پس دو مثلث PBM و $PB'M'$ متشابه‌اند و چون PMB متساوی‌الساقین است، داریم $B'M' = B'P$؛ پس نقطهٔ متغیر M' از نقطهٔ ثابت B' فاصلهٔ ثابتی برابر $B'P$ دارد و قضیه ثابت می‌شود.

چند نکته. ۱. دو اثبات ارائه شده دو راه برای ترسیم دایرهٔ منعکس یک خط، ارائه می‌کنند.

۲. در شکل (الف) هر دو نقطهٔ متناظر یک طرف مرکز انعکاس O قرار دارند، که نشان می‌دهد ثابت انعکاس k مثبت و دایرهٔ انعکاس (P) حقیقی است. ولی اثباتهای ارائه شده به‌ازای k منفی نیز معتبرند (شکل ب).



(الف)



(ب)

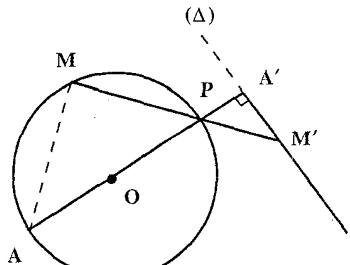
۳. اگر دایرهٔ انعکاس حقیقی باشد، خط مفروض محور اصلی این دایره و دایرهٔ منعکس این خط در واقع داریم (شکل الف):

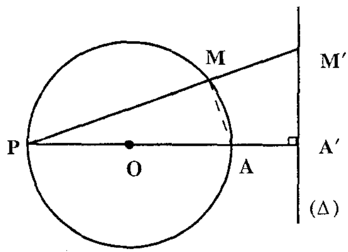
$$\overline{AP}.\overline{AA'} = \overline{AP}(\overline{AP}+\overline{PA'}) = \overline{AP}^2 + \overline{AP}.\overline{PA'} = \overline{AP}^2 - \overline{PA}.\overline{PA'}$$

$\overline{AP}.\overline{AA'}$ قوت A نسبت به دایرهٔ (PA') و $\overline{AP}^2 - \overline{PA}.\overline{PA'}$ قوت A نسبت به دایرهٔ انعکاس (P) است، زیرا $\overline{PA}.\overline{PA'}$ با مربع شعاع (P) برابر است ؛ پس گزارهٔ بیان شده ثابت می‌شود.

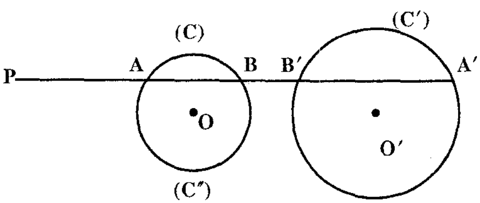
۴. داریم : $k = PB.PB' = ۲PA.PB'$ پس شعاع PB' از دایرهٔ انعکاس (PA') برابر $(k:۲PA)$ است.

۱۷۳. دایرهٔ O را که بر قطب انعکاس P می‌گذرد، در نظر می‌گیریم و A' منعکس A، انتهای قطر گذرنده بر P، را به‌دست می‌آوریم (شکل) ؛ حال اگر M' منعکس یک نقطهٔ غیرمشخص M از دایره باشد، چهار نقطهٔ A، A' ، M و M' بر محیط یک دایره واقعند و $M'\hat{A'}A$ که مکمل یا مساوی زاویهٔ قائمهٔ AMM' است، برابر ۹۰° است ؛ پس $M'A'$ بر PA' عمود است ؛ یعنی منعکس هر نقطه از دایره روی خطی است که از A' بر PA عمود شده باشد.





۱۷۴. فرض می‌کنیم که شکل (C') منعکس دایرهٔ (C) نسبت به قطب P با قوت a باشد (شکل) ؛ هرگاه قوت نقطهٔ P را نسبت به دایرهٔ (C) مساوی P



فرض کنیم، منعکس این دایره با قطب P و قوت P بر خود آن خواهد بود ؛ زیرا که منعکس هر نقطهٔ دایره بر روی همان دایره است ؛ این منعکس را (C'') می‌نامیم ؛ حالا برای دایرهٔ (C) نسبت به قطب P دو منعکس به‌دست آورده‌ایم، یکی با قوت a که شکل (C') است و دیگری با قوت r که دایرهٔ (C'') است و به‌طوری که می‌دانیم این دو منعکس، مجانس یکدیگرند ؛ پس شکل (C') مجانس دایرهٔ (C'') است با نسبت

تجانس $\frac{a}{r}$، یعنی دایره‌ای است که فاصلهٔ مرکز آن O'، از نقطهٔ P، مساوی $OP\times\frac{a}{r}$ و شعاعش مساوی با حاصلضرب شعاع دایرهٔ (C) در $\frac{a}{r}$ می‌باشد. به این ترتیب: منعکس دایره‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، مجانس آن هم هست و قطب انعکاس و مرکز تجانس بر یکدیگر منطبقند.

چند نکته. ۱. مرکز انعکاس یک مرکز تشابه دایرهٔ مفروض و دایرهٔ منعکس آن است.

۲. دو نقطهٔ منعکس A و A' دو نقطهٔ پاد همشکل در دو دایرهٔ منعکس هستند. نقطهٔ A' دایرهٔ (O') را در جهتی خلاف جهت حرکت نقطهٔ A بر روی دایرهٔ (O)، می‌پیماید.

۳. اگر R و R' شعاع دایره‌های (O) و (O') باشند، داریم (شکل):

$$R':R=\overline{PA'}:\overline{PB}=\overline{PA}.\overline{PA'}:\overline{PA}.\overline{PB}=k:r$$

پس، $R'=R(k:r)$

۴. اگر ثابت انعکاس با قوت مرکز انعکاس نسبت به دایرهٔ مفروض برابر باشد، منعکس دایره، خود آن دایره خواهد بود، زیرا در این صورت A' بر B منطبق است. وقتی ثابت انعکاس مثبت و در نتیجه دایرهٔ انعکاس حقیقی است، نتیجهٔ به‌دست آمده را می‌توان این طور بیان کرد: دایره‌ای متعامد با دایرهٔ انعکاس، بر خودش منعکس می‌شود.

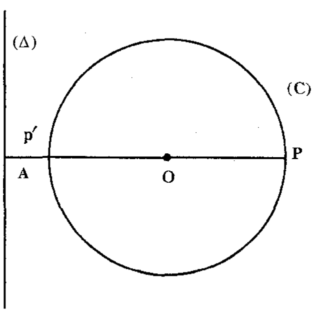
۱۷۵. می‌دانیم که خط و دایره نسبت به یکدیگر، ممکن است سه وضع داشته باشند:

اوّل. خط خارج دایره باشد.

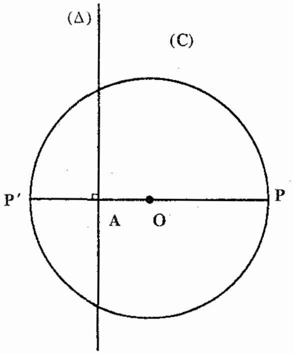
دوم. خط دایره را قطع کند.

سوم. خط بر دایره مماس باشد.

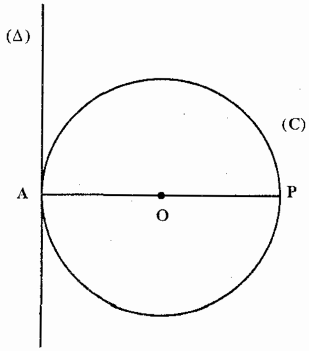
اینک قضیه را در هر سه حالت ثابت می‌کنیم.



اوّل. خط Δ خارج دایره است (شکل). از مرکز دایره خطی بر Δ عمود می‌کنیم تا آن را در A و دایره را در P و P' قطع کند؛ حال اگر P را قطب انعکاس اختیار کنیم، به سهولت معلوم می‌شود که خط Δ منعکس مثبت دایرهٔ (C) و (C) منعکس مثبت Δ است با قوت $\overline{PA}\times\overline{PP'}$؛ و اگر P' را قطب انعکاس اختیار کنیم، Δ منعکس منفی (C) و (C) منعکس منفی Δ است با قوت $\overline{P'A}\times\overline{P'P}$؛ پس Δ و (C) به دو طریق مثبت و منفی منعکس یکدیگرند.



دوم. خط دایره را قطع می‌کند (شکل). باز از مرکز دایره عمودی بر Δ رسم می‌کنیم تا خط و دایره را در A، P و P′ قطع کند؛ اگر P را قطب انعکاس فرض کنیم، به آسانی دیده می‌شود که (C) منعکس Δ و Δ منعکس (C) است با قوت $\overline{PA} \times \overline{PP'}$؛ و اگر P′ را قطب اختیار کنیم، خط منعکس دایره و دایره منعکس خط است با قوت $\overline{P'A} \times \overline{P'P}$؛ پس خط و دایره با دو قوت، منعکس مثبت یکدیگرند.

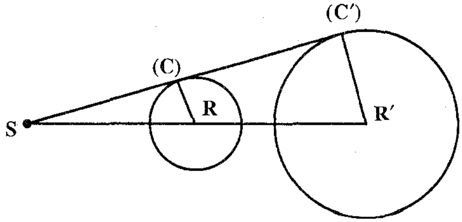


سوم. خط با دایره مماس است (شکل). عمودی که از O بر خط Δ رسم شود، بر نقطهٔ تماس A می‌گذرد؛ در این حال فقط می‌توان P را قطب انعکاس اختیار کرد و Δ و (C) را با آن قطب و قوت PA^2، منعکس مثبت یکدیگر دانست. A را نمی‌توان قطب انعکاس گرفت، زیرا که قوت انعکاس صفر می‌شود.

۱۷۶. در حقیقت، دو دایره به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، مجانس مستقیم و مجانس معکوس یکدیگرند. حال اگر S یکی از مرکزهای تجانس دو دایره باشد (شکل) و خط‌المرکزین، دو دایره را در A، B، B′ و A′ قطع کند و خط غیرمشخص دیگری که بر S می‌گذرد، دایره‌ها را در M، N، N′ و M′ تلاقی کند، برای اثبات قضیه کافی است، ثابت کنیم که M و M′ با قوت $SA \times SA'$ منعکس یکدیگرند؛ می‌دانیم که AM مجانس B′N′ و موازی با آن است؛ پس $A\hat{M}N = B\hat{N'}M'$؛ اما چون $B'\hat{N'}M'$ مکمل $M'\hat{A'}B'$ است، بنابراین $M'\hat{A'}A$ و $M'\hat{M}A$ مکمل یکدیگرند و چهار نقطهٔ A، M، M′ و A′ روی یک دایره واقعند و $SM.SM' = SA.SA'$، یعنی M′ منعکس M است با قوت $SA \times SA'$.

نکته. وقتی که دو دایره بر هم مماس باشند، نقطهٔ تماس، مرکز تجانس آنها هست، اما قطب انعکاس آنها نیست؛ زیرا که در این صورت قوت انعکاس صفر می‌شود.

۱۷۷. هرگاه S مرکز تجانس و قطب انعکاس دایره‌های (C) و (C′) باشد (شکل) و قوت انعکاس (C) و (C′) را a و قوت نقطهٔ S نسبت به (C) را P و نسبت به (C′) را P′



فرض کنیم، از طرفی می‌دانیم که نسبت تجانس (C') به (C) برابر $\frac{a}{P}$ و نسبت تجانس (C) و (C') برابر $\frac{a}{P'}$ می‌باشد و از طرف دیگر، نسبت تجانس (C') به (C) برابر $\frac{R'}{R}$ و نسبت تجانس (C) به (C') برابر $\frac{R}{R'}$ می‌باشد ؛ پس

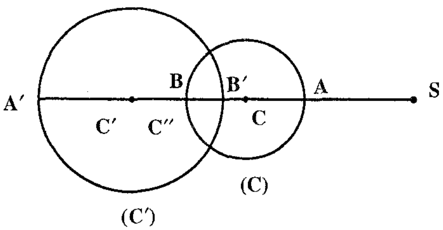
$$\frac{R'}{R}=\frac{a}{P} \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad \frac{R}{R'}=\frac{a}{P'} \quad (۲)$$

حال اگر رابطه‌های ۱ و ۲ را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\frac{a}{P'}\times\frac{a}{P}=\frac{R}{R'}\times\frac{R'}{R}=۱$$

و از آن‌جا : $a=\sqrt{PP'}$

۱۷۸. در انعکاس مفروض با قطب S و قوت k، منعکس دایرهٔ (C) را که بر مرکز انعکاس نگذشته است، دایرهٔ (C') می‌گیریم (شکل) ؛ چنانچه خط‌المرکزین دو دایره، محیط دایرهٔ (C) را در A و B و محیط دایرهٔ (C') را در A' و B' قطع کند (A' منعکس A و B' منعکس B است) و نقطهٔ C'' منعکس مرکز دایرهٔ (C) در این انعکاس باشد، داریم :



$$\overline{SB}.\overline{SB'}=k \ (۳) \quad \text{و} \quad \overline{SA}.\overline{SA'}=k \ (۲) \quad \text{و} \quad SC.SC''=k \ (۱)$$

چون (۴) $۲\overline{SC}=\overline{SA}+\overline{SB}$ است (زیرا بر طبق رابطهٔ شال می‌توان نوشت : $\overline{SC}=\overline{SA}+\overline{AC}$ و $\overline{SC}=\overline{SB}+\overline{BC}$ و نیز $\overline{AC}+\overline{BC}=۰$).

پس با استفاده از رابطه‌های ۱، ۲ و ۳، رابطهٔ ۴ چنین می‌شود :

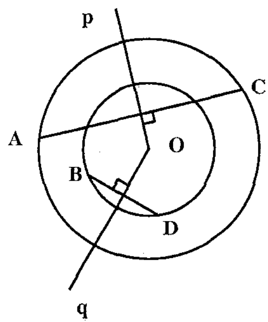
$$\frac{۲k}{\overline{SC''}}=\frac{k}{\overline{SA'}}+\frac{k}{\overline{SB'}}$$

و یا

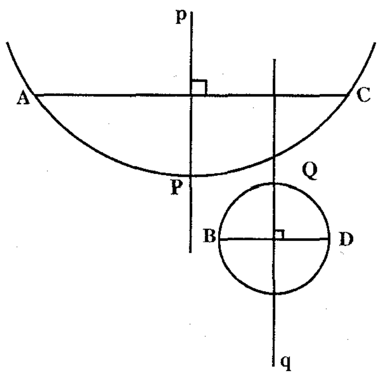
$$\frac{۲}{\overline{SC''}}=\frac{۱}{\overline{SA'}}+\frac{۱}{\overline{SB'}}$$

و این رابطه نشان می‌دهد که C'' مزدوج توافقی S است نسبت به دو نقطهٔ A' و B' و قضیه ثابت است.

۱۷۹. عمودمنصف پاره‌خط AC را با p و عمودمنصف پاره‌خط BD را با q نشان می‌دهیم. p و q نمی‌توانند بر هم منطبق باشند، بنابراین یا در یک نقطهٔ O متقاطعند و یا با هم‌موازی‌اند، اگر p و q در O متقاطع باشند، مطابق با شکل (الف) دایره‌های به مرکز O و به شعاعهای OA و OB متداخلند و اولّی بر A و C و دومی بر B و D می‌گذرد. اگر p با q موازی باشد، در این صورت AC نیز با BD موازی است، مطابق با شکل (ب). نقطه‌های p و Q بترتیب بر p و q و به یک فاصله از خطهای موازی AC و BD وجود دارند. دایره‌ای که بر A، C و P می‌گذرد با دایره‌ای که بر B، D و Q می‌گذرد، نقطهٔ مشترک نخواهند داشت.



(الف)



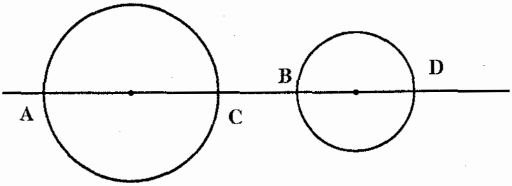
(ب)

تعریف. جفت نقطه‌های A و C را نسبت به جفت نقطه‌های B و D جداساز نامیم، هرگاه چهارنقطهٔ A، B، C و D یا بر یک خط و یا بر یک دایره واقع باشند و پاره‌خط یا کمان AC یکی و فقط یکی از دو نقطهٔ B و D را در برداشته باشد، به‌عبارت ساده‌تر هر یک از جفتها بین نقطه‌های جفت دیگر جدایی بیندازند. رابطهٔ مزبور را بنا به قرارداد به‌صورت زیر نشان می‌دهند: AC| |BD

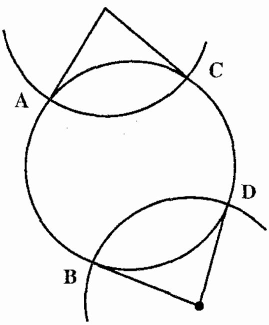
این رابطه را به هفت صورت دیگر می‌توان نوشت، مانند: AC| |BD یا AC| |DB.

نکته. هرگاه چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یک خط L بر یک دایره واقع باشند، امّا جفت نقطه‌های A و C نسبت به جفت نقطه‌های B و D جداساز نباشند، بسادگی می‌توان دو دایرهٔ بدون نقطهٔ مشترک رسم کرد که یکی بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد؛

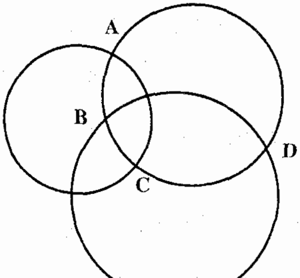
در حالتی که این چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، مانند شکل (پ) کافی است دایره‌های به قطرهای AC و BD را رسم کنیم؛ هرگاه چهار نقطهٔ A، B، C و D به شرط مذکور بر یک دایره واقع باشند، مانند شکل (ت) مماسهایی که در A و C بر دایره رسم کنیم و همچنین مماسهایی که در B و D بر آن رسم کنیم، مرکزهای دایره‌هایی متمایز را به دست می‌دهند. هرگاه، داشته باشیم AC| |BD ، در این صورت هر دایره که بر A و C بگذرد، از دو نقطهٔ B و D یکی در درون آن و دیگری در برون آن واقع خواهد شد. بنابراین، هر دایره که بر Aو C بگذرد با هر دایره که بر B و D بگذرد، متقاطع خواهد بود. صورت نقیض قضیهٔ قبلی بدین معنی است که هرگاه دایره‌ای دلخواه که بر دو خط مفروض می‌گذرد با دایرهٔ دلخواه دیگر که بر دو نقطهٔ مفروض دیگر می‌گذرد، حداقل در دو نقطه مشترک باشد، آن چهار نقطهٔ مفروض باید بر یک خط و یا بر یک دایره واقع باشند (شکلهای (ث) و (ج)). در چنین حالتی، دو



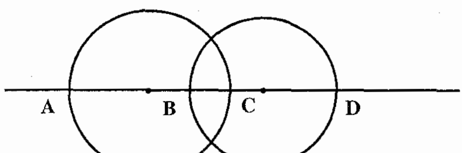
(پ)



(ت)



(ج)



(ث)

جفت نقطه‌های مفروض هر کدام نسبت به دیگری جداساز می‌باشند. با توجه به آن‌چه گفته شد، می‌توانیم بدون قید آن که چهار نقطه بر یک خط یا بر یک دایره واقع باشند، تعریف مفهوم جداسازی Separation را به شرح زیر بیان کنیم :

دو جفت نقطه‌های (A، C) و (B، D) را نسبت به یکدیگر جداساز می‌گوییم هرگاه هر دایرهٔ گذرنده بر A و C با هر دایرهٔ گذرنده بر B و D حداقل در دو نقطه مشترک باشد؛ که این دو دایره یا متقاطعند و یا منطبقند، باید گفت که به نوع دیگری و بدون ارتباط دادن هیچ دایره‌ای می‌توان جداسازی را تعریف کرد.

۱۸۰. اثبات این قضیه هر چند که نیاز به یادآوریهایی دارد اما حائز اهمیت است، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، در این صورت با استفاده از ویژگیهای برداری فرض می‌کنیم که:

$$\vec{AD} = x \ ، \ \vec{BD} = y \ ، \ \vec{CD} = z$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\vec{AB} = x - y \ ، \ \vec{BO} = y - z \ ، \ \vec{AC} = x - z$$

بنابراین:

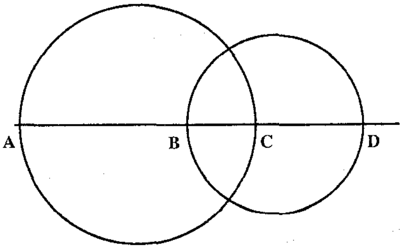
$$\vec{AB}\times\vec{CD}+\vec{BC}\times\vec{AD} = (x-y)z+(y-z)x$$

$$= (x-z)y = \vec{AC}\times\vec{BD} \qquad (۱)$$

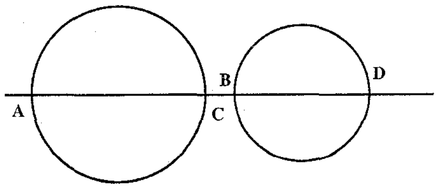
هرگاه داشته باشیم $|BD|$ $|AC|$، مانند شکل (الف)، پاره‌خط AC فقط یکی از دو نقطهٔ B یا D را در بردارد و بنابراین نسبتهای $\vec{AB}:\vec{BC}$ و $\vec{AD}:\vec{DC}$ مختلف‌العلامتند و در نتیجه حاصلضربهای $\vec{AB}\times\vec{DC}$ و $\vec{BC}\times\vec{AD}$ نیز مختلف العلامتند و بنابراین حاصلضربهای $\vec{AB}\times\vec{CD}$ و $\vec{BC}\times\vec{AD}$ هم‌علامت می‌باشند. در چنین حالتی رابطهٔ (۱) برای اندازه‌های هندسی بردارها نیز محقق خواهند بود. امّا اگر جفت A، C نسبت به جفت B، D جداساز نباشد، مانند شکل (ب)، علامتهای گفته شده تغییر خواهند کرد؛ مثلاً حاصلضربهای $\vec{AB}\times\vec{CD}$ و $\vec{BC}\times\vec{AD}$ مختلف‌العلامت می‌باشند. در این حالت وقتی اندازه‌های هندسی بردارها را در نظر بگیریم، از رابطهٔ (۱) برمی‌آید که مقدار مثبت $AC\times BD$ که با تفاضل دو مقدار مثبت $AB\times CD$ و $BC\times AD$ برابر است، از مجموع این دو مقدار مثبت کوچکتر خواهد بود، یعنی داریم:

$$AB\times CD+BC\times AD > AC\times BD$$

بنابراین برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، حکم قضیه ثابت شده است. برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع نباشند، از بین آنها دست‌کم سه نقطه تشکیل مثلث می‌دهند. مثلاً مثلث ABC، و چهارمین نقطه، یعنی D، یا بر یکی از ضلعهای این مثلث واقع است و یا داخل یا خارج آن قرار خواهد داشت. در هر صورت بنابه قضیهٔ



(الف)



(ب)

بطلمیوس و عکس آن خواهیم داشت :

$$AB\times CD+BC\times AD\geq AC\times BD$$

تساوی فقط وقتی برقرار است که چهار نقطه بر یک دایره واقع باشند.

۱۸۱. نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ غیرمشخص A، B، C و D که جدا از هم و به همین ترتیب مفروضند، عبارت است از عدد (ABCD) که برحسب فاصله‌های دو به‌دوی این نقطه‌ها به‌صورت فرمول زیر تعریف می‌شود :

$$(ABCD)=\frac{AC.BD}{AD.BC}\left(\text{یا}\ \frac{CA}{CB}.\frac{DA}{DB}\right)$$

هرگاه طرفین رابطه‌ها $AB.CD+BC.AD\geq AC.BD$ را که برای چهار نقطهٔ واقع در یک صفحه برقرار است، بر $AC.BD$ تقسیم کنیم، با توجه به تعریف بالا نتیجه خواهد شد که : این ارتباط بین نسبتهای ناهمساز و (جداسازی) امکان آن را به‌وجود می‌آورد که بر عکس آن‌چه که قبلاً عمل کردیم، عمل کنیم ؛ یعنی به‌جای آن که جداسازی را برحسب دایره‌ها تعریف کنیم، اکنون دایره‌ها را برحسب جداسازی تعریف کنیم ؛ زیرا سه نقطهٔ متمایز A، B و C یک دایره (یا یک خط) منحصر به فرد را مشخص می‌کنند و می‌توان آن را متشکل از همان سه نقطه و همهٔ نقطه‌های X دانست، به قسمی که :

$$BC|\quad|AX\quad,\quad CA|\quad|BX\quad,\quad AB|\quad|CX$$

۱۸۲. داریم :

$$(A'B'C'D')=\frac{\overline{A'C'}\times\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}\times\overline{B'C'}}=\frac{\dfrac{k^2.\overline{AC}}{\overline{OA}.\overline{OC}}\times\dfrac{k^2.\overline{BD}}{\overline{OB}.\overline{OD}}}{\dfrac{k^2.\overline{AD}}{\overline{OA}.\overline{OD}}\times\dfrac{k^2.\overline{BC}}{\overline{OB}.\overline{OC}}}=\frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{\overline{AD}.\overline{BC}}=(ABCD)$$

از این ویژگی نیز برمی‌آید که در انعکاس، ویژگی جداسازی بین دو جفت نقطه محفوظ می‌ماند، یعنی انعکاس نسبت ناهمساز چهارنقطه را محفوظ می‌دارد.

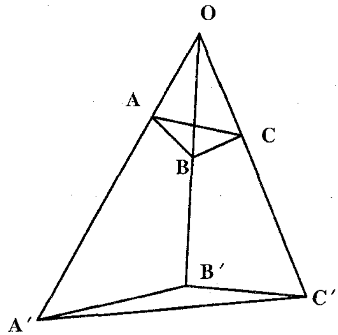
۱۸۳. زیرا با توجه به قضیه‌ها از رابطهٔ $|BD| \quad |AC$ نتیجه می‌شود که :

$$(A'D'B'C')+(A'B'D'C')=(ADBC)+(ABDC)=۱$$

بنابراین داریم : $|B'D'| \quad |A'C'$

۱۸۴. فرض کنید OABC چهارضلعی مفروض (شکل) و A' ، B' و C' نقطه‌های منعکس A، B و C در انعکاس (k و O) باشند. داریم :

$$\frac{AB}{OA.OB}=\frac{A'B'}{k} \; , \; \frac{BC}{OB.OC}=\frac{B'C'}{k} \; , \; \frac{AC}{OA.OC}=\frac{A'C'}{k}$$



حال اگر OABC محاطی نباشد، نقطه‌های A' ، B' و C' همخط نیستند ؛ پس،

$$A'B'+B'C'>A'C' \qquad (۱)$$

پس،

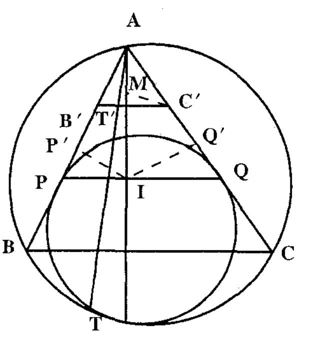
$$\frac{AB}{OA.OB}+\frac{BC}{OB.OC}>\frac{AC}{OA.OC} \qquad (۲)$$

یا

$$AB.OC+BC.OA>AC.OB \qquad (۳)$$

ولی اگر OABC محاطی باشد، نقطه‌های A' ، B' و C' همخطند ؛ پس در (۱) و (۲) و (۳) علامت $>$ باید با علامت تساوی (=) عوض شود.

۱۸۵. فرض کنید دایرهٔ PQT در نقطهٔ T بر دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC مماس داخلی باشد (شکل) و در نقطه‌های P و Q بر ضلعهای AB و AC مماس باشد. فرض کنید I نقطهٔ وسط PQ باشد. اگر B' و C' منعکسهای B و C ، در انعکاس (A, AI^2) باشند، خط $B'C'$ منعکس (O) است و خط AT خط $B'C'$ را در T' منعکس T، قطع می‌کند.



فرض کنید P' و Q' منعکسهای P و Q باشند، داریم $AP.AP' = AI^{2}$ و چون مثلث AIP در رأس I قائمه است، نقطهٔ P' پای عمودی است که از I بر وتر AP رسم می‌شود. مطلب مشابهی در مورد Q' صادق است. حال چون دایرهٔ $P'Q'T'$ منعکس دایرهٔ PQT است، و در نتیجه در T' بر $B'C'$ مماس است، I مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $AB'C'$ نسبت به A است. دایرهٔ $IB'C'$ خط IA را در M ، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث $AB'C'$ ، قطع می‌کند و در چهار ضلعی محاطی $IB'MC'$ داریم :

$$B'\hat{I}M = B'\hat{C'}M = \frac{1}{2}B'\hat{C'}A = \frac{1}{2}A\hat{B}C$$

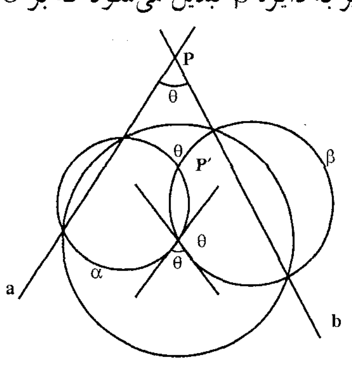
زیرا خطهای BC و $B'C'$ نسبت به AB و AC پادموازی‌اند. خطهای BI و $B'I$ نیز نسبت به AB و AI پادموازی‌اند، زیرا نقطه‌های B' و I منعکسهای B و I هستند ؛ پس،

$$A\hat{B}I = B'\hat{I}A = B'\hat{I}M = \frac{1}{2}A\hat{B}C$$

و I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ABC است.

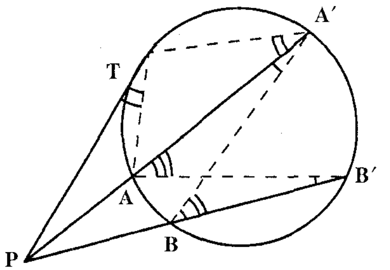
اثبات در حالت مماس خارجی نیز مشابه همین اثبات است.

۱۸۶. با مطرح ساختن دایره‌ها مطرح شدن زاویه‌ها خود به خود به میان می‌آید. زاویهٔ بین دو دایرهٔ متقاطع همان زاویه‌ای است که مماسهای رسم شده بر آن دو دایره در یکی از نقطه‌های تقاطعشان با یکدیگر می‌سازند ؛ زیرا به علت تقارن نسبت به خط‌المرکزین، زاویه‌های دو دایره در دو نقطهٔ تقاطعشان با یکدیگر برابرند. برای بررسی این که آیا در انعکاس نسبت به یک دایرهٔ به مرکز O ، زاویه‌ها تغییر می‌کنند یا نه، دو خط a و b در نظر می‌گیریم که در p با هم برخورد کرده و با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند، در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز O خط a به دایرهٔ α تبدیل می‌شود که بر O می‌گذرد و مماس بر این دایره در O با a موازی است. خط b نیز به دایرهٔ β تبدیل می‌شود که بر O می‌گذرد و مماس بر آن در O با b موازی است. زاویهٔ بین دو مماس که با θ برابر است بنا به تعریف زاویهٔ بین دو دایرهٔ α و β می‌باشد.



دو دایرهٔ α و β در نقطهٔ دیگر P' که منعکس نقطهٔ P است نیز متقاطعند و زاویهٔ بین دو دایره در P' با زاویهٔ بین آنها در O برابر بوده و همان θ است. هرگاه a و b در O برخورد کرده

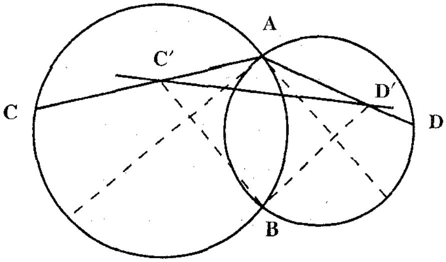
باشند، منعکس هر کدام بر خودش واقع است و تغییرناپذیری θ باز هم ثابت است. هرگاه a و b بر دایره‌هایی که از p می‌گذرند، مماس باشند، این دایره‌ها پس از انعکاس به مماسهای بر α و β در P' تبدیل می‌شوند.



۱۸۷. هرگاه در شکل، انعکاسی در نظر بگیریم که O قطب آن بر P واقع بوده و A و A' منعکسهای یکدیگر باشند، در این صورت داریم:

$k^2 = \overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OT}^2$

بنابراین هر قاطع، مانند OBB' که بر O بگذرد، دایره را در دو نقطهٔ منعکس یکدیگر قطع می‌کند و بعلاوه نقطهٔ تماس هر مماسی که از D بر دایره رسم شود، مانند T نقطهٔ تماس OT، منعکس خودش می‌باشد که روی دایرهٔ انعکاس ω واقع است.



۱۸۸. A، B، C و D (شکل) چهار نقطهٔ مفروضند. فرض کنید که دو دایرهٔ ABC و ABD متعامد باشند. در انعکاسی که (AB و A) دایرهٔ انعکاس آن است، نقطهٔ B به خودش و دایره‌های ABC و ABD به دو خط راست تبدیل می‌شوند. این دو خط در B بر هم عمودند و به ترتیب از منعکسهای C و D، یعنی نقطه‌های C' و D' می‌گذرند.

دایرهٔ CDA به خط $C'D'$ و دایرهٔ CDB به دایرهٔ $C'D'B$ تبدیل می‌شود. چون $C'\hat{B}D'$ قائمه است، خط $C'D'$ قطری از دایرهٔ $C'D'B$ است و بنابراین، بر دایره عمود است، پس می‌توان نتیجه گرفت که دایره‌های (CDA) و (CDB) متعامدند و قضیه ثابت می‌شود.

روش دیگر. در انعکاس (P و C) که در آن P قوت نقطهٔ C نسبت به دایرهٔ ABD است، دایرهٔ ABD به خودش تبدیل می‌شود و خطهای CA، CB و CD این دایره را در A'، B' و D' (منعکسهای نقطه‌های A، B و D) نیز قطع می‌کنند. دایرهٔ CAB به خط راست $A'B'$ تبدیل می‌شود و این خط یک قطر دایرهٔ ABD است، زیرا دایره‌های ABC و ABD بنابر فرض بر هم عمودند. دایره‌های CDA و CDB به خطهای

$D'A'$ و $D'B'$ تبدیل می‌شوند. این دو خط بر هم عمودند؛ پس دایره‌های CDA و CDB نیز بر هم عمودند.

۱۸۹. در شکل (الف) مثلث ABC، مثلث میانه‌ای آن $A'B'C'$، دایرهٔ محاطی داخل آن به مرکز I که در X بر BC مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A به مرکز I_a که در X_a بر BC مماس است و بالاخره B_1C_1 مماس مشترک داخلی دیگر این دو دایره مشاهده می‌شود. دایرهٔ ω به قطر XX_a نیز رسم شده است و B_1C_1 با BC، $A'B'$ و $A'C'$ بترتیب در S، B'' و C'' برخورد کرده است. دایرهٔ ω بر هر یک از دایره‌های به مرکز I و I_a عمود است، پس هر یک از دایره‌ها در انعکاس به دایرهٔ ω منعکس خودش می‌باشد. اکنون ثابت خواهیم کرد که در همین انعکاس خط B_1C_1 منعکس دایرهٔ نه نقطه است. با فرض این که S نصف محیط مثلث ABC باشد، داریم: $BX = X_aC = s-b$.

و از آن جا نتیجه می‌شود که A' وسط BC مرکز دایرهٔ ω است و طول قطر این دایره برابر است با: $XX_a = a-۲(s-b) = b-c$.

(نامگذاری رأسهای مثلث را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که این مقدار مثبت باشد.)

چون دایرهٔ نه نقطه بر A' مرکز دایرهٔ ω می‌گذرد، پس منعکس آن نسبت به این دایره خطی است مستقیم. ثابت می‌کنیم که این خط بر B'' و C'' (و در نتیجه بر B_1 و C_1) می‌گذرد، یعنی ثابت می‌کنیم که B'' و C'' منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند.

نقطهٔ S بر خط II_a یعنی بر نیمساز زاویهٔ A_1 واقع است، پس ضلع BC را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث ABC تقسیم می‌کند و داریم:

$$CS = \frac{ab}{b+c} \quad \text{و} \quad SB = \frac{ac}{b+c}$$

با محاسبهٔ نصف تفاضل این دو مقدار داریم:

$$SA' = \frac{a(b-c)}{۲(b+c)}$$

همچنین می‌دانیم که:

$$BC_1 = AC_1 - AB = AC - AB = b-c$$

$$CB_1 = BC_1 = b-c$$

مثلثهای $SA'B''$ و SBC_1 و همچنین مثلثهای $SA'C''$ و SCB_1 با هم متشابه‌اند و نتیجه می‌شود:

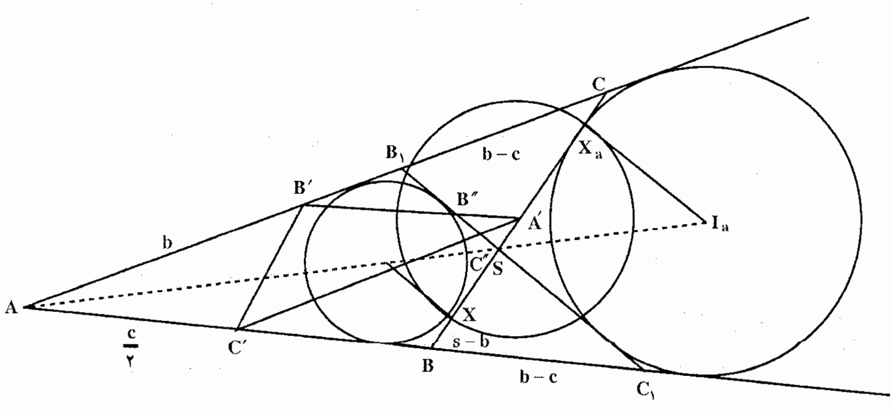
$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{۲c}$$

$$\frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_۱} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{۲b}$$

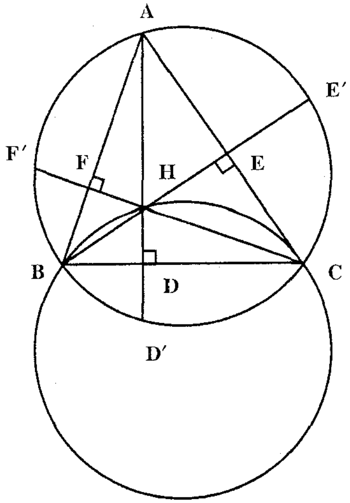
$$A'B' \times A'B'' = \frac{c}{۲} \cdot \frac{(b-c)^۲}{۲c} = \left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$

$$A'C' \times A'C'' = \frac{b}{۲} \cdot \frac{(b-c)^۲}{۲b} = \left(\frac{b-c}{۲}\right)^۲$$

چون $\frac{b-c}{۲}$ شعاع دایرهٔ ω است، پس نسبت به دایرهٔ ω نقطه‌های B'' و C'' به‌ترتیب منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند. بنابراین در انعکاس نسبت به دایرهٔ ω هر یک از دایره‌های محاطی به مرکزهای I و I_a منعکس خودش می‌باشد و خط $B_۱C_۱$ منعکس دایرهٔ نه نقطه است، و چون این خط بر دو دایرهٔ مزبور مماس است، پس دایرهٔ نه نقطه نیز بر دو دایرهٔ مزبور مماس می‌باشد. با روش مشابه ثابت می‌شود که دایرهٔ نه نقطه بر هر یک از دو دایرهٔ محاطی خارجی دیگر مثلث نیز مماس است. دایرهٔ نه نقطه بر نقطه‌های D ، E و F (شکل ب) می‌گذرد که این نقطه‌ها عبارتند از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارگوشهٔ ABCH ، به عبارت دیگر، چهار مثلث ABC، BCH، CAH و ABH دارای یک دایرهٔ نه نقطه‌اند، امّا دایره‌های محاطی آنها متفاوتند. بنابراین چهارگوشهٔ ارتفاعی مجموعهٔ شانزده دایره را مشخص می‌کند که همه بر دایرهٔ DEF مماس می‌باشند.



(الف)



(ب)

۱۹۰. برای چنین تبدیلی کافی است که مرکز دایرهٔ انعکاس یکی از نقطه‌های حد O یا P از دسته دایره غیر متقاطع $\alpha\beta$ انتخاب شود. هرگاه، α داخل β واقع باشد، هر دایرهٔ انعکاس به مرکز O (یا P) دایرهٔ α را به بزرگترین (یا کوچکترین) دایره‌های هم‌مرکز تبدیل خواهد کرد. هرگاه مرکز دایرهٔ انعکاس را ثابت نگاه داشته اما شعاع آن را تغییر دهیم که در نتیجه یک جفت دیگر دایره‌های هم‌مرکز را جانشین جفت دایره‌های هم‌مرکز خواهیم ساخت که نسبت بین شعاعهای آنها محفوظ خواهد ماند و در نتیجه این تبدیل معادل است با حاصل ترکیب تبدیل اوّل با یک تجانس. همچنین، هر دایرهٔ انعکاس به مرکز P یک جفت دایرهٔ هم‌مرکز را به جفت دیگر دایره‌های هم‌مرکز تبدیل خواهد کرد که شعاعهای آنها بر نسبت عکس خواهند بود.

هرگاه α و ω دو دایرهٔ دلخواه متمایز باشند، منعکس α نسبت به ω به دسته دایره‌های $\alpha\omega$ تعلق خواهد داشت: هر دو دایرهٔ دلخواهی که بر هر یک از دو دایرهٔ α و ω عمود باشند، بر منعکسهای آنها نیز عمود خواهند بود. اگر منعکس α را β بنامیم، دایرهٔ ω را دایرهٔ «نیمساز» دو دایرهٔ α و β می‌نامیم (در این مورد اصطلاح «دایرهٔ متشابه انعکاسی» نیز به کار می‌رود، اما اصطلاح «نیمساز» مناسبتر است (اصطلاح نیمساز در این جا به این مناسبت است که اگر α، β و ω جزء یک دسته دایره باشند و α و β نسبت به ω منعکس یکدیگر باشند، در حالتی که α و β متقاطعند، بسادگی ثابت می‌شود که دایرهٔ ω نیمساز دو دایرهٔ α و β است. اگر سه منحنی C_1، C_2 و C_3 از

یک نقطه بگذرند و مماس رسم شده در این نقطه بر C_1 نیمساز زاویهٔ بین مماسهای رسم شده در این نقطه بر C_2 و C_3 باشد، منحنی C_1 نیمساز دو منحنی C_2 و C_3 در نقطهٔ تقاطع آنها نامیده می‌شود. حال اگر منحنیها دایره باشند و یک دایره در هر دو نقطهٔ تقاطع نیمساز دو دایرهٔ دیگر باشد، این دایره را به طور مطلق نیمساز دو دایرهٔ دیگر می‌گویند.))
دایرهٔ β به دسته دایرهٔ $\alpha\omega$ و دایرهٔ ω به دسته دایره‌های $\alpha\beta$ تعلق خواهد داشت.
اکنون در مرحله‌ای هستیم که به اثبات قضیهٔ زیر بپردازیم:
قضیه. هر دو دایرهٔ دلخواه حداقل یک دایرهٔ نیمساز دارند؛ اگر دو دایره غیر متقاطع یا مماس باشند، دایرهٔ نیمساز آنها منحصر به فرد است؛ اگر دو دایره متقاطع باشند، دارای دو دایرهٔ نیمساز عمود بر یکدیگر خواهند بود؛ زیرا دو دایره که متقاطع باشند توسط انعکاس به دو خط متقاطع تبدیل می‌شوند که این دو خط متقاطع دارای دو نیمساز عمود بر هم می‌باشند. در تبدیل عکس نتیجه می‌شود که دو دایرهٔ متقاطع دارای دو دایرهٔ نیمساز عمود بر یکدیگرند که این دو دایره بر نیمسازهای زاویه‌های بین مماسهای رسم شده بر دو دایرهٔ متقاطع در نقطه‌های تقاطع آنها مماس می‌باشند. دو دایرهٔ α و β که بر هم مماس باشند توسط انعکاس به دو خط متوازی تبدیل می‌شوند و در نتیجه بیش از یک دایرهٔ نیمساز ندارند.
هرگاه دو دایرهٔ α و β نقطهٔ مشترک نداشته باشند، می‌توان توسط انعکاس آنها را به دو دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای مثلاً a و b تبدیل کرد. در این صورت این دو دایره نسبت به دایرهٔ به شعاع $\sqrt{ab}$ و هم مرکز آنها منعکس یکدیگر می‌باشند و با تبدیل انعکاسی عکس نتیجه می‌شود که دو دایرهٔ غیر متقاطع α و β فقط یک دایرهٔ نیمساز دارند. اگر α و β دو دایرهٔ متساوی باشند، دایرهٔ نیمساز آنها همان محور اصلی آنها می‌باشد.

۱۹۳. فرض کنید (P) و (Q) دو دایرهٔ دلخواه از دسته دایرهٔ هم محور (E) باشند، که مزدوج دسته دایرهٔ هم محور مفروض (F) است. فرض کنید هر دایرهٔ (C) از دسته دایرهٔ (F) به دایرهٔ (C')، که بر منعکسهای (P) و (Q) (یعنی (P') و (Q')) عمود است، تبدیل شود؛ پس (C') دسته دایرهٔ هم‌محور (F') را تعیین می‌کند.

بحث. یکی از دو دسته دایرهٔ هم محور مزدوج (E) و (F)، مثلاً (F)، دو نقطهٔ اساسی A و B دارد که نقطه‌های حدی دسته دایرهٔ دیگر (E) هستند. دایره‌های منعکس (F)، یعنی دایره‌های (F') از منعکسهای A و B، یعنی A' و B' می‌گذرند.
دایره‌های (E) به دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم محور (E')، تبدیل می‌شوند که مزدوج (F') است؛ پس نقطه‌های A' و B' نقطه‌های حدی (E') هستند.

اگر یکی از نقطه‌های A و B ، مثلاً A را مرکز انعکاس بگیریم، دایره‌های (F) به خطهای راستی تبدیل می‌شوند که از ′B ، منعکس B، می‌گذرند ؛ هر دایرهٔ (′E) بر خطهایی که از ′B می‌گذرند عمود است، یعنی ′B مرکز مشترک همهٔ دایره‌های (′E) است.

نتیجه. در انعکاس، دو نقطهٔ وارون نسبت به یک دایرهٔ مفروض، به دو نقطهٔ وارون نسبت به دایرهٔ منعکس دایرهٔ مفروض، تبدیل می‌شوند. نقطه‌های حدی A و B نسبت به هر دایره‌ای از (E)، مثلاً (M)، وارون یکدیگرند، و نقطه‌های ′A و ′B نسبت به (′M)، منعکس (M)، وارون یکدیگرند.

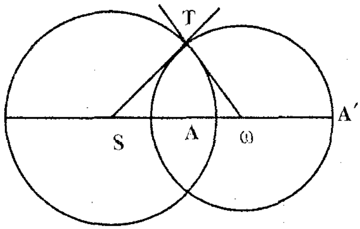
۱۹۴. فرض کنید (C) و (′C) دو دایرهٔ منعکس باشند و فرض کنید (S) دایرهٔ انعکاس باشد. اگر (S) و (C) دو نقطهٔ مشترک داشته باشند، دایرهٔ (′C) از این دو نقطه می‌گذرد، زیرا نقطه‌های (S) روی خودشان منعکس می‌شوند.

اگر (S) و (C) نقطهٔ مشترک نداشته باشند، یک دسته دایرهٔ هم محور نامتقاطع را تعیین می‌کنند که دو نقطهٔ حدی L و ′L دارد. این نقطه‌ها که نسبت به (S) وارون یکدیگرند، به یکدیگر منعکس می‌شوند و چون نسبت به (C) وارون یکدیگر هستند، نسبت به (′C) وارون یکدیگرند ؛ پس (S)، (C) و (′C) به یک دسته دایرهٔ هم محور تعلق دارند.

نتیجه. اگر دو دایره نسبت به یک دایرهٔ دیگر، به عنوان دایرهٔ انعکاس، منعکس هم باشند، آن‌گاه این دایره، دایرهٔ تشابه آن دو دایره است. مرکز دایرهٔ سوم (S) مرکز تشابه دو دایرهٔ (C) و (′C) است و (S) با (C) و (′C)، هم محور است، بنابراین گزارهٔ بیان شده، درست است.

۱۹۵. رأس A و پای ارتفاع AD از مثلث ABC نسبت به دایرهٔ قطبی (H) از مثلث ABC وارون یکدیگرند ؛ گزاره‌های مشابهی برای دو نقطهٔ B و E و همچنین، برای دو نقطهٔ C و F برقرارند ؛ پس دایرهٔ محیطی ABC = (O) و دایرهٔ نه نقطهٔ DEF = (N) نسبت به (H) منعکس یکدیگرند ؛ پس (O)، (N) و (H) هم محورند. نقطهٔ برخورد مماسهایی که از B و C بر (O) رسم می‌شوند، قطب BC نسبت به (O) است ؛ پس اگر این نقطهٔ برخورد را L بنامیم، L و نقطهٔ وسط BC ، ′A ، نسبت به (O) وارون یکدیگرند. گزاره‌های مشابهی نیز برای دو نقطهٔ M و ′B و همچنین دو نقطهٔ N و ′C برقرارند، پس دایرهٔ محیطی LMN = (T) از مثلث مماسی و A′B′C′ = (N) نسبت به (O) منعکس یکدیگرند و در نتیجه، (O)، (T) و (N) هم محورند. در نتیجه چهار دایرهٔ (O)، (N)، (H) و (T) هم محورند.

نتیجه. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مماسی روی خط اویلر مثلث مفروض قرار دارد.



۱۹۷. اگر A' منعکس A به قطب S و قوت k باشد، داریم $SA.SA' = k$ و چنانچه از S مماس ST را بر دایرهٔ به قطر AA' رسم کنیم، بنا به تعریف دایرهٔ به مرکز S و شعاع ST دایرهٔ انعکاس است؛ زیرا: $R_{(s)} = ST = \sqrt{\overline{SA}.\overline{SA'}} = \sqrt{k}$ و چون $P_{s(\omega)} = \overline{SA}.\overline{SA'} = \overline{ST}^2 = R^2$ است، یعنی قوت مرکز دایرهٔ انعکاس (دایرهٔ به مرکز S و شعاع دایرهٔ ST) نسبت به دایرهٔ به قطر AA' مساوی مربع شعاع دایرهٔ (S) است، پس دو دایره بر هم عمودند.

۱۹۹. بر دایرهٔ انعکاس قرار دارند.

۲.۲. انعکاس در: نقطه، خط، زاویه، ...

۱.۲.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۰۰. فرض کنیم O قطب انعکاس و k قوت انعکاس باشد. اگر A'، B' و C' منعکسهای A، B و C و $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ و $B'C' = a'$، $C'A' = b'$ و $A'B' = c'$ باشند، داریم:

$$a' = \frac{ka}{OB.OC} \;;\; b' = \frac{kb}{OC.OA} \;;\; c' = \frac{kc}{OA.OB}$$

و برای این که مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع شود، لازم است:

$$\frac{a}{OB.OC} = \frac{b}{OC.OA} = \frac{c}{OA.OB}$$

و یا

$$\frac{OB}{OC} = \frac{c}{b} \;,\; \frac{OC}{OA} = \frac{a}{c}$$

چنانچه A' و A''، و B' و B'' پای نیمسازهای زاویه‌های A و B باشند، O در محل تلاقی دایره‌هایی به قطرهای $A'A''$ و $B'B''$ است. بنابراین، برای O دو جواب به‌دست

می‌آید که نقطه‌های مشترک سه دایرهٔ آپولونیوس متعلق به مثلث ABC می‌باشند. اگر A، B و C بر یک استقامت باشند، به همین نتیجه می‌رسیم.

۲۰۱. الف. فرض می‌کنیم $BD \parallel AC$ و علاوه بر آن چهار نقطهٔ مفروض بر یک دایرهٔ γ واقع باشند. دو دایرهٔ β و α را در نظر می‌گیریم که بر دایرهٔ γ عمود باشند و α بر A و C و β بر B و D بگذرد و نقطه‌های برخورد این دو دایره را با L و O نشان می‌دهیم. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دایره‌های α و β به دو قطر از دایرهٔ γ تبدیل می‌شوند به گونه‌ای که $A'B'C'D'$ یک مستطیل به مرکز O' خواهد بود.

ب. فرض می‌کنیم $CD \parallel AB$ یا $BC \parallel AD$ و دایره‌های γ، α و β را به گونهٔ بالا در نظر می‌گیریم، اما این بار دو دایرهٔ α و β متقاطع نمی‌باشند. نقطه‌های حد دسته دایره‌های $\alpha\beta$ را با L و O نشان می‌دهیم، یعنی L و O نقطه‌های برخورد γ با خط‌المرکزین α و β می‌باشند. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دو دایرهٔ α و β به دو دایرهٔ به مرکز مشترک O' تبدیل می‌شوند. چون $A'C'$ و $B'D'$ (که روی یک خط واقعند) قطرهای دو دایرهٔ هم مرکز می‌باشند، پس $A'B'C'D'$ یک متوازی‌الاضلاع به وضع خاص می‌باشد.

پ. وقتی A، B، C و D روی یک دایره واقع نباشند، چهار دایرهٔ متمایز ABC، ACD، ABD و BCD را معین می‌کنند. یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABC و ACD را که جداسازی بین B و D را پدید می‌آورد با μ نشان می‌دهیم. همچنین یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABD و BCD را که جداسازی بین A و C را پدید می‌آورد با ν نشان می‌دهیم. دو دایرهٔ μ و ν در L و O برخورد می‌کنند. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دایره‌های ABC و ACD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'C'$ و $A'C'D'$ تبدیل می‌شوند که μ' محور اصلی آنها بین B' و D' جداسازی پدید می‌آورد به گونه‌ای که : $A'\hat{B}'C' = C'\hat{D}'A'$. همچنین در انعکاس مزبور دایره‌های ABD و BCD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'D'$ و $B'C'D'$ تبدیل می‌شوند که ν' محور اصلی آنها جداسازی بین A' و C' را پدید می‌آورد و داریم :

$$D'\hat{A}'B' = B'\hat{C}'D'$$

بنابراین $A'B'C'D'$ یک متوازی‌الاضلاع است.

یادداشت. در هر یک از حالتهای بالا، جفت نقطهٔ (L,O) به نام ژاکوبن جفتهای نقطه‌های (A,C) و (B,D) موسوم است.

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۲.۲.۲.۱. جای نقطه

۲۰۲. اگر A مبدأ محور فرض کنیم، چون بنا به فرض: چهار نقطهٔ A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، داریم:

$$\frac{۲}{\overline{AB}}=\frac{۱}{\overline{AC}}+\frac{۱}{\overline{AD}} \quad (۱)$$

در صورتی که D'، B' و C' بترتیب منعکسهای D، B و C با قطب A و قوت k باشند، داریم:

$$AB.AB'=AC.AC'=AD.AD'=k$$

و یا

$$\frac{۱}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB'}}{k}\ ,\ \frac{۱}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC'}}{k}\ ,\ \frac{۱}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AD'}}{k}$$

چنانچه رابطه‌های اخیر را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{۲\overline{AB'}}{k}=\frac{\overline{AC'}}{k}+\frac{\overline{AD'}}{k}$$

و چنانچه طرفین این رابطه را در k ضرب کنیم نتیجه می‌شود:

$$۲\overline{AB'}=\overline{AC'}+\overline{AD'}$$

یعنی B' وسط $C'D'$ است.

۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۰۳. اگر (ABCD) تقسیم توافقی و نقطه‌های A'، B'، C' و D' بترتیب منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D نسبت به قطب انعکاس O واقع بر خط AB و قوت انعکاس k باشند داریم:

$$(\overline{OA}+\overline{OB})(\overline{OC}+\overline{OD})=۲(\overline{OA}.\overline{OB}+\overline{OC}.\overline{OD}) \quad (۱)$$

$$\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=\overline{OC}.\overline{OC'}=\overline{OD}.\overline{OD'}=K \quad (۲)$$

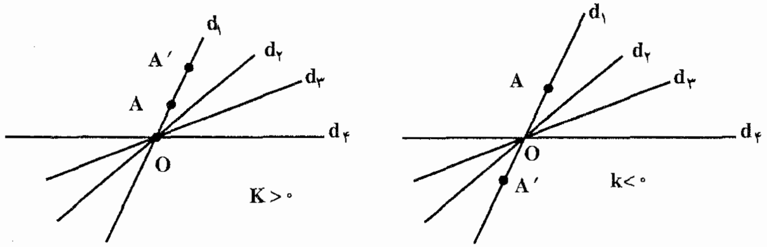
$$(۱)\ و\ (۲)\Rightarrow(\overline{OA'}+\overline{OB'})(\overline{OC'}+\overline{OD'})=۲(\overline{OA'}.\overline{OB'}+\overline{OC'}.\overline{OD'})$$

$\Rightarrow$ $(A'B'C'D')$ تقسیم توافقی است

۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۲. خطها همرسند

۲۰۴. منعکس هر خط راست نسبت به قطب انعکاسی که روی آن خط قرار دارد، خود آن خط است و چون نقطهٔ همرسی دسته خط روی تمام خطهای آن قرار دارد، پس دسته خط منعکس که همان دسته خط داده شده است، همرسند.



۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازهٔ زاویه

۲۰۵. با توجه به ثابت بودن زاویه‌های مثلث ABP ثابت کنید زاویهٔ بین مماسهای رسم شده بر دو دایره در یکی از دو نقطهٔ M یا P برابر مقدار ثابتی است.

۵.۲.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۲۰۶. با توجه به دستور $A'B' = \dfrac{k^2 . AB}{OA.OB}$ داریم :

$$A'B' = \frac{4 \times 12}{8 \times 6} = 1 \text{ cm}$$

۲۰۷. می‌دانیم که شعاع دایرهٔ انعکاس جذر قوت انعکاس است، یعنی :

$$R = \sqrt{k} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \sqrt{k} \Rightarrow k = \frac{۹}{۴۹}$$

از طرفی داریم :

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = k$$
$$\Rightarrow \frac{۹}{۸}.\overline{OA'} = \frac{۹}{۴۹} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{۸}{۴۹}$$

۲۰۸. داریم :

$$\sqrt{k} = \frac{۹}{۵} \Rightarrow k = \frac{۸۱}{۲۵} \text{ قوت انعکاس}$$
$$\overline{OA}.\overline{OA'} = k \Rightarrow OA.\frac{۶}{۷} = \frac{۸۱}{۲۵} \Rightarrow OA = \frac{۱۴۹}{۵۰}$$

۶.۲.۲. رابطه‌های متری

۲۰۹. چنانچه $\overline{OA} = a$ ، $\overline{OB} = b$ ، $\overline{OC} = c$ و $\overline{OD} = d$ به ترتیب طولهای نقطه‌های A، B، C و D که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند باشند، در حالت کلی داریم :

$$۲(ab + cd) - (a + b)(c + d) = ۰ \quad (۱)$$

و در صورتی که 'A، 'B، 'C و 'D که بترتیب به طولهای $\overline{OA'} = a'$ ، $\overline{OB'} = b'$ ، $\overline{OC'} = c'$ و $\overline{OD'} = d'$ می‌باشند، منعکسهای A، B، C و D به قطب (O) و قوت K باشند، می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} OA.OA' = a \times a' = k \text{ یا } a = \dfrac{k}{a'} \\ OB.OB' = b \times b' = k \text{ یا } b = \dfrac{k}{b'} \\ OC.OC' = c \times c' = k \text{ یا } c = \dfrac{k}{c'} \\ OD.OD' = d \times d' = k \text{ یا } d = \dfrac{k}{d'} \end{cases}$$

از مقایسهٔ رابطه‌های اخیر و رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$۲\left(\frac{K}{a'b'}+\frac{K}{c'd'}\right)-\left(\frac{K}{a'}+\frac{K}{b'}\right)\left(\frac{K}{c'}+\frac{K}{d'}\right)=۰$$

و یا

$$۲\left(\frac{۱}{a'b'}+\frac{۱}{c'd'}\right)-\left(\frac{۱}{a'}+\frac{۱}{b'}\right)\left(\frac{۱}{c'}+\frac{۱}{d'}\right)=۰$$

و یا

$$۲(a'b'+c'd')-(a'+b')(c'+d')=۰$$

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که C' و D' مزدوجهای توافقی A' و B' می‌باشند.

۲۱۰. اولاً. رابطهٔ $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{AD}+\overline{CA}.\overline{BD}$ با ملاحظهٔ این که $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}$ و $\overline{BD}=\overline{BC}+\overline{CD}$ می‌باشد، به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}(\overline{AC}+\overline{CD})+\overline{CA}(\overline{BC}+\overline{CD})$$

و یا

$$(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\,\overline{CD}+\overline{BC}\,(\overline{AC}+\overline{CA})$$

اما چون $\overline{AC}+\overline{CA}=۰$ و بنابر رابطهٔ اختصاصی شال : $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$ نیز صفر می‌باشد، پس عبارت :

$$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\,\overline{AD}+\overline{CA}.\overline{BD}=۰$$

برای هر چهار نقطه بر روی یک خط مستقیم همواره صادق است. پس اگر نقطهٔ D به بینهایت دور هم منتقل شود، رابطه باز هم صفر بوده و چنان که دیدیم به رابطهٔ اختصاصی $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=۰$ شال مبدل می‌شود.

ثانیاً. اگر به قطب نقطهٔ دلبخواه O و به قوت دلبخواه $k^۲$ شکل را منعکس کنیم رابطهٔ کلی شال به رابطهٔ :

$$\overline{A'B'}.\overline{C'D'}+\overline{B'C'}.\overline{A'D'}+\overline{C'A'}.\overline{B'D'}=۰$$

بدل می‌شود که در آن A' ، B' ، C' و D' مرتباً منعکسهای A، B، C و D می‌باشند ؛ زیرا منعکس خط جهت‌دار ABCD دایره‌ای خواهد بود که بر نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' و O مرور می‌کند. (منعکس هر خط مستقیم دایره‌ای است که بر قطب انعکاس مرور می‌کند.) از تشابه مثلثهای OAB و $OA'B'$ حاصل می‌شود :

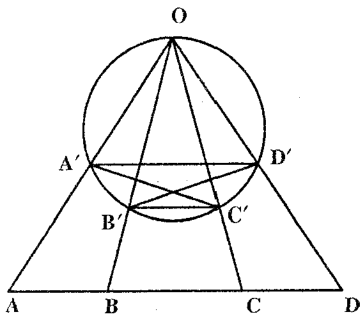
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}$$

و یا

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{OA}\times\overline{OA'}}{\overline{OA}\times\overline{OB}}=\frac{k^۲}{\overline{OA}.\overline{OB}}$$

پس :

$$\overline{AB}=\frac{k^۲}{\overline{OA}.\overline{OB}}.\overline{A'B'}$$



و همچنین با تشابه مثلثهای دیگر مرتباً رابطه‌های :

$$\overline{BC}=\frac{k^{2}}{\overline{OB}\times\overline{OC}}.\overline{B'C'} \quad \text{و} \quad \overline{CA}=\frac{k^{2}}{\overline{OA}.\overline{OC}}.\overline{C'A'}$$

$$\overline{CD}=\frac{k^{2}}{\overline{OC}\times\overline{OD}}.\overline{C'D'} \quad \text{و} \quad \overline{AD}=\frac{k^{2}}{\overline{OA}.\overline{OD}}.\overline{A'D'}$$

$$\overline{BD}=\frac{k^{2}}{\overline{OB}\times\overline{OD}}.\overline{B'D'}$$

پس :

$$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{AD}+\overline{CA}.\overline{BD}$$

$$=\frac{k^{4}}{\overline{OA}.\overline{OB}.\overline{OC}.\overline{OD}}(\overline{A'B'}.\overline{C'D'}+\overline{B'C'}.\overline{A'D'}+\overline{C'A'}.\overline{B'D'})=0$$

خواهد بود. البته محور (خط جهت‌دار) به دایرهٔ جهت‌دار تبدیل می‌شود و با رعایت جهت بر روی دایره ملاحظه می‌شود که از جملهٔ داخل پرانتز طرف دوم جملهٔ $\overline{C'A'}.\overline{B'D'}$ منفی است، زیرا یکی از قوسهای این دو وتر در جهت عقربه‌های ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی می‌شود، پس با ملاحظهٔ جهت و تبدیل کلیهٔ جمله‌ها به جمله‌های مثبت طرف دوم به صورت :

$$\overline{A'B'}.\overline{C'D'}+\overline{B'C'}.\overline{A'D'}=\overline{A'C'}.\overline{B'D'}$$

نوشته می‌شود که حکم قضیهٔ بطلمیوس برای چهار ضلعی محاطی ABCD می‌باشد. اگر چهار نقطهٔ A، B، C و D زوجین متوافق باشند، روشن است که $\overline{BC}.\overline{DA}+\overline{BA}.\overline{DB}=0$ است، پس $\overline{B'C'}.\overline{D'A'}+\overline{B'A'}.\overline{D'B'}=0$ خواهد بود. چهار ضلعی محاطی را در این صورت هارمونیک می‌نامند و با رعایت جهت رابطهٔ $\overline{B'A'}.\overline{D'B'}=\overline{B'C'}.\overline{A'D'}$ به دست می‌آید. اگر قبول کنیم که $A'B'$ و $B'C'$ و... همچون حامل عمل می‌کنند (این فرض خلاف حقیقت نیست، زیرا جمیع این

مقدارها به تبع جهت دایره و قوسهای آن همچون حامل عمل می‌کنند)، رابطهٔ دیگری نیز برای چهار ضلعی هارمونیک به دست می‌آید. به صورت $\overline{A'B'}.\overline{C'D'} = \overline{B'C'}.\overline{B'D'}$ یعنی ضلعهای منتهی به دو رأس مجاور بر یک نسبتند. از این مقدمه می‌توان خواص چهارضلعی هارمونیک را بحث کرد و ما به همین اشاره اکتفا می‌کنیم.

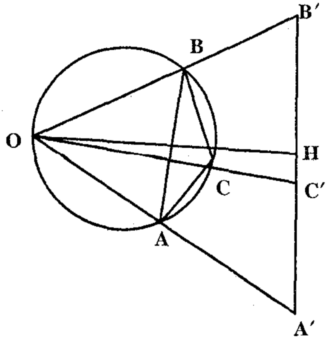
تبصره. اگر چهار نقطه بر روی دایره‌ای ثابت باشند، مانند چهار نقطهٔ A، B، C و D از نقطهٔ متغیری مانند M به A ، B، C و D وصل کنیم نسبت ناموزون چهار شعاع OA، OB، OC و OD چون به زاویه‌های این شعاعها مربوط است (و این زاویه‌ها ثابت می‌باشند چون قوسهای AB، BC و CD همه ثابتند) بنابراین با تغییر نقطهٔ O این نسبت ناموزون تغییر نمی‌کند. بنابر تعریف این نسبت را نسبت ناموزون چهار نقطهٔ A، B، C و D بر روی یک دایره نامیده می‌شود. چهار ضلعی هارمونیک هنگامی به دست می‌آید که شعاعهای MA، MB، MC و MD شعاعهای توافقی تشکیل دهند. از این تعریف نیز می‌توان خواص چهار ضلعی هارمونیک را به دست آورد.

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۱۲. به دو دایرهٔ متقاطع ؛ نقطهٔ دیگر تقاطع دو خط P_∞ است.

۲۱۳. دو دایرهٔ عمودبرهم، یک دایره و یک خط گذرنده از مرکز آن.

۸.۲.۲. رسم شکلها



۲۱۴. از سه نقطهٔ A، B و C دایره‌ای مرور می‌دهیم. باید روی این دایره نقطه‌ای مانند O تعیین کنیم که اگر قطب انعکاس اختیار شود، C′ منعکس C وسط A′B′ قرار گیرد. می‌دانیم :

$$B'C' = \frac{|K|\cdot BC}{OB\cdot OC} \quad \text{و} \quad A'C' = \frac{|K|\cdot AC}{OA\cdot OC}$$

پس داشته باشیم $\frac{BC}{OB\cdot OC} = \frac{AC}{OA\cdot OC}$ یا

$\frac{BC}{AC} = \frac{OB}{OA}$. بنابراین برای تعیین O کافی است مکان نقطه‌هایی را رسم کنیم که نسبت فاصله‌های آنها از A و B برابر $\frac{BC}{AC}$ باشد و محل برخورد این مکان و دایرهٔ محیطی مثلث ABC نقطهٔ O خواهد بود.

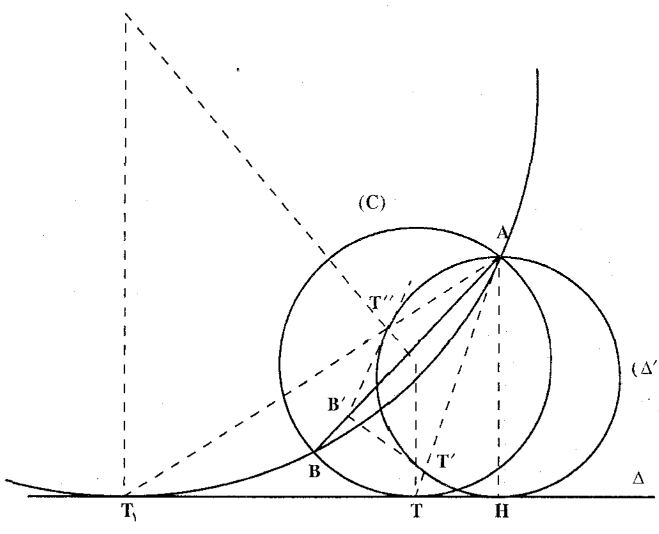
۲۱۵. اگر $\overline{APQ}$ خط مطلوب گذرنده بر نقطهٔ A و متقاطع با ضلعهای زاویه باشد، به‌نحوی که $AP \cdot AQ = a^2$ است. در این‌حالت Q منعکس P با قطب A و قوت a^2 خواهد بود و در نتیجه حل مسأله چنین است :

منعکس خط OY را با قطب A و قوت a^2 رسم می‌کنیم. چنانچه دایره (ω) منعکس خط OY باشد، محل برخوردش با خط OX نقطهٔ P و نقطهٔ تقاطع AP با خط OY نقطهٔ Q است. به‌طوری که داریم : $AP \cdot AQ = a^2$ است.

بحث. در صورتی که دایرهٔ (ω) منعکس خط OYخط OX را در یک یا دو نقطه قطع کند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه متقاطع نباشند، مسأله جواب ندارد.

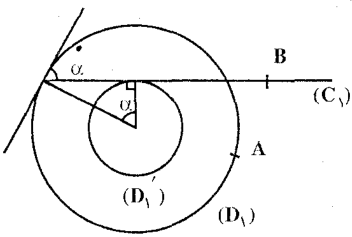
۲۱۶. هرگاه مسأله حل شده باشد و (C) دایرهٔ مطلوب در T بر خط Δ مماس باشد (شکل)، درصورتی که شکل را به وسیلهٔ انعکاس تبدیل کنیم، منعکس (C) بر منعکس Δ در T'، منعکس T مماس خواهد بود. اما اگر قطب را یکی از نقطه‌های (C) بگیریم، منعکس (C) خطی است مستقیم و منعکس Δ دایره‌ای خواهد بود مماس بر آن خط مستقیم ؛ پس مسأله را به این طریق حل می‌کنیم :

A را قطب انعکاس و مقداری دلخواه، مثلاً AH^2، را قوت انعکاس فرض می‌کنیم



(AH) عمودی است که از A بر Δ رسم کرده‌ایم). منعکس خط Δ دایرهٔ Δ' است به قطر AH رسم شود. حال B' منعکس B را به‌دست می‌آوریم و از B' بر دایرهٔ (Δ') مماس $B'T'$ را رسم کرده AT' را رسم می‌کنیم تا Δ را در T قطع کند. دایره‌ای که بر A، B و T بگذرد، دایرهٔ مطلوب است. مسأله در حالت کلی دو جواب دارد.

۲۱۷. فرض کنیم مسأله حل شده است و (C) دایره‌ای باشد که از A، B گذشته و خط (D) را به زاویهٔ α قطع کند (شکل). شکل را نسبت به قطب انعکاس A و با قوت $\overline{AB}^2$ منعکس می‌کنیم. B بر منعکس خود منطبق است و منعکس (D) دایرهٔ (D_1) است که از A می‌گذرد و منعکس (C) خط (C_1) است که از B می‌گذرد و دایرهٔ (D_1) را به زاویهٔ α قطع می‌کند. کافی است خط (C_1) را رسم کنیم. می‌دانیم پوش خطهایی که دایرهٔ (D_1) را به زاویهٔ α قطع می‌کنند، دایرهٔ (D'_1) است متحدالمرکز با (D_1) (α زاویهٔ حاده فرض شده است). پس از نقطهٔ B دو مماس بر دایرهٔ (D'_1) رسم می‌کنیم. منعکس این مماسها دایره‌هایی مطلوب می‌باشند. مسأله دو جواب و یا یک جواب دارد و یا غیرممکن است بر حسب آن که وضع B نسبت به دایرهٔ (D'_1) چگونه باشد. همین استدلال را وقتی که خط D را با یک دایره عوض کنیم می‌توان بیان نمود.



۲۱۸. اگر (C)دایرهٔ مطلوب گذرنده بر M و مماس بر OX و OY باشد، چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، درنتیجه اگر منعکسهای خطهای OX و OY و دایرهٔ (C) را به قطب M و قوت دلخواه K رسم کنیم در این صورت :

اولاً. منعکس دایرهٔ (C) بر منعکسهای خطهای OX و OY مماس است.

ثانیاً. منعکس دایرهٔ (C) که از قطب انعکاس می‌گذرد، خطی است مستقیم و منعکسهای خطهای OX و OY دایره‌هایی مانند (ω) و (Γ) گذرنده بر M می‌باشند و Δ منعکس دایرهٔ (C) مماس مشترک دایره‌های (ω) و (Γ) می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

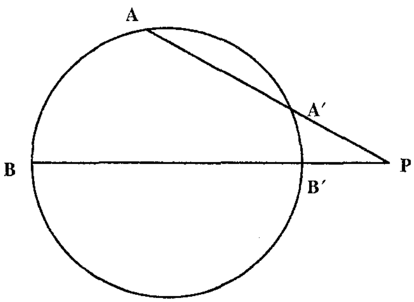
ابتدا دایره‌های (ω) و (Γ) منعکسهای خطهای OX و OY را قطب M و قوت دلخواه K رسم می‌نماییم و سپس خط Δ مماس مشترک آنها رسم می‌کنیم. منعکس خط Δ با قطب M و قوت K دایرهٔ مطلوب است.

بحث. چون دایره‌های (ω) و (Γ) از نقطهٔ M می‌گذرند متقاطع بوده و دارای دو مماس

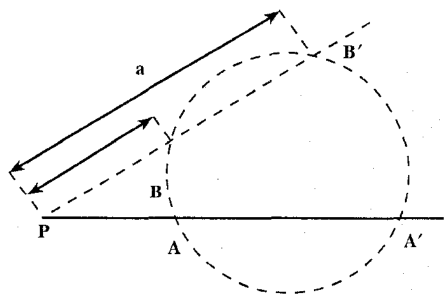
مشترک می‌باشند و مسأله پیوسته دارای دو جواب است.

۲۱۹. اگر P (شکل الف) قطب و a قوت انعکاس و A نقطهٔ مفروض باشد و a را مثبت فرض کنیم، از P خطی دلخواه می‌کشیم و بر روی آن و در یک طرف P طولهای PB و PB' را بترتیب مساوی ۱ و a جدا می‌کنیم و بر A، B و B' دایره‌ای می‌گذرانیم تا PA را در A' قطع کند؛ A' نقطهٔ مطلوب، یعنی منعکس A است.

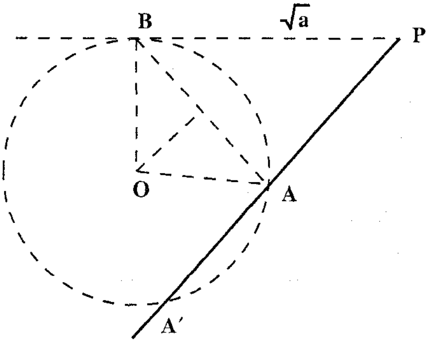
درصورتی که $a < 0$ باشد، $PB' = |a|$ را در جهت عکس PB جدا می‌کنیم. اگر a، قوت انعکاس، مجذور کامل باشد، برروی خطی که از P می‌گذرانیم (شکل پ) طول PB را مساوی جذر a جدا می‌کنیم؛ آن‌گاه از B عمودی بر BP اخراج می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در O قطع کند؛ دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OA رسم شود، PA را در A' قطع می‌کند و داریم: $PA \cdot PA' = PB^2 = a$؛ پس A' منعکس A است.



(الف)

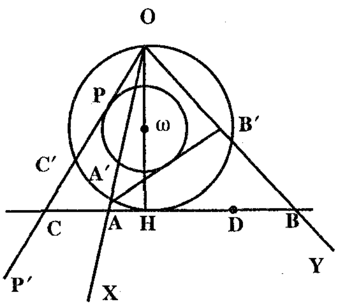


(ب)



(پ)

۲ . ۲ . ۹ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۲۲۰. فرض کنیم OAB مثلثی باشد که از D و ضلعهای زاویهٔ XOY تشکیل می‌شود. شکل را نسبت به O و با قوت $OH^۲$ مربع فاصلهٔ O از D منعکس می‌کنیم. منعکس D دایرهٔ به قطر OH و منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OAB خط A′B است بنابه فرض زاویهٔ $\alpha A'\hat{O}B'$ مساوی با $۲^d - \alpha$ (d یعنی قائمه) است و پوش A′B′ دایرهٔ (ω) است که متحدالمرکز با دایرهٔ به قطر OH است (شکل). پوش دایرهٔ محیطی مثلث AOB منعکس دایرهٔ (ω) است که آن را رسم می‌کنیم، مرکز این دایره روی OH است و با خط OP یعنی مماس رسم شده از قطب انعکاس O بر دایرهٔ (ω) در P′ نیز مماس است و داریم:

$$OP \cdot OP' = OH^۲ = OC \times OC';$$

امّا

$$OC' = ۲OP;$$

پس

$$OP \cdot OP' = ۲OC \times OP;$$

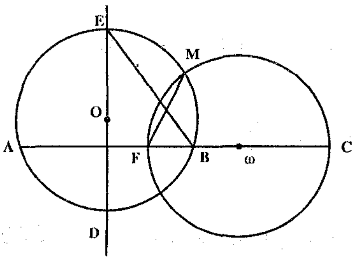
و یا

$$OP' = ۲OC$$

به این ترتیب P′ به‌دست می‌آید. اگر I′ (در شکل نیست) محل تلاقی OH با عمود رسم شده از P′ بر OP′ باشد، پوش دایرهٔ محیطی مثلث OAB دایره‌ای است به مرکز I′ و به شعاع I′P′.

۲۲۱. داریم:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = K \Rightarrow \frac{۲}{۳} \times \frac{۵}{۶} = K \Rightarrow K = \frac{۵}{۹} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

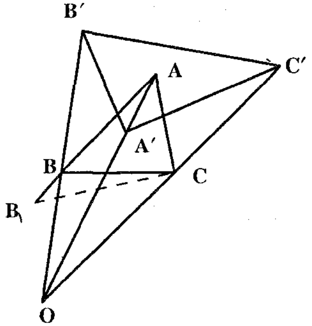


۲۲۳. اگر E نقطهٔ دلخواهی از خط D عمود منصف AB و (O) دایرهٔ محیطی مثلث ABE باشد، داریم:

ثابت = $\overline{CM} \cdot \overline{CE} - \overline{CB} \cdot \overline{CA}$. یعنی نقطهٔ M منعکس E با قطب C و

قوت ثابت $CA \cdot CB = K$ است، یا به عبارت دیگر مکان M منعکس خط D است و چون خط D از C قطب انعکاس نمی‌گذرد، در نتیجه منعکس خط D دایره‌ای است که از قطب انعکاس (نقطهٔ C) گذشته و قطری از آن که از C می‌گذرد بر D عمود بوده و پاره‌خط AB را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند.

۲۲۴. اگر O قطب انعکاس باشد، بنابه فرض داریم:



$(A'B' \hat{,} A'C') =$ ۱ قائمه ;

و یا

$(A'B' \hat{,} OA) + (OA \hat{,} A'C') =$ ۱ قائمه ; (۱)

اما AB و A′B′ نسبت به زوج (OA, OB) متباینند و داریم:

$(A'B' \hat{,} OA) + (AB \hat{,} OB) = 0$;

و همچنین $(OA \hat{,} A'C') + (OC \hat{,} AC) = 0$;

با جمع دو رابطهٔ بالا و با استفاده از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$(AO \hat{,} OB) + (OC \hat{,} AC) +$ ۱ قائمه $= 0$;

با جمع (OC و OB) به طرفین رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$(OB \hat{,} OC) = (AB \hat{,} AC) +$ ۱ قائمه ;

پس مکان O دایره‌ای است که از B و C می‌گذرد (شکل). فرض کنیم B_1 محل تلاقی AB و با عمود رسم شده از C بر AC باشد. B_1 روی دایرهٔ مزبور است، زیرا:

$(B_1B, B_1C) = (AB, AC)$;

به همین ترتیب این دایره از محل تلاقی AC و عمود رسم شده از B بر AB می‌گذرد.

وقتی که A، B و C بر یک خط راست واقع باشند؛ $(AB \hat{,} AC) = 0$ است، پس ۱ قائمه $= (OB \hat{,} OC)$ و دراین حالت مکان O دایرهٔ به قطر BC است.

۲ . ۲ . ۱۰ . مسأله‌های ترکیبی

۲۲۵. ۱. چنانچه M نقطه‌ای از صفحهٔ شکل و M′ منعکس آن در انعکاس (K و S) و N و

N' بترتیب منعکسهای M و M' در انعکاس (K_1 و S_1) و A نقطهٔ برخورد NN' با خط SS_1 باشد، در این صورت NN' منعکس دایرهٔ محیطی S_1MM' است. درصورتی که B محل تلاقی SS_1 با دایرهٔ محیطی S_1MM' باشد، داریم :

$$SM \cdot SM' = SB \cdot SS_1 = K = \text{مقدار ثابت}$$

که چون S_1 و S ثابت هستند، SB و در نتیجه نقطهٔ B ثابت خواهد بود و چون NN' منعکس دایرهٔ S_1MM' است، می‌توان نوشت :

$$S_1B \cdot S_1A = S_1M \cdot S_1N = K_1 = \text{مقدار ثابت}$$

در نتیجه S_1A و از آن‌جا A ثابت است، یعنی NN' از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد.

۲. اگر (O) مرکز دایرهٔ محیطی $MM'O'N$ به شعاع R در یک حالت خاص باشد،

$$\begin{cases} P_{S(O)} = SM \cdot SM' = SO^2 - R^2 = K \\ P_{S_1(O)} = S_1M \cdot S_1N = S_1O^2 - R^2 = K_1 \end{cases}$$

ازکم کردن طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود :

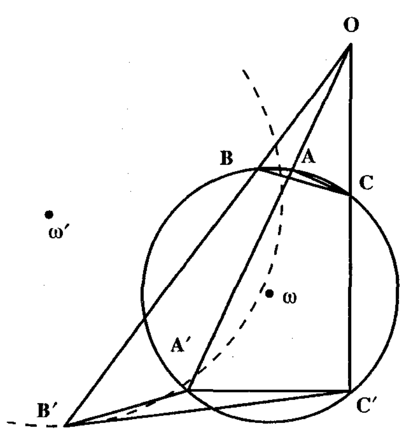
$$SO^2 - S_1O^2 = K - K_1 = \text{مقدار ثابت}$$

از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می‌شود که مکان (O) که تفاضل مربعات فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت S و S_1 مقداری است ثابت، خطی است مستقیم عمود بر S_1S که می‌توان پای عمود را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد :

$$IH = \frac{K - K_1}{2SS_1} = \frac{K_2}{2SS_1}$$ (I وسط SS_1 و H پای عمود است.)

۲۲۶. ۱. چنانچه (O) قطب انعکاس و K قوت انعکاس باشد، داریم :

$$\begin{cases} A'B' = \dfrac{|K| \cdot AB}{OA \cdot OB} \\ A'C' = \dfrac{|K| \cdot AC}{OA \cdot OC} \end{cases}$$



چنانچه مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الساقین باشد، به‌نحوی که $A'B' = A'C'$ است، دراین صورت، خواهیم داشت:

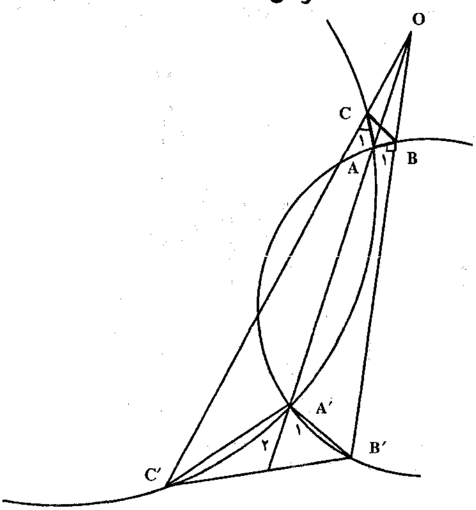
$$\frac{|K|\cdot AB}{OA\cdot OB}=\frac{|K|\cdot AC}{OA\cdot OC}$$

و یا $\frac{AB}{OB}=\frac{AC}{OC}$ یا ثابت $=\frac{AB}{AC}=\frac{OB}{OC}$

و چون مثلث ABC ثابت است، نقطه‌های C و B و نسبت $\frac{AB}{AC}$ ثابت است و از آن‌جا: ثابت $\frac{OB}{OC}$، یعنی مکان (O) قطب انعکاس که فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت C و B مقداری است ثابت، دایره‌ای است که قطری از آن که بر BC می‌گذرد، پاره‌خط BC را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند و نقطه‌های تقاطعش پاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ $\hat{A}$ است.

۲. درصورتی که بخواهیم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، یعنی داشته باشیم $A'B' = BC = A'C'$، در این‌صورت چون می‌خواهیم: $A'B' = A'C'$ باشد، بنابه حکم ۱. مکان (O) قطب انعکاس بر دایره‌ای به قطر پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A روی BC است و برای این که $A'C' = B'C'$ باشد، مکان (O) قطب انعکاس بایستی روی دایره‌ای به قطر پاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ C باشد، پس (O) روی محل تلاقی دو دایرهٔ مزبور است.

۳. بنا به خاصیت انعکاس چهارضلعیهای $ABB'A'$ و $ACC'A'$ محاطی است و $\hat{A}'_۱ = \hat{B}$ و $\hat{A}'_۲ = \hat{C}_۱$ و چون $\hat{A}'_۱ + \hat{A}'_۲ = ۹۰°$ فرض شده. لذا $\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۹۰°$ است و از آن‌جا $\hat{B} + \hat{C} = ۲۷۰°$ است و در چهارضلعی OBAC نتیجه می‌شود $\hat{A} + \hat{O} = ۹۰°$ یا $\hat{O} = ۹۰° - \hat{A} = \alpha$ یعنی زاویهٔ $\hat{O}$ مقداری است ثابت و مکانش کمان حاوی زاویهٔ $\alpha = ۹۰° - \hat{A}$ و گذرنده بر نقطه‌های B و C است.



۲۲۷. اوّل. خط AB نیمساز زاویهٔ قائمه را در نقطهٔ ثابتی قطع می‌کند. اگر سطح مثلثهای FOA و FOB را جمع کرده مساوی سطح مثلث OAB قرار دهیم خواهیم داشت:

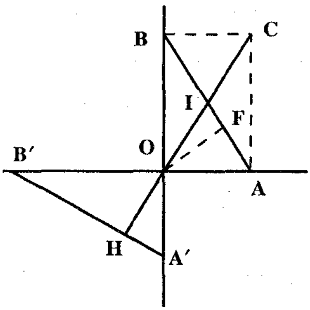
$$OA \times OF\frac{\sqrt{۲}}{۲} + OB \times OF\frac{\sqrt{۲}}{۲} = OA \times OB$$

(زاویه‌های COA و COB هر کدام ۴۵° می‌باشند) ولی از رابطهٔ مفروض مسأله داریم:

$$a(OA + OB) = OA \times OB$$

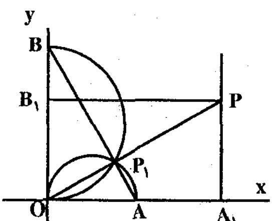
پس:

$$OF\frac{\sqrt{۲}}{۲}(OA + OB) = OA \times OB$$



معلوم می‌کند که $OF = a\sqrt{۲}$، پس نقطهٔ F ثابت است.

دوم. اگر ملاحظه شود که دو مثلث OAB و OA′B′ نسبت به نیمساز دوم قرینهٔ یکدیگرند، پس میانهٔ مثلث OAB ارتفاع مثلث OA′B′ می‌باشد، زیرا چون OI میانهٔ OAB باشد، زاویه‌های OBI و BOI برابرند، پس امتداد OI زاویهٔ HOA′ را برابر IBO تشکیل می‌دهد و چون IBO متمم BAO و پس متمم OA′B′ است، پس خط OH ارتفاع OA′B′ می‌باشد. از طرف دیگر روشن است که میانهٔ OI مثلث OAB از نقطهٔ C رأس مستطیل به قطر AB می‌گذرد، پس عمودی که از C بر A′B′ فرود می‌آید از نقطهٔ ثابت O می‌گذرد.



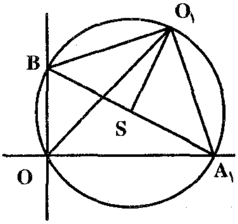
سوم. نیمدایره‌هایی به قطرهای OA و OB در نقطهٔ P تلاقی می‌کنند. اگر شکل را به قطب O و قوتی دلبخواه منعکس کنیم نیمدایرهٔ به قطر OA خطی مستقیم موازی Oy به فاصلهٔ $OA_۱ = \frac{k^۲}{OA}$ و منعکس نیمدایرهٔ به قطر OB خطی مستقیم موازی Ox به فاصلهٔ $OB_۱ = \frac{k^۲}{OB}$ خواهد بود. نقطهٔ تلاقی این دو خط یعنی $P_۱$ منعکس نقطهٔ P می‌باشد. اگر مشاهده کنیم که $OA_۱ + OB_۱ = \frac{k^۲}{a}$ مقداری است ثابت، پس مکان P خطی است مستقیم موازی نیمساز خارج xOy، پس مکان P منعکس این خط دایره‌ای است که بر O مرور می‌کند

و مرکز آن بر نیمساز xOy قرار دارد.

چهارم. منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OAB همان خط A_1B_1 قسمت قبل است که پایه‌های خطهای منعکس نیمدایره‌های به قطر OA و OB را به هم وصل می‌کند و این خط چنان است که:

$$OA_1 + OB_1 = \frac{k^2}{a}$$

مقداری است ثابت. چون دایرهٔ محیطی OB_1A_1 را رسم کنیم تا نیمساز xOy را در نقطهٔ O_1 قطع کند مشاهده می‌شود که نقطهٔ O_1 نقطهٔ ثابتی است؛ زیرا اگر رابطهٔ بطلمیوس را برای چهارضلعی محاطی $O_1A_1OB_1$ بنویسیم خواهیم داشت:



$$O_1A_1 . OB_1 + O_1B_1 . OA_1 = A_1B_1 . OO_1$$

ولی $O_1A_1 = O_1B_1$ زیرا قوسهای O_1A_1 و O_1B_1 برابرند (هر کدام 45°) و $OA_1 + OB_1 = \frac{k^2}{a}$ مقداری ثابت است، پس: $OO_1 = \frac{O_1A_1}{A_1B_1} . \frac{k^2}{a}$ ولی $\frac{O_1A_1}{A_1B_1}$ مقداری است ثابت، زیرا برابر است با $\frac{O_1A_1}{2SA_1}$ (S مرکز دایرهٔ محیطی OA_1B_1 یعنی وسط A_1B_1 است) ولی $\frac{O_1A_1}{SA_1}$ برابر $\frac{1}{\cos 45^\circ}$ یا $\sqrt{2}$ می‌باشد، پس $OO_1 = \frac{k^2\sqrt{2}}{2a}$ می‌باشد و نقطهٔ O_1 نقطهٔ ثابتی است ولی زاویهٔ $B_1A_1O_1$ نیز مقداری ثابت برابر 45° می‌باشد، پس مسأله به یکی از مسأله‌های قبل برمی‌گردد؛ زاویهٔ ثابت 45° (یعنی زاویهٔ $B_1A_1O_1$) چنان حرکت می‌کند که رأس A_1 آن خط Ox را می‌پیماید و ضلع اوّل A_1O_1 آن بر نقطهٔ ثابت O_1 مرور می‌کند. امتداد ضلع دوم A_1B_1 بر سهمی ثابتی که O_1 کانون آن است مماس می‌باشد.

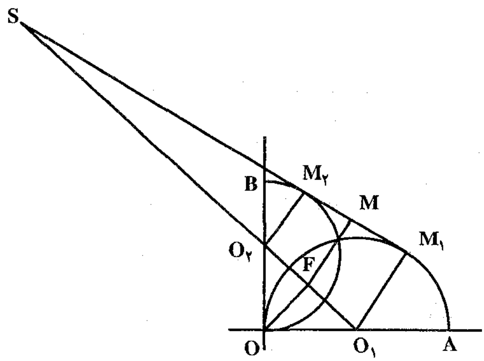
پنجم. مماس مشترک دایره‌های قسمت ۳ یعنی خط M_1M_2 صاحب این خاصیت است که $O_1M_1 = O_1O$ و $O_2M_2 = O_2O$ می‌باشد، پس:

$$\frac{1}{O_1M_1} + \frac{1}{O_2M_2} = \frac{2}{a}$$

می‌باشد، زیرا $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{a}$ می‌باشد و O_1O و O_2O مرتباً نصف OA و OB

می‌باشند. از طرف دیگر چون خط O_1O_2 دارای همان خاصیت خط AB است، پس نقطهٔ F که از تقاطع نیمساز xOy با O_1O_2 به‌دست می‌آید، نقطهٔ ثابتی است. اگر عمود FM را بر M_1M_2 فرود آوریم، می‌شود ثابت کرد که FM طول ثابتی دارد. زیرا اولاً، اگر خطهای M_1M_2 و O_1O_2 در نقطهٔ S تلاقی کنند، نسبت قطعات $\frac{SO_2}{SO_1}$ برابر $\frac{O_2M_2}{O_1M_1}$ است (به علّت توازی O_1M_1 و O_2M_2) پس $\frac{SO_2}{SO_1}=\frac{OO_2}{OO_1}$ زیرا شعاعهای: $O_1M = OO_1$ و $O_2M = OO_2$ پس نقطهٔ S بر روی نیمساز خارج xOy واقع است و نقطه‌های F و S نسبت به O_1 و O_2 مزدوج می‌باشند (همچنین M و S نسبت به M_1 و M_2 مزدوجند) پس لازم می‌آید که:

$$\frac{SO_1}{SO_2}=\frac{OO_1}{OO_2} \quad \text{و} \quad \frac{FO_1}{FO_2}=-\frac{OO_1}{OO_2}$$



باشد (خواص نیمسازهای داخل و خارج مثلث) حال از تشابه مثلثهای SMF و MO_1S حاصل می‌شود $\frac{FM}{O_1M_1}=\frac{SF}{SO_1}$ و از تشابه مثلثهای SMF و SM_2O_2 رابطهٔ: $\frac{FM}{O_2M_2}=\frac{SF}{SO_2}$ به‌دست می‌آید، چون دو رابطه را جمع کنیم حاصل می‌شود:

$$FM\left(\frac{1}{O_1M_1}+\frac{1}{O_2M_2}\right)=SF\left(\frac{1}{SO_1}+\frac{1}{SO_2}\right)$$

ولی چون نقطه‌های S، F، O_1 و O_2 مزدوجند، پس: $\frac{1}{SO_1}+\frac{1}{SO_2}=\frac{2}{SF}$ و چون $\frac{2}{a}=\frac{1}{O_2M_2}+\frac{1}{O_1M_1}$ پس: $\frac{2FM}{a}=2$ و یا FM=a پس مماس مشترک M_1M_2 همواره بر دایره‌ای به مرکز F و به شعاع a مماس می‌باشد.

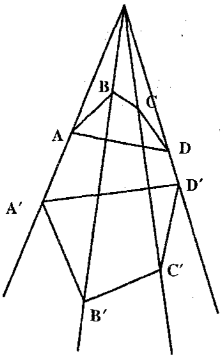
۲۲۸. از روی شکل دیده می‌شود که:

$$\hat{A}+\hat{C}=O\hat{A}D-O\hat{A}B+\pi-O\hat{C}B+\pi-O\hat{C}D$$

و

$$\hat{A'}+\hat{C'}=O\hat{A'}B'-O\hat{A'}D'+O\hat{C'}B'+O\hat{C'}D'$$

چون چهارضلعیهایی نظیر $ABA'B'$ (متشکل از دو نقطهٔ منعکس نسبت به هم) همه محاطی می‌باشند، پس:



$$O\hat{A}B=O\hat{B'}A'$$

و
$$O\hat{A}D=O\hat{D'}A'$$

و
$$O\hat{C}B=O\hat{B'}C'$$

و
$$O\hat{C}D=O\hat{D'}C'$$

چون دومقدار $\hat{A}+\hat{C}$ و $\hat{A'}+\hat{C'}$ را از هم کسر کنیم، خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{C}-(\hat{A'}+\hat{C'})=O\hat{D'}A'-O\hat{B'}A'+\pi-O\hat{B'}C'+\pi-O\hat{D'}C'-O\hat{A'}B'+O\hat{A'}D'-O\hat{C'}B'-O\hat{C'}D'$$

و با مراجعه به شکل ملاحظه می‌شود که:

$$O\hat{D'}A'+O\hat{A'}D'=\pi-A'\hat{O}D' \quad \text{و} \quad O\hat{B'}A'+O\hat{A'}B'=\pi-A'\hat{O}B'$$

$$O\hat{B'}C'+O\hat{C'}B'=\pi-B'\hat{O}C' \quad \text{و} \quad O\hat{D'}C'+O\hat{C'}D'=\pi-C'\hat{O}D'$$

پس: $\hat{A}+\hat{C}-(\hat{A'}+\hat{C'})=\pi-A'\hat{O}D'-\pi+A'\hat{O}B'+B'\hat{O}C'+C'\hat{O}D'$

و یا $\hat{A}+\hat{C}-(\hat{A'}+\hat{C'})=A'\hat{O}B'+B'\hat{O}C'+C'\hat{O}D'-A'\hat{O}D'=0$

پس $\hat{A}+\hat{C}=\hat{A'}+\hat{C'}$ و همچنین می‌شود ثابت کرد: $\hat{B}+\hat{D}=\hat{B'}+\hat{D'}$ (البته با در نظر گرفتن مجموع زاویه‌های چهارضلعی اگر شکل محدب باشد این رابطهٔ اخیر خود به خود محقق است). ازتشابه دو مثلث OAB و $OA'B'$ حاصل می‌شود:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{OA'}{OB}=\frac{OA'\times OA}{OB\times OA}$$

و چون $OA\times OA'=k^2$ (قوت انعکاس) پس: $A'B'=\dfrac{k^2.AB}{OA\times OB}$ و همچنین

$C'D' = \dfrac{k^2.CD}{OC \times OD}$ ، $A'C' = \dfrac{k^2.AC}{OA \times OC}$ و $D'B' = \dfrac{k^2.DB}{OD \times OB}$. چون عبارت $\dfrac{A'B' \times C'D'}{A'C' \times D'B'}$ را تشکیل دهیم، مشاهده می‌شود که :

$$\frac{AB \times CD}{AC \times BD} = \frac{A'B' \times C'D'}{AC \times BD}$$

اگر چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یک استقامت باشند، شکل $A'B'C'D'$ چهارضلعی محاطی خواهد بود و اگر خصوصاً نقطه‌های A، B، C و D دستگاه توافقی تشکیل دهند، در رابطهٔ اخیر کسر طرف اوّل برابر (۱−) است. در این صورت چهارضلعی $A'B'C'D'$ را چهارضلعی هارمونیک می‌نامند و صاحب خواصی است که در بعضی کتب هندسه مذکور است، مثلاً قطبی رأسهای پنجم و ششم چهارضلعی کامل نسبت به دایرهٔ محیطی چهارضلعی بر محل تلاقی قطرها می‌گذرد و قطبی این نقطهٔ اخیر قطر سوم است و دیگر خواص معروف. اگر شکل DABC را منعکس کنیم مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید و منعکس نقطهٔ D در بینهایت دور خواهد بود، پس زاویهٔ D صفر می‌شود، زیرا خطهای DA_1 و DC_1 (ضلعهای زاویهٔ D) موازی می‌شوند و همچنین شکل $D'A'B'C'$ مثلث $A'_1B'_1C'_1$ را به‌دست می‌دهد و منعکس D' در بینهایت دور و زاویهٔ D' صفر خواهد بود. پس از رابطهٔ : $\hat{D}_1 + \hat{B}_1 = \hat{D}'_1 + \hat{B}'_1$ حاصل می‌شود : $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$ (زیرا $D_1 = D'_1 = 0$) و رابطهٔ :

$$\frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{BD} = \frac{A'B'}{A'C'} \times \frac{C'D'}{B'D'}$$

به علت اینکه D_1 و D'_1 در بینهایت دور قرار می‌گیرد به رابطهٔ : $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A'_1B'_1}{A'_1C'_1}$ بدل می‌شود و دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ در زاویهٔ B_1 و B'_1 متساوی و در ضلعهای مجاور این زاویه متناسب خواهند بود، یعنی دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ متشابه می‌باشند. اگر شکل اوّل ABCD خط مستقیم می‌بود، با انعکاس به قطب D خط مستقیم دیگری حاصل می‌شد و چهارضلعی محاطی $D'A'B'C'$ با قطب D' مجدداً به خطی مستقیم دیگر تبدیل می‌شد، در این صورت زاویه‌های B_1 و B'_1 صفر می‌شدند و فقط تناسب $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{A'_1B'_1}{A'_1C'_1}$ به‌دست می‌آید.

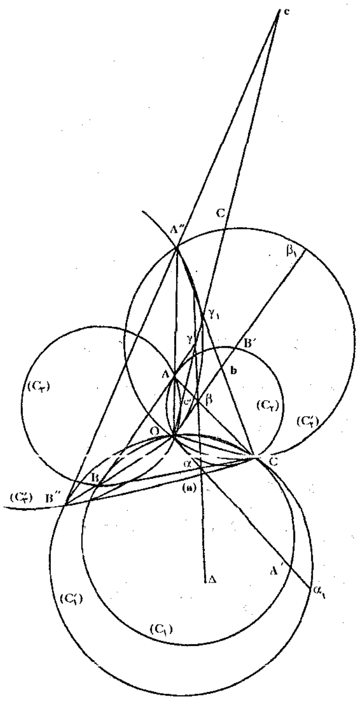
۳.۲. انعکاس در مثلث

۱.۳.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۲۹. مثلث متساوی‌الساقین BO_1C را چنان رسم می‌کنیم که هر یک از دو زاویهٔ B و C برابر با $\hat{A}+\hat{D}-۹۰^{\circ}$ باشد، همچنین مثلث متساوی‌الساقین CO_2A را چنان رسم می‌کنیم که هر یک از دو زاویهٔ C و A برابر با $\hat{B}+\hat{E}-۹۰^{\circ}$ باشد.
دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 را رسم می‌کنیم که بر C بگذرد که در نقطهٔ دیگر O برخورد خواهند داشت، نقطهٔ O قطب انعکاس است و K قوت آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$K^2=\frac{OA.OB.DE}{AB}$$

۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...



۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۳۰. A'' و B'' منعکسهای A و B را با قطب (O) و قوت $K=\overline{OC}^2$ تعیین می‌نماییم. دایره‌های (C'_1)، (C'_2) و (C'_3) بترتیب منعکسهای $\overline{A''B''}$، $\overline{CA''}$ و $\overline{CB''}$ می‌باشند. چنانچه α_1، β_1 و γ_1 بترتیب نقطه‌های برخورد $\overline{OA'}$، $\overline{OB'}$ و $\overline{OC'}$ با دایره‌های (C'_1)، (C'_2) و (C'_3) باشند، نقطه‌های α_1، β_1 و γ_1 بترتیب منعکسهای α، β و γ بوده و داریم :

$$O\alpha.O\alpha_1 = O\beta.O\beta_1 = O\gamma.O\gamma_1 = K = \overline{OC}^2 \quad (1)$$

و چون α، β و γ بر مورب Δ واقعند منعکسهای آنها بر دایره‌ای قرار دارند که از (O) قطب انعکاس می‌گذرد، یعنی $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ بر یک دایره قرار دارند. اگر a، b و c بترتیب نقطه‌های برخورد $\overline{OA'}$، $\overline{OB'}$ و $\overline{OC'}$ با $\overline{CB''}$، $\overline{CA''}$ و $\overline{A''B''}$ باشند، a، b و c بترتیب منعکسهای A'، B' و C' می‌باشند. چنانچه قوت نقطه‌های a، b و c را بترتیب نسبت به دایره‌های (C'_1)، (C'_2) و (C'_3) بنویسیم، داریم :

$$\begin{cases} P_{a(C'_1)} = aC.aB'' = aO.O\alpha_1 \\ P_{b(C'_2)} = bC.bA'' = bO.b\beta_1 \\ P_{c(C'_3)} = \overline{cA''}.\overline{cB''} = cO.c\gamma_1 \end{cases}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود طرف اوّل رابطه‌های بالا، قوت نقطه‌های a، b و c نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث $A''B''C$ و طرف دومشان قوت همان نقطه‌ها نسبت به دایرهٔ محیطی $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ بوده و درنتیجه چون a، b و c نسبت به دو دایرهٔ $A''B''C$ و $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ متحدالقوت می‌باشند، بر محور اصلی آن دو دایره واقع می‌باشند، یعنی a، b و c بر یک استقامت بوده که در نتیجه منعکسهای آنها (A'، B' و C') بر یک دایره قرار دارند که از قطب انعکاس می‌گذرد و یا به عبارت دیگر A'، B' و C' و O بر یک دایره قرار دارند.

۲.۳.۳. خطهای: موازی، همرس،...

۲.۳.۳.۱. خطها همرسند

۲۳۱. مرکز ارتفاعی را به‌عنوان مرکز انعکاس برگزینید.

۲.۳.۴. زاویه

۲.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۲۳۲. دو مثلث ABC و AB_1C_1 که نسبت به خط AS قرینه‌اند با هم برابرند و بنابر آن :

$$B\hat{S}C_1 = S\hat{B}A - S\hat{C_1}B = \hat{B} - \hat{C}$$

۵.۳.۲. پاره‌خط

۱.۵.۳.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۳۴. ۱. اگر (O) دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دایره‌های (ω)، (Δ) و (C) بترتیب دایره‌های محیطی مثلثهای $\overset{\Delta}{B\hat{H}C}$ ، $\overset{\Delta}{B\hat{H}A}$ و $\overset{\Delta}{A\hat{H}C}$ باشند. چون $E\hat{H}K = B\hat{H}C$ و یا $B\hat{H}C + \hat{A} = 180^\circ$ است و دایره‌های (ω) و (O) از BC می‌گذرند و زاویه‌های $B\hat{H}C$ و $\hat{A}$ مکمل یکدیگر می‌باشند، پس دایره‌های (ω) و (O) و درنتیجه دایره‌های (O)، (ω)، (Δ) و (C) با هم برابرند.

۲. چون بنا به فرض : $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$ است، می‌توان گفت A' ، B' و C' بترتیب منعکسهای A، B و C است با قطب H و قوت انعکاس.

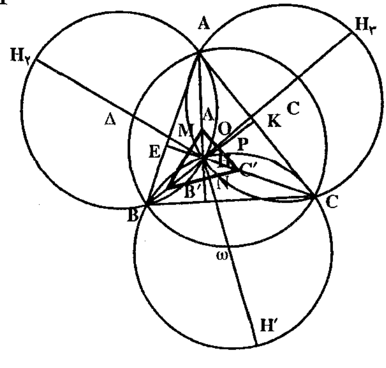
$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC' = K \qquad (1)$$

و در نتیجه $B'C'$ ، $A'B'$ و $A'C'$ بترتیب منعکسهای دایره‌های (ω)، (Δ) و (C) می‌باشند و از آن‌جا خطهای $B'C'$ ، $A'B'$ و $A'C'$ بترتیب بر قطرهای HH_1 ، HH_2 و HH_3 از دایره‌های (ω)، (Δ) و (C) عمود بوده و داریم :

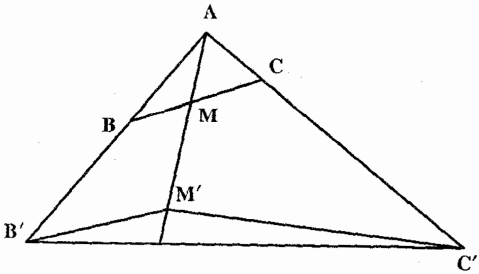
$$\begin{cases} HA.HA' = HM.HH_2 \\ HB.HB' = HN.HH_1 \\ HC.HC' = HP.HH_3 \end{cases}$$

از مقایسهٔ این رابطه‌ها و فرض مسأله (رابطهٔ (۱)) نتیجه می‌شود که $HM.HH_2 = HN.HH_1 = HP.HH_3$ (۲) و چون دایره‌های (O)، (ω)، (Δ) و (C) برابرند، قطرهایشان مساوی بوده و از آن‌جا رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$HM = HN = HP$$



۶.۳.۲. رابطه‌های متری



۲۳۵. در انعکاس به قطب انعکاس A و قوت انعکاس $k \neq ۰$، منعکسهای ضلعهای AB، AC و میانهٔ AM خطهای راستی است که بر AB، AC و AM قرار دارند. اگر منعکسهای نقطه‌های B، C و M در انعکاس داده شده را بترتیب B'، C' و M' بنامیم، داریم:

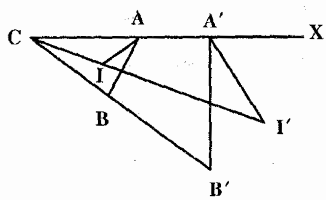
$$\overline{AB}.\overline{AB'}=k \Rightarrow \overline{AB}=\frac{k}{\overline{AB'}}$$

$$\overline{AC}.\overline{AC'}=k \Rightarrow \overline{AB}.\overline{AB'}=\overline{AC}.\overline{AC'}=\overline{AM}.\overline{AM'}=k$$

$$\Rightarrow \overline{AB}=\frac{k}{\overline{AB'}} \text{ و } \overline{AC}=\frac{k}{\overline{AC'}} \text{ و } \overline{AM}=\frac{k}{\overline{AM'}}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{AB'}+\frac{k}{AC'}=\frac{۳k}{AM'} \Rightarrow \frac{۱}{AB'}+\frac{۱}{AC'}=\frac{۳}{AM'}$$

۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند



۲۳۶. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و I' منعکس I نسبت به C باشد دو مثلث CAI و $CA'I'$ متشابه‌اند و $\hat{I'}=\frac{\hat{A}}{۲}$ و

$$C\hat{A}'I'=\pi-\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{\hat{C}}{۲}$$

یا

$$C\hat{A}'I'=\pi-(\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}) \text{ یا } C\hat{A}'I'=\pi-\frac{\pi}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲}$$

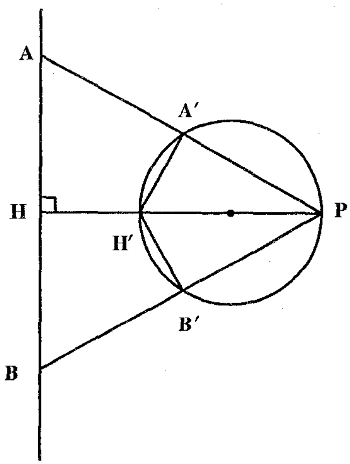
$$B'\hat{A}'X=\pi-\hat{B} \text{ و } I'\hat{A}'X=\pi(\frac{\pi}{۲}+\frac{\hat{B}}{۲})=\frac{\pi}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}$$

بنابراین :
$$I'\hat{A}'X = \frac{B'\hat{A}'X}{۲}$$

پس I' محل تلاقی نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ و زاویهٔ $B'\hat{A}'X$ است و درنتیجه مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث $CA'B'$ مماس به ضلع $A'B'$ است.

۲۳۷. داریم :
$$A'D = \frac{b^۲ - c^۲}{۲a} \text{ و } A'S = \frac{a(b-c)}{۲(b+c)}$$

۸.۳.۲. رسم شکلها

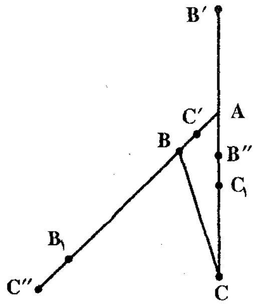


۲۳۹. می‌دانیم منعکس خط راستی که از قطب انعکاس نگذرد، دایره‌ای است که بر قطب انعکاس می‌گذرد. این دایره بر منعکس پای عمودی که از قطب انعکاس بر آن خط رسم می‌شود، می گذرد، بنابراین اگر H پای عمودی باشد که از G بر خط AB رسم می‌شود و H' را منعکس نقطهٔ H اختیار کنیم، دایرهٔ به قطر GH' منعکس خط AB است. امّا منعکس پاره‌خط AB قوس $\overset{\frown}{A'B'}$ از این دایره است. بنابراین، منعکسهای سه ضلع مثلث را رسم می‌کنیم. سه کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ ، $\overset{\frown}{B'C'}$ و $\overset{\frown}{C'A'}$ به‌دست می‌آید. مثلث منحنی‌الخط $A'B'C'$ منعکس مثلث ABC در انعکاس مشخص شده است.

تبصره. به‌ازای مقدارهای مختلف k شکل حاصل را بررسی کنید.

۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

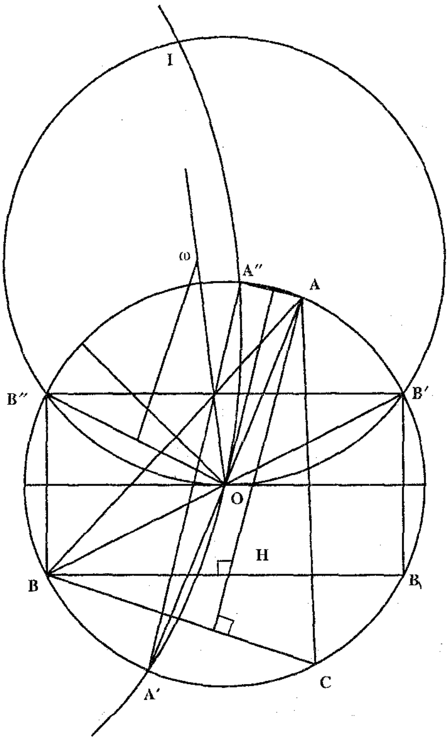
۲۴۰. ابتدا ثابت می‌کنیم که دو دایره از سه دایره مثلاً دایره‌های $(B'B'')$ و $(C'C'')$ یکدیگر را به زاویهٔ ۱۲۰° قطع می‌کنند (شکل). دایرهٔ $(B'B'')$ از B می‌گذرد، زیرا $B'\hat{B}B'' = ۹۰^\circ$ و همچنین دایرهٔ $(C'C'')$ از C خواهد گذشت. این دو دایره را با



قطب A و با قوت دلخواهی منعکس می‌کنیم. فرض کنیم B_1 و C_1 منعکسهای B و C باشند. چون B′ و B″ مزدوج AC می‌باشند. C_1 وسط قطعه منعکس B′B″ و درنتیجه مرکز دایرهٔ منعکس (B′B″) است از طرف دیگر دایرهٔ منعکس (B′B″) به مرکز C_1 از B_1 می‌گذرد و به همین ترتیب ثابت می‌شود که منعکس دایرهٔ (C′C″) به مرکز B_1 از C_1 می‌گذرد. بنابراین منعکسهای دو دایرهٔ (B′B″) و (C′C″) که به مرکزهای B_1 و C_1 می‌باشند، هر یک از مرکز دیگری می‌گذرد، پس یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر M_1 یکی از این نقطه‌ها باشد، مثلث $M_1B_1C_1$ متساوی‌الاضلاع است، پس مماسهای در نقطهٔ M_1 با هم زاویهٔ $120°$ می‌سازند و چون انعکاس حفظ‌کنندهٔ زاویه‌ها است، دو دایرهٔ (B′B″) و (C′C″) یکدیگر را در نقطهٔ M به زاویهٔ $120°$ قطع می‌نمایند. اکنون ثابت می‌کنیم که دایرهٔ (A′A″) نیز از نقطهٔ تلاقی دایره‌های (B′B″) و (C′C″) می‌گذرد. چون M نقطهٔ مشترک دو دایرهٔ اخیر است و می‌دانیم که دایرهٔ (B′B″) مکان نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌های آنها از A و C برابر با $\frac{c}{a}$ است، پس: $\frac{MA}{MC}=\frac{c}{a}$ یا $a.MA=c.MC$ و به همین ترتیب، چون M روی دایرهٔ (C′C″) نیز واقع است، پس $b.MB=a.MA$ از این دو رابطه نتیجه می‌شود که: $b.MB=c.MC$ و یا $\frac{MB}{MC}=\frac{c}{b}$ این رابطه نشان می‌دهد که M روی دایرهٔ (A′A″) است.

۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

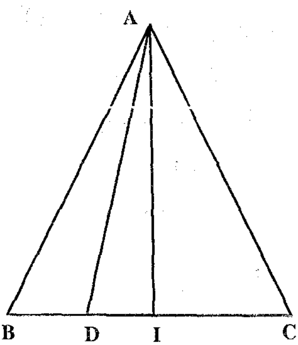
۲۴۱. اولاً. چنانچه B_1 قرینهٔ B′ نسبت به عمودمنصف AC باشد، چهارضلعی $BB''B_1B'$ مستطیلی به مرکز (O) است. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الساقین OB′B″ روی عمودمنصف B′B″ است و با توجه به طریقهٔ تعیین B″B′ نتیجه می‌گیریم که B′B″ و در نتیجه BB_1 بر AC عمود است و لذا منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OB′B″ (دایرهٔ ω) به قطب O و قوت $OB'^2=OB^2=R^2$ خطی است مستقیم که عمود بر عمودمنصف B′B″ است و چون $OB'^2=OB^2=OB.OB'$ است، لذا نتیجه می‌گیریم که B منعکس B′ از دایرهٔ محیطی OB′B″ است، پس BB_1 که ارتفاع h_b مثلث ABC



می‌باشد، منعکس دایرهٔ $OB'B''$ خواهد بود و به همین طریق ثابت می‌شود h_a و h_c بترتیب منعکسهای دایره‌های محیطی مثلثهای $\overset{\Delta}{OA'A''}$ و $\overset{\Delta}{OC'C''}$ می‌باشند که چون ارتفاعهای مثلث ABC در نقطه‌ای مانند H همرسند، منعکسهای آنها یعنی دایره‌های محیطی مثلثهای $\overset{\Delta}{OA'A''}$، $\overset{\Delta}{OB'B''}$ و $\overset{\Delta}{OC'C''}$ متقاطع بوده و نقطهٔ تقاطعشان منعکس نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند که آن را I می‌نامیم.

ثانیاً. اگر A بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC تغییر نماید، لیکن BC ثابت بماند، مکان نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC دایره‌ای است که این دایره قرینهٔ دایرهٔ (O) نسبت به BC می‌باشد یا به عبارت دیگر مکان H کمان درخور زاویهٔ $\alpha = \pi - \hat{A}$ گذرنده بر BC است، پس مکان I منعکس مکان H است و چون دایرهٔ مکان H از (O) نمی‌گذرد درنتیجه مکان I دایره‌ای است که از انعکاس دایرهٔ (H) با قطب (O) و قوت $OB^2 = OB'^2 = R^2$ به‌دست می‌آید.

۲۴۲. اگر AI ارتفاع مثلث باشد، مشاهده می‌شود که :

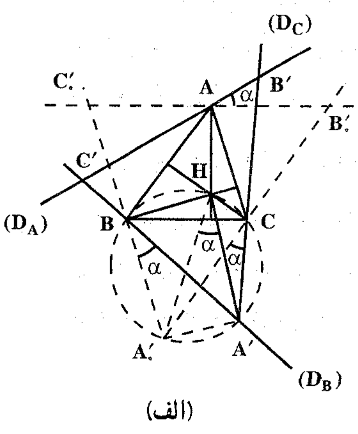


$$AB^2 - AD^2 = IB^2 - ID^2$$

و بنابراین مساوی است با : $(IB - ID)(IB + ID)$ و یا $(IB - ID)(IB + CI)$ یعنی DB.CD که می‌توان با تغییر علامت عاملهای BD.DC نوشت.

بنابراین $AB^2 = AD^2 + BD.DC$. اگر $BC^2 + 2AD^2 = 4AB^2$ باشد، بنابراین $4IB^2 + 2AD^2 = 4AB^2$ و یـــــــــــــــ

$2IB^2 + AD^2 = 2AB^2$ و یا $AD^2 = 2(AB^2 - IB^2)$ یعنی $AD^2 = 2AI^2$ و چون $AD^2 = AI^2 + ID^2$ ، پس : AI=ID یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ AID متساوی‌الساقین است، پس زاویهٔ AD و BC برابر $45°$ می‌باشد. اگر بطور کلی $BC^2 + kAD^2 = 4AB^2$ باشد، چنین خواهیم داشت : $4IB^2 + kAD^2 = 4AB^2$ یعنی $kAD^2 = 4AI^2$ و یا $\frac{AI}{AD} = \frac{\sqrt{k}}{2}$ بنابراین $k < 4$ است و در این صورت اگر زاویهٔ AD با BC برابر α باشد، $\sin\alpha = \frac{\sqrt{k}}{2}$ می‌باشد. اگر نقطه‌های A و B ثابت بمانند، مکان نقطهٔ C دایره‌ای است به مرکز A و به شعاع AB و اگر $BD.BC = a^2$ مقداری ثابت باشد، نقطهٔ D منعکس مکان C را با انعکاسی به قطب B و قوت a خواهد پیمود و منعکس دایره‌ای به شعاع AB و به مرکز A با قطب B خطی مستقیم (زیرا B بر روی دایرهٔ مکان C قرار دارد) این خط مستقیم بر BA عمود است. اگر BD.DC مقداری ثابت باشد، بنابر رابطهٔ اوّل : $AB^2 = AD^2 + BD.DC$. طول AD ثابت باقی می‌ماند. مکان D دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AD می‌باشد.

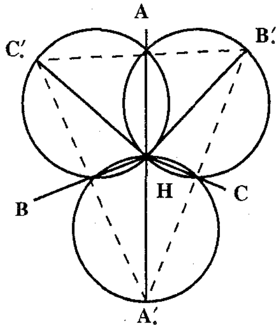


(الف)

۲۴۳. هرگاه α در فاصلهٔ $(0,\pi)$ تغییر کند، مثلث متغیر $A'B'C'$ تمام وضعهای ممکنه را اختیار می‌کند : در ازای $\alpha = 0$ و $\alpha = \pi$ مثلث متغیر تبدیل به مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ و در ازای $\alpha = \frac{\pi}{2}$ تبدیل به نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC و مرکز دایرهٔ محیطی $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ می‌شود. تساوی $(CA, D_B) = (AB, D_C) \bmod \pi$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(BA'_\circ, BA') = (CA'_\circ, CA')$$

این تساوی نشان می‌دهد که چهار نقطهٔ B، C، $A'_\circ$ و A' Cocyclique می‌باشند، پس A' روی دایرهٔ ثابت محیطی مثلث $BCA'_\circ$ قرار دارد. زاویه‌های $A'_\circ\hat{B}H$ و $A'_\circ\hat{C}H$ قائمه بود و نقطهٔ H روی دایرهٔ مزبور واقع بود و نقطهٔ متقاطر $A'_\circ$ می‌باشد. نقطهٔ A' روی دایرهٔ ثابتی به قطر $A'_\circ H$ قرار دارد. α در



(ب)

فاصلهٔ $(\circ,\pi)$ تغییر می‌کند و خطی مانند D_B یک نیمدور حول B می‌چرخد و نقطهٔ دیگر تقاطع این خط با دایرهٔ به قطر $A'_\circ H$ تمام این دایره را طی می‌کنند. مکان A' دایرهٔ به قطر $HA'_\circ$ بوده (شکل ب) و همچنین مکان نقطهٔ B' دایرهٔ به قطر $HB'_\circ$ و مکان نقطهٔ C' به قطر $HC'_\circ$ است.

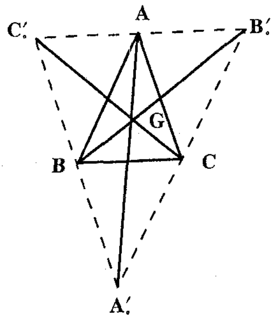
از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود (شکل الف):

$$(A'C, A'B) = (A'_\circ C, A'_\circ B) \bmod \pi$$

یعنی: $(A'B', A'C') = (A'_\circ B'_\circ, A'_\circ C'_\circ) \bmod \pi$

و همچنین $(B'C', B'A') = (B'_\circ C'_\circ, B'_\circ A'_\circ) \bmod \pi$

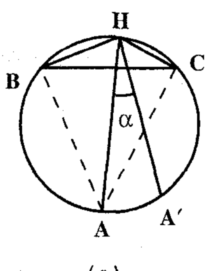
$$(C'A', C'B') = (C'_\circ A'_\circ, C'_\circ B'_\circ) \bmod \pi$$



(پ)

زاویه‌های دو مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ و $A'B'C'$ متساوی‌اند و این دو مثلث مستقیماً متشابه یکدیگرند. مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ مجانس مثلث ABC است در تجانسی که مرکزش نقطهٔ G مرکز ثقل مشترک دو مثلث بوده و نسبت تجانس ۲− است (شکل پ) و مثلث $A'B'C'$ مستقیماً با مثلث ABC متشابه است و $\frac{A'B'}{AB}$ نسبت تشابه مستقیم آنها است که ABC را به $A'B'C'$ تبدیل می‌کند و این تشابه عبارت است از حاصلضرب تجانسی که ABC را به $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ تبدیل می‌کند و تشابه مستقیمی که $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ را به $A'B'C'$ بدل می‌نماید:

$$\frac{A'B'}{AB} = ۲\frac{A'B'}{A'_\circ B'_\circ}$$



(ت)

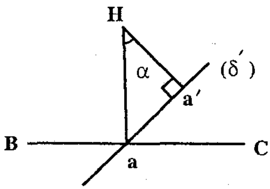
می‌توان گفت که α که در فاصلهٔ $(\circ,\pi)$ تغییر می‌کند این دورهٔ تناوب معادل است که با دورهٔ تناوب $(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ در حالی که α زاویهٔ همسانی مستقیم Σ است که مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ را در مثلث $A'B'C'$ تغییر شکل می‌دهد. مرکز این همسانی نقطهٔ H است که نقطهٔ مشترک دایره‌های مکان $A'B'C'$ است. دایره‌هایی که حاوی زاویهٔ α بوده بترتیب از A' و $A'_\circ$، B' و $B'_\circ$، C' و

$C'_\circ$ می‌گذرند و نسبت این همسانی برابر است با (شکل ت) : $\cos\alpha = \frac{HA'}{HA'_\circ} = \frac{A'B'}{A'_\circ B'_\circ}$

و بالاخره $\frac{A'B'}{AB} = ۲\cos\alpha$. اگر فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ مورد توجه نباشد، می‌توان نوشت :

$\frac{A'B'}{AB} = ۲|\cos\alpha|$ در مطالب بعد فرض می‌کنیم : $-\frac{\pi}{۲} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲}$

ثانیاً. α زاویهٔ (BC, D_A)، (CA, D_B) و $(AB_۱, D_C)$ است که با شرطهای بالا اختیار می‌شود. همسانی $\sum(H;\alpha:\cos\alpha)$ مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ را به مثلث $A'B'C'$ تبدیل می‌کند، دیدیم که H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ می‌باشد. دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ در همسانی $\sum$ تبدیل یافتهٔ دایرهٔ $(A'_\circ B'_\circ C'_\circ)$ است که مرکزش H بوده و شعاع آن برابر است با : $HA' = HA'_\circ\cos\alpha$.

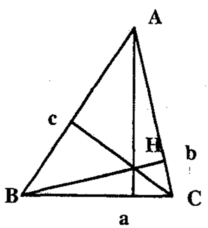


(ث)

ثالثاً. فرض (δ') خط واصل بین وسطهای $A'B'$ و $A'C'$ باشد (شکل ث). (δ') در همسانی $\sum$ تبدیل یافتهٔ خطی است که وسطهای $A'_\circ B'_\circ$ و $A'_\circ C'_\circ$ را به هم وصل می‌کند، یعنی خط BC. اگر a و a' تصویر نقطهٔ H روی BC و (δ') باشند، بردار $\overrightarrow{Ha'}$ تبدیل‌یافتهٔ بردار $\overrightarrow{Ha}$ در همسانی $\sum$ است و داریم :

$$(\overrightarrow{Ha}, \overrightarrow{Ha'}) = \alpha (\bmod ۲\pi), \frac{Ha'}{Ha} = \cos\alpha;$$

رابطه‌های بالا نشان می‌دهند که مثلث Haa' در a' قائمه است، پس (δ') از نقطهٔ ثابت a پای ارتفاع رأسهای A از مثلث ABC می‌گذرد (شکل ج). به همین ترتیب خطی که وسطهای $B'A'$ و $B'C'$ را به هم وصل می‌کند از پای ارتفاع رأس B و خطی که وسطهای $B'C'$ و $C'A'$ را به هم وصل می‌کند از پای ارتفاع رأس C از مثلث ABC می‌گذرد (شکل ج).



(ج)

رابعاً. دیدیم که از مثلث ABC به مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ با یک تجانس به مرکز G و با نسبت ۲- می‌توان رسید که آن را $H(G;-۲)$ می‌نامیم. این تجانس یک همسانی مستقیم است به مرکز G و به زاویهٔ π یا $(-\pi)$ و با نسبت ۲. از مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ به مثلث $A'B'C'$ می‌توان با همسانی $\sum(H, \alpha, \cos\alpha)$ می‌توان رسید، پس از مثلث ABC به مثلث

$A'B'C'$ با حاصلضرب دو همسانی مستقیم می‌توان رسید، یعنی با یک همسانی که مرکزش S و زاویه‌اش $\alpha+\pi$ یا $(\alpha-\pi)$ و نسبت آن $۲\cos\alpha$ است. نقطهٔ مضاعف S از همسانی حاصلضرب برحسب تغییراتش به شکل زیر مشخص می‌شود:

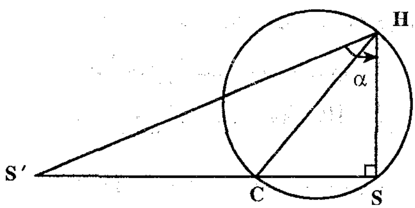
$$K(G;-۲) \quad \sum(H;\alpha;\cos\alpha)$$

$$S \Rightarrow S' \Rightarrow S$$

S، S' و G به قسمی قرار دارند که: $H.\overrightarrow{GS'}=۲\overrightarrow{GS}$ ، S' و S به قسمی قرار دارند که

$$\begin{cases}(HS';HS)=\alpha(\bmod ۲\pi)\\ \dfrac{HS}{HS'}=\cos\alpha\end{cases}$$

این دو رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که مثلث HSS' در رأس S قائمه است و رابطهٔ مربوط به تجانس نشان می‌دهد که G روی قطعه خط SS' و در یک سوم آن از S واقع است. نقطه‌های ثابت G و H و نقطه‌های متغیر S و S' (شکل چ) را تشکیل می‌دهند. زاویه‌های جهت‌دار



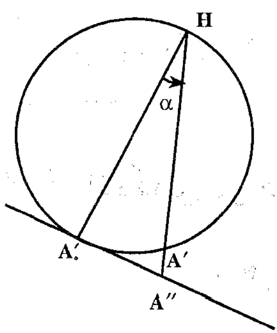
(چ)

$S'\hat{H}S$ و $G\hat{H}S$ در یکجهت بوده و $\overrightarrow{SS'}=۳\overrightarrow{SG}$ و $\tan G\hat{H}S=\dfrac{\tan\alpha}{۳}$ و نقطهٔ S روی دایرهٔ ثابتی واقع است که قطرش HG است. α در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ و $\tan\alpha$ در فاصلهٔ $(-\infty,+\infty)$ و $\tan G\hat{H}S$ نیز در همین فاصله و زاویهٔ $G\hat{H}S$ در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ تغییر می‌کند و S تمام نقطه‌های دایره به قطر GH را می‌پیماید. مکان S دایرهٔ به قطر HG است. برای رسم S چون α در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ مفروض است. زاویهٔ φ را همجهت با α چنان می‌سازیم که $\tan\varphi=\dfrac{\tan\alpha}{۳}$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ GHS وتر GH و زاویهٔ جهتدار H که برابر است با φ معلوم است. مثلث به سهولت رسم می‌شود.

خامساً. نقطهٔ A'' منعکس نقطهٔ A' در انعکاس به مرکز H و به قوت $HA_{\circ}'^{۲}$ است. در

این انعکاس (شکل چ) نقطهٔ A'' محل تقاطع خط HA' و منعکس دایرهٔ مکان A' یعنی دایره به قطر $HA'_\circ$ می‌باشد؛ منعکس این دایره خطی است که در $A'_\circ$ بر این دایره مماس بوده و ضمناً در $A'_\circ$ بر دایرهٔ محیطی مثلث $A'_\circ B'_\circ C'_\circ$ مماس است و خواهیم داشت:

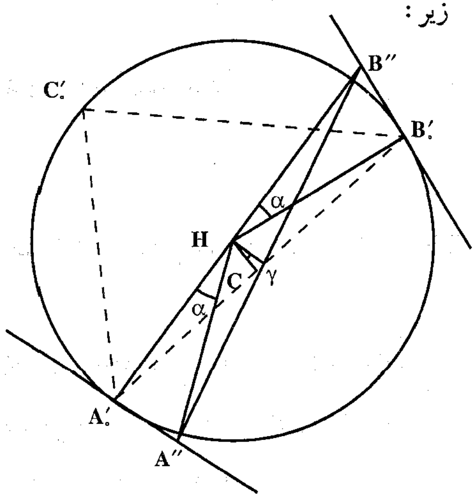
$$\begin{cases}(HA'_\circ, HA'') = \alpha (\bmod ۲\pi)\\ \dfrac{HA''}{HA'_\circ} = \dfrac{۱}{\cos\alpha};\end{cases}$$



(ح)

و A'' تبدیل یافتهٔ $A'_\circ$ در همسانی $\Sigma(H, \alpha, \frac{۱}{\cos\alpha})$ می‌باشد. به همین ترتیب B'' منعکس B' در انعکاس بالا محل برخورد HB' با مماس دو نقطهٔ $B'_\circ$ بر دایرهٔ $(A'_\circ B'_\circ C'_\circ)$ بوده و B'' تبدیل‌یافتهٔ B' در همسانی $\Sigma(H; \alpha; \frac{۱}{\cos\alpha})$ و C'' منعکس C' در همان انعکاس محل برخورد HC' و خط مماس در $C'_\circ$ بر دایرهٔ $(A'_\circ B'_\circ C'_\circ)$ بوده و C'' تبدیل‌یافتهٔ $C'_\circ$ در همسانی Σ می‌باشد. قطعه خط $A''B''$ تبدیل‌یافتهٔ $A'_\circ B'_\circ$ در این همسانی بوده و نقطهٔ γ تبدیل‌یافتهٔ نقطهٔ C وسط $A'_\circ B'_\circ$ است (شکل خ) رابطه‌های زیر:

$$\begin{cases}(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{H\gamma}) = \alpha (\bmod ۲\pi)\\ \dfrac{H\gamma}{HC} = \dfrac{۱}{\cos\alpha}\ ;\end{cases}$$



(خ)

نشان می‌دهند که γ روی $A'_0B'_0$ واقع است و تمام آن را طی می‌کند وقتی که α از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند. پوش $A''B''$ یک سهمی است که کانون آن H و مماس در رأس آن $A'_0B'_0$ است. همچنین پوش خطهای $B''C''$ و $C''A''$ سهمیهای به کانون H بوده که مماس در رأس آنها بترتیب $B'_0C'_0$ و $C'_0A'_0$ است.

طریقهٔ دیگری برای تعیین مکان γ. مثلث $HA''\gamma$ متشابه خود باقی می‌ماند (زیرا مثلث $HA''B''$ متشابه خود می‌ماند) (شکل خ). در همسانی به مرکز H و به زاویهٔ $(\overrightarrow{HA''};\overrightarrow{H\gamma})$ یا $(\overrightarrow{HA'};\overrightarrow{HC})$ و با نسبت $\frac{H\gamma}{HA''}=\frac{HC}{HA'_0}$ نقطهٔ A'' به نقطهٔ γ تبدیل می‌شود. مکان A'' مماس در نقطهٔ A'_0 و مکان γ تبدیل‌یافتهٔ این مماس یعنی $A'_0B'_0$ است.

۴.۲. انعکاس در چندضلعی

۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۴۶. قطب این انعکاس رأس A (محل برخورد BB' و DD') و قوت انعکاس برابر $AC^۲=۲a^۲$ است. زیرا منعکس C بر خودش منطبق است و داریم:

$$AC^۲ = AB.AB' = AD.AD'$$

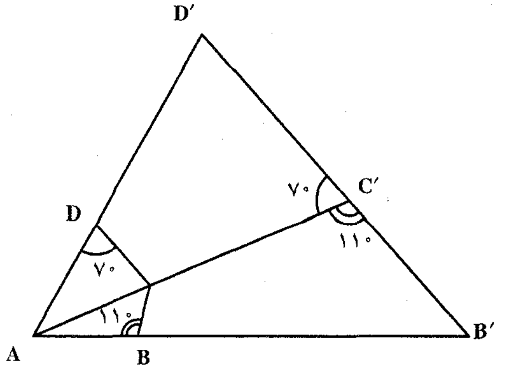
۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند

۲۴۷. چهارضلعیهای $BB'C'C$ و $DCC'D'$ محاطی‌اند و داریم: $C\hat{C'}D' = A\hat{D}C$ و $B'\hat{C'}C = A\hat{B}C$ از آن‌جا:

$$B'\hat{C'}D' = B'\hat{C'}C + C\hat{C'}D' = A\hat{B}C + A\hat{D}C$$

اما به‌دلیل محاطی بودن چهارضلعی ABCD، $A\hat{B}C + A\hat{D}C = ۱۸۰^\circ$ است، پس $B'C'D' = ۱۸۰^\circ$ یعنی نقطه‌های B'، C' و D' همخطند.



۳.۴.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۴.۲. خطها موازی‌اند

۲۴۸. چون OA=OC و OB=OD است، پس $OC' = OA'$ و $OD' = OB'$ و $A'OB' = C'OD' = ۹۰^\circ$ است، پس دو مثلث $OA'B'$ و $OC'D'$ همنهشتند، از آن‌جا، $\hat{B'} = \hat{D'}$ است، پس $A'B' \| C'D'$ می‌باشد.

۴.۴.۲. زاویه

۱.۴.۴.۲. اندازهٔ زاویه

۲۴۹. چهارضلعیهای $BB'C'C$ و $CC'D'D$ محاطی‌اند، بنابراین $B'\hat{C'}C = A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$ و $C\hat{C'}D' = A\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ است، بنابراین زاویهٔ محدب $B'C'D'$، $B'\hat{C'}D' = ۳۶۰^\circ - ۱۹۰^\circ = ۱۷۰^\circ$ و زاویهٔ مقعر $B'C'D'$، $B'\hat{C'}D' = ۷۰^\circ + ۱۲۰^\circ = ۱۹۰^\circ$

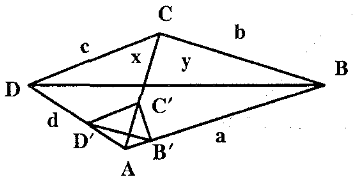
۵.۴.۲. پاره‌خط

۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۵۰. نقطهٔ برخورد AC و BD را Q و نقطهٔ تقاطع AD و BC را R می‌نامیم. ثابت کنید EF

با QR موازی است و دستگاه (Q − PRAD) توافقی است.

۶.۴.۲. رابطه‌های متری



۲۵۱. A را قطب انعکاس اختیار نموده و با قوت اختیاری k شکل را تبدیل می‌کنیم. دایره‌های (ABC)، (ADC)، (ABD) و (CBD) دارای منعکسهای (B′C′)، (C′D′) و (B′D′) و دایرهٔ (C′B′D′) می‌باشند. بنا به فرض نتیجه می‌گیریم که (B′C′) و (C′D′) بر هم عمودند، پس B′D′ قطر دایرهٔ (C′B′D′) است و بر این قطر عمود است، بنابراین دایره‌های (CBD) و (ABD) بر هم عمودند (شکل).

فرض کنیم a، b، c، d، x و y طولهای ضلعهای قطرهای چهارضلعی باشند، داریم:

$$B'C' = \frac{k.b}{ax} \; ; \; C'D' = \frac{k.c}{dx} \; ; \; B'D' = \frac{k.y}{ad} \; ;$$

اما

$$B'C'^{۲} + C'D'^{۲} = B'D'^{۲} \; ;$$

پس:

$$\frac{b^{۲}}{a^{۲}x^{۲}} + \frac{c^{۲}}{d^{۲}x^{۲}} = \frac{y^{۲}}{a^{۲}d^{۲}} \; ;$$

و یا

$$b^{۲}d^{۲} + a^{۲}c^{۲} = x^{۲}y^{۲}$$

۲۵۲. دایرهٔ دلخواه به مرکز A را دایرهٔ انعکاس می‌گیریم. منعکسهای B، C و D عبارتند از B′، C′ و D′ که C′ بر B′D′ واقع نخواهد بود، مگر آن که AC∥BD باشد. نابرابری $B'C' + C'D' \geq B'D'$ معادل خواهد بود با:

$$\frac{BC}{AB.AC} + \frac{CD}{AC.AD} \geq \frac{BD}{AB.AD}$$

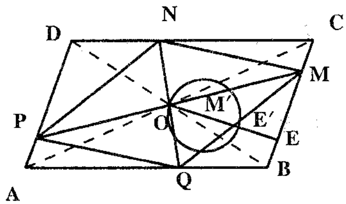
$$AD.BC + AB.CD \geq AC.BD$$

۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۵۳. چـــون $AC = a\sqrt{۲}$ و $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ اســـت، پـــس

$OA^۲ = OB^۲ = OC^۲ = OD^۲ = \frac{a^۲}{۲}$ می‌باشد، بنابراین منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D بر خودشان منطبقند.

۸.۴.۲. رسم شکلها



۲۵۴. فرض کنیم لوزی MNPQ (شکل) در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط است. مرکز لوزی بر مرکز متوازی‌الاضلاع منطبق است. مساحت لوزی عبارت است از:

$$\frac{۱}{۲} PM \times NQ = ۲OM \times ON \;;$$

و بنا به فرض $N.OM \times ON = k^۲$ را چنان بنا می‌کنیم که این رابطه محقق باشد و برای این منظور روی OM نقطهٔ M' را چنان تعیین می‌کنیم که $OM \times OM' = k^۲$ از آن‌جا $ON = OM'$ و M' روی منعکس BC نسبت به O واقع است، قوت انعکاس $k^۲$ است، پس M' روی دایرهٔ به قطر OE' است و E' روی عمود OE که بر BC رسم می‌شود قرار دارد. به قسمی که $OE \times OE' = k^۲$ ؛ پس N در محل برخورد CD با دایره حاصل از دوران دایرهٔ به قطر OE' حول نقطهٔ O به اندازهٔ $\pm ۹۰^\circ$ واقع است. پس از تعیین N، لوزی به سهولت رسم می‌شود.

۲۵۵. دورانی به زاویهٔ ۹۰ درجه را درنظر می‌گیریم که مربع را به خودش تبدیل کند. در این صورت، خطهای راست AK، BK، CK و DK درست روی عمودهایی قرار می‌گیرند که رسم کرده بودیم. درنتیجه نقطهٔ K به نقطهٔ مشترک این عمودها می‌رود.

۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۶. نقطه‌های B'، C' و D' منعکسهای B، C و D را با قطب A و قوت دلخواه k تعیین می‌نماییم و در نتیجه داریم:

$$D'C' = \frac{DC.k}{AD.AC} \;(۱) \quad \text{و} \quad B'C' = \frac{BC.k}{AB.AC} \;(۲) \quad \text{و} \quad B'D' = \frac{DB.k}{AB.AD} \;(۳)$$

و بنا به فرض داریم:

$$BD.AC = BC.AD + AB.DC$$

چنانچه طرفین رابطهٔ اخیر را بر AC.AB.AD تقسیم کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\frac{BD}{AB.AD}=\frac{CD}{AC.AD}+\frac{BC}{AB.AC} \qquad (۴)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که $B'D'=B'C'+C'D'$ و از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های B' ، C' و D' بر یک استقامت واقعند و چون B' ، C' و D' بر یک استقامت واقعند لذا منعکسهای آنها بر یک دایره واقعند که بر نقطهٔ A قطب انعکاس می‌گذرد، یعنی نقطه‌های A، B، C و D بر یک دایره واقعند و یا به عبارت دیگر چهارضلعی ABCD محاطی است.

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۵۷. ۱. چون A، D و O روی یک خطند، پس A' و D' هم روی همین خط قرار دارند. همین‌طور پنج نقطهٔ B' ، C' ، C، B و O همخطند.

۲. چهارضلعی ABCD محاطی است، بنابراین $\hat{A}=\hat{C}$ است، از طرفی چهارضلعی $CDD'C'$ محاطی می‌باشد، پس $\hat{C}=\hat{D}'$ است، در نتیجه $\hat{A}=\hat{D}'$ و از آن‌جا نتیجه می‌شود که $AB \| C'D'$ می‌باشد، موازی بودن $A'B'$ و CD به روش مشابه ثابت می‌شود.

۳. چهارضلعی $ABB'A'$ محاطی است. بنابراین $\hat{A}=\hat{B}'$ است. در نتیجه $\hat{D}'=\hat{B}'$ یعنی چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است.

۵.۲. انعکاس در دایره

۱.۵.۲. مرکز انعکاس، قوت انعکاس

۲۵۸. سه دایرهٔ منعکس بر خط مفروض S عمودند، پس S منعکس دایره‌ای است که از مرکز انعکاس مطلوب می‌گذرد و بر سه دایرهٔ مفروض عمود است، یعنی O نقطه‌ای روی دایرهٔ متعامد (R) برای سه دایرهٔ مفروض است، پس اگر (R) حقیقی باشد، O یکی از دو انتهای قطر عمود بر S در دایرهٔ (R) است.

۲۵۹. فرض کنیم r و r' شعاع دو دایرهٔ مفروض و r_1 و r'_1 شعاع منعکسهای آنها نسبت به

قطب P و k قوت انعکاس و P و P' قوتهای نقطهٔ P نسبت به دو دایرهٔ مفروض (C) و (C') باشد، داریم :

$$\frac{r_1}{r}=\left|\frac{k}{P}\right| \text{ و } \frac{r'_1}{r'}=\left|\frac{k}{P'}\right|$$

و برای این‌که $r_1=r'_1$ باشد، باید $\left|\frac{P}{P'}\right|=\frac{r}{r'}$ یا $\frac{P}{P'}=\pm\frac{r}{r'}$ پس P مکان نقطه‌هایی است که نسبت قوتهای آنها نسبت به دو دایرهٔ (C) و (C') برابر است با $\frac{\pm r}{r'}$ و برای تعیین این مکان فرض کنیم $\lambda=\pm\frac{r}{r'}$. اگر O و O' مرکزهای دو دایرهٔ مفروض باشند، داریم :

$$\overline{PO}^2-\lambda\overline{PO'}^2-\lambda r'^2 \ (1) \text{ و یا } \frac{\overline{PO}^2-r^2}{\overline{PO'}-r'^2}=\lambda$$

اگر O'' نقطهٔ غیرمشخص از OO' باشد، به موجب رابطهٔ استوارت داریم :

$$\overline{PO}^2.\overline{O'O''}+\overline{PO'}^2.\overline{O''O}+\overline{PO''}^2.\overline{OO'}+\overline{OO'}.\overline{O'O''}.\overline{O''O}=0 \qquad (2)$$

فرض کنیم $OO'=d$ و O'' را چنان اختیار می‌کنیم که : $O''O'=\frac{O''O}{-\lambda}=\frac{-d}{1-\lambda}$.

از آن‌جا $OO''=\frac{-d}{1-\lambda}$ و $O''O=\frac{\lambda d}{1-\lambda}$ و در این رابطهٔ (۲) چنین می‌شود :

$$\frac{\overline{PO}^2-\lambda\overline{PO'}^2}{\lambda-1}+\overline{PO''}^2-\frac{\lambda d^2}{(1-\lambda)^2}=0$$

با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$\overline{PO''}^2=\frac{\lambda d^2}{(\lambda-1)^2}-\frac{r^2-\lambda r'^2}{\lambda-1}=\frac{r'^2\lambda^2+(d^2-r^2-r'^2)\lambda+r^2}{(\lambda-1)^2}$$

به‌جای λ مقدارش $\frac{r}{r'}$ و $-\frac{r}{r'}$ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت :

$$\overline{PO''}^2=\frac{rr'\left[d^2-(r-r')^2\right]}{(r-r')^2} \ (3) \text{ و } \overline{PO''}^2=\frac{rr'\left[(r+r')^2-d^2\right]}{(r+r')^2} \ (4)$$

پس مکان P از دو دایره به مرکز O'' تشکیل می‌شود که O'' از رابطهٔ $\frac{O''O}{O''O'}=\pm\frac{r}{r'}$ مشخص می‌شود، یعنی O'' یکی از مرکزهای تجانس دو دایرهٔ (C) و (C') است و

مربع شعاع این دو دایره از رابطه‌های (۳) و (۴) به‌دست می‌آیند. برای این که دایرهٔ مربوط به رابطهٔ (۳) موجود باشد، باید $d > |r - r'|$ یعنی (C) با (C′) نباید متداخل باشد. برای این‌که دایرهٔ مربوط به رابطهٔ (۴) موجود باشد، باید $d < r + r'$، یعنی (C) با (C′) نباید متخارج باشد، پس نتیجه می‌گیریم که اگر دو دایرهٔ (C) و (C′) متقاطع باشند، مکان P از دو دایره تشکیل می‌شود و اگر متداخل و متخارج باشند، مکان P یک دایره خواهد بود و اگر (C) و (C′) با هم مماس باشند، مکان P به نقطهٔ تماس تبدیل می‌شود و مسأله در این حالت غیرممکن است، زیرا (C) و (C′) به دو خط تبدیل می‌شوند.

۲۶۰. فرض کنیم I قطب انعکاسی باشد که دو دایرهٔ C و C′ را در این انعکاس به دو دایرهٔ منطبق‌المرکز C و C′ تبدیل کند. از مرکز مشترک این دو دایره دو خط a و b را رسم می‌کنیم این دو خط بر دو دایرهٔ C و C′ عمودند، پس آنها منعکس دو دایرهٔ A و B خواهند بود که بر دایره‌های C و C′ عمودند و از I می‌گذرند، پس این نقطهٔ I یکی از نقطه‌های مشترک دستگاه دایره‌های عمود بر C و C′ است. بالعکس نقطهٔ I که این چنین به‌دست می‌آید، منعکسهای C و C′ نسبت به آن دو دایره عمود بر دو خط متقاطع خواهند بود، یعنی مرکز آنها نقطهٔ تلاقی این دو خط است. برای این‌که مسأله ممکن باشد، لازم است دستگاه دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ C و C′ در دو نقطهٔ مشترک باشند، به عبارت دیگر C و C′ نقطهٔ مشترک نداشته باشند، با این شرط مسأله دو جواب خواهد داشت.

۲۶۱. چنانچه (O) مرکز مشترک دایره‌های (C) و (C′) به شعاعهای R و R′ و S قطب انعکاس و k قوت انعکاس و d فاصلهٔ OS و (C_1) و (C'_1) بترتیب منعکسهای دایره‌های (C) و (C′) باشند. بنا به خاصیت انعکاس داریم:

$$r = R\left|\frac{k}{P_{S(C)}}\right| = R\left|\frac{k}{d^2 - R^2}\right| \qquad (1)$$

$$r' = R'\left|\frac{k}{P_{S(C')}}\right| = R'\left|\frac{k}{d^2 - R'^2}\right| \qquad (2)$$

و برای این‌که دایره‌های (C_1) و (C'_1) مساوی باشند، بایستی داشته باشیم: $r = r'$ یا $R\left|\frac{k}{d^2 - R^2}\right| = R'\left|\frac{k}{d^2 - R'^2}\right|$ و یا $d^2 = \pm RR'$ که فقط $d = \sqrt{RR'}$ قابل قبول بوده که در نتیجه با معلوم بودن $d = \sqrt{RR'}$ می‌توان نقطهٔ S قطب انعکاس و با استفاده

از رابطه‌های (۱) و (۲)، r و r' و از آن‌جا دایره‌های (C') و (C'_1) را تعیین نمود.

۲۶۲. قوت مرکز انعکاس مطلوب S، نسبت به هر یک از دایره‌های مفروض باید برابر ثابت انعکاس K باشد ؛ پس سه قوت باید برابر باشند، یعنی S باید مرکز اصلی سه دایرهٔ مفروض باشد. همچنین ثابت انعکاس باید با قوت S نسبت به دایره‌های مفروض برابر باشد. مسأله یک و تنها یک جواب دارد. اگر مرکزهای سه دایرهٔ مفروض همخط باشند، بسته به این که دایره‌ها هم‌محور باشند یا نباشند، مسأله یا بی‌نهایت جواب دارد یا جواب ندارد.

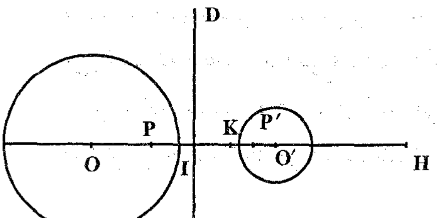
۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۲.۵.۲.۱. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۶۴. از این ویژگی استفاده کنید که هرگاه یک نقطه از دایره نیمساز دو دایره را قطب انعکاس اختیار کنیم، این دایره به یک خط و دو دایره به دو دایره تبدیل می‌شوند که نسبت به آن خط قرینه‌اند.

۲.۵.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۶۵. (O) و (O′) دو دایرهٔ مفروض و I پای محور اصلی D و P و P′ قطبهای D نسبت به دو دایره و H و K مرکزهای تجانس آنها است. می‌خواهیم ثابت کنیم که P و P′ نسبت به HK مزدوج توافقی می‌باشد.



می‌دانیم که دایرهٔ به قطر HK متعلق به دستگاه دایره‌های (O) و (O′) است. منعکس نقطه‌های O، O′، K و H را نسبت به I و با قوتی برابر قوت مشترک نقطهٔ I نسبت به دایره‌های مزبور به‌دست می‌آوریم. نقطه‌های P، P′، H و K به‌دست می‌آیند و چون H و K مزدوج OO′ می‌باشند، K و H مزدوج PP′ خواهند بود.

۳.۲.۵.۲. نقطه‌ها غیرمتناظرند

۲۶۶. ثابت کنید خط واصل بین این نقطه‌های متناظر از مرکز تجانس دو دایره می‌گذرد.

۳.۵.۲. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۵.۲. خطها بر هم عمودند

۲۶۷. آنها در مرکز دایره بر هم عمودند.

۴.۵.۲. زاویه

۱.۴.۵.۲. اندازهٔ زاویه

۲۶۸. با رسم شکل در حالت اوّل حکم بسادگی محقق می‌شود. در حالت دوم با فرض a=b و c=۲p، داریم :

$$ch۲\delta = \frac{(۲p)^۲ - b^۲ - b^۲}{۲b^۲} = ۲(\frac{p}{b})^۲ - ۱$$

۲۶۹. اگر سه نقطهٔ جدا از هم به فاصله‌های a، b و c از هم باشند، به مرکزهای این سه نقطه سه دایرهٔ دو به دو مماس بر هم می‌توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s-a$ ، $s-b$ و $s-c$ می‌باشند که s نصف مجموع a+b+c است. دو دایرهٔ مماس بر این سه دایره که نقطهٔ مشترک ندارند، دایره‌های سدی نامیده می‌شوند. دایره‌های سدی همان دایره‌های چیستان اشتینر در حالت n=۳ می‌باشند. بنابراین :

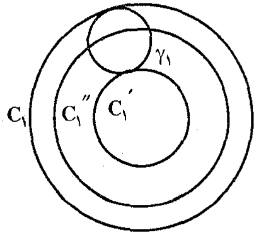
$$ch\frac{\delta}{۲} = \sec\frac{\pi}{۳} = ۲$$

۲۷۰. اتحاد مثلثاتی زیر را در نظر گرفته و در آن θ را با $\frac{r}{n} + \frac{r}{۲}$ جانشین سازید :

$$\frac{۱}{\sin\theta} - \cot\theta = \tan\frac{\theta}{۲}$$

۲۷۱. با توجه به این که محور اصلی دو دایره به معادلهٔ x=۰ است، خواهیم داشت :

$$ch\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^۲ - d^۲}} \quad \text{و} \quad ch\beta = \frac{b}{\sqrt{b^۲ - d^۲}}$$

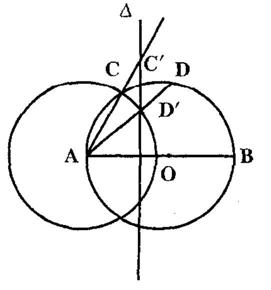


۲۷۲. فرض کنید C و C' متقاطعند، بنابراین هر دایرهٔ C'' که متعلق به دستگاه تشکیل شده از C و C' باشد از نقطه‌های تقاطع آنها می‌گذرد. یکی از نقطه‌های تقاطع را قطب انعکاس اختیار می‌کنیم. با قوت دلخواهی شکل را منعکس می‌نماییم. دایره‌های C، C' و C'' به سه خط همرس C_1، C_1' و C_1'' تبدیل می‌شوند و دایرهٔ متغیر γ به دایرهٔ متغیر γ_1 که از یک نوع به خطهای C_1 و C_1' مماس خواهد بود، تبدیل می‌شود و به علت تجانس هر خط مانند C_1'' دایرهٔ γ_1 را به زاویه‌های مساوی قطع می‌کند و چون انعکاس حفظ‌کنندهٔ زاویه‌ها است، C'' هر دایره مانند γ را به زاویه‌های متساوی قطع خواهد کرد. وقتی که C و C' بر هم مماس باشند، استدلال به طریق بالا است. اکنون فرض می‌کنیم C و C' نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. در این حالت قطب انعکاس را یکی از نقطه‌های حد دستگاه دایره‌های C و C' اختیار می‌کنیم. دایره‌های C و C' و هر دایرهٔ C'' متعلق به دستگاه به دایره‌های متحدالمرکز C_1، C_1' و C_1'' تبدیل می‌شوند و منعکس دایره‌ای مانند γ دایره‌ای مانند γ_1 خواهد بود که با C_1 و C_1' از یک نوع مماس می‌باشد. این دایره γ_1 دایرهٔ C_1'' را به زاویهٔ ثابتی قطع می‌کند، زیرا می‌توان با دورانی حول مرکز C_1'' از یک دایره، دایرهٔ دیگر را به‌دست آورد. پس هر دایره مانند C'' با دایرهٔ مانند γ زاویهٔ ثابتی می‌سازد (شکل).

۲.۵.۵. پاره‌خط

۲.۵.۵.۱. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۲۷۳. دایرهٔ (O) منعکس خط Δ نسبت به نقطهٔ A است و چهارضلعی $CC'DD'$ محاطی است، پس می‌توان نوشت : $AC.AC' = AD.AD'$ و AC با AD' برابر است، پس $AC' = AD$ و از آن‌جا : $CC' = DD'$.



۶.۵.۲. رابطه‌های متری

۲۷۴. حاصلضرب آنها برابر با K^4 است.

۲۷۵. هرگاه O مرکز دایرهٔ ω باشد، دو مثلث OAP و OPA' متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{PA}{PA'}=\frac{OA}{OP}=\text{ثابت}$$

$$\Delta B''BC: \frac{B''B'}{B''B}=\frac{B'M}{B'C} \quad \text{و} \quad \Delta BC''C: \frac{C''C'}{C''C}=\frac{C'M}{BC}$$

$$B'M=C'M \Rightarrow \frac{B''B'}{B''B}=\frac{C''C'}{C''C} \Rightarrow B''C'' \| BC$$

۲۷۶. فرض کنیم خط AB در نقطهٔ T بر دایرهٔ (C) مماس است. نقطه‌های A، B و T بر یک استقامتند، پس یکی از سه طول AB، AT و BT برابر با مجموع دو مقدار دیگر است اما $AT=\sqrt{\alpha}$ و $BT=\sqrt{\beta}$. پس یکی از سه مقدار AB، $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ برابر مجموع دو مقدار دیگر است. بعکس اگر این شرط برقرار باشد، دایره‌های به مرکزهای A و B و به شعاع $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ بر هم مماسند وعلاوه بر آن این دو دایره بر دایرهٔ (C) عمود می‌باشند. به این ترتیب دایرهٔ (C) بر دایره‌های (A) و (B) که با هم مماسند، عمود می‌باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که دایرهٔ (C) مماس است بر خط‌المرکزین AB.

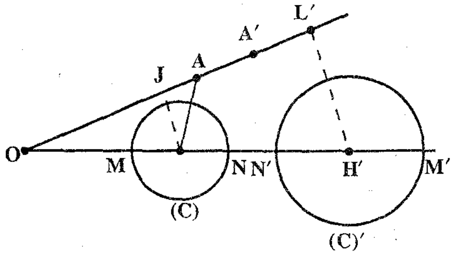
۲۷۷. فرض کنیم (Γ) در قسمت خارجی (Γ') واقع باشد و سه نقطهٔ A، B و C روی (Γ) را در نظر می‌گیریم. A را قطب انعکاس و قوت آن را (که $\alpha\beta$ می‌نامیم) نسبت به (Γ') قوت انعکاس اختیار می‌کنیم. منعکس (Γ') بر خود منطبق است. فرض کنیم B_1 و C_1 منعکسهای B و C باشد. منعکس (Γ) خط B_1C_1 است و برای این که (Γ) بر (Γ') مماس شود، لازم است B_1C_1 بر (Γ') مماس گردد و می‌دانیم برای این که B_1C_1 بر (Γ') مماس شود چنانچه β_1 و γ_1 قوتهای B_1 و C_1 نسبت به (Γ') باشند، لازم و کافی است یکی از سه مقدار B_1C_1، $\sqrt{\beta_1}$ و $\sqrt{\gamma_1}$ برابر مجموع دو مقدار دیگر باشد. اکنون آنها را محاسبه می‌کنیم. داشتیم:

$$B_1C_1=\frac{\alpha.BC}{AB\times AC}$$

$$\beta_1=\frac{\alpha\times\beta}{AB^2} \quad ; \quad \gamma_1=\frac{\alpha\times\gamma}{AC^2} \quad \text{و} \quad \sqrt{\beta_1}=\frac{\sqrt{\alpha\times\beta}}{AB} \quad ; \quad \sqrt{\gamma_1}=\frac{\sqrt{\alpha\times\gamma}}{AC} \quad \text{و}$$

پس یکی از سه مقدار $\frac{\alpha.BC}{AB\times AC}$ ، $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{AB}$ و $\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{AC}$ باید با مجموع دو مقدار دیگر برابر شود. هر سه مقدار را در $\frac{AB\times AC}{\sqrt{\alpha}}$ ضرب می‌کنیم، پس یکی از سه مقدار $BC\sqrt{\alpha}$ ، $CA\sqrt{\beta}$ و $AB\sqrt{\gamma}$ باید با مجموع دو مقدار دیگر مساوی شود.

۲۷۸. فرض کنیم I و 'H مرکزهای دو دایره، J و 'L تصویرهای آنها روی 'OAA، MN و 'M'N قطرهای دایره‌هایی که روی خط‌المرکزین اختیار شده‌اند، باشند. در مثلث OAI (شکل) داریم:



$$\overline{AI}^2=\overline{OI}^2+\overline{OA}^2-2\overline{OA}\times\overline{OJ}$$

و از آن‌جا:

$$\overline{AI}^2-r^2=\overline{OI}^2-r^2+\overline{OA}^2-2\overline{OA}\times\overline{OJ} \qquad (1)$$

r شعاع دایرهٔ (C) است، یعنی:

$$\alpha=\omega+\overline{OA}^2-2\overline{OA}\times\overline{OJ}$$

و به همین ترتیب برای دایرهٔ ('C) خواهیم داشت:

$$\alpha'=\omega'+\overline{OA'}^2-2\overline{OA'}\times\overline{OL'} \qquad (2)$$

اما

$$\omega'=\overline{OM'}\times\overline{ON'}=\frac{k^2}{\overline{OM}\times\overline{ON}}=\frac{k^2}{\omega}$$

$$\frac{\overline{OL'}}{\overline{OJ}}=\frac{\overline{OH'}}{\overline{OI}}=\frac{\frac{1}{2}(\overline{OM'}+\overline{ON'})}{\frac{1}{2}(\overline{OM}+\overline{ON})}=\frac{k(\frac{1}{\overline{OM}}+\frac{1}{\overline{ON}})}{\overline{OM}+\overline{ON}}=\frac{k}{\overline{OM}.\overline{ON}}=\frac{k}{\omega}$$

و از آن‌جا $\overline{OL'}=\frac{k}{\omega}\times\overline{OJ}$ و رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

$$\alpha'=\frac{k^2}{\omega}+\frac{k^2}{\overline{OA}^2}-\frac{2k^2\times\overline{OJ}}{\overline{OA}\times\omega}$$

یا

$$\alpha'=\frac{k^2}{\omega\times\overline{OA}^2}(\overline{OA}^2+\omega-2\overline{OA}\times\overline{OJ})=\frac{k^2\times\alpha}{\omega\times\overline{OA}^2}=\overline{OA'}^2\times\frac{\alpha}{\omega}$$

۲۷۹. مجذور نسبت بین طولهای مماسها برابر است با:

$$\frac{c^۲-(a+b)^۲}{c^۲-(a-b)^۲}=\frac{c^۲-a^۲-b^۲-۲ab}{c^۲-a^۲-b^۲+۲ab}=\frac{ch\delta-۱}{ch\delta+۱}=th^۲\frac{\delta}{۲}$$

۲۸۰. شعاعهای دو دایرهٔ مماس داخلی را با a و b و شعاع دایرهٔ نیمساز آنها را با r نشان می‌دهیم. دایرهٔ انعکاس را به مرکز نقطهٔ تماس دو دایره انتخاب می‌کنیم. منعکسهای دو دایره می‌شود دو خط موازی که به فاصله‌های $\frac{k^۲}{۲a}$ و $\frac{k^۲}{۲b}$ از قطب انعکاس واقعند. منعکس دایرهٔ نیمساز خطی می‌شود موازی و متساوی‌الفاصله با دو خط مزبور و به فاصلهٔ $\frac{k^۲}{۲r}$ از قطب انعکاس. بنابراین داریم:

$$\frac{۲}{r}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۲۸۱. دو مثلث POB و COP′ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{PO}{OB}=\frac{CO}{OP'}\ ,\ \ OP.OP'=k^۲$$

۲۸۲. اگر (O) و (O′) دایره‌های مفروض و T و T′ نقطه‌های تماس دایرهٔ (ω) با دایره‌های (O) و (O′) و S نقطهٔ تقاطع مماس مشترک خارجی دایره‌های (O) و (O′) با خط‌المرکزین آنها باشد: S مرکز تجانس مستقیم (O) و (O′) و T و T′ مرکزهای تجانس معکوس دو به دو دایره‌های (O,ω) و (O′,ω) می‌باشد و چون در سه دایره هر دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک امتدادند، لذا S، T و T′ بر یک استقامت می‌باشند و چون OT و O′T′ در نقطهٔ (ω) مرکز آن دایرهٔ متقاطع می‌باشد، در نتیجه T و T′ نقطه‌های متجانس نبوده و نقطه‌های منعکس می‌باشند، زیرا در تجانس بایستی OT||O′T′ باشد و در این صورت قوت انعکاس آنها:

$$ST.ST'=SI.SI=k$$

۲۸۳. اگر C و C′ دو دایرهٔ مفروض باشند. چنانچه می‌دانیم دو دایره به هر طریق که باشند، منعکس یکدیگر بوده و نقطهٔ تلاقی مماس مشترک خارجی دو دایره با خط‌المرکزین، قطب انعکاس و مرکز تجانس آنهاست و داریم: PT.PT′ = k (k قوت انعکاس) و TH و T′H′ قطبیهای P نسبت به دو دایرهٔ C و C′ می‌باشند. از تشابه مثلثهای

$(\overset{\Delta}{PT'H'} \sim \overset{\Delta}{PTC})$ و $(\overset{\Delta}{PTH} \sim \overset{\Delta}{PT'C'})$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{PT}{PC'} = \frac{PH}{PT'}$ و

$\frac{PT}{PH'} = \frac{PC}{PT'}$ و یا $PT.PT' = PC.PH' = PH.PC'$ که از این رابطه نتیجه می‌گیریم که H پای قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (C) منعکس (C′) مرکز دایرهٔ (C′) و H′ پای قطبی قطب P نسبت به دایرهٔ (C′) منعکس C مرکز دایرهٔ (C) می‌باشد.

۲۸۵. در حالتی که ω و α متقاطع یا بر هم مماس باشند، حکم بدیهی است. در حالتی که ω و α متخارج باشند، معادله‌های آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$x^2 + y^2 = k^2$ و $x^2 + y^2 = ax$

معادلهٔ منعکس α نسبت به ω می‌شود:

$$\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{k^2y}{x^2+y^2}\right)^2 = a\left(\frac{k^2x}{x^2+y^2}\right)$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت: $k^2 = ax$.

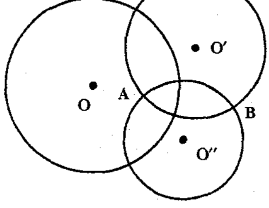
۲۸۸. تقارن نسبت به یک خط حالت خاص انعکاس نسبت به دایره است.

۲۸۹. دو دسته خطهای موازی عمود بر هم به دست می‌آید.

۲۹۰. دسته دایرهٔ (F) و دو دایرهٔ (Γ_1) و (Γ_2) را که دسته مزدوج آن می‌باشند در نظر می‌گیریم. دایره‌های دستگاه (F) بر (Γ_1) و (Γ_2) عمودند؛ پس منعکسهای آنها بر منعکسهای (Γ_1) و (Γ_2) عمودند و تشکیل یک دسته دایره می‌دهند. اگر دسته دایرهٔ (F) دو نقطهٔ مشترک داشته باشند و قطب انعکاس بر یکی از آنها منطبق باشد، منعکس دستگاه (F) یک دسته خط خواهد بود و اگر دایره‌های (F) بر یک خط مماس باشند، یعنی دارای یک نقطهٔ مشترک باشند و قطب انعکاس بر این نقطه منطبق باشد، منعکس دایره‌های (F) خطهای موازی با مماس مشترک دایره‌های (F) خواهند بود.

۲۹۱. دایره درون دایرهٔ انعکاس.

۲۹۲. در شکل، فرض می‌کنیم O دایرهٔ انعکاس با دو دایرهٔ O′ و O″ عمود بر آن و متقاطع با یکدیگر در A و B باشد. می‌توان ثابت کرد که نقطهٔ O با A و B بر یک استقامت واقعند، زیرا این نقطه، نقطه‌ای است که می‌توان از آن مماسهای همنهشت بر دایره‌های O′ و O″ رسم کرد (اثبات این گزاره را به عنوان تمرین وامی‌گذاریم). در این صورت، A و B، نقطه‌های منعکسند.



۸.۵.۲. رسم شکلها

۲۹۳. اگر D محور اصلی دو دایره و S یک نقطه از آن باشد، داریم :

$$SA.SM = SA'.SM' = P_{S(O)} = P_{S(O')}$$

چنانچه S را قطب و $P_{S(O)} = P_{S(O')} = k$ قوت انعکاس فرض کنیم، منعکسهای دایره‌های (O′) و (O″) و خط D بر خودشان منطبق است و خط MM′ منعکس دایرهٔ SAA′ می‌باشد، برای این که MM′ بر خط D محور اصلی دو دایره عمود باشد. لازم است منعکسهای آنها بر هم عمود باشد. وقتی خط D بر دایرهٔ SAA′ عمود است از مرکز آن می‌گذرد، یعنی مرکز دایرهٔ SAA′ بایستی بر D واقع باشد و در نتیجه، عمودمنصف AA′ را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. محل برخورد دایرهٔ به مرکز (ω) و شعاع $\omega A = \omega S'$ با خط D نقطهٔ S است که اگر SA و SA′ را امتداد دهیم تا دایره‌های (O) و (O′) را در نقطه‌های M و M′ قطع کند، MM′ بر D عمود خواهد بود.

۲۹۴. اگر $A\overset{\triangle}{B}C$ مثلث مطلوب محاط در دایرهٔ مفروض (O) باشد، به نحوی که ضلعهایش از نقطه‌های M، N و P گذشته باشد، ابتدا M′ منعکس نقطهٔ M با قطب P و قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) تعیین می‌کنیم ؛ در این صورت داریم : $PB.PA = PM.PM'$. آن‌گاه BM′ را وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگر B′ قطع کند. چنانچه N′ را منعکس N با قطب M′ و قوت، قوت نقطهٔ M′ نسبت به دایرهٔ (O) تعیین نماییم، در این حالت چهارضلعیهای ABM′M و NN′BB′ بترتیب در دایره‌های (Γ) و (ω) محاط می‌باشند و داریم :

$$\hat{M} + M\hat{B}'A = ۱۸۰^\circ \ ,\ M\hat{B}'A + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ \ ,\ A\hat{C}B' = \hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{B'EA}}{۲}$$

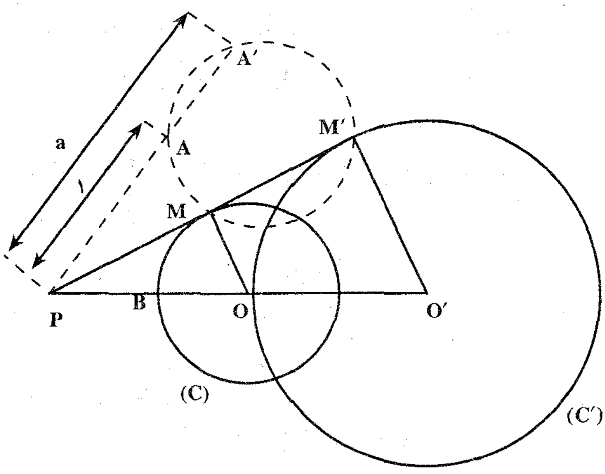
از مقایسهٔ این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که : $\hat{M} = A\hat{C}B'$ و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\overline{PM} \| \overline{BC}$ (۱) و همچنین، چون چهارضلعی EB′BC محاطی است، داریم :

$$\hat{E} + B'\hat{B}C = ۱۸۰^\circ \ ,\ B'\hat{B}C = \hat{B}_۲ + ۱۸۰^\circ \ ,\ N\hat{N}'B' = \hat{B}_۲ = \frac{\overset{\frown}{NB'}}{۲}$$

از مقایسهٔ این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که $\overline{EC} \| \overline{NM'}$ (۲) از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $P\hat{M}'N = B'\hat{C}E = \alpha$ (۳) و از آن‌جا حل مسأله چنین است : ابتدا M′ منعکس M را با قطب P و قوت، قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) تعیین نموده

و $M'N$ را وصل کرده، سپس N' منعکس N را با قطب M' و قوت، قوت نقطهٔ M' نسبت به دایرهٔ (O) تعیین می‌کنیم تا زاویهٔ $N\hat{M'}P = \alpha$ به دست آید و از نقطهٔ دلخواه I واقع بر دایرهٔ (O) زاویهٔ $F\hat{I}F' = \alpha$ رسم نموده و دایرهٔ (δ) متحدالمرکزین با دایرهٔ (O) و مماس بر $\overline{FF'}$ رسم می‌کنیم. سپس از N' مماسی بر دایرهٔ (δ) رسم می‌نماییم تا دایرهٔ (O) را در نقطه‌های B' و E قطع نماید. حال چنانچه از B' موازی MP رسم کنیم دایره را در نقطهٔ C قطع می‌نماید و محل تلاقی MC با دایرهٔ (O) نقطهٔ A بوده و اگر A را به P وصل کنیم نقطهٔ تقاطعش با دایره، نقطهٔ B بوده که بنا به خاصیت بالا BC از نقطهٔ N گذشته و ABC مثلث مطلوب است.

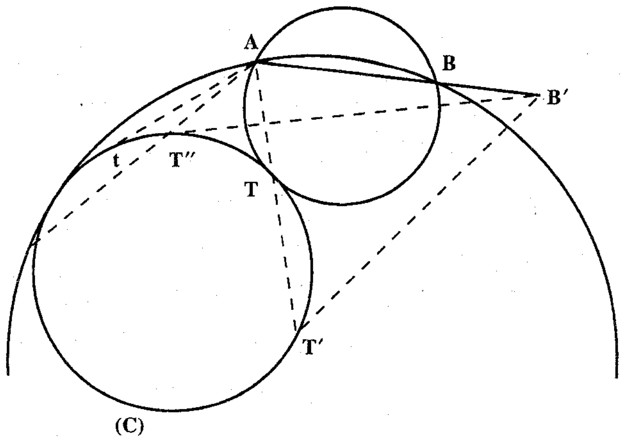
۲۹۵. به طورکلی برای رسم منعکس دایره کافی است که یک نقطه و مرکزش را تعیین کنیم. امّا می‌دانیم که مرکز آن دایره، منعکس مزدوج توافقی P نسبت به دو سر قطری از (C) است که از P می‌گذرد. در حالت خاصی که P خارج دایرهٔ (C) باشد (شکل)، کافی است که مماس PM را بر دایره رسم کنیم و M' منعکس M را (با ترسیم) به‌دست آوریم و از M' موازی MO بکشیم تا امتداد PO را در O' قطع کند و بالاخره به مرکز O' و به شعاع $O'M'$ دایرهٔ مطلوب را رسم کنیم.



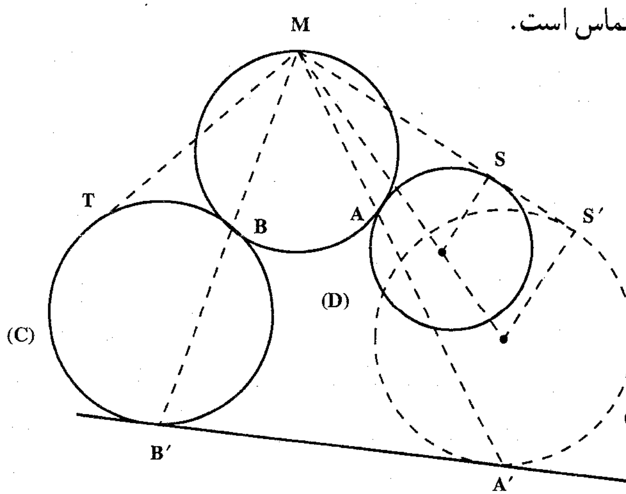
۲۹۶. مسأله را که حل شده فرض کنیم به راه حل زیر می‌رسیم:

از A مماس At را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم (شکل). A را قطب و At^2 را که قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق است. B' منعکس B را تعیین می‌کنیم و از B' خطی رسم می‌کنیم که در T' بر (C) مماس شود. AT' را

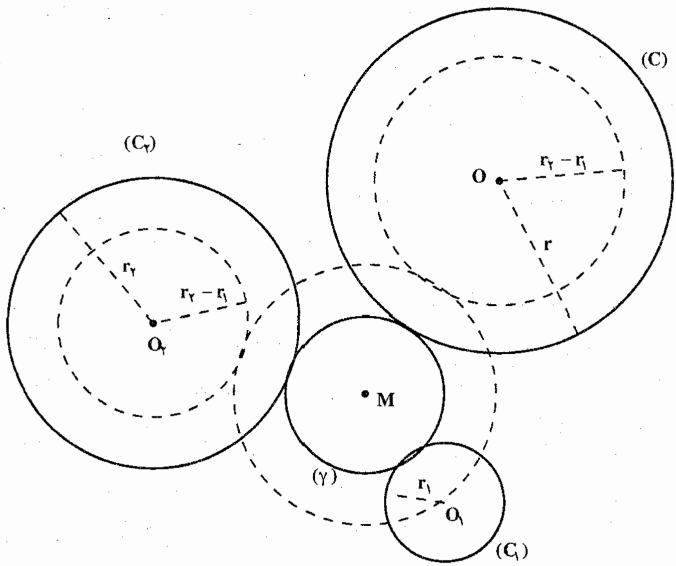
وصل می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را بار دیگر در T قطع کند. دایره‌ای که بر A، B و T بگذرد، دایرهٔ مطلوب است، زیرا این دایره منعکس خطی است که از B' بر (C) مماس شده است، پس بر (C) مماس خواهد بود.



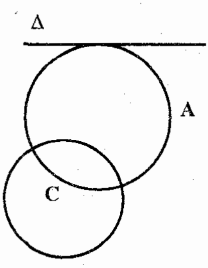
۲۹۷. از M مماس MT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم (شکل). M را قطب و MT^2 را قوت انعکاس اختیار کرده، منعکسهای دایره‌های (C) و (D) را به دست می‌آوریم. منعکس (C) بر خودش منطبق است و منعکس D دایرهٔ (D') است. مماس مشترک دو دایرهٔ (D') و (C) را رسم می‌کنیم تا بر آنها در A' و B' مماس شود. MA' دایرهٔ (D) را در A و MB' دایرهٔ (C) را در B قطع می‌کند. دایره‌ای که بر M، A و B بگذرد، دایرهٔ مطلوب است، زیرا که این دایره، چون منعکس مماس مشترک $A'B'$ است، بر دو دایرهٔ مفروض مماس است.



۲۹۸. اگر مسأله حل شده و دایرهٔ (γ) (شکل) دایرهٔ خواسته شده و M مرکز آن باشد و مرکز کوچکترین سه دایرهٔ مفروض را O_1 بنامیم، دایره‌ای که به مرکز M و شعاع MO_1 رسم شود بر نقطهٔ O_1 خواهد گذشت و بر دو دایره، یکی به مرکز O و شعاع $r - r_1$ و دیگری به مرکز O_2 و شعاع $r_2 - r_1$ مماس خواهد بود. پس مسأله تبدیل می‌شود به رسم دایره‌ای که بر یک نقطهٔ معلوم (یعنی O_1) بگذرد و بر دو دایره (یعنی دایره‌های به شعاع $r - r_1$ و مرکز O و به شعاع $r_2 - r_1$ و مرکز (O_2)) مماس باشد، پس از به دست آمدن مرکز این دایره، رسم دایرهٔ خواسته شدهٔ مسأله به آسانی انجام می‌گیرد.



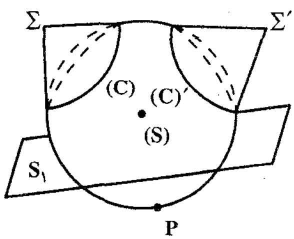
۲۹۹. نقطهٔ A را قطب انعکاس و قوت نقطهٔ A را نسبت به دایرهٔ (C) قوت انعکاس اختیار می‌کنیم در این صورت منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق می‌شود و منعکس دایره‌ای مانند (C') خواهد بود که از A می‌گذرد و منعکس دایرهٔ جواب خطی است که از مرکز دایرهٔ (C) خواهد گذشت، زیرا در انعکاس زاویه‌ها محفوظ می‌ماند و این خط باید بر دایرهٔ (C) عمود شود، یعنی از مرکزش بگذرد، بنابراین راه حل مسأله چنین است: دایرهٔ (C') منعکس Δ را پیدا می‌کنیم و از نقطهٔ C مماسی بر آن می‌کشیم؛ منعکس این مماس جواب مسأله است. ممکن است مسأله دو جواب داشته باشد.



۳۰۰. خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم که قطر AB از اوّلی و قطر CD از دومی را پدید می‌آورد به گونه‌ای که $AC \| BD$. دایره‌های به قطر AD و به قطر BC را با α و β نشان می‌دهیم و L و M نقطه‌های حدی دسته دایره‌های $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم. دایرهٔ نیمساز مطلوب دایرهٔ به قطر LM است، زیرا در انعکاس نسبت به این دایره که بر دایره‌های α و β عمود است، A به D و B به C تبدیل می‌شود.

۳۰۱. از نقطه نظر هندسهٔ انعکاسی وضع دایره‌های مورد نظر، نظیر شکل مربوط به چیستان اشتینر در حالت $n = ۴$ می‌باشد، بنابراین سه عدد از انحرافهای انعکاسی برابر $۲\log(\sqrt{۲} + ۳)$ و دوازده عدد دیگر برابر با صفر است.

۳۰۲. دو نقطهٔ P و Q را در درون دایرهٔ معلوم α در نظر می‌گیریم. منعکسهای P و Q نسبت به هر دایرهٔ به مرکز P عبارتند از P_∞ و Q' و منعکس دایرهٔ α در این انعکاس یک دایرهٔ α' است که P_∞ و Q' در بیرون α' واقعند. مماسهای رسم شده از Q' بر α' دو «دایره» که بر P_∞ و بر Q' می‌گذرد که عبارتند از منعکسهای دو دایره‌ای که بر P و Q می‌گذرند و بر α مماس می‌باشند.



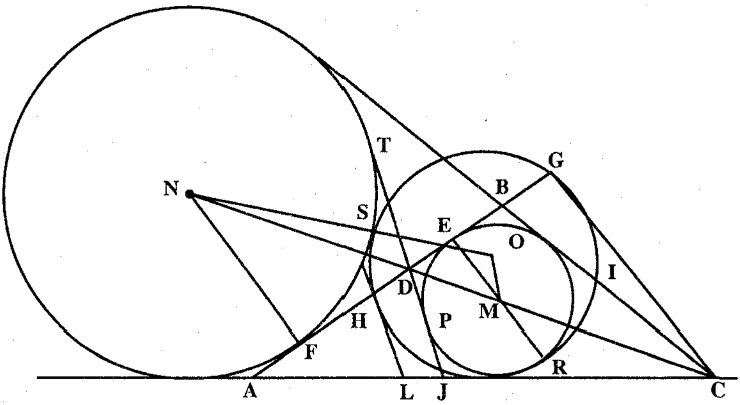
۳۰۳. دو دایرهٔ (C) و (C′) را روی کرهٔ (S) در نظر می‌گیریم فرض کنیم (C_1)، (C_1') و (S_1) منعکسهای (C)، (C′) و (S) نسبت به قطب P باشند. چون بنا به فرض (C_1) و (C_1') باید در یک صفحه واقع باشند، پس (S_1) که شامل آنها است، صفحه است و در نتیجه قطب P باید روی (S) واقع باشد. از طرف دیگر Σ و Σ' رأسهای مخروطهای محیط بر (S) در طول دایره‌های (C) و (C′) باشند. می‌دانیم که مرکزهای (C_1) و (C_1') محل برخورد $P\Sigma$ و $P\Sigma'$ با صفحه (S_1) خواهند بود و برای این که مرکزهای (C_1) و (C_1') بر هم منطبق شوند، لازم است $P\Sigma$ بر $P\Sigma'$ منطبق گردد، پس P یکی از نقطه‌های تقاطع خط $\Sigma\Sigma'$ با کرهٔ (S) است. برای این که مسأله جواب داشته باشد، لازم است $\Sigma\Sigma'$ کرهٔ (S) را قطع کند، یعنی (C) و (C′) هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند (شکل).

۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۴. انعکاس $(B, BC^۲)$ را در نظر بگیرید.

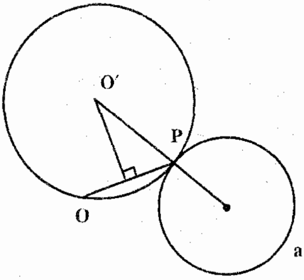
۳۰۵. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های M و N مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس به ضلع AB و r و r′ شعاعهای این دایره‌ها می‌باشند. نقطه‌های H، I و J وسطهای ضلعهای مثلثند که دایرهٔ نه نقطه از آنها می‌گذرد. ME و NF شعاعهای نقطه‌های تماس ضلع AB را با دایره‌های گفته شده رسم کرده، CG ارتفاع رأس C را می‌کشیم. دایرهٔ نه نقطه از G نیز می‌گذرد و داریم :

$$\frac{GE}{GF}=\frac{DE}{DF} \quad \text{و یا} \quad \frac{CM}{CN}=\frac{r}{r'}=\frac{DM}{DN}$$

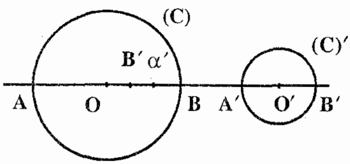


بنابراین تقسیم (GHEF) توافقی است و می‌دانیم AF = BE است، پس نقطهٔ H وسط EF نیز می‌باشد و به موجب رابطهٔ نیوتن داریم : $HE^2 = HD.HG = k^2$. اگر H را قطب انعکاس و k^2 را قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایره‌های (M) و (N) بر خود منطبق بوده و منعکس دایرهٔ نه نقطه چون از H′ می‌گذرد، خطی است مستقیم که از منعکس G یعنی D می‌گذرد و با HL، مماس نقطهٔ H موازی است، چون HL با AB نسبت به زاویهٔ C آنتی پارالل است، پس منعکس دایرهٔ نه نقطه نیز با AB نسبت به زاویهٔ C آنتی پارالل خواهد بود و این خط که باید از D بگذرد، ناچار مماس مشترک داخلی دیگر دو دایرهٔ (M) و (N) یعنی خط TP است، چون منعکس دایرهٔ نه نقطه بر منعکسهای دایره‌های (M) و (N) مماس است، پس دایرهٔ نه نقطه بر دایره‌های (M) و (N) و هریک از دایره‌های محاطی خارجی دیگر مماس است.

۳۰۶. منعکسهای a و P را نسبت به یک دایرهٔ به مرکز O به دست می‌آوریم که دایرهٔ a′ و نقطهٔ P′ واقع بر آن خواهد بود. در P′ فقط یک خط مماس بر a′ می توان رسم کرد. همچنین می‌توانیم منعکسهای a و O را نسبت به یک دایرهٔ به مرکز P به دست آوریم که

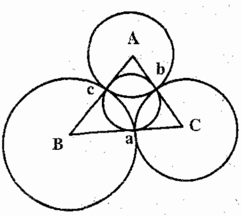


خط a' و نقطهٔ O' غیرواقع بر آن خواهد بود و از O' فقط یک خط موازی با a' می‌توان رسم کرد.

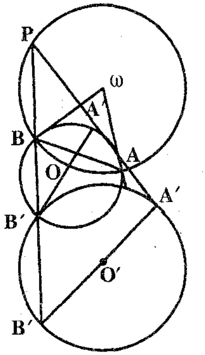


۳۰۷. قطب انعکاس را روی دایرهٔ (C) به دلخواه اختیار نموده و با قوت اختیاری، شکل را منعکس می‌کنیم. منعکس (C)، خط (C_1) و منعکس (C') دایرهٔ (C'_1) و منعکس دایرهٔ (γ)، دایرهٔ (γ_1) است که بر دایرهٔ (C'_1) مماس و بر خط (C_1) عمود است؛ یعنی (C_1) محور تقارن آن است. واضح است که (γ_1) بر (C''_1) قرینهٔ (C'_1) نسبت به (C_1) مماس است، پس (γ) نیز بر دایرهٔ (C'') قبل از انعکاس نیز مماس است. این دایرهٔ (C'') را رسم می‌کنیم. فرض کنیم AB و $A'B'$ قطرهای دو دایرهٔ (C) و (C') واقع بر روی خط المرکزین OO' آنها باشند و α' و β' مزدوجهای A' و B' نسبت به AB می‌باشند. دایره‌های به قطرهای $A'\alpha'$ و $B'\beta'$ مماس بر (C') و عمود بر (C) و مماس بر دایرهٔ به قطر $\alpha'\beta'$ می‌باشند و نتیجه می‌گیریم که چون (C'') مرکزش روی خط OO' است، (C'') دقیقاً همان دایرهٔ به قطر $\alpha'\beta'$ می‌باشد.

۳۰۸. چنانچه C را قطب و $k = P_{C(\omega)}$ را قوت انعکاس انتخاب کنیم، A'، B' و D' بترتیب، منعکسهای A، B و D بوده و منعکس دایرهٔ (ω) بر خودش منطبق است و در این حالت $A'B'$، $A'D'$ و $B'D'$ بترتیب، منعکسهای دایره‌های (O)، ACD و BCD است و چون دایره‌های (O) و (ω) بر هم عمودند، منعکسهای آنها بر هم عمود بوده و در نتیجه $A'B'$ از مرکز دایرهٔ (ω) می‌گذرد و از آن جا $A'\hat{D}'B' = ۹۰^\circ$ است، یعنی $A'D'$ بر $D'B'$ عمود می‌باشد و لذا منعکسهای آنها بر هم عمودند، یعنی دایره‌های ACD و BCD بر هم عمود خواهند بود.



۳۰۹. نقطهٔ تماس دو دایره از سه دایره را مرکز دایرهٔ انعکاس می‌گیریم. در این صورت منعکس شکل مفروض عبارت خواهد بود از دو خط متوازی و دایره‌ای که بر آنها مماس است.



۳۱۰. چنانچه P یک نقطه از مکان (قطب انعکاس) و A' و B' منعکسهای A و B و دایرهٔ (O') منعکس دایرهٔ (O) در انعکاس (K و P) باشند،
اوّلاً. چون $B'A'$ از مرکز دایرهٔ (O') می‌گذرد، می‌توان گفت $A'B'$ بر دایرهٔ (O') عمود است.
ثانیاً. $A'B'$ منعکس دایرهٔ PAB است.
ثالثاً. چون در انعکاس زاویه‌ها ثابت می‌مانند، لذا منعکسهای $A'B'$ و (O') بر هم عمودند، یعنی دایرهٔ (O) بر دایرهٔ PAB عمود است و یا به عبارت دیگر مکان P دایره‌ای است که بر B و A گذشته و بر دایرهٔ (O) عمود است (در حالت خاص که $K = P_{P(O)}$ باشد، دایرهٔ (O') بر دایرهٔ (O) منطبق است و $A'B'$ قطری از دایرهٔ (O) می‌باشد.

۳۱۱. نقطه‌های $P'_۱$ و $P'_۲$ را نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ عظیمه از کرهٔ α' می‌گیریم که یکی از آنها بر O و A می‌گذرد. در این صورت $P_۱$ و $P_۲$ در صفحهٔ α نقطه‌های برخورد خطی گذرندهٔ بر A با دایره‌ای هستند که از دو نقطهٔ $Q_۱$ و $Q_۲$ می‌گذرد و این دو نقطه دو سر قطری از دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۲k یعنی دو سر قطری از دایرهٔ تصویر استوا می‌باشند. چون داریم: $AP_۱.AP_۲ = AQ_۱.AQ_۲ = -(۲k)^۲$ پس $P_۱$ و $P_۲$ توسط یک انعکاس منفی به هم مربوط می‌باشند که ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به دایرهٔ تصویر استوا با نیمدور حول A.

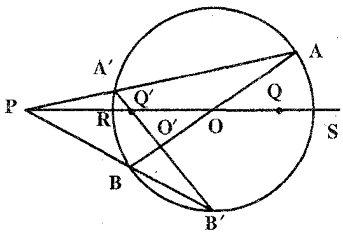
۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۱۲. الف. بنا به خاصیت قاطعهای رسم شده از یک نقطه واقع در داخل دایره داریم: ثابت $= k$ $MA.MA' = MB.MB'$. از این رابطه می‌توان گفت که A' و B' بترتیب منعکسهای A و B با قطب M و قوت $MA.MA' = k = d^۲ - R^۲$ می‌باشند و همچنین منعکس خط AB دایرهٔ (Γ) که همان دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ $MA'B'$ است، می‌باشد و مرکز آن I وسط $A'B'$ است. از طرف دیگر چون بنا به خاصیت انعکاس قطری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد بر خط منعکس دایره عمود است، یعنی MI بر AB در نقطهٔ C عمود می‌باشد یا MC خط عمود بر AB از I وسط $A'B'$ می‌گذرد.
ب. چنانچه C' نقطهٔ دیگر تقاطع MC با دایرهٔ (Γ) باشد، داریم:

$$MC.MC' = MB.MB' = P_{M(O)}$$

و چون $MC' = ۲MI$ است، لذا $P_{M(O)} = MC.۲MI$ و یا $MC.MI = \frac{۱}{۲}P_{M(O)}$.

۳۱۳. ۱. فرض کنیم Q نقطهٔ دیگر برخورد دایرهٔ (PAB) و خط PO باشد (شکل)، داریم :



$$\overline{OP}\times\overline{OQ} = \overline{OA}\times\overline{OB} = -r^۲;$$

و از آن‌جا :
$$\overline{OQ} = -\frac{r^۲}{OP}$$

پس نقطهٔ Q ثابت است. این نقطه قرینهٔ پای قطبی P نسبت به دایرهٔ (O)، نسبت به مرکز O می‌باشد.

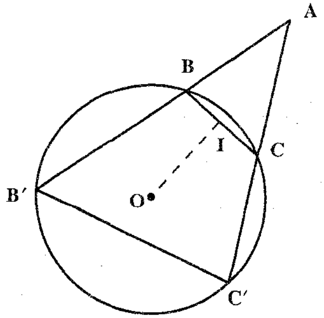
۲. فرض کنیم p قوت P نسبت به (O) باشد، داریم :

$$PA\times PA' = PB\times PB' = p\ ;$$

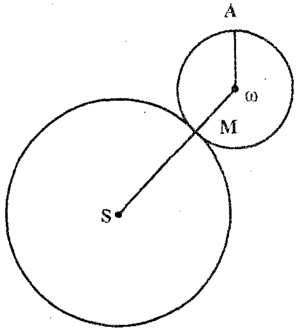
دایرهٔ $(PA'B')$ منعکس خط AOB در انعکاس به قطب P و با قوت p می‌باشد، پس این دایره از O' منعکس O می‌گذرد. همچنین می‌توان گفت AOB بر دایرهٔ (O) عمود است. دایرهٔ $(PA'B')$ بر دایرهٔ (O) عمود است و از مزدوج P نسبت به قطر RS می‌گذرد.

۳. در انعکاس قبلی خط $A'B'$ ، منعکس دایرهٔ (PAB) است و در نتیجه این خط از Q' منعکس Q می‌گذرد.

۳۱۴. اولاً. دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ منعکس وتر BC در انعکاسی به قطب A و به قوت $AC\times AC'$ (قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ O) می‌باشد. وتر BC در جمیع وضعهای مختلف خود چون به طول ثابت a می‌باشد در نقطهٔ I وسط خود بر دایره‌ای ثابت به مرکز O و به شعاع OI مماس می‌باشد، پس منعکس این وتر یعنی دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ بر منعکس این دایره که دایرهٔ ثابتی است، همواره مماس می‌باشد. اگر BC به قطر بدل شود، در این صورت چون همواره بر نقطهٔ ثابت O مرور می‌کند، پس منعکس آن نیز بر منعکس O که نقطهٔ ثابتی است مرور خواهد کرد.

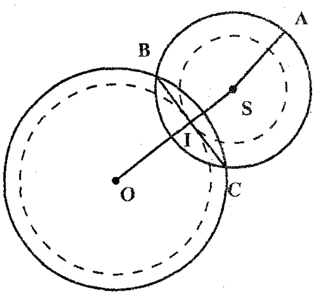


ثانیاً. چون دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ همواره بر نقطهٔ ثابت A مرور کرده و بر دایرهٔ ثابتی مماس می‌باشد، مکان هندسی ω مرکز آن بر



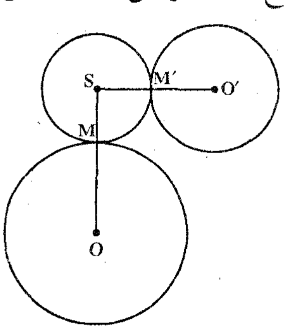
حسب آن که تماس دایره‌های داخلی یا خارجی باشد، بیضی یا هذلولی می‌باشد. در شکل این تماس خارجی است و مشاهده می‌شود که دایرهٔ ثابت S در نقطهٔ M بر دایرهٔ محیطی مثلث $AB'C'$ مماس است، پس $\omega S - \omega M = SM = R$ مقداری است ثابت و چون: $\omega M = \omega A$ شعاع دایرهٔ محیطی $AB'C'$ است، پس $\omega S - \omega A = R$ مقداری است ثابت و مکان ω هذلولی است به کانونهای A و S.

ثالثاً. دایرهٔ محیطی مثلث ABC و دایره‌ای که بر نقطهٔ ثابت A مرور کرده و دایرهٔ ثابتی را در وتری به طول ثابت قطع می‌کند. فرض کنیم که S مرکز این دایره باشد. نقطهٔ I وسط BC بر دایرهٔ ثابتی که قبلاً مذکور شد، همواره قرار دارد و خط BC بر این دایره (به مرکز O و به شعاع OI) مماس است. اگر دایره‌ای به مرکز S و به شعاع SI رسم کنیم. این دایره بر دایرهٔ قبل مماس خواهد بود و چون $SB = SA$ و $\overline{SB}^2 - \overline{SI}^2 = \frac{a^2}{4}$ می‌باشد،



پس $\overline{SA}^2 - \overline{SI}^2 = \frac{a^2}{4}$ است، یعنی قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ به مرکز S و به شعاع SI مقداری است ثابت؛ مسأله منجر می‌شود به تعیین مکان هندسی مرکز S دایره‌هایی که بر دایرهٔ ثابت (به مرکز O و به شعاع OI) مماس می‌باشند به قسمی که قوت نقطهٔ ثابت A نسبت به آنها مقدار ثابتی باشد،

چون شکل را با انعکاسی به قطب A و با قوتی برابر همین مقدار ثابت (قوت نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ S) منعکس کنیم دایرهٔ (به مرکز S و به شعاع SI) تغییر نمی‌کند، منعکس

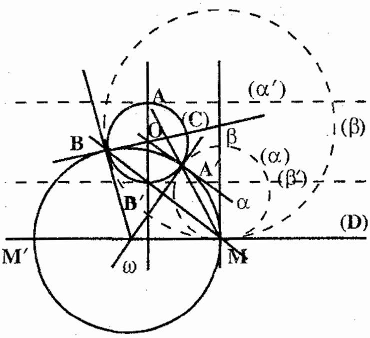


دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OI دایرهٔ جدیدی می‌شود که دایرهٔ S (به شعاع SI) بر آن باید مماس باشد، یعنی مکان هندسی نقطهٔ S مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است که بر دو دایرهٔ ثابت مماس می‌باشند و بر حسب این که تماسها از یک جنس یا مختلف‌الجنس باشند، این مکان هذلولی یا بیضی است. مثلاً در شکل مقابل مکان هذلولی است، زیرا :

$$SO' - SO = O'M' - OM = R' - R$$

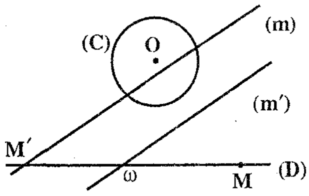
مقداری است ثابت و مکان هذلولی است به کانونهای O و O′.

۳۱۵. فرض کنیم (α) دایرهٔ مماس بر (D) در نقطهٔ M و مماس بر دایرهٔ (C) باشد؛ مرکز این دایره، نقطهٔ α روی عمود رسم شده از M بر (D) قرار دارد: MZ (شکل). در انعکاس به مرکز M و با قوت نقطهٔ M نسبت به (C) دایرهٔ (C) ثابت می‌ماند و دایرهٔ (α) به خط (α′) عمود بر Mα تبدیل می‌شود که موازی با خط (D) بوده و مماس بر دایرهٔ (C) است. دایره‌های مطلوب (α) و (β) پس از انعکاس مزبور H[M.P(M)] به مماسهای به زاویهٔ (C) که به موازات (D) رسم شوند، تبدیل می‌شوند. فرض کنیم (α′) و (β′) این مماسها باشند، این خطها در نقطه‌های A′ و B′ که انتهای قطر عمود بر (D) از دایرهٔ (C) بر این دایره مماسند، دایرهٔ (α) در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است و نقطهٔ A منعکس نقطهٔ A′ می‌باشد و نقطهٔ دیگر تقاطع خط MA′ با دایرهٔ (C) است؛ مرکز دایرهٔ (α) محل برخورد OA و خط MZ خواهد بود. دایرهٔ (β) نیز در نقطهٔ دیگر تقاطع خط MB′ با دایرهٔ (C) بر این دایره مماس بوده و مرکزش β در محل تقاطع OB با خط MZ است. انعکاس نامبرده دایرهٔ (MAB) را به خط A′B′ تبدیل می‌کند که عمود بر دایرهٔ (C) بوده و خطی است ثابت و عمود بر خط ثابت (D)، پس دایرهٔ (AMB) بر دایرهٔ (C) و خط (D) عمود می‌باشند؛ بنابراین مرکزش ω روی خط D قرار دارد.



(الف)

ثانیاً. نقطهٔ M′ نقطه متقاطر M از دایرهٔ (AMB) روی خط (D) واقع است و چون دایرهٔ (AMB) بر دایرهٔ (C) عمود است. نقطهٔ M′ مزدوج نقطهٔ M به (C) است. وقتی که M ثابت بماند، خط D حول نقطهٔ M دوران می‌کند در حالی که تمام صفحه را می‌پیماید، نقطهٔ M′ قطبی (m) از نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (C) را طی می‌کند (شکل ب). دایره‌های (ABM) و (C) متعامدند، پس مماسهای در نقطه‌های تقاطع A و B بر دایرهٔ (C) از ω مرکز دایرهٔ (AMB) می‌گذرند؛ ω وسط MM′ مجانس نقطهٔ M′ در تجانس به مرکز M و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. پس مکان ω خط (m′) مجانس (m) در این تجانس است.



(ب)

ثالثاً. فاصلهٔ نقطهٔ O از خط (D) برابر است با $OH = \frac{R}{۲}$ و فاصلهٔ HM را x فرض می‌کنیم. اگر ′a و ′b محل برخورد خط αβ [عمود رسم شده از M بر خط(D)] با خطهای (′α) و (′β) باشند و a و b نقطه‌های متقاطر M در دو دایرهٔ (α) و (β) فرض شوند (شکل پ).

a و ′a و همچنین b و ′b منعکس یکدیگر در انعکاسی که انجام داده‌ایم می‌باشند؛ قوت نقطهٔ M را نسبت به دایرهٔ (C) حساب می‌کنیم :

$$P_C(M) = MO^۲ - R^۲ = OH^۲ + HM^۲ - R^۲ = x^۲ - \frac{۳R^۲}{۴} \;;$$

$$\overline{M_a}.\overline{M_{a'}} = x^۲ - \frac{۳R^۲}{۴} \;;\; \overline{M_b}.\overline{M_{b'}} = x^۲ - \frac{۳R^۲}{۴} \qquad (۱)$$

فرض کنیم ρ_α و ρ_β شعاع دایره‌های (α) و (β) باشند :

$$M_a = ۲\rho_\alpha \qquad M_b = ۲\rho_\beta$$

از طرف دیگر :

$$M_{a'} = HA' = \frac{۳R}{۲} \qquad M_{b'} = HB' = \frac{R}{۲}$$

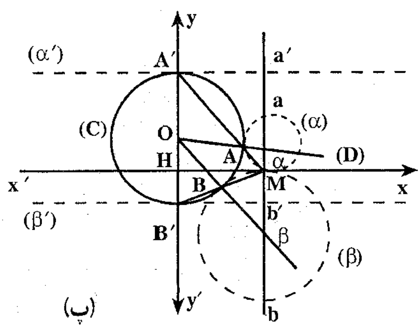
و رابطهٔ (۱) برحسب قدرمطلق چنین نوشته می‌شود :

$$۳R.\rho_\alpha = \left| x^۲ - \frac{R^۲}{۴} \right| \qquad R.\rho_\beta = \left| x^۲ - \frac{R^۲}{۴} \right|$$

از آن‌جا :

$$\rho_\alpha = \left| \frac{۴x^۲ - ۳R^۲}{۱۲R} \right|$$

و



(پ)

$$\rho_\beta = \left| \frac{۴x^۲ - ۳R^۲}{۴R} \right|$$

و

$$\frac{\rho_\beta}{\rho_\alpha} = ۳$$

و بستگی به جای نقطهٔ M روی خط (D) ندارد.
اگر (α) و (β) مماس داخلی با دایرهٔ (C) و M داخل دایرهٔ (C) فرض شود. یعنی $x < \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ و $P_C(M) < ۰$ اگر (α) و (β) مماس خارجی با دایرهٔ (C) و M خارج دایرهٔ (C) باشد، یعنی : $x > \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ و $P_C(M) > ۰$ نتیجه‌های بالا را با استفاده از رابطهٔ $HI = HJ = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$ (شکل ت) نیز می‌توان به‌دست آورد.

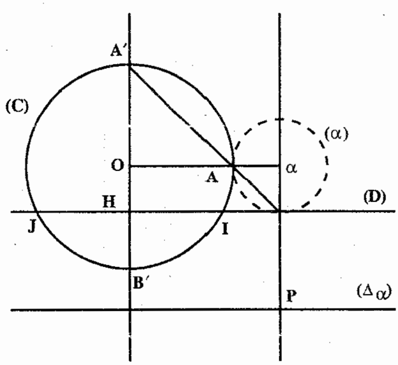
دو دایرهٔ (α) و (β) را در طرفین خط (D) در نظر می‌گیریم : فرض کنیم دایرهٔ (α) با دایرهٔ (C) مماس خارج بوده و در آن نیمصفحهٔ محدود به خط (D) که شامل نقطهٔ O است، قرار داشته باشد ؛ اگر (Δ_α) انتقال خط (D) با بردار $۲\overrightarrow{OH}$ و P محل برخورد αM با (Δ_α) باشد (شکل ت) خواهیم داشت :

$\alpha O = \alpha A + R$ (زیرا $۲OH = R$)

و از طرف دیگر : $\alpha P = \alpha M + R$ ، پس $\alpha O = \alpha P$ و نقطهٔ α روی سهمی (π_α) به کانون O و به خط هادی (Δ_α) واقع است.

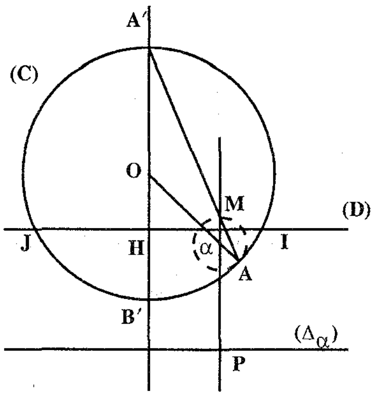
اگر (α) مماس داخلی با دایرهٔ (C) بوده و در نیمصفحه‌ای که شامل نقطهٔ O نباشد واقع شود (شکل ث) خواهیم داشت :

$$\alpha O = R - \alpha A$$
$$\alpha P = R - \alpha M$$



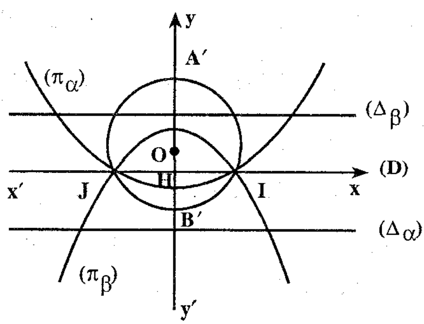
(ت)

پس $\alpha O = \alpha P$ و α روی همان سهمی (π_α) واقع است. خط نامحدود αM عمود بر (D) دو نقطهٔ M که خط D را طی می‌کند، تمام صفحه را می‌پیماید ؛ و نقطهٔ α تمام سهمی (π_α) را طی می‌کند (شکل ج).



(ث)

مکان α سهمی (π_α) به کانون O و به خط هادی (Δ_α) است، بترتیب بالا اگر دایرهٔ (β) را با مماس خارجی با دایرهٔ (C) و واقع در نیمصفحه‌ای که شامل نقطهٔ O نیست و یا مماس داخلی با دایرهٔ (C) و واقع در نیمصفحه که شامل نقطهٔ O می‌باشد در نظر می‌گیریم. اگر خط (Δ_β) انتقال خط (D) با انتقالی برابر با $۲\overrightarrow{HO}$ و Q محل برخورد BM با (Δ_β) باشد، در هر حالت نامبرده خواهیم داشت : $\beta O = \beta Q$ و مکان β یک سهمی (π_β) به کانون O و به خط هادی (Δ_β) خواهد بود.



(ج)

تبصره. (شکل پ).

چنانچه جهت مثبت را جهت بردار $\overrightarrow{HO}$ و خط D را $x'x$ به قسمی که $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \frac{\pi}{۲}$ باشد، اختیار کنیم. اگر $\overline{HM} = x$ باشد عرضهای α و β عبارتند از :

$$y_\alpha = \overline{M_\alpha} = \frac{\overline{Ma}}{۲} \quad , \quad y_\beta = \overline{M_\beta} = \frac{\overline{Mb}}{۲}$$

از طرف دیگر داریم : $MQ' = \overline{HA'} = \frac{۳R}{۲} \quad , \quad \overline{Ma'} = -\frac{R}{۲}$

و رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$۳Ry_{\alpha} = x^{۲} - \frac{۳R^{۲}}{۴} \ , \ -Ry_{\beta} = x^{۲} - \frac{۳R^{۲}}{۴}$$

و مکان α و β عبارتند از :

$$(\pi_{\alpha}) \ \ y_{\alpha} = \frac{x^{۲}}{۳R} - \frac{R}{۴} \ ; \ (\pi_{\beta}) \ \ y_{\beta} = -\frac{x^{۲}}{R} + \frac{۳R}{۴}$$

۳۱۶. ۱. چهار نقطهٔ M، N، 'M و 'N که دو به دو منعکس و متناظرند بر یک دایره قرار دارند. چنانچه I نقطهٔ تقاطع MN و 'M'N باشد، داریم :

$$P_{I(\omega)} = IM.IN = IM'.IN'$$

و یا

$$P_{I(C)} = P_{I(C')} = IM.IN = IM'.IN'$$

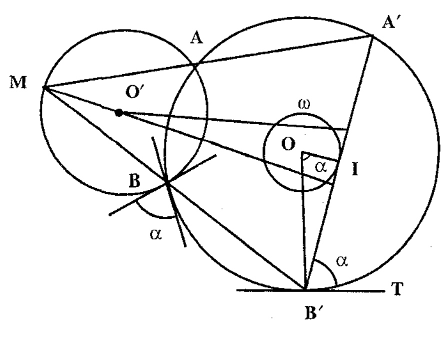
یعنی، قوت نقطهٔ I نسبت به دایره‌های (C) و ('C) مساوی است که در نتیجه I بر محور اصلی آنها واقع است.

۲. چون در انعکاس مماسهای بر دو منحنی در دو نقطهٔ منعکس با خط واصل بین آن دو نقطه زاویه‌های متساوی می‌سازند، لذا اگر T محل تلاقی مماسهای بر دو دایره در نقطه‌های متناظر M و 'M باشد، مثلث $\overset{\Delta}{MTM'}$ متساوی‌الساقین بوده و $MT = M'T$ یا $P_{T(C)} = P_{T_{۱}(C')} = MT^{۲} = M'T^{۲}$ و از آن‌جا T که قوتش نسبت به دو دایره مساوی است، روی محور اصلی دو دایره واقع است.

۳۱۷. ۱. چنانچه ملاحظه می‌شود :

$$P_{M(O')} = MA.MA' = MB.MB'$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که 'A و 'B بترتیب منعکسهای A و B و از آن‌جا 'A'B منعکس دایرهٔ (O) در انعکاس $(M \quad \text{و} \quad P_{M(O')} = MA.MA')$ می‌باشد و بنا به خاصیت انعکاس 'A'B بر MO عمود می‌باشد.

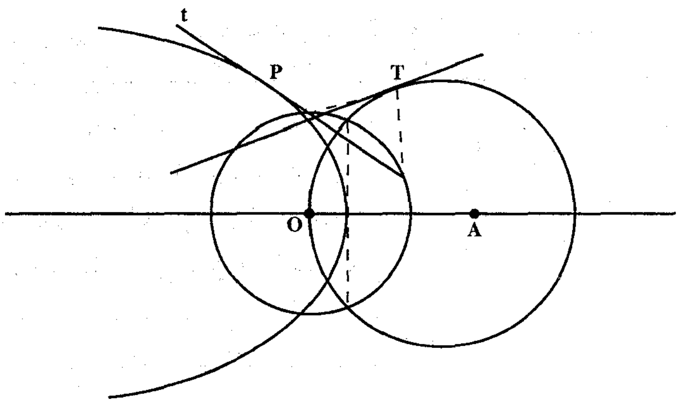


۲. در انعکاس $(M, k = MA.MA')$: 'A'B منعکس دایرهٔ (O) و منعکس ('O)

بر خودش منطبق است و چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، یعنی زاویهٔ بین دایره (O) و (O′) مساوی زاویهٔ بین A′B′ و (O′) یعنی α می‌باشد؛ لذا پیوسته $\widehat{(O),(O')} = \alpha$ و $\widehat{(O'),B'T} = \alpha$ و $I\hat{O'}B' = \alpha$ و از آن‌جا A′B′ پیوسته بر دایرهٔ (ω) به مرکز (O′) و شعاع $R'' = R'\cos\alpha$ مماس است یا به عبارت دیگر پوش A′B′ دایره‌ای است به مرکز (O′) و شعاع $R'' = R'\cos\alpha$.

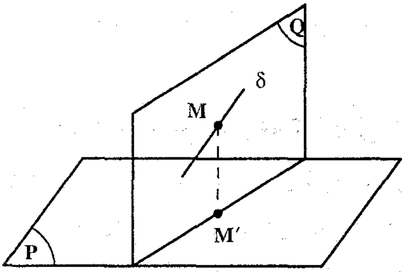
۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی

۳۱۸. از روی شکل معلوم می‌شود که هر مماس t که بر سهمی رسم شود، قطبی یک نقطهٔ T از دایرهٔ α است. پای عمودی که از O بر t رسم شود، منعکس T نسبت به دایرهٔ ω است و مکان هندسی آن منعکس دایرهٔ α (گذرنده بر O) است که یک خط می‌باشد.

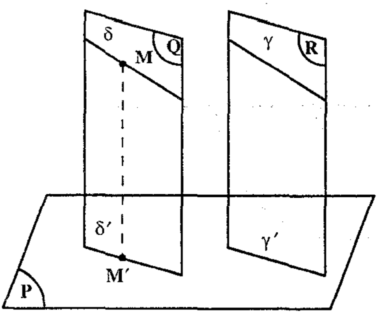


راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳.
تبدیلهای آفین و تصویری

۱.۳. تعریف و قضیه



۳۱۹. اگر M نقطهٔ دلخواهی از δ و M' تصویر M بر P باشد، آن‌گاه نقطهٔ M'، هم در صفحهٔ P قرار دارد و هم در صفحهٔ Q که از δ می‌گذرد و بر P عمود است. بنابراین تصویر δ بر فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q قرار دارد. بعکس، هر نقطهٔ N' از فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q، تصویر نقطه‌ای مانند N از خط δ است (از N' خطی بر صفحه عمود کنید تا δ را در N قطع کند.) بنابراین تصویر δ بر صفحهٔ P درست همان فصل مشترک P و Q است و برهان قضیه به پایان می‌رسد.

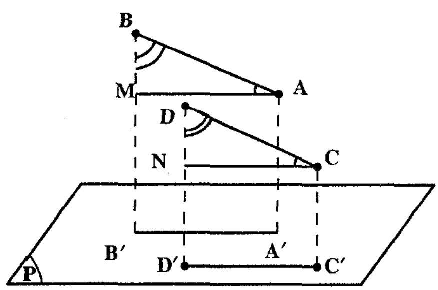


۳۲۰. اگر دو صفحهٔ Q و R بترتیب بر δ و γ گذشته و بر صفحهٔ P عمود باشند، در این صورت Q و R با هم موازی یا بر هم منطبقند در نتیجه فصل مشترکشان با صفحهٔ P یعنی δ' و γ' که بترتیب تصویرهای δ و γ بر صفحهٔ P هستند یا متوازی‌اند یا بر هم منطبقند.

۳۲۱. اگر $AB \| CD$ و $A'B'$ و $C'D'$ تصویرهای آن دو پاره‌خط بر صفحهٔ P باشند، (شکل)، و از نقطه‌های A و C دو خط موازی $A'B'$ و $C'D'$ رسم کنیم تا امتدادهای BB' و DD' را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کنند:

$$(AM \| CN \text{ و } AB \| CD) \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$(BM \| DN \text{ و } BA \| DC) \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$



در نتیجه $\Delta ABM \sim \Delta CDN$ و از آن‌جا :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{CN}{CD}$$

و چون $AM = A'B'$ و $CN = C'D'$ است (چرا؟)، خواهیم داشت :

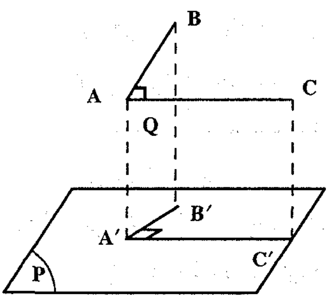
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{C'D'}{CD}$$

یا :

$$\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$$

نتیجهٔ ۱. تصویرهای دو پاره‌خط متوازی و متساوی بر هر صفحه با هم برابرند.
نتیجهٔ ۲. تصویر وسط هر پاره‌خط، وسط تصویر آن پاره‌خط است.

۳۲۲. زاویهٔ قائمهٔ BAC را که در آن ضلع AC با صفحهٔ P موازی و ضلع AB بر صفحهٔ P عمود نیست، در نظر می‌گیریم (شکل). اگر $A'B'$ تصویر AB و $A'C'$ تصویر AC باشد :



$AC \| P \Rightarrow AC \| A'C'$ (چرا؟)

و اگر صفحهٔ مصور خط AB را Q بنامیم :

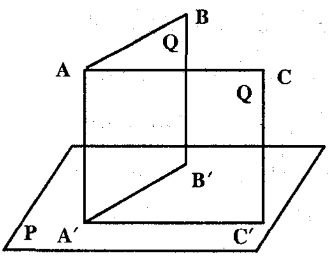
$(AC \| A'C'$ و $AC \perp AB) \Rightarrow A'C' \perp AB$

$(A'C' \perp AB$ و $A'C' \perp AA') \Rightarrow A'C' \perp Q$

$A'C' \perp Q \Rightarrow A'C' \perp A'B'$

یعنی $B'\hat{A}'C' = ۹۰^\circ$ است.

۳۲۴. اگر $B\hat{A}C$ یک زاویهٔ قائمه و $B'\hat{A}'C'$ تصویر آن بر صفحهٔ P نیز زاویهٔ قائمه باشد و یکی از دو ضلع زاویهٔ مفروض، به طور مثال ضلع AB با صفحهٔ P، و در نتیجه با $A'B'$ تصویرش بر آن صفحه موازی نباشد (شکل)، ملاحظه می‌کنیم که اگر Q صفحهٔ مصور خط AB باشد :



$(A'C' \perp A'B'$ و $A'C' \perp AA') \Rightarrow A'C' \perp Q \Rightarrow A'C' \perp AB$

و اگر Q' صفحهٔ مصور ضلع AC باشد :

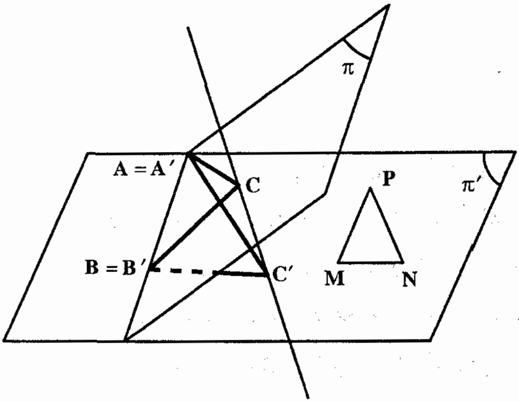
$(A'B' \perp A'C'$ و $A'B' \perp AA') \Rightarrow A'B' \perp Q' \Rightarrow A'B' \perp AC$

بنابراین چون $A'B' \nparallel AB$ پس $AC \perp Q$.

امّا : $(AC \perp Q$ و $A'C' \perp Q) \Rightarrow AC \| A'C' \Rightarrow AC \| P$

یعنی اگر یکی از دو ضلع زاویهٔ مفروض با صفحهٔ تصویر موازی نباشد، ضلع دیگرش با آن صفحه موازی است و بنابراین برهان قضیه به پایان می‌رسد.

۳۲۶. صفحه‌های π و π' را چنان قرار می‌دهیم که فصل مشترک آنها بر AB قرار گیرد. حال در صفحهٔ π' یک نقطهٔ C' طوری اختیار می‌کنیم که $\Delta ABC' \sim \Delta MNP$ ؛ پس تصویر موازی خواسته شده، با خط CC' مشخص خواهد شد.



۳۲۸. اگر قضیهٔ ۳ را اثبات شده فرض کنیم، قضیهٔ ۲ بلافاصله از آن نتیجه می‌شود. زیرا، چون فقط یک تبدیل آفین وجود دارد که مثلث مفروض ABC را به مثلث مفروض $A'B'C'$ بدل می‌کند، این تبدیل باید با تصویر موازی صفحه بر خودش و تشابه بعدی که مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ بدل می‌کند، منطبق باشد (این نکته که یک تصویر موازی و یک تشابه وجود دارد از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود). می‌ماند اثبات قضیهٔ ۳.

روش اثبات به قرار زیر است. فرض کنید که در یک تبدیل آفین، سه نقطهٔ A، B و C به سه نقطهٔ مفروض A' ، B' و C' بدل شده است. باید نشان دهیم که این تبدیل آفین، M' نگارهٔ یک نقطهٔ دلخواه M از صفحه را مشخص می‌کند. ابتدا باید یک عده نقطه‌هایی را که نگاره‌هایشان را می‌توانیم پیدا کنیم، به دست آوریم ؛ سپس از این گونه نقطه‌ها بیشتر و بیشتر و باز هم بیشتر، پیدا خواهیم کرد. بدین طریق در صفحه یک مجموعهٔ چگال از نقطه‌ها به دست خواهیم آورد که نگاره‌های آنها را بر اثر تبدیل آفین مورد نظر می‌توانیم بسازیم. از این رو به ازای هر نقطهٔ M از صفحه نقطه‌هایی از این مجموعه به قدر دلخواه نزدیک به M وجود خواهد داشت. وانگهی می‌توانیم هر نقطهٔ M را در داخل یک چند ضلعی به دلخواه کوچک بگنجانیم که رأسهایش متعلق به مجموعه نقطه‌هایی باشند که نگاره‌هایشان معین شده‌اند. در نتیجه هر چندضلعی از این گونه به چند ضلعی معینی بدل، و از آن‌جا نتیجه می‌شود که M' ، نگارهٔ نقطهٔ M، هم

معین می‌شود. و این همان چیزی است که به اثباتش پرداخته بودیم.

نکته. در عین حالی که این ملاحظه‌ها قضیهٔ ۳ را موجه می‌سازند، ولی برهانی دقیق برای آن نیستند. صرف این واقعیت که یک مجموعهٔ دلخواه چگال از نقطه‌هایی داریم که نگاره‌هایشان بر ما معلومند، ایجاب نمی‌کند که هر نقطه در این مجموعه گنجیده باشد. (مثلاً هیچ مجموعه‌ای از نقطه‌های گویا بر محور xها، ولی چگال، شامل نقطه‌ای به مختص $x = \sqrt{2}$ نخواهد شد). از این رو ممکن است نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که نگاره‌اش بر ما معلوم نباشد، ولو این که نگاره‌های نقطه‌ها به قدر دلخواه نزدیک به M بر ما معلوم باشند. برای این که برهان فوق را به برهانی دقیق بدل کنیم، باید ملاحظه‌های دیگری به کار بریم که در این جا وارد آنها نمی‌شویم.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه باید مجموعه نقطه‌های ذکر شده در بالا را بسازیم. از ویژگی زیر از تبدیل آفین استفاده می‌کنیم: یک تبدیل آفین خطهای موازی را به خطهای موازی بدل می‌کند. اگر بعکس، نگاره‌های دو خط موازی l و m دو خط متقاطع باشند، آن‌گاه پیشنگارهٔ نقطهٔ برخورد آنها می‌باید به هر دو خط l و m متعلق باشد که غیرممکن است.

نکتهٔ ۱. اگر نقطهٔ A' نگارهٔ نقطهٔ A باشد، A را پیشنگارهٔ A' گویند.

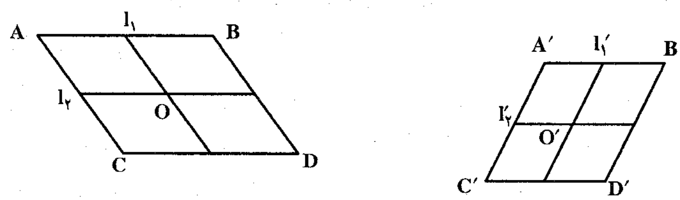
نکتهٔ ۲. باید توجه داشت که در یک تبدیل آفین خطهای متقاطع به خطهای متقاطع بدل می‌شوند.

گیریم l_1 معرف خط AB باشد و l_2 معرف خط AC. تبدیل ما l_1 را به l'_1 بدل می‌کند که از نقطه‌های A' و B' می‌گذرد و l_2 را به l'_2، که از نقطه‌های A' و C' می‌گذرد. فرض می‌کنیم خط CD بر C بگذرد و با l_1 موازی باشد و خط BD بر B بگذرد و با l_2 موازی باشد (شکل (الف)). چون در یک تبدیل آفین خطهای موازی به خطهای موازی بدل می‌شوند، CD به خطی بدل می‌شود که از C' می‌گذرد و با l'_1 موازی است، BD به خطی مبدل می‌شود که از B' می‌گذرد و با l'_2 موازی است، و D به نقطهٔ تقاطع این دو خط، D' بدل می‌شود. پس متوازی‌الاضلاع ABCD در شکل (الف)، به متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، و نقطهٔ O محل برخورد قطرهای AD و BC از متوازی‌الاضلاع ABCD، به نقطهٔ O' محل برخورد قطرهای $A'D'$ و $B'C'$ از $A'B'C'D'$. حال میانخطهای چهارضلعی ABCD، خطهایی که از O به موازات l_1 و l_2 رسم می‌شوند، را در نظر می‌گیریم. نگاره‌های آنها خطهایی هستند که از O' به موازات l'_1 و l'_2 می‌گذرند؛ یعنی میانخطهای $A'B'C'D'$ هستند. به عبارت دیگر

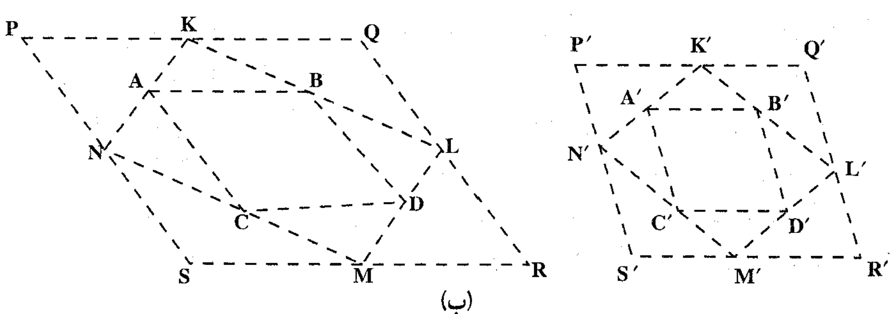
نقطه‌های برخورد میانخطهای ABCD با l_1 و l_2 به نقطه‌های وسط ضلعهای $A'B'C'D'$ بدل می‌شوند.

بعد با هریک از چهار متوازی‌الاضلاعی که از میانخطهای متوازی‌الاضلاع ABCD پدید می‌آیند همان گونه عمل می‌کنیم که با ABCD عمل کردیم. با ادامهٔ این عمل (شکل (الف)) یک شبکهٔ متوازی‌الاضلاع در داخل ABCD پدید می‌آید که تبدیل آفین مورد بحث آن را به یک شبکهٔ متوازی‌الاضلاع در داخل $A'B'C'D'$ بدل می‌کند و نقطه‌های شبکهٔ ABCD را به نقطه‌های شبکهٔ متناظرش در $A'B'C'D'$ بدل می‌کند. با تکرار این عمل، به قدر کافی زیاد، می‌توانیم ضلعهای متوازی‌الاضلاع شبکهٔ خود را به دلخواه کوچک، و لذا شبکه را به دلخواه چگال کنیم.

حال از نقطه‌های A و D خطهایی به موازات BC و از نقطه‌های B و C خطهایی به موازات AD رسم می‌کنیم. نگاره‌های آنها بر اثر تبدیل آفین مورد بحث، خطهایی هستند که از A' و D' به موازات $B'C'$ و از نقطه‌های B' و C' به موازات $A'D'$ رسم می‌شوند. بدین ترتیب یک متوازی‌الاضلاع KLMN به‌دست می‌آوریم که مساحتش دو برابر مساحت ABCD است، و نگارهٔ آن، متوازی‌الاضلاع معلوم $K'L'M'N'$ است. با تکرار این شیوهٔ عمل، یک متوازی‌الاضلاع PQRS به‌دست می‌آوریم که مساحتش چهار برابر مساحت ABCD است و ضلعهایش با ضلعهای ABCD موازی‌اند (شکل (ب))، و نگاره‌اش متوازی‌الاضلاع $P'Q'R'S'$ است، و غیره.



(الف)

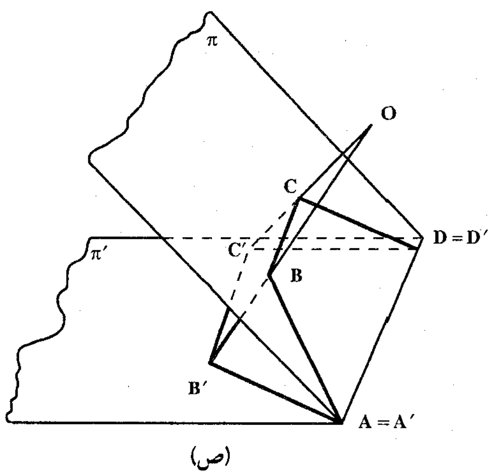


(ب)

از ترکیب این دو شیوهٔ عمل خود (رسم متوازی‌الاضلاعهایی بزرگتر و بزرگتر، و متوازی‌الاضلاعهایی کوچکتر و کوچکتر، که نگاره‌ها در داخل آنها معلومند)، می‌توانیم بر اثر تبدیل آفین خود یک مجموعهٔ چگال از نقطه‌های صفحه با نگاره‌های معلوم به‌دست آوریم، همان گونه که از آغاز شروع کرده بودیم.

دقیقاً بگوییم، قضیه‌های ۱ و ۳ تنها ایجاب می‌کنند که هر تبدیل آفین از صفحه که می‌تواند دست کم یک سه تایی از نقطه‌های ناهمخط A، B و C را به یک سه تایی ناهمخط A'، B' و C' بدل کند، می‌تواند به عنوان حاصلضرب یک تصویر موازی صفحه بر خودش و یک تشابه تحقق یابد. ولی به آسانی دیده می‌شود که نمی‌توانیم یک تبدیل آفین داشته باشیم که هر سه تایی از نقطه‌ها را به یک سه تایی از نقطه‌های همخط بدل کند. زیرا اگر هر سه تایی از نقطه‌های A، B و M، با A و Bی ثابت و M دلخواه، قرار باشد به یک سه تایی همخط A'، B' و M' بدل شود، آن‌گاه همهٔ نقطه‌های صفحه می‌بایستی به نقطه‌های خط $A'B'$ بدل شوند، که مخالف تعریف تبدیل آفین از یک صفحه است.

۳۲۹. ما نخست این قضیه را در حالت خاصی که چهارضلعیهای ABCD و MNPQ ذوزنقه هستند، $AD \| BC$ و $NP \| MQ$، ثابت می‌کنیم. در صفحهٔ π' یک ذوزنقه $A'B'C'D'$ مشابه با MNPQ چنان وارد می‌کنیم که $AD = A'D'$. سپس صفحهٔ π را در فضا طوری حرکت می‌دهیم که پاره‌خطهای AD و $A'D'$ بر هم منطبق شوند و نقطه‌های B و C بیرون صفحهٔ π' بمانند (شکل (ص)). حال B را به B' و C را به C' وصل می‌کنیم. خطهای BB' و CC' همصفحه‌اند؛ زیرا $BC \| AD$ و $AD \| B'C'$ ایجاب می‌کنند که BC و $B'C'$ موازی و در نتیجه همصفحه باشند. اگر O نقطهٔ برخورد خطهای BB' و CC' باشد، تصویر مرکزی به مرکز O، چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌کند؛ اگر $BB' \| CC'$، آن‌گاه تصویر موازی در امتدادی که به



(ص)

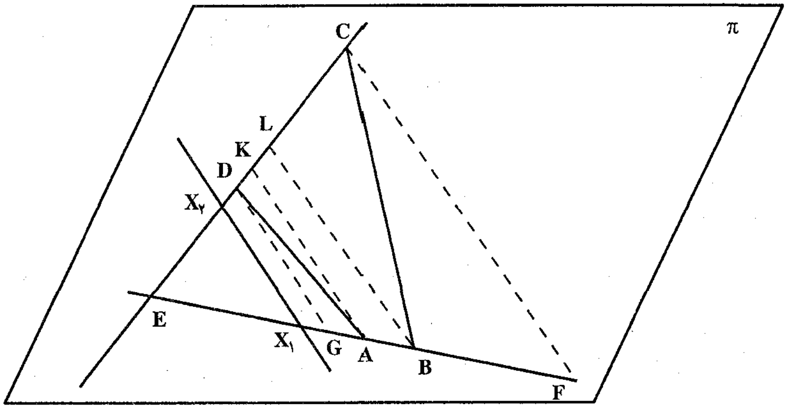
وسیلهٔ این خطها مشخص می‌شوند، ABCD را به $A'B'C'D'$ بدل می‌کند.
حال نشان می‌دهیم که حالت کلی را می‌توانیم به حالت خاصی که هم‌اکنون ملاحظه کردیم، بدل کنیم. پس فرض می‌کنیم ABCD و MNPQ دو چهارضلعی در π و π' باشند (شکل (ض)) (چهارضلعیهای ABCD و MNPQ در شکل (ض) کوژند، ولی هرگاه یک یا هر دو چهارضلعی ناکوژ باشند، باز هم استدلال عوض نمی‌شود). فرض می‌کنیم که یک تصویر مرکزی (یا موازی) از π به π' چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی $A'B'C'D'$، متشابه با MNPQ، بدل کند. نشان خواهیم داد که ABCD و MNPQ خط خاص صفحهٔ π را مشخص می‌کنند. برای این امر، فرض می‌کنیم E، E' و R نقطه‌های برخورد ضلعهای AB و CD، $A'B'$ و $C'D'$، MN و PQ از چهارضلعیهای ABCD، $A'B'C'D'$ و MNPQ باشند. به موجب ویژگی (الف) از تصویر مرکزی، نگارهٔ نقطهٔ E نقطهٔ E' است. اگر X'_1 نقطهٔ بینهایت $A'B'$ باشد، آن‌گاه به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی، این نقطه نگارهٔ یک نقطهٔ X_1 از AB است، به طوری که:

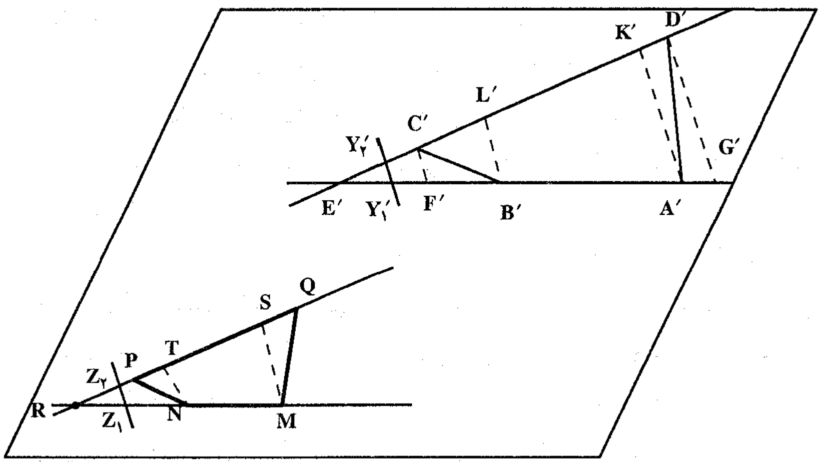
$$\frac{AE/BE}{AX_1/BX_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'X'_1/B'X'}=\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{MR}{NR}$$

(زیرا $A'X'_1/B'X'_1=1$). از این رابطه‌ها می‌توانیم نسبت AX_1/BX_1 را (از لحاظ اندازه و علامت) تعیین، و لذا X_1 را پیدا کنیم. همچنین رابطهٔ:

$$\frac{CE/DE}{CX_2/DX_2}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{PR}{QR}$$

نقطهٔ X_2 از DC را معین می‌کند که بر نقطهٔ بینهایت X'_2 از $D'C'$ نگاشته می‌شود.
اگر نقطهٔ E بر نقطهٔ بینهایت $A'B'$ نگاشته شده باشد، یعنی اگر $A'B'\|C'D'$، به‌جای AB و CD می‌توانیم AD و BC را درنظر بگیریم. اگر E و نقطهٔ I، نقطهٔ برخورد AD و BC، بر نقطه‌های بینهایت نگاشته شوند، یعنی اگر $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاع باشد، آن‌گاه EI خط خاص π می‌شود. در این حالت قضیهٔ ذکر شده را بدون محاسبهٔ نسبتهای پاره‌خطها می‌توان اثبات کرد.
خط X_1X_2 خط خاص π، و خط مورد نظر ماست. باید توجه کنیم که X_1 و X_2 را می‌توان از روی چهارضلعیهای مفروض ABCD و MNPQ پیدا کرد. یک برهان مشابه، به ما امکان می‌دهد خط خاص $Y'_1Y'_2$ در π' را معین کنیم (شکل (ض)).
نقطه‌های Y'_1 و Y'_2 از رابطه‌های زیر مشخص می‌شوند:





(ض)

$$\frac{AE}{BE}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1} \text{ و } \frac{CE}{DE}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}$$

حال از نقطه‌های A و B خطهای موازی خط X_1X_2 رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آنها را با CD بترتیب K و L می‌نامیم. به موجب ویژگی (ب) از تصویر مرکزی، خطهای موازی AK و BL به خطهای موازی بدل می‌شوند. تعبیر آن این است که تصویر مرکزی ما ذوزنقهٔ ABLK را به ذوزنقهٔ $A'B'L'K'$ $(A'K' \| B'L' \| Y'_1Y'_2)$ بدل می‌کند. حال می‌توانیم از چهارضلعیهای ABCD و MNPQ برای یافتن ذوزنقهٔ ABLK و ذوزنقهٔ MNTS که با $A'B'L'K'$ متشابه باشد، استفاده کنیم. در این‌جا باید نقطه‌های

Z_1 و Z_2 را بر خطهای MN و PQ چنان پیدا کنیم که :

$$\frac{MR/NR}{MZ_1/NZ_1}=\frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1}=\frac{AE}{BE}\ ,$$

$$\frac{PR/QR}{PZ_2/QZ_2}=\frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2}=\frac{CE}{DE}$$

و بعد سه خط NT ، Z_1Z_2 و MS را موازی با هم رسم می‌کنیم.

حالت خاص قضیه ۱ که در بالا اثبات شد، مجوز وجود یک تصویر مرکزی (یا موازی) است که ذوزنقهٔ ABLK را به ذوزنقهٔ $A'B'L'K'$ متشابه با MNTS بدل کند. برای اثبات این قضیه، باید نشان دهیم که این تصویر، ABCD را به $A'B'C'D'$ یعنی، نقطه‌های C و D را به نقطه‌های C' و D'، بدل می‌کند.

ملاحظه می‌کنیم که خط خاص π نسبت به تصویر ما خط X_1X_2 است که در بالا پیدا کردیم. زیرا خط خاص با AK و BL موازی است (ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی) و از X_1 می‌گذرد (زیرا E، نقطهٔ برخورد AB و KL، به E'، نقطهٔ برخورد $A'B'$ و $K'L'$، و نقطهٔ X_1 که در رابطهٔ :

$$(AE/BE)/(AX_1/BX_1)=A'E'/B'E'$$

صدق می‌کند به یک نقطه در بینهایت، نگاشته می‌شود). و به همین طریق نشان می‌دهیم که خط خاص π' خط $Y'_1Y'_2$ است ؛ چون E و X_2 و نقطهٔ بینهایت KL بترتیب بر E' و یک نقطه در بینهایت و نقطهٔ Y'_2 از $K'L'$ نگاشته شده‌اند، به موجب ویژگی (ج) تصویر مرکزی، نتیجه می‌گیریم که نگارهٔ نقطهٔ C، نقطهٔ $\overline{C}$، از خط $K'L'$ است، به طوری که :

$$\frac{EX_2/CX_2}{1}=\frac{1}{E'Y'_2/\overline{C}Y'_2}$$

بنابراین :

$$\overline{C}Y'_2=E'Y'_2\cdot\frac{EX_2}{CX_2}$$

می‌ماند نشان دهیم که $\overline{C}$ بر C' منطبق است. برای این منظور ذوزنقهٔ CDGF در شکل (ض) را (با $CF\|DG\|X_2X_1$) به وسیلهٔ تصویر مرکزی (یا موازی) و به دنبال آن یک تشابه، به ذوزنقهٔ $C'D'G'F'$ (با $C'F'\|D'G'\|Y'_1Y'_2$) بدل می‌کنیم. به موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم این امر ممکن است. این نگاشت E را به E'، نقطهٔ X_2 از CD را به نقطهٔ بینهایت X'_2 از $C'D'$، و نقطهٔ بینهایت Y_2 از CD را به نقطهٔ Y'_2 بدل

می‌کند. [زیرا بنا بر تعریف نقطه‌های X_2 و Y'_2] داریم :

$$(CE/DE)/(CX_2/DX_2) = C'E'/D'E' \ ,$$

$$\left[CE/DE = (C'E'/D'E')/(C'Y'_2/D'Y'_2)\right)$$

بنابراین به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم :

$$\frac{EX_2/CX_2}{1} = \frac{1}{E'Y'_2/C'Y'_2}$$

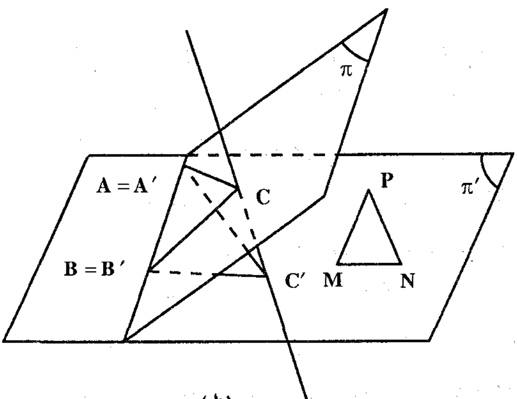
پس :

$$C'Y'_2 = E'Y'_2 \cdot \frac{EX_2}{CX_2}$$

از این جا نتیجه می‌شود که C بر 'C منطبق است. عیناً به همین طریق ثابت می‌کنیم که این تصویر مرکزی (یا موازی) که ABLK را به 'A'B'L'K بدل می‌کند، D را به 'D می‌نگارد. حال می‌بینیم که تصویر ما چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی 'A'B'C'D بدل کرده است، همان گونه که ادعا کرده بودیم.

وقتی بعضی از نقطه‌های A، B، C و D یا 'A ، 'B ، 'C و 'D در بینهایت باشند، برهان قضیهٔ ۱ را به آسانی می‌توان اصلاح کرد.

۳۳۰. صفحه‌های π و π' را چنان قرار می‌دهیم که فصل مشترک آنها بر AB قرار گیرد. حال در صفحهٔ π' یک نقطهٔ 'C طوری اختیار می‌کنیم که $\Delta ABC' \sim \Delta MNP$. پس تصویر موازی خواسته شده با خط 'CC مشخص خواهد شد (شکل (ظ)).

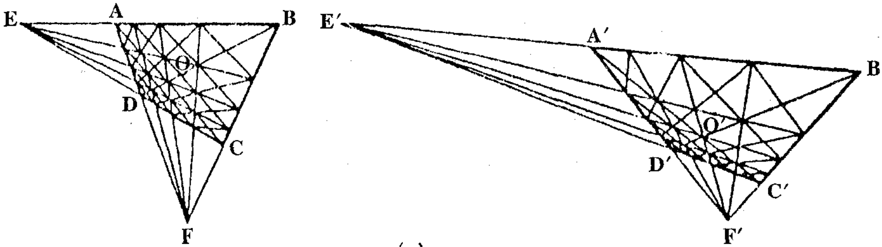


(ظ)

۳۳۱. برهانی که ما در این‌جا برای این قضیه می‌آوریم برای حالتی است که قسمتی از صفحه، که در تعریف تبدیل تصویری به آن اشاره شده بود، یک چهارضلعی محدب باشد (مثل صفحه‌ای از یک دفتر یادداشت). [این فرض محدودیتی برای تعمیم قضیه نیست، زیرا در هر ناحیهٔ G ممکن است یک چهارضلعی (کوچک) ABCD انتخاب کرد. هر خط

که ABCD را ببرد، باید از G بگذرد. ولی در این صورت هر تبدیلی که خطهای گذرنده‌بر G را به خط بدل کند، باید خطهای متقاطع با چهارضلعی (محدب) ABCD را به خط بدل کند.]

پس فرض می‌کنیم یک تبدیل تصویری، چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی A′B′C′D′ (شکل (ع)) بدل کند. بنابر قضیهٔ ۱، بر اثر یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه به خودش و سپس با یک تشابه، می‌توان ABCD را به A′B′C′D′ بدل کرد. بنابراین هرگاه بتوانیم نشان دهیم که این تبدیل تصویری که ABCD را به A′B′C′D′ بدل می‌کند منحصر به فرد باشد، قضیه ثابت خواهد شد.

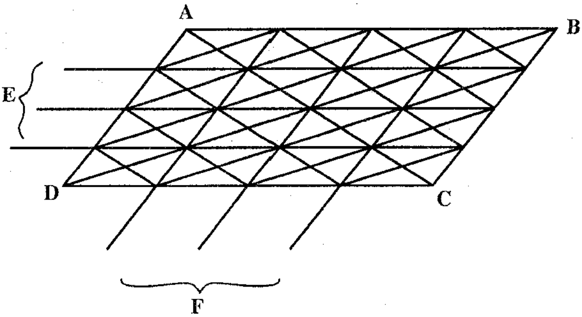


(ع)

گیریم E و F ؛ E′ و F′ نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای AB و CD، AD و BC ؛ A′B′ و C′D′ ، A′D′ و B′C′ از چهارضلعیهای ABCD و A′B′C′D′ باشند (برخی از نقطه‌های برخورد ممکن است در بینهایت باشند)، فرض می‌کنیم G و G′ نقطه‌های برخورد قطرها باشند. چون AB به A′B′ و CD به C′D′ بدل می‌شود، در نتیجه E به E′ بدل خواهد شد، همچنین F به F′ و G به G′ . بنابراین خطهای EG و FG به خطهای E′G′ و F′G′ بدل می‌شوند.

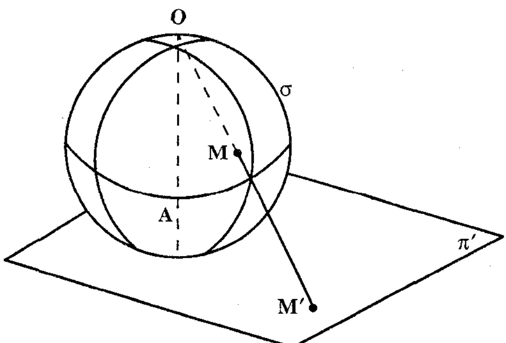
خطهای EG و FG چهارضلعی ABCD را به چهارچهارضلعی کوچکتر تقسیم می‌کنند ؛ هریک از اینها بر اثر تبدیل تصویری ما به چهارضلعی معلومی بدل می‌شوند. از وصل کردن نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیهای کوچکتر به E و F و ادامهٔ این روش، یک شبکه از خطها در ABCD به دست می‌آوریم که نگاره‌های آنها را در A′B′C′D′ بر اثر تبدیل ذکر شده در دست داریم (شکل (ع)). این شبکه را می‌توان به دلخواه چگال کرد. (به آسانی دیده می‌شود که هر تصویر مرکزی از صفحهٔ شکل ما بر خودش، که EF را به خط بینهایت بدل کند، شبکهٔ ما را به یک شبکه از متوازی‌الاضلاعهایی که در شکل (غ) رسم شده، بدل می‌کند. حال برهان منحصر به فرد بودن تبدیل تصویری که

ABCD را به $A'B'C'D'$ بدل کند، به روش مشابه برهان قضیهٔ ۳ دنبال می‌شود).
ما خود را به تعیین نگاره‌های نقطه‌های داخل چهارضلعی محدود کردیم، زیرا خود تعریف یک تبدیل تصویری سر و کارش با قسمتی از صفحه است. ولی یادآوری می‌کنیم که ممکن است به همان طریقی که در برهان قضیهٔ ۳ صورت گرفته بود، شبکهٔ خود را به خارج چهارضلعی اصلی بسط دهیم.)



(غ)

۳۳۲. برای اثبات این قضیه‌ها راههای مختلفی وجود دارد. راه انتخابی ما ساده‌ترین راه نیست، ولی بینشی که به شخص می‌دهد ارزش تلاش اضافی را دارد. این راه براساس مطالعهٔ تصویر گنجنگاشتی یک کره بر یک صفحه استوار شده است.
منظور از تصویر گنجنگاشتی یک کرهٔ σ بر صفحهٔ π'، مماس بر σ در یک نقطهٔ A، تصویر مرکزی σ است بر π' که O مرکز تصویر، سر دیگر قطری از σ است که به A وصل می شود. پس نگارهٔ یک نقطهٔ M از σ ($M \neq 0$) براثر تصویر گنجنگاشتی، نقطهٔ M' محل برخورد OM است با صفحهٔ π' (شکل (الف)). نقطهٔ Oی کره، بر اثر این تصویر گنجنگاشتی بر هیچ نقطهٔ صفحهٔ π' تصویر نمی‌شود.

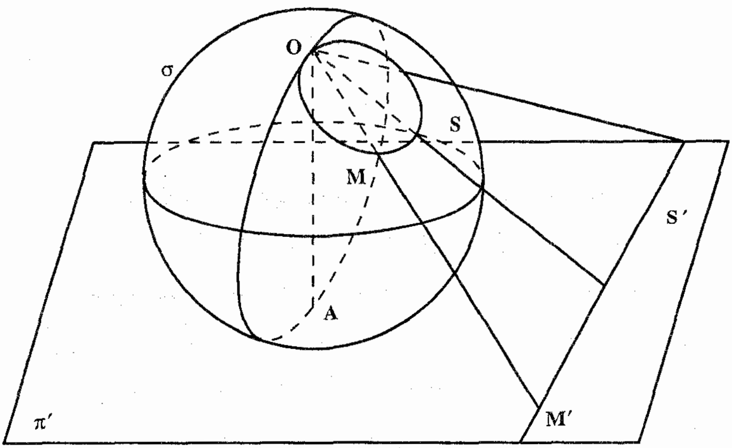


(الف)

مهمترین ویژگی تصویر گنجنگاشتی در قضیهٔ زیر بیان شده است:
قضیه. تصویر گنجنگاشتی، هر دایرهٔ واقع بر کرهٔ σ را به

یک دایره یا یک خط در صفحهٔ π' بدل می‌کند، و بعکس، پیشنگاشت یک خط یا یک دایرهٔ صفحهٔ π' دایره‌ای است واقع بر σ.

برهان. روشن است که تصویر گنجنگاشتی، یک دایرهٔ S واقع بر کرهٔ σ گذرنده بر O را به یک خط S' در صفحهٔ π' (شکل (ب)) بدل می‌کند و بعکس، پیشنگاشت یک خط در π' براثر تصویر گنجنگاشتی دایره‌ای است واقع بر σ گذرنده بر O. حال فرض می‌کنیم S دایره‌ای بر σ باشد که از O نگذرد. S ممکن است به‌عنوان خم تماسی σ با مخروط محیطی K (شکل (پ.۱))، یا با استوانهٔ محیطی Λ (شکل (پ.۲)) انگاشته شود. فرض می‌کنیم P' محل برخورد π' با خط گذرنده بر O و رأس Pی مخروط K، یا خط گذرنده بر O موازی یا مولدی از استوانهٔ Λ باشد. نشان خواهیم داد که تصویر گنجنگاشتی، S را به یک دایرهٔ S' به مرکز P' در صفحهٔ π' بدل می‌کند.



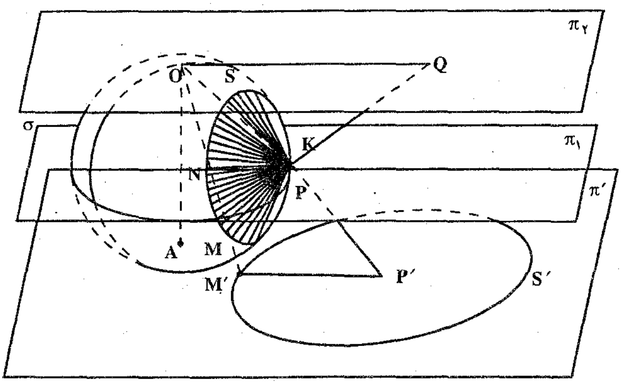
(ب)

گیریم M نقطه‌ای بر S باشد و M' تصویر آن بر صفحهٔ π'. باید نشان دهیم که فاصلهٔ $P'M'$ مستقل از انتخاب نقطهٔ M بر دایرهٔ S است (این، هم‌ارز است با این که نشان دهیم مکان M' یک دایرهٔ S' به مرکز P' است). ابتدا حالتی را در نظر می گیریم که S دایرهٔ تماسی مخروط K با کرهٔ σ باشد (شکل (پ.۱)). صفحه‌های π_1 و π_2 را از نقطه های P و O به موازات π' رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد OM را با π_1 به N و نقطهٔ برخورد PM را با π_2 به Q نشان می‌دهیم. سپس Q را به O وصل می‌کنیم. خطهای $P'M'$ ، PN و QO با هم موازی‌اند ؛ زیرا فصل مشترکهای صفحهٔ OPM با صفحه‌های موازی π' ، π_1 و π_2 هستند. از این‌جا نتیجه می‌شود که $\Delta MPN \sim \Delta MQO$ و

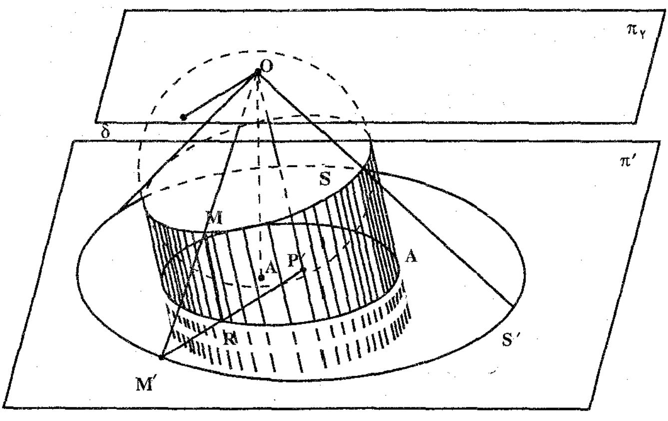
$\Delta OPN \sim \Delta OP'M'$. از تشابه دو مثلث اوّل نتیجه می‌شود که $PN/PM = QO/QM$. چون QO و QM مماسهای رسم‌شده از Q بر σ هستند (QO در صفحهٔ π_2 مماس بر σ قرار دارد و QM مولد مخروط محیطی σ است)، و $QO = QM$ ، پس $PM = PN$. این تساوی نشان می‌دهد که طول پاره‌خط PM مستقل از انتخاب M بر S است (طول PM به‌ازای جمیع نقطه‌های M بر S ثابت است). وانگهی تشابه دو مثلث دیگر ایجاب می‌کند که داشته باشیم $P'M'/PN = OP'/OP$. پس:

$$P'M' = PN(OP'/OP) = PM(OP'/OP)$$

معنی این تساوی این است که $P'M'$ درواقع مستقل از انتخاب M است، و این همان چیزی است که ما می‌خواستیم ثابت کنیم.



(پ ۱)



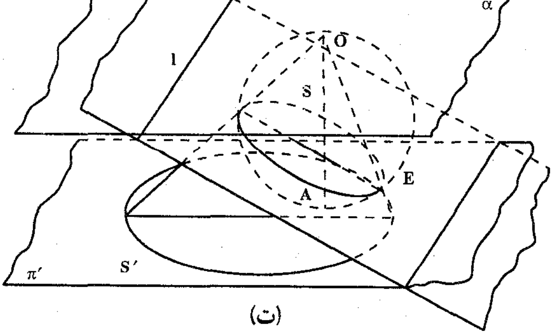
(پ ۲)

اگر S دایرهٔ مماسی استوانهٔ Λ و کرهٔ σ باشد (شکل (پ.۲))، مولد گذرنده بر M از استوانه را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با صفحه‌های π' و π_2 (که در بالا وارد کردیم) به Q و R نشان می‌دهیم. چون $MR \| OP'$، R بر پاره‌خط $M'P'$ واقع خواهد شد. Q را به O وصل می‌کنیم و مانند قسمت قبل نتیجه می‌گیریم که $\Delta MRM' \sim \Delta MQO$ و از این مشابهت به تساوی $MR = RM'$ می‌رسیم (زیرا $QM = QO$ مماسهای رسم‌شده از Q بر σ هستند). اما از تشابه مثلثهای $OP'M'$ و MRM' نتیجه می‌گیریم که $P'M' = P'O$، که معنی آن این است که در این حالت هم طول $P'M'$ به انتخاب نقطهٔ M بر S بستگی ندارد.

بعکس، گیریم S' دایره‌ای دلخواه به مرکز P' در صفحهٔ π' و M' نقطه‌ای از S'، و M، نقطه‌ای از σ، پیشنگاشت M'، بر اثر تصویر گنجنگاشتی باشد. فرض می‌کنیم P نقطهٔ برخورد خط OP' با صفحهٔ α، مماس بر σ در M باشد (به‌شرطی که چنین نقطه‌ای موجود باشد). مانند حالت قبل ثابت می‌کنیم که P مستقل از انتخاب M' بر S' است. ثابت می‌کنیم که مکان نقطهٔ M دایرهٔ S است، که یا دایرهٔ تماسی کرهٔ σ با مخروط Kی حاصل از مماسهای رسم‌شده بر این کره از نقطهٔ P است، و یا دایرهٔ مماسی استوانهٔ Λ ی حاصل از مماسهای بر σ به‌موازات OP'.

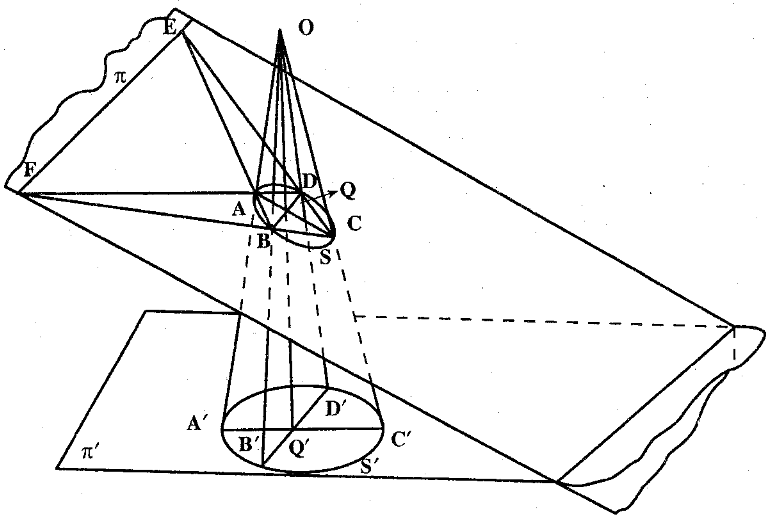
با استفاده از قضیهٔ ۲ بلافاصله می‌توانیم قضیه‌های بنیادی ۱ و $1'$ را ثابت کنیم.

برهان قضیهٔ $1'$. گیریم S دایره‌ای در یک صفحهٔ π و l خطی در π نامتقاطع با S باشد. کرهٔ دلخواه σ را بر S، و صفحهٔ α گذرنده بر l و مماس بر σ در یک نقطهٔ O را رسم می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم π' صفحه‌ای موازی α و مماس بر σ در نقطهٔ A، متقاطر O، باشد (شکل (ت)). تصویر مرکزی π از O بر π'، (به موجب قضیهٔ ۲) S را به یک دایرهٔ S' از صفحهٔ π'، و (بدیهی است که) l را به خط بینهایت π' بدل می‌کند.



(ت)

برهان قضیهٔ ۱. گیریم S یک دایره و Q نقطه‌ای در داخل آن باشد. فرض می‌کنیم AC و BD دو وتر رسم شده از Q باشند و چهارضلعی ABCD (شکل (ث)) را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل این چهارضلعی را به E و F نشان می‌دهیم.



(ث)

همهٔ خطهای رسم شده از E، یا S را (۱) دو بار بر کمان AB، یا (۲) دو بار بر کمان CD (اگر دو نقطهٔ برخورد، بر یک کمان یکی شوند، خط مورد نظر مماس می‌شود و برهان معتبر می‌ماند.)، یا (۳) یک بار بر کمان AD و یک بار بر کمان BC، می‌برند یا (۴) نقطهٔ مشترکی با S ندارند. همچنین خطهای گذرنده بر F، یا S را (۱) دوبار بر کمان AD، یا (۲) دو بار بر کمان BC، یا (۳) یک بار بر کمان AB و یک بار بر کمان CD، می‌برند یا (۴) نقطهٔ مشترکی با S ندارند. خط EF باید به دستهٔ چهارم متعلق باشد؛ زیرا اگر به یکی از سه دستهٔ دیگر نسبت به E متعلق باشد، شرایط بودن در یکی از چهار دسته نسبت به F را نقض می‌کند.

حال شکل را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به یک دایرهٔ S' و EF به خط بینهایت π' بدل شود (که بنابر قضیهٔ ۱′ ممکن است). نگارهٔ چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ محاط در S'، یعنی یک مستطیل است. چون Q نقطهٔ تقاطع قطرهای ABCD است، پس نگاره‌اش، Q'، نقطهٔ تقاطع قطرهای مستطیل $A'B'C'D'$، یعنی مرکز S' خواهد شد.

قضیه‌های ۱ و ′۱ به ما امکان می‌دهند که از تصویرهای مرکزی برای حل بسیاری از مسأله‌های متضمن دایره‌ها استفاده کنیم. تعدادی از این‌گونه مسأله‌ها در زیر می‌آیند. به‌خاطر سپردن این واقعیت که یک تصویر مرکزی که یک دایرهٔ S را به یک دایرهٔ S' بدل می‌کند، مماس بر S (یعنی خطی که با S تنها یک نقطهٔ مشترک دارد) را نیز به مماس بر S' بدل می‌کند، در حل مسأله‌ها بیشتر تا حدی مفید واقع می‌شود. بدون استفاده از تصویر مرکزی، علی‌الاصول، حل این مسأله‌ها خیلی دشوار است.

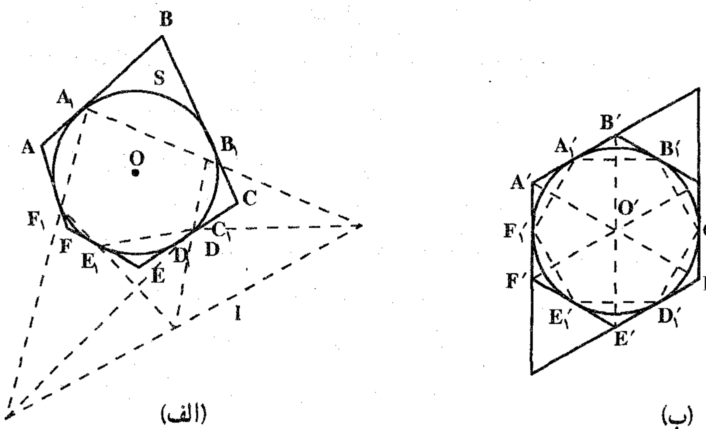
۳۳۳. تصویر جسم نمایی حالت خاص انعکاس است.

۳۳۴. هرگاه دو مثلث دارای مرکز همسانی باشند، دارای محورهمسانی نیز می‌باشند و بعکس.

تعریف. مرکز همسانی. هرگاه بین دو شکل پدیدآمده از نقطه‌ها و خطها، چنان تناظری وجود داشته باشد که هر جفت نقطهٔ نظیر هم بر خطهای همرس واقع باشند، می‌گوییم که آن دو شکل مرکز همسانی دارند.

محور همسانی. هرگاه تناظر بین دو شکل چنان باشد که هر جفت خط نظیر هم در نقطه‌های واقع بر یک خط راست متقاطع باشند، می‌گوییم که آن دو شکل محور همسانی دارند.

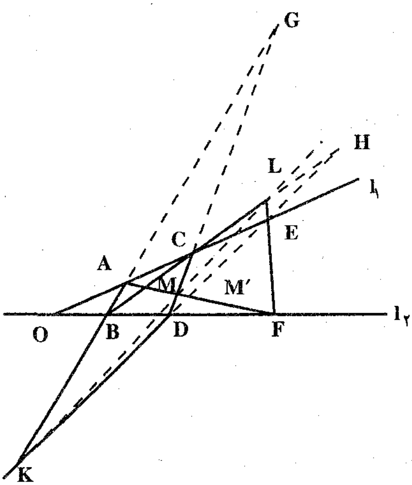
۳۳۵. شش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (شکل (الف)) در دایرهٔ S محاط شده است، پس در شرایط قضیهٔ پاسکال صدق می‌کند. صفحهٔ شکل (الف) را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به گونه‌ای که S به یک دایرهٔ S' بدل شود و خط l، که نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش‌ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را بر خود دارد، به خط بینهایت صفحهٔ π' بدل شود. براثر این تصویر، $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ به شش‌ضلعی $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1F'_1$ بدل می‌شود که ضلعهای مقابلش موازی‌اند (شکل (ب)). حال مماسهای $A'B'$ ، $A'F'$ ،



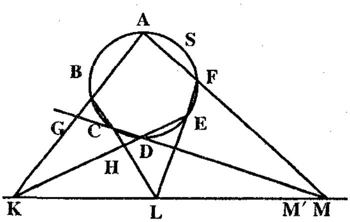
(الف) (ب)

$D'C'$ و $D'E'$ بر S' را در نظر می‌گیریم. چون $A'_1F'_1 \| C'_1D'_1$، از این جا نتیجه می‌شود که $A'D'$ یک محور تقارن چهارضلعی حاصل از این مماسها است. این محور از O'، مرکز S'، می‌گذرد و بر $A'_1F'_1$ و $C'_1D'_1$ عمود است. به طریقی کاملاً مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای $B'E'$ و $C'F'$ از O' می‌گذرند. از این‌جا نتیجه می‌شود که خطهای AD، BE و CF همرسند.

۳۳۶. نقطه‌های واقع بر l_1 و l_2 را بترتیب با A، C و E ؛ B، D و F نشان می‌دهیم. نقطه‌های برخورد خطهای AB و ED، CD و AF، EF و CB را با K، M و L، و نقطه‌های برخورد خطهای AB و CD، CB و ED، l_1 و l_2 را هم با G، H و O نشان می‌دهیم، و نقطهٔ برخورد KL و CD را با M'. باید نشان دهیم که M' بر M منطبق است. تصویر CD از مرکز A بر خط l_2، نقطه‌های C، G، D و M را به نقطه‌های O، B، D و F بدل می‌کند، و تصویر l_2 از مرکز E بر خط CB، نقطه‌های O، B، D و F را به C، B، H و L. تصویر مجدد CB از مرکز K بر خط CD، نقطه‌های C، B، H و L را به نقطه‌های C، G، D و M' بدل می‌کند. حاصلضرب این سه تصویر متوالی، تبدیلی است تصویری از خط CD که نقطه‌های C، G، D و M را به نقطه‌های C، G، D و M' بدل می‌کند. به‌موجب یک ویژگی بنیادی از تبدیلهای تصویری، یک تبدیل تصویری از یک خط که سه نقطهٔ آن را ثابت نگه‌دارد (که در مورد مسأله ما، نقطه‌های C، G و D است) یک تبدیل همانی است. از این‌جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های M و M' بر هم منطبقند.

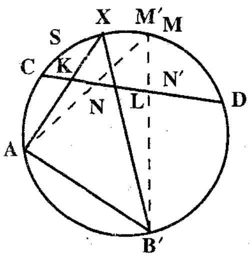


۳۳۷. نقطه‌های برخورد AB و DE، BC و EF، CD و FA، CD و KL را بــه K، L، M و M' نشان می‌دهیم، و نقطه‌های تقاطع AB و CD، BC و DE را با G و H (شکل). باید نشان دهیم که M بر M' منطبق است. تصویر CD

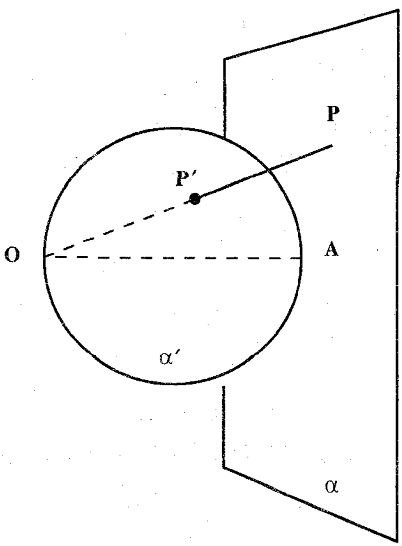


از A بر دایرهٔ S نقطه‌های G، C، D و M را به نقطه‌های B، C، D و F بدل می‌کند، و تصویر این نقطه‌ها از E بر خط BC آنها را به B، C، H و L. تصویر نقطه‌های اخیر از K بر خط CD آنها را به G، C، D و M′ بدل می‌کند، که در این صورت M و M′ بر هم منطبق می‌شوند.

۳۳۹. گزینهٔ (د) درست است.



۳۴۰. الف. تبدیل تصویری دایرهٔ S به‌شرح زیر را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ M متعلق به S، از نقطهٔ A بر خط CD تصویر شده است. نقطهٔ حاصل یعنی N، به‌اندازهٔ $NN' = a$ در طول خط CD منتقل شده است (یعنی تبدیل تصویری خط CD است)، و بالاخره نقطهٔ N′ از B بر نقطهٔ M′ واقع بر S (شکل) تصویر شده است.
نقطهٔ مطلوب X نقطهٔ ثابتی است از تبدیل تصویری بالا. برای تعیین آن مجبوریم نگاره‌های سه نقطهٔ دلخواه از دایرهٔ S را بر اثر تبدیل خود پیدا کنیم. مسأله می‌تواند دو یا یک جواب داشته باشد، یا جوابی نداشته باشد.
ب. راه حل آن با راه حل مسألهٔ (الف) فقط در این نکته تفاوت دارد که به جای انتقال a در طول خط CD، باید از حرکت نیمدور پیرامون نقطهٔ مفروض E استفاده کنیم (که یک تبدیل تصویری از CD نیز هست).



۳۴۱. صفحهٔ عمودمنصف OA (شکل) کرهٔ α′ را در یک دایرهٔ عظیمهٔ خاص قطع می‌کند که اصطلاحاً آن‌را استوا می‌نامیم. این استوا هر دایرهٔ عظیمهٔ دیگر از کره را در دو نقطه قطع می‌کند که در دو سر یک قطر واقعند. ویژگی استوا این است که تصویرهای قطرهای آن روی صفحهٔ α عبارتند از قطرهای دایره‌ای از این صفحه که مرکزش A و شعاعش ۲k می‌باشد.

۲.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در نقطه، خط، زاویه

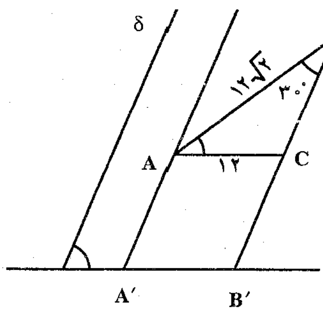
۱.۲.۳. مرکز تصویر، محور تصویر

۳۴۲. از A خطی موازی $A'B'$ رسم می‌کنیم تا BB' را در نقطهٔ C قطع کند. در مثلث ABC، بنا به قانون سینوسها داریم:

$$\frac{AC}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{AB}{\sin \hat{ACB}}\Rightarrow \frac{۱۲}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱۲\sqrt{۲}}{\sin \hat{ACB}}\Rightarrow \sin \hat{ACB}=\sqrt{\frac{۲}{۲}}=\sin ۱۳۵^\circ$$

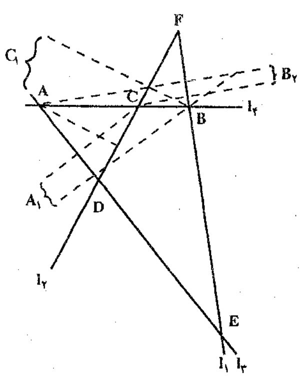
$$\Rightarrow \hat{ACB}=۱۳۵^\circ \Rightarrow \hat{ACB'}=۴۵^\circ$$

پس امتداد δ خطی است که با محور تصویر یعنی خط d، زاویهٔ ۴۵° می‌سازد.



۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

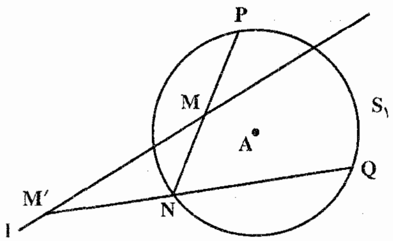


۳۴۳. فرض می‌کنیم l_1، l_2، l_3 و l_4 چهار خط مفروض، و A، B، C، D، E و F نقطه‌های برخورد آنها باشند (شکل).

حال سه مثلث از چهار مثلثی را که آنها تشکیل می‌دهند، مثل ABE، ACD و BCF را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد ارتفاعها در هریک از این مثلثها، نقطه‌های برخورد خطهای $AB_1 \perp l_1$،

$BA_1 \perp l_3$، $AC_1 \perp l_2$ ؛ $CA_1 \perp l_3$، $BC \perp l_2$ و $CB_1 \perp l_1$ هستند. اما این نقطه‌ها همخطند. حکمی مشابه این حکم را می‌توان بر هر مثلث از چهار مثلث جاری دانست. بنابراین هر چهار نقطهٔ موردنظر همخطند.

۳.۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه‌های برخورد



۳۴۴. فرض می‌کنیم P و Q دو نقطه بر S_1 باشند (شکل). l را از P بر S_1 و S_1 را از Q بر l تصویر می‌کنیم. روشن است که نقطه‌های برخورد S_1 و l بر اثر تبدیل تصویری حاصل از l ثابتند. یک راه آسان برای پیدا کردن سه نقطهٔ R، S و T بر l، این است که سه نقطهٔ R_1، S_1 و T_1 از S_1 را اوّل از P بر l، بر نقطه‌های R، S و T، تصویر کنیم و سپس از Q بر نقطه‌های R'، S' و T'. بدین ترتیب، مسألهٔ ما بدل می‌شود به مسألهٔ تعیین نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری با ستاره، از یک خط l، که به وسیلهٔ نقطه‌های R'، S' و T'، نگاره‌های R، S و T بر l، مشخص شده‌اند. اگر دایرهٔ S در صفحه داده شده باشد، این مسأله می‌تواند به کمک ستارهٔ تنها حل شود.

۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی،...

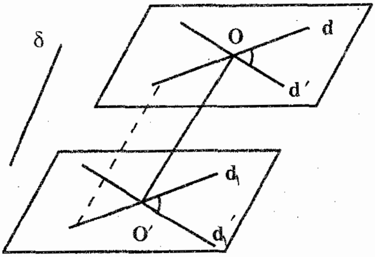
۱.۳.۲.۳. خطها موازی‌اند

۳۴۵. زیرا در این حالت، صفحه‌های P_1 و P_2 که از نقطهٔ O و خطهای l_1 و l_2 می‌گذرند، یکدیگر را در OM که موازی صفحهٔ π' است، قطع می‌کنند. از آن‌جا نتیجه می‌شود که l_1' و l_2' تصویرهای l_1 و l_2، خطهایی موازی، در صفحهٔ π' هستند.

۴.۲.۳. زاویه

۱.۴.۲.۳. اندازهٔ زاویه

۳۴۶. اگر تصویرهای دو خط d و d' روی صفحهٔ π' به موازات امتداد δ را بترتیب d_1 و



d'_1 بنامیم، $d_1 \| d$ و $d'_1 \| d'$ است. پس زاویهٔ بین دو خط d_1 و d'_1 برابر زاویهٔ بین دو خط d و d'، یعنی 30° است.

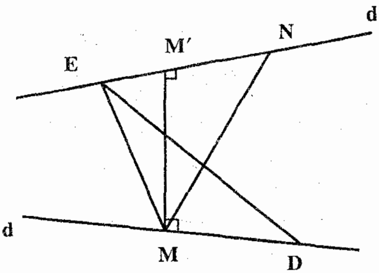
نکته. دو زاویه که ضلعهایشان دو به دو موازی و در یک جهت باشند، با هم مساوی‌اند.

۵.۲.۳. پاره‌خط

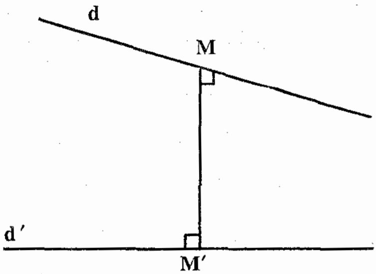
۱.۵.۲.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۳۴۷. داریم:

$$A'B' = AB\cos 30^\circ \Rightarrow A'B' = 5\times\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

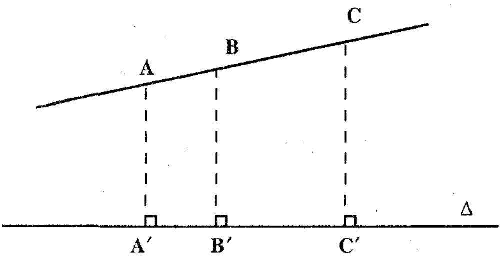


۳۴۸. دو خط متنافر d و d' و پاره‌خط MM'، عمود مشترک آنها را در نظر می‌گیریم. اگر پاره‌خط دیگری مانند MN را درنظر بگیریم که یک سر آن نقطهٔ M و سر دیگرش روی خط d' واقع باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $MM'N$، $MN > MM'$ است. حال اگر پاره‌خط DE را که دو سرش روی دو خط d و d' قرار داشته و متمایز با پاره‌خط MM' باشد اختیار کنیم، $MM' < DE$ است.



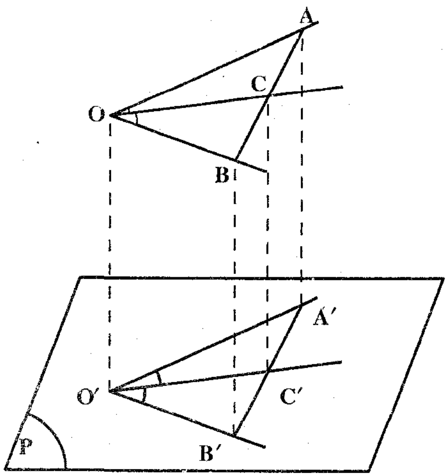
۳۴۹. دو خط متنافر d و d' و پاره‌خط MM' را که عمود مشترک آن دو می‌باشد، اختیار کنید. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که این پاره‌خط منحصر به فرد است.

۶.۲.۳. رابطه‌های متری



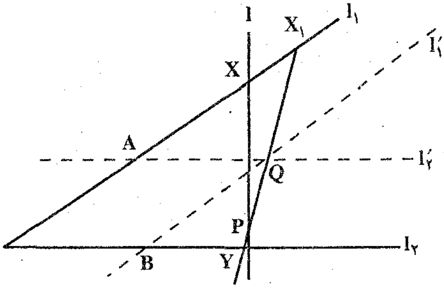
۳۵۰. خطهای متوازی AA' ، BB' و CC' دو خط Δ و ABC را قطع کرده‌اند؛ بنابراین رابطهٔ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ و از آن‌جا رابطهٔ $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = m$ برقرار است.

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند



۳۵۱. یک زاویه و نیمساز آن را درنظر می‌گیریم و روی ضلعهای طولهای متساوی OA و OB را جدا می‌کنیم. نیمساز زاویه، پاره‌خط AB را در نقطهٔ C وسط آن قطع می‌کند و در مثلث متساوی‌الساقین AOB، نیمخط OC ارتفاع رأس O نیز هست. اگر این شکل را روی صفحهٔ P تصویر کنیم، مثلث $A'O'B'$ و میانهٔ آن $O'C'$ به‌دست می‌آید. زیرا تصویر نقطهٔ C وسط AB، نقطهٔ C' وسط $A'B'$ است. برای آن که میانه $O'C'$ در عین حال نیمساز زاویهٔ $A'O'B'$ نیز باشد، لازم و کافی است که ارتفاع مثلث باشد؛ یعنی زاویهٔ قائمه OCA به زاویهٔ قائمه تصویر شود و این منظور در صورتی ممکن است که یکی از ضلعهای این زاویه با صفحهٔ P موازی باشد. بنابراین یا باید OC با صفحهٔ P موازی باشد و یا ضلع CA که به موازات نیمساز زاویهٔ خارجی AOB می‌باشد.

۸.۲.۳. رسم شکلها



(الف)

۳۵۲. الف. فرض می‌کنیم X و Y معرف نقطه‌های برخورد خط مطلوب با l_1 و l_2 باشند (شکل (الف)). l_1 را از P بر l_2 تصویر می‌کنیم. سپس l_2 را بر l_1 منطبق می‌کنیم به‌طوری که، به ویژه، B بر A منطبق شود، و سرانجام l_2 را تحت تأثیر یک تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{m}{n}$ قرار می‌دهیم. تبدیل نتیجهٔ l_1 تبدیلی است تصویری؛ زیرا حاصلضرب یک تصویر و یک تجانس است. X یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است (داریم : $X \to Y \to X$)؛ پس می‌تواند تعیین شود. چون تجانس می‌تواند به نسبت $-\frac{m}{n}$ نیز باشد، مسأله تا چهار جواب دارد. در حالت خاصی که تبدیل تصویری بالا به همانی بدل شود، مسأله نامعین است. (این حالت زمانی روی می‌دهد که خطهای l_1 و l_2 و نقطه‌های A و B بر اثر تجانس به مرکز P و نسبت $\pm\frac{m}{n}$ متناظر یکدیگر شوند.)

ب. فرض می‌کنیم که $l_1 \neq l_2$، و l_1 را بر l_2 از P تصویر می‌کنیم. نقطهٔ مطلوب X بر l_1 به یک نقطهٔ Y بر l_2 بدل می‌شود. بعد l_2 را دوباره بر l_1 از نقطهٔ Q، نقطهٔ تقاطع خطهای $l_1' \| l_1$ و $l_2' \| l_2$ که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، تصویر می‌کنیم (شکل (الف)). گیریم این تصویر نقطهٔ Y از l_2 را به یک نقطهٔ X_1 از l_1 بدل کند. از تشابه مثلثهای AQX_1 و BYQ داریم:

$$AX_1/AQ = BQ/BY$$

یعنی:

$$AX_1.BY = AQ.BQ = p^2$$

که p می‌تواند تعیین شود. حال اگر تجانس به مرکز A و نسبت k^2/p^2 را برای l_1 به‌کار بریم، نقطهٔ X_1 به یک نقطهٔ X' بدل می‌شود، به‌طوری که:

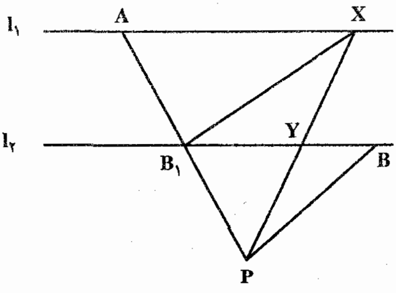
$$AX' = \frac{k^2}{p^2}AX_1 = \frac{k^2}{p^2}.\frac{p^2}{BY} = \frac{k^2}{BY} = AX$$

یعنی X' بر X منطبق می‌شود. این نشان می‌دهد که X نقطهٔ ثابتی از تبدیل تصویری l_1 است، پس می‌تواند معین شود. چون تجانس می‌تواند دارای نسبت $-k^2/p^2$ نیز باشد، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (تبدیل تصویری ما نمی‌تواند به تبدیل همانی بدل شود). اگر $l_1 \| l_2$، و B_1 نقطهٔ برخورد PA و l_2 باشد، آن‌گاه:

$$B_1Y = \frac{PB_1}{PA}.AX$$

بنابراین شرط $AX.BY = k^2$ با شرط

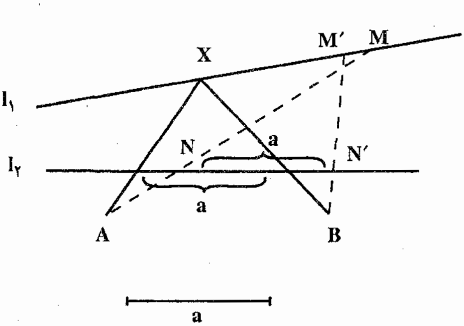
$$BY.B_1Y = \frac{PB_1}{PA}.k^2$$



(ب)

(شکل (ب)) هم‌ارز است. چون، علاوه‌بر حاصلضرب پاره‌خطهای BY و B_1Y، $B_1Y \cdot BY$، مجموع (یا تفاضل) آنها، BB_1، نیز داده شده است، این پاره‌خطها را بلافاصله می‌توانیم رسم کنیم.

یادداشت. به‌جای این که قید کنیم که خط مطلوب از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد، می‌توانستیم قید کنیم که امتدادش معین است. در این صورت در راه حل ما، کافی است به‌جای تصویر مرکزی به مرکز P، تصویر موازی بگذاریم.

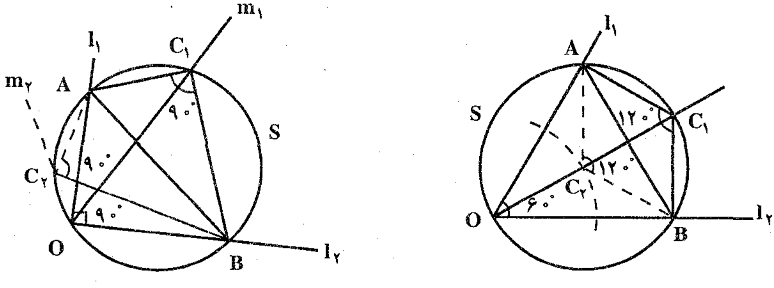


۳۵۳. الف. تبدیل تصویری خط l_1 به شرح زیر را در نظر می‌گیریم: تصویر یک نقطهٔ M واقع بر آن از نقطهٔ A بر خط l_2، سپس انتقال نقطهٔ حاصل، یعنی N، به اندازهٔ $NN' = a$ در طول l_2، و سرانجام تصویر نقطهٔ N' بر خط l_1 از نقطهٔ B و تعیین نقطهٔ M'، پای تصویر (شکل). نقطهٔ مطلوب X، نقطهٔ ثابت این تبدیل تصویری است و بدین عنوان می‌تواند معین شود. مسأله ممکن است دارای دو یا یک جواب باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

ب. تفاوت راه حل این قسمت با راه حل قسمت (الف) فقط در این است که به‌جای انتقال به اندازهٔ a در طول l_2، یک نیمدور خط l_1 در حول نقطهٔ E را می‌گذاریم.

۹.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۵۴. الف. نقطه‌های C_1 و C_2 در شکل (الف) بر دایرهٔ محیطی مثلث ABO واقعند. وقتی پاره‌خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویهٔ $l_1\hat{O}l_2$ باشند، رأسهای C_1 و C_2 از مثلث ABC_1 و ABC_2 خطهای m_1 و m_2 را که از O می‌گذرند، می‌پیمایند. [دقیقتر بگوییم، پاره‌خطهایی از این خطها را می‌پیمایند. تعیین طول این پاره‌خطها به خواننده واگذار می‌شود.]

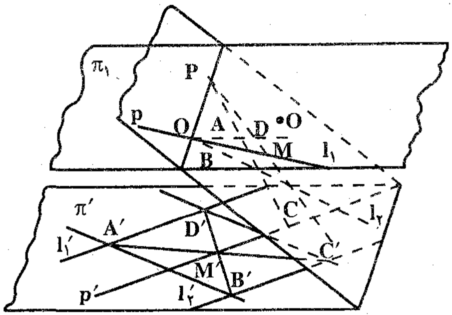


(الف) (ب)

ب. نقطهٔ C_1 در شکل (ب) بر S، دایرهٔ محیطی مثلث ABO، واقع است؛ نقطهٔ C_2 مرکز این دایره است. وقتی پاره‌خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویهٔ l_1Ol_2 واقع باشد، رأس C_2 از مثلث ABC_2 دایره‌ای به مرکز O را می‌پیماید. [به بیان دقیقتر، C_1 پاره‌خطی از این خط را می‌پیماید، و C_2 کمانی از دایره را.]

۱۰.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۵. الف. فرض می‌کنیم Q نقطهٔ برخورد خطهای l_1 و l_2 باشد. صفحهٔ π ی شکل (الف) [درصورت مسأله] را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که PQ خط خاص صفحهٔ π باشد. برای این کار کافی است بر PQ صفحهٔ دلخواهی مانند π_1، غیر از π،



(الف)

بگذرانیم و π را از یک نقطهٔ Oی π_1 بر یک صفحه π' موازی π_1 تصویر کنیم شکل (الف). در این صورت شکل (الف) [در صورت مسأله] (در صفحهٔ π) به شکل (ب) (در صفحهٔ π') بدل می‌شود و مکان نقطه‌های M، نقطهٔ برخورد خطهای AC و BD، به یک خط p' موازی با l'_1 و l'_2 و متساوی‌الفاصله از آن دو بدل می‌شود. از ویژگی (الف) تصویر مرکزی، نتیجه می‌شود که مکان نقطه‌های M یک خط است.

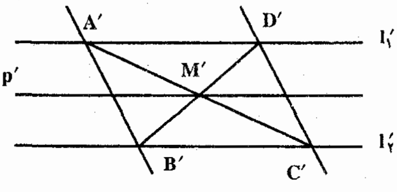
اگر $l_1 \| l_2$، آن‌گاه از راه تصویر صفحهٔ π بر یک صفحهٔ π' زمانی به شکل (ب) می‌رسیم، که خط گذرنده بر P موازی l_1 و l_2، خط خاص π باشد.

از ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی بلافاصله نتیجه می‌شود که هرگاه l_1 و l_2 در یک نقطهٔ Q متقاطع باشند، آن‌گاه P از Q می‌گذرد و اگر $l_1 \| l_2$، آن‌گاه p با l_1 و l_2 موازی است.

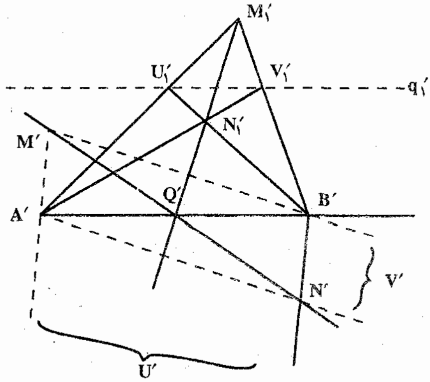
اگر P_1 نقطهٔ دلخواهی از خط PQ باشد، آن‌گاه بر اثر تصویر مرکزی ما، خطهای متقاطع در P_1 به خطهای موازی بدل می‌شوند و مکان نقطه‌های M_1، محل برخورد خطهای A_1C_1 و B_1D_1 به خط p' بدل می‌شود. از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان نقطه‌های M_1 بر p منطبق است. (همچنین اگر $l_1 \| l_2$ و بنابراین $PP_1 \| l_1$، آن‌گاه P و P_1 همان خط p را مشخص می‌کنند.)

ب. صفحهٔ π ی شکل (ب) [درصورت مسأله] را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که خط q خط خاص π باشد. در این صورت خطهای UA و UB، VA و VB به خطهای موازی بدل می‌شوند (شکل (پ)) ؛ خط MN به قطر $M'N'$ از متوازی‌الاضلاع $M'A'N'B'$ بدل می‌شود و قطر دیگر $A'B'$ را در Q' نصف می‌کند.

بنابراین، به‌ازای هر انتخاب U و V، خط MN به یک خط $M'N'$ بدل می‌شود که $A'B'$ را در همان نقطهٔ Q' می‌برد ؛ از آن‌جا نتیجه می‌شود که همهٔ خطهای MN، خط AB را در یک نقطهٔ Q می‌برند.

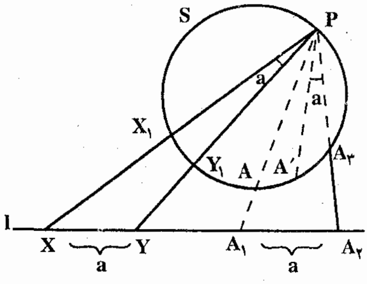


(ب)



(پ)

حال فرض می‌کنیم q_1 خط دیگری باشد که AB را در نقطهٔ P ببرد. بر اثر تصویر ما، q_1 به یک خط q'_1 موازی با $A'B'$، چهارضلعی ABV_1U_1 به ذوزنقهٔ $A'B'V'_1U'_1$، و خط M_1N_1 به خط $M'_1N'_1$، واصل بین نقطهٔ برخورد قطرها و نقطهٔ برخورد ضلعهای مقابل ذوزنقه، بدل می‌شوند (شکل (پ)). اما در این صورت $M'_1N'_1$ قاعدهٔ $A'B'$ از ذوزنقه را در نقطهٔ Q' وسط آن خواهد برید که دومین حکم مسألهٔ ما را ایجاب می‌کند.



(الف)

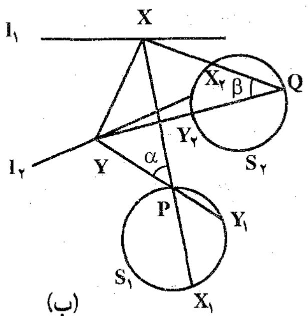
۳۵۶. الف. دایرهٔ S را که بر P می‌گذرد درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که خطهای مطلوب PX و PY دایرهٔ S را در نقطه‌های X_1 و Y_1 ببرند (شکل (الف)). تبدیل تصویری از S به شرح زیر را درنظر می‌گیریم : دایرهٔ S از P بر l تصویر می‌شود، سپس l به اندازهٔ a در طول خودش انتقال داده می‌شود، بعد l از P بر S دوباره تصویر می‌شود، و بالاخره S حول مرکزش به اندازهٔ 2α دوران داده می‌شود. جهت دوران طوری انتخاب می‌شود که موجب حرکت نقطهٔ برخورد PM و l (M بر S) در امتدادی خلاف امتداد انتقال بالا شود. روشن است که اثر این تبدیل بر نقطهٔ X_1 چنین است :

$$X_1 \to X \to Y \to Y_1 \to X_1$$

(به‌خاطر داشته باشید که $\widehat{X_1Y_1} = 2X_1\hat{P}Y_1 = 2\alpha$) ؛ پس X_1 یک نقطهٔ ثابت است. اکنون سه نقطهٔ A، B و C را بر S انتخاب، و A' ، B' و C' ، نگاره‌های آنها را بر اثر این تبدیل تعیین می‌کنیم (شکل (الف)) : A_1 نقطهٔ برخورد PA و l است، $A_1A_2 = a$ ، A_3 نقطهٔ برخورد PA_2 و S است، و $\widehat{A_3A'} = 2\alpha$ ؛ B' و C' به طریق مشابه تعیین می‌شوند). نقطهٔ X_1 می‌تواند به عنوان یک نقطهٔ ثابت از تبدیل تصویری دایرهٔ S تعیین شود که A، B و C را به A' ، B' و C' بدل کند.

مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

ب. دایره‌های S_1 و S_2 را که بترتیب بر نقطه‌های P و Q می‌گذرند، رسم می‌کنیم. گیریم PX و PY دایرهٔ S_1 را در نقطه‌های X_1 و Y_1 ببرند، و QX و QY دایرهٔ S_2 را در نقطه‌های X_2 و Y_2 (شکل (ب)). تبدیل تصویری S_1 به شرح زیر را درنظر می‌گیریم :



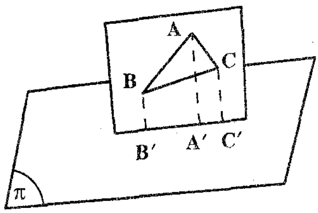
(ب)

S_1 از P بر l_1 تصویر شده است، سپس l_1 از Q بر دایرهٔ S_2 ؛ بعد S_2 در حول مرکزش به زاویهٔ 2β دوران کرده است. آن‌گاه S_2 از Q بر l_2 تصویر شده است، بعد l_2 از P بر S_1 ؛ و سرانجام S_1 در حول مرکزش به زاویهٔ 2α دوران کرده است. اثر این تبدیل بر نقطهٔ X_1 چنین است $X_1 \to X \to X_2 \to Y_2 \to Y \to Y_1 \to X_1$ ، پس X_1 یک نقطهٔ ثابت است. حال سه نقطهٔ A_1 ، B_1 و C_1 را بر S_1 انتخاب، و نگاره‌های آنها A'_1 ، B'_1 و C'_1 را بر اثر تبدیل فوق پیدا می‌کنیم. پس نقطهٔ X_1 ممکن است به‌عنوان یک نقطهٔ ثابت تبدیل تصویری S_1 ، که A_1 ، B_1 و C_1 را به A'_1 ، B'_1 و C'_1 بدل می‌کند، انتخاب شود.

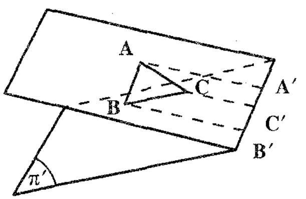
چون S_1 به دو طریق ممکن است به زاویهٔ 2α دوران داده شود، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد.

۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث

۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

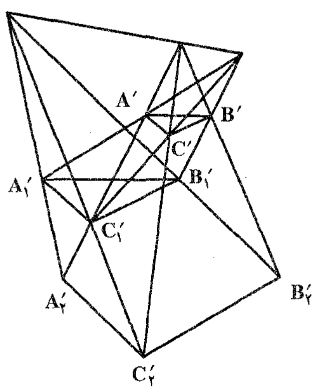


۳۵۷. اگر صفحهٔ تصویر بر صفحهٔ مثلث ABC عمود باشد و یا امتداد تصویر موازی صفحهٔ مثلث ABC باشد.



۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند

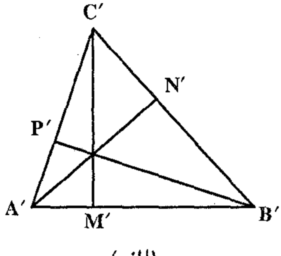


۳۵۸. صفحهٔ π ی سه مثلث را بر یک صفحهٔ π' تصویر کنید به‌طوری که PQR خط خاص π باشد. بر اثر این تصویر مثلثهای ABC، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ به مثلثهای دو به دو متجانس $A'B'C'$، $A_1'B_1'C_1'$ و $A_2'B_2'C_2'$ بدل می‌شوند، و نقطهٔ برخورد خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 ؛ AA_2، BB_2 و CC_2 ؛ A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 به مرکزهای تجانس این مثلثها بدل می‌شوند. به‌موجب قضیهٔ سه مرکز تجانس، این سه نقطه همخطند (شکل).

نتیجه. پیشنگاره‌های این نقطه‌ها نیز بر اثر تصویر ما همخطند.

۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۳.۳.۳. خطها همرسند



(الف)

۳۵۹. در درسهای هندسهٔ دبیرستانی ثابت می‌کنند که در یک مثلث میانه‌ها، ارتفاعها و نیمسازها، سه تاییهای همرس تشکیل می‌دهند.
مسأله ما زمانی حل می‌شود که بتوانیم صفحهٔ مثلث ABC را با یک تصویر موازی بر صفحهٔ دیگر بنگاریم، به‌طوری که خطهای AN، BP و CM به سه میانه، سه نیمساز یا سه ارتفاع مثلث A′B′C′، نگارهٔ مثلث ABC، بدل شوند. روشن است که خطهای AN، BP و CM نمی‌توانند به‌وسیلهٔ یک تصویر موازی بر میانه‌های یک مثلث نگاشته شوند، مگر این که خود آنها میانه‌های ΔABC باشند. باز، همیشه ممکن نیست خطهای AN، BP و CM را بر نیمسازهای یک مثلث نگاشت. مانده است که نگاشت خطهای AN، BP و CM را بر اثر تصویر موازی بر ارتفاعهای یک مثلث، امتحان کنیم.
ثابت می‌کنیم که هرگاه $A'N'$، $B'P'$ و $C'M'$ از ارتفاعهای یک مثلث $A'B'C'$ باشند (شکل (الف))، آن‌گاه:

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=۱$$

چون از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $A'N'C'$ و $B'P'C'$ خواهیم داشت:

$$C'P'/N'C'=\frac{a}{b}$$

که $a=B'C'$ و $b=A'C'$. عیناً به‌همین طریق می‌توان نشان داد که:

$$B'N'/M'B'=\frac{c}{a} \text{ و } c=AB' \text{ و } A'M'/P'A'=\frac{b}{c}$$

از ضرب این سه تساوی نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{A'M'}{P'A'}\cdot\frac{B'N'}{M'B'}\cdot\frac{C'P'}{N'C'}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}=۱$$

حال یک مثلث $A'B'C'$ می‌سازیم، چنان‌که پاهای ارتفاعهای آن، N'، M' و P'، ضلعهای مثلث را به نسبتهای مفروض زیر تقسیم کنند:

$$\frac{A'M'}{M'B'}=\frac{AM}{MB},\frac{B'N'}{N'C'}=\frac{BN}{NC},\frac{C'P'}{P'A'}=\frac{CP}{PA}$$

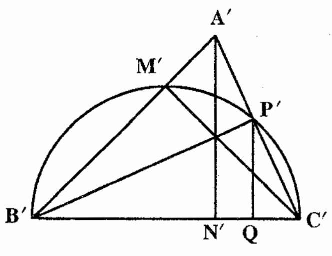
یک پاره‌خط دلخواه $B'C'$ را به نسبت $B'N'/N'C' = BN/NC$ تقسیم می‌کنیم. در N' عمودی بر $B'C'$ اخراج، و سپس پاره‌خط $C'N'$ را به نسبت $C'Q/QN' = CP/PA$ تقسیم می‌کنیم. در Q عمودی بر $C'B'$ اخراج (شکل (ب)) و فرض می‌کنیم P' نقطهٔ برخورد این عمود با نیمدایرهٔ به قطر $C'B'$ باشد و A' نقطهٔ برخورد $C'P'$ با عمود رسم شده بر $C'B'$ در N'. می‌گوییم $A'B'C'$ مثلث مطلوب است؛ زیرا $A'N'$ و $B'P'$ دو ارتفاع این مثلث هستند، و اگر $C'M'$ سومین ارتفاع آن باشد، چون داریم :

$$C'P'/P'A' = C'Q/QN' = CP/PA \ , B'N'/N'C' = BN/NC,$$

$$\frac{A'M'}{M'B'}\cdot\frac{B'N'}{N'C'}\cdot\frac{C'P'}{P'A'}=1=\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}$$

آن‌گاه نتیجه می‌شود :

$$A'M'/M'B' = AM/MB$$



(ب)

حال ΔABC را به‌وسیلهٔ یک تصویر موازی برروی مثلثی متشابه با $\Delta A'B'C'$ می‌نگاریم. به‌موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی، نقطه‌های P، N و M بر پاهای ارتفاعهای نگارهٔ ΔABC نگاشته می‌شوند، و خطهای AN، BP و CM بر ارتفاعهای آن. چون سه ارتفاع یک مثلث همرسند، پس خطهای AN، BP و CM نیز همرس خواهند شد.

یادداشت. اکنون به آسانی می‌توانیم عکس این گزاره را اثبات کنیم :
اگر سه خط که بر رأسهای مثلثی می‌گذرند، همرس باشند، آن‌گاه N، P و M نقطه‌های برخورد این خطها با ضلعهای ΔABC، ضلعها را طوری تقسیم می‌کنند که :

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

زیرا، فرض کنیم P_1 نقطه‌ای بر ضلع AC چنان باشد که :

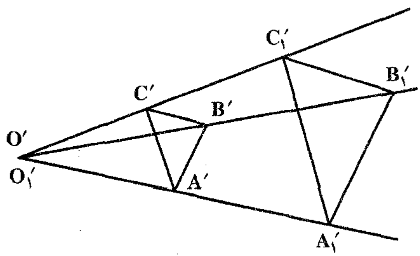
$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP_1}{P_1A}=1$$

پس خطهای AN، BP_1 و CM همرسند؛ یعنی BP_1 از نقطهٔ برخورد AN و CM می‌گذرد. ولی این امر فقط زمانی ممکن است که BP_1 بر BP، یعنی P بر P_1 منطبق باشد.

بدین ترتیب به قضیهٔ زیر، که بیشتر قضیهٔ سوا نامیده می‌شود، می‌رسیم:
گیریم N، P و M نقطه‌هایی بر ضلعهای ΔABC (نه بر امتدادشان) باشند. شرط لازم و کافی برای این که خطهای AN، BP و CM همرس باشند، این است که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$$

۳۶۰. اوّل ثابت می‌کنیم که هرگاه خطهای AA_1، BB_1 و CC_1 همرس باشند، آن‌گاه P، Q و R، نقطه‌های برخورد خطهای BC و B_1C_1، CA و C_1A_1، AB و A_1B_1، همخطند. برای اثبات این مطلب، صفحهٔ π ی شکل داده شده



در صورت را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به‌طوری که QR خط خاص π باشد. در این صورت به موجب ویژگی (ب)ی تصویر مرکزی داریم $A'B'\|A'_1B'_1$ و $A'C'\|A'_1C'_1$. از $C'A'\|C'_1A'_1$ نتیجه می‌گیریم که $O'C'/O'C'_1=O'A'/O'A'_1$ و از $A'B'\|A'_1B'_1$ نتیجه می‌گیریم، $O'A'/O'A'_1=O'B'/O'B'_1$؛ یعنی $O'B'/O'B'_1=O'C'/O'C'_1$. بنابراین خطهای $B'C'$ و $B'_1C'_1$ موازی‌اند و P، نقطهٔ برخورد BC و B_1C_1 بر خط خاص صفحهٔ π قرار دارد، یعنی نقطه‌های P، Q و R همخطند.

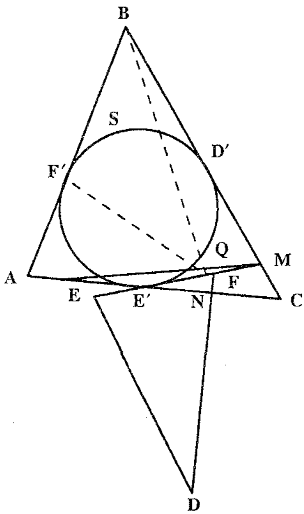
حال عکس آن را ثابت می‌کنیم. بدین منظور صفحهٔ π ی شکل داده شده در صورت را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، چنان که خطی که شامل P، Q و R است، خط خاص π باشد. بر اثر این تصویر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به مثلثهای متشابه $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ که ضلعهای متناظرشان موازی‌اند، بدل می‌شود (شکل). فرض می‌کنیم O' نقطهٔ برخورد $A'A'_1$ و $B'B'_1$ باشد و O'_1 نقطهٔ برخورد $A'A'_1$ و $C'C'_1$. داریم

$O'_1A'/O'_1A'_1 = A'C'/A'_1C'_1$ و $O'A'/O'A'_1 = AB'/A'_1B'_1$. از سوی دیگر از تشابه مثلثهای $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ نتیجه می‌گیریم که :

$$A'B'/A'_1B'_1 = A'C'/A'_1C'_1$$

بنابراین $O'A'/O'A'_1 = O'_1A'/O'_1A'_1$ ؛ یعنی دو نقطهٔ O' و O'_1 برهم منطبقند. چون خطهای $A'A'_1$ ، $B'B'_1$ و $C'C'_1$ همرسند، پس خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 نیز همرسند.

۳۶۱. شش ضلعی (تباهیدهٔ) $AF'BMFN$ (شکل درصورت) را درنظر می‌گیریم. از قضیهٔ بریانشن نتیجه می‌شود که خط FF' از نقطهٔ برخورد خطهای AM و BN، یعنی Q، می‌گذرد (شکل). با درنظر گرفتن شش ضلعیهای مناسب، به طریق مشابه نشان می‌دهیم که خطهای DD' و EE' هم از Q می‌گذرند.



۳۶۲. فرض می‌کنیم ABC مثلثی دلخواه در صفحهٔ π باشد. بر اثر یک تصویر موازی مناسب π بر یک صفحهٔ π' ، نگارهٔ مثلث ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ خواهد شد. به موجب ویژگی (ج) از تصویر موازی، نگاره‌های وسطهای ضلعهای مثلث ABC وسطهای ضلعهای مثلث $A'B'C'$ خواهند شد. چون مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است، میانه‌ها نیمسازهای مثلثند، پس در یک نقطه، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، برخورد می‌کنند ؛ پس میانه‌های مثلث اصلی ABC همرسند.

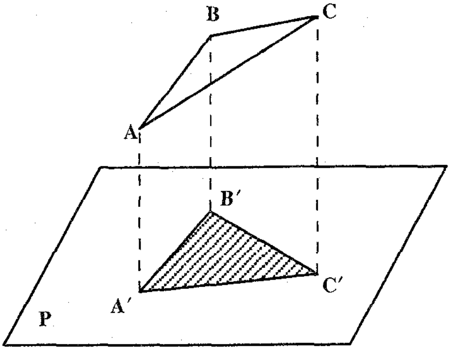
۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۳۶۳. اگر S مساحت مثلث ABC، S' مساحت مثلث $A'B'C'$ و α زاویهٔ بین صفحهٔ تصویر

و صفحهٔ مثلث ABC باشد، داریم $S' = S\cos\alpha$. بنابراین خواهیم داشت :

$$۱۲\sqrt{۳} = ۲۴\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$



۵.۳.۳. پاره‌خط

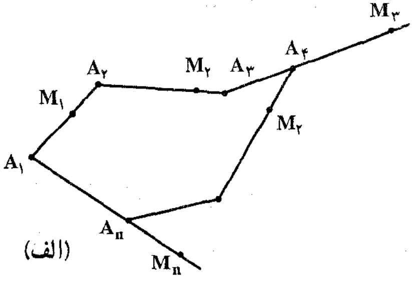
۱.۵.۳.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۳۶۴. زاویهٔ $A\hat{H}A' = ۳۰^\circ$ ؛ یعنی مساوی زاویهٔ بین صفحهٔ P و صفحهٔ مثلث ABC است.

بنابراین داریم : $A'H = AH\cos\alpha \Rightarrow A'H = ۱۲\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۸\text{cm}$

۶.۳.۳. رابطه‌های متری

۳۶۵. نشان خواهیم داد که قضیه‌های منلائوس و سوا نتیجه‌های مستقیم قضیهٔ زیر هستند که ما قبل از حل این مسأله آن را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A_۱A_۲\cdots A_n$ چند ضلعی دلخواهی باشد و $M_۱$ ، $M_۲$ ، .... ، M_n نقطه‌هایی بر ضلعها یا بر امتداد ضلعهای آن باشند (شکل (الف)). نشان می‌دهیم که حاصلضرب



$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdots\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n} \qquad (\neq)$$

بر اثر یک تصویر مرکزی عوض نمی‌شود ؛ زیرا اگر A'_1 ، A'_2 ، ...، A'_n ؛ و M'_1 ، M'_2 ، ...، M'_n نگاره‌های نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ...، A_n ؛ M_1 ، M_2 ، ...، M_n بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشند، پس طبق دستور (۱) داریم :

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}=\left(\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\right)\left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right)\Big/\left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right)$$

$$\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}=\left(\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\right)\left(\frac{OA'_2}{OA_2}\right)\Big/\left(\frac{OA'_3}{OA_3}\right)$$

....

$$\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n}=\left(\frac{A_nM_n}{A_1M_n}\right)\left(\frac{OA'_n}{OA_n}\right)\Big/\left(\frac{OA'_1}{OA_1}\right)$$

از ضرب این تساویها به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{A'_1M'_1}{A'_2M'_1}\cdot\frac{A'_2M'_2}{A'_3M'_2}\cdots\cdots\frac{A'_nM'_n}{A'_1M'_n}=\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdots\cdots\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

یعنی همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این قضیه را می‌توان تعمیم ویژگی (ج) از یک تصویر مرکزی انگاشت. (هرگاه چند ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ به‌صورت دو ضلعی تباهیدهٔ ABA درآید، آن‌گاه این قضیه به‌ویژگی (ج) بدل می‌شود). اکنون نشان می‌دهیم که چگونه قضیه‌های منلائوس و سوا نتیجه می‌شوند.

الف. صفحهٔ π ی مثلث ABC را بر یک صفحهٔ π' چنان تصویر می کنیم که خط MN به خط خاص π بدل شود. اگر نقطه‌های M، N و P بر یک خط l واقع باشند، این خط به خط بینهایت بدل می‌شود و M، N و P به نقطه‌های M' ، N' و P' بدل می‌شوند که نقطه‌هایی در بینهایت بر $A'B'$ ، $B'C'$ و $C'A'$ هستند. بنابراین :

$$\frac{A'M'}{B'M'}=1 \text{ ،} \quad \frac{B'N'}{C'N'}=1 \text{ ،} \quad \frac{C'P'}{A'P'}=1 \quad \text{و} \quad \frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'}=1$$

اما به‌موجب آن چه که در بالا ثابت کردیم، مقدار حاصلضرب

$$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)$$

برابر یک است.

بعکس، گیریم $(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP) = ۱$، چون تصویر فوق M و N را به نقطه‌های بینهایت M' و N' بدل می‌کند، پس $B'N'/C'N' = ۱$ و $A'M'/B'M' = ۱$.
به‌موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم باید داشته باشیم:

$$(A'M'/B'M')(B'N'/C'N')(C'P'/A'P') = ۱$$

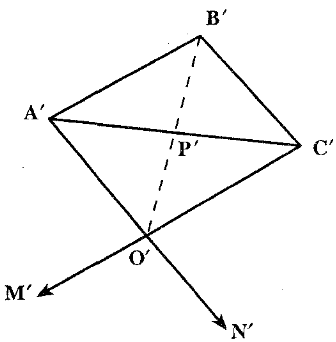
و بنابراین $C'P'/A'P' = ۱$. معنی این تساوی این است که P' نقطهٔ بینهایت خط $A'C'$ است. اما در این صورت P باید بر خط خاص π قرار گیرد. یعنی همخط بودن M، N و P ثابت می‌شود.

تبصره. با استفاده از استدلالی مشابه، می‌توان قضیهٔ کلی‌تر زیر را ثابت کرد:
اگر $M_۱$، $M_۲$، ....، M_n نقطه‌های تقاطع یک n ضلعی $A_۱A_۲\cdots A_n$ با یک خط l باشند، آن‌گاه:

$$\frac{A_۱M_۱}{A_۲M_۱}\cdot\frac{A_۲M_۲}{A_۳M_۲}\cdot\frac{A_۳M_۳}{A_۴M_۳}\cdot\ldots\cdot\frac{A_nM_n}{A_۱M_n} = ۱$$

ولی، به‌ازای $n > ۳$، عکس این قضیه درست نیست، یعنی این تساوی همخطی نقطه‌های $M_۱$، $M_۲$، ....، M_n را ایجاب نمی‌کند.

ب. صفحهٔ π ی مثلث ABC را بریک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که MN خط خاص π شود. اگر خطهای AN، BP و CM موازی یا در یک نقطهٔ O متقاطع باشند، آن‌گاه شکل (پ) (در صورت) در صفحهٔ π به شکل (ب) بدل می‌شود، و $C'M' \| B'A'$ و $A'N' \| B'C'$.



(ب)

بنابراین P' وسط $A'C'$ است (زیرا نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'B'C'O'$ است). از این رو داریم $A'M'/B'M' = ۱$ و $B'N'/C'N' = ۱$ (زیرا M' و N' نقطه‌های بینهایت هستند) و $C'P'/A'P' = -۱$. از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{A'M'}{B'M'}\cdot\frac{B'N'}{C'N'}\cdot\frac{C'P'}{A'P'} = -۱$$

پس به‌موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم،

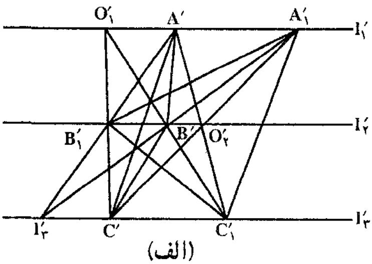
$$\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BN}{CN}\cdot\frac{CP}{AP}=-1$$

بعکس، فرض می‌کنیم که تساوی اخیر برقرار باشد. چون نقطه‌های M و N بر اثر تصویر ما به نقطه‌های بینهایت بدل می‌شوند، داریم $A'M'/B'M'=1$ و $B'N'/C'N'=1$. از آن‌جا نتیجه می‌شود $C'P'/A'P'=-1$، یعنی نقطهٔ P' وسط $A'C'$ است. اما در این حال خطهای $A'N'\|B'C'$ و $C'M'\|B'A'$ و $B'P'$ در یک نقطهٔ O' متلاقی‌اند (شکل (ب)). بنابراین خطهای AN، CM و BP یا همرسند یا موازی.

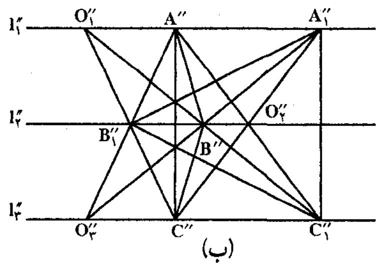
۳۶۷. معلوم است که قضیه برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع درست است. از این‌جا نتیجه می‌شود که برای یک مثلث دلخواه نیز درست است.

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۶۸. از تصویر مرکزی استفاده می‌کنیم تا نگاشت صفحهٔ π ی شکل درصورت را بر یک صفحهٔ π' به‌دست آوریم، به‌طوری که خط خاص π خط واصل بین O و نقطهٔ برخورد AC و A_1C_1 باشد. به‌وسیلهٔ این نگاشت، مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به مثلثهای $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ بدل می‌شوند با $A'A'_1\|B'B'_1\|C'C'_1$ و $A'C'\|A'_1C'_1$. خطهای $A'A'_1$، $B'C'_1$ و $C'B'_1$ در یک نقطهٔ O'_1 همرسند و خطهای $A'C'_1$، $B'B'_1$ و $C'A'_1$ در نقطهٔ O'_2 (شکل (الف)). خطهای موازی $A'A'_1$، $B'B'_1$ و $C'C'_1$ را به l'_1، l'_2 و l'_3 نشان می‌دهیم. چون $A'C'_1$ و $C'A'_1$ قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'C'A'_1C'_1$ هستند، و چون $B'B'_1$ از نقطهٔ برخورد این قطرها می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم که خط $B'B'_1$ (یعنی l'_2) از l'_1 و l'_3 همفاصله است. باید نشان دهیم که $A'B'_1$، $B'A'_1$ و $C'C'_1$ همرسند. نتیجهٔ آن این است که AB_1، BA_1 و CC_1 همرسند.



(الف)



(ب)

حال از یک تصویر موازی برای نگاشت صفحهٔ π' بر یک صفحهٔ π'' استفاده می‌کنیم تا $\Delta A'C'C'_1$ را به یک مثلث قائم‌الزاویهٔ $A''C''C''_1$ بدل کنیم. در این صورت شکل (الف) به شکل (ب) بدل می‌شود که l''_2 محور تقارن شکل شده است. از این‌جا نتیجه می‌شود که خطهای $A''B''_1$ و $B''A''_1$ در نقطهٔ O''_3 واقع بر خط $C''C''_1$، که قرینهٔ O''_1 نسبت به l''_2 است، متقاطع می‌شوند. درنتیجه، خطهای $A'B'_1$، $B'A'_1$ و $C'C'_1$ از شکل (الف) در یک نقطهٔ O'_3 متقاطع خواهند شد. (O'_3 آن نقطه از π' است که بر اثر تصویر موازی ما بر روی O''_3 نگاشته شده است.)

۳۶۹. نقطه‌های C و B_1 و نقطهٔ O_1، محل برخورد A_1B و AC_1، نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیهای $A_1OO_1C_1$، OO_1BA و A_1C_1BA هستند.

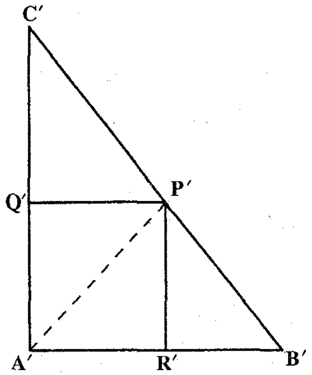
۳. ۸. ۳. رسم شکلها

۳۷۳. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، روشن است که نقطهٔ مطلوب M، باید از ضلعهای ΔABC به یک فاصله باشد؛ یعنی M مرکز دایرهٔ محیطی داخلی مثلث ABC، یا به گونهٔ دیگر، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد. از آن‌جا نتیجه می‌شود که در یک مثلث دلخواه ABC، نقطهٔ مطلوب M باید بر نقطهٔ برخورد میانه‌های آن منطبق باشد.

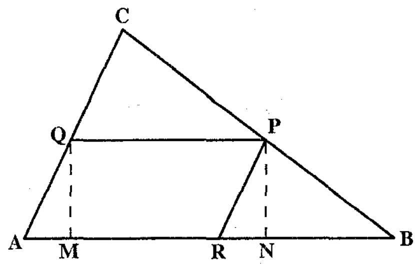
۳۷۴. مسألهٔ ما با مسألهٔ زیر هم‌ارز است:

متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ به مساحت معین σ را در مثلث مفروض ABC محاط کنید، به طوری که هر دو شکل در یک رأس A مشترک باشند و رأسهای دیگر متوازی‌الاضلاع بر ضلعهای AC، BC و AB از مثلث قرار داشته باشند. این مسأله بلافاصله از شکل (الف) نتیجه می‌شود که در آن متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ و مستطیل $MNPQ$ دیده می‌شوند که مساحتهای مساوی دارند (زیرا هر دو در قاعدهٔ PQ و ارتفاع QM مشترکند). به عبارت دیگر، اگر بتوانیم متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ را رسم کنیم، آن‌گاه می‌توانیم مستطیل $MNPQ$ را نیز بسازیم.

اگر یک تصویر موازی، ΔABC از صفحهٔ π را بر یک مثلث $A'B'C'$ از صفحهٔ π' بنگاریم، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع $ARPQ$ محاط در مثلث ABC بر یک متوازی‌الاضلاع $A'R'P'Q'$ محاط در یک مثلث $A'B'C'$ نگاشته می‌شود. [به همین دلیل است که



(ب)



(الف)

ما رسم مستطیل MNPQ را با رسم متوازی‌الاضلاع ARPQ معاوضه کردیم : یک تصویر موازی، درحالت کلی، یک مستطیل را بر یک مستطیل نمی‌نگارد، و این امر، استفاده از یک تصویر موازی را برای حل مسألهٔ اصلی دشوار می‌سازد.] فرض می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع ARPQ محاط شده باشد. مثلث ABC را بر اثر یک تصویر موازی مناسب بر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ می‌نگاریم (شکل (ب)). می‌توانیم فرض کنیم که مثلثهای ABC و $A'B'C'$ یک مساحت دارند (این کار را همواره می‌توان با استفاده از یک تشابه مناسب برای نگارهٔ ΔABC انجام داد) ؛ پس متوازی‌الاضلاع ARPQ و $A'R'P'Q'$ (که البته، چهارضلعی دومی یک مستطیل است) یک مساحت σ دارند. اگر S مساحت ΔABC باشد، آن‌گاه مساحت مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $B'R'P'$ و $C'P'Q'$ برابر است با $S-\sigma$. چون :

$$S_{C'P'Q'} = \frac{1}{2}Q'P'^2 \quad و \quad S_{B'R'P'} = \frac{1}{2}R'P'^2$$

پس خواهیم داشت : $R'P'^2 + Q'P'^2 = 2(S-\sigma)$

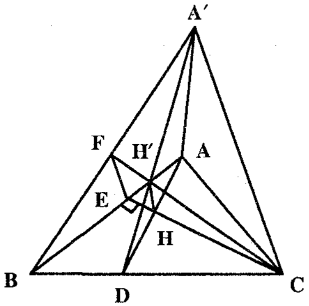
یا چون $RP'^2 + Q'P'^2$ برابر مجموع مربع قطر $A'P'$ از مستطیل $A'R'P'Q'$ است، خواهیم داشت $A'P' = \sqrt{2(S-\sigma)}$.

این تحلیل، ترسیم زیر را از مستطیل MNPQ به ذهن متبادر می‌سازد : مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ بامساحت S، مساوی مساحت مثلث مفروض ABC را رسم می‌کنیم (ضلع $A'B'$ در این مثلث برابر واسطهٔ هندسی قاعده و ارتفاع ΔABC است). سپس، بر وتر $B'C'$ نقطهٔ P' را چنان انتخاب می‌کنیم که $A'P' = \sqrt{2(S-\sigma)}$. بالاخره ضلع BC از مثلث مفروض ABC را به نسبت $BP/PC = B'P'/P'C'$ تقسیم

می‌کنیم (ویژگی (ج) از تصویر موازی). مستطیل MNPQ (با رأس Q برضلع AC و رأسهای M و N بر ضلع AB) مستطیل مطلوب است.
مسأله ممکن است یک یا دو جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

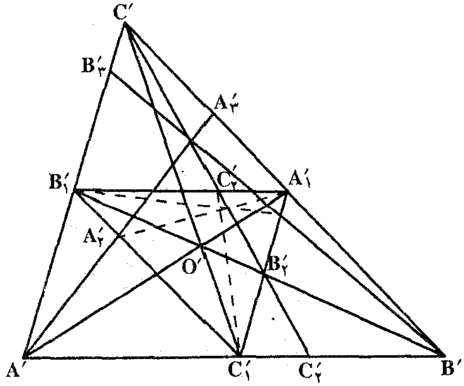
۳ . ۳ . ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۵. ارتفاعهای AD و CE از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ H متقاطع شود. چون AA' بر صفحهٔ ABC عمود است، طبق قضیهٔ سه عمود، $A'D$ ارتفاع مثلث $A'BC$ می‌باشد. پس اگر ارتفاع CF عمود بر $A'B$ را رسم کنیم، $A'D$ را در نقطهٔ H' محل تلاقی ارتفاعهای مثلث $A'BC$ قطع می‌کند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $H'H$ بر صفحهٔ $A'BC$ عمود می‌باشد. چون BC بر DA و بر DA' و بنابراین بر صفحهٔ DAA' عمود است، پس صفحهٔ BCA' بر صفحهٔ DAA' عمود می‌باشد. از طرف دیگر CE بر AB و بر AA' عمود است؛ پس بر صفحهٔ BAA' عمود می‌باشد به‌طوری که BA' بر CE و CF و بنابراین بر صفحهٔ CEF عمود است یعنی صفحهٔ CEF بر صفحهٔ $A'BC$ عمود می‌باشد. از این جا معلوم می‌شود که خط HH' فصل مشترک صفحه‌های DAA' و CEF که هر دوی آنها بر صفحهٔ $A'BC$ عمودند، بر این صفحه عمود است.



۳ . ۳ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۷۶. از یک تصویر مرکزی برای نگاشت چهارضلعی ABCO بر یک چهارضلعی $A'B'C'O'$ استفاده می‌کنیم به‌طوری که O' نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث $A'B'C'$ باشد. امکان انجام این عمل از قضیهٔ ۱ ناشی می‌شود. بر اثر این تصویر، ضلعهای $\Delta A_1'B_1'C_1'$ با ضلعهای $\Delta A'B'C'$ (شکل) موازی می‌شوند. اگر نقطه‌های تقاطع خطهای $A'A_2'$ ، $B'B_2'$ و $C'C_2'$ را با ضلعهای مقابل $\Delta A'B'C'$ به A_3' ، B_3' و C_3' نشان دهیم، نتیجه می‌گیریم که :



$$\frac{A'C'_3}{B'C'_3}=\frac{B'_1C'_2}{A'_1C'_2} \text{ و } \frac{B'A'_3}{C'A'_3}=\frac{C'_1A'_2}{B'_1A'_2} \text{ و } \frac{C'B'_3}{A'B'_3}=\frac{A'_1B'_2}{C'_1B'_2}$$

حال فرض می‌کنیم :

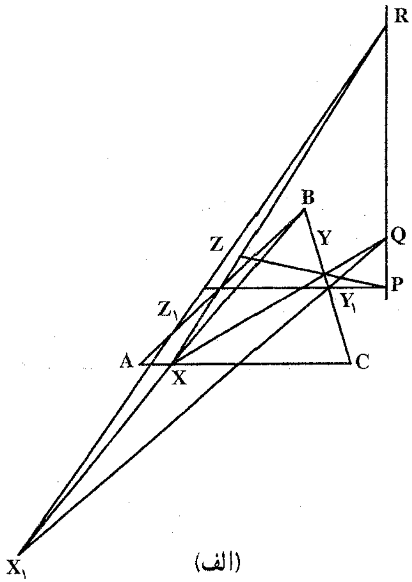
$$\frac{A'_1C'_2}{B'_1C'_2}\cdot\frac{B'_1A'_2}{C'_1A'_2}\cdot\frac{C'_1B'_2}{A'_1B'_2}=\pm ۱$$

(به موجب قضیهٔ سوا و منلائوس)، معنی این فرض این است که خطهای $A'_1A'_2$ ، $B'_1B'_2$ و $C'_1C'_2$ همرسند، یا این‌که نقطه‌های A'_2 ، B'_2 و C'_2 همخطند.)، پس از این‌جا نتیجه می شود که :

$$\frac{A'C'_3}{B'C'_3}\cdot\frac{B'A'_3}{C'A'_3}\cdot\frac{C'B'_3}{A'B'_3}=\pm ۱$$

ولی طبق همان قضیه‌ها معنی این تساویها این است که خطهای $A'A'_3$ ، $B'B'_3$ و $C'C'_3$ همرسند، یا این‌که نقطه‌های A'_3 ، B'_3 و C'_3 همخطند، بر حسب این که مقدار حاصلضرب بالا ۱− یا ۱+ باشد.

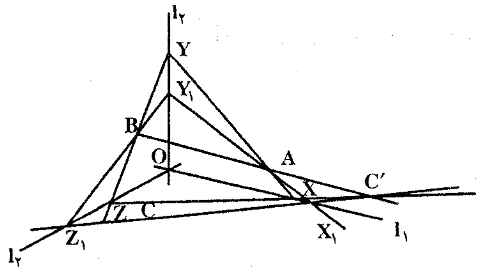
۳۷۷. الف. از P خطی رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخوردش را با ضلعهای AB و BC از ΔABC به Z_1 و Y_1 نشان می‌دهیم، و نقطهٔ برخورد خطهای QY_1 و RZ_1 را به X_1 (شکل (الف)). اکنون فرض می‌کنیم که مسأله حل‌شده باشد، یعنی مثلث مطلوب XYZ رسم شده باشد، یادآوری می‌کنیم که در این حالت $\Delta X_1Y_1Z_1$ و ΔXYZ مثلثهای منظری هستند (P، Q و R نقطه‌های برخورد ضلعهای دومثلث، همخطند). از این‌جا نتیجه می‌شود که خطهای XX_1 ، YY_1 و ZZ_1 در یک نقطه همرسند و B نقطهٔ همرسی آنهاست. از وصل B به X_1 و پیدا کردن نقطهٔ برخورد BX_1 و AC، رأس X از مثلث



(الف)

مطلوب را به‌دست می‌آوریم. اکنون پیدا کردن بقیهٔ رأسها دیگر اشکالی ندارد.

ب. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک nضلعی چنان تغییر کند که ضلعهایش از nنقطهٔ ثابت واقع بر یک خط l بگذرند و $(n-1)$ رأس آن بر $(n-1)$ خط مفروض حرکت کنند، آن‌گاه مکان رأس nام آن یک خط است. برای اثبات این مطلب، شکل خود را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم. به‌طوری که l خط خاص π باشد.

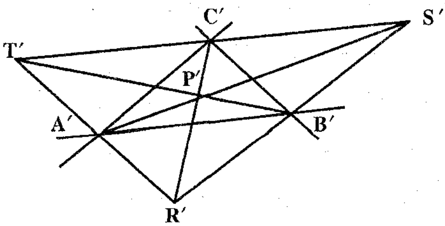


(ب)

ج. از A خطی مرور می‌دهیم که خطهای l_1 و l_2 را بترتیب در نقطه‌های X_1 و Y_1 ببرد. Z_1، نقطهٔ برخورد خطهای Y_1B و l_3، را به X_1 وصل می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم که مسأله حل‌شده، یعنی ΔXYZ رسم شده باشد (شکل (ب)). چون خطهای XX_1، YY_1 و ZZ_1 در O همرسند، مثلثهای XYZ و $X_1Y_1Z_1$ مثلثهای منظری می‌شوند، و نقطه‌های برخورد خطهای X_1Y_1 و XY (یعنی، نقطهٔ A)، Y_1Z_1 و YZ (یعنی نقطهٔ B)، و Z_1X_1 و ZX همخطند. حال می‌توانیم به آسانی، C'، نقطهٔ برخورد ZX و Z_1X_1، را پیدا کنیم؛ زیرا بر نقطهٔ برخورد Z_1X_1 و AB منطبق است. ضلع

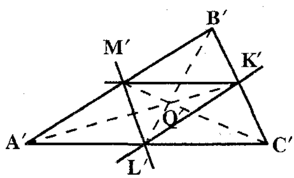
ZX از مثلث مطلوب بر خط واصل بین نقطه‌های C و 'C واقع است.

۳۷۸. الف. با استفاده از یک تصویر مرکزی، صفحهٔ π ی (شکل (الف)، در صورت) را بر صفحهٔ 'π می‌نگاریم به‌طوری که p خط خاص π باشد. در این‌صورت خطهای AM و BC به خطهای موازی 'A'M و 'B'C، خطهای BN و AC به خطهای موازی 'B'N و 'A'C ؛ و خطهای CL و AB به خطهای موازی 'C'L و 'A'B بدل می‌شوند. خطهای AS، BT و CR به میانه‌های 'A'S، 'B'T و 'C'R از مثلث 'A'B'C بدل می‌شوند (شکل (الف)) ؛ پس باید یکدیگر را در یک نقطهٔ 'P ببرند. از این‌جا نتیجه می‌شود که AS، BT و CR در یک نقطهٔ P یکدیگر را می‌برند.

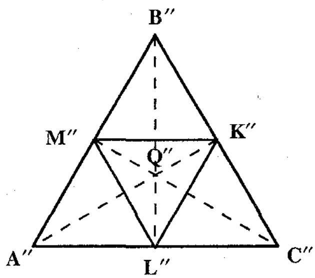


(الف)

ب. با استفاده از یک تصویر مرکزی صفحهٔ π ی شکل (ب) درصورت مسأله را بر صفحهٔ 'π می‌نگاریم، به‌طوری که RS خط خاص صفحهٔ π شود. در 'π داریم : $K'L' \| A'B'$ و $K'M' \| A'C'$ (شکل (ب)). حال از یک تصویر موازی استفاده می‌کنیم و $\Delta A'B'C'$ را بر یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A''B''C''$ می‌نگاریم (شکل (پ)). در



(ب)

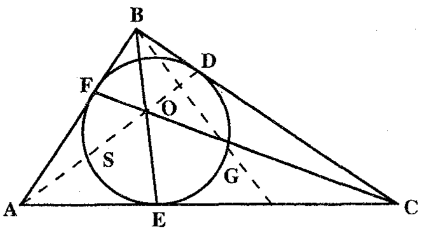


(پ)

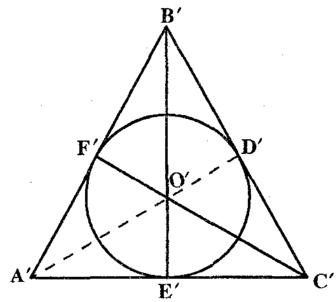
این صورت خطهای $A''K''$ و $B''L''$ بر $C''D$، محور تقارن $\Delta A''B''C''$، یکدیگر را می‌برند و خطهای $A''K''$ و $C''M''$ بر $B''E$، محور تقارن مثلث ما متقاطع می‌شوند. از این‌جا نتیجه می‌شود که Q''، نقطهٔ تقاطع خطهای $A''K''$، $C''M''$ و $B''L''$، نقطهٔ برخورد دو محور تقارن، یعنی مرکز ثقل مثلث است ؛ خطهای $L''K''$، $K''M''$ و $M''L''$ میانخطهای مثلثند. بنابراین $L''M' \| B''C''$.

ویژگی (ب)ی یک تصویر موازی ایجاب می‌کند که داشته باشیم $L'M' \| B'C'$. بعلاوه ویژگی (ب) ایجاب می‌کند که T، نقطهٔ برخورد LM و BC، نیز بر خط خاص صفحهٔ π واقع باشد، یعنی R، S و T همخط باشند.

۳۷۹. الف. **راه حل اول.** گیریم D، E و F نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی S با ضلعهای ΔABC باشند (شکل (الف)). O، نقطهٔ برخورد BE و CF، درون دایرهٔ S قرار دارد. (خط BG، که G دومین نقطهٔ برخورد CF با دایرهٔ S است، پاره‌خط EC از خط AC را می‌برد. پس BE وتر FG از S را می‌برد.)



(الف)



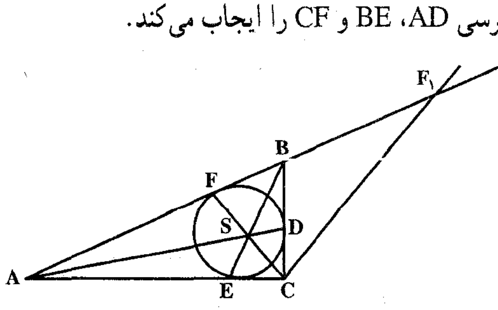
(ب)

حال صفحهٔ شکل را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به‌طوری که S به یک دایرهٔ S' و O به نقطهٔ O'، مرکز دایرهٔ S'، بدل شود. بر اثر این تصویر شکل (الف) به شکل (ب) بدل شده است. به آسانی دیده می‌شود که خطهای $B'E'$ و $C'F'$ هم نیمسازها و هم ارتفاعهای $\Delta A'B'C'$ هستند. از این‌جا نتیجه می‌شود که $A'B' = B'C'$ و $C'A' = B'C'$. پس مثلث $A'B'C'$ مثلثی متساوی‌الاضلاع است، پس خط $A'D'$ از O' می‌گذرد. همرسی $A'D'$، $B'E'$ و $C'F'$ همرسی AD، BE و CF را ایجاب می‌کند.

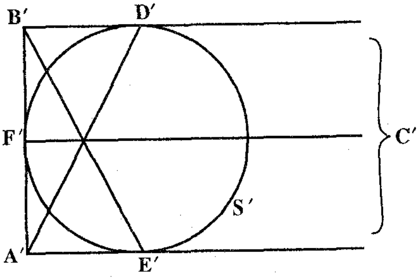
راه حل دوم. (نمادها همان نمادهای راه‌حل قبلی هستند.) بر امتداد AB نقطهٔ F_1 را چنان تعیین می‌کنیم که:

$F_1A/F_1B = -FA/FB$

(شکل (پ)).



(پ)



(ت)

خط CF_1 بیرون مثلث ABC و بنابراین بیرون S قرار دارد. صفحهٔ شکل را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به یک دایرهٔ S' و خط CF_1 به‌خط بینهایت صفحهٔ π' بدل شود. پس شکل (پ) به شکل (ت) بدل می‌شود، که $A'E' \| B'D' \| F'C'$.

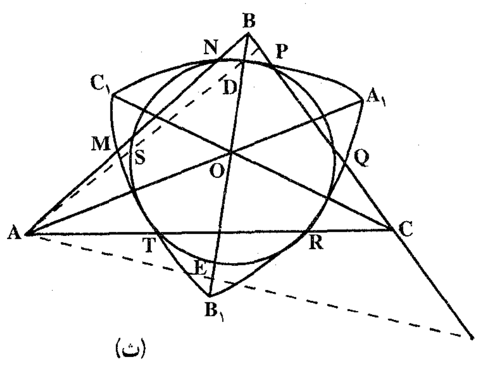
ملاحظه می‌کنیم که F' وسط پاره‌خط $A'B'$ است. [دلیل آن این است که، به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر مرکزی داریم:

$$\frac{F_1'A'/F_1'B'}{F'A'/F'B'} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{F'A'}{B'F'} = \frac{F_1'A'}{F_1'B'}$$

در این‌جا F_1' نقطهٔ بینهایت بر خط $A'B'$ است، چنان که:

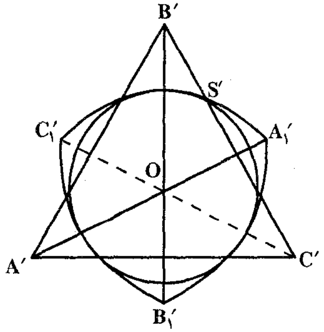
$$[F_1'A'/F_1'B' = 1 = F'A'/B'F'$$

چون $|B'F'| = |A'F'|$، پس نتیجه می‌شود که $F'C'$ یک محور تقارن شکل حاصل است، و واضح است که نقطهٔ برخورد خطهای $A'D'$ و $B'E'$ بر $F'C'$ قرار دارد. چون $A'D'$ ، $B'E'$ و $C'F'$ همرسند، این حکم بر خطهای AD، BE و CF نیز جاری است.



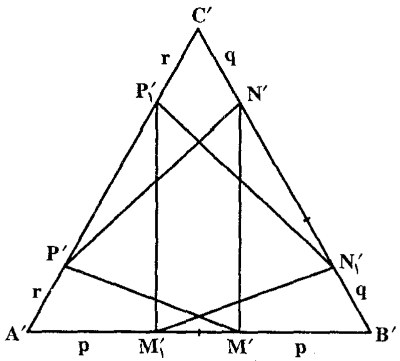
(ث)

ب. ملاحظه می‌کنیم که O نقطهٔ برخورد خطهای AA_1 و BB_1 درون دایرهٔ S قرار دارد؛ زیرا AA_1 و BB_1 وترهای PQ و TR از دایرهٔ S را قطع می‌کنند (شکل (ث)). چون خطهای AD و AE، که D و E نقطه‌های برخورد BB_1 با S هستند، BC را بیرون پاره‌خط PQ، و در دو طرف آن می‌برند، از آن‌جا نتیجه می شود که AA_1 وتر DE را می‌برد. حال صفحهٔ شکل (ث) را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به‌طوری که S به



(ج)

یک دایرهٔ S' بدل شود و O به O'، مرکز S'. پس شکل (ث) به شکل (ج) بدل می‌شود. چون $A'A'_1$ و $B'B'_1$ از نقطهٔ O' می‌گذرند، در نتیجه $A'A'_1 \perp B'C'$ و $B'B'_1 \perp A'C'$. بنابراین $A'A'_1$ و $B'B'_1$ دو ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهند بود، و O' نقطهٔ برخورد آنها. از این‌جا نتیجه می‌شود که $C'C'_1$ سومین ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهد شد. روشن است که عمودهای رسم شده از O'، مرکز S'، بر ضلع $A'B'$ از $\Delta A'B'C'$ باید از C'_1 بگذرد. پس خطهای $A'A'_1$، $B'B'_1$ و $C'C'_1$ در O' همرس هستند. از این‌جا نتیجه می‌شود که AA_1، BB_1 و CC_1 نیز در O یکدیگر را می‌برند.



(الف)

۳۸۰. الف. به موجب ویژگیهای (ج) و (د) از تصویر موازی، کافی است قضیه را برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ ثابت کنیم (شکل (الف)). فرض می‌کنیم p معرف اندازهٔ پاره‌خطهای $B'M'$ و $A'M'_1$، r معرف اندازهٔ پاره‌خطهای $A'P'$ و $C'P'_1$، q اندازهٔ پاره‌خطهای $C'N'$ و $B'N'_1$، و a اندازهٔ یک ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ باشد.

مساحت ΔXYZ را با S_{XYZ} نشان می‌دهیم. پس:

$$S_{A'B'C'} - S_{M'N'P'} = S_{A'P'M'} + S_{B'M'N'} + S_{C'N'P'}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin ۶۰^\circ[r(a-p)+p(a-q)+q(a-r)]$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin ۶۰^\circ[a(p+q+r)-(pq+qr+rp)]$$

و

$$S_{A'B'C'} - S_{M'_1N'_1P'_1} = S_{A'P'_1M'_1} + S_{B'M'_1N'_1} + S_{C'N'_1P'_1}$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin ۶۰^\circ[(a-r)p+(a-p)q+(a-q)r]$$

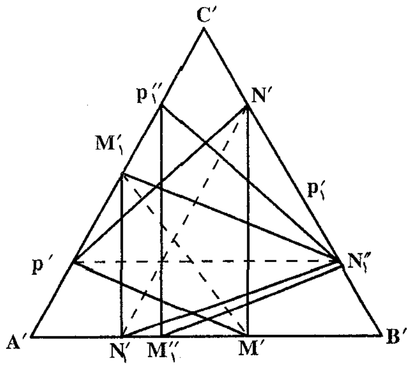
$$= \frac{1}{2}\sin 60^\circ[a(p+q+r)-(pq+qr+rp)]$$

بنابراین :

$$S_{M'N'P'} = S_{M'_1N'_1P'_1}$$

ب. عیناً نظیر قسمت (الف)، کافی است حکم را برای مثلث متساوی‌الاضلاع $A'B'C'$ (شکل (ب)) اثبات کنیم. چون $M'M'_1 \| B'C'$ ، $N'N'_1 \| C'A'$ و $P'P'_1 \| A'B'$ ، از این‌جا نتیجه می‌شود :

$$A'M' = A'M'_1 \text{ و } B'N' = B'N'_1 \text{ و } C'P' = C'P'_1$$



(ب)

مثلث $A'B'C'$ را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، حول خودش به اندازهٔ زاویهٔ 120° دوران می دهیم. این دوران $\Delta A'B'C'$ را به خودش بدل می‌کند و به موجب تساویهای بالا این دوران $\Delta M'_1N'_1P'_1$ را به $\Delta M''_1N''_1P''_1$ بدل می‌کند که رأسهای آن قرینه‌های رأسهای $\Delta M'N'P'$ نسبت به وسطهای ضلعها هستند. این واقعیت و نتیجه‌ای که در قسمت (الف) در بالا استخراج کردیم ایجاب می‌کنند که داشته باشیم :

$$S_{M''_1N''_1P''_1} = S_{M'N'P'}$$

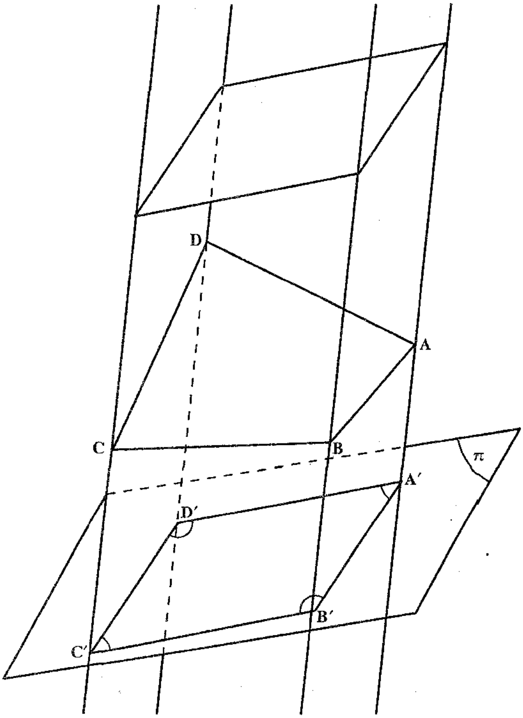
پس :

$$S_{M'_1N'_1P'_1} = S_{M'N'P'}$$

تساوی مساحتهای مثلثهای $M'N'P'$ و $M'_1N'_1P'_1$ را از راه محاسبهٔ مستقیم، مانند راه‌حل قسمت (الف) ، می‌توانیم به آسانی ثابت کنیم.

۴.۳. تصویرهای آفین و تصویری در چندضلعی

۱.۴.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، قطب خط، ...



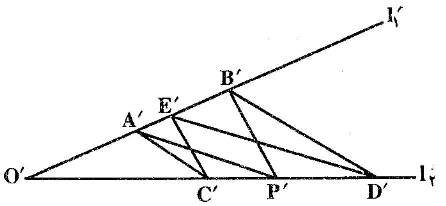
۳۸۱. بر AB و CD دو صفحهٔ متوازی P و P′ و بر BC و AD دو صفحهٔ متوازی Q و Q′ را مرور می‌دهیم. این صفحه‌ها، یک سطح منشوری به‌وجود می‌آورند. مقطع قائم این سطح منشوری مستطیل A′B′C′D′ است ؛ بنابراین صفحهٔ π را باید عمود بر این صفحه‌ها، اختیار کنیم. بدیهی است که صفحه‌های P، P′ و Q ، Q′ ثابتند.

نسبت به خطهای (EC و EB)، و همچنین نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد، و چون قطبیهای نقطه‌های S، E و F در نقطهٔ M همرسند، قطبهایشان بر یک استقامت می‌باشند.

۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۸۲. فرض می‌کنیم M ، N و P نقطه‌های برخورد خطهای AF و ED ؛ EC و BF ؛ AC و BD ، بترتیب باشند ؛ و O نقطهٔ تقاطع AB و CD باشد. صفحهٔ π ی شکل صورت مسأله را بر یک صفحهٔ π' چنان تصویر می‌کنیم که MN خط خاص π باشد. بر اثر این



نگاشت، شکل صورت مسأله به شکل در حل بدل می‌شود، که در آن $A'F' \| D'E'$ و $B'F' \| C'E'$. توازی خطهای $A'F'$ و $D'E'$ ایجاب می‌کند که داشته باشیم $O'A'/O'E' = O'F'/O'D'$ و توازی خطهای $B'F'$ و $C'E'$ ایجاب می‌کند که $O'E'/O'B' = O'C'/O'F'$. از ضرب این دو تساوی به‌دست می‌آوریم $O'A'/O'B' = O'C'/O'D'$. از این تساوی نتیجه می‌شود که خطهای $A'C'$ و $B'D'$ موازی‌اند، یعنی P برخط خاص MN از صفحهٔ π واقع است. [بررسی حالت (ساده‌تر) $l_1' \| l_2'$ به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود (قراردادها همان قرارداد شکل در حل است).]

۳۸۳. فرض می‌کنیم M، N و P نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش‌ضلعی محاطی ABCDEF باشد (شکل (الف)). چون نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از N بر S بر کمانهای $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{DE}$ قرار دارند، از این جا نتیجه می‌شود که NM دایرهٔ S را نمی‌برد. بنابراین می‌توانیم صفحهٔ شکل (الف) را بر یک صفحهٔ π' تصویر کنیم، به‌گونه‌ای که S به یک دایرهٔ S' بدل شود، و MN به خط بینهایت π' . پس شکل (الف) به شکل (ب) بدل می‌شود که :

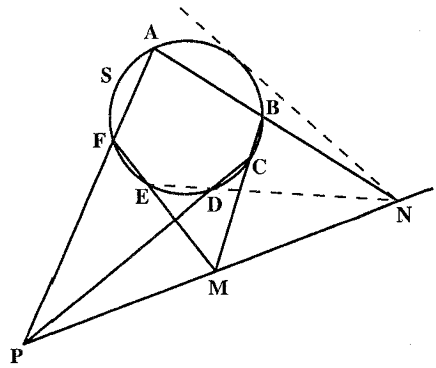
$$A'B' \| E'D' \quad , \quad B'C' \| E'F'$$

در نتیجه $\overset{\frown}{A'B'C'} = \overset{\frown}{D'E'F'}$ ، یعنی $A'\hat{B'}C' = D'\hat{E'}F'$. از این‌جا نتیجه می‌شود که :

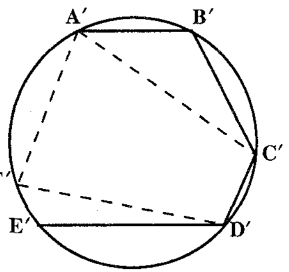
$$F'\hat{A'}C' + D'\hat{C'}A' = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'E'F'}) + \frac{1}{2}(\overset{\frown}{F'A'} + \overset{\frown}{D'E'F'})$$

$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{C'D'} + \overset{\frown}{D'E'F'} + \overset{\frown}{F'A'} + \overset{\frown}{A'B'C'}) = 180^\circ$$

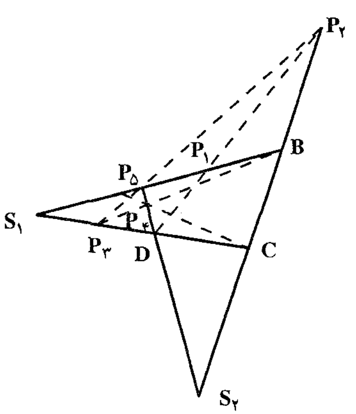
بنابراین $A'F' \| C'D'$ ، یعنی، خطهای $A'F'$ و $C'D'$ در یک نقطه در بینهایت یکدیگر را می‌برند. پس P' ، M' و N' ، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش‌ضلعی $A'B'C'D'E'F'$ همخطند، بر یک خط بینهایت صفحهٔ π' قرار دارند. در نتیجه، نقطه‌های P ، M و N در شکل (الف) نیز همخطند.



(الف)



(ب)

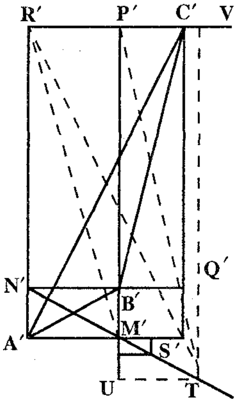


۳۸۴. نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی ABCD را با S_1 و S_2 نشان می‌دهیم (شکل). تصویر AB از مرکز D بر خط BC، نقطه‌های S_1، A و B را به S_2، C و B بدل می‌کند، و تصویر BC از مرکز A بر خط DC، نقطه‌های C، S_2 و B را به C، D و S_1. تصویر DC از مرکز B بر DA نقطه‌های C، D و S_1 را به نقطه‌های S_2، D و A بدل می‌کند، و تصویر DA از مرکز C بر AB، نقطه‌های S_2، D و A را به B، S_1 و A. حاصلضرب این چهار تصویر، تبدیلی است تصویری از خط AB که S_1، A و B را به B، S_1 و A بدل می‌کند. مربع این تبدیل S_1، A و B را به A، B و S_1 بدل می کند، و مکعب آن، S_1، A و B را به S_1، A و B؛ پس بایستی این تبدیل، تبدیل همانی باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که پس از سه بار دور زدن ضلعهای چهارضلعی، همواره به نقطهٔ آغاز می‌رسیم؛ بویژه، نقطه‌های P_1 و P_{13} بر ضلع AB منطبقند.

۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۳ خطها همرسند

۳۸۵. گیریم π صفحهٔ شکل در متن باشد. گوییم که π می‌تواند بر اثر یک تصویر موازی بر



صفحهٔ π' نگاشته شود، به‌طوری که زاویه‌های $A\hat{M}N$ و $A\hat{R}S$ در شکل (صورت) به زاویه‌های مساوی $A'M'N'$ و $A'R'S'$ بدل شوند و $R'A'M'$ قائمه باشد. در واقع، برای این که نگاره‌های مثلثهای $A'M'N'$ و $A'R'S'$ (مشترک در زاویهٔ A') متشابه باشند (یعنی برای این که $A'\hat{M}'N' = A'\hat{R}'S'$)، کافی است که ضلعهای آنها متناسب باشند:

$$\frac{A'M'}{A'N'} = \frac{A'R'}{A'S'} \qquad (۱)$$

چون نسبتهای

$$\frac{A'N'}{A'R'} = \frac{AN}{AR} = \beta \quad , \quad \frac{A'S'}{A'M'} = \frac{AS}{AM} = \alpha$$

معلومند، شرط کافی (۱) با

$$\frac{A'M'}{\beta A'R'} = \frac{A'R'}{\alpha A'M'} \text{ یا } \frac{A'M'}{A'R'} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

هم‌ارز است. می‌توانیم مثلث ΔAMR را بر یک مثلث $A'M'R'$ تصویر کنیم، چنان که $\frac{A'M'}{A'R'} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$، و $R'A'M'$ یک زاویهٔ قائمه باشد؛ و در نتیجه حکم ما ثابت می‌شود. این مطلب ما را به شکل (در حل) می‌کشاند که باید ثابت کنیم T، نقطهٔ برخورد $M'N'$ و $R'S'$ ، بر $P'Q'$ قرار دارد. این کار را بعداً انجام خواهیم داد.

از تشابه مثلثهای $M'S'T$ و $R'N'T$ (که زاویه‌های مساوی دارند) به تساوی:

$$\frac{M'T}{R'T} = \frac{M'S'}{R'N'}$$

می‌رسیم و از تشابه مثلثهای TUM' و TVR' ، که U و V پاهای عمودهای رسم شده از T بر $P'M'$ و $P'R'$ هستند، (در این مثلثهای قائم‌الزاویه $(T\hat{M}'U = ۹۰^\circ - T\hat{M}'S' = ۹۰^\circ - T\hat{R}'N' = T\hat{R}'V)$ خواهیم داشت $\frac{TU}{TV} = \frac{M'T}{R'T}$. بنابراین:

$$\frac{TU}{TV} = \frac{M'T}{R'T} = \frac{M'B'}{R'N'} = \frac{Q'B'}{Q'C'}$$

که تساوی $\frac{Q'B'}{Q'C'}=\frac{TU}{TV}$ ثابت می‌کند T بر خط P'Q' قرار دارد.

۳۸۶. حکم مسأله فقط شکل دیگر قضیهٔ دزارگ است.

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازهٔ زاویه

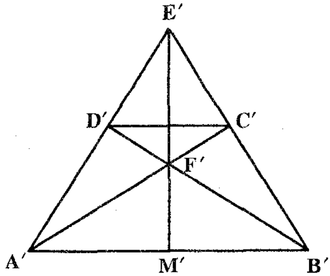
۳۸۷. می‌دانیم که $C'H = CH.\cos\alpha$ است که α زاویه بین دو صفحهٔ BCD و ABD است. بنابراین $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ و از آن‌جا $\alpha=\frac{\pi}{3}$ است.

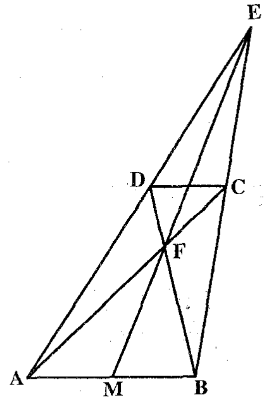
۵.۴.۳. پاره‌خط

۱.۵.۴.۳ . رابطهٔ بین پاره‌خطها

۳۸۸. فرض می‌کنیم ABCD یک ذوزنقه باشد، E نقطهٔ برخورد (امتدادهای) ساقهای آن، و F نقطهٔ برخورد قطرهای آن. بر اثر یک تصویر موازی مناسب صفحهٔ π ی ذوزنقه بر یک صفحه π' ، نگارهٔ مثلث ABE مثلث متساوی‌الساقین A'B'E' می‌شود. در عین حال به موجب ویژگی (ب)ی تصویر موازی، ذوزنقهٔ ABCD به ذوزنقهٔ A'B'C'D' بدل می‌شود (شکل). روشن است که E'F' نگارهٔ خط EF محور تقارن مثلث متساوی‌الساقین A'B'E' است، پس قاعده‌های A'B' و C'D' از ذوزنقهٔ A'B'C'D' را نصف می‌کند. به موجب ویژگی (ج) مربوط به تصویر موازی، این مطلب ایجاب می‌کند که خط EF قاعده‌های AB و CD از ذوزنقهٔ اصلی ABCD را نصف کند.

یادآور می‌شویم که بدین طریق می‌توانیم عکس قضیهٔ بالا را هم ثابت کنیم :
هرگاه یک نقطهٔ F از میانهٔ EM از مثلث ABE را به رأسهای A و B وصل کنیم تا ضلعهای مثلث را در نقطه‌های D و C ببرند، خط CD موازی AB است (شکل (ب) نشان می‌دهد که وقتی مثلث ABE متساوی‌الساقین باشد، CD موازی AB می‌شود).





۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۳۸۹. باید نشان دهیم (شکل) که :

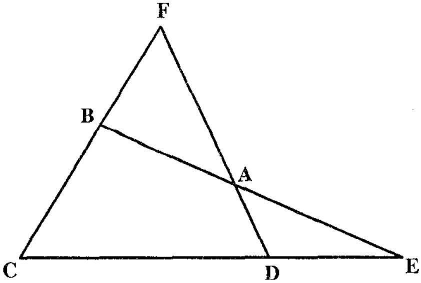
$$\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}=1$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت بالا را می‌توان به عنوان حالت خاص عبارت :

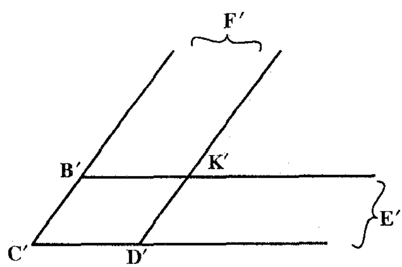
$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1}\cdot\frac{A_2M_2}{A_3M_2}\cdot\frac{A_3M_3}{A_4M_3}\cdot\;\cdots\;\cdot\frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

گرفت که چهارضلعی ABCD، نقش n ضلعی $A_1A_2\cdots A_n$ را بازی می‌کند و نقطه‌های E ، F ، E و F (به همان ترتیب) نقش نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_n را در شکل مربوط به سؤال (۳۶۵). از این‌جا نتیجه می‌شود که عبارت :

(AE/BE)(BF/CF)(CE/DE)(DF/AF)



(الف)



(ب)

براثر تصویر مرکزی پایا می‌ماند. ملاحظه می‌کنیم که تصویری از صفحهٔ π ی شکل (الف) که EF خط خاص آن باشد، شکل (الف) را به شکل (ب) بدل می‌کند. چون E' و F' نقطه‌هایی در بینهایتند، پس:

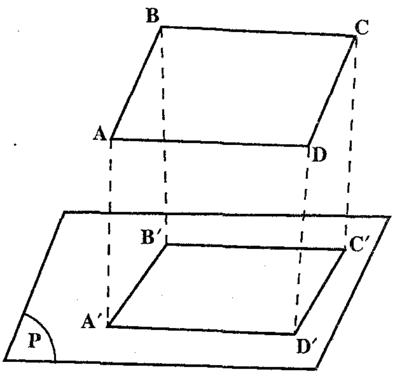
$$\frac{A'E'}{B'E'}=\frac{B'F'}{C'F'}=\frac{C'E'}{D'E'}=\frac{D'F'}{A'F'}=۱$$

بنابراین:

$$\frac{A'E'}{B'E'}\cdot\frac{B'F'}{C'F'}\cdot\frac{C'E'}{D'E'}\cdot\frac{D'F'}{A'F'}=۱\left(=\frac{AE}{BE}\cdot\frac{BF}{CF}\cdot\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DF}{AF}\right)$$

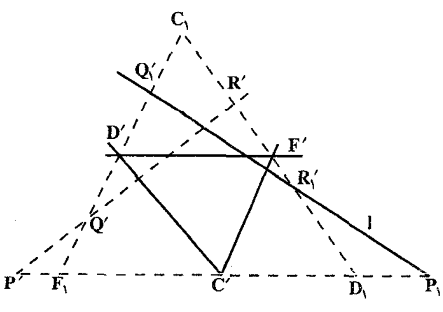
این تساوی قضیهٔ ما را ثابت می‌کند.

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند



۳۹۰. تصویر متوازی الاضلاع ABCD روی صفحهٔ P را متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ می‌نامیم. صفحه‌های $ABB'A'$ و $CDD'C'$ باهم و صفحه‌های $BCC'B'$ و $ADD'A'$ باهم موازی‌اند. پس فصل مشترکهای آنها با صفحهٔ P باهم موازی‌اند. یعنی $A'B'\|C'D'$ و $B'C'\|A'D'$ است. بنابراین چهارضلعی $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاع است.

۸.۴.۳. رسم شکلها



۳۹۱. صفحهٔ π ی شکل داده شده در صورت را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به‌طوری که خط ABE خط خاص صفحهٔ π شود. پس شکل داده شده در صورت به شکل روبه‌رو بدل شده است. قطرهای CA ، DB

و FEای چهارضلعی کامل به خطهای $C'A' \| F'D'$ و $D'B' \| F'C'$ و $F'E' \| D'C'$ بدل می‌شوند. نقطه‌های برخورد این خطها را با C_1 ، D_1 و F_1 نشان می‌دهیم (شکل). روشن است که نقطه‌های C' ، D' و F' وسطهای ضلعهای مثلث $C_1D_1E_1$ هستند.
حال نگاره‌های P ، Qو R، وسطهای قطرهای چهارضلعی کامل، را تعیین می‌کنیم. نقطهٔ P، وسط CA ، نقطه‌ای است که $AP/CP = -1$. اگر نقطهٔ بینهایت خط CA را به P_1 نشان دهیم، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{AP/CP}{AP_1/CP_1} = -1$$

به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم :

$$\frac{A'P'/C'P'}{A'P'_1/C'P'_1} = -1$$

که P'_1 نگارهٔ نقطهٔ بینهایت P_1 است، یعنی نقطهٔ برخورد $C'A'$ با خط خاص l از صفحهٔ π . تساوی خود را بار دیگر به صورت :

$$\frac{C'P'_1/C'P'}{A'P'_1/A'P'} = -1$$

می‌نویسیم، یا، چون $A'P'_1/A'P' = -1$ ، (A' نقطه‌ای است در بینهایت)،

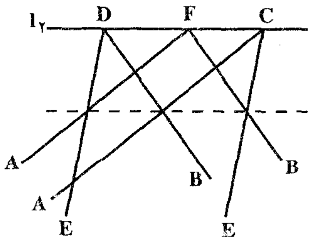
$$\frac{C'P'_1}{C'P'} = -1$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که C' وسط پاره‌خط $P'P'_1$ است، یعنی، P' قرینهٔ P'_1 (نقطهٔ برخورد خط D_1F_1 با l) است نسبت به C' ، وسط ضلع D_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$.
به‌گونه‌ای مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که نقطه‌های Q و R، وسطهای قطرهای DB و FE از چهارضلعی کامل، بر نقطه‌های Q' و R' قرینه‌های نقطه‌های Q'_1 و R'_1 ، نقطه‌های برخورد خط خاص l با ضلعهای C_1F_1 و C_1D_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ ، نسبت به D' و F' ، وسطهای این ضلعها، هستند. از این‌جا قضیهٔ مربوط به چهارضلعی کامل (که می‌گوید نقطه‌های P، Q و Rهمخطند) به شکل زیر درمی‌آید :
فرض می‌کنیم P'_1 ، Q'_1 و R'_1 نقطه‌های برخورد یک خط l، بترتیب با ضلعهای F_1D_1 ، C_1D_1 و C_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ باشند. در این صورت نقطه‌های P' ، Q' و R' قرینه‌های P'_1 ، Q'_1 و R'_1 بترتیب نسبت به وسطهای ضلعهای F_1D_1 ، C_1D_1 و C_1F_1 ، همخطند.

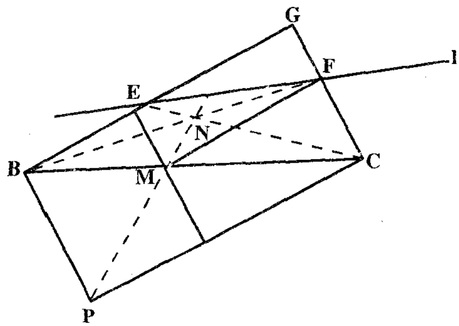
۳۹۲. قسمتهای (i) و (ii) با بعضی از حالتهای خاص قضیهٔ دزارگ هم‌ارزند. تشخیص چگونگی عملیات مورد نیاز و بیان صورت جدید را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱.۳۹۳. گیریم D، F و C، سه نقطه بر خط l باشند. از این نقطه‌ها خطهای FB‖DB ، DE‖CE و FA‖CA را رسم می‌کنیم (شکل الف). در این‌جا A ، B و E نقطه‌هایی در بینهایت هستند.) نقطه‌های برخورد DE و FA ؛ DB و CA ؛ FB و CE همخطند (چرا؟).

۲. هرگاه خط l ضلعهای BG و CG از مثلث BCG را در E و F ببرد (شکل ب)، آن‌گاه N ، نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی BCEF ، و رأسهای P و M از متوازی‌الاضلاعهای BGCP و EGFM همخطند (چرا؟).

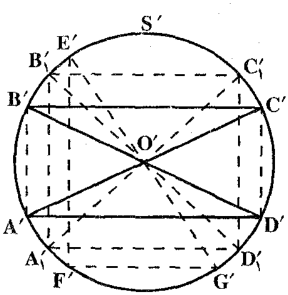


(الف)



(ب)

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۹۴. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم، به‌طوری که دایرهٔ S به یک دایرهٔ S' مبدل شود و نقطهٔ O به نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ S'. بر اثر این تبدیل تصویر چهار ضلعی ABCD به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می‌شود (زیرا قطرهای $A'B'D'$ در مرکز دایرهٔ محیطی S' متقاطعند). بنابراین نقطه‌های P و Q به P' و Q'، نقطه‌های بینهایت امتدادهای ضلعهای مستطیل بدل می‌شوند (شکل).

اگر ضلعهای $A'_1B'_1$ و $D'_1C'_1$ از مستطیل $A'_1B'_1C'_1D'_1$ محاط در دایرهٔ S' از نقطهٔ P'

بگذرند و ضلع B_1C_1 از Q' بگذرد (یعنی $A_1'B_1' \| D_1'C_1' \| A'B'$ و $B_1'C_1' \| B'C'$)، آن‌گاه $A_1'D_1' \| B'C' \| A'D'$ و قطرهای $A_1'C_1'$ و $B_1'D_1'$ در O' مرکز S' یکدیگر را می‌برند و از این‌جا حکم مسأله ثابت می‌شود.

۳۹۵. گزینهٔ (ج) درست است.

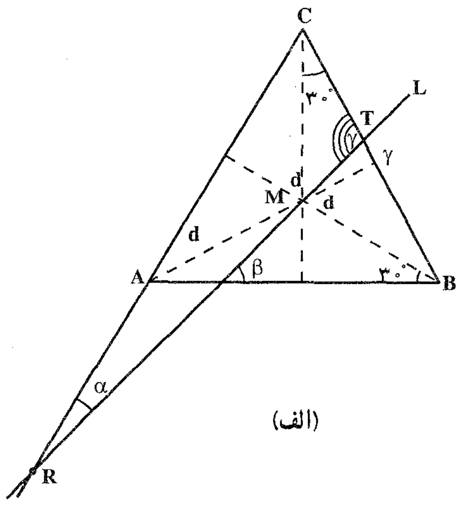
۳.۴.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۹۶. الف. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد. شکل (الف) را درنظر می‌گیریم. با استفاده از قانون سینوسها در مثلثهای AMR ، BMS و CMT(و با توجه به این که d برابر $\frac{۲}{۳}$ میانهٔ ΔABC است) می‌بینیم که :

$$\frac{d}{MR} = \frac{\sin\alpha}{\sin ۱۵۰^\circ} = ۲\sin\alpha$$

$$\frac{d}{MS} = \frac{\sin\beta}{\sin ۳۰^\circ} = ۲\sin\beta$$

$$\frac{d}{MT} = \frac{\sin\gamma}{\sin ۳۰^\circ} = ۲\sin\gamma$$



(الف)

پس :

$$\frac{۱}{MT} = \frac{۲}{d}\sin\gamma \ , \ \frac{۱}{MR} + \frac{۱}{MS} = \frac{۲}{d}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

روشن است که :

$$\beta = \gamma - ۶۰^\circ \quad , \quad \alpha = ۱۲۰^\circ - \gamma$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= \sin(۱۲۰^\circ - \gamma) + \sin(\gamma - ۶۰^\circ) \\ &= \sin(۱۲۰^\circ - \gamma) - \sin(۱۲۰^\circ + \gamma) \\ &= -۲\cos ۱۲۰^\circ \sin\gamma = \sin\gamma \end{aligned}$$

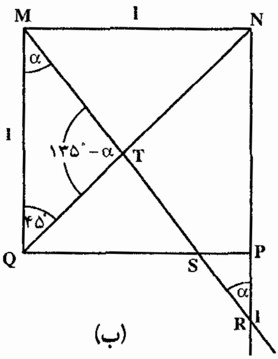
یعنی در یک مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داریم :

$$\frac{۱}{MR}+\frac{۱}{MS}=\frac{۱}{MT}$$

برای این که ببینیم آیا این رابطه برای یک مثلث دلخواه ABC صحیح است یا نه، ملاحظه می‌کنیم که رابطهٔ اخیر با رابطهٔ : $MT/MR+MT/MS=۱$
هم‌ارز است و همواره می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی را به وسیلهٔ یک تصویر موازی خاص و مشابهت به هر مثلث قبلاً مشخص شده‌ای بدل کرد.

با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که هرگاه به جای M، به‌طور مثال، نقطهٔ N وسط میانهٔ AD را بگذاریم، رابطهٔ بالا به رابطهٔ مشابهی با $\frac{۱}{MX}$ (X معرف نقطهٔ سه‌گانهٔ R، S و T مربوط به ضلع BC از مثلث ABC است) بدل می‌شود که به جای آن $\frac{۲}{NX}$ (و به جای $\frac{۱}{MY}$ و $\frac{۱}{MZ}$ مقدارهای $\frac{۱}{NY}$ و $\frac{۱}{NZ}$) نهاده شده است.

ب. فرض می‌کنیم متوازی‌الاضلاع MNPQ یک مربع واحد (شکل ب) باشد. پس در مثلثهای MRN، MSQ و MTQ داریم :



(ب)

$$\frac{۱}{MR}=\sin\alpha \quad , \quad \frac{۱}{MS}=\cos\alpha$$

$$\frac{۱}{MT}=\frac{\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)}{\sin ۴۵^\circ}=\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)$$

چون :

$$\sin(۱۳۵^\circ-\alpha)=\sin(۴۵^\circ+\alpha)=\sin ۴۵^\circ\cos\alpha+\cos ۴۵^\circ\sin\alpha$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

پس :

$$\frac{۱}{MT}=\sqrt{۲}\left[\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right]=\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{۱}{MR}+\frac{۱}{MS}$$

برای یک مربع MNPQ داریم :

$$\frac{۱}{MR}+\frac{۱}{MS}=\frac{۱}{MT}$$

برای این که درستی این رابطه را برای یک متوازی‌الاضلاع دلخواه ببینیم، ملاحظه می‌کنیم که این رابطه با رابطهٔ $MT/MR + MT/MS = 1$ هم‌ارز است و همواره می‌توان هر متوازی‌الاضلاع ABCD را بر اثر یک تصویر موازی مناسب به یک مربع بدل کرد (برای این امر کافی است مثلث ABC را به یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بدل کنیم).

۳۹۷. الف. از رأس B ی متوازی‌الاضلاع ، خطی موازی MD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در N' قطع کند (شکل الف). چون $MN \| N'B$ ، پس $AN'/AN = AB/AM = n$. بعد هم، قابلیت انطباق مثلثهای ADN و CBN' ایجاب می‌کند که $AN = CN'$. از این‌جا نتیجه می‌شود که :

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n + 1$$

که همان چیزی است که ما می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر شکل (الف) را بر صفحهٔ دیگری چنان تصویر کنیم که AB موازی با خط خاص صفحه تصویر شود، آن‌گاه نسبت پاره‌خطهای واقع بر خط AB محفوظ می‌ماند. ولی این تصویر نسبت پاره‌خطهای واقع بر قطر AC را حفظ نمی‌کند. بنابراین برای به دست آوردن صورت دیگری از قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، باید آن را طوری بیان کنیم که نسبت پاره‌خطهای واقع بر AC حذف شوند، و فقط نسبت پاره‌خطهای واقع بر AB باقی بمانند. این کار، بسیار ساده به صورت زیر انجام می‌گیرد :

از N خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در M_1 قطع کند. قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، ایجاب می‌کند که اگر $AM = (\frac{1}{n})AB$ ، آن‌گاه :

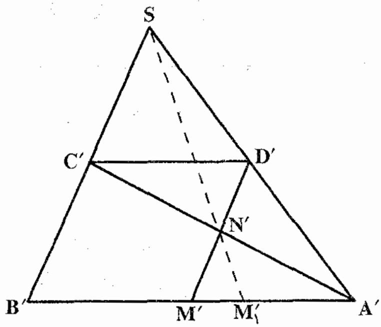
$$AM_1 = \frac{1}{n+1} AB$$

اکنون روشن است که تصویر ما به نتیجهٔ زیر منجر می‌شود :

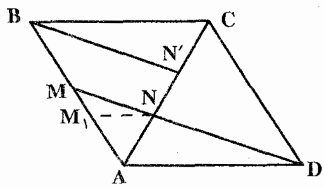
اگر نقطهٔ M' قاعدهٔ $A'B'$ از ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ را به نسبت $A'M'/A'B' = 1/n$ تقسیم کند، آن‌گاه خط SN' واصل بین S، نقطهٔ برخورد ضلعهای (ناموازی) ذوزنقه، و N'، نقطهٔ برخورد $D'M'$ با قطر $A'C'$ ، یک نقطهٔ M'_1 را بر $A'B'$ مشخص می‌کند به‌طوری که :

$$A'M'_1 = \frac{1}{n+1} A'B'$$

(شکل ب). [چون خطهای AB و CD با خط خاص صفحه موازی‌اند. نگاره‌های آنها براثر این تصویر، موازی باقی می‌مانند. این مطلب ایجاب می کند که متوازی‌الاضلاع ABCD به یک ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ بدل شود. خطهای موازی AD ، BC و M_1N به خطهای $A'D'$ ، $B'C'$ و $M_1'N'$ بدل می‌شوند که یکدیگر را در یک نقطهٔ S می‌برند. نسبت پاره‌خطهای واقع بر خط AB، موازی با خط خاص صفحه، بر اثر یک تصویر محفوظ می‌ماند.]



(ب)

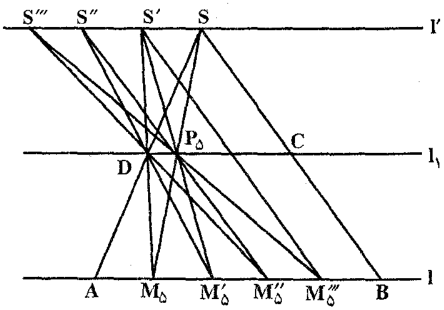


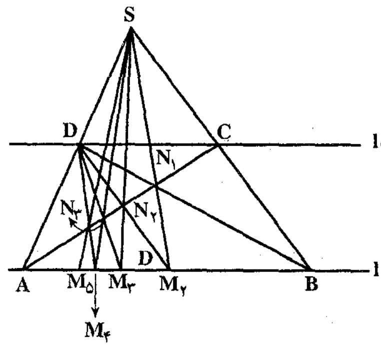
(الف)

ب. یک نقطهٔ اختیاری S از صفحه را به نقطه‌های A و B وصل، و فرض می کنیم C و D نقطه‌های برخورد خطهای SA و SB با l_1 باشند. اگر N_1 نقطه برخورد DB با AC باشد، آن‌گاه SN_1 خط AB را در یک نقطهٔ M_2 می‌برد به طوری که $AM_2 = (\frac{1}{2})AB$. بعد اگر DM_2 خط AC را در یک نقطهٔ N_2 ببرد، آن‌گاه SN_2 خط AB را در یک نقطهٔ M_3 می‌برد به‌طوری که $AM_3 = (\frac{1}{3})AB$ ؛ اگر DM_3 خط AC را در یک نقطهٔ N_3 ببرد، آن‌گاه SN_3 خط AB را در یک نقطهٔ M_4 می‌برد به طوری که $AM_4 = (\frac{1}{4})AB$ و همچنین :

وقتی نقطهٔ M_n با تساوی $AM_n = (\frac{1}{n})AB$ معین شود، به آسانی می‌توان بقیهٔ نقطه‌هایی را که پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، پیدا کرد. زیرا کافی است، خط l' را از S به موازات l و l_1 رسم کنیم. حال، اگر SM_n خط DC را در یک نقطهٔ P_n ببرد، M_nD خط l' را در یک نقطهٔ S' می‌برد و $S'P_n$ خط AB را

در یک نقطهٔ M'_n . پس: $AM_n = M_nM'_n$ ، آن‌گاه $AM'_n = (\frac{۲}{n})AB$ ، و همچنین (شکل (پ) که $n = ۵$.)





(پ)

۳۹۸. چهارضلعی $ABCD$ را بر یک مربع $A'B'C'D'$ تصویر، و فرض می‌کنیم نقطه‌های $P_۱$ ، $P_۲$ ، $P_۳$ و... به نقطه‌های $P'_۱$ ، $P'_۲$ ، $P'_۳$ و... بدل شوند (شکل). این نقطه‌ها بر ضلعهای مربع نسبتهایی پدید می‌آورند که با

$$\lambda_۱ = \frac{A'P'_۱}{B'P'_۱} \quad , \quad \lambda_۲ = \frac{B'P'_۲}{C'P'_۲} \quad , \quad \lambda_۳ = \frac{C'P'_۳}{D'P'_۳}$$

نشان می‌دهیم. خاطرنشان می‌کنیم که این عددها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. از تشابه مثلثهای $A'D'P'_۱$ و $B'P'_۲P'_۱$ (شکل) نتیجه می‌شود:

$$\frac{D'A'}{B'P'_۲} = -\frac{A'P'_۱}{B'P'_۱}$$

پس:

$$\frac{C'P'_۲}{B'P'_۲} = \frac{C'B' + B'P'_۲}{B'P'_۲} = \frac{C'B'}{B'P'_۲} + ۱ = \frac{D'A'}{B'P'_۲} + ۱ = -\frac{A'P'_۱}{B'P'_۱} + ۱$$

از این‌رو:

$$\frac{۱}{\lambda_۲} = -\lambda_۱ + ۱$$

یا

$$\lambda_۲ = \frac{۱}{۱ - \lambda_۱} \qquad (۱)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که هرگاه نقطهٔ $P'_۱$ بر امتداد $A'B'$ در سمت چپ A' یا سمت راست B' قرار گیرد، دستور (۱) صحیح باقی می‌ماند.

با استفاده از دستور (۱)، پیدا می‌کنیم :

$$\lambda_۲=\frac{۱}{۱-\lambda_۱} \quad ، \quad \lambda_۳=\frac{۱}{۱-\lambda_۲}=۱-\frac{۱}{\lambda_۱} \quad ، \quad \lambda_۴=\frac{۱}{۱-\lambda_۳}=\lambda_۱$$

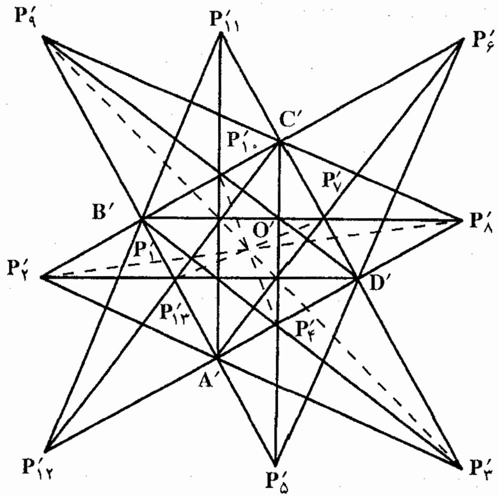
$$\lambda_۵=\frac{۱}{۱-\lambda_۴}=\lambda_۲ \quad ، \quad \lambda_۶=\frac{۱}{۱-\lambda_۵}=\lambda_۳ \quad \text{و} \quad \ldots$$

یعنی :

$$\lambda_۱=\lambda_۴=\lambda_۷=\lambda_{۱۰}=\lambda_{۱۳}=\lambda_{۱۶}=\cdots$$

$$\lambda_۲=\lambda_۵=\lambda_۸=\lambda_{۱۱}=\lambda_{۱۴}=\lambda_{۱۷}=\cdots=\frac{۱}{۱-\lambda_۱}$$

$$\lambda_۳=\lambda_۶=\lambda_۹=\lambda_{۱۲}=\lambda_{۱۵}=\lambda_{۱۸}=\cdots=۱-\frac{۱}{\lambda_۱}$$



حال حکمهای قضیهٔ ما بلافاصله نتیجه می‌شود :

الف. $\lambda_{۱۳}=\lambda_۱$ ایجاب می‌کند که نقطهٔ $P'_{۱۳}$ بر نقطهٔ $P'_۱$ منطبق باشد. از ماهیت یک به‌یک بودن یک تصویر مرکزی نتیجه می‌شود که $P_{۱۳}$ بر $P_۱$ منطبق است.

ب. $\lambda_۱=\lambda_۷$ و $\lambda_۲=\lambda_۸$ و $\lambda_۳=\lambda_۹$ و غیره ایجاب می‌کنند که $P'_۱$ و $P'_۷$ ، $P'_۲$ و $P'_۸$ ، $P'_۳$ و $P'_۹$ ، نسبت به مرکز O' مربع متقارن باشند، یعنی خطهای $P'_۱P'_۷$ ، $P'_۲P'_۸$

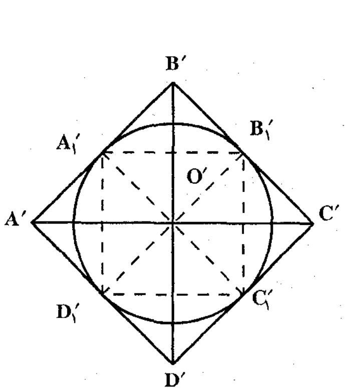
و $P'_3P'_9$ و غیره در O' متقاطع باشند. درنتیجه، به موجب ویژگیهای تصویر مرکزی، خطهای P_1P_7 ، P_2P_8 ، P_3P_9 و غیره، از نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ می‌گذرند.

ج. خطهای $P'_1P'_2$ ، $P'_7P'_8$ ، $P'_2P'_3$ ، $P'_8P'_9$ ، $P'_3P'_4$ و $P'_9P'_{10}$ و غیره نسبت به O' ، مرکز مربع، قرینه هستند ((ب) در بالا) و بنابراین موازی‌اند. به موجب ویژگیهای یک تصویر مرکزی، نتیجه می‌شود که خطهای P_1P_2 و P_7P_8 ، P_2P_3 و P_8P_9 ، P_3P_4 و P_9P_{10} ، دوبه‌دو بر خط واصل بین نقطه‌های S و S_1 ، محل برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی $ABCD$، بگذرند (بر اثر تصویر بالا خط SS_1 به خط بینهایت بدل شده است).

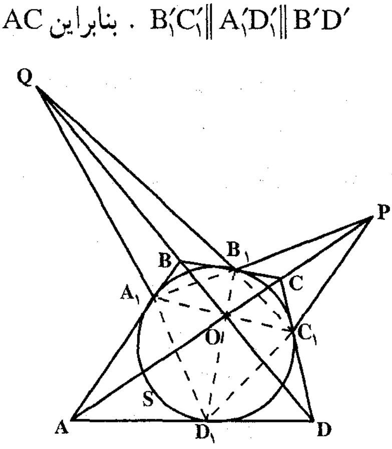
۳۹۹. صفحهٔ شکل (الف) را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که S به دایرهٔ S' و O، نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ ، به نقطهٔ O' ، مرکز دایرهٔ S' ، بدل شوند. پس شکل (الف) به شکل (ب) بدل می‌شود که $A'B' \parallel C'D' \perp A'_1C'_1$ و $B'C' \parallel A'D' \perp B'_1D'_1$. در نتیجه $A'B'C'D'$ متوازی‌الاضلاعی می‌شود که بر یک دایره محیط است، یعنی یک لوزی است.

الف. می‌دانیم که نقطهٔ برخورد قطرهای لوزی $A'B'C'D'$ بر مرکز دایرهٔ محاطی‌اش منطبق است. پس نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیهای $A'B'C'D'$ و $A'_1B'_1C'_1D'_1$ برهم منطبقند، و همین امر برای نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیهای $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ نیز صادق است.

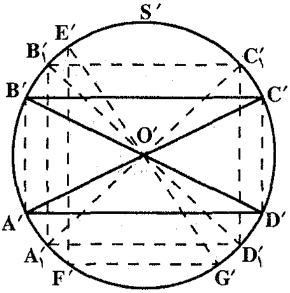
ب. با توجه به ویژگی تقارن روشن است که $A'_1B'_1 \parallel D'_1C'_1 \parallel A'C'$ و $B'_1C'_1 \parallel A'_1D'_1 \parallel B'D'$. بنابراین AC باید از P بگذرد و BD از Q.



(ب)



(الف)



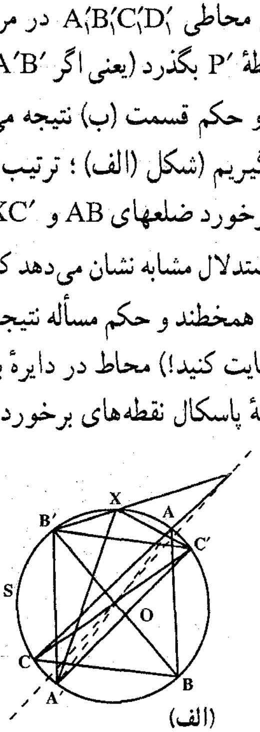
۴۰۰. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ جدید π' تصویر می‌کنیم به‌طوری که دایرهٔ S به یک دایرهٔ S' بدل شود و نقطهٔ O به O' ، مرکز دایرهٔ S'. بر اثر این تصویر، چهارضلعی $ABCD$ به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می‌شود (زیرا قطرهای $A'B'C'D'$ در مرکز دایرهٔ محیطی S' متقاطعند). بنابراین نقطه‌های P و Q به P' و Q'، نقطه‌های بینهایت امتدادهای ضلعهای مستطیل، بدل می‌شوند (شکل).

الف. اگر ضلعهای $E'F'$ و $F'G'$ از $\Delta E'F'G'$ از، محاط در S' ، بترتیب از نقطه‌های بینهایت P' و Q' بگذرند، یعنی هرگاه $E'F' \| A'B'$ و $F'G' \| B'C'$ ، آن‌گاه ضلع $E'G'$ از O' ، مرکز S' ، می‌گذرد (ضلع $E'G'$ مقابل به زاویهٔ قائمهٔ $E'F'G'$ محاط در S' است). اگر ضلع $E'G'$ از مرکز O' بگذرد و $E'F'$ از نقطهٔ P'، یعنی اگر $E'F' \| A'B'$ ، آن‌گاه $F'G' \| B'C'$ ، یعنی $F'G'$ از نقطهٔ Q' می‌گذرد (زیرا زاویهٔ محاطی مقابل به قطر، قائمه است).

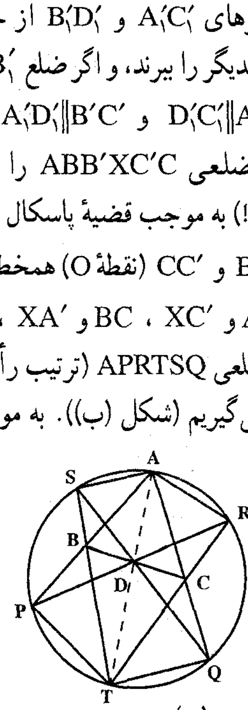
ب. اگر قطرهای $A'_1C'_1$ و $B'_1D'_1$ از چهارضلعی محاطی $A'_1B'_1C'_1D'_1$ در مرکز O' از دایرهٔ S' یکدیگر را ببرند، و اگر ضلع $A'_1B'_1$ از نقطهٔ P' بگذرد (یعنی اگر $A'_1B'_1 \| A'B'$)، آن‌گاه $D'_1C'_1 \| A'B'$ و $B'_1C'_1 \| A'_1D'_1 \| B'C'$ ؛ و حکم قسمت (ب) نتیجه می‌شود.

۴۰۱. الف. شش‌ضلعی $ABB'XC'C$ را درنظر می‌گیریم (شکل (الف) ؛ ترتیب رأسها را رعایت کنید!) به موجب قضیهٔ پاسکال نقطه‌های برخورد ضلعهای AB و XC' ، AC و XB' ، BB' و CC' (نقطهٔ O) همخطند. یک استدلال مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های برخورد AB و XC' ، BC و XA' ، و نقطهٔ O همخطند و حکم مسأله نتیجه می‌شود.

ب. شش‌ضلعی $APRTSQ$ (ترتیب رأسها را رعایت کنید!) محاط در دایرهٔ به قطر AT را درنظر می‌گیریم (شکل (ب)). به موجب قضیهٔ پاسکال نقطه‌های برخورد ضلعهای



(الف)

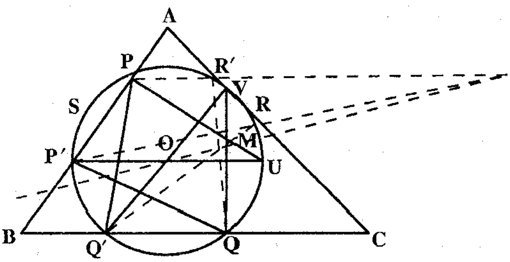


(ب)

AP و ST، AQ و RT، RP و QS ، همخطند، که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ج. گیریم U و V نقطه‌های برخورد PM و P′O ، QM و Q′O باشند (شکل (پ)).

چون داریم $P'\hat{P}M = Q'\hat{Q}M = ۹۰^\circ$ ، نقطه‌های U و V (که متقاطر P′ و Q′ هستند) بر S قرار دارند. حال شش‌ضلعی P′QVQ′PU ، محاط در S را درنظر می‌گیریم (به‌ترتیب رأسها توجه کنید!). به موجب قضیهٔ پاسکال، نقطه‌های برخورد ضلعهای QV و PU ، Q′V و P′U ، P′Q و Q′P ، یعنی نقطه‌های M و O و نقطهٔ برخورد P′Q و Q′P همخطند. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های برخورد P′R و PR′ ، Q′R و QR′ بر خط OM قرار دارند.

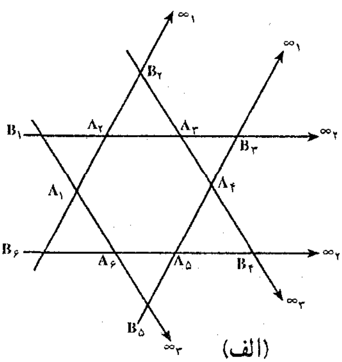


(پ)

حال شش‌ضلعی P′QVQ′PU ، محاط در S را در نظر می‌گیریم (بترتیب رأسها توجه کنید!). به موجب قضیهٔ پاسکال، نقطه‌های برخورد ضلعهای QU و PU و Q′V و PU′ ، P′Q و Q′P ، یعنی نقطه‌های M و O و نقطهٔ برخورد PQ′ و Q′P همخطند. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های برخورد P′R و PR′ ، Q′R و QR′ بر خط OM قرار دارند.

۴۰۲. الف. این مسأله یک حالت خاص مسألهٔ ۳۸۴ است.

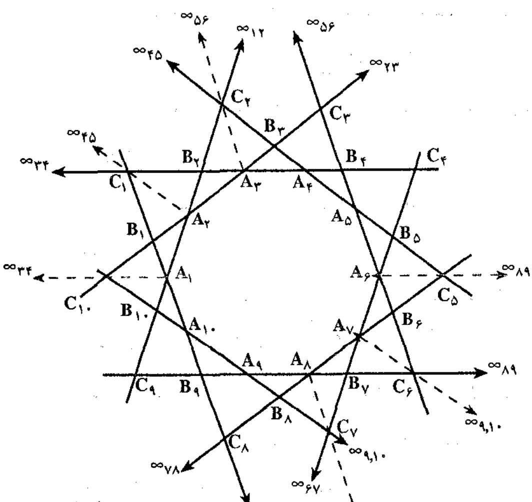
ب. نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای شش‌ضلعی را با $B_{۱}$ ، $B_{۲}$ ، $B_{۳}$ ، $B_{۴}$ ، $B_{۵}$ و $B_{۶}$ نشان می‌دهیم (شکل (الف))، و نقطه‌های بینهایت متناظر به امتدادهای $A_{۱}A_{۲}$ ، $A_{۲}A_{۳}$ ، $A_{۳}A_{۴}$ را به $\infty_{۱}$ ، $\infty_{۲}$ و $\infty_{۳}$. تصویر خط $A_{۱}A_{۲}$ از



(الف)

مرکز A_6 بر خط A_2A_3 نقطه‌های A_1 ، A_2 ، B_6 و ∞_1 را به نقطه‌های B_1 ، A_2 ، ∞_2 و A_3 بدل می‌کند، و تصویر A_2A_3 از مرکز A_1 بر A_3A_4 نقطه‌های B_1 ، A_2 ، ∞_2 و A_3 را به ∞_3 ، B_2 ، A_4 و A_3 . با استفاده از تصویرهای مناسب، به‌طور متوالی از نقطه‌های ∞_3 ، B_2 ، A_4 و A_3 بر خط A_3A_4 به نقطه‌های A_5 ، ∞_1 ، A_4 و B_3 بر A_4A_5 ؛ بعد به نقطه‌های A_5 ، A_6 ، B_4 و ∞_2 بر خط A_5A_6 ؛ سپس به نقطه‌های B_5 ، A_6 ، ∞_3 و A_1 بر A_6A_1 ؛ بالاخره به نقطه‌های ∞_1 ، B_6 ، A_2 و A_1 برخط اولیهٔ A_1A_2 می‌رسیم. حاصلضرب این شش تصویر معرف یک تبدیل تصویری است از A_1A_2 که A_1 ، A_2 ، B_6 و ∞_1 را به ∞_1 ، B_6 ، A_2 و A_1 بدل می‌کند و مربع این تبدیل A_1 ، A_2 ، B_6 و ∞_1 را به A_1 ، A_2 ، B_6 و ∞_1 ؛ پس تبدیلی است همانی بر خط A_1A_2 (برای اثبات درستی این نتیجه کافی است که بدانیم تبدیل مورد بحث سه نقطه را ثابت نگه می‌دارد).

ج. نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای ده‌ضلعی را به B_1 ، B_2 ، ... ، B_{10} ؛ C_1 ، C_2 ، ... ، C_{10} ، همان‌گونه که در شکل (ب) نشان داده شده، نشان می‌دهیم، و نقطه‌های بینهایت خطهای A_1A_2 ، A_2A_3 و غیره را به ∞_{12} و ∞_{23} و غیره. تصویر از مرکز A_{10} نقطه‌های A_1 ، A_2 و B_{10} بر خط A_1A_2 را به نقطه‌های B_1 ، A_2 و C_{10} بر A_2A_3 ، بدل می‌کند. تصویرهای متوالی از مرکزهای A_1 ، A_2 ، ... و A_9 این نقطه‌ها را به C_1 ، B_2 و ∞_{34} بر خط A_3A_4 ؛ سپس به ∞_{45} ، C_2 و A_5 بر خط A_4A_5 ؛ بعد به A_6 ، ∞_{56} و A_5 بر خط A_5A_6 ؛ سپس به A_6 ، A_7 و B_5 بر خط A_6A_7 ؛ بعد به B_6 ، A_7 و C_5 بر خط A_7A_8 ؛ بعد به C_6 ، B_7 و ∞_{89} بر خط A_8A_9 ؛ سپس به $\infty_{9,10}$ ، C_7 و A_{10} بر خط A_9A_{10} ؛ بعد به A_1 ، $\infty_{10,1}$ و A_{10} بر خط $A_{10}A_1$ ، بعد به A_1 ، A_2 و B_{10} بر خط اوّلیهٔ A_1A_2 بدل می‌کنند. حاصلضرب این ده تصویر معرف تبدیلی است



(ب)

تصویری از خط A_1A_2 که سه نقطهٔ A_1 ، A_2 و B_1 . را ثابت نگاه می‌دارد، و بنابراین باید تبدیل همانی از آن خط باشد.

۴۰۳. چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را بر یک مربع $A'_1A'_2A'_3A'_4$ تصویر می‌کنیم، بر اثر این تصویر نقطه‌های P و Q به نقطه‌های بینهایت امتدادهای ضلعهای مربع بدل می‌شوند و خطهای PN و QN به میانخطهای آن. نقطه‌های B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 به وسطهای B'_1 ، B'_2 ، B'_3 و B'_4 از ضلعهای مربع و نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_8 به نقطه‌های M'_1 ، M'_2 ، ...، M'_8 (شکل) بدل می‌شوند.

حکمهای قضیهٔ مورد بحث از ملاحظه‌های نسبتاً بدیهی زیر ناشی می‌شوند:

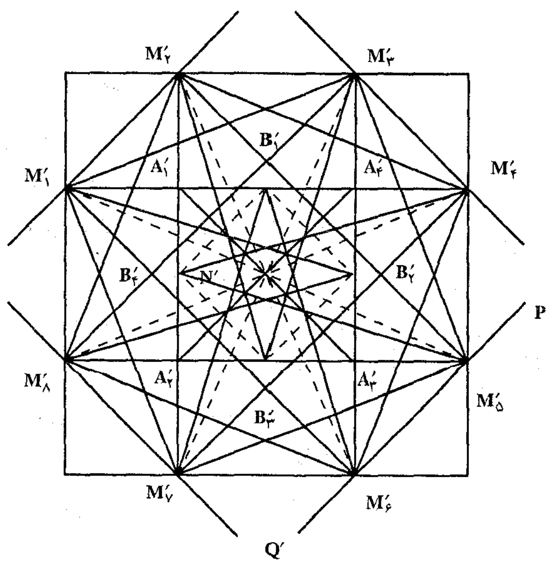
الف. نقطه‌های M'_1 و M'_5 ، M'_2 و M'_6 ، M'_3 و M'_7 ، M'_4 و M'_8 نسبت به N' ، مرکز مربع، قرینه هستند. در نتیجه خطهای $M'_1M'_5$ ، $M'_2M'_6$ ، $M'_3M'_7$ و $M'_4M'_8$ در N' یکدیگر را می‌برند.

ب. خطهای $M'_2M'_3$ و $M'_6M'_7$ با $A'_2A'_3$ موازی‌اند؛ و خطهای $M'_1M'_8$ و $M'_4M'_5$ با $A'_1A'_2$.

ج. $M'_1M'_2$ ، $M'_3M'_8$ ، $M'_4M'_7$ و $M'_5M'_6$ با قطر $A'_2A'_4$ مربع، و خطهای $M'_3M'_4$ ، $M'_2M'_5$ ، $M'_1M'_6$ و $M'_7M'_8$ با قطر $A'_1A'_3$ ی مربع موازی‌اند.

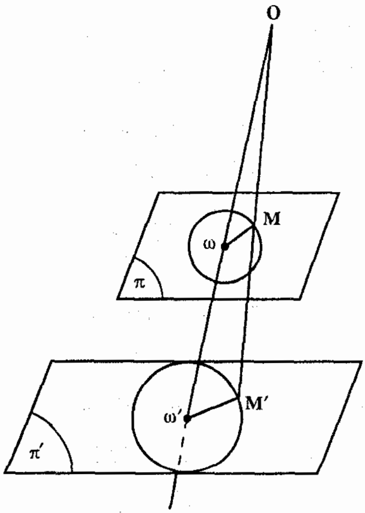
د. $M'_1M'_3 \| M'_5M'_7 \| B'_4M'_4 \| B'_2M'_8$ ؛ $M'_2M'_4 \| M'_6M'_8 \| B'_4M'_5 \| B'_2M'_1$ ؛

$M'_3M'_5 \| M'_1M'_7 \| B'_1M'_6 \| B'_3M'_2$ ؛ $M'_4M'_6 \| M'_2M'_8 \| B'_1M'_7 \| B'_3M'_3$.



۳ . ۵. تبدیلهای آفین و تصویری در دایره

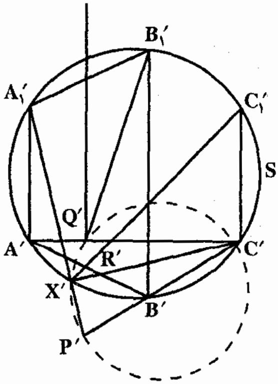
۳ . ۵ . ۱. مرکز تصویر، محور تصویر



۴۰۴. تصویر مرکزی که در آن دو صفحهٔ π و π' موازی باشند تجانس است. بنابراین باید مرکز تجانس دو دایره را بیابیم. برای این کار دو شعاع موازی و همجهت ωM و $\omega' M'$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد $\omega\omega'$ و MM' نقطهٔ O مرکز تجانس یا مرکز تصویر است.

۳ . ۵ . ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۳ . ۵ . ۲ . ۱. نقطه‌ها همخطند



(الف)

۴۰۵. اگر O بر S منطبق باشد، مسأله بی‌معنی است. مانده است دو حالت زیر را بررسی کنیم:

۱. O نقطه‌ای است در خارج S. صفحهٔ نمودار را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که دایرهٔ S به یک دایرهٔ S' بدل شود، و O به یک نقطهٔ بینهایت O' از π'. بر اثر این تصویر، شکل صورت مسأله به شکل (الف) بدل می‌شود که:

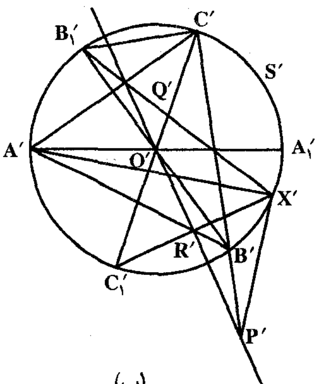
$A'A'_1 \| B'B'_1 \| C'C'_1$

نشان می‌دهیم که $P'Q' \| A'A'_1$. ذوزنقهٔ

$A'B'B'_1A'_1$ محاط در S' متساوی‌الساقین است؛ $A'B' = A'_1B'_1$، بنابراین $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{A'_1B'_1}$ و $A'\hat{C}'B' = A'_1\hat{X}'B'_1$، ولی این تساویها ایجاب می‌کنند که نقطه‌های X'، C'، P' و Q' بر یک دایره قرار داشته باشند. بنابراین $X'\hat{P}'Q' = X'\hat{C}'Q' = X'\hat{C}'A'$. ولی $X'\hat{C}'A' = X'\hat{A}'_1A'$، پس $X'\hat{P}'Q' = X'\hat{A}'_1A'$ و بالاخره $P'Q' \| A'A'_1$. به طریقی مشابه ثابت می‌کنیم که $Q'R' \| B'B'_1$. پس داریم:

$$P'Q' \| Q'R' \| A'A'_1$$

که بدین معنی است که P'، Q' و R' بر خطی قرار دارند که بر نقطهٔ بینهایت O' می‌گذرد. ازآن‌جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های P، Q و R، شکل صورت مسأله، بر یک خط واقعند که بر O می‌گذرد.



(ب)

۲. O نقطه‌ای است در داخل S. صفحهٔ شکل صورت مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که S به یک دایرهٔ S' بدل شود و O به O'، مرکز S' (شکل(ب)).

ثابت می‌کنیم که $P'Q'$ از O' می‌گذرد. بدین‌منظور اوّل اثبات می‌کنیم که:

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} \qquad (۱)$$

که S_{XYZ} معرف مساحت ΔXYZ است.

حال اگر XY یک خط باشد، پاره‌خط رسم شده از O' و عمود بر XY، یا طول آن را، (که معنی موردنظر از متن پیدا خواهد شد) به h_{XY} نشان می‌دهیم. پس:

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}} = \frac{P'A'_1 \cdot h_{X'A'_1}}{P'B' \cdot h_{B'C'}} \quad \text{و} \quad \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}} = \frac{Q'A' \cdot h_{C'A'}}{Q'B'_1 \cdot h_{X'B'_1}} \qquad (۲)$$

یادآور می‌شویم که $h_{X'A'_1}$ میانخط $\Delta X'A'_1A'$ است، بنابراین:

$$h_{X'A'_1} = (\tfrac{۱}{۲})X'A'$$

همچنین:

$$h_{B'C'} = (\tfrac{۱}{۲})B'_1C'$$

باز از تشابه مثلثهای $A'Q'X'$ و $B'_1Q'C'$ نتیجه می‌شود که:

$$\frac{A'X'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1}$$

پس:
$$\frac{h_{X'A'_1}}{h_{B'C'}}=\frac{X'A'}{B'_1C'}=\frac{Q'A'}{Q'B'_1}$$

همچنین، با استدلالی مشابه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{h_{C'A'}}{h_{X'B'_1}}=\frac{P'A'_1}{P'B'}$$

از قرار دادن این رابطه‌ها در تساویهای (۲)، به رابطهٔ (۱) می‌رسیم.
حال نقطهٔ برخورد $P'Q'$ را با ضلع $A'C'$ از $\Delta A'B'C'$ به Q'_1 نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم h_1 ، h_2 ، h_3 و h_4 طولهای عمودهای رسم شده از نقطه‌های A'_1 ، B' ، A' و B'_1 برخط $P'O'Q'_1$ باشند. چون $O'A'=O'A'_1$ ، از آن‌جا نتیجه می‌شود که $h_1=h_3$ و به طریق مشابه $h_2=h_4$. بنابراین:

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'} \quad و \quad \frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{P'O'}{Q'_1O'}$$

و بنابراین:
$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'_1O'A'}}=\frac{S_{P'O'B'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}$$

یا:
$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'}}=\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}} \qquad (۳)$$

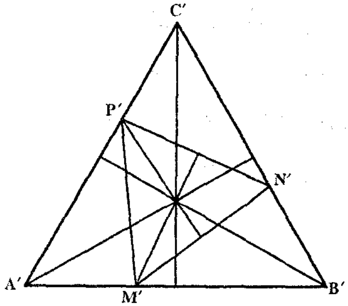
از مقایسهٔ تساویهای (۳) و (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{S_{Q'_1O'A'}}{S_{Q'_1O'B'_1}}=\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'_1}}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که Q'_1 بر Q' منطبق است.
استدلالی مشابه، نشان می‌دهد که R' برخط $O'P'$ قرار دارد. پس، P' ، Q' و R' بر یک خط گذرنده بر O' واقعند، و حکم مسأله نتیجه می‌شود.

۳.۵.۲.۲. نقطه‌ها برهم منطبقند

۴۰۶. الف. یک تصویر موازی مناسب، مثلث ABC را بر مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$



در یک صفحهٔ π' می‌نگارد، و نیز به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی، این نگاشت نقطه‌های M ، N و P را به نقطه‌های M' ، N' و P' بدل می‌کند به‌طوری که $A'M'/M'B' = B'N'/N'C' = C'P'/P'A'$ (شکل). دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویهٔ ۱۲۰° ، ضلعهای $A'B'$ ، $B'C'$ و $C'A'$ را بترتیب به ضلعهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ بدل می‌کند، و نقطه‌های M' ، N' و P' را بترتیب به نقطه‌های N' ، P' و M'. بنابراین دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویهٔ ۱۲۰°، مثلث $M'N'P'$ را به خودش بدل می‌کند؛ اما این بدین معنی است که مثلث اخیر متساوی‌الاضلاع است و مرکزش بر مرکز مثلث $A'B'C'$ منطبق است. به عبارت دیگر، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث $M'N'P'$ بر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث $A'B'C'$ منطبق است. چون یک تصویر موازی میانه‌های یک مثلث را به میانه‌های نگاره‌اش بدل می‌کند، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث MNP بر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC منطبق می‌شود.

ب. برهان مشابه با حل قسمت (الف).

۳ . ۵ . ۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۳ . ۵ . ۳ . ۱. خطها موازی‌اند

۴۰۷. توجه می‌کنیم که، مجموع طولهای دو تصویر یک پاره‌خط، بر خط راست مفروض l و خط راست l' عمود بر آن، کمتر از واحد نیست. درواقع، اگر بردار a به‌طول واحد، با یکی از پاره‌خطها موازی باشد، و بردارهای x و y، تصویرهای بردار a بر خطهای راست l و l' باشند، آن‌وقت:

$$a = x + y \Rightarrow |x| + |y| \geq |a| = ۱$$

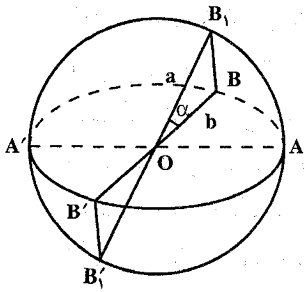
ولی طول تصویرهای پاره‌خط، برابر $|x|$ و $|y|$ است، بنابراین مجموع آنها هم، از واحد کوچکتر نیست. به این‌ترتیب، مجموع طول تصویرهای همهٔ پاره‌خطها، از ۴n کمتر نیست. یعنی، از بین دو خط راست l و l' می‌توان خط راستی را انتخاب کرد که، مجموع طول تصویرهای پاره‌خطها بر آن، از ۲n کمتر نباشد. درنتیجه، روی خط

راست انتخابی، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست‌کم، متعلق به تصویر دوتا از پاره‌خطهاست. اگر از این نقطه، خط راستی عمود بر خط راست انتخابی رسم کنیم، دست‌کم، این دو پاره‌خط را قطع می‌کند. چون این خط راست، یا موازی خط راست l و یا عمود بر آن است ؛ همان خط راستی است که مسأله می‌خواهد.

۳ . ۵ . ۴ . زاویه

۳ . ۵ . ۴ . ۱ . اندازهٔ زاویه

۴۰۸. تصویر دایرهٔ به شعاع a روی صفحه‌ای که با آن زاویهٔ α می‌سازد، یک بیضی با نیمه قطرهای a و b است به قسمی که $\frac{b}{a} = \cos\alpha$ است. بنابراین داریم :



b = ۳ = ۶:۲ و a = ۴ = ۸:۲ ، شعاع دایره ۴ = a

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arc}\cos(\frac{۳}{۴})$$

۳.۵.۵. پاره‌خط

۳.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۰۹. الف. تصویر دایرهٔ S بر خط AB از M، نقطه‌های A، B، N و P بر دایره را به A، B، O و E بر آن خط بدل می‌کند. تصویر S بر AB از Q همین چهار نقطه را به A، B، F و O بدل می‌کند. از آن‌جا نتیجه می‌شود که نسبتهای ناهمساز چهار نقطهٔ A و B ؛ O و E، و A و B ؛ F و O مساویند، یعنی :

$$\frac{AO/BO}{AE/BE} = \frac{AF/BF}{AO/BO} = \frac{BO/AO}{BF/AF}$$

این رابطه، تساوی نسبتهای ناهمساز چهارتاییهای A و B ؛ O و E، و B و A ؛ O و F را ایجاب می‌کند. حال قرینهٔ چهارتایی A، B، O و E را نسبت به O، مرکز وتر AB پیدا می‌کنیم، و این، عمل چهارتایی ما را به B، A، O و F_1 بدل می‌کند که F_1 قرینهٔ E نسبت به O است. ولی در این صورت نسبتهای ناهمساز چهارتاییهای B و A ؛ O و F، و B و

و A ؛ O و F_1 مساویند که تساوی $F = F_1$ را ایجاب می‌کند، یعنی همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ب. این تعمیم قسمت (الف) است. استدلال که شبیه به استدلال قسمت (الف) است، به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

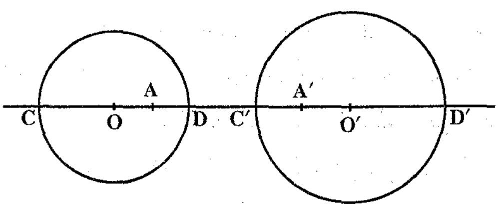
۳ . ۵ . ۶. رابطه‌های متری

۴۱۰. اگر صفحه‌ها موازی باشند، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می‌کنیم دو صفحه موازی نباشند، در این‌صورت، تصویر جسم بر خط راست l، فصل مشترک دو صفحه را می‌توان به‌عنوان تصویر هریک از تصویرهای جسم بر این یا آن صفحه، بر خط راست l به‌دست آورد (همه‌جا صحبت بر سر تصویر قائم است. مجموعهٔ پای عمودها)، ولی تصویر هر دایره بر خط راستی واقع در صفحهٔ خودش، برابر است با قطر دایره.

۳ . ۵ . ۷. ثابت کنید شکلها تبدیل‌یافتهٔ یکدیگرند

۴۱۱. اثبات به عنوان قضیه در قسمت ۳ . ۱ آمده است.

۸.۵.۳. رسم شکلها



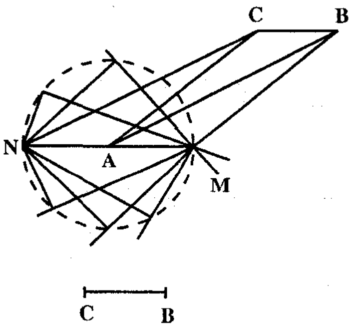
۴۱۲. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای است که نسبت به دو دایرهٔ (O) و (O') دارای یک خط قطبی است. خطهای OA و $O'A$ باید به این خط قطبی عمود باشند، و چون از A می‌گذرند، پس بر هم منطبقند. در نتیجه A باید روی خط‌المرکزین OO' واقع باشد (شکل). بنابراین باید روی OO' نقطه‌ای به‌دست آورد که نسبت به CD و $C'D'$، قطرهای دو دایره، دارای یک نقطهٔ مزدوج باشد. اما اگر A چنین نقطه‌ای باشد و B مزدوج آن، نسبت به CD و $C'D'$ فرض شود، می‌دانیم که هر دایرهٔ گذرنده بر A و B، بر دایرهٔ (O) و (O') عمود است و بعکس. به این ترتیب A به‌دست

می‌آید که نقطهٔ برخورد OO' با دایرهٔ عمود بر (O) و (O') می‌باشد. و مسأله عموماً دو جواب دارد که جواب دیگر را B می‌نامیم.
این نقطه‌های A و B، نقطه‌های حد دستگاه دایره‌های تشکیل شده از (O) و (O') می‌باشند و برای این که موجود باشند، باید دو دایرهٔ (O) و (O') متقاطع نباشند. اگر بر هم مماس باشند، مسأله دارای یک جواب خواهد بود.
در آنچه بیان شد فرض بر این بود که دو دایره متحدالمرکز نباشند. اکنون فرض می‌کنیم که متحدالمرکز باشند. اگر A نقطهٔ غیرمشخصی باشد، OA دایره‌ها را در CD و $C'D'$ قطع می‌کنند. اگر B و B' پای قطبیهای A نسبت به دو دایره باشند، داریم:

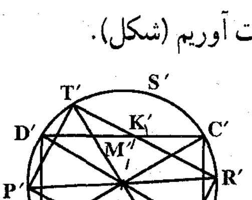
$$OC'^{2} = OA \times OB' \text{ و } OC^{2} = OA \times OB$$

این رابطه نشان می‌دهد که OB و OB' متساوی نیستند، پس در این قسمت مسأله جواب ندارد.

۴۱۳. پاره‌خط BC را که طولش مساوی شعاع مفروض باشد، رسم می‌کنیم. از A خطی موازی BC می‌کشیم و بر آن قطعه‌های MA و AN را مساوی با پاره‌خط BC جدا می‌کنیم. پاره‌خط MN قطر دایرهٔ خواسته شده است. حال خطی از M می‌گذرانیم و عمودی از N بر آن وارد می‌کنیم. پای این عمود بر دایرهٔ مطلوب واقع است. با تغییر خط گذرنده بر M می‌توانیم نقطه‌های دلخواه زیادی از دایرهٔ مطلوب را به دست آوریم (شکل).



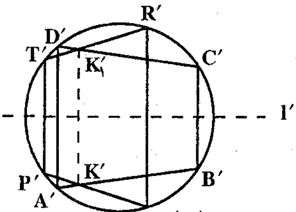
۴۱۴. الف. فرض می‌کنیم چهارضلعی خواسته‌شدهٔ ABCD رسم شده و نقطهٔ مفروض M نقطه برخورد قطرهای آن باشد، و AB و CD از نقطه‌های مفروض K و L بگذرند. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به‌گونه‌ای که دایرهٔ محیطی آن، S، به یک دایرهٔ S' بدل شود و M به نقطهٔ M'، مرکز S'. در این حال ABCD به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می‌شود.



(الف)

حال اگر $P'Q'R'T'$ یک چهارضلعی محاط در S' باشد که قطرهایش در مرکز M' متلاقی باشند (که مستطیل بودن آن را ایجاب می‌کند) و ضلع $P'Q'$ آن از K' بگذرد،

آن‌گاه ضلع $R'T'$ باید از K'_1، قرینهٔ K' نسبت به M' بگذرد (شکل (الف)). بدین ترتیب ضلعهای $R'T'$ در همهٔ چهارضلعیهای محاط در S'، که قطرهایشان در M' برخورد می‌کنند و ضلعهای $P'Q'$ آنها از K' می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K'_1 می‌گذرند. از این جا نتیجه می‌شود که ضلعهای RTی همهٔ چهارضلعیهای PQRT محاط در S که قطرهای آنها در یک نقطهٔ M برخورد می‌کنند و ضلعهای PQی آنها از K می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K_1 می‌گذرند. برای تعیین K_1 کافی است که دو تا از این چهارضلعیها را رسم کنیم. ضلع CDی چهارضلعی خواسته‌شدهٔ ABCD از وصل K_1 به L به‌دست می‌آید. اگر K_1L با S برخورد کند و K_1 غیر از L باشد، مسأله جوابی منحصربه‌فرد دارد. اگر K_1L دایرهٔ S را نبرد، مسأله جواب ندارد، و اگر K_1 بر L منطبق باشد، مسأله بینهایت جواب دارد.



(ب)

ب. فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی خواسته شدهٔ محاط در دایرهٔ S باشد که ضلعهای BC و ADی آن در یک نقطهٔ مفروض M برخورد کنند و ضلعهای AB و CDی آن بترتیب از نقطه‌های مفروض K و L بگذرند. صفحهٔ نمودار را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که S به یک دایرهٔ S' بدل شود و M به یک نقطهٔ بینهایت M' از π'. در این صورت چهارضلعی ABCD به یک ذوزنقهٔ $A'B'C'D'$ به قاعده‌های $B'C'$ و $D'A'$ بدل می‌شود (شکل (ب)). چون ذوزنقهٔ محاط در یک دایره است، پس متساوی‌الساقین است. یک چهارضلعی $P'Q'R'T'$، محاط در دایرهٔ S'، که ضلعهای $Q'R'$ و $T'R'$ آن در نقطهٔ بینهایت M' برخورد کنند، ذوزنقه‌ای است متساوی‌الساقین که محور تقارنش قطر l' از دایرهٔ S' عمود بر امتدادی است که با M' معین می‌شود. بنابراین، هرگاه ضلع $P'Q'$ از چهارضلعی، از نقطه‌ای مانند K' بگذرد ؛ آن‌گاه ضلع $R'T'$ از نقطهٔ K'_1، قرینهٔ K' نسبت به l'، خواهد گذشت. از آن‌جا نتیجه می‌شود که ضلعهای RT در همهٔ چهارضلعیهای محاطی PQRT، که ضلعهای QR و PTی آنها در M برخورد می‌کنند، و ضلعهای PQی آنها از K می‌گذرند، از نقطهٔ ثابت K_1 می‌گذرند. برای پیدا کردن K_1 کافی است دو تا از این چهارضلعیها را رسم کنیم. از وصل کردن K_1 به L، ضلع CDی چهارضلعی خواسته شده به دست می‌آید.

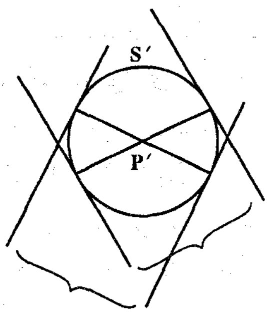
اگر K_1 از L متمایز باشد، مسأله (بسته به این که خط K_1L دایره را ببرد یا نبرد) یا یک جواب منحصر به فرد دارد و یا جوابی ندارد. اگر K_1 و L بر هم منطبق باشند، آن‌گاه مسأله بینهایت جواب پیدا می‌کند.

۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

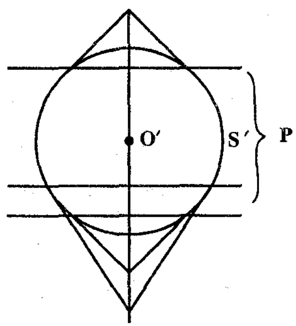
۴۱۵. دو حالت در نظر می‌گیریم :

۱. P نقطه‌ای است در خارج S. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم، به طوری که دایرهٔ S به یک دایرهٔ S'، و P به نقطهٔ بینهایت P' از π' بدل شوند. بر اثر این تصویر مکان خواسته شده به یک خط، یعنی به قطری از S' عمود بر امتدادی که به وسیلهٔ نقطهٔ بینهایت P' مشخص می‌شود، بدل می‌گردد (شکل (الف)). از آن‌جا نتیجه می‌شود که مکان خواسته شده یک خط است.

۲. P نقطه‌ای است در داخل S. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایرهٔ S' بدل شود، و P به P'، مرکز S'. روشن است که مکان خواسته شده در این صورت به خط بینهایت π' بدل می‌شود (شکل (ب)). از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان خواسته شده یک خط است. ملاحظه می‌کنیم که اگر P نقطه‌ای بر S باشد، آن‌گاه مکان خواسته شده، مماس بر S در P خواهد شد.



(ب)



(الف)

۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

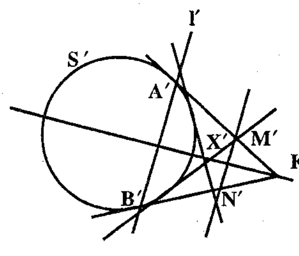
۴۱۶. الف. دو حالت در نظر می‌گیریم :

۱. P نقطه‌ای است در خارج S (شکل (الف) در صورت مسأله). صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایرهٔ S' و P به P'، نقطهٔ بینهایت π'، بدل شوند. در این حال خطهای AB و MN به خطهای $A'B'$ و $M'N'$ بدل می‌شوند (شکل (الف)). با توجه به ملاحظه‌های تقارن، نتیجه می‌شود که نقطه‌های

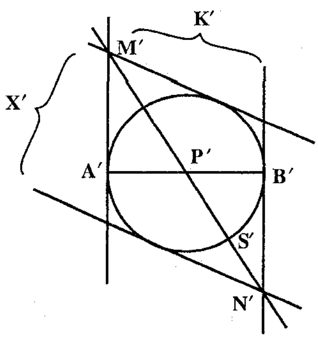
K' و X' (شکل (الف)) بر قطری از S' عمود بر خط l'، نگارهٔ l، قرار دارند. بنابراین مکان X' خطی است گذرنده بر K' و عمود بر l'. در نتیجه مکان X خطی می‌شود که بر K می‌گذرد.

۲. P نقطه‌ای است در داخل S. صفحهٔ نمودار را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به دایرهٔ S' و P به P'، مرکز S' بدل شود (شکل (ب)). در این صورت خطهای $A'B'$ و $M'N'$ قطرهای S' هستند. بنابراین مماسهای $A'K'$ و $B'K'$ بر S' در A' و B' موازی‌اند. بنابراین مماسهای دوم بر S' از M' و N' نیز موازی‌اند. ملاحظه می‌کنیم که در این حالت مکان X' خط بینهایت π' است. نقطهٔ K' نیز بر این خط است؛ پس مکان X خطی است که بر K می‌گذرد.

روشن است که شرایط مسأله حالتی را که P بر S است مستثنی می‌کند. (اگر P بر A منطبق باشد، M نیز بر A منطبق است، و در آن فقط یک مماس تنها بر S وجود دارد که همان خط AK است.)



(الف)



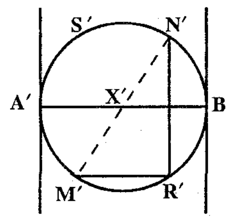
(ب)

ب. اگر P بر S باشد، روشن است که حکم مسأله صحیح است. (چون، اگر P بر A منطبق باشد، آن‌گاه N نیز بر A منطبق است و نقطهٔ ثابت X بر A منطبق می‌شود.) بنابراین باید مسأله را برای دو حالت زیر در نظر بگیریم:

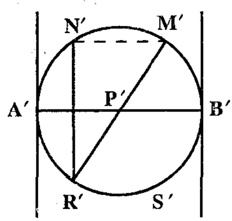
۱. P نقطه‌ای است در خارج S. صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایرهٔ S' بدل شود، و PK به خط بینهایت π' (شکل (پ)). پس AB به یک قطر $A'B'$ از S' بدل می‌شود، و خطهای AK و BK به مماسهای بر دایره در نقطه‌های A' و B'. به آسانی دیده می‌شود که $R'M'$ و $R'N'$

بر هم عمودند و بنابراین $M'N'$ قطری است از S'. پس به ازای هر انتخاب نقطهٔ R'، خط $M'N'$ از X'، مرکز S'، می‌گذرد؛ و حکم نتیجه می‌شود.

۲. P نقطه‌ای است در داخل S (شکل (ب) در صورت مسأله). صفحهٔ نمودار مسأله را بر یک صفحهٔ π' تصویر می‌کنیم به طوری که دایرهٔ S به یک دایرهٔ S' بدل شود و P به P'، مرکز S' (شکل (ت)). پس AB به قطر $A'B'$ از دایرهٔ S'، و K به نقطهٔ بینهایت K' از قطر عمود بر $A'B'$ بدل می‌شوند. چون $R'N' \perp A'B'$ و $M'N' \perp R'N'$، از این‌جا نتیجه می‌شود که $M'N' \| A'B'$؛ یعنی به ازای هر انتخاب نقطهٔ R'، خطهای $M'N'$ و $A'B'$ در نقطهٔ بینهایت X' از $A'B'$ برخورد می‌کنند، و حکم نتیجه می‌شود.



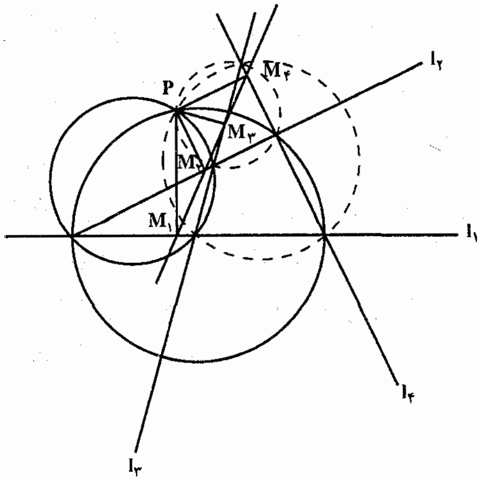
(پ)



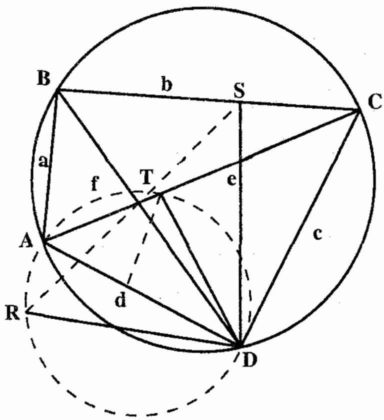
(ت)

۴۱۷. الف. فرض کنید l_1، l_2، l_3 و l_4 چهار خط مفروض باشند. دایره‌های محیطی مثلثهای حاصل از خطهای l_1، l_2، l_3 و l_1، l_2، l_4 را رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد این دایره‌ها (غیر از نقطهٔ برخورد l_1 و l_2) را به P نشان می‌دهیم (شکل (الف)). از P عمودهایی بر خطهای l_1، l_2، l_3 و l_4 رسم می‌کنیم؛ پاهای این عمودها را M_1، M_2، M_3 و M_4 می‌نامیم. نقطه‌های M_1، M_2 و M_3 بر یک خط واقعند، و نقطه‌های M_1، M_2 و M_4 نیز بر یک خط قرار دارند؛ در نتیجه، هر چهار نقطهٔ بالا بر یک خط واقعند. از همان مسأله نتیجه می‌شود که M_1، M_3 و M_4 تنها وقتی بر یک خط واقعند که P بر دایرهٔ محیطی مثلثی واقع باشد که ضلعهای آن را خطهای l_1، l_3 و l_4 پدید می‌آورند. به همین شیوه می‌توان نشان داد که P بر دایرهٔ محیطی مثلثی واقع است که ضلعهایش را خطهای l_2، l_3 و l_4 تشکیل می‌دهند.

ب. با علامت‌گذاریهای شکل صورت مسأله، داریم $MP \perp AB$ (زیرا زاویه‌های MPA و MPB روبه‌رو به قطرند)؛ به همین طریق داریم $MQ \perp AC$ و $ME \perp BC$. بنابراین،



(الف)



(ب)

P، Q، و R پاهای عمودهای رسم شده از نقطهٔ M واقع بر S، دایرهٔ محیطی ΔABC، بر ضلعهای این مثلث است.

ج. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محاطی باشد، و داشته باشیم $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$، $DA = d$، $AC = e$، $BD = f$ (شکل (ب)). از D عمودهای DR، DS و DT را بترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA از ΔABC فرود می‌آوریم، نقطه‌های R، S و T پاهای این عمودها، بر یک راستا واقعند. روشن است که می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی ATDR محیط کرد. پاره‌خط AD قطری از این دایره خواهد بود. از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$TR = AD \sin T\hat{D}R = d \sin T\hat{D}R$$

اما داریم $T\hat{D}R = B\hat{A}C$ (ضلعهایشان بر هم عمودند)، و با توجه به ΔABC نتیجه می‌شود که:

$$\sin B\hat{A}C = BC / 2r = b / 2r$$

که در آن r شعاع دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD است. پس داریم:

$$TR = d\frac{b}{2r} = \frac{bd}{2r}$$

درست به همین طریق می‌توان رابطه‌های زیر را به دست آورد:

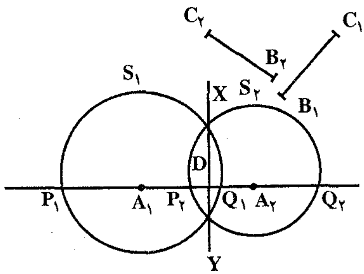
$$TS = \frac{ac}{2r}, \quad RS = \frac{ef}{2r}$$

بعلاوه، چون نقطه‌های R، S و T بر یک خط واقعند (شکل (ب))، داریم :

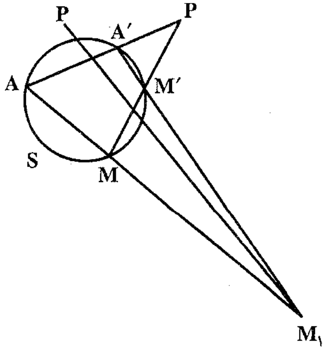
$$RT + TS = RS \Rightarrow \frac{bd}{۲r} + \frac{ac}{۲r} = \frac{ef}{۲r} \Rightarrow bd + ac = ef$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۱۸. نخست باید $P_۱$ و $Q_۱$، $P_۲$ و $Q_۲$، نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین $A_۱A_۲$ را با $S_۱$ و $S_۲$ تعیین کنیم. روشن است که اگر پاره‌خطهای $P_۱Q_۱$ و $P_۲Q_۲$ یکی در بیرون دیگری، یا یکی در داخل دیگری باشد، $S_۱$ و $S_۲$ متقاطع نیستند. مانده است حالتی که $P_۲$ درون پاره‌خط $P_۱Q_۱$ و $Q_۱$ درون پاره‌خط $P_۲Q_۲$ قرار داشته باشد.



حال D، نقطهٔ برخورد خط‌المرکزین $A_۱A_۲$ را با XY، وتر مشترک $S_۱$ و $S_۲$ تعیین می‌کنیم (X و Y نقطه‌های مطلوب برخورد دایره‌ها هستند). بدین منظور تبدیل تصویری خط $A_۱A_۲$ را که یک نقطهٔ واقعی R را به نقطهٔ R' بدل می‌کند، چنان که $R\hat{X}R' = ۹۰^\circ$، در نظر می‌گیریم. این تبدیل، تصویری است؛ زیرا می‌تواند بترتیب زیر به دست آید: $A_۱A_۲$ را از نقطهٔ X بر یک دایرهٔ S، گذرنده بر X، تصویر می‌کنیم، سپس S را در حول مرکزش به زاویهٔ ۱۸۰° دوران می‌دهیم، و سپس S را از X بر $A_۱A_۲$ تصویر می‌کنیم. این تبدیل $P_۱$ را به $Q_۱$، و $Q_۱$ را به $P_۱$، و $P_۲$ را به $Q_۲$ بدل می‌کند. پس نگاره‌های این سه نقطه بر l به‌دست می‌آیند. با استفاده از ستارهٔ تنها می‌توانیم به آسانی نگارهٔ یک نقطهٔ قبلاً مشخص شدهٔ M بر l را بر اثر تبدیل تصویری خود تعیین کنیم؛ زیرا می‌توانیم تبدیل را با تصویر l بر خط دیگر $l_۱$، بعد با تصویر $l_۱$ بر خط دیگر $l_۲$، و سپس تصویر دوبارهٔ $l_۲$ بر l تحقق بخشیم. به ویژه نقطهٔ D می‌تواند به عنوان نگارهٔ نقطهٔ بینهایت خط l پیدا شود (این امر مستلزم رسم خطی است موازی با l، و این ترسیم می‌تواند به کمک ستارهٔ تنها انجام گیرد.) خط XY در D بر $A_۱A_۲$ عمود است، پس نقطه‌های X و Y به صورت نقطه‌های برخورد XY با یکی از دایره‌های $S_۱$ یا $S_۲$ معین می‌شوند.



۴۱۹. گیریم P یک نقطه و S یک دایره باشد. منظور از تصویر S بر خودش از P، تبدیلی است که یک نقطهٔ M بر S را به M'، دومین نقطهٔ برخورد PM و S، بدل می‌کند (شکل). این تبدیل، تبدیلی است تصویری. زیرا فرض می‌کنیم A و A' یک جفت نقطهٔ متناظر باشند، و M و M' یک جفت دیگر. M_1، نقطهٔ برخورد AM و $A'M'$، بر خط ثابت p، قطبی P نسبت به S قرار دارد. این نشان می‌دهد که تبدیلی که M را به M' بدل می‌کند؛ می‌تواند ابتدا به وسیلهٔ تصویر S از A بر خط p (که M را به M' بدل می‌کند، (شکل)) تحقق یابد. بنابراین، تبدیل از M به M' تبدیلی است تصویری، همان گونه که ادعا کرده بودیم.

الف. رشته تبدیلهای تصویری از دایره را به شرح زیر در نظر می‌گیریم: دایره را ابتدا از P و سپس از Q، و بالاخره از O بر خودش تصویر می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که اثر این تبدیلها بر رأسهای چهارضلعی محاطی چنین است:

$$D \to C \to B \to D, C \to D \to A \to C, B \to A \to D \to B, A \to B \to C \to A$$

این نشان می‌دهد که تبدیل تصویری حاصل، چهار نقطهٔ ثابت دارد، پس تبدیلی است همانی. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر تصویر دایرهٔ S بر خودش از P، یک نقطهٔ E از S را به F بدل کند، و تصویر از Q، F را به G، آن‌گاه تصویر از O، G را به E بدل می‌کند. اما معنی این مطلب این است که اگر دو ضلع EF و FG از یک مثلث محاطی از P و Q بگذرند، ضلع EG از O خواهد گذشت.

عیناً به همین طریق نشان می‌دهیم که رشته تصویرهای دایره بر خودش، با مرکزهای تصویر O، P و Q تبدیلی است همانی (زیرا رأسهای چهارضلعی ABCD را ثابت نگاه می‌دارد). از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر دوضلع یک مثلث محاطی از O و P بگذرند، ضلع سوم از Qخواهد گذشت.

ب. رشته تصویرهای دایرهٔ S را بر خودش، از P وQ، مجدداً از P، و باز از Q در نظر می‌گیریم. رأسهای چهارضلعی ABCD چنین تبدیل می‌شوند:

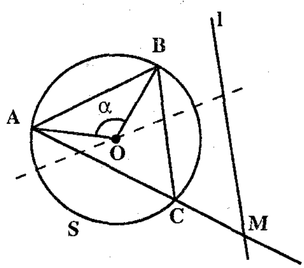
$$D \to C \to B \to A \to D \quad , \quad C \to D \to A \to B \to C \quad ,$$
$$B \to A \to D \to C \to B \quad , \quad A \to B \to C \to D \to A$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که تبدیل حاصل، تبدیلی است همانی؛ پس اگر تصویر دایرهٔ S بر

خودش از P، A_1 را به B_1 بدل کند، تصویر از Q، B_1 را به C_1 ، و تصویر از P ، C_1 را به D_1 ، آن‌گاه تصویر از Q ، D_1 را به A_1 بدل می‌کند. اما این بدین معنی است که هرگاه ضلعهای A_1B_1 و C_1D_1 از یک چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ محاط در یک دایره، از نقطهٔ P بگذرند، و ضلع B_1C_1 از Q بگذرد، آن‌گاه ضلع D_1A_1 نیز از Q می‌گذرد. گرفتن O ، نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD ، به عنوان مرکز یک تصویر از دایره بر خودش، با پیدا کردن رشته تصویرهای دایره بر خودش از P و Q هم‌ارز است. نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ حاصل نیز همین ویژگی را دارد و بنابراین باید بر O منطبق باشد.

ج. برهان کاملاً مشابه برهان (ب) است، و آوردن آن به عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود.

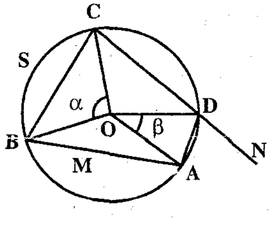
۴۲۰. الف. زاویهٔ مرکزی وتری به‌طول مفروض AB از دایرهٔ S را به α نشان می‌دهیم. سپس فرض می‌کنیم که خط l معرف امتداد ضلع BC باشد و M نقطه‌ای بر AC (شکل (الف)). تبدیل تصویری از S را به شرح زیر درنظر می‌گیریم:



(الف)

دوران S حول مرکزش به زاویهٔ α ، سپس تقارن Sنسبت به قطر عمود بر l، و بعد تصویرS بر خودش از M . روشن است که A یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است (داریم : $A \to B \to C \to A$). پس A می‌تواند به عنوان یک نقطهٔ ثابت از تبدیل معلومی معین شود. مسأله ممکن است دارای دو یا چند جواب باشد و یا جوابی نداشته باشد (به آسانی می‌توان نشان داد که تبدیل تصویری نمی‌تواند یک تبدیل همانی باشد).

ب. فرض می‌کنیم M و N نقطه‌های مفروض بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی مطلوب باشند، و α و β زاویه‌های مرکزی دایرهٔ روبه‌رو به وترهای معلوم BC و AD (شکل (ب)). تبدیل تصویری از دایره به شرح زیر را درنظر می‌گیریم:



(ب)

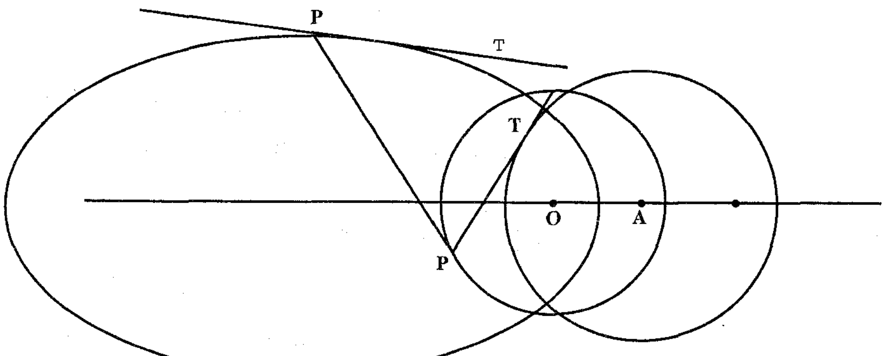
تصویر S از M بر خودش، و بعد دوران S در حول مرکزش به زاویهٔ α ، سپس تصویر S از نقطهٔ N بر روی خودش، و بالاخره دوران S حول مرکزش به زاویهٔ β . روشن است که A یک

نقطهٔ ثابت تبدیل است (داریم $A \to B \to C \to D \to A$) این کلید ترسیم است. مسأله ممکن است دو جواب یا یک جواب داشته باشد و یا جوابی نداشته باشد، و در موارد استثنایی ممکن است نامعین باشد.

۶.۳.تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۱.۶.۳. مرکز تصویر، محور تصویر

۴۲۱. برای شکل زیر، OA یک محور تقارن است. برای بیضی و هذلولی محور تقارن دیگری عمود بر OA می‌توان درنظر گرفت.



۴۲۲. نقطه‌های P'_1 و P'_2 را نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ عظیمهٔ از کرهٔ α' می‌گیریم که یکی از آنها بر O و A می‌گذرد. در این صورت P_1 و P_2 در صفحهٔ α نقطه‌های برخورد خطی گذرنده بر A با دایره‌ای هستند که از دو نقطهٔ Q_1 و Q_2 می‌گذرد و این دو نقطه دوسر قطری از دایره به مرکز A و به شعاع $2k$، یعنی دوسر قطری از دایرهٔ تصویر استوا می‌باشند. چون داریم:

$$AP_1 . AP_2 = AQ_1 . AQ_2 = -(2k)^2$$

پس P_1 و P_2 توسط یک انعکاس منفی به‌هم مربوط می‌باشند که ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به دایرهٔ تصویر استوا با نیمدور حول A.

۲.۶.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۶.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۲۳. این دایره منعکس دایرهٔ α نسبت به ω است.

۳.۶.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۶.۳. خطها موازی‌اند

۴۲۴. صفحه‌های تصویرکنندهٔ دو خط هادی، باهم موازی‌اند. پس فصل مشترکهای آنها با هر صفحه، دو خط موازی است.

۴.۶.۳. زاویه

۱.۴.۶.۳. اندازهٔ زاویه

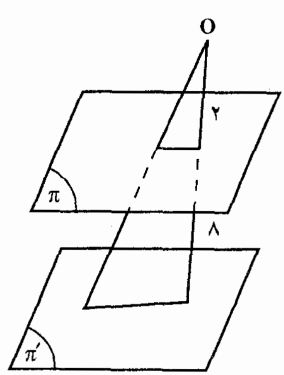
۴۲۵. تصویر جسم نمایی حالت خاص انعکاس است.

۵.۶.۳. پاره‌خط

۱.۵.۶.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۴۲۶. تصویر مرکزی با صفحه‌های موازی π و π' تجانس به مرکز O است. نسبت این تجانس مساوی $\frac{۱۲}{۴}=۳$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{M'N'}{MN}=۳ \Rightarrow \frac{M'N'}{۶}=۳ \Rightarrow M'N'=۱۸$$



۶.۶.۳. رابطه‌های متری

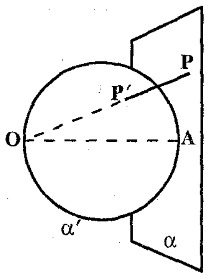
۴۲۷. اگر P را بر شاخهٔ چپ هذلولی بگیریم، داریم:

$$OP - O_1P = \varepsilon_\circ PK - \varepsilon_\circ PK_1 = -\varepsilon_\circ KK_1$$

اگر P بر شاخهٔ سمت راست هذلولی باشد، علامت حاصل تغییر می‌کند.

۷.۶.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

۴۲۸. صفحهٔ عمودمنصف OA(شکل) کرهٔ α' را در یک دایرهٔ عظیمهٔ خاص قطع می‌کند که اصطلاحاً آن را استوا می‌نامیم. این استوا هر دایرهٔ عظیمهٔ دیگر از کره را در دو نقطه قطع می‌کند که در دو سر یک قطر واقعند. ویژگی استوا این است که تصویرهای قطرهای آن روی صفحهٔ α عبارتند از قطرهای دایره‌ای از این صفحه که مرکزش A و شعاعش ۲k می‌باشد.



۸.۶.۳. رسم شکلها

۴۲۹. کرهٔ α' را درنظر می‌گیریم که بر دوازده یال مکعب در وسط آنها مماس می‌باشد. یکی از نقطه‌های برخورد این کره با خط واصل بین دو رأس روبه‌رو از مکعب را O می‌نامیم. O را مرکز تصویر جسم نمایی نسبت به کرهٔ α' قرار می‌دهیم.
(هرگاه یکی از نقطه‌های برخورد خط واصل بین مرکزهای دو وجه روبه‌رو با کرهٔ α' را O و مرکز تصویر برگزینیم، شکل حاصل متقارن چیستان اشتینر در حالت $n = ۴$ خواهد بود).

فهرست منابع جلد ۹

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلداول. هاورد.و.ایوز. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم‌وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم‌وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخرـ رابرت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.

۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.

۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضایاسی‌پور. نشر ناس، نشر نام.

۶. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضایاسی‌پور. نشر ناس، نشر نام.

۷. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا...محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.

۸. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.

۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای اس کلامکین. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی‌اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۱. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.

۱۲. آلمپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری‌ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.

۱۳. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ.س.م. کوکس‌تیر ـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.

۱۴. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسا.

۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۷. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشل. ترجمهٔ دکترحسن‌صفاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۱۸. تبدیلهای هندسی. جلداول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسداله‌کارشناس ـ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۹. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ محمدباقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۱. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۲. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج‌پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۳. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۴. ۴۵۰ مسأله ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۵. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۶. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۷. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۸. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان اله‌قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۹. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۰. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۱. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۳۲. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۳. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی‌ـ

علی‌حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسه مطبوعاتی شرقی.
۳۴. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی اصغر شیخ‌رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۵. خلاصهٔ زندگینامه علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامه بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۶. خلاقیت ریاضی. جورج‌پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۷. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۸. درپی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۹. دوره حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکترحسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۰. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۱. دورهٔ مجله ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۲. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۴۳. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۴. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۴۵. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۶. ریاضیات زنده. ی، پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۷. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل‌بل. ترجمهٔ دکترحسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۸. سرگرمیهای هندسه. ی، پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضایاسی‌پور.
۵۰. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی‌اصل ـ دکتر علیرضاجمالی. انتشارات فاطمی.
۵۱. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۵۲. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضایاسی‌پور.
۵۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری۔

ابراهیم عادل. نشر بردار.

۵۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.

۵۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۵۶. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و.د.چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.

۵۷. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.

۵۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویزشهریاری. انتشارات فردوس.

۵۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای.خ. سیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضابهنیا. انتشارات احمد علمی.

۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت.سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمدقزل‌اباغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز.ت.سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. جیمز. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینوگاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و.س.کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.

۶۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف‌کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف‌کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی‌ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌الله‌قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوّار تهران.

۶۸. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ

پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۶۹. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۷۰. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی ـ چنتسوف ـ یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید ـ انتشارات فردوس.
۷۱. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۷۲. نابرابریهای هندسی. نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمهٔ دکترمحمدحسن بیژن‌زاده. مرکزنشر دانشگاهی تهران.
۷۳. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۷۴. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفامحمدبن محمدالبوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین‌جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م.هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضابهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغرشیخ‌رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۷. هندسه تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۷۸. هندسه‌های جدید. جیمز.ار.اسمارت. ترجمهٔ غلامرضایاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعه کتابهای سیمرغ.
۸۰. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمدشرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۸۱. هندسه دوایر. دکترمحسن هشترودی. از انتشارات مجله ریاضی یکان.
۸۲. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۸۳. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۸۴. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۸۵. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۸۶. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۷. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ

محمودنصیری. انتشارات مبتکران.
۸۸. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.
۹۰. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

91. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR. F. G. M.

92. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.Th.CARONNET.

93. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES). PAR.G.PAPELIER.

94. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLAIRES) PAR G.PAPELIER.

95. GEOMETRY A HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE. GENE MURROW.

96. GIANT COLOUR BOOK OF MATHEMATICS BY IRVING ADLER.

97. GUIDES PRATIQUES BORDAS.

II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.

98. JACOBS HAROLD. R.GEOMETRY.

99. LES NOMBRES ET LEURS MYSTE´RES PAR ANDRE´ WARUSFEL.

100. MATHEMATICS AROUND US.

101. ME´MENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR. A. PONT.

102. PLANE GEOMETRY. WIIH SPACE CONCEPTS.A.M. WELCHONS.W.R KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.

103. PRECIS DE GE´OME´TRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND.P.TURMEL.

104. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

105. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

106. RESOLUTION DES PROBLEMES ELE´MENTAIRES DE GEOMETRIE PAR. E.J.HONNET.

107. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC DONOUGH. ALVIN. J. HANSEN.