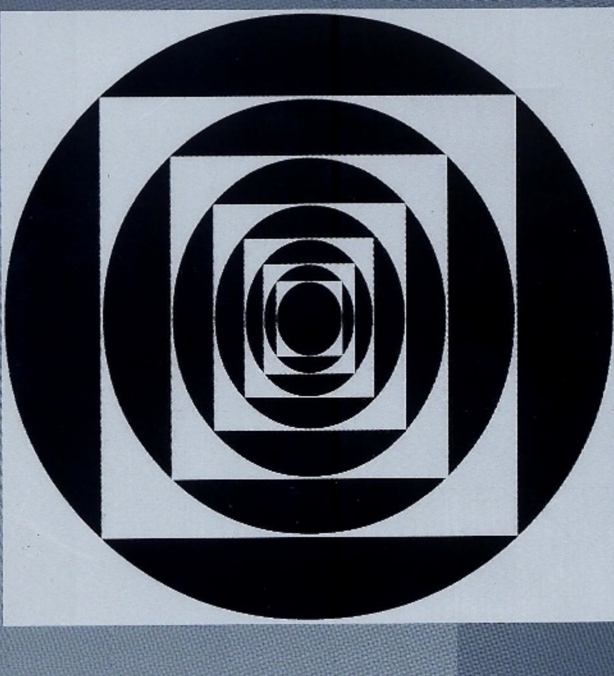
دانشگاه زنجان

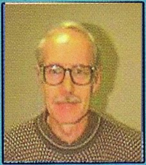
درآمدی به نظریهٔ مجموعه‌ها

ویرایش سوم، با افزایش و پیرایش بسیار

کارل هرباتسِک
توماس یِخ



ترجمهٔ
دکتر سعید مقصودی
دکتر سیدمجید جعفریان امیری



کارل هرباتسِک استاد گروه ریاضی دانشگاه نیویورک و نویسنده بیش از ۲۰ مقاله تخصصی در نظریه مجموعه ها و منطق است . دکتر هرباتسِک عضو انجمن ریاضی و جامعه ریاضی آمریکا و همچنین انجمن منطق صوری است. وی مدرک دکتری خود را در سال ۱۹۶۶ از دانشگاه چارلز چکوسلواکی دریافت کرده است.

توماس یِخ استاد ریاضیات در دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا است. وی نویسنده شش کتاب و بیش از ۱۰۰ مقاله تخصصی است. دکتر یخ ویراستار یکی از مجلات معتبر منطق است. وی دکتری خود را در سال ۱۹۶۶ از دانشگاه چارلز چکوسلواکی دریافت کرده است.

پیشگفتار مترجمان

امروزه امری مسلم است که در ریاضیات بدون آنچه گئورگ کانتور در خلال سال‌های ۱۸۷۹ تا ۱۸۸۴ به جهان ریاضیات عرضه کرد چیز زیادی نمی‌توان گفت. کتابی که پیش روی دارید ترجمهٔ کتابی است که برای تدریس در دورهٔ کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد در دانشگاه‌های آمریکا نوشته شده است و یکی از بهترین کتاب‌ها در این زمینه است. هم کتاب و هم نویسندگان آن بی‌نیاز از تعریف‌اند و فقط به این نکته اشاره می‌کنیم که این کتاب تاکنون سه‌بار ویرایش و چاپ شده است. در این کتاب نویسندگان بدون درگیرشدن در صورتگرایی منطقی به ارائهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها به روش اصل موضوعی می‌پردازند. تا آنجا که ما می‌دانیم این کتاب بعد از کتاب بسیار خواندنی و کلاسیک هالموس تنها کتابی است که به زبان فارسی به این موضوع می‌پردازد. البته این کتاب نه از لحاظ حجم و نه از لحاظ سبک و محتوی قابل مقایسه با کتاب هالموس نیست. ما نیز همانند نویسندگان کتاب امیدواریم این کتاب برای دانشجویان و علاقه‌مندان فارسی‌زبان نظریهٔ مجموعه‌ها مفید باشد.

اما چند جمله‌ای دربارهٔ این ترجمه. کوشیده‌ایم تعادلی بین روان بودن متن و وفاداری به اصل برقرار سازیم. برای یکدست بودن ترجمه، به دلایلی، تصمیم بر آن شد که یکی از ما (م. ج. ا.) بخش تمرین‌ها و دیگری (س. م.) مابقی متن را ترجمه و متن را یکدست کند. برابرنهادهٔ اصطلاحات تخصصی را تماماً مطابق با واژه‌نامهٔ

انجمن ریاضی ایران آورده‌ایم. در موارد دیگر از برابرنهاده‌هایی که در مجلات تخصصی و ترجمه‌های معتبر به کاربرده شده‌اند، استفاده کرده‌ایم. متأسفانه واژه‌نامهٔ انجمن ریاضی بسیار قدیمی است و نیاز به تدوین واژه‌نامه و یا واژه‌نامه‌هایی در حوزه‌های مختلف ریاضی به شدت احساس می‌شود. در ضبط اسامی خاص سیاست گفته‌شده در پیشگفتار کتاب فرهنگ تلفظ نامهای خاص (ف. مجیدی، فرهنگ معاصر، ۱۳۸۱) را برگزیده‌ایم و تمامی اسامی خاص را مطابق آن مرجع ضبط کرده‌ایم.

این ترجمه به سه تن وامدار است: اول، به سرکار خانم لطفی که در تبدیل دست‌نوشته‌های نه چندان خوانای اولیه به صورت زیبای فعلی با نرم افزار فارسی‌تک از هیچ کوششی دریغ نورزیدند. دوم، دوست گرانقدرمان دکتر علیرضا امینی هرندی از دانشگاه شهرکرد که در پیراستن متن از لغزش‌های علمی سعی بلیغ کردند. و سوم، آقای دکتر محمد ابراهیم‌پور از دانشگاه تبریز که در ویرایش گفتار و نوشتار این ترجمه جهد تمام نمودند.

آخر از همه اما نه کمتر از همه، از پدر، مادر، همسر، و فرزندانمان بی‌نهایت سپاسگزاریم. به آن‌ها بیش از آنچه قادر به بیان آن باشیم مدیونیم. به نشانهٔ قدرشناسی این ترجمه را به آن‌ها تقدیم می‌کنیم.

سعید مقصودی
سیدمجید جعفریان امیری
تابستان ۱۳۹۰

پیشگفتار ویرایش سوم

نه تنها از زمان چاپ ویرایش نخست این کتاب در سال ۱۹۷۸ که حتی از زمان عرضهٔ ویرایش دوم در سال ۱۹۸۴ به بعد، شاهد رشد فوق‌العاده‌ای در نظریهٔ مجموعه‌ها بوده‌ایم. علاوه بر این، بسیاری از اندیشه‌هایی که در آن زمان در مرز تحقیقات بودند، اکنون ابزارهای مهمی در دیگر شاخه‌های ریاضیات به حساب می‌آیند. برای مثال، هم‌اکنون اصل‌های ترکیبیاتی مانند اصل لوزی و اصل مارتین، ابزارهای ناگزیری در توپولوژی عمومی و جبرند. مجموعه‌های غیردرست‌بنیان به زمینهٔ مناسبی برای معناشناسی زبان‌های ساختگی و همچنین برای زبان‌های طبیعی تبدیل شده‌اند. آنالیز غیراستاندارد، که بر ساختارهایی مبتنی بر فراپالایه‌ها بنا شده است، به یک فن و مبحث مستقل با بسیاری کاربردهای شگفت‌انگیز گسترش یافته است. گنجاندن برخی از اندیشه‌های نظریه‌ـمجموعه‌ای مذکور در کتابی درسی که به منظور درآمدی عمومی به موضوع در نظر گرفته شده است، مناسب به نظر می‌رسد. این کار را در قالب چهار فصل جدید (فصل‌های ۱۱ــ۱۴)، که خود موضوعات فصل ۱۱ ویرایش دوم را بسط می‌دهند و شامل بسیاری مطالب جدید دیگر نیز می‌باشند، انجام داده‌ایم. فصل ۱۱ مفاهیم پالایه‌ها و فراپالایه‌ها را عرضه می‌کند و همچنین خواص پایه‌ای مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران و مانا را بسط می‌دهد و با اثباتی از قضیهٔ سیلور خاتمه می‌یابد. دو بخش اول فصل ۱۲ درآمدی به حسابان در اختیار می‌گذارند. در دو بخش بعدی آن فصل، درخت‌ها را مورد

بررسی قرار می‌دهیم و رابطهٔ آن‌ها با مسئلهٔ سوسلین نشان داده می‌شود. بخش ۵ از فصل ۱۲ درآمدی است بر اصول ترکیبیاتی. فصل ۱۳ به مسئلهٔ اندازه و اعداد اصلی اندازه‌پذیر اختصاص دارد. موضوع فصل ۱۴ بررسی نسبتاً جامعی از مجموعه‌های درست‌بنیان و غیردرست‌بنیان است.

فصل‌های ۱ تا ۱۰ ویرایش دوم به‌طور کامل بازنگری و با ترتیب جدیدی نوشته شده است. مطالب مربوط به اعداد گویا و گنگ در فصل ۱۰ ادغام شده‌اند. در نتیجه وقفه‌ای در ارائهٔ نظریهٔ خالص مجموعه‌ها ایجاد نمی‌کند. به منظور حفظ پیوستگی مطالب، بخشی دربارهٔ برش‌های ددکیند به فصل ۴ افزوده شده است. مطالب جدیدی نیز (دربارهٔ صورت‌های نرمال و دنباله‌های گودستاین) به فصل ۴ افزوده شده است.

یک درس اساسی و پایه در نظریهٔ مجموعه‌ها باید بیشتر فصل‌های ۱ تا ۹ را در برگیرد. با افزودن مطالب اضافی از فصل‌های ۱۰ تا ۱۴، که کاملاً از یکدیگر مستقل هستند (به‌جز بخش ۵ فصل ۱۲ و فصل ۱۳ که به برخی مفاهیم تعریف‌شده در فصل‌های قبلی ارجاع می‌دهند) درس را می‌توان تکمیل کرد.

کارل هرباتِسِک

توماس یِخ

پیشگفتار ویرایش دوم

نسخهٔ اولیهٔ این کتاب درسی در بهار سال ۱۹۶۸ به زبان چک نوشته شد و انتشارات آکادمیای پراگ آن را تحت عنوان «*Úvod do teorie množin*» برای چاپ پذیرفت. با این حال، در آن سال ما هر دو کمی بعد چکوسلواکی را ترک کردیم و در نتیجه کتاب هرگز انتشار نیافت. در سال‌های بعد، ما نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها را در دانشگاه‌های مختلف ایالات متحده درس دادیم و دریافتیم که انتخاب کتابی مناسب این درس دشوار است. برخی از کتاب‌های موجود، مبتنی بر رویکرد طبیعی به جای رویکرد اصل موضوعی به نظریهٔ مجموعه‌ها هستند. ما آشنایی با پارادوکس‌های نظریه ـ مجموعه‌ای و گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر (مانند فرض پیوستار) را یکی از اهداف مهم درس نظریهٔ مجموعه‌ها به حساب می‌آوریم. اما با رویکرد طبیعی، هیچ یک از این مباحث نمی‌توانند آن‌چنان‌که باید بررسی شوند. به‌علاوه، نظریهٔ مجموعه‌ها انتخابِ دانشجویی است که بخواهد برای اولین بار بسط اصل موضوعی شاخه‌ای از ریاضیات را ببیند. از سوی دیگر، بسیاری از کتاب‌های موجود نظریهٔ مجموعه‌ها با دیدگاه اصل موضوعی، تأکید بسیاری بر منطق و صورتگرایی منطقی دارند. بیشتر آن‌ها با چیزی شبیه یک دورهٔ درس منطق شروع می‌شوند. حال آنکه متوجه شده‌ایم که دانشجویان اغلب درس نظریهٔ مجموعه‌ها را قبل از درس منطق اخذ می‌کنند. مهم‌تر از این آنکه تأکید بر صورتگرایی جوهرهٔ روش اصل موضوعی را از نظر پنهان می‌سازد. احساس کردیم به کتابی نیاز است که نظریهٔ اصل

موضوعی مجموعه‌ها را با دیدی ریاضی، با سطح دقتی در حد معمول دیگر دروس رشتهٔ ریاضی ارائه کند. این نیاز ما را بر آن داشت تا متن نگاشته‌شده به زبان چکی فوق‌الذکر را از نو بازنویسی کنیم. ما طرح کلی اولیه را حفظ کردیم، منتها الزاماتی که کتاب درسی مناسب دانشگاه‌های آمریکا داشت منجر به کاری کاملاً جدید شد.

مایلیم بر ویژگی‌های زیر از کتاب حاضر تأکید کنیم:

۱) نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور اصل موضوعی بسط داده شده است. به دلایل اتخاذ هر اصل موضوع، که هم از شهود و هم از رویهٔ جاری ریاضیات سرچشمه می‌گیرند، به‌دقت اشاره شده است. مواردی که محل مناقشه‌اند، مانند اصل انتخاب، مفصلاً بحث شده‌اند.

۲) رویکرد ما صوری نیست. ابزارهای منطقی را در سطح حداقل نگه داشته‌ایم و از صورتگرایی منطقی کاملاً پرهیز کرده‌ایم.

۳) با پروراندن مقدمات نظریهٔ اعداد طبیعی، گویا و حقیقی بر اساس نظریهٔ مجموعه‌ها نشان خواهیم داد نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها به‌قدر کافی توانا هست تا چارچوبی برای ریاضیات در اختیار گذارد. با وجود این، این کار را تا جایی پیش گرفته‌ایم که در روشن کردن آن اندیشهٔ کلی و ایجاد انگیزه برای تعمیم‌های نظریه ـ مجموعه‌ای برخی از این مفاهیم (مانند اعداد ترتیبی و اعمال روی آن‌ها) مفید بوده است. جزئیات خسته‌کننده و تکراری، مانند اثبات‌های قواعد معمول حساب، به قسمت تمرین‌ها برده شده‌اند.

۴) در هر بخش تمرین‌های بسیاری با درجهٔ سختی متفاوت آورده شده است.

۵) بخش قابل ملاحظه‌ای از کتاب را به بررسی اعداد اصلی و ترتیبی اختصاص داده‌ایم.

۶) فصل آخر ارائهٔ غیررسمی نکات عمدهٔ برخی از پیشرفت‌های اخیر نظریهٔ مجموعه‌ها به همراه بیان اهمیت آن‌ها در دیگر حوزه‌های ریاضیات است. این نکات عبارت‌اند از اصل ساخت‌پذیری، مسئلهٔ سازگاری و استقلال، و اعداد اصلی بزرگ. اثباتی ارائه نشده است، با این حال جزئیات تا آن اندازه بیان شده است که شخص غیرمتخصص از مسائل موجود در مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها و شیوه‌های حل آن‌ها و تأثیر آن‌ها روی ریاضیات به‌طورکلی، ایده‌هایی به‌دست آورد.

ویرایش اول این کتاب بارها به‌عنوان متن درسی در نظریهٔ مجموعه‌ها در دوره‌های کارشناسی و سال اول کارشناسی ارشد استفاده شده است. تجربهٔ شخصی ما و بسیاری از همکارانمان و پیشنهادها و انتقادهای منتقدان، ما را بر آن داشت تا برخی تغییرات و اصلاحات را در این ویرایش دوم کتاب اعمال کنیم. این تغییرات بسی گسترده‌تر از آنچه ما قصد آن را داشتیم از آب درآمد. نتیجه اینکه کتاب کلاً از نو نوشته شد و تفصیل یافت. در زیر عمدهٔ ویژگی‌های جدید را برمی‌شماریم:

۱) بسط و شرح اعداد طبیعی در فصل ۳ به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای ساده شده است. مبنای کار را تعریف مجموعهٔ اعداد طبیعی به‌منزلهٔ کوچک‌ترین مجموعهٔ استقرائی و اصل استقرا قرار داده‌ایم. معرفی مجموعه‌های متعدی و مشخص کردن اعداد طبیعی به‌منزلهٔ آن دسته از مجموعه‌های متعدی که خوش‌ترتیب‌اند و با رابطهٔ $\in$ به طور وارونه خوش‌ترتیب شده‌اند را تا فصل اعداد ترتیبی (فصل ۷) به تعویق انداخته‌ایم.

۲) مطالب مربوط به اعداد گویا و صحیح (که در ویرایش اول فصل جداگانه‌ای بود) در یک بخش (بخش ۱ از فصل ۵) خلاصه شده‌اند. احساس ما این است که بیشتر دانشجویان این موضوع را در درس دیگری (جبر مجرد) می‌آموزند؛ و اساساً هم این موضوع به آن درس مربوط می‌شود.

۳) تعدادی از بخش‌های جدید (بخش ۳ از فصل ۵، ۶ و ۹) به ویژگی‌های نظریه‌ـمجموعه‌ای اعداد حقیقی (مانند مجموعه‌های باز، بسته و کامل و غیره) می‌پردازند و کاربردهای جالبی از نظریهٔ مجرد مجموعه‌ها در آنالیز حقیقی را عرضه می‌کنند.

۴) فصل جدیدی با عنوان «مجموعه‌های ناشمارا» (فصل ۱۱) افزوده شده است. این فصل برخی مفاهیم بنیادی نظریهٔ جدید مجموعه‌ها، مانند فراپالایه‌ها، مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران، درخت‌ها و افرازها، و اعداد اصلی بزرگ را معرفی می‌کند. از این مباحث می‌توان به‌منظور غنی ساختن درس یک ترمی معمول (که معمولاً بیشتر مطالب فصل‌های ۱ تا ۱۰ را دربرمی‌گیرد) بهره گرفت.

۵) بررسی ترتیب‌های خطی بسط یافته است و در یکجا نیز گرد آورده شده است (بخش ۴ فصل ۴).

۶) افزایش‌ها، تغییرات، و اصلاحات جزئی عدیدهٔ دیگری در سراسر متن

صورت گرفته است.

۷) و بالاخره، بحث پیرامون موقعیت حاضر نظریهٔ مجموعه‌ها در بخش ۳ از فصل ۱۲ به‌روز شده است.

کارل هرباتِسک

توماس یِخ

بسم‌الله الرحمن الرحیم

فهرست

فصل ۱

مجموعه‌ها

۱ آشنایی با مجموعه‌ها

مفهوم محوری این کتاب، یعنی مجموعه، دست‌کم به‌ظاهر، بی‌اندازه ساده است. یک مجموعه می‌تواند هر گردایه‌ای، گروهی و یا توده‌ای باشد. بنابراین، ما مجموعه‌هایی داریم مثل مجموعهٔ همهٔ دانشجویانی که در دانشگاه زنجان در شهریور ۱۳۸۸ ثبت‌نام کرده‌اند، مجموعهٔ اعداد زوج، مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ P که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ مفروض A دقیقاً ۲ سانتی‌متر است، و مجموعهٔ فیل‌های صورتی‌رنگ.

مجموعه‌ها اشیائی از دنیای واقعی، مثل میزها و ستاره‌ها، نیستند؛ ذهنمان آن‌ها را می‌سازد نه دستانمان. کپه‌ای از سیب‌زمینی‌ها، یک مجموعه از سیب‌زمینی‌ها نیست، به همین ترتیب مجموعهٔ مولکول‌های یک قطره آب، همان قطرهٔ آب نیست. ذهن آدمی توانایی انتزاع کردن دارد، توانایی آن را دارد که به تعدادی اشیای متفاوت این‌گونه فکر کند که خاصیتی مشترک آن‌ها را کنار هم گرد می‌آورد و به هم مربوط می‌کند. و بدین طریق مجموعه‌ای از اشیائی که آن ویژگی مشترک را دارند تشکیل دهد. این ویژگی مشترک هم ممکن است فقط امکان تصور این اشیا کنار یکدیگر باشد. از این‌رو مجموعه‌ای که فقط شامل اعداد ۲، ۷، ۱۲، ۱۳، ۲۹، ۳۴ و ۱۱۰۰۰

باشد، وجود دارد علی‌رغم آنکه دریافتن این نکته دشوار است که به غیر از اینکه ما آن‌ها را در ذهنمان گرد هم می‌آوریم چه چیز دیگری دقیقاً آن‌ها را به یکدیگر مربوط می‌کند. گئورگ کانتور، ریاضیدان آلمانی، که طی انتشار یک سری مقاله در سه دهۀ آخر قرن نوزدهم نظریۀ مجموعه‌ها را پایه‌گذاری کرد، مجموعه را این‌گونه تعریف می‌کند: «یک مجموعه، گردایه‌ای است به‌صورت یک کل از اشیای معین و متمایز در حس و یا ذهنمان. آن اشیا اعضای مجموعه نامیده می‌شوند.»

اشیائی را که مجموعه از آن‌ها ساخته می‌شود اعضا یا عناصر آن مجموعه می‌نامند. همچنین، می‌گوییم آن اشیا به آن مجموعه متعلق‌اند.

در این کتاب می‌خواهیم نظریۀ مجموعه‌ها را به‌منزلۀ بنیانی برای دیگر شاخه‌های ریاضی بپرورانیم. از این‌رو، به مجموعه‌های افراد یا مولکول‌ها نمی‌پردازیم، بلکه صرفاً به مجموعۀ اشیای ریاضی مانند اعداد، نقاط صفحه، توابع یا مجموعه‌ها خواهیم پرداخت. در حقیقت، سه مفهوم اول را در نظریۀ مجموعه‌ها می‌توان به‌منزلۀ مجموعه‌هایی با خواص ویژه‌ای تعریف کرد، کاری که ما در فصل‌های آینده انجام خواهیم داد. بنابراین یگانه اشیائی که ما پس از این به آن‌ها خواهیم پرداخت، مجموعه‌ها هستند. برای روشن شدن مطلب، از مجموعه‌های اعداد یا نقاط حتی قبل از آنکه این مفاهیم دقیقاً تعریف شوند صحبت خواهیم کرد. با این حال، ما این کار را در مثال‌ها، تمرین‌ها، و مسئله‌ها انجام می‌دهیم و نه در متن اصلی نظریه. مثال‌هایی از مجموعه‌های اشیای ریاضی عبارت‌اند از:

۱.۱ مثال.

الف) مجموعۀ همۀ مقسوم‌علیه‌های اول ۳۲۴.

ب) مجموعۀ همۀ اعدادی که صفر آن‌ها را عاد می‌کند.

ج) مجموعۀ همۀ توابع پیوستۀ حقیقی ـمقدار روی بازۀ [۰, ۱].

د) مجموعۀ همۀ بیضی‌ها با قطر بزرگ ۵ و خروج از مرکز ۳.

هـ) مجموعۀ همۀ مجموعه‌هایی که اعضای آن‌ها اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ است.

بررسی این مثال‌ها و دیگر مثال‌های مشابه نشان می‌دهد که مجموعه‌هایی که

ریاضیدانان با آن‌ها کار می‌کنند نسبتاً ساده‌اند. این مجموعه‌ها، اعداد طبیعی و زیرمجموعه‌های متفاوت آن (مانند مجموعهٔ همهٔ اعداد اول) و همچنین مجموعهٔ دوتایی‌ها و سه‌تایی‌ها و به‌طورکلی nتایی‌های اعداد طبیعی را شامل می‌شوند. اعداد صحیح و گویا را می‌توان فقط برحسب چنین مجموعه‌هایی توصیف کرد. بعد از این کار، اعداد حقیقی را می‌توان به‌منزلهٔ مجموعه‌ها یا دنباله‌های اعداد گویا تعریف کرد.

آنالیز ریاضی به مجموعه‌های اعداد حقیقی یا توابع روی اعداد حقیقی (مجموعه‌های زوج‌های مرتب اعداد حقیقی) می‌پردازد و در برخی مباحث مجموعه‌هایی از توابع یا حتی مجموعه‌هایی از مجموعه‌های توابع در نظر گرفته می‌شود. اما به‌ندرت یک ریاضیدان در کار خود با اشیائی پیچیده‌تر از این‌ها مواجه می‌شود. شاید تعجب‌برانگیز نباشد که کاربردهای بی‌چون‌وچرای «مجموعه‌هایی» که با «تجربهٔ روزمره» کمی فاصله دارند به تناقض می‌انجامند.

برای مثال، «مجموعهٔ» R متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی را که عضو خودشان نیستند در نظر بگیرید. به بیان دیگر، R مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های x است به‌طوری‌که $x \notin x$ («$\in$» را «متعلق به» و «$\notin$» را «متعلق نیست به» بخوانید). اکنون می‌پرسیم آیا $R \in R$. اگر $R \in R$، آن‌گاه R عضوی از خودش نیست (زیرا عضوی از R متعلق به خودش نیست)، بنابراین $R \notin R$. پس لزوماً $R \notin R$. اما در این صورت R مجموعه‌ای است که خودش عضو خودش نیست و همهٔ چنین مجموعه‌هایی به R تعلق دارند. نتیجه می‌گیریم $R \in R$؛ که باز هم تناقض است.

استدلال بالا را می‌توان به این صورت خلاصه کرد: ابتدا R را به این صورت تعریف کنید: $x \in R$ اگر و فقط اگر $x \notin x$. اکنون فرض کنید $x = R$؛ بنا به تعریف R، $R \in R$ اگر و تنها اگر $R \notin R$؛ که تناقض است.

چند تذکر دربارهٔ این استدلال (که از آن برتراند راسل است) خالی از فایده نیست. نخست اینکه، مجموعه‌ای از مجموعه‌ها بودن R چیز اشتباهی نیست. بسیاری از مجموعه‌ها که اعضایشان خود نیز مجموعه هستند، به‌گونه‌ای موجه در ریاضیات استفاده می‌شوند ــ مثال ۱.۱ را ببینید ــ و به تناقض نیز نمی‌انجامند. دوم اینکه، ارائهٔ مثال‌هایی از اعضای R، ساده است، مثلاً اگر x مجموعهٔ همهٔ اعداد

طبیعی باشد، آن‌گاه $x \notin x$ (مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی خود یک عدد طبیعی نیست) و بنابراین $x \in R$. سوم اینکه، ارائهٔ مثال‌هایی از مجموعه‌هایی که متعلق به R نیستند. خیلی ساده نیست، ولی این مسئله ربطی به موضوع ندارد.

حتی اگر مجموعه‌هایی که عضو خودشان هستند نیز وجود نداشته باشند، استدلال مذکور به تناقض خواهد انجامید . (نامزد مناسبی برای مجموعه‌ای که عضو خودش است «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها»، V، خواهد بود؛ به‌وضوح $V \in V$. در عین حال، «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» نیز خود به گونه‌ای ظریف‌تر به تناقض می‌انجامد. تمرین‌های ۳.۳ و ۳.۶ را ببینید.)

این تناقض را چگونه می‌توان رفع کرد؟ در استدلال بالا فرض کردیم که مجموعهٔ R مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که عضو خودشان نیستند، باشد و از آن، تناقضی را که نتیجهٔ بلافصل تعریف R است استخراج کردیم. این فقط یک معنی می‌تواند داشته باشد و آن اینکه مجموعه‌ای که در تعریف R صدق کند وجود ندارد. به بیان دیگر، استدلال فوق نشان می‌دهد مجموعه‌ای که اعضایش دقیقاً مجموعه‌هایی باشند که عضو خودشان نیستند وجود ندارد. درسی که پارادوکس راسل و دیگر مثال‌های مشابه به ما می‌آموزند این است که صرف تعریف یک مجموعه، وجود آن را ثابت نمی‌کند (همان‌طور که با وصف اسب تک شاخ وجود آن را ثابت نمی‌کنیم). خاصیت‌هایی وجود دارند که مجموعه تعریف نمی‌کنند؛ به عبارت دیگر، امکانِ در یک مجموعه گرد هم آوردن همهٔ اشیائی که آن خاصیت را دارند وجود ندارد. این ملاحظه، وظیفهٔ تعیین خاصیت‌هایی که مجموعه‌ها را تعریف می‌کنند، بر عهدهٔ نظریهٔ مجموعه‌دان‌ها قرار می‌دهد. متأسفانه هیچ‌گونه راهی برای این کار شناخته نشده است و برخی نتایج منطق (به‌ویژه قضایای به اصطلاح عدم تمامیت که کورت گودل آن‌ها را اثبات کرده است) ظاهراً دال برآنند که حتی جوابی کامل به مسئله امکان‌پذیر نیست.

از این‌رو، ما این هدف بلندپروازانه را دنبال نخواهیم کرد. برخی از خاصیت‌های نسبتاً سادهٔ مجموعه‌ها را که ریاضیدانان به کار می‌برند، به عنوان اصول موضوع صورت‌بندی می‌کنیم و بعد از آن با دقت، نتیجه شدن منطقی همهٔ قضایا را از اصول موضوع بررسی می‌کنیم. از آنجایی که اصول موضوع به‌وضوح صادق‌اند و قضایا به

طور منطقی از آن‌ها نتیجه می‌شوند، قضایای حاصل نیز صادق‌اند (البته نه لزوماً به گونه‌ای بدیهی). محصول ما در آخر کتاب مجموعه‌ای از راستی‌ها دربارهٔ مجموعه‌هاست که، علاوه بر چیزهای دیگر، مشتمل بر ویژگی‌های پایه‌ای اعداد طبیعی، گویا، و حقیقی، تابع‌ها، ترتیب‌ها و مفاهیم دیگر می‌شود و تا جایی که می‌دانیم خالی از تناقض‌اند. تجربه نشان داده است که عملاً همهٔ مفاهیم ریاضیات معاصر و ویژگی‌های ریاضی آن‌ها می‌توانند در این دستگاه اصل موضوعی تعریف و نتیجه شوند. بدین معنی، نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها می‌تواند به منزلهٔ بنیانی رضایت‌بخش برای دیگر شاخه‌های ریاضیات در نظر گرفته شود.

از سوی دیگر، ما ادعا نمی‌کنیم که هر گزارهٔ صادق دربارهٔ مجموعه‌ها از اصولی که ما عرضه می‌کنیم قابل استنتاج است. دستگاه اصل موضوعی مذکور به این معنی کامل نیست و ما در فصل آخر به بحث دربارهٔ مسئلهٔ کمال باز خواهیم گشت.

۲ خاصیت‌ها

در بخش قبل مجموعه را همچون گردایه‌ای از اشیا که خاصیت مشترکی دارند تعریف کردیم. بی‌فایده نیست که مفهوم خاصیت را کمی بیشتر بررسی کنیم. برخی خاصیت‌ها که عموماً در زندگی روزمره به آن‌ها توجه می‌شود، چنان مبهم‌اند که به‌ندرت در یک نظریهٔ ریاضی وارد می‌شوند. به طور مثال، «اشعار نغز معاصر ایران» را در نظر بگیرید. قضاوت‌های متفاوت افراد دربارهٔ اینکه شعر نغز چگونه چیزی است، آن‌چنان با یکدیگر فرق دارند که شیوهٔ مورد قبول عامی وجود ندارد که بتوان با آن مشخص کرد که شعری به این مجموعه تعلق دارد یا نه.

به‌عنوان مثالی حتی از این هم تعجب‌برانگیزتر، «مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی که بتوان آن را به‌صورت اعشاری نوشت» را در نظر بگیرید. در اینجا بتوان یعنی اینکه شخص بتواند واقعاً این کار را با قلم و کاغذ انجام دهد. به‌وضوح عدد ۰ را می‌توان به این صورت نوشت. اگر عدد n را بتوان نوشت، در آن صورت مطمئناً عدد $n + ۱$ را نیز می‌توان نوشت (مثلاً شخصی را در نظر بگیرید که قدری سریع‌تر

می‌نویسد و یا کسی که n را می‌تواند بنویسد و قدری هم تند دست‌تر است). بنابراین، طبق اصل آشنای استقرای ریاضی، هر عدد طبیعی n را می‌توان نوشت. اما این مطلب به‌وضوح نامعقول است؛ نوشتن $10^{10^{10}}$ در دستگاه اعشاری مستلزم گذاشتن 10^{10} صفر جلوی ۱ است که این نیز ۳۰۰ سال کار مداوم با سرعت یک صفر در ثانیه نیاز دارد!

علت این مسئله مبهم بودن معنای «بتوان» است. برای پرهیز از مشکلات مشابه، اکنون صریحاً منظور خود را از خاصیت بیان می‌کنیم. فقط خاصیت‌های ریاضی خالی از ابهام مجاز دانسته می‌شوند؛ خوشبختانه این‌گونه خاصیت‌ها برای بیان همهٔ حقایق ریاضی کافی‌اند.

بیان ما در این بخش غیررسمی است. خوانندهٔ علاقه‌مند به مطالعهٔ این قسمت از دیدگاهی دقیق‌تر می‌تواند به کتابی دربارهٔ منطق ریاضی مراجعه کند.

خاصیت بنیادی در نظریهٔ مجموعه‌ها خاصیت عضویت است: «... عضوی از ... است»، که آن را با $\in$ نشان می‌دهیم. بنابراین «$X \in Y$» به‌صورت «X عضوی از Y است» یا «X متعلق به Y است» خوانده می‌شود.

حروف X و Y در عبارت‌های بالا متغیر نامیده می‌شوند؛ آن‌ها جانگهدار (نشان‌دهندهٔ) مجموعه‌های نامشخص دلخواهی هستند. گزارهٔ « $X \in Y$ » بسته به مجموعه‌های (مشخص‌شده با) X و Y می‌تواند برقرار باشد یا نباشد. گاهی اوقات می‌گوییم «$X \in Y$» خاصیتی از X و Y است. خواننده مطمئناً با چنین طرز بیان غیررسمی در دیگر شاخه‌های ریاضیات آشنایی دارد. برای مثال، «m کوچک‌تر از n است» خاصیتی از m و n است. حروف m و n متغیرهایی هستند که اعداد غیرمشخص m و n را نشان می‌دهند. برخی m و nها این خاصیت را دارند (مثلاً «۲ کوچک‌تر از ۴ است» صادق است)، اما برخی دیگر چنین نیستند (مثلاً «۳ از ۲ کوچک‌تر است» کاذب است).

همهٔ خواص نظریه‌ـمجموعه‌ای دیگر را می‌توان با کمک ابزارهای منطق ــ اینهمانی و رابطهای منطقی و سورها ــ برحسب عضویت بیان کرد.

ما اغلب دربارهٔ یک مجموعهٔ واحد در قسمت‌های مختلف صحبت می‌کنیم و برای ما راحت‌تر آن است که آن مجموعه‌ها را با متغیرهای متفاوتی نشان دهیم. نماد

اینهمانی «$=$» را برای بیان این مطلب که دو متغیر، مجموعهٔ واحدی را نشان می‌دهند به کار می‌بریم. بنابراین می‌نویسیم $X = Y$، هرگاه X همان مجموعهٔ Y باشد (X با Y یکسان است یا X با Y مساوی است).

در مثال بعدی، تعدادی از حقایق مسلم بدیهی دربارهٔ اینهمانی را فهرست می‌کنیم.

۱.۲ مثال.

الف) $X = X$. (X با X مساوی است.)

ب) اگر $X = Y$، آن‌گاه $Y = X$. (اگر X با Y مساوی باشد، آن‌گاه Y با X مساوی است.)

ج) اگر $X = Y$ و $Y = Z$، آن‌گاه $X = Z$. (اگر X با Y و Y با Z مساوی باشد، آن‌گاه X با Z مساوی است.)

د) اگر $X = Y$ و $X \in Z$، آن‌گاه $Y \in Z$. (اگر X و Y مساوی و X به Z متعلق باشد، آن‌گاه Y به Z متعلق است.)

هـ) اگر $X = Y$ و $Z \in X$، آن‌گاه $Z \in Y$. (اگر X و Y مساوی باشند و Z به X متعلق باشد، آن‌گاه Z به Y متعلق است.)

برای ساختن خاصیت‌های پیچیده‌تر از خاصیت‌های ساده‌تر می‌توان از رابطهای منطقی استفاده کرد. رابطهای منطقی عبارت‌هایی مانند «چنین نیست که ...»، «... و ...»، «اگر ...، آن‌گاه ...»، و «... اگر و تنها اگر ...» هستند.

۲.۲ مثال.

الف) «$X \in Y$ یا $Y \in X$» خاصیتی از X و Y است.

ب) «چنین نیست که $X \in Y$ و چنین نیست که $Y \in X$» یا چنانچه کلمات فارسی بیشتری به کار بریم «X عضوی از Y نیست و Y عضوی از X نیست» نیز خاصیتی از X و Y است.

ج) «اگر $X = Y$، آن‌گاه $X \in Z$ اگر و تنها اگر $Y \in Z$» خاصیتی از X، Y و Z است.

د) «X عضوی از X نیست» (یا «چنین نیست که $X \in X$») خاصیتی از X است.

به‌جای «چنین نیست که $X \in Y$» می‌نویسیم $X \notin Y$ و به‌جای «چنین نیست که $X = Y$» می‌نویسیم $X \neq Y$.

سورهای «برای همه» (یا «برای هر») و «وجود دارد» (یا «چیزی هست که»)، از دیگر ابزارهای منطقی هستند. جریان معمول ریاضیات نشان می‌دهد که نه تنها همهٔ حقایق ریاضی در همین زبان محدودی که توصیف کردیم قابل بیان است، بلکه این زبان مانع ورود عبارت‌های مبهم، از آن‌گونه که در ابتدای این بخش دیدیم، به ریاضیات می‌شود.

اکنون به چند مثال از خاصیت‌هایی که سورها را در بر دارند، نگاهی می‌اندازیم.

۳.۲ مثال.

الف) «وجود دارد Y که $Y \in X$».

ب) «برای هر $Y \in X$، وجود دارد Z به طوری که $Z \in X$ و $Z \in Y$».

ج) «Z وجود دارد به‌طوری‌که $Z \in X$ و $Z \notin Y$».

صادق یا کاذب بودن (الف) به‌وضوح به مجموعهٔ (نشان‌داده‌شده با متغیر) X وابسته است. برای مثال، اگر X مجموعهٔ همهٔ رئیس‌جمهورهای ایران بعد از سال ۱۳۱۰ شمسی باشد، آن‌گاه (الف) صادق است؛ اگر X مجموعهٔ همهٔ رئیس جمهورهای ایران قبل از سال ۱۳۱۰ شمسی باشد، (الف) کاذب خواهد بود. (به طور کلی، اگر X عضوی داشته باشد، (الف) صادق و اگر X عضوی نداشته باشد کاذب خواهد بود.) گوییم (الف) خاصیتی از X است و یا اینکه (الف) به پارامتر X بستگی دارد. به همین ترتیب، (ب) خاصیتی از X است و (ج) خاصیتی از X و Y. همچنین توجه کنید که در (الف) Y پارامتر نیست؛ زیرا پرسش از اینکه آیا (الف) به‌ازای مجموعهٔ Yی خاصی صادق است، بی‌معنی است. حرف Y را در سور مذکور فقط برای راحتی به کار برده‌ایم؛ به‌جای آن می‌توانیم بگوییم «وجود دارد Wیی که $W \in X$» یا «عضوی از X وجود دارد». به همین ترتیب، (ب) خاصیتی از Y یا Z نیست و (ج) نیز خاصیتی از Z نیست.

گرچه قاعده‌های دقیقی برای مشخص کردن پارامترهای یک خاصیت مفروض می‌توان صورت‌بندی کرد، ما به تشخیص عمومی خواننده اتکا می‌کنیم و به این

آخرین مثال بسنده می‌کنیم.

۴.۲ مثال.

الف) «$Y \in X$».

ب) «وجود دارد Yیی به‌طوری‌که $Y \in X$».

ج) «برای هر X، وجود دارد Yیی به‌طوری‌که $Y \in X$».

در اینجا (الف) خاصیتی از X و Y است؛ (الف) برای بعضی از مجموعه‌های X و Y صادق و برای برخی دیگر کاذب است. (ب) خاصیتی از X (اما نه از Y) است؛ درحالی‌که (ج) هیچ پارامتری ندارد. بنابراین (ج) یا صادق است یا کاذب (درواقع کاذب است). خاصیت‌هایی را که هیچ پارامتری ندارند (و بنابراین یا صادق‌اند یا کاذب)، گزاره می‌نامند؛ همهٔ قضایای ریاضی گزاره (صادق) هستند.

گاهی اوقات می‌خواهیم به خاصیت نامشخص دلخواهی اشاره کنیم. حروف بزرگ سیاه را برای نشان دادن گزاره‌ها و خاصیت‌ها به کار می‌بریم و به شرط راحتی، همه یا بعضی از پارامترهای آن‌ها را در پرانتز می‌نویسیم. از این‌رو، $\mathbf{A}(X)$ را برای نشان دادن یک خاصیت با پارامتر X قرار می‌دهیم، مانند (الف) یا (ج) در مثال ۲.۳؛ با $E(X,Y)$ خاصیتی با دو پارامتر X و Y را نشان می‌دهیم، مانند (ج) در مثال ۲.۳ و قسمت (الف) در مثال ۲.۴ یا مثل

د) «$X \in Y$ یا $X = Y$ یا $Y \in X$».

به‌طورکلی، $\mathbf{P}(X, Y, \ldots, Z)$ خاصیتی است که صدق و کذب آن به پارامترهای X، Y، ...و Z (یا احتمالاً به دیگر پارامترها) بستگی دارد.

چندین بار اشاره کردیم که همهٔ خاصیت‌های نظریه ـ مجموعه‌ای برحسب زبان محدود ما، که متشکل از خاصیت تعلق و ابزارهای منطقی است، قابل بیان‌اند. در عین حال، همچنان که یک نظریه پرورانده می‌شود و قضایای پیچیده‌تری اثبات می‌شود، گذاشتن اسم روی برخی خاصیت‌های ویژه، به‌عبارت‌دیگر، تعریف خاصیت‌های جدید، مزایای عملی به همراه دارد. از این‌رو، نماد جدیدی برای نشان دادن خاصیت جدید مورد نظر معرفی (تعریف) می‌شود؛ آن نماد را می‌توان یک

کوتاه‌نویسی برای فرمول‌بندی صریح تلقی کرد. برای مثال، خاصیت « زیرمجموعه بودن» به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۵.۲ تعریف. $X \subseteq Y$ اگر و تنها اگر هر عضو X عضوی از Y باشد.

«X زیرمجموعه‌ای از Y است» (یا $X \subseteq Y$) خاصیتی از X و Y است. در فرمول‌های پیچیده‌تر می‌توانیم نماد معرفی‌شده را به کار بریم و چنانچه بخواهیم می‌توانیم $X \subseteq Y$ را با تعریفش جایگزین کنیم. برای مثال، تعریف صریح

«اگر $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq Z$، آن‌گاه $X \subseteq Z$.»

به‌صورت زیر است

«اگر هر عضو X عضوی از Y باشد و هر عضو Y عضوی از Z باشد، آن‌گاه هر عضو X عضوی از Z است.»

مسلم است که به ریاضیات بدون تعریف‌ها هم می‌توان پرداخت، اما چیزی به شدت دست‌وپاگیر می‌شود.

برای نوع دیگری از تعریف، خاصیت $\mathbf{P}(X)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

«هیچ Yیی وجود ندارد که $Y \in X$.»

در بخش ۳ ثابت می‌کنیم که

الف) مجموعهٔ X وجود دارد که $\mathbf{P}(X)$ (مجموعهٔ Xیی وجود دارد که هیچ عضوی ندارد).

ب) حداکثر یک مجموعهٔ X وجود دارد که $\mathbf{P}(X)$؛ به عبارت دیگر، اگر $\mathbf{P}(X)$ و $\mathbf{P}(X')$، آن‌گاه $X = X'$ (اگر X عضوی نداشته باشد و X' نیز عضوی نداشته باشد، آن‌گاه X و X' مساوی‌اند).

شرایط (الف) و (ب) با هم این واقعیت را بیان می‌کنند که یک مجموعهٔ منحصر به‌فرد X با خاصیت $\mathbf{P}(X)$ وجود دارد. از این‌رو، می‌توان نامی به این مجموعه داد، مانند $\varnothing$ (مجموعهٔ تهی)، و آن را در رابطه‌های پیچیده‌تر به کار گرفت.

بنابراین، معنی کامل «$\varnothing \subseteq Z$» عبارت است از «مجموعهٔ X، که هیچ عضوی ندارد، زیرمجموعه‌ای از Z است». گاهی اوقات $\varnothing$ را ثابت تعریف‌شده به‌وسیلهٔ $\mathbf{P}$ می‌نامیم.

به‌عنوان آخرین مثال از یک تعریف، خاصیت $\mathbf{Q}(X, Y, Z)$ از X، Y و Z را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

«برای هر U، $U \in Z$ اگر و تنها اگر $U \in X$ و $U \in Y$.»

در بخش بعد خواهیم دید که

الف) برای هر X و Y وجود دارد Z به‌طوری‌که $\mathbf{Q}(X, Y, Z)$.

ب) برای هر X و Y، اگر $\mathbf{Q}(X, Y, Z)$ و $\mathbf{Q}(X, Y, Z')$، آن‌گاه $Z = Z'$.

شرایط (الف) و (ب) (که هرگاه این نوع تعریف به کار گرفته شود، نیاز به اثبات دارند) تضمین می‌کنند که برای هر X و Y یک مجموعهٔ منحصربه‌فرد Z موجود است که $\mathbf{Q}(X, Y, Z)$. از این‌رو، می‌توان نامی مثلاً $X \cap Y$ برای این مجموعهٔ منحصربه‌فرد Z معرفی کرد و $X \cap Y$ را اشتراک X و Y نامید. بنابراین، $\mathbf{Q}(X, Y, X \cap Y)$ برقرار است. $\cap$ را عمل تعریف‌شده به‌وسیلهٔ خاصیت $\mathbf{Q}$ می‌نامیم.

۳ اصول موضوع

اکنون اقدام به تأسیس دستگاه اصل موضوعی‌مان می‌کنیم و خواهیم کوشید تا معنی شهودی هر اصل را روشن سازیم.

اولین اصل موضوعی که برمی‌گزینیم تهی نبودن «عالم سخنمان» را اصل قرار می‌دهد؛ به‌عبارت‌دیگر، فرض می‌کند مجموعه‌هایی وجود دارند. به‌عبارت مشخص‌تر، ما وجود مجموعهٔ معینی را اصل فرض می‌کنیم؛ آن مجموعه مجموعهٔ تهی است.

اصل موضوع وجود. مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

مجموعه‌ای که عضوی ندارد شهوداً به‌صورت‌های گوناگونی می‌تواند توصیف

شود؛ مثلاً، همچون مجموعهٔ همهٔ رئیس‌جمهورهای ایران قبل از سال ۱۱۰۰ شمسی، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x که $x^۲ = -۱$ و غیره. همهٔ مثال‌هایی از این دست مجموعهٔ واحدی را توصیف می‌کنند، یعنی همان مجموعهٔ تهی یا پوچ. بنابراین، شهوداً فقط یک مجموعهٔ تهی وجود دارد. اما هنوز نمی‌توانیم این ادعا را ثابت کنیم. اصل دیگری برای بیان این واقعیت که هر مجموعه توسط اعضایش مشخص می‌شود نیاز داریم. به مثال دیگری توجه کنید.

X مجموعه‌ای دقیقاً متشکل از اعداد ۲، ۳ و ۵ است.
Y مجموعهٔ همهٔ اعداد اول کوچک‌تر از ۷ است.
Z مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۳ - ۱۰x^۲ + ۳۱x - ۳۰ = ۰$ است.

در اینجا، $X = Y$، $X = Z$ و $Y = Z$، و ما سه توصیف متفاوت از یک مجموعهٔ واحد داریم. این مطلب به اصل موضوع توسیع می‌انجامد.

اصل موضوع توسیع. اگر هر عضو از X عضوی از Y و هر عضو از Y عضوی از X باشد، آن‌گاه $X = Y$.

خلاصه آنکه، اگر دو مجموعه اعضای یکسانی داشته باشند، آن‌گاه آن دو مجموعه مساوی‌اند. اکنون می‌توانیم لم ۱.۳ را اثبات نماییم.

۱.۳ لم. فقط یک مجموعهٔ بدون عضو وجود دارد.

برهان. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی بدون عضو باشند. بنابراین هر عضو A، عضوی از B است (چون A عضوی ندارد گزارهٔ «$a \in A$ ایجاب می‌کند $a \in B$» استلزامی با مقدم کاذب است و لذا خودبه‌خود صادق است). به طریق مشابه، هر عضو B عضوی از A است (چون B عضوی ندارد). بنابراین، طبق اصل موضوع توسیع، $A = B$. □

۲.۳ تعریف. مجموعه‌ای (منحصر به‌فرد) که هیچ عضوی ندارد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با $\varnothing$ نمایش داده می‌شود.

توجه کنید که اصل موضوع توسیع و لم ۱.۳ تعریف ثابت $\varnothing$ را موجه می‌کنند.

از لحاظ شهودی، مجموعه‌ها گردایه‌ای از اشیائی هستند که دارای برخی خاصیت‌های مشترک هستند، بنابراین انتظار داریم اصل‌هایی داشته باشیم که این واقعیت را بیان کنند. اما همان‌طورکه پارادوکس‌های بخش ۱ نشان دادند، هر خاصیت مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند؛ خاصیت‌های «$X \notin X$» یا «$X = X$» نمونه مثال‌هایی از این دست هستند.

در هر دو مورد به نظر می‌رسد مشکل در اینجا است که به منظورِ در یک مجموعه گرد هم آوردن همهٔ اشیائی که چنین خاصیتی دارند، باید پیش از آن قادر به تصور کردن همهٔ مجموعه‌ها باشیم. این مشکل را می‌توان رفع کرد به شرطی که وجود مجموعهٔ همهٔ اشیا با خاصیتی مفروض را فقط به شرط وجود مجموعه‌ای که همهٔ این اشیا به آن متعلق باشند اصل قرار دهیم.

قالب اصل موضوع شمول. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی از x باشد. برای هر مجموعهٔ A مجموعهٔ B وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $\mathbf{P}(x)$ صادق باشد.

این اصل یک قالب کلی از اصل‌های موضوع است؛ به‌عبارت‌دیگر، برای هر خاصیت $\mathbf{P}$ یک اصل داریم. برای مثال، اگر $\mathbf{P}(x)$ عبارت باشد از «$x = x$»، این اصل می‌گوید:

> برای هر مجموعهٔ A، مجموعهٔ B موجود است به‌طوری‌که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x = x$. (در این حالت $B = A$.)

اگر $\mathbf{P}(x)$ عبارت باشد از «$x \notin x$»، اصل مذکور بیان می‌کند که

> برای هر مجموعهٔ A، مجموعهٔ B وجود دارد که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $x \notin x$.

اگر چه تعداد اصل‌ها نامحدود است، مشکلی پیش نمی‌آید؛ زیرا به‌راحتی می‌توان تشخیص داد که آیا گزارهٔ خاصی اصل هست یا نه؛ علاوه بر اینکه هر اثبات فقط تعداد متناهی از اصل‌های موضوع را به کار می‌گیرد.

خاصیت $\mathbf{P}(x)$ ممکن است به پارامترهای دیگری مانند $p,\dots,q$ بستگی داشته باشد؛ اصل موضوع نظیر این حالت بیان می‌کند که برای همهٔ مجموعه‌های $p,\dots,q$ و هر A، مجموعهٔ B (وابسته به $p,\dots,q$ و البته A) دقیقاً متشکل از همهٔ اعضای $x \in A$ که برای آن‌ها $\mathbf{P}(x,p,\dots,q)$ صادق است، وجود دارد.

۳.۳ مثال. اگر P و Q مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعهٔ R وجود دارد که $x \in R$ اگر و تنها اگر $x \in P$ و $x \in Q$.

برهان. خاصیت $\mathbf{P}(x,Q)$ از x و Q را با تعریف $x \in Q$ در نظر بگیرید. بنابراین، طبق اصل موضوع شمول، برای هر Q و هر P مجموعهٔ R وجود دارد به‌طوری‌که $x \in R$ اگر و تنها اگر $x \in P$ و $\mathbf{P}(x,Q)$، به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر $x \in P$ و $x \in Q$. (P نقش A را بر عهده دارد و Q هم یک پارامتر است.) $\square$

۴.۳ لم. برای هر A، فقط یک مجموعه B وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $\mathbf{P}(x)$ صادق است.

برهان. اگر B' مجموعهٔ دیگری باشد به‌طوری‌که $x \in B'$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $\mathbf{P}(x)$، آن‌گاه $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in B'$. بنابراین، طبق اصل موضوع توسیع، داریم $B = B'$. $\square$

اکنون معرفی اسمی برای مجموعهٔ منحصربه‌فرد B موجه است.

۵.۳ تعریف. با $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$ مجموعهٔ تمام $x \in A$هایی با خاصیت $\mathbf{P}(x)$ را نشان می‌دهیم.

۶.۳ مثال. مجموعهٔ معرفی شده در مثال ۳.۳ را می‌توان با $\{x \in P \mid x \in Q\}$ نمایش داد.

دستگاه اصل موضوعی ما هنوز آن‌چنان قدرتمند نیست؛ تنها مجموعه‌ای که وجود آن را ثابت کردیم مجموعهٔ تهی است، همچنین کاربردهای اصل موضوع شمول در مورد این مجموعه دوباره مجموعهٔ تهی را به‌دست می‌دهد. در حقیقت،

صرف‌نظر از انتخاب خاصیت $\mathbf{P}$ داریم $\varnothing = \{x \in \varnothing \mid \mathbf{P}(x)\}$. (این مطلب را ثابت کنید.) سه اصل موضوع بعدی این مطلب را که بعضی روش‌های ساخت، که غالباً در ریاضیات به کار گرفته می‌شوند، مجموعه تولید می‌کنند، در قالب اصل موضوع بیان می‌کنند.

اصل موضوع زوج. برای هر A و B، مجموعهٔ C وجود دارد به‌طوری‌که $x \in C$ اگر و تنها اگر $A = x$ یا $B = x$.

بنابراین $A \in C$ و $B \in C$ و C هیچ عضو دیگری ندارد. مجموعهٔ C منحصربه‌فرد است (این مطلب را ثابت کنید)؛ از این‌رو، زوج نامرتب حاصل از A و B را مجموعه‌ای که اعضای آن فقط A و B هستند تعریف می‌کنیم و برای آن نماد $\{A, B\}$ را معرفی می‌کنیم. به‌ویژه، اگر $A = B$، به‌جای $\{A, A\}$ می‌نویسیم $\{A\}$.

۷.۳ مثال.

الف) قرار دهید $A = \varnothing$ و $B = \varnothing$؛ بنابراین $\{\varnothing\} = \{\varnothing, \varnothing\}$ مجموعه‌ای است که برای آن داریم $\varnothing \in \{\varnothing\}$، و اگر $x \in \{\varnothing\}$، آن‌گاه $x = \varnothing$. بنابراین، $\{\varnothing\}$ دارای عضو منحصربه‌فرد $\varnothing$ است. توجه کنید $\varnothing \neq \{\varnothing\}$، زیرا $\varnothing \in \{\varnothing\}$ اما $\varnothing \notin \varnothing$.

ب) قرار دهید $A = \varnothing$ و $B = \{\varnothing\}$؛ بنابراین، $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ و $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. همچنین، $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ تنها اعضای مجموعهٔ $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ هستند.

توجه کنید که $\varnothing \neq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ و $\{\varnothing\} \neq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

اصل موضوع اجتماع. برای هر مجموعهٔ S مجموعهٔ U موجود است به‌طوری‌که $x \in U$ اگر و تنها اگر به‌ازای $A \in S$یی، داشته باشیم $x \in A$.

در اینجا نیز مجموعهٔ U منحصربه‌فرد است (ثابت کنید)؛ این مجموعه را اجتماع S می‌نامند و با $\bigcup S$ نشان می‌دهند. هرگاه بخواهیم تأکید کنیم که اعضای S مجموعه هستند، گوییم S دستگاهی از مجموعه‌ها یا گردایه‌ای از مجموعه‌هاست

(البته این گفته همیشه صادق است ــ همهٔ اشیای مورد نظر ما مجموعه هستند ــ و بنابراین عبارت‌های مجموعه و دستگاهی از مجموعه‌ها معنای یکسانی دارند). بنابراین، اجتماع دستگاهی از مجموعه‌ها مانند S مجموعه‌ای است که اعضای آن دقیقاً xهایی هستند که به مجموعه‌ای از دستگاه S متعلق‌اند.

۸.۳ مثال.

الف) فرض کنید $S = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$؛ بنابراین، $x \in \bigcup S$ اگر و تنها اگر به‌ازای $A \in S$یی، داشته باشیم $x \in A$، به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر $x \in \varnothing$ یا $x \in \{\varnothing\}$. بنابراین $x \in \bigcup S$ اگر و تنها اگر $x \in \varnothing$. در نتیجه $\bigcup S = \{\varnothing\}$.

ب) $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

ج) فرض کنید M و N مجموعه باشند؛ $x \in \bigcup\{M, N\}$ اگر و تنها اگر $x \in M$ یا $x \in N$.

مجموعهٔ $\bigcup\{M, N\}$ رااجتماع M و N می‌نامند و با $M \cup N$ نشان می‌دهند.

بدین ترتیب، بالاخره یکی از ساده‌ترین عمل‌های نظریه‌ـ‌مجموعه‌ای را که مطمئناً خواننده با آن آشناست، معرفی کردیم. اصول موضوع زوج و اجتماع برای تعریف اجتماع دو مجموعه لازم‌اند (همچنین اصل موضوع توسیع نیز برای تضمین منحصربه‌فرد بودن آن مورد نیاز است). اجتماع دو مجموعه معنایی طبیعی دارد؛ $x \in M \cup N$ اگر و تنها اگر $x \in M$ یا $x \in N$.

۹.۳ مثال. $\bigcup\{\{\varnothing\} \cup \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

البته اصل موضوع اجتماع بسیار قوی‌تر از این است که به نظر می‌رسد؛ این اصل امکان تشکیل اجتماع نه تنها دو مجموعه، بلکه هر تعداد محتملاً نامتناهی از گردایه‌ای از مجموعه‌ها را در اختیار ما قرار می‌دهد.

اگر A، B و C مجموعه باشند، اکنون قادریم وجود و منحصربه‌فرد بودن مجموعهٔ P که اعضایش دقیقاً A، B و C هستند را ثابت کنیم (تمرین ۵.۳ را ببینید). P مجموعهٔ $\{A, B, C\}$ را نشان می‌دهد و سه‌تایی نامرتب حاصل از A، B و C نامیده می‌شود. به نحو مشابه، می‌توان چهارتایی و یا ۱۷تایی نامرتب را تعریف کرد.

پیش از معرفی آخرین اصل موضوع این بخش، مفهوم سادهٔ دیگری را تعریف می‌کنیم.

۱۰.۳ تعریف. A زیرمجموعه‌ای از B است اگر و تنها اگر هر عضو A متعلق به B باشد. به‌عبارت‌دیگر، A زیرمجموعه‌ای از B است اگر برای هر x، $x \in A$ ایجاب کند $x \in B$.

برای آنکه نشان دهیم A زیرمجموعه‌ای از B است می‌نویسیم $A \subseteq B$.

۱۱.۳ مثال.

الف) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ و $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

ب) برای هر مجموعهٔ A، $\varnothing \subseteq A$ و $A \subseteq A$.

ج) $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\} \subseteq A$.

د) اگر $A \in S$، آن‌گاه $A \subseteq \bigcup S$.

اصل موضوع بعدی بیان می‌کند که همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ مفروض را می‌توان در یک مجموعه گردآورد.

اصل موضوع مجموعهٔ توانی. برای هر مجموعهٔ S، مجموعهٔ P موجود است به‌طوری‌که $X \in P$ اگر و تنها اگر $X \subseteq S$.

از آنجایی که باز هم P به‌طور منحصربه‌فرد تعیین می‌گردد، می‌توان مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را مجموعهٔ توانی مجموعهٔ S نامید و آن را با $\mathcal{P}(S)$ نمایش داد.

۱۲.۳ مثال.

الف) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

ب) $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$.

ج) اعضای $\mathcal{P}(\{a, b\})$ عبارت‌اند از $\varnothing$، $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{a, b\}$.

این بخش را با یک قرارداد نمادگذاری دیگر به پایان می‌بریم. $\mathbf{P}(x)$ را خاصیتی از x (و احتمالاً از پارامترهای دیگر) در نظر بگیرید.

اگر مجموعهٔ A موجود باشد به‌طوری‌که برای هر x، $\mathbf{P}(x)$ ایجاب کند $x \in A$، آن‌گاه $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$ وجود دارد و به A نیز وابسته نیست. این بدین معنی است که اگر A' مجموعهٔ دیگری باشد به‌طوری‌که برای هر x، $\mathbf{P}(x)$ ایجاب کند $x \in A'$، آن‌گاه $\{x \in A' \mid \mathbf{P}(x)\} = \{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$. (این مطلب را ثابت کنید.)

اکنون می‌توان $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$ را برابر مجموعهٔ $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$ تعریف کرد، که در آن A مجموعه‌ای است که برای آن $\mathbf{P}(x)$ ایجاب می‌کند $x \in A$. (دلیل این امر آن است که مهم نیست چه مجموعهٔ Aیی را به کار می‌بریم.) $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$ مجموعهٔ همهٔ xهایی است که دارای خاصیت $\mathbf{P}(x)$ هستند. بار دیگر تأکید می‌کنیم که نماد مذکور را تنها بعد از آنکه ثابت شد مجموعه‌ای مانند A شامل همهٔ xها با خاصیت $\mathbf{P}$ وجود دارد می‌توان به کار گرفت.

۱۳.۳ مثال.

الف) $\{x \mid x \in P, x \in Q\}$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید $\mathbf{P}(x, P, Q)$ خاصیت $x \in P$ و $x \in Q$ باشد؛ قرار دهید $A = P$. در نتیجه $\mathbf{P}(x, P, Q)$ ایجاب می‌کند $x \in A$. از این‌رو

$$\{x \mid x \in P, x \in Q\} = \{x \in P \mid x \in P, x \in Q\} = \{x \in P \mid x \in Q\}$$

و این همان مجموعهٔ R در مثال ۳.۳ است. □

ب) $\{x \mid x = a \text{ یا } x = b\}$ وجود دارد؛ برای اثبات قرار دهید $A = \{a, b\}$ و نشان دهید $\{x \mid x = a \text{ یا } x = b\} = \{a, b\}$

ج) $\{x \mid x \notin x\}$ وجود ندارد؛ (دلیل آن پارادوکس راسل است.) بنابراین در این مورد نماد $\{x \mid \mathbf{P}(x)\}$ موجه نیست.

گرچه فهرست اصول موضوع ما کامل نیست، معرفی دیگر اصل‌های باقی‌مانده را تا هنگامی که نیازی به آن‌ها نداشته باشیم به تعویق خواهیم انداخت. با اصول موضوعی که اکنون در اختیار داریم می‌توان چندتایی مفهوم معرفی کرد و تعدادی قضیه هم اثبات نمود. شاید خواننده متوجه شده باشد که وجود هیچ مجموعهٔ نامتناهی را تا کنون تضمین نکرده‌ایم. این نقیصه در فصل ۳ رفع خواهد شد. در

فصل‌های ۶ و ۸ اصل‌های دیگر معرفی خواهند شد. فهرست کاملی از اصول موضوع را می‌توان در بخش ۱ از فصل ۱۵ یافت. دستگاه اصل موضوعی مذکور را اساساً ارنست تسرملو در سال ۱۹۰۸ صورت‌بندی کرده است و از این‌رو، اغلب از آن به اسم دستگاه اصل موضوعی تسرملو- فرانکل برای نظریهٔ مجموعه‌ها نام برده می‌شود.

تمرین‌ها

۱.۳ نشان دهید مجموعهٔ همهٔ xهایی که $x \in A$ و $x \notin B$ وجود دارد.

۲.۳ اصل موضوع وجود را با اصل ضعیف‌تر زیر جایگزین کنید.

اصل موضوع ضعیف وجود. مجموعه‌ای وجود دارد.

اصل موضوع وجود را با استفاده از اصل موضوع ضعیف وجود و اصل موضوع شمول ثابت کنید. [راهنمایی: فرض کنید A مجموعه‌ای باشد که می‌دانیم وجود دارد؛ حال مجموعهٔ $\{x \in A \mid x \neq x\}$ را در نظر بگیرید.]

۳.۳ الف) ثابت کنید «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» وجود ندارد. [راهنمایی: فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها باشد؛ حال مجموعهٔ $\{x \in V \mid x \notin x\}$ را در نظر بگیرید.]

ب) ثابت کنید برای هر مجموعهٔ A، وجود دارد xیی که $x \notin A$.

۴.۳ فرض کنید A و B مجموعه باشند. نشان دهید مجموعهٔ منحصربه‌فرد C موجود است به‌طوری‌که $x \in C$ اگر و تنها اگر یا $x \in A$ و $x \notin B$ یا $x \in B$ و $x \notin A$.

۵.۳ الف) فرض کنید A، B و C داده شده باشند. نشان دهید مجموعهٔ P وجود دارد به‌طوری‌که $x \in P$ اگر و تنها اگر $x = A$ یا $x = B$ یا $x = C$.

ب) قسمت (الف) را به چهار عضو تعمیم دهید.

۶.۳ برای هر X نشان دهید $\mathcal{P}(X) \subseteq X$ نادرست است. به‌ویژه برای هر X، $\mathcal{P}(X) \neq X$. این مطلب بار دیگر نشان می‌دهد که «مجموعهٔ همهٔ

مجموعه‌ها» وجود ندارد. [راهنمایی: قرار دهید $Y = \{u \in X \mid u \notin u\}$؛ در نتیجه $Y \in \mathcal{P}(X)$ درحالی‌که $Y \notin X$.]

۷.۳ اصول موضوع زوج، مجموعهٔ توانی و اجتماع را می‌توان با صورت‌های ضعیف‌تر زیر جایگزین کرد.

اصل موضوع ضعیف زوج. برای هر A و B، مجموعهٔ C وجود دارد به‌طوری‌که $A \in C$ و $B \in C$.

اصل موضوع ضعیف مجموعهٔ توانی. برای هر مجموعهٔ S، مجموعهٔ P وجود دارد به‌طوری‌که $X \subseteq S$ ایجاب می‌کند $X \in P$.

اصل موضوع ضعیف اجتماع. برای هر S، مجموعهٔ U وجود دارد به‌طوری‌که اگر $X \in A$ و $A \in S$، آن‌گاه $X \in U$.

با به کار بردن صورت‌های ضعیف فوق، اصول موضوع زوج، مجموعهٔ توانی، و اجتماع را ثابت کنید. [راهنمایی: اصل موضوع شمول را به کار برید.]

۴ اعمال مقدماتی روی مجموعه‌ها

در این بخش قصد داریم مفاهیم تعریف‌شده در بخش پیشین را قدری روشن‌تر سازیم. به‌ویژه اعمال نظریه ـ مجموعه‌ای ساده‌ای (مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل، و غیره) را معرفی و برخی ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها را اثبات خواهیم کرد. قطعاً خواننده تا حدودی با این مفاهیم آشناست و به همین دلیل از بیشتر جزئیات صرف‌نظر می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳ منظور از «A زیرمجموعه‌ای از B (مشمول در B) است» را بیان می‌کند. خاصیت $\subseteq$ را شمول می‌نامند. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که برای هر A، B و C داریم

الف) $A \subseteq A$.

ب) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، آن‌گاه $A = B$.

ج) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.

برای نمونه، برای اثبات (ج) باید ثابت کرد که اگر $x \in A$، آن‌گاه $x \in C$. اما، اگر $x \in A$، آن‌گاه $x \in B$؛ زیرا $A \subseteq B$. اکنون چون $B \subseteq C$، $x \in B$ ایجاب می‌کند $x \in C$. بنابراین $x \in A$ ایجاب می‌کند $x \in C$.

اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$، می‌گوییم A زیرمجموعهٔ سره‌ای از B است (A به‌طور سره در B قرار دارد) و می‌نویسیم $A \subset B$. همچنین به‌جای $A \subseteq B$ می‌نویسیم $B \supseteq A$ و به‌جای $A \subset B$ می‌نویسیم $B \supset A$.

به بیشتر اعمال نظریه‌ـمجموعه‌ای که خواهد آمد، پیش از این اشاره شده است. احتمالاً خواننده می‌داند چگونه با نمودار وِن این اعمال را به تصویر درآورد (شکل ۱ را ببینید).

۱.۴ تعریف. اشتراک A و B، $A \cap B$، مجموعهٔ همهٔ xهایی است که به هردوی A و B متعلق‌اند. اجتماع A و B، $A \cup B$، مجموعهٔ همهٔ xهایی است که به A یا B (یا هر دو) متعلق‌اند. تفاضل A و B، $A - B$، مجموعهٔ همهٔ $x \in A$هایی است که به B متعلق نیستند. تفاضل متقارن A و B، $A \Delta B$، به‌صورت $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ تعریف می‌شود. (مثال‌های ۳.۳ و ۸.۳ و تمرین‌های ۱.۳ و ۴.۳ را به منظور اثبات و یکتایی آن ببینید.)

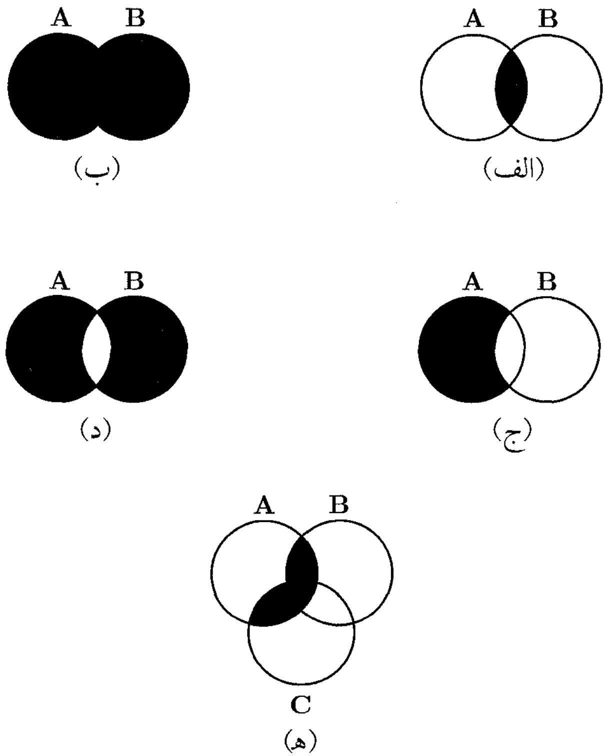
برای تمرین، خواننده می‌تواند اثبات برخی ویژگی‌های سادهٔ این اعمال را انجام دهد.

(تعویض‌پذیری)
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

(شرکت‌پذیری)
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

بنا به رابطهٔ بالا، به‌جای اشتراک سه مجموعهٔ A، B و C با نادیده گرفتن پرانتزها می‌توان به‌راحتی نوشت $A \cap B \cap C$.

به‌همین ترتیب در نوشتن اجتماع سه مجموعه یا بیشتر، احتیاجی به پرانتزها نیست.



شکل ۱: نمودارهای ون. (الف) اشتراک. قسمت هاشورزده برابر $A\cap B$ است. (ب) اجتماع. قسمت هاشورزده برابر $A\cup B$ است. (ج) تفاضل. قسمت هاشورزده برابر $A-B$ است. (د) تفاضل متقارن. قسمت هاشورزده برابر $A\Delta B$ است. (هـ) قانون توزیع‌پذیری. قسمت هاشورزده به‌وضوح هم $A\cap(B\cup C)$ و هم $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ را نشان می‌دهد.

(توزیع‌پذیری)

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B) \qquad \text{(قانون‌های دمورگان)}$$

$$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$$

بعضی از خواص تفاضل و تفاضل متقارن هم عبارت‌اند از

$$A\cap(B-C) = (A\cap B)-C$$

$A\subseteq B$ اگر و تنها اگر $A-B=\varnothing$

$$A\Delta A = \varnothing$$

$$A\Delta B = B\Delta A$$

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

اغلب رسم نمودار وِن به کشف و اثبات روابط بالا و دیگر روابط مشابه کمک می‌کند. برای مثال شکل ۱ (هـ) قانون پخش‌پذیری $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ را نشان می‌دهد. اثبات دقیق آن از این قرار است، باید ثابت کنیم مجموعه‌های $A\cap(B\cup C)$ و $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ اعضای یکسانی دارند. این امر نیازمند نشان دادن دو چیز است:

الف) هر عضو $A\cap(B\cup C)$ به $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ تعلق دارد.

ب) هر عضو $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ به $A\cap(B\cup C)$ تعلق دارد.

برای اثبات (الف)، فرض کنید $a\in A\cap(B\cup C)$. بنابراین $a\in A$ و همچنین $a\in B\cup C$. از این‌رو، یا $a\in B$ یا $a\in C$. پس $a\in A$ و $a\in B$ یا $a\in A$ و $a\in C$. این هم یعنی اینکه $a\in A\cap B$ یا $a\in A\cap C$؛ بالاخره اینکه $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

برای اثبات (ب)، فرض کنید $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. بنابراین $a\in A\cap B$ یا $a\in A\cap C$. در حالت اول، $a\in A$ و $a\in B$، پس $a\in A$ و $a\in B\cup C$ و در نتیجه $a\in A\cap(B\cup C)$. در حالت دوم، $a\in A$ و $a\in C$ و بنابراین مجدداً $a\in A$ و $a\in B\cup C$ و نهایتاً $a\in A\cap(B\cup C)$.

بخش تمرین‌ها مواد کافی برای تمرین استدلال‌های مقدماتی مشابهی دربارهٔ مجموعه‌ها را فراهم می‌کنند.

اجتماع دستگاهی از مجموعه‌ها، S، را در بخش گذشته توصیف کردیم. اکنون $\bigcap S$، اشتراک خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌ها، S، را تعریف می‌کنیم: گوییم $x \in \bigcap S$ اگر و تنها اگر برای هر $A \in S$، $x \in A$. بنابراین اشتراک دو مجموعه هم حالت خاصی از این عمل کلی‌تر است؛ یعنی $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$. توجه کنید که $\bigcap \varnothing$ را تعریف نکردیم؛ دلیل این امر آن است که هر x به همهٔ Aها، که $A \in \varnothing$، متعلق است (به این دلیل که اصلاً چنین Aیی وجود ندارد)، بنابراین، $\bigcap \varnothing$ باید مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها باشد. بررسی جزئیات بیشتری از اجتماع‌ها و اشتراک‌های کلی را تا فصل ۲، که در آن نمادهای خوش‌دست‌تری در اختیار خواهیم داشت، به تعویق خواهیم انداخت.

مطلب آخر اینکه، مجموعه‌های A و B را مجزا گوییم اگر $A \cap B = \varnothing$. و به‌صورت کلی‌تر اینکه S را یک دستگاه از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا گوییم هرگاه برای هر $A, B \in S$ که $A \neq B$، داشته باشیم $A \cap B = \varnothing$.

تمرین‌ها

۱.۴ همهٔ روابط مشخص‌شده در این بخش را ثابت کنید و آن‌ها را با نمودار ون به تصویر درآورید.

۲.۴ ثابت کنید

الف) $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A \cap B = A$ اگر و تنها اگر $A \cup B = B$ اگر و تنها اگر $A - B = \varnothing$.

ب) $A \subseteq B \cap C$ اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $A \subseteq C$.

ج) $B \cup C \subseteq A$ اگر و تنها اگر $B \subseteq A$ و $C \subseteq A$.

د) $A - B = (A \cup B) - B = A - (A \cap B)$.

ه) $A \cap B = A - (A - B)$.

و) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

ز) $A = B$ اگر و تنها اگر $A \Delta B = \varnothing$.

۳.۴ برای هر یک از گزاره‌های (کاذب) زیر، یک نمودار ون رسم کنید که گزارهٔ داده شده برای آن برقرار نباشد.

الف) $A - B = B - A$.

ب) $A \cap B \subset A$.

ج) $A \subseteq B \cup C$ ایجاب می‌کند $A \subseteq B$ یا $A \subseteq C$.

د) $B \cap C \subseteq A$ ایجاب می‌کند $B \subseteq A$ یا $C \subseteq A$.

۴.۴ فرض کنید A یک مجموعه باشد، نشان دهید «متممی» برای A وجود ندارد. («متمم» A عبارت است از مجموعهٔ همهٔ xهایی که $x \notin A$.)

۵.۴ فرض کنید $S \neq \varnothing$ و A مجموعه باشد.

الف) قرار دهید $T_1 = \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid X \in S$ به‌ازای یک $Y = A \cap X\}$ و ثابت کنید $A \cap \bigcup S = \bigcup T_1$. (تعمیم قانون توزیع‌پذیری)

ب) قرار دهید $T_2 = \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid X \in S$ به‌ازای یک $Y = A - X\}$ و ثابت کنید

$$A - \bigcup S = \bigcap T_2$$
$$A - \bigcap S = \bigcup T_2$$

(تعمیم قانون‌های دمورگان.)

۶.۴ ثابت کنید برای هر $S \neq \varnothing$، $\bigcap S$ وجود دارد. در کجای برهان فرض $S \neq \varnothing$ به کار می‌رود.

فصل ۲

رابطه‌ها، تابع‌ها، و ترتیب‌ها

۱ زوج‌های مرتب

در این فصل برنامهٔ خود را مبنی بر پروراندن نظریهٔ مجموعه‌ها به‌منزلهٔ بنیانی برای ریاضیات آغاز می‌کنیم. نشان خواهیم داد چگونه مفاهیم کلی متنوعی از ریاضیات مانند رابطه‌ها، تابع‌ها، و ترتیب‌ها را می‌توان برحسب مجموعه‌ها بیان کرد.

کار را با معرفی مفهوم زوج مرتب شروع می‌کنیم. اگر a و b دو مجموعه باشند، آن‌گاه زوج نامرتب $\{a, b\}$ مجموعه‌ای است که اعضای آن دقیقاً a و b هستند. «ترتیب» کنار هم قرار دادن a و b، در اینجا، نقشی ندارد؛ به‌عبارت‌دیگر، $\{a, b\} = \{b, a\}$. در بسیاری از کاربردها، نیاز داریم a و b را طوری جفت کنیم که بتوان گفت کدام اول آمده است و کدام دوم. در این حالت زوج مرتب a و b را با (a, b) نشان می‌دهیم؛ a مختص اول و b مختص دوم زوج (a, b) است.

زوج مرتب نیز همانند دیگر اشیای مورد بحث ما باید یک مجموعه باشد. این مجموعه باید به‌گونه‌ای تعریف شود که دو زوج مرتب مساوی باشند اگر و تنها اگر مختص‌های اول با هم برابر باشند و مختص‌های دوم با هم. این به‌ویژه تضمین می‌کند که $(a, b) \neq (b, a)$ اگر $a \neq b$ (تمرین ۳.۱ را ببینید).

راه‌های زیادی برای تعریف (a, b) وجود دارد که شرط گفته‌شده را برآورده

سازد. ما یکی از این تعریف‌ها را ارائه می‌کنیم و خواننده را برای رویکردی جایگزین به تمرین ۶.۱ ارجاع می‌دهیم.

۱.۱ تعریف. $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$.

اگر $a\neq b$، آن‌گاه (a,b) دو عضو دارد، یکی مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ و دیگری زوج بدون ترتیب $\{a,b\}$. مختص اول را با دیدن عضو $\{a\}$ درمی‌یابیم. مختص دوم، عضو دیگر مجموعهٔ $\{a,b\}$ است. اگر $a=b$، آن‌گاه $(a,b)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\}\}$ فقط یک عضو دارد. در هر حال، به نظر واضح است که هر دو مختص را می‌توان به‌طور منحصربه‌فرد از مجموعهٔ (a,b) بازخوانی کرد. این مطلب را در قضیهٔ زیر دقیق می‌سازیم.

۲.۱ قضیه. $(a,b)=(a',b')$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$.

برهان. اگر $a=a'$ و $b=b'$، آن‌گاه

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}=(a',b').$$

استلزام دیگر قدری ظریف‌تر است. فرض کنیم $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$. اگر $a\neq b$، آن‌گاه $\{a\}=\{a'\}$ و $\{a,b\}=\{a',b'\}$. بنابراین، اولاً $a=a'$ و ثانیاً $\{a,b\}=\{a',b'\}$، که نتیجه می‌دهد $b=b'$. اگر $a=b$، آن‌گاه $\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\}\}$. بنابراین $\{a\}=\{a'\}$، $\{a\}=\{a',b'\}$ و در نتیجه به‌دست می‌آوریم $a=a'=b'$. پس در این حالت نیز $a=a'$ و $b=b'$ برقرارند. □

با در اختیار داشتن زوج‌های مرتب می‌توان سه‌تایی‌های مرتب

$$(a,b,c)=((a,b),c)$$

و چهارتایی‌های مرتب

$$(a,b,c,d)=((a,b,c),d)$$

و غیره را تعریف کرد. همچنین، «یکتایی مرتب»

$$(a)=a$$

را توصیف می‌کنیم. با این حال، تعریف کلی یک nتایی مرتب را تا فصل ۳، که اعداد طبیعی تعریف می‌شوند، باید به تعویق بیندازیم.

تمرین‌ها

۱.۱ ثابت کنید $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$ و $a,b \in \bigcup(a,b)$. به‌طور کلی‌تر، اگر $a \in A$ و $b \in A$، آن‌گاه $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

۲.۱ ثابت کنید که (a,b)، (a,b,c)، و (a,b,c,d) به‌ازای هر a,b,c,d وجود دارند.

۳.۱ ثابت کنید: اگر $(a,b) = (b,a)$، آن‌گاه $a = b$.

۴.۱ نشان دهید که $(a,b,c) = (a',b',c')$ نتیجه می‌دهد $a = a'$، $b = b'$، و $c = c'$.

۵.۱ a، b، و c را طوری بیابید که $((a,b),c) \neq (a,(b,c))$. البته می‌توانیم مجموعهٔ دوم را برای تعریف سه‌تایی‌های مرتب به کار ببریم، بی‌آنکه تغییری در نتایج ایجاد شود.

۶.۱ برای دادن یک تعریف جایگزین برای زوج‌های مرتب، دو مجموعهٔ متمایز $\Box$ و $\triangle$ (مثلاً، $\Box = \varnothing$ و $\triangle = \{\varnothing\}$) را انتخاب و تعریف کنید

$$\langle a,b\rangle = \big\{\{a,\Box\},\ \{b,\triangle\}\big\}.$$

برای این مفهوم جدید از زوج‌های مرتب، مشابه قضیهٔ ۱.۲ را بیان و اثبات کنید. سه‌تایی و چهارتایی‌های مرتب را نیز تعریف کنید.

۲ رابطه‌ها

ریاضیدان‌ها اغلب روابط بین اشیای ریاضی را مطالعه می‌کنند. غالب اوقات با روابط بین دوگونه از اشیا مواجه‌ایم. این گونه روابط را رابطه‌های دوتایی می‌نامیم. مثلاً، فرض کنید بگوییم خط l در رابطهٔ R_1 با نقطهٔ P است اگر l از P بگذرد. در این صورت، R_1 یک رابطهٔ دوتایی بین اشیائی به نام خطوط و اشیائی دیگر به‌نام

نقاط است. به‌همین ترتیب، ما رابطهٔ R_2 بین اعداد صحیح مثبت و اعداد صحیح مثبت را با گفتن اینکه عدد صحیح مثبت m در رابطهٔ R_2 با اعداد صحیح مثبت n است اگر m بر n بخش‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم.

اکنون فرض کنیم رابطهٔ R'_1 بین خطوط و نقاط به این صورت باشد که خط l در رابطهٔ R'_1 با نقطهٔ P است اگر P روی l واقع باشد. به‌وضوح، دقیقاً وقتی خط l در رابطهٔ R_1 با نقطهٔ P است که l در رابطهٔ R'_1 با نقطهٔ P باشد. گرچه، خاصیت‌های متفاوتی R_1 و R'_1 را تعریف کرده‌اند ما معمولاً R_1 و R'_1 را یکی در نظر می‌گیریم، به‌عبارت‌دیگر، $R'_1 = R_1$. به‌همین ترتیب، فرض کنید عدد صحیح مثبت m در رابطهٔ R'_2 با عدد صحیح مثبت n باشد اگر n مضربی از m باشد. باز هم زوج مرتب‌های یکسانی در رابطهٔ R_2 و R'_2 هستند، و در نتیجه، ما R_2 و R'_2 را یک رابطه به حساب می‌آوریم.

بنابراین یک رابطهٔ دوتایی با معین کردن تمام زوج‌های مرتب اشیائی که در آن رابطه‌اند مشخص می‌شود؛ اینکه چه خاصیتی مجموعهٔ این زوج‌های مرتب را توصیف کرده است اهمیتی ندارد. بنابراین به تعریف زیر می‌رسیم.

۱.۲ تعریف. مجموعهٔ R یک رابطهٔ دوتایی نامیده می‌شود اگر همهٔ اعضای R زوج مرتب باشند. به عبارت دیگر، اگر برای هر $z \in R$ اعضائی مانند x و y موجود باشند به‌قسمی که $z = (x, y)$.

۲.۲ مثال. رابطهٔ R_2 برابر مجموعهٔ

$$\{z \mid z = (m,n) \text{ اعداد صحیح مثبت } m \text{ و } n \text{ موجود است به‌طوری‌که } \}$$

است. اعضای R_2 زوج‌های مرتب زیر است

$$(1,1), (1,2), (1,3), \ldots$$
$$(2,2), (2,4), (2,6), \ldots$$
$$(3,3), (3,6), (3,9), \ldots$$
$$\ldots$$

معمول است به‌جای $(x, y) \in R$ بنویسیم xRy. گوییم x در رابطهٔ R با y است اگر xRy برقرار باشد.

اکنون چند اصطلاح مربوط به رابطه‌ها را معرفی می‌کنیم.

۳.۲ تعریف. فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی باشد.

الف) مجموعهٔ همهٔ xهایی را که در رابطهٔ R با برخی yها هستند دامنهٔ R می‌نامند و با $\operatorname{dom} R$ نشان می‌دهند. بنابراین $\operatorname{dom} R = \{x \mid xRy$ که yیی وجود دارد$\}$.
$\operatorname{dom} R$ مجموعهٔ همهٔ مختص‌های اول زوج‌های مرتب در R است.

ب) مجموعهٔ همهٔ yهایی که به‌ازای برخی xها، x در رابطهٔ R با y است برد R می‌نامند و با $\operatorname{ran} R$ نمایش می‌دهند. بنابراین $\operatorname{ran} R = \{y \mid xRy$ به‌طوری‌که xیی وجود دارد$\}$. $\operatorname{ran} R$ مجموعهٔ همهٔ مختص‌های دوم زوج‌های مرتب در R است. برای هر رابطهٔ R هم $\operatorname{dom} R$ هم $\operatorname{ran} R$ هر دو موجودند، این مطلب را ثابت کنید (تمرین ۱.۲ را ببینید).

ج) مجموعهٔ $\operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$ را میدان R می‌نامند و با $\operatorname{field} R$ نشان می‌دهند.

د) اگر $\operatorname{field} R \subseteq X$، گوییم R یک‌رابطه در X است یا اینکه R یک رابطه‌بین اعضای X است.

۴.۲ مثال. فرض کنید R_2 رابطهٔ گفته‌شده در مثال ۲.۲ باشد.

$$\operatorname{dom} R_2 = \{m \mid \text{را می‌شمارد}\ n\ \text{عدد}\ m\ \text{موجود است به‌طوری‌که}\ n\ \text{عدد}\}$$
$$= \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت}$$

به این دلیل که هر عدد صحیح مثبت m عدد nیی را می‌شمارد، مثلاً $n = m$.

$$\operatorname{ran} R_2 = \{n \mid \text{را می‌شمارد}\ n\ \text{عدد}\ m\ \text{موجود است به طوری که}\ m\ \text{عدد}\}$$
$$= \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت}$$

به این دلیل که هر عدد صحیح مثبت n را عددی مثل m می‌شمارد، مثلاً $m = n$.

$$\operatorname{field} R_2 = \operatorname{dom} R_2 \cup \operatorname{ran} R_2 = \text{مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت}$$

R_2 یک رابطه بین اعداد صحیح مثبت است.

حال تعریف ۳.۲ را تعمیم می‌دهیم.

۵.۲ تعریف.

الف) تصویر A تحت R برابر مجموعهٔ همهٔ yهایی از برد R است که در رابطهٔ R با برخی اعضای A هستند؛ آن را با نماد $R[A]$ نشان می‌دهند. پس

$$R[A] = \{y \in \operatorname{ran} R \mid \text{یی موجود است به‌طوری‌که } xRy \text{ و } x \in A\}.$$

ب) تصویر وارون B تحت R برابر مجموعهٔ همهٔ xهایی از دامنهٔ R است که در رابطهٔ R با برخی اعضای B هستند؛ آن را با $R^{-1}[B]$ نشان می‌دهند. پس

$$R^{-1}[B] = \{x \in \operatorname{dom} R \mid \text{یی موجود است به‌طوری‌که } xRy \text{ و } y \in B\}.$$

۶.۲ مثال. $R_2^{-1}[\{3, 8, 9, 12\}] = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$؛
$R_2[\{2\}] =$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت فرد.

۷.۲ تعریف. فرض کنید R رابطهٔ دوتایی باشد.وارون R برابر مجموعهٔ زیر است

$$R^{-1} = \{z \mid (y, x) \in R \text{ که } y \text{ و } x \text{ به‌ازای } z = (x, y)\}.$$

۸.۲ مثال. دوباره فرض کنید

$$R_2 = \{z \mid \text{ را می‌شمارد } n \text{ عدد } m \text{ اعداد صحیح مثبت و } n \text{ و } m \text{ ،} z = (m, n)\}.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} R_2^{-1} &= \{w \mid w = (n, m) \text{ و } (m, n) \in R_2\} \\ &= \{w \mid \text{ را می‌شمارد } n \text{ عدد } m \text{ اعداد صحیح مثبت و } n \text{ و } m \text{ ،} w = (n, m)\}. \end{aligned}$$

در معرفی R_2، متغیر m را برای مختص اول و متغیر n را برای مختص دوم استفاده کردیم. همچنین خاصیتی که R_2 را توصیف می‌کرد طوری بیان کردیم که متغیر m ابتدا ذکر شود. توصیف R_2^{-1} نیز به همین شیوه، مرسوم (و نه اجباری) است. آنچه باید انجام دهیم به کار بردن حرف m به‌جای n و حرف n به‌جای m و تغییر جمله‌بندی است.

R_2^{-1}=$\{w \mid$ را می‌شمارد m عدد n اعداد صحیح مثبتی هستند و m و n ،$w=(m,n)\}$
=$\{w \mid$ است n مضربی از m اعداد صحیح مثبتی هستند و n و m ،$w=(m,n)\}$.

اکنون R_2 و R_2^{-1} به موازات یکدیگر توصیف شده‌اند. از این نظر، وارون رابطهٔ «می‌شمارد» به‌صورت رابطهٔ «مضربی است» می‌باشد.

خواننده شاید متوجه شده باشد که نماد $R^{-1}[B]$ در تعریف ۵.۲ (ب) برای تصویر وارون B تحت R، اکنون تصویر B تحت R^{-1} را نیز نشان می‌دهد. خوشبختانه، این دو مجموعه با هم برابرند.

۹.۲ لم. تصویر وارون B تحت R با تصویر B تحت R^{-1} برابر است.

برهان. ابتدا ملاحظه کنید که $\operatorname{dom} R = \operatorname{ran} R^{-1}$ (تمرین ۴.۲ را ببینید). پس $x \in \operatorname{dom} R$ به تصویر وارون B تحت R متعلق است اگر و تنها اگر $(x,y) \in R$ به‌ازای یک $y \in B$. اما $(x,y) \in R$ اگر و تنها اگر $(y,x) \in R^{-1}$. بنابراین x به تصویر وارون B تحت R تعلق دارد اگر و تنها اگر $(y,x) \in R^{-1}$ به‌ازای یک $y \in B$. به‌عبارت‌دیگر، اگر و تنها اگر x به تصویر B تحت R^{-1} متعلق باشد. □

در ادامه بارها رابطه‌های متنوعی، به‌عبارت‌دیگر مجموعه‌هایی از زوج‌های مرتب با خواص معینی، تعریف می‌کنیم. به منظور ساده کردن نمادهایمان، قرارداد زیر را معرفی می‌کنیم. به‌جای

$\{w \mid$ صادق است $\mathbf{P}(x,y)$ که y و x یی به‌ازای $w=(x,y)\}$

فقط می‌نویسیم

$$\{(x,y) \mid \mathbf{P}(x,y)\}.$$

مثلاً، با این نماد می‌توان وارون R را به‌صورت $\{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$ بیان نمود. [در اینجا نیز همانند حالت کلی، فقط وقتی مجاز به استفاده از این نماد هستیم که ثابت کنیم مجموعهٔ A موجود است به‌طوری‌که برای هر x و y، $\mathbf{P}(x,y)$ ایجاب کند $(x,y) \in A$.]

۱۰.۲ تعریف. فرض کنید R و S رابطهٔ دوتایی باشند. ترکیب R و S عبارت است از رابطهٔ

$$S \circ R = \{(x,z) \mid (y,z) \in S \text{ و } (x,y) \in R \text{ که بهقسمی باشد موجود } y\}.$$

بنابراین $(x,z) \in S \circ R$ به این معنی است که به‌ازای یک y داریم xRy و ySz. برای اینکه اشیائی را که با x در $S \circ R$ در رابطه هستند بیابیم، ابتدا اشیای y که با x در R هستند و سپس اشیائی را که با آن yها در S در رابطه هستند، می‌یابیم. توجه کنید گرچه ابتدا R عمل می‌کند و بعد S، نماد $S \circ R$ متداول است (حداقل در مورد توابع این چنین است؛ بخش ۳ را ببینید).

چند نوع از رابطه‌ها اهمیت خاصی دارند. تعدادی از آن‌ها را در این بخش و تعدادی دیگر را در ادامهٔ فصل معرفی می‌کنیم.

۱۱.۲ تعریف. رابطهٔ عضویت روی A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\in_A = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A,\ a \in b\}.$$

رابطهٔ همانی روی A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{Id}_A = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A,\ a = b\}.$$

۱۲.۲ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتبی که مختص اول آن‌ها از A و مختص دوم آن‌ها از B گرفته شود، حاصل‌ضرب دکارتی A و B نامیده می‌شود و با $A \times B$ نشان داده می‌شود. به‌بیان‌دیگر،

$$A \times B = \{(a,b) \mid\ a \in A,\ b \in B\}.$$

بنابراین $A \times B$ رابطه‌ای است که در آن هر عضو A با هر عضو B در رابطه قرار می‌گیرد.

نشان دادن اینکه مجموعهٔ $A \times B$ موجود است خیلی بدیهی نیست. ولی از تمرین ۱.۱ می‌توان دریافت که اگر $a \in A$ و $b \in B$، آن‌گاه $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

بنابراین

$$A \times B = \{(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

چون ثابت کردیم $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ موجود است، پس وجود مجموعهٔ $A \times B$ از اصل موضوع شمول نتیجه می‌شود. [به بیان روشن‌تر، می‌توان نوشت

$$[A \times B = \{w \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \text{به‌ازای } a \in A \text{یی و } b \in B \text{یی } w = (a,b)\}$$

مجموعهٔ $A \times A$ را با A^2 نشان می‌دهیم. اکنون به‌راحتی می‌توان حاصل‌ضرب دکارتی سه مجموعه را معرفی کرد

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C.$$

ملاحظه کنید که

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

(در اینجا از تعمیم واضحی از قراردادهای نمادگذاریمان استفاده کرده‌ایم). معمولاً $A \times A \times A$ را با A^3 نشان می‌دهند.

می‌توان رابطه‌های سه‌تایی را نیز تعریف کرد.

۱۳.۲ تعریف. یک‌رابطهٔ سه‌تایی مجموعه‌ای از سه‌تایی‌های نامرتب است. به بیان روشن‌تر، S یک رابطهٔ سه‌تایی است اگر برای هر $u \in S$ اعضای x، y و z موجود باشد به‌طوری‌که $u = (x,y,z)$. اگر $S \subseteq A^3$، می‌گوییم S یک رابطهٔ سه‌تایی در A است. (توجه کنید که رابطهٔ دوتایی R در A است اگر و تنها اگر $R \subseteq A^2$.)

مفاهیم این بخش را می‌توانیم به رابطه‌های سه‌تایی تعمیم دهیم. همچنین می‌توان رابطه‌های ۴تایی یا ۱۷تایی تعریف کرد. اما این مطالب را تا بخش ۵ از فصل سه به تعویق می‌اندازیم، در آنجا اعداد طبیعی را در اختیار داریم که تعریف رابطه‌های nتایی را ممکن می‌سازند. در این مرحله ما به دلایل فنی، فقط رابطهٔ یکتایی را که عبارت است از یک مجموعه تعریف می‌کنیم. یک رابطهٔ یکتایی در A

زیرمجموعه‌ای از A است. این تعریف با این طرح کلی که یک رابطهٔ یکتایی در A باید یک مجموعه از یکتایی‌ها از اعضای A باشد و هم با تعریف $x = (x)$ در بخش ۱ سازگار است.

تمرین‌ها

۱.۲ فرض کنید که R یک رابطه دوتایی باشد. فرض کنید $A = \bigcup \left(\bigcup R \right)$. نشان دهید $(x, y) \in R$ نتیجه می‌دهد $x \in A$ و $y \in A$. و از آن نتیجه بگیرید که $\operatorname{dom} R$ و $\operatorname{ran} R$ وجود دارند.

۲.۲ الف) نشان دهید R^{-1} و $S \circ R$ وجود دارند. [راهنمایی: $R^{-1} \subseteq (\operatorname{ran} R) \times (\operatorname{dom} R)$ و $S \circ R \subseteq (\operatorname{dom} R) \times (\operatorname{ran} S)$.]

ب) نشان دهید $A \times B \times C$ وجود دارد.

۳.۲ فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی و A و B دو مجموعه باشند. ثابت کنید:

الف) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.

ب) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

ج) $R[A - B] \supseteq R[A] - R[B]$.

د) با یک مثال نشان دهید که $\subseteq$ و $\supseteq$ در قسمت‌های (ب) و (ج) نمی‌توانند با $=$ جایگزین شوند.

ه) قسمت‌های (الف)ــ(د) را با R^{-1} به‌جای R ثابت کنید.

و) $R^{-1}[R[A]] \supseteq A \cap \operatorname{dom} R$ و $R[R^{-1}[B]] \supseteq B \cap \operatorname{ran} R$؛ مثال‌هایی بیاورید که برای آن‌ها تساوی برقرار نباشد.

۴.۲ فرض کنید $R \subseteq X \times Y$. ثابت کنید:

الف) $R[X] = \operatorname{ran} R$ و $R^{-1}[Y] = \operatorname{dom} R$.

ب) اگر $a \notin \operatorname{dom} R$، آن‌گاه $R[\{a\}] = \varnothing$؛ اگر $b \notin \operatorname{ran} R$، آن‌گاه $R^{-1}[\{b\}] = \varnothing$.

ج) $\operatorname{dom} R = \operatorname{ran} R^{-1}$ و $\operatorname{ran} R = \operatorname{dom} R^{-1}$.

د) $(R^{-1})^{-1} = R$.

ه) $\mathrm{Id}_{\mathrm{dom}R} \subseteq R^{-1} \circ R$ و $\mathrm{Id}_{\mathrm{ran}R} \subseteq R \circ R^{-1}$.

۵.۲ فرض کنید $X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ و $Y = \mathcal{P}(X)$. رابطه‌های زیر را توصیف کنید

الف) $\in_Y$.

ب) Id_Y.

دامنه، برد، و میدان هر دو رابطه را مشخص کنید.

۶.۲ برای هر سه رابطه R، S، و T ثابت کنید:

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R.$$

(یعنی، عمل $\circ$ شرکت‌پذیر است.)

۷.۲ مثال‌هایی از مجموعهٔ، X، Y، و Z ارائه دهید به‌طوری‌که

الف) $X \times Y \neq Y \times X$.

ب) $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$.

ج) $X^3 \neq X \times X^2$ [یا به عبارت دیگر، $(X \times X) \times X \neq X \times (X \times X)$].

[راهنمایی برای قسمت (ج): $X = \{a\}$.]

۸.۲ ثابت کنید

الف) $A \times B = \varnothing$ اگر و فقط اگر $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$.

ب) $(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$؛

$A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$

ج) همان قسمت (ب)، با جایگزین کردن عمل $\cup$ با $\cap$ و $-$ با $\triangle$.

۳ تابع‌ها

در ریاضیات تلقی ما از یک تابع عبارت است از یک دستورالعمل یا یک قاعده که به هر شیء a از دامنهٔ تابع یک شیء منحصربه‌فرد مانند b را موسوم به مقدار تابع در a نسبت می‌دهد. بنابراین، تابع نمونهٔ خاصی از رابطه را نشان می‌دهد، رابطه‌ای که هر شیء a از دامنه با دقیقاً یک شیء در برد، یا همان مقدار تابع در a، در رابطه قرار داده شده است.

۱.۳ تعریف. رابطهٔ دوتایی F یک تابع (یانگاشت، تناظر) نامیده می‌شود اگر برای هر a، b_1، و b_2، روابط aFb_1 و aFb_2 ایجاب کنند $b_1 = b_2$. به بیان دیگر، رابطهٔ دوتایی F تابع است اگر و تنها اگر برای هر a از $\mathrm{dom}F$ دقیقاً یک b موجود باشد به‌طوری‌که aFb. این bی منحصربه‌فرد، مقدار F در a نامیده می‌شود و با $F(a)$ یا F_a نموده می‌شود. [اگر $a \notin \mathrm{dom}\, F$، مقدار $F(a)$ تعریف نمی‌شود.] اگر F یک تابع با $\mathrm{dom}\, F$ و $\mathrm{ran}\, F \subseteq B$ باشد، نمادهای $F : A \to B$، $\langle F(a) \mid a \in A \rangle$، $\langle F_a \mid a \in A \rangle$، و $\langle F_a \rangle_{a \in A}$ برای نمایش تابع F نمادهای متداولی هستند. برد تابع F را می‌توان با $\{F(a) \mid a \in A\}$ یا $\{F_a\}_{a \in A}$ نشان داد.

اصل موضوع توسیع را می‌توان به‌صورت زیر برای توابع به‌کار بست.

۲.۳ لم. فرض کنید F و G دو تابع باشند. $F = G$ اگر و تنها اگر $\mathrm{dom}\, F = \mathrm{dom}\, G$ و $F(x) = G(x)$ برای هر $x \in \mathrm{dom}\, F$.

اثبات را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

از آنجایی که تابع‌ها رابطه‌های دوتایی هستند، مفاهیم دامنه، برد، تصویر، تصویر وارون، وارون، و ترکیب را می‌توان دربارهٔ آن‌ها به کار بست. اضافه بر اینها، چند تعریف دیگر بیان می‌کنیم.

۳.۳ تعریف. فرض کنید F یک تابع و A و B دو مجموعه باشند.

الف) F تابعی روی A است اگر $\mathrm{dom}\, F = A$.

ب) F تابعی بتوی B است اگر $\mathrm{ran}\, F \subseteq B$.

ج) F تابعی بروی B است اگر $\mathrm{ran}\, F = B$.

د) تحدید تابع F به A عبارت است از تابع

$$F \restriction A = \{(a,b) \in F \mid a \in A\}.$$

اگر G تحدید F به A باشد، گوییم F یک گسترش G است.

۴.۳ مثال. قرار دهید $F = \{(x, 1/x^2) \mid \text{عدد حقیقی است } x \text{ و } x \neq 0\}$. F تابع است؛ چه اگر aFb_1 و aFb_2، آن‌گاه $b_1 = 1/a^2$ و $b_2 = 1/a^2$، پس $b_1 = b_2$.

اگر اندکی قراردادهای نمادگذاریمان را گسترش بدهیم، می‌توان نوشت

$$F = \langle \frac{1}{x^2} \mid x \neq 0 \text{ و است حقیقی عدد } x \rangle.$$

مقدار F در x، $F(x)$، برابر $1/x^2$ است. F یک تابع روی A است که در آن $\operatorname{dom} F = \{x \mid x \neq 0 \text{ و است حقیقی عدد } x\} = A$. F تابعی بتوی ولی نه بروی مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است. اگر $B = \{x \mid x > 0 \text{ و است حقیقی عدد } x\}$، در این صورت F بروی B است. اگر $C = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$، در این صورت $F[C] = \{x \mid x \geq 1\}$ و $F^{-1}[C] = \{x \mid x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1\}$.

اجازه دهید ترکیب $F \circ F$ را بیابیم:

$$\begin{aligned} F \circ F &= \{(x,z) \mid (y,z) \in f \text{ و } (x,y) \in f \text{ که طوری به است موجود } y\} \\ &= \{(x,z) \mid z = \frac{1}{y^2} \text{ ،} y \neq 0 \text{ و } y = \frac{1}{x^2} \text{ ،} x \neq 0 \text{ که طوری به است موجود } y\} \\ &= \{(x,z) \mid x \neq 0,\ z = x^4\} \\ &= \langle x^4 \mid x \neq 0 \rangle. \end{aligned}$$

توجه کنید که $F \circ F$ تابع است. این امر اتفاقی نیست.

۵.۳ قضیه. فرض کنید f و g دو تابع باشند. در این صورت $g \circ f$ تابع است. $g \circ f$ در x تعریف می‌شود اگر و تنها اگر f در x و g در $f(x)$ تعریف شود، یعنی

$$\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f \cap f^{-1}[\operatorname{dom} g].$$

همچنین، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ برای هر $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم که $g \circ f$ تابع است. اگر $x(g \circ f)z_1$ و $x(g \circ f)z_2$ اعضای y_1 و y_2 موجودند به‌طوری‌که xfy_1، y_1gz_1 و xfy_2، y_2gz_2. چون f تابع است، $y_1 = y_2$. لذا داریم y_1gz_1، y_1gz_2 و در نتیجه $z_1 = z_2$، زیرا g نیز تابع است.

اکنون دامنهٔ $g \circ f$ را جستجو می‌کنیم. $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ اگر و تنها اگر z موجود باشد به‌طوری‌که $x(g \circ f)z$، به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر z و y موجود باشند به‌طوری‌که xfy و ygz. اما این امر اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر

$x \in \operatorname{dom} f$ و $x \in \operatorname{dom} g$ و $y = f(x) \in \operatorname{dom} g$. عبارت آخر معادل با این است که $x \in \operatorname{dom} f$ و $x \in f^{-1}[\operatorname{dom} g]$. □

در حسابان از قضیهٔ فوق به منظور محاسبهٔ دامنهٔ ترکیب توابع استفاده می‌کنند. اجازه بدهید یک نمونه مثال ارائه دهیم.

۶.۳ مثال. قرار دهید

$$g = \langle \sqrt{x} \mid x \geq ۰ \rangle, \quad f = \langle x^۲ - ۱ \mid \text{حقیقی } x \rangle.$$

ترکیب $g \circ f$ را بیابید.

نخست ما دامنهٔ $g \circ f$ را مشخص می‌کنیم. $\operatorname{dom} f$ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است و $\operatorname{dom} g = \{x \mid x \geq ۰\}$. داریم

$$f^{-۱}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid f(x) \in \operatorname{dom} g\} = \{x \mid x^۲ - ۱ \geq ۰\} = \{x \mid x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱\}.$$

از این‌رو، $\operatorname{dom}(g \circ f) = (\operatorname{dom} f) \cap f^{-۱}[\operatorname{dom} g] = \{x \mid x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱\}$ و

$$\begin{aligned} g \circ f &= \{(x, z) \mid x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \text{ و } \sqrt{y} = z \text{، } x^۲ - ۱ = y \text{ به‌ازای برخی } y\text{ها}\} \\ &= \langle \sqrt{x^۲ - ۱} \mid x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \rangle. \end{aligned}$$

اگر f تابع باشد، وارون آن $f^{-۱}$ یک رابطه است، اما ممکن است تابع نباشد. گوییم تابع f وارون‌پذیر است اگر $f^{-۱}$ تابع باشد.

یافتن شرایط لازم و کافی برای وارون‌پذیر بودن یک تابع حائز اهمیت است.

۷.۳ تعریف. تابع f را یک‌به‌یک یا انژکتیو نامند هرگاه $a_۱ \in \operatorname{dom} f$، $a_۲ \in \operatorname{dom} f$ و $a_۱ \neq a_۲$ ایجاب کند $f(a_۱) \neq f(a_۲)$. به بیان دیگر، اگر $a_۱ \in \operatorname{dom} f$، $a_۲ \in \operatorname{dom} f$ و $f(a_۱) = f(a_۲)$، آن‌گاه $a_۱ = a_۲$. بنابراین، تابع یک‌به‌یک مقادیر متفاوتی را به‌ازای اعضای متفاوتی از دامنه اختیار می‌کند.

۸.۳ قضیه. یک تابع وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر یک‌به‌یک باشد. اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $f^{-۱}$ نیز وارون‌پذیر است و $f = (f^{-۱})^{-۱}$.

برهان.

الف) فرض کنید f وارون‌پذیر باشد؛ در این صورت f^{-1} تابع است. نتیجه آنکه، برای هر $a \in \operatorname{dom} f$، $f^{-1}(f(a)) = a$. اگر $a_1, a_2 \in \operatorname{dom} f$ و $f(a_1) = f(a_2)$، به‌دست می‌آوریم $f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2))$ و $a_1 = a_2$. لذا f یک‌به‌یک است.

ب) فرض کنید f یک‌به‌یک باشد. اگر $af^{-1}b_1$ و $af^{-1}b_2$، داریم b_1fa و b_2fa. از این‌رو، $b_1 = b_2$ و بنابراین ثابت کردیم f^{-1} تابع است.

ج) از تمرین ۴.۲ (د) می‌دانیم که $f = (f^{-1})^{-1}$، لذا f^{-1} نیز وارون‌پذیر است (در نتیجه، f^{-1} نیز یک‌به‌یک است). □

۹.۳ مثال.

الف) قرار دهید $f = \langle 1/x^2 \mid x \neq 0 \rangle$؛ f^{-1} را بیابید.

چون $f = \{(x, 1/x^2) \mid x \neq 0\}$، داریم $f^{-1} = \{(1/x^2, x) \mid x \neq 0\}$. f^{-1} تابع نیست چون $(1, -1) \in f^{-1}$ و $(1, 1) \in f^{-1}$. از این‌رو، f یک‌به‌یک نیست؛ مثلاً $(1, 1) \in f$ و $(-1, 1) \in f$.

ب) قرار دهید $g = \langle 2x - 1 \mid \text{حقیقی } x \rangle$؛ g^{-1} را بیابید.

g یک‌به‌یک است: اگر $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$، آن‌گاه $2x_1 = 2x_2$ و در نتیجه $x_1 = x_2$. $g = \{(x, y) \mid y = 2x - 1 \text{ و } \text{حقیقی } x\}$، از این‌رو،

$$g^{-1} = \{(y, x) \mid y = 2x - 1 \text{ و } \text{حقیقی } x\}.$$

همان‌طورکه در توصیف توابع مرسوم است، مختص دوم (مقدار تابع) را برحسب مختص اول بیان می‌کنیم:

$$g^{-1} = \left\{(y, x) \mid x = \frac{y + 1}{2} \text{ و } \text{حقیقی } y\right\}.$$

در آخر هم معمول است که متغیر اول (مستقل) را با x و متغیر دوم (وابسته) را با y نشان دهیم. از این‌رو نمادها را تغییر می‌دهیم

$$\begin{aligned} g^{-1} &= \left\{(x, y) \mid y = \frac{x + 1}{2} \text{ و } \text{حقیقی } x\right\} \\ &= \left\langle \frac{x + 1}{2} \mid \text{حقیقی } x \right\rangle. \end{aligned}$$

۱۰.۳ تعریف.
الف) دو تابع f و g را موافق نامند اگر $f(x) = g(x)$ برای هر $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$.
ب) یک مجموعهٔ F از توابع را دستگاه موافق از توابع می‌نامند اگر هر دو تابع f و g از F موافق باشند.

۱۱.۳ لم.
الف) توابع f و g موافق‌اند اگر و تنها اگر $f \cup g$ تابع باشد.
ب) توابع f و g موافق‌اند اگر و تنها اگر

$$f \restriction (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g) = g \restriction (\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g).$$

اثبات این لم را به خواننده واگذار می‌کنیم، اما قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

۱۲.۳ قضیه. اگر F دستگاهی موافق از توابع باشد، آن‌گاه $\bigcup F$ تابع است و $\operatorname{dom}(\bigcup F) = \bigcup\{\operatorname{dom} f \mid f \in F\}$. تابع $\bigcup F$ گسترشی برای هر تابع $f \in F$ است.

پس، توابع یک دستگاه موافق را می‌توان کنار هم قرار داد تا یک تک تابع که همگی آن توابع را گسترش می‌دهد به‌دست آورد.

برهان. آشکارا، $\bigcup F$ یک رابطه است؛ اکنون ثابت می‌کنیم که یک تابع است. اگر $(a, b_1) \in \bigcup F$ و $(a, b_2) \in \bigcup F$، توابع $f_1, f_2 \in F$ موجودند به طوری که $(a, b_1) \in f_1$ و $(a, b_2) \in f_2$. اما f_1 و f_2 موافق‌اند و $a \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$، پس $b_1 = f(a_1) = f(a_2) = b_2$.

نشان دادن اینکه $x \in \operatorname{dom}(\bigcup F)$ اگر و تنها اگر $x \in \operatorname{dom} f$ به‌ازای برخی $f \in F$، واضح است. □

۱۳.۳ تعریف. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. مجموعهٔ همهٔ توابع روی A بتوی B با B^A نموده می‌شود. البته، ما باید نشان دهیم که B^A موجود است؛ این کار در تمرین ۹.۳ انجام می‌شود.

تعریف مفهوم کلی‌تری از حاصل‌ضرب مجموعه‌ها برحسب توابع مفید به نظر می‌رسد.

فرض کنید $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ یک تابع با دامنهٔ I باشد. احتمالاً، خواننده عمدتاً با توابعی که مقادیر عددی اختیار می‌کنند آشنایی دارد؛ اما برای ما در اینجا، مقادیر S_iها مجموعه‌های دلخواه هستند. اگر بخواهیم تأکید کنیم که مقادیر S مجموعه هستند، تابع $\langle S_i \mid i \in I \rangle$ را دستگاهی اندیس‌دار از مجموعه‌ها می‌نامیم.

اکنون فرض کنید $S = \langle S_i \mid i \in I \rangle$ یک دستگاه اندیس‌دار از مجموعه‌ها باشد. حاصل‌ضرب دستگاه اندیس‌دار S را مجموعهٔ

$$\prod S = \{f \mid \text{برای هر } i \in I\ ,\ f_i \in S_i \text{ و } \text{است } I \text{ تابعی روی } f\}$$

تعریف می‌کنیم. نمادهای دیگری که گاهی اوقات به کار می‌بریم عبارت‌اند از

$$\prod \langle S(i) \mid i \in I \rangle, \quad \prod_{i \in I} S(i), \quad \prod_{i \in I} S_i.$$

وجود حاصل‌ضرب دستگاه اندیس‌دار در تمرین ۹.۳ اثبات می‌شود.

خواننده احتمالاً کنجکاو است بداند این حاصل‌ضرب چگونه با مفاهیم $A \times B$ و $A \times B \times C$ که قبلاً تعریف شده‌اند مربوط می‌شود. به این مسئلهٔ فنی در بخش ۵ از فصل ۳ باز خواهیم گشت. فعلاً، فقط متذکر می‌شویم که اگر دستگاه اندیس‌دار S طوری باشد که $S_i = B$ برای هر $i \in I$، آن‌گاه

$$\prod_{i \in I} S_i = B^I.$$

«به توان رساندن» مجموعه‌ها به «ضرب» مجموعه‌ها همان‌گونه ارتباط پیدا می‌کند که اعمال متناظر روی اعداد ارتباط دارند.

این بخش را با دو تذکر راجع به نمادها به پایان می‌بریم.

برای یک دستگاه A از مجموعه‌ها $\bigcup A$ و $\bigcap A$ تعریف شدند (در حالت اشتراک، $A \neq \varnothing$ است.) اغلب، دستگاه A برد یک تابع است، یعنی یک دستگاه اندیس‌دار است. (برای اثبات اینکه هر دستگاه A را می‌توان، در صورت نیاز، بدین صورت نمایش داد تمرین ۸.۳ را ببینید).

گوییم A توسط S اندیس‌دار شده است اگر

$$A = \{S_i \mid i \in I\} = \operatorname{ran} S,$$

که در آن S تابعی روی I است. در این حالت، متداول است بنویسیم

$$\bigcup A = \bigcup \{S_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} S_i,$$

و به طریق مشابه برای اشتراک. من‌بعد این نماد توصیفی‌تر را به کار خواهیم برد.

فرض کنید f تابعی روی یک زیرمجموعه از حاصل‌ضرب $A \times B$ باشد. متداول است مقدار f در $(x,y) \in A \times B$ را با $f(x,y)$ به‌جای $f((x,y))$ نشان دهیم و f را تابعی از دو متغیر x و y تلقی کنیم.

تمرین‌ها

۱.۳ ثابت کنید: اگر $\operatorname{ran} f \subseteq \operatorname{dom} g$، آن‌گاه $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f$.

۲.۳ توابع f_i، $i = ۱, ۲, ۳$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_۱ = \langle ۲x - ۱ \mid \text{حقیقی است } x \rangle,$$
$$f_۲ = \langle \sqrt{x} \mid x > ۰ \rangle,$$
$$f_۳ = \langle \frac{۱}{x} \mid \text{حقیقی است } x \text{ و } x \neq ۰ \rangle.$$

هر یک از توابع زیر را توصیف کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

$$f_۲ \circ f_۱, \quad f_۱ \circ f_۲, \quad f_۳ \circ f_۱, \quad f_۱ \circ f_۳.$$

۳.۳ ثابت کنید توابع $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$ در تمرین ۳.۲ یک‌به‌یک هستند، و وارون آن‌ها را به‌دست آورید. در هر مورد، نشان دهید که $\operatorname{dom} f_i = \operatorname{ran}(f_i^{-۱})$ و $\operatorname{ran} f_i = \operatorname{dom}(f_i^{-۱})$.

۴.۳ ثابت کنید:

الف) اگر f وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $f^{-۱} \circ f = \mathrm{Id}_{\operatorname{dom} f}$ و $f \circ f^{-۱} = \mathrm{Id}_{\operatorname{ran}(f)}$.

ب) فرض کنید f تابع باشد. اگر تابع g وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{dom} f}$، آن‌گاه f وارون‌پذیر و $g \restriction \mathrm{ran}\, f = f^{-1}$. اگر تابع h وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f \circ h = \mathrm{Id}_{\mathrm{ran} f}$، ممکن است f وارون‌پذیر نباشد.

۵.۳ ثابت کنید: اگر f و g دو تابع یک‌به‌یک باشند، در این صورت $g \circ f$ نیز تابع یک‌به‌یک است و $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

۶.۳ مجموعهٔ تصویرها و تصویرهای وارون توابع، ویژگی‌های مذکور در مثال ۲.۳ را دارند، اما برخی از نابرابری‌ها را می‌توان با برابری عوض کرد. ثابت کنید

الف) اگر f تابع باشد، در این صورت $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

ب) اگر f تابع باشد، در این صورت $f^{-1}[A - B] = f^{-1}[A] - f^{-1}[B]$.

۷.۳ مثالی از یک تابع f و یک مجموعه A ارائه دهید به‌طوری‌که $f \cap A^2 \neq f \restriction A$.

۸.۳ هر دستگاه از مجموعه‌های A می‌توانند توسط یک تابع اندیس‌گذاری شوند. [راهنمایی: $I = A$ و مجموعه $S_i = i$ به‌ازای هر $i \in A$ را در نظر بگیرید.]

۹.۳ الف) نشان دهید مجموعه B^A وجود دارد. [راهنمایی: $B^A \subseteq P(A \times B)$.]

ب) فرض کنید $\langle S_i \mid i \in I \rangle$ یک دستگاه اندیس‌دار از مجموعه‌ها باشد. نشان دهید که $\prod_{i \in I} S_i$ وجود دارد. [راهنمایی: $\prod_{i \in I} S_i \subseteq P(I \times \cup_{i \in I} S_i)$.]

۱۰.۳ ثابت کنید اجتماع و اشتراک در صورت کلی قانون شرکت‌پذیری صدق می‌کنند:

$$\bigcup_{a \in \cup S} F_a = \bigcup_{C \in S} \Big(\bigcup_{a \in C} F_a \Big),$$
$$\bigcap_{a \in \cup S} F_a = \bigcap_{C \in S} \Big(\bigcap_{a \in C} F_a \Big),$$

به شرطی که S دستگاه ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد.

۱۱.۳ ویژگی‌های دیگری از اجتماع و اشتراک می‌توانند به‌طور مشابه تعمیم داده شوند.

قانون دمورگان:

$$B - \bigcup_{a\in A} F_a = \bigcap_{a\in A}(B - F_a),$$
$$B - \bigcap_{a\in A} F_a = \bigcup_{a\in A}(B - F_a).$$

قانون توزیع‌پذیری:

$$\big(\bigcup_{a\in A} F_a\big) \cap \big(\bigcup_{b\in B} G_b\big) = \bigcup_{(a,b)\in A\times B} (F_a \cap G_b),$$
$$\big(\bigcap_{a\in A} F_a\big) \cup \big(\bigcap_{b\in B} G_b\big) = \bigcap_{(a,b)\in A\times B} (F_a \cup G_d).$$

۱۲.۳ فرض کنید f تابع باشد. در این صورت

$$f\big[\bigcup_{a\in A} F_a\big] = \bigcup_{a\in A} f[F_a],$$
$$f^{-1}\big[\bigcup_{a\in A} F_a\big] = \bigcup_{a\in A} f^{-1}[F_a],$$
$$f\big[\bigcap_{a\in A} F_a\big] \subseteq \bigcap_{a\in A} f[F_a],$$
$$f^{-1}\big[\bigcap_{a\in A} F_a\big] = \bigcap_{a\in A} f^{-1}[F_a].$$

اگر f یک‌به‌یک باشد، آن‌گاه $\subseteq$ در سومین رابطه می‌تواند با $=$ جایگزین شود.

۱۳.۳ صورت زیر از قانون توزیع‌پذیری را ثابت کنید:

$$\bigcap_{a\in A}\big(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}\big) = \bigcup_{f\in B^A}\big(\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}\big),$$

با این فرض که $F_{a,b_1} \cap F_{a,b_2} = \varnothing$ برای هر $a \in A$، $b_1, b_2 \in B$، و $b_1 \neq b_2$. [راهنمایی: فرض کنید L مجموعه سمت چپ و R مجموعه سمت راست باشد. چون $F_{a,f(a)} \subseteq \bigcup_{b\in B} F_{a,b}$، بنابراین $\bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)} \subseteq \bigcap_{a\in A}\big(\bigcup_{b\in B} F_{a,b}\big) = L$، لذا $R \subseteq L$. برای اثبات اینکه $L \subseteq R$، یک $x \in L$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید $(a,b) \in f$ اگر و فقط اگر $x \in F_{a,b}$، و ثابت کنید که f یک تابع روی A بتوی B است برای xهایی که $x \in \bigcap_{a\in A} F_{a,f(a)}$. و در نتیجه $x \in R$.]

۴ هم‌ارزی‌ها و افرازها

مکرر چند نوعِ خاص از رابطه‌های دوتایی در بحث‌هایمان ظاهر می‌شوند.

۱.۴ تعریف. فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی در A باشد.

الف) R را در A بازتابی گویند هرگاه برای هر $a \in A$، aRa.

ب) R را در A متقارن گویند هرگاه برای هر $a, b \in A$، aRb ایجاب کند bRa.

ج) R را در A متعدی گویند هرگاه برای هر $a, b, c \in A$، aRb و bRc ایجاب کند aRc.

د) R را هم‌ارزی روی A گویند هرگاه بازتابی، متقارن، و متعدی در A باشد.

۲.۴ مثال.

الف) فرض کنید P مجموعهٔ همهٔ انسان‌های زندهٔ روی کرهٔ زمین باشد. گوییم شخص p با شخص q هم‌ارز است $(p \equiv q)$ اگر p و q هر دو در یک کشور زندگی کنند. آشکارا، رابطهٔ $\equiv$ بازتابی، متقارن، و متعدی در P است. توجه کنید مجموعهٔ P را می‌توان به رده‌هایی از اعضای دوبه‌دو هم‌ارز تقسیم کرد؛ تمامی افرادی که در ایالات متحده زندگی می‌کنند یک رده و تمامی افرادی که در فرانسه زندگی می‌کنند ردهٔ دیگر و به همین صورت الی‌آخر. تمام اعضای یک رده دوبه‌دو هم‌ارزند؛ اعضای رده‌های متفاوت به هیچ وجه هم‌ارز نیستند. رده‌های هم‌ارزی دقیقاً متناظر با کشورها هستند.

ب) هم‌ارزی E را روی مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ به‌صورت زیر تعریف کنید: xEy اگر و تنها اگر عدد ۲ عدد $x - y$ را بشمارد. (دو عدد هم‌ارزند اگر تفاضلشان زوج باشد). خواننده باید شرایط ۱.۴ (الف)ـــ(ج) را بررسی کند. مجدداً، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را می‌توان به رده‌های هم‌ارزی تحت (یا، چنانکه متداول است، به پیمانه) هم‌ارزی E تقسیم کرد. در اینجا، دو ردهٔ هم‌ارزی وجود دارد: مجموعهٔ اعداد صحیح زوج و مجموعهٔ اعداد صحیح فرد. هر دو عدد صحیح زوج با هم هم‌ارزند، همین طور، هر دو عدد صحیح فرد. اما عدد صحیح زوج با عدد صحیح فرد نمی‌تواند هم‌ارز باشد.

وضعیتی که در مثال‌های پیشین دیدیم امری کاملاً کلی است. هر هم‌ارزی روی A، مجموعهٔ A را به رده‌های هم‌ارزی افراز می‌کند؛ برعکس، با داشتن یک افراز مناسب از A، یک هم‌ارزی روی A توسط آن مشخص می‌شود. تعریف و قضیه‌های ذیل این تناظر را اثبات می‌کنند.

۳.۴ تعریف. فرض کنید E یک هم‌ارزی روی A باشد و فرض کنید $a \in A$. ردهٔ هم‌ارزی a به پیمانهٔ E عبارت است ازمجموعهٔ

$$[a]_E = \{x \in A \mid xEa\}.$$

۴.۴ لم. فرض کنید $a, b \in A$.

الف) a هم‌ارز b به پیمانهٔ E است اگر و تنها اگر $[a]_E = [b]_E$.

ب) a هم‌ارز b به پیمانهٔ E نیست اگر و تنها اگر $[a]_E \cap [b]_E = \varnothing$.

برهان.

الف) (۱) فرض کنید aEb. فرض کنید $x \in [a]_E$، یعنی xEa. خاصیت تعدی نتیجه می‌دهد که xEa و aEb ایجاب می‌کنند xEb، یعنی $x \in [b]_E$. به‌طریق مشابه، $x \in [b]_E$ ایجاب می‌کند $x \in [a]_E$ (چون E متقارن است پس bEa صادق است)، لذا $[a]_E = [b]_E$.

(۲) فرض کنید $[a]_E = [b]_E$. چون E بازتابی است پس aEa و بنابراین $a \in [a]_E$. اما در این صورت، $a \in [b]_E$ و این یعنی aEb.

ب) (۱) فرض کنید aEb برقرار نباشد، باید ثابت کنیم $[a]_E \cap [b]_E = \varnothing$. اگر چنین نباشد، xیی وجود دارد که $x \in [a]_E \cap [b]_E$، لذا xEa و xEb. اما در این صورت، با استفاده از تقارن و تعدی، aEx و xEb و بنابراین aEb، که تناقض است.

(۲) سرانجام، فرض کنید $[a]_E \cap [b]_E = \varnothing$. اگر a و b به پیمانهٔ E هم‌ارز باشند، aEb برقرار است و بنابراین $a \in [b]_E$. اما همچنین داریم $a \in [a]_E$، که ایجاب می‌کند $[a]_E \cap [b]_E \neq \varnothing$، که تناقض است. □

۵.۴ تعریف. دستگاه S از مجموعه‌های ناتهی را یک افراز از A می‌نامند هرگاه

الف) S یک دستگاه از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا باشد، یعنی، اگر $C \in S$، $D \in S$، و $C \neq D$، آن‌گاه $C \cap D = \varnothing$.

ب) اجتماع S برابر کل A باشد، به عبارت دیگر، $\bigcup S = A$.

۶.۴ تعریف. فرض کنید E یک هم‌ارزی روی A باشد. دستگاه همهٔ رده‌های هم‌ارزی به پیمانهٔ E را با A/E نشان می‌دهند، بنابراین $A/E = \{[a]_E \mid a \in A\}$.

۷.۴ قضیه. فرض کنید E هم‌ارزی روی A باشد. در این صورت A/E افرازی برای A است.

برهان. شرط (الف) از لم ۴.۴ نتیجه می‌شود. اگر $[a]_E \neq [b]_E$، آن‌گاه a و b، E–هم‌ارز نیستند، لذا $[a]_E \cap [b]_E = \varnothing$. برای اثبات (ب)، توجه کنید که $\bigcup A/E = A$، زیرا $a \in [a]_E$. همچنین، توجه کنید هیچ ردهٔ هم‌ارزیی تهی نیست، زیرا، به‌طور قطع داریم $a \in [a]_E$. □

در جهت عکس، ما اکنون نشان می‌دهیم به هر افراز می‌توان یک رابطهٔ هم‌ارزی نظیر کرد. فی‌المثل، افراز افراد برحسب کشور محل اقامت آن‌ها، هم‌ارزی (الف) از مثال ۲.۴ را به‌دست می‌دهد.

۸.۴ تعریف. فرض کنید S یک افراز از A باشد. رابطهٔ E_S در A به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_S = \{(a,b) \in A \times A \mid \text{وجود دارد به‌طوری‌که } C \in S \text{ و } a \in C \text{ و } b \in C\}.$$

اشیای a و b در رابطهٔ E_S هستند اگر و تنها اگر به یک مجموعه از افراز S متعلق باشند.

۹.۴ قضیه. فرض کنید S یک افراز از A باشد، در این صورت E_S یک هم‌ارزی روی A است.

برهان.

۱) بازتابی. فرض کنید $a \in A$. چون $\cup S = A$ پس وجود دارد $C \in S$ به‌طوری‌که $a \in C$. لذا، $(a,a) \in E_S$.

۲) تقارن. فرض کنید aE_Sb، در این صورت $C \in S$ موجود است به‌طوری‌که $a \in C$ و $b \in C$. بنابراین، $b \in C$ و $a \in C$، و از این‌رو، bE_Sa.

۳) تعدی. فرض کنید aE_Sb و bE_Sc، در این صورت $C \in S$ و $D \in S$ وجود دارند به‌طوری‌که $a \in C$ و $b \in C$ و $b \in D$ و $c \in D$. از اینجا درمی‌یابیم که $b \in C \cap D$، و بنابراین $C \cap D \neq \varnothing$. اما S دستگاهی از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزاست، پس $C = D$. اکنون داریم $a \in C$ و $c \in C$، لذا aE_Sc. □

قضیهٔ بعدی رابطهٔ بین هم‌ارزی‌ها و افرازها را روشن‌تر می‌کند. اثبات این قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱۰.۴ قضیه.

الف) اگر E یک هم‌ارزی روی A باشد و $S = A/E$، آن‌گاه $E_S = E$.

ب) اگر S یک افراز از A و E_S هم‌ارزی نظیر آن باشد، آن‌گاه $A/E_S = S$.

بنابراین، رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها دو توصیف متفاوت از یک «حقیقت ریاضی» واحد هستند. هر هم‌ارزی مانند E افراز $S = A/E$ را مشخص می‌کند. هم‌ارزی E_S که با این افراز S معین می‌شود با هم‌ارزی اولیهٔ E یکی است. بالعکس، هر افراز مانند S هم‌ارزی E_S را معین می‌کند، و چنانچه رده‌های هم‌ارزی به پیمانهٔ E_S را تشکیل دهیم، افراز اولیهٔ S را بازیابی خواهیم کرد.

در حین کار با افرازها و هم‌ارزی‌ها، در دست داشتن یک مجموعه که از هر ردهٔ هم‌ارزی دقیقاً یک «نماینده» داشته باشد، اغلب کارها را تسهیل می‌بخشد.

۱۱.۴ تعریف. مجموعهٔ $X \subseteq A$ را یک مجموعه از نماینده‌ها برای هم‌ارزی E_S (یا برای افراز S از A) می‌نامند اگر برای هر $C \in S$، $a \in C$ موجود باشد به‌طوری‌که $X \cap C = \{a\}$.

با مراجعه به مثال ۲.۴ می‌بینیم که در قسمت (الف) مجموعهٔ X متشکل از همهٔ سران کشورها یک مجموعه از نماینده‌ها برای افراز حاصل از کشور محل اقامت تشکیل می‌دهد. مجموعهٔ $X = \{۰, ۱\}$ یک مجموعه از نماینده‌ها برای افراز اعداد صحیح به مجموعه‌های اعداد فرد و زوج می‌تواند محسوب شود.

آیا هر افراز دارای یک مجموعه از نماینده‌هاست؟ به‌طور شهودی، جواب به نظر مثبت است، اما نمی‌توانیم وجود چنین مجموعه‌ای را برای هر افراز بر اساس اصل‌های موضوعمان اثبات کنیم. هنگام بحث دربارهٔ اصل موضوع انتخاب به این مسئله باز خواهیم گشت. در اینجا، فقط اشاره می‌کنیم که برای بسیاری از هم‌ارزی‌های جذاب ریاضی انتخاب یک مجموعهٔ طبیعی از نماینده‌ها هم ممکن و هم مفید است.

تمرین‌ها

۱.۴ بازتابی، تقارنی یا متعدی بودن هر یک از رابطه‌های زیر را معین کنید.

الف) عدد صحیح x بزرگ‌تر از عدد صحیح y است.

ب) عدد صحیح n، عدد صحیح m را عاد می‌کند.

ج) $x \neq y$ در مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی.

د) $\subseteq$ و $\subset$ در $\mathcal{P}(A)$.

ه) $\varnothing$ در $\varnothing$.

ز) $\varnothing$ در یک مجموعه ناتهی مانند A.

۲.۴ فرض کنید f تابعی روی A بروی B باشد. رابطهٔ E در A را به‌صورت aEb اگر و تنها اگر $f(a) = f(b)$ تعریف کنید

الف) نشان دهید که E رابطهٔ هم‌ارزی روی A است.

ب) تابع φ روی A/E بروی B را با ضابطه $\varphi([a]_E) = f(a)$ تعریف کنید (بررسی کنید که هرگاه $[a]_E = [a']_E$ داریم $\varphi([a]_E) = \varphi([a']_E)$).

ج) فرض کنید j تابعی روی A بروی A/E با ضابطه $j(a) = [a]_E$ داده شده باشد. نشان دهید $\varphi \circ j = f$.

۳.۴ فرض کنید $P = \{(r,\gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid r > 0\}$، که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است. عناصر P را به عنوان مختصات قطبی نقاط در صفحه در نظر بگیرید و رابطه‌ای به‌صورت زیر روی P تعریف کنید. $(r,\gamma) \sim (r',\gamma')$ اگر و تنها اگر $r = r'$ و $\gamma - \gamma'$ مضرب صحیحی از 2π باشد. نشان دهید که $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی P است. نشان دهید هر ردهٔ هم‌ارزی شامل یک زوج یکتا مانند (r,γ) با شرط $0 \leq \gamma < 2\pi$ است. بنابراین، مجموعه چنین زوج‌هایی یک مجموعه از نماینده‌ها برای $\sim$ است.

۵ ترتیب‌ها

ترتیب‌ها یکی دیگر از انواع رابطه‌ها هستند که اغلب با آن‌ها مواجه می‌شویم.

۱.۵ تعریف. رابطهٔ دوتایی R در A پادمتقارن است اگر برای هر $a, b \in A$، aRb و bRa ایجاب کنند $a = b$.

۲.۵ تعریف. رابطه دوتایی R در A را ترتیب (جزئی) از A می‌نامند هرگاه بازتابی، پادمتقارن، و متعدی باشد. در این حالت زوج (A,R) مجموعهٔ مرتب نامیده می‌شود.

aRb را می‌توانیم به‌صورت «a کمتر یا مساوی b است» یا «b بزرگ‌تر یا مساوی a است» (در ترتیب R) بخوانیم. لذا، هر عضو A کمتر یا مساوی خودش است. اگر a کمتر یا مساوی b و در عین حال، b کمتر یا مساوی a باشد، آن‌گاه $a = b$. و بالاخره اینکه، اگر a کمتر یا مساوی b و b کمتر یا مساوی c باشد، a باید کمتر یا مساوی c باشد.

۳.۵ مثال.

الف) $\leq$ یک ترتیب روی مجموعهٔ همهٔ اعداد (طبیعی، گویا، حقیقی) است.

ب) رابطهٔ $\subseteq_A$ در A را به این صورت تعریف کنید: $x \subseteq_A y$ اگر و تنها اگر $x \subseteq y$ و $x, y \in A$. در این صورت $\subseteq_A$ یک ترتیب از مجموعهٔ A است.

ج) در A رابطهٔ $\supseteq_A$ را به این صورت تعریف کنید: $x \supseteq_A y$ اگر و تنها اگر $x \supseteq y$ و $x, y \in A$. در این صورت $\supseteq_A$ نیز یک ترتیب از مجموعهٔ A است.

د) رابطهٔ $|$ که به‌صورت: $m \mid n$ اگر و تنها اگر n عدد m را بشمارد تعریف می‌شود یک ترتیب از همهٔ اعداد صحیح مثبت است.

ه) رابطهٔ Id_A یک ترتیب از A است.

اغلب نمادهای $\leq$ یا $\preccurlyeq$ را برای نشان دادن ترتیب به کار می‌برند.

گاهی اوقات توصیف دیگری از ترتیب‌ها کارها را ساده‌تر می‌کند. فی‌المثل، شاید ترجیح دهیم به‌جای رابطهٔ $\leq$ بین اعداد از رابطهٔ $<$ (اکیداً کوچک‌تر) استفاده کنیم. به همین نحو، می‌توان از $\subset_A$ (زیرمجموعهٔ اکید) به‌جای $\subseteq_A$ استفاده کرد. هر ترتیبی را می‌توان به یکی از این دو طریق جایگزین، توصیف کرد.

۴.۵ تعریف. رابطهٔ S در A نامتقارن است اگر aSb ایجاب کند که bSa برقرار نیست (برای هر $a, b \in A$). به عبارت دیگر، aSb و bSa هیچ‌گاه با هم برقرار نباشند.

۵.۵ تعریف. رابطهٔ S در A ترتیب اکید است هرگاه نامتقارن و متعدی باشد.

حال روابط بین ترتیب‌ها و ترتیب‌های اکید را نشان می‌دهیم.

۶.۵ قضیه.

الف) فرض کنید R ترتیبی از A باشد، در این صورت رابطهٔ S که در A به‌صورت

aSb اگر و تنها اگر aRb و $a \neq b$

تعریف می‌شود، یک ترتیب اکید از A است.

ب) فرض کنید S یک ترتیب اکید از A باشد، آن‌گاه رابطهٔ R که در A به‌صورت

aRb اگر و تنها اگر aSb و $a = b$

تعریف می‌شود، یک ترتیب از A است.

در این حالت می‌گوییم ترتیب اکید S نظیر ترتیب R است و برعکس.

برهان.

الف) اجازه دهید نشان دهیم S نامتقارن است. فرض کنید هم aSb و هم bSa هر دو برای a و bیی در A برقرار باشند. بنابراین aRb و bRa و بنابراین، $a = b$ (زیرا R نامتقارن است). این مطلب با تعریف aSb در تناقض است. بررسی متعدی بودن S را به خواننده محول می‌کنیم.

ب) اجازه دهید نشان دهیم R نامتقارن است. فرض کنید که aRb و bRa. چون aSb و bSa هم‌زمان نمی‌توانند برقرار باشند (S نامتقارن است)، نتیجه می‌گیریم $a = b$. به‌طریق مشابهی متعدی بودن و بازتابی بودن R بررسی می‌شوند. □

۷.۵ تعریف. فرض کنید $a, b \in A$ و $\leq$ یک ترتیب از A باشد. گوییم a و b در ترتیب $\leq$ مقایسه‌پذیرند اگر $a \leq b$ یا $b \leq a$. گوییم a و b مقایسه‌ناپذیرند اگر a و b مقایسه‌پذیر نباشند (یا به‌عبارت‌دیگر، اگر نه $a \leq b$ و نه $b \leq a$ هیچ‌یک برقرار نباشند). هر دو تعریف را می‌توان به‌صورت معادل برحسب ترتیب اکید متناظر $<$ بیان نمود، فی‌المثل، a و b در $<$ مقایسه‌ناپذیرند اگر $a \neq b$ و هیچ‌یک $a < b$ و $b < a$ برقرار نباشند.

۸.۵ مثال.

الف) هر دو عدد حقیقی در ترتیب $\leq$ مقایسه‌پذیرند.

ب) ۲ و ۳ در ترتیب $|$ مقایسه‌ناپذیرند.

ج) هر دو عضو متمایز $a, b \in A$ در Id_A مقایسه‌ناپذیرند.

د) اگر A حداقل دو عضو داشته باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مرتب $(\mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)})$ اعضای مقایسه‌ناپذیر دارد.

۹.۵ تعریف. ترتیب $\leq$ (یا $<$) از A را خطی یا کلی می‌نامند اگر هر دو عضو A مقایسه‌پذیر باشند. در این حالت زوج $(A, \leq)$ را یک مجموعهٔ مرتب خطی می‌نامند.

بنابراین، ترتیب $\leq$ از اعداد صحیح مثبت کلی است، درصورتی‌که، ترتیب $|$ این چنین نیست.

۱۰.۵ تعریف. فرض کنید $B \subseteq A$، که در آن A با $\leq$ مرتب شده است. B زنجیر در A است هرگاه هر دو عضو B مقایسه‌پذیر باشند.

فی‌المثل، مجموعهٔ همهٔ توان‌های ۲ (یعنی، $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$) زنجیری در مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت است که با $|$ مرتب شده است.

اغلب پیش می‌آید که بخواهیم کوچک‌ترین یا بزرگ‌ترین عضو در میان اعضای مشخصی از یک مجموعهٔ مرتب را بیابیم. وارسی دقیق‌تری معلوم می‌کند که «کوچک‌ترین» و «بزرگ‌ترین» چندین مفهوم متفاوت دارند.

۱۱.۵ تعریف. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب از A باشد و $B \subseteq A$.

الف) $b \in B$ کوچک‌ترین عضو B در ترتیب $\leq$ است، اگر برای هر $x \in B$، $b \leq x$.

ب) $b \in B$ یک عضو کمین B در ترتیب $\leq$ است، اگر هیچ عضو $x \in B$ موجود نباشد که $x \leq b$ و $x \neq b$.

به همین نحو،

الف) $b \in B$ بزرگ‌ترین عضو B در ترتیب $\leq$ است، اگر برای هر $x \in B$، $x \leq b$.

ب) $b \in B$ یک عضو بیشین B در ترتیب $\leq$ است، اگر هیچ عضو $x \in B$ موجود نباشد که $b \leq x$ و $x \neq b$.

۱۲.۵ مثال. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد که با رابطهٔ بخش‌پذیری $|$ مرتب شده است. در این صورت ۱ کوچک‌ترین عضو $\mathbb{N}$ است، ولی $\mathbb{N}$ بزرگ‌ترین عضو ندارد. فرض کنید B مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت بزرگ‌تر (از لحاظ مقدار) از یک باشد، یعنی $B = \{2, 3, 4, \ldots\}$. در این صورت B در $|$ کوچک‌ترین عضو ندارد (مثلاً، ۲ کوچک‌ترین عضو نیست زیرا $2|3$ برقرار نیست)، لیکن B تعدادی (نامتناهی) عضو کمین دارد: اعداد ۲، ۳، ۵ و غیره. (تمامی اعداد اول) همگی عضو کمین هستند. B نه عضو بیشین دارد و نه بزرگ‌ترین عضو.

چندتایی از ویژگی‌های اعضای کمین و کوچک‌ترین عضو را در قضیهٔ ۱۳.۵ گرد می‌آوریم. اثبات قضیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

۱۳.۵ قضیه. فرض کنید A با $\leq$ مرتب شده باشد و $B \subseteq A$.
الف) B حداکثر یک کوچک‌ترین عضو دارد.
ب) کوچک‌ترین عضو B (در صورت وجود) عضو کمین نیز هست.
ج) اگر B زنجیر باشد، آن‌گاه هر عضو کمین B کوچک‌ترین عضو نیز هست.

اگر واژه‌های «کوچک‌ترین» و «کمین» را به‌ترتیب با «بزرگ‌ترین» و «بیشین» عوض کنیم، قضیه بالا باز هم برقراراست.

۱۴.۵ تعریف. فرض کنید $\leq$ یک ترتیب برای A باشد و $B \subseteq A$.
الف) $a \in A$ کران پایین برای B در مجموعهٔ مرتب $(A, \leq)$ است، هرگاه $a \leq x$ برای هر $x \in B$.
ب) $a \in A$ اینفیممی برای B در $(A, \leq)$ [یا بزرگ‌ترین کران پایین B در $(A, \leq)$] نامیده می‌شود هرگاه a بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ همهٔ کران‌های پایین B در $(A, \leq)$ باشد.

به همین نحو،
الف) $a \in A$ یک کران بالا برای B در مجموعهٔ مرتب $(A, \leq)$ است هرگاه $x \leq a$ برای هر $x \in B$.
ب) $a \in A$ سوپریممی برای B در $(A, \leq)$ [یا کوچک‌ترین کران بالای B در $(A, \leq)$] نامیده می‌شود هرگاه کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ همهٔ کران‌های بالای B در $(A, \leq)$ باشد.

دقت کنید که تفاوت بین کوچک‌ترین عضو B و یک کران پایین B در این است که در دومی لازم نیست که $b \in B$. ممکن است یک مجموعه تعداد زیادی کران پایین داشته باشد، لیکن مجموعهٔ همهٔ کران‌های پایین B حداکثر یک بزرگ‌ترین عضو می‌تواند داشته باشد و بنابراین B می‌تواند حداکثر یک اینفیمم داشته باشد.
حال برخی ویژگی‌های سوپریمم و اینفیمم‌ها را در قضیهٔ زیر خلاصه می‌کنیم.

۱۵.۵ قضیه. فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه‌ای مرتب باشد و $B \subseteq A$.
الف) B حداکثر یک اینفیمم دارد.

ب) اگر b کوچک‌ترین عضو B باشد، آن‌گاه b اینفیمم B است.
ج) اگر b اینفیمم B باشد و $b \in B$، آن‌گاه b کوچک‌ترین عضو B است.
د) $b \in A$ اینفیمم B در $(A, \leq)$ است اگر و تنها اگر
(۱) برای هر $x \in B$، $b \leq x$.
(۲) اگر $b' \leq x$ برای هر $x \in B$، آن‌گاه $b' \leq b$.

اگر واژه‌های «کوچک‌ترین» و «اینفیمم» را به ترتیب با واژه‌های «بزرگ‌ترین» و «سوپریمم» و در (۱) و (۲)، «$\leq$» با «$\geq$» عوض شوند، قضیهٔ بالا باز هم درست است.

برهان.
الف) در تذکر پیش از قضیه، این قسمت را اثبات کردیم.
ب) b کوچک‌ترین عضو B، یک کران پایین B است. اگر b' کران پایینی از B باشد، چون $b \in B$ پس $b' \leq B$. لذا b بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ همهٔ کران‌های پایین B است.
ج) بدیهی است.
د) این قسمت فقط بیان دیگری از تعریف اینفیمم است. □

اگر سوپریمم و اینفیمم B موجود باشد، آن‌ها را با نمادهای $\sup(B)$ و $\inf(B)$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر B مرتب خطی باشد، اعضای کمین (کوچک‌ترین) و بیشین (بزرگ‌ترین) B را در صورت وجود با $\min(B)$ و $\max(B)$ نشان می‌دهیم.

۱۶.۵ مثال. فرض کنید $\leq$ ترتیب معمول مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. قرار دهید $B_۱ = \{x \mid ۰ < x < ۱\}$، $B_۲ = \{x \mid ۰ \leq x < ۱\}$، $B_۳ = \{x \mid x > ۰\}$، و $B_۴ = \{x \mid x < ۰\}$. در این صورت، $B_۱$ کوچک‌ترین عضو و بزرگ‌ترین عضو ندارد، اما هر $b \leq ۰$ کران پایینی برای $B_۱$ است، لذا ۰ بزرگ‌ترین کران پایین $B_۱$ است، یعنی $\inf(B_۱) = ۰$. به همین نحو، هر $b \geq ۱$ کران بالایی برای $B_۱$ است و لذا $\sup(B_۱) = ۱$. مجموعهٔ $B_۲$ کوچک‌ترین عضو دارد، لذا $\min(B_۲) = \inf(B_۲) = ۰$، اما این مجموعه بزرگ‌ترین عضو ندارد. مع‌ذلک، $\sup(B_۲) = ۱$. مجموعهٔ $B_۳$ نه بزرگ‌ترین عضو دارد و نه سوپریمم (در واقع $B_۳$

با $\le$ کران بالا ندارد)، اما $\inf(B_3) = 0$. به همین نحو، B_4 هیچ کران پایینی ندارد و بنابراین اینفیمم نیز ندارد.

۱۷.۵ تعریف. منظور از یکریختی بین دو مجموعهٔ مرتب $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ عبارت است از یک تابع یک‌به‌یک مانند h با دامنهٔ P و برد Q به‌قسمی که برای هر $p_1, p_2 \in P$،

$$p_1 \le p_2 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad h(p_1) \prec h(p_2).$$

اگر یک یکریختی بین $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ یکریخت‌اند.

یکریختی‌ها را در فصل ۳ مطالعه خواهیم کرد. فعلاً، به گزارهٔ زیر بسنده می‌کنیم.

۱۸.۵ لم. فرض کنید $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ دو مجموعهٔ مرتب خطی باشند و h یک تابع یک‌به‌یک با دامنهٔ P و برد Q به‌قسمی باشد که $h(p_1) \prec h(p_2)$ به شرطی که $p_1 < p_2$. در این صورت h یک یکریختی بین $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ است.

برهان. باید نشان دهیم اگر $p_1, p_2 \in P$ به‌قسمی باشند که $h(p_1) \prec h(p_2)$، آن‌گاه $p_1 < p_2$. حال اگر p_1 کمتر از p_2 نباشد، چون $<$ ترتیب خطی از P است پس یا $p_1 = p_2$ یا $p_2 < p_1$. اگر $p_1 = p_2$، آن‌گاه $h(p_1) = h(p_2)$، و اگر $p_2 < p_1$، آن‌گاه بنا به فرض، $h(p_2) \prec h(p_1)$. هر یک از این حالت‌ها ناقض $h(p_1) \prec h(p_2)$ هستند. $\square$

تمرین‌ها

۱.۵ الف) فرض کنید R ترتیبی از A، S ترتیب اکید متناظر آن و R^* ترتیب متناظر با S باشند. نشان دهید $R^* = R$.

ب) فرض کنید S ترتیب اکیدی از A، R ترتیب متناظر آن و S^* ترتیب اکید متناظر با R باشد. در این صورت $S^* = S$.

۲.۵ تعریف عضو غیرقابل مقایسه، بیشین، کمین، بزرگ‌ترین، و کوچک‌ترین عضو و سوپریمم و اینفیمم را برحسب ترتیب اکید بیان کنید.

۳.۵ فرض کنید R ترتیبی از A باشد. ثابت کنید R^{-1} نیز ترتیبی از A است و برای $B \subseteq A$ داریم

الف) a کوچک‌ترین عضو B در R^{-1} است اگر و فقط اگر a بزرگ‌ترین عضو B در R باشد.

ب) مشابه (الف) برای (عضو بیشین و کمین) و (سوپریموم و اینفیموم).

۴.۵ فرض کنید R ترتیبی از A باشد و فرض کنید $B \subseteq A$. نشان دهید که $R \cap B^{2}$ ترتیبی از B است.

۵.۵ مجموعهٔ مرتب متناهی مانند $(A, \leq)$ و زیرمجموعه B از A طوری مثال بزنید که

الف) B بزرگ‌ترین عضو ندارد.

ب) B کوچک‌ترین عضو ندارد.

ج) B بزرگ‌ترین عضو ندارد ولی B سوپریمم دارد.

د) B سوپریمم ندارد.

۶.۵ الف) فرض کنید $(A, <)$ مجموعهٔ مرتب اکیدی باشد و $b \notin A$. رابطهٔ $\prec$ را در $B = A \cup \{b\}$ به‌صورت زیر تعریف کنید.

$x \prec y$ اگر و تنها اگر $(x < y$ و $x, y \in A)$ یا $(y = b$ و $x \in A)$.

نشان دهید که $\prec$ ترتیب اکیدی از B است و $< = \prec \cap A^{2}$. (به لحاظ شهودی، $\prec$ مجموعهٔ A را به همان صورت $<$ مرتب می‌کند و در آن b بزرگ‌تر از هر عضو A است.)

ب) قسمت (الف) را تعمیم دهید: فرض کنید $(A_1, <_1)$ و $(A_2, <_2)$ ترتیب‌های اکید باشند و $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. رابطهٔ $\prec$ را روی B به‌صورت زیر تعریف کنید

$x \prec y$ اگر و تنها اگر $x, y \in A_1$ و $x <_1 y$

یا $x, y \in A_2$ و $x <_2 y$

یا $x \in A_1$ و $y \in A_2$.

نشان دهید $\prec$ ترتیب اکیدی از B است و $\prec_1 = \prec \cap A_1^2$ و $\prec_2 = \prec \cap A_2^2$. (به لحاظ شهودی، $\prec$ هر عضو A_1 را قبل از هر عضو A_2 قرار می‌دهد و با ترتیب‌های اولیه از A_1 و A_2 مطابقت دارد.)

۷.۵ فرض کنید R رابطهٔ بازتابی و متعدی در A باشد (R را پیش‌ترتیبی از A می‌نامند). E را در A به‌صورت زیر تعریف کنید

$$aEb \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad aRb \quad \text{و} \quad bRa.$$

نشان دهید E رابطهٔ هم‌ارزی روی A است. رابطهٔ R/E در A/E را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$[a]_E \; R/E \; [b]_E \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad aRb.$$

نشان دهید این تعریف به انتخاب نماینده‌های $[a]_E$ و $[b]_E$ بستگی ندارد. ثابت کنید R/E ترتیبی از A/E است.

۸.۵ فرض کنید $A = \mathcal{P}(X)$ و $X \neq \varnothing$. ثابت کنید:

الف) هر $S \subseteq A$ سوپریممی در $\subseteq_A$ دارد و $\sup S = \bigcup S$.

ب) هر $S \subseteq A$ اینفیممی در $\subseteq_A$ دارد و $\inf S = \bigcap S$ هرگاه $S \neq \varnothing$؛ $\inf \varnothing = X$.

۹.۵ فرض کنید $\mathrm{Fn}(X,Y)$ مجموعهٔ تمام توابعی باشد که زیرمجموعه‌ای از X را بتوی Y می‌نگارد [یا معادلاً، $\mathrm{Fn}(X,Y) = \bigcup_{Z\subseteq X} Y^Z$]. رابطهٔ $\leq$ در $\mathrm{Fn}(X,Y)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$f \leq g \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad f \subseteq g.$$

الف) ثابت کنید $\leq$ ترتیبی از $\mathrm{Fn}(X,Y)$ است.

ب) فرض کنید $F \subseteq \mathrm{Fn}(X,Y)$. نشان دهید $\sup F$ وجود دارد اگر و تنها اگر F دستگاهی موافق از توابع باشد و در این صورت $\sup F = \bigcup F$.

۱۰.۵ فرض کنید $A \neq \varnothing$ و $\mathrm{Pt}(A)$ مجموعهٔ همه افرازهای A باشد. رابطه $\preccurlyeq$ در $\mathrm{Pt}(A)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$S_2 \preccurlyeq S_1$ اگر و تنها اگر برای هر $C \in S_1$، یک $D \in S_2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $C \subseteq D$. (گوییم افراز S_1 تظریفی از افراز S_2 است هرگاه $S_2 \preccurlyeq S_1$.)

الف) نشان دهید $\preccurlyeq$ یک ترتیب است.

ب) فرض کنید $S_1, S_2 \in \mathrm{Pt}(A)$. نشان دهید $\{S_1, S_2\}$ اینفیمم دارد. [راهنمایی: تعریف کنید $S = \{C \cap D \mid C \in S_1,\ D \in S_2\}$. رابطهٔ هم‌ارزی E_S چه رابطه‌ای با هم‌ارزی‌های E_{S_1} و E_{S_2} دارد؟

ج) فرض کنید $T \subseteq \mathrm{Pt}(A)$. نشان دهید $\inf T$ وجود دارد.

د) فرض کنید $T \subseteq \mathrm{Pt}(A)$. نشان دهید $\sup T$ وجود دارد. [راهنمایی: فرض کنید T' مجموعهٔ همهٔ افرازهای S با این خاصیت باشد که هر افراز T تظریفی از S باشد. نشان دهید $\sup T' = \inf T$.]

۱۱.۵ نشان دهید اگر $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ دو مجموعهٔ مرتب اکید یکریخت باشند و $<$ ترتیب خطی باشد، آن‌گاه $\prec$ ترتیب خطی است.

۱۲.۵ تابع همانی روی P یکریختی بین $(P, <)$ و $(P, <)$ است.

۱۳.۵ اگر h یکریختی بین $(P, <)$ و $(Q, \prec)$ باشد، آن‌گاه h^{-1} یکریختی بین $(Q, \prec)$ و $(P, <)$ است.

۱۴.۵ اگر f یکریختی بین $(P_1, <_1)$ و $(P_2, <_2)$ باشد و اگر g یکریختی بین $(P_2, <_2)$ و $(P_3, <_3)$ باشد، آن‌گاه $g \circ f$ یکریختی بین $(P_1, <_1)$ و $(P_3, <_3)$ است.

فصل ۳

اعداد طبیعی

۱ آشنایی با اعداد طبیعی

تعریف اعداد طبیعی برای بسط ریاضیات در چارچوب نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها ضروری است. همهٔ ما درکی شهودی از اعداد طبیعی داریم: ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۳۲۴ و غیره. همچنین به‌راحتی می‌توانیم مجموعه‌هایی با صفر، یک، دو یا سه عضو مثال بزنیم:

$\varnothing$ صفر عضو دارد.

$\{\varnothing\}$ و یا به طور کلی، $\{a\}$ به‌ازاء هر a، یک عضو دارد.

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$، و یا $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$، و یا به طور کلی، $\{a, b\}$ با شرط $a \neq b$، دو عضو دارد، و غیره.

هدف ما در این بخش تکمیل این فهم شهودی از طریق یک توصیف دقیق است.

ما برای تعریف عدد ۰، یک نماینده از مجموعه‌هایی که هیچ عضوی ندارند انتخاب می‌کنیم. این‌کار هم ساده است، چون فقط یک مجموعه از این نوع وجود دارد. بنابراین، تعریف می‌کنیم $\varnothing = 0$. اجازه دهید سراغ مجموعه‌هایی که یک عضو دارند (تک عضوی) برویم: $\{\varnothing\}$، $\{\{\varnothing\}\}$، $\{\{\{\varnothing\}\}\}$، $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$؛ و به‌طور کلی، $\{x\}$. اکنون چگونه باید یک نماینده برگزینیم؟ از آنجایی که قبلاً شیء خاصی تعریف

کرده‌ایم، یعنی، ۰، انتخاب طبیعی برای ما مجموعهٔ $\{۰\}$ است. لذا، تعریف می‌کنیم

$$۱ = \{۰\} = \{\varnothing\}.$$

حالا به مجموعه‌های دو عضوی می‌پردازیم: $\{\{\varnothing\}, \varnothing\}$، $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$، $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ و غیره. تا اینجا ما ۰ و ۱ را تعریف کرده‌ایم و داریم $۱ \neq ۰$. مجموعهٔ دو عضوی خاصی را انتخاب می‌کنیم، مجموعهٔ دو عضویی که اعضای آن اعداد ۰ و ۱ هستند. بنابراین:

$$۲ = \{۰, ۱\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

کم‌کم معلوم می‌شود که چگونه باید ادامه داد:

$$\begin{aligned}
۳ &= \{۰, ۱, ۲\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
۴ &= \{۰, ۱, ۲, ۳\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} \\
۵ &= \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\},
\end{aligned}$$

و غیره.

آشکارا، ایدهٔ اصلی این است که عدد طبیعی n را به‌صورت مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر تعریف کنیم، یعنی $\{۰, ۱, \ldots, n - ۱\}$. بدین طریق، n مجموعه‌ای خاص با n عضو است. اما این ایده یک نقص اساسی دارد. ما اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را تعریف کردیم و به همین سادگی ۱۷ ــ و البته نه به همین سادگی ــ ۳۲۴ را می‌توان تعریف کرد. لیکن این توصیف‌ها به ما نمی‌گویند اعداد طبیعی در حالت کلی چه هستند. آنچه ما نیاز داریم عبارتی به این صورت است: مجموعهٔ n عدد طبیعی است اگر .... کافی نیست که فقط بگوییم مجموعهٔ n عدد طبیعی است هرگاه اعضای آن همهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر باشند، چرا که، چنین «تعریفی» همان مفهومی را که قرار است تعریف شود در بر دارد.

اجازه دهید ساخت چند عدد طبیعی اولیه را بار دیگر بررسی کنیم. قبلاً تعریف کردیم $۲ = \{۰, ۱\}$. برای ساختن ۳، باید عضو سومی، مثلاً خود ۲ را، به ۲ اضافه کنیم، پس

$$۳ = ۲ \cup \{۲\} = \{۰, ۱\} \cup \{۲\}.$$

به‌همین‌نحو،

$$\begin{aligned} ۴ &= ۳ \cup \{۳\} = \{۰, ۱, ۲\} \cup \{۳\}, \\ ۵ &= ۴ \cup \{۴\} \end{aligned}$$

و غیره. فرض کنید عدد طبیعی n داده شده باشد، با الحاق یک عضو دیگر به n، مثلاً خود n، به عدد «بعدی» می‌رسیم. این روند حتی برای ۱ و ۲ هم کار می‌کند: $۱ = ۰ \cup \{۰\}$، $۲ = ۱ \cup \{۱\}$. لیکن برای ۰، کوچک‌ترین عدد طبیعی، انجام شدنی نیست.

ملاحظات فوق تعریف زیر را پیشنهاد می‌کند.

۱.۱ تعریف. تالی مجموعهٔ x عبارت است از $S(x) = x \cup \{x\}$.

از لحاظ شهودی، $S(n)$ تالی عدد طبیعی n، عدد «یک واحد بزرگ‌تر» $n + ۱$ است. از این به بعد، به‌جای $S(n)$ نماد گویاتر $n + ۱$ را به کار می‌بریم. بعداً، جمع اعداد طبیعی را (با استفاده از مفهوم تالی) طوری تعریف خواهیم کرد که $n + ۱$ واقعاً برابر مجموع n و ۱ باشد. اما تا قبل از آن، $n + ۱$ فقط یک نماد است و هیچ ویژگی از عمل جمع نه در آن فرض می‌شود و نه از آن نتیجه می‌شود.

درک شهودیمان از اعداد طبیعی را به‌صورت زیر می‌توان خلاصه کرد:

الف) ۰ عدد طبیعی است.

ب) اگر n عدد طبیعی باشد، در آن صورت تالی آن $n + ۱$ نیز عدد طبیعی است.

ج) با به کار بردن (الف) و (ب) همهٔ اعداد طبیعی را می‌توان تولید کرد، یعنی با ۰ شروع کنیم و مکرراً عمل تالی را به کار بریم: ۰، $۰ + ۱ = ۱$، $۱ + ۱ = ۲$، $۲ + ۱ = ۳$، $۳ + ۱ = ۴$، $۴ + ۱ = ۵$، ... و غیره.

۲.۱ تعریف. مجموعهٔ I را استقرائی گوییم هرگاه

الف) $۰ \in I$.

ب) اگر $n \in I$، آن‌گاه $n + ۱ \in I$.

مجموعهٔ استقرائی ۰ و تالی هر عضو خود را در بر دارد. با توجه به قسمت (ج) بالا، مجموعهٔ استقرائی باید شامل همهٔ اعداد طبیعی باشد. معنای دقیق قسمت (ج)

در بالا این است که مجموعهٔ اعداد طبیعی یک مجموعهٔ استقرائی است و به‌جز اعداد طبیعی، هیچ عضو دیگری ندارد. به عبارت دیگر، کوچک‌ترین مجموعهٔ استقرائی است. از این‌رو تعریف زیر را داریم.

۳.۱ تعریف. مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی عبارت است از مجموعهٔ

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \in I \text{ ،}I \text{ برای هر مجموعهٔ استقرائی}\}.$$

اعضای $\mathbb{N}$ اعداد طبیعی نامیده می‌شوند. از این‌رو مجموعهٔ x عدد طبیعی است اگر و تنها اگر به هر مجموعهٔ استقرائی متعلق باشد.

وجود $\mathbb{N}$ را باید بر اساس اصل موضوع شمول مُبَرهن کنیم (توضیحات بعد از مثال ۱۲.۳ از فصل ۱ را ببینید). لیکن این کار آسان است. فرض کنید A مجموعهٔ استقرائی باشد، در این صورت، به‌وضوح داریم

$$\mathbb{N} = \{x \in A \mid x \in I \text{ ،}I \text{ به‌ازای هر مجموعهٔ استقرائی}\}.$$

تنها پرسش باقی‌مانده این است که آیا اصلاً مجموعهٔ استقرائی وجود دارد؟ البته پاسخ شهودی این پرسش مثبت است؛ یک مثال بارز، مجموعهٔ اعداد طبیعی است. لیکن نگاهی دقیق به اصل‌های موضوع مورد قبول ما نشان می‌دهد که وجود مجموعه‌های نامتناهی (مثل $\mathbb{N}$) از آن‌ها قابل استخراج نیست. دلیل این امر این است که این اصل‌های موضوع به‌صورت کلی زیرند:

«برای هر مجموعهٔ X، مجموعهٔ Y موجود است به‌قسمی که ...»،

که در آن اگر X متناهی باشد مجموعهٔ Y نیز متناهی است. از آنجایی که $\varnothing$ یگانه مجموعه‌ای است که وجود آن را صراحتاً تحت عنوان اصل موضوع بیان کرده‌ایم، مجموعه‌ای متناهی است و در نتیجه هر مجموعهٔ دیگری که اصول موضوع وجود آن را ایجاب می‌کنند نیز متناهی خواهد بود. (به‌منظور درک دقیق‌تری از این موضوع بخش ۲ از فصل ۴ را ببینید.) نتیجه آنکه اصل موضوع دیگری نیاز داریم.

اصل موضوع بی‌نهایت. یک مجموعهٔ استقرائی وجود دارد.

برخی ریاضیدانان مخالف اصل موضوع بی‌نهایت هستند به این دلیل که معتقدند گردایه‌ای از اشیا که حاصل یک فرایند بی‌پایان است (مانند $\mathbb{N}$) نباید یک شیء کامل در نظر گرفته شود. با وجود این، هر شخصی که قدری آشنایی با ریاضیات داشته باشد بدون هیچ مشکلی می‌تواند اعداد طبیعی با تعریف مذکور را در ذهن خود مجسم کند. مجموعه‌های نامتناهی ابزارهای پایه‌ای برای ریاضیات جدید هستند و بنیاد نظریهٔ مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهند. تا کنون هیچ‌گونه تناقضی از به کاربردن مجموعه‌های نامتناهی، علی‌رغم حجم وسیع تحقیقات روی آن‌ها، دیده نشده است. به‌همین دلیل، اصل موضوع بی‌نهایت با دیگر اصول موضوع ما هم‌شأن است.

اکنون دیگر مجموعهٔ طبیعی $\mathbb{N}$ را در اختیار داریم. اجازه دهید قبل از آنکه پیشتر برویم، نشان دهیم مجموعهٔ $\mathbb{N}$ به‌راستی استقرائی است.

۴.۱ لم. مجموعهٔ $\mathbb{N}$ استقرائی است. اگر I مجموعهٔ استقرائی باشد، آن‌گاه $\mathbb{N} \subseteq I$.

برهان. چون برای هر مجموعهٔ استقرائی I، $\circ \in I$ پس $\circ \in \mathbb{N}$.

اگر $n \in \mathbb{N}$، به‌ازای هر مجموعهٔ استقرائی I داریم $n \in I$، در نتیجه $n + ۱ \in I$. لذا، $\mathbb{N}$ مجموعهٔ استقرائی است. قسمت دوم لم بی‌درنگ از تعریف $\mathbb{N}$ به‌دست می‌آید. $\square$

گام بعدی ما تعریف ترتیب اعداد طبیعی برحسب اندازه است. ایدهٔ راهنمای ما، یعنی تعریف هر عدد طبیعی به‌عنوان مجموعه‌ای از اعداد طبیعی کوچک‌تر، ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

۵.۱ تعریف. رابطهٔ $<$ روی $\mathbb{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $m < n$ اگر و تنها اگر $m \in n$.

البته لازم است ثابت کنیم که رابطهٔ $<$، به‌راستی، ترتیب خطی است و مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{N}, <)$ واقعاً از ویژگی‌هایی که از اعداد طبیعی انتظار داریم، برخوردار است. نظریهٔ مورد نیاز این کار را در ادامه این فصل مهیا خواهیم کرد.

تمرین‌ها

۱.۱ همواره $x \subseteq S(x)$ و هیچ zیی وجود ندارد به‌طوری‌که $x \subset z \subset S(x)$.

۲ ویژگی‌های اعداد طبیعی

در بخش پیشین، مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را مجموعه‌ای تعریف کردیم که (الف) $\circ \in \mathbb{N}$ و (ب) اگر $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه $(n+۱) \in \mathbb{N}$. همچنین، رابطهٔ $m < n$ را به معنی $m \in n$ تعریف کردیم. در این بخش قصد داریم نشان دهیم مفاهیم مذکور همان ویژگی‌های معمول را دارند.

کار را با ابزاری بنیادی برای مطالعهٔ اعداد طبیعی شروع می‌کنیم. این ابزار همان اصل معروف به استقرای ریاضی است.

اصل استقرا. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی (احتمالاً شامل پارامتر) باشد. فرض کنید

الف) $\mathbf{P}(\circ)$ برقرار باشد.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbf{P}(n)$ ایجاب کند $\mathbf{P}(n+۱)$.

در این صورت $\mathbf{P}$ برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

برهان. حکم نتیجه‌ای آنی از تعریف $\mathbb{N}$ است. در واقع مفروضات (الف) و (ب) به‌سادگی نشان می‌دهند که مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(n)\}$ استقرائی است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathbb{N} \subseteq A$. □

لم بعد که مثال ساده‌ای از اثبات با استقرا است، دو خاصیت ساده از اعداد طبیعی را اثبات می‌کند.

۱.۲ لم.

(۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n \geq \circ$.

(۲) برای هر $k, n \in \mathbb{N}$، $k < n+۱$ اگر و تنها اگر $k < n$ یا $k = n$.

برهان. (۱) $\mathbf{P}(x)$ را خاصیت «$x \geq ۰$» در نظر می‌گیریم و مفروضات اصل استقرا را می‌آزماییم.

الف) $\mathbf{P}(۰)$ برقرار است. زیرا $\mathbf{P}(۰)$ همان گزارهٔ «$۰ \leq ۰$» است که قطعاً برقرار است (زیرا $۰ = ۰$).

ب) $\mathbf{P}(n)$ ایجاب می‌کند $\mathbf{P}(n + ۱)$. زیرا، فرض می‌کنیم $\mathbf{P}(n)$ برقرار باشد، به‌عبارت‌دیگر، فرض کنیم $n \geq ۰$. بنا به تعریف $>$ داریم $n = ۰$ یا $n \in ۰$. در هر حالت، $۰ \in n \cup \{n\} = n + ۱$ و بنابراین $(n + ۱) > ۰$. لذا $\mathbf{P}(n + ۱)$ برقرار است.

با استفاده از اصل استقرا و اینکه (الف) و (ب) برقرار است می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbf{P}(n)$ برقرار است. به‌عبارت‌دیگر، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n \geq ۰$.

(۲) اثبات این قسمت نیازی به استقرا ندارد. برای اثبات کافی است ملاحظه کنیم $k \in n \cup \{n\}$ اگر و تنها اگر $k \in n$ یا $k = n$. □

اثبات قضیهٔ بعدی چند نمونهٔ کمی مشکل‌تر از اثبات با استقرا را ارائه می‌کند.

۲.۲ قضیه. مجموعهٔ $(\mathbb{N}, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی است.

برهان.

(۱) رابطهٔ $<$ روی $\mathbb{N}$ متعدی است.

باید ثابت کنیم برای هر $k, m, n \in \mathbb{N}$ از $k < m$ و $m < n$ نتیجه می‌شود $k < n$. با استقرا روی n عمل می‌کنیم، بدین معنی که برای $\mathbf{P}(x)$ خاصیت « برای هر $k, m \in \mathbb{N}$، اگر $k < m$ و $m < x$، آن‌گاه $k < x$ » را به کار می‌بریم.

الف) $\mathbf{P}(۰)$ برقرار است. در واقع $\mathbf{P}(۰)$ حکم می‌کند برای هر $k, m \in \mathbb{N}$، اگر $k < m$ و $m < ۰$، آن‌گاه $k < ۰$. اما بنا به لم ۱.۲ (۱)، عدد $m \in \mathbb{N}$ موجود نیست به‌طوری‌که $m < ۰$. لذا بدیهی است که $\mathbf{P}(۰)$ برقرار است.

ب) فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ برقرار باشد، به‌عبارت‌دیگر، فرض کنید برای هر $k, m \in \mathbb{N}$، اگر $k < m$ و $m < n$، آن‌گاه $k < n$. اکنون باید ثابت کنیم $\mathbf{P}(n + ۱)$ برقرار است، یعنی اینکه باید ثابت کنیم $k < m$ و $m < (n + ۱)$ ایجاب می‌کند

$k < (n + ۱)$. حال اگر $k < m$ و $m < (n + ۱)$، بنا به لم ۱.۲ (۲)، داریم $m < n$ یا $m = n$. اگر $m < n$، بنا به فرض استقرا داریم $k < n$. اگر $m = n$، چون $k < m$ داریم $k < n$. در هر حالت، بنا به لم ۱.۲ (۲) داریم $k < n + ۱$. پس $\mathbf{P}(n + ۱)$ نتیجه می‌شود.

اکنون درستی $\mathbf{P}(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، که دقیقاً همان متعدی بودن $(\mathbb{N}, <)$ است، از اصل استقرا نتیجه می‌شود.

(۲) رابطهٔ $<$ روی $\mathbb{N}$ پادمتقارن است.

فرض کنید $n < k$ و $k < n$. از خاصیت تعدی نتیجه می‌شود $n < n$. لذا کافی است نشان دهیم محال است حکم اخیر اتفاق بیفتد. با استقرا عمل می‌کنیم. به‌وضوح، غیرممکن است که $۰ < ۰$ (زیرا بدین معنی است که $\varnothing \in \varnothing$). اکنون، فرض می‌کنیم $n < n$ کاذب است و ثابت می‌کنیم $(n + ۱) < (n + ۱)$ نیز کاذب است. اگر $(n + ۱) < (n + ۱)$ برقرار باشد، داریم $n + ۱ < n$ یا $n + ۱ = n$ [لم ۱.۲ (۲)]. بنا به لم ۱.۲ (۲)، $n < n + ۱$ و چون متعدی بودن $<$ را قبلاً ثابت کردیم، پس نتیجه می‌گیریم $n < n$. لذا، فرض استقرا (یعنی $n < n$ کاذب است) نقض می‌شود. بنابراین، ثابت کردیم مفروضات (الف) و (ب) در اصل استقرا (که در اینجا $\mathbf{P}(x)$ عبارت است از «$x < x$ کاذب است») برقرارند. اکنون، می‌توان نتیجه گرفت برای هر $n \in \mathbb{N}$ محال است که $n < n$. لذا تا اینجا دریافتیم رابطهٔ $<$ ترتیب (اکید) روی $\mathbb{N}$ است.

فقط می‌ماند ثابت کنیم

(۳) رابطهٔ $<$ ترتیب خطی روی $\mathbb{N}$ است.

باید ثابت کنیم برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، یا $m < n$ یا $m = n$ یا $n < m$. با استقرا روی n عمل می‌کنیم.

الف) باید نشان دهیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، یا داریم $m < ۰$ یا $m = ۰$ یا $۰ < m$. این حکم بی‌درنگ از لم ۱.۲ (۲) نتیجه می‌شود.

ب) فرض کنید برای هر $m \in \mathbb{N}$، یا $m < n$ یا $m = n$ یا $n < m$. باید حکم مشابهی برای $(n + ۱)$ به‌جای n اثبات کنیم. اگر $m < n$، آن‌گاه از لم ۱.۲ (۲) و خاصیت تعدی داریم $m < (n + ۱)$. به همین نحو، اگر $m = n$، در این

صورت $m < (n+1)$. و بالاخره، اگر $n < m$ نشان خواهیم داد $n+1 \leq m$. چه در این صورت برای هر $m \in \mathbb{N}$ یا داریم $m < (n+1)$ یا $m = (n+1)$ یا $(n+1) < m$ که (ب) را ثابت و اثبات را تمام می‌کند. پس با استقرا روی m نشان خواهیم داد اگر $n < m$، آن‌گاه برای هر $m \in \mathbb{N}$، $m < (n+1)$ [در اینجا n پارامتر است، بدین معنی که اصل استقرا را برای خاصیت $\mathbf{P}(x)$ با تعریف «اگر $n < x$، آن‌گاه $n+1 < x$» به کار خواهیم گرفت]. اگر $m = 0$، گزارهٔ «اگر $n < 0$، آن‌گاه $n+1 \leq 0$» صادق است (زیرا فرض آن کاذب است). فرض کنید $\mathbf{P}(m)$ برقرار باشد، یعنی اگر $n < m$، آن‌گاه $(n+1) \leq m$. برای اثبات $\mathbf{P}(m+1)$، فرض کنید $n < m+1$، در این صورت $n < m$ یا $n = m$. اگر $n < m$، آن‌گاه بنا به فرض استقرا $n+1 \leq m$ و لذا $n+1 < m+1$. اگر $n = m$، به‌وضوح $n+1 = m+1$. در هر حالت $\mathbf{P}(m+1)$ اثبات می‌شود. و همان‌طورکه می‌خواستیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، $\mathbf{P}(m)$ برقرار است.

اکنون با توجه به ثابت شدن مفروضات (الف) و (ب) در اصل استقرا، اثبات قسمت (۳) به پایان می‌رسد. □

به خواننده توصیه می‌شود برهان بالا را از جهت استفاده‌های متنوع از اصل استقرا به‌دقت مطالعه کند. به‌ویژه، دقت شود اثبات قسمت (۳) نمونه‌ای از «استقرای دوگانه» است. یعنی اینکه برای اثبات گزاره‌ای که به دو متغیر m و n بستگی دارد، استقرا را روی یکی از آن‌ها، مثلاً n به‌کار می‌گیریم. اثبات فرض (ب) در اصل استقرا در اینجا خود به استقرا روی متغیر دیگر، یعنی m (برای n ثابت)، نیاز دارد. تمرین ۱۳.۲ را ببینید.

پیش از اینکه بحث خود را ادامه دهیم صورت دیگری از اصل استقرا را که غالباً مفیدتر است بیان و اثبات می‌کنیم.

اصل استقرا، صورت دوم. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی (احتمالاً شامل پارامتر) باشد. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$،

(*) اگر برای هر $k < n$، $\mathbf{P}(k)$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(n)$.

در این صورت $\mathbf{P}$ برای همهٔ اعداد طبیعی برقرار است.

به‌عبارت‌دیگر، برای اثبات $\mathbf{P}(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ کافی است (برای هر $n \in \mathbb{N}$) $\mathbf{P}(n)$ را با شرط برقراری برای تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر اثبات کنیم.

برهان. فرض کنید $(*)$ درست باشد. خاصیت $\mathbf{Q}(x)$ با تعریف «برای هر $k < n$، $\mathbf{P}(k)$ برقرار است» را در نظر بگیرید. به‌وضوح، $\mathbf{Q}(0)$ درست است. (زیرا هیچ kیی که $k < 0$ وجود ندارد). اگر $\mathbf{Q}(n)$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{Q}(n + 1)$ نیز برقرار است. زیرا، اگر $\mathbf{Q}(n)$ برقرار باشد، در آن صورت برای هر $k < n$، $\mathbf{P}(k)$ برقرار است و در نتیجه برای $k = n$ نیز برقرار است [به دلیل رابطهٔ $(*)$]. از لم ۱.۲ (۲) می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{P}(k)$ برای هر $k < n + 1$ برقرار است. بنابراین، $\mathbf{Q}(n + 1)$ برقرار است. چون برای عدد $k \in \mathbb{N}$ عددی مانند $n > k$ موجود است (مثلاً بگیرید $n = k + 1$)، پس بنا به اصل استقرا برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbf{Q}(n)$ درست است. پس، همان‌طور که می‌خواستیم برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\mathbf{P}(k)$ صادق است. $\square$

ترتیب اعداد طبیعی برحسب اندازه‌شان ویژگی مهم دیگری دارد که آن را مثلاً از ترتیب اعداد صحیح یا اعداد گویا برحسب اندازه‌شان متمایز می‌سازد.

۳.۲ تعریف. ترتیب خطی $\prec$ روی مجموعهٔ A خوش‌ترتیبی است هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی A کوچک‌ترین عضو داشته باشد. در این صورت مجموعهٔ مرتب $(A, \prec)$ مجموعهٔ خوش‌ترتیب نامیده می‌شود.

مجموعه‌های خوش‌ترتیب رکن رکین نظریهٔ مجموعه‌ها هستند. در فصل ٦ آن‌ها را به‌طور گسترده‌ای مطالعه خواهیم کرد. در اینجا فقط قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

۴.۲ قضیه. مجموعهٔ $(\mathbb{N}, <)$ خوش‌ترتیب است.

برهان. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathbb{N}$ باشد. باید نشان دهیم که X دارای یک کوچک‌ترین عضو است. فرض کنید X کوچک‌ترین عضو نداشته باشد و مجموعهٔ $\mathbb{N} - X$ را در نظر بگیرید. مرحلهٔ اصلی اثبات توجه به این مطلب است

که اگر برای هر $k < n$، $k \in \mathbb{N} - X$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N} - X$. این هم به این دلیل است که در غیر این صورت n باید یک کوچک‌ترین عضو برای X باشد. اکنون، بنا به‌صورت دوم اصل استقرا نتیجه می‌گیریم برای هر عدد طبیعی n، $n \in \mathbb{N} - X$ [در اینجا $\mathbf{P}(x)$ عبارت است از خاصیت «$x \in \mathbb{N} - X$»]. از این‌رو، $X = \varnothing$ که فرض اولیهٔ ما را نقض می‌کند. □

این بخش را با ویژگی دیگری از ترتیب > به پایان می‌بریم.

۵.۲ قضیه. اگر زیرمجموعهٔ غیرتهی از اعداد طبیعی مثبت در ترتیب > یک کران بالا داشته باشد، آن‌گاه دارای یک بزرگ‌ترین عضو است.

برهان. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{N}$ به‌قسمی که $A \neq \varnothing$ داده شده باشد. تعریف کنید $B = \{k \in \mathbb{N} \mid$ یک کران بالا برای A است $k\}$. فرض می‌کنیم $B \neq \varnothing$. بنا به قضیهٔ ۴.۲، B دارای یک کوچک‌ترین عضو مانند n است، لذا $n = \sup(A)$. اثبات را با نشان دادن اینکه $n \in A$ کامل می‌کنیم. [قضیهٔ **۱۵.۵** (پ) فصل ۲ را ببینید و در آن به‌جای «سوپریمم» کلمهٔ «اینفیمم» قرار دهید]. با برهان استقرائی ساده‌ای ثابت می‌شود که یا $n = ۰$ یا به‌ازای $k \in \mathbb{N}$یی، $n = k + ۱$. (تمرین ۴.۲ را ببینید). فرض کنید $n \notin A$. پس برای هر $m \in A$ داریم $n > m$. چون $A \neq \varnothing$ نتیجه می‌شود $n \neq ۰$. از این‌رو، به‌ازای $k \in \mathbb{N}$یی، $n = k + ۱$ که نتیجه می‌دهد برای هر $m \in A$، $k \geq m$ [باز هم لم ۱.۲ (۲)!]. بنابراین k کران بالایی برای A است و $k < n$، که تناقض است. □

تمرین‌ها

۱.۲ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. ثابت کنید که هیچ $k \in \mathbb{N}$یی وجود ندارد به‌طوری‌که $n < k < n + ۱$.

۲.۲ با استفاده از تمرین ۱.۲، ثابت کنید که به‌ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$: اگر $m < n$، آن‌گاه $m + ۱ \leq n$. از اینجا نتیجه بگیرید که $m < n$ ایجاب می‌کند

$m + ۱ < n + ۱$ و بنابراین تالی $S(n) = n + ۱$ تابعی یک‌به‌یک روی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کند.

۳.۲ ثابت کنید که یک نگاشت یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی زیرمجموعهٔ سره‌ای از $\mathbb{N}$ وجود دارد [راهنمایی: از تمرین ۲.۲ استفاده کنید].

۴.۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \neq ۰$، عدد یکتایی مانند $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $n = k + ۱$.

۵.۲ برای هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \neq ۰, ۱$، عدد یکتایی مانند $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $n = (k + ۱) + ۱$.

۶.۲ ثابت کنید هر عدد طبیعی مجموعه‌ای از اعداد طبیعی کوچک‌تر است. یا معادلاً

$$n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}.$$

[راهنمایی: با استفاده از استقرا ثابت کنید که همهٔ اعضاء یک عدد طبیعی اعداد طبیعی هستند.]

۷.۲ برای هر $m, n \in \mathbb{N}$،

$$m < n \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad m \subset n.$$

۸.۲ ثابت کنید که هیچ تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ وجود ندارد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f(n) > f(n + ۱)$. (دنبالهٔ نزولی و نامتناهی از اعداد طبیعی وجود ندارد.)

۹.۲ اگر $X \subseteq \mathbb{N}$، آن‌گاه $\langle X, < \cap X^۲ \rangle$ خوش‌ترتیب است.

۱۰.۲ در تمرین **٦.۵** از فصل ۲، قرار دهید $A = \mathbb{N}$ و $b = \mathbb{N}$. ثابت کنید که $\prec$ به‌صورتی که در آنجا تعریف شده است، یک خوش‌ترتیبی از $B = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ است. توجه کنید که $x \prec y$ اگر و فقط اگر $x \in y$ برای هر $x, y \in B$.

۱۱.۲ فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی باشد. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ و

الف) $\mathbf{P}(k)$ برقرار باشد.

ب) برای هر $n \geq k$، اگر $\mathbf{P}(n)$، آن‌گاه $\mathbf{P}(n + ۱)$. در این صورت $\mathbf{P}(n)$ به‌ازای هر $n \geq k$ برقرار است.

۱۲.۲ (**اصل استقرای متناهی**) فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی باشد. فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ و

الف) $\mathbf{P}(\circ)$.

ب) برای هر $n < k$، $\mathbf{P}(n)$ ایجاب کند $\mathbf{P}(n+۱)$.

در این صورت $\mathbf{P}(n)$ برای هر $n \leq k$ برقرار است.

۱۳.۲ (**استقرای دوگانه**) فرض کنید $\mathbf{P}(x,y)$ خاصیتی باشد. فرض کنید که

(**) اگر $\mathbf{P}(k,l)$ برای هر $k,l \in \mathbb{N}$ که $k < m$ یا ($l < n$ و $k = m$) برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(m,n)$ برقرار است.

نتیجه بگیرید که $\mathbf{P}(m,n)$ برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ برقرار خواهد بود.

۳ قضیهٔ بازگشت

کار بعدی ما این است که نشان دهیم چگونه جمع، ضرب، و دیگر اعمال معمول حساب را تعریف کنیم. به‌منظور تسهیل این امر، یک روش کلی و مهم برای تعریف توابع روی $\mathbb{N}$ به‌دست می‌آوریم.

با معرفی چند اصطلاح جدید شروع می‌کنیم. یک دنباله تابعی است که دامنهٔ آن یا یک عدد طبیعی است یا $\mathbb{N}$. دنباله‌ای که دامنه آن عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ است دنبالهٔ متناهی با طول n نامیده می‌شود و به‌صورت

$$\langle a_\circ, a_۱, \ldots, a_{n-۱}\rangle \quad \text{یا} \quad \langle a_i \mid i = \circ, ۱, \ldots, n-۱\rangle \quad \text{یا} \quad \langle a_i \mid i < n\rangle$$

نمایش داده می‌شود. به‌ویژه، $\langle\rangle\ (= \varnothing)$ دنبالهٔ یکتا با طول صفر یا دنبالهٔ تهی را نشان می‌دهد. مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی از اعضای A را با $\mathrm{Seq}(A) = \cup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ نشان می‌دهیم. (وجود این مجموعه را ثابت کنید!). اگر دامنهٔ دنباله‌ای برابر $\mathbb{N}$ باشد آن دنباله را دنبالهٔ نامتناهی می‌نامیم و آن را با

$$\langle a_i\rangle_{i=\circ}^{\infty} \quad \text{یا} \quad \langle a_i \mid i = \circ, ۱, ۲, \ldots\rangle \quad \text{یا} \quad \langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$$

نشان می‌دهیم.

لذا دنباله‌های نامتناهی از اعضای A دقیقاً همان اعضای $A^{\mathbb{N}}$ هستند. نماد دنباله اساساً، تابعی با دامنهٔ مناسب را که مقدارش در i برابر a_i است مشخص می‌کند. برای نشان دادن برد دنبالهٔ $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ نمادهای $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$، $\{a_i\}_{i=۰}^{\infty}$، و غیره را به کار می‌بریم. به همین نحو، با $\{a_i \mid i < n\}$ یا $\{a_۰, a_۱, \dots, a_{n-۱}\}$ برد دنبالهٔ $\langle a_i \mid i < n\rangle$ را نشان می‌دهیم.

اکنون دو مثال از دنباله‌های نامتناهی ارائه می‌دهیم.

الف) دنبالهٔ $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ که با ضابطهٔ

$$s_۰ = ۱,$$
$$s_{n+۱} = n^۲ \quad \text{برای هر } n \in \mathbb{N}$$

تعریف شده است.

ب) دنبالهٔ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ که با ضابطهٔ

$$f_۰ = ۱,$$
$$f_{n+۱} = f_n \times (n + ۱) \quad \text{برای هر } n \in \mathbb{N}$$

تعریف شده است.

دو تعریف بالا، صرف‌نظر از شباهت ظاهریشان، تفاوت بسیار اساسی با هم دارند. تعریف s دستور صریحی برای محاسبه s_x برای هر $x \in \mathbb{N}$ در اختیار می‌گذارد. به‌بیان دقیق‌تر، این تعریف ما را قادر می‌کند که خاصیت $\mathbf{P}$ را به‌صورت

$$\mathbf{P}(x, y) \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad s_x = y$$

فرمول بندی کنیم. مثلاً، فرض کنید $\mathbf{P}$ به این صورت باشد « $x = ۰$ و $y = ۱$ یا به‌ازای $n \in \mathbb{N}$یی، $x = n + ۱$ و $y = n^۲$ ». وجود و یکتایی دنبالهٔ s که در قسمت (الف) بالا صدق می‌کند بی‌درنگ از اصل‌های موضوعمان نتیجه می‌شود، در واقع

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \mathbf{P}(x, y)\}.$$

در مقابل این، دستوری که تعریف f را در اختیار می‌گذارد فقط طریقهٔ محاسبه f_x را به‌شرطی که مقدار f برای عددی کوچک‌تر (مثلاً، $x - ۱$) قبلاً محاسبه شده باشد، به ما نشان می‌دهد. در بادی امر واضح نیست که چگونه خاصیتی مانند $\mathbf{P}$ را به‌گونه‌ای فرمول‌بندی کنیم که شامل تابع f که قرار است تعریف شود نباشد و برای آن داشته باشیم

$$f_x = y \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \mathbf{P}(x, y).$$

تعریف (ب) را می‌توان شرط‌هایی انگاشت که دنبالهٔ f باید در آن‌ها صدق کند. بدین معنی که «f تابعی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ است که در شرط اولیه $f_۰ = ۱$ و «شرط بازگشتی» برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_{n+۱} = f_n \times (n + ۱)$ صدق می‌کند.»

در ریاضیات از این نوع تعریف‌ها زیاد استفاده می‌شود. شاید خواننده مثلاً به یاد تعریف ضمنی توابع در حسابان بیفتد. لیکن تعاریفی از این نوع فقط وقتی موجه‌اند که بتوان نشان داد اصلاً توابعی با شرایط مورد نظر وجود دارد و همچنین فقط یک تابع از این نوع موجود است. در حسابان، این کار را قضیهٔ تابع ضمنی به انجام می‌رساند. در اینجا ما نتیجه‌ای مشابه ولی مناسب بحثمان بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیهٔ بازگشت. برای هر مجموعهٔ A، هر $a \in A$، و هر تابع $g : A \times \mathbb{N} \to A$ دنبالهٔ نامتناهی منحصر به‌فردی مانند $f : \mathbb{N} \to A$ موجود است به‌طوری‌که

الف) $f_۰ = a$،

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_{n+۱} = g(f_n, n)$.

مثلاً در مثال (ب) در بالا داریم $A = \mathbb{N}$، $a = ۱$، و $g(u, v) = u \times (v + ۱)$.

مجموعهٔ a «مقدار اولیه» f نامیده می‌شود. نقش g ارائهٔ دستوری برای محاسبهٔ $f_{n+۱}$ برحسب مقدار محاسبه شده f_n است.

برهان قضیهٔ بازگشت طرحی از تعریف صریح تابع f را در بر دارد. مجدداً، مثال (ب) را در نظر بگیرید. در اینجا f_n همان n فاکتوریل است و در نتیجه تعریف صریح f را به‌راحتی می‌توان نوشت:

$$f_۰ = ۱, \quad f_m = ۱ \times ۲ \times \ldots \times (m + ۱) \times m \quad m \neq ۰ \text{ و } m \in \mathbb{N} \text{ اگر}$$

مشکل در اینجا، دقیق ساختن تعریف «...» در بالاست. با گفتن اینکه f_m نتیجهٔ محاسبات

$$\begin{gathered}
۱ \\
۱ \times ۱ \\
[۱ \times ۱] \times ۲ \\
[۱\times ۱ \times ۲] \times ۳ \\
\vdots \\
[۱ \times ۱\times ۲ \ldots \times (m-۱)] \times m
\end{gathered}$$

است می‌توان مشکل را رفع نمود.

عمل محاسبه دنباله‌ای متناهی است که با «مقدار اولیهٔ» f شروع و تابع g مکرراً برای آن به کار گرفته می‌شود. در مثال بالا، محاسبهٔ mـمرحله‌ای t دنباله‌ای متناهی با طول $m+۱$ است که در آن $t_۰ = ۱$ و $t_{k+۱} = t_k \times (k+۱) = g(t_k, k)$ برای هر $k < m$ و $k \geq ۰$. تعریف صریح و دقیق f به‌صورت زیر است.

$$f_m = t_m \quad \text{که در آن } t \text{ محاسبهٔ } m\text{ـمرحله‌ای (با } a = ۱ \text{ و } g\text{) است.}$$

مسئلهٔ وجود و یکتایی تابع f به این مسئله تقلیل می‌یابد که نشان دهیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، دقیقاً یک محاسبهٔ mـمرحله‌ای وجود دارد.

اکنون به اثبات رسمی قضیهٔ بازگشت می‌پردازیم. از آنجایی که این قضیه و تعمیم‌هایش جزء مهم‌ترین تکنیک‌های نظریهٔ مجموعه‌ها هستند به خواننده توصیه می‌شود مثال قبلی و برهان قضیه را به‌دقت مطالعه کند.

برهان. وجود تابع f. تابع $t : (m+۱) \to A$ محاسبهٔ mـمرحله‌ای با a و g نامیده می‌شود هرگاه $t_۰ = a$ و برای هر k با شرط $۰ \leq k < m$، $t_{k+۱} = g(t_k, k)$. دقت کنید $t \subseteq \mathbb{N} \times A$. قرار دهید

$$F = \{t \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t \text{ محاسبهٔ } m\text{ـمرحله‌ای است}\}.$$

همچنین قرار دهید $f = \bigcup F$.

۱.۳ ادعا. f تابع است.

برای این کار کافی است نشان دهیم دستگاه توابع F موافق است (قضیهٔ ۱۲.۳ از فصل ۲ را ببینید). فرض کنید $t, u \in F$، $\operatorname{dom} t = n \in \mathbb{N}$ و $\operatorname{dom} u = m \in \mathbb{N}$. چنانچه، مثلاً $n \le m$، در این صورت $n \subseteq m$ و بنابراین کافی است نشان دهیم برای هر $k < n$، $t_k = u_k$. این را با استقرا ثابت می‌کنیم (آن صورتی از استقرا که در تمرین ۱۲.۲ بیان شد). مسلماً، $t_\circ = a = u_\circ$. حال فرض کنید k چنان باشد که $k + ۱ < n$ و در نظر بگیرید $t_k = u_k$. بنابراین $t_{k+۱} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k+۱}$. لذا برای هر $k < n$، $u_k = t_k$.

۲.۳ ادعا. $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$ و $\operatorname{ran} f \subseteq A$.

به‌راحتی می‌توان دید $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$ و $\operatorname{ran} f \subseteq A$. برای اثبات برابری $\operatorname{dom} f = \mathbb{N}$ کافی است ثابت کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ محاسبهٔ nـمرحله‌ای t موجود است. از اصل استقرا استفاده می‌کنیم. به‌وضوح $t = \{(\circ, a)\}$ محاسبه‌ای $\circ$ـمرحله‌ای است.

فرض کنید t محاسبهٔ nـمرحله‌ای باشد. در این صورت تابع t^+ روی $(n + ۱) + ۱$ با تعریف

$$t_k^+ = t_k \quad k \le n,$$

$$t_{n+۱}^+ = g(t_n, n)$$

محاسبه‌ای $(n + ۱)$ـمرحله‌ای است.

پس نتیجه می‌گیریم هر $n \in \mathbb{N}$ در دامنهٔ محاسبه‌ای مانند $t \in F$ است و لذا $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{t \in F} \operatorname{dom} t = \operatorname{dom} f$.

۳.۳ ادعا. تابع f در شرایط (الف) و (ب) قضیه صدق می‌کند.

چون برای هر $t \in F$ داریم $t_\circ = a$، پس به‌وضوح $f_\circ = a$. برای اثبات اینکه $f_{n+۱} = g(f_n, n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید t محاسبه‌ای

$(n+1)$ـمرحله‌ای باشد، در این صورت برای هر $k \in \operatorname{dom} t$، $t_k = f_k$. لذا $f_{n+1} = t_{n+1} = g(t_n, n) = g(f_n, n)$.

اکنون وجود تابع f که شرایط قضیهٔ بازگشت را دارا باشد از ادعاهای ۱.۳، ۲.۳، و ۳.۳ نتیجه می‌شود.

یکتایی تابع f. فرض کنید $h : \mathbb{N} \to A$ به‌گونه‌ای باشد که

الف`) $h_\circ = a$،

ب`) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $h_{n+1} = g(h_n, n)$.

باز هم با استقرا نشان خواهیم داد برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n = h_n$. مسلماً $f_\circ = a = h_\circ$. حال اگر $f_n = h_n$، در این صورت $f_{n+1} = g(f_n, n) = g(h_n, n) = h_{n+1}$. بنابراین، همان‌طور که ادعا کرده بودیم $f = h$. □

به‌عنوان مثالی بارز از کاربردهای قضیهٔ بازگشت، نشان می‌دهیم ترتیب اعداد طبیعی برحسب اندازه که در فصل قبلی اثبات کردیم، مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{N}, <)$ را به‌طور یکتایی مشخص می‌کند.

۴.۳ قضیه. فرض کنید $(A, \prec)$ مجموعهٔ مرتب خطی ناتهی با ویژگی‌های زیر باشد

الف) برای هر $p \in A$، $q \in A$یی موجود است که $q \succ p$.

ب) هر زیرمجموعهٔ ناتهی از A دارای $\prec$ـکوچک‌ترین عضو است.

ج) هر زیرمجموعهٔ ناتهی از A که کران بالا داشته باشد دارای $\prec$ـبزرگ‌ترین عضو است.

در این صورت $(A, \prec)$ با $(\mathbb{N}, <)$ یکریخت است.

برهان. به‌وسیلهٔ قضیهٔ بازگشت یکریختی‌ای مانند f می‌سازیم. فرض کنید a کوچک‌ترین عضو A و $g(x, n)$ (برای هر n) کوچک‌ترین عضو A باشد که از x بزرگ‌تر است. در این صورت، $a \in A$ و g تابعی از $A \times \mathbb{N}$ به A است. دقت کنید بنا به مفروضات (الف) و (ب) قضیه، برای هر $x \in A$، $g(x, n)$ تعریف شده است و بستگی به n ندارد. قضیهٔ بازگشت وجود تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌قسمی که

(۱) $f_\circ = a =$ کوچک‌ترین عضو A.

$$f_{n+1} = g(f_n, n) = \text{کوچک‌ترین عضو } A \text{ بزرگ‌تر از } f_n \quad (۲)$$

تضمین می‌کند. واضح است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \prec f_{n+1}$. بنا به استقرا، هرگاه $n < m$، داریم $f_n \prec f_m$ (تمرین ۱.۳ را ببینید). در نتیجه، f یک‌به‌یک است. بنابراین، باقی می‌ماند نشان دهیم که برد f در A قرار دارد.

اگر چنین نباشد، پس $A - \operatorname{ran} f \neq \varnothing$؛ کوچک‌ترین عضو $A - \operatorname{ran} f$ را p بنامید. مجموعهٔ $B = \{q \in A \mid q \prec p\}$ ناتهی است و p کران بالایی برای آن است. (زیرا در غیر این صورت، p کوچک‌ترین عضو خواهد بود و در این صورت $p = f_0$). فرض کنید q بزرگ‌ترین عضو B باشد [بنا به فرض (ب) در قضیهٔ ۴.۳ چنین عضوی وجود دارد]. چون $q \prec p$، به‌ازای $m \in \mathbb{N}$یی داریم $q = f_m$. لیکن به‌آسانی دیده می‌شود که p کوچک‌ترین عضو A است و از q بزرگ‌تر. بنابراین، بنا به قسمت (۲) شرط بازگشتی داریم $p = f_{m+1}$. در نتیجه، $p \in \operatorname{ran} f$ که تناقض است. □

در برخی از تعریف‌های بازگشتی، مقدار f_{n+1} نه‌تنها به f_n بلکه به f_kها به‌ازای مقادیر دیگر $k < n$ نیز بستگی دارد. نمونهٔ مشهوری از این نوع، دنبالهٔ فیبوناچی

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, \ldots$$

است. در اینجا، $f_0 = ۱$، $f_1 = ۱$، و برای $n > 0$، $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. در قضیهٔ زیر این ساخت بازگشتی و به‌ظاهر کلی‌تر را صوری‌سازی می‌کنیم.

۵.۳ قضیه. برای هر مجموعهٔ S و هر تابع مانند $g : \operatorname{Seq}(S) \to S$ دنبالهٔ منحصربه‌فردی مانند $f : \mathbb{N} \to S$ موجود است به‌طوری که

$$f_n = g(f \restriction n) = g\big(\langle f_0, \ldots, f_{n-1} \rangle\big) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

به‌ویژه، ملاحظه کنید که $f_0 = g(f \restriction 0) = g(\langle\rangle) = g(\varnothing)$. برای به‌دست آوردن دنبالهٔ فیبوناچی کافی است تعریف کنید

$$g(t) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } t \text{ دنباله‌ای متناهی به طول ۰ یا ۱ باشد} \\ t_{n-1} + t_{n-2} & \text{اگر } t \text{ دنباله‌ای متناهی به طول } n > 1 \text{ باشد} \end{cases}$$

برهان. ایده اثبات تعریف دنبالهٔ $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle = \langle f \restriction n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ با استفاده از قضیهٔ بازگشت است.

بنابراین تعریف می‌کنیم

$$F_\circ = \langle\rangle\,,$$

$$F_{n+1} = F_n \cup \{\, \langle n, g(F_n)\rangle \,\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

وجود دنبالهٔ $\langle F_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ از قضیهٔ بازگشت به‌دست می‌آید، که در آن $A = \mathrm{Seq}\,\langle S\rangle$، $a = \langle\rangle$، و $G : A \times \mathbb{N} \to A$ تابع با تعریف زیر است

$$G(t,n) = \begin{cases} t \cup \{\, \langle n, g(t)\rangle \,\} & \text{دنباله با طول } n \text{ } t \\ \langle\rangle & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استقرا به‌آسانی می‌توان ثابت کرد برای هر $n \in \mathbb{N}$، F_n به S^n متعلق است و $F_n \subseteq F_{n+1}$. بنابراین، $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ دستگاهی موافق از توابع است (تمرین ۱.۳ را ببینید). قرار دهید $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$، به‌وضوح داریم $f : \mathbb{N} \to S$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f \restriction n = F_n$. بنابراین، نتیجه می‌گیریم $f_n = F_{n+1}(n) = g(F_n) = g(f \restriction n)$، که همان است که می‌خواستیم اثبات کنیم. □

مثال‌های دیگری از کاربرد این صورت از قضیهٔ بازگشت در فصل ۴ ارائه می‌شود. فعلاً، صورت پارامتری دیگری از قضیهٔ بازگشت، که با آن می‌توان توابع دو متغیری را تعریف کرد، بیان می‌کنیم.

۶.۳ قضیه. فرض کنید $a : P \to A$ و $g : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ دو تابع باشند. تابع منحصربه‌فردی مانند $f : P \times \mathbb{N} \to A$ موجود است به‌طوری‌که

الف) برای هر $p \in P$، $f(p, \circ) = a(p)$،

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $p \in P$، $f(p, n+1) = g(p, f(p,n), n)$.

به‌جای $f(p, \circ)$ می‌توان از نماد $f_{p,\circ}$ استفاده کرد و همین‌طور در مورد دیگر نمادها.

برهان. برهان قضیه در اصل همان صورت پارامتری برهان قضیهٔ بازگشت است. محاسبهٔ mـ‌مرحله‌ای را تابعی مانند $t : P \times (m+۱) \to A$ تعریف کنید به‌طوری‌که برای هر $p \in P$

$$t(p, \circ) = a(p), \quad t(p, k+۱) = g(p, t(p,k), k)$$

برای هر k به‌طوری‌که $\circ \leq k < m$. اکنون مراحل اثبات قضیهٔ بازگشت را دنبال کنید و در هر مرحله p را نیز لحاظ کنید. راه دیگر اثبات قضیه، به‌دست آوردن آن مستقیماً از قضیهٔ بازگشت است (تمرین ۴.۳ را ببینید). □

اکنون تمام ابزار مورد نیاز برای تعریف جمع اعداد طبیعی و دیگر اعمال حسابی را در اختیار داریم. در بخش بعد به این کار خواهیم پرداخت.

تمرین‌ها

۱.۳ فرض کنید f دنبالهٔ نامتناهی از اعضای A باشد، که در آن A با رابطهٔ $\prec$ مرتب شده است. فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \prec f_{n+۱}$. ثابت کنید که $n < m$ نتیجه می‌دهد $f_n \prec f_m$، برای هر $n, m \in \mathbb{N}$. [راهنمایی: از استقرا روی m همانند تمرین ۱۱.۲ استفاده کنید و قرار دهید $k = n + ۱$.]

۲.۳ فرض کنید $(A, \prec)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد و $p, q \in A$. گوییم q تالی p است، هرگاه $p \prec q$ و هیچ $r \in A$یی وجود نداشته باشد که $p \prec r \prec q$. توجه کنید که هر $p \in A$ می‌تواند حداکثر یک تالی داشته باشد. فرض کنید که $(A, \prec)$ غیرتهی و دارای ویژگی‌های زیر باشد

الف) هر عضو $p \in A$ یک تالی دارد.

ب) هر زیرمجموعهٔ غیرتهی A یک $\prec$ـ‌کوچک‌ترین عضو دارد.

ج) اگر $p \in A$ یک $\prec$ـ‌کوچک‌ترین عضو نباشد، آن‌گاه p تالی برخی اعضای $q \in A$ است.

ثابت کنید $(A, \prec)$ با $(\mathbb{N}, <)$ یکریخت است. نشان دهید اگر یکی از شرایط (الف)ـ‌ـ(ج) حذف شوند، حکم دیگر برقرار نیست.

۳.۳ اثبات مستقیمی از قضیهٔ ۵.۳ با روشی مشابه با اثبات قضیهٔ بازگشت ارائه دهید.

۴.۳ صورت پارامتری قضیهٔ بازگشت (قضیهٔ ٦.۳) را از قضیهٔ بازگشت نتیجه بگیرید.

[راهنمایی: تابع $F : \mathbb{N} \to A^P$ را به‌صورت بازگشتی تعریف کنید:

$$F_\circ = a \in A^P,$$

$$F_{n+\text{۱}} = G(F_n, n),$$

که در آن $G : A^P \times \mathbb{N} \to A^P$ با ضابطهٔ $G(x,n)(p) = g(p, x(p), n)$ برای هر $x \in A^P$ و $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شود. سپس قرار دهید $f(p,n) = F_n(p)$.]

۵.۳ صورت زیر از قضیهٔ بازگشت را ثابت کنید.

فرض کنید g تابعی روی زیرمجموعه‌ای از $A \times \mathbb{N}$ بتوی A باشد و $a \in A$. در این صورت دنبالهٔ یکتای f از اعضای A وجود دارد به‌طوری‌که

الف) $f_\circ = a$.

ب) $f_{n+\text{۱}} = g(f_n, n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ به شرطی که $(n+\text{۱}) \in \operatorname{dom} f$.

ج) f یا یک دنبالهٔ نامتناهی است و یا دنبالهٔ متناهی با طول $k + \text{۱}$ است و $g(f_k, k)$ تعریف نشده است.

[راهنمایی: فرض کنید $\overline{A} = A \cup \{\bar{a}\}$ که در آن $\bar{a} \notin A$. تابع $\overline{g} : \overline{A} \times \mathbb{N} \to \overline{A}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید.

$$\overline{g}(x,n) = \begin{cases} g(x,n) & \text{اگر تعریف شده باشد} \\ \bar{a} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از قضیهٔ بازگشت، دنبالهٔ نامتناهی متناظر $\overline{f}$ را به‌دست آورید. اگر به‌ازای $l \in \mathbb{N}$ ایی، $\overline{f}_l = \bar{a}$. در این صورت $\overline{f} \restriction l$ را برای کوچک‌ترین چنین lهایی در نظر بگیرید.]

۶.۳ ثابت کنید: اگر $X \subseteq \mathbb{N}$، آن‌گاه دنبالهٔ یک‌به‌یک (متناهی یا نامتناهی) مانند f وجود دارد به طوری که $\operatorname{ran} f = X$. [راهنمایی: از تمرین ۵.۳ استفاده کنید.]

۴ حساب اعداد طبیعی

اکنون به عنوان کاربردی از قضیهٔ بازگشت نشان می‌دهیم چگونه جمع بین اعداد طبیعی تعریف می‌شود. همچنین با استقرا خواص پایه‌ای را اثبات می‌کنیم. به همین نحو، می‌توان اعمال حسابی دیگر را تعریف کرد (تمرین‌های این بخش را ببینید).

۱.۴ قضیه. تابع منحصر به‌فردی مانند $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که
الف) برای هر $m \in \mathbb{N}$، $+(m, \circ) = m$.
ب) برای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $+(m, n + ۱) = +(m, n) + ۱$.

برهان. کافی است در صورت پارامتری قضیهٔ بازگشت قرار دهیم $A = P = \mathbb{N}$ و برای هر $p \in \mathbb{N}$، $a(p) = p$ و برای هر $p, x, n \in \mathbb{N}$، $g(p, x, n) = x + ۱$. □

توجه کنید چنانچه در قسمت (ب) قضیهٔ بالا قرار دهیم $n = \circ$، خواهیم داشت $+(m, \circ + ۱) = +(m, \circ) + ۱$. اما بنا به قسمت (الف)، $+(m, \circ) = m$ و بنا به تعریف عدد ۱ داریم $۱ = S(\circ) = ۱ + \circ$. درنتیجه داریم $+(m, ۱) = m + ۱ = S(m)$. پس همان‌طور که قبلاً اشاره کرده بودیم، تالی عدد $m \in \mathbb{N}$ به‌راستی مجموع m و ۱ است. این مطلب کاربرد نمادی را که برای تالی وضع کردیم توجیه می‌کند. در ادامه به‌جای $+(m, n)$ می‌نویسیم $m + n$.

بنابراین می‌توان خواص مُعرّف عمل جمع را به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

۲.۴ $m + \circ = m$.

۳.۴ $m + (n + ۱) = (m + n) + ۱$.

عموماً، ویژگی‌های توابعی که به‌طور بازگشتی تعریف شده‌اند را می‌توان با استقرا اثبات کرد. برای نمونه، قانون تعویض‌پذیری جمع را ثابت می‌کنیم.

۴.۴ قضیه. عمل جمع تعویض‌پذیر است. به عبارت دیگر برای هر $m, n \in \mathbb{N}$،

$$m+n = n+m. \qquad (۵.۴)$$

برهان. گوییم n جابه‌جایی است هرگاه رابطهٔ (۵.۴) برای هر $m \in \mathbb{N}$ برقرار باشد. با استقرا روی n نشان می‌دهیم هر $n \in \mathbb{N}$ جابه‌جایی است.

برای آنکه نشان دهیم ۰ جابه‌جایی است، کافی است نشان دهیم برای هر $m \in \mathbb{N}$، $0 + m = m$ [چرا که بنا به (۲.۴)، $m + 0 = m$]. به‌وضوح، $0 = 0 + 0$. حال، اگر $0 + m = m$، آن‌گاه $0 + (m+1) = (0+m) + 1 = m + 1$. لذا حکم از استقرا (روی m) نتیجه می‌شود.

اکنون فرض کنید n جابه‌جایی است. نشان خواهیم داد $n + 1$ نیز جابه‌جایی است. با استقرا روی m ثابت می‌کنیم

$$m+(n+1) = (n+1)+m \quad m \in \mathbb{N}. \tag{۶.۴}$$

اگر $m = 0$ باشد، قبلاً دیدیم (۶.۴) برقرار است. حال فرض کنید (۶.۴) برای m برقرار باشد، ثابت خواهیم کرد

$$(m+1)+(n+1) = (n+1)+(m+1). \tag{۷.۴}$$

رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
(m+1)+(n+1) &= ((m+1)+n)+1 && [\text{بنا به ۳.۴}]\\
&= (n+(m+1))+1 && [n\ \text{جابه‌جایی است}]\\
&= ((n+m)+1)+1 && [\text{بنا به ۳.۴}]\\
&= ((m+n)+1)+1 && [n\ \text{جابه‌جایی است}]\\
&= (m+(n+1))+1 && [\text{بنا به ۳.۴}]\\
&= ((n+1)+m)+1 && [\text{چون (۶.۴) برای هر}\ m\ \text{برقرار است}]\\
&= (n+1)+(m+1) && [\text{بنا به ۳.۴}].
\end{aligned}$$

□

اثبات جزئیات حساب اعداد طبیعی خارج از بحث ماست. خواننده‌ای که علاقه‌مند به این موضوع است می‌تواند تمرین‌های آخر بخش را انجام دهد. انجام

این کار وی را متقاعد خواهد ساخت که نظریهٔ مجموعه‌ها قابلیت اثبات دقیق همهٔ قواعد معمول حساب را دارد. پس از آن نیز می‌توان مفاهیم بخش‌پذیری و اعداد اول را تعریف کرد و قضایای بنیادی نظریهٔ مقدماتی اعداد، مثل وجود و یکتایی تجزیه اعداد طبیعی برحسب اعداد اول، را اثبات کرد.

با در دست داشتن اعداد طبیعی و حساب آن‌ها، می‌توان ابتدا تعریف دقیقی از مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و بعد اعداد گویای $\mathbb{Q}$ ارائه کرد و بعد از آن قواعد حسابی متناظر را اثبات کرد. این ساختن‌ها در درس جبر کاملاً شناخته شده‌اند و احتمالاً بسیاری از خوانندگان آن‌ها را در آنجا دیده‌اند. برای کامل بودن بحث، ما این مطالب را با برخی جزئیات در بخش ۱ از فصل ۱۰ آورده‌ایم. خواننده هم‌اکنون می‌تواند به آن قسمت مراجعه کند. در ادامه، حساب اعداد صحیح و گویا را اثبات شده فرض می‌گیریم.

این بخش را با تذکری دربارهٔ حساب اصل موضوعی اعداد طبیعی به‌پایان می‌بریم. نظریهٔ حساب اعداد طبیعی را می‌توان به روش اصل موضوعی بنا کرد. در اینجا دستگاه پذیرفته‌شدهٔ اصول موضوع، منسوب به پئانو است. مفاهیم تعریف نشدهٔ حساب پئانو یکی ثابت ۰، عمل یکتایی S و اعمال دوتایی $+$ و $\cdot$ هستند. اصول موضوع پئانو عبارت‌اند از:

پ۱ اگر $S(n) = S(m)$، آن‌گاه $n = m$.

پ۲ $S(n) \neq 0$.

پ۳ $n + 0 = n$.

پ۴ $n + S(m) = S(n + m)$.

پ۵ $n \cdot 0 = 0$.

پ۶ $n \cdot S(m) = (n \cdot m) + n$.

پ۷ اگر $n \neq 0$، آن‌گاه به‌ازای kیی، $n = S(k)$.

پ۸ اصل استقرا. فرض کنید $\mathbf{A}$ خاصیتی حسابی باشد (به‌عبارت‌دیگر، خاصیتی که برحسب $+$، $\cdot$ و ۰ قابل بیان است). اگر ۰ خاصیت $\mathbf{A}$ را داشته باشد و برای هر k، $\mathbf{A}(k)$ ایجاب کند $\mathbf{A}(S(k))$، آن‌گاه هر عدد خاصیت $\mathbf{A}$ را دارد.

دشوار نیست که ثابت کنیم اعداد طبیعی و اعمال حسابی به‌گونه‌ای که ما تعریف کردیم همگی در اصول موضوع پئانو صدق می‌کنند (تمرین ۸.۴). بسیاری از مطالب مورد نیاز این کار را قبلاً ثابت کرده‌ایم.

تمرین‌ها

۱.۴ قانون شرکت‌پذیری جمع را ثابت کنید:

$$(k+m)+n = k+(m+n) \quad \text{برای هر } k,m,n \in \mathbb{N}$$

۲.۴ اگر $m,n,k \in \mathbb{N}$، آن‌گاه $m < n$ اگر و تنها اگر $m+k < n+k$.

۳.۴ اگر $m,n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه $m \leq n$ اگر و تنها اگر $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌طوری‌که $n = m+k$. این k یکتا است، بنابراین می‌توانیم آن را با $n-m$ نشان دهیم و آن را تفاضل n و m بنامیم. بدین ترتیب، تفریق دو عدد طبیعی تعریف می‌شود.

۴.۴ تابع یکتای $\cdot$ (ضرب) از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$m \cdot 0 = 0 \quad \text{برای هر } m \in \mathbb{N},$$

$$m \cdot (n+1) = m \cdot n + m \quad \text{برای هر } m,n \in \mathbb{N}$$

۵.۴ ثابت کنید که ضرب تعویض‌پذیر، شرکت‌پذیر، و توزیع‌پذیر نسبت به جمع است.

۶.۴ اگر $m,n,k \in \mathbb{N}$ و $k > 0$، آن‌گاه $m < n$ اگر و تنها اگر $m \cdot k < n \cdot k$.

۷.۴ توان اعداد طبیعی را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$m^0 = 1 \quad \text{برای هر } m \in \mathbb{N} \quad (\text{به‌ویژه، } 0^0 = 1),$$

$$m^{n+1} = m^n \cdot m \quad \text{برای هر } m,n \in \mathbb{N} \quad (\text{به‌ویژه، } 0^n = 0 \text{ برای } n > 0).$$

قوانین معمول توان‌ها را ثابت کنید.

۸.۴ اصول موضوع پئانو را بیازمایید. نتایج لازم را می‌توانید در متن و یا تمرین‌ها بیابید.

۹.۴ برای هر دنبالهٔ متناهی $\langle k_i \mid 0 \leq i < n\rangle$ از اعداد طبیعی، $\sum \langle k_i \mid 0 \leq i < n\rangle$ (یا با نمادهای رایج‌تر آن $\sum_{0\leq i<n} k_i$ یا $\sum_{i=0}^{n-1} k_i$) را به‌گونه‌ای تعریف کنید که

$$\sum \langle\rangle = 0,$$
$$\sum \langle k_0\rangle = k_0,$$
$$\sum \langle k_0, \ldots, k_n\rangle = \sum \langle k_0, \ldots, k_{n-1}\rangle + k_n \quad n \geq 1.$$

۵ عمل‌ها و ساختارها

توابع +، ⋅ و مشابه آن‌ها را معمولاً عمل می‌نامند. در این بخش قصد داریم مفهوم کلی عمل را تعریف و ویژگی‌های آن را بررسی کنیم.

هر یک از عمل‌هایی که تا کنون دیدیم به هر زوج از اشیا (اعداد، مجموعه‌ها) شیء سومی از همان نوع (مجموع، تفاضل، اجتماع و غیره) نسبت می‌دهد. در اینجا ترتیب اشیا هم ممکن است تفاوت ایجاد کند. مثلاً $۲ - ۷$ و $۷ - ۲$ دو شیء متفاوت‌اند. با این ملاحظات تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

۱.۵ تعریف. عمل دوتایی روی S عبارت است از تابعی که زیرمجموعه‌ای از S^2 را به S می‌نگارد.

عمل‌ها را اغلب با علائم غیرحرفی مانند +، ×، *، Δ، و غیره نشان می‌دهند. در این صورت، مقدار (یا نتیجهٔ) عمل * روی (x,y) را به‌جای $*(x,y)$ با $x*y$ نمایش می‌دهند.

عمل‌هایی وجود دارند که به‌جای اثر روی یک زوج روی تنها یک شیء اثر می‌کنند، مانند عمل ریشه دوم و مشتق. چند تعریف عرضه می‌کنیم.

۲.۵ تعریف. منظور از عمل یکتایی روی S عبارت است از تابعی از زیرمجموعه‌ای از S بتوی S. عمل سه‌تایی روی S عبارت است از تابعی روی زیرمجموعه‌ای از S^3 به S.

۳.۵ تعریف. فرض کنید f یک عمل دوتایی روی S باشد و $A \subseteq S$. گوییم A تحت عمل f بسته است هرگاه برای هر $x, y \in A$ که به‌ازای آن‌ها $f(x, y)$ تعریف شده باشد، داشته باشیم $f(x, y) \in A$.

تعریف‌های مشابهی برای عمل‌های یکتایی و سه‌تایی می‌توان بیان کرد.

۴.۵ مثال.

الف) فرض کنید $+$ عمل جمع روی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. عمل $+$ برای هر عدد حقیقی a و b تعریف می‌شود. مجموعهٔ اعداد حقیقی و همین‌طور اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به عمل $+$ بسته‌اند. مجموعهٔ اعداد زوج تحت $+$ بسته است. لیکن، مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد این چنین نیست.

ب) فرض کنید $\div$ عمل تقسیم روی مجموعه اعداد حقیقی باشد. این عمل برای (a, b) چنانچه $b = \circ$، تعریف نمی‌شود. مجموعهٔ اعداد گویا تحت عمل $\div$ بسته است، اما مجموعهٔ اعداد صحیح نه.

ج) فرض کنید S مجموعه باشد و عمل‌های $\cup_S$ و $\cap_S$ را روی S به‌صورت زیر تعریف کنید.

(۱) چنانچه $x, y \in S$ و $x \cup y \in S$، تعریف کنید $x \cup_S y = x \cup y$.

(۲) چنانچه $x, y \in S$ و $x \cap y \in S$، تعریف کنید $x \cap_S y = x \cap y$.

حال اگر A مجموعه باشد و بگیریم $S = \mathcal{P}(A)$، در این صورت $\cup_S$ و $\cap_S$ برای هر زوج $(x, y) \in S^{\text{۲}}$ تعریف شده است.

در هر شاخه از ریاضیات معمولاً توجه ما معطوف به مجموعه‌های اشیا و روابط فی‌مابین و عمل‌های روی آن‌هاست. برای نمونه، در نظریهٔ اعداد یا آنالیز ما به مطالعهٔ مجموعهٔ اعداد (حقیقی یا گویا)، اعمال جمع و ضرب، رابطهٔ کوچک‌تری، و غیره می‌پردازیم. در هندسه نیز ما به مطالعهٔ مجموعهٔ نقاط و خطوط، روابط بینیت و تلاقی و عمل اشتراک، و غیره می‌پردازیم. برای توصیف این حالت‌ها در حالت مجرد، مفهوم ساختار را معرفی می‌کنیم.

یک ساختار در حالت کلی از مجموعهٔ A و چند رابطه و عمل روی A تشکیل می‌شود. برای نمونه، ما ساختارهایی را که دو رابطهٔ دوتایی و دو عمل، مثلاً

یک عمل یکتایی و یک عمل دوتایی دارند، در نظر می‌گیریم. در واقع، فرض کنید A یک مجموعه، $R_۱$ و $R_۲$ روابط دوتایی روی A و f عمل یکتایی، و g یک عمل دوتایی روی A باشند. ساختار مذکور را با پنج‌تایی $(A, R_۱, R_۲, f, g)$ نشان می‌دهیم.

۵.۵ مثال.

الف) هر مجموعهٔ مرتب یک ساختار با یک عمل دوتایی است.

ب) $(A, \cup_A, \cap_A, \subseteq_A)$ یک ساختار با دو عمل دوتایی و یک عمل یکتایی است.

ج) فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد: در این صورت $(\mathbb{R}, +, -, \times, \div)$ یک ساختار با چهار عمل دوتایی است.

اکنون به تعریف کلی ساختار می‌پردازیم. روابط یکتایی (۱تایی)، دوتایی (۲تایی) و سه‌تایی (۳تایی) را در فصل ۲ تعریف کردیم. اما حرفی از روابط nتایی، برای n دلخواه، به میان نیاوردیم، زیرا در آنجا مفهوم عدد طبیعی دلخواه را در اختیار نداشتیم. لیکن این مشکل هم‌اکنون دیگر رفع شده است و در فصل حاضر تعریف nتایی، روابط و اعمال nتایی، و حاصل‌ضرب nتایی دکارتی را برای هر عدد طبیعی n ارائه خواهیم کرد.

کار را با تعریف یک nتایی مرتب شروع می‌کنیم. به یاد آورید که در بخش ۱ از فصل ۲ زوج مرتب $(a_۰, a_۱)$ را برابر مجموعه‌ای تعریف کردیم که دو مختص خود را به‌طور یکتایی مشخص می‌کند، یعنی

$$(a_۰, a_۱) = (b_۰, b_۱) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a_۰ = b_۰ \quad \text{و} \quad a_۱ = b_۱.$$

گفتیم $a_۰$ مختص اول و $a_۲$ مختص دوم $(a_۰, a_۱)$ است. از همین رو یک nتایی مانند $(a_۰, a_۱, \dots, a_{n-۱})$ نیز باید مجموعه‌ای باشد که n مختص خود، یعنی $a_۰$، $a_۱$، ...، $a_{n-۱}$، را به‌طور یکتایی مشخص کند. به‌عبارت‌دیگر، باید داشته باشیم

(*)

$$(a_۰, \dots, a_{n-۱}) = (b_۰, \dots, b_{n-۱}) \text{ اگر و تنها اگر } a_i = b_i \text{ برای } i = ۰, \dots, n-۱.$$

اما، قبلاً مفهومی را که در شرط $(*)$ صدق می‌کرد معرفی کردیم. منظور ما همان دنباله به طول n، یعنی $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ است. در این حالت، عبارت

$\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle = \langle b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle$ اگر و تنها اگر برای $i = 0, \ldots, n-1$، $a_i = b_i$

فقط فرمول بندی مجددی از تساوی توابع است که در لم ۲.۳ در فصل ۲ گفته شد.

از این‌رو، nتایی را برابر دنباله‌ای به طول n تعریف می‌کنیم. برای هر i، $0 \leq i < n$، a_i را $(i+1)$امین مختص $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ می‌نامیم. لذا، a_0 اولین مختص، a_1 دومین مختص، ... و a_{n-1} برابر n امین مختص است. [درست‌تر آن است که آن‌ها را صفرامین، اولین، ...، $(n-1)$ امین مختص بنامیم. اما در صفحهٔ مختصات و دیگر جاها اصطلاح اولین مختص و دومین مختص نقطه مرسوم‌تر است.]

توجه کنیم که یگانه 0تایی همان دنبالهٔ تهی $\varnothing = \langle\rangle$ است که هیچ مختصی هم ندارد. ۱تایی‌ها دنباله‌هایی به‌صورت $\langle a_0\rangle$ هستند [یعنی، مجموعه‌هایی به‌صورت $\{(0, a_0)\}$]. معمولاً، یکی گرفتن ۱تایی $\langle a_0\rangle$ با عضو a_0 مشکلی پیش نمی‌آورد.

چنانچه $\langle A_i \mid 0 \leq i < n\rangle$ دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها باشد، حاصل‌ضرب nتایی دکارتی $\prod_{0\leq i<n} A_i$، که در بخش ۳ از فصل ۲ تعریف شد، دقیقاً همان مجموعهٔ همهٔ nتایی‌هایی به‌صورت $a = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ است که در آن $a_0 \in A_0$، $a_1 \in A_1$، ... و $a_{n-1} \in A_{n-1}$. اگر برای هر i، $0 \leq i < 0$، $A_i = A$، در آن صورت $\prod_{0\leq i<n} A_i = A^n$ همان مجموعهٔ همهٔ nتایی‌هایی است که همهٔ مختص‌هایش به A متعلق‌اند.

توجه می‌کنیم که $A^0 = \{\langle\rangle\}$ و A^1 را نیز می‌توان با A یکی گرفت. منظور از رابطهٔ nتایی R در A عبارت است از زیرمجموعه‌ای از A^n. در این حالت به‌جای $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle \in R$ می‌نویسیم $R(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. به همین نحو، منظور از عمل nتایی مانند F روی A عبارت است از یک تابع روی زیرمجموعه‌ای از A^n بتوی A. به‌جای $F(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle)$ نیز می‌نویسیم $F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

اکنون نمادهایی را که برای دوتایی‌ها و سه‌تایی‌ها معرفی کرده بودیم تعمیم

می‌دهیم. چنانچه، $\mathbf{P}(x_\circ, x_\backslash, \ldots, x_{n-1})$ خاصیتی با پارامترهای $x_\circ$، x_1، ...، x_{n-1} باشد، مجموعهٔ

$$\Big\{a \in \prod_{\circ \leq i < n} A_i \mid \text{ برقرار است } \mathbf{P}(a_\circ, \ldots, a_{n-1}) \text{ و } a = \langle a_\circ, \ldots, a_{n-1}\rangle$$

$$\text{به‌ازای } a_\circ، a_1، \ldots، a_{n-1}\text{هایی،}\Big\}$$

را با

$$\{\langle a_\circ, \ldots, a_{n-1}\rangle \mid a_\circ \in A_\circ, \ldots, a_{n-1} \in A_{n-1},\ \mathbf{P}(a_\circ, \ldots, a_{n-1})\}$$

نشان می‌دهیم.

توجه کنید تمایزی بین روابط ۱تایی و زیرمجموعه‌های A قائل نمی‌شویم. همچنین می‌توان عمل‌های ۱تایی را با توابعی که از زیرمجموعه‌ای از A بتوی A تعریف می‌شوند، یکی گرفت. روابط ۰تایی $\varnothing$ و $\{\langle\rangle\}$ چندان کاربردی ندارند، اما عمل‌های ۰تایی ناتهی بسیار کاربرد دارند. این عمل‌ها به‌صورت $\{(\langle\rangle, a)\}$ هستند که در آن $a \in A$. آن‌ها را ثابت‌ها می‌نامیم و در ادامه آن‌ها را با اعضای A یکی می‌گیریم [به عبارت دیگر، بین a و $\{(\langle\rangle, a)\}$ تمایزی قائل نمی‌شویم].

اطلاعات بیشتری دراین‌باره و مفاهیم مربوط در آخر این فصل در قسمت تمرین‌ها ارائه شده است.

در این رویکرد ما مشکلی وجود دارد و آن اینکه زوج مرتب تعریف‌شده در فصل ۲، یعنی $(a_\circ, a_1) = \{\{a_\circ\}, \{a_\circ, a_1\}\}$، در حالت کلی با مجموعهٔ ۲تایی $\langle a_\circ, a_1\rangle = \{(\circ, a_\circ), (1, a_1)\}$، که اکنون تعریف کردیم، تفاوت دارد. نتیجتاً، ما دو تعریف مثلاً برای حاصل‌ضرب دکارتی $A_\circ \times A_1$، $\prod_{\circ \leq i < 2} A_i$، دو تعریف برای روابط و اعمال دوتایی، و غیره خواهیم داشت. مع‌هذا، تناظر یک‌به‌یک طبیعی بین زوج‌های مرتب و ۲تایی‌ها وجود دارد که مختص‌های اول و دوم را ثابت نگه می‌دارد. به‌عبارت دقیق‌تر، اگر تعریف کنیم $\delta((a_\circ, a_1)) = \langle a_\circ, a_1\rangle$، در آن صورت δ نگاشتی یک‌به‌یک روی $A_\circ \times A_1$ بروی $\prod_{\circ \leq i < 2} A_i$ است و x مختص اول (دوم) $(a_\circ, a_1)$ است اگر و تنها اگر x مختص اول (دوم) $\langle a_\circ, a_1\rangle$ باشد. اغلب در کاربردها، تفاوتی ندارد که کدام تعریف را به کار می‌بریم. از این‌رو، ما در ادامه

تمایزی بین زوج‌های مرتب و ۲تایی‌ها قائل نمی‌شویم. تذکرات مشابهی دربارهٔ رابطهٔ بین سه‌تایی‌ها و ۳تایی‌ها و غیره می‌توان بیان کرد. به‌عبارت بهتر، برای هر عدد طبیعی n می‌توان nتایی را مثل فصل ۲ تعریف کرد. ایدهٔ کار تعریفی بازگشت به‌صورت زیر است

$$(a_0) = a_0,$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n \geq 1$ $\quad (a_0, a_1, \ldots, a_n) = ((a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$.

لیکن دقیق ساختن این ایده مشکلات فنی دارد. تا اینجا ما قضیهٔ بازگشت در آن حد کلی که چنین تعریف‌هایی را پوشش دهد در دست نداریم (با این حال، تمرین ۲.۴ در فصل ٦ را ببینید). ما نیازی به تعریف جایگزین برای nتایی‌ها نداریم، لیکن خوانندهٔ علاقه‌مند به این مطلب را به تمرین ۱۷.۵ ارجاع می‌دهیم. نمادهای $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ و $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ را به‌جای یکدیگر به کار خواهیم برد.

این فصل را با تعمیم مفهوم ساختار ادامه می‌دهیم. یک نوع τ عبارت است از زوج مرتب $(\langle r_0, \ldots, r_{m-1} \rangle, \langle f_0, \ldots, f_{n-1} \rangle)$ متشکل از دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی که در آن برای هر $i \leq m-1$ و $0 \leq i$ داریم $r_i > 0$. یک ساختار از نوع τ عبارت است از سه‌تایی

$$\mathfrak{A} = \left(A, \langle R_0, \ldots, R_{m-1} \rangle, \langle F_0, \ldots, F_{n-1} \rangle\right),$$

که در آن برای هر $i \leq m-1$، R_i رابطه‌ای r_iتایی روی A و برای هر $j \leq n-1$، F_j عملی f_jتایی روی A است. به‌علاوه، چنانچه $f_j = 0$ شرط می‌کنیم $F_j \neq \varnothing$. توجه کنید که چنانچه $f_j = 0$، در این صورت F_j عملی ۰تایی روی A است. برای نمونه، $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \langle < \rangle, \langle 0, +, \cdot \rangle)$ ساختاری از نوع $(\langle 2 \rangle, \langle 0, 2, 2 \rangle)$ است که یک عمل دوتایی، یک ثابت، و دو عمل دوتایی دارد. همین‌طور $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \langle\rangle, \langle 0, 1, +, -, \times, \div \rangle)$ ساختاری از نوع $(\langle\rangle, \langle 0, 0, 2, 2, 2, 2 \rangle)$ است و الی‌آخر. غالباً، ساختارها را با یک $(1 + m + n)$تایی، مثل $(\mathbb{N}, <, 0, +, \cdot)$ نشان می‌دهیم به‌شرطی‌که معلوم باشد چه نمادهایی رابطه و چه نمادهایی عمل هستند. مجموعهٔ A در تعریف ساختار از نوع τ را عالم ساختار $\mathfrak{A}$ می‌نامیم.

حال مفهومی را که در نظریهٔ ساختارها از منتهای اهمیت برخوردار است معرفی می‌کنیم. (در حالت خاصِ مجموعه‌های مرتب، تعریف زیر را با تعریف ۱۷.۵ در فصل ۲ مقایسه کنید.)

۶.۵ تعریف. منظور از یکریختی بین دو ساختار $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{A}' = (A', \langle R'_0, \ldots, R'_{m-1}\rangle, \langle F'_0, \ldots, F'_{n-1}\rangle)$ که هر دو از نوع τ هستند، عبارت است از نگاشت یک‌به‌یکی مانند h روی A بتوی A' به‌طوری‌که

الف) $R_i(a_0 \ldots, a_{r_i-1})$ اگر و تنها اگر $R'_i(h(a_0), \ldots, h(a_{r_i-1}))$ برای هر $a_0, \ldots, a_{r_i-1} \in A$ و $i \leq m-1$.

ب) $h(F_j(a_0, \ldots, a_{f_j-1})) = F'_j(h(a_0), \ldots, h(a_{f_j-1}))$ برای هر $a_0, \ldots, a_{f_j-1}$ متعلق به A و $j \leq n-1$ به شرطی که طرفین تساوی تعریف شده باشند.

برای نمونه، فرض کنید (A, R_1, R_2, f, g) و (A', R'_1, R'_2, f', g') دو ساختار با دو رابطهٔ دوتایی و یک عمل یکتایی و یک عمل دوتایی باشند. در این صورت، h یک یکریختی از (A, R_1, R_2, f, g) و (A', R'_1, R'_2, f', g') است به شرطی که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) h تابعی یک‌به‌یک روی A بروی A' است.

ب) برای هر $a, b \in A$، aR_1b اگر و تنها اگر $h(a)R'_1h(b)$.

ج) برای هر $a, b \in A$، aR_2b اگر و تنها اگر $h(a)R'_2h(b)$.

د) برای هر $a \in A$، $f(a)$ تعریف شده است اگر و تنها اگر $f'(h(a))$ تعریف شده باشد و $h(f(a)) = f'(h(a))$.

ه) برای هر $a, b \in A$، $g(a, b)$ تعریف شده است اگر و تنها اگر $g'(h(a), h(b))$ تعریف شده باشد و $h(g(a, b)) = g'(h(a), h(b))$.

دو ساختار را یکریخت گوییم اگر یک یکریختی بین آن‌ها موجود باشد.

۷.۵ مثال. فرض کنید A مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\leq_A$ ترتیب معمول اعداد حقیقی، و $+$ عمل جمع روی A باشد. فرض کنید A' مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، $\leq_{A'}$ ترتیب معمولی اعداد حقیقی مثبت، و $\times$ عمل ضرب روی A' باشد. نشان می‌دهیم

ساختارهای $(A, \leq_A, +)$ و $(A', \leq_{A'}, \times)$ یکریخت هستند. برای این منظور، فرض کنید h تابع با تعریف

$$h(x) = e^x \quad x \in A \text{ برای هر}$$

باشد. ثابت می‌کنیم h یکریختی از $(A, \leq_A, +)$ و $(A', \leq_{A'}, \times)$ است. برای این کار باید ثابت کنیم:

الف) h تابعی یک‌به‌یک روی A بروی A' است. به‌وضوح h تابع است و $\operatorname{dom} h = A$ و $\operatorname{ran} h = A'$. اگر $x_۱ \neq x_۲$، در این صورت $e^{x_۱} \neq e^{x_۲}$. لذا، h یک‌به‌یک است. (در اینجا برخی اطلاعات را از حسابان مقدماتی دانسته فرض می‌کنیم.)

ب) فرض کنید $x_۱, x_۲ \in A$. در این صورت، $x_۱ \leq_A x_۲$ اگر و تنها اگر $h(x_۱) \leq_{A'} h(x_۲)$. دلیل این قسمت این است که تابع e^x صعودی است، لذا $x_۱ \leq x_۲$ اگر و تنها اگر $e^{x_۱} \leq e^{x_۲}$.

ج) فرض کنید $x_۱, x_۲ \in A$. در این صورت $x_۱ + x_۲$ تعریف شده است اگر و تنها اگر $h(x_۱) \times h(x_۲)$ تعریف شده باشد و $h(x_۱ + x_۲) = h(x_۱) \times h(x_۲)$.
برای این قسمت، نخست توجه کنید هم $+$ روی A و هم $\times$ روی A' هر دو برای همهٔ زوج‌های مرتب تعریف شده‌اند. اکنون داریم $h(x_۱ + x_۲) = e^{x_۱ + x_۲} = e^{x_۱} \times e^{x_۲} = h(x_۱) \times h(x_۲)$.

اهمیت برقراری یک یکریختی بین دو ساختار در این واقعیت نهفته است که روی دو ساختار یکریخت خواص ناشی از روابط و اعمال با یکدیگر کاملاً یکسانند. از این‌رو، اگر خواص اعمال و روابط روی یک ساختار مورد توجه باشد دیگر فرقی نمی‌کند که کدام‌یک از دو ساختار یکریخت را از این جهت بررسی کنیم.

۸.۵ مثال. فرض کنید (A, R) و (B, S) یکریخت باشند (R و S رابطه‌های دوتایی هستند). در این صورت R ترتیبی از A است اگر و تنها اگر S ترتیبی از B باشد. A نسبت به R کوچک‌ترین عضو دارد اگر و تنها اگر B نسبت به S کوچک‌ترین عضو داشته باشد.

برهان. فرض کنید h یک یکریختی از (A, R) و (B, S) باشد. فرض کنید R ترتیبی روی A باشد. ثابت می‌کنیم S ترتیبی از B است. برای این کار فرض کنید $b_1, b_2, b_3 \in B$ و $b_1 S b_2$ و $b_2 S b_3$. چون h بروی B تعریف می‌شود، پس $a_1, a_2, a_3 \in A$ موجودند به طوری که $b_1 = h(a_1)$، $b_2 = h(a_2)$، و $b_3 = h(a_3)$. چون $a_1 R a_2$ برقرار است اگر و تنها اگر $h(a_1) S h(a_2)$ برقرار باشد، یعنی اگر و تنها اگر $b_1 S b_2$ برقرار باشد، نتیجه می‌گیریم $a_1 R a_2$. به همین نحو، $a_2 R a_3$. اما R متعدی است و لذا $a_1 R a_3$. از این‌رو، $h(a_1) S h(a_3)$، یعنی $b_1 S b_3$. اثبات خاصیت بازتابی و تقارن را به عهده خواننده می‌گذاریم. به‌طریق مشابه، می‌توان ثابت کرد اگر S ترتیبی از B باشد در این صورت R نیز ترتیبی از A است. حال فرض کنید A کوچک‌ترین عضو داشته باشد. ادعا می‌کنیم که B نیز کوچک‌ترین عضو دارد. فرض کنید a کوچک‌ترین عضو A باشد، یعنی برای هر $x \in A$، aRx. در این صورت، همان‌طورکه اثبات زیر نشان می‌دهد $h(a)$ کوچک‌ترین عضو B است. چنانچه $y \in B$، در این صورت به‌ازای $x \in A$یی، $y = h(x)$ (چون h بروی B تعریف شده است). برای این x خاص داریم aRx. متناظر با این رابطه داریم $h(a) S h(x)$. از اینجا درمی‌یابیم که برای هر $y \in B$، $h(a) S y$. بنابراین $h(a)$ کوچک‌ترین عضو B است. □

هر یکریختی بین ساختار $\mathfrak{A}$ و خودش را یک خودریختی از $\mathfrak{A}$ می‌خوانند. نگاشت همانی روی عالم $\mathfrak{A}$ به‌وضوح یک خودریختی از $\mathfrak{A}$ است. به‌آسانی می‌توانید اثبات کنید که ساختار $(\mathbb{N}, <)$ دارای هیچ خودریختی دیگری نیست. از طرف دیگر، ساختار $(\mathbb{Z}, <)$، که در اینجا $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح است، خودریختی غیربدیهی ندارد. در واقع خودریختی‌های آن دقیقاً توابع به‌صورت f_h هستند که در آن $f_h(x) = h + x$ و $h \in \mathbb{Z}$. در تمرین ۱۲.۵ برخی دیگر از خواص خودریختی‌ها را فهرست کرده‌ایم.

ساختار $\mathfrak{A} = (A, \langle R_0, \ldots, R_{m-1} \rangle, \langle F_0, \ldots, F_{n-1} \rangle)$ را، که تا آخر بحث ثابت است، در نظر بگیرید. زیرمجموعهٔ $B \subseteq A$ را بسته می‌نامیم اگر حاصل هر عمل روی اعضای B عضوی از B باشد، به‌عبارت‌دیگر هرگاه برای هر $j \leq n - 1$

و هر $B \ni a_\circ, \ldots, a_{f_i-1}$، $F_j(a_\circ, \ldots, a_{f_i-1}) \in B$، مشروط بر اینکه عبارت آخر تعریف شده باشد. به‌ویژه، همه ثابت‌های $\mathfrak{A}$ به B متعلق‌اند. فرض کنید $C \subseteq A$. بستار C که با $\overline{C}$ نشان داده می‌شود عبارت است از کوچک‌ترین مجموعه‌ای که شامل همهٔ اعضای C است، یعنی

$$\overline{C} = \bigcap \{B \subseteq A \mid \text{بسته است } B \text{ و } C \subseteq B\}.$$

توجه کنید که A مجموعه‌ای بسته شامل C است و لذا دستگاهی که اشتراک آن $\overline{C}$ را تعریف می‌کند ناتهی است. بدیهی است که $\overline{C}$ بسته است و بنا به تعریف، $\overline{C}$ در واقع کوچک‌ترین مجموعهٔ بسته شامل C است.

۹.۵ مثال.

الف) هر مجموعهٔ $B \subseteq A$ بسته است به‌شرطی‌که ساختار $\mathfrak{A}$ هیچ عملی نداشته باشد.

ب) فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ همه اعداد حقیقی باشد و $C = \{\circ\}$. مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ بستار مجموعهٔ C در ساختار $(\mathbb{R}, f)$ است، که در اینجا f تابع تالی است که به‌صورت

$$f(x) = x + 1 \quad \text{برای هر عدد حقیقی } x$$

تعریف می‌شود.

ج) فرض کنید $C = \{\circ, 1\}$. مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ بستار C در ساختار $(\mathbb{R}, +, -)$ یا در $(\mathbb{R}, +, -, \times)$ است.

د) مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$ بستار $\varnothing$ در ساختار $(\mathbb{R}, \circ, |, +, -, \times, \div)$ است.

مفهوم بستار در جبر، منطق، و دیگر حوزه‌های ریاضیات دارای اهمیت است. قضیهٔ بعدی چگونگی ساخت بستار یک مجموعه «از پایین» را نشان می‌دهد.

۱۰.۵ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A, \langle R_\circ, \ldots, R_{m-1}\rangle, \langle F_\circ, \ldots, F_{n-1}\rangle)$ یک ساختار باشد و $C \subseteq A$. اگر دنبالهٔ $\langle c_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ به‌صورت بازگشتی با دستور

$$C_\circ = C,$$

$$C_{i+1} = C_i \cup F_\circ[C_i^{f_\circ}] \cup \ldots \cup F_{n-1}[C_i^{f_{n-1}}]$$

تعریف شود، آن‌گاه $\overline{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$.

در اینجا، $\bigcup_{0\leq i<n} A_i$ نماد اختصاری برای $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ است. ملاحظه کنید برای هر i، $C_i \subseteq C_{i+1}$ و لذا دنبالهٔ $\langle C_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ غیرنزولی است (تمرین ۱.۳ را ببینید).

برهان. قرار دهید $\widetilde{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$. باید ثابت کنیم $\overline{C} \subseteq \widetilde{C}$. رابطهٔ اخیر هم ثابت خواهد شد اگر نشان دهیم $\widetilde{C}$ بسته است. دلیل این امر آن است که $C = C_0 \subseteq \widetilde{C}$. پس فرض کنید $j < n$ و $a_0, \ldots, a_{f_j-1} \in \widetilde{C}$. از تعریف اجتماع نتیجه می‌گیریم a_r [برای هر $0 \leq r \leq f_j - 1$] به C_iیی متعلق است. فرض کنید i_r کوچک‌ترین $i \in \mathbb{N}$یی باشد به‌طوری‌که $a_r \in C_i$.

برد دنبالهٔ متناهی $\langle i_r \mid 0 \leq r \leq f_j - 1\rangle$ متشکل از اعداد طبیعی و شامل کوچک‌ترین عضو مانند $\bar{\imath}$ است (این مطلب، به‌راحتی با استقرا ثابت می‌شود، تمرین ۱۳.۵ را ببینید). چون $\langle C_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ غیرنزولی است، برای هر $r \geq 0$ و $r \leq f_j - 1$ داریم $a_r \in C_{i_r} \subseteq C_{\bar{\imath}}$. پس نتیجه می‌گیریم، چنانچه $F_j(a_0, \ldots, a_{f_i-1})$ تعریف شده باشد به $F_j[C_{\bar{\imath}}^{f_j}] \subseteq C_{\bar{\imath}+1} \subseteq \widetilde{C}$ متعلق است و لذا $\widetilde{C}$ بسته است.

آنچه برای اثبات باقی می‌ماند اثبات جهت عکس شمول یعنی $\widetilde{C} \subseteq \overline{C}$ است. به‌وضوح، $C_0 = C \subseteq \overline{C}$. اگر $C_i \subseteq \overline{C}$، در این صورت برای هر $j \leq n - 1$ داریم $F_j[C_i^{f_j}] \subseteq \overline{C}$، به این دلیل که $\overline{C}$ بسته است. بنابراین $C_{i+1} \subseteq \overline{C}$. از اصل استقرا نتیجه می‌گیریم که $C_i \subseteq \overline{C}$ برای هر $i \in \mathbb{N}$ و نهایتاً $\widetilde{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \subseteq \overline{C}$، و این همان است که می‌خواستیم اثبات کنیم. $\square$

این بخش را با قضیه‌ای به پایان می‌بریم که اغلب برای اثبات اینکه اعضای یک بستار فلان خاصیت P را دارند مفید است. این قضیه را می‌توان نوعی تعمیم اصل استقرا دانست، چرا که حالت خاص آن برای ساختار $\langle \mathbb{N}, S\rangle$ که (S عمل تالی است) و $C = \{0\}$، اصل استقرا را نتیجه می‌دهد.

۱۱.۵ قضیه. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی باشد. فرض کنید که

الف) برای هر $a \in C$، $\mathbf{P}(a)$.

ب) برای هر $j \leq n-1$، چنانچه $\mathbf{P}(a_\circ)$، ...، $\mathbf{P}(a_{f_i-1})$ برقرار باشند و $F_j(a_\circ, \ldots, a_{f_i-1})$ تعریف شده باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}\left(F_j(a_\circ, \ldots, a_{f_j-1})\right)$ برقرار است. در این صورت برای هر $x \in \overline{C}$، $\mathbf{P}(x)$ برقرار است.

برهان. از مفروضات (الف) و (ب) مسلم است که مجموعهٔ $B = \{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$ بسته است و $C \subseteq B$. □

تمرین‌ها

۱.۵ کدام یک از مجموعه‌های زیر تحت اعمال جمع، تفاضل، ضرب، و تقسیم اعداد حقیقی بسته‌اند؟

الف) مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت.

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح.

ج) مجموعهٔ اعداد گویا.

د) مجموعهٔ اعداد گویای منفی.

ه) مجموعهٔ تهی.

۲.۵ فرض کنید $*$ عملی دوتایی روی A باشد.

الف) $*$ تعویض‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه، برای هر $a, b \in A$، به شرطی که $a * b$ تعریف شود، آن‌گاه $b * a$ نیز تعریف شود و $a * b = b * a$.

ب) $*$ شرکت‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a, b, c \in A$، $(a * b) * c = a * (b * c)$ به‌شرطی‌که عبارت یک طرف علامت تساوی تعریف شود (در این صورت عبارت طرف دیگر نیز باید تعریف شده باشد).

کدام یک از اعمال بیان شده در این بخش تعویض‌پذیر یا شرکت‌پذیر هستند؟

۳.۵ فرض کنید $*$ و Δ عمل‌هایی در A باشند. می‌گوییم $*$ نسبت به Δ توزیع‌پذیر است هرگاه $a * (b \Delta c) = (a * b) \Delta (a * c)$ برای هر $a, b, c \in A$ که برای آن‌ها عبارت یک طرف (و در نتیجه طرف دیگر نیز) تعریف شده باشد. برای مثال،

ضرب اعداد حقیقی نسبت به جمع توزیع‌پذیر است، اما جمع نسبت به ضرب توزیع‌پذیر نیست.

۴.۵ فرض کنید $A \neq \varnothing$ و $B = \mathcal{P}(A)$. نشان دهید $(B, \cup_B, \cap_B)$ و $(B, \cap_B, \cup_B)$ دو ساختار یکریخت هستند. [راهنمایی: قرار دهید $h(x) = B - x$ و توجه کنید که $\cup_B$ در ساختار اول متناظر با $\cap_B$ در ساختار دوم است و بالعکس.]

۵.۵ برای معنای نمادها به مثال ۷.۵ مراجعه کنید.

الف) عدد حقیقی مانند $a \in A$ وجود دارد به طوری که $a + a = a$ (مثلاً $a = \circ$). با استفاده از این مطلب، ثابت کنید که $a' \in A'$ وجود دارد به‌طوری‌که $a' \times a' = a'$. a' را بیابید.

ب) برای هر $a \in A$، عدد $b \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که $a + b = \circ$. نشان دهید که برای هر $a' \in A'$ یک $b' \in A'$ وجود دارد به‌طوری‌که $a' \times b' = ۱$. b' را بیابید.

۶.۵ فرض کنید $\mathbb{Z}^+$ و $\mathbb{Z}^-$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد صحیح مثبت و منفی باشند. نشان دهید که $(\mathbb{Z}^+, <, +)$ با $(\mathbb{Z}^-, >, +)$ یکریخت است (که در اینجا $<$ ترتیب معمولی اعداد صحیح است).

۷.۵ فرض کنید R مجموعه‌ای باشد که اعضای آن همگی nتایی هستند. ثابت کنید R رابطه‌ای nتایی در مجموعه‌ای مانند A است.

۸.۵ برای هر عمل nتایی مانند F روی A، رابطهٔ $(n + ۱)$تایی یکتایی مانند R در A وجود دارد به طوری که $F(a_\circ, \ldots, a_{n-۱}) = a_n$ اگر و فقط اگر $R(a_\circ, \ldots, a_{n-۱}, a_n)$ برقرار باشد.

۹.۵ قرار دهید $B = \prod_{\circ \leq i < n} A_i$. تصویر B بروی مجموعهٔ $(i + ۱)$امین مختصش عبارت است از، تابع $\pi_i : B \to A_i$ که به‌صورت $\pi_i(a) = a_i$ تعریف می‌شود. ثابت کنید که π_i بروی A_i است و $a = \langle \pi_\circ(a), \ldots, \pi_{n-۱}(a) \rangle$. به طور کلی‌تر،

الف) برای هر $f : C \to B$، فرض کنید $f_i = \pi_i \circ f$ برای $\circ \leq i < n$. در این صورت $f_i : C \to A_i$ و $f(c) = \langle f_\circ(c), \ldots, f_{n-۱}(c) \rangle$.

ب) اگر $f_i : C \to A_i$ برای $0 \le i < n$ داده شده باشد، تعریف کنید $f : C \to B$ با ضابطهٔ $f(c) = \langle f_0(c), \dots, f_{n-1}(c) \rangle$. در این صورت $f_i = \pi_i \circ f$.

۱۰.۵ $\prod_{0 \le i < n} A_i \neq \varnothing$ اگر و فقط اگر $A_i \neq \varnothing$ برای هر $0 \le i < n$. [راهنمایی: استقرا.]

۱۱.۵ فرض کنید $B \subseteq \mathrm{Seq}(A)$. تابع $\mathrm{length} : B \to \mathbb{N}$، و عمل‌های head، tail، $*$ (پیوند)، و conv روی B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathrm{length}\left(\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle \right) = m,$$

$$\mathrm{head}\left(\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle \right) = a_0 \quad (m \ge 1),$$

$$\mathrm{tail}\left(\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle \right) = \langle a_1, \dots, a_{m-1} \rangle \quad (m \ge 1),$$

$$\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle * \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle = \langle c_0, \dots, c_{m+n-1} \rangle,$$

که در آن $c_i = a_i$ برای $0 \le i < m$ و $c_i = b_{i-m}$ برای $m \le i \le m+n-1$،

$$\mathrm{conv}\left(\langle a_0, \dots, a_{m-1} \rangle \right) = \langle b_0, \dots, b_{m-1} \rangle,$$

که درآن $b_i = a_{m-i-1}$ برای هر $0 \le i \le m-1$.

ثابت کنید برای اعضای $a, b, c \in B$ که برای آن‌ها عمل‌های مورد نظر تعریف شده باشد، داریم

$$\mathrm{length}(a * b) = \mathrm{length}(a) + \mathrm{length}(b),$$

$$\mathrm{length}\left(\mathrm{tail}(a)\right) = \mathrm{length}(a) - 1,$$

$$a = \mathrm{head}(a) * \mathrm{tail}(a),$$

$$\mathrm{head}(a * b) = \mathrm{head}(a),$$

$$\mathrm{tail}(a * b) = \mathrm{tail}(a) * b,$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c,$$

$$\mathrm{conv}(\mathrm{conv}(a)) = a,$$

$$\mathrm{conv}(a) = \mathrm{conv}(\mathrm{tail}(a)) * \mathrm{head}(a).$$

۱۲.۵ فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{C}$ ساختارهایی از نوع τ باشند. ثابت کنید
الف) $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{A}$ یکریخت است.
ب) اگر $\mathfrak{A}$ یکریخت با $\mathfrak{B}$ باشد، آن‌گاه $\mathfrak{B}$ با $\mathfrak{A}$ یکریخت است.
ج) اگر $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B}$ و $\mathfrak{B}$ با $\mathfrak{C}$ یکریخت باشد، آن‌گاه $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{C}$ یکریخت است.

علاوه بر این ثابت کنید که
د) تابع همانی روی عالم $\mathfrak{A}$ خودریختی از $\mathfrak{A}$ است.
ه) اگر f و g خودریختی‌هایی از $\mathfrak{A}$ باشند، آن‌گاه $f \circ g$ نیز خودریختی از $\mathfrak{A}$ است.
و) اگر f خودریختی از $\mathfrak{A}$ باشد، آن‌گاه f^{-1} نیز خودریختی از $\mathfrak{A}$ است.

۱۳.۵ فرض کنید $\langle k_0, \ldots, k_{n-1} \rangle$ دنباله‌ای متناهی از اعداد طبیعی با طول $n \geq 1$ است. در این صورت برد آن $\{k_0, \ldots, k_{n-1}\}$ دارای بزرگ‌ترین عضو است (در ترتیب معمول اعداد طبیعی برحسب اندازه). [راهنمایی: از استقرا روی طول دنبالهٔ مذکور استفاده کنید.]

۱۴.۵ مجموعه‌های C_0، C_1، C_2، و C_3 مذکور در قضیهٔ ۱۰.۵ را برای موارد زیر بسازید.
الف) $\mathfrak{A} = (R, S)$ و $C = \{0\}$.
ب) $\mathfrak{A} = (R, +, -)$ و $C = \{0, 1\}$.

۱۵.۵ فرض کنید $R \subseteq A^2$ عملی دوتایی باشد. عمل دوتایی F_R روی A^2 را با ضابطهٔ زیر تعریف کنید

$$F_R\big((a_1, a_2), (b_1, b_2)\big) = (a_1, b_2) \qquad \text{اگر} \qquad a_2 = b_1$$

(در غیر این صورت تعریف نشده است).
نشان دهید بستار R در (A^2, F_R) رابطه‌ای متعدی است. نشان دهید اگر R بازتابی و متقارن باشد، آن‌گاه بستارش رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۱۶.۵ فرض کنید $B = \mathrm{Seq}(A)$ که در آن $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ مجموعهٔ حروف الفبای انگلیسی است. تمرین ۱۱.۵ را ببینید. دنباله‌ها با طول ۱ را با A یکی بگیرید، لذا $A \subseteq B$. حال فرض کنید F عمل دوتایی تعریف‌شده

به‌صورت زیر باشد

اگر $\bar{x}, \bar{y} \in B$ و $\bar{y} \in A$ (یعنی، طول آن ۱ باشد)، آن‌گاه $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} * \bar{x} * \bar{y}$ (در غیر این صورت F تعریف نشده است).

فرض کنید C بستار A در ساختار (B, F) باشد. ثابت کنید $c = \mathrm{conv}(c)$، برای هر $c \in C$. (اعضای C را جناس‌های مقلوب می‌نامند.) [راهنمایی: از قضیهٔ ۱۱.۵ استفاده کنید.]

۱۷.۵ nتایی‌هایی تعریف کنید به‌قسمی که

(الف) $(a_0) = a_0$.

(ب) $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = ((a_0, \ldots, a_{n-1}), a_n)$، برای هر $n \geq 1$.

[راهنمایی: a را nتایی بنامید، هرگاه دنباله‌های متناهی مانند f و $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ با طول n موجود باشند به‌قسمی که

(۱) $f_0 = a_0$.

(۲) $f_{i+1} = (f_i, a_{i+1})$ برای هر $i < n - 1$ و $i \geq 0$.

(۳) $a = f_{n-1}$.

نشان دهید برای هر nتایی a، زوج یکتایی از دنباله‌های متناهی مانند f و $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ با طول n وجود دارد به‌طوری‌که (۱)، (۲)، و (۳) برقرار باشند؛ در این صورت می‌نویسیم $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$. نشان دهید برای هر دنبالهٔ متناهی $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ با طول n، nتایی یکتای $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ وجود دارد. حال (الف) و (ب) را ثابت کنید.]

فصل ۴

مجموعه‌های متناهی، شمارا، و ناشمارا

۱ عدد اصلی مجموعه‌ها

از منظر نظریهٔ محض مجموعه‌ها پرسش بنیادی دربارهٔ یک مجموعه این است که «این مجموعه چند عضو دارد؟». نکتهٔ اساسی در اینجا این است که عبارت «مجموعهٔ A و B به یک تعداد عضو دارند» را بدون اینکه چیزی دربارهٔ تعداد بدانیم، می‌توانیم تعریف کنیم.

برای اینکه چگونگی این کار را دریابیم، فرض کنید بخواهیم ببینیم آیا تعداد مشتری‌های یک سالن نمایش تئاتر با تعداد صندلی‌های آن برابر هستند یا نه؟ برای یافتن پاسخ نیازی به شمردن مشتری‌ها یا صندلی‌ها نیست. فقط کافی است ببینیم که هر مشتری روی یک و فقط یک صندلی می‌نشیند و هر صندلی را یک و فقط یک مشتری اشغال می‌کند.

۱.۱ تعریف. دو مجموعهٔ A و B را همتوان (یا دارای یک عدد اصلی) نامند اگر تابع یک‌به‌یک f بادامنهٔ A و برد B موجود باشد. در این حالت می‌نویسیم $|A| = |B|$.

۲.۱ مثال.

الف) مجموعه‌های $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ و $\{\{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}\}$ همتوان هستند. کافی است قرار دهید $f(\{\varnothing\}) = \{\{\{\varnothing\}\}\}$ و $f(\varnothing) = \{\{\varnothing\}\}$.

ب) دو مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ و $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ همتوان نیستند.

ج) مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت با مجموعهٔ اعداد حقیقی منفی همتوان هستند. کافی است برای هر x حقیقی مثبت قرار دهید $f(x) = -x$.

۳.۱ قضیه.

الف) A همتوان A است.

ب) اگر A همتوان B باشد، آن‌گاه B همتوان A است.

ج) اگر A همتوان B و B همتوان C باشد، آن‌گاه A همتوان C است.

برهان.

الف) تابع Id_A نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی A است.

ب) اگر f نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی B باشد. در این صورت f^{-1} نگاشتی یک‌به‌یک از B بروی A است.

ج) اگر f نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی B و g نگاشتی یک‌به‌یک از B بروی C باشد، آن‌گاه $g \circ f$ نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی C است. □

به نحو مشابه، تعریف زیر نیز کاملاً شهودی به نظر می‌رسد.

۴.۱ تعریف. عدد اصلی A کمتر یا مساوی عدد اصلی B است (که با نماد $|A| \leq |B|$ نشان داده می‌شود) اگر نگاشتی یک‌به‌یک از A بتوی B موجود باشد.

توجه کنید که $|A| \leq |B|$ به این معنی است که زیرمجموعهٔ $C \subseteq B$ موجود است به‌طوری‌که $|A| = |C|$. همچنین می‌نویسیم $|A| < |B|$ به این معنی که $|A| \leq |B|$ ولی $|A| = |B|$ برقرار نیست، به‌عبارت‌دیگر نگاشت یک‌به‌یکی از A بروی زیرمجموعه‌ای از B وجود دارد، لیکن نگاشت یک‌به‌یکی از A بروی B موجود نیست. دقت کنید که این امر به این معنی نیست که نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی زیرمجموعهٔ سره‌ای از B موجود است. برای نمونه، نگاشت یک‌به‌یکی از $\mathbb{N}$

بروی یک زیرمجموعهٔ سره‌اش وجود دارد (تمرین ۳.۲ در فصل ۳) در عین اینکه $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

قضیهٔ ۳.۱ نشان می‌دهد خاصیت $|A| = |B|$ شبیه یک رابطهٔ هم‌ارزی رفتار می‌کند. بدین معنی که بازتابی، متقارن، و متعدی است. نشان خواهیم داد خاصیت $|A| \leq |B|$ روی «رده‌های هم‌ارزی» تحت رابطهٔ همتوانی همچون یک ترتیب رفتار می‌کند.

۵.۱ لم.

الف) اگر $|A| \leq |B|$ و $|A| = |C|$، آن‌گاه $|C| \leq |B|$.

ب) اگر $|A| \leq |B|$ و $|B| = |C|$، آن‌گاه $|A| \leq |C|$.

ج) $|A| \leq |A|$.

هـ) اگر $|A| \leq |B|$ و $|B| \leq |C|$، آن‌گاه $|A| \leq |C|$.

برهان. به‌عنوان تمرین ۱.۱ به عهدهٔ خواننده. □

دیدیم رابطهٔ $\leq$ بازتابی و متعدی است. اثبات پادتقارنی آن باقی مانده است. برخلاف دو خاصیت دیگر، این خاصیت قضیه‌ای سترگ را تشکیل می‌دهد.

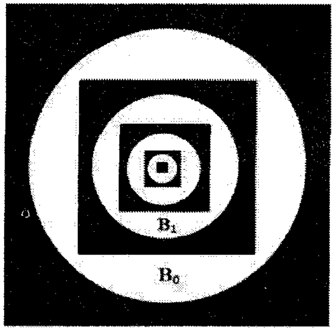
۶.۱ قضیهٔ کانتور-برنشتاین. اگر $|X| \leq |Y|$ و $|Y| \leq |X|$، آن‌گاه $|X| = |Y|$.

برهان. چنانچه $|X| \leq |Y|$، در این صورت تابع یک‌به‌یکی مانند f، X را بتوی Y می‌نگارد. همچنین، چنانچه $|Y| \leq |X|$، تابع یک‌به‌یکی مانند g، Y را بتوی X می‌نگارد. برای آنکه نشان دهیم $|X| = |Y|$، باید تابع یک‌به‌یکی معرفی کنیم که X را بروی Y بنگارد.

ابتدا تابع f و بعد تابع g را اثر می‌دهید، در این صورت تابع $g \circ f$، X را بتوی Y می‌نگارد که تابعی یک‌به‌یک نیز هست. به‌وضوح، $g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X$، به‌علاوه چون f و g یک‌به‌یک هستند، داریم $|g[f[X]]| = |X|$ و $|g[Y]| = |Y|$. اکنون قضیه از لم ۷.۱ ذیل نتیجه می‌شود (در آن لم قرار دهید $A = X$، $B = g[Y]$ و $A_1 = g[f[x]]$). □

۷.۱ لم. اگر $A \subseteq B \subseteq A_1$ و $|A| = |A_1|$، آن‌گاه $|B| = |A|$.

نمودار زیر به فهم مراحل برهان کمک می‌کند.



برهان. فرض کنید f نگاشتی یک‌به‌یک از A بروی A_1 باشد. به‌طور بازگشتی دو دنبالهٔ

$$A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$$

و

$$B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$$

از مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم. (در نمودار بالا، مربع‌ها A_nها و دایره‌ها B_nها را نشان می‌دهند).

قرار دهید $A_0 = A$، $B_0 = B$، و برای هر n

$$A_{n+1} = f[A_n], \qquad B_{n+1} = f[B_n]. \qquad (*)$$

چون $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$، لذا به استقرا از $(*)$ نتیجه می‌شود برای هر n، $A_{n+1} \subseteq A_n$. برای هر n قرار می‌دهیم

$$C_n = A_n - B_n,$$

و

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, \qquad D = A - C$$

(C قسمت هاشور خوردهٔ نمودار است). بنا به (*) داریم $f[C_n] = C_{n+1}$. لذا

$$f[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

اکنون آماده‌ایم تا نگاشت یک‌به‌یک g از A بروی B را به‌صورت

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ x & x \in D \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

هم $g \restriction C$ و هم $g \restriction D$ هر دو توابعی یک‌به‌یک‌اند و برد آن‌ها از یکدیگر مجزاست. از این‌رو g تابعی یک‌به‌یک است و A را بروی $f[C] \cup D = B$ می‌نگارد. □

دیدیم رابطهٔ $\leq$ تمامی ویژگی‌های یک رابطهٔ ترتیب را داراست. سؤال طبیعی که پیش می‌آید این است که آیا این رابطه، خطی نیز هست بدین معنی که آیا

ی) برای هر A, B، $|A| \leq |B|$ یا $|B| \leq |A|$ برقرارند.

معلوم شده است که برهان (ی) نیازمند اصل انتخاب است. در فصل ۸ به این موضوع باز خواهیم گشت. ولی تا قبل از آن، از کاربرد آن در برهان‌ها اجتناب خواهیم کرد.

تا اینجا بدون اینکه اعداد اصلی را فی‌الواقع تعریف کنیم، ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها را اثبات کردیم. اصولاً می‌توان حتی بدون تعریف $|A|$، مطالعهٔ ویژگی‌های $|A| = |B|$ و $|A| \leq |B|$ را به همین نحو ادامه داد. کافی است نماد $|A| = |B|$ را صرفاً کوته‌نوشتی برای خاصیت «A همتوان B است» در نظر گرفت و به همین ترتیب برای بقیه. مع‌هذا، هم به لحاظ مفهومی و هم به لحاظ نمادگذاری تعریف $|A|$ «تعداد اعضای مجموعه A»، همچون شیئی از نظریهٔ مجموعه‌ها، یعنی یک مجموعه، مفید به نظر می‌رسد. از این‌رو فرض زیر را می‌پذیریم.

۸.۱ فرض. مجموعه‌هایی به‌نام اعداد اصلی (یا کاردینال‌ها) موجودند با این ویژگی که به‌ازای هر مجموعهٔ X عدد اصلی منحصربه‌فردی مانند $|X|$ (عدد اصلی X یا

کاردینال X) موجود است و به‌علاوه مجموعه‌های X و Y همتوانند اگر و تنها اگر $|X|$ برابر $|Y|$ باشد.

در اینجا ما عملاً داریم فرضِ وجود یک «نمایندهٔ» منحصربه‌فرد برای هر رده از مجموعه‌های دوبه‌دو همتوان را می‌پذیریم. این فرض بی‌زیان است، یعنی اینکه آن را صرفاً برای تسهیل امور به کار می‌بریم و می‌توانیم بدون آن هم قضایای خود را فرمول‌بندی و اثبات کنیم. این فرض را فی‌الواقع می‌توان به کمک اصل انتخاب اثبات کرد و ما در فصل ۸ چنین خواهیم کرد. از این گذشته، اعداد اصلی را برای رده‌ای خاص از مجموعه‌ها می‌توان تعریف کرد و حتی بدون استفاده از اصل انتخاب فرض مذکور را برای آن رده اثبات کرد. مجموعه‌های متناهی از با اهمیت‌ترین این رده‌ها هستند.

در بخش بعد مجموعه‌های متناهی و اعداد اصلی آن‌ها را به‌طور مفصل مطالعه می‌کنیم.

تمرین‌ها

۱.۱ لم ۵.۱ را ثابت کنید.

۲.۱ ثابت کنید:

الف) اگر $|A| < |B|$ و $|B| \leq |C|$، آن‌گاه $|A| < |C|$.

ب) اگر $|A| \leq |B|$ و $|B| < |C|$، آن‌گاه $|A| < |C|$.

۳.۱ اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $|A| \leq |B|$.

۴.۱ ثابت کنید:

الف) $|A \times B| = |B \times A|$.

ب) $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.

ج) $|A| \leq |A \times B|$ اگر $B \neq \varnothing$.

۵.۱ نشان دهید $|S| \leq |\mathcal{P}(S)|$. [راهنمایی: $|S| = |\{\{a\} \mid a \in S\}|$.]

۶.۱ نشان دهید $|A| \leq |A^S|$ برای هر A و هر $S \neq \varnothing$. [راهنمایی: توابع ثابت را در نظر بگیرید.]

۷.۱ اگر $S \subseteq T$، آن‌گاه $|A^S| \leq |A^T|$؛ به‌ویژه $|A^n| \leq |A^m|$ اگر $n \leq m$. [راهنمایی: توابعی را که روی $T - S$ مقدار ثابت اختیار می‌کنند در نظر بگیرید.]

۸.۱ $|T| \leq |S^T|$ اگر $|S| \geq ۲$. [راهنمایی: اعضای $u, v \in S$ که $u \neq v$ را انتخاب کنید و برای هر $t \in T$، $f_t : T \to S$ را به‌گونه‌ای که $f_t(t) = u$ و در غیر این صورت $f_t(x) = v$ در نظر بگیرید.]

۹.۱ اگر $|A| \leq |B|$ و A غیرتهی باشد، آن‌گاه نگاشت f از B بروی A وجود دارد.

قدری عجیب می‌نماید که اثبات نتیجه‌ای اساسی و کلی، مانند قضیهٔ کانتور-برنشتاین، نیاز به مجموعه‌های خاصی، مثل اعداد طبیعی، دارد. حقیقت این است که این‌طور نیست. چند تمرین زیر اثبات دیگری در اختیار می‌گذارند. در طی این اثبات، خواننده با خاصیت نقطهٔ ثابت توابع یکنوا، که به‌خودی‌خود نتیجهٔ مهمی است، آشنا خواهد شد.

فرض کنید F تابعی روی $\mathcal{P}(A)$ بتوی $\mathcal{P}(A)$ باشد. مجموعهٔ $X \subseteq A$ یک نقطهٔ ثابت برای F نامیده می‌شود هرگاه $F(X) = X$. تابع F را یکنوا می‌نامند هرگاه $X \subseteq Y \subseteq A$ ایجاب کند $F(X) \subseteq F(Y)$.

۱۰.۱ فرض کنید $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ یکنوا باشد. در این صورت F یک نقطهٔ ثابت دارد. [راهنمایی: فرض کنید $T = \{X \subseteq A \mid F(X) \subseteq X\}$. توجه کنید $T \neq \varnothing$. قرار دهید $\overline{X} = \bigcap T$ و ثابت کنید که اگر $\overline{X} \in T$، $F(\overline{X}) \in T$. بنابراین، $F(\overline{X}) \subset \overline{X}$ نشدنی است.]

۱۱.۱ با استفاده از تمرین ۱۰.۱ اثبات جایگزینی برای قضیهٔ کانتور-برنشتاین ارائه دهید. [راهنمایی: لم ۷.۱ را به‌صورت زیر ثابت کنید: فرض کنید $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ با ضابطهٔ $F(X) = (A - B) \cup F[X]$ تعریف شود. نشان دهید که F یکنواست. فرض کنید C نقطهٔ ثابت F باشد، یعنی $C = (A - B) \cup f[C]$ و تعریف کنید $D = A - C$. تابع g را به همان صورتی که در اثبات اولیه است تعریف کنید و نشان دهید که یک‌به‌یک و بروی B است.]

۱۲.۱ ثابت کنید $\overline{X}$ در تمرین ۱۰.۱ کوچک‌ترین نقطهٔ ثابت F است، به‌عبارت

دیگر اگر به‌ازای مجموعه‌ای مانند $X \subseteq A$، $F(X) = X$، آن‌گاه $\overline{X} \subseteq X$.

مابقی تمرین‌ها نشان می‌دهند که این دو اثبات قضیه با هم تفاوت زیادی ندارند. تابع $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ پیوسته است اگر $F(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} F(X_i)$ به‌ازای هر دنبالهٔ ناافزایشی از زیرمجموعه‌های A. (دنبالهٔ $\langle X_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ ناافزایشی است هرگاه $X_i \subseteq X_j$ به‌شرطی‌که $i \leq j$.)

۱۳.۱ ثابت کنید F به‌کاررفته در تمرین ۱۱.۱ پیوسته است. [راهنمایی: تمرین ۱۲.۳ از فصل دوم را ببینید.]

۱۴.۱ ثابت کنید اگر $\overline{X}$ کوچک‌ترین نقطهٔ ثابت تابع پیوستهٔ یکنوای $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ باشد، آن‌گاه $\overline{X} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$، که در آن به‌طور بازگشتی تعریف می‌کنیم $X_{i+1} = F(X_i)$، $X_0 = \varnothing$.

خواننده باید اثبات لم ۷.۱ را با ساختن کوچک‌ترین نقطهٔ ثابت برای تابع $F(X) = (A - B) \cup f[X]$ در تمرین ۱۴.۱ مقایسه کند.

۲ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌های متناهی را می‌توان آن مجموعه‌هایی تعریف کرد که اندازهٔ آن‌ها برابر یک عدد طبیعی است.

۱.۲ تعریف. مجموعهٔ S متناهی است هرگاه با یک عدد طبیعی مانند $n \in \mathbb{N}$ همتوان باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $|S| = n$ و می‌گوییم S، n عضو دارد. یک مجموعه نامتناهی است هرگاه متناهی نباشد.

بنا به تعریف‌هایمان، عدد اصلی مجموعه‌های متناهی همان اعداد طبیعی هستند. بدیهی است که اعداد طبیعی خودشان نیز مجموعه‌های متناهی هستند و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|n| = n$. لیکن منحصربه‌فرد بودن عدد اصلی مجموعهٔ متناهی را باید بررسی کنیم. این امر در لم ۲.۲ انجام می‌شود.

۲.۲ لم. اگر $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه هیچ نگاشت یک‌به‌یکی از n بروی زیرمجموعهٔ سره‌ای مانند $X \subset n$ وجود ندارد.

برهان. با استقرا روی n عمل می‌کنیم. حکم به‌وضوح برای $n = ۰$ درست است. فرض می‌کنیم حکم برای n درست باشد، ثابت می‌کنیم برای $n + ۱$ نیز برقرار است. چنانچه حکم برای $n + ۱$ نادرست باشد، در آن صورت نگاشت یک‌به‌یکی مانند f از $n + ۱$ بروی مجموعه‌ای مانند $X \subset n + ۱$ وجود دارد. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: یا $n \in X$ یا $n \notin X$. چنانچه $n \notin X$، در این صورت $X \subseteq n$ و تابع $f \restriction n$، n را بروی زیرمجموعهٔ سرهٔ $X - \{f(n)\}$ از n می‌نگارد، که این تناقض است. اگر $n \in X$، در این صورت به‌ازای $k \leq n$ایی، $n = f(k)$. تابع g روی n را به‌صورت

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & i < n \quad i \neq k \text{ برای هر} \\ f(n) & i = k < n \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. تابع g یک‌به‌یک است و n را بروی $X - \{n\}$، که زیرمجموعه‌ای سره از n است، می‌نگارد. که این نیز تناقض است. □

۳.۲ نتیجه.

الف) اگر $n \neq m$، آن‌گاه هیچ نگاشت یک‌به‌یکی از n بروی m وجود ندارد.

ب) اگر $|S| = n$ و $|S| = m$، آن‌گاه $n = m$.

ج) مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نامتناهی است.

برهان.

الف) اگر $n \neq m$، در این صورت بنا به تمرین ۳.۲ در فصل ۳، یا $n \subset m$ یا $m \subset n$، و لذا هیچ نگاشت یک‌به‌یکی از n بروی m وجود ندارد.

ب) بی‌درنگ از (الف) نتیجه می‌شود.

ج) بنا به تمرین ۳.۲ در فصل ۳ تابع تالی نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی زیرمجموعهٔ سره‌اش $\mathbb{N} - \{۰\}$ است. □

نکتهٔ حائز اهمیت دیگر اینکه اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $m < n$ (رابطه، همان ترتیب معمول اعداد طبیعی است که برحسب اندازه در فصل ۳ تعریف شد) آن‌گاه $m \subset n$ و لذا $m = |m| < |n| = n$، که در اینجا $<$ همان ترتیب اعداد اصلی است که در فصل قبلی تعریف کردیم. بنابراین لازم نیست تمایزی بین این دو رابطهٔ ترتیب قائل شویم. از این‌رو ما هر دو را با $<$ نشان می‌دهیم.

در ادامهٔ این بخش خواص مجموعه‌های متناهی و اعداد اصلی آن‌ها را مفصل‌تر مطالعه می‌کنیم.

۴.۲ قضیه. اگر X زیرمجموعهٔ متناهی و $Y \subseteq X$، آن‌گاه Y نیز متناهی است. به‌علاوه، $|Y| \leq |X|$.

برهان. می‌توانیم فرض کنیم $X = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$، که در اینجا $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$ دنباله‌ای یک‌به‌یک و Y مجموعه‌ای ناتهی است. برای آنکه نشان دهیم Y متناهی است، دنباله‌ای متناهی و یک‌به‌یک با برد Y می‌سازیم. صورتی از قضیهٔ بازگشت را، که در تمرین ۵.۳ در فصل ۳ بیان شده است، به کار می‌بریم. قرار دهید

$k_0 =$ کوچک‌ترین k به‌قسمی که $x_k \in Y$،

$k_{i+1} =$ کوچک‌ترین k به‌قسمی که $k > k_i$، $k < n$، و $x_k \in Y$

(به شرط وجود چنین kیی).

به عهدهٔ خواننده است که تحقیق کند تعریف بالا با شرایط تمرین ۵.۳ از فصل ۳ جور در می‌آید. [راهنمایی: $A = n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$، $a = \min\{k \in n \mid x_k \in Y\}$، $g(t, i) = \min\{k \in n \mid k > t,\ x_k \in Y\}$ اگر چنین kیی موجود باشد و در غیر این صورت $g(t, i)$ تعریف نشده است]. از اینجا دنبالهٔ $\langle k_0, \ldots, k_{m-1}\rangle$ تعریف می‌شود. خواننده باید نشان دهد که $m \leq n$ (در واقع بنا به استقرا، به شرط قابل تعریف بودن، داریم $k_i \geq i$، از این‌رو به‌ویژه، $m - 1 \leq k_{m-1} \leq n - 1$). □

۵.۲ قضیه. اگر X مجموعهٔ متناهی و f تابع باشد، آن‌گاه $f[X]$ متناهی است. به‌علاوه، $|f[X]| \leq |X|$.

برهان. قرار دهید $X = \{x_{\circ}, \dots, x_{n-1}\}$. مجدداً قضیهٔ بازگشت را به کار می‌بریم و دنبالهٔ یک‌به‌یک و متناهی با برد $f[X]$ می‌سازیم. فی‌الواقع، در صورت قضیهٔ بازگشت قرار می‌دهیم $f(n+1) = g(f \restriction n)$. ساخت دنباله به قرار زیر است:

$k_{\circ} = \circ$،

$k_{i+1} =$ کوچک‌ترین $k > k_i$ به‌قسمی که $k < n$ و برای هر $j \leq i$، $f(x_k) \neq f(x_{k_j})$

(به شرط وجود چنین kیی) و $y_i = f(x_{k_i})$، از خواننده می‌خواهیم جزئیات اثبات را کامل کند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای $m \leq n$یی، $f[X] = \{y_{\circ}, \dots, y_{m-1}\}$.

□

به‌عنوان یک نتیجه، چنانچه $\langle a_i \mid i < n \rangle$ دنباله‌ای متناهی (با تکرار یا بدون تکرار) باشد، در آن صورت مجموعهٔ $\{a_i \mid i < n\}$ متناهی است.

چنانچه روش‌های ساخت مبتنی بر اصل موضوع شمول را برای مجموعه‌های متناهی به کار بریم بازهم یک مجموعهٔ متناهی حاصل می‌شود. حال نشان می‌دهیم چنانچه X متناهی باشد، $\mathcal{P}(X)$ نیز متناهی است و اگر X ردهٔ متناهی از مجموعه‌های متناهی باشد، در این صورت $\bigcup X$ نیز متناهی است. از این‌رو، برای داشتن مجموعه‌های نامتناهی، افزودن اصل موضوع نامتناهی ضروری است.

۶.۲ لم. اگر X و Y متناهی باشند، آن‌گاه $X \cup Y$ متناهی است. به‌علاوه، $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$ و اگر X و Y مجزا باشند، آن‌گاه $|X \cup Y| = |X| + |Y|$.

برهان. چنانچه $X = \{x_{\circ}, \dots, x_{n-1}\}$ و $Y = \{y_{\circ}, \dots, y_{m-1}\}$، که در اینجا $\langle x_{\circ}, \dots, x_{n-1} \rangle$ و $\langle y_{\circ}, \dots, y_{m-1} \rangle$ دو دنبالهٔ متناهی یک‌به‌یک هستند، قرار دهید $z = \langle x_{\circ}, \dots, x_{n-1}, y_{\circ}, \dots, y_{m-1} \rangle$ دنباله‌ای متناهی با طول $n+m$ باشد. (به بیان دقیق‌تر، دنبالهٔ $z = \langle z_i \mid \circ \leq i < n+m \rangle$ را با

$$z_i = x_i \quad \circ \leq i < n, \qquad z_i = y_{i-n} \quad n \leq i < n+m$$

تعریف کنید.)

به‌وضوح، Z، $n+m$ را بروی $X \cup Y$ می‌نگارد و لذا، $X \cup Y$ متناهی است، و

بنا به قضیهٔ ۵.۲، $|X \cup Y| \leq n + m$. اگر X و Y مجزا باشند، در این صورت Z یک‌به‌یک است و $|X \cup Y| = n + m$. □

۷.۲ قضیه. اگر S متناهی باشد و هر مجموعهٔ $X \in S$ متناهی باشد، آن‌گاه $\bigcup S$ متناهی است.

برهان. استقرا را روی تعداد اعضای S به کار می‌بریم. اگر $|S| = ۰$، حکم درست است. حال فرض کنید حکم برای هر S که $|S| = n$ درست باشد و فرض کنید $S = \{X_۰, \ldots, X_{n-۱}, X_n\}$ مجموعه‌ای با $n + ۱$ عضو و هر $X_i \in S$ مجموعه‌ای متناهی باشد. بنا به فرض استقرا، $\bigcup_{i=۰}^{n-۱} X_i$ متناهی است و داریم

$$\bigcup S = \Big(\bigcup_{i=۰}^{n-۱} X_i\Big) \bigcup X_n,$$

که بنا به لم ۶.۲ مجموعه‌ای متناهی است. □

۸.۲ قضیه. اگر X متناهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{P}(X)$ متناهی است.

برهان. با استقرا روی $|X|$ عمل می‌کنیم. اگر $|X| = ۰$، یعنی $X = \varnothing$، در این صورت $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing\}$ که مجموعه‌ای متناهی است. فرض کنید چنانچه $|X| = n$، $\mathcal{P}(X)$ متناهی باشد. فرض کنید Y مجموعه‌ای با $n + ۱$ عضو باشد، $Y = \{y_۰, \ldots, y_n\}$. قرار دهید $X = \{y_۰, \ldots, y_{n-۱}\}$. توجه می‌کنیم $\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X) \cup U$، که در اینجا $U = \{u \mid u \subseteq Y,\ y_n \in u\}$. همچنین توجه می‌کنیم که $|U| = |\mathcal{P}(X)|$، چراکه نگاشتی یک‌به‌یک از U بروی $\mathcal{P}(X)$ وجود دارد؛ در واقع برای هر $u \in U$، $f(u) = u - \{y_n\}$. از این‌رو، $\mathcal{P}(Y)$ اتحاد دو مجموعهٔ متناهی است و در نتیجه مجموعه‌ای متناهی است. □

آخرین قضیهٔ این بخش نشان می‌دهد مجموعه‌های نامتناهی حقیقتاً بیش از مجموعه‌های متناهی عضو دارند.

۹.۲ قضیه. اگر X نامتناهی باشد، آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $|X| > n$.

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n \leq |X|$. با استقرا این کار را انجام می‌دهیم. به‌وضوح، $|X| > ۰$. فرض کنید $n \leq |X|$، پس تابع یک‌به‌یکی مانند $f : n \to X$ وجود دارد. چون X نامتناهی است، پس $x \in (X - \operatorname{ran} f)$ وجود دارد. تعریف کنید $g = f \cup \{(n, x)\}$. g تابعی یک‌به‌یک روی n بتوی X است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $n + ۱ \leq |X|$. □

این فصل را با شرح مختصری از رویکرد دیگری به مفهوم متناهی بودن به پایان می‌بریم. در زیر تعریفی از مجموعهٔ متناهی عرضه می‌کنیم که در آن هیچ استفاده‌ای از اعداد طبیعی نمی‌شود. مجموعهٔ X متناهی است اگر و تنها اگر رابطه‌ای مانند $\prec$ موجود باشد به‌طوری‌که

الف) رابطهٔ $\prec$ یک ترتیب خطی از X است.

ب) هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از X در رابطهٔ $\prec$ دارای کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو است.

توجه کنید که این مفهوم متناهی بودن با آنچه قبلاً برحسب دنباله‌های متناهی تعریف کردیم مطابقت دارد. به عبارت دقیق‌تر، چنانچه $X = \{x_۰, \ldots, x_{n-۱}\}$ در آن صورت $x_۰ \prec \cdots \prec x_{n-۱}$ یک ترتیب خطی روی X تعریف می‌کند که خواص مذکور را دارد. از طرف دیگر، اگر $(X, \prec)$ در (الف) و (ب) صدق کند، می‌توان به طریق بازگشتی دنبالهٔ $\langle f_۰, f_۱, \ldots\rangle$ را همانند قضیهٔ ۴.۳ در فصل ۳ ساخت. طبق آن قضیه، دنبالهٔ مذکور تمام اعضا را در بر دارد، ولی این ساختن باید پس از تعداد متناهی مرحله در نقطه‌ای به پایان برسد. زیرا، در غیر این صورت مجموعهٔ نامتناهی $\{f_۰, f_۱, f_۲, \ldots\}$ بزرگ‌ترین عضو در $(X, \prec)$ نخواهد داشت.

تعریف دیگری از متناهی بودن ذکر می‌کنیم که متضمن اعداد طبیعی نیست. گوییم مجموعهٔ X متناهی است هرگاه هر خانوادهٔ ناتهی از زیرمجموعه‌های X یک عضو $\subseteq$-بیشین داشته باشد، یعنی اگر $\varnothing \neq U \subseteq \mathcal{P}(X)$، آن‌گاه عضو $z \in U$ موجود باشد که برای هیچ $y \in U$یی، $z \subset y$ نباشد. تمرین ۶.۲ هم‌ارز بودن این تعریف را با تعریف ۱.۲ نشان می‌دهد.

در پایان اجازه دهید باز هم رویکرد دیگری به مفهوم متناهی را بررسی کنیم. از

لم ۲.۲ نتیجه می‌شود که اگر X متناهی باشد، در این صورت هیچ نگاشت یک‌به‌یکی از X بروی هیچ زیرمجموعهٔ سره‌اش وجود ندارد. از طرف دیگر، برای مجموعه‌های نامتناهی مثل مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، نگاشت‌های یک‌به‌یک بروی یک زیرمجموعه سره از آن‌ها همواره وجود دارد [مثلاً، $f(n) = n + ۱$]. بنابراین، مجموعه‌های متناهی را می‌توان مجموعه‌هایی تعریف کرد که با هیچ زیرمجموعهٔ سره‌ای از خود همتوان نیستند. لیکن اثبات هم‌ارزی این تعریف با تعریف ۱.۲ بدون استفاده از اصل انتخاب غیرممکن است (تمرین ۹.۱ در فصل ۸ را ببینید).

تمرین‌ها

۱.۲ اگر $S = \{X_۰, \ldots, X_{n-۱}\}$ و اعضای S دوبه‌دو مجزا باشند، آن‌گاه $|\bigcup S| = \sum_{i=۰}^{n-۱} |X_i|$.

۲.۲ اگر X و Y متناهی باشند، آن‌گاه $X \times Y$ متناهی است و $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

۳.۲ اگر X متناهی باشد، آن‌گاه $|\mathcal{P}(X)| = ۲^{|X|}$.

۴.۲ اگر X و Y متناهی باشند، آن‌گاه X^Y به تعداد $|X|^{|Y|}$ عضو دارد.

۵.۲ اگر $|X| = n \geq |Y| = k$، آن‌گاه تعداد توابع یک‌به‌یک مانند $f : Y \to X$ برابر است با $n \cdot (n - ۱) \cdot \cdots \cdot (n - k + ۱)$.

۶.۲ X متناهی است اگر و فقط اگر هر دستگاه غیرتهی از زیرمجموعه‌های X یک عضو $\subseteq$-بیشین دارد. [راهنمایی: اگر X متناهی باشد، به‌ازای nیی، $|X| = n$. اگر $U \subseteq \mathcal{P}(X)$، فرض کنید m بزرگ‌ترین عدد در $\{|Y| \mid Y \in U\}$ باشد. اگر $Y \in U$ و $|Y| = m$، آن‌گاه Y بیشین است. از طرف دیگر، اگر X نامتناهی باشد، قرار دهید $U = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ متناهی است}\}$.]

۷.۲ با استفاده از لم ۶.۲ و تمرین‌های ۲.۲ و ۴.۲ اثبات ساده‌ای برای تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری جمع و ضرب اعداد طبیعی، توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع و ویژگی‌های حسابی معمول توان بدهید. [راهنمایی: برای اثبات مثلاً تعویض‌پذیری عمل ضرب، X و Y را انتخاب کنید

به‌طوری‌که $|X| = m$ و $|Y| = n$. بنا به تمرین ۲.۲، $|X \times Y| = m \cdot n$ و $|Y \times X| = n \cdot m$. اما $X \times Y$ و $Y \times X$ همتوان هستند.]

۸.۲ اگر A و B متناهی باشند و $X \subseteq A \times B$، آن‌گاه $|X| = \sum_{a \in A} k_a$، که در آن $k_a = |X \cap (\{a\} \times B)|$.

۳ مجموعه‌های شمارا

اصل موضوع بی‌نهایت نمونه‌ای از یک مجموعهٔ نامتناهی در اختیار ما می‌گذارد، که همان مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ است. در این بخش به بررسی عدد اصلی $\mathbb{N}$ می‌پردازیم. به‌عبارت‌دیگر، توجه خود را معطوف مجموعه‌هایی که با $\mathbb{N}$ همتوان هستند می‌سازیم.

۱.۳ تعریف. مجموعهٔ S را شمارا گوییم هرگاه $|S| = |\mathbb{N}|$. مجموعهٔ S حداکثر شمارا نامیده می‌شود هرگاه $|S| \leq |\mathbb{N}|$.

بنابراین مجموعهٔ S شماراست هرگاه نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی S موجود باشد. به‌عبارت‌دیگر هرگاه S برد دنباله‌ای یک‌به‌یک و نامتناهی باشد.

۲.۳ قضیه. هر زیرمجموعهٔ نامتناهی یک مجموعهٔ شمارا، شماراست.

برهان. فرض کنید A مجموعه‌ای شمارا و $B \subseteq A$ نامتناهی باشد. دنبالهٔ یک‌به‌یک نامتناهی $\langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ با برد A موجود است. قرار می‌دهیم $b_0 = a_{k_0}$، که در اینجا k_0 کوچک‌ترین kیی است که $a_k \in B$. فرض کنید b_n ساخته شده باشد، قرار می‌دهیم $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$، که در اینجا k_{n+1} کوچک‌ترین kیی است که $a_k \in B$ و برای هر $i \leq n$، $a_k \neq b_i$. چنین kیی موجود است، چرا که B نامتناهی است. وجود دنبالهٔ $\langle b_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ به‌راحتی از قضیهٔ بازگشت، که تحت عنوان قضیهٔ **۵.۳** در فصل **۳** بیان شد، نتیجه می‌شود. به‌آسانی دیده می‌شود که $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $\langle b_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ یک‌به‌یک است. لذا B شماراست. □

چنانچه S مجموعه‌ای حداکثر شمارا باشد، در این صورت با زیرمجموعه‌ای از یک مجموعهٔ شمارا همتوان است؛ و بنا به قضیهٔ ۲.۳، چنین مجموعه‌ای یا متناهی است یا شمارا. از این‌رو، نتیجهٔ ۳.۳ را داریم.

۳.۳ نتیجه. یک مجموعهٔ حداکثر شماراست اگر و تنها اگر یا متناهی یا شمارا باشد.

برد یک دنبالهٔ یک‌به‌یک و نامتناهی، شماراست. چنانچه $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ دنبالهٔ نامتناهی باشد که یک‌به‌یک نیست، در این صورت مجموعهٔ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ممکن است متناهی باشد (مثلاً، اگر دنباله ثابت باشد چنین اتفاقی خواهد افتاد). مع‌هذا، اگر برد دنباله نامتناهی باشد در این صورت مجموعهٔ مذکور شماراست.

۴.۳ قضیه. برد دنبالهٔ نامتناهی $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ حداکثر شماراست، یعنی، یا متناهی یا شماراست. (به عبارت دیگر، تصویر یک مجموعهٔ شمارا تحت هر نگاشتی، حداکثر شماراست.)

برهان. به‌طریق بازگشتی، دنبالهٔ $\langle b_n\rangle$ (با دامنه متناهی یا نامتناهی) را طوری می‌سازیم که یک‌به‌یک باشد و برد آن با برد $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ یکی باشد. قرار می‌دهیم $b_0 = a_0$. فرض کنید b_n ساخته شده باشد، حال قرار می‌دهیم $b_{n+1} = a_{k_{n+1}}$، که در اینجا k_{n+1} کوچک‌ترین kیی است که برای هر $i \leq n$، $a_k \neq b_i$. (چنانچه چنین kیی موجود نباشد، در این صورت دنبالهٔ متناهی $\langle b_i \mid i \leq n\rangle$ را در نظر می‌گیریم.) دنبالهٔ $\langle b_i\rangle$ که بدین صورت ساخته می‌شود یک‌به‌یک با برد $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ است. □

باید توجه کرد که تمامی ویژگی‌های اندازه، از مجموعه‌های متناهی به مجموعه‌های نامتناهی انتقال پیدا نمی‌کند. برای نمونه، مجموعهٔ شمارای S را می‌توان به دو قسمت مجزای A و B تجزیه کرد به‌طوری‌که $|A| = |B| = |S|$. حال اینکه چنین چیزی اگر S متناهی باشد، محال است (مگر اینکه $S = \varnothing$).

برای مثال، مجموعهٔ اعداد زوج $E = \{۲k \mid k \in \mathbb{N}\}$ و مجموعهٔ اعداد فرد $O = \{۲k + ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. هم E و هم O هر دو نامتناهی و لذا شمارا هستند. بنابراین داریم $|O| = |E| = |\mathbb{N}|$ و اینکه $\mathbb{N} = E \cup O$ و $E \cap O = \varnothing$.

نتیجهٔ بهتری هم می‌توانیم به‌دست آوریم. فرض کنید p_n، nامین عدد اول باشد (یعنی، $p_0 = 2$، $p_1 = 3$ و غیره). قرار دهید

$$S_0 = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}, \quad S_1 = \{3^k \mid k \in \mathbb{N}\}, \ \ldots \ , \quad S_n = \{p_n^k \mid k \in \mathbb{N}\}, \ldots .$$

مجموعه‌های S_n $(n \in \mathbb{N})$ زیرمجموعه‌های شمارا و دوبه‌دو مجزا از $\mathbb{N}$ هستند. لذا، داریم $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \subseteq \mathbb{N}$، که در اینجا $|S_n| = |\mathbb{N}|$ و S_nها دوبه‌دو مجزایند.

دو قضیهٔ زیر نشان می‌دهند که حاصل انجام اعمال ابتدائی روی مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

۵.۳ قضیه. اجتماع هر دو مجموعهٔ شمارا، مجموعه‌ای شماراست.

برهان. فرض کنید $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ شمارا باشند. دنبالهٔ $\langle c_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ را به‌صورت زیر

$$\text{برای هر } k \in \mathbb{N} \quad c_{2k+1} = b_k \quad \text{و} \quad c_{2k} = a_k$$

می‌سازیم. بنابراین $A \cup B = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. چون این مجموعه نامتناهی است، پس شماراست. □

۶.۳ نتیجه. اتحاد یک دستگاه متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

برهان. با استقرا (روی اندازهٔ دستگاه) می‌توان این نتیجه را ثابت کرد. □

با توجه به نتیجهٔ بالا شاید وسوسه شویم و نتیجه بگیریم اتحاد دستگاهی شمارا از مجموعه‌های شمارا، شماراست، ولی این نتیجه را فقط با اصل انتخاب می‌توان ثابت کرد (قضیهٔ ۷.۱ در فصل ۸ را ببینید). بدون اصل انتخاب حتی قضیهٔ «بدیهی»، «اگر $S = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ و برای هر n، $|A_n| = 2$، آن‌گاه $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ شماراست» را نیز نمی‌توان ثابت کرد.

مانع ما در اینجا انتخاب یک دنبالهٔ یکتا برای هر $n \in \mathbb{N}$ است که A_n را بشمارد. چنانچه چنین انتخابی ممکن باشد همان‌طور که قضیهٔ ۹.۳ نشان می‌دهد حکم برقرار خواهد بود، ولی برای این کار ابتدا به نتیجهٔ مهم دیگری نیاز داریم.

۷.۳ قضیه. اگر A و B شمارا باشند، آن‌گاه $A \times B$ شماراست.

برهان. کافی است نشان دهیم $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. یعنی کافی است یا نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ بسازیم یا دنباله‌ای یک‌به‌یک با برد $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. [تمرین ۱.۳ را ببینید.]

الف) تابع

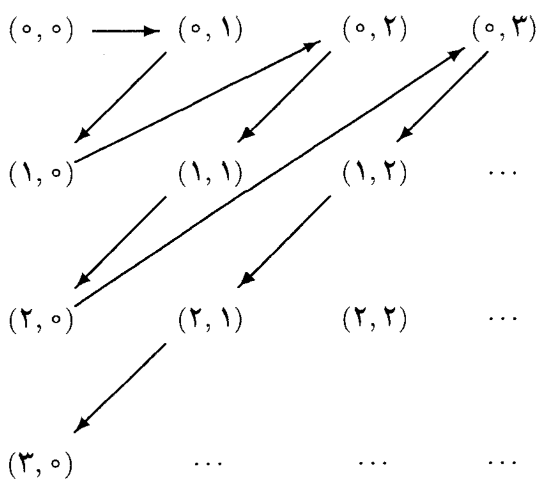
$$f(k, n) = ۲^k(۲n + ۱) - ۱$$

را در نظر بگیرید.

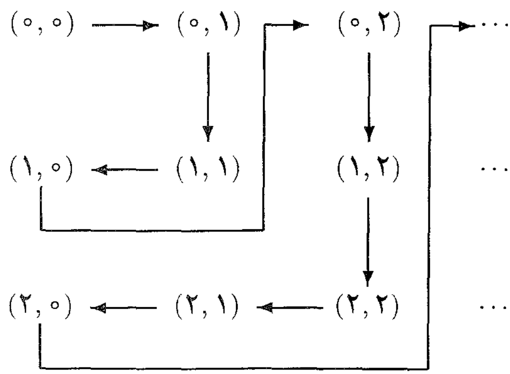
برعهدهٔ خواننده است که تحقیق کند f یک‌به‌یک است و برد آن برابر $\mathbb{N}$ است.

□

ب) برهان دیگری ارائه می‌کنیم: از روی نمودار زیر دنباله‌ای از اعضای $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بسازید.



باز هم برهان دیگری می‌توان ارائه کرد:



□

۸.۳ نتیجه. حاصل‌ضرب دکارتی هر تعداد متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست. در نتیجه، برای هر $m > ۰$، $\mathbb{N}^m$ شماراست.

برهان. این نتیجه را با استقرا می‌توان ثابت کرد. □

۹.۳ قضیه. فرض کنید $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دستگاهی شمارا از مجموعه‌های حداکثر شمارا باشد. فرض کنید $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دستگاهی از شمارش‌های A_n باشد، یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n = \langle a_n(k) \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ دنباله‌ای نامتناهی است و $A_n = \{a_n(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. آن‌گاه $\bigcup_{n=۰}^{\infty} A_n$ حداکثر شماراست.

برهان. تعریف کنید $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=۰}^{\infty} A_n$ که $f(n, k) = a_n(k)$. در این صورت f، $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ را بروی $\bigcup_{n=۰}^{\infty} A_n$ می‌نگارد. لذا بنا بر قضیهٔ ۴.۳ و ۷.۳، مجموعهٔ $\bigcup_{n=۰}^{\infty} A_n$ حداکثر شماراست. □

به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه داریم

۱۰.۳ قضیه. اگر A شمارا باشد، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناهی از اعضای A، $\mathrm{Seq}(A)$، شماراست.

برهان. کافی است قضیه را در حالت $A = \mathbb{N}$ ثابت کنیم. از آنجایی که $\mathrm{Seq}(\mathbb{N}) = \bigcup_{n=۰}^{\infty} \mathbb{N}^n$، چنانچه بتوانیم دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \geq ۱\rangle$ را برای شمارش‌های $\mathbb{N}^n$

تولید کنیم، در آن صورت حکم قضیه از قضیهٔ ۹.۳ نتیجه خواهد شد. این کار را به طریق بازگشتی انجام می‌دهیم.

فرض کنید g نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ باشد. به‌طریق بازگشتی تعریف کنید

$a_1(i) = \langle i\rangle$ برای هر $i \in \mathbb{N}$،

$a_{n+1}(i) = \langle b_0,\ldots,b_{n-1}, i_2\rangle$ که در اینجا $g(i) = \langle i_1, i_2\rangle$

و $\langle b_0,\ldots,b_{n-1}\rangle = a_n(i_1)$ برای هر $i \in \mathbb{N}$

ایدهٔ پشت این تعریف این است که $a_{n+1}(i)$ را $(n+1)$تایی که از کنار هم قرار دادن i_1امین nتایی (از شمارش nتایی‌ها که در مرحلهٔ قبل ساخته شده‌اند، یعنی a_n) و i_2 حاصل می‌شود، تعریف کنیم. اثبات استقرائی ساده‌ای نشان می‌دهد که برای هر $n \geq 1$، a_n بروی $\mathbb{N}^n$ است و بنابراین $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{N}^n$ شماراست. چون $\mathbb{N}^0 = \{\langle\rangle\}$ بنابراین، $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{N}^n$ نیز شماراست. □

۱۱.۳ نتیجه. مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعهٔ شمارا، شماراست.

برهان. تابع F با تعریف $F(\langle a_0,\ldots,a_{n-1}\rangle) = \{a_0,\ldots,a_{n-1}\}$ مجموعهٔ شمارای $\mathrm{Seq}(A)$ را بروی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی می‌نگارد. اکنون حکم از قضیهٔ ۴.۳ نتیجه می‌شود. □

قضیهٔ زیر نتیجهٔ سودمند دیگری دربارهٔ مجموعه‌های شماراست.

۱۲.۳ قضیه. مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbb{Q}$ شمارا هستند.

برهان. $\mathbb{Z}$ شماراست، چراکه اتحاد دو مجموعهٔ شماراست. به‌عبارت‌دیگر،

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

$\mathbb{Q}$ شماراست، چراکه تابع $f : \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\}) \to \mathbb{Q}$ با تعریف $f(p,q) = p/q$ مجموعه‌ای شمارا را بروی $\mathbb{Q}$ می‌نگارد. □

۱۳.۳ قضیه. یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک مجموعهٔ شمارا حداکثر تعداد شمارایی ردهٔ هم‌ارزی دارد.

برهان. فرض کنید E یک رابطهٔ هم‌ارزی روی مجموعهٔ شمارای A باشد. تابع F با تعریف $F(a) = [a]_E$ مجموعهٔ شمارای A را بروی مجموعهٔ A/E می‌نگارد. بنا به قضیهٔ ۴.۳، A/E حداکثر شماراست. □

۱۴.۳ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A}$ ساختاری با عالم A و $C \subseteq A$ حداکثر شمارا باشد. آن‌گاه بستار C، $\overline{C}$، نیز حداکثر شماراست.

برهان. قضیهٔ ۱۰.۵ از فصل ۳ نشان می‌دهد که $\overline{C} = \bigcup_{i=\circ}^{\infty} C_i$، که در اینجا $C_\circ = C$ و $C_{i+۱} = C_i \cup F_\circ[C_i^{f_\circ}] \cup \cdots \cup F_{n-۱}[C_i^{f_n-۱}]$. بنابراین، کافی است دستگاهی از شمارش‌های $\langle C_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ تولید کنیم.

فرض کنید $\langle c(k) \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ شمارشی از C و g نگاشتی از $\mathbb{N}$ بروی مجموعهٔ شمارش‌پذیر $(n+۱) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{f_\circ} \times \cdots \times \mathbb{N}^{f_{n-۱}}$ باشد. به‌گونهٔ بازگشتی، دستگاهی از شمارش‌های $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a_\circ(k) = c(k) \quad \text{برای هر } k \in \mathbb{N},$$

$$a_{i+۱}(k) = \begin{cases} F_p\big(a_i(r_p^\circ), \ldots, a_i(r_p^{f_p-۱})\big) & \circ \le p \le n-۱ \\ a_i(q) & p = n, \end{cases}$$

که در اینجا $g(k) = \langle p, q, \langle r_\circ^\circ, \ldots, r_\circ^{f_\circ-۱}\rangle, \ldots, \langle r_{n-۱}^\circ, \ldots, r_{n-۱}^{f_{n-۱}-۱}\rangle\rangle$.

عضو $a_{i+۱}$ را به‌گونه‌ای تعریف کرده‌ایم که در آن بتوان به‌راحتی دید اگر a_i، C_i را بشمرد، در این صورت $a_{i+۱}$ نیز $C_{i+۱}$ را می‌شمارد (از طریق چندین بار تکرار). با استقرا، ثابت می‌شود برای هر $i \in \mathbb{N}$، a_i، C_i را می‌شمارد. این همان است که می‌خواستیم اثبات کنیم. □

این بخش را با تعریف عدد اصلی مجموعه‌های شمارا به‌پایان می‌بریم.

۱۵.۳ تعریف. برای هر مجموعهٔ شمارای A، $|A| = \mathbb{N}$.

عدد اصلی مجموعه‌های شمارا (یا همان مجموعهٔ اعداد طبیعی، چنانچه به عنوان یک عدد اصلی در نظر گرفته شود) را با نماد $\aleph_0$ (الف صفر) نشان می‌دهیم.
اکنون تعدادی از قضایای این بخش را بر حسب نماد جدید بازگو می‌کنیم.

۱۶.۳ قضیه.

الف) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $n < \aleph_0$. اگر $\kappa \geq \aleph_0$ به‌ازای عدد اصلی مانند k، در این صورت $\kappa = \aleph_0$، یا به‌ازای $n \in \mathbb{N}$یی، $\kappa = n$ (این همان نتیجهٔ **۳.۳** است).

ب) اگر $|A| = \aleph_0$ و $|B| = \aleph_0$، آن‌گاه $|A \cup B| = \aleph_0$ و $|A \times B| = \aleph_0$ (قضایای **۵.۳** و **۷.۳**).

ج) اگر $|A| = \aleph_0$، آن‌گاه $|\mathrm{Seq}(A)| = \aleph_0$ (قضیهٔ **۱۰.۳**).

تمرین‌ها

۱.۳ فرض کنید $|A_1| = |A_2|$ و $|B_1| = |B_2|$. ثابت کنید

الف) اگر $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ و $B_1 \cap B_2 = \varnothing$، آن‌گاه $|A_1 \cup A_2| = |B_1 \cup B_2|$.

ب) $|A_1 \times A_2| = |B_1 \times B_2|$.

ج) $|\mathrm{Seq}(A_1)| = |\mathrm{Seq}(A_2)|$.

۲.۳ اجتماع یک مجموعهٔ متناهی و یک مجموعهٔ شمارا، شماراست.

۳.۳ اگر $A \neq \varnothing$ متناهی باشد و B شمارا باشد، آن‌گاه $A \times B$ شماراست.

۴.۳ اگر $A \neq \varnothing$ متناهی باشد، آن‌گاه $\mathrm{Seq}(A)$ شماراست.

۵.۳ فرض کنید A شمارا باشد. مجموعهٔ $[A]^n = \{S \subseteq A \mid |S| = n\}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $n \neq 0$ شماراست.

۶.۳ دنبالهٔ $\langle s_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ از اعداد طبیعی نهایتاً ثابت است هرگاه $n_0 \in \mathbb{N}$ و $s \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $s_n = s$ به‌ازای هر $n \geq n_0$. نشان دهید که مجموعهٔ دنباله‌های نهایتاً ثابت اعداد طبیعی شماراست.

۷.۳ دنبالهٔ $\langle s_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ از اعداد طبیعی (نهایتاً) متناوب است هرگاه اعداد $n_0, p \in \mathbb{N}$ و $p \geq 1$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $n \geq n_0$، $s_{n+p} = s_n$. ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های متناوب اعداد طبیعی مجموعه‌ای شماراست.

۸.۳ دنبالهٔ $\langle s_n\rangle_{n=0}^{+\infty}$ از اعداد طبیعی یک تصاعد حسابی نامیده می‌شود هرگاه $d \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $s_{n+1} = s_n + d$. ثابت کنید مجموعهٔ همه تصاعدهای حسابی مجموعه‌ای شماراست.

۹.۳ برای هر $s = \langle s_0, \ldots, s_{n-1}\rangle \in \mathrm{Seq}(\mathbb{N} - \{0\})$، فرض کنید $f(s) = p_0^{s_0} \cdots p_{n-1}^{s_{n-1}}$، که در آن p_i، i امین عدد اول است. نشان دهید f یک‌به‌یک است و با استفاده از این حقیقت، اثبات دیگری برای برابری $|\mathrm{Seq}(\mathbb{N})| = \aleph_0$ ارائه دهید.

۱۰.۳ فرض کنید $(S, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد و $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دنباله‌ای نامتناهی از زیرمجموعه‌های متناهی S باشد. در این صورت، $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ حداکثر شماراست. [راهنمایی: برای هر $n \in \mathbb{N}$، یگانه شمارش $\langle a_n(k) \mid k < |A_n|\rangle$ از A_n در ترتیب افزایشی را در نظر بگیرید.]

۱۱.۳ هر افراز از یک مجموعهٔ حداکثر شمارا دارای مجموعه‌ای از نماینده‌ها است.

۴ ترتیب‌های خطی

در فصل قبل شمارش‌پذیری تعدادی از مجموعه‌های آشنا را، مانند مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q}$، ثابت کردیم. نکتهٔ مهمی که مایلیم در اینجا بیان کنیم این است که صرفاً از روی عدد اصلی مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{Q}$ نمی‌توان تمایزی بین آن‌ها قائل شد. مع‌هذا، این مجموعه‌ها «به نظر» کاملاً متفاوت می‌رسند (آن‌ها را به‌صورت زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی مجسم کنید!). برای اینکه این تفاوت را دریابیم باید طریقهٔ مرتب‌شدنشان را بررسی کنیم. از اینجا معلوم می‌شود که ترتیب اعداد طبیعی برحسب اندازه با ترتیب معمول $\mathbb{Z}$ کاملاً فرق دارد (مثلاً، $\mathbb{N}$ کوچک‌ترین عضو دارد ولی $\mathbb{Z}$ ندارد) و هر دوی این‌ها با ترتیب معمول

$\mathbb{Q}$ کاملاً فرق دارند (مثلاً، بین هر دو عدد گویای متمایز، بی‌نهایت عدد گویا هست، درحالی‌که بین هر دو عدد صحیح متمایز، فقط تعداد متناهی عدد صحیح وجود دارد). ترتیب‌های خطی یکی از ابزارهای مهم برای مطالعهٔ عمیق خواص مجموعه‌هاست. از این‌رو، این بخش را به نظریهٔ مجموعه‌های مرتب خطی اختصاص می‌دهیم و در ضمن آن، مجموعه‌های شمارا را برای روشن شدن مطالب به کار می‌بریم.

۱.۴ تعریف. دو مجموعهٔ مرتب خطی $(A, <)$ و $(B, \prec)$ مشابه (دارای نوع ترتیب یکسان) هستند هرگاه یکریخت باشند، یعنی نگاشت یک‌به‌یک f روی A بروی B موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a_1, a_2 \in A$، $a_1 < a_2$ برقرار باشد اگر و تنها اگر $f(a_1) \prec f(a_2)$. (تعریف ۱۷.۵ در فصل ۲ و لم بعد از آن را ببینید).

مجموعه‌های مرتب مشابه، شبیه یکدیگر به نظر می‌رسند، یعنی اینکه ترتیب‌های آن‌ها خواص یکسانی دارند [مثال ۸.۵ در فصل ۳ را ببینید]. بنابراین $(\mathbb{N}, <)$ و $(\mathbb{Z}, <)$ مشابه نیستند و همین‌طور هم، نه $(\mathbb{Z}, <)$ و $(\mathbb{Q}, <)$ و نه $(\mathbb{N}, <)$ و $(\mathbb{Q}, <)$ مشابه هم نیستند. (در اینجا، $<$ همان رابطهٔ ترتیب معمول اعداد است.)

به‌آسانی ثابت می‌شود خاصیت مشابه بودن همانند یک رابطهٔ هم‌ارزی رفتار می‌کند، یعنی

الف) $(A, <)$ مشابه $(A, <)$ است.

ب) اگر $(A, <)$ مشابه $(B, \prec)$ باشد، آن‌گاه $(B, \prec)$ مشابه $(A, <)$ است.

ج) اگر $(A_1, <_1)$ مشابه $(A_2, <_2)$ و $(A_2, <_2)$ مشابه $(A_3, <_3)$ باشد، آن‌گاه $(A_1, <_1)$ مشابه $(A_3, <_3)$ است.

همانند اعداد اصلی در اینجا نیز می‌توان به هر مجموعهٔ مرتب خطی، شیئی به‌نام نوع ترتیب وابسته کرد با این خاصیت که مجموعه‌های مرتب مشابه دارای نوع ترتیب یکسانی باشند. تعریف صوری نوع‌های ترتیب مشکلات فنی دارد، از این‌رو ما آن‌ها را صرفاً به‌صورت استعاره به کارمی‌بریم، گرچه می‌توان این کار را هم نکرد و مجموعه‌های مشابه را جایگزین آن‌ها ساخت. در فصل ٦ تعریف دقیقی از نوع

ترتیب مجموعه‌های خوش‌ترتیب (از مهم‌ترین حالت‌های خاص) ارائه خواهیم کرد.

بررسی ترتیب‌های خطی را با اثبات اینکه یک مجموعهٔ متناهی با تقریب یکریختی فقط به یک طریق مرتب خطی می‌شود، شروع می‌کنیم.

۲.۴ لم. هر ترتیب خطی روی یک مجموعهٔ متناهی، خوش‌ترتیبی است.

برهان. با استقرا نشان می‌دهیم هر زیرمجموعهٔ ناتهی و متناهی مانند B از مجموعهٔ مرتب خطی $(A, <)$ دارای کوچک‌ترین عضو است. اگر B یک عضو داشته باشد، به‌وضوح حکم درست است. فرض کنید حکم برای هر مجموعهٔ n عضوی برقرار باشد و B دارای $n+۱$ عضو باشد. در این صورت $B = \{b\} \cup B'$، که در آن B' دارای n عضو است و $b \notin B'$. بنا به فرض استقرا، B' دارای کوچک‌ترین عضو مانند b' است. اگر $b' < b$، در این صورت b' کوچک‌ترین عضو B است و در غیر این صورت b کوچک‌ترین عضو B است. در هر دو حالت، B دارای کوچک‌ترین عضو است. □

۳.۴ قضیه. اگر $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ دو مجموعه مرتب خطی باشند و $|A_۱| = |A_۲|$ متناهی باشد، آن‌گاه $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ مشابه‌اند.

برهان. با استقرا روی $n = |A_۱| = |A_۲|$ عمل می‌کنیم. اگر $n = ۰$، در این صورت $A_۱ = A_۲ = \varnothing$ و به‌وضوح، $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ یکریخت‌اند. فرض کنید حکم برای مجموعه‌های n عضوی مرتب خطی برقرار باشد. قرار دهید $|A_۱| = |A_۲| = n+۱$. ثابت می‌کنیم $<_۱$ و $<_۲$ خوش‌ترتیبی هستند. لذا، فرض کنید $a_۱$ (به همین ترتیب $a_۲$) کوچک‌ترین عضو $(A_۱, <_۱)$ [از $(A_۲, <_۲)$] باشد. اکنون داریم $|A_۱ - \{a_۱\}| = |A_۲ - \{a_۲\}| = n$ و لذا بنا به فرض استقرا، یکریختی g بین $(A_۱ - \{a_۱\}, <_۱ \cap (A_۱ - \{a_۱\})^۲)$ و $(A_۲ - \{a_۲\}, <_۲ \cap (A_۲ - \{a_۲\})^۲)$ وجود دارد. تابع $f : A_۱ \to A_۲$ را به‌صورت

$$f(a_۱) = a_۲,$$

$$f(a) = g(a) \qquad a \in A_۱ - \{a_۱\}$$

تعریف کنید. به‌راحتی می‌توان دید که f یکریختی بین $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ است. □

این بررسی را با ذکر این نکته که برای مجموعه‌های متناهی نوع‌های ترتیب متناظر با اعداد اصلی هستند به پایان می‌بریم. همان‌طور که مثال‌های ابتدائی این بخش نشان می‌دهند ترتیب‌های خطی، روی مجموعه‌های بی‌پایان، خیلی جالب‌ترند. اکنون به بررسی چند شیوهٔ ساختن ترتیب‌های خطی، که بعداً مفید خواهند بود، می‌پردازیم.

۴.۴ لم. اگر $(A, <)$ مرتب خطی باشد، آن‌گاه $(A, <^{-۱})$ نیز مرتب خطی است.

برهان. به عهدهٔ خواننده است (تمرین **۳.۵** در فصل **۲** را ببینید). □

برای نمونه، وارون مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{N}, <)$، مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{N}, <^{-۱})$ است که در آن $۰ <^{-۱} ۱ <^{-۱} ۲ <^{-۱} ۳ <^{-۱} ۴ \ldots$. توجه کنید که این ترتیب شبیه ترتیب اعداد منفی برحسب اندازهٔ آن‌هاست. یعنی اینکه،

$$-۱ < -۲ < -۳ < -۴ < \cdots$$

که خوش‌ترتیبی نیز نیست.

۵.۴ لم. فرض کنید $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ دو مجموعهٔ مرتب خطی باشند و $A_۱ \cap A_۲ = \varnothing$. رابطهٔ $<$ روی $A = A_۱ \cup A_۲$ که به‌صورت

$a < b$ اگر و تنها اگر $a, b \in A_۱$ و $a <_۱ b$

یا $a, b \in A_۲$ و $a <_۲ b$

یا $a \in A_۱$ و $b \in A_۲$

تعریف می‌شود، یک ترتیب خطی است.

برهان. این حکم تمرین **٦.۵** در فصل **۲** است و بنابراین بازهم به عهدهٔ خواننده است. □

به‌عبارت‌دیگر، مجموعهٔ A در لم بالا با قرار دادن اعضای $A_۱$ قبل از اعضای $A_۲$

مرتب شده است. در این حالت گوییم مجموعهٔ مرتب خطی $(A, <)$ مجموع دو مجموعهٔ مرتب خطی $(A_1, <_1)$ و $(A_2, <_2)$ است.

دقت کنید که نوع ترتیب مجموع فوق به مجموعه‌های مرتب خاص $(A_1, <_1)$ و $(A_2, <_2)$ بستگی ندارد، بلکه فقط به نوع‌های آن‌ها وابسته است (تمرین ۱.۴ را ببینید). برای مثال، مجموعهٔ مرتب خطی همهٔ اعداد صحیح $(\mathbb{Z}, <)$ مشابه مجموع مجموعه‌های مرتب خطی $(\mathbb{N}, <^{-1})$ و $(\mathbb{N}, <)$ است (در اینجا $<$ ترتیب معمول اعداد برحسب اندازه‌شان است).

در نتیجهٔ بعدی، طریقهٔ مرتب کردن حاصل‌ضرب دکارتی را بررسی می‌کنیم.

۶.۴ لم. فرض کنید $(A_1, <_1)$ و $(A_2, <_2)$ دو مجموعهٔ مرتب خطی باشند. رابطهٔ $<$ روی $A = A_1 \times A_2$ که به‌صورت

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a_1 <_1 b_1 \quad \text{یا} \quad (\, a_1 = b_1 \text{ و } a_2 < b_2 \,)$$

تعریف می‌شود، یک ترتیب خطی است.

برهان. تعدی: چنانچه $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ و $(b_1, b_2) < (c_1, c_2)$، در این صورت یا $a_1 <_1 b_1$ یا $(a_1 = b_1 \text{ و } a_2 <_2 b_2)$.

در حالت اول، $a_1 <_1 b_1$ و $b_1 \le_1 c_1$ نتیجه می‌دهند $a_1 <_1 c_1$. در حالت دوم، یا $b_1 <_1 c_1$ و در نتیجه، دوباره $a_1 <_1 c_1$ و یا $b_1 = c_1$ و $b_2 <_2 c_2$ و لذا $a_1 = c_1$ و $a_2 <_2 c_2$. در هر حالت، نتیجه می‌گیریم که $(a_1, a_2) < (c_1, c_2)$.

پادتقارنی: بلافاصله از پادتقارنی $<_1$ و $<_2$ نتیجه می‌شود.

خطی بودن: (a_1, a_2) و (b_1, b_2) را در نظر بگیرید، یکی از حالت‌های زیر باید اتفاق بیفتد:

الف) $a_1 <_1 b_1$ [لذا $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$].

ب) $b_1 <_1 a_1$ [لذا $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$].

ج) $a_1 = b_1$ و $a_2 <_2 b_2$ [لذا $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$].

د) $a_1 = b_1$ و $b_2 <_2 a_2$ [لذا $(b_1, b_2) < (a_1, a_2)$].

ه) $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ [لذا $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$].

در هر حالت (a_1, a_2) و (b_1, b_2) نسبت به $<$ مقایسه‌پذیرند. □

رابطهٔ $<$ فوق‌الذکر را ترتیب الفبایی (حاصل‌ضرب الفبایی) $A_1 \times A_2$ می‌نامیم. دلیل این نامگذاری این است که اگر $A_1 = A_2 = \{a, b, \ldots, z\}$ مجموعهٔ همه حروف الفبای زبان انگلیسی باشد و $<_1=<_2$ ترتیب الفبایی باشد، یعنی $a <_1 b <_1 c <_1 \cdots <_1 z$، در این صورت رابطهٔ $<$ اعضای $A_1 \times A_2$ (یا همان «واژه‌های دو حرفی») را طوری مرتب می‌کند که گویی در یک فرهنگ لغت مرتب شده‌اند.

مفهوم ترتیب الفبایی را به‌راحتی می‌توان به حاصل‌ضرب دنبالهٔ متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌های مرتب خطی تعمیم داد.

۷.۴ قضیه. فرض کنید $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ دستگاهی اندیس‌دار از مجموعه‌های مرتب خطی باشد، که در اینجا $I \subseteq \mathbb{N}$. رابطهٔ $\prec$ روی $\prod_{i \in I} A_i$ با تعریف

$f \prec g$ اگر و تنها اگر $\operatorname{diff}(f,g) = \{i \in I \mid f_i \neq g_i\} \neq \varnothing$ و $f_{i_0} <_{i_0} g_{i_0}$،
که در آن i_0 کوچک‌ترین عضو $\operatorname{diff}(f,g)$ است
(نسبت به ترتیب معمول $<$ اعداد طبیعی)

یک ترتیب خطی از $\prod_{i \in I} A_i$ است. (این ترتیب را ترتیب الفبایی می‌نامند).

برهان. تعدی: فرض کنید $f \prec g$ و $g \prec h$ و فرض کنید i_0 [و به همین ترتیب j_0] کوچک‌ترین عضو $\operatorname{diff}(f,g)$ [و به‌همین ترتیب $\operatorname{diff}(g,h)$] باشد. اگر $i_0 < j_0$ داریم $f_{i_0} < g_{i_0}$ و $g_{i_0} = h_{i_0}$، و لذا $f_{i_0} < h_{i_0}$ و i_0 کوچک‌ترین عضو $\operatorname{diff}(f,h)$ است. پس، نتیجه می‌گیریم $f \prec h$. حالت‌های $i_0 = j_0$ و $i_0 > j_0$ نیز مشابهٔ همین حالت‌اند.

پادتقارنی: رخ دادن $f \prec g$ و $g \prec f$ محال است، زیرا در این صورت $f_{i_0} < g_{i_0}$ و $g_{i_0} < f_{i_0}$، که در آن $i_0 =$ کوچک‌ترین عضو $\operatorname{diff}(f,g) = \operatorname{diff}(g,f)$.

خطی بودن: اگر $\operatorname{diff}(f,g) = \varnothing$، داریم $f = g$. در غیر این حالت، اگر i_0 کوچک‌ترین عضو $\operatorname{diff}(f,g)$ باشد یا باید $f_{i_0} < g_{i_0}$ یا $f_{i_0} > g_{i_0}$، و در نتیجه یا $f \prec g$ یا $f \succ g$. □

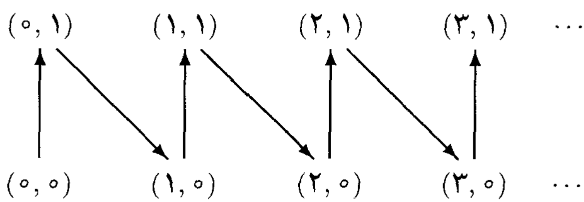
در حالت خاص، اگر برای هر $i \in I = \mathbb{N}$، $(A_i, <_i) = (A, <)$ رابطهٔ $\prec$ همان ترتیب الفبایی مجموعهٔ $A^{\mathbb{N}}$ متشکل از همهٔ دنباله‌های نامتناهی از اعضای A است.

همچنین می‌توان قبل از مقایسهٔ مختص‌های اول، مختص‌های دوم را مقایسه کرد و به این ترتیب رابطهٔ ترتیب پادالفبایی $\prec$ را روی $A_1 \times A_2$ تعریف کرد، یعنی

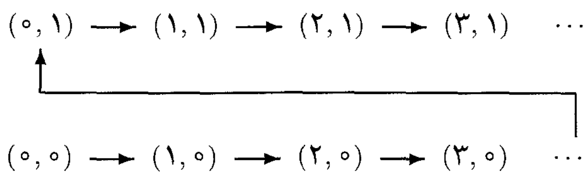
$(a_1, a_2) \prec (b_1, b_2)$ اگر و تنها اگر $a_2 <_2 b_2$ یا $(a_2 = b_2$ و $a_1 <_1 b_1)$.

اثبات اینکه $\prec$ ترتیب خطی است کاملاً مشابهٔ حالت الفبایی انجام می‌شود. در حالت کلی، این دو ترتیب کاملاً متفاوت‌اند. برای مثال ترتیب الفبایی و پادالفبایی را برای حاصل‌ضرب $A_1 = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ و $A_2 = \{0, 1\}$ (که هر دو برحسب اندازه مرتب شده‌اند) مقایسه کنید.

ترتیب الفبایی



ترتیب پادالفبایی



ترتیب اولی شبیه $(\mathbb{N}, <)$ است ولی دومی نه. [دومی حاصل‌جمع دو نسخه از $(\mathbb{N}, <)$ است].

نتایج بالا نشان می‌دهند روی مجموعه‌های شمارا ترتیب‌های خطی بسیار متنوعی می‌توان تعریف کرد. از این‌رو، قدری تعجب خواهید کرد اگر بدانید که برای مجموعه‌های شمارا یک ترتیب خطی کلی وجود دارد. بدین معنی که هر مجموعهٔ مرتب خطی شمارا با یکی از زیرمجموعه‌های آن مشابه است. در ادامهٔ این بخش به اثبات این نتیجهٔ مهم می‌پردازیم.

۸.۴ تعریف. مجموعهٔ مرتب $(X,<)$ چگال است اگر حداقل دو عضو داشته باشد و برای هر $a,b \in X$ شرط $a<b$ وجود عضوی مانند $x \in X$ را ایجاب کند که $a<x<b$.

کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو یک مجموعهٔ مرتب خطی را (درصورت وجود) نقاط انتهایی آن مجموعه می‌نامیم.

مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbb{Q}$، که برحسب اندازه مرتب شده است، از با اهمیت‌ترین مثال‌های یک مجموعهٔ مرتب خطی شمارای چگال است. این مجموعه چگال است، زیرا اگر r و s دو عدد گویا باشند و $r<s$، در آن صورت $x=(r+s)/۲$ نیز عدد گویا است و $r<x<s$. علاوه بر این، $(\mathbb{Q},<)$ نقاط انتهایی ندارد (چنانچه $r \in \mathbb{Q}$، در این صورت $r+۱, r-۱ \in \mathbb{Q}$ و $r-۱<r<r+۱$). در تمرین‌های ۶.۴ و ۷.۴ مثال‌های دیگری از مجموعه‌های مرتب خطی چگال و شمارا داده شده است. با وجود این، ما اثبات می‌کنیم مجموعه‌های مرتب خطی شمارا بدون نقاط انتهایی دارای نوع ترتیب یکسانی هستند.

۹.۴ قضیه. فرض کنید $(P,\prec)$ و $(Q,<)$ دو مجموعهٔ مرتب خطی چگال و شمارا بدون نقاط انتهایی باشند. در این صورت $(P,\prec)$ و $(Q,<)$ مشابه‌اند.

برهان. فرض کنید $\langle p_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دنبالهٔ یک‌به‌یکی باشد به‌طوری‌که $P=\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$، همچنین فرض کنید $\langle q_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دنبالهٔ یک‌به‌یکی باشد به‌طوری‌که $Q=\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. تابع h روی زیرمجموعه‌ای از P بتوی Q یک یکریختی جزئی از P به Q نامیده می‌شود به‌شرطی‌که $p \prec p'$ اگر و تنها اگر $h(p) \prec h(p')$ برای هر $p,p' \in \operatorname{dom} h$.

برای اثبات به حکم زیر نیاز داریم: اگر h یکریختی جزئی از P به Q چنان باشد که $\operatorname{dom} h$ متناهی باشد، آن‌گاه برای $p \in P$ و $q \in Q$ یکریختی جزئی $h_{p,q} \supseteq h$ موجود است به‌طوری‌که $p \in \operatorname{dom} h_{p,q}$ و $q \in \operatorname{ran} h_{p,q}$.

برهان حکم بالا. قرار دهید $h=\{(p_{i_۱},q_{i_۱}),\dots,(p_{i_k},q_{i_k})\}$، که در اینجا $p_{i_۱} \prec p_{i_۲} \prec \cdots \prec p_{i_k}$ و از این‌رو $q_{i_۱}<q_{i_۲}<\cdots<q_{i_k}$. اگر $p \notin \operatorname{dom} h$،

داریم $p \prec p_{i_1}$ یا $p_{i_e} \prec p \prec p_{i_{k+1}}$ به‌ازای e و kیی که $1 \leq e \leq k$، یا $p_{i_k} \prec p$. کوچک‌ترین عدد طبیعی n را چنان در نظر بگیرید که q_n با q_{i_1}، ...، q_{i_k} همان رابطه‌ای را داشته باشد که p با p_{i_1}، ...، p_{i_k}ها دارد. به‌عبارت دقیق‌تر، q_n به‌گونه‌ای باشد که

اگر $p \prec p_{i_1}$، آن‌گاه $q_n < q_{i_1}$،

اگر $p_{i_1} \prec p \prec p_{i+1}$، آن‌گاه $q_i < q_n < q_{i+1}$ و

اگر $p_{i_k} \prec p$، آن‌گاه $q_{i_k} < q_n$.

امکان چنین انتخابی از این واقعیت ناشی می‌شود که $(Q, <)$ مرتب خطی چگال است بدون نقاط انتهایی. واضح است که $h' = h \cup \{(p, q_n)\}$ یکریختی جزئی است. اگر $q \in \operatorname{ran} h'$، اثبات تمام است. اگر $q \notin \operatorname{ran} h'$، در این صورت با استدلالی مشابه قبل (که در آن نقش P و Q برعکس شده است) عضو $p_m \in P$ وجود دارد به گونه‌ای که $h' \cup \{(p_m, q)\}$ یکریختی جزئی است. اکنون کوچک‌ترین این mها را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $h_{p,q} = h' \cup \{(p_m, q)\}$. حکم اکنون اثبات می‌شود. □

حال به‌طور بازگشتی دنباله‌ای از یکریختی‌های جزئی موافق می‌سازیم. قرار دهید

$$h_0 = \varnothing,$$

$$h_{n+1} = (h_n)_{p_n, q_n},$$

که در اینجا $(h_n)_{p_n,q_n}$ توسیعی از h_n (که از حکم بالا به‌دست می‌آید) است به‌قسمی که $p_n \in \operatorname{dom}(h_n)_{p_n,q_n}$ و $q_n \in \operatorname{ran}(h_n)_{p_n,q_n}$. قرار دهید $h = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n$. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که $h : P \to Q$ یک یکریختی بین $(P, \prec)$ و $(Q <)$ است. □

۴.۱۰ قضیه. هر مجموعهٔ مرتب خطی شمارا را می‌توان به‌طور یکریخت بتوی یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال و شمارا بدون نقاط انتهایی نگاشت.

برهان. نسخهٔ یک طرفهٔ اثبات قبلی برای این قضیه کار خواهد کرد. فرض کنید $(P, \prec)$ مجموعهٔ مرتب خطی شمارا و $(Q, <)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی

چگال و شمارا بدون نقاط انتهایی باشد. برای هر یکریختی جزئی h از مجموعهٔ مرتب $(P, \prec)$ بتوی Q و هر $p \in P$، یکریختی جزئی مانند $h \subseteq h_p$ را طوری تعریف می‌کنیم که $p \in \operatorname{dom} h_p$. اکنون بار دیگر تعریف بازگشتی را به کار می‌بریم. □

تمرین‌ها

۱.۴ فرض کنید $(A_۱, <_۱)$ مشابه $(B_۱, \prec_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ مشابه $(B_۲, \prec_۲)$ باشد.

الف) مجموع $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ با مجموع $(B_۱, \prec_۱)$ و $(B_۲, \prec_۲)$ مشابه است با این فرض که $A_۱ \cap A_۲ = \varnothing = B_۱ \cap B_۲$.

ب) ضرب الفبایی $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ با ضرب الفبایی $(B_۱, \prec_۱)$ و $(B_۲, \prec_۲)$ مشابه است.

۲.۴ مثالی از ترتیب‌های خطی $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ ارائه دهید که برای آن‌ها نوع ترتیب مجموع $(A_۱, <_۱)$ و $(A_۲, <_۲)$ با نوع ترتیب مجموع $(A_۲, <_۲)$ و $(A_۱, <_۱)$ یکی نباشد («جمع نوع‌های ترتیب تعویض‌پذیر نیست»). آیا برای ضرب الفبایی حکم مشابهی برقرار است.

۳.۴ ثابت کنید که مجموع و ضرب الفبایی دو خوش‌ترتیبی، خوش‌ترتیبی است.

۴.۴ اگر $\langle A_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌های مرتب خطی از اعداد طبیعی باشد و $|A_i| \geq ۲$ برای هر $i \in \mathbb{N}$، آن‌گاه ترتیب الفبایی $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ خوش‌ترتیبی نیست.

۵.۴ فرض کنید $\langle (A_i, <_i) \mid i \in I \rangle$ دستگاهی اندیس‌دار از مجموعه‌های مرتب خطی دوبه‌دو مجزا باشد و $I \subseteq \mathbb{N}$. رابطهٔ $\prec$ که روی $\bigcup_{i \in I} A_i$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \prec b$ اگر و تنها اگر یا به‌ازای $i \in I$ای، $a, b \in A_i$ و $a <_i b$ یا $a \in A_i$، $b \in A_j$ و $i < j$ (در ترتیب معمول اعداد طبیعی)، یک ترتیب خطی است. اگر همهٔ $<_i$ها خوش‌ترتیبی باشند، آن‌گاه $\prec$ نیز خوش‌ترتیبی است.

۶.۴ فرض کنید $(\mathbb{Z}, <)$ مجموعهٔ اعداد صحیح با ترتیب خطی معمول باشد. فرض کنید $\prec$ ترتیب الفبایی از $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ تعریف شده در قضیهٔ ۴.۷ باشد. و

فرض کنید $FS \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ مجموعهٔ همه اعضای نهایتاً ثابت از $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ باشد، یعنی $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle \in FS$ اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $n_{\circ} \in \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{Z}$ به‌طوری‌که $a_i = a$ برای هر $i \geq n_{\circ}$ (با تمرین ۶.۳ مقایسه کنید). ثابت کنید که FS شماراست و $(FS, \prec \cap FS^{۲})$ یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال بدون نقطهٔ پایانی است.

۷.۴ فرض کنید $\prec$ ترتیب الفبایی $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ باشد (که در آن $\mathbb{N}$ به‌طریق معمول مرتب شده است) و فرض کنید $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های نهایتاً متناوب ولی نه نهایتاً ثابت از اعداد طبیعی باشد (برای تعریف این مفاهیم، تمرین‌های ۳.۶ و ۳.۷ را ببینید). نشان دهید که $(P, \prec \cap p^{۲})$ یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال شمارا بدون نقاط پایانی است.

۸.۴ فرض کنید $(A, <)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد. روی $\mathrm{Seq}(A)$ ترتیب $\prec$ را به این صورت تعریف کنید: $\langle a_{\circ}, \ldots, a_{m-۱} \rangle \prec \langle b_{\circ}, \ldots, b_{n-۱} \rangle$ اگر و تنها اگر عدد $k < n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a_i = b_i$ برای هر $i < k$ و یا $a_k < b_k$ یا a_k تعریف نشده باشد (یعنی، $k = m < n$). ثابت کنید که $\prec$ ترتیب خطی است. اگر $(A, <)$ خوش‌ترتیبی باشد، $(\mathrm{Seq}(A), \prec)$ نیز خوش‌ترتیبی است. (در این ترتیب اگر یک دنبالهٔ متناهی توسیع دنبالهٔ کوتاه‌تری باشد، دنبالهٔ کوتاه‌تر قبل از دنبالهٔ بلندتر می‌آید.)

۹.۴ فرض کنید $(A, <)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد. روی $\mathrm{Seq}(A)$ ترتیب $\prec$ را به‌صورت زیر تعریف کنید: $\langle a_{\circ}, \ldots, a_{m-۱} \rangle \prec \langle b_{\circ}, \ldots, b_{n-۱} \rangle$ اگر و تنها اگر عدد $k < m$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a_i = b_i$ برای هر $i < k$ و یا $a_k < b_k$ یا b_k تعریف نشده باشد (یعنی، $k = n < m$). ثابت کنید $\prec$ یک ترتیب خطی است. اگر $|A| \geq ۲$، این رابطه خوش‌ترتیبی نیست. (در این ترتیب اگر یک دنبالهٔ متناهی توسیع یک دنبالهٔ کوتاه‌تر باشد، دنباله بلندتر قبل از دنبالهٔ کوتاه‌تر می‌آید.) اگر $A = \mathbb{N}$ و $<$ ترتیب معمول اعداد طبیعی باشد، $\prec$ را ترتیب بروئوور-کلِنه $\mathrm{Seq}(\mathbb{N})$ می‌نامند، این ترتیبِ خطی چگال بدون کوچک‌ترین عضو و دارای بزرگ‌ترین عضو $\langle\rangle$ است.

۱۰.۴ فرض کنید $(A, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی بدون عضو پایانی باشد و $A \neq \varnothing$. بازهٔ بسته $[a, b]$ به‌ازای $a, b \in A$ به‌صورت $[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}$ تعریف می‌شود. فرض کنید هر بازهٔ بسته $[a, b]$، $a, b \in A$ تعداد متناهی عضو دارد. در این صورت، $(A, <)$ با مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ در ترتیب معمولی مشابه است.

۱۱.۴ فرض کنید $(A, <)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال باشد. نشان دهید که برای هر $a, b \in A$ که $a < b$، بازهٔ بسته $[a, b]$ تعریف شده در تمرین ۱۰.۴، تعداد نامتناهی عضو دارد.

۱۲.۴ نشان دهید همهٔ مجموعه‌های مرتب خطی چگال شمارا دارای دو نقطهٔ پایانی با هم مشابه‌اند.

۱۳.۴ فرض کنید $(\mathbb{Q}, <)$ مجموعهٔ اعداد گویا در ترتیب معمولی باشد. زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{Q}$ بیابید که مشابه باشد با

الف) مجموع دو نسخه از $(\mathbb{N}, <)$.

ب) مجموع $(\mathbb{N}, <)$ و $(\mathbb{N}, <^{-1})$.

ج) ضرب الفبایی $(\mathbb{N}, <)$ با $(\mathbb{N}, <)$.

۵ ترتیب‌های خطی کامل

در فصل گذشته دیدیم که ترتیب معمول $<$ در اعداد گویای $\mathbb{Q}$ در بین همهٔ ترتیب‌های خطی شمارا کلی است (قضیهٔ ۱۰.۴). با وجود این، همین که به اعمال حسابی روی $\mathbb{Q}$ می‌پردازیم کمبودهایی به چشم می‌آید. برای مثال، عدد گویای x وجود ندارد به‌قسمی که $x^2 = 2$ (تمرین ۱.۵). وقتی نمایش اعشاری اعداد گویا را بررسی می‌کنیم به مورد دیگری از این نوع برمی‌خوریم. هر عدد گویا بسط اعشاری دارد که یا متناهی است (مثل $0.25 = 1/4$) یا نامتناهی و از مرحله‌ای به بعد متناوب (مثل $0.1666\cdots = 1/6$) (فصل ۱.۱۰ را ببینید). هر چند برای دنبالهٔ دلخواه $\langle a_i \rangle_{i=0}^{\infty}$ از اعداد صحیح بین ۰ و ۹ می‌توان بسط اعشاری $0.a_1a_2a_3\ldots$ را تشکیل داد، چنانچه دنبالهٔ مذکور متناهی یا مالاً متناوب نباشد عدد

گویای x را نمی‌توان یافت به‌طوری‌که $x = ۰/a_۱a_۲a_۳\ldots$ (به‌عنوان مثال خاص، $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱\ldots$ را در نظر بگیرید). از این ملاحظات اکنون آشکار می‌شود که مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{Q}, <)$ شکاف‌هایی دارد.

مفهوم شکاف را می‌توان صرفاً برحسب ترتیب خطی بیان کرد.

۱.۵ تعریف. فرض کنید $(P, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد. یک شکاف عبارت است از زوج (A, B) از مجموعه‌ها به‌طوری‌که

الف) A و B زیرمجموعه‌های ناتهی و مجزا از P هستند و $A \cup B = P$.

ب) چنانچه $a \in A$ و $b \in B$، در این صورت $a < b$.

ج) A بزرگ‌ترین عضو و B کوچک‌ترین عضو ندارد.

برای نمونه، قرار دهید $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \le ۰ \quad \text{یا} \quad (x > ۰ \text{ و } x^۲ < ۲)\}$. بررسی اینکه (A, B) یک شکاف در $\mathbb{Q}$ است دشوار نیست (تمرین ۲.۵). به همین نحو، یک بسط اعشاری نامتناهی که مالاً متناوب نیست یک شکاف به‌دست می‌دهد (تمرین ۳.۵).

به یاد بیاورید که در فصل ۲ مفاهیم کران بالا و پایین، سوپریمم و اینفیمم را تعریف کردیم. یک زیرمجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرتب خطی P را کران‌دار می‌نامیم اگر هم از بالا کران‌دار باشد هم از پایین. یک مجموعه از بالا (پایین) کران‌دار است هرگاه کران بالا (پایین) داشته باشد.

فرض کنید (A, B) یک شکاف در یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد. مجموعهٔ A از بالا کران‌دار است، چرا که هر $b \in B$ کران بالایی برای A است. ادعا می‌کنیم A سوپریمم ندارد. زیرا اگر c سوپریمم A باشد، در این صورت به‌راحتی می‌توان دید یا c بزرگ‌ترین عضو A است یا کوچک‌ترین عضو B. از طرف دیگر، فرض کنید S مجموعه‌ای غیرتهی و کران‌دار از بالا باشد. قرار دهید

$$A = \{x \mid x \le s \quad \text{به‌ازای } s \in S \text{ یی}\},$$

$$B = \{x \mid x > s \quad \text{به‌ازای } s \in S \text{ یی}\}.$$

از خواننده می‌خواهیم تحقیق کند که زوج (A, B) در دو شرط اول تعریف شکاف صدق می‌کند. حال فرض کنید S سوپریمم نداشته باشد. لذا (A, B) یک شکاف

است، زیرا در غیر این صورت، بزرگ‌ترین عضو A یا کوچک‌ترین عضو B سوپریمم S خواهند بود.

توجه می‌کنیم که وجود شکاف‌ها ارتباط نزدیکی دارد با وجود یا حتی عدم وجود سوپریمم برای مجموعه‌های کران‌دار. از اینجا به تعریف مجموعه مرتب کامل می‌رسیم.

۲.۵ تعریف. فرض کنید $(P, <)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال باشد. P کامل است هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی $S \subseteq P$ که از بالا کران‌دار است سوپریمم داشته باشد. ملاحظه کنید که $(P, <)$ کامل است اگر و تنها اگر هیچ شکافی نداشته باشد.

همان‌طور که دیدیم مجموعه‌های مرتب خطی چگال، لزوماً کامل نیستند. لیکن هر مجموعهٔ مرتب خطی چگال را با «پر کردن شکاف‌هایش» می‌توان کامل کرد، مجموعهٔ حاصل اساساً به‌طور یکتایی مشخص نمی‌شود. این مطلب مضمون قضیهٔ مهم بعدی است.

۳.۵ قضیه. فرض کنید $(P, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی چگال بدون نقاط انتهایی باشد. در این صورت مجموعهٔ مرتب خطی کامل $(C, \prec)$ وجود دارد به‌طوری‌که

الف) $P \subseteq C$.

ب) اگر $p, q \in P$، در این صورت $p < q$ اگر و تنها اگر $p \prec q$ (یعنی $\prec$ با $<$ روی P یکی است).

ج) P در C چگال است، یعنی برای هر $p, q \in P$ که $p < q$، $c \in C$ موجود است به‌طوری‌که $p \prec c \prec q$.

د) C نقاط انتهایی ندارد.

به‌علاوه، مجموعهٔ مرتب خطی کامل $(C, \prec)$ با تقریب یکریختی روی P منحصر به‌فرد است. به‌بیان دیگر، اگر $(C^*, \prec^*)$ مجموعهٔ مرتب خطی کامل دیگری باشد که در شرایط (الف)ـــ(ه) صدق می‌کند، در آن صورت یکریختی h بین $(C, \prec)$ و $(C^*, \prec^*)$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in P$، $h(x) = x$. مجموعهٔ مرتب خطی $(C, \prec)$ را کامل‌سازی $(P, <)$ می‌نامند.

در قضایایی از این دست، اثبات یکتایی آسان‌تر است. به همین دلیل، ما هم همین قسمت را ابتدا اثبات می‌کنیم.

اثبات یکتایی کامل‌سازی مجموعه. فرض کنید $(C, \prec)$ و $(C^*, \prec^*)$ دو مجموعهٔ مرتب خطی کامل باشند که در شرایط (الف)ـــ(هـ) صدق می‌کنند. نشان می‌دهیم یکریختی h از C بروی C^* موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in P$، $h(x) = x$.

اگر $c \in C$، قرار دهید $S_c = \{p \in P \mid p \preccurlyeq c\}$. به همین نحو، برای هر $c^* \in C^*$، قرار دهید $S_{c^*} = \{p \in P \mid p \preccurlyeq^* c^*\}$. چنانچه S زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کران‌داری از P باشد، سوپریمم S در $(C, \prec)$ را با $\sup S$ و سوپریمم S در $(C^*, \prec^*)$ را با $\sup^* S$ نشان می‌دهیم. توجه کنید $\sup S_c = c$ و $\sup^* S_{c^*} = c^*$.

نگاشت h را به‌صورت $h(c) = \sup^* S_c$ تعریف می‌کنیم.

به‌وضوح، h نگاشتی از C بتوی C^* است. باید نشان دهیم که این نگاشت پوشاست و

الف) اگر $c \prec d$، آن‌گاه $h(c) \prec^* h(d)$.

ب) برای هر $x \in P$، $h(x) = x$.

برای اینکه نشان دهیم h پوشاست، فرض کنید $c^* \in C^*$ دلخواه باشد. در این صورت، $c^* = \sup^* S_{c^*}$. چنانچه قرار دهیم $c = \sup S_{c^*}$، در این صورت $S_c = S_{c^*}$ و در نتیجه $c^* = h(c)$. اگر $c \prec d$، در این صورت (چون P در C چگال است) $p \in P$ موجود است به‌طوری‌که $c \prec p \prec d$. به‌راحتی دیده می‌شود که $\sup^* S_c \prec^* p \prec^* \sup^* S_d$ و بنابراین $h(c) \prec^* h(d)$. از اینجا با استفاده از لم ۱۸.۵ از فصل ۲ نتیجه می‌گیریم h یکریختی است. نهایتاً چنانچه $x \in P$، در این صورت $x = \sup S_x = \sup^* S_x$ و لذا $h(x) = x$. □

برای اثبات وجود کامل‌سازی، مفهوم برش ددکیند را تعریف می‌کنیم.

۴.۵ تعریف. یک برش عبارت است از زوج (A, B) از مجموعه‌ها به‌طوری‌که

الف) A و B زیرمجموعه‌های ناتهی و مجزا از P هستند، به‌قسمی که $A \cup B = P$.

ب) اگر $a \in A$ و $b \in B$، آن‌گاه $a < b$.

خاطرنشان می‌کنیم که برش یک شکاف است، چنانچه علاوه بر این‌ها A بزرگ‌ترین عضو و B کوچک‌ترین عضو نداشته باشند. توجه کنید چون P چگال است، امکان ندارد که هم A بزرگ‌ترین عضو و هم B کوچک‌ترین عضو داشته باشد. بنابراین، حالت‌های ممکن یکی این است که یا B کوچک‌ترین عضو داشته باشد و A بزرگ‌ترین عضو نداشته باشد یا A بزرگ‌ترین عضو داشته باشد و B کوچک‌ترین عضو نداشته باشد، در حالت اول سوپریمم برابر کوچک‌ترین عضو B است و در حالت دیگر سوپریمم برابر بزرگ‌ترین عضو A است. لذا، ما فقط حالت اول را در نظر می‌گیریم و به برش‌هایی که در آن A بزرگ‌ترین عضو دارد نمی‌پردازیم.

۵.۵ تعریف. برش (A, B) یک برش ددکیند است هرگاه A بزرگ‌ترین عضو نداشته باشد.

دو نوع برش ددکیند وجود دارد:

الف) آن دسته برش‌هایی که به‌ازای یک $p \in P$، $B = \{x \in P \mid x \geq p\}$. در این حالت می‌نویسیم $(A, B) = [p]$.

ب) شکاف‌ها.

حال C را مجموعهٔ همهٔ برش‌های ددکیند (A, B) در $(P, <)$ در نظر بگیرید و آن را به‌صورت

$$(A, B) \preccurlyeq (A', B') \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad A \subseteq A'$$

مرتب کنید. برعهدهٔ خواننده است که نشان دهد $(C, \preccurlyeq)$ مجموعه‌ای مرتب خطی است.

اگر $p, q \in P$ طوری باشند که $p < q$، در این صورت داریم $[p] \prec [q]$. بنابراین، مجموعهٔ مرتب خطی $(P', \prec)$ که در اینجا $P' = \{[p] \mid p \in P\}$ با $(P, <)$ یکریخت است. می‌خواهیم نشان دهیم $(C, \prec)$ کامل‌سازی $(P', \prec)$ است. چون $(P, <)$ و $(P', \prec)$ یکریخت‌اند، از اینجا نتیجه می‌شود که $(P, <)$ کامل‌سازی را شامل می‌شود.

کافی است ثابت کنیم

ج`) p' در $(C,\prec)$ چگال است.

هـ) C نقاط انتهایی ندارد.

و البته،

و) $(C,\prec)$ کامل است.

برای اینکه نشان دهیم P' در C چگال است، فرض کنید $c,d\in C$ به‌قسمی باشند که $c\prec d$، به‌عبارت‌دیگر $c=(A,B)$، $d=(A',B')$ و $A\subset A'$. فرض کنید $p\in P$ چنان باشد که $p\in A'$ و $p\notin A$. به‌علاوه می‌توان فرض کرد p کوچک‌ترین عضو B نیست. بنابراین، $(A,B)\prec[p]\prec(A',B')$ و لذا P' در C چگال است. [که همچنین نشان می‌دهد $(C,\prec)$ مجموعهٔ مرتب چگال است.]

به همین نحو، اگر $(A,B)\in C$، در این صورت $p\in B$ موجود است که کوچک‌ترین عضو B نیست و لذا داریم $(A,B)\prec[p]$. از این‌رو، C بزرگ‌ترین عضو ندارد. به دلیلی مشابه، کوچک‌ترین عضو هم ندارد.

برای آنکه نشان دهیم C کامل است، فرض کنید S زیرمجموعهٔ غیرتهی از C و کران‌دار از بالا باشد. بنابراین، $(A_\circ,B_\circ)\in C$ موجود است به‌قسمی که $A\subseteq A_\circ$ مشروط بر اینکه $(A,B)\in S$. سوپریمم S را پیدا می‌کنیم. برای این کار قرار دهید

$$A_S=\bigcup\{A\mid(A,B)\in S\},\qquad B_S=P-A_S=\bigcap\{B\mid(A,B)\in S\}.$$

به‌راحتی می‌توان دید که (A_S,B_S) یک برش است. (توجه کنید B_S غیرتهی است، زیرا $B_\circ\subseteq B_S$). در واقع (A_S,B_S) برش ددکیند است: چون هیچ‌یک از Aها کوچک‌ترین عضو ندارد، A_S نیز چنین است.

چون برای هر $(A,B)\in S$، $A\subseteq A_S$، بنابراین (A_S,B_S) کوچک‌ترین کران بالای S است. چنانچه $(\overline{A},\overline{B})$ کران بالایی برای S باشد، در این صورت برای هر $(A,B)\in S$، $A\subseteq\overline{A}$ و لذا $A_S=\bigcup\{A\mid(A,B)\in S\}\subseteq\overline{A}$. بنابراین $(A_S,B_S)\leq(\overline{A},\overline{B})$. از این‌رو، (A_S,B_S) سوپریمم S است. □

بنابراین قضیهٔ ۳.۵ اثبات می‌شود. در حالت ویژه، مجموعهٔ مرتب اعداد گویای $(\mathbb{Q},<)$ کامل‌سازی منحصر به‌فردی (با تقریب یکریختی) دارد، که همان مجموعهٔ

مرتب اعداد حقیقی است. چون ترتیب اعداد حقیقی روی $\mathbb{Q}$ با $<$ یکی است آن را با همان نماد متداول $<$ (به‌جای $\prec$) نشان می‌دهند.

۶.۵ تعریف. کامل‌سازی $(\mathbb{Q},<)$ را با $(\mathbb{R},<)$ نشان می‌دهند، اعضای $\mathbb{R}$ اعداد حقیقی نامیده می‌شوند.

اکنون مشخصه‌سازی زیر برای $(\mathbb{R},<)$ بی‌درنگ نتیجه می‌شود.

۷.۵ قضیه. $(\mathbb{R},<)$ مجموعهٔ مرتب خطی منحصربه‌فردی (با تقریب یکریختی) بدون نقاط انتهایی است که زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال در خود دارد.

برهان. فرض کنید $(C,\prec)$ مجموعهٔ مرتب خطی کاملی بدون نقاط انتهایی و P زیرمجموعهٔ شمارا و چگالی در C باشد. بنابراین $(P,\prec)$ یکریخت با $(\mathbb{Q},<)$ است، و بنا به یکتایی کامل‌سازی (قضیهٔ ۳.۵)، $(C,\prec)$ با کامل‌سازی $(\mathbb{Q},<)$، یعنی $(\mathbb{R},<)$، یکریخت است. $\square$

اکنون باید اعمال جبری را روی $\mathbb{R}$ تعریف کنیم و نشان دهیم آن‌ها در قواعد معمول جبر صدق می‌کنند و روی اعداد گویا با تعریف‌های قبلی سازگارند. اما این مباحث در جبر و آنالیز حقیقی بیشتر اهمیت دارد تا در نظریهٔ مجموعه‌ها. بنابراین، ما در اینجا به این کار نمی‌پردازیم. خوانندهٔ مشتاق به بیان دقیق حساب اعداد حقیقی هم‌اکنون می‌تواند بخش ۲.۱۰ را بدین منظور مطالعه کند.

تمرین‌ها

۱.۵ ثابت کنید که هیچ عددی مانند $x \in \mathbb{Q}$ وجود ندارد به‌طوری‌که $x^۲ = ۲$.
[راهنمایی: بنویسید $x = p/q$ که در آن $p,q \in \mathbb{Z}$ نسبت به هم اول‌اند، و با استفاده از $p^۲ = ۲q^۲$ نشان دهید که ۲ باید هر دوی p و q را بشمارد.]

۲.۵ نشان دهید که (A,B) که در آن $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > ۰ \text{ و } x^۲ > ۲\}$ و $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq ۰ \text{ یا } (x > ۰ \text{ و } x^۲ < ۲)\}$ یک شکاف در $(\mathbb{Q},<)$ است. [راهنمایی: برای اثبات اینکه A بزرگ‌ترین عضو ندارد، به‌ازای $x > ۰$

و $x^2 < 2$ داده شده، عدد گویای $\varepsilon > 0$ را بیابید به‌طوری‌که $(x+\varepsilon)^2 < 2$.
کافی است عدد $x > \varepsilon$ را طوری انتخاب کنید که $x^2 + 3x\varepsilon < 2$.]

۳.۵ فرض کنید $0/a_1a_2a_3\cdots$ یک بسط اعشاری نامتناهی باشد اما متناوب نباشد.
فرض کنید $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0/a_1a_2a_3\cdots a_k$ ، $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ بی‌ازای$\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0/a_1a_2a_3\cdots a_k$ ، $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ بی‌ازای$\}$. نشان دهید (A, B) یک شکاف در $(\mathbb{Q}, <)$ است.

۴.۵ نشان دهید که مجموعهٔ مرتب خطی چگال $(P, <)$ کامل است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی $S \subseteq P$ که از پایین کران‌دار است دارای اینفیمم باشد.

۵.۵ فرض کنید D در $(P, <)$ چگال باشد و فرض کنید E در $(D, <)$ چگال باشد. نشان دهید که E در $(P, <)$ چگال است.

۶.۵ فرض کنید F مجموعهٔ اعداد گویایی باشد که بسط اعشاری آن‌ها فقط تعداد متناهی رقم غیر صفر دارد. نشان دهید که F در $\mathbb{Q}$ چگال است.

۷.۵ فرض کنید D (اعداد گویای دو دویی) مجموعهٔ همهٔ اعداد به‌صورت $m/2^n$ باشد که در آن m یک عدد صحیح و n یک عدد طبیعی است. نشان دهید که D در $\mathbb{Q}$ چگال است.

۸.۵ ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد اصم $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است. [راهنمایی: برای $a < b$ مفروض، بگیرید $x = (a+b)/2$ اگر این عدد گویا باشد و در غیر این صورت $x = (a+b)/\sqrt{2}$. از تمرین ۱.۵ استفاده کنید.]

۶ مجموعه‌های ناشمارا

تا اینجا عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را که مشخص کردیم، همگی شمارا بودند. طبیعتاً این پرسش پیش می‌آید که آیا همهٔ مجموعه‌های نامتناهی شمارا هستند؟ اگر پاسخ مثبت بود باید این کتاب را در فصل قبلی به پایان می‌رساندیم. کشف بزرگ گئورگ کانتور این بود که مجموعه‌های ناشمارا واقعاً وجود دارند. این

کشف محرکی برای رشد نظریهٔ مجموعه‌ها بود و به منبعی از غنا و عمق برای آن تبدیل شد.

۱.۶ قضیه. مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ ناشماراست.

برهان. مجموعهٔ $(\mathbb{R}, <)$ مرتب خطی چگال و بدون نقاط انتهایی است. اگر $\mathbb{R}$ شمارا باشد، بنا به قضیهٔ ۹.۴، $(\mathbb{R}, <)$ با $(\mathbb{Q}, <)$ یکریخت می‌شود. اما این نشدنی است، چرا که $(\mathbb{R}, <)$ کامل است و $(\mathbb{Q}, <)$ نه. □

برهان بالا بر نظریهٔ ترتیب‌های خطی که در بخش ۴ عرضه شد مبتنی است. برهان اولیهٔ کانتور از روش مشهور «قطری سازی» منسوب به وی استفاده می‌کند.

برهان کانتور برای قضیهٔ ۱.۶. فرض کنید $\mathbb{R}$ شمارا باشد، یعنی $\mathbb{R}$ برد دنبالهٔ نامتناهی مثل $\langle r_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ باشد. فرض کنید $a_0^{(n)}/a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\cdots$ بسط اعشاری r_n باشد. (فرض می‌کنیم که بسط اعشاری از مرحله‌ای به بعد فقط از رقم ۹ تشکیل نشده است، لذا هر عدد حقیقی یک بسط اعشاری منحصر به‌فرد دارد. بخش ۱.۱۰ را ببینید) اگر $a_n^{(n)} = 0$، قرار دهید $b_n = 1$ و در غیر این صورت، $b_n = 0$. r را عدد حقیقی در نظر بگیرید که بسط اعشاریش به‌صورت $0/b_1b_2b_3\cdots$ باشد. داریم $b_n \neq a_n^{(n)}$، بنابراین برای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $r \neq r_n$. و این تناقض است. □

ماهیت ترکیبیاتی برهان قطری (که کاملاً شبیه پارادوکس راسل است که بعد از آن کشف شد) در قضیهٔ بعدی روشن‌تر می‌شود.

۲.۶ قضیه. مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی ناشماراست. در واقع $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$.

برهان. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ با تعریف $f(n) = \{n\}$ یک‌به‌یک است. لذا $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. ثابت می‌کنیم برای هر دنبالهٔ $\langle S_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ مجموعه‌ای مانند $S \subseteq \mathbb{N}$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $S \neq S_n$. این نشان می‌دهد که هیچ نگاشت پوشایی از $\mathbb{N}$ بروی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ وجود ندارد و بنابراین $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

مجموعهٔ $S \subseteq \mathbb{N}$ را به‌صورت $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}$ تعریف می‌کنیم. عدد n، S را از S_n متمایز می‌کند، یعنی اگر $n \in S_n$، در این صورت $n \notin S$ و اگر $n \notin S_n$ در این صورت $n \in S$. در هر حالت همان‌طور که می‌خواستیم $S \neq S_n$. □

مجموعه‌های ناشمارا را در فصل ۵ (و فصل‌های بعد از آن) به‌طور مفصل مطالعه خواهیم کرد. فعلاً فقط ثابت می‌کنیم مجموعهٔ $\mathbf{۲}^{\mathbb{N}} = \{\circ, \mathbf{۱}\}^{\mathbb{N}}$، یعنی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های نامتناهی حاصل از ۰ها و ۱ها ناشماراست و حتی عدد اصلی آن با $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mathbb{R}$ برابر است.

۳.۶ قضیه. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbf{۲}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

برهان. برای هر $S \subseteq \mathbb{N}$ تابع مشخصهٔ S، $\chi_S : \mathbb{N} \to \{\circ, \mathbf{۱}\}$ را به‌صورت

$$\chi_S = \begin{cases} \circ & n \in S \\ \mathbf{۱} & n \notin S \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان دید که تناظر بین مجموعه‌ها و تابع مشخصهٔ آن‌ها نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ بروی $\{\circ, \mathbf{۱}\}^{\mathbb{N}}$ است.

نشان می‌دهیم $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ و همچنین $|\mathbb{R}| \leq |\mathbf{۲}^{\mathbb{N}}|$ و با استفاده از قضیهٔ کانتور-برنشتاین برهان را کامل می‌کنیم.

الف) قبلاً اعداد حقیقی را همچون برش‌هایی در مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbb{Q}$ ساختیم. تابعی که به هر عدد حقیقی $r = (A, B)$ مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{Q}$ را نسبت می‌دهد نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ است. بنابراین، $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. از آنجایی که $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$، داریم $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{Q})|$ (تمرین ۳.٦). لذا $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

ب) برای اثبات $|\mathbb{R}| \leq |\mathbf{۲}^{\mathbb{N}}|$ نمایش اعشاری اعداد حقیقی را به کار می‌بریم. تابعی که به هر دنبالهٔ نامتناهی $\langle a_n \rangle_{n=\circ}^{\infty}$ از ۰ها و ۱ها، عدد حقیقی یکتایی را با بسط اعشاری $\circ/a_\circ a_\mathbf{۱} a_\mathbf{۲} \cdots$ نسبت می‌دهد نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbf{۲}^{\mathbb{N}}$ بتوی $\mathbb{R}$ است. بنابراین، داریم $|\mathbb{R}| \leq |\mathbf{۲}^{\mathbb{N}}|$. □

قبلاً برای عدد اصلی $\mathbb{N}$ نماد $\aleph_\circ$ را وضع کردیم. با توجه به قضیهٔ ۳.٦ معمولاً عدد اصلی $\mathbb{R}$ را با $\mathbf{۲}^{\aleph_\circ}$ نشان می‌دهند. همچنین مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را

«پیوستار» می‌خوانند، به‌همین دلیل $2^{\aleph_0}$ را «عدد اصلی پیوستار» می‌نامند. با این نمادها قضیهٔ ۲.٦ حاکی از آن است که $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

تمرین‌ها

۱.۶ با استفاده از استدلال قطری، نشان دهید که $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ناشماراست. [راهنمایی: دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ را در نظر بگیرید که در آن $a_n = \langle a_{nk} \mid k \in \mathbb{N} \rangle$. حال $d \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ را به‌صورت $d_n = a_{nn} + 1$ تعریف کنید.]

۲.۶ نشان دهید که $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$. [راهنمایی: $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.]

۳.۶ نشان دهید که $|A| = |B|$ ایجاب می‌کند $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

فصل ۵

اعداد اصلی

۱ حساب اعداد اصلی

اعداد اصلی را در فصل ۴ تعریف کردیم. در این فصل به مطالعهٔ ویژگی‌های کلی آن‌ها، با تأکید خاص روی عدد اصلی پیوستار $2^{\aleph_0}$، می‌پردازیم. در این بخش ابتدا اعمال حسابی (جمع، ضرب، و توان) را روی اعداد اصلی تعریف می‌کنیم و سپس به بررسی ویژگی‌های این اعمال می‌پردازیم.

حاصل‌جمع دو عدد اصلی، $\kappa + \lambda$، را مشابهٔ مجموعه‌های متناهی تعریف می‌کنیم، بدین معنی که اگر مجموعهٔ A، a عضو و مجموعهٔ B، b عضو داشته باشد و A و B مجزا باشند، در این صورت $A \cup B$، $a+b$ عضو دارد.

۱.۱ تعریف. $\kappa + \lambda = |A \cup B|$، که در آن $|A| = \kappa$، $|B| = \lambda$، و $A \cap B = \varnothing$.

برای اینکه این تعریف موجه باشد باید نشان بدهیم که $\kappa + \lambda$ به انتخاب مجموعه‌های A و B بستگی ندارد. این مطلب مضمون لم بعدی است.

۲.۱ لم. اگر A، B، A'، و B' مجموعه‌هایی باشند به‌قسمی که $|A| = |A'|$، $|B| = |B'|$، و $A \cap B = \varnothing = A' \cap B'$، آن‌گاه $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

برهان. فرض کنید f و g به‌ترتیب نگاشتی یک‌به‌یک از A بتوی A' و از B

بتوی B' باشد. در این صورت $f \cup g$ نگاشتی یک‌به‌یک از $A \cup B$ بتوی $A' \cup B'$ است. □

جمع اعداد اصلی نه تنها برای اعداد اصلی متناهی با جمع معمولی اعداد یکی می‌شود، بلکه بسیاری از قواعد معمول جمع برای آن برقرار است. برای مثال، جمع اعداد اصلی تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است:

الف) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.

ب) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$.

قانون‌های فوق مستقیماً از تعریف نتیجه می‌شوند. به همین نحو، نابرابری‌های زیر به‌راحتی اثبات می‌شوند:

ج) $\kappa \leq \kappa + \lambda$

د) اگر $\kappa_1 \leq \kappa_2$ و $\lambda_1 \leq \lambda_2$ در این صورت $\kappa_1 + \lambda_1 \leq \kappa_2 + \lambda_2$.

با وجود این، همهٔ قانون‌های جمع اعداد برای جمع اعداد اصلی برقرار نیستند. خصوصاً نابرابری‌های اکید در روابط اعداد اصلی نامتناهی به‌ندرت اتفاق می‌افتد و همان‌طورکه بعداً خواهیم دید (قضیهٔ کونیگ)، اثبات آن موارد نادر نیز بسیار دشوار است. برای نمونه، این واقعیت ساده را که اگر $n \neq 0$، آن‌گاه $n + n > n$ در نظر بگیرید. چنانچه κ نامتناهی باشد این رابطه دیگر برقرار نخواهد بود، مثلاً دیدیم $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ [۱۶.۳ (۲) را در فصل ۴ ببینید]. همچنین اصل انتخاب برای هر κ نامتناهی ایجاب می‌کند $\kappa + \kappa = \kappa$.

انگیزهٔ ما برای تعریف ضرب اعداد اصلی باز هم ویژگی‌های ضرب اعداد است. اگر A و B دو مجموعه به ترتیب با تعداد عضو a و b باشند، در این صورت حاصل‌ضرب $A \times B$، $a \cdot b$ عضو دارد.

۳.۱ تعریف. $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$، که در اینجا $|A| = \kappa$ و $|B| = \lambda$.

موجه بودن این تعریف از لم ۴.۱ نتیجه می‌شود.

۴.۱ لم. اگر A، B، A'، و B' به‌قسمی باشند که $|A| = |A'|$ و $|B| = |B'|$، آن‌گاه $|A \times B| = |A' \times B'|$.

برهان. فرض کنید $f : A \longrightarrow A'$ و $g : B \longrightarrow B'$ دو نگاشت باشند. تعریف می‌کنیم $h : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ که

$$h(a,b) = \big(f(a), g(b)\big).$$

به‌وضوح اگر f و g یک‌به‌یک و پوشا باشند، h نیز چنین خواهد بود. □

در اینجا هم ضرب برخی ویژگی‌های مطلوب را دارد، به‌ویژه، تعویض‌پذیر و شرکت‌پذیر است. علاوه بر این، قانون توزیع‌پذیری برقرار است.

ه) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.

و) $\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu$.

ز) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

خاصیت آخری نتیجه‌ای از برابری

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

است که برای هر مجموعهٔ A، B، و C برقرار است. همچنین داریم

ح) اگر $\lambda > ۰$، $\kappa \leq \kappa \cdot \lambda$.

ط) اگر $\kappa_۱ \leq \kappa_۲$ و $\lambda_۱ \leq \lambda_۲$، آن‌گاه $\kappa_۱ \cdot \lambda_۱ \leq \kappa_۲ \cdot \lambda_۲$.

برای آنکه مقایسهٔ ما بین ضرب اعداد اصلی و ضرب اعداد کامل‌تر شود، اجازه دهید ثابت کنیم

ی) $\kappa + \kappa = ۲ \cdot \kappa$.

برهان. اگر $k = |A|$، در این صورت $۲ \cdot k$ عدد اصلی مجموعهٔ $\{۰, ۱\} \times A$ است. توجه می‌کنیم که $\{۰, ۱\} \times A = (\{۰\} \times A) \cup (\{۱\} \times A)$ و $|\{۰\} \times A| = |\{۱\} \times A| = \kappa$ و همچنین دو عامل اجتماع از همدیگر مجزا هستند. بنابراین $۲ \cdot \kappa = \kappa + \kappa$. □

یک نتیجه از (ی) این است که

ک) $\kappa + \kappa \leq \kappa \cdot \kappa$ مشروط به اینکه $\kappa \geq ۲$.

ضرب اعداد اصلی نامتناهی همانند جمع ویژگی‌هایی دارد که با ویژگی‌های این عمل برای اعداد متناهی کاملاً متفاوت است. برای نمونه، $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$ [نگاه کنید به ۱۶.۳ (۲) در فصل ۴]. (همچنین، اصل انتخاب برای هر عدد اصلی نامتناهی ایجاب می‌کند $\kappa \cdot \kappa = \kappa$).

راهنمای ما در تعریف توان اعداد اصلی این نکته است که اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی به‌ترتیب با a و b عضو باشند، در این صورت a^b برابر تعداد تمام توابع از B به A است.

۵.۱ تعریف. $\kappa^\lambda = |A^B|$، که در اینجا $\kappa = |A|$ و $\lambda = |B|$.

تعریف κ^λ به نوع انتخاب A و B بستگی ندارد.

۶.۱ لم. \اگر $|A'| = |A|$ و $|B'| = |B|$، آن‌گاه $|A'^{B'}| = |A^B|$.

برهان. فرض کنید $f : A \to A'$ و $g : B \to B'$ یک‌به‌یک و پوشا باشند. فرض کنید $F : A^B \to A'^{B'}$ به این صورت تعریف شود که اگر $k \in A^B$، $F(k) = h$، که در آن $h \in A'^{B'}$ به‌قسمی است که $h(g(b)) = f(k(b))$ برای هر $b \in B$، به‌عبارت‌دیگر $h = f \circ k \circ g^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & B' \arrow[d, "h = F(k)"] \\
A \arrow[r, "f"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

در این صورت F یک‌به‌یک است و A^B را بروی $A'^{B'}$ می‌نگارد. □

از روی تعریف توان به‌راحتی دیده می‌شود که

ل) اگر $\lambda > 0$، $\kappa \le \kappa^\lambda$.

م) اگر $\kappa > 1$، $\lambda \le \kappa^\lambda$.

ن) اگر $\kappa_1 \le \kappa_2$ و $\lambda_1 \le \lambda_2$، آن‌گاه $\kappa_1^{\lambda_1} \le \kappa_2^{\lambda_2}$.

همچنین داریم

(چ) $\kappa\cdot\kappa=\kappa^{2}$.

برای اثبات (چ)، کافی است تناظر یک‌به‌یکی بین $A\times A$، مجموعه همهٔ زوج‌های (a,b) که $a,b\in A$، و مجموعهٔ همهٔ توابع از $\{0,1\}$ بتوی A داشته باشیم. چنین تناظری را در بخش ۵ از فصل ۳ ساختیم.

قضیهٔ بعدی ویژگی‌های بیشتری از توان را بیان می‌کند.

۷.۱ قضیه.

(الف) $\kappa^{\lambda+\mu}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$.

ب) $(\kappa^{\lambda})^{\mu}=\kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

ج) $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\cdot\lambda^{\mu}$.

برهان. قرار دهید $|K|=\kappa$، $|L|=\lambda$، و $|M|=\mu$. برای اثبات (الف) فرض کنید L و M مجزا باشند. نگاشت یک‌به‌یکی مثل F، از $K^{L}\times K^{M}$ بروی $K^{L\cup M}$ می‌سازیم. چنانچه $(f,g)\in K^{L}\times K^{M}$، قرار می‌دهیم $F(f,g)=f\cup g$. توجه می‌کنیم که $f\cup g$ تابع است، در حقیقت عضوی از $K^{L\cup M}$ است و هر $h\in K^{L\cup M}$ برابر $F(f,g)$ است به‌ازای یک $(f,g)\in K^{L}\times K^{M}$ (مثلاً $f=h\restriction L$ و $g=h\restriction M$). به‌راحتی دیده می‌شود F یک‌به‌یک است.

برای اثبات (ب)، نگاشت یک‌به‌یکی مثل F از $K^{L\times M}$ بروی $(K^{L})^{M}$ را جستجو می‌کنیم. اعضای $K^{L\times M}$ توابعی به‌صورت $f:L\times M\to K$ هستند. فرض کنید F به f تابع $g:M\to K^{L}$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود نسبت دهد، برای هر $m\in M$، $g(m)=h\in K^{L}$، که در اینجا $h(l)=f(l,m)$ (برای هر $l\in L$).

برای اثبات (ج) نیاز به نگاشت یک‌به‌یکی مثل F از $K^{M}\times L^{M}$ بروی $(K\times L)^{M}$ داریم. برای هر $(f_1,f_2)\in K^{M}\times L^{M}$ قرار دهید

$$F(f_1,f_2)=g:M\to(K\times L),$$

که در آن برای هر $m\in M$، $g(m)=(f_1(m),f_2(m))$. به شیوه معمول می‌توان دید F یک‌به‌یک و پوشاست. □

تا اینجا مجموعهٔ مفیدی از ویژگی‌های کلی اعداد اصلی را گرد آوردیم، لیکن

فقط اعداد اصلی مشخصی که تا اینجا با آن‌ها مواجه شده‌ایم اعداد طبیعی، $\aleph_0$، و $2^{\aleph_0}$ هستند. نشان خواهیم داد بسیاری اعداد اصلی دیگر وجود دارند. در این راستا نتیجهٔ بنیادی، قضیهٔ کلی کانتور است (برای حالت خاص، قضیهٔ ۲.٦ از فصل ۴ را ببینید).

۸.۱ قضیهٔ کانتور. برای هر مجموعهٔ X، $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

برهان. برهان قضیه تعمیم سرراستی از برهان قضیهٔ ۲.٦ در فصل ۴ است. قلب برهان صورت مجرد برهان قطری‌سازی است.

نخست اینکه، تابع $f : X \to \mathcal{P}(X)$ با تعریف $f(x) = \{x\}$ به‌وضوح یک‌به‌یک است و لذا $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. آنچه می‌ماند این است که ثابت کنیم هیچ نگاشتی از X بروی $\mathcal{P}(X)$ وجود ندارد. حال فرض کنید f نگاشتی از X بتوی $\mathcal{P}(X)$ باشد. مجموعهٔ $S = \{x \in X \mid x \notin f(X)\}$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم S در برد f قرار ندارد. فرض کنید که به‌ازای $z \in X$یی، $S = f(z)$. بنا به تعریف S، $z \in S$ اگر و تنها اگر $z \notin f(z)$. لذا داریم $z \in S$ اگر و تنها اگر $z \notin S$ که تناقض است. این نشان می‌دهد که f بروی $\mathcal{P}(X)$ نیست. بنابراین، اثبات $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ کامل می‌شود. $\square$

همچنین، قسمت اول قضیهٔ ۳.٦ در فصل ۴ را می‌توان به مجموعه‌های دلخواه تعمیم داد.

۹.۱ قضیه. برای هر مجموعهٔ X، $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

برهان. در برهان رابطهٔ $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$ از قضیهٔ ۳.٦ در فصل ۴، $\mathbb{N}$ را با X جابه‌جا کنید. $\square$

اکنون می‌توانیم قضیهٔ کانتور را برحسب اعداد اصلی به‌صورت زیر بازگو کنیم

$$\text{برای هر عدد اصلی } \kappa \quad \kappa < 2^{\kappa}.$$

این بخش را با این نکته ختم می‌کنیم که برای هر مجموعه از اعداد اصلی یک عدد اصلی بزرگ‌تر از همهٔ آن‌ها یافت می‌شود.

۱۰.۱ نتیجه. برای هر دستگاه مانند S از مجموعه‌ها مجموعهٔ Y موجود است به‌قسمی که برای هر $X \in S$، $|Y| > |X|$.

برهان. قرار دهید $Y = \mathcal{P}(\bigcup S)$. بنا به قضیهٔ کانتور، $|Y| > |\bigcup S|$ و لذا به‌وضوح برای هر $X \in S$، $|\bigcup S| > |X|$ (زیرا، اگر $X \in S$، $X \subseteq \bigcup S$). □

تمرین‌ها

۱.۱ ویژگی‌های (الف)ــ(چ) حساب اعداد اصلی را که در این بخش بیان شد ثابت کنید.

۲.۱ نشان دهید که برای هر κ، $\kappa^{\circ} = ۱$ و $\kappa^{۱} = \kappa$.

۳.۱ نشان دهید برای هر κ، $۱^{\kappa} = ۱$ و برای هر $\kappa > \circ$، $\circ^{\kappa} = \circ$.

۴.۱ ثابت کنید $\kappa^{\kappa} \leq ۲^{\kappa \cdot \kappa}$.

۵.۱ اگر $|A| \leq |B|$ و $A \neq \varnothing$، آن‌گاه نگاشتی از B بروی A وجود دارد. بعداً، با کمک اصل انتخاب نشان می‌دهیم که عکس این مطلب نیز درست است. اگر نگاشتی از B بروی A وجود داشته باشد، آن‌گاه $|A| \leq |B|$.

۶.۱ اگر نگاشتی از B بروی A وجود داشته باشد، آن‌گاه $۲^{|A|} \leq ۲^{|B|}$. [راهنمایی: اگر g نگاشت داده شده از B بروی A باشد، برای هر $X \subseteq A$ قرار دهید $f(X) = g^{-۱}[X]$.]

۷.۱ با استفاده از قضیهٔ کانتور نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها وجود ندارد.

۸.۱ فرض کنید X یک مجموعه و f نگاشتی یک‌به‌یک از X بتوی خودش باشد، به‌طوری‌که $f[X] \subset X$، در این صورت X نامتناهی است.

مجموعهٔ X را نامتناهی ددکیند گویند هرگاه نگاشت یک‌به‌یکی از X بروی زیرمجموعهٔ سره‌اش وجود داشته باشد. مجموعهٔ متناهی ددکیند مجموعه‌ای است که نامتناهی ددکیند نباشد. در مابقی تمرین‌ها ویژگی‌های مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ددکیند را بررسی می‌کنیم.

۹.۱ هر مجموعهٔ شمارا، نامتناهی ددکیند است.

۱۰.۱ اگر X شامل یک زیرمجموعهٔ شمارا باشد، آن‌گاه X نامتناهی ددکیند است.

۱۱.۱ اگر X نامتناهی ددکیند باشد، آن‌گاه شامل زیرمجموعه‌ای شماراست.
[راهنمایی: فرض کنید $x \in X - f[X]$، تعریف کنید

$$x_\circ = x,\ x_\backslash = f(x_\circ),\ \ldots,\ x_{n+\backslash} = f(x_n),\ \ldots.$$

در این صورت، مجموعهٔ $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ شماراست.]

بنابراین، مجموعه‌های نامتناهی ددکیند دقیقاً مجموعه‌هایی هستند که زیرمجموعهٔ شمارا دارند. بعداً، با استفاده از اصل انتخاب نشان می‌دهیم که هر مجموعهٔ نامتناهی یک زیرمجموعهٔ شمارا دارد. بنابراین نامتناهی ددکیند= نامتناهی.

۱۲.۱ اگر A و B متناهی ددکیند باشند، آن‌گاه $A \cup B$ متناهی ددکیند است.
[راهنمایی: از تمرین ۱۱.۱ استفاده کنید.]

۱۳.۱ اگر A و B متناهی ددکیند باشند، آن‌گاه $A \times B$ متناهی ددکیند است.
[راهنمایی: از تمرین ۱۱.۱ استفاده کنید.]

۱۴.۱ اگر A نامتناهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ نامتناهی ددکیند است. [راهنمایی: برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $S_n = \{X \subset A \mid |X| = n\}$. مجموعهٔ $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ زیرمجموعه‌ای شمارا از $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ است.]

۲ عدد اصلی پیوستار

تا اینجا با ویژگی‌های عدد اصلی $\aleph_\circ$، عدد اصلی مجموعه‌های شمارا، کاملاً آشنا شدیم. برای ارجاعات بعدی آن‌ها را در اینجا به‌طور خلاصه می‌آوریم. در این کار از مفاهیم حساب اعداد اصلی که در فصل قبلی تعریف کردیم، استفاده می‌کنیم.

الف) $\kappa < \aleph_\circ$ اگر و تنها اگر $\kappa \in \mathbb{N}$.

ب) $n + \aleph_\circ = \aleph_\circ + \aleph_\circ = \aleph_\circ \quad (n \in \mathbb{N})$.

ج) $n \cdot \aleph_\circ = \aleph_\circ \cdot \aleph_\circ = \aleph_\circ \quad (n \in \mathbb{N},\ n > \circ)$.

د) $\aleph_\circ^n = \aleph_\circ$.

در این بخش دومین عدد اصلی مهم، یعنی عدد اصلی پیوستار، $\mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$، را مطالعه می‌کنیم. نخست به خاطر می‌آوریم که $\mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$ در حقیقت عدد اصلی مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

۱.۲ قضیه. $|\mathbb{R}| = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$.

برهان. این همان نتیجهٔ دوم قضیهٔ ۳.۶ از فصل ۴ است. □

در قضیهٔ بعد خواص حسابی عدد اصلی پیوستار را یکجا گرد می‌آوریم.

۲.۲ قضیه.

الف) $\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \aleph_\circ + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = n + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$ $(n \in \mathbb{N})$.

ب) $\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \aleph_\circ \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = n \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$ $(n \in \mathbb{N},\ n > \circ)$.

ج) $\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = {\aleph_\circ}^{\aleph_\circ} = n^{\aleph_\circ} = (\mathsf{Y}^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = (\mathsf{Y}^{\aleph_\circ})^n$ $(n \in \mathbb{N},\ n > \circ)$.

برهان.

الف) حکم از زنجیرهٔ واضح نابرابری‌های زیر و قضیهٔ کانتور-برنشتاین به‌دست می‌آید

$$\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq n + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq \aleph_\circ + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} + \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y} \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\mathsf{1}+\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}.$$

ب) به‌نحو مشابه، داریم

$$\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq n \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq \aleph_\circ \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \cdot \mathsf{Y}^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ + \aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}.$$

ج) داریم

$$\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq (\mathsf{Y}^{\aleph_\circ})^n \leq (\mathsf{Y}^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ^{\mathsf{Y}}} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}$$

و یا

$$\mathsf{Y}^{\aleph_\circ} \leq n^{\aleph_\circ} \leq \aleph_\circ^{\aleph_\circ} \leq (\mathsf{Y}^{\aleph_\circ})^{\aleph_\circ} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ^{\mathsf{Y}}} = \mathsf{Y}^{\aleph_\circ}. \quad \square$$

این نکته جالب توجه است که قضیهٔ ۲.۲ که نتیجهٔ ساده‌ای از حساب اعداد اصلی و قضیهٔ کانتور-برنشتاین است، نتایج کاملاً غیرمنتظره‌ای دارد. برای

نمونه، $۲^{\aleph_۰} \cdot ۲^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$ به این معنی است که $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$. لیکن مجموعهٔ همهٔ زوج‌های اعداد حقیقی با مجموعه همهٔ نقاط صفحه در تناظر یک‌به‌یک‌اند (از طریق دستگاه مختصات دکارتی). پس می‌بینیم که نگاشتی یک‌به‌یک از خط مستقیم $\mathbb{R}$ بروی صفحهٔ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وجود دارد (و به‌همین نحو، بروی فضای سه بعدی $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و الی‌آخر). این نتایج (همگی منسوب به کانتور) معاصرانش را متعجب ساخت. حقیقت آن است که قدری خلاف درک معمول ما به نظر می‌رسند و بد نیست خواننده چنین نگاشتی را بسازد (تمرین ۷.۲ را ببینید). قضیهٔ بعد نشان می‌دهد چندین مجموعهٔ مهم، عدد اصلی پیوستار را دارند.

۳.۲ قضیه.

الف) عدد اصلی مجموعهٔ نقاط صفحهٔ nبعدی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است.

ب) عدد اصلی مجموعهٔ اعداد مختلط برابر $۲^{\aleph_۰}$ است.

ج) عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های نامتناهی اعداد طبیعی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است.

د) عدد اصلی مجموعهٔ دنباله‌های نامتناهی اعداد حقیقی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است.

برهان.

الف) بنا به تعریف توان اعداد اصلی، $|\mathbb{R}^n| = (۲^{\aleph_۰})^n$ و بنا به قضیهٔ ۲.۲ (ج) داریم $(۲^{\aleph_۰})^n = ۲^{\aleph_۰}$.

ب) اعداد مختلط به‌صورت زوج‌هایی از اعداد حقیقی هستند (تمرین ۶.۲ در فصل ۱۰ را ببینید). لذا عدد اصلی مجموعهٔ اعداد مختلط برابر است با $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = (۲^{\aleph_۰})^۲ = ۲^{\aleph_۰}$.

ج) مجموعهٔ دنباله‌های نامتناهی اعداد طبیعی برابر $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ است، در نتیجه $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_۰^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$.

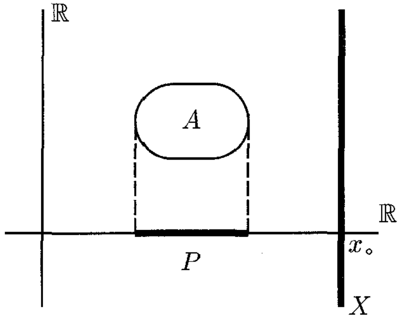
د) $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = (۲^{\aleph_۰})^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$. □

برای اثبات نتایج دیگری از این دست قضیهٔ بعدی سودمند است.

۴.۲ قضیه. اگر A زیرمجموعهٔ شمارایی از B باشد و $|B| = ۲^{\aleph_۰}$، آن‌گاه $|B - A| = ۲^{\aleph_۰}$.

(متذکر می‌شویم که با استفاده از اصل انتخاب می‌توان نشان داد، در حالت کلی اگر $|A| < |B|$، آن‌گاه $|B - A| = |B|$.)

برهان. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



قرار دهید $P = \operatorname{dom} A$، یعنی

$$P = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A \text{ ،}y\text{ به‌ازای }\text{یی}\}.$$

چون $|A| = \aleph_\circ$، داریم $|P| \leq \aleph_\circ$. بنابراین $x_\circ \in \mathbb{R}$یی موجود است که $x_\circ \notin P$. در نتیجه، مجموعهٔ $X = \{x_\circ\} \times \mathbb{R}$ و A مجزا هستند، لذا $X \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - A$. به‌وضوح $|X| = |\mathbb{R}| = ۲^{\aleph_\circ}$، پس داریم $|(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - A| \geq ۲^{\aleph_\circ}$. □

۵.۲ قضیه.

الف) عدد اصلی مجموعهٔ اعداد گنگ برابر $۲^{\aleph_\circ}$ است.

ب) عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های نامتناهی اعداد طبیعی برابر $۲^{\aleph_\circ}$ است.

ج) عدد اصلی مجموعهٔ تمام نگاشت‌های یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بتوی $\mathbb{N}$ برابر $۲^{\aleph_\circ}$ است.

برهان.

الف) مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbb{Q}$ شماراست، بنابراین، $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گنگ، بنا به قضیهٔ ۴.۲ عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_\circ}$ دارد.

ب) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$، مجموعه همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$، عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_\circ}$ دارد، در نتیجه مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ شماراست (نتیجهٔ ۱۱.۳ در فصل ۴ را ببینید). پس مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ عدد اصلی برابر پیوستار دارد.

ج) فرض کنید P مجموعه همهٔ نگاشت‌های یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی $\mathbb{N}$ باشد. چون $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، به‌وضوح $|P| \leq ۲^{\aleph_۰}$. فرض کنید E و O به ترتیب مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و فرد باشند. چنانچه $X \subseteq E$ نامتناهی باشد، نگاشت $f_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f_X(۲k) = k \text{ امین عضو } X \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$f_X(۲k+۱) = k \text{ امین عضو } \mathbb{N} - X \quad (k \in \mathbb{N}).$$

توجه کنید که $O \subseteq \mathbb{N} - X$ نامتناهی است، و لذا f_X نگاشتی یک‌به‌یک از $\mathbb{N}$ بروی $\mathbb{N}$ است. علاوه بر این، به‌راحتی می‌توان نشان داد که $X_۱ \neq X_۲$ ایجاب می‌کند $f_{X_۱} \neq f_{X_۲}$. بنابراین، یک تناظر یک‌به‌یک بین زیرمجموعه‌های نامتناهی E و برخی اعضای P داریم. چون بنا به قضیهٔ ۵.۲ (ب)، E به اندازهٔ $۲^{\aleph_۰}$ زیرمجموعهٔ نامتناهی دارد، همان‌طورکه می‌خواستیم نتیجه می‌گیریم $|P| \geq ۲^{\aleph_۰}$. □

نتایج مشابهٔ دیگری را نیز قضیهٔ بعدی در اختیار می‌گذارد. تعاریف و ویژگی‌های پایه‌ای مجموعه‌های باز و توابع پیوسته را می‌توان در بخش ۳ از فصل ۱۰ یافت.

۶.۲ قضیه.

الف) مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$ عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ دارد.

ب) مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های باز اعداد حقیقی عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ دارد.

برهان.

الف) ویژگی‌ای از توابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ را (که در قضیهٔ ۱۱.۳ از فصل ۱۰ اثبات شده است) به کار می‌بریم. آن خاصیت این است که هر تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ با مقادیرش روی مجموعه‌های چگال و به‌ویژه روی نقاط گویا مشخص می‌شود. پس اگر f و g دو تابع پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشند و برای هر عدد گویا q، $f(q) = g(q)$، آن‌گاه $f = g$. حال فرض کنید C مجموعهٔ همه توابع حقیقی‌ـمقدار پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. نگاشت F از C بتوی $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ را به‌صورت

$F(f) = f \restriction \mathbb{Q}$ تعریف کنید. با توجه به مطالب بالا، F یک‌به‌یک است، لذا $|C| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = (۲^{\aleph_۰})^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}$. از طرف دیگر، به‌وضوح $|C| \geq ۲^{\aleph_۰}$ (مثلاً توابع ثابت را در نظر بگیرید).

ب) هر مجموعهٔ باز اتحاد یک دستگاه از بازه‌های باز با نقاط انتهایی گویا است (لم ۱۴.۳ در فصل ۱۰ را ببینید). به اندازهٔ $\aleph_۰$ تا بازهٔ باز با نقاط انتهایی گویا وجود دارد (هر بازه‌ای از این نوع بازه‌ها با زوج مرتبی از اعداد گویا معین می‌شود) و لذا $۲^{\aleph_۰}$ تا از دستگاه‌های مذکور نیز وجود دارد. این نشان می‌دهد که حداکثر $۲^{\aleph_۰}$ تا مجموعهٔ باز وجود دارد. از طرف دیگر، اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq b$، آن‌گاه $(a, \infty) \neq (b, \infty)$، پس حداقل $۲^{\aleph_۰}$ تا مجموعهٔ باز وجود دارد.

□

نتایج این بخش اهمیت عدد اصلی $۲^{\aleph_۰}$ را نشان می‌دهند. پس نباید تعجب کرد که مشخص کردن مقدار $۲^{\aleph_۰}$ اهمیت اساسی دارد. می‌دانیم $۲^{\aleph_۰}$ از $\aleph_۰$ بزرگ‌تر است اما چقدر بزرگ‌تر؟ کانتور حدس زد $۲^{\aleph_۰}$ عدد اصلی بلافاصله بعد از $\aleph_۰$ است. این حدس همان فرض مشهور پیوستار است.

فرض پیوستار. عدد اصلی ناشمارای κ موجود نیست به‌قسمی که $\kappa < ۲^{\aleph_۰}$.

به‌بیان‌دیگر فرض پیوستار ادعا می‌کند هر مجموعه از اعداد حقیقی یا متناهی است یا شمارا یا اینکه با مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی هم‌توان است. عدد اصلی دیگری در این میان وجود ندارد. در سال ۱۹۰۰، داوید هیلبرت مسئلهٔ پیوستار را در فهرست مشهورش از مسئله‌های حل نشده در ریاضیات قرار دارد (به‌عنوان مسئلهٔ شمارهٔ ۱). امروزه هم این مسئله به‌طور کامل حل نشده است. در سال ۱۹۳۹، کورت گودل نشان داد فرض پیوستار با اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است. این بدین معنی است که چنانچه اصول موضوع تسرملو ـ فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها (به انضمام اصل انتخاب) را به کار بریم، نمی‌توانیم برهانی برای رد فرض پیوستار بیاوریم. در سال ۱۹۶۳، پال کوئین ثابت کرد فرض پیوستار مستقل از اصول موضوع مذکور است. بدین معنی که فرض پیوستار را نمی‌توان از اصول موضوع مذکور نتیجه

گرفت. در فصل ۱۵ در این باره مفصل‌تر بحث خواهیم کرد.

این بخش را با مثالی از یک مجموعه با عدد اصلی بزرگ‌تر از پیوستار به پایان می‌بریم.

۷.۲ لم. عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی-مقدار روی اعداد حقیقی برابر $۲^{۲^{\aleph_۰}} > ۲^{\aleph_۰}$ است.

برهان. عدد اصلی $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ برابر است با $(۲^{\aleph_۰})^{۲^{\aleph_۰}} = ۲^{\aleph_۰ \cdot ۲^{\aleph_۰}} = ۲^{۲^{\aleph_۰}}$. □

تمرین‌ها

۱.۲ ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های متناهی از اعداد حقیقی دارای عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است. در اینجا یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های شمارا نیز عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ دارد، اما اثبات آن نیاز به اصل انتخاب دارد.

۲.۲ عدد حقیقی x جبری است، هرگاه جواب معادله‌ای به‌صورت

$$a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ = ۰$$

باشد، که در آن $a_۰$، ...، a_n اعداد صحیح هستند. اگر x جبری نباشد، آن را متعالی نامند. نشان دهید که مجموعهٔ همهٔ اعداد جبری شماراست و بنابراین مجموعهٔ همهٔ اعداد متعالی عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ دارد.

۳.۲ اگر مجموعهٔ مرتب خطی P زیرمجموعهٔ چگال داشته باشد، آن‌گاه $|P| \leq ۲^{\aleph_۰}$.

۴.۲ مجموعهٔ همه زیرمجموعه‌های بسته از اعداد حقیقی عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ دارد.

۵.۲ نشان دهید که برای $n > ۰$،

$$\begin{aligned} n \cdot ۲^{۲^{\aleph_۰}} &= \aleph_۰ \cdot ۲^{۲^{\aleph_۰}} = ۲^{\aleph_۰} \cdot ۲^{۲^{\aleph_۰}} = ۲^{۲^{\aleph_۰}} \cdot ۲^{۲^{\aleph_۰}} = (۲^{۲^{\aleph_۰}})^n \\ &= (۲^{۲^{\aleph_۰}})^{\aleph_۰} = (۲^{۲^{\aleph_۰}})^{۲^{\aleph_۰}} = ۲^{۲^{\aleph_۰}}. \end{aligned}$$

۶.۲ عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ توابع ناپیوسته برابر $\text{۲}^{\text{۲}^{\aleph_\circ}}$ است. [راهنمایی: با استفاده از تمرین ۵.۲، نشان دهید که $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}} - C| = \text{۲}^{\text{۲}^{\aleph_\circ}}$ به‌شرطی که $|C| \leq \text{۲}^{\aleph_\circ}$.]

۷.۲ یک نگاشت یک‌به‌یک از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بروی $\mathbb{R}$ بسازید. [راهنمایی: اگر $a, b \in [\circ, \text{۱}]$ دارای بسط اعشاری $\circ/a_\text{۱}a_\text{۲}a_\text{۳}\cdots$ و $\circ/b_\text{۱}b_\text{۲}b_\text{۳}\cdots$ باشند، زوج مرتب (a, b) را به روی $\circ/a_\text{۱}b_\text{۱}a_\text{۲}b_\text{۲}a_\text{۳}b_\text{۳}\cdots$ تصویر کنید.]

فصل ۶

اعداد ترتیبی

۱ مجموعه‌های خوش‌ترتیب

انگیزهٔ ما برای معرفی اعداد طبیعی صوری‌سازی عمل شمردن بود. دیدیم اعداد طبیعی با ۰ شروع و با اعدادی که پیاپی یک واحد افزایش می‌یابند تولید می‌شوند: ۰، ۱، ۲، ... و الی غیرالنهایه. عمل تالی را به‌صورت $S(x) = x \cup \{x\}$ تعریف کردیم و اعداد طبیعی را برابر کوچک‌ترین مجموعه‌ای معرفی کردیم که شامل ۰ و تحت S نیز بسته است.

بسیار مطلوب است که بتوان شمارش را فراتر از اعداد طبیعی نیز انجام داد. ایدهٔ کار در این است که عدد نامتناهی ω را که «بعد از» همهٔ اعداد طبیعی قرار می‌گیرد، در نظر بگیریم و سپس شمردن را با اعداد ترامتناهی ω ۱ + ω ۱ + (۱ + ω)، و الی‌آخر ادامه دهیم.

در فصل حاضر شمارش ترامتناهی را صوری‌سازی می‌کنیم و تعمیمی از اعداد طبیعی، موسوم به اعداد ترتیبی، عرضه می‌کنیم. مفهوم حاصل، همانند هر تعمیم مناسبی، در بسیاری از ویژگی‌ها با اعداد طبیعی مشترک است و از همه مهم‌تر اینکه قضیه‌های استقرا و بازگشت به قضیه‌های استقرای ترامتناهی و بازگشت ترامتناهی تعمیم پیدا می‌کنند.

نقطهٔ شروع کار ما این حقیقت است که هر عدد طبیعی با مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی کوچک‌ترش یکی گرفته می‌شود، یعنی اینکه، $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$. (تمرین ٦.٢ در فصل ۳ را ببینید.) به همین قیاس، ω کوچک‌ترین عدد ترامتناهی را برابر مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم، پس $\omega = \mathbb{N} = \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$.

اکنون که این گام «حدی» برداشته شد ادامهٔ کار آسان است. عمل تالی را همان‌گونه که برای تولید اعداد بعد از ۰ به کار بردیم برای تولید اعداد بعد از ω به کار می‌بریم:

$$S(\omega) = \omega \cup \{\omega\} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega\},$$
$$S(S(\omega)) = S(\omega) \cup \{S(\omega)\} = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega, S(\omega)\},$$

و غیره.

نمادهای الهام بخش زیر را به کار می‌بریم:

$$S(\omega) = \omega + ۱, \quad S(S(\omega)) = (\omega + ۱) + ۱ = \omega + ۲, \text{ و غیره.}$$

به همین ترتیب اعداد «بزرگ» و «بزرگ‌تری» می‌توانیم تولید کنیم: ω، $\omega + ۱$، $\omega + ۲$، ...، $\omega + n$، ...، برای هر $n \in \mathbb{N}$. عدد بعد از همهٔ $\omega + n$ها را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ همهٔ اعداد کوچک‌تر در نظر گرفت:

$$\omega \cdot ۲ = \omega + \omega = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \ldots\}.$$

می‌توان حتی اعداد بزرگ‌تری تولید کرد، مثلاً

$$\omega \cdot ۲ + ۱ = \omega + \omega + ۱ = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega, \omega + ۱, \omega + ۲, \ldots, \omega + \omega\},$$
$$\begin{aligned} \omega \cdot ۳ &= \omega + \omega + \omega \\ &= \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega, \omega + ۱, \omega + ۲, , \ldots, \omega + \omega, \omega + \omega + ۱, \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\omega \cdot \omega = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega, \omega + ۱, \ldots, \omega \cdot ۲, \omega \cdot ۲ + ۱, \ldots, \omega \cdot ۳, \ldots, \omega \cdot ۴, \ldots\}.$$

مجموعه‌هایی که در بالا ساختیم، بسیار شبیه اعداد طبیعی رفتار می‌کنند از این جهت که آن‌ها با رابطهٔ $\in$ مرتب خطی هستند و هر زیرمجموعهٔ غیرتهی آن‌ها

کوچک‌ترین عضو دارد. روابط خطی دارای این خاصیت را خوش‌ترتیب نامیدیم (تعریف ۳.۲ در فصل ۳ را ببینید). اجازه دهید تعریف خوش‌ترتیبی را یادآوری کنیم، چرا که خوش‌ترتیبی و عدد اصلی جزء مهم‌ترین مفاهیم نظریهٔ مجرد مجموعه‌ها هستند.

۱.۱ تعریف. مجموعهٔ W را با رابطهٔ $<$ خوش‌ترتیب می‌نامیم هرگاه
الف) $(W,<)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد.
ب) هر زیرمجموعهٔ غیرتهی W کوچک‌ترین عضو داشته باشد.

مجموعه‌های مرتب خطی بالا همگی نمونه‌هایی از مجموعه‌های خوش‌ترتیب تحت رابطهٔ $\in$ هستند. بعداً در این فصل نشان می‌دهیم هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب را می‌توان با مجموعه‌هایی از این نوع نمایش داد. همچنین مفهوم اعداد ترتیبی را معرفی می‌کنیم که نوع‌های ترتیب را برای مجموعه‌های خوش‌ترتیب به‌دست می‌دهند. در تمرین‌های آخر این بخش، مثال‌های بیشتری از مجموعه‌های خوش‌ترتیب می‌توانید بیابید.

خاصیت بنیادی خوش‌ترتیبی‌ها این است که می‌توان آن‌ها را برحسب «طولشان» مقایسه کرد. معنی دقیق این عبارت را در قضیهٔ ۳.۱ بیان می‌کنیم.

فرض کنید $(L,<)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد. مجموعهٔ $S \subseteq L$ را یک قطعهٔ آغازی L می‌نامند اگر S زیرمجموعهٔ سره‌ای از L باشد (یعنی $S \neq L$) و برای هر $a \in S$، هر عضو $x < a$ عضوی از S باشد. (برای نمونه، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی منفی و مجموعهٔ اعداد حقیقی غیر مثبت هر دو قطعه‌های آغازی از مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند.)

۲.۱ لم. اگر $(W,<)$ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی باشد و S قطعهٔ آغازی از $(W,<)$ باشد، آن‌گاه $a \in W$ موجود است به‌قسمی که $S = \{x \in W \mid x < a\}$.

برهان. فرض کنید $X = W - S$ متمم S باشد. چون S زیرمجموعهٔ سره‌ای از W است، پس X ناتهی است و بنابراین نسبت به رابطهٔ خوش‌ترتیبی $<$ دارای کوچک‌ترین عضو است. فرض کنید a کوچک‌ترین عضو X باشد. چنانچه

$x < a$، آن‌گاه x نمی‌تواند به X متعلق باشد چرا که a کوچک‌ترین عضو آن است، لذا x به S تعلق دارد. اگر $a \leq x$ در این صورت x به S متعلق نیست، زیرا در غیر این صورت a در S خواهد بود، چرا که S قطعهٔ آغازی است. بنابراین $S = \{x \in W \mid x < a\}$. □

چنانچه a عضوی از مجموعهٔ خوش‌ترتیب $(W, <)$ باشد مجموعهٔ

$$W[a] = \{x \in W \mid x < a\}$$

را قطعهٔ آغازی تولید شده توسط a می‌نامیم. (دقت کنید که اگر a کوچک‌ترین عضو W باشد، آن‌گاه $W[a]$ تهی است.) بنا به لم ۲.۱، هر قطعهٔ آغازی، یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب به‌صورت $W[a]$، به‌ازای عضوی مانند $a \in W$، است. مسلماً $W[a]$ نیز تحت $>$ خوش‌ترتیب است (به بیان دقیق‌تر، تحت $W[a] \cap >$). غالب اوقات رابطهٔ خوش‌ترتیبی را، که از متن کلام معلوم است، صریحاً ذکر نمی‌کنیم.

۳.۱ قضیه. اگر $(W_۱, <_۱)$ و $(W_۲, <_۲)$ دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند، آن‌گاه دقیقاً یکی از حالت‌های زیر برقرار است

الف) یا $W_۱$ و $W_۲$ یکریخت‌اند،

ب) یا $W_۱$ با یک قطعهٔ آغازی از $W_۲$ یکریخت است،

ج) یا $W_۲$ با قطعه آغازی از $W_۱$ یکریخت است.

در هر حالت یکریختی مذکور یکتاست.

این قضیه شیوه‌ای برای مقایسهٔ مجموعه‌های خوش‌ترتیب در اختیار می‌گذارد. بدین معنی که، گوییم $W_۱$ نوع ترتیب کوچک‌تری از $W_۲$ دارد، چنانچه $W_۱$ با $W_۲[a]$ به‌ازای عضوی مانند $a \in W_۲$، یکریخت باشد.

قبل از اثبات قضیهٔ ۳.۱، یک لم را با برخی نتایج آن بیان می‌کنیم. تابع f روی مجموعهٔ مرتب خطی $(L, <)$ بتوی L را صعودی گوییم چنانچه $x_۱ < x_۲$ ایجاب کند $f(x_۱) < f(x_۲)$. توجه کنید که هر تابع صعودی یک‌به‌یک است و در نتیجه یک یکریختی از $(L, <)$ و $(\operatorname{ran} f, <)$ است.

۴.۱ لم. اگر $(W, <)$ مجموعه‌ای خوش‌ترتیب و $f : W \to W$ تابع صعودی باشد، آن‌گاه برای هر $x \in W$، $f(x) \geq x$.

برهان. اگر مجموعهٔ $X = \{x \in W \mid f(x) < x\}$ غیرتهی باشد، در این صورت دارای کوچک‌ترین عضوی چون a است. ولی در این صورت $f(a) < a$، و چون f صعودی است، پس $f(f(a)) < f(a)$. این بدین معنی است که $f(a) \in X$. این نیز تناقض است، چرا که a کوچک‌ترین عضو در X است. □

۵.۱ نتیجه.

الف) هیچ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی با هیچ قطعهٔ آغازی از خودش یکریخت نیست.

ب) هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب فقط یک خودریختی دارد که همان نگاشت همانی است.

ج) اگر W_1 و W_2 دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب یکریخت باشند، آن‌گاه یکریختی بین W_1 و W_2 یکتاست.

برهان.

الف) فرض کنید f یکریختی بین W و $W[a]$، به‌ازای عضوی مانند $a \in W$، باشد. در این صورت $f(a) \in W[a]$، و بنابراین $f(a) < a$. با توجه به اینکه f صعودی است رابطهٔ اخیر خلاف لم ۴.۱ است.

ب) فرض کنید f یک خودریختی از W باشد. f و f^{-1} هر دو توابع صعودی هستند، و لذا برای هر $x \in W$، $f(x) \geq x$ و $f^{-1}(x) \geq x$، بنابراین $x \geq f(x)$. از اینجا برای هر $x \in W$ نتیجه می‌شود $f(x) = x$.

ج) فرض کنید f و g دو یکریختی بین W_1 و W_2 باشند. در این صورت $f \circ g^{-1}$ یک خودریختی از W_2 است، و بنابراین با نگاشت همانی برابر است. در نتیجه $f = g$. □

۶.۱ برهان قضیهٔ ۳.۱. فرض کنید W_1 و W_2 دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند. از لم ۴.۱ نتیجه می‌گیریم که سه حالت (الف)، (ب)، و (ج) فوق‌الذکر دوبه‌دو مانعةالجمع هستند. برای مثال، اگر W_1 به‌ازای عضوی مانند $a_2 \in W_2$ با $W_2[a_2]$

یکریخت باشد و در عین حال W_2 نیز به‌ازای عضوی مانند $a_1 \in W_1$ با $W_1[a_1]$ یکریخت باشد، آن‌گاه ترکیب این دو یکریختی یک یکریختی از مجموعه‌ای خوش‌ترتیب بروی قطعهٔ آغازی خودش است.

به‌علاوه، یکتایی یکریختی در هر حالت از نتیجهٔ ۵.۱ نتیجه می‌شود. بنابراین فقط باید نشان دهیم یکی از سه حالت (الف)، (ب)، و (ج) همواره برقرار است. مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مثل $f \subseteq W_1 \times W_2$ تعریف خواهیم کرد و نشان می‌دهیم f یا f^{-1} یکریختی‌ای است که در (الف)، (ب) یا (ج) صدق می‌کند. قرار دهید

$$f = \{(x,y) \in W_1 \times W_2 \mid \text{است } W_2[y] \text{ یکریخت با } W_1[x]\}.$$

نخست اینکه، از نتیجهٔ ۵.۱ (الف) نتیجه می‌شود که f تابعی یک‌به‌یک است. زیرا اگر $W_1[x]$ هم با $W_2[y]$ و هم با $W_2[y']$ یکریخت باشد، آن‌گاه $y = y'$، زیرا در غیر این صورت $W_2[y]$ با قطعهٔ آغازیی از $W_2[y']$ یکریخت خواهد بود (یا بالعکس) و این نشدنی است چرا که خود آن‌ها با هم یکریخت هستند. بنابراین $(x,y) \in f$، و $(x,y') \in f$ ایجاب می‌کند $y = y'$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $(x,y) \in f$ و $(x',y) \in f$ ایجاب می‌کند $x = x'$.

دوم اینکه، $x < x'$ ایجاب می‌کند $f(x) < f(x')$. درواقع، اگر h یکریختی بین $W_1[x']$ و $W_2[f(x')]$ باشد، آن‌گاه تحدید $h \restriction W_1[x]$ یکریختی بین $W_1[x]$ و $W_2[h(x)]$ است و لذا $f(x) = h(x)$ و $f(x) < f(x')$.

بنابراین f یک یکریختی است بین دامنه‌اش به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از W_1 و بردش به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از W_2. چنانچه دامنهٔ f برابر W_1 و برد آن برابر W_2 باشد، در این صورت W_1 با W_2 یکریخت خواهد بود. حال نشان می‌دهیم اگر دامنه f کل W_1 نباشد قطعهٔ آغازیی از آن است و برد f برابر کل W_2 خواهد بود. (این حکم برای تکمیل اثبات کفایت می‌کند، چرا که حالت باقی‌مانده با تغییر نقش W_1 و W_2 حاصل می‌شود).

پس فرض کنید $\operatorname{dom} f \neq W_1$. توجه می‌کنیم که مجموعهٔ $S = \operatorname{dom} f$ قطعهٔ آغازیی از W_1 است. در حقیقت، اگر $x \in S$ و $z < x$ و فرض کنیم h یکریختی بین

$W_1[x]$ و $W_2[f(x)]$ باشد، در این صورت $h \restriction W_1[z]$ یک یکریختی بین $W_1[z]$ و $W_2[h(z)]$ است و لذا $z \in S$. برای اثبات اینکه $W_2 = \operatorname{ran} f = T$، فرض می‌کنیم چنین نباشد و با استدلالی مشابه بالا نشان می‌دهیم T قطعه آغازیی از W_2 است. اما در این صورت به‌ازای عضوی مانند $a \in W_1$، $\operatorname{dom} f = W_1[a]$ و در نتیجه به‌ازای عضوی مانند $b \in W_2$، $\operatorname{ran} f = W_2[b]$. به بیان دیگر، f یکریختی بین $W_1[a]$ و $W_2[b]$ است. این هم بنا به تعریف f، یعنی اینکه $(a, b) \in f$ و لذا $a \in \operatorname{dom} f = W_1[a]$. پس $a < a$ که تناقض است. □

تمرین‌ها

۱.۱ مثالی از یک مجموعهٔ مرتب خطی $(L, <)$ و قطعهٔ آغازی S از L ارائه دهید که به‌ازای هیچ عضوی مانند $a \in L$ به شکل $\{x \mid x < a\}$ نیست.

۲.۱ $\omega + 1$ با ω یکریخت نیست (در خوش‌ترتیبی $\in$).

۳.۱ تعداد $2^{\aleph_0}$ خوش‌ترتیبی از مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود دارد.

۴.۱ برای هر زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند A از $\mathbb{N}$، $(A, <)$ با $(\mathbb{N}, <)$ یکریخت است.

۵.۱ فرض کنید $(W_1, <_1)$ و $(W_2, <_2)$ مجموعه‌های خوش‌ترتیب مجزایی باشند که با $(\mathbb{N}, <)$ یکریخت هستند. نشان دهید مجموع دو مجموعهٔ مرتب خطی (آن‌چنان که در لم ۵.۴ از فصل ۴ تعریف شد) یک خوش‌ترتیبی است و با عدد ترتیبی $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$ یکریخت است.

۶.۱ نشان دهید که‌حاصل‌ضرب الفبایی $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$ (لم ۶.۴ در فصل ۴ را ببینید) با $\omega \cdot \omega$ یکریخت است.

۷.۱ فرض کنید $(W, <)$ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی باشد و فرض کنید $a \notin W$. رابطهٔ $<$ را به مجموعهٔ $W' = W \cup \{a\}$ گسترش دهید به این صورت که a بزرگ‌تر از هر $x \in W$ باشد. در این صورت W دارای نوع ترتیب کوچک‌تری از W' است.

۸.۱ مجموعه‌های $W = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ و $W' = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$ که با ترتیب الفبایی مرتب شده‌اند، مجموعه‌های خوش‌ترتیب یکریختی نیستند. (تذکر ذیل قضیهٔ ۷.۴ در فصل ۴ را ببینید.)

۲ اعداد ترتیبی

در فصل ۳، هدف ما از معرفی اعداد طبیعی یکی نمایش عدد اصلی و نوع ترتیب مجموعه‌های متناهی بود و دیگری کاربرد آن‌ها در قضیه‌های استقرا و بازگشت. در اینجا تعریف اعداد طبیعی را با معرفی اعداد ترتیبی تعمیم می‌دهیم.

با معرفی اعداد ترتیبی اعداد بزرگ‌تری برای حوزهٔ ترامتناهی تولید می‌شود. اعداد ترتیبی نیز همانند اعداد طبیعی به‌گونه‌ای تعریف می‌شوند که با رابطهٔ $\in$ خوش‌ترتیب باشند. علاوه بر این، گردایهٔ همهٔ اعداد ترتیبی (که خواهیم دید یک مجموعه نیست) نسبت به رابطهٔ $\in$ خوش‌ترتیب است و اعداد طبیعی را به عنوان یک قطعهٔ آغازی در بر دارد. مهم‌تر اینکه، اعداد ترتیبی نماینده‌های همهٔ مجموعه‌های خوش‌ترتیب هستند؛ یعنی اینکه هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب با یک عدد ترتیبی یکریخت است. لذا، اعداد ترتیبی را نوع‌های ترتیب مجموعه‌های خوش‌ترتیب می‌توان در نظر گرفت.

۱.۲ تعریف. مجموعهٔ T متعدی نامیده می‌شود هرگاه هر عضو T زیرمجموعه‌ای از T باشد.

به‌بیان‌دیگر، یک مجموعهٔ متعدی دارای این خاصیت است که رابطهٔ $u \in v \in T$ ایجاب می‌کند $u \in T$. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مجموعه‌های متعدی خواننده را به تمرین‌های این بخش و همچنین به فصل ۱۴ ارجاع می‌دهیم.

۲.۲ تعریف. مجموعهٔ α عدد ترتیبی نامیده می‌شود در صورتی که

الف) α متعدی باشد.

ب) α با رابطهٔ $\in_\alpha$ خوش‌ترتیب باشد.

معمولاً اعداد ترتیبی را با حروف یونانی کوچک نشان می‌دهند. به‌جای عدد ترتیبی نیز اغلب واژهٔ اوردینال به‌کار برده می‌شود.

به‌ازای هر عدد طبیعی m، اگر $k \in l \in m$ (به‌عبارت‌دیگر، $k < l < m$)، آن‌گاه $k \in m$. در نتیجه، هر عدد طبیعی یک مجموعهٔ متعدی است. همچنین هر عدد طبیعی نسبت به رابطهٔ $\in$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است (زیرا هر $n \in \mathbb{N}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}$ است و $\mathbb{N}$ نسبت به $\in$ خوش‌ترتیب است). پس داریم

۳.۲ قضیه. هر عدد طبیعی یک اوردینال است.

به‌آسانی می‌توان دید مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی متعدی، و نسبت به $\in$ خوش‌ترتیب است. لذا $\mathbb{N}$ یک عدد ترتیبی است.

۴.۲ تعریف. $\omega = \mathbb{N}$.

در اینجا فقط به مجموعهٔ $\mathbb{N}$ اسم جدیدی نسبت داده‌ایم.

۵.۲ لم. اگر α عدد ترتیبی باشد، آن‌گاه $S(\alpha)$ نیز عدد ترتیبی است.

برهان. مجموعهٔ $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ متعدی است. به‌علاوه، $\alpha \cup \{\alpha\}$ نسبت به $\in$ خوش‌ترتیب است و α بزرگ‌ترین عضو و $\alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ قطعهٔ آغازی آن است که با α مشخص شده است. بنابراین، $S(\alpha)$ عدد ترتیبی است. □

تالی α را با $\alpha + ۱$ نشان می‌دهیم:

$$\alpha + ۱ = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

عدد ترتیبی α را اوردینال تالی نامند اگر عدد ترتیبی β موجود باشد که $\alpha = \beta + ۱$. در غیر این صورت آن را اوردینال حدی می‌نامند. برای دو عدد ترتیبی α و β تعریف می‌کنیم: $\alpha < \beta$ اگر و تنها اگر $\alpha \in \beta$. بدین طریق، تعریف ترتیب اعداد طبیعی در فصل ۳ را گسترش می‌دهیم. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد رابطهٔ $<$ نه تنها همهٔ ویژگی‌های یک ترتیب خطی، بلکه در حقیقت ویژگی‌های یک خوش‌ترتیبی را دارد.

۶.۲ قضیه. فرض کنید α، β، و γ اعداد ترتیبی باشند.

الف) اگر $\alpha < \beta$ و $\beta < \gamma$، آن‌گاه $\alpha < \gamma$.

ب) روابط $\alpha < \beta$ و $\beta < \alpha$ همزمان با هم نمی‌توانند برقرار باشند.

ج) یکی از روابط $\alpha < \beta$ یا $\alpha = \beta$ یا $\beta < \alpha$ برقرار است.

د) هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد ترتیبی یک $<$ـ کوچک‌ترین عضو دارد. در نتیجه، هر مجموعه از اعداد ترتیبی نسبت به $<$ خوش‌ترتیب است.

ه) برای هر مجموعهٔ X از اعداد ترتیبی، عدد ترتیبی α موجود است که $\alpha \notin X$. (به بیان دیگر، «مجموعهٔ همهٔ اعداد ترتیبی» وجود ندارد.)

اثبات مبتنی بر لم‌های زیر است.

۷.۲ لم. اگر α عدد ترتیبی باشد، در این صورت $\alpha \notin \alpha$.

هیچ‌یک از اصول موضوعی که برای نظریهٔ مجموعه‌ها در نظر گرفتیم وجود مجموعه‌هایی مانند X که $X \in X$ باشد را منتفی نمی‌کند. مع‌هذا، مجموعه‌هایی که در ریاضی با آن‌ها سر و کار پیدا می‌کنیم چنین خاصیت ویژه‌ای ندارند.

برهان. اگر $\alpha \in \alpha$، در این صورت مجموعهٔ مرتب خطی $(\alpha, \in_\alpha)$ شامل عضو $x = \alpha$ است که برای آن $x \in x$، این هم با پادتقارنی $\in_\alpha$ در تناقض است. □

۸.۲ لم. هر عضو یک عدد ترتیبی، عددی ترتیبی است.

برهان. فرض کنید α یک اوردینال باشد و $x \in \alpha$. نخست ثابت می‌کنیم x متعدی است. فرض کنید u و v به‌قسمی باشند که $u \in v \in x$؛ می‌خواهیم نشان دهیم $u \in x$. چون α متعدی است و $x \in \alpha$، داریم $v \in \alpha$ و بنابراین $u \in \alpha$. لذا، u، v، و x اعضای α هستند و $u \in v \in x$. چون $\in_\alpha$ به‌طور خطی α را مرتب می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $u \in x$.

حال ثابت می‌کنیم $\in_x$ یک خوش‌ترتیبی از x است. از متعدی بودن α داریم $x \subseteq \alpha$، و بنابراین رابطهٔ $\in_x$ تحدیدی از رابطهٔ $\in_\alpha$ است. چون $\in_\alpha$ خوش‌ترتیبی است، لذا $\in_x$ نیز خوش‌ترتیبی است. □

۹.۲ لم. اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند به‌قسمی که $\alpha \subset \beta$، آن‌گاه $\alpha \in \beta$.

برهان. فرض کنید $\alpha \subset \beta$. در این صورت $\beta - \alpha$ زیرمجموعهٔ ناتهی از β است و لذا دارای کوچک‌ترین عضوی مانند γ نسبت به ترتیب $\in_\beta$ است. توجه کنید که $\gamma \subseteq \alpha$، زیرا در غیر این صورت هر $\delta \in \gamma - \alpha$ عضوی از $\beta - \alpha$ کوچک‌تر از γ خواهد بود (چرا که، β متعدی است). اگر نشان دهیم $\alpha \subseteq \gamma$ (و بنابراین، $\alpha = \gamma \in \beta$) اثبات کامل می‌شود.

فرض کنید $\delta \in \alpha$؛ نشان می‌دهیم $\delta \in \gamma$. اگر چنین نباشد، در این صورت یا $\gamma \in \delta$ یا $\gamma = \delta$ (δ و γ هر دو به β متعلق‌اند که نسبت به $\in$ مرتب خطی است). اما، این نیز ایجاب می‌کند که $\gamma \in \alpha$، چرا که α متعدی است. حکم اخیر هم با انتخاب $\gamma \in \beta - \alpha$ در تناقض است. □

برهان قضیهٔ ۶.۲.

الف) اگر $\alpha \in \beta$ و $\beta \in \gamma$، آن‌گاه $\alpha \in \gamma$، چرا که γ متعدی است.

ب) فرض کنید $\alpha \in \beta$ و $\beta \in \alpha$. از خاصیت تعدی داریم $\alpha \in \alpha$، که متناقض لم ۷.۲ است.

ج) اگر α و β دو اوردینال باشند، $\alpha \cap \beta$ نیز اوردینال است (خواص (الف) و (ب) تعریف اوردینال را بررسی کنید) و $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ و $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$. چنانچه $\alpha \cap \beta = \alpha$، در این صورت $\alpha \subseteq \beta$ و بنابراین، بنا به لم ۹.۲ یا $\alpha \in \beta$ یا $\alpha = \beta$. به نحو مشابه، $\alpha \cap \beta = \beta$ ایجاب می‌کند که $\beta \in \alpha$ یا $\beta = \alpha$. یگانه حالت باقی مانده، یعنی $\alpha \cap \beta \subset \alpha$ و $\alpha \cap \beta \subset \beta$ نمی‌تواند اتفاق بیفتد، زیرا، در این صورت $\alpha \cap \beta \in \alpha$ و $\alpha \cap \beta \in \beta$ که منتهی می‌شود به اینکه $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$، که این نیز با لم ۷.۲ در تناقض است.

د) فرض کنید A مجموعه‌ای غیرتهی از اوردینال‌ها باشد. بگیرید $\alpha \in A$ و مجموعهٔ $\alpha \cap A$ را در نظر بگیرید. اگر $\alpha \cap A = \varnothing$، α کوچک‌ترین عضو A است. اگر $\alpha \cap A \neq \varnothing$، $\alpha \cap A \subseteq \alpha$ نسبت به ترتیب $\in_\alpha$ دارای کوچک‌ترین عضوی مثل β است. از این‌رو، β کوچک‌ترین عضو A نسبت به ترتیب $<$ است.

ه) فرض کنید X مجموعه‌ای از اعداد ترتیبی باشد. چون همهٔ اعضای X مجموعه‌های متعدی هستند، مجموعهٔ $\bigcup X$ نیز متعدی است (تمرین ۵.۲ را ببینید). مستقیماً از قسمت (هـ) قضیه نتیجه می‌شود که $\in$ یک خوش‌ترتیبی برای $\bigcup X$ است، در نتیجه $\bigcup X$ یک عدد ترتیبی است. حال قرار دهید $\alpha = S(\bigcup X)$، پس α عدد ترتیبی است و $\alpha \notin X$. [زیرا، در غیر این صورت، داریم $\alpha \subseteq \bigcup X$ و بنا به لم ۹.۲، یا $\alpha = \bigcup X$ یا $\alpha \in \bigcup X$. در هر دو حالت، $\alpha \in S(\bigcup X) = \alpha$، که با لم ۷.۲ در تناقض است.] $\square$

عدد ترتیبی $\bigcup X$ که در برهان (هـ) به کار رفت، سوپریمم X نامیده می‌شود و با $\sup X$ نشان داده می‌شود. دلیل این نامگذاری این است که $\bigcup X$ کوچک‌ترین اوردینالی است که بزرگ‌تر یا مساوی هر عضو X است:

الف) اگر $\alpha \in X$، در این صورت $\alpha \subseteq \bigcup X$ و لذا $\alpha \leq \bigcup X$.

ب) اگر برای هر $\alpha \in X$، $\alpha \leq \gamma$، در این صورت برای هر $\alpha \in X$، $\alpha \subseteq \gamma$ و لذا $\bigcup X \subseteq \gamma$، یعنی $\bigcup X \leq \gamma$.

چنانچه مجموعهٔ X نسبت به ترتیب $<$ دارای بزرگ‌ترین عضو β باشد، در این صورت $\sup X = \beta$. چرا که در غیر این صورت برای هر $\gamma \in X$، $\sup X > \gamma$ (و کوچک‌ترین چنین اوردینال‌هایی است). پس می‌بینیم هر مجموعه از اوردینال‌ها دارای سوپریمم (نسبت به ترتیب $<$) است.

آخرین قضیهٔ این بخش بیانگر این حقیقت است که اوردینال‌ها تعمیمی از اعداد طبیعی هستند.

۱۰.۲ قضیه. اعداد طبیعی همان اعداد ترتیبی نامتناهی هستند.

برهان. از قبل می‌دانیم (قضیهٔ ۳.۲) که هر عدد طبیعی یک اوردینال است و البته یک مجموعهٔ متناهی. بنابراین فقط باید ثابت کنیم که هر اوردینالی که عدد طبیعی نیست، مجموعه‌ای نامتناهی است. حال اگر α اوردینال باشد و $\alpha \notin \mathbb{N}$، در این صورت بنا به قضیهٔ ٦.۲ (ب) باید $\omega \leq \alpha$ (زیرا $\alpha \not< \omega$)، پس $\omega \subseteq \alpha$ چرا که α متعدی است. پس α باید زیرمجموعه‌ای نامتناهی داشته باشد و از این‌رو باید نامتناهی باشد. $\square$

هر اوردینال تحت خوش‌ترتیبی $\in$ یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب است. چنانچه α و β دو اوردینال متمایز باشند، در این صورت به‌عنوان دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب یکریخت نیستند، زیرا یکی قطعهٔ آغازیی از دیگری است. ثابت خواهیم کرد هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب با یک عدد ترتیبی یکریخت است. لیکن این امر نیازمند معرفی اصل موضوعی است که در بخش بعدی عرضه می‌شود.

و تذکر آخر: لم ۸.۲ اثبات می‌کند که هر عدد ترتیبی α دارای این خاصیت است که

$$\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha \text{ و } \beta \text{ اوردینال است}\}.$$

چنانچه α را مجموعه‌ای از اوردینال‌ها در نظر بگیریم، در این صورت اگر α تالی باشد، مثلاً به‌صورت $\beta + 1$، در این صورت بزرگ‌ترین عضوی مانند β دارد. اگر α اوردینال حدی باشد، در این صورت بزرگ‌ترین عضو ندارد و در نتیجه $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

همچنین توجه کنید، بنا به تعریف، 0 اوردینال حدی است و بنابراین $\sup \varnothing = 0$.

تمرین‌ها

۱.۲ مجموعهٔ X متعدی است اگر و فقط اگر $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

۲.۲ مجموعهٔ X متعدی است اگر و فقط اگر $\bigcup X \subseteq X$.

۳.۲ آیا مجموعه‌های زیر متعدی هستند؟

الف) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$،

ب) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$،

ج) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$.

۴.۲ کدام یک از مطالب زیر درست است؟

الف) اگر X و Y متعدی باشند، آن‌گاه $X \cup Y$ متعدی است.

ب) اگر X و Y متعدی باشند، آن‌گاه $X \cap Y$ متعدی است.

ج) اگر $X \in Y$ و Y متعدی باشد، آن‌گاه X متعدی است.
د) اگر $X \subseteq Y$ و Y متعدی باشد، آن‌گاه X متعدی است.
ه) اگر Y متعدی باشد و $S \subseteq \mathcal{P}(Y)$، آن‌گاه $Y \cup S$ متعدی است.

۵.۲ اگر هر مجموعهٔ $X \in S$ متعدی باشد، آن‌گاه $\bigcup S$ متعدی است.

۶.۲ عدد ترتیبی α عدد طبیعی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی از α دارای بزرگ‌ترین عضو باشد.

۷.۲ اگر مجموعه‌ای از اعداد ترتیبی مانند X دارای بزرگ‌ترین عضو نباشد، آن‌گاه $\sup X$ عدد ترتیبی حدی نیست.

۸.۲ اگر X مجموعه‌ای غیرتهی از اعداد ترتیبی باشد، آن‌گاه $\bigcap X$ یک عدد ترتیبی است. به‌علاوه، $\bigcap X$ کوچک‌ترین عضو X است.

۳ اصل موضوع جایگزینی

همان‌طور که در آخر بخش ۲ اشاره کردیم، مجموعه‌های خوش‌ترتیب را می‌توان با اعداد ترتیبی نمایش داد. قضیهٔ زیر منظور از «نمایش» را دقیق می‌سازد.

۱.۳ قضیه. هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب با یک عدد ترتیبی منحصر به‌فردی یکریخت است.

اثبات قضیه را در ذیل خواهیم آورد. گرچه خواننده اثبات را کاملاً پذیرفتنی خواهد یافت، اثبات نقصی دارد. اثبات، در واقع، فرضی را به کار می‌گیرد که گرچه پذیرفتنی است، از اصول موضوع قبلی نتیجه نمی‌شود. به همین دلیل لازم است اصل موضوع دیگری معرفی شود.

برهان. فرض کنید $(W, <)$ مجموعهٔ خوش‌ترتیبی باشد. فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعضای $a \in W$ باشد به‌قسمی که $W[a]$ با یک عدد ترتیبی یکریخت است. چون هیچ دو عدد ترتیبی متمایز با یکدیگر یکریخت نیستند (یکی قطعهٔ آغازی دیگری نیست)، پس عدد ترتیبی مذکور به‌طور یکتایی معین می‌شود و آن را با α_a نشان می‌دهیم.

حال فرض کنید مجموعهٔ S موجود باشد به‌طوری‌که $S = \{\alpha_a \mid a \in A\}$. مجموعهٔ S چون مجموعه‌ای از اوردینال‌هاست، نسبت به رابطهٔ $\in$ خوش‌ترتیب است. متعدی نیز هست، زیرا اگر $\gamma \in \alpha_a \in S$ و φ یکریختی بین $W[a]$ و α_a باشد و قرار دهیم $c = \varphi^{-1}(\gamma)$. به‌راحتی می‌توان دید که $\varphi \restriction c$ یکریختی بین $W[c]$ و γ است، و لذا $\gamma \in S$. بنابراین، S ترتیبی است و $S = \alpha$.

استدلال مشابهی نشان می‌دهد که $a \in A$، و $b < a$ ایجاب می‌کند $b \in A$. فرض کنید φ یک یکریختی بین $W[a]$ و α_a باشد. پس، $\varphi \restriction W[b]$ یک یکریختی از $W[b]$ و قطعهٔ آغازی I از α_a است. بنا به لم ۲.۱، اوردینال $\beta < \alpha_a$ موجود است به‌قسمی که $I = \{\gamma \in \alpha_a \mid \gamma < \beta\} = \beta$؛ یعنی $\beta = \alpha_b$. این نشان می‌دهد که $b \in A$ و $\alpha_b < \alpha_a$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که یا $A = W$ یا به‌ازای عضوی مانند $c \in W$، $A = W[C]$ (کاربرد مجدد لم ۲.۱).

اکنون تابع $f : A \to S = \alpha$ را به صورت $f(a) = \alpha_a$ تعریف می‌کنیم. از تعریف S و این واقعیت که $b < a$ ایجاب می‌کند $\alpha_b < \alpha_a$، روشن است که f یک یکریختی از $(A, <)$ و α است. چنانچه $A = W[c]$، در این صورت خواهیم داشت $c \in A$، که تناقض است. بنابراین $A = W$، و از این‌رو f یک یکریختی از $(W, <)$ و اوردینال α است.

تا اینجا اثبات قضیهٔ ۱.۳ کامل می‌بود، اگر فرض وجود مجموعهٔ S مُبَرهن شده بود. اعضای S قطعاً به روشنی معین شده‌اند، ولی اینکه چرا وجود چنین مجموعه‌ای به‌صورت صوری از اصول موضوع پذیرفته‌شدهٔ ما نتیجه می‌شود مشخص نیست.

به منظور روشن‌تر کردن مسئله دو مثال را بررسی می‌کنیم:

برای ساختن دنبالهٔ

$$(\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots),$$

مطابق الگوی کلی تعریف‌های بازگشتی، می‌توان تعریف کرد

$$a_0 = \varnothing,$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_{n+1} = \{a_n\}$.

مشکل در اینجا این است که برای استفاده از قضیهٔ بازگشت باید یک مجموعهٔ A از پیش داده شده باشد به‌طوری‌که بتوان تابع $g : \mathbb{N} \times A \to A$ را با تعریف $g(n, x) = \{x\}$ برای محاسبه جملهٔ $(n + ۱)$ام دنباله برحسب جملهٔ nام به کار بست. اما در اینجا روشن نیست چگونه با اصول موضوعِ ما می‌توان وجود مجموعهٔ A را با شرط

$$\varnothing \in A, \quad \{\varnothing\} \in A, \quad \{\{\varnothing\}\} \in A, \quad \{\{\{\varnothing\}\}\} \in A, \dots$$

ثابت کرد.

اجازه دهید مثال دیگری را بررسی کنیم. در فصل ۳، وجود مجموعهٔ ω را اصل موضوع قرار دادیم؛ از این اصل موضوع نیز می‌توان به‌راحتی با به کار بستن مکرر اعمال اجتماع و زوج غیرمرتب مجموعه‌های $\omega + ۱ = \omega \cup \{\omega\}$ $\omega + ۲ = (\omega + ۱) \cup \{\omega + ۱\}$ و غیره را به‌دست آورد. در توضیحات ابتدائی بخش ۱، مجموعهٔ $\omega + \omega$ را اجتماع مجموعه‌های ω و همهٔ $\omega + n$ ها، که $n \in \omega$، «تعریف کردیم» و از مسئلهٔ وجود این مجموعه‌ها عبور کردیم. گرچه شهوداً وجود $\omega + \omega$ پرسش‌برانگیزتر از وجود ω نیست، اما وجود آن با اصول موضوع پذیرفته‌شدهٔ ما قابل اثبات نیست. می‌دانیم به هر $n \in \omega$ مجموعهٔ منحصربه‌فرد $\omega + n$ متناظر می‌شود، اما تا اینجا اصل موضوعی که اجازه دهد همهٔ چنین مجموعه‌های $\omega + n$ را در یک مجموعه گرد آورد، در اختیار نداریم. اصل موضوع زیر این نقیصه را مرتفع می‌کند.

قالب اصل موضوع جایگزینی. فرض کنید $\mathbf{P}(x, y)$ خاصیتی باشد به‌قسمی که برای هر x عضو منحصربه‌فردی مانند y موجود باشد که $\mathbf{P}(x, y)$ برقرار باشد.

برای هر مجموعهٔ A، مجموعهٔ B موجود است به‌قسمی که برای هر $x \in A$، $y \in B$ موجود است که برای آن $\mathbf{P}(x, y)$ برقرار است.

امیدواریم تذکرات ذیل، انگیزه‌های دیگری را برای معرفی این اصل موضوع به خواننده نشان دهد.

۲.۳ فرض کنید $\mathbf{F}$ عمل تعریف شده توسط خاصیت $\mathbf{P}$ باشد، به‌عبارت‌دیگر فرض کنید $\mathbf{F}(x)$ نمایشگر yی منحصربه‌فردی باشد که برای آن $\mathbf{P}(x, y)$ صادق است.

(بخش ۲ از فصل ۱ را ببینید). اصل موضوع جایگزینی را در این حالت می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

> برای هر مجموعهٔ A مجموعه‌ای مانند B وجود دارد به‌قسمی که برای هر $x \in A$، $\mathbf{F}(x) \in B$.

البته $\mathbf{F}(x)$ ممکن است اعضائی داشته باشد که به‌صورت $\mathbf{F}(x)$، که $x \in A$، نباشند، با این حال کاربردی از اصل موضوع شمول نشان می‌دهد که مجموعهٔ

$$\{y \in B \mid y = \mathbf{F}(x) \text{ ،} x \in A \text{ بی‌ازای } \text{ یی}\} = \{y \in B \mid P(x,y) \text{ ،} x \in A \text{ به‌ازای } \text{ یی}\}$$
$$= \{y \mid P(x,y) \text{ ،} x \in A \text{ به‌ازای } \text{ یی}\}$$

وجود دارد. مجموعهٔ مذکور را تصویر A تحت $\mathbf{F}$ می‌نامیم و با $\{\mathbf{F}(x) \mid x \in A\}$ یا، به‌طور مختصر، با $\mathbf{F}[A]$ نشان می‌دهیم.

۳.۳ مقایسهٔ قالب اصل موضوع جایگزینی با قالب اصل موضوع شمول توجیه شهودی دیگری برای این اصل به‌دست می‌دهد. اصل موضوع شمول به ما اجازه می‌داد سراغ اعضای یک مجموعهٔ مفروض مانند A برویم و ببینیم آیا خاصیت $\mathbf{P}(x)$ را دارند یا نه و آن‌هایی را که دارای این خاصیت هستند در یک مجموعه گردآوریم. به‌طریق کاملاً مشابه، اصل موضوع جایگزینی نیز به ما اجازه می‌دهد سراغ اعضای A برویم و برای هر $x \in A$، عضو yی متناظر و منحصربه‌فردی که خاصیت $\mathbf{P}(x,y)$ را دارد، برگزینیم و سپس همهٔ چنین yها را در یک مجموعه گردآوریم. شهوداً واضح است که مجموعهٔ $\mathbf{F}[A]$ «بزرگ‌تر از» مجموعهٔ A نیست. این در حالی است که تمامی «مجموعه‌های پارادوکسی» شناخته شده «بزرگ» هستند، چیزی در حد «مجموعهٔ مجموعه‌ها».

۴.۳ مجدداً، همانند ۲.۳ فرض کنید که $\mathbf{F}$ عمل تعریف شده توسط $\mathbf{P}$ باشد. در اینجا اصل جایگزینی نشان می‌دهد که عمل $\mathbf{F}$ روی اعضای مجموعهٔ مفروض A را می‌توان با یک تابع، یعنی مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، نمایش داد یا «جایگزین» کرد. به بیان دقیق‌تر

برای هر مجموعهٔ A، تابع f موجود است به‌قسمی که $\operatorname{dom} f = A$ و برای هر $x \in A$، $f(x) = \mathbf{F}(x)$.

برای اختصار قرار می‌دهیم $f = \{(x,y) \in A \times B \mid \mathbf{P}(x,y)\}$، که در اینجا B مجموعه‌ای است که بنا به اصل موضوع جایگزینی حاصل می‌شود. برای تابع منحصربه‌فرد f نماد $\mathbf{F} \restriction A$ را به کار می‌بریم. توجه کنید که $\operatorname{ran}(\mathbf{F} \restriction A) = \mathbf{F}[A]$.

اکنون می‌توان **اثبات قضیهٔ ۱.۳** را کامل کرد:
تا اینجا ثابت کردیم که برای تکمیل اثبات قضیه فقط باید وجود مجموعهٔ $S = \{\alpha_a \mid a \in W\}$ را تضمین کنیم، که در اینجا برای هر $a \in W$، α_a عدد ترتیبی منحصربه‌فردی است که با $W[a]$ یکریخت است.
فرض کنید $\mathbf{P}(x,y)$ خاصیت زیر باشد:

یا $x \in W$ و y اوردینال منحصربه‌فرد یکریخت با $W[x]$ است
یا $x \notin W$ و $y = \varnothing$.

با به کار بردن اصل موضوع جایگزینی [با تعریف $\mathbf{P}(x,y)$ به‌صورت فوق] نتیجه می‌گیریم که (به‌ازای $A = W$) مجموعهٔ B موجود است که برای هر $a \in W$ عضو $\alpha \in B$ موجود است که به‌ازای آن $\mathbf{P}(a,\alpha)$ برقرار است. بنابراین قرار می‌دهیم

$$S = \{\alpha \in B \mid \text{به‌ازای عضو } a \in W\text{، } \mathbf{P}(a,\alpha) \text{ درست است}\} = \mathbf{F}[W],$$

که در آن $\mathbf{F}$ عمل تعریف شده توسط $\mathbf{P}$ است. □

با استفاده از قضیهٔ ۱.۳ داریم

۵.۳ تعریف. چنانچه W مجموعهٔ خوش‌تعریفی باشد، در این صورت نوع ترتیب W برابر عدد ترتیبی منحصربه‌فردی است که با W یکریخت است.

اکنون برای مثال‌های بالا چه می‌توان کرد؟ به نظر، قضیهٔ بازگشت جامع‌تری نیاز داریم. قضیهٔ زیر را با قضیهٔ بازگشتی که در فصل ۳ ثابت کردیم مقایسه کنید.

۶.۳ قضیهٔ بازگشت. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد. برای هر مجموعه مانند a دنبالهٔ نامتناهی منحصربه‌فرد $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ وجود دارد به‌قسمی که

الف) $a_\circ = a$.

ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n+\text{۱}} = \mathbf{G}(a_n, n)$.

از این قضیه وجود دنبالهٔ $\langle \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots \rangle$ و وجود $\omega + \omega$ نتیجه می‌شود (تمرین ۲.۳ را ببینید). قضیهٔ بازگشت بالا را به‌علاوهٔ قضیهٔ بازگشت ترامتناهی جامع‌تری در بخش بعد ثابت خواهیم کرد.

تمرین‌ها

۱.۳ فرض کنید $\mathbf{P}(x, y)$ خاصیتی باشد به‌قسمی که برای هر x، حداکثر یک y وجود داشته باشد که به‌ازای آن $\mathbf{P}(x, y)$ برقرار است. در این صورت به‌ازای هر مجموعهٔ A، مجموعهٔ B وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$ اگر $\mathbf{P}(x, y)$ به‌ازای yیی برقرار باشد، در این صورت به‌ازای $y \in B$یی، $\mathbf{P}(x, y)$ برقرار است.

۲.۳ با استفاده از قضیهٔ ٦.۳، وجود مجموعه‌های زیر را ثابت کنید:

الف) مجموعهٔ $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots\}$.

ب) مجموعهٔ $\{\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \ldots\}$.

ج) مجموعهٔ $\omega + \omega = \omega \cup \{\omega, \omega + \text{۱}, (\omega + \text{۱}) + \text{۱}, \ldots\}$.

۳.۳ با استفاده از قضیهٔ ٦.۳ تعریف کنید

$$V_\circ = \varnothing,$$

$$V_{n+\text{۱}} = \mathcal{P}(V_n) \qquad (n \in \omega),$$

$$V_\omega = \bigcup_{n \in \omega} V_n.$$

۴.۳ الف) هر $x \in V_\omega$ متناهی است.

ب) V_ω متعدی است.

ج) V_ω یک مجموعهٔ استقرائی است.

اعضای V_ω را مجموعه‌های به‌طور ارثی متناهی می‌نامند.

۵.۳الف) اگر $x \in V_\omega$ و $y \in V_\omega$، آن‌گاه $\{x,y\} \in V_\omega$.

ب) اگر $X \in V_\omega$، آن‌گاه $\bigcup X \in V_\omega$ و $\mathcal{P}(X) \in V_\omega$.

ج) اگر $A \in V_\omega$ و f تابعی روی A باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$، $f(x) \in V_\omega$، آن‌گاه $X \in V_\omega$.

د) اگر X زیرمجموعهٔ متناهی از V_ω باشد، آن‌گاه $X \in V_\omega$.

۴ بازگشت و استقرای ترامتناهی

اصل استقرا و قضیهٔ بازگشت دو ابزار عمده برای اثبات قضیه‌های اعداد طبیعی و ساختن توابع با دامنهٔ $\mathbb{N}$ هستند. از هر دوی آن‌ها در فصل‌های قبل، بارها استفاده کردیم. در این بخش، نشان می‌دهیم چگونه این نتایج را می‌توان به اعداد ترتیبی تعمیم داد.

۱.۴ اصل استقرای ترامتناهی. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیت (احتمالاً دارای پارامتر) باشد. فرض کنید برای هر عدد ترتیبی α

(۲.۴) اگر $\mathbf{P}(\beta)$ برای هر $\beta < \alpha$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(\alpha)$.

در این صورت $\mathbf{P}(\alpha)$ برای هر اوردینال α برقرار است.

برهان. فرض کنید عدد ترتیبی γ خاصیت $\mathbf{P}$ را نداشته باشد و S دارای کوچک‌ترین عضوی مانند α باشد. چون هر اوردینال $\beta < \alpha$ دارای خاصیت $\mathbf{P}$ است، از (۲.۴) نتیجه می‌شود که $\mathbf{P}(\alpha)$ برقرار است ولی این تناقض است. $\square$

برخی اوقات به کاربردن اصل استقرای ترامتناهی آسان‌تر می‌شود اگر به اصل استقرای معمولی برای $\mathbb{N}$ شبیه‌تر باشد. چنین صورتی را جداگانه برای اوردینال‌های تالی و حدی عرضه می‌کنیم.

۳.۴ صورت دوم اصل استقرای ترامتناهی. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ یک خاصیت باشد. فرض کنید که

الف) $\mathbf{P}(\circ)$ برقرار باشد.

ب) برای هر اوردینال α، $\mathbf{P}(\alpha)$ ایجاب کند $\mathbf{P}(\alpha + ۱)$.

ج) برای هر اوردینال حدی $\alpha \neq \circ$، اگر $\mathbf{P}(\beta)$ برای هر اوردینال $\beta < \alpha$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(\alpha)$ برقرار است.

در این صورت برای هر اوردینال α، $\mathbf{P}(\alpha)$ برقرار است.

برهان. کافی است نشان دهیم مفروضات (الف)، (ب)، و (ج)، رابطهٔ (۲.۴) را نتیجه می‌دهند. پس فرض کنید α یک اوردینال باشد به‌طوری‌که برای هر $\beta < \alpha$، $\mathbf{P}(\beta)$ برقرار باشد. اگر $\alpha = \circ$، در این صورت $\mathbf{P}(\alpha)$ بنا به (الف) برقرار است. اگر α تالی باشد، یعنی اگر اوردینال $\beta < \alpha$ موجود باشد به‌قسمی که $\alpha = \beta + ۱$، چون می‌دانیم $\mathbf{P}(\beta)$ برقرار است، لذا بنا به (ب)، $\mathbf{P}(\alpha)$ برقرار است. چنانچه $\alpha \neq \circ$ حدی باشد، بنا به (ج)، $\mathbf{P}(\alpha)$ برقرار است. □

اکنون قضیهٔ بازگشت را تعمیم می‌دهیم. توابعی را که دامنهٔ آن‌ها اوردینال α است دنبالهٔ ترامتناهی با طول α می‌نامند.

۴.۴ قضیه. فرض کنید Ω یک عدد ترتیبی، A یک مجموعه، و $S = \bigcup_{\alpha<\Omega} A^\alpha$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های ترامتناهی از A با طول کوچک‌تر از Ω باشد. فرض کنید $g : S \to A$ یک تابع باشد. در این صورت تابع منحصربه‌فردی مانند $f : \Omega \to A$ موجود است به‌قسمی که

$$\text{برای هر } \alpha < \Omega \quad f(\alpha) = g(f \restriction \alpha).$$

شما می‌توانید این قضیه را با روشی کاملاً مشابه اثبات قضیهٔ بازگشت در فصل ۳ اثبات کنید. ما در اینجا وارد جزئیات نمی‌شویم، چرا که این قضیه نتیجه‌ای از قضیهٔ بازگشت ترامتناهی کلی‌تری است.

چنانچه ϑ یک اوردینال و f دنبالهٔ ترامتناهی با طول ϑ باشد، می‌نویسم

$$f = \langle a_\alpha \mid \alpha < \vartheta \rangle .$$

قضیهٔ ۴.۴ می‌گوید اگر g تابعی روی مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های ترامتناهی از اعضای A با طول کوچک‌تر از Ω با مقادیر در A باشد، در این صورت دنبالهٔ ترامتناهی $\langle a_\alpha \mid \alpha < \Omega \rangle$ موجود است به‌قسمی که برای هر $\alpha < \Omega$، $a_\alpha = g(\langle a_\xi \mid \xi < \alpha \rangle)$.

۵.۴ قضیهٔ بازگشت ترامتناهی. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد، در این صورت خاصیت $\mathbf{P}$ مذکور در (۶.۴)، عملی مانند $\mathbf{F}$ را تعریف می‌کند که برای هر اوردینال α، $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$.

برهان. t را یک محاسبه با طول α روی $\mathbf{G}$ می‌نامیم اگر t تابع باشد، $\operatorname{dom} t = \alpha + ۱$، و برای هر $\beta \leq \alpha$، $t(\beta) = \mathbf{G}(t \restriction \beta)$.

فرض کنید $\mathbf{P}(x, y)$ خاصیت زیر باشد

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ یک عدد ترتیبی است و به‌ازای محاسبه } t \text{ با طول } x \text{ روی } \mathbf{G}\text{، } y = t(x)\text{،} \\ \text{یا } x \text{ عدد ترتیبی نیست و } y = \varnothing. \end{array}\right\} \quad (۶.۴)$$

نخست ثابت می‌کنیم $\mathbf{P}$ یک عمل تعریف می‌کند.

باید نشان دهیم برای هر x، yی منحصربه‌فردی موجود است به‌قسمی که $\mathbf{P}(x, y)$. اگر x عدد ترتیبی نباشد این حکم واضح است. برای اثبات حکم برای اوردینال‌ها، کافی است با استقرای ترامتناهی نشان دهیم که برای هر اوردینال α محاسبهٔ یکتایی با طول α وجود دارد.

عبارت برای هر $\beta < \alpha$ محاسبهٔ یکتایی با طول β وجود دارد را فرض استقرا در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم ثابت کنیم محاسبهٔ یکتایی با طول α وجود دارد.

وجود: کاربرد اصل موضوع جایگزینی برای خاصیت «y محاسبه‌ای با طول x است» و مجموعهٔ α نشان می‌دهد مجموعهٔ

$$T = \{t \mid \text{ محاسبه‌ای با طول } \beta \text{ به‌ازای } \beta < \alpha \text{ یی است } t\}$$

وجود دارد. به‌علاوه، فرض استقرا ایجاب می‌کند برای هر $\beta < \alpha$، عضو یکتایی مانند $t \in T$ وجود دارد به‌قسمی که طول t برابر β است.

T دستگاهی از توابع است، قرار دهید $\bar{t} = \bigcup T$. نهایتاً هم قرار دهید $\tau = \bar{t} \cup \{(\alpha, \mathbf{G}(\bar{t}))\}$. ثابت می‌کنیم τ محاسبه‌ای با طول α است.

۷.۴ ادعا. τ تابع است و $\mathrm{dom}\tau = \alpha + ۱$.

به‌راحتی می‌بینیم که $\mathrm{dom}\bar{t} = \bigcup_{t\in T} \mathrm{dom}t = \bigcup_{\beta\in\alpha}(\beta + ۱) = \alpha$، نتیجتاً، $\mathrm{dom}\tau = \mathrm{dom}\bar{t} \cup \{\alpha\} = \alpha + ۱$.

حال چون $\alpha \notin \mathrm{dom}\bar{t}$، کافی است ثابت کنیم که $\bar{t}$ تابع است. این هم از این واقعیت که T یک دستگاه موافق از توابع است نتیجه می‌شود.

در حقیقت، فرض کنید $t_۱, t_۲ \in T$ دلخواه باشند و $\mathrm{dom}t_۱ = \beta_۱$ و $\mathrm{dom}t_۲ = \beta_۲$. فرض کنید که مثلاً $\beta_۱ \le \beta_۲$، پس $\beta_۱ \subseteq \beta_۲$ و کافی است نشان دهیم برای هر $\gamma < \beta_۱$، $t_۱(\gamma) = t_۲(\gamma)$. این کار را با استقرای ترامتناهی انجام خواهیم داد. لذا فرض کنید $\gamma < \beta_۱$ و $t_۱(\gamma) = t_۲(\gamma)$ برای هر $\delta < \gamma$. در این صورت $t_۱ \restriction \gamma = t_۲ \restriction \gamma$ و بنابراین داریم $t_۱(\gamma) = \mathbf{G}(t_۱ \restriction \gamma) = \mathbf{G}(t_۲ \restriction \gamma) = t_۲(\gamma)$. از اینجا نتیجه می‌گیریم $t_۱(\gamma) = t_۲(\gamma)$ برای هر $\gamma < \beta_۱$. این امر اثبات ادعای ۷.۴ را کامل می‌کند.

۸.۴ ادعا. برای هر $\beta < \alpha$، $\tau(\beta) = \mathbf{G}(\tau \restriction \beta)$.

اگر $\beta = \alpha$ حکم واضح است، زیرا $\tau(\alpha) = \mathbf{G}(\bar{t}) = \mathbf{G}(\tau \restriction \alpha)$. چنانچه $\beta < \alpha$، $t \in T$ را طوری انتخاب کنید که $\beta \in \mathrm{dom}\, t$. داریم $\tau(\beta) = t(\beta) = \mathbf{G}(t \restriction \beta) = \mathbf{G}(\tau \restriction \beta)$، چرا که t یک محاسبه است و $t \subseteq \tau$.

دو ادعای ۷.۴ و ۸.۴ با هم ثابت می‌کنند که τ محاسبه‌ای با طول α است.

یکتایی: فرض کنید σ محاسبهٔ دیگری با طول α باشد؛ نشان می‌دهیم $\tau = \sigma$. چون τ و σ تابع هستند و $\mathrm{dom}\tau = \alpha + ۱ = \mathrm{dom}\sigma$، کافی است با استقرای ترامتناهی ثابت کنیم برای هر $\gamma \le \alpha$، $\tau(\gamma) = \sigma(\gamma)$.

فرض کنید برای هر $\delta < \gamma$، $\tau(\delta) = \sigma(\delta)$. در این صورت $\tau(\gamma) = \mathbf{G}(\tau \restriction \gamma) = \mathbf{G}(\sigma \restriction \gamma) = \sigma(\gamma)$. اکنون حکم نتیجه می‌شود.

اثبات اینکه خاصیت $\mathbf{P}$ یک عمل $\mathbf{F}$ تعریف می‌کند، به پایان می‌رسد. توجه کنید برای هر محاسبه t، $\mathbf{F} \restriction \operatorname{dom} t = t$. دلیل این امر این است که برای هر $\beta \in \operatorname{dom} t$، به‌وضوح $t_\beta = t \restriction (\beta + ۱)$ محاسبه‌ای با طول β است و لذا، بنا به تعریف $\mathbf{F}$، $\mathbf{F}(\beta) = t_\beta(\beta) = t(\beta)$.

برای اثبات اینکه برای هر α، $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$، فرض کنید t محاسبهٔ منحصر به‌فردی با طول α باشد، پس داریم $\mathbf{F}(\alpha) = t(\alpha) = \mathbf{G}(t \restriction \alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$. □

بازهم نسخهٔ پارامتری‌ای از قضیهٔ بازگشت ترامتناهی را نیاز داریم. چنانچه $\mathbf{F}(z, x)$ عملی با دو متغیر باشد به‌جای $\mathbf{F}(z, x)$ می‌نویسیم $\mathbf{F}_z(x)$.

توجه کنید که برای هر z ثابت، $\mathbf{F}_z$ عملی برحسب یک متغیر است. چنانچه $\mathbf{F}$ با $Q(z, x, y)$ داده شود، نمادهای $\mathbf{F}_z[A]$ و $\mathbf{F}_z \restriction A$ به معنی

$$\mathbf{F}_z[A] = \{y \mid Q(z, x, y) \text{ به‌ازای } x \in A \text{ یی، }\},$$

$$\mathbf{F}_z \restriction A = \{(x, y) \mid Q(z, x, y) \text{ به‌ازای } x \in A \text{ یی، }\}$$

هستند. حال می‌توانیم نسخهٔ پارامتری‌ای از قضیهٔ ۵.۴ را بیان کنیم.

۹.۴ قضیهٔ بازگشت ترامتناهی، صورت پارامتری. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد. خاصیت Q در (۱۰.۴) عمل $\mathbf{F}$ را تعریف می‌کند به‌قسمی که $\mathbf{F}(z, \alpha) = \mathbf{G}(z, \mathbf{F}_z \restriction \alpha)$ برای هر اوردینال α و هر مجموعهٔ z.

برهان. t را یک محاسبه با طول α روی $\mathbf{G}$ و z بنامید هرگاه t تابع باشد، $\operatorname{dom} t = \alpha + ۱$، و برای هر $\beta \le \alpha$، $t(\beta) = \mathbf{G}(z, t \restriction \beta)$.

فرض کنید $Q(z, x, y)$ خاصیت زیر باشد

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ عدد ترتیبی است و به‌ازای محاسبه } t \text{ با طول } x \text{ روی } \mathbf{G} \text{ و } z\text{،} \\ y = t(x) \text{، یا} \\ x \text{ عدد ترتیبی نیست و } y = \varnothing. \end{array}\right\} \qquad (۱۰.۴)$$

حال z را به طریق معمول همانند یک پارامتر در ادامهٔ برهان وارد کنید. □

گاهی اوقات مهم است بین اوردینال‌های تالی و حدی در ساختارهایمان تمایز قائل شویم. لذا مفید است فرمول‌بندی دیگری از قضیهٔ بازگشت با عنایت به این تمایز در اختیار داشته باشیم.

۱۱.۴ قضیه. فرض کنید $\mathbf{G}_1$، $\mathbf{G}_2$، و $\mathbf{G}_3$ سه عمل باشند و فرض کنید $\mathbf{G}$ عمل تعریف شده در (۱۲.۴) ذیل باشند. در این صورت خاصیت $\mathbf{P}$ در (۶.۴) (روی $\mathbf{G}$) عملی مانند $\mathbf{F}$ را تعریف می‌کند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= \mathbf{G}_1(\varnothing), \\ \mathbf{F}(\alpha+1) &= \mathbf{G}_2(\mathbf{F}(\alpha)) \quad \text{برای هر } \alpha, \\ \mathbf{F}(\alpha) &= \mathbf{G}_3(\mathbf{F}\restriction\alpha) \quad \text{برای هر اوردینال حدی } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

برهان. عمل $\mathbf{G}$ را به‌صورت

(۱۲.۴)
$y = \mathbf{G}(x)$ اگر و تنها اگر یا
(الف) $x = \varnothing$ و $y = \mathbf{G}_1(\varnothing)$، یا
(ب) x تابع است و $\operatorname{dom} x = \alpha + 1$، به‌ازای اوردینالی مانند α
و $y = \mathbf{G}_2(x(\alpha))$، یا
(ج) x تابع است و $\operatorname{dom} x = \alpha$ به‌ازای اوردینالی حدی مانند $\alpha \neq 0$
و $y = \mathbf{G}_3(x)$، یا
(هـ) x به‌صورت هیچ‌یک از موارد بالا نیست و $y = \varnothing$

تعریف کنید. فرض کنید $\mathbf{P}$ خاصیت گفته‌شده در (۶.۴) از اثبات قضیهٔ بازگشت ترامتناهی (روی $\mathbf{G}$) باشد. در این صورت عمل $\mathbf{F}$ که برحسب $\mathbf{P}$ تعریف شده است برای هر α در $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}\restriction\alpha)$ صدق می‌کند. با استفاده از تعریف $\mathbf{G}$، به‌راحتی می‌توان دید که $\mathbf{F}$ خواص مطلوب را دارد. □

بیان نسخهٔ پارامتری قضیهٔ ۱۱.۴ سرراست است و آن را به خواننده محول می‌کنیم.

این بخش را با اثبات قضیه‌های ۶.۳ و ۴.۴ به پایان می‌بریم.

برهان قضیهٔ ۶.۳. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد. می‌خواهیم برای هر مجموعهٔ a، دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ را به‌قسمی بیابیم که $a_\circ = a$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n+1} = \mathbf{G}(a_n, n)$.

طبق نسخهٔ پارامتری قضیهٔ بازگشت ترامتناهی ۱۱.۴، عمل $\mathbf{F}$ موجود است به‌قسمی که $\mathbf{F}(\circ) = a$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbf{F}(n+1) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(n), n)$. حال اصل موضوع جایگزینی را به کار می‌بریم، پس دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ موجود است که معادل $\mathbf{F} \restriction \omega$ است و از اینجا حکم نتیجه می‌شود. □

برهان قضیهٔ ۴.۴. عمل $\mathbf{G}$ را به‌صورت

$$\mathbf{G} = \begin{cases} g(t) & t \in S \\ \varnothing & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف کنید. قضیهٔ بازگشت ترامتناهی عملی مانند $\mathbf{F}$ را به‌دست می‌دهد به‌قسمی که $\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$ برای هر اوردینال α برقرار است. حال تعریف کنید $f = \mathbf{F} \restriction \Omega$. □

تمرین‌ها

۱.۴ قضیهٔ کلی‌تر بازگشت ترامتناهی (قضیهٔ بازگشت دوگانه) را ثابت کنید:
فرض کنید $\mathbf{G}$ عملی دو متغیری باشد. در این صورت عمل $\mathbf{F}$ وجود دارد به طوری که $\mathbf{F}(\beta, \alpha) = \mathbf{G}\left(\mathbf{F} \restriction (\beta \times \alpha)\right)$ برای هر دو عدد ترتیبی α و β.
[راهنمایی: در اینجا محاسبه‌ها توابعی روی $(\alpha + ۱) \times (\beta + ۱)$ هستند.]

۲.۴ با استفاده از قضیهٔ بازگشت ۹.۴ نشان دهید که عمل دوتایی مانند $\mathbf{F}$ وجود دارد به‌طوری‌که

الف) $\mathbf{F}(x, ۱) = \circ$ برای هر x.

ب) $\mathbf{F}(x, n+۱) = \circ$ اگر و فقط اگر y و z وجود داشته باشند به‌طوری‌که $x = (y, z)$ و $\mathbf{F}(y, n) = \circ$.

گوییم x یک nتایی است (که در آن $n \in \omega$ و $n > ۰$) هرگاه $\mathbf{F}(x,n) = ۰$. ثابت کنید که این تعریف از nتایی‌ها با آنچه که در تمرین ۱۷.۵ از فصل سوم داده شده است مطابقت دارد.

۵ حساب اوردینال‌ها

اکنون قضیهٔ بازگشت ترامتناهی از بخش قبل را به کار می‌بریم تا جمع، ضرب، و توان اعداد ترتیبی را تعریف کنیم. این تعریف‌ها تعمیم سرراستی از تعریف‌های متناظر در اعداد طبیعی هستند.

۱.۵ تعریف جمع اعداد ترتیبی. برای هر اوردینال β

الف) $\beta + ۰ = \beta$.

ب) $\beta + (\alpha + ۱) = (\beta + \alpha) + ۱$ برای هر α.

ج) $\beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma \mid \gamma < \alpha\}$ برای هر اوردینال حدی $\alpha \neq ۰$.

اگر در (الف) قرار دهیم $\alpha = ۰$، تساوی $\beta + ۱ = \beta + ۱$ به‌دست می‌آید، طرف چپ جمع عدد ترتیبی β و ۱ را نشان می‌دهد درحالی که طرف راست تالی β است.

تعریف ۱.۵ مبتنی بر نسخهٔ معمول قضیهٔ بازگشت ترامتناهی است. برای دیدن این امر اجازه دهید عمل‌های $\mathbf{G}_۱$، $\mathbf{G}_۲$، و $\mathbf{G}_۳$ را در نظر بگیریم که در اینجا $\mathbf{G}_۱(z,x) = z$، $\mathbf{G}_۲(z,x) = x + ۱$، و $\mathbf{G}_۳(z,x) = \sup(\operatorname{ran} x)$ مشروط بر اینکه x تابع باشد (و در غیر این صورت، $\mathbf{G}_۳(z,x) = ۰$).

صورت پارامتری قضیهٔ ۱۱.۴ عملی مانند $\mathbf{F}$ را به‌دست می‌دهد که برای هر z

(۲.۵)

$$\begin{cases} \mathbf{F}(z,۰) = \mathbf{G}_۱(z,۰) = z. \\ \mathbf{F}(z,\alpha+۱) = \mathbf{G}_۲(z,\mathbf{F}_z(\alpha)) = \mathbf{F}(z,\alpha) + ۱ \quad \text{برای هر } \alpha. \\ \text{برای هر اوردینال حدی } \alpha \neq ۰، \\ \mathbf{F}(z,\alpha) = \mathbf{G}_۳(z,\mathbf{F}_z \restriction \alpha) = \sup(\operatorname{ran}(\mathbf{F}_z \restriction \alpha)) = \sup(\{\mathbf{F}(z,\gamma) \mid \gamma < \alpha\}) \end{cases}$$

چنانچه α و β دو اوردینال باشند، در این صورت به‌جای $\mathbf{F}(\beta,\alpha)$ می‌نویسیم $\beta + \alpha$. حال توجه کنید شرایط (۲.۵) دقیقاً همان عبارت‌های (الف)، (ب)، و (ج) تعریف ۱.۵ هستند.

در کاربردهای بعدی قضیهٔ بازگشت ترامتناهی، صورت اختصاری مذکور در تعریف ۱.۵ را به کار می‌بریم بی‌آنکه تعریفی سازگار با قضیهٔ ۱۱.۴ برای عمل‌های $\mathbf{G}_1$، $\mathbf{G}_2$، و $\mathbf{G}_3$ را صریحاً فرمول‌بندی کنیم.

یکی از نتایج (۱.۵) این است که برای هر β

$$(\beta + 1) + 1 = \beta + 2,$$

$$(\beta + 2) + 1 = \beta + 3,$$

و الی‌آخر. همچنین، (اگر $\alpha = \beta = \omega$) داریم

$$\omega + \omega = \sup\{\omega + n \mid n < \omega\},$$

و به‌نحو مشابه،

$$(\omega + \omega) + \omega = \sup\{(\omega + \omega) + n \mid n < \omega\}.$$

برعکس این مثال‌ها، اجازه دهید مجموع $m + \omega$ برای $m < \omega$ را در نظر بگیریم. داریم $m + \omega = \sup\{m + n \mid n < \omega\} = \omega$، چرا که اگر m عدد طبیعی باشد، $m + n$ نیز عدد طبیعی است. لذا می‌بینیم که $m + \omega \neq \omega + m$، یعنی جمع اوردینال‌ها تعویض‌پذیر نیست. همچنین لازم است توجه کنیم که گرچه $2 \neq 1$، داریم $2 + \omega = 1 + \omega$. پس حذف از راست در برابری‌ها و نابرابری‌ها مجاز نیست. با این حال، جمع اعداد ترتیبی شرکت‌پذیر است و حذف از چپ مجاز است. (لم ۴.۵)

در فصل ۴، مجموع مجموعه‌های مرتب خطی را تعریف کردیم. حال ثابت می‌کنیم تعریف ۱.۵ برای جمع اوردینال‌ها با آن تعریف کلی‌تر مطابقت دارد.

۳.۵ قضیه. فرض کنید $(W_1, <_1)$ و $(W_2, <_2)$ دو مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشند که به ترتیب با دو اوردینال α_1 و α_2 یکریخت‌اند. همچنین فرض کنید

$(W,<)$ مجموع $(W_۱,<_۱)$ و $(W_۲,<_۲)$ باشد. در این صورت $(W,<)$ با اوردینال $\alpha_۱+\alpha_۲$ یکریخت است.

برهان. فرض می‌کنیم $W_۱$ و $W_۲$ مجزا هستند، $W=W_۱\cup W_۲$، و هر عضو در $W_۱$ نسبت به $<$ قبل از هر عضو $W_۲$ قرار می‌گیرد و در عین حال $<$ با $<_۱$ و $<_۲$ روی $W_۱$ و $W_۲$ یکی است. قضیه را با استقرا روی $\alpha_۲$ اثبات می‌کنیم.

اگر $\alpha_۲=۰$، آن‌گاه $W_۲=\varnothing$، $W=W_۱$، و $\alpha_۱+\alpha_۲=\alpha_۱$.

اگر $\alpha_۲=\beta+۱$، آن‌گاه $W_۲$ بزرگ‌ترین عضو چون a دارد و $W[a]$ با $\alpha_۱+\beta$ یکریخت است. این یکریختی به یک یکریختی‌ای بین W و $(\alpha_۱+\beta)+۱=\alpha_۱+\alpha_۲$ قابل گسترش است.

فرض کنید $\alpha_۲$ اوردینال حدی باشد. برای هر $\beta<\alpha_۲$ یکریختی f_β از $\alpha_۱+\beta$ بروی $W[a_\beta]$ موجود است، که در اینجا $a_\beta\in W_۲$. به‌علاوه، f_β یکتاست، a_β، βامین عضو $W_۲$ است و چنانچه $\beta<\gamma$، در این صورت $f_\beta\subset f_\gamma$. قرار دهید $f=\bigcup_{\beta<\alpha_۲}f_\beta$. چون $\alpha_۱+\alpha_۲=\bigcup_{\beta<\alpha_۲}(\alpha_۱+\beta)$، نتیجه می‌گیریم که f یک یکریختی از $\alpha_۱+\alpha_۲$ بروی W است. □

۴.۵ قضیه.

الف) اگر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و β اوردینال باشند، در این صورت $\alpha_۱<\alpha_۲$ اگر و تنها اگر $\beta+\alpha_۱<\beta+\alpha_۲$.

ب) برای هر اوردینال $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و β، $\beta+\alpha_۱=\beta+\alpha_۲$ اگر و تنها اگر $\alpha_۱=\alpha_۲$.

ج) برای هر اوردینال α، β، و γ، $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

برهان.

الف) نخست با استفاده از استقرای ترامتناهی روی $\alpha_۲$ نشان می‌دهیم از $\alpha_۱<\alpha_۲$ نتیجه می‌شود $\beta+\alpha_۱<\beta+\alpha_۲$. پس فرض کنید $\alpha_۲$ اوردینالی بزرگ‌تر از $\alpha_۱$ باشد و همچنین $\alpha_۱<\delta$ ایجاب کند $\beta+\alpha_۱<\beta+\delta$، برای هر $\delta<\alpha_۲$. چنانچه $\alpha_۲$ اوردینال تالی باشد، در این صورت $\alpha_۲=\delta+۱$ که در آن $\alpha_۱\le\delta$. بنا به فرض استقرا، چنانچه $\alpha_۱<\delta$ و همچنین، به‌وضوح، چنانچه

$\delta = \alpha_1$ داریم $\beta + \alpha_1 \leq \beta + \delta < (\beta + \delta) + 1 = \beta + (\delta + 1) = \beta + \alpha_2$.
چنانچه α_2 اوردینال حدی باشد، در این صورت $\alpha_1 + 1 < \alpha_2$، پس داریم

$$\begin{aligned}\beta + \alpha_1 &< (\beta + \alpha_1) + 1 = \beta + (\alpha_1 + 1)\\ &\leq \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \alpha_2\} = \beta + \alpha_2.\end{aligned}$$

برای اثبات جهت عکس، فرض کنید $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$. چنانچه $\alpha_2 < \alpha_1$، بنا به قسمت ثابت شده در بالا، $\beta + \alpha_2 < \beta + \alpha_1$. چون تساوی $\alpha_2 = \alpha_1$ نشدنی است (چرا که لازم می‌آید $\beta + \alpha_2 = \beta + \alpha_1$)، از خاصیت خطی بودن $<$ نتیجه می‌گیریم $\alpha_1 < \alpha_2$.

ب) این قسمت بلافاصله از (الف) نتیجه می‌شود؛ چرا که اگر $\alpha_1 \neq \alpha_2$، آن‌گاه یا $\alpha_1 < \alpha_2$ یا $\alpha_2 < \alpha_1$، و نتیجتاً یا $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$ یا $\beta + \alpha_2 < \beta + \alpha_1$. اگر هم $\alpha_1 = \alpha_2$، در این صورت رابطهٔ $\beta + \alpha_1 = \beta + \alpha_2$ بدیهی است.

ج) اثبات را با استقرای ترامتناهی روی γ انجام می‌دهیم. چنانچه $\gamma = 0$، در این صورت $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$. فرض کنید حکم برای هر γ برقرار باشد، آن را برای $\gamma + 1$ اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + (\gamma + 1) &= [(\alpha + \beta) + \gamma] + 1 = [\alpha + (\beta + \gamma)] + 1\\ &= \alpha + [(\beta + \gamma) + 1] = \alpha + [\beta + (\gamma + 1)]\end{aligned}$$

(در مرحلهٔ دوم از فرض استقرا و در دیگر مرحله‌ها از عبارت دوم در تعریف جمع استفاده کرده‌ایم). نهایتاً، فرض کنید γ اوردینال حدی باشد و $\gamma \neq 0$. در این صورت

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{(\alpha + \beta) + \delta \mid \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \gamma\}.$$

مشاهده می‌کنیم که $\sup\{\beta + \delta \mid \delta < \gamma\} = \beta + \gamma$ (بنا به عبارت سوم در تعریف جمع) و اینکه $\beta + \gamma$ اوردینال حدی است (اگر $\xi < \beta + \gamma$، آن‌گاه $\xi \leq \beta + \delta$ به‌ازای یک $\delta < \gamma$یی، و بنابراین $\xi + 1 \leq (\beta + \delta) + 1 = \beta + (\delta + 1) < \beta + \gamma$، چرا که γ حدی است). حال

کافی است توجه کنیم

$$\sup\{\alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta + \gamma\}$$

(به این دلیل که $\beta + \gamma = \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \gamma\}$) و بنابراین مجدداً بنا به عبارت سوم در تعریف ۱.۵ داریم $(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta + \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma)$.

□

لم زیر نشان می‌دهد می‌توان برای اعداد ترتیبی عمل تفریق تعریف کرد.

۵.۵ لم. اگر $\alpha \leq \beta$، آن‌گاه عدد ترتیبی منحصربه‌فرد ξ موجود است به‌قسمی که $\alpha + \xi = \beta$.

برهان. چون α قطعهٔ آغازی از مجموعهٔ خوش‌ترتیب β (یا $\alpha = \beta$) است، قضیهٔ ۳.۵ ایجاب می‌کند که $\beta = \alpha + \xi$، که در آن ξ نوع ترتیب مجموعهٔ $\beta - \alpha = \{\nu \mid \alpha \leq \nu \leq \beta\}$ است. اوردینال ξ بنا به لم ۴.۵ (ب) منحصر به‌فرد است. □

حالا تعریفی برای ضرب اوردینال‌ها ارائه می‌دهیم.

۶.۵ تعریف – ضرب اعداد ترتیبی. برای هر اوردینال β،

الف) $\beta \cdot 0 = 0$.

ب) برای هر α، $\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta$.

ج) برای هر $\alpha \neq 0$ حدی، $\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma \mid \gamma < \alpha\}$.

۷.۵ مثال‌ها.

الف) $\beta \cdot 1 = \beta \cdot (0 + 1) = \beta \cdot 0 + \beta = 0 + \beta = \beta$.

ب) $\beta + \beta = \beta \cdot 1 + \beta = \beta \cdot (1 + 1) = \beta \cdot 2$، در حالت خاص، $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

ج) $\beta + \beta + \beta = \beta \cdot 2 + \beta = \beta \cdot (2 + 1) = \beta \cdot 3$ و مشابه آن.

د) $\beta \cdot \omega = \sup\{\beta \cdot n \mid n \in \omega\} = \sup\{\beta, \beta + \beta, \beta + \beta + \beta, \ldots\}$.

ه) برای هر α، $\alpha = \alpha \cdot ۱$؛ اما این حکم اثبات استقرائی به‌صورت زیر نیاز دارد:

$$۱ \cdot ۰ = ۰, \; ۱ \cdot (\alpha + ۱) = ۱ \cdot \alpha + ۱ = \alpha + ۱,$$
$$۱ \cdot \alpha = \sup\{۱ \cdot \gamma \mid \gamma < \alpha\} = \sup\{\gamma \mid \gamma < \alpha\} = \alpha$$

اگر $\alpha \neq ۰$ حدی باشد.

و) $۲ \cdot \omega = \sup\{۲ \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega$. از آنجا که $\omega \cdot ۲ = \omega + \omega \neq \omega$ نتیجه می‌گیریم ضرب اوردینال‌ها در حالت کلی تعویض‌پذیر نیست.

خواص بیشتری از ضرب اوردینال‌ها در تمرین‌های **۱.۵**، **۲.۵** و **۷.۵** آورده شده است.

ضرب اوردینال‌ها نیز آن‌گونه که در **٦.۵** بیان شد با تعریف کلی حاصل‌ضرب مجموعه‌های مرتب خطی مذکور در فصل ۴ مطابقت دارد.

۸.۵ قضیه. فرض کنید α و β دو عدد ترتیبی باشند. ترتیب‌های الفبایی و پادالفبایی روی حاصل‌ضرب $\alpha \times \beta$، هر دو خوش‌ترتیبی هستند. ترتیب پادالفبایی $\alpha \times \beta$ دارای نوع ترتیب $\alpha \cdot \beta$ است در حالی که ترتیب الفبایی آن دارای نوع ترتیب $\beta \cdot \alpha$ است.

برهان. ترتیب پادالفبایی $\alpha \times \beta$ را با $\prec$ نشان دهید. یک یکریختی بین $(\alpha \times \beta, \prec)$ و $\alpha \cdot \beta$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $\xi < \alpha$ و $\eta \leq \beta$ قرار دهید $f(\xi, \eta) = \alpha \cdot \eta + \xi$. در این صورت برد f برابر مجموعهٔ $\alpha \cdot \beta = \{\alpha \cdot \eta + \xi \mid \eta < \beta \text{ و } \xi < \alpha\}$ است و f یکریختی است (جزئیات را ــ که با استقرا ثابت می‌شود ــ به خواننده محول می‌کنیم؛ همچنین تمرین‌های **۱.۵**، **۲.۵**، **۷.۵** و **۸.۵** را ببینید). □

۹.۵ تعریف– توان اعداد ترتیبی. برای هر β،

الف) $\beta^{۰} = ۱$.

ب) برای هر α، $\beta^{\alpha + ۱} = \beta^{\alpha} \cdot \beta$.

ج) برای هر $\alpha \neq ۰$ حدی، $\beta^{\alpha} = \sup\{\beta^{\gamma} \mid \gamma < \alpha\}$.

۱۰.۵ مثال.

الف) $\beta^{۱} = \beta$، $\beta^{۲} = \beta \cdot \beta$، $\beta^{۳} = \beta^{۲} \cdot \beta = \beta \cdot \beta \cdot \beta$ و مشابه آن.

ب) $\beta^{\omega} = \sup\{\beta^n \mid n \in \omega\}$، در حالت ویژه،

$۱^{\omega} = ۱$،

$۲^{\omega} = \omega$، $۳^{\omega} = \omega$، …، $n^{\omega} = \omega$ برای هر $n \in \omega$،

$\omega^{\omega} = \sup\{\omega^n \mid n \in \omega\} > \omega$.

ذکر این نکته ضروری است که حساب اوردینال‌ها تفاوت اساسی با حساب کاردینال‌ها دارد. برای مثال، $۲^{\omega} = \omega$ و ω^{ω} اوردینال‌های شمارایی هستند درحالی که $\aleph_{\circ}^{\aleph_{\circ}} = ۲^{\aleph_{\circ}}$ ناشماراست.

اعمال حسابی را برای تولید اوردینال‌های بزرگ‌تر می‌توان به کار برد:

$\circ$، ۱، ۲، ۳، …، ω، $\omega + ۱$، $\omega + ۲$، …، $\omega \cdot ۲$، $\omega \cdot ۲ + ۱$، …، $\omega \cdot ۳$، …، $\omega \cdot ۴$،
…، $\omega \cdot \omega = \omega^{۲}$، $\omega^{۲} + ۱$، …، $\omega^{۲} \cdot ۲$، …، $\omega^{۳}$، …، $\omega^{۴}$، …، $\omega^{\omega} \cdot \omega^{\omega} + ۱$، …،
$\omega^{\omega} \cdot ۲$، …، $\omega^{\omega} \cdot \omega = \omega^{\omega+۱}$، …، $\omega^{\omega^{۲}}$، …، $\omega^{\omega^{۳}}$، …، $\omega^{\omega^{\omega}}$، …، $\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}$، ….

روند فوق را به‌راحتی می‌توان ادامه داد. چنانچه تعریف کنیم $\varepsilon = \sup\{\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}, \ldots\}$، می‌توان اوردینال‌های زیر را تشکیل داد $\varepsilon + ۱$، $\varepsilon + \omega$، ε^{ω}، $\varepsilon^{\varepsilon}$، $\varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon}}$ و همین‌طور الی‌آخر.

تمرین‌ها

۱.۵ قانون شرکت‌پذیری $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ را ثابت کنید.

۲.۵ قانون توزیع‌پذیری $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ را ثابت کنید.

۳.۵ ساده کنید:

الف) $\omega + (\omega + ۱)$.

ب) $\omega^{۲} + \omega$.

ج) $\omega^{۲} \cdot (\omega + ۱)$.

۴.۵ برای هر عدد ترتیبی α، یک عدد ترتیبی حدی یکتایی مانند β و عدد طبیعی یکتایی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha = \beta + n$. [راهنمایی: $\beta = \sup\{\gamma \le \alpha \mid$ حدی است $\gamma\}$.]

۵.۵ فرض کنید $\alpha \le \beta$. معادله $\beta = \alpha + \xi$ ممکن است ۰، ۱، یا تعداد نامتناهی جواب داشته باشد.

۶.۵ کوچک‌ترین اوردینال $\alpha > \omega$ را بیابید به‌طوری‌که $\xi + \alpha = \alpha$ برای هر $\xi < \alpha$.

۷.۵ الف) اگر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و β اعداد ترتیبی باشند و $\beta \neq ۰$، آن‌گاه $\alpha_۱ < \alpha_۲$ اگر و فقط اگر $\beta \cdot \alpha_۱ < \beta \cdot \alpha_۲$.

ب) برای اعداد ترتیبی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، و $\beta \neq ۰$ داریم $\beta \cdot \alpha_۱ = \beta \cdot \alpha_۲$ اگر و فقط اگر $\alpha_۱ = \alpha_۲$.

۸.۵ فرض α، β، و γ اعداد ترتیبی باشند و فرض کنید $\alpha < \beta$. در این صورت:

الف) $\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$.

ب) $\alpha \cdot \gamma \le \beta \cdot \gamma$ و در اینجا $\le$ نمی‌تواند با $>$ در هر دو نابرابری جایگزین شود.

۹.۵ نشان دهید که قوانین زیر برای همهٔ اعداد ترتیبی α، β، و γ برقرار نیستند:

الف) اگر $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$، آن‌گاه $\alpha = \beta$.

ب) اگر $\gamma > ۰$ و $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$، آن‌گاه $\alpha = \beta$.

ج) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.

۱۰.۵ عدد ترتیبی α حدی است اگر و فقط اگر $\alpha = \omega \cdot \beta$ به‌ازای عدد ترتیبی مانند β.

۱۱.۵ مجموعهٔ A از اعداد ترتیبی را طوری بیابید که $(A, \le_{\mathbb{Q}})$ با $(\alpha, \le)$ یکریخت باشد، که در آن

الف) $\alpha = \omega + ۱$،

ب) $\alpha = \omega \cdot ۲$،

ج) $\alpha = \omega \cdot ۳$،

د) ω^ω،

ه) $\alpha = \varepsilon$.

[راهنمایی: مجموعهٔ $\{n - 1/m \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ با ω^2 یکریخت است و غیره.]

۱۲.۵ نشان دهید که $(\omega \cdot 2)^2 \neq \omega^2 \cdot 2^2$.

۱۳.۵ الف) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

ب) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

۱۴.۵ الف) اگر $\alpha \leq \beta$، آن‌گاه $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

ب) اگر $1 < \alpha$ و اگر $\beta < \gamma$، آن‌گاه $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

۱۵.۵ کوچک‌ترین اوردینال ξ را بیابید به‌طوری‌که

الف) $\omega + \xi = \xi$.

ب) $\omega \cdot \xi = \xi \cdot \xi \neq 0$.

ج) $\omega^\xi = \xi$.

[راهنمایی برای قسمت (الف): فرض کنید $\xi_0 = 0$، $\xi_{n+1} = \omega + \xi_n$ و $\xi = \sup\{\xi_n \mid n \in \omega\}$.]

۱۶.۵ (مشخصه‌سازی توان‌های اوردینال‌ها) فرض کنید α و β دو عدد ترتیبی باشند. برای $f : \beta \to \alpha$ تعریف کنید $s(f) = \{\xi < \beta \mid f(\xi) \neq 0\}$. قرار دهید $S(\beta, \alpha) = \{f \mid f : \beta \to \alpha$ و $s(f)$ متناهی است$\}$. روی $S(\beta, \alpha)$ رابطهٔ $\prec$ را به این صورت تعریف کنید: $f \prec g$ اگر و فقط اگر اوردینالی مانند $\xi_0 < \beta$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(\xi_0) < g(\xi_0)$ و $f(\xi) = g(\xi)$ برای هر $\xi_0 < \xi$. نشان دهید که $(S(\alpha, \beta), \prec)$ با $(\alpha^\beta, <)$ یکریخت است.

۶ صورت نرمال

با استفاده از توان‌ها می‌توان نمایشی برای اعداد ترتیبی شبیه بسط اعشاری اعداد صحیح به‌دست آورد. اعداد ترتیبی به‌گونهٔ یکتایی برحسب صورت نرمال به معنایی که در قضیهٔ زیر دقیق خواهد شد، قابل نمایش هستند. صورت نرمال را برای اثبات نتیجهٔ جالبی دربارهٔ به اصطلاح دنباله‌های گودستاین اعداد صحیح به کار خواهیم برد.

ابتدا ملاحظه کنید که توابع اوردینالی $\alpha + \beta$، $\alpha \cdot \beta$، و α^β نسبت به متغیر دوم پیوسته‌اند؛ یعنی اینکه، چنانچه γ اوردینال حدی و $\beta = \sup_{\nu<\gamma} \beta_\nu$، در این صورت

$$\alpha+\beta = \sup_{\nu<\gamma}(\alpha+\beta_\nu), \quad \alpha\cdot\beta = \sup_{\nu<\gamma}(\alpha\cdot\beta_\nu), \quad \alpha^\beta = \sup_{\nu<\gamma} \alpha^{\beta_\nu}. \qquad (۱.٦)$$

این مطلب مستقیماً از تعریف‌های **۱.۵**، **٦.۵**، و **۹.۵** به‌دست می‌آید. نتیجه‌ای از این مطلب به صورت زیر است.

۲.۶ لم.

الف) اگر $\circ < \alpha \leq \gamma$، آن‌گاه بزرگ‌ترین اوردینالی مانند β موجود است به‌قسمی که $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$.

ب) اگر $۱ < \alpha \leq \gamma$، آن‌گاه بزرگ‌ترین اوردینالی مانند β موجود است به‌قسمی که $\alpha^\beta \leq \gamma$.

برهان. چون $\alpha \cdot (\gamma + ۱) \geq \gamma + ۱ > \gamma$، اوردینالی مانند δ وجود دارد به‌طوری‌که $\alpha \cdot \delta > \gamma$. به نحو مشابه، چون $\alpha^{\gamma+۱} \geq \gamma + ۱ > \gamma$، اوردینالی مانند δ وجود دارد که $\alpha^\delta > \gamma$. کوچک‌ترین δیی که برای آن $\alpha \cdot \delta > \gamma$ (یا $\alpha^\delta > \gamma$) بنا به (۱.٦)، باید یک اوردینال تالی، مثلاً به‌صورت $\delta = \beta + ۱$، باشد. بنابراین β بزرگ‌ترین اوردینالی است که $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ (متناظراً، $\alpha^\beta \leq \gamma$). □

لم زیر مشابه قضیهٔ تقسیم برای اعداد صحیح است.

۳.۶ لم. اگر γ اوردینال دلخواهی باشد و $\alpha \neq \circ$، آن‌گاه اوردینال یکتای β و اوردینال یکتای $\rho < \alpha$ موجود است به‌قسمی که $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$.

برهان. فرض کنید β بزرگ‌ترین اوردینالی باشد که $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$ (چنانچه $\alpha > \gamma$ قرار دهید $\beta = \circ$) و ρ آن ρی یکتایی باشد (بنا به لم **۵.۵**) که $\alpha \cdot \beta + \rho = \gamma$. اوردینال ρ کوچک‌تر از α است، زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت

$$\alpha \cdot (\beta + ۱) = \alpha \cdot \beta + \alpha \leq \alpha \cdot \beta + \rho = \gamma,$$

که با فرض بزرگ‌ترین بودن β در تناقض است.

برای اثبات یکتایی، قرار دهید $\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1 = \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2$ که در آن $\rho_1, \rho_2 < \alpha$. فرض کنید $\beta_2 > \beta_1$. پس $\beta_2 \geq \beta_1 + 1$، و بنابراین داریم

$$\alpha \cdot \beta_1 + (\alpha + \rho_2) = \alpha \cdot (\beta_1 + 1) + \rho_2 \leq \alpha \cdot \beta_2 + \rho_2 = \alpha \cdot \beta_1 + \rho_1,$$

و طبق لم ۴.۵ (الف)، $\alpha \leq \alpha + \rho_2 \leq \rho_1$، که تناقض است. پس $\beta_1 = \beta_2$ و از لم ۵.۵ نتیجه می‌شود $\rho_1 = \rho_2$. □

صورت نرمال چیزی شبیه به بسط اعشاری اعداد صحیح است با این تفاوت که پایهٔ توان‌ها در اینجا اوردینال ω است.

۴.۶ قضیه. هر اوردینال $\alpha > 0$ به گونه‌ای یکتا به شکل

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} k_n,$$

قابل بیان است، که در آن $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$، و $k_1 > 0, k_2 > 0, \ldots, k_n > 0$ و همگی آن‌ها متناهی هستند.

متذکر می‌شویم که ممکن است $\alpha = \omega^\alpha$، مثلاً تمرین ۱.٦ را ببینید.

برهان. نخست با استقرا روی α وجود صورت نرمال را ثابت می‌کنیم. اوردینال $\alpha = 1$ را می‌توان به‌صورت $\omega^0 \cdot 1 = 1$ بیان کرد.

حال فرض کنید $\alpha > 0$ دلخواه باشد. طبق لم ۲.٦ (ب) بزرگ‌ترین β موجود است به‌قسمی که $\omega^\beta \leq \alpha$ (چنانچه $\alpha < \omega$، قرار دهید $\beta = 0$). پس بنا به لم ۳.٦، δی منحصربه‌فرد و ρ موجودند به‌قسمی که $\rho < \omega^\beta$ و $\alpha = \omega^\beta \cdot \delta + \rho$. چون $\omega^\beta \leq \alpha$ داریم $\delta > 0$ و $\rho < \alpha$. ادعا می‌کنیم که δ متناهی است. چنانچه δ متناهی باشد، در این صورت $\alpha \geq \omega^\beta \cdot \delta \geq \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1}$، که فرض بزرگ‌ترین بودن β را نقض می‌کند. از این‌رو، قرار می‌دهیم $\beta_1 = \beta$ و $k_1 = \delta$.

اگر $\rho = 0$، در این صورت $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1$ صورت نرمال است. اگر $\rho > 0$، در این صورت بنا به فرض استقرا، وجود دارد $\beta_2 > \cdots > \beta_n$ و تعدادی متناهی $k_2, \ldots, k_n > 0$ به‌قسمی که

$$\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n.$$

چون $\rho < \omega^{\beta_1}$، داریم $\omega^{\beta_2} \le \rho < \omega^{\beta_1}$ و لذا $\beta_1 > \beta_2$. از اینجا نتیجه می‌شود که $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ برحسب صورت نرمال بیان شده است.

برای اثبات یکتایی، نخست ملاحظه می‌کنیم که چنانچه، $\gamma > \beta$ در این صورت برای هر kی متناهی، $\omega^\beta \cdot k < \omega^\gamma$ به این دلیل که $\omega^\beta \cdot k < \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1} \le \omega^\gamma$. از اینجا به‌راحتی نتیجه می‌شود که اگر $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ برحسب صورت نرمال باشد و $\gamma > \beta_1$، در این صورت $\alpha < \omega^\gamma$.

یکتایی صورت نرمال را با استقرا روی α ثابت می‌کنیم. به‌ازای $\alpha = 1$، نمایش $\omega^0 \cdot 1 = 1$ به‌وضوح منحصربه‌فرد است. حال فرض کنید $\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n = \omega^{\gamma_1} \cdot \ell_1 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$. از پاراگراف قبل نتیجه می‌شود $\beta_1 = \gamma_1$. چنانچه قرار دهیم $\delta = \omega^{\beta_1} = \omega^{\gamma_1}$، $\rho = \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$ و $\sigma = \omega^{\gamma_2} \cdot \ell_2 + \cdots + \omega^{\gamma_m} \cdot \ell_m$ خواهیم داشت $\alpha = \delta \cdot k_1 + \rho = \delta \cdot \ell_1 + \sigma$، چون $\rho < \delta$ و $\sigma < \delta$، لم ۳.۶ ایجاب می‌کند $k_1 = \ell_1$ و $\rho = \sigma$. بنا به فرض استقرا، صورت نرمال برای ρ منحصربه‌فرد است، و بنابراین $m = n$، $\beta_2 = \gamma_2$، ...، $\beta_n = \gamma_n$، $k_2 = \ell_2$، ...، $k_n = \ell_n$. از اینجا نتیجه می‌گیریم نمایش صورت نرمال α یکتاست. □

صورت نرمال را به کار می‌بریم و نتیجهٔ جالبی دربارهٔ دنباله‌های گودستاین اثبات می‌کنیم. نخست اجازه دهید خاطرنشان کنیم که برای هر عدد طبیعی $a \ge 2$، عدد طبیعی m را می‌توان در پایه a نوشت، یعنی به‌صورت مجموعی از توان‌های a:

$$m = a^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + a^{b_n} \cdot k_n,$$

مشروط بر اینکه $b_1 > \cdots > b_n$ و $0 < k_i < a$ برای $i = 1, \ldots, n$. برای مثال، عدد ۳۲۴ را می‌توان به‌صورت $4^4 + 4^3 + 4$ در پایه ۴ و $7^2 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 2$ در پایه ۷ نوشت. یک دنبالهٔ ضعیف گودستاین با آغاز در $m > 0$ عبارت است از دنبالهٔ m_0، m_1، m_2، ... از اعداد طبیعی که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

ابتدا، قرار دهید $m_0 = m$ و m_0 را در پایهٔ ۲ به‌صورت زیر بنویسید:

$$m_0 = 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_n}.$$

برای محاسبه m_1، پایه را یک واحد (از ۲ به ۳) افزایش دهید و بعد یک واحد کم کنید. پس

$$m_1 = 3^{b_1} + \cdots + 3^{b_n} - 1.$$

برای محاسبه m_{k+1} از روی m_k در حالت کلی (تا وقتی که $m_k \neq 0$)، m_k را در پایه $k+2$ بنویسید، بعد پایه را یک واحد (به $k+3$) افزایش دهید و یک واحد کم کنید. مثلاً، دنبالهٔ ضعیف گودستاین با شروع از $m = 21$ به قرار زیر است:

$$m_0 = 21 = 2^4 + 2^2 + 1$$

$$m_1 = 3^4 + 3^2 = 90$$

$$m_2 = 4^4 + 4^2 - 1 = 4^4 + 4 \cdot 3 + 3 = 271$$

$$m_3 = 5^4 + 5 \cdot 3 + 2 = 642$$

$$m_4 = 6^4 + 6 \cdot 3 + 1 = 1315$$

$$m_5 = 7^4 + 7 \cdot 3 = 2422$$

$$m_6 = 8^4 + 8 \cdot 2 + 7 = 4119$$

$$m_7 = 9^4 + 9 \cdot 2 + 6 = 6585$$

$$m_8 = 10^4 + 10 \cdot 2 + 5 = 10025$$

و الی‌آخر.

با اینکه در ابتدا، دنبالهٔ ضعیف گودستاین سریعاً رشد می‌کند اما داریم

۵.۶ قضیه. برای هر $m > 0$، دنبالهٔ ضعیف گودستاین با شروع از m نهایتاً به‌ازای nیی به $m_n = 0$ ختم می‌شود.

برهان. صورت نرمال برای اوردینال‌ها را به کار می‌بریم. فرض کنید $m > 0$ و m_0، m_1، m_2، ... دنبالهٔ ضعیف گودستاین با شروع از m باشد. جملهٔ aام آن در پایه $a+2$ به‌صورت

$$m_a = (a+2)^{b_1} k_1 + \cdots + (a+2)^{b_n} k_n \qquad (6.6)$$

نوشته می‌شود. اوردینال

$$\alpha_a = \omega^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{b_n} \cdot k_n$$

را در نظر بگیرید که با جانشین کردن پایهٔ $a + 2$ با ω در (6.6) حاصل شده است. به‌راحتی دیده می‌شود $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_a > \cdots$ دنباله‌ای نزولی از اوردینال‌های بالضروره متناهی است. از این‌رو، nیی موجود است به‌طوری‌که $\alpha_n = 0$. لیکن به‌وضوح، $m_a \leq \alpha_a$ برای هر $a = 0, 1, 2, \ldots, n$. لذا $m_n = 0$. □

تذکر. اوردینال‌های متناظر با دنبالهٔ ضعیف گودستاین m_0، m_1، m_2 ... با شروع از $m = 21$ فوق‌الذکر، عبارت‌اند از $\omega^4 + \omega^2 + 1$، $\omega^4 + \omega^2$، $\omega^4 + \omega \cdot 3 + 3$، $\omega^4 + \omega \cdot 3 + 2$، $\omega^4 + \omega \cdot 3 + 1$، $\omega^4 + \omega \cdot 3$، $\omega^4 + \omega \cdot 2 + 7$، ... .

اکنون به اجمال نتیجه‌ای قوی‌تر را بیان می‌کنیم. گوییم عدد m برحسب پایهٔ خالص $a \geq 2$ نوشته شده است هرگاه نخست خود در پایهٔ a نوشته شده باشد و بعد هم توان‌ها، توان‌های توان و الی‌آخر، موجود در آن نمایش، چنین نوشته شده باشند. مثلاً عدد ۳۲۴ برحسب پایهٔ خالص ۳ به‌صورت $3^{3+2} + 3^{3+1}$ نوشته می‌شود.

دنبالهٔ گودستاین با شروع از $m > 0$ عبارت است از دنبالهٔ m_0، m_1، m_2 ... که به‌صورت زیر حاصل می‌شود. قرار دهید $m_0 = m$ و m_0 را برحسب پایهٔ خالص ۲ بنویسید. برای تعریف m_1، عدد ۲ را با ۳ جایگزین کنید و بعد یک واحد کسر کنید. در حالت کلی برای محاسبه m_{k+1}، m_k را برحسب پایهٔ خالص $k + 2$ بنویسید، $k + 2$ را با $k + 3$ جانشین کنید و یک واحد کسر کنید. برای مثال، دنبالهٔ گودستاین با شروع از $m = 2$ به‌صورت زیر است.

$$m_0 = 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1$$

$$m_1 = 3^{3^3} + 3^3 \sim 7.6 \times 10^{12}$$

$$m_2 = 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \sim 1.3 \times 10^{154}$$

$$m_3 = 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \sim 1.9 \times 10^{2184}$$

$$m_4 = 6^{6^6} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1 \sim 2.6 \times 10^{36305}$$

دنباله‌های گودستاین در شروع حتی از دنباله‌های ضعیف گودستاین هم سریع‌تر رشد می‌کنند؛ اما با این حال داریم

۷.۶ قضیه. برای هر $m > 0$، دنبالهٔ گودستاین با شروع از m به‌ازای nیی نهایتاً به $m_n = 0$ ختم می‌شود.

برهان. دوباره دنباله‌ای (متناهی) از اوردینال‌های $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_a > \cdots$ به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم. چنانچه m_α برحسب پایهٔ خالص $a+2$ نوشته شده باشد، با جایگزین کردن $a+2$ با ω، α_a را محاسبه می‌کنیم. مثلاً، در مثال فوق‌الذکر، اوردینال‌ها عبارت‌اند از $\omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega + 1$، $\omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega$، $\omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 3$، $\omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 2$، $\omega^{\omega^\omega} + \omega^3 \cdot 3 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 3 + 1$ و الی‌آخر. اوردینال‌های α_a برحسب صورت نرمال هستند و باز هم می‌توان نشان داد آن‌ها یک دنبالهٔ نزولی (متناهی) تشکیل می‌دهند. از این‌رو، به‌ازای nیی داریم $\alpha_n = 0$، و چون $m_a \leq \alpha_a$ برای هر a، پس داریم $m_n = 0$. □

تمرین‌ها

۱.۶ نشان دهید $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.

۲.۶ تعدادی از جمله‌های اول دنبالهٔ گودستاین با شروع در $m = 28$ را بیابید.

فصل ۷

الف‌ها

۱ اوردینال‌های آغازی

مطالعهٔ اعداد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را در فصل ۵ شروع کردیم. گرچه برخی نتایج را دربارهٔ $|X|$، عدد اصلی مجموعه X، اثبات کردیم، به‌جز در حالتی که X متناهی یا شمارا بود، خود مفهوم $|X|$ را تعریف نکردیم.

در بخش حاضر، به مسئلهٔ یافتن «نماینده‌هایی» برای اعداد اصلی می‌پردازیم. برای مجموعه‌های متناهی، اعداد طبیعی به نحو مطلوبی این نقش را ایفا می‌کنند. پیش از این، مفهوم عدد طبیعی را گسترش دادیم و نشان دادیم که اعداد ترتیبی حاصل دارای بسیاری از ویژگی‌های اعداد طبیعی هستند، به‌خصوص می‌توان اثبات‌های استقرائی و ساختن‌های بازگشتی روی آن‌ها انجام داد. لیکن اعداد ترتیبی، اعداد اصلی را نمایش نمی‌دهند، بلکه آن‌ها نمایش‌دهندهٔ نوع خوش‌ترتیبی‌ها هستند. از آنجا که هر مجموعهٔ نامتناهی را (به‌شرطی‌که اصلاً به یک طریقی ممکن باشد) به طرق مختلف می‌توان خوش‌ترتیب کرد (تمرین ۱.۱)، تعداد زیادی عدد اوردینال وجود دارد که دارای یک عدد اصلی هستند. مثلاً، ω، $\omega + ۱$، $\omega + ۲$ ...، $\omega + \omega$، ...، $\omega \cdot \omega$، $\omega \cdot \omega + ۱$، ... همگی اعداد ترتیبی شمارا هستند، یعنی اینکه $|\omega| = |\omega + ۱| = |\omega + \omega| = \cdots = \aleph_0$. قضیهٔ ۳.۴ در فصل ۴ توجیهی

برای خوش‌رفتار بودن اعداد ترتیبی متناهی ــــ اعداد طبیعی ــــ است. طبق آن قضیه همهٔ ترتیب‌های خطی یک مجموعهٔ متناهی یکریخت هستند، و بنابراین خوش‌ترتیبی هستند. لذا به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی X، دقیقاً یک عدد ترتیبی n موجود است به‌قسمی که $|X| = |n|$. این n را عدد اصلی X نامیدیم.

علی‌رغم مشکلات بالا، به‌راحتی می‌توان به عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی (خوش‌ترتیب‌شدنی) یک نماینده وابسته کرد. فقط کافی است برای یک عدد اصلی مفروض، کوچک‌ترین عدد ترتیبی مربوط را نمایندهٔ آن عدد اصلی در نظر بگیریم.

۱.۱ تعریف. عدد ترتیبی α را یک اوردینال آغازی می‌نامند اگر با هیچ اوردینال $\beta < \alpha$ همتوان نباشد.

۲.۱ مثال. هر عدد طبیعی یک اوردینال آغازی است. ω نیز اوردینال آغازی است، چرا که ω با هیچ عدد طبیعی‌ای همتوان نیست. $\omega + ۱$ آغازی نیست، زیرا $|\omega + ۱| = |\omega|$. همین‌طور، $\omega + ۲$، $\omega + ۳$، $\omega + \omega$، $\omega \cdot \omega$، ω^ω، ...، هیچ‌یک آغازی نیستند.

۳.۱ قضیه. هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌شدنی مانند X با یک عدد ترتیبی آغازی یکتایی همتوان است.

برهان. طبق قضیهٔ ۱.۳ از فصل ٦، X با اوردینالی مانند α همتوان است. فرض کنید $\alpha_۰$ کوچک‌ترین اوردینال همتوان با X باشد. در این صورت $\alpha_۰$ اوردینال آغازی است، چرا که اگر به‌ازای $\beta < \alpha_۰$یی، $|\beta| = |\alpha_۰|$ ایجاب می‌کند $|\beta| = |X|$، که تناقض است.

چنانچه $\alpha_۰ \neq \alpha_۱$ دو اوردینال آغازی باشند، در این صورت نمی‌توانند همتوان باشند، زیرا $|\alpha_۱| = |\alpha_۰|$ و همین‌طور مثلاً $\alpha_۰ < \alpha_۱$ ناقض آغازی بودن $\alpha_۱$ است. این امر اثبات یکتایی را کامل می‌کند. □

۴.۱ تعریف. چنانچه X یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌شدنی باشد، در این صورت عدد اصلی X، که با $|X|$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از اوردینال آغازی

یکتایی که با X همتوان است. به‌خصوص، برای هر مجموعهٔ شمارای X، $|X| = \omega$ و برای هر مجموعهٔ متناهی n عضوی داریم $|X| = n$، که با تعریف‌های قبلی نیز مطابقت دارند.

طبق قضیهٔ ۳.۱، عدد اصلی مجموعه‌های خوش‌ترتیب‌شدنی دقیقاً همان اعداد ترتیبی آغازی هستند. طبیعی است بپرسیم آیا علاوه بر اعداد طبیعی و ω اوردینال‌های آغازی دیگری وجود دارد؟ قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد اوردینال‌های آغازی به دلخواه بزرگ وجود دارند. فی‌الواقع، نتیجه‌ای کلی‌تر ثابت خواهیم کرد. اگر A مجموعه باشد، خود A شاید خوش‌ترتیب‌شدنی نباشد، اما قطعاً زیرمجموعه‌های خوش‌ترتیب شدنی دارد؛ مثلاً همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی A خوش‌ترتیب‌شدنی هستند.

۵.۱ تعریف. برای مجموعهٔ A، فرض کنید $h(A)$ کوچک‌ترین عدد ترتیبی باشد که با هیچ زیرمجموعه‌ای از A همتوان نیست. $h(A)$ را عدد هارتوگس A می‌نامند.

طبق تعریف، $h(A)$ کوچک‌ترین اوردینالی مانند α است که $|\alpha| \not\leq |A|$.

۶.۱ لم. برای هر مجموعهٔ A، $h(A)$ عدد ترتیبی آغازی است.

برهان. فرض کنید به‌ازای اوردینالی مانند $\beta < h(A)$، $|h(A)| = |\beta|$. پس β با زیرمجموعه‌ای از A همتوان است و بنابراین با $h(A)$ همتوان است. پس نتیجه می‌گیریم $h(A)$ با زیرمجموعه‌ای از A همتوان است، یعنی $h(A) < h(A)$، که تناقض است. □

تا اینجا از مشکل اصلی که از کجا می‌دانیم عدد هارتوگس A موجود است؟ طفره رفتیم. اگر همهٔ اوردینال‌های نامتناهی شمارا بودند، $h(\omega)$ از همهٔ اوردینال‌ها تشکیل می‌شد!

۷.۱ لم. برای هر مجموعهٔ A، عدد هارتوگس A موجود است.

برهان. بنا به قضیهٔ ۱.۳ از فصل ٦، برای هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب (W, R) که $W \subseteq A$، اوردینال یکتای α موجود است به‌قسمی که $(\alpha, <)$ با (W, R) یکریخت

است. اصل موضوع جایگزینی ایجاب می‌کند که مجموعهٔ H چنان موجود باشد که برای هر خوش‌ترتیبی $R \in \mathcal{P}(A \times A)$، اگر اوردینال α با H یکریخت باشد به H متعلق باشد. ادعا می‌کنیم H همهٔ اوردینال‌های همتوان با زیرمجموعه‌های A را دربر دارد. فی‌الواقع، اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد که α را بتوی A بنگارد، قرار می‌دهیم $W = \operatorname{ran} f$ و $R = \{(f(\beta), f(\gamma)) \mid \beta < \gamma < \alpha\}$. در این صورت $R \subseteq A \times A$ خوش‌ترتیبی یکریخت با α (تحت یکریختی f) است. این مطالب نشان می‌دهند

$$h(A) = \{\alpha \in H \mid \text{است } A \text{ اوردینالی همتوان با زیرمجموعه‌ای از } \alpha\},$$

و با توجه به اصل موضوع شمول وجود $h(A)$ را مستدل می‌کنند. □

آنچه در بالا بیان داشتیم ما را قادر می‌سازد با استفاده از بازگشت ترامتناهی سلسله‌مراتبی از اعداد ترتیبی آغازی بزرگ و بزرگ‌تر تعریف کنیم.

۸.۱ تعریف.

$$\omega_0 = \omega,$$

$$\omega_{\alpha+1} = h(\omega_\alpha) \quad \text{برای هر } \alpha,$$

$$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\} \quad \text{اگر } \alpha \text{ اوردینال حدی باشد و } \alpha \neq 0$$

تذکر بعد از تعریف ۵.۱ نشان می‌دهد برای هر α، $|\omega_\alpha| < |\omega_{\alpha+1}|$ لذا $|\omega_\alpha| < |\omega_\beta|$ مشروط بر اینکه $\alpha < \beta$.

۹.۱ قضیه.

الف) برای هر α، ω_α عدد ترتیبی آغازی نامتناهی است.

ب) اگر Ω عدد ترتیبی آغازی نامتناهی باشد، آن‌گاه به‌ازای αیی، $\Omega = \omega_\alpha$.

برهان.

الف) اثبات با استقرا روی α انجام می‌شود. فقط وقتی که α اوردینال حدی باشد حکم غیربدیهی است. فرض کنید به‌ازای $\gamma < \omega_\alpha$یی، $|\gamma| = |\omega_\alpha|$، پس $\beta < \alpha$ موجود است به‌قسمی که $\gamma \le \omega_\beta$ (بنا به تعریف سوپریمم). اما این

ایجاب می‌کند $|\omega_\alpha| \leq |\omega_\beta| \leq |\gamma| = |\omega_\alpha|$، که از اینجا هم تناقض به‌دست می‌آید.

ب) نخست، برهان استقرائی ساده‌ای نشان می‌دهد برای هر α، $\alpha \leq \omega_\alpha$. بنابراین برای هر اوردینال آغازی نامتناهی مانند Ω، اوردینالی مانند α موجود است به‌قسمی که $\Omega < \omega_\alpha$ (برای مثال، $\alpha = \Omega + ۱$). پس کافی است ادعای ذیل را ثابت کنیم: برای هر اوردینال آغازی نامتناهی مانند $\Omega < \omega_\alpha$، اوردینال $\gamma < \alpha$ موجود است به‌طوری‌که $\Omega = \omega_\gamma$. برهان با استقرا روی α صورت می‌گیرد. این ادعا به‌ازای $\alpha = ۰$ بدیهی است. چنانچه $\alpha = \beta + ۱$، $\Omega < \omega_\alpha = h(\omega_\beta)$ ایجاب می‌کند که $|\Omega| \leq |\omega_\beta|$، پس یا $\Omega = \omega_\beta$، که در این صورت می‌توان قرار داد $\gamma = \beta$، یا $\Omega < \omega_\beta$، که در این صورت وجود $\gamma < \beta < \alpha$ از فرض استقرا نتیجه می‌شود. اگر α اوردینال حدی باشد، رابطهٔ $\Omega < \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$ ایجاب می‌کند به‌ازای $\beta < \alpha$یی، $\Omega < \omega_\beta$. مجدداً فرض استقرا وجود $\gamma < \beta$یی را تضمین می‌کند به‌قسمی که $\Omega = \omega_\gamma$.
□

نتیجهٔ این بخش این است که هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌شدنی با یک عدد ترتیبی آغازی منحصر به‌فردی همتوان است. همچنین اعداد ترتیبی آغازی نامتناهی یک دنبالهٔ ترامتناهی مانند ω_α تشکیل می‌دهند که α روی همهٔ اعداد ترتیبی می‌چرخد. اوردینال‌های آغازی نامتناهی، بنا به تعریفشان، همان عدد اصلی مجموعه‌های خوش‌ترتیب‌شدنی نامتناهی هستند. متداول است این اعداد اصلی را الف‌ها بنامند، لذا برای هر α تعریف می‌کنیم

$$\aleph_\alpha = \omega_\alpha.$$

بنابراین عدد اصلی یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌شدنی یا یک عدد طبیعی است یا یک الف. به‌ویژه، $\aleph_۰ = |\mathbb{N}|$، که با نمادگذاری قبل نیز مطابقت دارد. توجه کنید که ترتیب اعداد اصلی برحسب اندازهٔ آن‌ها که در فصل ۴ تعریف شد، با ترتیب اعداد طبیعی و الف‌ها به‌عنوان اوردینال نسبت به $<$ (یا همان $\in$) مطابقت دارد. به‌عبارت دیگر، اگر $|X| = \aleph_\alpha$ و $|Y| = \aleph_\beta$، آن‌گاه $|X| < |Y|$ برقرار است اگر و تنها اگر

$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ (یا همان $\omega_\alpha \in \omega_\beta$). همچنین هم‌ارزی مشابهی برقرار است اگر یکی یا هر دوی $|X|$ و $|Y|$ عدد طبیعی باشند.

در فصل ۵ جمع، ضرب، و توان اعداد اصلی را تعریف کردیم. این اعمال با جمع، ضرب، و توان اوردینال‌های متناظر که در فصل ٦ تعریف شد به شرطی که اوردینال‌های مربوط اعداد طبیعی باشند، مطابقت دارند، ولی برای اوردینال‌های نامتناهی ممکن است تفاوت داشته باشند. برای نمونه، اگر + جمع اوردینال‌ها را نشان دهد $\omega_\circ + \omega_\circ \neq \omega_\circ$ حال آنکه اگر + جمع اعداد اصلی را نشان دهد $\omega_\circ + \omega_\circ = \omega_\circ$. جمع اعداد اصلی تعویض‌پذیر است، ولی جمع اوردینال‌ها نه. برای جلوگیری از اشتباه از این قرارداد استفاده می‌کنیم که اگر صحبت بر سر اعمال اوردینال‌هاست از نمادهای ω استفاده کنیم و برای اعمال اعداد اصلی از نمادهای الف. بنابراین $\omega_\circ + \omega_\circ$ و $۲^{\omega_\circ}$ جمع و توان اوردینال‌ها را نشان می‌دهد ($۲^{\omega_\circ} = \sup\{۲^n \mid n < \omega_\circ\} = \omega_\circ$ ،$\omega_\circ + \omega_\circ = \sup\{\omega + n \mid n < \omega_\circ\} > \omega_\circ$)، در حالی که، $\aleph_\circ + \aleph_\circ$ و $۲^{\aleph_\circ}$ اعمال اعداد اصلی هستند ($\aleph_\circ + \aleph_\circ = \aleph_\circ$ و $۲^{\aleph_\circ}$ نیز ناشمارااست).

تمرین‌ها

۱.۱ اگر X مجموعهٔ خوش‌ترتیب‌شدنی نامتناهی باشد، آن‌گاه X خوش‌ترتیبی‌های غیریکریخت دارد.

۲.۱ اگر α و β دو عدد ترتیبی حداکثر شمارا باشند، آن‌گاه $\alpha + \beta$، $\alpha \cdot \beta$، و α^β حداکثر شمارا هستند. [راهنمایی: از نمایش عمل‌های ترتیبی در قضیه‌های ۳.۵ و ۸.۵ و تمرین ۱٦.۵ از فصل ٦ استفاده کنید. راه دیگر اثبات، اثبات با استقرای ترامتناهی است.]

۳.۱ برای هر مجموعهٔ A، نگاشتی از $\mathcal{P}(A \times A)$ بروی $h(A)$ وجود دارد. [راهنمایی: اگر $R \subseteq A \times A$ خوش‌ترتیبی از میدانش باشد تعریف کنید $f(R) =$ اوردینال یکریخت با R، و در غیر این صورت $f(R) = \circ$.]

۴.۱ برای هر A، $|A| < |A| + h(A)$.

۵.۱ برای هر A، $|h(A)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))|$. [راهنمایی: به هر مجموعهٔ $X \in \mathcal{P}(h(A))$ مجموعهٔ همهٔ خوش‌ترتیب‌های مانند $R \subseteq A \times A$ را نسبت دهید که برای آن‌ها اوردینال یکریخت با R به X تعلق دارد و از این طریق ثابت کنید $|\mathcal{P}(h(A))| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times A))|$.]

۶.۱ فرض کنید $h^*(A)$ کوچک‌ترین عدد ترتیبی α باشد به طوری که تابعی با دامنهٔ A و برد α وجود ندارد. ثابت کنید که

الف) اگر $\alpha \geq h^*(A)$، آن‌گاه تابعی با دامنهٔ A و برد α وجود ندارد.

ب) $h^*(A)$ یک عدد ترتیبی آغازی است.

ج) $h(A) \leq h^*(A)$.

د) اگر A خوش‌ترتیب شدنی باشد، آن‌گاه $h(A) = h^*(A)$.

هـ) برای هر A، $h^*(A)$ وجود دارد.

[راهنمایی برای قسمت (هـ): نشان دهید که $\alpha \in h^*(A)$ اگر و فقط اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha =$ اوردینال یکریخت با R، که در آن R خوش‌ترتیبی‌ای برای افرازی از A به رده‌های هم‌ارزی است.]

۲ جمع و ضرب الف‌ها

اجازه دهید تعریف جمع و ضرب اعداد اصلی را یادآوری کنیم. فرض کنید κ و λ دو عدد اصلی باشند. $\kappa + \lambda$ را برابر عدد اصلی مجموعهٔ $X \cup Y$ تعریف کردیم که در آن $|X| = \kappa$، $|Y| = \lambda$، و X و Y مجزا هستند، پس

$$\text{اگر } X \cap Y = \varnothing, \quad |X| + |Y| = |X \cup Y|.$$

نشان دادیم که این تعریف به نوع انتخاب X و Y بستگی ندارد. حاصل‌ضرب $\kappa \cdot \lambda$ را نیز برابر عدد اصلی حاصل‌ضرب دکارتی $X \times Y$ تعریف کردیم، که در اینجا X و Y دو مجموعهٔ دلخواه و با عدد اصلی به ترتیب κ و λ هستند، پس

$$|X| \cdot |Y| = |X \times Y|,$$

این تعریف نیز مستقل از نوع انتخاب X و Y است. ثابت کردیم جمع و ضرب اعداد اصلی در قانون‌های حسابی مختلفی صدق می‌کنند، مثل تعویض‌پذیری، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری:

$$\kappa + \lambda = \lambda + \kappa,$$

$$\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa,$$

$$\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu,$$

$$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu,$$

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu.$$

علاوه بر این، اگر κ و λ اعداد اصلی متناهی باشد (یعنی اعداد طبیعی)، در این صورت اعمال $\kappa + \lambda$ و $\kappa \cdot \lambda$ با اعمال حسابی معمولی یکی هستند.

اعمال اعداد نامتناهی با حساب اعداد متناهی تفاوتی اساسی دارد و در حقیقت قواعد جمع و ضرب الف‌ها خیلی ساده‌اند. برای نمونه،

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$

برای هر عدد طبیعی n. (اگر n عضو را به یک مجموعهٔ شمارا بیفزاییم، حاصل یک مجموعهٔ شماراست.) حتی داریم

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

زیرا، می‌توانیم مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی را اجتماع دو مجموعهٔ شمارای مجزا در نظر بگیریم، یکی مجموعهٔ اعداد زوج و دیگری مجموعهٔ اعداد فرد. همچنین به خاطر بیاورید که

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 .$$

(مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب از اعداد طبیعی مجموعه‌ای شماراست.) اکنون قضیه‌ای کلی ثابت می‌کنیم که حاصل جمع و ضرب الف‌ها را کاملاً معین می‌کند.

۱.۲ قضیه. برای هر α، $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

اجازه دهید قبل از اثبات قضیه به نتایج آن برای جمع و ضرب اعداد اصلی نگاهی بیندازیم.

۲.۲ نتیجه. برای هر α و β که $\alpha \leq \beta$، داریم

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta.$$

به‌علاوه،

$$n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

برای هر عدد طبیعی مثبت n.

برهان. اگر $\alpha \leq \beta$، از یک طرف، داریم $\aleph_\beta = ۱ \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta$ و از طرف دیگر، بنا به قضیهٔ ۱.۲، $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$. بنابراین طبق قضیهٔ کانتور-برنشتاین داریم $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.

به‌طریق مشابه، برابری $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ اثبات می‌شود. □

۳.۲ نتیجه. برای هر α و β که $\alpha \leq \beta$ داریم

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta.$$

به‌علاوه،

$$n + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

برای هر عدد طبیعی n.

برهان. چنانچه $\alpha \leq \beta$، در این صورت $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = ۲ \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$، در نتیجه حکم نتیجه می‌شود. به نحو مشابه، قسمت دوم نیز ثابت می‌شود. □

برهان قضیهٔ ۱.۲. قضیه را با استقرای ترامتناهی اثبات می‌کنیم. برای هر α، روی مجموعهٔ $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ خوش‌ترتیبی مثل $\prec$ می‌سازیم، سپس با استفاده از فرض استقرا $\aleph_\beta \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta$ برای هر $\beta < \alpha$، نشان می‌دهیم نوع ترتیب مجموعهٔ خوش‌ترتیب $(\omega_\alpha \times \omega_\alpha, \prec)$ حداکثر برابر ω_α است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha$. حال چون $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \geq \aleph_\alpha$، پس داریم $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

خوش‌ترتیبی $\prec$ را برای $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ به‌طور یکنواخت نسبت به ω_αها می‌سازیم؛ به‌عبارت‌دیگر، خاصیتی مثل $\prec$ را روی زوج‌های مرتب اوردینال‌ها تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $\prec$، $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ را برای هر ω_α خوش‌ترتیب می‌کند.

قرار می‌دهیم $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\beta_1, \beta_2)$ اگر و تنها اگر:

یا $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \max\{\beta_1, \beta_2\}$، یا $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ و $\alpha_1 < \beta_1$،
یا $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\}$، $\alpha_1 = \beta_2$، و $\alpha_2 < \beta_2$.

حال نشان می‌دهیم $\prec$ یک خوش‌ترتیبی (برای هر مجموعه از زوج مرتب‌های اوردینال‌ها) است.

نخست، نشان می‌دهیم $\prec$ متعدی است. فرض کنید α_1، α_2، β_1، β_2، γ_1، γ_2 چنان باشند که $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\beta_1, \beta_2)$ و $(\beta_1, \beta_2) \prec (\gamma_1, \gamma_2)$. از تعریف $\prec$ نتیجه می‌شود $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \max\{\beta_1, \beta_2\} \leq \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$، پس $\max\{\alpha_1, \alpha_1\} \leq \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$. چنانچه $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$، در این صورت $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\gamma_1, \gamma_2)$. پس فرض کنید $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$. در این صورت داریم $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$، و لذا $\alpha_1 \leq \gamma_1$. چنانچه $\alpha_1 < \gamma_1$، در این صورت $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\gamma_1, \gamma_2)$، چرا که در غیر این صورت داریم $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$. پس در حالت اخیر داریم $\max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ و $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$، پس ضرورتاً، $\alpha_2 < \beta_2 < \gamma_2$. از اینجا هم نتیجه می‌شود $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\gamma_1, \gamma_2)$.

حال ثابت می‌کنیم که برای هر α_1، α_2، β_1، β_2 یا $(\alpha_1, \alpha_2) \prec (\beta_1, \beta_2)$ یا $(\beta_1, \beta_2) \prec (\alpha_1, \alpha_2)$ یا $(\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1, \beta_2)$ (و به‌علاوه، این سه حالت دوبه‌دو ناسازگارند). این حکم مستقیماً از تعریف به این صورت به‌دست می‌آید که به‌ازای (α_1, α_2) و (β_1, β_2) مفروض، ابتدا اوردینال‌های $\max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ و $\max\{\beta_1, \beta_2\}$ و بعد اوردینال‌های α_1 و β_1 و در آخر هم α_2 و β_2 را مقایسه می‌کنیم.

اکنون نشان می‌دهیم $\prec$ خوش‌ترتیبی است. فرض کنید X مجموعهٔ غیرتهی از زوج‌های اوردینال، باشد، کوچک‌ترین عضو X را نسبت به $\prec$ می‌یابیم. فرض کنید δ کوچک‌ترین ماکزیمم زوج‌های متعلق به X باشد، به‌عبارت‌دیگر، فرض کنید δ

کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{\max\{\alpha,\beta\} \mid (\alpha,\beta)\in X\}$ باشد. به‌علاوه، قرار دهید

$$Y = \{(\alpha,\beta)\in X \mid \max\{\alpha,\beta\}=\delta\}.$$

مجموعهٔ Y زیرمجموعهٔ غیرتهی از X است و برای هر $(\alpha,\beta)\in Y$ داریم $\max\{\alpha,\beta\}=\delta$، علاوه بر این، برای هر $(\alpha',\beta')\in X-Y$، $\delta<\max\{\alpha',\beta'\}$ و بنابراین $(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')$، به‌شرطی‌که $(\alpha,\beta)\in Y$ و $(\alpha',\beta')\in X-Y$. از این‌رو، کوچک‌ترین عضو Y، به‌شرطی‌که موجود باشد، کوچک‌ترین عضو X نیز هست. اکنون فرض کنید $\alpha_\circ$، کوچک‌ترین اوردینال مجموعهٔ $\{\alpha \mid (\alpha,\beta)\in Y$ ،β برای هر$\}$ باشد، و فرض کنید

$$Z=\{(\alpha,\beta)\in Y \mid \alpha=\alpha_\circ\}.$$

مجموعهٔ Z یک زیرمجموعهٔ ناتهی Y است، و داریم $(\alpha,\beta)\prec(\alpha',\beta')$، از این‌رو $(\alpha,\beta)\in Z$ و $(\alpha',\beta')\in Y-Z$.

سرانجام، فرض کنید $\beta_\circ$ کوچک‌ترین اوردینال مجموعهٔ $\{\beta \mid (\alpha_\circ,\beta)\in Z\}$ باشد. واضح است که، $(\alpha_\circ,\beta_\circ)$ کوچک‌ترین عضو Z است، و از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت $(\alpha_\circ,\beta_\circ)$ کوچک‌ترین عضو X است.

حال که نشان دادیم $\prec$ یک خوش‌ترتیبی برای $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ به‌ازای هر α، است از این مطلب استفاده می‌کنیم و با استقرای ترامتناهی روی α ثابت می‌کنیم که $|\omega_\alpha\times\omega_\alpha|\le\aleph_\alpha$، یعنی اینکه، $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha\le\aleph_\alpha$.

قبلاً ثابت کردیم $\aleph_\circ\cdot\aleph_\circ=\aleph_\circ$، پس حکم ما برای $\alpha=\circ$ درست است. حال فرض کنید $\alpha>\circ$، و اجازه دهید فرض کنیم برای هر $\beta<\alpha$، $\aleph_\beta\cdot\aleph_\beta\le\aleph_\beta$. ثابت می‌کنیم $|\omega_\alpha\times\omega_\alpha|\le\aleph_\alpha$. برای این کار کافی است نشان دهیم نوع ترتیب مجموعهٔ خوش‌ترتیب $(\omega_\alpha\times\omega_\alpha,\prec)$ حداکثر برابر ω_α است. اگر نوع ترتیب $\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ از ω_α بزرگ‌تر باشد، در این صورت، $(\alpha_1,\alpha_2)\in\omega_\alpha\times\omega_\alpha$ موجود است به‌قسمی که عدد اصلی مجموعهٔ

$$X=\{(\xi_1,\xi_2)\in\omega_\alpha\times\omega_\alpha \mid (\xi_1,\xi_2)\prec(\alpha_1,\alpha_2)\}$$

حداقل $\aleph_\alpha$ باشد. پس کافی است ثابت کنیم برای هر $(\alpha_1, \alpha_2) \in \omega_\alpha \times \omega_\alpha$، داریم $|X| < \aleph_\alpha$.

قرار دهید $\beta = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} + 1$. در این صورت $\beta \in \omega_\alpha$ و برای هر $(\xi_1, \xi_2) \in X$ داریم $\max\{\xi_1, \xi_2\} \le \max\{\alpha_1, \alpha_2\} < \beta$. لذا $\xi_1 \in \beta$ و $\xi_2 \in \beta$. به عبارت دیگر، $X \subseteq \beta \times \beta$.

فرض کنید $\gamma < \alpha$ چنان باشد که $|\beta| \le \aleph_\gamma$. پس $|X| \le |\beta \times \beta| = |\beta| \cdot |\beta| \le \aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma$، و بنا به فرض استقرا، $\aleph_\gamma \cdot \aleph_\gamma \le \aleph_\gamma$. در نتیجه $|X| \le \aleph_\gamma$ و بنابراین همان‌طور که ادعا کرده بودیم $|X| < \aleph_\alpha$.

از اینجا نتیجه می‌شود که $|\omega_\alpha \times \omega_\alpha| \le \aleph_\alpha$. پس با استقرا روی α ثابت کردیم برای هر α، $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha \le \aleph_\alpha$. چون $\aleph_\alpha \le \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha$ پس داریم $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ و بنابراین اثبات قضیهٔ ۱.۲ کامل می‌شود. □

تمرین‌ها

۱.۲ اثبات مستقیمی برای $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ از طریق بیان ω_α به‌عنوان اجتماع مجزا از دو مجموعه با عدد اصلی $\aleph_\alpha$ ارائه دهید.

۲.۲ اثبات مستقیمی برای $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ با ساختن یک نگاشت یک‌به‌یک از ω_α بروی $n \times \omega_\alpha$ ارائه دهید.

۳.۲ نشان دهید که

الف) $\aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$، برای هر عدد طبیعی مثبت n.

ب) $|[\aleph_\alpha]^n| = \aleph_\alpha$، که در آن $[\aleph_\alpha]^n$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های nعضوی از $\aleph_\alpha$ است، برای هر $n > 0$.

ج) $|[\aleph_\alpha]^{<\omega}| = \aleph_\alpha$، که در آن $[\aleph_\alpha]^{<\omega}$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی از $\aleph_\alpha$ است.

[راهنمایی: قضیهٔ ۲.۱ و استقرا را به کار ببرید؛ برای قسمت (ج)، همانند اثبات قضیهٔ ۱۰.۳ فصل ۴ عمل کنید و از $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ استفاده کنید.]

۴.۲ اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند و $|\alpha| \leq \aleph_\gamma$، آن‌گاه $|\alpha + \beta| \leq \aleph_\gamma$، $|\alpha \cdot \beta| \leq \aleph_\gamma$ و $|\alpha^\beta| \leq \aleph_\gamma$ (که در آن $\alpha + \beta$، $\alpha \cdot \beta$، و α^β اعمال ترتیبی هستند).

۵.۲ اگر X تصویر ω_α توسط تابعی مانند f باشد، آن‌گاه $|X| \leq \aleph_\alpha$. [راهنمایی: نگاشت یک‌به‌یک g را از X بتوی ω_α بسازید با این دستور که $g(x) =$ کوچک‌ترین عضو تصویر وارون $\{x\}$ تحت f.]

۶.۲ اگر X زیرمجموعه‌ای از ω_α باشد به‌طوری‌که $|X| < \aleph_\alpha$، آن‌گاه $|\omega_\alpha - X| = \aleph_\alpha$.

فصل ۸

اصل موضوع انتخاب

۱ اصل موضوع انتخاب و معادل‌های آن

در فصل پیش، پرسش اساسی «چه مجموعه‌هایی را می‌توان خوش‌ترتیب کرد؟» را بدون پاسخ رها کردیم. جالب توجه است که پرسش فوق در اواخر دوران تکامل نظریهٔ مجموعه‌ها بدین صورت مطرح شده است. کانتور این مطلب که هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد، کاملاً بدیهی می‌پنداشت. یک «برهان» نسبتاً شهودی بر این «حقیقت» از این قرار است. برای خوش‌ترتیب کردن مجموعهٔ A، کافی است نگاشتی یک‌به‌یک از یک اوردینال λ بروی A بسازیم. این کار را با بازگشت ترامتناهی انجام می‌دهیم. فرض کنید a مجموعه‌ای باشد که به A تعلق ندارد. تعریف کنید

$$f(\circ) = \begin{cases} A \text{ عضوی از}, & A \neq \varnothing \\ a, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$f(\text{۱}) = \begin{cases} A - \{f(\circ)\} \text{ عضوی از}, & A - \{f(\circ)\} \neq \varnothing \\ a, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و همین‌طور الی‌آخر. یا به‌طور کلی،

$$f(\alpha) = \begin{cases} A - \operatorname{ran}(f \restriction \alpha) \text{ عضوی از } , & A - \operatorname{ran}(f \restriction \alpha) \neq \varnothing \\ a, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به زبان شهودی، f اعضای A را یکی‌یکی تا وقتی که موجودند، فهرست می‌کند، هنگامی که A توسط f تماماً پوشیده شد، f مقدار a را اختیار می‌کند.

توجه می‌کنیم که A در مرحلهٔ $\lambda < h(A)$ پوشیده می‌شود، که در اینجا $h(A)$ عدد هارتوگس A است. دلیل این امر این است که برای هر $\alpha < \beta$، چنانچه $f(\beta) \neq \alpha$، در این صورت $f(\beta) \in A - \operatorname{ran}(f \restriction \beta)$، $f(\alpha) \in \operatorname{ran}(f \restriction \beta)$ و لذا $f(\alpha) \neq f(\beta)$. اگر بخواهد $f(\alpha) \neq a$ برای هر $\alpha < h(A)$ برقرار باشد، f باید نگاشت یک‌به‌یکی از $h(A)$ بتوی A باشد، که در این صورت تعریف $h(A)$ را نقض می‌کند، چرا که $h(A)$ کوچک‌ترین اوردینالی است که با هیچ تابع یک‌به‌یکی بتوی A نگاشته نمی‌شود.

فرض کنید λ کوچک‌ترین $\alpha < h(A)$ی به‌قسمی باشد که $f(\alpha) = a$. بند بالا بی‌درنگ نشان می‌دهد که $f \restriction \lambda$ یک‌به‌یک است. «برهان» کامل خواهد شد اگر نشان دهیم $\operatorname{ran}(f \restriction \lambda) = A$. به‌وضوح، $\operatorname{ran}(f \restriction \lambda) \subseteq A$، حال اگر $\operatorname{ran}(f \restriction \lambda) \subset A$، پس $A - \operatorname{ran}(f \restriction \lambda) \neq \varnothing$ و $f(\lambda) \neq a$، که ناقض تعریف ما از λ است.

علامت‌های نقل قول در بالا نشانگر آن است که جایی از استدلال بالا نادرست است، اما کجا، شاید خیلی روشن نباشد. اما همین که بخواهیم بازگشت ترامتناهی بالا را از طریق قضیهٔ بازگشت، مثلاً به‌صورت مذکور در قضیهٔ **۵.۴** فصل **۶**، اعتبار ببخشیم، در خواهیم یافت که به تابعی چون G نیاز داریم که f از طریق $f(\alpha) = G(f \restriction \alpha)$ تعریف شود. چنین تابعی باید دارای خواص زیر باشد:

$$G(f \restriction \alpha) \in A - \operatorname{ran}(f \restriction), \quad A - \operatorname{ran}(f \restriction \alpha) \neq \varnothing \text{ اگر }$$
$$G(f \restriction \alpha) = a, \qquad \text{در غیر این صورت}$$

چنانچه A خوش‌ترتیب‌شدنی باشد، چنین تابع Gیی را می‌توان به‌راحتی تعریف کرد، مثلاً

$$G(x) = \begin{cases} \prec \text{ نسبت به } A - \operatorname{ran} x \text{ کوچک‌ترین عضو } , & A - \operatorname{ran} x \neq \varnothing \text{ اگر } x \text{ تابع و } \\ a, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در اینجا، $\prec$ خوش‌ترتیبی از A است. اما اگر روی A خوش‌ترتیبی وجود نداشته باشد دیگر معلوم نیست چه خاصیتی را می‌توان برای تعریف تابع G استفاده کرد.

به بیان دقیق‌تر، فرض کنید S دستگاهی از مجموعه‌ها باشد. تابع g روی S را تابع انتخاب برای S نامند، هرگاه برای هر $X \in S$ ناتهی، $g(X) \in X$.

حال اگر قبول کنیم که یک تابع انتخاب g برای $\mathcal{P}(A)$ وجود دارد، می‌توان شکاف برهان قبل را با تعریف

$$G(x) = \begin{cases} g(A - \operatorname{ran} x), & \text{تابع است و } A - \operatorname{ran} x \neq \varnothing \; x \\ a, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

رفع کرد.

آنچه در بالا ثابت کردیم قسمت مشکل قضیهٔ زیر است که اساساً منسوب به ارنست تسرملو است.

۱.۱ قضیه. مجموعهٔ A را می‌توان خوش‌ترتیب کرد اگر و تنها اگر $\mathcal{P}(A)$، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، دارای یک تابع انتخاب باشد.

برهان. اثبات طرف دوم آسان است. چنانچه $\prec$ خوش‌ترتیبی برای A باشد، تابع انتخاب g روی $\mathcal{P}(A)$ را به‌صورت

$$g(x) = \begin{cases} \text{کوچک‌ترین عضو } x \text{ نسبت به خوش‌ترتیبی } \prec, & x \neq \varnothing \\ \varnothing, & x = \varnothing \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. □

پس مسئلهٔ خوش‌ترتیب ساختن مجموعهٔ A به یافتن یک تابع انتخاب برای $\mathcal{P}(A)$ تقلیل می‌یابد. نخست به قضیهٔ ۲.۱ توجه کنید.

۲.۱ قضیه. هر دستگاه متناهی از مجموعه‌ها دارای یک تابع انتخاب است.

برهان. با استقرا عمل می‌کنیم. فرض کنید هر دستگاه n عضوی دارای تابع انتخاب باشد و فرض کنید $|S| = n + 1$. $X \in S$ را ثابت در نظر بگیرید، مجموعهٔ $S - \{X\}$ دارای n عضو و بنابراین دارای تابع انتخابی مانند g_X است. چنانچه

$X = \varnothing$، تابع $g = g_X \cup \{(X, \varnothing)\}$ تابع انتخابی بروی S است. اگر $X \neq \varnothing$، در این صورت $g^x = g_X \cup \{(X, x)\}$ (برای هر $x \in X$) تابع انتخابی برای S خواهد بود.

□

برای خواننده آموزنده است که بررسی کند چرا برهان بالا را نمی‌توان برای دستگاه شمارایی از مجموعه‌ها تعمیم داد. علاوه بر این، گرچه به‌راحتی می‌توان تابع انتخاب برای $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ یا $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ یافت (چرا؟)، چنین تابعی برای $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ به ذهن نمی‌آید.

حداقل از اواخر قرن نوزدهم به بعد، آنالیزدان‌ها توابع انتخاب را برای دستگاه نامتناهی از مجموعه‌های اعداد حقیقی به‌طور ضمنی به کار می‌بردند. لیکن، سال‌ها طول کشید تا دریابند فرض وجود چنین توابعی ابداً واضح نیست. تسرملو در سال **۱۹۰۴** اصل موضوع زیر را مطرح کرد.

اصل موضوع انتخاب. برای هر دستگاه از مجموعه‌ها یک تابع انتخاب وجود دارد.

شصت سال بعد یعنی در سال **۱۹۶۳**، پال کوئین نشان داد که اصل موضوع انتخاب را با اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نمی‌توان ثابت کرد (در این باره مطالب بیشتری در فصل **۱۵** آمده است). بنابراین، اصل موضوع انتخاب اصل مجموعه‌ساز جدیدی است. تفاوتی که با دیگر اصول مجموعه‌ساز دارد این است که این اصل در عمل مفید مقصود نیست، یعنی اینکه اصل انتخاب حکم می‌کند مجموعه‌های مشخصی (توابع انتخاب) وجود دارند، اما این مجموعه‌ها را برحسب خواص اعضای تشکیل دهندهٔ آن‌ها معین نمی‌کند. این امر به‌علاوه برخی نتایج خلاف شهود اصل انتخاب (بخش ۲ را ببینید)، باعث شده است برخی ریاضیدانان مخالف استفاده از اصل انتخاب باشند.

در ادامه برخی صورت‌های معادل اصل موضوع انتخاب و چند کاربرد آن را در نظریهٔ مجموعه‌ها و ریاضیات بررسی خواهیم کرد. بعد از این، در انتهای بخش ۲، بحث دربارهٔ دیگر جنبه‌های اصل انتخاب را از سر خواهیم گرفت. قضیه‌هایی که اثبات آن‌ها به اصل انتخاب وابسته است و همچنین تمرین‌هایی را که از آن استفاده می‌کنند با ستاره مشخص کرده‌ایم تا بتوانیم مواردی که در این فصل به اصل

انتخاب وابسته‌اند دنبال کنیم. اصل انتخاب را در فصول بعد بدون اشارهٔ مستقیم به کار خواهیم برد.

۳.۱ قضیه. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

الف) (اصل موضوع انتخاب) هر دستگاه از مجموعه‌ها دارای یک تابع انتخاب است.

ب) هر افراز دارای یک مجموعه از نماینده‌هاست.

ج) اگر $\langle X_i \mid i \in I\rangle$ دستگاهی اندیس‌دار از مجموعه‌های غیرتهی باشد، آن‌گاه تابع f چنان موجود است که برای هر $i \in I$، $f(i) \in X_i$.

به یاد بیاورید که یک افراز از مجموعهٔ A دستگاهی از مجموعه‌های غیرتهی دوبه‌دو مجزا است که اجتماع آن‌ها برابر A است. مجموعهٔ $X \subseteq A$ را یک مجموعه از نماینده‌ها برای افراز S از A می‌نامیم، هرگاه برای هر $C \in S$، $X \cap C$ متشکل از یک عضو منحصربه‌فرد باشد. (برای این تعریف‌ها بخش ۴ از فصل ۲ را ببینید.)

یک حکم معادل برای قسمت (ج) از قضیهٔ ۳.۱ به‌صورت زیر است (با تمرین ۱۰.۵ از فصل ۳ مقایسه کنید):

د) اگر برای هر $i \in I$، $X_i \neq \varnothing$، آن‌گاه $\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$.

برهان. (الف) ایجاب می‌کند (ب). فرض کنید f یک تابع انتخاب برای افراز S باشد؛ پس $X = \operatorname{ran} f$ مجموعه‌ای از نماینده‌ها برای S است. توجه می‌کنیم برای هر $C \in S$، $f(C) \in X \cap C$، ولی برای $D \neq C$، $f(D) \notin X \cap C$ [به این دلیل که $f(D) \in D$ و $D \cap C = \varnothing$]. پس برای هر $C \in S$، $X \cap C = \{f(C)\}$.

(ب) ایجاب می‌کند (ج). قرار دهید $C_i = \{i\} \times X_i$. چون برای $i \neq i'$، $C_i \cap C_{i'} = \emptyset$، پس $S = \{C_i \mid i \in I\}$ یک افراز است. چنانچه f مجموعه‌ای از نماینده‌ها برای S باشد، در این صورت f مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است و برای هر $i \in I$، x یکتایی وجود دارد که $(i,x) \in f \cap C_i$. اما این بدین معنی است که f تابعی روی I است و برای هر $i \in I$، $f(i) \in X_i$.

(ج) ایجاب می‌کند (الف). فرض کنید S دستگاهی از مجموعه‌ها باشد. قرار دهید $I = S - \{\varnothing\}$ و برای هر $C \in I$، $X_C = C$. در این صورت $\langle X_C \mid C \in I\rangle$

دستگاهی اندیس‌دار از مجموعه‌های غیرتهی است. چنانچه $f \in \prod_{C\in I} X_C$، در این صورت f به‌شرطی‌که $\varnothing \notin S$، یک تابع انتخاب برای S است. در حالتی که $\varnothing \in S$، $f \cup \{(\varnothing, \varnothing)\}$ یک تابع انتخاب برای S خواهد بود. □

قضیهٔ ۳.۱ برخی صورت‌های معادل اصل انتخاب را به‌دست می‌دهد. عبارت‌های دیگری هم هستند که ثابت شده است با اصل انتخاب معادل‌اند. معمول‌ترین آن‌ها قضیهٔ خوش‌ترتیبی است، بدین مضمون که هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد (هم‌ارزی آن با اصل انتخاب از قضیهٔ ۱.۱ به‌دست می‌آید). نسخهٔ رایج دیگر این قضیه (لم تسورن) در قضیهٔ ۱۳.۱ آورده شده است.

اما قبل از همه، چند نتیجه از اصل انتخاب را عرضه می‌کنیم.

۴.۱ قضیه*. هر مجموعهٔ نامتناهی دارای یک زیرمجموعهٔ شماراست.

برهان. فرض کنید A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. A خوش‌ترتیب‌شدنی است یا به‌عبارت معادل، A را می‌توان به‌صورت یک دنبالهٔ ترامتناهی یک‌به‌یک مانند $\langle a_\alpha \mid \alpha < \Omega\rangle$ مرتب کرد، که در آن Ω، طول دنباله، یک اوردینال نامتناهی است. حال $C = \langle a_\alpha \mid \alpha < \omega\rangle$ برد قطعهٔ آغازی $\langle a_\alpha \mid \alpha < \omega\rangle$ از این دنباله زیرمجموعهٔ شمارایی از A است. □

۵.۱ قضیه*. برای هر مجموعهٔ نامتناهی S یک $\aleph_\alpha$ یکتایی وجود دارد به‌قسمی که $|S| = \aleph_\alpha$.

برهان. چون S خوش‌ترتیب‌شدنی است، پس با یک اوردینال نامتناهی و در نتیجه با یک عدد ترتیبی آغازی منحصربه‌فرد ω_α همتوان است. □

از اینجا نتیجه می‌گیریم که در نظریهٔ مجموعه‌ها با اصل انتخاب، عدد اصلی $|X|$ برای مجموعهٔ X را می‌توان برابر اوردینال آغازی همتوان با X تعریف کرد. در این صورت، دو مجموعهٔ X و Y همتوان هستند اگر و تنها اگر اوردینال $|X|$ با اوردینال $|Y|$ یکی باشد (یعنی $|X| = |Y|$). به‌علاوه، ترتیب $>$ اعداد اصلی برحسب اندازهٔ آن‌ها با ترتیب اوردینال‌ها برحسب $\in$ مطابقت دارد: یعنی $|X| < |Y|$ اگر و تنها اگر $|X| \in |Y|$. این ملاحظات فرض ۷.۱ در فصل ۴ را به‌حد کفایت موجه می‌سازد.

مجموعه‌هایی موسوم به اعداد اصلی موجودند با این خاصیت که به‌ازای هر مجموعهٔ X، عدد اصلی منحصربه‌فرد $|X|$ موجود است و دو مجموعهٔ X و Y همتوانند اگر و تنها اگر $|X|$ برابر $|Y|$ باشد.

با توجه به اینکه $\in$ یک ترتیب خطی (فی‌الواقع، یک خوش‌ترتیبی) روی هر مجموعه از اعداد ترتیبی است، قضیهٔ زیر حاصل می‌شود.

۶.۱ قضیه*. برای هر دو مجموعهٔ A و B یا $|B| \leq |A|$ یا $|A| \leq |B|$.

۷.۱ قضیه*. اجتماع گردایهٔ شمارا از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

برهان. (با قضیهٔ ۹.۳ از فصل ۴ مقایسه کنید.) فرض کنید S مجموعهٔ شمارایی باشد که هر عضو آن شماراست. قرار دهید $A = \bigcup S$. نشان می‌دهیم A شماراست.

چون S شماراست، پس دنبالهٔ یک‌به‌یکی مانند $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ وجود دارد به‌قسمی که $S = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. برای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعهٔ A_n شماراست، پس دنباله‌ای وجود دارد که برد آن برابر A_n است.

طبق اصل انتخاب، برای هر n می‌توان یک چنین دنباله‌ای انتخاب کرد. [بدین صورت که برای هر n، فرض کنید S_n مجموعهٔ همهٔ دنباله‌هایی باشد که برد آن A_n است. فرض کنید F تابع انتخاب روی $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ باشد، حال برای هر n قرار دهید $s_n = F(S_n)$.]

با انتخاب $s_n = \langle a_n(k) \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، با تعریف $f(n,k) = a_n(k)$، تابع f از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ بروی A به‌دست می‌آید. حال چون $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ شماراست و A تصویر آن تحت f است، پس A نیز شماراست. □

۸.۱ نتیجه*. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی برابر اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا نیست.

برهان. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ ناشماراست. □

۹.۱ نتیجه*. اوردینال ω_1 برابر سوپریمم مجموعهٔ شمارایی از اوردینال‌های شمارا نیست.

برهان. اگر $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ مجموعهٔ شمارایی از اوردینال‌ها باشد، در این صورت سوپریمم آن

$$\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$$

مجموعه‌ای شمارا خواهد بود و لذا $\alpha < \omega_1$. □

۱۰.۱ قضیه*. $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.

برهان. حکم از قضیهٔ ۵.۱ و اینکه $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ نتیجه می‌شود. □

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ بالا می‌توان فرض پیوستار را به‌صورت حدس زیر

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

بیان کرد، که در اینجا $\aleph_1$ کوچک‌ترین عدد اصلی ناشماراست.

۱۱.۱ قضیه*. اگر f یک تابع و A مجموعه‌ای باشد، آن‌گاه $|f[A]| \leq |A|$.

برهان. برای هر $b \in f[A]$ تعریف کنید $X_b = f^{-1}(\{b\})$. توجه کنید $X_b \neq \varnothing$ و اگر $b_1 \neq b_2$، $X_{b_1} \cap X_{b_2} = \varnothing$. بگیرید $g \in \prod_{b\in f[A]} X_b$، در این صورت $g : f[A] \to A$ و اگر $b_1 \neq b_2$ در این صورت $g(b_1) \in X_{b_1}$ و $g(b_1) \in X_{b_2}$، پس $g(b_1) \neq g(b_2)$. از اینجا نتیجه می‌گیریم g نگاشتی یک‌به‌یک از $f[A]$ بتوی A است و نتیجتاً، $|f[A]| \leq |A|$. □

۱۲.۱ قضیه*. اگر $|S| \leq \aleph_\alpha$ و برای هر $A \in S$، $|A| \leq \aleph_\alpha$، آن‌گاه $|\bigcup S| \leq \aleph_\alpha$.

برهان. این قضیه تعمیمی از قضیهٔ ۷.۱ است. فرض می‌کنیم $S \neq \varnothing$ و هر $A \in S$ ناتهی است. قرار دهید $S = \{A_\nu \mid \nu < \aleph_\alpha\}$ و برای $\nu < \aleph_\alpha$ دنبالهٔ ترامتناهی $A_\nu = \langle a_\nu(\kappa) \mid \kappa < \aleph_\alpha\rangle$ را طوری انتخاب کنید که $A_\nu = \{a_\nu(\kappa) \mid \kappa < \aleph_\alpha\}$. (تمرین ۹.۱ از فصل ۴ را ببینید.) نگاشت f روی $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ بروی $\bigcup S$ را به‌صورت $f(\nu,\kappa) = a_\nu(\kappa)$ تعریف کنید. طبق قضیهٔ ۱۱.۱ داریم

$$\left|\bigcup S\right| \leq |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha,$$

(مرحلهٔ آخر همان قضیهٔ ۱.۲ در فصل ۷ است). □

و حالا لم تسورن را که نسخهٔ با اهمیت دیگری از اصل انتخاب است، نتیجه می‌گیریم.

۱۳.۱ قضیه. عبارت‌های زیر معادل‌اند.

الف) (اصل موضوع انتخاب) برای هر دستگاه از مجموعه‌ها یک تابع انتخاب وجود دارد.

ب) (اصل خوش‌ترتیبی) هر مجموعه خوش‌ترتیب‌شدنی است.

ج) (لم تسورن) اگر هر زنجیر از یک مجموعهٔ جزئاً مرتب کران بالا داشته باشد، آن‌گاه مجموعهٔ جزئاً مرتب مذکور دارای یک عضو بیشین است.

یادآوری می‌کنیم که منظور از زنجیر عبارت است از یک زیرمجموعهٔ مرتب خطی از یک مجموعه جزئاً مرتب (برای این تعریف و همین‌طور تعریف «مجموعهٔ مرتب»، «کران بالا»، «عضو بیشین»، و دیگر مفاهیم مرتبط با ترتیب‌ها بخش ۵ از فصل ۲ را ببینید).

برهان. معادل بودن (الف) و (ب) مستقیماً از قضیهٔ ۱.۱ به‌دست می‌آید، پس کافی است نشان دهیم (الف)، (ج) و (ج)، (الف) را نتیجه می‌دهد.

(الف) ایجاب می‌کند (ج). فرض کنید $(A, \preccurlyeq)$ مجموعهٔ (جزئاً) مرتبی باشد که در آن هر زنجیر، کران بالا دارد. استراتژی ما برای اثبات این است که با ساختن یک دنبالهٔ ترامتناهی $\preccurlyeq$ـصعودی از اعضای A، عضو بیشینی برای $(A, \preccurlyeq)$ بیابیم.

یک b با شرط $b \notin A$ و یک تابع انتخاب g برای $\mathcal{P}(A)$ اختیار می‌کنیم و $\langle a_\alpha \mid \alpha < h(A) \rangle$ را از طریق بازگشت ترامتناهی تعریف می‌کنیم. اگر $\langle a_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ داده شده باشد، دو حالت را در نظر می‌گیریم. چنانچه برای هر $\xi < \alpha$، $b \neq a_\xi$ و $\{$برای هر $\xi < \alpha$، $a_\xi < \alpha$ $\mid$ $a \in A\} \neq \varnothing$ $A_\alpha =$، تعریف می‌کنیم $a_\alpha = g(A_\alpha)$ در غیر این حالت تعریف می‌کنیم $a_\alpha = b$.

از خواننده می‌خواهیم درست بودن تعریف فوق را با استفاده از قضیهٔ ۴.۴ در فصل ۷ بررسی کند. توجه داریم که به‌ازای $\alpha < h(A)$یی، $a_\alpha = b$؛ زیرا اگر چنین نباشد $\langle a_\xi \mid \xi < h(A) \rangle$ نگاشتی یک‌به‌یک از $h(A)$ بتوی A خواهد بود. فرض کنید λ کوچک‌ترین αیی باشد که $a_\alpha = b$. بنابراین مجموعهٔ $C = \{a_\xi \mid \xi < \lambda\}$

یک زنجیر در $(A,\preccurlyeq)$ است و لذا دارای کوچک‌ترین کرانی مانند $c \in A$ است. اگر به‌ازای $a \in A$یی، $c \prec a$ خواهیم داشت $a \in A_\lambda \neq \varnothing$ و $a_\lambda = g(A_\lambda) \neq b$ که تناقض است. پس c عضو بیشینی برای A است. (به‌راحتی دیده می‌شود که $\lambda = \beta + 1$ و $c = a_\beta$.)

(ج) ایجاب می کند (الف). کافی است نشان دهیم که برای هر دستگاه از مجموعه‌های ناتهی مانند S یک تابع انتخاب دارد. فرض کنید F دستگاه همهٔ توابع f باشد به شرطی که $\operatorname{dom} f \subseteq S$ و برای هر $X \in S$، $f(X) \in X$. مجموعهٔ F را با رابطهٔ شمول $\subseteq$ مرتب می‌کنیم. حال اگر $F_\circ$ زیرمجموعهٔ مرتب خطی از $(F,\subseteq)$ باشد (یعنی اینکه برای هر $f,g \in F_\circ$ یا $f \subseteq g$ یا $g \subseteq f$)، در این صورت $f_\circ = \bigcup F_\circ$ یک تابع تعریف می‌کند. (قضیهٔ ۱۲.۳ از فصل ۲ را ببینید.) به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که $f_\circ \in F$ و $f_\circ$ کران بالایی برای $F_\circ$ در $(F,\subseteq)$ است.

چون مفروضات لم تسورن برقرارند، نتیجه می‌گیریم $(F,\subseteq)$ دارای یک عضو بیشین مانند $\overline{f}$ است. اگر نشان دهیم $\operatorname{dom}\overline{f} = S$، اثبات کامل می‌شود. فرض کنید چنین نباشد و عضوی مانند $X \in S - \operatorname{dom}\overline{f}$ و $x \in X$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح $\overline{\overline{f}} = \overline{f} \cup \{(X,x)\} \in F$ و $\overline{\overline{f}} \supset \overline{f}$، ولی این ناقض بیشین بودن $\overline{f}$ است. □

این بخش را با قضیه‌ای که در فصل ۱۱ بدان نیاز خواهیم داشت، به پایان می‌بریم.

۱۴.۱ قضیه*. اگر $(A,\preccurlyeq)$ یک ترتیب خطی باشد به‌قسمی که $|\{y \in A \mid y \preccurlyeq x\}| < \aleph_\gamma$، برای هر $x \in A$، در این صورت $|A| \leq \aleph_\gamma$.

برهان. عیناً مثل اثبات لم تسورن، یک دنبالهٔ صعودی از اعضای A مثل $\langle a_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ می‌سازیم به‌طوری‌که $A_\lambda = \varnothing$؛ به عبارت دیگر، $a \in A$ موجود نباشد به‌طوری‌که برای هر $\xi \in A$، $a_\xi \prec a$. از آنجا که $(A,\preccurlyeq)$ مرتب خطی است، پس برای هر $a \in A$، $\xi \in A$ موجود است که $a \preccurlyeq a_\xi$. (در این حالت می‌گوییم دنبالهٔ $\langle a_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ در $(A,\preccurlyeq)$ هم‌پایان است.)

داریم $A = \bigcup_{\xi<\lambda}\{y \in A \mid y \preccurlyeq a_\xi\}$ و بنا به فرض، نتیجه می‌شود $|\{y \in A \mid y \preccurlyeq a_\xi\}| < \aleph_\gamma$ و بنابراین، $\lambda \leq \aleph_\gamma$ (زیرا در غیر این صورت $\omega_\gamma < \lambda$ و

$\langle a_\xi \mid \xi < \omega_\gamma \rangle$ نگاشتی یک‌به‌یک از $\aleph_\gamma$ بتوی $\{y \in A \mid y \preccurlyeq a_{\omega_\gamma}\}$ خواهد بود که ناقض مفروضات است). از قضیهٔ ۱۲.۱، حال نتیجه می‌گیریم $\aleph_\gamma \leq |A|$. □

تمرین‌ها

۱.۱ ثابت کنید: اگر مجموعهٔ A را بتوان مرتب خطی کرد، آن‌گاه هر دستگاه از زیرمجموعه‌های متناهی A یک تابع انتخاب دارد. (از اصل موضوع‌های تسرملو ـ فرانکل نتیجه نمی‌شود که هر مجموعه می‌تواند مرتب خطی شود.)

۲.۱ اگر A را بتوان خوش‌ترتیب کرد، آن‌گاه $\mathcal{P}(A)$ را می‌توان مرتب خطی کرد. [راهنمایی: فرض کنید $<$ یک خوش‌ترتیبی از A باشد، برای $X, Y \subseteq A$ تعریف کنید: $X \prec Y$ اگر و فقط اگر $<$ـ‌کوچک‌ترین عضو از $X \Delta Y$ متعلق به X باشد.]

*۳.۱ فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعهٔ مرتبی باشد که در آن هر زنجیر دارای یک کران بالا است. در این صورت برای هر $a \in A$، یک $\leq$ـ‌عضو بیشین مانند x از A وجود دارد به‌طوری‌که $a \leq x$.

۴.۱ ثابت کنید که لم تسورن با این مطلب معادل است: برای هر $(A, \leq)$، مجموعهٔ همه زنجیرهای $(A, \leq)$ دارای $\subseteq$ـ‌عضو بیشین است.

۵.۱ ثابت کنید که لم تسورن با این مطلب معادل است: اگر A یک دستگاه از مجموعه‌ها باشد، به‌طوری‌که برای هر $B \subseteq A$ که نسبت به $\subseteq$ مرتب خطی است، داشته باشیم $\bigcup B \in A$، در این صورت A دارای یک $\subseteq$ـ‌عضو بیشین است.

۶.۱ یک دستگاه از مجموعه‌ها مانند A سرشت متناهی دارد، هرگاه $X \in A$ اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی X به A متعلق باشد. ثابت کنید لم تسورن با مطلب زیر (لم تیوکی) معادل است: هر دستگاه از مجموعه‌ها با سرشت متناهی دارای یک $\subseteq$ـ‌عضو بیشین است. [راهنمایی: تمرین ۵.۱ را به کار ببرید.]

۷.۱* فرض کنید E یک رابطهٔ دوتایی روی مجموعه A باشد. نشان دهید تابعی مانند $f : A \to A$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \in A$، $(x, f(x)) \in E$ اگر و تنها اگر $y \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(x, y) \in E$.

۸.۱* ثابت کنید که هر مجموعهٔ ناشمارا زیرمجموعه‌ای با عدد اصلی $\aleph_1$ دارد.

۹.۱* هر مجموعهٔ نامتناهی با برخی از زیرمجموعه‌های سره‌اش همتوان است. معادلاً، مجموعه‌های متناهی ددکیند دقیقاً همان مجموعه‌های متناهی هستند.

۱۰.۱* فرض کنید $(A, <)$ مجموعهٔ مرتب خطی باشد. دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ از اعضای A کاهشی است هرگاه $a_{n+1} < a_n$ برای هر $n \in \omega$. ثابت کنید $(A, <)$ خوش‌ترتیب است اگر و فقط اگر هیچ دنبالهٔ کاهشی نامتناهی در A وجود نداشته باشد.

۱۱.۱* قانون توزیع‌پذیری زیر را ثابت کنید (تمرین ۱۳.۳ در فصل دوم را ببینید).

$$\bigcap_{t\in T} \Big(\bigcup_{s\in S} A_{t,s} \Big) = \bigcup_{f\in S^T} \Big(\bigcap_{t\in T} A_{t,f(t)} \Big).$$
$$\bigcup_{t\in T} \Big(\bigcap_{s\in S} A_{t,s} \Big) = \bigcap_{f\in S^T} \Big(\bigcup_{t\in T} A_{t,f(t)} \Big).$$

۱۲.۱* ثابت کنید که برای هر ترتیب $\preccurlyeq$ روی A، یک ترتیب خطی مانند $\leq$ روی A وجود دارد به‌طوری‌که $a \preccurlyeq b$ نتیجه می‌دهد $a \leq b$، برای هر $a, b \in A$ (یا معادلاً، هر ترتیب جزئی را می‌توان به یک ترتیب خطی گسترش داد).

۱۳.۱* (اصل انتخاب‌های وابسته) اگر R یک رابطهٔ دوتایی روی $M \neq \varnothing$ باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ یک $y \in M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که xRy، آن‌گاه دنبالهٔ $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_n R x_{n+1}$ برای هر $n \in \omega$.

۱۴.۱ اصل انتخاب‌های وابسته را مفروض بگیرید و ثابت کنید که هر دستگاه شمارا از مجموعه‌ها دارای یک تابع انتخاب است (اصل موضوع انتخاب شمارا).

۱۵.۱ اگر هر مجموعه با یک عدد ترتیبی همتوان باشد، آن‌گاه اصل موضوع انتخاب برقرار است.

۱۶.۱ اگر برای هر دو مجموعهٔ A و B یا $|A| \leq |B|$ یا $|B| \leq |A|$، آن‌گاه اصل موضوع انتخاب برقرار است. [راهنمایی: A و $B = h(A)$ را مقایسه کنید.]

۱۷.۱* اگر B مجموعهٔ نامتناهی و A یک زیرمجموعهٔ B باشد به‌طوری‌که $|A| < |B|$، آن‌گاه $|B - A| = |B|$.

۲ کاربرد اصل موضوع انتخاب در ریاضیات

در این بخش چندین نمونه از کاربرد اصل موضوع انتخاب در ریاضیات را عرضه می‌کنیم. مثال‌ها را طوری انتخاب کرده‌ایم که در عین اینکه تنوع کاربردهای اصل انتخاب در ریاضیات را نشان می‌دهند، چندان نیازی به دانستن اطلاعاتی خارج از حوزهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها ندارند. کاربردهای دیگر اصل انتخاب را می‌توان در تمرین‌ها و همچنین در اکثر متون درسی دربارهٔ توپولوژی عمومی، جبر مجرد و یا آنالیز تابعی یافت. به دنبال هر مثال به نقش و اهمیت اصل انتخاب در آن مثال نیز اشاره‌ای کرده‌ایم.

۱.۲ مثال. نقاط بستاری. دنبالهٔ $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ از اعداد حقیقی همگرا به $a \in \mathbb{R}$ خوانده می‌شود هرگاه برای هر عدد حقیقی مثبت ε عدد $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $n \geq n_\varepsilon$، $|x_n - a| < \varepsilon$. (در این مثال $|x|$ قدرمطلق x است و نه عدد اصلی x.)

فرض کنید A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. در حسابگان پیشرفته عموماً نقاط بستاری A را به یکی (یا هردو) صورت زیر مشخصه‌سازی می‌کنند:

الف) $a \in \mathbb{R}$ یک نقطهٔ بستاری از A است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ با مقادیر در A و همگرا به a موجود باشد.

ب) $a \in \mathbb{R}$ یک نقطهٔ بستاری از A است اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی مثبت ε عدد $x \in A$ موجود باشد به‌قسمی که $|x - a| < \varepsilon$.

حال لازم است ثابت کنیم (الف) و (ب) معادل‌اند.

(الف) ایجاب می‌کند (ب). برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده، وجود دارد $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ به‌قسمی که برای هر $n \geq n_\varepsilon$، $|x_n - a| < \varepsilon$. به‌خصوص، داریم $|x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$ و $x_{n_\varepsilon} \in A$.

(ب) ایجاب می‌کند (الف). اثبات معمول این قسمت به این صورت است که فرض کنید $X_n = \{x \in A \mid |x-a| < ۱/n\}$. طبق قسمت (ب) برای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_n \neq \varnothing$. فرض کنید $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ یک دنباله باشد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in X_n$. از این‌رو، x_nها به A تعلق دارند و $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ به a همگراست. $\square$

پرسشی که اغلب نادیده گرفته می‌شود این است که، چرا فرض می‌کنیم چنین دنبالهٔ $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ وجود دارد؟ توجه می‌کنیم که در اینجا ما خاصیتی به‌صورت $\mathbf{P}(x,y)$ نداریم که برای آن برقراری $\mathbf{P}(x,y)$ معادل باشد با $y = x_n$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$). در برخی حالت‌های خاص چنین خاصیتی را می‌توان مشخص کرد (مثلاً در حالتی که A باز است. تمرین ۱.۲ را ببینید). به هر حال، ثابت شده است که معادل بودن (الف) و (ب) برای هر $A \subseteq \mathbb{R}$ فقط با استفاده از اصول تسرملو ـ فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها امکان‌پذیر نیست. مسلم است اگر اصل انتخاب را بپذیریم از اینکه $X_n \neq \varnothing$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، بلافاصله نتیجه می‌شود $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \varnothing$.

۲.۲ مثال. پیوستگی تابع. تعریف معمول پیوستگی یک تابع حقیقی ـ مقدار با متغیر حقیقی به‌صورت زیر است:

الف) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، وجود داشته باشد $\delta > ۰$ به‌قسمی که برای هر x که $|x-a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ب) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ که به a همگراست، دنبالهٔ $\langle f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ به $f(a)$ همگرا باشد.

به‌راحتی می‌توان دید که (الف) ایجاب می‌کند (ب): در واقع، اگر $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ به a همگرا باشد و $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، در این صورت اول $\delta > ۰$ را بنا به (الف) می‌یابیم. حال چون $\langle x_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ همگراست، پس n_δ موجود است به‌طوری‌که اگر $n > n_\delta$، $|x_n - a| < \delta$. به‌وضوح برای چنین nهایی داریم $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

چنانچه اصل انتخاب را بپذیریم در این صورت (ب) نیز (الف) را نتیجه می‌دهد و از این‌رو (الف) و (ب) دو تعریف معادل برای پیوستگی هستند. حال

فرض کنید (الف) برقرار نباشد، پس $\varepsilon > 0$ موجود است به‌قسمی که برای هر $\delta > 0$ عدد x موجود است که $|x - a| < \delta$ ولی $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. به‌خصوص، برای هر $k = 1, 2, 3, \ldots$ می‌توان x_k را طوری انتخاب کرد که $|x_k - a| < 1/k$ و $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$. دنباله $\langle x_k \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ به a همگراست در حالی که دنبالهٔ $\langle f(x_k) \mid k \in \mathbb{N} \rangle$ به $f(a)$ همگرا نیست، لذا (ب) نیز نقض می‌شود. □

همانند مثال ۱.۲ می‌توان نشان داد اثبات هم‌ارزی (الف) و (ب) در اینجا نیز به تنهایی فقط با استفاده از اصول تسرملو ـ فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها امکان‌پذیر نیست.

۳.۲ مثال. پایهٔ یک فضای برداری. در این مثال، آشنایی با مفهوم فضای برداری روی یک میدان (مثل میدان اعداد حقیقی) لازم است. در هر کتاب جبر خطی می‌توانید تعاریف و خواص جبری مقدماتی فضاهای برداری را ببینید.

مجموعهٔ A از بردارها مستقل خطی نامیده می‌شود هرگاه هیچ ترکیب خطی متناهی مانند $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ از اعضای v_1، ...، v_n در A با ضرایب غیرصفر α_1، ...، α_n از میدان مربوط برابر بردار صفر نباشد. یک پایه برای فضای برداری V عبارت است از بزرگ‌ترین (نسبت به رابطهٔ شمول) زیرمجموعهٔ مستقل خطی از V.

یکی از اساسی‌ترین واقعیت‌ها دربارهٔ فضاهای برداری به‌صورت زیر است.

۴.۲ قضیه*. هر فضای برداری دارای یک پایه است.

برهان. این قضیه نتیجهٔ سرراستی از لم تسورن است. در واقع اگر C یک $\subset$ـزنجیر از زیرمجموعه‌های مستقل از فضای برداری مفروض باشند، در این صورت اجتماع C نیز یک مجموعهٔ مستقل است. از این‌رو، یک مجموعهٔ مستقل بیشین برای فضای برداری داده شده به‌دست می‌آید. [برای جزئیات بیشتر، حالت خاص مطرح شده در مثال بعد را ببینید.] □

اثبات قضیهٔ بالا فقط با استفاده از اصول تسرملو ـ فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها بدون استفاده از اصل انتخاب امکان‌پذیر نیست.

۵.۲ مثال. پایهٔ هامل. مجموعهٔ اعداد حقیقی را یک فضای برداری روی میدان

اعداد گویا در نظر بگیرید. طبق قضیهٔ ۴.۲ این فضای برداری دارای یک پایه موسوم به پایهٔ هامل برای $\mathbb{R}$ است.

به بیان دیگر، مجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{R}$ یک پایهٔ هامل برای $\mathbb{R}$ است هرگاه هر $x \in \mathbb{R}$ را بتوان به‌گونه‌ای یکتا به‌صورت

$$x = r_۱ \cdot x_۱ + \cdots + r_n \cdot x_n$$

نوشت، که در آن $x_۱, \ldots, x_n \in X$ دوبه‌دو مجزا و $r_۱$، ...، r_n تعدادی عدد گویای غیر صفر هستند. در ذیل به تفصیل نشان می‌دهیم چنین مجموعهٔ Xیی موجود است.

مجموعهٔ X از اعداد حقیقی را وابسته نامند هرگاه اعداد دوبه‌دو متمایز $x_۱, \ldots, x_n \in X$ و $r_۱, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ موجود باشند به‌قسمی که

$$r_۱ \cdot x_۱ + \cdots + r_n \cdot x_n = ۰,$$

و حداقل یکی از ضرایب $r_۱$، ...، r_n مخالف صفر باشد. مجموعه‌ای که وابسته نیست، مستقل نامیده می‌شود. فرض کنید A دستگاه همهٔ مجموعه‌های مستقل از اعداد حقیقی باشد. لم تسورن را به کار می‌بریم و نشان می‌دهیم A نسبت به ترتیب $\subseteq$ دارای عضو بیشین است. با اثبات اینکه هر مجموعهٔ مستقل و $\subseteq$ـبیشین یک پایهٔ هامل است، اثبات را کامل می‌کنیم.

$A_۰ \subseteq A$ را مجموعهٔ مرتب خطی نسبت به $\subseteq$ در نظر می‌گیریم و مفروضات لم تسورن را بررسی می‌کنیم. قرار دهید $X_۰ = \bigcup A_۰$. چنانچه $X_۰ \in A$، یا به‌عبارت‌دیگر، چنانچه $X_۰$ مستقل باشد، در این صورت $X_۰$ یک کران بالا برای $A_۰$ نسبت به $(A, \subseteq)$ است. اما در حقیقت $X_۰$ مستقل است، زیرا فرض کنید اعداد $x_۱, \ldots, x_n \in X_۰$ و $r_۱, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$، که همگی صفر نیستند، موجود باشند به‌قسمی که $r_۱ \cdot x_۱ + \cdots + r_n \cdot x_n = ۰$. در این صورت، وجود دارد $X_۱, \ldots, X_n \in A_۰$ به‌طوری‌که $x_۱ \in X_۱$، ...، $x_n \in X_n$. چون $A_۰$ نسبت به $\subseteq$ مرتب خطی است، زیرمجموعهٔ متناهی $\{X_۱, \ldots, X_n\}$ از $A_۰$ دارای یک $\subseteq$ـبزرگ‌ترین عضو، مثلاً X_i، است. اما در این صورت، $x_۱, \ldots, x_n \in X_i$ و بنابراین X_i دیگر مستقل خطی نخواهد بود.

از لم تسورن نتیجه می‌گیریم که $(A, \subseteq)$ دارای یک عضو بیشین مانند X است. اکنون فقط می‌ماند نشان دهیم که X یک پایهٔ هامل است.

فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ به‌ازای هیچ $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ و $x_1, \ldots, x_n \in X$ به‌صورت $r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n$ قابل بیان نباشد. پس $x \notin X$ (زیرا در غیر این صورت داریم $x = 1 \cdot x$). از این‌رو، $X \cup \{x\} \supset X$ و در نتیجه $X \cup \{x\}$ وابسته است. (به یاد داشته باشید X یک مجموعهٔ مستقل بیشین است). لذا وجود دارد $x_1, \ldots, x_n \in X \cup \{x\}$ و $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Q}$ که همگی صفر نیستند به‌قسمی که $s_1 \cdot x_1 + \cdots + s_n \cdot x_n = 0$. با توجه به اینکه X مستقل است، پس $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. فرض کنید مثلاً $x = x_i$ و ضریب متناظر آن $s_i \neq 0$. اکنون داریم

$$\begin{aligned} x &= x_i \\ &= \left(-\frac{s_1}{s_i}\right) \cdot x_1 + \cdots + \left(-\frac{s_{i-1}}{s_i}\right) \cdot x_{i-1} + \left(-\frac{s_{i+1}}{s_i}\right) \cdot x_{i+1} + \cdots + \left(-\frac{s_n}{s_i}\right) \cdot x_n, \end{aligned}$$

که در آن $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in X$ و ضرایب اعداد گویا هستند. اما این امر فرض ما دربارهٔ x را نقض می‌کند.

حال فرض کنید که $x \in \mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که به دو صورت $x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n = s_1 \cdot y_1 + \cdots + s_k \cdot y_k$ قابل نمایش باشد، که در اینجا $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k \in X$ و $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{Q} - \{0\}$. لذا

$$r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_n \cdot x_n - s_1 \cdot y_1 - \cdots - s_k \cdot y_k = 0. \qquad (۶.۲)$$

اگر $\{x_1, \ldots, x_n\} \neq \{y_1, \ldots, y_k\}$ (مثلاً، $x_1 \notin \{y_1, \ldots, y_k\}$)، (۶.۲) را می‌توان به‌صورت ترکیبی از اعضای متمایز در X با حداقل یک ضریب غیر صفر (مثلاً، r_1) نوشت. اما این مستقل بودن X را نقض می‌کند. پس نتیجه می‌گیریم $n = k$ و یک نگاشت یک‌به‌یک مثل $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ بین اندیس‌های $1, 2, \ldots, n$ وجود دارد به‌قسمی که $x_1 = y_{i_1}$، ...، $x_n = y_{i_n}$. پس می‌توان (۶.۲) را به‌صورت $(r_1 - s_{i_1}) \cdot x_1 + \cdots + (r_n - s_{i_n}) \cdot x_n = 0$ نوشت. چون x_1، ...، x_nها اعضای دوبه‌دو مجزایی از X هستند، نتیجه می‌گیریم $r_1 - s_{i_1} = 0$، ...، $r_n - s_{i_n} = 0$؛

یعنی $x_1 = s_{i_1}$، ...، $x_n = s_{i_n}$. استدلال فوق نشان می‌دهد که هر $x \in \mathbb{R}$ یک نمایش به‌صورت مورد نظر دارد و بنابراین X یک پایهٔ هامل است.

وجود پایهٔ هامل را به تنهایی در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نمی‌توان ثابت کرد و به کار گرفتن اصل انتخاب ضروری است.

۷.۲ مثال. توابع جمعی. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جمعی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) + f(y)$. نمونه‌ای از تابع جمعی، تابع f_a است که برای هر $a \in \mathbb{R}$ ثابت، به‌صورت $f_a(x) = a \cdot x$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود.

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که توابع جمعی بسیار شبیه تابع f_a، به‌ازای $a \in \mathbb{R}$ مناسبی، هستند. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید f جمعی باشد و قرار دهید $a = f(۱)$. در این صورت داریم

$$f(۲) = f(۱) + f(۱) = a \cdot ۲, \quad f(۳) = f(۲) + f(۱) = a \cdot ۳,$$

و بنا به استقرا، برای هر $b \in \mathbb{N} - \{۰\}$ به‌دست می‌آید $f(b) = a \cdot b$. چون $f(۰) = f(۰ + ۰) = f(۰) + f(۰)$، پس داریم $f(۰) = ۰$. لذا $f(-b) + f(b) = f(۰) = ۰$ و بنابراین $f(-b) = -f(b) = a \cdot (-b)$ برای هر $b \in \mathbb{N}$. برای محاسبه $f(۱/n)$، توجه کنید که

$$a = f(۱) = \underbrace{f(\frac{۱}{n}) + \cdots + f(\frac{۱}{n})}_{n \text{ بار}} = n \cdot f(\frac{۱}{n}),$$

در نتیجه، $f(۱/n) = a \cdot ۱/n$. با ادامهٔ این کار به‌راحتی ثابت می‌شود که برای هر عدد گویای x، $f(x) = a \cdot x$. اکنون طبیعی است حدس بزنیم که $f(x) = a \cdot x$ برای هر عدد حقیقی x. به‌عبارت‌دیگر، هر تابع جمعی به‌صورت f_a است به‌ازای عددی مانند $a \in \mathbb{R}$. اثبات می‌شود که این حدس را در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نمی‌توان رد کرد، ولی چنانچه اصل انتخاب را بپذیریم حدس مذکور نادرست است. قضیهٔ زیر را در این مورد ثابت می‌کنیم.

۸.۲ قضیه*. تابع جمعی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری که برای هر $a \in \mathbb{R}$،

$.f \neq f_a$

برهان. فرض کنید X یک پایهٔ هامل برای $\mathbb{R}$ باشد. عدد $\overline{x} \in X$ را ثابت اختیار کنید. تعریف کنید

$$f(x) = \begin{cases} r_i, & x = r_1 \cdot x_1 + \cdots + r_i \cdot x_i + \cdots + r_n \cdot x_n \text{ و } x_i = \overline{x} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

راحت می‌توان دید که f جمعی است. به‌علاوه، توجه کنید $0 \notin X$ و X نامتناهی است (در حقیقت، داریم $|X| = 2^{\aleph_0}$). داریم $f(\overline{x}) = 1$ (زیرا، $\overline{x} = 1 \cdot \overline{x}$ نمایش $\overline{x}$ برحسب پایه است)، درحالی‌که، برای هر $\overline{\overline{x}} \in X$ که $\overline{\overline{x}} \neq \overline{x}$، $f(\overline{\overline{x}}) = 0$ (زیرا $\overline{x}$ در نمایش پایه برای $\overline{\overline{x}} = 1 \cdot \overline{\overline{x}}$ ظاهر نمی‌شود). حال اگر به‌ازای $a \in \mathbb{R}$یی داشته باشیم $f = f_a$، در این صورت خواهیم داشت $f(\overline{x}) = 1 = a \cdot \overline{x}$، که نشان می‌دهد $a \neq 0$ و همچنین از طرف دیگر، $f(\overline{\overline{x}}) = 0 = a \cdot \overline{\overline{x}}$ که نشان می‌دهد $.a = 0$ □

۹.۲ مثال. قضیهٔ هان ــ باناخ. تابع f روی فضای برداری V روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با مقادیر در $\mathbb{R}$ را تابعک خطی نامند هرگاه

$$f(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot f(u) + \beta \cdot f(v)$$

برای هر $u, v \in V$ و $.\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

تابع p روی V با مقادیر در $\mathbb{R}$ را تابعک زیرخطی روی V می‌نامند هرگاه

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \text{برای هر } u, v \in V$$

و

$$.p(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot p(u) \quad \text{برای هر } u \in V \text{ و } \alpha > 0$$

قضیهٔ زیر، که منسوب به هانس هان و استفان باناخ است، یکی از سنگ بناهای آنالیز تابعی به حساب می‌آید.

۱۰.۲ قضیه*. فرض کنید p یک تابعک زیرخطی روی فضای برداری V باشد و $f_\circ$ تابعک خطی روی زیرفضای $V_\circ$ از V باشد به‌قسمی که $f_\circ(v) \leq p(v)$ برای هر $v \in V_\circ$. در این صورت تابعک خطی f روی V موجود است به‌طوری‌که $f_\circ \subseteq f$ و برای هر $v \in V$، $f(v) \leq p(v)$.

برهان. F را مجموعهٔ همه تابعک‌های خطی g تعریف شده روی زیرفضایی مثل W از V در نظر بگیرید به‌قسمی که

$g \supseteq f_\circ$ و برای هر $v \in W$، $g(v) \leq p(v)$.

نشان می‌دهیم یک عضو بیشین برای $(F, \subseteq)$ همان تابعک خطی مطلوب ماست. مفروضات لم تسورن را می‌آزماییم. برای این کار فرض کنید $F_\circ \subseteq F$ مجموعه‌ای ناتهی و مرتب خطی باشد. حال، چنانچه $g_\circ = \bigcup F_\circ$، در این صورت به‌شرطی‌که $g_\circ \in F$، $g_\circ$ یک $\subseteq$ــ‌کران بالا برای $F_\circ$ است. اما، به‌وضوح $g_\circ$ یک تابع با مقادیر در $\mathbb{R}$ است و $f_\circ \subseteq g_\circ$. همچنین چون اجتماع هر زیرمجموعه از زیرفضاهای V که نسبت به $\subseteq$ مرتب خطی باشد زیرفضایی از V است، پس $\operatorname{dom} g_\circ = \bigcup_{g \in F_\circ} \operatorname{dom} g$ نیز فضایی از V است. برای اثبات خطی بودن $g_\circ$، فرض کنید $u, v \in \operatorname{dom} g_\circ$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. در این صورت وجود دارد $g, g' \in F_\circ$ به‌قسمی که $u \in \operatorname{dom} g$ و $v \in \operatorname{dom} g'$. چون $F_\circ$ نسبت به $\subseteq$ مرتب خطی است، بنابراین یا $g \subseteq g'$ یا $g' \subseteq g$. در حالت اول، داریم $u, v, \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in \operatorname{dom} g'$ و بنابراین

$$g_\circ(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = g'(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot g'(u) + \beta \cdot g'(v) = \alpha \cdot g_\circ(u) + \beta \cdot g_\circ(v)$$

حالت دوم نیز مشابه حالت اول است. نهایتاً اینکه، برای هر $u \in \operatorname{dom} g_\circ$ و $g \in F_\circ$ به شرطی که $u \in \operatorname{dom} g$، داریم $g_\circ = g(u) \leq p(u)$. پس دیدیم $g_\circ \in F$.

بنا به لم تسورن، $(F, \subseteq)$ دارای عضو بیشین مانند f است. فقط می‌ماند نشان دهیم که $\operatorname{dom} f = V$. ثابت می‌کنیم که اگر $\operatorname{dom} f \subset V$، در این صورت f دیگر بیشین نخواهد بود. $u \in V - \operatorname{dom} f$ را ثابت اختیار کنید و W را زیرفضای تولید شده توسط $\operatorname{dom} f$ و u از V در نظر بگیرید. چون هر $w \in W$ نمایش یکتایی به‌صورت $w = x + \alpha \cdot u$ دارد که در آن $x \in \operatorname{dom} f$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، لذا تابع f_c با تعریف

$$f_c(w) = f(x) + \alpha \cdot c$$

یک تابعک خطی روی W است و $f \subset f_c$. اثبات کامل می‌شود به‌شرطی‌که نشان دهیم عدد $c \in \mathbb{R}$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که

$$f_c(x+\alpha\cdot u) = f(x)+\alpha\cdot c \le p(x+\alpha\cdot u), \qquad (۱۱.۲)$$

برای هر $x \in \operatorname{dom} f$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

رابطهٔ (۱۱.۲) بلافاصله از خواص f به‌ازای $\alpha = 0$ حاصل می‌شود. پس باید c را طوری انتخاب کنیم که در دو شرط زیر صدق کند:

الف) برای هر $\alpha > 0$ و $x \in \operatorname{dom} f$، $f(x) + \alpha \cdot c \le p(x + \alpha \cdot u)$.

ب) برای هر $\alpha > 0$ و $y \in \operatorname{dom} f$، $f(y) + (-\alpha) \cdot c \le p(y + (-\alpha) \cdot u)$.

یا معادلاً اینکه، برای هر $x, y \in \operatorname{dom} f$ و $\alpha > 0$ داشته باشیم

$$f(y) - p(y - \alpha \cdot u) \le \alpha \cdot c \le p(x + \alpha \cdot u) - f(x)$$

و یا

$$f\Big(\frac{1}{\alpha}\cdot y\Big) - p\Big(\frac{1}{\alpha}\cdot y - u\Big) \le c \le p\Big(\frac{1}{\alpha}\cdot x + u\Big) - f\Big(\frac{1}{\alpha}\cdot x\Big). \qquad (۱۲.۲)$$

اما توجه کنید برای هر $v, t \in \operatorname{dom} f$،

$$f(v) + f(t) = f(v + t) \le p(v + t) \le p(v - u) + p(t + u)$$

و بنابراین

$$f(v) - p(v - u) \le p(t + u) - f(t).$$

حال چنانچه قرار دهیم $A = \sup\{f(v) - p(v - u) \mid v \in \operatorname{dom} f\}$ و $B = \inf\{p(t + u) - f(t) \mid t \in \operatorname{dom} f\}$، داریم $A \le B$. اگر c را چنان انتخاب کنیم که $A \le c \le B$، در این صورت رابطهٔ (۱۲.۲) برقرار خواهد شد. □

۱۳.۲ مثال. مسئلهٔ اندازه. گسترش مفهوم طول یک بازه به مجموعه‌های پیچیده‌تر از اعداد حقیقی مسئلهٔ حائز اهمیتی در آنالیز است. بهترین حالت ممکن آن است که تابعی مانند μ روی $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ با مقادیر در $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ موجود باشد به‌طوری‌که

(۰) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، $\mu([a,b]) = b - a$.

(۱) $\mu(\varnothing) = \circ$ و $\mu(\mathbb{R}) = \infty$.

(۲) هرگاه $\{A_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای در $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت

$$\mu\Big(\bigcup_{n=\circ}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \mu(A_n).$$

(خاصیت فوق را شمارا_جمعی یا σ_جمع‌پذیری μ می‌نامند.)

(۳) هرگاه $a \in \mathbb{R}$ و $A \subseteq \mathbb{R}$ و $A + a = \{x + a \mid x \in A\}$، در این صورت $\mu(A + a) = \mu(A)$ (انتقال ناوردایی μ).

برخی خواص μ بلافاصله از (۰)ــ(۳) به‌دست می‌آید (تمرین ۳.۲) مانند:

(۴) اگر $A \cap B = \varnothing$ آن‌گاه $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (متناهیاً جمعی).

(۵) اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $\mu(A) \leq \mu(B)$ (یکنوایی).

اصل انتخاب نشان می‌دهد که هیچ تابعی مانند μ با خواص فوق‌الذکر وجود ندارد.

۱۴.۲ قضیه*. تابع $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [\circ, \infty) \cup \{\infty\}$ صادق در شرایط (۰)ــ(۵) وجود ندارد.

برهان. روی $\mathbb{R}$ رابطهٔ هم‌ارزی $\approx$ را به‌صورت:

$x \approx y$ اگر و تنها اگر $x - y$ گویا باشد

تعریف می‌کنیم. با استفاده از اصل انتخاب یک مجموعه از نماینده‌ها، مانند X، برای $\approx$ وجود دارد. به‌آسانی می‌توان دید

$$\mathbb{R} = \bigcup\{X + r \mid \text{عدد گویا است } r\}. \qquad (۱۵.۲)$$

علاوه بر این چنانچه q و r دو عدد گویای متمایز باشند، در این صورت $X + q$ و $X + r$ از هم جدا هستند. توجه می‌کنیم که $\mu(X) > \circ$؛ زیرا اگر $\mu(X) = \circ$ در این

صورت برای هر $q \in \mathbb{Q}$، $\mu(X+q) = \circ$ و در نتیجه

$$\mu(\mathbb{R}) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu(X+q) = \circ,$$

که تناقض است. طبق خاصیت شمارا_جمعی بودن μ، بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ موجود است به‌قسمی که $\mu(X \cap [a,b]) > \circ$. قرار دهید $Y = X \cap [a,b]$. پس

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[\circ,۱]} (Y+q) \subseteq [a, b+۱], \qquad (۱۶.۲)$$

و توجه کنیم سمت چپ اجتماع تعداد شمارایی از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $Y+q$ است که $\mu(Y+q) = \mu(Y) > \circ$. از این‌رو، طرف چپ (۱۶.۲) دارای اندازه‌ای برابر ∞ است که با $\mu([a,b+۱]) = b+۱-a$ در تناقض است. □

قضیهٔ بالا حاکی از آن است که از برخی شرایط μ باید صرف‌نظر کرد. مطلوب‌ترین حالت برای آنالیز ریاضی، صرف‌نظر کردن از شرط تعریف μ روی کل زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است. در عوض شرط می‌کنیم که دامنهٔ μ تحت اعمال مجموعه‌ای مناسبی بسته باشد.

۱۷.۲ تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی باشد. گردایهٔ $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ را یک σ_جبر از زیرمجموعه‌های S می‌نامند هرگاه

(۱) $\varnothing \in \mathfrak{S}$ و $S \in \mathfrak{S}$.

(۲) هرگاه $X \in \mathfrak{S}$، در این صورت $S - X \in \mathfrak{S}$.

(۳) اگر $X_n \in \mathfrak{S}$ برای هر n، در این صورت $\bigcup_{n=\circ}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$ و $\bigcap_{n=\circ}^{\infty} X_n \in \mathfrak{S}$.

۱۸.۲ تعریف. یک اندازهٔ σ_جمعی روی یک σ_جبر $\mathfrak{S}$ از زیرمجموعه‌های S عبارت است از تابع $\mu : \mathfrak{S} \to [\circ, \infty) \cup \infty$ به‌قسمی که

(۱) $\mu(\varnothing) = \circ$، $\mu(S) > \circ$.

(۲) هرگاه $\{X_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا از $\mathfrak{S}$ باشد، در این صورت

$$\mu\Big(\bigcup_{n=\circ}^{\infty} X_n\Big) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \mu(X_n).$$

اعضای $\mathfrak{S}$ را مجموعه‌های μـاندازه‌پذیر می‌نامند.

چند مثال ساده از σـجبرها و اندازه‌های σـجمعی را می‌توان در تمرین‌ها دید. به‌خصوص، $\mathcal{P}(S)$ بزرگ‌ترین σـجبر زیرمجموعه‌های S است. منظور از یک اندازه روی S عبارت است از اندازه‌ای که روی $\mathcal{P}(S)$ تعریف شده است.

قضیهٔ زیر بیان دیگری از قضیه بالاست که اثبات کردیم.

۱۹.۲ نتیجه. فرض کنید μ یک اندازهٔ σـجمعی روی یک σـجبر $\mathfrak{S}$ از زیرمجموعه های $\mathbb{R}$ باشد به‌گونه‌ای که

(۰) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$، $[a, b] \in \mathfrak{S}$ و $\mu([a, b]) = b - a$.

(۳) اگر $A \in \mathfrak{S}$، آن‌گاه برای هر $a \in \mathbb{R}$، $A + a \in \mathfrak{S}$ و $\mu(A + a) = \mu(A)$.

در این صورت زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی وجود دارند که μـاندازه‌پذیر نیستند.

در آنالیز حقیقی، σـجبر خاص $\mathfrak{M}$ از مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ و یک اندازه σـجمعی مانند μ روی $\mathfrak{M}$ موسوم به اندازهٔ لبگ می‌سازند که در شرایط (۰) و (۳) از نتیجهٔ فوق صدق می‌کند. از این‌رو، وجود مجموعهٔ اندازه‌ناپذیر لبگ نتیجه‌ای از اصل انتخاب است. روبرت سالُوِی نشان داده است که برای اثبات چنین نتیجه‌ای اصل انتخاب لازم است.

ضعیف کردن شرایط (۰)ــ(۴) در تعریف μ به‌صورت‌های دیگری هم مورد مطالعه قرار گرفته است و سؤالات بسیار جالبی نیز در نظریهٔ مجموعه‌ها مطرح کرده است. فی‌المثل، می‌توان از شرط (۳) (انتقال ناوردایی) صرف‌نظر کرد و پرسید آیا اندازهٔ σـجمعی μ روی $\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ که $a < b$ داشته باشیم $\mu([a, b]) = b - a$. این پرسش وابستگی عمیقی به نظریهٔ کاردینال‌های بزرگ دارد و ما به این سؤال در فصل ۱۳ خواهیم پرداخت. حالت جالب دیگر، صرف‌نظر کردن از شرط (۲) (شمارا ـ جمعی بودن) و به‌جای آن نگه‌داشت شرط (۴) (متناهیاً جمعی بودن) است. اندازه‌های متناهیاً جمعی غیربدیهی فی‌الواقع موجودند (به شرط پذیرفتن اصل انتخاب) و ما آن‌ها را در فصل ۱۱ بیشتر مطالعه خواهیم کرد.

در اینجا جنبه‌های مختلف اصل موضوع انتخاب را مورد بحث قرار می‌دهیم. اول از همه، باید گفت که چندین نتیجهٔ اساسی و البته به لحاظ شهودی بسیار پذیرفتنی دربارهٔ مجموعه‌های شمارا و خواص نظریه‌ـاندازه‌ای و توپولوژیک خط حقیقی وجود دارد که اثبات آن‌ها وابسته به اصل انتخاب است. دو نمونه از این نوع نتایج را در مثال‌های ۱.۲ و ۲.۲ مشاهده کردیم. تصور اینکه چگونه بدون آن‌ها مثلاً حتی بتوان به مطالعهٔ حسابان پیشرفته پرداخت، دشوار است. لیکن می‌دانیم اثبات آن‌ها در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل امکان‌پذیر نیست. مطمئناً این امر اصل انتخاب را قدری موجه می‌سازد. مع‌هذا، بررسی دقیق‌تر اثبات مثال‌های (۱.۲) و (۲.۲) آشکار می‌کند که صورت بسیار محدود اصل انتخاب در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است. حقیقت امر این است که این دو نتیجه را با پذیرفتن اصل انتخاب شمارا نیز می‌توان ثابت کرد.

اصل موضوع انتخاب شمارا. برای هر دستگاه شمارا از مجموعه‌ها، یک تابع انتخاب وجود دارد.

چه بسا، اصل انتخاب شمارا شهوداً پذیرفتنی باشد، لیکن اصل انتخاب کامل چنین نیست. این احساس با دیدن برخی پیامدهای خلاف شهود اصل انتخاب کامل قوت می‌گیرد. وجود توابع جمعی غیرخطی در مثال ۷.۲، یا وجود مجموعه‌های اندازه‌ناپذیر لبگ در مثال ۱۳.۲ نمونه‌ایی از این دست هستند. از قضا هیچ‌یک از این دو نتیجه از اصل انتخاب شمارا به‌دست نمی‌آیند.

به نظر می‌رسد کاربردهایی مانند مثال ۹.۲ دلیل عمدهٔ پذیرش عمومی اصل انتخاب است. قضیهٔ هان ـ باناخ، قضیهٔ تیخونوف (حاصل‌ضرب توپولوژیک هر دستگاهی از فضاهای توپولوژیک فشرده، فشرده است)، و قضیهٔ ایدال ماکزیمال (در هر حلقه، هر ایدال را می‌توان به یک ایدال ماکزیمال گسترش داد) تنها نمونه‌هایی از گسترهٔ وسیع قضایایی هستند که اثبات آن‌ها نیازمند اصل انتخاب، تقریباً به‌صورت کامل آن و در برخی موارد حتی معادل آن، هستند. درست است که برای پرداختن به اشیای معمول ریاضیات، مانند اعداد و توابع حقیقی و مختلط، به چنین نتایج کلی نیاز نداریم، لیکن نقش اصل انتخاب در تسهیل ملاحظات جبری و

توپولوژیک انکارنشدنی است، چنانکه عدم استفاده از آن ما را به دام جزئیات نظریه‌ـمجموعه‌ای بی‌ربط دچار می‌سازد. به این دلیلِ عمل اندیشانه به نظر می‌رسد که اصل انتخاب همواره جایگاه خود را در نظریهٔ مجموعه‌ها حفظ کند.

تمرین‌ها

۱.۲ بدون استفاده از اصل انتخاب، ثابت کنید که دو تعریف نقاط بستاری معادل هستند اگر و فقط اگر A مجموعه‌ای باز باشد. [راهنمایی: X_n باز است، بنابراین $X_n \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ و $\mathbb{Q}$ می‌تواند خوش‌ترتیب شود.]

۲.۲ ثابت کنید که هر تابع پیوستهٔ جمعی مانند f با f_a، به‌ازای عددی مانند $a \in \mathbb{R}$، برابر است.

۳.۲ فرض کنید μ دارای خاصیت‌های (۰)ـــ(۲) باشد. خاصیت‌های (۴) و (۵) را ثابت کنید. همچنین ثابت کنید:

(۶) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

(۷) $\mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

*۴.۲ فرض کنید $\mathfrak{S} = \{X \subseteq S \mid |X| \leq \aleph_0$ یا $|S - X| \leq \aleph_0\}$. ثابت کنید $\mathfrak{S}$ یک σـجبر است.

۵.۲ فرض کنید $\mathfrak{C}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد. فرض کنید $\mathfrak{S} = \bigcap\{\mathfrak{T} \mid \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{T}$ و $\mathfrak{T}$ یک σـجبر از زیرمجموعه‌های S است$\}$. ثابت کنید $\mathfrak{S}$ یک σـجبر است (این σـجبر را σـجبر تولید شده توسط $\mathfrak{C}$ می‌نامند).

۶.۲ $a \in S$ را ثابت اختیار کنید و μ را روی $\mathcal{P}(S)$ به این صورت تعریف کنید؛ $\mu(A) = 1$ اگر $a \in A$ و $\mu(A) = 0$ اگر $a \notin A$. نشان دهید که μ یک اندازهٔ σـجمعی روی S است.

۷.۲ برای $A \subseteq S$، قرار دهید $\mu(A) = 0$ اگر $A = \varnothing$ و در غیر این صورت $\mu(A) = \infty$. نشان دهید μ یک اندازهٔ σـجمعی روی S است.

۸.۲ برای $A \subseteq S$، تعریف کنید $\mu(A) = |A|$، اگر A متناهی باشد و $\mu(A) = \infty$، اگر A نامتناهی باشد. μ یک اندازهٔ σـجمعی روی S است؛ این اندازه را اندازهٔ شمارشی روی S می‌نامند.

فصل ۹

حساب اعداد اصلی

۱ مجموع و حاصل‌ضرب‌های نامتناهی اعداد اصلی

در فصل ۵، اعمال حسابی را برای اعداد اصلی مطالعه کردیم. تعمیم این اعمال و تعریف مجموع و حاصل‌ضرب تعداد نامتناهی عدد اصلی مطلوب به نظر می‌رسد. برای نمونه، طبیعی است انتظار داشته باشیم

$$\underbrace{۱ + ۱ + \cdots}_{\aleph_۰ \text{ بار}} = \aleph_۰$$

و یا به‌طور کلی‌تر،

$$\underbrace{\kappa + \kappa + \cdots}_{\lambda \text{ بار}} = \kappa \cdot \lambda.$$

مجموع دو عدد اصلی $\kappa_۱$ و $\kappa_۲$ را برابر عدد اصلی مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲$ تعریف کردیم، که در آن $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعهٔ مجزا هستند و $|A_۱| = \kappa_۱$ و $|A_۲| = \kappa_۲$. مفهوم جمع را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

۱.۱ تعریف. فرض کنید $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ دستگاهی از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا باشد. برای هر $i \in I$، قرار دهید $|A_i| = \kappa_i$. مجموع $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ را به‌صورت

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف $\sum_{i\in I}\kappa_i$ مبتنی بر مجموعه‌های خاص A_i $(i\in I)$ است. در حالت متناهی، که $I=\{۱,۲\}$ و $|A_۱\cup A_۲|=\kappa_۱+\kappa_۲$، نشان دادیم نوع انتخاب $A_۱$ و $A_۲$ بی‌اثر است. در واقع ثابت کردیم چنانچه $A'_۱$ و $A'_۲$ دو مجموعهٔ مجزا از یکدیگر باشند به‌طوری‌که $|A'_۱|=\kappa_۱$ و $|A'_۲|=\kappa_۲$، در این صورت $|A'_۱\cup A'_۲|=|A_۱\cup A_۲|$.

در حالت کلی برای اثبات نتیجهٔ متناظر برای حالت نامتناهی نیازمند اصل انتخاب هستیم. فرض کنید دو دستگاه $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ و $\langle A'_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ متشکل از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا باشند، به‌طوری که مجموعه‌های A_n و A'_n هر کدام دو عضو داشته باشند. حال در غیاب اصل انتخاب ممکن است $\bigcup_{n=۰}^{\infty}A_n$ با $\bigcup_{n=۰}^{\infty}A'_n$ همتوان نباشد!

به همین دلیل، و وابستگی بسیاری از نتایج دیگر به اصل انتخاب، از حالا به بعد اصل انتخاب را بدون اشارهٔ مستقیم به آن به کار خواهیم برد.

۲.۱ لم. اگر $\langle A_i\mid i\in I\rangle$ و $\langle A'_i\mid i\in I\rangle$ دو دستگاه از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا باشند به‌قسمی که برای هر $i\in I$، $|A_i|=|A'_i|$، آن‌گاه $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcup_{i\in I}A'_i\right|$.

برهان. برای هر $i\in I$، نگاشت یک‌به‌یک f_i از A_i بتوی A'_i را در نظر می‌گیریم. در این صورت $f=\bigcup_{i\in I}f_i$ نگاشت یک‌به‌یکی از $\bigcup_{i\in I}A_i$ بتوی $\bigcup_{i\in I}A'_i$ خواهد بود. □

لم بالا تعریف $\sum_{i\in I}\kappa_i$ را موجه می‌نماید. از آنجایی که اجتماع نامتناهی مجموعه‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است (تمرین ۱۰.۳ در فصل ۲)، در نتیجه مجموع نامتناهی کاردینال‌ها نیز دارای خاصیت شرکت‌پذیری است (تمرین ۱.۱ را ببینید). عمل $\sum$ خواص مطلوب دیگری نیز دارد، مثلاً اگر برای هر $i\in I$، $\kappa_i\le\lambda_i$، آن‌گاه $\sum_{i\in I}\kappa_i\le\sum_{i\in I}\lambda_i$ (تمرین ۲.۱). با این حال اگر برای هر $i\in I$ $\kappa_i<\lambda_i$ لزومی ندارد که $\sum_i\kappa_i<\sum_i\lambda_i$ (تمرین ۳.۱).

چنانچه جمعوندها برابر باشند، یعنی اگر برای هر $i\in\lambda$ $\kappa_i=\kappa$، همانند حالت متناهی، داریم

$$\sum_{i\in\lambda}\kappa_i=\underbrace{\kappa+\kappa+\cdots}_{\lambda\ \text{بار}}=\kappa\cdot\lambda,$$

(آن را اثبات کنید! تمرین ۱.۴).

محاسبهٔ مجموع‌های نامتناهی خیلی مشکل نیست. برای مثال، مورد

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}n=1+2+3+\cdots+n+\cdots\qquad(n\in\mathbb{N})$$

را در نظر بگیرید. به‌آسانی می‌توان دید که مجموع فوق برابر $\aleph_0$ است. فی‌الواقع، این حکم از قضیهٔ کلی زیر نتیجه می‌شود.

۳.۱ قضیه. فرض کنید λ یک کاردینال نامتناهی و κ_α $(\alpha<\lambda)$ یک عدد اصلی ناصفر باشد. همچنین قرار دهید $\kappa=\sup\{\kappa_\alpha\mid\alpha<\lambda\}$. در این صورت

$$\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha=\lambda\cdot\sup\{\kappa_\alpha\mid\alpha<\lambda\}.$$

برهان. از یک طرف، برای هر $\alpha<\lambda$، $\kappa_\alpha\le\kappa$، و لذا $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha\le\sum_{\alpha<\lambda}\kappa=\kappa\cdot\lambda$. از طرف دیگر، توجه می‌کنیم که $\lambda=\sum_{\alpha<\lambda}1\le\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$. چون مجموع $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$ کران بالایی برای κ_αهاست و κ کوچک‌ترین کران بالاست، پس داریم $\kappa\le\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$. حال چون κ و λ هر دو کوچک‌تر از $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$ هستند، نتیجه می‌شود که $\kappa\cdot\lambda$ نیز که از هر دوی κ و λ بزرگ‌تر است، از $\sum_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$ کوچک‌تر است. حکم قضیه اکنون از قضیهٔ کانتور ـ برنشتاین به‌دست می‌آید. □

۴.۱ نتیجه. اگر κ_i $(i\in I)$ اعداد اصلی باشند و $|I|\le\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}$، آن‌گاه

$$\sum_{i\in I}\kappa_i=\sup_{i\in I}\kappa_i.$$

(به‌خصوص، اگر همهٔ κ_iها دوبه‌دو متمایز باشند، شرایط قضیه برقرار خواهد بود.)

□

قبلاً حاصل‌ضرب دو کاردینال κ_1 و κ_2 را برابر کاردینال حاصل‌ضرب دکارتی $A_1\times A_2$ تعریف کردیم، که در اینجا A_1 و A_2 دو مجموعهٔ دلخواه هستند و $|A_1|=\kappa_1$ و $|A_2|=\kappa_2$. این تعریف به‌صورت زیر تعمیم می‌یابد.

۵.۱ تعریف. فرض کنید $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in I$، $|A_i| = \kappa_i$. حاصل‌ضرب $\langle \kappa_i \mid i \in I\rangle$ را به‌صورت

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = \Big|\prod_{i\in I} A_i\Big|$$

تعریف می‌کنیم. حاصل‌ضرب کاردینال‌ها (سمت چپ) را با همان نماد حاصل‌ضرب دکارتی خانوادهٔ اندیس‌دار $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ نشان می‌دهیم. معمولاً می‌توان فهمید کدام معنی از نماد $\prod$ اراده شده است.

در اینجا نیز، تعریف $\prod_{i\in I} \kappa_i$ به‌نوع انتخاب مجموعه‌های A_iها بستگی ندارد.

۶.۱ لم. اگر $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ و $\langle A'_i \mid i \in I\rangle$ چنان باشند که برای هر $i \in I$، $|A_i| = |A'_i|$، آن‌گاه $|\prod_{i\in I} A_i| = |\prod_{i\in I} A'_i|$.

برهان. برای هر $i \in I$، نگاشت یک‌به‌یک f_i از A_i بروی A'_i را انتخاب کنید. فرض کنید f تابعی روی $\prod_{i\in I} A_i$ باشد که برای $x = \langle x_i \mid i \in I\rangle \in \prod_{i\in I} A_i$ به‌صورت $f(x) = \langle f_i(x_i) \mid i \in I\rangle$ تعریف می‌شود. در این صورت f نگاشتی یک‌به‌یک از $\prod_{i\in I} A_i$ بروی $\prod_{i\in I} A'_i$ است. □

حاصل‌ضرب نامتناهی از بسیاری از ویژگی‌های حاصل‌ضرب متناهی اعداد طبیعی برخوردار است. برای نمونه، اگر حداقل یک κ_i برابر صفر باشد، در این صورت $\prod_{i\in I} \kappa_i = 0$. هر دو حاصل‌ضرب دارای خاصیت شرکت‌پذیری هستند (تمرین ۷.۱). ویژگی مقدماتی دیگر این است که اگر برای هر $i \in I$، $\kappa_i \le \lambda_i$، آن‌گاه $\prod_{i\in I} \kappa_i \le \prod_{i\in I} \lambda_i$ (تمرین ۸.۱). چنانچه همهٔ عوامل κ_i برابر κ باشند، در این صورت، همانند حالت متناهی، داریم

$$\prod_{i\in\lambda} \kappa_i = \underbrace{\kappa \cdot \kappa \cdot \cdots}_{\lambda \text{ بار}} = \kappa^{\lambda}.$$

(این مطلب را بررسی کنید! تمرین ۱۰.۱ را نیز ببینید). قواعد توان‌ها، که در زیر می‌آید، تعمیمی از حالت متناهی به حالت نامتناهی هستند (تمرین ۱۱.۱ و ۱۲.۱ را ببینید):

$$\Big(\prod_{i\in I}\kappa_i\Big)^{\lambda}=\prod_{i\in I}(\kappa_i^{\lambda}),$$
$$\prod_{i\in I}(\kappa^{\lambda_i})=\kappa^{\sum_{i\in I}\lambda_i}.$$

محاسبهٔ حاصل‌ضرب‌های نامتناهی در قیاس با حاصل‌جمع‌های نامتناهی دشوارترند. در برخی حالات خاص، برای مثال محاسبهٔ حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha<\lambda}\kappa_\alpha$ برای دنبالهٔ صعودی $\langle\kappa_\alpha \mid \alpha<\lambda\rangle$ از کاردینال‌ها، چند قاعدهٔ ساده را می‌توان ثابت کرد. حالت بسیار خاص

$$\prod_{n=۱}^{\infty} n = ۱\cdot ۲\cdot ۳\cdot\cdots\cdot n\cdot\cdots \qquad (n\in\mathbb{N})$$

را در نظر بگیرید. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\prod_{n=۱}^{\infty} n \le \prod_{n=۱}^{\infty}\aleph_۰ = \aleph_۰^{\aleph_۰} = ۲^{\aleph_۰}.$$

بالعکس، داریم

$$۲^{\aleph_۰}=\prod_{i=۱}^{\infty} ۲ \le \prod_{n=۲}^{\infty} n = \prod_{n=۱}^{\infty} n,$$

و لذا نتیجه می‌گیریم

$$۱\cdot ۲\cdot ۳\cdot\cdots\cdot n\cdot\cdots = ۲^{\aleph_۰}.$$

حال قضیهٔ مهمی را ثابت می‌کنیم که برای اثبات نابرابری‌های اعداد اصلی مفید است.

۷.۱ قضیهٔ کونیگ. اگر κ_i و λ_i، $(i\in I)$، دو عدد اصلی باشند و برای هر $i\in I$، $\kappa_i<\lambda_i$، آن‌گاه

$$\sum_{i\in I}\kappa_i<\prod_{i\in I}\lambda_i.$$

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\sum_{i\in I}\kappa_i\le\prod_{i\in I}\lambda_i$. فرض کنید $\langle A_i \mid i\in I\rangle$ و $\langle B_i \mid i\in I\rangle$ چنان باشد که برای هر $i\in I$، $|A_i|=\kappa_i$ و $|B_i|=\lambda_i$ و A_iها

دوبه‌دو مجزا باشند. به‌علاوه می‌توان فرض کرد برای هر $i \in I$، $A_i \subset B_i$. نگاشت یک‌به‌یکی مانند f از $\bigcup_{i\in I} A_i$ بتوی $\prod_{i\in I} B_i$ می‌یابیم.

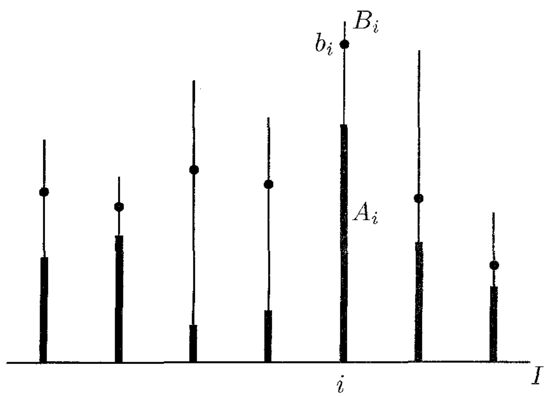
برای هر $i \in I$، $d_i \in B_i - A_i$ را اختیار کنید. برای هر $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$، فرض کنید i_x آن اندیس iی منحصر به‌فرد متعلق به I باشد به‌طوری‌که $x \in A_i$. اکنون تعریف کنید $f(x) = \langle a_i \mid i \in I\rangle$، که در آن

$$a_i = \begin{cases} x & i = i_x \\ d_i & i \neq i_x. \end{cases}$$

چنانچه $x \neq y$، قرار دهید $f(x) = a$ و $f(y) = b$. نشان می‌دهیم $a \neq b$. اگر $i_x = i_y = i$، در این صورت $a_i = x$، در حالی که $b_i = y$. چنانچه $i_x \neq i_y = i$، در این صورت $a_i = d_i \notin A$، درحالی‌که $b_i = y \in A$. در هر حالت، $f(x) \neq f(y)$ و لذا f یک‌به‌یک است.

حال نشان می‌دهیم $\sum_i \kappa_i < \prod_i \lambda_i$. فرض کنید B_i $(i \in I)$ چنان باشد که برای هر $i \in I$، $|B_i| = \lambda_i$. اگر حاصل‌ضرب $\prod_i \lambda_i$ با مجموع $\sum_i \kappa_i$ برابر باشد، در این صورت می‌توان زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای X_i را از حاصل‌ضرب دکارتی $\prod_{i\in I} B_i$ چنان یافت که برای هر i، $|X_i| = \kappa_i$ و

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \prod_{i\in I} B_i.$$



شکل ۱

نشان می‌دهیم تساوی اخیر نمی‌تواند برقرار باشد.

برای هر $i \in I$، قرار دهید

$$A_i = \{a_i \mid a \in X_i\} \qquad \text{(شکل ۱ را ببینید).} \tag{۸.۱}$$

برای هر $i \in I$ داریم $A_i \subset B_i$، چرا که $|A_i| \le |X_i| = \kappa_i < \lambda_i = |B_i|$. بنابراین وجود دارد $b_i \in B_i$ به‌قسمی که $b_i \notin A_i$. قرار دهید $b = \langle b_i \mid i \in I\rangle$. حال به‌راحتی می‌توان نشان داد که b به هیچ‌یک از X_iها $(i \in I)$ تعلق ندارد؛ در واقع، چون برای هر $i \in I$، $b_i \notin A_i$، پس بنا به (۸.۱)، $b \notin X_i$. در نتیجه، $\bigcup_{i\in I} X_i$ برابر کل $\prod_{i\in I} B_i$ نیست، که این تناقض است. □

قضیهٔ کونیگ را در بخش ۳ به کار خواهیم برد. در اینجا فقط خاطرنشان می‌کنیم که این قضیه (و اثبات آن) تعمیم قضیهٔ کانتور است که بیان می‌کرد برای هر κ، $\kappa < ۲^\kappa$. در واقع، چنانچه κ را به‌صورت جمع بی‌پایان

$$\kappa = ۱ + ۱ + \cdots \qquad (\kappa \text{ بار})$$

و ۲^κ را به‌صورت حاصل‌ضرب بی‌پایان

$$۲^\kappa = ۲ \cdot ۲ \cdot ۲ \cdot \cdots \qquad (\kappa \text{ بار})$$

بنویسیم با به کار بردن قضیهٔ کونیگ (چون $۱ < ۲$) به‌دست می‌آوریم

$$\kappa = \sum_{i\in\kappa} ۱ < \prod_{i\in\kappa} ۲ = ۲^\kappa.$$

تمرین‌ها

۱.۱ اگر J_i $(i \in I)$ مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و $J = \bigcup_{i\in I} J_i$، و κ_j $(j \in J)$ کاردینال باشند، آن‌گاه

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J}\kappa_j\Big) = \sum_{j\in J}\kappa_j$$

(شرکت‌پذیری $\sum$).

۲.۱ اگر $\kappa_i \leq \lambda_i$ برای هر $i \in I$، آن‌گاه $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \sum_{i\in I}\lambda_i$.

۳.۱ کاردینال‌های κ_n و λ_n $(n \in \mathbb{N})$ را طوری بیابید که $\kappa_n < \lambda_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، ولی $\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n$.

۴.۱ ثابت کنید $\lambda \cdot \kappa = (\text{بار } \lambda)\ \kappa + \kappa + \cdots$.

۵.۱ قانون توزیع‌پذیری را ثابت کنید:

$$\lambda \cdot \big(\sum_{i\in I}\kappa_i\big) = \sum_{i\in I}(\lambda \cdot \kappa_i).$$

۶.۱ $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \sum_{i\in I}|A_i|$.

۷.۱ اگر J_i $(i \in I)$ مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا و $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ و κ_j $(j \in J)$ کاردینال باشند، آن‌گاه

$$\prod_{i\in I}\big(\prod_{j\in J}\kappa_j\big) = \prod_{j\in J}\kappa_j$$

(شرکت‌پذیری $\prod$).

۸.۱ اگر $\kappa_i \leq \lambda_i$ برای هر $i \in I$ آن‌گاه

$$\prod_{i\in I}\kappa_i \leq \prod_{i\in I}\lambda_i.$$

۹.۱ کاردینال‌های κ_n و λ_n $(n \in \mathbb{N})$ را طوری بیابید که $\kappa_n < \lambda_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$، ولی $\prod_{n=0}^{\infty}\kappa_n = \prod_{n=0}^{\infty}\lambda_n$.

۱۰.۱ ثابت کنید که $\kappa^\lambda = (\text{بار } \lambda)\ \kappa \cdot \kappa \cdot \cdots$.

۱۱.۱ فرمول $\prod_{i\in I}(\kappa_i)^\lambda = \big(\prod_{i\in I}\kappa_i\big)^\lambda$ را ثابت کنید. [راهنمایی: اثباتی را که در قضیهٔ ۷.۱ از فصل ۵ برای حالت خاص $(\kappa^\lambda)^\mu = (\kappa^\mu)^\lambda$ داده شده است تعمیم دهید.]

۱۲.۱ دستور زیر را ثابت کنید

$$\prod_{i\in I}(\kappa^{\lambda_i}) = \kappa^{\sum_{i\in I}\lambda_i}.$$

[راهنمایی: اثباتی را که در قضیهٔ ۷.۱ (الف) در فصل ۵ برای حالت خاص $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$ داده شده است تعمیم دهید.]

۱۳.۱ ثابت کنید اگر برای هر $i \in I$، $1 \leq \kappa_i \leq \lambda_i$، آن‌گاه $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq \prod_{i\in I}\lambda_i$.

۱۴.۱ عدد اصلی $\prod_{0<\alpha<\omega_1} \alpha$ را محاسبه کنید. [جواب: $2^{\aleph_1}$.]

۱۵.۱ وجود تابع f را در برهان لم ۲.۱ بر اساس اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها به‌طور کامل توضیح دهید.

۲ کاردینال‌های منظم و تکین

فرض کنید $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \vartheta \rangle$ دنبالهٔ استقرائی از اعداد ترتیبی با طول ϑ باشد. این دنباله را صعودی می‌خوانیم هرگاه $\alpha_\nu < \alpha_\mu$ مشروط بر اینکه $\nu < \mu < \vartheta$. اگر ϑ اوردینال حدی و $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \vartheta \rangle$ دنبالهٔ صعودی از اوردینال‌ها باشد، تعریف می‌کنیم

$$\alpha = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \sup\{\alpha_\nu \mid \nu < \vartheta\}$$

و α را حد دنبالهٔ صعودی مذکور می‌نامیم.

۱.۲ تعریف. کاردینال نامتناهی κ را تکین می‌نامند هرگاه دنبالهٔ ترامتناهی صعودی مانند $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \vartheta \rangle$ از اوردینال‌های $\alpha_\nu < \kappa$ موجود باشد به‌طوری که طول آن ϑ یک اوردینال حدی کوچک‌تر از κ باشد و $\kappa = \lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu$. کاردینال نامتناهی را که تکین نیست منظم می‌نامند.

زیرمجموعهٔ $X \subseteq \kappa$ را کران‌دار نامند به‌شرطی‌که $\sup X < \kappa$ و آن را بی‌کران نامند هرگاه $\sup X = \kappa$.

۲.۲ قضیه. فرض کنید κ یک کاردینال منظم باشد.

الف) اگر $X \subseteq \kappa$ چنان باشد که $|X| < \kappa$، آن‌گاه X کران‌دار است. بنابراین هر زیرمجموعهٔ بی‌کران از κ دارای عدد اصلی κ است.

ب) اگر $\lambda < \kappa$ و $f : \lambda \to \kappa$، آن‌گاه $f[\lambda]$ کران‌دار است.

برهان.

الف) اگر X دارای بزرگ‌ترین عضو باشد، حکم واضح است. لذا فرض کنید نوع ترتیب X یک اوردینال حدی باشد و فرض کنید $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \vartheta \rangle$ یک شمارش

صعودی از X باشد. چون $|\vartheta| = |X| < \kappa$، داریم $\vartheta < \kappa$ و بنابراین چون κ کاردینال منظم است، نتیجه می‌گیریم که $\sup X = \lim_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu < \kappa$.

ب) چون $|f[\lambda]| \le \lambda < \kappa$، حکم از (الف) نتیجه می‌شود. □

کاردینال $\aleph_\omega$ مثالی از یک کاردینال تکین است؛ در واقع داریم

$$\aleph_\omega = \lim_{n\to\omega} \aleph_n,$$

که در آن $\omega < \aleph_\omega$ و برای هر n، $\aleph_n < \aleph_\omega$.

به دلیلی مشابه، کاردینال‌های $\aleph_{\omega+\omega}$، $\aleph_{\omega\cdot\omega}$، و $\aleph_{\omega_1}$ تکین هستند؛ در واقع

$$\aleph_{\omega+\omega} = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\omega+n},$$
$$\aleph_{\omega\cdot\omega} = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\omega\cdot n},$$
$$\aleph_{\omega_1} = \lim_{\alpha\to\omega_1} \aleph_\alpha.$$

اما $\aleph_0$ مثالی از یک کاردینال منظم است.

لم زیر کاردینال‌های تکین را به‌صورت دیگری مشخصه‌سازی می‌کند.

۳.۲ لم. کاردینال نامتناهی κ تکین است اگر و تنها اگر مجموع حداکثر κتا کاردینال کوچک‌تر باشد؛ یعنی $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i$، که در آن $|I| < \kappa$ و برای هر $i \in I$، $\kappa_i < \kappa$.

برهان. چنانچه κ تکین باشد، در این صورت دنبالهٔ ترامتناهی صعودیی موجود است به‌قسمی که $\kappa = \lim_{\nu\to\vartheta} \alpha_\nu$ که در آن $\vartheta < \kappa$ و برای هر $\nu < \vartheta$، $\alpha_\nu < \kappa$. چون هر اوردینال مجموعهٔ متشکل از اوردینال‌های کوچک‌تر است، آنچه را در بالا گفتیم می‌توانیم به‌صورت

$$\kappa = \bigcup_{\nu\in\vartheta} \alpha_\nu = \bigcup_{\nu\in\vartheta} (\alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi)$$

بازنویسی کنیم. چنانچه قرار دهیم $A_\nu = \alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi$، در این صورت $\langle A_\nu \mid \nu < \vartheta\rangle$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها با تعدادی کمتر از κ و اعداد اصلی برابر $\kappa_\nu = |A_\nu| = |\alpha_\nu - \bigcup_{\xi<\nu} \alpha_\xi| \le |\alpha_\nu| < \kappa$ است. حال چون A_νها دوبه‌دو مجزا

هستند، بنابراین $\kappa = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu$ و این همان است که می‌خواستیم نشان دهیم. پس شرایط لم ۳.۲ لازم‌اند.

برای اثبات کافی بودن شرایط لم، فرض کنید $\kappa = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$، که در آن λ کاردینالی کوچک‌تر از κ است و برای هر $\alpha < \lambda$، κ_α کاردینالی کوچک‌تر از κ است. بنا به قضیهٔ ۳.۱، $\kappa = \lambda \cdot \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$، و چون $\lambda < \kappa$، لذا باید داشته باشیم $\kappa = \sup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$. از این‌رو، برد دنبالهٔ ترامتناهی $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$ دارای سوپریمم κ است، و چون برای هر $\alpha < \lambda$، $\kappa_\alpha < \kappa$ پس می‌توان (با بازگشت ترامتناهی) زیردنبالهٔ صعودیی یافت که حد آن برابر κ باشد. به‌وضوح طول زیردنبالهٔ مذکور برابر اوردینال حدی ϑ است و $\vartheta \le \lambda$. پس نتیجه می‌شود κ منحصربه‌فرد است. □

کاردینال نامتناهی $\aleph_\alpha$ را یک کاردینال تالی گویند هرگاه اندیس α اوردینال تالی باشد، به‌عبارت‌دیگر هرگاه به‌ازای βیی، $\aleph_{\beta+1} = \aleph_\alpha$. چنانچه $\kappa = \aleph_\beta$، کاردینال $\aleph_{\beta+1}$ را تالی κ می‌نامیم و با κ^+ نشان می‌دهیم. چنانچه α اوردینال حدی باشد، در این صورت $\aleph_\alpha$ را کاردینال حدی می‌نامند. اگر $\alpha > 0$ اوردینال حدی باشد، در این صورت $\aleph_\alpha$ حد دنبالهٔ $\langle \aleph_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$ است.

۴.۲ قضیه. هر کاردینال تالی مانند $\aleph_{\alpha+1}$ یک کاردینال منظم است.

برهان. اگر چنین نباشد، $\aleph_{\alpha+1}$ مجموع کاردینال‌های کوچک‌تر با تعدادی کوچک‌تر از $\aleph_{\alpha+1}$ است، یعنی

$$\aleph_{\alpha+1} = \sum_{i \in I} \kappa_i,$$

که در آن $|I| < \aleph_{\alpha+1}$ و برای هر $i \in I$، $\kappa_i < \aleph_{\alpha+1}$. بنابراین $|I| \le \aleph_\alpha$ و برای هر $i \in I$، $\kappa_i \le \aleph_\alpha$. بنابراین داریم

$$\aleph_{\alpha+1} = \sum_{i \in I} \kappa_i \le \sum_{i \in I} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot |I| \le \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

اما این تناقض است و از این‌رو $\aleph_{\alpha+1}$ باید منظم باشد. □

بنابر قضیهٔ ۴.۲، هر کاردینال تکین در واقع یک کاردینال حدی است. اکنون کاردینال‌های حدی را بررسی می‌کنیم.

۵.۲ لم. کاردینال‌های تکین به دلخواه بزرگ وجود دارند.

برهان. فرض کنید $\aleph_\alpha$ کاردینال دلخواهی باشد. دنبالهٔ

$$\aleph_\alpha,\ \aleph_{\alpha+۱},\ \aleph_{\alpha+۲},\ \ldots,\ \aleph_{\alpha+n},\ \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$\aleph_{\alpha+\omega} = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\alpha+n},$$

و بنابراین $\aleph_{\alpha+\omega}$ کاردینال تکین و بزرگ‌تر از $\aleph_\alpha$ است. □

تمام کاردینال‌های حدی ناشمارایی که تا کنون دیده‌ایم تکین بودند. پرسشی طبیعی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا کاردینال حدی منظم و ناشمارایی وجود دارد. فرض کنید $\aleph_\alpha$ چنین کاردینالی باشد. چون α اوردینال حدی است، پس داریم

$$\aleph_\alpha = \lim_{\beta\to\alpha} \aleph_\beta,$$

یعنی اینکه $\aleph_\alpha$ حد دنبالهٔ صعودی با طول α است. چون $\aleph_\alpha$ منظم است، پس ضرورتاً $\aleph_\alpha \geq \alpha$، این رابطه به انضمام اینکه $\aleph_\alpha \leq \alpha$، نتیجه می‌دهد

$$\alpha = \aleph_\alpha. \qquad (*)$$

فعلاً این شرط دال بر بسیار بزرگ بودن $\aleph_\alpha$ است.

شرط $(*)$ به نظر شرط قویی است، ولی نه آن‌چنان که در بادی امر به نظر می‌رسد.

۶.۲ لم. کاردینال‌های تکین به دلخواه بزرگی وجود دارند به‌قسمی که $\aleph_\alpha = \alpha$.

برهان. فرض کنید $\aleph_\gamma$ یک کاردینال دلخواه باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ دنبالهٔ

$$\alpha_۰ = \omega_\gamma,$$

$$\alpha_۱ = \omega_{\alpha_۰} = \omega_{\omega_\gamma},$$

$$\alpha_2 = \omega_{\alpha_1} = \omega_{\omega_{\omega_\gamma}},$$

$$\cdots$$

$$\alpha_{n+1} = \omega_{\alpha_n},$$

$$\cdots$$

را در نظر بگیرید و قرار دهید $\alpha = \lim_{n\to\omega} \alpha_n$. واضح است که $\aleph_\alpha$ حد دنبالهٔ $\langle \aleph_{\alpha_n} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ است. اما داریم

$$\aleph_\alpha = \lim_{n\to\omega} \aleph_{\alpha_n} = \lim_{n\to\omega} \alpha_{n+1} = \alpha.$$

چون $\aleph_\alpha$ حد دنباله‌ای از کاردینال‌های کوچک‌تر با طول ω است، در نتیجه $\aleph_\alpha$ باید تکین باشد. □

عدد اصلی ناشمارای $\aleph_\alpha$ را دسترس‌ناپذیر گویند هرگاه کاردینال حدی و منظم باشد (غالباً، آن را ضعیفاً دسترس‌ناپذیر گویند تا آن را از کاردینال‌هایی که با شرط قوی‌تری تعریف می‌شوند متمایز کنند ــ بخش ۳ را ببینید). اثبات وجود کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر فقط با استفاده از اصول نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ــ فرانکل به همراه اصل انتخاب به‌تنهایی غیرممکن است.

۷.۲ تعریف. هرگاه α یک اوردینال حدی باشد منظور از هم‌پایانگی α که با $\mathrm{cf}(\alpha)$ نموده می‌شود عبارت است از کوچک‌ترین عدد ترتیبی ϑ به‌قسمی که α حد دنباله‌ای صعودی از اوردینال‌ها با طول ϑ باشد.

(دقت کنید که $\mathrm{cf}(\alpha)$ اوردینال حدی است و $\mathrm{cf}(\alpha) \le \alpha$.) بنابراین $\aleph_\alpha$ تکین است هرگاه $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) < \omega_\alpha$، و منظم است چنانچه $\mathrm{cf}(\omega_\alpha) = \omega_\alpha$.

فرض کنید α اوردینال حدی باشد ولی عدد اصلی نباشد. چنانچه قرار دهیم $|\alpha| = \kappa$، در این صورت نگاشت یک‌به‌یکی از κ بروی α موجود است، یا به‌عبارت دیگر، دنبالهٔ یک‌به‌یک $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \kappa \rangle$ با طول κ موجود است به‌قسمی که $\alpha = \{\alpha_\nu \mid \nu < \kappa\}$. می‌توان (با بازگشت ترامتناهی) زیردنباله‌ای یافت که صعودی و حد آن برابر α باشد. چون طول این زیردنباله حداکثر برابر κ است و

چون $|\alpha| = \kappa$ و کوچک‌تر از α است (چون α کاردینال نیست)، نتیجه می‌گیریم $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

بدین ترتیب نتیجهٔ زیر را ثابت کردیم:

۸.۲ لم. اگر α اوردینال حدی باشد ولی کاردینال نباشد، آن‌گاه $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

به عنوان نتیجه‌ای از لم بالا، برای هر اوردینال حدی α داریم،

$\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ اگر و تنها اگر α کاردینال منظم باشد.

۹.۲ لم. برای هر اوردینال حدی α داریم $\mathrm{cf}\left(\mathrm{cf}(\alpha)\right) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

برهان. قرار دهید $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$. به‌وضوح ϑ یک اوردینال حدی است و در نتیجه $\mathrm{cf}(\vartheta) \leq \vartheta$. باید نشان دهیم $\mathrm{cf}(\vartheta)$ از ϑ کوچک‌تر نیست. چنانچه $\gamma = \mathrm{cf}(\vartheta) < \vartheta$ در این صورت دنبالهٔ صعودی $\langle \nu_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ از اوردینال‌ها موجود است به‌قسمی که $\lim_{\xi \to \gamma} \nu_\xi = \vartheta$. چون $\vartheta = \mathrm{cf}(\alpha)$ پس دنبالهٔ صعودی $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \vartheta \rangle$ از اوردینال‌ها موجود است به‌طوری‌که $\lim_{\nu \to \vartheta} \alpha_\nu = \alpha$. پس طول دنبالهٔ $\langle \alpha_{\nu_\xi} \mid \xi < \gamma \rangle$ برابر γ است و $\lim_{\xi \to \gamma} \alpha_{\nu_\xi} = \alpha$. ولی $\gamma < \vartheta$، و از اینجا تناقض حاصل می‌شود، چرا که فرض کرده‌ایم ϑ کوچک‌ترین طول یک دنبالهٔ صعودی با حد α است. □

۱۰.۲ نتیجه. برای هر اوردینال حدی α، $\mathrm{cf}(\alpha)$ کاردینالی منظم است.

تمرین‌ها

۱.۲ $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \mathrm{cf}(\aleph_{\omega+\omega}) = \omega$.

۲.۲ $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1}) = \omega_1$، $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_2}) = \omega_2$.

۳.۲ فرض کنید α کاردینال تعریف شده در اثبات لم ۶.۲ باشد. نشان دهید $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

۴.۲ نشان دهید که $\mathrm{cf}(\alpha)$ کوچک‌ترین γیی است که α برابر اجتماع γ تا مجموعه با عدد اصلی کمتر از α است.

۵.۲ فرض کنید $\aleph_\alpha$ یک کاردینال حدی باشد و $\alpha > 0$. نشان دهید که یک دنبالهٔ صعودی از الف‌ها با طول $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ با حد $\aleph_\alpha$ وجود دارد.

۶.۲ فرض کنید κ یک کاردینال حدی باشد و $\lambda < \kappa$ کاردینالی نامتناهی و منظم باشد. نشان دهید که دنبالهٔ صعودی $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \mathrm{cf}(\kappa) \rangle$ از کاردینال‌ها وجود دارد به‌طوری‌که $\lim_{\nu \to \mathrm{cf}(\kappa)} \alpha_\nu = \kappa$ و $\mathrm{cf}(\alpha_\nu) = \lambda$ برای هر ν.

۳ توان کاردینال‌ها

گرچه جمع و ضرب کاردینال‌ها ساده است (به این خاطر که، $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta =$ بزرگ‌ترینشان)، محاسبهٔ توان آن‌ها قدری پیچیده است. در اینجا سعی نداریم مجموعهٔ قواعد کاملی را عرضه کنیم (فی‌الواقع، می‌توان گفت مسئلهٔ محاسبهٔ κ^λ در حالت کلی هنوز حل نشده است)، بلکه به اثبات چند ویژگی اساسی عمل κ^λ اکتفا می‌کنیم. خواهیم دید از این جهت کاردینال‌های منظم رفتار متفاوتی دارند.

نخست، عمل $2^{\aleph_\alpha}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بنا به قضیهٔ کانتور داریم $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$، به بیان دیگر

$$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}. \tag{۱.۳}$$

به یاد بیاورید که فرض پیوستار کانتور بیان می‌کرد که $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. تعمیم این حدس موسوم به فرض پیوستار تعمیم‌یافته است که بیان می‌کند

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad \text{برای هر } \alpha$$

خواهیم دید فرض پیوستار تعمیم‌یافته محاسبهٔ توان کاردینال‌ها را تا حد قابل توجهی ساده می‌کند. در واقع، با استفاده از آن، عمل κ^λ را می‌توان با چند قاعدهٔ ساده محاسبه کرد.

فرض پیوستار تعمیم‌یافته را از طریق اصل‌های موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها نه می‌توان ثابت کرد و نه رد. (فصل ۱۵ را در این باب ببینید).

بدون فرض پیوستار تعمیم‌یافته دربارهٔ $2^{\aleph_\alpha}$ به‌جز (۱.۳) و رابطهٔ بدیهی

$$2^{\aleph_\alpha} \le 2^{\aleph_\beta} \quad \text{به شرطی که} \quad \alpha \le \beta، \tag{۲.۳}$$

چیز زیادی نمی‌توان ثابت کرد.

حکم زیر نتیجه‌ای از قضیهٔ کونیگ است.

۳.۳ لم. برای هر α داریم

$$\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha. \tag{۴.۳}$$

بنا به این لم، $2^{\aleph_0}$ نمی‌تواند برابر $\aleph_\omega$ باشد، چرا که $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\omega}) = \aleph_0$. در عین حال دربارهٔ اینکه $2^{\aleph_0}$ برابر $\aleph_{\omega_1}$ باشد چیزی نمی‌گوید. به همین نحو، $2^{\aleph_1}$ نمی‌تواند برابر $\aleph_{\omega_1}$ یا $\aleph_\omega$ یا $\aleph_{\omega+\omega}$ و ... باشد.

برهان. قرار دهید $\vartheta = \mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})$، پس ϑ یک کاردینال است. لذا $2^{\aleph_\alpha}$ حد یک دنبالهٔ صعودی با طول ϑ است و از اینجا نتیجه می‌شود (برای جزئیات اثبات لم ۳.۲ را ببینید) که

$$2^{\aleph_\alpha} = \sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu,$$

که در آن هر κ_ν کاردینالی کوچک‌تر از $2^{\aleph_\alpha}$ است. طبق قضیهٔ کونیگ (با جایگذاری $\lambda_\nu = 2^{\aleph_\alpha}$ برای هر $\nu < \vartheta$) داریم

$$\sum_{\nu<\vartheta} \kappa_\nu < \prod_{\nu<\vartheta} 2^{\aleph_\alpha},$$

و بنابراین $2^{\aleph_\alpha} < \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\vartheta$. حال چنانچه ϑ کوچک‌تر یا مساوی $\aleph_\alpha$ باشد، خواهیم داشت

$$2^{\aleph_\alpha} < \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^\vartheta \le \left(2^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha},$$

که تناقض است. □

چنانچه کاردینال $\aleph_\alpha$ منظم باشد، نابرابری‌های (۱.۳)، (۲.۳)، و (۴.۳) تنها ویژگی‌هایی هستند که می‌توان برای $2^{\aleph_\alpha}$ ثابت کرد. اما، اگر $\aleph_\alpha$ تکین باشد،

قاعده‌های متنوعی رفتار $\mathsf{۲}^{\aleph_\alpha}$ را کنترل می‌کنند. در اینجا (قضیهٔ ۵.۳) یکی از آن قاعده‌ها را ثابت می‌کنیم. در این‌باره در فصل ۱۱ قضیهٔ سیلور (قضیهٔ ۱.۴) را ثابت خواهیم کرد که بیان می‌کند اگر $\aleph_\alpha$ کاردینال تکینی با هم‌پایانگی $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \geq \aleph_\mathsf{۱}$ باشد و برای هر $\xi < \alpha$، $\mathsf{۲}^{\aleph_\xi} = \aleph_{\xi+\mathsf{۱}}$، آن‌گاه $\mathsf{۲}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\mathsf{۱}}$.

۵.۳ قضیه. فرض کنید $\aleph_\alpha$ کاردینال تکین باشد. فرض کنید مقدار $\mathsf{۲}^{\aleph_\xi}$ برای هر $\xi < \alpha$ یکسان باشد، مثلاً $\aleph_\beta = \mathsf{۲}^{\aleph_\xi}$. در این صورت $\mathsf{۲}^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$.

دقت کنید که در این قضیه، بزرگ‌تر بودن $\aleph_\beta$ از $\aleph_\alpha$ به‌طور ضمنی جزء مفروضات است. مثالی از این قضیه این است که اگر بدانیم برای هر $n < \omega$، $\mathsf{۲}^{\aleph_n} = \aleph_{\omega+\mathsf{۵}}$، آن‌گاه داریم $\mathsf{۲}^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\mathsf{۵}}$.

برهان. چون $\aleph_\alpha$ تکین است، بنا به لم ۳.۲، خانوادهٔ $\langle \kappa_i \mid i \in I\rangle$ از کاردینال‌ها موجود است به‌قسمی که برای هر $i \in I$، $\kappa_i < \aleph_\alpha$ و همچنین $|I| = \aleph_\gamma$ کاردینالی کوچک‌تر از $\aleph_\alpha$ است و $\sum_{i\in I}\kappa_i = \aleph_\alpha$. بنا به فرض، برای هر $i \in I$، $\mathsf{۲}^{\kappa_i} = \aleph_\beta$، و لذا $\mathsf{۲}^{\aleph_\gamma} = \aleph_\beta$، بنابراین

$$\mathsf{۲}^{\aleph_\alpha} = \mathsf{۲}^{\sum_{i\in I}\kappa_i} = \prod_{i\in I}\mathsf{۲}^{\kappa_i} = \prod_{i\in I}\aleph_\beta = \aleph_\beta^{\aleph_\gamma} = \left(\mathsf{۲}^{\aleph_\gamma}\right)^{\aleph_\gamma} = \mathsf{۲}^{\aleph_\gamma} = \aleph_\beta.$$

□

اکنون به محاسبهٔ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ برای کاردینال‌های نامتناهی دلخواه $\aleph_\alpha$ و $\aleph_\beta$ می‌پردازیم. نخست ملاحظه می‌کنیم که

۶.۳ لم. اگر $\alpha \leq \beta$، آن‌گاه $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \mathsf{۲}^{\aleph_\beta}$.

برهان. به‌وضوح $\mathsf{۲}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. همچنین، چون $\aleph_\alpha \leq \mathsf{۲}^{\aleph_\alpha}$ و $\aleph_\beta = \max\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$، داریم

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \left(\mathsf{۲}^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\beta} = \mathsf{۲}^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta} = \mathsf{۲}^{\aleph_\beta}.$$

□

برای محاسبهٔ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ به‌ازای $\alpha > \beta$، نتیجهٔ زیر مفید است.

۷.۳ لم. فرض کنید $\alpha \geq \beta$ و S مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $X \subseteq \omega_\alpha$ باشد به‌قسمی که $|X| = \aleph_\beta$. در این صورت $|S| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq |S|$. فرض کنید S' مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $X \subseteq \omega_\beta \times \omega_\alpha$ باشد به‌قسمی که $|X| = \aleph_\beta$. چون $\aleph_\beta \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ پس داریم $|S| = |S'|$. همچنین هر تابع $f : \omega_\beta \to \omega_\alpha$ عضوی از مجموعهٔ S' است و لذا $\omega_\alpha^{\omega_\beta} \subseteq S'$. بنابراین $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \subseteq |S|$.

بالعکس، چنانچه $X \in S$، تابع f روی ω_β موجود است به‌قسمی که X برابر برد f است. برای هر تابعی مانند f یک مجموعهٔ $X \in S$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $F(X) = f$. به‌وضوح اگر $X \neq Y$ و $f = F(X)$ و $g = F(Y)$، خواهیم داشت $X = \operatorname{ran} f$ و $Y = \operatorname{ran} g$ و لذا $f \neq g$. از این‌رو، F نگاشتی یک‌به‌یک از S بتوی $\omega_\alpha^{\omega_\beta}$ است و بنابراین $|S| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. □

اکنون با پذیرفتن فرض پیوستار تعمیم‌یافته، موقعیت برای محاسبهٔ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ به‌ازای کاردینال منظم $\aleph_\alpha$ فراهم است.

۸.۳ قضیه. چنانچه فرض پیوستار تعمیم‌یافته را بپذیریم در این صورت اگر $\aleph_\alpha$ یک کاردینال منظم باشد، داریم

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \beta < \alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \beta \geq \alpha. \end{cases}$$

برهان. چنانچه $\alpha \leq \beta$، در این صورت بنا به لم ۶.۳، $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$. پس فرض کنید $\beta < \alpha$ و قرار دهید $S = \{X \subseteq \omega_\alpha \mid |X| = \aleph_\beta\}$. بنا به لم ۷.۳، $|S| = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$. بنا به قضیهٔ ۲.۲ (الف)، هر مجموعهٔ $X \in S$ زیرمجموعهٔ کران‌داری از ω_α است. پس فرض کنید $B = \bigcup_{\delta < \omega_\alpha} \mathcal{P}(\delta)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های کران‌دار ω_α باشد. نشان می‌دهیم $|B| \leq \aleph_\alpha$ و از اینجا، چون $S \subset B$، نتیجه می‌شود $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

چون $B = \bigcup_{\delta<\omega_\alpha} \mathcal{P}(\delta)$، داریم

$$|B| \leq \sum_{\delta<\omega_\alpha} ۲^{|\delta|}.$$

از طرفی، برای هر کاردینال $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$ داریم $۲^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+۱} \leq \aleph_\alpha$، لذا $۲^{|\delta|} < \aleph_\alpha$ برای هر $\delta < \omega_\alpha$. از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$|B| \leq \sum_{\delta<\omega_\alpha} ۲^{|\delta|} \leq \sum_{\delta<\omega_\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

□

دستور مشابهی (اما قدری پیچیده‌تر) برای کاردینال تکین $\aleph_\alpha$ ثابت خواهیم کرد، اما قبل از آن به تعمیمی از لم ۳.۳ نیاز داریم.

۹.۳ لم. برای هر کاردینال $۱ < \kappa$ و هر α، $\mathrm{cf}\left(\kappa^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

برهان. عیناً مشابه اثبات لم ۳.۳ است با این تفاوت که به‌جای $۲^{\aleph_\alpha}$ باید قرار دهید $\kappa^{\aleph_\alpha}$. □

۱۰.۳ قضیه. چنانچه فرض پیوستار تعمیم‌یافته را بپذیریم در این صورت اگر $\aleph_\alpha$ یک کاردینال تکین باشد، داریم

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+۱} & \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+۱} & \aleph_\beta \geq \aleph_\alpha. \end{cases}$$

برهان. چنانچه $\alpha \leq \beta$، در این صورت $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = ۲^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+۱}$. اگر $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$، آن‌گاه هر زیرمجموعهٔ $X \subseteq \omega_\alpha$ با شرط $|X| = \aleph_\beta$، زیرمجموعه‌ای کران‌دار است و با استدلالی همانند حالت $\aleph_\alpha$ی منظم، نتیجه می‌گیریم $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.

حال فرض می‌کنیم $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha$. از یک طرف، داریم

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = ۲^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+۱}.$$

از طرف دیگر، بنا به لم ۹.۳، $\mathrm{cf}\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right) > \aleph_\beta$ و چون $\aleph_\beta \geq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$، داریم $\mathrm{cf}\left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right) \neq \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. بنابراین $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq \aleph_\alpha$. پس باید $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+۱}$. □

اگر فرض پیوستار تعمیم‌یافته را نپذیریم شرایط بسیار پیچیده‌تر خواهد شد. در این باب به اثبات قضیهٔ زیر اکتفا می‌کنیم.

۱۱.۳ دستور هاسدورف. برای هر α و β، داریم

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

برهان. اگر $\beta \geq \alpha + 1$، در این صورت، $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$، $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$، و در نتیجه $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta \leq 2^{\aleph_\beta}$ و لذا دستور داده شده برقرار است. پس فرض کنید $\beta \leq \alpha$. چون $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ و $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$، کافی است نشان دهیم $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

توجه کنید هر تابع $f : \omega_\beta \to \omega_{\alpha+1}$ کران‌دار است؛ یعنی اینکه وجود دارد $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ به‌قسمی که برای هر $\xi < \omega_\beta$، $f(\xi) < \gamma$ (به این دلیل که $\omega_{\alpha+1}$ منظم است و $\omega_\beta < \omega_{\alpha+1}$). لذا

$$\omega_{\alpha+1}^{\omega_\beta} = \bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}.$$

حال چون هر $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ دارای عدد اصلی $|\gamma| < \aleph_\alpha$ است، پس (بنا به تمرین ۶.۱) داریم $\left|\bigcup_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \gamma^{\omega_\beta}\right| \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta}$. از این‌رو

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} |\gamma|^{\aleph_\beta} \leq \sum_{\gamma<\omega_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

□

قضیهٔ بالا محاسبهٔ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ را در برخی حالت‌های ساده امکان‌پذیر می‌سازد (تمرین ۵.۳ را ببینید).

کاردینال نامتناهی $\aleph_\alpha$ را کاردینال حدی قوی نامند هرگاه برای هر $\beta < \alpha$، $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. به‌وضوح هر کاردینال حدی قوی یک کاردینال حدی است، زیرا اگر $\aleph_\alpha = \aleph_{\gamma+1}$، در این صورت $\aleph_\alpha \leq 2^{\aleph_\gamma}$. اما هر کاردینال حدی لزوماً یک کاردینال حدی قوی نیست. مثلاً اگر $2^{\aleph_0}$ از $\aleph_\omega$ بزرگ‌تر باشد، $\aleph_\omega$ یک مثال نقض برای این مطلب است. لیکن اگر فرض پیوستار تعمیم‌یافته را بپذیریم، در این صورت هر

کاردینال حدی یک کاردینال حدی قوی است.

۱۲.۳ قضیه. اگر $\aleph_\alpha$ یک کاردینال حدی قوی و κ و λ دو کاردینال نامتناهی باشند به‌قسمی که $\kappa < \aleph_\alpha$ و $\lambda < \aleph_\alpha$، در این صورت $\kappa^\lambda < \aleph_\alpha$.

برهان. $\kappa^\lambda \leq (\kappa \cdot \lambda)^{\kappa\cdot\lambda} = ۲^{\kappa\cdot\lambda} < \aleph_\alpha$. □

کاردینال ناشمارای κ را قویاً دسترس‌ناپذیر نامند هرگاه کاردینال حدی قوی و منظم باشد. (پس هر کاردینال قویاً دسترس‌ناپذیر، ضعیفاً دسترس‌ناپذیر نیز هست، و چنانچه فرض پیوستار تعمیم‌یافته را بپذیریم، هر کاردینال ضعیفاً دسترس‌ناپذیر نیز قویاً دسترس‌ناپذیر است.) این اعداد اصلی را به این دلیل دسترس‌ناپذیر می‌نامند که با اعمال معمول نظریه‌ـ‌مجموعه‌ای آن‌ها را نمی‌توان از کاردینال‌های کوچک‌تر به‌دست آورد.

۱۳.۳ قضیه. فرض کنید κ یک کاردینال قویاً دسترس‌ناپذیر باشد.

الف) اگر عدد اصلی X کوچک‌تر از κ باشد، آن‌گاه $\mathcal{P}(X)$ نیز عدد اصلی کوچک‌تر از κ دارد.

ب) اگر هر $X \in S$ عدد اصلی کوچک‌تر از κ داشته باشد و $|S| < \kappa$، آن‌گاه $\bigcup S$ نیز عدد اصلی کوچک‌تر از κ دارد.

ج) اگر $|X| < \kappa$ و $f : X \to \kappa$، آن‌گاه $\sup f[X] < \kappa$.

برهان.

الف) κ کاردینال حدی قوی است.

ب) قرار دهید $\lambda = |S|$ و $\mu = \sup\{|X| \mid X \in S\}$. در این صورت (بنا به قضیهٔ ۲.۲ (الف)) $\mu < \kappa$، چرا که κ منظم است و $|\bigcup S| \leq \lambda \cdot \mu < \kappa$.

ج) از قضیهٔ ۲.۲ (ب) نتیجه می‌شود. □

تمرین‌ها

۱.۳ اگر $\aleph_\alpha \geq ۲^{\aleph_\beta}$، آن‌گاه $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = ۲^{\aleph_\beta}$.

۲.۳ این تعمیم از تمرین ۱.۳ را ثابت کنید: اگر $\alpha > \gamma$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\aleph_\alpha \geq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$، مثلاً $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\delta$، آن‌گاه $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\delta$.

۳.۳ فرض کنید α یک عدد ترتیبی حدی باشد و فرض کنید $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. نشان دهید که اگر $\aleph_\xi^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$ برای همه $\xi < \alpha$، آن‌گاه $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. [راهنمایی: اگر $X \subseteq \omega_\alpha$ به‌طوری باشد که $|X| = \aleph_\beta$، آن‌گاه به ازای یک $\xi < \alpha$، $X \subseteq \omega_\xi$.]

۴.۳ اگر $\aleph_\alpha$ قویاً دسترس‌ناپذیر باشد و $\beta < \alpha$، آن‌گاه $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. [راهنمایی: تمرین ۲.۳ را به کار ببرید.]

۵.۳ اگر $n < \omega$، آن‌گاه $\aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_n \cdot 2^{\aleph_\beta}$. [راهنمایی: دستور هاوسدورف را n بار به کار ببرید.]

۶.۳ ثابت کنید که $\prod_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. [راهنمایی: فرض کنید A_i $(i < \omega)$ زیرمجموعه‌های نامتناهی دو به دو مجزا از ω باشد. در این صورت

$$\prod_{n<\omega} \aleph_n \geq \prod_{i<\omega} \Big(\prod_{n \in A_i} \aleph_n \Big) \geq \prod_{i<\omega} \Big(\sum_{n \in A_i} \aleph_n \Big) \geq \prod_{i<\omega} \aleph_\omega = \aleph_\omega^{\aleph_0}.$$

طرف دیگر آسان است.]

۷.۳ ثابت کنید $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

[راهنمایی:

$$\begin{aligned} \aleph_\omega^{\aleph_1} &= \Big(\sum_{n<\omega} \aleph_n \Big)^{\aleph_1} \leq \Big(\prod_{n<\omega} \aleph_n \Big)^{\aleph_1} = \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1} \\ &= \prod_{n<\omega} (\aleph_n \cdot 2^{\aleph_1}) = \Big(\prod_{n<\omega} \aleph_n \Big) \cdot (2^{\aleph_1})^{\aleph_0} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}] \end{aligned}$$

فصل ۱۰

مجموعهٔ اعداد حقیقی

۱ اعداد صحیح و گویا

اعداد طبیعی و ترتیب آن‌ها را در فصل ۳ تعریف کردیم و اشاره کردیم که چگونه می‌توان اعمال حسابی را روی آن‌ها تعریف کرد. گام بعدی برای بسط بنیان‌های ریاضیات، تعریف اعداد صحیح و گویاست. ایدهٔ راهنمای ما برای هر دو مورد این است که یک عمل حسابی را که روی اعداد طبیعی به‌صورت جزئی تعریف می‌شود (مثلاً برای مورد اعداد صحیح عمل تفریق و برای اعداد گویا عمل تقسیم) اولاً به یک عمل کامل تبدیل کنیم و ثانیاً رنگ و بوی جبری بیشتری به آن بدهیم تا نظریه‌ـمجموعه‌ای. لذا ما فقط به ترسیم خطوط اصلی موضوع اکتفا می‌کنیم و تقریباً هیچ اثباتی ارائه نمی‌کنیم. اثبات‌ها را می‌توانید در هر کتاب جبر مجردی بیابید. اگر خواننده هم چندتایی یا همهٔ آن‌ها را به‌عنوان تمرین انجام دهد که چه بهتر.

در تمرین ۳.۴ از فصل ۳، تفریق را برای زوج (n,m) از اعداد طبیعی که $n \geq m$ تعریف کردیم. در این حالت، $n - m$ برابر عدد طبیعی منحصربه‌فرد k است که $n = m + k$. چنانچه $n < m$، چنین عدد طبیعی k وجود ندارد و در نتیجه $n - m$ تعریف نمی‌شود. اگر بخواهیم $n - m$ را معنی‌دار کنیم باید آن را شیء

«جدیدی» در نظر بگیریم. فعلاً آن را فقط با زوج مرتب (n, m) نشان می‌دهیم. اما از ویژگی‌های آشنای اعداد صحیح چنین به نظر می‌رسد که زوج‌های مرتب متفاوت ممکن است عدد صحیح واحدی را نشان دهند، برای مثال $(۲, ۵)$ و $(٦, ۹)$ هر دو عدد صحیح -۳ را نشان می‌دهند $(-۳ = ۹ - ٦ = ۵ - ۲)$. به‌طور کلی، زوج $(n_۱, m_۱)$ و $(n_۲, m_۲)$ هر دو یک عدد صحیح را نمایش می‌دهند اگر و تنها اگر $n_۱ - m_۱ = n_۲ - m_۲$. تا اینجا آنچه گفتیم شهودی و غیررسمی است، ولی می‌توانیم آن را به‌صورت

$$n_۱ + m_۲ = n_۲ + m_۱$$

که فقط شامل جمع اعداد طبیعی است (که قبلاً تعریف کردیم)، بازنویسی کنیم. این مطالب انگیزه‌ای برای تعاریف و نتایج زیر هستند.

قرار دهید $\mathbb{Z}' = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. روی $\mathbb{Z}'$ رابطهٔ $\approx$ را به‌صورت $(a, b) \approx (c, d)$ اگر و تنها اگر $a + d = b + c$، تعریف کنید. رابطهٔ $\approx$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathbb{Z}'$ است (البته باید این را بررسی کنید). مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی $\mathbb{Z}'$ به پیمانهٔ $\approx$ را با $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}'/\approx$ نشان دهید. $\mathbb{Z}$ را مجموعهٔ اعداد صحیح و اعضای آن را عدد صحیح می‌نامیم.

قضیهٔ زیر که ماهیت نظریه‌ـمجموعه‌ای دارد نتیجهٔ مستقیمی از تعریف بالا است.

۱.۱ قضیه. مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ شماراست.

برهان. از قضیهٔ ۱۳.۳ در فصل ۴ نتیجه می‌شود. برهان دیگری هم از قضیهٔ ۱۲.۳ از فصل ۴ به‌دست می‌آید. □

حال رابطهٔ $<$ را روی $\mathbb{Z}$ به‌صورت $[(a, b)] < [(c, d)]$ اگر و تنها اگر $a + d < b + c$ تعریف می‌کنیم. [به یاد بیاورید که به‌طور غیررسمی (a, b)، $a - b$ را و (c, d)، $c - d$ را نشان می‌دهند. پس طبیعی است $a - b < c - d$ به معنی $a + d < b + c$ باشد.]

می‌توان نشان داد که $<$ خوش‌تعریف (یعنی، درستی یا نادرستی $[(a, b)] < [(c, d)]$ به انتخاب نماینده‌های (a, b) و (c, d) ربطی ندارد بلکه به ردهٔ

هم‌ارزی مربوط بستگی دارد) و یک ترتیب خطی است.

و سرانجام اینکه، ملاحظه می‌کنیم برای هر عدد صحیح $[(a,b)]$ یا $b < a$، که در این حالت $(a,b) \approx (a-b, ۰)$ (در اینجا − همان تفریق اعداد طبیعی را نشان می‌دهد که در این حالت تعریف شده است)، یا $a < b$، که در این حالت نیز $(a,b) \approx (۰, b-a)$. از اینجا نتیجه می‌شود که هر عدد صحیح یک زوج منحصربه‌فرد را به‌صورت $(n, ۰)$، $n \in \mathbb{N}$ یا $(۰, n)$ که $n \in \mathbb{N} - \{۰\}$ است در بر دارد. پس $[(n, ۰)]$ اعداد صحیح مثبت و $[(۰, n)]$ اعداد صحیح منفی هستند. نگاشت $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ با تعریف $F(n) = [(n, ۰)]$ نگاشتی یک‌به‌یک و حافظ ترتیب (یعنی، $m < n$ ایجاب می‌کند $F(m) < F(n)$) است. عدد صحیح به‌صورت $[(n, ۰)]$ را با عدد طبیعی متناظر آن یعنی n یکی در نظر می‌گیریم و عدد صحیح به‌صورت $[(۰, n)]$ را با $-n$ نشان می‌دهیم. پس، برای مثال همان‌طور که انتظار داریم $[(۶, ۹)] = [(۲, ۵)] = [(۰, ۳)] = -۳$.

اکنون ادامهٔ این نظریه سرراست است. می‌توان ثابت کرد که $(\mathbb{Z}, <)$ هیچ نقطهٔ انتهایی ندارد و برای $a, b \in \mathbb{Z}$ که $a < b$، مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{Z} \mid a < x < b\}$ تعداد متناهی عضو دارد. به‌علاوه، هر مجموعهٔ غیرتهی و از بالا کران‌دار از اعداد صحیح دارای بزرگ‌ترین عضو و هر مجموعهٔ غیرتهی و از پایین کران‌دار دارای یک کوچک‌ترین عضو است. جمع و ضرب را برای اعداد صحیح می‌توان به‌صورت

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)],$$
$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$$

تعریف کرد و نشان داد که این اعمال در قواعد معمول جبر (تعویض‌پذیری، شرکت‌پذیری و پخش‌پذیری ضرب نسبت به جمع) صدق می‌کنند. به‌علاوه، برای اعداد طبیعی این اعمال با اعمال معمول آن‌ها یکی است.

تفریق را به‌صورت

$$[(a,b)] - [(c,d)] = [(a,b)] + (-[(c,d)])$$

تعریف می‌کنیم، در اینجا $-[c,d] = [(d,c)]$ قرینهٔ $[(c,d)]$ را نشان می‌دهد. توجه

کنید $-n = [(\circ, n)] = -[(n, \circ)]$ و $n = [(n, \circ)] = -[(\circ, n)]$، که با قراردادهای قبلی نیز مطابقت دارند.

قدرمطلق عدد صحیح a را با $|a|$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq \circ \\ -a & a < \circ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم.

برحسب نیاز، ویژگی‌های دیگر این مفاهیم را می‌توان ثابت کرد. جمع، تفریق، و ضرب را برای هر زوج از اعداد صحیح تعریف کردیم. یک مشکل در اینجا باقی می‌ماند و آن اینکه تقسیم را همیشه نمی‌توان تعریف کرد.

گوییم عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش‌پذیر است هرگاه عدد صحیح منحصربه‌فردی مانند x به‌گونه‌ای یافت شود که $a = b \cdot x$. عدد منحصربه‌فرد x را خارج قسمت a و b می‌نامیم. علاقه‌مندیم دستگاه اعداد صحیح را چنان گسترش دهیم که هر عدد صحیح a بر هر عدد صحیح دیگر مانند b قابل قسمت باشد و به‌علاوه همهٔ قواعد مفید حساب در این دستگاه معتبر باقی بمانند. حال اگر قرار است رابطهٔ $\circ \cdot x = \circ$ در دستگاه مذکور برای هر x برقرار باشد، به‌راحتی می‌بینیم که هیچ عدد a بر $\circ$ قابل قسمت نخواهد بود؛ درواقع معادلهٔ $a = \circ \cdot x$ بسته به اینکه $a \neq \circ$ یا $a = \circ$ یا اصلاً جوابی ندارد یا بی‌شمار جواب دارد. لذا، بهترین گسترشی که می‌توانیم انتظار داشته باشیم آن است که برای هر a و هر $b \neq \circ$ یک x منحصربه‌فردی در آن یافت شود که $a = b \cdot x$.

قرار دهید $\mathbb{Q}' = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{\circ\}) = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^{\text{۲}} \mid b \neq \circ\}$. مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ را مجموعهٔ کسرها روی $\mathbb{Z}$ می‌نامیم و برای $(a, b) \in \mathbb{Q}'$ به‌جای (a, b) می‌نویسیم a/b. رابطهٔ هم‌ارزی $\approx$ را روی مجموعهٔ $\mathbb{Q}'$ به‌صورت

$$\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

تعریف می‌کنیم.

مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\mathbb{Q}'$ به پیمانهٔ $\approx$ را با $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}' / \approx$ نشان می‌دهیم. اعضای $\mathbb{Q}$ را اعداد گویا می‌نامیم و عدد گویایی را که a/b نمایش می‌دهد با $[a/b]$

نشان می‌دهیم. [بعداً، کروشه‌ها را نیز حذف می‌کنیم و تفاوتی بین اعداد گویا و (تعداد زیادی) کسرهایی که آن را نمایش می‌دهند، قائل نمی‌شویم.]

نگاشت i با تعریف

$$i(a) = \left[\frac{a}{۱}\right]$$

به‌وضوح نگاشت یک‌به‌یکی از مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ بتوی اعداد گویاست. (اعداد صحیح را بعداً با عدد گویای متناظرش یکی خواهیم گرفت.) حال جمع و ضرب اعداد گویا را به‌صورت

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}\right],$$

$$\left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right]$$

تعریف می‌کنیم. برای داشتن یک مبانی رضایت‌بخش، باید موارد زیر اثبات شوند.

الف) جمع و ضرب اعداد گویا خوش‌تعریف‌اند. (یعنی اینکه از انتخاب نماینده‌ها مستقل‌اند.)

ب) برای اعداد صحیح، تعریف‌های جدید اعمال فوق‌الذکر با تعریف‌های قبلی مطابقت دارد؛ به‌عبارت‌دیگر، برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$، $i(a+b) = i(a) + i(b)$ و $i(a \cdot b) = i(a) \cdot i(b)$.

ج) جمع و ضرب اعداد گویا در قواعد معمول جبر صدق می‌کند.

د) چنانچه $A \in \mathbb{Q}$، $B \in \mathbb{Q}$، و $B \neq [۰/۱]$، در این صورت معادلهٔ $A = B \cdot X$ دارای جواب منحصربه‌فرد $X \in \mathbb{Q}$ است. لذا تقسیم اعداد گویا تعریف می‌شود به‌شرطی‌که مقسوم‌علیه صفر نباشد. این عمل را با $\div$ نشان می‌دهیم، پس $X = A \div B$.

و سرانجام ترتیب اعداد صحیح را به اعداد گویا گسترش می‌دهیم.

نخست توجه می‌کنیم که هر عدد گویا به صورت کسر a/b که b بزرگ‌تر از صفر است، قابل نمایش است و همچنین

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{-a}{-b}\right] \quad \text{که یا} \quad b > ۰ \quad \text{یا} \quad -b > ۰.$$

حال ترتیب طبیعی را برای اعداد گویا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

چنانچه $b > ۰$ و $d > ۰$ تعریف کنید $\left[\frac{c}{d}\right] < \left[\frac{a}{b}\right]$ اگر و تنها اگر $a \cdot d < b \cdot c$.

اثبات اینکه تعریف فوق به شرطی که $d > ۰$ و $b > ۰$ به انتخاب نماینده‌ها بستگی ندارد، رابطهٔ $<$ به راستی یک ترتیب خطی است، برای هر $a, b \in \mathbb{Z}$، $a < b$ اگر و تنها اگر $[a/۱] < [b/۱]$، و اینکه قواعد معمول جبری (مثل، اگر $a < b$، آن‌گاه $a + c < b + c$ و غیره) برقرارند را همگی به خواننده محول می‌کنیم. اینجا هم مجدداً قضیهٔ زیر را داریم.

۲.۱ قضیه. مجموعهٔ اعداد گویای $\mathbb{Q}$ شماراست.

برهان. همان قضیهٔ ۱۳.۳ در فصل ۴ است. قضیهٔ ۱۲.۳ از فصل ۴ نیز اثبات دیگری در اختیار می‌گذارد. □

در فصل ۴ به قضیهٔ زیر ارجاع دادیم.

۳.۱ قضیه. $(\mathbb{Q}, <)$ مجموعه‌ای مرتب خطی و چگال بدون نقاط انتهایی است. در حقیقت، برای هر $r \in \mathbb{Q}$ عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌قسمی که $r < n$.

برهان. چون $a/b - ۱ < a/b < a/b + ۱$، پس $\mathbb{Q}$ نامتناهی است و نقاط انتهایی ندارد. چنانچه $r \leq ۰$، می‌توان قرار داد $n = ۱$. چنانچه $r > ۰$، می‌توان نوشت $r = a/b$ که $a > ۰$، $b > ۰$ و $a, b \in \mathbb{N}$. حال قرار می‌دهیم $n = a + ۱$.

فقط باید نشان دهیم که $(\mathbb{Q}, <)$ چگال است. فرض کنید r و s دو عدد گویا چنان باشند که $r < s$. فرض می‌کنیم $r = a/b$ و $s = c/d$ که $b > ۰$ و $d > ۰$. حال قرار می‌دهیم

$$x = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{۲ \cdot b \cdot d}$$

[به‌عبارت‌دیگر $x = (r + s)/۲$]. لذا $r < x < s$. □

این بخش را با چند تذکر دربارهٔ بسط اعشاری (یا به‌طور کلی در پایهٔ p) اعداد گویا به پایان می‌بریم. هر عدد صحیح $p > ۱$ را می‌توان پایهٔ یک دستگاه نمایش

اعداد در نظر گرفت. عموماً حالت $p = 10$ استفاده می‌شود. حالت مفید دیگر $p = 2$ است.

۴.۱ لم. برای عدد گویای مفروض r عدد صحیح منحصربه‌فردی مانند e موجود است به‌قسمی که $e \leq r < e + 1$. عدد e را جزء صحیح r می‌نامیم و می‌نویسیم $e = [r]$.

برهان. فرض کنید $r = a/b$ و $b > 0$. فرض کنید $a \geq 0$ و $b \geq 1$، در این صورت $a \leq a \cdot b$ و $r = a/b \leq a \in \mathbb{Z}$. از اینجا نتیجه می‌شود که a کران بالایی برای مجموعهٔ $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq r\} \subseteq \mathbb{Z}$ است. در حالتی که $a < 0$، در این صورت 0 کران بالایی برای S است. بنابراین، S دارای بزرگ‌ترین عضو مانند e است. پس $e \leq r < e + 1$. واضح است e یگانه عدد صحیح با این خاصیت است. □

قطعاً خواننده با بسط اعداد صحیح در پایهٔ p آشنایی کامل دارد. بنا به لم ۴.۱، داریم $r = [r] + q$ که $[r]$ عدد صحیح و $q \in \mathbb{Q}$ به‌گونه‌ای است که $0 \leq q < 1$. بنابراین توجه خود را به q معطوف می‌کنیم.

از طریق تعریف بازگشتی، دنباله‌ای از ارقام ۰، ۱، … و $p - 1$ را به‌صورت زیر برای q می‌سازیم.

ابتدا $a_1 \in \{0, \dots p - 1\}$ را چنان پیدا می‌کنیم که $a_1/p \leq q < (a_1 + 1)/p$ (در واقع قرار دهید $a_1 = [q \cdot p]$).

حال $a_2 \in \{0, \dots, p - 1\}$ را چنان می‌یابیم که

$$\frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} \leq q < \frac{a_1}{p} + \frac{a_2 + 1}{p^2}$$

(قرار دهید $a_2 = [(q - a_1/p) \cdot p^2]$).

به‌طور کلی، $a_k \in \{0, \dots, p - 1\}$ را چنان می‌یابیم که

$$\frac{a_1}{p} + \dots + \frac{a_k}{p^k} \leq q < \frac{a_1}{p} + \dots + \frac{a_k + 1}{p^k}$$

(a_k را برابر $\left[\left(q - \frac{a_1}{p} - \dots - \frac{a_{k-1}}{p^{k-1}}\right) \cdot p^k\right]$ اختیار کنید).

دنبالهٔ $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ را بسط q در مبنای p می‌نامیم. در حالتی که $p = ۱۰$، معمولاً می‌نویسند $q = ۰/a_۱a_۲a_۳\cdots$.

می‌توان نشان داد که

الف) عدد i وجود ندارد که برای هر $j > i$، $a_j = p - ۱$.

ب) عدد $n \in \mathbb{N}$ و $l > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $n \geq n_۰$، $a_{n+l} = a_n$ (یعنی، بسط مربوط نهایتاً متناوب با دورهٔ l است).

به‌علاوه، اگر $q = a/b$، می‌توان دورهٔ تناوب l را طوری یافت که $l \leq |b|$. بالعکس، هر دنبالهٔ $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ با ویژگی‌های (الف) و (ب) بسط یک عدد گویا مثل q ($۰ \leq q < ۱$) است.

تمرین‌ها

۱.۱ ادعاهای مطرح‌شده در این بخش را ثابت کنید.

۲.۱ اگر $r \in \mathbb{Q}$ و $r > ۰$، آن‌گاه $n \in \mathbb{N} - \{۰\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $۱/n < r$.
[راهنمایی: مطلب گفته‌شده در قضیهٔ ۳.۱ را به کار ببرید.]

۲ اعداد حقیقی

در بخش ۵ از فصل ۴، اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و ترتیب خطی $<$ روی آن را به‌منزلهٔ کامل‌سازی اعداد گویا تعریف کردیم. به‌خصوص، دیدیم هر مجموعهٔ ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کران‌دار باشد، دارای سوپریمم و هر مجموعهٔ ناتهی که از پایین کران‌دار باشد، دارای اینفیمم است. در این بخش اعمال جبری روی اعداد حقیقی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نخست لم مفید زیر را ثابت می‌کنیم.

۱.۲ لم. برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N} - \{۰\}$، دو عدد $r, s \in \mathbb{Q}$ موجود است به‌قسمی که $r < x \leq s$ و $s - r \leq ۱/n$.

برهان. ابتدا، $r_0, s_0 \in \mathbb{Q}$ را طوری اختیار می‌کنیم که $r_0 < x < s_0$. همچنین $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ را طوری در نظر می‌گیریم که $k > n(s_0 - r_0)$. دنبالهٔ صعودی و متناهی $\langle r_i \rangle_{i=0}^{k}$ از اعداد گویا را با تعریف $r_i = r_0 + i/n$ در نظر می‌گیریم. عدد j را بزرگ‌ترین عدد i در نظر می‌گیریم که $r_i < x$. توجه کنید که $j < k$. حال، داریم $r_j < x \leq r_{j+1}$ و $r_{j+1} - r_j = 1/n$. اکنون کافی است قرار دهیم $r = r_j$ و $s = r_{j+1}$. □

در زیر، عمل جمع را برای اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم.

۲.۲ تعریف. فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}$. تعریف می‌کنیم

$$x + y = \inf\{r + s \mid r, s \in \mathbb{Q},\ x \leq r,\ y \leq s\}.$$

(علامت + در طرف راست همان جمع اعداد گویاست.)

توجه می‌کنیم که چون مجموعهٔ ناتهی مذکور در بالا از پایین کران‌دار است (به ازای هر $p, q \in \mathbb{Q}$ که $p < x$ و $q < y$، $p + q$ کران پایین است) پس اینفیمم آن موجود است. همچنین آشکار است که چنانچه x و y دو عدد گویا باشند، مقدار $x + y$ با تعریف جدید به عنوان جمع دو عدد گویا که قبلاً تعریف کردیم برابر است.

۳.۲ لم. فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(۱) $x + y = y + x$.

(۲) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(۳) $x + 0 = x$.

(۴) عدد یکتایی مانند $w \in \mathbb{R}$ موجود است به‌قسمی که $x + w = 0$. در این حالت می‌نویسیم $w = -x$ و آن را قرینهٔ x می‌نامیم.

(۵) اگر $x < y$، آن‌گاه $x + z < y + z$.

برهان. برخی خواص سادهٔ سوپریمم و اینفیمم را برای اثبات به کار خواهیم برد (تمرین ۱.۲ را ببینید). قسمت‌های (۱)، (۲)، و (۳) به‌راحتی از خواص متناظر در اعداد گویا نتیجه می‌شوند.

(۴) متذکر می‌شویم که $x = \inf\{s \in \mathbb{Q} \mid x \leq s\} = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$. با توجه به این رابطه، تعریف می‌کنیم $w = \inf\{-r \mid r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$. داریم

$$x + w = \inf\{s - r \mid r, s \in \mathbb{Q},\ x \leq s,\ r < x\}.$$

چون $r < x$ و $x \leq s$ ایجاب می‌کنند $s - r > 0$، بنابراین $x + w \geq 0$. فرض کنید $x + w > 0$. چگال بودن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ و تمرین ۲.۱ نشان می‌دهد که عدد $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ موجود است به‌قسمی که $1/n < x + w$. بنا به لم ۱.۲، اعداد $r, s \in \mathbb{Q}$ موجودند که $r < x \leq s$ و $s - r \leq 1/n$. لذا $x + w \leq 1/n$، که تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد یک w وجود دارد به‌طوری‌که $x + w = 0$. حال اگر $x + v = 0$، خواهیم داشت (با استفاده از (۱)، (۲)، و (۳))

$$w = w + 0 = 0 + w = (v + x) + w = v + (x + w) = v + 0 = v,$$

پس w یکتاست.

(۵) چنانچه $x < y$، از تعریف جمع (و تمرین ۱.۲) به‌راحتی نتیجه می‌شود که $x + z \leq y + z$. حال اگر $x + z = y + z$، داریم

$$\begin{aligned} x = x + 0 = x + (z + (-z)) &= (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) \\ &= y + (z + (-z)) = y + 0 = y, \end{aligned}$$

که تناقض است. □

ضرب بین اعداد حقیقی مثبت نیز به طریق مشابهی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

۴.۲ تعریف. فرض کنید $x, y \in \mathbb{R}^+$. تعریف می‌کنیم

$$x \cdot y = \inf\{r \cdot s \mid r, s \in \mathbb{Q},\ x \leq r,\ y \leq s\}.$$

۵.۲ لم. فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

(۶′) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(۷′) $x \cdot y = y \cdot x$.

(۸′) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(۹′) $x \cdot 1 = x$.

(۱۰′) عدد منحصربه‌فرد $w \in \mathbb{R}^+$ موجود است به‌قسمی که $x \cdot w = 1$. در این حالت می‌نویسیم $w = 1/x$ و آن را وارون x می‌نامیم.

(۱۱′) اگر $x < y$، آن‌گاه $x \cdot z < y \cdot z$.

برهان. عیناً شبیه اثبات لم ۳.۲ است. برای اثبات (۱۰′) تعریف کنید

$$w = \inf\{\frac{1}{r} \mid r \in \mathbb{Q},\ 0 < r < x\}.$$

□

اکنون گسترش ضرب به همهٔ اعداد حقیقی امر ساده‌ای است. نخست قدرمطلق عدد $x \in \mathbb{R}$ را به‌صورت

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم و توجه می‌کنیم که برای $x \neq 0$، $|x| \in \mathbb{R}^+$ (چنانچه $x < 0$، در این صورت $0 = x + (-x) < 0 + (-x) = -x$).

۶.۲ تعریف. برای $x, y \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم

$$x \cdot y = \begin{cases} |x| \cdot |y| & x > 0,\ y > 0 \text{ یا } x < 0,\ y < 0 \\ -(|x| \cdot |y|) & x > 0,\ y < 0 \text{ یا } x < 0,\ y > 0 \\ 0 & x = 0 \text{ یا } y = 0. \end{cases}$$

دو کار را به خواننده محول می‌کنیم. نخست اثبات سرراست، اما خسته‌کنندهٔ این امر را که تعریف بالا با تعریف حاصل‌ضرب اعداد گویا که در بخش ۱ داده شده است، مطابقت دارد و دوم اثبات لم زیر.

۷.۲ لم. فرض کنید $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(۶) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(۷) $x \cdot y = y \cdot x$.

(۸) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(۹) $x \cdot 1 = x$.

(۱۰) برای هر $x \in \mathbb{R}$، اگر $x \neq 0$، آن‌گاه عدد یکتایی مانند $w \in \mathbb{R}$ موجود است به‌قسمی که $x \cdot w = 1$.

(۱۱) اگر $x < y$ و $z > 0$، آن‌گاه $x \cdot z < y \cdot z$.

عدد یکتای w مذکور در قسمت (۱۰) را با $1/x$ نشان می‌دهیم. عمل تقسیم بر عدد حقیقی غیر صفر x را به‌صورت $y \div x = y \cdot (1/x)$ تعریف می‌کنیم.

در جبر یک ساختار مانند $\mathfrak{A} = (A, <, +, \cdot, 0, 1)$ را که در آن $<$ ترتیب خطی، $+$ و $\cdot$ اعمال دوتایی و 0 و 1 دو عضو ثابت هستند و در شرایط (٦)ـــ(۱۰) صدق می‌کنند میدان مرتب می‌نامند. بنابراین، خلاصهٔ لم ۳.۲ و ۵.۲ این است که اعداد حقیقی (با ترتیب معمولی و اعمال حسابی تعریف شده در بالا) یک میدان مرتب است. چون ترتیب اعداد حقیقی کامل است پس اعداد حقیقی یک میدان مرتب کامل است.

۸.۲ قضیه. ساختار $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ یک میدان مرتب کامل است.

می‌توان نشان داد که میدان مرتب کامل یکتاست؛ به‌عبارت‌دیگر، اگر $\mathfrak{A} = \langle A, <, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ یک میدان مرتب کامل دیگر باشد، آن‌گاه $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{R}$ یکریخت هستند. چون اثبات، مقدمات جبری زیادی نیاز دارد، لذا اثبات را در اینجا ارائه نخواهیم کرد (با این حال تمرین ۵.۲ را ببینید).

این بخش را با مطلب مشهوری دربارهٔ اعداد حقیقی که در بخش ٦ از فصل ۴ آن را به کار بردیم، به پایان می‌بریم. اثبات آن تمرینی برای خواننده.

۹.۲ قضیه (بسط اعداد حقیقی در مبنای p). فرض کنید $p \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد. برای هر عدد حقیقی مانند $0 \leq a < 1$، یک دنبالهٔ یکتا از اعداد حقیقی مانند $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد به‌قسمی که

الف) برای هر $n = 1, 2, \ldots$، $0 \leq a_n < p$.

ب) عددی مانند $n_\circ$ وجود ندارد به‌قسمی که برای هر $n \geq n_\circ$، $a_n = p - ۱$.

ج) برای هر $n \geq ۱$،

$$\frac{a_۱}{p} + \cdots + \frac{a_n}{p^n} \leq a < \frac{a_۱}{p} + \cdots + \frac{a_n + ۱}{p^n}.$$

عدد حقیقی a گویا است اگر و تنها اگر $\langle a_n \rangle_{n=۱}^{\infty}$ نهایتاً متناوب باشد.

تمرین‌ها

۱.۲ فرض کنید که $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ و $A \neq \varnothing$. اگر B از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه $\inf B \leq \inf A$. اگر B از بالا کران‌دار باشد، آن‌گاه $\sup A \leq \sup B$. به‌علاوه، اگر برای هر $b \in B$، عدد $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a \leq b$، آن‌گاه $\inf B = \inf A$. حکم مشابهی برای sup اثبات کنید.

۲.۲ برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N} - \{\circ\}$، $r, s \in \mathbb{Q}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\circ < r < x \leq s$ و $۱ < s/r \leq ۱ + ۱/n$. [راهنمایی: $r_\circ \in \mathbb{Q}$ را ثابت بگیرید به‌طوری‌که $\circ < r_\circ < x$ و $k \in \mathbb{N} - \{\circ\}$ به‌طوری باشد که $kr_\circ > n$. از لم ۲.۱، برای یافتن $r, s \in \mathbb{Q}$ با شرط $r_\circ < r < x \leq s$ به‌گونه‌ای که $s - r < ۱/k$ استفاده کنید و s/r را تخمین بزنید.]

۳.۲ ثابت کنید که اگر $a, b \in \mathbb{R}$ و $b \neq \circ$، آن‌گاه معادلهٔ $a = b \cdot x$ دارای جواب یکتاست.

۴.۲ ثابت کنید که برای هر $a \in \mathbb{R}^+$، عدد یکتای $x \in \mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \cdot x = a$.

۵.۲ ثابت کنید که هر میدان مرتب کامل با $\mathbb{R}$ یکریخت است.

[راهنمایی:

(۱) در میدان مرتب کامل $\mathfrak{A} = \langle A, <, +, \cdot, \circ, ۱ \rangle$ بستار $\{\circ, ۱\}$ را که با C نشان می‌دهیم، تحت $+$ و $\cdot$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathfrak{C}$ ساختار به‌دست آمده از تحدید ترتیب و اعمال $\mathfrak{A}$ به C باشد. نشان دهید که $\mathfrak{C}$

(به‌طور یکتا) با $\langle \mathbb{Q}, <, +, \cdot, ۰, ۱ \rangle = \mathfrak{Q}$ یکریخت است. این قسمت بخش «جبری» اثبات را تشکیل می‌دهد.

(۲) نشان دهید که برای هر $a \in A$، یک $c \in C$ وجود دارد به طوری که $a \leq c$. (اگر چنین نباشد، آن‌گاه مجموعهٔ $S = \{a \in A \mid a > c$ برای هر $c \in C\}$، غیرتهی و کران‌دار از پایین است، اما اینفیمم ندارد، زیرا $a \in S$ ایجاب می‌کند $a - ۱ \in S$.)

(۳) قسمت (۲) را به کار برید و نشان دهید C در $(A, <)$ چگال است.

(۴) قسمت (۳) را به کار برید و نشان دهید یکریختی بین $\mathfrak{Q}$ و $\mathfrak{C}$ به‌گونه‌ای یکتا به یک یکریختی بین $\mathfrak{R}$ و $\mathfrak{A}$ گسترش می‌یابد.]

۶.۲ (اعداد مختلط) تعریف کنید $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و جمع و ضرب را روی $\mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف کنید

$$(a_۱, a_۲) + (b_۱, b_۲) = (a_۱ + b_۱, a_۲ + b_۲),$$

$$(a_۱, a_۲) \cdot (b_۱, b_۲) = (a_۱ \cdot b_۱ - a_۲ \cdot b_۲, a_۱ \cdot b_۲ + a_۲ \cdot b_۱).$$

نشان دهید که $+$ و $\cdot$ در قسمت‌های (۱)ـــ(۴) از لم ۳.۲ و (٦)ـــ(۱۰) از لم ۷.۲ صدق می‌کنند.

۳ توپولوژی خط حقیقی

به‌عنوان قضیهٔ اصلی بخش پیش دیدیم که دستگاه اعداد حقیقی یک میدان مرتب کامل است. اکنون وقت آن رسیده است که مطالعه خواص توپولوژیکی خط حقیقی را آغاز کنیم. در این بخش برخی تعاریف و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم. قصد ما در این بخش این است که اولاً نشان دهیم نظریهٔ مجموعه‌هایی که تا اینجا پرورانده‌ایم، بنیان رضایت‌بخشی برای آنالیز ریاضی فراهم می‌کند و ثانیاً برخی نتایج قضایای قبل را نشان دهیم و برخی قضایا و مفاهیمی را که در جاهای دیگر به کار رفته‌اند برای ارجاعات بعدی یکجا بیاوریم. برای کسی که حسابان پیشرفته خوانده

است بسیاری از مطالب بخش حاضر آشنا هستند. در هر صورت از این بخش می‌توان عبور کرد و فقط در صورت نیاز به آن رجوع کرد.

با تعریف یک مفهوم آشنا شروع می‌کنیم.

۱.۳ تعریف. فرض کنید $(P,<)$ یک ترتیب خطی باشد و $a,b \in P$ و $a<b$. منظور از یک بازهٔ باز (کران‌دار) با نقاط انتهایی a و b عبارت است از مجموعهٔ $(a,b)=\{x\in P \mid a<x<b\}$. بازهٔ بسته (کران‌دار) با نقاط انتهایی a و b عبارت است از مجموعهٔ $[a,b]=\{x\in P \mid a\leq x\leq b\}$. بازه‌های بسته و باز بی‌کران $(a,+\infty)$، $(-\infty,a)$، $[a,+\infty)$، $(-\infty,a]$ و $P=(-\infty,\infty)$ را به‌نحو مشابهی تعریف می‌کنیم. مثلاً داریم $(a,+\infty)=\{x\in P \mid a<x\}$. بازه‌های باز را با نماد مرسوم (a,b) نشان می‌دهیم، گرچه این نماد با نماد زوج‌های مرتب تداخل دارد، معنای درست را همیشه می‌توان از متن استنباط کرد.

قضیهٔ بعد، نتیجه‌ای از وجود یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال در $\mathbb{R}$ است.

۲.۳ قضیه. هر دستگاه از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا در $\mathbb{R}$، حداکثر شمارا است.

برهان. قرار دهید $P=\mathbb{Q}\cap\bigcup S$ که در آن S دستگاهی از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا را نشان می‌دهد. چون $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، هر بازهٔ باز در S حداقل یک عضو از P را دربر دارد. همچنین، چون اعضای S دوبه‌دو مجزا هستند، پس هر عضو P در یک بازهٔ باز منحصربه‌فرد از S قرار دارد. حال تابعی که به هر عضو P آن بازهٔ باز منحصربه‌فرد مذکور را نسبت می‌دهد نگاشتی از مجموعهٔ حداکثر شمارای P بروی مجموعهٔ S است. بنابراین، S بنا به قضیهٔ ۴.۳ در فصل ۴ حداکثر شماراست. □

اکنون به‌جاست مسئلهٔ مشهوری را در نظریهٔ مجموعه‌ها، که قدمت آن به اوایل قرن حاضر میلادی برمی‌گردد، مطرح کنیم. فرض کنید $(P,<)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی کامل باشد به طوری که هیچ نقطهٔ انتهایی ندارد و هر دستگاه از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزای آن حداکثر شمارا هستند. آیا $(P,<)$ با خط حقیقی یکریخت است؟ این مسئله به مسئلهٔ سوسلین مشهور است. این مسئله نیز مانند فرض پیوستار

مدت‌ها حل نشده بود. سرانجام با استفاده از مدل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها ثابت شد که این مسئله هم مانند فرض پیوستار، بر اساس اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نه قابل اثبات است نه قابل رد. در این باره در فصل ۱۵ مطالب بیشتری آمده است.

۳.۳ تعریف. دستگاه S از مجموعه‌ها دارای ویژگی اشتراک متناهی است هرگاه هر زیردستگاه ناتهی متناهی از S دارای مقطع ناتهی باشد.

برد یک دنبالهٔ غیرصعودی از مجموعه‌های ناتهی، یعنی $S = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ که $A_n \neq \varnothing$ و $A_{n'} \subseteq A_n$ برای هر $n, n' \in \mathbb{N}$ با شرط $n \leq n'$، نمونه‌ای از یک دستگاه مجموعه‌ها با ویژگی اشتراک متناهی است.

قضیهٔ بعدی نتیجه‌ای از خاصیت کمال خط حقیقی است.

۴.۳ قضیه. هر دستگاه از بازه‌های بسته و کران‌دار $\mathbb{R}$ با ویژگی اشتراک متناهی دارای مقطع ناتهی است.

برهان. فرض کنید S دستگاهی با شرایط قضیه باشد. مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x, y] \in S$ ،$y \in \mathbb{R}$ به‌ازای $\}$ یی را مجموعهٔ همهٔ نقاط انتهایی چپ بازه‌های موجود در S در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم S از پایین کران‌دار است. بازهٔ $[a, b] \in S$ را ثابت اختیار کنید. در این صورت داریم $x \leq b$، چرا که در غیر این صورت خواهیم داشت $a < b < x < y$ و بنابراین دو بازهٔ $[x, y]$ و $[a, b]$ مجزا خواهند بود که خاصیت اشتراک متناهی را برای زیرمجموعهٔ دوعضوی $\{[x, y], [a, b]\}$ از S نقض می‌کند. بنابراین b کران بالایی برای A است. بنا به خاصیت کمال، A دارای سوپریممی مثل $\overline{a}$ است. اگر $[a, b]$ بازه‌ای در S باشد، چون $a \in A$ پس $a \leq \overline{a}$ و چون b کران بالایی برای A است پس $\overline{a} \leq b$. لذا برای هر بازهٔ $[a, b] \in S$ داریم $\overline{a} \in [a, b]$ و بنابراین $\bigcap S$ غیرتهی است. □

خاصیت کمال اعداد حقیقی دلیل مفید بودن مفهوم حد نیز محسوب می‌شود. چند مفهوم آشنا را از حسابان یادآوری می‌کنیم.

۵.۳ تعریف. فرض کنید $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ دنبالهٔ نامتناهی از اعداد حقیقی باشد.

الف) (a_n) را غیرنزولی نامند هرگاه برای هر $n, n' \in \mathbb{N}$ با شرط $n < n'$، $a_n \leq a_{n'}$. آن را صعودی گویند هرگاه $a_n < a_{n'}$ به‌شرطی‌که $n < n'$.

ب) دنبالهٔ (a_n) را کران‌دار از بالا می‌نامند هرگاه برد آن $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کران‌دار باشد. به‌نحو مشابه از پایین کران‌داری نیز تعریف می‌شود. دنبالهٔ (a_n) را کران‌دار نامند اگر از بالا و پایین کران‌دار باشد.

ج) دنبالهٔ (a_n) دارای حد a است (همگرا به a است) هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\varepsilon \in \mathbb{R}$، عددی مثل $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود باشد که برای هر $n \geq n_\circ$، $|a_n - a| < \varepsilon$.

د) دنبالهٔ (a_n) را دنبالهٔ کوشی گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$، $\varepsilon \in \mathbb{R}$، عدد $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $m, n \geq n_\circ$، $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

در زیر چند قضیهٔ اساسی همگرایی را اثبات می‌کنیم. به نقش اساسی خاصیت کمال در اثبات این قضیه‌ها توجه کنید.

۶.۳ قضیه. هر دنبالهٔ غیرنزولی و از بالا کران‌دار از اعداد حقیقی دارای حد است.

برهان. اگر مجموعهٔ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ از بالا کران‌دار باشد، در این صورت دارای سوپریممی مانند $\overline{a}$ است. ثابت می‌کنیم $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ به $\overline{a}$ همگراست. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد. چون $\overline{a} - \varepsilon < \overline{a}$ و $\overline{a}$ کوچک‌ترین کران بالای مجموعهٔ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ است، پس $n_\circ$ موجود است به‌قسمی که $\overline{a} - \varepsilon < a_{n_\circ}$. پس برای هر $n \geq n_\circ$ داریم $\overline{a} - \varepsilon < a_{n_\circ} \leq a_n \leq \overline{a} < \overline{a} + \varepsilon$، یعنی $|a_n - \overline{a}| < \varepsilon$. این نشان می‌دهد که $\langle a_n \rangle$ به $\overline{a}$ همگراست. □

۷.۳ تعریف. فرض کنید $\langle k_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی باشد. دنبالهٔ $\langle a_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ را یک زیردنباله از $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ می‌نامیم. (دقت کنید این دنباله ترکیب سادهٔ $\langle a_n \rangle \circ \langle k_n \rangle$ است.)

۸.۳ قضیه. هر دنبالهٔ کران‌دار از اعداد حقیقی دارای یک زیردنبالهٔ همگراست.

برهان. فرض کنید دنبالهٔ $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ کران‌دار باشد. تعریف کنید $b_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ و توجه کنید که دنبالهٔ $\langle b_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ غیرنزولی و از بالا

کران‌دار است (هر کران بالای دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ یک کران بالا برای $\langle b_n\rangle$ نیز هست). بنابر قضیهٔ ۶.۳، دنبالهٔ $\langle b_n\rangle$ دارای حدی مانند $\overline{a}$ است. از طریق بازگشت زیردنباله‌ای از $\langle a_n\rangle$ همگرا به $\overline{a}$ می‌سازیم.

قرار دهید $k_0 = 0$، پس $a_{k_0} = a_0$،

فرض کنید k_n داده شده باشد، عدد k_{n+1} را برابر کوچک‌ترین عدد $k \in \mathbb{N}$ تعریف کنید که $k > k_0$ و

$$\overline{a} - \frac{1}{n+1} < a_k < \overline{a} + \frac{1}{n+1}.$$

حال باید ثابت کنیم چنین kیی موجود است. چون $\overline{a} = \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (اثبات قضیهٔ ۶.۳ را ببینید) پس عدد $i > k_n$ موجود است به‌قسمی که

$$\overline{a} - \frac{1}{n+1} < b_i \leq \overline{a}.$$

به‌علاوه، داریم $b_i = \inf\{a_k \mid k \geq i\}$ و لذا عدد $k \geq i$ وجود دارد به‌قسمی که

$$b_i \leq a_k < \overline{a} + \frac{1}{n+1}.$$

پس داریم $k > k_n$ و

$$\overline{a} - \frac{1}{n+1} < a_k < \overline{a} + \frac{1}{n+1},$$

و این همان است که می‌خواستیم.

زیردنبالهٔ $\langle a_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ از دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ دارای این خاصیت است که برای هر $n \geq 1$، $|a_{k_n} - \overline{a}| < 1/n$. از این به‌راحتی نتیجه می‌شود که دنبالهٔ $\langle a_{k_n}\rangle$ به $\overline{a}$ همگراست (تمرین ۴.۳ را ببینید). □

۹.۳ قضیه. هر دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی همگراست.

برهان. اولاً هر دنبالهٔ کوشی، کران‌دار است. زیرا اگر $\langle a_n\rangle$ یک دنبالهٔ کوشی باشد، در تعریف ۵.۳ (د)، قرار دهید $\varepsilon = 1$. پس عدد $n_0 \in \mathbb{N}$ به‌دست می‌آید به‌قسمی که برای هر $n \geq n_0$، $|a_{n_0} - a_n| < 1$ (در اینجا برای m نیز قرار می‌دهیم

$m = n_\circ$). پس برای هر $n \geq n_\circ$، $a_{n_\circ} - ۱ < a_n < a_{n_\circ} + ۱$. حال چنانچه تعریف کنیم

$$M_۱ = \max\{a_\circ, \ldots, a_{n_\circ - ۱}, a_{n_\circ} + ۱\},$$

$$M_۲ = \min\{a_\circ, \ldots, a_{n_\circ - ۱}, a_{n_\circ} - ۱\},$$

کران بالا و پایین مطلوب برای مجموعهٔ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ به‌دست می‌آید.

بنا به قضیهٔ ۸.۳، دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ دارای زیردنباله‌ای مانند $\langle a_{k_n} \rangle$ همگرا به $\overline{a} \in \mathbb{R}$ است. نشان می‌دهیم دنبالهٔ $\langle a_n \rangle$ نیز به $\overline{a}$ همگراست. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد؛ چون $\langle a_{k_n} \rangle$ به $\overline{a}$ همگراست پس عدد $n_\circ \in \mathbb{N}$ موجود است به‌قسمی که برای هر $n \geq n_\circ$، $|a_{k_n} - \overline{a}| < \varepsilon/۲$. چون دنباله‌ای کوشی است، پس عدد $n_۱ \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $m, n \geq n_۱$، $|a_m - a_n| < \varepsilon/۲$. قرار دهید $n_۲ = \max\{n_\circ, n_۱\}$. اگر $n \geq n_۲$، در این صورت

$$|a_n - \overline{a}| \leq |a_n - a_{k_{n_۲}}| + |a_{k_{n_۲}} - \overline{a}| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon.$$

لذا همگرا بودن $\langle a_n \rangle$ به $\overline{a}$ ثابت می‌شود. □

اکنون به بررسی توابع پیوسته و مجموعه‌های بسته و باز می‌پردازیم.

۱۰.۳ تعریف. تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را پیوسته در نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ می‌نامند هرگاه برای هر $\varepsilon > \circ$ عدد $\delta > \circ$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $x \in \mathbb{R}$، اگر $|x - a| < \delta$، آن‌گاه $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. تابع f را پیوسته نامند هرگاه در هر نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ پیوسته باشد. مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$ را باز نامند هرگاه برای هر $a \in A$ عدد $\delta > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که از $|x - a| < \delta$ نتیجه شود $x \in A$. [یا به‌عبارت‌دیگر، برای بازهٔ باز $(a - \delta, a + \delta)$ داشته باشیم $(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$.] مجموعهٔ B را بسته نامند هرگاه متمم نسبی آن یعنی $\mathbb{R} - B$ باز باشد.

توابع پیوسته رفتار فوق‌العاده ساده‌ای دارند و یکی از موضوعات مهم در آنالیز ریاضی هستند. در اینجا ما فقط به این نتیجه نیاز داریم که تابع پیوسته به‌وسیلهٔ

مقادیرش روی یک مجموعهٔ چگال از $\mathbb{R}$ (مثل اعداد گویا)، به‌طور یکتایی مشخص می‌شود.

۱۱.۳ قضیه. فرض کنید مجموعهٔ $D \subseteq \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ چگال باشد. اگر f و g دو تابع پیوسته باشند و $f \restriction D = g \restriction D$، آن‌گاه $f = g$.

برهان. فرض کنید $f \neq g$، پس به‌ازای $a \in \mathbb{R}$ یی، $f(a) \neq g(a)$. قرار دهید $\varepsilon = |f(a) - g(a)|/۲$. چون f و g را در a پیوسته فرض کرده‌ایم، پس $\delta_۱, \delta_۲ > ۰$ موجود است که اگر $|x - a| < \delta_۱$، آن‌گاه $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ و به همین صورت اگر $|x - a| < \delta_۲$، آن‌گاه $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. از چگال بودن D نتیجه می‌گیریم نقطهٔ $x \in D$ وجود دارد به‌قسمی که $|x - a| < \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} |f(a) - g(a)| &\leq |f(a) - f(x)| + |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \varepsilon + ۰ + \varepsilon = |f(a) - g(a)|, \end{aligned}$$

که تناقض است. [از اینکه برای $x \in D$، $f(x) = g(x)$ در سطر میانی برای جایگزین کردن ۰ استفاده کرده‌ایم.] □

در مورد مجموعه‌های باز و بسته هم باید گفت که نسبتاً ماهیتی ساده دارند و خوش‌رفتارند. از تعریف واضح است که یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر اجتماع یک دستگاه از بازه‌های باز باشد. در نتیجه، اجتماع هر دستگاه از مجموعه‌های باز یک مجموعه باز و اشتراک هر دستگاه از مجموعه‌های بسته، مجموعهٔ بسته است. ساده‌ترین مثال از مجموعه‌های باز، فواصل باز هستند. نمونه مثال‌های مجموعه‌های بسته عبارت‌اند از فواصل بسته، مجموعه‌های متناهی، و مجموعهٔ $\{۱/n \mid n \in \mathbb{N} - \{۰\}\} \cup \{۰\}$. لم زیر مثال‌های دیگری در اختیار می‌گذارد.

۱۲.۳ لم. اشتراک هر دستگاه متناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است. اجتماع یک دستگاه متناهی از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است.

برهان. فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعهٔ باز باشند. اگر $a \in A_۱ \cap A_۲$، در این صورت دو عدد $\delta_۱, \delta_۲ > ۰$ موجود است به‌قسمی که رابطهٔ $|x-a| < \delta_۱$ ایجاب می‌کند $x \in A_۱$ و $|x-a| < \delta_۲$ ایجاب می‌کند $x \in A_۲$. قرار دهید $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$، در این صورت $\delta > ۰$ و از $|x-a| < \delta$ نتیجه می‌شود $x \in A_۱ \cap A_۲$. پس ثابت کردیم اشتراک دو مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای باز است. حکم از طریق استقرا برای هر دستگاه متناهی از مجموعه‌های باز ثابت می‌شود. همچنین با متمم‌گیری نسبت به $\mathbb{R}$ و قانون دمورگان (بخش ۴ از فصل ۱ را ببینید) حکم برای مجموعه‌های بسته نیز اثبات می‌شود. □

۱۳.۳ قضیه. برای تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ عبارت‌های زیر معادل‌اند.

الف) f پیوسته است.

ب) $f^{-۱}[A]$ برای هر مجموعهٔ باز $A \subseteq \mathbb{R}$، باز است.

ج) $f^{-۱}[B]$ برای هر مجموعهٔ بستهٔ $B \subseteq \mathbb{R}$، بسته است.

برهان. (الف) ایجاب می‌کند (ب). فرض کنید f پیوسته باشد. اگر $a \in f^{-۱}[A]$، در این صورت $f(a) \in A$ و لذا عدد $\varepsilon > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که از $|y - f(a)| < \varepsilon$ نتیجه می‌شود $y \in A$ (زیرا A باز است). بنا به تعریف پیوستگی، عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که اگر $|x-a| < \delta$ آن‌گاه $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. بنابراین عدد $\delta > ۰$ وجود دارد که رابطهٔ $|x-a| < \delta$ ایجاب می‌کند $f(x) \in A$، به‌عبارت‌دیگر $x \in f^{-۱}[A]$. این نشان می‌دهد که $f^{-۱}[A]$ باز است.

(ب) ایجاب می‌کند (الف). فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > ۰$. از فرض (ب) نتیجه می‌گیریم $f^{-۱}[(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)]$ مجموعه‌ای باز است (و شامل a). لذا عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که $|x-a| < \delta$ ایجاب می‌کند $x \in f^{-۱}[(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)]$ و یا معادلاً، $f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$. این پیوستگی f در a را ثابت می‌کند.

هم‌ارزی (ب) و (ج) به‌راحتی از تمرین ۶.۳ (ب) در فصل ۲ نتیجه می‌شود. □

در ادامهٔ فصل برخی نتایج دربارهٔ مجموعه‌های باز و بسته را ثابت می‌کنیم. در فصل ۵، لم زیر را برای تعیین کاردینال دستگاه همهٔ مجموعه‌های باز به کار بردیم.

۱۴.۳ لم. هر مجموعهٔ باز اجتماع دستگاهی از بازه‌های باز با نقاط انتهایی گویا است.

برهان. فرض کنید A مجموعه‌ای باز و S دستگاه همهٔ بازه‌های باز با نقاط انتهایی گویا مشمول در A باشد. به‌وضوح $\bigcup S \subseteq A$. اگر $a \in A$، در این صورت $\delta > 0$یی موجود است که $(a-\delta, a+\delta) \subseteq A$، و با توجه به چگال بودن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ دو عدد $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ موجود است که $a - \delta < r_1 < a < r_2 < a + \delta$. اکنون داریم $A \supseteq (r_1, r_2) \ni a$، لذا $a \in \bigcup S$ که نشان می‌دهد $\bigcup S = A$. $\square$

مجموعه‌های بسته را برابر متمم مجموعه‌های باز تعریف کردیم. مشخص کردن آن‌ها برحسب رفتار نقاط خود مجموعه گاهی اوقات مفید است.

۱۵.۳ تعریف. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ را نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ می‌نامند هرگاه برای هر $\delta > 0$ عدد $x \in A$ موجود باشد که $x \neq a$ و $|x - a| < \delta$. نقطهٔ $a \in \mathbb{R}$ را نقطهٔ تنهای مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ می‌نامند هرگاه $a \in A$ و عدد $\delta > 0$ موجود باشد به‌قسمی که رابطهٔ $|x - a| < \delta$ و $x \neq a$ ایجاب کند $x \notin A$.

به‌راحتی می‌توان دید هر نقطهٔ مجموعهٔ A یا نقطهٔ تنها است یا نقطهٔ انباشتگی و همچنین یک نقطهٔ انباشتگی ممکن است به A تعلق نداشته باشد.

۱۶.۳ لم. مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}$ بسته است اگر و تنها اگر همهٔ نقاط انباشتگی A به A متعلق باشند.

برهان. فرض کنید A بسته است، یعنی $\mathbb{R} - A$ باز است. اگر $a \in \mathbb{R} - A$، در این صورت عدد $\delta > 0$ چنان موجود است که رابطهٔ $|x - a| < \delta$ ایجاب می‌کند $x \in \mathbb{R} - A$، و لذا a نقطهٔ انباشتگی A نخواهد بود. پس همهٔ نقاط انباشتگی A به A تعلق دارند.

بالعکس، فرض کنید همهٔ نقاط انباشتگی A به A متعلق باشند. اگر $a \in \mathbb{R} - A$، در این صورت a نقطهٔ انباشتگی A نیست، و لذا عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که هیچ نقطهٔ $x \in A$ موجود نیست که $x \neq a$ و $|x - a| < \delta$. اما رابطهٔ $|x - a| < \delta$

ایجاب می‌کند که $x \in \mathbb{R} - A$، پس $\mathbb{R} - A$ باز است و در نتیجه A باید بسته باشد. □

به‌عنوان کاربردی از لم بالا، با استفاده از آن قضیهٔ ۴.۳ را تعمیم می‌دهیم.

۱۷.۳ قضیه. هر دستگاه ناتهی از مجموعه‌های بسته و کران‌دار که ویژگی اشتراک متناهی داشته باشد دارای مقطع ناتهی است.

برهان. فرض کنید S دستگاهی با شرایط قضیه باشد. توجه می‌کنیم که اشتراک هر زیردستگاه ناتهی و متناهی T از S مجموعه‌ای غیرتهی کران‌دار و بسته است. بنابراین مجموعهٔ $\overline{S} = \{\bigcap T \mid$ زیردستگاهی ناتهی و متناهی از S است $T\}$ نیز دستگاهی ناتهی از مجموعه‌های بسته و کران‌دار می‌شود که ویژگی اشتراک متناهی دارد. به‌علاوه، $\overline{S}$ دارای این خاصیت اضافی است که اشتراک هر زیردستگاه ناتهی متناهی از آن به $\overline{S}$ تعلق دارد. از آنجا که به‌وضوح داریم $\bigcap S = \bigcap \overline{S}$، لذا کافی است ثابت کنیم $\bigcap \overline{S} \neq \varnothing$.

اثبات این مرحله خیلی شبیه اثبات قضیهٔ ۴.۳ است. قرار دهید $A = \{\inf F \mid F \in \overline{S}\}$. نشان می‌دهیم که A از بالا کران‌دار است. مجموعهٔ $G \in \overline{S}$ را اختیار کنید. برای هر $F \in \overline{S}$ داریم $F \cap G \in \overline{S}$ و

$$\inf F \leq \inf(F \cap G) \leq \sup(F \cap G) \leq \sup G,$$

و لذا $\sup G$ کرانی برای A است. بنا به خاصیت کمال، A باید سوپریممی مانند $\overline{a}$ داشته باشد. با اثبات اینکه برای هر $F \in \overline{S}$، $\overline{a} \in F$، اثبات را کامل می‌کنیم.

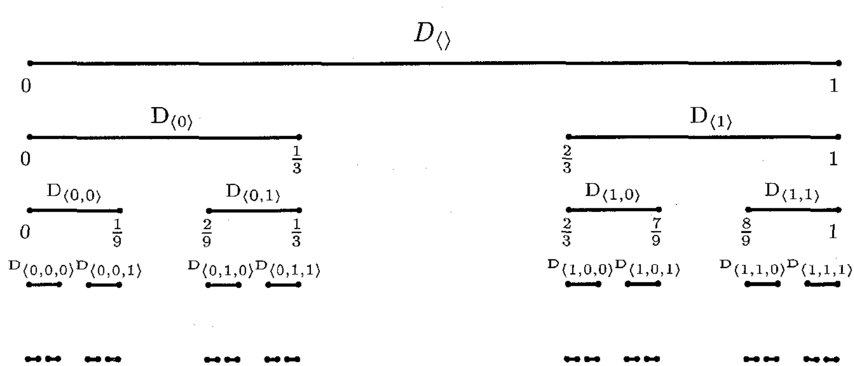
فرض کنید که $\overline{a} \notin F$. برای هر عدد $\delta > 0$، بنا به تعریف $\overline{a}$، مجموعهٔ $H \in \overline{S}$ یافت می‌شود به‌قسمی که $\overline{a} - \delta < \inf H \leq \overline{a} + \delta$. چون $F \cap H \in \overline{S}$ و $\inf H \leq \inf(H \cap F)$ پس، همچنین داریم $\overline{a} - \delta < \inf(H \cap F) \leq \overline{a} < \overline{a} + \delta$. اکنون از تعریف اینفیمم نتیجه می‌شود که عدد $x \in H \cap F$ موجود است به‌طوری‌که $\inf(H \cap F) \leq x < \overline{a} + \delta$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر $\delta > 0$، عدد $x \in F$ موجود است به‌قسمی که $x \neq \overline{a}$ (فرض کردیم که $\overline{a} \notin F$) و $|x - \overline{a}| < \delta$. اما این یعنی $\overline{a}$ یک نقطهٔ انباشتگی F است. چون F بسته است پس $\overline{a} \in F$، که این نیز تناقض است. □

مجموعه‌های بسته تمامی نقاط انباشتگی خود را در بر دارند و علاوه بر این یک مجموعهٔ بسته ممکن است نقطهٔ تنها داشته باشد و یا نداشته باشد. فواصل بسته مثالی از مجموعهٔ بستهٔ بدون نقاط تنها هستند. مجموعهٔ $[\text{۰}, \text{۱}] \cup \mathbb{N}$ مجموعهٔ بسته‌ای است که (تعداد نامتناهی) نقطهٔ تنها دارد. مجموعه‌های بستهٔ ناتهی بدون نقطهٔ تنها فوق‌العاده خوش‌رفتارند؛ چنین مجموعه‌هایی را مجموعهٔ تام می‌نامند. در بخش بعد آن‌ها را برای تحلیل ساختار مجموعه‌های بسته به کار خواهیم برد. این بخش را با مثالی به پایان می‌بریم که نشان می‌دهد خوش‌رفتاری برای مجموعه‌های تام معنایی اساساً متفاوت از مجموعه‌های آشنا، مثلاً بازه‌های بسته، دارد.

۱۸.۳ مثال. مجموعهٔ کانتور.
مجموعهٔ S را به‌صورت $S = \mathrm{Seq}(\{\text{۰}, \text{۱}\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\text{۰}, \text{۱}\}^{\mathbb{N}}$ تعریف کنید. به‌عبارت‌دیگر، S مجموعه همهٔ دنباله‌های متناهی متشکل از ۰ها و ۱هاست. دستگاهی از فاصله‌های بسته مانند $D = \langle D_s \mid s \in S\rangle$ به‌صورت زیر می‌سازیم. قرار دهید

$$D_{\langle\rangle} = [\text{۰}, \text{۱}],$$
$$D_{\langle \text{۰}\rangle} = [\text{۰}, \tfrac{\text{۱}}{\text{۳}}],\ \ D_{\langle \text{۱}\rangle} = [\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}, \text{۱}],$$
$$D_{\langle \text{۰},\text{۰}\rangle} = [\text{۰}, \tfrac{\text{۱}}{\text{۹}}],\ D_{\langle \text{۰},\text{۱}\rangle} = [\tfrac{\text{۲}}{\text{۹}}, \tfrac{\text{۱}}{\text{۳}}],\ \ D_{\langle \text{۱},\text{۰}\rangle} = [\tfrac{\text{۲}}{\text{۳}}, \tfrac{\text{۷}}{\text{۹}}],\ \ D_{\langle \text{۱},\text{۱}\rangle} = [\tfrac{\text{۸}}{\text{۹}}, \text{۱}],$$

و به همین صورت الی‌آخر.



به‌طور کلی، اگر $D_{\langle s_\circ,\ldots,s_{n-1}\rangle} = [a,b]$، تعریف می‌کنیم

$$D_{\langle s_\circ,\ldots,s_{n-1},\circ\rangle} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)] \quad \text{و} \quad D_{\langle s_\circ,\ldots,s_{n-1},1\rangle} = [a + \frac{2}{3}(b-a), b]$$

که همان یک‌سوم اول و آخر بازهٔ $[a,b]$ هستند. وجود دستگاه D با کمی تأمل از قضیهٔ بازگشت به‌دست می‌آید. در واقع دنبالهٔ $\langle D^n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ را که D^n دستگاهی از فواصل بسته است و با $\{\circ, 1\}^n$ اندیس‌گذاری شده است به‌صورت بازگشتی تعریف می‌کنیم. ابتدا تعریف کنید $D^\circ_{\langle\rangle} = [\circ, 1]$ و با فرض داشتن D^n، مجموعهٔ D^{n+1} را برای هر $\langle s_\circ, \ldots, s_{n-1}\rangle \in \{\circ, 1\}^n$ به‌صورت

$$D^{n+1}_{\langle s_\circ,\ldots,s_{n-1},\circ\rangle} = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)]$$

و

$$D^{n+1}_{\langle s_\circ,\ldots,s_{n-1},1\rangle} = [a + \frac{2}{3}(b-a), b]$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $[a,b] = D_{s_\circ,\ldots,s_{n-1}}$. حال قرار می‌دهیم $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D^n$.

تعریف کنید $F_n = \bigcup\{D_s \mid s \in \{\circ, 1\}^n\}$، پس مثلاً $F_\circ = [\circ, 1]$، $F_1 = [\circ, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ و الی‌آخر. توجه کنید هر F_n اجتماع یک دستگاه متناهی از فواصل بسته است و بنابراین خود آن نیز بسته است (لم ۱۲.۳ را ببینید). لذا مجموعهٔ $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ نیز بسته است. این مجموعه را مجموعهٔ کانتور می‌نامند.

برای هر $f \in \{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم $D_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_{f\restriction n}$. توجه می‌کنیم که $D_f \subseteq F$ و $D_f \neq \varnothing$ (قضیهٔ ۴.۳). علاوه بر این، طول بازهٔ $D_{f\restriction n}$ برابر $1/3^n$ است و لذا اینفیمم طول بازه‌ها در دستگاه $\langle D_{f\restriction n} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ برابر صفر است. از اینجا نتیجه می‌گیریم D_f یک عضو منحصربه‌فرد دارد که آن را با d_f نشان می‌دهیم، پس $D_f = \{d_f\}$. برعکس، برای هر $a \in F$ عضو یکتای $f \in \{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}$ وجود دارد به‌قسمی که $a = d_f$. درواقع، f مذکور به‌صورت $f = \bigcup\{s \in \mathrm{Seq}(\{\circ, 1\}) \mid a \in D_s\}$ تعریف می‌شود. (این مطلب را با تمرین ۱۳.۳ در فصل ۲ مقایسه کنید.) لذا تابع $d = \langle d_f \mid f \in \{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}\rangle$ نگاشتی یک‌به‌یک از $\{\circ, 1\}^{\mathbb{N}}$ بتوی F است و از اینجا نتیجه می‌گیریم که مجموعهٔ کانتور دارای عدد اصلی برابر عدد پیوستار $2^{\aleph_\circ}$ است.

از بین بسیاری نتایج جالب دربارهٔ مجموعهٔ F فقط دوتا از آن‌ها را ثابت می‌کنیم.

(۱) مجموعهٔ کانتور مجموعه‌ای تام است.

برهان. می‌دانیم مجموعهٔ F ناتهی و بسته است. لذا می‌ماند ثابت کنیم که هیچ نقطهٔ تنهایی ندارد. فرض کنید $a \in F$ و $\delta > ۰$. باید نقطهٔ $x \in F$، $x \neq a$ را طوری بیابیم که $|x - a| < \delta$. عدد $n \in \mathbb{N}$ را طوری در نظر بگیرید که $\delta > ۱/۳^n$. چون می‌دانیم عضو $f \in \{۰, ۱\}^{\mathbb{N}}$ وجود دارد به‌قسمی که $a = d_f$. فرض کنید g دنباله‌ای از ۰ها و ۱ها باشد به‌طوری‌که $g \restriction n = f \restriction n$ و $f \neq g$. حال تعریف کنید $x = d_g$. پس $a \neq x$، اما $a, x \in D_{f\restriction n} = D_{g\restriction n}$ که دارای طولی به اندازه $\delta > ۱/۳^n$ است، لذا همان‌طور که می‌خواستیم داریم $|x - a| < \delta$. □

(۲) متمم نسبی مجموعهٔ کانتور در $[۰, ۱]$ در $[۰, ۱]$ چگال است.

برهان. فرض کنید $۰ \leq a < b \leq ۱$. نشان می‌دهیم (a, b) عضوی دارد که در F نیست. عدد $n \in \mathbb{N}$ را طوری در نظر بگیرید که $\frac{۱}{۲}(b - a) > \frac{۱}{۳^n}$. فرض کنید k کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که $\frac{k}{۳^n} \geq a$. پس داریم $a \leq \frac{k}{۳^n} < \frac{k+۱}{۳^n} < b$. بنابراین بازهٔ باز

$$\left(\frac{۳k + ۱}{۳^{n+۱}}, \frac{۳k + ۲}{۳^{n+۱}}\right) \quad \left(\text{یک‌سوم میانی بازهٔ } \left[\frac{k}{۳^n}, \frac{k + ۱}{۳^n}\right]\right)$$

قطعاً با F اشتراکی ندارد. پس در می‌یابیم که فاصلهٔ (a, b) هیچ عضوی از F را در بر ندارد. □

تمرین‌ها

۱.۳ هر دستگاه از مجموعه‌های باز دوبه‌دو مجزا حداکثر شماراست. این مطلب برای مجموعه‌های بسته درست نیست.

۲.۳ فرض کنید S یک دستگاه غیرتهی از بازه‌های بسته و کران‌دار در $\mathbb{R}$ باشد. اگر $\inf\{b - a \mid [a, b] \in S\} = ۰$، آن‌گاه $\bigcap S$ شامل حداکثر یک عضو است.

۳.۳ فرض کنید $(P,<)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی چگال باشد که در آن هر دستگاه غیرتهی از بازه‌های بسته و کران‌دار با ویژگی اشتراک متناهی دارای اشتراک ناتهی است. در این صورت P کامل است. (عکس قضیهٔ ۴.۳.)

۴.۳ دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ همگرا به a است اگر و فقط اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $k > 0$، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $|a_n - a| < 1/k$ برای هر $n \geq n_0$.

۵.۳ اگر دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ همگرا به a و b باشد، آن‌گاه $a = b$ (حد یکتاست). این مطلب نماد $\lim_{n\to\infty} a_n$ را برای حد، در صورت وجود، توجیه می‌کند.

۶.۳ هر دنبالهٔ همگرا از اعداد حقیقی یک دنبالهٔ کوشی است.

۷.۳ عدد $\overline{a} = \sup\{\inf\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$، که در اثبات قضیهٔ ۸.۳ به کار برده شد، حد پایین $\langle a_n\rangle$ نامیده می‌شود و با $\liminf_{n\to\infty} a_n$ نشان داده می‌شود. به همین نحو، $\overline{b} = \inf\{\sup\{a_k \mid k \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ حد بالای $\langle a_n\rangle$ نامیده می‌شود و با $\limsup_{n\to\infty} a_n$ نشان داده می‌شود. ثابت کنید:

الف) برای هر دنبالهٔ کران‌دار، $\overline{b}$ وجود دارد و $\overline{a} \leq \overline{b}$.

ب) اگر c حد زیردنباله‌ای از $\langle a_n\rangle$ باشد، آن‌گاه $\overline{a} \leq c \leq \overline{b}$.

ج) $\langle a_n\rangle$ همگراست اگر و فقط اگر $\overline{a} = \overline{b}$ (و اگر چنین باشد، $\overline{a}$ حد دنباله است.)

۸.۳ دنباله‌ای مانند $\langle a_n\rangle$ با این خاصیت وجود دارد که برای هر $a \in \mathbb{R}$، $\langle a_n\rangle$ دارای زیردنبالهٔ همگرا به a است. [راهنمایی: شمارشی از همهٔ اعداد گویا در نظر بگیرید.]

۹.۳ نشان دهید که $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در $a \in \mathbb{R}$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، یک $k \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $|x - a| < 1/k$ نتیجه می‌دهد که $|f(x) - f(a)| < 1/n$.

۱۰.۳ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a, b, y \in \mathbb{R}$، $a < b$، و $f(a) \leq y \leq f(b)$. ثابت کنید که عدد $x \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $a \leq x \leq b$ و $f(x) = y$ (قضیهٔ مقدار میانی). [راهنمایی: $x = \sup\{z \in [a,b] \mid f(z) \leq y\}$ را در نظر بگیرید.]

۱۱.۳ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$. ثابت کنید تصویر $[a,b]$ تحت f بسته است.

۱۲.۳ فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$. ثابت کنید که $x\in[a,b]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)\geq f(z)$ برای هر $z\in[a,b]$. بنابراین تصویر $[a,b]$ تحت f کران‌دار است.

۱۳.۳ اگر A باز باشد و $\langle x_n\rangle$ به $a\in A$ همگرا باشد، آن‌گاه $n_\circ\in\mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $a_n\in A$ به‌ازای هر $n\geq n_\circ$.

۱۴.۳ $a\in\mathbb{R}$ یک نقطهٔ بستار $A\subseteq\mathbb{R}$ است هرگاه برای هر $\delta>\circ$، یک $x\in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|x-a|<\delta$. $a\in\mathbb{R}$ یک نقطهٔ بستار است اگر و فقط اگر یا نقطهٔ تنهای A باشد یا نقطهٔ انباشتگی A باشد. فرض کنید $\overline{A}$ مجموعهٔ همهٔ نقاط بستاری A باشد. A بسته است اگر و فقط اگر $A=\overline{A}$.

۱۵.۳ هر مجموعهٔ باز، اجتماعی از دستگاهی از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا است.
[راهنمایی: اگر A باز باشد و $a\in A$، آن‌گاه $\bigcup\{(x,y)\mid a\in(x,y)\subseteq A\}$ یک بازهٔ باز است.]

۱۶.۳ مثالی از یک دنبالهٔ کاهشی از مجموعه‌های بسته با اشتراک تهی ارائه دهید.

۱۷.۳ نشان دهید که تمرین‌های ۱۱.۳ و ۱۲.۳ برای هر مجموعهٔ کران‌دار و بسته مانند C به‌جای بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ درست هستند.

۱۸.۳ طریق ساخت کامل‌سازی دیگری از $(\mathbb{Q},<)$ را توضیح می‌دهیم. دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_{n=\circ}^{\infty}$ از اعداد گویا یک دنبالهٔ کوشی است هرگاه برای هر عدد گویای $p>\circ$ یک $n_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که $|a_n-a_{n_\circ}|<p$ به‌شرطی که $n\geq n_\circ$. فرض کنید C مجموعهٔ همه دنباله‌های کوشی از اعداد گویا باشد. یک رابطهٔ هم‌ارزی روی C به این صورت تعریف می‌کنیم که $\langle a_n\rangle_{n=\circ}^{\infty}\approx\langle b_n\rangle_{n=\circ}^{\infty}$ اگر و فقط اگر برای هر $p>\circ$ یک $n_\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $|a_n-b_n|<p$ هرگاه $n\geq n_\circ$. روی C پیش‌ترتیبی به این صورت تعریف می‌کنیم که $\langle a_n\rangle_{n=\circ}^{\infty}\preccurlyeq\langle b_n\rangle_{n=\circ}^{\infty}$ اگر و فقط اگر برای هر $p>\circ$ یک $n_\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a_n-b_n<p$ هرگاه $n\geq n_\circ$.
ثابت کنید

الف) $\approx$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی C است.
ب) $\preccurlyeq$ یک ترتیب خطی روی $C/\approx$ تعریف می‌کند.
ج) مجموعهٔ مرتب $C/\approx$ با $\mathbb{R}$ یکریخت است.

۴ مجموعه‌های اعداد حقیقی

فرض پیوستار ایجاب می‌کند که هر مجموعه از اعداد حقیقی یا شماراست و یا عدد اصلی آن برابر عدد پیوستار دارد. علی‌رغم اینکه نمی‌توان فرض پیوستار را در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو_فرانکل ثابت کرد، لیکن احکامی از این دست، وقتی خود را به مجموعه‌هایی که به معنایی، مثلاً توپولوژیکی، ساده‌اند، محدود کنیم وضعیت متفاوتی پیدا می‌کنند. در این بخش چند نمونه از این‌گونه احکام را عرضه می‌کنیم.

۱.۴ قضیه. هر مجموعهٔ باز ناتهی از اعداد حقیقی دارای عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ است.

برهان. تابع آشنای $\tan x$ یک نگاشت یک‌به‌یک از بازهٔ باز $(-\pi/2, \pi/2)$ بروی خط حقیقی $\mathbb{R}$ است. بنابراین بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ دارای عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ است. چنانچه (a, b) و (c, d) دو بازهٔ باز باشند، در این صورت تابع

$$f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

یک نگاشت یک‌به‌یک از (a, b) بروی (c, d) خواهد بود. این امر نشان می‌دهد که همهٔ بازه‌های باز دارای عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ هستند. حال چون هر مجموعهٔ باز اجتماع یک دستگاه ناتهی از بازه‌های باز است، پس حداقل عدد اصلی آن برابر $2^{\aleph_0}$ است. اما چون زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ نیز هست پس باید عدد اصلی آن نیز حداکثر برابر $2^{\aleph_0}$ باشد. □

۲.۴ قضیه. هر مجموعهٔ تام دارای عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ است.

ما ابتدا نشان می‌دهیم هر مجموعهٔ تام دارای دو زیرمجموعهٔ تام از هم جداست

(این مطلب را «لم جدا کننده» می‌نامند). دستگاه همهٔ زیرمجموعه‌های تام $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{P}$ نشان می‌دهیم.

۳.۴ لم. دو تابع $G_۰$ و $G_۱$ از $\mathcal{P}$ بتوی $\mathcal{P}$ موجود است به‌قسمی که برای هر $F \in \mathcal{P}$، $G_۰(F) \subseteq F$، $G_۱(F) \subseteq F$ و $G_۰(F) \cap G_۱(F) = \varnothing$.

برهان. نشان می‌دهیم برای هر مجموعهٔ تام مانند F دو عدد گویای r و s موجود است که $r < s$ و دو مجموعهٔ $F \cap (-\infty, r]$ و $F \cap [s, +\infty)$ هر دو تام هستند.

چنانچه F از پایین کران‌دار باشد قرار دهید $\alpha = \inf F$ (توجه کنید که در این حالت $\alpha \in F$) و در غیر این صورت، $\alpha = -\infty$. به همین نحو، اگر F از بالا کران‌دار بود قرار دهید $\beta = \sup F$ (توجه کنید $\beta \in F$) و در غیر این صورت، $\beta = +\infty$. دو حالت زیر را باید بررسی کنیم:

الف) اگر $(\alpha, \beta) \subseteq F$. در این حالت هر دو عدد $r, s \in \mathbb{Q}$ به‌شرطی که $\alpha < r < s < \beta$ خاصیت مورد نظر را دارد. زیرا، مثلاً چنانچه $\alpha \in \mathbb{R}$، در این صورت $F \cap (-\infty, r] = [\alpha, r]$ و در غیر این صورت، $F \cap (-\infty, r] = (-\infty, r]$ (توجه می‌کنیم که هر بازهٔ بسته، مجموعه‌ای تام است).

ب) اگر $(\alpha, \beta) \not\subseteq F$. در این صورت عدد $a \in (\alpha, \beta)$ وجود دارد که $a \notin F$. چون F بسته است (به‌عبارت‌دیگر متمم آن باز است)، لذا عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به‌قسمی که $(a - \delta, a + \delta) \cap F = \varnothing$. توجه می‌کنیم که $\alpha < a - \delta$ (زیرا $\alpha = \inf F$ و بنابراین عدد $x \in F$ وجود دارد که $\alpha < x < a$) و به همین دلیل $a + \delta < \beta$. حال هر دو عدد $r, s \in \mathbb{Q}$ به شرطی که $a - \delta < r < a < s < a + \delta$ دارای خاصیت مورد نظر هستند. زیرا، مثلاً مجموعهٔ $F \cap (-\infty, r]$ به‌وضوح بسته و ناتهی است ($F \cap (-\infty, r] = F \cap (-\infty, a]$). اگر دارای یک نقطهٔ تنها مثل b باشد در این صورت می‌توان عدد $\delta' \leq \delta$ را طوری یافت که $x \in (b - \delta', b + \delta')$ و $x \neq b$، که این نیز ایجاب می‌کند $x \notin F \cap (-\infty, r] = F \cap (-\infty, a + \delta)$.

اما برای چنین xیی داریم $x < b+\delta' \leq r+\delta' < a+\delta' \leq a+\delta$ و لذا $x \in (-\infty, a+\delta)$. پس نتیجه می‌گیریم $x \notin F$. این نشان می‌دهد b نقطهٔ تنها برای F است. اما این امر فرض ما را، که F تام است، نقض می‌کند.

برای تکمیل اثبات، شمارشی از مجموعهٔ شمارای زوج‌های مرتب اعداد گویا مثل $\langle (r_n, s_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $G_\circ(F) = F \cap (-\infty, r_n]$ و $G_\backslash(F) = F \cap [s_n, \infty)$، که در آن زوج (r_n, s_n) اولین (نسبت به شمارش ما) زوجی از اعداد گویا است که $r_n < s_n$ و هر دو مجموعهٔ $F \cap (-\infty, r_n]$ و $F \cap [s_n, \infty)$ مجموعه‌ای تام هستند. □

برای اثبات قضیهٔ ۲.۴ به نتیجهٔ دیگری نیاز داریم. برای هر مجموعهٔ غیرتهی و کران‌دار $A \subseteq \mathbb{R}$، قطر آن را با $\operatorname{diam}(A)$ نشان می‌دهیم و برابر $\sup A - \inf A$ تعریف می‌کنیم. لم بعدی نشان می‌دهد که هر مجموعهٔ تام دارای یک زیرمجموعهٔ تام با قطر به دلخواه کوچک است.

۴.۴ لم. تابعی مانند $H : \mathcal{P} \times (\mathbb{N} - \{\circ\}) \to \mathcal{P}$ موجود است به‌قسمی که برای هر $F \in \mathcal{P}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ که $n \neq \circ$ داریم $H(F,n) \subseteq F$ و $\operatorname{diam}(H(F,n)) \leq \backslash/n$.

برهان. فرض کنید $F \in \mathcal{P}$، $n \in \mathbb{N}$ و $n > \circ$. عدد $m \in \mathbb{Z}$ چنان موجود است که $F \cap (m/n, (m+\backslash)/n) = \varnothing$. (زیرا، در غیر این صورت $F \subseteq \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}\}$ و لذا همهٔ نقاط F تنها خواهند بود.) کوچک‌ترین عدد m با خاصیت مذکور در نظر بگیرید، اگر چنین mیی موجود نباشد بزرگ‌ترین عدد $m < \circ$ را با آن خاصیت در نظر بگیرید. تعریف کنید $a = \inf F \cap (m/n, (m+\backslash)/n)$ و $b = \sup F \cap (m/n, (m+\backslash)/n)$. به‌وضوح $m/n \leq a \leq b \leq (m+\backslash)/n$، لذا $b - a \leq \backslash/n$. قرار می‌دهیم $H(F,n) = F \cap [a,b]$. واضح است F بسته است و $F \neq \varnothing$. تعریف اینفیمم نشان می‌دهد که نه a و نه b هیچ‌یک نقطهٔ تنها برای $H(F,n)$ نیستند. با استدلالی شبیه آنچه که در قسمت (ب) اثبات لم قبل به کار رفت می‌توان نشان داد که هیچ عدد $x \in (a,b) \subseteq (m/n, (m+\backslash)/n)$ نقطهٔ تنها برای $H(F,n)$ نیست و لذا $H(F,n)$ تام است. □

برهان قضیهٔ ۲.۴. اکنون دیگر اثبات آسان است. اثبات، بسیار شبیه استدلالی است که در بخش ۳ با آن ثابت کردیم عدد اصلی مجموعه کانتور برابر $2^{\aleph_0}$ است. فرض کنید F مجموعهٔ تامی باشد. دستگاهی از زیرمجموعه‌های تام آن را مانند $\langle F_S \mid s \in S\rangle$ که $S = \mathrm{Seq}(\{0, 1\})$ به‌صورت زیر می‌سازیم.
تعریف کنید

$$F_{\langle\rangle} = F,$$

$$F_{\langle s_0,\dots,s_{n-1},0\rangle} = H\big(G_0(F_{\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle}), n\big),$$
$$F_{\langle s_0,\dots,s_{n-1},1\rangle} = H\big(G_1(F_{\langle s_0,\dots,s_{n-1}\rangle}), n\big).$$

برای هر $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ تعریف می‌کنیم $F_f = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{f\restriction n}$. بنا به قضیهٔ ۱۷.۳، $F_f \neq \varnothing$. به‌علاوه، F_f فقط شامل یک عضو است، زیرا اگر $x, y \in F_f$ در این صورت $|x - y| < \mathrm{diam}(F_f)$ و برای هر $0 \neq n \in \mathbb{N}$، $\mathrm{diam}(F_{f\restriction n}) \leq 1/n$، لذا $x = y$. عضو منحصر به‌فرد F_f را با d_f نشان می‌دهیم. تابع $\langle d_f \mid f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}\rangle$ نگاشتی یک‌به‌یک از $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ بتوی (و نه لزوماً بروی) F است. این امر نشان می‌دهد که عدد اصلی F حداقل برابر $2^{\aleph_0}$ است. چون $F \subseteq \mathbb{R}$، عدد اصلی F حداکثر برابر $2^{\aleph_0}$ است. حال قضیهٔ ۲.۴ از قضیهٔ کانتور-برنشتاین نتیجه می‌شود.
□

هدف بعدی ما این است که نشان دهیم مجموعه‌های بسته نیز رفتاری سازگار با فرض پیوستار دارند، بدین معنی که هر مجموعهٔ بسته یا حداکثر شماراست یا عدد اصلی آن برابر $2^{\aleph_0}$ است. این مطلب نتیجهٔ مستقیمی از قضیهٔ زیر و ۲.۴ است.

۵.۴ قضیه. هر مجموعهٔ بستهٔ ناشمارا، شامل یک زیرمجموعهٔ تام است.

۶.۴ نتیجه. هر مجموعهٔ بسته از اعداد حقیقی یا حداکثر شماراست یا دارای عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ است.

برای قضیهٔ ۵.۴ دو اثبات ارائه می‌کنیم. برهان اول خیلی ساده است و از این مطلب که اجتماع هر دستگاه شمارا از مجموعه‌های شمارا، حداکثر شمارا است

استفاده می‌کند. اما این حکم به اصل انتخاب (فصل ۸) نیاز دارد. برهان دوم، ابداً به اصل انتخاب نیاز ندارد. علاوه بر این، این برهان تحلیل عمیق‌تری از ساختار مجموعه‌های بسته در اختیار می‌گذارد که به خودی خود جالب توجه است. برهان مبتنی بر بازگشت ترامتناهی است (فصل ٦ را ببینید).

برهان قضیهٔ ۵.۳. فرض کنید A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. عدد $a \in \mathbb{R}$ را یک نقطهٔ چگالش از A می‌نامیم هرگاه برای هر $\delta > \circ$ مجموعهٔ همهٔ نقاط $x \in A$ با شرط $|x - a| < \delta$ ناشمارا باشند (به‌عبارت‌دیگر، نه شمارا و نه متناهی باشند). از این تعریف واضح است که هر نقطهٔ چگالش A یک نقطهٔ انباشتگی از A است. مجموعه همه نقاط چگالش A را با A^c نشان می‌دهیم.

(۱) A^c یک مجموعهٔ بسته است.

برهان. با توجه به لم ١٦.٣، کافی است نشان دهیم هر نقطهٔ انباشتگی از A^c به A^c تعلق دارد. چنانچه a نقطه انباشتگی از A^c باشد و $\delta > \circ$، در این صورت نقطهٔ $x \in A^c$ موجود است به‌قسمی که $|x - a| < \delta$. قرار دهید $\varepsilon = \delta - |x - a| > \circ$. تعداد ناشمارا نقطهٔ $y \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $|y - x| < \varepsilon$. اما بنا به نوع انتخاب ما از ε، اگر $|y - x| < \varepsilon$، آن‌گاه

$$|y - a| \leq |y - x| + |x - a| < \varepsilon + |x - a| = \delta.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که تعداد ناشمارا نقطهٔ $y \in A$ موجود است به‌قسمی که $|y - a| < \delta$، لذا $a \in A^c$. □

حال اگر F مجموعه‌ای بسته باشد، در این صورت $F^c \subseteq F$ (لم ١٦.٣ را ببینید). مطلب بعدی ما از این قرار است

(۲) مجموعهٔ $C = F - F^c$ حداکثر شماراست.

برهان. اگر $a \in C$، در این صورت a نقطهٔ چگالش برای F نیست، و لذا عدد $\delta > \circ$ وجود دارد به‌قسمی که مجموعهٔ $F \cap (a - \delta, a + \delta)$ حداکثر شماراست. چون اعداد گویا در مجموعهٔ خط حقیقی چگال است پس اعداد گویای r و s موجودند به‌قسمی که $a - \delta < r < a < s < a + \delta$. این نشان می‌دهد که برای هر

$a \in C$ بازهٔ باز (r,s) با نقاط انتهایی گویا وجود دارد به‌گونه‌ای که $a \in F \cap (r,s)$ و $F \cap (r,s)$ هر دو حداکثر شمارا هستند. به‌عبارت‌دیگر،

$$C \subseteq \bigcup \{F \cap (r,s) \mid r,s \in \mathbb{Q} \text{ و } r < s\text{، } F \cap (r,s) \text{ حداکثر شماراست}\}.$$

طرف راست رابطهٔ بالا، اجتماع یک دستگاه حداکثر شمارا از مجموعه‌های شماراست. لذا طرف راست و نتیجتاً C نیز، حداکثر شماراست. (مطلب اخیر به اصل انتخاب بستگی دارد.) □

(۳) اگر F مجموعه‌ای ناشمارا باشد، آن‌گاه F^c تام است.

برهان. می‌دانیم F^c بسته [بنا به قسمت (۱)] و ناتهی [بنا به قسمت (۲)] است. فقط می‌ماند نشان دهیم که F^c هیچ نقطهٔ تنهایی ندارد. فرض کنید $a \in F^c$ نقطه تنهایی برای F^c باشد. پس عدد $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که از $|x-a| < \delta$ و $x \neq a$ نتیجه می‌شود $x \notin F^c$. اما در این صورت برای عدد δی مذکور روابط $|x-a| < \delta$ و $x \in F$ ایجاب می‌کنند که $x = a$ یا $x \in F - F^c$. توجه کنید مجموعهٔ اخیر بنا به قسمت (۲) شماراست. لذا حداکثر تعداد شمارایی نقطهٔ $x \in F$ موجود است که $|x-a| < \delta$، اما این مطلب فرض $a \in F^c$ را نقض می‌کند. □

اکنون قسمت (۳)، برهان قضیهٔ **۵.۴** را تکمیل می‌کند. □

اکنون تحلیل نسبتاً عمیقی از ساختار مجموعه‌های بسته ارائه می‌کنیم. این تحلیل هم به‌خودی‌خود جالب توجه است و هم برای اثبات دیگری از قضیهٔ **۵.۴** به کار می‌آید. در حالت کلی تفاوت مجموعه‌های بسته و تام در این است که مجموعه‌های بسته می‌تواند دارای نقطهٔ تنها باشند. نخست، قضیهٔ زیر را ثابت می‌کنیم.

۷.۴ قضیه. هر مجموعهٔ بسته حداکثر تعداد شمارایی نقطهٔ تنها دارد.

برهان. چنانچه a نقطهٔ تنهایی از مجموعه بستهٔ F باشد، در این صورت عدد $\delta > 0$ موجود است به‌قسمی که یگانه عضو F که در بازهٔ باز $(a-\delta, a+\delta)$ قرار می‌گیرد همان نقطهٔ a است. با استفاده از چگال بودن اعداد گویا در اعداد

حقیقی، می‌توان دو عدد $r, s \in \mathbb{Q}$ را طوری یافت که $a - \delta < r < a < s < a + \delta$. از این‌رو، a یگانه عضو F است که در بازهٔ باز (r, s) با نقاط انتهایی گویا قرار دارد. تابعی را که به هر بازهٔ باز با نقاط انتهایی گویا که یک نقطهٔ منحصربه‌فرد از F را نیز در بر داشته باشد، به‌عنوان مقدار، نقطهٔ مذکور را نسبت دهد در نظر بگیرید. این نگاشت از یک مجموعهٔ حداکثر شمارا بروی مجموعهٔ همه نقاط تنهای F تعریف شده است. حال حکم از قضیهٔ ۴.۳ در فصل ۴ نتیجه می‌شود. □

۸.۴ تعریف. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه باشد. منظور از مجموعهٔ مشتق A که با A' نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقاط انباشتگی A.

به‌راحتی دیده می‌شود که مجموعهٔ A بسته است اگر و تنها اگر $A' \subseteq A$. به‌علاوه، مجموعهٔ مشتق نیز مجموعه‌ای بسته است. (برای این احکام تمرین ۴.۴ را ببینید.) قضیهٔ ۷.۴ بیان می‌کند که برای هر مجموعهٔ بسته مانند F، مجموعه نقاط تنهای آن، یعنی $F - F'$، مجموعه‌ای حداکثر شماراست. این ملاحظات روشی برای بررسی عدد اصلی مجموعه‌های بسته پیش روی ما می‌گذارند.

فرض کنید $F \neq \varnothing$ یک مجموعهٔ بسته باشد. اگر $F = F'$، در این صورت F تام است و لذا $|F| = ۲^{\aleph_۰}$. در غیر این صورت، داریم $F = (F - F') \cup F'$ و $|F - F'| \leq \aleph_۰$. پس باید عدد اصلی مجموعهٔ بسته و کوچک‌تر F' را معین کنیم. چنانچه $F' = \varnothing$، در این صورت مجموعهٔ $F = F - F'$ فقط نقاط تنها دارد و لذا $|F| \leq \aleph_۰$.

اگر F' تام باشد، آن‌گاه $|F'| = ۲^{\aleph_۰}$ و بنابراین $|F| = ۲^{\aleph_۰}$. ممکن است خود F' نقاط تنها داشته باشد. مثلاً مجموعهٔ

$$F = \mathbb{N} \cup \{m - \frac{۱}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ و } m \geq ۱ \text{ ،} n > ۱\}$$

را در نظر بگیرید. در چنین حالتی می‌توان مرحلهٔ قبل را تکرار کرد و مجموعهٔ $F'' = (F')'$ را بررسی کرد. اگر $F'' = \varnothing$ یا F'' تام باشد، خواهیم داشت $|F| \leq \aleph_۰$ یا $|F| = ۲^{\aleph_۰}$. اما خود F'' ممکن است دارای نقاط تنها باشد. در این صورت بررسی را باید باز هم ادامه داد. به‌طریق بازگشتی می‌توان دنبالهٔ نامتناهی

$\langle F_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ را به‌صورت

$$F_\circ = F,$$

$$F_{n+1} = (F_n)'$$

تعریف کرد. تمامی مجموعه‌های F_n بسته‌اند. اگر به‌ازای یک $n \in \mathbb{N}$، $F_n = \varnothing$ یا F_n تام باشد، در این صورت، داریم $|F| \leq \aleph_\circ$ یا $|F| = 2^{\aleph_\circ}$. ولی متأسفانه ممکن است همهٔ F_nها نقاط تنها داشته باشند. در این حالت می‌توان تعریف کرد $F_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. مجموعهٔ F_ω یک مجموعهٔ بسته و کوچک‌تر از همهٔ F_nهاست. اگر F_ω تام باشد، خواهیم داشت $|F| \geq |F_\omega| = 2^{\aleph_\circ}$. اگر $F_\omega = \varnothing$، در این صورت $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_n - F_{n+1})$ اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شماراست، که می‌توان (بدون استفاده از اصل انتخاب) ثابت کرد که مجموعه‌ای شمارا خواهد بود. مشکل اینجاست که ممکن است F_ω هم نقطهٔ تنها داشته باشد! (ساخت چنین مجموعه‌ای قدری پیچیده است، با این حال، تمرین ۵.۴ و ۶.۴ را ببینید.) بنابراین باید مجموعه‌های $F_{\omega+1} = F'_\omega$، $F_{\omega+2} = F'_{\omega+1}$، ...، و حتی اگر لازم باشد مجموعهٔ $F_{\omega+\omega} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{\omega+n}$ و همین‌طور الی‌آخر را در نظر بگیریم. همین‌طور که مجموعه‌های مذکور کوچک‌تر می‌شوند، این امید تقویت می‌شود که این فرایند در جایی متوقف شود و یک مجموعهٔ تام یا تهی حاصل شود. این امر محرک اصلی کانتور برای بسط نظریه‌اش دربارهٔ ترامتناهی‌ها یا اعداد اوردینال بود.

۹.۴ تعریف. فرض کنید A مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. برای هر اوردینال α، به‌طریق بازگشتی روی α تعریف می‌کنیم

$$A^\circ = A,$$

$$A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})' = A^{(\alpha)} \text{ مجموعه مشتق},$$

$$A^{(\alpha)} = \bigcap_{\xi<\alpha} A^{(\xi)} \quad (\alpha \text{ اوردینال حدی است})$$

۱۰.۴ قضیه. فرض کنید F مجموعهٔ بسته‌ای از اعداد حقیقی باشد. یک اوردینال حداکثر شمارا مانند Θ موجود است به‌قسمی که

الف) برای هر $\alpha < \Theta$، مجموعهٔ $F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)}$ ناتهی و حداکثر شماراست.

ب) $F^{(\Theta+1)} = F^{(\Theta)}$.

ج) یا $P = F^{(\Theta)}$ یا P تهی است یا تام.

د) مجموعهٔ $C = F - P$ حداکثر شماراست.

به‌خصوص از قضیهٔ بالا نتیجه می‌شود که هر مجموعهٔ بسته و ناشمارای F را می‌توان به دو مجموعه تجزیه کرد، یکی مجموعهٔ تام P و دیگری مجموعهٔ حداکثر شمارای C.

برهان. برای هر α، مجموعهٔ $F^{(\alpha)}$ بسته است. این امر را می‌توان با توجه به اینکه مجموعهٔ مشتق یک مجموعهٔ بسته، بسته است و همچنین اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است، با استقرا روی α، دید. برای هر α، مجموعهٔ $F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)}$ برابر مجموعهٔ همهٔ نقاط تنهای $F^{(\alpha)}$ است. لذا بنا به قضیهٔ ۷.۴، مجموعه‌ای حداکثر شماراست.

چنانچه $F^{(\alpha+1)} \neq F^{(\alpha)}$، دنبالهٔ ترامتناهی $\langle F^{(\alpha)} \rangle$ نزولی خواهد بود (یعنی، $F^{(\beta)} \supset F^{(\alpha)}$ به‌شرطی که $\alpha < \beta$). بنا به اصل موضوع جایگزینی اوردینال Θ موجود است به‌قسمی که $F^{(\Theta+1)} = F^{(\Theta)}$. [برای اثبات این مطلب، فرض کنید برای هر α، $F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)} \neq \varnothing$ و γ را عدد هارتوگس $\mathcal{P}(F)$ در نظر بگیرید. در این صورت تابع $g(\alpha) = F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)}$ برای $\alpha < \gamma$، نگاشت یک‌به‌یکی از γ بتوی $\mathcal{P}(F)$ است، که تناقض است.] فرض کنید Θ کوچک‌ترین اوردینال از این نوع باشد. [فی‌الواقع، از استدلال ذیل نتیجه می‌شود که Θ اوردینالی کوچک‌تر از ω_1 است.]

فرض کنید $P = F^{(\Theta)}$. داریم $(F^{(\Theta)})' = F^{(\Theta)}$ و لذا P یا تهی است یا تام. تعریف کنید $C = F - P$.

فرض کنید $\langle J_0, J_1, \ldots, J_n, \ldots \rangle$ دنبالهٔ همه بازه‌های باز با نقاط انتهایی گویا باشد. برای هر $a \in C$، اوردینال α_a را اوردینال منحصربه‌فرد $\alpha < \Theta$ در نظر بگیرید به‌قسمی که $a \in F^{(\alpha)} - F^{(\alpha+1)}$ و تعریف کنید

$$f(a) = \text{کوچک‌ترین عدد } n \text{ به‌طوری‌که } J_n \cap F^{(\alpha_a)} = \{a\}.$$

چون a یک نقطهٔ تنها از $F^{(\alpha_a)}$ است، پس بازهٔ J_n فقط در نقطهٔ a با $F^{(\alpha_a)}$ مشترک است، لذا f خوش‌تعریف است.

تابع f مجموعهٔ C را بتوی ω می‌نگارد. نشان می‌دهیم f یک‌به‌یک است و بدین طریق برهان را تکمیل می‌کنیم. پس فرض کنید $a, b \in C$ و $f(a) = f(b) = n$. فرض کنید $\alpha_a \leq \alpha_b$. پس $F^{(\alpha_b)} \subseteq F^{(\alpha_a)}$ و در نتیجه

$$b \in J_n \cap F^{(\alpha_b)} \subseteq J_n \cap F^{(\alpha_a)},$$

پس $b = a$. بنابراین f یک‌به‌یک است و C باید حداکثر شمارا باشد. □

می‌دانیم هر مجموعهٔ بسته و ناشمارا دارای یک زیرمجموعهٔ تام است. این امر چنین به ذهن القا می‌کند که شاید مثال ساده‌ای از یک مجموعهٔ ناشمارا از اعداد حقیقی وجود ندارد که هیچ زیرمجموعهٔ تامی نداشته باشد. حقیقت این است که برای یافتن چنین مثالی، به کار بردن اصل انتخاب ضروری است.

۱۱.۴ مثال. یک مجموعهٔ ناشمارا بدون هیچ زیرمجموعهٔ تام.

ابتدا اصل انتخاب را به کار می‌بریم و دو مجموعهٔ از هم جدا مثل X و Y هر دو با عدد اصلی $۲^{\aleph_۰}$، چنان می‌سازیم که نه X و نه Y، هیچ‌یک زیر مجموعهٔ تام ندارند. مجموعه‌های X و Y در واقع برد دو دنبالهٔ یک‌به‌یک $\langle x_\alpha \mid \alpha < ۲^{\aleph_۰} \rangle$ و $\langle y_\alpha \mid \alpha < ۲^{\aleph_۰} \rangle$ هستند که در پایین آن‌ها را تعریف می‌کنیم.

در فصل ۵ ثابت کردیم که تعداد مجموعه‌های بستهٔ اعداد حقیقی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است. لذا فقط $۲^{\aleph_۰}$ مجموعهٔ تام از اعداد حقیقی وجود دارد. حال $\langle P_\alpha \mid \alpha < ۲^{\aleph_۰} \rangle$ را نگاشت یک‌به‌یکی از $۲^{\aleph_۰}$ بروی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های تام اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. با استقرای ترامتناهی (برای $\alpha < ۲^{\aleph_۰}$) دو دنبالهٔ $\langle x_\alpha \rangle$ و $\langle y_\alpha \rangle$ را می‌سازیم.

دو عضو متمایز مانند $x_۰$ و $y_۰$ از $P_۰$ انتخاب می‌کنیم. با فرض داشتن $\langle x_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ و $\langle y_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ (که در آن $\alpha < ۲^{\aleph_۰}$)، توجه می‌کنیم که مجموعهٔ

$$P_\alpha - \big(\{x_\xi \mid \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi \mid \xi < \alpha\}\big)$$

دارای عدد اصلی $۲^{\aleph_۰}$ است (زیرا، $|P_\alpha| = ۲^{\aleph_۰}$ و $|\alpha| < ۲^{\aleph_۰}$). بنابراین دو عضو متمایز مثل $x_\alpha, y_\alpha \in P_\alpha$ را چنان انتخاب می‌کنیم که هر دوی آن‌ها از هر x_ξ و y_ξ $(\xi < \alpha)$ متمایز باشند.

دو دنبالهٔ $\langle x_\xi \mid \xi < ۲^{\aleph_۰}\rangle$ و $\langle y_\xi \mid \xi < ۲^{\aleph_۰}\rangle$ یک‌به‌یک هستند و برد آن‌ها، یعنی X و Y، دو مجموعهٔ مجزا با عدد اصلی برابر $۲^{\aleph_۰}$ است. نه X و نه Y هیچ‌یک زیرمجموعهٔ تام ندارند. زیرا، اگر P تام باشد، در این صورت اوردینال $\alpha < ۲^{\aleph_۰}$ موجود است که $P = P_\alpha$، بنابراین $P \cap X \neq \varnothing \neq P \cap Y$، چرا که $x_\alpha \in P \cap X$ و $y_\alpha \in P \cap Y$. □

تمرین‌ها

۱.۴ هر مجموعهٔ کامل یا بازه‌ای به شکل $[a,b]$، $(-\infty, a]$ و $[b, +\infty)$ یا $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ است یا اجتماعی از دو مجموعهٔ کامل مجزا.

۲.۴ فرض کنید اجتماعی از هر دستگاه شمارا از مجموعه‌های شمارا، شماراست. ثابت کنید هر مجموعهٔ بستهٔ ناشمارا شامل دو مجموعهٔ بستهٔ شمارای مجزاست (لم تجزیه برای مجموعه‌های بسته).

۳.۴ با استفاده از تمرین ۲.۴، اثبات دیگری از این حقیقت که هر مجموعهٔ ناشمارای بسته دارای عدد اصلی $۲^{\aleph_۰}$ است بیاورید.

۴.۴ فرض کنید A' مجموعه مشتق $A \subseteq \mathbb{R}$ باشد. مجموعه A' بسته است. A بسته است اگر و فقط اگر $A' \subseteq A$. A تام است اگر و فقط اگر $A' = A$ و $A \neq \varnothing$.

۵.۴ مجموعهٔ

$$F = \{۱\} \cup \{۱ - \frac{۱}{۲^{n_۱}} \mid n_۱ \geq ۱\} \cup \{۱ - \frac{۱}{۲^{n_۱}} - \frac{۱}{۲^{n_۱+n_۲}} \mid n_۱ \geq ۱ \text{ و } n_۲ \geq ۱\}$$

بسته است و داریم $F' = \{۱\} \cup \{۱ - \frac{۱}{۲^{n_۱}} \mid n_۱ \geq ۱\}$، $F'' = \{۱\}$ و $F''' = ۰$.

۶.۴ برای مجموعهٔ

$$F = \{۱\} \cup \{۱ - \frac{۱}{۲^{n_۱}} - \frac{۱}{۲^{n_۱+n_۲}} - \cdots - \frac{۱}{۲^{n_۱+n_۲+\cdots+n_k}} \mid k \leq n_۱ \text{ و } n_i \geq ۱ \text{ و } i \leq k\}$$

داریم $F_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{1\}$.

۷.۴ تجزیهٔ مجموعهٔ بستهٔ F به $P\cup C$ که در آن $P\cap C=\varnothing$، P کامل، و C حداکثر شماراست، منحصربه‌فرد است، به‌عبارت‌دیگر، اگر $F = P_1\cup C_1$ که در آن P_1 کامل و P_1 و C_1 مجزا و $|C_1|\le\aleph_0$، آن‌گاه $P_1 = P$ و $C_1 = C$.
[راهنمایی: نشان دهید که P مجموعهٔ همهٔ نقاط چگالش F است.]

۵ مجموعه‌های بورل

قضیهٔ ۱.۴ و نتیجهٔ ۶.۴ نشان می‌دهند که مجموعه‌های بسته و باز یا شمارا هستند یا عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ دارند. ترغیب می‌شویم نتایج مشابهی برای مجموعه‌های قدری پیچیده‌تر، اما نسبتاً ساده، اثبات کنیم. سؤال این است که چگونه چنین مجموعه‌هایی را می‌توان تولید کرد؟ به کاربردن اعمال نظریه‌ـمجموعه‌ای، مثل اجتماع و اشتراک، یکی از آن راه‌هاست. اما می‌دانیم اجتماع و یا اشتراک هر دستگاه متناهی از مجموعه‌های باز، مجدداً مجموعه‌ای باز است، لذا از این طریق مجموعهٔ جدیدی حاصل نمی‌شود. مجموعه‌های بسته نیز همین طور هستند. فکر بعدی این است که اجتماع و اشتراک دستگاه‌های شمارا را در نظر بگیریم. مجموعه‌های بورل را آن دسته از مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم که با اجتماع و اشتراک شمارا گرفتن مکرر از مجموعه‌های بسته و باز به‌دست می‌آیند.

۱.۵ تعریف. مجموعهٔ $B\subseteq\mathbb{R}$ را بورل می‌نامیم هرگاه به هر دستگاه از مجموعه‌ها مانند $S\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند، تعلق داشته باشد.

الف) مجموعه‌های باز و بسته به S تعلق دارند.

ب) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $B_n\in S$، آن‌گاه $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ و $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ نیز به S متعلق باشد.

دستگاه همهٔ مجموعه‌های بورل را با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهند.

به‌بیان‌دیگر، $\mathcal{B} = \bigcap\{S\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \text{را دارد (ب) و (الف) ویژگی‌های } S\}$ کوچک‌ترین گردایه از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی است که شامل همهٔ

مجموعه‌های باز و بسته است و تحت اعمال اجتماع و اشتراک شمارا «بسته» است. [توجه کنید که $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ویژگی‌های (الف) و (ب) را دارد و لذا عمل اشتراک در بالا تعریف شده است.] می‌توان برخی ویژگی‌های مجموعه‌های بورل را با این تعریف اثبات کرد. یک نمونه ارائه خواهیم کرد (همچنین تمرین‌های ۱.۵ و ۲.۵ را ببینید).

مفهوم σـجبر از زیرمجموعه‌های S را در ۱۷.۲ از فصل ۸ تعریف کردیم.

۲.۵ قضیه. گردایهٔ $\mathcal{B}$ متشکل از مجموعه‌های بورل، یک σـجبر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ است.

برهان. تعریف کنید $\mathcal{C} = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - X \in \mathcal{B}\}$. نشان می‌دهیم $\mathcal{C}$ خواص (الف) و (ب) تعریف ۱.۵ را دارد.

اگر X باز باشد، در این صورت $\mathbb{R} - X$ بسته است، و لذا $\mathbb{R} - X \in \mathcal{B}$ و $X \in \mathcal{C}$. به‌نحو مشابه، چون X بسته است پس $X \in \mathcal{C}$. بنابراین، $\mathcal{C}$ خاصیت (الف) را دارد.

اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_n \in \mathcal{C}$، در این صورت برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbb{R} - B_n \in \mathcal{B}$. لذا $\mathbb{R} - \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\mathbb{R} - B_n) \in \mathcal{B}$ و $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$. این مطلب و استدلال مشابه برای اشتراک نشان می‌دهد که $\mathcal{C}$ خاصیت (ب) را دارد.

پس نتیجه می‌گیریم $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. بنابراین از $X \in \mathcal{B}$ نتیجه می‌شود $X \in \mathcal{C}$، که این نیز ایجاب می‌کند که $\mathbb{R} - X \in \mathcal{B}$. □

قضیهٔ ۲.۵ نشان می‌دهد که گردایهٔ مجموعه‌های بورل $\mathcal{B}$، یک σـجبر است که توسط همهٔ مجموعه‌های باز (و یا همهٔ مجموعه‌های بسته) تولید شده است؛ تمرین ۵.۲ در فصل ۸ را ببینید. لیکن برای مطالعهٔ مجموعه‌های بورل بهتر است یک مشخصه‌سازی روشن‌تری از آن‌ها در اختیار داشته باشیم. اجازه دهید یک بار دیگر مرور کنیم و ببینیم چه مجموعه‌هایی، بورل هستند.

نخست، بنا به قسمت (الف) همهٔ مجموعه‌ها باز و بسته بورل هستند. تعریف می‌کنیم

$$\Sigma_1^0 = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid \text{باز است } B\},$$

$$\Pi_1^0 = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid \text{بسته است } B\}.$$

لذا $B \subseteq \Sigma_1^\circ$ و $B \subseteq \Pi_1^\circ$. بعد از این‌ها، بنابر قسمت (ب) اجتماع و اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز باید بورل باشند. اجتماع شمارای مجموعه‌های باز، مجموعه‌ای باز است و مجموعهٔ جدیدی حاصل نمی‌شود (تذکر بعد از قضیهٔ ۱۱.۳ را ببینید)، لذا تعریف می‌کنیم

$$\Pi_2^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Sigma_1^\circ\}.$$

به‌وضوح $\Sigma_1^\circ \subseteq \Pi_2^\circ$ و می‌توان نشان داد شمول در اینجا اکید است (تمرین ۳.۵). پس، از این طریق مجموعه‌های بورل جدیدی به‌دست می‌آید. به نحو مشابه، می‌توان تعریف کرد

$$\Sigma_2^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Pi_1^\circ\}$$

و نشان داد که $\Pi_1^\circ \subset \Sigma_2^\circ \subseteq B$.

روابط $\Pi_1^\circ \subset \Pi_2^\circ$ و $\Sigma_1^\circ \subset \Sigma_2^\circ$ نیز برقرارند (تمرین ۳.۵ را ببینید). روند فوق را می‌توان به‌طور بازگشتی ادامه داد. پس تعریف می‌کنیم

$$\Sigma_3^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Pi_2^\circ\}$$

و به‌نحو مشابه،

$$\Pi_3^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Sigma_2^\circ\}.$$

به‌طور کلی، برای هر $k > 0$ قرار می‌دهیم

$$\Sigma_{k+1}^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Pi_k^\circ\}$$

و

$$\Pi_{k+1}^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \text{ که در آن } B_n \in \Sigma_k^\circ\}.$$

با استقرا می‌توان دید که برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $k > 0$ داریم $\Sigma_k^\circ \subseteq B$ و $\Pi_k^\circ \subseteq B$. همچنین می‌توان نشان داد (با استفاده از اصل انتخاب که ما در اینجا اثبات را

نمی‌آوریم) که

$$\Sigma_k^\circ \cup \Pi_k^\circ \subset \Sigma_{k+1}^\circ \quad \text{و} \quad \Sigma_k^\circ \cup \Pi_k^\circ \subset \Pi_{k+1}^\circ،$$

لذا سلسله‌وار در هر مرحله، مجموعه‌های بورل جدیدی تولید می‌شود. شاید انتظار داشته باشیم که همهٔ مجموعه‌های بورل بدین صورت تولید شوند، یعنی اینکه $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^\infty \Sigma_k^\circ = \bigcup_{k=1}^\infty \Pi_k^\circ$، لیکن این طور نیست. دنبالهٔ $\langle B_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_n \in \Sigma_{n+1}^\circ \subseteq \mathcal{B}$، ولی یا $\bigcup_{n=0}^\infty B_n$ و یا $\bigcap_{n=0}^\infty B_n$ به هیچ‌یک از Σ_k° یا Π_k° تعلق ندارند (البته این دو مجموعه بورل هستند). در اینجا نیز نیاز داریم که ساخت سلسلهٔ بالا را در حوزهٔ «ترامتناهی» ادامه دهیم.

۳.۵ تعریف. برای هر اوردینال $\alpha < \omega_1$ گردایهٔ مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی به نام Σ_α° و Π_α° را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف)

$$\Sigma_1^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B \text{ مجموعه‌ای باز است}\},$$
$$\Pi_1^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B \text{ مجموعه‌ای بسته است}\}.$$

ب)

$$\Sigma_{\alpha+1}^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcup_{n=0}^\infty B_n \text{ که در آن } B_n \in \Pi_\alpha^\circ\},$$
$$\Pi_{\alpha+1}^\circ = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcap_{n=0}^\infty B_n \text{ که در آن } B_n \in \Sigma_\alpha^\circ\}.$$

ج)

$$\Sigma_\alpha^\circ=\{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcup_{n=0}^\infty B_n \text{ که در آن اوردینال } \beta < \alpha \text{ موجود است که } B_n \in \Pi_\beta^\circ\},$$
$$\Pi_\alpha^\circ=\{B \subseteq \mathbb{R} \mid B = \bigcap_{n=0}^\infty B_n \text{ که در آن اوردینال } \beta < \alpha \text{ موجود است که } B_n \in \Sigma_\beta^\circ\}.$$

(α اوردینال حدی است).

[با توجه به لم بعدی، برای اوردینال‌های تالی به‌جای عبارت (ب) می‌توان از عبارت (ج) استفاده کرد.]

۴.۵ لم.

(۱) برای هر $\alpha < \omega_1$،

$$\Pi^\circ_\alpha \subseteq \Sigma^\circ_{\alpha+1} \quad \text{و} \quad \Sigma^\circ_\alpha \subseteq \Pi^\circ_{\alpha+1}.$$

(۲) برای هر $\alpha < \omega_1$،

$$\Pi^\circ_\alpha \subseteq \Pi^\circ_{\alpha+1} \quad \text{و} \quad \Sigma^\circ_\alpha \subseteq \Sigma^\circ_{\alpha+1}.$$

(۳) اگر $B \in \Sigma^\circ_\alpha$، آن‌گاه $\mathbb{R} - B \in \Pi^\circ_\alpha$ و اگر $B \in \Pi^\circ_\alpha$، آن‌گاه $\mathbb{R} - B \in \Sigma^\circ_\alpha$.

(۴) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_n \in \Sigma^\circ_\alpha$، آن‌گاه $\bigcup_{n=0}^\infty B_n \in \Sigma^\circ_\alpha$ و اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $B_n \in \Pi^\circ_\alpha$، آن‌گاه $\bigcap_{n=0}^\infty B_n \in \Pi^\circ_\alpha$.

(۵) اگر $\alpha < \beta$، آن‌گاه $\Sigma^\circ_\alpha \subseteq \Sigma^\circ_\beta$، $\Sigma^\circ_\alpha \subseteq \Pi^\circ_\beta$ و $\Pi^\circ_\alpha \subseteq \Pi^\circ_\beta$، $\Pi^\circ_\alpha \subseteq \Sigma^\circ_\beta$.

برهان.

(۱) واضح است. کافی است در تعریف ۳.۵ (ب) برای هر n، قرار دهید $B_n = B$.

(۵) هر مجموعهٔ باز در Σ°_2 قرار دارد (تمرین ۳.۵ را ببینید)، به همین ترتیب، هر مجموعهٔ بسته در Π°_2 قرار دارد. بنابراین $\Sigma^\circ_1 \subseteq \Sigma^\circ_2$ و $\Pi^\circ_1 \subseteq \Pi^\circ_2$. به‌علاوه، بنا به قسمت (۱)، داریم $\Pi^\circ_1 \subseteq \Sigma^\circ_2$ و $\Sigma^\circ_1 \subseteq \Pi^\circ_2$. با استقرا روی β نشان می‌دهیم که حکم برای هر $\alpha < \beta$ برقرار است.

(۲) از (۵) نتیجه می‌شود.

(۳) با استقرا روی α نتیجه می‌شود.

(۴) این گزاره اصل انتخاب شمارا را نیاز دارد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ اگر $B_n \in \Sigma^\circ_\alpha$، آن‌گاه گردایهٔ شمارایی مانند $\{B_{mn} \mid m \in \mathbb{N}\}$ از مجموعه‌های $B_{mn} \in \bigcup_{\gamma<\alpha} \Pi^\circ_\gamma$ موجود است به‌قسمی که $B_n = \bigcup_{m=0}^\infty B_{mn}$. برای هر n، یک چنین گردایه‌ای (با حفظ نامگذاری آن به‌صورت $\langle B_{mn} \mid m \in \mathbb{N}\rangle$) انتخاب کنید، در این صورت داریم

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} B_{mn}$$

یعنی $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ اجتماع گردایهٔ شمارای $\{B_{mn} \mid (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ است و لذا در Σ°_α قرار می‌گیرد.

اثبات Π°_α نیز به‌طریق مشابه صورت می‌گیرد. □

(با استقرا روی α) واضح است که Σ°_α و Π°_α از مجموعه‌های بورل تشکیل شده‌اند. نکته حائز اهمیت این است که این سلسله‌مراتب، همهٔ مجموعه‌های بورل را دربر می‌گیرد.

۵.۵ قضیه. یک مجموعه از اعداد حقیقی یک مجموعهٔ بورل است اگر و تنها اگر به‌ازای اوردینالی مانند $\alpha < \omega_1$ به Σ°_α متعلق باشد (اگر و تنها اگر به‌ازای اوردینالی مثل $\alpha < \omega_1$ به Π°_α متعلق باشد).

برهان. کافی است نشان دهیم مجموعهٔ

$$S = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^\circ_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^\circ_\alpha$$

تحت اجتماع و اشتراک شمارا بسته است. برای این کار فرض کنید $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های S باشد. نشان می‌دهیم که مثلاً $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ در S قرار دارد.

برای هر n، اوردینال α_n را برابر کوچک‌ترین αیی در نظر بگیرید که برای آن $B_n \in \Pi^\circ_\alpha$. بنابراین مجموعهٔ $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ متشکل از اوردینال‌های کوچک‌تر از ω_1 و لذا حداکثر شماراست. لذا (بنا به اصل انتخاب شمارا) سوپریمم آن $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ یک اوردینال کوچک‌تر از ω_1 است. بنا به لم ۴.۵، برای هر n داریم $B_n \in \Pi^\circ_\alpha$. نتیجتاً، مجموعهٔ $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ به $\Sigma^\circ_{\alpha+1}$ تعلق دارد و بنابراین به S نیز متعلق است. □

بدون اثبات، فقط متذکر می‌شویم که قضیهٔ ۵.۴ را می‌توان به همهٔ مجموعه‌های بورل تعمیم داد، بنابراین هر مجموعهٔ بورل ناشمارا شامل یک زیرمجموعهٔ تام است. به خصوص، هر مجموعهٔ بورل ناشمارا دارای عدد اصلی $2^{\aleph_0}$ است. در فصل ۸ اشاره کردیم که برای σـجبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ اعداد حقیقی $\mathfrak{M}$

داریم، $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{M}$، لیکن مجموعه‌های لبگ اندازه‌پذیر نیز وجود دارند که بورل نیستند. در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نمی‌توان ثابت کرد که همه مجموعه‌های لبگ ناشمارا، دارای عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ هستند.

ساخت سلسله‌مراتبی مجموعه‌های بورل که در بالا دیدیم در واقع یک حالت خاص از یک روش کلی است. توجه می‌کنیم که این اجتماع و اشتراک متناهی‌وار که در بالا استفاده کردیم، به نوعی تعمیم همان اعمال $\cup$ و $\cap$ معمولی هستند. در اینجا تعریفی ارائه می‌کنیم. گوییم F یک عمل نامتناهی‌وار (شمارا) روی A است هرگاه F تابعی روی یک زیرمجموعه از $A^{\mathbb{N}}$ (مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های نامتناهی از اعضای A) بتوی A باشد. از این طریق، می‌توان ساختار با اعمال نامتناهی‌وار را معرفی کرد. بدین صورت که تعریف یک نمونه (بخش ۵ از فصل ۳ را ببینید) را با شرط $f_j \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ و الزام اینکه هرگاه $f_j = \mathbb{N}$، F_j یک عمل نامتناهی‌وار است، گسترش بدهیم. تعریف مجموعهٔ بسته برای زیرمجموعهٔ $B \subseteq A$ اساساً بدون تغییر می‌ماند؛ الا اینکه، چنانچه $f_j = \mathbb{N}$ برای هر دنبالهٔ $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$ که در آن برای هر $i \in \mathbb{N}$، $a_i \in B$ و F_j تعریف شده است، شرط کنیم $F_j\left(\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle\right)$. بستار مجموعهٔ $C \subseteq A$، یعنی $\overline{C}$، در اینجا نیز همان کوچک‌ترین مجموعهٔ بسته است که شامل همهٔ اعضای C است.

با این اصطلاحات جدید، دستگاه مجموعه‌های بورل برابر بستار دستگاه همهٔ مجموعه‌های باز و بسته تحت اشتراک و اجتماع نامتناهی‌وار است. به عبارت دقیق‌تر، اگر تعریف کنیم $\mathfrak{A} = \langle A, F_1, F_2 \rangle$ که در آن $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$، $F_1\left(\langle B_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle\right) = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ و $F_2\left(\langle B_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle\right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ و $C = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid$ باز یا بسته است $B\}$، در این صورت داریم $\mathcal{B} = \overline{C}$.

در تمرین ۹.۵ مثال دیگری از یک ساختار با اعمال نامتناهی‌وار و یک زیرمجموعهٔ بسته و جذاب ریاضی ارائه شده است.

عدد اصلی بستار در حالت کلی سؤال مهمی است. ساده‌ترین نتیجه‌ای را که پاسخی به این پرسش بود در قضیهٔ ۱۴.۳ از فصل ۴ اثبات کردیم. در آنجا فرض بر این بود که C حداکثر شماراست و همهٔ اعمال متناهی هستند. این نتیجه را تعمیم می‌دهیم، ابتدا برای مجموعه دلخواه C و بعد برای ساختار با اعمال نامتناهی‌وار.

۶.۵ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A} = (A, \langle R_0, \ldots, R_{m-1}\rangle, \langle F_0, \ldots, F_{n-1}\rangle)$ یک ساختار باشد و $C \subseteq A$. فرض کنید $\overline{C}$ بستار C را نشان بدهد. اگر C متناهی باشد، در این صورت $\overline{C}$ حداکثر شماراست و اگر C نامتناهی باشد، آن‌گاه $|C| = |\overline{C}|$.

برهان. در قضیهٔ ۱۰.۵ از فصل ۳ ثابت کردیم که چنانچه $C_0 = C$ و $C_{i+1} = C_i \cup F_0[C_i^{f_0}] \cup \cdots \cup F_{n-1}[C_i^{f_{n-1}}]$، در این صورت $\overline{C} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$. اگر C متناهی باشد، در این صورت هر مجموعهٔ C_i متناهی است و بنابراین $|\overline{C}| \leq \aleph_0$. اگر C نامتناهی باشد و $|C| = \aleph_\alpha$، می‌توان با استقرا ثابت کرد که برای هر k داریم $|C_k| = \aleph_\alpha$. در واقع فرض کنید حکم استقرا برای C_i درست باشد، پس $|C_i^{f_i}| \leq \aleph_\alpha^{f_i} = \aleph_\alpha$، لذا $|F_j[C_i^{f_i}]| \leq \aleph_\alpha$ و بنابراین $|C_{i+1}| = \aleph_\alpha$. از این‌رو داریم $|\overline{C}| = \aleph_0 \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. □

قضیهٔ ٦.۵ را برای حالتی که $\mathfrak{A}$ یک ساختار با اعمال نامتناهی‌وار باشد نیز می‌توان تعمیم داد، لیکن برآورد عدد اصلی در آن تغییر می‌کند. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک ساختار باشد و برای ساده کردن بحث فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک عمل مانند F داشته باشد و همچنین F نیز عمل متناهی باشد (مسلم است نتیجه را می‌توان برای حالتی که ساختار بیش از یک عمل داشته باشد، تعمیم داد). پس $\mathfrak{A}$ عالمی مثل A دارد و F تابعی روی یک زیرمجموعه از A^ω بتوی A است، که در آن A^ω مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ با مقادیر در A است.

۷.۵ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A} = \langle A, F\rangle$ یک ساختار باشد که در آن F یک عمل روی زیرمجموعه‌ای از A^ω بتوی A است. همچنین فرض کنید $C \subseteq A$. بستار C در $\mathfrak{A}$ را با $\overline{C}$ نشان می‌دهیم، پس

$$\overline{C} = \bigcap \{X \subseteq A \mid F[X^\omega] \subseteq X \text{ و } C \subseteq X\}.$$

اگر C حداقل دو عضو داشته باشد، آن‌گاه $|\overline{C}| \leq |C|^{\aleph_0}$.

برهان. یک ω_1ـدنباله مانند

$$C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq C_\alpha \subseteq \cdots \quad (\alpha < \omega_1)$$

از زیرمجموعه‌های A به‌صورت زیر می‌سازیم. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} C_\circ &= C, \\ C_{\alpha+1} &= C_\alpha \cup F[C_\alpha^\omega], \\ C_\alpha &= \bigcup_{\xi<\alpha} C_\xi \quad (\text{اوردینال حدی است } \alpha). \end{aligned}$$

فرض کنید $\overline{C}$ بستار C در $\mathfrak{A}$ باشد و قرار دهید $D = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. با استقرا روی α داریم $C_\alpha \subseteq \overline{C}$ و بنابراین $D \subseteq \overline{C}$. از طرف دیگر، اگر $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ یک دنباله در D باشد، در این صورت به‌ازای یک $\alpha < \omega_1$یی، $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle \in C_\alpha$. در واقع اگر برای هر n، کوچک‌ترین ξ را که برای آن $a_n \in C_\xi$ با ξ_n نشان دهیم کافی است تعریف کنیم $\alpha = \sup\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. حال اگر $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle \in \operatorname{dom} F$ در این صورت $F(\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle) \in C_{\alpha+1}$، پس $F[D^\omega] \subseteq D$ و لذا $\overline{C} \subseteq D$.

پس دیدیم $\overline{C} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. برای برآورد اندازهٔ $\overline{C}$ ابتدا با استقرا روی α، نشان می‌دهیم $|C_\alpha| \le |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ}$. به‌وضوح این حکم برای $\alpha = \circ$ درست است. اگر این تقریب برای α درست باشد، در این صورت داریم

$$|C_{\alpha+1}| \le |C_\alpha| + |C_\alpha|^{\aleph_\circ} \le \left(|C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ}\right)^{\aleph_\circ} = |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ}.$$

حال چنانچه α اوردینال حدی باشد و برآورد مذکور برای اوردینال $\xi < \alpha$ درست باشد، در این صورت

$$|C_\alpha| \le |\alpha| \cdot |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ} = |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ}$$

(زیرا $|\alpha| \le \aleph_\circ$). پس نهایتاً داریم

$$|\overline{C}| \le \aleph_1 \cdot |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ} = |C|^{\aleph_\circ} \cdot 2^{\aleph_\circ}$$

چرا که $\aleph_1 \cdot 2^{\aleph_\circ} = 2^{\aleph_\circ}$. همچنین اگر $|C| \ge 2$، در این صورت $|C|^{\aleph_\circ} \ge 2^{\aleph_\circ}$ و لذا داریم $|\overline{C}| \le |C|^{\aleph_\circ}$. □

تمرین‌ها

۱.۵ اگر X بورل و $a \in \mathbb{R}$، آن‌گاه $X + a = \{x + a \mid x \in X\}$ بورل است. [راهنمایی: از اثبات قضیهٔ ۵.۲ الهام بگیرید.]

۲.۵ اگر X بورل و $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، آن‌گاه $f^{-1}[X]$ بورل است.

۳.۵ ثابت کنید هر بازهٔ باز اجتماعی از یک دستگاه شمارا از بازه‌های بسته است و از آن نتیجه بگیرید که $\Sigma^\circ_1 \subseteq \Sigma^\circ_2$. چون $\Pi^\circ_1 \subseteq \Sigma^\circ_2$، نتیجه بگیرید که $\Sigma^\circ_1 \subset \Sigma^\circ_2$ و $\Pi^\circ_1 \subset \Sigma^\circ_2$. این نیز بی‌درنگ نتیجه می‌دهد که $\Pi^\circ_1 \subset \Pi^\circ_2$ و $\Sigma^\circ_1 \subset \Pi^\circ_2$.

۴.۵ با استقرا ثابت کنید که $\Sigma^\circ_n \cup \Pi^\circ_n \subseteq \Sigma^\circ_{n+1} \cap \Pi^\circ_{n+1}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$.

۵.۵ ثابت کنید که برای هر α، هر دوی Σ°_α و Π°_α تحت اجتماع‌ها و اشتراک‌های متناهی بسته است. به‌عبارت‌دیگر، اگر $B_1, B_2 \in \Sigma^\circ_\alpha$، آن‌گاه $B_1 \cup B_2 \in \Sigma^\circ_\alpha$ و $B_1 \cap B_2 \in \Sigma^\circ_\alpha$ و به‌طور مشابه برای Π°_α.

۶.۵ فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. اگر $B \in \Sigma^\circ_\alpha$، آن‌گاه $f^{-1}[B] \in \Sigma^\circ_\alpha$ و به‌طور مشابه برای Π°_α.

۷.۵ نشان دهید که عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های بورل $\mathcal{B}$ برابر $2^{\aleph_0}$ است.

۸.۵ ثابت کنید مجموعه‌های بورل، بستار مجموعهٔ همه بازه‌های باز با نقاط انتهایی گویا تحت اجتماع و اشتراک‌های نامتناهی هستند. این نشان می‌دهد که در یک ساختار با عمل‌های نامتناهی‌وار، بستار یک مجموعهٔ شمارا می‌تواند ناشمارا باشد.

۹.۵ فرض کنید Fn مجموعه همهٔ توابع از زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$ باشد. عمل نامتناهی‌وار $\lim(\text{limit})$ روی Fn به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $\lim(\langle f_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle) = f$ که در آن $f(x) = \lim_{i\to+\infty} f_i(x)$ به‌شرطی که طرف راست وجود داشته باشد و در غیر این صورت، تعریف نشده است. اعضای بستار مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته تحت $\lim$ را توابع بِر می‌نامند. نشان دهید که توابع بِر لزوماً پیوسته نیستند. به‌ویژه، نشان دهید که توابع

مشخصهٔ اعداد صحیح و گویا، توابع بِر هستند.

۱۰.۵ برای $\alpha < \omega_1$، توابع (روی یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ بتوی $\mathbb{R}$) از ردهٔ α را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: توابع از ردهٔ ۰، همهٔ توابع پیوسته هستند. f از ردهٔ α است هرگاه $f = \lim_{n\to\infty} f_n$، که در آن هر f_n از رده‌ای کمتر از α است. نشان دهید که توابع بِر دقیقاً توابع از ردهٔ α است که در اینجا $\alpha < \omega_1$.

۱۱.۵ نشان دهید که عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ توابع بِر برابر $2^{\aleph_0}$ است.

فصل ۱۱

پالایه‌ها و فراپالایه‌ها

۱ پالایه‌ها و ایدال‌ها

در این فصل ویژگی‌های عمیق‌تری از مجموعه‌ها را در حالت کلی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برخلاف فصل‌های قبل، ما در این فصل خود را نه به مجموعه‌های اعداد طبیعی و حقیقی محدود می‌کنیم و نه منحصراً به اوردینال‌ها و کاردینال‌ها می‌پردازیم. بلکه در این فصل به گردایهٔ مجرد مجموعه‌ها می‌پردازیم و ویژگی‌های آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. چند مفهوم را تعریف می‌کنیم که در کاربردهای نظریهٔ مجموعه‌ها از اهمیت اساسی برخوردارند. جالب توجه است که بررسی عمیق‌تر این مفاهیم راه را برای نظریهٔ کاردینال‌های بزرگ هموار می‌کند. در فصل ۱۳ کاردینال‌های بزرگ را مطالعه خواهیم کرد.

در ابتدا مفهوم یک پالایه از مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم. پالایه‌ها نقش بسیار مهمی در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات ایفا می‌کنند.

۱.۱ تعریف. فرض کنید S مجموعهٔ غیرتهی باشد. منظور از یک پالایه روی S عبارت است از یک گردایهٔ مانند F از زیرمجموعه‌های S به‌قسمی که در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $S \in F$ و $\varnothing \notin F$.

ب) اگر $X \in F$ و $Y \in F$، آن‌گاه $X \cap Y \in F$.
ج) اگر $X \in F$ و $X \subseteq Y \subseteq S$، آن‌گاه $Y \in F$.

گردایهٔ $F = \{S\}$ مثال بدیهی از یک پالایه روی S است که فقط از یک مجموعه، یعنی خود S، تشکیل شده است. این پالایهٔ بدیهی روی S کوچک‌ترین پالایه روی S است، به‌عبارت‌دیگر، هر پالایه روی S آن را در بر دارد.

فرض کنید A زیرمجموعهٔ غیرتهی از S باشد. گردایهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$F = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}.$$

گردایهٔ F در شرایط تعریف ۱.۱ صدق می‌کند، لذا یک پالایه روی S است. این پالایه را پالایهٔ اساسی تولید شده توسط A روی S می‌نامند.

چنانچه A فقط یک نقطه داشته باشد، یعنی $A = \{a\}$ و $a \in S$، در این صورت پالایهٔ اساسی

$$F = \{X \subseteq S \mid a \in X\}$$

بیشین است، بدین معنی که پالایهٔ دیگری، مثلاً F'، روی S موجود نیست به‌قسمی که $F \subset F'$ (به این دلیل که اگر $X \in F' - F$، در این صورت $a \notin X$. اما $\{a\} \in F'$ و لذا $\varnothing = X \cap \{a\} \in F'$، که تناقض است).

ثابت خواهیم کرد پالایه‌های بیشینی وجود دارند که اساسی نیستند.

برای ساختن نمونه‌ای از یک پالایهٔ غیراساسی، فرض کنید S مجموعه‌ای نامتناهی باشد و تعریف کنید

$$F = \{X \subseteq S \mid \text{متناهی است } S-X\} \tag{۲.۱}$$

F در واقع پالایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متمم متناهی S است. (X را زیر مجموعهٔ متمم متناهی از S نامند هرگاه $S - X$ متناهی باشد.) F پالایه است، به این دلیل که اشتراک هر دو زیرمجموعهٔ متمم متناهی از S باز هم زیرمجموعه‌ای متمم متناهی است. اما F پالایهٔ اساسی نیست، زیرا چنانچه $A \in F$، در این صورت زیرمجموعهٔ سرهٔ X از A موجود است به‌قسمی که $X \in F$ (X را می‌توان هر زیرمجموعهٔ متمم متناهی از A گرفت به‌طوری‌که $X \neq A$).

۳.۱ تعریف. فرض کنید S یک مجموعهٔ ناتهی باشد. منظور از یک ایدال روی S عبارت است از یک گردایه، مانند I، از زیرمجموعه‌های S که در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $\varnothing \in I$ و $S \notin I$.

ب) اگر $X \in I$ و $Y \in I$، آن‌گاه $X \cup Y \in I$.

ج) اگر $Y \in I$ و $X \subseteq Y$، آن‌گاه $X \in I$.

ایدال $\{\varnothing\}$ را ایدال بدیهی روی S می‌نامند. ایدال اصلی عبارت است از یک ایدال به‌صورت

$$I = \{X \mid X \subseteq A\}, \tag{۴.۱}$$

که در آن $A \subseteq S$.

ایدال‌ها و پالایه‌ها به‌صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند. اگر F یک پالایه روی S باشد، در این صورت

$$I = \{S - X \mid X \in F\} \tag{۵.۱}$$

یک ایدال است، و بالعکس، اگر I یک ایدال باشد، در این صورت

$$F = \{S - X \mid X \in I\} \tag{۶.۱}$$

یک پالایه است. دو شیء تعریف شده در (۵.۱) و (۶.۱) را دوگان یکدیگر می‌نامند.

پالایهٔ زیرمجموعه‌های متمم متناهی S دوگان ایدال زیرمجموعه‌های متناهی S است. در تمرین ۲.۱ و ۳.۱، مثال‌های دیگری از ایدال‌های غیر اصلی داده شده است.

یادآوری می‌کنیم (تعریف ۳.۳ از فصل ۱۰) که گردایهٔ ناتهی، مانند G، دارای ویژگی اشتراک متناهی است هرگاه هر زیرخانوادهٔ ناتهی و متناهی، مثل $\{X_۱, \ldots, X_n\}$، از G دارای اشتراک ناتهی باشد، یعنی $X_۱ \cap X_۲ \cap \cdots \cap X_n \neq \varnothing$.

از قسمت‌های (الف) و (ب) تعریف ۱.۱ نتیجه می‌شود که هر پالایه دارای ویژگی اشتراک متناهی است. در حقیقت، اگر G زیرگردایه‌ای از یک پالایهٔ F باشد، در این صورت G ویژگی مقطع متناهی دارد.

بالعکس، هر مجموعه که ویژگی اشتراک متناهی داشته باشد، زیرگردایه‌ای از یک پالایه است.

۷.۱ لم. فرض کنید $G \neq \varnothing$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد و فرض کنید G دارای ویژگی اشتراک متناهی باشد. در این صورت پالایه‌ای مانند F روی S یافت می‌شود به‌قسمی که $G \subseteq F$.

برهان. فرض کنید F گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S، مانند X، باشد به‌قسمی که زیرمجموعهٔ متناهی $\{X_1, \ldots, X_n\}$ از G موجود باشد که

$$X_1 \cap \cdots \cap X_n \subseteq X.$$

به‌وضوح، S در F قرار دارد و چون G ویژگی اشتراک متناهی دارد، پس $\varnothing$ در F نیست. مسلم است که F در شرط (ج) تعریف ۱.۱ صدق می‌کند. اما برای اثبات شرط (ب)، هرگاه $X_1, \ldots, X_n \in G$ موجود باشند که $X \supseteq X_1 \cap \cdots \cap X_n$ و به همین صورت اگر $Y_1, \ldots, Y_m \in G$ موجود باشند به‌طوری‌که $Y \supseteq Y_1 \cap \cdots \cap Y_m$، در این صورت $X \cap Y \supseteq X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_m$، و لذا $X \cap Y \in F$. بنابراین F یک پالایه است. $\square$

پالایه‌ای که در لم ۷.۱ ساختیم در واقع کوچک‌ترین پالایه روی S است که گردایهٔ G را توسیع می‌دهد. در این حالت گوییم G پالایهٔ F را تولید می‌کند، تمرین ۶.۱ را ببینید.

۸.۱ مثال. فرض کنید S فضای اقلیدسی و a نقطه‌ای در S باشد. گردایهٔ G را مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های باز U از S تعریف کنید که $a \in U$. در این صورت G ویژگی اشتراک متناهی دارد و بنابراین یک پالایه مانند F روی S تعریف می‌کند. F را پالایهٔ همسایگی‌های a می‌نامند.

۹.۱ مثال. چگالی. فرض کنید A یک مجموعه از اعداد طبیعی باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$، تعداد اعضای A را که کوچک‌تر از n هستند با $A(n)$ نشان می‌دهیم، یعنی $A(n) = |A \cap \{\circ, \dots, n - ۱\}|$. چنانچه حد

$$d(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{A(n)}{n}$$

موجود باشد آن را چگالی A می‌نامند. مثلاً، چگالی مجموعهٔ اعداد زوج برابر ۱/۲ است (تمرین ۷.۱). چگالی هر مجموعهٔ متناهی برابر صفر است، به‌علاوه مجموعه‌های نامتناهی با چگالی صفر نیز وجود دارند. (مثلاً مجموعهٔ توان‌های ۲، $\{۲^n \mid n \in \mathbb{N}\}$، تمرین ۸.۱ را ببینید.)

فرض کنید A و B دو مجموعه از اعداد طبیعی باشند. اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه برای هر n، $A(n) \subseteq B(n)$، و لذا اگر چگالی A و B هر دو موجود باشد، داریم $d(A) \leq d(B)$. به خصوص، اگر $d(B) = \circ$، در این صورت $d(A) = \circ$.

همچنین برای هر n، $(A \cup B)(n) \leq A(n) + B(n)$ و اگر A و B از هم مجزا باشند داریم $(A \cup B)(n) = A(n) + B(n)$. بنابراین $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$ (به شرط وجود چگالی‌ها) و اگر A و B از هم مجزا باشند $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$. چنانچه $d(A)$ و $d(B)$ هردو برابر صفر باشند، در این صورت داریم $d(A \cup B) = \circ$.

اکنون می‌توان مثالی از یک ایدال روی $\mathbb{N}$ به‌دست آورد. این ایدال، ایدال مجموعه‌ها با چگالی صفر است که به‌صورت

$$I_d = \{A \mid d(A) = \circ\}$$

تعریف می‌شود. به‌وضوح، داریم $\varnothing \in I_d$ و $\mathbb{N} \notin I_d$ (چون $d(\mathbb{N}) = ۱$). همچنین اگر $A \subseteq B$ و $B \in I_d$، در این صورت $A \in I_d$ و اگر $A \in I_d$ و $B \in I_d$ در این صورت $A \cup B \in I_d$. بنابراین I_d به‌روشنی یک ایدال است. همان‌طور که اشاره شد، I_d همهٔ مجموعه‌های متناهی و همچنین برخی مجموعه‌های نامتناهی را در بر دارد.

تذکر آخر اینکه، چگالی لزوماً برای هر مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{N}$ تعریف نمی‌شود. ساختن مجموعه‌ای مثل A که برای آن $\lim_{n \to +\infty} A(n)/n$ موجود نباشد، دشوار نیست (تمرین ۹.۱).

این بخش را با معرفی مفهوم مهمی که در آنالیز کاربردهای فراوانی دارد به پایان می‌بریم.

۱۰.۱ تعریف. منظور از یک اندازه روی مجموعهٔ S عبارت است از یک تابع حقیقی ـ مقدار مانند m که روی $\mathcal{P}(S)$ تعریف شده است و در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $m(\varnothing) = \circ$، $m(S) > \circ$.

ب) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $m(A) \leq m(B)$.

ج) اگر A و B از هم جدا باشند، آن‌گاه $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

(توجه کنید که تابع چگالی روی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ همهٔ شرایط بالا را دارد، الا اینکه روی همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ تعریف نشده است.)

از تعریف نتیجه می‌شود که برای هر A، $m(A) \geq \circ$ و $m(S - A) = m(S) - m(A)$. خاصیت (ج) را خاصیت متناهیاً جمعی می‌نامند. به‌وضوح، برای هر گردایهٔ متناهی از مجموعه‌های مجزا مانند $\{A_\text{۱}, \ldots, A_n\}$ داریم

$$m(A_\text{۱} \cup \cdots \cup A_n) = m(A_\text{۱}) + \cdots + m(A_n).$$

در اینجا ما فقط می‌توانیم دو نمونهٔ بدیهی از اندازه را ذکر کنیم.

۱۱.۱ مثال. فرض کنید S مجموعهٔ متناهی باشد و برای هر $A \subseteq S$ تعریف کنید $m(A) = |A|$. m را اندازهٔ شمارشی روی S می‌نامند.

۱۲.۱ مثال. فرض کنید S مجموعه‌ای ناتهی باشد و $a \in S$. اگر $a \in A$، تعریف کنید $m(A) = \text{۱}$ و اگر $a \notin A$، $m(A) = \circ$. (m را یک اندازهٔ بدیهی می‌نامند.)

در بخش بعدی، اندازه‌های غیربدیهی روی $\mathbb{N}$ خواهیم ساخت.

تمرین‌ها

۱.۱ اگر S مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی باشد، آن‌گاه هر پالایه روی S یک پالایهٔ اصلی است.

۲.۱ فرض کنید S یک مجموعهٔ ناشمارا و I گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های $X \subset S$ باشد به‌طوری‌که $|X| \leq \aleph_0$. در این صورت I یک ایدال غیراصلی روی S است.

۳.۱ فرض کنید S مجموعهٔ نامتناهی و $Z \subseteq S$ چنان باشد که Z و $S - Z$ نامتناهی هستند. گردایهٔ $I = \{X \subseteq S \mid$ متناهی است $X - Z\}$ یک ایدال غیراصلی است.

۴.۱ اگر مجموعهٔ $A \subseteq S$ بیش از یک عضو داشته باشد، آن‌گاه پالایهٔ اصلی تولید شده توسط A بیشین نیست.

۵.۱ اگر $\mathcal{F}$ مجموعهٔ غیرتهی از پالایه‌های روی S باشد، آن‌گاه $\bigcap\{F \mid F \in \mathcal{F}\}$ نیز یک پالایه روی S است.

۶.۱ پالایهٔ ساخته‌شده در اثبات لم ۷.۱ کوچک‌ترین پالایه روی S است که شامل گردایهٔ G است.

۷.۱ فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی باشد که بر عدد مفروض $p > 0$ بخش‌پذیرند. نشان دهید $d(A) = 1/p$.

۸.۱ ثابت کنید که مجموعهٔ $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ دارای چگالی صفر است.

۹.۱ مجموعهٔ A از اعداد طبیعی را طوری بسازید که

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 0 \quad \text{و} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} = 1.$$

۲ فراپالایه‌ها

۱.۲ تعریف. پالایهٔ U روی S را فراپالایه می‌نامند هرگاه برای هر $X \subseteq S$، یا $X \in U$ یا $S - X \in U$.

ایدال اول مفهوم دوگان برای فراپالایه است.

۲.۲ تعریف. ایدال I روی S را ایدال اول نامند هرگاه برای هر $X \subseteq S$، یا $X \in I$ یا $S - X \in I$.

۳.۲ لم. پالایهٔ F روی S فراپالایه است اگر و تنها اگر یک پالایهٔ بیشین روی S باشد.

برهان. اگر F یک فراپالایه باشد، در این صورت F یک پالایهٔ بیشین است. برای اثبات این حکم، فرض کنید F' یک پالایه روی S چنان باشد که $F \subset F'$. در این صورت مجموعهٔ $X \subseteq S$ موجود است که در $F' - F$ قرار دارد. چون F یک فراپالایه است و $S - X$ در F قرار دارد، پس در F' نیز قرار دارد. لذا داریم $\varnothing = X \cap (S - X) \in F$، که تناقض است.

بالعکس، فرض کنید F یک پالایه باشد که فراپالایه نیست. مجموعهٔ $X \subseteq S$ وجود دارد که نه X و نه $S - X$ هیچ‌یک در F قرار ندارند. تعریف کنید $G = F \cup \{X\}$. ادعا می‌کنیم G دارای ویژگی اشتراک متناهی است.

اگر X_1، ...، X_n در F قرار داشته باشند، در این صورت $Y = X_1 \cap \cdots \cap X_n \in F$ و همچنین $Y \cap X \neq \varnothing$، زیرا در غیر این صورت $Y \subseteq S - X$ و لذا $S - X \in F$، که با فرض در تناقض است. بنابراین، $X_1 \cap \cdots \cap X_n \cap X \neq \varnothing$ که بدین معنی است که $G = F \cup \{X\}$ دارای ویژگی اشتراک متناهی است.

بنابراین پالایهٔ F' روی S چنان موجود است که $F \cup \{X\} \subseteq F'$. اما این به این معنی است که F یک پالایهٔ بیشین نیست. □

قبلاً دیدیم که پالایه‌های اساسی وجود دارند که بیشین نیستند. به بیان دیگر، فراپالایه‌های اساسی وجود دارند. اما آیا فراپالایه‌های غیراساسی نیز وجود دارند؟

فرض کنید S یک مجموعهٔ نامتناهی باشد و F پالایهٔ زیرمجموعه‌های متمم متناهی S. اگر U یک فراپالایه باشد و U گسترشی از F باشد، در این صورت U نمی‌تواند اساسی باشد. پس برای یافتن یک فراپالایهٔ غیراساسی کافی است یک فراپالایه بیابیم که گسترشی از پالایهٔ مجموعه‌های متمم متناهی باشد.

بالعکس، اگر U یک فراپالایهٔ غیراساسی باشد، در این صورت چون هر مجموعهٔ $X \in U$ نامتناهی است، پس U گسترشی از پالایهٔ مجموعه‌های متمم متناهی است (تمرین ۲.۲).

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر پالایه را می‌توان به یک فراپالایه گسترش داد. اثبات این قضیه از اصل انتخاب بهره می‌برد و به‌علاوه می‌دانیم که قضیه را نمی‌توان در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل ثابت کرد.

۴.۲ قضیه. هر پالایه روی مجموعهٔ S را می‌توان به یک فراپالایه روی S گسترش داد.

اثبات مبتنی بر لم تسورن است. لم زیر را برای این کار نیاز داریم.

۵.۲ لم. اگر C مجموعه‌ای از پالایه‌ها روی S باشد و برای هر $F_1, F_2 \in C$ یا داشته باشیم $F_1 \subseteq F_2$ یا $F_2 \subseteq F_1$، آن‌گاه اجتماع C نیز یک پالایه روی S است.

برهان. فقط بررسی سادهٔ شرایط (الف)، (ب)، و (ج) از تعریف ۱.۱ برای اثبات نیاز است. □

برهان قضیهٔ ۴.۲. فرض کنید F_0 یک پالایه روی S باشد، پالایه‌ای مانند F را طوری می‌یابیم که $F_0 \subseteq F$ و F بیشین باشد.

فرض کنید P مجموعهٔ همه پالایه‌ها، مانند F، روی S باشد به‌قسمی که $F_0 \subseteq F$. مجموعهٔ جزئاً مرتب $(P, \subset)$ را در نظر می‌گیریم. بنا به لم ۵.۲، هر زنجیر مانند C در P یک کران بالا، مثلاً $\bigcup C$، دارد. لذا لم تسورن را می‌توان به کار بست و نتیجه گرفت که $(P, \subset)$ دارای عضو بیشینی مانند U است. به‌وضوح، U یک پالایهٔ بیشین روی S است و $F_0 \subseteq U$. پس بنا به لم ۳.۲، U یک فراپالایه است. □

بین اندازه و فراپالایه رابطه‌ای طبیعی وجود دارد. اندازهٔ m روی S را دو مقداری می‌نامیم هرگاه فقط دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند؛ به‌عبارت‌دیگر، برای هر $A \subseteq S$، $m(A) = 0$ یا $m(A) = 1$.

۶.۲ قضیه.

الف) اگر m یک اندازهٔ دو مقداری روی S باشد آن‌گاه مجموعهٔ $U = \{A \subseteq S \mid m(A) = 1\}$ یک فراپالایه است.

ب) اگر U یک فراپالایه روی S باشد، آن‌گاه تابع m که روی $\mathcal{P}(S)$ برای $A \in U$ به‌صورت $m(A) = ۱$ و برای $A \notin U$ به‌صورت $m(A) = ۰$ تعریف می‌شود، یک اندازهٔ دو مقداری روی S است.

برهان. کافی است تعریف‌های اندازه و فراپالایه را با هم مقایسه کنید. توجه کنید اگر A و B از هم مجزا باشند، در این صورت حداکثر یکی از آن‌ها در یک فراپالایه قرار می‌گیرد (یا دارای اندازه‌ای برابر ۱ است). □

اکنون یکی از کاربردهای فراپالایه را می‌آوریم. این کاربرد تعمیمی از مفهوم حد دنباله‌های اعداد حقیقی است.

۷.۲ تعریف. فرض کنید U فراپالایه‌ای روی $\mathbb{N}$ و $\langle a_n\rangle_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای کران‌دار از اعداد حقیقی باشد. گوییم عدد حقیقی a را Uــحد دنبالهٔ مذکور می‌نامیم و می‌نویسیم

$$a = \lim_U a_n,$$

هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، داشته باشیم $\{n \mid |a_n - a| < \varepsilon\} \in U$.

نخست توجه می‌کنیم که Uــحد در صورت وجود یکتاست. زیرا فرض کنید a و b به شرط $a < b$، دو Uــحد برای دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_{n=۰}^{\infty}$ باشند و قرار دهید $\varepsilon = (b-a)/۲$. در این صورت، دو مجموعهٔ $\{n \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ و $\{n \mid |a_n - b| < \varepsilon\}$ از هم مجزا هستند و لذا نمی‌توانند هر دو در U قرار گیرند.

اگر U فراپالایهٔ اساسی به‌صورت $U = \{A \mid n_۰ \in A\}$، به‌ازای یک $n_۰$ی، باشد در این صورت برای هر دنبالهٔ $\langle a_n\rangle_{n=۰}^{\infty}$ داریم $\lim_U a_n = a_{n_۰}$. دلیل این امر این است که برای هر $\varepsilon > ۰$، $\{n_۰\} \in U$ و $\{n_۰\} \subseteq \{n \mid |a_n - a_{n_۰}| < \varepsilon\}$.

اگر $\langle a_n\rangle_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌ای همگرا باشد و $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$، در این صورت برای هر فراپالایهٔ غیراساسی U، $\lim_U a_n = a$. دلیل این امر این است که برای هر $\varepsilon > ۰$، عددی مانند k موجود است به‌طوری‌که $\{n \mid n \geq k\} \subseteq \{n \mid |a_n - a| < \varepsilon\}$ و $\{n \mid n \geq k\} \in U$.

خاصیت مهم حدهای فراپالایه‌ای این است که Uـحد برای هر دنبالهٔ کران‌دار موجود است.

۸.۲ قضیه. فرض کنید U یک فراپالایه روی $\mathbb{N}$ و $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ دنبالهٔ کران‌داری از اعداد حقیقی باشد. در این صورت $\lim_U a_n$ موجود است.

برهان. چون $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ کران‌دار است، پس دو عدد a و b موجود است به‌طوری‌که برای هر n، $a < a_n < b$. برای هر $x \in [a,b]$ تعریف کنید

$$A_n = \{n \mid a_n < x\}.$$

به‌وضوح، $A_a = \varnothing$، $A_b = \mathbb{N}$ و $A_x \subseteq A_y$ به‌شرطی‌که $x \le y$. بنابراین $A_a \notin U$ و $A_b \in U$. همچنین اگر $A_x \in U$ و $y \ge x$، آن‌گاه $A_y \in U$. حال تعریف کنید

$$c = \sup\{x \mid A_x \notin U\}.$$

ادعا می‌کنیم $c = \lim_U a_n$. چون برای هر $\varepsilon > 0$، $A_{c-\varepsilon} \notin U$ و در عین حال $A_{c+\varepsilon} \in U$ و به‌علاوه

$$A_{c+\varepsilon} = A_{c-\frac{\varepsilon}{2}} \cup \{n \mid c-\varepsilon < a_n < c+\varepsilon\},$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\{n \mid |a_n - c| < \varepsilon\} \in U$. $\square$

به‌عنوان کاربردی از حدود فراپالایه‌ای، مثالی از یک اندازهٔ غیربدیهی روی $\mathbb{N}$ می‌سازیم.

۹.۲ قضیه. اندازه‌ای مثل m روی $\mathbb{N}$ موجود است به‌قسمی که برای هر مجموعهٔ A که چگالی آن تعریف شده باشد، $m(A) = d(A)$.

برهان. فرض کنید U یک فراپالایهٔ غیراساسی روی $\mathbb{N}$ باشد. برای هر مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{N}$ تعریف کنید

$$m(A) = \lim_U \frac{A(n)}{n},$$

که در آن $A(n) = |A \cap n|$. به‌وضوح اگر A دارای چگالی باشد، در این صورت $m(A) = d(A)$. همچنین به‌راحتی می‌توان دید که $m(\varnothing) = ۰$، $m(\mathbb{N}) = ۱$ و $A \subseteq B$ ایجاب می‌کند که $m(A) \le m(B)$. اگر A و B از هم مجزا باشند، در این صورت $(A \cup B)(n) = A(n) + B(n)$، حال خاصیت جمع‌پذیری m از ویژگی حدهای فراپالایه‌ای زیر به‌دست می‌آید

$$\lim_U (a_n + b_n) = \lim_U a_n + \lim_U b_n.$$

اثبات رابطهٔ اخیر را که شبیه حدهای معمولی است، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (تمرین ۵.۲). □

تمرین‌ها

۱.۲ اگر U یک فراپالایه روی S باشد، آن‌گاه $\mathcal{P}(S) - U$ یک ایدال اول است.

۲.۲ اگر U یک فراپالایهٔ غیر اصلی باشد، آن‌گاه هر $X \in U$ نامتناهی است.

۳.۲ فرض کنید U یک فراپالایه روی S باشد. نشان دهید که گردایهٔ V از مجموعه‌های $X \subseteq S \times S$ با تعریف $X \in V$ اگر و فقط اگر $\{a \in S \mid \{b \in S \mid (a,b) \in X\} \in U\} \in U$، یک فراپالایه روی $S \times S$ است.

۴.۲ فرض کنید U یک فراپالایه روی S باشد و $f : S \to T$. نشان دهید که گردایهٔ V از مجموعه‌های $X \subseteq T$ با تعریف $X \in V$ اگر و فقط اگر $f^{-۱}[X] \in U$، یک فراپالایه روی T باشد.

۵.۲ ثابت کنید $\lim_U (a_n + b_n) = \lim_U a_n + \lim_U b_n$.

۳ مجموعه‌های مانا و بستهٔ بی‌کران

در این بخش پالایهٔ مهمی روی کاردینال‌های ناشمارای منظم تعریف می‌کنیم. این پالایه توسط مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران تولید می‌شود. اگر چه تمام نتایج این بخش

را می‌توان برای هر کاردینال ناشمارای منظم بیان و اثبات کرد، ما کوچک‌ترین کاردینال ناشمارای $\aleph_۱$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. (تمرین‌های ۵.۳ــــ۹.۳ را ببینید.)

۱.۳ تعریف. مجموعهٔ $C \subseteq \omega_۱$ بستهٔ بی‌کران نامیده می‌شود هرگاه
الف) C در $\omega_۱$ بی‌کران باشد، یعنی $\sup C = \omega_۱$.
ب) C بسته باشد، یعنی هر دنبالهٔ صعودی از اوردینال‌ها در C مثل

$$\alpha_۰ < \alpha_۱ < \cdots < \alpha_n < \cdots \quad (n \in \omega)$$

سوپریمم داشته باشد و $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C$.

خاصیت مهم اما سادهٔ مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران این است که آن‌ها دارای ویژگی اشتراک متناهی هستند. این حکم نتیجه‌ای از لم زیر است.

۲.۳ لم. اگر $C_۱$ و $C_۲$ دو مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران از $\omega_۱$ باشند، در این صورت $C_۱ \cap C_۲$ مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران است.

برهان. به‌راحتی می‌توان دید که $C_۱ \cap C_۲$ بسته است، در واقع اگر $\alpha_۱ < \alpha_۲ < \cdots$ دنباله‌ای در هر دوی $C_۱$ و $C_۲$ باشد، در این صورت $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} \in C_۱ \cap C_۲$.

برای اثبات اینکه $C_۱ \cap C_۲$ بی‌کران است، فرض کنید $\gamma < \omega_۱$ دلخواه باشد، اوردینال α در $C_۱ \cap C_۲$ را طوری می‌یابیم که $\alpha > \gamma$. ابتدا دنبالهٔ صعودی از اوردینال‌های شمارا را مانند

$$\alpha_۰ < \beta_۰ < \alpha_۱ < \beta_۱ < \cdots < \alpha_n < \beta_n < \cdots$$

به‌صورت زیر می‌سازیم. کوچک‌ترین اوردینال در C و بالادست γ را $\alpha_۰$ در نظر بگیرید. حال $\beta_۰$ را کوچک‌ترین اوردینال $\beta > \alpha_۰$ که در $C_۲$ قرار دارد در نظر می‌گیریم. پس $\alpha_۱ \in C_۱$، $\beta_۱ \in C_۲$، و الی آخر.

فرض کنید α سوپریمم $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ باشد. α، همچنین سوپریمم $\{\beta_n\}_{n\in\omega}$ نیز هست. اوردینال α در $C_۱$ و $C_۲$ قرار دارد و بنابراین $\alpha \in C_۱ \cap C_۲$. □

مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های شمارای ω_1 مجموعه‌ای بسته و بی‌کران است. (در اینجا، نتیجه‌ای از اصل انتخاب که همان منظم بودن ω_1 است، به کار برده شده است. به یاد بیاورید که سوپریمم هر دنبالهٔ شمارا از اوردینال‌های شمارا، اوردینالی شماراست.) مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های شمارای حدی مثال دیگری از مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران است (تمرین ۲.۳). مثال‌های کمتر بدیهی دیگری در تمرین‌های ۳.۳ و ۴.۳ آورده شده است.

چون گردایهٔ همه زیرمجموعه‌های بستهٔ بی‌کران از ω_1 ویژگی اشتراک متناهی دارد، پس یک پالایه مانند

$$F = \{X \subseteq \omega_1 \mid C \subseteq X \text{ که } C \text{ موجود است مجموعه بستهٔ بی‌کران }\} \qquad (۳.۳)$$

روی ω_1 تولید می‌کند.

پالایهٔ معرفی شده در (۳.۳) را پالایهٔ بستهٔ بی‌کران روی ω_1 می‌نامند.

۴.۳ لم. اگر $\{C_n\}_{n\in\omega}$ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران باشد، آن‌گاه $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ نیز بسته و بی‌کران است. در نتیجه، اگر $\{X_n\}_{n\in\omega}$ گردایهٔ شمارایی از مجموعه‌های مشمول در یک پالایهٔ بستهٔ بی‌کران مانند F باشند، آن‌گاه $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \in F$.

برهان. به‌آسانی می‌توان دید که اشتراک $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ بسته است. برای اثبات بی‌کران بودن C، فرض می‌کنیم $\gamma < \omega_1$ و عضو $\alpha \in C$ را چنان می‌یابیم که α بزرگ‌تر از γ باشد.

توجه می‌کنیم که می‌توان نوشت $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n$، که در آن برای هر n، $D_n = C_0 \cap \cdots \cap C_n$. مجموعه‌های D_n بسته و بی‌کران هستند و یک دنبالهٔ نزولی به صورت $D_0 \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots$ تشکیل می‌دهند.

فرض کنید $\langle \alpha_n \mid n \in \omega\rangle$ دنباله‌ای از اوردینال‌های شمارا به این صورت باشد که $\gamma < \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$ و برای هر n، α_{n+1} کوچک‌ترین اوردینال در D_n بالا دست α_n است. سوپریمم $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ را α در نظر بگیرید. برای اینکه نشان دهیم $\alpha \in C$، ثابت خواهیم کرد برای هر n، $\alpha \in D_n$. اما این نیز آسان است، چرا که

برای هر n، α برابر سوپریمم $\{\alpha_k \mid k \geq n+1\}$ است و برای هر $k \geq n+1$، α_kها در D_n قرار دارند، چرا که برای $k > n$، $D_n \supseteq D_{n+1} \supseteq \cdots \supseteq D_k \supseteq \cdots$. □

مجموعه‌های مانا ارتباط نزدیکی با مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران دارند. مجموعه‌های مانا آن دسته مجموعه‌های $S \subseteq \omega_1$ هستند که به ایدال دوگان پالایهٔ بستهٔ بی‌کران تعلق ندارند. بیان دیگری از این تعریف ما را به تعریف زیر می‌رساند.

۵.۳ تعریف. مجموعهٔ $S \subseteq \omega_1$ مانا نامیده می‌شود هرگاه برای هر مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران مانند C، $S \cap C$ ناتهی باشد.

به‌وضوح، هر مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران مجموعه‌ای مانا است و به‌علاوه اگر S مانا باشد و $S \subseteq T \subseteq \omega_1$، در این صورت T نیز مانا است. بعداً در همین بخش مثالی از یک مجموعهٔ مانا خواهیم آورد که هیچ زیرمجموعهٔ بستهٔ بی‌کرانی ندارد. اما اکنون قضیهٔ زیر را ابتدا اثبات می‌کنیم.

تابعی مانند f با دامنه $S \subseteq \omega_1$ را پسرونده نامند هرگاه برای هر $\alpha \neq 0$، $f(\alpha) < \alpha$.

۶.۳ قضیه. مجموعهٔ $S \subseteq \omega_1$ مانا است اگر و تنها اگر هر تابع پسرونده مانند $f : S \to \omega_1$ روی یک مجموعهٔ بی‌کران ثابت باشد. در واقع f روی هر مجموعهٔ مانا مقداری ثابت اختیار می‌کند.

این قضیه به خوبی نشان می‌دهد که الفِ ناشمارایی، مثل $\aleph_1$، تفاوت اساسی با $\aleph_0$ دارد. روی کاردینال‌های ناشمارا تابعی مانند $f : \omega \to \omega$ با تعریف $f(n) = n - 1$ برای $n > 0$ و $f(0) = 0$، که هر مقدار را فقط تعداد متناهی بار اختیار می‌کند، نمی‌توان تعریف کرد. یکی از نتایج قضیهٔ ۶.۳ این است که روی ω_1، تابع با شرط $f(\alpha) < \alpha$ برخی مقادیر را ناشمارا بار اختیار می‌کند مگر در حالتی که دامنهٔ f «کوچک» باشد، یعنی اینکه مجموعه‌ای مانا باشد.

یک طرف قضیهٔ ۶.۳ می‌گوید که اگر مجموعهٔ $S \subseteq \omega_1$ مانا نباشد، در این صورت تابعی مثل f روی S وجود دارد به‌قسمی که برای هر $\alpha \neq 0$، $f(\alpha) < \alpha$ و

f هر مقدار را حداکثر تعداد شمارا بار اختیار می‌کند. چنین تابعی را در مثال زیر می‌سازیم.

۷.۳ مثال. فرض کنید $A \subseteq \omega_1$ مجموعه‌ای غیرمانا باشد. بنابراین مجموعهٔ بستهٔ بی‌کرانی مانند C موجود است که $A \cap C = \varnothing$. تابع $f : A \to \omega_1$ را به‌صورت

$$f(\alpha) = \sup(C \cap \alpha) \quad (\alpha \in A)$$

تعریف کنید. چون $f(\alpha) \in C$ (تمرین ۱.۳) و $C \cap A = \varnothing$، بنابراین داریم $f(\alpha) < \alpha$. همچنین برای $\gamma < \omega_1$، اگر $\alpha \in A$ از کوچک‌ترین عضو C که بالا دست γ قرار دارد بزرگ‌تر باشد، در این صورت $f(\alpha) > \gamma$ و بنابراین f یک مقدار ثابت را برای تعداد ناشمارا مقدار α اختیار نمی‌کند.

برای اثبات طرف دیگر قضیهٔ ۴.۳ به یک لم نیاز داریم.

۸.۳ لم. فرض کنید $\{C_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بی‌کران بسته باشد مجموعهٔ $C \subseteq \omega_1$ که به‌صورت

$$\alpha \in C \text{ اگر و تنها اگر برای هر } \xi < \alpha\text{، } \alpha \in C_\xi \quad (\alpha \in \omega_1) \qquad (۹.۳)$$

تعریف و اشتراک قطری C_ξها نامیده می‌شود، یک مجموعه بستهٔ بی‌کران است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم C بسته است. برای این کار فرض کنید $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$ دنباله‌ای صعودی از اعضای C و α سوپریمم آن باشد. برای اینکه نشان دهیم α در C قرار دارد نشان می‌دهیم برای هر $\xi < \alpha$، $\alpha \in C_\xi$.

فرض کنید $\xi < \alpha$. در این صورت عدد k موجود است به‌قسمی که $\xi < \alpha_k$، و لذا برای هر $n \geq k$، $\xi < \alpha_n$. چون هر α_n در C قرار دارد، پس در رابطهٔ (۹.۳) صدق می‌کند، و لذا برای هر $n \geq k$ داریم $\alpha_n \in C_\xi$. اما C_ξ بسته است و بنابراین α که سوپریمم $\{\alpha_n\}_{n \geq k}$ است در C_ξ قرار دارد.

حال ثابت می‌کنیم C بی‌کران است. فرض می‌کنیم $\gamma < \omega_1$ و $\alpha \in C$ را چنان می‌یابیم که α از γ بزرگ‌تر باشد. دنبالهٔ صعودی مانند $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ را

به‌صورت زیر می‌سازیم.

قرار دهید $\gamma = \alpha_0$. مجموعه $\bigcap_{\xi<\alpha_0} C_\xi$ (بنا به لم ۴.۳) بستهٔ بی‌کران است و لذا می‌توان α_1 را کوچک‌ترین عضو آن که بالادست α_0 است، تعریف کرد. حال α_2 را برابر کوچک‌ترین عضو $\bigcap_{\xi<\alpha_1} C_\xi$ که بالادست α_1 قرار دارد، تعریف می‌کنیم. در حالت کلی، تعریف می‌کنیم

$$\alpha_n < \alpha_{n+1} \in \bigcap_{\xi<\alpha_n} C_\xi \qquad (۱۰.۳)$$

α را برابر سوپریمم $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $\alpha \in C$.

برای این کار نشان می‌دهیم برای $\xi < \alpha$، $\alpha \in C_\xi$. لذا فرض کنید $\xi < \alpha$. عدد k وجود دارد به‌طوری‌که $\xi < \alpha_k$، بنابراین برای هر $n \geq k$، بنا به (۱۰.۳) داریم $\alpha_{n+1} \in C_\xi$. اما α سوپریمم $\{\alpha_n\}_{n>k}$ و بنابراین در C_ξ قرار دارد. □

برهان قضیهٔ ۶.۳. فرض کنید S یک مجموعهٔ مانا و $f : S \to \omega_1$ تابعی پسرونده باشد. برای هر $\gamma < \omega_1$، تعریف می‌کنیم $A_\gamma = f^{-1}[\{\gamma\}]$. نشان می‌دهیم γیی وجود دارد که به‌ازای آن A_γ مجموعه‌ای مانا است.

فرض کنید چنین نباشد، یعنی هیچ A_γیی مانا نباشد. لذا برای هر $\gamma < \omega_1$ مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران مانند C_γ موجود است به‌قسمی که $A_\gamma \cap C_\gamma = \varnothing$. فرض کنید C برابر اشتراک قطری C_γها باشد، به‌عبارت‌دیگر،

$$\alpha \in C \text{ اگر و تنها اگر برای هر } \gamma < \alpha\text{، } \alpha \in C_\gamma \qquad (۱۱.۳)$$

چنانچه $\alpha \in C_\gamma$، در این صورت $\alpha \notin A_\gamma$ و لذا $f(\alpha) \neq \gamma$. پس از (۱۱.۳) نتیجه می‌گیریم که اگر $\alpha \in C$، در این صورت برای هر $\gamma < \alpha$، $f(\alpha) \neq \gamma$. به‌بیان‌دیگر، $f(\alpha)$ از α کوچک‌تر نیست. اما C بسته و بی‌کران است و بنابراین مجموعهٔ مانای S را قطع می‌کند. پس برای هر $\alpha \in S$، $f(\alpha)$ کوچک‌تر از α است، اما این تناقض است. □

به‌عنوان کاربردی دیگر از قضیهٔ ۶.۳، مجموعه‌ای مانا مانند $S \subseteq \omega_1$ می‌سازیم که متمم آن نیز مانا است. توجه کنید که از اصل انتخاب در اینجا استفاده می‌کنیم.

(ثابت می‌شود که کاربرد اصل انتخاب در اینجا گزیر ناپذیر است.)

۱۲.۳ مثال. مجموعه‌ای مانا که متمم آن نیز مانا است.

فرض کنید C مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های حدی شمارا باشد. برای هر $\alpha \in C$ دنبالهٔ صعودی مثل $x_\alpha = \langle x_{\alpha_n} \mid n \in \omega \rangle$ با حد α وجود دارد. برای هر n، تابع $f_n : C \to \omega_1$ را به‌صورت $f_n(\alpha) = x_{\alpha_n}$ تعریف می‌کنیم.

برای هر n، چون روی C، $f_n(\alpha) < \alpha$، اوردینال γ_n موجود است به‌قسمی که مجموعهٔ $S_n = \{\alpha \in C \mid f_n(\alpha) = \gamma_n\}$ مانا باشد.

ادعا می‌کنیم حداقل یکی از مجموعه‌های S_n دارای متمم مانا است. اگر چنین نباشد، در این صورت هر S_n یک مجموعه بستهٔ بی‌کران در بر دارد، لذا اشتراک آن‌ها نیز شامل یک مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران است. بنابراین مجموعهٔ $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ شامل یک اوردینال مانند α است که از سوپریمم مجموعهٔ $\{\gamma_n\}_{n\in\omega}$ بزرگ‌تر است. اما در این صورت دنبالهٔ $x_\alpha = \langle x_{\alpha_n} \mid n \in \omega \rangle = \langle f_n(\alpha) \mid n \in \omega \rangle = \langle \gamma_n \mid n \in \omega \rangle$ به α همگرا نخواهد بود، که این تناقض است. □

به‌عنوان کاربردی دیگر از قضیهٔ ۶.۳ یک قضیهٔ ترکیبیاتی موسوم به لم Δ را ثابت می‌کنیم. اگرچه اثبات مستقیمی برای لم Δ می‌توان ارائه کرد، اثبات حاضر قدرت قضیهٔ ۶.۳ را به نمایش می‌گذارد.

۱۳.۳ قضیه. فرض کنید $\{A_i \mid i \in I\}$ گردایهٔ ناشمارایی از مجموعه‌های متناهی باشد. در این صورت مجموعهٔ ناشمارای $J \subseteq I$ و مجموعه‌ای مانند A موجود است به‌قسمی که برای هر $i, j \in J$ متمایز، $A_i \cap A_j = A$.

برهان. می‌توان فرض کرد که $I = \omega_1$. همچنین، چون اندازهٔ اجتماع تعداد $\aleph_1$تا مجموعهٔ متناهی برابر $\aleph_1$ است، می‌توان فرض کرد که همهٔ A_iها زیرمجموعه‌هایی از ω_1 هستند. روشن است که تعداد ناشمارا A_i، دارای یک اندازه هستند و لذا می‌توان فرض کرد که گردایه‌ای مانند $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ از زیرمجموعه‌های ω_1 داریم به‌طوری‌که اندازهٔ هر A_α برابر یک عدد ثابتی مانند n است.

مجموعهٔ C را مجموعهٔ همهٔ اوردینال‌های $\alpha < \omega_1$ در نظر بگیرید که برای آن $\max A_\xi < \alpha$ به‌شرطی‌که $\xi < \alpha$. مجموعهٔ C بستهٔ بی‌کران است (با تمرین ۴.۳ مقایسه کنید). برای هر $k \leq n$ تعریف کنید

$$S_k = \{\alpha \in C \mid |A_\alpha \cap \alpha| = k\}.$$

حداقل یک k موجود است که به‌ازای آن S_k مانا است. برای هر $m = 1, \ldots, k$ قرار دهید

$f_m(\alpha) = m$امین عضو A_α.

پس روی S_k داریم $f_m(\alpha) < \alpha$. با کاربرد قضیهٔ ۶.۳، مجموعهٔ مانای $T \subseteq S_k$ و مجموعهٔ A (با اندازهٔ k) را به‌دست می‌آوریم به‌قسمی که برای هر $\alpha \in T$، $A_\alpha \cap \alpha = A$.

حال اگر α و β در T باشند و $\alpha < \beta$، در این صورت $A_\alpha \subset \beta$ (چون $\beta \in C$) و $A_\alpha \cap \alpha = A_\beta \cap \beta = A$. از اینجا نتیجه می‌شود $A_\alpha \cap A_\beta = A$ [چرا که $(A_\alpha - \alpha) \cap A_\beta = \varnothing$]. لذا $\{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$ زیرخانوادهٔ ناشمارایی از $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ است که در شرایط قضیه صدق می‌کند. □

تمرین‌ها

۱.۳ مجموعهٔ بی‌کران $C \subseteq \omega_1$ بسته است اگر و فقط اگر برای هر $X \subset C$، چنانچه $\sup X < \omega_1$، آن‌گاه $\sup X \in C$.

۲.۳ مجموعهٔ همه اوردینال‌های حدی شمارا، بستهٔ بی‌کران است.

اگر X مجموعه‌ای از اوردینال‌ها باشد، در این صورت α یک نقطهٔ حدی از X است هرگاه برای هر $\gamma < \alpha$ یک $\beta \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\gamma < \beta < \alpha$. اوردینال شمارای α یک نقطهٔ حدی X است اگر و فقط اگر دنبالهٔ $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$ در X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \alpha$. هر مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $C \subseteq \omega_1$ شامل تمامی نقاط حدی شمارای خود است.

۳.۳ اگر X زیرمجموعهٔ بی‌کرانی از ω_1 باشد، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ نقاط حدی شمارای X یک مجموعهٔ بی‌کران است.

اگر $f : \omega_1 \to \omega_1$ تابعی صعودی باشد، آن‌گاه $\alpha < \omega_1$ یک نقطهٔ بستاری از f است هرگاه $f(\xi) < \alpha$ به‌شرطی‌که $\xi < \alpha$.

۴.۳ مجموعهٔ همهٔ نقاط بستاری تابع صعودی $f : \omega_1 \to \omega_1$ مجموعه‌ای بسته و بی‌کران است.

فرض κ یک کاردینال ناشمارای منظم باشد. مجموعهٔ $C \subseteq \kappa$ بستهٔ بی‌کران است هرگاه $\sup C = \kappa$ و $\sup(C \cap \alpha) \in C$ برای هر $\alpha < \kappa$.

۵.۳ اگر C_1 و C_2 بستهٔ بی‌کران باشند، آن‌گاه $C_1 \cap C_2$ بستهٔ بی‌کران است.

پالایهٔ بستهٔ بی‌کران روی κ عبارت است از پالایهٔ تولیدشده توسط مجموعه‌های بستهٔ بی‌کران.

۶.۳ اگر $\lambda < \kappa$ و هر C_α، که $\alpha < \lambda$، بستهٔ بی‌کران باشد، آن‌گاه $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ بستهٔ بی‌کران است.

مجموعهٔ $S \subseteq \kappa$ ماناست اگر $S \cap C \neq \varnothing$، برای هر مجموعهٔ بستهٔ بی‌کران $C \subseteq \kappa$.

۷.۳ مجموعهٔ $\{\alpha < \kappa \mid$ و α اوردینال حدی است $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ مانا است. اگر $\kappa > \aleph_1$، آن‌گاه مجموعهٔ $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1\}$ مانا است.

۸.۳ اگر هر C_α، که $\alpha < \kappa$، بستهٔ بی‌کران باشد، آن‌گاه اشتراک قطری $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \in C_\xi$ برای هر $\xi < \alpha\}$ بستهٔ بی‌کران است.

تابع با شرط $\operatorname{dom} f \subseteq \kappa$ را پسرونده نامند هرگاه $f(\alpha) < \alpha$ برای هر $\alpha \in \operatorname{dom} f$ و $\alpha \neq 0$.

۹.۳ مجموعهٔ $S \subseteq \kappa$ مانا است اگر و فقط اگر هر تابع پسرونده روی S مقداری ثابت روی یک مجموعهٔ ناشمارا اختیار کند.

۴ قضیهٔ سیلور

در این بخش با استفاده از روش‌های بخش ۲ و ۳ صورتی از فرض پیوستار تعمیم‌یافته را برای کاردینال‌های تکین ثابت می‌کنیم.

۱.۴ قضیهٔ سیلور. فرض کنید $\aleph_\lambda$ یک کاردینال تکین باشد به‌قسمی که $\mathrm{cf}(\lambda) > \omega$. اگر برای هر $\alpha < \lambda$، $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$، آن‌گاه $2^{\aleph_\lambda} = \aleph_{\lambda+1}$.

قضیهٔ سیلور را با استفاده از نظریهٔ زیرمجموعه‌های مانای $\aleph_1$، برای حالت خاص $\aleph_\lambda = \aleph_{\omega_1}$، اثبات می‌کنیم. حالت کلی را به‌نحو مشابه با استفاده از نظریهٔ کلی زیرمجموعه‌های مانای $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$ می‌توان ثابت کرد (تمرین ۱.۴ را ببینید). پس فرض کنید، برای هر $\alpha < \omega_1$، $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. نتیجهٔ این فرض که مکرر در این بخش به کار خواهد رفت، این است که برای هر $\alpha < \omega_1$، $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ (قضیهٔ ۱۲.۳ در فصل ۹ را ببینید).

فرض کنید f و g دو تابع روی ω_1 باشند. توابع f و g را تقریباً مجزا نامند هرگاه اوردینال $\alpha < \omega_1$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $\beta \geq \alpha$، $f(\beta) \neq g(\beta)$.

۲.۴ لم. فرض کنید $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به‌قسمی که برای هر $\alpha < \omega_1$، $|A_\alpha| \leq \aleph_\alpha$. همچنین فرض کنید F خانواده‌ای از توابع تقریباً مجزا باشد، پس

$$F \subset \prod_{\alpha < \omega_1} A_\alpha.$$

در این صورت $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم برای هر $\alpha < \omega_1$، $A_\alpha \subseteq \omega_\alpha$. فرض کنید S_0 مجموعه همهٔ اوردینال‌های حدی مانند α باشد که $0 < \alpha < \omega_1$. برای $f \in F$ و $\alpha \in S_0$، کوچک‌ترین β را که برای آن $f(\alpha) < \omega_\beta$ با $f^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم. چون برای هر $\alpha \in S_0$، $f^*(\alpha) < \alpha$، پس بنا به قضیهٔ ۶.۳، مجموعهٔ مانایی مثل $S \subseteq S_0$ موجود است به‌قسمی که f^* روی S ثابت است. بنابراین $f \restriction S$ یک

تابع از S بتوی ω_β است که در آن β اوردینالی است با شرط $\beta < \omega_1$. تابع $f \restriction S$ را با $\varphi(f)$ نشان می‌دهیم.

اگر f و g دو تابع متمایز در F باشند، در این صورت $\varphi(f)$ و $\varphi(g)$ نیز متمایزند. توجه کنید حتی اگر دامنهٔ دو تابع مذکور، مثلاً برابر S، باشد، چون f و g تقریباً مجزا هستند، لذا $f \restriction S \neq g \restriction S$. بنابراین φ نگاشتی یک‌به‌یک با دامنه F است. مقادیر برد تابع φ توابعی هستند که روی یک زیرمجموعه مانند S از ω_1 بتوی یک $\omega_\beta < \omega_{\omega_1}$ تعریف شده‌اند. بنابراین داریم

$$|F| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \sum_{\beta<\omega_1} \aleph_\beta^{\aleph_1} \leq \aleph_{\omega_1}.$$

□

با تغییر اندکی در لم ۲.۴، لم زیر حاصل می‌شود.

۳.۴ لم. فرض کنید $F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ خانواده‌ای از توابع تقریباً مجزا باشند به‌قسمی که مجموعهٔ $T = \{\alpha < \omega_1 \mid |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$ مانا باشد. در این صورت $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$.

برهان. در برهان لم ۲.۴، کافی است S_0 را مجموعهٔ مانای زیر

$$S_0 = \{\alpha \in T \mid \text{اوردینال حدی است } \alpha\}$$

قرار دهید. ادامهٔ اثبات مشابه است. □

با استفاده از لم ۳.۴ نتیجهٔ زیر به‌راحتی حاصل می‌شود.

۴.۴ لم. فرض کنید f یک تابع روی ω_1 باشد به‌قسمی که برای هر $\alpha < \omega_1$، $f(\alpha) < \aleph_{\alpha+1}$. فرض کنید F خانواده‌ای از توابع تقریباً مجزا روی ω_1 باشد. همچنین قرار دهید

$$F_f = \{g \in F \mid \text{به‌ازای مجموعهٔ مانایی مثل } T \subseteq \omega_1\text{، } g(\alpha) < f(\alpha) \text{ برای هر } \alpha \in T\}.$$

در این صورت $|F_f| \leq \aleph_{\omega_1}$.

برهان. به‌ازای مجموعهٔ مانای ثابتی مانند T، بنا به لم ۳.۴، عدد اصلی مجموعهٔ $\{g \in F \mid g(\alpha) < f(\alpha)$ ،$\alpha \in T$ برای هر$\}$ حداکثر برابر $\aleph_{\omega_1}$ است. لذا $|F| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$. □

اکنون لمی اساسی را برای اثبات قضیهٔ سیلور ثابت می‌کنیم.

۵.۴ لم. فرض کنید $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد به‌قسمی که برای هر $\alpha < \omega_1$، $|A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+1}$. همچنین F را خانواده‌ای از توابع تقریباً مجزا در نظر بگیرید که

$$F \subset \prod_{\alpha < \omega_1} A_\alpha.$$

در این صورت $|F| \leq \aleph_{\omega_1+1}$.

برهان. فرض کنید U یک فراپالایه روی ω_1 و گسترش پالایهٔ بستهٔ بی‌کران باشد.

بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که برای هر $\alpha < \omega_1$، $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$. رابطهٔ $<$ را روی مجموعهٔ F به‌صورت

$$f < g \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$$

تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم رابطهٔ $<$ یک ترتیب خطی روی F است. اگر $f < g$ و $g < h$، در این صورت $f < h$، چرا که

$$\{\alpha \mid f(\alpha) < h(\alpha)\} \supseteq \{\alpha \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \cap \{\alpha \mid g(\alpha) < h(\alpha)\} \in U.$$

اگر $f, g \in F$ و $f \neq g$، در این صورت مجموعهٔ $\{\alpha \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ حداکثر شماراست و بنابراین در U قرار ندارد. لذا یکی از مجموعه‌های $\{\alpha \mid f(\alpha) < g(\alpha)\}$ یا $\{\alpha \mid g(\alpha) < f(\alpha)\}$ به U متعلق‌اند. پس یا $f < g$ یا $g < f$. از اینجا نتیجه می‌شود که رابطهٔ $<$ یک ترتیب خطی روی F است.

حال اگر $f, g \in F$ و $g < f$، در این صورت $g \in F_f$ که در آن

$$F_f = \{g \in F \mid \alpha \in T \text{ برای هر } g(\alpha) < f(\alpha) \text{ ،}T \text{ به‌ازای مجموعهٔ مانایی مانند } \},$$

پس بنا به لم ۴.۴، $|F_f| \le \aleph_{\omega_1}$. بنابراین برای هر $f \in F$، $|\{g \in F \mid g < f\}| \le \aleph_{\omega_1}$. چون رابطهٔ $<$ یک ترتیب خطی روی F است، از قضیهٔ ۱۴.۱ در فصل ۸ نتیجه می‌شود که $|F| \le \aleph_{\omega_1+1}$. □

قضیهٔ سیلور (در حالتی که $\lambda = \omega_1$) اکنون نتیجهٔ ساده‌ای از لم ۵.۴ است.

برهان قضیهٔ سیلور. برای هر $\alpha < \omega_1$، تعریف کنید $A_\alpha = \mathcal{P}(\omega_\alpha)$. چون $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$، پس داریم $|A_\alpha| = \aleph_{\alpha+1}$. برای هر مجموعهٔ $X \subseteq \omega_{\omega_1}$، تابع $f_X \in \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ را به‌صورت

$$f_X(\alpha) = X \cap \omega_\alpha$$

تعریف کنید. اگر $X \neq Y$، در این صورت $f_X \neq f_Y$، به‌علاوه f_X و f_Y تقریباً مجزا هستند. دلیل این امر این است که یک $\alpha < \omega_1$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $\beta > \alpha$، $X \cap \omega_\beta \neq Y \cap \omega_\beta$. لذا $F = \{f_X \mid X \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})\}$ خانواده‌ای از توابع تقریباً مجزا است و بنا به لم ۵.۴، داریم $|F| \le \aleph_{\omega_1+1}$. بنابراین $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$. □

تمرین‌ها

۱.۴ قضیهٔ سیلور را برای λ دلخواه با هم‌پایانگی ناشمارا ثابت کنید.
[همه جا در بخش ۴، ω_1 را با $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$ و دنبالهٔ $\langle \aleph_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ را با دنبالهٔ صعودی پیوستهٔ $\langle \lambda_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ از اوردینال‌ها جایگزین کنید. تمرین ۹.۳ را نیز به کار ببرید.]

فصل ۱۲

نظریهٔ ترکیباتی مجموعه‌ها

۱ قضایای رَمزی

معمای معروف زیر مثال کلاسیکی از نمونه پرسش‌هایی است که در این بخش مورد بررسی قرار خواهیم داد. نشان دهید در هر گروه ٦ نفری، حداقل ۳ نفر هستند که یا همگی همدیگر را می‌شناسند یا اینکه نسبت به یکدیگر غریبه‌اند. تلویحاً فرض می‌کنیم که رابطهٔ «x، y را می‌شناسد» متقارن است.

حل این معما از این قرار است. یکی از این افراد، مثلاً علی، را در نظر بگیرید. از ۵ نفر باقی‌مانده، یا حداقل ۳ نفر با علی آشنا هستند یا حداقل ۳ نفر با او آشنا نیستند. فرض کنید حسن، حسین، و مریم با علی آشنا باشند. اگر دو نفر از این‌ها، مثلاً حسن و حسین، با یکدیگر آشنا باشند، در این صورت ۳ نفر را داریم که با یکدیگر آشنا هستند (علی، حسن، و حسین). در غیر این صورت، حسن، حسین، و مریم ۳ نفری هستند که با هم غریبه‌اند. اگر حسن، حسین، و مریم ۳ نفری باشند که با علی آشنا نیستند، استدلال مشابه خواهد بود.

اکنون مسئله را به شکل مجردتری بازگو می‌کنیم که تعمیم‌های دیگری را میسر می‌سازد.

فرض کنید S یک مجموعه باشد. به‌ازای هر $r \in \mathbb{N}$، $r \neq 0$، گردایهٔ

$[S]^r = \{X \subseteq S \mid |X| = r\}$ برابر گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های r عضوی از S است. (تمرین ۵.۳ در فصل ۴ را ببینید.) فرض کنید $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ افرازی از $[S]^r$ به s رده باشد ($s \in \mathbb{N} - \{0\}$)؛ به‌عبارت‌دیگر، $[S]^r = \bigcup_{i=0}^{s-1} A_i$، و به‌ازای $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$. گوییم زیرمجموعهٔ $H \subseteq S$ برای افراز مذکور همگن است هرگاه به‌ازای یک i $[H]^r \subseteq A_i$؛ به‌عبارت‌دیگر، هرگاه زیرمجموعه‌های r عضوی H به یک ردهٔ واحدی مانند A_i از افراز متعلق باشند.

به درک مطلب کمک خواهد کرد اگر تصور کنیم که با رنگ‌های متمایزی اعضای رده‌های متفاوت رنگ شده‌اند. پس s رنگ داریم (که با ۰، ۱، ...، $s - 1$ شماره‌گذاری شده‌اند) و هر زیرمجموعهٔ r عضوی S با یکی از آن‌ها رنگ شده است. در این صورت مجموعه‌های همگن تک‌رنگ هستند؛ به‌عبارت‌دیگر، تمامی زیرمجموعه‌های r عضوی آن‌ها با رنگ یکسانی رنگ شده است.

با این اصطلاحات، مثالی که در ابتدا بیان کردیم نشان می‌دهد که به‌ازای هر مجموعهٔ S با شرط $|S| \geq 6$، هر افراز $[S]^2$ به دو رده، دارای یک مجموعهٔ همگن مانند H با شرط $|H| \geq 3$ است. (رده‌ها عبارت‌اند از $A_0 = \{\{x,y\} \in [S]^2 \mid$ با هم آشنا هستند y و $x\}$ و $A_1 = \{\{x,y\} \in [S]^2 \mid$ نسبت به هم غریبه‌اند y و $x\}$.)

معمای فوق‌الذکر را به طریق دیگری نیز می‌توان بیان کرد. مجموعهٔ S را با حداقل ۶ نقطه انتخاب کنید و هر زوج از نقاط را با پاره‌خطی به رنگ قرمز و یا آبی (ولی نه هر دو) به هم وصل کنید. در این صورت گراف حاصل یک مثلث تک رنگ (یعنی، یا اضلاعش آبی‌اند یا قرمز) خواهد داشت.

فرض کنید κ و λ دو عدد اصلی باشند. نماد $\kappa \to (\lambda)_s^r$ را کوته‌نوشتی برای این عبارت قرار می‌دهیم: به‌ازای هر مجموعهٔ S با شرط $|S| = \kappa$ و هر افراز از $[S]^r$ به s رده، مجموعهٔ همگن H با شرط $|H| \geq \lambda$ وجود دارد. نقیض این عبارت را با $\kappa \nrightarrow (\lambda)_s^r$ نشان می‌دهیم.

ثابت کردیم که $6 \to (3)_2^2$؛ اثبات اینکه $5 \nrightarrow (3)_2^2$ تمرین ساده‌ای است. (تمرین ۱.۱ را ببینید.)

به‌طور کلی‌تر، منظور از $\kappa \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)_s^r$ این است که: به‌ازای هر مجموعهٔ

S با $|S| = \kappa$ و هر افراز مانند $\{A_i\}_{i=0}^{s-1}$ از $[S]^r$ به s رده عدد i و مجموعهٔ $H \subseteq S$ وجود دارند به‌قسمی که $[H]^r \subseteq A_i$ و $|H_i| \geq \lambda_i$. تمرین ۲.۱ و ۳.۱ برخی ویژگی‌های سادهٔ این نمادها را نشان می‌دهند.

نتیجهٔ بنیادی دربارهٔ افرازهای مجموعه‌های متناهی قضیهٔ متناهی رمزی است. این قضیه بیان می‌کند که اگر S به‌قدر کافی بزرگ باشد، هر رنگ‌آمیزی از زیرمجموعه‌های r عضوی آن دارای مجموعه‌های تک‌رنگ با اندازهٔ معین k است.

۱.۱ قضیهٔ متناهی رَمزی. به‌ازای اعداد طبیعی k، r و s عدد طبیعی n موجود است به‌قسمی که $n \to (k)_s^r$.

خواننده‌ای که بیشتر به مجموعه‌های نامتناهی علاقه‌مند است می‌تواند از اثبات قضیه بی‌هیچ ضرری عبور کند.

برهان. نخست حالت $s = 2$ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $r, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$ عدد $n \in \mathbb{N}$ موجود است که برای آن، بنا به استقرا روی r، داریم $n \to (p, q)_2^r$.

فرض کنید $r = 1$. بنابراین کافی است قرار دهیم $n = p + q - 1$؛ چرا که واضح است اگر $|S| = n$ و $[S]^1 = S = A_0 \cup A_1$، نمی‌توانیم همزمان داشته باشیم $|A_0| \leq p - 1$ و $|A_1| \leq q - 1$. چنانچه $|A_0| \geq p$، قرار دهید $H = A_0$، و در غیر این صورت، قرار دهید $H = A_1$.

اکنون فرض می‌کنیم حکم برای r (و هر p و q) درست باشد و آن را برای $r + 1$ ثابت خواهیم کرد. کوچک‌ترین عدد n را که برای آن $n \to (p, q)_2^r$ برقرار است با $R(p, q; r)$ نشان می‌دهیم. حال برهان را با استقرا روی $(p + q)$ انجام می‌دهیم.

مجموعه‌ای مانند S با شرط $|S| = n > 0$ (به‌صورت نامعین) و افرازی مثل $[S]^{r+1} = A_0 \cup A_1$ را در نظر بگیرید که در آن $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. اگر $p \leq r$ یا $q \leq r$ حکم برقرار است. در واقع، اگر $p < r$ (و متناظراً، $q < r$) می‌توانیم H را هر زیرمجموعهٔ دلخواه از S با شرط $|H| = p$ (متناظراً، $|H| = q$) در نظر بگیریم؛ اگر $p = q = r$، در این صورت یا $A_0 \neq \varnothing$ که در این حالت هر $H \in A_0$ حکم را

برقرار می‌کند، یا $A_1 \neq \varnothing$ که هر $H \in A_1$ حکم را برقرار خواهد کرد. لذا فرض می‌کنیم $p > r$ و $q > r$، و بنابراین حکم برای p' و q' برقرار است.

عضو $a \in S$ را ثابت در نظر بگیرید، قرار دهید $S^a = S - \{a\}$ و افراز $\{B_0, B_1\}$ از $[S^a]^r$ را به این صورت در نظر بگیرید که $X \in B_0$ (متناظراً، B_1) اگر و تنها اگر $\{a\} \cup X \in A_0$ (متناظراً، A_1) (برای هر $X \in [S^a]^r$).

اگر n را چنان بزرگ انتخاب کنیم که $n - 1 = R(p', q'; r)$ (p' و q' غیر مشخص‌اند)، آن‌گاه مجموعه‌ای مانند $H^a \subseteq S^a$ موجود است به‌قسمی که یا

(۱) $[H^a]^r \subseteq B_0$ و $|H^a| \geq p'$، یا

(۲) $[H^a]^r \subseteq B_1$ و $|H^a| \geq q'$.

در هر حال، تمامی مجموعه‌های $r + 1$ عضوی به شکل $\{a\} \cup X$، $X \in [H^a]^r$ مطمئناً با رنگ واحدی رنگ‌آمیزی می‌شوند، لذا باقی می‌ماند به زیرمجموعه‌های ($r + 1$) عضوی از H^a بپردازیم.

فرض کنید (۱) اتفاق بیفتد. بنا به فرض استقرا، عدد n وجود دارد به‌قسمی که $n \to (p - 1, q)_2^{r+1}$ برقرار است. فرض کنید $p' = R(p - 1, q; r + 1)$ کوچک‌ترین این nها باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که یا مجموعهٔ $H' \subseteq H^a$ موجود است به‌طوری‌که $|H'| \geq p - 1$ و $[H']^{r+1} \subseteq A_0$؛ که در این حالت قرار می‌دهیم $H = H' \cup \{a\}$ و ملاحظه می‌کنیم که $|H| \geq p$ و $[H]^{r+1} \subseteq A_0$. یا، مجموعهٔ $H'' \subseteq H^a$ وجود دارد به طوری که $|H''| \geq q$ و $[H'']^{r+1} \subseteq A_1$؛ و در این حالت قرار می‌دهیم $H = H''$ و ملاحظه می‌کنیم که $|H| \geq q$ و $[H]^{r+1} \subseteq A_1$.

حالت (۲) نیز به‌طور مشابهی بررسی می‌شود، یعنی تعریف کنید $q' = R(p, q - 1; r + 1)$، و n را کوچک‌ترین عددی در نظر بگیرید که $n \to (p, q - 1)_2^{r+1}$ برقرار باشد.

اثبات برای حالت $s = 2$ کامل می‌شود. به‌خصوص، با قرار دادن $p = q = k$، برای هر k و r داریم $n \to (k)_2^r$. برهان قضیهٔ متناهی رمزی را اکنون با استقرا روی s می‌توان کامل کرد. حالت $s = 1$ بدیهی است و حالت $s = 2$ در بالا اثبات شد.

فرض کنید m خاصیت $m \to (k)_s^r$ را داشته باشد. فرض کنید $\{A_i\}_{i=0}^{s}$ افرازی از $[S]^r$ به $s + 1$ رده باشد، که در آن S مجموعه‌ای با عدد اصلی غیر مشخص n

است. حال $\{B_\circ, B_1\}$ با تعریف

$$B_\circ = \bigcup_{i=\circ}^{s-1} A_i, \quad B_1 = A_s$$

افرازی از $[S]^r$ به ۲ رده خواهد بود. چنانچه $n = R(l, l; r)$ (به‌ازای l غیر مشخص)، در این صورت $H' \subseteq S$ موجود است که $|H'| \geq l$ و یا $[H']^r \subseteq B_\circ$ یا $[H']^r \subseteq B_1$. فرض می‌کنیم $l = \max\{m, k\}$. در حالت اول، $\{A_i\}_{i=\circ}^{s-1}$ مجموعهٔ $[H']^r$ را به s رده افراز می‌کند، لذا انتخاب ما برای l وجود $H \subseteq H'$ را تضمین می‌کند که برای آن $|H| \geq k$ و $[H]^r \subseteq A_i$ به‌ازای یک $i \in \{\circ, \ldots, s-1\}$. در حالت دوم، انتخاب ما برای l مجاز می‌دارد که قرار دهیم $H = H'$ و نتیجه بگیریم که $|H| \geq k$ و $[H]^r \subseteq A_s$. در هر حالت، برهان کامل است. □

خاطرنشان می‌کنیم که تعیین دقیق عدد $R(p, q; r)$ دشوار است و علی‌رغم تلاش فراوان و استفادهٔ وسیع از کامپیوتر فقط تعدادی از آن‌ها شناخته شده است. در اینجا فهرست کل آن‌ها را تا این زمان (۱۹۹۸) ارائه می‌کنیم: $R(۳, l; ۲)$ به‌ازای $l = ۳, ۴, ۵, ٦, ۷, ۸, ۹$، $R(۳, ۳, ۳; ۲) = ۱۷$، و $R(۴, ۴; ۳) = ۱۳$. مقادیر مذکور با رشد $(p+q)$ و r سریعاً رشد می‌کنند. این مطلب در حوزه‌ای از ریاضیات به‌نام ترکیبیات (متناهی) بسیار مورد توجه است، لیکن اکنون ما به پرسش‌های مشابه برای اعداد اصلی نامتناهی می‌پردازیم. در اینجا مهم‌ترین نتیجه، قضیهٔ (نامتناهی) رمزی است.

۲.۱ قضیهٔ رَمزی. برای هر $r, s \in \mathbb{N} - \{\circ\}$، $\aleph_\circ \longrightarrow (\aleph_\circ)_s^r$.

به بیان دیگر، اگر زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ نامتناهی با تعداد متناهی s رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آن‌گاه یک زیرمجموعهٔ نامتناهی وجود دارد که زیرمجموعه‌های r عضوی آن با رنگ یکسانی رنگ‌آمیزی شده است.

برهان. کافی است حالت $S = \mathbb{N}$ را در نظر بگیریم (تمرین ۲.۱ را ببینید). با استقرا روی r عمل می‌کنیم.

$r = ۱$: اگر $[\mathbb{N}]^1 = \mathbb{N} = \bigcup_{i=\circ}^{s-1} A_i$، در این صورت حداقل یکی از مجموعه‌های

A_i باید نامتناهی باشد (قضیهٔ ۷.۲ در فصل ۴) و از این‌رو H را برابر آن مجموعهٔ A_i تعریف می‌کنیم.

۲ $r =$: این حالت تمرینی برای مرحلهٔ کلی استقرا است. فرض کنید $[\mathbb{N}]^2 = \bigcup_{i=0}^{s-1} A_i$. به‌طریق بازگشتی دنباله‌های $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$، $\langle i_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ و $\langle H_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ را می‌سازیم. قرار می‌دهیم $a_0 = 0$ و تعریف می‌کنیم $B_i^0 = \{b \in \mathbb{N} \mid \{a_0, b\}$ و $b \neq a_0\}$. در این صورت $\{B_i^0\}_{i=0}^{s-1}$ افرازی از $\mathbb{N} - \{a_0\}$ است؛ عدد i_0 را اولین عدد i در نظر می‌گیریم که به‌ازای آن B_i^0 نامتناهی است (به حالت $r = 1$ مراجعه کنید) و قرار دهید $H_0 = B_{i_0}^0$. تمام جملات دیگر دنبالهٔ $\langle a_n\rangle$ از H_0 انتخاب می‌شوند و این تضمین می‌کند که برای هر $n > 0$، $\{a_0, a_n\} \in A_{i_0}$. اولین عضو H_0 را a_1 می‌نامیم و تعریف می‌کنیم $B_i^1 = \{b \in H_0 \mid \{a_0, b\} \in A_i$ و $b \neq a_1\}$. بار دیگر، فرض کنید $\{B_i^1\}_{i=0}^{s-1}$ افرازی از مجموعهٔ نامتناهی $H_0 - \{a_1\}$ باشد و i_1 را اولین عدد i در نظر بگیرید که به‌ازای آن B_i^1 نامتناهی است و تعریف کنید $H_1 = B_{i_1}^1$. با انجام این کار دنباله‌های مطلوب به‌دست می‌آیند. بنا به ساخت، به‌وضوح $\langle a_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ دنباله‌ای صعودی است و برای هر $m > n$، $\{a_n, a_m\} \in A_{i_n}$. مقادیر دنبالهٔ $\langle i_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ در مجموعهٔ متناهی $\{0, \ldots, s-1\}$ قرار دارند، پس عدد j و مجموعهٔ نامتناهی M موجودند به‌قسمی که برای هر $n \in M$، $i_n = j$. حالا باید تعریف کنیم $H = \{a_n \mid n \in M\}$. در این صورت H نامتناهی است و $[H]^2 \subseteq A_j$ به این دلیل که برای هر $n, m \in M$ که $n < m$، داریم $\{a_n, a_m\} \in A_{i_n} = A_j$.

حالت کلی مشابه است. فرض می‌کنیم که قضیه برای r درست باشد و آن را برای $r + 1$ ثابت می‌کنیم. پس قرار دهید $[\mathbb{N}]^{r+1} = \bigcup_{i=0}^{s-1} A_i$. عدد دلخواه $a \in \mathbb{N}$ و مجموعهٔ نامتناهی دلخواه $S \subseteq \mathbb{N}$ را طوری در نظر بگیرید که $a \notin S$. افرازی مانند $\{B_i\}_{i=0}^{s-1}$ از $[S]^r$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای $X \in [S]^r$، $X \in B_i$ اگر و تنها اگر $\{a\} \cup X \in A_i$ (به‌عبارت‌دیگر، چنانچه زیرمجموعهٔ r عضوی X از S را رنگ‌آمیزی کنیم، مجموعهٔ $r + 1$ عضوی $\{a\} \cup X$ نیز همان رنگ‌آمیزی اولیه را داشته باشد). بنا به فرض استقرا، مجموعهٔ نامتناهی $H \subseteq S$ چنان موجود است که به‌ازای یک i، $[H]^r \subseteq B_i$. یکی از آن‌ها مثل $i = i(a, S)$ و $H = H(a, S)$ را

انتخاب می‌کنیم. (i را همیشه کوچک‌ترین انتخاب می‌کنیم، ولی اصل انتخاب را به کار می‌بریم [$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ را می‌توان خوش‌ترتیب کرد] و H خاصی را انتخاب می‌کنیم. به بهای پیچیدگی‌های بیشتر می‌توان از کاربرد اصل انتخاب اجتناب کرد.) ملاحظه می‌کنیم که همهٔ مجموعه‌ها به‌صورت $\{a\} \cup X$ که در آن $X \in [H]^r$ به A_i تعلق دارند.

ادامه برهان بسیار شبیه حالت $r = ۲$ است. به‌طریق بازگشتی دنباله‌های $\langle a_n \rangle_{n=۰}^{\infty}$، $\langle i_n \rangle_{n=۰}^{\infty}$، و $\langle H_n \rangle_{n=۰}^{\infty}$ را می‌سازیم. تعریف می‌کنیم $a_۰ = ۰$، $i_۰ = i(۰, \mathbb{N} - \{۰\})$ و $H_۰ = H(۰, \mathbb{N} - \{۰\})$. با فرض ساخته‌شدن a_n، i_n و H_n، تعریف می‌کنیم $a_{n+۱}$ برابر کوچک‌ترین عضو H_n باشد و $i_{n+۱} = i(a_{n+۱}, H_n - \{a_{n+۱}\})$ و $H_{n+۱} = H(a_{n+۱}, H_n - \{a_{n+۱}\})$. مجدداً اصل اثبات، تضمین این است که همهٔ مجموعه‌ها به شکل $\{a_n, a_{k_۱}, \ldots, a_{k_r}\}$ که در آن $n < k_۱, \ldots, n < k_r$ (و $k_۱$، ...، k_r دو به دو مجزا هستند) به A_{i_n} متعلق‌اند.

در اینجا نیز عدد $j \in \{۰, ۱, \ldots, s - ۱\}$ موجود است به‌قسمی که $M = \{m \in \mathbb{N} \mid i_m = j\}$ نامتناهی است. تعریف می‌کنیم $H = \{a_m \mid m \in M\}$ و ملاحظه می‌کنیم که H نامتناهی است و $[H]^{r+۱} \subseteq A_j$. □

این بخش را با کاربردهای ساده‌ای از قضیهٔ رمزی به پایان می‌رسانیم.

۳.۱ نتیجه. هر مجموعهٔ مرتب نامتناهی $(P, \leq)$ دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی مانند S است به‌قسمی که یا هر دو عضو متمایز S مقایسه‌پذیرند (یعنی، S یک زنجیر است) یا هر دو عضو متمایز S مقایسه‌ناپذیرند.

برهان. قضیهٔ رمزی را برای افراز $\{A_۰, A_۱\}$ از $[P]^۲$ به کار ببرید که در آن

$$A_۰ = \{\{x, y\} \in [P]^۲ \mid \text{مقایسه‌پذیرند } y \text{ و } x\},$$
$$A_۱ = \{\{x, y\} \in [P]^۲ \mid \text{مقایسه‌ناپذیرند } y \text{ و } x\}.$$

□

۴.۱ نتیجه. هر مجموعهٔ مرتب خطی نامتناهی شامل زیرمجموعه‌ای مشابه $(\mathbb{N}, <)$ یا $(\mathbb{N}, >)$ است.

برهان. فرض کنید $(P,\preccurlyeq)$ مجموعهٔ مرتب خطی متناهی باشد و $\leq$ خوش‌ترتیبی از P باشد. مجموعهٔ $[P]^{۲}$ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم

$$A_{۰} = \{\{x,y\} \in [P]^{۲} \mid x < y \text{ و } x \prec y\},$$
$$A_{۱} = \{\{x,y\} \in [P]^{۲} \mid x < y \text{ و } x \succ y\}.$$

فرض کنید H مجموعهٔ همگن نامتناهی باشد که از قضیهٔ رمزی به‌دست می‌آید. رابطهٔ $<$ مجموعهٔ H را خوش‌ترتیب می‌کند؛ فرض کنید $\bar{H}$ قطعهٔ آغازی H با نوع ترتیب ω باشد. اگر $[H]^{۲} \subseteq A_{۰}$، در این صورت $(\bar{H},\prec)$ مشابه $(\mathbb{N},<)$ است؛ اگر $[H]^{۲} \subseteq A_{۱}$، در این صورت $(\bar{H},\succ)$ مشابه $(\mathbb{N},<)$ است. □

تمرین‌ها

۱.۱ نشان دهید $۵ \nrightarrow (۳)^{۲}_{۲}$.

۲.۱ ثابت کنید واژه‌های «هر مجموعهٔ S» در تعریف $\kappa \to (\lambda)^{r}_{s}$ را می‌توان با «مجموعه‌ای مانند S» جایگزین کرد.

۳.۱ فرض کنید که $\kappa \to (\lambda)^{r}_{s}$ برقرار باشد. ثابت کنید

الف) اگر $\kappa' \geq \kappa$، آن‌گاه $\kappa' \to (\lambda)^{r}_{s}$.

ب) اگر $\lambda' \leq \lambda$، آن‌گاه $\kappa \to (\lambda')^{r}_{s}$.

ج) اگر $s' \leq s$، آن‌گاه $\kappa \to (\lambda)^{r}_{s'}$.

د) اگر $r' \leq r$، آن‌گاه $\kappa \to (\lambda)^{r'}_{s}$.

عبارت‌های مشابهی برای $\kappa \to (\lambda_{۱},\dots,\lambda_{s})^{r}_{s}$ ثابت کنید. همچنین نشان دهید $\kappa \to (\lambda_{۱},\dots,\lambda_{s})^{r}_{s}$ برقرار است اگر و تنها اگر $\kappa \to \left(\lambda_{\pi(۱)},\dots,\lambda_{\pi(s)}\right)^{r}_{s}$ برقرار باشد، که در آن π نگاشتی یک‌به‌یک از $\{۱,\dots,s\}$ بروی خودش است.

۴.۱ نشان دهید که به‌ازای هر کاردینال نامتناهی κ، $\kappa \to (\kappa)^{۱}_{\lambda}$ برقرار است اگر و تنها اگر $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$.

۵.۱ فرض کنید $[S]^{<\omega} = \bigcup_{n=۰}^{\infty}[S]^{n}$. نشان دهید که افراز $\{A_{۰},A_{۱}\}$ از $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $H \subseteq \mathbb{N}$ نامتناهی، $[H]^{<\omega} \cap A_{۰} \neq \varnothing$ و

$[H]^{<\omega} \cap A_۱ \neq \varnothing$.

[راهنمایی: قرار دهید $X \in A_۰$ اگر و تنها اگر $|X| \in X$.]

۲ حساب افرازی برای کاردینال‌های ناشمارا

قضیهٔ رمزی بیان می‌کند که هر افراز از زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ نامتناهی مانند S به تعداد متناهی رده دارای یک مجموعهٔ همگن نامتناهی است. پرسش طبیعی بعدی این است که S چقدر باید بزرگ باشد تا هر افراز آن دارای یک مجموعهٔ همگن ناشمارا باشد. با قیاس با قضیهٔ رمزی، شاید انتظار داشته باشیم که $\aleph_۱ \to (\aleph_۱)^r_s$. لیکن، همان‌طور که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد، این مطلب نادرست است.

۱.۲ قضیه. $۲^{\aleph_۰} \nrightarrow (\aleph_۱)^۲_۲$.

برهان. استدلال کاملاً شبیه استدلالی است که برای نتیجه‌گیری نتیجهٔ ۴.۱ به کار رفت. فرض کنید $\lambda = ۲^{\aleph_۰}$ عدد اصلی پیوستار باشد. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ دارای عدد اصلی $|\mathbb{R}| = \lambda$ است و با $\leq$ مرتب خطی است. فرض کنید $\preccurlyeq$ یک خوش‌ترتیبی از $\mathbb{R}$ با نوع ترتیب λ باشد. مجموعهٔ $[\mathbb{R}]^۲$ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم

$$A_۰ = \{\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^۲ \mid x \prec y \text{ و } x < y\},$$
$$A_۱ = \{\{x,y\} \in [\mathbb{R}]^۲ \mid x \prec y \text{ و } x > y\}.$$

فرض کنید H مجموعهٔ همگن ناشمارایی برای این افراز باشد. این یعنی اینکه یا

(۱) برای هر $x,y \in H$، $x \prec y$ ایجاب می‌کند $x < y$، یا

(۲) برای هر $x,y \in H$، $x \prec y$ ایجاب می‌کند $x > y$.

نشان می‌دهیم که چنین چیزی نشدنی است.

فرض کنیم (۱) برقرار باشد. فرض کنید $\varphi : \mu \to H$ یک یکریختی از $(\mu, \in)$ و $(H, \prec)$ باشد، که در آن μ یک عدد اوردینال است (بالضروره، $\mu \leq \lambda$ و

μ ناشماراست). ملاحظه می‌کنیم که $\xi < \eta < \mu$ ایجاب می‌کند $\varphi(\xi) \prec \varphi(\eta)$ و بنابراین $\varphi(\xi) < \varphi(\eta)$. لذا $\{(\varphi(\xi), \varphi(\xi + ۱)) \mid \xi < \mu\}$ گردایهٔ ناشمارایی از بازه‌های باز دو به دو مجزا در $\mathbb{R}$ است، که بنا به قضیهٔ ۲.۳ در فصل ۱۰ غیرممکن است.

حالت (۲) مشابه است. □

برای اثباتی اندکی متفاوت تمرین ۱.۲ را ببینید. اما، نتیجه‌ای ضعیف‌تر در جهت مثبت برقرار است.

۲.۲ قضیهٔ افراز اردوش ـ دوشنیک ـ میلر. $\aleph_۱ \longrightarrow (\aleph_۱, \aleph_۰)^۲_۲$.

به بیان دیگر، به‌ازای هر افراز از زوج‌های مرتب یک مجموعهٔ ناشمارا به دو رده، چنانچه یک رده هیچ مجموعهٔ همگن نامتناهی نداشته باشد، در این صورت ردهٔ دیگر دارای یک مجموعهٔ همگن ناشماراست.

برهان. فرض کنید $\{A, B\}$ افرازی از $[\omega_۱]^۲$ باشد. به‌ازای هر $\alpha \in \omega_۱$، تعریف کنید $B(\alpha) = \{\beta \in \omega_۱ \mid \beta \neq \alpha$ و $\{\alpha, \beta\} \in B\}$. دو حالت امکان‌پذیر است.

۱. به‌ازای هر مجموعهٔ ناشمارای $X \subseteq \omega_۱$، عضو $\alpha \in X$ موجود است که برای آن $|B(\alpha) \cap X| = \aleph_۱$. ما در این حالت به‌طریق بازگشتی مجموعهٔ همگن شمارایی برای B می‌سازیم. تعریف می‌کنیم $X_۰ = \omega_۱$ و $\alpha_۰$ را اولین عضو $X_۰$ در نظر می‌گیریم که برای آن $|B(\alpha_۰) \cap X_۰| = \aleph_۱$. حال قرار می‌دهیم $X_۱ = B(\alpha_۰) \cap X_۰$ و $\alpha_۱$ را کوچک‌ترین عضو $X_۱$ می‌گیریم که برای آن $|B(\alpha_۱) \cap X_۱| = \aleph_۱$. در حالت کلی، در مرحلهٔ $n + ۱$ قرار می‌دهیم $X_{n+۱} = B(\alpha_n) \cap X_n \subset X_n$ و $\alpha_{n+۱}$ را اولین عضو $X_{n+۱}$ می‌گیریم که برای آن $|B(\alpha_{n+۱}) \cap X_{n+۱}| = \aleph_۱$. روشن است که مجموعهٔ $H = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ شماراست و $[H]^۲ \subseteq B$.

۲. در حالت عکس، مجموعهٔ ناشمارای $X \subseteq \omega_۱$ موجود است به‌قسمی که برای هر $\alpha \in X$، $|B(\alpha) \cap X| \leq \aleph_۰$. این بار از طریق بازگشت ترامتناهی با طول $\omega_۱$ برای A مجموعهٔ همگن ناشمارایی می‌سازیم. فرض کنید دنبالهٔ یک‌به‌یک $\langle \alpha_\nu \mid \nu < \lambda \rangle$ تعریف شده باشد که در آن برای هر $\nu < \lambda < \omega_۱$، $\alpha_\nu \in X$، در این صورت ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ $\bigcup_{\nu<\lambda} B(\alpha_\nu) \cap X$ متشکل از آن

$\beta \in X$ها که به‌ازای آن‌ها $\{\alpha_\nu, \beta\} \in B$ (به‌ازای یک $\nu < \lambda$) حداکثر شماراست (این مجموعه اجتماع شمارایی از مجموعه‌های حداکثر شماراست). بنابراین، $X - \bigcup_{\nu<\lambda} \left(B(\alpha_\nu) \cup \{\alpha_\nu\}\right)$ ناشماراست؛ اولین عضو آن را α_λ در نظر می‌گیریم. به‌وضوح، $\alpha_\lambda \neq \alpha_\nu$ و برای هر $\nu < \lambda$، $\{\alpha_\nu, \alpha_\lambda\} \in A$. حال مجموعهٔ $H = \{\alpha_\nu \mid \nu < \omega_1\}$ در $|H| = \aleph_1$ و $[H]^2 \subseteq A$ صدق می‌کند. □

فی‌الواقع، قضیه برای هر کاردینال نامتناهی κ (به‌جای $\aleph_1$) برقرار است، یعنی، $\kappa \to (\kappa, \aleph_0)^2_2$. تغییر ساده‌ای در برهان حالت $\kappa = \aleph_1$ برهان حالت κی منظم را به‌دست می‌دهد؛ و ما آن را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

به منظور اینکه هر افرازِ $[S]^2$ مجموعهٔ همگن ناشمارایی داشته باشد، فضای زمینهٔ S باید از ناشمارایی صرف فراتر رود.

۳.۲ قضیهٔ افراز اردوش ــ رادو. $(2^{\aleph_0})^+ \longrightarrow (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$.

با مفروض گرفتن درستی فرض پیوستار، قضیهٔ بالا به $\aleph_2 \longrightarrow (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$ تبدیل می‌شود.

برهان. $(2^{\aleph_0})^+$ را با λ نشان می‌دهیم و $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را افرازی از $[\lambda]^2$ در نظر می‌گیریم. برای هر زوج $\{\alpha, \beta\} \in [\lambda]^2$ عدد یکتای n را که به‌ازای آن $\{\alpha, \beta\} \in A_n$ با $n(\alpha, \beta)$ نشان می‌دهیم ($n(\alpha, \beta)$ همان «رنگ» $\{\alpha, \beta\}$ است).

به‌ازای هر $\alpha < \lambda$ دنبالهٔ ترامتناهی f_α را به‌طریق بازگشتی به‌صورت زیر می‌سازیم:

$f_\alpha(0) = 0$،

اگر $\langle f_\alpha(\eta) \mid \eta < \xi \rangle$ تعریف شده باشد $(\xi < \alpha)$ و $\sigma < \alpha$ چنان موجود باشد که $\sigma \neq f_\alpha(\eta)$ و برای هر $\eta < \xi$، $n(f_\alpha(\eta), \sigma) = n(f_\alpha(\eta), \alpha)$، در این صورت $f_\alpha(\xi)$ را برابر کوچک‌ترین این σها تعریف می‌کنیم؛ در غیر این صورت فرایند متوقف می‌شود.

توجه می‌کنیم که $\operatorname{dom} f_\alpha$ قطعهٔ آغازی از α (یا خود α) است و f_α دنباله‌ای صعودی از اعضای α است.

ادعا می‌کنیم که به‌ازای یک $\alpha < \lambda$، $|\operatorname{dom} f_\alpha| \geq \aleph_1$. برخلاف، فرض کنید که برای هر $\alpha < \lambda$، $|\operatorname{dom} f_\alpha| \leq \aleph_0$. دنبالهٔ $g_\alpha : \operatorname{dom}(f_\alpha) \to \mathbb{N}$ را با تعریف $g_\alpha(\eta) = n(f_\alpha(\eta), \alpha)$ در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنیم که $g_\alpha = g_\beta$ ایجاب می‌کند $f_\alpha = f_\beta$. در واقع، به‌وضوح $\operatorname{dom} f_\alpha = \operatorname{dom} g_\alpha = \operatorname{dom} g_\beta = \operatorname{dom} f_\beta$ و اگر برای هر $\eta < \xi$، $f_\alpha(\eta) = f_\beta(\eta)$، در این صورت $n(f_\alpha(\eta), \sigma) = n(f_\alpha(\eta), \alpha)$ برقرار است اگر و تنها اگر $n(f_\beta(\eta), \sigma) = n(f_\beta(\eta), \beta)$ (برای هر $\eta < \xi$)، این نشان می‌دهد که، بنا به تعریف f، $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$. فرض ما ایجاب می‌کند که $\operatorname{dom} g_\alpha$ یک اوردینال شماراست، لذا فقط $2^{\aleph_0} = (\aleph_0^{\aleph_0}) \cdot \aleph_1$ تا g_α احتمالاً متمایز وجود دارد. بنابراین وجود دارد $\beta < \alpha < \lambda$ به‌قسمی که $g_\beta = g_\alpha$، لذا $f_\beta = f_\alpha$. چون در این صورت برای هر $\eta \in \gamma = \operatorname{dom} f_\alpha$، $n(f_\alpha(\eta), \beta) = n(f_\beta(\eta), \beta) = g_\beta(\eta) = g_\alpha(\eta) = n(f_\alpha(\eta), \alpha)$. از اینجا نتیجه می‌شود که $f_\alpha(\gamma)$ تعریف شده است (همین‌طور β). این امر تناقض است و ادعای ما را اثبات می‌کند.

اکنون α را با شرط $|\operatorname{dom} f_\alpha| \geq \aleph_1$ اختیار می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $X = \operatorname{ran} f_\alpha$. در این صورت $|X| \geq \aleph_1$ و مجموعهٔ X دارای این ویژگی است که برای هر $\sigma, \tau, \tau' \in X$، $\sigma < \tau$، $\sigma < \tau'$. $n(\sigma, \tau) = n(\sigma, \tau')$؛ به‌عبارت‌دیگر، $\{\sigma, \tau\} \in A_n$ اگر و تنها اگر $\{\sigma, \tau'\} \in A_n$. تعریف می‌کنیم $B_n = \{\sigma \in X \mid \sigma < \tau \text{ و } \{\sigma, \tau\} \in A_n \text{ ،} \tau \in X \text{ به‌ازای یک}\}$. گردایهٔ $\{B_n\}$ یک افراز از X است و $|X| \geq \aleph_1$ ایجاب می‌کند که به‌ازای یک $n \in \mathbb{N}$، $|B_n| \geq \aleph_1$. به‌وضوح $[B_n]^2 \subseteq A_n$ و لذا $H = B_n$ همان مجموعهٔ همگن مطلوب است. □

تعمیم این نتیجه خیلی دشوار نیست. نخست، دنبالهٔ ترامتناهی از بث‌ها را تعریف می‌کنیم، یعنی اعداد اصلی که از طریق نمای مکرر به‌دست می‌آیند.

۴.۲ تعریف.

$$\beth_0 = \aleph_0,$$

$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha},$$

$$\beth_\lambda = \sup\{\beth_\alpha \mid \alpha < \lambda\} \qquad \text{حدی } \lambda \neq 0$$

اکنون صورت کلی‌تری از قضیهٔ اردوش ـ رادو را می‌توان بیان کرد.

۵.۲ قضیه. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(\beth_n)^+ \longrightarrow (\aleph_1)^{n+1}_{\aleph_0}$.

اثبات از طریق استقرا و شبیه حالت خاص $n = 1$ در قضیهٔ ۳.۲ انجام می‌شود. نتایج مشابهی برای کاردینال نامتناهی دلخواه κ وجود دارد. تمرین ۵.۲ را ببینید. نتایج بسیاری از این نوع، چه مثبت چه منفی، را محققانی به‌دست آورده‌اند که در حوزه‌ای از نظریهٔ مجموعه‌ها معروف به ترکیبیات نامتناهی‌وار کار می‌کنند. یک پرسش به گونهٔ ویژه‌ای در پیشرفت نظریهٔ جدید مجموعه‌ها نقش بسیار مهمی ایفا کرده است. این پرسش عبارت است از اینکه آیا عدد اصلی ناشمارای κ موجود است که قضیه‌ای مشابه قضیهٔ رمزی برای آن برقرار باشد.

۶.۲ تعریف. کاردینال ناشمارای κ را ضعیف ـ فشرده خوانند هرگاه برای هر $r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$ داشته باشیم $\kappa \to (\kappa)^r_s$.

۷.۲ قضیه. کاردینال‌های ضعیف ـ فشرده قویاً دسترس‌ناپذیرند.

برهان. باید ثابت کنیم که کاردینال ضعیف ـ فشردهٔ κ یک کاردینال حدی قوی و منظم است.

(۱) منظمی: فرض کنید $\kappa = \bigcup_{\nu<\lambda} P_\nu$ که در آن $\lambda < \kappa$ و برای هر $\nu < \lambda$، $|P_\nu| < \kappa$. افرازی از $[\kappa]^2$ به‌صورت زیر تعریف کنید

$\{\alpha, \beta\} \in A_0$ اگر و تنها اگر $\nu < \lambda$ موجود باشد به‌قسمی که $\alpha \in P_\nu$ و $\beta \in P_\nu$

و در غیر این صورت $\{\alpha, \beta\} \in A_1$.

(۲) ویژگی حدی قوی بودن: فرض کنید $\lambda < \kappa \leq 2^\lambda$. بنا به تمرین ۱.۲، $(\lambda^+)^2_2 \nrightarrow 2^\lambda$، لذا $(\lambda^+)^2_2 \nrightarrow \kappa$، و چون $\lambda^+ \leq \kappa$، پس $(\kappa)^2_2 \nrightarrow \kappa$. □

تمرین‌ها

۱.۲ ثابت کنید برای هر κ نامتناهی $(\kappa^+)^2_2 \nrightarrow 2^\kappa$. [راهنمایی: از برهان قضیهٔ ۱.۲

پیروی کنید، منتها $(\mathbb{R}, \leq)$ را با مجموعهٔ $^{\kappa}\{۰,۱\}$ که به‌طور الفبایی مرتب شده است جایگزین کنید (فصل ۴، بخش ۴ را ببینید).]

۲.۲ ثابت کنید $\kappa \to (\kappa \cdot \aleph_۰)^۲_۲$ به‌ازای هر κ منظم نامتناهی برقرار است.

۳.۲ ثابت کنید: اگر X مجموعهٔ نامتناهی باشد و $\leq$ و $\preccurlyeq$ دو خوش‌ترتیبی از X باشد، آن‌گاه یک $Y \subseteq X$ با شرط $|Y| = |X|$ موجود است به‌قسمی که $y_۱ \leq y_۲$ اگر و تنها اگر $y_۱ \preccurlyeq y_۲$ برای هر $y_۱, y_۲ \in Y$ برقرار باشد. [راهنمایی: قرار دهید $A = \{\{x,y\} \in [X]^۲ \mid x < y \text{ و } x \prec y\}$ و $B = \{\{x,y\} \in [X]^۲ \mid x < y \text{ و } x \succ y\}$. قضیه اردوش ـ دوشنیک ـ میلر را به کار ببرید و نشان دهید که B نمی‌تواند مجموعهٔ همگن نامتناهی داشته باشد.]

۴.۲ ثابت کنید که $(\beth_n)^+ \to (\aleph_۱)^{n+۱}_{\aleph_۰}$.
[راهنمایی: استقرا.]

۵.۲ برای هر کاردینال κ تعریف کنید $\exp_۰(\kappa) = \kappa$، $\exp_{n+۱}(\kappa) = ۲^{\exp_n(\kappa)}$. ثابت کنید: به‌ازای هر κ نامتناهی، $\left(\exp_n(\kappa)\right)^+ \to (\kappa^+)^{n+۱}_{\kappa}$. به‌ویژه، $(۲^{\kappa})^+ \to (\kappa^+)^۲_۲$.

۳ درخت‌ها

سرچشمهٔ درخت‌ها نیز همانند افرازها در ترکیبیات متناهی است، اما بسیار مورد توجه نظریه مجموعه‌دان‌ها نیز قرار گرفت.

۱.۳ تعریف. یک درخت عبارت است از یک مجموعهٔ مرتب $(T, \leq)$ که دارای کوچک‌ترین عضو است و، برای هر $x \in T$، مجموعه $\{y \in T \mid y < x\}$ با $\leq$ خوش‌ترتیب است. شکل ۱ را ببینید.

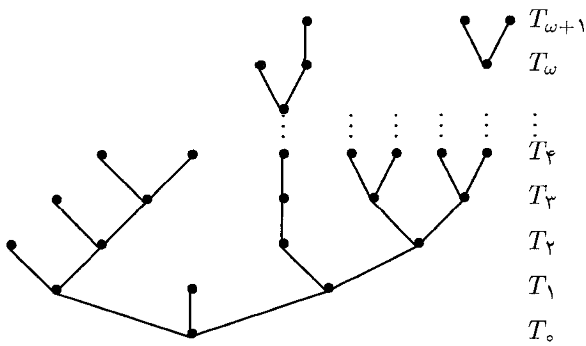
اعضای T، را گره می‌نامند. اگر $x, y \in T$ و $x > y$، گوییم y یک مقدم x و x یک تالی y است. ریشه کوچک‌ترین عضو یکتای T است. بنابه قضیهٔ ۱.۳ در فصل ۶، مجموعهٔ خوش‌ترتیب $\{y \in T \mid y < x\}$ متشکل از همهٔ مقدم‌های x با یک

عدد اصلی یکتایی مانند $h(x)$، موسوم به بلندی x، یکریخت است. مجموعهٔ $T_\alpha = \{x \in T \mid h(x) = \alpha\}$، α امین تراز T است. اگر $h(x)$ اوردینال تالی باشد، x را گرهٔ تالی و در غیر این صورت آن را گرهٔ حدی می‌نامند. کوچک‌ترین α را که برای آن $T_\alpha = \varnothing$، بلندی درخت T، $h(T)$، خوانده می‌شود.

یک شاخه در T عبارت است از یک زنجیر (یعنی، زیرمجموعهٔ مرتب خطی) بیشین در T. نوع ترتیب شاخه‌ای مانند b را طول آن می‌نامند و با $\ell(b)$ نشان می‌دهند. این عدد همیشه عدد ترتیبی کوچک‌تر یا مساوی با بلندی T است. شاخه‌ای را که طول آن با بلندی درخت مربوط برابر باشد هم‌پایان می‌نامند.

زیرمجموعه T' از T یک زیردرخت از T است هرگاه به‌ازای هر $x \in T'$، $y \in T$، $y < x$ ایجاب کند $y \in T'$. در این صورت T' نیز (وقتی با $\leq$ مرتب شود) یک درخت است و برای هر $\alpha < h(T')$، $T'_\alpha = T_\alpha \cap T'$. برای هر $\alpha \leq h(T)$، مجموعهٔ $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ زیردرختی از T است و $h(T^{(\alpha)}) = \alpha$. اگر $x \in T_\alpha$، در این صورت $\{y \in T \mid y < x\}$ شاخه‌ای از $T^{(\alpha)}$ با طول α است. معهذا، $T^{(\alpha)}$ ممکن است شاخه‌های دیگری از طول α نیز (اگر α اوردینال حدی باشد) داشته باشد.

سرانجام اینکه، مجموعهٔ $A \subseteq T$ یک پادزنجیر در T است اگر هر دو عضو متمایز A مقایسه‌ناپذیر باشند، یعنی $x, y \in A$ و $x \neq y$ ایجاب کند که نه $x < y$ و نه $y < x$. به خواننده قویاً توصیه می‌شود که تمرین‌های ۱.۳ و ۲.۳ را انجام دهد. در این تمرین‌ها برخی ویژگی‌های سادهٔ مفاهیم فوق‌الذکر بسط داده شده است.



شکل ۱

اکنون وقت آن رسیده که چند مثال از درخت‌ها را عرضه کنیم.

۲.۳ مثال.

الف) هر مجموعهٔ خوش‌ترتیب $(W, \leq)$ یک درخت است. لذا درخت‌ها را می‌توان تعمیم‌هایی از خوش‌ترتیبی‌ها در نظر گرفت. $h(W)$ نوع ترتیب W است: یگانه شاخهٔ W خود آن است و بنابراین هم‌پایان است.

ب) فرض کنید λ عدد اوردینال و A مجموعهٔ غیرتهی باشد. مجموعهٔ $A^{<\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} A^\alpha$ را برابر مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های ترامتناهی از اعضای A تعریف کنید که از طول کمتر از λ هستند. قرار می‌دهیم $T = A^{<\lambda}$ و آن را با $\subseteq$ مرتب می‌کنیم؛ لذا برای هر $f, g \in T$، $f \leq g$ بدین معنی است که $f \subseteq g$، یعنی، $f = g \restriction \operatorname{dom} f$. به‌راحتی می‌توان بررسی کرد که T یک درخت است. برای $f \in T$، $h(f) = \alpha$ اگر و تنها اگر $f \in A_\alpha$، به‌عبارت‌دیگر، $T_\alpha = A^\alpha$. به‌ازای $\alpha = \beta + ۱$ و $f \in A^\alpha$، $f \restriction \beta$ مقدم بلافصل f است، و هر $f \cup \{\langle \beta, a\rangle\}$، $a \in A$، تالی‌های بلافصل f هستند. شاخه‌ها در T در تناظر یک‌به‌یک با توابع از λ بتوی A هستند. در حقیقت، اگر $F \in A^\lambda$، آن‌گاه $\{F \restriction \alpha \mid \alpha < \lambda\}$ شاخه‌ای در T است. بالعکس، اگر B شاخه‌ای در T باشد آن‌گاه B دستگاه موافقی از توابع است و $F = \bigcup B \in A^\lambda$. ملاحظه می‌کنیم که تمامی شاخه‌ها هم‌پایان هستند.

ج) به‌طور کلی‌تر، اگر $T \subseteq A^{<\lambda}$ زیردرختی از $(A^{<\lambda}, \subseteq)$ باشد، شاخه‌ها در T در تناظری یک‌به‌یک با آن دسته توابع مانند $F \in A^{<\lambda} \cup A^\lambda$ قرار دارند که برای هر $\alpha \in \operatorname{dom} F$، $F \restriction \alpha \in T$ و یا $F \notin T$، یا $F \in T$ و F هیچ تالی در T ندارد. غالباً در این حالت شاخه‌ها را با توابع متناظرشان یکی می‌گیریم.

د) قرار دهید $A = \mathbb{N}$، $\lambda = \omega$. $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ را مجموعهٔ تمامی دنباله‌های نزولی متناهی در نظر بگیرید، به‌عبارت‌دیگر، $f \in T$ اگر و تنها اگر برای هر $i < j < \operatorname{dom} f \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $f(i) > f(j)$. در این صورت T زیردرختی از $(\mathbb{N}^{<\omega}, \subseteq)$ است. T درختی از بلندی ω است که دارای هیچ شاخهٔ هم‌پایانی نیست (تمرین ۸.۲ از فصل ۳ را ببینید).

ه) فرض کنید $(\mathbb{R}, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی باشد. یک نمایش از درخت $(T, \preccurlyeq)$ برحسب بازه‌ها در $(\mathbb{R}, \leq)$ عبارت است از تابع یک‌به‌یک Φ به‌طوری‌که به هر $x \in T$ یک بازه مانند $\Phi(x)$ در $(\mathbb{R}, \leq)$ نسبت می‌دهد به‌قسمی که برای هر $x, y \in T$

(۱) $x \preccurlyeq y$ اگر و تنها اگر $\Phi(x) \supseteq \Phi(y)$،

(۲) x و y مقایسه‌ناپذیرند اگر و تنها اگر $\Phi(x) \cap \Phi(y) = \varnothing$.

به‌ویژه، از اینجا نتیجه می‌شود که $(\Phi[T], \supseteq)$ درختی یکریخت با $(T, \preccurlyeq)$ است. برای نمونه، دستگاه $\langle D_s \mid s \in S \rangle$ که در مثال ۱۸.۳ از فصل ۱۰ ساختیم نمایشی از درخت $S = \text{Seq}(\{۰, ۱\}) = \{۰, ۱\}^{<\omega}$ (مرتب شده با $\subseteq$) برحسب بازه‌های بسته روی خط حقیقی است.

مطالعهٔ درخت‌های متناهی یکی از مسائل مهم مورد توجه در ترکیبیات است. در اینجا ما این مسئله را پی‌گیری نمی‌کنیم و در عوض توجه خود را به درخت‌های نامتناهی معطوف می‌کنیم. ما عمدتاً به این پرسش می‌پردازیم که تحت چه شرایطی یک درخت دارای شاخه‌ای هم‌پایان است. برای درخت‌هایی که بلندی آن‌ها برابر یک اوردینال تالی است جواب روشن است: اگر $h(T) = \alpha + ۱$، آن‌گاه $T_\alpha \neq \varnothing$ و $\{y \in T \mid y \leq x\}$، برای هر $x \in T_\alpha$، شاخه‌ای هم‌پایان در T است. از اینجا به بعد، به درخت‌هایی با بلندی حدی می‌پردازیم. مثال ۲.۳ (د) نشان می‌دهد که درخت‌هایی با بلندی ω وجود دارند که دارای شاخه‌های فقط متناهی هستند. قضیهٔ بعدی، که پایه‌ای‌ترین نتیجه در باب پرسش ماست، نشان می‌دهد که اگر درخت به قدر کافی «باریک» باشد مثال مذکور نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

۳.۳ لم کونیگ. اگر T درختی با بلندی ω باشد که تمامی ترازهای آن متناهی باشند، آن‌گاه T دارای شاخه‌ای با طول ω است.

معادلاً، هر درخت با بلندی ω که هر گرهٔ آن تعداد متناهی تالی بلافصل دارد دارای تعداد نامتناهی شاخه است.

برهان. قضیهٔ بازگشت را به کار می‌بریم تا دنبالهٔ نامتناهی مانند $\langle c_n \rangle_{n=۰}^{\infty}$ از گره‌های T بسازیم به‌قسمی که، برای هر n، $\{a \in T \mid c_n \leq a\}$ نامتناهی است.

فرض کنیم $c_\circ$ ریشهٔ T باشد و ملاحظه می‌کنیم که $\{a \in T \mid c_\circ \leq a\} = T$ نامتناهی است. اگر c_n چنان باشد که $\{a \in T \mid c_n \leq a\}$ نامتناهی باشد، ملاحظه می‌کنیم که

$$\{a \in T \mid c_n \leq a\} = \{c_n\} \cup \bigcup_{b \in S} \{a \in T \mid b \leq a\},$$

که در آن S مجموعهٔ متناهی متشکل از تمامی تالی‌های بلافصل c_n است (تمرین ۱.۳ (۵)). بنابراین، دست‌کم به‌ازای یک $b \in S$، مجموعهٔ $\{a \in T \mid b \leq a\}$ نامتناهی است؛ c_{n+1} را برابر یکی از این bها تعریف می‌کنیم. به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $\{a \in T \mid a \leq c_n$ ،به‌ازای یک $n \in \mathbb{N}\}$ شاخه‌ای در T از طول ω است. □

در اینجا باید نکتهٔ مهمی را در باب ساخت بازگشتی فوق و نمونه‌های مشابهی که خواهد آمد متذکر شویم. قضیهٔ بازگشت، به شکلی که در بخش ۳ از فصل ۳ صورت‌بندی شد، به تابعی مانند g نیاز دارد که کار آن «محاسبهٔ» c_{n+1} از c_n است. در برهان قبلی، ما چنین تابع g را صریحاً مشخص نکردیم و فی‌الواقع صورتی از اصل انتخاب برای انجام این کار مورد نیاز است. برای نمونه، فرض کنید k تابع انتخابی برای $\mathcal{P}(T)$ باشد. فرض کنید S_c مجموعهٔ همهٔ تالی‌های بلافصل c در T را نشان دهد. اگر قرار دهیم $g(c,n) = k(\{b \in S_c \mid$ متناهی است $\{a \in T \mid b \leq a\}\})$، آن‌گاه $c_{n+1} = g(c_n, n)$ دنبالهٔ $\langle c_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ را مطابق با قضیهٔ بازگشت تعریف می‌کند.

معمولاً این نوع ریزه‌کاری‌ها را حذف می‌کنند و ما نیز از این پس چنین خواهیم کرد. خواننده را ترغیب می‌کنیم که جزئیات چند کاربرد بعدی از قضیهٔ بازگشت یا قضیهٔ بازگشت ترامتناهی را به‌عنوان تمرین کامل کند.

برگردیم به لم کونیگ: به چند طریق جالب می‌توان این لم را تعمیم داد. برای نمونه، نسبتاً به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که هر درخت از بلندی κ که ترازهایش متناهی باشند دارای شاخه‌ای از طول κ است (تمرین ۳.۳). پرسش زیر را مطرح می‌کنیم: فرض کنید T درختی از بلندی ω_1 باشد که هر تراز آن حداکثر شماراست؛ آیا این درخت باید

شاخه‌ای از طول ω_1 داشته باشد؟ معلوم خواهد شد که پاسخ «منفی» است.

۴.۳ تعریف. درختی از بلندی ω_1 را درخت آرُنشاین می‌خوانند اگر تمامی ترازهایش حداکثر شمارا باشند و هیچ شاخه‌ای از طول ω_1 نداشته باشد.

۵.۳ قضیه. درخت‌های آرُنشاین از بلندی ω_1 وجود دارند.

برهان. ترازهای T_α، $\alpha < \omega_1$، از یک درخت آرُنشاین را به‌طریق بازگشت ترامتناهی به‌گونه‌ای می‌سازیم که

(۱) $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$، $|T_\alpha| \leq \aleph_0$.

(۲) اگر $f \in T_\alpha$، آن‌گاه f یک‌به‌یک است و $(\omega - \operatorname{ran} f)$ نامتناهی است.

(۳) اگر $f \in T_\alpha$ و $\beta < \alpha$، آن‌گاه $f \restriction \beta \in T_\beta$.

(۴) به‌ازای هر $\beta < \alpha$ و هر $g \in T_\beta$ و هر مجموعهٔ متناهی $X \subseteq w - \operatorname{ran} g$، تابع $f \in T_\alpha$ موجود است به‌قسمی که $f \supseteq g$ و $\operatorname{ran} f \cap X = \varnothing$.

اجازه دهید فرض کنیم این کار انجام شده است و نشان دهیم که در این صورت $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ یک درخت آرُنشاین است. به‌وضوح T یک درخت است (بنا به (۳))، هر تراز آن حداکثر شماراست (بنا به (۱))، و بلندی آن برابر ω_1 است (بنا به (۴) و اینکه $T_\alpha \neq \varnothing$). اگر B شاخه‌ای از طول ω_1 در T باشد، آن‌گاه $F = \bigcup B$ تابعی یک‌به‌یک از ω_1 بتوی ω خواهد بود (بنا به (۲))، که این نیز تناقض است.

باقی می‌ماند تکمیل ساخت T_αها. قرار می‌دهیم $T_0 = \{\varnothing\}$. با فرض اینکه T_α صادق در شرایط (۱)ـــ(۴) ساخته شده باشد، تعریف می‌کنیم $T_{\alpha+1} = \{g \cup \{\langle \alpha, a \rangle\} \mid g \in T_\alpha,\ a \in \omega - \operatorname{ran} g\}$. به‌آسانی می‌توان دید که شرایط (۱)ــ(۴) برای $\alpha + 1$ برقرار است.

باقی می‌ماند T_α را برای αی حدی بسازیم. به‌ازای هر $g \in T_\beta$، $\beta < \alpha$، و هر مجموعهٔ متناهی $X \subseteq (\omega - \operatorname{ran} g)$ تابع خاص $f = f(g, X)$ را به‌طریق بازگشتی به‌صورت زیر می‌سازیم: دنبالهٔ صعودی $\langle \alpha_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ را ثابت اختیار کنید به‌قسمی که $\alpha_0 = \beta$ و $\sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \alpha$. فرض کنید $f_0 = g \in T_{\alpha_0}$ و $X_0 = X \subseteq \omega - \operatorname{ran} f_0$. چنانچه $f_n \in T_{\alpha_n}$ و مجموعهٔ متناهی $X_n \subseteq \omega - \operatorname{ran} f_n$

تعریف شده باشد، نخست مجموعهٔ متناهی $X_{n+1} \supset X_n$ را انتخاب می‌کنیم که $X_{n+1} \subseteq \omega - \operatorname{ran} f_n$ (این کار شدنی است چرا که مجموعهٔ آخر بنا به (۲) نامتناهی است) و سپس یک $f_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ را طوری برمی‌گزینیم که $f_{n+1} \supseteq f_n$ و $X_{n+1} \cap \operatorname{ran} f_{n+1} = \varnothing$ (که بنا به (۴) شدنی است). قرار می‌دهیم $f = \bigcup_{n=0}^{\infty} f_n$. به‌وضوح $f : \alpha \to \omega$ یک‌به‌یک است (چون تمامی f_nها چنین‌اند)، $\operatorname{ran} f \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \varnothing$، لذا $\omega - \operatorname{ran} f$ نامتناهی است و $\operatorname{ran} f \cap X = \varnothing$. بنابراین f در (۲) صدق می‌کند. به‌ازای $\beta < \alpha$، $f \restriction \beta = f_n \restriction \beta$ به شرطی که $\beta < \alpha_n$، لذا (۳) نیز برقرار است.

به‌ازای هر $g \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ و هر مجموعهٔ متناهی $X \subseteq \omega - \operatorname{ran} g$ تابع $f = f(g, X)$ را در T_α قرار می‌دهیم. بنابراین (۴) نیز برقرار است. چون $|\bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta| \leq \sum_{\beta<\alpha} |T_\beta| \leq \aleph_0$ (بنا به فرض استقرای (۱)) و تعداد زیرمجموعه‌های متناهی از ω شماراست، پس مجموعهٔ T_α حداکثر شماراست و بنابراین (۱) نیز برقرار است. □

به‌طور کلی‌تر، یک درخت از بلندی κ (κ کاردینال ناشماراست) یک درخت آرُنشاین خوانده می‌شود هرگاه ترازهای آن عدد اصلی کوچک‌تر از κ داشته باشند و هیچ شاخه‌ای از طول κ نداشته باشد. وجود چنین درخت‌هایی پرسشی بسیار پیچیده است و تا کنون به‌طور کامل حل نشده است. به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر κ تکین باشد چنین درخت‌هایی وجود دارند (تمرین ۴.۳). کاردینال‌های ناشمارایی که برای آن‌ها مشابه لم کونیگ برقرار است، یعنی اینکه، هیچ درخت آرُنشاین از بلندی κ موجود نباشد، از اهمیت خاصی برخوردارند. به اصطلاح گویند این‌گونه کاردینال‌ها دارای ویژگی درخت‌وارگی هستند. ثابت می‌شود که کاردینال‌های قویاً دسترس‌ناپذیر دارای ویژگی درخت‌وارگی دقیقاً کاردینال‌های ضعیف‌ـفشرده مذکور در بخش ۲ هستند.

تمرین‌ها

۱.۳ فرض کنید $(T, \leq)$ یک درخت باشد. ثابت کنید

(۱) ریشه برابر عضو $r \in T$ یکتایی است که $h(r) = \circ$. به‌ویژه، $T_\circ \neq \varnothing$.

(۲) اگر $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه $T_\alpha \cap T_\beta = \varnothing$.

(۳) $T = T^{(h(T))} = \bigcup_{\alpha < h(T)} T_\alpha$.

(۴) $x \in T$ یک گرهٔ تالی است اگر و تنها اگر یک $y \in T$ موجود باشد به‌قسمی که $y < x$ و هیچ $z \in T$ موجود نباشد که $y < z < x$ برقرار باشد. اگر x یک گرهٔ تالی باشد آن‌گاه چنین yیی یکتاست؛ آن را پیش بلافصل x می‌نامند، و x را تالی بلافصل y می‌نامند. (هر گره حداکثر تعداد شمارایی پیش بلافصل دارد، ولی ممکن است تعداد زیادی تالی بلافصل داشته باشد.)

(۵) اگر $x < y$، آن‌گاه یک $z \in T$ یکتا موجود است به‌قسمی که $x < z \leq y$ و z تالی بلافصلی از x است.

(۶) $h(T) = \sup\{\alpha + ۱ \mid T_\alpha \neq \varnothing\} = \sup\{h(x) + ۱ \mid x \in T\}$.

۲.۳ ثابت کنید:

(۱) هر زنجیر در T خوش‌ترتیب است.

(۲) اگر b شاخه‌ای در T باشد، $x \in b$، و $y < x$، آن‌گاه $y \in b$.

(۳) اگر b شاخه‌ای در T باشد، آن‌گاه برای $\alpha < \ell(b)$، $|b \cap T_\alpha| = ۱$ و برای $\alpha > \ell(b)$، $|b \cap T_\alpha| = \circ$. نتیجه بگیرید که $\ell(b) \leq h(T)$.

(۴) نشان دهید که $h(T) = \sup\{\ell(b) \mid$ شاخه‌ای در T است $b\}$.

(۵) نشان دهید که هر T_α $(\alpha < h(T))$ یک پادزنجیر در T است.

۳.۳ فرض کنید $(T, \leq)$ درختی از بلندی κ باشد (κ یک کاردینال نامتناهی است)، که ترازهای آن متناهی است. ثابت کنید T شاخه‌ای از بلندی κ دارد.
[راهنمایی: تعریف کنید $U_\alpha = \{x \in T_\alpha \mid |\{y \in T \mid x \leq y\}| = \kappa\}$. ثابت کنید $\{|U_\alpha| \mid \alpha < \kappa\} \subseteq \mathbb{N}$ کران‌دار است؛ فرض کنید m بیشینهٔ آن باشد ($m \geq ۱$). نشان دهید که T دقیقاً m شاخه از طول κ دارد.]

۴.۳ درخت آرُنشاین از بلندی $\aleph_\omega$ بسازید. این ساخت را به کاردینال تکین دلخواه κ تعمیم دهید.

۴ مسئلهٔ سوسلین

در فصل ۴، قضیهٔ ۷.۵، ثابت کردیم که اعداد حقیقی، با ترتیب معمول، مجموعهٔ مرتب خطی کامل و یکتا (تا حد یکریختی) بدون نقاط انتهایی است که دارای زیرمجموعه‌ای چگال شماراست. نتیجه‌ای فوری از این قضیه این است که هر گردایه از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا در $(\mathbb{R},<)$ حداکثر شماراست (قضیهٔ ۲.۳ در فصل ۱۰). سوسلین در سال ۱۹۲۰ پرسید که آیا ترتیب اعداد حقیقی به‌طور یکتایی برحسب این خاصیت ضعیف‌تر مشخص می‌شود.

۱.۴ تعریف. یک خط سوسلین عبارت است از یک مجموعهٔ مرتب خطی کامل بدون نقاط انتهایی که در آن هر گردایه از بازه‌های باز دوبه‌دو مجزا حداکثر شماراست، ولی هیچ زیرمجموعهٔ چگال شمارا ندارد.

فرض مشهور سوسلین بیان می‌کند که هیچ خط سوسلینی وجود ندارد. در حال حاضر می‌دانیم که فرض سوسلین بر پایهٔ اصول تسرملو_فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها به همراه اصل انتخاب نه قابل اثبات کردن است و نه رد کردن. در این بخش پیوندی بین خطوط سوسلین و نوع خاصی از درخت‌ها برقرار می‌کنیم. در بخش بعد چند اصل موضوع دیگر با ماهیت ترکیبیاتی در نظر می‌گیریم که به پاسخی به مسئلهٔ سوسلین منتهی می‌شوند.

قضیهٔ ۵.۳ روشن می‌سازد که درخت از بلندی ω_1 با ترازهای شمارا همواره «به‌قدر کافی باریک» نیستند که دارای شاخه‌ای هم‌پایان باشند. مع‌الوصف، می‌توان شرط قوی‌تری وضع کرد: می‌توان الزام کرد که تمامی پادزنجیرها (و نه فقط ترازها) شمارا باشند.

۲.۴ تعریف. یک درخت از بلندی ω_1 را درخت سوسلین می‌نامند هرگاه تمامی پادزنجیرهایش حداکثر شمارا باشد و هیچ شاخه‌ای از طول ω_1 نداشته باشد.

به‌وضوح یک درخت سوسلین یک درخت آرُنشاین است، ولی عکس این حکم لزومی ندارد درست باشد. همان‌طور که اسم‌ها اشاره دارند پیوند نزدیکی بین

درخت‌های سوسلین و خطوط سوسلین وجود دارد. اکنون قصد داریم این پیوند را برقرار سازیم.

فرض کنید $(S,<)$ یک خط سوسلین باشد؛ متذکر می‌شویم که هر ترتیب کامل بنا به تعریف، چگال است. با استفاده از بازگشت ترامتناهی از طول $\omega_۱$ درختی مانند $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega_۱}$ و نمایش آن Φ را به‌وسیله بازه‌های باز در S می‌سازیم. به‌عبارت دقیق‌تر، ترازهای $T_\alpha \subseteq \mathbb{N}^\alpha$ و نگاشت‌های Φ_α را به‌قسمی می‌سازیم که به‌ازای هر $\alpha < \omega_۱$

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} |T_\alpha| \le \aleph_۰ \text{، } T^{(\alpha+۱)} = \bigcup_{\beta\le\alpha} T_\beta \text{ درخت است، و} \\ \Phi^{(\alpha+۱)} = \bigcup_{\beta\le\alpha} \Phi_\beta \text{ نمایشی از } T^{(\alpha+۱)} \text{ برحسب بازه‌ها روی } (S,<) \text{ است.} \end{array} \right.$$

قرار می‌دهیم $T_۰ = \{\varnothing\}$ و $\Phi(\varnothing) = S$. فرض کنید $T_\alpha \subseteq \mathbb{N}^\alpha$ ساخته شده باشد و در شرط $(*)$ صدق کند. برای هر $f \in T_\alpha$ و $n \in \mathbb{N} - \{۰\}$ تابع $f_n = f \cup \{(\alpha,n)\}$ را در $T_{\alpha+۱}$ قرار می‌دهیم. تعریف کنید $\Phi_\alpha(f) = (a,b)$؛ با استفاده از چگال بودن $(S,<)$ دنبالهٔ صعودی $a = a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < b$ را برمی‌گزینیم و برای هر $n \ge ۱$ تعریف می‌کنیم $\Phi_{\alpha+۱}(f_n) = (a_n, a_{n+۱})$. اگر $a_۰ = \sup\{a_n\}_{n=۱}^\infty < b$، $f_۰ = f \cup \{(\alpha,۰)\}$ را در $T_{\alpha+۱}$ قرار می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\Phi_{\alpha+۱}(f_۰) = (a_۰, b)$. روشن است که شرط $(*)$ به‌ازای هر $\alpha+۱$ برقرار است.

اکنون فرض کنید $\alpha < \omega_۱$ یک اوردینال حدی باشد. فرض کنیم برای هر $\beta < \alpha$، T_β و Φ_β صادق در شرط $(*)$ ساخته شده باشد. پس واضح است که $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ یک درخت است، $|T^{(\alpha)}| \le \aleph_۰$، و $\Phi^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta$ نمایشی از $T^{(\alpha)}$ برحسب بازه‌ها در S است.

فرض کنید f شاخه‌ای در $T^{(\alpha)}$ باشد؛ می‌توان آن را عضوی از $\mathbb{N}^\alpha$ در نظر گرفت. پس $\Phi^{(\alpha)}(f \restriction \beta) = (a_\beta, b_\beta)$ بازه‌ای در S است و $\beta < \gamma < \alpha$ ایجاب می‌کند $a_\beta \le a_\gamma < b_\gamma \le b_\beta$. قرار دهید $a = \sup_{\beta<\alpha} a_\beta$ و $b = \inf_{\beta<\alpha} b_\beta$ (از کامل بودن S استفاده کرده‌ایم)؛ به‌وضوح $a \le b$. در واقع اگر $a < b$، f را در T_α قرار می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $\Phi_\alpha(f) = (a,b)$. به سادگی می‌توان بررسی کرد که

$T^{(\alpha+1)} = T^{(\alpha)} \cup T_\alpha$ یک درخت است و $\Phi^{(\alpha+1)} = \Phi^{(\alpha)} \cup \Phi_\alpha$ نمایش آن است (مثلاً، اگر $f, g \in T_\alpha$ ناموافق باشند، اولین βیی را که $f(\beta) \neq g(\beta)$ در نظر می‌گیریم؛ در این صورت داریم $f \restriction (\beta + 1) \neq g \restriction (\beta + 1)$، لذا بنا به فرض استقرا، $\Phi^{(\alpha)}(f \restriction (\beta+1)) \cap \Phi^{(\alpha)}(g \restriction (\beta+1)) = \varnothing$، و بنابراین $\Phi(f) \cap \Phi(g) = \varnothing$). مجموعهٔ T_α حداکثر شماراست، چرا که در غیر این صورت $\{\Phi^{(\alpha)}(f) \mid f \in T_\alpha\}$ گردایهٔ ناشمارایی از بازه‌های دوبه‌دو مجزا در S خواهد بود. از این‌رو (*) در مرحلهٔ α برآورده می‌شود.

این مطلب ساخت بازگشتی را تکمیل می‌کند. تعریف می‌کنیم $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ و $\Phi = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Phi_\alpha$. به‌وضوح T یک درخت است و Φ آن را برحسب بازه‌ها در $(S, <)$ نمایش می‌دهد. ادعا می‌کنیم که T یک درخت سوسلین است. روشن است که T هیچ پادزنجیر ناشمارایی ندارد؛ در واقع تصویر هر پادزنجیر در T تحت تابع یک‌به‌یک Φ برابر گردایه‌ای از بازه‌های دوبه‌دو مجزا در S است و لذا حداکثر شماراست.

حالا نشان می‌دهیم که T هیچ شاخه‌ای از طول ω_1 ندارد.

۳.۴ ادعا. فرض کنید $(T, \leq)$ درختی باشد که هر گرهٔ آن حداکثر دو تالی بلافصل داشته باشد. اگر T هیچ پادزنجیر ناشمارایی نداشته باشد، آن‌گاه T هیچ شاخه‌ای از طول بزرگ‌تر از ω_1 ندارد.

برهان. فرض کنید $\langle x_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ زنجیری در T باشد، که در آن $x_\alpha \in T_\alpha$. مجموعهٔ تالی‌های بلافصل x_α حداکثر ۲ عضو دارد، لذا $y_{\alpha+1}$ را تالی بلافصل x_α متمایز از $x_{\alpha+1}$ در نظر بگیرید. از این‌رو، $\{y_{\alpha+1} \mid \alpha < \omega_1\}$ یک پادزنجیر در T است. □

باقی می‌ماند نشان دهیم که T دارای بلندی ω_1 است، به‌عبارت‌دیگر، برای هر α، $T_\alpha \neq \varnothing$. با برهان خلف عمل می‌کنیم. فرض کنید $\bar{\alpha} < \omega_1$ اولین اوردینالی باشد که برای آن $T_{\bar{\alpha}} = \varnothing$؛ از طرز ساخت $\bar{\alpha}$ واضح است که $\bar{\alpha}$ باید یک اوردینال حدی باشد. فرض کنید C مجموعهٔ تمامی نقاط انتهایی همهٔ بازه‌های $\Phi(g)$ باشد که $g \in T^{(\bar{\alpha})}$؛ در این صورت C حداکثر شماراست و

بنابراین نمی‌تواند در S چگال باشد. به بیان دیگر، بازه‌ای مانند (c,d) مجزا از C وجود دارد. با استفاده از آن شاخه‌ای در $T^{(\bar{\alpha})}$ به‌صورت زیر می‌سازیم: تعریف می‌کنیم $F(0) = \varnothing$ و ملاحظه می‌کنیم $(c,d) \subseteq S = \Phi(F(0))$. چنانچه $F(\alpha) \in T_\alpha$ به‌قسمی باشد که $(c,d) \subseteq \Phi(F(\alpha)) = (a,b)$ و دنبالهٔ $a = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_0 \leq b$ در ساخت $\Phi_{\alpha+1}$ به کار رفته باشد، ملاحظه می‌کنیم که $C \cap (c,d) = \varnothing$ ایجاب می‌کند که عدد یکتای $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌قسمی که $(c,d) \subseteq (a_n, a_{n+1})$ (یا چنانچه $n = 0$، $(c,d) \subseteq (a_0, b)$)؛ برای آن n تعریف می‌کنیم $F(\alpha + 1) = F(\alpha) \cup \{(\alpha, n)\}$. برای αی حدی، بنا به فرض استقرا $\bigcap_{\beta<\alpha} \Phi(F(\beta)) \supseteq (c,d)$، لذا $g = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta) \in T_\alpha$ و $\Phi(g) \supseteq (c,d)$، و بنابراین قرار می‌دهیم $F(\alpha) = g$.

شاخهٔ حاصل یعنی $f = \bigcup_{\alpha<\bar{\alpha}} F(\alpha)$ به‌روشنی باز هم دارای ویژگی $\bigcap_{\alpha<\bar{\alpha}} \Phi(f \restriction \alpha) \supseteq (c,d)$ است، لذا مطابق مرحلهٔ حدی ساخت بازگشتی $T_{\bar{\alpha}}$ داریم $f \in T_{\bar{\alpha}}$. از این‌رو $T_{\bar{\alpha}} \neq \varnothing$، که تناقض است.

درخت سوسلینی که اکنون ساختیم دارای دو ویژگی اضافی است که هر دو از خود برهان معلوم‌اند:

(۱) مجموعهٔ تمامی تالی‌های بلافصل هر گره شماراست.

(۲) اگر $x, y \in T_\alpha$، که α حدی و $\alpha < h(T)$، و
$\{z \in T \mid z < x\} = \{z \in T \mid z < y\}$، آن‌گاه $x = y$.

درخت‌ها با ویژگی‌های (۱) و (۲) را منظم می‌نامیم.

استدلال‌هایی که هم اکنون کامل شد قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنند.

۴.۴ قضیه. اگر یک خط سوسلین موجود باشد، آن‌گاه یک درخت منظم سوسلین وجود دارد.

این قضیه عکسی نیز دارد.

۵.۴ قضیه. اگر یک درخت منظم سوسلین موجود باشد، آن‌گاه یک خط سوسلین وجود دارد.

بنابراین وجود خطوط سوسلین با وجود درخت‌های منظم سوسلین معادل است. فی‌الواقع وجود خطوط سوسلین با وجود درخت‌های سوسلین معادل است، اما ما اثبات نه‌چندان جذاب این امر را حذف می‌کنیم.

برهان. فرض کنید $(T, \preccurlyeq)$ یک درخت منظم سوسلین باشد؛ بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای مجموعه‌ای مانند A، $T \subseteq A^{\omega_1}$ و $\preccurlyeq$ همان $\subseteq$ است (تمرین ۳.۴). برای هر $f \in T$ مجموعهٔ تالی‌های بلافصل f، S_f، شماراست و ترتیب خطی و چگالی $\prec_f$ از این مجموعه بدون نقاط انتهایی را ثابت اختیار می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که طول هر شاخهٔ b در T باید یک اوردینال حدی باشد (چرا که هر گره در T دارای تالی‌هایی است) کوچک‌تر از ω_1 (زیرا T سوسلین است). B را مجموعهٔ همهٔ شاخه‌های T قرار می‌دهیم و آن را به طور «الفبایی» مرتب می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر، B را به‌صورت زیرمجموعه‌ای از $\bigcup\{T^\alpha \mid \alpha < \omega_1$ حدی و $\alpha\}$ در نظر می‌گیریم و برای $b, b' \in B$، $b \neq b'$، قرار می‌دهیم

$$b < b' \qquad \text{اگر و تنها اگر} \qquad b \restriction (\alpha + 1) \prec_{b \restriction \alpha} b' \restriction (\alpha + 1)،$$

که در آن α کوچک‌ترین اوردینالی است که $b(\alpha) \neq b'(\alpha)$. (ملاحظه می‌کنیم که $b \subset b'$ یا $b' \subset b$ نشدنی است؛ در واقع، شاخه‌ها زنجیرهای بیشین هستند.) استدلال‌هایی شبیه آنچه در برهان قضیهٔ ۷.۴ در فصل ۴ به کار رفت نشان می‌دهد که $>$ ترتیبی خطی است. اگر $b < b'$ و α همانند بالا باشد، در این صورت $g \in S_{b \restriction \alpha}$ موجود است به‌قسمی که $b \restriction (\alpha + 1) \prec_{b \restriction \alpha} g \prec_{b' \restriction \alpha} b' \restriction (\alpha + 1)$ (بنا به ویژگی چگالی $\prec_{b \restriction \alpha}$). پس هر شاخهٔ $b'' \supseteq g$ در $b < b'' < b'$ صدق می‌کند، لذا $>$ روی B چگال است. استدلال‌های مشابهی نشان می‌دهد B بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عضو ندارد.

ادعا می‌کنیم که هر دستگاه از بازه‌های دو به دو مجزا در B حداکثر شماراست. برعکس فرض کنید که $\{(b_i, b'_i) \mid i < \omega_1\}$ دستگاهی مجزا باشد. فرض کنید α_i اولین اوردینالی باشد که $b_i(\alpha_i) \neq b'_i(\alpha_i)$ و $g_i \in S_{b_i \restriction \alpha_i}$ چنان باشد که $b_i \restriction (\alpha_i + 1) \prec g_i \prec b'_i \restriction (\alpha_i + 1)$. به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که

$\{g_i \mid i < \omega_1\}$ یک پادزنجیر در T است، که این هم تناقض است.

سرانجام، نشان می‌دهیم که B زیرمجموعهٔ چگال شمارا ندارد. فرض کنید $C = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ یکی از این زیرمجموعه‌ها باشد. $\alpha = \sup\{\ell(b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ را سوپریمم طول‌های شاخه‌ها در C در نظر بگیرید؛ چون $|C| \leq \aleph_0$ و $\ell(b_n) < \omega_1$، منظم بودن ω_1 ایجاب می‌کند که $\alpha < \omega_1$. اما $T_\alpha \neq \varnothing$، پس یک $f \in T_\alpha$، دوتا از تالی‌های بلافصل آن، مثل $f_2 \prec_f f_1$، و دو شاخه مانند $b_1 \supseteq f_1$ و $b_2 \supseteq f_2$ را در نظر بگیرید. حال داریم $b_1 < b_2$، اما بازهٔ (b_1, b_2) به‌وضوح مجزا از C است.

خلاصه آنکه $(B, <)$ تمامی ویژگی‌های یک خط سوسلین را دارد الا کامل بودن. $(\overline{B}, <)$ را کامل‌سازی ددکیند $(B, <)$ همان‌گونه که در بخش ۵ از فصل ۴ ساخته شد در نظر بگیرید. بررسی اینکه $(\overline{B}, <)$ یک خط سوسلین است تمرینی ساده است. $\square$

تمرین‌ها

۱.۴ فرض کنید $(S, <_1)$ یک خط سوسلین، $(\{a\}, <_2)$ مجموعهٔ یک عضوی با ترتیب یکتایش، و $(\mathbb{R}, <_3)$ خط حقیقی باشد. نشان دهید که مجموع مجموعه‌های مرتب $(S, <_1)$، $(\{a\}, <_2)$، و $(\mathbb{R}, <_3)$ یک خط سوسلین است.

۲.۴ فرض کنید $(S, <)$ یک خط سوسلین باشد؛ ثابت کنید $|S| \leq 2^{\aleph_0}$.
[راهنمایی: فرض کنید T و Φ همانند برهان قضیهٔ ۴.۴ باشند؛ با قرار دادن $\overline{\alpha} = \omega_1$ در آن استدلال و نشان دادن اینکه T دارای بلندی ω_1 است مجموعهٔ C با شرط $|C| = \aleph_1$ به‌دست می‌آید که در S چگال است. نشان دهید هر $x \in S$ برابر حد یک دنباله از اعضای C است؛ سپس تمرین ۱.۳ در فصل ۹ را به کار ببرید.]

۳.۴ نشان دهید که یک درخت، ویژگی (۲) مذکور در تعریف منظم بودن را دارد اگر و تنها اگر با درختی از دنباله‌های ترامتناهی یکریخت باشد (مثل مثال ۲.۳ (ج)).

۴.۴ فرض کنید $(B, <)$ ترتیبی خطی و چگال بدون نقاط انتهایی باشد که همهٔ ویژگی‌های یک خط سوسلین را دارد، الا کامل بودن. نشان دهید کامل سازی ددکیند آن $(\overline{B}, <)$ یک خط سوسلین است.

[راهنمایی: اگر $(\overline{B}, <)$ زیرمجموعهٔ چگال شمارایی داشت، آن‌گاه آن مجموعه با خط حقیقی یکریخت می‌شد. ولی هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از $\mathbb{R}$ یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا دارد؛ لذا B دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا است.]

۵.۴ یک درخت سوسلین منظم $(T, \leq)$ نرمال است اگر برای هر $\alpha < \beta < \omega_1$ و هر $x \in T_\alpha$ یک $y \in T_\beta$ موجود باشد به‌قسمی که $x < y$. یک خط سوسلین $(L, \leq)$ سره است اگر هیچ بازهٔ باز در L دارای زیرمجموعهٔ چگال شمارا نباشد. نشان دهید که یک درخت سوسلین نرمال است اگر و تنها اگر خط سوسلین ساخته‌شده از آن همانند برهان قضیهٔ ۵.۴ سره باشد.

۶.۴ ثابت کنید: اگر یک خط سوسلین موجود باشد، آن‌گاه یک خط سوسلین سره موجود است.

[راهنمایی: رابطهٔ هم‌ارزی روی خط سوسلین $(L, \leq)$ به‌صورت زیر تعریف کنید؛ $x \sim y$ اگر و تنها اگر بازه با نقاط انتهایی x و y شامل یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا باشد. نشان دهید که هر $[x]$ شامل یک زیرمجموعهٔ چگال شماراست. قرار دهید $\widetilde{L} = \{[x] \mid x \in L\}$؛ تعریف کنید $[x] \preccurlyeq [y]$ اگر و تنها اگر $x \leq y$ و نشان دهید که $(\widetilde{L}, \preccurlyeq)$ یک خط سوسلین سره است.]

۵ اصل‌های ترکیبیاتی

فرض سوسلین را براساس اصول موضوع ZFC نه می‌توان اثبات کرد و نه رد. این مطلب در دههٔ شصت میلادی با ساختن مدل‌هایی که اصول ZFC در آن‌ها ارضا می‌شود و فرض سوسلین برقرار نیست و همچنین مدل‌هایی که این فرض در آن‌ها برقرار است نشان داده شد. مطالعهٔ مدل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها مستلزم آشنایی با

منطق صوری است، که به‌جز مقدمهٔ مختصر در فصل ۱۵، خارج از حدود این کتاب است. مع‌الوصف، در ابتدای پیشرفت این نظریه ریاضیدانان تعدادی اصول کلی با ماهیت ترکیبیاتی را مورد بررسی قرار دادند که در یکی از مدل‌های ZFC برقرار است و نتیجه‌ای از آن پاسخی صریح به مسئلهٔ سوسلین و همین‌طور به تعداد دیگری از پرسش‌هاست. چنانچه بخواهیم اصلی از این‌گونه را به‌عنوان اصل موضوع اضافی از نظریهٔ مجموعه‌ها بپذیریم، در این صورت می‌توان با شیوه‌هایی کاملاً کلاسیک بدون مطالعهٔ عمیق منطق، نتایجی را که در ZFC خالص، دست‌نیافتنی هستند، اثبات کنیم. این شیوه‌ای است که در توپولوژی عمومی یا برخی قسمت‌های جبر مجرد در پیش گرفته شده است. در اینجا این رویکرد را با دو نمونه، یکی اصل لوزی ینسن و دیگری اصل موضوع مارتین، نشان می‌دهیم. بر این نکته تأکید می‌کنیم که وضع این اصول به‌لحاظ شناخت‌شناسی با اصول موضوع ZFC یکی نیست. در وضع حاضر نظریهٔ مجموعه‌ها دلایل قانع‌کننده‌ای برای پذیرفتن اینکه یکی از این اصول شهوداً درست است وجود ندارد. فقط می‌دانیم اگر بپذیریم که ZFC به تناقض منجر نمی‌شود این اصول نیز چنین خواهند بود. اهمیت این اصول در این است که به گرداب سازگاری نتایجی که با تکنیک مدل‌ها به‌دست می‌آیند سامان می‌بخشند.

اولین اصل ترکیبیاتی که بررسی می‌کنیم اصل $\diamondsuit$ ینسن است.

اصل $\diamondsuit$. دنبالهٔ $\langle W_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ موجود است به‌قسمی که، به‌ازای هر $\alpha < \omega_1$، $W_\alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$، W_α حداکثر شماراست، و برای هر $X \subseteq \omega_1$ مجموعهٔ $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha \in W_\alpha\}$ ماناست.

اینکه اصل $\diamondsuit$ در مدل ساخت‌پذیرها برقرار است امر شناخته‌شده‌ای است (فصل ۱۵ بخش ۲ را ببینید). در اینجا دوتا از نتایج آن را ثابت می‌کنیم؛ نتایج دیگر را در تمرین‌ها می‌توانید بیابید.

۱.۵ قضیه. اگر $\diamondsuit$ برقرار باشد، آن‌گاه $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

برهان. اگر $X \subseteq \omega \subseteq \omega_1$، آن‌گاه $S_X = \{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha \in W_\alpha\}$ ماناست. به‌ازای هر $\alpha \in S_X$، $\alpha \geq \omega$ ایجاب می‌کند که $X = X \cap \alpha \in W_\alpha$. لذا

$\mathcal{P}(\omega) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} W_\alpha$، اما عدد اصلی مجموعهٔ اخیر حداکثر برابر $\sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ است. $\square$

۲.۵ قضیه. اگر $\diamondsuit$ برقرارباشد، آن‌گاه خطوط سوسلین وجود دارند.

ایدهٔ اصلی برهان بدین صورت است که مطابق معمول از طریق بازگشت ترامتناهی $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ را می‌سازیم. می‌خواهیم اطمینان حاصل کنیم که T هیچ پادزنجیر ناشمارایی ندارد. چون $|T| = \aleph_1$، تعداد $2^{\aleph_1} > \aleph_1$ زیرمجموعه از T وجود دارد، بنابراین بیشتر از $\aleph_1$تا مجموعهٔ $X \subseteq T$ وجود دارد که ساختار ما اجازه نمی‌دهد پادزنجیر باشند. قلب اثبات در این است که بتوانیم به بیش از $\aleph_1$ مجموعه در $\aleph_1$ مرحله بپردازیم. دقیقاً همین جاست که $\diamondsuit$ به کار گرفته می‌شود. به بیان دقیق‌تر، به‌گونه‌ای عمل خواهیم کرد که آن $A \in W_\alpha$ها که پادزنجیر بیشین در زیردرخت $T^{(\alpha)}$ هستند و قبل از مرحلهٔ α ساخته شده‌اند دیگر رشد نکنند ـــ یعنی برای بقیهٔ ساختار T پادزنجیر بیشین باقی بمانند. $\diamondsuit$ ایجاب می‌کند که چنانچه X پادزنجیر بیشین در T باشد، آن‌گاه به‌ازای یک $\alpha < \omega_1$، $X \cap T^{(\alpha)}$ پادزنجیر بیشینی در $T^{(\alpha)}$ است و $X \cap T^{(\alpha)} \in W_\alpha$. چون نتیجتاً $X \cap T^{(\alpha)}$ رشد نمی‌کند، پس باید داشته باشیم $X = X \cap T^{(\alpha)}$ و لذا به‌ویژه X حداکثر شماراست.

اکنون می‌رویم سراغ جزئیات. یک مشکل جزئی در اینجا پیش می‌آید چرا که $\diamondsuit$ در مورد زیرمجموعه‌های ω_1 به کار گرفته می‌شود، حال آنکه ما در نظر داریم T را همچون زیرمجموعه‌ای از $\omega^{<\omega_1}$ بسازیم. لم زیر به این امر می‌پردازد.

۳.۵ لم. $\diamondsuit$ ایجاب می‌کند که دنبالهٔ $\langle Z_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ موجود است به‌قسمی که به‌ازای هر $\alpha < \omega_1$، $Z_\alpha \subseteq \omega^{<\alpha}$، Z_α حداکثر شماراست، و برای هر $X \subseteq \omega^{<\omega_1}$ مجموعهٔ $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \omega^{<\alpha} \in Z_\alpha\}$ ماناست.

برهان. چون بنا به قضیهٔ ۱.۵، $2^{\aleph_0} = \aleph_1$، ملاحظه می‌کنیم که $|\omega^{<\omega_1}| = |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \omega^\alpha| = \sum_{\alpha<\omega_1} 2^{\aleph_0} = \aleph_1$. فرض کنید F نگاشتی یک‌به‌یک از $\omega^{<\omega_1}$ بروی ω_1 باشد. ادعا می‌کنیم که $S_F = \{\alpha < \omega_1 \mid \sup F[\omega^{<\alpha}] = \alpha\}$ بستهٔ بی‌کران است.

روشن است که S_F بسته است. چنانچه $\beta < \omega_1$ داده شده باشد به‌طور بازگشتی تعریف می‌کنیم: $\alpha_0 = \beta$، $\alpha_{n+1} = \sup F[\omega^{<\alpha_n}]$، و قرار می‌دهیم $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n < \omega\}$. روشن است که $\beta \leq \alpha < \omega_1$ و $\alpha \in S_F$.

اکنون اگر $\alpha \in S_F$، قرار می‌دهیم $Z_\alpha = \{F^{-1}[A] \cap \omega^{<\alpha} \mid A \in W_\alpha\}$ و در غیر این صورت $Z_\alpha = \varnothing$. به‌وضوح $Z_\alpha \subseteq \omega^{<\alpha}$ و مجموعه‌ای حداکثر شماراست. اگر $X \subseteq \omega^{<\omega_1}$، آن‌گاه $F[X] \subseteq \omega_1$، لذا $S = \{\alpha < \omega_1 \mid F[X] \cap \alpha \in W_\alpha\}$ ماناست. پس $S \cap S_F$ نیز ماناست و $\alpha \in S \cap S_F$ ایجاب می‌کند $Z_\alpha \ni F^{-1}\left[F[X] \cap \alpha\right] \cap \omega^{<\alpha} = X \cap \omega^{<\alpha}$. □

اثبات قضیهٔ ۲.۵. درخت سوسلین خاص و جالب توجهی می‌سازیم.

۴.۵ تعریف. (تمرین ۵.۴ را ببینید) درخت منظم $(T, \leq)$ نرمال است هرگاه برای هر $\alpha < \beta < h(T)$ و هر $x \in T_\alpha$، یک $y \in T_\beta$ موجود باشد به‌قسمی که $x < y$.

از طریق بازگشت ترامتناهی T_α را می‌سازیم به طوری که برای هر $\alpha < \omega_1$، $|T_\alpha| \leq \aleph_0$ و $T^{(\alpha+1)} = \bigcup_{\beta \leq \alpha} T_\beta$ نرمال است. قرار می‌دهیم $T_0 = \{\varnothing\} \subseteq \omega^0$. چنانچه $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$ چنان داده شده باشد که $|T_\alpha| \leq \aleph_0$ و $T^{(\alpha+1)}$ نرمال باشد، تعریف می‌کنیم $T_{\alpha+1} = \{f \cup \{\langle \alpha, n\rangle\} \mid f \in T_\alpha,\ n \in \omega\}$ و ملاحظه می‌کنیم که $|T_{\alpha+1}| \leq \aleph_0$ و $T^{(\alpha+2)}$ نرمال است.

حال α را یک اوردینال حدی در نظر بگیرید. بنا به فرض استقرا، همهٔ T_βها، $\beta < \alpha$، و بنابراین $T^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta$ نیز نرمال هستند و $|T^{(\alpha)}| \leq \sum_{\beta < \alpha} |T_\beta| \leq \aleph_0$.

فرض کنید $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ گردایهٔ حداکثر شمارا از آن دسته اعضای Z_α باشد که اتفاقاً پادزنجیر بیشین در $T^{(\alpha)}$ هستند.

۵.۵ ادعا. به‌ازای هر $f \in T^{(\alpha)}$، شاخهٔ b از طول α موجود است به‌قسمی که $f \subseteq b$ و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، یک $g \in C_n$ موجود است به‌طوری‌که $g \subseteq b$.

برهان. دنبالهٔ صعودی $\langle \alpha_n \mid n \in \omega\rangle$ از اوردینال‌ها را چنان اختیار می‌کنیم $\alpha_0 = \operatorname{dom} f$ و $\sup_{n \in \omega} \alpha_n = \alpha$. به‌طریق بازگشتی b را می‌سازیم.

تعریف کنید $b_\circ = f$. چنانچه b_n با شرط $\operatorname{dom} b_n \geq \alpha_n$ داده شده باشد، یک $g \in C_n$ موافق با b_n موجود است، چرا که در غیر این صورت $C_n \cup \{b_n\}$ یک پادزنجیر در $T^{(\alpha)}$ خواهد بود که این امر بیشین بودن C_n را نقض می‌کند. اگر $\alpha_{n+1} \leq \operatorname{dom} g$، تعریف می‌کنیم $b_{n+1} = g$؛ در غیر این صورت یک $b_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ را انتخاب می‌کنیم به‌قسمی که $b_{n+1} \supseteq g \cup b_n$ (بنا به نرمال بودن $T^{(\alpha)}$ چنین b_{n+1} وجود دارد). چنانچه قرار دهیم $b = \bigcup_{n\in\omega} b_n$، خواهیم داشت $\operatorname{dom} b = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \alpha$، و ویژگی‌های دیگر b که در ادعا ذکر شده است به‌وضوح برآورده می‌شوند. □

بازگردیم به اثبات قضیهٔ ۲.۵، برای هر $f \in T^{(\alpha)}$ یک شاخهٔ b_f همانند ادعای **۵.۵** انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم $T_\alpha = \{b_f \mid f \in T^{(\alpha)}\}$. روشن است که $T^{(\alpha+1)}$ درختی نرمال است و $|T^{(\alpha+1)}| \leq \aleph_\circ$. نکتهٔ اصلی این است که هر C_n یک پادزنجیر بیشین در $T^{(\alpha+1)}$ باقی می‌ماند. دلیل این امر این است که هر $b \in T_\alpha$ با یک $g \in C_n$ موافق است (فی‌الواقع، $g \subseteq b$).

این مطلب ساخت بازگشتی مورد نظر را تکمیل می‌کند. قرار می‌دهیم $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ و ملاحظه می‌کنیم که T درختی نرمال از بلندی ω_1 است. با توجه به ادعای ۳.۴، باقی می‌ماند نشان دهیم که T هیچ پادزنجیر با عدد اصلی $\aleph_1$ ندارد. فرض کنید X یک چنین پادزنجیری باشد؛ می‌توانیم فرض کنیم X بیشین است.

۶.۵ ادعا. $S_X = \{\alpha < \omega_1 \mid$ است $T^{(\alpha)}$ پادزنجیری بیشین در $X \cap T^{(\alpha)}\}$ بستهٔ بی‌کران است.

برهان. فرض کنید $\beta < \omega_1$ دلخواه باشد. دنباله‌ای مانند $\langle \alpha_n \mid n \in \omega \rangle$ را به طریق بازگشتی می‌سازیم: $\alpha_\circ = \beta$. چنانچه α_n داده شده باشد، مجموعهٔ $T^{(\alpha_n)}$ حداکثر شماراست، و به‌ازای هر $f \in T^{(\alpha_n)}$ یک $g_f \in X$ موافق با f موجود است (زیرا در غیر این صورت، X دیگر پادزنجیر بیشین نخواهد بود). تعریف می‌کنیم

$$\alpha_{n+1} = \sup \big\langle \{(\operatorname{dom} g_f) + 1 \mid f \in T^{(\alpha_n)}\} \cup \{a_n\} \big\rangle.$$

اگر $\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\}$ داریم $\beta \leq \alpha < \omega_1$ و هر $f \in T^{(\alpha)}$ موافق با عضوی از

$X \cap T^{(\alpha)}$ است، لذا $X \cap T^{(\alpha)}$ زنجیر بیشینی در $T^{(\alpha)}$ است. این امر نشان می‌دهد S_X بی‌کران است. به‌آسانی دیده می‌شود که S_X بسته است. □

اکنون برهان قضیهٔ ۲.۵ را تکمیل می‌کنیم. لم ۳.۵ اوردینال $\alpha \in S_X$ را که α حدی است به‌دست می‌دهد به‌قسمی که $X \cap \omega^{<\alpha} \in Z_\alpha$. لذا $X \cap T^{(\alpha)}$ یک پادزنجیری بیشین در $T^{(\alpha)}$ است و به Z_α متعلق است. بنا به طرز ساخت ما و نکتهٔ اصلی فوق‌الذکر، $X \cap T^{(\alpha)}$ پادزنجیری بیشین در $T^{(\alpha+1)}$ باقی می‌ماند. اما در این صورت پادزنجیر بیشینی در T باقی می‌ماند! فی‌الواقع، اگر $f \in T - T^{(\alpha+1)}$، آن‌گاه $f \restriction \alpha \in T^{(\alpha+1)}$ و بنابراین به‌ازای یک $g \in X \cap T^{(\alpha)}$، $f \supseteq f \restriction \alpha \supseteq g$، به‌عبارت‌دیگر، f با یک $g \in X \cap T^{(\alpha)}$ مقایسه‌پذیر است. از اینجا نتیجه می‌شود که $X = X \cap T^{(\alpha)}$، پس به‌ویژه، $|X| \leq |T^{(\alpha)}| \leq \aleph_0$. □

یکی از بی‌شمار نتایج اصل ترکیبیاتی دومی که در این بخش مورد مطالعه قرار می‌دهیم، عدم وجود خطوط سوسلین است. پیش از بیان آن به معرفی چند اصطلاح نیاز داریم.

۷.۵ تعریف. فرض کنید $(P, \leq)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد. گوییم مجموعهٔ $C \subseteq P$ هم‌پایان در P است اگر برای هر $p \in P$ یک $q \in C$ موجود باشد به‌قسمی که $p \leq q$. مجموعهٔ $D \subseteq P$ جهت‌دار است اگر برای هر $d_1, d_2 \in D$ یک $d \in D$ موجود باشد به‌قسمی که $d_1 \leq d$ و $d_2 \leq d$. مجموعهٔ $A \subseteq P$ یک مجموعهٔ پایین است اگر $a \in A$، $p \in P$، $p \leq a$ ایجاب کند $p \in A$. فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های هم‌پایان از P باشد. مجموعهٔ $G \subseteq P$ را $\mathcal{C}$ـعام نامند اگر G یک مجموعهٔ جهت‌دار پایین باشد و برای هر $C \in \mathcal{C}$، $G \cap C \neq \varnothing$.

۸.۵ مثال. فرض کنید $(T, \leq)$ درخت باشد. $D \subseteq T$ جهت‌دار است اگر و تنها اگر D زنجیر باشد. فرض کنید T نرمال است. در این صورت $T(\alpha) = \bigcup_{\alpha \leq \beta} T_\beta = \{y \in T \mid x \leq y$ که $x \in T_\alpha$ موجود است به‌قسمی که $\}$ در T برای $\alpha < h(T)$ هم‌پایان است. مجموعهٔ $G \subseteq T$، $\mathcal{C}$ـعام است که $\mathcal{C} = \{T(\alpha) \mid \alpha < h(T)\}$ اگر و تنها اگر G شاخه‌ای از طول $h(T)$ در T باشد.

قضیهٔ زیر حقیقتی بنیادی دربارهٔ مجموعه‌های عام است.

۹.۵ قضیه. فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های هم‌پایان از P با شرط $|\mathcal{C}| \leq \aleph_0$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $p \in P$ یک مجموعهٔ $\mathcal{C}$ـعام مانند G موجود است به‌قسمی که $p \in G$.

برهان. قرار دهید $\mathcal{C} = \{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. دنبالهٔ $\langle p_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ را به‌طریق بازگشتی می‌سازیم. قرار می‌دهیم $p_0 = p$؛ با داشتن p_n، تعریف می‌کنیم $p_{n+1} = q$ که $q \in C_n$ چنان است که $p_n \leq q$. سرانجام تعریف می‌کنیم $G = \{r \in P \mid r \leq p_n$ ،$n \in \mathbb{N}$ به‌ازای یک $\}$. پس G یک مجموعهٔ پایینی است و G به‌وضوح جهت‌دار و $\mathcal{C}$ـعام است. □

به‌عنوان کاربرد، حالتِ خاصی از قضیهٔ رسته‌ای بِر را (برای $\mathbb{R}$) ثابت می‌کنیم.

۱۰.۵ نتیجه. اشتراک هر گردایهٔ حداکثر شمارا از مجموعه‌های باز چگال در $\mathbb{R}$ چگال است.

برهان. فرض کنید $\mathcal{O}$ گردایه‌ای حداکثر شمارا از مجموعه‌های باز چگال در $\mathbb{R}$ باشد. فرض کنید (a, b) یک بازهٔ باز باشد. مجموعهٔ P مجموعهٔ همهٔ بازه‌های بسته به‌صورت $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$، و $\alpha < \beta$ را در نظر می‌گیریم و آن را با عکس شمول $\supseteq$ مرتب می‌کنیم. اگر $O \subseteq \mathbb{R}$ باز و چگال باشد، تعریف می‌کنیم $C_O = \{[\alpha, \beta] \in P \mid [\alpha, \beta] \subseteq O\}$؛ به‌آسانی بررسی می‌شود که C_O در P هم‌پایان است. تعریف می‌کنیم $\mathcal{C} = \{C_O \mid O \in \mathcal{O}\}$؛ بنا به قضیهٔ **۹.۵**، مجموعهٔ $\mathcal{C}$ـعامی مانند G وجود دارد. به‌ویژه، G با $\supseteq$ جهت‌دار شده است. از اینجا نتیجه می‌شود که G گردایه‌ای از بازه‌های کران‌دار بسته و ناتهی با ویژگی اشتراک متناهی است. بنا به قضیهٔ ۴.۳ در فصل ۱۰، $\bigcap G \neq \varnothing$. به‌وضوح، هر $x \in \bigcap G$ به $(a, b) \cap \bigcap \mathcal{O}$ تعلق دارد. □

پرسش جالب این است که آیا مجموعه‌های $\mathcal{C}$ـعام برای $\mathcal{C}$های ناشمارا وجود دارد. مثال بعدی نشان می‌دهد که در حالت کلی وجود ندارند.

۱۱.۵ مثال. فرض کنید $T = \omega_1^{<\omega}$ و با $\subseteq$ به‌طریق معمول مرتب شده باشد. لذا T درخت متشکل از تمامی دنباله‌های متناهی از اوردینال‌های شماراست. به‌ازای هر $\alpha < \omega_1$ تعریف می‌کنیم $C_\alpha = \{f \in T \mid \alpha \in \operatorname{ran} f\}$. C_α در T هم‌پایان است. در واقع اگر $f \in T$، $\operatorname{dom} f = n$، آن‌گاه $g = f \cup \{\langle n, \alpha\rangle\} \in C_\alpha$ و $f \subseteq g$. فرض کنید G به‌ازای $\mathcal{C} = \{C_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$، $\mathcal{C}$ـعام باشد. G گردایه‌ای از دنباله‌های متناهی است و چون جهت‌دار است هر دو دنبالهٔ متناهی در G موافق هستند. بنابراین $F = \bigcup G$ تابعی از یک زیرمجموعهٔ ω بتوی ω_1 است. چون $|\operatorname{ran} F| \le \aleph_0$، یک $\gamma \in \omega_1 - \operatorname{ran} F$ موجود است، اما این رابطهٔ $C_\gamma \cap G \ne \varnothing$ را نقض می‌کند.

همان‌گونه که در مطالعهٔ درخت‌ها عمل کردیم، در اینجا نیز به امید داشتن نتایج با وجه مثبت باید خود را به مجموعه‌های مرتب به قدر کافی «باریک» محدود سازیم.

۱۲.۵ تعریف. فرض کنید $(P, \le)$ یک مجموعهٔ مرتب باشد. گوییم $p, q \in P$ موافق‌اند اگر یک $r \in P$ موجود باشد به‌قسمی که $p \le r$ و $q \le r$؛ در غیر این صورت آن‌ها ناموافق‌اند. یک پادزنجیر در P عبارت است از یک زیرمجموعهٔ $A \subseteq P$ به‌قسمی که $p, q \in A$، $p \ne q$ ایجاب می‌کند p و q ناموافق‌اند.

ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $(P, \le)$ درخت باشد، $p, q \in P$ موافق‌اند اگر و تنها اگر مقایسه‌پذیر باشند، لذا تعریف ما برای پادزنجیرها با تعریف قبلی برای درخت‌ها مطابقت دارد.

مجموعهٔ مرتب $(P, \le)$ در شرط پادزنجیر شمارا صدق می‌کند هرگاه هر پادزنجیر در P حداکثر شمارا باشد.

فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی باشد. حال می‌توانیم اصل موضوع مارتین را برای κ بیان کنیم.

اصل موضوع مارتین MA_κ. اگر $(P, \le)$ مجموعهٔ مرتب صادق در شرط پادزنجیر شمارا باشد، آن‌گاه به‌ازای هر گردایهٔ $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های هم‌پایان P با شرط $|\mathcal{C}| \le \kappa$، یک مجموعهٔ $\mathcal{C}$ـعام وجود دارد.

توجه می‌کنیم که بنا به قضیهٔ **۹.۵**، $\mathrm{MA}_{\aleph_0}$ درست است، لذا $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ اولین حالت جالب توجه است. در اینجا دوتا از پیامدهای آن را ثابت می‌کنیم و نمونه‌های بیشتر را در تمرین‌ها بررسی خواهیم کرد.

۱۳.۵ قضیه. MA_κ ایجاب می‌کند که اشتراک هر گردایهٔ $\mathcal{O}$ از مجموعه‌های باز چگال در $\mathbb{R}$ با شرط $|\mathcal{O}| \leq \kappa$ چگال است.

برهان. دقیقاً همانند برهان نتیجهٔ **۱۰.۵** است فقط ارجاع به قضیهٔ **۹.۵** با ارجاع به MA_κ جایگزین می‌شود. مطابق قضیهٔ **۲.۳** در فصل ۱۰، P در شرط پادزنجیر شمارا صدق می‌کند. □

۱۴.۵ نتیجه. MA_κ ایجاب می‌کند $\kappa < 2^{\aleph_0}$.

برهان. به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}$، $O_x = \mathbb{R} - \{x\}$ باز و چگال است. اگر $\kappa \leq 2^{\alpha_0}$، آن‌گاه $\mathcal{O} = \{O_x \mid x \in \mathbb{R}\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز چگال در $\mathbb{R}$ با شرط $|\mathcal{O}| \leq \kappa$ است، اما $\bigcap \mathcal{O} = \varnothing$ در $\mathbb{R}$ چگال نیست. □

به‌ویژه، $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ ایجاب می‌کند $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$، که این نقیض فرض پیوستار است.

۱۵.۵ قضیه. $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ ایجاب می‌کند که خطوط سوسلین وجود ندارند.

برهان. فرض کنید T یک درخت سوسلین منظم از بلندی ω_1 باشد. قرار می‌دهیم $\tilde{T} = \{t \in T \mid \text{ناشماراست } \{r \in T \mid t \leq r\}\}$. روشن است که $\tilde{T}$ زیردرختی از T است و $\tilde{T}$ در شرط مذکور در تعریف **۴.۵** صدق می‌کند (اگر چه $\tilde{T}$ لزوماً منظم نیست، حتی اگر T منظم باشد!)؛ به‌ویژه، $|\tilde{T}| = \aleph_1$. به‌ازای هر $\alpha < \omega_1$، $\tilde{T}(\alpha) = \{y \in \tilde{T} \mid x \leq y$ به‌ازای یک $x \in \tilde{T}_\alpha\}$ در $\tilde{T}$ هم‌پایان است. فرض کنید G برای $\mathcal{C} = \{\tilde{T}(\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$، $\mathcal{C}$ـعام باشد. در این صورت G شاخه‌ای هم‌پایان در $\tilde{T}$، و بنابراین در T، است که این هم فرض اینکه T سوسلین است را نقض می‌کند. □

اصل موضوع مارتین (MA) عبارت است از اینکه MA_κ برای هر $\kappa < 2^{\aleph_0}$

نامتناهی برقرار است. اگر $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$، آن‌گاه $\kappa < 2^{\aleph_0}$ ایجاب می‌کند $\kappa = \aleph_0$ و MA برقرار است. مع‌هذا، برقرار بودن MA و $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ با هم سازگار است. لذا MA را می‌توان تعمیمی از فرض پیوستار محسوب کرد. مستقیماً از قضیهٔ ۱۳.۵ درمی‌یابیم که اگر MA برقرار باشد، آن‌گاه اشتراک هر گردایهٔ $\mathcal{O}$ از زیرمجموعه‌های باز چگال از $\mathbb{R}$ با شرط $|\mathcal{O}| < 2^{\aleph_0}$ چگال است. همچنین MA ایجاب می‌کند که اجتماع مجموعه‌ها با اندازهٔ لبگ صفر با تعداد کمتر از $2^{\aleph_0}$ با اندازهٔ صفر است، اندازهٔ لبگ به‌ازای هر $\kappa < 2^{\aleph_0}$، κـ‌جمع‌پذیر است (و نه فقط شمارا‌ـ‌جمعی)، و بسیاری نتایج دیگر دربارهٔ $\mathbb{R}$، فضاهای توپولوژیک، و مجموعه‌ها به‌طور کلی.

تمرین‌ها

۱.۵ نشان دهید که $\diamondsuit$ معادل است با گزارهٔ زیر: دنبالهٔ $\langle W'_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ موجود است به‌قسمی که، برای هر $\alpha < \omega_1$، $W'_\alpha \subseteq \alpha^\alpha$، W'_α حداکثر شماراست، و برای هر $f : \omega_1 \to \omega_1$ مجموعهٔ $\{\alpha < \omega_1 \mid f \restriction \alpha \in W'_\alpha\}$ ماناست.

۲.۵ $\diamondsuit$ را مفروض بگیرید و نشان دهید که درخت سوسلینی مانند $(T, \leq)$ موجود است به‌قسمی که تنها خودریختی $(T, \leq)$ همان نگاشت همانی است (آن درخت را درخت استوار سوسلین می‌نامند).
[راهنمایی: از برهان قضیهٔ ۲.۵ تقلید کنید. در مرحله‌های حدی α اطمینان حاصل کنید که هیچ خودریختی h از $T^{(\alpha)}$ به‌شرطی‌که $h \in Z_\alpha$ نمی‌تواند به یک خودریختی از $T^{(\alpha+1)}$ گسترش یابد.]

۳.۵ با مفروض گرفتن $\diamondsuit$ نشان دهید که به تعداد $2^{\aleph_1}$تا درخت سوسلین نرمال دوبه‌دو غیریکریخت وجود دارد.

۴.۵ با مفروض گرفتن $\diamondsuit$ نشان دهید که $2^{\aleph_1}$تا زیرمجموعهٔ مانا از ω_1 موجود است به‌قسمی که اشتراک هر دوتا از آن‌ها حداکثر شماراست.
[راهنمایی: برای هر $X \subseteq \omega_1$ مجموعهٔ $S_X = \{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha \in W_\alpha\}$ را در نظر بگیرید.]

۵.۵ نشان دهید که MA_κ معادل با گزارهٔ زیر است: اگر $(P, \leq)$ مجموعهٔ

مرتبی صادق در شرط پادزنجیر شمارا باشد، آن‌گاه برای هر گردایهٔ $\mathcal{C}$ از پادزنجیرهای بیشین با شرط $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ یک مجموعهٔ جهت‌دار G موجود است به‌قسمی که، به‌ازای هر $C \in \mathcal{C}$، یک $c \in C$ و $a \in G$ موجود است به‌طوری‌که $c \leq a$.

۶.۵ نشان دهید که $2^{\aleph_0}$تا زیرمجموعه از ω موجود است به‌قسمی که اشتراک هر دوتا از آن‌ها متناهی است.

[راهنمایی: برای $f \in \{0, 1\}^\omega$، تعریف کنید $A_f = \{f \upharpoonright n \mid n \in \omega\} \subseteq \omega^{<\omega}$. البته، $|\omega^{<\omega}| = |\omega|$.]

۷.۵ فرض کنید $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ و نشان دهید که $2^{\aleph_1}$تا زیرمجموعه از ω_1 موجود است به‌قسمی که اشتراک هر دوتا از آن‌ها حداکثر شماراست.

فصل ۱۳

کاردینال‌های بزرگ

۱ مسئلهٔ اندازه

قضیهٔ ۱۴.۲ در فصل ۸ نشان می‌دهد که اندازهٔ σـجمعی و انتقال ناوردایی مانند μ روی σـجبر همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ وجود ندارد به‌قسمی که برای هر بازهٔ $[a,b]$ در $\mathbb{R}$، $\mu([a,b]) = b - a$. در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که آیا اندازهٔ σـجمعی روی $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ یا همین‌طور روی $\mathcal{P}(S)$، برای هر مجموعهٔ نامتناهی S، وجود دارد. البته اندازهٔ شمارشی، که حالت $\mu(S) = \infty$ در آن اتفاق می‌افتد، مثال واضحی برای این سؤال است. اما ما مسئله را به‌گونهٔ دیگری صورت‌بندی می‌کنیم. نزد ما اندازه فقط می‌تواند مقدار متناهی اختیار کند و همچنین بدون کاسته شدن از کلیت، شرط می‌کنیم که $\mu(S) = ۱$.

۱.۱ تعریف. فرض کنید S یک مجموعهٔ ناتهی باشد. منظور از یک اندازهٔ (احتمالی σـجمعی غیربدیهی) روی S عبارت است از تابع $\mu : \mathcal{P}(S) \to [۰, ۱]$ به‌قسمی که

الف) $\mu(\varnothing) = ۰$، $\mu(S) = ۱$.

ب) اگر $X \subseteq Y$، آن‌گاه $\mu(X) \le \mu(Y)$.

ج) اگر X و Y از هم مجزا باشند، آن‌گاه $\mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.

د) برای هر $a \in S$، $\mu(\{a\}) = ۰$.

ه) اگر $\{X_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای S باشند، آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{n=\circ}^{\infty} X_n) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \mu(X_n).$$

از (د) و (ه) نتیجه می‌شود که هر زیرمجموعهٔ شمارای S دارای اندازه‌ای برابر صفر است. لذا اگر اندازه‌ای روی S موجود باشد باید S ناشمارا باشد. روشن است که وجود اندازه روی S فقط به کاردینال S بستگی دارد. پس، اگر روی S یک اندازه وجود داشته باشد و $|S| = |S'|$، در این صورت روی S' نیز یک اندازه وجود دارد. در بخش ۲ از فصل ۱۱، یک اندازهٔ متناهیاً جمعی غیربدیهی را روی $\mathbb{N}$، یعنی تابعی که در شرایط (الف)ـــ(د) از تعریف ۱.۱ صدق می‌کند، ساختیم. اینکه آیا چنین تابعی روی مجموعهٔ S وجود دارد که σـ‌جمعی باشد به مسئلهٔ اندازه معروف است. مسئلهٔ اندازه با مسئلهٔ گسترش اندازهٔ لبگ به همهٔ مجموعه‌های اعداد حقیقی ارتباط دارد. به بیان دقیق‌تر، آیا اندازهٔ σـ‌جمعی مانند $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [\circ, \infty) \cup [\infty]$ وجود دارد که برای هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر لبگ X، $\mu(X)$ برابر اندازهٔ لبگ X باشد؟ چنانچه گسترشی مانند μ از اندازهٔ لبگ موجود باشد، در این صورت تحدید μ به $\mathcal{P}([\circ, ۱])$ یک اندازهٔ غیربدیهی روی $S = [\circ, ۱]$ خواهد بود (یعنی در شرایط (الف) تا (ه) از تعریف ۱.۱ صدق می‌کند). بالعکس، می‌توان نشان داد که اگر یک اندازهٔ غیربدیهی روی یک مجموعه با کاردینال $۲^{\aleph_\circ}$ موجود باشد در این صورت می‌توان اندازهٔ لبگ را به یک اندازهٔ σـ‌جمعی مثل $\mu : \mathcal{P} \to [\circ, \infty) \cup \{\infty\}$ گسترش داد.

مسئلهٔ اندازه پرسشی طبیعی است که در آنالیز حقیقی مجرد مطرح می‌شود و عمیقاً به مسئلهٔ پیوستار مرتبط است. همچنین جالب توجه است که این مسئله به کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر، که در فصل ۹ بررسی کردیم، ارتباط پیدا می‌کند. مسئلهٔ اندازه نقطهٔ شروع بررسی کاردینال‌های بزرگ است که آن‌ها را در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۱ قضیه. اگر یک اندازه روی $۲^{\aleph_\circ}$ موجود باشد، آن‌گاه فرض پیوستار نقض می‌شود.

برهان. فرض کنید که $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ و اندازه‌ای مثل μ روی مجموعهٔ $S = \omega_1$ موجود باشد، یعنی تابعی که روی $\mathcal{P}(S)$ تعریف شده است و در شرایط (الف)ـــ(ه) از تعریف ۱.۱ صدق می‌کند. ایدال مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را با I نشان می‌دهیم، یعنی

$$I = \{X \subseteq S \mid \mu(X) = 0\}.$$

ایدال I دارای خواص زیر است

(۳.۱) برای هر $x \in S$، $\{x\} \in I$،

(۴.۱) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_n \in I$، آن‌گاه $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \in I$،

(۵.۱) گردایهٔ ناشمارا از مجموعه‌های دو به دو مجزا، مانند $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$، وجود ندارد به‌قسمی که برای هر $X \in \mathcal{S}$، $X \notin I$.

خاصیت (۴.۱) نتیجهٔ مستقیمی از تعریف ۱.۱ (ه) است. برای اثبات (۵.۱)، فرض کنید $\mathcal{S}$ گردایه مذکور در (۵.۱) باشد. برای هر n، تعریف کنید

$$\mathcal{S}_n = \{X \in \mathcal{S} \mid \mu(X) \geq \frac{1}{n}\}.$$

چون $\mu(S) = 1$، پس هر $\mathcal{S}_n$ فقط می‌تواند متناهی باشد. همچنین، چون $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$، پس $\mathcal{S}$ حداکثر شمارا است.

حال «ماتریسی» از زیرمجموعه‌های S به‌صورت $\langle A_{\alpha n} \mid \alpha \in \omega_1,\ n \in \omega\rangle$ می‌سازیم.

برای هر $\xi < \omega_1$، تابع f_ξ روی ω موجود است به‌قسمی که $\xi \subseteq \operatorname{ran} f_\xi$. برای هر ξ یک f_ξ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$A_{\alpha n} = \{\xi < \omega_1 \mid f_\xi(n) = \alpha\} \quad (\alpha < \omega_1,\ n \in \omega).$$

ماتریس $(A_{\alpha n})$ دارای خواص زیر است.

(۶.۱) برای هر n اگر $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه $A_{\alpha n} \cap A_{\beta n} = \varnothing$.

(۷.۱) برای هر α، مجموعه $S - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{\alpha n}$ حداکثر شماراست.

رابطهٔ (۶.۱) نیز برقرار است، زیرا اگر $\xi \in A_{\alpha n} \cap A_{\beta n}$، در این صورت $f_\xi(n) = \alpha$ و $f_\xi(n) = \beta$. مجموعهٔ مذکور در (۷.۱) به این دلیل که مشمول در مجموعهٔ $\alpha \cup \{\alpha\}$ است، حداکثر شماراست. در حقیقت، اگر برای هر n، $\xi \notin A_{\alpha n}$، در این صورت $\alpha \notin \operatorname{ran} f_\xi$ و لذا $\xi \leq \alpha$.

فرض کنید $\alpha < \omega_1$ ثابت اختیار شده باشد. از (۷.۱) و (۴.۱) نتیجه می‌گیریم که همهٔ مجموعه‌های $A_{\alpha n}$ برای $n \in \omega$، در ایدال I قرار ندارند. زیرا ω_1 اجتماع مجموعه‌های $A_{\alpha n}$ است، پس حداکثر شماراست و بنا به (۳.۱) و (۴.۱) به I تعلق دارد.

بنابراین، برای هر $\alpha < \omega_1$ عدد $n_\alpha \in N$ موجود است به‌قسمی که $A_{\alpha n_\alpha} \notin I$. چون تعداد ناشمارایی اوردینال $\alpha < \omega_1$ و تعداد شمارایی عدد $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد، پس عدد n موجود است به‌قسمی که مجموعهٔ $\{\alpha \mid n_\alpha = n\}$ ناشماراست. تعریف کنید

$$\mathcal{S} = \{A_{\alpha n} \mid n_\alpha = n\}.$$

گردایهٔ $\mathcal{S}$ گردایه‌ای ناشمارا از زیرمجموعه‌های S است. بنا به (۶.۱)، مجموعه‌های $\mathcal{S}$ دوبه‌دو مجزا هستند، پس برای هر $A_{\alpha n} \in \mathcal{S}$، $A_{\alpha n} \notin I$. این امر (۵.۱) را نقض می‌کند.

از تناقض اخیر نتیجه می‌گیریم که فرض $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ باید نادرست باشد. پس قضیه اثبات می‌شود. $\square$

با اندکی تغییر در اثبات قضیهٔ ۲.۱، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

۸.۱ قضیه. اگر یک اندازه روی مجموعهٔ S موجود باشد، آن‌گاه کاردینالی مانند $\kappa \leq |S|$ موجود است که ضعیفاً دسترس‌ناپذیر است.

۹.۱ نتیجه. اگر یک اندازه روی $2^{\aleph_0}$ موجود باشد، آن‌گاه کاردینال ضعیفاً دسترس‌ناپذیر κ موجود است به‌قسمی که $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

اثبات قضیهٔ ۸.۱ بسیار شبیهٔ اثبات قضیهٔ ۲.۱ است. فرض می‌کنیم برای مجموعه‌ای مانند S تابع $\mu : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$ موجود باشد که در تعریف ۱.۱ صدق می‌کند. حال نشان می‌دهیم که ایدال I روی S یافت می‌شود که در شرایط (۳.۱)، (۴.۱)، و (۵.۱) صدق می‌کند. تعریف کنید

$\kappa =$ کوچک‌ترین کاردینالی که به‌ازای مجموعه‌ای مثل S با اندازهٔ κ، ایدال I روی S موجود باشد که در خواص (۳.۱)، (۴.۱)، و (۵.۱) صدق می‌کند. (۱۰.۱)

(۱۱.۱) I ایدالی روی $S = \kappa$ با خواص (۳.۱)، (۴.۱)، و (۵.۱) است.

(روشن است که اگر چنین ایدالی روی مجموعه‌ای مثل S با اندازهٔ κ یافت شود، در این صورت روی κ نیز وجود دارد.)

۱۲.۱ لم. برای هر $\lambda < \kappa$، اگر $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda}$ چنان باشد که برای هر $\eta < \lambda$، $X_\eta \in I$، آن‌گاه $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \in I$.

برهان. اگر چنین نباشد، کاردینال $\lambda < \kappa$ و گردایهٔ $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda}$ موجود است به‌قسمی که برای هر η، $X_\eta \in I$ ولی $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin I$. می‌توان فرض کرد X_ηها دوبه‌دو مجزا هستند، زیرا در غیر این صورت X_η را می‌توان با $X'_\eta = X_\eta - \bigcup\{X_\nu \mid \nu < \eta\}$ جایگزین کرد. توجه کنید در این حالت داریم $\bigcup_{\eta<\lambda} X'_\eta = \bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta$. تعریف می‌کنیم

$$J = \{Y \subseteq \lambda \mid \bigcup_{\eta\in Y} X_\eta \in I\}.$$

ایدال بودن J روی λ را بررسی می‌کنیم (به‌عبارت‌دیگر، اینکه اگر $\bigcup_{\eta\in\lambda} X_\eta \notin I$ آن‌گاه $\lambda \notin J$). برای هر $\eta \in \lambda$، چون $X_\eta \in I$ پس $\{\eta\} \in J$. پس J در شرط (۳.۱) صدق می‌کند. به‌نحو مشابه، می‌توان بررسی کرد و دید که J در (۴.۱) و همین‌طور (۵.۱) صدق می‌کند. [برای بررسی (۵.۱) فرض دوبه‌دو مجزا بودن X_η را به کار ببرید].

لذا J یک ایدال روی $\lambda < \kappa$ است که در خواص (۳.۱)، (۴.۱)، و (۵.۱) صدق می‌کند، ولی این با فرض (۱۰.۱) در تناقض است. □

۱۳.۱ نتیجه. اگر $X \subset \kappa$ و $|X| < \kappa$، آن‌گاه $X \in I$.

۱۴.۱ نتیجه. κ یک کاردینال منظم ناشماراست.

برهان. κ ناشماراست به این دلیل که حداکثر تعداد شمارایی زیرمجموعه از κ به I تعلق دارند. همچنین κ منظم است، زیرا در غیر این صورت κ اجتماع یک تعداد مجموعه است که تعداد و اندازهٔ آن‌ها از κ کوچک‌تر است و بنابراین باید به ایدال مذکور تعلق داشته باشد. این امر تناقض است. □

اکنون می‌توانیم اثبات قضیهٔ ۸.۱ را تمام کنیم.

۱۵.۱ قضیه. κ ضعیفاً دسترس‌ناپذیر است.

برهان. با توجه به نتیجهٔ ۱۴.۱ کافی است ثابت کنیم κ کاردینال حدی است. پس فرض کنید κ کاردینال تالی باشد، مثلاً $\kappa = \aleph_{\nu+1}$.

برای هر $\xi < \kappa$ تابع f_ξ روی ω_ν را طوری انتخاب می‌کنیم که $\xi \subseteq \operatorname{ran} f_\xi$ و تعریف می‌کنیم

$$A_{\alpha\eta} = \{\xi < \kappa \mid f_\xi(\eta) = \alpha\} \quad (\alpha < \omega_{\nu+1},\ \eta < \omega_\nu).$$

مثل اثبات قضیهٔ ۲.۱ نشان می‌دهیم ماتریس $\langle A_{\alpha\eta}\rangle$ در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱۶.۱) برای هر η، اگر $\alpha \neq \beta$، آن‌گاه $A_{\alpha\eta} \cap A_{\beta\eta} = \varnothing$.

(۱۷.۱) برای هر α، $|\kappa - \bigcup_{\eta<\omega_\nu} A_{\alpha\eta}| \leq \aleph_\nu$.

همانند اثبات قضیهٔ ۲.۱ فقط با این تفاوت که به‌جای (۴.۱) با استفاده از لم (۱۲.۱)، نشان می‌دهیم برای هر $\alpha < \omega_{\nu+1}$، اوردینال $\eta < \omega_\nu$ موجود است به‌قسمی که $A_{\alpha\eta} \notin I$. به‌علاوه، استدلال مشابهی همانند قبل، گردایه‌ای مانند S به‌دست می‌دهد که اندازهٔ آن $\aleph_{\nu+1}$ (و بنابراین ناشمارا) است و از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزا تشکیل می‌شود که در I قرار ندارند. اما این امر، خاصیت (۵.۱) را نقض می‌کند و بنابراین κ نمی‌تواند یک کاردینال تالی باشد. □

اندازهٔ μ را دو مقداری می‌نامند هرگاه فقط دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار کند. در بخش بعد، به‌عنوان نقطهٔ شروع نظریهٔ کاردینال‌های بزرگ به اندازه‌های دو مقداری باز خواهیم گشت.

۱۸.۱ تعریف. فرض کنید μ یک اندازه روی S باشد. مجموعهٔ $A \subseteq S$ را جوهر می‌نامند هرگاه $\mu(A) > 0$ و برای هر $X \subseteq A$ یا $\mu(X) = 0$ یا $\mu(A - X) = 0$. اندازهٔ μ را بدون جوهر می‌نامند هرگاه هیچ جوهری نداشته باشد.

این بخش را با اثبات قضیهٔ دوحالتی منسوب به استانیسلاف اولام به پایان می‌بریم.

۱۹.۱ قضیه. اگر یک اندازه وجود داشته باشد، آن‌گاه یا یک اندازهٔ دو مقداری موجود است یا یک اندازه روی $2^{\aleph_0}$.

۲۰.۱ لم. فرض کنید μ یک اندازهٔ بدون جوهر روی S باشد.

الف) برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $X \subseteq S$ به‌شرطی‌که $\mu(X) > 0$، مجموعه $Y \subseteq X$ موجود است به‌قسمی که $0 < \mu(Y) \leq \varepsilon$.

ب) برای هر $X \subseteq S$ مجموعهٔ $Y \subseteq X$ موجود است به‌قسمی که $\mu(Y) = \frac{1}{2}\mu(X)$.

برهان.

الف) قرار دهید $X_0 = X$. برای هر n، مجموعه‌های $X_{n+1} \subset X_n$ را طوری می‌یابیم که $\mu(X_{n+1}) \leq \frac{1}{2}\mu(X_n)$. این کار امکان‌پذیر است، چونکه X_n جوهر نیست و بنابراین مجموعهٔ $X \subset X_n$ وجود دارد به‌قسمی که $\mu(X) > 0$ و $\mu(X_n - X) > 0$. چون $\mu(X_n) = \mu(X) + \mu(X_n - X)$، پس نتیجه می‌شود که یا $X_{n+1} = X$ یا مجموعهٔ $X_{n+1} = X_n - X$ خاصیت مطلوب را داراست. به‌وضوح برای هر n، $0 < \mu(X_n) < \frac{1}{2^n}\mu(X)$، پس قسمت (الف) ثابت می‌شود.

ب) فرض کنید $X \subseteq S$ چنان باشد که $\mu(X) = m > 0$. از طریق بازگشت ترامتناهی روی $\alpha < \omega_1$ خانوادهٔ مجزا از زیرمجموعه‌های Y_α از مجموعهٔ X

را به‌صورت زیر می‌سازیم. ابتدا فرض کنید مجموعهٔ $Y_\circ \subset X$ به‌قسمی باشد که $\circ < \mu(Y_\circ) \le m/۲$. چنانچه $\mu(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta) < m/۲$، مجموعهٔ $Y_\alpha \subset X - \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\circ < \mu(Y_\alpha) \le \frac{m}{۲} - \mu(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta).$$

از (۵.۱) نتیجه می‌شود که α موجود است که به‌ازای آن فرایند بالا متوقف می‌شود، یعنی $\mu(\bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta) = m/۲$. □

برهان قضیهٔ ۱۹.۱. فرض کنید اندازهٔ μ روی مجموعه‌ای مثل S موجود باشد. اگر جوهری مثل $A \subseteq S$ موجود باشد، اندازهٔ دو مقداری ν روی A را به‌صورت $\nu(X) = \mu(X)/\mu(A)$ برای هر $X \subseteq A$ تعریف می‌کنیم.

چنانچه μ بدون جوهر باشد، خانواده‌ای مثل $\{X_s \mid s \in \mathrm{Seq}\}$ از زیرمجموعه‌های S را، که با دنباله‌های متناهی ۰ـ۱ها، مثل $s \in \mathrm{Seq} = \bigcup_{n=\circ}^{\infty} \{\circ, ۱\}^n$ اندیس‌گذاری شده‌اند، تعریف می‌کنیم. مجموعه‌های X_s در واقع از طریق بازگشت روی طول s تعریف می‌شوند. برای دنبالهٔ تهی قرار می‌دهیم $X_\varnothing = S$. به‌ازای مجموعهٔ X_s داده‌شده، زیرمجموعه‌های $X_{s\frown\circ}$ و $X_{s\frown۱}$ از X_s را طوری در نظر می‌گیریم که $X_{s\frown۱} = X_s - X_{s\frown\circ}$ و $\mu(X_{s\frown\circ}) = \mu(X_{s\frown۱}) = \frac{۱}{۲}\mu(X_s)$. لذا $\mu(X_s) = ۱/۲^n$، که در آن n طول s است.

علاوه بر این، برای هر $f \in \{\circ, ۱\}^\omega$ تعریف می‌کنیم $X_f = \bigcap_{n=\circ}^{\infty} X_{f\restriction n}$. توجه کنید که اگر $f \neq g$، در این صورت $X_f \cap X_g = \varnothing$ و برای هر f، $\mu(X_f) = \circ$.

حال اندازهٔ ν روی مجموعهٔ $\{\circ, ۱\}^\omega$ را به‌صورت

$$\nu(Z) = \mu(\bigcup\{X_f \mid f \in Z\}) \quad (Z \subseteq \{\circ, ۱\}^\omega)$$

تعریف می‌کنیم. چون μ اندازه است، به‌راحتی دیده می‌شود که ν خواص (الف)، (ب)، (ج)، و (هـ) از تعریف ۱.۱ را دارد. خاصیت (د) نیز از اینکه برای هر $f \in \{\circ, ۱\}^\omega$، $\mu(X_f) = \circ$ نتیجه می‌شود. □

بنابراین، اگر یک اندازه وجود داشته باشد، در این صورت یا یک اندازه روی $۲^{\aleph_۰}$ موجود است، که در این حالت کاردینال ضعیفاً دسترس‌ناپذیری مثل κ وجود خواهد داشت به‌قسمی که $\kappa \leq ۲^{\aleph_۰}$، یا اینکه یک اندازهٔ دو مقداری وجود دارد. شق دوم را در بخش بعد بررسی می‌کنیم.

۲ کاردینال‌های بزرگ

در بخش پیشین ثابت کردیم که اگر یک اندازهٔ σـ‌جمعی غیربدیهی موجود باشد، در این صورت یک کاردینال ضعیفاً دسترس‌ناپذیر نیز موجود است. این نتیجه، مشت نمونهٔ خروار از نظریهٔ کاردینال‌های بزرگ است. در این بخش ضمن ارائهٔ نتایج بیشتری از این دست به مطالعهٔ یک نمونهٔ بارز از کاردینال‌های بزرگ موسوم به کاردینال‌های اندازه‌پذیر می‌پردازیم.

۱.۲ لم. اگر μ یک اندازهٔ دو مقداری روی S باشد، آن‌گاه گردایهٔ

$$U = \{X \subseteq S \mid \mu(X) = ۱\}$$

یک فراپالایهٔ غیراساسی روی S است، و به‌علاوه

(۲.۲) اگر $\{X_n\}_{n=۰}^{\infty}$ به‌قسمی باشد که برای هر n، $X_n \in U$، آن‌گاه $\bigcap_{n=۰}^{\infty} X_n \in U$.

برهان. برهان این لم متضمن یک بررسی ساده است. چون μ غیربدیهی است پس U غیراساسی است، همچنین چون μ، σـ‌جمعی است، لذا در (۲.۲) صدق می‌کند. $\square$

خاصیت (۲.۲) را شرط σـ‌کامل بودن می‌نامند. عکس لم ۱.۲ نیز درست است. یعنی اگر U یک فراپالایهٔ غیراساسی σـ‌کامل روی S باشد، آن‌گاه تابع $\mu : \mathcal{P}(S) \to \{۰, ۱\}$ با تعریف زیر یک اندازهٔ دو مقداری روی S است.

$$x \cdot y = \begin{cases} ۱ & X \in U \\ ۰ & X \notin U \end{cases}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مسئلهٔ وجود اندازهٔ دو مقداری با مسئلهٔ وجود فراپالایه‌های غیراساسی σـ کامل هم‌ارز است. مسئلهٔ اخیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

نخست تعمیمی از تعریف σـ کامل بودن ارائه می‌کنیم.

۳.۲ تعریف. فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا باشد. پالایهٔ F روی S را κـ کامل می‌نامند هرگاه برای هر کاردینال $\lambda < \kappa$، اگر برای هر $\alpha < \lambda$، $X_\alpha \in F$، آن‌گاه $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F$.

ایدال I روی S را κـ کامل می‌نامند هرگاه برای هر کاردینال $\lambda < \kappa$، اگر برای هر $\alpha < \lambda$، $X_\alpha \in I$، آن‌گاه $\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in I$.

یک پالایه κـ کامل است اگر و تنها اگر ایدال دوگان آن κـ کامل باشد. یک پالایه $\aleph_1$ـ کامل را σـ کامل یا شمارا کامل نیز می‌نامند. $\aleph_1$ـ کامل بودن به این معنی است که اگر برای همهٔ X_nها، $X_n \in F$، در این صورت $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \in F$. همین مطالب را برای ایدال‌ها نیز می‌توان بیان کرد.

۴.۲ لم. اگر یک فراپالایهٔ غیراساسی σـ کامل وجود داشته باشد، آن‌گاه یک کاردینال ناشمارا مانند κ و یک فراپالایهٔ غیراساسی κـ کامل روی κ نیز وجود دارد.

برهان. فرض کنید κ کوچک‌ترین کاردینالی باشد که یک فراپالایهٔ غیراساسی σـ کامل روی κ وجود دارد. فراپالایهٔ مذکور را با U نشان می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم که U، κـ کامل است (توجه کنید چون U، σـ کامل است پس κ باید ناشمارا باشد).

فرض کنید I ایدال دوگان U باشد، یعنی $I = \mathcal{P}(\kappa) - U$. در این صورت I یک ایدال اول غیراساسی و σـ کامل روی κ است. نشان می‌دهیم I، κـ کامل است. اگر I، κـ کامل نباشد، در این صورت اوردینال $\lambda < \kappa$ و $\{X_\eta\}_{\eta<\lambda}$ موجود است به‌قسمی که برای هر η، $X_\eta \in I$ ولی $\bigcup_{\eta<\lambda} X_\eta \notin I$. می‌توان فرض کرد که X_ηها دوبه‌دو مجزا هستند. تعریف کنید

$$J = \{Y \subseteq \lambda \mid \bigcup_{\eta\in Y} X_\eta \in I\}.$$

در این صورت J یک ایدال اول σـکامل است. به‌علاوه، چون برای هر $\eta \in \lambda$، $X_\eta \in I$ پس J غیراساسی است. دوگان J یک فراپالایهٔ غیراساسی و σـکامل روی λ است.

اما $\lambda < \kappa$ و این فرض ما را که κ کوچک‌ترین اوردینالی است که روی آن یک فراپالایهٔ غیراساسی و σـکامل یافت می‌شود نقض می‌کند. پس U، κـکامل است.

□

۵.۲ تعریف. منظور از یک کاردینال اندازه‌پذیر عبارت است از یک کاردینال ناشمارا مانند κ به‌طوری‌که روی آن یک فراپالایهٔ غیراساسی و κـکامل موجود باشد.

تعریف ۵.۲ نشان می‌دهد که کاردینال‌های اندازه‌پذیر و مسئلهٔ اندازه، که در بخش ۱ بررسی شد، با یکدیگر مربوط‌اند. وجود یک کاردینال اندازه‌پذیر با وجود یک اندازهٔ σـجمعی دو مقداری و غیربدیهی هم‌ارز است.

در ادامهٔ این بخش به کاردینال‌های اندازه‌پذیر می‌پردازیم.

۶.۲ قضیه. هر کاردینال اندازه‌پذیر، قویاً دسترس‌ناپذیر است.

برهان. به یاد می‌آوریم که یک کاردینال، قویاً دسترس‌ناپذیر است اگر منظم ناشمارا و حدی قوی باشد. فرض کنید κ یک کاردینال اندازه‌پذیر باشد و U فراپالایه‌ای غیراساسی و κـکامل روی آن باشد.

I را ایدال اول دوگان فراپالایهٔ U در نظر بگیرید. هر مجموعهٔ تک نقطه‌ای به I تعلق دارد و چون I، κـکامل است، پس هر مجموعهٔ $X \subset \kappa$ با کاردینال کوچک‌تر از κ به I تعلق دارد. اگر κ تکین باشد در این صورت، بنا به κـکامل بودن، مجموعهٔ κ نیز باید به I متعلق باشد. لذا κ منظم است.

اکنون فرض می‌کنیم که κ حدی قوی نباشد. بنابراین کاردینال $\lambda < \kappa$ وجود دارد به‌قسمی که $\kappa \geq ۲^\lambda$. پس مجموعهٔ $S \subseteq \{۰, ۱\}^\lambda$ با کاردینال κ وجود دارد. روی S فراپالایهٔ غیراساسی و κـکاملی مانند V وجود دارد.

برای هر $\alpha < \lambda$، فقط یکی از دو مجموعهٔ

$$\{f \in S \mid f(\alpha) = \text{۰}\} \quad \text{و} \quad \{f \in S \mid f(\alpha) = \text{۱}\} \qquad (\text{۷.۲})$$

به V تعلق دارد. آن مجموعه را با X_α نشان می‌دهیم. پس برای هر $\alpha < \lambda$ مجموعهٔ $X_\alpha \in V$ را داریم که بنا به κـکامل بودن، نتیجه می‌گیریم مجموعهٔ $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ نیز در V قرار دارد. اما حداکثر یک تابع مانند f در S موجود است به‌قسمی که به همهٔ X_αها تعلق داشته باشد. پس مقدار f در α با انتخاب یکی از مجموعه‌ها در (۷.۲) مشخص می‌گردد. لذا $|X| \leq \text{۱}$. اما این تناقض است، زیرا V غیراساسی است. پس κ کاردینال حدی قوی و بنابراین قویاً دسترس‌ناپذیر است. □

اضافه بر دسترس‌ناپذیری، بسیاری نتایج دیگر را می‌توان برای کاردینال‌های اندازه‌پذیر ثابت کرد. چند خاصیت دیگر از کاردینال‌های اندازه‌پذیر را که می‌توان با روش‌های مقدماتی به‌دست آورد، عرضه خواهیم کرد.

یادآوری می‌کنیم (بخش ۳ از فصل ۱۲) که کاردینال ناشمارای κ دارای ویژگی درخت‌وارگی است هرگاه هیچ درخت آرُنشاین با بلندی κ موجود نباشد. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که هر کاردینال اندازه‌پذیر دارای ویژگی درخت‌وارگی است.

۸.۲ قضیه. فرض کنید κ یک کاردینال اندازه‌پذیر باشد. اگر T یک درخت با بلندی κ چنان باشد که هر گرهٔ آن کمتر از κ تالی بلافصل داشته باشد، آن‌گاه T دارای یک شاخه با بلندی κ است.

برهان. برای هر $\alpha < \kappa$، T_α را مجموعه همهٔ $s \in T$ با بلندی α در نظر بگیرید. چون κ کاردینال قویاً دسترس‌ناپذیر است، با استقرا روی α نتیجه می‌گیریم که برای هر $\alpha < \kappa$، $|T_\alpha| < \kappa$. لذا $|T| \leq \kappa$ و بنابراین $|T| = \kappa$. فرض کنید U یک فراپالایهٔ غیراساسی و κـکامل روی T باشد.

شاخه‌ای با بلندی κ به‌صورت زیر پیدا می‌کنیم. با استقرا روی α نشان می‌دهیم که برای هر α یک $s_\alpha \in T_\alpha$ منحصر به‌فردی موجود است به‌قسمی که

$$\{t \in T \mid s_\alpha \leq t\} \in U \qquad (\text{۹.۲})$$

و $s_\alpha < s_\beta$ مشروط به اینکه $\alpha < \beta$. برای این کار، نخست فرض کنید $s_\circ$ ریشهٔ T باشد. فرض کنید s_α داده شده باشد و رابطهٔ (۹.۲) را مفروض بگیرید و توجه کنید که در این صورت مجموعهٔ $\{t \in T \mid s_\alpha \le t\}$ اجتماع مجزای دو مجموعهٔ $\{s_\alpha\}$ و $\{t \in T \mid u \le t\}$ است که u روی همهٔ تالی‌های بلافصل s_α تغییر می‌کند. چون U یک فراپالایهٔ κـکامل است و تعداد تالی‌های بلافصل s_α کمتر از κ است، پس تالی بلافصل $u = s_{\alpha+1}$ موجود است به‌قسمی که $\{t \in T \mid s_{\alpha+1} \le t\} \in U$.

چنانچه η یک اوردینال حدی باشد و $\{s_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ و $s_\alpha \in T_\alpha$ چنان باشند که s_αها در شرط (۹.۲) صدق کنند و $s_\alpha < s_\beta$ مشروط به اینکه $\alpha < \beta$، در این صورت داریم

$$S = \bigcap_{\alpha<\eta} \{t \in T \mid s_\alpha \le t\} \in U. \qquad (۱۰.۲)$$

دلیل رابطهٔ بالا این است که U، κـکامل است. مجموعهٔ

$$S_\eta = \{s \in T_\eta \mid s \le t \quad \text{به‌ازای } t \in S \text{ یی،}\}$$

غیرتهی و با اندازهٔ کوچک‌تر از κ است. از اینجا نتیجه می‌شود که عضو یکتایی مانند $s \in S_\eta$ موجود است به‌قسمی که $\{t \in T \mid s \le t\} \in U$. عضو مذکور s را با s_η نشان می‌دهیم. روشن است که مجموعهٔ $b = \{s_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ یک شاخه در T با طول κ است. $\square$

کاردینال‌های ضعیف‌ـفشرده را در بخش ۲ از فصل ۱۲ معرفی کردیم. بدون اثبات، هم‌ارزی زیر را، که مشخصه‌سازی دیگری برای کاردینال‌های ضعیف‌ـفشرده به‌دست می‌دهد، ذکر می‌کنیم.

۱۱.۲ قضیه. برای کاردینال ناشمارای κ، عبارت‌های زیر معادل‌اند.

الف) $\kappa \to (\kappa)^۲_۲$.

ب) برای هر دو عدد صحیح مثبت r و s، $\kappa \to (\kappa)^r_s$.

ج) κ قویاً دسترس‌ناپذیر است و دارای ویژگی درخت‌وارگی است.

از آنجایی که کاردینال‌های اندازه‌پذیر، قویاً دسترس‌ناپذیر و دارای ویژگی درخت‌وارگی هستند، بنابراین هر کاردینال اندازه‌پذیر، ضعیف ـ فشرده نیز هست. این مطلب را مستقیماً با نشان دادن اینکه $\kappa \to (\kappa)^r_s$ نیز می‌توان ثابت کرد. این مقدمه بر کاردینال‌های بزرگ را با ارائهٔ اثباتی از حالت خاص $r = s = ۲$ به پایان می‌بریم.

۱۲.۲ قضیه. اگر κ کاردینال اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه هر افراز $[\kappa]^۲$ به دو مجموعه، دارای یک مجموعهٔ همگن با عدد اصلی برابر κ است.

برهان. فرض کنید $\{P_۱, P_۲\}$ یک افراز برای $[\kappa]^۲$ باشد. برای یافتن یک مجموعهٔ همگن، فرض کنید U یک فراپالایهٔ غیراساسی و κـکامل روی κ باشد.

برای هر $\alpha \in \kappa$ تعریف کنید

$$S^۱_\alpha = \{\beta \in \kappa \mid \beta \neq \alpha \text{ و } \{\alpha, \beta\} \in P_۱\},$$
$$S^۲_\alpha = \{\beta \in \kappa \mid \beta \neq \alpha \text{ و } \{\alpha, \beta\} \in P_۲\}.$$

فقط یکی از دو مجموعهٔ $S^۱_\alpha$ و $S^۲_\alpha$ به U تعلق دارد. تعریف کنید

$$Z_۱ = \{\alpha \mid S^۱_\alpha \in U\}, \qquad Z_۲ = \{\alpha \mid S^۲_\alpha \in U\}.$$

چون $Z_۱ \cup Z_۲ = \kappa$، پس یا $Z_۱$ یا $Z_۲$ در U است. فرض کنیم $Z_۱ \in U$. حال مجموعهٔ $H \subseteq \kappa$ با کاردینال κ را طوری می‌یابیم که $[H]^۲ \subseteq P_۱$.

مجموعهٔ $H = \{\alpha_\xi \mid \xi < \kappa\}$ را از طریق بازگشت می‌سازیم. بنا به قضیهٔ بازگشت در مرحله γ، دنبالهٔ صعودی

$$\langle \alpha_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$$

از اعضای $Z_۱$ ساخته شده است به‌قسمی که برای هر $\xi < \eta < \gamma$،

$$\alpha_\eta \in S^۱_{\alpha_\xi}. \tag{۱۳.۲}$$

چون برای هر $\xi < \gamma$، $S^۱_{\alpha_\xi} \in U$، بنابراین مجموعهٔ

$$Z_۱ \cap \bigcap_{\xi < \gamma} S^۱_{\alpha_\xi}$$

در U (بنا به κـ‌کامل بودن) قرار دارد و لذا شامل یک αیی است که از همهٔ α_ξها، که $\xi < \gamma$، بزرگ‌تر است. کوچک‌ترین چنین αیی را با α_γ نشان می‌دهیم. بنابراین، (۱۳.۲) برای هر $\xi < \eta < \gamma + 1$ برقرار است.

تعریف کنید $H = \{\alpha_\xi \mid \xi < \kappa\}$. اگر $\xi < \eta$، آن‌گاه $\alpha_\eta \in S^1_{\alpha_\xi}$ و لذا $\{\alpha_\xi, \alpha_\eta\} \in P_1$ و $[H]^2 \subseteq P_1$. از این‌رو، H یک مجموعهٔ همگن برای افراز داده شده است. □

تمرین‌ها

کاردینال قویاً دسترس‌ناپذیر κ را کاردینال مالو نامند هرگاه مجموعهٔ همهٔ کاردینال‌های منظم کوچک‌تر از κ مانا باشد.

۱.۲ اگر κ مالو باشد، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ کاردینال‌های قویاً دسترس‌ناپذیر کوچک‌تر از κ ماناست. [راهنمایی: مجموعهٔ همهٔ کاردینال‌های حدی قوی $\alpha < \kappa$ بستهٔ بی‌کران است.]

فرض کنید κ کاردینال اندازه‌پذیر باشد. یک فراپالایهٔ غیراساسی κـ‌کامل مانند U روی κ نرمال است هرگاه هر تابع پسرونده مانند f با شرط $\operatorname{dom} f \in U$، روی مجموعه‌ای مانند $A \in U$ ثابت باشد.

در تمرین‌های ۲.۲ــ۵.۲، فرض کنید U یک فراپالایهٔ غیراساسی κـ‌کامل روی κ باشد. برای f و g در $^\kappa\kappa$، تعریف کنید

$$f \equiv g \qquad \text{اگر} \qquad \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U.$$

۲.۲ رابطهٔ $\equiv$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $^\kappa\kappa$ است.

فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی نسبت به $\equiv$ روی $^\kappa\kappa$ باشد، ردهٔ هم‌ارزی f را با $[f]$ نشان می‌دهیم. تعریف کنید

$$[f] < [g] \qquad \text{اگر} \qquad \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U.$$

۳.۲ رابطهٔ $<$ یک ترتیب خطی از W است.

۴.۲ رابطهٔ $<$ یک خوش‌ترتیبی از W است. [راهنمایی: اگر چنین نباشد، دنبالهٔ $\langle f_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ وجود دارد به‌طوری‌که $[f_n] > [f_{n+1}]$. قرار دهید $X_n = \{\alpha \mid f_n(\alpha) > f_{n+1}(\alpha)\}$ و $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$. اگر $\alpha \in X$، آن‌گاه $\cdots > f_1(\alpha) > f_0(\alpha)$ که تناقض است.]

۵.۲ فرض کنید تابع $h : \kappa \to \kappa$ کوچک‌ترین تابع (در $(W, <)$) با این خاصیت باشد که برای هر $\gamma < \kappa$، $\{\alpha < \kappa \mid h(\alpha) > \gamma\} \in U$. قرار دهید $V = \{X \subseteq \kappa \mid h^{-1}[X] \in U\}$. نشان دهید که V یک فراپالایهٔ نرمال است.

بنابراین، به‌ازای هر کاردینال اندازه‌پذیر κ، یک فراپالایهٔ نرمال روی κ وجود دارد. در تمرین‌های ۶.۲ــ۹.۲، U یک فراپالایهٔ نرمال روی κ را نشان می‌دهد.

۶.۲ هر مجموعهٔ $A \in U$ ماناست. [راهنمایی: تمرین **۹.۳** در فصل **۱۱** و تعریف نرمال بودن را به کار ببرید.]

۷.۲ فرض کنید $\lambda < \kappa$ یک کاردینال منظم باشد و تعریف کنید $E_\lambda = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$. مجموعهٔ E_λ در U قرار ندارد. [راهنمایی: فرض کنید که $E_\lambda \in U$. برای هر $\alpha \in E_\lambda$، فرض کنید $\{x_{\alpha\xi} \mid \xi < \lambda\}$ دنباله‌ای صعودی با حد α باشد. به‌ازای هر $\xi < \lambda$ یک y_ξ و $A_\xi \in U$ وجود دارد به‌قسمی که $x_{\alpha\xi} = y_\xi$، برای هر $\alpha \in A_\xi$. قرار دهید $A = \bigcap_{\xi<\lambda} A_\xi$. در این صورت $A \in U$، ولی A فقط شامل یک عضو است، یعنی $\sup\{y_\xi \mid \xi < \lambda\}$، که تناقض است.]

۸.۲ مجموعهٔ همهٔ کاردینال‌های منظم کوچک‌تر از κ در U قرار دارد. [راهنمایی: اگر چنین نباشد، مجموعهٔ $S = \{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) < \alpha\}$ در U قرار دارد، و از اینکه cf یک تابع پسرونده روی S است، پس $\lambda < \kappa$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{\alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\} \in U$؛ که تناقض است.]

۹.۲ هر کاردینال اندازه‌پذیر یک کاردینال مالو است. [راهنمایی: تمرین‌های ۶.۲ و ۸.۲.]

فصل ۱۴

اصل موضوع بنیان

۱ رابطه‌های درست‌بنیان

مفهوم خوش‌ترتیبی یکی از مفاهیم مهم در نظریهٔ مجموعه‌ها است. در فصل ۳، درضمن مطالعهٔ اعداد طبیعی، با این مفهوم مواجه شدیم. دیدیم خوش‌ترتیب بودن اعداد طبیعی برحسب اندازه‌شان اساساً هم‌ارز است با اصل استقرای ریاضی. خوش‌ترتیب‌ها را به تفصیل در فصل ٦ مورد مطالعه قرار دادیم و در فصل‌های بعد از آن نیز بسیاری از کاربردهای آن‌ها را مشاهده کردیم. بنابراین بررسی امکان تعمیم این مفهوم حائز اهمیت است. برای بسیاری از مقاصد، دیده می‌شود که قید «ترتیب» اهمیت آنچنانی ندارد، بلکه آنچه اهمیت اساسی دارد قسمت «خوش» است، یعنی این شرط که هر زیرمجموعهٔ ناتهی دارای یک عضو کمین باشد. این امر ما را به تعریف بنیادی این بخش می‌رساند.

۱.۱ تعریف. فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی روی A باشد و $X \subseteq A$. گوییم $a \in X$ یک عضو Rـ کمین برای X است هرگاه عضو $x \in X$ موجود نباشد به‌قسمی که xRa. رابطهٔ R را درست‌بنیان روی A می‌نامند هرگاه هر زیرمجموعهٔ ناتهی A یک عضو Rـ کمین داشته باشد. مجموعهٔ $\{x \in A \mid xRa\}$ را Rـ توسیع a در A می‌نامند و با $\mathrm{ext}_R(a)$ نشان می‌دهند. بنابراین a یک عضو Rـ کمین از X

است اگر و تنها اگر $\mathrm{ext}_R(a) \cap X = \varnothing$.

۲.۱ مثال.

الف) رابطهٔ تهی $R = \varnothing$ روی هر مجموعهٔ A، چه تهی چه غیرتهی، درست‌بنیان است.

ب) هر خوش‌ترتیبی روی A، درست‌بنیان روی A است. به خصوص، رابطهٔ $\in_\alpha$ روی α، برای هر عدد ترتیبی α، درست‌بنیان است.

ج) قرار دهید $A = \mathcal{P}(\omega)$، در این صورت $\in_A$ روی A درست‌بنیان است.

د) اگر $A = V_n$ $(n \in \mathbb{N})$ یا $A = V_\omega$، در این صورت رابطهٔ $\in_A$ روی A درست‌بنیان است (تمرین ۳.۳ در بخش ٦ را ببینید).

هـ) اگر $(T, \leq)$ یک درخت باشد (بخش ۳ از فصل ۱۲)، آن‌گاه $<$ روی T درست‌بنیان است.

دو لم بعدی چند خاصیت ساده از رابطه‌های درست‌بنیان را به‌دست می‌دهند.

۳.۱ لم. فرض کنید R یک رابطهٔ درست‌بنیان روی A باشد.

الف) R روی A پادبازتابی است، یعنی برای هر $a \in A$، aRa نادرست است.

ب) R روی A نامتقارن است، یعنی رابطهٔ aRb ایجاب می کند bRa، برقرار نیست.

ج) هیچ دنبالهٔ متناهی مانند $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ موجود نیست به‌قسمی که a_1Ra_0، a_2Ra_1، ...، a_nRa_{n-1}، a_0Ra_n.

د) هیچ دنبالهٔ نامتناهی مثل $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ از اعضای A موجود نیست به‌قسمی که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $a_{i+1}Ra_i$.

برهان.

الف) اگر aRa، در این صورت مجموعهٔ $X = \{a\} \neq \varnothing$ هیچ عضو Rـ‌کمینی ندارد.

ب) اگر aRb و bRa، در این صورت مجموعهٔ $X = \{a, b\} \neq \varnothing$ هیچ عضو Rـ‌کمینی ندارد.

ج) اگر چنین نباشد، در این صورت مجموعهٔ $X = \{a_0, \ldots, a_n\}$ هیچ عضو Rـ‌کمینی ندارد.

د) اگر (د) برقرار نباشد، در این صورت مجموعهٔ $X = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ هیچ عضو Rـ‌کمینی ندارد. □

۴.۱ لم*. فرض کنید R یک رابطهٔ دوتایی روی A باشد به‌قسمی که دنبالهٔ نامتناهی مثل $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ از اعضای A وجود نداشته باشد به‌طوری‌که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $a_{i+1} R a_i$. در این صورت R روی A درست‌بنیان است.

لم بالا حکمی در جهت عکس لم ۳.۱ (د) است. در این فصل اصل انتخاب را جزء مفروضات خود نمی‌گیریم. چند نتیجه‌ای را که از آن استفاده می‌کنند با ستاره مشخص کرده‌ایم. با مفروض گرفتن اصل انتخاب، درمی‌یابیم که رابطهٔ R درست‌بنیان است اگر و تنها اگر دنبالهٔ «Rـ‌نزولی» نامتناهی از اعضای A وجود داشته باشد.

برهان. اگر R روی A درست‌بنیان نباشد، در این صورت A شامل یک زیرمجموعهٔ ناتهی مانند X با این خاصیت است که برای هر $a \in X$، عضوی مانند $b \in X$ موجود است به‌قسمی که bRa برقرار است. عضو $a_0 \in X$ را انتخاب کنید. حال عضو $a_1 \in X$ را طوری انتخاب کنید که $a_1 R a_0$. فرض کنید $\langle a_0, \ldots, a_i\rangle$ داده شده باشد، عضو $a_{i+1} \in X$ را طوری انتخاب کنید که $a_{i+1} R a_i$. دنبالهٔ $\langle a_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ که از این طریق حاصل می‌شود، برای هر $i \in \mathbb{N}$ در شرط $a_{i+1} R a_i$ صدق می‌کند. □

رابطه‌های درست‌بنیان از این نظر اهمیت دارند که همانند خوش‌ترتیبی‌ها، برای آن‌ها اثبات استقرائی و ساخت توابع به‌طریق بازگشتی میسر است.

۵.۱ اصل استقرا. فرض کنید $\mathbf{P}$ یک خاصیت باشد. همچنین فرض کنید R یک رابطهٔ درست‌بنیان روی A باشد و برای هر $x \in A$،

(*) اگر $\mathbf{P}(y)$ برای هر $y \in \mathrm{ext}_R(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(x)$ برقرار است.

در این صورت $\mathbf{P}(x)$ برای هر $x \in A$ برقرار است.

برهان. اگر چنین نباشد، داریم $X = \{x \in A \mid \text{درست نیست } \mathbf{P}(x)\} \neq \varnothing$. فرض کنید a یک عضو Rـکمین از X باشد. در این صورت $\mathbf{P}(a)$ برقرار نیست، ولی $\mathbf{P}(y)$ برای هر yRa برقرار است. اما این رابطهٔ $(*)$ را نقض می‌کند. □

۶.۱ قضیهٔ بازگشت. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد. همچنین فرض کنید R یک رابطهٔ درست‌بنیان روی A باشد. در این صورت تابع یکتای f روی A موجود است به‌قسمی که برای هر $x \in A$،

$$f(x) = \mathbf{G}\left(f \restriction \mathrm{ext}_R(x)\right).$$

ایدهٔ اثبات قضیهٔ ٦.١ همان است که برای اثبات دیگر قضایای بازگشت به کار گرفته شد، همانند صورت اصلی قضیه در بخش ۳ از فصل ۳ و قضیهٔ ۵.۴ در فصل ٦. قبل از اثبات، بیان چند تعریف و اثبات یک لم ساده مفید به نظر می‌رسد.

۷.۱ تعریف. مجموعهٔ $B \subseteq A$ را Rـمتعدی در A می‌نامند هرگاه $\mathrm{ext}_R(x) \subseteq B$ برای هر $x \in B$. به‌بیان‌دیگر، B، Rـمتعدی است هرگاه $x \in B$ و yRx ایجاب کند $y \in B$.

روشن است که اجتماع و اشتراک هر گردایه از زیرمجموعه‌های Rـمتعدی A، بازهم Rـمتعدی است.

۸.۱ لم. برای هر زیرمجموعهٔ $C \subseteq A$، کوچک‌ترین مجموعهٔ Rـمتعدی مانند $B \subseteq A$ موجود است به‌قسمی که $C \subseteq B$.

برهان. تعریف کنید

$$B_\circ = C,\ B_{n+1} = \{y \in A \mid \text{یی موجود باشد که } yRx\ x \in B_n\},\ B = \bigcup_{n=\circ}^{\infty} B_n.$$

واضح است که B یک مجموعهٔ Rـمتعدی است و $C \subseteq B$. به‌علاوه، به‌ازای هر مجموعهٔ Rـمتعدی B'، اگر $C \subseteq B'$ در این صورت، با استقرا داریم $B_n \subseteq B'$، و پس $B \subseteq B'$. □

برهان قضیهٔ بازگشت. تعریف کنید

$$T = \{g \mid g(x) = \mathbf{G}(g \restriction \mathrm{ext}_R(x)) \text{ داریم } x \in \mathrm{dom}\, g \text{ برای هر }\}$$

(که در آن g تابع است و $\mathrm{dom}\, g$ در A، Rـمتعدی است).

نخست نشان می‌دهیم که T دستگاهی موافق از توابع است.

دو تابع $g_۲ \in T$ و $g_۱$ را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$X = \{x \in \mathrm{dom}\, g_۱ \cap \mathrm{dom}\, g_۲ \mid g_۱(x) \neq g_۲(x)\} \neq \varnothing.$$

فرض کنید a عضو Rـکمینی از X باشد. در این صورت yRa ایجاب می‌کند $y \in \mathrm{dom}\, g_۱$، $y \in \mathrm{dom}\, g_۲$، و $g_۱(y) = g_۲(y)$. لذا

$$g_۱(a) = g_۱ \restriction \mathrm{ext}_R(a) = g_۲ \restriction \mathrm{ext}_R(a) = g_۲(a),$$

که با $a \in X$ در تناقض است.

حال تعریف می‌کنیم $f = \bigcup T$. به‌وضوح $\mathrm{dom}\, f = \bigcup\{\mathrm{dom}\, g \mid g \in T\}$ مجموعه‌ای Rـمتعدی و f تابع است و اگر $x \in \mathrm{dom}\, f$، در این صورت عضو $g \in T$ با شرط $g \subseteq f$ موجود است که برای آن $x \in \mathrm{dom}\, g$. لذا

$$f(x) = g(x) = \mathbf{G}(g \restriction \mathrm{ext}_R(x)) = \mathbf{G}(f \restriction \mathrm{ext}_R(x)).$$

حال فقط می‌ماند نشان دهیم که $\mathrm{dom}\, f = A$. اگر چنین نباشد، در این صورت عضو Rـکمینی مانند a از $A - \mathrm{dom}\, f$ وجود خواهد داشت. در این صورت $\mathrm{ext}_R(a) \subseteq \mathrm{dom}\, f$ و مجموعهٔ $D = \mathrm{dom}\, f \cup \{a\}$، Rـمتعدی است. تابع g را به‌صورت

$$g(x) = f(x) \qquad x \in \mathrm{dom}\, f,$$

$$g(a) = \mathbf{G}(f \restriction \mathrm{ext}_R(x))$$

تعریف می‌کنیم. به‌وضوح $g \in T$، و لذا $g \subseteq f$ و $a \in \mathrm{dom}\, f$. اما این تناقض است.

اثبات منحصربه‌فرد بودن f شبیه استدلالی است که با آن ثابت کردیم T یک دستگاه موافق است. □

با استفاده از استقرای ترامتناهی و بازگشت، در فصل ٦ نشان دادیم که هر خوش‌ترتیبی با یک عدد ترتیبی یکتایی (با ترتیب $\in$) یکریخت است. در ادامهٔ این بخش این نتیجهٔ مهم را به رابطه‌های درست‌بنیان تعمیم می‌دهیم.

از فصل ٦، تعریف ۱.۲ را یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ T را متعدی می‌نامند هرگاه هر عضو T زیرمجموعه‌ای از T باشد.

۹.۱ تعریف. مجموعهٔ متعدی T را درست‌بنیان می‌نامند اگر و تنها اگر رابطهٔ $\in_T$ روی T درست‌بنیان باشد، یعنی برای هر $X \subseteq T$، $X \neq \varnothing$، عضو $a \in X$ موجود باشد به‌قسمی که $a \bigcap X = \varnothing$.

اعداد ترتیبی، $\mathcal{P}(\omega)$، V_n $(n \in \mathbb{N})$، و V_ω نمونه‌هایی از مجموعه‌های درست‌بنیان هستند (تمرین ۲.۱). قضیهٔ بعدی جان کلام را دربر دارد.

۱۰.۱ قضیه. فرض کنید R یک رابطهٔ درست‌بنیان روی A باشد. تابع یکتای f روی A موجود است به‌قسمی که برای هر $x \in A$

$$f(x) = \{f(y) \mid y \in A \text{ و } yRx\} = f[\mathrm{ext}_R(x)].$$

مجموعه $T = \operatorname{ran} f$ متعدی و درست‌بنیان است.

برهان. وجود و یکتایی f بلافاصله از قضیهٔ بازگشت نتیجه می‌شود. برای این کار کافی است قرار دهیم

$$\mathbf{G}(z) = \begin{cases} \operatorname{ran} z & \text{تابع است } z \\ \varnothing & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

اینکه مجموعهٔ $T = \operatorname{ran} f$ متعدی است، آسان است. چرا که اگر $t \in T$، در این صورت به‌ازای یک $x \in A$، $t = f(x)$ و لذا $s \in t = \{f(y) \mid yRx\}$ ایجاب می‌کند عضو $y \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که $s = \{f(y)\}$. پس $s \in T$.

اگر T درست‌بنیان نباشد، در این صورت مجموعهٔ $S \subseteq T$ موجود است که $S \neq \varnothing$ و برای هر $t \in S$ عضو $s \in S$ موجود است به‌قسمی که $s \in t$. قرار دهید $B = f^{-1}[S]$، چون f آن را بروی T می‌نگارد، پس $B \neq \varnothing$. چنانچه

$x \in B$، در این صورت $f(x) \in S$، پس عضو $s \in S$ وجود دارد به‌طوری‌که $s \in f(x) = \{f(y) \mid yRx\}$. پس به‌ازای عضوی مانند y که yRx، داریم $s = f(y)$ و $y \in f^{-1}[s] = B$. بنابراین ثابت کردیم برای هر $x \in B$ عضو $y \in B$ وجود دارد به‌قسمی که yRx. اما این با درست‌بنیان بودن R در تناقض است. □

در حالت کلی، نگاشت f یک‌به‌یک نیست. برای مثال، چنانچه x عضو Rـ‌کمینی از A باشد (یعنی $\mathrm{ext}_R(x) = \varnothing$)، داریم $f(x) = \varnothing$. به همین نحو، اگر همهٔ اعضای مجموعهٔ $\mathrm{ext}_R(x) = \varnothing$، Rـ‌کمین باشند، $f(x) = \{\varnothing\}$ و به همین صورت مثال‌های دیگر.

۱۱.۱ تعریف. گوییم R توسیعی روی A است هرگاه $y \neq x$ ایجاب کند $\mathrm{ext}_R(x) \neq \mathrm{ext}_R(y)$، برای هر $x, y \in A$. به‌بیان‌دیگر، R روی A توسیعی است هرگاه برای هر $z \in A$ از رابطهٔ zRx اگر و تنها اگر zRy، نتیجه بگیریم $x = y$.

۱۲.۱ قضیه. تابع f در قضیهٔ ۱۰.۱ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر R روی A توسیعی باشد. اگر f یک‌به‌یک باشد، در این صورت f یکریختی بین (A, R) و $(T, \in_T)$ است.

برهان. فرض کنید R روی A توسیعی باشد، ولی f یک‌به‌یک نباشد. در این صورت

$$X = \{x \in A \mid f(x) = f(y) \text{ و } y \neq x \text{ موجود است که } y \in A \text{ عضو}\} \neq \varnothing.$$

فرض کنید a یک عضو Rـ‌کمین X باشد و فرض کنید عضو $b \neq a$ چنان باشد که $f(a) = f(b)$. با توجه به توسیعی بودن R، عضو $c \in A$ موجود است به‌قسمی که یا cRa و نه cRb، یا cRb و نه cRa. فقط حالت اول را بررسی می‌کنیم. حالت دوم مشابه است. از cRa نتیجه می‌گیریم $f(c) \in f(a) = f(b)$. چون $f(b) = \{f(z) \mid zRb\}$، پس عضو d که dRb وجود دارد به‌قسمی که $f(c) = f(d)$. چون cRb نقض می‌شود، پس $c \neq d$. اما این به این معنی است که $c \in X$. این نیز نوع انتخاب a را به‌عنوان یک عضو Rـ‌کمین از X نقض می‌کند.

فرض کنید R روی A توسیعی نباشد. پس دو عضو $a,b \in A$ که $a \neq b$ موجود است به‌قسمی که $\mathrm{ext}_R(a) = \mathrm{ext}_R(b)$. از این‌رو داریم

$$f(a) = f[\mathrm{ext}_R(a)] = f[\mathrm{ext}_R(b)] = f(b),$$

که نشان می‌دهد f یک‌به‌یک نیست.

در آخر نشان می‌دهیم یک‌به‌یک بودن f ایجاب می‌کند که f یکریختی باشد. بنا به تعریف f، به‌وضوح aRb ایجاب می‌کند $f(a) \in f(b)$. حال بالعکس، اگر $f(a) \in f(b)$، در این صورت به‌ازای عضوی مانند x که xRb، $f(a) = f(x)$. پس داریم $x = a$ و لذا aRb. □

نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۰.۱ و ۱۲.۱، معروف به لم تجمیع موستوفسکی، بیان می‌کند که هر رابطهٔ درست‌بنیانِ توسیعی مانند R روی A با رابطهٔ عضویت روی یک مجموعهٔ منحصربه‌فردِ خوش‌تعریف و متعدی، مانند T، یکریخت است. این نتیجه نشان می‌دهد چگونه می‌توان یک نمایندهٔ منحصربه‌فرد برای هر رده از روابط درست‌بنیان توسیعی و دوبه‌دو یکریخت تعریف کرد. این مطلب قضیهٔ ۱.۳ از فصل ۶ را تعمیم می‌دهد (تمرین ۵.۱ را ببینید).

تمرین‌ها

۱.۱ فرض کنید (A,R) و $X \subseteq A$ داده شده باشند. گوییم $a \in X$ یک Rـ کوچک‌ترین عضو از X است هرگاه a یک عضو Rـ کمین از X باشد و برای هر $b \in X$ و $b \neq 0$ داشته باشیم aRb. نشان دهید اگر هر زیرمجموعهٔ غیرتهی A یک Rـ کوچک‌ترین عضو داشته باشد، آن‌گاه (A,R) خوش‌ترتیبی است.

۲.۱ ثابت کنید که $\in_A$ درست‌بنیان روی A است به‌شرطی‌که $A = \mathcal{P}(\omega)$، $A = V_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $A = V_\omega$.

۳.۱ فرض کنید (A,R) درست‌بنیان باشد. نشان دهید که تابع یکتایی مانند ρ روی A با مقادیر اعداد ترتیبی موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in A$،

$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + ۱ \mid yRx\}$. $\rho(x)$ را رتبهٔ x در (A, R) می‌نامند.

۴.۱ الف) فرض کنید $A = \alpha$ و $R = \in_\alpha$، که در آن α یک عدد ترتیبی است. ثابت کنید که $\rho(x) = x$، برای هر $x \in A$.

ب) فرض کنید $A = V_\omega$ و $R = \in_R$. ثابت کنید $\rho(x) =$ کوچک‌ترین عدد n که $x \in V_{n+۱}$، به‌عبارت‌دیگر، $V_n = \{x \in V_\omega \mid \rho(x) < n\}$.

۵.۱ فرض کنید (A, R) یک خوش‌ترتیبی باشد و $f : A \to T$ تابع مذکور در قضیهٔ ۱۰.۱ باشد. ثابت کنید که $T = \alpha$ یک عدد ترتیبی است و $f = \rho$ یک یکریختی از (A, R) بروی $(\alpha, \in_\alpha)$ است.

۶.۱ الف) فرض کنید A مجموعه‌ای درست‌بنیان متعدی باشد و قرار دهید $R = \in_A$. اگر $f : A \to T$ تابع مذکور در قضیهٔ ۱۰.۱ باشد، آن‌گاه $T = A$ و $f(x) = x$، برای هر $x \in A$.

ب) اگر A و B دو مجموعهٔ درست‌بنیان متعدی باشند و $A \neq B$، آن‌گاه $(A, \in_A)$ و $(B, \in_B)$ یکریخت نیستند.

۲ مجموعه‌های درست‌بنیان

هنگام بحث دربارهٔ پارادوکس راسل، در بخش ۱ از فصل ۱، به این سؤال که آیا یک مجموعه می‌تواند عضوی از خودش باشد اشاره کردیم. این سؤال را بدون پاسخ رها کردیم، چرا که اساساً الزامی به این کار نداریم، تمامی نتایجی که تاکنون ثابت کرده‌ایم بدون توجه به وجود یا عدم وجود چنین مجموعه‌هایی درست‌اند. مع‌هذا، خود این پرسش، به لحاظ فلسفی، پرسشی جالب توجه است و برای مطالعات پیشرفته‌تر نظریهٔ مجموعه‌ها با اهمیت است. در اینجا ابزار لازم برای بررسی بیشتر این پرسش را در اختیار داریم.

با یک لم ساده اما بنیادی شروع می‌کنیم.

۱.۲ لم. برای هر مجموعهٔ X، کوچک‌ترین مجموعهٔ متعدی وجود دارد که X را به

صورت یک زیرمجموعه در بر دارد. این مجموعه را بستار متعدی X می‌نامند و با $\mathrm{TC}(X)$ نشان می‌دهند.

برهان. تعریف کنید $X_\circ = X$،

$$X_{n+1} = \bigcup X_n = \{y \mid y \in x \text{ ،} x \in X_n \text{ به‌ازای یک } \}$$

و $\mathrm{TC}(X) = \bigcup \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. واضح است که $X \subseteq \mathrm{TC}(X)$ و به‌علاوه $\mathrm{TC}(X)$ متعدی است.

اگر T مجموعهٔ متعدی دیگری باشد که $X \subseteq T$، با استقرا درمی‌یابیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_n \subseteq T$. لذا $\mathrm{TC}(X) \subseteq T$. □

۲.۲ لم. $y \in \mathrm{TC}(X)$ اگر و تنها اگر دنبالهٔ متناهی مثل $\langle x_\circ, x_1, \ldots, x_n \rangle$ موجود باشد به‌قسمی که $x_\circ = X$ و برای هر $i = \circ, 1, \ldots, n-1$، $x_{i+1} \in x_i$ و $x_n = y$.

برهان. فرض کنید $g \in \mathrm{TC}(X) = \bigcup_{n=\circ}^{\infty} X_n$. برهان را با استقرا انجام می‌دهیم. اگر $y \in X_\circ$، کافی است که دنبالهٔ $\langle X, y \rangle$ را در نظر بگیریم. حال اگر $y \in X_{n+1}$، در این صورت عضوی مانند x وجود دارد که $y \in x \in X_n$. بنا به فرض استقرا، دنباله‌ای مثل $\langle x_\circ, \ldots, x_n \rangle$ موجود است به‌قسمی که $x_\circ = X$ و برای $i = \circ, \ldots, n-1$، $x_{i+1} \in x_i$ و $x_n = x$. حال تعریف می‌کنیم $x_{n+1} = y$ و دنبالهٔ $\langle x_\circ, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle$ را تشکیل می‌دهیم.

بالعکس، اگر دنبالهٔ $\langle x_\circ, \ldots, x_n \rangle$، که در آن $x_\circ = X$ و برای هر $i = \circ, 1, \ldots, n-1$، $x_{i+1} \in x_i$، داده شده باشد، با استقرا به‌راحتی می‌توان دید که برای هر $i \leq n$، $x_i \in X_i \subseteq \mathrm{TC}(X)$. □

۳.۲ تعریف. مجموعهٔ X را درست‌بنیان می‌نامند هرگاه $\mathrm{TC}(X)$ مجموعهٔ درست‌بنیان و متعدی باشد.

برای مجموعه‌های متعدی، تعریف فوق با تعریف ۹.۱ سازگار است، چرا که اگر X متعدی باشد، داریم $\mathrm{TC}(X) = X$. اهمیت درست‌بنیان بودن از قضیهٔ زیر آشکار می‌شود.

۴.۲ قضیه.

الف) اگر X درست‌بنیان باشد، آن‌گاه هیچ دنباله‌ای مثل $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ وجود ندارد به‌قسمی که $X_\circ = X$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_{n+۱} \in X_n$.

ب)* اگر هیچ دنبالهٔ $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ به‌قسمی که $X_\circ = X$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_{n+۱} \in X_n$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه X درست‌بنیان است.

به‌خصوص، هیچ مجموعهٔ درست‌بنیانی مانند X نمی‌تواند عضو خودش باشد (کافی است قرار دهید $X_n = X$، برای هر n)، همچنین به‌ازای هیچ مجموعه‌ای مانند Y نمی‌تواند $X \in Y$ و $Y \in X$ (کافی است دنبالهٔ $\langle X, Y, X, Y, X, Y, \ldots \rangle$ را در نظر بگیرید)، و به‌طور کلی هیچ وضعیت «دوری‌ای» نمی‌تواند برقرار باشد.

برهان.

الف) فرض کنید X درست‌بنیان باشد و $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ در شرایط $X_\circ = X$ و $X_{n+۱} \in X_n$، برای هر $n \in \mathbb{N}$ صدق کند. داریم $X_\circ = X \subseteq \mathrm{TC}(X)$، و با استقرا، برای هر $n \geq ۱$، $X_n \in \mathrm{TC}(X)$. بنابراین مجموعهٔ $\{X_n \mid n \geq ۱\} \subseteq \mathrm{TC}(X)$ هیچ عضو $\in$ـ‌کمینی ندارد. اما این درست‌بنیان بودن $\mathrm{TC}(X)$ را نقض می‌کند.

ب) فرض کنید X درست‌بنیان نباشد، پس $\mathrm{TC}(X)$ به معنی تعریف ۹.۱، مجموعهٔ درست‌بنیان و متعدی نیست. این بدین معنی است که مجموعهٔ $Y \subseteq \mathrm{TC}(X)$ موجود است که $Y \neq \varnothing$ و برای هر $y \in Y$، عضو $z \in Y$ وجود دارد به‌قسمی که $z \in y$. یک عضو مانند $y \in Y$ را انتخاب کنید. بنا به لم ۲.۲، دنبالهٔ متناهی $\langle X_\circ, \ldots, X_n \rangle$ موجود است به‌قسمی که $X_\circ = X$ و برای $i = \circ, \ldots, n - ۱$، $X_{i+۱} \in X_i$ و $X_n = y$. به‌طریق بازگشتی و با استفاده از اصل انتخاب، دنبالهٔ مذکور را به یک دنبالهٔ نامتناهی گسترش می‌دهیم. $X_{n+۱}$ را برابر عضو $z \in Y$ تعریف کنید که $z \in y = X_n$ (پس $X_{n+۱} \in X_n \cap Y$). با مفروض گرفتن $X_{n+k} \in Y$، به‌نحو مشابه، مجموعهٔ $X_{n+k+۱} \in X_{n+k} \cap Y$ را انتخاب کنید. دنبالهٔ حاصل $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ همان دنبالهٔ مطلوب قضیه است. □

اکنون وقت آن رسیده است که درک شهودی خود را از مجموعه‌ها بازبینی کنیم. توصیف اولیهٔ کانتور از مجموعه‌ها را یادآوری می‌کنیم: یک مجموعه گردایه‌ای است به‌صورت یک کل واحد از اشیای متمایز و معین از فکر یا ذهنمان. از این تعریف می‌توان چنین برداشت کرد که اشیای مورد نظر قبل از آنکه تحت یک مجموعه گرد هم بیایند، باید (در ذهنمان) وجود داشته باشند. فرض کنید این برداشت را بپذیریم (چون همان‌طور که در بخش ۳ خواهیم دید، تنها برداشت ممکن نیست) و متذکر شویم که مجموعه‌ها یگانه اشیای مورد بحث ما هستند. فرض کنید می‌خواهیم «برای اولین بار» یک مجموعه تشکیل دهیم. پس، یعنی قبلاً هیچ شیء مناسبی (یعنی مجموعه) در ذهن ما وجود نداشته است و لذا یگانه گردایه‌ای که می‌توان تشکیل داد همان مجموعهٔ $\varnothing$ است. اما اکنون چیزی در اختیار داریم! حالا $\varnothing$ یک شیء معین در ذهن ما است، پس می‌توانیم مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ را تشکیل دهیم. در این مرحله دو شیء $\varnothing$ و $\{\varnothing\}$ در ذهن ما وجود دارد و بنابراین می‌توانیم با آن‌ها مجموعه‌های دیگری تشکیل دهیم. در واقع چهار مجموعهٔ $\varnothing$، $\{\varnothing\}$، $\{\{\varnothing\}\}$، و $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ را می‌توان تشکیل داد. پس از این، مجموعه‌هایی را که می‌توان با این چهار شیء تشکیل داد، تشکیل می‌دهیم (هشت مجموعه می‌توان تشکیل داد)، و به همین صورت الی‌آخر. در زیر توصیف دقیقی از فرایند فوق عرضه می‌کنیم و نشان می‌دهیم از طریق آن می‌توان همهٔ مجموعه‌های درست‌بنیان را به‌دست آورد.

۵.۲ تعریف. (سلسله‌مراتب تجمعی مجموعه‌های درست‌بنیان)

$$V_0 = \varnothing,$$

$$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \quad \text{برای هر } \alpha,$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \quad \text{برای هر اوردینال حدی } \alpha \neq 0$$

متذکر می‌شویم که $V_1 = \{\varnothing\}$، $V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$، $V_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ و برای هر $n \leq \omega$، V_n در تمرین ۳.۳ از فصل ٦ قبلاً تعریف شده است و برخی خواص آن نیز در تمرین‌های ۴.۳ و ۵.۳ از

فصل ٦ بیان شده است (تمرین‌های ۲.۱ و ۴.۱ (ب) این فصل را نیز ببینید).

۶.۲ لم.

الف) اگر $x \in V_\alpha$ و $y \in x$، آن‌گاه وجود دارد $\beta < \alpha$ که $y \in V_\beta$.

ب) اگر $\beta < \alpha$، آن‌گاه $V_\beta \subseteq V_\alpha$.

ج) برای هر α، V_α درست‌بنیان و متعدی است.

برهان.

الف) با استقرای ترامتناهی روی α برهان را انجام می‌دهیم. اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha \neq 0$ اوردینال حدی باشد، حکم بدیهی است. چنانچه $x \in V_{\alpha+1}$، در این صورت $x \subseteq V_\alpha$، و لذا $y \in x$ ایجاب می‌کند $y \in V_\alpha$، پس کافی است قرار دهیم $\beta = \alpha$.

ب) مجدداً از استقرای ترامتناهی روی α استفاده می‌کنیم. فقط حالت تالی نیاز به اثبات دارد. نشان می‌دهیم $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$. بنا به قسمت (الف)، اگر $x \in V_\alpha$، آن‌گاه $x \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. بنا به فرض استقرا، $\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \subseteq V_\alpha$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $x \subseteq V_\alpha$ و بنابراین $x \in V_{\alpha+1}$. پس برای هر $\beta \leq \alpha$، $V_\beta \subseteq V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$.

ج) با ترکیب قسمت‌های (الف) و (ب) نتیجه می‌گیریم که $x \in V_\alpha$ ایجاب می‌کند $x \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \subseteq V_\alpha$. این نشان می‌دهد که V_α متعدی است.

حال نشان می‌دهیم V_α درست‌بنیان است. فرض کنید $Y \subseteq V_\alpha$ و $Y \neq \varnothing$. فرض کنید β کوچک‌ترین اوردینالی باشد که برای آن داشته باشیم $Y \cap V_\beta \neq \varnothing$؛ به‌وضوح $\beta \leq \alpha$. عضو $x \in Y \cap V_\beta$ را در نظر بگیرید. بنا به لم ٦.۲ (الف)، $y \in x$ ایجاب می‌کند که اوردینال $\gamma < \beta$ موجود باشد که $y \in V_\gamma$، لذا $y \notin Y$. پس x یک عضو $\in$ـ‌کمین از Y است. چون V_α متعدی است، پس درست‌بنیان است. $\square$

۷.۲ قضیه. مجموعهٔ X درست‌بنیان است اگر و تنها اگر اوردینال α موجود باشد به‌قسمی که $X \in V_\alpha$.

برهان. (۱) فرض کنید X درست‌بنیان باشد. به‌راحتی می‌توان دید مجموعهٔ $\mathrm{TC}(X) \cup \{X\} = \mathrm{TC}\left(\{X\}\right)$ درست‌بنیان و متعدی است. تعریف کنید

$$Y = \left\{x \in \mathrm{TC}\left(\{X\}\right) \mid x \in V_\alpha \text{ به‌ازای } \alpha\text{یی} \right\}.$$

کافی است ثابت کنیم $Y = \mathrm{TC}\left(\{X\}\right)$. اگر چنین نباشد، عضو $\in$ـکمینی مانند a از $\mathrm{TC}\left(\{X\}\right) - Y$ وجود خواهد داشت. در این صورت برای هر $y \in a$ داریم $y \in Y$. $f(y)$ را کوچک‌ترین αیی تعریف کنید که $y \in V_\alpha$. اصل جایگزینی نشان می‌دهد که f تابع خوش‌تعریفی روی a است. تعریف می‌کنیم $\gamma = \sup f[a]$. پس برای هر $y \in a$، $y \in V_{f(y)} \subseteq V_\gamma$ و لذا $a \subseteq V_\gamma$ و $a \in V_{\gamma+1}$، اما این، رابطهٔ $a \notin Y$ را نقض می‌کند.

(۲) اگر $X \in V_\alpha$، با استفاده از متعدی بودن V_α داریم $X \subseteq V_\alpha$. لذا $\mathrm{TC}(X) \subseteq V_\alpha$. چون V_α درست‌بنیان و متعدی است، پس هر $Y \subseteq \mathrm{TC}(X)$، با شرط $Y \neq \varnothing$، دارای یک عضو $\in$ـکمین است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{TC}(X)$ و با توجه به تعریف، X نیز درست‌بنیان است. □

درک شهودیی که از واژهٔ «گردایه» به کار می‌بردیم مبتنی بر این فرض بود که اشیائی که گرد هم آورده می‌شوند «از قبل» وجود داشته باشند. اکنون فرایندی در دست داریم که از طریق آن می‌توان مرحله‌به‌مرحله مجموعه‌های پیچیده را که توصیف دقیقی از آن‌ها با سلسله‌مراتب تجمعی V_α در دست است، گرد هم آوریم و از این طریق همهٔ مجموعه‌های درست‌بنیان را تولید کنیم. از طرف دیگر، مجموعه‌ای که درست‌بنیان نباشد با برداشت فوق همخوان نخواهد بود، چرا که وجود دنباله‌ای مثل $\langle X_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ با شرط $X_۰ \ni X_۱ \ni X_۲ \ni \cdots$، سرانجام به تسلسل نامتناهی خواهد انجامید. از این ملاحظات این احساس حاصل می‌شود که در وضعیت فعلی ما، تنها مجموعه‌های درست‌بنیان مجموعهٔ «واقعی» هستند. این احساس بیشتر تأیید می‌شود اگر توجه کنیم چنانچه همه‌جا کلمهٔ «مجموعه» را با «مجموعهٔ درست‌بنیان» در همهٔ اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها که تاکنون پذیرفتیم، جایگزین کنیم این اصول به گزاره‌های صادق تبدیل می‌شوند. با چند

مثال این امر را روشن می‌سازیم و بررسی بقیهٔ اصول موضوع را به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم.

۸.۲ مثال.

الف) اصل موضوع توسیع. تمامی اعضای یک مجموعهٔ درست‌بنیان، درست‌بنیان هستند ($X \in V_\alpha$ ایجاب می‌کند $X \subseteq V_\alpha$). بنابراین، اگر دو مجموعهٔ درست‌بنیان X و Y اعضای درست‌بنیان یکسانی داشته باشند، آن‌گاه $X = Y$.

ب) اصل موضوع مجموعهٔ توانی. مجموعهٔ توانی $\mathcal{P}(S)$ از یک مجموعهٔ درست‌بنیان مثل S، درست‌بنیان است. (اگر $S \in V_\alpha$، آن‌گاه $S \subseteq V_\alpha$، لذا $\mathcal{P}(S) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+۱}$ و بنابراین مجموعه $\mathcal{P}(S) \in V_{\alpha+۲}$ درست‌بنیان است.) بنابراین به‌ازای هر مجموعهٔ درست‌بنیان مانند S یک مجموعهٔ درست‌بنیان مانند P ($= \mathcal{P}(S)$) وجود دارد به‌قسمی که برای هر مجموعهٔ درست‌بنیان X، $X \in P$ اگر و تنها اگر $X \subseteq S$.

ج) قالب اصل موضوع شمول. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی برحسب x باشد (که در آن واژهٔ «مجموعه» همه‌جا با «مجموعهٔ درست‌بنیان» جایگزین می‌شود). اگر A درست‌بنیان باشد، در این صورت مجموعهٔ $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\} \subseteq A$ نیز درست‌بنیان است.

بر این موارد و استدلال‌های مشابهٔ آن‌ها می‌توان برهان دقیقی بنا کرد که نشان دهد این فرض که فقط مجموعه‌های درست‌بنیان وجود دارند با همهٔ اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها که تاکنون پذیرفته‌ایم، سازگارند. انجام چنین کاری مستلزم تحلیل صوری دقیقی از معنای خاصیت است که البته موضوع منطق ریاضی است و نمی‌توانیم آن را اینجا دنبال کنیم. مع‌هذا، از یک طرف، این درک شهودی بهتر از چگونگی گرد هم آمدن مجموعه‌ها طی مراحلی که در بالا توصیف شد و از طرف دیگر، ملاحظهٔ اینکه همهٔ مجموعه‌های مورد نیاز در ریاضیات، درست‌بنیان هستند (تمرین ۳.۲)، اکثر نظریه مجموعه‌دان‌ها را بر آن داشته است این حکم که همهٔ مجموعه‌ها درست‌بنیان هستند را جزء اصول نظریهٔ مجموعه‌هایشان وارد کنند.

اصل موضوع بنیان. (همچنین موسوم به اصل موضوع نظم) همهٔ مجموعه‌ها درست‌بنیان هستند.

تأکید می‌کنیم که چه اصل موضوع بنیان را بپذیریم چه نه، اگر بسط ریاضیات معمول بر پایه نظریهٔ مجموعه‌ها مورد نظر باشد، هیچ تفاوتی ایجاد نمی‌شود. ملاحظه کردید که بدون هیچ استفاده‌ای از اصل موضوع بنیان، اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد حقیقی و توابع روی آن‌ها و حتی اعداد ترتیبی و اصلی را تعریف و ویژگی‌های آن‌ها را ثابت کردیم. تا زمانی که با این موضوعات سر و کار داریم، اصلاً فرقی ندارد که مجموعهٔ غیردرست‌بنیان وجود دارد یا نه. با وجود این، اصل موضوع بنیان در مطالعهٔ مدل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها بسیار مفید واقع می‌شود (فصل ۱۵ را ببینید).

تمرین‌ها

۱.۲ برای هر مجموعهٔ X، $\mathrm{TC}(\{X\})$ کوچک‌ترین مجموعهٔ متعدی است که X را همچون یک عضو در بر دارد.

۲.۲ الف) $V_\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$.

ب) $\beta < \alpha$ نتیجه می‌دهد $V_\beta \subset V_\alpha$.

ج) $\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$، برای هر اوردینال α.

۳.۲ فرض کنید X و Y دو مجموعهٔ درست‌بنیان باشند. ثابت کنید $\{X, Y\}$، (X, Y)، $X \cup Y$، $X \cap Y$، $X - Y$، $X \times Y$، X^Y، $\bigcup X$، $\operatorname{dom} X$ و $\operatorname{ran} X$ درست‌بنیان هستند. ثابت کنید که $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ درست‌بنیان هستند.

۴.۲ نشان دهید اگر در اصل موضوع‌های وجود، زوج، اجتماع، بی‌نهایت، و انتخاب واژهٔ «مجموعه» را با «مجموعهٔ درست‌بنیان» عوض کنیم همانند اصل موضوع جایگزینی تغییری در درستی آن‌ها ایجاد نمی‌شود. [راهنمایی: تمرین ۳.۲ را به کار ببرید.]

۵.۲ نوعی اصل استقرا: فرض کنید $\mathbf{P}$ یک خاصیت باشد. فرض کنید که برای هر

مجموعهٔ درست‌بنیان x،

(*) اگر $\mathbf{P}(y)$ برای هر $y \in x$ برقرار باشد، آن‌گاه $\mathbf{P}(x)$ برقرار است.

ثابت کنید که $\mathbf{P}(x)$ برای هر مجموعهٔ درست‌بنیان x برقرار است.

۶.۲ نوعی قضیهٔ بازگشت. فرض کنید $\mathbf{G}$ یک عمل باشد. عمل منحصر به‌فرد $\mathbf{F}$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر مجموعهٔ درست‌بنیان x، $\mathbf{F}(x) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction x)$ و برای هر مجموعهٔ غیردرست‌بنیان x، $\mathbf{F}(x) = \varnothing$.

۷.۲ با استفاده از تمرین ۶.۲ نشان دهید که عمل منحصر به‌فرد ρ (رتبه) وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر مجموعهٔ درست‌بنیان x، $\rho(x) = \sup\{\rho(y) + ۱ \mid y \in x\}$، و در غیر این صورت، $\rho(x) = \{\{\varnothing\}\}$. ثابت کنید که $V_\alpha = \{x \mid \rho(x) \in \alpha\}$ برای هر اوردینال α.

۸.۲ با استفاده از اصل موضوع بنیان می‌توان تعریف دقیقی برای نوع ترتیب ترتیب‌های خطی ارائه کرد (فصل ۴ از بخش ۴). اگر $\mathfrak{A} = (A, <)$ یک ترتیب خطی باشد، فرض کنید α کوچک‌ترین عدد ترتیبی باشد که ترتیب خطی $\mathfrak{A}' = (A', <')$ از رتبهٔ $\rho(\mathfrak{A}') = \alpha$ یکریخت با $\mathfrak{A}$ موجود باشد. (به تمرین ۷.۲ رجوع کنید.) تعریف کنید $\tau(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}' \mid \rho(\mathfrak{A}') = \alpha$ و $\mathfrak{A}'$ با $\mathfrak{A}$ یکریخت است$\}$. چون $\tau(\mathfrak{A}) \subseteq V_{\alpha+۱}$، پس $\tau(\mathfrak{A})$ مجموعه است. ثابت کنید $\mathfrak{A}$ با $\mathfrak{B} = (B, \prec)$ یکریخت است اگر و تنها اگر $\tau(\mathfrak{A}) = \tau(\mathfrak{B})$. نوع‌های یکریخت برای ساختارهای دلخواه به طریق مشابه قابل تعریف است.

۳ مجموعه‌های غیردرست‌بنیان

به دلایلی که در بخش پیشین گفتیم، بسیاری از نظریه مجموعه‌دان‌ها اصل موضوع بنیان را جزء دستگاه اصل موضوع خود برای نظریهٔ مجموعه‌ها وارد می‌کنند. لیکن اصول دیگری که مجموعه‌های غیردرست‌بنیان را مجاز می‌شمارند، می‌توانند با دیگر اصول منطقاً سازگار باشند، علاوه بر این‌ها از جذابیت شهودی نیز

برخوردارند و اخیراً برخی کاربردهایی نیز یافته‌اند. دو نمونه از چنین اصول «پادبنیان» را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دید شهودی دیگری دربارهٔ مجموعه‌ها بدین صورت است که اشیائی که یک مجموعه تشکیل می‌دهند باید هنگامی که مجموعه «بسته» شد معین و متمایز باشند نه لزوماً قبل از آن. آن اشیا ممکن است در ضمن فرایندی که به تشکیل شدن مجموعه ختم می‌شود، شکل بگیرند. و بنابراین از قبل نمی‌توان امکان این که مجموعه‌ای می‌تواند عضو خودش و یا حتی یگانه عضو خودش باشد را رد کرد.

اما چگونه می‌توان چنین مجموعه‌هایی را ساخت؟ خواهیم دید که تعمیم طبیعی نتایج بخش ۱ و ۲ و به‌خصوص قضیه‌های ۱۰.۱ و ۱۲.۱ ما را به مجموعه‌های غیردرست‌بنیان می‌رسانند. بهتر است برای بازگو کردن این نتایج از چند اصطلاح جدید استفاده کنیم.

۱.۳ تعریف. منظور از یک گراف عبارت است از یک ساختار مثل (A, R) که در آن R یک رابطهٔ دوتایی روی A است. یک گراف نقطه‌دار عبارت است از سه‌تایی (A, R, p) که در آن (A, R) یک گراف است به‌طوری‌که $p \in A \neq \varnothing$. یک تزئین از (A, R) یا (A, R, p) عبارت است از یک تابع مانند f به‌شرطی که $\operatorname{dom} f = A$ و برای هر $x \in A$

$$f(x) = \{f(y) \mid yRx\}.$$

اگر f یک تزئین برای گراف نقطه‌دار (A, R, p) باشد، مجموعهٔ $f(p)$ را مقدار آن می‌نامند.

با این اصطلاحات قضیهٔ ۱۰.۱ و ۱۲.۱ به ترتیب نتیجه می‌دهند که:
هر گراف درست‌بنیان یک تزئین منحصر به‌فرد دارد.
هر گراف توسیعی درست‌بنیان یک تزئین انژکتیو (یک‌به‌یک) دارد.
به‌علاوه، یک مجموعه درست‌بنیان است اگر و تنها اگر مقدار یک تزئین از یک گراف درست‌بنیان باشد.

برای اثبات مطلب آخر، ملاحظه کنید که اگر (A, R, p) یک گراف درست‌بنیان

باشد و f یک تزئین، در این صورت $f(p) \in \operatorname{ran} f = T$، که در آن T بنا به قضیهٔ ۱۰.۱ متعدی و درست‌بنیان است، لذا مجموعهٔ $f(p) \subseteq T$ درست‌بنیان است. بالعکس، مجموعهٔ درست‌بنیان X را در نظر بگیرید، تعریف کنید $A = \mathrm{TC}(\{X\})$، $R = \in_A$، $p = X$ و $f = \mathrm{Id}_A$. به‌راحتی دیده می‌شود که (A, R, p) گراف نقطه‌دار توسیعی و درست‌بنیان است و f یک تزئین انژکتیو از آن است و $f(p) = X$ (تمرین ۱.۲ را ببینید).

حال به تزئین یک گراف غیردرست‌بنیان می‌پردازیم. برای ترسیم (A, R, p) اعضای A را با نقاط، رابطهٔ aRb را با پیکان از b به a، و «نقطهٔ» p را با دایره نشان می‌دهیم.

۲.۳ مثال.

الف) شکل ۱ (الف) را نگاه کنید. فرض کنید $A = \{a\}$ تک نقطه‌ای باشد، $R = \{(a, a)\}$ و $p = a$. اگر S مقدار یک تزئین f از (A, R, p) باشد، در این صورت $S = \{S\}$.

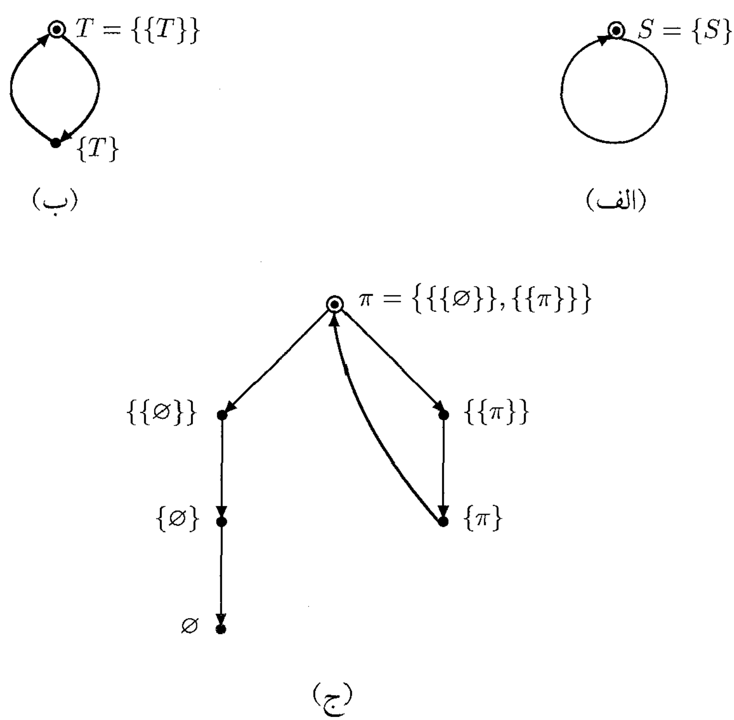
ب) شکل ۱ (ب) را ببینید. فرض کنید $A = \{a, b\}$ و $a \neq b$، $R = \{(a, b), (b, a)\}$ و $p = a$. اگر T مقدار یک تزئین از (A, R, p) باشد، در این صورت $T = \{\{T\}\}$.

ج) به‌منظور ارائهٔ مثالی دشوارتر و اشاره به کاربردها، مسئله‌ای را که در زبان‌های برنامه‌نویسی مطرح می‌شود، بررسی می‌کنیم. مجموعه‌ای مانند D از «داده» و یک مجموعه از «برنامه‌ها» در اختیار داریم. یک برنامه مانند $\pi \in P$ داده را به عنوان «ورودی‌ها» می‌گیرد و داده‌ای نیز به‌عنوان «خروجی‌ها» باز می‌گرداند. به لحاظ ریاضی این برنامه در واقع یک تابع از D به D است. در حالتی که $D \cap P = \varnothing$ دشواریی وجود ندارد، اما همان‌گونه که در برنامه‌نویسی نیز معمول است، اگر برنامه‌ها به‌عنوان ورودی برنامه‌های دیگر (و یا حتی خودشان) را قبول کنند پیچیدگی‌های جالبی ظاهر می‌شود.

یک مثال ساده از این قرار است که تعریف کنیم $P = \{\pi\}$، $D = \{\varnothing, \pi\}$ و شرط کنیم که برنامهٔ π هر ورودی از D را بپذیرد و آن را بدون تغییر به‌عنوان

خروجی بازگرداند. به‌عبارت‌دیگر، $\pi(\varnothing) = \varnothing$ و $\pi(\pi) = \pi$. در این صورت داریم $\pi = \{(\varnothing,\varnothing),(\pi,\pi)\} = \{\{\{\varnothing\}\},\{\{\pi\}\}\}$. چنین مجموعه‌ای را می‌توان به‌صورت مقدار یک تزئین دلخواه از گراف رسم‌شده در شکل ۱ (ج) به‌دست آورد.

این مثال‌ها نشان می‌دهند که اگر به‌عنوان اصل بپذیریم که (حداقل یک) گراف غیردرست‌بنیان دارای تزئین است، در این صورت می‌توان مجموعه‌های غیردرست‌بنیان تولید کرد. اما یک سؤال جالب، و آن اینکه منظور از تساوی دو مجموعهٔ غیردرست‌بنیان چیست؟



شکل ۱

اصل موضوع توسیع، اصل واجب نظریهٔ مجموعه‌ها، می‌گوید برای تساوی دو

مجموعهٔ X و Y کافی است نشان دهیم X و Y هر دو اعضای یکسانی دارند. این فرایند برای مجموعه‌های درست‌بنیان کارآمد است به این دلیل که اعضای X و Y «از پیش» مشخص شده‌اند. اما، مثلاً برای دو مجموعهٔ $X = \{X\}$ و $Y = \{Y\}$ تصمیم‌گیری در مورد تساوی $X = Y$ از طریق اصل موضوع توسیع، در حقیقت، تکرار همان پرسش اولیه است. در اینجا برای اتخاذ تصمیم نیاز به اصولی اندکی قوی‌تر (و البته سازگار با اصل توسیع) داریم. اصلی که در زیر ارائه می‌کنیم وجود بسیاری مجموعهٔ غیردرست‌بنیان را ایجاب می‌کند و ملاکی برای تساوی آن‌ها به‌دست می‌دهد. اصل مذکور، فی‌الواقع، تعمیم طبیعی قضیهٔ ۱۰.۱ با برداشتن شرط درست‌بنیان بودن R است.

۳.۳ اصل پادبنیان. هر گراف دارای یک تزئین یکتاست.

ثابت می‌شود اصل موضوع فوق با نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل (بدون اصل بنیان) سازگار است.

۴.۳ تعریف. مجموعهٔ X را بازتابی گویند هرگاه $X = \{X\}$.

۵.۳ قضیه. اصل پادبنیان وجود یک مجموعهٔ بازتابی یکتا را ایجاب می کند.

برهان. فرض کنید (A, R, p) گراف نقطه‌دار مثال ۲.۳ (الف) باشد. این گراف بنا به اصل پادبنیان دارای یک تزئین مانند f است، پس $X = f(p)$ مجموعه‌ای بازتابی است. اگر Y مجموعهٔ بازتابی دیگری باشد، تابع g روی A را به‌صورت $g(a) = Y$ تعریف می‌کنیم. روشن است که g نیز یک تزئین است. بنا به یکتایی تزئین نتیجه می‌گیریم $f = g$ و لذا $X = Y$. □

اکنون معیاری کلی برای تشخیص اینکه دو تزئین دارای یک مقدار باشند به‌دست می‌دهیم. این معیار مفهوم مهم شبیه‌سازی دوسویه را در بر دارد که منشأ آن مطالعهٔ راه‌هایی است که یک فرایند (نامتناهی) می‌تواند از فرایند دیگری تقلید کند.

۶.۳ تعریف. فرض کنید $(A_۱, R_۱)$ و $(A_۲, R_۲)$ دو گراف باشند. برای هر $B \subseteq A_۱ \times A_۲$ مجموعهٔ $B^+ \subseteq A_۱ \times A_۲$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

گوییم $B^+ \ni (a_1, a_2)$ هرگاه برای هر $x_1 \in \mathrm{ext}_{R_1}(a_1)$، عضو $x_2 \in \mathrm{ext}_{R_2}(a_2)$، و برای هر $x_2 \in \mathrm{ext}_{R_2}(a_2)$، عضو $x_1 \in \mathrm{ext}_{R_1}(a_1)$ موجود باشد به‌قسمی که $(x_1, x_2) \in B$.

گوییم B یک شبیه‌سازی دوسویه بین (A_1, R_1) و (A_2, R_2) است هرگاه $B^+ \subseteq B$.

۷.۳ لم.
(۱) اگر $B \subseteq C \subseteq A_1 \times A_2$ آن‌گاه $B^+ \subseteq C^+$.
(۲) $\varnothing$ یک شبیه‌سازی دوسویه است.
(۳) اجتماع هر دو گردایه از شبیه‌سازی‌های دوسویه، یک شبیه‌سازی دوسویه است.

برهان. (۱) و (۲) بدیهی‌اند.
اگر $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ و برای هر $i \in I$، $B_i \subseteq B_i^+$، در این صورت بنا به قسمت (۱) برای هر $i \in I$، $B_i^+ \subseteq B^+$، لذا $B = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i^+ \subseteq B^+$. □

از لم بالا به‌راحتی نتیجه می‌شود که برای هر دو گراف (A_1, R_1) و (A_2, R_2)، بزرگ‌ترین شبیه‌سازی دوسویه با تعریف زیر وجود دارد

$$\widetilde{B} = \bigcup \{B \subseteq A_1 \times A_2 \mid \text{شبیه‌سازی دوسویه است } B\}.$$

لم بعد مفهوم شبیه‌سازی دوسویه را با تزئین‌ها پیوند می‌دهد.

۸.۳ لم. فرض کنید f_1 و f_2 دو تزئین به ترتیب برای (A_1, R_1) و (A_2, R_2) باشند. قرار دهید

$$B = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}.$$

در این صورت B یک شبیه‌سازی دوسویه است.

برهان. ثابت می‌کنیم $B = B^+$. داریم
$(a_1, a_2) \in B$ اگر و تنها اگر $f_1(a_1) = f_2(a_2)$

اگر و تنها اگر برای هر $x_1 \in \mathrm{ext}_{R_1}(a_1)$، $f_1(x_1) \in f_2(a_2)$ و بالعکس

اگر و تنها اگر برای هر $x_1 \in \mathrm{ext}_{R_1}(a_1)$ عضو $x_2 \in \mathrm{ext}_{R_2}(a_2)$ موجود باشد به‌قسمی که $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ و بالعکس

اگر و تنها اگر برای هر $x_1 \in \mathrm{ext}_{R_1}(a_1)$ عضو $x_2 \in \mathrm{ext}_{R_2}(a_2)$ موجود باشد به‌قسمی که $(x_1, x_2) \in B$ و بالعکس

اگر و تنها اگر $(a_1, a_2) \in B^+$. □

۹.۳ تعریف. دو گراف نقطه‌دار (A_1, R_1, p_1) و (A_2, R_2, p_2) را برحسب شبیه‌ساز دوسویه معادل می‌نامند هرگاه یک شبیه‌ساز دوسویه مانند B بین (A_1, R_1) و (A_2, R_2) موجود باشد به‌قسمی که $(p_1, p_2) \in B$ (یا معادلاً، هرگاه $(p_1, p_2) \in \widetilde{B}$).

قضیهٔ بعدی معیاری برای تساوی عرضه می‌کند که آن را وعده داده بودیم.

۱۰.۳ قضیه. فرض کنید f_1 یک تزئین برای (A_1, R_1, p_1) و f_2 برای (A_2, R_2, p_2) باشد. اصل موضوع پادبنیان ایجاب می‌کند که f_1 و f_2 مقدار یکسان دارند اگر و تنها اگر (A_1, R_1, p_1) و (A_2, R_2, p_2) برحسب شبیه‌ساز دوسویه معادل باشند.

۱۱.۳ نتیجه. با مفروض گرفتن اصل پادبنیان، $X = Y$ اگر و تنها اگر دو گراف نقطه‌دار $(\mathrm{TC}(\{X\}), \in, X)$ و $(\mathrm{TC}(\{Y\}), \in, Y)$ برحسب شبیه‌ساز دوسویه معادل باشند.

پیش از اثبات قضیهٔ ۱۰.۳ به یک لم تکنیکی نیاز داریم.

۱۲.۳ لم.

الف) به‌ازای $i = 1, 2$، فرض کنید f_i تزئینی برای (A_i, R_i, p_i) باشد. کوچک‌ترین زیرمجموعهٔ R_iـمتعدی A_i با شرط $p_i \in A_i$ را با $\bar{A}_i$ نشان می‌دهیم. تعریف

کنید $\bar{R}_i = R_i \cap (\bar{A}_i \times \bar{A}_i)$ و $\bar{f}_i = f_i \restriction \bar{A}_i$. در این صورت $\bar{f}_i$ یک تزئین برای $(\bar{A}_i, \bar{R}_i, p_i)$.

ب) فرض کنید B یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۱, R_۱, p_۱)$ و $(A_۲, R_۲, p_۲)$ باشد. در این صورت $\bar{B} = B \cap (\bar{A}_۱ \times \bar{A}_۲)$ یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(\bar{A}_۱, \bar{R}_۱)$ و $(\bar{A}_۲, \bar{R}_۲)$ است. اگر $(p_۱, p_۲) \in B$ آن‌گاه $\operatorname{dom} \bar{B} = \bar{A}_۱$ و $\operatorname{ran} \bar{B} = \bar{A}_۲$.

برهان. از اثبات لم ۸.۱ به یاد می‌آوریم که $\bar{A}_i = \bigcup_{n=۰}^{\infty} C_{i,n}$ که در آن

$$C_{i,۰} = \{p_i\},$$
$$C_{i,n+۱} = \{y \in A_i \mid yR_ix \text{ داریم } x \in C_{i,n} \text{ به‌ازای}\} = \bigcup \{\operatorname{ext}_{R_i}(x) \mid x \in C_{i,n}\}.$$

به‌خصوص، برای $x \in \bar{A}_i$، $\operatorname{ext}_{R_i}(x) = \operatorname{ext}_{\bar{R}_i}(x)$. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که $\bar{f}_i$ یک تزئین و $\bar{B}$ یک شبیه‌ساز دوسویه است. نتیجهٔ اخیر نشان می‌دهد که $\operatorname{dom} \bar{B}$ یک زیرمجموعهٔ $\bar{R}_۱$ـمتعدی از $\bar{A}_۱$ است و لذا یک زیرمجموعهٔ $R_۱$ـمتعدی از $A_۱$ است. اگر $(p_۱, p_۲) \in B$، در این صورت $p_۱ \in \operatorname{dom} \bar{B}$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم $\bar{A}_۱ \subseteq \operatorname{dom} \bar{B}$. به‌نحو مشابه، $\bar{A}_۲ \subseteq \operatorname{ran} \bar{B}$. □

برهان قضیهٔ ۳.۱۰. فرض کنید $f_۱(p_۱) = f_۲(p_۲)$. پس

$$B = \{(a_۱, a_۲) \in A_۱ \times A_۲ \mid f_۱(a_۱) = f_۲(a_۲)\}$$

بنا به لم ۸.۳، یک شبیه‌ساز دوسویه است و در نتیجه $(p_۱, p_۲) \in B$. از این‌رو $(A_۱, R_۱, p_۱)$ و $(A_۲, R_۲, p_۲)$ برحسب شبیه‌ساز دوسویه معادل‌اند.

بالعکس، فرض کنید B یک شبیه‌ساز دوسویه با شرط $(p_۱, p_۲) \in B$ باشد. از لم ۱۲.۳، یک شبیه‌ساز دوسویه مانند $\bar{B}$ بین $(\bar{A}_۱, \bar{R}_۱)$ و $(\bar{A}_۲, \bar{R}_۲)$ و همچنین دو تزئین $\bar{f}_۱$ و $\bar{f}_۲$ را به‌دست می‌آوریم. حال گراف (A, R) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A = \bar{B} = \{(a_۱, a_۲) \mid a_۱ \in \bar{A}_۱,\ a_۲ \in \bar{A}_۲,\ (a_۱, a_۲) \in \bar{B}\},$$
$$R = \{((b_۱, b_۲), (a_۱, a_۲)) \in A \times A \mid (b_۱, a_۱) \in \bar{R}_۱,\ (b_۲, a_۲) \in \bar{R}_۲\}.$$

دو تابع F_1 و F_2 را به‌صورت

$$F_1((a_1, a_2)) = \bar{f}_1(a_1)$$
$$F_2((a_1, a_2)) = \bar{f}_2(a_2)$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} F_1((a_1, a_2)) &= \bar{f}_1(a_1) = \{\bar{f}_1(b_1) \mid b_1 \bar{R}_1 a_1\} \\ &= i\{F_1((b_1, b_2)) \mid b_1 \bar{R}_1 a_1,\ b_2 \bar{R}_2 a_2,\ (b_1, b_2) \in \bar{B}\} \\ &= \{F_1((b_1, b_2)) \mid (b_1, b_2) R (a_1, a_2)\}. \end{aligned}$$

لذا، F_1 یک تزئین روی (A, R) است. به‌نحو مشابه، F_2 نیز تزئینی روی (A, R) است. اصل پادبنیان ایجاب می‌کند که $F_1 = F_2$، به خصوص

$$f_1(p_1) = \bar{f}_1(p_1) = F_1((p_1, p_2)) = F_2((p_1, p_2)) = \bar{f}_2(p_2) = f_2(p_2).$$

□

برخی از ریاضیدانان اصل‌های موضوع «پادبنیان» دیگری نیز در نظر گرفته‌اند. به‌طور مثال، اگر قضیهٔ ۱۲.۱ را تعمیم دهیم، اصل زیر را می‌توان به‌دست آورد.

۱۳.۳ اصل موضوع کلیت. هر گرافِ توسیعی دارای یک تزئین انژکتیو است.

اصل موضوع کلیت نیز با دیگر اصول نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار است، ولی با اصل موضوع پادبنیان همخوان نیست. همان‌گونه که قضیهٔ بعد نشان می‌دهد این اصل، مجموعه‌های غیردرست‌بنیان بسیاری در اختیار ما می‌گذارد.

۱۴.۳ قضیه. اصل موضوع کلیت ایجاب می‌کند که گردایه‌ای با کاردینال دلخواه از مجموعه‌های بازتابی وجود دارد.

برهان. فرض کنید A یک مجموعهٔ دلخواه باشد و فرض کنید $R = \{(a, a) \in A\}$ رابطهٔ همانی روی A باشد. اگر $a \neq b$، در این صورت $\mathrm{ext}_R(a) = \{a\} \neq \{b\} = \mathrm{ext}_R(b)$، و لذا (A, R) توسیعی است. اگر f یک تزئین

انژکتیو برای (A, R) باشد، در این صورت برای هر $a \in A$، $f(a) = \{f(a)\}$ و به‌علاوه از $a \neq b$، بنا به انژکتیو بودن f، نتیجه می‌گیریم $f(a) \neq f(b)$. از این‌رو $\{f(a) \mid a \in A\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بازتابی با عدد اصلی برابر عدد اصلی A است. □

نتایج قوی‌تری از این دست در تمرین‌ها آمده است.

تمرین‌ها

۱.۳ گراف‌های نقطه‌داری بسازید که مقدار آن‌ها، S، دارای خاصیت زیر باشد

الف) $S = \{\varnothing, S\}$.

ب) $S = (\varnothing, S)$.

ج) $S = \mathbb{N} \cup \{S\}$.

۲.۳ نشان دهید برای بزرگ‌ترین شبیه‌ساز دوسویهٔ $\widetilde{B}$ داریم $\widetilde{B}^{+} = \widetilde{B}$.

۳.۳ گراف‌های $(A_۱, R_۱)$، $(A_۲, R_۲)$، و $(A_۳, R_۳)$ داده شده‌اند. نشان دهید

(۱) $\mathrm{Id}_{A_۱}$ یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۱, R_۱)$ و $(A_۱, R_۱)$ است.

(۲) اگر B یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۱, R_۱)$ و $(A_۲, R_۲)$ باشد، آن‌گاه $B^{-۱}$ یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۲, R_۲)$ و $(A_۱, R_۱)$ است.

(۳) اگر B یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۱, R_۱)$ و $(A_۲, R_۲)$ و C شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۲, R_۲)$ و $(A_۳, R_۳)$ باشند، آن‌گاه $C \circ B$ یک شبیه‌ساز دوسویه بین $(A_۱, R_۱)$ و $(A_۳, R_۳)$ است.

از اینجا نتیجه بگیرید که مفهوم هم‌ارزی برحسب شبیه‌ساز دوسویه، بازتابی، متقارن، و متعدی است.

۴.۳ نشان دهید هر دو گراف نقطه‌دار دلخواه زیر برحسب شبیه‌ساز دوسویه هم‌ارزند.

(۱) مثال ۲.۳ (الف).

(۲) مثال ۲.۳ (ب).

(۳) $(\mathbb{N}, \{(n + ۱, n) \mid n \in \mathbb{N}\}, ۰)$.

(۴) $(\mathbb{N}, >, \circ)$.

۳.۵. فرض کنید (A, R) یک گراف باشد. از طریق بازگشت ترامتناهی تعریف کنید

$$W_\circ = \varnothing,$$
$$W_{\alpha+1} = \{a \in A \mid \operatorname{ext}_R(a) \subseteq W_\alpha\},$$
$$W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta \quad \alpha \neq \circ \text{ برای هر اوردینال حدی }$$

نشان دهید λ وجود دارد به‌طوری‌که $W_\lambda = W_{\lambda+1}$. ثابت کنید $(W_\lambda, R \cap W_\lambda^2)$ درست‌بنیان است. W_λ را قسمت درست‌بنیان (A, R) می‌نامیم.

۶.۳ اگر W قسمت درست‌بنیان (A, R) باشد و f_1 و f_2 دو تزئین از (A, R) باشند، آن‌گاه $f_1 \restriction W = f_2 \restriction W$.

۷.۳ فرض کنید (A, R, p) یک گراف نقطه‌دار توسیعی باشد و W قسمت درست‌بنیان آن و $p \notin W$. با فرض اصل موضوع کلیت، نشان دهید که مجموعه‌هایی با اعداد اصلی به دلخواه بزرگ وجود دارند که همهٔ اعضای آن مجموعه‌ها مقادیر گراف W هستند.

[راهنمایی: اجتماع خانوادهٔ دلخواه از نسخه‌های مجزای (A, R) را در نظر بگیرید و قسمت درست‌بنیان آن‌ها را یکی کنید، نشان دهید که ساختار حاصل توسیعی است، سپس تزئین انژکتیو آن را در نظر بگیرید.]

فصل ۱۵

نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها

۱ نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو-فرانکل با اصل انتخاب

طی چهارده فصل گذشته، اصولی را معرفی کردیم که با هم نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو-فرانکل به انضمام اصل موضوع انتخاب (ZFC) را تشکیل می‌دهند. برای راحتی خواننده این اصول را اینجا ذکر می‌کنیم.

اصل موضوع وجود. مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

اصل موضوع توسیع. اگر هر عضو X عضوی از Y باشد و هر عضو Y عضوی از X باشد، آن‌گاه $X = Y$.

قالب اصل موضوع شمول. فرض کنید $\mathbf{P}(x)$ خاصیتی برحسب x باشد. برای هر A، Bیی وجود دارد به‌قسمی که $x \in B$ اگر و تنها اگر $x \in A$ و $\mathbf{P}(x)$ صادق باشد.

اصل موضوع زوج. برای هر A و B، Cیی وجود دارد به‌قسمی که $x \in C$ اگر و تنها اگر $x = A$ یا $x = B$.

اصل موضوع اجتماع. برای هر S، وجود دارد U به‌قسمی که $x \in U$ اگر و تنها اگر به‌ازای یک $A \in S$، $x \in A$.

اصل موضوع مجموعهٔ توانی. برای هر S، وجود دارد $\mathbf{P}$یی به‌قسمی که $X \in \mathbf{P}$ اگر و تنها اگر $X \subseteq S$.

اصل موضوع بی‌نهایت. یک مجموعهٔ استقرائی وجود دارد.

اصل موضوع جایگزینی. فرض کنید $\mathbf{P}(x,y)$ خاصیتی باشد به‌قسمی که برای هر x، یک yی یکتا موجود باشد که به‌ازای آن $\mathbf{P}(x,y)$ برقرار باشد. برای هر A یک B چنان موجود است که به‌ازای هر $x \in A$ یک $y \in B$ وجود دارد که به‌ازای آن $\mathbf{P}(x,y)$ برقرار است.

اصل موضوع بنیان. همهٔ مجموعه‌ها درست‌بنیان هستند.

اصل موضوع انتخاب. هر دستگاه از مجموعه‌ها دارای یک تابع انتخاب است.

(شاید خواننده متوجه شده باشد که برخی از این اصول اضافی هستند. به‌طور مثال، اصل موضوع وجود و اصل موضوع زوج را می‌توان از دیگر اصول به‌دست آورد.)

در فصل‌های قبل نشان دادیم که مفاهیم آشنای آنالیز حقیقی (مانند اعداد حقیقی، اعمال حسابی روی آن‌ها، حدود دنباله‌ها، پیوستگی توابع و غیره) را می‌توان برحسب نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف کرد و با اصول تسرملو ـ فرانکل و اصل انتخاب ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها را اثبات کرد. همین ادعا را دربارهٔ دیگر شاخه‌های ریاضیات معاصر (به استثنای نظریهٔ رسته) می‌توان بیان کرد. اشیای بنیادی توپولوژی، جبر یا آنالیز تابعی (مثل فضاهای توپولوژیک، فضاهای برداری، گروه‌ها، حلقه‌ها، فضاهای باناخ) معمولاً به‌صورت مجموعه‌هایی خاص تعریف می‌شوند. ویژگی‌های توپولوژیکی، جبری، و تحلیلی این اشیا از ویژگی‌های مختلف مجموعه‌ها به‌دست می‌آیند و خود این ویژگی‌ها نیز نتایجی از اصول ZFC هستند. تجربه حاکی از آن است که همهٔ قضایایی که ریاضیدانان اثبات آن‌ها را شهوداً

می‌پذیرند، اساساً می‌توان با اصول ZFC اثبات کرد. بدین معنی، نظریهٔ اصل موضوعی مجموعه‌ها به نحو رضایت‌بخشی بنیان یکپارچه‌ای برای ریاضیات در اختیار می‌گذارد.

بعد از آنکه اطمینان خاطر حاصل کردیم که ریاضیات کنونی را می‌توان تحت ZFC تدوّین کرد، از خود می‌پرسیم در مورد ریاضیات آینده چطور؟ این سؤال را به گونهٔ دیگری مطرح می‌کنیم. آیا همهٔ قضایای صادق ریاضی را (ازجمله، آن دسته قضایای صادقی که هنوز اثبات نشده‌اند) می‌توان در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل به همراه اصل انتخاب ثابت کرد؟ چنانچه پاسخ مثبت باشد، این بدان معنی است که ما خواهیم توانست در مورد همهٔ پرسش‌های ریاضی که تاکنون بدون پاسخ مانده، فقط بر پایهٔ اصول ZFC اساساً حکم (رد یا قبول) صادر کنیم. لیکن مسئله چیز دیگری از کار در می‌آید.

چند مسئلهٔ نسبتاً سادهٔ نظریه ـ مجموعه‌ای، چندین دهه، ریاضیدانان را درمانده کرده بود. آن‌ها این مسائل را نه می‌توانستند اثبات کنند و نه رد. نمونهٔ بارزی از این نوع مسائل فرض پیوستار (CH) بود که بیان می‌کرد هر مجموعهٔ اعداد حقیقی یا حداکثر شماراست یا دارای عدد اصلی برابر پیوستار است. در فصل ۹ نشان دادیم که (CH) با گزارهٔ $\aleph_۱ = ۲^{\aleph_۰}$ معادل است. لیکن، ما نه $\aleph_۱ = ۲^{\aleph_۰}$ و نه $\aleph_۱ \neq ۲^{\aleph_۰}$ هیچ‌یک را اثبات نکردیم. مسئلهٔ مشابه دیگر، فرض سوسلین است. همچنین مسائل دیگری از این دست در توپولوژی و نظریهٔ اندازه پیش می‌آید (بخش ۳ را ببینید). شکست پی‌درپی همهٔ تلاش‌ها برای حل این مسائل، ریاضیدانان را به این شک انداخت که اصلاً این مسائل با دانش موجود ریاضی قابل حل نیستند. رویکرد اصل موضوعی به نظریهٔ مجموعه‌ها بیان این شک را به‌صورت یک حدس دقیق و به لحاظ ریاضی اثبات‌پذیر، ممکن می‌سازد. برای مثال، براساس اصول ZFC (که همان گونه که بحث کردیم، ریاضیات معاصر را با آن می‌توان بیان کرد) نمی‌توان دربارهٔ فرض پیوستار تصمیم‌گیری کرد. کارهای کورت گودل و پال کوئین نشان می‌دهند که این حدس درست است.

ابتدا گودل در سال ۱۹۳۹ اثبات کرد که فرض پیوستار را در ZFC نمی‌توان رد کرد (یعنی اینکه، نمی‌توان ثابت کرد که $\aleph_۱ \neq ۲^{\aleph_۰}$). بیست و چهار سال بعد هم

کوئین نشان داد که فرض پیوستار را اثبات نیز نمی‌توان کرد. محققان دیگری، با استفاده از تکنیک‌های آن‌ها، نشان دادند که فرض سوسلین و برخی مسائل دیگر نیز در ZFC تصمیم‌ناپذیرند. گرچه طرح کلی از ایده‌های گودل و کوئین را در بخش ۲ به اختصار خواهیم آورد، خواننده‌ای که خواهان اطلاعات عمیق‌تری در این باره است بهتر است به کتاب‌های پیشرفته‌تر در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها مراجعه کُند.

نتایج فوق‌الذکر، تصویر جدیدی از مسائل لاینحل قدیمی نظریهٔ مجموعه‌ها ارائه می‌کنند. فرض پیوستار بر پایهٔ دانش فعلی ما از مجموعه‌ها، که در قالب اصول ZFC بازتاب یافته است، تصمیم‌ناپذیر است و این بدین معنی است که هنوز برخی خواص بنیادی مجموعه‌ها شناخته نشده است. آنچه که در پیش خواهیم داشت یافتن این گونه ویژگی‌ها و فرمول‌بندی آن‌ها به‌صورت اصل‌های جدیدی است که با اضافه کردن آن‌ها به ZFC تصمیم‌گیری را دربارهٔ CH میسر سازد.

تا حدی یافتن چنین اصولی کار ساده‌ای است. به‌طور مثال، می‌توان به ZFC اصل

$$«2^{\aleph_0} = \aleph_1»$$

را افزود. متأسفانه، به‌جای اصل بالا می‌توان اصل

$$«2^{\aleph_0} = \aleph_2»$$

را نیز در نظر گرفت، که در این صورت نظریهٔ مجموعه‌ای متفاوت و ناسازگار با قبلی حاصل می‌شود. افزودن اصل «$2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+17}$» چطور؟ کار کوئین نشان می‌دهد که از افزودن این اصل نیز یک نظریهٔ مجموعهٔ سازگار و متناقض با دوتای قبلی به‌دست می‌آید. علاوه بر این، چنانچه درست بودن یا نادرست بودن فرض سوسلین را به عنوان یک اصل به هر یک از سه نظریهٔ فوق‌الذکر اضافه کنیم از هر یک از آن‌ها دو نوع نظریهٔ دیگر به‌دست می‌آید. همان‌طور که در هندسه علاوه بر هندسهٔ اقلیدسی معمول، هندسه‌های غیراقلیدسی دیگری (مانند بیضوی، هذلولوی و غیره) وجود دارد، اینجا نیز ما علاوه بر نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها، که در آن $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ یک اصل محسوب می‌شود، نظریهٔ مجموعه‌های غیرکانتوری دیگری نیز داریم که هیچ‌یک بر دیگری رجحان منطقی ندارند.

بعید است چنین برداشتی کاملاً رضایت‌بخش باشد. به‌وضوح، سیاه‌بازی است که برای حل مسئلهٔ پیوستار، سرخود عبارت $\aleph_{\omega+17} = 2^{\aleph_0}$ را به‌عنوان یک اصل به اصول دیگر بیفزاییم. مطلقاً این شیوه‌ای نیست که ما در فصل‌های پیشین دنبال می‌کردیم. ما فقط وقتی یک اصل را می‌پذیرفتیم که:

الف) شهوداً واضح بود که مجموعه‌ها، در معنایی که ما از آن‌ها داریم، از خواصی که آن اصل معین می‌کرد، برخوردار بودند (در مورد اصل انتخاب شک و تردیدهایی بود، ولی به تفصیل در این باره بحث کردیم.)

ب) آن اصل نتایج با اهمیتی هم در نظریهٔ مجموعه‌ها و هم در دیگر شاخه‌های ریاضیات داشت. برخی از نتایج با خود آن اصل در واقع معادل می‌شدند.

تا اینجا، بعید به نظر می‌رسد که اصل $\aleph_{\omega+17} = 2^{\aleph_0}$ (یا هر اصل دیگری به‌صورت $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$) در شرایط (الف) یا (ب) صدق کند.

فی‌الواقع، هیچ اصلی که به اندازهٔ اصول ZFC شهوداً واضح باشند، تاکنون پیشنهاد نشده است. شاید شهود ما در این مورد به منتهای خود رسیده است. با این حال، در سال‌های اخیر چندین پرسش لاینحل، به‌ویژه در حوزه‌ای موسوم به نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها، کشف شده است که با انواع مختلفی از کاردینال‌های بزرگ، آن گونه که در فصول ۹ و ۱۳ ذکر شد، پیوند تنگاتنگی دارند. روند کلی این است که این دست پرسش‌ها را به دو صورت می‌توان پاسخ داد، یکی با مفروض گرفتن وجود کاردینالی بزرگ و مناسب و دیگری عدم وجود آن. پاسخ اولی نسبت به دومی از این مزیت برخوردار است که «طبیعی‌تر»، «عمیق‌تر»، و «زیباتر» است. حاصل تحقیقات گسترده‌ای که طی ۴۰ سال گذشته در این باره انجام گرفته است یک نظریهٔ بسیار غنی و غالباً بسیار ظریف و دشوار دربارهٔ کاردینال‌های بزرگ است. جذابیت زیباشناختی این نظریه ما را متقاعد می‌سازد که این نظریه ابعاد درست عالم نظریهٔ مجموعه‌ها را برای ما ترسیم می‌کند. به برخی از این نتایج در فصل ۳ به‌اختصار خواهیم پرداخت.

۲ سازگاری و استقلال

به‌منظور درک روش‌های اثبات سازگاری و استقلال فرض پیوستار نسبت به اصول تسرملو ـ فرانکل نظریهٔ مجموعه‌ها، نخست اجازه دهید مسئله‌ای مشابه ولی به مراتب ساده‌تر را بررسی کنیم. در فصل ۲، مجموعه‌های مرتب (اکید) را زوج $(A, <)$ تعریف کردیم که در آن A یک مجموعه و $<$ یک رابطهٔ دوتایی پادمتقارن و متعدی روی A است. یا معادلاً می‌توان یک مجموعهٔ مرتب را ساختاری مثل $(A, <)$ تعریف کرد که در اصول زیر صدق می‌کند.

اصل موضوع ناتقارنی. هیچ دو عضو a و b وجود ندارد به‌قسمی که $a < b$ و $b < a$.

اصل موضوع تعدی. برای هر a، b و c، اگر $a < b$ و $b < c$، آن‌گاه $a < c$.

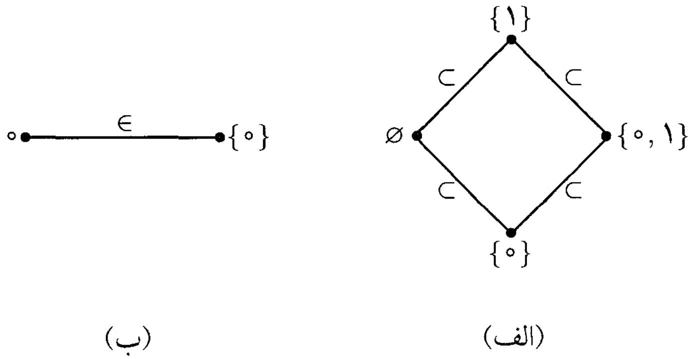
در اینجا می‌توان گفت که اصل موضوع ناتقارنی و اصل موضوع تعدی یک نظریهٔ اصل موضوعی برای ترتیب تشکیل می‌دهند و مجموعه‌های مرتب یک مدل برای این نظریهٔ اصل موضوعی است. اجازه دهید اصل دیگری را نیز فرمول‌بندی کنیم.

اصل موضوع خطی بودن. برای هر a و b یا $a < b$ یا $a = b$ یا $b < a$.

اکنون می‌پرسیم آیا می‌توان اصل موضوع خطی بودن را در این نظریهٔ اصل موضوعی ترتیب، اثبات و یا رد کرد.

ابتدا فرض می‌کنیم که بتوان اصل خطی بودن را در این نظریهٔ ترتیب اثبات کرد. بنابراین هر مدل از این نظریه باید در اصل خطی بودن که نتیجهٔ منطقی این نظریه است، صدق کند. به زبان ساده‌تر، هر ترتیبی باید یک ترتیب خطی باشد. ولی چنین چیزی نادرست است. شکل ۱ (الف) مثالی از یک مدل برای این نظریهٔ ترتیب است که در آن اصل خطی بودن برقرار نیست.

حال فرض کنید که در این نظریه، اصل خطی بودن را نتوان رد کرد. پس هر مدل از این نظریه باید در نقیض اصل خطی بودن صدق کند. به‌بیان‌دیگر، هر ترتیبی



شکل ۱. (الف) $(\mathcal{P}(\{۰,۱\}),\subset)$؛ (ب) $(\{۰,\{۰\}\},\in)$.

باید غیرخطی باشد. اما، این نیز نادرست است. برای نمونه‌ای از یک مدل برای این نظریهٔ ترتیب که در آن اصل خطی بودن برقرار است، شکل ۱ (ب) را ببینید. از اینجا نتیجه می‌گیریم اصل خطی بودن در این نظریهٔ ترتیب تصمیم‌ناپذیر است.

بازمی‌گردیم به تصمیم‌ناپذیری فرض پیوستار در ZFC. مشابه مثال‌های قبلی، برای آنکه نشان دهیم فرض پیوستار را نمی‌توان در ZFC اثبات کرد، باید مدلی از ZFC بسازیم که در آن فرض پیوستار برقرار نباشد. به همین نحو، برای اثبات اینکه فرض پیوستار را در ZFC نمی‌توان رد کرد، باید مدلی از ZFC بسازیم که در آن فرض پیوستار برقرار باشد. اما نخست یک نکتهٔ فنی را باید روشن کنیم. دیدیم برای معرفی یک مدل برای نظریهٔ ترتیب، یعنی یک مجموعهٔ مرتب، باید اعضای آن مدل (از طریق انتخاب مجموعهٔ A) و معنی رابطهٔ «کوچک‌تر از» را (از طریق رابطهٔ دوتایی $>$ روی A) مشخص کنیم. به همین نحو، برای معرفی یک مدل برای نظریهٔ مجموعه‌ها، باید اعضای مدل و معنی رابطهٔ «متعلق است به» را در آن مدل مشخص کنیم. ولی با توجه به پارادوکس‌های نظریهٔ مجموعه‌ها، خیلی خوش‌بینانه است که انتظار داشته باشیم اعضای مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها را بتوان در یک مجموعه گردآورد. (واقعیت این است که وجود چنین مدل‌هایی کاملاً هم غیرممکن نیست. گرچه وجود آن‌ها را در ZFC نمی‌توان ثابت کرد، چنانچه ZFC را با پذیرفتن اصلی

در مورد برخی کاردینال‌های بزرگ گسترش دهیم، وجود آن‌ها را نیز می‌توان ثابت کرد. بخش ۳ را ببینید).

برای رفع مشکل فوق، لازم است که مدل‌های نظریهٔ مجموعه‌ها با یک جفت خاصیت مانند $\mathbf{M}(x)$ و $\mathbf{E}(x,y)$ توصیف شوند. در اینجا $\mathbf{M}(x)$ را به‌صورت «x مجموعه‌ای از مدل مذکور است» و $\mathbf{E}(x,y)$ را به‌صورت «x در معنایی که مدل مشخص می‌کند به y متعلق است» می‌خوانیم. چنانچه $\mathbf{M}(x)$ را خاصیت «x یک مجموعه است» و $\mathbf{E}(x,y)$ را «$x \in y$» در نظر بگیریم، یک مثال واضح از یک مدل برای نظریهٔ مجموعه‌ها حاصل می‌شود. این مدل متشکل از همهٔ مجموعه‌هاست به انضمام رابطهٔ معمول عضویت.

کورت گودل در سال ۱۹۳۹ اولین مدل غیربدیهی نظریهٔ مجموعه‌ها موسوم به مدل ساخت‌پذیرها را معرفی کرد. گودل به دنبال مدلی بود که در آن فرض پیوستار برقرار باشد، بدین معنی که $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. بنا به قضیهٔ کانتور داریم $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$، به بیان دیگر $\aleph_1$ کوچک‌ترین کاردینالی است که پیوستار می‌تواند با آن برابر باشد. این ملاحظات نشان می‌دهند که باید مدلی را جستجو کنیم که تا حداکثر ممکن مجموعه در بر داشته باشد. گودل طی مراحلی از طریق بازگشت ترامتناهی چنین مدلی را می‌سازد. در هر مرحله، فقط مجموعه‌هایی که وجود آن‌ها را یکی از اصول ZFC تأیید می‌کند، به مدل وارد می‌شوند.

در ابتدا، اصل بی‌نهایت و اصل شمول وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی را تضمین می‌کند، لذا تعریف می‌کنیم

$$L_0 = \omega.$$

حال اگر $\mathbf{P}(n)$ یک خاصیت با پارامتری از ω باشد، در این صورت اصل شمول وجود مجموعهٔ $\{n \in \omega \mid \text{برقرار است } (\omega,\in) \text{ در } \mathbf{P}(n)\}$ را ایجاب می‌کند. این مجموعه را به مدل وارد می‌کنیم. بنابراین، تعریف می‌کنیم

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{l} X \subseteq L_0 \mid X = \{n \in L_0 \mid \text{برقرار است } (L_0,\in) \text{ در } \mathbf{P}(n)\} \\ \text{که در آن } \mathbf{P} \text{ یک خاصیت با پارامترهایی در } L_0 \text{ است} \end{array} \right\}$$

برای اثبات وجود $L_۱$، ابتدا لازم است تعریف صوری مفاهیم منطقی، مانند «خاصیت» و «برقرار است در» در نظریهٔ مجموعه‌ها بیان شود. چنین تعریف‌هایی را که در این مختصر نمی‌گنجند، می‌توان در بیشتر کتاب‌های منطق ریاضی یافت. وجود خود $L_۱$ از اصل مجموعهٔ توانی و شمول نتیجه می‌شود. لذا $L_۱$ باید وارد مدل شود. توجه کنید که $L_۰ \subseteq L_۱$؛ در واقع برای هر $k \in L_۰$ چنانچه خاصیت $\mathbf{P}(n)$ را برابر «$n \in k$» در نظر بگیریم، در این صورت $X = k$ را به‌دست می‌آوریم.

بعد از این استدلال، بند قبل را با $L_۱$ به‌جای $L_۰$ تکرار می‌کنیم. چون $L_۱$ در مدل ما قرار دارد، باید همهٔ زیرمجموعه‌های آن، که با خاصیتی مانند $\mathbf{P}$ در $(L_۱, \in)$ تعریف‌پذیر است، در مدل قرار داشته باشند. همچنین $L_۲$، مجموعهٔ همهٔ چنین زیرمجموعه‌هایی، باید در مدل قرار داشته باشد.

به این صورت $L_۳$، $L_۴$، ... تعریف می‌شوند. در مرحلهٔ ω اجتماع همهٔ L_nهای ساخته‌شده را تشکیل می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

$$L_\omega = \bigcup_{n \in \omega} L_n$$

(وجود L_ω از اصل جایگزینی و اجتماع نتیجه می‌شود). حال همانند قبل ادامه می‌دهیم.

بنابراین تعریف بازگشتی عمل L به‌صورت زیر انجام می‌گیرد.

$L_۰ = \omega,$

$L_{\alpha+۱} = \Big\{ X \subseteq L_\alpha \mid$

X در $(L_\alpha, \in)$ با خاصیتی مانند $\mathbf{P}$ و پارامترهایی از L_α تعریف‌پذیر است$\Big\},$

$L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$ اگر α اوردینال حدی باشد و $\alpha > ۰$

به‌راحتی می‌توان دید که اگر $\alpha < \beta$، $L_\alpha \subseteq L_\beta$. یک مجموعه را ساخت‌پذیر نامند هرگاه به L_α به‌ازای یک αیی متعلق باشد.

اکنون آماده‌ایم تا مدل ساخت‌پذیرها را معرفی کنیم. مجموعه‌های این مدل دقیقاً همان مجموعه‌های ساخت‌پذیرند [یعنی اینکه، $\mathbf{M}(x)$ عبارت است از خاصیت «x ساخت‌پذیر است»]. رابطهٔ عضویت در این مدل همان رابطهٔ معمول

است؛ یعنی اینکه اگر x و y دو مجموعه از مدل باشند، در این مدل x به y متعلق است اگر و تنها اگر $x \in y$ [پس، $\mathbf{E}(x,y)$ خاصیت «$x \in y$» است].

البته باید نشان داده شود که مدل ساخت‌پذیرها به‌راستی یک مدل برای ZFC است، بدین معنی که در همهٔ اصول ZFC صدق می‌کند. برای نمونه، نشان می‌دهیم اصل زوج در مدل ساخت‌پذیرها برقرار است. یعنی باید نشان دهیم برای هر A و B متعلق به مدل، یک C متعلق به مدل موجود است به‌قسمی که برای هر x متعلق به مدل، x نسبت به مدل متعلق به C است اگر و تنها اگر $x = A$ یا $x = B$.

برای اثبات، با توجه به تعریف مدل ساخت‌پذیرها باید نشان دهیم که برای هر دو مجموعهٔ ساخت‌پذیر A و B، مجموعهٔ ساخت‌پذیر C موجود است به‌قسمی که برای هر ساخت‌پذیر x، $x \in C$ اگر و تنها اگر $x = A$ یا $x = B$.

فرض کنید دو مجموعهٔ ساخت‌پذیر A و B داده شده باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم $\{A, B\}$ نیز یک مجموعهٔ ساخت‌پذیر است. فی‌الواقع، چنانچه $A \in L_\alpha$، $B \in L_\beta$ و $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$، در این صورت $A, B \in L_\gamma$ و در نتیجه مجموعهٔ $\{A, B\}$ در $(L_\gamma, \in)$ به‌صورت $\{x \in L_\gamma \mid x = A$ یا $x = B\}$ تعریف‌شدنی است. پس نتیجه می‌گیریم $\{A, B\} \in L_{\gamma+1}$ و بنابراین $\{A, B\}$ مجموعه‌ای ساخت‌پذیر است. حال اگر تعریف کنیم $C = \{A, B\}$، در این صورت C ساخت‌پذیر است و به‌وضوح خواص مطلوب را داراست.

استدلال فوق در حقیقت نتیجه‌ای قوی‌تر از درستی اصل زوج در مدل ساخت‌پذیرها را اثبات می‌کند. این استدلال نشان می‌دهد که عمل زوج‌سازی نامرتب، هنگامی که در مدل مذکور روی مجموعه‌ای از آن اِعمال می‌شود، زوج نامرتب معمول آن دو مجموعه را به‌دست می‌دهد. در این حالت می‌گوییم عمل زوج‌سازی نامرتب، مطلق است. با بررسی دقیق و مشابهی از مفاهیم نظریه‌ـمجموعه‌ای درمی‌یابیم که دیگر اصول ZFC نیز در مدل ساخت‌پذیرها برقرارند و به‌علاوه، بسیاری از اعمال و مفاهیم نظریه‌ـمجموعه‌ای معمول، مطلق هستند. مفهوم اعداد طبیعی نیز مطلق است (یعنی اینکه، یک مجموعهٔ ساخت‌پذیر در معنای مدل ساخت‌پذیرها عدد طبیعی است اگر و تنها اگر به معنای عادی عدد طبیعی باشد) و مفهوم اعداد ترتیبی نیز همین‌گونه است. ولی برخی مفاهیم مطلق

نیستند. از جمله مهم‌ترین این مثال‌ها عبارت‌اند از عمل مجموعهٔ توانی و مفهوم اعداد اصلی. مثلاً مجموعهٔ توانی ω در معنای مدل ساخت‌پذیرها از همهٔ زیرمجموعه‌های ساخت‌پذیر ω تشکیل می‌شود. حال آنکه مجموعهٔ توانی معمول ω از همهٔ زیرمجموعه‌های ω تشکیل می‌شود. لذا، به‌وضوح مجموعهٔ توانی ω در این مدل زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ توانی معمول ω است و نه بالعکس. و فی‌الواقع همین امر به ما اجازه می‌دهد که اندازهٔ پیوستار را در مدل ساخت‌پذیرها «کوتاه» کنیم. و بالاخره اینکه، مفهوم ساخت‌پذیری نیز مطلق است، یعنی اینکه یک مجموعه ساخت‌پذیر است در معنای مدل ساخت‌پذیرها اگر و تنها اگر ساخت‌پذیر باشد. اما همهٔ مجموعه‌ها در مدل مذکور ساخت‌پذیر هستند! پس می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه در مدل مذکور به معنای آن مدل ساخت‌پذیر است. از اینجا ثابت می‌شود که عبارت‌های زیر در مدل ساخت‌پذیرها برقرار است.

اصل موضوع ساخت‌پذیری. همهٔ مجموعه‌ها ساخت‌پذیرند.

خلاصهٔ کلام، مدل ساخت‌پذیرها در همهٔ اصول ZFC و علاوه بر آن در اصل ساخت‌پذیری صدق می‌کند. نتیجتاً، اصل ساخت‌پذیری را نمی‌توان در ZFC رد کرد و بنابراین می‌توان آن را بی‌آنکه به تناقض بینجامد به مدل اضافه کرد. قضایای مهمی را می‌توان در ZFC، که با اصل ساخت‌پذیری غنی شده است، اثبات کرد. تمامی این قضایا در مدل ساخت‌پذیرها نیز برقرارند و لذا نمی‌توان آن‌ها را در ZFC رد کرد. گودل ثابت کرد که اصل ساخت‌پذیری فرض پیوستار تعمیم‌یافته را ایجاب می‌کند، یعنی

$$\text{برای هر اوردینال } \alpha \qquad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

رونالد ینسن با استفاده از اصل ساخت‌پذیری یک مجموعهٔ مرتب خطی بدون نقاط انتهایی ساخته است با این خاصیت که هر دستگاه از بازه‌های دوبه‌دو مجزای آن حداکثر شمارا هستند و در عین‌حال هیچ مجموعهٔ چگال شمارایی ندارد. به این ترتیب نشان می‌دهد که فرض سوسلین در این مدل درست نیست. بعد از آن نتایج عمیق دیگری از همین دست ثابت شده است. در اینجا به‌اجمال نشان می‌دهیم چگونه با استفاده از اصل ساخت‌پذیری می‌توان نشان داد که $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

اثبات این حکم مبتنی بر قضیه‌ای اساسی از منطق ریاضی موسوم به قضیهٔ اسکولم_لووِنهایم است. این قضیه بیان می‌کند که به‌ازای هر ساختاری مانند $(A; R, \ldots, F, \ldots)$ که در آن R یک رابطهٔ دوتایی، F تابع یکتایی و به همین صورت الی‌آخر، مجموعهٔ حداکثر شمارایی مانند $B \subseteq A$ موجود است به‌قسمی که یک خاصیت با پارامتر از B در $(A; R, \ldots, F, \ldots)$ برقرار است به‌شرطی‌که در $(B; R \cap B^۲, \ldots, F \restriction B, \ldots)$ برقرار باشد. (این قضیه، صورت مجرد و تعمیم‌یافتهٔ قضیه‌هایی از نوع «هر گروه دارای یک زیرگروه حداکثر شمارش‌پذیر است» و غیره است. قضیهٔ مذکور، همچنین قضیهٔ **۱۴.۳** در فصل **۴** را تعمیم می‌دهد.)

اکنون فرض کنید $X \subseteq \omega$. بنا به اصل ساخت‌پذیری اوردینال α، محتملاً شمارش‌ناپذیر، وجود دارد که $X \in L_{\alpha+۱}$. این بدین معنی است که خاصیتی مانند $\mathbf{P}$ وجود دارد به‌قسمی که $n \in X$ اگر و تنها اگر $\mathbf{P}(n)$ در $(L_\alpha, \in)$ برقرار باشد. بنا به قضیهٔ اسکولم_لووِنهایم، مجموعهٔ حداکثر شمارایی مانند $B \subseteq L_\alpha$ وجود دارد به‌قسمی که $(B, \in)$ در همان گزاره‌هایی صدق می‌کند که $(L_\alpha, \in)$. به‌خصوص، $n \in X$ اگر و تنها اگر $\mathbf{P}(n)$ در $(B, \in)$ برقرار باشد. به‌علاوه، این واقعیت که هر ساختار به‌صورت $(L_\beta, \in)$ است، که در آن β اوردینال مناسبی است، را می‌توان با عبارت مناسبی بیان کرد که در $(L_\alpha, \in)$ و بنابراین در $(B, \in)$ برقرار است. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که $(B, \in)$ (یکریخت با) یک ساخت به‌صورت $(L_\beta, \in)$ است که در آن β یک اوردینال بالضروره حداکثر شمارا است. چون X در $(B, \in)$ تعریف‌پذیر است، پس داریم $X \in L_{\beta+۱}$.

می‌توان نتیجه گرفت که هر مجموعه از اعداد طبیعی در مرحله‌ای حداکثر شمارا ساخته می‌شود، به‌عبارت‌دیگر $\mathcal{P}(\omega) \subseteq \bigcup_{\beta<\omega_۱} L_{\beta+۱}$. برای تکمیل اثبات $۲^{\aleph_۰} = \aleph_۱$، فقط نیاز داریم نشان دهیم که عدد اصلی مجموعهٔ فوق‌الذکر برابر $\aleph_۱$ است. این نیز ثابت خواهد شد اگر نشان دهیم که برای هر $\gamma < \omega_۱$، L_γ شماراست. به‌وضوح $L_۰ = \omega$ شماراست. مجموعهٔ $L_۱$ متشکل از تمام زیرمجموعه‌های $L_۰$ است که در $(L_۰, \in)$ تعریف‌پذیرند. چون حداکثر به تعداد شمارایی می‌توان تعریف ارائه کرد (هر تعریف، دنباله‌ای متناهی از حروف به انضمام یک دنبالهٔ متناهی از پارامترها از مجموعهٔ شمارای $L_۰$ است. حروف مذکور به الفبای متناهی یک زبان

صوری تعلق دارند.) بنابراین تعداد حداکثر شمارایی زیرمجموعه‌های تعریف‌پذیر برای L_0 وجود دارد. از اینجا نتیجه می‌گیریم L_1 شماراست. حال برهان را با استقرا انجام می‌دهیم؛ در مراحل تالی از ایده‌ای مشابه بالا استفاده می‌کنیم و در مراحل حدی از این واقعیت که اجتماع تعداد شمارا از مجموعه‌های شمارا، حداکثر شماراست.

استقلال فرض پیوستار از اصول ZFC (یعنی نشان دادن اینکه فرض پیوستار در ZFC قابل اثبات نیست) پرسشی بود که مدت طولانی‌تری لاینحل مانده بود. سرانجام پال کوئین در سال ۱۹۶۳ اعلام کرد که روشی ابداع کرده است که از طریق آن می‌تواند مدلی برای ZFC بسازد که در آن فرض پیوستار برقرار نباشد. ادامهٔ این بخش را به بیان اجمالی برخی ایده‌های او در این باره اختصاص می‌دهیم.

در اینجا نیز عالم همهٔ مجموعه‌هایی را که اصول تسرملو ـ فرانکل به همراه اصل انتخاب توصیف می‌کنند، در نظر می‌گیریم. تنها چیزی که دربارهٔ $2^{\aleph_0}$ می‌توان به‌دست آورد همان است که قضیهٔ کانتور در اختیار می‌گذارد، یعنی اینکه $\aleph_1 \le 2^{\aleph_0}$ (یا به‌طورکلی‌تر، $\aleph_0 < \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$. لم ۳.۳ از فصل ۹ را ببینید). به‌خصوص، تساوی $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ یکی از حالت‌های ممکن است (و اگر اصل ساخت‌پذیری را نیز بپذیریم، اثبات‌شدنی است). بنابراین در حالت کلی، برای به‌دست آوردن مدلی که در آن $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ باید به عالم مذکور مجموعه‌های «جدیدی» بیفزاییم.

ما افزودن فقط یک مجموعهٔ «جدید» از اعداد طبیعی مانند X را مورد توجه قرار می‌دهیم. فعلاً برای ما X فقط یک نماد بدون مفهوم و در واقع نام یک مجموعه است که قرار است آن را معین کنیم. ببینیم دربارهٔ آن، چه می‌توانیم بگوییم.

یک نکتهٔ کلیدی این است که نباید انتظار داشته باشیم که در مورد X اطلاعات کاملی داشته باشیم. اگر خاصیتی مانند $\mathbf{P}$ بیابیم که دقیقاً مشخص کند چه اعداد طبیعی‌ای به X تعلق دارند، در این صورت مجموعهٔ $X = \{n \in \omega \mid \mathbf{P}(n)\}$ بنا به اصل شمول باید در عالم مورد بحث موجود باشد، و در این صورت دیگر یک مجموعهٔ «جدید» نخواهد بود. ایدهٔ اساسی کوئین این بود که توصیفی جزئی از X برای این کار کفایت می‌کند. وی مجموعهٔ X را با یک دسته از «تقریب‌ها» توصیف می‌کند. این تقریب‌ها بسیار شبیه تقریب اعداد گنگ به‌وسیلهٔ اعداد گویا هستند.

به‌عبارت دقیق‌تر، منظور از قیدها عبارت است از دنباله‌های متناهی از ۰ها و ۱ها. برای مثال، $\varnothing$، $\langle ۱\rangle$، $\langle ۱, ۰, ۱\rangle$، $\langle ۰, ۱, ۱\rangle$، $\langle ۱, ۰, ۱, ۱\rangle$ نمونه‌ای از قیدها هستند. قیدها به معنایی که خواهیم گفت اطلاعات جزئی دربارهٔ X در اختیار ما می‌گذارند. اگر kامین مختص در یک قید برابر ۱ باشد، در این صورت آن قید الزام می‌کند که $k \in X$. اگر آن مختص برابر ۰ باشد، در این صورت $k \notin X$. برای مثال، شرط $\langle ۱, ۰, ۱, ۱\rangle$ الزام می‌کند که $۰ \in X$، $۱ \in X$، $۲ \notin X$ و $۳ \in X$ (لیکن مشخص نمی‌کند که مثلاً $۴ \in X$ یا نه.)

باید توجه داشت که افزودن یک مجموعه مانند X به عالم مربوط منجر به اضافه شدن تعداد دیگری مجموعه می‌شود که در ابتدا در آن عالم قرار نداشتند، مثل $X - \omega$ $X \times \omega$، $X^۲$، $\mathcal{P}(X)$ و غیره. هر قید، اطلاعاتی دربارهٔ X در اختیار ما می‌گذارد و ما را قادر می‌کند که دربارهٔ این مجموعه‌ها و همچنین کل عالم گسترش‌یافته نتیجه‌گیری‌هایی انجام دهیم. کوئین برای نشان دادن اینکه اطلاعات حاصل از قید p الزام می‌کند که خاصیت $\mathbf{P}$ برقرار باشد از نماد $p \Vdash \mathbf{P}$ (p تحمیل می‌کند $\mathbf{P}$ را) استفاده کرده است. برای مثال، روشن است که

$$\langle ۱, ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash (۵, ۳) \in \omega \times X$$

(زیرا، همان‌طورکه دیدیم، $\langle ۱, ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash ۳ \in X$ و $۵ \in \omega$ درست‌اند) یا

$$\langle ۱, ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash \{۲, ۳\} \notin \mathcal{P}(X)$$

(زیرا، $\langle ۱, ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash ۲ \notin X$).

باید دقت داشت که قیدها گاهی اوقات با یکدیگر تداخل دارند. به‌طورمثال داریم

$$\langle ۱, ۱, ۰\rangle \Vdash (۰, ۱) \in X^۲,$$

و درعین‌حال

$$\langle ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash (۰, ۱) \notin X^۲.$$

برای توجیه این مسئله، باید رابطهٔ $p \Vdash \mathbf{P}(X)$ را به‌صورت یک گزارهٔ شرطی در

نظر بگیریم. یعنی اگر X یک مجموعهٔ مشخص‌شده با قید p باشد، آن‌گاه X دارای خاصیت $\mathbf{P}$ است. لذا $\langle ۰, ۱, ۱\rangle \Vdash (۰, ۱) \in X^۲$ بدین معنی است که اگر $X \ni ۰$، $X \ni ۱$ و $۲ \notin X$، آن‌گاه $(۱, ۰) \in X^۲$، در حالی که $\langle ۱, ۰, ۱\rangle \Vdash (۰, ۱) \notin X^۲$ یعنی اگر $۰ \in X$، $۱ \notin X$ و $۲ \in X$، آن‌گاه $(۱, ۰) \notin X^۲$. چنانچه مجموعهٔ X را می‌شناختیم، در این صورت می‌توانستیم مشخص کنیم که X با کدام یک از قیدهای $\langle ۰, ۱, ۱\rangle$ یا $\langle ۱, ۰, ۱\rangle$ یا شش قید باقی‌مانده با طول ۳ مشخص می‌شود. چون نمی‌توانیم مجموعهٔ X را بشناسیم، اصلاً نمی‌دانیم کدام‌یک از این قیدها، قید «درست» است. لذا نمی‌توانیم مشخص کنیم که آیا $(۱, ۰) \in X^۲$ یا نه. علی‌رغم این، می‌دانیم که در مورد بسیاری از ویژگی‌های X، می‌توانیم تصمیم‌گیری کنیم، زیرا این ویژگی‌ها صرف‌نظر از اینکه چه قیدی «درست» است باید برقرار باشند. برای نمونه، نشان می‌دهیم هر قید دلخواهی، نامتناهی بودن X را تحمیل می‌کند. زیرا اگر چنین نباشد، قیدی مانند p و عدد طبیعی k وجود خواهد داشت به‌قسمی که (X دارای k عضو است) $\Vdash p$. مثلاً، فرض کنید $p = \langle ۱, ۰, ۱\rangle$ و $k = ۵$. نشان می‌دهیم «X دارای ۵ عضو است» $\Vdash \langle ۱, ۰, ۱\rangle$ نشدنی است. قید $q = \langle ۱, ۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱\rangle$ را در نظر بگیرید. نخست اینکه قید q همهٔ اطلاعاتی را که p در اختیار می‌گذارد، در بر دارد، یعنی $۰ \in X$، $۱ \notin X$، $۲ \in X$. اگر این نتیجه که X دارای پنج عضو است از p قابل استنتاج باشد از q نیز خواهد بود. اما این امر نشدنی است، زیرا به‌وضوح داریم «X دارای شش عضو است» $\Vdash q$، یعنی اینکه $q \Vdash ۰ \in X,\ ۲ \in X,\ ۳ \in X,\ ۴ \in X,\ ۵ \in X,\ ۶ \in X$. استدلال مشابهی برای هر قید، با p و k دلخواه، به تناقض می‌انجامد.

در دومین و آخرین نمونه نشان می‌دهیم که هر قید دلخواه الزام می‌کند که X یک مجموعهٔ «جدید» از اعداد طبیعی است. به‌عبارت دقیق‌تر، اگر A مجموعه‌ای از اعداد طبیعی از عالم «اولیه» (قبل از افزودن X) باشد، در این صورت هر قیدی الزام می‌کندکه $X \neq A$. زیرا اگر چنین نباشد، قیدی مانند p وجود دارد به‌قسمی که $p \Vdash X = A$. فرض کنید $p = \langle ۱, ۰, ۱\rangle$، در این صورت $p \Vdash ۰ \in X,\ ۱ \notin X,\ ۲ \in X$. حال دو حالت اتفاق می‌افتد. اگر $۳ \in A$، قرار دهید $q_۱ = \langle ۱, ۰, ۱, ۰\rangle$. چون $q_۱$ همهٔ اطلاعاتی را که p در اختیار می‌گذارد، دربر دارد

پس $q_1 \Vdash X = A$. ولی این رابطه نشدنی است، زیرا $q_1 \Vdash ۳ \notin X$ درحالی‌که $۳ \in A$. حال اگر $۳ \notin A$، تعریف کنید $q_2 = \langle ۱, ۰, ۱, ۱ \rangle$. باز هم می‌توان نتیجه گرفت که $q_2 \Vdash X = A$ و از $q_2 \Vdash ۳ \in X$ و $۳ \notin A$ تناقض به‌دست آورد. در اینجا نیز استدلال مشابهی برای هر p دلخواه کار می‌کند.

اکنون اجازه دهید ببینیم از ساختار کوئین چه چیزی حاصل شد. عالم نظریهٔ مجموعه‌ها از طریق افزودن یک مجموعهٔ «جدید» و «خیالی» مانند X (و همچنین دیگر مجموعه‌هایی که با اَعمال نظریه‌ـمجموعه‌ای از X حاصل می‌شوند) گسترش یافت. توصیف‌های جزئی برای X برحسب برخی قیدها را در اختیار داریم. گرچه این توصیف‌ها برای تصمیم‌گیری دربارهٔ اینکه آیا عدد طبیعی مفروضی به X متعلق هست یا نه، کفایت نمی‌کنند، با وجود این، اثبات برخی احکام دربارهٔ X را ممکن می‌سازند، مثل X نامتناهی است و با مجموعه‌های عالم اولیه فرق دارد. کوئین ثابت کرد که توصیف‌های حاصل از قیدها برای اثبات درستی همهٔ اصول نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو‌ـفرانکل به همراه اصل انتخاب در عالم گسترش‌یافتهٔ فوق‌الذکر کفایت می‌کنند.

چون افزودن یک مجموعه از اعداد طبیعی به عالم فوق‌الذکر عدد اصلی پیوستار را افزایش نمی‌دهد، لذا می‌توان عالم گسترش‌یافته را در نظر گرفت و با تکرار کل ساختار بالا به آن یک مجموعهٔ «جدید» از اعداد طبیعی مانند Y اضافه کرد. اگر این فرایند را $\aleph_2$ بار تکرار کنیم، مدلی به‌دست می‌آوریم که در آن حداقل $\aleph_2$ مجموعه از اعداد طبیعی وجود دارد، پس $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$. به‌جای این روش می‌توان از طریق قیدهای اندکی متفاوت، $\aleph_2$ تا از چنین مجموعه‌هایی یک دفعه به مدل افزود.

با استفاده از روش کوئین، مدل‌هایی ساخته‌اند که در آن برای هر $\aleph_\alpha$ با شرط $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_0$، داریم $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. همچنین از این روش می‌توان برای ساخت مدل‌هایی بهره برد که در آن فرض سوسلین برقرار باشد یا نباشد، یا مدل‌هایی برای اصل مارتین MA_κ یا همچنین مدل‌هایی برای هر گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر نظریهٔ مجموعه‌ها. با استفاده از روش‌های این بخش می‌توان نشان داد اصل انتخاب بر پایهٔ اصول دیگر نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو‌ـفرانکل نه اثبات‌شدنی است و نه ردکردنی. به این دلیل ردکردنی نیست که با استفادهٔ تنها از اصول نظریهٔ مجموعه‌های

تسرملو ـ فرانکل بدون اصل انتخاب می‌توان نشان داد که مدل ساخت‌پذیرها یک مدل برای ZFC است. [برای یک دستگاه مانند X از مجموعه‌های ساخت‌پذیر می‌توان تابع انتخاب را به‌طور دقیق به‌صورت زیر تعریف کرد. به‌ازای هر $A \in S$ ($A \neq \varnothing$) عضوی را که در آخرین مرحله ساخته شده است انتخاب می‌کنیم. به‌عبارت‌دیگر، عضوی را انتخاب می‌کنیم که به L_0 یا $L_{\alpha+1}$ متعلق باشد، که در آن α کوچک‌ترین αی ممکن است. چنانچه چندین عضو از این نوع وجود داشته باشد $\in$ـ کوچک‌ترین عضو از L_0 یا عضوی را که تعریف آن در $(L_\alpha, \in)$ برحسب ترتیب الفبایی پیش از همهٔ تعریف‌های ممکن قرار می‌گیرد، انتخاب می‌کنیم.] از سوی دیگر، اصل انتخاب در نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل نیز اثبات‌شدنی نیست. زیرا همان‌گونه که کوئین نشان داد، می‌توان با افزودن یک مجموعهٔ «جدید» از اعداد حقیقی، عالم مجموعه‌ها را گسترش داد، بدون آنکه خوش‌ترتیبی‌ای از مجموعهٔ اعداد حقیقی به مدل اضافه گردد. بدین ترتیب، مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها به‌دست می‌آید که در آن مجموعهٔ اعداد حقیقی نمی‌تواند خوش‌ترتیب شود. سازگاری اصل بنیان با دیگر اصول ZFC را نیز می‌توان به روش مدل‌ها ثابت کرد. چنانچه $\mathbf{M}(x)$ خاصیت «x یک مجموعهٔ درست‌بنیان است» و $\mathbf{E}(x,y)$ به معنی «$x \in y$» باشد، مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها به‌همراه اصل بنیان به‌دست می‌آید. شبیه آنچه در مثال ۸.۲ بخش ۲ از فصل ۱۴ دیدیم می‌توان ثابت کرد که مدل حاصل به‌راستی یک مدل صادق در اصل بنیان است.

۳ عالم نظریهٔ مجموعه‌ها

در این بخش آخر، امکان گسترش نظریهٔ مجموعه‌های تسرملو ـ فرانکل به همراه اصل انتخاب را از طریق افزودن اصل‌های موضوع دیگر مورد تأمل قرار می‌دهیم. در اینجا اصولی مورد توجه ما هستند که درست بودن آن‌ها را بتوان تا حدودی توجیه کرد.

یک نمونه از این‌گونه اصول جدید همان اصل ساخت‌پذیری است، که در

بخش ۲ معرفی کردیم. در آن بخش دیدیم اصل ساخت‌پذیری نتایج مهمی در نظریهٔ مجموعه‌ها به دنبال دارد. مثلاً این اصل، فرض پیوستار تعمیم‌یافته و مثال نقضی برای فرض سوسلین را ایجاب می‌کند. در سال‌های اخیر نشان داده شده است که اصل ساخت‌پذیری ابزار قدرتمندی در دیگر شاخه‌های ریاضیات مجرد است. همچنین نتایج مهم و جالب و جذابی با استفاده از آن در نظریهٔ مدل، توپولوژی عمومی، و نظریهٔ گروه‌ها به‌دست آمده است. از سوی دیگر، دلایل شهودی قوی در جهت تأیید اینکه همهٔ مجموعه‌ها ساخت‌پذیرند، نداریم. بلکه برعکس، سهولت روش تحمیل‌گرهای مذکور در بخش ۲، برای اثبات وجود مجموعه‌های ساخت‌ناپذیر، بیشتر جهت عکس را تأیید می‌کند. علاوه بر این، همهٔ نتایج پس از آن را می‌توان به همان راحتی از برخی اصول دیگر که یا ضعیف‌تر از اصل ساخت‌پذیری هستند و یا حتی متناقض با آن، نتیجه‌گیری کرد.

مع‌الوصف، یکی از اساسی‌ترین انتقادهایی که به پذیرش اصل ساخت‌پذیری به مثابهٔ یکی از اصول ZFC وارد است به خاطر نتایج تا حدی غیرعادی است که در نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها به دنبال می‌آورد. در نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها به مطالعهٔ تفصیلی پیچیدگی‌های مجموعه‌های اعداد حقیقی پرداخته می‌شود. با توجه به اینکه نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها درک حائز اهمیتی در خصوص مبانی نظریهٔ مجموعه‌ها در اختیار می‌گذارد، لذا در اینجا برخی از مسائل و نتایج اساسی آن را طرح می‌کنیم.

در بخش ۵ از فصل ۱۰ مجموعه‌های بورل را تعریف کردیم. مجموعه‌های بورل مجموعه‌های فوق‌العاده ساده‌ای از اعداد حقیقی هستند. این امر را مطالعه مجموعه‌های بورل تأیید می‌کند و نشان می‌دهد که آن‌ها بسیار خوش‌رفتارند. مثلاً دیدیم هر مجموعهٔ بورل یا حداکثر شماراست یا دارای یک زیرمجموعهٔ تام است، و لذا طبق فرض پیوستار، یا عدد اصلی آن از $\aleph_0$ کوچک‌تر یا برابر $2^{\aleph_0}$ است. همچنین هر مجموعهٔ بورل، مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر است و بنابراین از ویژگی‌های جالب بسیاری برخوردار است. هدف در نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها تعمیم این نتایج به مجموعه‌های پیچیده‌تر است. اما چنین مجموعه‌هایی را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟ چون اجتماع و اشتراک شمارای مجموعه‌های بورل باز هم بورل است، پس از این طریق مجموعهٔ «جدیدی» به‌دست نمی‌آید. توابع پیوسته

توابعی ساده با رفتاری کاملاً شناخته شده هستند، ولی نشان داده می‌شود که تصویر یک مجموعهٔ بورل تحت آن‌ها (که امید داریم به اندازهٔ کافی «ساده» باشد) لزوماً مجموعهٔ بورل نیست. مجموعه‌های تحلیلی را مجموعه‌هایی تعریف می‌کنیم که تصویر یک مجموعهٔ بورل تحت یک تابع پیوسته باشند. همچنین مجموعهٔ متمم تحلیلی مجموعه‌ای است که متمم آن مجموعهٔ تحلیلی (در $\mathbb{R}$) باشد. معمولاً خانوادهٔ مجموعه‌های تحلیلی را با Σ^1_1 و مجموعه‌های متمم تحلیلی را با Π^1_1 نشان می‌دهند. حال می‌توان به‌طور بازگشتی مجموعهٔ Σ^1_{n+1} را برابر تصویر پیوستهٔ Π^1_n و Π^1_{n+1} را متمم مجموعه‌های مشمول در Σ^1_{n+1} تعریف کرد. این مجموعه‌ها سلسله مراتب تصویری را تشکیل می‌دهند و مجموعه‌هایی را که به یک Σ^1_n (یا Π^1_n) تعلق داشته باشند، مجموعه‌های تصویری می‌نامند. انتظار داریم مجموعه‌های تصویری، درعین‌حال که ساده هستند، خوش‌رفتار باشند. این امر را نظریهٔ کلاسیک توصیفی مجموعه‌ها که نیکلای لوزین و شاگردان وی گسترش دادند، تا حد زیادی تأیید می‌کند. به‌طور مثال، می‌دانیم که همهٔ مجموعه‌های تحلیلی و متمم تحلیلی اندازه‌پذیر لبگ هستند و هر مجموعهٔ تحلیلی ناشمارا شامل یک زیرمجموعهٔ تام است. اما همین که در ZFC به همراه اصل ساخت‌پذیری، پیش می‌رویم، نتایج مأیوس‌کننده‌ای می‌بینیم، مثلاً مجموعه‌هایی در Σ^1_2 (یا Π^1_2) وجود دارند که اندازه‌پذیر لبگ نیستند و همچنین مجموعه‌های متمم تحلیلی ناشمارایی (Π^1_1) وجود دارند که هیچ زیرمجموعهٔ تامی ندارند.

قضیهٔ کلاسیک و مهم دیگری نیز وجود دارد که بیان می‌کند مجموعه‌های Π^1_1 و Σ^1_2 از ویژگی موسوم به ویژگی فروکاهش برخوردارند، ولی Σ^1_1 و Π^1_2 این خاصیت را ندارند. (گوییم یک خانواده از مجموعه‌ها، مانند Γ، دارای ویژگی فروکاهش است هرگاه برای هر $A, B \in \Gamma$، مجموعه‌های $A', B' \in \Gamma$ موجود باشد به‌قسمی که $A' \subseteq A$، $B' \subseteq B$، $A' \cup B' = A \cup B$ و $A' \cap B' = \varnothing$.) شاید انتظار داشته باشیم که مجموعه‌های Π^1_3، Σ^1_4، Π^1_5 و غیره دارای ویژگی فروکاهش باشند و Σ^1_3، Π^1_4، Σ^1_5 فاقد این خاصیت باشند. لیکن با مفروض گرفتن اصل ساخت‌پذیری، به‌جز حالت استثنایی عجیب $n = ۱$، می‌توان نشان داد که برای هر $n \geq ۲$، همهٔ مجموعه‌های Σ^1_n دارای ویژگی فروکاهش و برای هر $n \geq ۲$، مجموعه‌های Π^1_n فاقد آن هستند.

با کمال تعجب می‌بینیم که اگر از برخی به اصطلاح اصول کاردینال‌های بزرگ استفاده کنیم، نتایج رضایت‌بخش‌تری به‌دست می‌آوریم. ساده‌ترین مثال از کاردینال‌های بزرگ همان اعداد اصلی دسترس‌ناپذیرند، که در فصل ۹ تعریف کردیم. متذکر می‌شویم که عدد اصلی $\kappa > \aleph_0$ را دسترس‌ناپذیر می‌نامند هرگاه منظم و برابر حد اعداد اصلی کوچک‌تر از خود باشد. در بخش ۲ از فصل ۹، نشان دادیم که اولین کاردینال دسترس‌ناپذیر (به فرض وجود) باید از $\aleph_1$، $\aleph_2$، ...، $\aleph_\omega$، ...، $\aleph_{\aleph_1}$، ...، $\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}$، ...، $\aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}$، ... و الی‌آخر بزرگ‌تر باشد، و البته این صفت «بزرگ» را برای آن‌ها توجیه می‌کند. می‌دانیم که وجود کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر در ZFC قابل اثبات نیست. فی‌الواقع، به‌آسانی می‌توان مدلی برای ZFC ساخت که در آن هیچ کاردینال دسترس‌ناپذیری وجود ندارد. اگر عالم ساخت‌پذیرها مانند L هیچ کاردینال دسترس‌ناپذیری (به مفهوم L) در بر نداشته باشد، نمونه‌ای از این مثال‌ها خواهد بود. زیرا اگر چنین نباشد، کوچک‌ترین کاردینال دسترس‌ناپذیر ϑ در L را در نظر می‌گیریم و مدلی تشکیل می‌دهیم که مجموعه‌های آن دقیقاً همان اعضای L_ϑ و رابطهٔ عضویت همان رابطهٔ معمول باشد. با استفاده از دسترس‌ناپذیری ϑ بسیار راحت می‌توان ثابت کرد که همهٔ اصول ZFC در این مدل برقرارند. از اینکه ϑ کوچک‌ترین کاردینال دسترس‌ناپذیر در L است، نتیجه می‌گیریم که هیچ کاردینال دسترس‌ناپذیری در این مدل وجود ندارد. بنابراین وجود کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر در ZFC مستقل است. اثبات سازگار بودن کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر در ZFC از طریق ساختن مدل مناسب در این مورد همانند فرضیهٔ پیوستار یا مسئله سوسلین امکان‌پذیر نیست (امکان‌پذیر بودن این امر قضیهٔ مشهور دوم عدم تمامیت منسوب به گودل را نقض خواهد کرد). این بدین معنی است که نظریهٔ مجموعه‌ها به اضافهٔ کاردینال بزرگ اساساً از ZFC تنها، قوی‌تر است. فرض وجود کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر نیازمند یک «جهش در باور» است (شبیه آنچه که برای پذیرش اصل بی‌نهایت نیاز است)، مع‌هذا، پذیرش آن را می‌توان به‌صورت زیر تا حدودی توجیه کرد.

ریاضیدانان معمولاً یک دستهٔ نامتناهی را، مثلاً از مجموعهٔ اعداد طبیعی یا مجموعهٔ اعداد حقیقی، به‌صورت یک کل نهایی و تمام‌شده در نظر می‌گیرند. از

سوی دیگر، ریاضیدانی که با این رده از مجموعه‌ها کار می‌کند، نمی‌تواند دستهٔ همهٔ مجموعه‌ها را یک کل نهایی‌شده، به‌عبارت‌دیگر، یک مجموعه، به حساب بیاورد. چرا که این تصور به تناقض می‌انجامد. دسته‌هایی را که ریاضیدانان، به‌طور معمول نهایی و بسته‌شده به حساب می‌آورند، مجموعه‌های مرتبهٔ اول می‌نامیم. این‌ها همان مجموعه‌هایی بودند که تا قبل از این با آن‌ها سر و کار داشتیم. اکنون خود را در جایگاه یک ریاضیدان فراتر از معمول با اندیشهٔ اندکی مجردتر قرار می‌دهیم. اکنون ما عالم مجموعه‌های مرتب را وارسی می‌کنیم و همهٔ آن‌ها را در یک کل نهایی‌شده با نام مجموعه‌های مرتبهٔ دوم V گرد می‌آوریم. با داشتن V و استفاده از روش‌های فصل‌های ۱ــــ۱۴ می‌توان مجموعه‌های مرتبهٔ دوم دیگری را، نظیر $V-\omega$، $\aleph_1 \times V$، $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V))$، $O = \{\alpha \in V \mid \text{اوردینال است } \alpha\}$، $O+1$، $O+O+\omega$ و غیره، تشکیل دهیم. [توجه کنید که O مجموعهٔ (مرتبهٔ دوم) همهٔ اوردینال‌های مرتبهٔ اول است.] همان بحث‌های شهودی که اصول ZFC را برای ریاضیدان مرتبهٔ اول توجیه می‌کند، می‌تواند ریاضیدان مرتبهٔ دوم را نیز متقاعد کند که این اصول در عالم «مرتبهٔ دوم» نظریهٔ مجموعه‌های او برقرارند. (توجه کنید که با توجه به آنچه خواهد آمد، پارادوکس راسل رخ نمی‌دهد. ریاضیدان مرتبهٔ دوم می‌تواند مجموعهٔ R را که شامل همهٔ مجموعه‌های مرتبهٔ اولی که عضو خودشان نیستند، تشکیل دهد. R یک مجموعهٔ مرتبهٔ اول نیست و لذا به‌وضوح، $R \notin R$، بنابراین هیچ تناقضی رخ نخواهد داد. البته ریاضیدان مرتبهٔ دوم دیگر نمی‌تواند «مجموعهٔ» همهٔ مجموعه‌های مرتبهٔ دوم خود را که عضو خود نیستند تشکیل دهد. تشکیل چنین مجموعه‌ای در حوزهٔ ریاضیدان مرتبهٔ سوم است.) حال ادعا می‌کنیم که کوچک‌ترین اوردینال مرتبهٔ دوم O یک اوردینال دسترس‌ناپذیر در عالم مرتبهٔ دوم است. مسلم است که $O > \aleph_0$ و O برابر حد اعداد کاردینال (مرتبهٔ اول) است. اگر $\langle \kappa_\iota \mid \iota < \alpha \rangle$ دنباله‌ای از اوردینال‌های کوچک‌تر از O با طول α کوچک‌تر از O باشند، در این صورت α و همهٔ κ_ιها، اوردینال‌های مرتبهٔ اول خواهند بود. اکنون همان استدلالی که برای توجیه اصل جایگزینی به کار بردیم، ما را متقاعد می‌کند که ریاضیدان مرتبهٔ اول مجاز است گردایهٔ $\{\kappa_\iota \mid \iota < \alpha\}$ را یک مجموعهٔ مرتبهٔ اول به حساب بیاورد. در این صورت $\sup_{\iota<\alpha} \kappa_\iota$ یک اوردینال مرتبهٔ اول است و لذا

$\sup_{\iota<\alpha}\kappa_\iota < O$؛ بنابراین O منظم است. از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عالم نظریهٔ مجموعهٔ ریاضیدان مرتبهٔ دوم در اصلِ «یک کاردینال دسترس‌ناپذیر وجود دارد» صدق می‌کند.

اکنون دوباره به نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها و به‌خصوص این پرسش می‌پردازیم که آیا هر مجموعهٔ متمم تحلیلی شمارا دارای یک زیرمجموعهٔ تام است. روبرت سالُوِی ارتباط عمیقی بین این پرسش و کاردینال‌های دسترس‌ناپذیر کشف کرد؛ بدین ترتیب که اگر هر مجموعهٔ متمم تحلیلی ناشمارا دارای زیرمجموعهٔ تام باشد، آن‌گاه $\aleph_1$ در عالم ساخت‌پذیرهای L یک کاردینال دسترس‌ناپذیر است. (در بخش ۲ متذکر شدیم که مفهوم عدد اصلی مطلق نیست و لذا اگر همهٔ مجموعه‌ها به L متعلق نباشند، لازم نیست که کاردینال «حقیقی» $\aleph_1$ همان «$\aleph_1$ در معنای مدل L» باشد.) فی‌الواقع، حکمی کلی‌تر از این نیز برقرار است:

(*) برای هر عدد حقیقی a، $\aleph_1$ در $L[a]$ دسترس‌ناپذیر است،

که در آن $L[a]$ مدلی است که همانند L ساخته می‌شود با این تفاوت که با $L_0[a]=\omega\cup\{a\}$ شروع می‌کند (مدل اخیر کوچک‌ترین مدل نظریهٔ مجموعه‌ها است که همهٔ اوردینال‌ها و همچنین عدد حقیقی a را دربردارد). بالعکس، از «اصل کاردینال بزرگ» (*) نتیجه می‌شود که همهٔ مجموعه‌های ناشمارای Π^1_1 دارای زیرمجموعهٔ تام هستند (و بنابراین عدد اصلی برابر $2^{\aleph_0}$ دارند) و همهٔ مجموعه‌های Σ^1_2 و Π^1_2 اندازه‌پذیر لبگ هستند (لیکن وجود زیرمجموعه‌های تام برای مجموعه‌های ناشمارای Π^1_2 و اندازه‌پذیری مجموعه‌های Σ^1_3 را نتیجه نمی‌دهد). در مجموع، اصل (*)، نتایجی را که با اصل ساخت‌پذیری حاصل می‌شود اندکی بهبود می‌بخشد. برای نتایج بهتر، باید وجود کاردینال‌های خیلی بزرگ‌تر از دسترس‌ناپذیرها را مفروض بگیریم. اما پیش از پرداختن به آن‌ها، باید به مطلبی دیگر، گریزی بزنیم.

نوع خاصی از بازی‌های نامتناهی در نظریهٔ جدید توصیفی مجموعه‌ها نقش مهمی ایفا می‌کنند. بازی با قواعد زیر را بین دو بازیکن I و II در نظر بگیرید. مجموعهٔ متناهی از حرکت‌های ممکن مانند M داده شده است. بازیکن‌ها حرکت‌ها

را به نوبت انتخاب می‌کنند و هر حرکت را n بار انجام می‌دهند. به‌عبارت‌دیگر، بازیکن I با حرکت $p_1 \in M$ شروع می‌کند، بازیکن II با انجام حرکت $q_1 \in M$ جواب می‌دهد. سپس نوبت I است که حرکت $p_2 \in M$ را انجام دهد، در جواب آن II حرکت $q_2 \in M$ را انجام می‌دهد و همین‌طور الی‌آخر. دنبالهٔ حاصل از حرکت‌های $\langle p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n \rangle$ را یک دورِ بازی می‌نامیم. یک مجموعه از چند دورِ بازی از قبل مشخص شده است و هر دو بازیکن از آن مطلع‌اند. بازیکن I به شرطی می‌برد که $\langle p_1, \ldots, q_n \rangle \in S$؛ و بازیکن II به شرطی می‌برد که $\langle p_1, \ldots, q_n \rangle \notin S$. برای بسیاری از بازی‌های فکری، مانند شطرنج و مهره بازی و غیره، می‌توان با انتخاب مناسب M، n و S یک نمایش ریاضی به‌صورت مجرد فوق به‌دست آورد (برخی قراردادهای اضافی نیز، مثلاً برای انجام قرعه‌کشی، باید اتخاذ کرد).

استراتژی، مفهوم بنیادی در نظریهٔ بازی‌ها محسوب می‌شود. منظور از استراتژی برای بازیکن I عبارت است از قاعده‌ای که به او می‌گوید در هر نوبت با توجه به حرکت‌های قبلی دو بازیکن چه حرکتی انجام دهد. اگر یک استراتژی برای بازیکن I دارای این خاصیت باشد که با پیروی از آن بازیکن I همیشه برنده شود، آن را یک استراتژی برد برای I می‌نامند. به‌نحو مشابه، استراتژی برد برای II نیز تعریف می‌شود.

نکتهٔ اساسی دربارهٔ این‌گونه بازی‌ها این است که همواره یک استراتژی برد برای یکی از بازیکن‌ها وجود دارد. به بیان دیگر، بازی برای چنین بازیکنی از پیش تعیین شده متعیّن است. دلیل این امر خیلی ساده است.

اگر حرکت p_1 موجود باشد به‌طوری‌که برای هر q_1

حرکت p_2 وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر q_2

حرکت p_n وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای q_n دور بازی $\langle p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n \rangle$ در S قرار گیرد.

در این صورت به‌وضوح بازیکن I یک استراتژی برد دارد. چنانچه عکس این اتفاق بیفتد، یعنی داشته باشیم

برای هر p_1 وجود داشته باشد q_1 به‌طوری‌که

برای هر p_2 وجود داشته باشد q_2 به‌طوری‌که
برای هر p_n وجود داشته باشد q_n به طوری که دور بازی $\langle p_1, q_1, \dots, p_n, q_n\rangle$
در S نباشد.

اما در این حالت بازیکن II دارای یک استراتژی برد خواهد بود.

اکنون تغییری در بازی می‌دهیم و اجازه می‌دهیم هر بازیکن بی‌نهایت نوبت بازی داشته باشد. در این صورت هر دور بازی به‌صورت دنبالهٔ نامتناهی $\langle p_1, q_1, p_2, q_2, \dots\rangle$ از حرکت‌ها می‌باشد. مجموعهٔ پاداش S عبارت است از یک مجموعه از دنباله‌های نامتناهی از اعضای M. بازیکن I برنده می‌شود اگر و تنها اگر $\langle p_1, q_1, p_2, q_2, \dots\rangle \in S$. بازی‌ای را که مطابق این قواعد انجام شود، با G_S نشان می‌دهیم. اکنون دیگر بدیهی نیست که چنین بازی‌هایی متعیّن هستند و در واقع لزومی ندارد که چنین باشند. با استفاده از اصل انتخاب می‌توان به‌ازای هر M با شرط $|M| \geq 2$ مجموعهٔ پاداشی مانند $S \subseteq M^{\mathbb{N}}$ ساخت، به‌قسمی که هیچ‌یک از بازیکنان استراتژی بردی در بازی G_S نداشته باشند. (برهان این امر کاملاً شبیه برهانی است که به‌وسیلهٔ آن در مثال ۱۱.۴ از فصل ۱۰ مجموعهٔ شمارایی بدون زیرمجموعهٔ تام ساختیم.) پرسش جالب این است که آیا برای مجموعه‌های «سادهٔ» S بازی G_S متعیّن است. برای بررسی این پرسش، مجموعهٔ متناهی M را عدد طبیعی m در نظر می‌گیریم؛ در این صورت دنباله‌های نامتناهی از اعضای m را می‌توان به‌صورت بسط اعداد حقیقی در پایه m و مجموعهٔ پاداش S را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. بدین ترتیب صحبت از بورل بودن، تحلیلی بودن و غیره برای مجموعه‌های پاداش معنی‌دار است.

قضیهٔ عمیقی متعلق به د. آنتونی مارتین بیان می‌کند که همهٔ بازی‌هایی که مجموعهٔ پاداش آن‌ها بورل باشد، متعیّن هستند. وضعیت در مراتب بالاتر از سلسله مراتب تصویری مشابه حالتی است که در خصوص وجود زیرمجموعه‌های تام گفته شد، به‌جز اینکه کاردینال‌های بزرگ در این حالت بسیار بزرگ‌تر از حالت مذکور هستند. به بیان دقیق‌تر، با استفاده از اصل ساخت‌پذیری می‌توانیم بازی‌هایی با مجموعه پاداش تحلیلی (Σ^1_1) بسازیم که متعیّن نباشند. کار مارتین و لئو هرینگتون نشان می‌دهد که متعیّن بودن همهٔ بازی‌ها با مجموعه پاداش Σ^1_1 (یا معادلاً، Π^1_1) با

اصل وجود کاردینال بزرگی هم‌ارز است. بیان این اصل ما را از موضوع بسیار منحرف می‌کند (این اصل در حقیقت به‌صورت «برای هر عدد حقیقی x، $x^{\#}$ موجود است» بیان می‌شود). برای مقاصد ما کافی است که بیان کنیم این اصل، فرض سالُوِی (*) و بسیاری نتایج دیگر را ایجاب می‌کند (برای مثال، وجود کاردینال‌های مالو و ضعیف‌ـفشرده را در عالم ساخت‌پذیرهای L ایجاب می‌کند) و همچنین، خود نتیجه‌ای از وجود کاردینال‌های اندازه‌پذیر است. لذا، اگر کاردینال اندازه‌پذیری وجود داشته باشد، در این صورت هر بازی تحلیلی یا متمم تحلیلی متعین است. وجود کاردینال‌های اندازه‌پذیر برای اثبات متعیّن بودن همه بازی‌ها با مجموعهٔ پاداش Σ_2^1 (یا Π_2^1) کفایت نمی‌کند. کارهای مارتین، جان استیل، و هیو ودین در دهۀ نود میلادی نشان می‌دهد که وجود برخی کاردینال‌های بزرگ اصل تعیّن تصویری را ایجاب می‌کند. بدین معنی که هر بازی با مجموعه پاداش تصویری، متعیّن است. بالعکس، اصل تعیّن تصویری وجود یک مدل برای نظریهٔ مجموعه‌ها به همراه کاردینال‌های بزرگ مذکور را ایجاب می‌کند.

دلایل ما برای باور به درستی اصولی مانند اصل تعیّن تصویری چیست؟ علاوه بر مقبولیت ذاتی خود این اصل، باید اضافه کرد که تعیّن بازی‌های متناهی‌وار در مراتبی از سلسله‌مراتب تصویری، آن دسته ویژگی‌های جالب نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها را ایجاب می‌کند که انتظار داریم مجموعه‌ها در آن مرتبه یا نزدیک آن دارا باشند. برای مثال، تعیّن بازی‌های Σ_1^1 ایجاب می‌کند که همهٔ مجموعه‌های ناشمارای Π_1^1 و Σ_2^1 دارای یک زیرمجموعهٔ تام و تمامی مجموعه‌های Σ_2^1 و Π_2^1 اندازه‌پذیر لبگ باشند. تعیّن بازی‌های Σ_2^1 ایجاب می‌کند که مجموعه‌های ناشمارای Π_2^1 و Σ_3^1 دارای زیرمجموعه‌ای تام و تمامی مجموعه‌های Σ_3^1 و Π_3^1 اندازه‌پذیر لبگ باشند. علاوه بر این، ویژگی فروکاهش را به درستی به مرتبهٔ سوم سلسله‌مراتب تصویری تعمیم می‌دهد، به‌عبارت‌دیگر ایجاب می‌کند که مجموعه‌های Π_3^1 دارای ویژگی فروکاهش هستند و Σ_3^1 فاقد آن. اندازه‌پذیری لبگ همهٔ مجموعه‌های تصویری و اینکه هر مجموعه تصویری ناشمارا دارای یک زیرمجموعهٔ تام است و رفتار «صحیح» ویژگی فروکاهش (مجموعه‌های Π_1^1، Σ_2^1، Π_3^1، Σ_4^1، ... دارای این ویژگی هستند ولی Σ_1^1، Π_2^1، Σ_3^1، Π_4^1، ...، نه) و بسیاری دیگر که از ذکر آن‌ها

خودداری می‌کنیم، از جمله نتایج صورت کامل اصل تعیّن تصویری هستند. نتایجی از این دست، متخصصان نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها را متقاعد می‌کند که PD (اصل تعیّن تصویری) باید درست باشد.

از ملاحظات بالا یک سلسله‌مراتبی حاصل می‌شود که با مفروض گرفتن وجود کاردینال‌های بزرگ و بزرگ‌تر، تقریب‌های بهتر و بهتری به آن حقیقت نهایی دربارهٔ عالم مجموعه‌ها در اختیار می‌گذارند. این تصویر کلی را پژوهش‌هایی که دربارهٔ گزاره‌های تصمیم‌ناپذیر در حساب انجام شده است، تقویت می‌کند. منظور ما از حساب نظریهٔ حساب پئانو است که اصول آن را در فصل ۳ بیان کردیم. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که حساب پئانو با نظریهٔ مجموعه‌های متناهی هم‌ارز است. منظور از نظریهٔ مجموعه‌های متناهی نظریه‌ای است که از ZFC با حذف اصل بی‌نهایت حاصل می‌شود (در این نظریه فقط وجود مجموعه‌های متناهی را می‌توان ثابت کرد). از زمان کار بنیادی کورت گودل در سال ۱۹۳۱ معلوم شده بود که گزاره‌های درستی دربارهٔ اعداد طبیعی (یا مجموعه‌های متناهی) وجود دارند که با اصول حساب پئانو (یا نظریهٔ مجموعه‌های متناهی) تصمیم‌ناپذیرند (نه اثبات می‌شوند و نه رد). احکام مذکور درست‌اند، زیرا می‌توان آن‌ها را در ZFC اثبات کرد، لیکن برای اثبات آن‌ها به کار گرفتن دست‌کم برخی مجموعه‌های نامتناهی ضروری است. در عین حال، مثال‌های گودل از این دسته احکام مبتنی بر ملاحظات منطقی بود (شبیه به پارادوکس راسل) و هیچ معنی قابل حس ریاضی نداشتند. تا اینکه در سال ۱۹۷۷ جفری پریس اولین مثال ریاضی ساده از این احکام را کشف کرد و بعد از آن نیز مثال‌های دیگری کشف شد. یکی از جالب‌ترین این مثال‌ها قضیهٔ ۷.۶ در فصل ۶ است، که بیان می‌کرد هر دنبالهٔ گودستاین پس از تعداد متناهی بار مرحله به یک مقدار ۰ ختم می‌شود. برای اثبات آن، از اوردینال‌های نامتناهی استفاده کردیم. کار پریس نشان می‌دهد به کار بردن بی‌نهایت در اینجا ضروری است. نمونهٔ دیگر، صورتی از قضیهٔ نامتناهی رمزی است که در بخش ۱ از فصل ۱۲ بیان شد. می‌توان اندازهٔ مجموعه‌های نامتناهی را که برای اثبات یک حکم خاص لازم است تعیین کرد، و بنابراین در اینجا نیز دیده می‌شود که سلسله مراتبی از نظریه‌ها وجود دارند که با اصل قرار دادن وجود مجموعه‌های نامتناهی

بزرگ و بزرگ‌تر، تقریب‌های بهتر و بهتری به حقیقت اعداد طبیعی (یا مجموعه‌های متناهی) در اختیار می‌گذارند. در بیشتر حالات، این نظریه‌ها در واقع زیرنظریه‌هایی از ZFC هستند (لذا تعداد قلیلی از ریاضیدانان در درستی آن‌ها شک دارند)، ولی مثال‌هایی از احکام (قدری پیچیده‌تر) حساب وجود دارند که حتی در ZFC تصمیم‌پذیر نیستند (اما، مثلاً در ZFC به همراه یک کاردینال دسترس‌ناپذیر تصمیم‌پذیرند). لذا ترکیب سلسله‌مراتبی که از مطالعهٔ قدرت قضایای حساب به‌دست می‌آید با سلسله‌مراتب کاردینال‌های بزرگ که برای مطالعه قدرت قضایا دربارهٔ اعداد حقیقی در نظریهٔ توصیفی مجموعه‌ها مورد نیاز است به همراه ZFC فقط یکی از مراحل فوق‌الذکر را تشکیل می‌دهند. حتی تکنیک‌هایی که برای اثبات نتایج حساب به کار برده می‌شود ارتباط نزدیکی دارد با روش‌هایی که برای مطالعهٔ کاردینال‌های بزرگ به کار می‌رود. این تکنیک‌ها به‌شدت به مفاهیمی مثل افرازها، درخت‌ها، و بازی‌ها متکی هستند.

بسیاری از مطالبی که در بالا بحث کردیم متعلق به سال‌های اخیر هستند و ابداً صورت کامل و نهایی نیستند. هم نظریهٔ کاردینال‌های بزرگ و هم مطالعهٔ احکام تصمیم‌ناپذیر حساب جزء حوزه‌های فعال تحقیقاتی‌ای هستند که در آن کشف ارتباطات و اطلاعات جدید درحال انجام است. همان‌طورکه قضیهٔ عدم تمامیت گودل به ما اطمینان خاطر می‌دهد هیچ نظریهٔ اصل موضوعی‌ای نمی‌تواند در مورد همهٔ قضایای حساب یا نظریهٔ مجموعه‌ها تصمیم‌گیری کند. از این‌رو، اطمینان پیدا می‌کنیم که امر خطیر تقرّب به حقیقت نهایی دنیای ریاضیات بی‌پایان ادامه خواهد داشت.

کتاب‌نامه

[1] Peter Aczel. *Non-well-founded sets.* Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 1988.

با مقدمه‌ای از جان باروایز.

[2] Keith Devlin. *The joy of sets.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

اصول نظریهٔ معاصر مجموعه‌ها.

[3] F. R. Drake and D. Singh. *Intermediate set theory.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1996.

[4] Herbert B. Enderton. *Elements of set theory.* Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1977.

[5] Paul Erdős, András Hajnal, Attila Máté, and Richard Rado. *Combinatorial set theory: partition relations for cardinals.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[6] Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, and Joel H. Spencer. *Ramsey theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1990.

از سلسله انتشارات Wiley-Interscience.

[7] Paul R. Halmos. *Naive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the 1960 edition, Undergraduate Texts in Mathematics.

[8] James M. Henle. *An outline of set theory.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[9] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1997.

[10] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering modern set theory.* I. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

حاوی مبانی موضوع است.

[11] Akihiro Kanamori. *The higher infinite.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

دربارهٔ کاردینال‌های بزرگ در نظریهٔ مجموعه‌ها از ابتدای پیدایش آن‌ها.

[12] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[13] Kenneth Kunen. *Set theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983.

درآمدی به انواع اثبات‌های استقلال، تجدید چاپ از چاپ اولیه در سال ۱۹۸۰.

[14] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[15] Yiannis N. Moschovakis. *Notes on set theory.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[16] Judith Roitman. *Introduction to modern set theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1990.

از سلسله انتشارات Wiley-Interscience.

[17] Robert L. Vaught. *Set theory.* Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 1995.

درآمدی به موضوع است.

فهرست اسامی خاص

آرُنشاین، ن.	Aronszajn, N.
استیل، جان	Steel, John
اسکولم، ت.	Skolem, T.
اردوش، پ.	Erdős, P.
اولام، استانیسلاف	Ulam, Stanislaw
باناخ، استفان	Banach, Stefan
بِر، ر.	Bair, R.
برنشتاین، ف.	Bernstein, F.
بروئوِر، ل. ا. ج.	Brouwer, L. E. J.
بورل، ا.	Borel, E.
پئانو، جوزپّه	Peano, Giuseppe
پریس، جفری	Paris, Jeffrey
تسرملو، ارنست	Zermelo, Ernst
تسورن، م.	Zorn, M.
تیخونوف، آ.	Tichonov, A.
تیوکی، ج.	Tukey, J.
ددکیند، ر.	Dedekind, R.
دمورگان، ا.	De Morgan, A.
دوشنیک، ب.	Dushnik, B.
رادو، ر.	Radó, R.
راسل، برتراند	Russell, Bertrand
رَمزی، ف.	Ramsey, F.

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

استراتژی برد .... winning strategy
استقرای دوگانه .... double induction
اصل موضوع .... axiom
اصل موضوع اجتماع .... axiom of union
اصل موضوع انتخاب شمارا .... axiom of countable choice
اصل موضوع بنیان .... axiom of foundation
اصل موضوع بی‌نهایت .... axiom of infinity
اصل موضوع پادبنیان .... axiom of anti-foundation
اصل موضوع تعیّن تصویری .... axiom of projective determinacy
اصل موضوع توسیع .... axiom extensionality
(قالب) اصل موضوع جایگزینی .... axiom schema replacement
اصل موضوع خطی بودن .... axiom of linearity
اصل موضوع زوج .... axiom of pair
اصل موضوع ساخت‌پذیری .... axiom of constructibility
(قالب) اصل موضوع شمول .... axiom schema of comprehension
اصل موضوع فروکاهش‌پذیری .... axiom of reducibility
اصل موضوع کلیت .... axiom of universality
اصل موضوع مجموعهٔ توانی .... axiom power set
اصل موضوع ناتقارنی .... axiom of asymmetry
اصل موضوع نظم .... axiom of regularity
اصل موضوع وجود .... axiom of existence
اصول موضوع .... axioms
افراز .... partition

الف .... aleph
الف صفر .... aleph naught
اندازهٔ بدون جوهر .... atomless measure
اندازهٔ شمارشی .... counting measure
اوردینال آغازی .... initial ordinal
ایدال اصلی .... principal ideal
ایدال اول .... prime ideal

برش .... cut
برش ددکیند .... Dedekind cut
بزرگ‌ترین عضو .... greatest element
بزرگ‌ترین کران پایین .... greatest lower bound
بستار .... closure
بسط .... expansion
بلندی .... height
به‌طور ارثی متناهی .... hereditarily finite
بی‌تناسب .... incompatible

پادزنجیر .... antichain
پادمتقارن .... antisymmetric
پارادوکس .... paradox
پالایه .... filter
پالایهٔ بستهٔ بی‌کران .... closed unbounded filter
پایهٔ هامل .... Hamel basis
پیوستار .... continuum
پیوند .... concatenation

تابع بتوی .... function into
تابع بروی .... function onto
تابع پسرونده .... regressive function
تابع جمعی .... additive function

تابع دومقداری .... two-valued function
تابع روی .... function on
تابع یک‌به‌یک .... one-to-one function
تالی .... successor
تجمیع .... collapsing
تحمیلگر .... forcing
ترتیب، رابطهٔ ترتیبی .... ordering
ترتیب اکید .... strict ordering
ترتیب الفبایی .... lexicographic ordering
ترتیب خطی .... linear ordering
ترتیب خطی کامل .... complete linear ordering
ترتیب کلی .... total ordering
تزئین .... decoration
تصویر .... image
تصویر .... projection
تصویر وارون .... inverse image
تمامیت .... completness
توابع تقریباً مجزا .... almost disjoint functions

جمع .... addition
جناس مقلوب .... palindrome
جوهر .... atom

چگالی .... density

حداکثر شمارا .... at most countable

خاصیت .... property
خودریختی .... automorphism
خوش‌ترتیب .... well-ordered
خوش‌ترتیبی .... well-ordering

دنبالهٔ ترامتناهی .... transfinite sequence
دنبالهٔ تهی .... empty sequence
دنبالهٔ هم‌پایان .... cofinal sequence
دورِ بازی .... play

رابط .... connective
رابطهٔ بازتابی .... reflexive relation
رابطهٔ توسیعی .... extensional relation
رابطهٔ درست‌بنیان .... well-founded relation
رابطهٔ دوتایی .... binary relation
رابطهٔ سه‌تایی .... ternary relation
ریشه .... root

زبان ساختگی .... artificial language
زنجیر .... chain
زوج مرتب .... ordered pair
زوج نامرتب .... unordered pair
زیرساخت .... substructure

ساخت .... structure
سلسله‌مراتب تجمعی .... cumulative hierarchy

شاخه .... branch
شبیه‌سازی دوسویه .... bisimulation
شرط .... condition
شمارا ـ جمعی .... countable additivity
شمارا ـ کامل .... countably complete
شمول .... inclusion

صورت نرمال .... normal form

طول .... length

عالم .... universe
عدد اصلی .... cardinal number
عدد اصلی .... cardinality
عدد ترتیبی .... ordinal number
عضو .... element
عضو بیشین .... maximal element
عضو کمین .... minimal element
عمل دوتایی .... binary operation
عمل نامتناهی‌وار .... infinitary operation
عمل nتایی .... n-ary operation
عمل یکتایی .... unary operation
فراپالایه .... ultrafilter
فرض پیوستار .... continuum hypothesis
فروکاهش‌پذیری .... reducebility

قضیهٔ بازگشت .... recursion theorem
قطعهٔ آغازی .... initial segment

کاردینال اندازه‌پذیر .... measurable cardinal
کاردینال تکین .... singular cardinal
کاردینال حدی .... limit cardinal
کاردینال حدی قوی .... strong limit cardinal
کاردینال دسترس‌ناپذیر .... inaccessible cardinal
کاردینال ضعیف ـ فشرده .... weakly compact cardinal
کاردینال منظم .... regular cardinal
کامل سازی .... completion
کراندار .... bounded
کوچک‌ترین عضو .... least element

گردایه .... collection
گره .... node

متعیّن .... determined
متناهیاً جمعی .... finitley additive
مجزا .... disjoint
مجموعهٔ تام .... perfect set
مجموعهٔ تحلیلی .... analytic set
مجموعهٔ تک‌رنگ .... monochromatic set
مجموعهٔ توانی .... power set
مجموعهٔ پاداش .... payoff set
مجموعهٔ ساخت‌پذیر .... constructible set
مجموعهٔ شمارا .... countable set
مجموعهٔ عام .... generic set
مجموعهٔ غیردرست‌بنیان .... non-well-founded set
مجموعهٔ مانا .... stationary set
مجموعهٔ متعدی .... transitive set
مجموعهٔ متمم تحلیلی .... coanalytic set
مجموعهٔ متمم متناهی .... cofinite set
مجموعهٔ مشتق .... derived set
مجموعهٔ نامتناهی .... infinite set
محاسبه .... computation
مختص .... coordinate
مدل .... model
مدل ساخت‌پذیرها .... constructible model
مطلق .... absolute
مقایسه‌پذیر .... comparable
مقایسه‌ناپذیر .... incomparable
مقدار .... value
موافق، متناسب .... compatible

ناشمارا .... uncountable
نامتقارن .... asymmetric
nتایی .... n-tuple
نظریهٔ بازی‌ها .... game theory
نظریه‌ـمجموعه‌ای .... set-theoretic
نقطهٔ انباشتگی .... accumulation point
نقطهٔ تنها .... isolated point
نقطهٔ حدی .... limit point
نقطهٔ چگالش .... condensation point
نگاشت .... mapping
نوع ترتیب .... order type

هم‌پایانگی .... cofinality
همتوان .... equipotent
همگن .... homogeneous

ویژگی اشتراک متناهی .... finite intersection property
ویژگی درخت‌وارگی .... tree property

فهرست الفبایی