الکساندر پتروویچ دوموریاد

در قلمرو ریاضیات

ترجمه: پرویز شهریاری

الکساندر پترویچ دوموریاد

Александр Петрович Доморяд.

در قلمرو ریاضیات

چاپ دوم

ترجمهٔ پرویز شهریاری

مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۳

پترویچ دموریاد، الکساندر
در قلمرو ریاضیات
ترجمهٔ پرویز شهریاری

چاپ اول: ۱۳۴۸
چاپ دوم : ۱۳۶۳
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ سپهر، تهران

تیراژ: ۵۵۰۰ نسخه

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

به‌مناسبت چاپ دوم

چاپ اول این کتاب در سیاه‌ترین سال‌های تسلط حکومت امریکایی محمدرضائی چاپ شد، سال‌هایی که هرگونه تلاش انسانی مواجه با بن‌بست می‌شد و حتی تلاش در زمینهٔ نشر دانش هم نمی‌توانست از این وضع بیرون باشد. در آن سال‌ها، من به‌جز ترجمهٔ برخی متن‌های ریاضی و علمی، ماهنامهٔ «سخن علمی» را منتشر می‌کردم که آن هم در سال ۱۳۴۹ مواجه با اشکال و به‌ناچار تعطیل شد. بندبازی عجیبی لازم بود تا آدم بتواند بنویسد و در ضمن درست بنویسد. برای نشان دادن فرهنگ استعماری و به‌اندیشه واداشتن جوانان دربارهٔ آن‌چه که به‌نام درس و فرهنگ و دانش به‌خورد آن‌ها می‌دهند، راهی به‌جز بیان جمله‌های «استعاره‌آمیز» نبود.

ولی وقتی که در مقدمهٔ کتاب می‌نوشتم «ریاضیات که خود باید عاملی برای درست‌اندیشی و نظم فکری باشد، به وسیله‌ای که از یک‌جهت دانش‌آموز را می‌آزارد و از جهت دیگر، در خراب کردن ذهن و اندیشهٔ او نقش اساسی دارد، تبدیل شده است»، جوانان ما کم و زیاد منظور را می‌فهمیدند و به‌دنبال علاج می‌گشتند.

امروز، دیگر با رژیم دانش‌کش پهلوی‌ها سروکار نداریم و خیلی خوب می‌توان دید که چطور استعدادهای جوانان می‌شکفد و بارور می‌شود. ولی روشن است که اگر این، استعدادها به‌حال خود رها شوند و یا ناچار به‌قبول تنگناهایی باشد، مشکل اصلی شکوفائی دانش به‌جای خود باقی می‌ماند.

ملت آزاد شده است و دولتی مردمی برسرکار است و بنابراین تمامی شرایط عینی شکوفایی دانش فراهم شده است. می‌توان و باید بر اساس برنامه‌ای که شایستهٔ انقلاب بزرگ و بی‌مانند مردم ماست، شرایط ذهنی این شکوفائی را هم آماده کرد و همهٔ ما امیدواریم که چنین بشود.

مترجم

مقدمهٔ چاپ اول

اگر این مطلب صحیح باشد که بشر زمانهٔ ما، بیش از هروقت دیگر، احتیاج به‌تفکر دارد، در اینصورت کتابهائی از نوع کتاب حاضر می‌تواند خدمتگذار خوبی در جهت این هدف باشد.

با کمال تأسف، ریاضیات دبیرستانی به‌علتهای مختلفی که جای بحث آنها در اینجا نیست، فلسفهٔ وجودی خود را در عمل نفی کرده است. از یکطرف مباحث موجود در کتابهای درسی بدون درنظرگرفتن تاریخ وعمل تنظیم شده است و اکثر دانش‌آموزان دلیلی برای درك و یادگیری این انبوه مطالب نمی‌بینند و از طرف دیگر نوع سازمانی امتحانات ما، اکثر دانش‌آموزان را وامی‌دارد که تنها راهی برای موفقیت در امتحان جستجو کنند و اغلب نحوهٔ کار درکلاسها هم به‌این طرز تفکر آنها کمك می‌کند. و به‌این ترتیب ریاضیات دبیرستانی روزبروز قدرت و قابلیت خود را بیشتر از دست می‌دهد و به‌عاملی برای کسب موفقیتهای تحصیلی تبدیل می‌شود.

ریاضیات، که خود باید عاملی برای درست‌اندیشی و نظم فکری باشد، به‌وسیله‌ای که از یکجهت دانش‌آموز را می‌آزارد و از جهت دیگر در خراب کردن ذهن و اندیشهٔ او نقشی اساسی دارد، تبدیل شده است. رابطهٔ ریاضیات با عمل، که اساسی‌ترین نیروی محرکهٔ پیشرفت آنست، بکلی فراموش می‌شود و این تصور قوت می‌گیرد که این علم بظاهر انتزاعی، چیزی جز بازی با علامتها نیست و راهی است که بشر برای سرگرمی ذهنی خود پیدا کرده است.

اینجاست که لزوم کتابهائی احساس می‌شود که در کنار کتابهای درسی، بتواند راهنمائی برای معلم و دانش‌آموز باشد و آنها را به‌زنده بودن ریاضیات قانع سازد.

در این کتاب، مؤلف کوشیده است تا مسائل سادهٔ مربوط به‌بازیها، سرگرمیها، نقشه‌ها، ... را از نظر ریاضی

بررسی کند و خواننده را وادارد تا در همهٔ زمینه‌هائی که در زندگی خود می‌بیند و دربارهٔ همهٔ حوادثی که در اطراف او جریان دارد، با نقطه‌نظر علمی و ریاضی بنگرد و این قدرت را بدست آورد که از هر مطلب ساده‌ای مسئله‌ای ریاضی بسازد و راهی برای جستجوی قوانین طبیعت، و آنچه که نظم نامیده می‌شود، پیدا کند.

مترجم

مطالب این کتاب

از انبوه مطالبی که بوسیلهٔ مولفین مختلف تحت نام‌کلی « بازیها و سرگرمیهای ریاضی » جمع شده است ، می‌توان گروههائی از « سرگرمیهای کلاسیك » را جداکرد ،که از قدیم مورد توجه ریاضی‌دانها بوده است :

۱ . سرگرمیهای مربوط جستجوی راه‌حلهای اصلی مسائلی‌که‌در عمل مجموعهٔ جوابهای آنها پایان ناپذیر است (مثلا « مربعهای جادوئی » فصل ۱۶ ، « مسئله‌ای دربارهٔ اسب شطرنج » ـ فصل ۱۹ و غیره را ببینید)؛ در این موارد معمولا پیداکردن تعداد جوابها ، و روشهائی که مارا به‌گروه بزرگتری از این جوابها (ویابه جوابی‌که شرایط خاصی دارد) می‌رساند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد .

۲ . بازیهای ریاضی ، یعنی بازیهائی‌که در آنها « حرکتها » طبق قواعد معلومی انجام می‌گیرد و باید به شکل معینی منجر شود ، ضمناً این امکان وجود داردکه با هر وضع اولیه‌ای ، در مقابل رقیب ، چنان‌حرکتهائی انجام‌گیردکه پیروزی تضمین شود (مثلا فصل ۱۰ را ببینید) .

۳ . سرگرمیهائی که در آنها ، با کمك يك رشته عملیاتی که بوسیلهٔ یکنفر و برطبق قاعدهٔ معینی انجام می‌شود ، باید به صورتی‌که از قبل معین شده است ، رسید (مثلا فصلهای ۱۱ـ۱۴ را ببینید) ؛ در این موارد باید شرایطی را پیداکردکه بتوان به جواب رسید و ضمناً کمترین تعداد حرکت، برای رسیدن به هدف را پیداکرد .

قسمت عمده‌ای از این کتاب به بحث دربارهٔ اینگونه بازیها و سرگرمیهای کلاسیك مربوط است .

در فصلهای اول کتاب از مبناهای مختلف عدد شماری و از بعضی مطالب مربوط به نظریهٔ اعداد صحبت شده است، که اطلاع بر آنها برای درك نظریهٔ مربوط به بازیهای ریاضی لازم است ؛ ضمن اینکه خود این مباحث هم برای بسیاری از خوانندگان جالب و آموزنده است .

بسیاری از نظریه‌های مربوط به بازیهای ریاضی بطور کامل روشن شده است و در بعضی دیگر به ذکر نتایج و اشاراتی دربارهٔ روشن شدن کار، اکتفا شده است .

علاوه بر سرگرمیهای کلاسیك ، در این کتاب به بعضی سرگرمیهای « امروزی» هم توجه شده است (مثل « محاسبهٔ سریع » ، «شکلهای زیبا» ، «ساختن منحنی‌ها» ، « قالبهای چند وجهی‌ها» وغیره) .

به مسائلی هم که در عمل ، از راه تجربه ، نمی‌توان تمام جوابهای آنها را بدست آورد و یا حتی در بعضی موارد تعداد جوابها بی‌نهایت است، توجه شده است (مثل «تنظیم پارکتها» ، « ساختن نقشه‌های زیبا » وغیره)، در این موارد هرکسی می‌تواند پیش خود هم به نتایج جالب و سرگرم‌کننده‌ای برسد .

اگر سرگرمیهای کلاسیك ، مثل « مربعهای جادوئی» به عده محدودتری مربوط می‌شود ، در عوض مباحثی از قبیل ساختن شکلهای متقارن از کاغذ ، ساختن نقشه‌های زیبا و غیره هیچ احتیاجی به مقدمات ریاضی ندارد و برای همه‌کس (چه آنها که به ریاضیات علاقمندند و چه آنها که از ریاضیات دوری می‌جویند) می‌تواند جالب باشد ...

بسیاری از فصلهای این کتاب می‌تواند ، برای کار اضافی و خارج از کلاس ، مورد استفادهٔ معلمین قرار گیرد .

در متن کتاب ، هر جا به قضیه یا مسئله‌ای برخوردیم ، که برای اثبات یا حل آنها احتیاج به توضیح بوده است با شماره‌هائی که داخل پرانتز قرار گرفته‌اند، مشخص کرده‌ایم و در فصل ۳۸ به اثبات یا حل آنها اشاره کرده‌ایم.

از مقدمهٔ مولف

۱

دستگاههای مختلف عددشماری

در دفترچهٔ یکی از علاقمندان ریاضیات ، این مطالب یادداشت شده است :

۳۲۱۷−	(پنج وپنج می‌شود ده ؛ ۲را می‌نویسیم،	۳۲۰۵+
۱۴۵۲	۱ را درذهن نگه می‌داریم وغیره)	۴۷۷۵
۱۵۴۵		۱۰۲۰۲

$\sqrt{۱۰۴۲۳۱}=۲۷۳$

۴

۴۷ | ۴۴۲

۷ | ۴۲۱

۵۶۳ | ۲۱۳۱

۳ | ۲۱۳۱

۰

(پنج هفت‌تا می‌شود سی‌وپنج ؛ ۳ را می‌نویسیم ، ۴را در ذهن نگه می‌داریم وغیره)

۴۳۵ ×

۴۷

۳۷۱۳

۲۱۶۴

۲۵۵۵۳

(به‌پنج ساده شده است) $\frac{۱۷}{۴۳}=\frac{۳}{۷}$

۳۶۱ | ۱۴

۳۰ | ۲۴/۰۵۲۵...

۶۱

۶۰

۱۰۰

۷۴

۴۰

۳۰

۱۰۰ وغیره

یعنی داریم : $\frac{۳۶۱}{۱۴}=۲۴/۰(۵۲)$

آزمایش : $۰/۰(۵۲)=\frac{۵۲}{۷۷۰}=\frac{۱}{۱۴}$

(پس‌از ساده‌کردن به‌۵۲) ؛

$۲۴+\frac{۱}{۱۴}=\frac{۲۴\times۱۴+۱}{۱۴}=\frac{۲۶۱}{۱۴}$

دربرخورد اول، همهٔ این اعمال عجیب بنظر می‌رسد، ولی اگرمتوجه شویم‌که درمبنای عددشماری ۸ انجام‌گرفته‌اند ، کاملا مفهوم وقابل درك می‌شوند .

طریقهٔ معمولی که برای نوشتن ارقام عدد N بکار می‌بریم به‌جا و موضعی‌که ارقام قرارگرفته‌اند بستگی‌دارد (اصل‌موضعی‌بودن): یکی‌ها، ده‌ها، صدها وغیره یعنی‌ارقام یکان، دهگان، سدگان وغیره عدد N را تشکیل می‌دهند.

عدد k را به‌عنوان مبنای عددشماری انتخاب می‌کنیم، یعنی واحد هررقم یا هرطبقه را k برابر واحد رقم یا طبقهٔ سمت راست می‌گیریم. چنین عددنویسی‌را، دستگاه عددنویسی درمبنای k گویند (مبنای عدد-نویسی معمولی ما، ۱۰ است).

اگر $k<10$ باشد ارقام از k تا ۹ مورد استفاده قرار نمی‌گیرند (درنمونه‌های بالا، که درمبنای ۸ بود، از رقمهای ۸و۹ خبری نیست). و اگر $k>10$ باشد، باید برای عددهای از ۱۰ تا $k-1$، علامتهائی درنظر گرفت؛ مثلا درعددشماری به‌مبنای ۱۲، می‌توان برای ۱۰و۱۱ علامت‌های α و β را درنظرگرفت.

وقتی‌که عددی را در مبنای k می‌نویسیم، بهتر است عـدد k را داخل پرانتز درسمت راست و پائین عدد قرار دهیم، فقط برای عددهائی که درمبنای ۱۰ نوشته شده‌اند، ذکرمبنا ضرورتی ندارد، مثلا:

$$\left.\begin{aligned}
۱۱۰۱_{(۲)} &= ۱\times ۲^{۳}+۱\times ۲^{۲}+۰\times ۲+۱=۱۳,\\
۲۰۱۲۰_{(۳)} &= ۲\times ۳^{۴}+۱\times ۳^{۲}+۲\times ۳=۱۷۷,\\
\alpha۱۳\beta_{(۱۲)} &= ۱۰\times ۱۲^{۳}+۱\times ۱۲^{۲}+۳\times ۱۲+۱۱\\
&= ۱۷۴۷۱,\\
۱/۶۷۲_{(۸)} &= ۱+\frac{۶}{۸}+\frac{۷}{۸^{۲}}+\frac{۲}{۸^{۳}}=\frac{۴۷۷}{۲۵۶}
\end{aligned}\right\}\quad (۱)$$

سمت چپ مثال آخررا **کسر ترتیبی** می‌نامند، (شبیه‌کسر اعشاری درعددشماری به مبنای ۱۰).

وقتی‌که عدد k بزرگ باشد، ارقام از ۱۰ تا $k-1$ را می‌توان با استفاده ازعددهای مبنای اعشاری نوشت: منتهی درچنین مواردی، روی عدد چندرقمی که به‌عنوان یك‌رقم بکار می‌رود خطی قرار می‌دهند تا به

صورت یك‌رقم درنظر گرفته شود، مثلا:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{۱۰}\,۰\,۶\,\overline{۱۱}_{(۱۶)}=۱۰\times ۱۶^{۳}+۶\times ۱۶+۱۱=۴۲۰۳,\\
&۳\,\overline{۱۳}\,\overline{۱۲}\,\overline{۴۱}_{(۶۰)}=۳\times ۶۰^{۳}+۱۳\times ۶۰^{۲}+۱۲\times ۶۰+\\
&\qquad\qquad+۴۱=۶۹۵۵۶۱,\\
&۰/\overline{۳۰}\,\overline{۱۰}_{(۶۰)}=\frac{۳۰}{۶۰}+\frac{۱۰}{۶۰^{۲}}=\frac{۱۸۱}{۳۶۰}
\end{aligned}\right\}\ (۲)$$

ازتساویهای (۱) و(۲) معلوم می‌شود که تبدیل عدد به مبنای k به‌صورت عددی به‌مبنای عادی ۱۰ کار ساده‌ای است.

مسئلهٔ عکس‌هم به سادگی حل‌می‌شود: مثلا می‌خواهیم عدد طبیعی N درمبنای ده‌را به‌مبنای k ببریم.

فرض می‌کنیم‌که داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
N&=kq_{۱}+c_{۰},\\
q_{۱}&=kq_{۲}+c_{۱},\\
q_{۲}&=kq_{۳}+c_{۲},\\
&\cdots\cdots\\
q_{n-۲}&=kq_{n-۱}+c_{n-۲},\\
q_{n-۱}&=kq_{n}+c_{n-۱},
\end{aligned}$$

در اینجا $q_{۱}$ و $c_{۰}$ بترتیب خارج‌قسمت و باقیماندهٔ تقسیم عدد N بر k هستند و بطورکلی $q_{s+۱}$ و c_s خارج قسمت و باقیمانده‌ای که از تقسیم q_s بر k بدست می‌آید. هریك ازعددهای $c_{۰}، c_{۱}، c_{۲}، \ldots، c_{n-۱}$ کوچکتر از k وبزرگتر ازصفرند: $۰<c_s<k$. ازآنجا:

$$N=(kq_{۲}+c_{۱})k+c_{۰}=q_{۲}k^{۲}+c_{۱}k+c_{۰}=$$

$$= (q_3k+c_2)k^2+c_1k+c_0=\cdots=q_nk^n+c_{n-1}\,k^{n-1}+$$

$$c_{n-2}k^{n-2}+\cdots+c_1k+c_0=q_n\,c_{n-1}\,c_{n-2}\cdots c_2c_1c_{0(k)}$$

مثال زیر روش فوق را بخوبی روشن می‌کند : عدد ۶۹۵۵۶۱ را به مبنای ۶۰ ببرید :

۶۹۵۵۶۱	۶۰		
۶۰	۱۱۵۹۲	۶۰	
۹۵	۶۰	۱۹۳	۶۰
۶۰	۵۵۹	۱۸۰	۳
۳۵۵	۵۴۰	۱۳	
۳۰۰	۱۹۲		
۵۵۶	۱۸۰		
۵۴۰	۱۲		
۱۶۱			
۱۲۰			
۴۱			

و بنابراین :

$$695561=3\,\overline{13}\;\overline{12}\;\overline{41}_{(60)}$$

اگر $N=\frac{a}{b}$ باشد ، برای نوشتن عدد N در مبنای k کافی است که عددهای a و b را دراین‌مبنا بنویسیم واگر بخواهیم کسر بدست‌آمده را به‌صورت‌کسر ترتیبی بنویسیم‌باید در دستگاه عددشماری به‌مبنای k، عدد a را برعدد b تقسیم کنیم .به‌عنوان مثال‌کسر $\frac{17}{18}$ را به مبنای ۱۲ و کسر $\frac{4}{7}$ را به مبنای ۳ می‌بریم :

$$\frac{۱۷}{۱۸}=\frac{۱۵_{(۱۲)}}{۱۶_{(۱۲)}}=۰/\overline{۱۱}۴_{(۱۲)}$$

زیرا به ازاء $k=۱۲$ داریم :

$$\begin{array}{l|l}
۱۵/۰ & ۱۶ \\ \cline{2-2}
\underline{۱۴\ ۶} & ۰/\overline{۱۱}۴ \\
۶۰ & \\
\underline{۶۰} & \\
۰ &
\end{array}$$

$$\frac{۴}{۷}=\frac{۱۱_{(۳)}}{۲۱_{(۳)}}=۰/(۱۲۰۱۰۲)_{(۳)}$$

زیرا داریم (به‌ازاء $k=۳$) :

$$\begin{array}{l|l}
۱۱/۰ & ۲۱ \\ \cline{2-2}
\underline{۲۱} & ۰/۱۲۰۱۰۲... \\
۱۲۰ & \\
\underline{۱۱۲} & \\
۱۰۰ & \\
\underline{۲۱} & \\
۲۰۰ & \\
\underline{۱۱۲} & \\
۱۱... &
\end{array}$$

باقیماندهٔ $۱۱_{(۳)}$ که درآخر بدست‌آمده است ، مساوی عدد اصلی $a=۱۱_{(۳)}$ است و بنابراین کسر ترتیبی مطلوب ، یك‌کسر متناوب ساده است .

طبق قاعده‌ای‌که برای تبدیل‌کسر ترتیبی متناوب به‌کسر متعارفی وجود دارد، می‌توان نتیجه‌ای راکه بدست‌آمده است آزمایش‌کرد :

برای تبدیل کسر ترتیبی به کسر متعارفی باید یك‌دورهٔ تناوب را درصورت کسر قرارداد ودرمخرج آن به‌اندازهٔ تعداد ارقام صورت، رقم «$k-۱$» را درنظرگرفت (این قاعده را بااستفاده ازحد مجموع جملات یك‌تصاعد هندسی نزولی ثابت‌کنید[1]).

در اینجا $k=۳$ است و بنابراین داریم:

$$۰/(۱۲۰۱۰۲)_{(۳)}=\frac{۱۲۰۱۰۲_{(۳)}}{۲۲۲۲۲۲_{(۳)}}=\frac{۱۱_{(۳)}}{۲۱_{(۳)}}$$

(صورت ومخرج کسررا به$۱۰۲۱۲_{(۳)}$کوچك کرده‌ایم ــ آزمایش کنید).

برای اینکه ضرب‌وتقسیم‌عددهادرمبنای k به‌سادگی‌انجام‌بگیرد، می‌توان جدولی‌تشکیل دادکه درآن حاصلضرب دو به دوی تمام‌عددهای کوچکتر از k را داده باشد.

مثلا برای $k=۸$ و $k=۱۲$ داریم:

جدول ضرب درمبنای ۸

	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲	۴	۶	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
۳	۶	۱۱	۱۴	۱۷	۲۲	۲۵
۴	۱۰	۱۴	۲۰	۲۴	۳۰	۳۴
۵	۱۲	۱۷	۲۴	۳۱	۳۶	۴۳
۶	۱۴	۲۲	۳۰	۳۶	۴۴	۵۲
۷	۱۶	۲۵	۳۴	۴۳	۵۲	۶۱

جدول ضرب درمبنای ۱۲

	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	α	β
۲	۴	۶	۸	α	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۱α
۳	۶	۹	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	۲۰	۲۳	۲۶	۲۹
۴	۸	۱۰	۱۴	۱۸	۲۰	۲۴	۲۸	۳۰	۳۴	۳۸
۵	α	۱۳	۱۸	۲۱	۲۶	۲β	۳۴	۳۹	۴۲	۴۷
۶	۱۰	۱۶	۲۰	۲۶	۳۰	۳۶	۴۰	۴۶	۵۰	۵۶
۷	۱۲	۱۹	۲۴	۲β	۳۶	۴۱	۴۸	۵۳	۵α	۶۵
۸	۱۴	۲۰	۲۸	۳۴	۴۰	۴۸	۵۴	۶۰	۶۸	۷۴
۹	۱۶	۲۳	۳۰	۳۹	۴۶	۵۳	۶۰	۶۹	۷۶	۸۳
α	۱۸	۲۶	۳۴	۴۲	۵۰	۵α	۶۸	۷۶	۸۴	۹۲
β	۱α	۲۹	۳۸	۴۷	۵۶	۶۵	۷۴	۸۳	۹۲	α۱

مثلا $۳۶_{(۸)} = ۵ \times ۶$ و $۲\beta_{(۱۲)} = ۵ \times ۷$.

ثابت کنید[۲] که قاعدهٔ جذرگرفتن در هر مبنای شمار کاملا شبیه مبنای دهدهی است (به نمونه‌ای که در ابتدای این بند ذکر کردیم، مراجعه کنید).

عدد شماری به مبنای ۲

در عدد شماری به مبنای ۲ ، می‌توان هر عدد دلخواه را به کمک رقمهای ۱ و صفر نوشت ؛ واین به معنای آنست که هر عدد را می‌توان به صورت مجموعی از توانهای ۲ درآورد.

$$N = ۲^{\alpha_۱} + ۲^{\alpha_۲} + \dots + ۲^{\alpha_s} \quad (\alpha_۱ > \alpha_۲ > \dots > \alpha_s \geqslant ۰)$$

۱	۱۷	**۲**	۱۸	**۴**	۲۰	**۸**	۲۴	**۱۶**	۲۴
۳	۱۹	۳	۱۹	۵	۲۱	۹	۲۵	۱۷	۲۵
۵	۲۱	۶	۲۲	۶	۲۲	۱۰	۲۶	۱۸	۲۶
۷	۲۳	۷	۲۳	۷	۲۳	۱۱	۲۷	۱۹	۲۷
۹	۲۵	۱۰	۲۶	۱۲	۲۸	۱۲	۲۸	۲۰	۲۸
۱۱	۲۷	۱۱	۲۷	۱۳	۲۹	۱۳	۲۹	۲۱	۲۹
۱۳	۲۹	۱۴	۳۰	۱۴	۳۰	۱۴	۳۰	۲۲	۳۰
۱۵	۳۱	۱۵	۳۱	۱۵	۳۱	۱۵	۳۱	۲۳	۳۱

شکل ۱

براساس این خاصیت عددها، می‌توان بازی درست کرد که موضوع آن، کشف عدد باشد: روی کارتهائی که باعناوین ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶ (شکل ۱) مشخص شده‌اند، عددهای صحیح را طوری می‌نویسیم که هر عدد صحیح N،

تنها درکارتهائی وجود داشته‌باشدکه مجموع‌عناوین‌آنها مساوی N بشود. مثلا عدد ۲۷ را در نظر می‌گیریم ، این عدد مساوی ۱۶+۸+۲+۱ است وبنابراین تنها درکارت باعنوان ۴ نباید نوشته شود وغیره.

فرض‌کنید ،کسی عددی راکه بزرگتر از۳۱ نباشد، پیش‌خود فکر کند وعنوان کارتهائی راکه این‌عدد درآنها نوشته شده است، ذکر کند ، شما می‌توانیدفوری وبا جمع‌کردن این عنوانها، عددی را که فکرکرده است بگوئید.

می‌توان به بازی جنبهٔ مکانیکی داد و جدولهای مربوطه را روی صفحاتی به وزنهای۱، ۲، ۴، ۸ و۱۶گرم نوشت. اگرصفحاتی راکه عدد مورد نظر روی آنها وجود دارد ، روی یك ترازوی حساس قرار دهیم ، عقربهٔ ترازو روی عدد مطلوب قرار خواهد گرفت .

از عدد شماری به مبنای ۲ اغلب در ماشینهای حساب الکترونی معاصر استفاده می‌کنند. درحقیقت در چنین ماشینهائی می‌توان به‌سادگی عناصری را که به کمك آنها عددها را بیان می‌کنیم، به‌دو وضع متمایز درآورد (مثلا ، قطع ووصل جریان برق،مغناطیسی‌کردن نوارمغناطیس در دوجهت مختلف و غیره).

بنابراین هریك ازاین عناصرمی‌توانند برای یکی ازعددهائی‌که دردستگاه مبنای ۲ بکار می‌رود، مورد استفاده قرارگیرند(یکی‌از حالتها برای صفر وحالت دیگر برای‌واحد درنظرگرفته می‌شود). این‌مطلب هم اهمیت داردکه انجام اعمال، وقتی‌که فقط با دو رقم ۰ و۱ سروکار داشته باشیم، خیلی ساده‌تر است.

دستگاه عددشماری به مبنای۲ در نظریهٔ بازیهانیز، وقتی‌که باسه

تودهٔ شیئی سروکار داشته باشیم ، مورد استفاده دارد وما بعداً در بند ۱۰ دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد .

عددشماری به مبنای ۳

در دستگاه عددشماری به مبنای ۳ ، می‌توان هرعدد دلخواه را با رقمهای ۰ ، ۱و۲ نوشت. ولی اگر«رقمهای منفی»را هم درنظر بگیریم، مثلاً آنطورکه دربیان لگاریتم اعداد برای مفسرهای منفی عمل می‌کنند، باتوجه به‌تساوی

$$۲\times۳^{m}=۳^{m+۱}-۳^{m}=۱\times۳^{m+۱}+\bar{۱}\times۳^{m}$$

می‌توان هر عدد را در مبنای۳ بارقمهای ۰ و۱ و$\bar{۱}$ نشان داد و بنابراین قضیهٔ زیرصحیح است.

قضیه .هـر عدد صحیح را می‌توان بـه صورت مجموع جبری توانهای مختلف عدد۳ نوشت ، یعنی:

$$N=۳^{\alpha_۱}+۳^{\alpha_۲}+\ldots-۳^{\beta_۱}-۳^{\beta_۲}-\ldots \quad (۳)$$

$\alpha_۱$،$\alpha_۲$،...،$\beta_۱$،$\beta_۲$،... عددهای صحیح وغیرمنفی هستند ؛ جملات منفی‌در تساوی (۳) می‌توانند وجود نداشته باشند.

مثلا برای عدد ۱۹۱۰ داریم:

$$N=۱۹۱۰=۲۱۲۱۲۰۲_{(۳)}=۲۱۲۱۲۱\bar{۱}_{(۳)}=۲۱۲۲\bar{۱}۱\bar{۱}_{(۳)}=$$
$$=۲۱۳\bar{۱}\,\bar{۱}۱\bar{۱}=۲۲۰\bar{۱}\,\bar{۱}۱\bar{۱}_{(۳)}=۳\bar{۱}۰\bar{۱}\,\bar{۱}۱\bar{۱}_{(۳)}=$$
$$=۱۰\bar{۱}۰\bar{۱}\,\bar{۱}۱\bar{۱}_{(۳)}=۳^{۷}-۳^{۵}-۳^{۳}-۳^{۲}+۳-۳^{۰}$$

(ضمن تنظیم عدد به‌صورت توانهائی ازعدد۳، موقتاً ازعدد ۳ هم‌به‌عنوان یك رقم استفاده‌کردیم) .

طبعاً از اینجا راه‌حلی برای مسئلهٔ قدیمی چهاروزنه پیدا می‌شود که باکمك‌آنها بتوانیم هروزنی از۱ تا۴۰کیلوگرم را بدست‌آوریم . *

درحقیقت ، اگر در یك‌کفهٔ ترازو وزنه‌های $۳^{\alpha_۱}$ کیلوگرم ، $۳^{\alpha_۲}$ کیلوگرم‌وغیره ودرکفهٔ دیگر وزنه‌های $۳^{\beta_۱}$ کیلوگرم $۳^{\beta_۲}$کیلوگرم وغیره را قرار دهیم (رابطه (۳) را به‌بینید) ، می‌توانیم وزن N کیلوگرم را بدست‌آوریم . بنابراین باانتخاب وزنه‌های ۱، ۳، ۹،... و۳^nکیلوگرمی می‌توانیم هرجسمی به‌وزنN کیلوگرم (N عددی است صحیح) را وزن کنیم‌که درآن :

$$N \leqslant ۱+۳+۹+\dots+۳^n = \frac{۳^{n+۱}-۱}{۲}$$

و به ازاء $n=۳$

$$\frac{۳^{n+۱}-۱}{۲} = ۴۰$$

مسائل

۱ . عددهای ۲۷۱۳ و۴۰۹را به‌کمك‌رقمهای ۰و۱ و۲ (وبااستفاده از «رقمهای منفی») به مبنای عددشماری پنج ببرید[۳a] .

۲ . صحت اعمالی راکه در ابتدای این بند نوشته‌ایم به دو طریق

*) فیبوناچی هم در سال ۱۲۰۲ میلادی مسئلهٔ وزنه‌ها را مورد مطالعه قرار داده بود.

آزمایش کنید :

a) همهٔ عملیات را مستقیماً درمبنای ۸ انجام دهید .

b) عددهائی که اعمال مربوطه روی آنها انجام گرفته است و نتایج این اعمال‌را به مبنای ۱۰ ببرید وسپس مورد تحقیق قراردهید.

۳. $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۱۶}$ را به صورت کسر ترتیبی در مبناهای ۲،۳، ۱۲ و ۶۰ بنویسید . برای آزمایش درستی عمل، کسرهائی راکه بدست می‌آورید به‌کسر اعشاری تبدیل کنید .

۴. عدد ۶۷۶ را به مبناهای ۲، ۳ و ۵ ببرید وازعددهای بدست‌ـ آمده درهمان مبناها جذر بگیرید.

۵. ثابت‌کنید (۳b) ، برای تبدیل عددی‌که درمبنای ۸ نوشته شده است، به‌عددی‌درمبنای۲ ،کافی است هررقم‌آنرا به‌صورت یك‌عدد سه‌رقمی درمبنای ۲ بنویسیم؛ مثلا :

$$۷۳۱۵_{(۸)}=\underbrace{۱۱۱}\ \underbrace{۰۱۱}\ \underbrace{۰۰۱}\ \underbrace{۱۰۱}_{(۲)};$$

و برعکس :

$$\underbrace{۱۰}\ \underbrace{۰۰۰}\ \underbrace{۱۰۱}\ \underbrace{۱۱۰}_{(۲)}=۲۰۵۶_{(۸)}$$

بادر نظر گرفتن این قاعده وقواعد مشابه‌آن برای تبدیل عددهائی که درمبنای ۴ یا۱۶ وغیره هستند به‌مبنای ۲، ثابت‌کنید :

$$\overline{۱۱}\ ۴\ \overline{۱۳}_{(۱۶)}=۵۵۱۵_{(۸)} \quad \text{و} \quad ۷۷۳_{(۸)}=۱۳۳۲۳_{(۴)}$$

۶. ثابت‌کنید(۴)، به‌ازاء هرمقدار $k>5$ عدد $۱۲۳۴۵۴۳۲۱_{(k)}$ ، مجذورکامل است .

۷. چگونه می‌توان عدد N را که‌کسی پیش خود فکر کرده است

(تاحد ۱۰۰۰) با ۱۰ سئوال بدست آورد[۵]؛ به‌شرطی که جوابها تنها با «آری» یا «نه» مشخص شده باشند .

۸. درشکل ۱ هریك ازکارتها شامل ۱۶عدد است.

بطورکلی، اگر s کارت باعناوین ۱، ۲، ۴، ۸، ...، $۲^{s-۲}$ و $۲^{s-۱}$ در نظر بگیریم و هرعدد m (از ۱ تا $۲^s-۱$) درکارتهائی نوشته شده باشد که مجموع عناوین آنها مساوی m بشود، در هر کارت باید رویهم $۲^{s-۱}$ عدد نوشت. این قضیه‌را ثابت کنید[۶].

۲

چند اطلاع از نظریهٔ اعداد

اگر برای دوعدد a و bبتوان عددc را چنان پیدا کرد که $a = bc$ باشد، گویند a برb قابل قسمت است و b را **مقسوم علیه** عدد a گویند (در این بند ، وقتی‌که وضع خاص یك عدد بیان نشده باشد، صحبت از عددهای طبیعی، یعنی صحیح ومثبت ، است) .

عددp را **اول** گویند، وقتی که تنها دومقسوم‌علیه داشته‌باشد: ۱ وp.

هرعدد غیراول n را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$n = p_۱^{\alpha} p_۲^{\beta} \cdots p_k^{\sigma} \qquad (۱)$$

که در آن $p_۱$، $p_۲$، ...، p_k عددهائی اول و α، β، ...، σ عددهای طبیعی هستند؛ ضمناً وقتی‌که بین $p_۱$، $p_۲$، ...، p_k عددهای مساوی وجود نداشته باشد، (۱) را تجزیهٔ جزمی عدد n به عوامل گویند .

در هرکتاب مربوط به نظریهٔ اعداد قضیهٔ زیرثابت شده است:

قضیه . برای هــر عدد n ، تنها یك تجزیهٔ جــزمی وجود دارد (به شرطی‌که باتغییر ترتیب عوامل، تجزیه را متفاوت‌به‌حساب نیاوریم). ممکن است بنظر بعضی ازخوانندگان عجیب باشدکه ریاضی‌دانها وقت‌و انرژی خودرا صرف اثبات اینگونه قضایای «واضح» می‌کنند. ولی نمونهٔ زیرکه از مجموعهٔ دیگری ازاعداد(غیرازمجموعهٔ اعداد طبیعی)انتخاب شده است، بخوبی ثابت می‌کندکه یك قضیهٔ بظاهر «واضح» ممکن است نادرست باشد.

عدد مختلط به صورت $a+b\sqrt{-۶}$ ، که درآن a وb عددهائی صحیح هستند ، وقتی «مــرکب» نامیده می‌شود که بتواند به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$a+b\sqrt{-۶}=(c+d\sqrt{-۶})(e+f\sqrt{-۶}),$$

c ، d ، e و f عددهائی صحیح هستند (که حتی می‌توانند مساوی صفر باشند)وضمناً بایدهریك‌از عوامل مخالف ۱ یا ۱— باشند.در حالت عکس، عدد مختلط را «اول» گوئیم.

طبق این تعریف عددهای $\sqrt{-۶}-۲۰$،۷ (در اینجا a=۷ و

$b=0$ است)و۶($a=6$ ، $b=0$) عددهائی مرکب هستند .

$$20-\sqrt{-6}=(2-3\sqrt{-6})(1+\sqrt{-6}),$$
$$7=(1+\sqrt{-6})(1-\sqrt{-6}),$$
$$6=2\times 3=(\sqrt{-6})(-\sqrt{-6}).$$

ولی می‌توان ثابت‌کرد که عددهای $\sqrt{-6}$ ، $-\sqrt{-6}$ ، ۲ و ۳ ، «اول» هستند . به این ترتیب عدد «مرکب» ۶را به دو طریق می‌توان به صورت عوامل «اول» تجزیه‌کرد .

توابع $\tau(n)$ و $S(n)$

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد n را به $\tau(n)$ ومجموع آنها را به $S(n)$ نشان می‌دهیم.

مثلا $\tau(10)=4$ و $S(10)=18$ است ، زیرا عدد ۱۰ تنها چهار مقسوم‌علیه صحیح و مثبت دارد : ۱، ۲، ۵، ۱۰.

اگر $n=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}p_3^{\gamma}\cdots p_k^{\sigma}$ ، تجزیهٔ جزمی عدد n باشد، داریم:

$$\tau(n)=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots(\sigma+1) \qquad (2)$$

$$S(n)=(1+p_1+p_1^2+\cdots p_1^{\alpha})\,(1+p_2+\cdots+p_2^{\beta})\times$$
$$\times(1+p_3+\cdots+p_3^{\gamma})\cdots(1+p_k+\cdots+p_k^{\sigma}) \qquad (3)$$

درحقیقت هرمقسوم‌علیه عدد n به صورت زیراست :

$$p_1^{\alpha'}\,p_2^{\beta'}\,p_3^{\gamma'}\cdots p_k^{\sigma'}, \qquad (4)$$

که در آن باید داشته باشیم :

$$0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha;0\leqslant\beta'\leqslant\beta;0\leqslant\gamma'\leqslant\gamma;\ldots;0\leqslant\sigma'\leqslant\sigma \qquad (5)$$

چون α' می‌تواند به $(\alpha+1)$ نوع، β' به $(\beta+1)$ نوع وغیره انتخاب شود، برای انتخاب دو عدد α'وβ' می‌توان $(\alpha+1)(\beta+1)$ نوع مختلف درنظر گرفت (برای هریك ازانواع α' می‌توان $\beta+1$ نوع ازمقادیر β' را انتخاب کرد). اگر سه‌عدد α'،β'وγ' را درنظر بگیریم به $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ حالت مختلف می‌رسیم (هریك ازحالتهای دوعدد α'وβ' را می‌توان بایکی از $\gamma+1$ حالت γ' درنظر گرفت).

اگر این استدلال‌را ادامه دهیم،معلوم می‌شودکه‌اگر گروه‌عددهای α'،β'،γ'،...،σ' در شرایط (۵) صدق کنند، می‌توان

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\sigma+1)$$

نوع از آنهارا انتخاب‌کرد . بنابراین‌رابطهٔ (۲) صحیح است.

صحت رابطهٔ(۳) هم ازاینجا ثابت می‌شودکه اگرکثیرالجمله‌های سمت راست تساوی(۳) را درهم ضرب‌کنیم، تمام انواع جملات به‌صورت (۴) بدست می‌آید.

اگر $S(n)=2n$ باشد، n را **عدد کامل** گویند، مثلا ۶و۲۸ دوعدد کامل هستند ، زیرا داریم:

$$S(6)=12\ ,\ S(28)=56$$

حتی **اقلیدس** ثابت کرد که هرعدد زوج به صورت زیر یك عدد کامل است :

$$N=2^{\alpha}(2^{\alpha+1}-1)^{1} \qquad (6)$$

به شرطی که α عددی طبیعی و $2^{\alpha+1}-1$ عددی اول باشد . از طرف

دیگر هر عدد زوج کامل را به صورتی غیراز (۶) نمی‌توان تجزیه‌کرد.

فعلاروشن شده‌است که‌عددهای به‌صورت $۲^{\alpha+۱}-۱$ (که‌بنام‌دانشمند قرن ۱۷ فرانسه، عددهای **مرسن** نامیده می‌شود) به‌ازاء مقادیر

$$\alpha = ۱، ۲، ۴، ۶، ۱۲، ۱۶، ۱۸، ۳۰، ۶۰، ۸۸، ۱۰۶، ۱۲۶، ۵۲۰، ۶۰۶، ۱۲۷۸، ۲۲۰۲، ۲۲۸۰;$$

عددی است اول و بنا براین تاامروز تنها ۱۷عددکامل شناخته شده‌است.

هفت عددکامل اولیه چنین اند:

۶، ۲۸، ۴۹۶، ۸۱۲۸، ۳۳۵۵۰۳۳۶، ۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶، ۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸

تا امروز معلوم نشده است که آیا عدد فرد کامل هم وجود دارد یا نه.

ریاضی‌دانهای قرون وسطی توجه‌زیادی به **عددهای متحابه** داشتند. دوعدد a وb را متحابه‌گویند وقتی‌که داشته باشیم:

$$S(a) = S(b) = a + b$$

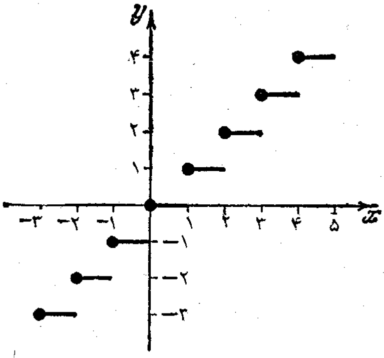
بااستفاده ازرابطهٔ (۳) ثابت‌کنیدکه ۲۲۰و۲۸۴ دوعدد متحابه‌اند؛ عددهای ۱۸۴۱۶ و ۱۷۲۹۶ هم متحابه‌اند.

تابع $[x]$ (قسمت صحیح عدد x)

تابع $[x]$ برابر است با بزرگترین عدد صحیحی که از x تجاوز نکند (x عددی دلخواه وحقیقی است). مثلا:

$$[\sqrt{۷}]=۲\ ,\ [-\frac{۱۹}{۵}]=-۴\ ,\ [۶]=۶$$

تابع $[x]$ دارای «نقاط انفصال» است: به‌ازاء هرمقدار صحیح x با یك «جهش» تغییر می‌کند.



شکل۲

درشکل ۲ نمایش تغییرات این تابع داده شده است ، ضمناً انتهای چپ هریك ازپاره خطهای افقی جزو این نمایش تغییرات هستند، درحالیکه انتهای راست آنها به این نمایش تغییرات تعلق ندارند.

حالا ثابت‌کنید(۷) که اگر $n!=p_۱^{\alpha}p_۲^{\beta}p_۳^{\gamma}\cdots p_k^{\sigma}$، تجزیهٔ جزمی عدد !n باشد، خواهیم داشت:

$$\alpha=\left[\frac{n}{p_۱}\right]+\left[\frac{n}{p_۱^۲}\right]+\left[\frac{n}{p_۱^۳}\right]+\cdots;$$

وبهمین ترتیب روابط مشابهی برای عددهای β، γ، ...، σ .

با دانستن این مطلب ، مثلا به سادگی می‌توان معین کردکه عدد !۱۰۰ به‌چند صفر ختم می‌شود. فرض می‌کنیم:

$$۱۰۰!=۲^{\alpha}\times ۳^{\beta}\times ۵^{\gamma}\times\cdots\times ۹۷^{\sigma}$$

دراینصورت داریم :

$$\alpha=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۴}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۸}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۱۶}\right]+\frac{۱۰۰}{۳۲}\Big]+$$

$$\left[\frac{۱۰۰}{۶۴}\right]+\left[\frac{۱۰۰}{۱۲۸}\right]+\cdots=۵۰+۲۵+۱۲+۶+۳+۱=۹۷،$$

$$\gamma=[\frac{۱۰۰}{۵}]+[\frac{۱۰۰}{۲۵}]+[\frac{۱۰۰}{۱۲۵}]+\dots=۲۰+۴=۲۴$$

بنابراین !۱۰۰ برعدد $(۲\times۵)^{۲۴}$ قابل‌قسمت است، یعنی درسمت راست آن ۲۴ صفروجود دارد .

مسائل

۱. ثابت کنید[۸] طبق رابطهٔ (۶) ، به‌ازاء $\alpha=۲۲۸۰$ یك عدد کامل با ۱۳۷۳ رقم بدست می‌آید ($log ۲ \# ۰/۳۰۱۰۲۹۹۹۶$).

۲. بااستفاده ازرابطهٔ(۳) ثابت‌کنید[۹] که برای هر عدد به‌صورت $N=۲^{\alpha}(۲^{\alpha+۱}-۱)$ (که درآن $۲^{\alpha+۱}-۱$ عددی است اول) داریم:

$$S(N)=۲N$$

۳. بزرگترین‌عدد طبیعی k را چنان پیداکنیدکه به‌ازاء آن‌کسر $\frac{۱۰۱\times۱۰۲\times\dots\times۹۹۹\times۱۰۰۰}{۷^k}$ مساوی باعددی صحیح باشد[۱۰].

۴. ثابت‌کنید [۱۱]

$$۱۳۲۲\ ۳۱۴\ ۰۴۹\ ۶۱۳\ ۲۲۳\ ۱۴۰\ ۴۹۶=۳۶۳۶۳۶۳۶۴^۲$$

کوچکترین‌مربع‌کامل درمبنای اعشاری‌است‌که از دو ردیف ارقام‌عین هم تشکیل‌شده‌است. در مبناهای دیگر چنین‌عددهائی بارقمهای‌کمتر بدست می‌آید ، مثلا :

$$۲۸۸۲۸۸_{(۲۳)}=۳۹۰۰^۲ ،\ ۸۸۲\ ۸۸۲_{(۲۳)}=۷۳۳۲^۲ ،\ ۱۱_{(۳)}=۲^۲$$

ضمناً مکعبهای کاملی پیداکنیدکه دراین ویا آن دستگاه عددشماری از دوردیف ارقام مساوی‌تشکیل شده‌باشد، مثلا :

$$۱۱_{(۷)}=۲^۳ ،\ \underbrace{۱۰۱۱۰۱۰۰۱}\ \underbrace{۱۰۱۱۰۱۰۰۱}_{(۲)}=۵۷^۳$$

۳

هم‌نهشتی

اگر عددهای صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m، باقیمانده‌های مساوی بدهند، یعنی $a=mq_1+r$ و $b=mq_2+r$ باشد، (r، q_1 و q_2 عددهائی صحیح‌هستند و $0 \leqslant r<m$ می‌باشد)، گویند این دوعدد نسبت به مدول m هم باقیمانده‌اند ، یا نسبت به مدول m هم‌نهشت‌اند و چنین می‌نویسند :

$$a \equiv b \pmod{m}$$

مثلاداریم: $-13 \equiv 27 \pmod 8$ ؛ زیرا $27 = 3 \times 8 + 3$ و همچنین $-13 = 8(-2) + 3$. واضح است که تفاضل دوعدد هم‌نهشت نسبت به مدول m ، یعنی $a-b$ ، بر m قابل قسمت است . در مورد مثال فوق $27-(-13)=40$ می‌شود و ۴۰ بر ۸ قابل‌قسمت است.

اثبات خواص زیر مربوط به هم نهشتی را بـه عهدهٔ خواننده می‌گذاریم :

اگر داشته باشیم $a \equiv b \pmod m$ ، $c \equiv d \pmod m$ ، داریم:

۱) $a+c \equiv b+d \pmod m$،

۲) $a-c = b-d \pmod m$،

۳) $k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod m$ (k عدد صحیح دلخواهی است)،

۴) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$،

۵) $a^n \equiv b^n \pmod m$ (n عدد طبیعی‌دلخواهی است).

(توجه‌کنیدکه $a = b + mt$ ، $c = d + mt'$ است که tوt' عدد- های صحیحی هستند) .

از خواصی که ذکر کردیم به سادگی قضیهٔ زیر ثابت می‌شود[۱۲]:

اگر $\alpha \equiv \beta \pmod m$ و $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ کثیر- الجمله‌ای باضرایب صحیح باشد ، خواهیم داشت :

$$f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod m$$

به کمك این قضیه می‌توان قاعدهٔ قابلیت تقسیم عدد طبیعی N را بر ۷، ۹، ۱۱ و۱۳ بدست‌آورد .

فرض‌کنید داشته باشیم:

$$N=c_k c_{k-1} c_{k-2}\cdots c_2c_1c_{0\,(10)}=10^k c_k+10^{k-1}c_{k-1}+\cdots$$
$$+10^2c_2+10c_1+c_0=1000^sC_s+1000^{s-1}C_{s-1}+\cdots+$$
$$+1000^2C_2+1000C_1+C_0$$

در اینجا C_0، C_1، …، C_{s-1} عبارت از عددهای سه‌رقمی هستند که از تقسیم عدد N از راست بچپ سه‌رقم سه‌رقم جدا شده باشند، $s=\left[\frac{k}{3}\right]$ و C_s می‌تواند یك‌رقمی ، دورقمی و یا سه‌رقمی باشد. مثلا داریم :

$$N=15\,032\,104\,341=341+1000\times104+1000^2\times32+$$
$$+1000^3\times15$$

در اینجا $s=3$ و $C_0=341$ ، $C_1=104$ $C_2=32$ و $C_3=15$ است .

اگر فرض کنیم :

$$c_kz^k+c_{k-1}z^{k-1}+\cdots+c_2z^2+c_1z+c_0=f(z),$$
$$C_sz^s+C_{s-1}z^{s-1}+\cdots+C_2z^2+C_1z+C_0=F(z),$$

خواهیم داشت :

$$N=f(10)=F(1000),$$
$$f(1)=c_k+c_{k-1}+\cdots+c_2+c_1+c_0=\sigma(N),$$
(مجموع ارقام عدد N)
$$f(-1)=c_0-c_1+c_2-\cdots+(-1)^kc_k=\sigma'(N),$$
$$F(-1)=C_0-C_1+C_2-\cdots+(-1)^sC_s=\Sigma'(N);$$

دو مجموع اخیر را اصطلاحاً مجموع جبری ارقام و مجموع جبری حدود سه‌رقمی عدد N می‌نامیم .

چون $10 \equiv 1 \pmod{9}$ می‌باشد، طبق آخرین قضیه‌ای که ذکر کردیم $f(10) \equiv f(1) \pmod{9}$ یا $N = \sigma(N) \pmod{9}$ می‌شود، یعنی باقیماندهٔ N بر ۹ برابر است با باقیماندهٔ $\sigma(N)$ بر ۹. به‌این ترتیب تنها وقتی N بر ۹ قابل‌قسمت است که $\sigma(N)$ بر ۹ قابل‌قسمت باشد.

به‌همین ترتیب ازهم‌نهشتی $10 \equiv -1 \pmod{11}$ می‌توان نتیجه گرفت: $f(10) \equiv f(-1) \pmod{11}$ یا $N = \sigma'(N) \pmod{11}$، درنتیجه‌وقتی عدد N بر ۱۱ قابل‌قسمت است‌که مجموع جبری ارقام‌آن بر ۱۱ قابل‌ـ قسمت باشد (و برعکس).

ازهم‌نهشتیهای $1000 = -1 \pmod{7}$، $1000 = - \pmod{11}$، $1000 = -1 \pmod{13}$، نتیجه می‌شود:

$$F(1000) \equiv F(-1) \pmod{7};$$
$$F(1000) \equiv F(-1) \pmod{11};$$
$$F(1000) = F(-1) \pmod{13}.$$

یا:
$$N = \Sigma'(N) \pmod{7};\ N = \Sigma'(N) \pmod{11};$$
$$N = \Sigma'(N) \pmod{13}.$$

یعنی وقتی N بر ۷ قابل قسمت است‌که مجموع جبری حدودسه‌رقمی آن بر ۷ قابل قسمت باشد (و برعکس)؛ به‌همین ترتیب می‌توان قاعدهٔ قابلیت تقسیم بر ۱۱ و ۱۳ را هم منظم‌نمود.

برای جستجوی قاعدهٔ قابلیت تقسیم یك‌عدد ازمبنای k بر $k-1$ و $k+1$ می‌توان شبیه روش فوق استدلال نمود: عدد N وقتی بر $k-1$ (یا $k+1$) قابل‌قسمت است‌که مجموع ارقام‌آن (یامجموع جبری‌ارقام آن)ـ وقتی‌که عدد N درمبنای k نوشته‌شده استـ بر $k-1$ (یا $k+1$)

قابل‌قسمت باشد. تنظیم استدلال دقیق‌را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

حالا قاعدهٔ قابلیت تقسیم بر۵ و بر۱۳ را در دستگاه عدد شماری به مبنای۸ ، قابلیت تقسیم بر۲ و بر۴ و بر۷ را در دستگاه عددشماری به مبنای۵ بدست‌آورید[13].

باکمك هم‌نهشتی،مسائلی‌ازقبیل نمونهٔ زیر به‌سادگی حل‌می‌شوند: مطلوبست باقیماندهٔ تقسیم عدد $N=13^{69}+48\times10^{50}$ را بر۱۷ بدست آورید. روشن است‌که باید کوچکترین عدد غیر منفی هم‌نهشت باN را نسبت به مدول ۱۷ بدست‌آورد ؛ بااستفاده از خواص هم‌نهشتی‌ها بدست می‌آید :

$$13^{69}+48\times10^{50}\equiv(-4)^{69}-3\times100^{25}\equiv$$
$$\equiv4\times16^{34}-3(-2)^{25}\equiv-4(-1)^{34}+6\times16^{6}\equiv$$
$$\equiv-4+6(-1)^{6}\equiv2\pmod{17},$$

بنابراین باقیماندهٔ مجهول برابراست با۲.

حالا با همین روش دو رقم آخر عدد های 293^{293} و 2^{1000} و $31^{31}+69^{69}$ را بدست‌آورید[14].

تابع اولر

تابع اولر $\varphi(n)$ (n عددی طبیعی است) به تعداد عددهائی گفته می‌شودکه کوچکتر ازn ونسبت به n اول باشند. حالا صحت جدول‌زیر را تحقیق‌کنید :

$n=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	36
$\varphi(n)=1$	2	2	4	2	6	4	6	4	4	8	12

مثلا $\varphi(10)=4$ است ، زیرا از عددهای کوچکتر از ۱۰، تنها

چهارعدد: ۱و۳و۷و۹ نسبت به ۱۰ اول‌هستند. ضمناً $\varphi(1)=1$ به‌حساب می‌آوریم.

به‌سادگی‌می‌توان ثابت‌کرد[۱۵] که اگر p عددی اول باشد، داریم:

$$\varphi(p)=p-1 \quad \text{و} \quad \varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}.$$

در نظریهٔ اعداد ثابت می‌کنند که اگر a و b نسبت بهم اول باشند $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ می‌شود. ازاینجا نتیجه می‌گیریم که اگر تساوی $n=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\cdots p_k^{\lambda}$، تجزیهٔ جزمی عدد n باشد، داریم:

$$\varphi(n)=\left(p_1^{\alpha}-p_1^{\alpha-1}\right)\left(p_2^{\beta}-p_2^{\beta-1}\right)\cdots\left(p_k^{\lambda}-p_k^{\lambda-1}\right) \quad (1)$$

گوس ثابت‌کردکه مجموع مقادیر تابع اولر، که ازهمهٔ مقسوم‌علیه‌های n بدست می‌آید، برابر است باخود عدد n، مثلا:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(5)+\varphi(10)=1+1+4+4=10$$

اولر ثابت‌کردکه همیشه برای دوعدد k و n که نسبت بهم اولند، داریم: $k^{\varphi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$؛ درحالت خاص برای عدد اول p، وقتی که a بر p قابل‌قسمت نباشد، $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$ می‌باشد (قضیهٔ‌کوچك فرما).

خواننده راراهنمائی می‌کنیم‌که ضمن مثالهای‌خاص‌صحت قضایای اولر، گوس وفرما وهمچنین رابطهٔ (۱) را تحقیق‌کند.

ازقضیهٔ اولرنتیجه می‌شودکه یك«هم‌نهشتی‌مجهول القوه» به‌صورت $k^z\equiv 1 \pmod{n}$، وقتی که k و n نسبت بهم اول باشند، حتماً جواب $z=\varphi(n)$ را قبول‌دارد؛ ولی ممکن است‌که این هم‌نهشتی به‌ازاء مقادیر

کوچکتر z هم صحیح باشد.

کوچکترین عدد طبیعی z_0 ، که در این هم‌نهشتی صدق می کند ، **توانی است که نسبت به‌مدول** n به‌k **تعلق دارد** می‌توان ثابت کرد[۱۶] که z_0 حتماً یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد $\varphi(n)$ است. مثلا برای بدست آوردن کوچکترین ریشهٔ هم‌نهشتی : $۶۰^z \equiv ۱ (mod\ ۱۷)$ ، باید همهٔ مقسوم علیه های عدد $۱۶ = \varphi(۱۷)$ را آزمایش کرد. چون داریم : $۶۰^z \equiv ۹^z\ (mod\ ۱۷)$ و $۹^۲ \equiv -۴ (mod\ ۱۷)$ و $۹^۴ \equiv (-۴)^۲ \equiv -۱ (mod\ ۱۷)$ و $۹^۸ \equiv ۱ (mod\ ۱۷)$ می‌باشد ، بنابراین ۶۰، به‌توان ۸ نسبت به مدول ۱۷ تعلق دارد .

اگر کسر غیرقابل تحویل $\frac{m}{n}$ را به‌صورت‌کسر ترتیبی درمبنای k تبدیل‌کنیم (n و k نسبت بهم اولند) ، تعداد ارقام دورهٔ تناوب این کسر برابر است[۱۷] با توان z_0 که به k نسبت به‌مدول n تعلق‌دارد. مثلااگر $\frac{۱}{۱۷}$ را درمبنای ۶۰ به‌صورت‌کسر ترتیبی تبدیل‌کنیم، برای دورهٔ تناوب آن یك‌عدد ۸رقمی خواهیم داشت. ۱را بر۱۷ درمبنای ۶۰ تقسیم‌کنید ، چنین می‌شود :

$$\frac{۱}{۱۷} = ۰/(۳\ \overline{۳۱}\ \overline{۴۵}\ \overline{۵۲}\ \overline{۵۶}\ \overline{۲۸}\ \overline{۱۴}\ ۷)_{(۶۰)}$$

ازهمین راه تعداد ارقام دورهٔ تناوب‌کسرهای اعشاری،که باکسرهای متعارفی $\frac{۱}{۷}$ ، $\frac{۱}{۱۳}$ ، $\frac{۴}{۱۳}$ ، $\frac{۶}{۱۳}$ و $\frac{۲}{۱۹}$ معادل‌اند ، پیداکنید و صحت نتیجه‌را ازراه تقسیم مستقیم بر۷، بر۱۳ وبر۱۹ تحقیق کنید.

۴

کسرهای مسلسل ومعادلات سیال

هرعدد مثبت و گویای $\frac{a}{b}$ (a و b اعدادی طبیعی هستند) می‌تواند به صورت **کسر مسلسل** نوشته شود.

فرض‌کنید در تقسیم a بر b ، به‌عنوان‌خارج قسمت $q_0=\left[\frac{a}{b}\right]$ و به عنوان باقیمانده r_1، بدست‌آید؛ همچنین در تقسیم b بر r_1 ، خارج -

قسمت q_1 وباقیماندهٔ r_2 ؛ درتقسیم r_1 بر r_2، خارج‌قسمت q_2 وباقیماندهٔ r_3 وغیره‌را داشته باشیم. مسلماً پس‌ازیك رشته عملیات r_{n-1} بر r_n قابل قسمت خواهد بود $\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n\right)$.

در نظریهٔ اعداد ثابت می‌کنند که $r_n=(a,b)$ می‌باشد* . روش جستجوی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعدد به‌کمك تقسیمهای متوالی را **آلگوریتم اقلیدس** گویند.

معمولا تقسیمها را یکجا وبه‌صورت «یك‌پارچه» می‌نویسند :

$$
\begin{array}{r|l}
a & \underline{b} \\
\underline{bq_0} & q_0 \\
b & \underline{r_1} \\
\underline{q_1r_1} & q_1 \\
r_1 & \underline{r_2} \\
\underline{q_2r_2} & q_2 \\
r_2 & \underline{r_3} \\
\vdots & \\
r_{n-1} & \underline{r_n} \\
\underline{q_nr_n} & q_n \\
0 &
\end{array}
$$

و واضح است‌که داریم :

---

۱) منظور از (a , b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین دو عدد a و b است .

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b}=q_0+\frac{1}{\frac{b}{r_1}}=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{r_2}{r_1}}=$$

$$=q_0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}=\dots=$$

$$=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\dots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}}}$$

واین همان‌کسر مسلسل مورد نظراست. کسرمسلسل فوق‌را اغلب به‌صورت زیر می‌نویسند :

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{1}{q_1+}\frac{1}{q_2+}\frac{1}{q_3+}\cdots+\frac{1}{q_{n-1}+}\frac{1}{q_n}$$

کـه در حقیقت هرکدام از عددهای ۱ باید بر تمـام عبارتی‌که زیر آن قرارگرفته است تقسیم شود. راحت‌تر است که‌کسر مسلسل را به صورت قراردادی زیر نشان دهیم:

$$\frac{a}{b}=[q_0,q_1,q_2,\cdots,q_{n-1},q_n],$$

که در آن فقط به نوشتن خارج قسمتهای جزئی $q_۰$، $q_۱$، $q_۲$، $\cdots$، $q_{n-۱}$ و q_n اکتفاشده است. مثلا :

$$\frac{۱۷۳}{۳۹}=۴+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۳+\cfrac{۱}{۲+\cfrac{۱}{۲}}}}=[۴,۲,۳,۲,۲]$$

زیرا داریم :

$$\begin{array}{r|l} ۱۷۳ & ۳۹ \\ \hline ۱۵۶ & ۴ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} ۳۹ & ۱۷ \\ \hline ۳۴ & ۲ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} ۱۷ & ۵ \\ \hline ۱۵ & ۳ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} ۵ & ۲ \\ \hline ۴ & ۲ \end{array}\qquad \begin{array}{r|l} ۲ & ۱ \\ \hline ۲ & ۲ \\ \hline ۰ & \end{array}$$

اگر کسررا در k امین خارج‌قسمت جزئی قطع کنیم و کسرمسلسل کوتاه‌شدهٔ $[q_۰,q_۱,\cdots,q_{k-۱},q_k]$ را به‌کسر متعارفی تبدیل کنیم، گویند k امین **کسر متقارب** $\frac{P_k}{Q_k}$ را بدست‌آورده‌ایم . واضح است‌که $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{a}{b}$ می‌باشد .

کسرهای متقارب دارای یك‌رشته خواص مهم می‌باشند:

خاصیت ۱. صورت ومخرج سه‌کسرمتقارب متوالی به‌وسیلهٔ زوابط

برگشتی زیر بهم مربوط‌اند :

$$P_{k+۱}=P_k\, q_{k+۱}+P_{k-۱}\,;\ Q_{k+۱}=Q_k\, q_{k+۱}+$$
$$+Q_{k-۱}\,, \qquad (۱)$$

باکمك این روابط وبادردست‌داشتن خارج‌قسمتهای جزئی، می‌توان بدون زحمت کسرهای متقارب را محاسبه‌کرد.

برای کسر $\frac{۱۷۳}{۳۹}$ اگر $\frac{P_۰}{Q_۰}=۴=\frac{۴}{۱}$ و $\frac{P_۱}{Q_۱}=۴+\frac{۱}{۲}=\frac{۹}{۲}$ را محاسبه کنیم ، به‌کمك روابط (۱) می‌توان بقیهٔ کسرهای متقارب را بدست‌آورد. نتیجهٔ این محاسبه‌را درجدول زیر نشان داده‌ایم:

۰	۰	۱	۲	۳	۴
q_k	۴	۲	۳	۲	۲
P_k	۴	۹	۳۱	۷۱	۱۷۳
Q_k	۱	۲	۷	۱۶	۳۹

مثلا داریم :

$$P_۲=P_۱q_۲+P_۰=۹\times۳+۴=۳۱,$$
$$Q_۲=Q_۱q_۲+Q_۰=۲\times۳+۱=۷\ ,$$

خاصیت ۲. نامساویهای زیرهمیشه برقرار است:

$$\frac{P_۰}{Q_۰}<\frac{P_۲}{Q_۲}<\frac{P_۴}{Q_۴}<\dots<\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}<\dots<\frac{P_۵}{Q_۵}<\frac{P_۳}{Q_۳}<\frac{P_۱}{Q_۱}$$

خاصیت ۳. به‌ازاء هرمقدار k داریم :

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^{k-1}}{Q_kQ_{k-1}} \quad (2)$$

ویا :

$$P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}=(-1)^{k-1} \quad (3)$$

ازاینجا نتیجه می‌شودکه $(P_k,Q_k)=1$، زیرا در غیر اینصورت (یعنی به ازاء $(P_k,Q_k)>1$) عبارت $P_kQ_{k-1}-Q_kP_{k-1}$ که مساوی $(-1)^{k-1}$ است نمی‌تواند برعدد (P_k,Q_k) قابل‌قسمت باشد.

اگر $(a,b)=1$ باشد، ازتساوی $\frac{a}{b}=\frac{P_n}{Q_n}$ نتیجه می‌شود $a=P_n$ و $b=Q_n$ واز رابطهٔ (۳) به‌ازاء $k=n$ خواهیم داشت:

$$aQ_{n-1}-bP_{n-1}=(-1)^{n-1} \quad (4)$$

تساوی (۴) کلید حل معادلات سیال درجه اول (برای پیداکردن جوابهای صحیح‌آن) به‌صورت زیراست :

$$ax+by=c \qquad (5)$$

که درآن a وb وc عددهائی صحیح وضمناً $(a,b)=1$ است.

درحقیقت ، رابطهٔ (۴) را می‌توان به‌این‌صورت نوشت :

$$a(-1)^{n-1}cQ_{n-1}+b(-1)^{n}cP_{n-1}=c\,,$$

وواضح استکه عددهای

$$x_0=(-1)^{n-1}cQ_{n-1}\,,\ y_0=(-1)^{n}cP_{n-1} \quad (6)$$

یکی‌از ریشه‌های صحیح‌معادلهٔ(۵) است . به‌سادگی ثابت می‌شود[۱۸] که :

۱) تمام بقیهٔ جوابهای معادلهٔ (۵) از(۶) وطبق روابط زیر بدست می‌آید :

$$x=x_{\circ}+bt;\quad y=y_{\circ}-at$$

(t عدد صحیح دلخواهی است).

۲) معادلهٔ $ax+by=c$، وقتی‌که $(a,b)>1$ و c غیرقابل قسمت بر (a,b) باشد، دارای جواب صحیح نیست (اگر c بر (a,b) قابل‌قسمت باشد، می‌توان همهٔ جملات‌معادلهٔ(۵)را به (a,b) ساده‌کرد، دراینصورت به معادلهٔ $a'x+b'y=c'$ می‌رسیم‌که درآن $(a',b')=1$ است) .

آنچه راکه‌گفتیم ضمن یك‌مثال روشن می‌کنیم.

دریك قوطی، که پرازعنکبوت وخزوك است ، رویهم ۳۸پا دیده می‌شود. چند عنکبوت (x) وچند خزوك (y) درقوطی است؟ به شرطی که عنکبوت ۸ وخزوك۶پا دارد.

داریم: $8x+6y=38$ یا $4x+3y=19$. دراینجا $a=4$، $b=3$ و $c=19$ است. برای کسرمسلسل $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$ داریم: $\frac{P_{\circ}}{Q_{\circ}}=\frac{1}{1}$ و $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{4}{3}$.

بنابراین :

$$x_{\circ}=(-1)^{1-1}\times 19\times 1=19;$$
$$y_{\circ}=(-1)^{1}\times 19\times 1=-19$$

وازآنجا :

$$x=19+3t\;;\; y=-19-4t$$

در این مسئله تنها جوابهای غیر منفی x و y مورد توجه ماست ،

یعنی باید داشته باشیم:

$$۱۹+۳t\geqslant ۰ \quad , \quad -۱۹-۴t\geqslant ۰$$

که ازآنجا بدست می‌آید :

$$-\frac{۱۹}{۳}\leqslant t\leqslant -\frac{۱۹}{۴}$$

به‌ازاء $t=-۵$ داریم: $x_۱=۴$ و $y_۱=۱$ (چهار عنکبوت و یك خزوك) و به‌ازاء $t=-۶$ داریم: $x_۱=۱$ و $y_۱=۵$ (یك عنکبوت و پنج خزوك) .

روش دیگری برای‌حل معادلهٔ (۵) ذکر می‌کنیم . این معادله را به‌صورت $ax-c=-by$ می‌نویسیم. واضح است‌که باید مقادیر x را چنان پیدا کرد که به ازاء آنها تفاضل $ax-c$ بر b قابل‌قسمت باشد ، یعنی :

$$ax\equiv c(mod\, b) \qquad (۷)$$

که $x\equiv ca^{\varphi(b)-۱}(mod\, b)$ درآن‌صدق‌می‌کند. درحقیقت‌اگر این‌مقدار را درهم نهشتی(۷) قرار دهیم (با توجه به‌قضیهٔ اولر) بدست می‌آید :

$$\cdot aca^{\varphi(b)-۱}\equiv c\cdot ۱(mod\, b)$$

مثلا برای معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ داریم:

$$x\equiv ۱۹\times ۴^{\varphi(۳)-۱}(mod ۳)\equiv ۱\times ۱^{۲-۱}(mod ۳)$$

ویا : $x=۱+۳s$

که ازآنجا بدست می‌آید :

$$y=۵-۴s$$

به‌ازاء $s=۰$ بدست می‌آید : $x_۱=۱$ ، $y_۱=۵$ وبه ازاء $s=۱$

بدست می‌آید : $x_{۲}=۴$ ، $y_{۲}=۱$.

معادلات سیال زیررا باهریك ازروشهای فوق حل‌کنید :

$$۱)\quad ۶۱۷x-۱۲۵y=۹۱$$

$$۲)\quad ۱۲x+۳۱y=۱۷۰$$

*

هر عدد گنگ α راهم می‌توان به صورت یك کسرمسلسل نشان داد قسمت صحیح α را جدا می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$\alpha=q_{۰}+\frac{۱}{\alpha_{۱}}\ (q_{۰}=[\alpha]\ ,\ \frac{۱}{\alpha_{۱}}<۱ \text{ و } \alpha_{۱}>۱);$$

وسپس :

$$\alpha_{۱}=q_{۱}+\frac{۱}{\alpha_{۲}}\ (q_{۱}=[\alpha_{۱}]\ ,\ \alpha_{۲}>۱);$$

$$\alpha_{۲}=q_{۲}+\frac{۱}{\alpha_{۳}}\ (q_{۲}=[\alpha_{۲}]\ ,\ \alpha_{۳}>۱);\ldots$$

بعدازآنکه این عمل‌را n بار تکرارکنیم ، بدست می‌آید :

$$\alpha=[q_{۰},q_{۱},\cdots,q_{n-۱}\ ,\ \alpha_{n}];$$

و چون به ازاء هر مقدار n ، مقدار α_{n} گنگ است ، این دوره هرگز تمام‌نمی‌شود و به‌همین علت‌آنرا **کسر مسلسل نامحدود** می‌نامیم :

$$\alpha=[q_{۰},q_{۱},q_{۲},\cdots,q_{n-۱},q_{n},\cdots]$$

وقتی‌که بارادیکالی‌ازریشهٔدوم‌سروکارداشته‌باشیم، یعنی‌داشته باشیم: $\alpha=\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ (a، b، c و d عددهائی صحیح هستند) ، مقسوم علیه‌های جزئی، بعداز تعدادی عمل، یك‌دور تناوبی پیدامی‌کنند، مثلا:

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{3}-1}{2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}=$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\frac{1}{1}+\cfrac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}$$

و چون داریم : $\alpha_1=\sqrt{3}-1=\alpha_3$ ؛ از این ببعد ، مقسوم علیه های جزئی متناوباً تکرار می‌شوند .

درحقیقت داریم :

$$\sqrt{3}=[1,1,2,1,2,1,2,\cdots];$$

بهمین‌ترتیب می‌توان بدست‌آورد :

$$\sqrt{5}=[2,4,4,\cdots],$$
$$\sqrt{7}=[2,1;1,1,4,1,1,1,4,1,1,\cdots].$$

تمام خواصی راکه درموردکسرهای متقارب ذکرکردیم ، درمورد کسرهای مسلسل نامحدود هم صحیح است ، همین امر اجازه می‌دهد که بتوانیم مقادیرتقریبی اعدادگنگ را، باتقریب دلخواه، ازروی‌کسرهای مسلسل، بامحاسبهٔ مقدارکافی از مقسوم‌علیه‌های جزئی، محاسبه‌کنیم .

درحقیقت، طبق‌خاصیت دوم‌کسرهای متقارب، مقدار α بین‌مقادیر دوکسر متقارب متوالی $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ و $\frac{P_k}{Q_k}$ واقع‌است. ولی‌قدر مطلق‌این‌تفاضل

برابر است با $\frac{۱}{Q_{k-۱}Q_k}$ (خاصیت سوم). بنابراین خطای تساوی تقریبی $\alpha \# \frac{P_{k-۱}}{Q_{k-۱}}$ از $\frac{۱}{Q_{k-۱}Q_k}$ کمتر است . مثلا برای

$$\sqrt{۵}=[۲،۴،۴،۴،\ldots]$$

داریم :

k	۰	۱	۲	۳	۴ …
q_k	۲	۴	۴	۴	۴ …
P_k	۲	۹	۳۸	۱۶۱	۶۸۲ …
Q_k	۱	۴	۱۷	۷۲	۳۰۵ …

بنابراین $\sqrt{۵} \# \frac{۳۸}{۱۷}$ (باخطای کمتر از $\frac{۱}{۱۷\times۷۲}$) و $\sqrt{۵} \# \frac{۱۶۱}{۷۲}$ (باخطای کمتر از $\frac{۱}{۷۲\times۳۰۵}$) وغیره .

مطلوبست[۱۹] کسرهای متقارب متناظر با $\sqrt{۲}=[۱,۲,۲,\ldots]$ و $\sqrt{۳}=[۱,۱,۲,۱,۲,\ldots]$، بطوریکه اختلاف آنها با $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ از $۱۰^{-۶}$ کوچکتر باشد .

تبدیل $\sqrt{m}$ به کسر مسلسل طریقهٔ سادهای برای جستجوی ریشههای صحیح معادلاتی که بهصورت زیر باشند، میدهد :

$$x^۲-my^۲=۱ \qquad (۸)$$

فرض کنید داشتهباشیم:

$$\sqrt{m}=[q_۰,\underline{q_۱,q_۲,\cdots,q_{s-۱},q_s}q_۱,q_۲,\cdots]$$

(آنچه را که زیر آن خط کشیده‌ایم ، دورهٔ تناوب کسر مسلسل را نشان می‌دهد) .

وقتی‌که s عددی زوج‌باشد. جوابهای معادلهٔ(۸)، عددهای دوگانهٔ زیر هستند :

$$(P_{s-۱},Q_{s-۱}),(P_{۲s-۱},Q_{۲s-۱}),(P_{۳s-۱},Q_{۳s-۱}),\dots$$

ووقتی‌که s عددی فرد باشد، عددهای دوگانهٔ زیر:

$$(P_{۲s-۱},Q_{۲s-۱}),(P_{۴s-۱},Q_{۴s-۱}),(P_{۶s-۱},Q_{۶s-۱}),\dots$$

مثلا برای $\sqrt{۱۰}=[۳,۶,۶,۶,\dots]$ داریم:

k	۰	۱	۲	۳ ...
q_k	۳	۶	۶	۶ ...
P_k	۳	۱۹	۱۱۷	۷۲۱ ...
Q_k	۱	۶	۳۷	۲۲۸ ...

چون در اینجا ۱ = s می‌باشد ، بنابراین جوابهای معادلهٔ $x^۲-۱۰y^۲=۱$ چنین خواهد بود :

$$\begin{array}{l|l} x_۱=P_۱=۱۹ & x_۲=P_۳=۷۲۱ \\ y_۱=Q_۱=۶ & y_۲=Q_۳=۲۲۸ \end{array} ;\dots$$

برای $\sqrt{۳۲}=[۵,۱,۱,۱,۱۰,۱,۱,\dots]$ داریم :

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
q_k	۵	۱	۱	۱	۱۰	۱	۱	۱
P_k	۵	۶	۱۱	۱۷	۱۸۱	۱۹۸	۳۷۹	۵۷۷
Q_k	۱	۱	۲	۳	۳۲	۳۵	۶۷	۱۰۲

چون $s=۴$ است ، جوابهای معادلهٔ $x^۲-۳۲y^۲=۱$ چنین می‌شود :

$$\left|\begin{array}{l} x_۱=P_۳=۱۷ \\ y_۱=Q_۳=۳ \end{array}\right. ; \left|\begin{array}{l} x_۲=P_۷=۵۷۷ \\ y_۲=Q_۷=۱۰۲ \end{array}\right. ;\ldots$$

حالا باتوجه به‌اینکه داریم:

$$\sqrt{۸۹}=[۹,\underline{۲,۳,۳,۱۸},۲,۳,\ldots]\text{،}$$

$$\sqrt{۶۱}=[۷,\underline{۱,۴,۳,۱,۲,۲,۱,۳,۴,۱,۱۴},۱,۴,۳,\ldots]$$

ثابت کنید که کوچکترین جوابهای صحیح معادلات $x^۲-۸۹y^۲=۱$ و $x^۲-۶۱y^۲=۱$ بترتیب (۵۳۰۰۰ و ۵۰۰۰۰۱) و (۲۲۶ ۱۵۳ ۹۸۰ و ۱ ۷۶۶ ۳۱۹ ۰۴۹) می‌باشد.

سرپینسکی ریاضی‌دان لهستانی، دریکی ازمقاله‌های خودکوچکترین جواب معادلهٔ $x^۲-۹۹۱y^۲=۱$ را حساب کرده است، این جواب چنین است :

$$\left|\begin{array}{l} x_۱=۳۷۹\ ۵۱۶\ ۴۰۰\ ۹۰۶\ ۸۱۱\ ۹۳۰\ ۶۳۸\ ۰۱۴\ ۸۹۶\ ۰۸۰ \\ y_۱=\ ۱۲\ ۰۵۵\ ۷۳۵\ ۷۹۰\ ۳۳۱\ ۳۵۹\ ۴۴۷\ ۴۴۲\ ۵۳۸\ ۷۶۷ \end{array}\right.$$

واین به‌معنای آنست که $\sqrt{۹۹۱y^۲+۱}$ به‌ازاء هرمقداردلخواه y، که از

y_1 تجاوز نکند، عددی است گنگ و به ازاء $y=y_1$، عددگویای x_1 بدست می‌آید.

برای اینکه به‌عظمت‌عددهای x_1وy_1 درمثال‌اخیر پی‌ببریم،متذکر می‌شویم‌که اگر درجریان یك‌میلیاردمیلیارد (10^{18}) سال به‌محاسبهٔ‌مقدار $\sqrt{991y^2+1}$ به‌ازاء $y=1,2,3,4,\ldots$ مشغول باشیم وفرض‌کنیم که درهر ثانیه یك‌عمل انجام‌دهیم، به‌حالتی‌که $\sqrt{991y^2+1}$ عددی‌گویا باشد، نمی‌رسیم.

باوجود این نمی‌توان حکم کردکه $\sqrt{991y^2+1}$ به‌ازاء همهٔ مقادیر طبیعی y، عددی است‌گنگ: اگر مدت‌آزمایش را تقریباً ۴۰۰ بار زیادکنیم، به y_1می‌رسیم‌که‌درآنصورت‌حاصل $\sqrt{991y_1+1}$ عددی است‌گویا!

مسئلهٔ‌دیگری‌را مورد مطالعه قرار می‌دهیم‌که منسوب‌به **ارشمیدس** است ودرآخرکار به‌معادلهٔ ازنوع (۸) منجر می‌شود.

در متنی که در اواخر قرن هیجدهم پیدا شد، گفته می‌شود که گویا ارشمیدس به یك رسالهٔ قدیمی بر می‌خورد و مسئله‌ای راکه درآن وجود داشته است برای ریاضی‌دانهای اسکندریه می‌فرستد.

درمسئله باید تعدادگاوهای نروماده متعلق به‌الههٔ خورشیدرا معین کرد. ازقسمت‌اول مفروضاتی‌که به‌صورت شعربرای مسئله داده شده‌است، برمی‌آیدکه گله ازگاوهای سفید، سیاه، خرمائی وچندرنگ تشکیل‌شده است. ضمناً تعداد گاوهای مختلف نر (U,X,Y,Z) و گاوهای مختلف ماده (u,x,y,z) باروابط زیر بهم مربوط می‌شوند:

$$U=\frac{5}{6}X+Y\ ;\ X=\frac{9}{20}Z+Y\ ;\ Z=\frac{13}{42}U+Y$$

$$u=\frac{۷}{۱۲}(X+x)\ ;\ x=\frac{۹}{۲۰}(Z+z)\ ;\ z=\frac{۱۱}{۳۰}(Y+y)\cdot$$

$$y=\frac{۱۳}{۴۲}(U+u)\cdot$$

کسانی که علاقمند باشند، می‌توانند از اینجا روابط زیر را بدست آورند[۲۰] :

$$U=۱۰\ ۳۶۶\ ۴۸۲t,\qquad u=۷\ ۲۰۶\ ۳۶۰t,$$

$$X=۷\ ۴۶۰\ ۵۱۴t,\qquad x=۴\ ۸۹۳\ ۲۴۶t,$$

$$Y=۷\ ۳۵۸\ ۰۶۰t,\qquad y=۳\ ۵۱۵\ ۸۲۰t,$$

$$Z=۴\ ۱۴۹\ ۳۸۷t,\qquad z=۵\ ۴۳۹\ ۲۱۳t\cdot$$

(t عدد دلخواه صحیحی است).

ولی درقسمت دوم متن مسئله ، که به‌حل مسئله می‌پردازد، متذکر می‌شود که اشکال عمدهٔ مسئله ناشی ازشرایط اضافی آنست :

«اگر توبتوانی همهٔ گله‌ای راکه آنجا جمع‌شده است، حساب کنی،
«بدانی که چندگاو پرگوشت در سبزه‌زار می‌چرد،
«چندگاو شیرده واز هررنگ چندگاو ،
«دیگر هیچکس ترا درشمارافراد نادان به‌حساب نخواهدآورد ،
«ولی ضمناً ترا خردمند هم نخواهند شناخت .
«زیرا هنوز عادتهای مختلف گاوهای نر را حساب نکرده‌ای».

پس ازآنکه درمتن اصلی، عادتهای گاوهای نررا نام‌می‌برد، درپایان مسئله می‌گوید :

«اگر توانستی همه اینهارا پیداکنی وبایك نظر،
«اندازهٔ گله را بدست‌آوری وبه دیگران عرضه‌کنی،
«باغرور جلوبرو وبه پیروزی بزرگ خود ببال،

«بدان که باامتیازاولین خردمند هستی» .

ولی اگر بخواهیم عادتهای گاوهای نر را به حساب بیاوریم ، در روابط قبلی باید t را چنان انتخاب کنیم که :

۱) مجموع $U+X$ ، که مساوی $17\ 826\ 996t$ می‌باشد ، باید مربع کامل باشد، برای این منظور باید $t=4\ 456\ 749s^2$ بگیریم که در آن s عدد طبیعی دلخواهی است.

۲) مجموع $Y+Z$ ، که مساوی $11\ 507\ 447t$ می‌باشد ، باید مساوی «یك عدد مثلثی» یعنی عددی به‌صورت $\frac{n(n+1)}{2}$ باشد .

اگر بجای t مقدار بالارا قرار دهیم، به‌معادله زیر می‌رسیم :

$$51\ 285\ 803\ 909\ 803s^2=\frac{n(n+1)}{2}$$

اگر طرفین این‌تساوی را در ۸ ضرب‌کنیم، سپس به‌دوطرف تساوی یك‌واحداضافه‌نمائیم و $2n+1$ را w بنامیم، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم :

$$w^2-410\ 286\ 423\ 278\ 224\ s^2=1$$

اگر تعدادهمهٔ گاوهای گله را N فرض کنیم(کمترین مقدارممکنهٔ آ نرا) وقتی که شرایط اضافی‌را هم در نظر بگیریم بدست می‌آید (طبق محاسبهٔ **آمتور** درسال ۱۸۸۰) :

$$N\#77\times10^{206543}$$

آیا خواننده در ردیف کسانی هست که «بایك‌نظر اندازهٔ گله را بدست‌آورد وبه دیگران عرضه‌کند» .

۵

عددهای فیثاغورثی وعددهای هرونی

رابطهٔ مشهور بین وتر و اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه در مثلث قائم‌الزاویه ، یعنی $x^2+y^2=z^2$ را می‌توان به عنوان یك معادلهٔ سیال باسه مجهول در نظر گرفت .

به سادگی می‌توان ثابت کرد که هر سه عددی راکه دو به‌دو نسبت بهم اول باشند ودر این معادله‌هم صدق کنند، می‌توان از روابط زیر بدست

آورد* :

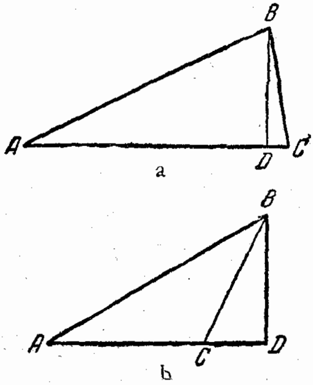
$$\begin{cases} x=u^{2}-v^{2} \\ y=2uv \\ z=u^{2}+v^{2} \end{cases}$$

وقتی‌که برای متغیرهای کمکی u وv، عددهائی‌که نسبت بهم‌اولند درنظر بگیریم، عددهای سه‌گانهٔ فیثاغورثی بدست می‌آید. (درحالتی‌که u وv نسبت بهم اول نباشند ومثلا $u=d\cdot u'$ و $u=d\cdot v'$ باشد (u' و v' نسبت بهم اولند)، مقادیر x وy وz، دارای بزرگترین مقسوم علیه مشترکی مساوی d^{2} خواهند بود). مثلا :

u	v	x	y	z
۲	۱	۳	۴	۵
۴	۱	۱۵	۸	۱۷
۳	۲	۵	۱۲	۱۳
۴	۳	۷	۲۴	۲۵
۵	۲	۲۱	۲۰	۲۹
۳	۱	۸	۶	۱۰

عددهای فیثاغورثی در حالت خاص به «عددهای هرونی» تبدیل می‌شوند. عددهای‌هرونی به‌سه‌عدد صحیحی گویندکه بتوانند اضلاع‌مثلثی باشندکه‌مساحت‌آن باعددی‌صحیح بیان‌شود. به‌سادگی ثابت‌می‌شود[۲۱] که‌هر ارتفاع «مثلث‌هرون» (BD درشکل۳) ،دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABDو BDC

*) برای توضیح بیشتر در این مورد ، مثلا به‌کتاب «سرگرمیهای جبر» تألیف «یاکوب پرلمان» ، ترجمهٔ «پرویز شهریاری» صفحهٔ ۱۸۶ مراجعه کنید (انتشارات یکان ــ چاپ اول ــ ۱۳۴۶) .



شکل ۳

به‌وجود می‌آورد که مجاور هم ویا یکی درداخل دیگری قرار گرفته و اضلاع آنها عددهائی گویا است.

دومثلث قائم‌الزاویه Δ و Δ' در نظر می‌گیریم که اضلاع a، b، c و a'، b، c' آنها عددهائی صحیح باشند (c و c' وترهای دو مثلث هستند).

اضلاع مثلث Δ را در $\frac{a'}{a}$ ضرب می‌کنیم، مثلث Δ_1 با اضلاع به‌طول a'، $\frac{ba'}{a}$، $\frac{ca'}{a}$ بدست می‌آید که با مثلث Δ متشابه است.

اگر دومثلث قائم‌الزاویهٔ Δ_1 و Δ' را مجاور همچنان قرار دهیم که ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ مشترک آنها برهم منطبق باشد، دومثلث با اضلاع گویا: $\frac{a'}{a}c$، c'، $\left|\frac{a'}{a}b \pm b'\right|$ بدست می‌آید، که اگر همهٔ آنها را a برابر کنیم دوجواب برای عددهای هرونی بدست می‌آید:

$$a'c,\ ac',\ |a'b \pm b'a|.$$

به‌همین ترتیب بامعادل‌کردن ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ a باضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه b' (اضلاع مثلث Δ را در $\frac{b'}{a}$ ضرب می‌کنیم)، یامعادل کردن b با a' (با ضرب در $\frac{b'}{a}$)، یا معادل‌کردن b و b' (با ضرب در $\frac{b'}{b}$)، می‌توان شش جواب دیگر برای عددهای هرونی بدست‌می‌آورد:

$$a'c,\ bc',\ |a'a \pm b'b|\ ;\ b'c,\ ac',\ |b'b \pm a'a|\ ;$$
$$b'c,\ bc',\ |b'a \pm a'b|.$$

مثلا به ازاء عددهای فیثاغورثی (۳،۴،۵) و (۱۵،۸،۱۷)، اگر با روشی که ذکر کردیم عمل کنیم، ۸جواب زیر برای عددهای هرونی بدست می آید :

(۷۵,۵۱,۸۴):(۷۵,۵۱,۳۶);(۷۵,۶۸,۷۷);(۷۵,۶۸,۱۳);
(۴۰,۵۱,۷۷);(۴۰,۵۱,۱۳):(۴۰,۶۸,۸۴);(۴۰,۶۸,۳۶).

اگر دوجواب اول را به۳ ودوجواب آخررا به۴ ساده کنیم بدست می آید :

(۲۵,۱۷,۲۸);(۲۵,۱۷,۱۲);(۱۰,۱۷,۲۱);(۱۰,۱۷,۹).

بااستفاده از عددهای فیثاغورثی زیر، عددهای هرونی مربوطه را بدست آورید[۲۲] :

۱) (۳,۴,۵) و (۵,۱۲,۱۳);

۲) (۷,۲۴,۲۵) و (۷,۲۴,۲۵).

٦

سرگرمیهائی ازحساب

مسائلی درحساب پیدا می‌شود که راه‌حل‌کلی برای آنها وجودندارد و به نظریهٔ خاصی مربوط نیستند . و تنها تیزهوشی و حوصله برای حل آنها لازم است .

مثلاجستجوی روابط جالب بین‌اعداد، وجود عجایب عددی‌مختلف وغیره را می‌توان ازاین ردیف مسائل دانست .

نمونه‌هائی از اینگونه مسائل را ذکر می‌کنیم:

۱. بین‌ارقام: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹، بدون‌اینکه جای آنهارا تغییر دهید، علامتهائی از اعمال حساب و (اگر لازم است) پرانتزهائی چنان قراردهیدکه نتیجهٔ محاسبهٔ آن برابربا عدد N، که ازقبل معین‌شده است، بشود. مثلا برای $N=\frac{۱}{۲}$ و $N=۱$ داریم:

$$(۱۲۳-۴۵):(۶۷+۸۹)=\frac{۱}{۲};$$
$$۱+۲-۳+۴-۵-۶+۷-۸+۹=۱;$$
$$۱+۲۳-۴۵-۶۷+۸۹=۱;\ \ldots$$

می‌توان روابط ویاروشهائی‌پیداکردکه به‌کمك‌آنها بتوان یك‌رشته عدد طبیعی ویاکسری را بدست‌آورد (مثلاکسر به‌صورت $\frac{k}{۵}$ را که درآن $k=۱,۲,۳,\ldots$ می‌باشد). برعکس می‌توان عددمشخصی به‌عنوان‌نتیجه درنظرگرفت وانواع مختلف تبدیلات‌را جستجوکرد.

همچنین می‌توان مسئله‌را محدود به‌استفاده ازعلامتهای + و − کرد، یااینکه مثلا بااضافه‌کردن علامت رادیکال تغییر جای ارقام مانعی نداشته باشد، مثلا برای بدست‌آوردن عدد ۱۰۰ بتوانیم بنویسیم:

$$۶۷^{۲}-۴۳۸۵-۱-\sqrt{۹}=۱۰۰;\ldots$$

۲. بجای هر(−) یکی‌از ارقام(۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹) را چنان قرار دهیدکه‌بعداز انجام عمل‌تساوی برقرار باشد (ازهررقم بایداستفاده شودورقم تکراری وجود نداشته باشد):

a) $--\times---=----$ (مثلا $۱۲\times۴۸۳=۵۷۹۶$).

b) $---\times--=---\times--$

c) $----\times-=---\times--$

۳. ارقام(۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹)را چنان‌منظم‌کنیدکه حاصلضرب سه‌عدد سه‌رقمی — — — × — — — × — — — حداکثر (یاحداقل) مقدار ممکن باشد.

۴. ارقام (۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹) را چنان قرار دهید که داشته باشیم :

$$n = - - - - - \div - - - - -$$

که درآن n مساوی یکی‌از عددهای ۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ باشد.

۵. بعضی‌عددهارا می‌توان به‌صورتهای دیگری نوشت، بدون‌اینکه احتیاج به ارقام جدیدی باشد، مثلا:

$$۶۶۰ = ۶! - ۶۰ \; ;$$

$$۱۳۹۵ = ۱۵ \times ۹۳ \; ;$$

$$۱۴۵ = ۱! + ۴! + ۵! \; ;$$

$$۱۴۴ = (۱+۴)! + ۴! = (۱+\sqrt{۴})! \times ۴! \; ;$$

$$۳۸۷\,۴۲۰\,۴۸۹ = ۳^{۸۷+۴۲۰-۴۸۹}$$

کوشش‌کنید عددهای دیگری ازاین قبیل‌را بدست‌آورید .

۶. هربار یکی‌از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶ را بکار ببرید وازهریك از اعمال: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم‌وتوان یکباراستفاده‌کنید، بطوریکه حاصل حداکثر مقدار ممکن بشود.

۷. در عبارت ۹ : ۸ : ۷ : ۶ : ۵ : ۴ : ۳ : ۲ : ۱ پرانتزهائی چنان قرار دهید که بعدازمحاسبه ، حداکثر (یا حداقل) مقدار ممکن بدست‌آید .

$$۴۱۰۹۶ \times ۸۳ = ۳۴۱۰۹۶۸$$

$$۸ \times ۸۶ = ۶۸۸$$

درهر دومورد یکی‌از عوامل ضرب عددی است دورقمی‌که برای بدست‌آوردن حاصلضرب‌کافی است رقم سمت راست این‌عامل رادرسمت چپ و رقم سمت چپ آنرادرسمت راست عامل دیگر قرار دهیم.

نمونه‌های دیگری ازاین‌قبیل پیداکنید.

۹ . درمقالهٔ یك روزنامه‌گفته شده است‌که بین عددهای کوچکتر از ده‌هزار، تنها هشت‌عدد وجود داردکه می‌توان هر یك ازآنهارا در دو مبنای شمار باسه‌رقم مساوی نوشت.

کوچکترین وبزرگترین این‌عددها چنین است :

$$۲۷۳ = ۱۱۱_{(۱۶)} = ۳۳۳_{(۹)} \quad ;$$

$$۹۱۱۴ = ۲۲۲_{(۶۲)} = \overline{۱۴}\;\overline{۱۴}\;\overline{۱۴}_{(۲۵)}$$

شش عدد دیگررا پیداکنید .

آیا می‌توانید عددهائی پیداکنیدکه :

a) درسه‌دستگاه مختلف شمار به‌صورت عددهای سه‌رقمی باارقام مساوی باشند .

b) در دودستگاه‌مختلف‌شمار به‌صورت‌عددهای چهاررقمی باارقام مساوی باشند.

۱۰ . می‌توان برای دوستداران ریاضی مجموعه‌ای ازعجایب‌اعداد را عرضه‌کرد، ولی‌مادراینجا نمونه‌هائی‌را می‌آوریم‌که‌می‌توانندراهنمائی برای‌جستجوی مثالهای مشابه برای خوانندهٔ علاقمند باشند:

a) $\overline{10}\,\overline{10}44_{(13)}=\overline{11}\,\overline{11}^2_{(13)}$; $44\overline{10}\,\overline{10}_{(13)}=77^2_{(13)}$;

b) $7778^2-2223^2=55\,555\,555$;

c) $888\,889^2-111\,112^2=777\,777\,777\,777$;

d) $999\,999\,999^2=12\,345\,678\,987\,654\,321(1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1)$.

به‌چه‌طرق ساده‌ای می‌توان صحت سه‌تساوی اخیررا ثابت‌کرد[22]؟

۱۱. راه غلط و نتیجهٔ درست .

کسرهائی‌وجود دارندکه باحذف یك ، یا دربعضی موارد چندرقم مساوی ازصورت ومخرج آنها ، تغییر نمی‌کنند.

به‌نمونه‌های زیر توجه‌کنید :

$$\frac{19}{95}=\frac{1}{5}\;;\;\frac{3544}{7531}=\frac{344}{731}\;;$$

$$\frac{2666}{6665}=\frac{266}{665}=\frac{26}{65}=\frac{2}{5}\;;$$

$$\frac{143\,185}{17\,018\,560}=\frac{1435}{170560}\;;$$

$$\frac{4\,251\,935\,345}{91\,819\,355\,185}=\frac{425\,345}{91\,825\,185}\;;\ldots$$

می‌توان‌این‌سئوال‌را طرح‌کردکه بطورکلی‌چه‌کسرهائی‌را می‌توان به‌این ترتیب «ساده‌کرد». به‌این سئوال وقتی می‌توان جواب داد که اولا تعداد ارقام صورت ومخرج، ثانیاً جای رقمهائی‌که باید باهم ساده‌شوند، معلوم باشد .

مثلا ازتساوی $\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}$ $(a\neq c)$ بسادگی بدست می‌آید :

$c=\frac{۱۰ab}{۹a+b}$ ، که اگرمقادیر b وc را صحیح وکوچکتر از ۱۰ بگیریم، تنها بهازاء a=۱,۲,۴ چنین کسرهائی بدست می آیدکه عبارتند از :

$$\frac{۱۶}{۶۴},\ \frac{۱۹}{۹۵},\ \frac{۲۶}{۶۵},\ \frac{۴۹}{۹۸}$$

۱۲. بااستفاده از۴عدد مساوی۴ (ویا درحالت دیگر ۵عددمساوی ۵یا۴ عدد مساوی ۵ وغیره) اعداد از ۱ تا n را بدستآورید ، حد اکثر مقدار n چقدر است. مثلا:

$$۴-۴+\frac{۴}{۴}=۱\ ;\ \ \frac{۴۴}{۴}-۴=۷\ \ ;\ldots$$

می توان استفاده ازعلامت فاکتوریل را هم واردکرد :

$$۴!+\frac{۴}{۴}-۴=۲۱\ ,$$

ویا علامت رادیکال را:

$$\sqrt{۴^{۴}}+\frac{۴}{۴}=۱۷\ \ ,$$

همچنین می توان باقراردادن یك نقطه قبل از عدد ویك نقطه بالای عدد، بترتیب کسرهای اعشاری وکسرهای اعشاری متناوب راعلامت گذاشت:

$$۰/۴=.۴\ ;\ ۰/۴۴۴\ldots=۰/(۴)=.\dot{۴}$$

مثلا :

$$\frac{۴}{.۴}+\frac{۴}{.\dot{۴}}=۱۹$$

و غیره .

اگر قرار باشد که از علامت لگاریتم استفاده کنیم، می‌توان با توجه به رابطهٔ (۲۳a):

$$n = -\log_{۴}\left(\log_{۴}\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{۴}}}}}}_{\text{۲n رادیکال}}\right)$$

تنها با کمک ۳ عدد مساوی ۴، هر عدد دلخواه n را به‌دست آورد.

۷

تردستیهای عددی

گاهی به‌افرادی برخورد می‌کنیم ،که باسرعت غیرعادی عملیاتی روی عددهای چندرقمی انجام می‌دهند . این‌محاسبین هنرمند با استفاده ازبعضی روشهای خود ساخته وذخیرهٔ جالب‌توجهی از تردستیهای مختلف عددی می‌توانند مردم‌را دچار حیرت‌کنند.

البته، اگرحتی راز اینگونه عملیات هم برملا شده باشد، هرکسی

نمی‌تواند نقش این محاسبین هنرمند را باموفقیت بعهده بگیرد. اطلاع براین اسرار تنها درموارد ساده می‌تواند وسیله‌ای برای انجام عمل باشد. مادراینجاچندنمونه ازاینگونه تردستیهای عددی‌را ذکر می‌کنیم.

حدس بزنید

عددی‌را درذهن‌خود در نظر بگیرید وروی آن عملیات معینی انجام دهید، به‌سادگی می‌توانید بادردست داشتن نتیجهٔ محاسبه، عدد اصلی‌را پیداکنید.

چند مثال ذکر می‌کنیم:

۱. عددی پیش‌خود درنظر بگیرید، ۳واحد به‌آن اضافه‌کنید، مجموع حاصل‌را ۶برابر کنید، سپس خود عددی راکه در نظر گرفته‌اید از حاصلضرب کم‌کنید، دوباره ۸واحد از نتیجه کم‌کنید و نتیجه‌آنرا بر ۵ تقسیم‌کنید. حالا اگر حاصل‌را داشته باشید، می‌توانید به‌سرعت عدد اصلی‌را پیداکنید. هماطورکه ازتساوی زیرپیدا است:

$$[(x+۳)\times ۶-x-۸]:۵=x+۲$$

برای این‌منظورکافی است از نتیجهٔ حاصل دو واحد کم‌کنیم تاعدد اصلی بدست‌آید.

۲. دوعددکوچکتر ازصد x وy را درنظر بگیرید (عدد ماه، قد انسان، نمرهٔ کفش، مبلغ پرداخت‌وغیره) واعمالی‌راکه درسمت چپ تساوی زیروجود دارد انجام دهید:

$$(۲x+۵)\times ۵۰+y-۳۶۵=۱۰۰x+y-۱۱۵=N$$

دراینصورت، با معلوم‌بودن N، می‌توان مقادیر x وy را بدست

آورد (به‌عدد N، عدد ۱۱۵ را اضافه می‌کنیم وعددهای حاصل‌را باجدا- کردن دورقم سمت راست‌آن به‌دوعدد تبدیل می‌کنیم) .

۳ . واقعه‌ای‌را در نظر بگیرید، عدد روز، ماه وسال‌آنرا به‌ترتیب l، m و n فرض کنید (سال را در قرن بیستم وبرای عدد آن تنها دورقم سمت راست‌را درنظر بگیرید) . روی عددهای l، m و n عملیات سمت چپ تساوی زیررا انجام دهید :

$$[(۲۰l+۲۲۲)\times ۵+m]\times ۱۰۰+n+۱۱۱=۱۰۰۰۰l+$$
$$+۱۰۰m+n+۱۱۱\,۱۱۱=N$$

برای تعیین تاریخ موردنظر باید ازعدد بدست‌آمدهٔ N ، عدد ۱۱۱ ۱۱۱ راکم‌کنیم وازسمت‌راست باجداکردن دورقم دورقم‌آنرا به‌سه‌قسمت‌تقسیم کنیم . مثلا اگر $N=۲۰۱۶۵۶$ باشد تاریخ مطلوب ۹.۵.۴۵ یعنی نهم ماه مه ۱۹۴۵ خواهد بود. تردستیهای دیگری از این قبیل را می‌توانید خودتان به‌سادگی درست‌کنید .

حدس نتیجهٔ عملیات

عملیات معینی وجود دارد،که اگر درمورد دستهٔ بزرگی ازاعداد انجام شود ، نتیجهٔ واحدی بدست می‌آید . و برهمین اساس تردستیهائی درست‌کرده‌اند. این تردستیهاگاهی ناشی‌ازحذف‌عدد اصلی، ضمن‌عملیات است، گاهی ناشی ازخصوصیت مربوط بیك‌دسته ازاعداد وگاهی ناشی‌از نوع عملیات انجام‌شده. دراینجا برای هر نمونه مثالی‌آورده‌ایم:

۱ . اگر یك‌عدد دلخواه‌سه‌رقمی‌رادرسمت‌راست‌خودش‌بنویسیم‌وعدد شش‌رقمی‌حاصل‌را (این‌عددبرابراست با $۱۰۰۱N=N\times ۷\times ۱۱\times ۱۳$)

ابتدا بر۷، سپس برخود N و بالاخره بر۱۱ تقسیم‌کنیم، همیشه حاصل مساوی ۱۳ خواهد شد.

اکثراً، وقتی‌که می‌بینند دراین تقسیمات همیشه باقیمانده مساوی صفر است، دچار حیرت می‌شوند.

۲ . چون هرعدد فرد اول‌غیراز۳را می‌توان به‌صورت $p=6k\pm 1$ نوشت، بنابراین $p^2+17=36k^2\pm 12k+18$ همیشه در تقسیم بر ۱۲ باقیمانده‌ای مساوی ۶ دارد .

۳ . اگر $\overline{abc}$ عددی‌سه‌رقمی باشد(a،bوcرا رقمهای‌عددگرفته‌ایم) و $a>c$ داریم :

$$1)\quad \overline{abc}-\overline{cba}=\overline{\alpha\beta\gamma}\qquad (\beta=\alpha+\gamma=9)\ ;$$

$$2)\quad \overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\gamma\beta\alpha}=1089$$

بنابراین اگرازیکی ازرقمهای αوγ در $\overline{\alpha\beta\gamma}$ اطلاع داشته باشیم، تفاضل هر عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ را با «مقلوب» آن می‌توان «حدس» زد و درحالتیکه هم که هیچ اطلاعی ازعدد سه‌رقمی نداریم می‌توانیم مجموع $\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\gamma\beta\alpha}$ را «حدس» بزنیم.

تعیین عدد به‌وسیلهٔ سه جدول

در هریك از سه جدول عددهای ۱تا۶۰ را قرار می‌دهیم؛ جدول سه ستون دارد و درهر ستون ۲۰عدد ، جدول دوم چهارستون وهرستون ۱۵عدد وجدول‌سوم پنج‌ستون وهرستون۱۲عدد دارد (شکل۴). به‌سادگی می‌توان هرعدد N $(N\leqslant 60)$راکه‌کسی فکرکرده‌است پیداکرد ، به‌شرطی

که ردیف α، β و γ یعنی ستون نهائی که این عدد درهر جدول قراردارد معلوم شده باشد: N عبارتست ازباقیماندهٔ تقسیم عدد $۴۰\alpha+۴۵\beta+۳۶\gamma$ بر ۶۰ یا به عبارت دیگر N برابراست باکوچکترین عدد مثبتی که بامجموع $(۴۰\alpha+۴۵\beta+۳۶\gamma)$ نسبت به مدول ۶۰ هم نهشت باشد.

مثلا درحالتی که $\alpha=۳$، $\beta=۲$ و $\gamma=۱$ باشد، داریم:

$$۴۰\alpha+۴۵\beta+۳۶\gamma\equiv ۰+۳۰+۳۶=۶ \pmod{۶۰}$$

یعنی $N=۶$.[۲۴]

I	II	III
۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹
⋮	⋮	⋮
۵۵	۵۶	۵۷
۵۸	۵۹	۶۰

I	II	III	IV
۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
⋮	⋮	⋮	⋮
۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
۵۷	۵۸	۵۹	۶۰

I	I	III	IV	V
۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵
۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰

شکل ۴

می توان مسئلهٔ مشابهی دربارهٔ عددهای تا ۴۲۰ طرح کرد، به این ترتیب که آنها را درچهار جدول که به ترتیب دارای سه، چهار، پنج و هفت ستون باشند تنظیم نمود: اگر α، β، γ، δ به ترتیب شماره ستون نهائی ازچهار

جدول باشد که عدد مفروض درآنجا قرار دارد، این عدد برابر خواهد بود با باقیماندهٔ تقسیم عدد :

$$۲۸۰\alpha + ۱۰۵\beta + ۳۳۶\gamma + ۱۲۰\delta$$

بر ۴۲۰ . کوشش کنید برای این مطلب استدلالی پیدا کنید[۲۴].

تردستی با ورق بازی

فرض کنید کسی یك ورق از بین ۴۰ ورق بازی بردارد، شما می‌توانید بسرعت ، با نگاه کردن به بقیهٔ ورقها (و بدون اینکه آنها را از دستتان بیرون بریزید) ورق انتخاب شده را پیدا کنید . می‌دانید که مجموع خالهای ۴۰ ورق مساوی ۲۲۰ است و بنابراین اگر خالهای باقیمانده را باهم جمع کنید (که پس از کمی تمرین این کار می‌تواند به سرعت انجام بگیرد) ، برای مجموع S آنها خواهیم داشت :

$$۲۱۰ \leqslant S < ۲۲۰$$

ضمن جمع کردن خالها بهتر است از دهگان صرفنظر کنید . اگر مثلا در آخر کار به عدد ۳ رسیدید، به این معنی است که S = ۲۱۳ است و بنابراین ورق انتخاب شده ۷ می‌باشد ، نوع ورق هم با نگاه سریعی بـه ورقها معلوم می‌شود.

هر کسی چی انتخاب کرده است؟

طرح کنندهٔ معما به سه نفر A،B وC بترتیب یك، دو وسه سکه می‌دهد؛ روی میزهم ۱۸ سکه وجود دارد . A،B وC درغیاب طرح کنندهٔ

معما سه‌شیئی (ومثلا، چنگال، قاشق وکارد) را بین‌خود تقسیم می‌کنند ، سپس‌صاحب‌چنگال به‌تعدادسکه‌ای‌که درابتدا داشته، صاحب‌قاشق دوبرابر وصاحب‌کارد چهاربرابر تعداد سکه‌های اولیهٔ خود برمی‌دارند .

برای شش‌حالتی‌که درانتخاب اشیاء وجود دارد: (چنگال، قاشق، کارد)؛ (قاشق، چنگال، کارد)؛ (چنگال ، کارد، قاشق)؛ (قاشق ، کارد ، چنگال) ؛ (کارد، چنگال، قاشق) ؛ (کارد، قاشق، چنگال) بترتیب ۱، ۲ ، ۳، ۴، ۵، ۶و۷ سکه روی میز می‌مانند.

اگرشما ازانواع ترتیب سه‌شیئی اطلاع داشته باشد (بنحوی‌که‌در بالا نشان دادیم) ، به‌سادگی می‌توانید از روی تعداد سکه‌هائی که روی میزمانده است مطلع بشویدکه‌کدام شیئی متعلق به‌چه‌کسی است.

بهمین ترتیب برای تعیین صاحبان n شیئی مختلف ، باید n عدد مختلف: $a_۱، a_۲، \ldots، a_n$ (برای اندازهٔ تقسیم اولیهٔسکه‌ها) درنظر گرفت وسپس ضرایب: $m_۱، m_۲، \ldots، m_n$ را به‌آنها نسبت‌داد. برای‌تقسیم این‌ضرایب بین‌عددهای $a_۱، a_۲، \ldots، a_n$ به‌اندازهٔ $n!$ حالت مختلف وجود دارد ودرهرحال برای‌مجموع زیر مقدارمشخصی که‌باحالت‌دیگرفرق دارد بدست می‌آید:

$$m_{\alpha_۱} a_۱ + m_{\alpha_۲} a_۲ + \cdots + m_{\alpha_n} a_n$$

$\alpha_۱، \alpha_۲، \alpha_۳، \ldots، \alpha_n$ شمارهٔ اشیائی‌است‌که به‌ترتیب به‌نفر اول، نفردوم، ... ونفر nام داده‌شده‌است. مثلا به‌ازاء $n=۴$ می‌توان به‌این‌ترتیب انتخاب کرد : $a_۱=۱ ، a_۲=۲ ، a_۳=۳$ و $a_۴=۴$ باضرایب :

$$m_i = ۱, ۲, ۵, ۱۵$$

ریشهٔ اعداد چند رقمی

بااستفاده از بعضی قواعد ساده، می‌توان ریشهٔ فرد عددهائی را که ریشهٔ تحقیقی دو و یا حتی سه‌رقمی دارند، بدست‌آورد.

برای محاسبهٔ $\sqrt[s]{N}$، باید عدد Nرا ازراست به‌چپ به‌عددهای s رقمی تقسیم‌کرد (درسمت چپ ممکن‌است، عددی که تعداد ارقامش کمتراست باقی بماند).

ارقام ریشهٔ عددرا می‌توان بااستفاده ازدوقاعدهٔ زیر بدست‌آورد:

I. عددهای $n^{۵}, n^{۹}, n^{۱۳}, \ldots, n^{۴s+۱}$ به‌همان رقمی ختم‌شده‌اندکه عدد n به‌آن ختم‌شده است.

II. اگرعددn به‌رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ ختم‌شده‌باشد، عددهای $n^{۳}, n^{۷}, n^{۱۱}, \ldots, n^{۴s-۱}$ به ترتیب به رقمهای ۰، ۱، ۸، ۷، ۴، ۵، ۶، ۳، ۲، ۹ ختم می‌شوند.

اگر مقادیر $n^{۳}$ را برای $۱ \leqslant n \leqslant ۹$ بدانیم، اولین رقم $\sqrt[s]{N}$ برای $s=۳$ به‌سادگی بدست‌می‌آید، برای $s=۵, ۷, ۹, \ldots$ باید جدول لگاریتم دو رقمی را برای ۱۰عدد اول بخاطرداشت:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
log n	۰	۰/۳۰	۰/۴۸	۰/۶۰	۰/۷۰	۰/۷۸	۰/۸۵	۰/۹۰	۰/۹۵

چند مثال: ۱. می‌توان یکباره با استفاده ازقاعدهٔ II و باتوجه به نامساوی $۶^{۳}<۳۱۴<۷^{۳}$ نوشت:

$$\sqrt[۳]{۳۱۴۴۳۲}=۶۸$$

۲. $n = \sqrt[7]{17\,565\,568\,854\,912} = \sqrt[7]{N}$. چون داریم:
$2\times 10^{12} > N > 10^{13}$ ، خواهیم داشت :

$$13,3 > \log N > 13,0$$

در نتیجه : $$1,9 > \log N \frac{1}{7} = \log n > 1,85$$

وبنابراین باتوجه به‌جدول بالا $80 > n > 70$ می‌شود و بااستفاده‌ازقانون II بدست می‌آید:

$$n = 78$$

۳. ریشهٔ بیست‌وپنجم یك‌عدد۴۶رقمی‌که به۸ ختم‌شده‌باشد، برابر است با۶۸. زیرا $46 > \log N > 45$ است و بنابراین داریم :

$$1,84 > \log N \frac{1}{25} = \log n > 1,8$$

وقتی‌که N به‌یکی ازرقمهای ۱،۳،۷،۹ ختم شده‌باشد بادردست‌داشتن دورقم‌آخر N ، می‌توان دورقم آخر $\sqrt[3]{N}$ راهم‌پیداکرد. مثلا:

$$\sqrt[3]{\ldots 53} = n = 10z + 7$$

درذهن حساب می‌کنیم :

$$(7+10z)^3 = 343 + 147\times z\times 10 + \cdots$$

(دوجملهٔ بعد به‌رقمهای یکان ودهگان مربوط نیستند) .

چون رقم دهگان N مساوی پنج ورقم دهگان ۳۴۳ مساوی‌چهار است، عدد ۱۴۷z به‌رقم۱ ختم می‌شود وz به‌رقم ۳، یعنی داریم :

$$n = 100y + 37$$

این روش امکان می‌دهد که وقتی کسی بتدریج ارقام عدد N را از راست بچپ می‌خواند (برای $N<10^6$) ، بدون اینکــه منتظر آخرین ارقام آن باشید، جواب‌را ذکر کنید .

با به‌حساب آوردن بعضی شرایط اضافی، می‌توان این‌روش‌را برای مواردی که آخرین‌رقم N غیراز ۱، ۳، ۷، ۹ هم‌باشد، بکاربرد؛ ازاین‌قاعده می‌توان $s=5,7,\ldots$ هم استفاده‌کرد.

در اینجا قاعده‌ای را ذکر می‌کنیم‌که باکمك‌آن می‌توان یکی از ارقام $n=\sqrt[3]{N}$ را بامعلوم‌بودن سایر ارقام n بدست‌آورد.

اساس این جستجو برقاعدهٔ زیر بنا شده است[۲۵]:

اگر باقیماندهٔ تقسیم n^3 بر ۱۱ چنین‌باشد

$$d:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$$

آنوقت باقیماندهٔ n بر ۱۱ چنین خواهدبود

$$d_1:0,1,7,9,5,3,8,6,2,4,10$$

همانطورکه در بند ۳ دیدیم $N\equiv\sigma'(N)\ (\mathrm{mod}\,11)$ ، که $\sigma'(N)$ «مجموع جبری ارقام» عدد N است. بنابراین باید $\sigma'(N)$ را پیداکرد و d ، هم‌نهشت‌آن نسبت به‌مدول۱۱را تعیین‌کرد $(0\leqslant d\leqslant 10)$

وقتی که عددهای متناظر d و d_1 را بدانیم ، تنهارقم مجهول n را می‌توانیم از شرط $d_1=\sigma'(n)\ (\mathrm{mod}\,11)$ بدست‌آوریم. مثلادرموردبمونهٔ $n=3z81=\sqrt[3]{54\ 053\ 028\ 541}$ (که‌درآن‌همهٔ ارقام‌بجز z ازقبل

معلوم است) . داریم:

$$\sigma'(N)=۱-۴+۵-۸+۲-۰+۳-۵+۰-۴+۵=-۵$$

و $-۵\equiv۶(\mod ۱۱)$ است، $d=۶$ می‌شود ، به‌این ترتیب روشن‌است‌که $\sigma'(n)=۱-۸+z-۳=z-۱۰$ باید نسبت به‌مدول ۱۱هم‌نهشت با $d_۱=۸$ باشد وازآنجا $z=۷$ بدست می‌آید.

البته‌کسانی‌که ذهن محاسبه‌ای قوی داشته باشند، می‌توانند چنان ورزیدگی پیداکنندکه همهٔ این محاسبات‌را به‌سرعت درذهن خود انجام دهند و بیننده را دچار حیرت نمایند .

۸

محاسبهٔ سریع

تمایل به ساده‌کردن عملیات مربوط به‌اعداد چندرقمی وسریع‌ـ کردن محاسبه منجر به‌کشف جدول لگاریتم (در ابتدای قرن هفدهم) و سپس خط‌کش محاسبه شد.

درقرن نوزدهم ماشینهای حساب، درابتدای قرن بیستم ماشینهای خودکارمحاسبه ودرقریب بیست‌سال‌قبل‌ماشینهای الکترونیك محاسبه بوجود

آمدکه‌می‌توانند درعرض چندساعت مسائلی‌را حل‌کنندکه شامل‌میلیونها عمل روی عددهای چندرقمی بزرگ باشد .

دراین‌بند ازساده‌ترین‌روشهائی‌که به‌سرعت محاسبه‌کمك می‌کنند، صحبت خواهیم‌کرد .

ساده‌کردن ضرب

فرض‌کنید بخواهیم دوعدد ۷۴۹۶ و ۳۸۵۲ را درهم ضرب‌کنیم ، حاصلضرب هر یك از رقمهای مضروب را در مضروب فیه بطور کامل به ردیف می‌نویسیم :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & ۷ & ۴ & ۹ & ۶ \\
. & . & . & ۳ & ۸ & ۵ & ۲
\end{array}
$$

۰	۰	۰	۱۴	۸	۱۸	۱۲
۰	۰	۳۵	۲۰	۴۵	۳۰	
۰	۵۶	۳۲	۷۲	۴۸		
۲۱	۱۲	۲۷	۱۸			

$$
\begin{array}{cccccccc}
۲ & ۸ & ۸ & ۷ & ۴ & ۵ & ۹ & ۲ \\
 & ۷ & ۱۰ & ۱۳ & ۱۰ & ۴ & ۱ &
\end{array}
$$

درهریك ازستونها(بامحاسبهٔازبالا به‌پائین) دونوع عدد قراردارد: ۱) حاصلضرب‌یکان‌مضروب‌فیه‌دررقم‌مربوطه ازمضروب(α) ؛ ۲)حاصلضرب بقیهٔ ارقام مضروب‌فیه، باانتخاب ازراست به‌چپ، بترتیب دربقیهٔ ارقامی که درمضروب، سمت راست α قرارگرفته‌اند.

مثلا درستون مربوط به‌ردیف صدها داریم :

$$۸(=۲\times۴)\ ;\ ۴۵(=۵\times۹)\ ;\ ۴۸=(۸\times۶);$$

دراینجا $\alpha = ۴$ است. ودرستون مربوط به ده‌هزارها داریم :

$$۲۷(=۳\times۹); ۳۲(=۸\times۴) ; ۳۵(=۵+۷) ; ۰(=۲\times۰)$$

در اینجا $\alpha = ۰$ است.

سپس اگرعددهائی‌راکه دریك ستون قرارگرفته‌اند باهم‌جمع‌کنیم و ده‌هائی راکه ازجمع ستون سمت راست‌آن «درخاطر» نگه داشته‌ایم، به‌آن اضافه‌کنیم (عددهای زیرکمانها را به‌بینید) ، از راست بچپ همهٔ رقمهای حاصلضرب بدست می‌آید.

البته برای‌اینکه ارقام حاصلضرب دوعدد را، بدون نوشتن‌جدول، ازراست‌به‌چپ، مرتباً بنویسیم، بایدبتوانیم به‌سرعت وبدون اشتباه‌عددهای دورقمی را باهم جمع‌کنیم.

مثلا اگر به رقم صدها رسیده باشیم (از ردیف ده‌ها برای ما «۴» باقی مانده است) ، چشممان را به‌۲ و ۴ ، سپس به‌۵و۹ وبالاخره به‌۸و۶ می‌دوزیم ومی‌گوئیم: «هشت وچهار می‌شود دوازده؛ و چهل وپنج می‌شود پنجاه وهفت؛ وچهل‌وهشت می‌شود صدوپنج» ، ده‌را درذهن نگه‌می‌داریم ورقم پنج‌را بجای صدها درحاصلضرب می‌نویسیم.

برای تمرین ابتدا باعددهای دورقمی شروع‌کنید، سپس به‌ضرب عددهای سه‌رقمی وغیره بپردازید، خواهید دیدکه پس از مدت کوتاهی چنان عادت خواهیدکردکه رقمهای حاصلضرب عددهای چندرقمی را به سرعت وبدون اشتباه ازچپ به‌راست بدست می‌آورید.

ساده‌کردن تقسیم

برای تقسیم عددهای چند رقمی بر یکدیگر به سادگی می‌توان

حاصلضرب مقسوم‌علیه در خارج‌قسمت جزئی را (بدون نوشتن) از ارقام مقسوم و یا باقیمانده‌های جزئی تقسیم‌کرد. ارقام این‌باقیمانده بترتیب از راست بچپ و به‌سهولت بدست می‌آید.

مثلا به‌اولین عمل تقسیم زیر توجه‌کنید :

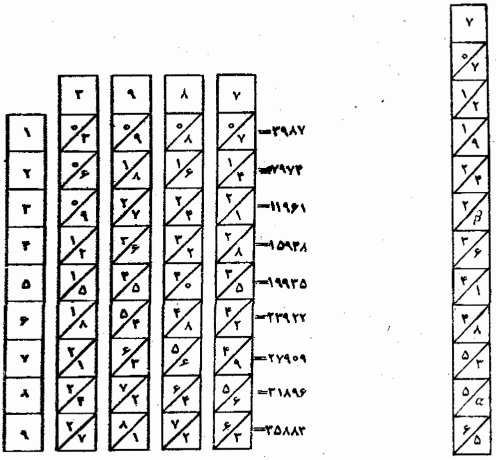
$$\begin{array}{r|l} ۴۹۶۳۴۳ & \underline{۹۲۷} \\ ۳۲۸ & ۵ \end{array}$$

در اینجا ارقام ۸ ، ۲ ، ۳ باقیمانده به‌این ترتیب بدست می‌آید : حاصلضرب ۳۵ = ۷ × ۵ را درذهن نگه می‌داریم، به‌این عدد (یعنی۳۵) باید ۸ را اضافه‌کرد تا به عددی برسیم‌که به‌۳ختم شده‌باشد؛ می‌گوئیم : «سی‌وپنج وهشت می‌شود چهل‌وسه، چهار را درذهن نگه می‌داریم و۸را به‌عنوان اولین‌رقم‌باقیمانده می‌نویسیم؛ چهار وده(۲ × ۵)می‌شود چهارده، ودو می‌شود شانزده، یك‌را درذهن نگه می‌داریم (و۲را به‌عنوان رقم‌دوم باقیمانده می‌نویسیم) ، یك وچهل وپنج (۹×۵) می‌شود چهل‌وشش که اگر با سه جمع شود چهل‌ونه بدست می‌آید، (۳را به‌عنوان آخرین رقم باقیمانده می‌نویسیم) .

چوتکه وچوبحساب نپر

ضرب و تقسیم عددهای چند رقمی را می‌توان به‌کمك چوتکه و «چوبحساب نپر» با سادگی انجام داد .

هریك از چوبحسابهای نپر حاصلضرب عددی راکه در عنوان آن نوشته شده‌است درارقام۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹معین می‌کنند (شکل ۵—a) ؛ ضمناً رقم دهگان این حاصلضرب در بالا و رقم یکان آن در



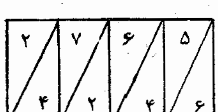
a b

شکل ۵

پائین خانه مربوطه نوشته شده و بوسیلهٔ یک خط مایل ازهم جدا شده‌اند.

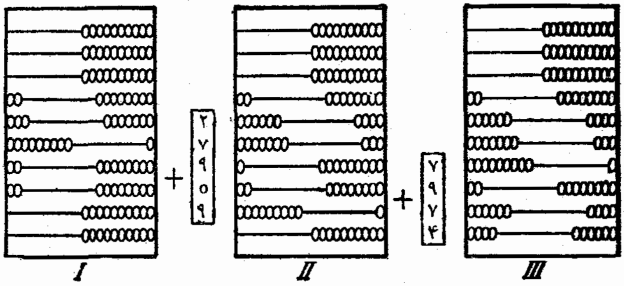
فرض کنید چوبحسابها را طوری انتخاب کنیم که عناوین آنها یکی ازعوامل ضرب را مشخص کند؛ دراینصورت اگر یک چوبحساب کمکی در سمت چپ آنها طوری قرار دهیم که شمارهٔ سطر را معین کند، حاصلضرب این عامل را در هر یک از عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ خواهیم داشت.

مثلا (شکل ۵ — a را به‌بینید):

۳۹۸۷ × ۸ =  = ۳۱۸۹۶

هریک ازرقمهای دهگان، که دربالای خط مایل نوشته شده‌است، بارقم یکان مجاور وسمت چپ خود جمع شده است).

برای ضرب دوعدد چندرقمی، ابتدا حاصلضرب یکی‌از عوامل را در یک‌یک ارقام عامل دیگر، روی چوبحسابهای نپرمعین می‌کنیم وسپس



شکل ۶

باکمك چوتکه باهم جمع می‌کنیم.

درشکل۶ ، مراحل مختلف ضرب عدد ۳۹۸۷ در۶۷۲ نشان داده شده است.

I ـ روی چوتکه صدبرابر عدد ۲۳۹۲۲ (۳۹۸۷×۶) نشان‌داده شده است؛

II ـ به‌عددچوتکه‌قبل، ده‌برابر عدد۲۷۹۰۹ (۳۹۸۷×۷) اضافه شده است؛

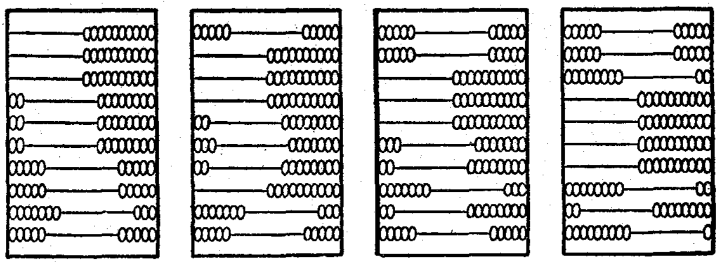
III ـ به‌عدد چوتکـهٔ قبل ۷۹۴۷ واحد (۳۹۸۷×۲) اضافه شده است.

همچنین برای تقسیم، مثلا عدد ۵۷۵ ۲۲۵ ۲ برعدد ۳۹۸۷ باید:

۱. عدد مقسوم‌را روی چوتکه می‌گذاریم (شکل۷ ـ a) ؛

۲. روی چوبحسابهای نپر نزدیکترین‌عدد به۲۵۵ ۲۲، ولی کمتر ازآن، را پیدا می‌کنیم (این‌عددبرابراست با ۳۹۸۷×۵=۹۳۵ ۱۹) ، وازعدد ۲۵۵ ۲۲کم می‌کنیم؛ درعین حال دربالای‌چوتکه رقم۵ خارج‌ـ قسمت راجدا می‌کنیم (شکل ۷ ـ b) ؛

۳. روی‌چوبحسابهای نپر نزدیکترین‌عدد به ۲۵۷ ۲۳، ولی کمتر



شکل ۷

ازآن، را پیدا می‌کنیم (این‌عدد برابراست با ۵ × ۳۹۸۷ = ۱۹۹۳۵)، و آنرا از ۲۰۷ ۲۳ کم می‌کنیم ودر سطردوم ازبالای چوتکه رقم۵ ، یعنی دومین رقم خارج‌قسمت را جدا می‌کنیم (شکل ۷ — c) ؛

۴. حالا روی چوبحسابهای نپر، نزدیکترین عدد به ۷۲۵ ۳۲ ، ولی کمترازآن،راپیدامی‌کنیم(این‌عددبرابراست‌با۸ × ۳۹۸۷ = ۳۱۸۹۶)، وآنرا از ۷۲۵ ۳۲ کم می‌کنیم و سومین رقم خارج‌قسمت را (یعنی۸) در سومین سطرچوتکه (ازبالا) جدا می‌کنیم.

درنتیجه دربالای چوتکه‌عددخارج‌قسمت(۵۵۸) ودرپائین چوتکه عدد باقیماندهٔ تقسیم (۸۲۹) بدست می‌آید (شکل ۷ — d).

روی نوارهای محکم مقوائی و یا تخته‌ای ، چوبحسابهای نپر را درست‌کنید وبا استفاده ازچوتکه روی ضرب وتقسیم عددهای چندرقمی آزمایش‌کنید؛ خواهید دیدکه بااین وسائل‌ساده چگونه می‌توان باسادگی وسرعت ازعهدهٔ محاسبات مشکل برآمد.

دونکته را هم بخاطر داشته باشید: اولا چوبحساب با عنوان «۰» را فراموش نکنید، ثانیاً ازچوبحسابهای نپر دویاسه مجموعه تهیه‌کنید،

زیرا ممکن است درعوامل ضرب رقمهای مساوی وجود داشته باشد.

از چوبحسابهای نپر برای محاسبه در مبناهای دیگر هم می‌توان استفاده‌کرد. درشکل ۵ − b چوبحسابی برای ضرب عدد هفت درهریك ازعددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، درمبنای عددشماری دوازده ، داده شده است ($\alpha = ۱۰$، $\beta = ۱۱$) .

جذرگرفتن

می‌دانیم‌که مجموع n عدد فرد متوالی ،که ازواحد شروع شود ، برابر است با $n^۲$:

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۳) + (۲n - ۱) = n^۲$$

بنابراین محاسبهٔ $\sqrt{N}$ (N عددی‌طبیعی است) به‌مسئلهٔ زیرمنجر می‌شود : در رشته عددهای فرد متوالی۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱،... حداکثر تعداد جملات چقدر باشدکه مجموع‌آنها ازN تجاوز نکند. واین‌مسئله را می‌توان به‌سادگی باکمك چوتکه حل‌کرد.

ولی، وقتی‌که عدد N بزرگ باشد ، عملیات مفصل و خسته‌کننده می‌شود وبهتر است‌که عدد N را به ردیفهائی تقسیم‌کنیم وارقام جذر را بترتیب‌ازچپ به‌راست بدست‌آوریم.

اگر عدد N سه‌رقمی ویا چهاررقمی باشد ، فرض می‌کنیم :

$$\sqrt{N} = ۱۰a + b \qquad (۱)$$

بجای اینکه، ازعدد N بطور متوالی $۱۰a$ جملهٔ مجموع زیر را کم‌کنیم :

$$S = ۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲۰a - ۳) + (۲۰a - ۱) = (۱۰a)^۲,$$

وسپس b جملهٔ مجموع زیر را:

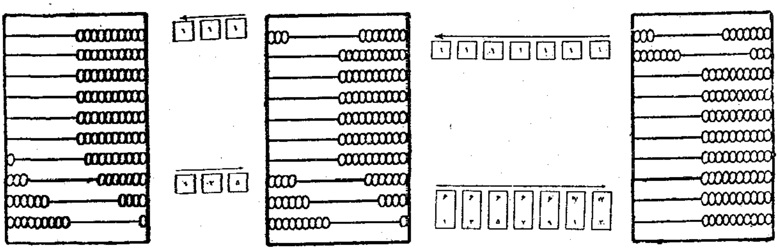
$$S' = (۲۰a + ۱) + (۲۰a + ۳) + \cdots + (۲۰a + ۲b - ۱),$$

ساده‌تر است که از «ردیف بزرگتر» عدد N، فقط **a** جمله ازمجموع زیر را کم‌کنیم:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲a-۱)=a^۲$$

که معادل است باکم‌کردن عدد $S=۱۰۰\times a^۲$ از N)، وسپس از آنچه که باقی می‌ماند جملات مجموع S' را کم‌کنیم (که اولین جملهٔ آن یك واحد از۲۰ برابر **a** بیشتر است).

در شکل ۸، جریان محاسبهٔ $\sqrt{۱۳۶۹}$ روی چوتکه نشان داده شده است.



شکل ۸

ازردیف اول (یعنی ۱۳) بترتیب عددهای ۱،۳و۵ راکم می‌کنیم؛ وروی مفتول بالائی چوتکه به‌ازاء هرعمل تفریق، یکی‌از مهره‌ها را به سمت چپ می‌بریم.

سپس از عددی که باقی می‌ماند (۴۶۹)، بترتیب عددهای ۶۱،۶۳،۶۵،۶۷،...(۱+۲۰×۳=۶۱) راکم می‌کنیم وبه‌ازاء هرعمل تفریقی‌که انجام می‌دهیم، روی مفتول دوم دربالای چوتکه یك مهره را بسمت چپ می‌بریم، دراینصورت بدست می‌آید:

$$\sqrt{۱۳۶۹}=۳۷$$

برای اینکه کار محاسبهٔ ارقام جداگانه جذر مورد نظر سریعتر شود، می‌توان «در ذهن» یکباره مجموع چندجمله را بدست آورد و از عدد مورد نظر کم کرد .

مثلا، می‌توان بطور ذهنی متوجه شد که رقم دوم جذر ۱۳۶۹ مساوی هفت است ، در اینصورت بجای اینکه از باقیمانده (۴۶۹) عددهای : ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳ را کم کنیم ، می‌توان یکباره :

$$۷\times۶۰+(۱+۳+۵+۷+۹+۱۱+۱۳)=$$
$$=۷\times۶۰+۷^۲=۶۷\times۷$$

راکم کرد و روی مفتول دوم از بالای چوتکه هفت مهره را به سمت چپ برد .

درواقع ، بداین ترتیب انجام عملیات بدون فکر و «خودکار» از بین می‌رود و تمام جریان محاسبه ، مثل جذرگرفتن معمولی ، روی کاغذ انجام می‌شود .

اگر N پنج یا شش رقمی باشد ، عدد a در (۱) ، عددی دورقمی خواهد بود. برای پیداکردن آن، باید ازدو «مرتبهٔ بزرگتر» عدد N جذر گرفت وسپس مثل سابق b را پیداکرد .

مثلا، برای محاسبهٔ $\sqrt{۸۶۴۳۶}$ ، از ۸ عددهای ۱ و ۳ را کم می‌کنیم ، عدد ۴۶۴۳۶ بدست می‌آید؛ سپس از ۴۶۴ عددهای: ۴۱، ۴۳، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷ $(۴۱=۲\times۲۰+۱)$ را کم می‌کنیم ، و بالاخره از آنچه که باقی می‌ماند (یعنی عدد ۲۳۳۶)، عددهای: ۵۸۱ ، ۵۸۳ ، ۵۸۵ ، ۵۸۷ $(۵۸۱=۲\times۲۹۰+۱)$ راکم می‌کنیم . روی مفتولهای بالای چوتکه بدست می‌آید :

$$\sqrt{۸۶۴۳۶}=۲۹۴$$

روش مشهور دیگری را دربارهٔ جذرگرفتن عددها ذکر می‌کنیم، که

بلافاصله مقدارگویائی راکه خیلی‌کم با جذر اصلی اختلاف دارد بدست می‌دهد . فرض‌کنید .

$$\sqrt{A}=a+\alpha\neq a \qquad (2)$$

a مقدار تقریبی جذر است و α خطای تقریب ، ضمناً $|\alpha|<\gamma$ است و γ می‌تواند مساوی $\frac{1}{10}$ ، $\frac{5}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ وغیره باشد.

از رابطهٔ (۲) بدست می‌آید $(\sqrt{A}-\alpha)^n=\alpha^n$ وازآنجا، وقتی که دوجمله‌ای را بتوان n برسانیم، به‌سادگی خواهیم داشت، مثلا برای $n=7$:

$$\sqrt{A}=\frac{a^2+A}{2a}-\frac{\alpha^2}{2a}=a_1+\alpha_1 \qquad (3)$$

و برای $n=3$:

$$\sqrt{A}=\frac{a^3+3aA}{3a^2+A}+\frac{\alpha^3}{3a^2+A}=a_1'+\alpha_1' \qquad (4)$$

وبرای $n=5$:

$$\sqrt{A}=\frac{a^5+10a^3A+5aA^2}{5a^4+10a^2A+A^2}+\frac{\alpha^5}{5a^4-10a^2A+A^2}=$$
$$=a_1''+\alpha_1'' \qquad (5)$$

اگر اولین جملهٔ این تساویها را به عنوان مقدار $\sqrt{A}$ درنظر بگیریم ، قدرمطلق خطای حاصل بترتیب ازعددهای زیر تجاوز نمی‌کند :

$$\frac{\gamma^2}{2a},\ \frac{\gamma^3}{3a^2+A},\ \frac{\gamma^5}{5a^4+10a^2A+A^2}\,.$$

مثلا $\sqrt{10}=3+\alpha\neq 3$ ؛ $0<\alpha<0{,}2$ (زیرا $3{,}2^2=10{,}24$).

طبق رابطهٔ (۳):

$$\sqrt{10} \# \frac{3^2+10}{2\times 3}=\frac{19}{6}=3,1666\ldots$$

باتقریب اضافی، زیرا دررابطهٔ (۳) $\alpha_1<0$ است، ضمناً داریم:

$|\alpha_1|<\frac{0,2^2}{2\times 3}=0,0067$ ؛ وطبق رابطهٔ (۵) :

$$\sqrt{10} \# \frac{3^5+10\times 3^3\times 10+5\times 3\times 10^2}{5\times 3^4+10\times 3^2\times 10+10^2}=\frac{4443}{1405}=$$
$$=3,16227758\ldots$$

باتقریب نقصانی، زیرا دراینحالت $\alpha_1''>0$ است وضمناً داریم:

$$|\alpha_1''|<\frac{0,2^5}{1405}=0,00000023;$$

وبنابراین نتیجه می‌گیریم :

$$3,16227758<\sqrt{10}<3,16227782$$

باهمین روش می‌توان ریشهٔ‌سوم، ریشهٔ پنجم وغیره را نیز بدست آورد .

جمع و تفریق بجای ضرب

تاقبل ازکشف جدولهای لگاریتم، برای ساده‌کردن ضرب‌عددهای چندرقمی ازجدولهائی استفاده می‌کردندکه شامل مقادیر تابع $\left[\frac{z^2}{4}\right]$ (بند۲را به‌بینید)، به‌ازاء مقادیر طبیعی عددz بود.ازآنجاکه‌برای مقادیر صحیح a وb داریم:

$$a\cdot b=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}=\left[\frac{(a+b)^2}{4}\right]-\left[\frac{(a-b)^2}{4}\right]$$

(چه عددهای $a+b$ و $a-b$ هردوزوج وچه هردوفرد باشند، قسمتهای کسری $\frac{(a+b)^۲}{۴}$ و $\frac{(a-b)^۲}{۴}$ یکی خواهد شد)، بنابراین ضرب دوعدد a و b منجر به تعیین مقادیر $a+b$ و $a-b$ و بالاخره تعیین اختلاف عددهای: $\left[\frac{(a+b)^۲}{۴}\right]$ و $\left[\frac{(a-b)^۲}{۴}\right]$ می‌شود، که مقادیر آنها درجدولها ثبت است.

برای ضرب سه‌عدد می‌توان ازاتحاد زیر استفاده کرد:

$$abc=\frac{۱}{۲۴}\Big\{(a+b+c)^۳-(a+b-c)^۳- \qquad (۶)$$
$$-(a+c-b)^۳-(b+c-a)^۳\Big\}$$

ازاین اتحاد نتیجه می‌شود که بادردست داشتن مقادیر تابع $\frac{z^۳}{۲۴}$، محاسبهٔ حاصلضرب abc، منجر به محاسبهٔ $a+b+c$، $a+b-c$، $a+c-b$ و $b+c-a$ و سپس محاسبهٔ مقادیر سمت راست تساوی (۶) با کمك جدول می‌شود.

به عنوان مثال جدولی‌راکه برای عددهای $۱\leqslant z\leqslant ۳۰$ تنظیم‌شده است در اینجامی‌آوریم. عددهای‌درشت‌تر جدول نمایندهٔ مقادیر $\left[\frac{z^۳}{۲۴}\right]$ وعددهای ریزتر نمایندهٔ k، بطوریکه داشته باشیم:

$$\frac{z^۳}{۲۴}=\left[\frac{z^۳}{۲۴}\right]+\frac{k}{۲۴} \quad \text{و} \quad ۰\leqslant k\leqslant ۲۳$$

دهگان \ یکان	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰		$۰_{۱}$	$۰_{۸}$	$۱_{۳}$	$۲_{۱۶}$	$۵_{۵}$	$۹_{۰}$	$۱۴_{۷}$	$۲۱_{۸}$	$۳۰_{۹}$
۱	$۴۱_{۱۶}$	$۵۵_{۱۱}$	$۷۲_{۰}$	$۹۱_{۱۳}$	$۱۱۴_{۸}$	$۱۴۰_{۱۵}$	$۱۷۰_{۱۶}$	$۲۰۴_{۱۷}$	$۲۴۳_{۰}$	$۲۵۸_{۱۹}$
۲	$۳۳۳_{۸}$	$۳۸۵_{۲۱}$	$۴۴۳_{۱۶}$	$۵۰۶_{۲۳}$	$۵۷۶_{۰}$	$۶۵۱_{۱}$	$۷۳۲_{۸}$	$۸۲۰_{۳}$	$۹۱۴_{۱۶}$	$۱۰۱۶_{۵}$

که به‌سادگی و با توجه به‌رابطهٔ(۶)، از این جدول بدست می‌آید (آزمایش کنید) :

$$۹\times۹\times۹=۸۲۰_{۳}-۳۰_{۹}-۳۰_{۹}-۳۰_{۹}=۷۲۹$$
$$۱۷\times۸\times۴=۱۰۱۶_{۵}-۳۸۵_{۲۱}-۹۱_{۱۳}-۵_{۵}=۵۴۴$$

دربارهٔ محاسبات لگاریتمی

روش ساده ومشهوری را هم‌که دربارهٔ محاسبهٔ لگاریتم اعدادوجود دارد، ذکرمی‌کنیم، بااین‌روش می‌توان لگاریتم هرعدد طبیعی‌را باکمك جدول مکعبات اعداد بدست آورد . جدولی را انتخاب‌کنیدکه بخصوص مکعب عددهای چهاررقمی را معین‌کرده باشدو محاسبات زیررا آزمایش کنید. فرض‌کنید داشته باشیم:

$$\log ۱۳=c_{۰}/c_{۱}c_{۲}c_{۳}\cdots_{(۳)}=c_{۰}+\frac{c_{۱}}{۳}+\frac{c_{۲}}{۳^{۲}}+\frac{c_{۳}}{۳^{۳}}+\cdots,$$

یعنی لگاریتم مجهول‌را به‌صورت کسر ترتیبی درمبنای ۳ می‌گیریم ، در اینصورت داریم :

$$۱۰^{c_{۰}+\frac{c_{۱}}{۳}+\frac{c_{۲}}{۹}+\cdots}=۱۳,$$

بنابراین $c_{۰}=۱$ است.

اگر طرفین تساوی رابه $۱۰^{c_{۰}}=۱۰$ ساده کنیم وسپس به‌توان ۳ برسانیم ، بدست می‌آید:

$$10^{c_1+\frac{c_2}{3}+\frac{c_3}{9}+\cdots}=1/3^3=2/197,$$

ازآنجا $c_1=0$ است .

چون توان سوم ۲/۱۹۷ ومحاسبات دقیق بعدی منجر به عددهای بزرگ می‌شود،می‌توان‌آنهارا درچهاررقم‌گردکرد.درجدول زیرمحاسبات بعدی بهمین‌ترتیب داده شده‌است ودر دوستون متوالی حدپائین وحدبالای محاسبات باچهار رقم مشخص شده است :

	حدبالا	حد پائین	
$c_2=1$	۱۰/۶۱	۱۰/۶۰	$10^{c_2+\frac{c_3}{3}+\cdots}$
$c_3=0$	۱/۱۹۵	۱/۱۹۱	$10^{c_3+\frac{c_4}{3}+\cdots}$
$c_4=0$	۱/۷۰۷	۱/۶۸۹	$10^{c_4+\frac{c_5}{3}+\cdots}$
$c_5=0$	۴/۹۷۴	۴/۸۱۸	$10^{c_5+\frac{c_6}{3}+\cdots}$
$c_6=2$	۱۲۳/۱	۱۱۱/۸	$10^{c_6+\frac{c_7}{3}+\cdots}$
$c_7=0$	۱/۸۶۶	۱/۳۹۷	$10^{c_7+\frac{c_8}{3}+\cdots}$
$c_8=0$	۶/۴۹۸	۲/۷۲۶	$10^{c_8+\frac{c_9}{3}+\cdots}$
$c_9=1, c_9=2$	۲۷۴/۴	۲۰/۲۵	$10^{c_9+\frac{c_{10}}{3}+\cdots}$
$c_{10}=0, c_{10}=1$	۲۰/۶۷	۸/۳۰۳	$10^{c_{10}+\frac{c_{11}}{3}+\cdots}$
$c_{11}=2, c_{11}=0$	۸/۸۳۲	۵۷۲/۴	$10^{c_{11}+\frac{c_{12}}{3}+\cdots}$

و از آنجا :

$$۱+\frac{۱}{۳^{۲}}+\frac{۲}{۳^{۶}}+\frac{۱}{۳^{۹}}+\frac{۲}{۳^{۱۱}}<\log ۱۳<۱+\frac{۱}{۳^{۲}}+\frac{۲}{۳^{۶}}+\frac{۲}{۳^{۹}}+\frac{۱}{۳^{۱۰}}+\cdots$$

یا :

$$۱/۱۱۳۹۱۱<\log ۱۳<۱/۱۱۳۹۷۹$$

همین نوع محاسبه‌را برای لگاریتم عددهای دیگری بکار برید و مقداری راکه‌بدست می‌آیدباعددی‌که درجدول لگاریتم وجوددارد، مقایسه‌کنید.

۹

اعداد غیرعادی

درفیزیك ، شیمی و نجوم اغلب به‌عددهای «بسیار بزرگ» و«بسیار کوچك» برمی‌خوریم؛ مثلا فاصلهٔ زمین تا نزدیکترین ستاره از $۱۰^{۱۳}$ تا $۱۰^{۱۴}$ کیلومتر است، شعاع اتوم درحدود $۱۰^{-۸}$ سانتیمتر ، تعداد مولکولهائی که دریك گرم ــ مولکول جسم قرار دارد، تقریباً مساوی ۶×۱۰^{۲۳} (عدد **آووگادرو**) است.

برای اینکه اندازهٔ چنین عددهائی بهتر قابل‌لمس باشد، ازروشهای مختلفی استفاده می‌کنند. مثلا برای ایجاد تصور ملموسی دربارهٔ عدد آووگادرو به‌نمونهٔ زیر توجه‌کنید:

اگر یك لیوان‌آب را، که مولکولهای‌آن «نشان‌دار» شده است، بطور یکنواخت در پنج اقیانوس زمین تقسیم کنیم، در هر لیوان آب اقیانوسها کمتر ازپانصد مولکول «نشان‌دار» نخواهد بود[۲۶].

ولی مهم‌تر از همه، اعداد بزرگ و کوچکی هستندکه ضمن حل مسائل مختلف ریاضی به آنها برخورد می‌کنیم. بـه چند نمونهٔ زیر توجه‌کنید.

۱. $log\,x$ با بزرگ‌شدن x، به‌کندی بزرگ می‌شود، بنحوی که نامساوی $log\,x > ۱۰۰$ وقتی صحیح است‌که $x > ۱۰^{۱۰۰}$ باشد.

برای اینکه تصوری دربارهٔ اندازهٔ این عدد بدست‌آورید، بعداز حساب[۲۷] خواهید دیدکه بیش‌از تعداد مولکولهای آبی است‌که مکعبی به ضلع ۷۰ میلیون سال‌نوری را پرکرده باشد (به‌شرطی‌که وزن مخصوص آب را درتمام مکعب واحد به حساب آوریم ودرهرسانتیمتر مکعب‌آب $\frac{۱}{۳} \times ۱۰^{۲۳}$ مولکول وجود داشته باشد).

همچنین دربارهٔ اندازهٔ عدد $K = ۹^{۹^{۹}} \# ۴{,}۲۸ \times ۱۰^{۳۶۹۶۹۳۰۹۹}$ پیش خود فکر کنید (باتوجه به $log\,۹ = ۰{,}۹۵۴۲۴۲۵۰۹۴۳۹۳۲...$ صحت این عدد را تحقیق کنید)، که در مقایسهٔ با آن، حتی عدد مسئلهٔ ارشمیدس ($N \# ۷۷ \times ۱۰^{۲۰۶۵۴۳}$؛ به فصل ۴ مـراجعه کنید) ــ عددی «بسیار بسیار ... بسیارکوچکتر از اندازه‌های میکروسکوپی است»!

عدد دیگری هم با نام ارشمیدس مربوط است که خیلی عظیم‌تر از $۹^{۹^{۹}}$ می‌باشد. ارشمیدس در اثرخودش بنام«محاسبهٔ تعداد شنها» طبقه‌بندی عددها را تا $۱۰^{۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$ می‌دهد.

ولی این‌عدد ارشمیدس هم در مقایسه باعدد $Q=۴^{۴^{۴^{۴}}}$ خیلی‌حقیر بنظر می‌رسد. زیرا درحقیقت داریم:

$$Q=۴^{۴^{۴^{۴}}}=۴^{۴^{۲۵۶}}>۴^{۱/۳۳\times ۱۰^{۱۵۴}}>۱۰^{۸\times ۱۰^{۱۵۳}}$$

(امتحان‌کنید[۲۷a]). برای اینکه‌تصوری‌که دربارهٔ «طول»این‌عدد(و نه‌خود عدد Q) درمبنای اعشاری داشته باشید ، مطلب زیررا ازکتابی‌که درقرن گذشته دربارهٔ این‌عدد نوشته شده است، نقل می‌کنیم :

«پاره‌خطی را درنظر بگیرید که برای پیمودن طول‌آن به وسیلهٔ نور $۱۰^{۳۰}$ سال وقت لازم باشد. سپس‌کره‌ای به قطر این پاره‌خط در نظر بگیریدکه پراز مرکب چاپ باشد، تمام این‌مرکبها برای چاپ این‌عدد باکوچکترین حروفی‌که درچاپخانه وجود دارد، کافی نیست».

درحقیقت، می‌توان به سادگی ثابت‌کرد[۲۸]، که حجم چنین‌کره‌ای از $\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{۱۴۴}$ سانتیمتر مکعب‌کمتر است (تحقیق‌کنید !).

فرض‌کنیدکه هرسانتیمترمکعب مرکب برای‌چاپ ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰ رقم‌کافی باشد، دراینصورت می‌توانیم‌عددی راکه‌کوچکتر از $\frac{۱}{۲}\times ۱۰^{۱۵۳}$ است چاپ‌کنیم؛ درحالیکه درعدد Q بیش‌از ۸×۱۰^{۱۵۳} رقم وجوددارد.

۲ . می‌دانیم‌که وقتی‌مقدار x زیاد شود، a^x (به‌ازاء $a>۱$) خیلی

سریع‌تراز x^n $(n>۰)$ بزرگ می‌شود و x^n هم‌سریع‌از: $log_b x$ $(b>۱)$.
ازاین مطلب نتیجه می‌شود:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} \frac{log_b x}{x^n}=۰ \quad \text{و} \quad \underset{x\to\infty}{\text{حد}} \frac{x^n}{a^n}=۰$$

ولی، مثلاً تساوی واضح $\underset{x\to\infty}{\text{حد}} f(x)=۰$ ، بطوریکه در آن $f(x)=\frac{x^{۱۰۰۰۰۰۰}}{۱/۰۰۰۰۰۱^x}$ باشد ، ممکن است با مطالعهٔ ابتدای جدول زیر به صورت یك معما درآید:

x	۰	۱	۲	$۱۰^۶$	$۱۰^۷$	$۱۰^{۱۳}$	$۱۰^{۱۴}$
$x^{۱۰۰۰۰۰۰}$	۰	۱	$۲^{۱۰۰۰۰۰۰}$	$۱۰^{۶۰۰۰۰۰۰}$	$۱۰^{۷۰۰۰۰۰۰}$	$۱۰^{۱۳۰۰۰۰۰۰}$	$۱۰^{۱۴۰۰۰۰۰۰}$
$۱/۰۰۰۰۰۱^x$	۱	۱/۰۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۰۲	$e \# ۲/۷۱۸$	$e^{۱۰} \# ۱۰^{۴/۳۴}$	$e^{۱۰^۷} \# ۱۰^{۴/۳۴\times۱۰^۶}$	$e^{۱۰^۸} \# ۱۰^{۴۳/۴۲۹\times۱۰^۶}$

ولی انتهای جدول نشان می‌دهد که به ازاء مقداری از x که در فاصلهٔ $۱۰^{۱۳}$ و $۱۰^{۱۴}$ واقع است $f(x)$ مساوی واحد می‌شود و چون $log f(۱۰^{۱۴}) \# -۲۹/۴۳\times۱۰^۶$ (امتحان کنید!) ، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(۱۰^{۱۴})<۱۰^{-۲۹\times۱۰^۶}$$

عدد e کــه درجدول بکار برده شده است ، مبنای **لگاریتم طبیعی** است: $log_e N = log N$ ضمناً بین لگاریتم طبیعی ولگاریتم اعشاری یك عدد رابطهٔ زیر برقرار است:

$$log N \# ۲/۳۰۲۵۸۵۱ \times log N$$

در ریاضیات عالی ثابت می‌شود:

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2/7182818\ldots,$$

واز آنجا $\log e \# 0/4342945$ و $e \# 10^{0/4342945}$ می‌شود.

حالا ثابت کنید[۲۹]، که برای تابع:

$$\varphi(x) = \frac{\log_{1/000001} x}{x^{0/000001}},$$

داریم: $\varphi(e^{31000000}) > 1$ ، ولی $\varphi(e^{32000000}) < 1$.

۳ . تابع فاکتوریل n ($n!$) با سرعت فوق العاده‌ای همراه با n بزرگ می‌شود. برای تخمین سرعت رشد این تابع می‌توان از نامساویهای زیر استفاده کرد:

$$\sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n < n! < \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\frac{1}{12n}}$$

واز آنجا:

$$\frac{1}{2}\log(2\pi n) + n\log n - n < \log(n!) < \frac{1}{2}\log(2\pi n) +$$

$$+ n\log n - n + \frac{1}{12n}$$

این نامساویها به‌ازاء مقادیر بزرگ n ، حدود نزدیک بهم را برای $\log(n!)$ بدست می‌دهند . به‌کمك این نامساویها می‌توان فهمید[۳۰] که عدد $10000!$ شامل ۳۵۶۶۰ رقم ، عدد $100000!$ شامل ۴۵۶۵۷۴ رقم وعدد $1000000!$ شامل ۵۵۶۵۷۰۹ رقم می‌باشد .

۱۰

بازی با اشیاء

در این بند سه بازی را شرح داده‌ایم که نظریهٔ آنها بطور کامل ودقیق طرح شده است. در هریك ازاین بازیها، اکثراً وضع مساعد برای کسی است که بازی را شروع کرده است، یعنی اگر درست بازی کند برد اوحتمی است و تنها در موارد استثنائی وضع مساعدی برای رقیب او پیدا می‌شود (البته این درصورتی است که هردو بازیکن با نظریهٔ بازیها آشنا باشند).

بنابراین بازی تنها برای کسانی جالب است که با نظریهٔ آن آشنائی نداشته باشند.

بازی با یك تودهٔ شیئی

ازمجموعه‌ای که‌شامل n شیئی است، دوبازیکن هریك بنوبت تعداد دلخواهی‌شیئی برمی‌دارند (ولی این تعداد نباید ازیك‌کمتر واز a بیشتر باشد). کسی بازی را می‌بردکه درنوبت خود بتواند همهٔ اشیاء باقیمانده را بردارد.

وضع نامساعد برای بازیکنی پیش می‌آیدکه وقتی نوبت بازی با اوست تعداد اشیاء باقیمانده (که ماآنرا به m نشان می‌دهیم) مضربی از $a+1$ باشد. درحقیقت وقتی که $m=a+1$ باشد، با هر نوع انتخابی، بازیکن رقیب می‌تواند تمام اشیاء باقیمانده را بردارد. اگر $m=s(a+1)$ باشد (s عدد دلخواه طبیعی است)، با هر نوع انتخاب تعداد اشیاء، بازیکن رقیب می‌تواند طوری تعداد اشیاء را انتخاب کند که $(s-1)(a+1)$ شیئی باقی بماند، سپس $(s-2)(a+1)$ شیئی و غیره، اگر بازی بهمین‌ترتیب ادامه پیداکند، بالاخره $a+1$ شیئی‌می‌ماند وبحالت قبل برمی‌گردد.

اگر برای بازیکن این وضع وجود نداشته باشد، یعنی $m=s(a+1)+r$ باشد $(1\leqslant r\leqslant a)$، بازیکن اول می‌تواند r شیئی را انتخاب‌کند ونتیجه بازی‌را بطورقطع بنفع خود تمام‌کند.

درسال ۱۶۱۲ این‌بازی باکمی تفاوت به‌وسیلهٔ **باش** شرح داده‌شده است: دونفر به‌نوبت عددهائی ازیك تا ده انتخاب می‌کنند، کسی برنده

است که برای اولین‌بار به صد برسد (یعنی مجموع عددهای انتخابی دو نفر مساوی صد شود) .

بازی با دو تودهٔ شیئی

حالا به‌نظریهٔ نسبتاً بغرنج بازی‌ملی چین به‌نام **تسه زیانشیدز** (انتخاب سنگریزه) می‌پردازیم . شرایط این بازی چنین است .

از دو تودهٔ شیئی که از اشیاء دلخواه تشکیل شده‌اند، دو بازیکن به نوبت به‌این ترتیب انتخاب می‌کنند ، یا: ۱) تعداد دلخواهی از یك توده (حتی تمام اشیاء این توده، ولی حداقل یك‌شیئی) برمی‌دارد، یا: ۲) به تعداد مساوی از دو تودهٔ شیئی (بازهم به‌دلخواه) برمی‌دارد ، دراین مورد هم باید لااقل یك‌شیئی ازهر توده بردارد.

کسی‌دربازی برنده‌به‌حساب می‌آیدکه‌بتواند درنوبت بازی‌خودش، باکمك یکی‌از دوراه مذکور، تمام اشیاء باقیمانده را بردارد .

وقتی‌که درهردومجموعه بترتیب k و l شیئی وجود داشته باشد، به شکل (k,l) یا (l,k) نشان می‌دهیم (ترتیب k و l دراینجا نقشی ندارد). اوضاع زیر را :

$$(c_0,d_0),(c_1,d_1),(c_2,d_2),\cdots,(c_n,d_n),\cdots, \qquad (۱)$$

باشرایط زیر اوضاع «خاص» می‌نامیم:

۱) $c_0=d_0=0$.

۲) c_n دروضع (c_n , d_n) $(n=1,2,3,\cdots)$ برابرباکوچکترین عدد طبیعی‌که درتشکیل اوضاع (c_0,d_0)، (c_1,d_1)، ...، (c_{n-1},d_{n-1})

مورد استفاده قرار نگرفته است، انتخاب شده باشد.

۳) $d_n=c_n+n$.

اوضاع دیگری راکه دراین شرایط صدق نکنند «غیرخاص» گوئیم.

چند وضع اولیهٔ «خاص» چنین‌اند :

(۰,۰),(۱,۲),(۳,۵),(۴,۷),(۶,۱۰),(۸,۱۳),(۹,۱۵),...

اوضاع خاص سه خاصیت دارند:

I . هرعدد طبیعی منحصراً دریك وضع خاص وجود دارد.

درحقیقت ، وقتی‌که برای c_n از کوچکترین عدد طبیعی استفاده می‌کنیم‌که در اوضاع خاص قبلی بکار نرفته است، وجود هرعدد طبیعی دلخواه را دریکی از اوضاع (۱) تضمین کرده‌ایم . واضح است که c_n با هیچیك ازعددهای اوضاع خاص قبل ازآن برابر نیست ؛ وچون به‌ازاء $k<n$ داریم:

$$d_n=c_n+n>c_k+k=d_k>c_k$$

بنابراین d_n هم نمی‌تواند با هیچیك از عدد هـای اوضاع قبل برابر باشد .

II . یك حرکت دلخواه ، هر وضع خاص را به وضعی غیرخاص تبدیل می‌کند .

درحقیقت ، اگر حرکت مفروض فقط یکی‌از دوعدد وضع خاص (c_n, d_n) را تغییر دهد به‌وضعی غیرخاص می‌رسیم ، زیرا عددی‌که تغییر نکرده است نمی‌تواند در دو وضع خاص‌متفاوت وجود داشته باشد؛ واگر حرکت مفروض بیك اندازه ازدوعدد c_n و d_n کم‌کند، دراینصورت اختلاف

بین آنها بازهم n می‌شود، درحالیکه در وضع ایجاد شدهٔ (c_k, d_k) باید اختلاف بین دوعدد یعنی $d_k - c_k$ مساوی $k \neq n$ باشد.

III. ازهروضع غیرخاص، می‌توان با یك حرکت به وضع خاص رسید.

اثبات : اگر وضع غیرخاص (a, a) باشد $(a \neq ۰)$ با انتخاب a شیئی ازهریك ازدومجموعه، به‌وضع خاص $(۰, ۰)$ می‌رسیم. اگروضع غیر خاص به‌صورت (a, b) باشد $(a < b)$ ازچند حالت زیرخارج نیست.

۱. $a = c_k$ ؛ $b > c_k + k = d_k$

واضح‌است که دراین‌حالت کافی است ازمجموعهٔ دوم $b - d_k$ شیئی برداریم تا به‌وضع خاص (c_k, d_k) برسیم.

۲. $a = c_k$ ؛ $b < c_k + k$ یعنی $b - c_k = b - a = h < k$.

دراینصورت کافی است ازهریك ازدو مجموعه به‌اندازهٔ $c_k - c_h$ شیئی برداریم ؛که مارا به‌وضع خاص زیر می‌رساند :

$$(c_h\ ,\ b - c_k + c_h) = (c_h\ ,\ h + c_h) = (c_h, d_h)$$

۳. $a = d_k$.

در اینحالت کافی است ازمجموعهٔ دوم $b - c_k$ شیئی برداریم که‌در اینصورت به‌وضع خاص $(d_k, c_k) = (c_k\ ,\ d_k)$ می‌رسیم.

باتوجه به‌خواص II , III نتیجه می‌شودکه بعداز هرحرکتی که یك بازیکن روی وضع‌خاص انجام دهد، رقیب‌او می‌تواند باحرکت‌خود وضع خاص دیگری درمقابل‌او قرار دهد. اگررقیب همین تدبیررا ادامه دهد مرتباً به اوضاع خاصی می‌رسدکه هربار عددهای آن کوچکتر از

عددهای وضع خاص قبل است ، تا وقتی که بالاخره بــه وضع خاص $(c_0,d_0)=(0,0)$ برسد، این شکل بازی به‌معنای آنست که رقیب آخرین اشیاء را از دوتودهٔ شیئی برمی‌دارد و برنده می‌شود.

بنابراین ، اگر بازی هردوطرف صحیح انجام شود، کسی که بازی را شروع کرده است به‌شرطی برنده می‌شود که درابتدا درمقابل وضع غیر خاص قرار گرفته باشد . و اگر درشروع بازی وضع خاص وجود داشته باشد برای بازیکن اول شرایط نامساعد است.

بدون اثبات متذکر می‌شویم که می‌توان c_k,d_k را با مفروض بودن مقدار k، ازرابطهٔ زیر بدست آورد :

$$c_k=\left[k\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \qquad (2)$$

$$d_k=\left[k\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right] \qquad (3)$$

مثلا به‌ازاء $k=100$ داریم :

$$c_{100}=\left[100\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]=\left[100\times 1/618034\text{V}\ldots\right]=161,$$

$$d_{100}=\left[100\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]=\left[100\times 2/618034\text{V}\ldots\right]=261$$

ازروابط (۲) و(۳) نتیجه می‌شود:

$$c_k<k\frac{1+\sqrt{5}}{2}<c_k+1,$$

یعنی :

$$c_k\times 0/618034\text{V}\ldots=c_k\frac{\sqrt{5}-1}{2}<k<(c_k+1)\frac{\sqrt{5}-1}{2}=$$
$$=(c_k+1)0/618034\text{V}\ldots, \qquad (4)$$

$$d_k \times ۰/۳۸۱۹۶۷۲\ldots = d_k \frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} < k < (d_k+۱)\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲} =$$
$$= (d_k+۱)۰/۳۸۱۹۶۷۲\ldots, \qquad (۵)$$

برای اینکه بتوان حرکتهای صحیح را در هروضع (a,b) سریع انجام داد، بهتر است جدول نسبتاً بزرگی ازاوضاع خاص دردست داشته باشیم. ولی اگر چنین جدولی‌را دراختیار نداریم ویا در یکی از موارد (a,b) که برخورد می‌کنیم، وضع خاص مربوطه را درجدول نمی‌بینیم، می‌توانیم به‌این‌ترتیب عمل‌کنیم : باید دیدکه درکدامیك ازفواصل :

$$\left(a\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}, (a+۱)\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right), \left(a\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}, (a+۱)\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)$$

عددی صحیح وجود دارد. اگر عدد صحیح k در فاصلهٔ اول واقع باشد، $a=c_k$ واگر درفاصلهٔ دوم واقع باشد $a=d_k$ می‌شود. در هریك از این دو حالت با توجه به خاصیت III می‌توان وضع خاص را بدست‌آورد. می‌توان ثابت‌کرد[۳۱] که حتماً یك‌عدد صحیح دریکی ازاین فواصل‌وجود دارد وضمناً در هردو فاصله نمی‌توان عددی صحیح بدست‌آورد.

بازی باسه تودهٔ شیئی

منشأ این بازی معلوم نیست وبه‌این ترتیب انجام می‌شود: سه‌تودهٔ شیئی داده شده است؛ دوبازیکن می‌توانند به‌نوبت تعداد دلخواهی‌شیئی (که ازیك کمتر نباشد) ازیکی ازاین توده‌ها بردارند (اینکه چقدر و ازکجاانتخاب‌کند بسته به‌صلاحدید بازیکن است). کسی بازی را می‌برد که بتواند تمام اشیاء باقیمانده را انتخاب‌کند.

برای روشن‌کردن نظریهٔ این بازی بخاطر می‌آوریم که هر عدد را می‌توان به‌صورت مجموعی از توانهای مختلف عدد دو نوشت (و ضمناً تنها به‌یك صورت). مثلا:

$$۱۷ = ۲^{۴} + ۲^{۰},$$
$$۲۹ = ۲^{۴} + ۲^{۳} + ۲^{۲} + ۲^{۰},$$
$$۹۷ = ۲^{۶} + ۲^{۵} + ۲^{۰}$$

اگر وضع (h,k,l) را به موردی بگوئیم که در سه توده بترتیب h، k و l شیئی وجود داشته باشد؛ درحالتی که ازعدد $۲^{s}(s=۰,۱,۲,\ldots)$ یا درهیچیك از عددهای h، k، l (وقتی که به‌صورت مجموعی از توانهای ۲ نوشته شده‌اند) وجود نداشته باشد ویا تنها در دوتا ازاین سه‌عدد وجود داشته باشد، وضع (h,k,l) را خاص می‌نامیم .

در حالتی که یکی از عددهای $۲^{s}(s=۰,۱,۲,\ldots)$ در عددهای h،k،l یك یا سه بار تکرار شده باشد ، وضع (h,k,l) غیر خاص خواهد بود.

مثلا وضع $(۱۸,۲۱,۷)$ ، وضعی خاص است زیرا داریم :

$$۱۸ = ۲^{۴} + ۲^{۱} \;;\; ۲۱ = ۲^{۴} + ۲^{۲} + ۲^{۰} \;;\; ۷ = ۲^{۲} + ۲^{۱} + ۲^{۰}$$

و واضح است که به‌ازاء هرمقدار دلخواه n ، وضع $(۰,n,n)$ (یعنی حالتی که یکی‌از توده‌های شیئی را حذف‌کرده باشیم)، وضعی خاص است.

نظریهٔ این‌بازی برقضایای زیر استوار است:

قضیهٔ I- بازیکنی که درنوبت بازی خود به‌یکی از دو وضع خاص $(۱,۲,۳)$ و $(۰,n,n)$ برسد ، محکوم به باخت است .

درحقیقت ، هر حرکتی که بازیکن اول روی وضع $(۰,n,n)$

انجام دهد، رقیب او همان تعدادشیئی‌را ازتودهٔ دیگر برمی‌دارد، بنحوی که دوباره وضع $(\circ, m, m)$ بدست مـی‌آید $(m<n)$ ؛ و چنین روشی بالاخره اورا به‌وضع $(\circ, \circ, \circ)$ می‌رساند یعنی بازی را می‌برد.

اگر خواننده، حالتهای مختلف مربوط به‌وضع $(۱,۲,۳)$ را مورد آزمایش قرار دهد، متوجه می‌شود که در هرحال کسی که اول بازی را شروع کند خواهد باخت.

قضیهٔ II. برای هردوعدد دلخواه m و n می‌توان عدد سوم p را چنان انتخاب کرد که وضع (m,n,p) خاص باشد (وضمناً برای p یك عدد بیشتر پیدا نمی‌شود).

درحقیقت کافی است (ولازم است) توانهائی از دوراکه درتشکیل عددهای m و n فقط یکبار شرکت کرده‌اند، درتشکیل عدد p منظورکنیم وتوانهائی ازدوراکه درهیچیك ازدوعدد m و n نیستند ویا درهردوی آنها وجود دارند، درتشکیل عدد p منظور نکنیم.

مثلا اگر داشته باشیم:

$$m=۱۹=۲^۴+۲^۱+۲^\circ \quad \text{و} \quad n=۳۷=۲^۵+۲^۲+۲^\circ$$

درتشکیل عدد p باید عددهای $۲^۵$، $۲^۴$، $۲^۲$ و $۲^۱$ را منظورداشت که دراینصورت $p=۵۴$ می‌شود وبا عددهای ۱۹ و ۳۷ تشکیل وضعی خاص می‌دهند، ضمناً هرعدد دیگری که همراه ۱۹ و ۳۷ باشد وضعی غیرخاص به‌وجود می‌آورد.

قضیهٔ III. هرحرکتی که روی وضع خاص (k,l,m) انجام شود، به وضعی غیرخاص تبدیل می‌شود.

این قضیه نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ II است.

قضیهٔ IV. از هر وضع غیرخاص، می‌توان با یك حرکت به وضع خاص رسید.

برای اثبات این قضیه دوحالت زیررا درنظر می‌گیریم:

۱. بزرگترین تواندو دریك یاهرسه‌عدد وجود دارد؛ دراینصورت کافی است از عدد بزرگتر آنقدر برداریم تا به عددی تبدیل شود که با دوعددکوچکتر وضع خاص به‌وجودآورد. اگر دراینحالت دوعددبزرگتر باهم مساوی باشند، می‌توان یکی از آنهارا درنظر گرفت (دراینحالت همچنین می‌توان تودهٔ کوچکتر را بطورکامل برداشت).

۲. بزرگترین توان دو و مثلا ۲^s تنها در دو عدد وجود دارد؛ دراینصورت باید به $۲^{s-۱}$، $۲^{s-۲}$ وغیره متوجه شد، تاوقتی‌که به‌توانی‌از دو برسیم (مثلا ۲^r) که یا تنها در یك عدد وجود داشته باشد و یا در هر سه عدد.

برای بدست‌آوردن وضع خاص باید یکی از عددها را به اندازهٔ کافی کوچك کرد، بنحوی‌که فقط «قسمت انتهائی» آن تغییرکند (یعنی قسمتی ازعددکه شامل ۲^r وتوانهای‌کوچکتر ازآنست)؛ یعنی درحقیقت قسمتهای انتهائی هر سه عدد را از ۲^r به بعد در نظر می‌گیریم و مثل حالت اول عمل می‌کنیم، در اینصورت معلوم می‌شود که ازکدام عدد و چقدر بایدکم‌کرد تا به‌وضع خاص برسیم. درحالتی‌که قسمت انتهائی دو عدد باهم مساوی باشد، می‌توان عدد مورد نظررا ازیکی از آنهاکم کرد (ویا بطورکامل‌قسمت انتهائی عدد سوم را حذف‌کرد).

چند مثال ۱.

$$h = ۱۴ = ۲^۳ + ۲^۲ + ۲^۱ ,$$

$$k=۲۱=۲^۴+۲^۲+۲^۰,$$
$$l=۳۹=۲^۵+۲^۲+۲^۱+۲^۰$$

دراینجا حالت اول را داریم؛ کافی است عدد l را چنان کوچك کنیم‌که عدد $۲۷=۲^۰+۲^۱+۲^۳+۲^۴=l'$ بدست آید، یعنی باید از تودهٔ سوم ۱۲ شیئی برداشت.

۲.

$$h=۸۱=۲^۶+۲^۴+۲^۰,$$
$$k=۱۲۱=۲^۶+۲^۵+۲^۴+۲^۳+۲^۰,$$
$$l=۵۵=۲^۵+۲^۴+۲^۲+۲^۱+۲^۰$$

دراینجا هریك ازعددهای $۲^۶$و$۲^۵$ درتبدیل عددهای فوق دومرتبه وجوددارند؛ چون $۲^۴$ درهرسه عدد وجود دارد وبزرگترین‌قسمت انتهائی درعددk است، باید ازآن‌آنقدرکم‌کردکه قسمت انتهائی‌آن به $۲^۲+۲^۱$ تبدیل‌شود، دراینصورت عددk به‌عدد $۱۰۲=۲^۱+۲^۲+۲^۵+۲^۶=k'$ تبدیل می‌شودکه باh وl وضع خاصی بوجود می‌آورد.

به‌این ترتیب باید از تودهٔ دوم ۱۹شیئی برداشت تابه وضع خاص (۵۵ و ۱۰۲ و ۸۱) رسید.

۳.

$$h=۲۹=۲^۴+۲^۳+۲^۲+۲^۰,$$
$$k=۵۸=۲^۵+۲^۴+۲^۳+۲^۱,$$
$$l=۴۵=۲^۵+۲^۳+۲^۲+۲^۰$$

دراینجا بانوع دوم ازحالت دوم سروکار داریم: به‌$۲^۵$و$۲^۴$ دومرتبه برخورد می‌کنیم، وبزرگترین قسمت انتهائی($۲^۳+۲^۲+۲^۰$) در دو عدد hوk مشترك است. بنابراین می‌توان یکی ازآنها را ۶ واحدکوچکتر

کرد که دراینصورت به‌وضع خاص $(\mathbf{h}-۶,\mathbf{k},\mathbf{l})=(۲۳,۵۸,۴۵)$ یا به وضع $(\mathbf{h},\mathbf{k},\mathbf{l}-۶)=(۲۹,۵۸,۳۹)$ رسید. ولی می‌توان در اینحالت بطورساده قسمت انتهائی را درعدد $\mathbf{k}$ حذف‌کردکه دراینصورت به وضع خاص $(\mathbf{h},\mathbf{k}-۱۰,\mathbf{l})=(۲۹,۴۸,۴۵)$ رسید.

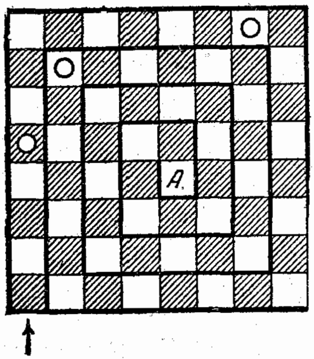
از دوقضیهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

۱. بازی‌کنی‌که اولین حرکت را روی یك وضع خاص انجام دهد، خواهد باخت، زیرارقیب او می‌تواند همیشه‌وضع خاص دیگری درمقابل او قراردهد وباتکرار این‌روش، دیر یا زود، وضع $(۰,\mathbf{n},\mathbf{n})$ یا $(۱,۲,۳)$ را به‌وجود می‌آوردکه برد اورا تأمین می‌کند.

۲ بازی‌کنی‌که‌اولین حرکت‌را روی‌یك‌وضع غیرخاص انجام‌دهد، باید هربار وضع خاص بسازد تابرد اوضمانت شود.

این بازی‌را به‌شکل زیرهم می‌توان‌تنظیم‌کرد: روی صفحهٔ‌شطرنج سه‌مهره بطورتصادفی درخانه‌هائی قرار می‌دهیم؛ دونفر بنوبت مهره‌هارا روی مارپیچ (شکل۹) بطرف خانهٔ $\mathbf{A}$ حرکت می‌دهند ، ضمن جابجائی می‌توان در هرحرکت یکی از مهره‌هارا بهر تعداد خانه‌ای که بازی‌کن می‌خواهد، جلو ببرد (ضمناً دریك خانه می‌تواند دو ویا حتی سه مهره جابگیرد). بازی وقتی‌تمام می‌شودکه هرسه مهره به‌خانهٔ$\mathbf{A}$ رسیده باشند وبرنده‌کسی است‌که آخرین حرکت را انجام داده است .

تبصرهٔ ۱. می‌توان با بعضی تغییرات درشرایط بازیها ، نظریه‌های جدیدی ساخت . مثلا در بازی اول برای هرحرکت درحالتی‌که بیش‌از پنجاه شیئی وجود دارد ازسه تاپانزده شیئی ووقتی‌که‌کمتر ازپنجاه شیئی باشد ازیك تا ده شیئی درنظرگرفت.



شکل ۹

دربازی با دوتودهٔ شیئی می‌توان مثلا تعداد اشیاء انتخابی‌را درهر حرکت محدودکرد ویا تصمیم گرفت‌که درهرحال ازدوتودهٔ شیئی باهم و تنها به‌نسبت ۲ : ۱ انتخاب‌کرد وغیره .

دربازی سوم می‌توان حرکت‌را به‌این‌ترتیب هم مشروط کردکه از دو ویاحتی سه‌تودهٔ شیئی بتوان بطور مساوی انتخاب‌کرد .

البته، نباید انتظار داشت‌که‌درهمهٔ‌این‌حالتها نظریهٔ بازی به‌سادگی مشخص شود، وهمچنین نباید انتظار داشت‌که همیشه این نظریه ساده و زیبا باشد ؛ ولی کاملا احتمال دارد که در بعضی از موارد نتایج جالبی بدست‌آید .

تبصرهٔ ۲. حتی درمواردی‌که هردو بازی‌کن به‌نظریهٔ دوم ویا سوم آشنا باشند، اگرمیزان وقت قراردادی برهر حرکت محدود شود، بازهم نتیجهٔ بازی به مهارت بازی‌کننده مربوط می‌شود.

***

درمورد بازی بادوتودهٔ شیئی خودرا امتحان‌کنید :

a) درهریك ازاوضاع زیرحرکتهای صحیح را معین‌کنید[۳۲] :

(۲۷,۳۷),(۱۴,۹۵),(۴۷,۶۹)

b) کدامیك ازعددهای۴۰،۵۵،۱۴۰ و۴۰۰کوچکترین وکدامیك بزرگترین عدد در زوج اعداد وضع خاص هستند و در هرحالت عدد دوم وضع خاص‌را بدست‌آورید[۳۳].

c) اوضاع خاص را تا (c_{10}, d_{10}) یکبار طبق شرایط ۱ تا ۳ و یکبار طبق روابط (۲)و(۳) مشخص‌کنید و نتیجه‌هارا باهم‌مقایسه‌نمائید.

دربازی سوم حرکت صحیح (یاحرکتهای صحیح) را درهریك از اوضاع زیر پیداکنید[۳۴]:

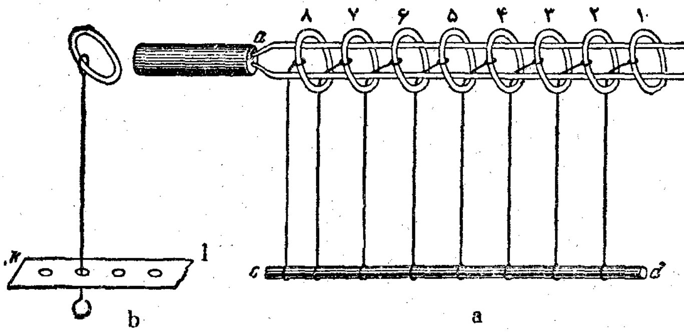
(۱۰,۱۷,۲۵)و(۴۷,۹۹,۱۸۱)و(۲۵,۴۳,۵۰)و(۲۹,۲۹,۱۸)و (۹۳,۲۹,۷۴)

۱۱

بازی چینی

یك بازی چینی هم بنام مِه‌لِدا در اواسط قرن شانزدهم بـه وسیلهٔ **کاردان** ریاضی‌دان ایتالیائی شرح داده شده است (شکل ۱۰ — a) .

شرط بازی اینست که همهٔ حلقه‌هائی را که روی دوشاخهٔ سیمی **ab** قرار دارند بیرون بیاوریم . دوشاخهٔ سیمی دارای یك دسته است و حلقه‌ها به وسیلهٔ نخهائی بهم مربوط‌شده‌اند و انتهای دیگراین نخها به چوب **cd** متصل است.



شکل ۱۰

می‌توان به‌جای نخ از سیم و به‌جای چوب **cd** ازصفحهٔ **kl** استفاده کرد ، درصفحه سوراخهای کوچکی تعبیه می‌کنیم وپس‌از آنکه سیمهای مربوطه را ازاین سوراخها گذرا ندیم ، انتهای آنهارا خم می‌کنیم (شکل ۱۰ – b).

تنظیم نقشهٔ‌راه‌حل،که ناشی‌از خصوصیت ساختمانی «مه‌لدا» است، ومحاسبهٔ همهٔ اعمالی که‌برای انجام‌کار لازم‌است، یك‌مسئلهٔ جالب‌ریاضی به وجود می‌آورد .

بادردست داشتن «مه‌لدا»(که ساختن‌آن بهیچوجه مشکل نیست) می‌توان اعمال زیررا انجام داد:

۱ . حلقهٔ ۱را می‌توان پائین‌آورد (یعنی می‌توان‌آنرا از دوشاخهٔ سیمی بیرون‌آورد وپس‌از ردکردن ازداخل‌آن بطرف پائین‌آویزان کرد) یا بالا برد (یعنی می‌توان‌آنرا ازداخل دوشاخه بطرف بالا برد وروی‌شاخه را پوشاند). دراین‌موقع هریك ازحلقه‌های دیگرمی‌توانند روی دوشاخه راپوشاندویا بطرف پائین‌آویزان شده باشند.

۲ هریك ازحلقه‌های ۳،۴،۵،۶،... را می‌توان پائین آورد ویا

بالا برد، تنها درموقعی که حلقه با یك شماره کمتر، روی دوشاخه را پوشانده باشد وهمهٔ حلقه‌های دیگری که شمارهٔ کمتر دارند پائین باشند؛ ضمناً وضع حلقه‌هائی که شمارهٔ بزرگتر از حلقهٔ مفروض دارند، در انجام این عمل تأثیری ندارند.

۳. حلقهٔ۲، درهر وضعی که حلقه‌های دیگر باشند، **تنها همراه با حلقهٔ ۱** می‌تواند بالا برود ویا پائین بیاید.

بعدازاین هر بالا بردن و یا پائین آوردن یك حلقه وهمچنین بالا بردن و یا پائین آوردن دوحلقهٔ ۱و۲را یك **حرکت** می‌نامیم.

فرض کنیم «مه‌لدا» دارای n حلقه باشد:

$$A,B,C,D,\cdots,K,L,M$$

به‌این حلقه‌ها بترتیب شماره‌های زیررا نسبت می‌دهیم:

$$n,n-۱,n-۲,n-۳,\cdots ۳,۲,۱$$

روی شکل، وقتی که حلقه‌ای بالارفته باشد حرف مربوطهٔ آنرا روی خط افقی و وقتی پائین آمده باشد، حرف مربوطهٔ آنرا زیر خط افقی قرار می‌دهیم.

تعداد حرکتهائی راکه برای پائین آوردن (یا بالا بردن) حلقه‌های با شماره‌های ۱، ۲، ...، $k-۱$، k لازم است، به u_k $(k\leqslant n)$ نشان می‌دهیم.

برای اینکه حلقهٔ nامرا پائین بیاوریم (شکل ۱۱ وضع I را ببینید) باید ابتدا آنرا به‌وضع II درآوریم، برای این منظور لااقل $u_{n-۲}$ حرکت لازم است. باانجام آخرین حرکت برای حلقهٔ A به وضع III می‌رسیم ودر مجموع $u_{n-۲}+۱$ حرکت انجام داده‌ایم. به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

باشروع ازوضع III ، برای پائین‌آوردن حلقهٔ B ، باید از یکی ازمراحل بینابینی، ازمرحلهٔ IV ، عبورکرد .

درحقیقت برای پائین‌آوردن حلقهٔ B، باید حلقهٔ C روی‌دوشاخه را بپوشاندکه بلافاصله بعداز بالابردن حلقهٔ C وضع V بوجودمی‌آید، که درآن پائین‌آوردن حلقهٔ B مستلزم پائین‌آوردن حلقهٔ D می‌شود.

با دنبال‌کردن این استدلال ، روشن می‌شودکه پائین‌آوردن حلقهٔ D مستلزم بوجودآوردن‌وضع VI است،که درآن پائین‌آوردن D مستلزم ‌پائین‌آوردن F است، درنتیجه به‌وضع VII می‌رسیم وغیره.

به‌این‌ترتیب وضع IV ، یك مرحلهٔ عبور اجباری است .

شکل ۱۱

چون برای‌عبور ازوضع III به‌وضع IV باید لااقل u_{n-2} حرکت انجام‌داد (همان‌اندازه‌که برای عبور از IV به III لازم است)، وچون برای پائین‌آوردن همهٔ حلقه‌ها از وضع IV (که بصورت یك مه‌لدا با $n-1$ حلقه است) حداقل u_{n-1} حرکت لازم است، بنابراین :

$$u_n = u_{n-2} + 1 + u_{n-2} + u_{n-1} = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 1 \qquad (1)$$

واضح است که $u_1=u_2=1$ است و بااستفاده ازرابطهٔ برگشتی(۱) بدست می‌آید؛

$$u_3=u_2+2u_1+1=4\ ,$$
$$u_4=u_3+2u_2+1=7\ ,$$
$$u_5=u_4+2u_3+1=16,\ldots$$

بااستفاده از روش استقراء ریاضی به‌سادگی نتیجه می‌شود :

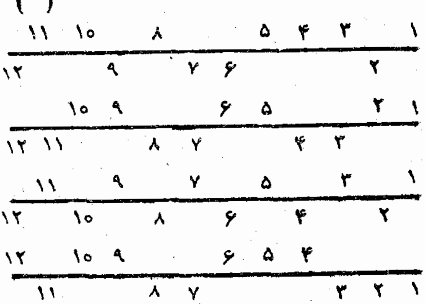
$$u_n=\frac{1}{2}[2^n-1-(-1)^n],$$

واز اینجا نتیجه می‌شود که بابزرگ شدن n ، مقدار u_n باسرعت زیاد می‌شود ، مثلا $u_{21}=2^{20}=1048576$.

مسئله . در هریك ازاوضاع شکل ۱۲ کوتاهترین راه پائین‌آوردن و کوتاهترین راه بالابردن همهٔ حلقه‌ها را پیدا کنید ودر هرمورد تعداد حرکتها را بدست‌آورید[۳۵]

تبصره. می‌توان نقش حلقه‌ها را به بازیکن هائی دادکه از قبل شماره‌گذاری شده‌اند واطراف دایره‌ای‌که روی زمین رسم شده است ایستاده‌اند . خارج‌شدن از دایره و یا داخل‌شدن به‌آن طبق«قواعد» سه‌گانه‌ای‌که قبلا برای پائین‌آوردن و بالا بردن حلقه‌ها ذکر کردیم انجام می‌گیرد . به این ترتیب بازی جالبی بر اساس طرح فوق

(۳۶)



شکل۱۲

بدست می‌آید.

تغییر بازی به‌این شکل، از اینجهت هم قابل توجه است که مارا از ساختن مه‌لدا معاف می‌کند و با در نظر گرفتن شرایط بازی در هر حالت خاص می‌توان به‌سادگی کوتاهترین راه‌حل مسئله را پیداکرد. همچنین می‌توان باساختن وسائل سیمی، شبیه آنچه‌که درمسئلهٔ ضمیمه داده شده است، بازیهائی باشرایط جدیددرست کرد که حل آنهامتضمن سرگرمیهای جدیدی باشد.

۱۲

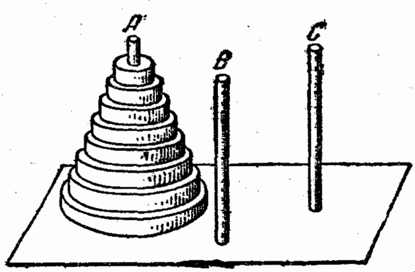
بازی هندی

در این بازی باید n قرص گردی که با اندازه‌های مختلف اند و روی میلهٔ A قرار گرفته‌اند (شکل ۱۳) با استفاده از میلهٔ C روی میلهٔ B منتقل کرد، در هر حرکت تنها می‌توان یکی از قرصها را منتقل کرد (از هر میله به میلهٔ دیگر) وضمناً گذاشتن قرص بزرگتر روی قرص کوچکتر از خود مجاز نیست .

می‌خواهیم کوتاهترین راه‌حل را بدست آوریم و تعداد u_n ، حرکتهای

لازم را محاسبه کنیم .

برای انتقال قرص زیرین میلهٔ A به میلهٔ B ، باید قبلا بقیهٔ قرصها را به میلهٔ C منتقل کرد (در این مورد ازمیلهٔ B به عنوان میلهٔ کمکی استفاده می‌شود)، که حداقل u_{n-1} حرکت لازم است و بنا براین واضح است که داریم :



شکل ۱۳

$$u_n = u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1 ,$$

ازآنجا بااستفاده ازروش استقراء ریاضی[۳۶]، به‌سادگی بدست می‌آید:

$$u_n = 2^n - 1$$

دوستداران ریاضی می‌توانند یك ردیف سئوال خاص و کلـی ، مربوط به‌این بازی، درمقابل خودقراردهند. قرصهارا به‌ترتیب ازکوچك به بزرگ باعددهای ۱،۲،۳،۴،... شماره‌گذاری می‌کنیم. مثلا می‌توان کمترین تعداد حرکت‌را ازوضع $\{A(8,4,3)$ و $B(7,5,1)$ و $C(6,2)\}$ به وضع $B(8,7,6,5,4,3,2,1)$ مطالعه کرد (درپرانتزهاشمارهٔ قرصهائی که روی هرمیله قرار دارد ازپائین به‌بالا مشخص شده است) یااز وضع:

$$\Big\{A(2m, 2m-2, 2m-4, \ldots, 6, 4, 2) ,$$

$$B(2m-1, 2m-3, \ldots 5, 3, 1)\Big\}$$

یا :

$$\left\{A(۲m,۲m-۱,\cdots m+۲,m+۱)\,,\right.$$
$$\left.B(m,m-۱,\cdots,۳,۲,۱)\right\}$$

به وضع

$$B\ (۲m,۲m-۱,۲m-۲,\cdots,۴,۳,۲,۱)$$

۱۳

بازی سی و سه

بازئی‌که بنام سی‌وسه مشهور است روی صفحه‌ای با سی‌وسه خانه انجام می‌شود (شکل ۱۴) . چنین صفحه‌ای را می‌توان به سادگی از یك مقواکه مثل‌صفحهٔ شطرنج جدول‌بندی‌شده‌است بدشکل یك صلیب برید. در شکل ۱۴ هرخانه بادو عدد مشخص شده است، که یکی‌ازآنها معرف ردیف افقی و دیگری معرف ردیف قائمی است کــه این خانه محل تلاقی آنهاست .

درابتدای بازی همهٔ خانه‌ها، به‌استثنای یکی از آنها، به‌وسیلهٔ مهره‌هائی اشغال شده است.

باید ۳۱ مهره را برداشت، ضمناً خانه‌ای که درابتدا خالی بوده است (a,b) و خانه‌ای که درآخر کار باید مهره روی آن قرار گیرد (c,d) ، معلوم است. قانون بازی چنین است : یك مهره را بشرطی می‌توان ازروی صفحه برداشت که در کنار آن (در ردیف افقی یادر ردیف قائم) در یکطرف مهره‌ای‌وجود داشته باشدودرطرف دیگرخانه‌ای خالی باشد ، در اینصورت این مهره را برمی‌داریم و مهرهٔ کنار آنرا در خانهٔ خالی قبلی قرارمی‌دهیم، مثلا اگرخانهٔ ۴۴ خالی باشد، می‌توان مثلا مهرهٔ خانهٔ ۵۴ را برداشت ومهرهٔ خانهٔ ۶۴ را درخانهٔ ۴۴ قرارداد.

		۷۳	۷۴	۷۵		
		۶۳	۶۴	۶۵		
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷
		۲۳	۲۴	۲۵		
		۱۳	۱۴	۱۵		

شکل ۱۴

ازتحلیل نظریهٔ بازی نتیجه می‌شودکه حل‌مسئله تنها وقتی ممکن است‌که داشته باشیم :

$$a \equiv c \pmod{۳} \quad , \quad b \equiv d \pmod{۳}$$

به‌عنوان مثال مسئله را درحالتیکه خانهٔ ۴۴، هم‌خانهٔ خالی‌اولی وهم هدف‌آخر باشد حل می‌کنیم :

۱) ۶۴—۴۴ ۴) ۵۲—۵۴ ۷) ۴۳—۶۳ ۱۰) ۳۵—۵۵

۲) ۶۵—۵۴ ۵) ۷۳—۵۳ ۸) ۷۳—۵۳ ۱۱) ۶۵—۴۵

۳) ۴۴—۶۴ ۶) ۷۵—۷۳ ۹) ۵۴—۵۲ ۱۲) ۱۵—۳۵

۱۳) ۴۵—۲۵	۱۸) ۲۵—۴۵	۲۳) ۵۱—۳۱	۲۸) ۱۳—۳۳
۱۴) ۳۷—۳۵	۱۹) ۴۶—۴۴	۲۴) ۵۲—۳۲	۲۹) ۳۲—۳۴
۱۵) ۵۷—۳۷	۲۰) ۲۳—۴۳	۲۵) ۳۱—۳۳	۳۰) ۳۴—۵۴
۱۶) ۳۴—۳۶	۲۱) ۳۱—۳۳	۲۶) ۱۴—۳۴	۳۱) ۶۴—۴۴
۱۷) ۳۷—۳۵	۲۲) ۴۳—۲۳	۲۷) ۳۴—۳۲	

اینجا در مورد هرحرکت، خانه‌ای‌که مهرهٔ‌آن برداشته می‌شود و خانه‌ای‌که مهره درآن‌گذاشته می‌شود معین‌شده است (درهرمورد مهره‌ای که‌بین این خانه‌ها قرارگرفته است ازصفحه خارج می‌شود).

حالا بابرداشتن ۳۱مهره این دومسئله را حل‌کنید :

a) خانهٔ خالی اولیه (۷و۵) وخانهٔ هدف انتهائی (۴و۲) است.

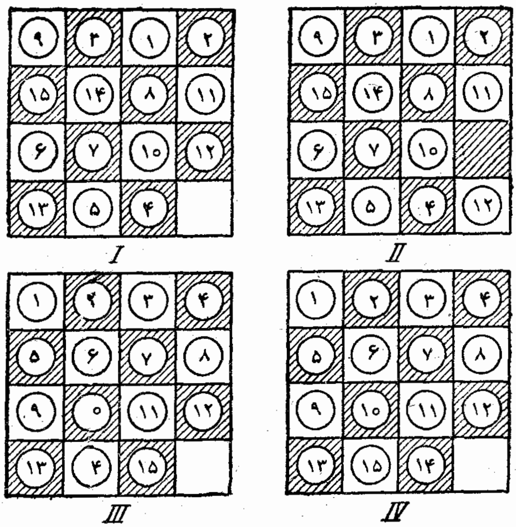
b) خانهٔ خالی اولیه (۵و۵) وخانهٔ هدف انتهائی (۲و۵)[۳۷].

۱۴

بازی با پانزده و بازیهای مشابه آن

اساس بازی پانزده چنین است: درصفحه مربع‌شکلی ۱۶خانه‌تعبیه شده و ۱۵ مهره‌ای که از قبل شماره‌گذاری شده‌اند بطور دلخواه دراین خانه‌هاگذاشته شده است(مثلاشکل ۱۵ — I را ببینید)، بایدبا حرکتهای سادهٔ سطری یاستونی (که به‌کمك خانهٔ‌آزاد ممکن است) مهره‌ها را به ردیف طبیعی III درآوریم.

مثلاباحرکت مهرهٔ شمارهٔ۱۲ می‌توانیم ازوضعI به‌وضعII برسیم:



شکل ۱۵

سپس می‌توان مهره ۱۰ یا ۱۱ را به‌خانهٔ خالی برد وغیره .

هروضع مهره‌ها را یك **تبدیل** می‌نامیم. بنظر می‌رسد که بعضی از انواع تبدیلات «غیرقابل حل» هستند، یعنی از آنها نمی‌توان به تبدیل III رسید .

باملاحظات ساده‌ای می‌توان اساس این بحث‌را روشن‌کرد : گوئیم دو مهره نسبت بهم دارای **انعکاس** هستند وقتی که مهرهٔ با شمارهٔ بزرگتر قبل‌از مهرهٔ باشمارهٔ کوچکتر قرارگرفته باشد ؛ مثلا در تبدیل III حتی یك انعکاس‌هم وجود ندارد، در تبدیل I مهرهٔ ۱ دارای دو انعکاس‌است (نسبت به مهره‌های ۳و۹) ، مهرهٔ ۲ هم باهمان مهره‌ها دو انعکاس دارد، مهرهٔ ۳ دارای یك انعکاس است (بامهرهٔ ۹ ؛ انعکاس مهره‌های ۳ با ۲ و ۳ با ۱ قبلاً حساب شده است) وغیره .

به سادگی می‌توان محاسبه کرد که در تبدیل I رویهم ۴۹ انعکاس وجود دارد.

فرض می‌کنیم که درخانهٔ خالی مهرهٔ ۱۶ قرارگرفته باشد (مهرهٔ ذهنی)، بنابراین هرحرکت به‌معنای تغییرجای مهرهٔ فرضی ۱۶ با یکی ازمهره‌های مجاورآنست.

در تبدیلات I، III، IV هیچیك از مهره‌ها با مهرهٔ ۱۶ انعکاس ندارند، درتبدیل II هریك ازمهره‌های ۱۳، ۵، ۴، ۱۲ بامهرهٔ ۱۶ دارای انعکاس هستند.

تبدیلی که تعداد انعکاسهای آن (با به‌حساب‌آوردن مهرهٔ فرضی ۱۶) زوج باشد، مثل تبدیلهای II و III، **تبدیل زوج** و تبدیلی که تعداد انعکاسهای آن فردباشد، مثل تبدیلهای I و IV. **تبدیل فرد** نامیده می‌شود.

درجبرعالی ثابت می‌کنندکه تغییرجای هردو عنصر تبدیل، گروه آنرا عوض می‌کند، بنابراین هرحرکت در بازی پانزده‌که جای یکی‌از مهره‌ها را بامهرهٔ فرضی ۱۶ عوض می‌کند، گروه تبدیل‌را عوض می‌کند (مثلا درمورد عبور ازتبدیل I به‌تبدیل II آزمایش‌کنید)؛ واضح است که اگرتعداد حرکتها زوج باشد، گروه اصلی تبدیل تغییر نمی‌کند واگر تعداد حرکتها فردباشد به‌تبدیلی ازگروه مخالف می‌رسیم.

اگربرای سهولت‌کار ۱۶خانه‌را مثل خانه‌های صفحهٔ شطرنج رنگ کنیم، درهر حرکت‌رنگ خانهٔ‌خالی تغییر می‌کند وبنابراین قضایای‌زیر صحیح است:

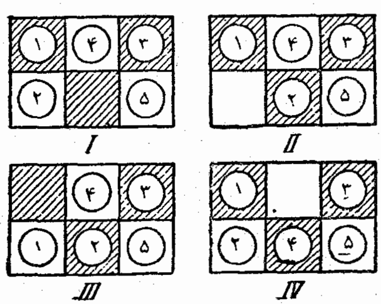
قضیهٔ I. همهٔ تبدیلهای فردی که خانهٔ خالی آنها سفید باشد وهمهٔ تبدیلهای زوجی‌که خانهٔ خالی‌آنها سیاه‌باشد، غیرقابل حل هستند؛ یعنی

نمی‌توان آنهارا به‌تبدیل III منجر کرد .

درحقیقت ازتبدیل فردی‌که خانهٔ خالی‌آن سفید باشد به‌تبدیل با خانهٔ‌خالی (بازهم‌سفید) درگوشه راست وپائین، تعداد حرکتها زوج‌است، یعنی تنها می‌توان به‌یك تبدیل فرد رسید وبنابراین به تبدیل III (که یك تبدیل زوج است) نمی‌توان رسید. بهمین‌ترتیب هم می‌توان غیرقابل حل‌بودن تبدیل زوجی‌که خانهٔ خالی‌آن سیاه‌باشد، ثابت کرد.

قضیهٔ بالارا به‌صورت‌کلی‌تری هم می‌توان مطرح‌کرد.

قضیهٔ II. اگر دربازی پانزده فرض‌را براین مگیریم‌که هرمهره‌ای بتواند به خانهٔ خالی بروِد وجای هردو مهرهٔ دلخواه را هم بتوانیم عوض کنیم، بازهم‌هیچ تبدیل فردی‌را نمی‌توان باتعداد زوج حرکت به‌تبدیل III منجرکرد وهمچنین هیچ‌تبدیل زوجی‌را باتعدادفرد حرکت‌نمی‌توان به‌تبدیل III رسانید .



شکل ۱۶

درحقیقت، طبق قانون این بازی،وقتی‌که جای‌دومهرهٔ دلخواه را باهم عوض می‌کنیم (که ممکن است یکی‌ازآنهامهرهٔ فرضی‌باشد) گروه تبدیل تغییر می‌کند (ثابت کنید!) . تبدیل III هم، که باید در انتهای عمل بدست آید، تبدیلی زوج است .

چون در بازی شطرنج حرکت اسب هم، رنگ خانهٔ شطرنج را عوض می‌کند . اگر حرکت مهره های بازی پانزده به خانهٔ خالـی طبق

حرکت اسب هم انجام بگیرد، باز قضیهٔ I صحیح است.

قضیهٔ III . هر تبدیل زوجی کـه خانهٔ آن سفید باشد و هـر تبدیل فردی‌که خانهٔ خالی‌آن سیاه باشد قابل حل است، یعنی می‌تواند منجر بـه تبدیل III بشود . بقیهٔ تبدیلات را می‌توان بـه تبدیل IV منجر نمود.

ابتدا حرکتهای پنج مهره را درمستطیلی‌که ازشش خانه تشکیل شده است ، مطالعه می‌کنیم . اگر تنها به ارتباط متقابل مهره‌ها ، ضمن حرکت دوری مستطیل (درجهت حرکت عقربه‌های ساعت) توجه کنیم ، بدون به حساب‌آوردن جای خانهٔ خالی، وضع قرارگرفتن مهره‌ها در I و II و III (شکل ۱۶) دارای یك خصوصیت تبدیل هستند : ۱۴۳۵۲ (یا یکی‌از تبدیلات ۴۳۵۲۱ ، ۳۵۲۱۴ وغیره) .

به سادگی دیده می‌شودکه هر حرکت افقی (مثلا حرکت ازحالت I به II) وهر حرکت قائم درستونهای کناری (مثلا حرکت ازحالت II به III) ارتباط متقابل مهره‌هارا تغییر نمی‌دهد وهر حرکت قائم درستون وسط (مثلا حرکت مهرهٔ ۴ درحالت I و رسیدن به‌حالت IV) ارتباط متقابل مهره‌ها را تغییر می‌دهد ، ضمناً تبدیل ۱۳۵۴۲ ، کـه ازلحاظ ترتیب خصوصیت جدیدی دارد ، ازهمان تبدیل قبلی بادوحرکت شمارهٔ مربوطه بدست می‌آید: ۱۴۳۵ ۲. با استفاده از این مطلب، هرسه مهرهٔ دلخواه، مثلا۱، ۲و۳ را می‌توان پشت‌سرهم بترتیب صعودی قرار داد؛مثلا باشروع از تبدیل ۱۴۳۵۲ پس‌از انتقال، ابتدا مهرهٔ۲ وسپس مهرهٔ۴ در ستون‌وسط به‌تبدیل۱۲۳۴۵ می‌رسیم (باشروع‌ازاوضاع دیگرهم‌می‌توان به تبدیل۱۲۳۵۴ رسید) .

بنا به استدلالی که کردیم، تنظیم مهره‌ها را باشروع ازهر وضعی که در ابتدا داشته‌اند ، می‌توان مثلا به این ترتیب انجام داد (که البته همیشه‌کوتاهترین راه حل نیست):

۱) ابتدا کوشش می‌کنیم که در مستطیل «۱,۲,۵,۶,۹,۱۰» (اینها شماره‌های شش خانه‌ای هستندکه درحالت تبدیل عادی III یك مستطیل می‌سازند) مهره‌های۱و۲ وهمچنین سه مهرهٔ دلخواه دیگردرست درآیند ویکی ازخانه خالی باشد ؛

۲) مهره‌های ۱و۲ را به‌جای مربوطهٔ خود منتقل می‌کنیم ؛

۳) باانجام عمل مشابه، مرتباً مهره‌ها را به محل خودشان منتقل می‌کنیم :

۳و۴، درچارچوب مستطیل « ۳,۴,۷,۸,۱۱,۱۲ » ،

۵و۶، درچارچوب مستطیل «۵,۶,۹,۱۰,۱۳,۱۴» ،

۷و۸، درچارچوب مستطیل «۷,۸,۱۱,۱۲,۱۵,۱۶» ،

۹و۱۳، درچارچوب مستطیل «۹,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵» ؛

۴) داخل مستطیل « ۱۰,۱۱,۱۲,۱۴,۱۵,۱۶ » مهره‌های ۱۰ ، ۱۱، ۱۲ و۱۵ پیدا می‌شودکه سه‌تای آنها: ۱۰، ۱۱ و۱۲ می‌توانندبجای خود منتقل شوندکه دراینصورت ، اگر تبدیل اصلی باشرایط قضیهٔ III بسازد به‌تبدیل III (شکل۱۵) می‌رسیم ودرغیراینصورت به تبدیلIV.

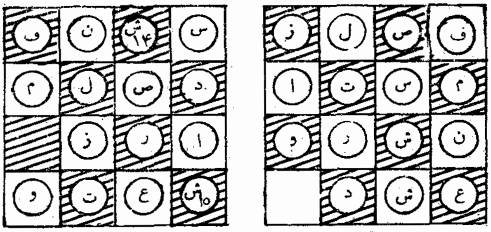
دربازی پانزده ، می‌توان هر مهره را بایك حرف الفبا نشان داد بطوریکه در ترکیب کلی بصورت یك جمله درآیند. ضمناً اگر یکی از حروف دوبار و بقیه یکبار وجود داشته باشد ، باهر وضع اولیه مهره‌ها ، می‌توان ضمن چند حرکت آنها را به‌وضع «صحیح» منجر کرد.

مثلا جملهٔ : «فصل زمستان شروع شد» را انتخاب می‌کنیم:

حروف: ف،ص، ل، ز، م، س، ت، ا، ن، ر، و ، ع ، د ،

شماره : ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲ ، ۱۳ ، ۱۵ ،

وشماره‌های ۱۰ و۱۴ را به‌ترتیبی‌که لازم‌باشد، به حرف ش می‌دهیم، بهر نحوی‌که مهره‌ها روی صفحه قرارگرفته باشد، یکی‌از دوگروه تبدیل‌را خواهیم داشت،که هریك را، باتبدیل جای دوحرف، می‌توان به‌دیگری منجرکرد . بنابراین یکی‌از تبدیلها مسلماً قابل حل خواهدبود.



شکل ۱۷

مثلا، اگر درشکل ۱۷*، حرف ش را دربالا بجای شمارهٔ ۱۰ و در پائین بجای شمارهٔ ۱۴ بگیریم ، تبدیلی از گروه زوج بدست می‌آید (۴۴ انعکاس) ، واگر جای‌آنها را باهم عوض‌کنیم ، هما نطورکه در شکل است ، به تبدیل ازگروه فرد می‌رسیم (۴۷ انعکاس) .

چون خانهٔ خالی دروضع (a) سیاه است ، برای اینکه به وضع (b) برسیم ، باید حرف‌ش بالارا باشمارهٔ۱۴ وحرف ش پائین را باشمارهٔ

*) ازآنجاکه خط فارسی ازراست به چپ نوشته می‌شود، درشکل ۱۷ نسبت به‌اصل تغییراتی‌داده شده‌است: اولاحروف را ازراست به‌چپ نوشته‌ایم، ثانیاً خانهٔ خالی را درپائین وسمت چپ قرار داده‌ایم . «مترجم»

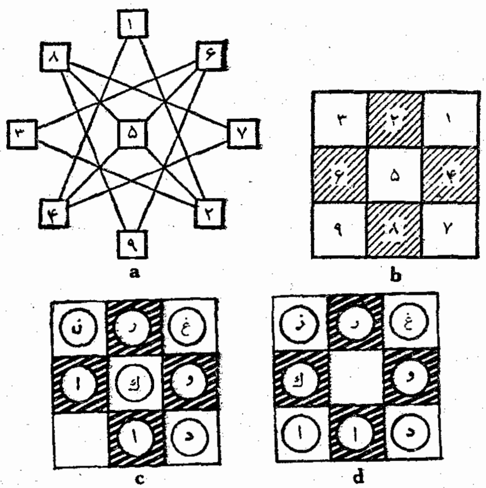
۱۰ درنظر بگیریم.

همهٔ آنچه راکه درمورد بازی پانزده گفتیم، دربارهٔ «بازی نه» هم صدق می‌کند، که درآن هشت مهره می‌توانند درمربعی‌که نه‌خانه دارد. گذاشته شوند.

نمونهٔ جالبی ازبازی‌نه را (که‌آنرا بازی «غاز و اردك» می‌نامیم)، مورد مطالعه قرارمی‌دهیم. بازی روی «تخته‌ای» انجام می‌شودکه نه‌خانه دارد و به‌وسیلهٔ پاره خطهای مستقیم بهم مربوط شده‌اند (شکل ۱۸ــa). روی مهره‌های هشت خانه، حروف«غاز واردك» نوشته شده‌است ومهره‌ها بطور تصادفی درهشت خانهٔ صفحه قرارگرفته‌اند.

باحرکت مهره‌ها روی پاره‌خطهای اتصالی، باید چنان قرارگیرند که وقتی درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیش برویم، با شروع ازخانهٔ ۱، «غاز و اردك» بدست‌آید.

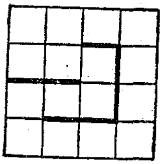
اگر خانه‌های «صفحه» را طبق شکل ۱۸ــa شماره‌گذاری کنیم،



شکل۱۸

به سادگی معلوم می‌شود که ارتباط هردوخانه‌آن به‌وسیلهٔ پاره‌خط مستقیم درست مثل، ارتباط همان شماره‌ها در مربع b است، بشرطی‌که درمورد این مربع،حرکت‌تنها بطور مستقیم (افقی یاقائم)ممکن باشد.

چون در«غاز و اردك» حرف « ا »دوبار تکرار شد، وبقیهٔ حروف هرکدام یکبار (مثل جملهٔ«فصل زمستان شروع‌شد»که درآن حرف «ش» دوبار آمده بود) ، بنابراین طبق آنچه در بالا گفتیم ، باشروع از هر وضعی که مهره‌ها در b داشته باشند، می‌توان به وضع c و متناظر آن وضع d (با a مقایسه کنید) رسید.



شکل۱۹

بازیهائی راکه در این بند شرح دادیم ، بازیهای یکنفره است . ولی چند نفر هم می‌توانند به‌آنها بپردازند ، به‌این‌ترتیب‌که معلوم شود چه‌کسی‌کوتاهترین راه حل را پیدا می‌کند .

برای انجام بازی پانزده می‌توان ازبعضی حرکتها صرفنظر کرد ؛ مثلا می‌توان ثابت کرد (آزمایش کنید وانجام دهید)[۳۸]، موانعی‌که در شکل ۱۹ نشان داده شده است، نمی‌تواند مانع عبور از هر وضع اولیه به اوضاع III یا IV (شکل۱۵) باشد.

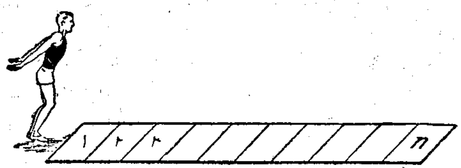
حال به سئوال زیر پاسخ بدهید : اگر حرکت ساده مستقیم را به نوع‌حرکت اسب دربازی شطرنج تبدیل‌کنیم،آیا بازهم قضیهٔ III صحیح است ؟ سئوال مشابهی می‌توان دربارهٔ صفحهٔ مربع‌شکلی با۳۶ خانه و۳۵ مهرهٔ شماره‌گذاری شده طرح کردکه درآن بجای حرکت اسب (دربازی شطرنج) ، یك مهره طوری حرکت‌کندکه از جهت (افقی یاقائم) دوخانه وازجهت دیگر سه‌خانه تغییرمحل داده باشد.

۱۵

تعیین تعداد روشهای رسیدن به هدف

مسائلی در بارهٔ پرش

I . فرض کنیم کسی جلوخانه‌هائی که روی زمین رسم شده است ایستاده باشد (شکل ۲۰) و بخواهد با پرشهای متوالی خودرا به خانهٔ nام برساند، اگر پرش او از چپ به راست باشد و فقط درخانه‌های رسم‌شده فرودآید وضمناً طول پرش بتواند هرمقدار دلخواه باشد، به چند طریق می‌تواند خود را به هدف برساند.



شکل ۲۰

تعداد راههای رسیدن به خانهٔ sام را به u_s نشان می‌دهیم . برای حل مسئله باید توجه داشت که پرش می‌تواند یکباره به‌خانهٔ nام باشد، بدون اینکه در خانه‌های بینابینی فرودآید . اگر بخواهد برای رسیدن به هدف در k خانهٔ بینابینی فرودآید می‌تواند با $C_{n-۱}^{k}$ طریقه خودرا به خانهٔ nام برساند وبنابراین :

$$u_n = ۱ + C_{n-۱}^{۱} + C_{n-۱}^{۲} + \cdots + C_{n-۱}^{n-۱} = ۲^{n-۱} \qquad (۱)$$

تبصرهٔ ۱ . واضح است که راحت‌تر است تعداد انواع نمایش عدد n را به صورت مجموع عددهای مثبت وصحیح پیداکرد(که شامل حالتی که «مجموع» ازیك‌جمله هم تشکیل‌شده باشد، می‌شود)، ضمناً دونمایش را وقتی مختلف می‌گیریم که یا جملات آنها فرق داشته باشند و یا ردیف این جملات .

تبصرهٔ ۲ . اگر قرارباشدکه تعداد فرودآمدن زوج باشد، دستور محاسبهٔ تعدادِ روشها چنین خواهد بود :

$$۱ + C_{n-۱}^{۲} + C_{n-۱}^{۴} + \cdots = ۲^{n-۲}$$

II . مطلوبست تعداد انواع پرشها برای رسیدن به خانهٔ nام ، بشرطی‌که تنها بتوان پرش‌را به‌خانهٔ مجاور ویك‌خانه درمیان انجام داد.

تعداد روشهای رسیدن به‌خانهٔ sام را به v_s نشان می‌دهیم. برای

رسیدن به خانهٔ sام تنها می‌توان از خانهٔ $(s-۱)$ام یا $(s-۲)$ام پرید وبرای‌رسیدن به‌این‌خانه‌ها هم بترتیب $v_{s-۱}$ و $v_{s-۲}$ طریقه وجوددارد، به‌این ترتیب به‌ازاء $s>۲$ داریم :

$$v_s = v_{s-۱} + v_{s-۲} \qquad (۲)$$

و مستقیماً هم بدست می‌آید :

$$v_۱ = ۱ \text{ و } v_۲ = ۲ \qquad (۳)$$

باتوجه به روابط (۳) می‌توان به کمك رابطهٔ (۲) بطور متوالی مقادیر $v_۳$، $v_۴$، $v_۵$، ... را بدست‌آورد ، یعنی حل مسئله را به‌صورت یك جدول تنظیم کرد :

(۴)

s	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
v_s	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷	۶۱۰

معادلهٔ (۲) حالت خاصی ازمعادلهٔ زیر است:

$$v_{x+m} = F(v_x, v_{x+۱}, \cdots, v_{x+m-۱}) \quad , \quad (۵)$$

اگر مقادیر $v_۰$، $v_۱$، $v_۲$، ...، $v_{m-۱}$ معلوم باشد ، می‌توان به‌کمك رابطهٔ (۵) (که به رابطهٔ برگشتی برای تابع v_x معروف است) به طـور متوالی مقادیر v_m، $v_{m+۱}$، $v_{m+۲}$، ... را بدست آورد ، یعنی جدولـی برای حل معادلهٔ(۵) تشکیل‌داد. ولی جستجوی تابع به‌این‌طریق ، مثلا برای $v_{۱۰۰۰}$ خیلی مفصل و نامطبوع است ومعمولا کوشش می‌شود که تابع به‌صورت $v_x = f(x)$ بدست‌آید .

می‌توان ثابت کرد[۳۹] که معادلات (۲) و (۳) در تابع زیر صدق می‌کنند :

$$v_n=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{n+۱}\right] \quad (۶)$$

اگر باکمك رابطهٔ (۶) مقادیر $v_۳$، $v_۴$، $v_۵$، ... را محاسبه‌کنیم ، به‌همان عددهائی می‌رسیم که درجدول (۴) بدست آوردیم (امتحان‌کنید!) .

تبصرهٔ ۳. «مسئلهٔ خرگوشها» که به‌وسیلهٔ لئوناردو فیبوناچی طرح شده است، نیز به‌حل همین‌معادلهٔ(۲) منجرمی‌شود و بهمین مناسبت‌عددهای جدول (۴)را **عددهای فیبوناچی** می‌نامند. این‌عددها خواص بسیارجالبی دارند و ما در اینجا تنها به‌رابطهٔ‌آنها بـاضرایب بسط دوجمله‌ای اشاره می‌کنیم .

از حل مسئلهٔ دوم مربوط به پرش نتیجه می‌شودکه v_n برابراست باتعداد نمایشهای مختلف عدد طبیعی n به‌صورت مجموعهائی که هریك ازجملات‌آنها برابر یك یا دو باشد، ضمناً دونمایش تنها درحالتی باهم اختلاف دارندکه ردیف جملات آنها باهم اختلاف داشته باشند. ازطرف دیگر تعداد نمایشی ،که درآن عدد۲ به‌اندازهٔ k مرتبه تکرار شده‌باشد $\left(\circ\leqslant k\leqslant\left[\frac{n}{۲}\right]\right)$ ، برابر است با C_{n-k}^{k}، زیرا دراینحالت تعداد کلی جملات برابر است با$n-k$ وازn$-$k جا، k جارا عدد ۲ اشغال کرده است، C_{n-k}^{k} طریقه می‌تواند وجود داشته باشد، بنابراین :

$$v_n=۱+C_{n-۱}^{۱}+C_{n-۲}^{۲}+\cdots C_{n-[\frac{n}{۲}]}^{[\frac{n}{۲}]} \quad (۷)$$

تبصرهٔ ۴. در اولین مسئلهٔ مـربوط به پرش می‌توان به این رابطهٔ رسید :

$$u_s = ۱ + u_۱ + u_۲ + \cdots + u_{s-۱}, \qquad (۸)$$

وازآنجا به‌سادگی (به ازاء $u_۱ = ۱$) به‌تساوی $u_n = ۲^{n-۱}$ می‌رسیم.

تبصرهٔ ۵. مسئلهٔ مربوط به‌پرش را می‌توان باتغییر شرایط متنوع‌تر کرد: مثلاً می‌توان فرض کرد که پرش بتواند یك، دو وسه‌بار انجام شود، بشرطی که درهرحال این پرش ازخانه‌ای که شماره‌اش مضربی ازپنج است انجام گیرد (برای وضع اولیه هم همین شرط باید رعایت شود).

اگر در اینحالت w_s را تعداد انواع روشهای رسیدن به‌خانهٔ sام فرض کنیم، به‌جای یك معادله، یك دستگاه خواهیم داشت:

$$w_s = w_{s-۱} + w_{s-۲} + w_{s-۳} \qquad (\text{به‌ازاء } s = ۵k \ , \ s = ۵k \pm ۱)$$

$$w_s = w_{s-۱} + w_{s-۳} \qquad (\text{به‌ازاء } s = ۵k + ۲)$$

$$w_s = w_{s-۱} + w_{s-۲} \qquad (\text{به‌ازاء } s = ۵k + ۳)$$

ضمناً $w_۱ = ۱$ ، $w_۲ = ۱$ ، $w_۳ = ۲$ می‌باشد.

با تشکیل یك جدول برای مقادیر w_s ، امتحان کنید[۴۰] که در اینحالت برای رسیدن به‌خانهٔ پانزدهم ۱۶۱۹ طریقه وجود دارد.

حالا به مسائلی می‌پردازیم که درآنها، تابع مجهول به‌دو یا چند متغیر صحیح (متغیری که تنها می‌تواند عددهای صحیح را اختیار کند) بستگی دارد.

مسئلهٔ رخ

به چند طریق (باکمترین تعداد ممکنهٔ حرکت)، می‌توان رخ را ازخانهٔ(۰,۰) به خانهٔ (m,n) منتقل کرد، بشرطی که انتقال باحرکتهای

ساده انجام‌گیرد یعنی حرکتهائی‌که رخ را تنها به خانهٔ مجاور در جهت افقی یاقائم منتقل‌کند .

عددهائی که در پرانتز گذاشته شده است، بترتیب شمارهٔ ستون و سطری است‌که خانهٔ مفروض در محل تلاقی‌آنها قرار گرفته است، ضمناً ستون سمت چپ و سطر پائین را با شمارهٔ صفر نشان داده‌ایم (m و n عددهائی صحیح وغیرمنفی هستند) .

تعداد طریقه‌های انتقال ازخانهٔ $(0,0)$ به‌خانه (x,y) را به $u_{x,y}$ نشان می‌دهیم. واضح است‌که برای هرمقدار xو y داریم :

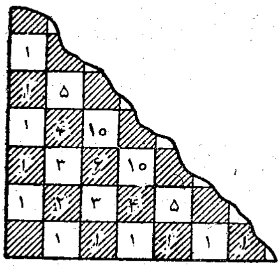
$$u_{x,0}=1 \quad \text{و} \quad u_{0,y}=1 \qquad (9)$$

چون به‌ازاء $x>0$, $y>0$، رخ می‌تواند تنها ازخانهٔ $(x-1,y)$ یا ازخانهٔ $(x,y-1)$ به‌خانهٔ (x,y) برود وچون‌ضمناً برای‌رسیدن به‌خود این خانه‌ها هم بترتیب $u_{x,y-1}, u_{x-1,y}$ طریقه وجود دارد ، می‌توان به‌رابطهٔ زیر رسید :

$$u_{x,y}=u_{x-1,y}+u_{x,y-1} \qquad (10)$$

به‌این‌ترتیب بیك رابطهٔ برگشتی برای تابع $u_{x,y}$ می‌رسیم‌که به‌دو متغیر صحیح (و درمورد مسئلهٔ ماغیرمنفی) بستگی دارد .

اگر در هرخانهٔ صفحه مقادیر متناظر $u_{x,y}$ نوشته شود، باتوجه به روابط (۹) و (۱۰) می‌توان همهٔ خانه‌های ستون سمت چپ و سطر پائین را باواحد پرکردو سپس (رابطهٔ۱۰را ببینید) بتدریج درخانه‌های دیگر عددهای مربوطه را قرار دادکه برابر است بامجموع دو عدد مجاور آن (پائین وسمت چپ). واین‌حل معادلهٔ(۱۰) (به‌کمك جدول) باشرایط(۹) می‌باشد (شکل ۲۱ را ببینید) .


شکل۲۱

مسئلهٔ رخ را می‌توان باروش ساده‌تری هم حل کرد، راه حل جدید این حسن را هم دارد که معادلهٔ (۱۰) را به‌صورت یک رابطهٔ ساده درمی‌آورد.

برای انتقال رخ از خانهٔ (۰,۰) به خانه(m,n) باید بطورکلی $m+n$ حرکت انجام‌داد: m حرکت درجهت افقی و n حرکت درجهت قائم. طریقه‌های مختلف انتقال رخ را می‌توان به این ترتیب درنظر گرفت که دو حرف h و v باچه ترتیبی می‌توانند حرکتهای افقی وقائم خودرا داشته باشند.

واضح است‌که حرف h از مجموع $m+n$ خانه‌ای که برای آن وجوددارد، می‌تواند m خانه‌را انتخاب کند و بنا براین‌رویهمرفته به‌اندازهٔ $C_{m+n}^{m}=\frac{(m+n)!}{m!n!}$ امکان وجود داردکه ضمناً راه‌حل مسئلهٔ رخ هم می‌باشد. حل معادلهٔ (۱۰) باشرایط (۹) هم منجر به‌تابع زیر می‌شود:

$$u_{x,y}=\frac{(x+y)!}{x!y!} \qquad (۱۱)$$

مسئلهٔ عنکبوت

اگرعنکبوتی در مبدأ مختصات باشد، به‌چند طریق می‌تواند خود را (ازکوتاهترین راه) به‌نقطهٔ (k,l,m) از شبکهٔ فضائی برساند؟ (در شبکهٔ فضائی، هرنقطهٔ گرهی، یعنی نقطه‌ای که مختصات‌آن عددهائی

صحیح است، به‌وسیلهٔ تارهائی موازی محورهای مختصات به‌شش نقطهٔ گرهی مجاور مربوط می‌شود) . این‌مسئله را می‌توان تعمیم مسئلهٔ رخ دانست .

اگر تعداد طریقه‌های رسیدن به‌نقطهٔ (x,y,z) را به $u_{x,y,z}$ نشان دهیم، به‌ازاء مقادیر طبیعی y,x و z خواهیم داشت :

$$u_{x,y,z}=u_{x-1,y,z}+u_{x,y-1,z}+u_{x,y,z-1} \qquad (12)$$

به‌این معادله‌ای که رابطهٔ تابع مجهول را با سه متغیر صحیح معین‌می‌کند، باید شرایط زیررا اضافه‌کرد :

$$u_{y,x,0}=\frac{(x+y)!}{x!y!}\ ;\ u_{x,0,z}=\frac{(x+z)!}{x!z!}\ ;$$

$$u_{0,y,z}=\frac{(y+z)!}{y!z!}, \qquad (13)$$

که نتیجه‌ای ازحل مسئلهٔ قبلی هستند .

هر طریقهٔ مشخص انتقال عنکبوت را از گره $(0,0,0)$ به گره (k,l,m) می‌توان باتوالی حروف z,y,x درنظر گرفت که به‌چه‌ترتیبی متناوباً موازی با محورهای oz,oy,ox منتقل می‌شوند ؛ بنابراین $u_{k,l,m}$ برابر است با تعداد طریقه‌هائی که می‌توان k حرف «x»، l حرف «y» و n حرف «z» را در $k+l+m$ محل جاداد .

ولی از $k+l+m$ محلی که داریم، k محل را حرف «x» می‌ـ تواند اشغال‌کند و بنابراین دراین مورد $\frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}$ طریقه وجود دارد ؛ برای هریك از این طریقه‌ها $\frac{(l+m)!}{l!m!}$ امکان برای انتخاب l محل وجود دارد (از $l+m$ محل آزاد باقیمانده) که مربوط به حرف «y» است. بنابراین تعدادکلی امکان انتخاب k محل (برای جادادن حرف

«x») و l محل (برای جادادن حرف «y») برابر است با:

$$\frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!}\cdot\frac{(l+m)!}{l!m!}=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}$$

به‌این ترتیب از حل معادلهٔ (۱۲) باتوجه به‌شرایط (۱۳) ، تابع زیر بدست می‌آید :

$$u_{x,y,z}=\frac{(x+y+z)!}{x!y!z!}$$

مسائل چندبعدی

مسئلهٔ مربوط به عنکبوت را می‌توان به‌صورت یك شبکهٔ چهار-بعدی تعمیم داد، به‌این‌ترتیب که نقاط گرهی آن از نقاط گرهی یك‌شبکهٔ سه‌بعدی با انتقال آن به‌اندازهٔ یك، دو، سه و ... واحد طول به موازات « محور چهارم » ou بدست می‌آید . لازم نیست محور ou را عمود بر محورهای ox، oy و oz در نظر بگیریم (که برای آن لازم است وارد در «فضای چهاربعدی» بشویم) ، بلکه کافی است یك‌رشته شبکهٔ سه‌بعدی بنظرآوریم که‌گره‌های آنها به‌وسیلهٔ تارهای واحدی موازی بامحور ou بهم مربوط شده‌اند .

درچنین‌شبکهٔ‌چهاربعدی، هر گره به‌وسیلهٔ‌چهارعدد صحیح(مختصات گره) مشخص می‌شود .

باحفظ اصطلاحات هندسی، اغلب مجموعهٔ m عدد: a_1، a_2، ...، a_m به عنوان مختصات یك نقطه در «فضای m بعدی» درنظر گرفته می‌شود.

اگر فرض‌کنیم عددهای a_1، a_2، ...، a_m صحیح وغیرمنفی باشند و

دوگره‌را وقتی مجاور هم بدانیم که تنها یکی از عددهای مربوط به‌مختصات آنها یك واحد اختلاف داشته باشند و بقیهٔ مختصات آنها یکی باشد، در اینصورت به ازاء $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$ ، انتقال از گره $O(0,0,\ldots,0)$ به‌گره $A(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ می‌تواند با n حرکت انجام شود (بطوریکه هرحرکت ،گره را به‌گره مجاور منتقل‌کند) .

اگرحرکتهائی راکه به‌ازاء آنها فقط مختص اول یا مختص دوم و غیره‌زیاد می‌شود متناظراً به‌حرف x_1، حرف x_2 وغیره نشان دهیم، تعداد طریقه های انتقال به‌وسیلهٔ n حرکت از گره $O(0,0,\ldots,0)$ به گره $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ مساوی‌است‌با تعداد « ترکیبهای تکراری » مختلف از n عنصر :

$$\underbrace{x_1,x_1,\cdots,x_1}_{\text{عنصر } a_1}\ ;\ \underbrace{x_2,x_2,\cdots,x_2}_{\text{عنصر } a_2}\ ;\ \cdots\ ;\ \underbrace{x_m,x_m,\ldots x_m}_{\text{عنصر } a_m}$$

که اگر این استدلال را ادامه دهیم به مسئلهٔ عنکبوت می‌رسیم . ثابت کنید[۴۱] که‌این تعداد برابر است با :

$$\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}$$

به‌عنوان نمونه‌ای از مسائل چندبعدی می‌توان از مسئلهٔ پرکردن بشکه‌های آب نام برد : بشکه‌هائی با شماره‌های $1,2,\ldots,m-1,m$ داریم‌که ظرفیت‌آنها بترتیب $a_1,a_2,\ldots,a_{m-1},a_m$ سطل است ؛ به‌چند طریق می‌توان همهٔ این بشکه‌ها را پرکرد، به‌شرطی‌که هربار بتوان یك سطل پرآب دریکی ازبشکه‌ها بطورکامل ریخت ؟

واضح است‌که دراین مورد هم تعداد طریقه‌ها برابراست با:

$$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_m)!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}$$

مسئله‌ای در بارهٔ شاه شطرنج

اگر شاه بتواند در خانه‌های شطرنج طوری حرکت کندکه یکی یا هردو مختص آن اضافه‌شود (یعنی حرکت «قطری» هم داشته‌باشد)، به‌چند طریق می‌توان آنرا ازخانهٔ (o و o) به‌خانهٔ (k,l) رساند ؟

تعداد مجهول را به $w_{k,l}$ نشان می‌دهیم . اگـر تعداد حرکتهای قطری شاه‌را s بگیریم (واضح است‌که $s\leqslant l, s\leqslant k$)، دراینصورت تعداد حرکتهای افقی مساوی $k-s$ وتعداد حرکتهای قائم $l-s$ ومجموع کل حرکتها $k+l-s$ می‌شود. تعداد طریقه‌هائی را که درهریك ازآنها s حرکت قطری وجود داشته باشد، می‌توان به $\frac{(k+l-s)!}{(k-s)!(l-s)!s!}$ نشان داد(تحقیق کنیدکه به چند طریق می‌توان $k-s$ حرف h، $l-s$ حرف وs حرف d را چید؟) .

بنابراین به‌ازاء $k\leqslant l$ داریم :

$$w_{k,l}=\frac{(k+l)!}{k!l!}+\frac{(k+l-1)!}{(k-1)!(l-1)!1!}+\cdots+$$
$$+\frac{l!}{o!(l-k)!k!} \qquad (۱۴)$$

اولین جملهٔ این رابطه ، معرف تعداد طریقه‌های رسیدن به خانهٔ (k,l) بدون حرکت قطری است، دومین جمله تعداد طریقه‌هائی است‌که در هر

یك ازآنها یك حرکت قطری وجود داشته باشد وغیره.

خواننده را راهنمائی می‌کنیم که باتوجه به‌رابطهٔ واضح:

$$w_{x,y}=w_{x,y-۱}+w_{x-۱,y}+w_{x-۱,y-۱} \qquad (۱۵)$$

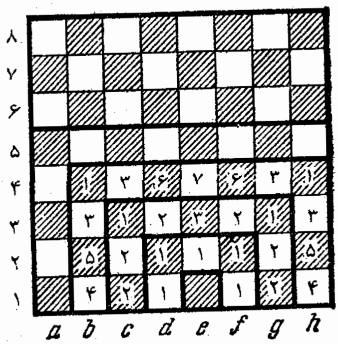
با شرایط:

$$w_{x,۰}=w_{۰,y}=۱ \qquad (۱۶)$$

جدولی برای مقادیر تابع $w_{x,y}$ ترتیب دهد، ومقادیر بدست‌آمده را با نتایجی‌که ازرابطهٔ (۱۴) محاسبه می‌شود، مقایسه‌کند.

می‌توان، بابعضی تغییرات در شرایط مسئله، تعداد طریقه‌هائی جستجوکردکه شاه بتواند ازیك خانهٔ مشخص (ومثلا ازخانهٔ e۲) به‌خانهٔ دیگری ازصفحهٔ شطرنج **باکمترین تعداد ممکنهٔ حرکت** برسد.

صفحهٔ شطرنج را به منطقه‌هائی تقسیم می‌کنیم، که شاه بتواند با یك حرکت، دو حرکت وغیره به‌آنها برسد (شکل ۲۲). فرض‌کنیدکه مثلا برای همهٔ خانه‌های اولین سه منطقه، راه‌حل معلوم‌باشد (عددهائی را که در این خانه‌ها قرار گرفته است ببینید).



شکل ۲۲

چون به خانهٔ f۵ ازمنطقهٔ چهارم می‌توان از خانه‌های e۴، f۴ و g۴ منطقهٔسوم رسید، وبه‌این خانه‌ها هم می‌توان بترتیب باهفت، شش وسه طریقه رسید، بنابراین شاه می‌تواند درخانهٔ f۵ به شانزده طریق (۳+۶+۷) قرارگیرد.

واضح است که تاخانهٔ g۵ می‌توان ده طریقه (۱+۶+۳)، تاخانهٔ h۵ ، چهار طریقه (۱+۳) وغیره انتخاب کرد .

اگر بطور متوالی خانه‌های منطقه‌های چهارم، پنجم وغیره را پر کنیم ، به سادگی نتیجه می‌گیریم که مثلا برای رسیدن شاه به خانه‌های a۲، a۷، c۸ و d۸ بترتیب ۱۲، ۲۰، ۲۶۶ و۳۵۷ طریقه وجود دارد .

مسائل مختلف

مسائل مشابهی وجود دارد ،که درآنها برای جستجوی تابع نمی‌توان ویا بااشکال می‌توان معادلهٔ مشخصی تشکیل داد. مثلا اگر حرکت شاه را به حرکت اسب درصفحهٔ شطرنج تبدیل کنیم ، یا اگر در مسائل مربوط به‌رخ ویا عنکبوت باقراردادن موانعی درصفحه ویا از بین بعضی‌از تارهای شبکهٔ فضائی بعضی‌از حرکتها را ازدست بدهیم، به‌چنین مسائلی می‌رسیم .

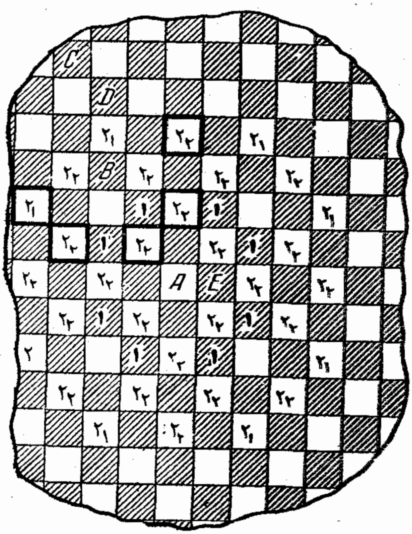
دراینگونه مسائل، مناطقی‌که می‌توان با k حرکت به‌آنها رسید ($k=1,2,3,\ldots$) ، می‌توانند اشکال کاملا مخصوص بخودی داشته باشند و بنابراین خانه‌های مناطق مختلف را بهتر است یا شماره‌گذاری‌کرد و یا با رنگهای مختلف رنگ کرد . ضمناً قبل از آنکه بـه تعیین منطقهٔ ($k+1$) ام بپردازیم ، باید همهٔ خانه‌های منطقهٔ kام را مشخص‌کنیم .

عددهای شکل ۲۳، خانه‌های مربوط به دو منطقهٔ اول را درمورد مسئلهٔ مربوط بدحرکت اسب دریك‌صفحهٔ بی‌انتهای شطرنج نشان‌می‌دهد؛

عددهای کوچکتر نشان می‌دهند که از خانهٔ A به‌چند طریق می‌توان اسب را به خانه‌های جداگانهٔ این منطقه‌ها رسانید.

واضح است که منطقهٔ سوم از بین خانه‌های خالـی چنان انتخاب می‌شود که بتوان از یکی از خانه‌های منطقهٔ دوم با حرکت اسب به‌آنها رسید. مثلاخانهٔ B متعلق به منطقهٔ سوم است، وچون ازپنج خانهٔ منطقهٔ دوم (که درشکل دورآنها پررنگ‌تر شده است) می‌توان باحرکت اسب به‌آن رسید، بنابراین‌اسب می‌تواند ازخانهٔ A به‌نه طریقه به‌آن‌برسد.

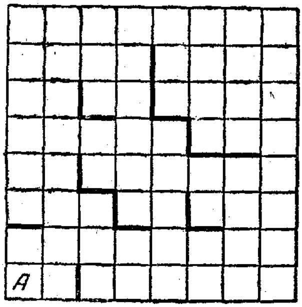
(۲+۲+۲+۲+۱)



شکل ۲۳

به‌همین ترتیب می‌توان دانست‌که به خانه‌های C، D و E از منطقهٔ سوم می‌توان ، باحرکت اسب ، بایك ، شش و دوازده طریقه رسید .

خودتان آزمایش کنید که با توجه به موانعی که در شکل ۲۴ نشان داده شده است، منطقهٔ دوازدهم در مسئلهٔ مربوط به رخ، با شروع از A، از چهار خانه تشکیل شده‌است ورخ را می‌توان به هفت طریقه به هریك از آنها رسانید[۴۲].



شکل ۲۴

سئوالهای مشابهی می‌توان در بارهٔ مسائل مربوط به حرکت اسب ویاعنکبوت طرح کرد، ضمناً موانع مربوط حرکتهارا می‌توان به‌هرطریقی انتخاب کرد. دراین موارد می‌توان حدس زدکه «منطقهٔ kام» به فلان صورت می‌باشد.

به سادگی دیده می‌شود که در مسئلهٔ مربوط به اسب، منطقه‌های پنجم، ششم وغیره صورت کاملا منظمی دارند و ضمناً به ازاء $k \geqslant ۵$، برای تعداد N_k خانه‌های منطقهٔ kام، رابطهٔ $N_k = ۱۲۰ + ۲۸(k-۵)$ صحیح است.

حالا دربارهٔ مسائل زیر فکر کنید:

۱. به چند طریقه می‌توان روی صفحهٔ شطرنج بی‌انتها با چهار حرکت به منطقهٔ چهارم، بدوسیلهٔ شاه، رسید[۴۳]؟

۲. به‌چند طریقه می‌توان دو (سه، چهار) پیاده راکه درخط دوم صفحهٔ شطرنج قرارگرفته‌اند به‌خط هشتم رسانید[۴۴]؟ (حرکتهای متناوبی که پیاده‌های مختلف انجام می‌دهند، متمایز می‌گیریم، همچنین هریك از آنها از حق استفادهٔ دو حرکت اولیه، می‌توانند استفاده کنند یا

استفاده نکنند) .

۳ . آیا نمی‌شود راه حلی‌کلی برای مسئلهٔ اسب پیداکرد ، یعنی ارتباط بین تعدادطریقه‌های رسیدن به‌خانه‌های جداگانه ازصفحهٔ شطرنج بی‌انتها را باوضع اولیهٔ‌آنها تعیین‌کرد (لااقل برای $k \geqslant 5$) .

می‌توان سئوال مشابهی برای مقادیری مانند **p**و**q** طرح کـرد ، بطوریکه به‌ازاء هرحرکت یکی از مختصات **p** واحد و دیگری **q** واحد تغییر کند .

۱۶

مربعهای جادوئی

مربع جادوئی (یا مربع وفقی) $n^۲$ به مربعی شامل $n^۲$ خانـه گفته می‌شود که درآنها $n^۲$ عدد طبیعی اولیه بنحوی قرار گرفته باشند ، که مجموع عددهای واقع درهر سطر یا هر ستون ، وهمچنین در هریك از قطرهای مربع مقداری ثابت ومساوی $S_n = \frac{n(n^۲+۱)}{۲}$ باشد. اگر تنها مجموع عددهای واقع در هرسطر وهر ستون مقداری ثابت باشد، مربع

را نیم‌جادوئی (یا نیم‌وفقی) گویند. در شکل ۲۵ — a مربع جادوئی معروف به مربع دورِر داده‌شده است که بنام ریاضی‌دان و نقاش قرن شانزدهم نامیده می‌شود؛ او این جدول‌را در پردهٔ نقاشی مشهور «مالیخولیا» نقش کرده است : دو عدد وسط در سطر پائین این مربع عدد ۱۵۱۴ را نشان می‌دهدکه تاریخ بوجودآمدن پرده است .

بسادگی می‌توان مسئلهٔ مربوط به‌مربع جادوئی‌را برای ۳ = n حل کرد. درحقیقت داریم : $S_{۳}=\frac{۳(۳^{۲}+۱)}{۲}=۱۵$ ، وفقط به هشت طریق می توان عدد ۱۵ را به صورت مجموعی ازعددهای مختلف (از یك تا نه) درآورد :

$$۱۵=۱+۵+۹=۱+۶+۸=۲+۴+۹=۲+۵+۸=$$
$$=۲+۶+۷=۳+۴+۸=۳+۵+۷=۴+۵+۶$$

می‌بینیم‌که هریك ازعددهای ۱، ۳، ۷ و۹ دوبار، هریك از عددهای ۲، ۴، ۶ و۸ سه‌بار وتنها عدد ۵ چهاربار در این مجموع‌ها ظاهر شده‌است. ازطرف دیگرازهشت ردیف خانه‌های سه‌تائی: سه‌ردیف افقی، سه‌ردیف قائم و دوردیف قطری، هریك ازخانه‌هائی‌که دریکی ازگوشه‌های مربع قرارگرفته‌است سه‌بار،خانهٔ وسط مربع‌چهاربار وبقیه دوبار دراین هشت ردیف‌قرارمی‌گیرند. بنابراین باید۵حتماً درخانهٔ مرکزی، عددهای۲،۴، ۶ و ۸ در خانه‌های گوشه‌ای و عددهای ۱، ۳ ، ۷ و ۹ در بقیهٔ خانه‌ها قرارگیرند .

چون عددهای ۲ ، ۴ ، ۶ و۸ را تنها به هشت طریق می‌توان در خانه‌های‌گوشه‌ای مربع‌طوری قرار دادکه مجموع هریك‌ازقطرها مساوی ۱۵ شود و وضع این عددهاکاملا وضع عددهای ۱، ۳، ۷ و ۹ را مشخص

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

a

۶	۷	۲
۱	۵	۹
۸	۳	۴

b

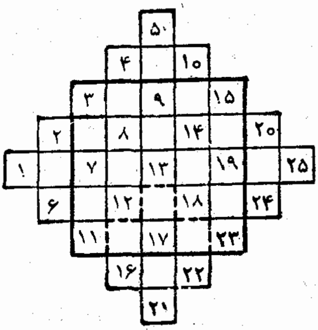
۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

c

شکل ۲۵

می‌کند، می‌توان نتیجه‌گرفت‌که تنها هشت نوع مربع جادوئی با نه خانه وجود دارد. دوتاازاین مربعها، که نسبت بهم قرینه‌اند، درشکل ۲۵- b، c داده شده‌است؛ شش‌مربع‌بقیه را می‌توان ازاین دومربع‌بادوران دوره‌مرکز به اندازهٔ ۹۰درجه، ۱۸۰درجه و۲۷۰ درجه‌بدست‌آورد. بازیادکردن n ، تعداد N مربعهای مختلف با n^2 خانه به سرعت زیاد می‌شود، و اگرچه رابطهٔ‌کلی‌که ارتباط بین N وnرا نشان دهد تااین زمان پیدا نشده است، ولی مثلا معلوم شده است‌که۸۸۰ نوع مختلف مربع وفقی باشانزده خانه وجود دارد ، همچنین به ازاء $n=7$ ، تعداد اینگونه مربعها به صدها ملیون می‌رسد .

برای تشکیل مربعهای وفقی ، وقتی که تعداد خانه‌ها فرد باشد ، طریقه‌های مختلفی، که به مؤلفین‌مختلف منتسب است، وجود دارد. یکی از زیباترین این روشها به **روش تراس** مشهور است که منتسب به **باش** می‌باشد: n^2 عدد را پشت‌سرهم (شکل ۲۶ که درآن $n=5$ است ببینید) درn ردیف موازی‌با یکی‌ازقطرهای مربع ودرهرردیف n عدد می نویسیم، ضمناً عدد حد وسط از این عددها باید در مرکز مربع قرار گیرد . به سادگی می‌توان ثابت‌کردکه اگرقسمتهای اضافی (تراس)را نسبت به‌مربع اصلی، به موازات خود منتقل‌کنیم تا درداخل مربع ومجاور ضلع مقابل



۳	۱۶	۹	۲۲	۱۵
۲۰	۸	۲۱	۱۴	۲
۷	۲۵	۱۳	۱	۱۹
۲۴	۱۲	۵	۱۸	۶
۱۱	۴	۱۷	۱۰	۲۳

شکل ۲۶

خود قرارگیرند ، به یك مربع وفقی می‌رسیم .

بااستفاده از قرینهٔ مربع وفقی که بدست می‌آید و دوران آنها به اندازهٔ ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه، می‌توان از «مربع باش» هفت مربع دیگر وفقی بدست آورد .

ساده‌ترین روشها برای تشکیل مربعهای وفقی ، وقتی‌که تعداد خانه‌ها زوج باشد ، به‌وسیلهٔ **بال** داده شده است .

برای سهولت‌کار اعمالی راکه به‌ازاءآنها جای عددهای αوβ ، α وγ ، αوδ ،که بترتیب نسبت به خطهای **AA'** و**BB'** ومرکزمربع قرینه یکدیگرند ، تغییر می‌کند : تبدیل افقی، عمودی ومرکزی می‌نامیم و به (α,β) ، (α,γ) ، (α,δ) نشان می‌دهیم (شکل ۲۷ — a) .

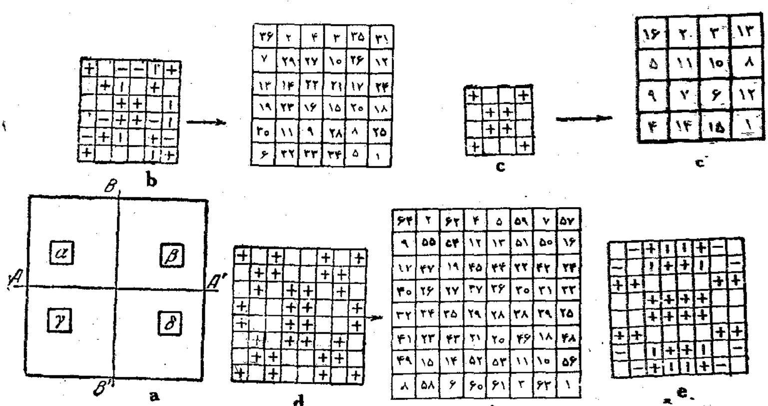
به سادگی دیده می‌شودکه دوتبدیل مرکزی (α,δ) و (β,γ) ، که به ازاءآنها جای عددهای α،β،γ،δ عوض می‌شود (این‌عددها دررأسهای مقابل‌مستطیلی‌قراردارندکه‌خطوط **AA'** و**BB'** محورهای تقارن‌آنست)،

با دو تبدیل افقی (α,β) و (γ,δ) و دو تبدیل عمودی (α,γ) , (β,δ) معادل است .

اگر مربعی با $(2m)^2$ خانه را به وسیلهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $4m^2$ بردیف پرکنیم (ازچپ به راست، ابتدا سطر بالا، سپس سطردوم، بعد سطرسوم وغیره) ؛ به سادگی ثابت می‌شودکه :

۱ قطرها درشرط مربع‌وفقی‌صدق می‌کنند، یعنی‌مجموع عددهای واقع در هریك ازقطرها مساوی $m(4m^2+1)$ می‌باشد .

۲ هردوستون (یا سطر) ،که نسبت به خط BB' (یا AA') قرینه باشند ، به شرط انجام m تبدیل افقی (یا عمودی) درشرط مربع وفقی صدق خواهندکرد .



شکل ۲۷

روش بال براساس چنین تبدیلاتی قرارگرفته است ،که بعدازانجام آنها همهٔ سطرها وستونها درشرط مربع وفقی صدق می‌کنند و عناصر هر قطرهم درهمان قطر باقی می‌ماند (تنها ممکن است جای آنها باهم عوض

شود) .

پاره خطهای افقی (عمودی) راکه درخانه‌ها قرارگرفته‌اند ونسبت به $(AA')BB'$ متقارنند برای تبدیل افقی (عمودی) درنظرگرفته‌ایم و باید عددهای مربوطهٔ آنهارا تبدیل کرد. همچنین هرچهارصلیب را چنان درنظر می‌گیریم که رأسهای مستطیلی باشند که مرکزآن بر مرکز مربع واقع شود ، در اینصورت باید جای عددهای هـردو رأس روبروی چنین مستطیلی را باهم عوض کرد (که هما نطورکه قبلاگفتیم این تغییرمعادل با دوتبدیل افقی و دو تبدیل قائم‌است) .

در شکل ۲۷ـb،c،d طرح اعمالی‌که (برای $m=۳,۲,۴$) باید انجام شود تا مربعهای b'،c'،d' (یعنی مربعهائی با $۴m^۲$ عدد طبیعی اولیه) تبدیل شوند ، داده شده است.

چون در این تغییرات، عددهای هرقطر درهمان قطرباقی می‌ماند و m عدد از هرردیف افقی و عمودی جای خود را با عددهای مربوطهٔ ردیف متقارن عوض می‌کنند ، بنابراین مربعهای b'،c' و d' مربعهای وفقی خواهند بود.

خواننده خود می‌تواند برای‌نمونه‌های دیگری ازمربعهای وفقی، طرح عملیات را بریزد ، در این موارد معمولا زحمت زیادی لازم‌نیست وبا در دست داشتن m می‌توان به راههای مختلف‌آنرا انجام داد .

متذکر می‌شویم‌که وقتی m عددی زوج باشد،طرح عملیات برای رسیدن از مربعی که بطور طبیعی و مرتب پر شده است بـه مربع وفقی ساده‌تر انجام می‌شود ، زیرا در حالتی‌که m عددی فرد است ، باید در طرح عملیات ، علاوه برعلامتهای صلیب، پاره خطهای افقی وعمودی هم

وجود داشته باشد.

وقتی‌که m عددی زوج است، می‌توان طرح‌را فقط باکمك‌صلیبها تنظیم‌کرد (مثلا طرح d را ببینید)، ولی این شرط اجباری نیست ومثلا می‌توان‌آنرامثل طرح e منظم‌کرد.

مفهوم مربعهای وفقی با $n^۲$ عدد را می‌توان تا حدی تعمیم داد و عددهای خانه‌ها را از $k+۱$ تا $k+n^۲$ درنظرگرفت.

همچنین می‌توان مربعهای وفقی جستجو کرد که دارای شرایط اضافی مختلفی باشند. مثلا شتیفل درسال ۱۵۴۴ مربع وفقی با $۷^۲$ خانه ساخت‌که وقتی تمام خانه‌های مرزی آنرا کنار بگذاریم، مربع وفقی‌با $۵^۲$ خانه‌که شامل عددهای از ۱۳ تا ۳۷ است، بدست می‌آید؛ با همین روش، یعنی حذف خانه‌های مرزی مربع جدید، باز هم مربع وفقی با $۳^۲$ خانه بدست می‌آید که شامل عددهای از ۲۱ تا ۲۹ است (شکل ۲۸—a).

درشکل ۲۸ـb یك مربع **فوق وفقی** داده شده است، یعنی مربعی که اگر عین‌آنرا درسمت راست‌آن قرار دهیم، مجموع عددهائی‌که در در «جهت قطری» قرارگرفته‌اند مقداری ثابت خواهد شد.

می‌توان مربع وفقی با $۹^۲$ خانه ساخت بطوریکه بتوان‌آنرا به ۹ مربع وفقی ۹ خانه تبدیل‌کرد.

شبیه مربعهای وفقی می‌توان مکعبهای وفقی با $n^۳$ خانه ساخت، بطوریکه $n^۳$ عدد اولیه (ویا عددهای از $k+۱$ تا $k+n^۳$) طوری در آن تقسیم‌شده باشد که مجموع عددهای واقع در هر$۳n^۲$ ردیف موازی یکی ازیالها ویا موازی یکی از قطرهای مکعب، مقداری ثابت باشد.

می‌توان مفهومی برای مستطیلهای وفقی به‌وجود آورد، به‌این ترتیب که درآن مجموع عددهای واقع در«جهت قطری» (تعداد خانه‌ها درهمهٔ آنها یکی است) مقداری ثابت باشد ، بدون اینکه به مجموع عددهای واقع در خانه‌های موازی اضلاع مستطیل کار داشته باشیم .

۲	۹	۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹	۱۱	۱۸	۲۵
۱۶	۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶	۲۳	۵	۷	۱۴
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳	۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳
۲۴	۱	۸	۱۵	۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵	۱۷
۱۳	۲۰	۲۲	۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲	۴	۶

۴۰	۱	۲	۳	۴۲	۴۱	۴۶
۳۸	۳۱	۱۳	۱۴	۳۲	۳۵	۱۲
۳۹	۳۰	۲۶	۲۱	۲۸	۲۰	۱۱
۴۳	۳۳	۲۷	۲۵	۲۳	۱۷	۷
۶	۱۶	۲۲	۲۹	۲۴	۳۴	۴۴
۵	۱۵	۳۷	۳۶	۱۸	۱۹	۴۵
۴	۴۹	۴۸	۴۷	۸	۹	۱۰

a

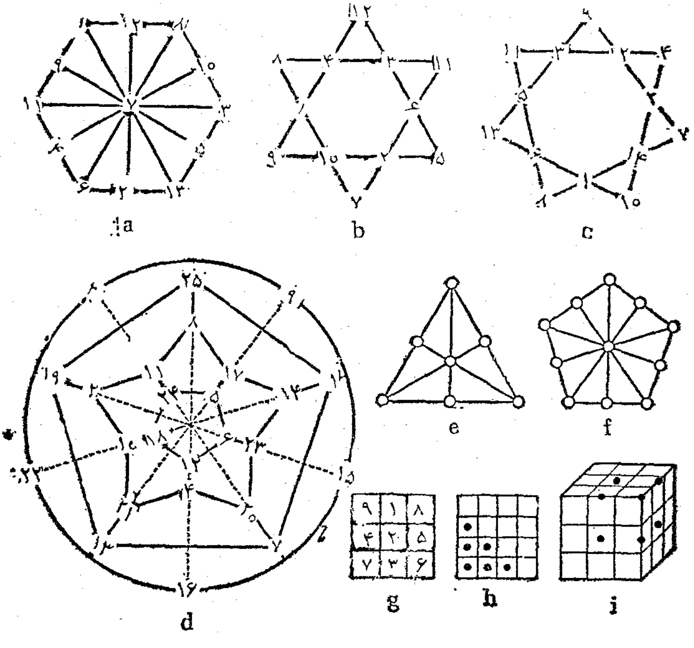
شکل ۲۸

درشکل ۲۹ شش‌ضلعی وفقی **a** و«ستاره‌های وفقی» **b**و**c** داده شده است که درآنها مجموع عددهای واقع بریك خط راست ، مقدار ثابتی است. درشکل ۲۹ — **d** تصویر مرکزی یك دوازده وجهی منتظم (به‌شکل ۱۱۷ هم مراجعه‌کنید) در داخل یك دایره داده شده است. اگرمجموع عددهائی راکه: ۱) دررئوس هریك ازوجوه دوازده وجهی قرارگرفته‌اند (۲۵+۸+۱۱+۲+۱۹،۱۱+۸+۱۷+۵+۲۴ و غیره) ، ۲) در امتداد هریك از خطهای نقطه چین واقع شده‌اند ، ۳) روی محیط دایره قرار دارند، حساب‌کنیم ، درهمهٔ موارد عدد ۶۵ بدست می‌آید.

حالا توجه خود را به سئوالهای زیرمعطوف دارید :

۱. آیا مـی‌توان مثلث وپنج ضلعی وفقی ساخت (شبیه شش‌ضلعی وفقی شکل ۲۹ — a)، بنحوی‌که طبق طرحهای شکل ۲۹ — f,e بترتیب ازعددهای ۱ تا۷ و۱ تا۱۱ استفاده‌کرده باشیم(۴۵).

۲. درستارهٔb (شکل ۲۹) نه‌تنها هرچهار عددی‌که درامتداد یك ضلع قرارگرفته‌اند ، مجموعی مساوی ۲۶ دارند ، بلکه هرچهارعددی کـه رأسهای لوزیهای بزرگ را تشکیل می‌دهند (۱۲+۱+۷+۶ و غیره) و هرپنج عددی‌که به‌یکی از رأسهای ستاره پیوسته‌اند (۳+۴+۸+۱+۱۰ وغیره) نیزمجموعی مساوی ۲۶ دارند.



شکل ۲۹

آیا می‌توانید در همین طرح ، عددهای از ۱ تا ۱۲ را بترتیب دیگری قرار دهید، بطوریکه هریك ازگروه‌های پانزده‌گانه مذکور باز هم مجموعی مساوی ۲۶ داشته باشد .

۳. عددهای از ۱ تا ۹ را در یك مربع با $۳^۲$ خانه چنان قرار دهید که چهار «مجموع زاویه‌ای» (که هر کدام شامل سه عدد هستند : عدد یکی از رأسهای مربع و دو عدد مجاور آن) مساوی عدد s باشد . **مثلا** برای مربع g داریم :

$$s=۱۴=۴+۷+۳=۳+۶+۵=۵+۸+۱=۱+۹+۴$$

اگر n را تعداد طریقه‌های حل مسئلهٔ فوق برای s بگیریم، **می‌توان** رابطهٔ بین n و s را به‌طریق زیر ثابت‌کرد :

s	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
n	۳	۶	۱۰	۹	۶	۳

برای $۱۲>s$ و $s>۱۸$ ، مسئله جواب ندارد .

اگر قرینهٔ این ۳۷ نوع راه حل شناخته‌شده را بدست‌آوریم و هر یك از آنها را به زوایای ۹۰ درجه ، ۱۸۰ درجه و ۲۷۰ درجه دوران دهیم، ۷ نوع ناشناختهٔ دیگرهم از راه حل مسئله بدست می‌آید.

همین مسئله‌را درمورد مربع $۴^۲$ خانه‌ای (شکل ۲۹ — h) ومکعب $۳^۳$ خانه‌ای (شکل ۲۹ — i) هم حل‌کنید ؛ درشکل خانه‌هائی راکه در مجاورت یك‌رأس قرارگرفته‌اند و باید «مجموع زاویه‌ای» آنها را بدست آورد ، علامت‌گذاشته‌ایم .

۱۷
مربعهای اولر

اگر در مربعی با $n^۲$ خانه، n عنصر «نوع اول» . $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و n عنصر «نوع دوم»: $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n (که ازهریك آنها n مرتبه انتخاب شده است) چنان قرار دهیم‌که :

۱) در هرخانهٔ مربع یك عنصر از هر نوع قرارگرفته باشد ،

۲) هر عنصر نوع اول تنها یکبار با هــریك از عناصر نوع دوم ترکیب شده باشد ،

۱,۱	۲,۲	۳,۳
۲,۳	۳,۱	۱,۲
۳,۲	۱,۳	۲,۱

a

۱,۱	۳,۲	۳,۳	۴,۴
۳,۴	۴,۳	۱,۲	۲,۱
۴,۲	۱,۱	۲,۴	۱,۳
۲,۳	۱,۴	۴,۱	۳,۲

b

۱,۱	۲,۲	۳,۳	۴,۴	۵,۵	۱,۱	۲,۲	۳,۳	۴,۴	۵,۵
۳,۴	۴,۵	۵,۱	۱,۲	۲,۳	۳,۴	۴,۵	۵,۱	۱,۲	۲,۳
۵,۲	۱,۳	۲,۴	۳,۵	۴,۱	۵,۲	۱,۳	۲,۴	۳,۵	۴,۱
۲,۵	۳,۱	۴,۲	۵,۳	۱,۴	۲,۵	۳,۱	۴,۲	۵,۳	۱,۴
۴,۳	۵,۴	۱,۵	۲,۱	۳,۲	۴,۳	۵,۴	۱,۵	۲,۱	۳,۲

c

شکل ۳۰

۳) درهرسطر و هرستون مربع ازهمهٔ عناصر نوع اول ونوع دوم وجود داشته باشد ، در اینصورت مربعی کــه بدست می‌آید ، **مربع اولر** نامیده می‌شود .

اگر قطرهای چنین مربعی هم دارای خواص سه‌گانهٔ فوق باشند، **مربع قطری اولر** خواهد بود .

درشکل۳۰مربعهای‌اولر به‌ازاء $n = ۳,۴,۵$ داده شده‌است، ضمناً در خانه‌های این مربعها ، تنها عددهای زیر عناصر نوع اول ونوع دوم را آورده‌ایم .

مربع b قطری و مربع c دارای این خاصیت است که : اگر در سمت راست آن مربعی عین خودش قرار دهیم، در هر ده «**جهت قطری**» (که در شکل بـا پیکـان نشان داده شده است) به هر یك از عناصر نوع اول و دوم برخورد می‌کنیم . چنین مربعی را **مربع همه قطری اولر** می‌نامیم .

مسئلهٔ مربوط به ساختن مربع اولررا می‌توان به‌طریق دیگری‌هم منظم نمود : فرض‌کنید هریك از n^2 عنصر اولاً متعلق بیکی از n طبقه، ثانیاً بیکی‌از n مقوله مربوط باشند، ضمناً اختلاف بین دوعنصررا یا از جهت اختلاف طبقهٔ آنها ، یا از جهت اختلاف مقولهٔ آنها و یا از جهت اختلافی‌که درهردو مورد دارند ، بدانیم .

باید این عناصر را در مربعی با n^2 خانه چنان تقسیم کنیم که در هر سطر و یا هر ستون آن ، ازهمهٔ طبقات و همهٔ مقولات وجود داشته باشد.

برای $n=4$ می‌توان مثلا ۱۶ورق بازی (تك‌خال ، شاه ، بی‌بی، سرباز) ازچهار خال‌را درنظرگرفت وبرای $n>4$ می‌توان n^2 قطعه مقوا انتخاب‌کردکه روی‌آنها n شکل مختلف (مربع ، مثلث ، دایره و غیره) رسم شده باشد وبه n رنگ مختلف باشند .

خود اولر، بدون اینکه موفق شود،کوشید تامسئلهٔ سی‌وشش افسر را (که با شش درجهٔ مختلف افسری واز شش هنگ مختلف بودند) حل کند . بعدها ثابت شدکه این مسئله جواب ندارد ، یعنی به ازاء $n=6$ نمی‌توان مربع اولر را ساخت .

اگر ازهریك‌از عددهائی‌که درخانه‌های مربع اولرقرارگرفته‌اند، یك واحد کم کنیم وسپس هردو عددی که در یك خانه باقی می‌ماند ، به عنوان ارقام یك عدد دورقمی در مبنایn به حساب‌آوریم؛ می‌توانیم از هر مربع اولر یك مربع نیم‌وفقی واز هر مربع قطری اولر یك مربع وفقی بدست‌آوریم .

خواننده را راهنمائی می‌کنیم‌که ازهمین راه به‌کمك «مربع همه

قطری» c (درشکل ۳۰) ، مربع 5^2 خانه‌ای فوق وفقی بسازد .

هر مربع اولر را می‌توان به عنوان ترکیبی از دو مربع **لاتینی** دانست، یعنی مربعهائی‌که هرکدام با n عنصر (هریك ازعناصر n مرتبه انتخاب شده‌اند) پرشده باشند، بنحوی‌که در هرسطر و هرستون هرعنصر دلخواه را بتوان پیداکرد . ضمناً باید هرعنصر یکی از مربعها را با هر یك از n عنصرمربع دوم ترکیب‌کرد .

۱۸

سرگرمی با دومینو

میدانیم که هریك از ۲۸ سنگ دومینو به دو قسمت مساوی تقسیم شده است و برروی این دوقسمت انواع ترکیبهای ممکنه ازعددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، و۶ وجود دارد . سنگی راکه برروی دونیمهٔ آن l,k خال وجود داشته باشد، سنگ (k,l) می‌نامیم .

اگر نیمه‌های یکجور سنگها را پهلوی هم قرار دهیم ، می‌توان یك «زنجیر» تشکیل‌داد. زنجیری راکه دونیمهٔ انتهائی‌آن یکجورباشد،

می‌توان به‌صورت بسته درآورد . با پاره‌کردن زنجیر بسته‌ای که از m سنگ درست شده است ، می‌توان زنجیرهای باز بدست‌آورد .

می‌توان بازی دومینو را تعمیم داد و روی نیمهٔ سنگهای آن همهٔ انواع ممکنهٔ ترکیبهای عددهای ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$، n را درنظر گرفت.

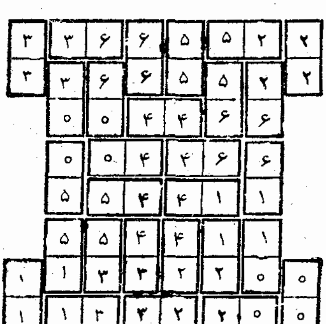
حالا مسائل زیررا حل کنید :

۱. ثابت کنید[۴۶]، تعداد سنگها ومجموع همهٔ خالها در دومینوی تعمیم داده شده بترتیب برابرند با :

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{و} \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

۲. ثابت کنید[۴۷]، با خارج کردن سنگ (a,b) (که درآن $a\neq b$ است) ، از مجموعهٔ کامل سنگهای دومینو درحالت زوج بودن n ، تنها میتوان زنجیر بازی ساخت که در دو انتهای آن a و b خال داشته باشد ،

۳. ثابت کنید[۴۸]، اگر n فرد باشد ، با مجموعهٔ کامل سنگهای دومینو نمی‌توان یك زنجیر ساخت وطولانی‌ترین زنجیر ممکنه شامل بیش از $\frac{n^2+2n+3}{2}$ سنگ نیست .



شکل ۳۱

۴. ۲۸ سنگ دومینو را بین چهار بازیکن چنان تقسیم کنید که تا پایان بازی نفر اول، نه بازیکن دوم و نه بازیکن سوم امکان قراردادن حتی یك سنگ‌را هم نداشته باشند[۴۹].

۵. شکل ۳۱ را می توان به ۱۴ مربع چنان تقسیم کرد که هر

یك ازآنها شامل چهارعدد یکجور باشد . با تبدیل نقش عددهای ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ و استفاده از تقارن نسبت به محور عمودی می‌توان ۱۰۰۸۰(= !۷+۲) شکل‌مختلف بدست‌آوردکه غیرواقعی هستند (یعنی هرمربع شامل چهارعدد یکجور را نمی‌توان ازبقیه جداکرد) .

آیا می‌توانید شکلی بهمین‌ترتیب بسازیدکه بتوان‌آنرا به۱۴مربع مختلف وواقعی تقسیم‌کرد ؟

۶. درشکل ۳۲ ، سنگهای دومینو چنان قرارگرفته‌اندکه اگر ستون سمت راست را (کـه همهٔ خانه‌های آن از صفر تشکیل شده است) بطور ذهنی جدا کنیم ، به مربعی با $۷^۲$ خانه می‌رسیم‌که درآن مجموع خالهای هر یك از قطرها و هریك از ردیفهای افقی یا قائم برابر بیست وچهار است.

۰	۴	۵	۵	۴	۰	۵	۱
۰	۳	۳	۳	۲	۲	۵	۶
۰	۳	۳	۲	۶	۶	۱	۳
۰	۲	۴	۴	۴	۲	۵	۳
۰	۶	۱	۲	۱	۶	۲	۶
۰	۵	۵	۲	۶	۴	۱	۱
۰	۱	۳	۶	۱	۴	۵	۴

شکل ۳۲

آیا می‌توانید مربع مشابهی با $(n-1)^2$ خانـه برای حالت دومینوی تعمیم داده شده بسازید ؟

۱۹

مسائلی ازصفحهٔ شطرنج

در فصل ۱۵ مسائل مربوط به تعیین تعداد طریقه‌های حرکت یك مهرهٔ شطرنج را ازیك خانه به خانهٔ دیگر مورد مطالعه قرار دادیم.

حالا به مطالعهٔ دو مسئلهٔ کلاسیك دیگر می‌پردازیم : دربارهٔ وزیر و دربارهٔ اسب ویك رشته سئوالهای مربوط به‌آنها. اهمیت یك دسته از این مسائل به‌مناسبت ارتباط نزدیك آنها با نظریهٔ ترکیب است، بقیه را هم می‌توان منبعی برای‌جستجوی راه‌حلهای عادی دانست .

مسئلهٔ رخ

به چند طریق می‌توان n رخ را درصفحه‌ای با n^2 خانه قرارداد، بنحوی‌که یکدیگررا تهدید نکنند ؟

واضح است که باید رخها را در سطرها وستونهای مختلف صفحه قرار داد . هریك از این انواع استقرار n شکل را بــر صفحهٔ شطرنج می‌توان به‌صورت تبدیل عددهای ۱، ۲، ۳،.....، $n-۲$ ، $n-۱$ ، n دانست، بشرطی‌که عددهای متوالی‌را در تبدیل، شمارهٔ سطرهائی بدانیم که بوسیلهٔ شکلها اولین ، دومین ، ... ستون را اشغال‌کرده‌اند .

چون هریك ازاین تبدیلها متناظر بایك جواب مسئله است وچون تبدیلهای مختلف معرف جوابهای مختلف است ، بنابــراین تعداد کلی جوابهای این مسئله مساوی $n!$ می‌شود .

مسئلهٔ مربوط به رخ را می‌توان به این‌ترتیب بغرنج‌کردکه شرط کنیم فقط جوابهائی قابل قبول باشد که درآنها هیچیك از رخها برقطر واصل بین پائین‌ترین خانهٔ سمت چپ وبالاترین خانهٔ سمت راست، واقع نباشند . تعدادکلی N این جوابها ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید :

$$N=n!\left(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}+\frac{۱}{۴!}-\dots+\frac{(-۱)^n}{n!}\right)$$

این تعداد برابراست باتعداد تبدیلهای n عنصر، وقتی‌که هیچیك از عناصر درجای «طبیعی» خود نباشند .

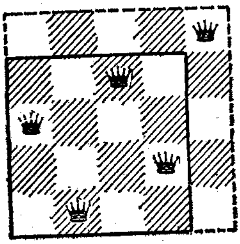
با محدودکردن وضع رخها (مثلا اینکه تنها در خانه‌های سفید باشند ، یا روی هیچیك از دوقطر قرار نگیرند وغیره) می‌توان به‌مسائل

پیچیده‌تری رسید .

مسئلهٔ وزیر

به چند طریق می‌توان n وزیررا در صفحه‌ای با n^2 خانه طوری قرار دادکه هیچیك دیگری را تهدید نکنند ؟

دو وزیری که در خانه‌های (p,q) و (s,t) قرار گرفته باشند ، تنها وقتی درجهت‌قطری یکدیگررا تهدید می‌کنندکه $|p-s|=|q-t|$ باشد ؛ در اینجا p و s شمارهٔ ستونها و q و t شمارهٔ سطرهائـی را معین می‌کنندکه خانه‌های (p,q) و (s,t) در محل تلاقی آنها قـرار گـرفته‌اند . در ترکیب مربوطه (مسئلهٔ رخ را ببینید) در p امین و sامین محل باید عددهای q و t قرار گرفته باشند. به‌این ترتیب ترکیبی از n عدد می‌تواند جواب مسئله باشدکه درآن اختلاف شمارهٔ جای دوعدد دلخواه با اختلاف خود این دوعدد ، ازلحاظ قدرمطلق ، متفاوت باشد .



شکل ۳۳

بسادگی دیده می‌شودکه به‌ازاء $n=2$ و $n=3$ مسئلهٔ وزیرجواب ندارد . حل مسئله به‌ازاء $n=4$ و $n=5$ هم بسهولت و از شکل ۳۳ بدست می‌آید ؛ وقتی $n \geqslant 6$ باشد ، حل مسئله از ترکیبهائی که در این جدول داده شده است دیده می‌شود :

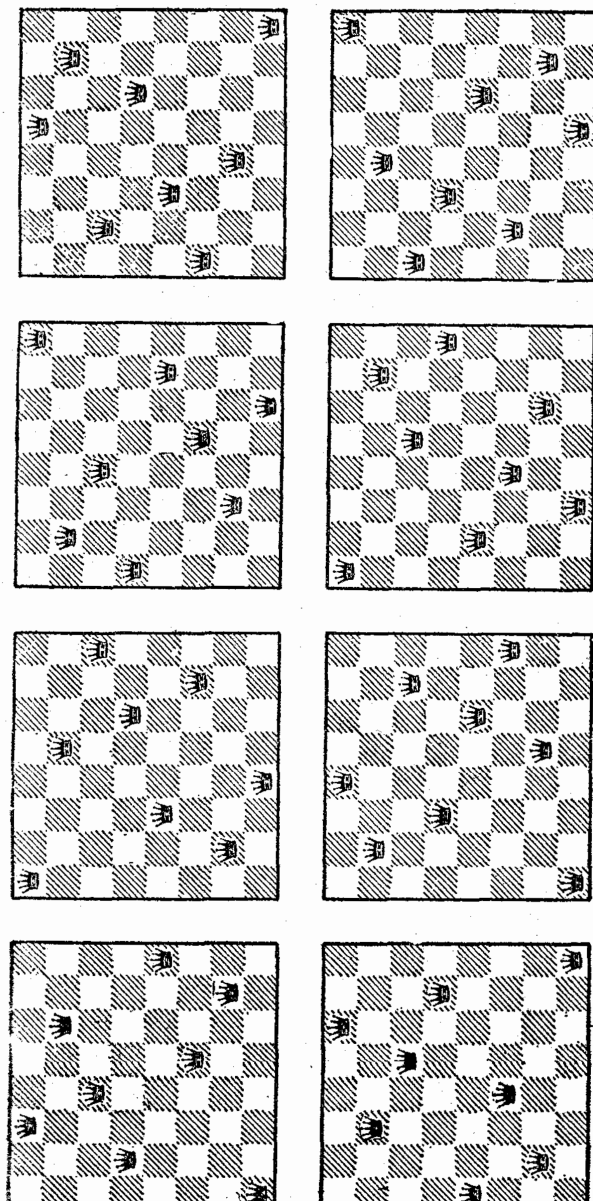
ترکیب مربوط به جواب مسئلهٔ وزیر	شکل عدد n
۲,۴,۶,۸...,n−۲,n,۱,۳,۵,۷,...,n−۳,n−۱	۶k ۶k+۴
۴,n−۲,n−۴,n−۶,...,۱۰,۸,۶,n,۲,n−۱,۱, n−۵,n−۷,...,۵,۳,n−۳	۶k+۲
n,۲,۴,۶,...,n−۳,n−۱,۱,۳,۵,.. ,n−۴,n−۲	۶k+۱ ۶k+۵
n,۴,n−۳,n−۵ ,..., ۱۰,۸,۶,n−۱,۲, n−۲ n−۸,...,۷,۵,۳,n−۴	۶k+۳

تحقیق کنید که در هریك از ترکیبهای مذکور، اختلاف بین هر دو عنصر، از لحاظ قدر مطلق، با اختلاف بین شمارهٔ جای آنها فرق دارد. مثلا این مطلب را به ازاء $k=۱$ و $k=۲$ تحقیق کنید.

مسئلهٔ مربوط به‌تعداد جوابهای مسئلهٔ مربوط به وزیر درصفحه‌ای با $n^۲$ خانه، برای عدد دلخواه n، باوجودکوششهای بسیاری ازریاضی‌دانها، تاکنون حل نشده است. درحالت خاص $n=۸$، ثابت شده است که مسئله ۹۲ جواب دارد. بین این ۹۲ جواب، ۱۲جواب بهم مربوط نیستند و با ترکیبهای زیرمشخص می‌شوند:

۲۷۵۸۱۴۶۳	۲۵۷۴۱۸۶۳	۱۵۸۶۳۷۲۴
۳۵۸۴۱۷۲۶	۲۶۱۷۴۸۳۵	۱۶۸۳۷۴۲۵
۳۶۲۵۸۱۷۴	۲۶۸۳۱۴۷۵	۲۴۶۸۳۱۷۵
۳۵۲۸۱۷۴۶	۲۷۳۶۸۵۱۴	۲۵۷۱۳۸۶۴

بقیهٔ جوابها ازاین دوازده جواب به کمك قرینهٔ همهٔ شکلها نسبت به‌خط قائم وسط صفحهٔ شطرنج و از راه دوران شکلها (چه شکلهای اولیه وچه شکلهای‌قرینه) دور مرکز صفحهٔ شطرنج به‌اندازهٔ ۹۰ درجه، ۱۸۰ درجه



شکل ۳۴

و ۲۷۰ درجه بدست می‌آید ،

درشکل ۳۴، در ردیف بالا جواب متناظر تبدیل ۱۵۸۶۳۸۲۴ و سه جوابی که ازآن با دوران به‌اندازهٔ ۹۰ ، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه بدست می‌آید داده شده است ؛ در ردیف پائین قـرینهٔ این جواب و جوابهای بدست‌آمده ازآن ، پس از دوران بـه اندازهٔ زوایای مذکور ، داده شده است .

به‌این ترتیب هریک از تبدیلهای مذکور، بطورکلی هشت جواب می‌دهد، به‌استثنای‌آخرین تبدیل‌که تنها سه‌جواب اضافی دارد (آزمایش کنید !) .

دو مسئله‌ای را که مورد مطالعه قـرار دادیم ، می‌توان درجهات مختلف تعمیم داد . مثلا می‌توان $\mathbf{n}$ رخ یا $\mathbf{n}$ وزیررا درصفحه‌ای با $\mathbf{m^2}$ خانه $(\mathbf{m>n})$ و یا در صفحه‌ای با $\mathbf{p \cdot q}$ خانه $(\mathbf{q \geqslant n , p \geqslant n})$ درنظر گرفت :

می‌توان جوابهای مسئله‌ای‌را جستجوکردکه درآنها، مثلاهیچیک از دوشکل مستقرشده ، با حرکت اسب بهم مربوط نباشند وغیره .

بالاخره می‌توان شبکه‌ای با $\mathbf{n^3}$ خانه در دستگاه قائم سه‌بعدی (و یاحتی شبکهٔ $\mathbf{n}^k$ خانه‌ای در دستگاه $\mathbf{k}$ بعدی) درنظرگرفت ،که‌درجهت هریک از بعدها به‌اندازهٔ $\mathbf{n}-۱$ واحد امتداد داشته باشد، ودرگره‌های آن $\mathbf{n^2}$ (متناظر با $\mathbf{n}^{k-1}$) رخ یاوزیرچنان قرار دادکه هیچکدام دیگری را تهدید نکنند .

در این‌مورد چنین درنظر می‌گیریم‌که با حرکت رخ ویا حرکت وزیر بتوان از نقطهٔ گرهی مفروض به هرنقطهٔ گرهی ، که فقط ازلحاظ

یك مختص با نقطهٔ اولیه اختلاف دارد، عبور کند و ضمناً با حرکت وزیر بتوان از نقاط گرهی چنان عبور کرد که در هرحرکت دو مختص آن بیك اندازه (ازلحاظ قدر مطلق) تغییر کند. البته دراین‌مورد می‌توان حرکت وزیر را بترتیب دیگری هم تعیین کرد، مثلا فرض می‌کنیم‌که دو نقطهٔ $A(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ و $B(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ وقتی باحرکت وزیر بهم مربوط شوندکه اختلافهای b_s-a_s (به ازاء $s=1,2,\ldots,k-1,k$) ، بدون ارتباط بیکدیگر ، یکی از سه مقدار $-m,m,0$ را (m عدد دلخواه صحیحی است) قبول‌کند، ضمناً لااقل یکی از این اختلافها باید مخالف صفر باشد.

بااین حرکت وزیر، طرح این سئوال جالب است‌که کوچکترین مقدار n (کــه با k فرق دارد) چقدر باشد تا مسئلهٔ وزیر دارای جواب باشد ؟

مسئلهٔ اسب

با حرکت اسب تمام خانــه‌های صفحهٔ شطرنج را نشانه بروید ، بطوریکه از هرخانه تنها یکبار عبورکنند .

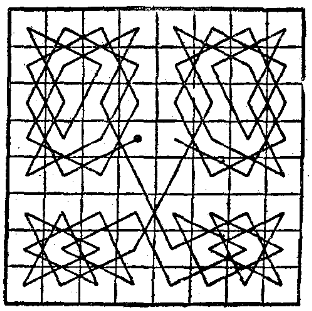
این مسئله توجه عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانها را جلب‌کرده است و یك رشته‌جوابهای خاص برای آن بدست آورده‌اند ؛ ولــی هنوز حتی نتوانسته‌اند تعدادکلی جوابهای‌آنرا پیدا کنند ، اگرچه معلوم شده است که این تعداد خیلی زیاد است .

می‌توان صفحهٔ شطرنج معمولی را بــا صفحه‌ای شامل n^2 خانــه

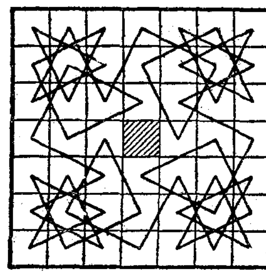
($n \neq ۸$) یا مستطیلی شامل $m \cdot n$ خانه عوض کرد و یا حتی می‌توان صفحه‌هائی انتخاب کرد که مستطیل نباشند .

در شکل ۳۵ چند جواب از مسئلهٔ اسب داده شده است، پاره‌خطهائی که مراکز خانه‌ها را به‌وسیلهٔ خطهای راست بهم وصل کرده‌اند ، مسیر حرکت اسب را نشان می‌دهند.

یانیچ ریاضی‌دان قرن نوزدهم روسیه جواب مسئلهٔ اسب را چنان پیدا کرد که اگر شمارهٔ ردیف حرکت اسب را درخانه‌های مربوطه قرار دهیم ، به مربع نیم‌وفقی می‌رسیم که مجموع هریك از سطرها وستونهای آن $s = ۲۶۰$ است (شکل ۳۵ — c) .



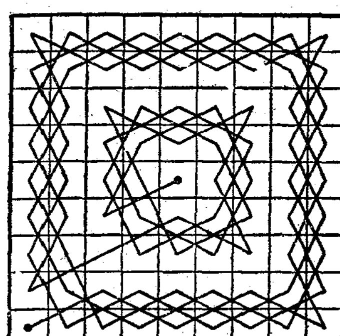
a



b

۵۰	۱۱	۲۴	۶۳	۱۴	۳۷	۲۶	۳۵
۲۳	۶۲	۵۱	۱۲	۲۵	۳۴	۱۵	۳۸
۱۰	۴۹	۶۴	۲۱	۴۰	۱۳	۳۶	۲۷
۶۱	۲۲	۹	۵۲	۳۳	۲۸	۳۹	۱۶
۴۸	۷	۶۰	۱	۲۰	۴۱	۵۴	۲۹
۵۹	۴	۴۵	۸	۵۳	۳۲	۱۷	۴۲
۶	۴۷	۲	۵۷	۴۴	۱۹	۳۰	۵۵
۳	۵۸	۵	۴۶	۳۱	۵۶	۴۳	۱۸

c



d

شکل ۳۵

می‌توان به‌جای حرکت اسب، حرکت مهره‌ای را در نظر گرفت که در هر حرکت p خانه در یکجهت و q خانه درجهت دیگر پیش برود، ضمناً p و q نباید هردو زوج و یا هردو فرد باشند، زیرا در اینصورت حرکت آن تنها در خانه‌هائی که به رنگ خانهٔ مبدأ حرکت باشد، می‌تواند انجام بگیرد.

به سادگی می‌توان ثابت کرد که درصفحهٔ با $۳^۲$ خانه نمی‌توان با حرکت معمولی اسب عبور کرد. درصفحه‌ای هم که $۴^۲$ خانه دارد، مسئله جواب ندارد؛ ولی در مستطیل با ابعاد ۳ و ۴ می‌توان مسئلهٔ اسب را حل کرد.

طبیعی است که با اضافه کردن مقادیر p و q (ویا حتی یکی از آنها)، ممکن است مسئله درصفحهٔ با $n^۲$ خانه، حتی برای بعضی از مقادیر $n>۴$ هم غیرقابل حل باشد.

مثلاً تحقیق در این باره جالب است که آیا می‌توان درصفحهٔ با $n^۲$ خانه (به‌ازاء $n=۵,۶,۷,۸$) حرکت «اسب ۳ و ۳ خانه‌ای» (یعنی اسبی که در یکجهت ۲ خانه و درجهت دیگر سه خانه حرکت کند) ویا حرکت «اسب ۱ و ۴ خانه‌ای» را تنظیم کرد. در حالتهائی که مسئله غیرقابل حل است، می‌توان این سئوال را طرح کرد که کمترین تعداد خانهٔ غیرقابل عبور چقدر است؟ (مثلادر صفحه‌ای با $۳^۲$ خانه، باحرکت معمولی اسب می‌توان از تمام خانه‌ها بجز خانهٔ مرکزی عبور کرد. درحالتهائی هم که مسئله قابل حل است، می‌توان جوابهای بکر و تازه را جستجو کرد.

مسئلهٔ معمولی اسب، معادل با مسئلهٔ عددی زیراست: ۶۴ زوج

عدد صحیح و مختلف : (a_{64},b_{64})،...،(a_2,b_2)،(a_1,b_1) را (عددهای b_k,a_k می‌توانند مقادیر ۱ تا ۸ را قبول کنند) طوری انتخاب کنید که برای هردو زوج عدد مجاور شرط زیر برقرار باشد :

$$(a_{k+1}-a_k)^2+(b_{k+1}-b_k)^2=5$$

(یکی از دوعدد به‌اندازهٔ یك واحد و دیگری به‌اندازهٔ دو واحد تغییر می‌کند) . اگر علاوه‌براین رابطهٔ :

$$(a_{64}-a_1)^2+(b_{64}-b_1)^2=5$$

نیز برقرار باشد ، می‌توان ازآخرین نقطه هم، با حرکت اسب، به‌نقطهٔ شروع رسید . دوری‌که در تساوی آخری هم صدق‌کند **دور بسته** نامیده می‌شود .

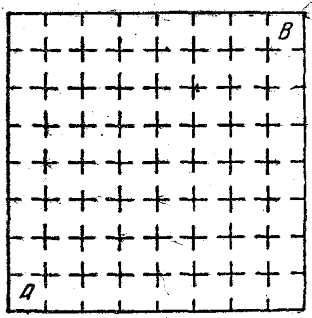
مسائل مختلف

می‌توان مسائل‌جالبی‌مربوط به‌عبورشاه یارخ درصفحه طرح‌کرد ، بطوریکه تنها حرکت به خانهٔ مجاور میسر باشد (حرکتهای سادهٔ رخ).

چون در هروضعی‌که رخ باشد، می‌تواند برای وضع جدید، حد اکثرچهارنوع حرکت داشته باشد، ولی شاه واسب می‌توانند ازخانه‌های جداگانه تا هشت حرکت مختلف انجام دهند ؛ طبیعی است کـه مسائل مربوط به رخ به مراتب ساده‌تر خواهند بود.

آیا موفق می‌شوید تعداد طریقه‌های مختلف استقرار رخ را برای عبوراز n^2 خانه، به‌ازاء $n=3,4,5,\ldots$ را بدست‌آورید ؛ همین مسئله را می‌توان برای صفحه‌ای با $m\cdot n$ خانه (به‌ازاء مقادیر مختلف n,m)

طرح کرد (می‌توانید حتی جواب کلی مسئله را برای مقادیر دلخواه n,m پیدا کرد).

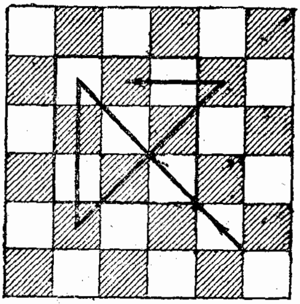


شکل ۳۶

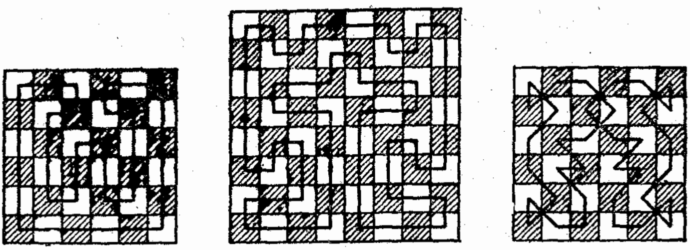
باید توجه داشت که وقتی حاصلضرب $m \cdot n$ عددی فرد باشد، با حرکت رخ روی صفحه‌ای با ابعاد m و n، مسیر بسته وجود ندارد، زیرا دو خانهٔ مبدأ و انتهائی اجباراً بیك رنگ هستند (برای اینکه رخ به خانهٔ انتهائی برسد، باید تعداد حرکت‌های آن زوج باشد) و نمی‌توان آنها را باحرکت سادهٔ رخ بهم وصل کرد. همچنین واضح است، برای صفحه‌ای که تعداد خانه‌های آن زوج است، خانهٔ مبدأ و انتها نمی‌توانند (برای حرکت رخ) از یك رنگ باشند، مثلا مسئلهٔ خاص زیرغیرقابل حل‌است: باشروع حرکت ازخانهٔ A (شکل ۳۶) وبا عبوراز همهٔ خانه‌ها (طوری ازهرخانه تنها یکبارعبورکنید) به خانهٔ B برسید.

همچنین می‌توان به مسائلی توجه‌کردکه این ویاآن مهره باید از همهٔ خانه‌های صفحه عبورکنند، بدون اینکه مجبور باشیم در هریك از خانه‌ها توقف کنیم ویا بتوانیم از هرخانه چندبار عبور نمائیم. مثلا به سادگی ثابت می‌شود که رخ می‌تواند در یك صفحه با n^2 خانه به‌کمك $2n - 1$ حرکت از همهٔ خانه‌ها عبور کند. اگر در صفحه‌ای که تعداد خانه‌های آن 3^2 است، جای رخ را بـه وزیر بدهیم، تعداد حرکتهای لازم تغییر نمی‌کند. ولی اگرمربع نه‌خانه‌ای‌را در داخل صفحهٔ بزرگتری درنظربگیریم واین حق‌را به وزیربدهیم‌که بتواند ازحدود مربع کوچك

خارج شود، می‌تواند به‌جای پنج حرکت (که‌درمورد رخ لازم است) با چهار حرکت از همهٔ ۹ خانهٔ مربع عبور کند (شکل ۳۷). شبیه همین‌مسئله را می‌توان برای‌حالت ۳<n ، وقتی‌که مربع n^2 خانه‌ای در داخل صفحهٔ بزرگتری باشد، مطرح‌کرد.



شکل ۳۷



شکل ۳۸

در این موارد جالب‌تر اینست‌که جوابهائی را برای حرکت اسب (شاه یا رخ) پیداکنیم‌که مسیرآنها خط شکستهٔ جالبی را به وجودآورد (شکل۳۸ را ببینید). ضمناً برای مواردی‌که مسیر بسته نیست، می‌توان به‌طور اضافی، خانهٔ شروع حرکت را به خانهٔ انتهائی وصل کرد.

مسائلی برای فکر کردن

۱ . برای مقادیر کوچک k و n، مسئلهٔ اسب را درحالت شبکهٔ با

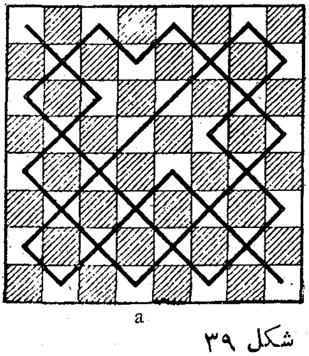
n^k خانه در نظر بگیرید ؛ ارتباط شبکه‌های $A(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ و $B(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ وقتی باحرکت اسب برقرار است‌که داشته باشیم:

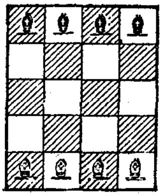
$$\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)^2=5 \text{ و } \sum_{i=1}^{k}|a_i-b_i|=3$$

همچنین مسئلهٔ مشابهی را دربارهٔ حرکت اسب با « p و q خانه » (برای مقادیرکوچك p و q) مورد مطالعه قرار دهید .

۲. فیل می‌تواند ازهمهٔ خانه‌های یك رنگ ، در صفحه‌ای با 8^2 خانه ، با ۱۷ حرکت عبورکند (شکل ۳۹ — a) . حال اگر صفحه‌ای با n^2 خانه $(n=9,10,11,\ldots)$ در نظر بگیریم ، کمترین تعداد حرکت برای عبور از همهٔ خانه‌هائی‌که یك رنگ دارند ، چقدر است؟

۳. فیلهای سفید وسیاه را درشکل ۳۹ — b بنوبت چنان تغییرجا بدهیدکه ضمن ۳۶ حرکت، هرگز مهره‌های بارنگهای مختلف یکدیگر را تهدید نکنند[50].


a


b

شکل ۳۹

۴. ثابت‌کنید که در صفحهٔ «۳ و ۴خانه‌ای» تنها هشت مسیر برای حرکت اسب وجود داردکه همهٔ آنها هم غیربسته‌اند[51].

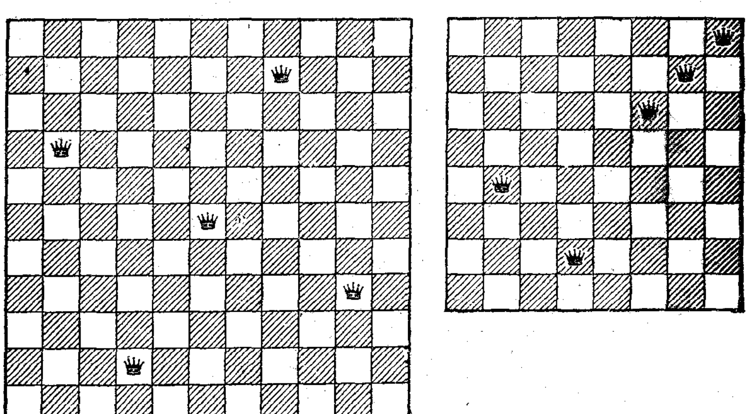
۵. مهره‌ای که شرط حرکت آن ازخانهٔ (k,l) به خانهٔ (m,n) از صفحهٔ شطرنج چنین باشد :

$$(k-m)^{2}+(l-n)^{2}=25$$

دارای خواص جالبی است. چنین مهره‌ای می‌تواند هم شبیه رخ حرکت کند (در یك ردیف از چهارخانه عبورکند و درخانهٔ پنجم جا بگیرد) و شبیه «اسب ۳و۴ خانه‌ای»؛ این مهره در هرخانه‌ای از صفحهٔ 8^2خانه‌ای که وجود داشته باشد ، می‌تواند چهار حرکت انجام دهد .

آیا خواننده می‌تواند مهرهٔ دیگری در نظر بگیرد که درصفحه‌ای با n^2خانه $(n=6,7,9,10,\dots)$ یادرشبکه‌ای با n^kخانه $(k=3,4,\dots)$ دارای همین خاصیت باشد .

۶. در شکل ۴۰ دیده می‌شود که پنج وزیر در صفحهٔ 8^2 خانه‌ای



شکل ۴۰

می‌توانند همهٔ خانه‌ها را ازحمله حفظ کنند؛ ودرصفحهٔ 11^2خانه‌ای همهٔ

خانه‌ها را بجزهمان خانه‌هائی‌که به وسیلهٔ پنج وزیر اشغال شده است.

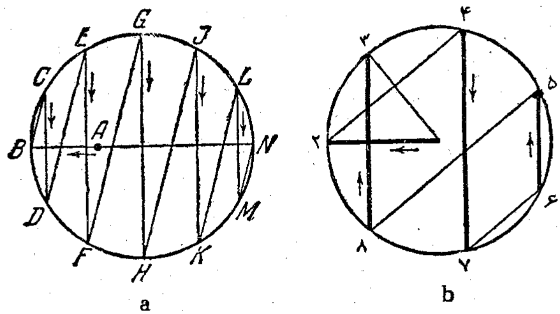
مطلوبست بزرگترین مقدار $N_۱$ و $N_۲$ به این شرط که n وزیر $(n=۶,۷,۸,۹,\ldots)$ بتوانند همهٔ خانه‌های $N_۱^۲$ خانه‌ای را حفظ‌کنند و یا همهٔ خانه‌های صفحهٔ $N_۲^۲$ خانه‌ای را به‌استثنای خانه‌هائی‌که به‌وسیلهٔ وزیرها اشغال شده است.

۲۰

تنظیم برنامهٔ عمل

به حل چند مسئله از تنظیم برنامهٔ کار می‌پردازیم که به‌کمك آنها بتوانیم اعضای یك مجموعه را چنان بهم مربوط کنیم که باشرایط اضافی مسئله تطبیق کند.

۱. سیزده بچه باید ۶ تمرین ورزشی را روی محیط یك دایره انجام دهند. آیا می‌توان ترتیب قرارگرفتن بچه‌ها را طوری تنظیم کرد که هر بچه در هر تمرین همسایه‌های جدیدی داشته باشد.



شکل ۴۱

بچه‌ها را با حروف از A تا N نشان می‌دهیم، A را بر خط شکسته‌ای قرار می‌دهیم که رأسهای آن محیط دایره‌ای را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم کرده است (شکل ۴۱ — a) و بقیه حروف را بطور یکنواخت روی محیط دایره قرار می‌دهیم .

اگر با شروع از نقطهٔ A در جهتی که روی شکل نشان داده شده است ، چه در وضع موجود و چه پس از دوران دایره دور مرکز خود به اندازهٔ ۳۰ ، ۶۰ ، ۹۰ ، ۱۲۰ ، و ۱۵۰ درجه (ضمن دوران ردیف همهٔ حروف به‌استثنای A ، تغییر نمی‌کند) درخلاف جهت عقربه‌های ساعت، شش ردیف زیر برای حروف بدست می‌آید :

۱) ABCDEFGHJKLMNA، ۲) ADBFCHEKGMJNLA،
۳) AFDHBKCMENGLJA، ۴) AHFKDMBNCLEJGA،
۵) AKHMFNDLBJCGEA، ۶) AMKNHLFJDGBECA،

که درآنها در همسایگی هرحرف، در مجموعهٔ شش حالت، همهٔ حروف دیگر قرارگرفته‌اند .

ثابت کنید که با همین روش می‌توان در حالت کلی و وقتی که

۱+۲n بچه بخواهند n تمرین ورزشی انجام دهند، مسئله را حل‌کرد این امکان هم هست‌که شما بتوانید برای حل این‌مسئله راه حل ساده‌تری پیداکنید.

۲. جدول مسابقه شطرنج را برای هشت بازیکن تنظیم‌کنید.

از همان روش حل مسئلهٔ قبل استفاده می‌کنیم: شمارهٔ ۱ را در مرکز دایره وبقیهٔ هفت شمارهٔ دیگررا در رأسهای یك هفت‌ضلعی محاط در دایره قرار می‌دهیم، شماره‌ها را مطابق شکل ۴۱-b به وسیلهٔ خط شکسته‌ای بهم وصل می‌کنیم و پاره‌خطهای اتصالی را یك در میان کلفتر و نازکتر می‌کشیم. هردو شماره‌ای راکه باخط‌کلفت بهم وصل شده‌اند، برای مسابقهٔروز اول وهردو شماره‌ای‌راکه باخط نازك بهم وصل‌شده‌اند، برای مسابقهٔ روز دوم درنظر می‌گیریم:

روز اول:	۲,۱	۷,۴	۵,۶	۳,۸
روز دوم:	۱,۳	۴,۲	۶,۷	۸,۵

اگر فرض را بر این بگیریم که در هر بازی که در اینجا نشان داده‌ایم، نفر اول با مهره‌های سفید و نفر دوم بامهره‌های سیاه بازی‌کند، هر بازیکن در جریان دو روز بازی هم با مهرهٔ سیاه و هم با مهرهٔ سفید بازی‌کرده است.

حالا اگر دایره را در جهت عقربه‌های ساعت بترتیب به اندازهٔ $\frac{۴\pi}{۷}$، $\frac{۸\pi}{۷}$ و $\frac{۱۲\pi}{۷}$ رادیان دوران دهیم وخط شکسته را با پاره خطهای کلفت و نازك ثابت نگه داریم، به سهولت برنامهٔ مسابقه در پنج روز بقیه بدست می‌آید:

روز سوم :	۴,۱	۲,۶	۷,۸	۵,۳
روز چهارم :	۱,۵	۶,۴	۸,۲	۳,۷
روز پنجم :	۶,۱	۴,۸	۲,۳	۷,۵
روز ششم :	۱,۷	۸,۶	۳,۴	۵,۲
روز هفتم :	۸,۱	۶,۳	۴,۵	۲,۷

این‌روش برای تمام مواردی‌که n (تعداد بازیکن‌ها) زوج باشد، صحیح است ؛ درحالتی هم‌که n فرد باشد ، می‌توان یك بازیکن فرضی درنظر گرفت ، منتهی هر بازیکنی‌که در مقابل این بازیکن فرضی قرار گیرد ، به معنای آنست که درآن روز از بازی‌آزاد است. مثلا اگر در مثال فوق ، شمارهٔ بازیکن‌ها را هرکدام یك واحد کم کنیم و بازیکن شمارهٔ صفررا فرضی بگیریم ، برنامهٔ مسابقه برای هفت بازیکن بدست می‌آید ، بطوریکه هرکدام سه‌بار با مهره‌های سیاه وسه بار بامهره‌های سفید بازی می‌کنند ودر هر روزیکی ازآنها آزاد است .

۳. پانزده بچه هرروز درگروههای سه‌نفری برای بازی باهم جمع می‌شوند . یك برنامهٔ هفتگی برای‌آنها تنظیم‌کنید و بنحوی‌که هربچه در هرروز همبازیهای جدیدی داشته باشد .

این مسئله را ، با مختصر تفاوتی ، **کرکمان** در سال ۱۸۵۰ مطرح کرد وموردتوجه عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانها قرارگرفت. یکی‌ازجوابهای مسئله را در اینجا ذکر می‌کنیم :

روز اول	a,b,c	d,e,f	g,h,i	j,k,l	m,n,o
روز دوم	a,d,g	b,e,h	c,l,o	j,n,i	m,k,f
روز سوم	a,j,m	b,k,n	c,f,i	d,h,o	g,e,l

روز چهارم	a,i,o	b,d,j	c,e,k	g,n,f	i,h,l
روز پنجم	a,f,l	b,g,i	c,h,n	d,i,k	j,e,o
روز ششم	a,h,k	b,f,o	c,g,j	d,l,n	m,e,i
روز هفتم	a,e,n	b,i,l	c,d,m	g,k,o	j,h,f

بعضی از مؤلفین مسائل مشابهی را بەازاء $n=۵\times ۳^k$ ، $n=۳^k$ ، $n=۶۳(=۲^۶-۱)$ و $n=۲۵۵(=۲^۸-۱)$ حل کرده‌اند .

این مطلب جالب است کـه بتوانیم برای مسئلهٔ اصلی و انواع دیگر آن برنامه‌ای درست کنیم که به بازیکنان امکان بدهد به سادگی تبدیلات لازم را خود انجام دهند .

سیلوستر ریاضی‌دان قرن گذشتهٔ انگلیس مسئله‌ای دربارهٔ تقسیم همهٔ انواع ترکیبهای سه به سه (تعداد آنها چنین است : $C_{۱۵}^{۳}=۱۵۵$) به۱۳ مجموعه طرح کرد (که ظاهراً تاکنون حل نشده است) که از تقسیم هریك ازآنها به ۷ گروه ، منجر به حل مسئلهٔ **کرکمان** خواهد شد.

حل این‌مسئله معادل است با تنظیم یك برنامهٔ سه‌ماهه (۱۳هفته) که درآن هیچیك از ترکیبها تکراری نباشد .

درمورد مسائلی‌که مورد مطالعه قرار دادیم و مسائل مشابه‌آنها ، می‌توان سئوالی دربارهٔ تعداد برنامه‌های واقعاً مختلف طرح کرد (کـه بطورکلی حل‌آن ساده نیست!)؛ ضمناً اگردوبرنامه چنان باشندکه بتوان یکی را از دیگری بدست آورد (با جابجاکردن عنصری از گـروه با عنصر دیگر) ویا تنها روزهای جابجاشده باشند ، آنها را واقعاً مختلف ندانیم .

دربارهٔ مسئلهٔ زیرهم فکرکنید :

مسئله - برنامه‌ای برای $n+1$ روز تنظیم‌کنیدکه درهریك ازآنها n^2 دانش‌آموز به صورت گروههای n نفری درآمده باشند و ضمناً هر دانش‌آموز در هربار باچهره‌های جدیدی همراه باشد.

وقتی‌که n عددی اول باشد، این‌مسئله راه‌حل ساده‌ای دارد، ولی درحالتی‌که n عددی غیراول است، راه‌حل دشوارتر می‌شود .

۲۱

مسئلهٔ یوسف فلاویوس ونظایر آن

فرض کنید روی محیط دایره‌ای n عنصر قرار داده باشیم ، سپس یکی از این عناصر را مبدأ قرار دهیم وبا شمردن آنها هرعنصر kام را حذف کنیم (وقتی‌که مسئله را روی کاغذ حل می‌کنیم ، می‌توان عناصر حذف شده را خط زد و وقتی‌که روی محیط دایره اشیائی قرار داده‌ایم، می‌توان بطور ساده عناصرحذف شده را برداشت) ، وقتی‌که یك عنصررا حذف می‌کنیم از عنصر بعدی و روی عناصری که سالم مانده‌اند ، شروع

به شمردن می‌کنیم .

به‌این‌ترتیب می‌توان سئوالهای زیررا مطرح‌کرد :

۱. در s امین دور، کدام عنصرحذف می‌شود ($1 \leqslant s \leqslant n$) ؟ روایت می‌کنندکه این مسئله‌را **یوسف فلاویوس*** مورخ به‌ازاء $n = 40$ و $k = 3$ حل‌کرده است و برای $s = 39$ و $s = 40$ ، عناصری‌راکه پس‌از سی‌وهشت دور حذف‌کردن ، برداشته می‌شود ، پیداکرده است.

۲. n عنصرمفروض را چگونه بچینیم‌که عناصرحذف‌شده بترتیبی باشد که ازقبل در نظر گرفته شده است؟

برای حل مسئلهٔ اخیرکافی است n عدد طبیعی‌اولیه را (که‌بجای عناصر مفروض در نظرگرفته‌ایم) از چپ به راست پشت‌سرهم بنویسیم ؛ سپس با شروع ازسمت چپ بترتیب هر k امین عدد را خط بزنیم و زیر آن عددی راکه بجای‌آن درنظرگرفته‌ایم ، قرار دهیم . ضمناً هربارکه به‌آخرسمت راست عددها می‌رسیم، بدنبال‌آن دوباره ازسمت چپ شروع کنیم (در اینصورت مثل اینست کـه عددها را روی محیط یك دایره نوشته‌ایم).

فرض کنید که مثلا بخواهیم ۹ ورق بازی از یك رنگ را چنان رویهم بچینیم ودر دست نگه داریم ،که اگرمرتباً یکی یکی آنهارا از رو برداشته و زیر قرار دهیم و هروقت به چهارمین ورق رسیدیم ، آنرا روی میز بگذاریم ، بترتیب از تکخال تا نه برروی میز قرارگیرد .

---

*) مورخ یهود در اوایل قرن چهارم میلادی . بعدها به‌روم رفت ودر آنجا مقیم‌شد . اکثر نوشته‌های‌او مربوط به تاریخ قوم یهود وبخصوص‌وقایع مربوط به‌ویرانی‌اورشلیم‌است . «مترجم»

دستهٔ ورق را از بالا به پائین بترتیب از تکخال تا نه لو در نظر می‌گیریم :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
(۹)	(۸)	(۳)	(۱)	(۶)	(۵)	(۷)	(۲)	(۴)

عددهای داخل پرانتز که در زیر نوشته شده است به این ترتیب بدست آمده‌اند: ازچپ به‌راست بترتیب می‌شماریم‌ووقتی که به‌شمارهٔ‌چهاررسیدیم، عدد مربوطه را خط می‌زنیم وزیر آن دفعهٔ اول عدد (۱) ، دفعهٔ دوم عدد (۲) وغیره را قرار می‌دهیم . بعدازشماره‌گذاری،ورقها را بترتیبی‌که در شماره‌های پائین بدست‌آمده است ازچپ به راست می‌چینیم .

چون طبق شرط باید قبل از همه تکخال روی میز قرار گیرد ، بایدآنرا ازبالا درردیف چهارم قرارداد، بهمین ترتیب دولو را درردیف هشتم وغیره وبالاخره نه‌لورا درردیف اول ازطرف بالاقرار داد. بنابراین ورقها از بالا به‌پائین به‌این ترتیب خواهند بود : نه‌لو، هشت‌لو، سه‌لو ، تکخال ، شش‌لو، پنج‌لو، هفت‌لو، دولو، چهارلو .

برای مواردی‌که n عددبزرگی است، اگربخواهیم عنصربخصوصی در دور sام شمردن حذف شود، راه‌حل ساده‌یی وجود داردکه ضمن‌آن لازم نیست عناصر حذف‌شدهٔ قبلی را شماره‌گذاری‌کنیم .

$\left\{x\right\}$ را عدد صحیحی فرض می‌کنیم که در نامساوی $x \leqslant \left\{x\right\}$ صدق‌کند ، در این‌صورت رشته عددهای :

$$a_1=\left\{a\right\}, a_2=\left\{a_1 q\right\}, a_3=\left\{a_2 q\right\}, \cdots, a_n=\left\{a_{n-1} q\right\}, \cdots$$

را « **تصاعد هندسی با عددهای صحیح** » به‌قدر نسبت q می‌نامیم .

برای اینکه شمارهٔ t ، عنصری بدانیم که در نوبت s ام باید کنار گذاشته شود (با تعداد اولیهٔ n عنصر و با حذف هربار عنصر k ام) ، « تصاعد هندسی با عددهای صحیح » را تشکیل می‌دهیم که در آن $a=k(n-s)+۱$ و $q=\frac{k}{k-۱}$ باشد؛ اگر بزرگترین جمله‌ای ازاین تصاعد را که از n_k تجاوز نکند به A نشان دهیم ، در اینصورت خواهیم داشت :

$$t=nk+۱-A$$

درمورد مثالی که قبلادربارهٔ نه ورق بازی ذکرکردیم، مثلا به‌بینیم که در دور پنجم چه ورقی روی میز قرار می‌گیرد . دراینجا $n=۹$ ، $k=۴$ ، $s=۵$ ، $q=\frac{k}{k-۱}=\frac{۴}{۳}$ و $nk=۳۶$ است. بنابراین داریم:

$$a_۱=\left\{۴(۹-۵)+۱\right\}=۱۷,\quad a_۲=\left\{۱۷\times\frac{۴}{۳}\right\}=۲۳,$$

$$a_۳=\left\{۲۳\times\frac{۴}{۳}\right\}=۳۱,\quad a_۴=\left\{۳۱\times\frac{۴}{۳}\right\}=۴۲>nk;$$

بنابراین $A=۳۱$ و $t=۳۶+۱-۳۱=۶$ می‌شود، یعنی در دورپنجم ورق ششم روی میز قرار خواهدگرفت .

مسائل زیررا حل‌کنید :

۱. از دوطریقی که ذکرکردیم ، ثابت کنید .(۵۱a) که در مسئلهٔ یوسف فلاویوس بیست و هشتمین و سیزدهمین عنصر بترتیب درآخرین و یکی مانده به‌آخرین دور حذف می‌شوند .

۲. ۳۶ ورق‌بازی طوری رویهم بچینیدکه اگر ازرو مرتباً پنج‌ورق

در زیرقرار دهیم وورق ششم را روی میز بگذاریم، ابتدا از ورق بزرگ تا ورق کوچك از یك رنگ و سپس از رنگ دوم ، بعد رنگ سوم و بالاخره رنگ چهارم روی میز قرارگیرند[۵۱b]

با تشکیل تصاعد هندسی باعددهای صحیح ، جای تکخال رنگ سوم (۱۹=s) ، سرباز رنگ چهارم (۳۱=s) و هفت‌لوی رنگ دوم (۱۷=s) را معین‌کنید .

۲۲

سر گرمیهائی مربوط به جابجا کردن اشیاء

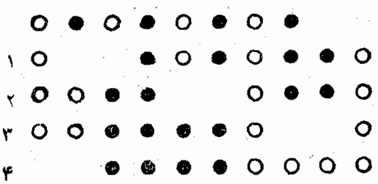
در چهار مسئلهٔ اول این فصل باید اشیائی را، با جابجاکردن آنها طبق یك قاعدهٔ معین ، به وضعی که از قبل داده شده است ، درآورد و بعضی ازآنها را می‌توان درجهتهای مختلف تعمیم داد .

در پایان فصل مسئله‌ای را مورد مطالعه قرار داده‌ایم‌که اگرعملی را درموردآن تکرار کنیم ، به وضع اولیهٔ اشیاء منجر می‌شود . تعیین تعداد اعمالی کــه برای این منظور لازم است بستگی به خاصیت تبدیل

دارد و برای حل مسئله درحالت‌کلی باید از نظریهٔ اعداد کمك‌گرفت.

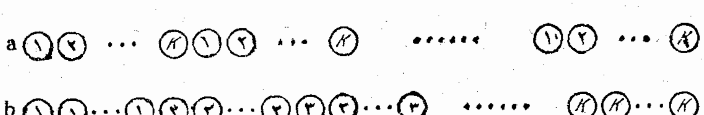
انتقال دو به‌دوی اشیاء

چهارمهرهٔ سیاه روی یك خط راست بترتیب درفواصل چهار مهرهٔ سفید قرار گرفته‌اند. بنا برشرط بازی، در هرحرکت می‌توانیم دو مهرهٔ مجاور را باهم برداریم (بدون اینکه آنها را ارهم جداکنیم ویا ردیف آنها را تغییر دهیم) و درجای جدیدی، در امتداد اولیه، قرار دهیم. هدف بازی اینست‌که در چهارحرکت به وضعی برسیم‌که چهار مهرهٔ سیاه در سمت چپ و چهار مهرهٔ سفید درسمت راست قرار گرفته باشند (حل مسئله درشکل۴۲ داده شده‌است).



شکل ۴۲

این مسئله‌را می‌توان به‌ترتیب زیر تعمیم داد: k نوع مهره و از هر نوع s عدد مفروض است. ببینید به‌ازاء چه مقادیری از k و s می توان به‌کمك یك رشته حرکت از وضع a به وضع b رسید (شکل۴۳). ثابت شده است که مسئله در حالت $k=۲$ برای هر مقدار $s>۴$ جواب دارد.

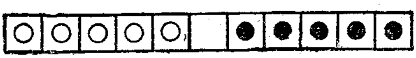


شکل ۴۳

می‌توان مثلا شرط کرد که بجای دومهرهٔ مجاور، سه‌مهرهٔ مجاور را منتقل‌کنیم؛ضمناً می‌توان همراه‌آن‌شرط کرد که این مهره را بتوانیم فقط در جهت‌مستقیم‌ردیف‌اولیه، یا فقط درجهت معکوس ردیف‌اولیه و یادرهر دوجهت به‌جای‌جدید منتقل‌کنیم. همچنین می‌توان وضع‌استقرارمهره‌ها را درآخر بازی بنحو دیگری مشروط‌کرد .

مسئلهٔ دیگر

مهره‌ها را مثل شکل۴۴ منظم‌کرده‌ایم . میخواهیم جای مهره‌های



شکل ۴۴

سیاه عوض کنیم . شرایط بازی چنین است : هر مهرهٔ سفید فقط بطرف راست و هرمهرهٔ سیاه فقط بطرف چپ می‌تواند حرکت کند ، حرکت می‌تواند یا به خانهٔ‌خالی مجاورباشد ویا به‌خانهٔ خالی مجاورنزدیکترین مهرهٔ رنگ مخالف .

بعد از تحلیل سادهٔ حرکتهائی که منجر به لاینحل شدن مسئله می‌شود ، روش حل، بدست می‌آید که در اینجا به صورت زیر نشان داده‌ایم :

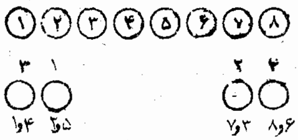
abbaaabbbbaaaaabbbbbaaaabbbbaaabba

دراینجا حرف a نمایندهٔ مهرهٔ سفید وحرف b نمایندهٔ مهرهٔ سیاه است؛ ابتدا یك مهرهٔ سفید را جابجا می‌کنیم ، بعد دومهرهٔ سیاه ، بعد سه‌مهرهٔ

سفید ، ... تاآخر.

جمع و جور کردن سکه‌ها

هشت سکه را در یك ردیف چیده‌ایم . میخواهیم چهار سکه را طوری جابجا کنیم که چهار دسته سکهٔ دوتائی داشته باشیم . ضمناً هر سکه‌ای راکه برمی‌داریم تنها روی‌سکه‌ای می‌توانیم بگذاریم‌که درفاصلهٔ باآن دو سکه وجود داشته باشد (خواه این دو سکه در کنار هم باشند یا رویهم) .



شکل ۴۵

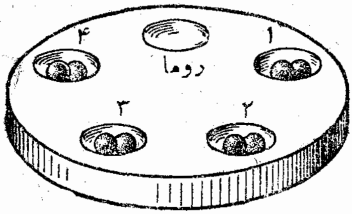
راه حل مسئله تقریباً واضح است وباید بطورمتوالی ابتدا سکهٔ پنجم را روی سکهٔ دوم، بعدسکهٔ سوم را روی سکهٔ هفتم ، بعد سکهٔ چهارم را روی سکهٔ اول و بالاخره سکهٔ ششم را روی سکهٔ هشتم قرار دهیم (شکل ۴۵) .

حالا سعی‌کنید راه حل این مسئله را پیداکنید : می‌خواهیم **pn** سکه ($p \geqslant ۴$) را در **p** گروه **n** سکه‌ای‌جمع‌کنیم،ضمناًسکه‌ای را بتوانیم روی سکهٔ دیگر قراردهیم‌که در فاصلهٔ آنها **n** سکه وجود داشته باشد (چه جدا از هم وچه رویهم) .

روما

بازی بنام «روما» وجود داردکه اصل‌آن هندی است وما دراینجا با مختصر تغییری ازآن یاد می‌کنیم .

روی یك صفحهٔ دایره‌ای شکل ۲n+۱ چاله وجود دارد . در ابتدای بازی یکی از چاله‌ها (روما) خالی است و در هریك از بقیه n گلوله وجود دارد (شکل ۴۶ به ازاء n=۲) .



شکل ۴۶

هدف بازی اینست که همهٔ گلوله‌ها را در «روما» جمع کنیم.

هرعملی راکه بترتیب زیر انجام شود یك حرکت می‌نامیم:
همهٔ گلوله‌هائی راکه در یك چالهٔ A وجود دارد برمی‌داریم ویکی‌یکی در چاله‌های بعد از خودش تقسیم می‌کنیم (حرکت در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد) . اگر تعدادگلوله‌هائی‌که باید تقسیم شوند، بیشتر از ۲n باشد، یکی ازگلوله‌ها درخود چالهٔ A باقی می‌ماند وبقیه در چاله‌های بعدی (هرکدام یکی) قرار می‌گیرد .

حرکت اول را می‌توان از هر چالهٔ دلخواه شروع کرد . اگر در یکی ازحرکتها (و منجمله حرکت اول) ، آخرین‌گلوله در روما افتاد، حرکت بعدی را می‌توان ازهرچالهٔ دلخواه شروع‌کرد، در غیراینصورت (یعنی وقتی‌که‌آخرین‌گلوله در روما قرار نگیرد) باید ازچاله‌ای شروع شود که آخرین گلوله درآن افتاده است ، بشرطی‌که این چاله قبل از افتادن این گلوله خالی نبوده باشد . در حالتی که حرکت ممکن نباشد بازی را باخته‌ایم .

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت درحالت n=۲ ، اولین حرکت بایداز چالهٔ شمارهٔ ۳ شروع شود، زیرا درهمهٔ‌حالتهای‌دیگر، درحرکت

دوم، آخرین گلوله درچالهٔ خالی می‌افتد و بازی منجر به باخت می‌شود. بعد ازمقداری تجربه می‌توان به‌این نتیجه رسیدکه برای به‌انجام‌رساندن بازی باید بترتیب از چاله‌های زیرحرکت کرد: ۳، ۴، ۲، ۳، ۴، ۱ و ۴، ۲، ۳، ۴.

به‌ازاء $n=3$ ، حد اکثر تعداد گلوله‌هائی را که می‌توان وارد روماکرد، ظاهراً مساوی پانزده است. به ازاء $n=4$ لااقل نه راه حل برای مسئله وجود دارد.

جالب اینست که بتوانیم نظریه‌ای برای این بازی پیدا کنیم و یا لااقل حالتهای خاصی را جستجو کنیم که در هریك از آنها یا راه حل مسئلهٔ (یا راه حلهای مسئلهٔ) پیدا شود ویا حداکثر تعدادگلوله‌هائی راکه بتوان وارد روماکرد محاسبه نمود.

همچنین می‌توان دربارهٔ انواع دیگری از این بازی فکرکردکه مثلادرهریك ازچاله‌ها s گلوله داشته‌باشیم $(s \neq n)$ و یا شرایط حرکت را تغییر دهیم وغیره.

تکرار متوالی یك عمل

سرگرمیهائی با ورق وجود دارد و اساس آنها بر اینست که طبق قاعدهٔ معینی نظم آنها را تغییر دهیم وپس از چند بارکه عمل را تکرار کردیم، به وضع اولیه نظم ورقها (ویا اشیاء دیگر) برسیم.

حل این‌معما، درموارد غیراستثنائی، براساس خواص سادهٔ انواع تبدیلها قرار دارد.

اگر n شیئی a_1، a_2، ...، a_n را، که ازقبل شماره‌گذاری شده‌اند، بخواهیم از وضع استقرار اولیه به وضع a_{α_1}، a_{α_2}، ...، a_{α_n} (α_1، ...، α_n تبدیلی از عددهای ۱ ، ۲ ، ... ، n هستند) درآوریم ، می‌توان آنرا به صورت تبدیل زیر نشان داد :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n-1 & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

که نشان می‌دهد ، کدام عدد (α_i) باید جانشین عددی (i) ، که درسطر بالای تبدیل A قرارگرفته است ، بشود .

اغلب راحت‌تر است که بجای عناصر α_1، α_2، ...، α_n ، ازعددهای ۱ تا n استفاده کنیم .

مثلا تبدیل زیررا در نظر می‌گیریم :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 7 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

که ابتدا از تبدیل ۱۲۳۴۵۶۷۸ شروع شده است، سپس به ترکیبی که از A بدست می‌آید وغیره می‌رسیم ، دراینصورت خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(I)}{12345678} \xrightarrow{A} \underset{(II)}{58637142} \xrightarrow{A} \underset{(III)}{72164538} \xrightarrow{A} \underset{(IV)}{48513762} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{A} \underset{(V)}{32756418} \xrightarrow{A} \underset{(VI)}{68471352} \xrightarrow{A} \underset{(I)}{12345678} \end{array}\right\} \quad (1)$$

حاصلضرب دو تبدیل C و D به تبدیلی گفته می‌شود که معادل با تبدیلهای C و D باشد ، با انجام یکی بعد از دیگری (ابتدا C ،

بعد D)

مثلا اگر $C=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۵ & ۴ & ۱ & ۳ \end{pmatrix}$ و $D=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد، دراینصورت $\acute{C}D=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$ خواهد بود. درحقیقت در تبدیل C، ۱ به ۲ ودرتبدیل D، ۲ به ۴ تبدیل می‌شود؛ بنابراین در تبدیل CD، ۱ به۴ تبدیل می‌شود وغیره.

روشن است‌که $DC=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۴ & ۵ & ۲ \end{pmatrix}$، یعنی $DC \neq CD$ است.

بسادگی دیده می‌شود که $A^{۲}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۷ & ۲ & ۱ & ۶ & ۴ & ۵ & ۳ & ۸ \end{pmatrix}$است، این تبدیلی است‌که در طرح (۱)، تبدیل I را به III وتبدیل II را به IV می‌رساند وغیره.

اگر تبدیل A را شش‌بار بکاربریم I به I منجر می‌شود، بنابراین $A^{۶}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \end{pmatrix}$، یعنی همهٔ عناصر در جای خود باقی می‌مانند. چنین تبدیلی را **اتحاد** گویند وبا حروف E نشان می‌دهند.

کوچکترین عدد طبیعی s، که برای آن $B^{s}=E$ باشد، **ردیف** تبدیل B نامیده می‌شود. بنابراین ردیف A مساوی شش است.

برای اینکه بتوانیم بسرعت ردیف هرتبدیل‌را معین‌کنیم (بخصوص وقتی‌که تعداد عناصر تبدیل زیاد است) بهتر است‌که آنرا در «دورهای مستقل» قرار دهیم.

مثلا بسادگی دیده می‌شودکه درتبدیل A عنصر۱ به عنصر۵ تبدیل می‌شود، عنصر۵ به۷، عنصر۷ به۴، عنصر۴ به۳، عنصر۳ به۶ و بالاخره

عنصر۶ به۱ تبدیل می‌شود (دور بسته شد) .

به عبارت دیگر عناصر۶,۳,۴,۷,۵,۱ بترتیب هرکدام جای خود را به دیگری واگذار می‌کنند. این تبدیل را می‌توان مثل یك «تبدیل دوری» $\begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۷ & ۴ & ۳ & ۶ \\ ۵ & ۷ & ۴ & ۳ & ۶ & ۱ \end{pmatrix}$ مشخص کرد ، که اغلب بصورت یك سطر (۱۵۷۴۳۶) یا (۷۴۳۶۱۵) وغیره نوشته می‌شود ؛ در این طرز نوشتن باید بخاطرداشت‌که هرعنصرجای خود را به عنصربعد از خود وآخرین عنصرجای خود را به عنصراول می‌دهد (بنابراین تفاوتی ندارد‌که ازکدام عنصر شروع‌کنیم. تنها باید ردیف عناصررا حفظ‌کنیم) .

علاوه برآن در تبدیل **A** عنصر۲ جای خود را به۸، وعنصر ۸ به ۲ می‌دهد ،که دور (۲۸) را به وجود می‌آورند وآنرا **جانشینی** عناصر۲ و ۸ هم‌گویند .

دورهای (۶ ۳ ۴ ۷ ۵ ۱) و (۸ ۲) را به آنجهت مستقل گویندکه بین‌آنها عناصر مشترکی وجود ندارد . به این ترتیب **A** برابر است با حاصلضرب دوتبدیل دوری مستقل :

$$\mathbf{A}=(۱\ \ ۵\ \ ۷\ \ ۴\ \ ۳\ \ ۶)(۲\ \ ۸)$$

مثلا تحقیق‌کنید :

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ \\ ۹ & ۲ & ۴ & ۱ & ۸ & ۱۰ & ۵ & ۷ & ۳ & ۶ \end{pmatrix}=(۱\ ۹\ ۳\ ۴)(۲)(۵\ ۸\ ۷)(۶\ ۱۰)$$

که درآن حتی یك دور یك‌جمله‌ای هم وجود دارد .

به سادگی ثابت می‌شود(۵۲) ، که ردیف هر تبدیل برابر است با کوچکترین مضرب مشترك ردیفهای دورهای مستقل آن . مثلا ردیف تبدیل **A** برابر است با شش (کوچکترین مضرب مشترك عددهای ۶و۲)

و ردیف تبدیل B برابر است با دوازده (کوچکترین مضرب مشترك عددهای ۴، ۱، ۳ و ۲).

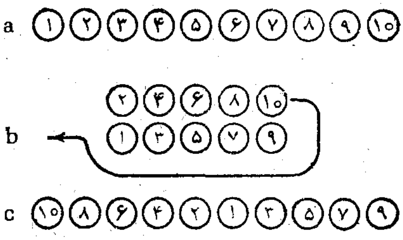
درطرح (۱) باید به این نکته توجه کرد که در هریك از انتقالهای I←II ، II←III ، III←IV وغیره، که باتبدیل A مشخص می‌شوند، عنصر ردیف پنجم جانشین عنصر ردیف اول ، عنصر هشتم جانشین عنصر دوم، عنصر ششم جانشین عنصر سوم ، عنصر سوم جانشین عنصر چهارم ، عنصر هفتم جانشین عنصر پنجم ، عنصر اول جانشین عنصر ششم ، عنصر چهارم جانشین عنصر هفتم و بالاخره عنصر دوم جانشین عنصر هشتم می‌شود. می‌توان ثابت کرد که این کیفیت تصادفی نیست . علاوه بر آن همیشه عکس این کیفیت هم صحیح است ، یعنی اگر در یك رشته انتقال از یك تبدیل به تبدیل دیگر، سپس از تبدیل دوم به تبدیل سوم، ازسوم به چهارم وغیره همهٔ انتقالها طبق یك قانون انجام بگیرند (به معنی **تغییر ردیف جای عناصر**)، دراینصورت انتقالها را می‌توان بوسیلهٔ یك تبدیل M مشخص کرد ، بنحوی که معین کند در هر انتقال کدام عنصر جانشین کدام عنصر می‌شود[۵۳].

با بوجودآوردن تبدیل M، می‌توان معین کرد که برای رسیدن به وضع استقرار اولیهٔ عناصر چند تبدیل باید انجام داد

بازی مونژ

۲n نفردانش‌آموز را درنظر بگیرید که در یك صف ایستاده باشند (شکل ۴۷ — a)، سپس به دو دسته تقسیم شوند بنحوی که دانش‌آموزان ردیف‌زوج پشت‌سردانش‌آموزان ردیف فرد قرارگیرند (شکل ۴۷ — b)؛

در حرکت سوم دانش‌آموزان ردیف دوم چنان حرکت می‌کنند که در جناح راست ردیف اول مثل شکل ۴۷ — c قرار گیرند (در شکل ۴۷ ، ۵ = n و دانش‌آموزان رو به ما فرض شده‌اند) .



شکل ۴۷

بازی مونژ را می‌توان با $۲n$ ورق به‌این ترتیب انجام داد : دستهٔ ورق را مرتب کرده ودر دست چپ می‌گیریم وسپس آنهارا بنوبت بدست راست منتقل می‌کنیم ، به‌این ترتیب که یکـی را در رو و دیگری را در زیر قرار دهیم. واضح است که این عمل را می‌توان بوسیلهٔ تبدیل زیر مشخص کرد :

$$M=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots n-۱ & n & n+۱ & n+۲ \cdots & ۲n-۱ & ۲n \\ ۲n & ۲n-۲\cdots & ۴ & ۲ & ۱ & ۳ & \cdots ۲n-۳ & ۲n-۱ \end{pmatrix}$$

که می‌توان به ازاء مقادیرمختلف n ، ردیف M را معین کرد :

$$n=۱,۲,۳,۴,۵,\ ۶,\ ۷,۸,\ ۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,\ldots$$

ردیف M $= s = ۲,۳,۶,۴,۶,۱۰,۱۴,۵,۱۸,۱۰,۱۲,۲۱,۲۶,\ldots$

خواننده می‌تواند به ازاء مقادیر مختلف n ، صحت مقادیر متناظر s را آزمایش کند .

مثلا به ازاء ۸ = n داریم :

$$M=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ & ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ & ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \\ ۱۶ & ۱۴ & ۱۲ & ۱۰ & ۸ & ۶ & ۴ & ۲ & ۱ & ۳ & ۵ & ۷ & ۹ & ۱۱ & ۱۳ & ۱۵ \end{pmatrix},$$

$$M=(۱\ ۱۶\ ۱۵\ ۱۳\ ۹)(۲\ ۱۴\ ۱۱\ ۵\ ۸)(۳\ ۱۲\ ۷\ ۴\ ۱۰)(۱۶)$$

یعنی ۵ = s است.

همچنین می‌توانید با ورق بازی یا اشیاء دیگری که شماره‌گذاری شده‌اند، آزمایش کنید که در s امین دور بازی مونژ، عناصر به وضع اولیه درمی‌آیند.

می‌توان $۲n$ ورزشکار را در یك صفت قرارداد و طبق طرحی که در شکل ۴۷ داده شده است، آنها را بـه حرکت واداشت. اولین دور ورزش وقتی تمام می‌شود که ورزشکاران بهمان ردیف اولیه ایستاده باشند.

قضیهٔ زیرهم صحیح است:

ردیف تبدیل M برابر است باکوچکترین جواب هم‌نهشتی زیر:

$$۲^{z} \equiv -۱ (mod\, ۴n + ۱)$$

واگر این هم‌نهشتی جواب نداشته باشد، کوچکترین جواب هم‌نهشتی زیر:

$$۲^{z} \equiv ۱ (mod\, ۴n + ۱)$$

صحت این قضیه را به ازاء مقادیر مختلف n تحقیق کنید مثلا به ازاء $n = ۸$ داریم: $۴n + ۱ = ۳۳$؛ که‌اگر توانهای مختلف ۲ را آزمایش کنیم، بدست می‌آید: $۲^{۵} \equiv -۱ (mod\, ۳۳)$، یعنی به ازاء $n = ۸$ داریم: $s = ۵$.

اگر $n = ۵$ باشد $۴n + ۱ = ۲۱$ می‌شود و داریم:

$$۲^{۴} \equiv -۵ (mod\, ۲۱), ۲^{۵} \equiv -۱۰ (mod\, ۲۱), ۲^{۶} \equiv -۲۰ (mod\, ۲۱)$$

بنابراین به ازاء $n = ۵$ ردیف M مساوی ۶ است.

۲۳

روشهای ساده‌ای برای رسم نقشه‌های زیبا

گمان نمی‌کنم کسی باشدکه ازطرح عجیب و زیبای دانه‌های برف به حیرت نیفتاده باشد ویا نقشهای جادوئی وتزیینی راکه بوسیلهٔ استاد- کاران ماهر، با ترسیمات پیچیده و هم‌آهنگ ، روی قالیها ، پارچه‌ها ، سفالها و سرامیکها، به شکلها و رنگهای مختلف، نقش بسته است، تحسین نکرده باشد .

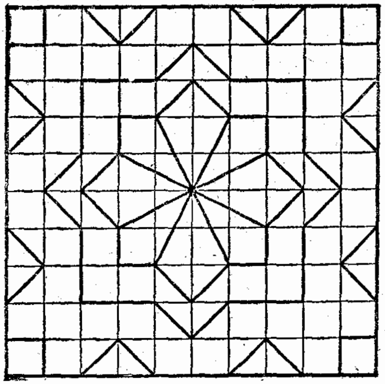
ولی رسم شکلهای زیبای هندسی ، باوجود حوصله و وقتی‌که لازم

دارد ، شوق و تمایل بسیاری را برمی‌انگیزد .

ما در اینجا چند فصلی را به رسم چنین شکلهائی ، بــه صورت سرگرمیهائی از هندسه ، اختصاص می‌دهیم کــه بعضی ساده‌تر و بعضی بغرنجترند و در هرحال نقشه‌هــا و طرحهای زیبائی بدست می‌آید . از ساده‌ترین آنها شروع کنیم .

طرح روی کاغذ شطرنجی

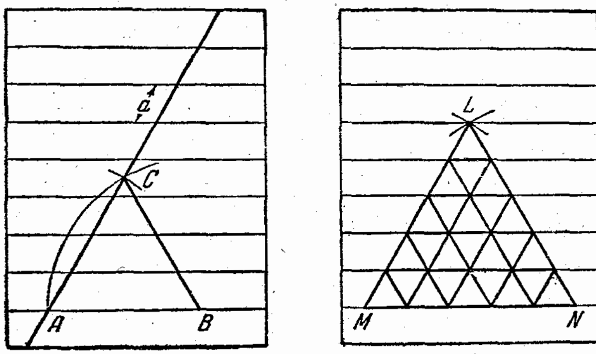
روی کاغذ شطرنجی می‌توان ، بدون زحمت ، نقشهای مختلف و پیچیده‌ای طرح ریخت ؛ برای این منظور می‌توان نـه تنها روی اضلاع مربعها (خانه‌های کاغذ شطرنجی) ، بلکه در طول قطر مربعها و یا قطر مستطیلهائی که درکاغذ وجود دارد ، حرکت‌کرد (شکل ۴۸) .



شکل ۴۸

ترسیمات مشابهی را می‌توان روی کاغذی که خانه‌های مثلثی ـ شکل دارد ، بوجودآورد ؛ چنین خانه‌هائی را می‌توان باکمك یك صفحهٔ کاغذ کــه خطهای موازی دارد، درست‌کرد: دو نقطهٔ دلخواه A و B (شکل ۴۹) روی یکی از خطهای کاغذ خط دار در نظر می‌گیریم ؛ نقطـهٔ C را چنان پیدا می‌کنیم که $AC=BC=AB$ باشد . خطهای کاغذ ، خط AC را به قطعاتی تقسیم می‌کند، هریك از این قطعه‌هارا مقیاس می‌گیریم ومساوی

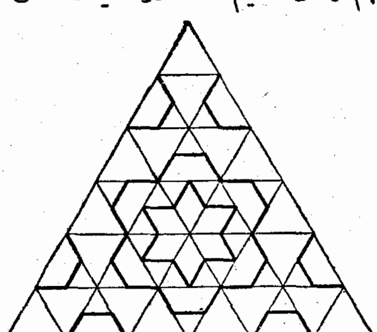
a فرض می‌کنیم ؛ حالا روی کاغذ خط دار دیگری پاره خطِ MN را را مساوی na جدا می‌کنیم (در شکل ۴۹ داریم : n=۵) و آنرا به



شکل ۴۹

پاره خطهائی مساوی a تقسیم می‌کنیم ، مثلث متساوی الاضلاع MNL را می‌سازیم و از نقاط تقسیم اضلاع آن بوسیلهٔ خطهای کاغذ ، موازی اضلاع ML و NL رسم می‌کنیم .

برای اینکه روی این شبکهٔ مثلثی ، طرح زینتی رسم کنیم ، می‌توانیم اوساط اضلاع مثلثها را هم بهم وصل کنیم که درحقیقت مثل اینست که مثلثهائی به ضلع $\frac{a}{2}$ بوجود آورده‌ایم (شکل ۵۰ را ببینید) .



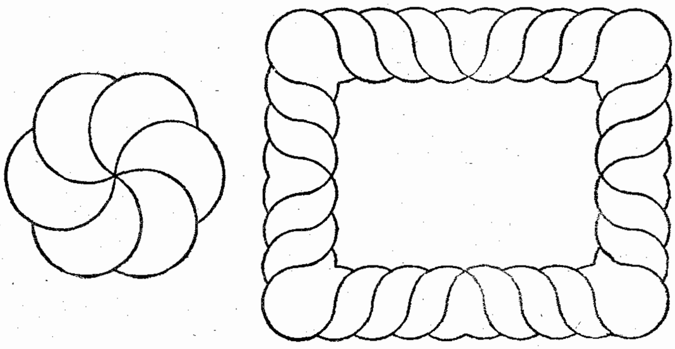
شکل ۵۰

شبکهٔ مربعی یا مثلثی را انتخاب کنید و طرح بهترین نقشه را روی آن به مسابقه بگذارید ؛ در این مسابقه باید تازگی رسم ،

ظرافت و دقت در کار و کیفیت رنگ‌آمیزی را مـورد توجه قرار داد (اندازه‌های رسم را می‌توان مثلاً مستطیلی بـا ابعاد ۲۰ × ۱۲ خانه، مربعی با ۱۰ × ۱۰ خانه یا شش‌ضلعی به ضلع ۶a در نظرگرفت.

با پرگار وخط‌کش

باکمك پرگار وخط‌کش می‌توان شکلهای بسیار متنوعی رسم‌کرد. برای این منظور بهتر است دایره‌ای که به n قسمت مساوی تقسیم شده است، درنظرگرفت (وقتی‌که n مساوی ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰ و غیره‌باشد، انجام این تقسیم مشکل نیست و وقتی‌که n مساوی ۷، ۹، ۱۱ و غیره و یا حتی ۵ و ۱۰ باشد، می‌توان از نقاله استفاده‌کرد). برای ساده‌کردن کار می‌توان در مرکز و رأسهای چندضلعی منتظم سوزنهائی روی کاغذ بدون خط فروکرد.



شکل ۵۱

اگر از نقاط تقسیم دایره، وترهائی با طولهای مساوی رسم‌کنیم،

چندضلعی‌های منتظم ستاره‌ای مختلفی بدست می‌آید. حالا اگر دایره‌هائی (ویا قوسهای دایره‌ای) با شعاعهای مختلف به مرکز رأسهای چندضلعی‌های منتظم و به مرکز نقاط تلاقی دایره‌ها رسم کنیم و سپس هردو نقطهٔ جداگانه را به‌وسیلهٔ پاره‌خطهای مستقیم بهم وصل کنیم، می‌توان مجموعهٔ بزرگی از شکلهای مختلف بدست آورد، که اگر آنهارا بطور متناسب رنگ کنیم برزیبائی آنها افزوده می‌شود.

مبنای رسم را می‌توان بجای دایره، اشکال دیگری مثل مستطیل، مثلث وغیره قرار داد (شکل ۵۱ را ببینید).

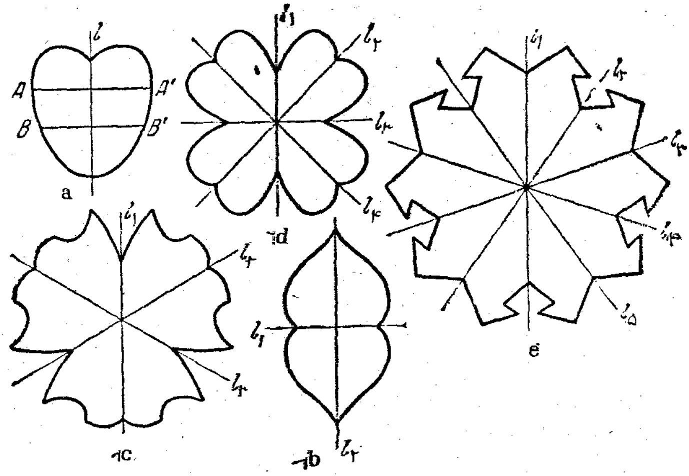
شکلهای متقارن

دونقطهٔ A و A' را نسبت به خط l **متقارن** گوئیم وقتی‌که A و A' در دو طرف خط l و بیك فاصله از آن قرار گرفته باشند و AA' عمود بر l باشد.

شکل مسطحه‌ای را نسبت به خط l **متقارن** گوئیم وقتی‌که برای هر نقطهٔ B ازآن، نقطه‌ای مانند B' (که بازهم برشکل واقع است) وجود داشته باشد که قرینهٔ B نسبت به خط l باشد. خط l را **محور تقارن** شکل گویند.

در شکل ۵۲ شکلهائی رسم شده است‌که بترتیب دارای یك، دو، سه، چهار و پنج محور تقارن هستند.

شکلهای متقارن را می‌توان بسادگی وبا بریدن کاغذ بدست آورد: کاغذ نازکی را n مرتبه چنان تا می‌کنیم که بصورت «قطاعی» با زاویهٔ

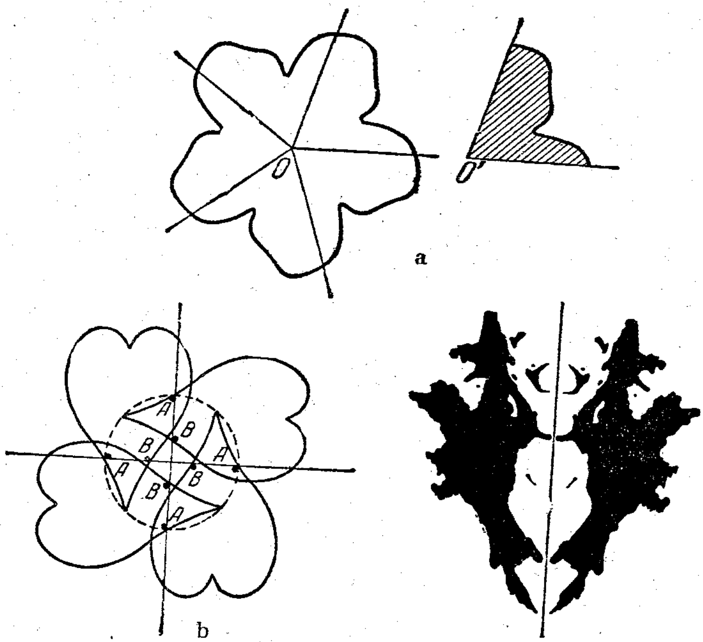


شکل ۵۲

مرکزی مساوی $\frac{180^\circ}{n}$ بدست آید؛ اگردرطرف بیرونی این قطاع محیط خاصی را ببریم n و کاغذ را بازکنیم ، شکلی که دارای n محور تقارن است بدست می‌آید . اگرازکاغذ رنگین استفاده‌کنیم ، می‌توانیم دستمال سفره‌های‌کاغذی با رنگهای مختلف و نقشهای جالب درست‌کنیم .

نقطهٔ O را **مرکز تقارن درجهٔ n** برای شکل مفروض گوئیم وقتی که با دوران شکل به اندازهٔ $\frac{360^\circ}{n}$ دور نقطهٔ O برخودش منطبق شود. مثلا در شکل ۵۲ ، شکلهای b ، c ، d و e بترتیب دارای مرکز تقارن درجهٔ ۲، ۳، ۴ و ۵هستند .

برای ساختن شکلهائی که دارای مرکز تقارن درجهٔ n باشند ، می‌توان از قالبهای مقوائی به صورت « قطاعی » که‌کنارهٔ منحنی‌الشکل دارد و زاویهٔ مرکزی‌آن $\frac{360}{n}$ است ، استفاده‌کرد .



شکل ۵۳

از نقطه‌ای مانند O ، روی صفحهٔ کاغذ ، n نیم‌خط چنان رسم می‌کنیم که هردو نیم خط مجاور زاویه‌ای مساوی $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه با هم بسازند. قالب را بترتیب بین هردو نیم‌خط مجاور قرار می‌دهیم (بطوری که O' بر O منطبق شود) و بامداد درکنارهٔخارجی‌قالب و روی‌کاغذخط می‌کشیم؛ به‌این‌ترتیب شکل متقارنی بدست می‌آیدکه شبیه‌آن درشکل ۵۳ — a نشان داده شده است.

همچنین می‌توان قالبی باشکل دلخواه انتخاب کرد و آنرا بطور یکنواخت برهریك از نیم‌خطهای مذکور قرار داد، مثلا به‌این‌ترتیب‌که

همیشه دو نقطهٔ A و B آن (که بیك فاصله از O هستند) بریکی از نیم-خطها واقع باشند (شکل ۵۳-b) .

یکنوع دیگر ساختن شکلهای متقارن را هم بخاطر می‌آوریم ، به‌این ترتیب که مختصری مرکب روی یك نیمه‌کاغذ بریزیم وسپس کاغذرا ازوسط تاکنیم؛ به‌این ترتیب می‌توان شکلهائی که‌دارای محور تقارن هستند، و اکثراً هم زیبا وعجیب ، بدست‌آورد (شکل ۵۳-c) .

۲۴

چندضلعی‌های منتظم از لوزی

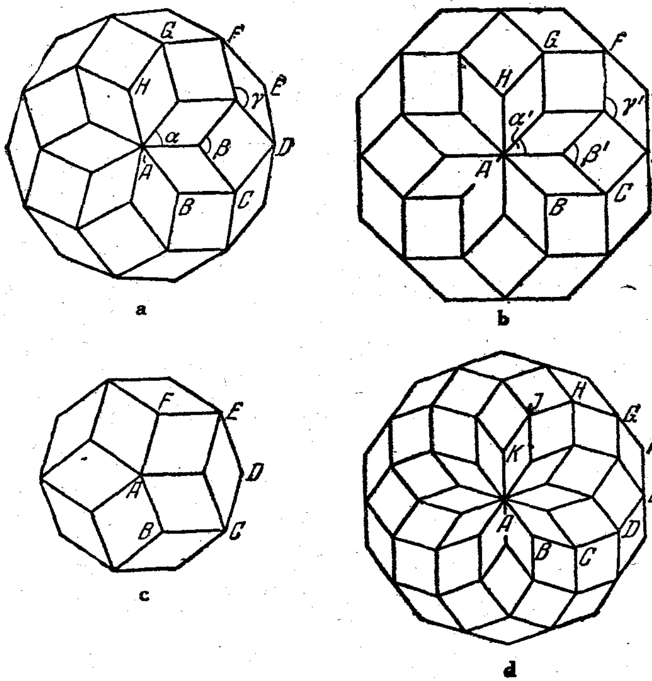
در شکل ۵۴-a دیده می‌شود که اگر دور هفت‌ضلعی ستاره‌ای (که از هفت لوزی به ضلع a و زاویهٔ حادهٔ $\alpha=\frac{۲\pi}{۷}$ تشکیـل شده است) ، ردیف دومی از هفت لوزی جدید با زاویهٔ $\beta=۲\alpha=\frac{۴\pi}{۷}$ قـرار دهیم و سپس ستارهٔ جدیدرا باهفت لوزی دیـگر به زاویهٔ $\gamma=۳\alpha=\frac{۶\pi}{۷}$ بپوشانیم،

یك چهارده‌ضلعی منتظم به ضلع a بدست می‌آید.

یك هشت‌ضلعی ستاره‌ای در نظر می‌گیریم (شکل ۵۴-b)، که‌از هشت لوزی به زاویهٔ $\alpha'=\frac{2\pi}{8}$ تشکیل‌شده است، درردیف دوم مربعهائی خواهیم داشت ($\beta'=2\alpha'=\frac{\pi}{2}$) و در ردیف سوم، لوزیهائـی مساوی لوزیهای ستارهٔ مرکزی ($\gamma'=3\alpha'=\pi-\alpha'$)؛ این سه ردیف رویهم یك هشت‌ضلعی منتظم به ضلع 2a بوجود می‌آورند.

ثابت‌کنیدکه اگر $\alpha=\frac{2\pi}{m}$ و m عددی فرد باشد ($m\geqslant 3$) بـا $\frac{m-1}{2}$ ردیف لوزی یك 2m ضلعی منتظم به ضلع a و اگر m زوج باشد ($m\geqslant 4$)، با $\frac{m}{2}$ ردیف لوزی یك m ضلعی منتظم بـه ضلع 2a بدست می‌آید[54]. اما چون در هرردیف m لوزی وجود دارد، می‌توان نتیجه‌گرفت‌که وقتی m عددی فرد باشد، هر 2m ضلعی منتظم به ضلع b را می‌توان یا به $m(m-1)$ لوزی به ضلع $\frac{b}{2}$ ویا به $\frac{m(m-1)}{2}$ لوزی به ضلع b تقسیم‌کرد (مثلا شکل ۵۴ - d.c را ببینید).

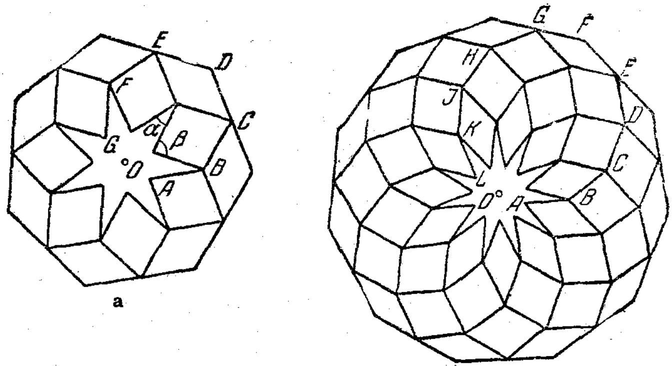
متذکر می‌شویم که برای تقسیم 2m ضلعی منتظم به ضلع 2a به لوزیهائی به ضلع a، می‌توان 2m ضلعی منتظم «کوچکتر» به ضلع a را بطور متوالی دور یکی از رأسهای‌آن به‌اندازهٔ زوایای $\frac{\pi}{m}$، $2\frac{\pi}{m}$، $3\frac{\pi}{m}$، ...، $(2m-1)\frac{\pi}{m}$ دوران داد (ABCDEFGH و



شکل ۵۴

ABCDEFGHIK را در شکل۵۴ـ b و d ببینید) ؛ ضمناً $2m$ ضلعی کوچکتر ، کــه دوران می‌کند ، شامل همان نوع لوزیهای $2m$ ضلعی بزرگتر است ، منتهی تعداد آنها در اولــی یکچهارم تعداد آنها در دومی است .

تقسیم $2m$ ضلعی منتظم به ضلع a را به لوزیهائی به ضلع a (وقتی کــه m عددی فرد است) ، می‌توان از دوران $m+1$ ضلعی به ضلع a (که درآن دو زاویهٔ روبرو برابر $\frac{\pi}{m}(m-1)$ و هریك از



شکل ۵۵

$m-1$ زاویهٔ دیگر برابر $(m-2)\frac{\pi}{m}$ است) دور رأس بـه زاویهٔ $(m-1)\frac{\pi}{m}$ به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{m}$ ، $2\frac{2\pi}{m}$ ،...، $(m-1)\frac{2\pi}{m}$ رادیان بدست‌آورد (مثلا در ۱۴ضلعی a ، شکل ۵۴ هشت‌ضلعی **ABCDEFGH** ودر ۱۰ ضلعی c ، شکل ۵۴ شش‌ضلعی **ABCDEF**) .

برای اینکه وقتی m عددی فرد است ، به یك m ضلعی منتظم به ضلع 2a برسیم باید به عنوان شکل مرکزی ، بجای ستاره‌ای‌که از m لوزی تشکیل شده باشد ، از m ضلعی ستاره‌ای منتظمی‌که α یعنی زاویهٔ رأس آن مساوی $\frac{\pi}{m}$ و β زاویهٔ خارجی‌آن مساوی $\frac{3\pi}{m}=3\alpha$ و طول ضلع‌آن $AB=a$ باشد(درشکل۵۵-a وb بترتیب $m=7$ و$m=11$ است). ثابت‌کنیدکه اگردور این‌چندضلعی ستاره‌ای‌را به‌وسیلهٔ $\frac{m-3}{2}$

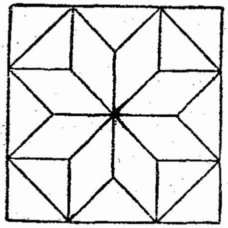
ردیف لوزی بپوشانیم، همیشه بیك m ضلعی منتظم به‌ضلع $2a$ می‌رسیم[۵۵].
ضمناً تقسیم m ضلعی به‌لوزیها با یك چند ضلعی ستاره‌ای درمرکزرا می‌توان با دوران m ضلعی منتظم کوچك « غیر بسته » (ABCDEFG درشکل ۵۵-a یا ABCDEFGHIKL در شکل ۵۵-b) دور مرکز ستاره و به زاویهٔ $\frac{2\pi}{m}$ بدست‌آورد.

۲۵

بازی «موزائیك»

در بازی بنام « موزائیك » ، هدف اینست که به‌کمك قطعات با رنگهای مختلف ، شکلهای مختلفی درست کنیم . معمولا این قطعات را به شکل مربع، لوزی و مثلث قائم‌الزاویه بازاویهٔ حادهٔ مساوی ۴۵درجه در نظر می‌گیرند (شکل ۵۶) .

در حالتهای ساده‌تر باید همهٔ قطعه‌ها را در جاهای مربوطه یك شکل قرار داد . ولی می‌توان ، بدون درنظرگرفتن یك شکل رسم‌شده



شکل ۵۶

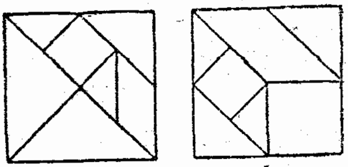
وبدون اینکه خود را محدود به اشکال خاصی بکنیم ، بااستفاده از همه قطعه‌ها و یا بعضی از آنها شکلهای بکر وجالبی درست‌کرد .

خواننده می‌تواند بازیهای‌جالب ومختلفی از این قبیل فکر کند که در آنها قطعه هـای مختلفـی بـه شـکل مثلث ، متوازی الاضلاع ، کثیر الاضلاعهای منتظم وغیره مورد استفاده قـرار گیرد . به این منظور می‌توان از مقوا قطعه‌هائی به شکلهای مورد نظر برید و روی آنها را با کاغذهای رنگی مختلف پوشاند .

اگر بجای قطعه های مقوائی یا چوبی از شیشه‌های رنگین نازك ویا انواع پلاستیکهای شفاف استفاده کنیم و بتوانیم قطعه‌های مختلف را روی یکدیگر قراردهیم، می‌توانیم حتی به‌کمك دو رنگ از آنها انواع شکلها را با انواع رنگها درست‌کنیم .

شکلهائی به کمك قطعه‌های مربع

یکـی از جالب‌ترین سرگرمیها در این زمینه ، ساختن شکلهای مختلف از هفت قطعهٔ مربع شکل ۵۷ – a می‌باشد ، ضمناً برای درست‌کـردن شـکل مفروض باید از هر هفت قطعه استفاده‌کرد وهیچکدام آنها ، حتی بطور جزئی هم نباید رویهم قرارگرفته باشند .

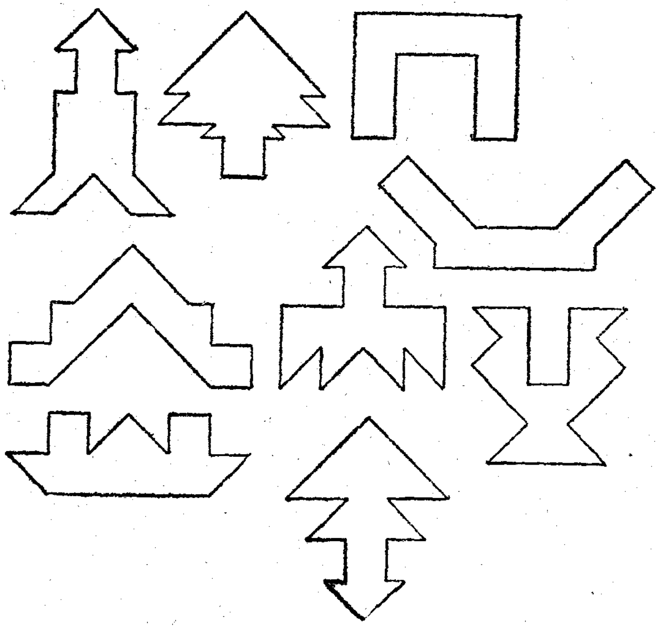


a b

شکل ۵۷

درشکل ۵۸ شکلهای متقارنی

رسم شده است که همهٔ آنها به کمك قطعه‌های مربع شکل ۵۷ — a بدست آمده‌اند (این شکلها از کتاب «معمای سه‌گانه» تألیف ب. ای. آبره‌ایمو چاپ ۱۸۸۴ برداشته شده است) .



شکل ۵۸

از همین قسمتها می‌توان شکلهای دیگری هم ساخت (مثلا اشیاء مختلف ، حیوانات مختلف وغیره) .

از قطعه‌های شکل ۵۷ — b هم می‌توان شکلهای گوناگون(منتهی به تعداد کمتری) به وجودآورد .

مسابقه‌ای ترتیب دهید که از این قطعه‌ها، شکلهای ابتکاری ساخته شود ، برندهٔ این مسابقه کسی خواهد بود که زودتر از دیگران بتواند به

به نتیجه برسد.

آیا می‌توانید مربع را بنحو دیگری به هفت قسمت تقسیم کنید، بطوریکه بتوان از قطعه‌های آن شکلهای متقارن مختلف درست کرد؟

برای اینکه سرگرمی جالب‌تر بشود، می‌توان مثلا شرط کرد که باکمك پنج قطعه از هفت قطعه، شکلهای ابتکاری ساخته شود ودوقطعه‌ای راکه در ساختن شکل بکار نمی‌رود به‌اختیار بازی‌کننده گذاشت.

مستطیل به‌کمك مربعها

دراین اواخر درصفحات بعضی از روزنامه‌های ریاضی مقالاتی‌در بارهٔ ساختن مستطیل به‌کمك مربعهای مختلف (بطوریکه هیچ دومربعی با هم مساوی نباشند)، دیده می‌شود.

بنظر می‌رسدکه اگر $n<9$ باشد، نمی‌توان به‌کمك n مربع مختلف، مستطیلی ساخت. به‌ازاء $n=9$ مسئله دارای دوجواب است: می‌توان مستطیل را از مربعهائی درست کرد که نسبت اضلاع آنها ۱۸ : ۱۵ : ۱۴ : ۱۰ : ۹ : ۸ : ۷ : ۴ : ۱ باشد(شکل۵۹) ویا ازمربعهائی که اضلاع آنها به نسبت ۳۶ : ۳۳ : ۲۸ : ۲۵ : ۱۶ : ۹ : ۷ : ۵ : ۲ باشند. مستطیلی با ده مربع بسازید[۵۶] که ضلعهای آن به نسبت:

۴۵ : ۴۴ : ۴۱ : ۳۸ : ۳۵ : ۳۴ : ۲۳ : ۱۲ : ۱۱ : ۳

و مستطیلی با سیزده مربع که ضلعهای آن به‌نسبت:

۷۲ : ۷۱ : ۷۰ : ۶۹ : ۵۶ : ۵۲ : ۳۳ : ۱۹ : ۱۴ : ۹ : ۵ : ۴ : ۱

باشند (بهتر است ابتدا به سئوال مربوط به نسبت ضلعها ، در هریك از این موارد ، جواب داده شود) .

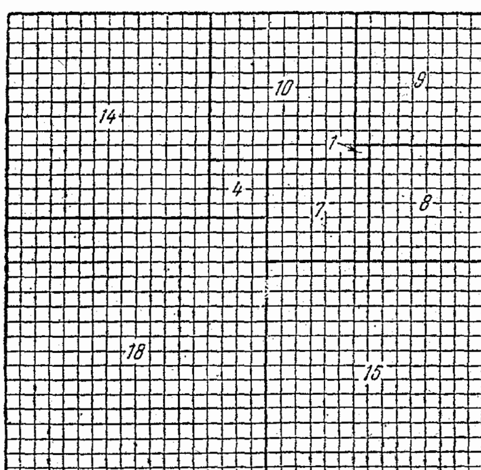
کمترین تعداد مربعهای مختلفی که بتوان باآنها مربع بزرگتری ساخت،۲۶ است. مربع بزرگی بسازیدکه از ۲۶ مربع‌کوچکتر با اضلاع به نسبت :

۱ : ۱۱ : ۴۱ : ۴۲ : ۴۳ : ۴۴ : ۸۵ : ۱۶۸ : ۱۷۲ : ۱۸۳ : ۱۹۴ :

:۲۰۵: ۲۰۹: ۵ : ۷ : ۲۰ : ۲۷: ۳۴ : ۶۱: ۹۵ : ۱۰۸ : ۱۱۳: ۱۱۸:

:۱۲۳ : ۱۳۶ :۲۳۱

تشکیل شده باشد ، ضمناً ۱۳ مربع اول مستطیلی با اضلاع به نسبت ۳۷۷ : ۶۰۸ و ۱۳ مربع‌آخر مستطیلی با اضلاع به نسبت ۲۳۱: ۶۰۸ بسازند (۵۷).



شکل ۵۹

یادآوری این مطلب جالب‌است که مسئلهٔ مربوط به‌ساختن‌مکعب

مستطیلها از تعداد معینی مکعبهای مختلف قابل حل نیست .

فرض می‌کنیم که مسئله جواب داشته باشد و v حجم کوچکترین مکعب باشد . چون در هر مستطیلی که از مربعهای دو به دو مختلف تشکیل شده است ، کوچکترین مربع نمی‌تواند به ضلع مستطیل متصل باشد (این حکم را ثابت‌کنید[۵۸]) ، کوچکترین مکعبی‌که روی قاعدهٔ تحتانی مکعب‌مستطیل قرار دارد (k_1)، به وسیلهٔ مکعبهائی با اندازه‌های بزرگتر احاطه شده است ؛ این مکعبهای بزرگتر « چاهکی » درست کرده‌اند که در ته‌آن (یعنی روی مکعب k_1) مکعبهائی قرارگرفته‌اند، کوچکترین آنها (k_2) بازهم به وسیلهٔ مکعبهای بزرگتری (در مقایسه با آن) احاطه شده است‌که خود چاهکی تشکیل می‌دهند و غیره .

دنبالهٔ مکعبهای k_1، k_2، k_3، ... بالاخره به مکعبی می‌رسد که که حجم آن از v کوچکتر است و این با فرض ما متناقض است.

این دومسئله راهم حل‌کنید :

۱) مکعبی را به n مکعب (که در بین آنها مکعبهای مساوی هم می‌تواند وجود داشته باشد) به ازاء $n=۳۴$ و $n=۵۰$ تقسیم کنید[۵۹].

به ازاء چه مقادیری از n ، مسئله جواب ندارد .

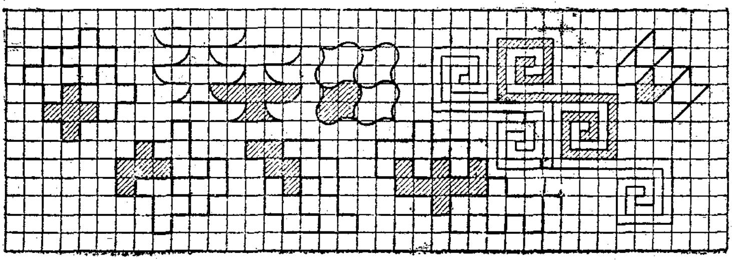
۲) ثابت کنید[۶۰] که اگر $n \neq ۲,۳,۵$ باشد، مربع را می‌توان به n مربع دیگر تقسیم‌کرد (که در بین آنها مربعهای مساوی‌هم بتواند وجودداشته باشد).

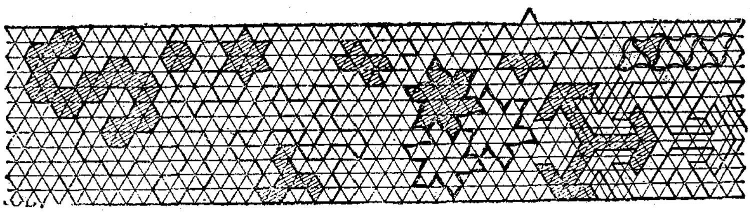
٢٦

تنظیم پارکت

یکی ازجالب‌ترین سرگرمیهای هندسی ، تنظیم پارکت است که عبارتست‌از پوشاندن یك‌صفحه باشکلهائی که‌بیك صورت ویا به‌صورتهای مورد نظر تکرار شده‌اند .

برای تهیه پارکتهای ساده ، می‌توان از کاغذهای‌شطرنجی‌معمولی یاصفحه‌هائی که‌بامثلثهای متساوی‌الاضلاع مساوی پرشده‌اند، استفاده‌کرد؛ روی چنین صفحه‌هائی می‌توان به‌این یاآن طریقه خانه‌ها ویا رئوس‌آنها





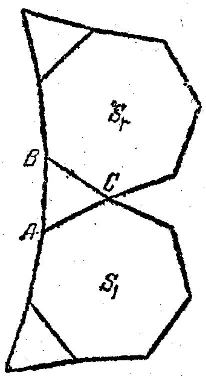
شکل ۶۰

را بهم وصل کرد و پارکتهای مختلف دلخواهی بدست آورد. تنوع را می‌توان از این راه بدست آورد که یکی از خانه‌ها را با دیگری یکی کنیم یا آنرا بوسیلهٔ خطهای منحنی یا شکسته تقسیم کنیم. درشکل ۶۰ بعضی ازانواع پارکتها داده شده است، که می‌توان هرکدام از آنها را بطور نامحدود ادامه داد (ومااز خواننده می‌خواهیم که این عمل‌راانجام دهد).

می‌توان پارکتهارا به‌کمك چند ضلعی‌های منتظمی که‌تعداداضلاع آنها با هم فرق دارد بدست آورد.

برای بررسی سئوال مربوط به‌پوشاندن‌سطح بوسیلهٔ‌چندضلعی‌های منتظم لازم است قبل از همه انواع ممکنهٔ نقاط «گرهی» را معین‌کنیم، یعنی ترکیبهای مختلف چندضلعی‌های منتظم را بدست آوریم که بتوانند

بدون اینکه رویهم قرارگیرند ، صفحه را بپوشانند، وضمناً درهرحالت باید امکان ادامه‌نامحدود پارکت را با نقاط گرهی موجود موردآزمایش قرار داد . نقاطی راکه چند ضلعی‌های منتظم مفروض درآنجا رأس‌مشترك داشته‌باشند، نقاط گرهی می‌نامیم .



شکل ۶۱

مثلا به سادگی می‌توان با مثلث‌متساوی الاضلاع ، هفت ضلعی‌منتظم و۴۲ ضلعی‌منتظم، نقطهٔ‌گرهی درست‌کرد ، ولی پوشاندن صفحه با چند ضلعی‌های منتظمی کــه شامل چنین نقاط گرهی(۳،۷،۴۲) باشند،ممکن نیست.درحقیقت اگر رأس A (شکل ۶۱) رأس مشترك مثلث ABC ، هفت ضلعی S_1 و ۴۲ ضلعی S_2 باشد ، در اینصورت رأس B از مثلث ABC و۴۲ ضلعی باید رأسی ازهفت ضلعی S_3 باشد ، ولی در اینصورت دیگر نقطهٔ C نمی‌تواند یك نقطهٔ‌گرهی(۳،۷،۴۲) باشد.

ثابت‌کنیدکه ، اگرچه‌نقاط گرهی (۵، ۵، ۱۰) وجود دارد ، ولی نمی‌توان تمام صفحه را باپنج ضلعی‌ها وده‌ضلعی‌های منتظم پوشانید.[۶۱]

برای‌جستجوی‌انواع‌مختلف نقاط‌گرهی بایددانست‌که k ، یعنی‌مرتبهٔ نقطهٔ‌گرهی (تعداد چندضلعی‌هائی که درآنجا بهم رسیده‌اند)، نمی‌تواند از شش تجاوزکند . علاوه برآن ، اگر درگرهٔ مرتبهٔ k چند ضلعی‌های منتظمی بهم رسیده باشندکه تعداد اضلاع آنها بترتیب $n_1، n_2، \ldots، n_k$ باشد، به سادگی ثابت می‌شود[۶۲]که:

$$k-۲\left(\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\cdots+\frac{۱}{n_k}\right)=۲$$

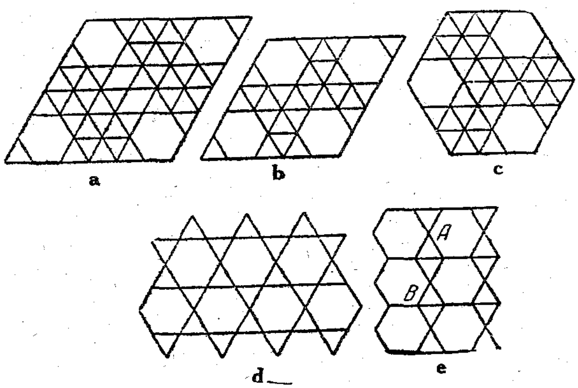
مثلا به ازاء $k=۳$ این تساوی را خواهیم داشت :

$$\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}=\frac{۱}{۲}$$

که درگرههای(۴،۸،۸)،(۳،۱۲،۱۲)،(۵،۵،۱۰)،(۴،۶،۱۲)،(۶،۶،۶)، (۴۲،۷،۳)وغیره صدق می‌کند .

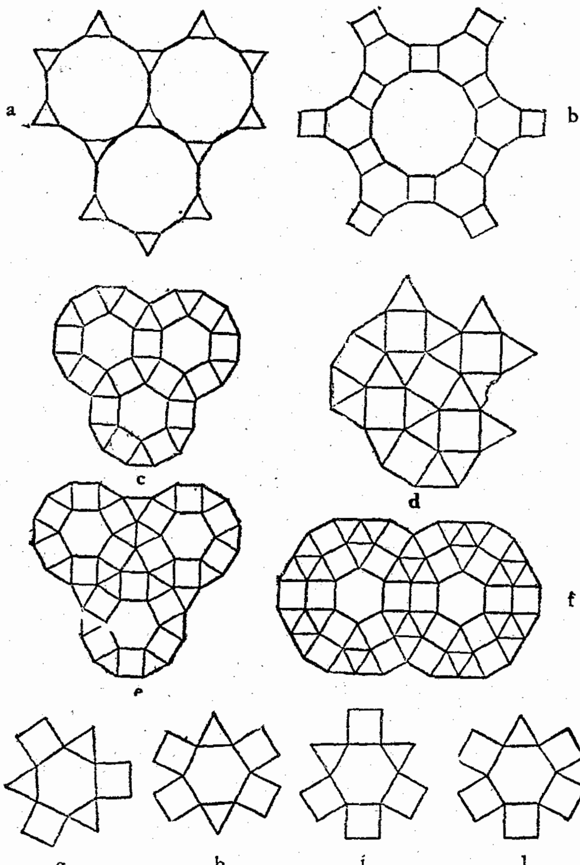
به ازاء $k=۴$ داریم : $\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}+\frac{۱}{n_۴}=۱$ و ایـن شرط در گرههای (۴،۴،۳،۶) ، (۳،۶،۳،۶) و غیره صدق می‌کند .

همهٔ پارکتها را نمی‌توان بدست‌آورد ، زیرا اگر مثلا شبکهٔمثلثی را در نظر بگیریم وبه‌طریقه‌های‌مختلف قسمتهای مثلثی شکل را به‌شش ضلعی تبدیل کنیم ، می‌توان مجموعهٔ بی‌پایانی از پارکتها را بدست‌آورد که همهٔ آنها از مثلثها وشش ضلعی‌های منتظم تشکیل‌شده‌اند (شکل۶۲).



شکل ۶۲

بنابراین برای ساختن پارکتها صلاح بر اینست که خود را در شرایط سخت‌تری محدودکنیم . مثلا می‌توان شرط کرد که اجتماع چند ضلعی‌هائی‌که در اطراف یك نقطهٔ‌گرهی قرار دارند ، برای همهٔ گره‌ها یکنواخت باشد . این شرط در مورد پارکتهای a، b، c از شکل ۶۲ صدق نمی‌کنند ، زیرا درآنها بعضی ازگره‌ها از مرتبهٔ پنج وبقیه‌ازمرتبهٔ



شکل ۶۳

شش هستند ؛ ولی همین شرط درمورد پارکتهای d و e از شکل ۶۲ صدق می کنند .

اگر بازهم شرطی را اضافه کنیم که مثلاوضع استقرار چندضلعی ها، برای همهٔ گره‌ها یکنواخت باشد ، در اینصورت پارکت e هم‌ازگردونه خارج می‌شود، زیرا در گره A مثلثها واسطهٔ اتصال شش ضلعی هاهستند، در حالیکه درگرهٔ B دوشش ضلعی مستقیماً درکنار یکدیگر ند .

می توان شرط کرد که همهٔ چند ضلعی‌های مساوی در پارکت ، از یك نوع باشند ، بدین معنی که بتوان هر دو چند ضلعی همنام پارکت را با چند ضلعی هائی که با آنها وصل شده‌اند رویهم قرار داد (شکل ۶۳ — a،b،c،d را ببینید) ، یا می توان از چند ضلعی‌هائی که از دو نوع مختلف باشنداستفاده کرد (مثلا درشکل ۶۳ — e ، همهٔ مربعها و همهٔ شش ضلعیها از یکنوع‌اند ، ولی مثلثها از دو نوع مختلف‌اند ، زیرا بعضی از مثلثها به سه‌مربع و بعضی دیگر به دو مربع و یك مثلث متصل‌اند) .

درc ، g ، h ، i و j از شکل ۶۳ پنج نوع شش‌ضلعی‌منتظم وجود دارد که بوسیلهٔ مربعها و مثلثهای متساوی‌الاضلاع احـاطه شده‌انـد ، بطوریکه هریك‌از شش رأس شش ضلعی‌گره‌هائی از مرتبهٔ چهارم‌هستند و هیچ دوشش ضلعی حتی دارای یك رأس مشترك هم نیستند.

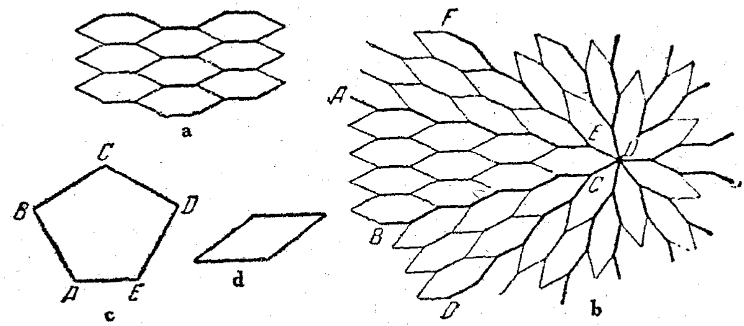
در مقایسهٔ شکلهای a ، b ، c ، e و f دیـده می‌شود کـه از پارکتهائی که در تنظیم‌آنها از دوازده ضلعیهای منتظم استفاده شده است، می‌توان پارکتهای جدیدی بدست آورد (به این ترتیب‌که دوازده‌ضلعی را به اجزاء تشکیل دهندهٔ آن تقسیم‌کنیم) .

اگر در پارکت f هر چهار مثلث مجاوررا بهم متصل کنیم، پارکت جدیدی بدست می‌آید که همهٔ خانه‌ها و همهٔ گره‌های آن از یکنوع است، ولی در عوض خانه‌های آن منتظم نیست (بعضی از خانه‌ها مستطیلهائی هستندکه از دو مربع تشکیل شده است) .

شش ضلعی متساوی‌الاضلاعی که دو زاویهٔ روبروی آن هر یك $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه (n عددی است طبیعی) و بقیهٔ زوایا باهم برابر باشند ، دارای خاصیت جالبی است . از اینگونه شش ضلعی‌ها ، علاوه بر آنکه می‌توان مانند شکل ۶۴—a خانه ها را بطور موازی چید، می‌توان پارکت b را درست کردکه مجموعه‌ای است از n «قطاع» بصورت AOB که در مرکز O بهم رسیده‌اند (در شکل ۷ = n است) و n « قطاع » بصورت BCD و AEF وغیره که رأس آنها درمرکز نیست.

به‌کمك همجواری پنج ضلعی‌های منتظم و پنج ضلعی های منتظم با ده ضلعی‌های منتظم وپنج ضلعی‌های ستاره‌ای‌می‌توان پارکتهای‌جالبی با تعداد زیادی خانه درست کرد ، ولی چنین پارکتی قابل این نیستکه تا بی‌نهایت امتداد داشته باشد .

می‌توان[۶۳] ازپنج ضلعیهای منتظم ولوزیهائی بشکل d (در شکل ۶۴) ، که زاویهٔ حادهٔ آنها مساوی ۳۶ درجه باشد ، و همچنین از نوعی پنج ضلعی‌های متساوی‌الاضلاع بشکل c ، کـه درآن دو زاویهٔ رأسهای B و D قائمه‌اندو بقیهٔزوایابا هم‌برابر است وAB = BC = CD = DE می‌باشد ، پارکتهای جالبی‌که تا بی‌نهایت بتوانند ادامه پیداکنند، درست کرد .



شکل ۶۴

برای تنظیم ویا جستجوی پارکت، بعضی از مقدمات ریاضی مورد احتیاج است ، ولی رنگ‌کردن آن و یا بهم پیوستن خانه‌های آن و یا حتی تغییرشکل خانه‌های یك پارکت آماده ، هیچگونه نیازی به اطلاعات ریاضی ندارد .

پارکتهای دو رنگ

در کتاب **اوبره‌ایموو** (بنام معمای سه‌گانه) از پارکتهای مربعی صحبت شده است که از تخته‌های مربعی شکل تشکیل و ازطریق قطر به دومثلث مساوی (سفید وسیاه) تقسیم شده‌اند .

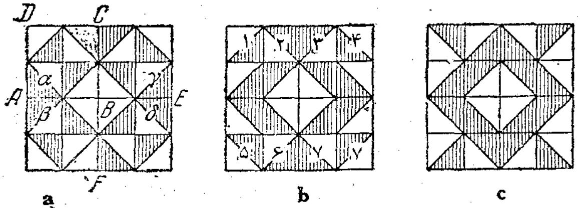
چهار تخته‌ازاین مربعها انتخاب می‌کنیم (مثلا ABCD درشکل ۶۵) ، می‌توان به‌آن (در طرف راست وپائین) سه مجموعهٔ دیگر چنان اضافه‌کرد که یك پارکت شانزده خانه‌ای متقارن بدست آوردکه دارای محورهای تقارن افقی (A E) و قائم (C F) باشد

می‌توان مجموعهٔ اول‌را بجای‌چهارخانه ، از نه ، شانزده، بیست

وپنج خانه وغیره انتخاب کرد .

چون از $n^۲$ خانهٔمربعی می‌توان $۴^{n^۲}$ ترکیب مختلف درست‌کرد، وقتی‌که $n>۲$ باشد، تقریباً نمی‌توان مجموعهٔ پارکتهای متقارنی‌که از $۴n^۲$ مربع دو رنگ تشکیل شده است به‌آخر رسانید .

اگر در یك پارکت متقارنی که براساس چهارمربع‌کوچك بطریق بالا درست شده است ، مثلا چهار مربع کوچك α، β، γو δ (شکل ۶۵) راکه نسبت به‌محورهای‌تقارن مربع بزرگ دوبدو متقارنند درنظر بگیریم وبدون اینکه جهت آنها را عوض‌کنیم، جای‌آنها را درجهت‌افقی‌منتقل کنیم (یعنی α وγ را باهم وβ وδ را باهم عوض‌کنیم) و یا در جهت قائم (یعنی α وβ را با هم وγ وδ را باهم عوض‌کنیم) بازهم پارکت متقارنی بدست خواهیم آورد . به‌این‌ترتیب انتقال افقی مربعهای (αوγ)و(δوβ)، پارکت a را به پارکت b وسپس انتقال قائم مربعهای (۵و۱) ، (۶و۲)، (۳و۷) و (۸و۴) آنرا به پارکت c منجر می‌کند .



شکل ۶۵

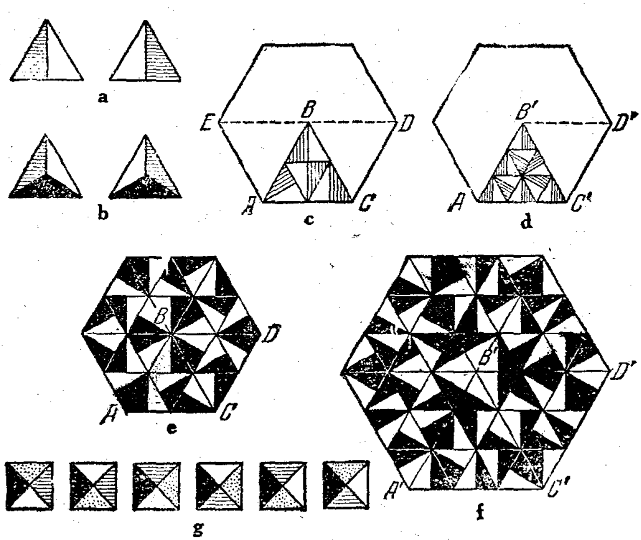
دو پارکت را **هم‌خانواده** می‌نامیم ، وقتی‌که بتوان از یکی به دیگری با یك یا چند انتقال خانه‌هائی که نسبت به محورهای قائم و یا افقی پارکت متقارنند، رسید . مثلا دو پارکت b وc هم‌خانواده‌اند،زیرا

می‌توان آنهارا باانتقال افقی خانه‌های بالا وپائین ، بیکدیگر تبدیل کرد .

آیا می‌توانید معین کنید که برای ...,۲,۳,۴ = n پارکتهای متقارنی راکه از $۴n^۲$ مربع کوچك تشکیل شده است ، به چند طبقه می‌توان تقسیم کرد ؟

همچنین آیا می‌توانید پارکتهای ۶ ضلعی تنظیم کنید که متشکل از مثلثهائی با دو یا سه رنگ باشند (شکل ۶۶ ـ a وb).

به کمك ۴ (۱۶،۹) وبطور کلی ($n^۲$) مثلث بشکل a ، مثلث متساوی‌الاضلاع بزرگ ABC (شکل ۶۶ــ d که در آن n = ۳ است) را بسازید، قرینهٔ این مثلث را نسبت به ضلع BC (B'C') پیدا کنید وسپس قرینهٔ لوزی ABCD (A'B'C'D') رانسبت به (AB وBD (یا A'B' وB'D') بدست آورید، شش ضلعی منتظمی بــا سه محور تقارن بدست می‌آید (شکلهای e وf را ببینید) که از $n^۲$ ۶ مثلث دو رنگ کوچك درست شده‌است.



شکل ۶۶

اگر قرنیه را بترتیب دیگری بدست می‌آوردید (ابتدا مثلث ABC رانسبت به‌ضلع AB و سپس لوزی بدست آمده‌را نسبت به‌ضلعهای BE،BC) به همین شش‌ضلعی می‌رسیدید. این مطلب را ثابت کنید[۶۴]

از $۴n^۲$ تختهٔ چهار رنگ می‌توان پارکتهای مربعی مختلفی با نقشهای عجیب درست کرد؛ چون چهار مثلثی راکه‌رأس مشترکشان درمرکز مربع باشد به‌شش طریق می‌توان رنگ کرد (شکل ۶۶ — g را ببینید)، می‌توان ازهرشش نوع مربع استفاده کرد و یاخود را به بعضی محدودیتها مقیدکرد.

۲۷

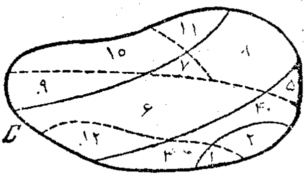
برش شکل

دو شکل را (که ممکن است دو شکل مسطحه یا دو جسم باشند) هم ترکیب گوئیم، وقتی که بتوانیم با تقسیم یکی از آنها به اجزاء کوچکتر و سپس متصل کردن این اجزاء بنحوی دیگر، شکل دوم بدست آید.

سیر این عمل را برش یك شکل به صورت دیگری می نامیم.

قضیهٔ I . اگر هر یك از دو شکل A و B با شکلی مانند C هم ترکیب باشند، خود شکلهای A و B نیز هم ترکیب خواهند بود.

درحقیقت اگر شکل C (شکل ۶۷ را ببینید) بهوسیلهٔ خطهای کامل (ودرمورد جسم ، به وسیلهٔ صفحات) به قسمتهائی تقسیم بشود که باآنها بتوان شکل A راساخت . و بهوسیله خطهای نقطهچین بهقسمتهائی که با آنها شکل B ساخته شود ،مجموعهٔ قطعات آن وقتی‌که به صورت گروههای ۱،۲؛۳،۴،۵؛وغیره انتخاب شود شکل A و وقتی که به صورت گروههای ۱،۳،۱۲؛ ۲،۴،۶، ۹ ؛ و غیره انتخاب شود . شکل B بدست می‌آید . بنابراین می‌توان ازقطعات شکل A ، شکل B را بدست‌آورد وبرعکس .



شکل ۶۷

قضیهٔII. هردو شکل هم ترکیب ؛ معادل‌اند ؛ یعنی مساحتهای مساوی دارند .

عکس این‌قضیه‌صحیح نیست، یعنی دو شکل‌معادل‌همیشه‌هم‌ترکیب نیستند .

دراینجا قضایائی را ذکر می‌کنیم که در آنها از حالتهای خاصی که دو شکل معادل ، هم‌ترکیب هم‌هستند گفتگو می‌شود .

قضیهIII . دومتوازی‌الاضلاع که قاعده‌های مساوی و ارتفاعهای مساوی داشته باشند ، هم‌ترکیب‌اند (شکل ۶۸—a را ببینید).

قضیهٔ IV . هردو مستطیلی‌که معادل باشند، هم‌ترکیب‌هم‌هستند.

(بااستفاده ازشرط $ab=cd$، ثابت‌کنیدکه $AB\|CD\|LM$ (شکل ۶۸—b) ؛ EKF را موازی AB رسم‌کنید ، به سادگی دیده می‌شود

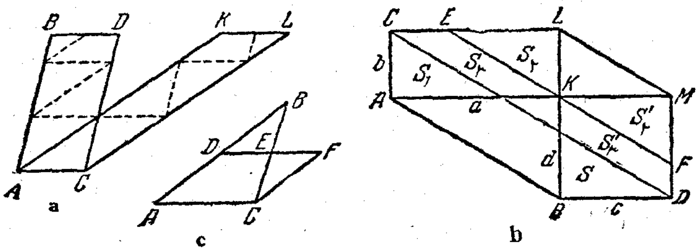
که $S_1=S'_1$ ؛ $S_2=S'_2$ و ضمناً S_3 و S'_3 هم‌ترکیب‌اند .

قضیهٔV. هر دو متوازی الاضلاعی که معادل باشند ، هم‌ترکیب هم هستند .

(طبق قضیهٔIII ، هریك از این متوازی‌الاضلاعها با مستطیلی‌هم ترکیبند و ازآ نجا به‌قضیهٔ I و V می‌رسیم) .

قضیهٔVI. هر مثلث و مستطیلی‌که معادل باشند ، هم‌ترکیب هم هستند .

(باید ثابت کرد که هرمثلثی مثلABC با متوازی‌الاضلاعی مثل ADFC هم ترکیب است ؛ شکل۶۸ ـ C) .



شکل ۶۸

قضیهٔVII . هر دو چند ضلعی معادل ، هم ترکیب‌اند (**قضیهٔ بایای‌گروین**) .

در حقیقت اگر هر یك از دو چند ضلعی (Q,P) را به‌مثلثهائی تقسیم کنیم (بترتیب p_1،p_2،....،p_m و q_1،q_2،....،q_n) ، کافی است همهٔ مثلثها را به صورت مستطیلهائی برش‌کنیم (p'_1،p'_2،....،p'_m و q'_1،q'_2،....،q'_n)که به‌ارتفاع‌مشترك h باشند . مستطیلی که‌ازمستطیلهای

p'_1، p'_2، ....، p'_m به ارتفاع h درست شده باشد (که می‌توان آنرا از q'_1، q'_2، ....، q'_n هم ساخت) هم با P وهم با Q هم ترکیب است .

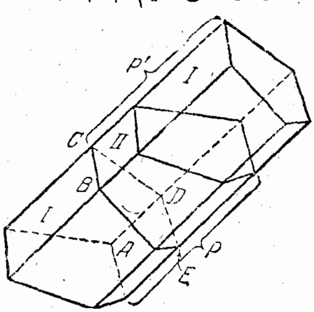
می‌بینیم که به این ترتیب به قضیهٔ II می‌رسیم و بنابراین برای هر نوع چند ضلعی صحیح است .

در قرن گذشته کوششی در این باره انجام گرفت که قضیهٔ بایای گروین را برای چند وجهی‌ها هم ثابت کنند ، ولی در سال ۱۹۰۱ دن ریاضی‌دان آلمانی ثابت کرد که اگر یك مکعب و یك چهار وجهی منتظم معادل باشند ، هم ترکیب نیستند .

ولی اگر حالتهای خاص چند وجهی‌ها را در نظر بگیریم، بازهم می‌توان شکلهای معادل هم‌ترکیب‌را پیداکرد، مثلا:

قضیهٔ $VIII$. مکعب مستطیلهای معادل ، هم‌ترکیب‌اند .

این مکعب مستطیلها را P و Q می‌نامیم . a،b و c را ابعاد P و a_1،b_1 و c_1 را ابعاد Q می‌گیریم و فرض می‌کنیم $abc = a_1b_1c_1$ باشد . مکعب مستطیل کمکی R را با ابعاد a_1،b' و c در نظر می‌گیریم بطوریکه $a_1b' = ab$ و $b'c = b_1c_1$ باشد ؛ بسادگی ثابت می‌شود که P و R هم‌ترکیب‌اند (ارتفاع هردومساوی c وقاعده‌های آنها معادل‌اند) . و بهمین ترتیب برای Q و R .



شکل ۶۹

قضیهٔ IX. هر منشوری را می‌توان به‌صورت یك مکعب مستطیل برش داد.

P را منشورمایل به یال مساوی l می‌گیریم. مقطع ABCDE را عمود بریالهای جانبی منشور رسم می‌کنیم (مقطع قائم). دراین‌صورت از دو قسمت I و II (شکل ۶۹) می‌توان منشور قائم P' را به ارتفاع l وقاعدهٔ ABCDE ساخت (اگر نتوان صفحه‌ای عمود بریالهای منشور مایل چنان رسم کرد که همهٔ یالهای آنرا قطع‌کند، قبلا منشور را به چند منشور باریکتر، با قاعده‌های کوچکتر، تقسیم می‌کنیم وسپس هریك ازمنشورهای بدست آمده را، طبق روشی‌که ذکرکردیم، به‌منشور قائم تبدیل می‌کنیم). بنا برقضیهٔ VII با تقسیم چند ضلعی ABCDE به‌قسمتهای α_1، α_2، ... وα_n، می‌توان‌آنرا برای تبدیل بیك‌مستطیل برش داد، بنابراین ازمنشورهای قائم با قاعده‌های α_1، α_2، ... وα_n وبه‌ارتفاع مشترك l (که P' را ساخته‌اند)، می‌توان مکعب مستطیل P" را به‌ارتفاع l ساخت.

قضیهٔ X. هر درمنشور معادل، هم ترکیب اند (این قضیه‌نتیجه‌ای از قضایای VIII و IX می‌باشد).

مسائل مربوط به‌برش شکلهاگاهی به‌صورت تعیین تعدادقسمتهائی که باید شکل را تقسیم‌کرد، مطرح می‌شود. مثلا:

۱. مستطیل ۱۶ × ۹ سانتیمتر مربع را به دوقسمت چنان تقسیم کنید، که بتوان با آنها یك مربع ساخت[۶۵a]

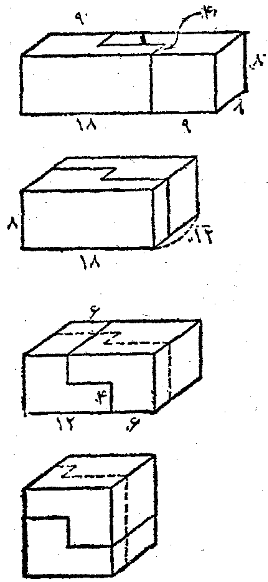
۲. مستطیل a × b سانتیمتر مربع را به دو قسمت چنان تقسیم

کنید ، که بتوان با آنها مستطیل $\frac{b(n+1)}{n} \times \frac{an}{n+1}$ سانتیمترمربع را ساخت.(۶۵b)

۳. مکعب‌مستطیل ۲۷ × ۸ × ۸ سانتیمترمکعبی را به‌چهار قسمت چنان تقسیم‌کنید که از آنها بتوان‌مکعبی به‌ضلع ۱۲ سانتیمتر ساخت (شکل ۷۰ را ببینید) .

چهار قسمت لازم را با مقوا درست‌کنید و با آنها هم مکعب به ضلع ۱۲ سانتیمتر و هم مکعب مستطیل ۲۷ × ۸ × ۸ سانتیمتر مکعبی را بسازید .

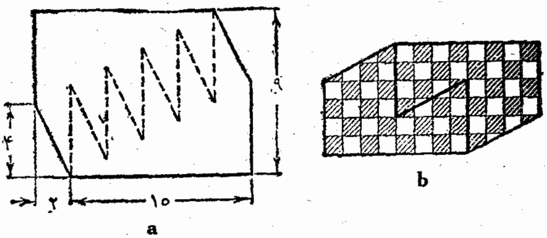
۴. مکعب مستطیل $a \times b \times c$ سانتیمتر مکعبی را به چهار قسمت طوری تقسیم کنید که بتوان با آنها مکعب مستطیل $\frac{am}{m+1} \times \frac{b(m+1)n}{m(n+1)} \times \frac{c(n+1)}{n}$ سانتیمترمکعبی (m و n عددهای صحیح هستند) یا مکعب مستطیل $\frac{c(n+1)}{n} \times \frac{b(m+1)}{m} \times \frac{amn}{(m+1)(n+1)}$ سانتیمترمکعبی ساخت.(۶۶)



شکل ۷۰

۵. در شکل ۷۱ نشان داده شده است که چگونه می‌توان قطعه فرش a و صفحهٔ شطرنجی b را به دوقسمت تقسیم‌کرد ، تا از قطعه‌های بدست آمده در حالت اول یك فرش مربع شکل و در حالت دوم یك

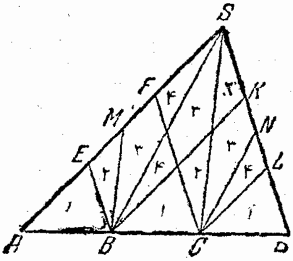
صفحهٔ شطرنج درست کرد .



شکل ۷۱

دربارهٔ مسائل مشابهی فکر کنید که در آنها قسمتهای تشکیل شده شامل سه ، چهار ویا شش دندانه باشند .

۶ . مثلثهای ASB ، BSC و CSD (شکل۷۲) دارای رأس مشترک S و قاعده‌های مساوی واقع بر یک خط راست و متصل بهم (AB=BC=CD) هستند .



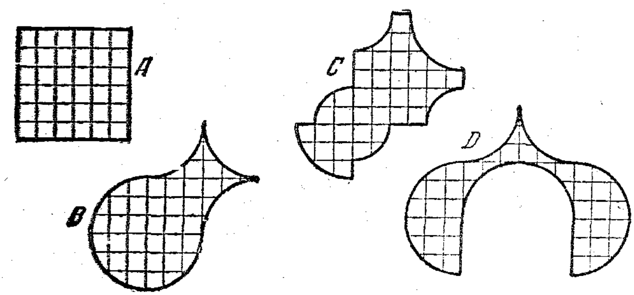
شکل۷۲

ثابت کنید که همهٔ این مثلثها را می‌توان بیک طریق برش داد ، قطعه‌های برش در هر مثلث با عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ نشان داده شده است (AS ∥ BK ∥ CL ؛ CF ∥ BE ∥ DS ؛ CS ∥ BM ؛ BS ∥ CN).

مسئلهٔ مشابهی را برای حالت n مثلث مورد توجه قرار دهید (n=۴,۵,۶,...) ، بطوریکه مثلثها دارای یک رأس مشترک وقاعده‌های مساوی ومتصل بهم واقع بریک خط راست باشند . ضمناً فرض کنیم که این مثلثها بوسیلهٔ خطهائی که از رأسهای مجاور به قاعدهٔ مثلثها

موازی با اضلاع جانبی آنها رسم شده است ، بریده شده باشند .

۷. مربع A (شکل۷۳) را به صورت شکلهای B ، C و D برش کنید(۶۷) بطوریکه دردو حالت اول به سه و درحالت سوم به‌چهارقسمت شده باشد .



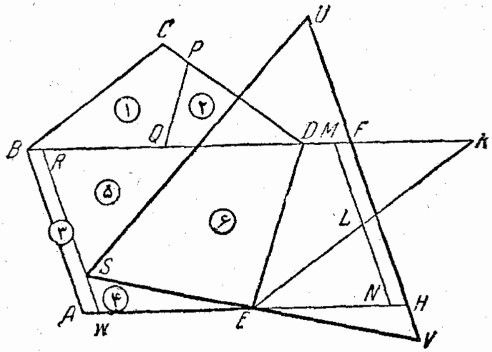
شکل۷۳

تبصره . می‌توانید درگروه خود این مطلب را بمسابقه بگذارید که ازمربع یا شکل دیگری (دایره ، شش ضلعی منتظم و غیره) باتقسیم به‌چندقسمت‌مفروض، شکلهای جالبی بدست‌آورند. در شکل۷۴ نشان‌داده شده است که‌چگونه میتوان با تقسیم‌پنج‌ضلعی منتظم ABCDE به ضلع a به‌شش‌قسمت (که درشکل‌شماره گذاری‌شده‌است) یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع به‌ضلع $b = a\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}tg36^\circ}} \# 1,993a$ ساخت . ساختمان‌به‌این‌ترتیب انجام می‌گیرد :

۱) DK درامتداد BD است و DK = BE ، یعنی مثلث EDK مساوی مثلث BCD است ؛

۲) LK ∥ EL ؛ AB ∥ MN ؛ CP = DM ؛ BQ = EL ،

یعنی $BCPQ = EDML$ و $\Delta_{QPD} = \Delta_{LMK} = \Delta_{LNE}$ ؛



شکل ۷۴

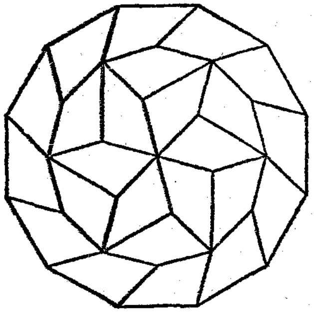
۳) $ET = \frac{b}{۲} = ES = TS = TU = EV$ ، یعنی مثلث متساوی الاضلاع SUV با پنج ضلعی $ABCDE$ معادل است ؛

۴) $RW \parallel UV$ (ولی RW موازی AB نیست) ، بنابراین $\Delta_{TUF} = \Delta_{TRS}$ و $\Delta_{EHV} = \Delta_{EWS}$. علاوه براین از معادل بودن چهار ضلعی‌های $ABRW$ و $NMFH$ واز اضلاع متناظرموازی نتیجه می‌شود که اگر آنها را رویهم قرار دهیم ، برهم منطبق می‌شوند .

کوردمسکی و روسالیو در کتاب خود بنام «مربع عجیب» نشان می‌دهند که چگونه می‌توان مربع را به مثلثها ، شش ضلعی‌ها و پنج ضلعی‌های منتظم برش داد که تعداد تقسیمات آن بترتیب پنج ، پنج و شش است . حالا کوشش کنید که یك هفت‌ضلعی منتظم‌را به‌صورت‌مثلثهای متساوی الاضلاع و یا مربعها و همچنین شش ضلعی منتظم را به صورت هشت ضلعی‌های منتظم برش کنید و غیره .

با استفاده از قضیهٔ I می‌توانید مثلث (شش ضلعی و غیره) را

به قطعاتی ، که اندازه‌های آنها خیلی کوچك نباشد ، **چنان تقسیم کنید** که بتوان از آنها هم مربع و هم پنج ضلعی منتظم (یا مربع وهفت ضلعی منتظم و غیره) درست کرد . از این مطلب می‌توان معمای جالبی ساخت : ازقطعات انتخابی‌مفروض سه ضلعی منتظم مفروض بسازید .



شکل ۷۵

در شکل ۷۵ دیده می‌شود که یك‌دوازده‌ضلعی‌منتظم‌را می‌توان به قطعات مساوی چنان تقسیم‌کرد که از مجموعهٔ دو برابر آنها یك دوازده ضلعی منتظم ، کـه مساحتی دوبرابر مساحت دوازده ضلعی دارد، بدست آید .

در مورد این سئوال هم فکر کنید : به ازاء چه مقادیری از n و k می‌توان n ضلعی منتظم را به قطعاتی مساوی چنان تقسیم کرد (که تعداد آنها باید تا حد امکان کم باشد) که از بهم پیوستن **k برابر** این قطعات ، شکل مشابهی با مساحت k برابر بدست آید .

آیا می‌توانید مربع را به n قسمت چنان تقسیم کنیدکه باکنار گذاشتن یکی از آنها وسپس دوتا از آنها (و احتمالا سه تا !) بتوان از بهم‌پیوستن بقیهٔ قطعه‌ها، هربار مربعی بااندازه‌های کوچکتر بدست‌آورد.

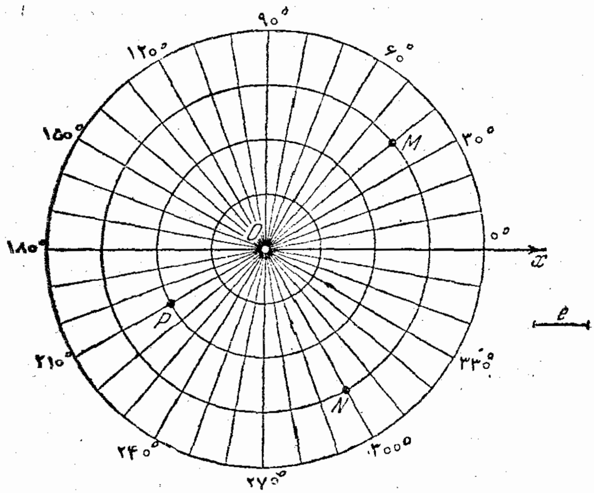
مسئلهٔ مشابهی را می‌توان دربارهٔ مثلث متساوی الاضلاع ، شش ضلعی منتظم وغیره نیز طرح کرد .

۲۸
منحنی گلها

آنهاکه به‌شکلهای زیبای‌هندسی علاقمندند، می‌توانند دردستگاه مختصات قطبی منحنی‌های نظیر معادلات $r=a+b\sin\frac{m\varphi}{n}$ را جستجو کنند(a ، b ، m و n عددهای مفروضی هستند) .

در مختصات قطبی پاره خطی مثل e را به عنوان واحد ، o را قطب و ox را محور قطبی انتخاب می‌کنند (شکل ۷۶) . وضع هر نقطهٔ M بوسیلهٔ شعاع قطبی OM و زاویهٔ قطبی φ (زاویه‌ای که نیم‌خط OM

با نیم خط ox می‌سازد) معین‌شود . عدد r ،که طول **OM را نسبت‌به e** معین می‌کند ($OM=re$) و مقدار عددی زاویهٔ φ ، که **به درجه و یا** رادیان بیان می‌شود ، **مختصات قطبی** نقطهٔ M نامیده **می‌شود .**



شکل ۷۶

برای هر نقطه‌ای ، بجز نقطهٔ **O** می‌توان $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ و $r>0$ گرفت . ولی برای رسم منحنی‌ها ، معادلهٔ به‌صورت $r=f(\varphi)$ ، **باتغییر** φ (منجمله مقادیر منفی و یا بزرگتراز 2π) ، برای **r مقادیری مثبت‌یا منفی** بدست می‌آید .

برای اینکه نقطهٔ (r و φ) را پیدا کنیم ، از **نقطهٔ O نیم خطی** رسم می‌کنیم که با ox زاویه‌ای مساوی φ بسازد و **روی آن (وقتی که** $r>0$ است) و یا در امتداد آن درجهت مخالف **(وقتی‌که $r<0$ است)**، پاره خط $|r|e$ را جدا می‌کنیم .

اگر بخواهیم کار نقطه یابی خیلی ساده شود، بهتر است که قبلا شبکهٔ مختصات را بسازیم ، این شبکه تشکیل شده است از دایره‌های متحدالمرکزی به شعاع e ، ۲e ، ۳e و غیره (به‌مرکز قطب O) و نیم خطهائی که برای آنها مقدار φ مساوی °۰، °۱۰، °۲۰،...، °۳۴۰، °۳۵۰ باشد؛ همین نیم خطها برای حالتهائی هم که $\varphi<۰^\circ$ یا $\varphi>۳۶۰^\circ$ باشد بکار می‌آید ؛ مثلا به ازاء $\varphi=۷۴۰^\circ$ یا $\varphi=-۳۴۰^\circ$ روی نیم خطی خواهیم بود که برای آن $\varphi=۲۰^\circ$ است (روی شکل ۷۶ نقطه‌های (۳ و °۴۰)M و(۳− و°۱۲۰)N و (۲ و °۱۳۲۰−)P را ببینید) .

منحنی‌های متناظر معادلات زیر را بررسی می‌کنیم :

$$\mathrm{I}\cdot r=\sin ۳\varphi,$$

$$\mathrm{II}\cdot r=\frac{۱}{۲}+\sin ۳\varphi,$$

$$\mathrm{III}\cdot r=۱+\sin ۳\varphi,$$

$$\mathrm{IV}\cdot r=\frac{۳}{۲}+\sin ۳\varphi.$$

جدول زیر را تنظیم می‌کنیم :

φ	°۳۰−	°۲۰−	°۱۰−	°۰	°۱۰	°۲۰	°۳۰
$\sin ۳\varphi$	۱−	۰/۸۷−	۰/۵−	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱
$\frac{۱}{۲}+\sin ۳\varphi$	۰/۵−	۰/۳۷−	۰	۰/۵	۱	۱/۳۷	۱/۵
$۱+\sin ۳\varphi$	۰	۰/۱۳	۰/۵	۱	۱/۵	۱/۸۷	۲
$\frac{۳}{۲}+\sin ۳\varphi$	۰/۵	۰/۶۳	۱	۱/۵	۲	۲/۳۷	۲/۵

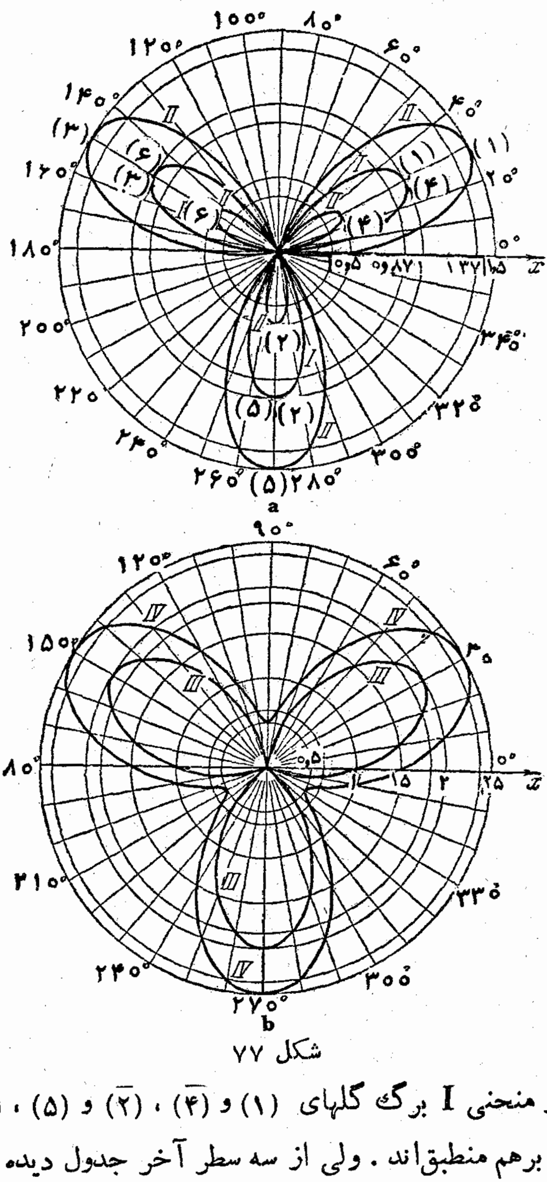
φ	۴۰°	۵۰°	۶۰°	۷۰°	۸۰°	۹۰°
$\sin ۳\varphi$	۰/۸۷	۰/۵	۰	−۰/۵	−۰/۸۷	−۱
$\frac{۱}{۲}+\sin ۳\varphi$	۱/۳۷	۱	۰/۵	۰	−۰/۳۷	−۰/۵
$۱+\sin ۳\varphi$	۱/۸۷	۱/۵	۱	۰/۵	۰/۱۳	۰
$\frac{۳}{۲}+\sin ۳\varphi$	۲/۳۷	۲	۱/۵	۱	۰/۶۳	۰/۵

(۰/۸۷ مقدار تقریبی عدد $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است) .

قطاع (α,β) را قسمتی از صفحه را می‌گیریم که برای نقاط آن $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ باشد . نقاط : (۰,°۰) ، (۱۰°,۰/۵) ، (۲۰°,۰/۸۷) ، (۳۰°,۱) ، (۴۰°,۰/۸۷) ، (۵۰°,۰/۵) ، (۶۰°،۰)رابامنحنی‌یکنواختی بهم وصل می‌کنیم ، در قطاع (۶۰°,۰°) «برگ گل» (۱) از منحنی I بدست می‌آید (شکل ۷۷ — a را ببینید).

اگر جدول را تا $\varphi=۳۶۰°$ ادامه بدهیم و نقاط : (۶۰°,۰) ، (۷۰°,−۰/۵) ، (۸۰°,−۰/۸۷) ، (۹۰°,−۱) ، (۱۰۰°,−۰/۸۷)، (۱۱۰°،−۰/۵) ، (۱۲۰°,۰) را، که درقطاع (۲۴۰°,۳۰۰°) واقع‌اند، بهم وصل کنیم ، «برگ‌گل منفی»($\bar{۲}$) از منحنی I بدست می‌آید .

با ادامهٔ این روش بسادگی «برگ گل مثبت» (۳) در قطاع (۱۲۰°,۱۸۰°) ، «برگ‌گل منفی» ($\bar{۴}$) در قطاع (۰°,۶۰°) ، «برگ‌گل مثبت» (۵) در قطاع (۲۴۰°,۳۰۰°) و بالاخره «برگ گل منفی»($\bar{۶}$) در قطاع (۱۲۰°,۱۸۰°)بدست می‌آید .

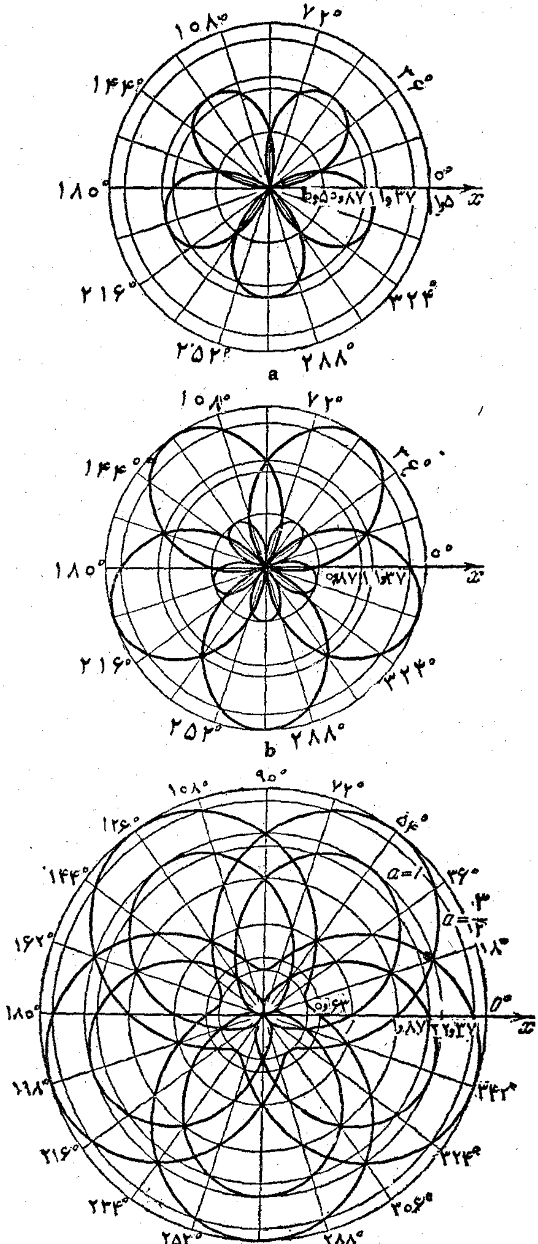


شکل ۷۷

در منحنی I برگ گلهای (۱) و (۴̅) ، (۲̅) و (۵) ، (۳) و(۶̅)

در به دو برهم منطبق‌اند . ولی از سه سطر آخر جدول دیده میشودکه:

۱) درمنحنی II (سطری‌ازجدول که‌متناظر است با $r=\frac{1}{2}+\sin 3\varphi$)


۱۵۸°
۷۲°
۳۶°
۱۴۴°
۱۸۰°
۰°
x
۲۱۶°
۳۲۴°
۲۵۲°
۲۸۸°
a
b
۹۰°
۱۲۶°
۵۴°
a=1
۱۶۲°
۱۸°
۱۹۸°
۳۴۲°
۲۳۴°
۳۰۶°
۲۷۰°
c

شکل ۷۸

برگ‌گل مثبت اول(۱) در قطاع $(-10^\circ, 70^\circ)$ (با حداکثر $r=1/5$) قرارگرفته است ، در دنبالهٔ آن برگ منفی($\overline{2}$) درقطاع $(250^\circ, 290^\circ)$ (با حداکثر $|r|=0/5$) قرارگرفته‌است وغیره(شکل ۷۷ــa راببینید).

۲)درمنحنی III فقط برگ‌گلهای مثبت درقطاعهای $(-30^\circ, 90^\circ)$، $(90^\circ, 210^\circ)$ و $(210^\circ, 330^\circ)$ وجود دارد (شکل ۷۷ــ b) .

۳) در منحنی IV حد اقل مقدار r مساوی ۰٫۵ است و برگ‌گل «بصورت نا تمامی» در می‌آید (شکل۷۷ــ b) .

بهمین ترتیب می‌توان دربارهٔ منحنی‌های زیر هم عمل‌کرد :

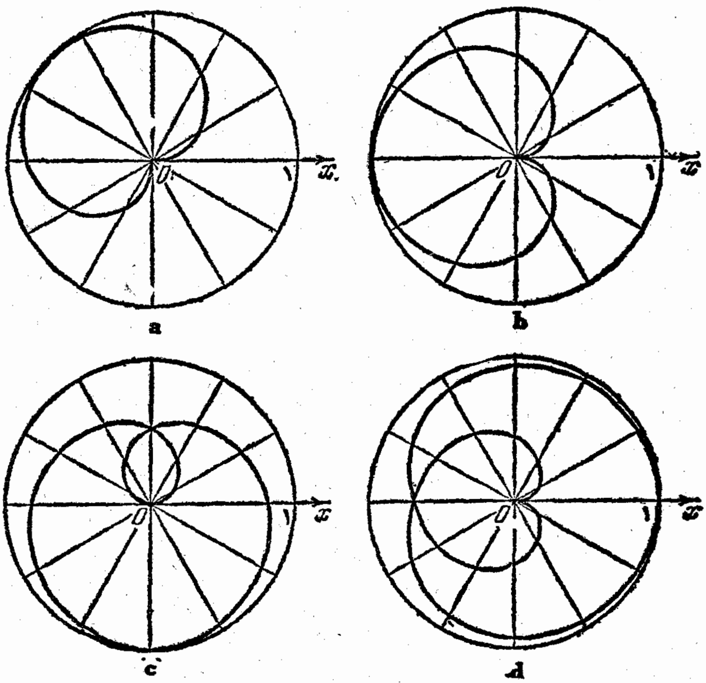
$$r=a+\sin\frac{5\varphi}{3} \qquad (a=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2})$$

دراینجا بهتر است که زاویهٔ φ را ۱۸ درجه به ۱۸ درجه تغییر دهیم (از ۰ درجه تا ۱۰۸۰درجه) . به‌ازاء $a=0$ برگ‌گل اول (مثبت) ودوم (منفی)در دوقطاع $(0^\circ, 108^\circ)$ و $(288^\circ, 396^\circ)$ قراردارند (شکل ۷۸ — a)، و به ازاء $a=\frac{1}{2}$ دردوقطاع $(-18^\circ, 126^\circ)$و $(306^\circ, 378^\circ)$ (شکل ۷۸ ـ b) . به ازاء $a=1$ تنها پنج برگ گل مثبت در قطاعهای $(-54^\circ, 162^\circ)$ و $(162^\circ, 378^\circ)$ و غیره قرار دارند ؛ همچنین به ازاء $a=\frac{3}{2}$ به‌صورت «برگ‌گلهای ناتمام» خواهدبود (شکل۷۸ــc) .

درحالت کلی ، در منحنی $r=\sin\frac{m\varphi}{n}$ ، اولین برگ گل مثبت درقطاع$(0^\circ, \frac{180^\circ n}{m})$محصوراست، دراین‌قطاع‌داریم: $0^\circ \leqslant \frac{m\varphi}{n} \leqslant 180^\circ$

به‌ازاء $\frac{1}{2}<\frac{m}{n}<1$ ، برگ گل در قطاعی بزرگتر از ۱۸۰ درجه ، ولی

کوچکتر از ۳۶۰ درجه قرار دارد، ولی به ازاء $\frac{m}{n}<\frac{1}{2}$ ، برای یك برگ‌گل «قطاعی» که از ۳۶۰درجه بزرگتر است ، لازم می‌شود (درشکل



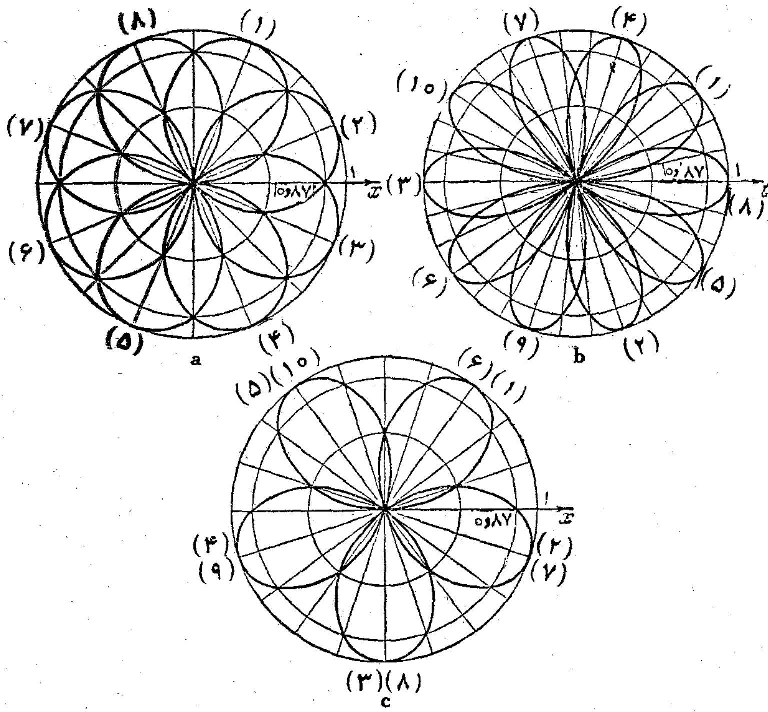
شکل۷۹

۷۹ برگ‌گلهائی‌راکه‌به‌ازاء $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$ بدست آمده است ، می‌بینید) .

m و n را که در معادلهٔ $r=\sin\frac{m\varphi}{n}$ وجود دارد ، نسبت بهم اول می‌گیریم . به حالتهای زیر ممکن است برخورد کنیم :

۱) m زوج و n فرد است . با تغییر φ از ۰ تا ۳۶۰nدرجه،

گل کاملی بدست می‌آوریم که شامل $2m$ برگ است ($2m = \frac{180n}{m} : 360n$) وآخرین آنها منفی است؛ بنابراین با **ادامهٔ تغییر** φ دوباره بهمان گل ساخته شده می‌رسیم (شکل ۸۰ ـ **a** به ازاء $n=3$ و $m=4$).



شکل ۸۰

۲) m فرد و n زوج است . با تغییر φ از ۰ تا **۱۸۰ n درجه** (تعداد صحیحی از محیط دایره) ، m **برگ بدست می‌آید** ($m = \frac{180n}{m} : 180n$) ، ولی آخرین این برگها مثبت است و **بنابراین**

با ادامهٔ تغییر φ از ۱۸۰ n تا ۳۶۰ n درجه ، برگهائی بدست می‌آید که بطور قطری در جهت مخالف برگهای اولی قرار دارند ؛ به این ترتیب در این مورد هم بطورکلی گلی با ۲m برگ بدست می‌آید (شکل ۸۰-b به ازاء ۵=m و ۲=n) .

۳) m و n هر دوفردند . با تغییر φ از ۰ تا ۱۸۰ n درجه ، m برگ بدست‌می‌آید ، و چون آخرین آنها مثبت‌است، برگ (m+۱) امین منفی خواهد بود و بر اولین برگ مثبت منطبق می‌شود ؛ به عبارت‌دیگر با تغییر φ از ۱۸۰ n تا ۳۶۰ n درجه همان m برگ ساخته‌شده بدست می‌آید ، منتهی آنهائی که در ابتدا مثبت بوده‌اند ، حالا منفی‌می‌شوند و برعکس (شکل ۸۰-c به ازاء ۵=m و ۳=n) .

در محورهای مختصات قائم

بسیاری‌ازمنحنی‌های‌جالب‌را دردستگاه مختصات‌دکارتی‌هم‌می‌توان ساخت . بخصوص منحنی‌هائی‌که معادلات آنها به‌صورت پارامتری داده شده باشد، بسادگی رسم می‌شوند :

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

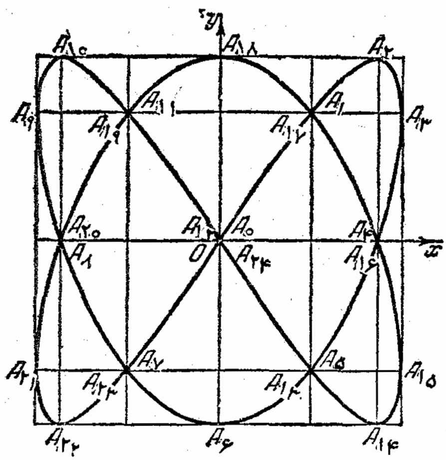
که در آن t یك متغیر کمکی (پارامتر) است .

در اینحالت برای رسم منحنی مقادیر x و y را به ازاء مقادیر مختلف پارامتر t (بطور صعودی یا نزولی) حساب می‌کنند، سپس نقاط (x و y) را روی شکل معین و بوسیلهٔ خط همواری بهم وصل می‌کنند.

مثلا برای معادلهٔ $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\sin 3t \end{cases}$ داریم :

t	°۰	°۱۵	°۳۰	°۴۵	°۶۰	°۷۵	°۹۰	°۱۰۵	...
x	۰	۰/۵	۰/۸۷	۱	۰/۸۷	۰/۵	۰	۰/۵ −	...
y	۰	۰/۷	۱	۰/۷	۰	۰/۷−	۱ −	۰/۷ −	...

این این‌جدول را تا $t=360°$ ادامه‌دهیم و نقاط متناظر **x و y**های مربوطه را A_1 ، A_2 ، .... ، A_{24} بنامیم ، به سادگی منحنی را که در شکل ۸۱ می‌بینید ، بدست خواهید آورد .



شکل ۸۱

این یکی از انواع منحنی‌هائی است‌که‌در حالت‌کلی **معادلهٔ** آنها آنها چنین است :

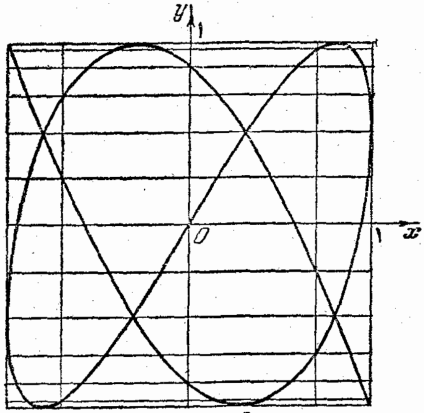
$$\left.\begin{aligned} x&=a\sin mt, \\ y&=b\sin n(t+\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

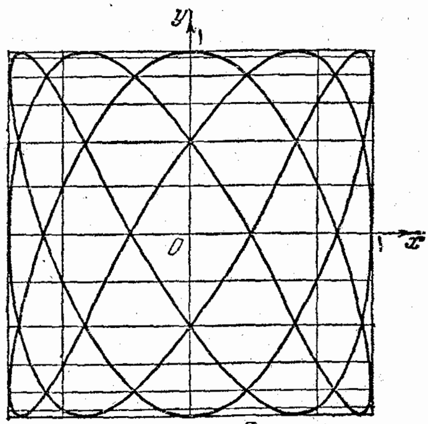
اگر پارامتر t را به عنوان زمان در نظر بگیریم ، **تابع(۱) نتیجهٔ**

ترکیب دو حرکت نوسانی توافقی است که در جهات عمود بر هم انجام می‌گیرد.

تحقیق کنید که معادلات :

$$\text{I)}\begin{cases} x = \sin ۳t \\ y = \sin ۵t \end{cases} ; \qquad \text{II)}\begin{cases} x = \sin ۳t \\ y = \cos ۵t \end{cases} ;$$

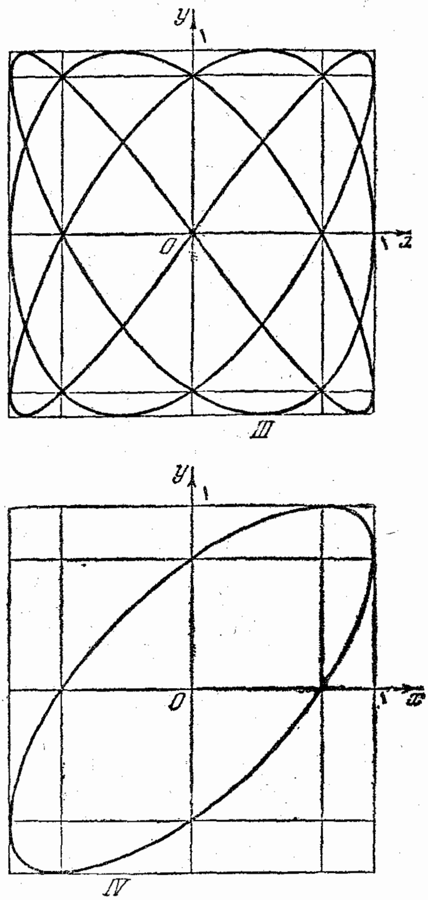




شکل ۸۲-I و II

$$\text{III)}\begin{cases} x=\sin 3t \\ y=\sin 4t \end{cases} ; \qquad \text{IV)}\begin{cases} x=\sin(t-45^\circ) \\ y=\sin t \end{cases}$$

بترتیب منحنی‌های شکل ۸۲ را می‌دهند . علاوه بر منحنی‌ها ، در هرشکل مربعی به ضلع ۲ رسم‌شده است ،که‌منحنی مربوطه‌براضلاع آن‌مماس‌است . درحالت‌کلی، منحنی(۱) درداخل مستطیلی به‌ابعاد 2a و



شکل ۸۲-IV, III

$2b$ قرار دارد .

برای رسم منحنی‌های (۱) بهتر است ابتدا نقاط تماس منحنی‌را با اضلاع مستطیل‌مربوطه بدست آورد ، همچنین باید خطوط افقی رابه فواصل $b\sin 15^\circ$ ، $b\sin 30^\circ$ ، $b\sin 45^\circ$ ، $b\sin 60^\circ$ ، $b\sin 75^\circ$ ازمبداء مختصات‌وخطوط عمودی رابه فواصل $a\sin 15^\circ$ ، $a\sin 30^\circ$ وغیره‌ازمبداء مختصات به عنوان خطوط کمکی رسم‌کرد (تغییرات φ را ۱۵ درجه به ۱۵ درجه و $\alpha=0$ می‌گیریم).

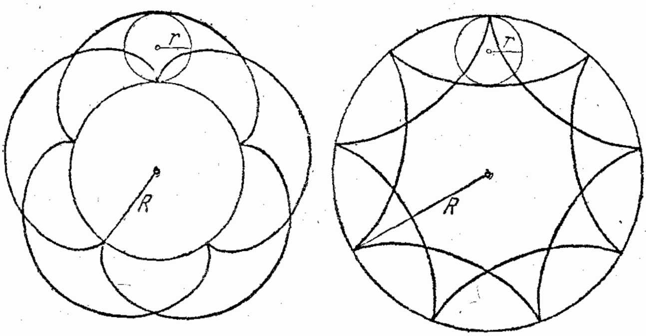
منحنی(۱) وقتی غیر بسته است که به ازاء مقداری از پارامتر ، منحنی در یکی ازراسهای مستطیل قرارگیرد : به ازاء مقادیر بعدیφ ، نقطه در جهت عکس و روی همان منحنی حرکت می‌کند (مثلاً منحنی I از شکل ۸۲ را ببینید) .

حالا ببینید به‌ازاء چه شرطی ، منحنی(۱)، وقتی‌که $\alpha=0$است، غیر بسته است[۶۸]. تعقیب تغییر منحنی (۱) جالب است ، مثلاً معادلهٔ $x=\sin 3t$ و $y=\sin 5(t+3^\circ)$ منحنی غیر بستهٔ I را به منحنی بسته تبدیل می‌کنند .

سیکلوئید ، اپیسیکلوئید ، هیپوسیکلوئید

علاقمندان به ریاضی ، بدون تردید به منحنی‌های اپیسیکلوئید و هیپوسیکلوئید ، که خیلی به سیکلوئید نزدیکند ، توجه کرده‌اند ؛ وقتی که یك دایرهٔ به شعاع r روی خط راست بغلطد ، سیکلوئید و وقتی که روی یك دایرهٔ به شعاع R و در بیرون‌آن بغلطد اپیسیکلوئید وبالاخره

وقتی که روی یك دایرهٔ بشعاع R و در داخل آن بغلط هیپوسیکلوئید به وجود می‌آید.



شکل ۸۳

معادلات این منحنی‌ها را به‌صورت پارامتری می‌توان چنین نوشت:

سیکلوئید
$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t) \end{cases}$$

اپیسیکلوئید
$$\begin{cases} x = R[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t] \\ y = R[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t] \end{cases}$$

هیپوسیکلوئید
$$\begin{cases} x = R[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t] \\ y = R[(m-1)\sin mt + m\sin(1-m)t] \end{cases}$$

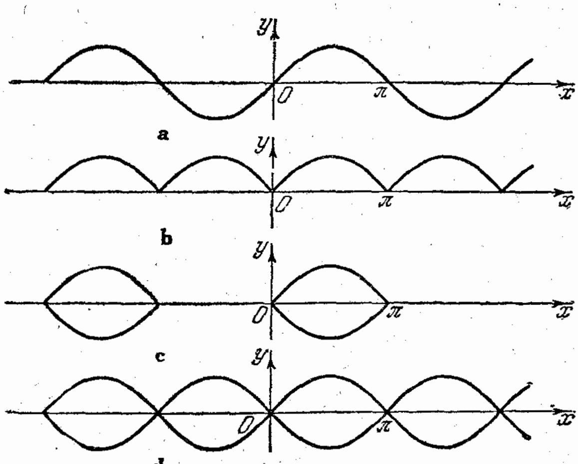
که در آن $m = \frac{r}{R}$ است.

در شکل ۸۳ اپیسیکلوئید (a) به ازاء $m = \frac{۲}{۵}$ و هیپوسیکلوئید (b) به ازاء $m = \frac{۲}{۹}$ رسم شده است.

خطهای شکستهٔ جالب

با بکار بردن علامت قدر مطلق در معادلات منحنی‌ها ، امکانات زیادی برای متنوع‌کردن شکل منحنیها بوجود می‌آید .

مثلاً از معادلات : $y = \sin x$ ، $y = |\sin x|$ ، $|y| = \sin x$ و $|y| = |\sin x|$ می‌توان بترتیب منحنی‌های a ، b ، c , d از شکل ۸۴ را بدست آورد .



شکل ۸۴

« منحنی » متناظر با معادلهٔ

$$|x| + |y| = 1 \qquad (2)$$

به صورت مربع ABCD (شکل ۸۵ – a) در می‌آید ، زیرا مثلاً در ربع دوم که $x < 0$ و $y > 0$ است ، معادلهٔ (۲) به صورت $-x + y = 1$ نوشته می‌شود و این، معادلهٔ خطی مانند l است که از آن پاره خطی راکه در ربع دوم واقع است باید انتخاب کرد .

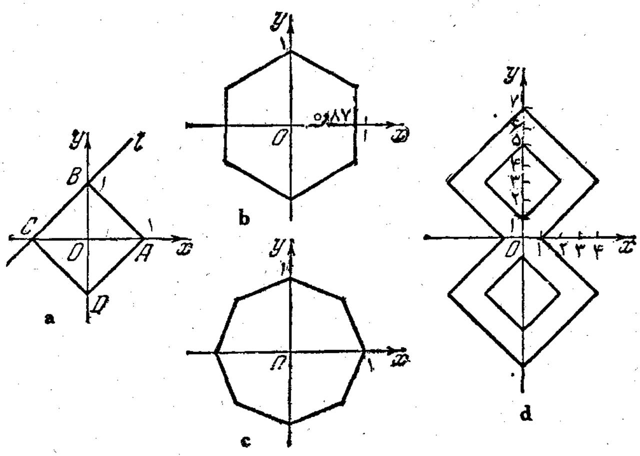
تحقیق کنید که[۶۹] که معادلات :

$$\text{I.}\quad |2y-1|+|2y+1|+\frac{4}{\sqrt{2}}|x|=4,$$

$$\text{II.}\quad |x|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2}}[|x-y|+|x+y|]=\sqrt{2}+1,$$

$$\text{III.}\quad \Big||x|+\big||y|-3\big|-3\Big|=1$$

بترتیب بصورت یك شش‌ضلعی منتظم ، هشت‌ضلعی منتظم و « هشت‌ضلعی مقعر» که درشکل ۸۵ — b ، c و d نشان داده شده‌است ، در می آیند.



شکل۸۵

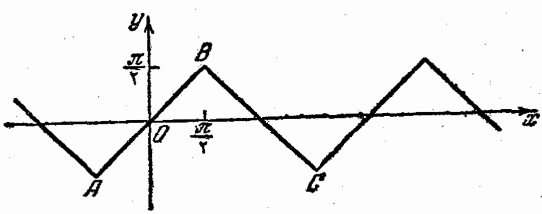
آیا خواننده می‌تواند معادلهٔ دوازده ضلعی منتظم . شانزده ضلعی منتظم وغیره‌را پیداکند ؟ بنظر می‌رسدکه حل این‌مسئله برای پنج ضلعی منتنظم ، هفت ضلعی منتظم و غیره مشکل‌تر باشد .

معادلهٔ $y=m\arcsin[\sin k(x-\alpha)]$ هم‌نمایش تغییرات‌جالب و مخصوص بخودی دارد . از معادلهٔ $y=\arcsin(\sin x)$ نتیجه‌می‌شود:

$$۱) \quad -\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲} \quad و \quad ۲) \quad \sin y=\sin x$$

وقتی که $-\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ باشد ، این دو شرط در تابع $y=x$ صدق می‌کنند و آن در فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ پاره خط AB ازخط شکستهٔ شکل ۸۶ می‌باشد .

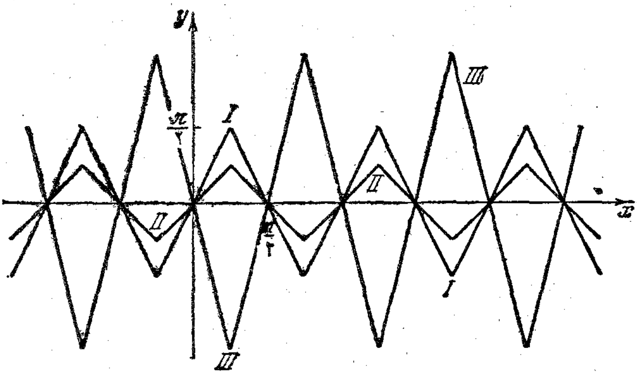
در فاصله $\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۲}$ خـواهیم داشت $y=\pi-x$ ، زیـرا $\sin(\pi-x)=\sin x$ است ودراین‌فاصلهٔ $-\frac{\pi}{۲}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{۲}$ است . در اینجا نمایش آن عبارت از پاره خط BC .



شکل۸۶

چون تابع $\sin x$ یك تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است ، خط شکستهٔ ABC ،که در فاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{۳\pi}{۲}\right)$ رسم شده است ، دوباره فواصل $\left(\frac{۳\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{۷\pi}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۷\pi}{۲}\right.$ و $\left.\frac{۱۱\pi}{۲}\right)$ و غیره تکرار می‌شود .

معادلهٔ $y=\arcsin(\sin kx)$ متناظر با خط شکستهٔ I و با دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{k}$ (دورهٔ تناوب تابع $\sin kx$) است (درشکل۸۷ ، $k=۲$ فرض شده است) .



شکل ۸۷

اگر مضرب m از تابع سمت راست تساوی را درنظر بگیریم به معادلهٔ $y=m\arcsin(\sin kx)$ می‌رسیم‌که وقتی $m>0$ باشد به‌صورت II (به ازاء $m=\frac{1}{2}$) ووقتی $m<0$ باشدبه‌صورت خط‌شکستهٔ III (به ازاء $m=-2$) درمی‌آید .

بالاخره بسادگی نتیجه می‌شود [۷۵] که اگر خط شکستهٔ اخیر را بموازات خود و به‌اندازهٔ پاره‌خط α بسمت راست منتقل کنیم ، نمایش تابع زیر بدست‌می‌آید :

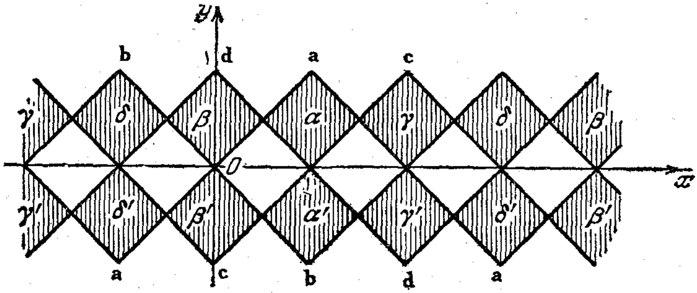
$$y=m\arcsin[\sin k(x-\alpha)]$$

تحقیق کنیدکه معادلهٔ :

$$\left[y-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\left[y+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[y-\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\right]\left[y+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi(x-1)}{2}\right)\right]=0$$

مجموعهٔ خطوطی را می‌دهد که در شکل ۸۸ نمایش داده شده است

(حاصلضرب چند عامل تنها وقتی مساوی صفر است که لااقل یکی از



شکل ۸۸

عوامل مساوی صفر باشد ، با صفر قراردادن هریك از عوامل چهارگانه بترتیب خطهای‌شکستهٔ a ، b ، c و d بدست می‌آید) .مطالب دیگری که مربوط به شکل ۸۸ است در زیر شرح خواهیم داد .

منحنی‌های تصنعی

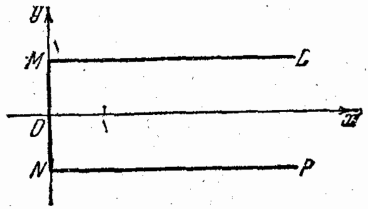
مطلب جالبی است که بتوانیم نوع تغییرات بعضی از منحنی‌را، که معادلهٔ آنها شامل توانهای خیلی بزرگ هستند ، معین کنیم .

مثلا برای معادلهٔ $x = y^{۱۰۰۰۰۰۰}$ این جدول بدست‌می‌آید :

(امتحان کنید (۷۰a))

x	۰	$۱۰^{-۶}$	۱	$۱۰^{۱۰}$	$۱۰^{۱۰۰۰۰۰}$
y	۰	±۰/۹۹۹۹۸۶	±۱	±۱/۰۰۰۰۲۳	±۱/۲۵۸۳

از این‌جدول دیده می‌شود که منحنی تابع در فاصلهٔ بسیار بزرگی، تقریباً هیچ تفاوتی با خط شکسته LMNP ندارد (شکل ۸۹) .



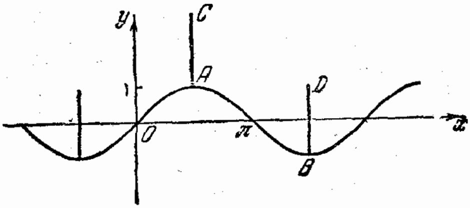
شکل ۸۹

در شکل ۹۰ منحنی تابع $y = \sin x + ۲(\sin x)^{۱۰۰۰۰۰۰}$ داده شده است.

(تحقیق کنید (۷۰a))

x	$۸۹°۴۵'$	$۸۹°۵۰'$	$۹۰°$
$۲(\sin x)^{۱۰۰۰۰۰۰}$	۰/۰۰۰۱۶	۰/۰۳۲	۲

از جدول دیده می‌شود که جملهٔ دوم تابع مفروض، حتی به ازاء مقادیری از x که به ۹۰ درجه نزدیکند، خیلی‌کم با صفر اختلاف دارد (همچنین در ۲۷۰ درجه وغیره)؛ بنابراین در نزدیکی بعضی‌از نقاط تابع سینوس معمولی (A ، B و غیره) منحنی برجسته‌ای که شاخه‌های آن بسیار بهم نزدیك است بدست می‌آید، که درمقایسه با اندازه‌های کوچك شکل به‌صورت پاره‌خطهای AC ، BD وغیره درمی‌آید.



شکل ۹۰

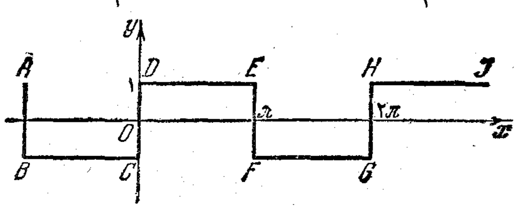
معادلهٔ $y^{۱۰۰۰۰۰۱} = \sin\frac{\pi x}{۲}$ نمایش تغییراتی‌داردکه با خط‌شکستهٔ ABCDEEGHI (شکل ۹۱) خیلی کم اختلاف دارد (به ازاء $x = ۰/۰۰۰۰۰۱$ داریم: $y \# ۰/۹۹۹۹۸۴$).

با استفاده از جدول مقادیر تابع $\sin x$، می‌توان بسادگی جدول زیر را ادامه داد:

x	$\sin ۳x$	$\sin^{۵} ۳x$	$\sin^{۹} ۳x$
۰	۰	۰	۰
۵°	۰/۲۵۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰
۱۰°	۰/۵	۰/۰۳۱	۰/۰۰۲
۱۵°	۰/۷۰۷	۰/۱۷۸	۰/۰۴۴
۲۰°	۰/۸۶۶	۰/۴۸۷	۰/۲۸
۲۵°	۰/۹۶۶	۰/۸۴	۰/۷۳
۳۰°	۱	۱	۱

حالا با مقیاس بزرگ منحنی‌های توابع زیر را رسم‌کنید:

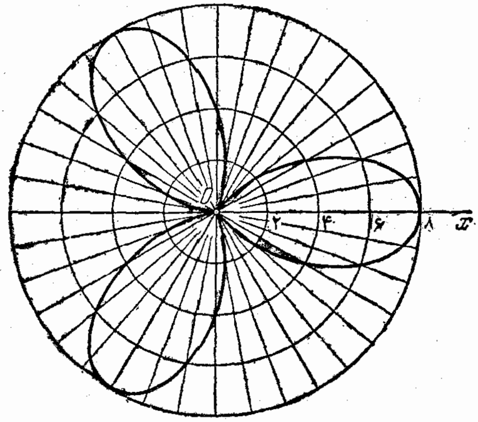
$$y = \sin x + \frac{۱}{۳}(\sin ۳x)^{۵} \quad ; \quad y = \sin x - \frac{۱}{۲}(\sin ۳x)^{۹}$$



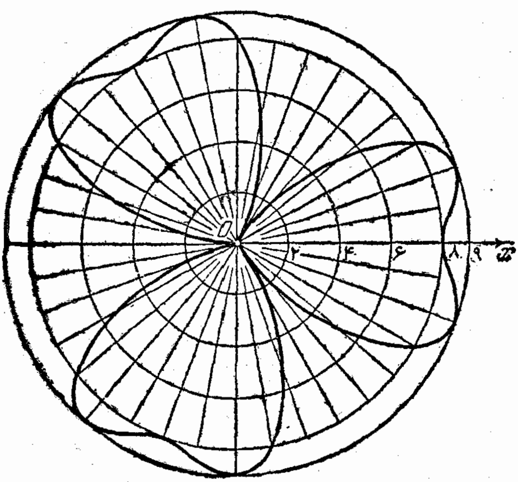
شکل ۹۱

اثر جمله‌های اضافی را در شکل منحنی ، می‌توان بسادگی در مختصات قطبی‌هم تعقیب کرد .

برای‌شکلهای هندسی که در دنیای گیاهان پیدامی‌شود ، می‌توان



a



b

شکل ۹۲

معادله‌های جالبی بدست آورد .

مثلا معادله‌های $r=۴(۱+cos۳\varphi)$, $r=۴(۱+cos۳\varphi)+۴sin^{۲}۳\varphi$

منحنی‌هائی را که شکل ۹۲ داده شده است ، بدست می‌دهند.

معادله‌های

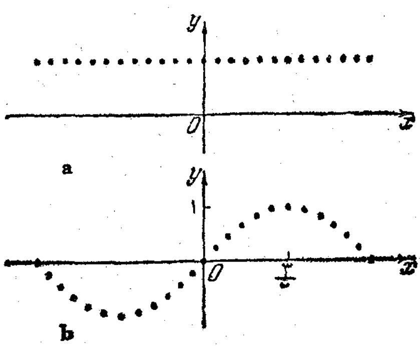
$$r=۵+۲cos\varphi+۳cos^{۷۱}\varphi \ ;$$

$$r=۵+۲cos\varphi+۳cos^{۷۱}\varphi-sin^{۲۱۸}\varphi cos^{۴}\frac{\varphi}{۲}$$

بترتیب دور «برگ یاس» و «برگ‌گزنه» را می‌دهند.

به خواننده توصیه می‌کنیم که ابتدا منحنی $r=۵+۲cos\varphi$ را رسم‌کندوسپس ابتداا‌ثرجملهٔ $۳cos^{۷۱}\varphi$ و بعد اثرجملهٔ $-sin^{۲۱۸}\varphi cos^{۴}\frac{\varphi}{۲}$ رامشخص‌کند.

تابع $y=۱+\sqrt{log\,sin\,۲\pi nx}$ وضعی مخصوص بخود دارد . این تابع تنها وقتی حقیقی است که x یکی از مقادیر ۰ ، $\pm\frac{۱}{n}$ ، $\pm\frac{۲}{n}$ ، ...



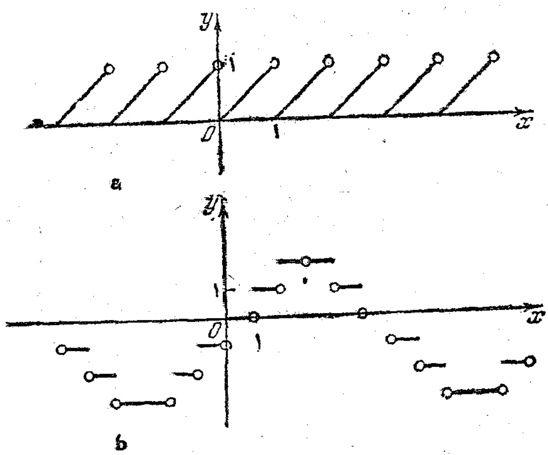
شکل ۹۳

را اختیار کند ؛ درغیر اینصورت ، عبارت زیر رادیکال منفی و یا موهومی می‌شود .

نمایش تغییرات این تابع عبارتست از مجموعهٔ نقاطی که به‌فاصلهٔ يك واحد از محور ox قرار گرفته‌اند و فاصلهٔ هر دونقطهٔ مجاور برابر $\frac{1}{n}$ واحد است (شکل ۹۳—a) .

اگر منحنی تابع $y=f(x)$ معلوم باشد و روی این منحنی تنها نقاطی را درنظر بگیریم که طول آنها بترتیب ۰ ، $\pm\frac{1}{n}$ ، $\pm\frac{2}{n}$ وغیره باشد ، نمایش تابع $y=f(x)(1+\sqrt{\log\cos 2\pi n x})$ بدست می‌آید (شکل ۹۳—b را ببینید که درآن $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ و $n=4$ است) .

با استفاده از تابع $f(x)=[x]$ (فصل ۲ را ببینید) ، می‌توان به



شکل ۹۴

منحنی‌های بسیار جالبی رسید. مثلا در شکل ۹۴ — a نمایش تغییرات تابع $y = x - [x]$ ودر ۹۴ — b نمایش تغییرات $y = \left[\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)\right]$ داده شده است؛ دایره‌های کوچك به معنای اینست که نقاط متناظر آنها در تابع مربوطه صدق نمی‌کنند.

۲۹
زینتهای ریاضی

به شکل و یا نقشه‌ای زینت ریاضی گوئیم که به‌کمك یك معادله یا نامعادله (و احتمالا دستگاه معادلات یا دستگاه نامعادلات) بدست بیاید و در فاصلهٔ معینی مرتباً تکرار شود .

مثلاً دستگاه نامعادلات

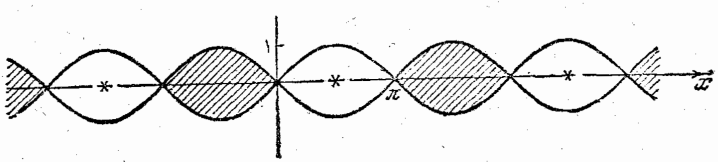
$$\begin{cases} y > \sin x \\ y < -\sin x \end{cases} \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم ، نقاطی از محورهای مختصات در این نامعادلات صدق می‌کنند که بالای منحنی سینوسی (که برای آنها $y > \sin x$ است) و پائین منحنی $y = -\sin x$ باشد ، یعنی « حوزهٔ جوابهای» دستگاه(۱) از قسمتهائی تشکیل شده است که در شکل ۹۵ خط خوردگی دارد .

عوامل اول‌ودوم رادر نامساوی زیر به $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ نشان می‌دهیم :

$$(y - \sin x)(y + \sin x) < 0 \qquad (۲)$$

این نامساوی وقتی برقرار است که یا نامساویهای $f_1(x,y) > 0$ و $f_2(x,y) < 0$ بر قرار باشند (که جوابهای متناظر آنها در شکل ۹۵ خطخوردگی دارد) و یا نامساویهای $f_1(x,y) < 0$ و $f_2(x,y) > 0$ (که حوزهٔ جوابهای آنها در شکل ۹۵ به وسیلهٔ ستاره مشخص شده است) .



شکل۹۵

در حقیقت جواب نامعادلهٔ (۲) عبارتست از مجموع قسمتهای خطخورده و قسمتهائی که با ستاره مشخص شده‌اند در شکل ۹۵ . اگر در نامساوی

$$\left[y - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right]\left[y + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right] \times$$
$$\times \left[y - \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{x-1}{2}\pi\right)\right] \qquad (۳)$$
$$\left[y + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{x-1}{2}\pi\right)\right] < 0$$

عوامل سمت‌چپ تساوی‌را بترتیب φ_1 ، φ_2 ، φ_3 و φ_4 بنامیم، نامساوی (۳) برای نقاطی از محورهای مختصات برقرار است که برای آنها یا یکی از عوامل منفی و بقیه مثبت باشند (مثلا « حوزهٔ α » در شکل ۸۸ که در آن $\varphi_1 < 0$ و $\varphi_2 , \varphi_3 , \varphi_4 > 0$ است، «حوزهٔ β » که در آن $\varphi_4 < 0$ و $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 > 0$ است و غیره) یا سه عامل منفی و یك عامل مثبت باشد (« حوزهٔ α' » که در آن $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4 < 0$ و $\varphi_2 > 0$ است، «حوزهٔ β'» که‌درآن $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4 < 0$ و $\varphi_3 > 0$ است وغیره) .

بطورکلی جواب نامساوی (۳) عبارتست از مربعهای خط خورده درشکل ۸۸ .

با اضافه کردن تعداد عوامل سمت چپ ساوی ، با انتخاب آنها بنحوی که منحنی‌ها و خطهای شکسته (که روی آنها یکی از این عوامل برابر صفر می‌شود) نسبت بهم در فاصله‌ای حرکت کنند ، بادر نظر گرفتن دستگاه نامعادلات ساده بجای یك نامعادلهٔ مرکب و غیره ، می‌توان اشکال متنوع و جالبی بدست آورد .

اگر خواننده حوزهٔ جوابهای

۱) نامساوی

$$\left[y^2 - \arcsin^2(\sin x)\right]\left\{y^2 - \arcsin^2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]\right\} < 0 \quad (۴)$$

۲) نامساوی

$$\Phi_{-2}\Phi_{-1}\Phi_0\Phi_1\Phi_2 < 0 \qquad (۵)$$

که درآن داریم: $\Phi_k = \Phi_k(x,y) = y^2 - \arcsin^2\left[\sin\left(x+\frac{k\pi}{6}\right)\right]$

$k = -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲$ ؛

۳) نامساوی

$$\left[y^۲ - \sin^۲ x\right]\left[y^۲ - \sin^۲\left(x + \frac{\pi}{۶}\right)\right]\left[y^۲ - \sin^۲\left(x - \frac{\pi}{۶}\right)\right] < ۰ \quad (۶)$$

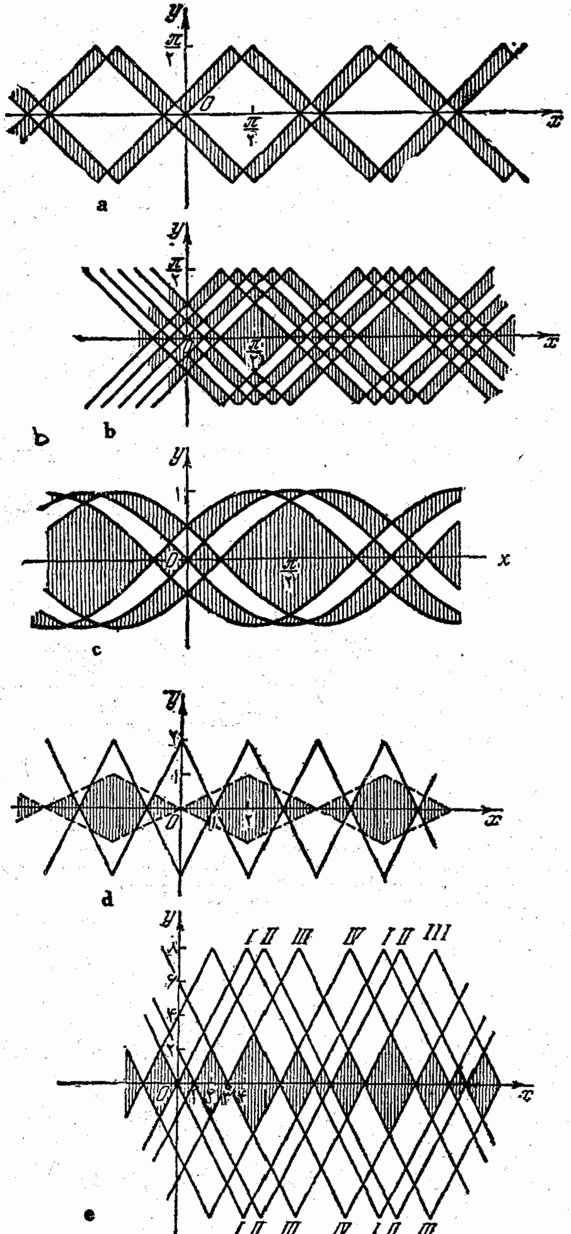
۴) دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} y^۲ - \left(\frac{۲}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left(\sin\frac{\pi x}{۴}\right) < ۰ & (۷') \\ y^۲ - \left(\frac{۴}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left[\sin\frac{\pi}{۲}(x - ۱)\right] < ۰ & (۷'') \end{cases}$$

و ۵) دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} y^۲ - \left(\frac{۱۶}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left(\sin\frac{\pi x}{۸}\right) < ۰ & (۸') \\ y^۲ - \left(\frac{۱۶}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left[\sin\frac{\pi(x - ۱)}{۸}\right] < ۰ & (۸'') \\ y^۲ - \left(\frac{۱۶}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left[\sin\frac{\pi(x - ۳)}{۸}\right] < ۰ & (۸''') \\ y^۲ - \left(\frac{۱۶}{\pi}\right)^۲ \arcsin^۲\left[\sin\frac{\pi(x - ۶)}{۸}\right] < ۰ & (۸'''') \end{cases}$$

را بدست آورد ، بترتیب قسمتهای خط خوردهٔ a ، b ، c ، d و e روی شکل ۹۶ خواهد شد (در شکل ۹۶ ـ d لوزیهای خطچین«افقی» جواب نامساوی $(۷')$ ولوزیهای«قائم»جواب نامساوی$(۷'')$ است؛درشکل ۹۶ـe لوزیهای بزرگ I حوزهٔ جواب نامساوی $(۸')$ و لوزیهایII حوزهٔ جواب نامساوی $(۸'')$ و غیره و جوابهای مشترك آنها لوزیهای کوچك خط خورده می باشد) .



شکل ۹۶

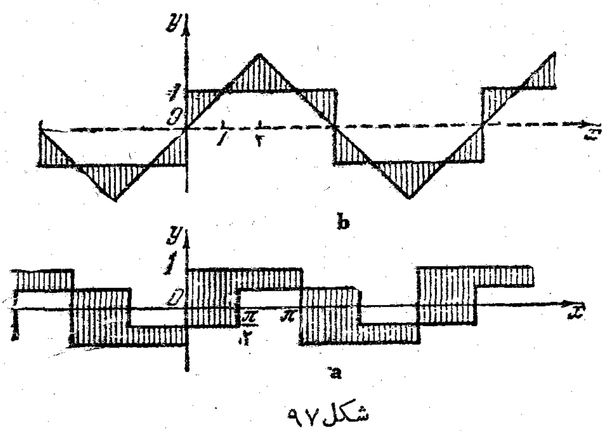
با استفاده از نامساویهائی که توان y از درجات بالا باشد، می‌توان زینتهای جالبی بدست آورد . مثلا نامساوی

$$\left(y^{1000001}-\sin x\right)\left[(2y)^{1000001}-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]<0 \quad (9)$$

و نامساوی

$$\left(y^{1000001}-\sin\frac{\pi x}{4}\right)\left(y-\frac{4}{\pi}\arcsin\sin\frac{\pi x}{4}\right)<0 \qquad (10)$$

دارای جوابهائی هستند که با آنچه در شکل ۹۷ ــ a و b داده شده‌است، خیلی کم اختلاف دارد .



شکل ۹۷

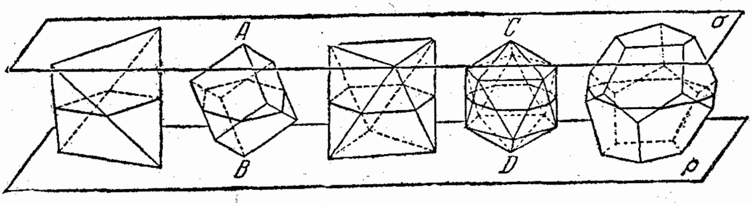
زینتهای ریاضی می‌تواند یکی از وسائل بسیار جالب برای تمرین در کلاسهای بالای متوسطه باشد و از جمع آوری بهترین آنها می‌توان آلبومی درست کرد و حتی بعضی از آنها را با رنگهای مناسب زیباتر کرد .

۳۰
قالبهای چند وجهی ها

دوصفحهٔ موازی ρ و σ را در نظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم‌دو یال روبرو از یك چهار وجهی منتظم : دو رأس روبرو از یك مکعب و یك بیست وجهی‌منتظم (ضمناً $AB \perp \rho$ و $CO \perp \rho$)، دووجه‌روبرواز یك‌هشت وجهی منتظم و یك دوازده وجهی منتظم ، روی این دوصفحهٔ موازی‌قرار گرفته باشند (شکل۹۸).

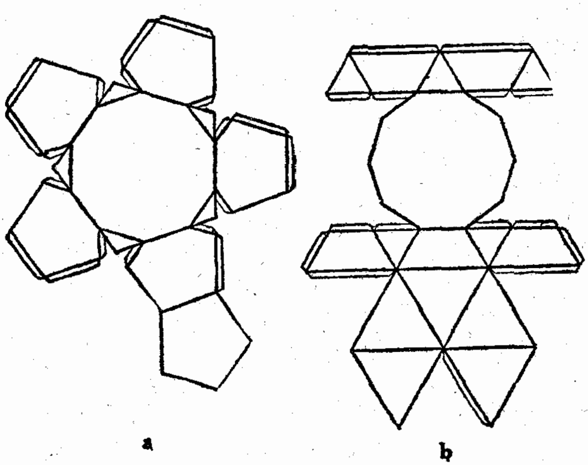
اگر این چند وجهی‌های منتظم را بوسیلهٔ صفحه‌ای موازی ρوσ و

بیك فاصله ازآنها قطع کنیم، به‌عنوان مقطع‌ها یك مربع ، دوشش‌ضلعی منتظم و دو ده‌ضلعی منتظم بدست می‌آید .



شکل۹۸

اگر نمونهٔ دو نیمهٔ هر یك از چندوجهی‌ها را تهیه‌کنیم و با لولا بهم مربوط‌کنیم (می‌توان با باریکهٔ نازك و محکمی از کاغذ یا پارچه در طول یال مشترك ، آنها را بهم وصل‌کرد) ، نمونه‌ای بدست می‌آید که شکل مقطع را روی چند وجهی که بوسیلهٔ « صفحهٔ واسطه » تقسیم شده است ، نشان می‌دهد .



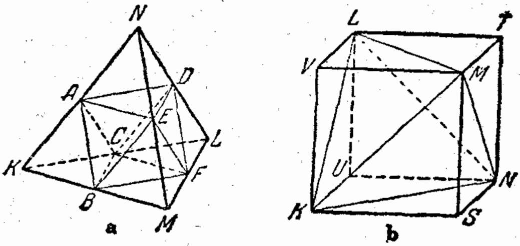
شکل۹۹

در شکل ۹۹ باز شده نیمهٔ دوازده وجهی و بیست وجهی داده‌شده است .

این مطلب‌هم‌جالب‌است‌که باساختن نمونه‌هائی بتوانیم‌روش«عبور» از یك چندوجهی منتظم را به دیگری نشان دهیم . در شکل ۱۰۰ـa دیده می‌شود که چگونه یك‌هشت‌وجهی منتظم ABCDEF می‌تواند تا یك چهاروجهی منتظم KLMN بزرگ شود ، به این ترتیب‌که به‌چهار وجه آن چهار وجهی‌های‌کوچکی اضافه‌کنیم .

به نوبهٔ خود اگر به هرچهار وجه چهار وجهی منتظم KLMN هرمهای مثلث‌القاعدهٔ مساوی KLMV ، LMNT ، KMNS و KLNU را اضافه کنیم ، یك مکعب بدست می‌آید . اگر این هرمها را جداگانه درست کنیم و آنها را با لولا در طول یالهای MN ، NL و LM بهم‌وصل‌کنیم «لفافی» برای « پوشاندن » چهاروجهی KLMN بدست می‌آوریم که رویهم یك مکعب بوجود می‌آورند(شکل ۱۰۰ـb).

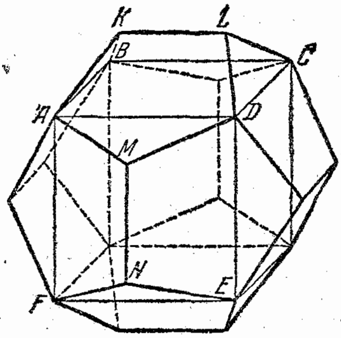
برای‌مکعب‌می‌توان از شش«شیروانی» یکنواخت ABCDKL ،

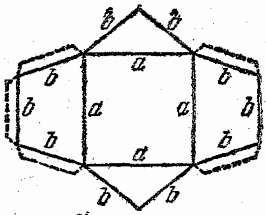


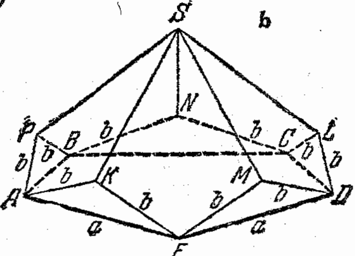
شکل ۱۰۰

$ADEFMN$ و غیره به‌عنوان لفاف استفاده کرد که از وصل آنها بیکدیگر یك دوازده ضلعی منتظم بدست می‌آید (شکل ۱۰۱ ـ a) . در شکل ۱۰۱ـb از این شیروانیها بطور جداگانه باز شده‌است ؛ زوایای منفرجهٔ مثلثها وذوزنقه‌ها ۱۰۸ درجه و a ۰٫۶۱۸ $\neq \frac{a}{2\cos 36^\circ} = b$

بالاخره از دوازده چند وجهی ، طبق آنچه که در شکل ۱۰۱ـc نشان داده شده است ، می‌توان لفافی به شکل بیست‌وجهی منتظم به یال a بدست آورد هریك از این چندوجهی‌هائی که روی یکی از پنج ضلعی‌های $ABCDE$ به ضلع a قرار گرفته‌اند ، از پنج مثلث متساوی‌الساقین (AKE ، EMD و غیره) با ساق $b \neq 0{,}535a$ و پنج چهارضلعی یکجور ($EKSM$ ، $DMSL$ و غیره) تشکیل شده است که در آنها $EK=EM=b$ ؛ $KS=SM \neq 0{,}927a$ ؛ $\widehat{KEM}=120^\circ$ و $\widehat{EKS}=\widehat{EMS}=90^\circ$ می‌باشد .





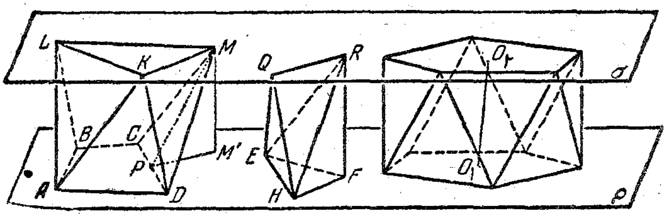


شکل ۱۰۱

در مورد قالبها می‌توان به انواع **شبه منشورها** (چند وجهی‌های محدب) برخوردکرد که قاعده‌های آنها چند ضلعی‌هائی با شکل دلخواه و موازی با هم و وجوه جانبی آنها مثلث (و یا ذوزنقه) است، بطوریکه همهٔ رأسهای این مثلثها (یا ذوزنقه‌ها) بر رأسهای قاعده‌ها منطبق‌اند. در شکل ۱۰۲ شبه منشور $ABCDKLM$ که دو قاعدهٔ آن یکی مثلث و دیگری چهار ضلعی است، شبه منشور $EFHQR$ با قاعده‌های مثلث و «دوضلعی» (پاره خط QR) و شبه منشور موسوم به **منشورمعکوس** که دو قاعدهٔ آنرا n ضلعی‌های منتظم مساوی و وجوه جانبی آنرا مثلثهای متساوی‌الاضلاع تشکیل داده است وضمناً خط و اصل بین مراکزدوقاعده یعنی O_1O_2 بر P عموداست‌ودوقاعده نسبت‌بهم به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{n}$ چرخش‌دارند، رسم شده است.

اگر تصویرشبه منشوربر صفحهٔ P (یا σ) و ارتفاع آن h مفروض باشد (شکل ۱۰۳)، می‌توان بسادگی باز شدهٔ آنرا ساخت.

قاعدهای شبه منشور در تصویر بدون تغییر باقی میماند؛ برای تعیین شکل واقعی وجوه جانبی و مثلاً $M'P،CDM$ را عمود بر CD رسم می‌کنیم، دراینصورت داریم $PM_1 = \sqrt{M'P^2 + h^2}$ (شکل ۱۰۳)

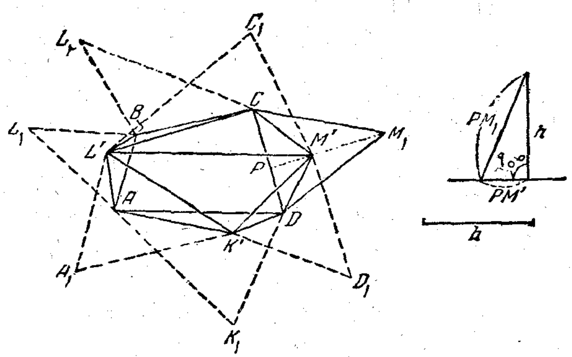


شکل ۱۰۲

را ببینید). بهمین ترتیب شکل حقیقی سایر وجوه جانبی راکه به قاعدهٔ ABCD وصل‌اند پیدا می‌کنیم وسپس‌وجوهی که به قاعده KLM وصل شده‌اند (این وجوه در شکل ۱۵۳ با خطچین نشان داده شده‌اند).

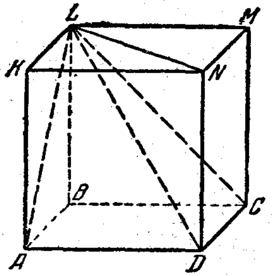
می‌توان بسادگی با درآوردن شکلهای $AL_1BL_2CM_1DK_1A$ و $K'A_1L'C_1M'D_1K'$ (با در نظر گرفتن کناره‌های لازم برای اتصال) خود شبه منشور را درست‌کرد .

چند نمونهٔ باز شده شبه منشورهای غیرمنتظم‌وهمچنین‌منشورهای معکوس منتظم (به ازاء $n=5,6,7,\ldots$) را بسازید و بهم وصل‌کنید .



شکل ۱۵۳

همانطور که شکل۱۵۴ دیده می‌شود ، می‌توان مکعب را به سه هرم یکجور تقسیم کرد : LABCD ، LMNCD ، LAKND ؛ این هرمها دارای یال مشترك LD (قطرمکعب) و قاعده‌های مربع‌شکل ABCD ، NMCD ، AKND هستند ، از اینجا ، بدون استفاده از رابطهٔ مربوط به حجم هرم ، نتیجه می‌شود که حجم هرمی که قاعدهٔ



شکل ۱۰۴

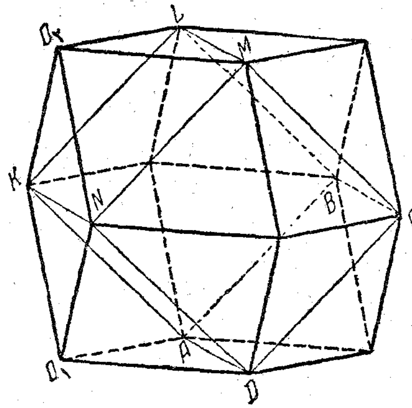
مربع شکل داشته باشد و یکی از یالهای جانبی آن عمود برقاعده‌و برابر a ، ضلع قاعده ، باشد ، برابر است با $\frac{1}{3}a^3$.

با دوران مکعب دور قطر LD به اندازهٔ ۱۲۰ درجه و ۲۴۰ درجه ، هرمهای LABCD ، LNMCD ، LAKND بیکدیگر تبدیل می‌شوند .

قسمتهای مختلف مکعب (هرمها) را بسازید، اولی را به دومی در طول یال LC و دومی را به سومی در طول یال LA لولا کنید ، به این ترتیب نمونهٔ یك مکعب لولا شده را خواهید داشت .

اگر فضا را از مکعبهای یکجور پر کنیم ، بطوریکه هر دومکعب مجاور دریك‌وجه مشترك باشندو درذهن‌خودآ نها را، به‌ردیف‌شطرنجی، با رنگهای سیاه وسفید در نظر بگیریم ؛ با عبور یك صفحه از یال هر یك از مکعبهای سیاه نوع ABCDKLMN (شکل۱۰۵) ، بطوریکه در عین حال از دو مرکز O_1 و O_2 مکعبهای سفید مجاور هم عبورکند (مثلاً صفحهٔ O_1KN) ، می‌توان هر مکعب سفید را به شش هرم یکجور تقسیم کرد .

اگر بهر یك از مکعبهای سیاه ، هرمهای سفید مجاور آنرامتصل کنیم ، بنظر می‌آید که فضا از **دوازده‌وجهی‌های لوزوی** پر شده است .

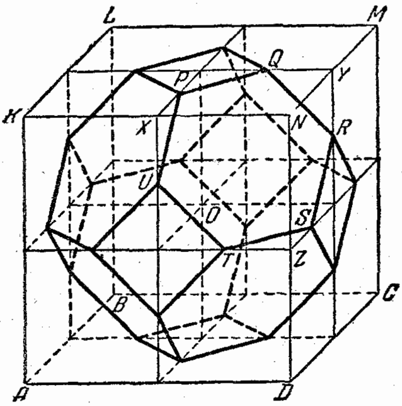


شکل ۱۰۵

دردوازده وجهی لوزوی ، ۸کنج سه وجهی و ۶کنج چهاروجهی و دوازده وجه لوزی شکل وجود دارد و قطرهای هریك از لوزیها به نسبت $\sqrt{2}$:۱ هستند . ثابت کنید که صفحات بصورت O_1KN و KO_2N برهم منطبق اند .

۵ ـ دوازده وجهی یکجور بسازید ، مـی بینیدکه می توان آنها را خیلی خوب کنار هم قرارداد .

اگر مکعب ABCDKLMN (شکل ۱۰۶) را به وسیلهٔ صفحاتی که موازی مکعب هستند و از مرکز آن می گذرند ، به هشت مکعب کوچك تقسیم کنیم و نیمی از هر مکعب کوچك را که به رأس مکعب بزرگ متصل است جداکنیم (مثلا هفت وجهی NXYZOQRSTU ، که به رأس N متصل است) ، از مکعب اصلی چند وجهی باقی می ماند که شش وجه آن مربع وهشت وجه آن شش ضلعی منتظم است ، که‌در



شکل ۱۰۶

حقیقت از اتصال هشت «نیم‌مکعب» بوجود آمده‌است و رأس مشترک این نیم‌مکعبها در نقطهٔ O مرکز مکعب بزرگ است .

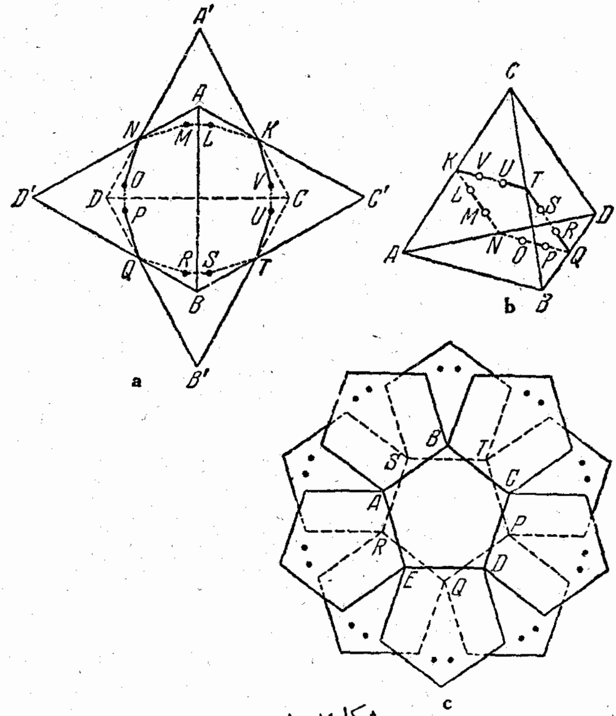
همین چندوجهی را می‌توان با هشت «نیم‌مکعبی» که‌دراطراف نقطهٔ N هستند ، درست کرد ، بشرطی که همان اعمال مذکور در فوق را درمورد هشت مکعب بزرگی که رأس مشترکشان N است، انجام دهیم .

بنا براین به کمک چهارده وجهی‌های شکل ۱۰۶ می‌توان فضا را « بدون منفذ » پـر کرد . اگر پنج نمونه از ایـن چهارده وجهی‌ها (با اندازه‌های مساوی) در اختیار داشته باشید ، می‌توانید صحت این مطلب را آزمایش کنید .

ازمقوای محکم می‌توان بعضی‌ازچندوجهی‌ها رادرست‌کرد. مثلاً چهارمثلث متساوی‌الاضلاع از مقوا ببرید و آنها را بطور لولائی دوبدو بهم وصل‌کنید ، به این ترتیب که در امتداد خط AB و در امتداد خط CD نواری از پارچه یا کاغذ بچسبانید (شکل۱۰۷ــa) .

اگر لوزیهای بدست آمده را بوسیلهٔ کش (نخ لاستیکی) بسته ONMLKVUTSRQPO بهم وصل کنیم (کش را از سوراخهای M و L ، V و U ، S و R ، P و O عبوردهید)، در اینصورت وقتی که

کش راکوتاه‌کنیم، شکل مسطحهٔ **a** به چهاروجهی **b** (شکل ۱۰۷) تبدیل می‌شود (نقاط **U** و **V** بر خطی که اوساط اضلاع مثلث **ABC** را بهم وصل کرده‌اند قرارمی‌گیرند وغیره).



شکل ۱۰۷

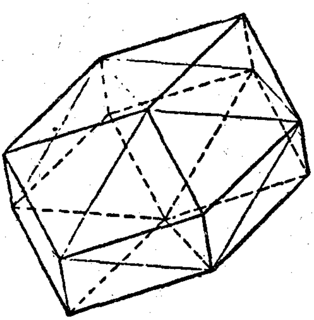
برای اینکه یك دوازده وجهی منتظم بدست آوریم، باید شش پنج‌ضلعی منتظم ازمقوای محکم برید و پنج تا از آنها را با لولا به‌پنج ضلعی مرکزی **ABCDE** وصل‌کرد (شکل ۱۰۷ــc)، سپس‌شبیه آنرا با پنج ضلعی مرکزی **PQRST** درست کرد و از بیست سوراخی که در شکل نشان داده است، نخ‌کش‌دار را عبور داد.

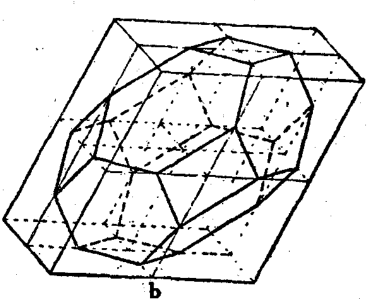
چند سئوال برای فکر کردن

۱ . اگر از هر یك از دوازده یال یك مکعب ، صفحه‌ای عبور دهیم ، که نسبت به وجود زاویهٔ دو وجهی متناظر خود یکنوع تمایل داشته باشد ، یك دوازده وجهی لوزوی بدست می‌آید (شکل۱۰۵).

حالا اگر از ۲۴ یال یك دوازده وجهی لوزوی صفحاتی عبور دهیم ، که تمایل هر یك از آنها نسبت به دو وجه مجاور خود یکجور باشد ، به چند وجهی S_1 می‌رسیم ، سپس بهمین طریق از چندوجهی S_1 به چند وجهی S_2 می‌رسیم ، از S_2 به S_3 و غیره .

آیا می‌توانید شکل وجوه S_1 و S_2 را معین کنید و نمونهٔ آنها را بسازید .


a


b

شکل۱۰۸

همین مسئله را می‌توان به‌این ترتیب طرح کرد که بجای مکعب، شکل اولیه را چند وجهی دیگری (مثل دوازده وجهی منتظم ، شبه منشور با قاعدهٔ پنج ضلعی منتظم و غیره) انتخاب کنیم .

اگر چند وجهی اولیه را چهار وجهی منتظم یا هشت وجهی

منتظم بگیریم ، چه نوع چند وجهی بدست‌می‌آید[۷۱]؟

۴ . اگر فضا را با متوازی‌السطوحهای یکجور پر کنیم و آنها را به‌صورت ردیف‌شطرنجی‌رنگ نمائیم، سپس بهریك ازمتوازی‌السطوحهای سیاه شش‌هرم‌چنان‌متصل‌کنیم‌که رأسهای‌آنها درمرکزمتوازی‌السطوحهای مجاور باشد ، دوازده وجهی‌هائی بدست می‌آید که فضا را « بدون‌منفذ» پرکرده‌اند (شکل ۱۰۸-a) .

همچنین اگر از متوازی‌السطوحهای بزرگ ، هشت نیمه متوازی‌السطوح کوچك جدا کنیم ، چهارده وجهی‌هائی بدست می‌آید که باز هم فضا را پرمی‌کنند (شکل۱۰۸-b) .

اگر ارتفاع h متوازی‌السطوح را بدانیم و تصویرمتوازی‌السطوح بر صفحهٔ قاعدهٔ آن‌هم معلوم باشد ، باز شدهٔاین دوازده وجهی‌وچهارده‌وجهی را بسازید .

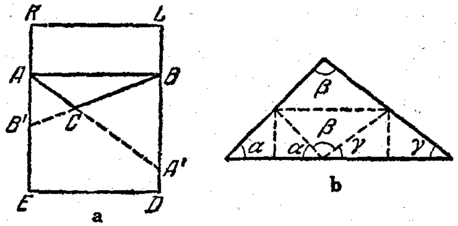
نمونه‌هائی از این چند وجهی‌ها بسازید و ببینید که می‌توان‌آنها را بطور کامل در فضا پهلوی هم چید .

۳۱

سرگرمی با صفحهٔ کاغذ

روی مثلثی که در صفحهٔ کاغذ رسم‌شده است می‌توان، بدون‌استفاده از وسائل رسم ، ثابت‌کرد که سه نیمساز (سه میانه، سه ارتفاع، سه‌عمود منصف) مثلث در یك نقطه متقاربند .

در حقیقت هر یك از این خطوط را می‌توان ، با تا کردن صفحهٔ کاغذ ، ساخت . منتهی در حالتیکه مثلث ABC منفرجه‌الزاویه باشد، برای بدست آوردن مرکز دایرهٔ محیطی باید صفحهٔ کاغذ را بشکل



شکل۱۰۹

AKLBC (بشکل ۱۰۹ ـ a) و برای بدست آوردن محل تلاقی ارتفاعات به شکل ABDE گرفت ، در حالت اخیر باید (با تا کردن کاغذ) ادامهٔ اضلاع AC و BC را علامت گذاشت .

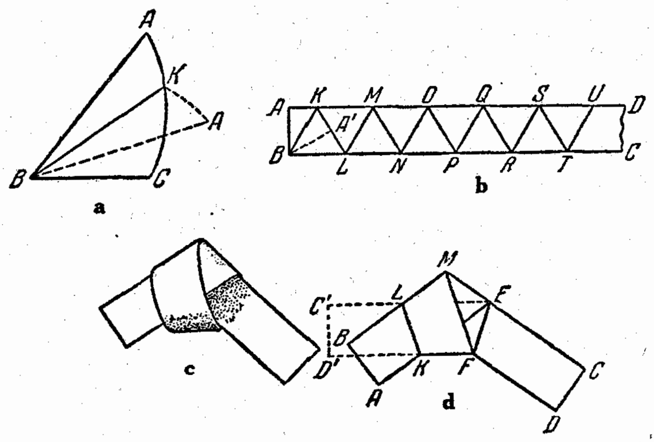
همینطور بسادگی می‌توان قضیهٔ مربوط به مجموع زوایای مثلث را ثابت‌کرد (شکل ۱۰۹ـ b) .

همچنین می‌توان بطور تقریب ، زاویهٔ ABC را به سه قسمت مساوی تقسیم‌کرد (بدون وسیلهٔرسم)، برای این منظور (شکل۱۱۰ـa) کافی است صفحهٔ کاغذ راروی خط BK (که‌ازرأس‌زاویه‌عبورکرده‌است) چنان تاکنیم که‌زوایای 'KBA و A'BC مساوی باشند . باکمی‌تمرین می‌توان این عمل را با چشم و با دقت زیاد انجام داد .

چند ضلعی‌های منتظم

اگر نوارکاغذی ABCD ، که‌بشکل‌مستطیل‌است(شکل۱۱۰ـb) را روی خطوط : BK ، KL ، LM ، MN ، ... تاکنیم ؛ با «مثلث نیم‌کامل» آخری می‌توان سر«کاغذ ـ پاکت» بشکل مثلث‌متساوی‌الاضلاع

را بست . ضمناً اگر نوار را روی خطوط : BK ، KL ، ... «نیم تا» کنیم ، می‌توان بسادگی انواع سطوح جانبی منشورهای معکوس منتظم را بدست آورد .

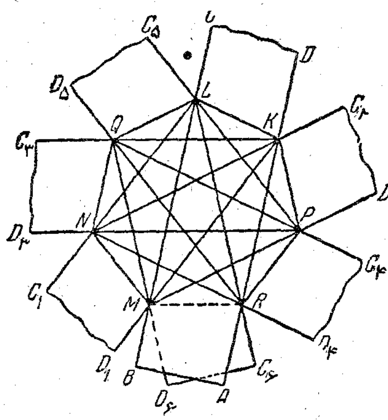


شکل ۱۱۰

از یك نوار کاغذی ، با کناره‌های موازی ، می‌توان بسادگی پنج ضلعی منتظم ساخت ، به این ترتیب که نوار را گره می‌زنیم (شکل ۱۱۰ــc) و با احتیاط گره رامی‌کشیم و سپس روی آنرا فشارمی‌دهیم تا بشکل پنج‌ضلعی KLMEF درآید (شکل ۱۱۰ــd) .

حالا اگر نوار EFCD را روی‌خط EF تاکنیم واز زیرذوزنقهٔ KLME عبور دهیم یك «کاغذ ـ پاکت» بشکل پنج‌ضلعی منتظم‌بدست می‌آید . اگر این شکل از کاغذ خیلی کلفت درست نشده باشد ، وقتی‌که آنرا جلو روشنائی بگیریم ، بخوبی در متن آن یك پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای هم دیده می‌شود .

نوار ABCD که به اندازهٔ کافی طولانی است ، روی خط KL $\left(\widehat{AKL}=\frac{۴\pi}{۷}\right)$ تا می‌کنیم، بسادگی سه‌رأس‌اول: آن‌یعنی K ، L ، M از هفت ضلعی منتظم بدست می‌آید (درشکل ۱۱۱ باید نوار را ازطرف CD ،سپس C_1D_1 وغیره به‌اندازهٔ کافی طولانی درنظرگرفت) .



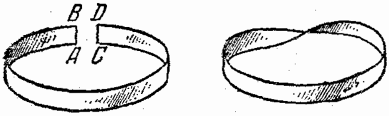
شکل ۱۱۱

سپس نواررا متوالیاً روی خط MN (برای اینکه NC_2 از نقطهٔ K عبور کند) ، روی خط KP (برای اینکه PD_2 از نقطهٔ N عبور کند) ، روی خط NQ (برای اینکه OC_3 از نقطهٔ P عبورکند) ، روی‌خط PR (برای اینکه PD_5 از نقطهٔ Q و PC_5 از نقطهٔ L عبور کند) و بالاخره روی خط QL (که در نتیجهٔ آن باید نوار از نقاط M و R عبور کند) تا می‌کنیم ، هفت ضلعی منتظم MNQLKPR بدست می‌آید ، و اگر آنرا در مقابل نور نگاه‌کنیم چند هفت ضلعی‌ستاره‌ای هم بچشم می‌خورد .

سطح موبیوس

دو انتهای AB و CD از یك نوار کاغذی را بهم نزدیك‌کنید ،

آنها را کمی بپیچانید (طوریکه نقطهٔ C در کنار B و D در کنار A قرار گیرد) و در اینحال دو انتهای AB و CD را بهم وصل کنید (شکل ۱۱۲) .



شکل ۱۱۲

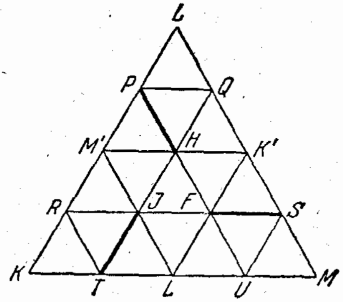
شکلی که به این ترتیب بدست می‌آید به **سطح موبیوس** معروف است که دارای یك سطح است و نمی‌توان آنرا از دوطرف به دو رنگ مختلف رنگ‌کرد : اگر از یك نقطهٔ آن شروع به‌رنگ‌کردن کنیم و مرتباً جلوبرویم ، از طرف دیگر نوار هم عبور می‌کنیم و بالاخره به نقطهٔ اول می‌رسیم .

اگر سطح موبیوس را روی خطی متساوی‌الفاصله از دوکنارهٔ آن قطع‌کنیم ، به دو قسمت تبدیل نمی‌شود ، بلکه یك حلقهٔ پیچ‌دار کامل بدست می‌آید ؛ این حلقه دارای دو پیچ است و دیگر نمی‌توان با شروع از یك نقطه بطرف دیگر سطح رسید . از چنین سطحی ، که با کمك سطح موبیوس‌بدست می‌آید ، می‌توان به‌عنوان‌معما ، برای‌کسانی که در مورد آن تجربه‌ای ندارند ، استفاده‌کرد .

علاقمندان می‌توانند تحقیقات دیگری را در مورد سطح موبیوس انجام دهند و دربارهٔ رابطهٔ تعداد پیچهای آن با خواص سطح تحقیق کنند ، می‌توان آنرا بوسیلهٔ یك یا دو خط (که فاصلهٔ آنها از هم و از دو کناره یکی باشد) برش داد وغیره .

ساختن بیست‌وجهی منتظم

نواری از کاغذ ضخیم به‌عرض ۱۰ تا ۱۲ سانتیمتر انتخاب‌کنید و شبیه شکل ۱۱۰ـb مثلثهای متساوی‌الاضلاعی روی آن بوجود آورید، سپس چند تا ازاین مثلثها رامی‌توان بسادگی (وبطور دقیق) به‌شانزده‌مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم‌کرد، به این ترتیب که ابتدا آنرا روی خطهای M'K' ، K'L' ، L'M' تا می‌کنیم (باید L را بر L'، وسط KM قرار داد، دراینصورت‌کاغذ روی خط M'K' تا می‌شود و غیره)، سپس آنرا روی خطهای PQ ، RS ، TQ وغیره‌تامی‌کنیم



شکل ۱۱۳

(شکل ۱۱۳ را ببینید).

حالا کاغذ راروی پاره خطهای PH ، FS و TJ می‌بریم و مثلا لوزی PLQH را دور رأس H درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت طوری‌می‌چرخانیم‌که مثلث HQP زیر مثلث HM'P قرارگیرد، ضمناً لوزی را روی قطر PQ تا می‌کنیم تا رأس L بر نقطهٔ H قرارگیرد، در اینصورت کنج پنج وجهی به رأس H بدست می‌آید (برای اینکه‌مثلث PQL خوب به بقیه محکم‌شود، چند قطره چسب به‌مرکزآن بریزید).

اگر بهمین ترتیب‌کنجهای‌پنج‌وجهی‌رادر رأسهای J و F هم‌درست کنیم، نیمی از یك بیست‌وجهی منتظم بدست می‌آید.

چهار ـ پنج تا از این نیمه بیست وجهیها درست می‌کنیم. آنهارا طوری بهم نزدیک می‌کنیم که هر دوتای آنها چهاروجه مشترک داشته باشند و به این ترتیب یک بیست‌وجهی منتظم که به اندازهٔ کافی محکم و ثابت است بدست می‌آید.

آیا خواننده می‌تواند نمونه‌های دیگری از چهاروجهی منتظم، هشت‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم با کمک چند نوار کاغذ هم عرض بسازد (با تقسیم نوارها به مثلثهای متساوی‌الاضلاع مثل شکل ۱۱۰ـb)؟ همچنین می‌توان با کمک چند نوار کاغذ، که روی هر کدام از آنها پنج‌ضلعی‌های منتظم متصل بهم درست شده است (شکل ۱۱۰ـd)، دوازده وجهی منتظم هم درست کرد.

۳۴
مسئلهٔ چهاررنگ*

فرض کنید که بخواهیم منطقه‌های مختلف یك صفحه و یا یك سطح کروی (مثلاً نقشهٔ سیاسی جهان) را بنحوی رنگ آمیزی کنیم که هیچیك از دو منطقهٔ مجاور (یعنی دو قسمتی‌که مرز مشترکی ، ولو کم ، دارند) بیك رنگ نباشند . منطقه‌هائی را که دارای یك یا چند

---

*) برای توضیح بیشتر دربارهٔ مسئلهٔ چهاررنگ به‌کتاب « استقراء ریاضی » که از همین مترجم چاپ شده است ، مراجعه کنید .

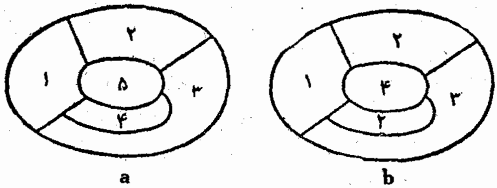
نقطهٔ مشترك باشند ، مجاور بحساب نمی‌آوریم و می‌توان آنها را با یك رنگ مشخص کرد .

تجربه نشان می‌دهد که حداکثر با چهار رنگ می‌توان این نتیجه را بدست آورد ، بشرطی‌که سطح آنها را به عنوان یك منطقهٔ جداگانه با یك رنگ در نظر بگیریم .

البته ممکن است که با رنگ‌آمیزی چند منطقه، که حساب نشده انجام‌گرفته باشد، بنظر برسد که به پنج‌رنگ احتیاج است (مثلاً برای رنگ‌آمیزی منطقهٔ مرکزی درشکل ۱۱۴ــa که‌در آن هر شماره نشانهٔ یك رنگ جداگانه است) ، ولی اگر رنگ‌آمیزی مناطق اولیه را بنحو دیگری انجام دهیم ، می‌بینیم که بیش از چهار رنگ لازم نیست (شکل ۱۱۴ــb) .

ولی تاکنون کسی نتوانسته این مطلب را بدقت ثابت کند (ومسئله چهاررنگ هم همین‌است) که نمی‌توان صفحه یا سطح کره را به‌مناطقی چنان تقسیم‌کرد(که برای رنگ‌آمیزی آن پنج رنگ لازم باشد ، اگر چه ثابت شده است که همیشه پنج‌رنگ‌برای‌رنگ‌آمیزی مناطق‌مربوطه کافی است (کتاب استقراء ریاضی را ببینید) .

جالب است که سطح **تور** (شکل ۱۱۴ ــ c) را می‌توان به هفت منطقه چنان تقسیم کرد که هر یك از آنها با هر یك از مناطق دیگر مرز مشترك داشته باشد . بنابراین ، در حالت کلی ، نمی‌توان مناطق سطح تور را با کمتر از هفت رنگ ، رنگ آمیزی کرد ، ولی ثابت می‌شود که نمی‌توان سطح تور را چنان تقسیم‌بندی کرد که برای رنگ‌آمیزی آن هشت رنگ مورد احتیاج باشد .



شکل۱۱۴-a و b

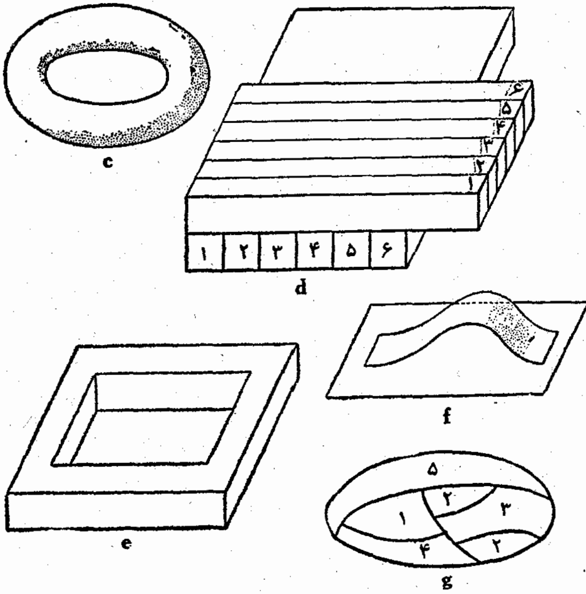
بسادگی روشن می‌شود که در حالت مناطق فضائی، وضع بنحو دیگری است؛ بخصوص می‌توان مناطق را، بهر تعداد دلخواه، چنان گرفت که هرکدام از آنها با بقیه در یك قطعه مشترك باشد. کافی است دو ردیف میلهٔ بلند در نظر گرفت و آنها را در دو جهت مختلف قرارداد (شکل ۱۱۴ ـ d)، ضمناً هر دو میلهٔ همنام را در دو ردیف مختلف متصل بهم فرض کرد.

چند سئوال ومسئله، که به مسئلهٔ چهار رنگ مربوطاست، در اینجا می‌آوریم:

۱. شکل۱۱۴ـe ازلحاظ توپولوژی (مکان‌شناسی) معادل با تور است؛سطح آنرا به هفت منطقه چنان تقسیم‌کنید که هر یك از آنها با شش منطقهٔدیگر مرز مشترك داشته باشد.

۲. روی یك در، «پل» بزرگی نصب شده است. منطقهٔ روی در را، با در نظرگرفتن سطح روی پل و سطح زیر آن، به هفت‌قسمت چنان تقسیم‌کنید که هر دو قسمت آن مجاور یکدیگر باشند. برای حل مسئله، نمونهٔ شکل ۱۱۴ـf را با یك صفحهٔ‌کاغذ درست کنید که روی آن با یك نوارکاغذی شکل پل به آن مربوط‌شده باشد.

۳. ثابت‌کنید[۷۲] که اگر تعداد دلخواهی خط راست، صفحه را



شکل ۱۱۴-c تا g

به مناطقی تقسیم کرده باشد ؛ برای رنگ آمیزی این مناطق دو رنگ کافی است . وضع در حالت فضائی چگونه است : وقتی تعداد دلخواهی صفحه ، فضا را به مناطقی تقسیم کرده باشند ؟

۴ . ثابت کنید(۷۳) که هشت چهاروجهی (لازم نیست منتظم باشند) وجود دارد بطوریکه بتوان آنها را در فضا چنان قرارداد که هر دو تای آنها در قسمتی از یك وجه مشترك باشند (بشرطی که وجه مشترك بصورت یك خط یا نقطه نباشد) .

۵ . در شکل ۱۱۴-g دیده می‌شود که یك جزیره را می‌توان به شش منطقه که بین پنج دولت تقسیم شده‌اند ، چنان قسمت کرد که هر دو دولت دارای سرزمینی مجاور هم باشند . اگر لازم باشد که هر سرزمین

متعلق بیك دولت بـا یك رنگ مشخص شده باشد ، ناگزیریم از پنج رنگ استفاده کنیم .

به‌ازاء $m = ۶, ۷, ۸, ۹, \ldots$ کوچکترین عدد n را پیدا کنید ، طوریکه اگر جزیره را به n قسمت تقسیم کنیم و این قسمتها را بین m دولت تقسیم نمائیم ، هردو دولت دارای سرزمینی مجاور هم باشند .

آیا می‌توانید رابطه‌ای بصورت زیر پیداکنید :

$$n_{min} = f(m)$$

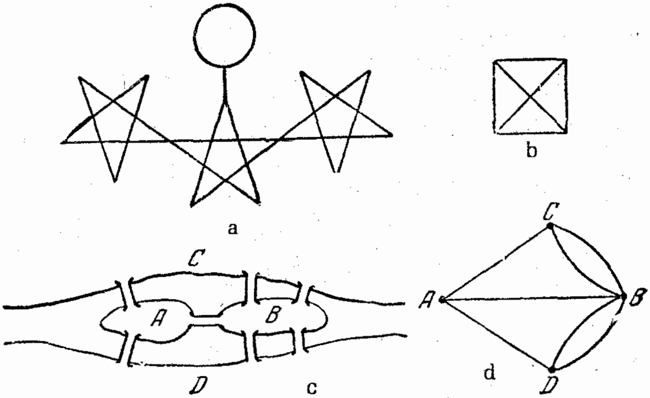
همچنین می‌توان جزیره‌ای را با تقسیمات مفروض در نظر گرفت؛ آنوقت بزرگترین عدد m را طوری پیدا کرد ، طوریکه اگر قطعات جزیره بین m دولت تقسیم شوند ، هر دو دولت دارای سرزمین مجاور هم باشند .

۳۳

رسم شکل با یك حرکت قلم*

با یك حرکت قلم، یعنی بدون اینکه قلم را از کاغذ جدا کنیم و بدون اینکه روی یك خط دو بار حرکت کنیم ، روی محیط شکلی حرکت کنیم (شکل ۱۱۵ـ a) ، که از یك ردیف «گره» و «مسیر»های اتصالی درست شده است (راهها می توانند منحنی باشند (شکل ۱۱۵ ـ d) ، ولی

*) در این مورد می توانید به کتاب «سرگرمیهای هندسه» هم که از همین مترجم چاپ شده است ، مراجعه کنید .



شکل۱۱۵

نمی‌شود از صورت ظاهر شکل b بسادگی عبور کرد) .

به نقطه‌ای که از آن k مسیر عبور کند ، گره مرتبهٔ k گوئیم . مثلاً در شکل ۱۱۵ ــ a ، دوگره مرتبهٔ ۴ وجود دارد ، واضح است که هر نقطهٔ بینابینی را ، که بر مسیری قرارگرفته باشد ، می‌توان بعنوان گره مرتبهٔ ۲ بحساب آورد .

وقتی که با قلم‌شکلی را دورمی‌زنیم ، گره شروع را باگره خاتمه وگره‌های بینابینی از هم جدا می‌کنیم .

قضیه . وقتی که‌شکلی را با یك حرکت قلم‌رسم می‌کنیم ، هیچیك ازگره‌های مرتبهٔ فرد آن نمی‌توانند جزوگره‌های بینابینی باشند .

در حقیقت گره از مرتبهٔ $2m+1$ ، تنها می‌تواند گره شروع یا گره خاتمه باشد ، زیرا وقتی که m مرتبه‌ازگرهی عبور کنیم $2m$ مسیر را طی کرده‌ایم برای مسیری که باقی میماند ، فقط می‌توان در شروع یا خاتمهٔ حرکت ، آنرا طی‌کرد .

از این قضیه نتیجه می‌شود که نمی‌توان با یك حرکت قلم، شکلی را که بیش از دو گره مرتبهٔ فرد دارد رسم کرد ؛ در شکل ۱۱۵- b چهار گره مرتبهٔ ۳ وجود دارد و بنابراین با یك حرکت قلم قابل رسم نیست .

مسئلهٔ معروف **اولر** را دربارهٔ پلها مورد مطالعه قرار می‌دهیم: هفت پل دو جزیره A و B را بهم و جزیره‌ها را به ساحل وصل کرده‌اند، آیا می‌توان طوری از آنها عبور کرد که از هر پل تنها یکبار گذشته باشیم ؟ (شکل ۱۱۵- c) .

اگر جزیره‌ها و سواحل را بوسیلهٔ نقطه‌هائی مشخص کنیم و پلها را خطهای رابط بین این نقطه‌ها بدانیم ، مسئلهٔ اولر به این مسئله منجر می‌شود که شکل ۱۱۵ - d را با یك حرکت قلم رسم کنیم و این هم بعلت اینکه گره‌های فرد آن چهارتا است ، غیر ممکن است .

ثابت کنید(۷۴) که در هر شکل دلخواه . تعداد گره‌های مرتبهٔ فرد عددی است زوج .

اگر از هر نقطهٔ شکلی بتوان به نقطهٔ دیگری از همان شکل ، بوسیلهٔ مسیری که روی شکل وجود دارد ، عبور کرد ، شکل را **بسته** گویند .

می‌توان ثابت کرد که هر شکل بسته را، که دارای گره ردیف فرد نباشد و یا دو گره ردیف فرد داشته باشد ، می‌توان با یك حرکت قلم رسم کرد .

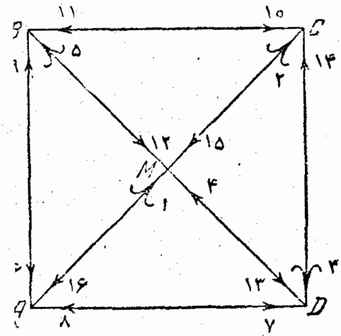
برای جستجوی روش رسم یك شکل ، که با یك حرکت قلم قابل رسم باشد ، می‌توان به این طریق عمل کرد : فرض کنید، در یك

حرکت از دور بسته‌ای عبور کنیم ، بدون اینکه از همهٔ خطهای شکل عبور کرده باشیم ، دراینصورت‌همیشه‌می‌توان نقطه‌ای‌را پیداکردکه‌برای مسیرهای رسم شده و مسیرهائی که در خارج این حرکت باقیمانده‌اند ، مشترك باشد ، وقتی از این نقطه روی مسیری حرکت کنیم ، پس از آنکه دوباره بهمین نقطه برسیم ، تعداد مسیرهای رسم نشده کم می‌شود و این‌بار از همین نقطه روی مسیر جدیدی حرکت را شروع می‌کنیم . البته وقتی باید به این روش پرداخت که نتوانیم مسیری که شامل تمام خطها باشد ، بدست آوریم .

واضح است‌که اگردر شکلی دوگره فرد وجود داشته باشد ، باید یکی از آنها را به عنوان مبداء و دیگری را به عنوان انتهای حرکت در نظرگرفت ، ولی وقتی که تمام گره‌ها زوج باشد ، حرکت را از هر نقطهٔ دلخواهی از شکل می‌توان شروع‌کرد و بهمان جاهم پایان‌داد .

اگر قرار را براین بگذاریم‌که از هر خط شکل درست دومرتبه عبورکنیم (یعنی هر مسیری‌که دو نقطه را بهم وصل کرده است درذهن خود بصورت دو مسیر در نظر بگیریم) ، در اینصورت تعدادگره‌ها دو برابر می‌شود و هر شکل بسته را می‌توان با یك حرکت قلم رسم‌کرد .

رسم مضاعف شکل را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ زیر تا آخر انجام داد: وقتی که به‌گرهی ازمسیری مانند l برای اولین‌بار می‌رسیم، باید از مسیر l تا زمانیکه ممکن باشد ، استفاده نکرد ؛ یعنی حرکت دوم از این مسیر را تنها وقتی انجام دادکه همه مسیرهائی را که به این گره ختم می‌شوند، دوباره طی‌کرده باشیم ؛ ضمناً از هرگره نمی‌شود در



شکل ۱۱۶

یك مسیر دو بار عبورکرد (زیرا حرکت دوم روی یك مسیر در خلاف جهت حرکت اول است) .

درشکل ۱۱۶ ، شانزده مسیری که طبق قاعدهٔ فوق می‌توان طی کرد ، بترتیب شماره گذاری شده است ، ضمناً پیکانهای بزرگ روی مسیرهائی گذاشته‌شده است، که درامتداد آنها به گرهی‌می‌رسیم ، که تا آنموقع به آن برخورده نکرده‌ایم (از این گره‌در چنین مسیری ، وقتی می‌توان برگشت که همهٔ مسیرهای منتهی به آنرا دوبار طی‌کرده باشیم) .

وقتی که برای مرتبهٔ دوم به گرهی نزدیك می‌شویم از علامت سادهٔ پیکان استفاده‌کرده‌ایم ؛ در چنین مسیرهائی حرکت مجدد را (در جهت عکس حرکت اول) می‌توان هر وقت‌که ساده‌تر باشد ، انجام داد. مثلاً بجای « حرکت » پنجم، می‌توان حرکت از M به D را انجام داد، ولی حرکت هشتم را نمی‌توان عوض‌کرد ، زیرا روی مسیر DM از گره D یك حرکت انجام گرفته است (حرکت چهارم) و علامت بزرگ پیکان روی DC نشان می‌دهد که از این مسیر از گره D باید در نوبت آخر عبورکرد .

قاعده‌ای را که در اینجا ذکرکردیم از لحاظ مسئلهٔ مربوط به پیچ و خمها اهمیت‌اساسی‌دارد. هرپیچ‌وخمی را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط (محوطه‌ها ، اطاقها و غیره) که بوسیلهٔ خطهائی (خیابانها ،

راهروها و غیره) بهم وصل شده‌اند ، در نظرگرفت .

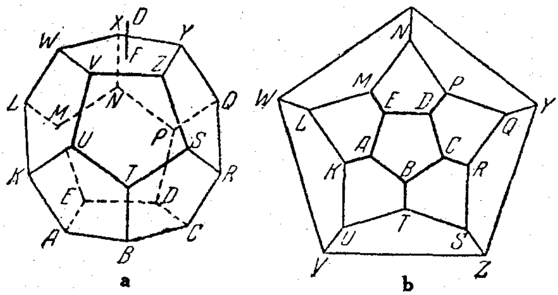
با این قاعده می‌توان نتیجه‌گرفت‌که هر پیچ‌وخم بسته‌ای راهمیشه می‌توان دور زد (بدون اینکه از شکل اطلاع داشته باشیم) ، بنحوی که هر یك از مسیرها را دوبار طی کنیم . ضمناً در پیچ‌وخم ، علاوه بر پیکانهای بزرگ وساده ، باید علامتی هم قرار داد ،که از تکرارحرکت در یك مسیر در همان جهت قبلی جلوگیری‌کند .

۳۴

بازی هامیلتون

درسال ۱۸۵۷، **هامیلتون** ریاضی‌دان انگلیسی یك بازی‌طرح کرد که به « مسافری روی دوازده‌وجهی » معروف‌شده است. این بازی‌چنین‌است: می‌خواهیم از رأسهای دوازده وجهی عبور کنیم، بنحوی که حرکت‌تنها از طریق یالها انجام‌گیرد و از هر رأس هم بیش از یکبار رد نشویم.

اگر تصویر مرکزی دوازده وجهی را بدست آوریم، یعنی‌رأسهاو یالهای آنرا (شکل ۱۱۷ ـ a) روی صفحه‌ای که از وجه ABCDE



شکل ۱۱۷

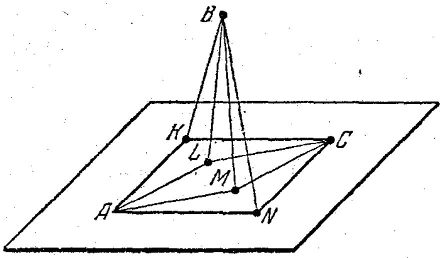
عبور کرده است ، از نقطهٔ O ، تصویر کنیم (نقطهٔ O در ارتفاع کمی بالای مرکز وجه VWXYZ قرار گرفته است) ، طرح ۱۱۷ ــ b بدست می‌آید .

یکی از مسائل مربوط به بازی هامیلتون عبارتست از ساختن یك دور بسته از همهٔ بیست رأس . معلوم شده است که اگر از یك رأس چهار حرکت انجام دهیم ، می‌توانیم در همهٔ رأسهای بقیه باشیم و با بیست حرکت به رأس اولیه برگردیم .

می‌توان سؤال را دربارهٔ تعداد حرکتها ، با معلوم بودن مثلاً سه رأس اولیه و رأس آخر، مطرح کرد (که بسته به نوع قرارگرفتن آنها با ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۴ یا ۶ دور ممکن است) ، یا اینکه دو رأس اول و دو رأس آخر معلوم باشد و غیره . همچنین می‌توان ورود به بعضی رأسها و یا استفاده از بعضی یالها را ممنوع کرد .

می‌توان بازی را بادو نفر در نظر گرفت که بنوبت حلقه‌های «دورشکسته» را رسم کنند ، ضمناً یکی از آنها کوشش کند عبور کاملی از هر بیست رأس

داشته باشد (لزومی ندارد دور بسته‌ای ایجاد کند) ، و دیگری کوشش کند وضعی را بوجود آورد که در آن قسمتی از رئوس از نظر دور باشد (مثلاً خط شکستهٔ SZYXNPDCRQ).



شکل ۱۱۸

بجای رسم خط شکسته، بازیکن‌ها می‌توانند بنوبت مهره‌های شماره‌دار سیاه‌وسفید را در رأسهای مربوطه‌قرار دهند. بازی جالبتر و بغرنجتر می‌شود وقتی که بجای طرح b (شکل ۱۱۷) ، از دوازده وجهی چوبی استفاده‌کنیم که حلقه‌هائی در رأسهای آن بطور محکم قرارگرفته باشد .

بجای حرکت روی یك دوازده وجهی منتظم ، می‌توان حرکت روی چند وجهی‌های دیگر را مطرح کرد، مثلا جالب است که بارعایت بازی هامیلتون ، نمی‌توان همهٔ رأسهای یك دوازده وجهی لوزوی (فصل ۳۰ را ببینید) را دوز زد ، زیرا در اینجا ۶ کنج چهار وجهی و هشت کنج سه وجهی داریم و هر یال دو رأس از دو کنج مختلف را بهم وصل می‌کند .

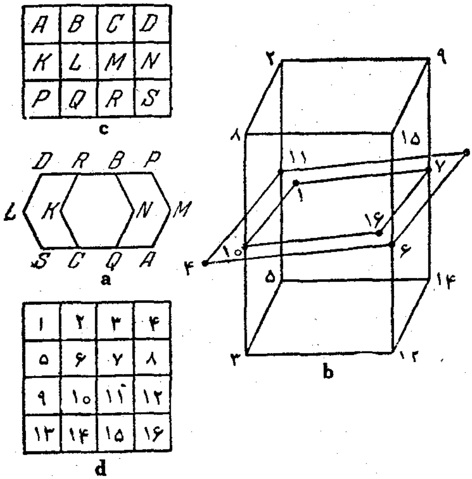
در شکل ۱۱۸ طرح فضائی با دورغیر بسته داده شده است وضمناً نمی‌توان روی آن دور بسته‌ای بوجود آورد (چرا ؟)(۷۵)

آیا خواننده‌می‌تواند چندوجهی پیدا کند که دارای همین خاصیت باشد؟

هامیلتون بازی دومی هم داردکه مربوط به‌حرکت روی وجوه یك چند وجهی‌است و در آن عبور از یك وجه به‌وجوه دیگر تنها درصورتی

ممکن است که این دو وجه یال مشترکی داشته باشند.

از خواننده می‌خواهیم ثابت کند[۷۶] که طرح حرکت دربازی‌دوم هامیلتون روی هشت وجهی منتظم و روی بیست وجهی منتظم کاملاً شبیه طرح حرکت بازی اول هامیلتون روی‌مکعب و دوازده وجهی‌منتظم‌است.



شکل ۱۱۹

مسئلهٔ مربوط به اسب راکه‌در فصل ۱۹ آوردیم ، می‌توان به‌عنوان مسئلهٔ حرکت طبق قاعدهٔهامیلتون‌در نظر گرفت: کافی است بجای‌خانه‌های صفحهٔ شطرنج ، نقاطی در نظیر بگیریم و ممکن است نقاط متناظر خانه‌ها را ، با توجه به حرکت اسب روی خانه‌های شطرنج ، باخطوطی بهم وصل کنیم.

در شکل ۱۱۹ طرح مسطحهٔ (a) و طرح فضائی (b) متناظر با صفحهٔ ۳×۴ خانه‌ای (c) و $۴^۲$ خانه‌ای (d) داده شده است.

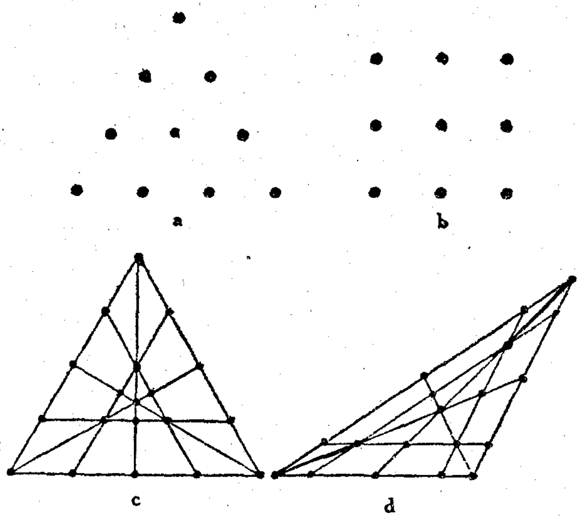
۳۵

تقسیم نقاط در صفحه و در فضا

معمولا مسائل در این زمینه را می‌توان بصورت « محسوس » در آورد ، یعنی از سکه ، فندق و یا شیئی دیگری بجای نقطه استفاده کرد .

چند مسئله از این نوع را می‌آوریم :

۱ . ده سکه بصورت یك مثلث متساوی‌الاضلاع چیده‌اند (شکل ۱۲۰ ــ a را ببینید) . سه سکه را چنان جابجا کنید[۷۷] که دوباره یك



شکل ۱۲۰

مثلث‌متساوی‌الاضلاع بدست آید .

۲ . از شکل ۱۲۰ ـ b دیده می‌شود که با ۹ سکه می‌توان‌هشت ردیف سه سکه‌ای درست‌کرد ، یعنی می‌توان هشت خط راست پیداکرد که‌مراکز سه تا از سکه‌ها روی هر یك از آنها قرارگرفته‌باشد .

دو سکه را طوری جابجا کنید[۷۸] که نه سکهٔ مفروض در طرح جدید ، روی ده ردیف سه سکه‌ای قرارگرفته باشند .

۳ . در شکل ۱۲۰ ـ c و d دو طرح داده شده است که ازلحاظ اصولی مثل هم و از لحاظ شکل ظاهری با هم متفاوتند . در هر یك‌از این دو طرح ۱۹ سکه در ۹ ردیف پنج سکه‌ای قرارگرفته‌اند .

۱۹ سکه را در ده ردیف پنج سکه‌ای قراردهید[۷۹] .

بین دوستانتان مسابقه‌ای ترتیب دهید که با کمك n نقطه ، m ردیف p نقطه‌ای درست کنند ، بطوریکه نسبت $\frac{mp}{n}$ حتی‌الامکان عدد بزرگی باشد (برای این منظور باید قید کرد که n نباید از عددی مثل n_0 تجاوز کند) .

همچنین سعی کنید شبیه مربعهای وفقی بسازید، مثلاً آیا می‌توان عددهای صحیح از ۱ تا ۱۹ را در نقاط گرهی طرح c از شکل ۱۲۰ چنان قرار داد که مجموع عددهای واقع در روی هریك از ۹ خط راست مقدار ثابتی باشد ؟

۴ . شش نقطه را روی صفحه چنان قرار دهید(۸۰) که هر سه نقطه رئوس یك مثلث متساوی‌الساقین باشند .

۵ . هشت نقطه را در فضا چنان قرار دهید(۸۱) که همهٔ ۵۶ مثلث (C_8^3) بدست آمده (که رأسهای آنها نقاط مفروض هستند) متساوی‌الساقین باشند .

دربارهٔ این مسئله مطالعه کنید که چگونه می‌توان n نقطه را $(n=7, 8, 9 \ldots)$ روی صفحه چنان قرارداد که بین C_n^3 مثلثی که از این نقاط بدست می‌آید ، بیشترین تعداد ممکنهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین بوجود آید . شبیه این مسئله را می‌توان برای $n=9, 10, 11, \ldots$ در فضا طرح کرد .

همهٔ این مسائل را می‌توان در فضای m بعدی مورد مطالعه‌قرار داد ، بشرطی که تحت عنوان نقاط فضای m بعدی ، مجموعهٔ m عدد

حقیقتی با نظم معینی استنباط شود و فاصلهٔ بین هر دو نقطهٔ

$$A(\alpha_۱,\alpha_۲,\cdots,\alpha_m) \text{ و } B(\beta_۱,\beta_۱,\cdots,\beta_m)$$

با رابطهٔ زیر محاسبه شود :

$$d=\sqrt{(\alpha_۱-\beta_۱)^۲+(\alpha_۲-\beta_۲)^۲+\cdots+(\alpha_m-\beta_m)^۲}$$

۶ با استفاده از رابطهٔ اخیر ثابت کنید[۸۲]، در یك فضای چهار بعدی هر سه نقطه از پنج نقطهٔ

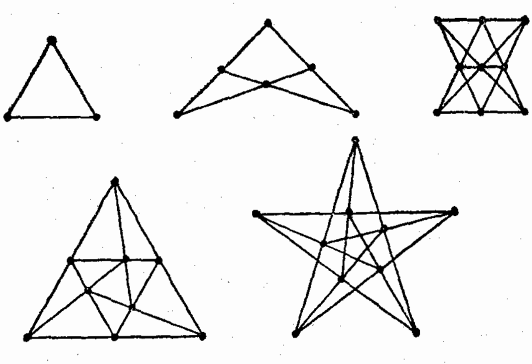
$$O(,۰,۰,۰,۰),\ \ A(۱,۰,۰,۰)\ ,\ B(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۳}}{۲},۰,۰),$$

$$C(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۳}}{۶}\ ,\ \frac{\sqrt{۶}}{۳},\ ۰)\ \ D(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۳}}{۶}\ ,\ \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\ ,\ \frac{\sqrt{۱۰}}{۴})\ ,$$

رأسهای یك مثلث‌متساوی‌الساقین هستند .

مسئله های ۲ و ۳ مربوط بـه مسئلهٔ جالبی از **هندسهٔ تصویری** هستند :

می‌خواهیم شکل مسطحه‌ای از p نقطه و q خط راست چنان



شکل ۱۲۱

بسازیم که از هر نقطه m خط راست بگذرد و هر خط راست از n نقطه (از نقاط مفروض) عبور کند . در اینصورت شکل را با (q_n و p_m) نشان می‌دهند .

بسادگی ثابت می‌شود[۸۳] که باید $pm=qn$ باشد . اگر $p=q$ و $m=n$ باشد، بجای (p_m , p_m) می‌نویسند (p_m).

در شکل ۱۲۱ حالتهای ($۳_۲$)،($۶_۲,۴_۳$)،($۹_۳$)، ($۹_۳$)و($۱۰_۳$) رسم شده است . جالب است که مثلاً شکل ($۷_۳$) را نمی‌توان ساخت .

۳۶

مسائلی با جنبه‌های منطقی

اهمیت مسائلی که با جنبه‌های منطقی طرح شوند ، تنها از نظر محتوی جالب و سرگرم کنندهٔ آنها نیست ، بلکه به این مناسبت هم هست که حل اینگونه مسائل ، مثل حل مسائل ریاضی، به پیشرفت تفکر و تیزهوشی کمك می‌کند و این قابلیت را بوجود می‌آورد که با جستجوی در شرایط مسئله « نقطهٔ ضعفی» را ، که استفادهٔ از آن منجر به حل مسئله می‌شود ، پیدا کنیم . چند نمونه ذکر کنیم :

۱ . دانش آموزان برای بازی به دو دسته تقسیم شده‌اند : دستهٔ « جدی » که بهر سئوال جواب درست می‌دهند ، و دستهٔ « شوخ » که بهر سئوال جواب نادرست می‌دهند .

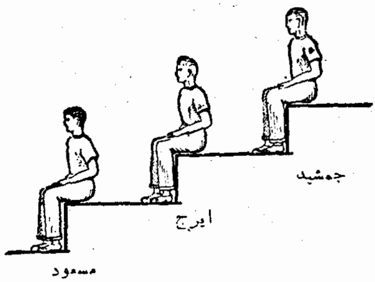
معلم ، که به این امر وقوف داشت ، ازشهریار پرسید که آیاجدی است یا شوخ . معلم جواب شهریار را درست نفهمید به شروین و مژده که درردیف شهریار نشسته بودند ، روکردوپرسید : « شهریار چه‌جوابی بمن داد ؟ » . شروین گفت : « شهریار جواب داد که او جدی است » . مژده گفت : « شهریار جواب دادکه او شوخ است » . شروین ومژده به کدام دسته تعلق داشتند ؟(۸۴)

۲ . شش دانش‌آموز که تعطیلات خود را می‌گذراندند به سه‌دسته تقسیم شدند . روسای دسته‌ها عبارت بودند از : احمد ، مینا وکورش . احمد وزهره قطعه چوبهای دو متری را برداشتند ، مینا و محمود قطعه چوبهای یك‌متر و نیمی وکورش وفرنگیس قطعه چوبهای یك متری و قرار شدکه همهٔ چوبها را بصورت قطعه‌های نیم‌متری اره‌کنند .

روی کاغذی که به‌دیوار نصب بود یادداشت شدکه دستهٔ A و B ، ۲۶ قطعه ؛ دستهٔ C و D : ۲۷ قطعه و دستهٔ E و F ، ۲۸ قطعه چوب تحویل دادند . نام D را پیداکنید .(۸۵)

۳ . سه دوست : جمشید . ایرج و مسعود بدون کلاه پشت سرهم نشسته‌اند (شکل ۱۲۲) ، ضمناً ایــرج و مسعود نمی‌توانند سرخود

را بعقب برگردانند، ایرج سرمسعود را که پائین‌تر از او نشسته است و جمشید سر دو دوست خود را می‌بیند.



شکل ۱۲۲

ازداخل کیسه‌ای‌که دو کلاه سفید و سه‌کلاه سیاه درآن گذاشته شده‌بود (وازاین‌امرهرسه‌نفراطلاع داشتند)، سه‌کلاه درآوردند وبر سر هر یك کلاهی گذاشتند، بطوریکه هیچکدام از رنگ کلاه‌خوداطلاع نداشتند. رنگ دوکلاهی هم که درکیسه باقیمانده بود برای هرسه نفر مجهول بود.

جمشید گفت که من نمی‌توانم رنگ کلاه خودم را پیداکنم. ایرج هم که جواب جمشید را شنیده بود گفت، اطلاعات اوهم برای پیداکردن رنگ کلاه خودش کافی نیست. آیا مسعود می‌تواند براساس جوابهای دوستانش رنگ کلاه خود را بگوید؟(۸۶)

☆☆☆

مسائلی وجود دارد که برای حل آنها باید تحلیل دقیقی ازمفروضات مسئله بعمل آید، مفروضاتی که درنظر اول با مجهول ارتباط ندارند. مثلاً:

۴. در یك مسابقه پنج نفر شرکت کردند. پس از مسابقه‌چنین اعلام شد:

I. سعید دوم و ساسان سوم شد .

II . جواد سوم و خسرو پنجم شد .

III . خسرو اول و جواد دوم شد .

IV . سعید دوم و فیروزه چهارم شد .

V . ساسان اول و فیروزه چهارم شد .

اگر بدانیم در هر مورد از این پنج جواب ، ردیف یکنفردرست و ردیف دیگری نادرست ذکر شده باشد ، ردیف صحیح پنج نفر را پیدا کنید.(۸۷)

۵ . شانزده دانشجو پس‌از تعطیلات‌زمستانی به لنینگرادبرگشتند. بین آنها چهارنفر اهل کیف بودند : A ، B ، C ، D ؛ چهار نفر اهل مسکو : E ، E ، G ، H؛ چهارنفراهل‌ساراتف : I ، K ، L ، M و چهار نفر اهل فرغان :N ، O ، P و R

همچنین A ، E ، I و N ، ۲۰ سال دارند، B ، F ، K و O ۲۱ سال ، C ، G ، L و P ، ۲۲ سال و D ، H ، M و R ، ۲۳ سال .

بین آنها چهارنفر ریاضی دان ، چهار نفر شیمی دان ، چهار نفر زمین‌شناس و چهار نفر زیست‌شناس وجود دارد ، ضمناً هر یك از چهار نفری که در یك رشته درس می‌خوانند از شهرهای مختلف و با سالهای مختلف‌اند .

چهار دانشجو در دورهٔ اول ، چهار نفر در دورهٔ دوم ، چهار نفر در دورهٔ سوم وچهار نفر در دورهٔ چهارم تحصیل می‌کنند، ضمناً هر یك از چهار نفری که در یك دوره تحصیل می‌کنند ، از شهرهای مختلف ، با سالهای مختلف و در رشته‌های مختلف‌اند .

بالاخره چهار نفر از این دانشجویان به فوتبال ، چهار نفر به بکس، چهار نفر به والیبال و چهار نفر به شطرنج علاقمندند ، و هر یك از چهار نفری که یکی از این ورزشها را دوست دارند از شهرهای مختلف ، باسالهای مختلف ، از رشته‌های مختلف و از دوره‌های‌مختلف تحصیل‌اند .

برای هر یك از دانشجویان ، رشتهٔ تحصیلی ، دورهٔ تحصیل و ورزش مورد علاقه را معلوم‌کنید ، بشرطی‌که بدانیم I والیبالیست ، F فوتبالیست ، C زیست شناس ، D دانشجوی دورهٔ اول ریاضیات و علاقمند به شطرنج ، G دانشجوی دورهٔ دوم شیمی و علاقمند به شطرنج و بالاخره K دانشجوی دورهٔ سوم زمین شناسی و علاقمند به شطرنج باشند .

برای سهولت بررسی بهتر است دراین‌باره جدولی تشکیل دهیم در خانه‌های این جدول باید برای هر دانشجو ، دانشکده، دوره تحصیلی و ورزش مورد علاقه را در نظر بگیریم .

در جدول، مفروضات مسئله‌را قرار می‌دهیم‌و کوشش‌می‌کنیم‌جاهای خالی را پرکنیم . (۸۸)

سن / شهر	۲۰ سال	۲۱	۲۲ سال	۲۳ سال
کیف	A ــ، ــ، ــ	B ــ، ــ، ــ	C زیست‌شناسی، ــ، ــ	D ریاضی، I، شطرنج
مسکو	E ــ، ــ، ــ	F ــ، ــ، فوتبال	G شیمی، II، شطرنج	H ــ، ــ، ــ
ساراتف	I ــ، ــ، والیبال	K زمین‌شناسی، III، شطرنج	L ــ، ــ، ــ	M ــ، ــ، ــ
فرغان	N ــ، ــ، ــ	O ــ، ــ، ــ	P ــ، ــ، ــ	R ــ، ــ، ــ

* * *

کشف ارقام مربوط به یك عمل حساب را هم (که بوسیلهٔ ستاره یا حروف الفبا مشخص‌شده‌اند) می‌توان جزو مسائل مربوط به‌منطق بحساب آورد.

حل اینگونه مسائل به پیشرفت فکر منطقی کمك می‌کندوطرح مسائل جدیدی از اینگونه می‌تواند زمینهٔ مناسبی بـرای سرگرمیهای مربوط به اندیشه و استدلال باشد.

در چهار نمونه‌ای که در اینجا آورده‌ایم می‌توان، بـا در نظر گرفتن تمام حالتهای ممکن، مقدار هر یك از ارقام مجهول را بدست آورد (در هر یك از این نمونه‌ها تنها یك جواب وجود دارد)(۸۹).

I . در هر یك از دو عمل زیر رقمها را بدست آورید:

a)

$$\begin{array}{r} \sqrt{******} = *** \\ -\ * \\ \hline -\ *** \\ ** \\ \hline -\ ۴*** \\ **** \\ \hline ۰ \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} -\ ****** & *** \\ **** & *۸* \\ \hline -\ *** & \\ *** & \\ \hline -\ **** & \\ **** & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

II . مقدار هر یك از حروف را در دو عمل زیر پیدا کنید :

a)

$$\begin{array}{r} \text{cmex} \\ +\ \text{grom} \\ \hline \text{gremu} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} \text{forty} \\ \text{ten} \\ +\ \text{ten} \\ \hline \text{sixty} \end{array}$$

(در هر عمل حروف شبیه بهم نمایندهٔ یك رقم و حروف مختلف نمایندهٔ رقمهای مختلف‌اند) .

اینگونه مسائل را بطریق دیگری هم می‌توان طرح کرد : کلمه‌ای را بعنوان «کلید» ، که شامل ۱۰ حرف مختلف باشد ، در نظر می‌گیریم وحروف آنرا بردیف بجای رقمهای ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۰ بحساب می‌آوریم. سپس عمل تقسیمی را بوسیلهٔ حروف «کلید» می‌نویسیم و حل مسئله عبارتست ازکشف کلمهٔ «کلید» .

فرض کنید به عنوان «کلید» جملهٔ « زندگی خوبست » را در نظر بگیریم ، بنابراین تناظر حروف و ارقام چنین است :

ز	ن	د	گ	ی	خ	و	ب	س	ت
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۰

تقسیم عدد ۲۴۰۱۷۶ بر ۱۱۹ به‌کمك حروف جملهٔ مفروض به این صورت درمی‌آید* :

خ و ز ت گ ن ــ | س ز ز
ب د ن | ز ت ن
(۱) ــــــــ | (۱) (۲)
و ز ن ــ
ش ز ز
(۲) ــــــــ
خ ب س

ابتدا به‌حروفی توجه می‌کنیم‌که با علامت(۱) مشخص‌کرده‌ایم؛از تساوی(ب‌دن=س‌زز×ن)نتیجه می‌شود : (ن≤ز.ن) وبنا برین(۱=ز) است ؛ همچنین از شکل تقسیم بسادگی معلوم می‌شود که رقم دوم در خارج قسمت مساوی صفر است .

سپس به حروفی می‌پردازیم کــه با علامت (۲) مشخص شده‌اند ، بسادگی نتیجه می‌شود که (۲=ن) (زیرا تفاضل «س ز ز — و ز ن» عددی است دو رقمی و بنابراین «۱=ز—ن» می‌شود) و (۸=ب)است (زیرا«۰=ت» و «ت‌گ‌ن=ن+ب‌دن» است) .

کسی که بحل چنین مسئله‌ای می‌پردازد با در دست داشتن ردیف بعضی از حروف ، می‌تواند حدس بزندکه جملهٔ «کلید» «زندگی‌خوبست» می‌باشد. محاسبات واستدلالهای بعد این‌حدس‌را تأیید یا تکذیب‌می‌کند (و در اینجا تأیید می‌کند) .

وقتی مسائلی از این قبیل درست شده باشد ، که پس از کشف‌رمز

---

*) حروفی را که در تقسیم نوشته شده است ، از چپ به راست درنظر بگیرید .

حروف آن ، جمله یاکلمه‌ای به عنوان «کلید» درست نکنند ، حل مسئله بغرنج‌تر می‌شود .

در اینجا سه مسئلهٔ دیگر ذکر می‌کنیم کـه در حل آنها عناصر منطقی وجود دارد و آخرین آنهامی‌توانند نمونهٔ جالبی از تعبیرمعادلات سیال درجه اول باشد .

عبوردشوار

سه تاجر A ، B و C و سه‌کارمند آنها a ، b و c بایدبوسیلهٔ یك قایق دو نفری از رودخانه‌ای عبورکنند؛ منتهی هیچیك ازکارمندان درجائی‌که یکی از تاجرهای دیگر وجود دارد ، نباید بدون صاحب کار خود باشد .

یکی از راه‌حلها در طرح زیر داده شده است :

رفتن	ab	bc	AB	BC	ab	ac
برگشتن	b	c	Bb	a	a	

اگر n تاجر با مستخدمین خود باشند برای $n=۴$ و $n=۵$ مسئله بـه کمك قایق دو نفری قابل حل نیست ، ولی اگر از قایق سه نفری‌استفاده کنیم ، قابل حل خواهد بود .

از خواننده می‌خواهیم ثابت‌کندکه‌در حالتهای زیر مسئله جواب دارد: a) به‌ازاء $n=۲$ (قایق‌دو نفری)، باسه‌خط «سیرمستقیم؛ b) به‌ازاء $n=۴$ (قایق سه نفری) با پنج خط سیر « مستقیم » ؛ c) به ازاء

$n=5$ (قایق سه نفری) با شش خطسیر «مستقیم»(۹۰).

مسئله به ازاء $n=6$ و باقایق سه نفری، بنظر قابل‌حل می‌رسد، ولی‌واضح است‌که به ازاء هرمقدار n می‌توان با قایق چهارنفری مسئله را حل‌کرد.

اگر در رودخانه جزیره‌ای در نظر بگیریم و فرض کنیم که‌ضمن عبور از رود خانه‌بتوان موقتاً درآن پیاده شد، با قایق دو نفری‌می‌توان مسئله را به ازاء هر مقدار دلخواه n حل‌کرد.

نشخیص سکهٔ تقلبی

در سالهای اخیر طرح مسائل مربوط به تشخیص سکهٔ تقلبی، که تنها در وزن با سکه‌های معمولی فرق دارد، خیلی رواج پیدا کرده است.

در حالت سادهٔ این مسئله، باید k توزین با تراز و (بدون‌استفاده از وزنه) سکهٔ تقلبی را (که از همه سبک‌تر است) بین $n=3^k$ سکه پیداکرد.

در اینجا کافی است سکه‌ها را به سه دستهٔ 3^{k-1} سکه‌ای تقسیم کنیم، با قرار دادن دو دسته از این سکه‌ها در دو کفهٔ ترازو، بسادگی دستهٔ 3^{k-1} سکه‌ای، که شامل سکهٔ‌تقلبی است، معلوم‌می‌شود. اگر در مورد این دسته هم، همان عمل را انجام دهیم، به دستهٔ 3^{k-2} سکه‌ای شامل سکهٔ تقلبی می‌رسیم و غیره. مسئله را می‌توان به

این ترتیب مشکل‌ترکرد که سبك‌تر یا سنگین‌تر بودن سکهٔ تقلبی معلوم نباشد .

در اینجا یکی از مسائل قابل حل را می‌آوریم :

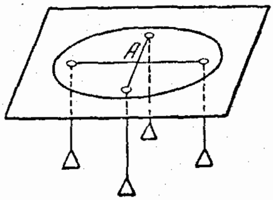
بین دوازده سکه ، یك سکهٔ تقلبی وجوددارد ، با سه توزین این سکه را پیداکنید و معین کنید که آیا این سکه از سکه‌های معمولی سبك‌تر است یا سنگین‌تر .

اگرسکه‌های چهار تائی را بنحوی‌که درستونهای دوم وسوم‌جدول صفحهٔ ۳۲۷ با توزین مقایسه‌کنیم ، (در جدول فقط شمارهٔ سکه‌ها ذکر شده است) ، بسادگی‌روشن می‌شود (امتحان‌کنید!) که در بیست و چهار حالتی‌که ممکن است بوجودآید یا یکی ازسکه‌های باشمارهٔ : ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ ، ۹ . ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۲ سبك‌تر و تقلبی است و یا یکی از آنها سنگین‌تر و تقلبی است (سطرهای آخر جدول‌را ببینید) به این ترتیب بیست‌وچهار حالت مختلف از توزین سکه‌ها بدست‌می‌آید که در جدول در ستونهای متوالی ، که شماره‌گذاری شده است ، نشان داده شده است .

می‌توانید با آزمایش روی ۱۲ سکه ، ببینید که کدامیك از حالتهای بیست‌وچهارگانه پیدا می‌شود و با جوابی که در سطرهای‌آخر جدول داده‌ایم ، مقایسه‌کنید .

در زمان ما مسئلهٔ مربوط به سکهٔ تقلبی به انواع مختلف طرح شده است و زمینه‌ای برای سرگرمیهای ریاضی فراهم شده است .

شمارهٔ توزین	سکه‌ها		احتمال نتایجی‌که در توزین بدست‌می‌آید (علامتها : س ـ یعنی طرف چپ سبکتر است ، و ـ یعنی طرف چپ وزین‌تر (سنگین‌تر) است، ه ـ یعنی چپ و راست هم وزن‌هستند).																							
	چپ	راست	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۱	۱,۲,۳,۴	۵,۶,۷,۸	س	س	س	س	و	و	و	و	ه	ه	ه	ه	و	و	و	و	س	س	س	س	ه	ه	ه	ه
۲	۱,۲,۳,۵	۴,۹,۱۰,۱۱	س	س	س	و	س	ه	ه	ه	و	و	و	ه	و	و	و	س	و	ه	ه	ه	س	س	س	ه
۳	۱,۶,۹,۱۲	۲,۵,۷,۱۰	س	و	ه	ه	و	س	و	ه	س	و	ه	س	و	س	ه	ه	س	و	س	ه	و	س	ه	و
شمارهٔ سکهٔ تقلبی	: سبکتر		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲												
	: سنگین‌تر														۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲



شکل ۱۲۳

برای تنوع می‌توان از ترازوی «m کفه‌ای» استفاده کرد (شکل ۱۲۳ که در آنجا ۴ = m است) که بدان وسیله در یك توزین معلوم می‌شود که کدامیك از m گروه سکه سبك‌تر از دیگران است .

مسائلی درباره تقسیم مایعات

از ظرف پر از مایعی که ۸ لیتر گنجایش دارد می‌خواهیم ۴ لیتر شراب برداریم ، برای این منظور دوظرف خالی باگنجایش پنج لیتر و سه لیتر در اختیار داریم .

حل مسئله را در طرح زیر داده‌ایم :

۸,۰,۰ ← ۳,۵,۰ ← ۳,۲,۳ ← ۶,۲,۰ ← ۶,۰,۲ ←
← ۱,۵,۲ ← ۱,۴,۳ ← ۴,۴,۰

در این طرح دیده می‌شود که هر بار **ظرف متوسط خالی** را از مایع ظرف بزرگ پرمی‌کنیم و سپس **به اندازه‌ای مساوی گنجایش ظرف کوچك** به ظرف بزرگ برمی‌گردانیم .

می‌توان برای حل مسئله نقش ظرف کوچك را باظرف متوسط عوض کرد: مایع را ازظرف بزرگ در **ظرف خالی کوچك** می‌ریزیم (وآنرا **پر می‌کنیم**) وسپس به **اندازهٔ گنجایش ظرف متوسط** به آن برمی‌گردانیم .

۸,۰,۰ ← ۵,۰,۳ ← ۵,۳,۰ ← ۲,۳,۳ ← ۲,۵,۱ ←
← ۷,۰,۱ ← ۷,۱,۰ ← ۴,۱,۳ ← ۴,۴,۰

اگر در حالت کلی گنجایش سه ظرف‌را a، b و c فرض کنیم (a عددی زوج ، $a>b>c$ و $b+c\geqslant\frac{a}{2}$ است) ، در حالتی که b و c نسبت‌بهم اول و $a\geqslant b+c-1$ باشد ، هر دو طریقه‌ای که در بالا ذکر کردیم ، منجر به حل معادله‌ای با ریشه‌های صحیح و مثبت می‌شود :

$$a-bx+cy=\frac{a}{2} \quad \text{و} \quad a-cu+bv=\frac{a}{2}$$

که بترتیب متناظر با طریقهٔ اول وطریقهٔ دوم می‌شود (فصل۴ را ببینید).

ولی وقتی که $a=b+c-2$ باشد،ممکن است یکی ازطریقه‌ها بی‌نتیجه بنظر برسد (مثلاً ، اگر در طریقهٔ اول $(b-1,0,c-1)$ بوجودآید ، نه‌می‌شود ازظرف بزرگ،ظرف متوسط‌راپر کرد و نه‌می‌توان از ظرف‌کوچك c لیتر در ظرف بزرگ ریخت) ، ولی‌دراین موردحتماً می‌توان از طریقهٔ دیگر به نتیجه رسید . مثلاً وقتی که $a=20$ ، $b=13$ و $c=9$ باشد ، مسئله را می‌توان به طریقهٔ دوم حل کرد[۹۱].

وقتی‌که $a<b+c-2$ باشد، مسئله غیرقابل حل بنظر می‌رسد و خواننده می‌تواند آنرا در حالتی که $a=16$، $b=12$ و $c=7$ است ، امتحان کند[۹۲].

۳۷
مطالب مختلف

در این فصل مطالبی را ازقسمتهای مختلف ریاضی گردآورده‌ایم؛ بعضی از آنها می‌تواند مورداستفادهٔ عدهٔ زیادتری قرارگیردو بعضی دیگر برای کسانی است که ازلحاظ ریاضی آمادگی بیشتری داشته باشند. در مورد بسیاری از آنها تنها قلم، کاغذ و پایداری لازم است و هر مسئله‌ای می‌تواند زمینه‌ای باشدکه خواننده بر مبنای آن جستجوهای جدیدی را انجام دهد.

تعبیر هندسی رابطهٔ :

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+(n-۱)^۲+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

فرض‌کنید در n ردیف (از پائین به بالا) بترتیب $n^۲$،$(n-۱)^۲$، ...،$۳^۳$،$۲^۲$و$۱^۲$ مکعب با ضلعهای مساوی قرار گرفته باشد (شکل ۱۲۴ به ازاء $n=۵$ داده شده است) .

هرم OADBC را محیط برهمهٔ مکعبهادرنظرمی‌گیریم‌بطوریکه $OA=OB=OC=n+۱$ باشد(حجم این هرم مساوی $\frac{(n+۱)^۳}{۳}$ می‌باشد) ؛ از اینجا نتیجه می‌شود که حجم همهٔ مکعبها برابر است با :

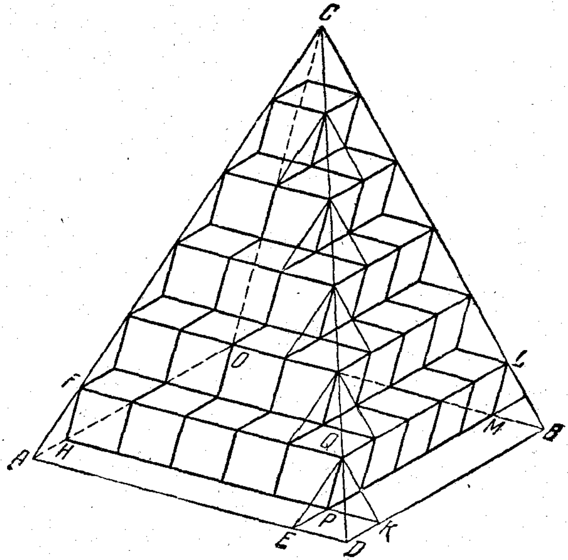
$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+(n-۱)^۲+n^۲=\frac{(n+۱)^۳}{۳}-$$

$$-[n+(n-۱)+\dots+۳+۲+۱]-(n+۱)\times\frac{۱}{۳}=$$

$$=\frac{(n+۱)^۳}{۳}-\frac{n(n+۱)}{۲}-\frac{n+۱}{۳}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶};$$

که در آن عبارت داخل کروشه برابر است با مجموع حجمهای منشور AFHEPQ(حجم $=\frac{n}{۲}$) ، منشور KPQBML(حجم $=\frac{n}{۲}$) و منشورهای مشابه در همهٔ بقیهٔ قشرها ؛ $\frac{۱}{۳}(n+۱)$ عبارتست از مجموع حجمهای هرمهای‌کوچك (EPKDQ و غیره).

با همین روش تساوی زیر را ثابت‌کنید(۹۳):



شکل ۱۲۴

$$۱^۲+۳^۲+۵^۲+۷^۲+\dots+(۲n-۳)^۲+(۲n-۱)^۲=\frac{n(۴n^۲-۱)}{۳}$$

تمرینهائی در بارهٔ « دید هندسی »

در اینجا مسائلی داده شده است که هر کدام از آنها را می‌توان با عنوان « چه‌کسی بیشتر ؟ » به مسابقه‌گذاشت .

در اینگونه مسائل باید بطورمنظم شکلهای مورد نظر رادرتصویر کشف کرد ؛ در مسئلهٔ شمارهٔ ۴ باید دقیقاً فکر کرد چگونه و از راهی باید شروع‌کرد تا حتی یکی ازشکلهای مورد نظر از قلم نیفتد .

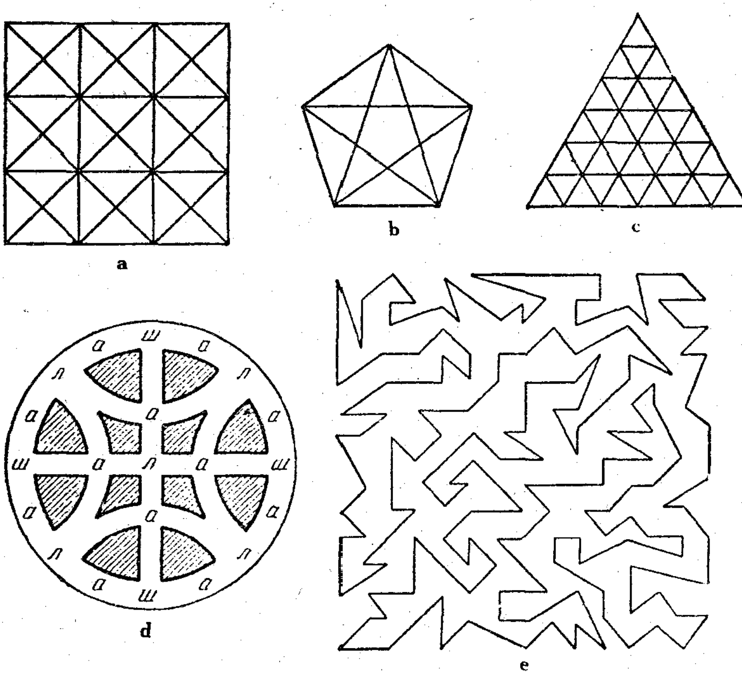
خواننده می‌تواند خود مسائل مشابهی را بسادگی طرح کند .

۱ . در شکل ۱۲۵ ـ a چند مثلث ، چند مربع و چند مستطیل دیده می‌شود[۹۴]؟

۲ . تعداد مثلثهای شکل ۱۲۵ ـ b را پیداکنید[۹۵].

۳ . در شکل ۱۲۵ـ c چند مثلث ، چند شش ضلعی منتظم‌وچند لوزی وجود دارد[۹۶]؟

۴ . چند مربع و چند مستطیل می‌توان در صفحهٔ شطرنج‌معمولی دید ؟ در صفحه‌ای با n^2 خانه و یا صفحه‌ای با $m \cdot n$ خانه‌چطور؟



شکل ۱۲۵

اگرمکعبی به ضلع۱۰ سانتیمتر داشته‌باشیم وآنرا بوسیلهٔصفحاتی موازی با وجوه مکعب به مکعبهائی به ضلع یك سانتیمتر تقسیم کنیم، چند مکعب و چند مکعب مستطیل در آن بوجود می‌آید[۹۷]؟

۵ . کلمهٔ « шалаш » را در شکل ۱۲۵ ـ d به چند طریق می‌توان خواند (روی خط راست یا خط منحنی یا خط شکسته)، بشرطی حرف اول و حرف آخر ш برهم منطبق نباشند[۹۸]؟

ضمناً ازبازی می‌توان یادکرد که چند ضلعی شکستهٔ دلخواه و غیر محدبی رسم‌کرد (مثلاً شکل۱۲۵ ـ e را ببینید)،روی آن‌نقطه‌ای علامت گذاشت و به مسابقه‌گذاشت که چه کسی زودتر می‌تواند معلوم کند که این نقطه داخل چند ضلعی است و یا خارج آن .

اتحادهای جالب

۱ . اتحاد زیر بسادگی قابل تحقیق است :

$$(۳s^{۲n}-۲s^{n}-۱)^{۲}+(۴s^{۲n}+۴s^{n})^{۲}\equiv(۵s^{۲n}+۲s^{n}+۱)^{۲}$$

بنابراین با توجه به روابط:

$$a_n=۳s^{۲n}-۲s^{n}-۱ \;:\; b_n=۴s^{۲n}+۴s^{n} \;:\; C_n=۵s^{۲n}+۲s^{n}+۱$$

(که در آنها s و n عددهای طبیعی و $s>۱$ است) می‌توانیم هر چقدرکه بخواهیم عددهای سه‌گانهٔ فیثاغورثی را بدست آوریم (فصل پنجم را ببینید) .

زوایای مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن a_n ، b_n و c_n باشد، به‌ازاء مقادیر خیلی بزرگ n ، با زوایای مثلثی که اضلاع آن ۳ و ۴

و ۵ باشد ، خیلی کم اختلاف دارد ، زیرا داریم :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{a_n}{b_n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{۳s^{۲n}-۲s^n-۱}{۴s^{۲n}+۴s^n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\frac{۳-\frac{۲}{s^n}-\frac{۱}{s^{۲n}}}{۴+\frac{۴}{s^n}}=\frac{۳}{۴}$$

اتحاد مشابهی پیدا کنید که با کمك آن بتوان اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای بدست آورد که «بتقریب متشابه» با مثلثی باشد که اضلاع آن ۵ و ۱۲ و ۱۳ است .

۲ . اتحادهائی درست کنید که در آنها حاصلضرب دو کثیرالجملهٔ «بزرگ» مساوی با کثیرالجمله‌ای با تعداد کم جملات باشد ، مثلاً :

$$(x^۸-۴x^۷+۸x^۶-۱۰x^۵+۸x^۴-۴x^۳+۲x^۲-x+\tfrac{۱}{۴})\times$$

$$\times(x^۸+۴x^۷+۸x^۶+۱۰x^۵+۸x^۴+۴x^۳+۲x^۲+x+\tfrac{۱}{۴})\equiv$$

$$\equiv x^{۱۶}+\frac{۱۷}{۲}x^۸+\frac{۱}{۱۶}$$

۳. اتحاد $\dfrac{a+b}{a+(a-b)}\equiv\dfrac{a^۳+b^۳}{a^۳+(a-b)^۳}$ (امتحان کنید !)

می‌توان برای نوعی «ساده‌کردن غیر مجاز» کسرها ، که منجر به نتیجهٔ صحیح می‌شود ، مورد استفاده قرار گیرد ، مثلاً :

$$\frac{۳۷^۳+۱۳^۳}{۳۷^۳+۲۴^۳}=\frac{۳۷+۱۳}{۳۷+۲۴}=\frac{۵۰}{۶۱}$$

آیا می‌توانید اتحاد مشابهی پیدا کنید ، که در آن توانهای ساده شده در صورت و مخرج کسر ، مساوی ۴ باشد ؟

۴. اتحاد
$$\frac{\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}\equiv\frac{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)^m}{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}}$$
(m عددی‌است مثبت و گویا) نشان‌می‌دهد که‌گاهی «ساده‌کردن غیر مجازعلامت log » در صورت ومخرج‌کسر : $\frac{\log a}{\log b}=\frac{a}{b}$ می‌توانددمنجر به‌نتیجهٔ صحیح بشود مثلاً (به ازاء $m=2$) :

$$\frac{\log\frac{9}{4}}{\log\frac{27}{8}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{27}{8}}$$

۵. در ردیف اتحادهای عجیب می‌توان از اتحاد زیر نام برد :

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}\equiv a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}};$$

مثلاً :

$$\sqrt[3]{2\tfrac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}};\quad\sqrt[4]{5\tfrac{5}{624}}=5\sqrt[4]{\frac{5}{624}};$$
$$\sqrt[5]{2\tfrac{2}{31}}=2\sqrt[5]{\frac{2}{31}};\ \ldots$$

۶. اگر « بطور غیر مجاز » علامت *sin* را در صورت و مخرج سمت راست اتحاد زیر حذف کنیم :

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ (99)$$

وسپس علامتهای $\sin$ را در سمت چپ اتحاد هم برداریم ، به اتحاد زیر می‌رسیم :

$$\alpha+2\alpha+\ldots+n\alpha=\frac{\frac{n+1}{2}\alpha\cdot\frac{n}{2}\alpha}{\frac{\alpha}{2}}$$

(صحت اتحاد اخیر را ثابت‌کنید) .

۷ . ثابت‌کنید[100] :

$$[3(10^k+10^{k-1}+\ldots+10^2+10+1)n+1]^2\equiv$$
$$\equiv n^2(10^{2k+1}+10^{2k}+\ldots+10^{k+1})+$$
$$+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\ldots+10+1)+1$$

این اتحاد منجر به دو رشته تساویهای عددی جالب می‌شود : به ازاء $n=1$ و $k=1,2,3,\ldots$ داریم :

$$34^2=1156\ ;\quad 334^2=111556\ ;\quad 3334^2=11115556;$$
$$33334^2=1111155556;\ldots$$

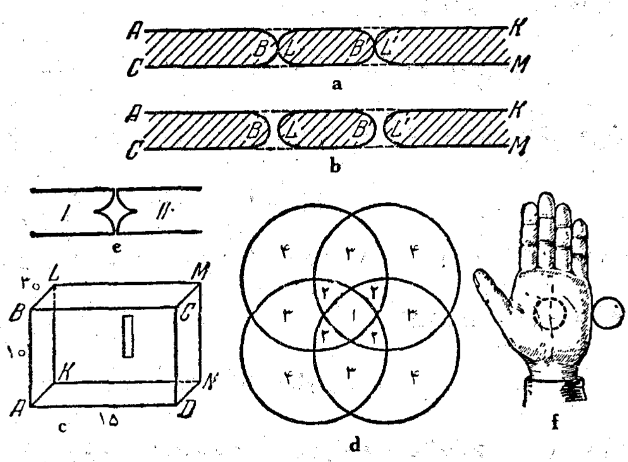
و به ازاء $n=2$ و $k=1,2,3,\ldots$ داریم :

$$67^2=4489\ ;\quad 667^2=444889\ ;\quad 6667^2=44448889\ ;$$
$$66667^2=4444488889\ ;\ \ldots$$

آیا می‌توانید اتحادی پیدا کنید که منجر به رشته تساویهای عددی مشابهی بشود ؟

خطای باصره

دستهای خود را بجلو درازکنید ، انتهای انگشتان اشارهٔ خود را درفاصلهٔ ۳۵ـ۵۰ سانتیمتری چشمهای خود بهم وصل کنید بطوریکه یکی در امتداد دیگری قرارگیرد ، از میان انگشتان خود به دیواری که دور از شما قرارگرفته است ، نگاه‌کنید . بنظر می‌رسد که بین دو انگشتان به‌اندازهٔ « یك بند انگشت » اضافی قرار گرفته است و اگر دو انگشت خود را کمی ازهم دورکنید ، این قسمت اضافی درهوا « آویزان » باقی می‌ماند .



شکل ۱۲۶

هر چهٔ دیواری که از «میان انگشتان» دیده می‌شود دورتر باشد، این «بند اضافی» بلندتر خواهدبود . تعداد «بندهای اضافی» را می‌توان با وصل‌کردن دو به‌دوی انگشتان دو دست ، زیادکرد .

توضیح این پدیدهٔ تفریحی خیلی ساده است : چشم راست قسمتی از دیوار را که به خطهای ABC و KLM محدود است ، نمی‌بیند (شکل ۱۲۶ ـ a و b) ، و چشم‌چپ قسمتی از دیوار را که به‌خطهای AB'C و KL'M محدود است . در نتیجه قسمتی از دیوار که بصورت قسمت خط خوردهٔ شکل ۱۲۶ ـ a و b است دیده نمی‌شود .

به‌همین علت‌است‌که اگرشکاف باریك عمودی روی وجهKLMN از قوطی‌که اندازه‌های تقریبی‌آن ۳۰×۱۵×۱۰ سانتیمتر مکعب‌است بوجود آوریم(شکل۱۲۶ـ c را ببینید) ، واز میان شکاف با دوچشم‌خود به دیوارهٔ بـا اضلاع « وجـه مخفی » ABCD نگاه‌کنیم ، دو شکاف موازی حس می‌کنیم (یایك شکاف پهن با بندهای عمودی) .

اگر در وجهٔ KLMN بجای شکاف چهار سوراخ کوچك ، که بررأسهای یك مربع واقع‌اند ، بوجود آوریم و بجای وجه ABCD قابی باصفحهٔ عکاسی قرار دهیم، دراینصورت‌اگر با این «دستگاه عکاسی» از دایرهٔ روشنی‌که در زمینهٔ سیاه قرارگرفته است عکس برداری‌کنیم ، « برگ‌گلی » بدست مـی‌آید (شکل ۱۲۶ ـ d را ببینید) کـه شدت روشنائی زمینهٔ آن با اضافه شدن شمارهٔ قستمها ،کم می‌شود .

برای تنوع می‌توان بجای انگشتان دست ، از دو نوار مقوائی I و II استفاده‌کرد (که مجاور هم و یا با فاصلهٔ‌کمی از هم قرارگیرند ؛ شکل ۱۲۶ ـ e را ببینید) . بجای شکاف قائم بـا کناره‌های مـوازی

(شکل ۱۲۶ ـ c) می‌توان شکاف را با شکلهای مختلف در نظر گرفت. باعکس‌برداری با چنین شکافهائی می‌توان « عکسهای هندسی » جالب و متنوعی بدست آورد .

در خاتمه یکی دیگر از انواع بسیار جالب خطای باصره را یادآوری می‌کنیم . با چشم راست از داخل یك لوله شیئی را نشانه بروید، سپس کف دست چپ را در انتهای لوله روبروی چشم چپ و مماس بر کنارهٔ لوله نگه دارید ، بطوریکه مانعی بین شیئی و چشم چپ باشد ، حالا اگر هر دو چشم را بازکنید ، شیئی را از وسط کف دست چپ می‌بینید ، مثل اینکه کف دست به اندازه مقطع لوله سوراخ شده باشد (شکل ۱۲۶ ـ f) .

مسائل مختلف

ابتدا چند مسئله و سئوال ساده طرح می‌کنیم :

۱ . در ظرفی m سانتیمتر مکعب آب و در ظرف دیگری n سانتیمتر مکعب الکل وجود دارد . ابتدا ازظرف‌اول a سانتیمترمکعب آب در ظرف دوم می‌ریزیم و سپس (بعد از آنکه آنها راکاملا مخلوط کردیم) a سانتیمتر مکعب از ظرف دوم به ظرف اول برمی‌گردانیم .

برای سهولت کار فرض می‌کنیم که حجم مخلوط مساوی مجموع حجمهای دو مایع مخلوط شده باشد ، در اینصورت معین کنید که آیا حجم الکلی‌که به ظرف اول اضافه شده بیشتراست یا آبی‌که به‌ظرف دوم اضافه‌شده[۱۰۱]؟

۲ . از پتروف سئوال کردند « این عکسی کــه روی دیوار است متعلق به‌چه‌کسی‌است؟ » پتروف جواب داد : « پدرصاحب این‌عکس تنها پسر پدر کسی است که با شما صحبت می‌کند » . صاحب این عکس بـا پتروف چه نسبتی دارد[۱۰۲]؟

۳ . همهٔ جدجدهای پدری و جدجدهای مادری شما رویهم چند جدجد پدری ومادری دارند[۱۰۳] ؟

۴ . اگر زاویه‌ای مساوی ۱۵ دقیقه را زیرذره‌بینی‌که چهارمرتبه بزرگ می‌کند قرار دهیم ، بچه اندازه بنظر می‌رسد[۱۰۴]؟

۵ . اگر قیمت تمام اجناس ۲۰٪ پائین بیاید ، قدرت خرید اهالی چند درصد زیاد می‌شود[۱۰۵]؟

۶ . اگر قدرت خرید مردم یکبار ۲۰٪ و بار دیگر ۲۵٪افزایش یابد ، رویهم قدرت خرید مردم چند درصد اضافه شده است[۱۰۵a]؟

۷ . عقربه‌های ساعت شمارو دقیقه شمار در هر شبانه روزچندبار با هم زاویهٔقائمه می‌سازند[۱۰۶]؟

۸ . وقتی‌که احمد هم‌سن محمود بود ، خاله‌هما به‌اندازهٔمجموع سن امروزی احمد ومحمود سن داشت . وقتی خاله‌هما هم‌سن احمدبود، احمد چند ساله بود[۱۰۷]؟

۹ . خلبان نقطهٔ A پرواز کرد و ۸۰۰کیلومتر بطرف جنوب رفت (تا نقطهٔ B) ، سپس ۸۰۰کیلومتر بطرف مشرق پروازکرد (تا نقطهٔC) در این موقع در پائین خرسهائی دید ، رنگ خرسهائی که خلبان دیده است ، چیست ؟ بشرطی‌که بدانیم $AB=AC$ است[۱۰۸]

۱۰ . A وB گلهٔ گاو خود را فروختند ، پولی که بابت هر گاو

گرفتند ، بر حسب تومان ، برابر بود با تعداد گاوهای گله . خواستند پولها را بطور مساوی قسمت کنند ، هرکدام بنوبت ۱۰ تومان برداشتند، بعد از چندبار اولی آنچه که از ۱۰ تومانها باقیمانده بود برداشت و بجبران آن کیف خود را با بقیهٔ پول به دیگری داد . قیمت کیف چقدر بوده است[۱۰۹]؟

۱۱ . سه نفر با زنهایشان وارد مغازه‌ای شدند . هر یك از شش نفر چیزهائی خریدند . هرکس به تعداد اشیائی که خریده بود برحسب تومان پول داد .

هریك ازمردها ۴۵ تومان بیش اززنهای خودپول دادند؛هوشنگ ۵۲۵ تومان بیشتراز زیبا پرداخت و مصطفی ۱۳ تومان بیش از مژده ، بقیهٔ افراد هم مهدی و نرگس بودند .

زن‌و شوهرهارا مشخص کنید و معین کنید هر کدام چند شیئی خریدکرده‌اند[۱۱۰]؟

۱۲ . شخصی پول‌خود را بین بچه‌ها تقسیم‌کرد ، به اولی یك‌تومان به اضافه $\frac{1}{6}$ بقیهٔ پول را داد؛ به دومی دو تومان به اضافهٔ $\frac{1}{6}$ باقیماندهٔ جدید ، به سومی سه تومان به اضافهٔ $\frac{1}{6}$ باقیماندهٔ جدید وغیره .

اگر به این ترتیب تمام پول (S تومان) بطور مساوی بین همهٔ بچه‌ها تقسیم شده باشد ، معلوم کنید مقدار S و تعداد بچه‌ها را .

در این مسئله ، اگر سهم هردونفر را مساوی قرار دهیم، دستگاه متوافقی با مجهول S بدست می‌آیدکه جواب آن $S=25$ است.مجذور هرعدد طبیعی‌دارای‌همین خاصیت‌است[۱۱۱] : اگراز n^2 ابتدا یك واحد و

$\frac{1}{n+1}$ باقیمانده، سپس ۲ واحد و $\frac{1}{n+1}$ باقیماندهٔ جدید و غیره را را برداریم، تمام قسمتها با هم مساوی خواهد شد.

۱۳. عبدالله از M بطرف N براه افتاد، در همان زمان پرویز با موتورسیکلت (به رانندگی رضا) حرکت کرد. پرویز قسمتی از راه را را سواره و بقیه را پیاده رفت، رضا وقتی که پرویز پیاده شد بطرف عبدالله برگشت، او را سوارکرد و در یکزمان با پرویز به N رسیدند.

اگر فاصلهٔ MN مساوی s کیلومتر، سرعت پیاده u کیلومتر در ساعت و سرعت موتور سیکلت v کیلومتر در ساعت باشد، مطلوبست مقدار وقتی که این سه دوست در راه از M تا N صرف کرده‌اند(۱۱۲).

این مسئله رامی‌توان بطرق مختلف تعمیم داد، مثلاً اینکه یك موتور سوار (یا دو موتورسواریکی با سرعت v_1 کیلومتر درساعت ودیگری با سرعت v_2 کیلومتر در ساعت) باید به n دوست کمك کند تا آنهارا در یك زمان به محل مورد نظر برساند؛ می‌توان فرض را براین گرفت که موتور سوار بتواند در عین‌حال دو مسافر سوار کند و غیره.

۱۴. کاری در فاصلهٔ بین ساعتهای ۴ و ۵ شروع و در فاصلهٔ ۷ تا ۸ تمام شده است، ضمناً اگرجای عقربه‌های ساعت شمارو دقیقه شمار را با هم عوض‌کنیم، ساعت شروع به ساعت‌خاتمه و ساعت خاتمه به ساعت شروع تبدیل می‌شود.

کار چقدرطول کشیده‌است؟ ضمناً ثابت کنیدکه در ابتدا وانتهای کار عقربه‌ها بیك‌اندازه نسبت به جهت افقی تمایل دارند(۱۱۳).

۱۵. در یك شبانه روز چندمرتبه عقربه‌های‌ساعت به وضعی قرار می‌گیرند که اگر جای دوعقربه‌را با هم عوض کنیم از لحاظ تعیین‌وقت

معنا داشته باشد[۱۱۴].

۱۶ . ثابت کنید[۱۱۵] که به ازاء هر عدد طبیعی k ، تعداد کل ارقام در دنبالهٔ

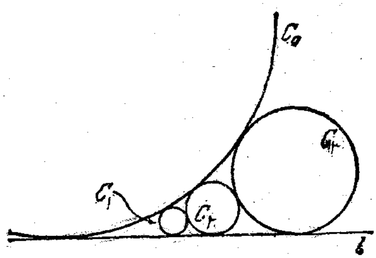
$$1,2,3,\ldots,10^k-1,10^k$$

برابر است با تعداد صفرها در دنبالهٔ

$$1,2,3,\ldots,10^{k+1}-1,10^{k+1}$$

۱۷ . ثابت کنید که شکل مسطحهٔ S را ، بهر شکل دلخواهی که باشد ، بشرطی که مساحت آن از یك سانتیمتر مربع کمتر باشد ، می‌توان در یك صفحهٔ شطرنجی ، با خانه‌های یك سانتیمتر مربعی ، چنان قرار داد که حتی یکی از نقاط گرهی صفحه را هم نپوشانده باشد[۱۱۶].

۱۸ . آیا می‌توان خط راستی چنان رسم کرد که همهٔ خطهای مستقیم l_1 ، l_2 ، l_3 و l_4 را ، که بطور دلخواه درفضا وجود دارند، قطع کند[۱۱۷]؟



شکل ۱۲۷

۱۹ . خط راست l بردایرهٔ C_0 مماس‌است (شکل ۱۲۷ را ببینید) دایره‌های C_1، C_2، C_3، ... را چنان رسم کرده‌ایم که دایرهٔ C_{k+1} بر دایره‌های C_k و C_0 و خط l مماس باشد .

مطلوبست شعاع دایرهٔ C_{1000} ، بشرطی که شعاع دایرهٔ C_0 مساوی یك کیلومتر و شعاع دایرهٔ C_1 مساوی یك میلیمتر باشد[۱۱۸].

۲۰ ثابت کنید شعاع نوری که بطور متوالی از سه آینهٔ دو بدو عمود برهم منعکس شود ، به شعاعی «منجرمی‌شود» که موازی با « شعاع تابش» ولی در جهت عکس آنست[۱۱۹].

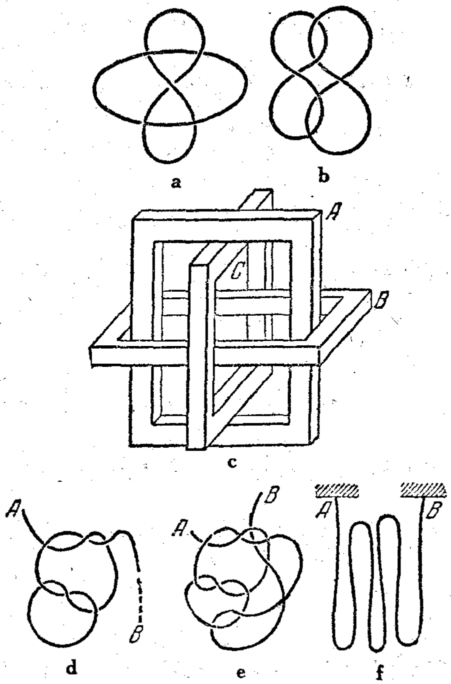
۲۱ . در چه جهتی باید شعاع نور را به مکعب مستطیل ، با وجوه آینه‌ای ، تاباند تا پس از عبور از هر شش وجه آن به نقطهٔ اصلی برگردد[۱۲۰]؟

۲۲ . خلبانی ۲۰۰۰ کیلومتر بطرف جنوب ، ۲۰۰۰ کیلومتر بطرف مشرق و ۲۰۰۰ کیلومتر بطرف شمال پرواز کرد و بجای اولیه‌ای که حرکت کرده‌بود، رسید. ازچه نقطه‌ای پرواز راشروع کرده‌است؟ (مسئله‌جوابهای زیادی دارد)[۱۲۱].

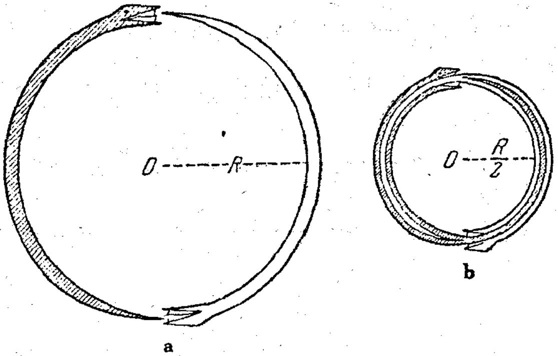
۲۳ . هواپیما از لنینگراد پرواز کرد ، a کیلومتر بطرف شمال رفت ، a کیلومتر بطرف مشرق و a کیلومتر بطرف جنوب . در اینموقع در ۳a کیلومتری شرق لنینگراد بود . مطلوبست مقدار a[۱۲۲].

۲۴ . اگر مثلث‌متساوی‌الاضلاعی بازاویهٔ ۷۲ درجه برسطح‌زمین رسم‌کنیم ، مساحت آن چقدراست ؟ دراینجا صحبت از مثلث‌کروی‌است که اضلاع آن قوسهائی از دایرهٔ عظیمهٔ کره هستندکه برسه رأس مثلث عبور کند[۱۲۳].

۲۵ . زوایای مثلث‌متساوی‌الاضلاع کروی‌را پیداکنیدکه طول‌ضلع آن یك‌کیلومتر باشد و بر سطح آرام یك دریاچه رسم شده باشد[۱۲۴].



شکل ۱۲۸



شکل ۱۲۹

چند معما

۱ . ثابت کنید که از «بافت» a در شکل ۱۲۸ (صفحهٔ ۳۴۶) می‌توان، بدون بازکردن حلقه‌های نخی ، به بافت b رسید .

۲ . چگونه می‌توان سه حلقهٔ نخی را بهم وصل کرد که با باز کردن هرکدام از آنها بتوان دو حلقه دیگر را از هم جدا کرد (بدون اینکه به بازکردن مجدد احتیاجی باشد) .

شبیه این مسئله را در مورد n حلقهٔ نخی حل کنید[۱۲۵]

۳ . اگر کلمهٔ « داخل » راکمی آزادانه‌تر تعبیر کنیم ، می‌توان مسئلهٔ زیر را حل کرد : سه جسم کاملاً مشابه A، B و C را طوری پیدا کنید که بتوان آنها را طوری قرارداد که A داخل B ، B داخل C و C داخل A باشد .

شرایط مسئله در سه «چهار چوبی» که کمی کشیده باشند ، صدق می‌کند (شکل ۱۲۸ ــ c را ببینید) .

شبیه این مسئله رامی‌توان در حالتی هم‌که n شیئی داشته باشیم ، حل کرد . n ماردر نظر بگیرید (که می‌توان آنهارا بصورت کیسه‌های باریك با دیواره‌های نازك و«مخروطی شکل» درنظر گرفت) که بصورت دایره‌ای به‌شعاع R قرار گرفته باشند و هر یك ازآنها ماری را که در جلوش قرار گرفته است شروع به بلعیدن بکند و سرعت بلعیدن برای تمام مارها یکسان باشد (شکل ۱۲۹ ــ a برای n=۲) .

وقتی‌که هر یك از مارها نیمی ازقربانی خودش را ببلعد،حلقه‌ای بادوقشر به‌شعاع $\frac{R}{۲}$ بدست می‌آید (شکل۱۲۹ ـ b) ؛ و وقتی‌که هریك ازآنها۹۰٪ مار مورد نظر خود داخل‌کند ، حلقه‌ای به شعاع $\frac{R}{۱۰۰}$ که‌از صد قشر تشکیل شده است ، بدست می‌آید و غیره .

۴ . اگر رشته نخی را ابتدا بصورت d (شکل ۱۲۸) و سپس بصورت e درآوریم ، می‌توان بسادگی باکشیدن دو انتهای A و B آن، به نخی که‌گره ندارد برسیم .

بنابراین با محکم کردن دوانتهای A و B نخ بصورت f،می‌توان آنرا بصورت e در آورد . خودتان آزمایش‌کنید .

۳۸

جواب مسائل

۱ . عدد $\alpha = 0/(a_1 a_2 \cdots a_{s-1} a_s)_{(k)}$ را در نظر می‌گیریم؛ عددی راکه معرف یك دورهٔ تناوب کسر است ، N می‌نامیم .

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{s-1} a_{s_{(k)}} = N$$

در این صورت داریم :

$$\alpha = \frac{a_1}{k} + \frac{a_2}{k^2} + \cdots + \frac{a_{s-1}}{k^{s-1}} + \frac{a_s}{k^s} + \frac{a_1}{k^{s+1}} + \frac{a_2}{k^{s+2}} + \cdots +$$

$$+\frac{a_{s-1}}{k^{2s-1}}+\frac{a_s}{k^{2s}}+\dots=\frac{a_1k^{s-1}+a_2k^{s-2}+\dots+a_s}{k^s}+$$

$$+\frac{a_1k^{s-1}+a_2k^{s-2}+\dots+a_s}{k^{2s}}+\dots=\frac{N}{k^s}+\frac{N}{k^{2s}}+\frac{N}{k^{3s}}+\dots=$$

$$=\frac{N}{k^s-1}=\frac{N}{\overline{k-1}\ \overline{k-1}\ \dots\ \overline{k-1}\ \overline{k-1}_{(k)}}$$

در مخرج کسر عدد s رقمی است که هر یك از رقمهای آن مساوی «$k-1$» است .

۲ . فرض کنید که می‌خواهیم جذر عدد $N=abcd_{(k)}$ را در مبنای k محاسبه کنیم (a ، b ، c ، d رقمهای عدد N در مبنای k هستند ؛ در عملیات بعدی از نوشتن علامت «k» در زیر عددها صرفنظر شده است) ، اگر اولین رقم جذر مفروض α باشد ، یعنی داشته باشیم :

$$\alpha^2\leqslant ab=ak+b<(\alpha+1)^2 ,$$

در اینصورت خواهیم داشت :

$$\begin{array}{l} \sqrt{abcd}=\alpha\dots \\ \underline{-\ \alpha^2} \\ a'b'cd \\ \cdots\cdots \end{array}$$

و واضح است که : $N=abcd=\alpha^2k^2+a'b'cd$.

حالا باید بزرگترین رقم β را طوری پیداکرد که داشته باشیم :

$$(\alpha k+\beta)^2=\alpha^2k^2+2\alpha k\beta+\beta^2\leqslant N$$

یا :

$$(2\alpha k+\beta)\beta\leqslant N-\alpha^2k^2=a'b'cd$$

یعنی باید بزرگترین رقم β را طوری پیداکردکه اگر آنرا درسمت

راست عدد ۲α بنویسیم، عددی (مساوی $۲\alpha k+\beta$) بدست آید که حاصلضرب آن در β از عدد $a'b'cd$ تجاوز نکند، و این همان قاعده‌ای است که برای جذر گرفتن در مبنای اعشاری مورد استفاده قرار می‌دهیم.

اگر بخواهیم از عددی جذر بگیریم که به سه قسمت دو رقمی تقسیم شده است، عدد دو رقمی حاصل از جذر چهار رقم سمت چپ را α می‌گیریم و برای مجهول یکان آن β، بهمان استدلالهای قبل متوسل می‌شویم، در حالتی که عدداز چهار قسمت دو رقمی تشکیل شده باشد، جذر شش رقم سمت چپ را (که عددی سه رقمی است) α می‌گیریم و سپس رقم سمت راست آنرا جستجو می‌کنیم و غیره.

۳a. $۲۷۱۳=۴۱۳۲۳_{(۵)}=۴۱۳۳\bar{۲}_{(۵)}=۴۱۴\bar{۲}\,\bar{۲}_{(۵)}=۱\bar{۱}۲\,\bar{۱}\,\bar{۲}\,\bar{۲}_{(۵)}$

آزمایش: $۱\bar{۱}۲\bar{۱}\,\bar{۲}\,\bar{۲}_{(۵)}=۵^۵-۵^۴+۲\times۵^۳-۵^۲-۲\times۵-۲=$

$=۲۷۱۳;۴۰۹=۳۱۱۴_{(۵)}=۱\bar{۲}۱۲\bar{۱}_{(۵)}$

۳ b. فرض کنید داشته باشیم:

$$N=abc_{(۸)}=a\times۸^۲+b\times۸+c$$

که در آن هیچیك از رقمهای a، b، c از هفت بزرگتر نیست. اگر فرض کنیم:

$$a=\alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳{}_{(۲)}\ ;\ b=\beta_۱\beta_۲\beta_۳{}_{(۲)}\ ;\ c=\gamma_۱\gamma_۲\gamma_۳{}_{(۲)}$$

که‌درآن‌هریك‌از رقمهای: $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$، $\beta_۱$، $\beta_۲$، $\beta_۳$، $\gamma_۱$، $\gamma_۲$، $\gamma_۳$ برابر صفر یا واحد هستند، در این صورت داریم:

$$N=(\alpha_1\times 2^2+\alpha_2\times 2+\alpha_3)\times 2^6+(\beta_1\times 2^2+\beta_2\times 2+\beta_3)\times 2^3+(\gamma_1\times 2^2+\gamma_2\times 2+\gamma_3)=\alpha_1\times 2^8+\alpha_2\times 2^7+\alpha_3\times 2^6+\beta_1\times 2^5+\beta_2\times 2^4+\beta_3\times 2^3+\gamma_1\times 2^2+\gamma_2\times 2+\gamma_3=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_{3(2)}$$

اگر این تساوی را از راست بچپ در نظر بگیریم، راه عبور از مبنای ۲ به مبنای هشت را بدست می‌آوریم : عددهای سه رقمی که از راست بچپ (پس از تقسیم عدد) بدست می‌آید (وقتی که در مبنای ۲ نوشته شده) بترتیب رقمهای عدد را در مبنای ۸ بدست می‌دهند.

۴ . به ازاء هرمقدار $k>5$ داریم :

$$12345432 1_{(k)}=11111^2_{(k)}$$

۵ . چون $2^{10}=1024>1000\geqslant N$ می‌باشد ، برای نوشتن عدد N درعدد شماری به مبنای دو بیش از ده رقم لازم نیست، که هر یك از آنها ممکن است صفر یا یك باشند .

برای تعیین N کافی است ده سئوال بشود . ۱) آیا اولین رقم از سمت راست این عدد در مبنای عدد شماری دو مساوی یك است ؟ ۲) آیا دومین رقم آن واحد است ؟ و غیره .

۶ . بسادگی تحقیق می‌شود که قضیه برای $s=1$ و $s=2$ صحیح است . برای اثبات قضیه در حالت کلی از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم . فرض می‌کنیم که قضیه برای $s=n$ صحیح باشد (یعنی برای عددهای از ۱ تا 2^n-1 ، n کارت داریم که هر یك از آنها شامل 2^{n-1} عدد است) ، ثابت می‌کنیم که قضیه برای $s=n+1$ هم صحیح است .

هر عدد m که‌در رابطهٔ $۲^n \leqslant m \leqslant ۲^{n+۱}-۱$ صدق کند،می‌تواند بصورت زیر نوشته شود :

$$m=۲^n+x \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۲^n-۱)$$

همهٔ این ۲^n عدد در $(n+۱)$ امین کارت با عنوان ۲^n قرار دارند ؛ دراین یا آن‌کارت قبلی ، هر یك از عددهای m فقط وقتی‌قرار دارند که $۱\leqslant x\leqslant ۲^n-۱$ باشد ؛ بنابراین در هر یك از کارتهای قبلی $۲^{n-۱}$ عدد جدید وجود دارد (فرض کرده بودیم که قضیه برای $s=n$ صحیح است) ، در نتیجه هر یك از $n+۱$ کارت شامل ۲^n عدد است.

۷ میدانیم :

$$n!=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times \cdots \times (n-۲)\cdot(n-۱)\cdot n \qquad (۱)$$

اگر عوامل را بردیف در نظر بگیریم ، از هر $p_۱$ عامل متوالی، یکی مضرب عدد اول $p_۱$ است که تعداد آنها مساوی $\left[\frac{n}{p_۱}\right]$ می‌شود ، ولی ازبین آنها $\left[\frac{n}{p_۱^۲}\right]$ عامل بر $p_۱^۲$ قابل قسمت است ، $\left[\frac{n}{p_۱^۳}\right]$ عامل بر $p_۱^۳$ و غیره .

بنابراین تعداد عواملی از تساوی (۱) ، که در آنها یك ، دو ، سه و ... مرتبه عامل $p_۱$ وجود دارد بترتیب برابر است با :

$$\left[\frac{n}{p_۱}\right]-\left[\frac{n}{p_۱^۲}\right] ; \left[\frac{n}{p_۱^۲}\right]-\left[\frac{n}{p_۱^۳}\right] ; \left[\frac{n}{p_۱^۳}\right]-\left[\frac{n}{p_۱^۴}\right] ; \ldots$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\alpha = \left[\frac{n}{p_۱}\right] - \left[\frac{n}{p_۱^۲}\right] + ۲\left\{\left[\frac{n}{p_۱^۲}\right] - \left[\frac{n}{p_۱^۳}\right]\right\} + ۳\left\{\left[\frac{n}{p_۱^۳}\right] - \left[\frac{n}{p_۱^۴}\right]\right\} + \cdots = \left[\frac{n}{p_۱}\right] + \left[\frac{n}{p_۱^۲}\right] + \left[\frac{n}{p_۱^۳}\right] + \cdots$$

۸ . داریم $N = ۲^{۴۵۶۱} - ۲^{۲۲۸۰}$ ؛ که در آن عدد $۲^{۲۲۸۰}$ ملیونها مرتبه از عدد $۲^{۴۵۶۱}$ کمتر است . چون داریم :

$$\log ۲^{۴۵۶۱} = ۴۵۶۱ \times ۰/۳۰۱۰۲۹۹۹۶ \# ۱۳۷۲/۹۹۷ \;,$$

بنابراین عدد $۲^{۴۵۶۱}$ (و بنابراین عدد N) شامل ۱۳۷۳ رقم است .

۹ . بترتیب داریم :

$$S(N) = (۱ + ۲ + ۲^۲ + \ldots + ۲^{\alpha})[۱ + (۲^{\alpha+۱} - ۱)] =$$

$$= \frac{۲^{\alpha+۱} - ۱}{۲ - ۱} \cdot ۲^{\alpha+۱} = ۲ \times ۲^{\alpha}(۲^{\alpha+۱} - ۱) = ۲N$$

۱۰ . داریم :

$$\left[\frac{۱۰۰۰}{۷}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۷^۲}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۷^۳}\right] = ۱۴۲ + ۲۰ + ۲ = ۱۶۴ \;;$$

$$\left[\frac{۱۰۰}{۷}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۷^۲}\right] = ۱۴ + ۲ = ۱۶ \;;$$

و چون صورت کسر برابر است با $(۱۰۰!)$: $(۱۰۰۰!)$ بنابراین :

$$k = ۱۶۴ - ۱۶ = ۱۴۸$$

۱۱ . اگر N عددی s رقمی باشد وآنرا دوبار درکنارهم بنویسیم بطوریکه عدد $۲s$ رقمی شامل دو ردیف ارقام عین هم بوجود آید، وقتی که N مجذور کامل باشد به این معنی است که :

۱) $10^{s-1}<N<10^{s}$ و

۲) $N(1+10^{s})$ مجذور کامل است .

در اینصورت باید عدد $10^{s}+1$ برمربع عدد صحیحی قابل‌قسمت باشد (زیرا در غیر اینصورت ، کوچکترین عدد N ، که در شرط دوم صدق کند، مساوی $10^{s}+1$ می‌شود که با شرط اول متناقض‌است).

برای تعیین کوچکترین مقدار s ،که به ازاء آن $10^{s}+1$ بر p^{2} قابل قسمت باشد ، بهتر است با استفاده خواص هم‌نهشتی (فصل ۳ را ببینید) ، کوچکترین جواب هم نهشتی $10^{s}\equiv -1 \pmod{p^{2}}$ را بدست آوریم ؛ مثلاً به ازاء $p=11$ داریم :

$$10^{2}\equiv -21 \pmod{121}\ ;\qquad 10^{3}\equiv -210\equiv 32 \pmod{121}\ ;$$

$$10^{4}\equiv 320\equiv 78 \pmod{121};\quad 10^{5}\equiv 780\equiv 54 \pmod{121}\ ;$$

$$10^{6}\equiv 540\equiv 56 \pmod{121};\quad 10^{7}\equiv 560\equiv 76 \pmod{121}\ ;$$

$$10^{8}\equiv 760\equiv 34 \pmod{121};\quad 10^{9}\equiv 340\equiv -23 \pmod{121}\ ;$$

$$10^{10}\equiv -230\equiv 12 \pmod{121};\quad 10^{11}\equiv 120\equiv -1 \pmod{121}$$

واضح است‌که $(10^{11}+1)\left[\frac{10^{11}+1}{11^{2}}k^{2}\right]$ به ازاء هر عددطبیعی k ، مجذور کامل است . بسادگی می‌توان تحقیق کرد که ۴ ،کوچکترین مقدار k است ،که به ازاء آن عبارت داخل‌کروشه به عدد یازده رقمی مساوی ۴۹۶ ۱۴۰ ۲۲۳ ۱۳ تبدیل می‌شود .

با تحقیق مستقیم می‌توان نتیجه گرفت که هم‌نهشتی بصورت $10^{s}\equiv -1 \pmod{k^{2}}$ ، که درآن k عددی است اول ، به ازاء $s<11$ صدق نمی‌کند ؛ بنابراین عدد :

$$۳۲۲\ ۳۱۴\ ۰۴۹\ ۶۱۳\ ۲۲۳\ ۱۴۰\ ۴۹۶=\left[\frac{۱۰^{۱۱}+۱}{۱۱}\times ۴\right]^{۲}=۳۶۳\ ۶۳۶\ ۳۶۴^{۲}$$

کوچکترین مجذور کاملی است که در دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰، از دو ردیف ارقام عین هم تشکیل شده است .

۱۲ . اگر $\alpha\equiv\beta(\mathrm{mod}\,m)$ باشد ، $\alpha^s\equiv\beta^s(\mathrm{mod}\,m)$ خواهد بود و بنابراین $a_s\alpha^s=a_s\beta^s(\mathrm{mod}\,m)$ می‌شود . علاوه بر آن واضح است که $a_0\equiv a_0(\mathrm{mod}\,m)$ می‌باشد .

اگر هم‌نهشتی $a_s\alpha^s\equiv a_s\beta^s(\mathrm{mod}\,m)$ را ، وقتی کـه s مقادیر ۱ ، ۲ ، ... ، n را اختیار کند ، در نظر بگیریم و با هم جمع کنیم : بدست می‌آید :

$$a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n\equiv a_0+a_1\beta+a_2\beta^2+a_3\beta^3+\cdots$$
$$\cdots+a_n\beta_n(\mathrm{mod}\,m)$$

و یا
$$f(\alpha)\equiv f(\beta)(\mathrm{mod}\,m)$$

۱۳ . چون $۸^{۲}\equiv -۱(\mathrm{mod}\,۵)$ ، با استدلالی شبیه قابلیت تقسیم برهفت در مبنای اعشاری ، نتیجه می‌شود که عدد N ، که در مبنای هشت نوشته شده است ، وقتی برپنج قابل قسمت است که مجموع جبری حدود دو رقمی آن برپنج قابل قسمت باشد (و برعکس) . برای بقیهٔ موارد هم کافی است بدانیم :

$$۸^{۲}\equiv -۱(\mathrm{mod}\,۱۳);\quad ۵^{۲}\equiv -۱(\mathrm{mod}\,۱۳)\quad;\quad ۵^{۲}\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۸)\quad;$$
$$۳\equiv ۱(\mathrm{mod}\,۲)\quad;\quad ۳\equiv -۱(\mathrm{mod}\,۴)\quad;\quad ۳^{۲}\equiv -۱(\mathrm{mod}\,۷);$$

۱۴ . کافی کوچکترین عدد مثبت دو رقمی (یا یك رقمی) را

بدست آوریم ، بطوریکه عدد مفروض نسبت به مدول ۱۰۰ هم نهشت با آن باشد .

مثلاً داریم :

$$۲۹۳^{۲۹۳} \equiv (-۷)^{۲۹۳} \equiv -۷ \times ۴۹^{۱۴۶} \equiv -۷ \times ۲۴۰۱^{۷۳} \equiv$$
$$\equiv ۹۳ \times ۱^{۷۳} \equiv ۹۳ (\, mod\, ۱۰۰)$$

بنا براین عدد $۲۹۳^{۲۹۳} - ۹۳$ بر ۱۰۰ قابل قسمت است (از تقسیم $۲۹۳^{۲۹۳}$ بر ۱۰۰ باقیمانده‌های مساوی ۹۳ بدست می‌آید) .

۱۵ . بین عددهای : ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ... ، $\mathbf{p}^k - ۲$ ، $\mathbf{p}^k - ۱$ و $\mathbf{p}^k$ ، مضارب $\mathbf{p}$ عبارتند از : $\mathbf{p}$ ، $۲\mathbf{p}$ ، $۳\mathbf{p}$ ، ... ، $\mathbf{p}^{k-۱}p = \mathbf{p}^k$ (یعنی رویهم $\mathbf{p}^{k-۱}$ عدد) . هر یك از بقیهٔ $\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k-۱}$ عدد نسبت به $\mathbf{p}$ اولند .

۱۶ . اگر $\varphi(\mathbf{n})$ در تقسیم بر $\mathbf{z}_۰$ خارج قسمت $\mathbf{q}$ و باقیماندهٔ $\mathbf{r}$ $(۰<\mathbf{r}<\mathbf{z}_۰)$ را داشته باشد ، یعنی‌داشته‌باشیم: $\varphi(\mathbf{n}) = \mathbf{q}\mathbf{z}_۰ + \mathbf{r}$ ، از $\mathbf{k}^{\varphi(n)} \equiv ۱ \; (\,mod\mathbf{n})$ نتیجه می‌شود :

$$\mathbf{k}^{qz_۰+r} \equiv (\mathbf{k}^{z_۰})^q . \mathbf{k}^r \equiv ۱^q . \mathbf{k}^r \equiv ۱ (\, mod\mathbf{n})$$

و این ممکن نیست ، زیرا $\mathbf{r}<\mathbf{z}_۰$ بود .

۱۷ فرض می‌کنیم که عددهای $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ در دستگاه عدد شماری به مبنای $\mathbf{k}$ نوشته شده باشند و $\mathbf{m}<\mathbf{n}$ باشد . اگر $\mathbf{k}^{z_۰} \equiv ۱ \; (mod\mathbf{n})$ باشد ($\mathbf{z}_۰$ کوچکترین عددمثبتی است که دارای این خاصیت باشد) ، در اینصورت $\mathbf{m}\mathbf{k}^{z_۰} \equiv \mathbf{m} (mod\mathbf{n})$ خواهد بود . این به معنای آنست که

اگر در سمت راست عدد m به‌اندازهٔ $z_{\circ}$ صفر قرار دهیم (که مساویست با حاصلضرب m در $k^{z_{\circ}}$) و عدد بدست آمده را بر n تقسیم کنیم، باقیمانده‌ای مساوی m و خارج‌قسمتی شامل گروه رقمهای $c_۱c_۲\cdots c_{z_{\circ}}$ بدست می‌آید. اگر در باقیمانده $z_{\circ}$ صفر قرار دهیم دوباره همان گروه در خارج قسمت بدست می‌آید وغیره.

۱۸. ۱) در معادلهٔ $ax+by=c$ ، $x=x_{\circ}+u$ و $y=y_{\circ}+v$ می‌گذاریم، بدست می‌آید:

$$ax_{\circ}+au+by_{\circ}+bv=c$$

چون $ax_{\circ}+by_{\circ}=c$ می‌باشد، پس $au+dv$ باید مساوی صفر باشد و از آنجا $au=-bv$ می‌شود؛ یعنی باید au بر b قابل قسمت باشد. چون a و b نسبت بهم اولند: بنابراین u بر b قابل قسمت می‌شود، یعنی $u=bt$ (t عدد صحیح دلخواهی‌است) ودراینصورت $v=-at$ می‌شود. به‌این ترتیب عددهای بصورت $x_{\circ}+bt$ و $y_{\circ}-at$ (به‌ازاء هر مقدار صحیح t) در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند.

۲) به ازاء هر مقدار صحیح x و y ، $ax+by$ بر (a و b) قابل قسمت است وبنابراین نمی‌تواند مساوی عدد c باشد، که طبق فرض بر (a و b) قابل قسمت نیست.

۱۹. چون داریم:

$$\sqrt{۲}=[۱,۲,۲,۲,۲,\cdots];$$

$$\sqrt{۳}=[۱,۱,۲,۱,۲,۱,۲,\cdots];$$

کسرهای متقارب مربوط به $\sqrt{۲}$ چنین است :

$$\frac{۱}{۱},\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۵},\frac{۱۷}{۱۲},\frac{۴۱}{۲۹},\frac{۹۹}{۷۰},\frac{۲۳۹}{۱۶۹},\frac{۵۷۷}{۴۰۸},\frac{۱۳۹۳}{۹۸۵},\frac{۳۳۶۳}{۲۳۷۸},\ldots$$

و برای $\sqrt{۳}$:

$$\frac{۱}{۱},\frac{۲}{۱},\frac{۵}{۳},\frac{۷}{۴},\frac{۱۹}{۱۱},\frac{۲۶}{۱۵},\frac{۷۱}{۴۱},\frac{۹۷}{۵۶},\frac{۲۶۵}{۱۵۳},\frac{۳۶۲}{۲۰۹},\frac{۹۸۹}{۵۷۱},\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰},$$
$$\frac{۳۶۹۱}{۲۱۳۱},\ldots$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\sqrt{۲}\#\frac{۱۳۹۳}{۹۸۵}=۱/۴۱۴۲۱۳۱\ldots;\sqrt{۳}\#\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}=۱/۷۳۲۰۵۱۲\ldots;$$

و ضمناً داریم :

$$\left|\sqrt{۲}-\frac{۱۳۹۳}{۹۸۵}\right|<\frac{۱}{۹۸۵\times ۲۳۷۸} \text{ و } \left|\sqrt{۳}-\frac{۱۳۵۱}{۷۸۰}\right|<\frac{۱}{۷۸۰\times ۲۱۳۱}$$

۲۰ . از سه معادلهٔ اول با چهار مجهول ، می‌توان X و Y و Z را برحسب U بدست آورد و سپس نوشت :

$$\frac{X}{۱۶۰۲}=\frac{Y}{۸۹۱}=\frac{Z}{۱۵۸۰}=\frac{U}{۲۲۲۶}=s$$

s عدد دلخواهی است ،

از چهار معادلهٔ اخیر می‌توان x ، y ، z , u را بر حسب X،Y،Z،U بیان کرد . سپس اگر $s=۴۶۵۷t$ بگیریم ، مقادیر X،Y،Z،U ، x ، y ، z ، u (که در متن داده شده است) بدست می‌آید .

۲۱ . اگر ABC « مثلث هرونی » باشد (شکل۳ را ببینید) ، طول پاره خطهای AD ، BD ، DC گویا هستند ، زیرا داریم :

$$BD=\frac{۲S_{ABC}}{AC};AD=\frac{AC^۲+AB^۲-BC^۲}{۲AC};DC=|AC-AD|$$

۲۲ . عددهای‌فیثاغورثی(۳,۴,۵) و (۵,۱۲,۱۳)عددهای‌سه‌گانهٔ هرونی زیر را بدست می‌دهند :

(۲۵,۳۹,۵۶) ; (۲۵,۳۹,۱۶) ; (۲۵,۵۲,۶۳) ; (۲۵,۵۲,۳۳) ;
; (۲۰,۱۳,۲۱) ; (۲۰,۱۳,۱۱) ; (۱۵,۱۳,۱۴) ; (۱۵,۱۳,۸) .

وعددهای فیثاغورثی (۷,۲۴,۲۵) و (۷,۲۴,۲۵) تنها سه دسته عددهای سه‌گانهٔ هرونی می‌دهد :

(۲۵,۲۵,۴۸) , (۲۵,۲۵,۱۴) ; (۱۷۵,۶۰۰,۵۲۷)

(چهارمین « مثلث هرونی » از دومثلثی تشکیل شده است که متشابه با «مثلث فیثاغورثی » به اضلاع ۷ ، ۲۴ و ۲۵ هستند) .

۲۳ . داریم :

b) $۵۵\,۵۵۵\,۵۵۵=۱۰\,۰۰۱\times ۵\,۵۵۵=(۷۷۷۸+۲۲۲۳)\times$
$\times(۷۷۷۸-۲۲۲۳);$

d) $۱۲\,۳۴۵\,۶۷۸\,۹۸۷\,۶۵۴\,۳۲۱=۱۱۱\,۱۱۱\,۱۱۱^۲;$
$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۸+۷+۶+۵+۴+$
$+۳+۲+۱=۸۱=۹^۲$

۲۳a . داریم :

$$-\log_{۴}\left(\log_{۴}\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{۴}}}}}}_{\text{رادیکال ۲n}}\right)=-\log_{۴}\left(\log_{۴}۴^{\frac{۱}{۲^{۲n}}}\right)$$

$$=-\log_{۴}\left(\frac{۱}{۴^n}\right)=n$$

۲۴. اکر عدد $x\ (۱\leqslant x\leqslant ۶۰)$ در ستونهائی بـا شماره‌هـای : α ، β ، γ از جدولهای شکل ۴ باشد ، داریم :

$$x\equiv\alpha\ (mod ۳) \qquad (۱)$$

$$x\equiv\beta\ (mod ۴) \qquad (۲)$$

$$x=\gamma\ (mod ۵) \qquad (۳)$$

از (۱) نتیجه می‌شود :

$$x=۳y+\alpha \qquad (۴)$$

اکر این مقدار x را در (۲) قراردهیم ، بدست می‌آید :

$$۳y+\alpha\equiv\beta\ (mod ۴)\Longrightarrow ۹y+۳\alpha\equiv ۳\beta\ (mod ۴)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y\equiv ۳\beta-۳\alpha\equiv\alpha-\beta\ (mod ۴);$$

و یا بالاخره :

$$y=\alpha-\beta+۴z \qquad (۵)$$

(اگر طرفین یك هم‌نهشتی رادرعددی که‌نسبت به مدول‌اول است، ضرب کنیم ، به هم نهشتی جدیدی می‌رسیم که با اولی « معادل » است ، یعنی ریشه‌های آنها یکی است . این مطلب را ثابت‌کنید).

(۵) را در (۴) قرار می‌دهیم ، بدست می‌آید :

$$x=۳(\alpha-\beta)+۱۲z+\alpha=۴\alpha-۳\beta+۱۲z \qquad (۶)$$

از (۶) و (۳) بدست می‌آید :

$$۴\alpha-۳\beta+۱۲z\equiv\gamma(\mathrm{mod}\,۵)\Longrightarrow۱۲\alpha-۹\beta+۳۶z\equiv۳\gamma(\mathrm{mod}\,۵)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow z\equiv۳\gamma-۱۲\alpha+۹\beta\equiv۳\gamma+۳\alpha+۴\beta(\mathrm{mod}\,۵);$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$z=۳\gamma+۳\alpha+۴\beta+۵t$$

که پس از قراردادن در(۶) می‌شود :

$$z=۴\alpha-۳\beta+۱۲(۳\gamma+۳\alpha+۴\beta+۵t)=$$
$$=۴۰\alpha+۴۵\beta+۳۶\gamma+۶۰t \qquad (۷)$$

و یا : $x\equiv۴۰\alpha+۴۵\beta+۳۶\gamma(\mathrm{mod}\,۶۰)$

۲۵ . فرض می‌کنیم $n\equiv d_۱(\mathrm{mob}\,۱۱)$ از نتیجه می‌شود $n^۳=d_۱^۳\equiv d(\mathrm{mod}\,۱۱)$ که در آن $۰\leqslant d_۱\leqslant۱۰$ و $۰\leqslant d\leqslant۱۰$ ، یعنی $d_۱$ باقیماندهٔ تقسیم n بر ۱۱ و d باقیماندهٔ تقسیم $n^۳$ بر ۱۱ باشد.

بسادگی تحقیق می‌شود که وقتی $d_۱$ مساوی : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰ باشد ، مقادیر متناظر چنین خواهند بود : ۰ ، ۱ ، ۸ ، ۵ ، ۹ ، ۴ ، ۷ ، ۲ ، ۶ ، ۳ ، ۱۰.

اگرمقادیر d رابه ردیف : ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ ، ۱۰ بنویسیم ، مقادیر متناظر $d_۱$ چنین می‌شوند : ۰ ، ۱ ، ۷ ، ۹ ، ۵ ، ۳ ، ۸ ، ۶ ، ۲ ، ۴ ، ۱۰

۲۶ . برای تحقیق کافی است بدانیم :

۱) حجم آبهای همهٔ اقیانوسها کمتر از $۱/۴\times۱۰^{۲۱}$ لیتر (۷×۱۰^{۲۱} لیوان) است .

۲) در استکان $\frac{۲۰۰}{۱۸}$ گـرم ـ ملکول آب است و بنابراین تعداد ملکولهای «نشان‌دار» بطور تقریب برابراست با $\frac{۶\times۱۰^{۲۳}\times۲۰۰}{۱۸}$ یـا $\frac{۲}{۳}\times۱۰^{۲۵}$.

۲۷. سال نوری عبارتست از فاصلهٔ L که نور در «یکسال طی می‌کند».

$$L=۳۶۵{,}۲۵\times۲۴\times۶۰\times۶۰\times۳\times۱۰^{۱۰}(\text{سانتیمتر})<$$
$$<۹۵\times۱۰^{۱۶}(\text{سانتیمتر})<۱۰^{۱۸}(\text{سانتیمتر})$$

اگر v حجم مکعبی بـه ضلع $۷\times۱۰^{۷}L$ و N تعداد ملکولهای آبی که برای پرکردن این مکعب لازم‌است ، باشد :

$$v<(۹۵\times۱۰^{۱۶}\times۷\times۱۰^{۷})^{۳}(\text{سانتیمترمکعب})=(۰{,}۶۶۵\times۱۰^{۲۶})^{۳}<$$
$$<\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}+۱۰^{۷۸}\ (\text{سانتیمترمکعب})$$

$$N<\frac{۶\times۱۰^{۲۳}}{۱۸}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}\times۱۰^{۷۸}=\frac{۸۰}{۸۱}\times۱۰^{۱۰۰}$$

۲۷a. اگر $m=۴^{۲۵۶}$ باشد ، داریم :

$$\log m=۲۵۶\times\log۴>۲۵۶\times۰{,}۶۰۲۰۵۵=۱۵۴{,}۱۲۶۰۸;$$

واز آنجا : $m>۱{,}۳۳۶\times۱۰^{۱۵۴}$

بنابراین خواهیم داشت :

$$Q=۴^{m}>۴^{۱{,}۳۳۶\times۱۰^{۱۵۴}};\ \log Q>۱{,}۳۳۶\times۱۰^{۱۵۴}\times۶۶۰۲۰۵۵>$$
$$>۰{,}۸۰۴۳۴\times۱۰^{۱۵۴}>۸\times۱۰^{۱۵۳}$$

واز آنجا : $Q>۱۰^{۸\times۱۰^{۱۵۳}}$

۲۸ . شعاع این کره چنین است :

$$R=\frac{10^{30}}{2}L<\frac{10^{30}}{2}\times 95\times 10^{16}$$ (سانتیمتر)

وحجم کره :

$$v<\frac{4}{3}\pi\times 47{,}5^{3}\times 10^{138}<\frac{1}{2}\times 10^{144}$$ (سانتیمترمکعب)

۲۹ . داریم :

$$\log_{1{,}000001}(e^{31\times 10^{6}})=31\times 10^{6}\log_{1{,}000001}e\#31\times 10^{6}\times 10^{6}$$

$$=3{,}1\times 10^{13};(e^{31\times 10^{6}})^{10^{-6}}=e^{31}\#10^{0{,}43\times 31}=$$

$$=10^{13{,}33}\#2{,}2\times 10^{13}\quad;\ \log_{1{,}000001}(e^{32\times 10^{6}})\#$$

$$\#3{,}2\times 10^{13}\ ;\ \left(e^{32\times 10^{6}}\right)^{10^{-6}}=e^{32}\#5{,}86\times 10^{13}$$

۳۰ . مثلاً فرض کنید $n=10000$ باشد، با توجه به‌نامساویهای صفحهٔ ۹۸ خواهیم داشت :

$$\log\sqrt{2\pi\times 10^{4}}-10000\log e+40000<\log(10000!)<$$

$$<\log\sqrt{2\pi\times 10^{4}}-10000\log e+40000+\frac{\log e}{120000}$$

چون $\log 2=0{,}30103,\log\pi=0{,}49715$ و $\log e\#0{,}4342945$ و $\frac{\log e}{120000}$ عددبسیارکوچکی است، داریم :

$$\log(10000!)\#\frac{1}{2}(0{,}49715+0{,}30103+4)-4342{,}945+$$

$$+40000=35659{,}454\ ;$$

یعنی ! 10000 ؛ عددی است ۳۵۶۶۰ رقمی .

۳۱ . اگر فرض کنیم که دو عدد صحیح k ، k' بنحوی وجود داشته باشندکه در شرایط زیر صدق‌کنند :

$$a\frac{\sqrt{5}-1}{2}<k<(a+1)\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$a\frac{3-\sqrt{5}}{2}<k'<(a+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

از جمع آنها با یکدیگر به نامساوی نادرست زیرمی‌رسیم :

$$a<k+k'<a+1$$

(زیرا a و $a+1$ دو عدد صحیح متوالی‌اند) .

واضح است که بین عددهای $a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ و $a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1$ ، عـدد صحیحی مـانند s وجـود دارد . اگـر s کوچکتر از $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ باشد ، در فاصلهٔ اول قرار خواهدگرفت؛ ولی اگر داشته باشیم :

$$a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}<s<a.\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1$$

می‌توان این نامساوی را بصورت زیر نوشت :

$$(a+1)\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)<s<a.\left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

و یا :

$$(a+1)\frac{3-\sqrt{5}}{2}>a+1-s>a\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

یعنی عدد صحیح $a+1-s$ در فاصلهٔ دوم قرارگرفته است .

۳۲ . جدول اوضاع خاص $(C_k ، d_k)$ را ، با استفاده از قوانین سه‌گانه‌ای که در ابتدای فصل ۱۰ داده شده است ، تشکیل می‌دهیم :

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	…
C_k	۰	۱	۳	۴	۶	۸	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶	۱۷	۱۹	۲۱	۲۲	۲۴	۲۵	۲۷	۲۹	۳۰	۳۲	۳۳	۳۵	۳۷	۳۸	۴۰	…
d_k	۰	۲	۵	۷	۱۰	۱۳	۱۵	۱۸	۲۰	۲۳	۲۶	۲۸	۳۱	۳۴	۳۶	۳۹	۴۱	۴۴	۴۷	۴۹	۵۲	۵۴	۵۷	۶۰	۶۲	۶۵	…

حرکتهای درست :

$(۲۷,۳۷)\to(۱۶,۲۶);(۱۴,۹۰)\to(۱۴,۲۳);(۴۷,۶۹)\to(۴۷,۲۹)$.

۳۳ . بسادگی می‌توان تحقیق‌کرد که به ازاء $a=۴۰,۵۵,۱۴۰$ فاصله $(۰/۶۱۸\ldots a,(a+۱)۰/۶۱۸\ldots)$ شامل عددهای صحیح : ۲۵ ، ۳۴ و ۸۷ می‌باشد و به ازاء $a=۴۰۰$ عدد صحیح ۱۵۳ در فاصلهٔ $(۰/۳۸۱\ldots a$ و $۰/۳۸۱\ldots(a+۱))$ می‌باشد . بنابراین $۴۰=C_{۲۵}$ $(d_{۲۵}=C_{۲۵}+۲۵=۶۵)$ ، $۵۵=C_{۳۴}$ $(d_{۳۴}=C_{۳۴}+۳۴=۸۹)$ ، $۱۴۰=C_{۸۷}$ $(d_{۸۷}=C_{۸۷}+۸۷=۲۲۷)$ ، $۴۰۰=d_{۱۵۳}$ $(C_{۱۵۳}=۴۰۰-۱۵۳=۲۴۷)$.

۳۴ . حرکتهای صحیح :

$(۱۰,۱۷,۲۵)\to(۸,۱۷,۲۵)$; $(۴۷,۹۹,۱۸۱)\to(۴۷,۹۹,۷۶)$;

(۲۵,۴۳,۵۰) وضع خاصی است و همهٔ حرکتها منجر به باخت می‌شود؛ از وضع (۲۹,۲۹,۱۸) می‌توان به (۱۵,۲۹,۱۸) یا به (۲۷,۲۹,۰) رسید و از (۳۹,۲۹,۷۴) به یکی از وضعهای (۸۷,۲۹,۷۴) ، (۹۳,۲۳,۷۴) و (۹۳,۲۹,۹۴) .

۳۵ . به عنوان مثال حالتی را در نظر می‌گیریم که حلقه‌های با شماره‌های ۱۲ ، ۹ ، ۷ ، ۶ ، ۲ پائین میله قرارگیرند و بقیه روی میله را پوشانده باشند .

برای پائین آوردن ۱۱ ، باید قبلاً ۸ ، ۵ ، ۴ ، ۳ ، ۱ را پائین آورد ،که بعد از آن باید $u_{10}+u_9+1$ حرکت انجام داد (پائین آوردن ۱۱ ، بالابردن ۱ — ۹ ، پائین آوردن ۱ — ۱۰) .

اما برای اینکه ۸ پائین آورده شود ، باید از مرحلهٔ بینابینی عبورکرد که ضمن آن ۱ — ۷ بالابرده شود و برای این منظور باید ۱ ، ۳ ، ۴ پائین آورده‌شود (۷ حرکت) ، ۶بالا برده شود (یك‌حرکت) ۵ پائین آورده شود (u_4+u_5 حرکت) ، ۷ بالا برده شود (یك‌حرکت) ۱ — ۵ بالا برده شود (u_5 حرکت) ، که در نتیجه در مجموع $9+u_4+2u_5$ حرکت مصرف می شود . با اضافه کردن u_8 حرکت (برای پائین آوردن ۱ — ۸) وحرکتهای مذکوردر بالا: $1+u_9+u_{10}$، تعداد حرکتها بطورکلی بدست می‌آید :

$$u_{10}+u_9+u_8+2u_5+u_4+10$$

۳۶ . برای اینکه صحت رابطهٔ $u_n=2^n-1$ را ثابت‌کنیم، کافی است :

۱) ثابت کنیم که این رابطهٔ به ازاء $n=1$ صحیح است ؛

۲) فرض کنیم که رابطه برای $n=k$ صحیح است (k عددی طبیعی است) و ثابت کنیم که در اینصورت برای $n=k+1$ هم‌صحیح است .

به‌ازاء $n=1$، صحت رابطه واضح‌است، زیرا برای‌انتقال یك‌قرص از میلهٔ A به‌میلهٔ B تنها یك‌حرکت‌لازم است، یعنی $u_1=1=2^1-1$.

حالا فرض می‌کنیم داشته باشیم $u_k=2^k-1$ ، با استفاده از رابطهٔ

$u_n=۲u_{n-۱}+۱$ (صفحهٔ ۱۲۰) ، بدست می‌آید :

$$u_{k+۱}=۲u_k+۱=۲(۲^k-۱)+۱=۲^{k+۱}-۱$$

۳۷

a) ۵۵ — ۵۷,۵۷ — ۵۵,۵۴ — ۵۶,۷۴ — ۵۴,۵۳ — ۵۵,۷۳ — ۵۳,
۴۳ — ۶۳,۵۱ — ۵۳,۶۳ — ۴۳,۳۳ — ۵۳,۴۱ — ۴۳,۵۳ — ۳۳,
۲۳ — ۴۳،۳۱ — ۳۳,۴۳ — ۲۳,۱۳ — ۳۳,۱۵ — ۱۳,۲۵ — ۲۳,
۳۴ — ۳۲,۱۳ — ۳۳,۳۲ — ۳۴,۴۵ — ۲۵,۳۷ — ۳۵,۵۷ — ۳۷,
۳۴ — ۳۶,۳۷ — ۳۵,۲۵ — ۴۵,۵۶ — ۵۴,۵۴ — ۳۴,۴۶ — ۴۴,
۴۴ — ۲۴.

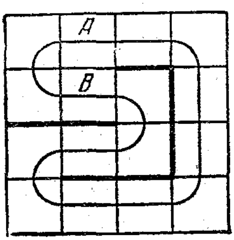
b) ۵۳ — ۵۵,۷۳ — ۵۳,۷۵ — ۷۳,۶۵ — ۶۳,۵۲ — ۵۴,۷۳ — ۵۳,
۵۴ — ۵۲,۵۱ — ۵۳,۳۱ — ۵۱,۳۲ — ۵۲,۴۳ — ۶۳,۵۱ — ۵۳,
۶۳ — ۴۳,۴۵ — ۶۵,۵۷ — ۵۵,۶۵ — ۴۵,۳۵ — ۵۵,۴۷ — ۴۵,
۵۵ — ۳۵,۲۵ — ۴۵,۳۷ — ۳۵,۴۵ — ۲۵,۱۵ — ۳۵,۱۳ — ۱۵,
۲۳ — ۲۵,۳۴ — ۳۶,۱۵ — ۳۵,۳۶ — ۳۴,۳۳ — ۵۳,۳۴ — ۵۴,
۵۴ — ۵۲.

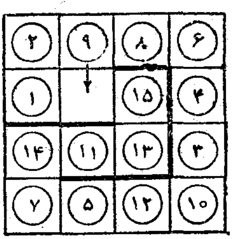
۳۸ . اگر مهره‌ها در طول خطی ، که در شکل ۱۳۰ — a نشان داده است (و یك « حلقهٔ » بسته بوجود آورده است) ، حرکت کنند (یکی از خانه‌های آن خالی است) ، وضع‌متقابل‌مهره‌ها **درروی‌این‌حلقه** تغییر نمی‌کند. ما باید مهره‌ها را روی حلقه چنان جا بجا کنیم ــ اگر وضع اولیه‌قابل حل‌باشد ــ که ترتیب زیر بوجودآید (شکل ۱۵ــIII را ببینید) :

۱,۲,۳,۴,۸,۱۲,*,۱۵,۱۴,۱۳,۹,۱۰,۱۱,۷,۶,۵ (۱)

(از خانهٔ بالا و سمت چپ شروع کرده‌ایم و حرکت را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته‌ایم ؛ * هم علامت خانهٔ خالی است) . می‌شود گفت که شمارهٔ ۲ بعد از شمارهٔ ۱ می‌آید . شمارهٔ ۳ بعد از شمارهٔ ۲ ، شمارهٔ ۱۵ بعد از شمارهٔ ۱۲ ، شمارهٔ ۱ بعد از شمارهٔ ۵ و غیره .

وضع متقابل مهره‌ها در این حلقهٔ تنها وقتی تغییر می‌کند که B خانهٔ خالی باشد و بتوانیم مهرهٔ خانهٔ A را وارد آن کنیم (و یا برعکس)؛ با چنین حرکتی ، دو جا «بطرف چپ» (یا « بطرف راست ») می‌رود .





شکل ۱۳۰

مثلاً ، برای اینکه در وضع اولیه :

۵,۷,۱۴,۱۱,۱۳,۱۵,۱,۲,۹,۸,۶,۴,۳,۱۰,*,۱۲ (۲)

مهرهٔ شمارهٔ ۹ را دو جا « بطرف چپ » ببریم ، باید مهره‌ها را با حرکت دوری به وضع b در شکل ۱۳۰ در آوریم و سپس شمارهٔ ۹ را بخانهٔ خالی منتقل کنیم . در اینصورت ردیف زیر بدست می‌آید :

۲,*,۸,۶,۴,۳,۱۰,۱۲,۵,۷,۱۴,۱۱,۱۳,۱۵,۹,۱

حالا اگر بهمین ترتیب شمارهٔ ۱۵ را دوجا «بسمت چپ» ببریم ،

شمارهٔ ۹ بعد از شمارهٔ ۱۳ ، شبیه وضع (۱) ، قرار می‌گیرد .

باروش مشابهی می‌توان شمارهٔ ۱۰را بعداز شمارهٔ ۹، شمارهٔ ۱۱ را بعداز شمارهٔ ۱۰، شمارهٔ ۷ را بعد از شمارهٔ ۱۱ وغیره قرارداد . اگر تبدیل (۲) قابل حل باشد ، در انتهای کار به تبدیل (۱) می‌رسیم ، و اگر (۲) «غیر قابل حل» باشد، به تبدیل زیر که متناظر باشکل ۱۵ ــ IV است می‌رسیم :

۱,۲,۳,۴,۸,۱۲,*,۱۴,۱۵,۱۳,۹,۱۰,۱۱,۷,۶,۵

۳۹ . به‌ازاء $n=1$ و $n=2$ ، ازرابطهٔ (۶) (صفحهٔ ۱۳۷) بدست می‌آید :

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=1;$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right]=\frac{2[3\sqrt{5}+(\sqrt{5})^3]}{8\sqrt{5}}=2$$

سپس می‌توان نوشت :

$$v_{s-1}+v_{s-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^s-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^s\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s+1}\right]=v_s,$$

زیرا داریم :

$$\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+۱=\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲,\quad \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}+۱=\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲$$

۴۰ . اگر بنوبت از سه رابطه‌ای که بین w_s ، $w_{s-۱}$، $w_{s-۲}$ ، $w_{s-۳}$ برقرار است ، استفاده‌کنیم ، با توجه به روابط $w_۱=w_۲=۱$ و $w_۳=۲$ بسادگی می‌توان جدول زیر را تشکیل داد :

s	۰	۱	۲	۳	۴	**۵**	۶	۷	۸	۹	**۱۰**	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	**۱۵**	...
w_s		۱	۱	۲	۴	۷	۱۳	۱۷	۳۰	۶۰	۱۰۷	۱۹۷	۲۵۷	۴۵۴	۹۰۸	۱۶۱۹	...

(شماره‌هائی که با حروف سیاه چاپ شده است ، نمایندهٔ « خانه‌های بازمین باتلاقی » است) .

۴۱ . این و یا آن طریقهٔ انتقال را ازگره $O(۰,۰,\dots,۰)$ به‌گره $A(a_۱,a_۲,\dots,a_m)$ ، که‌درآن $a_۱+a_۲+\dots+a_m=n$ است،می‌توان با n حرف نشان داد ، که در بین آنها حرف $x_۱$ (که معرف حرکت متناظری است که یك واحد به مختص اول نقطه اضافه می‌کند) به‌اندازهٔ $a_۱$ مرتبه ، حرف $x_۲$ به‌اندازهٔ $a_۲$ مرتبه و... بالاخره حرف x_m به‌اندازهٔ a_m مرتبه تکرار شده است، ولی‌برای انتخاب $a_۱$ جاازn، برای پرکردن آنها بوسیلهٔ حرف $x_۱$ ، می‌توان $C_n^{a_۱}$ طریقه پیدا کرد ، بطوریکه هر یك از این طریقه‌ها به اندازهٔ $C_{n-a_۱}^{a_۲}$ نوع از تبدیل $a_۲$ حرف $x_۲$ در $n-a_۱$ جای آزاد بوجود می‌آید . بنا براین برای انتخاب $a_۱$جا برای $x_۱$ و $a_۲$ جا برای $x_۲$ (از n جائی که وجود دارد) ، می‌توان $C_n^{a_۱}\cdot C_{n-a_۱}^{a_۲}$ طریقه پیداکرد . هر یك از آنها به‌اندازهٔ $C_{n-a_۱-a_۲}^{a_۳}$ نوع‌جایگزینی $a_۳$ حرف $a_۳$ در $n-a_۱-a_۲$ جای‌آزادباقیمانده‌بوجود

می‌آورد ، یعنی رویهم $C_n^{a_1} \cdot C_{n-a_1}^{a_2} \quad C_{n-a_1-a_2}^{a_3}$ طریقه برای انتخاب جائی که حروف x_1 و x_2 و x_3 اشغال می‌کنند ، وجود دارد .

اگر استدلال را بهمین طریق ادامه دهیم ، به این نتیجه می‌رسیم که تعداد طریقه‌ها برای جایگزینی a_1 حرف x_1 ، a_2 حرف x_2 ، ... ، a_{m-1} حرف x_{m-1} (حروف x_m خود بخود a_m جای آزاد را می‌گیرند) چنین است :

$$C_n^{a_1} \cdot C_{n-a_1}^{a_2} \cdot C_{n-a_1-a_2}^{a_3} \cdots C_{n-a_1-a_2-\cdots-a_{m-2}}^{a_{m-1}}$$
$$= \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} \cdot \frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!} \cdots$$
$$\cdots \frac{(n-a_1-a_2-\cdots-a_{m-1})!}{a_{m-1}!a_m!} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_m!}$$

۴۲ . در شکل ۱۳۱ نشان داده شده است که رخ به چند طریقه می‌تواند با کمترین تعداد « حرکتهای کوتاه » به این یا آن خانهٔ صفحهٔ

۱۲	۲	۴	۸	۸	۸	۸	۱۶
۱۰	۲	۲	۴	۸	۱۶	۴۸	۸
۸	۲	۴	۲	۸	۴۸	۱۶	۸
۶	۲	۲	۲	۴	۸	۸	۸
۴	۲	۲	۸	۲	۲	۴	۸
۲	۲	۴	۲	۲	۴	۲	۴
۱	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲
A	۱	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲

شکل ۱۳۱

شطرنج (که دیوارههای غیر قابل عبور دارد) برسد.

برای سادگی کار، خانههای مربوط به منطقهٔ چهارم(۲،۲،۴،۲،۲) منطقهٔهشتم(۱۰،۲،۲،۲،۴،۸،۲،۲،۲،۱۰) ومنطقهٔ دوازدهم (۸،۸،۸،۸) درداخل پرانتز قرارداده شده است.

۱	۴	۱۰	۱۶	۱۹	۱۶	۱۰	۴	۱
۴	۱	۳	۶	۷	۶	۳	۱	۴
۱۰	۳	۱	۲	۳	۲	۱	۳	۱۰
۱۶	۶	۲	۱	۱	۱	۲	۶	۱۶
۱۹	۷	۳	۱		۱	۳	۷	۱۹
۱۶	۶	۲	۱	۱	۱	۲	۶	۱۶
۱۰	۳	۱	۲	۳	۲	۱	۳	۱۰
۴	۱	۳	۶	۷	۶	۳	۱	۴
۱	۴	۱۰	۱۶	۱۹	۱۶	۱۰	۴	۱

شکل ۱۳۲

۴۳. در شکل ۱۳۲ دیده میشودکه منطقهٔ چهارم ازسی و دو خانه تشکیل شده است و شاه میتواند با ۳۲۰ طریقه در منطقهٔ چهارم قرار گیرد (۳۲۰ مجموع عددهای واقع در خانههای منطقهٔ چهارم است).

۴۴. دو پیاده را از خط دوم بهخط هشتم میتوان رسانید:

a) با ۱۲حرکت، بدون استفاده ازحرکت دو خانهای وبا $\frac{12!}{6!6!}$ طریقه.

b) با ۱۱ حرکت، اگر از حرکت دو خانهای تنها برای پیادهٔ اول (یا فقط برای پیاده دوم) استفاده کنیم، و $\frac{11!}{5!6!}$ طریقه.

c) با ۱۰حرکت، وقتیکه برایهردو پیاده از حرکت دوخانهای استفادهکنیم، و $\frac{10!}{5!5!}$ طریقه. بنابراین بطورکلی برای دو پیاده $\frac{10!}{5!5!}+$
$+\frac{11!}{5!6!}\times 2+\frac{12!}{6!6!}$ طریقه وجود دارد.

بهمین ترتیب برای سه‌پیاده و چهار پیاده ، تعداد طریقه‌ها بترتیب چنین است:

$$\frac{۱۸!}{۶!۶!۶!}+۳\times\frac{۱۷!}{۵!۶!۶!}+۳\times\frac{۱۶!}{۵!۵!۶!}+\frac{۱۵!}{۵!۵!۵!};$$

$$\frac{۲۴!}{۶!۶!۶!۶!}+۴\times\frac{۲۳!}{۵!۶!۶!۶!}+۶\times\frac{۲۲!}{۵!۵!۶!۶!}+$$

$$+۴\times\frac{۲۱!}{۵!۵!۵!۶!}+\frac{۲۰!}{۵!۵!۵!۵!}$$

۴۵ . a) ساختن مثلث ممکن نیست ، زیرا در آن (شکل ۲۹-e را ببینید) شش جهت وجود دارد ، که در هر یك از آنها مجموع سه عدد باید مقداری ثابت باشد . از طرف دیگر عدد ۱۲ را تنها به پنج طریق می‌توان بصورت مجموع سه عددی که از ۷ تجاوز نکند، نوشت:

$$۱۲=۱+۴+۷=۱+۵+۶=۲+۳+۷=۲+۴+۶=۳+۴+۵$$

(عدهای ۱۱ و ۱۳ را تنها به چهار طریق به صورت مجموع سه عدد می‌توان نوشت، برای ۱۰و۱۴ هم چهارطریق وجود دارد ، برای ۹ و۱۵ سه طریق وغیره) .

b) پنج ضلعی را هم نمی‌توان ساخت ، زیرا عددی که در مرکز آن قرار گرفته است ، باید در پنج مجموع قرار گیرد ، که جملات هر یك از آنها با یکدیگر فرق داشته باشد و از یازده هم تجاوز نکنند ؛ ولی بسادگی می‌توان آزمایش کرد که چنین عددی وجود ندارد .

۴۶ . ۱) در دومینوی تعمیم‌داده شده $n+۱$ سنگ بصورت (k,k) و $C^۲_{n+۱}=\frac{(n+۱)n}{۲}$ سنگ بصورت (l,m) ، که در آن

$l \neq m$ است ، و بطورکلی $(n+۱)+\frac{(n+۱)n}{۲}=\frac{(n+۲)\ (n+۱)}{۲}$ سنگ وجود دارد .

۲) هر عدد k ، در سنگهائی که عدد دوم آن $m \neq k$ است ، n بار و در سنگ (k,k) دوبارمی‌آید . بنابراین مجموع همه خالها چنین است :

$$(۰+۱+۲+\cdots+n)(n+۲)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۲}$$

۴۷ . وقتی‌که از مجموعهٔ کامل سنگهای دومینوی تعمیم داده‌شده برای زوج بودن n ، سنگ $(a,b)(a \neq b)$ را خارج کنیم ، تعداد سنگهائی‌که در آنها a خال وجود دارد (و همچنین برای سنگهای شامل b خال) به تعداد فرد $n+۱$ مرتبه برخورد می‌کنیم(قسمت ۲ از مسئلهٔ ۴۶ را ببینید).

ازطرف دیگر ، واضح است‌که ، در هرزنجیر بسته، هرخال بتعداد زوج وجود دارد ؛ وقتی که خالی بتعداد فرد وجود داشته باشد ، تنها می‌تواند در یك زنجیر باز وارد شود و ضمناً این خال در یکی از دو انتهای زنخیر خواهد بود .

۴۸ . در یك دومینوی تعمیم داده شده ، وقتی که n فرد باشد ، هر یك از خالها به تعداد $(n+۲)$ ، یعنی فرد ، وجود دارد . در یك زنجیر باز فقط تعداد خالهائی که در دوانتهای زنجیر قرار گرفته‌اند می‌تواندفرد باشد. بنابراین لااقل $n-۱$ عدد از خالهای ۰، ۱، ۲، ۳، ...، $n-۱$ و n ، که سنگها رابوجود آورده‌اند ، در ساختمان زنجیر نباید

شرکت داشته باشند ، یعنی لااقل بتعداد $\frac{n-۱}{۲}$ از سنگهای دومینو خارج از زنجیر قرار می‌گیرند . تعداد همه سنگها $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ است ، بنابراین تعداد سنگهائی که در ساختن زنجیر شرکت دارند ، حداکثر چنین است :

$$\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}-\frac{n-۱}{۲}=\frac{n^۲+۲n+۳}{۲}$$

۴۹ . یکی از انواع تقسیم سنگها چنین است : به‌بازیکن اول: (۰,۰) ، (۰,۱) ، (۰,۲) ، (۰,۳) ، (۱,۴) ، (۱,۵) ، (۱,۶) ؛ و بازیکن چهارم : (۱,۱) ، (۱,۲) ، (۱,۳) ، (۰,۴) ، (۰,۵) ،(۰,۶) و (۲,۲) .

دو بازیکن اول‌وچهارم‌زنجیر زیر رامی‌سازند :

(۶,۱)(۰,۶)(۱,۰)(۱,۱)(۵,۱)(۰,۵)(۲,۰)(۱,۲)(۴,۱)(۰,۴)(۰,۰)
(۳,۰)(۱,۳)

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

شکل۱۳۳

(نوبت به دو بازیکن دوم و سوم نمی‌رسد ، زیرا آنها استخوانهائی که‌شامل صفر یا یك خال باشد ندارند) .

۵۰ . خانه‌های صفحهٔ«۵×۴خانه‌ای» را (شکل۳۹ ـ b) مثل شکل ۱۳۳ نمره‌گذاری می‌کنیم حرکتهای متوالی که ما را بهدف‌می‌رساند ، چنین است :

۱)	۱۹—۱۴	۲—۷	۱۰)	۷—۱۱	۴—۱۰
۲)	۱۸—۱۵	۳—۶	۱۱)	۲—۱۲	۱۹—۹
۳)	۱۴—۸	۷—۱۳	۱۲)	۱۱—۱۶	۱۰—۵
۴)	۱۵—۱۲	۶—۹	۱۳)	۱۲—۷	۹—۱۴
۵)	۲۰—۵	۱—۱۶	۱۴)	۱۸—۱۳	۳—۸
۶)	۵—۲	۱۶—۱۹	۱۵)	۱۶—۶	۵—۱۵
۷)	۸—۱۱	۱۳—۱۰	۱۶)	۷—۲	۱۴—۱۹
۸)	۱۲—۱۸	۹—۳	۱۷)	۱۳—۴	۸—۱۷
۹)	۱۱—۱	۱۰—۲۰	۱۸)	۶—۳	۱۵—۱۸

۵۱ . در شکل ۱۱۹ ــ a ، طرح مسطحهٔ حرکت ، طبق قانون بازی هامیلتون (فصل ۳۴ را ببینید) با حرکت اسب در صفحه ۴×۳ خانه‌ای معادل است. بسادگی معلوم می‌شودکه‌اگردورزدن‌را از نقطه‌های Q,C،B،R،M،L (شکل ۱۱۹ ــ a) شروع‌کنیم ، نمی‌توان از تمام نقاط طرح عبورکرد ، بطوریکه از تمام پاره‌خطهای‌طرح عبورکرده‌باشیم وضمناً ازهر نقطه بیش‌از یکبار رد نشده باشیم. حرکتهای ممکن چنین است :

NBPMAQCKRDLS, PMAQNBRKCSLD,
NBPMAQCSLDRK, PMAQNBRDLSCK,
NQAMPBRKCSLD, AMPBNQCKRDLS,
NQAMPBRDLSCK, AMPBNQCSLDRK,

هر یك از این مسیرها خط‌شکسته‌ای‌بوجود می‌آورند ، که البته

می‌توان حرکت را از جهت عکس آن نیز شروع کرد (که ما آنرامسیر جدیدی بحساب نیاورده‌ایم) .

۵۱a . اگر چهل عدد طبیعی اولیه را بترتیب بنویسیم و مرتباً از چپ به‌راست سومین عدد راشماره‌گذاری‌کنیم (شماره‌ها را در زیر عدد مربوطه و داخل پرانتز گذاشته‌ایم ، ضمناً وقتی که به شمارش مجدد می‌رسیم ، باید آنهائی راکه عدد متناظرش معلوم شده است ، بحساب نیاوریم) ، بدست می‌آید :

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	
(۳۷)	(۱۴)	(۱)	(۲۳)	(۲۹)	(۲)	(۱۵)	(۳۳)	(۳)	(۲۴)	
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	
(۱۶)	(۴)	(۳۹)	(۳۰)	(۵)	(۱۷)	(۲۵)	(۶)	(۳۶)	(۱۸)	
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱
(۷)	(۳۴)	(۲۶)	(۸)	(۱۹)	(۳۱)	(۹)	(۴۰)	(۲۰)	(۱۰)	(۲۷)
۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰		
(۳۸)	(۱۱)	(۲۱)	(۳۲)	(۱۲)	(۲۸)	(۲۲)	(۱۳)	(۳۵)		

که از آنجا دیده می‌شود عنصر شمارهٔ سیزدهم در آخرین نوبت وشمارهٔ بیست و هشتم یکی مانده و به آخر حذف می‌شود .

۲) دراینحالت $n=۴۰$ ، $k=۳$ ، $q=\frac{k}{k-۱}=\frac{۳}{۲}$ و $nk=۱۲۰$ است . برای $s=۳۹$ مقدار $a_۱=k(n-s)+۱=۴$ می‌شود و«تصاعد هندسی با عددهای صحیح» چنین خواهد بود :

$$۴,۶,۹,۱۴,۲۱,۳۲,۴۸,۷۲,۱۰۸,۱۶۲,\ldots$$

چون می‌بینیم که ۱۶۲>nk=۱۲۰ است ، پس A=۱۰۸ و ضمناً t=nk+۱−A=۱۲۰+۱−۱۰۸=۱۳ می‌شود ، یعنی سیزدهمین عنصر در سی‌و نهمین نوبت حذف می‌شود .

اگر s=۴۰ باشد ، a_1=۱ و «تصاعد هندسی باعددهای صحیح» چنین است :

۱,۲,۳,۵,۸,۱۲,۱۸,۲۷,۴۱,۶۲,۹۳,۱۴۰,...

و چون ۱۴۰>nk=۱۲۰است، پس t=۱۲۰+۱−۹۳=۲۸ (A=۳۹) می‌شود ، یعنی بیست‌وهشتمین عنصر در نوبت چهلم حذف می‌شود .

۵۱ b.

۱	**۲**	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	**۱۰**
(۲۸)	**(۱۹)**	(۲۲)	(۳۶)	(۱۶)	(۱)	(۷)	(۱۲)	(۳۵)	**(۳۱)**
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	**۱۷**	۱۸		
(۲۵)	(۲)	(۲۰)	(۸)	(۲۷)	(۱۳)	**(۱۷)**	(۳)		
۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶		
(۲۳)	(۳۰)	(۹)	(۳۲)	(۲۹)	(۴)	(۱۴)	(۲۱)		
۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶
(۱۸)	(۱۰)	(۳۴)	(۵)	(۲۶)	(۲۴)	(۱۵)	(۳۳)	(۱۱)	(۶)

از جدول دیده می‌شود که باید کارتها را از بالا به پائین بترتیب زیر ردیف کرد، تکخال پیك (ورق بیست‌وهشتم یا به عبارت دیگر اولین ورق از رنگ چهارم) ، تکخال خاج (ورق شمارهٔ ۱۹ یعنی اولین ورق رنگ سوم) ، سه‌لوی خاج (ورق شمارهٔ ۲۲ یعنی چهارمین ورق

از رنگ سوم) وغیره .

چون $n=۳۶$ ، $k=۶$ ، $q=\frac{k}{k-۱}=\frac{۶}{۵}$ و $nk=۲۱۶$ است؛

«تصاعدهای هندسی با عددهای صحیح» چنین می‌شود :

$s=۱۹;a_۱=۶\times۱۷+۱=۱۰۳,۱۲۴,۱۴۹,۱۷۹,۲۱۵,۲۵۸,\ldots$

$s=۳۱;a_۱=۶\times۵+۱=۳۱,۳۸,۴۶,۵۶,۶۸,۸۲,۹۹,۱۱۹,۱۴۳,$
$,۱۷۲,۲۰۷,۲۴۹,\ldots$

$s=۱۷;a_۱=۶\times۱۹+۱=۱۱۵,۱۳۸,۱۶۶,۲۰۰,۲۴۰,\ldots$

چون در این «تصاعدها» بزرگترین عددهائی که از عدد nk تجاوز نمی‌کنند : ۲۱۵ ، ۲۰۷ و ۲۰۰ هستند ؛ مقادیر متناظر t چنین‌اند:

$(۲۱۶-۲۱۵+۱)=۲$ و $(۲۱۶-۲۰۷+۱)=۱۰$ و $(۲۱۶-۲۰۰+$
$+۱)=۱۷$

(در جدول این عددها با حروف سیاه چاپ شده است) .

۵۲ . اگر عناصر $a_۱$ ، $a_۲$ ، ... ، a_k را روی محیط دایره‌ای در جهت حرکت عقربه‌های ساعت قرار دهیم و سپس هر یك از این عناصر را ــ در جهت عکس عقربه‌های ساعت ــ به عنصر مجاور خود تبدیل کنیم ، معادل با یك تبدیل دوری خواهد بود : $C=(a_۱,a_۲,\ldots,a_k)$.

واضح است که $C^k=E$ ؛ زیرا وقتی تعداد تبدیلهائی که بطریق مذکور انجام دهیم ، مضربی از k باشد ؛ همهٔ عناصر درجای اول خود قرار خواهند گرفت .

اگر تبدیل A مساوی حاصلضرب چند دور مستقل از هم باشد : $A=C_۱\cdot C_۲\cdots C_s$ ، بطوریکه مرتبه‌های آنها $k_۱$،$k_۲$،...،k_s باشد ، تنها وقتی در تبدیل A^m همهٔ عناصر در جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرند

که m بر $k_۱$ و $k_۲$ و $k_۳$ و غیره قابل قسمت باشد . کوچکترین مقدار m ، که در این شرط صدق می‌کند ، عبارتست از کوچکترین مضرب مشترك عددهای $k_۱، k_۲، \dots، k_s$.

۵۳ . فرض کنید طبق قانونی که در فصل۲۲ شرح داده شده است، انتقال از یك‌تبدیل به تبدیل‌دوم واز تبدیل دوم به‌تبدیل‌سوم وغیره طوری انجام‌گیردکه برای هر انتقال ، عناصری که‌مثلاً دروضع $(\alpha_۱\alpha_۲\dots,\alpha_s)$ هستند ، جای خود را بدیگری در تبدیل دوری بدهند . در اینصورت در تشکیل تبدیل M ،دور $(a'_۱ و a'_۲ و \dots a'_s)$ بوجودمی‌آیدکه‌درآن‌عناصر $a'_۱، a'_۲، \dots، a'_s$ در ابتدا جاهائی با شماره‌های $\alpha_۱، \alpha_۲، \dots، \alpha_s$ داشته‌اند. بهمین ترتیب بقیهٔ‌دورهائی‌که در تبدیل‌موردنظر M عمل‌می‌کنند بدست می‌آید .

۵۴ . نزدیکترین زاویهٔ لوزیهای ردیف k ام را به مرکز ،α_k فرض می‌کنیم . اگر نقطهٔ A بین لوزیهای ردیف $(k-۱)$ ام و ردیف $(k+۱)$ ام مشترك باشد ، خواهیم داشت (شکل ۱۳۴ ـ a راببینید):

$$\alpha_{k-۱}+۲(\pi-\alpha_k)+\alpha_{k+۱}=۲\pi,$$

وازآنجا :

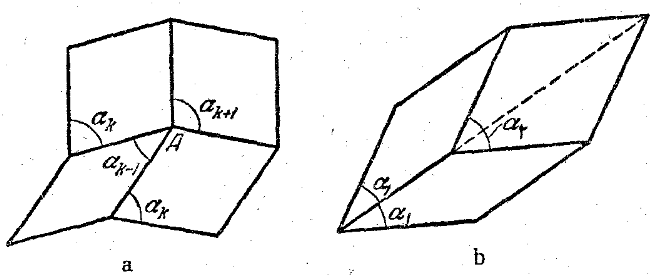
$$\alpha_{k+۱}-\alpha_k=\alpha_k-\alpha_{k-۱}$$

یعنی $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، $\alpha_۳$ ... تشکیل یك تصاعد عددی باقدرنسبت $\alpha_۱=\frac{۲\pi}{m}$ می دهند ، زیرا $\alpha_۲=۲\alpha_۱$ (شکل ۱۳۴ ـ b) و از آنجا $\alpha_۲-\alpha_۱=\alpha_۱=\frac{۲\pi}{m}$ می‌شود ؛ بنابراین $\alpha_k=k\frac{۲\pi}{m}$ خواهدبود .

اگر m عددی فرد باشد ، داریم :

$$\alpha_{\frac{m-1}{2}}=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{m}=\frac{\pi(2m-2)}{2m},$$

یعنی $\alpha_{\frac{m-1}{2}}$ برابر است با زاویهٔ یك $2m$ ضلعی منتظم . هر یك از بقیهٔ زوایای $2m$ ضلعی از سه زاویه تشکیل شده‌اند که مجموع آنها برابر است با :



شکل ۱۳۴

$$\alpha_{\frac{m-1}{2}-1}+2(\pi-\alpha_{\frac{m-1}{2}})=\frac{2\pi}{m}\cdot\frac{m-3}{2}+2\left(\pi-\frac{m-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{m}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{m}(m-3+2)=\frac{\pi(m-1)}{m}=\alpha_{\frac{m-1}{2}}$$

اگر m عددی زوج باشد ، داریم :

$$\alpha_{\frac{m}{2}-1}=\frac{2\pi}{m}\left(\frac{m}{2}-1\right)=\frac{\pi(m-2)}{m},$$

یعنی $\alpha_{\frac{m}{2}-1}$ برابر است با زاویهٔ m ضلعی منتظم؛ در اینحالت «زوایای»

از نوع D در شکل ۵۴ ـ b ، برابر است با :

$$\alpha_{\frac{m}{2}-2}+2\left(\pi-\alpha_{\frac{m}{2}-1}\right)=$$

$$=2\pi+\left[\frac{m}{2}-2-2\left(\frac{m}{2}-1\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{m}=\pi$$

۵۵ . اگر نزدیکترین زاویهٔ لوزی ردیف k ام را به مرکز چند ضلعی منتظم به α_k نشان دهیم، بسادگی ثابت می‌شود که $\alpha_k=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{m}$ است (کافی است بدست آوریم $\alpha_1=\frac{3\pi}{m}$ و $\alpha_2=\frac{5\pi}{m}$ و از تساوی واضح $\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}+2(\pi-\alpha_k)=2\pi$ استفاده کنیم ، نتیجه می‌شود که α_1 ، α_2 ، α_3 ، α_4 و غیره یك تصاعد عددی تشکیل می‌دهند) . ولی دراینصورت داریم :

$$\alpha_{\frac{m-3}{2}}=\left(2\,\frac{m-3}{2}+1\right)\frac{\pi}{m}=\frac{\pi(m-2)}{m}$$

و این اندازهٔ زاویهٔ یك m ضلعی منتظم است . علاوه بر آن زوایائی که مثلاً دررأس E از شکل ۵۵ ـ b ، تشکیل شده است ، برابراست با :

$$\alpha_{\frac{m-5}{2}}+2\left(\pi-\alpha_{\frac{m-3}{2}}\right)=(m-4)\frac{\pi}{m}+2\left[\pi-\frac{\pi(m-2)}{m}\right]=\pi$$

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که هر یك از زوایای « چند ضلعی غیربسته» (از نوع چند ضلعی ABCDEFGHIKL در شکل ۵۵ـ b) برابر است با $\frac{\pi(m-2)}{m}$، ازاینجا نتیجه می‌شود که «چند ضلعی غیر

بسته » منظم است . مثلاً اگر α زاویهٔ رأس چند ضلعی ستاره‌ای باشد، داریم :

$$\widehat{ABC}=\alpha+(\pi-\alpha_۱)=\alpha+\pi-۳\alpha=\pi-۲\alpha,$$

$$\widehat{BCD}=\alpha_۱+(\pi-\alpha_۲)=۳\alpha+\pi-۵\alpha=\pi-۲\alpha,\dots$$

و ضمناً : $\pi-۲\alpha=\pi-\frac{۲\pi}{m}=\frac{\pi(m-۲)}{m}$.

که زاویهٔ یك m ضلعی منتظم است .

۵۶ . اگر اضلاع مربعهای تشکیل دهنده را بترتیب ۲ سانتیمتر، ۵ سانتیمتر، ۷ سانتیمتروغیره بگیریم، مساحت مستطیلهای $S_۱$ ، $S_۲$ و $S_۳$ که بترتیب از نه ، ده و سیزده مربع درست شده‌اند ، چنین است :

$$۲^۲+۵^۲+۷^۲+۹^۲+۱۶^۲+۲۵^۲+۲۸^۲+۳۳^۲+۳۶^۲=۴۲۰۹$$ (سانتیمترمربع)

$$۳^۲+۱۱^۲+۱۲^۲+۲۳^۳+۳۴^۲+۳۵^۲+۳۸^۲+۴۱^۲+۴۴^۲+۴۵^۲=$$
$$=۱۰۲۷۲$$ (سانتیمترمربع)

$$۱^۲+۴^۲+۵^۲+۹^۲+۱۴^۲+۱۹^۲+۳۳^۲+۵۲^۲+۵۶^۲+۶۹^۲+$$
$$+۷۰^۲+۷۱^۲+۷۲^۲=۲۷۹۴۵$$ (سانتیمترمربع)

چون $۴۲۰۹=۳\times۲۳\times۶۱$ ، بنابراین اضلاع مستطیل $S_۱$ می‌تواند ۳ سانتیمتر و ۱۴۰۳ سانتیمتر یا ۶۹ سانتیمتر و ۶۱ سانتیمتر یا ۲۳ سانتیمتر و ۱۸۳ سانتیمتر باشد . حالتهای اول و سوم ممکن نیست، زیرا هیچیك از اضلاع $S_۱$ نباید از ضلع بزرگترین مربع تشکیل‌دهندهٔ

آن (یعنی ۳۶ سانتیمتر) کمتر باشد. بنابرایـن اضلاع مستطیل S_1 عبارتند از ۶۹ سانتیمتر و ۶۱ سانتیمتر.

بهمین ترتیب داریم:

$$۱۰۲۷۰ = ۲ \times ۵ \times ۱۳ \times ۷۹ = ۷۹ \times ۱۳۰ = ۶۵ \times ۱۵۸$$

ولی از مجموع مربعهای تشکیل دهنده، نمی‌توان ضلعی‌مساوی ۶۵ سانتیمتر درست‌کرد. بنابراین اضلاع مستطیل S_2 برابرند با ۷۹ سانتیمتر و ۱۳۰ سانتیمتر. اضلاع مستطیل S_3 هم ۱۴۱ سانتیمتر و۱۹۵ سانتیمتر است، زیرا داریم:

$$۲۷۴۹۵ = ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۱۳ \times ۴۷ = ۱۴۱ \times ۱۹۵$$

(هیچیك از دیگر انواع تجزیه عدد ۲۷ ۴۹۵ به صورت ضرب دوعامل با اندازه‌های مربعهای مفروض تطبیق نمی‌کند).

اگر بجای «مربع بضلع a» بنویسیم «مربع a»، در اینصورت S_1 تشکیل شده است (از چپ به راست) از مربعهای ۳۶، ۳۳ (ردیف بالا)؛ ۵، ۲۸ (زیر ۳۳)، ۲۵، ۹، ۲ (زیر ۳۶)؛ ۷ (زیر ۲ و ۵) و ۱۶ (زیر ۹ و ۷). S_2 تشکیل شده‌از مربعهای: ۴۱، ۴۴، ۴۵ (ردیف بالا)؛ ۳۸، ۳ (زیر ۴۱)؛ ۴۵، ۱۲ (زیر ۳ و ۴۴)؛ ۱۱، ۳۴ (زیر ۴۵)؛ ۲۳ (زیر ۱۲ و ۱۱). S_3 تشکیل شده است از مربعهای: ۷۱، ۷۲، ۵۲ (ردیف بالا)؛ ۱۹، ۳۳ (زیر ۵۲)؛ ۵، ۱۴ (زیر ۱۹)؛ ۷۰، ۱ (زیر ۷۱)؛ ۶۹، ۴ (زیر او۷۲)؛ ۹ (زیر ۴ و ۵)و۵۶ (زیر ۹، ۱۴ و ۳۳).

۵۷ . مستطیل با اضلاع به نسبت ۳۷۷ : ۶۰۸ از مربعهای زیر تشکیل شده است : ۲۰۹ ، ۲۰۵ ، ۱۹۴ (ردیف بالا) ؛ ۱۱ ، ۱۸۳ (زیر ۱۹۴) ؛ ۴۴ ، ۱۷۲ (زیر ۲۰۵ و ۱۱) ؛ ۱۶۸ ، ۴۱ (زیر ۲۰۹) ؛ ۱ ، ۴۳ (زیر ۴۴) ؛ ۴۲ (زیر ۴۱ و ۱) ؛ ۸۵ (زیر ۴۲ و ۴۲) و « مستطیل ۲۳۱ × ۶۰۸ » ازمربعهای: ۲۳۱ ، ۹۵ ، ۶۱ ، ۱۰۸، ۱۱۳ (ردیف بالا) ؛ ۳۴ ، ۲۷ (زیر ۶۱) ؛ ۷ ، ۲۰ (زیر ۲۷) ؛ ۱۳۶ (زیر ۹۵ و ۳۴ و ۷) ؛ ۱۲۳ ، ۵ (زیر ۱۲۸) ؛ ۱۱۸ (زیر ۵ و ۱۱۳) .

۵۸ . اگر کوچکترین مربع ABCD ، مثلاً از طرف ضلع AB بر یکی از اضلاع مستطیل متصل باشد ، یا از دو طرف بوسیلهٔ دو مربع بزرگتر در برگرفته شده است و یا اینکه از یکطرف به ضلع دیگری از مستطیل و از طرف دیگر به مربع بزرگتری متصل است که در هر دو صورت ، ضلع CD (ضلع کوچکترین مربع) نمی‌تواند به مربعی با اندازه‌های بزرگتر ، متصل می‌شود .

۵۹ . ۱) داریم :

$$a^{۳}=\left(\frac{۲a}{۳}\right)^{۳}+۱۷\left(\frac{a}{۳}\right)^{۳}+۱۶\left(\frac{a}{۶}\right)^{۳}$$

یعنی مکعب بضلع a را می‌توان به ۳۴ مکعب تقسیم کرد : یك مکعب به ضلع $\frac{۲a}{۳}$ ، ۱۷ مکعب به ضلع $\frac{a}{۳}$ و ۱۶ مکعب به ضلع $\frac{a}{۶}$.

۲) داریم : $a^{۳}=۲\left(\frac{a}{۲}\right)^{۳}+۴۸\left(\frac{a}{۴}\right)^{۳}$

یعنی مکعب به ضلع a را می‌توان به ۵۰ مکعب تقسیم‌کرد : ۲ مکعب

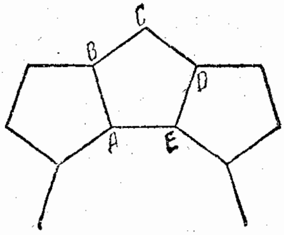
به ضلع $\frac{a}{۲}$ و ۴۸ مکعب به ضلع $\frac{a}{۴}$.

۶۰ . مربع بضلع a را می‌توان به ۴ مربع ، به ۶ مربع (یکی بضلع $\frac{۲a}{۳}$ و پنج مربع بضلع $\frac{a}{۳}$) ، به ۸ مربع (یکی بضلع $\frac{۳a}{۴}$ و هفت مربع بضلع $\frac{a}{۴}$) ، تقسیم‌کرد .

ولی اگر بتوان مربع را به s مربع تقسیم‌کرد، با تقسیم یکی از مربعهای بدست آمده به چهار مربع ، به تقسیم مربع اصلی به $s+۳$ مربع‌می‌رسم . بنابراین می‌توان مربع را به هفت $(۴+۳)$ ، ده $(۷+۳)$ و بطورکلی $۴+۳k$ مربع‌کوچکتر تقسیم‌کرد. با همین استدلال‌می‌توان نتیجه‌گرفت‌که هر مربع را به $۶+۳l$ مربع‌کوچکتر و $۸+۳m$ مربع کوچکتر تقسیم‌کرد (k ، l ، m عددهای طبیعی هستند) .

ولی هر عدد طبیعی n را ،که بزرگتر از شش باشد ، می‌توان بیکی از سه صورت $۶+۳l$ یا $۴+۳k$ یا $۸+۳m$ نوشت ، زیرا در تقسیم یك عدد بر ۳ ، برای باقیماندهٔ تقسیم صفر یا یك یا دو بدست می‌آید .

۶۱ . تمام راسهای یك ده ضلعی منتظم باید گرههائی از نوع (۱۰,۵,۵) باشند (شکل ۱۳۵ را ببینید). ولی نقاط B و D نمی‌توانندگرههائی از این نوع باشند، زیرا در اینصورت در نقطهٔ C دو ده ضلعی منتظم و یك پنج ضلعی



شکل۱۳۵

منتظم بهم رسیده‌اند ، که ممکن نیست .

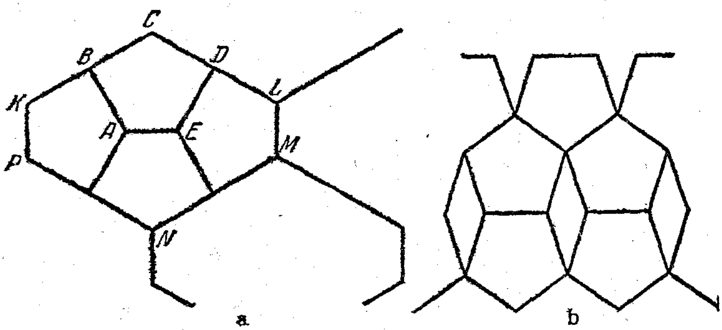
۶۲ . هرزاویهٔ یك m ضلعی منتظم برابر است با $\frac{۱۸۰^\circ(m-۲)}{m}$.
مجموع زوایای رأس درگره $(n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$ برابر است با ۳۶۰درجه،
بنابراین :

$$\frac{۱۸۰^\circ(n_۱-۲)}{n_۱}+\frac{۱۸۰^\circ(n_۲-۲)}{n_۲}+\ldots+\frac{۱۸۰^\circ(n_k-۲)}{n_k}=۳۶۰^\circ$$

که اگر طرفین را به ۱۸۰° ساده کنیم بدست می‌آید :

$$k-۲\left(\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\ldots+\frac{۱}{n_k}\right)=۲$$

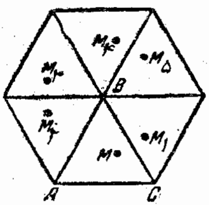
۶۳ . درشکل ۱۳۶ـ a دیده می‌شودکه باچهارپنج ضلعی به‌شکل $ABCDE$ ($AB=BC=CD=DE$ ؛ $\hat{B}=\hat{D}=۹۰^\circ$ ؛ $\hat{A}=\hat{C}=\hat{E}=۱۲۰^\circ$) می‌توان شش ضلعی $KCLMNP$ را درست‌کرد، که‌در آن هر دو ضلع روبرو مساوی و موازی‌اند ، و با چنین شش ضلعی‌هائی می‌توان بسادگی صفحه را پوشاند . درشکل ۱۳۶ـ b هم دیده می‌شود



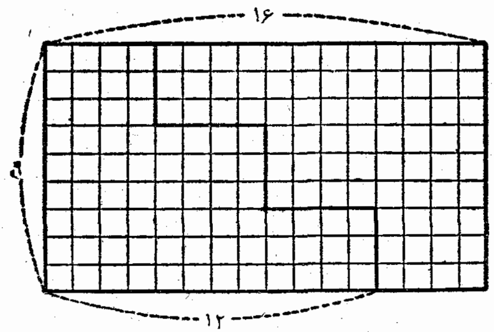
شکل۱۳۶

که با پنج ضلعی‌های منتظم و لوزیهائی با زاویهٔ حادهٔ ۳۶ درجه می‌توان صفحه را پرکرد .

۶۴ .کافی است ثابت‌کنیم ، که با پیدا کردن قرینهٔ مثلث ABC نسبت به‌ضلع BC، یا نسبت‌به ضلع AB ، نقطهٔ دلخواه M واقع درداخل



شکل۱۳۷



شکل۱۳۸

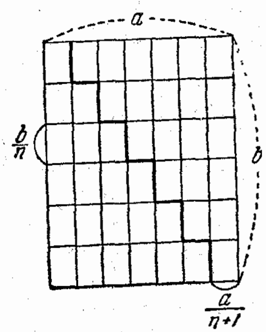
مثلث ABC ، درآخرکارمنجر به‌تنهاپنج نقطهٔ: M_1، M_2، M_3، M_4، M_5 می‌شود (شکل ۱۳۷) .

۶۵a . شکل ۱۳۸ را ببینید .

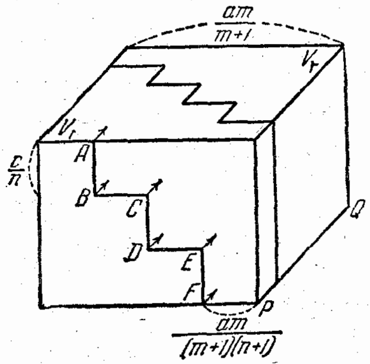
۶۵b . کافی است ضلع a را به ۱+n قسمت و ضلع b را به n قسمت تقسیم‌کنیم و خطوطی موازی‌اضلاع مستطیل رسم کنیم . سپس خط شکسته‌ای طبق شکل ۱۳۹ (برای ۶=n) رسم‌کنیم .

۶۶. در شکل ۱۴۰ مکعب مستطیل «$c \times \frac{b(m+1)}{m} \times \frac{am}{m+1}$» نشان داده شده است ، که از دو نیمهٔ v_1وv_2 ، مکعب مستطیل «$a \times b \times c$» تشکیل شده است (در شکل ۴=m و

$PQ=\frac{b(m+1)}{m}$ است) . اگر از خط شکستهٔ ABCDEF مقطعی موازی یال PQ رسم کنیم ، هر یك از نیمه‌های V_1 و V_2 به دوقسمت



شکل ۱۳۹



شکل ۱۴۰

تقسیم می‌شود : اگر قسمتهای راست را به اندازهٔ $\frac{c}{n}$ بطرف بالا به اندازهٔ $\frac{am}{(m+1)(n+1)}$ بطرف چپ حرکت دهیم ، مکعب مستطیل $\frac{amn}{(m+1)(n+1)}\times\frac{b(m+1)}{m}\times\frac{c(n+1)}{n}$ (در شکل $n=3$) بدست می‌آید . با طریقهٔ مشابهی می‌توان مکعب‌مستطیل $a\times b\times c$ را به مکعب مستطیل $\frac{am}{m+1}\times\frac{b(m+1)n}{m(n+1)}\times\frac{c(n+1)}{n}$ تبدیل کرد.

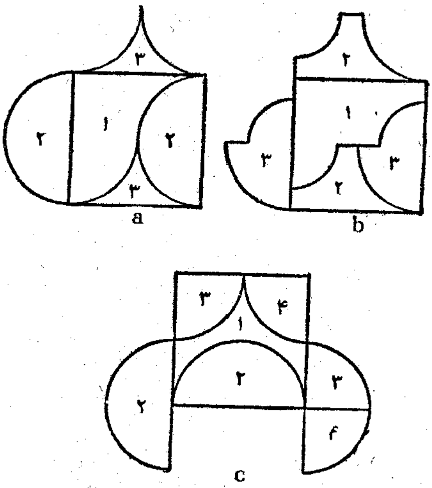
۶۷ . شکل ۱۴۱ را ببینید .

۶۸ . برای اینکه منحنی $\begin{cases}x=a\sin mt\\y=b\sin nt\end{cases}$ از یك رأس مستطیل «محاط» بر منحنی بگذرد ، باید به ازاء مقداری از پارامتر t داشته باشیم :

$$mt=(۲k+۱)۹۰^\circ \ ; \ nt=(۲l+۱)۹۰^\circ$$

که در آن k و l عددهای صحیحی هستند ؛ این روابط وقتی وجود دارند که عددهای k و l در رابطهٔ $\frac{m}{n}=\frac{۲k+۱}{۲l+۱}$ صدق کنند.

دراینحالت بهازاء $t_\circ=\frac{(۲k+۱)۹۰^\circ}{m}=\frac{(۲l+۱)۹۰^\circ}{n}=t$ خواهیم داشت : $|x_\circ|=|y_\circ|=۱$. از خواننده می‌خواهیم تحقیق کند که نقطه‌های $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ متناظر با مقادیر پارامتر $t_۱=t_\circ-\Delta t$ و $t_۲=t_\circ+\Delta t$ (Δt مقداری دلخواه است) برهم منطبق‌اند .



شکل ۱۴۱

۶۹ . I . معادلهٔ $|۲y-۱|+|+|۲y+۱|+\frac{۴|x|}{\sqrt{۳}}=۴$ ، باحذف علامت قدر مطلق در منطقه‌های : $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ ، $A_۵$ ، $A_۶$ (شکل ۱۴۲ــ a) فرارمی‌گیرد . مثلا وقتی که $y\geqslant\frac{۱}{۲}$ و $x\leqslant ۰$ بــاشد

(منطقه A_2) داریم :

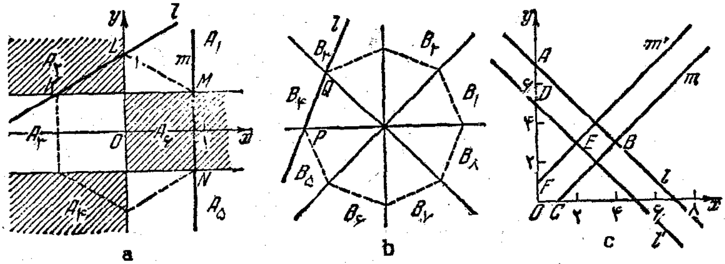
$$+2y-1+2y+1+\frac{4(-x)}{\sqrt{3}}=4\Longrightarrow y-\frac{x}{\sqrt{3}}=1;$$

و این معادله متناظر با خط l است، که از آن قطعه KL ، واقع در منطقهٔ A_2 ، قابل قبول‌است . وقتی‌که $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$ و $x\geqslant 0$ باشد ، داریم :

$$1-2y+2y+1+\frac{4x}{\sqrt{3}}=4 \quad\Longrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و این معادله متناظر با خط m است ،که از آن فقط باره خط MN، واقع در منطقهٔ A_6 ، مورد قبول است و غیره .

II . درمعادلهٔ $|x|+|y|+\frac{1}{\sqrt{2}}\{|x-y|+|x+y|\}=\sqrt{2}+1$ اگر علامت قدر مطلق را از بین ببریم ، هر یك از آنها در یکی از « مناطق » $B_k(1\leqslant k\leqslant 8)$ قرار می‌گیرند : که از تقسیم صفحه به ۸ قسمت ، بوسیلهٔ محورهای مختصات و نیمسازهای آنها ، بوجود آمده‌اند (شکل ۱۴۲ ـ b) . مثلاً در منطقهٔ B_4 ،که در آن $x\leqslant 0$ ، $y\geqslant 0$



شکل۱۴۲

$x-y\leqslant 0$ ، $x+y\leqslant 0$ است، داریم :

$$-x+y+\frac{1}{\sqrt{2}}[y-x+(-x-y)]=1+\sqrt{2}\Longrightarrow$$
$$y-(1+\sqrt{2})x=1+\sqrt{2},$$

و این معادلهٔ خط l است که از نقطه $(-1,0)$ می‌گذرد و با محور ox زاویه $67^\circ 30'$ می‌سازد (زیرا $tg 67^\circ 30'=1+\sqrt{2}$) . قسمتی از خط PQ ، که در قسعه B_4 قراردارد ، ضلع PQ از هشت ضلعی منتظم را می‌دهد . خواننده خود می‌تواند تحقیق کند که بهمین ترتیب می توان اضلاع دیگر هشت ضلعی ، واقع در بقیهٔ قطعه‌ها ، را بدست‌آورد :

III . چون در معادله $\left||x|+\left||y|-3\right|-3\right|=1$ فقط x و y در علامت قدر مطلق قرار گرفته‌اند ،کافی است قسمتی از نمایش تغییرات تابع راکه در ربع اول واقع است رسم کنیم ، سپس قرینهٔ آنرا نسبت به محورهای ox و oy و نسبت به مبداء مختصات پیداکنیم :

به‌ازاء $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$ داریم :

$$\left|x+|y-3|-3\right|=1$$

از آنجا نتیجه می‌شودکه یا :

$$x+|y-3|-3=-1 \Longrightarrow |y-3|=4-x \qquad (1)$$

و یا :

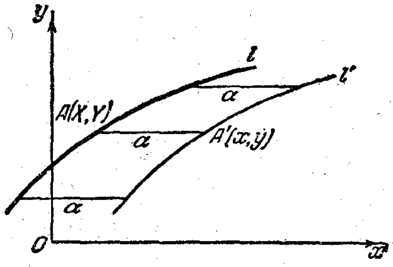
$$x+|y-3|-3=-1 \Longrightarrow |y-3|=2-x \qquad (2)$$

معادله (۱) تنها به ازاء $x\leqslant 4$ معنا دارد ، و از آن یکی از دو معادله $y-3=4-x$ (خط l ، که‌ازآن‌پاره خط AB انتخاب‌می‌شود

که ۴ $x \leqslant$ باشد) یا ۴ $y-۳=x-$ (خط m که از آن پاره خط BC به‌ازاء $x \leqslant$۴ ، انتخاب می‌شود) بدست می‌آید. (شکل ۱۴۲ ــ c را ببینید).

از معادله (۲) یکی از دو معادلهٔ : $y-۳=۲-x$ (خط 'l ، که از آن پاره خط DE انتخاب می‌شود ؛ به ازاء ۲ $x \leqslant$) یا ۲ $y-۳=x-$ (خط 'm ، که از پاره خط FE انتخاب می‌شود ؛ به‌ازاء ۲ $x \leqslant$) بدست می‌آید .

۷۰ . $y=f(x)$ را معادلهٔ منحنی l و 'l را نتیجهٔ انتقال l بطرف راست و به اندازهٔ α فرض می‌کنید (شکل ۱۴۳) . اگر $A'(x, y)$ را نقطهٔ دلخواهی از منحنی 'l و $A(X, Y)$ را نقطهٔ متناظر آن از منحنی l فرض کنیم ، یعنی $X=x-\alpha$ و $Y=y$ ، در اینصورت $Y=f(X)$ و بنابراین $y=f(x-\alpha)$ خواهدبود ،واین همان معادلهٔ منحنی 'l است که مختصات هر نقطهٔ دلخواه منحنی درآن صدق می‌کند .



شکل ۱۴۳

۷۰a . باید از جدول لگاریتم هفت رقمی استفاده‌کرد .

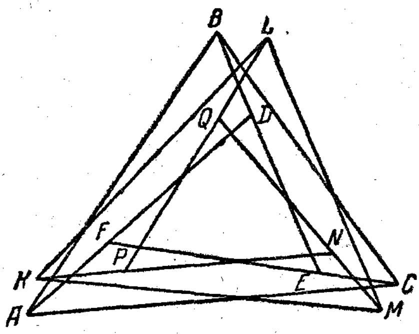
۷۱ . ۱) اگر شش صفحه از یالهای یك چهاروجهی منتظم چنان عبور دهیم که نسبت به وجوه مربوطهٔ چهار وجهی بیك اندازه تمایل داشته باشند ، از تقاطع آنها یك مکعب بدست می‌آید (شکل ۱۰۰ــ b را ببینید) .

۲) دوازده قطر بزرگ دوازده وجهی لوزوی (O_1O_2 و غیره ـ شکل ۱۰۵) ، یالهای یك هشت‌وجهی منتظم‌اند . صفحاتی که‌از یالهای این هشت وجهی چنان‌عبور کنندکه نسبت به وجوه‌متناظر آن یك‌تمایل داشته باشند ، دوازده وجهی لوزوی را ،که در شکل داده شده است ، محصور می‌کنند .

۷۲ فرض می‌کنیم که برای رنگ‌آمیزی مناطقی ، که بوسیلهٔ n خط راست بوجود آمده است ، دو رنگ کافی باشد . وقتی که خط $(n+1)$ ام را رسم می‌کنیم، می‌توان رنگ مناطقی‌را (یاقسمتی‌ازآنها) که در یکطرف این خط قرار گرفته‌اند بهمان وضع سابق حفظ کرد ، ولی‌درطرف‌دیگر، هر رنگ رابه‌رنگ دیگری‌تبدیل‌نمود؛دراینصورت در تقسیمی که بوسیلهٔ $n+1$ خط راست در صفحهٔ بوحود آمده است ، هر دو منطقهٔ مجاور به دو رنگ مختلف خواهند بود . چون به ازاء $n=1$ ، دو رنگ‌کافی و باکمك استقراء مرحلهٔ «عبور از n به $n+1$» را ثابت‌کردیم ، برای‌رنگ‌آمیزی صفحه (وقتی‌که با تعداد دلخواهی خط راست تقسیم شده باشد) دو رنگ بیشتر مورد احتیاج نیست .

همین استدلال در موردی‌که فضا بوسیلهٔ n صفحه تقسیم شده باشد نیز صحیح است .

۷۳ . در شکل ۱۴۴ دیده می‌شود که دو مثلث از چهار مثلث : ABD ، BCE ، CAF و DEF در یك پاره خط مشترکند ؛ همین وضع در مورد چهار مثلث : KLP ، LMQ ، MKN و NPQ نیز وجود دارد .



شکل ۱۴۴

علاوه بر این، هریك از چهار مثلث اول در قسمتی ازمساحت باهریك از چهار مثلث دوم مشترك است(والبته برعکس) .

بنابراین اگر بالای صفحهٔ شکل، نقطه‌ای مانند S و زیر صفحهٔ شکل ، نقطه‌ای مانند T در نظر بگیریم، دراینصورت هر دومثلث از هشت مثلث: SABD ، SBCE ، SCAF ، SDEF ، TKLP ، TLMQ ، TMKN ، TNPQ در قسمتی با هم مشترك خواهند بود.

۷۴ . اگر تعداد مسیرهائی که از « گره n_1 » عبور می‌کند به n_1 و تعداد مسیرهائی که از « گره n_2 » عبور می‌کند به n_2 و بالاخره تعداد، مسیرهائی که از «گره n_s» عبور می‌کنند به n_s نشان دهیم ، هر مسیررا دوبار بحساب آورده‌ایم وبنابراین تعدادکلی مسیرها برابراست با

$$\frac{n_1+n_2+\cdots+n_s}{2}.$$

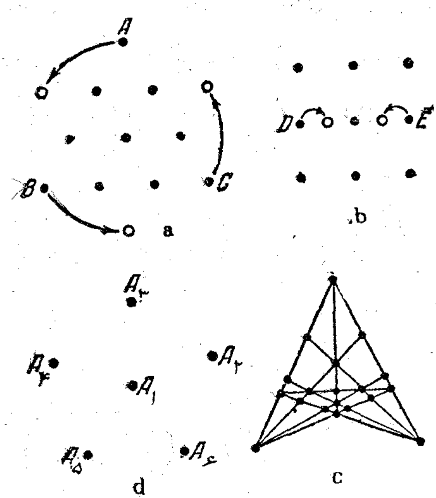
اگر در صورت این کسر، تعداد عددهای فردرا عددی فردبگیریم آنوقت تعدادکل مسیرها عددی‌کسری می‌شود .

۷۵ . درشکل ۱۱۸ ، هفت نقطه‌ای که وجود دارد، به‌دو دسته تقسیم می‌شوند : K ، L ، M ، N و A ، B ، C . طرح مسیرها چنانست که از هر نقطهٔ دستهٔ اول می‌توان بطور مستقیم تنها بیکی از نقاط دستهٔ دوم عبورکرد و بر عکس .

برای اینکه از همهٔ نقطه‌ها عبور کنیم باید حرکت را از نقطه‌ای مربوط به دستهٔ اول شروع کنیم و به نقطهٔ دیگری از همین دسته خاتمه دهیم ؛ ولی از نقطهٔ اخیر دیگر نمی‌توان بطور مستقیم بطرف نقطهٔ اولیه حرکت کرد .

۷۶ . اگر در هشت وجهی منتظم ، مکعبی محاط کنیم که رأسهای آن در مراکز وجوه هشت وجهی باشد ، دراینصورت عبور از یك وجه به وجه دیگر هشت وجهی ، تنها وقتی ممکن است که رأسهای مکعبی که در این وجوه قراردارند ، انتهای یکی از یالهای مکعب باشند .

همین استدلال را می‌توان دربارهٔ دوازده وجهی که در داخل یك بیست وجهی منتظم محاط شده است ، انجام داد .



شکل ۱۴۵

۷۷ . علامتهای پیکان درشکل ۱۴۵ ــ a نشان‌می‌دهدکه‌سکه‌های A ، B و C را چگونه باید جابجاکرد .

۷۸ . پیکانهای شکل ۱۴۵ ـ b نشان می‌دهند که دوسکهٔ D و E را چگونه باید جابجا کرد ؟

۷۹ . جواب در شکل ۱۴۵ ـ c داده شده است .

۸۰ . نقطه‌ها را باید در رأسها و مرکز یك پنج ضلعی منتظم قرار داد (شکل ۱۴۵ ـ d را ببینید) .

۸۱ . به شش نقطهٔ مسئلهٔ قبل باید دو نقطهٔ A_7 و A_8 را به این ترتیب اضافه کرد : در صفحهٔ عمود بر صفحهٔ شکل، که از مرکز A_1 گذشته است ، دو نقطهٔ A_7 و A_8 را طوری انتخاب می کنیم که ـ $A_1A_2 = A_1A_8 = A_1B_7$ باشد (در حقیقت یکی از « مثلثها » ، یعنی مثلث $A_1A_7A_8$ با زاویهٔ رأس مساوی ۱۸۰ درجه بدست می‌آید).

۸۲ . کافی است ثابت کنیم که طول پاره خطهای OA ، OB ، OC ، OD ، AB ، AC ، AD ، BC ، BD ، CD باهم برابرند، مثلاً :

$$AC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-0\right)^2+(0-0)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{36}+\frac{6}{9}}=1,$$

$$CD=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{12}-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{4}-0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{6}{16}+\frac{10}{16}}=1$$

وغیره .

۸۳ . تعداد کلی خطهای راست مساوی q است. اگر m خط راستی را

که از اولین نقطه می‌گذرد در نظر بگیریم ، سپس m خط راستی که از نقطهٔ دوم می‌گذرد، بالاخره m خط راستی‌که از نقطهٔ p ام عبورمی‌کند رویهم pm خط درنظرگرفته‌ایم، ولی در اینصورت هرخط n بار بحساب آمده است (زیرا هر خط از n نقطه عبور می‌کند) ، بنابراین‌داریم :

$$\frac{pm}{n}=q.$$

۸۴ . باید توجه داشت‌که شهریار ، خواه جدی وخواه شوخ باشد به معلم یك جواب‌می‌توانست بدهد: « من‌جدی هستم» . ولی‌دراینصورت واضح‌است‌که شروین جدی و مژده شوخ‌است .

۸۵ . چون از بین عددهای : ۲۶ ، ۲۷ و ۲۸ تنها عدد۲۷ بر۳قابل قسمت است ، C وD قطعه چوبهای یك‌مترونیمی را بریده‌اند ؛ بنابراین اسم آنها مینا و محمود است . ولی محمود رئیس دسته نیست و طبق شرط، D نباید رئیس دسته باشد ؛ بنابراین D همان‌محمود است .

۸۶ . بله می‌توانند . مسعود از جواب جمشید می‌فهمد که کلاه خودش و ایرج هر دو سفید نیست ، زیرا درغیراینصورت‌جمشید ازرنگ کلاه خود مطلع می‌شد .

اگرکلاه مسعود سفید بود ، ایرج می‌توانست بسادگی رنگ‌کلاه خود را بگوید و چون ایرج نتوانست رنگ‌کلاه خود را حدس بزند ، بنابراین رنگ‌کلاه مسعود سیاه است . مسئله را می‌توان بسادگی تعمیم داد : n نفررا در نظر گرفت که بترتیب پشت سرهم نشسته‌اندوبطورکلی $2n+1$ کلاه (n کلاه سفید و $n+1$ کلاه سیاه) وجود دارد .

۸۷ . اگرفرض‌کنیم سعید شمارهٔ ۲ باشد (یعنی در مسابقه دوم‌شده

باشد) ، به نتایج زیر می‌رسیم : از I معلوم می‌شود که ساسان شمارهٔ ۳ نیست ، از IV معلوم می‌شود که فیروزه شماره ۴ نیست ، از V معلوم می‌شود که ساسان شمارهٔ ۱ است ، از III معلوم می‌شود که خسرو شمارهٔ ۱ نیست (زیرا ساسان شمارهٔ ۱ بود) و جواد شمارهٔ ۲ است و این به تناقض برخورد می‌کند، زیرا برای شمارهٔ ۲ هم سعید داریم و هم جواد .

حالا ساسان را شمارهٔ ۳ فرض می‌کنیم : از I معلوم می‌شود سعید شمارهٔ ۲ نیست ، از IV معلوم می‌شود فیروزه شمارهٔ ۴ است از II معلوم می‌شود جواد شمارهٔ ۳ نیست و خسرو شمارهٔ ۵ است ، از III معلوم می‌شود که خسرو شمارهٔ ۱ نیست و جواد شمارهٔ ۲ است ؛ بنابراین برای سعید شمارهٔ ۱ باقی می‌ماند . به این ترتیب ردیف افراد چنین است : سعید ، جواد ، ساسان ، فیروزه ، خسرو .

۸۸ . چون سه نفر از علاقمندان به شطرنج را می‌شناسیم : اهل ساراتف ، مسکو و کیف و بترتیب دارای ۲۱ ، ۲۲ و ۲۳ سال هستند ؛ بنابراین چهارمین علاقمند به شطرنج از اهالی فرغان است و ۲۵ سال دارد (دانشجو N) ؛ او زیست‌شناس است (زیرا سه شطرنج بازدیگر ، ریاضی‌دان، شیمی‌دان و زمین‌شناس‌اند) ودر دورهٔ چهارم تحصیل می‌کند (بقیهٔ شطرنج بازها بترتیب در دوره‌های I ، II و III تحصیل می‌کنند).

این اطلاعات را در جدول با شماره‌های ۱ ، ۲ و ۳ مشخص کرده‌ایم، ضمناً درجدول اطلاعات قبلی را (که در فرض مسئله داده شده بود) باحروف‌سیاه نشان داده‌ایم. شمارهٔ ۴ رادرجدول چگونه بدست آوریم ؟

B شیمی‌دان است (زیرا C و D ، که اهل کیف‌اند ، زیست‌شناس و ریاضی‌دان هستند و K که ۲۱ ساله است زمین شناس است) .

شهر / سن	۲۰ سال	۲۱ سال	۲۲ سال	۲۳ سال
کیف	A. زمین‌شناسی (۵) II، فوتبال (۲۸) (۱۷)	B . شیمی، (۴) VI ، بکس . (۲۹) (۱۸)	C. زیست‌شناسی، III ، والیبال، (۳۰) (۲۲)	D. ریاضی، I، شطرنج ،
مسکو	E. ریاضی، III (۱۶)(۶) بکس (۲۷)	E. زیست‌شناسی (۳) I ، فوتبال (۱۹)	G. شیمی، II، شطرنج	H. زمین‌شناسی (۱۲) IV ، والیبال (۳۱) (۲۶)
ساراتف	I. شیمی، I (۱۵) (۷) والیبال ،	K. زمین‌شناسی، III، شطرنج	L، ریاضی، IV (۲۱) (۸) فوتبال (۳۳)	M. زیست‌شناسی (۹) II ، بکس (۳۴) (۲۵)
فرغان	N زیست‌شناسی (۲) IV ، شطرنج (۱) (۳)	O. ریاضی، II، (۲۰) (۱۴) والیبال (۳۲)	P. زمین‌شناسی ، (۱۰) I ، بکس (۳۵) (۲۳)	R. شیمی، III ، (۲۴) (۱۱) فوتبال (۳۶)

از تخصص بقیهٔ دانشجویان هم می‌توان بسادگی مطلع شد (که در جدول از ۵ تا ۱۴ شماره‌گذاری شده است) . سپس برای شمارهٔ ۱۵ می‌نویسیم : I ، شیمی‌دان اهل‌ساراتف ، دانشجوی دورهٔ اول است (زیرا

K ، اهل ساراتف در دورهٔ سوم ، G شیمی‌دان در دورهٔ دوم و N بیست ساله در دورهٔ چهارم تحصیل می‌کنند) . بهمین ترتیب دورهٔ تحصیل بقیهٔ دانشجویان را هم می‌توان معین کرد(شماره‌های ۱۶ تا ۲۶) :

بیست‌سالهٔ اهل مسکوعلاقمند به بکس‌است (شمارهٔ ۲۷) ، زیرا F و G اهل مسکو به فوتبال و شطرنج علاقمندند و I بیست سالهٔ به والیبال . بهمین ترتیب می‌توان از شمارهٔ ۲۸ تا ۳۶ ورزش مورد علاقهٔ هرکدام را پیدا کرد (مثلاً شمارهٔ ۲۹ : B علاقمند به بکس است ، زیرا A و D اهل کیف بــه فوتبال و شطرنج علاقمندند و I شیمی‌دان به‌والیبال و غیره) .

۱۰۸۹.

a) $\sqrt{******} = ***$

$-*$

$\;\;***$

$-\;\;**$

$\;\;۴***$

$-\;****$

$\;\;\;۰$

بلافاصله معلوم می‌شودکه اولین رقـم جذر مساوی ۳ است ، زیرا اولاً مجذور آن عددی است یك رقمی ، ثانیاً جذر تقریبی یك عدددو رقمی است . دومین رقم جذر تنها می‌تواند واحد باشد ، زیرا حتی از ضرب ۲×۶۲ عددی سه رقمی بدست می‌آید ، نه دو رقمی (در سطر چهارم فقط دو ستاره وجود دارد) . بالاخره از $۶۲z \times z = ۴***$ نتیجه می‌شود کــه z (آخرین رقم جذر مجهول) تنها می‌تواند هفت باشد .

```
b) _ ******|***
     ****   *۸*
     ----
      _ ***
        ***
        ----
      _ ****
        ****
        ----
           ۰
```

بسادگی دیده می‌شودکه خارج قسمت مساوی ۹۸۹ است ، زیرا حاصلضرب مقسوم‌علیه در ۸ عددی سه رقمی است (سطرچهارم‌را ببینید) ولی حاصلضرب آن در رقمهای اول و آخـر خارج قسمت عددی است چهار رقمی (سطرهای دوم و ششم را ببینید) . اگر مقسوم‌علیه را به z نشان دهیم داریـم : $۸z<۱۰۰۰$ و $۹z\geqslant۱۰۰۰$ و از آنجـا $۱۱۱<z<۱۲۵$ خواهـد شد . بـه ازاء $z=۱۱۲$ مقسوم مساوی $۹۸۹\times۱۱۲=۱۱۰۷۶۸$ می‌شود و تقسیم ۱۱۰۷۶۸ بر ۱۱۲ کاملاً بـا طرح مفروض مطابقت می‌کند . ولی وقتی‌که z را مساوی ۱۱۳ ، ۱۱۴ و غیره بگیریم ، اولین باقیمانده‌ای که در تقسیم بدست می‌آید، بجای دو رقمی (آنطورکه در طرح مسئله وجود دارد) ، سه رقمی می‌شود ؛ مثلاً برای $z=۱۱۳$ و $z=۱۱۴$ داریم :

```
۱۱۱۷۵۷ (=۹۸۹×۱۱۳)      ۱۱۲۷۴۶ (=۹۸۹×۱۱۴)
۱۰۰۷   (=۱۱۳×۹)        ۱۰۲۶   (=۱۱۴×۹)
----                   ----
 ۱۰۰                    ۱۰۱
```

به‌این ترتیب تنها جواب قابل قبول چنین است :

$$۱۱۰۷۶۸:۱۱۲=۹۸۹$$

II

a)
$$\begin{array}{r} \text{cmex} \\ +\ \text{grom} \\ \hline \text{gremu} \end{array}$$

واضح است که $g=1$ است . بنابراین $r\neq 1$ است ؛ ولی r از واحد هم نمی‌تواند بیشتر باشد ، زیرا به ازاء $r=2$ ، حتی وقتی که $c=9$ باشد ، باید از جمع ردیف صدها به عددی بین ۲۰ و ۳۰ برسیم، که ممکن نیست . پس $r=0$ است .

بسادگی دیده می‌شود که $m<9$ است ، زیرا اگر $m=9$ باشد، با توجه به اینکه $r=0$ است ، از جمع ستون‌ها تنها می‌توان $e=0$ را بدست آورد و این ممکن نیست (زیرا $e\neq r$ است) ، بنابراین $m<9$ و $e=m+1$ می‌شود .

واضح است که $c=9$ می‌شود . با توجه به مجموع در ستون دهها $o=8$ می‌شود ، زیرا $e=m+1$ و $o\neq c=9$ می‌باشد . به این ترتیب داریم :

$$\begin{array}{r} 9\text{mex} \\ +\ 108\text{m} \\ \hline 10\text{emu} \end{array}$$

اگر پنج حالت $m=2,3,4,5,6$ را آزمایش کنیم ، می‌بینیم که تنها به‌ازاء $m=5$ به تناقض برخورد نمی‌کنیم و در نتیجه جمع مطلوب چنین می‌شود : $9567+1085=10652$

b)
$$\begin{array}{r} \text{forty} \\ \text{ten} \\ +\ \text{ten} \\ \hline \text{sixty} \end{array}$$

بسادگی معلوم می‌شودکه $n=۰$ و $e=۵$ است . چون $i\neq ۰$ است ، $i=۱$ می‌شود (اگر $i=۲$ باشد ، حتی اگر $o=۹$ بگیریم، باید جمع ردیف صدها از ۳۰ بزرگتر شود که غیر ممکن است) . بهمین علت $o=۹$ می‌شود . به این ترتیب داریم :

$$\begin{array}{r} f۹rty \\ t۵۰ \\ t۵۰ \\ \hline s۱xty \end{array}$$

بنابراین $f=s+۱$ و مجموع ردیف صدها بین ۲۰ و ۳۰می‌شود ولی به‌ازاء $f=۷$ و $s=۸$ درردیف‌صدهاحداکثر $۱۷=۱+۶+۶+۴$ خواهیم داشت‌که از ۲۰کوچکتراست . به ازاء $f=۶$ و $s=۷$درردیف صدها می‌توانیم $۲۱=۱+۴+۸+۸$ و یا $۲۰=۱+۳+۸+۸$ داشته باشیم ، در اینصورت x مساوی i یا n خواهد شد .

بسادگی می‌توان تحقیق کرد که به ازاء $f=۳$ ، $s=۴$ هم در همهٔ حالتها مقدار x مساوی یکی‌از مقادیر n , i , f , s خواهد شد.

تنها در حالت $f=۲$ ، $s=۳$ و $r=۷$ ، $t=۸$ برای x مقداری بدست می‌آیدکه باهیچیك ازارقام نمایندهٔ حروف دیگرمساوی نمی‌شود : $x=۴$ و در آنصورت $y=۶$.

بنابراین تنها جواب چنین است :

$$۲۹۷۸۶+۸۵۰+۸۵۰=۳۱۴۸۶$$

۹۰ .

۱)

رفتن	Aa		AB		ab
برگشتن		A		a	

۲)

رفتن	abc		AB		BCD		abc		cd
برگشتن		c		Bb		a		c	

۳)

رفتن	abc	cde	ABC	CDE	bcd	de
برگشتن	c	de	cC		b	d

۹۱ . طریقهٔ اول چنین می‌شود :

(۲۰,۰,۰)→(۷,۱۳,۰)→(۷,۴,۹)→(۱۶,۴,۰)→(۱۶,۰,۴)→
→(۳,۱۳,۴)→(۳,۸,۹)→(۱۲,۸,۰)→(۱۲,۰,۸) .

و چون به وضع (b — ۱,۰,c — ۱) منجر می‌شود ، بنابراین طریقهٔ اول ما را به نتیجه نمی‌رساند .

طریقهٔ دوم چنین می‌شود :

(۲۰,۰,۰)→(۱۱,۰,۹)→(۱۱,۹,۰)→(۲,۹,۹)→(۲,۱۳,۵)→
→(۱۵,۰,۵)→(۱۵,۵,۰)→(۶,۵,۹)→(۶,۱۳,۱)→(۱۹,۰,۱)→
→(۱۹,۱,۰)→(۱۰,۱,۹)→(۱۰,۱۰,۰)

یعنی به نتیجه رسیده‌ایم .

۹۲ . طریقهٔ اول چنین می‌شود :

(۱۶,۰,۰)→(۴,۱۲,۰)→(۴,۵,۷)→(۱۱,۵,۰)→(۱۱,۰,۵);

و به نتیجه‌نمی‌رسد ، زیرا به وضع (b — ۱,۰,c — ۲) منجر شده‌است.

طریقهٔ دوم چنین می‌شود :

(۱۶,۰,۰)→(۹,۰,۷)→(۹,۷,۰)→(۲,۷,۷)→(۲,۱۲,۲)→
→(۱۴,۰,۲)→(۱۴,۲,۰)→(۷,۲,۷)→(۷,۹,۰)→(۰,۹,۷)→
→(۰,۱۲,۴)→(۱۲,۰,۴)→(۱۲,۴,۰)→(۵,۴,۷)→(۵,۱۱,۰)

چون به وضعی رسیده‌ایم که نمی‌توان ظرف کوچك را پر کرد

(از ظرف بزرگتر) و نمی‌توان به‌اندازهٔ گنجایش ظرف متوسط به‌ظرف بزرگتر برگرداند، بنابراین ازطریقهٔ دوم هم نمی‌توان برای تقسیم مایع به دو قسمت مساوی به نتیجه رسید .

۹۳ . هرم محیطی را با ضلع قاعدهٔ مساوی $۲n+۱$ و ارتفاع $n+\frac{۱}{۲}$ در نظر می‌گیریم (بشرطی که مکعبهای مرکزی همهٔ قشرها در یك ستون قرار گیرند) .

دراینصورت خواهیم داشت :

$$۱^۲+۳^۲+۵^۲+\dots+(۲n-۳)^۲+(۲n-۱)^۲=$$

$$=\frac{(۲n+۱)^۲(n+\frac{۱}{۲})}{۳}-۲[(۲n-۱)+(۲n-۳)+\dots+$$

$$+۵+۳+۱]-۴n\times\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{n(۴n^۲-۱)}{۳}$$

۹۴ . ۳۱ مربع ، ۱۲۴ مثلث ، ۸۷ مستطیل (به اضافهٔ مربعها) .

۹۵ . سی‌وپنج مثلث .

۹۶ . ۷۸ مثلث ، ۱۱ شش ضلعی منتظم ، ۶۶ لوزی .

۹۷ . ۱) $N_۱(m,n)$ را تعداد مربعها و $N_۲(m,n)$ را تعداد مستطیلهائی می‌گیریم که در صفحهٔ $m\times n$ خانه‌ای می‌توان دید .

اگر $m\leqslant n$ و a ضلع هرخانهٔ صفحه باشد، در یك صفحهٔ $m\times n$ خانه‌ای: m ستون به‌عرض a داریم، که درهریك ازآنها n مربع به‌ضلع a وجوددارد؛ $m-۱$ ستون به‌عرض $۲a$ ،که درهر یك ازآنها $n-۱$ مربع به ضلع $۲a$ وجود دارد ؛ $m-۲$ ستون به عرض $۳a$ وجود دارد ، که

در هریك ازآنها $n-۲$ مربع به‌ضلع $۳a$ وجود دارد و غیره ؛ بالاخره در ستون به عرض ma ، $n-m+۱$ مربع به ضلع ma وجود دارد . بنابراین داریم :

$$N_{۱}(m,n)=mn+(m-۱)(n-۱)+(m-۲)(n-۲)+\dots+$$
$$+۲(n-m+۲)+۱(n-m+۱).$$

اگر ستونها را درصفحهٔ $m\times n$ خانه‌ای، بسته باینکه‌عرض‌ستون را این و یا آن مقدار بگیریم ، می‌توان $\frac{m(m+۱)}{۲}$ ستون انتخاب کرد . و اگر یکی از ستونها را در نظر بگیریم ، می‌توان روی آن $\frac{n(n+۱)}{۲}$ مستطیل ، با عرضی مساوی عرض ستون ، دید (n مستطیل به ارتفاع a ، $n-۱$ مستطیل به ارتفاع $۲a$ و غیره ، بالاخره دو مستطیل به ارتفاع $(n-۱)a$ و یك مستطیل به ارتفاع na) . بنابراین داریم :

$$N_{۲}(m,n)=\frac{m(m+۱)}{۲}\cdot\frac{n(n+۱)}{۲}$$

و در حالت خاص :

$$N_{۱}(n,n)=n^{۲}+(n-۱)^{۲}+(n-۲)^{۲}+\dots+۳^{۲}+۲^{۲}+۱^{۲}=$$
$$=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶};$$

$$N_{۱}(۸,۸)=۲۰۴;$$

$$N_{۲}(n,n)=\frac{n^{۲}(n+۱)^{۲}}{۴};\ N_{۲}(۸,۸)=۱۲۹۶$$

۲) در قاعدهٔ مکعب به ضلع ۱۰ سانتیمتر می‌توان به اندازهٔ $(۱۰-\mathrm{k}+۱)^۲$ طریقه مربعهای به ضلع k سانتیمتر انتخاب‌کرد . در هر یك از ستونهائی‌که قاعدهٔ آنها یکی از مربعهای فوق باشد، می‌توان $(۱۰-\mathrm{k}+۱)$ مکعب به ضلع k پیداکرد. بنابراین بطورکلی درمکعب به ضلع۱۰سانتیمتر می‌توان $(۱۰-\mathrm{k}+۱)^۳$ مکعب به‌ضلع k سانتیمتر دید . چون k می‌تواند هر یك از عددهای از۱ تا ۱۰ را اختیارکند ، رویهم ۳۰۲۵ مکعب بدست‌می‌آید :

$$۱^۳+۲^۳=۳^۳+\ldots+۱۰^۳=۳۰۲۵$$

از طرف دیگر چون درقاعدهٔ مکعب به‌ضلع ۱۰ سانتیمترمی‌توان به ۳۰۲۵ ($N_۲(۱۰,۱۰)=۵۵^۲$) طریقه مستطیلهائی انتخاب‌کرد ودر هر ستونی که یکی از این مستطیلها قاعدهٔ آن باشد ۵۵ نوع مکعب مستطیل دیده می‌شود ، رویهم در مکعب مفروض به اندازهٔ $۵۵^۳$ مکعب مستطیل مختلف می‌توان دید .

۹۸ . چهل‌وچهار نوع .

۹۹ . اتحادهای زیر را با هم جمع می‌کنیم :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sin\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos\frac{۳\alpha}{۲}\\
\sin ۲\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\cos\frac{۳\alpha}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos\frac{۵\alpha}{۲}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sin \mathrm{n}\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{۲}\cos\frac{(۲\mathrm{n}-۱)\alpha}{۲}-\frac{۱}{۲}\cos\frac{(۲\mathrm{n}+۱)\alpha}{۲}
\end{array}\right.$$

بدست می‌آید :

$$(\sin\alpha+\sin 2\alpha+\dots+\sin n\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}=$$

$$=\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}$$

و از آنجا :

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\dots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

۱۰۰ . بترتیب داریم :

$$[3(10^k+10^{k-1}+\dots+10+1)n+1]^2=$$

$$=\left[\frac{n(10^{k+1}-1)}{3}+1\right]^2=$$

$$=\frac{n^2(10^{2k+2}-2\times 10^{k+1}+1)}{9}+\frac{2n(10^{k+1}-1)}{3}+1=$$

$$=n^2\times\frac{10^{2k+2}-10^{k+1}}{10-1}+(6n-n^2)\frac{10^{k+1}-1}{10-1}+1=$$

$$=n^2(10^{2k+1}+10^{2k}+\dots+10^{k+1})+$$

$$+(6n-n^2)(10^k+10^{k-1}+\dots+1)+1$$

۱۰۱ . چون حجم مایع در ظرف اول ، بعد از دو عمل مخلوط کردن ، تغییر نکرده است ، بنابراین حجم الکلی که به ظرف اول اضافه شده ، برابر است با حجم آبی که به ظرف دوم اضافه شده است (با محاسبهٔ ساده ، ولی مفصل‌تر ، به کمك حساب ، می‌توان مقدار آب و

الکل را هم در هر ظرف بدست آورد) .

۱۰۲ . روی دیوار عکس پسر پتروف قرار دارد (پتروف می‌توانست جواب را بطور ساده چنین بدهد : « پدر این عکس من هستم») .

۱۰۳ . چون هرکس ۸ جدجد پدری و ۸ جدجد مادری دارد و هر یك از این ۱۶ نفر هم بنوبهٔ خود ۱۶ جدجد پدری و مادری دارند بنابراین جواب مسئله ۲۵۶ (۱۶ × ۱۶) می‌شود .

البته ، اگر مثلاً در مواردی یك خواهر و برادر با خواهر و برادر دیگری ازدواج کرده باشند ، این تعداد از ۲۵۶ کمتر می‌شود .

۱۰۴ . ۱۵ دقیقه ؛ اگر دو نقطهٔ دلخواه A و C از اضلاع زاویهٔ ABC را بهم وصل کنیم، وقتی‌که از زیر ذره‌بین دیده می‌شود، به مثلث A'B'C' تبدیل می‌شود که با مثلث ABC متشابه است و بنابراین زوایای مساوی دارند .

۱۰۵ . قدرت خرید ۲۵٪ زیاد می‌شود (اگر مثلاً فرض کنیم ، قبل از ارزان شدن قیمتها ، بابت یك کیلوگرم سیب زمینی a ریال لازم بود، حالا برای همان یك کیلوگرم سیب زمینی ۰/۸a ریال لازم است و با a ریال می‌شود ۱/۲۵ کیلوگرم سیب‌زمینی خرید) .

۱۰۵ a . ۵۰٪ (اگر قبل از ارزان‌شدن قیمتها ، می‌شد با ۱۰۰ ریال مثلاً b کیلوگرم سیب زمینی خرید ، بعد از پائین آمدن قیمتها در مرتبهٔ اول با ۱۰۰ ریال ۱/۲ b کیلوگرم و بعد از پائین‌آمدن قیمتها در مرتبهٔ دوم به‌اندازهٔ ۱/۲ × ۱/۲۵b = ۱/۵b کیلوگرم سیب زمینی می‌توان خرید) .

۱۰۶ . ۴۴ مرتبه (در هر شبانه روز عقربهٔ دقیقه شمار ۲۴ مرتبه وعقربهٔساعت شمار ۲ مرتبه دور مرکز صفحهٔ ساعت می‌چرخند ؛ بنابراین عقربهٔ دقیقه شمار ۲۲ دور از عقربهٔ ساعت شمار جلو می‌افتد و در هر بار دو مرتبه با هم زاویهٔ قائمه می‌سازند) .

۱۰۷ . سن امروزی احمد را x و محمود را y می‌گیریم . طبق فرض ، وقتی‌که احمد y سال داشت ، سن خاله هما $x+y$ بود ؛ یعنی خاله هما x سال از احمد بزرگتر است . پس وقتی که خاله هما x سال داشته است ، احمد در سال اول تولد خود بوده است .

۱۰۸ . خلبان خرسهای سفید را دیده است ، زیرا از شرط $AB=BC$ نتیجه می‌شودکه نقطهٔ A در قطب شمال بوده است . البته A می‌تواند درنزدیکیهای‌قطب جنوب هم باشد (توضیح ۱۲۱ را ببینید) ولی در آنجا خرسی وجود ندارد .

۱۰۹ . تعدادگاوها را $۱۰a+b$ می‌گیریم $(۰\leqslant b\leqslant ۹)$. AوB گاوها را به $(۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲)$ تومان فروختند . از این مبلغ $(۱۰۰a^۲+۲۰ab)$ تومان آنرا بین خود بطورمساوی قسمت‌کردند (هر کدام بنوبت ۱۰ تومان برداشتند) . در بقیهٔ پول ($b^۲$ تومان) باید تعداد ده‌ها، عددی فرد باشد . زیرا وقتی که A آخرین ۱۰ تومان را برمی‌دارد ، برای دومی‌کمتر از ۱۰ تومان باقی می‌ماند .

چون $۰\leqslant b\leqslant ۹$ است پس داریم :

$$b^۲=۰,۱,۴,۹,۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱$$

و از بین آنها تنها ۱۶ و ۳۶ دارای دهگان فرد هستند ، یعنی در هر

حال باقیماندهٔ پول ۶ تومان است و از معادلهٔ $x+۶=x-۱۰$ بسادگی $x=۲$ بدست می‌آید. قیمت کیف ۲ تومان بوده است.

۱۱۰. فرض کنیم شوهرها s، x و z شیئی خریده باشند و زنهای آنها بترتیب t، y و w شیئی. در اینصورت داریم:

$$s^۲-t^۲=x^۲-y^۲=z^۲-w^۲=۴۵,$$

و یا:

$$(s+t)(s-t)=(x+y)(x-y)=(z+w)(z-w)=۴۵$$

ولی عدد ۴۵ تنها به سه طریق می تواند به حاصلضرب دو عدد صحیح تبدیل شود:

$$۴۵=۴۵\times۱=۱۵\times۳=۹\times۵$$

از معادلات $s+t=۴۵$ و $s-t=۱$ بدست‌می‌آید: $s=۲۳$ و $t=۲۲$. بهمین ترتیب‌می‌توان بدست‌آورد: $x=۹$، $y=۶$ و $z=۷$، $w=۲$. بنابراین شوهرها بترتیب: هوشنگ ۵۲۹ تومان، مهدی ۸۱ تومان، مصطفی ۴۹ تومان و زنهایشان بترتیب: نرگس ۴۸۴ تومان، مژده ۳۶ تومان و زیبا ۴ تومان خرید کرده‌اند.

۱۱۱. فرض کنید کل مبلغ مورد تقسیم در حالت کلی مساوی x باشد (وقتی‌که هر بار $\frac{۱}{n+۱}$ پول باقیمانده‌را اضافه‌کنیم)، دراینصورت داریم:

$$۱+\frac{x-۱}{n+۱}=۲+\frac{x-۳-\frac{x-۱}{n+۱}}{n+۱} \implies x=n^۲$$

سهم بچهٔ اول مساوی $n = 1 + \frac{n^2-1}{n+1}$ ، بچهٔ دوم $n = 2 + (n-2) = 2 + \frac{n^2-n-2}{n+1}$ ، بچهٔ سوم $3 + \frac{n^2-2n-3}{n+1} = 3 + (n-3) = n$

و غیره می‌شود . اگر فرض کنیم‌که k بچهٔ اول هر کدام n تومان سهم برده باشند ، در اینصورت سهم بچهٔ $(k+1)$ ام چنین می‌شود :

$$k+1+\frac{n^2-kn-(k+1)}{n+1}=k+1+n-(k+1)=n$$

از اینجا نتیجه می‌شود‌که هریك از بچه‌هاسهمی مساوی n تومان خواهند داشت .

۱۱۲ . اگر فرض‌کنیم‌که پرویز x کیلومتر درآخر مسیر پیاده‌رفته است ، عبداله هم در ابتدای مسیر همانقدرپیاده روی داشته است(زیرا با هم به N رسیده‌اند) .

در مدتی‌که پرویز x کیلومتر را با سرعت u کیلومتر در ساعت طی‌کرده است ، رضا با سرعت v کیلومتر در ساعت $2s-3x$ کیلومتر را طی‌کرده است ($S-2x$ کیلومتر برای رسیدن به پرویز و $S-x$ کیلومتر برای برگشتن تا N) . بنابراین داریم :

$$\frac{x}{2s-3x}=\frac{u}{v} \Longrightarrow x=\frac{2su}{v+3u}$$

و مقدار وقتی‌که صرف‌کرده‌اند :

$$\frac{x}{u}+\frac{s-x}{v}=\frac{s(u+3v)}{v(v+3u)}(\text{ساعت})$$

۱۱۳ . دایرهٔ صفحهٔ ساعت به ۶۰ «قسمت دقیقه‌ای» تقسیم شده‌است. فرض کنید کار در ساعت ۴ و x دقیقه شروع و در ساعت ۷ و y دقیقه تمام شده باشد . چون عقربهٔ ساعت شمار ۱۲ مرتبه آهسته‌تر از عقربهٔ دقیقه شمار حرکت می‌کند ، دو معادلهٔ زیر را داریم :

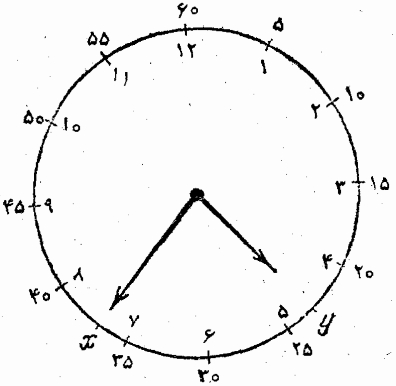
$$\begin{cases} x=۱۲(y-۲۰) \\ y=۱۲(x-۳۵) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۵۲۸۰}{۱۴۳}=x_۰ \\ y=\dfrac{۳۳۰۰}{۱۴۳}=y_۰ \end{cases}$$

و بسادگی می‌توان تحقیق کرد که $x_۰-۳۰=۳۰-y_۰$ است (شکل ۱۴۶ را ببینید) .

۱۱۴ . اگر با عوض کردن جای عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار ، وضع عقربه‌ها از لحاظ تعیین‌وقت معنا داشته باشد ، برای وضع « ساعت m و x دقیقه » و « ساعت n و y دقیقه » باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x=۱۲(y-۵m) \\ x=۱۲(x-۵n) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{۶۰(m+۱۲n)}{۱۴۳} \\ y=\dfrac{۶۰(n+۱۲m)}{۱۴۳} \end{cases}$$

چون m و n از صفر از ۱۱ تغییر می‌کنند ، برای هر زوج‌عدد m و n $(m\neq n)$ دو لحظه پیدا می‌شود که عقربه‌ها در حالتی هستند که با تغییر جای آنها وضع « بی‌معنی » بدست نمی‌آید . در ۱۲ ساعت تعداد این لحظه‌ها مساوی ۱۳۲ $(۲\times C_{۱۲}^{۲})$ و در شبانه روز ۲۶۴ می‌شود .



شکل ۱۴۶

علاوه براین در هر شبانه روز ۲۲ بار عقربه‌ها بر هم منطبق می‌شوند ، که با تغییر جای آنها ، تغییری در وقت پیدا نمی‌شود .

۱۱۵ . هر عدد s رقمی n ، به این ترتیب محدود می‌شود :

$$10^{s-1}<n<10^{s}$$

تعداد کل عددهای s رقمی مساوی $9\times10^{s-1}$ و تعداد کل ارقام آنها مساوی $9s\times10^{s-1}$ می‌باشد. در همهٔ عددهای s رقمی، رقم مرتبهٔ بزرگتر صفر نیست ، ولی در مرتبه‌های دیگر صفر هم بتعداد هر رقم دلخواه دیگر می‌تواند وجود داشته باشد (یعنی مثلاً در مرتبهٔ یکان اعداد s رقمی بهمان اندازه که صفر وجود دارد ، ۱ یا ۲ یا . . . هم می‌تواند وجود داشته باشد) . بنابراین تعداد صفرها در تمام اعداد s رقمی چنین است :

$$\frac{9s\times10^{s-1}-9\times10^{s-1}}{10}=9(s-1)10^{s-2}$$

(بهمین اندازه هم هر یك از رقمهای دیگر در تمام اعداد $s-1$ رقمی

وجود دارد) .

اگر N_1 تعدادکل رقمها در دنبالهٔ

$$1,2,3\ldots,10^k-1\ ,\ 10^k$$

و N_2 تعدادکل صفرها دردنبالهٔ

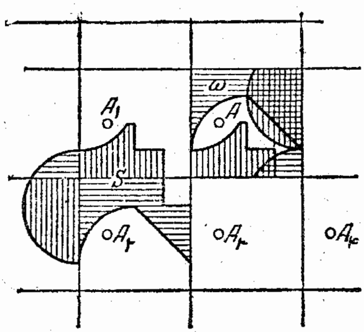
$$1,2,3\ldots,10^{k+1}-1,10^{k+1}$$

باشد ، داریم :

$$N_1=N_2=9+9\times2\times10+9\times3\times10^2+\ldots+$$
$$+9k\times10^{k-1}+k+1$$

($k+1$ تعداد رقمها در عدد 10^k و یا تعداد صفرها در عدد 10^{k+1} است) .

۱۱۶ . شکل S را با وضع دلخواهی روی کاغذ قرار دهید (شکل ۱۴۷) ، بطورذهنی همهٔ خانه‌هائی راکه شامل شکل S هستند بموازات خودطوری حرکت دهید تا روی هم و در خانه‌ای مثل ω قرارگیرند. البته ممکن‌است بعضی ازقسمتهای شکل رویهم بیفتند .



شکل ۱۴۷

در ω حتماً نقطه‌ای مانند A پیدا می‌شود که خارج ازشکل S است (زیرامساحت S ازمساحت خانه کوچکتراست). نقاط A_1، A_2، ... را در خانه‌های دیگرطوری علامت بگذاریدکه هر یك از آنها در خانهٔ

خود همان وضعی را داشته باشد ،که نقطهٔ A در خانهٔ ω دارد ، سپس صفحهٔ کاغذ را زیر شکل جابجا کنید (محل شکل S ثابت بماند) که نقاط‌گرهی صفحه بر A_1 ، A_2 ، A_3،... قرارگیرد .

۱۱۷ . اگر نقطهٔ A و دو خط l_1 ، l_2 در فضا مفروض باشند ، می‌توان خطی مانند m چنان رسم‌کرد که از نقطهٔ A عبورکند و با دو خط l_1، l_2 متقاطع باشد (درحالتی‌که l_1 موازی l_2 و A خارج صفحهٔ l_1 و l_2 باشد. مسئله جواب ندارد) ؛ برای این منظورکافی است صفحه‌ای از A و l_1 و صفحهٔ دیگری از A و l_2 عبور دهیم ، فصل مشترك این دو صفحه ، خط مورد نظر m است .

اگر بجای نقطهٔ A ، خط l_3 رادر نظر بگیریم، مجموعهٔ بی‌نهایت خط m_1 ، m_2 ، m_3 ، . . . را خواهیم داشت که هر يك از آنها سه خط l_1 ، l_2 ، l_3 را قطع می‌کنند .

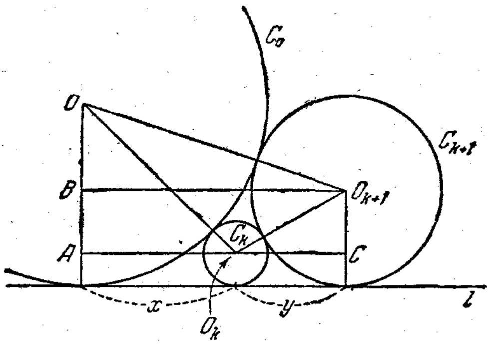
سطحی که از خطوط m_1 ، m_2 ، m_3 ، . . . می‌گذرد ، خط l_4 را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند ، که ضمناً بر یکی از خطوط m_j هم واقع است و همین خط با چهار خط l_1، l_2، l_3، l_4 متقاطع است .

۱۱۸ . R_s را شعاع دایرهٔ C_s $(0 \leqslant s \leqslant 1000)$ ، O را مرکز دایرهٔ C_0 و O_m را مرکز دایرهٔ C_m $(1 \leqslant m \leqslant 1000)$ می‌گیریم .

شعاعهای دایره‌های C_0 ، C_k ، C_{k+1} با رابطهٔ زیر بهم مربوطاند:

$$R_{k+1}=\frac{R_0R_k}{(\sqrt{R_0}-\sqrt{R_k})^2} \qquad (1)$$

زیرا در مثلث OO_kA (شکل ۱۴۸) داریم :



شکل ۱۴۸

$$(R_0+R_k)^2-(R_0-R_k)^2=x^2 \implies x=2\sqrt{R_0R_k};$$

بهمین ترتیب از مثلثهای $OO_{k+1}B$ و $O_kO_{k+1}C$ بدست می‌آید:

$$x+y=2\sqrt{R_0R_{k+1}} \text{ و } y=2\sqrt{R_kR_{k+1}};$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\sqrt{R_0R_{k+1}}-\sqrt{R_kR_{k+1}}=\sqrt{R_0R_k}$$

اگر شعاع دایره‌ها را برحسب کیلومتر بیان کنیم، $R_0=1$ و $R_1=10^{-6}$ می‌شود که با قراردادن در رابطهٔ (۱) به ازاء $k=1$ بدست می‌آید :

$$R_2=\frac{1\times10^{-6}}{(1-10^{-3})^2}=\frac{1}{999^2}$$

و به ازاء $k=۲$:

$$R_۲=\frac{۱}{۹۹۹^۲}:\left(۱-\frac{۱}{۹۹۹}\right)^۲=\frac{۱}{۹۹۸^۲}$$

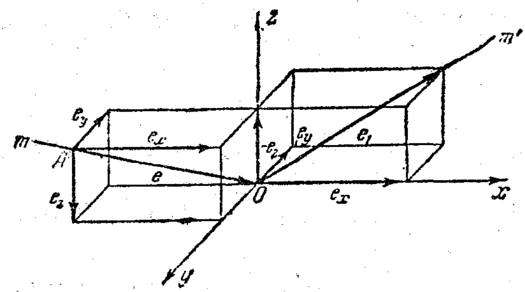
فرض می‌کنیم داشته باشیم :

$$R_m=\frac{۱}{(۱۰۰۰-m+۱)^۲} \qquad (۲)$$

طبق رابطهٔ (۱) بدست می‌آید : $R_{m+۱}=\frac{۱}{(۱۰۰۰-m)^۲}$ (عبور از m به $m+۱$)، چون رابطهٔ (۲) برای $m=۱$ صحیح است، بنابراین برای همهٔ مقادیر m ،که از ۱۰۰۰ تجاوز نکند ، صحیح‌است زیرا به ازاء $m=۱۰۰۰$ داریم $R_{۱۰۰۰}=۱$ و دیگر دایرهٔ $C_{۱۰۰۱}$ را نمی‌توان ساخت .

۱۱۹ . فرض‌کنیم جهت شعاع m ،که برصفحهٔ Oxy فرود آمده است ، با بردار واحد $e=\overline{AO}=(e_x,e_y,e_z)$ مشخص شده باشد (در پرانتز بردارهای مؤلفهٔ e ، موازی محورهای‌مختصات ، داده‌شده‌است). شعاع m' ،که ازصفحهٔ oxy (یاصفحه‌ای موازیoxy)منعکس‌شده‌است، با بردار واحد $e_۱=(e_x,e_y,-e_z)$ است که تنها علامت بردار مؤلفهٔ موازی محور oz تغییر علامت داده است (شکل ۱۴۹) .

برای شعاعهای m'',m''' ، کـه بعد از انعکاس شعاع m' از صفحه‌ای موازی صفحهٔ oxz و سپس شعاع m'' از صفحه‌ای موازی صفحهٔoyz، بدست می‌آید ، بردارهای واحد چنین‌اند :



شکل۱۴۹

$$\mathbf{e}_۲ = (\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_z) \text{ و } \mathbf{e}_۳ = (-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_z)$$

بنابراین $\mathbf{m}'''$ موازی $\mathbf{m}$ و در جهت عکس آن بدست می‌آید .

۱۲۰ . مؤلفه‌های α، β ، γ (موازی یالهای مکعب مستطیل) بردار واحد $e(\alpha,\beta,\gamma)$ ، که جهت شعاع مجهول را مشخص می‌کنند ، در انعکاس ازوجوه مکعب مستطیل ، از لحاظ قدرمطلق تغییر نمی‌کنند. بنابراین ، برای حرکت یك نقطه روی « شعاع تابش » و همهٔ شعاعهای منعکس ، جمع انتقالهای آن در جهت‌محورهای $\mathbf{ox}$ ، $\mathbf{oy}$ ، $\mathbf{oz}$(انتقال بطرف بالا ، پائین ، راست ، چپ ، « بطرف ما » و « از طرف ما » را مثبت می‌گیریم) متناسب با عددهای $|\alpha|$ ، $|\beta|$ ، $|\gamma|$ خواهند بود .

ولی در لحظهٔ برگشت نقطه ــ پس از انعکاس از همهٔ وجوه ــ به نقطهٔ اولیه ، این جمع انتقالها مساوی دو برابر طول یالهای مکعب یعنی $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ هستند ، بنابراین داریم :

$$|\alpha|:|\beta|:|\gamma| = \mathbf{a} : \mathbf{b} : \mathbf{c}$$

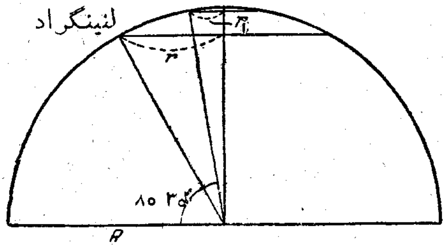
یعنی باید شعاع نور را موازی یکی از قطرهای مکعب مستطیل تاباند .

حل مسئله تقریباً هیچ مشکل‌تر نمی‌شود ، اگر بخواهیم شعاع نوری را جستجو کنیم که مثلاً برای بر گشت به نقطهٔ اولیه شرط شده باشد که از وجوه چپ ، راست و عقب سه بار ، از وجه جلو دوبار ، از وجه زیر چهار بار و از وجه بالا پنج‌بار منعکس شود . فاصلهٔ اولیه را ازوجوه چپ ، جلو و زیرمکعب مستطیل را مساوی a', b', c' بگیرید و شبیه مورد بالا استدلال‌کنید .

۱۲۱ . جواب روشن : A قطب شمال است .

جواب‌کم‌وبیش روشن : A نقطهٔ دلخواهی از نیمکرهٔ جنوبی‌است که برمدار l' واقع باشد ، بنحوی‌که مدار l' در ۲۰۰۰کیلومتری‌شمال مدار l ،که طول آن مساوی $\frac{۲۰۰۰}{n}$ کیلومتر است ، واقع باشد (n عدد طبیعی دلخواهی است) .

۱۲۲ . چون هواپیما a کیلومتر بطرف مشرق رفته است ولی در $۳a$ کیلومتری مشرق لنینگراد قرارگرفته است ، باید بطرف شرق روی مدار φ ، که شعاع آن r_1 سه‌بارکوچکتر از شعاع r از مدار لنینگراد می‌باشد ، حرکت‌کرده باشد (لنینگراد در۶۰ درجهٔ عرض شمالی قرار گرفته است) ؛ بنابراین داریم :



شکل ۱۵۰

$$R\cos\varphi = r_1 = \frac{r}{3} = \frac{R\cos 60^\circ}{3} = \frac{R}{6} \Longrightarrow \varphi \# 80^\circ 30'$$

(در شکل ۱۵۰ ، تصویر نیمکرهٔ شمالی بر صفحه‌ای موازی با محور کرهٔ زمین‌داده شده‌است) . بنا براین a برابر است باطول نصف‌النهار بین مدار ۶۰ درجه و مدار '۳۰°۸۰ ، یعنی :

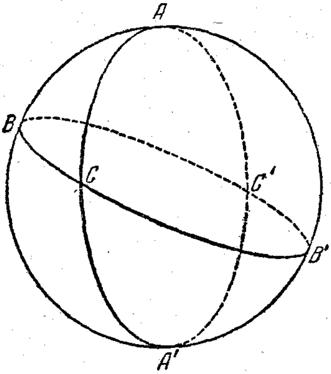
$$a \# \frac{40000 \times 20/5}{360} \# 2278 \text{ (کیلومتر)}$$

۱۲۳ . باید دانست که مجموع زوایای مثلث کروی ABC همیشه از ۱۸۰ درجه بزرگتر است ومساحت آنرا با رابطهٔ زیرمحاسبه‌می‌کنند:

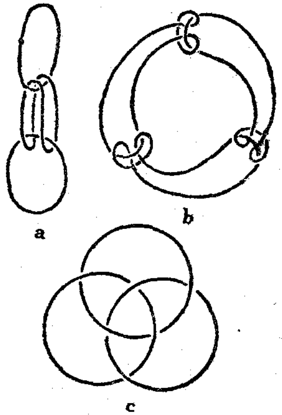
$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2,$$

در این رابطه α، β ، γ مقدار زوایای A،B،C برحسب رادیان است .

در حقیقت ، اگر هر دوضلع مثلث کروی ABC را ادامه دهیم (شکل ۱۵۱ را ببینید) ، « زوایای دو وجهی کروی » ABA'CA ،



شکل ۱۵۱



شکل ۱۵۲

BAB'CB، CAC'BC بدست می‌آید ،که مساحت سطح آنها چنین است :

$$S_{ABA'CA} = ۴\pi R^{۲} . \frac{\alpha}{۲\pi} \qquad (۱)$$

$$S_{BAB'CB} = ۴\pi R^{۲} . \frac{\beta}{۲\pi} \qquad (۲)$$

$$S_{CAC'BC} = S_{ABC} + S_{ABC'} = ۴\pi R^{۲} . \frac{\gamma}{۲\pi}$$

اگر در تساوی اخیر $S_{ABC'}$ را به $S_{A'B'C}$ تغییر دهیم ، بدست می‌آید :

$$S_{ABC} + S_{A'B'C} = ۴\pi R^{۲} . \frac{\gamma}{۲\pi} \qquad (۳)$$

(اگر چه نتوان مثلثهای 'ABC و A'B'C را ، در حالت کلی

برهم منطبق کرد ، ولی در هرحال می‌توان ثابت‌کرد $S_{ABC}=S_{A'B'C}$ است) .

از جمع روابط (۱) و (۲) و (۳) بدست می‌آید :

$$۲S_{ABC}+۲\pi R^{۲}۲R^{۲}(\alpha+\beta+\gamma)$$

و از آنجا :

$$S_{ABC}=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^{۲}$$

مثلاً مثلث DEF ، که دو ضلع آن DE و DF قوسهائی از دو نصف‌النهار باشند که در زاویهٔ قائمه بهم می‌رسند وقوس EF قوسی از خط استوا که با هر یك از دو قوس دیگر زاویه‌ای مساوی $\frac{\pi}{۲}$ می‌سازد ، داریم: $S_{DEF}=(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}-\pi)R^{۲}=\frac{\pi R^{۲}}{۲}$

یعنی مساحت این مثلث یك هشتم مساحت سطح‌کره است .

۱۲۴ - چون شعاع کرهٔ زمین تقریباً مساوی ۶۳۷۰ کیلومتر و مساحت مثلث مفروض‌کروی تقریباً مساوی $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ کیلومترمربع است ، با قراردادن $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\alpha$ (رادیان) بدست می‌آید (مسئلهٔ قبل را ببینید) :

$$۳\alpha-\pi=\frac{s}{R^{۲}}\approx\frac{\sqrt{۳}}{۴\times۶۳۷۰^{۲}}\ (\text{رادیان})$$

با ضرب طرف دوم در $\frac{۱۸۰\times۶۰\times۶۰}{\pi}$ برای تبدیل به ثانیه بدست می‌آید :

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \neq ۶۰^\circ ۰' ۰/۰۰۰۷''$$

۱۲۵ . در شکل ۱۵۲ سه طریقهٔ وصل برای سه حلقهٔ نخی داده شده است؛ از دو نوع اول می‌توان بسادگی برای حالت n حلقه هم استفاده کرد ، که در آنها با بازکردن یکی از حلقه‌ها ، بقیه هم خود بخود باز می‌شوند .

پایان