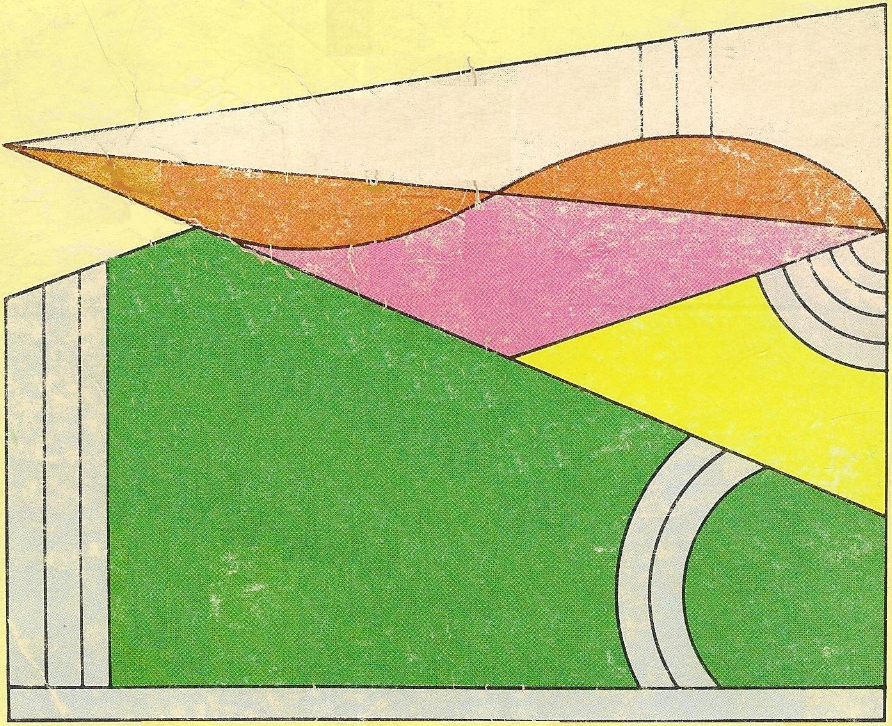
در پی فیثاغورث

ترجمه: پرویز شهریاری



در پی فیثاغورث

По следам Пифагора

شه‌پان ـــ النسکی

Щепан Еленьский

ترجمهٔ پرویز شهریاری

به دخترم مژده

بخاطر علاقه‌ای که به «چیستان»

و یا به‌قول خودش «این چیه» دارد

شه پان ـ النسکی

درپی فیثاغورث

ترجمه از لهستانی به‌روسی: گ. ف. بویارسکی،

ب. و. بویارسکی، آ. آ. یاکوشوا

ترجمه از روسی به‌فارسی: پرویز شهریاری

چاپ اول : ۱۳۵۲

چاپ دوم : ۱۳۶۱

چاپ و صحافی : چاپخانهٔ رامین ، تهران

تیراژ : ۶۶۰۰ نسخه

این کتاب به‌افتخار ریاضیدان بزرگ و آفرینندهٔ مکتب ریاضی یونان باستان، در پی فیثاغورث نام گرفته است.

فیثاغورث درحدود سال ۵۸۰ پیش از میلاد، در جزیرهٔ ساموس متولد شد. اقامت درمصر اثر فوق‌العاده‌ای درپیشرفت فیثاغورث داشت.

فیثاغورث درنخستین دورهٔ شکوفایی‌خود در کروتون (مستعمرهٔ یونانی در جنوب ایتالیا) زندگی می‌کرد. او درهمین‌جا مکتب فیثاغورثی را بنیان گذاشت که درپیشرفت ریاضیات یونانی اثر فوق‌العاده داشت.

فیثاغورث اساس ساختمانی جهان هستی را عدد (وبه تعبیر امروز عدد طبیعی) می‌دانست. علاقهٔ فیثاغورث ومکتب او به‌خاصیت عددها را باید سرچشمهٔ بوجود آمدن رشته‌ای از ریاضیات دانست که بعدهانام نظریهٔ عددها را به‌خودگرفت. یادگاری ازاین موضوع درنام جدول فیثاغورث باقی مانده است.

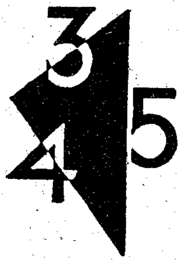
فیثاغورث در بارهٔ رابطه‌های عددی که در ساختمانهای هندسی وجود دارد، تحقیق می‌کرد. او مثلث معروف به مثلث مصری را، که ضلعهای آن با عددهای ۳، ۴ و۵ بیان می‌شود، می‌شناخت. مصریها می‌دانستندکه چنین مثلثی قائم‌الزاویه است وازآن برای تعیین زاویه‌های قائمه درتجدید تقسیم‌بندی زمینهای اطراف نیل، که هرسال براثر طغیان‌آب شسته می‌شد، استفاده می‌کردند.

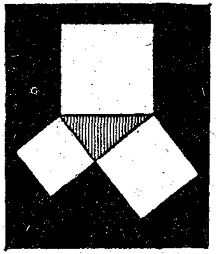
فیثاغورث رابطهٔ بین ضلعهای مثلث مصری را پیدا کرد که با رابطهٔ $۵^۲=۳^۲+۴^۲$ بیان می‌شود. فیثاغورث‌نشان دادکه این رابطه‌برای هرمثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای a، b و c به‌صورت $a^۲+b^۲=c^۲$ درست است و رابطه‌هایی برای این ضلعها پیدا کرد که به‌زبان امروزی چنین‌اند:

$$a=۲n+۱\ ;\ b=۲n(n+۱)\ ;\ c=۲n^۲+۲n+۱$$

که درآنها n عدد صحیح دلخواهی است. و روشن است‌که هرمثلثی با این ضلعها، یك مثلث قائم‌الزاویه است.

امروز مثلثهای قائم الزاویه‌ای که ضلعهای آنها با عددهای طبیعی بیان شوند، مثلثهای فیثاغورثی نامیده می‌شوند.





این قضیه را متعلق به فیثاغورث می‌دانند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربعی که روی وتر ساخته شود برابر است با مجموع مربعهایی که روی دو ضلع دیگر ساخته شده است. این قضیه راهم قضیهٔ فیثاغورث می‌نامند.

ابتدا گمان می‌کردند که ضلعهای هر مثلث قائم‌الزاویه را می‌توان با عددهای طبیعی بیان کرد، ولی بررسیهای ریاضیدانهای مکتب فیثاغورثی نشان داد که این تصور درست نیست.

مثلاً مثلث قائمه‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین یك مثلث فیثاغورثی نیست، زیرا نمی‌توان عددهایی پیدا کرد که در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$a^۲+a^۲=c^۲ \Longrightarrow ۲a^۲=c^۲$$

این کشف برای فیثاغورثیها مصیبت‌بار بود، زیرا این اعتقاد آنها را که همهٔ پدیده‌ها با عددهای طبیعی قابل بیان هستند، دچار شکست کرد.

کشف این مطلب که دنیای عددها با دنیای ساختمانهای هندسی متناقض است، چنان اثر بزرگی داشت که دانشمندان مکتب فیثاغورثی آنرا به‌عنوان رازی مخفی کردند و بررسیهای هندسی را بطور کلی از حساب جدا کردند. این مطلب بطور جدی مانع پیشرفت حساب در یونان شد، درحالی که هندسه را بنحو سریعی تکامل داد.

* * *

پیشرفت رشته‌های مختلف علوم دقیقه در یونان باستان تاحدی عجیب است. هندسه، که تکامل آنرا مدیون نامهای بزرگ اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس (سده‌های چهارم، سوم و دوم پیش‌از میلاد) هستیم، فوق‌العاده پیشرفت کرد. سپس در سدهٔ دوم میلادی و بخاطر موفقیتهایی که بطلمیوس بدست آورد، نجوم به‌حد شکفتگی رسید. بالاخره در سدهٔ سوم میلادی دیوفانت مبانی اساسی حساب را منظم کرد.

اقلیدس، بطلمیوس و دیوفانت به‌ترتیب اثرهای اساسی: مقدمات، المجسطی و حساب را نوشتند که هرکدام ازآنها شامل ۱۳ کتاب است. ولی به‌اعتقاد تاریخ نویسها این‌جریان بزرگ فکری برپایهٔ بررسیهای فیثاغورث قراردارد و به‌همین مناسبت‌هم مانام این‌کتاب را درپی فیثاغورث گذاشته‌ایم.

شه‌پان ـ النسکی

در این کتاب

فصل اول

II ـ خاصیتهای جالب عددها وعملهای ریاضی در صفحهٔ ۷۸

فصل دوم

فصل اول

I- لطیفه‌های ریاضی

ملاحظات کلی

لطیفه‌های ریاضی خیلی زیادند وبسادگی نمی‌توان مسأله‌های لطیفه‌ای را به‌پایان رساند. پس چه ملاکی برای انتخاب آنها وجود دارد؟ بیش ازهمه باید به حداکثر تنوع توجه داشت.

مسأله‌ها ولطیفه‌هایی که دراینجا گردآورده‌ایم به‌اندازهٔ کافی متنوع‌اند: مسأله‌های‌مربوط به‌تقسیم، مسأله‌هایی که‌در آنهااز موقعیت یك چیز، گذرگاهها، حیله‌هاوغیره صحبت می‌شود؛ مسأله‌هایی از دوره‌های مختلف: که منشأ آنها به‌هزارها، صدها، و دهها سال قبل می‌رسد؛ مسأله‌هایی ازچین، هند، یونان، سرزمینهای اسلامی، روسیه؛ فرانسه وغیره؛ مسأله‌هایی‌از ریاضیدانهای‌بزرگ: لئوناردو فیبوناچی، ایزاك نیوتون، و غیره، وهم مسأله‌هایی که مؤلفین آنها ناشناخته مانده است. از لحاظ موضوع هم تقریباً هر مسأله‌ای ویژگی خاص خودش را دارد.

همهٔ مسأله‌ها، برای کسانی که کم‌وبیش باحساب، جبروهندسهٔ مقدماتی آشنا هستند، قابل فهم است. در بارهٔ خوانندگانی که اطلاعات ریاضی در خاطرشان باقی نمانده است، می‌توانند با

بخاطر آوردن مطالب ریاضی کـه قبلاً می‌دانسته‌اند ، از بسیاری مسأله‌ها استفاده کنند.

بسیاری‌ازمسأله‌ها بطور کامل حل شده‌اند، درموردبعضی تنها بـه جواب اکتفا شده است و برای بقیه حتی جواب هم داده نشده است : این مسأله‌ها، که حل مستقل آنها (براساس مسأله‌های قبل) به‌عهدهٔ خواننده گذاشته شده است، وسیله‌ای برای درك بهترمطالب می‌باشد .

۱ـ ثروت عرب

این‌یکی ازمسأله‌های قدیمی، واحتمالاً عربی است که مؤلف آن شناخته نشده است. عربی برای سه فرزند خود یك گله شترباقی گذاشت، طبق وصیت او باید پسربزرگترنصف شترها را ببرد، پسر دوم یك سوم و پسر کوچکتر یك نهم شترها را. در گله هم ۱۷ شتر وجود دارد.

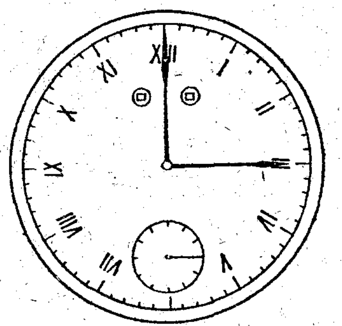
تقسیم مشکل بود وبرادرها برای قضاوت به‌دانشمندی که می‌شناختند مراجعه‌کردند. قاضی مسأله‌را به‌این ترتیب حل‌کرد: باید یك شتر قرض‌کنید ۱۸ شتری راکه خواهیدداشت تقسیم‌کنید. برادرها به‌همان ترتیب‌که قاضی توصیه‌کرده بود عمل‌کردند. به‌این ترتیب برادربزرگتر ۹شتر، برادروسط۶ شترو برادرکوچکتر ۲شتربدست‌آورد وشترقرضی‌راهم به‌صاحبش برگرداندند. برادرها ازاین قضاوت خیلی راضی بودند، زیرا هریك ازآنها بیشترازآنچه‌که پدرشان وصیت کرده‌بود، بدست آوردند: پسربزرگتر$\frac{۱}{۲}$، پسرمتوسط $\frac{۱}{۳}$ وپسر کـوچکتر $\frac{۱}{۹}$ شتر .

این نتیجهٔ جالب به صورت یك معما جلوه می‌کند. ولی اگر مجموع قسمتهایی ازدارایی راکه طبق وصیت پدر باید به‌پسرها داده شود، جمع‌کنیم:

$\frac{17}{18}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$، می‌بینیم که اگر تقسیم دقیقاً طبق وصیتنامه انجام می‌شد، $\frac{1}{81}$ دارایی تقسیم نشده باقی می‌ماند. و همین رمز خوشحالی بی‌مورد پسرها و نتیجهٔ غیرمنتظرهٔ مسأله است.

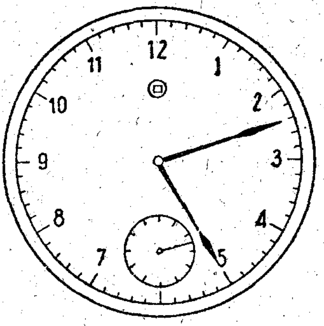
۲ـ چگونه وقت دقیق را معین کنیم؟

من موقتاً ساعت ندارم، آنرا برای تعمیر به‌ساعت‌ساز داده‌ام ساعت دیواری هم از کار افتاده است. من عازم منزل دوستم شدم وتاآنجاکه اطلاع دارم ساعت او بدون نقص کار می کند. مدتی پیش دوستم ماندم ووقتی بخانه برگشتم، ساعت دیواری را دقیقاً درست کردم. چگونه توانستم وقت دقیق‌را معین کنم، بشرطی که از قبل نمی‌دانستم که فاصلهٔ بین منزل من تامنزل دوستم را درچه‌مدتی طی می کنم.



شکل ۱

زمان a: ساعت راکوک کردم واز خانه خارج شدم



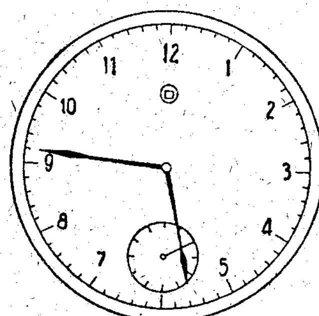
شکل ۲

زمان b: به‌خانهٔ دوستم رسیدم

مسأله به‌تعیین ووقت‌دقیق موقعی که به‌خانه برمی گردم، مربوط می‌شود. درلحظه‌ای که می‌خواهم ازمنزل‌خارج شوم ساعت دیواری‌را بکار می‌اندازم؛ وقتی راکه ساعت درآن لحظه نشان می‌دهد باحرف a نشان می‌دهیم (شکل ۱)

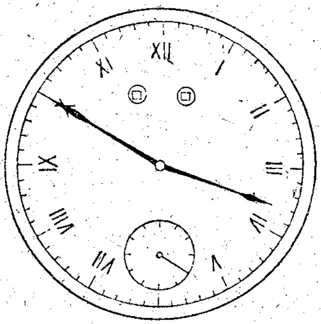
به‌محض اینکـه به‌منزل دوستم می‌رسم، ساعت دقیق را از او می‌پرسم و او ساعت خود را نشان می‌دهد؛ فرض‌کنیم زمان b را نشان دهد (شکل ۲).

بعدازگفتگوی بادوستم به‌طرف منزل برمی‌گردم، ولی درلحظهٔ حرکت ازپیش او دوباره وقت را می‌پرسم ویادداشت می‌کنم؛ فرض‌کنیم این وقت c باشد (شکل۳). وقتی‌که به‌منزل می‌رسم به‌ساعت‌دیواری خودم نگاه‌می‌کنم، فرض‌کنیم وقت d را نشان بدهد (شکل ۴) . نشستم و نقشهٔ محاسبه را ریختم و یك دقیقه بعد ساعت دیواری را روی وقت دقیق منظم‌کردم: وقت e (شکل ۵).



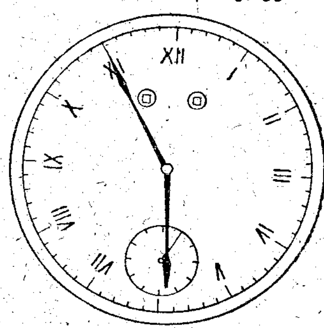
شکل۳

زمان c: بعدازچند دقیقه به‌منزل برگشتم



شکل۴

وزمان d: لحظه‌ای‌که به‌منزل رسیدم



شکل ۵

زمان e : یك دقیقه بعداز رسیدن من به‌منزل ساعت دیواری زمان درست را نشان می‌داد

محاسبهٔ من چنین بود: تفاضل d — a نشان می‌دهد کـه چه مدتی در منزل نبوده‌ام :

دقیقه دقیقه ساعت دقیقه ساعت

d—a=۳ , ۵۰—۳ , ۰۰=۵۰

تفاضل $c-b$ نشان می‌دهد که چه مدتی نزد دوستم بوده‌ام:

دقیقه دقیقه ساعت دقیقه ساعت
$c-b=$ ۵ ، ۴۶ − ۵ ، ۱۲ = ۳۴

تفاضل $(d-a)-(c-b)$ معلوم می‌کند که چه مدت برای رفتن و برگشتن در راه بوده‌ام:

دقیقه دقیقه دقیقه
$(d-a)-(c-b)=$ ۵۰ − ۳۴ = ۱۶

رفتن و برگشتن را با سرعت یکنواخت رفته‌ام، بنابراین برای رفتن یا برگشتن نصف این مدت را صرف کرده‌ام:

$$\frac{(d-a)-(c-b)}{۲}= ۸ \text{ دقیقه}$$

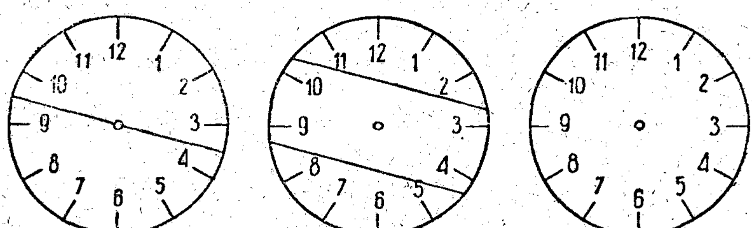
اگر این ۸دقیقه را به‌زمان c اضافه‌کنیم، وقت دقیق لحظه‌ای‌که به‌ـ منزل رسیدم، معلوم می‌شود:

دقیقه ساعت دقیقه دقیقه ساعت
۵ ، ۴۶ + ۸ = ۵ ، ۵۴

با اضافه‌کردن یك دقیقه‌ای‌که برای محاسبه صرف کردم، وقت دقیق بدست می‌آید.

۳ ـ صفحهٔ ساعت را چگونه تقسیم کنیم؟

A. صفحهٔ ساعت را با یك خط راست به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع عددهای هردو قسمت بادیگری برابر باشد. این مجموع چقدر است؟



شکل ۶

B. صفحهٔ ساعت را بوسیلهٔ دوخط راست به‌سه قسمت چنان

تقسیم کنید که مجموع عددها در هریك از این قسمتها با دیگری برابر باشد.

C. صفحهٔ ساعت را به‌همین‌ترتیب به‌شش قسمت تقسیم کنید.

در شکل۶ جواب دو قسمت اول داده شده است و حل قسمت سوم را به‌عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم.

۴ـ معمای قدیمی زنون با دید جدید

درنیمه شب یاظهر هردوعقربهٔ ساعت روی۱۲ قرارگرفته‌اند. بعدازیکساعت، عقربهٔ ساعت‌شمار روی۱ وعقربهٔ دقیقه‌شمار روی ۱۲است. وقتی که عقربهٔ دقیقه شمار به۱ برسد، عقربهٔ ساعت شمار به اندازهٔ $\frac{۵}{۱۲}$ قسمتهای دقیقه‌ای بجلو می‌رود؛ بعد وقتی که عقربهٔ دقیقه شمار به‌این نقطه که ساعت شمار قراردارد برسد (یعنی $۵\frac{۵}{۱۲}$ دقیقه بعداز ساعت۱)، عقربهٔ ساعت‌شمار بازهم کمی جلوتر رفته است وهمینطور می‌توان این بحث را تا بی‌نهایت ادامه داد: وقتی که عقربهٔ دقیقه شمار فاصله‌ای راکه تاساعت شمار دارد طی کند، عقربهٔ ساعت شمار باز هم مقداری بجلو رفته است، بنابراین «ظاهراً» عقربهٔ دقیقه شمار نه‌تنها نمی‌تواند از عقربهٔ ساعت شمار جلوبزند، بلکه همیشه از آن عقب‌تر است.

این معما را چگونه می‌توان حل کرد؟

دراین مسابقهٔ عقربه‌ها (شبیه مسابقهٔ آشیل ولاك پشت) تمام رمزکار دراین مطلب نهفته است که دنبالهٔ جابجایی عقربهٔ دقیقه شمار تشکیل یك تصاعد هندسی نزولی می‌دهد، یعنی:

$$۵+۵۰\frac{۱}{۱۲}+۵۰\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۲}+۵۰\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۳}+\dots$$

جملهٔ اول این تصاعد $a=۵$ وقدر نسبت آن $q=\frac{۱}{۱۲}$ است، چون مجموع بی‌نهایت جملهٔ تصاعد هندسی را از رابطهٔ $S=\frac{a}{۱-q}$ بدست می‌آورند، دراینجا $S=\frac{۵}{۱-\frac{۱}{۱۲}}=۵\frac{۵}{۱۱}$ می‌شود وبنابراین در ۱ ساعت و $۵\frac{۵}{۱۱}$ دقیقه بعداز نیمه شب یا بعدازظهر عقربهٔ دقیقه‌شمار به‌عقربهٔ ساعت‌شمار می‌رسد.

اگربطریق دیگری مسأله را حل کنیم، نتیجهٔ فوق تأیید می‌شود.

فرض کنیم که عقربهٔ دقیقه شمار x دقیقه بعد ازساعت ۱ به‌عقربهٔ ساعت‌شمار برسد. دراین مدت عقربهٔ ساعت شمار راهی مساوی $\frac{x}{۱۲}$ طی می‌کند. زاویه‌ای که در این مدت عقربهٔ دقیقه شمار طی می‌کند ۵ دقیقه بیشتر از زاویه‌ای است که عقربهٔ ساعت شمار طی می‌کند. از آنجا $x-\frac{x}{۱۲}=۵$ و بنابراین $x=۵۰\frac{۱۲}{۱۱}=\frac{۶۰}{۱۱}=۵\frac{۵}{۱۱}$.

هـ چگونه می‌توان جهات اصلی را به‌کمک ساعت تعیین کرد؟

درروز آفتابی به‌کمك یك ساعت می‌توان چهارجهت اصلی: شمال، جنوب، مشرق و مغرب را با دقتی که برای استفادهٔ عملی کافی است، پیدا کرد. این روش به‌اندازه‌ای ساده و در دسترس است که آدمی را به‌تعجب وامی‌دارد که چرا مورد استفادهٔ همگان قرار نمی‌گیرد.

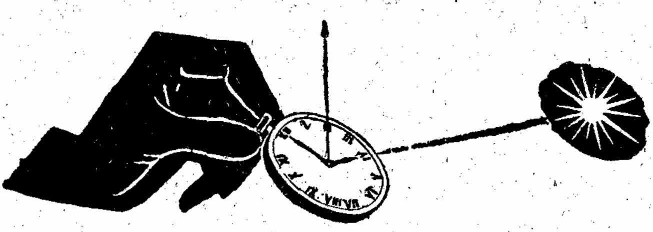
اساس این جهت‌یابی چنین است:

ساعت را کف دست قرار می‌دهیم و آنرا می‌چرخانیم تا عقربهٔ ساعت شمار جهت خورشید را نشان دهد؛ در این‌صورت نقطه‌ای که روی محیط صفحهٔ ساعت درست وسط عقربهٔ ساعت ـ شماروعددXII قرارگرفته است، جهت جنوب‌را مشخص می‌کند. مثلاً اگرعقربهٔ ساعت‌شمار روی IV باشد (شکل۷)، آنرا به‌طرف خورشید می‌گیریم، نقطهٔ وسط عددهای IV و XII، یعنی نقطه‌ای که ساعت II را معین می‌کند، جنوب را نشان خواهد داد، طرف مقابل آن شمال، سمت چپ مشرق وسمت راست مغرب‌خواهد بود.

این روش را می‌توان به‌صورت زیر هم بیان‌کرد:

روی محیط صفحهٔ ساعت باید نقطه‌ای را پیداکردکه درست دروسط عدد XII و عددی که عقربهٔ ساعت شمار روی آن ایستاده است، باشد. دراین صورت اگرهمین نقطهٔ وسط‌را درجهت‌خورشید نگاه داریم، عدد XII سمت جنوب را نشان خواهد داد.

مثلاً اگرساعت IV باشد، عدد II صفحهٔ ساعت را به‌طرف خورشید می‌گیریم، در این‌صورت خطی‌که از مرکز صفحهٔ ساعت به‌طرف عدد XII رسم شده باشد، جهت جنوب را نشان می‌دهد.



شکل ۷

درتأیید حکم بالاباید توجه‌کردکه درساعت XII یعنی ظهر،

خورشید و عقربهٔ ساعت‌شمار و نقطهٔ تقسیمی که روی محیط صفحهٔ ساعت پیدا می‌کنیم، هرسه دریکجهت قراردارند: درجهت‌جنوب.

پس هم‌خورشید وهم عقربهٔ ساعت‌شماردریك جهت حرکت می‌کنند، منتهی عقربهٔ ساعت‌شمار یك دور کامل را در۱۲ساعت و خورشید دور کامل را در۲۴ساعت طی‌می‌کند؛ یعنی زمانی‌که طول می‌کشد تاخورشید یك دور کامل حرکت‌کند درست دوبرابر زمانی است‌که برای دورزدن عقربهٔ ساعت‌شمارلازم است. روشی را هم که گفته‌ایم برهمین اساس قراردارد. باید اضافه‌کردکه وقتی قبل‌از ظهرباشد، باید نقطهٔ بین دو عقربه و عدد XII را در جهت حرکت عقربهٔ ساعت پیدا کرد و وقتی بعد از ظهر باشد در جهت عکس این حرکت.

تبصره. البته امتدادی که به‌این ترتیب بدست می‌آید کاملاً دقیق نیست. این عدم دقت بدان مناسبت است که ساعت را بجای اینکه در صفحهٔ استوای سماوی قرار دهیم، در صفحهٔ افقی قرار داده‌ایم. ضمناً اختلاف بین زمان حقیقی خورشیدی را با زمانی‌که ساعت نشان‌می‌دهد به‌حساب نیاورده‌ایم (مثلاً درهمهٔ شهرستانهای ایران، ساعت‌را روی افق تهران تنظیم می‌کنند). ولی باوجود این عدم دقتها، این روش درعمل کاملاً قابل استفاده است.

برای مردمی‌که درنیمکرهٔ جنوبی زندگی می‌کنند، باید این روش را بترتیب زیر تصحیح کرد.

اگرعقربهٔ ساعت‌شمار درجهت خورشید گرفته شود، امتداد نیمساز زاویهٔ بین عقربهٔ ساعت‌شمار ونیم خطی که مرکز ساعت را

به‌عدد XII وصل می‌کند، جهت شمال‌را نشان می‌دهد.

۶ـ داستان تخم مرغ فروش

فروشندهٔ مغازه‌ای داستانی می‌گفت که بنظر غیر واقعی می‌رسید:

ـ امروز یك خریدار به‌مغازه مراجعه‌کرد ونصف همهٔ تخم‌مرغها به‌اضافهٔ یك نصفه تخم‌مرغ‌را خرید؛ خریداردوم نصف بقیهٔ تخم مرغها را به‌اضافهٔ یك نصفه تخم‌مرغ خرید؛ همینطورخریدار سوم نصف تخم مرغهای باقیمانده را به‌اضافهٔ یك نصفه تخم مرغ خرید؛ به‌همین‌ترتیب خریداران چهارم، پنجم وششم هرکدام نصف آنچه‌که از تخم مرغها باقیمانده بود به‌اضافهٔ یك نصفه تخم مرغ خریدند. در پایان این فروش یك تخم مرغ باقی مانده بود.

کسی‌که طرف صحبت فروشنده بود گفت:

ـ ممکن نیست چنین چیزی پیش آمده باشد! چگونه ممکن است یك نصفه تخم مرغ فروخت؟

فروشنده جواب داد:

ـ ولی من به‌هیچ‌کس تخم مرغ نصفه نفروخته‌ام و هربار به‌خریدار تعداد صحیحی تخم مرغ تحویل داده‌ام.

دانش‌آموزی دراین مباحثه دخالت‌کرد و گفت:

ـ من خریدار هفتم بودم، نصف تخم مرغهای باقیمانده را به‌اضافهٔ یك نصفه تخم مرغ خریدم.

فروشنده به او نگاه‌کرد:

ـ بله درست است! شما یك تخم مرغ باقیمانده‌را خریدید.

راز مطلب در اینجاست که هربار در جعبه تعداد تخم مرغهایی که باقیمانده است، فرد است.

فرض می‌کنیم که در ابتدا تعداد تخم مرغها $2r+1$ باشد. خریدار اول نصف این تخم مرغها، یعنی $r+\frac{1}{2}$، به‌اضافهٔ $\frac{1}{2}$ تخم‌مرغ یعنی رویهم $r+1$ تخم‌مرغ را می‌خرد. به‌این ترتیب برای این خرید هیچ احتیاجی به‌نصف‌کردن تخم‌مرغ نیست. درجعبه r تخم‌مرغ باقی‌می‌ماند. طبق گفتگوی فروشنده این تعداد هم باید عددی فرد باشد. حالا می‌توان سؤال کرد: قبل ازفروش درمغازه چند تخم‌مرغ بوده است؟

این مسأله را ازآخر حل می‌کنیم. می‌دانیم که اگر در مغازه $2r+1$ تخم مرغ باشد، $r+1$ تخم سرغ را خریدارمی‌برد و r تخم‌مرغ باقی می‌ماند. جدول زیررا تشکیل می‌دهیم :

خریدار	باقیمانده	خرید	قبل ازخرید
هفتم	۰	۱	۱
ششم	۱	۲	۳
پنجم	۳	۴	۷
چهارم	۷	۸	۱۵
سوم	۱۵	۱۶	۳۱
دوم	۳۱	۳۲	۶۳
اول	۶۳	۶۴	۱۲۷

به‌این ترتیب معلوم می‌شودکه درابتدا۱۲۷ تخم مرغ وجود داشته است. این مسأله را می‌توان برای n خریدار تعمیم داد. در این‌صورت در ابتدا 2^n-1 تخم مرغ باید وجود داشته باشد. مثلاً اگر $n=7$ باشد تعداد تخم مرغهای اولیه چنین می‌شود:

$$2^7-1=128-1=127$$

۷ـ تقسیم سیبها

مقداری سیب در هفت جعبه وجود دارد. اگر باسیبهای جعبهٔ اول سیبهای هریك از شش جعبهٔ دیگر را دوبرابر کنیم ، سپس با سیبهای جعبهٔ دوم سیبهای هریك ازشش جعبهٔ دیگررا دوبرابر کنیم تاآخر؛ بعد ازپایان کار درهرجعبه ۱۲۸ سیب خواهیم داشت. آیا می‌توان، بدون استفاده ازجبر، تعداد سیبهای هریك از جعبه‌ها را قبل از تغییر بدست‌آورد؟

البته! منتهی باید محاسبه را ازآخرشروع کرد.

چون بعد از مرحلهٔ هفتم عمل، در هرجعبه ۱۲۸ سیب وجود دارد، به‌این معناست‌که شش جعبهٔ اول قبل‌ازاین مرحله هرکدام۶۴ سیب داشته‌اند و در نتیجه در جعبهٔ هفتم ۵۱۲ = ۶۴ × ۶ + ۱۲۸ سیب بوده است. اگر استدلال را به‌همین ترتیب دنبال‌کنیم، بالاخره معلوم می‌شودکه درابتدا در هرجعبه چندسیب وجود داشته است:

۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸	۱۲۸
۵۱۲	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴	۶۴
۲۵۶	۴۸۰	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲	۳۲
۱۲۸	۲۴۰	۴۶۴	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶
۶۴	۱۲۰	۲۳۲	۴۵۶	۸	۸	۸
۳۲	۶۰	۱۱۶	۲۲۸	۴۵۲	۴	۴
۱۶	۳۰	۵۸	۱۱۴	۲۲۶	۴۵۰	۲
۸	۱۵	۲۹	۵۷	۱۱۳	۲۲۵	۴۴۹

به این ترتیب قبل از تقسیم سیبها در هفت جعبه بـه‌ترتیب ۴۴۹، ۲۲۵، ۱۱۳، ۵۷، ۲۹، ۱۵، ۸ سیب بوده است.

بد نیست قانون تشکیل این عددها را بدانیم:

$$\mathbf{a}_1 = ۸$$

$$\mathbf{a}_2 = ۲\mathbf{a}_1 - ۱ = ۱۵$$

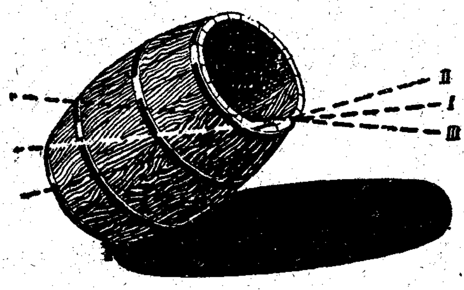
$$a_3 = 2a_2 - 1 = 29$$
$$a_4 = 2a_3 - 1 = 57$$

....

....

۸ـ آب بشکه چقدر است؟

دو باغبان در این باره که چقدر آب در بشکه وجود دارد مشاجره می کردند؛ آنهامی‌خواستند نمك پطاسیم درآب حل کنند. یکی ازآنها معتقد بودکه آب بشکه بیش‌ازنصف آن‌است ودیگری می گفت که از نصف کمتراست. بدون اینکه از وسایلی مثل سیم یا چوب برای اندازه‌گیری آب بشکه استفاده کنیم، چگونه می‌توان فهمیدکه حق باکیست؟



شکل ۸

ما دراینجا بایك لطیفهٔ ریاضی سروکارنداریم، بلکه‌درجلوما یك‌مسألهٔ هندسی است، اگرچه تاحد مضحکی آسان است.

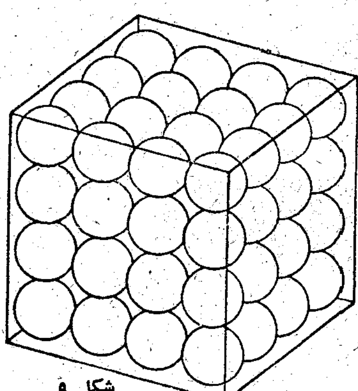
درحقیقت، اگرآب درست تانیمهٔ بشکه باشد، وقتی بشکه زا خم‌کنیم به‌نحوی‌که‌آب تالبهٔ‌آن برسد،باید سطح‌آب بطورافقی‌باشد (سطح I درشکل ۸). این مطلب ازاینجا نتیجه می‌شود که اگر صفحه‌ای بطور قطری از نقاط متقابل پایین و بالای دو تسمهٔ سر و تـه بشکه بگذرد، حجم آنـرا نصف خواهد کرد.

اگرآب از نصف بشکه‌کمتر باشد، وقتی‌که آنرا به‌ترتیب مذکور خم

کنیم، سطح آب قاعدهٔ بشکه را قطع خواهد کرد (سطح II درشکل۸). وبالاخره اگر آب بیش ازنصف باشد، بعد ازخم کردن بشکه، آب تمام سطح قاعده را فرا می گیرد (سطح III درشکل۸). از این راه می‌توان بدون هیچ وسیله‌ای جواب صحیح را پیداکرد .

۹ـ جعبه‌ای پراز گلوله

یك جعبهٔ مکعب شکل پراز گلـوله‌های فولادی است . جعبهٔ خالی ۲ کیلوگرم وبا گلوله‌ها ۱۸ کیلوگرم وزن دارد، در جعبه ۶۴ گلولهٔ یکجور و درچهار لایه چیده شده است : در لایهٔ پایین چهار ردیف و در هرردیف چهار گلوله، روی آن لایهٔ دوم به‌همان ترتیب قرارگرفته است، سپس لایهٔ سوم وبالاخره لایهٔ چهارم (شکل ۹).


شکل ۹

درجعبهٔ دیگری که کاملاً مساوی جعبهٔ اول است ۱۰۰۰ گلوله گذاشته شده است. در ۱۰ لایه، هرلایه ده ردیف و در هر ردیف ۱۰ گلوله. وزن این جعبه با گلوله‌های آن چند کیلوگرم است؟

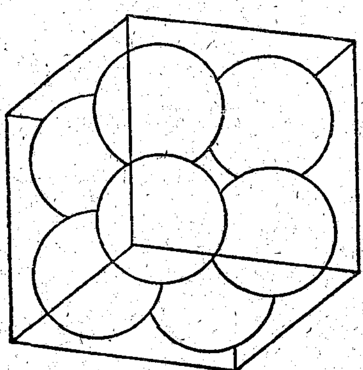
کدام جعبه سنگین‌تر است؟

گلوله‌های جعبهٔ اول، بدون در نظرگرفتن خود جعبه، ۱۶ کیلوگرم وزن دارند. چون درجعبه ۶۴ گلوله وجود دارد، وزن‌هر گلوله ۲۵/۰ کیلوگرم می‌شود.

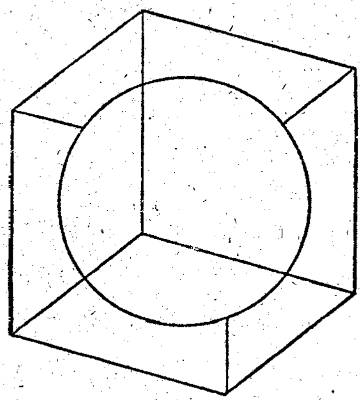
اگر یك گلولهٔ بزرگ درنظر بگیریم که بر هرشش وجه مکعب مماس باشد، چه وزنی خواهدداشت؟

قطر چنین گلوله‌ای چهاربرابر قطرهریك از ۶۴گلولهٔ نوع قبل است ، بنابراین وزن این گلوله ۴ × ۴ × ۴ یعنی۶۴ برابروزن هریك از ۶۴ گلولهٔ جعبهٔ اول است. به‌این ترتیب وزن گلولهٔ بزرگ درست مساوی ۶۴ گلولهٔ جعبهٔ اول، یعنی ۱۶ کیلوگرم است (شکل ۱۰) .

حال اگر گلوله‌هایی انتخاب کنیم که قطر هریك ازآنها نصف قطر این گلولهٔ بزرگ باشد، به‌اندازهٔ ۲ × ۲ × ۲ یعنی ۸عدد ازآنها را می‌توان در جعبه جای داد ووزن مجموع آنها درست مساوی وزن گلولهٔ بزرگ خواهد بود (شکل ۱۱) .



شکل ۱۱



شکل ۱۰

و اگر گلوله‌هایی به قطر یك سوم گلولـهٔ بزرگ انتخاب کنیم، تعداد ۳ × ۳ × ۳ یعنی ۲۷عدد ازآنها درجعبه جای می‌گیرد که وزن مجموع آنها مساوی وزن همان گلولهٔ بزرگ است. حالا می‌توانیم بـه سؤال مسأله جواب بدهیم:

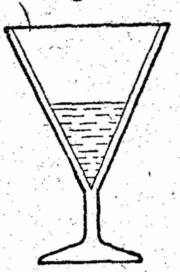
وزن خالص ۱۶ کیلوگرم و وزن باظرف ۱۸ کیلوگرم.

ضمناً خواننده می‌تواند معین کند که اگر جعبه را با لایه‌های یکنواخت پراز ساچمه‌های کوچك کنیم، چقدر وزن خواهد داشت .

۱۰ـ داروی تلخ

بچه‌ای مریض شد. پزشك برای او دارویی نوشت ودستورداد که ۱۵ تا۲۰گرم از آن به‌بیمار داده شود.

مادر گیلاسی به شکل مخروط انتخاب کرد. گیلاس درست گنجایش ۲۰ گرم دوا داشت. ولی دوا تلخ بود، پسر از مادرش خواهش کرد که اجازه دهد او فقط نصف دوا را بخورد: «ایناها تااینجا»، و باانگشت جایی را که وسط ارتفاع مایع در گیلاس بود نشان داد (شکل ۱۲). مادر ابتدا مخالفت کرد، ولی سر آخر راضی شد و پسر «نصف» دارو را خورد.

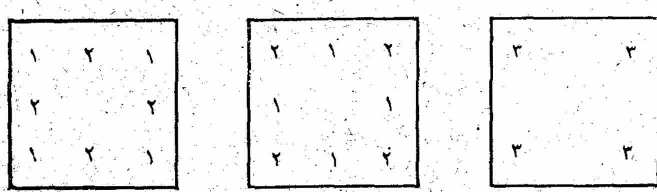

شکل ۱۲

به‌نظر شما عکس‌العمل پزشك درمقابل این عمل چه باید باشد؟

ـ بچه دارورا به‌اندازهٔ کافی مصرف کرده‌است. ارتفاع قسمت باقیماندهٔ دارو نصف ارتفاع تمام گیلاس و بنابراین حجم آن $\frac{۱}{۸}$ حجم گیلاس است. بچه تنها ۲/۵ گرم ازدارو را نگهداشته است و ۱۷/۵ گرم آنرا خورده است و بنابراین شفا می‌یابد.

۱۱ـ تنظیم نگهبانی سربازها

ستوان می‌بایست سربازهای تحت فرماندهی خود را در حیاط مربع شکل انبار مهمات به‌نگهبانی بگمارد. او در کنار هر- دیوار چهار سرباز به‌نگهبانی گذاشت و رفت. بعد از مدتی سروان



شکل ۱۳

آمد. او گفت که پستهای نگهبانی کافی نیست ودرطول هردیوار پنج

سرباز گذاشت. بالاخره سرهنگ به‌انبار مهمات آمد ودرطول هر- دیوار شش سرباز به‌نگهبانی گذاشت.

اگر درهرسه‌مورد تعداد سربازها یکی باشد، وضع استقرار نگهبانها درهربار چگونه بوده است؟

جواب خیلی ساده است (شکل ۱۳).

۱۲ـ کلید چمدانها

برای یك فروشگاه ۱۰ چمدان وهمراه آنها یك پاکت محتوی ۱۰ کلید جداگانه فرستاده شد. ضمناً اطلاع داده شده بود که هر- کلید تنها یك چمدان را باز می کند و برای هرچمدان هم یك کلید مناسب می‌توان پیدا کرد.

کارگر فروشگاه که چمدانها راتحویل گرفت وآهی کشید:

ـ چه گرفتاری! کلیدها را چگونه ازهم جدا کنم؟ من‌می‌دانم که این کلیدهای بی‌زبان چقدر لجبازند! اگر بخواهم کلید چمدان اول را پیدا کنم، حتماً کلید دهم درست درمی‌آید. و به‌این ترتیب من حتم دارم که برای ۱۰ چمدان باید درست صد بار امتحان کنم.

همکار او که اغلب درمنزل با کلید سروکار داشت گفت:

ـ کار به‌این اندازه‌ها هم سخت نیست. تنها برای پیدا کردن کلید چمدان اول باید ده‌بار آزمایش کرد. برای چمدان‌دوم بیش از ۹ آزمایش لازم‌نیست وبه‌همین ترتیب‌تعداد کلیدهایی که باید آزمایش کرد مرتباً کم می‌شود.

به‌این ترتیب می‌توان تعدادآزمایشها را برای پیدا کردن کلید هرچمدان محاسبه کرد:

۱۰+۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱=۵۵

یعنی بیش از ۵۵ آزمایش لازم نیست.

دراین موقع سرپرست فروشگاه وارد صحبت‌شد:

ـ کلیدها را یکی پس ازدیگری به‌یك چمدان امتحان نکنید، بهتراست یك کلید انتخاب کنید و ببینید بـاآن کدامیك از چمدانها را می‌توان بازکرد. به‌این ترتیب کارسریع‌ترانجام می‌شود وکلیدها هم بهم نمی‌ریزند. علاوه برآن باکلید اول لازم نیست ده آزمایش انجـام دهید، بلکه حد اکثر ۹ آزمـایش لازم است؛ زیرا اگر ۹ آزمایش اول باناکامی روبروشود، مسلم می‌شودکه این کلید متعلق به‌چمدان آخری است. به‌همین ترتیب با کلید دوم ۸ آزمایش، با سومی ۷ آزمایش . . . وباکلید نهم یك آزمایش کافی است و برای کلید دهم احتیاج به‌آزمایش نیست، زیرا این کلید مربوط به تنها ـ چمدان باقیمانده است.

به‌این ترتیب حداکثر۴۵ آزمایش لازم خواهید داشت.

البته، این مربوط به‌وضعی است که درهمهٔ آزمایشها بابدترین نوع بدشانسی روبروباشید و هرکلیدی راکه امتحان می‌کنید متعلق به‌آخرین چمدان باشد. درعمل تعدادآزمایشها بیش از نصف حد اکثرآن لازم نیست، یعنی برای پیداکردن کلید چمدانها کافی است ۲۲ یا ۲۳ آزمایش انجام دهیم.

۱۳ـ کامیونها واتومبیل سواری

بین دوشهر A و B، ۳۰۰ کیلومتر فاصله‌است. دوکامیون در یك روز و دریك لحظه یکی‌از شهر A به‌طرف شهر B و دیگری از

شهر B به‌طرف شهر A هر کدام باسرعت‌ثابت ۵۰ کیلومتر درساعت حرکت کردند. درهمان‌لحظه‌یك اتومبیل‌سواری هم‌ازشهرA به‌طرف شهرB باسرعت ۱۰۰ کیلومتر درساعت حرکت‌کرده است. اتومبیل سواری‌به‌طرف کامیونی که ازشهرB حرکت‌کرده‌است می‌رود، ولی به‌محض‌اینکه به‌آن می‌رسد برمی‌گردد وبه‌طرف شهر A می‌آید. در این‌برگشت همینکه به‌کامیون اولی رسید،دوباره به‌طرف کامیون دوم برمی‌گردد. اتومبیل سواری این رفت و برگشت را آنقدر تکرار می‌کند تادو کامیون بهم برسند.

اتومبیل سواری چند کیلومترراه طی کرده است؟

برای حل این مسأله اکثر به‌تلاشی می‌پردازند‌که مستلزم محاسبه‌های بغرنجی است: اتومبیل سواری‌کجا به کامیونی‌که ازشهرB حرکت‌کرده است می‌رسد، سپس در برخورد دوم‌کجا به کامیونی‌که ازشهر A حرکت‌کرده است می‌رسد و غیره.

ولی جواب این مسأله را می‌توان با روشی بسیار ساده بدست آورد: دو کامیون بعداز ۳ساعت بهم می‌رسند، و دراین مدت اتومبیل سواری دائماً بین‌آنها باسرعت ساعتی‌۱۰۰ کیلومتر دررفت وآمد بوده‌است؛ بنابراین راهی که اتومبیل سواری دراین مدت طی‌کرده است ۳۰۰کیلومتراست.

۱۴ـ نخ ابریشمی

کسی محاسبه‌های زیر را انجام داد و باید اعتراف کرد‌که آزمایش صحت مفروضات اوبه‌آسانی ممکن نیست. شهر **لیون** که به‌کارخانه‌های حریربافی خود مشهور است سالیانه یك میلیون کیلوگرم ابریشم مصرف می‌کند. هرگرم ابریشم از کار ۴ پروانه بدست می‌آید و این به معنای آنست که برای تهیهٔ محصولات کارخانه‌های لیون۴میلیارد پروانه لازم است. هرپروانه نخی به‌طول

۵۰۰ متر وبنابراین ۴میلیارد از این زحمتکشان کوچك نخی به‌طول ۲۰۰۰ میلیاردمتر یا ۲میلیارد کیلومتر می‌سازند.

طول این نخ ۱۳ برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید و ۵۲۰۰ برابر فاصلهٔ زمین تا ماه است. این نخ دور استوای زمین ۲۵ هزاربار و دور استوای ماه ۹۲ هزاربار می‌تواند بپیچد.

۱۵ـ جهانگردان و پیراشکی

سه‌جهانگرد، خسته وگرسنه به‌سازمان جهانگردی واردشدند تاچیزی بخورند و خستگی در کنند. آنها دستور پیراشکی دادند و خواهش کردند که پیراشکیها را مستقیماً به اتاقی که در آنجا استراحت کرده‌اند برایشان ببرند. آنها درانتظارپیراشکی خوابشان برد.

وقتی که پیراشکیها آماده شد، آنها را به اتاق آوردند و روی میز گذاشتند بدون اینکه جهانگردها را بیدار کنند. کمی بعد یکی ازجهانگردها بیدار شد، پیراشکیها را شمرد، یك سوم آنها را خورد و دوباره خوابید.

بعد جهانگرد دوم بیدار شد، او هم پیراشکیها را شمرد، یك‌سوم آنها را خورد و راحت خوابید.

بالاخره جهانگرد سوم بیدارشد و مثل دونفرقبل عمل کرد.

۸ پیراشکی باقی‌مانده بود. چگونه می‌شود تعداد پیراشکی‌هایی که روی میز گذاشته بودند پیدا کرد؟ اگرقرار باشد پیراشکیها بطور مساوی بین جهانگردان تقسیم شود، آنچه که باقیمانده است

متعلق به کیست؟

جهانگرد سوم برای دوستان خود ۸ پیراشکی نگه‌داشته است که به‌هرکدام آنها ۴عدد برسد، بنابراین خود اوهم ۴ پیراشکی خورده است: یعنی وقتی که جهانگرد سوم بیدارشده است درمقابل خود ۱۲ پیراشکی دیده‌است.

حالا ما می‌دانیم که جهانگرد دوم ۱۲ پیراشکی برای دوستان خود نگه‌داشته که بهرکدام آنها ۶عدد برسد، بنابراین خود اوهم۶پیراشکی‌خورده است: از اینجا نتیجه می‌شودکه وقتی اوبیدارشد ۱۸پیراشکی روی میزبود.

حالادیگربه‌سادگی معلوم می‌شودکه وقتی جهانگرد اول۱۸ پیراشکی برای دوستان خود باقی‌گذاشته است به‌این معناست که خودش ۹ پیراشکی خورده‌است وبرای هریك ازدوستان خود هم ۹عدد نگه‌داشته است: بنابراین تعداد اولیهٔ آنها ۲۷ بوده است.

۸ پیراشکی باقیمانده چگونه بایدتقسیم شود؟ واضح‌است که جهانگرد اول سهم کامل خودرا خورده است: ۹ پیراشکی. جهانگرد دوم ۶پیراشکی خورده است و بنابراین ۳ پیراشکی دیگرمتعلق به اوست. جهانگرد سوم ۴ پیراشکی خورده است و بنابراین هنوز می‌تواند ۵ پیراشکی دیگربخورد.

۱۶ـ تنظیم کار قطارها

ایستگاه راه‌آهن باید ۱۱قطار هرکدام با۳۵ واگون را برای حمل زغال بفرستد. برای اینکه چند لوکوموتیو برای کار دیگری آزاد شود، به‌این ترتیب صلاح اندیشی کردندکه به‌هرقطار ۵ برابر تعداد لوکوموتیوهایی که برای مأموریت دیگری در نظر گرفته‌اند، بطور اضافی متصل کنند.

به این ترتیب تمام واگونها برای زغال گسیل شد. چند لوکوموتیو برای کار دیگر آزاد شده است؟

تعداد واگونهایی که برای حمل زغال لازم است مساوی ۱۱×۳۵ یعنی ۳۸۵ عدد است. عدد ۳۸۵ را باید به طریق دیگری به‌ضرب دوعامل تجزیه‌کرد، به نحوی‌که یکی ازاین عاملها عدد n کوچکتر از ۱۱ ودیگری به صورت عدد $۳۵ + ۵n$ باشد.

عدد۳۸۵را به‌صورت ضرب‌عوامل‌اول می‌نویسیم: $۳۸۵ = ۵.۷.۱۱$ به‌کمك این عاملها می‌توان تمام مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۸۵ را نوشت: ۱ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ ، ۳۵ ، ۵۵ ، ۷۷ ، ۳۸۵.

ازاین مقسوم‌علیه‌ها می‌توان‌جفت عددهای زیررا انتخاب‌کرد، طوری که حاصلضرب هرجفت مساوی ۳۸۵ باشد:

$$۱.۳۸۵ = ۵.۷۷ = ۷.۵۵ = ۱۱.۳۵$$

معلوم می‌شودکه به‌جای ۱۱قطار وهرقطار با ۳۵ واگون می‌توان ۷ قطار و هرکدام با ۵۵ واگون برای حمل زغال فرستاد. به این ترتیب ۴ لوکوموتیو آزاد می‌شود، دراینصورت باید به‌هرقطار ۴×۵ واگون اضافه کردکه با شرایط مسأله درست درمی‌آید .

این مسأله را به‌کمك معادله هم می‌توان حل‌کرد.

تعداد لوکوموتیوهایی راکه برای کاردیگرآزاد می‌کنیم x می‌گیریم. در اینصورت $۱۱ - x$ لوکوموتیو باقی می‌ماند که به‌هرکدام از آنها باید $۳۵ + ۵x$ واگون متصل باشد . به‌این ترتیب معادلهٔ زیر بدست می‌آید :

$$(۱۱ - x)(۳۵ + ۵x) = ۳۸۵$$

که بعد از تبدیلهای جبری بدست می‌آید:

$$۲۰x - ۵x^۲ = ۰$$

برای x دوجواب بدست می‌آید: $x = ۰$ (و این همان وضع اولیه است‌که باید ۱۱قطار و هرکدام با۳۵ واگون برای حمل زغال فرستاد) یا $x = ۴$ (واین به‌معنای‌آنست‌که می‌توان ۴لوکوموتیورا آزادکرد).

۱۷ـ جمع‌آوری قارچ

پدر بزرگ با چهار نوه‌اش برای جمع‌آوری قارچ به‌جنگل رفت. وقتی‌که به‌جنگل رسیدند برای پیداکردن قارچ هرکدام به‌ـ طرفی رفتند. بعد از نیم‌ساعتی پدر بزرگ زیردرختی ایستاد تا هم‌ـ استراحت‌کند وهم قارچهایی‌راکه پیداکرده بود بشمارد: ۴۵قارچ داشت. درهمین موقع نوه‌های اوبادستهای خالی به‌طرفش دویدند:

هیچیك از آنها حتی یك قارچ هم پیدا نکرده بودند. یکی از آنها گفت :

ـ پدر بزرگ! خواهش می کنم کمی ازقارچهای خودت را به‌من بده، شاید برای من‌شانس بیاورد!

دومی گفت:

ـ منهم می‌خواهم.

و سومی :

ـ به‌منهم بده پدر بزرگ.

پدربزرگ بهرکدام از آنها مقداری قارچ داد، همهٔ قارچ‌های خود را بین آنها تقسیم کرد. بچه‌ها دوباره در جستجوی قارچ پراکنده شدند. یکی از بچه‌ها ۲ قارچ پیدا کرد، دومی برعکس ۲ قارچ خود را گم کرد، سومی به‌همان اندازه‌که پدر بزرگ به او داده بود پیدا کرد وچهارمی نصف قارچهای خود راگم کرد. وقتی که بچه‌ها به‌منزل رسیدند به یك اندازه قارچ داشتند.

هریك از بچه‌ها چندقارچ از پدر بزرگ گرفته بود و وقتی که به‌منزل رسیدند چند قارچ داشتند؟

به‌سادگی‌می‌شودفهمیدکه‌سومی‌کمترازدیگران ازپدر بزرگ‌قارچ‌گرفته بود زیرا با وجودی‌که به اندازهٔ آنچه که داشت خودش هم قارچ پیدا کرده بود، تازه سرآخرتعداد قارچهایش مساوی بقیهٔ بچه‌ها بود.

برای اینکه مسأله را ساده‌ترکنیم، فرض می‌کنیم کـه پدربزرگ یك مشت قارچ به‌نوهٔ سوم خود داده باشد. از همین مشتها چند تا به‌نوهٔ چهارم خود داده است؟

نوهٔ سوم ۲ مشت قارچ به‌منزل آورده‌است، زیرا خودش هم به‌اندازهٔ قارچهایی‌که از پدربزرگ‌گرفته بود، توانست جمع‌کند. نوهٔ چهارم هم به‌اندازهٔ سومی یعنی۲مشت قارچ به‌منزل‌آورد، ولی به‌خاطرداریم‌که چهارمی

نصف قارچهای خود را در راه گم‌کرده بود، بنابراین او ۴ مشت قارچ از پدربزرگ گرفته است.

نوهٔ اول ۲ مشت قارچ به‌منزل‌آورد و چون ۲عدد قارچ خودش پیدا کرده بود، بنابراین از پدربزرگ ۲ عدد کمتر از ۲ مشت قارچ گرفته است. دومی ۲ مشت قارچ به‌منزل‌آورد و چون ۲ عدد قارچ در راه گم‌کرده بود، بنابراین ازپدربزرگ ۲ مشت به‌اضافهٔ ۲عدد قارچ گرفته است.

به‌این ترتیب پدربزرگ قارچهای خود را اینطور بین نوه‌هایش تقسیم کرده است:

اولی : ۲ مشت منهای ۲قارچ
دومی : ۲ مشت به‌اضافهٔ ۲ قارچ
سومی : ۱ مشت
چهارمی : ۴ مشت

یعنی رویهم ۹ مشت قارچ بین نوه‌های خود قسمت‌کرده است. چون پدربزرگ ۴۵ قارچ داشت، بنابراین هرمشت قارچ ۵عدد بوده است.

حالادیگر به‌سادگی جواب بدست می‌آید:

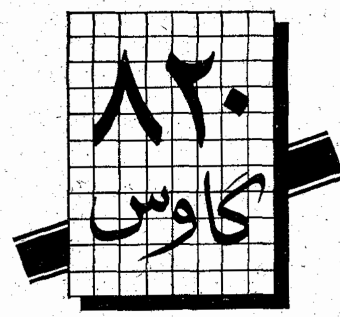
سومی‌که یك مشت قارچ‌گرفته بود می‌شود ۵ قارچ؛ چهارمی‌که ۴ مشت‌قارچ‌گرفته بودمی‌شود ۲۰قارچ؛ بالاخره اولی ۸ ودومی ۱۲ قارچ از پدربزرگ گرفته بودند.

ضمناً هریك از نوه‌ها با۱۰ قارچ به‌منزل می‌آید.

۱۸ـ نخستین جرقه‌های نبوغ

آنها که زندگینامهٔ **کارل گاوس** ریاضیدان بزرگ آلمانی را نوشته‌اند، لطیفهٔ قشنگی از دوران‌کودکی او نقل می‌کنند. وقتی که‌کارل هفت سالش تمام شد به‌مدرسهٔ ابتدایی فرستاده شد. دراین مدرسه، درس حساب را مرد میانسالی به‌عهده داشت‌که به‌سخت‌گیری مشهور بود. اغلب برای اینکه بتواند تمرینهای دانش‌آموزان کلاسهای دیگررا رسیدگی‌کند، تکالیفی به‌بچه‌ها می‌دادکه تاحدی سنگین‌تر از قدرت آنها بود. بچه‌ها می‌بایست این تکالیف را در

سکوت کامل و به‌تنهایی انجام دهند. دستور می‌داد که هر دانش‌ـ



آموزی که مسأله را حل کرد، دفتر خود را به‌آرامی روی میز معلم بگذارد.

یك روز این مسأله را به‌ـ دانش‌آموزان خود دیکته کرد: « مجموع همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۴۰ پیدا کنید». معلم اطمینان داشت که قسمت عمده‌ای از وقت کلاس را دانش‌آموزان صرف محاسبه خواهند کرد. ولی با حیرت بسیار، درست یك دقیقه بعد از آنکه بیان صورت مسأله را تمام کرده بود، صدای شادی شنید: «من حل کردم!» و در همان لحظه دفترچه‌ـ ای روی میز معلم گذاشته شد که زیر آن نوشته شده بود: **کارل گاوس.**

معلم درحالیکه گمان می کرد این یك شیطنت معمول بچه‌ها است بدون اینکه کارش را رها کند با خشم غری زد: « شیطان بازیگوش من اینجور شوخیها را از سر تو بیرون خواهم کرد. فقط کمی صبر کن!»

ولی کارل بااعتماد کامل نسبت به‌خود، به‌جای خود برگشت و منتظر زمانی ماند که معلم تصحیح دفتر او را شروع کند. بالاخره بعد از محاسبه‌های طولانی، همهٔ دانش‌آموزان دفترچه‌های خود را روی میز معلم گذاشتند. معلم به تصحیح آنها مشغول شد. اکثر دانش‌آموزان، باوجود محاسبه‌های طولانی، نتیجهٔ نادرست بدست آورده بودند، ولی در دفترچهٔ گاوس تنها یك عدد نوشته شده بود

و، آنهم جواب درست سؤال معلم بود . . . گاوس کوچك همانطور که مسأله را اززبان معلم می‌شنید، به‌سرعت متوجه راه حل آن شد. اینست طرح استدلالی که درذهن بچهٔ نابغه گذشت:

۱,	۲,	۳,	...,	۲۰
۴۰,	۳۹,	۳۸,	...,	۲۱
۴۱,	۴۱,	۴۱,	...,	۴۱

بزرگترین و کوچکترین‌عدد این رشته رویهم۴۱ می‌شود. اگر عدد دوم را با عدد ماقبل آخرجمع کنیم، یا عدد سوم را با دوعدد به‌آخر مانده جمع کنیم وغیره باز همان۴۱ بدست می‌آید. مجموع این جفت عددها همیشه مساوی۴۱ می‌شود و۲۰ بارهم تکرار شده لست. بعد از این استدلال ذهنی، کارل کوچك دوعدد ۲۰ و۴۱ را در ذهن خود در هم ضرب می‌کند و روی دفتر خود تنهـا یك عدد می‌نویسد: ۸۲۰. معلم مرد بافهمی بود. او متوجه شد که در مقابل او بچه‌ای باخصوصیات باورنکردنی قراردارد وباشوروشوق بسیار به‌او پرداخت. ولی خیلی زود تصدیق کرد که برای این شاگرد چیزی وجود نداردکه لازم باشد ازمعلم خود یاد بگیرد.

۱۹ـ تقسیم درست پاداش

دوعرب از بیابانی عبور می‌کردند. تانزدیکترین آبادی نیم‌ـ روز راه مانده بود. ازذخیرهٔ غذایی تنها ۸عدد نان برشته برای آنها مانده‌بود: ۳نان نزد یکی از آنها وپنج‌نان‌نزد دیگری. درراه به‌مسافر تنهایی برخوردند که از گرسنگی ضعف کرده بود. دلشان به‌حال او سوخت وذخیرهٔ غذایی خودرا با اوتقسیم کردند. موقع خداحافظی،

مسافر به‌عنوان تشکر ۸سکهٔ یکجور طلا به‌همسفران خود هدیه کرد.

این دونفر چگونه باید هدیه را بین خود تقسیم کنند؟

برای تقسیم کارشان به مشاجره کشید، زیرا مردی که ۵ نان داشت ۵سکهٔ طلا را متعلق به‌خود می‌دانست، در حالیکه دوست او مدعی ۴ سکه بود و استدلال می‌کرد که آنها باهم و مشترکاً برای نجات دولتمند گرسنه شرکت کرده‌اند. از آنجا که نتوانستند دربارهٔ طریقهٔ تقسیم با هم موافقت کنند، تصمیم گرفتند همینکه به‌آبادی رسیدند به‌قاضی محل مراجعه و از او خواهش کنند مشکل آنها را حل کند. و راه حل قاضی برای هردو غیرمنتظره بود.

قاضی ضمن اینکه لبخند می‌زد گفت:

ـ شما هردو اشتباه کرده‌اید. فرض کنید هرقرص‌نان را به‌سه‌قسمت کرده باشید، دراینصورت ۲۴ قسمت بدست می‌آید. به‌این‌ترتیب هرکدام ازشما ۸ قسمت‌نان خورده‌اید. آنکه پنج نان، یعنی ۱۵ قسمت، داشته‌است ۷ قسمت به‌مسافر گرسنه داده‌است و دیگری که ۳ نان، یعنی ۹ قسمت، داشته است ۱ قسمت به‌او بخشیده است. از اینجا نتیجه می‌شود که سکه‌ها را باید به‌این‌ترتیب تقسیم کرد: ۷ سکه متعلق به‌یکی از شما و تنها یك سکه متعلق به‌دیگری است.

۲۰ـ تنظیم سرعت حرکت

راننده‌ای در یك مسابقهٔ اتومبیل رانی شرکت کرد. طبق قرارداد او می‌بایست فاصله‌ای را باسرعت متوسط ۴۸ کیلومتر در ساعت طی کند. او نصف این راه را با سرعت ساعتی ۶۰ کیلومتر رفت. نصف بقیه راه را ساعتی چند کیلومتر براند تاسرعت متوسط او برای تمام راه ۴۸ کیلومتر درساعت بشود.

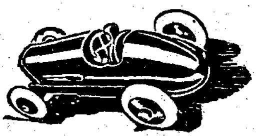
اگرخواننده گمان می‌کند که نیمهٔ دوم راه را باید با سرعت

۳۶ کیلومتر درساعت طی کند دچار اشتباه شده است، اگرچه داریم:

$$\frac{۶۰+۳۶}{۲}=۶۰$$

فرض کنیم که تمام راه ۱۲۰ کیلومتر باشد. برای اینکه این راه باسرعت ۴۸ کیلومتردرساعت پیموده شود باید ۴۸÷۱۲۰ یعنی $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت در راه باشد. چون نیمهٔ اول راه را باسرعت ۶۰ کیلومتر درساعت رانده است بنابراین برای نیمهٔ اول یك ساعت گذشته است وباید نیمهٔ دوم راه را در $۱\frac{۱}{۲}$ ساعت طی کند، به‌این ترتیب درنیمهٔ دوم باید باسرعت $۱\frac{۱}{۲}$÷۶۰ یعنی ۴۰ کیلومتر درساعت حرکت کند.

این مسأله را به‌صورت کاملاً کلی‌آن حل می‌کنیم.



طول تمام راه را $۲d$ می گیریم وفرض می کنیم که نیمهٔ اول باسرعت $v_۱$ ونیمهٔ دوم باسرعت $v_۲$ طی شده باشد. می‌خواهیم سرعت متوسط v را بدست آوریم.

وقتی که برای عبور ازنیمهٔ اول راه صرف شده مساوی $\frac{d}{v_۱}$ و برای نیمهٔ دوم راه $\frac{d}{v_۲}$ است، یعنی رویهم $\frac{d}{v_۱}+\frac{d}{v_۲}$ برای تمام راه وقت صرف شده است.

ازطرف دیگر اگر تمام راه باسرعت v طی می‌شد به‌اندازهٔ $\frac{۲d}{v}$ وقت لازم بود. بنابراین به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲d}{v}=\frac{d}{v_۱}+\frac{d}{v_۲}$$

که اگردوطرف معادله‌را به d ساده وسپس به ۲ تقسیم کنیم بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{v}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{v_۱}+\frac{۱}{v_۲}\right)$$

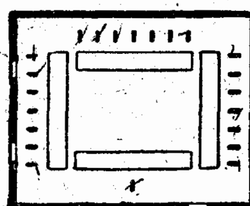
دیده می‌شود که عکس سرعت v واسطهٔ حسابی است بین عکسهای سرعتهای $v_۱$ و $v_۲$. دراین حالت می گویند که v واسطهٔ توافقی دو مقدار $v_۱$ و $v_۲$ است.

درمسألهٔ ما $v=۴۸$ و $v_۱=۶۰$ داده شده است وباید $v_۲$ را بدست آوریم. از معادله‌ای که بدست آوردیم می‌توان نوشت: $\frac{۱}{v_۲}=\frac{۲}{v}-\frac{۱}{v_۱}$
که باقراردادن مقدارهای v و $v_۱$ بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{v_۲}=\frac{۱}{۴۸}-\frac{۱}{۶۰}=\frac{۱}{۴۰} \qquad v_۲=۴۰$$

۲۱ـ جهانگردهای زرنگ

در «بار» چهار میز نزدیك دیوار قرار داشت. ۲۱ جهانگرد وارد بار شدند، آنها گرسنه ازگردش دسته جمعی بازگشته بودند. دستور نهار دادند و از متصدی بارهم دعوت کردندکه باآنها غذا بخورد. همه پشت میزها قرارگرفتند به‌این ترتیب که جهانگردها پشت سه میز و هرمیزهفت نفرومتصدی بار پشت میزچهارم نشست (شکل ۱۴). جهانگردها به‌متصدی بار پیشنهادکردندکه ضمن شمارش هفت به هفت، هرکس آخرکار باقی ماند پول نهارهمه را بپردازد. متصدی بار بلافاصله قبول کرد. شمارش را درجهت حرکت عقربه‌های ساعت شروع کردند (و در این شمارش متصدی بار را هم به‌حساب آوردند)؛ در هرشمارش نفرهفتم از پرداخت معاف می‌شد وبار را ترك می‌کرد. آخرین نفر که باقیماند خود متصدی باربود.



شکل ۱۴

شمردن را ازچه‌کسی شروع کردند؟

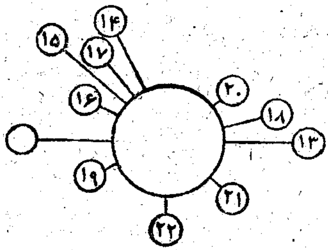
حل این مسأله را ازآخر شروع می‌کنیم. برای سهولت کار می‌توان از سنگهای دومینو، کبریت یاسکه استفاده‌کرد.

سکهٔ شمارهٔ ۲۲ را به‌جای متصدی بار می‌گیریم (شکل ۱۵) که درآخرشمارش باقی مانده است. سکه‌های ۲۱ و ۲۰ را آنطورکه در شکل ۱۵ نشان داده شده است می‌چینیم.

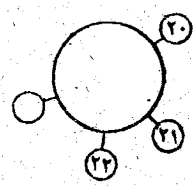
وقتی‌که تنها این سه سکه باقی مانده است چون سکهٔ ۲۰ حذف شده است پس ضمن شمارش، شمارهٔ ۷ به ۲۰، شمارهٔ ۶ به ۲۲، شمارهٔ ۵ به ۲۱، شمارهٔ ۴ به ۲۰ و ... برخورده است (چون عکس شمارش را انجام می‌دهیم روی دایره درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کنیم):

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲۰	۲۱	۲۲	۲۰	۲۱	۲۲	۲۰

چون شمارهٔ ۱ متعلق به سکهٔ ۲۰ است یعنی از ۲۰ شروع به‌شمارش کرده‌ایم، پس سکهٔ ۱۹ باید درست قبل از سکهٔ ۲۰ باشد (در دایرهٔ خالی شکل ۱۵).



شکل ۱۶



شکل ۱۵

به‌همین ترتیب وبه‌تدریج می‌توان جای سکه‌های جدید را معین‌کرد. درشکل ۱۶ تا سکهٔ شمارهٔ ۱۳ گذاشته شده است. اگر درجهت عکس و باشروع ازشمارهٔ ۷ برای سکهٔ ۱۳ شروع کنیم:

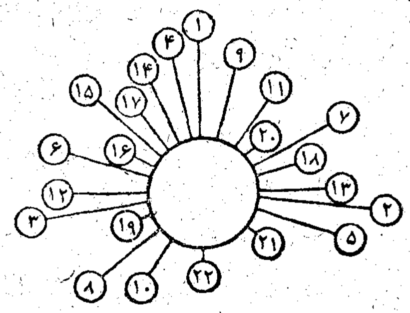
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱۶	۱۵	۱۷	۱۴	۲۰	۱۸	۱۳

جای سکهٔ ۱۲ معلوم می‌شود (چون شمارهٔ ۱ به‌سکهٔ ۱۶ خورده است پس جای سکهٔ ۱۲ دردایرهٔ خالی شکل ۱۶ است). اگر به‌همین‌ترتیب سکه‌ها را روی میز قراردهیم شکل ۱۷ بدست می‌آید.

ولی این پایان محاسبه‌ نیست. هفت سکهٔ دیگرباید بشماریم تاجایی را که شروع شمارش درابتدای قرعه‌کشی است بدست‌آوریم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۶	۱۶	۱۵	۱۷	۱۴	۴	۱

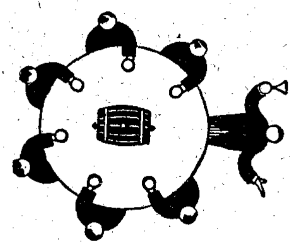
یعنی باید ازفرد شمارهٔ۶ (درشکل۱۴ میزسمت راست ازبالا به پایین نفرششم) شروع کرد تامتصدی بار (شمارهٔ۲۲) درآخر کار باقی‌بماند. *



شکل ۱۷

۲۲- بی‌احتیاطی در مهمان نوازی

در یك کتاب قدیمی ریاضی تألیف **هارس درفر** به‌نام **«سرگرمیهای ریاضی»** این مسأله آمده است.



شخصی به شش نفر از دوستان خود وعده داد که به‌ـ تعداد انواع مختلفی که با خود او بتوانند دور یك میز گرد بنشینند به‌آنها شام خواهد داد. به‌شرطی که این مهمان نواز بی‌احتیاط دوستانش را به شام دعوت کند، چند سال طول خواهدکشید تا وعدهٔ خود را انجام دهد؟

دعوت بعد از سیزده سال و کسری به پایان می‌رسد!

محاسبه مشکل نیست. باید انواع ترتیب ۷ «عنصر» را بدست

* برای اطلاع دقیق‌تر درمورد اینگونه مسأله‌ها وطرح مسألهٔ کلی به‌کتاب «درقلمرو ریاضیات» ترجمهٔ پرویزشهریاری صفحه‌های ۱۸۹ تا۱۹۲ مراجعه کنید.

آوریم که مساوی ۵۰۴۰ می‌شود.

اگرصاحبخانه بخواهد پیشنهاد نسنجیدهٔ خودرا اصلاح کند، چه توصیه‌ای به او می‌کنید؟ او باید به پیشنهاد خود دو شرط ساده اضافه کند.

قبل ازهمه باید شرط کندکه اگر افراد از ۱ تا۷شماره‌گذاری شوند، حالتهایی‌که باشمارش ازراست (یاچپ) ردیف خود را از لحاظ عددها حفظ کرده‌اند تنها یك حالت به‌حساب آید. این شرط تعداد حالتهای مختلف را به‌یك هفتم تقلیل می‌دهد و از ۵۰۴۰ به‌۷۲۰ می‌رساند. علاوه بر آن باید شرط کندکه اگر در دو وضع یکی ازراست به‌چپ و دیگری ازچپ به‌راست یك ردیف مشخص‌اعداد باشد یك وضع به‌حساب آید. این شرط هم تعداد حالتها را به‌۳۶۰ تقلیل می‌دهد.

ولی بهرحال در حدود یکسال باید هرشب دوستان خود را به شام دعوت کند. در این مورد حتی از ریاضیات هم کاری ساخته نیست.

۲۳ـ تاجرهای چیزفهم

آلکوئین مشهور، دوست **شارل کبیر** درکتاب خودش‌به‌نام «مسأله‌هایی برای نوجوانان» مسألهٔ معمایی زیررا طرح کرده‌است.

دوتاجریك گله خوك باهم خریدند ورویهم۱۰۰سکه پرداختند؛ وقتی که آنها می‌خواستند خوکها را بفروشند هیچکس حاضرنشد بیش ازآنچه که آنها خریده بودند به‌آنها پول بدهد، یعنی هر پنج

عدد خوك را به ۲ سکه می‌خریدند. ولی اگـر به‌این قیمت می‌دادند چیزی نفع نمی‌بردند. آنهـا بـا هم مشورت کردند و تصمیم گرفتند گله را به دوقسمت بکنند. همین کاررا کردند و سپس هرپنج عدد را به۲سکه فروختند، ضمناً نه‌فقط پول خودرا بدست‌آوردند، بلکه از این راه چیزی هم گیرشان آمد.

این معما را چگونه حل می‌کنید؟

تاجرها گله را به‌این ترتیب تقسیم‌کردند: یکی ازآنها همهٔ خوکهای بزرگ وخوب را انتخاب‌کرد ودیگری بچه خوکها را. اولی هر دوخوك را به‌یك سکه و دومی هر سه خوك را به یك سکه فروخت. بنابراین آنها در ـ حقیقت برای هر ۵عدد ۲سکه گرفتند.

اولی بافروش ۱۲۰ خوك ۶۰ سکه گرفت و دومی بابت همان ۱۲۰ خوك ۴۰ سکه وبه‌این ترتیب۱۰۰سکه خودرا بدست‌آوردند وضمناً رویهم ۱۰خوك هم برایشان باقی‌ماند.

۲۴ـ حمل زغال

در ایستگاه ۱۸ واگون است که رویهم ۵۰۰ تن زغال حمل می‌کنند. ظرفیت یك واگون ۱۵، ۲۰ و یا ۳۰ تن است. چند تا از واگونها ۱۵ تنی، چندتا ۲۰تنی وچندتا ۳۰تنی هستند؟

اگر تعداد واگونهای ۱۵تنی را x، تعداد واگونهای ۲۰تنی را y و تعداد واگونهای ۳۰تنی را z فرض‌کنیم، دومعادله تشکیل می‌شود:

$$15x+20y+30z=500$$
$$x+y+z=18$$

یعنی برای سه مجهول دومعادله بدست می‌آید. ولـی می‌توانیم این معادله‌ها را حل‌کنیم، زیرا مجهولها باید عددهایـی طبیعی باشند. دو طرف معادلهٔ اول‌را به۵تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید: $3x+4y+6z=100$ دوطرف‌معادلهٔ دوم را در۶ضرب‌می‌کنیم، می‌شود: $6x+6y+6z=108$ وحالا دومعادله را ازهم‌کم می‌کنیم:

$$-\begin{cases} ۶x+۶y+۶z=۱۰۸ \\ ۳x+۴y+۶z=۱۰۰ \end{cases}$$
$$۳x+۲y=۸$$

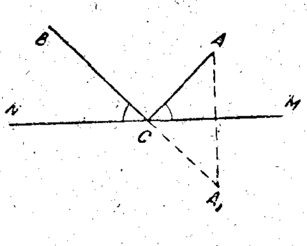
و این معادله برای عددهای طبیعی تنها یك جواب دارد: $x=۲$ ، $y=۱$ (جواب $x=۰$ ، $y=۴$ قابل قبول نیست، زیرا در این حالت واگون ۱۵ تنی مطلقاً وجود نخواهدداشت). حالادیگربه‌سادگی جواب نوشته می‌شود:

۲ واگون ۱۵ تنی ... ۳۰ تن
۱ واگون ۲۰ تنی ... ۲۰ تن
۱۵ واگون ۳۰ تنی ... ۴۵۰تن

۱۸ واگون ۵۰۰تن

۲۵ـ درچه نقطه‌ای باید انتظار پست را کشید؟

درفاصله‌ای از جادهٔ شوسه ـ که به‌خط مستقیم کشیده شده ـ دو دهکده قرار دارد. نامه رسان پست از جاده عبور می‌کند. مسئولان دهکده‌ها توافق کردند که روزانه وبه‌نوبت پیکی برای تحویل و تحول نامه‌ها بفرستند. پیکی که پست را تحویل می‌گیرد، ابتدا به دهکدهٔ همسایه برود و نامه‌ها و بسته‌های پستی آنجا را تحویل دهد و سپس به دهکدهٔ خود برگردد. مرکزتحویل‌پست را روی جاده در چه نقطه‌ای قرار دهند تامسیری که این پیکها طی می‌کنند کوتاهترین راه ممکن باشد؟



شکل ۱۸

این مسأله از لحاظ عملی بدون فایده نیست، زیرا اگر پیك در هر روز فقط ۱۰۰ متر راه بیهوده برود، در سال حداقل $۳۶\frac{۱}{۲}$

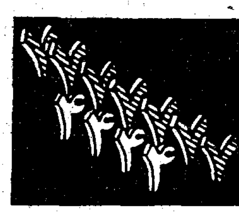
کیلومتر می‌شود.

اگرجادهٔ شوسه را MN و دهکده‌ها را با A و B نشان دهیم، دراین صورت برای تعیین نقطهٔ موردنظر روی جادهٔ شوسه از A عمودی برMN فرود می‌آوریم وبه‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به‌نقطهٔ A_1 برسد. سپس A_1 را به B وصل می‌کنیم. نقطهٔ C، محل تلاقی این خط با MN، همان نقطهٔ مورد نظراست (شکل۱۸).

ازلحاظ فیزیکی می‌توان مسأله را به‌این ترتیب توضیح داد: نقطهٔ C در محلی از جادهٔ شوسه باید باشدکه اگر درآنجا آیینهٔ بزرگی‌که روی آن به‌طرف‌دهکده وموازی جادهٔ شوسه باشد، نصب شود، نوری‌که ازدهکدهٔ A به‌آن بتابد به‌B منعکس شود و برعکس.

۲۶ـ رسالهٔ رنگ رفته

رسالهٔ قدیمی‌در زمینهٔ ریاضیات پیدا شده است‌که به علت عدم توجه در نگاهداری آن چنان رنگ رفته است‌که تنها بعضی



از رقمهای آنرا می‌توان خواند. رقمهایی را که قابل خواندن نیستند به وسیلهٔ ستاره نشان داده‌ایم. باید این رقمها را پیدا کنیم و درجای خودشان بنویسیم.

```
 ۵*۱۷+        ۱*۵+        *۸۴*+
 *۴*۸         **۱۷        ۲**۳
 ----         ۵۸**        ----
 ۶۸۱*         -----       ۶۵۲۹
              *۰۸۴۶
```

```
 ۳*۵۷—        ۸**۷—
 *۹۸*         *۳۵*
 ----         ----
 ۴*۶          ۶۱۷۷
```

درست کردن این عمل‌ها هیچ مشکل نیست. اشکال بیشتر

مربوط به‌مواردی از رساله است که با عمل ضرب یا تقسیم سروکار داشته است:

```
******|***
***   |**۸*
۳۰۲*
*۶۹۵
**۱۱
۳*۸*
۲*۱*
****
```

```
***۳ ×
***
*۷۰*
*۲۱۳
***۹
******
```

```
*** ×
۴۵۷
****
۱۷۰۵
****
******
```

برای دومثال زیر بازهم کار مشکل‌تر است. اینها متعلق به ریاضی‌دانهای امریکایی است. اولی به‌نام مسألهٔ چهارتا ۴ و دومی به‌نام مسألهٔ هفت‌تا ۷ معروف شده است:

```
**۷*******|****۷*
******    |**۷**
****۷**
*******
*۷****
*۷****
*******
****۷**
******
******
```

```
******۴|***
***    |*۴**
**۴*
****
****
*۴*
****
****
```

مسألهٔ چهارتا ۴ دارای چهار جواب است:

۱۳۳۷ ۱۷۴÷۹۴۳=۱۴۱۸؛

۱۳۴۳ ۷۸۴÷۹۴۹=۱۴۱۶؛

۱۲۰۰ ۴۷۴÷۸۴۶=۱۴۱۹؛

۱۲۰۲ ۴۶۴÷۸۴۸=۱۴۱۸

ولی مسألهٔ هفت تا ۷ تنها یك جواب دارد، ولی پیدا کردن آن مشکل است.

۷ ۳۷۵ ۴۲۸ ۴۱۳÷۱۲۵ ۴۷۳=۵۸ ۷۸۱

در رساله یك مورد هم پیدا شد که بجز یك رقم بقیهٔ رقمها ازبین رفته بود:

```
**********|    ؟
***       |*****۸**
 ***
 ***
  ***
  ***
    **
    **
     ***
     ***
```

و باهمین اطلاعات می‌توان عددهای تقسیم را بطور کامل پیدا کرد. باکمی دقت معلوم می‌شود که ازضرب عدد۸ درمقسوم‌علیه یك‌عدد دورقمی بدست آمده است، از اینجا این نتیجه بدست می‌آید که مقسوم‌علیه نمی‌تواند بزرگتراز ۱۲ باشد. از طرف دیگر در بعضی موارد از ضرب رقم خارج قسمت در مقسوم‌علیه عددی سه رقمی بدست آمده است و تنها از ضرب عدد ۱۲ در ۹ یك عدد سه رقمی بدست می‌آید، پس مقسوم‌علیه نمی‌تواند از ۱۲ کوچکتر باشد. بنابراین مقسوم‌علیه مساوی ۱۲ است.

وحالا دیگر با شروع ازآخرین رقم خارج قسمت، می‌توان

به‌تدریج تمام رقمهای نامعلوم را پیدا کرد:

$$
\begin{array}{l|l}
۱۰۹۱۸۸۹۷۰۸ & ۱۲ \\ \cline{2-2}
۱۰۸ & ۹۰۹۹۰۸۰۹ \\ \hline
\ \ ۱۱۸ & \\
\ \ ۱۰۸ & \\ \hline
\ \ \ ۱۰۸ & \\
\ \ \ ۱۰۸ & \\ \hline
\ \ \ \ \ ۹۷ & \\
\ \ \ \ \ ۹۶ & \\ \hline
\ \ \ \ \ ۱۰۸ & \\
\ \ \ \ \ ۱۰۸ & \\ \hline
\end{array}
$$

۲۷ـ کشف رمز

بسیاری از مسأله‌های مربوط به‌کشف رقمهـای نامعلوم از نوع زیرهستند:

$$
\begin{array}{r}
\mathrm{JCC}\times \\
\mathrm{JN} \\ \hline
\mathrm{NTT} \\
\mathrm{JCC}\ \ \\ \hline
\mathrm{JANT}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\mathrm{JNU}\times \\
\mathrm{NU} \\ \hline
\mathrm{LNU} \\
\mathrm{NUS}\ \ \\ \hline
\mathrm{OJNU}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\mathrm{UEMA} & \mathrm{MA} \\ \cline{2-2}
\mathrm{MA} & \mathrm{EMA} \\ \hline
\ \mathrm{TM} & \\
\ \mathrm{AS} & \\ \hline
\ \mathrm{EMA} & \\
\ \mathrm{EMA} & \\ \hline
\end{array}
$$

هرحرف نمایندهٔ یك رقم است؛ در هرمسأله حرفهای مشابه نمایندهٔ رقمهای مشابه‌اند (و نه برای دو حرف مشابه در دو مسألهٔ مختلف).

اینگونه مسأله‌ها به‌سادگی حل می‌شوند: جواب این سه مسأله

چنین است:

۱۱۴ × ۱۲ = ۱۷۲۸؛

۱۲۵ × ۲۵ = ۳۱۲۵؛

۳۱۲۵ ÷ ۲۵ = ۱۲۵

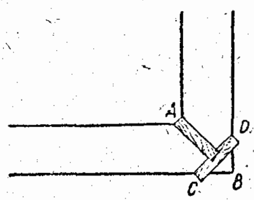
مسأله‌هایی ازاینگونه را، حتی نمونه‌های مشکل‌تروجالب‌تر، می‌توانید خودتان به‌سادگی درست کنید.

۲۸ـ عبور ازخندق

میدان مستطیل شکلی از چهارطرف به‌خندقی با عرض ثابت محدود شده است. دوتختهٔ محکم دراختیار داریم که طول هرکدام ازآنها مساوی عرض خندق است. به‌کمك این تخته‌ها باید راهی برای عبور ازخندق ساخته شود.

راه حل مسأله درشکل ۱۹ داده شده است.

امکان ساختن چنین‌پلی ازنظرریاضی باتوجه به‌شکل وبه‌کمك نامساوی $1\frac{1}{2} > \sqrt{2}$ ثابت می‌شود. اگر عرض خندق را واحد بگیریم، فاصلهٔ AB مساوی $\sqrt{2}$، یعنی تقریباً ۱/۴۱۴ می‌شود. طول تخته درست مساوی‌عرض خندق است وبنابراین باید مساوی۱ گرفته شود. یکی از تخته‌ها را درگوشهٔ B بطور سه‌گوش طوری قرارمی‌دهیم که مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD متساوی‌الساقین بشود و فاصلهٔ ضلعCD ازنقطهٔ A مساوی $\sqrt{2} - \frac{1}{2}$، یعنی تقریباً۰/۹۱۴ باشد.



شکل ۱۹

حالا می‌توان‌تختهٔ دوم را به‌این تخته محکم‌کرد به‌نحوی‌که به‌نقطهٔA برسد و برای تکیه دادن هم به‌اندازهٔ ۰/۰۸۶ واحد طول اضافه دارد (مثلاً اگر عرض خندق ۳متر باشد، این اضافه بیش‌از ۲۵ سانتیمترخواهد بود).

۲۹ـ مانور قطارها

I

قطار B به دوراهی کوچکی نزدیك می‌شود، ولی به علت نقصی که در لوکوموتیو آن پیدا شده‌است نمی‌تواند با سرعت لازم حرکت کند؛ قطار A که بایدراه خودرا ادامه دهد، به‌آن می‌رسد. متذکر می‌شویم که مسیر راه‌آهن در اینجا یك خطی است. در دو- راهی خط اصلی، یك خط کناری (به‌اصطلاح رشتهٔ بن‌بست) وجود دارد که قطار می‌تواند برای مدتی روی آن توقف کند، ولی این رشته به‌قدری کوتاه است که نمی‌تواند هیچکدام‌از دوقطاری راکه باید ازکنارهم رد شوند، بطورکامل در خود جا دهد. چه بایدکرد تاقطار A بتواند راه خود را ادامه دهد؟

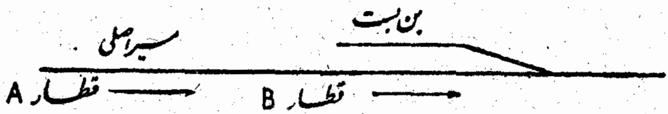
درشکل ۲۰ مسیر راه‌آهن درنزدیکی دوراهی نشان داده شده است.

در خط اصلی، در جهتی که پیکان نشان می‌دهد، قطار B حرکت می‌کند و بلافاصله بعد از آن قطار A قرار داردکه باید حرکت خودرا به‌طرف جلو ادامه دهد. همانطورکه قبلاً هم‌متذکر شدیم، رشتهٔ بن‌بست می‌تواند تنها قسمتی از واگونهای قطار B را درخود جادهد. قطارها چه مانورهایی باید بدهند تاقطار A بتواند حرکت خود را ادامه دهد؟

راه حل مسأله چنین است:

قطار B درمسیراصلی جلو می‌رود و ازمحل تقاطع دوراهی می‌گذرد. سپس عقب‌عقب وارد رشتهٔ بن‌بست می‌شود وآنقدراز واگونها راکه ممکن

است درآنجا می‌دهد. بقیهٔ قطار با لوکوموتیو دوباره به‌جلو می‌رود و از واگونهایی که در بن‌بست گذاشته است دور می‌شود. به‌دنبال‌آن قطار A هم به‌جلو حرکت‌می‌کند؛ وقتی که‌آخرین واگون‌آن به‌دوراهی رسید، واگونهای



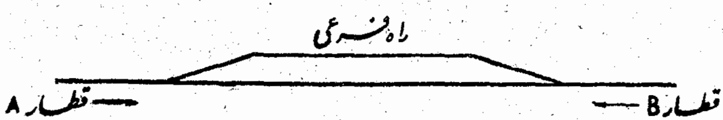
شکل ۲۰

قطارBراکه دربن‌بست باقی‌مانده‌اند به‌آن‌می‌بندند، قطارA آنهارا ازبن‌بست بیرون‌می‌کشد، سپس‌باآنها به‌عقب برمی‌گردد تاراه به‌طرف بن‌بست را برای باقیماندهٔ قطارB بازکند. قطار B به‌عقب می‌رود وکلاً وارد بن‌بست می‌شود. وقتی‌که به‌این ترتیب راه برای قطار A و تعدادی از واگونهای B که به‌آن بسته شده، باز می‌شود و قطار A حرکت خود را بطرف ایستگاه ادامه می‌دهد، قطار B هم با واگونهای باقیمانده از بن‌بست بیرون می‌آید وبه‌آهستگی به‌دنبال قطارA حرکت می‌کند.

خواننده می‌تواند این مسأله را به‌طریق دیگری هم‌حل‌کند. فکرکنید که آیامی‌توان بجای قطارB، قطارA را به دوقسمت تقسیم‌کرد؟

II

در بیشتر ایستگاههای کوچك علاوه بر مسیر عادی یك خط جنبی هم وجود داردکه بن‌بست نیست و از دوطرف به‌خط اصلی متصل می‌شود.



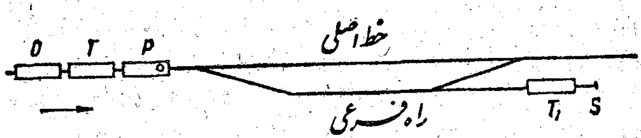
شکل ۲۱

دوقطار به‌طرف ایستگاه کوچك در حرکت‌اند: آنها از دوجهت مختلف به‌طرف یکدیگر می‌آیند. این قطارها باید از این ایستگاه بگذرند (شکل ۲۱). طول هردوی این قطارها طولانی‌تر از

خط فرعی است. با حد اقل مانور چگونه این دو قطار می‌توانند از کنارهم عبور کنند؟

III

قطاری که از لوکوموتیو P، واگونهای باری T و واگونهای مسافری O تشکیل شده‌است، نزدیك ایستگاه است. دراین ایستگاه هم یك خط اصلی، یك خط فرعی و بن‌بست S وجود داردکه در آن واگونهای باری T_1 ایستاده‌اند (شکل ۲۲).



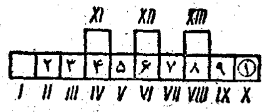
شکل ۲۲

باید واگونهای باری قطار T دربن‌بست نگاهداری شوند و بجای آنها واگونهای T_1 به‌قطار وبین O و P وصل شود. درزمان مانورها، حتی برای یك‌دقیقه‌هم نمی‌شود واگونها را درخط اصلی بدون لوکوموتیو گذاشت، زیرا ایستگاه منتظر قطار سریع‌السیری است که به محض دریافت علامت‌های نزدیك شدن آن، باید خط اصلی را برای عبور آن باز کنند.

۳۰ـ درسنگرها

درجبهه، درسنگرهایی که درست روبه‌روی دشمن‌قرارداشت ۹ سرباز و افسرخود موضع گرفته‌اند. موقعیت آنها خیلی خطرناك و افسردرجناح راست بود. بخاطربعضی ملاحظات، افسرمی‌خواست

در انتهای چپ دستهٔ خود قرار گیرد. سنگرها چنان تنگ و باریك است که دربارهٔ عقب زدن سربازها و با فشار از آنها عبور کردن، حتی فکرهم نمی‌توان کرد. سررا بیرون ازسنگرهم نمی‌توان آورد، زیرا دشمن منطقه را به‌شدت گلوله باران می‌کند.



شکل ۲۳

خوشبختانه در سنگر سه حفره وجود دارد که درهریك از آنها تنها یکنفرمی‌تواند جا بگیرد.

سربازها به چه ترتیب جاهای خود را عوض کنند تا افسر با عبور ازتمام سنگرها در سمت چپ و در ردیف سربازها قرارگیرد (شکل ۲۳)؟

ظاهراً افسروسربازها باید لااقل ۲۸مرتبه جای خودرا عوض کنند. طرح جابجایی چنین است:

۲—I	۹—VII	۵—VII	۳—III
۳—II	۱—XIII	۱—XI	۴—IV
۴—III	۹—X	۴—XII	۵—V
۵—XI	۸—IX	۳—VI	۶—VI
۶—IV	۱—XII	۲—V	۷—VII
۷—V	۷—XIII	۱—I	۸—VIII
۸—VI	۶—VIII	۲—II	۹—IX

آیا می‌توانید راه کوتاهتری برای این جابجایی پیدا کنید؟ خانه‌ها را روی کاغذ رسم کنید و با مهره‌های شماره داری که در آنها قرار می‌دهید به‌آزمایش بپردازید.

۳۱ـ آرامگاه دیوفانت

برسنگ آرامگاه دیوفانت ، ریاضیدان بزرگ یونان قدیم دوران اسکندریه کتیبه‌ای وجود دارد:

«رهگذر، زیر این سنگ باقیماندهٔ جسد دیوفانت آرمیده است، که در سنین پیری دارفانی را وداع گفته است. یك‌ششم زندگی‌طولانی او را دوران کودکیش تشکیل می‌دهد، یك دوازدهم عمرش در دوران جوانی بود، یك هفتم را مجرد زندگی کرد. پنج سال بعداز ازدواج برای اوپسری به‌دنیاآمدکه نصف پدرش عمرکرد. چهار سال بعدازمرگ پسر، دیوفانت که درمرگ نزدیکان خود سوگوار بود، به‌خواب ابدی فرورفت. اگرمی‌توانید محاسبه‌کنید، بگویید دیوفانت چندسال زندگی کرد؟»

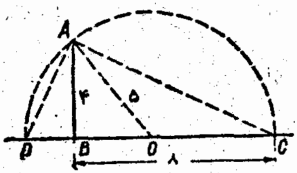
دیوفانت تازمان ازدواج $\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}$ یعنی $\frac{۳۳}{۸۴}$ عمرش زندگی کرده بود. همراه با پسرش هم به‌اندازهٔ $\frac{۴۲}{۸۴}$ تمام عمرخودش زندگی‌کرد. بقیهٔ عمر اوکه عبارتست اززمان ازدواج تا تولد پسرش و اززمان مرگ پسر تامرگ خودش‌که $\frac{۹}{۸۴}$ عمر او می‌شود، مساوی ۴+۵ یعنی ۹ سال است. بنابراین دیوفانت در۸۴سالگی مرد.

۳۲ـ گربه وموش (مسألهٔ هندی ازقرن هفتم)

گربه از دیواری به‌ارتفاع ۴آرنج بالارفت و ازآنجا متوجه موشی شدکه در۸ آرنجی‌پای دیوار بود. موش هم متوجه گربه شد وبه‌سرعت به‌طرف پناهگاه خودکه در زیر پی دیواربود دوید. گربه ازروی دیوار به‌پایین پرید وبه‌اندازهٔ راهی‌که موش‌روی زمین رفته

بود، در هوا طی کرد و موفق شد موش را بگیرد. در چه نقطه‌ای گربه موش را گرفت، شکارچی چهارپا چه مسافتی و موش چه ـ مسافتی را طی کرد ؟

فرض می‌کنیم درابتدا ، گربه در نقطهٔ A و موش در نقطهٔ C باشد، AB دیوارقائم، BC فاصلهٔ موش تا دیوار روی‌خط افقی وO نقطه‌ای‌باشد که درآنجا گربه توانسته است موش را بگیرد (شکل ۲۴). در اینصورت $AO=OC$. نقطهٔ O ، که باید آنرا پیداکنیم ، مرکز دایره‌ای است که از نقطه‌های A وC عبور می‌کند.



شکل ۲۴

D را نقطه‌ای می‌گیریم‌که درآنجا دایره خط BCرا قطع می‌کند. مثلث CAD،که محاط درنیمدایره می‌باشد، در زاویهٔ A قائمه‌است. در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دو قطعهٔ وتر: $AB^2=BD.BC$ یا $BD=\frac{AB^2}{BC}=\frac{4^2}{8}=2$.

ازآنجا $DC=2+8=10$ ، $OC=5$ و $OB=3$.

بنابراین گربه درنقطه‌ای‌که به‌فاصلهٔ ۳آرنج از دیوار است، موش را می‌گیرد.

۳۳ـ خیزران شکسته

نی خیزران به‌ارتفاع ۳۲آرنج (شکل۲۵) درجلگه‌ای روییده است. وزش باد این نی را درنقطه‌ای شکست وقسمت بالای نی به‌ـ طرف زمین خم شد ونوك‌آن در۱۶ آرنجی پای ساقهٔ خیزران زمین را لمس‌کرد. در چه فاصله‌ای از زمین نی خیزران شکسته است؟

فرض می‌کنیم نی درنقطه‌ای از ساقه شکسته باشدکه فاصلهٔ‌آن تازمین

x است (شکل ۲۶). درمثلث قائم‌الزاویه‌ای که‌ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن x و ۱۶ و وترآن $32-x$ است، تساوی زیررا خواهیم داشت:

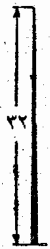
$$(32-x)^2=x^2+16^2$$

x را می‌توان از این معادله پیداکرد. ولی بدون حل معادله هم می‌توان جواب را بدست‌آورد.

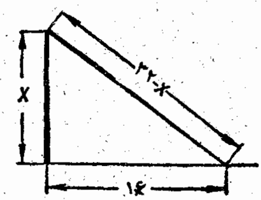
معادله را به‌اینصورت می‌نویسیم:

$$(32-x)^2-x^2=16^2$$

درشکل ۲۷ مربع $MNOP$ را به‌ضلع $32-x$ رسم کرده‌ایم. در این مربع، مربع $SNQR$را جا می‌دهیم که ضلع آن مساوی x است؛ این کار را می‌توان انجام داد، زیرا ازشکل ۲۶ معلوم است‌که xکوچکتر از $32-x$ است. از معادله نتیجه می‌شودکه قسمت هاشور نخوردهٔ مربع $MNOP$ مساوی 16^2 است.

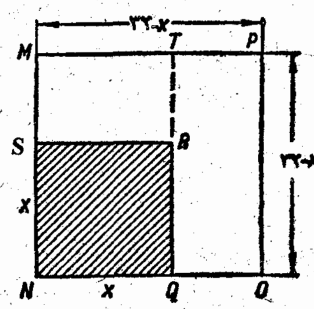


شکل ۲۵

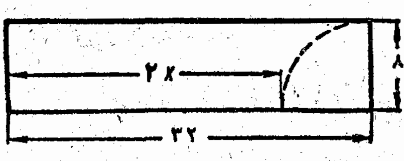


شکل ۲۶

این قسمت از دو مستطیل تشکیل شده است: مستطیل $MSRT$ به‌ضلعهای x و $32-2x$ و مستطیل $TQOP$ به ضلعهای $32-x$ و $32-2x$. از این دو مستطیل می‌توان مستطیلی ساخت که ارتفاع آن مساوی $32-2x$ وقاعده‌اش مساوی $(32-x)+x$ یا بطور ساده ۳۲ است.



شکل ۲۷



شکل ۲۸

این مستطیل با مستطیل 16×16، و بنابراین با مستطیل 8×32 معادل‌است. وقتی‌که دومستطیل‌معادل‌قاعده‌های‌مساوی داشته‌باشند (هر کدام مساوی ۳۲)، ارتفاعهای مساوی خواهند داشت، یعنی باید $32-2x$ و ۸ مساوی باشند؛ در شکل ۲۸ به‌سادگی دیده می‌شود که $2x$ برابر است با

۸ — ۳۲ یعنی ۲۴ و ازآنجا x مساوی ۱۲ می‌شود . خیزران از نقطه‌ای که ۱۲ آرنج بازمین فاصله دارد شکسته است.

۳۴ـ ساقهٔ نیلوفر

درسطح دریاچه‌ای گل نیلوفری دیده می‌شود که ساقهٔ آن نیم آرنج از آب بیرون آمده است. وزش باد ساقهٔ نیلوفر را به‌تدریج خم می‌کند و بالاخره گـل نیلوفر درست زیـر آب می‌رود و در فاصلهٔ ۲ آرنجی جای اولیهٔ خود قرار می‌گیرد (شکل ۲۹). آیا می‌توانید عمق دریاچه را بدست آورید؟ نتیجه را باجوابی که درآخر کتاب داده‌ایم تطبیق کنید.

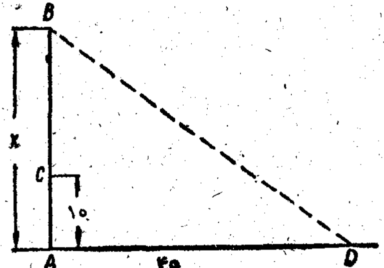
یکی ازانواع بغرنج‌تر این مسأله، مسألهٔ زیر است که مربوط به‌چین قدیم است:

شکل ۲۹

دروسط برکهٔ مربع‌شکل کوچکی که طول هرضلع آن ۱۰ پا است گیاه آبی روییده است که گل آن دریك پایی سطح آب قرار گرفته است. اگر آنرا از وسط به‌طرف یکی از کناره‌های برکـه خم کنیم، درکناره درست روی آب قرار می‌گیرد. عمق این برکه چقدر است؟

۳۵ـ پرش بوزینه

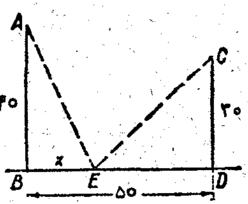
دو بوزینه روی درختی نشسته‌اند: یکـی در بـالاترین نقطـهٔ درخت ودیگری درارتفاع ۱۰ آرنجی اززمین. بوزینهٔ دوم خواست از چشمه‌ای که در فاصلهٔ ۴۰ آرنجی قرارگرفته است آب بخورد، او از درخت پایین آمد وبه‌طرف چشمه رفت. درهمین موقع بوزینهٔ اول از بالای درخت خـود را مستقیماً روی همین چشمـه انداخت؛ پرش او روی وتر مثلث قائم الزاویه بـود. هر دو بوزینه به‌یك انـدازه مسافت را طی کردند (شکل۳۰). آیا می‌توانیدبه‌سرعت ارتفاع درخت، یعنی‌ارتفاع بوزینهٔ اول را بگویید؟



شکل ۳۰

۳۶ـ مسألهٔ لئوناردو فیبوناچی (ازکتابی متعلق به‌قرن سیزدهم)

دو برج یکی به‌ارتفاع ۳۰ پا و دیگری به‌ارتفاع ۴۰ پـا در مقابل هم و به فاصلـهٔ ۵۰ پـا از یکدیگر قرارگرفته‌اند. بین آنهـا فواره‌ای وجود داردکه اگردو پرنده دریکزمان و بایك سرعت یکی ازروی برج اول ودیگری از روی برج دوم بـه‌طرف آن پروازکنند، دریکزمان به‌فواره می‌رسند. فاصلهٔ افقی فواره ازبرجها چقدر است؟ (شکل۳۱)



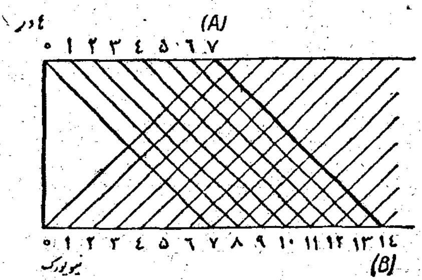
شکل ۳۱

۳۷ـ مسألهٔ جالب لوکا

در یك کنگرهٔ علمی، سرصبحانه عدهٔ زیادی از ریاضیدان‌های مشهور از کشورهـای مختلف جمع بودند، **ادوارد لوکا** ریاضیدان فرانسوی اظهار کرد که می‌خواهد یکی از مسأله‌های دشوار خود را طرح کند:

«فرض کنید هرنیمروز یك کشتی از **هاور** به **نیویورك** حرکت کند، درهمین زمان (یعنی هرنیمروز) کشتی دیگری که متعلق به همان شرکت است، ازنیویورك به طرف هاور برود. مسیر ازهر دوطرف هفت روزراه است. اگر یك کشتی امروزظهر ازهاور حرکت کند، درمسیرخود به چند کشتی ازهمان شرکت برخورد خواهد داشت؟»

لوکا درکتاب خودش به‌نام «ریاضیدانهای مشهور» نقل می‌کند که بعضی ازحاضران، که شهرتی درجمع ریاضیدانها داشتند، بدون فکر فریادزدند: «هفت!» ولی اکثریت آنها سکوت کردند، منتهی هیچکس جواب صحیح نداد. ولی اگر حرکت کشتیها را، آنطورکـه در شکل ۳۲ نشان داده شده است، رسم کنیم، جـواب



شکل ۳۲

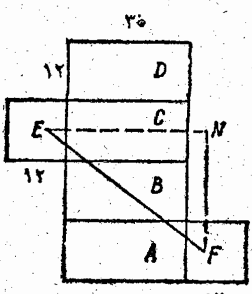
به‌روشنی معلوم می‌شود که ضمناً غیرمنتظره هم هست. کسانیکه به‌مسألهٔ لوکا جواب دادند، تنهاآن کشتیهایی را به‌حساب آوردند که باید ازهمان روز ازطرف مقابل به‌حرکت درآیند وآنهاراکه قبلاً حرکت کرده‌اند وحالا درراه هستند، فراموش نمودند.

شکل به‌روشنی نشان می‌دهدکه کشتی وقتی راه خودرا، که با **AB** نشان داده شده است، طی‌می‌کند با۱۳ کشتی در دریا برخورد می‌کند؛ علاوه برآن بایك کشتی در هاور موقع حرکت ویك کشتی در نیویورك موقع رسیدن به‌آنجا نیز برخورد می‌کند. بنابراین رویهم با۱۵ کشتی برخورد دارد. ضمناً شکل نشان می‌دهدکه این برخوردها درنیمروز و نیم شب است .

اگرکسانی هستند که دربارهٔ استفاده از رسم برای حل مسأله‌ها تردید دارند، حل این مسأله باید تردید آنها را برطرف کرده باشد. مسألهٔ بغرنجی از این نوع با رسم یك شکل به‌صورت واضح و ساده‌ای قابل حل می‌شود.

۳۸ـ عنکبوت و مگس

اتاقی است که طول آن ۳۰ پا، عرض آن ۱۲ پا و ارتفاع آن هم ۱۲ پاست. روی خط قائمی که از وسط یکی از دیوارهای کوچکتر گذشته است و به‌فاصلهٔ یك پا از سقف، عنکبوتی واقع است؛ روی عمودی که از وسط دیوار مقابل گذشته است و به‌فاصلهٔ یك پا از کف اتاق مگسی قرار دارد. عنکبوت، مگس راکه ازترس نیمه‌جان شده بود وحتی تلاشی هم برای نجات خود نکرد، دستگیر کرد.



شکل ۳۳

می‌خواهیم کوتاهترین راهی را که

عنکبوت برای رسیدن به‌شکار خود می‌تواند انتخاب کند، پیدا کنیم.

ساده‌ترین وسریع‌ترین راه‌حل این مسأله، روش رسم است. طرح‌شکل ۳۳ جواب مسأله را به‌دست می‌دهد. در این شکل، مستطیل A کف، B و D دیوارهای بزرگتر، C سقف، E و F نقطه‌های روی دو دیوار و جای اولیهٔ عنکبوت و مگس را نشان می‌دهند.

اگر پاره‌خط EF را، که عنکبوت روی‌آن حرکت می‌کند، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ EFN بگیریم، داریم: $EF^2 = NF^2 + NE^2$. ولی فاصله‌های NF و NE رابه‌سادگی می‌توان محاسبه‌کرد: آنها به‌ترتیب مساوی ۲۴ و ۳۲ پا هستند. ازآنجا EF مساوی ۴۰ پا می‌شود.

۳۹ـ شماره‌های اسرارآمیز تلفن

یك ریاضیدان اهل وین از دختر خانم جوانی خواهش کرد که شمارهٔ تلفن خودش را به‌او بدهد. دخترخانم که تمایل زیادی به‌این امرنداشت جواب دادکه درمؤسسه‌ای که او کار می کند چهار شمارهٔ تلفن وجود دارد؛ درهرشمارهٔ تلفن رقمها باهم فرق دارند، ولی هرچهار شماره یك خاصیت کلی دارند: مجموع رقمهای هر- شماره مساوی ۱۰ است، و اگر رقمهای هرکدام از این شماره‌ها را از جهت عکس بنویسیم و با خود شماره جمع کنیم چهار عدد مساوی بدست می‌آوریم که هرکدام ازآنها هم از رقمهای مساوی تشکیل شده است.

ـ همین برای شما کافی‌است، دخترخانم این را گفت و با لبخند شیطنت‌آمیزی خداحافظی کرد.

دخترخانم مطمئن بودکه بااین اطلاعات کلی، مشکل بتوان شماره‌های تلفن را پیداکرد. ولی اینطور نشد و با تعجب بسیار بعد

از مدت کوتاهی صدای کسل کنندهٔ آشنای خود را از یکی از تلفنها شنید.

چگونه او توانسته است این شماره‌های اسرارآمیز را کشف کند؟

این ریاضیدان می‌دانست که همهٔ تلفنهای وین شماره‌هایی از ۲۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹ دارند.

شمارهٔ یکی ازتلفنهای این موسسه را ABCDE فرض می‌کنیم؛ هر حرف یکی از رقمهارا نشان می‌دهد. طبق شرط مسأله، مجموع این عدد با عددی که از همین رقمها و درجهت عکس نوشته شده، باید عددی بارقمهای مساوی باشد:

$$\begin{array}{r} ABCDE+ \\ EDCBA \\ \hline FFFFF \end{array}$$

واین تنها وقتی ممکن است که $E+A=F$، $D+B=F$ و $C+C=F$.
علاوه بر آن می‌دانیم: $A+B+C+D+E=10$ و ازآنجا نتیجه می‌شود که $F=4$ و $C=2$.

رقم A می‌تواند مساوی ۳ یا ۴ باشد. حال به‌سادگی می‌توان چهار شمارهٔ تلفن را نوشت:

۳۰۲۴۱، ۳۴۲۰۱، ۴۱۲۳۰، ۴۳۲۱۰

۴۰ـ خارپشتها و لاکپشتها

دو خارپشت مسابقه‌ای برپا کردند. اولی در مسیر خود به‌هیچ مانعی برخورد نکرد، ولی دومی در راهش به دو لاك پشت بزرگ برخورد کرد. چاره‌ای نداشت جز آنکه یاآنها را دور بزند و یا از روی آنها عبور کند. خارپشت تصمیم گرفت ازروی آنها عبور کند. لاك پشت اول که یك متر طول داشت، در جهت مخالف خارپشت

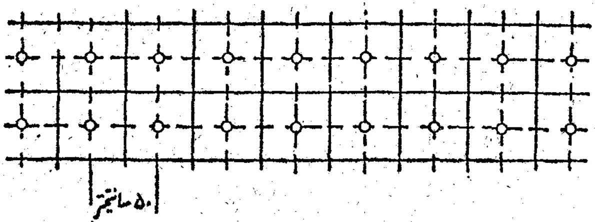
حرکت می کرد وسرعتی مساوی ۶سانتیمتردرثانیه داشت؛ لاك‌پشت دوم که بطول $\frac{۱}{۲}$ متر بود درجهت حرکت خارپشت پیش می‌رفت و سرعتی مساوی ۱۸ سانتیمتر درثانیه داشت.

دو خارپشت دریك زمان به‌انتهای راه رسیدند. کدامیك از آنها بیشتر راه رفته است؟

البته لاك‌پشت اول راه خارپشت را طولانی‌تر می‌کند، زیرا وقتی که خارپشت روی پشت اوقرارگرفته است وطول یك متراورا می‌پیماید، ومثلاً tثانیه طول می‌کشد، خارپشت به‌اندازهٔ $۶t$سانتیمتراورا به‌عقب‌برمی‌گرداند. ولی مدتی که خارپشت روی پشت لاك پشت دوم قرارگرفته$\frac{۱}{۲}t$ ثانیه طول می‌کشد و در این مدت او به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۲}t \times ۱۸$ یعنی $۹t$ سانتیمتراورا به‌جلـو می‌برد. بنابراین بطور کلی این خـارپشت به‌اندازهٔ $۳t$ سانتیمتر جلو می‌افتد و این به‌معنای آنست‌که خارپشت اول که مانعی در راه خود نداشته است، راه بیشتری رفته است.

۴۱ـ باصرفه‌ترین روش نشاء سیب زمینی

براساس تجربه‌های فراوان ثابت شده است که برای بدست آوردن حداکثر محصول سیب زمینی، باید آنها را در فاصله‌های



شکل ۳۴

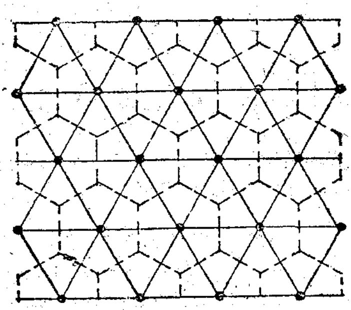
مساوی نسبت به یکدیگر نشاء کرد. سؤال اینست کـه چاله‌ها را

در مزرعه چگونه جا دهیم تا به‌صرفه نزدیکتر باشد. و به‌این ترتیب مسأله نه‌تنها به‌کشاورزی، بلکه به‌ریاضیات هم مربوط است.

می‌دانیم که تنها سه‌نوع چندضلعی وجود دارد که باآنهامی‌توان صفحه را بدون بریدگی وفاصله پوشانید: مثلث‌متساوی‌الاضلاع، مربع وشش‌ضلعی منتظم. بنابراین برای چاله‌های سیب زمینی تنها یکی از این سه نوع تقسیم را می‌توان درنظر گرفت. درمورد شش ضلعی، از زمین بطـور کامل استفاده نمی‌شود (با توجه به‌اینکه باید فاصلهٔ چاله‌ها ثابت باشد)، این تقریباً واضح است. تنها ممکن است درمورد انتخاب مثلث یـا مربع تردیدی پیش‌آید. در مرکز هریك ازاین چند ضلعیها یك گیاه قرار می‌دهیم. ضمناً اندازه‌های چند-ضلعیهارا طوری انتخاب می‌کنیم که فاصلهٔ هردوگیاه مجاورمقدار تعیین‌شده مثلاً $d = ۵۶$ سانتیمتر باشد (اگرکسی بخواهد فاصلـهٔ دیگری را برای d انتخاب‌کند، نتیجهٔ بحث تغییرنخواهد کرد).

برای نشاء سیب‌زمینی درمربعها، همانطورکه درشکل ۳۴ نشان داده شده است، باید ردیفهایی به‌فاصلهٔ ۵۶ سانتیمتر از یکدیگر در نظر بگیریم و درهرردیف سیب زمینیها را به‌فاصلهٔ ۵۶ سانتیمتر ازهم بنشانیم. دراینصورت برای هرگیاه ۵۶×۵۶ یعنی ۳۱۳۶ سانتیمترمربع زمین‌را اختصاص داده‌ایم، ودریك آرزمین (۱۰×۱۰متر) می‌توان $۱۰۰۰۰۰۰ \div ۳۱۳۶$ یعنی ۳۱۹ چاله به‌وجودآورد.

حالاازروش نشاءسیب‌زمینی در رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع استفاده می‌کنیم (شکل ۳۵). در اینصورت به‌هرگیاه، زمینی به‌شکل شش ضلعی منتظم داده‌ایم که فاصلهٔ مرکزآن ازضلعش مساوی ۲۸ سانتیمتر است.



شکل ۳۵

این شش ضلعی منتظم را می‌توان به‌شش مثلث متساوی الاضلاع تقسیم‌کرد. ارتفاع هریك از این مثلثهـا مساوی ۲۸ سانتیمتر و ضلع آن (که به‌سادگی قابل محاسبه است) تقریباً ۳۲ سانتیمتر می‌شود. مساحت هریك‌ازاین مثلثهای کوچك مساوی $۲۸ \times ۳۲ \times \frac{۱}{۲}$ یعنی ۴۴۸ سانتیمترمربع ودرنتیجه مساحت شش ضلعی مساوی ۴۴۸×۶ یعنی ۲۶۸۸ سانتیمترمربع خواهد شد. به‌این

ترتیب در هر آر می‌توان ۲۶۸۸÷۱۰۰۰۰۰۰ یعنی ۳۷۲ چاله به‌وجود آوردکه بیشتر ازحالت قطعه‌های مربع شکل‌است.

۴۲ ـ چگونه می‌توانیم فاصلهٔ خودرا ازشیئی که اندازه‌های آنرا می‌دانیم، بدون هیچ وسیله‌ای، بدست‌آوریم؟

فرض کنید که ما از ساختمان، اتاق و یا خانه‌ای که طول و عرض آنهارا می‌دانیم، دورمی‌شویم ومی‌خواهیم بدانیم چقدر دور شده‌ایم. یا اینکه داریم به‌آنجا برمی‌گردیم و می‌خواهیم بدانیم چقدر راه باقی مانده است. بدون اینکه هیچ وسیله‌ای در اختیار داشته باشیم، تنها ازدستها و چشمهای خود استفاده می‌کنیم.

دست راست را به‌جلو دراز می‌کنیم، چشم چپ را می‌بندیم وانتهای انگشت اشاره را در سمت چپ خانه قرار می‌دهیم؛ سپس درحالیکه دست را بطور کامل بدون حرکت نگاه می‌داریم به‌سرعت چشم راست را می‌بندیم و چشم چپ را باز می‌کنیم؛ در این‌لحظه انتهای انگشت به‌طرف راست جابجا می‌شود و مثلاً درمرکزچهارچوب وسط منزل قرارمی‌گیرد. و همین مطلب کافی‌است تا به‌کمک‌آن بتوانیم به‌تقریب (والبته خیلی تقریبی) فاصلهٔ مورد نظررا بدست‌آوریم.

فاصلهٔ انگشت دست تاچشم به‌احتمال‌قوی برای‌ما معلوم است، فرض کنید این فاصله ۸۰ سانتیمتر باشد. فاصلهٔ بین دو مردمک چشم را هم ۷ سانتیمتر می‌گیریم. اگر علاوه براینها بدانیم که عرض منزل ۲۰ مترباشد، نصف‌آن مساوی ۱۰ مترمی‌شود و از تناسب زیر می‌توانیم فاصلهٔ مجهول x را بدست آوریم:

$$0/07 \div 10 = 0/8 \div x$$

و از این تناسب بدست می‌آید:

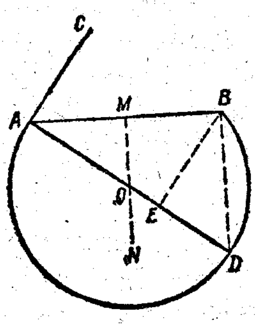
$$x = \frac{0/8 \times 10}{0/07} = \approx 115 \text{ (متر)}$$

اینکه چگونه این تناسب را تشکیل دادیم، باکمی‌توجه برای هرکس معلوم است .

۴۳ـ شکل تالار نمایش

تالار نمایش را به‌چه شکلی باید ساخت تا تماشاچیانی که درطول دیوار آن نشسته‌اند، از همه جا سن نمایش را به یك زاویه ببینند؟

پاره خط AB را سن نمایش می‌گیریم (شکل ۳۶). از نقطهٔ A خط AC را چنان می‌گذرانیم که زاویهٔ BAC مساوی ۵۳ درجه باشد. این‌زاویه مناسب‌ترین اندازه برای راحت‌تر دیدن‌سن شناخته شده است. از نقطهٔ A عمود AD را بر AC و از نقطهٔ M وسط AB عمود MN را برAB رسم می‌کنیم. نقطهٔ O، یعنی محل‌تلاقی خطهای AD و MN مرکز دایره‌ای است که از A وB می‌گذرد و در نقطهٔ A برخط AC مماس‌است. قوسADB شکل مورد نظرتالار را به‌ما می‌دهد، زیرا تمام زاویه هایی که رأس آنها روی این قوس باشد و



شکل ۳۶

ضلعهایشان از A و B عبور کرده باشد با زاویهٔ ADB و در نتیجه با زاویهٔ BAC برابرند (تساوی دوزاویه ADB وBAC از اینجا معلوم می‌شود که ضلعهایشهان برهم عمود است) و یااگرعمود BE را برخط AD رسم کنیم داریم:

$$\widehat{ADB}=\widehat{ABE}=\widehat{BAC}$$

۴۴ـ حقهٔ دستیار

۹ کیسهٔ گندم به‌آسیا بردند و آنهارا درکنار دیوار گذاشتند. کیسه‌ها از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری شده بود. وقتی‌که آسیابان به‌آنها نگاه‌کرد، متوجه‌شدکه بطورتصادفی وضع‌جالبی‌برای‌عددها وجود دارد. در دوطرف یك‌کیسه، بعد ازآنها دوکیسه باهم ودر وسط ۳ کیسه باهم وجود داشت (شکل ۳۷).

شکل ۳۷

اما چه‌چیزی برای اوجالب بود: اگر عددی راکه روی‌کیسهٔ سمت چپ نوشته شده در عددی که‌از رقمهای دوکیسهٔ مجاوربعدی تشکیل شده است، ضرب‌کنیم، حاصلضرب‌مساوی‌عددی می‌شود که روی۳ کیسهٔ مجاور هم در وسط وجود دارد: ۱۹۶ = ۲۸ × ۷. آسیابان از این پیش‌آمد دچار حیرت شد، آنرا به‌فال نیك گرفت و تصمیم‌گرفت شانس خود را روی عدد ۷۲۸۱۹۶ امتحان‌کند.

دستیار آسیابان از او خواست‌که دراین امر شریك اوباشد، ولی‌آسیابان موافقت نکرد. به‌همین مناسبت دستیار تصمیم گرفت یك شوخی باآسیابان بکند. شب هنگام کیسه‌های گندم را طوری قراردادکه ازهردوطرف حاصلضرب عددکیسهٔ اول‌درعدد دوکیسهٔ مجاورمساوی عددسه‌کیسهٔ وسط باشد، و این‌ترکیبی عجیب‌تربود.

فردا صبح آسیابان باهیجان بیدارشد وبه‌سراغ کیسه‌های گندم رفت و این عددها را دید:

۴ ۳۹ ۱۵۶ ۷۸ ۲

ضرب کرد: ۱۵۶ = ۳۹ × ۴ ، ۱۵۶ = ۷۸ × ۲. آسیابان نسبت به موفقیت فال اول دچار تردید شد. زیرا این بار وضع عددها عجیب‌تر و غیرمعمولی‌تر بود.

روز بعد هم ترتیب دیگری از کیسه‌ها دوباره همین نتیجه را داشت. آیا بازهم چنین ترتیبی را می‌شد درست کرد؟ به‌این سؤال خودتان جواب بدهید.

۴۵ـ تنهٔ درخت حیرت‌آور

حجم تنهٔ درختهایی که درجنگل قطع شده باشند به‌این ترتیب محاسبه می‌کنند که آنها را استوانه به‌حساب می‌آورند وقطراستوانه را قطر وسط تنهٔ درخت درنظر می‌گیرند. بنابراین ، اگر طول تنهٔ درخت را h وقطر مقطع وسط را d بگیریم، حجم تنه را می‌توان از رابطهٔ زیر بدست‌آورد:

$$V=\frac{\pi}{۴}d^{۲}h \implies V=۰/۷۸۵d^{۲}h$$

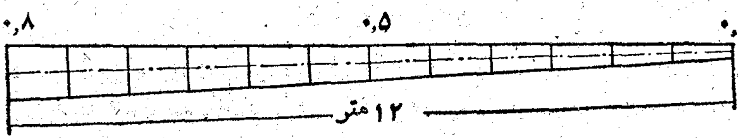
معمولاً مقدار گرد شدهٔ آنرا اختیار می‌کنند :

$$V=۰/۸d^{۲}h$$

مثلا فرض کنید تنهٔ درختی داشته باشیم که طول آن ۱۲ متر، قطرقسمت پایین‌آن ۰/۸ متر وقطر انتهای باریك‌آن ۰/۲ متر باشد. تنهٔ درخت بطور یکنواخت، مطابق شکل ۳۸، باریك می‌شود.

خریداری که می‌خواست این تنه‌را خریداری کند خواست که حجم آنرا تعیین کند. به‌سادگی معلوم می‌شود که قطر مقطع متوسط تنه مساوی ۰/۵ متر است واز آنجا حجم تنهٔ درخت چنین می‌شود:

$$V=۰/۸\times ۰/۵^{۲}\times ۱۲=۲/۴ \quad \text{(مترمکعب)}$$



شکل ۳۸

اگر چوب متر مکعبی ۱۰۰ روبل قیمت داشته باشد، معلوم می‌شود که خریدار باید ۲۴۰ روبل بابت تنهٔ درخت بپردازد. ولی درهمین موقع خریدار به‌فکر فرورفت و گفت که او یك تنهٔ ۱۰متری لازم دارد، به‌همین مناسبت ۲ متر از انتهای باریك تنهٔ درخت جدا کردند. آنچه که باقی‌ماند، تنهٔ درختی بود به‌طول ۱۰متر و قطرمقطع متوسط ۰/۵۵ متر. حجم آنرا محاسبه کردند که طبعاً باید کمتر از تنهٔ اولی درآید. ولی بعد از محاسبه این نتیجه بدست آمد:

$$V=۰/۸\times ۰/۵۵^{۲}\times ۱۰=۲/۴۲ \quad \text{(مترمکعب)}$$

اگر چوب را همان مترمکعبی ۱۰۰ روبل به حساب آوریم، خریدار باید بابت تنهٔ درختی که قسمتی از آن قطع شده است۲روبل بیشتر ازتنهٔ سالم درخت بپردازد (زیرا ۲/۴۲ مترمکعب ۲۴۲ روبل قیمت دارد). برای حجم ۲ متر باقیمانده تنهٔ درخت که قطر مقطع متوسط آن ۰/۲۵ متراست چنین خواهیم داشت:

$$V=۰/۸\times ۰/۲۵^{۲}\times ۲=۰/۱ \quad \text{(مترمکعب)}$$

که درنتیجه ۱۰ روبل قیمت خواهد داشت.

دربارهٔ این نتیجهٔ معمایی چه می‌گویید؟

مقصر اصلی رابطه‌ای است که برای محاسبهٔ حجم تنهٔ درخت مورد استفاده قراردادیم، این رابطه غیردقیق است. اگربخواهیم حجم تنهٔ درخت را دقیق‌تر پیداکنیم، باید ازاین رابطه استفاده‌کنیم:

$$V=\frac{\pi}{۴}\cdot\frac{d_{۱}^{۲}+d_{۱}d_{۲}+d_{۲}^{۲}}{۳}\cdot h$$

که درآن $d_۱$ و $d_۲$ قطرهای دو انتهای تنهٔ درخت و h طـول آنست. طبق این رابطه قیمت تنهٔ سالـم درخت ۲۶۳/۷۶ روبل و قیمت تنهٔ بریـده شده ۲۵۳/۸۲ روبل می‌شود، اختلاف این دوقیمت یعنی ۹/۹۴ روبل هم قیمت قطعهٔ دومتری بریده شده است.

۴۶ـ زاغی باهوش

یکی از روزهای سوزان تـابستان یك زاغی احساس تشنگی کرد. درباغ به‌یك آبپاش کوچك برخوردکردکه در زمین جا داده شده بود و در آن مقداری آب صاف وجود داشت. ولـی آب در آبپاش خیلی پایین‌بود و زاغی باهمهٔ زرنگی که داشت نمی‌توانست ازآن بخورد.

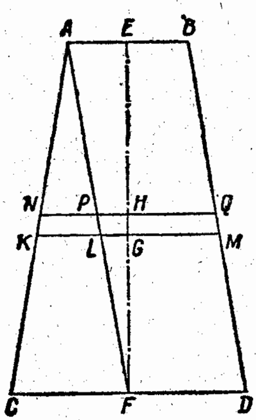
زاغی فکرکرد:

«اگرآب به‌اندازهٔ یك چهارم اینچ بالا می‌آمد (او بادستگاه متری اندازه‌گیری آشنا نبود)، من می‌توانستم ازآب خنك وصاف بخورم».

زاغی دورآبپاش گشتی زد و اندازه‌هارا پیداکرد: قطردهانهٔ بالایی آبپاش مساوی ۱/۵ اینچ و قطر دهانهٔ پایینی مساوی ۳ اینچ بود. ارتفاع آبپاش ۴/۵ اینچ بود، منتهی‌آب درسطح۲اینچی کف آبپاش قرارگرفته بود.

زاغی به‌خاطر آورد که درسوراخ یك درخت کهنسال ذخیره‌ای از سکه‌های درخشان جمع کرده است که ضخامت هر کدام از آنها ۱ خط (هرخط یك دوازدهم اینچ است) وقطر هریك ۱۶ خط است. بنظرش رسید که سکه‌ها را ازسوراخ آبپاش به‌داخل آب بیندازد.

زاغی به‌طرف سوراخ سکه‌ها پرواز کرد و آنها را برداشت و دانه دانه درآب انداخت و هربار امتحان می‌کرد که آیا منقارش به‌آب می‌رسد یا نه. ولی ما می‌خواهیم به کمك محاسبه بدانیم که زاغی چند بار باید برای آوردن سکه‌ها پرواز کند تا بتواند تشنگی خودرا برطرف کند.



شکل ۳۹

شکل آبپاش را رسم می‌کنیم (شکل ۳۹). FD را مساوی AB جدا می‌کنیم، در اینصورت خط AF موازی خط BD مـی‌شود. آب در سطح KM قراردارد وزاغی می‌خواهد آنرا به سطح NQ برساند. طـول پاره خطهـا را بر حسب خط (یك ـ دوازدهم اینچ) محاسبه می‌کنیم:

$CF=۱۸$, $EF=۵۴$,
$EG=۳۰$, $EH=۲۷$

این تناسبها به‌سادگی بدست می‌آید:

$$\frac{KL}{CF}=\frac{EG}{EF}\Longrightarrow KL=۱۰$$

$$\frac{NP}{CF}=\frac{EH}{EF}\Longrightarrow NP=۹$$

با دردست داشتن این مقادیر باید حجم قشری را پیدا کنیم که بین سطحهای KM و NQ قرارگرفته است:

$$d_1=KM=۲۸,\qquad d_2=NQ=۲۷,\qquad h=GH=۳$$

وحجم را باتوجه به‌رابطهٔ زیربدست می‌آوریم:

$$V=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{d_1^2+d_1d_2+d_2^2\times}{3}\cdot h$$

حجم قشر KNQM به‌تقریب مساوی ۱۷۸۱ خط مکعب می‌شود و حجم یك سکه مساوی ۲۰۲ خط مکعب؛ از اینجـا نتیجه می‌گیریم که بـا انداختن تنهـا ۹ سکه، منقار زاغی به آب می‌رسد، اما برای اینکه تشنگی زاغی برطرف شود باید دهمین سکه را هم درآب بیندازد.

۴۷ـ واگون با بار سبك‌تر از واگون خالی

در بعضی از راههای آهن به واگونهای تجارتی خـاصی بر می‌خوریم کـه به‌شکل استوانه‌های بزرگ برای حمل گاز در نظر گرفته شده‌اند. هریك ازاین واگونهـا معمولاً قریب ۱۰ تن وزن و ۵۰ مترمکعب حجم دارند. فرض کنیدکه واگون هیدرژن حمل کند که هرمترمکعب آن حدود ۱۰۰ گرم وزن دارد. واگون با بارش چقدر وزن دارد؟

چنین واگونی نه تنهـا سنگین‌تر از واگون بدون بار نیست، بلکه ازآن سبکتر هم هست. برای اینکه واگون را از هیدرژن پـر کنند، باید ابتدا ۵۰ مترمکعب هوای آنرا، که قریب ۶۵ کیلوگرم وزن دارد، خالی کنند و بجای آن ۵۰ مترمکعب هیدرژن به‌وزن ۵ کیلوگرم جـا دهند. بنابراین واگون به اندازهٔ ۵ـــ۶۵، یعنی ۶۰ کیلوگرم سبکتر می‌شود.

۴۸ـ ارزانترین درشکه

یکی از اهالی یك شهرکوچك به خست مشهور بـود. وقتی

کاری درشهر مجاور، که در ۲۵ کیلومتری بود، داشت، معمولاً سراغ یکی از همسایه‌های خود می‌رفت و خواهش می‌کرد که او را برساند.

یك روز مرد خسیس دور میدان شهر می‌گشت و انتظار کسی را می‌کشید که او را با «تشکر» به‌مقصد برساند.

ولی این‌بار کسی پیدا نشد.

وقتی که از پیدا کردن همسفر خیراندیش ناامید شد، چاره‌ای جز کرایهٔ یك‌درشکه‌ندید. او به‌همهٔ‌درشکه‌چیهاسرزد، شروع به‌چانه‌زدن‌باآنهاکرد وضمناً قیمتها راباهم‌مقایسه می‌کرد؛ یکی ۲۵۰روبل می‌خواست، دیگری ۲۰۰روبل‌وسومی ۱۵۰روبل‌مطالبه می‌کرد. همهٔ این قیمتها به نظر مرد خسیس خیلی گران بود. بالاخره او متوجهٔ درشکهٔ‌کهنه و زوار دررفته‌ای با یابوی مفلوکی شد. وقتی‌که مرد خسیس از او پرسید که با چه مبلغی اورا به‌شهر خودش می‌رساند، جوان درشکه‌چی سرش را پایین انداخت، سرش را خاراند و بالاخره جواب داد:

ـ برای کیلومتراول باید یك‌کوپك* بپردازی، شاید این مبلغ زیادی نباشد، ولی چون راه سخت است برای کیلومتر دوم باید دوکوپك پرداخت شود؛ برای کیلومترسوم که ازکوه عبور می‌کند ۴ کوپك می‌شود. از آن به‌بعد که راه کوهستانی است و یابو هم مرتباً خسته‌تر می‌شود باید تا انتهای راه برای هر کیلومتر دو برابر کیلومتر قبلی حساب شود.

---

*) هرروبل مساوی ۱۰۰ کوپك است.

مردخسیس که به‌سختی جلوخندهٔ خود را می‌گرفت فکر کرد:
ـ عجب مرد احمقی است، فقط چند کوپك گیرش می‌آید. ولی به‌من چه، من که نباید حساب او را بکنم.
فوراً درشکه را سوارشد و فریاد زد.
ـ موافقم! حرکت‌کن!
آنها براه افتادند، ولی وقتی‌که به‌مقصد رسیدند معلوم شد که مرد خسیس باید تمام دارایی خود را به درشکه‌چی «احمق» بپردازد و مبلغ زیادی هم قرض‌دار شود، زیرا بی‌کم وکاست رقم پرداختی او مساوی ۳۵۵۵۴۴ روبل و ۳۱ کوپك می‌شد.
اگرباور ندارید می‌توانیدامتحان کنید: بایدمجموع جمله‌های یك‌تصاعدهندسی رامحاسبه کنیدکه جملهٔ اول آن۱، قدرنسبت آن ۲ و تعداد جمله‌هایش مساوی ۲۵ است.

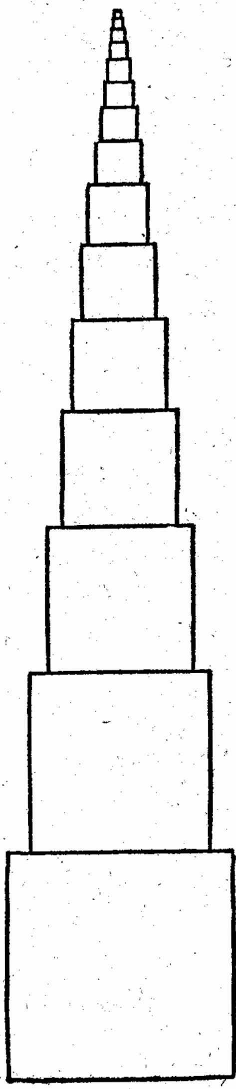
۴۹ـ هرکسی چند سال دارد؟

در خانواده‌ای پنج بچه وجـود دارد. سن یاس دو برابر ترزا است. تعداد سالهای نلی و ترزا رویهم دوبرابر تعداد سالهای‌یاس است. سلاویك و یاس رویهم دوبرابر نلی و ترزا سن دارند. سن ورا ، نلی و ترزا رویهم دوبرابر سن سلاویك و یاس رویهم است. ورا ۲۱ سال دارد. هریك ازبقیهٔ بچه‌ها چندسال دارند؟

اگر سن ترزا را مجهول بگیریم، می‌توانیم به سادگی مسأله را حل کنیم. سن ترزا را t می‌گیریم. در اینصورت یاس ۲t سال دارد. چون نلی و ترزا رویهم ۴t سال سن دارند، سن نلی ۳t سال می‌شود. سن سلاویك و یاس رویهم ۸t و بنابراین سلاویك ۶t ساله است. ورا، نلی و ترزا رویهم ۱۶t سال و بنابراین ورا ۱۲t ساله است. بـه‌این ترتیب داریم:

۲۱ = ۱۲t و ازآنجا $t=1\frac{3}{4}$ و به‌سادگی سن هرکدام به‌دست می‌آید.

متذکرمی‌شویم که سالهای سن سه بچهٔ کوچکتر به‌تصاعدحسابی هستند (با قدر نسبت یکسال و نه ماه) و این تصاعد برای سالهای بعدهم، هرچند سال که بگذرد، حفظ می‌شود. ولی سن سه بچهٔ بزرگتر به تصاعد هندسی است که باگذشت‌زمان حقیقت‌خودراازدست می‌دهد.


شکل ۴۰

۵۰ـ علامت نمایشگاه

طرح نمایشگاه آماده بود. هیئت ـ مدیره‌علامت نمایشگاه‌را به‌مسابقه گذاشت.

بین طرحهایی که فرستاده شد، دو طرح ازجهت فکرکاملا شبیه یکدیگربودند.

در یکی از این طرحها پیشنهاد شده بودکه برای علامت نمایشگاه هرمی درنظر گرفته شودکه باقراردادن مکعبهایی برروی هم درست شده باشد؛ روی مکعب بزرگ زیر، که‌ضلع آن a = ۲۵ (متر)است، مکعب دیگری گذاشته شود که ضلع آن ۲۰٪ کوچکتر باشد و روی این مکعب جدید، مکعب سوم قرار گیرد که ضلعی ۲۰٪ کوچکتر از ضلع مکعب دوم داشته باشد و غیره (شکل ۴۰).

در طرح دوم هم هرمی به‌همین‌شکل درنظرگرفته شده بودکه مکعب زیرین‌ضلعی مساوی a = ۲۵ (متر) و مکعبهای بعد از آن به‌ترتیب ضلعهایی مساوی $\frac{1}{2}a$ ، $\frac{1}{3}a$ ، $\frac{1}{4}a$

وغیره داشته باشند.

کدامیک ازاین‌هرمها، که بامکعب ساخته شده‌اند، بلندترند؟

ارتفاع برج اول ۱۲۵ متر درمی‌آید، زیرا بایـد مجموع جمله‌هـای این تصاعد هندسی را بدست بیاوریم:

$$۲۵+۲۵.\frac{۴}{۵}+۲۵.(\frac{۴}{۵})^{۲}+۲۵.(\frac{۴}{۵})^{۳}+\dots$$

می‌دانیم‌که برای محاسبهٔ چنین مجموعی باید از دستور $S=\frac{a}{۱-q}$ استفاده کنیم که در آن a عبارتست از جملـهٔ اول تصاعد هندسی و q قدر نسبت‌آن. در این مثال $a=۲۵$ و $q=\frac{۴}{۵}$ و بنابراین $S=۱۲۵$ می‌شود.

برای محاسبهٔ ارتفاع برج‌دوم باید مجموع رشتهٔ زیررا بدست‌آوریم:

$$a+\frac{a}{۲}+\frac{a}{۳}+\frac{a}{۴}+\frac{a}{۵}+\dots$$

این رشته را **رشتهٔ همساز** گویند.این رشته متباعد است، زیـرا اگر جمله‌های آنرا به‌تعدادکافی بگیریم، مجموع آن از هرعدد دلخواه بزرگتر می‌شود.

با استدلال خیلی جالبی می‌توان این نتیجه را بدست آورد. جمله‌های این رشته را می‌توان به صورت زیرگروه بندی‌کرد:

$$۱+\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸})+\dots$$

اگرمخرج همهٔ کسرهای داخل هرپرانتز را مساوی بزرگترین‌مخرج همان پرانتز بگیریم، رشتهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید :

$$۱+\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸})+\dots$$

وحالا می‌توان آنرا به‌این صورت نوشت:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\dots$$

اگر دو رشتهٔ:

$$۱+\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸})+\dots,$$

$$۱+\frac{۱}{۲}+(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴})+(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸})+\ldots$$

را باهم مقایسه کنیم، می‌بینیم که هر پرانتز رشتهٔ اول جمله‌هایی بزرگتر از پرانتز نظیرش در رشتهٔ دوم دارد. اما رشتهٔ دوم متباعد است و بنابراین رشتهٔ اول هم متباعد می‌شود.

به‌این ترتیب، برجی که طبق این طرح ساخته شود باید تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد، ولی البته دراین ارتفاع بجایی می‌رسیم که درآنجا نیروی گریز ازمرکز ناشی ازحرکت زمین دور محور خودش بیشتراز نیروی جاذبهٔ زمین خواهد بود . . .

۱۵ـ پسرچند سال دارد و پدر چند سال؟

بیش از سی‌سال قبل در مجلهٔ «پارامتر» مسألهٔ زیر به‌صورت گفتگوی بین پدر و پسرطرح شده بود:

پسر: بابا، امروز روز اول سال جدید و روز تولد من و تو است. می‌دانی بابا، مجموع رقمهای‌سال جدید درست مساوی‌سن من درامروز است، ولی سال گذشته اینطور نبود. آیا برای تو در چه سالی این اتفاق افتاده است؟

پدر (بعد ازکمی فکر): نه برای من چنین اتفاقی پیش نیامده است.

پسر: تولد تو در چه سالی بوده است؟

پدر: چون تو معما را دوست داری همینقدر می‌گویم که مجموع رقمهای سال تولد من بر۹ قابل قسمت است.

پدر وپسر درچه سالهایی متولد شده‌اند و این گفتگو در چه‌سالی بوده است؟

n را سالی فرض می‌کنیم که در آن برای نخستین‌بار سن پسر مساوی

با مجموع رقمهای عدد n شده باشد. اگرسن پسررا از عدد n کم‌کنیم سال تولد او بدست می‌آید. ازطرف دیگر اگرمجموع رقمهای عددی را ازخود عددکم‌کنیم، تفاضل بر۹قابل‌قسمت می‌شود. ازاینجا نتیجه می‌گیریم‌که سال تولد پسر بر۹ قابل قسمت‌است. سال تولد پسر نمی‌تواند ۱۹۳۵ یا ۱۹۲۶ باشد ، زیرا دراینصورت برای اولین بار در سال ۱۹۵۰ یا ۱۹۴۰ مجموع رقمهای سال تـولد مساوی سن پسرمی‌شود*. به‌این ترتیب سال تولدپسر ۱۹۱۷ بوده است‌که برای بار اول‌در ۱۹۳۰ آن تصادف پیش می‌آید (یعنی چند سال‌قبل ازنوشتن‌مسأله). همین‌تصادف درسال۱۹۳۹هم پیش‌خواهدآمد.

پدر هم درسالی متولد شده است‌کـه مجموع رقمهای آن بر ۹ قابل قسمت است، ولی هرگز مجموع رقمهای سالهـای بعد مساوی سن او نشده است. درقرن نوزدهم‌تنهاسال ۱۸۸۱ دارای‌این خاصیت است. اگر کسی در ۱۸۸۱ متولد شده باشد تا ۱۸۹۹ همیشه سنی‌کمتر از مجموع رقمهای سال تقویم دارد وازه۱۹۰۰ به‌بعد سن اوبیشترازمجموع رقمهای‌سال تقویم‌است.

به‌این ترتیب پدر در۱۸۸۱ و پسر در ۱۹۱۷ متولد شده‌اند، گفتگو دراول ژانویهٔ ۱۹۳۰ انجام شده است.

۴هـ چند مسأله

I

این یك مسألهٔ قدیمی چینی مربوط به‌خرگوش و مرغ است. ۳۵ سرو ۹۴پا وجود دارد. چندمرغ و چند خرگوش وجود دارد؟

این مسأله به‌سادگی و باروش جبری حل می‌شود.

II

مادیگر آلکوئین نویسندهٔ این مسأله را می‌شناسیم:

سگی به‌دنبال خرگوشی کـه با آن ۱۵۰ فوت فاصله داشت، شروع به‌دویدن کرد. هرجست خرگوش ۷فوت وهرجست سگ در

---

*) مسأله قبل از ۱۹۴۰ طرح شده است و به‌همین مناسبت این جوابها قابل قبول‌نیست. مترجم.

همان زمان مساوی ۹ فوت است.

با چند جست، سگ به‌خرگوش می‌رسد؟

III

طبق یك افسانهٔ قدیمی، لیبوش ملکهٔ چك قول داده بود که هرکس بتواند مسألهٔ زیر را حل کند، عنوان شوالیه را به‌او خواهدداد:

مقداری آلو درسبد داریم. نصف آنها را به‌اضافهٔ یك آلو به‌نفراول داده‌ایم. نصف بقیه‌را به‌اضافهٔ یك آلو به‌نفر دوم داده‌ایم. به‌نفرسوم هم‌نصف بقیه را به اضافهٔ ۳ آلوداده‌ایم. سبد خالی شده است. درسبد چندآلو بوده است؟

IV

برگ عدس آبی‌روی آب برکه‌است. سطح‌برگ درهردوروز دوبرابر می‌شود. تمام سطح برکه در ۶۴ روز پوشیده می‌شود. در چند روز یك چهارم سطح برکه ازبرگ عدس پوشیده خواهد شد؟

II ـ خاصیتهای جالب عددها وعملهای ریاضی

۱ـ خاصیتهای شگفت‌آور هفت و نه

اگر جمله‌های متوالی تصاعد حسابی را، که جملهٔ اول و قدرنسبت آن مساوی ۱۵۸۷۳ است، در ۷ ضرب کنیم، حاصلضربهای عجیبی بدست می‌آید. ازضرب عددهای ۱۵۸۷۳، ۳۱۷۴۶، ۴۷۶۱۹، ۶۳۴۹۲، ۷۹۳۶۵، ۹۵۲۳۸، . . . ، ۱۴۲۸۵۷ در ۷ همیشه یك عدد شش رقمی بارقمهای مساوی بدست می‌آید:

۱۵۸۷۳ × ۷ = ۱۱۱۱۱۱

۳۱۷۴۶ × ۷ = ۲۲۲۲۲۲

. . . .

۷۹۳۶۵ × ۷ = ۵۵۵۵۵۵

. . . .

۱۴۲۸۵۷ × ۷ = ۹۹۹۹۹۹

علت‌این‌خاصیت جالب مربوط به‌توالی عددهایی بارقمهای مساوی را می‌توان به‌سادگی روشن کرد. به‌عنوان نمونه داریم:

۷۹۳۶۵ × ۷ = (۵ × ۱۵۸۷۳) × ۷ = ۵ × (۱۵۸۷۳ × ۷) =
= ۵ × ۱۱۱۱۱۱

اما علت‌خاصیت‌غیرعادی‌زیررا مشکل‌ترمی‌توان‌روشن‌کرد:

اگر بین دو رقم توان دوم عدد ۷، یعنی بین رقمهای ۴۹ مرتباً عدد ۴۸ را قرار دهیم، این عددها به‌دست می‌آید:

۴۹، ۴۴۸۹؛ ۴۴۴۸۸۹، ۴۴۴۴۸۸۸۹، ...

و همهٔ این عددها مجذور کامل‌اند:

$$۴۹ = ۷^۲$$
$$۴۴۸۹ = ۶۷^۲$$
$$۴۴۴۸۸۹ = ۶۶۷^۲$$
$$۴۴۴۴۸۸۸۹ = ۶۶۶۷^۲$$

. . . .

* * *

اگر عدد ۷ را به عددهای ۱۱ و ۱۳ و یا عدد ۱۴۳ (یعنی ۱۱ × ۱۳) مربوط کنیم، می‌توان به «راز» جالب‌تری پی برد.

اگرعدد ۱۴۳ را در یکی از ۹۹۹ عدد طبیعی اولیهٔ مضرب ۷ ضرب کنیم، در حاصلضرب همیشه عددی به‌دست می‌آید که از دو عدد یکجور تشکیل شده است، مثلاً:

$$۲۸ \times ۱۴۳ = ۴۰۰۴$$
$$۳۱۵ \times ۱۴۳ = ۴۵۰۴۵$$
$$۲۴۶۴ \times ۱۴۳ = ۳۵۲۳۵۲$$
$$۳۵۹۱ \times ۱۴۳ = ۵۱۳۵۱۳$$
$$۵۴۹۵ \times ۱۴۳ = ۷۸۵۷۸۵$$
$$۶۹۹۳ \times ۱۴۳ = ۹۹۹۹۹۹$$

ضمناً بایدبه‌این‌مطلب‌توجه کرد که‌عددی که‌درحاصلضرب تکرار می‌شودبرابراست باتعداد عوامل۷ که درمضرب‌وجود دارد، یعنی:

$$۲۸ \div ۷ = ۴$$
$$۳۱۵ \div ۷ = ۴۵$$
$$۲۴۶۴ \div ۷ = ۳۵۲$$

. . . .

علت این رازرا درهمان نگاه‌اول می‌توان روشن کرد. کافی است‌توجه

کنیم که: $۷ \times ۱۴۳ = ۱۰۰۱$ و بنابراین:

$$۲۴۶۴ \times ۱۴۳ = (۳۵۲ \times ۷) \times ۱۴۳ = ۳۵۲ \times (۷ \times ۱۴۳) = ۳۵۲ \times ۱۰۰۱ = ۳۵۲ \times ۱۰۰۰ + ۳۵۲ = ۳۵۲۳۵۲$$

اگر عدد ۷۷ را دریکی از۹۹۹ عدد اولیهٔ مضرب ۱۳ ضرب‌کنیم و یا ۹۱ رادر۹۹۹ عدد اولیهٔ مضرب ۱۱ ضرب کنیم، نتیجه‌های مشابهی به‌دست می‌آید.

* * *

درخاتمه یك‌تردستی کوچك ریاضی مطرح می‌کنیم: چگونه می‌توان عدد ۷ را با ۲ نوشت:

$$۷ = ۲ + \frac{۲}{۲} + ۲ + ۲$$

این‌هم نمونه‌های جالب دیگری از نوشتن عدد ۷:

$$۷ = ۳^۲ - ۲$$

$$۷ = ۲^۳ - \frac{۲}{۲}$$

$$۷ = ۲^{۲^۲} - ۳^۲$$

$$۷ = ۳^۳ - ۲^۲ - ۲^{۲^۲}$$

چون گاهی به خاصیتهای جالبی از عدد ۷، شبیه خاصیتهای عدد ۹ برخورد می‌کنیم، به کمك این دو عدد هرم حاصلضربهای زیررا می‌سازیم:

$$۹ \times ۷ = ۶۳$$

$$۹۹ \times ۷۷ = ۷۶۲۳$$

$$۹۹۹ \times ۷۷۷ = ۷۷۶۲۲۳$$

$$۹۹۹۹ \times ۷۷۷۷ = ۷۷۷۶۲۲۲۳$$

$$۹۹۹۹۹ \times ۷۷۷۷۷ = ۷۷۷۷۶۲۲۲۲۳$$

. . . .

به این ترتیب برای دوعدد بارقمهای مساوی که یکی ازرقم‌های ۹ و دیگری از رقمهـای ۷ تشکیل شده است، عدد ۶۳ (یعنی ۹×۷) را در نظر می‌گیریم و قبل از رقـم ۶ یك واحد کمتر تعداد رقمهای مضروب یا مضروب‌فیه ۷ می‌گذاریم و قبل از رقـم ۳ به‌همان تعداد ۲ قرار می‌دهیم.

عدد ۹ بخصوص برای بچه‌هایی که جدول ضرب را به‌سختی یاد می‌گیرند ، عدد بسیارجالبی است، زیرا می‌شود ازبخاطر سپردن حاصلضربهای‌در۹صرفنظرکرد. برای چه به حافظهٔ خود فشاردهیم؟ وجود ۱۰ انگشت کافی‌است. باید هردو دست راکنارهم روی میز قرار داد و انگشتها رابازکرد، سپس انگشتی راکه جای مضروب راگرفته‌است‌خم‌کرد، حاصلضرب‌آن عدددر۹بطور عملی‌نشان داده می‌شود.

مثلاً اگربخواهیم ۹ را در۳ ضرب‌کنیم، انگشت‌سوم را ازسمت چپ خم می‌کنیم و حاصلضرب را می‌خوانیم: تعداد انگشتهایی‌که در سمت چپ انگشت خم‌شده است رقم دهگان حاصلضرب (۲) و تعداد انگشتهایی که‌در سمت راست انگشت خم‌شده قراردارد‌درقم‌یکان‌حاصلضرب(۷) رانشان‌می‌دهد.

اگربخواهیم ۷ را در۹ ضرب‌کنیم، انگشت هفتم را از سمت چپ خم می‌کنیم و می‌خوانیم : ۶۳.

احتمالاً کسانی باشندکه از این بابت تأسف بخورند که چرا نمی‌شود تمام جدول ضرب را «به‌کمك انگشتها» یادگرفت. در اینجا ماروش ضرب در ۶، ۷ و۸ را به‌کمك انگشتها ذکرمی‌کنیم، کـه اگر چه نسبت به‌ضرب در۹ پیچیده‌تر است می‌تواند خیلی‌کار را ساده‌کند.

* * *

به‌عدد۹ برمی‌گردیم. هرعدد را می‌توان مضربی از۹به‌اضافهٔ مجموع رقمهای خود عدد به‌حساب آورد. مثلاً :

$$۷۴۵=۸۱\times۹+(۷+۴+۵),$$
$$۲۱۴=۲۳\times۹+(۲+۱+۴),$$
$$۸۴=۸\times۹+(۸+۴)$$

هرعدد دلخواه را می‌توان به‌همین ترتیب نوشت، مثلاً:

۶۸۵۰۴۷۹۱=(مضرب۹)+(۶+۸+۵+۰+۴+۷+۹+۱)

* * *

اگر عددی از یك رقم و چند صفر تشکیل شده باشد، برابر است باحاصلضرب این رقم درعددی که به‌تعداد صفرهای عدداصلی رقم ۹ داشته باشد به‌اضافهٔ خود این رقم. مثلاً:

۸۰۰۰=۹۹۹×۸+۸

۷۰۰= ۹۹×۷+۷

۴۰= ۹×۴+۴

* * *

۱۰ عدد طبیعی اولیه ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ را انتخاب می کنیم و آنها را در ۹ ضرب می کنیم، حاصلضربها را به اینصورت می‌نویسیم: ۰۹، ۱۸، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲، ۸۱، ۹۰.

می‌بینیم که رقمهای اول این حاصلضربها به ترتیب عددهائی از ۰ تا ۹ و رقمهای دوم آنها بطور نزولی از۹ تا ۰ هستند.

اگررشتهٔ عددهای طبیعی را از هرعدد دلخواهی که به واحد ختم می‌شود انتخاب کنیم، باز هم به‌نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم، مثلاً اگر عددهای زیررا انتخاب کنیم:

۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ...، ۲۳۹

وآنها را در۹ ضرب کنیم، بدست می آید:

۲۰۷۹، ۲۰۸۸، ۲۰۹۷، ۲۱۰۶، ۲۱۱۵، ۲۱۲۴، ۲۱۳۳، ۲۱۴۲، ۲۱۵۱

آخرین رقمها عبارتند ازعددهای طبیعی از۹ تا ۱ و سه رقم سمت چپ عددها رشته عددهای طبیعی ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ... را تشکیل می‌دهند.

علت این مطلب را می‌توان به‌سادگی فهمید، اگر توجه کنیم که حاصلضرب هرعدددر۹ برابراست باتفاضل آن‌عدد ازده‌برابر خودش. مثلاً:

$$۲۵۴ \times ۹ = ۲۵۴۰ - ۲۵۴، \quad ۷۱۴۰ \times ۹ = ۷۱۴۰۰ - ۷۱۴۰$$

البته ملاحظاتی ازاین قبیل‌را نمی‌توان کشفیات فوق‌العاده‌ای به حساب آورد، ولی ممکن است هرکسی به آنها توجه نکند، درحالیکه استفاده ازآنها برای ساده‌کردن عملهای عددی می‌تواند مفید واقع‌شود.

جدولهایی را که در مورد نتیجه‌های جالب ضرب در ۹ خواهیم‌آورد باجدولهای ساده‌ای شروع می‌کنیم:

$۹۰ = ۹ \times ۱۰$	$۱ \times ۹ = ۰۹$
$۸۱ = ۹ \times ۹$	$۲ \times ۹ = ۱۸$
$۷۲ = ۹ \times ۸$	$۳ \times ۹ = ۲۷$
$۶۳ = ۹ \times ۷$	$۴ \times ۹ = ۳۶$
$۵۴ = ۹ \times ۶$	$۵ \times ۹ = ۴۵$

وقتی‌که ۹ در عددی ضرب شود و یا برعکس عددی در ۹ ضرب شود، عددی به‌عنوان حاصلضرب بدست می‌آیدکه مجموع رقمهای‌آن یامساوی ۹است ویا بر۹ قابل قسمت است:

$۰ + ۹ = ۹$	$۹ \times ۱ = ۰۹$
$۱ + ۸ = ۹$	$۹ \times ۲ = ۱۸$
$۲ + ۷ = ۹$	$۹ \times ۳ = ۲۷$
$۳ + ۶ = ۹$	$۹ \times ۴ = ۳۶$
$۴ + ۵ = ۹$	$۹ \times ۵ = ۴۵$

۹×۶=۵۴	۵+۴=۹
. . . .	
۹×۹= ۸۱	۸+۱=۹
۱۰×۹= ۹۰	۹+۰=۹
۱۱×۹= ۹۹	۹+۹=۱۸، ۱+۸=۹
۱۲×۹=۱۰۸	۱+۰+۸=۹
۱۳×۹=۱۱۷	۱+۱+۷=۹
. . . .	
۴۹×۹=۴۴۱	۴+۴+۱=۹
۵۰×۹=۴۵۰	۴+۵+۰=۹
۵۱×۹=۴۵۹	۴+۵+۹=۱۸، ۱+۸=۹
۵۲×۹=۴۶۸	۴+۶+۸=۱۸، ۱+۸=۹
۵۳×۹=۴۷۷	۴+۷+۷=۱۸، ۱+۸=۹
۵۴×۹=۴۸۶	۴+۸+۶=۱۸، ۱+۸=۹
۵۵×۹=۴۹۵	۴+۹+۵=۱۸، ۱+۸=۹

. . . .

* * *

یکی ازانواع جالب ضرب در ۹ را در جدول زیر می‌بینیم:

۱×۹+۲=۱۱
۱۲×۹+۳=۱۱۱
۱۲۳×۹+۴=۱۱۱۱
۱۲۳۴×۹+۵=۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵×۹+۶=۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶×۹+۷=۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷×۹+۸=۱۱۱۱۱۱۱۱
۱۲۳۴۵۶۷۸×۹+۹=۱۱۱۱۱۱۱۱۱

و شبیه‌آن درجدول زیر:

$$۹ \times ۹ + ۷ = ۸۸$$
$$۹۸ \times ۹ + ۶ = ۸۸۸$$
$$۹۸۷ \times ۹ + ۵ = ۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶ \times ۹ + ۴ = ۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵ \times ۹ + ۳ = ۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴ \times ۹ + ۲ = ۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴۳ \times ۹ + ۱ = ۸۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴۳۲ \times ۹ + ۰ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۹۸۷۶۵۴۳۲۱ \times ۹ - ۱ = ۸۸۸۸۸۸۸۸۸۸$$

برای ضرب یك‌عدد در . . .۹۹۹ کافی است یك عمل تفریق انجام دهیم. مثلاً برای ضرب عدد ۴۶۵۳۸ در ۹۹۹، ابتدا به‌تعداد رقمهای ۹ در سمت راست این عدد صفرمی‌گذاریم و سپس خود عدد را ازآن‌کم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} ۴۶۵۳۸۰۰۰ \\ ۴۶۵۳۸ \\ \hline ۴۶۴۹۱۴۶۲ \end{array}$$

و این همان حاصلضرب مطلوبست. آیا می‌توانید دلیل این روش را بیان‌کنید؟

* * *

درمورد تقسیم بر . . .۹۹۹ هم می‌توان روش ساده‌ای پیدا کرد. فرض‌کنید می‌خواهیم عدد ۲۴۸۵۶۱ را بر ۹۹۹ تقسیم کنیم. ابتدا ۲۴۸۵۶۱ را بر ۱۰۰۰ تقسیم می‌کنیم؛ خارج قسمت مساوی ۲۴۸ و باقیمانده مساوی ۵۶۱ می‌شود. می‌نویسیم:

$$۲۴۸۵۶۱=۲۴۸\times۱۰۰۰+۵۶۱$$

ولی ۱+۹۹۹=۱۰۰۰، بنابراین

$$۲۴۸\times۱۰۰۰=۲۴۸\times۹۹۹+۲۴۸$$

و درنتیجه داریم:

$$۲۴۸۵۶۱=۲۴۸\times۹۹۹+(۲۴۸+۵۶۱)$$

از این تساوی نتیجه می‌شود: در تقسیم ۲۴۸۵۶۱ بر ۹۹۹، خارج‌قسمت را مساوی ۲۴۸ (واحدهای صحیح تقسیم عدد بر ۱۰۰۰) و باقیمانده را مساوی مجموع دو عدد می‌گیریم: یکی ۲۴۸ (تعداد هزارها در مقسوم) و ۵۶۱ (سه رقم سمت راست مقسوم). ولی ۸۰۹=۵۶۱+۲۴۸. بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{r|l} ۲۴۸۵۶۱ & ۹۹۹ \\ \hline ۸۰۹ & ۲۴۸ \end{array}$$

به‌همین ترتیب می‌توان عدد ۲۴۸۵۶۱ را بر ۹۹۹۹ تقسیم کرد: خارج‌قسمت مساوی ۲۴ و باقیمانده مساوی ۸۵۶۱+۲۴ یعنی ۸۵۸۵ می‌شود.

ضمن این روش تقسیم ممکن است حالتی پیش آید که باقیمانده ازمقسوم‌علیه بزرگترشود. مثلاً درتقسیم ۲۴۸۷۹۸ بر ۹۹۹ خارج‌قسمت مساوی ۲۴۸ و باقیمانده مساوی ۷۹۸+۲۴۸ یعنی ۱۰۴۶ می‌شود. می‌بینیم که باقیمانده از مقسوم‌علیه بزرگتر است. ولی این وضع را می‌توان به‌سادگی اصلاح کرد: در عدد ۱۰۴۶ یکبار از مقسوم علیه وجود دارد، بنابراین یك واحد به خارج قسمت اضافه می‌کنیم و باقیمانده را مساوی ۹۹۹—۱۰۴۶ یعنی ۴۷ می‌گیریم.

حالا شما این تقسیم را انجام دهید:

$$۱۰۰۰۹۹۹\div۹۹۹$$

* * *

باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است بـا باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر۹. مثال (در این مثال رقمهای خارج‌قسمت داده نشده وتنها باقیمانده‌ها داده شده است):

۱+۵+۸+۳=۱۷

۱۷÷۹
۹
———
۸

۱۵۸۳÷۹
۹
———
۶۸
۶۳
———
۵۳
۴۵
———
۸

این مطلب را همه می‌دانند و ساده‌ترین روش برای امتحـان درستی تقسیم است. از همین مطلب نتیجه می‌شود که اگر مجموع رقمهای عددی را از خود عدد کم کنیم، تفاضل بر ۹ قـابل قسمت می‌شود:

۷۵۲۳−(۷+۵+۲+۳)=۷۵۰۶

واین عدد ۷۵۰۶ بر۹ قابل قسمت است، زیرا مجموع رقمهای آن ۶+۵+۷ بر۹ قابل قسمت است.

* * *

باقیماندهٔ تقسیم مجموع چندعدد بر۹ برابراست با باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای این عددها بر۹. مثال:

۴+۵+۸=۱۷
۱+۶+۵=۱۲
۵+۷+۸=۲۰
۴۹

۴۹÷۹
۴۵
۴

۱۲۰۱÷۹
۹
۳۰
۲۷
۳۱
۲۷
۴

۴۵۸+
۱۶۵
۵۷۸
۱۲۰۱

یعنی باقیماندهٔ تقسیم۱۲۰۱ بر۹ برابراست بباقیماندهٔ تقسیم۴۹بر۹.

* * *

باقیماندهٔ تقسیم تفاضل دو عدد بر ۹ برابر است با باقیماندهٔ تفاضل مجموع رقمهای این دوعدد بر۹. مثال:

۵+۲+۶=۱۳
۱+۳+۷=۱۱
۲

۳۸۹÷۹
۳۶
۲۹
۲۷
۲

۵۲۶−
۱۳۷
۳۸۹

می‌بینیم که تفاضل مجموع رقمهای دوعدد مساوی همان باقیماندهٔ تقسیم ۳۸۹ بر۹ است.

دراین قاعده ممکن است گاهی مجموع رقمهای مفروق‌منه از مجموع رقمهای مفروق بیشتر باشد، در اینصورت به مجموع رقمهای‌مفروق آنقدر۹اضافه می کنیم تاازمجموع رقمهای‌مفروق‌منه بیشترشود. مثال:

١+٠+٠+١=٢
٦+٧+٨=٢١

٣٢٣÷٩
٢٧
٥٣
٤٥
٨

١٠٠١−
٦٧٨
٣٢٣

دراینجا چگونه ٢١ را از ٢ کم کنیم؟ به‌عدد ٢ سه بار ٩ اضافه می‌کنیم (این عمل در باقیماندۀ تقسیم بر ٩ تغییری نمی‌دهد)؛ دراین‌صورت ٢١ − ٢٩ مساوی ٨ می‌شود که همان باقیماندۀ تقسیم عدد ٣٢٣ بر ٩ است.

* * *

بالاخره باقیماندۀ تقسیم حاصلضرب دو عدد بر ٩ را هم می‌توان بدست آورد: باقیمانده‌های تقسیم هریك از دو عامل ضرب را بر ٩ پیدا می‌کنیم وسپس باقیماندۀ تقسیم حاصلضرب این‌دوعدد را بر ٩ بدست می‌آوریم. مثال:

١+٢+٤=٧
٢+٦=٨

٣٢٢٤÷٩
٢٧
٥٢
٤٥
٧٤
٧٢
٢

١٢٤×
٢٦
٧٤٤
٢٤٨
٣٢٢٤

باقیماندۀ تقسیم دو عامل ضرب بر ٩ به‌ترتیب مساوی ٧ و ٨ و حاصلضرب آنها مساوی ٥٦ است. باقیماندۀ تقسیم این عدد بر ٩ مساوی ٢ می‌شود که همان باقیماندۀ تقسیم ٣٢٢٤ بر ٩ است.

* * *

بااستفاده ازاین خصوصیت می‌توان روش جالبی برای تقسیم عددهای بزرگ بر۹ بدست آورد.

فرض کنید بخواهیم عدد ۴۱۸ ۵۲۴ ۶۵۷ را بر ۹تقسیم کنیم. مجموع رقمهای این عدد مساوی ۴۲ می‌شود، بنابراین باقیماندهٔ تقسیم عدد بر ۹ همان باقیماندهٔ تقسیم ۴۲ بر ۹ یعنی ۶ است. اگر ۶ را از عدد مفروض کم کنیم، عدد ۴۱۲ ۵۲۴ ۶۵۷ بدست می‌آیدکه بر۹ قابل قسمت است.

حالاتقسیم‌بر ۹ را می‌توان به‌این‌ترتیب انجام داد: مقسوم را می‌نویسیم (البته بعد از آنکه باقیماندهٔ تقسیم بر ۹ را از آن کم کرده‌ایم)، روی آخرین رقم این مقسوم یك صفرمی‌گذاریم وفرض می‌کنیم که این صفررقم آخرعددی است که روی مقسوم قرار دارد و می‌خواهیم مقسوم را ازآن کم کنیم:

$$\begin{array}{r} 0 \\ \underline{657524412} \\ 8 \end{array}$$

رقم ۸ راکه در تفاضل بدست می‌آید سمت چپ صفر می‌نویسیم و تفریق را ادامه می‌دهیم:

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{657524412} \\ 68 \end{array}$$

و به‌همین ترتیب تفریق را تاآخر جلو می‌بریم:

$$
\begin{array}{r}
۷۳۰۵۸۲۶۸۰ - \\
\underline{۶۵۷۵۲۴۴۱۲} \\
۷۳۰۵۸۲۶۸
\end{array}
$$

عدد تفاضل، یعنی ۷۳۰۵۸۲۶۸ همان عدد مورد نظر است، به‌خاطر داشته باشیم که برای انجام این عمل باید ابتدا باقیماندهٔ تقسیم بر۹ را از عددکم کرد.

* * *

اگر یك عدد دورقمی بنویسیم وسپس مقلوب[1] آنرا از آن‌کم کنیم، همیشه عددی بدست می‌آیدکه بر۹ قابل‌قسمت است؛ مثلاً:

$$
\begin{array}{r}
۶۳ - \\
\underline{۳۶} \\
۲۷
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
۹۲ - \\
\underline{۲۹} \\
۶۳
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
۷۲ - \\
\underline{۲۷} \\
۴۵
\end{array}
$$

علاوه برآن همانطورکه دیده می‌شود، این تفاضل برابر است با حاصلضرب عدد۹ درتفاضل رقمهای عدد مفروض:

$$۷۲ - ۲۷ = ۴۵ = ۹ \times (۷ - ۲)$$

از این تبصره گاهی حسابدارها برای پیدا کردن اشتباه تراز استفاده می‌کنند، این بازرسی با تبدیل رقمها در عددهایی‌که در اینطرف و طرف دیگر دفتر حسابداری نوشته شده است انجام می‌گیرد.

* * *

اگریك عدد سه‌رقمی انتخاب‌کنیم، به‌نحوی که رقمهای اول

---

۱) مقلوب یك عدد، یعنی عددی که با همان رقمها و از جهت عکس نوشته شود.

و آخر آن باهم مساوی نباشند، و ازاین عدد مقلوب آنرا کم کنیم، تفاضل همیشه بر ۹ قابل قسمت است و ضمناً رقم وسط تفاضل مساوی ۹ است:

$$۵۶۳-۳۶۵=۱۹۸ \quad ; \quad ۷۵۶-۶۵۷=۰۹۹$$

* * *

اگرعددهایی که از رقمهای مساوی ۹ تشکیل شده‌اند به‌توان۲ برسانیم، نتیجه‌های بسیار جالبی بدست می‌آید:

$$۹^۲=۸۱$$
$$۹۹^۲=۹۸۰۱$$
$$۹۹۹^۲=۹۹۸۰۰۱$$
$$۹۹۹۹^۲=۹۹۹۸۰۰۰۱$$
$$۹۹۹۹۹^۲=۹۹۹۹۸۰۰۰۰۱$$

. . . .

برای نوشتن نتیجهٔ توان‌دوم چنین عددهایی، ابتدا ۸۱را می‌نویسیم، سپس رقمهای ۹ را قبل از ۸ و رقمهای صفر را قبل از ۱ به‌اندازهٔ یك واحد کمترتعداد رقمهای عددی که بتوان می‌رسانیم، قرار می‌دهیم.

* * *

دربارهٔ نوشتن یك عدد به‌کمك چهار عمل حساب، سؤالهای جالب زیادی پیش می‌آید. مثلاً اینکه آیا می‌توان عدد ۹ را به‌کمك هر ده‌عدد یك رقمی نشان داد؟

و اینك نمایش عدد ۹ به‌این صورت عجیب:

$$\frac{۹۵۷۴۲}{۱۰۶۳۸} \quad \text{یا} \quad \frac{۹۵۸۲۳}{۱۰۶۴۷} \quad \text{یا} \quad \frac{۹۷۵۲۴}{۱۰۸۳۶}$$

ضمناً به‌این نکته باید توجه کرد که درهرسه مورد ازهریك از ده رقم تنها یکبار استفاده شده است.

و اینهم نمایش عدد۹به کمك نه رقم و بدون استفاده ازصفر.

$$\frac{۵۷۴۲۹}{۶۳۸۱} \quad یا \quad \frac{۵۸۲۳۹}{۶۴۷۱} \quad یا \quad \frac{۷۵۲۴۹}{۸۳۶۱}$$

حالا ببینیم یك عدد بزرگ را چگونه می‌توان به کمك تنها سه تا ۹ نوشت؟

باید عددهای ۹ را به این ترتیب نوشت: $۹^{۹^{۹}}$.

دراین عدد باید عدد۹ به توان $۹^{۹}$ برسد. ولی

$$۹^{۹} = ۳۸۷\ ۴۲۰\ ۴۸۹\ ;\ ۹^{۹^{۹}} = ۹^{۳۸۷۴۲۰۴۸۹}$$

به‌عبارت دیگر باید ۳۸۷۴۲۰۴۸۹ بار عدد ۹ را در خودش ضرب کرد تاعدد مطلوب بدست آید.

اگر عدد $۹^{۹^{۹}}$ را در دستگاه عدد شماری دهدهی بنویسیم، دارای ۱۲۸ ۶۹۲ ۳۶۹ رقم خواهد بود.

اگر بخواهیم این عدد را روی یك نوار کاغذی بنویسیم و فرض کنیم که برای هررقم ۴ میلیمتر جا لازم باشد، باید نواری به‌طول بیش از ۱۴۷۸ کیلومتر انتخاب کنیم.

طول این نوار ۸۶ کیلومتر بیشتر از طول راه‌آهن سراسری ایران (از بندرشاه درشمال تا بندر شاهپور در جنوب) می‌باشد.

اگر فرض کنیم که برای نوشتن هررقم یك ثانیه وقت لازم باشد و یك نفرهرروز ۱۰ ساعت کار کند، ۲۸ سال و ۴۸ روز طول می‌کشد تا این عدد نوشته شود؛ به‌شرط اینکه حتی روزهای جمعه

و تعطیل هم کار کند.

برای بهترشناختن این عدد متذکر می‌شویم کـه رقم اول این عدد مساوی ۲ و رقم‌آخرآن مساوی ۹ است. بجز این دورقم باید بدون کم و بیش ۳۶۹۶۹۲۱۲۶ رقم دیگررا تعیین کرد. ولی باکمال تأسف اطلاع از این دورقم به‌سهولت محاسبه کمکی نمی‌کند. من اینطور فکرمی‌کنم.

۲ـ خاصیتهای مخصوص عدد ۱۱

این خصوصیت را **ابن‌البان** مراکشی کشف کرده است که‌در کتاب «جزوهٔ تحلیلی مسأله‌هـایی در زمینهٔ محاسبه» چاپ کرده است.

او متذکر می‌شود کـه برای بدست آوردن توانی از ۱۱ لازم نیست که ضرب خسته‌کنندهٔ ...۱۱.۱۱.۱۱ (n عامل) را انجام دهیم.

این روش را باتوجه به‌ضربهای زیر می‌توان فهمید:

$$۱+۱=۲ \qquad ۱۱^{۱}=۱۱$$
$$۱+۲+۱=۴=۲^{۲} \qquad ۱۱^{۲}=۱۲۱$$
$$۱+۳+۳+۱=۸=۲^{۳} \qquad ۱۱^{۳}=۱۳۳۱$$
$$۱+۴+۶+۴+۱=۱۶=۲^{۴} \qquad ۱۱^{۴}=۱۴۶۴۱$$

. . . .

در هرمی که از توانهـای متوالی ۱۱ بدست می‌آید، برای اینکـه توانی از ۱۱ را بدست آوریـم به این ترتیب عمل می‌کنیم:

رقم یکان همیشه مساوی ۱ است، رقم دهگان برابر است با رقم دهگان به اضافهٔ رقم یکان توان قبلی ۱۱، رقم سدگان برابر است با رقم سدگان به‌اضافهٔ رقم دهگان توان قبلی وغیره.

وقتی‌که ضربهای زیر را (که ضرب عددهایی با رقمهای مساوی واحداست) نیز انجام دهیم به‌رقمهای جالبی درحاصلضرب می‌رسیم:

۱۱·۱۱۱ = ۱۲۲۱

۱۱۱·۱۱۱۱۱ = ۱۲۳۳۳۲۱

۱۱۱۱·۱۱۳۱۱۱۱ = ۱۲۳۴۴۴۳۲۱

. . . .

* * *

از به‌توان رساندن عددهایی‌که رقمهای‌آنها تنها از ۱تشکیل شده است، بازهم هرم جالبی بدست می‌آید:

$۱^{۲}=۱$

$۱۱^{۲}=۱۲۱$

$۱۱۱^{۲}=۱۲۳۲۱$

$۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۳۲۱$

$۱۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۵۴۳۲۱$

$۱۱۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۵۶۵۴۳۲۱$

$۱۱۱۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۵۶۷۶۵۴۳۲۱$

$۱۱۱۱۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۵۶۷۸۷۶۵۴۳۲۱$

$۱۱۱۱۱۱۱۱۱^{۲}=۱۲۳۴۵۶۷۸۹۸۷۶۵۴۳۲۱$

اگر دوطرف این تساوی را در عدد

۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۸+۷+۶+۵+
+۴+۳+۲+۱

یعنی در ۹×۹ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹ \times ۹۹۹\ ۹۹۹\ ۹۹۹ =$$
$$= ۱۲۳۴۵۶۷۸۹۸۷۶۵۴۳۲۱ \times (۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+$$
$$+۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱)$$

عددهایی هم که به عنوان مجذور «واحدها» بدست می‌آیند، خاصیت جالبی دارند:

$$۱+۲+۱=۴=۲^۲$$
$$۱+۲+۳+۲+۱=۹=۳^۲$$
$$۱+۲+۳+۴+۳+۲+۱=۱۶=۴^۲$$
$$۱+۲+۳+۴+۵+۴+۳+۲+۱=۲۵=۵^۲$$
$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۵+۴+۳+۲+۱=۳۶=۶^۲$$

. . . .

علاوه برآن هر یك از این عددهـا را می‌توان به‌این صورت غیرعادی نوشت:

$$۱۱^۲=۱۲۱ = \frac{۲۲ \times ۲۲}{۱+۲+۱}$$
$$۱۱۱^۲=۱۲۳۲۱ = \frac{۳۳۳ \times ۳۳۳}{۱+۲+۳+۲+۱}$$
$$۱۱۱۱^۲=۱۲۳۴۳۲۱ = \frac{۴۴۴۴ \times ۴۴۴۴}{۱+۲+۳+۴+۳+۲+۱}$$

. . . .

* * *

اگر بخواهیم تقسیم بر ۱۱ را بطـور ساده‌ای انجـام دهیم، می‌توانیم از روشی استفاده کنیم که روش سادهٔ تقسیم بر ۹ را به‌خاطر می‌آورد.

مثلاً می‌خواهیم عدد ۳۴۵۷۸۵ را بر ۱۱ تقسیم کنیم. زیر آخرین رقم عدد مقسوم، صفر می‌گذاریم، صفررا از۵ کم می‌کنیم و حاصل را که ۵ می‌شود زیر ۸ می‌نویسیم؛ ۵ را از ۸ کم می‌کنیم و تفاضل را که ۳ می‌شود زیر ۷ می‌نویسیم؛ ۳ را از ۷ کم می‌کنیم و تفاضل را که ۴ می‌شود زیر ۵ می‌نویسیم، الی آخر:

$$\begin{array}{r} 345785 - \\ 314350 \\ \hline 31435 \end{array}$$

تفاضل این دوعدد، همان مقسوم‌علیه مجهول خواهد بود.

عددی انتخاب می‌کنیم که لااقل چهاررقم داشته باشد. فرض کنید این عدد ۴۳۳۵۷ باشد. زیر عدد ۴۳۳۵۷ همین عدد را دوباره می‌نویسیم، به نحوی که اولین رقم عدد دوم زیر چهارمین رقم عدد اول باشد، سپس دوعدد را به‌ترتیبی که نوشته شده است باهم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 43357 \\ 43357 + \\ \hline 43400357 \end{array}$$

حالا اگر مجموعی را که بدست می‌آید ابتدا بر ۷ و سپس حاصل آنرا بر۱۱ و حاصل آنرا بر ۱۳ تقسیم کنیم، همان عدد اول بدست می‌آید:

$$43400357 : 7 = 6200051$$

$$6200051 : 11 = 563641$$

$$563641 : 13 = 43357$$

این مطلب از اینجا ناشی می‌شود که حاصلضرب این سه عدد

۷×۱۱×۱۳=۱۰۰۱

درحقیقت دوعددی را که باهم جمع کرده‌ایم می‌توان به‌این ترتیب نوشت:

۴۳۳۵۷×۱۰۰۰+۴۳۳۵۷=۴۳۳۵۷(۱۰۰۰+۱)=۴۳۳۵۷×
×۱۰۰۱

و چون ۱۰۰۱ : ۷=۱۴۳، ۱۴۳ : ۱۱=۱۳ و ۱۳ : ۱۳=۱، بنابر-
این بعد از انجام این سه تقسیم به‌همان عدد ۴۳۳۵۷ می‌رسیم.

اگر عدد را سه رقمی انتخاب کنیم، عمل جمعی را که بالا ذکر کردیم منجر به‌این می‌شود که یکبار دیگر عدد راسمت راست عدد اصلی بنویسیم، مثلاً

```
۳۴۵
   ۳۴۵+
-------
۳۴۵۳۴۵
```

و دوباره داریم:

[(۳۴۵۳۴۵ : ۷) : ۱۱] : ۱۳=۳۴۵

* * *

ازقبل هم می‌توان به‌نزدیکی دوعدد ۹ و ۱۱ پی برد. دراینجا ما به‌یکی از روابط خویشاوندی این دوعدد توجه می‌کنیم.

وقتی که ازخاصیتهای جالب عدد۹ صحبت می‌کردیم، به‌این نکته توجه کردیم که اگرازیك عدد سه‌رقمی، مقلوب آنرا کم کنیم، تفاضل همیشه مضربی از ۹ است. حالامتذکرمی‌شویم که این‌تفاضل ضمناً مضرب ۱۱ هم خواهد بود، مثلاً:

۹۳۲−۲۳۹=۶۹۳=۹.۷.۱۱

۸۴۵−۵۴۸=۲۹۷=۹.۳.۱۱

علت این امرچیست؟

فرض‌کنیم در یك عدد سه رقمی (که باید دو رقم اول و آخرآن یکی نباشد)، رقم سدگان مساوی a ، دهگان مساوی b و یکان مساوی c باشد. این عدد را می‌توان به صورت $100a+10b+c$ نوشت. اگر رقمهای این عددرا به‌ترتیب عکس بنویسیم به‌صورت$100c+10b+a$ درمی‌آید. اگر تفاضل این دو عدد را بر۹ تقسیم‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{100a+10b+c-(100c+10b+a)}{9}=\frac{99(a-c)}{9}=$$
$$=11(a-c)$$

بنابراین اگرکسی یك‌عدد سه‌رقمی را نام ببرد ، می‌توان تفاضل دو رقم اول و آخر این عدد را در۱۱ ضرب کرد تا خارج‌قسمت تفاضل عدد و مقلوب آن بر۹ بدست آید.

۳ـ خاصیتهای جالب عددهای ۳۷ ، ۴۱ ، ۴۵ و بعضی عددهای دیگر

یك تصاعد حسابی می‌نویسیم که جملهٔ اول و قدر نسبت آن هردو مساوی ۳ باشد، این تصاعد چنین است:

۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸, ۲۱, ۲۴, ۲۷;

اگر هریك از جمله‌هـای این تصاعد را در ۳۷ ضرب کنیم، بدست می‌آید:

۱۱۱, ۲۲۲, ۳۳۳, . . . , ۹۹۹

دراین تصاعد جدید نه‌تنها هرجمله عددی سه رقمی بارقمهای مساوی است، بلکه اگر درهرجملهٔ تصاعد مجموع رقمهارا درنظر بگیریم به‌همان تصاعد اولی می‌رسیم:

$1+1+1=3,\ 2+2+2=6,\ \ldots,\ 9+9+9=27$

روشن کردن علت این امر به‌هیچوجه مشکل نیست.

* * *

عدد سه رقمی دلخواهی انتخاب می کنیم (مثلاً ۲۳۸). اختلاف این عدد با ۹۹۹ را (که در اینجا مساوی ۷۶۱ می‌شود) سمت راست آن می‌نویسیم. عدد شش رقمی که به این ترتیب بدست می‌آید دارای این خاصیت عجیب است که همیشه بر ۳۷ قابل قسمت است، خارج قسمتی که بدست می‌آید به‌نوبهٔ خود بر ۲۷ قابل قسمت است و بالاخره خارج قسمت دوم همیشه یك واحد از عدد سه‌رقمی انتخابی بیشتر است.

$$۲۳۸$$

$$۲۳۸۷۶۱ : ۳۷ = ۶۴۵۳$$

$$۶۴۵۳ : ۲۷ = ۲۳۹$$

$$۲۳۹ = ۲۳۸ + ۱$$

علت این امررا روشن کنیم.

اگر عدد انتخابی را a فرض کنیم، عملهای لازم به اینصورت خواهد بود:

$$a.۱۰۰۰ + (۹۹۹ - a) = ۹۹۹a + ۹۹۹ = ۹۹۹(a + ۱),$$

از طرف دیگر $۹۹۹ = ۳۷ \times ۲۷$، بنابراین:

$$a.۱۰۰۰ + (۹۹۹ - a) = ۳۷.۲۷(a + ۱)$$

* * *

حاصلضرب عدد ۳۷ در مجموع رقمهای آن برابر است با مجموع توانهای سوم همین رقمها:

$$۳۷.(۳ + ۷) = ۳^۳ + ۷^۳$$

و اگر عدد ۳۷ را به‌حاصلضرب رقمهای آن اضافه کنیم ، مساوی مجموع مربعهای رقمهای آن می‌شود:

$$۳۷+۳\times۷=۳^{۲}+۷^{۲}$$

و بالاخره ازضرب ۳۷ در دورقم خودش، حاصلضرب بسیارجالبی به‌دست می‌آید:

$$۳۷\times۳\times۷=۷۷۷$$

* * *

یك خاصیت بسیار جالب عدد ۳۷ هم اینست که بعضی از مضربهای آن ضمن تبدیل دوری رقمهایشان همیشه بر۳۷قابل‌قسمت باقی می‌مانند. مثلاً:

$$۲۵۹=۳۷.۷ \qquad ۱۸۵=۳۷.۵ \qquad ۲۹۶=۳۷.۸$$
$$۵۹۲=۳۷.۱۶ \qquad ۵۱۸=۳۷.۱۴ \qquad ۶۲۹=۳۷.۱۷$$
$$۹۲۵=۳۷.۲۵ \qquad ۸۵۱=۳۷.۲۳ \qquad ۹۶۲=۳۷.۲۶$$

همین خاصیت را در مورد بعضی عددها نسبت به ۴۱ هم می‌توان‌پیدا کرد. مثلاً:

$$۱۷۵۸۹=۴۱.۴۲۹$$
$$۷۵۸۹۱=۴۱.۱۸۵۱$$
$$۵۸۹۱۷=۴۱.۱۴۳۷$$
$$۸۹۱۷۵=۴۱.۲۱۷۵$$
$$۹۱۷۵۸=۴۱.۲۲۳۸$$

* * *

عدد ۴۵ از چهار عدد ۸ ، ۱۲ ، ۵ و ۲۰ تشکیل شده است ، به‌عبارت دیگر:

۴۵=۸+۱۲+۵+۲۰

اگربا هریك ازاین چهار عدد یکی ازچهارعمل حساب رابا۲ انجام دهیم، درهرحال عدد ۱۰ بدست می آید:

۸+۲=۱۰
۱۲−۲=۱۰
۵×۲=۱۰
۲۰:۲=۱۰
———
۴۵

این خاصیت مخصوص عدد ۴۵ نیست. اگرعددی به صورت $c=a(b+1)^2$ باشد (a و b دوعدد طبیعی دلخواهند)، می‌توان عدد c را به مجموع چهار عدد c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 چنان تبدیل کرد که داشته باشیم:

$$c=c_1+c_2+c_3+c_4$$
$$c_1+b=ab$$
$$c_2-b=ab$$
$$c_3 \,.\, b=ab$$
$$c_4 : b=ab$$

مثلاً عدد ۴۰۰ پنج نوع تبدیل از این قبیل دارد:

۷۲+۳=۷۵
۷۸−۳=۷۵
۲۵ . ۳=۷۵
۲۲۵ : ۳=۷۵
———
۴۰۰

۶۰+۴=۶۴
۶۸−۴=۶۴
۱۶ . ۴=۶۴
۲۵۶ : ۴=۶۴
———
۴۰۰

۲۷+۹=۳۶
۴۵−۹=۳۶
۴ . ۹=۳۶
۳۲۴ : ۹=۳۶
———
۴۰۰

۹۹+۱=۱۰۰
۱۰۱−۱=۱۰۰
۱۰۰ . ۱=۱۰۰
۱۰۰ : ۱=۱۰۰
———
۴۰۰

۰+۱۹=۱۹
۳۸−۱۹=۱۹
۱ . ۱۹=۱۹
۳۶۱ : ۱۹=۱۹
———
۴۰۰

به‌عدد ۴۵ برمی‌گردیم. این عدد مساوی مجموع نه رقم زیر است:

۴۵=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹

کسی در این مورد اعتراضی نخواهد داشت که مجموع چند عدد را از مجموع چند عدد دیگر کم کنیم، تنها باید عدد اول از عدد دوم کوچکتر باشد. مجموع ۹ رقم را از ۹ تا ۱ می‌نویسیم و زیر آن همان رقمها را از جهت عکس (یعنی به‌ردیف طبیعی):

۹+۸+۷+۶+۵+۴+۳+۲+۱ −
۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹
―――――――――――――
۸+۶+۴+۱+۹+۷+۵+۳+۲

تفریق را به‌طریق معمولی و از راست به‌چپ انجام داده‌ایم: ۹ را نمی‌توان از ۱ کم کرد، یك واحد از عدد بعدی (یعنی ۲) می‌گیریم و پهلوی ۱ می‌گذاریم ۱۱ می‌شود و ۹ را از ۱۱ کم می‌کنیم. دوباره ۸ را نمی‌توان از ۱ کم کرد آنرا از ۱۱ کم می‌کنیم (رقم ۱ سمت چپ را از ۳ گرفته‌ایم) و به‌همین ترتیب تاآخر تفریق را ادامه می‌دهیم. برای تفاضل مجموع همان ۹ رقم بدست می‌آید که البته بطور نامنظم به‌دنبال یکدیگر آمده‌اند. به‌این ترتیب برای تفاضل هم عددی مساوی ۴۵ بدست می‌آید و ظاهراً داریم:

۴۵ − ۴۵ = ۴۵

ولی این یك شوخی است. دراین عمل درحقیقت این دوعدد را از هم کم کرده‌ایم:

۹۸۷۶۵۴۳۲۱ −
۱۲۳۴۵۶۷۸۹
―――――――
۸۶۴۱۹۷۵۳۲

یعنی اگر رقمهای نه‌گانه را به‌ترتیب ازچپ به‌راست بنویسیم وعددی راکه بدست می‌آید از مقلوب خودش کم کنیم، در تفاضل عددی باهمان رقمهای نه‌گانه، منتهی به‌ترتیب نامنظم بدست می‌آید.

* * *

حالا که صحبت از عدد نه رقمی یا نه رقم ۱ تا ۹ است که به ترتیب صعودی نوشته شده باشد، متذکر می‌شویم که اگر چنین عددی را درعددهای ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ و ۸، یعنی درهریك از رقم‌هایی که مضرب ۳ نیستند، ضرب کنیم، برای حاصلضرب هم عددی ۹ رقمی بدست می‌آید که هیچیك از رقمهای آن تکرارنشده است:

$$۲ \cdot ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ = ۲۴۶۹۱۳۵۷۸$$
$$۴ \cdot ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ = ۴۹۳۸۲۷۱۵۶$$
$$۵ \cdot ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ = ۶۱۷۲۸۳۹۴۵$$
$$۷ \cdot ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ = ۸۶۴۱۹۷۵۲۳$$
$$۸ \cdot ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ = ۹۸۷۶۵۴۳۱۲$$

یعنی مجموع رقمهای‌هریك ازاین حاصلضربها هم مساوی ۴۵ است.

* * *

۴ـ عدد ۱۰۰

دربارهٔ این عدد گرد و زیبا حرفهای بسیاری می‌توان گفت. شبیه عدد ۴۵، عدد ۱۰۰ را هم می‌توان به صورت مجموع چهار عدد ۶۴+۴+۲۰+۱۲ نوشت. به‌نحوی که اگر به ترتیب هریك از چهار عمل حساب را روی این چهار عدد با عدد ۴ انجام دهیم، همیشه ۱۶ بدست می‌آید:

$$
\begin{array}{r}
۱۲+۴=۱۶\\
۲۰-۴=۱۶\\
۴\,.\,۴=۱۶\\
۶۴:۴=۱۶\\
\hline
۱۰۰
\end{array}
$$

* * *

۱۰۰ برابر است با مجموع توانهای سوم چهار عدد طبیعی اولیه:

$$۱۰۰=۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+۴^{۳}=۱+۸+۲۷+۶۴$$

* * *

عدد ۱۰۰ را با روشهای جالب وعجیب وبه‌وسیلهٔ‌همهٔ رقمهای دیگر (البته بجز ۱ و دوتا صفر) می‌توان نشان داد.

عدد ۱۰۰ را می‌توان به‌وسیلهٔ پنج رقم مساوی بیان کرد:

$$
\begin{array}{c}
۱۱۱-۱۱\\
۳\,.\,۳۳+(۳:۳)\\
۵\,.\,۵\,.\,۵-۵\,.\,۵\\
۵\,.\,(۵+۵+۵+۵)
\end{array}
$$

آنرا می‌توان به‌وسیلهٔ شش رقم ۹ نشان داد: $۹۹\frac{۹۹}{۹۹}$.

نشان دادن عدد ۱۰۰ به‌کمك همهٔ ۹عدد طبیعی اولیه‌هم خیلی‌جالب است:

$$۱۰۰=۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸\,.\,۹$$

و اینهــا نمونه‌های دیگری از نمایش عدد ۱۰۰ به کمك این ۹ عدد طبیعی است:

$$۹۱+\frac{۷۵۴۲}{۶۳۸}\;;\qquad ۹۱+\frac{۷۵۲۴}{۸۳۶}\;;\qquad ۷۵+۲۴+\frac{۳}{۶}+\frac{۹}{۱۸}\;;$$

$$۹۴+\frac{۱۵۷۸}{۲۶۳}\ ;\quad ۹۴+۵+\frac{۳۸}{۷۶}+\frac{۱}{۲}\ ;\quad ۹۱+\frac{۵۸۲۳}{۶۴۷}\ ;$$

$$۹۶+\frac{۱۷۵۲}{۴۳۸}\ ;\quad ۹۶+\frac{۱۴۲۸}{۳۵۷}\ ;\quad ۹۶+\frac{۲۱۴۸}{۵۳۷}$$

و بالاخره دو نمونهٔ نشان دادن عدد ۱۰۰ به‌کمك ده رقم:

$$۷۸+۲۱+\frac{۳}{۶}+\frac{۴۵}{۹۰}\ ;\quad ۵۰+۴۹+\frac{۱}{۲}+\frac{۳۸}{۷۶}$$

و اگرحوصله‌کنید می‌توانید صدها نوع ازاین قبیل برای نشان‌دادن عدد ۱۰۰ پیدا کنید.

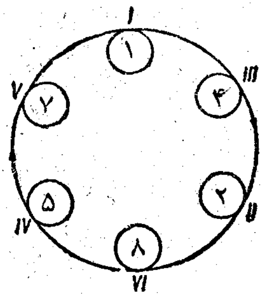
ه‍ـ چرخ و فلك عددی

یکی از عددهای اسرارآمیز ۱۴۲۸۵۷ است. این عدد از تبدیل کسر $\frac{۱}{۷}$ بــه کسر اعشاری بدست می‌آید:

$$\begin{array}{l|l}
۱ & ۷ \\ \hline
۱۰ & ۰/۱۴۲۸۵۷ \\
\underline{۷} & \\
۳۰ & \\
\underline{۲۸} & \\
\ \ ۲۰ & \\
\ \ \underline{۱۴} & \\
\ \ \ ۶۰ & \\
\ \ \ \underline{۵۶} & \\
\ \ \ \ ۴۰ & \\
\ \ \ \ \underline{۳۵} & \\
\ \ \ \ \ ۵۰ & \\
\ \ \ \ \ \underline{۴۹} & \\
\ \ \ \ \ \ ۱ &
\end{array}$$

در خـارج قسمت عدد ۱۴۲۸۵۷/۰ بدست می‌آیـد و در باقیمانده عدد۱ که همان‌عدد اصلی است. اگرتقسیم را ادامه دهیم، در هرحال همین رقمهـای ۱۴۲۸۵۷ پیدا می‌شود کـه می‌تواند تـا بی‌نهایت ادامه داده شود.

اگر این عدد را به‌ترتیب درعددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و۶ ضرب کنیم، حاصلضربها عددهایی شش رقمی خواهند بود که از تبدیل دوری همین عدد ۱۴۲۸۵۷ بدست می‌آید. کافی‌است‌به جدول زیر و دایره‌ای که درآن این رقمها جا داده شده‌اند (شکل ۴۱) توجه کنیم:



شکل ۴۱

I- ۱.۱۴۲۸۵۷=۱۴۲۸۵۷
II- ۲.۱۴۲۸۵۷=۲۸۵۷۱۴
III- ۳.۱۴۲۸۵۷=۴۲۸۵۷۱
IV- ۴.۱۴۲۸۵۷=۵۷۱۴۲۸
V- ۵.۱۴۲۸۵۷=۷۱۴۲۸۵
VI- ۶.۱۴۲۸۵۷=۸۵۷۱۴۲

اگر I، VI، II، V، III، IV را با هم جمع کنیم، به‌نتیجهٔ جالبی می‌رسیم.

اگر این عدد اسرارآمیز ۱۴۲۸۵۷ را در ۷ ضرب کنیم، عدد ۹۹۹۹۹۹ بدست می‌آید.

حالا این عدد ۱۴۲۸۵۷ را در ۸ ضرب می‌کنیم، نتیجهٔ بسیار جـالب ۱۱۴۲۸۵۶ پیدا می‌شود؛ اگر رقـم سمت چپ این عدد را برداشته و به‌رقم سمت راست آن اضافه کنیم همان عدد ۱۴۲۸۵۷

بدست می‌آید. با ضرب این عدد در عددهای مختلف، همیشه هیمنگونه عددی بدست می‌آید که از همین رقمهای ۱، ۴، ۲، ۸، ۵ و ۷ تشکیل شده ویکی از تبدیلهای دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ می‌باشد:

۸.۱۴۲۸۵۷ = ۱۱۴۲۸۵۶(۱۴۲۸۵۷)

۹.۱۴۲۸۵۷ = ۱۲۸۵۷۱۳(۲۸۵۷۱۴)

۱۰.۱۴۲۸۵۷ = ۱۴۲۸۵۷۰(۴۲۸۵۷۱)

۱۱.۱۴۲۸۵۷ = ۱۵۷۱۴۲۷(۵۷۱۴۲۸)

. . . .

۲۳.۱۴۲۸۵۷ = ۳۲۸۵۷۱۱(۲۸۵۷۱۴)

. . . .

۸۹.۱۴۲۸۵۷ = ۱۲۷۱۴۲۷۳(۷۱۴۲۸۵)

درحاصلضرب اخیریك عدد هشت‌رقمی بدست می‌آید، بنابراین باید دو رقم سمت چپ آنرا حذف کرد و آنرا به دو رقم سمت راست عدد اضافه کرد.

به‌همین ترتیب در مورد سه رقم اول در حاصلضرب زیر باید عمل کرد:

۲۳۱۳.۱۴۲۸۵۷ = ۳۳۰۴۲۸۲۴۱(۴۲۸۵۷۱)

فقط ضرب عدد ۱۴۲۸۵۷ درعددهایی که بر۷ قابل قسمت‌اند، از این قاعده استثنا هستند. در این حالت باید گفت که حاصلضرب رقمهایی «یکجور» بدست می‌آید.

توضیح دیگری هم در بارهٔ این عدد اسرار آمیز داریم. اگر هرکدام از حاصلضربهایی که از ضرب ۶ رقم اولیه در ۱۴۲۸۵۷ بدست می‌آید به سه‌عدد دورقمی تبدیل کنیم، هرکدام ازاین عددها

یا مساوی ضرب ۷ در ۲، ۴، ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ هستند ویا یك واحد از این حاصلضرب بیشترند، مثلاً:

۴۲|۸۵|۷۱	۱۴|۲۸|۵۷
۴۲=۷.۶	۱۴=۷.۲
۸۵=۷.۱۲+۱	۲۸=۷.۴
۷۱=۷.۱۰+۱	۵۷=۷.۸+۱

اگرعدد۱۴۲۸۵۷را در۳۲۶۴۵۱ ضرب کنیم، نتیجه‌ای بدست می‌آید که مبین خاصیت جالب دیگری ازاین عدد است:

```
      ۱۴۲۸۵۷×
      ۳۲۶۴۵۱
      ------
      ۱۴۲۸۵۷
     ۷۱۴۲۸۵
    ۵۷۱۴۲۸
   ۸۵۷۱۴۲
  ۲۸۵۷۱۴
 ۴۲۸۵۷۱
-----------
 ۴۶۶۳۵|۸۱۰۵۰۷
```

۴۶۶۳۵+۸۱۰۵۰۷=۸۵۷۱۴۲

* * *

راز این خاصیتهای «غیرعادی» عدد ۱۴۲۸۵۷ درکجاست؟

اگر نتوانستید این راز را کشف کنید می‌توانید در فصل دوم همین کتاب آنرا پیدا کنید. در آنجا این خاصیتها و خاصیتهای مشابهی روشن شده است.

۶ـ در بارهٔ هشت رقم بدون هشت ودربارهٔ هشت بدون هشت رقم

عددی که از هشت رقم متوالی بدون خود هشت تشکیل شده

است به‌این صورت است: ۱۲۳۴۵۶۷۹. این عدد بااین خصوصیت مشخص می‌شود که اگر آنرا در۹ و مضربهای ۹ که درجدول ضرب وجود دارد، یعنی عددهای ۹ ، ۱۸ ، ۲۷، ۳۶، ۴۵، ۵۴، ۶۳، ۷۲ و ۸۱، ضرب کنیم، درحاصلضرب عددهایی بدست می‌آید که برای هرمورد رقمهایی یکنواخت دارد:

$$۹.۱۲۳۴۵۶۷۹=۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$
$$۱۸.۱۲۳۴۵۶۷۹=۲۲۲۲۲۲۲۲۲$$
$$۲۷.۱۲۳۴۵۶۷۹=۳۳۳۳۳۳۳۳۳$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$۶۳.۱۲۳۴۵۶۷۹=۷۷۷۷۷۷۷۷۷$$
$$۷۲.۱۲۳۴۵۶۷۹=۸۸۸۸۸۸۸۸۸$$
$$۸۱.۱۲۳۴۵۶۷۹=۹۹۹۹۹۹۹۹۹$$

به‌سادگی می‌توان متوجه شد که هر رقم حاصلضرب مساوی تعداد نه هایی است که درمضروب وجود دارد و یا مساوی تفاضل این مضروب از نزدیکترین عددی‌است که به صفر ختم شده است؛ مثلاً:

$$۱۰-۹=۱,\quad ۲۰-۱۸=۲,\quad \cdots,\quad ۸۰-۷۲=۸,$$
$$۹۰-۸۱=۹$$

اگرهمین عدد ۱۲۳۴۵۶۷۹ رادر۳ویامضربی‌از۳ ضرب کنیم، برای حاصلضرب عددی بدست می‌آید که اگرآنرا به‌گروههای سه‌رقمی تقسیم کنیم، باهم یکی هستند؛ مثلاً:

$$۳.۱۲۳۴۵۶۷۹=۳۷۰۳۷۰۳۷$$
$$۶.۱۲۳۴۵۶۷۹=۷۴۰۷۴۰۷۴$$
$$۱۵.۱۲۳۴۵۶۷۹=۱۸۵۱۸۵۱۸۵$$
$$۲۱.۱۲۳۴۵۶۷۹=۲۵۹۲۵۹۲۵۹$$

آیا این وضع تابی‌نهایت ادامه دارد؟ روشن کردن این‌مطلب را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

* * *

اگرعدد ۱۲۳۴۵۶۷۹ را در ۸ ضرب کنیم (یعنی در رقمی که درخود عدد وجود ندارد)، چه نتیجه‌ای بدست می‌آید؟

از این ضرب عددی بدست می‌آید که از هشت رقم متوالی، به استثنای واحد، تشکیل شده است و به طور نزولی به دنبال هم آمده‌اند:

۸.۱۲۳۴۵۶۷۹ = ۹۸۷۶۵۴۳۲

اگر دراین ضرب عدد۱۲۳۴۵۶۷۹ را به‌دوعدد ۶۷۸ ۳۴۵ ۱۲ و ۱ تبدیل کنیم، تساوی بالا به‌صورت زیر درمی‌آید:

۸.۱۲ ۳۴۵ ۶۷۸ + ۸ = ۹۸ ۷۶۵ ۴۳۲

و می‌توان هرم عددی زیررا درست کرد:

۱۲۳۴۵۶۷۸.۸ + ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۲
۱۲۳۴۵۶۷.۸ + ۷ = ۹۸۷۶۵۴۳
۱۲۳۴۵۶.۸ + ۶ = ۹۸۷۶۵۴
۱۲۳۴۵.۸ + ۵ = ۹۸۷۶۵
۱۲۳۴.۸ + ۴ = ۹۸۷۶
۱۲۳.۸ + ۳ = ۹۸۷
۱۲.۸ + ۲ = ۹۸
۱.۸ + ۱ = ۹

افرادی هستند که نسبت به یك عدد تمایل دارند و بقیهٔ عددها را دوست ندارند. فرض کنید که کسی به‌رقم ۷ علاقمند باشد، برای چنین فردی جالب خواهد بود که ازاو بخواهیم عدد۷۸۹ ۴۵۶ ۱۲۳

را در ۹×۷ یعنی ۶۳ ضرب کند. در حـاصلضرب بجز یك رقـم، همهٔ رقمها مساوی ۷ خواهدبود:

```
۱۲۳۴۵۶۷۸۹×
       ۶۳
----------
 ۳۷۰۳۷۰۳۶۷
۷۴۰۷۴۰۷۳۴
----------
۷۷۷۷۷۷۷۰۷
```

اگر کسی به‌رقم ۸ تمایل داشته باشد، می‌تواند همان عدد را در ۹×۸ یعنی ۷۲ ضرب کند. و اگر کسی رقم ۳ را بخواهد بـاید عدد را در ۹×۳ یعنی ۲۷ضرب کند. البته درهرحال درحاصلضرب یك رقم صفروجود خواهد داشت.

درخاتمه باید اضافه کنیم که عدد ۶۷۹ ۳۴۵ ۱۲عبارتست از: دورهٔ گردش کسر اعشاری که ازتبدیل کسر $\frac{۱}{۸۱}$ به کسراعشاری بدست می‌آید، یعنی ازتقسیم ۱ بر۸۱ :

```
۱   |۸۱
    |۰/۰۱۲۳۴۵۶۷۹
۱۰۰
 ۱۹۰
  ۲۸۰
   ۳۷۰
    ۴۶۰
     ۵۵۰
      ۶۴۰
       ۷۳۰
         ۱
```

با ادامهٔ تقسیم مرتباً همین رقمهای ۰۱۲۳۴۵۶۷۹ تکرار می‌شود.

۷- ضربهای مقلوب

ضربهایی وجود دارد که اگر آنها را از آخر به‌اول بخوانیم باز هم یك ضرب خواهد بود، درست مثل اینکه تصویر این ضرب را در آئینه ببینیم، مثلاً:

۲۸ = ۱۴ × ۲	۲ × ۴۱ = ۸۲
۲۷۶ = ۲۳ × ۱۲	۲۱ × ۳۲ = ۶۷۲
۲۵۹۸۶ = ۲۱۳ × ۱۲۲	۲۲۱ × ۳۱۲ = ۶۸۹۵۲

اگرخواننده‌ای می‌خواهد خودش اینگونه ضربهای «مقلوب» را جستجو کند، باید ازعددهایی که ضمن ضرب رقمهای آنها عدد- هایی بزرگتر از ۹ می‌دهند، صرفنظر کند.

* * *

بین مجذورهای عددهای دو رقمی و سه رقمی هم «مقلوبها» وجود دارند، مثلاً:

۴۴۱ = ۲۱ × ۲۱	۱۲ × ۱۲ = ۱۴۴
۹۶۱ = ۳۱ × ۳۱	۱۳ × ۱۳ = ۱۶۹
۴۰۴۰۱ = ۲۰۱ × ۲۰۱	۱۰۲ × ۱۰۲ = ۱۰۴۰۴
۹۰۶۰۱ = ۳۰۱ × ۳۰۱	۱۰۳ × ۱۰۳ = ۱۰۶۰۹
۴۴۵۲۱ = ۲۱۱ × ۲۱۱	۱۱۲ × ۱۱۲ = ۱۲۵۴۴
۴۸۸۴۱ = ۲۲۱ × ۲۲۱	۱۲۲ × ۱۲۲ = ۱۴۸۸۴

کسی که علاقمند باشد، می‌تواند بازهم چنین عددهایی را جستجو کند؛ ولی باکمال تأسف تعداد این عددها زیاد نیست.

* * *

نزدیك به «مقلوبها»، مجذورهایی وجود دارد که حاصل آنها ازیکنوع رقم تشکیل شده است منتهی جای رقمهای آنها باهم فرق دارد. مثلاً:

$$۹۱۳^{۲}=۸۳۳۵۶۹ \qquad ۱۵۷^{۲}=۲۴۶۴۹ \qquad ۱۳^{۲}=۱۶۹$$
$$۹۱۴^{۲}=۸۳۵۳۹۶ \qquad ۱۵۸^{۲}=۲۴۹۶۴ \qquad ۱۴^{۲}=۱۹۶$$

و اینهم مکعبهایی از همین نوع:

$$۳۴۵^{۳}=۴۱\ ۰۶۳\ ۶۲۵$$
$$۳۸۴^{۳}=۵۶\ ۶۲۳\ ۱۰۴$$
$$۴۰۵^{۳}=۶۶\ ۴۳۰\ ۱۲۵$$

این دو عدد هم از این جهت جالب است که نه تنها مجذور آنها، بلکه مجذورمجذور آنها هم از یکنوع رقم تشکیل شده‌است:

$$۳۲^{۴}=۱۰۴۸۵۷۶ \qquad ۳۲^{۲}=۱۰۲۴$$
$$۴۹^{۴}=۵۷۶۴۸۰۱ \qquad ۴۹^{۲}=۲۴۰۱$$

* * *

در همین ردیف می‌توان از ضربهایی نام برد که رقمهای حاصلضرب همان رقمهای دوعامل ضرب باشد، مثلاً:

$$۳۲۱\times۹۷۵=۳۱۲۹۷۵ \qquad ۱۵\times۹۳=۱۳۹۵$$
$$۶۸۱\times۷۵۹=۵۱۶۸۷۹ \qquad ۳۵\times۴۱=۱۴۳۵$$
$$۸۴۳\times۸۷۶=۷۳۸۴۶۸ \qquad ۲۱\times۸۷=۱۸۲۷$$
$$۹۰۲\times۸۷۵=۷۸۹۲۵۰ \qquad ۲۷\times۸۱=۲۱۸۷$$

از اینگونه‌عددهای «خویشاوند» زیاد است، ولی معلوم کردن آنها احتیاج به‌حوصلهٔ زیاد دارد.

* * *

در سال ۱۹۴۸ یك ریاضیدان فرانسوی مسأله‌ای برای مجلهٔ ریاضی ماهیانهٔ امریکایی فرستاد، دراین مسأله خواسته شده بودکه عدد طبیعی n را بااین شرط پیدا کنندکه:

$$n^3 = 19\ 000\ 458\ 461\ 599\ 776\ 807\ 277\ 716\ 631$$

او همچنین خواسته بود این مطلب را امتحان کنندکه نه‌تنها این عدد ۲۹ رقمی بر n قابل قسمت است، بلکه هرعدد ۲۸رقمی که ازتبدیل دوری این عدد بدست می‌آید بر n قابل قسمت است.

برای اینکه زحمت خواننده‌را کم کنیم، عدد $n = 2\ 668\ 423\ 111$ را در اینجا می‌آوریم، ولی امتحان خاصیت دیگر n^3 را بـه عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۸ـ ضربهای آسان

عددی وجود داردکه به‌رقم ۲ ختم شده است و اگر این‌رقم ۲ را از انتهـای عدد برداریـم و در ابتدای آن قرار دهیم، عددی بدست می‌آید کـه درست ۲برابر عدد اصلی است. به عبارت دیگر برای ضرب این عدد در ۲ می‌توان رقـم آخر آنرا بـه ابتدای عدد منتقل کرد.

درزیر این عدد و حاصلضرب آن در ۲ داده شده است:

۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴ ۷۳۶ ۸۴۲
۲۱۰ ۵۲۶ ۳۱۵ ۷۸۹ ۴۷۳ ۶۸۴

چگونه می‌توان این عدد را پیدا کرد؟

از راه خیلی ساده‌ای. چون آخرین رقم مساوی ۲ است وبعد ازآنکه

این رقم ۲ را به‌ابتدای عدد منتقل می‌کنیم باید دو برابر عدد اصلی بدست آید، بنابراین رقم قبل از۲ درعدد باید ۴ باشد (۲×۲) و رقم قبل از آن ۸ (۲×۴) و رقم قبل ازآن ۶(۱۶=۲×۸) و قبل ازآن ۳... تا زمانی که به‌صفر برسیم که دیگر دوبرابرکردن‌آن لازم نیست.

رقمهایی راکه از این راه بدست می‌آید می‌توان دوباره نوشت:

۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴ ۷۳۶ ۸۴۲ ۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴ ۷۳۶ ۸۴۲

اگر سه‌بار یا چهار بار ویا . . . این عدد رابه‌دنبال هم بنویسیم درهرحال خاصیت خودرا حفظ می‌کند.

* * *

به‌همین‌ترتیب می‌توان عددی مختوم‌به۴ پیداکرد که اگر رقم ۴ را از انتها به‌ابتدای‌آن منتقل‌کنیم، چهاربرابر خودش بشود.

این عدد به‌مراتب کوچکتر ازعدد قبلی است:

۱۰۲۵۶۴

۴۱۰۲۵۶

درمورد این عددهم می‌توان آنرا دو، سه یا چندبارکنار هم نوشت، به‌نحوی درهرمورد عددی بدست‌آید، که همین خصوصیت را داشته باشد وبتوان حاصلضرب آنرا در۴ به‌سادگی بدست‌آورد.

* * *

آیا می‌توان عددی باساختمان مشابهی پیداکردکه به ۳ یا ۵ ختم شده باشد؟ به این سؤال نمی‌توان فوری جواب داد و برای آزمایش آنهم درعمل به‌حوصلهٔ زیادی احتیاج است.

* * *

حالا از بعضی عددها صحبت می‌کنیم کـه به سادگی تقسیم

می‌شوند. برای اینکه عدد ۸۷۱۲ را بر ۴ تقسیم کنیم کافی است که آنرا از ردیف عکس بنویسیم. درحقیقت:

$$\frac{۸۷۱۲}{۲۱۷۸}=۴$$

رقمهای این عدد را می‌توان به هرتعدادی که بخواهیم تکرار کرد، نوع تعیین خارج‌قسمت آن بر۴ تغییر نخواهدکرد، مثلاً:

$$\frac{۸۷۱۲۸۷۱۲۸۷۱۲}{۲۱۷۸۲۱۷۸۲۱۷۸}=۴$$

اگر در این عدد بین ۸۷ و ۱۲ یك یا چند۹ قرار دهیم، بازهم قانون تقسیم آن بر۴ برقرار می‌ماند:

$$\frac{۸۷۹۹۱۲}{۲۱۹۹۷۸}=۴$$

اگر بخواهیم چنین عددی را چند بار تکرار کنیم، باید رقمهای ۹ را چنان اضافه کنیم که از دو طرف متقارن باشد، به این منظور که درمقلوب کردن آن این رقمهای۹ درجای خود باقی بمانند، مثلاً:

$$\frac{۸۷۹۹۹۱۲۸۷۹۱۲۸۷۹۱۲۸۷۹۹۹۱۲}{۲۱۹۹۹۷۸۲۱۹۷۸۲۱۹۷۸۲۱۹۹۹۷۸}=۴$$

علاوه برآن، ضمن تکرار عدد، می‌توان صفرهایی هم بین آنها اضافه کرد، منتهی به طور متقارن به‌نحوی که ضمن مقلوب کردن عدد، جای صفرها تغییرنکند، مثلاً:

$$\frac{۸۷۹۹۱۲۰۸۷۱۲۰۰۰۰۰۸۷۱۲۰۸۷۹۹۱۲}{۲۱۹۹۷۸۰۲۱۷۸۰۰۰۰۰۲۱۷۸۰۲۱۹۹۷۸}=۴$$

عدد ۹۸۰۱ هم خاصیت مشابهی دارد، به این معنی که اگر آنرا بر۹ تقسیم کنیم، مقلوب خودش بدست می‌آید:

۹۸۰۱ : ۹ = ۱۰۸۹

ولی دربارهٔ عدد ۱۰۸۹ گفتگوی خاصی داریم.

۹ـ عدد ۱۰۸۹ و بعضی عددهای دیگر

عددی سه رقمی در نظر می‌گیریم، به نحوی رقم سدگان آن بزرگتر از رقم یکان آن باشد. از این عدد، مقلوب آنرا کم می‌کنیم، مثلاً:

۷۲۶ —	۸۳۲ —
۶۲۷	۲۳۸
۰۹۹	۵۹۴

اگر تفاضل دورقمی باشد به‌جای رقم سدگان آن صفر می‌گذاریم، به نحوی که بتوان این تفاضل را در هر حال سه رقمی به‌حساب آورد. به‌این تفاضل مقلوب آنرا اضافه می‌کنیم. حاصل‌جمع همیشه مساوی ۱۰۸۹ خواهد شد، مثلاً:

۰۹۹ +	۵۹۴ +
۹۹۰	۴۹۵
۱۰۸۹	۱۰۸۹

عدد ۱۰۸۹ را می‌توان به‌سادگی ۹ برابر کرد، برای این منظور کافی است رقمهای آنرا از جهت عکس بنویسیم:

$$\begin{array}{r} ۱۰۸۹ \times \\ ۹ \\ \hline ۹۸۰۱ \end{array}$$

همین خاصیت را عددهای زیرهم دارند:

۱۰۹۹...۹۹۸۹ ×　　۱۰۹۹۸۹ ×　　۱۰۹۸۹ ×
۹　　۹　　۹
۹۸۹۹...۹۹۰۱　　۹۸۹۹۰۱　　۹۸۹۰۱

همچنین با تکرار این عددها، کـه می‌توان بین هر دوتـای متوالی صفرهایی هم قرارداد، بازهم خاصیت آن برقرار می‌ماند، مثلاً :

۱۰۹ ۹۸۹ ۰۰۰ ۱۰۹ ۹۸۹ ×　　۱۰۸ ۹۱۰ ۸۹۱ ۰۸۹ ×
۹　　۹
۹۸۹ ۹۰۱ ۰۰۰ ۹۸۹ ۹۰۱　　۹۸۰ ۱۹۸ ۰۱۹ ۸۰۱

عدد ۱۰۸۹ را در ۲ و ۸ ضرب می کنیم:

۱۰۸۹ ×　　۱۰۸۹ ×
۸　　۲
۸۷۱۲　　۲۱۷۸

می‌بینیم که اگر عدد ۲۱۷۸ را ۴ برابر کنیم، عددی بدست می‌آیدکه اختلافش با عدد اصلی دراینست‌که رقمهای‌آن درجهت عکس نوشته شده است، یعنی مقلوب آن بدست می‌آید.

عددهای زیر هم همین خاصیت را دارند :

۲۱۹۷۸، ۲۱۹۹۷۸، ۲۱۹۹ . . . ۹۹۷۸

وهمچنین تکرار این عددها، چه درمرز تکرار صفرهایی قرار بدهیم یا قرار ندهیم، مثلاً :

۲۱۹۹۷۸۲۱۹۹۷۸ ×　　۲۱۷۸۰۰۰۲۱۷۸ ×
۴　　۴
۸۷۹۹۱۲۸۷۹۹۱۲　　۸۷۱۲۰۰۰۸۷۱۲

ضربهای زیررا باهم مقایسه می کنیم:

۱۰۸۹ ×　　۱۰۸۹ ×
۷　　۳
۷۶۲۳　　۳۲۶۷

همچنین درمورد دو ضرب زیر:

$$\begin{array}{r} 1089\times \\ 6 \\ \hline 6534 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1089\times \\ 4 \\ \hline 4356 \end{array}$$

در هردومورد حاصلضربها مقلوب یکدیگرند. بالاخره ضرب $5445 = 5 \times 1089$ را درنظر می‌گیریم که در حاصلضرب عددی متقارن بدست می‌آید، به‌نحوی که مقلوب آن باخودش برابراست. همین خاصیت، مثلاً درمورد عدد زیرهم برقرار است:

$$\begin{array}{r} 10998900109989\times \\ 5 \\ \hline 54994500549945 \end{array}$$

۱۰ـ خاصیتهای قشنگ عددها

عدد ۱۱۹ در تقسیم بر۲ باقیمانده‌ای مساوی ۱، درتقسیم بر۳ باقیمانده‌ای مساوی ۲، در تقسیم بر۴ باقیمانده‌ای مساوی ۳، در تقسیم بر۵ باقیمانده‌ای مساوی۴، درتقسیم بر۶ باقیمانده‌ای مساوی ۵ دارد و درتقسیم بر۷ باقیمانده‌اش مساوی صفر می‌شود.

۱۱۹ : ۲ = ۵۹، باقیمانده ۱
۱۱۹ : ۳ = ۳۹، باقیمانده ۲
۱۱۹ : ۴ = ۲۹، باقیمانده ۳
۱۱۹ : ۶ = ۱۹، باقیمانده ۵

در این چهار حالت رقم دوم خارج قسمت همیشه مساوی ۹ و رقمهای اول همان باقیمانده‌ها، منتهی از ردیف عکس، است.

می‌توان ضمناً اضافه کرد که ازتقسیم این‌عدد بر۸باقیمانده‌ای مساوی ۷ بدست می‌آید.

* * *

عدد۲۲۵را می‌توان به‌چندطریق به‌صورت مجموع جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی نوشت که در هرحال جملهٔ اول تصاعد مساوی واحد باشد:

۲۲۵=۱+۷۵+۱۴۹
۲۲۵=۱+۲۳+۴۵+۶۷+۸۹
۲۲۵=۱+۷+۱۳+۱۹+۲۵+۳۱+۳۷+۴۳+۴۹

آیـا می‌توان همین عدد ۲۲۵ را به‌مجموع هفت جمله ازیك تصاعد حسابی تبدیل کرد؟

* * *

عدد ۲۲۸ را به‌طریقه‌های مختلف می‌توان به مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی تبدیل کرد، به‌نحوی که جملهٔ اول همهٔ آنها یکی باشد:

۲۲۸=۱۸+۴۴+۷۰+۹۶
۲۲۸=۱۸+۲۶+۳۴+۴۲+۵۰+۵۸
۲۲۸=۱۸+۲۱+۲۴+۲۷+۳۰+۳۳+۳۶+۳۹

آیا می‌توان عدد ۲۲۸ را به طریقه‌های دیگری از این نـوع تبدیل کرد؟

* * *

عددهای ۱۲۵، ۲۵۰ و۳۷۵ دارای خاصیت مشترکی هستند، به‌این معنی که برای تقسیم هرکدام ازآنها بر۵، باید رقم اول آنها را حذف کرد:

۱۲۵ : ۵ = ۲۵،   ۲۵۰ : ۵ = ۵۰،   ۳۷۵ : ۵ = ۷۵

بنابراین می‌توان این عددها را عددهای ساده‌ای برای تقسیم خواند. تقسیمهای زیرهم دارای همین خصوصیت ساده هستند:

۱۱۲۵ : ۹،   ۲۲۵۰ : ۹،   ۳۳۷۵ : ۹،   ۴۵۰۰ : ۹،
۵۶۲۵ : ۹،   ۶۷۵۰ : ۹،   ۷۸۷۵ : ۹

آیاعددهای دیگری باهمین خصوصیت درتقسیم وجود دارد؟ اگر به‌آنها علاقمندید، می‌توانید به‌جستجوی آنها بپردازید.

* * *

عدد ۳۶ دارای این خاصیت است که حاصلضرب رقمهایش مساوی نصف آن و حاصلجمع رقمهایش مساوی یکچهارم آن می‌باشد. علاوه بر آن، مجموع رقمهای ۳۶ برابر است با مجموع رقمهای مضربهای متوالی آن، ۷۲ ، ۱۰۸ ، ۱۴۴ ، ۱۸۰ ، ۲۱۶ ، ۲۵۲ (و دراینجا رشته قطع می‌شود).

مجموع ۳۶عدد طبیعی اولیه، یعنی ۳۶+...+۳+۲+۱، برابراست با ۶۶۶، ومجموع رقمهای عدد اخیر، یعنی ۶+۶+۶، برابراست با حاصلضرب رقمهای عدد ۳۶ .

در مورد عدد 666 یك لطیفه وجود دارد: اگرنصف آنرا به‌خودش اضافه کنیم، چیزی به‌آن اضافه نمی‌شود، تنها ۱۸۰ درجه دوران می‌کند، یعنی «سروته» می‌شود.

* * *

دو جفت عدد ۲ و ۲ ، $۱\frac{۱}{۲}$ و ۳ دارای این خاصیت‌اند که مجموع آنها برابراست باحاصلضرب آنها:

$$۲+۲=۲\times۲ \quad , \quad ۱\frac{۱}{۲}+۳=۱\frac{۱}{۲}\times۳$$

زوجهای دیگری از این قبیل را جستجو کنید و یا به بخش دوم این کتاب مراجعه کنید.

* * *

ساده کردن کسرهای $\frac{۲۶}{۶۵}$ و $\frac{۱۶}{۶۴}$ چقدرعجیب است! اگردرهریك از این کسرها رقم ۶ را ازصورت و مخرج حذف کنیم، در مقدار کسر تغییری حاصل نمی‌شود.

آیا کسرهای دیگری از این قبیل وجود دارد؟ امتحان کنید! تعدادآنها کم نیست.

* * *

تااینجا چندبار جدولهایی ازضرب یا مجذورکردن عددهای صحیح آورده‌ایم که در آنها رقمها به‌نحوی مرتباً تکرار می‌شوند. در مجذورهای زیر هم نمونهٔ دیگری از چنین جدولها وجود دارد:

$$۴^۲=۱۶$$
$$۳۴^۲=۱۱۵۶$$
$$۳۳۴^۲=۱۱۱۵۵۶$$
$$۳۳۳۴^۲=۱۱۱۱۵۵۵۶$$
$$۳۳۳۳۴^۲=۱۱۱۱۱۵۵۵۵۶$$

* * *

دریك کتاب ریاضی، حروفچین به‌جای عدد $۲^۵.۹^۲$ به اشتباه عدد ۲۵۹۲ را انتخاب کرد. مصحح از این اشتباه جدی گذشت و کتاب به همان صورت چاپ شد. این کتاب را تعداد زیادی از ریاضیدانها مطالعه کردند و مثل حروفچین و مصحح متوجه این

اشتباه بارز نشدند و هیچکس در صدد تغییر آن برنیامد.

علت این وضع چیست؟

این وضع تنها به این مناسبت پیش‌آمد که ۲۵۹۲ = ۲^۵.۹^۲، و ظاهراً این تنها مورد از چنین وضع شگفت انگیزی است.

۱۱ـ ضرب به‌کمك انگشتها

وقتی که از خاصیتهای عدد ۹ صحبت می‌کردیم، از روش ضرب در این عدد به‌کمك انگشتها یاد کردیم. یك مؤلف ایرانی قرن هفدهم بنام بهاءالدین (۱۵۴۷ ـ ۱۶۲۲) در کتاب خودش، که بطور وسیعی درایران وهند پخش‌شد، به‌نام «دربارهٔ اصل محاسبه»، روش زیبای دیگری در مورد ضرب به‌کمك انگشتها داردکه برای آنهایی که نمی‌خواهند یا نمی‌توانند جدول ضرب را برای عددهای بزرگتر از ۵یاد بگیرند، لازم است.

اگر کسی بداند حاصل ۲×۲، ۳×۲ و غیره تا ۵×۵ چقدر است، می‌تواند حاصل بقیهٔ ضربها را به‌کمك انگشتهای خود محاسبه کند.

فرض کنیدکه بخواهیم حاصلضرب ۸×۹ را پیدا کنیم.

۴+۵=۹ و ۳+۵=۸، یعنی: (۳+۵)×(۴+۵)=۸×۹

۴ انگشت یك دست و ۳ انگشت دست دیگررا می‌خوابانیم.
مجموع انگشتهای خوابیده (۳+۴) رقم دهگان حاصلضرب را نشان می‌دهد (۷)، و رقم یکان این حاصلضرب عبارتست از حاصلضرب تعداد انگشتهای باز یك دست در تعداد انگشتهای باز دست دیگر: ۲=۲×۱. بنابراین داریم: ۷۲=۸×۹.

برای پیدا کردن حاصلضرب ۷×۸، یعنی(۲+۵)×(۳+۵) باید ۳ انگشت از یك دست و ۲ انگشت از دست دیگررا خواباند. مجموع این انگشتهای خوابیده ۵=۲+۳ ، رقم دهگان حاصل‌ضرب را می‌دهد و حاصلضرب تعداد انگشتهای باز ۶=۳×۲ ، رقم یکان حاصلضرب را معین می‌کند. به این ترتیب حاصلضرب مطلوب ۵۶ می‌شود.

ولی افسوس که ما سالها قبل جدول ضرب را به خاطر سپرده‌ایم.

۱۲- برخی نکته‌ها درمورد ضرب و تقسیم

بدون تردید، یکی از ملال‌آور ترین کارها جمع کردن یك ستون طولانی عدد است، بخصوص وقتی که هیچ وسیلهٔ کمکی، مثل ماشین حساب، در دسترس نباشد. ولی اغلب ضرب یا تقسیم هم می‌تواند به‌اندازهٔ کافی شخص را آزار دهد.

برای اینکه این عملهای نامطبوع تاحدی متنوع‌ترشوند، می‌توان بعضی تغییرات در آنها داد.

مثلاً وقتی که می‌خواهیم حاصلضرب دو عدد را پیدا کنیم، می‌توان ازراه جمع به‌آن رسید. فرض کنید که بخواهیم حاصلضرب ۴۳ در ۲۱۳ را بدست آوریم. برای بدست آوردن حاصلضرب از یکی از دوستونی که در اینجا نوشته شده است، استفاده می کنیم و به جای ضرب جمع را انجام می‌دهیم. روش کار از روی همین ستونها روشن است و احتیاجی به‌توضیح دربارهٔ آنها نیست:

۴۳		۲۱۳
۴۳		۲۱۳
۴۳	یا	۲۱۳
۴۳		۲۱۳
۴۳		۲۱۳
۴۳		۲۱۳
۹۱۵۹		۲۱۳
		۹۱۵۹

برای تنوع می‌توان ضرب را از طرف چپ انجـام داد، بر خلاف عادت که از طرف راست انجام می‌گیرد، در اینصورت به‌جای اینکه ضربهـای جزیی را مرتب به سمت چپ ببریم، به سمت راست می‌آوریم.

مثال زیر به‌روشنی روش عمل را دراین مورد نشان می‌دهد:

۴۲۳۵ ×	۴۲۳۵ ×
۳۱۴۷	۳۱۴۷
۱۲۷۰۵	۲۹۶۴۵
۴۲۳۵	۱۶۹۴۰
۱۶۹۴۰	۴۲۳۵
۲۹۶۴۵	۱۲۷۰۵
۱۳۳۲۷۵۴۵	۱۳۳۲۷۵۴۵

یکی دیگر از راههای متنوع کـردن ضرب را در زیر شرح می‌دهیم، ولی از قبل یادآوری می‌کنیم که این راه اگر چه جالب است ولی به‌سرعت عمل کمکی نمی‌کند.

فرض کنید بخواهیم دو عدد چهـار رقمی ۱۹۲۵ و ۲۳۴۷ را درهم ضرب کنیم. عدد اول را مضروب و عدد دوم را مضروب فیه می‌گیریم.

اگر مضروب‌فیه عددی فرد باشد (که درمثال ما چنین‌است: ۲۳۴۷)، زیر مضروب (۱۹۲۵) خطی می‌کشیم، سپس آنرا در ۲ ضرب می‌کنیم و درعین حال مضروب‌فیه را نصف می‌کنیم، ضمناً از باقیماندهٔ ۱ صرفنظر می‌نماییم. در مثال ما، بعد از نصف کردن دوباره برای مضروب‌فیه عددی فرد بدست می‌آید (۱۱۷۳)، بنابر-این زیرمضروب جدید (۳۸۵۰) هم خطی می‌کشیم.

این عمل را مرتباً ادامه می‌دهیم و هربار که به عنوان مضروب‌فیه عددی فرد پیدا شد زیر مضروب خط می‌کشیم تازمانی که مضروب فیه مساوی واحد شود. در این موقع همهٔ مضروبهایی را که با خط علامت گذاشته شده‌اند جمع می‌کنیم، حاصلجمعی که بدست می‌آید همان حاصلضرب مورد نظراست.

۲۳۴۷	$\underline{۱۹۲۵}$
۱۱۷۳	$\underline{۳۸۵۰}$
۵۸۶	۷۷۰۰
۲۹۳	$\underline{۱۵۴۰۰}$
۱۴۶	۳۰۸۰۰
۷۳	$\underline{۶۱۶۰۰}$
۳۶	۱۲۳۲۰۰
۱۸	۲۴۶۴۰۰
۹	$\underline{۴۹۲۸۰۰}$
۴	۹۸۵۶۰۰
۲	۱۹۷۱۲۰۰
۱	$\underline{۳۹۴۲۴۰۰}$
	۴۵۱۷۹۷۵

این روش ضرب، که از راه دوبرابر کردن متوالی بدست

می‌آید، در قرون وسطی معمول بوده است.

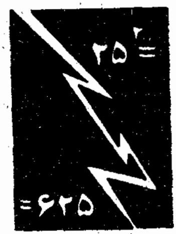
* * *

تقسیم را می‌توان منجر به تفریق کرد. فرض کنید بخواهیم عدد ۱۱۵۳ را بر ۴۷ تقسیم کنیم. روشن است که خارج قسمت دو-رقمی است. رقم دهگان خارج قسمت نشان می‌دهد که درمقسوم چند مرتبه ۴۷۰ وجود دارد. و این را می‌توان به سادگی به کمك تفریق بدست آورد. از ۱۱۵۳ می‌توان دوباره ۴۷۰ را کم کرد؛ یعنی رقم دهگان خارج قسمت مساوی ۲ است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که از باقیماندهٔ ۲۱۳ می‌توان چهار مرتبه عدد ۴۷ را کم کرد؛ به‌این ترتیب رقم یکان خارج قسمت هم بدست آمد وضمناً باقیماندهٔ تقسیم مساوی ۲۵ می‌شود:

۱۱۵۳	۴۷
۴۷۰	۲۴
۶۸۳	
۴۷۰	
۲۱۳	
۴۷	
۱۶۶	
۴۷	
۱۱۹	
۴۷	
۷۲	
۴۷	
۲۵	

۱۳ـ مجذور کردن سریع

این روش، که فوق العاده هم جالب است، با کمال تأسف تنها در مورد عددهایی می‌تواند به‌کار رود که به ۵ ختم شده‌اند.



قاعده چنین است: عدد دهگان را در عدد بلافاصله بعداز خودش ضرب می‌کنیم و۲۵ را سمت راست حاصلضرب می‌نویسیم؛ مثلاً:

$$۴۵^۲=۲۰۲۵ \qquad (۲۰=۴\times ۵)$$
$$۷۵^۲=۵۶۲۵ \qquad (۵۶=۷\times ۸)$$

دلیل این قاعده را می‌توان به‌سادگی پیدا کرد. هرعدد دورقمی را که به۵ ختم شده باشد، می‌توان بصورت $۱۰a+۵$ نوشت، که درآن a عبارت است ازرقم دهگان. حالا محاسبه می‌کنیم:

$$(۱۰a+۵)^۲=۱۰۰a^۲+۲\times ۵\times ۱۰a+۲۵=۱۰۰a^۲+ +۱۰۰a+۲۵,$$

و این برابر است با $۱۰۰a(a+۱)+۲۵$، یعنی $a(a+۱).۱۰۰+۲۵$.
این قاعده تنها مربوط به‌عددهای دورقمی نیست؛ مثلاً:

$$۱۰۵^۲=۱۱۰۲۵ \qquad (۱۱۰=۱۰\times ۱۱)$$
$$۱۳۵^۲=۱۸۲۲۵ \qquad (۱۸۲=۱۳\times ۱۴)$$

البته در بارهٔ عددهای چند رقمی باید ابتدا عدد دهگان را در عدد بلافاصله بعداز خودش جداگانه ضرب کنیم، ولی بهرحال بااین روش همیشه از وقت صرفه جویی می‌شود.

دو قاعدهٔ دیگرهم برای مجذور کردن سریع وجود دارد.

۱ـ برای مجذور کردن عددهای از ۵۱ تا ۵۹ می‌توان از این قاعده استفاده کرد: رقم یکان عدد را بـه ۲۵ اضافـه می کنیم و در

سمت راست حاصلجمع مجذور همین رقم یکان را می‌نویسیم :

$$۵۷^۲=۳۲۴۹$$

رابطهٔ کلی: $(۵۰+m)^۲=(۲۵+m).۱۰۰+m^۲$

۲ـ برای مجذور کردن عددها از ۴۱ تا ۴۹ این قاعده وجود دارد: به عدد ۱۵ رقم یکان عدد مفروض را اضافه می‌کنیم و در سمت راست حاصلجمع مجذور عددی را می‌نویسیم که مساوی تفاضل رقم یکان عدد مفروض از ۱۰ است، مثلاً $۴۶^۲=۲۱۱۶$.

قاعدهٔ کلی : $(۴۰+m)^۲=(۱۵+m).۱۰۰+(۱۰-m)^۲$

باید به‌این نکته توجه داشت که درحالت کلی باید نوشت: $۱^۲=۰۱$، $۲^۲=۰۴$، $۳^۲=۰۹$.

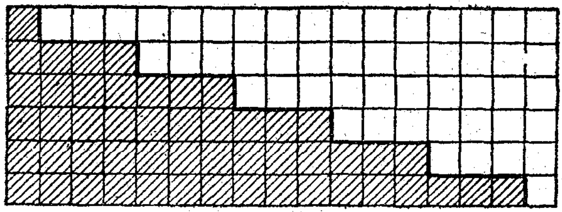
۱۴ـ توان درتصاعدها و تصاعد درتوانها

ترکیبهای عددی زیاد و در عین بسیار جالبی می‌توان در تصاعدها و بخصوص در توانهای مختلف جمله‌های آنها پیدا کرد. فعلاً این ترکیبها را درمورد تصاعد عددی وسلسلهٔ عددهای طبیعی بررسی می‌کنیم.

از اثبات رابطهٔ مجموع درتصاعد عددی باروش استفاده از شکل شروع می‌کنیم.

فرض کنید که بخواهیم مجموع جمله‌های این تصاعد را بدست آوریم:

$$۱,\ ۴,\ ۷,\ ۱۰,\ ۱۳,\ ۱۶$$



شکل ۴۲

قبل ازهمه جمله‌های‌این تصاعدرا ازردیف‌عکس می‌نویسیم:

۱۶، ۱۳، ۱۰، ۷، ۴، ۱

در ردیف اول یك خانهٔ هاشورخورده و۱۶ خانهٔ خالی رسم می‌کنیم، در ردیف دوم (زیر ردیف اول) ۴ خانهٔ هاشور خورده و ۱۳ خانهٔ خالی وغیره (شکل ۴۲) .

روشن است که برای پیدا کردن مجموع جمله‌های تصاعد باید یا خانه‌های هاشور خورده و یا خانه‌های خالی را شمرد، بنا براین باید نصف مجموع تمام خانه‌های این مستطیل را حساب کرد؛ مجموع خانه‌های مستطیل برابر است با (۱+۱۶).۶ ، یعنی مجموع جمله‌های تصاعد موردنظرمساوی $۵۱ = \frac{۶.(۱۶+۱)}{۲}$ می‌شود.

* * *

ساده‌ترین روش تشکیل جدول مربعهای عددهای طبیعی به‌این ترتیب است.

درستون اول پشت سرهم عددهای صحیح را باشروع ازصفر می‌نویسیم، یعنی ۰، ۱، ۲، ۳، . . .

این عددها را به ترتیب با هم جمع می‌کنیم: ۱=۱+۰؛ ۳=۲+۱؛ ۵=۳+۲؛ ۷=۴+۳ و غیره، عددهای فرد متوالی

بدست می‌آید که آنها را در ستون دوم طوری می‌نویسیم که هر عدد بین دو عدد ستون اول باشد.

درستون سوم در بالا، مقابل اولین عدد ستون اول، صفر را می‌نویسیم، نزدیکترین عدد به آنرا درستون دوم به آن اضافه می کنیم: ۱=۱+۰، این عددرا درستون سوم زیرصفر می‌نویسیم. به این عدد ۱، عدد بعدی ستون دوم را اضافه می کنیم: ۴=۳+۱ و آنرا در ستون سوم می‌نویسیم، به همین ترتیب جلو می‌رویم: ۹=۵+۴، ۱۶=۹+۷، ۲۵=۱۶+۹، ...، مجذور عددهای طبیعی متوالی را بدست خواهیم آورد:

۰		۰
	۱	
۱		۱
	۳	
۲		۴
	۵	
۳		۹
	۷	
۴		۱۶
	۹	
۵		۲۵
	۱۱	
۶		۳۶
	۱۳	
۷		۴۹
	۱۵	
۸		۶۴
	۱۷	
۹		۸۱

مثلاً: $۷^۲=۶^۲+(۶+۷)$ ، $۸^۲=۷^۲+(۷+۸)$.

و این نوع دیگری از جدول مربعهاست:

دومین تفاضلها	اولین تفاضلها	مربعهای کامل	عددهای صحیح
		۰	۰
	۱		
۲		۱	۱
	۳		
۲		۴	۲
	۵		
۲		۹	۳
	۷		
۲		۱۶	۴
	۹		
۲		۲۵	۵
	۱۱		
		۳۶	۶
			۷

اولین تفاضل عبارتست از تفاضل مربعهای متوالی:

$$۱-۰=۱;\ ۴-۱=۳;\ ۹-۴=۵;\ ۱۶-۹=۷;\ \ldots$$

دومین تفاضلها عبارتست از نمو اولین تفاضلها:

$$۳-۱=۲;\ ۵-۳=۲;\ ۷-۵=۲;\ ۹-۷=۲;\ \ldots$$

«تفاضل دوم» مقداری است ثابت: ۲؛ «اولین تفاضلها» دنبالهٔ عددهای فرد است وبنابراین ستون تفاضلهای اول را می‌توان به سادگی ادامه داد. مربعهای کامل به این ترتیب تشکیل می‌شوند: به‌آخرین مربعی که محاسبه شده است نزدیکترین «تفاضل اول» را اضافه می‌کنیم، بنابراین:

$$2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$3^2 = 4 + 5 = 9$$
$$4^2 = 9 + 7 = 16$$
$$5^2 = 16 + 9 = 25$$
$$6^2 = 25 + 11 = 36$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

* * *

مجموع نخستین عددهای فرد که از ۱ شروع شده باشند، برابر است با مربع تعداد این عددها:

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

* * *

مجموع مربعهای سه عدد فرد متوالی برابر است با ۳ برابر مربع عدد متوسط باضافهٔ ۸:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 3 \times 3^2 + 8$$
$$3^2 + 5^2 + 7^2 = 3 \times 5^2 + 8$$
$$5^2 + 7^2 + 9^2 = 3 \times 7^2 + 8$$

* * *

هر عدد اولی که در تقسیم بر ۴، باقیماندهای مساوی ۱ داشته

باشد، یعنی عدداول به‌صورت $۴n+۱$، می‌تواند به‌مجموع دومربع کامل تبدیل شود: مثلاً:

$$۵=۱^۲+۲^۲;\ ۱۳=۳^۲+۲^۲;\ ۲۹=۵^۲+۲^۲;\ ۴۱=۵^۲+۴^۲$$

همچنین مربع اینگونه عددهای اول را می‌توان به مجموع دومربع کامل تبدیل کرد:

$$۵^۲=۳^۲+۴^۲;\quad ۱۳^۲=۱۲^۲+۵^۲;\quad ۲۹^۲=۲۱^۲+۲۰^۲;\quad ۴۱^۲=۴۰^۲+۹^۲$$

مکعب این عددهای اول هم مساوی مجموع دو مربع کامل است:

$$۵^۳=۱۱^۲+۲^۲;\quad ۱۳^۳=۴۶^۲+۹^۲;\quad ۲۹^۳=۱۴۲^۲+۶۵^۲;\quad ۴۱^۳=۲۳۶^۲+۱۱۵^۲$$

ضمناً این مکعبها را به‌طریقه‌های مختلف می‌توان به‌مجموع دو مربع تبدیل کرد؛ مثلاً $۵^۳$ مساوی $۵^۲+۱۰^۲$ هم هست. ولی توانهای اول و دوم این عددها چنین خاصیتی ندارند.

* * *

جدول مکعبهای سلسلهٔ عددهای طبیعی کمی بغرنجتر از جدول مربعها تشکیل می‌شود:

عددهای صحیح	مکعبها	اولین تفاضلها	دومین تفاضلها	سومین تفاضلها
۰	۰			
		۱		
۱	۱		۶	
		۷		۶
۲	۸		۱۲	

←

		۱۹		۶
۳	۲۷		۱۸	
		۳۷		۶
۴	۶۴		۲۴	
		۶۱		۶
۵	۱۲۵		۳۰	
۶	۲۱۶	۹۱		

«اولین تفاضلها» عبارتست از تفاضلهای مکعبهای متوالی:

۱ − ۰ = ۱؛ ۸ − ۱ = ۷؛ ۲۷ − ۸ = ۱۹؛ ۶۴ − ۲۷ = ۳۷؛...

«دومین تفاضلها» عبارتست از نمو «اولین تفاضلها»:

۷ − ۱ = ۶؛ ۱۹ − ۷ = ۱۲؛ ۳۷ − ۱۹ = ۱۸؛ ۶۱ − ۳۷ = ۲۴؛ ...

می‌بینیم که «دومین تفاضلها» به طور ثابت و به اندازهٔ ۶ نمو می‌کنند، یعنی «سومین تفاضلها» مقدار ثابتی و مساوی ۶ می‌شود.

برای تشکیل جدول مکعبها، مضربهای ۶ را به‌عنون «دومین‌ـتفاضلها» می‌نویسیم:

۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴، ۳۰، ۳۶، ۴۲، ۴۸، ۵۴، ۶۰، ...

سپس «اولین تفاضلها» را می‌نویسیم: از ۱ شروع می‌کنیم و به‌هرعدد «تفاضل دوم» بعد از آنرا اضافه می‌کنیم:

۱ + ۶ = ۷؛ ۷ + ۱۲ = ۱۹؛ ۱۹ + ۱۸ = ۳۷، ۳۷ + ۲۴ = ۶۱؛ ...

و با همین روش مکعبهای کامل را پیدا می‌کنیم:

$۲^۳$ = ۱ + ۷ = ۸

$۳^۳$ = ۸ + ۱۹ = ۲۷

$۴^۳$ = ۲۷ + ۳۷ = ۶۴

$۵^۳$ = ۶۴ + ۶۱ = ۱۲۵

. . . .

* * *

حالا به‌چند خاصیت جالب از مکعبها می‌پردازیم.

۱ـ عددهایی که به ۱، ۴، ۵، ۶ و ۹ ختم شده‌باشند، مکعبهای آنها هم به همین رقمها ختم می‌شود، بنابراین تفاضل چنین عددی از مکعب آن همیشه به‌صفر ختم می‌شود. همچنین مکعب عددهایی که به ۲، ۳، ۷ و ۸ ختم شده باشند به‌ترتیب به ۸، ۷، ۳ و ۲ ختم می‌شوند و بنابراین مجموع این عددها با مکعبشان باز هم به‌صفر ختم می‌شود.

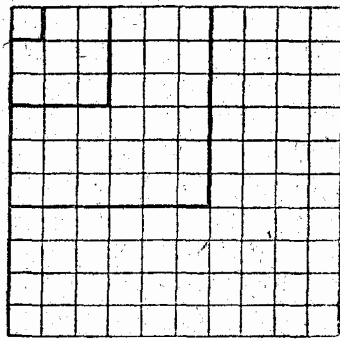
۲ـ عددی که به‌تعدادی صفر ختم شده است، نمی‌تواند مکعب کامل باشد، مگر اینکه تعداد این صفرها بر ۳ قابل قسمت باشد.

۳ـ هر عدد مکعب کامل یا مضربی است از ۹ ویا از مضرب ۹ یك واحد کمتر یا یك واحد بیشتر است.

۴ـ جدول عددهای فرد را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$۱ = ۱ = ۱^۳$$
$$۳ + ۵ = ۸ = ۲^۳$$
$$۷ + ۹ + ۱۱ = ۲۷ = ۳^۳$$
$$۱۳ + ۱۵ + ۱۷ + ۱۹ = ۶۴ = ۴^۳$$
$$۲۱ + ۲۳ + ۲۵ + ۲۷ + ۲۹ = ۱۲۵ = ۵^۳$$

همانطور که می‌بینیم، مجموع عددهایی که در هر گروه قرار گرفته است، مساوی است با مکعب تعداد این عددها. مکعب عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ وغیره را می‌توان روی شکل به‌ترتیب زیر نشان داد که از آنجا خاصیت بسیار جالبی از این عددها پیدا می‌شود:



شکل ۴۳

مجموع مکعبهای عددهای متوالی باشروع از ۱، برابراست با مربع مجموع این عددها (شکل۴۳).

به‌این ترتیب بدست می‌آید:

$$۱^۳+۲^۳=۳^۲ \qquad ۱+۲=۳$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳=۶^۲ \qquad ۱+۲+۳=۶$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=۱۰^۲ \qquad ۱+۲+۳+۴=۱۰$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳=۱۵^۲ \qquad ۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$$

. . . .

۱۵ـ وارونهٔ عمل

درپایان این بخش یك مسألهٔ هندی‌را می‌آوریم. وارونهٔ عمل یکی از جالبترین سرگرمیهای هندی است، چه در گذشته و چه در زمان حال؛ ظاهراً حتی بچه‌های هندی هم می‌توانند مسأله‌هایی را که باروش وارونهٔ عمل درست شده‌اند، به‌سرعت درذهن خودحل کنند. محتوی این روش عبارت از عملهایی است که باید آنها را ازآخرانجام داد. یکی از قدیمی‌ترین ریاضیدانهای مشهور هندی،

آریابهاتا (قرن پنجم قبل از میلاد) این روش را خلاصه ولی دقیق تعریف کرده است: «ضرب به‌تقسیم و تقسیم به‌ضرب تبدیل می‌شود؛ اضافه‌کردن به‌کم کردن و کم کردن به اضافه کردن منجر می‌شود، اینست روش وارونه !! » مثالی که از لیلاوات گرفته‌ایم به خوبی مطلب را روشن می کند:

«تو ای دختر زیبایی که چشمهایت می‌درخشد، تو که‌به‌خوبی از روش وارونه آگاهی، بگو آن عدد چقدر است که اگر آنرا در ۳ ضرب کنیم، سپس $\frac{۳}{۴}$ حاصلضرب را بـه‌آن اضافه کنیم، بعد به ۷ تقسیم کنیم، $\frac{۱}{۳}$ خارج‌قسمت را از آن کم کنیم، حاصل‌را درخودش ضرب کنیم، ۵۲ واحد از آن کم کنیم، بعد ازجذر گرفتن از حاصل ۸ واحد به‌آن اضافه‌کنیم وبر ۱۰ تقسیم کنیم، نتیجه مساوی ۲ شود؟»

حل مسأله را باید ازآخر انجام داد. یعنی از ۲ شروع کرد و عکس عملهایی را که در مسأله ذکر شده است به‌ترتیب انجام داد، یعنی:

$$(۲ \times ۱۰ - ۸)^{۲} + ۵۲ = ۱۹۶; \quad \sqrt{۱۹۶} = ۱۴;$$

$$۱۴ \times \frac{۳}{۲} \times ۷ \times \frac{۴}{۷} \div ۳ = ۲۸$$

III ـ شکلهای جادویی

ورود به مطلب

بین «شکلهای جادویی» بیش از همه مربعهای جادویی شهرت پیدا کرده است. این مربعها به تعداد معینی مربع یا خانه‌های کوچکتر تقسیم شده‌اند و در آنها عددهایی نوشته شده‌اند که بین خود یك تصاعد تشکیل می‌دهند. این عددها طوری قرار گرفته‌اند که برای مجموع هر ردیف افقی یا هر ردیف ستونی و یا هریك از دو ردیف قطری یك عدد بدست می‌آید.

۱۳	۲	۳	۱۶
۸	۱۱	۱۰	۵
۱۲	۷	۶	۹
۱	۱۴	۱۵	۴

شکل ۴۴

مربعهای جادویی را در چین و هند، حتی چند هزار سال قبل می‌شناخته‌اند. به بعضی طلسمهای چینی با مربعهای جادویی برمی‌خوریم که در آنها بجای عدد، سوراخها یا فرورفتگیهایی به‌تعداد معین وجود دارد. این مربعها بین کشورهای اسلامی هم در قرن نهم میلادی معمول بوده‌است. دراروپا مربعهای جادویی از اوایل قرن پانزدهم معمول شده است.

* * *

قدیمی‌ترین مربع جادویی در اروپـا را بدون تردید می‌توان مربعی دانست که روی یکی از شاهکارهای دیورر به‌نام « افسردگی » تصویر شده است (شکل ۴۴). این مربع از ۱۶ خـانه تشکیل شده است و اهمیت آن در اینست که دوعدد واقع در دو خانهٔ وسط در ردیف پایین سال به‌وجودآمدن آنرا مشخص می‌کنند (۱۵۱۴).

بعدازآن دیگرشوق به‌شکلهای جادویی ازبین‌نرفت وبسیاری از ریاضیدانها با علاقه روی روشهای تشکیل مربعهـای جادویی کار کردند.

۱ـ نوعهای مختلف شکلهای جادویی

شکلهای جادویی‌را می‌توان به‌دونوع مسطحه وفضایی تقسیم کرد، زیرا مربـع، مثلث، مستطیل، چند ضلعی و دایرهٔ جـادویی وجود دارد که شکلهایی مسطحه‌اند، مکعبهای جـادویی هم وجود دارد که فضایی است.

مربعها را می‌توان به مناسبت نوع تصاعدهایی که عددهای آنها تشکیل می‌دهند به‌عددی و هندسی؛ به‌مناسبت تعداد خانه‌هایی که درطول ضلعهای روبروی‌آن وجوددارد به‌مربعهای فرد (۳، ۵، ۷، ۹، . . .)، مربعهای زوج فرد (۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸، . . .) و مربعهای زوج زوج (۴، ۸، ۱۲، ۱۶، . . .)؛ وبالاخره به‌مناسبت نوع قرارگرفتن‌عددها درمربع به‌مربعهای عادی جادویی، مربعهای جادویی خاص و مربعهای فوق جادویی تقسیم کرد.

۲ـ خاصیتهای عمومی

اگر عددهای واقع درخانه‌های یك مربـع جـادویی را به‌یك نسبت بزرگ یاکوچك کنیم، بازهم مربع جادویی باقی می‌ماند. همچنین اگر همهٔ عددهای یك مربع جادویی را در عددی ضرب یا برعددی تقسیم کنیم، جادویی بودن آن از بین نمی‌رود. برای اینکه مطلب‌را بهتر بفهمیم کافی است آنرا روی یك‌مثال نشان دهیم (شکل ۴۵). درمربع اول، مجموع عددهای هر سطر یا هرستون و یا هر قطرمساوی ۱۵ است؛ مربع دوم را با اضافه کردن عدد ۱۷ به‌هریك از عددهای مربع اول درست کرده‌ایم، ومجموع سحرآمیزمساوی ۶۶=۱۷×۳+۱۵ شده است؛ بالاخره مربـع سوم را بـا دوبرابر کردن عددهای مربع دوم بدست آورده‌ایم و مجموع جادویی آن مساوی ۱۳۲=۶۶×۲ می‌شود.

۴۲	۵۲	۳۸
۴۰	۴۴	۴۸
۵۰	۳۶	۴۶

۲۱	۲۶	۱۹
۲۰	۲۲	۲۴
۲۵	۱۸	۲۳

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

شکل ۴۵

اگرمربعی برای یك‌تصاعدحسابی جادویی باشد، برای‌همین نوع قرارگرفتن، تصاعد حسابی باجملهٔ اول دیگر یا با قدر نسبت دیگر نیز جادویی خواهد بود.

مثلاً دراولین مربعی که در بالا آوردیم به‌جای عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، و ۹ می‌توان جمله‌های تصاعد زیر را

قرار داد:

۱۳۱، ۱۲۶، ۱۲۱، ۱۱۶، ۱۱۱، ۱۰۶، ۱۰۱، ۹۶، ۹۱

۲۱	۳۵	۲۵
۳۱	۲۷	۲۳
۲۹	۱۹	۳۳

=

۱۹	۲۶	۲۱
۲۴	۲۲	۲۰
۲۳	۱۸	۲۵

+

۲	۹	۴
۷	۵	۳
۶	۱	۸

شکل ۴۶

از همهٔ این قانونها می‌توان دستور عمل بسیار مهمی نتیجه گرفت: کافی است ابتدا یك مربع جادویی با ساده‌ترین عددها، یعنی عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، . . . تشکیل دهیم، سپس از راه ضرب، تقسیم، جمع یا تفریق در مورد این عددها می‌توان بی‌نهایت مربع جادویی با مجموعهای سحرآمیز متفاوت بدست آورد.

یکی دیگر از خاصیتهای مربعهای جادویی اینست که از دو مربع می‌توان مربع سوم را از راه جمع عددهای خانه‌های متناظر آنها بدست آورد (شکل۴۶). مجموع جادویی چنین مربعی برابراست باحاصلجمع مجموعهای جادویی دومربع اول:

۸۱ = ۱۵ + ۶۶

۵	۱۰	۱۶	۳
۱۵	۴	۶	۹
۲	۱۳	۱۱	۸
۱۲	۷	۱	۱۴

۱۲	۷	۱	۱۴
۱۵	۴	۶	۹
۲	۱۳	۱۱	۸
۵	۱۰	۱۶	۳

۱۴	۷	۱	۱۲
۹	۴	۶	۱۵
۸	۱۳	۱۱	۲
۳	۱۰	۱۶	۵

شکل ۴۷

اگر سطرها و ستونهایی از مربع را که نسبت به مرکز مربع

متقارنند جابجا کنیم، جادویی بودن مربع حفظ می‌شود (شکل۴۷).

در مربع اول جای ستونهای اول و چهارم را با هم عوض کرده‌ایم، مربع دوم به‌وجود آمده است که در آن مجموع درستونها وسطرها تغییرنکرده است، ولی مجموع درقطرها تغییر کرده است. حالا اگر در مربع دوم هم جای سطرهای اول و چهارم را عوض کنیم، به‌مربع سوم می‌رسیم که دیگریك مربع جادویی واقعی است.

وقتی که عددهای داخل خانه‌های مربع جادویی به‌تصاعد حسابی باشند، مجموع جادویی برابر است با حاصلضرب نصف مجموع جمله‌های اول و آخر درتعداد خانه‌های مجاور به یك ضلع مربع. مثلاً مجموع جادویی ساده‌ترین مربعی که از ۹ خانه تشکیل شده باشد، برابراست با:

$$\frac{۱+۹}{۲}\times ۳=۱۵$$

مجموع مربع جادویی دیورر برابراست با:

$$\frac{۱+۱۶}{۲}\times ۴=۳۴$$

۳ـ تشکیل مربعهای جادویی فرد

روشهای مختلفی برای ساختن مربعهای جادویی وجوددارد. بین آنها بیش ازهمه برای تشکیل مربعهای فرد و خیلی کمتر برای مربعهای زوج فرد وجود دارد. قاعده‌هایی که در زیر داده می‌شود ساده‌ترین و درعین حال جالب‌ترین آنهاست.

ما تنها به‌اصول کلی این روشها می‌پردازیم و به عمد آنها را

بادقت شرح نمی‌دهیم، برای اینکه خواننده بتواند باابتکار خود از آنها نتیجه گیری کند ونوعهای جالب جدیدی را پیدا کند.

روش هندیـ به‌عنوان مثال‌مربعی انتخاب می کنیم که از هفت ردیف درست شده باشد، یعنی رویهم ۴۹خانه داشته باشد. واحد را در خانه‌ای که درست زیر خانهٔ مرکزی واقع شده است قرار می‌دهیم، و با شروع ازاین خانه به‌سمت راست وپایین به‌صورت قطری حرکت می کنیم و عددهای طبیعی‌را به‌ترتیب قرار می‌دهیم (شکل ۴۸).

۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴	
۵	۲۳	۴۸	۱۷	۴۲	۱۱	۲۹	۵
۳۰	۶	۲۴	۴۹	۱۸	۳۶	۱۲	۳۰
۱۳	۳۱	۷	۲۵	۴۳	۱۹	۳۷	۱۳
۳۸	۱۴	۳۲	۱	۲۶	۴۴	۲۰	۳۸
۲۱	۳۹	۸	۳۳	۲	۲۷	۴۵	۲۱
۴۶	۱۵	۴۰	۹	۳۴	۳	۲۸	۴۶
۲۲	۴۷	۱۶	۴۱	۱۰	۳۵	۴	
						۲۹	

شکل ۴۸

عدد۴را درخارج مربع. باادامهٔ روشی که گفتیم، نوشته‌ایم، آنرا به خانهٔ مقابل آن در مربع منتقل کنید. ۵ را هم خارج مربع نوشته‌ایم، بااین‌عددهم‌همان عملی‌را انجام دهید که با۴انجام‌دادید. به‌این ترتیب تاعدد ۷ پیش می‌رویم که درآنجا به‌خانه‌ای که شامل واحد است برخورد می کنیم. دراین حالت عدد ۸را زیر۷، دوخانه پایین‌تر می گذاریم وبرهمین روال ادامه می‌دهیم تابه‌عدد۴۹ برسیم. درنتیجه مربعی بامجموع جادویی ۱۷۵ بدست می آید.

به عنوان تمرین می‌توانید همین روش را به این ترتیب به کار ببرید که واحد را به‌جای اینکه زیرخانهٔ مرکزی قراردهید، روی آن بگذارید و روی قطر درجهت مخالف حرکت کنید.

روش سیامیـ این روش را لالیوبر در اثر خودش به‌نام «دربارهٔ پادشاهی سیام» به‌ماشناسانده است. او فرستادهٔ لودویک چهاردهم نزد پادشاه سیام بود و در همانجا با این روش آشنا شد. جملهٔ اول تصاعد را در خانهٔ مرکزی

				۲	۱۱	۲۰	
			۱	۱۰	۱۹		
		۷	۹	۱۸			
	۶	۸	۱۷				
۵	۱۴	۱۶					۵
۱۳	۱۵					۴	۱۳
					۳	۱۲	
				۲	۱۱		

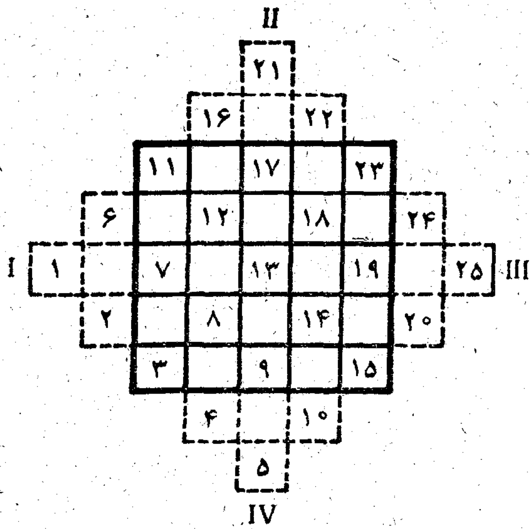
شکل ۴۹

ردیف اول قرار می‌دهیم (شکل ۴۹) ، جملهٔ دوم را در خانهٔ بالا و سمت راست آن می‌گذاریم، از اینجا به‌بعد مثل روش قبل عمل می‌کنیم، با این تفاوت که وقتی مثلاً عدد ۷ به خانهٔ اشغال شده رسید بجای اینکه عدد ۸ را درخانهٔ دوم زیرآن قرار دهیم، درست در خانهٔ زیرآن می‌گذاریم.

توصیه می‌کنیم که این روش را هم درمربع دیگری امتحان کنید و در ابتدا به جای وسط ردیف بالا، عدد۱را در وسط ردیف پایین بگذارید.

روش باشـ این روش یکی از زیباترین و درعین‌حال ساده‌

ترین آنهاست. این روش براین مبنا قرار داردکه به‌مربع چهارهرم در چهار طرف آن اضافه کنیم، همان‌طور که در اینجا برای مربع با ۲۵ خانه دیده می‌شود، به این ترتیب یك شکل پله‌ای متقارن بدست‌می‌آید(شکل ۵۰).



شکل ۵۰

سپس باشروع از رأس یکی از هرمها در جهت خطی که موازی قطر مربع باشد، به‌ترتیب همهٔ ۲۵ عددرا می‌نویسیم، بعد عددهایی راکه درخارج مربع قرارگرفته‌اند به‌این ترتیب وارد مربع می‌کنیم: هرم I را دور عدد ۱۹ می‌چینیم، هرم II را دور عدد۹ و غیره.

در نتیجه مربع جادویی با مجموع ۶۵ بدست می‌آید (شکل ۵۱). این مربع متقارن است. درطول یکی از قطرهای آن بطور زیبایی تصاعد ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ قرار گرفته

۱۱	۴	۱۷	۱۰	۲۳
۲۴	۱۲	۵	۱۸	۶
۷	۲۵	۱۳	۱	۱۹
۲۰	۸	۲۱	۱۴	۲
۳	۱۶	۹	۲۲	۱۵

شکل ۵۱

است، عددنیکبختی ۱۳ درمرکز آنهاست و هر دو عددی که نسبت به‌این مرکز قرینهٔ یکدیگر باشند، مجموعی مساوی۲۶، یعنی۱۳×۲، دارند.

روش لالیوبر- این روش را در مثالی از مربع پنج ردیفی بررسی‌می کنیم. به‌مربع اصلی، بجای هرمها، چهار مربع دیگر به‌همین اندازه طوری اضافه می‌کنیم که شکلی مانند شکل ۵۲ پیدا شود. دروسط ستون‌سمت چپ‌مربع اصلی‌واحد را قرار می‌دهیم، سپس درجهت بالا و سمت‌راست به‌صورت قطری عددهای ۲، ۳، ۴ و۵را به‌ترتیب می گذاریم.

							۱۵		
				۵		۱۴			
			۴		۱۳	۲۰			
		۳		۱۲	۱۹			۱۰	
	۲		۱۱	۱۸	۲۵		۹		
۱			۱۷	۲۴		۸			
		۱۶	۲۳		۷				
		۲۲		۶					
	۲۱								

شکل ۵۲

عددهای ۴ و ۵ درخارج مربع‌اند. اگر هرکدام از آنها را ۵ خانه پایین‌تر قراردهیم، درمربع قرار خواهندگرفت (شکل۵۳را ببینید).

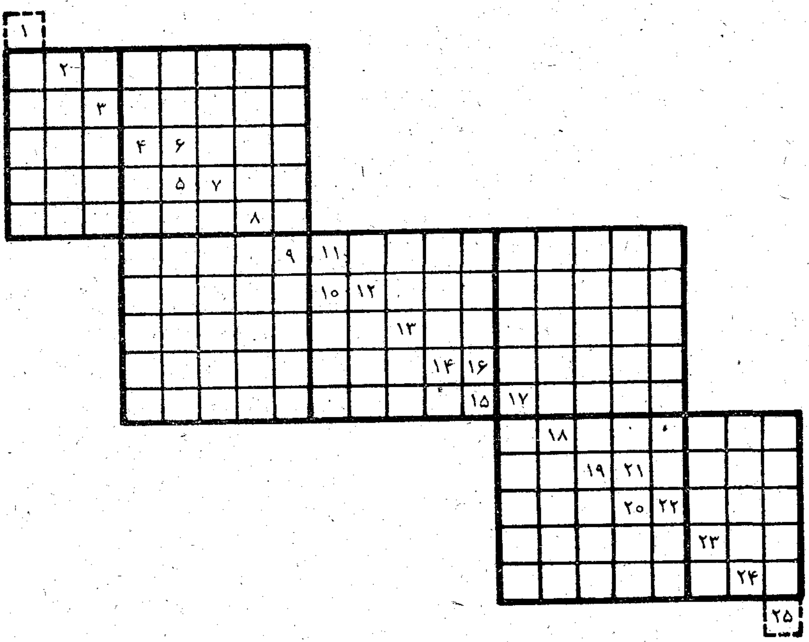
زیر موضع جدید ۵، عدد ۶ را می‌نویسیم و دوباره درجهت قطری به‌طرف بالا و راست عددهای ۷، ۸، ۹ و ۱۰ را قرار می‌دهیم. با رسیدن به‌دومین مضرب ۵ می‌بینیم که عددهای ۷، ۸، ۹ و ۱۰ درخارج مربع اصلی‌اند، آنها را پنج خانه به‌طرف چپ منتقل می‌کنیم تا درمربع واقع شوند. زیر موضع جدید ۱۰، عدد ۱۱ را قرار می‌دهیم و به دنبال آن عددهای ۱۲ ، ۱۳، ۱۴ ، ۱۵ . برای اینکه عددهای ۱۳، ۱۴ ، ۱۵ داخل مربع قرار گیرند، آنها را پنج خانه به‌طرف پایین و پنج خانه به‌طرف چپ می‌بریم. به‌همین ترتیب کار را به‌پایان می‌رسانیم.

۱۹	۲۱	۳	۱۰	۱۲
۲۵	۲	۹	۱۱	۱۸
۱	۸	۱۵	۱۷	۲۴
۷	۱۴	۱۶	۲۳	۵
۱۳	۲۰	۲۲	۴	۶

شکل ۵۳

وقتی که عددهای تصاعد را تا آخر بنویسیم (اینجا تا ۲۵) و همهٔ عددهایی را که در مربعهای فرعی هستند به مربع اصلی منتقل کنیم، مربعی جادویی بدست می‌آید که بامربع قبلی فرق دارد و به‌کمك روش باش پیدا شده است . در این مربع زیر خانهٔ ۲۵، خانهٔ ۱ قرارگرفته است.

تغییری در روش قبل- با الهام از فکر لالیوبر، روش او را مختصری تغییر می‌دهیم و راهی بـرای ساختن مربعهای جـادویی درجهٔ پنجم پیدا می‌کنیم. روی خانه‌های یك کاغذ شطرنجی، عدد-های طبیعی را به‌صورت زیر می‌نویسیم (شکل ۵۴):



شکل ۵۴

عددهای گروه اصلی ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را روی قطر مربع اصلی می‌نویسیم و عددهای دیگر را به ترتیبی که در شکل ۵۴ دیده می‌شود درداخل یاخارج این مربع (درمربعهای فرعی که مربع اصلی را احاطه کرده‌اند) جا می‌دهیم.

دیگر به سادگی می‌توان با انتقال عددهای خارج به مربع اصلی، مربع جادویی موردنظر را بدست آورد.

وبه‌روشنی دیده‌می‌شود که این یك مربع جادویی متقارن است. (شکل ۵۵).

١١	١٨	٢۵	٢	٩
١٠	١٢	١٩	٢١	٣
۴	۶	١٣	٢٠	٢٢
٢٣	۵	٧	١۴	١۶
١٧	٢۴	١	٨	١۵

شکل ۵۵

روش حرکت اسب شطرنج ـ این روش خیلی اصیل و درعین حال ساده و جالب است. در اینجا هم برای مثال مربـع درجه هفتم را انتخاب می کنیم کـه دارای ۴۹ خانه است. عدد ۱ را دریکی از خانه‌ها قرار می‌دهیم و عددهای ۲ و ۳ وغیره را روی آن در خانه‌هایی می گذاریم که حرکت اسب در بازی شطرنج آنها را مشخص می کنند. عدد ۴ در بیرون مربع قرار می گیرد و باید آنرا به داخل مربع در خانهٔ مربوط منتقل کرد، سپس بـا شروع از آن دوبـاره با حرکت اسب جلو می‌رویم. وقتی که به‌عدد ۷ رسیدیم و بعد هم هرجا به‌مضربهای ۷ یعنی ۱۴، ۲۱، . . . برخورد کردیم، عدد بعد از آن، یعنی۸، ۱۵، ۲۲، . . . را درست درخانهٔ زیر قرار می‌دهیم

					۱۳		
	۹			۴			
۷				۱۲			۷
۸			۳				
			۱۱			۶	
		۲				۱۴	
		۱۰			۵	۱۵	
	۱				۱۳		
	۹			۴			

		۱۸	۳۵	۴۵	۱۳	۲۳	۴۰
	۹	۲۶		۴	۲۱	۳۱	۴۸
۷	۱۷	۳۴	۴۴	۱۲	۲۲	۳۹	۷
۸	۲۵	۴۲	۳	۲۰	۳۰	۴۷	
۱۶	۳۳	۴۳	۱۱	۲۸	۳۸	۶	۱۶
۲۴	۴۱	۲	۱۹	۲۹	۴۶	۱۴	۲۴
۳۲	۴۹	۱۰	۲۷	۳۷	۵	۱۵	۳۲
۴۰	۱	۱۸	۳۵	۴۵	۱۳	۲۳	
۴۹	۹	۲۶	۳۶	۴	۲۱	۳۱	
					۲۲		

شکلهای ۵۶ و ۵۷

و باشروع از آن طبق حرکت اسب جلومی‌رویم تا به‌عدد۴۹ برسیم (شکلهای ۵۶ و ۵۷) .

۴ـ ساختن مربعهای جادویی زوج زوج

روش دلایر ـ برای ساختن مربعهای زوج زوج می‌توان با جزیی تغییر از روشهایی که قبلاً آوردیم استفاده کرد. اولین مربع کمکی را با عددهای تصاعد ۱، ۲، ۳، ۴ پر می‌کنیم: ابتدا این چهارعدد را درسطر اول به‌ترتیب دلخواه می‌نویسیم با این شرط که ۱ و ۴ و همچنین ۲ و ۳ قرینهٔ یکدیگر باشند، سپس تمام مربع را با این عددها پرمی‌کنیم به‌نحوی که نسبت به‌خط افقی مرکزی متقارن باشند؛ مربع جادویی بامجموع ۱۰ بدست می‌آید (شکل ۵۸).

مربع کمکی دوم را با عددهای تصاعد ۰، ۴، ۸، ۱۲ پر می‌کنیم. در اولین ستون مربع این چهار عدد را به ترتیب دلخواه

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲

۱۲	۰	۰	۱۲
۴	۸	۸	۴
۸	۴	۴	۸
۰	۱۲	۱۲	۰

۱۵	۴	۱	۱۴
۶	۹	۱۲	۷
۱۰	۵	۸	۱۱
۳	۱۶	۱۳	۲

شکل ۵۸

قرار می‌دهیم و سپس مثل مربع قبل (شکل ۵۸) خانه‌های مربع را طوری پرمی‌کنیم که نسبت به‌خط قائم مرکزی متقارن باشند. مربع دیگری بامجموع ۲۴ بدست می‌آید.

اگر عددهای متناظر این دومربع را باهم جمع کنیم، مربع سوم با جمع جادویی ۳۴ بدست می‌آید.

روش دلانه و مون دزیر ـ این روش کاملاً جدید، فوق‌العاده

ساده و درعین حال بامزه است. برای اینکه مطلب به‌خوبی روشن شود، این روش را روی مربع درجه هشتم، یعنی مربعی با ۶۴ خانه، شرح می‌دهیم، ولی عین آنرا می‌توان درمورد مربعی با ۱۶خانه هم بکار

۱	۶۳	۶۲	۴	۵	۵۹	۵۸	۸
۵۶	۱۰	۱۱	۵۳	۵۲	۱۴	۱۵	۴۹
۴۸	۱۸	۱۹	۴۵	۴۴	۲۲	۲۳	۴۱
۲۵	۳۹	۳۸	۲۸	۲۹	۳۵	۳۴	۳۲
۳۳	۳۱	۳۰	۳۶	۳۷	۲۷	۲۶	۴۰
۲۴	۴۲	۴۳	۲۱	۲۰	۴۶	۴۷	۱۷
۱۶	۵۰	۵۱	۱۳	۱۲	۵۴	۵۵	۹
۵۷	۷	۶	۶۰	۶۱	۳	۲	۶۴

شکل ۵۹

برد. بعضی از خانه‌های این مربع را (آنطور که در شکل می‌بینید) سیاه کرده‌ایم، شبیه وضعی که برای صفحهٔ شطرنج وجود دارد (شکل ۵۹).

اگر خواننده اندك دقتی به‌شکل بکند، راه نوشتن عددها را پیدا می‌کند. مربع جادویی بدست می‌آید که مجموع آن ۲۶۰ است.

ه‍ ـ ساختن مربعهای زوج فرد

همانطور که قبلاً هم یادآوری کردیم، برای ساختن این نوع مربعها راههای کمی وجود دارد؛ علاوه بر آن همهٔ روشهای موجود پیچیده و از جهت درك مشکل‌اند. ما در اینجا ساده‌ترین آنها را انتخاب کرده‌ایم که متعلق به دلایر است، ولی به هرحال نسبت به‌ـ روشهایی که تا اینجا دیده‌ایم مشکلتر و از ذهن دورتر است. شبیه حالت مربع زوج زوج، در اینجا هم به‌مربعهای کمکی احتیاج داریم: مربع اول از تصاعد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و مربع کمکی

دوم از تصاعد ۰، ۶، ۱۲، ۱۸، ۲۴ ، ۳۰ ساخته می‌شود. هیچیك از این دو مربع سحرآمیز نیستند، ولی قطرهای آنها مجموعهای مساوی هم دارند. این دو مربع را باهم جمع می‌کنیم، البته این مربع هم جادویی نیست (شکل ۶۰).

مربع جادویی را تنها بعد از چند تبدیل درمربع‌سوم می‌توان بدست‌آورد؛ به‌این ترتیب: عددهایی را که روی قطرقرارگرفته‌اند تغییر نمی‌دهیم ، در اولین سطر بالا و اولین ستون چپ ، جای عددهایی را که قرینهٔ هم هستند با هم عوض می‌کنیم: ۱۲ و ۷، ۲۷ و ۲۸، ۲ و ۳۲، ۱۷ و ۲۳. در ستون دوم و ستون آخر جای عدهای ۲۴ و۱۸، ۱۴ و ۲۰ راعوض می‌کنیم. بعد از این تبدیلها، مربع چهارم شکل ۶۰ بدست می‌آید؛ دراین مربع هم باید درسطر

۲۴	۶	۲۴	۲۴	۶	۲۴
۰	۳۰	۰	۰	۳۰	۰
۱۲	۱۸	۱۲	۱۲	۱۸	۱۲
۱۸	۱۲	۱۸	۱۸	۱۲	۱۸
۳۰	۰	۳۰	۳۰	۰	۳۰
۶	۲۴	۶	۶	۲۴	۶

۵	۶	۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳	۶	۵
۵	۶	۳	۴	۱	۲
۵	۶	۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳	۶	۵
۵	۶	۳	۴	۱	۲

۲۹	۷	۲۸	۹	۱۲	۲۶
۳۲	۳۱	۳	۴	۳۶	۵
۲۳	۱۸	۱۵	۱۶	۱۹	۲۰
۱۴	۲۴	۲۱	۲۲	۱۳	۱۷
۲	۱	۳۴	۳۳	۶	۳۵
۱۱	۳۰	۱۰	۲۷	۲۵	۸

۲۹	۷	۲۸	۲۷	۱۲	۲۶
۳۲	۳۱	۳	۴	۳۶	۵
۲۳	۱۸	۱۵	۱۶	۱۹	۲۰
۱۷	۲۴	۲۱	۲۲	۱۳	۱۴
۲	۱	۳۴	۳۳	۶	۳۵
۱۱	۳۰	۱۰	۹	۲۵	۸

۲۹	۱۲	۲۷	۲۸	۷	۲۶
۲	۳۱	۴	۳	۳۶	۵
۱۷	۲۴	۱۵	۱۶	۱۹	۱۴
۲۳	۱۸	۲۱	۲۲	۱۳	۲۰
۳۲	۱	۳۴	۳۳	۶	۳۵
۱۱	۳۰	۹	۱۰	۲۵	۸

شکل ۶۰

چهارم و ستون چهارم عددهای ۱۷ و ۱۴، ۲۷ و ۹ را باهم عوض کنیم. به این ترتیب مربع پنجم بدست می‌آید که یك مربع جادویی

با مجموع مساوی ۱۱۱ است (شکل ۶۰).

این تبدیلها را می‌توان با سه قاعدهٔ کلی انجام داد. بدون اینکه به‌عددهای قطر دست بزنیم، این تبدیلها را انجام می‌دهیم:

۱) درسطر اول و ستون اول، عددهای خانه‌های قرینه را بهم تبدیل می کنیم؛

۲) درسطردوم و آخر، همچنین درستون‌دوم و آخر، عددهای خانه‌های مرکزی را بهم تبدیل می کنیم؛

۳) دریکی از سطرهای مرکزی ودریکی ازستونهای مرکزی عددهای خانه‌های کنار را بهم تبدیل می کنیم.

البته، بجای سطر اول وستون اول می‌توان سطر آخر و ستون آخررا انتخاب کرد، همچنین تبدیلهای ۲) و ۳) را هم می‌توان به‌نحو دیگری انجام داد، تنها عددهای روی قطر را نباید دست زد. ضمن ساختن مربع‌جادویی به کمك مربعهای کمکی، می‌توان طرح کار را چنان ریخت که دریك خانهٔ معین، عدد مورد نظر قرارگرفته باشد. مثلاً اگر بخواهیم درخانهٔ مرکزی عدد ۱ قرارگیرد، مربع کمکی اول را طوری درست می کنیم که در این خانه عدد ۱ قرار گرفته باشد، ومربع دوم را به‌نحوی که درهمین خانه عدد صفر باشد.

۶ـ ساختن‌مربعهای جادویی‌خاص

روش‌آرنوـ این روش عبارتست از بیان بعضی انواع عبور از مربع جادویی عادی به‌مربع جادویی خاص. اگر دقیق‌تر بگوییم این قاعده عبارتست از روش ساختن مربعهای فرد، با این **تفاوت**

۳۱	۳۶	۲۹	۷۶	۸۱	۷۴	۱۳	۱۸	۱۱
۳۰	۳۲	۳۴	۷۵	۷۷	۷۹	۱۲	۱۴	۱۶
۳۵	۲۸	۳۳	۸۰	۷۳	۷۸	۱۷	۱۰	۱۵
۲۲	۲۷	۲۰	۴۰	۴۵	۳۸	۵۸	۶۳	۵۶
۲۱	۲۳	۲۵	۳۹	۴۱	۴۳	۵۷	۵۹	۶۱
۲۶	۱۹	۲۴	۴۴	۳۷	۴۲	۵۲	۵۵	۶۰
۶۷	۷۲	۶۵	۴	۹	۲	۴۹	۵۴	۴۷
۶۶	۶۸	۷۰	۳	۵	۷	۴۸	۵۰	۵۲
۷۱	۶۴	۶۹	۸	۱	۶	۵۳	۴۶	۵۱

شکل ۶۱

IV	IX	II
III	V	VII
VIII	I	VI

شکل ۶۲

که در آن تعداد خانه‌های هر - سطر مضربی است از ۳. درعین حال به کمك این روش یك مربع جادویی ترکیبی بدست می آید (یعنی مربع جادویی که خود از چند مربع جادویی درست شده است).

روی یك مثال بهتر می - توان مطلب را روشن کرد. برای این منظور مربعی از درجهٔ ۹، یعنی مربعی با ۸۱ خانه در نظر می گیریم. این مربع را به ۹ مربع که هرکدام آنها ۹ خانه داشته باشند، تقسیم می کنیم؛ و به‌ترتیب برای هرکدام از این ۹ مربع ۹ جمله از تصاعد

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، . . .، ۸۱

را انتخاب می کنیم و۹ مربع درجه سوم می‌سازیم (شکل۶۱)، سپس آنها را به‌نحوی که با عددهای رومی در شکل ۶۲ نشان داده شده است کنار هم جا می‌دهیم (خود این مربع درجه سوم که با عددهای رومی ساخته شده است یك مربع جادویی است).

اگربخواهیم باهمین روش مربعی ازدرجهٔ پانزدهم(۱۵ × ۱۵) بسازیم، برای معین کردن جای مربعهای درجهٔسوم ازیکی ازروشهای

ساختن مربعهای جادویی فرد استفاده می کنیم.

خصوصیت جالب این مربعهای جادویی ترکیبی در اینجاست که نه‌تنها تمام مربع، بلکه هریك از مربعهای تشکیل دهندهٔ آنهم مربعی جادویی است. بجای اینکه عددهای طبیعی از ۱ تا ۸۱ به ۹ تصاعد متوالی که هریك از۹ عدد متوالی ۱، ۲، ۳، . . .، ۹ وبعد ۱۰، ۱۱، ...، ۱۸ وسپس ۱۹، ۲۰، ... ۲۷ وغیره تشکیل شده‌اند، تقسیم کنیم؛ می‌توان این ۸۱ عدد متوالی را به‌ترتیب دیگری به ۹ تصاعد ازنوع دیگر تقسیم کرد، مثلا:

۱، ۱۰، ۱۹، . . .، ۷۳
۲، ۱۱، ۲۰، . . .، ۷۴
. . . .
۹، ۱۸، ۲۷، . . .، ۸۱

و با هریك از این تصاعدها یك مربعی جادویی با۹ خانه ساخت و سپس به‌کمك آنها مربعی جادویی از درجهٔ نهم بدست آورد. به‌این ترتیب مربع جادویی دیگری بدست می‌آیدکه باقبلی فرق دارد.

مربعهای جادویی خاص از نوع زوج زوج را هم می‌توان با همین روش ساخت. برای اینکه یك مربع جادویی خاص درجهٔ هشتم بسازیم، عددهای طبیعی از ۱ تا ۶۴ را به‌هشت قسمت تقسیم می کنیم، سپس از دوقسمت اول وهشتم،

I	XV	XIV	IV
XI	VI	VII	IX
VIII	X	XI	V
XIII	III	II	XVI

شکل ۶۴

۱	۶۳	۶۲	۴	۹	۵۵	۵۴	۱۲
۶۰	۶	۷	۵۷	۵۲	۱۴	۱۵	۴۹
۸	۵۸	۵۹	۵	۱۶	۵۰	۵۱	۱۳
۶۱	۳	۲	۶۴	۵۳	۱۱	۱۰	۵۶
۱۷	۴۷	۴۶	۲۰	۲۵	۳۹	۳۸	۲۸
۴۴	۲۲	۲۳	۴۱	۳۶	۳۰	۳۱	۳۳
۲۴	۴۲	۴۳	۲۱	۳۲	۳۴	۳۵	۲۹
۴۵	۱۹	۱۸	۴۸	۳۷	۲۷	۲۶	۴۰

شکل ۶۳

دوم وهفتم، سوم وششم وبالاخره چهارم وپنجم، چهارمربع درجهٔ چهار بایکی ازروشهای مذکور می‌سازیم (شکلهای ۶۳ و ۶۴)؛ هریك از این مربعها شامل مجموع جـادویی ۱۳۰ خواهد بود. از این چهار مربع، مربعی از درجهٔ هشت تشکیل می‌شود که خود یك مربع جادویی است.

۷ـ مربع جادویی با تصاعد هندسی

خطهای کلی ساختمان مربعی که عددهای آن بجای تصاعد حسابی، به‌تصاعدهندسی باشند شبیه‌حالت‌های قبلی است. البته به‌جای رشتهٔ عددهای ۱، ۲، ۳، . . . باید از دنبالهٔ عددهایی‌که نمای‌آنها به‌ترتیب ۰، ۱، ۲، ۳، ... است استفاده‌کنیم، وبجای مجموع جادویی دراینجا باید ازحاصلضرب جادویی نام برد (شکل ۶۵). درمربع شکل ۶۵ حاصلضرب جادویی برابر است با ۴۰۹۶.

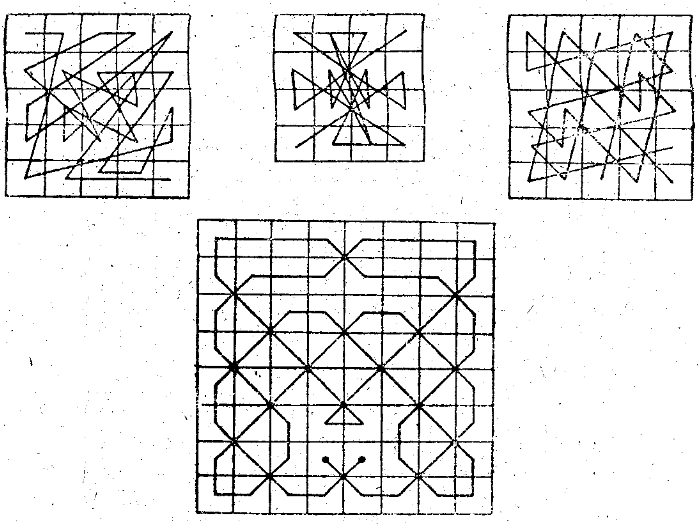
۲	۲۵۶	۸
۶۴	۱۶	۴
۳۲	۱	۱۲۸

شکل ۶۵

۸ـ تصویرهندسی حرکت درمربعهای جادویی

برای ساختن هر مربع جادویی می‌توان مسیر حرکت عددها را درخانه‌ها به‌صورت یك تصویر نشان داد، ضمناً از خطهایی که رسم می‌شود شکلهای بسیار جالبی هم بدست می‌آید. ما در اینجا در شکل ۶۶، مسیر حرکتها را درمربع ۴×۴، دو مربع ۵×۵ که با روشهای مختلفی ساخته شده‌اند، وبالاخره تصویر متقارن جالبی

در مربع ۸×۸ داده‌ایم . در مربع آخر، عددهای از ۱ تا ۶۴ را



شکل ۶۶

می‌توان با شروع از نقطهٔ مبدأ (راست یاچپ) درهرجهت دلخواه و به‌ترتیب نوشت.

۹ـ خطهای حسابی

قبل از اینکه مربعهای فوق جادویی را مطرح کنیم، باید مختصری دربارهٔ خطهای حسابی گفتگو کنیم:

به جدول شکل ۶۷ توجه کنید؛ این جدول از ۹ مربع درجه پنجم تشکیل شده است که درهر کدام از آنها به‌ترتیب عددهای ۰ تا ۲۴ نوشته شده است.

به‌جای ۹ مربع می‌توان ۱۶، ۲۵، ... مربع انتخاب کرد، همچنین بجای مربعهای درجهٔ پنجم می‌توان مربعهایی باتعدادخانه‌های

دیگرانتخاب کرد؛ به‌هرحال صحبت برسر کمیت نیست، بلکه سخن از کیفیت است که می‌توانیم در آنها خطهای به‌اصطلاح حسابی رسم کنیم، چیزی که به‌روشن کردن آن می‌پردازیم (شکل ۶۸).

۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴

شکل ۶۷

حتی بدون خط کش و مداد می‌توان بلافاصله به‌یکی ازخط‌های حسابی توجه کرد، یعنی به‌قطر مربع، این خط از خانه‌ای که صفر درآنست شروع می‌شود و ازخانهٔ ۶، سپس ۱۲، ۱۸، ۲۴، ... عبور می‌کند. خاصیت این خط هم بلافاصله دیده می‌شود.

ردیف عددهایی که این خط حسابی از آنها عبور می‌کند، چنین است:

۰, ۶, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ...

که می‌توان آنها را به‌صورت زیرنوشت:

۰, ۱+۵, ۲+۲×۵, ۳+۳×۵, ۴+۴×۵, ...

اگرخانهٔ شروع این خط را ۰ بنامیم، در اولین خانه‌ای که برخورد می‌کند: (مضرب ۵+۱)، در خانهٔ دوم (مضرب ۵+۲)، در خانهٔ سوم (مضرب ۵+۳)، در خانهٔ چهارم (مضرب ۵+۴) و غیره قرار دارد.

حال بجای اینکه در امتداد قطرمربع حرکت کنیم، خط کش و مدادی انتخاب می‌کنیم و مرکز خانه‌ای را که به‌وسیلهٔ ۰ پر شده است به مرکز خانه‌ای که عدد ۱۶ درآنست وصل می‌کنیم؛ اگراین خط راست را ادامه دهیم از مرکز بسیاری از خانه‌هـای دیگر هم عبور می‌کند و دوباره یك رشتهٔ عدد بدست می‌آید:

۰، ۱۶، ۷، ۲۳، ۱۴، . . .

که آنها را هم می‌توان به‌این صورت نوشت:

۰، ۱+۳×۵، ۲+۱×۵، ۳+۴×۵، ۴+۲×۵، ...

دوباره به‌همان وضعی رسیدیم کـه دفعهٔ قبل بـدست آورده بودیم، یعنی: رشته عددهایی که درخانه‌هایی نوشته شده‌اندکه خط حسابی از مرکز آنها می‌گذرد عبارتند از عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، . . . که به‌هرکدام ازآنها مضربی از۵ اضافه شده است. چنین خطهایی که از مرکزهای خانه‌های مختلف عبور کرده باشند، خطهای حسابی نامیده می‌شود. درشکلهای جادویی که تا اینجـا موردصحبت بوده است به سه نوع خط حسابی (بدون اینکه ازاین نام استفاده‌کنیم) برخورد کرده‌ایم که در مربعهای جادویی منطبق برخطهای جادویی بودند، این خطها عبارت بودند از خطهای افقی در طول خانه‌های مربع، خطهای قائم ستونی و بـالاخره خطهای

قطری. حالا به بررسی خطهای اریب دیگری می‌پردازیم که در مورد خانه‌های مربع به آنها برخورد می‌کنیم و همهٔ آنهارا خطهای حسابی می‌نامیم.

شکل ۶۸ را در نظر می‌گیریم که روی آن چند خط حسابی رسم شده است.

فاصلهٔ بین مرکزهای هردوخانهٔ مجاور راکه‌روی خط‌حسابی قرار دارند، **گام** خط حسابی می‌نامیم.

درطول ضلعهای مستطیل، سطرها و ستونهارا شماره‌گذاری می‌کنیم (آنطور که در شکل نشان داده شده است)، در اینصورت هرخانه را می‌توان به‌کمك یك زوج‌عدد مشخص کرد که درحقیقت خانهٔ محل تلاقی سطر وستون مربوطه را معین می‌کنند، همیشه عدد سمت چپ برای ستون و عدد سمت راست را بـرای سطر در نظر

	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۳	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۰	۱	۲	۳	۴
۱	۵	۶	۷	۸	۹	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۰	۱۱	۱۲	۴	۱۴
۳	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴

شکل ۶۸

می‌گیریم. مثلاً درخانهٔ (۳ و ۲) عدد ۱۷ ودرخانهٔ (۲و۳) عدد ۱۳ قرارگرفته است.

برای اینکه گام خطرا معین کنیم، کافی است دوخانهٔ مجاور را که خط از مرکزهای آنها عبور می‌کند بنویسیم، مثلاً (۰ و ۲) (۳ و ۳).

بر اساس این شماره‌گذاری می‌توان، بدون نگاه کردن به‌شکل، ردیف خانه‌هایی را که خط حسابی از مرکزهای آنها می‌گذرد، یادداشت کرد. برای این منظور کافی است به‌شمارهٔ ستون (یعنی عددی که در پرانتز در سمت چپ قرار گرفته است) مقدار ثابت (۲ ــ ۳) = ۱ و به‌شمارهٔ سطرعدد ثابت (۰ ــ ۳) = ۳ را مرتباً اضافه کنیم که در اینصورت خانه‌های زیر بدست می‌آید:

(۲ , ۰) ، (۳ , ۳) ، (۴ , ۶) ، (۵ , ۹) ، (۶ , ۱۲) ، (۷ , ۱۵) ، ...

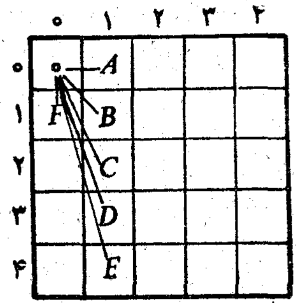
قسمتی از خط را که از مرز مربع اول خارج می‌شود، همیشه می‌توان با همان گامها به‌مربع اول منتقل کرد. مثلاً خط [(۲ , ۱)ــ(۰ , ۰)] از خانه‌های (۴ , ۲) ، (۶ , ۳) ، (۸ , ۴)، . . . عبور می‌کند. پاره خطی ازاین خط راکه باگام [(۴,۸) ــ (۳,۶)] مشخص می‌شود می‌توان به‌گام [(۴,۳) ــ (۳,۱)] منتقل کرد.

وقتی که نقطهٔ شروع خط، مرکزخانهٔ (۰و۰) باشد وبخواهیم چهارمین خانهٔ خط حسابی را باگام (۱و۳) پیدا کنیم، کافی است خانه‌ای را که با شماره‌های ۱×۴ و ۴×۳ مشخص شده است انتخاب کنیم که به‌طورخلاصه می‌توان به‌صورت (۳ , ۱)×۴ نشان داد، بنابراین به‌جای رشتهٔ:

(۰,۰) ، (۱,۳) ، (۲,۶) ، (۳,۹) ، (۴,۱۲) ، (۵,۱۵) ، ...

می‌توان این رشته را نوشت:

(۰,۰) , (۱,۳) , ۲×(۱,۳) , ۳×(۱,۳) , ۴×(۱,۳) , ۵×(۱,۳) , ...



شکل ۶۹

بین خطهای حسابی زیادی که می‌توان از خانه‌های مختلف و در جهتهای مختلف رسم کرد، به‌اصطلاح خطهای حسابی اصلی را که درشکل ۶۹ نشان‌داده شده است، جدا می‌کنیم. همهٔ این خطها را از خانهٔ (۰و۰) شروع شده‌اند وگامهای آنها چنین است:

گام (۰ و ۱) یا OA

گام (۱ و ۱) یا OB

گام (۲ و ۱) یا OC

گام (۳ و ۱) یا OD

گام (۴ و ۱) یا OE

و همچنین گام (۱ و ۰) یا OF

تعداد همهٔ خطهای حسابی اصلی درمربع درجهٔ پنجم مساوی ۶، یعنی ۱+۵، و به‌طور کلی در مربعی که n سطر و n ستون دارد مساوی $n+1$ است.

خطهـای حسابی اصلی از خانه‌های زیر می‌گذرند (پس از آنکه پاره خطهایی از آنها را که ازمربعهای دیگر گذشته‌اند، باگام مشابه به‌مربع اصلی منتقل کنیم):

OA خط : (۰,۰) , (۱,۰) , (۲,۰) , (۳,۰) , (۴,۰)
OB خط : (۰,۰) , (۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۴,۴)
OC خط : (۰,۰) , (۱,۲) , (۲,۴) , (۳,۱) , (۴,۳)
OD خط : (۰,۰) , (۱,۳) , (۲,۱) , (۳,۴) , (۴,۲)
OE خط : (۰,۰) , (۱,۴) , (۲,۳) , (۳,۲) , (۴,۱)
OF خط : (۰,۰) , (۰,۱) , (۰,۲) , (۰,۳) , (۰,۴)

درنتیجهٔ این مقابله می‌بینیم که از هر خانهٔ مربع اصلی (شکل ۷۰) یکی از خطهای اصلی عبور می‌کند و ضمناً تنها خانهٔ (۰,۰) برای همهٔ این خطها مشترك است و درهیچیك ازخانه‌های مربع اصلی، خطهای اصلی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	A	A	A	A
۱	F	B	D	C	E
۲	F	C	B	E	D
۳	F	D	E	B	C
۴	F	E	C	D	B
۰					
۱			D	C	E
۲				E	D
			E		C
۴				D	

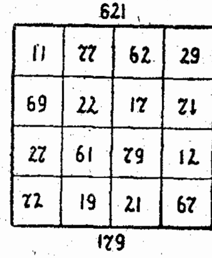
شکل ۷۰

دراینجا ما تنها به‌بعضی ازخاصیتهای خطهای حسابی اشاره کردیم که برای فهمیدن مربعهای «فوق جادویی» لازم داریم. به‌خواننده توصیه می‌کنیم که خود بعضی دیگر از خاصیتهای جالب این خطها را جستجو کند. چه بسا که در این جستجو به مطالب تازه‌ای برخورد کند، ولی حتی اگر تمام‌آنچه را که خواننده پیدا کند درنظریهٔ این خطها ازقبل وجود داشته باشد، بازهم از اهمیت کشفی‌که خواننده کرده است نمی‌کاهد.

۱۰ــ مربع «چرخشی»

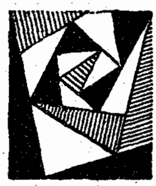
ما در این فصل آنقدر دربارهٔ مربعهای جادویی و فوق جادویی صحبت کرده‌ایم که به‌نظر می‌رسد هیچ‌چیز نمی‌تواند دراین

مبحث تعجب‌آور باشد. با وجود این در اینجا یك مربـع جادویی آورده‌ایم. آیا شبیه آن را جایی دیده‌اید ؟ آن را می‌توان به‌همین ترتیب که رسم شده است درنظر گرفت و یا آنرا «سروته» کرد، در هرحال جادویی است (شکل۷۱).



شکل ۷۱

۱۱ـ مثلثهای بادورهٔ جادویی



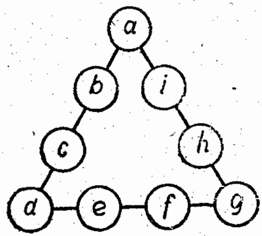
مثلث جـادویی یکی از جـالبترین شکلهای ریاضی است. باید عددهای طبیعی ۱ تا ۹ را به‌جای حرفهایی که در شکل ۷۲ وجود دارد به نحوی قرار داد که مجموع مربعهای عددهایی که در طول هریك از ضلعها قرار دارند، مقدار ثابتی بشود، یعنی:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=Q \qquad (1)$$
$$d^2+e^2+f^2+g^2=Q \qquad (2)$$
$$g^2+h^2+i^2+a^2=Q \qquad (3)$$

اگر این سه معادله را باهم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$a^2+d^2+g^2+(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2)=3Q$$

مجموع داخل پرانتز عبارتست ازمجموع مربعهای عددهای از ۱ تا ۹. می‌دانیم مجموع مربعهای n عدد طبیعی متوالی از۱ تا n با رابطهٔ $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ بدست می‌آید که به ازای ۹ $n=$



شکل ۷۲

مساوی ۲۸۵ می‌شود. از آنجا :

$$a^2+d^2+g^2=3(Q-95) \quad (4)$$

متذکر می‌شویم که اگر عددی بر ۳ قابل قسمت نباشد، مربع آن به صورت $3k+1$ است. اگرمجموع مربعهای عددهای a، d و g بر ۳ قابل قسمت باشد، یکی از دو حالت زیر وجود دارد:

I ـ یا هیچکدام از این سه عدد قابل‌قسمت بر ۳ نیستند.

II ـ ویا هر کدام از آنها بر ۳ قابل‌قسمت‌اند (یعنی عددهای ۳، ۶ و ۹ هستند).

در حالت II می‌توان فرض کرد: $a=3$ ، $d=6$ ، $g=9$. از آنجا $a^2+d^2+g^2=126$ و طبق رابطهٔ (۴):

$$126=3(Q-95) \implies Q=137$$

دراینصورت بنابر رابطهٔ (۱) بدست می‌آید: $b^2+c^2=92$.

چون مجموع b^2+c^2 عددی است زوج ، b و c هر دو زوج ویا هردو فردند؛ ولی اگرتمام انواع ممکنه را برای ۲، ۴ و ۸ یا ۱، ۵ و ۷ درنظربگیریم، نمی‌توان دو عدد زوج یا دو عدد فرد طوری پیدا کردکه مجموع مربعهای آنهامساوی۹۲ باشد. بنابراین حالت II ممکن نیست.

درحالت I به‌این ترتیب استدلال می‌کنیم: از رابطه‌های (۱) و(۲)و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(a^2+d^2)+(b^2+c^2)=(d^2+g^2)+(e^2+f^2)=$$
$$=(g^2+a^2)+(h^2+i^2)$$

ولی در این حالت هریک از مجموعهای a^2+d^2 ، d^2+g^2، g^2+a^2 در تقسیم بر۳ باقیمانده‌ای مساوی ۲ دارند. از اینجا نتیجه می‌گیریم که هریک از مجموعهای b^2+c^2 ، e^2+f^2 و h^2+i^2 هم در تقسیم بر۳ یکجور باقیمانده دارند. به‌سادگی معلوم می‌شود که درهریک ازاین مجموعها، یکی ازجمله‌ها بر۳ قابل‌قسمت ودیگری بر۳ غیرقابل قسمت است. می‌توان قبول کرد که $b^2=۹^2=۸۱$ ، $e^2=۶^2=۳۶$ و $h^2=۳^2=۹$.

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) با رابطه‌های (۲) و (۳) بدست می‌آید:

$$a^2+c^2+۴۵=f^2+g^2 \qquad (۵)$$

$$c^2+d^2+۷۲=g^2+i^2 \qquad (۶)$$

که درآنها مجذورها عبارتند از ۱، ۴، ۱۶، ۲۵، ۴۹ و ۶۴.

رابطهٔ(۶) تنها دریکی از دوحالت زیرتحقق می‌پذیرد:

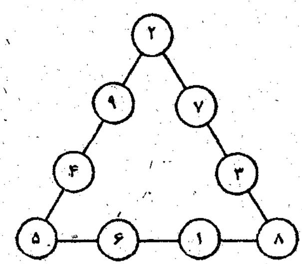
$$g^2+i^2=۶۴+۴۹=۱۱۳ \ , \quad c^2+d^2=۴۱=۱۶+۲۵;$$

$$g^2+i^2=۶۴+۲۵=۸۹ \ , \quad c^2+d^2=۱۷=۱+۱۶$$

و معادله‌های (۵) و (۶) تنها وقتی برقرارندکه داشته باشیم:

$g^2=۶۴$, $c^2=۱۶$, $a^2=۴$,
$f^2=۱$, $d^2=۲۵$, $i^2=۴۹$

و به‌این ترتیب مثلثی که درشکل ۷۳داده‌شده‌است، بدست‌می‌آید.



شکل ۷۳

بلافاصله نتیجهٔ غیر منتظرهٔ دیگری هم پیدا می‌شود: در این مثلث نه‌تنها مجموع مربعهای عددهای هرضلع، بلکه مجموع خود عددهای هرضلع هم مقداری ثابت است:

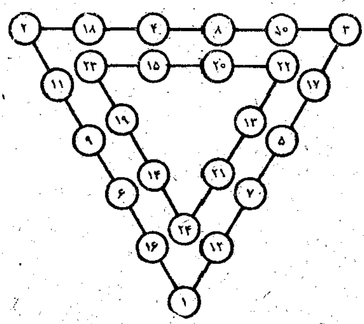
۲+۹+۴+۵=۲۰، ۵+۶+۱+۸=۲۰،
۸+۳+۷+۲=۲۰

به‌این ترتیب مثلثی بادونوع مجموع جادویی بدست می‌آید:
۲۰ و ۱۲۶.

۱۲ـ مثلثهای جادویی دیگر

برای مثلثهایی که در اینجا می‌آوریم روشهایی برای ساختن آنها وجود ندارد، با وجوداین بسیارجالب ومتنوع‌اند، بخصوص نوع دوم این مثلثها می‌تواند وسیله‌ای برای تمرین خواننده باشد.

I ـ مثلثهای هم مرکز (شکل ۷۴).



شکل ۷۴

هرضلع مثلث بیرونی دارای مجموع جادویی ۴۵ است:

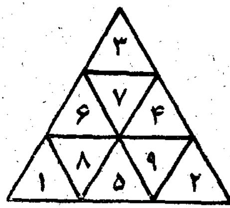
۱+۱۲+۷+۵+۱۷+۳=۴۵
۳+۱۰+۸+۴+۱۸+۲=۴۵
۲+۱۱+۹+۶+۱۶+۱=۴۵

مجموع جادویی ضلعهای مثلث درونی مساوی ۸۰ است:

۲۴+۲۱+۱۳+۲۲=۸۰
۲۲+۲۰+۱۵+۲۳=۸۰

۲۳+۱۹+۱۴+۲۴=۸۰

II ـ مثلثهایی که از مثلثهای دیگر درست شده است (شکل‌های ۷۵ و ۷۶).



شکل ۷۵

۱+۵+۶+۸=۲۰

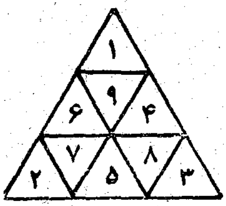
۲+۴+۵+۹=۲۰

۳+۶+۴+۷=۲۰

۱+۸+۵+۹+۲=۲۵

۲+۹+۴+۷+۳=۲۵

۳+۷+۶+۸+۱=۲۵



شکل ۷۶

۲+۵+۶+۷=۲۰

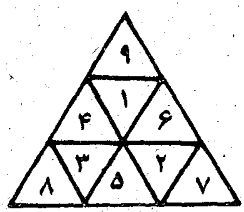
۳+۴+۵+۸=۲۰

۱+۶+۴+۹=۲۰

۲+۷+۵+۸+۳=۲۵

۳+۸+۴+۹+۱=۲۵

۱+۹+۶+۷+۲=۲۵



شکل ۷۷

۸+۵+۴+۳=۲۰

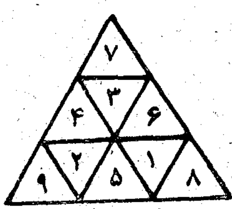
۷+۶+۵+۲=۲۰

۹+۴+۶+۱=۲۰

۸+۳+۵+۲+۷=۲۵

۷+۲+۶+۱+۹=۲۵

۹+۱+۴+۳+۸=۲۵



شکل ۷۸

۹+۵+۴+۲=۲۰

۸+۶+۵+۱=۲۰

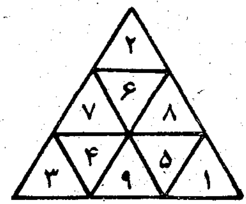
۷+۴+۶+۳=۲۰

۹+۲+۴+۳+۷=۲۵

۷+۳+۶+۱+۸=۲۵

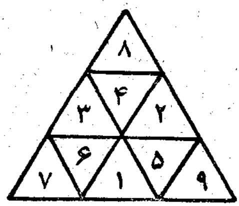
۸+۱+۵+۲+۹=۲۵

درمثالهایی که ذکر کردیم، باوجودتغییرجای‌عددها، مجموع جادویی تغییر نکرده است. می‌توان تغییر را چنان انجام داد که مجموع جادویی تغییر کند. درزیر چنین مثالهایی آورده‌ایم:



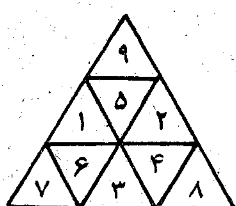
شکل ۷۹

۳+۹+۷+۴=۲۳
۱+۸+۹+۵=۲۳
۲+۷+۸+۶=۲۳
۳+۴+۹+۵+۱=۲۲
۱+۵+۸+۶+۲=۲۲
۲+۶+۷+۴+۳=۲۲



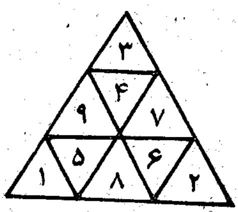
شکل ۸۰

۷+۱+۳+۶=۱۷
۹+۲+۱+۵=۱۷
۸+۳+۲+۴=۱۷
۷+۶+۱+۵+۹=۲۸
۹+۵+۲+۴+۸=۲۸
۸+۴+۳+۶+۷=۲۸



شکل ۸۱

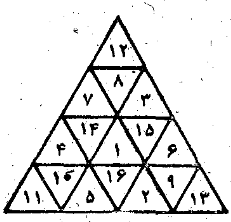
۷+۱+۳+۶=۱۷
۹+۲+۱+۵=۱۷
۸+۳+۲+۴=۱۷
۷+۶+۱+۵+۹=۲۸
۹+۵+۲+۴+۸=۲۸
۸+۴+۳+۶+۷=۲۸



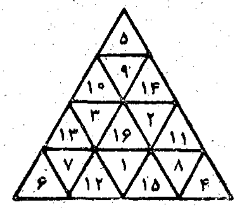
شکل ۸۲

۱+۹+۸+۵=۲۳
۳+۷+۹+۴=۲۳
۲+۸+۷+۶=۲۳
۱+۵+۹+۴+۳=۲۲
۳+۴+۷+۶+۲=۲۲
۲+۶+۸+۵+۱=۲۲

در مثلثهایی هم که از ۱۶ جزء تشکیل شده‌اند می‌توان خاصیتهای جالبی کشف کرد:



شکل ۸۴



شکل ۸۳

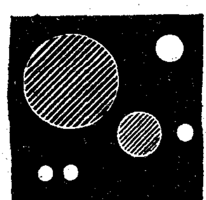
برای شکل ۸۳

۶+۱۲+۱۳+۷=۳۸
۴+۱۱+۱۵+۸=۳۸
۵+۱۰+۱۴+۹=۳۸
۶+۷+۱۲+۱+۱۵+ ۸+۴=۵۳
۴+۸+۱۱+۲+۱۴+ ۹+۵=۵۳
۵+۹+۱۰+۳+۱۳+ ۷+۶=۵۳

برای شکل ۸۴

۱۱+۵+۴+۱۰=۳۰
۱۳+۶+۲+ ۹=۳۰
۱۲+۷+۳+ ۸=۳۰
۱۱+۱۰+ ۵+۱۶+۲+۹+۱۳=۶۶
۱۳+ ۹+ ۶+۱۵+۳+۸+۱۲=۶۶
۱۲+ ۸+۷+۱۴+۴+۱۰+۱۱=۶۶

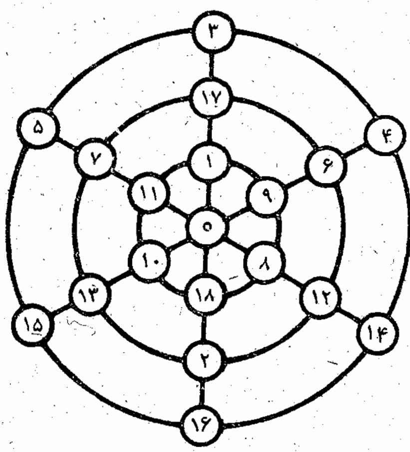
۱۳ـ دایره‌های جادویی



ساده‌ترین راه ساختن دایرهٔ جادویی اینست که عددها را درمحل تلاقی قطرهای دایره با محیط دایره‌های هم مرکز با آن،

قرار دهیم. درشکل ۸۵ که در اینجا نشان داده شده است، سه قطر محیط سه دایرهٔ هم مرکزرا در۱۸ نقطه قطع کرده‌اند. دراین نقطه‌ها باید ۱۸ عدد طبیعی از ۱ تا ۱۸ را چنان قرار داد که مجموع عددهای هر قطر و محیط هر دایره مقدار ثابتی باشد. این مجموع جادویی باید چنین باشد:

$$\frac{۱۸(۱۸+۱)}{۲} \times \frac{۱}{۳} = ۳ \times ۱۹ = ۵۷$$



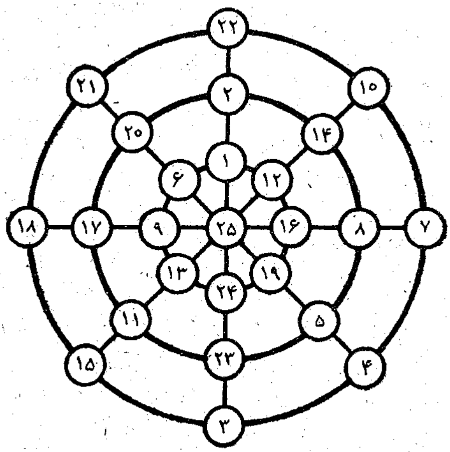
شکل ۸۵

عددهای از یك تا ۱۸ را اینطور می‌نویسیم:

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸

مجموع هرزوج مساوی۱۹ است، بنابراین کافی است عددها را طوری بنویسیم که هردونقطه‌ای که نسبت به‌مرکز قرینه‌اند، شامل یکی از این زوجها باشند؛ با این روش ساده، مجموع جادویی برای محیط و قطر بدست می‌آید.

برای همین تعداد دایره‌ها، می‌توان به‌جای سه قطر از چهار قطر استفاده کرد. در اینصورت تعداد نقطه‌های برخورد با محیطها مساوی ۴ × ۳ × ۲ یعنی ۲۴ می‌شود. روش ساختن این دایره هم



شکل ۸۶

مثل دایرهٔ قبلی است؛ تنها در مرکز دایره‌ها بجای صفر باید عددی را قرارداد که مساوی مجموع هرکدام از زوج عددهاست (۲۵=۱+۲۴ ، ۲۵=۲+۲۳، ...) که در نقطه‌های متقارن نسبت به‌مرکز قرارگرفته‌اند (شکل ۸۶).

۱۴ـ مکعبهای جادویی

مکعبی انتخاب می‌کنیم و آنرا به ۲۷ مکعب کوچکتر تقسیم می‌کنیم (شکل ۸۷). برای‌این‌منظور بایدهرکدام ازوجه‌های‌مکعب رابه ۹ مربع تقسیم کنیم و به‌کمك صفحه‌هایی که از داخل مکعب عبور می‌کنند، ضلعهای این مربعها را بهم وصل کنیم. مکعب را

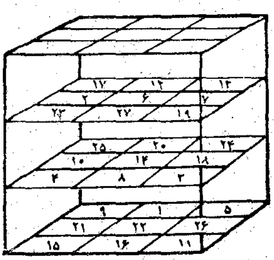
نیمه جادویی گوییم وقتی که مجموع نه عدد (واقع درداخل مکعبها) که روی هریك ازصفحه‌های افقی ویاعمودی قرارگرفته‌اند، مقدار ثابتی باشد.

مکعب را جادویی کامل گوییم وقتی که مجموع نه عددی که‌در طول هریك از شش قطر مکعب هم قرارگرفته‌اند، مقداری جادویی باشد.

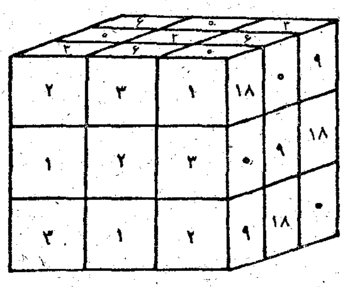
مجموع جادویی مکعبی کـه به ۲۷ قسمت تقسیم شده باشد، به سادگی محاسبه می‌شود. مجموع عددهای از ۱ تـا ۲۷ برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+۲۷=\frac{۲۷(۲۷+۱)}{۲}=۳۷۸$$

و مجموع جادویی مساوی ثلث این عدد یعنی ۱۲۶ می‌باشد.



شکل ۸۸



شکل ۸۷

ساده‌ترین روش تعیین‌جای عددها درمکعب‌جادویی، استفاده از مربعهای کمکی دلاایر است که ما در مورد ساختن مربعهای جادویی با آن آشنا هستیم. این مربعهای کمکی را روی سه وجه یك رأس مشترك مکعب کوچك قرار می‌دهیم و سپس برای هریك از مکعبهای کوچك عددهای وجه‌های آنرا بـا هم جمع می‌کنیم.

مثلاً برای مکعب کوچکی که در رأس پایین و سمت راست قرار گرفته است عدد ۱۱=۹+۲+۰ ، برای رأس سمت چپ عدد ۱۵=۹+۳+۳، برای مکعب کوچك مرکزی عدد ۱۴=۹+۲+۳ بدست می‌آید و غیره.

اگر با سه صفحهٔ افقی موازی مکعب را قطع کنیم، به نحوی که از مرکزهای هرلایهٔ مکعبهای کوچك بگذرند، همهٔ عددها، به همان ترتیب که روی این صفحه‌ها نوشته شده است، بدست می‌آید (شکل ۸۸). می‌بینیم مجموع عددهایی که روی هریك ازاین صفحه‌ها قرار گرفته‌اند مساوی ۱۲۶ است.

می‌توانستیم مکعب را به وسیلهٔ صفحه‌های قائم موازی قطع کنیم، دراینصورت گروه عددهایی بدست می‌آیدکه می‌توان آنها را به‌سادگی روی شکل پیداکرد، مثلاً برای صفحهٔ قائم مرکزی:

۲+۶+۷+۱۰+۱۴+۱۸+۲۱+۲۲+۲۶=۱۲۶

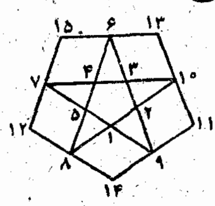
و برای صفحهٔ قائم دیگر:

۲۳+۲+۱۷+۴+۱۰+۲۵+۱۵+۲۱+۹=۱۲۶

به‌همین ترتیب می‌توان صفحه‌های قطری‌را هم بدست‌آورد:

۲۳+۶+۱۳+۴+۱۴+۲۴+۱۵+۲۲+۵=۱۲۶

۱۵ـ ستاره‌های جادویی



شکل ۸۹

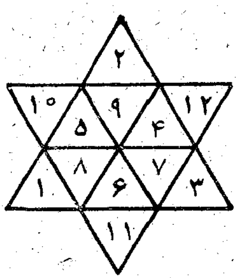
۱۱+۱۰+۱۳=۳۴
۱۳+۶+۱۵=۳۴
۱۵+۷+۱۲=۳۴
۱۲+۸+۱۴=۳۴
۱۴+۹+۱۱=۳۴

۱+۲+۴+۱۵=۲۲
۲+۳+۵+۱۲=۲۲
۳+۴+۱+۱۴=۲۲
۴+۵+۲+۱۱=۲۲
۵+۱+۳+۱۳=۲۲

۶+۱۵+۷+۴=۳۲
۷+۱۲+۸+۵=۳۲
۸+۱۴+۹+۱=۳۲
۹+۱۱+۱۰+۲=۳۲
۱۰+۱۳+۶+۳=۳۲

۱+۸+۵+۱۳=۲۷
۲+۹+۱+۱۵=۲۷
۳+۱۰+۲+۱۲=۲۷
۴+۶+۳+۱۴=۲۷
۵+۷+۴+۱۱=۲۷

۶+۹+۷+۱۵=۳۷
۷+۱۰+۸+۱۲=۳۷
۸+۶+۹+۱۴=۳۷
۹+۷+۱۰+۱۱=۳۷
۱۰+۸+۶+۱۳=۳۷



شکل ۹۰

۱۰+۵+۹+۴+۱۲=۴۰
۱۲+۴+۷+۶+۱۱=۴۰
۱۱+۶+۸+۵+۱۰=۴۰

۲+۹+۴+۷+۳=۲۵

۳+۷+۶+۸+۱=۲۵

۱+۸+۵+۹+۲=۲۵

۱۰+۲+۱۲+۳+۱۱+۱=۳۹

۵+۹+ ۴+۷+ ۶+۸=۳۹

IV - آوای دروغین

ورود به مطلب

اقلیدس، ریاضی‌دان بزرگ یونانی (که درقرن سوم قبل از میلاد می‌زیست)، علاوه بر «مقدمات» مشهور خود، کتاب جالبی هم به‌نام «آوای دروغین» دارد. در این کتاب از انواع استدلالهای نادرستی که ممکن است هر تازه‌کاری در ریاضیات و بخصوص در هندسه داشته باشد، گفتگو شده است. ولی این نوشتهٔ اقلیدس به‌ما نرسیده است.

ما در این فصل از انواع مختلف استدلالهای نادرست: پارالوگیزم[1]، سفسطه[2] وپارادوکس[3] درهندسه، حساب وجبرصحبت می‌کنیم.

بعضی از این مطالب بر اساس اشتباه چشم و بعضی دیگر بر اساس اشتباه گوش قرار دارد. مثلاً وقتی که مطلبی به‌طور کامل شنیده نشود وبه‌بعضی از مقدمات توجه نشود، اساساً محتوی مسأله

---

۱) Paralogisme : نتیجه‌گیری نادرست (قیاس کاذب).

۲) Saphisme : تظاهری آراسته و درست. ولی در واقع نتیجه‌گیری نادرست (سفسطه).

۳) Paradoxe : نتیجه‌ای که با اعتقاد عمومی نمی‌سازد.

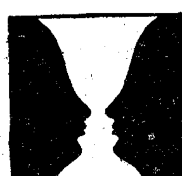
تغییر می کند؛ این حالت نه تنها به شکل سؤال، بلکه به لحنی هم که برای بیان دنبالهٔ مطلب به کار می‌رود، مربوط است. در موردهای دیگر، اشتباه مربوط می‌شود به کار برد نادرست قانون، طرح نادرست خود فرض، حذف یکی از حلقه‌های زنجیر قیاس، تعمیم نادرست حالتهای خاص و غیره.

مثل فصلهای قبل، در اینجا هم خواننده به انواع مختلف مسأله‌ها برخورد می کند که از نظر سادگی در درجه‌های مختلف قرار دارند. بعضی از این مسأله‌ها کاملاً روشن شده‌اند و در مورد بعضی دیگر برای جستجوی ریشهٔ اشتباه تنها به‌راهنمایی اکتفا شده است. نمونه‌هایی هم وجود دارد که حل آنها به طور کامل به عهده خواننده گذاشته شده است.

دوستداران استدلال دقیق وهواخواهان منطق، بدون تردید با شوق زیاد به‌این وادی پر از کوره راههای گمراه کننده قدم می‌گذارند. جایی که باید با تلاش زیاد خود را از سرگردانی نجات دهند.

۱ـ اشتباه چشم

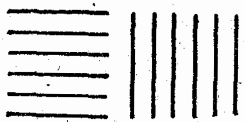
اشتباههایی که از راه دیدن پیش می‌آید خیلی زیاد است.

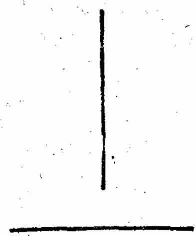


ما دراینجا بعضی از نمونه‌های ساده را، که از نظر اینگونه اشتباهها

اساسی است، می‌آوریم.

اشتباههایی که دراثر وضع قرارگرفتن خطها وشکلها پیش می‌آید. خطی که به‌طور قائم قرارگرفته باشد، بزرگترازخط افقی به‌نظر می‌رسد (شکل ۹۱). مربعی که به‌وسیلهٔ خطهای قائم هاشور

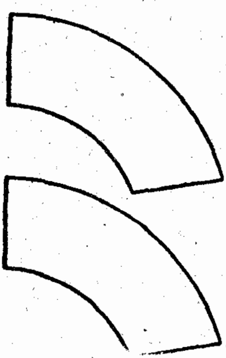




شکل ۹۲ — شکل ۹۱

خورده باشد، پهن‌ترازمربعی به‌نظرمی‌رسد که باخطهای افقی هاشور خور ده است (شکل ۹۲).

شکل ۹۳



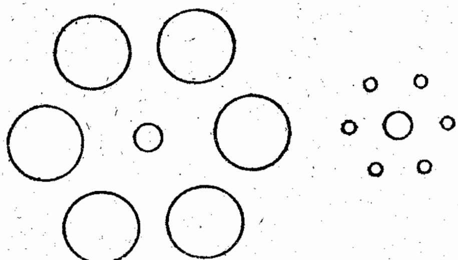
درشکل ۹۳ به‌نظر می‌رسد، که نه تنها نقطه‌های پایینی دایره‌ها روی یـك منحنی هستند، بلکه نقطه‌های‌بالایی آنها هم بریك خط منحنی قرار گرفته‌اند. در شکل۹۴ دو تصویر می‌بینیم که یکی روی دیگری قرار گـرفته است . در این وضعـی کـه دو

شکل ۹۴

تصویرقرارگرفته‌اند ، روشن‌است که کنارهٔ پایین‌تصویربالا کوچکتر

است از کنارهٔ بالای تصویر پایین؛ از همین‌جا این تصور پیش می‌آید که تمام تصویر بالا کوچکتر از تصویر پایین است.

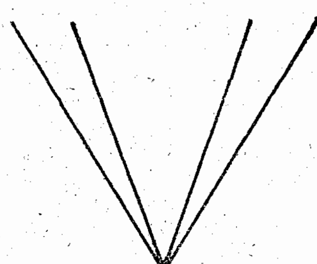
اشتباههایی که به‌خاطر مقایسه پیش می‌آید. دو دایره‌ای که درمرکز شکلهای ۹۵ قرارگرفته‌اند، باهم برابرند، ولی‌دایره‌ای که بین شش دایره بزرگتر واقع شده است، کوچکتر از دایره‌ای که



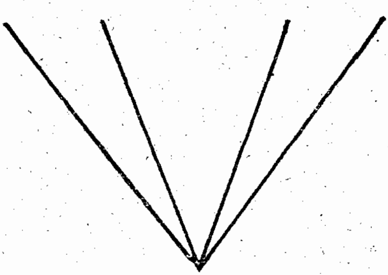
شکل ۹۵

بین شش دایرهٔ کوچکتر واقع است، به نظر می‌رسد این اشتباه به‌مناسبت مقایسهٔ دایره‌ها بایکدیگر پیش می‌آید.

در شکلهــای ۹۶ و ۹۷، زاویه‌هــای مرکزی برابرند، ولــی زاویه‌ای که بین دوزاویهٔ بزرگترقرارگرفته، کوچکتر و زاویه‌ای که



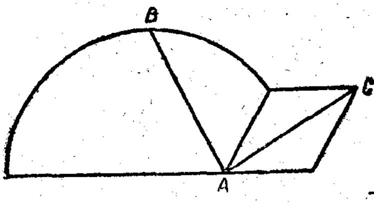
شکل ۹۶



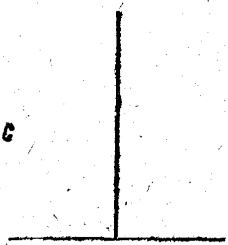
شکل ۹۷

بین دوزاویهٔ کوچکتر قرار گرفته، بزرگتر به‌نظرمی‌رسد. دراینجاهم اشتباه به‌مناسبت مقایسهٔ شکل با اطراف خود پیش آمده است.

در شکل ۹۸ پاره خط قائم بزرگتر از پاره خط افقی به نظر می‌رسد. اگرچه در واقع این پاره‌خطها باهم برابرند. در شکل ۹۹ پاره خط AB خیلی بزرگتر از پاره خط AC دیده می‌شود ، در حالیکه درواقع بایکدیگر مساوی‌اند.

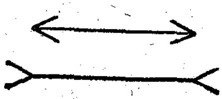


شکل ۹۹

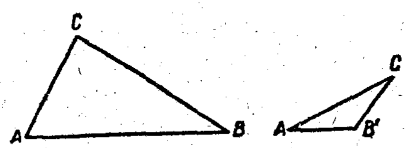


شکل ۹۸

ضلع AC از مثلث بزرگ در شکل ۱۰۰، بزرگتر از ضلع A'C' از مثلث کوچك به نظر می‌رسد، درحالیکه این دوضلع با هم برابرند.



شکل ۱۰۱



شکل ۱۰۰

اشتباههایی که به‌خاطر منحرف شدن دقت پیش می‌آید.

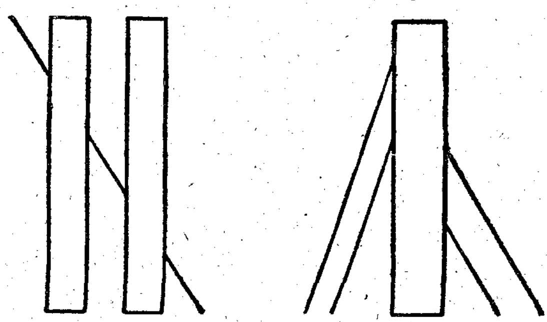
اگربه‌شکل۱۰۱ توجه کنیم، می‌فهمیم که دوپاره‌خط موازی ومساوی یکدیگرند، ولی وجود پیکانهـا در دو طرف پاره خطهـا، دقت را منحرف می کند واین اشتباه را به‌وجود می آورد که تصور کنیم پاره

خط پایینی بزرگتر از پاره‌خط بالایی است.

ولی باکمال تأسف کسی نیست که این اشتباه را نکند و گمان نکندکه در شکل ۱۰۲ فاصلهٔ منقارهـای دو پرندهٔ اول کوچکتر از فاصلهٔ منقارهای دوپرندهٔ دوم‌نیست، در حالیکه روی شکل این دو-فاصله باهم برابرند.

شکل ۱۰۲

اشتباههایی که به‌مناسبت نقض آهنگ اصلی پیش می‌آید.
اگرخطی بازاویهٔ کوچك حاده سطح دو مستطیل را قطع کند، به‌نظر می‌رسد به‌قطعه‌هایی تقسیم شده است که در امتداد هم نیستند (شکل ۱۰۳). درشکل دیگر۱۰۳ امتداد هرکدام ازدوخط مایلی که ازسمت راست نوار را قطع کرده‌اند درست به‌نقطهٔ برخورد مایلهای سمت

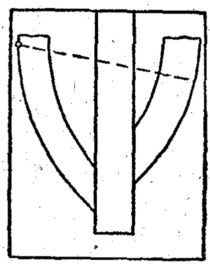


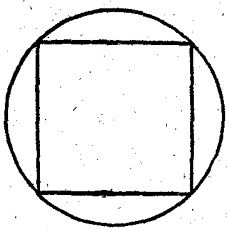
شکل ۱۰۳

چپ‌بانوار، می‌رسند، باوجود این به‌نظر می‌رسدکه‌انتهای مایلهای سمت چپ بالاتر از جای واقعی خود قرارگرفته‌اند.

دراین موردشکل۱۰۴ جالب‌تر است. می‌توانید به‌عدهٔ زیادی

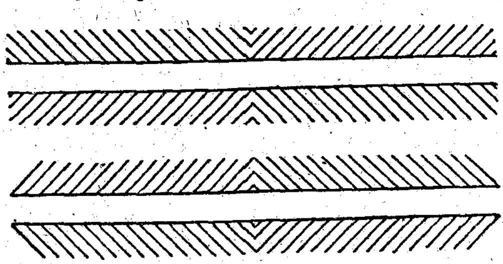
مراجعه کنید و از آنها بپرسید: اگر کمانهایی را که در سمت چپ نوار قرار دارند ادامه دهیم، آیـا به کمانهای سمت راست نـوار متصل می‌شوند (اینها کمانهایی از دایره‌اند)، وهمیشه جواب منفی بشنوید. ولی یك پرگار بردارید و آزمـایش کنید. می‌بینید شعـاع کمانهایی که در سمت چپ قرارگرفته‌اندکاملاً برابراست باشعاع کمانهای سمت راست. ولی حتی بعد از آزمایش هـم نمی‌توانید خودرا از تأثیر اشتباه نجات دهید.


شکل ۱۰۴


شکل ۱۰۵

مربعی که دردایره محاط شود (شکل ۱۰۵)، ظاهراً دایره را تغییرشکل می‌دهد: قسمتی ازکمان دایره‌که در نزدیکی رأس مربع قرار داردکمی فرورفته‌تر از قسمتی به‌نظر می‌رسدکه درمقابل وسط ضلع مربع قرار دارد.

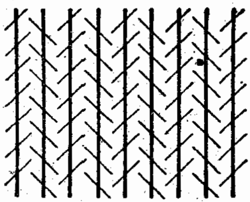
اگرآهنگ هاشور زدن را در دوطرف نواری که به دو خط


شکل ۱۰۶

موازی محدود شده است، تغییر دهیم (شکل ۱۰۶)، بسته به نوع هاشور، به‌نظر می‌رسد که نواردرمرکز خود فرورفتگی‌یا برآمدگی دارد.

بهم خوردگی آهنگ درشکل ۱۰۷ اثر عجیب‌تری دارد.

اگر به‌این شکل از پایین، در جهت مقابل نور، نگاه کنیم، به نحوی‌که امتداد دید از روی صفحهٔ کاغذ بلغزد، متوجه می‌شویم که خطهای کلفت موازی یکدیگرند؛ در حالیکه اگر به‌طور عادی



شکل ۱۰۷

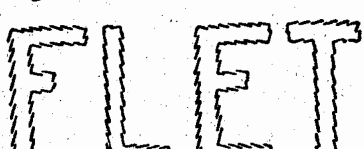
به‌آن نگاه‌کنیم، بسته به‌نوع خطهای کوتاه مایل، به‌نظر می‌رسد که این خطهای کلفت دربعضی جاها بهم نزدیک و دربعضی جاها ازهم دور شده‌اند.

* * *

همین نوع اشتباهها، درمواردی هم که حرفهای الفبا را به‌کمك پاره‌خطهای کوتاه مایل بنویسیم، پیش می‌آید.

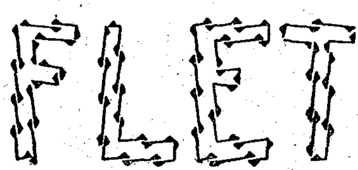
کلمهٔ **FLET** در شکل ۱۰۸ باحرفهای کاملاً مستقیم به نظر

شکل ۱۰۹

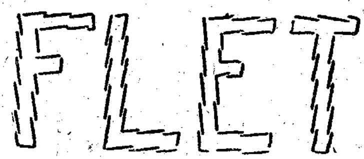


شکل ۱۰۸

می‌رسد. ولی اگر دور حرفها را به کمك پاره خطهای کوتـاه مایل و در جهتهای مخالف رسم کنیم، همین حرفهـا کج به نظر می آیند (شکل ۱۰۹). اگر این پاره خطها را ادامه دهیم، یا بخصوص اگر درانتهای آنها مثلثهای کوچکی بسازیم، تأثیراین ناهم‌آهنگی بیشتر می‌شود و به‌صورتی که در شکلهای ۱۱۰ و ۱۱۱ دیده می‌شود، در- می آید.



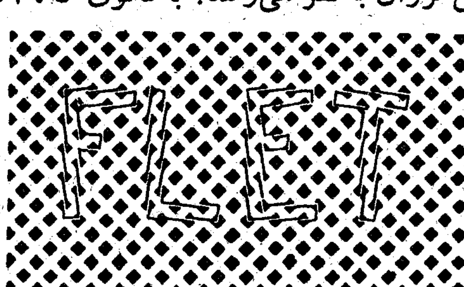
شکل ۱۱۰



شکل ۱۱۱

اگرچشمهای خودرا تنگ کنیم و ازمیان مژه‌ها به‌این شکلها خیره شویم، دوباره حرفها را مستقیم می‌بینیم.

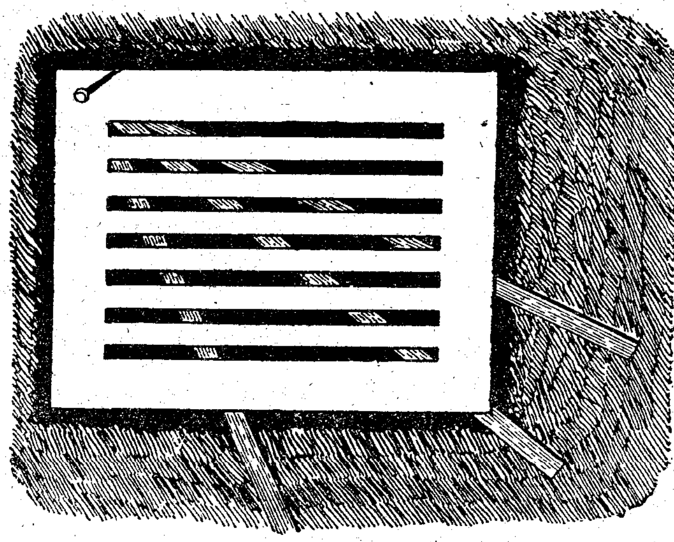
اشتباههایی که به‌مناسبت نوع زمینه‌ای که خطها ویا شکلها روی آن قرار دارند، به‌وجود می‌آید. اگر کلمهٔ FLET را روی زمینه‌ای قراردهیم که به‌وسیلهٔ مربعهای کج درست شده است، به‌طور باور نکردنی لرزان به نظر می‌رسد؛ به نحوی که، اگر کسی آن را



شکل ۱۱۲

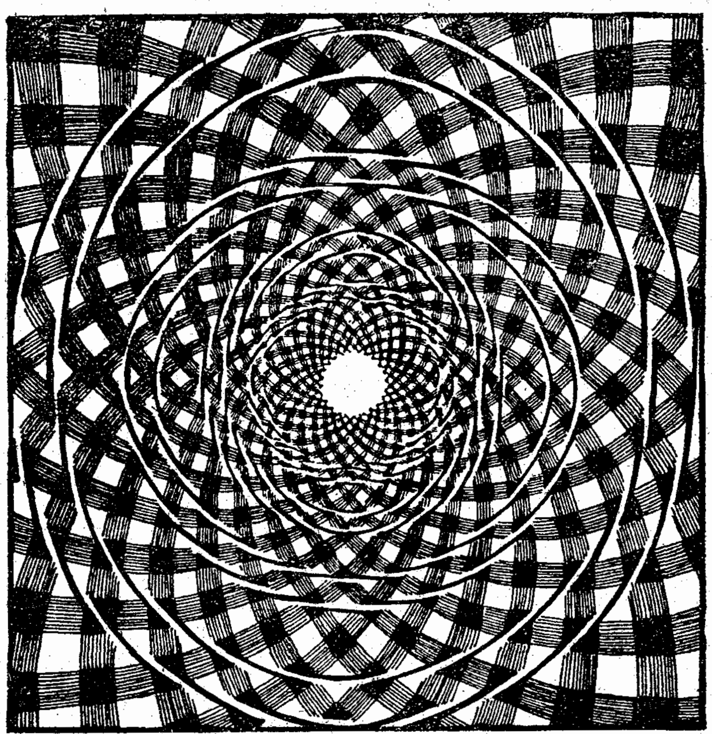
مورد آزمایش قرارندهد، باورنمی کند که مستقیم نوشته شده است

(شکل ۱۱۲). تجربهٔ قشنگی می‌توان به کمك مقواهای سفید و خاکستری انجام داد، به‌این‌ترتیب که بایك مقوای چهارگوش سفید شبکه‌ای درست می‌کنیم و آنطور که در شکل ۱۱۳ دیده می‌شود خط‌کشهایی از زیر آن می‌گذرانیم. هرچه خط‌کشها را مایل‌تر قرار دهیم، در نقطه‌هایی که از زیر سوراخهای شبکه می‌گذرد، شکسته‌تر به‌نظر می‌رسد.

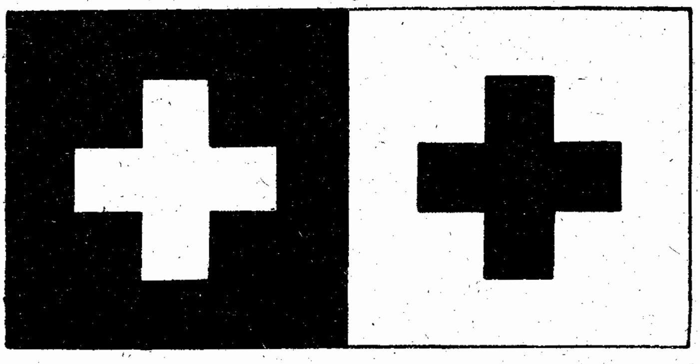


شکل ۱۱۳

اشتباهی باور نکردنی وعجیب درمورد شکلهای ۱۱۴ و ۱۱۵ پیش می‌آید. می‌توان ساعتها، از نزدیك یا دور، مستقیم یا مایل، به‌این شکلها نگاه کرد، بدون آنکه بتوانیم اشتباهی را که در آنها به نظر می‌رسد، پیدا کنیم: ما در این شکلها پیچ و یا منحنی‌هایی می‌بینیم که خیلی دور ازشکل واقعی آنها، یعنی دایره است.

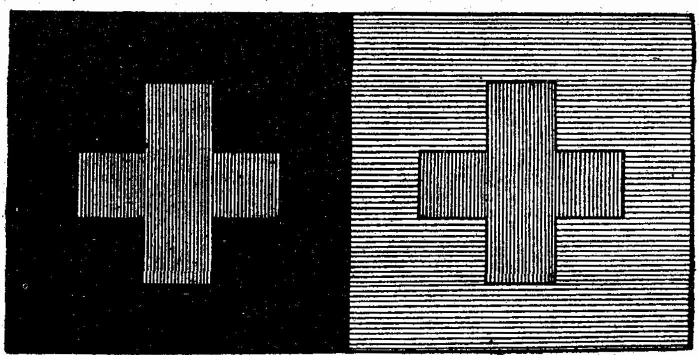


شکل ۱۱۵



شکل ۱۱۶

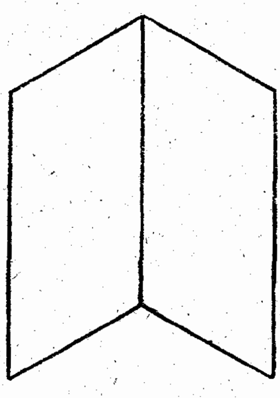
اینهم یکی دیگر از اشتباههای جالبی که در اثر برخورد با محیط پیش می‌آید.



شکل ۱۱۷

بین دو دایرهٔ بالایی می‌توان بازهم یك دایره قرارداد، و بین هرکدام ازدایره‌های بالایی وپایینی می‌توان‌درست سه دایرهٔ دیگر، مساوی باآنها، قرارداد. ولی به‌نظرمی‌رسدکه فاصلهٔ بین دایره‌های بالایی کمتر ازقطراین‌دایره است وظاهراً بین هردایرهٔ بالایی ودایرهٔ پایینی لااقل چهار دایره می‌توان جاداد، بخصوص وقتی که از دور به‌شکل نگاه‌کنیم، این اشتباه بزرگتر به‌نظر می‌رسد (شکل ۱۱۸).

شکل ۱۱۸

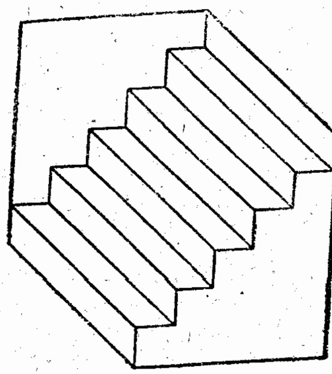


شکل ۱۱۹

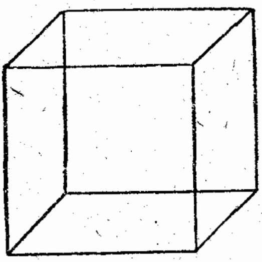
اشتباه روی شکلهای فضایی. این اشتباهها وضع خاصی

دارند و ناشی از بعضی شکلهای سه بعدی است؛ بعضی از این اشتباهها روشن و بعضی مبهم است و بالاخره درمورد بعضی دیگر گاه روشن و گاه مبهم است.

اساس این اشتباهها مربوط به تصور ناپایداری نقطه‌های صحنه است. درشکل ۱۱۹ به‌کمك هفت پاره‌خط دوصفحه مشخص شده است، فرورفتگی بین این دوصفحه گاهی از داخل و گاهی از بیرون دیده می‌شود.

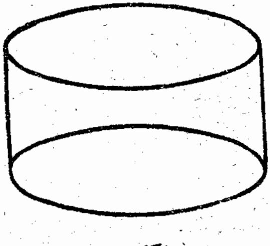


شکل ۱۲۵



شکل ۱۲۱

اگر به پلکان شکل ۱۲۰، از بالا یا از پایین نگاه کنیم، به‌ـ نظر می‌رسد که نوعی سقف خاص است. پدیدهٔ مشابهی در مورد نگاه کردن به‌یك مکعب شیشه‌ای و یا هرمکعب شفاف پیش می‌آید، ازطرف راست آنرا، ازبالا و از طرف چپ آنرا از پایین می‌بینیم (شکل ۱۲۱).

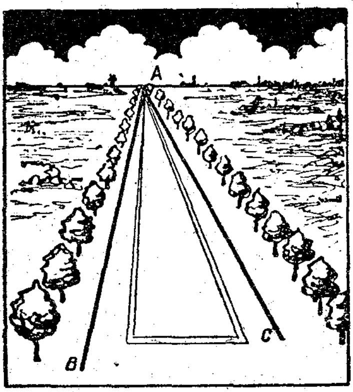


شکل ۱۲۲

در مورد استوانه هم، اگر شفاف باشد، چنین وضعی پیش می‌آید. و اگر به آن به‌عنوان یك جسم غیر شفاف نگاه کنیم، مثل برخورد دوسطحی به‌نظرمی‌رسد

که هر کدام دیگری‌را خم کرده است (شکل ۱۲۲).

عادت بر این است که یك شکل مسطحه را به‌صورت دورنما و طرح یك شکل فضایی واقعی درنظر بگیریم، وهمین عادت علت بسیاری از اشتباهها‌ست ومثلاً نمی‌گذارد که پاره خطها را در شکل ۱۲۳ باهم مقایسه کنیم.



شکل ۱۲۳

وقتی که به چشم انداز شکل ۱۲۳ نگاه می‌کنیم، نمی‌توانیم دچار این اشتباه نشویم که پاره خط AC از پاره خط AB کوچکتر است، اگر چه با اندازه‌گیری مستقیم ثابت می‌شود که این پاره‌خطها برابرند.

۲ـ حل فریب دهندهٔ مسأله‌ها

حرکت کرم. روز یکشنبه ساعت ۶ صبح، کرمی شروع به‌بالاخزیدن از درختی کرد. درجریان روز، یعنی تا ساعت ۶ عصر، به ارتفاع ۵ متری رسید، ولی در جزیان شب ۲ متر به طرف پایین خزید. روزهای بعدهم به‌همین ترتیب عمل کرد. این کرم درچه روز و چه ساعتی به‌بالای درخت، که ارتفاع آن مساوی ۱۲ متراست، می‌رسد؟

هرکس که صورت مسأله را بشنود، می‌خواهد آنرا به‌سرعت وسهولت حل کند: درهرشبانه روز ۵متر بالامی‌رود و۲ متر برمی‌گردد، یعنی‌رویهم ۳ متر از ارتفاع درخت را پشت سر می‌گذارد، بنابراین ۴شبانه‌روز طول می‌

کشد تا به بالای درخت برسد، یعنی در ساعت ۶ صبح روز پنجشنبه. ولی حقیقت اینست که کرم مدتها قبل، یعنی درساعت ۱۳ و ۱۲ دقیقهٔ روز چهار- شنبه، به‌بالای درخت رسیده است.

ساعت حساس. ساعت من نسبت به‌نور و حرارت حساسیت دارد. این ساعت در جریان روز $\frac{1}{2}$ دقیقه جلو می‌رود و در جریان شب $\frac{1}{3}$ دقیقه عقب کار می‌کند. اگر در ابتدای روز اول آوریل ساعت وقت درست را نشان دهد، کی ۵ دقیقه جلو خواهد بود؟ آیا این اتفاق درهمان ماه آوریل خواهد بود؟

گربه‌ها. این مسأله اگر چه قدیمی ولی جالب است. اتاقی چهار گوشه دارد و در هرگوشه‌ای گربه‌ای نشسته است. در مقابل هرگربه، ۳گربه نشسته‌است، ولی روی دم هرگربه، یك گربه نشسته است. رویهم چندگربه دراتاق است ؟

آیا درست فکرکرده‌اید؟ دراین اتاق رویهم چهارگربه است.

سه مسألهٔ کوتاه و ساده. برای اره کردن هر تنهٔ درختی باید ۱۰ ریال پرداخت. اگر بخواهیم تنهٔ درختی به‌طول ۱۲ متر را به- قطعه‌های نیم متری تبدیل کنیم، برای اره کردن آن چقدر باید بپردازیم؟

اگر یك نفر بتواند در ۸ ساعت چاهی به‌سطح ۱ متر مربع و عمق ۴ متر حفر کند، ۸ نفر همین چاه را در چه مدت حفر خواهند کرد ؟

وقتی نزدیك ایستگاه رسیدیم، نگاه کردم، ۸ واگون در جلو و ۵ واگون در عقب خود دیدم. در قطاری که من سوار بودم چند واگون وجود داشت؟

۳ـ سفسطه‌هایی درحساب

۲=۱. هیچکس دراین‌مورد تردید ندارد که: ۴ ــ ۶ = ۱ ــ ۳.

اگر دو طرف این تساوی واضح را در ۱ ــ ضرب کنیم، بدست می‌آید: ۶ ــ ۴ = ۳ ــ ۱. به دوطرف یك تساوی می‌توان یك مقدار اضافه کرد:

$$۱ - ۳ + \frac{۹}{۴} = ۴ - ۶ + \frac{۹}{۴}$$

هردوطرف این تساوی را می‌توان به‌صورت مجذور یك دوجمله‌ای عددی نوشت:

$$(۱ - \frac{۳}{۲})^{۲} = (۲ - \frac{۳}{۲})^{۲}$$

ازدوطرف تساوی اخیر جذر می‌گیریم:

$$۱ - \frac{۳}{۲} = ۲ - \frac{۳}{۲}$$

حالا به هردو طرف این تساوی عدد $\frac{۳}{۲}$ را اضافه می‌کنیم، بدست می‌آید: ۲ = ۱.

۳=۲. این تساوی را هم شبیه مورد بالا می‌توان ثابت کرد. به‌ترتیب تساویهای زیررا در نظر می‌گیریم:

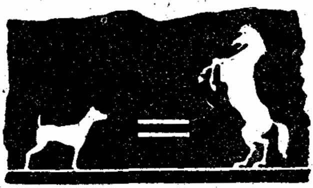
$$۴ - ۱۰ + \frac{۲۵}{۴} = ۹ - ۱۵ + \frac{۲۵}{۴}\,;$$

$$(۲ - \frac{۵}{۲})^{۲} = (۳ - \frac{۵}{۲})^{۲}\,;$$

$$۲ - \frac{۵}{۲} = ۳ - \frac{۵}{۲}\,;$$

$$۲ = ۳$$

هردو نتیجه‌گیری ناشی از استدلال منطقی نادرست است. این استدلال به‌همان اندازه بی‌معنی است که مثلاً قضاوت کنیم:



سگ حیوان است.
اسب حیوان است.
بنابراین سگ و اسب یکی هستند.

در بارهٔ دو حالت مورد نظر ما، از این قضاوت نادرست استفاده کرده‌ایم که:

مربع عددهای مساوی، مساوی‌اند.
مربع دوعدد مفروض مساوی شده‌اند.
بنابراین این دوعدد مساوی‌اند.

وما می‌دانیم که مربع یك عدد منفی مساوی یك عدد مثبت می‌شود، درست مثل مربع یك عدد مثبت .

۴ـ سفسطه‌هایی درجبر

نتیجهٔ نادرست، باوجود بکار بردن اصول. بـه نظر می‌رسد که هیچ چیزی معتبرتر از اصول ریاضی نیست. ولی دراینجا مثالی می‌آوریم که از آن نتیجه می‌شود که می‌توان اصول مقدماتی را در مورد ساده‌ترین عملهـای ریاضی در نظر گرفت و بـه نتیجهٔ کاملاً نادرستی رسید.

معادلهٔ $x-1=2$ را در نظر می‌گیریم.

از این اصل استفاده می‌کنیم که: اگردومقدار مساوی را در یك‌مقدار ضرب کنیم، حاصلضربهای‌مساوی بدست می‌آوریم. دو طرف تساوی فرض را در $(x-5)$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$x^2-6x+5=2x-10$$

حالا از اصل دیگری استفاده می کنیم و از هر دوطرف تساوی، عدد $(x-7)$ را کم می کنیم، بدست می آید:

$$x^2-7x+12=x-3$$

دو طرف معادله را بر $(x-3)$ تقسیم می کنیم، بدست می آید:

$$x-4=1$$

که بالاخره از آن بدست می آید: $x=5$ که نادرستی آن واضح است.

ظاهراً از اصولی که نمی‌توان در مورد آنها تردید داشت، درعملها استفاده کرده‌ایم، باوجود این به‌نتیجهٔ نادرستی رسیده‌ایم.

نتیجهٔ درست، با وجود استدلال نادرست. حالا نشان می‌دهیم که می‌توان دربرابر اصول، دچار لغزشهایی شد، بدون اینکه نتیجهٔ نادرستی بدست آید.

از همان معادلهٔ $x-1=2$ شروع می کنیم. تنها به‌یك طرف آن عدد ۱۰ را اضافه می کنیم، بدست می آید:

$$x+9=2$$

دوطرف تساوی را در $x-3$ ضرب می کنیم:

$$x^2+6x-27=2x-6$$

از دوطرف تساوی $2x-6$ را کم می کنیم:

$$x^2+4x-21=0$$

دو طرف این تساوی را بر $x+7$ تقسیم می کنیم، بدست می آید: $x-3=0$، یا $x=3$، که همان جواب معادلهٔ $x-1=2$ است.

اشتباه ما در کجاست؟

سرچشمهٔ اشتباه دراینجاست که درمورد اصل ضرب یا تقسیم دوطرف

تساوی، نباید عددی که در دو طرف ضرب می‌شود یا دو طرف برآن تقسیم می‌شودمساوی صفر باشد و ما، بدون درنظر گرفتن این نکته، دوطرف را در $۳-x$ ضرب یا برآن تقسیم کرده‌ایم. مثلاً در مسألهٔ اول ما منتظر جواب $x=۳$ هستیم و باتقسیم دوطرف تساوی بر $۳-x$، این جواب را از معادله حذف کرده‌ایم.

هرعدد مساوی نصف خودش است. روشن است که:

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

دراینصورت: $(a+a)(a-a)=a^۲-a^۲$

این تساوی را می‌توان اینطور نوشت:

$$(a+a)(a-a)=a(a-a)$$

دوطرف این تساوی را بر $a-a$ تقسیم می‌کنیم وبدست می‌آوریم:

$$a+a=a \implies ۲a=a \implies a=\frac{۱}{۲}a$$

صفر از هرعددی بزرگتر است. عددمثبت دلخواهی‌انتخاب می‌کنیم و آنرا a می‌نامیم دراینصورت نامساوی زیرواضح است:

$$a-۱<a$$

دوطرف این نامساوی‌را در$(-a)$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$-a^۲+a<-a^۲$$

به‌دوطرف نامساوی اخیر $a^۲$ اضافه می‌کنیم که در اینصورت بدست می‌آید: $a<۰$. در حالیکه ما a را عددی مثبت انتخاب کردیم؛ به‌عنوان نتیجه بدست آوردیم که ازصفر کوچکتراست.

هـ ـ سفسطه‌هایی در هندسه[۱]

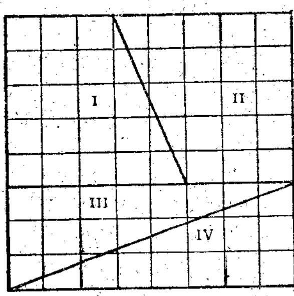
۶۳=۶۴=۶۵. مربعی با ضلعی به طول دلخواه انتخاب و

---

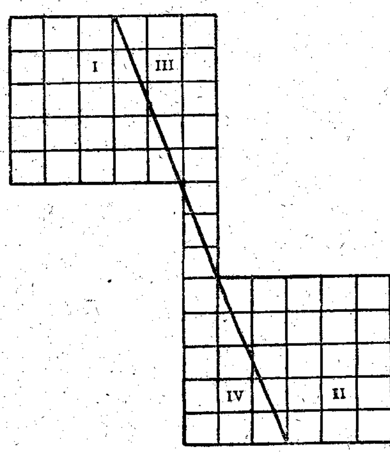
۱ ـ در این زمینه به خواننده توصیه می‌کنیم کتاب بسیار جالب «اشتباه استدلالهای هندسی» را که از مترجم همین کتاب چاپ شده است، مطالعه کند.

هر ضلع آنرا بـه ۸ قسمت تقسیم کنید . اگـر از نقطه‌هـای تقسیم خطهایی موازی ضلعها رسم کنیم، ۶۴ مربع کوچك بدست می‌آید که مربع بزرگ را کاملاً پوشانده‌اند.

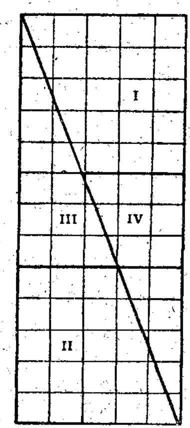
مربع را به‌چهارقسمت تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی که مثل شکل ۱۲۴ تساویهای I=II و III=IV برقرار باشد. این قسمتها را جدا می‌کنیم و باآنها دو شکل ۱۲۵و۱۲۶ را می‌سازیم که اولی مستطیل و دومی یك چند ضلعی است و هریك از مـربعهای کوچك‌تشکیل‌دهندهٔ آنها درست مساوی یکی ازمربعهای کوچك شکل ۱۲۴ است. می‌بینیم که درمستطیل شکل ۱۲۵ درست ۶۵مربع و درچندضلعی شکل ۱۲۶ درست ۶۳ مربع وجود دارد. واین همان



شکل ۱۲۴



شکل ۱۲۶



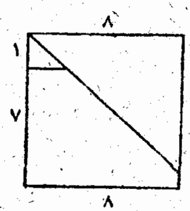
شکل ۱۲۵

نتیجهٔ غیرمنتظره‌ای است که درعنوان این مطلب نوشتیم :

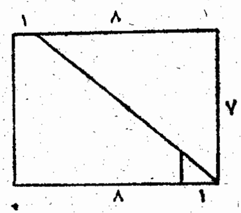
۶۵ = ۶۴ = ۶۳

قسمت دوم این تساوی، یعنی ۶۳ = ۶۴، را می‌توان به‌طریق دیگری، که خیلی هم ساده‌تر است، ثابت کرد.

دوباره مربع ۸ × ۸ را انتخاب می کنیم و آنرا به‌صورتی که درشکل ۱۲۷ نشان داده شده است، می‌بریم ودوقطعهٔ آنرا به‌صورتی که درشکل ۱۲۸ دیده می‌شود، پهلوی‌هم می گذاریم. دراینصورت مستطیلی بدست می‌آید با مساحت ۶۳ = ۹ × ۷. از مربعی که شامل



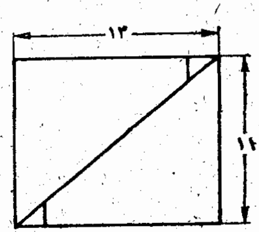
شکل ۱۲۷



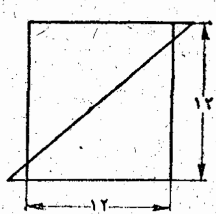
شکل ۱۲۸

۶۴ مربع کوچك بود، مستطیلی بدست می‌آوریم که شامل ۶۳ عدد ازهمان مربعهای کوچك است. بنابراین ۶۳ = ۶۴.

۱۴۵ = ۱۴۳. باهمین‌روش می‌توان ثابت کرد: ۱۴۵ = ۱۴۳.



شکل ۱۲۹



شکل ۱۳۰

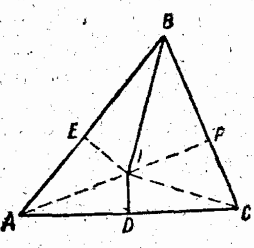
برای این منظورمستطیل ۱۴۳ = ۱۱ × ۱۳را انتخاب می کنیم

و آنرا روی قطر نصف می کنیم (شکل ۱۲۹)، سپس قسمت بالایی را به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۳}$ قاعده‌اش به‌طرف راست می‌لغزانیم. در اینصورت یك مربع ۱۴۴ = ۱۲ × ۱۲ و علاوه بر آن در دو رأس مقابل هم دو مثلث کوچك، بدست می‌آید (شکل ۱۳۰)، این دو مثلث کوچك رویهم به‌اندازهٔیکی ازمربعهای کوچك می‌شوند و در مجموع ۱۴۵ مربع کوچك بدست می آید.

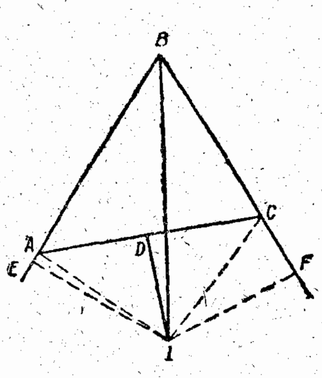
کسانی که مایل‌اند علت این اشتباهها را پیدا کنند، باید وسیله‌های رسم را بردارند و بادقت شروع به‌رسم شکلها کنند.

هرمثلثی متساوی‌الساقین است. مثلث غیر مشخص ABC را درنظر می گیریم. نیمساز زاویهٔ B و عمود منصف پاره خطAC را رسم می کنیم (شکل ۱۳۱).

اگر این دوخط یکدیگررا قطع نکنند، بریکدیگر منطبق می‌شوند و بلافاصله نتیجه می‌شود که مثلث ما متساوی‌الساقین است، یعنی AB = BC . اگراین‌دوخط یکدیگررا قطع کنند، دراینصورت یا درداخل و یا در خارج مثلث بهم‌می‌رسند.



شکل ۱۳۱



شکل ۱۳۲

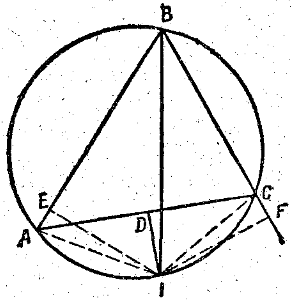
درحالت اول، ازنقطهٔ I (محل تلاقی این دوخط) عمودهای IE و IF را برضلعهای BA و BC فرود می‌آوریم و خطهای AI و CI را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BIE و BIF (شکل ۱۳۱) درضلع BI مشترکند و درزأس B زاویه‌های مساوی دارند، بنابراین دو مثلث برابرند، یعنی BE=BF . دو مثلث قائم الزاویهٔ دیگر AIE و CIF هم با یکدیگر برابرند، زیرا وترهای آنها IA=IC و علاوه بر آن IE=IF. از آنجا نتیجه می‌شود: AE=CF. حالا اگر به‌دو پاره‌خط مساوی BE=BF، دو پاره‌خط مساوی EA=FC را اضافه کنیم، در مجموع معلوم می‌شود که BA=BC . بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

درحالت دوم که نیمساز زاویهٔ B وعمودمنصف ضلع AC در خارج مثلث یکدیگررا قطع می کنند (شکل ۱۳۲)، بازهم می‌توان به‌همین نتیجه رسید، بااین تفاوت که به‌جای جمع دوجفت پاره‌خط مساوی، بایدآنها را ازهم کم کرد. درنتیجه معلوم می‌شود که مثلث را به‌هرترتیب انتخاب کنیم، متساوی‌الساقین می‌شود.

علت‌وجود این‌نتیجهٔ‌اشتباه بردومبنا قراردارد: ۱) می‌توان‌ثابت‌کرد که نقطهٔ I نمی‌تواند درداخل مثلث باشد؛ ۲) می‌توان ثابت‌کرد عمودهایی که از نقطهٔ I بر ضلعهای AB و BC فرود می‌آید، تنها یکی می‌تواند امتداد ضلع مربوطه را قطع‌کند و عمود دوم باید خود ضلع را قطع‌کند نه ـ امتداد آنرا.

اگردایره‌ای ازسه‌رأس مثلث بگذرانیم، هم عمود منصف پاره‌خط AC وهم نیمساز زاویهٔ B باید از وسط‌کمان AIC بگذرد، یعنی نقطهٔ I، محل تلاقی این دو خط، بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC و در نتیجه درخارج این مثلث قرار دارد (شکل ۱۳۳).

ثانیاً اگر فرض کنیم عمودی که از I بر ضلع BC رسم می‌کنیم، درنقطهٔ F واقع در امتدادِ BC آن راقطع کند، دراینصورت زاویهٔ BCI منفرجه می‌شود. ولی زاویه‌های BCI و BAI زاویه‌های روبرو از یك چهار ضلعی محاطی و بنابراین رویهم مساوی ۱۸۰ درجه‌اند؛ در نتیجه زاویهٔ BAI باید حاده باشد، یعنی پای عمودی که از I برضلع BA رسم می‌شود، باید بین B و A واقع باشد. به‌این ترتیب نمی‌شود هردونقطهٔE وF روی امتداد ضلعهای مربوطه قرارگیرند.



شکل ۱۳۳

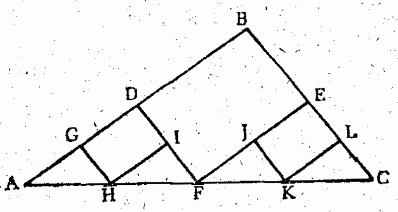
درهرمثلث، طول یك ضلع برابراست با مجموع طولهای دو ضلع دیگر. این سفسطه براساس نادرستی شکل نیست، بلکه بر اساس نادرستی استدلال است و به همین مناسبت ردکردن آن مشکل‌تر است.

درمثلث غیرمشخص ABC، نقطه‌های D، E و F را وسط ضلعهافرض کنید. خطهای DF وEF را رسم می‌کنیم. روشن است که :

$$DF = \frac{1}{2}BC = BE \quad ; \quad EF = \frac{1}{2}AB = BD$$

بنابراین خط شکستهٔ ADFEC برابراست با AB+BC.

اگرهمین روش را برای دومثلثی که روی قاعدهٔ مثلثABC پیدا می‌شود بکار بریم، به این نتیجه می‌رسیم که طول خط شکستهٔ AGHIFJKLC برابر است باطول خط شکستهٔ ADFEC یعنی AB+BC.



شکل ۱۳۴

اگر این روش را بی‌نهایت مرتبه ادامه دهیم، رأس‌های مثلثهای کوچك مرتباً به قاعدهٔ AC نزدیك و نزدیکتر و درحد بر خود AC منطبق می‌شوند. بنا بر این $AC = AB + BC$ (شکل ۱۳۴).

۶ـ به‌نظر نمی‌رسد که درست باشد

چرخش دایره بردایره. دو دایرهٔ مساوی، و مثلاً دو سکهٔ مساوی، انتخاب می‌کنیم؛ یکی از آنهارا بی‌حرکت نگاه‌می‌داریم ودیگری را دور آن می‌چرخانیم. سکهٔ‌متحرك، وقتی که‌یك‌دور کامل دور سکهٔ بدون حرکت می‌چرخد، چند مرتبه دور محور خودش دوران می‌کند؟

هرنقطه از محیط دایرهٔ متحرك، ضمن اینکه دور دایرهٔ بی‌حرکت می‌چرخد، در هردور کامل، تنها بایکی ازنقطه‌های محیط دایرهٔ بی‌حرکت تماس حاصل می‌کند. به‌این ترتیب از لحاظ نظری به‌نظر می‌رسد که سکهٔ متحرك ضمن یك دوران کامل تنها یك بار دور محور خود دوران می‌کند، درحالیکه در واقع در این فاصله دوبار دور محورش می‌چرخد. این مطلب را می‌توان ضمن تجربه ویا درمورد مثلثی که دور مثلث دیگر می‌چرخد یا مربعی که دور مربع دیگر می‌چرخد به‌روشنی ملاحظه کرد.

وقتی که استوای زمین ۱۰ متر بزرگ شود. فرض می‌کنیم یك کمربند آهنی دورخط استوای زمین کشیده شده باشد، به‌طوری که به سطح زمین محکم چسبیده باشد. طول این کمربند به‌اندازهٔ طول استوای زمین، یعنی ۴۰۰۷۲۰۰۰ متر است. خیال می‌کنید که

اگر ۱۰ متر به‌طول این کمربند اضافه کنیم، فاصله‌ای که بین آن و زمین ایجادمی‌شود به‌اندازه‌ای می‌تواند باشدکه یك موش معمولی از آن عبور کند؟

به‌احتمال‌قوی‌بسیاری‌ازافراد، بعدازمدتی فکر، به‌این سئوال‌جواب مثبت می‌دهند، ولی تقریباً برای هر کسی‌درستی‌این‌حکم کاملاً غیرمحتمل است که نه تنها، موش، بلکه گربه، سگ وحتی انسانی باقد متوسط می‌تواند به راحتی از این فاصله عبور کند. ولی بااطلاع ازرابطهٔ $C=2\pi R$ برای محاسبهٔ محیط یك دایره، می‌توان به‌سادگی، درستی این ادعای باورنکردنی را ثابت کرد.

شعاع استوای زمین را R می‌گیریم. دراینصورت طول خط استوا، که آنرا C می‌نامیم، ازرابطهٔ $C=2\pi R$ بدست می‌آید. به کمك این رابطه می‌توان شعاع کرهٔ زمین را محاسبه کرد: $R=\frac{C}{2\pi}$.

وقتی که طول کمربند مساوی $(C+10)$ متر باشد، شعاع آن چقدر است؟

با استفاده ازهمان رابطه، این شعاع هم بدست می‌آید:

$$R_1=\frac{C+10}{2\pi} \text{ (متر)}$$

این رابطه را می‌توان به‌این‌صورت تغییرداد:

$$R_1=\frac{C}{2\pi}+\frac{10}{2\pi} \implies R_1=R+\frac{10}{2\pi}$$

تفاضل R_1-R، فاصلهٔ زمین تاکمربند را مشخص می‌کند؛ ۱۰ را به 2π تقسیم می‌کنیم، تااین فاصله بدست‌آید: $\frac{10}{2\pi}\approx 1/59$ (متر)

واگریك‌انسان باقدمعمولی درنظربگیریم، با خم‌کردن‌سرخود می‌تواند از زیر این‌کمربند، که دور تا دور زمین را روی خط استوا فراگرفته است،

عبور کند. جاده‌ای کـه در ارتفاع ۱۵۹ سانتیمتری زمین دور تادور استوا کشیده شده باشد، تنها ۱۰ مترطولانی‌تر از جاده‌ای است کـه روی زمین و درامتداد استوا باشد. هرکس باور ندارد می‌تواند خودش آزمایش کند.

کرهٔ زمین وسیب. فرض می‌کنیم دور استوای زمین یك سیم فلزی کشیده باشیم، سیم دیگری به‌همین ترتیب دوریك سیب می‌پیچیم. سپس طول هریك ازاین سیمها را یك متر بزرگتر می‌کنیم، دراین‌صورت بین کمربند سیمی وزمین و همچنین بین کمربند سیمی و سیب فاصله‌ای به‌وجودمی آید. فکرمی کنید ارتفاع کدامیك ازاین فاصله‌ها بیشتر است؟

فاصلهٔ هرکدام ازاین کمربندهای سیمی تا سطح مربوط بـه‌خودشان (دریك مورد استوای زمین، و درمورد دیگر سطح سیب) کاملاً یکی است!

طول خط استوای زمین را C و طول محیط سیب را c می‌گیریم، اگرشعاع کرهٔ زمین R وشعاع سیب مساوی r باشد، داریم:

$$R=\frac{C}{۲\pi} \quad ; \quad r=\frac{c}{۲\pi}$$

اکنون اگر به‌محیط هردو دایره یك متر اضافه کنیم، شعاعهای جدید آنها چنین می‌شود:

$$\frac{C+۱}{۲\pi} \quad و \quad \frac{c+۱}{۲\pi}$$

واگر ازاین مقادیر، طول شعاعهای قبلی راکم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$برای\ زمین:\ \frac{C+۱}{۲\pi}-\frac{C}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi}\quad (متر)$$

$$برای\ سیب:\ \frac{c+۱}{۲\pi}-\frac{c}{۲\pi}=\frac{۱}{۲\pi}\quad (متر)$$

۷ـ حدس بزنید

ورود به‌مطلب

این موضوع یکی از سرگرمیهای ریاضی جالب در قرنهای ۱۷ و ۱۸ بوده است که اساس آن عبارتست از حدس ذهنی عددی که درنتیجهٔ عملهای حساب بدست می‌آید.

ما امروز می‌دانیم که این حدس زدن بر اساس خاصیتهای سادهٔ بعضی عددها و عملهای ریاضی است که ما دربارهٔ بعضی از آنها در بخش دوم این کتاب صحبت کرده‌ایم. ولی حتی امروز هم این بازیها می‌تواند دوره‌های دوستانه‌را رونق بدهد ودلچسب کند، زیرا همه را دچار حیرت می‌کند وعلاقه‌ها را برمی‌انگیزاند.

در این بخش هم مثل بخشهای دیگر، اشکال اصلی مربوط به فراوانی مطلب است. بـه همین مناسبت در اینجا هم انتخابی از موضوعها می‌کنیم ومسأله‌های مشکلتررا برای فصل دوم کنار می‌گذاریم. درعین حال کوشش می‌کنیم که نوعهای مختلفی ازاینگونه مسأله‌های جالب را بیاوریم.

برای اختصار بیشتر و برای اینکه بتوانیم مسأله‌های مختلف را طرح کنیم، آنها را به‌صورت کوتاه و همانگونه که معمولا معما-

سازان بیان می کنند، می آوریم وسپس بامثالهای کوتاه ویا رابطه‌های جبری (که اساس نظری این معماها هستند)، آنهـا را روشن می کنیم.

قبل ازاینکه به‌مطلب بپردازیم، ذکر یك نکته ضروری است. اغلب در گفتگوی عادی جملهٔ «این نصف کوچکتر است» یـا «این نصف بزرگتر است» را می‌شنوید. ریاضی‌دانها این عـادت را سرزنش می کنند واین جمله را نادرست می‌دانند. ولی این جمله‌ها، آنطورهم که به‌نظر می‌رسد، مخالف منطق نیستند. نه‌تنها باید بااین مفهومها موافقت کنیم. بلکه راه‌کار بردآنهارا هم باید یاد بگیریم، زیرا بسیاری از معماها بر اساس همین جمله‌ها گذاشته شده است. به‌این ترتیب وقتی کـه می گوییم نصف کوچکتر یك عدد فرد، یعنی قسمتی ازآن عددکه یك واحدکمتر از قسمت دیگرآن، که نصف بزرگتراست، باشد، مثلاً ۳ نصف کوچکتر و ۴ نصف بزرگتر عدد ۷ است.

۱ـ رقم حذف شده را پیدا کنید

۱. عدد دلخواهی بنویسید و یا اگر بـه حافظهٔ خود اطمینان دارید عدد دلخواهی فکر کنید. سمت راست‌آن یك صفر بگذارید، عددی را که فکرکرده‌اید ازآن کم کنید، ۱۱۷ را به‌آن اضافه کنید. در عددی که بدست می‌آید یکی از رقمها را که صفر نیست حذف کنید وبقیه را به‌من بگویید، من بلافاصله رقم حذف‌شده را به شما خواهم گفت.

مثال :

۵۱۸ ؛ ۵۱۸۰ ؛ ۵۱۸۰−۵۱۸=۴۶۶۲ ؛ ۴۶۶۲+۱۱۷=
=۴۷۷۹ ؛ ۴*۷۹

وقتی‌که رقمهای ۴ ، ۷ و ۹ معلوم باشد، مجموع آنها مساوی ۲۰ می‌شود. معماساز به‌سرعت این مجموع را از اولین مضرب ۹ بزرگتر ازآن یعنی ۲۷ کم می‌کند و به‌شما می‌گویدکه رقم حذف شده مساوی ۷است.

روشن است که به‌جای ۱۱۷ می‌شد مضرب دیگری از۹ را اضافه‌کرد.

۴. عددی فکر کنید، مجموع رقمهایش را از آن کم کنید، رقمهای عددی راکه بدست می‌آید، به‌هرنحوکه می‌خواهید جابجا کنید، به عددی کـه به‌این ترتیب بدست می‌آورید ۲۳ اضافه کنید، یکی از رقمهای کوچکتر از ۹ را درآن حذف کنید، مجموع بقیهٔ رقمها را به‌من بگویید ومن بلافاصله رقم حذف شده را به‌شما می‌گویم.

مثال :

۸۷۸۹ ؛ ۸+۷+۸+۹=۳۲ ؛ ۸۷۸۹−۳۲=۸۷۵۷ ؛
۷۷۸۵ ؛ ۷۷۸۵+۲۳=۷۸۰۸ ؛ ۷*۰۸ ؛ ۷+۸=۱۵

شما عدد ۱۵ را به‌معما ساز می‌دهید، او ۵ واحد ازاین عددکم می‌کند، عدد ۱۰ باقی می‌ماند، ۱۰ را ازنزدیکترین مضرب۹ بزرگتراز خودش کم می‌کند ورقم حذف شدهٔ ۸را بدست می‌آورد. دراین روش اگررقم حذف شده ۹ یا ۰ باشد نمی‌توان یك جواب مشخص بدست آورد، ولی اگر قرار بگذاریم که رقم حذف شده نباید مساوی ۹ باشد، آن وقت همیشه می‌توان جواب مشخص را بدست‌آورد.

اگرمجموع رقمهای عددی را ازآن عدد کم کنیم، تفاضل بر ۹ قابل قسمت خواهد بود.

عدد ۵ را به‌این مناسبت از مجموع رقمهای باقیمانده کم می‌کنیم که باقیماندهٔ ۲۳ بر ۹ مساوی ۵ است. می‌توان به جای ۲۳ عدد دیگری انتخاب‌کردکه درهرحال باقیماندهٔآن بر۹ برای معماساز روشن‌است.

اگر به‌جای رقم ۸، رقم ۰ را حذف می کردیم، بدست می‌آمد: ۸*۷۸. مجموع رقمهای باقیمانده ۲۳=۸+۸+۷ می‌شد. وقتی ۵ واحد از ۲۳ کم کنیم ۱۸ بدست می‌آید. ۱۸ بر ۹ قابل قسمت است، بنابراین رقم حذف شده ممکن است ۰ یا ۹ باشد. ولی اگر شرط کرده باشیم که نباید رقم ۹ را حذف کرد، مطمئن می‌شویم که رقم حذف شده مساوی ۰ است.

۳. عددی بنویسید، مجموع رقمهای آنرا در ۸۰ ضرب کنید، حاصلضرب را به عدد اصلی اضافه کنید، یکی از رقمهای آنرا که بزرگتر از ۸ نیست حذف کنید، بقیهٔ رقمها را به‌من بگویید تا رقم حذف شده را به‌شما بگویم.

مثال :

۴۳۵; ۴+۳+۵=۱۲ ; ۸۰×۱۲=۹۶۰ ;
۴۳۵+۹۶۰=۱۳۹۵ ; ۱*۹۵

کشف رقم حذف شده: ۱۵=۵+۹+۱. نزدیکترین مضرب ۹ به‌آن ۱۸ است؛ ۳=۱۵−۱۸، بنابراین رقم حذف شده برابراست با ۳.
درشرط مسأله می‌توان بجای ۹، قیدکردکه رقم حذف‌شده صفرنباشد.

۴. یك عدد چهار رقمی بنویسید، رقمهای آنرا هرطور که می‌خواهید جابجا کنید، تفاضل این دوعدد را در ۶۷ ضرب کنید، یك رقم از حاصلضرب را (که صفر نباشد) حذف کنید وبقیه را بگویید.

مثال :

۳۴۱۶; ۶۴۱۳−۳۴۱۶=۲۹۹۷;
۶۷×۲۹۹۷=۲۰۰۷۹۹; ۲۰۰۷*۹

کشف رقم: ۱۸=۹+۷+۲. این عدد مضرب ۹ است، ولی چون رقم حذف شده صفرنیست، حتماً مساوی ۹ است.
بجای ۶۷ دراین مسأله می‌توان عدد دیگری هم انتخاب کرد.

۵. عدد درستی انتخاب کنید، آنرا در عدد بعد از خودش

ضرب کنید، حاصلضربی که بدست می‌آید درمجموع همان دوعدد دوباره ضرب کنید، این حاصلضرب جدید را مجذور کنید، همهٔ رقمهای عددی راکه بدست می‌آید بجزیکی به‌من بگویید تا به‌شما بگویم کدام رقم را انداخته‌اید.

مثال :

$$۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰;\ ۱۱۰(۱۰+۱۱) = ۲۳۱۰;$$
$$۲۳۱۰^۲ = ۵۳۳۶۱۰۰;\ ۵۳*۶۱۰۰$$

کشف رقم براین‌اساس است که باشرط صحیح بودن n، همیشه‌حاصلضرب $n(n+۱)(۲n+۱)$ بر۳ وحتی بر۶ قابل قسمت است و در نتیجه مجذور آن بر ۹ قابل قسمت می‌شود. تمام معما به‌اینجا منجر می‌شود که مجموع رقمهای معلوم را ازنزدیکترین مضرب ۹کم کنیم.

اگر شرط نشده باشد که رقم حذف شده صفر (یا ۹) نباشد، وقتی که مجموع رقمهای معلوم مضربی از۹ بشود در جواب می‌توان گفت که رقم حذف شده یاصفراست ویا ۹.

۶. ازعددی‌که انتخاب کرده‌اید به‌کمك تبدیل رقمهای آن دو عدد دیگر درست کنید، مجموع این سه عدد را مجذور کنید، یك رقم آنرا کنار بگذارید و همهٔ بقیه را بگویید، من آن رقم را به‌شما خواهم گفت.

مثال :

$$۲۱۵;\ ۱۵۲;\ ۵۱۲;\ ۲۱۵+۱۵۲+۵۱۲ = ۸۷۹;$$
$$۸۷۹^۲ = ۷۷۲۶۴۱\ ;\ ۷*۲۶۴۱$$

کشف رقم حذف شده مثل نمونه‌های سابق است.

۷. حاصلضرب سه عدد متوالی را مجذور کنید، من به شما خواهم گفت کدام رقم را درنظرگرفته‌اید، به‌شرطی که مجموع بقیهٔ رقمها را به‌من بگویید.

مثال :

۱۱، ۱۲، ۱۳؛ ۱۷۱۶=۱۳×۱۲×۱۱؛

۲۹*۴۶۵۶ ؛۲۹۴۴۶۵۶=^{۲}۱۷۱۶

اساس این معما بر این مطلب است که حاصلضرب سه عدد متوالی بر ۳ و مجذور این حاصلضرب بر ۹ قابل قسمت است.

۸ . سه عدد متوالی انتخاب کنید و مجموع مکعبهای آنها را پیدا کنید. مجموع رقمهای این حاصلجمع را، بدون یکی از رقمها، به من بگویید. من می گویم رقم کنار گذاشته شده چند است.

مثال :

۵، ۶، ۷؛ ۶۸۴=^{۳}۷+^{۳}۶+^{۳}۵؛ ۶۸*

دراین مسأله ازاین خاصیت استفاده می‌شود که مجموع مکعبهای سه عدد متوالی همیشه بر ۹ قابل قسمت است.

۲ـ نتیجهٔ عمل را حدس بزنید، بدون آنکه عددها برای شما معلوم باشد

۱ . عددی فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ در نظر بگیرید، آنرا مجذور کنید، ۱۷ واحد به آن اضافه کنید، نتیجه را بر ۱۲ تقسیم کنید؛ من از قبل می گویم باقیماندهٔ تقسیم چقدر است. این باقیمانده مساوی ۶ است.

مثال :

۱۱؛ ۱۲۱=^{۲}۱۱؛ ۱۳۸=۱۷+۱۲۱؛ ۶+۱۲×۱۱=۱۳۸

۲ . به عدد دلخواهی ۱۱ واحد اضافه کنید، مجموع را در ۲ ضرب کنید، از حاصلضرب ۲۰ واحد کم کنید، آنچه را که بدست آمد در ۵ ضرب کنید، از حاصلضرب ۱۰ برابر عدد اصلی را کم کنید، من ازقبل نتیجه را می‌دانم، شما به‌عدد ۱۰ می‌رسید.

مثال :

$۲۳;\ ۲۳+۱۱=۳۴;\ ۲\times۳۴=۶۸;\ ۶۸-۲۰=۴۸;$
$۵\times۴۸=۲۴۰;\ ۲۴۰-۲۳۰=۱۰$

رابطهٔ جبری این‌عملها که درهرحال منجر به‌نتیجهٔ ۱۰ می‌شود، چنین است:

$$۵[۲(n+۱۱)-۲۰]-۱۰n=۱۰$$

۳. عددی سه رقمی انتخاب کنید که اختلاف رقمهای اول و آخرآن بیشتر از یك واحد باشد؛ تفاضل این عدد و مقلوب آنرا بدست‌آورید؛ عدد حاصل را مقلوب کنید و با خودش جمع کنید، همیشه به‌عدد ۱۰۸۹ می‌رسید.

مثال :

$۳۲۶;\ ۶۲۳-۳۲۶=۲۹۷;\ ۲۹۷+۷۹۲=۱۰۸۹$

۴. عدد دلخواهی را در ۳۷ ضرب کنید، به حاصلضرب ۱۷ واحد اضافه کنید، مجموع را در۲۷ ضرب کنید، ۷ واحد به‌حاصل‌ضرب اضافه کنید، نتیجه را بر ۹۹۹ تقسیم کنید، همیشه باقیماندهٔ این تقسیم ۴۶۶ است.

مثال :

$۳;\ ۳\times۳۷=۱۱۱;\ ۱۱۱+۱۷=۱۲۸;\ ۱۲۸\times۲۷=۳۴۵۶;$
$۳۴۵۶+۷=۳۴۶۳;\ ۳۴۶۳=۳\times۹۹۹+۴۶۶$

بجای ۱۷ و ۷ می‌توان دو عدد دیگر و مثلاً a و b گرفت، ولی این شرط‌که $۲۷a+b<۹۹۹$ باشد؛ دراینصورت بامجهول‌بودن n بدست می‌آید:

$$۲۷(۳۷n+a)+b=۹۹۹n+(۲۷a+b)$$

در نتیجه ضمن تقسیم بر ۹۹۹ باقیمانده‌ای مساوی $۲۷a+b$ بدست می‌آید که می‌توان آنرا ازقبل محاسبه‌کرد.

۵. عدد دلخواهی را در۱۸ ضرب کنید، ۲۹۱ را به حاصل‌

ضرب اضافه کنید، مجموع را بر۳ تقسیم کنید، از خارج قسمت شش برابرعددی را که درابتدا درنظرگرفته‌اید کم کنید، تفاضل را درعدد بلافاصله بعد از خودش ضرب کنید، اگر در محاسبهٔ اشتباه نکرده باشید، در نتیجهٔ این عملها عدد ۹۵۰۶ بدست می‌آید.

مثال :

۱۳; ۱۸×۱۳=۲۳۴; ۲۳۴+۲۹۱=۵۲۵; ۵۲۵:۳=۱۷۵;

۱۷۵−۶×۱۳=۹۷; ۹۷×۹۸=۹۵۰۶

درهمهٔ مسأله‌هایی که ازاینگونه‌اند و درابتدا باید عدد دلخواهی در نظرگرفت، برای اینکه به نتیجهٔ مشخصی برسیم که از قبل برای ما معلوم باشد، روشن است که ناچار ازعملهای متقابل هستیم (وقتی که مثلاً n برابر عدد مجهول را به‌عدد معلومی اضافه می‌کنیم، باید جای دیگرهمین n برابر عدد مجهول را بیرون بزویم). منتهی برای اینکه شنونده متوجه اساس ماجرا نشود باید عملها را طولانی‌تر کرد و بین دو عمل متقابل فاصله‌ای ایجادکرد تانتواند به‌سرعت به‌علت کارشما پی‌ببرد.

۶. دوعدد سه‌رقمی دلخواه درنظربگیرید، یکبارعددکوچکتر را سمت راست عدد بزرگتر و باردیگرعدد بزرگتررا سمت راست عددکوچکتر بنویسید؛ به این ترتیب دو عدد شش رقمی بدست می‌آید. این دوعدد را ازهم کم کنید و تفاضل را برتفاضل دوعدد سه‌رقمی اصلی تقسیم کنید، همیشه خارج‌قسمت مساوی۹۹۹وباقیمانده مساوی صفر می‌شود.

مثال :

۸۷۳; ۴۵۱; ۸۷۳۴۵۱−۴۵۱۸۷۳=۴۲۱۵۷۸;

۸۷۳−۴۵۱=۴۲۲; ۴۲۱۵۷۸ : ۴۲۲=۹۹۹

۷. سه‌عدد یك رقمی انتخاب کنید، با این سه رقم شش عدد دورقمی مختلف درست کنید، مجموع این عددهای دورقمی را بر

مجموع سه‌عدد یك‌رقمی تقسیم کنید، نتیجهٔ این‌عملها همیشه مساوی ۲۲ می‌شود.

مثال:

۳، ۴، ۸؛ ۳۴، ۳۸، ۴۳،۸۳، ۴۸، ۸۴؛

۳۴+۳۸+۴۳+۸۳+۴۸+۸۴=۳۳۰،

۳+۴+۸=۱۵؛ ۳۳۰ : ۱۵=۲۲

۸. عدد چهار رقمی دلخواهی بنویسید. این عدد را به من بگویید و زیرآن عددی راکه من دیکته می کنم بنویسید، عدد چهار رقمی سوم را انتخاب کنید و به‌من بگویید و سپس عددی راکه من می‌گویم زیرآن بنویسید. بالاخره شما آخرین عدد انتخابی خود را زیر آنها بنویسید، اگر این عدد را هم به‌من بگویید، من بلافاصله مجموع پنج عدد را به‌شما خواهم گفت.

اساس این مسأله براین مطلب قراردارد که درمقابل دوعدد چهاررقمی که گفته می‌شود باید اختلاف آنرا تا ۹۹۹۹ زیر آن نوشت. در اینصورت مجموع همهٔ عددها برابراست با ۲ واحدکمتر ازعدد پنجم، به‌شرطی‌که در سمت چپ‌آن یك عدد۲ قراردهیم. مثلاً:

۳۸۵۴	
۶۱۴۵	(۹۹۹۹−۳۸۵۴=۶۱۴۵).
۷۲۰۸	
۲۷۹۱	(۹۹۹۹−۷۲۰۸=۲۷۹۱)
۵۷۳۹	
۲۵۷۳۷	(۵۷۳۹−۲+۲۰۰۰۰)

۳ـ عددی را که در نظر گرفته‌اند حدس بزنید.

۱. نصف‌عددی راکه فکرکرده‌اید، انتخاب کنید (اگرعددی

که فکر کرده‌اید فرد باشد، نصف کوچکتر آنرا انتخاب کنید)، یك واحد به‌آن اضافه کنید، مجموع را در ۴ ضرب کنید، عددی که فکر کرده بودید ازاین حاصلضرب کم کنید. به‌من بگویید این تفاضل چیست تامن عددی را که انتخاب کرده بودید بگویم.

راه کشف عدد: اگرتفاضل آخر عددی زوج باشد، عدد اصلی ۴ واحد کمتر ازآنست و اگر این تفاضل عددی فرد باشد، عدد اصلی ۲ واحد کمتر از آنست.

مثال :

a) ۲۲; ۲۲ : ۲ = ۱۱; ۱۱ + ۱ = ۱۲; ۴ × ۱۲ = ۴۸;
۴۸ − ۲۲ = ۲۶

۲۶ عددی است زوج، بنابراین اگر ۴ واحد ازآن کم کنیم، عدد ۲۲ بدست می‌آید.

b) ۲۳; (۲۳ − ۱) : ۲ = ۱۱; ۱۱ + ۱ = ۱۲; ۱۲ × ۴ = ۴۸;
۴۸ − ۲۳ = ۲۵

۲۵ عددی است فرد، بنابراین اگر ۲ واحد از آن کم کنیم، عدد ۲۳ بدست می‌آید.

۳. عددی را که فکر کرده‌اید سه برابر کنید، به حاصلضرب یك واحد اضافه کنید، مجموع را دوباره در۳ضرب کنید. بالاخره به‌این حاصلضرب عددی را که فکر کرده بودید اضافه کنید. اگر حاصل را به‌من بگویید، بلافاصله عددی را که فکر کرده بودید به‌شما خواهم گفت.

برای اینکه عددرا حدس بزنید، باید رقم ۳را ازسمت راست عددی که به‌شما گفته می‌شود، حذف کنید.

مثال :

۱۳, ۱۳ × ۳ = ۳۹, ۳۹ + ۱ = ۴۰; ۳ × ۴۰ = ۱۲۰;
۱۲۰ + ۱۳ = ۱۳۳

۳ را ازسمت راست حاصل حذف کنید، ۱۳ بدست می‌آید.

۳. عددی را که فکر کرده‌اید مجذور کنید، سپس عدد بلافاصله بعد ازآنرا هم مجذور کنید و تفاضل این دومجذوررا به‌من بگویید، بلافاصله به‌شما خواهم گفت چه‌عددی را فکر کرده‌اید.

اساس این معما مربوط به‌خاصیت تفاضل مجذورهای دوعدد متوالی است؛ این تفاضل یك واحد بیشتر از دو برابر عدد کوچکتر است. بنابراین وقتی‌که نتیجهٔ عملها معلوم باشد، عدد مورد نظربرابراست با نصف کوچکتر آن.

مثال :

$$۱۷;\ ۱۷^۲=۲۸۹;\ ۱۸^۲=۳۲۴;\ ۳۲۴-۲۸۹=۳۵$$

و نصف کوچکترعدد ۳۵ برابراست با۱۷.

۴. عددی فکر کنید، بهتراست این عدد یك‌رقمی باشد (ولی اجباری دراین کار نیست)، در۵ ضرب کنید، ۲ واحد اضافه کنید، در ۴ ضرب کنید، ۳ واحد اضافه کنید، در ۵ ضرب کنید، ۷ واحد اضافه کنید. اگرنتیجه‌را به‌من بگویید، من به‌شما خواهم گفت که از چه عددی شروع کرده‌اید.

عدد اصلی را می‌توان باحذف دورقم‌آخر نتیجه بدست‌آورد.

مثال :

۷; ۳۵; ۳۷; ۱۴۸; ۱۵۱; ۷۵۵; ۷۶۲

باید ازعدد ۷۶۲ دورقم سمت راست را حذف‌کنیم تا ۷ بدست‌آید.

۵. عددی که خیلی بزرگ نباشد ودرهرحال از۹۹۶کوچکتر باشد، انتخاب کنید، در۳۷ ضرب کنید، ۱۱۱ به‌آن اضافه کنید، در ۲۷ضرب کنید، نتیجه را تاهزارهاگرد کنید. اگرعددی راکه بدست می‌آید به‌من بگویید، عدد انتخابی شما را می‌گویم.

مثال :

۱۴; ۵۱۸; ۶۲۹; ۱۶۹۸۳; ۱۷۰۰۰

برای اینکه عدد انتخابی را پیدا کنیم، باید ازتعداد هزارهای حاصل ۳ واحد کم کنیم. در اینجا ۳ واحد از ۱۷ کم می‌کنیم، عدد انتخابی ۱۴ بدست می‌آید.

۴ـ چند عدد را حدس بزنید

۱. سه‌عدد فکر کنید و برای سهولت کار خیلی بزرگ نباشند. عدد اول را در۲، عدد دوم را در۳ وعدد سوم را در۵ ضرب کنید. دو حاصلضرب آخر را با هم جمع کنید و اولی را از آن کم کنید، به‌من بگویید چه‌عددی بدست آورده‌اید. دو حاصلضرب سوم و اول را باهم جمع کنید ودومی را از آن کم کنید و دوباره نتیجه را به‌من بگویید. بالاخره دو حاصلضرب اول و دوم را با هم جمع کنید و سومی را از آن کم کنید. اگر من این تفاضل را هم بدانم به‌شما خواهم گفت چه عددهایی را فکر کرده‌اید.

x و y وz را سه‌عدد انتخابی و a و b وc را عددهایی‌که به‌ترتیب در آنها ضرب کرده‌ایم، فرض کنید (در اینجا $a=۲$ ، $b=۳$ و $c=۵$). دراینصورت :

$$\begin{cases} by+cz-ax=\alpha \\ cz+ax-by=\beta \\ ax+by-cz=\gamma \end{cases}$$

اگر دو به‌دو این معادله‌ها را باهم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$۲ax=\beta+\gamma \implies x=\frac{\beta+\gamma}{۲a}$$

$$۲by=\gamma+\alpha \implies y=\frac{\gamma+\alpha}{۲b}$$

$$۲cz=\alpha+\beta \implies z=\frac{\alpha+\beta}{۲c}$$

مثلاً اگر $x=۴$ ، $y=۷$ ، $z=۸$ باشد:

$$x=\frac{۲۷-۱۱}{۲\times۲}=۴\ ,\ y=\frac{۵۳-۱۱}{۲\times۳}=۷\ ,\ z=\frac{۵۳+۲۷}{۲\times۵}=۸$$

(دراینجا $\alpha=۵۳$ ، $\beta=۲۷$ و $\gamma=-۱۱$ می‌شود).

۴. یك عدد سه رقمی و سه‌عدد یك رقمی درنظربگیرید. عدد سه رقمی را دوبرابر وبایك‌جمع کنید، مجموع را ۵ برابر کنید وبا عدد دوم جمع کنید؛ به‌دو برابراین مجموع یك واحد اضافه‌کنید، به‌۵برابرحاصل عدد سوم را اضافه‌کنید، به دوبرابرحاصل‌یك‌واحد اضافه‌کنید، به ۵ برابر این نتیجه عدد چهارم را اضافه کنید، اگر این نتیجه را به من بگویید، عددهایی را که فکر کرده‌اید به‌شما خواهم گفت.

کشف عددها خیلی ساده است : باید از عددی که بدست می‌آید ۵۵۵ واحدکم‌کرد، سه رقم اول آن از سمت چپ همان عدد سه رقمی و رقمهای بعدی عددهای یکرقمی‌اند.

مثال :

۲۳۴، ۷، ۸، ۳، ۴۶۹، ۲۳۵۲، ۴۷۰۵، ۲۳۵۳۳، ۴۷۰۶۷، ۲۳۵۳۳۸، $۲۳۵۳۳۸-۵۵۵=۲۳۴۷۸۳$

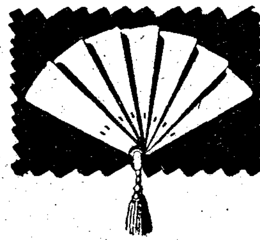
برای‌کسانی‌که می‌خواهند این مسألهٔ جالب را تعمیم دهند وبه‌جای۴ عدد، تعداد بیشتری عدد، یا به‌جای عدد سه‌رقمی، عددی با رقمهای بیشتر انتخاب‌کنند، دراینجا مسیرعملها را درمورد مثال بالا باتفصیل می‌آوریم:

$$۲۳۴$$
$$۲\times۲۳۴+\quad ۱$$
$$۱۰\times۲۳۴+\quad ۵+\qquad ۷$$
$$۲۰\times۲۳۴+\ ۱۰+\quad ۲\times۷+۱$$
$$۱۰۰\times۲۳۴+\ ۵۰+\ ۱۰\times۷+\ ۵+\qquad ۸$$

$$۲۰۰\times۲۳۴+۱۰۰+ \ ۲۰\times۷+۱۰+ \ ۲\times۸+۱$$
$$۱۰۰۰\times۲۳۴+۵۰۰+۱۰۰\times۷+۵۰+۱۰\times۸+۵+۳=$$
$$=۲۳۵۳۳۸$$

$$\begin{array}{r} ۲۳۵۳۳۸ \\ ۵۵۵ \\ \hline ۲۳۴۷۸۳ \end{array}$$

هـ جدولهای اسرار آمیز



مطلبی را که دراین بند می‌آوریم بدون تردید نسبت به بندهای قبلی کمتر دلچسب است، ولی به‌هرحال هم جالب و هم ساده است واگر با مهارت توأم باشد، می‌تواند اثرخوبی باقی بگذارد.

۱	۲	۴	۸	۱۶
۳	۳	۵	۹	۱۷
۵	۶	۶	۱۰	۱۸
۷	۷	۷	۱۱	۱۹
۹	۱۰	۱۲	۱۲	۲۰
۱۱	۱۱	۱۳	۱۳	۲۱
۱۳	۱۴	۱۴	۱۴	۲۲
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۲۳
۱۷	۱۸	۲۰	۲۴	۲۴
۱۹	۱۹	۲۱	۲۵	۲۵
۲۱	۲۲	۲۲	۲۶	۲۶
۲۳	۲۳	۲۳	۲۷	۲۷
۲۵	۲۶	۲۸	۲۸	۲۸
۲۷	۲۷	۲۹	۲۹	۲۹
۲۹	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۳۱	۳۱	۳۱	۳۱	۳۱

شکل ۱۳۵

جدول عددها را می‌توان روی کارت مقوایی (شکل ۱۳۵) یا روی بادبزن نوشت و در اینصورت آنرا بادبزن اسرارآمیز می‌نامیم. اگرستونها را به‌خاطربسپاریم اثر کار بیشتر می‌شود، زیرا دراینصورت بدون نگاه کردن به جدول می‌توان جواب را بلافاصله بیان کرد. کافی است دراین‌حالت شمارهٔ ستونهایی که عدد درآنها قرار دارد نام برده‌شود تابتوان خود عددرا بیان کرد.

رمزکار در اینجاست که باید شمارهٔ ستونهایی را که نام می‌برند باهم جمع کرد

(شمارهٔ ستونها را از چپ براست حساب می‌کنیم).

مثلاً اگر بگویند عددی درستونهای اول و آخر وجود دارد باید ۱ و ۱۶ را باهم جمع کرد وعدد ۱۷ را بدست‌آورد، تنها عدد ۱۷ در دوستون اول وآخر وجود دارد. اگر این‌عدد درچهارستون اول وجود داشته باشد مساوی ۳۰ و اگردرسه ستون مرکزی وجود داشته باشد مساوی ۱۴ است وغیره.

روش تشکیل اینگونه جدولهارا می‌توان به‌سادگی وباتوجه به‌جدول شکل ۱۳۵ پیدا کرد، اگر مایل باشیم، می‌توان تعداد ستونهای جدول را به‌۶ افزایش دادکه البته عددهای بالای این شش ستون ازچپ به‌راست به ـ ترتیب ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲ و ۱ خواهد بود؛ ضمناً بزرگترین عددی که در این جدول درپائین ستونها قراردارد برابراست با:

۶۳=۳۲+۱۶+۸+۴+۲+۱

درجدولی‌که هفت ستون دارد عددهای بالا درستونها از ۶۴ شروع می‌شود و درمورد جدولی‌که هشت ستون داشته باشد ازعدد۱۲۸ وغیره.

۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸
۳۹	۴۰			

شکل ۱۳۶ (جدول I)

۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۳۲
۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷
۳۸	۳۹	۴۰		
	XIV	XV	XVI	XVII
XVIII	XIX	XX	XXI	XXII

شکل ۱۳۷ (جدول II)

جدولهای بغرنجتری‌ازاین‌نوع درشکلهای ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸و ۱۳۹ داده شده است‌که ازدونوع عدد معمولی و رومی تشکیل شده است. این جدولها را می‌توان به جای پنج ستون، با سه ستون درست کرد.

۲	۳	۴	۱۱	۱۷
۱۳	۲۰	۲۱	۲۲	۲۹
۳۰	۳۱	۳۸	۳۹	۴۰
			V	VI
VII	XIV	XV	XVI	XXII
XXIV	XXV	XXXII	XXXIII	XXXIV

شکل ۱۳۸ (جدول III)

۱	۴	۷	۱۰	۱۳
۱۶	۱۹	۲۲	۲۵	۲۷
۳۱	۳۴	۳۷	۴۰	
		II		VIII
XI	XIV	XVI	XX	XXIII
XXVI	XXIX	XXXII	XXXV	XXXVIII

شکل ۱۳۹ (جدول IV)

عددهای اساسی که باید روی آنها عمل کرد روی جدولها نوشته نشده است، ولی به‌سادگی می‌توان آنهارا فهمید:

برای جدول I : ۲۷

برای جدول II : ۹

برای جدول III : ۳

برای جدول IV : ۱

عددی را که فکر می کنند وشما باید آنرا پیدا کنید، نباید از ۴۰ بزرگتر باشد، بعد باید گفته شود که در کدامیك از این چهار جدول وجود دارد و درجایی که وجود دارد آیا بارقمهای معمولی نوشته شده است یا با رقمهای رومی. در جدولی که با رقمهای معمولی نوشته شده باشد، عدد اصلی آن جدول را مثبت به‌حساب می‌آوریم و جایی که با راقمهای رومی نوشته شده باشد، عدد اصلی آن جدول را منفی به‌حساب می‌آوریم.

مثلاً اگر بشما بگویند عددی را که فکر کرده‌اند درجدول I بارقمهای معمولی و در جدول IV با رقمهای رومی وجود دارد، دراینصورت این عدد مساوی ۱ — ۲۷ یعنی ۲۶ خواهد بود.

اگرعدد درجدولI بارقمهای‌معمولی ودرجدولهای II وIII بارقمهای رومی و در جدول IV دوباره با رقمهای معمولی نوشته شده باشد، مساوی ۱ + ۳ — ۹ — ۲۷ یعنی ۱۶ خواهدبود.

نوع دیگری از این جدولها را می‌توان به‌کمك ۲۰ ستون متحرك عددی درست کرد. برای این منظور روی یك مقوا دوجدول درست‌می کنیم، که درهرکدام عددهای ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده باشد (شکلهای ۱۴۰ و ۱۴۱). سپس آنها را به‌صورت ۲۰ نوار در می‌آوریم. شما به دوست خود پیشنهاد می کنید از بین این نوارها دو نواری را انتخاب کند که عدد مورد نظراو درآنها وجود دارد و۱۸

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

شکل ۱۴۰

۹۱	۸۱	۷۱	۶۱	۵۱	۴۱	۳۱	۲۱	۱۱	۱
۹۲	۸۲	۷۲	۶۲	۵۲	۴۲	۳۲	۲۲	۱۲	۲
۹۳	۸۳	۷۳	۶۳	۵۳	۴۳	۳۳	۲۳	۱۳	۳
۹۴	۸۴	۷۴	۶۴	۵۴	۴۴	۳۴	۲۴	۱۴	۴
۹۵	۸۵	۷۵	۶۵	۵۵	۴۵	۳۵	۲۵	۱۵	۵
۹۶	۸۶	۷۶	۶۶	۵۶	۴۶	۳۶	۲۶	۱۶	۶
۹۷	۸۷	۷۷	۶۷	۵۷	۴۷	۳۷	۲۷	۱۷	۷
۹۸	۸۸	۷۸	۶۸	۵۸	۴۸	۳۸	۲۸	۱۸	۸
۹۹	۸۹	۷۹	۶۹	۵۹	۴۹	۳۹	۲۹	۱۹	۹
۱۰۰	۹۰	۸۰	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰

شکل ۱۴۱

نوار بقیه را به شما پس بدهد. شما با نگاه کردن به۱۸ نوار می‌توانید فوراً نوارهایی را که دوست شما برداشته است بشناسید

دهگان عدد انتخابی دوست شما همان دهگان عدد بالای نوار جدول II ویکان آن همان عدد بالای نوارجدول I است.

مثلاً فرض کنید دوست‌شما عدد ۳۷ را انتخاب کرده باشد؛ این عدد، مثل هرعدد دیگری، دردو نوار وجود دارد، یکی در نواری که عدد بالای آن ۷ است (ازجدول I) ودیگری درنواری که بالای آن عدد ۳۱ است (از جدول II). وقتی که شما به‌۱۸ نوارموجود نگاه‌کنید به‌این دوعدد ۷ و ۳۱ پی می‌برید و بلافاصله می‌گویید که عدد انتخابی دوست شما ۳۷ است (۳ رقم دهگان ۳۱ از جدول II و ۷عدد بالای نوار جدولI است).

۶ـ حدس زوج یا فرد بودن تعداد اشیاء

دریك دست به‌تعداد زوج و دردست دیگر به‌تعدادفرد چوب کبریت (یا چیز دیگری) نگاه دارید. تعداد چوب کبریتهای دست راست را درعددی فرد و تعداد چوب کبریتهای دست چپ را در عددی‌زوج ضرب کنید. دو حاصلضربی را که بدست آورده‌اید باهم جمع کنیدوحاصلجمع را به‌من بگویید، من بلافاصله به شما خواهم گفت تعداد چوب کبریتهای کدام دست شما عددی زوج ومال کدام دستتان عددی فرداست.

اگرمجموع آخر، عددی زوج باشد، تعداد چوب کبریتهای‌دست‌راست زوج وتعداد چوب کبریتهای دست چپ فرد است و اگر مجموع عددی فرد باشد برعکس‌آن.

مثال :

A) ۴ (در دست راست) ؛ ۳ (در دست چپ) ؛ ۴×۷+۳×۶=۴۶؛

B) ۵ (در دست راست) ؛ ۲ (در دست چپ) ؛ ۵×۷+۲×۶=۴۷

* * *

روش جالب‌تری هم برای این نوع حدس زدن وجود دارد.

به‌دوستتان پیشنهاد کنید دریك دست خود ۴ و دردست دیگر ۷ چوب کبریت بگذارد، تعداد کبریتهای دست راست خودرا دوبرابر وتعداد کبریتهای دست چپ خود را سه برابر کند، بالاخره ازمجموع این حاصلضربها ۲۷ واحد کم کنید. اگـر تفریق ممکن نباشد، تعداد زوج دردست چپ و اگر تفریق ممکن باشد، دردست راست بوده است.

وقتی که دوست شما اعتراض می‌کند که نمی‌شود ۲۷ را ازمجموع کم کرد، می‌توانید جواب معما را مطرح نکنید وپیشنهاد کنید که مثلاً به‌جای ۲۷ عدد ۱۷ را ازآن کم کندوسپس بخواهید چندعمل دوگانه متقابل به‌دنبال آن انجام دهد.

همچنین بجای ۲۷ می‌توان ازعدد ۲۸ استفاده کرد، زیرا در اینحالت هم همان وضع پیش می‌آید:

$$۳\times۴+۲\times۷=۲۶ \quad \text{یا} \quad ۳\times۷+۲\times۴=۲۹$$

به‌این ترتیب هم عدد ۲۷ و هم عدد ۲۸ بین این دو نوع مجموع قراردارند ونتیجهٔ عمل باآنها مشابه یکدیگر خواهد بود.

۷ـ تاریخ تولد را حدس بزنید

روز تولدتان را در ۲۰ ضرب و با ۷۷ جمع کنید. مجموع را ۵ برابر کنید و باعددی که ماه تولد شما را نشان می‌دهد جمع کنید. این مجموع را در ۲۰ ضرب کنید و دوباره با ۷۷ جمع کنید. نتیجه را در ۵ ضرب و دو رقم آخر سال تولدتان را به‌آن اضافه کنید؛ آنچه راکه بدست می‌آید به‌من بگویید تامن تاریخ دقیق تولد شما را بگویم.

راه حل اینست که عدد ۳۸۸۸۵ را ازنتیجه‌ای که بدست آمده است کم می‌کنیم: دورقم اولی که بدست‌می‌آید روز، دورقم بعدی

ماه و دو رقم آخر، سال تولد را نشان خواهدداد (فرض را بر این گرفته‌ایم که قرن تولد برهمه معلوم باشد).

مثلاً فرض‌کنید کسی در۵خرداد ۱۳۵۱ متولدشده باشد. اگرعملهای لازم را انجام دهیم، چنین می‌شود:

$$۲۰ \times ۵ + ۷۷ = ۱۷۷،$$
$$۱۷۷ \times ۵ + ۳ = ۸۸۸،$$
$$۸۸۸ \times ۲۰ + ۷۷ = ۱۷۸۳۷،$$
$$۱۷۸۳۷ \times ۵ + ۵۱ = ۸۹۲۳۶$$

اگر ازعدد ۸۹۲۳۶که بدست آمده است، عدد ۳۸۸۸۵ را کم کنیم به‌عدد ۵۰۳۵۱ می‌رسیم که دقیقاً تاریخ تولد را نشان می‌دهد: ۵۱/۳/۵.

بجای ۷۷که دومرتبه جمع کردیم، می‌توان هر عدد دلخواه **k** را در نظر گرفت، منتهی بجای عدد ۳۸۸۸۵، یعنی ۵۰۵ × ۷۷، بایدعدد ۵۰۵**k** را ازآن نتیجهٔ آخر کم کنیم.

VI ـ رازهایی از صفحهٔ شطرنج و دومینو

ورود به مطلب

درعنوان این قسمت از دو بازی نام برده‌ایم، درحالیکه دربارهٔ ماهیت بازیهای شطرنج و دومینو حتی صحبتی هم نشده است. باوجود این درخود موضوع این بازیها آنقدر ترکیبهای ریاضی وجود دارد که می‌تواند مورد بررسی خاص قرار گیرد.

آنچه که مربوط به دومینو است، این بازی کمتر بین جوانها رواج پیدا کرده است وبه‌همین مناسبت ارزش آن به‌درستی شناخته نشده است، درحالیکه به کمك سنگهای دومینو می‌توان معماهای جالبی درست کرد.

صفحهٔ شطرنج

۱ـ پاداش مخترع

روایت کرده‌اند که حکمران هند که به‌سختی تحت تأثیر اختراع بازی شطرنج قرارگرفته بود، به‌مخترع آن وعده دادکه هرپاداشی بخواهد به او بدهد. مخترع تقاضایی کرد که به ظاهر خیلی ناچیز

به‌نظر می‌رسید: اومقداری دانه‌های گندم درخواست کرد، به‌نحوی که اگر آنها را درخانه‌های صفحهٔ شطرنج جادهند، درهرخانه دو-برابر خانهٔ قبل وجود داشته باشد. به این ترتیب تعداد دانه‌های گندمی که او تقاضا کرد مساوی مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی بودکه جملهٔ اول آن ۱، قدر نسبتش ۲، و تعداد جمله‌هایش مساوی ۶۴ بود.

حکمران هند که ثروتمندترین مرد جهان بود، نتوانست از عهدهٔ این درخواست برآید. در حقیقت این راجهٔ ثروتمند شرقی با همهٔ تصورات بی پایان خود نمی‌توانست این مقدار گندم را تهیه کند!

تعداد دانه‌های گندم برابر است بامجموع توانهای متوالی ۲ از ۰ تا ۶۳ یعنی

۱۸ ۴۴۶ ۷۴۴ ۰۷۳ ۷۰۹ ۵۵۱ ۶۱۵ عدد گندم

اگردرهرسانتیمترمکعب ۲۰ دانه گندم جا بگیرد، رویهم‌این‌تعداد گندم‌به‌اندازهٔ ۶۸۵ ۲۰۳ ۳۳۷ ۹۲۲ مترمکعب گندم می‌شود (۲۰ میلیون گندم درهر مترمکعب).

برای‌اینکه‌بتوان این‌مقدارگندم رابدست‌آورد، باید هشت‌بارتمام‌زمین راکاشت وهشت بار محصول آنرا جمع کرد. به عبارت دیگر این محصول را از سیاره‌ای می‌توان بدست‌آوردکه سطح آن هشت برابرزمین باشد.

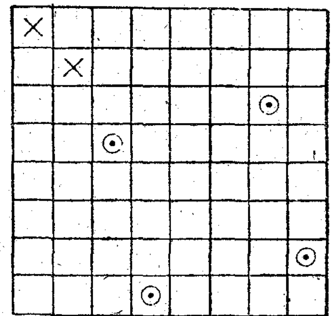
به‌این ترتیب مخترع شطرنج درس خوبی به‌حکمران هندداد و به‌او ثابت کرد که امکانات بی‌پایانی ندارد و نمی‌تواند «هر» خواهش مخترع را برآورد.

۲ـ دو مسأله دربارهٔ چند وزیر

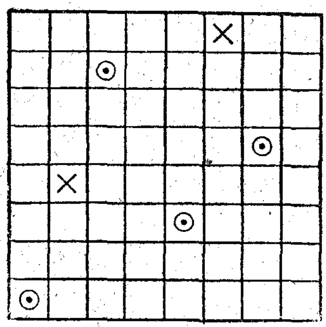
A. می‌دانیم که در بازی شطرنج، وزیر می‌تواند در هرجهتی حرکت کند: درطول‌خانه‌های صفحه به‌صورت‌افقی، قائم وقطری.

خانه‌هایی که وزیر می‌تواند مورد حمله قراردهد، منطقهٔ مورد تهدید نامیده می‌شود.

حالا فرض کنید به جای دو وزیر (که به‌طور عادی وجود دارد)، چهار وزیر وجود داشته باشد (برای این منظور، پیاده‌های شطرنج می‌توانند به‌وزیرتبدیل شوند). می‌خواهیم ببینیم این‌وزیرها



شکل ۱۴۲



شکل ۱۴۳

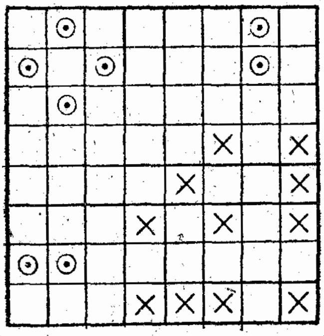
چگونه در خانه‌های شطرنج قرار بگیرند تا منطقهٔ مورد تهدید آنها حداکثر ممکن باشد.

چندنوع برای استقرار این چهار وزیر وجود دارد که برای آنها از ۶۴ خانه، تنها دوخانه آزاد است، یعنی درمنطقهٔ تهدید قرار ندارد. ما در اینجا دو نوع از آنها را می‌آوریم و جستجوی بقیه را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

درجدولهایی که دراینجاداده‌ایم، دایره‌ها علامت وزیر وصلیبهاعلامت خانه‌های آزادند، یعنی خانه‌هایی که در منطقهٔ تهدید قرار ندارند (شکلهای (۱۴۲ و ۱۴۳). به‌خواننده پیشنهاد می‌کنیم که برای حالتی که چهار رخ، فیل یا اسب وجود داشته باشد، حداکثر منطقهٔ مورد تهدید را پیداکند.

B. می‌خواهیم ۸ وزیررا در خانه‌های صفحهٔ شطرنج چنان قرار دهیم که منطقهٔ آزاد، یعنی منطقه‌ای که مورد تهدید نیست، حداکثر باشد.

درا‌ینجا یکی از جوابها داده شده است که در آن ۱۱ خانهٔ آزاد وجود دارد (شکل ۱۴۴) . ممکن است وضع دیگری برای استقرار ۸ وزیروجود داشته‌باشد، که برای آن تعداد خانه‌های آزاد بیشتر باشد، ولی تاامروزاین‌وضع پیدا نشده‌است، با وجودی که ازنظر ریاضی هیچکس نتوانسته است ثابت‌کند که این وضع ممکن نیست. به‌این‌ترتیب تاامروز ۱۱ خانهٔ آزاد به‌عنوان حداکثر به‌حساب می‌آید. شاید ازمیان خواننده‌ها کسی باشدکه بتواند این برتری را بشکند.



شکل ۱۴۴

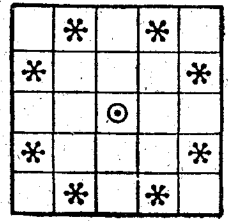
۳ـ باحرکت اسب

دراواخر قرن‌گذشته وابتدای قرن حاضر، مسأله‌های مربوط به‌شطرنج که تنها با حرکت اسب بازی می‌شد، خیلی معمول بود. اساس این مسأله‌ها چنین بود: مربعی را به‌تعدادی خانه تقسیم می‌کردند (تعداد این خانه‌ها متفاوت بود)، سپس حرفها، سیلابها یا کلمه‌هایی در بعضی از این خانه‌ها قرار می‌دادند و می‌بایستی با حرکت اسب آنها را به وضعی درآرند که یك کلمه یا شعر یا ضرب‌المثل درست شود.

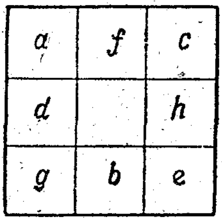
ولی در اینجا نمی‌خواهیم در بارهٔ اینگونه مسأله‌ها صحبت کنیم، بلکه از قانونها یا روشهایی گفتگو می‌کنیم که بااستفاده از آنهابتوان‌بااسب شطرنج به‌هر۶۴خانهٔ صفحهٔ شطرنج‌رفت، به‌نحوی که در هریك ازخانه‌ها تنهایکباروارد شده‌باشد.

برای کسانیکه احتمالاً از بازی شطرنج اطلاع ندارند، در

اینجا دو شکل آورده‌ایم که در آنها حرکت اسب نشان داده شده است. درشکل ۱۴۵ ازخانه‌ای که به‌وسیلهٔ دایره‌نشان داده‌شده‌است،



شکل ۱۴۵



شکل ۱۴۶

می‌توان باحرکت اسب در هریك از خانه‌هایی که با علامت ستاره مشخص شده‌است، جا گرفت.

درشکل ۱۴۶ ازخانه‌ای که باحرف a مشخص‌شده‌است، با حرکت اسب می‌توان به‌خانهٔ b و از آنجا به‌خانهٔ c ، سپس به خانهٔ d وغیره تا خانهٔ h رفت و ازخانهٔ h دوباره به‌خانهٔ a برگشت.

مسألهٔ مربوط به‌حرکت اسب در صفحهٔ شطرنج مورد بررسی خیلی ازریاضیدانهابوده‌است که عمیق‌ترین آنها بررسی اولر ریاضیدان مشهور است. روش اولر کلی‌تر ازدیگران است (ونه ساده‌تر) وما ابتدا به‌توضیح آن می‌پردازیم.

روش اولر (انتهای قرن هیجدهم). حرکت‌اسب ازیك خانهٔ دلخواه شروع می‌شود واسب بدون انتخاب خاصی، حد اکثر خانه‌هایی که می‌تواند جلومی‌رود، این خانه‌هارا باعددهای متوالی شماره گذاری می کنیم. وقتی که همه حرکتهای ممکن تمام شود، خانه‌هایی باقی می‌ماند که اسب نمی‌تواند از آنها عبور کند، این خانه‌ها را با شماره‌های آخر به حساب می‌آوریم و شروع به‌تبدیل

شماره‌ها می کنیم. بهتراست که این روش‌را بامثالهایی روشن کنیم.

فرض می کنیم که اسب موفق شده است از ۶۳ خــانه عبور کند، ولی یکی از خانه‌های صفحهٔ شطرنج، کــه در شکل ۱۴۷ با دایره نشان داده شده است، بــاقی مانده که اسب نمی‌تواند به‌آن برسد. کوتاه‌ترین مسیری را انتخاب می کنیم کــه اسب بتواند از طریق آن ازخانهٔ ۶۳ به‌خانهٔ بدون شماره برود. این مسیر عبارتست ازخانه‌های ۱۶ و۱۵ (مسیرهای دیگری هم برای عبور اسب ازخانهٔ ۶۳ به‌خانهٔ بدون شماره وجود دارد، مثل ۱۶ و ۴۷، ۱۴ و۱۵، ۳۰ و۲۹ وغیره. ولی‌مادراین موردهمان مسیر اول را انتخاب می کنیم وآزمایش بقیه را به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم).

۷	۵۴	۲۵	۴۲	۵	۵۶	۲۷	۴۴
۲۴	۴۱	۶	۵۵	۲۶	۴۳	۴	۵۷
۵۳	۸	۲۳	۲۰	۳۳	۱۲	۴۵	۲۸
۴۰	۱۹	۳۲	۱۳	۳۰	۲۱	۵۸	۳
۹	۵۲	۶۳	۲۲	۱۱	۳۴	۲۹	۴۶
۱۸	۳۹	۱۰	۳۱	۱۴	۴۷	۲	۵۹
۵۱	۶۲	۳۷	۱۶	۴۹	۶۰	۳۵	
۳۸	۱۷	۵۰	۶۱	۳۶	۱۵	۴۸	۱

شکل ۱۴۷

۷	۲۴	۵۳	۳۶	۵	۲۲	۵۱	۳۴
۵۴	۳۷	۶	۲۳	۵۲	۳۵	۴	۲۱
۲۵	۸	۵۵	۵۸	۴۵	۱۲	۳۳	۵۰
۳۸	۵۹	۴۶	۱۳	۴۸	۵۷	۲۰	۳
۹	۲۶	۱۵	۵۶	۱۱	۴۴	۴۹	۳۲
۶۰	۳۹	۱۰	۴۷	۱۴	۳۱	۲	۱۹
۲۷	۱۶	۴۱	۶۲	۲۹	۱۸	۴۳	۶۴
۴۰	۶۱	۲۸	۱۷	۴۲	۶۳	۳۰	۱

شکل ۱۴۸

دراین حالت در خــانهٔ بدون شماره، عدد ۶۴ را قرار می‌دهیم، سپس ۶۳ را بجای ۱۵، بعد ۶۲ را بجای ۱۶، ۶۱ را بجای ۱۷، ۶۰ را بجای ۱۸ و به‌همین ترتیب جلو می‌رویم (شکل۱۴۸). بالاخره به‌خانه‌ای می‌رسیم که در ابتدا شمارهٔ ۶۳ را داشت و حالا بجای‌آن شمارهٔ ۱۵ قرار داده‌ایم؛ بنابراین این‌خانه به‌خانهٔ شمارهٔ ۱۴ باحرکت‌اسب متصل است ودرنتیجه احتیاجی به‌تغییرشماره‌های

۱ تا ۱۴ نیست.

حالا فرض می‌کنیم که بعداز اولین حرکت‌اسب بجای یك خانه، مثلاً ۱۰ خانهٔ آزاد باقی بماند. در شکل ۱۴۹ این ۱۰ خـانهٔ آزاد به‌وسیلهٔ دایـره مشخص شده است.

⊙	۵۴	۴۱	۵۰	۴۳	۵۲	⊙	۴۸
⊙	⊙	۳۸	۵۳	⊙	۴۹	۴۴	۱۵
۳۷	۴۰	۱	۴۲	۵۱	۱۶	۴۷	⊙
⊙	۲۱	۳۶	۳۹	۱۲	۴۵	۱۴	۲۹
۳۵	۲	۳۳	۲۲	۱۷	۲۸	۱۱	۴۶
۲۰	۲۳	۱۸	⊙	۱۰	۱۳	۳۰	۷
۳	۳۴	۲۵	۳۲	۵	۸	۲۷	⊙
۲۴	۱۹	۴	۹	۲۶	۳۱	۶	⊙

شکل ۱۴۹

اسب درخانهٔ شمارهٔ ۵۴ متوقف شده است. در این حالت شمارهٔ ۱ را به اولین خانهٔ ستون دوم (ازسمت‌چپ) منتقل می‌کنیم، بجای۱ ، شمارهٔ۲را می‌گذاریم وغیره تا درآخر بجای ۵۴ شمارهٔ ۵۵ قرارگیرد. به‌این ترتیب تعداد خانه‌های خالی یك واحد کمتر می‌شود. نتیجهٔ همهٔ این تبدیلهـا در شکل ۱۵۰ نشان داده شده است .

⊙	۵۵	۴۲	۵۱	۴۴	۵۳	⊙	۴۹
۱	⊙	۳۹	۵۴	⊙	۵۹	۴۵	۱۶
۳۸	۴۱	۲	۴۳	۵۲	۱۷	۴۸	⊙
⊙	۲۲	۳۷	۴۰	۱۳	۴۶	۱۵	۳۰
۳۶	۳	۳۴	۲۳	۱۸	۲۹	۱۲	۴۷
۲۱	۲۴	۱۹	⊙	۱۱	۱۴	۳۱	۸
۴	۳۵	۲۶	۳۳	۶	۹	۲۸	⊙
۲۵	۲۰	۵	۱۰	۲۷	۳۲	۷	⊙

شکل ۱۵۰

۵۶	۳۹	۵۲	۴۳	۵۰	۴۱	⊙	۴۵
۱	⊙	۵۵	۴۰	⊙	۴۴	۴۹	۱۶
۳۸	۵۳	۲	۵۱	۴۲	۱۷	۴۶	⊙
⊙	۲۲	۳۷	۵۴	۱۳	۴۸	۱۵	۳۰
۳۶	۳	۳۴	۲۳	۱۸	۲۹	۱۲	۴۷
۲۱	۲۴	۱۹	⊙	۱۱	۱۴	۳۱	۸
۴	۳۵	۲۶	۳۳	۶	۹	۲۸	⊙
۲۵	۲۰	۵	۱۰	۲۷	۳۲	۷	⊙

شکل ۱۵۱

دراین‌مربع‌جدید، خانهٔ۳۹باحرکت‌اسب‌به‌خانهٔ‌چپ‌بالامربوط است. همچنین خانه‌های ۳۸و۵۵ هم باحرکت اسب بهم مربوط‌اند.

درخانهٔ چپ بالا شمارهٔ ۵۶ را قرارمی‌دهیم، بجای ۳۹ شمارهٔ ۵۵، بجای ۴۰ شمارهٔ ۵۴، بجای ۴۱ شمارهٔ ۵۳ تـا بالاخره بجـای ۵۵ شمارهٔ ۳۹. چون شمارهٔ ۳۹ باحرکت اسب به‌خانهٔ شمارهٔ ۳۸ مربوط

⊙	۳۹	۵۲	۴۳	۵۰	۴۱	۵۶	۴۵
۱	⊙	⊙	۴۰	۵۵	۴۴	۴۹	۱۶
۳۸	۵۳	۲	۵۱	۴۲	۱۷	۴۶	۵۷
⊙	۲۲	۳۷	۵۱	۱۳	۴۸	۱۵	۳۰
۳۶	۳	۳۴	۲۳	۱۸	۲۹	۱۲	۴۷
۲۱	۲۴	۱۹	⊙	۱۱	۱۴	۳۱	۸
۴	۳۵	۲۶	۳۳	۶	۹	۲۸	⊙
۲۵	۲۰	۵	۱۰	۲۷	۳۲	۷	⊙

شکل ۱۵۲

⊙	۳۱	۱۸	۲۷	۲۰	۲۹	۱۴	۲۵
۱	⊙	○	۳۰	۱۵	۲۶	۲۱	۵۴
۳۲	۱۷	۲	۱۹	۲۸	۵۳	۲۴	۱۳
⊙	۴۸	۳۳	۱۶	۵۷	۲۲	۵۵	۴۰
۳۴	۳	۳۶	۴۷	۵۲	۴۱	۱۲	۲۳
۴۹	۴۶	۵۱	۵۸	۱۱	۵۶	۳۹	۸
۴	۳۵	۴۴	۳۷	۶	۹	۴۲	⊙
۴۵	۵۰	۵	۱۰	۴۳	۳۸	۷	⊙

شکل ۱۵۳

۵۹	۲۸	۴۱	۳۲	۳۹	۳۰	۵۵	۳۴
۴۲	⊙	۶۰	۲۹	۵۶	۳۳	۳۸	۵
۲۷	۵۸	۴۳	۴۰	۳۱	۶	۳۵	۵۴
⊙	۱۱	۲۶	۵۷	۲	۳۷	۴	۱۹
۲۵	۴۴	۲۳	۱۲	۷	۱۸	۵۳	۳۶
۱۰	۱۳	۸	۱	۵۲	۳	۲۰	۴۹
۴۵	۲۴	۱۵	۲۲	۴۷	۵۰	۱۷	⊙
۱۴	۹	۴۶	۵۱	۱۶	۲۱	۴۸	⊙

شکل ۱۵۴

۲	۳۳	۲۰	۲۹	۲۲	۳۱	۶	۲۷
۱۹	۶۲	۱	۳۲	۵	۲۸	۲۳	۴۲
۳۴	۳	۱۸	۲۱	۳۰	۴۳	۲۶	۷
۶۱	۴۸	۳۵	۴	۳۹	۲۴	۴۱	۵۶
۳۶	۱۷	۶۰	۴۹	۴۴	۵۵	۸	۲۵
۴۷	۵۰	۴۵	۳۸	۹	۴۰	۵۷	۱۲
۱۶	۳۷	۵۲	۵۹	۱۴	۱۱	۵۴	⊙
۵۱	۴۶	۱۵	۱۰	۵۳	۵۸	۱۳	⊙

شکل ۱۵۵

۲	۳۳	۲۰	۲۹	۲۲	۳۱	۶	۲۷
۱۹	۳۶	۱	۳۲	۵	۲۸	۲۳	۶۰
۳۴	۳	۱۸	۲۱	۳۰	۶۱	۲۶	۷
۳۷	۵۰	۳۵	۴	۵۷	۲۴	۴۹	۴۲
۵۴	۱۷	۳۸	۴۹	۶۲	۴۳	۸	۲۵
۵۱	۴۸	۵۳	۵۶	۹	۵۸	۴۱	۱۲
۱۶	۵۵	۴۶	۳۹	۱۴	۱۱	۴۴	⊙
۴۷	۵۲	۱۵	۱۰	۴۵	۴۰	۱۳	⊙

شکل ۱۵۶

۲	۳۳	۲۰	۲۹	۲۲	۳۱	۶	۲۷
۱۹	۳۶	۱	۳۲	۵	۲۸	۲۳	۴۲
۳۴	۳	۱۸	۲۱	۳۰	۴۱	۲۶	۷
۳۷	۵۲	۳۵	۴	۴۰	۲۴	۴۳	۶۰
۴۸	۱۷	۳۸	۵۳	۴۰	۵۹	۸	۲۵
۵۱	۵۴	۴۹	۴۶	۹	۴۴	۶۱	۱۲
۱۶	۴۷	۵۶	۳۹	۱۴	۱۱	۵۸	۶۳
۵۵	۵۰	۱۵	۱۰	۵۷	۶۲	۱۳	⊙

شکل ۱۵۷

۲	۲۹	۱۶	۲۵	۱۸	۲۷	۶۲	۲۳
۱۵	۳۲	۱	۲۸	۶۳	۲۴	۱۹	۳۸
۳۰	۳	۱۴	۱۷	۲۶	۳۷	۲۲	۶۱
۳۳	۵۲	۳۱	۴	۵۹	۲۰	۳۹	۴۴
۵۶	۱۳	۳۴	۵۱	۳۶	۴۳	۶۰	۲۱
۵۳	۵۰	۵۵	۵۸	۵	۴۰	۴۳	۸
۱۲	۵۷	۴۸	۳۵	۱۰	۷	۴۶	۴۱
۴۹	۵۴	۱۱	۶	۴۷	۴۲	۹	۰

شکل ۱۵۸

۲	۶۳	۳۰	۴۹	۵۶	۴۷	۲۸	۵۱
۳۱	۶۰	۱	۶۴	۲۹	۵۰	۵۵	۴۶
۶۲	۳	۳۲	۵۷	۴۸	۴۵	۵۲	۲۷
۵۹	۱۸	۶۱	۴	۲۵	۵۴	۳۹	۱۰
۲۲	۳۳	۵۸	۱۷	۴۴	۱۱	۲۶	۵۳
۱۹	۱۶	۲۱	۲۴	۵	۴۰	۹	۳۸
۳۴	۲۳	۱۴	۴۳	۳۶	۷	۱۲	۲۱
۱۵	۲۰	۳۵	۶	۱۳	۴۲	۳۷	۷

شکل ۱۵۹

است، ازاینجا به‌بعد (یعنی شماره‌های ۳۸، ۳۷، ۳۶، . . .) بدون تغییر باقی می‌مانند.

تبدیلهای‌بعدی مشکل‌نیست وما آنها را به ترتیب درشکلهای ۱۵۱ تا ۱۵۹ نشان داده‌ایم.

به این ترتیب مسأله حل شد: تمام صفحهٔ شطرنج با حرکت اسب پوشیده شد. ولی معمولاً به‌این نتیجه قانع نمی‌شوند و کوشش می‌کنند حل مسأله را به‌این ترتیب تکمیل کنند که حرکت اسب در صفحهٔ شطرنج یك دور بسته تشکیل دهد، یعنی از خانهٔ ۶۴ بتوان با حرکت اسب به‌خانهٔ ۱ رفت و دوباره حرکت اولیه را ازسرگرفت.

۱۹	۲	۴۷	۶	۹	۶۴	۴۵	۱۴
۴۸	۵	۱۸	۱	۴۶	۱۵	۱۰	۶۳
۳	۲۰	۴۹	۸	۱۷	۶۲	۱۳	۴۴
۶	۳۵	۴	۲۱	۴۲	۱۱	۵۶	۲۷
۳۹	۵۰	۷	۳۴	۶۱	۲۸	۴۳	۱۲
۳۶	۳۳	۳۸	۴۱	۲۲	۵۷	۲۶	۵۵
۵۱	۴۰	۳۱	۶۰	۵۳	۲۴	۲۹	۵۸
۳۲	۳۷	۵۲	۲۳	۳۰	۵۹	۵۴	۲۵

شکل ۱۶۰

برای این‌منظور دوخانه با دو عدد متوالـی پیدا می کنیم ، یعنی‌خانه‌هایی که‌باحرکت‌اسب به‌هم مربوط باشند وضمناً یکی ازآنها باحرکت اسب به‌خانهٔ۱ و دیگری به خـانهٔ ۶۴ مربـوط باشد. این خانه‌ها درشکل ۱۵۹

عبارتند از خانه‌های ۴۸ و ۴۷. حالا خانهٔ ۶۴ را بجای ۴۷، ۶۳ را بجای ۴۶ و غیره تا بالاخره ۱ را بجای ۶۴ قرار می‌دهیم. در انتهای این تبدیلها به‌شکل ۱۶۰ می‌رسیم.

روش مونا (۱۸۴۳). صفحهٔ شطرنج را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم: قسمت داخلی که از ۱۶ خانه تشکیل شده است و قسمت خارجی به شکل چهار چوب شامل ۴۸ خانه (شکل۱۶۱). در خانه‌های مربع داخلی حرفهای بزرگ A،B،C وD راچنان قرار می‌دهیم که هر کدام چهار بار تکرارشود، ضمناً هر حرف در چهار رأس یك مربع‌یایك‌لوزی قرارگرفته باشدکه روی محیط بتوان ازهر رأس به رأس دیگر با حرکت‌اسب منتقل‌شد. همین چهارحرف، منتهی کوچك، را

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	A	B	C	D	d	c
d	c	C	D	A	B	b	a
a	b	B	A	D	C	c	d
c	d	D	C	B	A	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

شکل ۱۶۱

در خانه‌های چهارچوب طوری قرار می‌دهیم که هرکدام از حرفها باحرکت اسب‌یك چندضلعی بسته را تشکیل دهند.

اسب ازیکی ازخانه‌های قسمت بیرونی شروع می‌کند، ابتدا ۱۲خانه ازحرفی را که انتخاب شده است طی می‌کند (مثلاً حرف a)، سپس وارد مربع داخلی می‌شود وبه‌خانه‌ای می‌رود که حرف آنA نباشد (B ، C یا D). وقتی‌که ۴ خانهٔ این حرف‌را طی‌کرد دوباره به‌قسمت بیرونی می‌رود و از حرفی شروع می‌کندکه قبلاً

نبوده است، سپس دوباره به داخل و بعد به خارج می‌رود تا خانهٔ شصت و چهارم.

روش روژه (نیمهٔ اول قرن نوزدهم). این روش حرکت‌اسب خیلی ساده است، ولی کمترشهرت پیدا کرده است. صفحهٔ شطرنج را به‌چهار مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. در هریك از ۱۶ خانهٔ این

a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a
a	b	c	d	a	b	c	d
c	d	a	b	c	d	a	b
b	a	d	c	b	a	d	c
d	c	b	a	d	c	b	a

شکل ۱۶۲

۳۴	۵۱	۳۲	۱۵	۳۸	۵۳	۱۸	۳
۳۱	۱۴	۳۵	۵۲	۱۷	۲	۳۹	۵۴
۵۰	۳۳	۱۶	۲۹	۵۶	۳۷	۴	۱۹
۱۳	۳۰	۴۹	۳۶	۱	۲۰	۵۵	۴۰
۴۸	۶۳	۲۸	۹	۴۴	۵۷	۲۲	۵
۲۷	۱۲	۴۵	۶۴	۲۱	۸	۴۱	۵۸
۶۲	۴۷	۱۰	۲۵	۶۰	۴۳	۶	۲۳
۱۱	۲۶	۶۱	۴۶	۷	۲۴	۵۹	۴۲

شکل ۱۶۳

مربعها حرفهای a، b، c و d را، درست به‌همان ترتیب مربع داخلی روش مونا، قرار می‌دهیم. اسب ازیك حرف دلخواه حرکت خود را شروع می‌کند. به‌نوبت از ۴ خانهٔ این مربع که شامل این حرف است عبور می‌کند و سپس به‌مربع مجاور درخانه‌ای که شامل همین حرف است وارد می‌شود وغیره.

وقتی که اسب از ۱۶ خانهٔ این حرف عبور کرد، شروع به‌ـ عبور ازخانه‌های شامل حرف بعدی می‌کند تا به‌این ترتیب ازتمام ۶۴خانهٔ صفحهٔ شطرنج عبور کند (شکلهای ۱۶۲ و ۱۶۳).

۴ـ مسأله‌های دیگر مربوط به عبور از خانه‌های صفحهٔ شطرنج

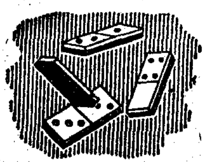
علاوه بر حرکت اسب، به نحوی که بتواند تمام خانه‌های

صفحهٔ شطرنج را بپوشاند، مسأله‌های دیگری مربوط به عبور از خانه‌های صفحهٔ شطرنج وجود دارد، که اگر چه به‌اندازهٔ حرکت اسب مشهور نیستند، ولی حل آنها خیلی جالب وسرگرم کننده‌است.

از این مسأله‌ها، مثلاً مسألهٔ وزیر است که بدون اینکه مسیر قبلی خودرا قطع کند بتواند از همه یا بعضی خانه‌های معین صفحهٔ شطرنج عبور کند، به‌این شرط که ابتدا وانتهای حرکت آن درخانه‌ای باشد که از قبل مشخص شده است. همینگونه مسأله‌ها را می‌توان برای رخ و تا حدی برای فیل نیز درست کرد. امکان طرح چنین مسأله‌هایی برای خواننده فوق‌العاده زیاد است.

دومینو

دومینوی جادویی. ازتعدادی سنگهای دومینو یا همهٔ آنها می‌توان مربعهای جادویی جالبی درست کرد.

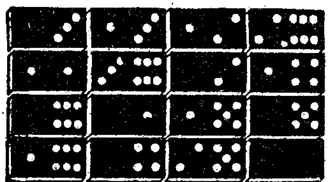


A. برای مربعهایی که از ۹ خانه تشکیل شده‌اند، می‌توان مسألهٔ زیر راطرح کرد.

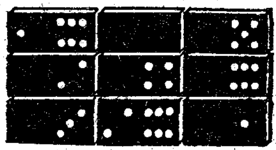
به هفت سنگی که دارای مربعهای «خالی» هستند، باید دو سنگ دومینواضافه کرد، به‌نحوی که بتوان باآنها یك مربع جادویی درست کرد که درآن مجموع خالها در هرسطر، هرستون و یا هر قطر یکی باشد.

حل مسأله: به‌سنگهای بامربعهای خالی دوسنگ ۶—۱ و۶—۲ را اضافه کنید، به‌نحوی که یك مربع جادویی درجهٔ ۳ با مجموع سحرآمیز ۱۲ بدست‌آید (شکل ۱۶۴). کدام سنگهای دومینو را باید اضافه کرد و چگونه

یك مربع جادویی تشکیل می‌دهند، اگر بجای ۷ سنگی کـه دارای مربعهای خالی هستند، از۷سنگی که دارای مربعهای تك‌خال یادوخال‌هستند، استفاده کنیم؟ مجموع سحرآمیز در هریك ازاین مربعهـا چند است؟ آیـا می‌توان



شکل۱۶۵



شکل ۱۶۴

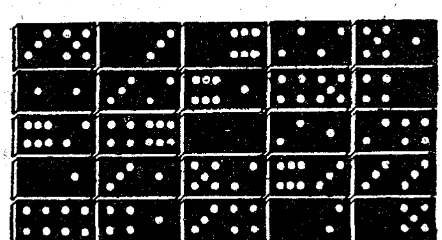
چنین مربعهای جادویی را به‌کمك هفت سنگ شامل مربعهای ۵ خـال یا ۶ خال درست کرد؟

B. برای مربعهایی که از۱۶خانه تشکیل شده‌اند، مسأله‌کمی بغرنجتر است؛ بـا انتخاب همهٔ سنگهای با مربعهای خالی و همهٔ سنگهای بامربعهای تك خال، باید سه سنگ دیگرچنان اضافه‌کرد که رویهم یك مربع جادویی بدست‌آید.

حل مسأله: مجموع سحرآمیز مساوی ۱۸ است، سنگهایی‌راکه باید اضافه‌کرد، عبارتند از ۵ — ۲، ۶ — ۲، ۶ — ۳ (شکل ۱۶۵).

دراین مربع‌جادویی سطراول یاستون اول را به‌آخر ببرید، به‌خاصیت عجیبی‌ازاین مربع‌پی‌خواهید برد، یعنی‌اینکه بااین تغییربازهم مربعی‌جادویی خواهید داشت.

بازهم این فکر پیش می‌آیدکه آیا می‌توان باسنگهایی از دومینوا که خالهای بیشتری دارند، چنین‌مربعهایی درست‌کرد؟ آزمایش‌کنید.

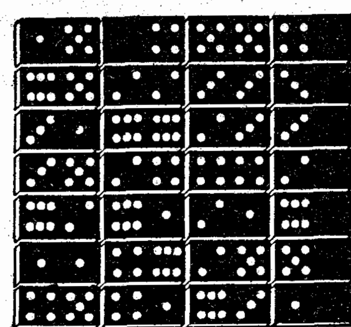


شکل ۱۶۶

C. در مورد مربعی که از ۲۵ خانـه تشکیل شده است، این

پرسشها وجود دارد: کدام سه سنگ را باید کنار گذاشت؟ آیا نمی‌شود سه سنگ دیگر را کنار گذاشت؟ با چه تبدیلهایی، این مربع (شکل ۱۶۶) جادویی باقی می‌ماند؟

D. مربع جادویی که از همهٔ سنگهای دومینو تشکیل شده باشد. بدون تردید، این‌مربع برای سنگ‌های دومینو جالب‌ترین مربعهای جادویی است. این‌مربع، با همهٔ مربعهای قبلی فرق دارد، زیرا در آن نباید خالهای سنگها را بطور کامل در نظر گرفت، بلکه مربع جادویی را باید ۷×۷ و شامل ۴۹ خانه به حساب آورد (به‌شرطی که مربعهای «خالی» ستون آخر را در نظر نگیریم). (شکل ۱۶۷).

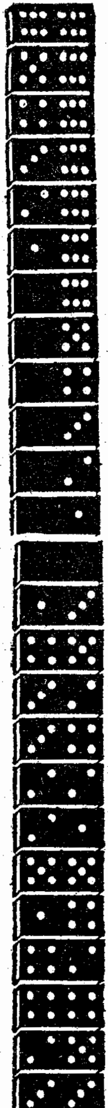


شکل ۱۶۷

حدس بزنید. چگونه می‌توان حدس زد که چند سنگ دومینو جابجا شده است؟

۲۵ سنگ دومینو را به ردیف زیر هم می‌چینیم (شکل ۱۶۸).

همانطور که درشکل دیده می‌شود، درمرکزآنها



شکل ۱۶۸

سنگ ۰ — ۰ قرار دارد. ۱۲ سنگ بالای مرکز از بالا به پایین به‌ترتیب از ۱۲ تا ۱ خال دارند؛ درزیر مرکز هم ۱۲ سنگ دلخواه گذاشته شده است. همهٔ این سنگهارا برگردانید به‌نحوی که خالهای آنها معلوم نباشد و به‌یکی ازحاضران پیشنهادکنیدکه درغیاب شما هرچندبارکه می‌خواهد سنگی را ازپایین بردارد و دربالاقراردهد. وقتی که کار جابجا کردن سنگها را تمام کرد، شما را صدا کند، شما بادیدن تعداد خالهای سنگ وسط می‌توانید، تعداد سنگهایی را که جابجاکرده‌اند، بگویید. البته دراین مورد باید شرط کرد که تعداد سنگهایی که جابجا می‌شود از۱۲ تجاوزنکند.

اگر شرط کنیم که تعداد سنگهای جابجا شده بیشتر از ۵ یا ۶ نباشد، می‌توان، بدون تغییرسنگها، برای بار دوم‌هم بخواهید چند سنگ جابجا کنند تا تعداد آنها را بگویید، منتهی اگر در بار اول خالهای سنگ مرکزی‌را می‌خوانید درباردوم بایدبه‌تعداد سنگهای جابجاشدهٔ باراول ازمرکز به‌طرف پایین بروید وخالهای سنگی را که به‌آن می‌رسید ببینید.

علت این حدس زدن به قدری روشن است که هیچ احتیاجی به‌توضیح دربارهٔ‌آن نیست.

VII- بازیهای ریاضی، سرگرمیها، معماها، تردستیها، شوخیها

۱- مازها (لابیرنتها)*

بازهم یکی از شگفتیهای ریاضی، که زمان پیدایش آن در افسانه‌های تاریخ گم شده است. کارل لپسیوس عقیده دارد که واژهٔ «لابیرنت» ریشهٔ مصری دارد و از «Lepi» به‌معنای «بارگاه‌مقدس» و «re - hint» به‌معنای «دهانهٔ معبر» آمده است. دانشمندانی هم هستندکه ریشهٔ این واژه را یونانی می‌دانندکه از واژه‌ای به‌معنای «راههای زیرزمینی» آمده است. چه بسا که مفهوم این واژه و یا حتی ساختمان آن دریونان به‌وجودآمده ویا چه بسا بعد ازقرنها از مصر به سرزمین یونـان رفته باشد، ولـی روشن کردن این مطلب ممکن نیست.

از نوشته‌های لپسیوس معلوم می‌شودکه‌هنوز هم خرابه‌های لابیرنتی که درکنار دریاچهٔ مودیس در ۲۱۰۰ سال قبل ازمیلاد ساخته شده است، باقی مـانده‌است وبه‌این ترتیب، این‌قدیمی‌ترین«لابیرنت» شناخته شده است. پلینی هم ازدو لابیرنت قدیمی دیگر نام می‌برد:

*) لابیرنت Labyrinthe

یکی لابیرنت لمنوس درجزیرهٔ لمنوس و دیگری لابیرنت ایتالیا زیر کلوزیوم. ولی مشهورترین لابیرنتها، لابیرنت افسانه‌ای کرت است که بنا بر روایت افسانه، مینوتاور غول افسانه‌ای سالهـا در آن اقامت داشته است، تااینکه پهلوان تزه واردلابیرنت می‌شود و اورا می‌کشد وخود سالم وهوشمندانه به‌کمك یك رشته نخ ازآن بیرون می‌آید.

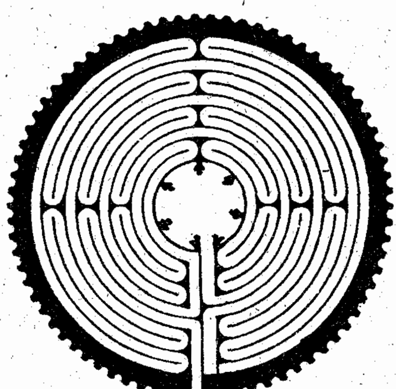
طرحهای لابیرنت درابتدای قرون وسطی، لباسهار کشیشهای مسیحی و بعد، بخصوص در سدهٔ دوازدهم، دیوارها و سقفهای کلیساهارازینت می‌داد. این‌لابیرنتها نشانهٔسردرگمی راههای‌زمینی وپریشانی‌وآشفتگی آدمی بود.

بعدها به‌تدریج، این‌لابیرنتهاجنبهٔ مذهبی‌خودراازدست‌دادوبه وسیلهٔ تزیین و سرگرمی در قصرها، ساختمانها وپارکهای امیران تبدیل شد.

* * *

همهٔ لابیرنتها را می‌توان به دو دستهٔ ظاهری و واقعی تقسیم کرد، زیرا دربسیاری موارد طرح درهم و برهمی است‌که درواقع از تعداد زیادی پیچ وخمها بـا یك مسیر، درست شده‌است.

وقتی که لابیرنت حقیقی باشد، این مسأله مطرح‌است که باید با سختی زیـاد مسیری را معین کرد که از طریق آن بتوان به‌مرکز رسید و یا از طریق آن ازلابیرنت خارج‌شد. ولی وقتی

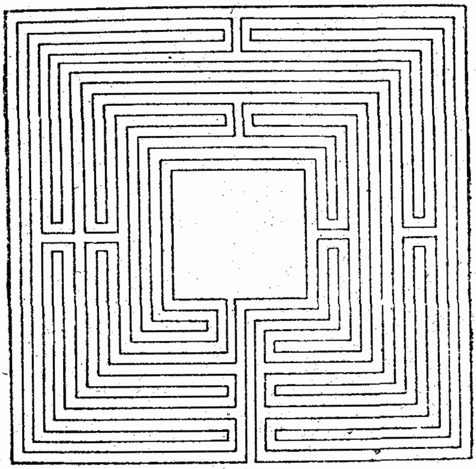


شکل ۱۶۹

که لابیرنت ظاهری باشد همه چیز برعکس است: ازمسیری که برای ورود به آن وجود دارد باجلورفتن نمی‌توان به‌مرکزرسید، همچنین با شروع ازمرکز نمی‌توان ازلابیرنت خارج شد.

از اینگونه لابیرنتهای ظاهری نمونه‌ای دراینجا درشکل۱۶۹ داده شده است که لابیرنت مشهور نمازخانهٔ شارتر است (که در چند ده کیلومتری پاریس قراردارد)؛ قطراین لابیرنت۴۰ارش است و مؤمنین برای ادای نماز وتوبه ازدهلیزهای تنگ آن عبورمی کردند.

از همین لابیرنتهـای ظاهری، نمونهٔ دیگری در شکل ۱۷۰ داده شده است کـه یك لابیرنت ایتالیایـی مربوط به سدهٔ شانزدهم

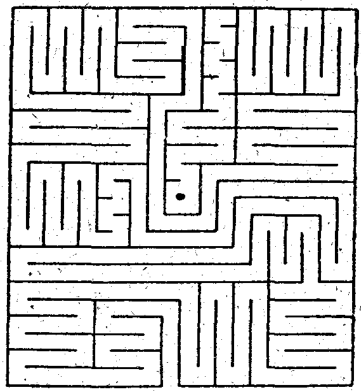


شکل ۱۷۵

است؛ همچنین لابیرنت دانمارکی مربوط به‌همین زمان که درشکل ۱۷۱ نشان داده شده است.

درحد فاصل لابیرنتهای ظاهری و واقعی، آنهـایی هستند که به‌شرط دانستن رمزکار ویانشانهٔ کوچکی که به‌عنوان کلید معماست،

می‌توان بااطمینان درپیچ وخمهایی که به‌ظاهر پیچیده‌است، حرکت کرد.

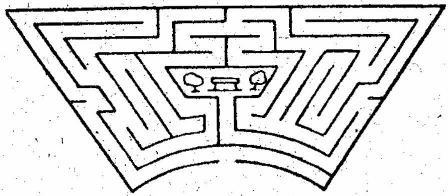


شکل ۱۷۱

از اینگونه لابیرنتها، باغ کمتون کورت* نزدیك لندن است که دو طرف راهروهای داخلی این باغ بـا نوعی شمشاد بلند پوشیده شده است و در مرکزآن دو درخت بزرگ قرار داردکه زیر آنها نیمکتی قرار دارد (شکل ۱۷۲). دربارهٔ این لابیرنت داستانهایی که بـه زمـان هـانری هشتم مربوط می‌شود نقل می کنند. سطح این لابیرنت ۱۲۰۰مترمربع وطول خیابانهای آن نیم میل انگلیسی یعنی ۸۰۰ متراست.

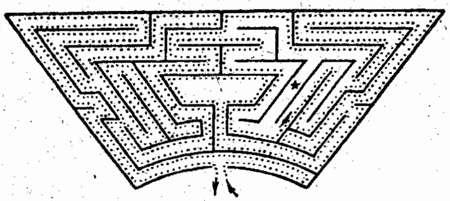
همانطور که از شکل دیده می‌شود، این لابیرنتی است کـه ممکن است آدم درآن گم شود، ولـی اگر راز آنرا بداند، یعنی اینکه با ورود از در باغ باید ازکنار دیواره‌های دست راست یـا ازکنار دیواره‌های دست چپ حرکت کرد (آنطور که درشکل۱۷۳

*) Campton Court



شکل ۱۷۲

نشان داده شده است)، می‌توان بدون هیچ زحمتی به‌مرکز آن رسید ویا از آن خارج شد.



شکل ۱۷۳

آنچه که بعد از این داده شده است، دیگر لابرینتهای واقعی هستند.

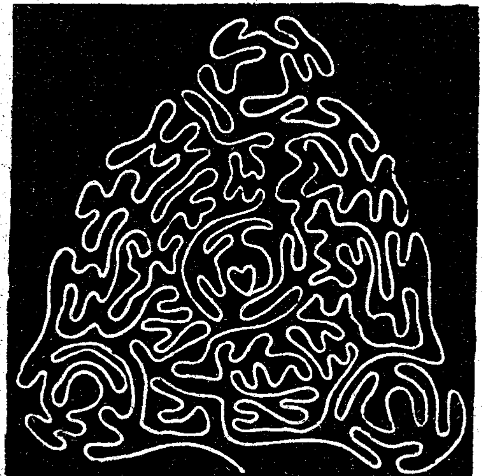
شکل ۱۷۴ یك لابیرنت آلمانی است، اگر چه خیلی پیچیده و گمراه کننده نیست.

نمونهٔ جالبی از لابیرنت درشکل ۱۷۵ داده شده است.

شکل ۱۷۴

این لابیرنت با بازه‌هایی به‌ارتفاع قریب‌یك فوت و راههای پرپیچ وخم و سردرگمی ساخته شده بود و مساحتی قریب ۴۰۰۰ متر مربع داشت.

محل این لابیرنت درانگلستان در کنت نشین دورست بود و تا سال ۱۷۳۰ وجود داشت.



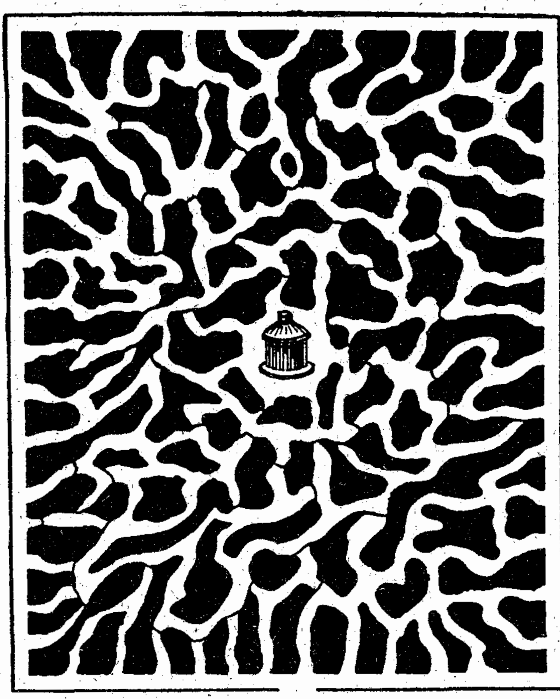
شکل۱۷۵

چه کسی می‌تواند مسیری را پیدا کند که ازطریق آن بتوان به‌قلبی که درمرکز شکل وجود دارد رسید؟

درمرکزیك پارك زیبا (شکل ۱۷۶)، بین لابیرنت خیابانها و پرچینها، قصر کوچکی مخفی شده‌است. هانری‌دوم پادشاه‌انگلستان، که فریفتهٔ «روزاموندای زیبا بود»، در همین قصر دور افتاده او را حسودانه ازنظرهای مردم دور داشته بود.

اگر ما در قرن دوازدهم زندگی می کردیم و می‌خواستیم «روزاموندای زیبا»را، که مورد ستایش بسیاری از شاعرها قرار گرفته است، ببینیم، می‌بایستی ازراههای باریکی که به‌قصراومنتهی می‌شد، عبور کنیم.

برای حل این مسأله (مثل دو مسألهٔ قبلی)، بهتراست از آخر شروع کنید: ازمرکز شروع کنید وامتحان کنید که چگونه می‌توان خود را به‌بیرون رسانید.

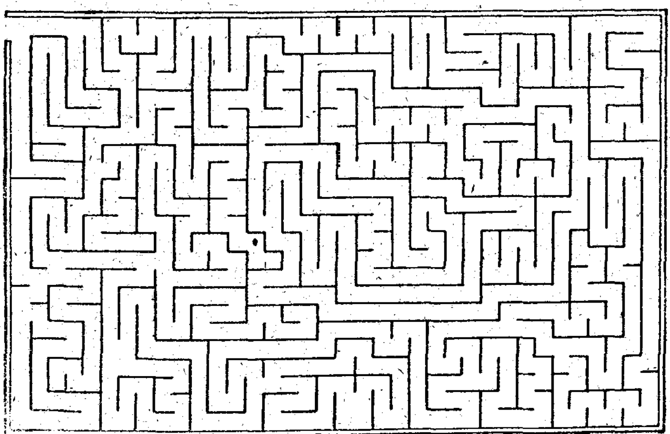


شکل ۱۷۶

این روش عالی را نمی‌توان درمورد آخرین لابیرنتی که در اینجا آورده‌ایم به‌کار برد (شکل ۱۷۷). این لابیرنت را رایس بول ریاضیدان انگلیسی درباغ خود ساخته بود.

اینجا دیگر صحبت برسر رسیدن به جای معینی نیست، بلکه مسأله اینست که چگونه می‌توان دراین باغ گردش طولانی‌تر انجام داد، به‌نحوی که تعداد خیابانهایی که دوبار برخورد می‌کنیم، حد اقل ممکن باشد.

اگرچه لابیرنت به‌مفهوم عادی‌خود به‌معنای راه پرپیچ وخمی است که ازآن نتوان خارج شد، ولی بااندکی فکرهر کس می‌داند



شکل ۱۷۷

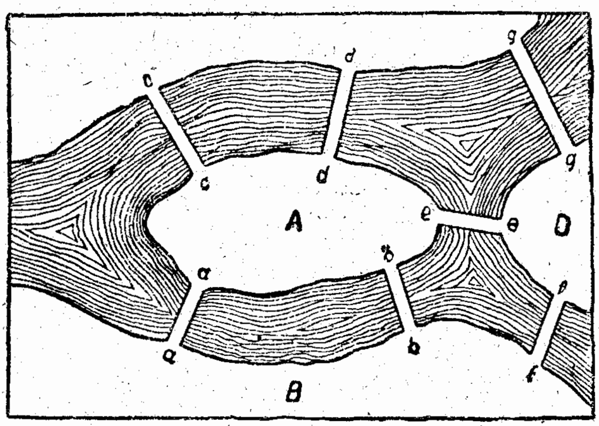
که اگر در خروجی وجود داشته باشد، لابیرنت نمی‌تواند مسیر خروج نداشته باشد.

امکان کشف راز لابیرنت، حتی بدون استفاده از نخ، امروز برای کسی عجیب نیست، زیرا نه‌تنها قانون راه‌حلهای مشابه شناخته شده است، بلکه تقریباً نظریهٔ کامل هندسی این راه حلها وجوددارد.

۲ـ پلهای کینگسبورگ

مسأله‌های مختلف زیادی وجود دارد که کاملاً به‌مسأله‌های لابیرنت مربوط می‌شوند وما، بدون اینکه بطوردقیق وارد درنظریهٔ ریاضی آنها بشویم، به‌ترتیب دربارهٔ آنها صحبت می کنیم.

اولر درسال ۱۷۵۹ به‌مسألهٔ مشهورپلهای کینگسبورگ پرداخت. او این سؤال را مطرح کرد: آیا می‌توانیم به نوبت از روی هریك از هفت پلی که شهر را به‌جزیره‌ای در وسط رودخانه وصل می کند عبورکنیم، به‌نحوی که ازروی هیچ پلی دوباررد‌نشویم (شکل۱۷۸)؟

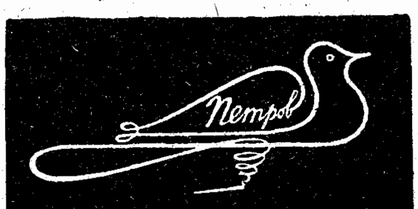


شکل ۱۷۸

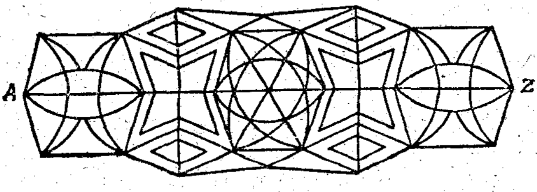
آزمایش نشان می‌دهد که جواب این سؤال منفی است.

۳ـ با یك حرکت قلم

اینجا به‌شکلهایی می‌پردازیم که می‌توان آنها را بایك‌حرکت قلم رسم کرد؛ یعنی بدون اینکه مداد یا قلم را ازروی کاغذ برداریم وبدون اینکه روی یك‌خط دوبارحرکت کنیم، شکل را رسم‌نماییم.

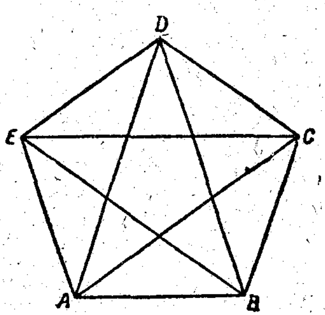


بدون تردید، هرکسی از این اطلاع تعجب خواهد کرد که نمی‌توان یك مستطیل یا مربع معمولی را با دوقطرآن به‌این طریق، یعنی بدون برداشتن مداد از روی کاغذ، رسم کرد، درحالیکه شکل پیچیده‌ای مثل شکل ۱۷۹ به‌این طریق قابل رسم است.



شکل ۱۷۹

مطلب چیست؟ چگونه می‌توان اینگونه شکلها را ازشکلهای مشابهی که بایك حرکت قلم قابل رسم نیستند، جدا کرد؟ آیا می‌توان دراین مورد یك قاعدهٔ کلی پیدا کرد؟ بله، چنین قاعده‌ای وجود دارد، منتهی برای پیدا کردن آن به استدلالهای کم و بیش پیچیدهٔ ریاضی نیاز داریم. ما در اینجا تنها به بررسی نمونه‌های ساده‌ای اکتفا می‌کنیم و سپس قاعده‌های کاملاً دقیق آنرا، بدون اثبات، می‌آوریم. پنج‌ضلعی ABCDE (شکل ۱۸۰) را می‌توان باروشهای مختلف، بدون جدا کردن قلم از کاغذ، رسم کرد، مثلاً: ABECBDCADEA. چه‌تفاوتی بین این پنج‌ضلعی باپنج‌قطر آن (که با یك حرکت قلم و بدون برداشتن مداد از کاغذ قابل رسم است) و مستطیل با دوقطرآن (که بایك حرکت‌قلم قابل رسم نیست)، وجوددارد؟



شکل ۱۸۰

ممکن است بگویید: تعداد ضلعهای پنج ضلعی فرد وتعداد ضلعهای چهار ضلعی زوج است. البته، ولی در این مورد، این مطلب یك اختلاف اساسی نیست، زیرا به سادگی می‌توان یك مربع را با یك

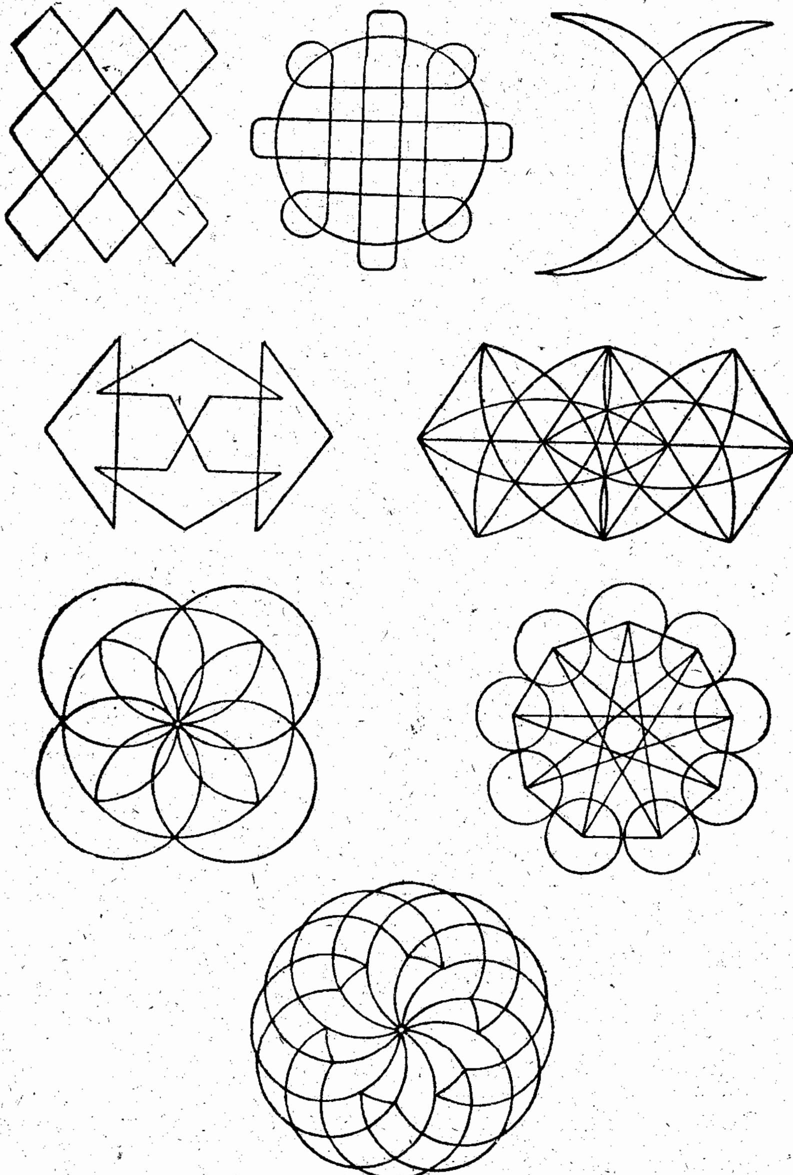
قطر آن، بدون برداشتن قلم از کاغذ، رسم کرد. اگر دربارهٔ قطرهای پنج‌ضلعی صحبت کنیم، به‌نتیجهٔ غریبی‌می‌رسیم. وقتی که فقط چهار قطر پنج‌ضلعی وجود داشته‌باشد، بازهم می‌توانیم آنرا بایك‌حرکت قلم رسم کنیم، به‌همین ترتیب وقتی که فقط سه‌قطر پنج ضلعی وجود داشته باشد، بازهم با یك حرکت قلم قابل رسم است؛ ولی وقتی که دوقطر پنج ضلعی وجود داشته باشد (به شرطی که از یك رأس نگذشته باشند) بایك حرکت قلم قابل رسم نیست؛ وقتی که یك‌قطر پنج ضلعی وجـود داشته باشد دوباره می‌تواند بـا یك حرکت قلم رسم شود.

بدون تردید، این وضع قضاوت خواننده را نسبت به‌زوج و فردبودن تعداد ضلعها متزلزل می‌کند و توجه اورا به‌طرف نقطه‌های گرهی‌جلب می‌کند (منظورما ازنقطهٔ‌گرهی نقطه‌ای است‌که درآنجا دو یاچند خط به‌هم رسیده‌اند)، به‌عبارت دقیق به‌این مطلب که آیا نقطه‌های‌گرهی زوج‌اند یـا فرد. نقطـهٔ گرهی را وقتی زوج می‌گوییم که محل برخورد تعداد زوج خطها باشد و اگر تعداد خطهـایی که دریك نقطه به‌هم رسیده‌اند فردباشد، نقطهٔ برخورد را، نقطهٔ‌گرهی فرد می‌خوانیم.

و به‌این ترتیب قاعدهٔ‌کلی بدست می آید:

شکلی را می‌توان بـا یك حرکت قلم رسم کرد کـه یا همهٔ نقطه‌های‌گرهی آن زوج باشد ویا تعداد نقطه‌های‌گرهی فردآن از دوعدد تجاوز نکند.

از قاعده‌ای که ذکرکردیم، می‌توان نتیجه‌هـای عملی برای



شکل ۱۸۱

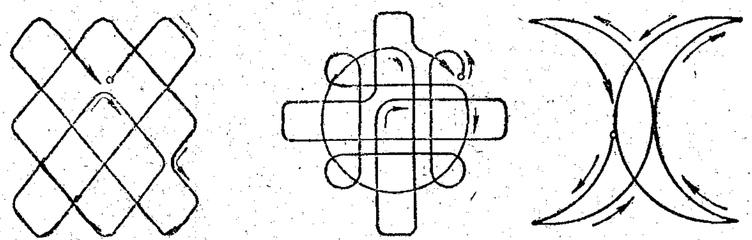
رسم چنین شکلهایی بدست آورد. قبلاً یك نکته‌را یادآوری می کنیم:

اگر درشکل مفروض نقطه‌های گرهی فرد وجود داشته باشد، برای موفقیت در رسم باید ازیکی ازاین نقطه‌ها شروع کرد.

رسم این شکلها یکی ازجالب‌ترین سرگرمیهاست که بسیاری را به‌طرف خود جلب می‌کند. در اینجا تعدادی شکلهای جالب را آورده‌ایم و برای دو مورد از آنها راه حل را ذکر کرده‌ایم، ولی حل بقیه را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (شکل ۱۸۱).

اولین شکل سمت راست ازبالا نشانه ومهر مشهور مسلمانان است که ازچهار پرهٔ شمشیر یا خنجر درست شده است.

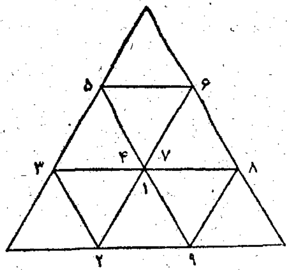
حل سه شکل بالا درشکل ۱۸۲ داده شده است.



شکل ۱۸۲

علاوه برمسأله‌هایی که در آنها باید شکل را با یك حرکت قلم رسم کرد، می‌توان از مسأله‌های دیگری هم صحبت کرد که اگرچه ظاهراً با آنها فرق دارند، ولی از لحاظ محتوی شبیه آنها هستند.

مثلث متساوی‌الاضلاع را به‌کمك یك خط متصل شکسته به‌ ۹قسمت مساوی تقسیم کنید، به‌نحوی که روی هریك از پاره‌خطهای این خط شکسته بیش از یکبار حرکت نکنید و ضمناً این پاره خطها یکدیگررا هم قطع نکنند. راه حل این مسأله درشکل ۱۸۳ داده‌شده

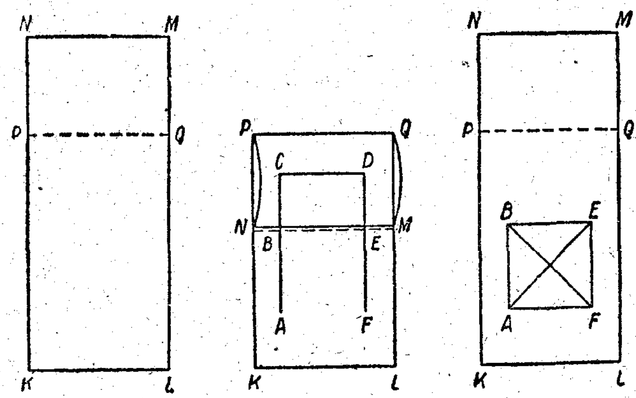


شکل ۱۸۳

و احتیاج به هیچ توضیح اضافی نیست.

اگر کسی بخواهد مربعی را با دو قطر آن بایك حرکت قلم رسم کند (که ما قبلاً گفتیم این کار ممکن نیست)، می‌تواند به‌این ترتیب عمل کند (شکل ۱۸۴).

صفحهٔ کاغذ را KLMN می‌نامیم؛ می‌خواهیم روی این صفحهٔ کاغذ مربعی با دو قطر آن رسم کنیم. صفحهٔ کاغذرا روی خط PQ تا می‌کنیم. ازنقطهٔ A شروع می‌کنیم وخط AC را رسم می‌کنیم که نیمی از آن روی کاغذ و نیم دیگرش روی قسمت تاخورده است. سپس روی قسمت تا خورده خط CD



شکل ۱۸۴

را وسپس روی قسمت تا خورده و قسمت اصلی خط DF را رسم می‌کنیم. حالا اگرقسمت تاخورده را باز کنیم، می‌توانیم بقیه مربع ودو قطر آنرا به‌ترتیب بارسم خطهای FB، BE، EA و AF تکمیل کنیم.

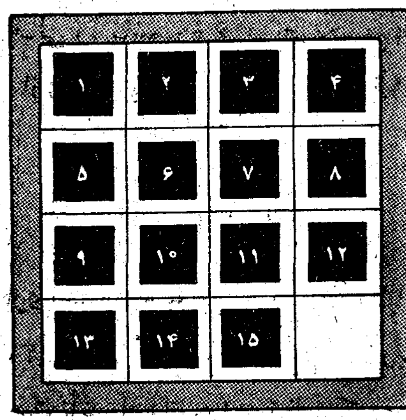
مسألهٔ مشهور هامیلتون به نام «مسافرت روی دوازده وجهی» هم کاملاً به‌همین رسم شکل بایك حرکت قلم مربوط است که ما آنرا درفصل دوم کتاب قرار داده‌ایم.

۴ـ بازی با «۱۵»

این بازی در امریکا و به‌وسیلهٔ یك «کرولال» در سال ۱۸۷۸ درست شد و باسرعتی باورنکردنی و به‌صورت همه‌گیر در ایالات متحده پخش شد، از آنجا به‌سایر کشورهای امریکایی وسپس اروپا سرایت کرد. هرجاکه آدمها به‌هم می‌رسیدند، درتراموا‌ها، درشکه‌ها وجلو باجه‌ها وغیره، همه‌جا به‌این‌بازی مشغول می‌شدند. می گویند که دولت امریکا مجبور شد دستوری صادر کندکه بنابرآن همراه‌داشتن این بازی درموقع کارممنوع شده‌بود، زیرا اغلب وقت افراد صرف بازی محبوبشان می‌شد.

این بازی خیلی ساده است. یك جعبهٔ‌کم‌عمق چهارگوش در نظر بگیرید که درآن ۱۵ مربع کوچك متحرك جا داده شده است: درهرردیف۴مربع کوچك قراردارد، بجزردیف آخر که درآن جای مربع شانزدهم خالی است. هر۱۵ مربع کوچك دارای شماره‌اند.

این مربعهای کوچك‌را باید به‌ترتیب تصادفی قرار داد وسپس بااستفاده از تنها جای «خالی» که وجود دارد، آنقدر مربعها را جابجا کرد تا به وضع شکل ۱۸۵ درآید. البته می‌توان مسأله‌های دیگری هم دراین مورد طرح کرد: مربعها را آنقدرجابه‌جا کنید تا ازوضع اولیه به‌یکی ازحالتهای شکل ۱۸۶ ویا مشابه‌آنها درآید.



شکل ۱۸۵

بعداز آنکه این بازی منتشر شد، خیلی زود نظریهٔ ریاضی مربوط آن روشن شد.

ما این نظریه را به دوجهت در اینجا نمی‌آوریم، یکی اینکه این نظریه خیلی پیچیده است، دیگراینکه اگراین نظریه برای خواننده کاملاً روشن باشد ومثلاً مواردی که حل آنها ممکن نیست مشخص شده باشد، از دلچسبی بازی می کاهد.

۷	۱۰	۱۳	۱۵
۴	۸	۱۱	۱۴
۲	۵	۹	۱۲
۱	۳	۶	

۱۵	۱۴	۱۲	۹
۱۳	۱۱	۸	۵
۱۰	۷	۴	۲
۶	۳	۱	

۱	۳	۶	۱۰
۲	۵	۹	۱۳
۴	۸	۱۲	۱۵
۷	۱۱	۱۴	

شکل ۱۸۶

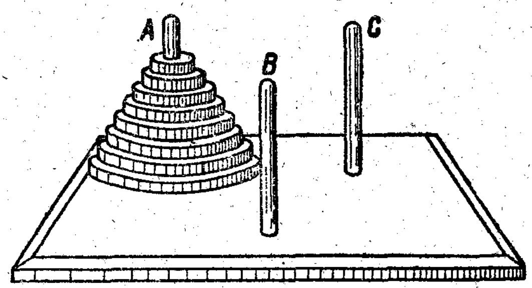
همینقدر متذکر می‌شویم که همیشه نمی‌توان به‌وضعی که در شکل۱۸۵ نشان داده شده است رسید وبه کرات درردیف آخربه‌جای دنبالهٔ ۱۳، ۱۴، ۱۵ دنبالهٔ ۱۳، ۱۵، ۱۴ بدست می‌آید.

درچنین حالتی هیچ صحبتی دربارهٔ تبدیل دومربع آخر نمی‌توان کرد، زیرا رسیدن به‌ترتیب درست غیرممکن است.

اگرخانهٔ خالی را باشمارهٔ ۱۶درنظربگیریم، آنوقت می‌توان بااستفاده ازاین بازی به‌طریقه‌های مختلف مربع۱۶خانه‌ای جادویی ساخت.

هـ برج هانوی

چرا این‌بازی چنین نام غریبی دارد که‌گویا از پایتخت ویتنام منشأ گرفته است ؟ احتمالاً به این علت که لوکا ریاضیدان مشهور فرانسوی آنرا تحت تأثیر افسانه هندی تنظیم کرده است و ما این افسانه را درپایان این بند می‌آوریم.



شکل ۱۸۷

هشت قرص از تختهٔ کلفت یا چوب تهیه می کنیم که به‌تدریج یکی از دیگری کوچکتر باشد، سه میلهٔ فلزی یا چوبی هم بر یك صفحهٔ افقی محکم می کنیم. وسط قرصهای چوبی باید سوراخی وجود داشته باشد، به نحوی که بتوان همهٔ آنها را مثل شکل ۱۸۷ روی یکی از میله‌ها قرار داد. به این ترتیب چیزی شبیه یك برج درست می‌شود.

مسأله اینست که باید تمام این «برج» را ازمیلهٔ A، بااستفاده از میلهٔ کمکی C، به‌میلهٔ B منتقل کرد.

ضمناً برای این انتقال باید این شرطها را رعایت کرد:

۱ـ هربار بیش‌از یك قرص را نمی‌توان جابجاکرد؛

۲ـ هرقرصی را که جابجا می‌شود باید روی میلهٔ خالی و یا روی قرص بزرگترقرارداد. هرگزقرص بزرگترروی قرض کوچکتر نباید قرارگیرد.

به‌احتمال زیاد بسیاری کسان گمان کنند، که با محدود شدن به این دو شرط، مسأله غیر قابل حل باشد. ولی در حقیقت این یك مسأله برای آزمایش حوصله است. برای اینکه سیرجابجایی قرصها را روشن کنیم، آنها را ازکوچك به‌بزرگ باعددهای ۱، ۲، ۳، ... ۷، ۸ نام‌گذاری می کنیم وتمام جابجاییها را درجدول زیرمشخص می کنیم:

	میلهٔ A	میلهٔ B	میلهٔ C
وضع اولیه	۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸	—	—
جابجایی اول	۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸	۱	—
« دوم	۳،۴،۵،۶،۷،۸	۱	۲
« سوم	۳،۴،۵،۶،۷،۸	—	۱،۲
« چهارم	۴،۵،۶،۷،۸	۳	۱،۲
« پنجم	۱،۴،۵،۶،۷،۸	۳	۲
« ششم	۱،۴،۵،۶،۷،۸	۲، ۳	—
« هفتم	۴،۵،۶،۷،۸	۱،۲،۳	—
« هشتم	۵،۶،۷،۸	۱،۲،۳	۴
. . .	. . . .	. . .	. . .

چند جابجایی‌لازم است تا تمام برج درمحل جدید خود قرارگیرد؟

اگرتعداد جابجایی قرصها را x و تعداد قرصها را n فرض‌کنیم، برای انتقال «برج» از میلهٔ A به‌میلهٔ B خواهیم داشت: $x = 2^n - 1$، بنابراین برای ۸ قرص بدست می‌آید: $x = 2^8 - 1 = 255$. به‌عبارت دیگردرمسألهٔ ما باید ۲۵۵ بار قرصها را جابجا کردکه خارج ازهرحوصلهٔ عادی است.

به‌همین مناسبت پیشنهاد می‌کنیم که به‌جای ۸ قرص از ۴، ۵ یا ۶قرص استفاده‌کنید. برای ۴قرص تنها ۱۵ حرکت برای انتقال «برج» کافی است.

افسانهٔ هندی دربارهٔ برج

در هندوستان در شهربنارس، زیرگنبد معبد بزرگ، جایی را که مرکز زمین است، برهما روی زمینه‌ای‌که ازمفرغ‌ساخته شده است، سه‌میلهٔ الماس به‌ارتفاع یك ارش (آرنج) وکلفتیِ زنبورعسل قرارداده است. درشروع‌عالم روی یکی ازاین میله‌ها ۶۴قرص ازطلای خالص، که درمیان هرکدام ازآنها سوراخی وجود دارد، گذاشته شده است، به نحوی کـه یك مخروط ناقص درست شد.

برهمن‌ها، که روز وشب جای‌خودرا عوض می‌کنند، پی‌درپی قرصهای طلارا به‌کمك میلهٔ دوم، ازمیلهٔ اول به‌میلهٔ سوم منتقل می‌کنند؛ ضمناًبرای این انتقال این دوشرط را همیشه دزنظردارند: اولاً هرگز دریکبار بیش‌ازیك قرص جابجا نشود، ثانیاً هرگزقرص بزرگتر روی قرص‌کوچکترقرار نگیرد. هروقت برهمنها کار خودرا تمام کردند، پایان عالم هم فرا می‌رسد.

برای کسی‌که بخواهد اززمان انجام این‌عمل مطلع‌شود، محاسبهٔ سادهٔ زیر کافی خواهد بود.

برهمنها باید قرصها را به‌تعداد

$$18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

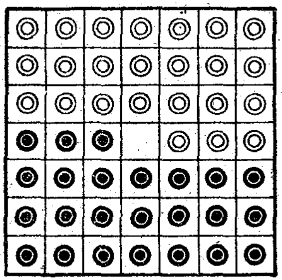
مرتبه جابجاکنند. اگربرهمنها هرثانیه‌ای یك قرص را حابجاکنند، کار آنها بیش از ۵ میلیارد قرن طول می‌کشد، و همانطورکه می‌بینید هنوزخیلی باید انتظارکشید.

۶ـ مربع لوکا

اینهم بازی دیگری است‌که براساس جابجایـی درست شده است. درمربعی‌که از ۴۹ مربع کوچك درست شده است، قرصهای

سیاه وسفید مطابق شکل ۱۸۸ گذاشته شده است.

خانهٔ مرکزی آزاد است. بـا استفاده از این خانهٔ آزاد بایـد قرصهای سفید را به‌جای قرصهای سیاه و قرصهای سیاه را به‌جای قرصهای سفید قرارداد. هرقرص می‌تواند به خانهٔ آزاد برود و یـا جای خودرا باقرص دیگری عوض کند، به‌شرطی که بعدازاین قرص دوم، خانهٔ آزاد وجود داشته باشد. به‌همان اندازه‌که برج هانوی در نظر اول پیچیده و مشکل به نظر می‌رسید ، مربع لوکا بـه عنوان بـازی ساده‌ای تلقـی می‌شود. ولی در واقـع این بازی هم آنقدرها ساده نیست، به همین مناسبت ما در اینجا به‌چند نکته اشاره می کنیم.



شکل ۱۸۸

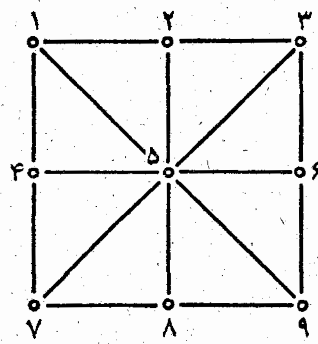
باید ازردیف افقی مرکزی شروع کرد و تبدیل کامل را درآن انجـام داد. سپس باید به‌سراغ ستون مرکزی رفت وبااستفاده از هرخانهٔ خالی که در بالا یا پایین پیدا می‌شود، قرصهای ردیفی را که درآن موقتاً خانهٔ خالی ستون مرکزی وجود دارد، جابجا کرد.

برای اینکه کار به‌پایان برسد باید ۱۲۰حرکت‌کرد؛ ولی همهٔ اینها را بایك حرکت هم می‌توان انجام داد: مربع لوکا را باقرصهای‌آن ۱۸۰ درجه می‌چرخانیم.

۷ـ بازی آسیاب

حالا به‌ذکریك بازی می‌پردازیم که می‌تواند دونفررا مشغول کند. یکی از ساده‌ترین بازیهای دونفره، بازی‌آسیاب است. آنها

به‌هیچ وسیله‌ای احتیاج ندارند. کافی است کاغذی بردارند و روی آن شکلی شبیه ۱۸۹ رسم کنند، علاوه بر آن شش قرص کوچك مقوایی لازم است، سه تـا برای یکی و سه تا برای دیگری، منتهی رنگ قرصهای یکی بادیگری فرق داشته باشد (به‌جـای تکه‌هـای مقوا می‌توان ازچوب کبریت، سنگ یاهرچیز دیگری استفاده کرد).



شکل ۱۸۹

هر کدام به‌نوبت یك قرص رادرنقطه‌ای ازجدول که انتخاب می‌کنند، قـرار می‌دهند؛ وقتی که قرصها تمام شد، می‌توانند به‌نوبت یکی ازقرصها را ازراه خط رسم شده جـابجـا کنند. کسی بـازی را برده است که برای نخستین بار سه قرص خودرا دریك ردیف قرارداده باشد.

باکمال تأسف بـازی آسیاب برای دو طرف در شروع کار شرایط نامساوی دارد: کسی کـه بازی را شروع می‌کند می‌تواند همیشه شانس برد داشته باشد، به‌شرطی که اولین قرص خود را در نقطهٔ ۵ (مرکزمربع) قراردهد.

۸ـ گرگ و میش

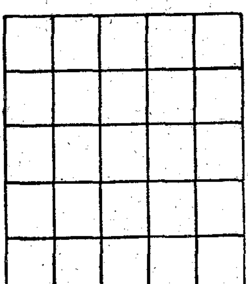
این بازی هم باشانسهای نامساوی است واگر بادقت بازی شود، آنکه بامیشها بازی می‌کند همیشه برنده است.

بازی روی صفحهٔ معمولی‌شطرنج با۶۴ خانه انجام می گیرد: ۳۲ خانـهٔ سفید و ۳۲ خانهٔ سیاه. یکی از بازیکنان ۴ میش دارد، یعنی ۴ قرص به یك اندازه، که آنها را درچهار خانهٔ سیاه یا سفید درطول یکی از ضلعها قـرار می‌دهد. دیگری هم یك گـرگ دارد (یك قرص بزرگتر) کـه آنرا در خانه‌ای به همین رنگ ودر طرف مقابل صفحهٔ شطرنج می گذارد، ضمناً میشها تنها می‌توانند بـه جلو بروند، درحالی که گرگ حق عقب رفتن را هم دارد. گرگ وقتی برنده است که پشت همهٔ میشها قرارگیرد؛ میشها زمانی‌برنده هستند که گرگ را طوری دور کرده باشند که او نتواند حتی یك حرکت انجام دهد.

۹ـ معماها

معماهای هندسی زیادی وجود داردکـه ما دراینجا چندتایی ازآنها را می‌آوریم.

A. اگر بپرسید که درشکل ۱۹۰ چند مستطیل وجود دارد، خیلیها بلافاصله تعداد تقسیمها را می‌شمارند و بدون فکـر جواب می‌دهند: در ایـن شکل ۲۵ مستطیل وجـود دارد.

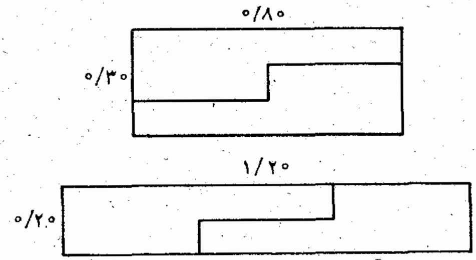


شکل ۱۹۵

واقعاً هم تعداد خانه‌ها بیش‌از ۲۵ نیست! ولی مستطیلهای مختلفی که در این شکل وجود دارد (ودر اینجا صحبت از همهٔ آنهاست)، خیلی بیش از اینهاست. در واقع تعداد این مستطیلها مساوی ۲۲۵ است. اگرکسی تردید دارد می‌تواند آنهارا بشمارد.

* * *

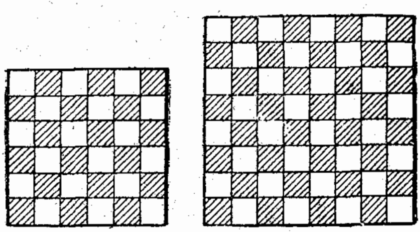
B. نجاری یك تخته به‌طول ۰/۸۰ متر وعرض ۰/۳۰ متردارد ومی‌خواهد از آن تخته‌ای به‌طول ۱/۲۰ متروعرض ۰/۲۰ متربسازد. به‌چه ترتیب باید این تخته را اره کند؟



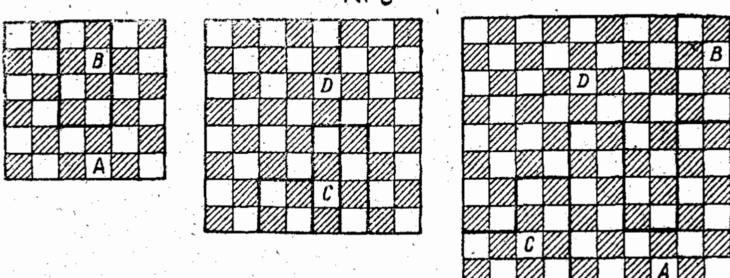
شکل ۱۹۱

شکل ۱۹۱ نشان می‌دهد که این نجار چگونه می‌تواند این مشکل را حل کند.

C. می‌خواهیم از دوصفحهٔ شطرنجی یکی با ۳۶ خانه ودیگری



شکل ۱۹۲



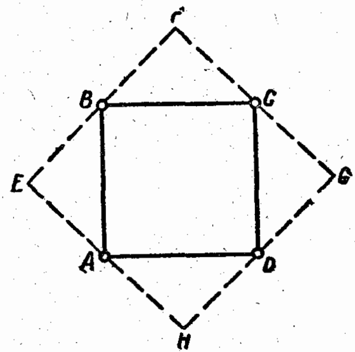
شکل ۱۹۳

با ۶۴خانه (شکل۱۹۲)، صفحهٔ دیگری با ۱۰۰خانه بسازیم، ضمناً هیچ کدام از آنها نباید به‌بیش‌از دوقسمت تقسیم شوند.

راه حل بسیار زیبایی از این مسأله در شکل ۱۹۳ داده شده است. آیا این تنها راه حل است؟

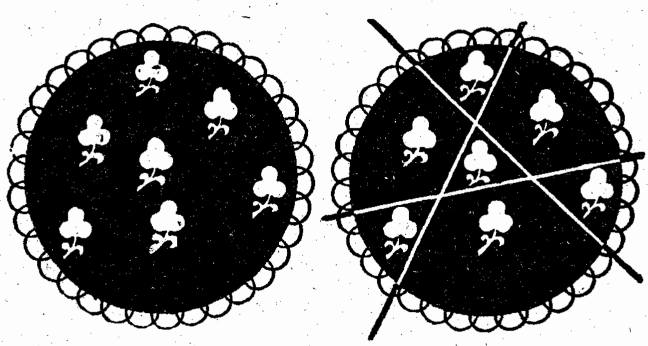
D. در کنار استخری به شکل مربع و در چهار گوشهٔ آن درختهایی وجود دارد. می‌خواهیم سطح استخر را دوبرابر کنیم، به نحوی که اولاً شکل آن مربع باقی بماند، ثانیاً مجبور به بریدن درختها نشویم.

راه حل جالب این مسأله در شکل ۱۹۴ داده شده است.



شکل ۱۹۴

E. روی یك تیکه پارچهٔ کتانی ۷ گل دوخته شده است. می‌خواهیم این تیکه پارچه را به وسیلهٔ سه برش مستقیم (روی خط راست) طوری تقسیم کنیم که در هرقسمت یکی از گلها قرار داشته باشد.



شکل ۱۹۵

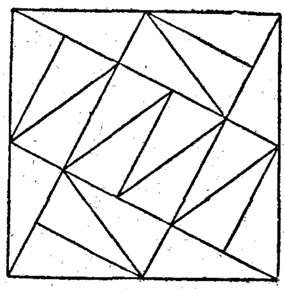
حل مسأله در شکل ۱۹۵ داده شده است.

راه حل براین خاصیت مثلث استوار است که سه خط راستی که یك مثلث تشکیل می‌دهند، صفحه را به ۷ قسمت تقسیم می‌کنند.

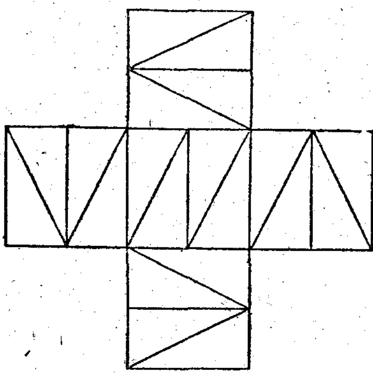
F. مربعی را به ۲۰ مثلث مساوی تقسیم کنید.

این یك معمای قشنگ و در عین حال ساده است. برای حل آن باید وسط ضلعهای مربع رابه راسهای آن وصل کرد (آنطورکه درشکل ۱۹۶ دیده می‌شود). تقسیم بندی بعدی به مثلثها خیلی ساده است.

از این ۲۰ مثلث می‌توان یك صلیب درست کرد (شکل ۱۹۷).



شکل ۱۹۶



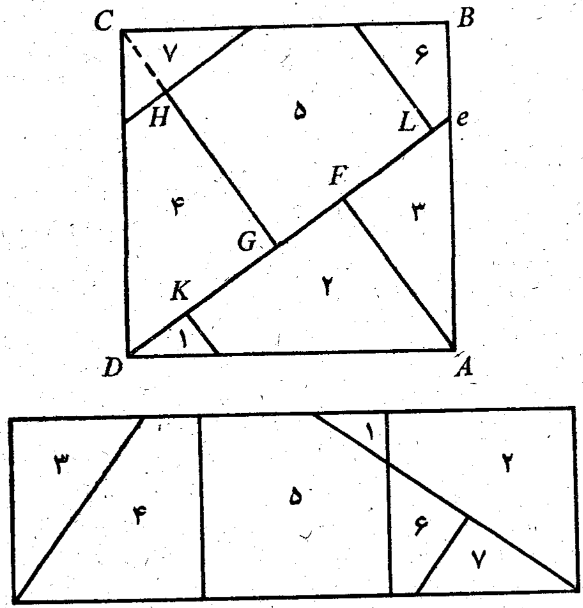
شکل ۱۹۷

همین روش، راه را برای تقسیم یك مربع به ۵ مربع مساوی‌هم نشان می‌دهد که خیلی ساده‌تر از روش تقسیم مربع به ۳ مربع مساوی است.

G. مربع مفروض رابه‌سه‌مربع مساوی تقسیم کنید (شکل۱۹۸).

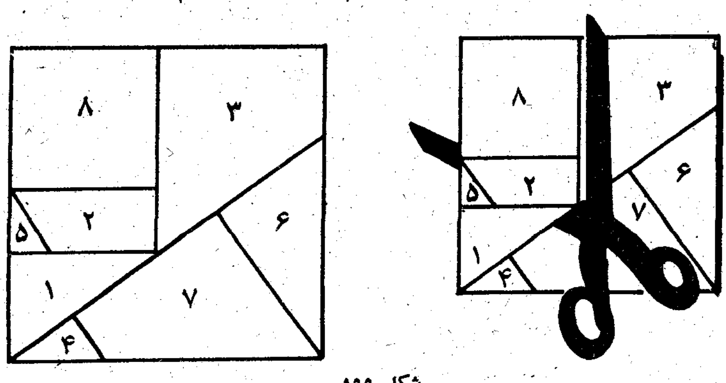
پاره خط Ae روی شکل فوقانی مساوی نصف قطر این مربع است، پاره خطهای AF و CG عمودهایی هستند که از راسها بر خط De فرود آمده‌اند، بالاخره پاره خطهای GH، GL و FK باپاره خط AF برابرند. شکل پایینی سه مربع را نشان می‌دهد که از مثلثها وچهار ضلعیهایی درست شده است که ازتقسیم مربع اصلی بدست‌آمده‌اند.

H. مربع مفروض را به سه مربعی تقسیم کنید که مساحتهای آنها برنسبت ۲:۳:۴ باشد.



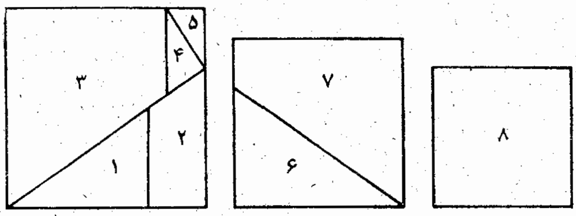
شکل ۱۹۸

در شکل ۱۹۹ روش سادهای برای تقسیم یك مربع به قسمتهایی دادهایم که به‌کمك آنها می‌توان سه مربع با مساحتهایی به نسبت ۲: ۳: ۴ درست کرد. کشف روش تقسیم را به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم که با کمی دقت به‌آن پی‌خواهد برد. فقط متذکر می‌شویم که وترمثلث قائم‌الزاویهٔ ۶ مساوی



شکل ۱۹۹

نصف قطر مربع و قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقهٔ ۳ مساوی $\frac{۲}{۳}$ ضلع مربع است. سه



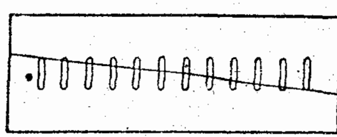
شکل ۲۰۰

مربع ساخته شده را در شکل ۲۰۰ داده‌ایم. به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که ضلع مربع اصلی را مساوی a بگیرد وطول تمام پاره خطهایی راکه درتقسیم مربع پیدا شده است، بدست‌آورد.

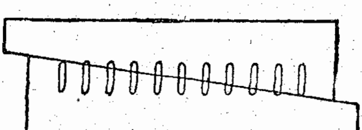
۱۰ـ غیبت اسرارآمیز

یك صفحهٔ مقوایی به شکل مستطیل انتخاب کنید و روی آن ۱۲ نوار باریك یکجور رسم کنید، به‌نحوی که مثل شکل ۲۰۱ ـ a به‌یك فاصله ازیکدیگر واقع باشند.

بعد مقوا را در امتداد خطی که انتهای بالای نوار سمت چپ را به انتهای پایین نوار سمت راست وصل می‌کند، ببرید. اگر قسمتهای مقوا را به‌اندازهٔ فاصلهٔ بین دونوار متوالی حرکت دهیم، یکی از نوارها بطور اسرارآمیزی گم می‌شود ؛ این مطلب را می‌توانید روی شکل ۲۰۱ـb ببینید و یا خودتان بطور عملی بـا یك



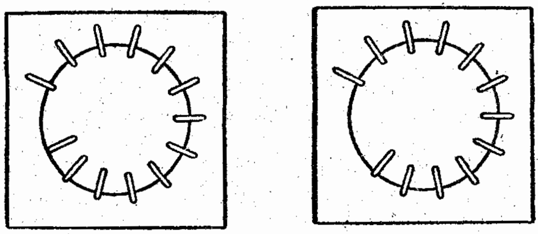
شکل ۲۰۱-a



شکل ۲۰۱-b

صفحهٔ مقوایی آزمایش کنید.

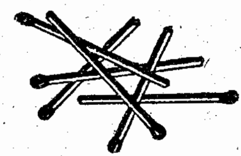
ازاین جالب‌تر، مخفی‌شدن نوارسیزدهم دریك مربع مقوایی



شکل ۲۰۲

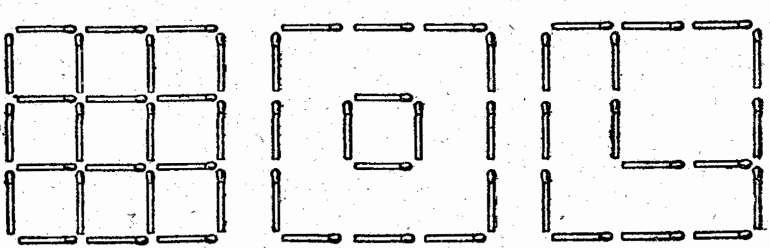
است، وقتی که قسمت مرکزی آن حرکت می‌کند (شکل ۲۰۲).

۱۱ـ بازی با چوب کبریت



از مجموعهٔ بی‌شمار بازیهای ریاضی که با چوب کبریت وجود دارد، چندتایی را که مشکل‌ترند در اینجا می‌آوریم؛ نمونه های ساده‌تر را خواننده می‌تواند خود به‌هر تعدادی که بخواهد درست کند.

با۲۴ چوب کبریت ۹ مربع بسازید، سپس ۸ چوب کبریت را طوری بردارید که کبریت‌های باقیمانده ۲ مربع درست کرده باشند. (شکل ۲۰۳).



شکل ۲۰۳

* * *

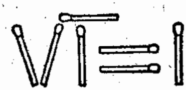
با ۶ چوب کبریت چهار مثلث بسازید.

برای این منظور با ۳ چوب‌کبریت مثلثی روی میز درست کنید، سپس به‌کمك سه چوب‌کبریت دیگر یك چهار وجهی بسازید که درهر وجه‌آن یك مثلث وجود داشته باشد، ضمناً هریك از این سه چوب‌کبریت اخیر ازیکطرف به یك رأس مثلث اول واز طرف دیگر به دوچوب‌کبریت دیگر متکی است.

* * *

چوب کبریتهایی را بـه صورت این معادلهٔ بی‌معنی چیده‌اند

شکل ۲۰۴



شکل ۲۰۵

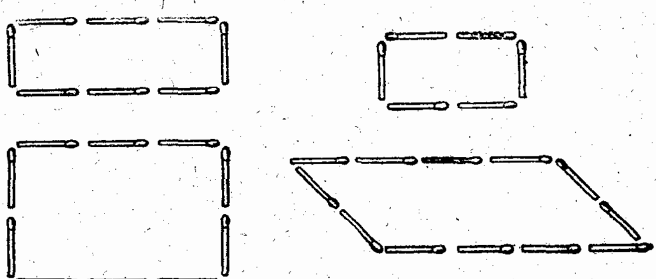
(شکل ۲۰۴) . ولی با تغییر جای فقط یك چوب کبریت، می‌توان آنرا به یک معادلهٔ واقعی تبدیل کرد.

راه حل این مسأله درشکل ۲۰۵ داده شده است‌که البته نه‌به‌سادگی، بلکه باکمی فکر بدست می‌آید.

* * *

با ۱۸چوب کبریت می‌توان به‌سهولت دوچهارضلعی ساخت، به‌نحوی که مساحت یکی دوبرابر مساحت دیگری باشد.

ولی مسأله خیلی مشکلتر به‌نظر می‌رسد، اگر خواسته شود با



شکل ۲۰۶

همین ۱۸ چوب کبریت دوچهار ضلعی درست شود که مساحت یکی سه برابر دیگری باشد (شکل ۲۰۶).

علت مشکل شدن مسألهٔ دوم در اینجاست که وقتی ما از چهار ضلعی صحبت می‌کنیم، ذهن شنونده به دنبال مستطیل می‌رود و به‌طور طبیعی به‌او تلقین می‌شود که چهارضلعیها را به‌شکل مستطیل بسازد که آنهم ممکن نیست.

* * *

به دوستتان پیشنهاد کنید تعداد دلخواهی چوب کبریت بردارد و آنها را دردو ردیف زیرهم بچیند، به‌نحوی که در ردیف بالا یک چوب کبریت بیشتراز ردیف پایین باشد. بدون اینکه از نتیجهٔ کار با او صحبت کنید ازاو بخواهید:

۱ـ از ردیف بالا تعدادی چوب کبریت که شما پیشنهاد می‌کنید، مثلاً ۷ عدد، بردارد.

۲ـ از ردیف پایین به‌تعداد چوب کبریتهایی که در ردیف بالا باقی مانده است، بردارد.

۳ـ تمام چوب کبریتهای ردیف بالا را بردارد.

حالا بدون آنکه شما از ابتدا به‌چوب کبریتهای دوستتان نگاه کرده باشید، می‌توانید بلافاصله بگویید چند چوب کبریت برای او باقی مانده است.

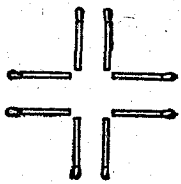
البته تعداد چوب کبریتهای باقیمانده یك واحد کمتراز تعدادی است که شما درابتدا پیشنهاد کردید ازردیف بالابردارد، یعنی ۶ تا.

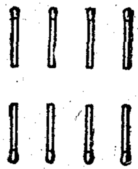
اگر می‌خواهید این شوخی را تکرار کنید، بهتر است که تعداد چوب کبریتهایی راکه درابتدا باید برداردعوض کنید، همچنین پیشنهاد کنید که در ردیف بالا ۲ یا ۳ چوب کبریت بیشترازردیف پایین قراردهد.

* * *

از ۸ چوب کبریتی که در دو ردیف چیده شده‌اند، ۴ تا را چنان جابجا کنید که یك صلیب درست شود.

ترتیب اولیهٔ چوب کبریتها (شکل ۲۰۷) و راه حل آن (شکل ۲۰۸) در اینجا داده شده است.


شکل ۲۰۸


شکل ۲۰۷

۱۲ـ لطیفه‌های مختلف ریاضی

مرد جذابی که همه او را «مرد طلایی» می‌خواندند از یک جواهر فروش آشنا پرسید:

ـ اگر من واقعاً از طلا ساخته شده بودم چقدر قیمت داشتم؟ وزن من ۷۵ کیلوگرم است؛ آیا تعیین قیمت من مشکل است؟

جواهر فروش جواب داد:

ـ نه، خیلی هم ساده است! کافی است ۷۵۰۰۰ گرم را در قیمت یك گرم طلا ضرب کنیم.

و به سرعت ضرب را انجام داد و عدد بزرگی پیدا کرد.

ریاضیدانی که ناظر این گفتگو بود، فوراً دخالت کرد:

ـ دوست من، خودت را ارزان نفروش! جواهرفروش می‌خواهد ترا فریب دهد، زیرا اگر تو حالا ۷۵ کیلوگرم باشی، وقتی که واقعاً به‌طلا تبدیل شوی وزنی خیلی بیشتر پیدا می کنی.

ـ بله، این درست است! از شما متشکرم که مرا از معامله

برحذر داشتید وقیمت واقعی مرا به من گوشزد کردید.

* * *

فرض می‌کنیم طـول راه‌آهن از ورشو تا پوزنان ۳۰۰ کیلومتر باشد. دریك زمان قطار سریع‌السیری ازورشو باسرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت وقطار باری از پوزنان با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت حرکت کردند.

کدامیك ازاین دوقطار درلحظهٔ ملاقات به ورشو نزدیکترند؟

* * *

آیا آینهٔ مسطح می‌تواند تصویری بزرگتر ازخودش بدهد؟

البته! آینهٔ مسطح می‌تواند تصویر را بیش‌از ۷ برابر بزرگ کند.

برای این منظور کافی است روی یك صفحهٔ کاغذ عدد ۱۰۸ رابنویسید و روی آن جلوآینه نگاه دارید، آینه آنرا به ۸۰۱ تبدیل می‌کند.

* * *

از ۹ رقمی کـه در اینجا نوشته شده است، ۶ رقم را طوری حذف کنیدکه مجموع آنچه که می‌ماند مساوی ۲۰ شود:

۱ ۱ ۱
۷ ۷ ۷
۹ ۹ ۹

حل: واحد سمت را از ردیف اول، تمام ردیف دوم و دو رقم ۹ از

سمت چپ در ردیف سوم را حذف کنید.
در ابتدا صحبت از رقمها بود، ولی درجمع کردن صحبت ازعددهاست.

* * *

در قفسه دوجلد بزرگ یك اثر علمی گذاشته شده است: قطر یکی ازآنها ۳ سانتیمتر و قطر دیگری ۵ سانتیمتر است. هردو جلد به‌خوبی صحافی شده‌اند وقطرجلد مساوی ۳ میلیمتر است. حشره‌ای وارد قفسه شده است که کاغذ را می‌خورد. این حشره در یک روز می‌تواندکاغذ رابه عمق ۱سانتیمتر وجلد رابه عمق ۶ میلیمتر سوراخ کند. بعداز چند روز از اولین صفحهٔ این کتاب به‌آخرین صفحهٔ‌آن می‌رسد؟

البته در جریان یك روز، زیرا همیشه کتابها را در قفسه طوری می‌چینند که اولین صفحهٔ جلد اول درست کنار آخرین صفحهٔ جلد دوم قرار می‌گیرد وتنها دوجلد بین‌آنها فاصله است.

* * *

در یك سبد ۹ سیب بزرگ زیبا وجود دارد. می‌خواهیم این سیبهارا بین ۹ دختر تقسیم کنیم، طوری که به هرنفر یك سیب برسد ویک سیب هم درسبد باقی بماند.

باید به ۸ دختر هرکدام یك سیب داد وسیب‌نهم را باسبد به‌دخترنهم تحویل داد. به این ترتیب طبق شرطهای مسأله عمل کرده‌ایم.

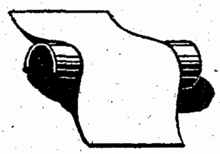
* * *

مادر برای هفت بچهٔ خودش ۵ سیب بزرگ و۵ سیب کوچك خرید، به این قصدکه آنها را به‌طور مساوی بین بچه‌ها تقسیم کند. به‌چه ترتیب توانست به‌سادگی نیت خود را عمل کند؟

از سیبهایی‌که خریده بود کمپوت درست‌کرد.

* * *

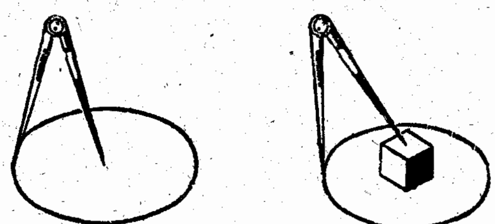
آیا می‌توان به‌کمک پرگار ازیك نقطه یك بیضی رسم‌کرد؟



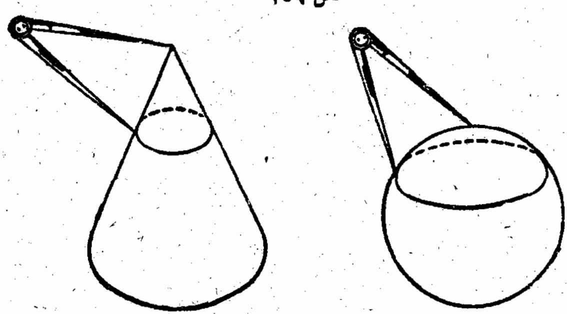
بله، می‌توان! منتهی باید کاغذ را روی سطح جانبی یك استوانهٔ چوبی یا لولهٔ کاغذ ویا لولهٔ یك فلزنرم قرارداد. در اینصورت بایك دورکامل پرگارمعمولی، یك‌بیضی روی کاغذ رسم می‌شود.

* * *

و اینهم چند جواب به این سؤال که: آیا می‌توان با پرگار ثابت (پرگاری‌که دوشاخهٔ آن ازهم دور ویابه‌هم نزدیک نمی‌شود) دایره‌هایی با قطرهای متفاوت رسم‌کرد. (شکلهای ۲۰۹ و ۲۱۰).



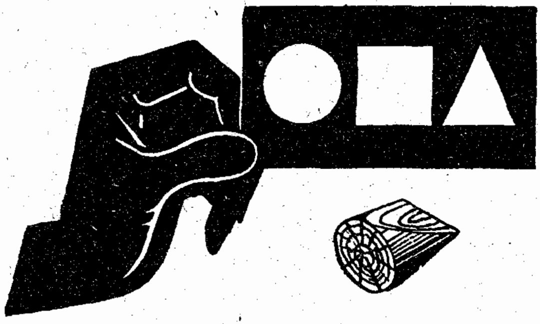
شکل ۲۰۹



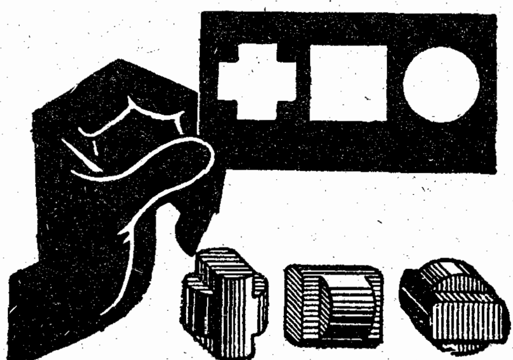
شکل ۲۱۰

وبالاخره یك وسیلهٔ عجیب: بایك وسیله می‌توان سوراخهایی

را که به‌شکل مثلث، مربع ویا دایره باشند مسدود کرد (شکل ۲۱۱).



شکل ۲۱۱



شکل ۲۱۲

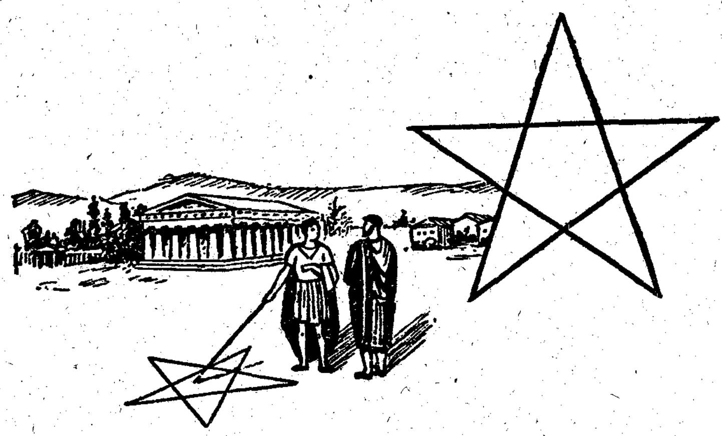
درشکل ۲۱۲ هم نمونهٔ دیگری از این وسیله داده شده است که برای آزمایش درستی آن بیش‌از عمل به‌تصور وفکر احتیاج دارد.

فصل دوم

I ـ فیثاغورثیان

۱ـ ستارهٔ فیثاغورثی

فیثاغورث یکی از بزرگترین ریاضیدانهای باستان واهل کروتون بود. شاگردان فیثاغورث به او به چشم یك مقدس نگاه می کردند.

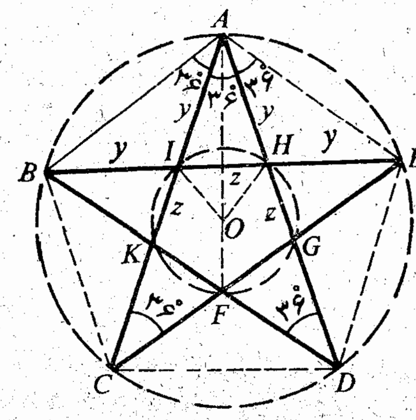


شکل ۲۱۳

یکی از زیباترین شکلهای فیثاغورثی ستارهٔ پنج پر است که بـه ستارهٔ فیثاغورثی هم مشهور است. این ستاره را می توان با امتداد دادن ضلعهای یك پنج ضلعی منتظم تاجایی که یکدیگررا قطع کنند،

بدست آورد. وقتی که فیثاغورثیان بهم می‌رسیدند برای تهنیت گفتن بهم وشناختن یکدیگر این شکل را روی زمین رسم می کردند.

این شکل‌درواقع فوق‌العاده جالب‌است ودارای خاصیتهایی است که آنرا ازسایر ستاره‌ها ممتاز می کند. همانطورکه در اینجا خواهیم دید، مجموع زاویه‌های ستارهٔ پنج‌پر مساوی دوقائمه است و بنابراین مثلث را به‌خاطر می‌آورد که مجموع زاویه‌های آنهم مساوی ۱۸۰ درجه است (شکل ۲۱۳).



شکل ۲۱۴

ضلعهای پنج پر هم خاصیتهای بسیار جالبی دارد (شکل۲۱۴). درپنج پر ABCDE طول پاره خطهای $AI = BK = CF = \ldots$ را به y وطول‌پاره‌خطهای $HI = IK = KF = \ldots$ را به z نشان می‌دهیم. مثلث IAH متساوی‌الساقین وهریك از زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ آن مساوی ۷۲ درجه است[1]. زاویهٔ BAH هم مساوی ۷۲ درجه است[2]، بنابراین مثلث

۱ــ مجموع زاویه‌های داخلی یك چند ضلعی برابر است با $2dn-4d$، که درآن d مساوی ۹۰ درجه و n تعداد ضلعهاست، بنابراین هرزاویهٔ داخلی یك پنج‌ضلعی منتظم: $KIH = \frac{2 \times 90 \times 5 - 4 \times 90}{5} = 108^\circ$. ازآنجا زاویهٔ مجانب آن، $AIH = 72^\circ$.

←

HBA متساوی الساقین و متشابه با مثلث IAH می‌شود. داریم: $AB=y+z$. پاره خط AB عبارتست از ضلـع پنج ضلعی منتظم ABCDE که رأسهای بیرونی پنج‌پر رابه‌هم وصل کرده است. مثلث ADB متساوی‌الساقین و با مثلثهای IAH و BAH متشابه است، زیرا زاویهٔ رأس آن مساوی ۳۶ درجه است.

به این ترتیب براساس این مثلثهای متشابه، می‌توان نوشت:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{HA}{AB}=\frac{IH}{HA},$$

یا

$$\frac{y+z}{2y+z}=\frac{y}{y+z}=\frac{z}{y}$$

واین به‌معنای آنست که:

$$AK:AC=KC:AK \quad \text{و} \quad AI:AK=IK:AI$$

بنابراین ضلع AC درنقطهٔ K به‌نسبت طلایـی تقسیم شده است (یك پاره خط وقتی به نسبت طلایی تقسیم می‌شود که نسبت قطعهٔ بزرگتر به‌تمام پاره خط برابرباشد با نسبت قطعهٔ کوچکتر به قطعهٔ بزرگتر). به همین ترتیب پاره خط AK هم در نقطهٔ I به نسبت طلایی تقسیم شده است (در زمان باستان نسبت طلایی اهمیت فوق‌العاده‌ای در نسبتهای ترکیبی داشته است). این طلایی‌ترین تقسیمی است که به‌ـ سادگی درهمهٔ نقطه‌های برخورد ضلعهای ستارهٔ فیثاغورثی بدست می‌آید.

← ۲ـ هریك ازوترهای مساوی $BC=CD=\cdots$ مقابل به‌کمانی برابر $\frac{۳۶۰}{۵}=۷۲°$ است. زاویهٔ BAH همان زاویهٔ BAD ومقابل به‌کمان۱۴۴ درجه $(۲\times۷۲=۱۴۴)$ است، بنابراین $BAH=۷۲°$.

۲ـ افتخار تفکر ریاضی فیثاغورثی

مشهورترین قضیهٔ فیثاغورث اینست: مربعی که روی وترمثلث قائم الزاویه ساخته شود برابر است با مجموع مربعهایی که روی ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمه ساخته می‌شود.

عکس این قضیه هم صحیح است: اگرضلعهای a ، b و c از مثلثی در شرط فیثاغورثی

$$a^۲+b^۲=c^۲$$

صدق کنند، در اینصورت مثلث مفروض قائم‌الزاویه است و زاویهٔ قائمهٔ آن روبروی ضلع c است.

بخصوص مثلثی جالب است که سه‌ضلع آن باعددهای صحیح بیان شود وشرط فیثاغورثی درمورد آنها برقرار باشد.

مثلاً مثلث باضلعهای ۳، ۴ و ۵ شرط فیثاغورثی را قبول دارد:

$$۳^۲+۴^۲=۵^۲$$

و این ساده‌ترین مثلث فیثاغورثی است.

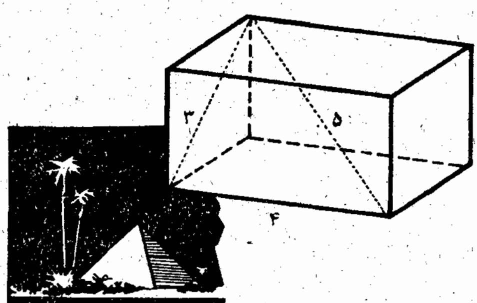
دراینجا چند مثلث فیثاغورثی آورده‌ایم:

a= ۳	b= ۴	c= ۵
a= ۵	b=۱۲	c=۱۳
a=۱۵	b= ۸	c=۱۷
a= ۷	b=۲۴	c=۲۵
a=۲۱	b=۲۰	c=۲۹
a= ۹	b=۴۰	c=۴۱

به‌سادگی دیده می‌شود که همهٔ این مثلثها درشرط فیثاغورثی $a^۲+b^۲=c^۲$ صدق می کنند و بنابراین قائم‌الزاویه‌اند.

درمصرقدیم وسایر کشورهای شرق آسیا ازمثلثی که ضلعهای آن ۳، ۴ و ۵ باشد، برای ساختن زاویهٔ قائمه (یعنی برای رسم دو خط راست‌عمود برهم) درعمل استفاده می کرده‌اند. تصادفی نیست که باستان شناسان چنین نسبتهایی‌را دراندازه‌های سنگهای تراشیده شدهٔ هرم خفرون پیدا کرده‌اند. این حقیقت بسیار جالب است که اتاق فرعون درهرم مشهور خئوپس اندازه‌هایی داردکه کاملاً به‌عدد‌های ۳، ۴ و۵ مربوط‌اند. اگرقطر تمام اتاق را ۵ واحد بگیریم، بزرگترین دیوار آن۴وقطر کوچکترین دیوار آن مساوی۳واحداست.

در دوران باستان مثلثی راکه ضلعهای آن ۳، ۴ و۵ باشد، شکلی اسرارآمیزوجادویی به‌حساب می‌آوردند (شکل۲۱۵). چنین مثلثی خاصیتهای جالب دیگری هم دارد. محیط آن باعدد ۱۲ بیان



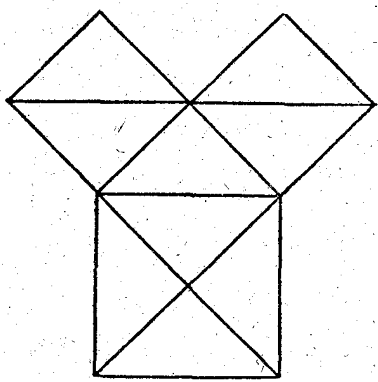
شکل ۲۱۵

می‌شود ومساحت آن برابراست با۶، یعنی عددی که درست بعد از سه عددضلعها قرارگرفته است؛ بالاترازهمه $5^3+4^3+3^3=6^3$ که به قول پلوتارك زیباترین وضع دربین همهٔ مثلثهاست.

بدون تردید هنوزهم نجارهای روستاها موقع‌ساختن خانه‌ها ویا انبارهای چوبی، برای اینکه زاویهٔ قائمه بدست‌آورند ازمثلث

به‌ضلعهای ۳، ۴ و ۵ استفاده می کنند؛ و این درست همان شیوه‌ای است که درهزاران سال قبل برای ساختمان معبدهای بزرگ درمصر، بابل، چین واحتمالاً درمکزیك به کار می‌رفته است.

بنابراین فیثاغورث این خاصیت مثلث قائم الزاویه را کشف نکرد، بلکه او برای نخستین بارتوانست این خاصیت‌را تعمیم دهد، آنرا ثابت کند و از جنبهٔ عملی به جنبهٔ علمی آن برسد. برای مامعلوم نیست که اوچگونه این مهم را انجام داد.

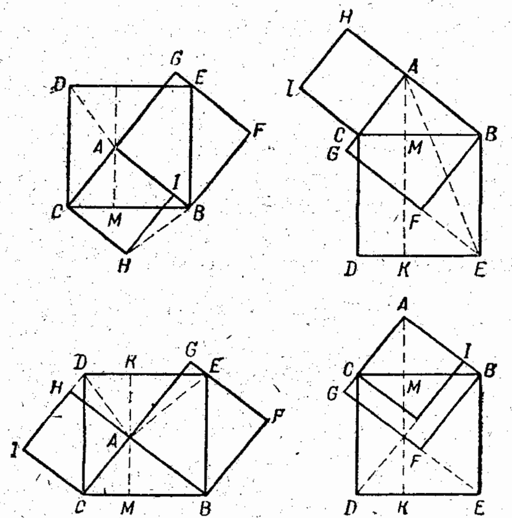


شکل ۲۱۶

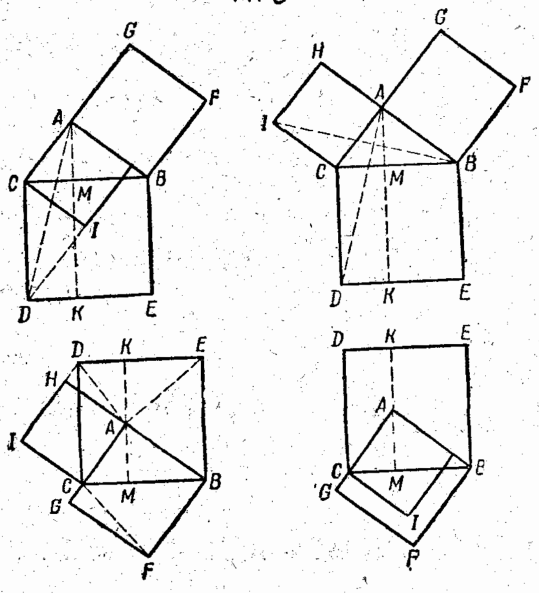
م.کانتور که به زندگینامهٔ ریاضیدانها پرداخته است حدس می‌زند به احتمال قوی این اثبات اساسی نبوده است و تنها روی حالتهای خاصی از مثلثها انجام گرفته است؛ مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین اولین حالت خاص مورد نظر فیثاغورث بوده است که باتوجه به‌شکل ۲۱۶ به سادگی می‌توان نتیجهٔ مورد نظر را درآن بدست آورد.

درزمان ما قضیهٔ فیثاغورث را می‌توان به‌صدها روش ثابت کرد، بله، به صدها روش! تقریباً هر قرنی که می گذرد روشهای جدیدی برای اثبات این قضیه پیدا می‌شود و یا لااقل فکر روشهای جدید اثبات به وجود می‌آید؛ هنوز هم افزایش تعداد این اثباتها به‌پایان نرسیده است.

اقـلیدس در کتاب «مقدمات» خود (کتاب I) بـه ۸ طریـق این



شکل ۲۱۷



شکل ۲۱۸

قضیه را ثابت کرده است که ما آنها را درشکلهای ۲۱۷و۲۱۸ بدون شرح داده‌ایم و خواننده‌ای که علاقمند باشد، می‌تواند خود روش توضیحی آنها را پیدا کند.

علاوه بر روشهای اثبات اقلیدس، ما بـه چند روش جالب دیگرهم که به هم‌ارزی شکلها مربوط می‌شود، می‌پردازیم.

در تمام این اثباتها از این علامتها استفاده می‌کنیم

$$\hat{A}=90^\circ\ ,\ BC=a\ ,\ CA=b\ ,\ AB=c$$

اثبات خواجه نصیرالدین طوسی (سال ۱۵۹۴). داریـم (شکل ۲۱۹):

$\Delta GAL=\Delta ABC,\ LA=CB,$

$\widehat{GAL}=\widehat{ABC}=\widehat{CAM}$

بنابراین LAMK خط راست است.

شکلهایی بـا مساحتهای مساوی به‌دست می‌آید:

$DKMC=CALD'=$

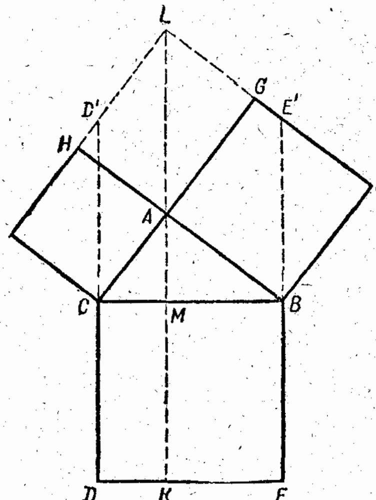
$=CAHI=b^2$

وبه همین ترتیب:

$KEBM=ABE'L=$

$=ABFG=c^2$

ولی

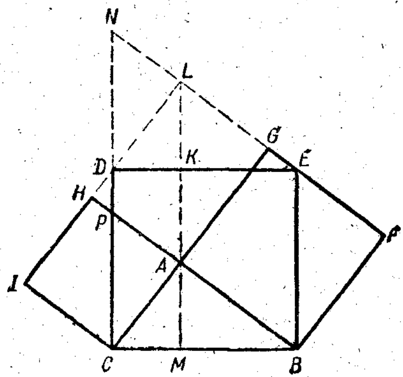


شکل ۲۱۹

$$DEBC=DKMC+KEBM\ ,\ DEBC=a^2$$

بنابراین $a^2=b^2+c^2$

اثبات هوفمان (سال ۱۸۲۱).



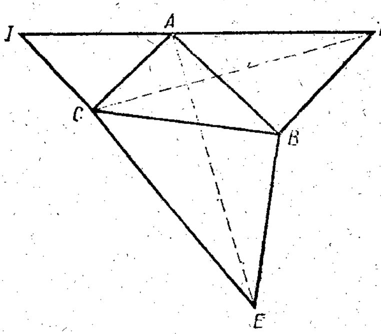
شکل ۲۲۰

CD و FG را امتداد می‌دهیم تادر N به‌هم برسند (شکل ۲۲۰). شکلهای هم‌ارز (یعنی با مساحتهای مساوی) بدست می‌آید.

$$PALN = CALD = CAHI = b^2;$$
$$ABEL = ABFG = c^2;$$
$$PBEN = CBED = a^2;$$

ولی
$$PBEN = PALN + ABEL$$
وبنابراین
$$a^2 = b^2 + c^2$$

اثبات دیگری ازهمین مؤلف که خیلی جالب وعجیب است:



شکل ۲۲۱

پاره خط BF را عمود بر AB و مساوی آن رسم می‌کنیم (شکل ۲۲۱)، بعد پاره خط CI را عمود بر AC و مساوی آن و بالاخره BE را عمود بر BC ومساوی آن رسم می‌کنیم. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های F، A و I بریک امتدادند.

چهـار ضلعیهای IFBC و ABEC هم‌ارزند، زیرا دومثلث CBF و ABE مساوی و دو مثلث ICF و ACE هم ارزند. از هر دوچهارضلعی، قسمت مشترک آنها، مثلث ABC راحذف می کنیم، بدست می آید:

$$\frac{c^۲}{۲}+\frac{b^۲}{۲}=\frac{a^۲}{۲}$$

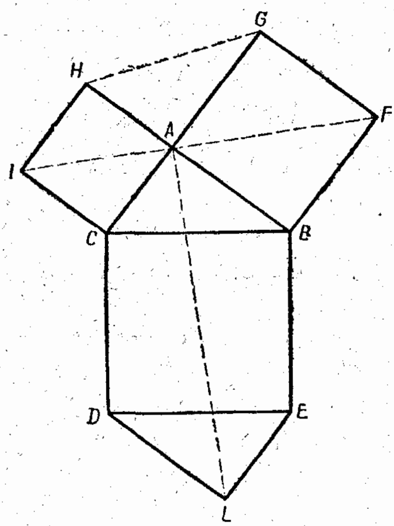
اثبات تمپلهوف (سال۱۷۶۹). داریم (شکل۲۲۲):

$$\Delta LDE=\Delta ABC,$$
$$\Delta AGH=\Delta ABC,$$
$$LDCA=FBCI=ABEL,$$
$$IHGF=ICBF$$

بنابراین:

$$ICBFGH=ACDLEB$$

این شش ضلعیها درمثلث ABC مشترکنـد، همچنین دو مثلث AGH و LDE برابرند، بنابـراین باقیمانـدهٔ این چند ضلعیها هم برابر می‌شوند، یعنی



شکل ۲۲۲

$$CDEB=CAHI+ABFG$$

ویا

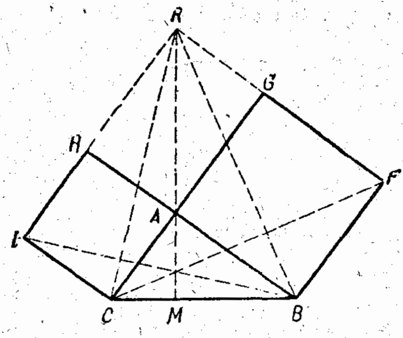
$$a^۲=b^۲+c^۲$$

اثبات رنان (سال ۱۸۸۹). داریم (شکل ۲۲۳):

$$\Delta HRA=\Delta ABC \Longrightarrow RA=BC$$

توجه می کنیم که:

$$\Delta IBC=\Delta CAR \;\; ; \;\; \Delta FBC=\Delta BAR$$



شکل ۲۲۳

و به‌سادگی ثابت می‌شود که:

$$RA \perp BC,\ BI \perp CR,\ CF \perp BR$$

زیرا AR (یعنی RM)، BI و CF ارتفاعهای مثلث BCR هستند و در یك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$\Delta CAR = \frac{1}{2} CA.RG = \frac{1}{2} b.b = \frac{1}{2} b^2,$$

$$\Delta BAR = \frac{1}{2} BA.RH = \frac{1}{2} c.c = \frac{1}{2} c^2$$

بنابراین

$$\Delta CAR + \Delta BAR = \frac{1}{2}(b^2 + c^2)$$

ولی

$$\Delta CAR = \frac{1}{2} RA.CM\ ;\ \Delta BAR = \frac{1}{2} RA.BM$$

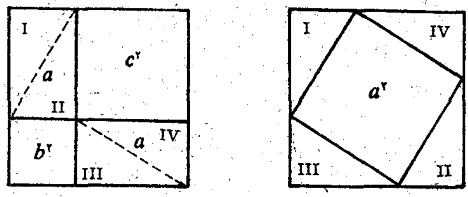
وبنابراین

$$\Delta CAR + \Delta BAR = \frac{1}{2} RA(CM + BM) = \frac{1}{2} a.a = \frac{1}{2} a^2$$

که از آنجا نتیجه می‌شود $b^2 + c^2 = a^2$

همهٔ روشهایی که تا اینجا برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث ذکر کردیم براساس شکلهای هم‌ارز بود. اگرعلاوه برآن، ازجابجایی شکلهاهم استفاده کنیم، روشهای جدیدی برای اثبات پیدا می‌شود.

ابتدا به اثبات احتمالی خود فیثاغورث می‌پردازیم.



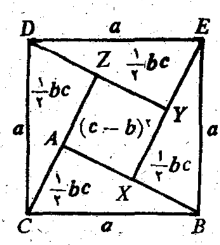
شکل ۲۲۴

مربعی می‌سازیم که ضلع آن مساوی مجموع b و c یعنی ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض باشد (شکل ۲۲۴). این مربع را به‌دو مربع $b^۲$ و $c^۲$ ودو مستطیل مساوی به ضلعهای b و c تقسیم‌می کنیم.

این مستطیلها را به‌نوبهٔ خود به‌چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی I ، II ، III و IV تقسیم می کنیم. این مثلثها را آنطور که در شکل دیده می‌شود قرار می‌دهیم، بلافاصله مربع $a^۲$ بدست می‌آید.

از آنجا نتیجه می‌شود که اگر از مربع به‌ضلع $b+c$ مقدار $۲bc$ راکم کنیم، ازیکطرف $b^۲+c^۲$ وازطرف دیگر $a^۲$ را می‌دهد، یعنی:

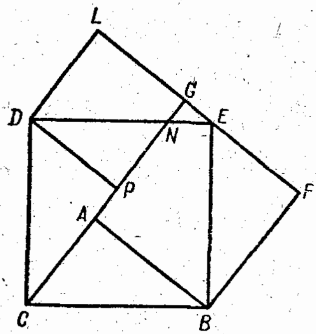
$$a^۲=b^۲+c^۲$$



شکل ۲۲۵

اثبات بهاسکارا (مؤلف معروف لیلاوات قرن دوازدهم).

ریاضیدان بزرگ هند زیر شکل تنها یك کلمه نوشته است: نگاه کنید (شکل ۲۲۵).

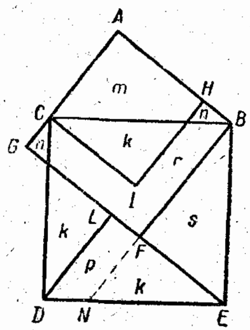


شکل ۲۲۶

اثبات ماری (سال ۱۸۸۷).

مربعهای $BCDE=a^2$ و $ABFG=c^2$ را می‌سازیم (شکل ۲۲۶). نقطهٔ E بر خط GF قرار می‌گیرد. از نقطهٔ D خط DP راموازی‌با GF و DL را موازی AG رسم می‌کنیم. مربع $DLGP=b^2$ تشکیل می‌شود.

از پنج ضلعی BCDLF یکبار مثلثهای ABC و DPC و باردیگرمثلثهای LED و EFB را (که مساوی مثلثهای قبلی‌هستند) کم می‌کنیم، بدست می‌آید: $a^2=b^2+c^2$



شکل ۲۲۷

اثبات رایشنبرگ (سال ۱۷۷۵). داریم (شکل ۲۲۷):

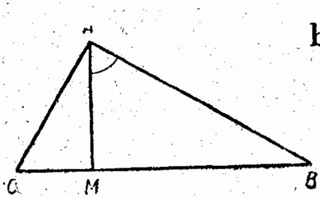
$$a^2=p+2k+r+s$$
$$b^2+c^2=2m+2n+2k+r$$

از تساوی مثلثهای ABC ، FBE و LED نتیجه می‌شود:

$$m+n=s=p+k$$

یعنی:

$$b^2+c^2=s+p+k+2k+r=a^2$$



شکل ۲۲۸

روش سوم اثبات، روش اثبات جبری است که بین آنها مقام نخست مربوط به راه

منسوب به فیثاغورث است.

مثلث ABC با مثلث MBA متشابه‌است وداریم (شکل۲۲۸):

$$BC : AB = AB : BM$$

ازآنجا

$$AB^2 = BC \cdot BM$$

مثلث ABC با مثلث MAC متشابه است و داریم:

$$BC : AC = AC : MC$$

ازآنجا

$$AC^2 = BC \cdot MC$$

از جمع این دوتساوی بدست می‌آید:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BM + MC)$$

ولی

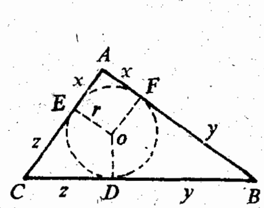
$$BM + MC = BC$$

وبنابراین

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

اگر واقعاً فیثاغورث قضیهٔ مشهور خود را به‌این ترتیب ثابت کرده باشد، این مسأله پیش می‌آیدکه او باید بایك رشته قضیه‌های هندسهٔ اقلیدسی آشنا بوده باشد.

اثبات مولمان.



شکل ۲۲۹

مساحت مثلث ABC از یکطرف برابر با $\frac{b.c}{2}$ (شکل ۲۲۹) و از طرف دیگر برابر با $\frac{p \cdot r}{2}$ (یعنی نصف حاصلضرب محیط مثلث درشعاع دایرهٔ محاطی آن) می‌باشد؛ شعاع r از دایرهٔ محاطی مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

$$x = \frac{b + c - a}{2}$$

از آنجا

$$\frac{b.c}{۲}=\frac{p.r}{۲}=\frac{a+b+c}{۲}\cdot\frac{b+c-a}{۲}$$

واز این معادله بدست می آید:

$$a^۲=b^۲+c^۲$$

۳ـ مثلثهای فیثاغورثی

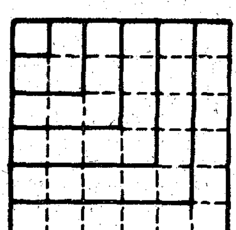
حالا به بررسی مثلثهای فیثاغورثی می‌پردازیم، یعنی مثلثهایی که ضلعهای a، b و c آنها عددهایی صحیح باشندودر رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$a^۲+b^۲=c^۲$$

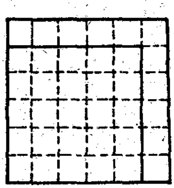
همانطورکه می‌دانیم چنین مثلثی قائم‌الزاویه است. روشن است که اگر دوتا ازاین عددها مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، عدد سوم هم براین مقسوم علیه قابل قسمت خواهد بود. به همین مناسبت در بحث زیر تنها ازعددهای صحیحی صحبت خواهیم کرد که مقسوم‌علیه مشترکی (به‌جز واحد) نداشته باشند.

* * *

به‌فیثاغورث بحثهای زیادی‌نسبت می‌دهند که مربوط به کاربرد حساب در هندسه می‌شود.



شکل ۲۳۰



شکل ۲۳۱

ضمناً او متوجه شده بود که مجموع عددهای فرد متوالی همیشه يك مجذور کامل می‌دهد (شکل ۲۳۰):

$$۱+۳=۲^۲$$
$$۱+۳+۵=۳^۲$$
$$۱+۳+۵+۷=۴^۲$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

واینکه هرعدد فرد برابر است با تفاضل دومربع کامل:

$$۲^۲-۱^۲=۳$$
$$۳^۲-۲^۲=۵$$
$$۴^۲-۳^۲=۷$$
$$۵^۲-۴^۲=۹$$
$$۶^۲-۵^۲=۱۱$$

ویا به‌صورت کلی (شکل ۲۳۱):

$$(n+۱)^۲-n^۲=۲n+۱$$

فیثاغورث قاعده‌ای را بدست آورده بود که طبق آن بتوان عددهای صحیحی برای مثلثهای فیثاغورثی بدست آورد. باعلامت‌گذاریهای امروزی، این قاعده باتساوی زیر بیان می‌شود:

$$(۲n+۱)^۲+(۲n^۲+n)^۲=(۲n^۲+۲n+۱)^۲ \qquad (۱)$$

که بجای n می‌توان هرعدد طبیعی دلخواه قرار داد.

اینست جدولی که براساس این قاعده تنظیم شده است:

وتر $2n^2+2n+1$	ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه II $2n(n+1)$	ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه I $2n+1$	n
۵	۴	۳	۱
۱۳	۱۲	۵	۲
۲۵	۲۴	۷	۳
۴۱	۴۰	۹	۴
۶۱	۶۰	۱۱	۵
...	...	...	...

از تساوی (۱) ودر جدول دیده می‌شود: عددهایی که ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ II ووتر را معین می‌کنند، دوعدد متوالی طبیعی هستند. به‌این ترتیب می‌توان گفت‌که اگر در رشتهٔ عددهای طبیعی به دوعدد متوالی برخورد کنیم که مجموع آنها مجذور کامل باشد، این دو عدد همراه با جذر مجموع آنها، سه ضلع مثلث فیثاغورثی را مشخص می‌کنند:

$$\underbrace{۴، ۵}_{۳^۲}، ...، \underbrace{۱۲، ۱۳}_{۵^۲}، ...، \underbrace{۲۴، ۲۵}_{۷^۲}، ...، \underbrace{۴۰، ۴۱}_{۹^۲}، ...$$

$$...، \underbrace{۶۰، ۶۱}_{۱۱^۲}، ...، \underbrace{۸۴، ۸۵}_{۱۳^۲}، ...$$

علاوه برتساوی (۱)، تساویهای دیگری هم برای معین کردن عددهای فیثاغورثی وجود داردکه دیرتر پیدا شده است.

واین یکی از آنهاست.

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2 \qquad (۲)$$

در این رابطه می‌توان بجای m و n هر عدد دلخواه صحیح

قرار داد. مثلاً اگر $m=۳$ و $n=۱$ بگیریم، بدست می‌آید: $۶^{۲}+۸^{۲}=۱۰^{۲}$. یعنی ترکیبی از عددهای ۶، ۸ و ۱۰ بدست می‌آید که درجدول قبل وجود نداشت. به‌همین مناسبت رابطهٔ (۲) کلی‌تر از رابطهٔ (۱) به‌نظر می‌رسد.

ولی مطلب ازاین جدی‌تراست. رابطهٔ (۲) شامل تمام انواع ممکنهٔ عددهای سه‌گانهٔ فیثاغورثی است. اگر بخواهیم مثلثهای متشابه فیثاغورثی تکرار نشود (مثلاً دومثلث به ضلعهای ۳، ۴، ۵ و ۶، ۸، ۱۰ متشابه‌اند)، باید قاعده‌های زیر را رعایت کنیم:

۱) از دوعدد m و n باید یکی فرد ودیگری زوج باشد؛

۲) باید دو عدد m و n نسبت به یکدیگر اول باشند، یعنی مقسوم‌علیه مشترکی بجز واحد نداشته باشند؛

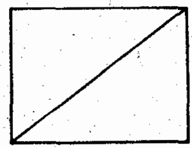
۳) $m>n$.

جدولی راکه درآن این قاعده‌ها رعایت شده است، در زیر می‌آوریم:

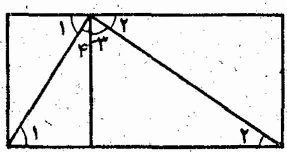
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
۲	۱	۳	۴	۵	۷	۲	۴۵	۲۸	۵۳
۳	۲	۵	۱۲	۱۳	۸	۷	۱۵	۱۱۲	۱۱۳
۴	۳	۷	۲۴	۲۵	۸	۵	۳۹	۸۰	۸۹
۴	۱	۱۵	۸	۱۷	۸	۳	۵۵	۴۸	۷۳
۵	۴	۹	۴۰	۴۱	۸	۱	۶۳	۱۶	۶۵
۵	۲	۲۱	۲۰	۲۹	۹	۸	۱۷	۱۴۴	۱۴۵
۶	۵	۱۱	۶۰	۶۱	۹	۴	۶۵	۷۲	۹۷
۶	۱	۳۵	۱۲	۳۷	۹	۲	۷۷	۳۶	۸۵
۷	۶	۱۳	۸۴	۸۵	...	...	...	...	...
۷	۴	۳۳	۵۶	۶۵					

۴ـ دومین قضیهٔ معروف فیثاغورث

دومین قضیهٔ هندسی که به‌فیثاغورث نسبت می‌دهند (ودرمیان قضیه‌های هندسه اهمیت خاصی دارد)، قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های مثلث است: این مجموع براراست با ۲ زاویهٔ قائمه.



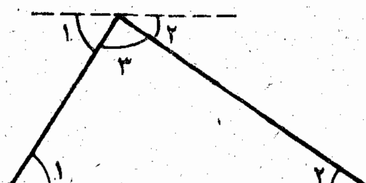
شکل ۲۳۲



شکل ۲۳۳

مورخین ریاضی کوشش می‌کنند این مطلب را روشن کنند که خودریاضی‌دان نابغه ازچه راهی این قضیه را ثابت می‌کرده است. به احتمالی او ازمثلث قائم‌الزاویه وبا تبدیل آن به مستطیل شروع کرده‌است(شکل ۲۳۲) وکوشیده است درستی قضیه‌را درمورد آن ثابت کند.

سپس متوجه شده است که هرمثلث می‌تواند، بارسم عمودی ازیك رأس به‌ضلع روبرو، به‌دو مثلث قائم‌الزاویه وسپس، بادو برابر کردن هریك ازاین مثلثها، به دو مستطیل تبدیل شود (شکل ۲۳۳).



شکل ۲۳۴

این احتمال هم وجود داردکه فیثاغورث قضیهٔ خودرا به کمك خطی که ازرأس موازی ضلع روبرو رسم می‌شود، ثابت کرده باشد (شکل ۲۳۴).

ولی دراین‌حالت‌باید فرض کرد که فیثاغورث از قضیهٔ دوخط موازی که به‌وسیلهٔ خط سوم قطع می‌شوند (وامروز آنرا به اقلیدس نسبت می‌دهند)، اطلاع داشته است.

۵ـ دایرهٔ فیثاغورثی

فیثاغورث، آنطور که شاگرد او پروکلس می‌گوید، بادلبستگی زیادی روی تصاعدها، چه حسابی وچه هندسی، کار می‌کرد. به‌همین مناسبت ممکن است فکر دایرهٔ فیثاغورثی، که در کتاب یامولی‌شاگردفیثاغورث آمده است، مربوط به‌خود فیثاغورث باشد.

دایرهٔ فیثاغورثی بر اساس بعضی مقابله‌های جالب عددی درست شده است، یعنی: اگر در طول محیط دایره رشتهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا n را بنویسیم وسپس درجهت مخالف از n تا ۱، در اینصورت مجموع تمام این عددها مساوی $n^۲$ می‌شود (شکلهای ۲۳۵ و ۲۳۶).

درحقیقت، دایرهٔ فیثاغورثی عبارتست ازمجموع دوتصاعد:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, n-۱$$

وعدد n.

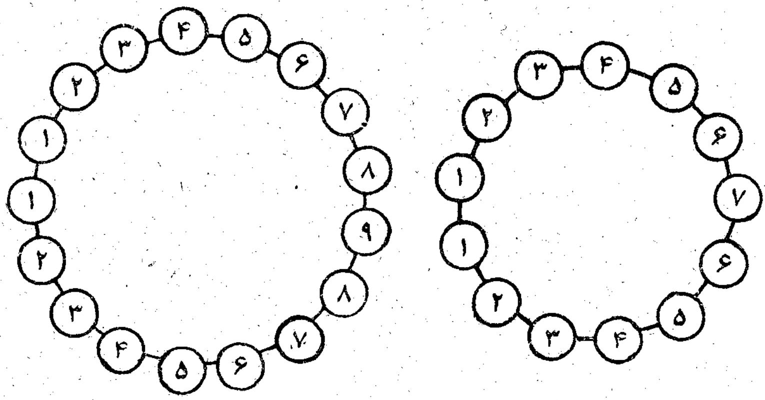
مجموع $n-۱$ عدد از رشتهٔ طبیعی عددها، که از واحد شروع شده باشد، برابر است با

$$\frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین مجموع دو تا از این تصاعدها مساوی $n(n-۱)$،

یعنی $n^{2}-n$، می‌شود که اگر عدد n را به‌این مجموع اضافه کنیم، بدست می آید:

$$n^{2}-n+n=n^{2}$$



شکل ۲۳۶ شکل ۲۳۵

این مسأله را می‌توان به‌صورت کلی‌تری مطرح کرد.

مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا n را به S_n نشان می‌دهیم؛ در اینصورت تساوی یامولی چنین می‌شود:

$$۲S_{n-1}+n=n^{2}$$

وقتی که رشتهٔ عددهای طبیعی را مطالعه می کنیم، متذکر می‌شویم که برای $n=۲$ داریم $S_{n-1}<n$، برای $n=۳$ داریم $S_{n-1}=n$ وبرای $n>۳$ داریم $S_{n-1}>n$. بنابراین می‌توان این قضیه را بیان کرد:

اگرمربع عدد صحیح $n>۳$ رابرمجموع همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا $n-۱$ تقسیم کنیم، خارج قسمت مساوی ۲ وباقیماندهٔ تقسیم مساوی n می‌شود.

حالا تساویهای زیر را می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
2S_{n-1}+n &= n^2\\
2S_{n-2}+n-1 &= (n-1)^2\\
2S_{n-3}+n-2 &= (n-2)^2\\
&\cdots\cdots\cdots\\
2S_2+3 &= 3^2\\
2S_1+2 &= 2^2\\
1 &= 1^2
\end{aligned}
$$

یعنی تساویها را باهم جمع می‌کنیم، باتوجه‌به‌تساوی:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=S_n^2$$

بدست می‌آید:

$$2(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1})+S_n=S_n^2$$

که آنرا می‌توان به‌صورت دایرهٔ فیثاغورثی نوشت:

$$
\begin{array}{lcl}
 & S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1} & \\
+ & & +S_n\\
 & S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-1} &
\end{array}
$$

که مجموع همهٔ جمله‌های آن مساوی S_n^2 است.

مثال عددی را برای $n=6$ می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
S_1&=1\\
S_2&=1+2=3\\
S_3&=1+2+3=6\\
S_4&=1+2+3+4=10\\
S_5&=1+2+3+4+5=15\\
S_6&=1+2+3+4+5+6=21
\end{aligned}
$$

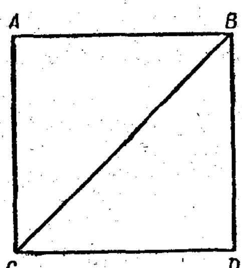
محاسبه می کنیم:

$$۲(S_۱+S_۲+S_۳+S_۴+S_۵)+S_۶=$$
$$=۲(۱+۳+۶+۱۰+۱۵)+۲۱=$$
$$=۲\times ۳۵+۲۱=۹۱$$
$$S_n^۲=۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲+۶^۲=۹۱$$

۶ـ دیگر موفقیتهای فیثاغورث

کشف عددهای اندازه ناپذیر (عددهای گنگ) هم به‌نام فیثاغورث ثبت شده است.

توجه او دراین مورد به‌نسبت قطر مربع به‌ضلع آن جلب شده بود (شکل۲۳۷). فیثاغورث ازاین‌فرض شروع کرد که پاره‌خطهای CB و AB قابل مقایسه باشند. این به‌معنای آنست که می‌توان پاره خط مشترکی پیدا کرد (مقیاس مشترك) که در پاره خط AB به‌اندازهٔ a مرتبه ودرپاره خط CB به‌اندازهٔ b مرتبه جا بگیرد. اگر بزرگترین مقیاس مشترك پاره‌خطهای AB و CB را اختیار کرده باشیم، عددهای a و b نسبت به یکدیگر اول خواهند بود، یعنی مقسوم‌علیه مشترکی بجز واحد نخواهند داشت.



شکل ۲۳۷

بین عددهای a و b این رابطه وجود دارد:

$$b^۲=a^۲+a^۲=۲a^۲$$

بنابراین عدد b باید زوج وبه صورت ۲n باشد، زیرا مجذور یک

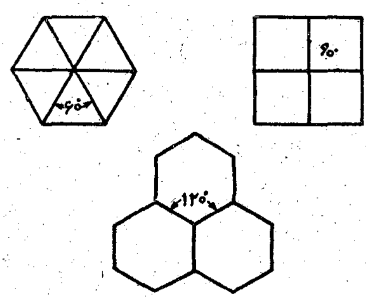
عدد فرد نمی‌تواند عددی زوج باشد. به‌این‌ترتیب $2a^2=(2n)^2$ واز آنجا $2n^2=a^2$.

از اینجا به‌این نتیجه می‌رسیم کـه a^2 و a باید عددی زوج باشند.

ولی a و b نسبت به‌هم اول بودنـد، بنابراین b باید عددی فرد باشد. به‌این ترتیب دونتیجه متضاد بدست می‌آید: عدد b بایـد درعین حال هم زوج وهم فرد باشد. بنابراین اشکال درفرض است که قبول کردیم CB و AB مقیاس مشترك دارند. به‌این ترتیب این پاره خطها مقیاس مشترك ندارند وقابل مقایسه نیستند.

* * *

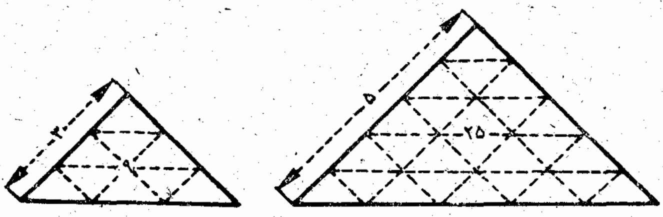
همچنین می‌گویند که فیثاغورث برای نخستین‌بار به‌این‌مطلب توجه کرد که صفحه را دور یك نقطه تنها بـا سه نوع چند ضلعیهای منتظم می‌توان پوشاند، یعنی: مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع وشش ضلعی منتظم (شکل ۲۳۸).



شکل ۲۳۸

بالاخره فیثاغورث این قضیهٔ مهم را می‌دانست که مساحتهای

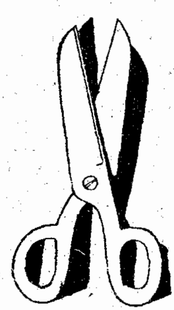
دوشکل متشابه نسبتی‌مساوی مجذور نسبت دوضلع‌متناظر آنها دارند (شکل ۲۳۹).



شکل ۲۳۹

اگراین قضیه را واقعاً فیثاغورث کشف کرده باشد، این‌قدرت را هم داشته است که مسأله‌هایی از این قبیل را حل کند: شکل مسطحه‌ای بسازید که متشابه بایك شکل مفروض وهم ارز با شکل مفروض دیگر باشد. این فرض خیلی به حقیقت نزدیك است، زیرا ساختن‌شکلها، ونه‌تنها شکلهای مسطحه، یکی‌ازسرگرمیهای خاص فیثاغورث بوده است.

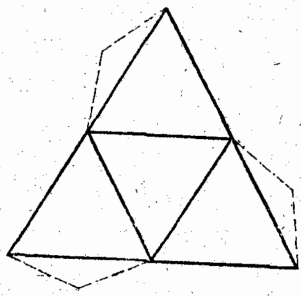
۷ـ شکلهای کیهانی

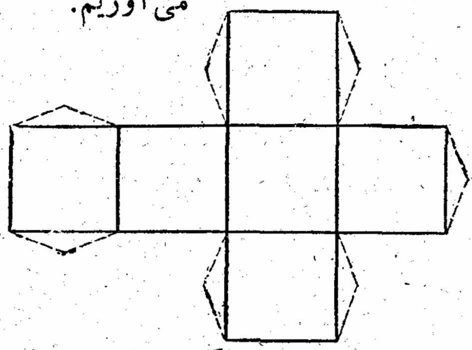


اینهم‌موردقبول‌همه‌است که‌فیثاغورث بانی اولیهٔ اصول ساختمان چند وجهیهای منتظم است که آنها را شکلهای کیهانی می‌نامید.

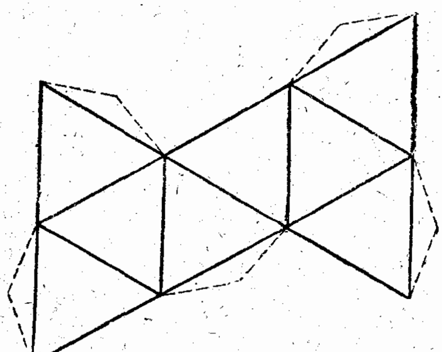
برای کسانیکه به هندسه علاقمندند و مایل‌اند نمونه‌هایی ازچند وجهی‌های منتظم را بسازند، در اینجا

طرح برش مقوا را برای چهاروجهی منتظم (شکل ۲۴۰)، شش وجهی منتظم (شکل۲۴۱)، هشت وجهی منتظم (شکل۲۴۲)، دوازده وجهی منتظم (شکل۲۴۳)، وبیست وجهی منتظم (شکل۲۴۴) می آوریم.

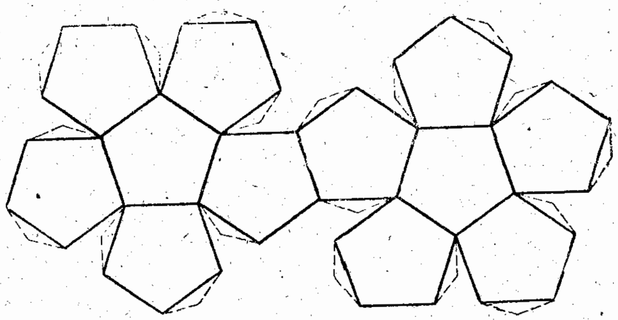

شکل ۲۴۰


شکل ۲۴۱

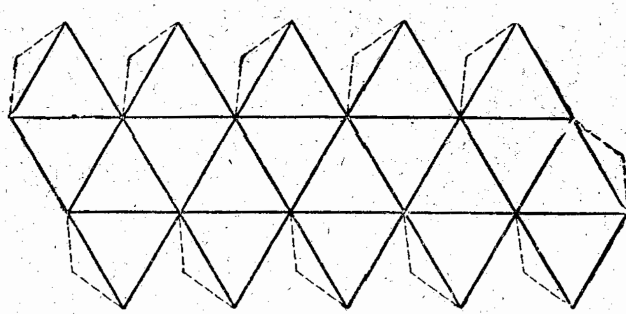
ما کوشش می‌کنیم به صورت دقیق‌تری همهٔ آنچه را که تاریخ و یا روایت قرنها، ودیعهٔ فیثاغورث در ریاضیات می‌دانند، دراینجا جمع آوری کنیم.


شکل ۲۴۲

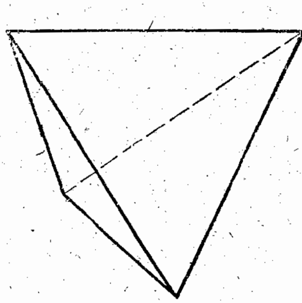
ولی احساس می‌شود که اینها قدری از بسیار است، بسیار از نظر معنا و اهمیت.



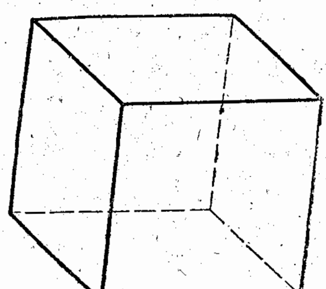
شکل ۲۴۳



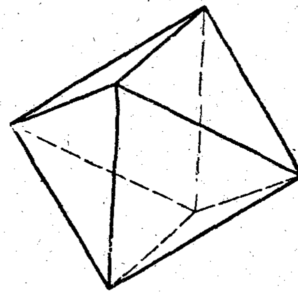
شکل ۲۴۴



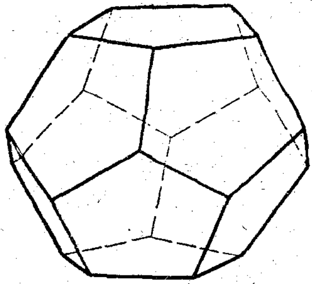
شکل ۲۴۵



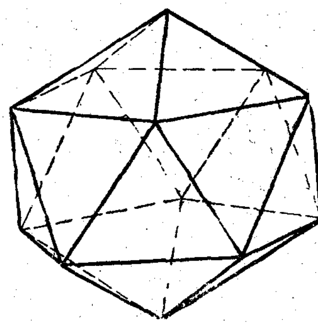
شکل ۲۴۶



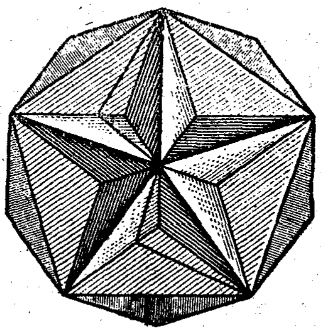
شکل ۲۴۷



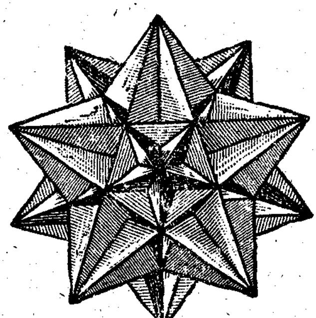
شکل ۲۴۸



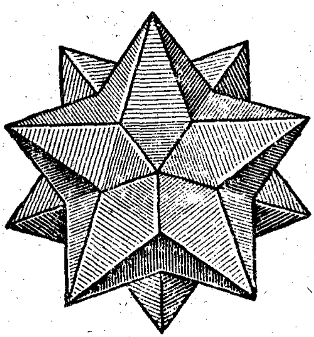
شکل ۲۴۹



شکل ۲۵۰



شکل ۲۵۱



شکل ۲۵۲

II- تقویم

۱ـ سال جدید در چه‌نقطه‌ای ازجهان شروع می‌شود

این دیگر چه پرسش عجیبی است! مگر نه اینکه سال جدید درآسیا، اروپا، امریکا، استرالیا، درپکن، کلکته، مسکو، ورشو، پاریس، لندن، نیویورك، سان فرانسیسکو، ... همه‌جا شروع می‌شود.

بدون شك همینطور است! ولی سال جدید درکجا شروع می‌شود؟ وقتی که در ورشو نیم شب ۳۱ دسامبراست، در پاریس هنوز سال کهنه است و در پکن چند ساعت قبل سال جدید شروع شده است.

سال جدید از شرق به ما می‌رسد، بنابراین باید جایی در مشرق جستجو کرد که در آنجا شروع می‌شود. بدون تردید، این مکان خطی است که ازمیان کرهٔ زمین از یك قطب به‌قطب دیگر گذشته است و دوشنبه را ازیکشنبه، چهارشنبه را ازسه‌شنبه، شنبه را ازجمعه جدا می‌کند.

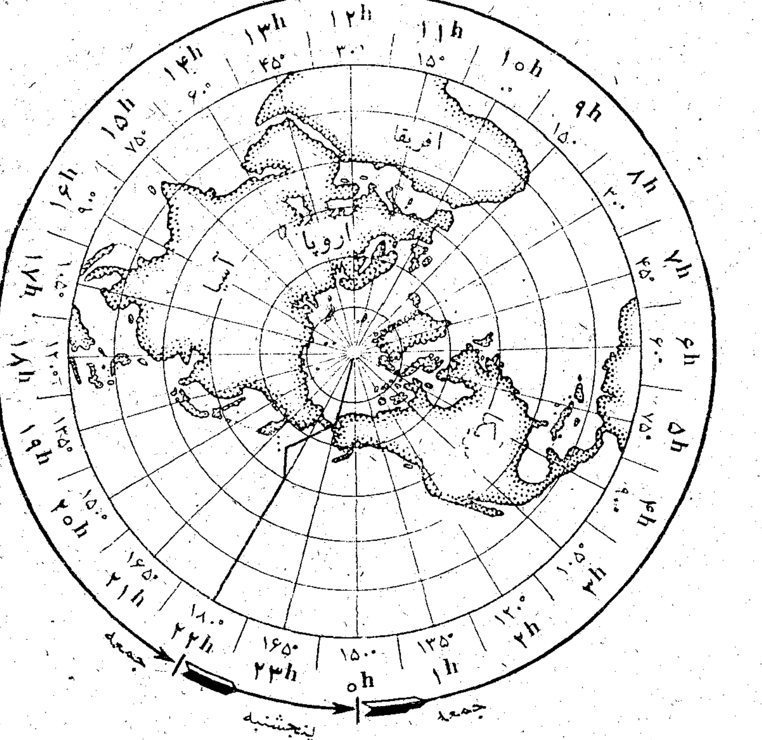
این خط وجود دارد و بر امواج دریا قرار گرفته است: این خط درجایی درتنگهٔ برینگ بین کامچاتکا وغربی‌ترین دماغهٔ امریکای شمالی شروع می‌شود، از کنار ژاپن رد می‌شود، بین جزیره‌های فیلیپین و کارولین وارد می‌شود، گینهٔ جدید، کالدونی جدید و زولاند جدید را دربر می‌گیرد و بالاخره در دریای جنوب گم می‌شود.

وقتی که سباستین دلکانو، همسفرماژلان (که ضمن راه به قتل رسیده بود)، از نخستین سفر دور دنیا به اروپا برگشت، علاوه بر غنیمتهای دریایی، یك معجزهٔ باورنکردنی هم با خود آورده بود: او روزپنجشنبه به‌اروپا رسید، درحالی که در آنجا به‌حساب خودشان جمعه بود. واین وضع بدان مناسبت پیش آمد که در آنزمان هنوز خطی که پنجشنبه را از جمعه جدا کند نمی‌شناختند. روشن است که این خط را تنها روی نقشه می‌توان پیدا کرد، ولی وقتی که درعمل کسی از آن عبور کند، یکباره ازپنجشنبه به‌جمعه می‌افتد ویاعجیب‌تر از آن ازجمعه به‌پنجشنبه برمی‌گردد.

برای اینکه این پدیده را بهتربفهمید، به‌شکل ۲۵۳ نگاه کنید.

دراین شکل دقیقاً نیمکرهٔ شمالی زمین نشان داده شده است. کرهٔ زمین ازمغرب به‌مشرق می‌چرخد (روی شکل درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، و به‌نظر آدمی می‌رسد که خورشید از مشرق به‌مغرب می‌رود.

سطح کره زمین به ۲۴ منطقه تقسیم شده است که هرکدام از آنها از منطقهٔ مجاور آن به وسیلهٔ یك ساعت زمان جدا می‌شود. فرض می‌کنیم که ما درساعت ۱۰ صبح روز جمعه ۳۱ دسامبر سال



شکل ۲۵۳

۱۹۴۸ در منطقهٔ نصف‌النهار صفردرجه، که از گرینویچ می گذرد، باشیم. اگر بطورذهنی به‌طرف غرب حرکت کنیم، مرتباً به‌ساعتهای قبل از ۱۰ می‌رسیم. مثلاً، درجلگهٔ رود می‌سی‌سی‌پی (۹۰درجه طول غربی)، ساعت ۴ صبح است، و در نصف النهار ۱۵۰ درجهٔ طول غربی ساعت ۰، یعنی نیم شب بین پنجشنبه وجمعه است. اگر ازاین نصف‌النهار بازهم به‌طرف غرب برویم، مثلاً در آلاسکا ساعتهای دیرعصرروزقبل، یعنی پنجشنبه، است وبالاخره درکنارنصف‌النهار ۱۸۰ درجه (درشرق این خط) درست ساعت ۲۲ پنجشنبه ۳۰ دسامبر

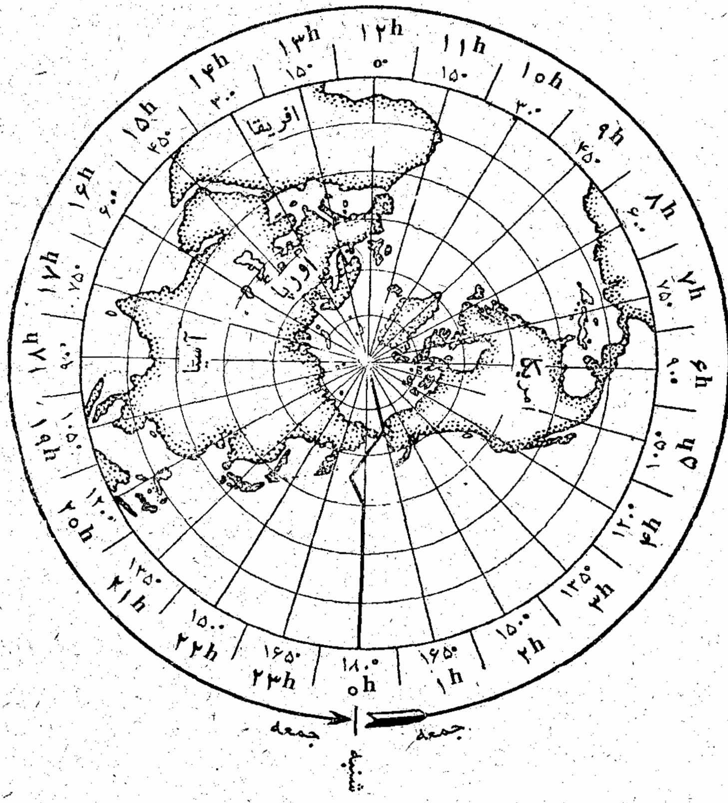
سال ۱۹۴۸ است.

حالا اگر بطورذهنی از نصف‌النهار صفردرجه به‌طرف مشرق حرکت کنیم، همه چیز برعکس خواهد بود. مثلاً دردهانهٔ رود گنگ (۹۰درجه طول شرقی) ساعت ۱۶ ودر نصف النهار ۱۸۰ درجه (از جهت مشرق) ساعت ۲۲ جمعهٔ ۳۱ دسامبر سال ۱۹۴۸ است. به‌این ترتیب درنصف‌النهار ۱۸۰درجه ـ درخط فاصل تاریخ ـ به‌دوزمان مختلف برخورد می‌کنیم: درطرف غرب این خط جمعه و درطرف شرق این خط پنجشنبه است، درحالیکه در هر دوطرف، ساعت یکی است (در مثال ما ساعت ۲۲). در نقطه‌ای دوردست، بین موجهای اقیانوس آرام ، این تغییرغیرعادی یعنی جهش واقعی زمان، انجام می‌گیرد. وقتی که کشتی، ضمن حرکت از غرب به‌شرق، به این خط غیرعادی می‌رسد، روز، ماه وهفته یکروز به‌عقب می‌رود. یعنی آن روز را باید دوبار به حساب آورد. مثلاً کشتی که به‌طرف شرق حرکت می‌کند روزپنجشنبه ۳۰ دسامبربه‌این مرزبرسد، فردای آنروز هم برای این کشتی همان پنجشنبه ۳۰دسامبرخواهد بود.

به‌این‌ترتیب برای کسانی که درجهت دوران کرهٔ زمین حرکت می‌کنند، یك روز از زندگیشان به‌حساب نمی‌آید. برعکس، وقتی که کشتی مرز تاریخ را ازشرق به‌غرب قطع می‌کند، یك شبانه‌روز کامل حذف می‌شود؛ و بنابراین باید مثلاً هفته را بدون جمعه به‌ـ

حساب آورد.

اگر یك کشتی که به‌طرف غرب می‌رود، ساعت ۷ صبح یکشنبه اول ژوئیه ازخط مرزی عبور کند. بلافاصله ۷ صبح دوشنبه دوم ژوئیه خواهدشد و کارکنان کشتی یکروزخودرا ازدست خواهند داد. ولی درعوض وقتی که این کشتی برمی‌گردد (یعنی درجهت عکس دوران کرۀ زمین حرکت می کند) روز ازدست رفتۀ خودرا دوباره بدست خواهندآورد.



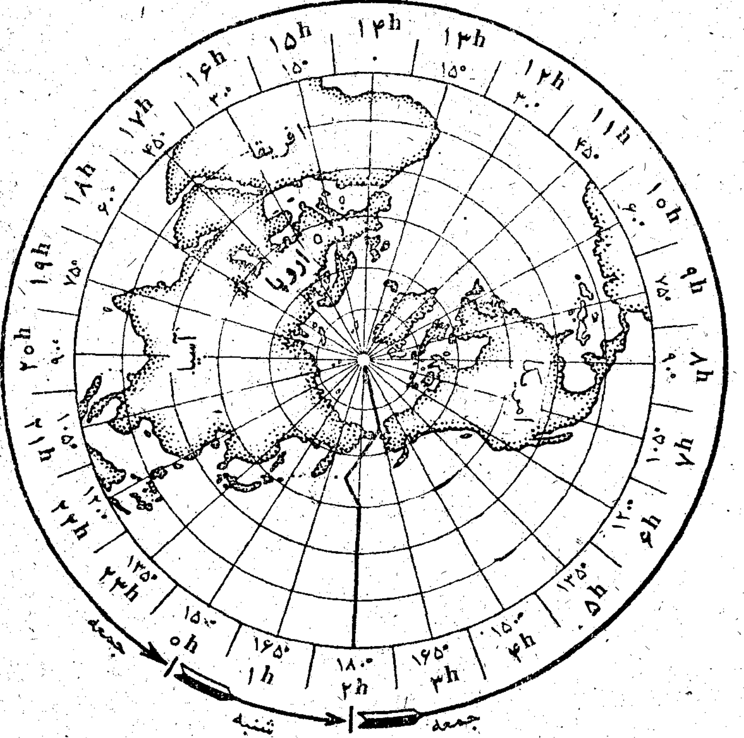
شکل ۲۵۴

زمان را دوساعت جلوتر درنظرمی گیریم (شکل۲۵۴را ببینید). دراینصورت در نصف‌النهار صفر درجه ساعت ۱۲، یعنی نیمروز جمعهٔ ۳۱ دسامبرسال ۱۹۴۸ خواهد بود. باحرکت به‌طرف مغرب خط می‌سی‌پی را درساعت ۶صبح قطع می کنیم و به نصف‌النهار ۱۸۰درجه درساعت۰، یعنی شروع جمعه۳۱دسامبر ۱۹۴۸می‌رسیم. حالا اگر از نصف‌النهار صفردرجه به‌طرف شرق حرکت کنیم، به‌دهانهٔ گنگ درساعت ۱۸ وبه نصف‌النهار ۱۸۰ درجه در ساعت۲۴، یعنی ساعت صفر شروع شنبه اول ژانویهٔ سال بعد یعنی سال۱۹۴۹، می‌رسیم.

حالادیگر برای ما معلوم است که درچه‌نقطه‌ای ازجهان تمام تاریخ و ازآنجمله سال جدید متولد می‌شود.

* * *

یکبار دیگر زمان را دوساعت جلومی‌بریم (شکل۲۵۵). حالا درنصف‌النهار ۰درجه ساعت ۱۴جمعه ۳۱ دسامبرسال ۱۹۴۸است. درغرب نصف‌النهار۱۸۰درجه۲ساعت ازشروع سال‌نو گذشته است؛ در آنجا شنبه اول ژانویه سال ۱۹۴۹ است. بقیهٔ قسمتهای جهان هنوز سال ۱۹۴۸ است. نزدیك ۱۵۰ درجهٔ طول شرقی در نصف‌النهاری که از جزیره‌های کوریل می گذرد، مردم به سال جدید رسیده‌اند؛ در نصف‌النهار ۰درجه ۱۰ ساعت به شروع سال جدید مانده است، و درطرف شرق نصف‌النهار۱۸۰درجه تنها ۲۲ساعت بعد سال نو فرا می‌رسد. درحالیکه در غرب خط فاصل، روز اول ژانویه را به‌پایان می‌رساند.



شکل ۲۵۵

به این ترتیب، زنگ رسمی ساعت، فرا رسیدن سال نو را برای نخستین بار در نصف‌النهار ۱۸۰ درجه اطلاع می‌دهد، سپس سال نو درحالیکه به‌طرف غرب می‌رود، با جهشهایی مساوی یك ساعت به‌جلو می‌رود و بعد از ۲۴ ساعت به‌نصف‌النهاز ۱۸۰ درجه ازطرف شرق می‌رسد.

۲ـ تاریخ میلادی درچه روزی شروع شده است

دربارهٔ این مطلب الیس سترمگن منجم دانمارکی به‌تفصیل کار

کرده است. او متقاعد شده است که اول ژانویهٔ سال اول میلادی شنبه بوده است.

باوجود این، محاسبهٔ این موضوع مشکل‌نیست. بایدتاریخی را انتخاب کرد که روز هفتهٔ آن معلوم باشد (وساده‌تر ازهمه اینست که همان روزی را که درآن هستیم درنظر بگیریم) و محاسبه کنیم که ازابتدای قرن تاآن روز، چندروزگذشته است.

ولی باید به‌این نکته توجه داشت که برای سالهای میلادی دو نوع تقویم وجود دارد: قیصری (یولیانی) وگرگوری

درتقویم قیصری، که به‌وسیلهٔ ژول سزار درقرن اول قبل از میلاد وضع شد، سه‌سال معمولی ۳۶۵ روزه وجود دارد وسال چهارم را ۳۶۶روز به‌حساب می‌آورند، یعنی در تقویم قیصری بطور متوسط سال را۳۶۵/۲۵ روز درنظر می‌گیرند. ولی ستاره شناسان ثابت کرده‌اند که سال نجومی از ۳۶۵/۲۴۲۲ روز تشکیل شده است. بنابراین سال قیصری ۰/۰۰۷۸ روز طولانی‌تراز واقع می‌شود. این اشتباه درجریان ۱۲۸ سال مساوی ۱ روز می‌شود. مثلاً درسال ۳۲۵ معلوم شده بودکه اعتدال ربیعی (تساوی شب و روز بهار) در۲۱مارس بود. بعداز ۱۲۸ سال (یعنی درسال ۴۵۳) اعتدال ربیعی به ۲۰ مارس منتقل شد. پس از ۱۲۸ سال، تقویم یك روز خودرا ازدست داد! به‌این ترتیب تا پایان سدهٔ شانزدهم در تقویم قیصری ۱۰ روز کامل از بین رفت و تقویم نخستین روز بهار را بجای ۲۱ مارس ۱۱ مارس نشان می‌داد.

اگر به‌همین ترتیب تاسال ۱۰۵۶۵، یعنی قرن یکصدوششم میلادی، پیش برود، نخستین روز بهار بااول سال جدید (یعنی اول ژانویه) منطبق می‌شود.

* * *

برای اینکه عقب‌ماندگی تقویم را ازسال نجومی برطرف کنند، پاپ گرگوری سیزدهم درسال ۱۵۸۲ تقویم را برمبنای دواصل زیراصلاح کرد:

۱. برای اینکه ۱۰ روزعقب افتاده جبران بشود، دستورداده شدکه روز بعد از ۴ اکتبر را ۱۵ اکتبر۱۵۸۲ به‌حساب آورند. بسیاری ازمردم به‌این

مطلب سخت اعتراض کردند، زیرا تقویم جدید ۱۰ روز اززندگی آنهـا را ازبین برده بود وبنابراین این روزها را بی‌اثر کرده بود؛ به‌این مناسبت حتی شورشهایی مثل «شورش تقویم» در ریگا به‌وجود آمد.

۲. درتقویم قیصری هرسالی که عدد آن بر۴ قابل قسمت بود، سال کبیسه نامیده می‌شد، یعنی آن سال را ۳۶۶روز به‌حساب می‌آوردند، بنابراین همهٔ سالهایی که درمرز دوسده باشند، یعنی ۱۶۰۰، ۱۷۰۰، ۱۸۰۰، ۱۹۰۰ وغیره سال کبیسه می‌شدند. درتقویم گرگوری بین چهارسال از اینگونه یکی کبیسه و سه‌تای دیگر عادی شدند؛ یعنی سال ۱۶۰۰ مثل تقویم قدیم سال کبیسه، ولی سالهای ۱۷۰۰، ۱۸۰۰ و ۱۹۰۰ سالهـای عـادی به حساب آمدند، سپس دوباره سال ۲۰۰۰، سال کبیسه و سالهـای ۲۱۰۰، ۲۲۰۰ و ۲۳۰۰ سالهای عادی وغیره.

درهریك ازاین سالهای عادی، غیرکبیسه، سال یکروز تندتر مـی‌رود و یك برگ تقویم حذف می‌شود (روز ۲۹فوریه را حذف می‌کنند)؛ به ایـن ترتیب درجریان چهارسده درتقویم جدید ۳روز صرفه جویی می‌شود، در ـ حالیکه درتقویم قدیم ازدست می‌رفت.

تقویم گرگوری به‌تدریج درهمهٔ کشورها رایج شد، به‌نحوی که امروز دیگر تقویم قدیم را باید بطور کلی مربوط به‌گذشته دانست.

* * *

به مسألهٔ خود برمی‌گردیم.

نقطـهٔ شروع را مثلاً روز شنبه اول ژانـویهٔ ۱۹۴۹ می‌گیریـم. می‌خواهیم بدانیم اول ژانویهٔ سدهٔ اول میلادی چه‌روزی ازهفته بوده‌است. می‌شود مسأله‌را به‌این ترتیب ساده‌تر کرد که درنظربگیریم: روزاول ژانویهٔ ۱۹۴۹طبق تقویم جدید، برابراست با ۱۹ دسامبر۱۹۴۸ طبق تقویم قدیم. باید حساب کنیم که ازنخستین لحظهٔ سدهٔ اول میلادی تا ۱۹ دسامبر ۱۹۴۸ طبق تقویم قیصری چند روز گذشته است. این تعداد روزها چنین است:

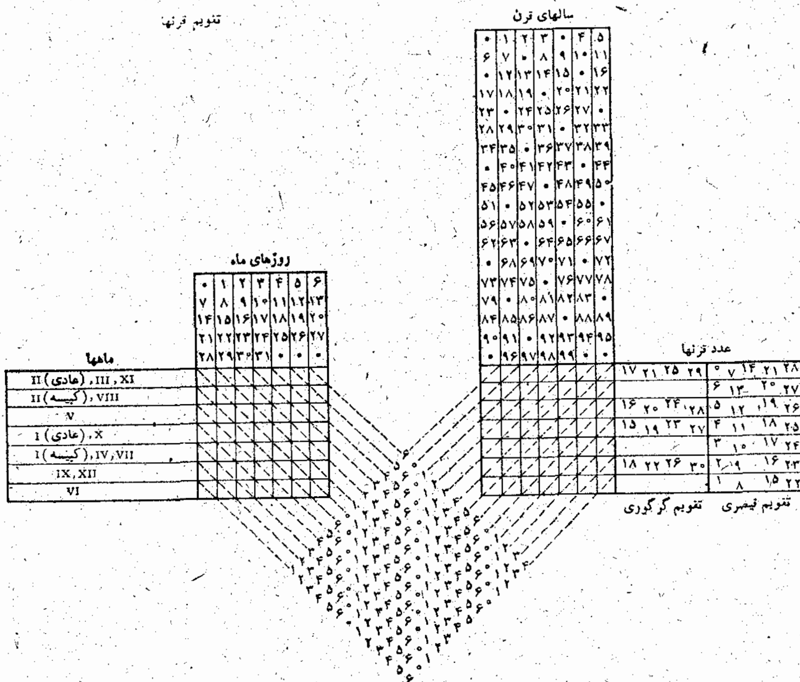
$$۱۹۴۸ \times ۳۶۵/۲۵ - ۱۳ = ۷۱۱۴۹۴$$

این عدد را بر۷ تقسیم می‌کنیم، نه‌به‌این مناسبت که خارج قسمت آنرا بدست‌آوریم (زیرا این خارج قسمت تنها تعداد هفته‌هایی را که گذشته است نشان می‌دهد)، بلکه برای اینکه باقیمـاندهٔ آنرا پیدا کنیم و بـه‌کمك این باقیمانده بتوانیم روزی ازهفته را که تاریخ میلادی در آنـروز شروع شده است، معین نماییم.

ازتقسیم ۷۱۱۴۹۴ بر ۷ به‌باقیماندهٔ صفر می‌رسیم؛ واین به‌معنای‌آن است که اول ژانویهٔ سال اول سدهٔ اول میلادی همان شنبه بوده است (یعنی همان روزی از هفته‌که با ۱۹ دسامبرسال ۱۹۴۹ تطبیق می‌کند).

۳- تقویم قرنها

جدولی به‌نام تقویم قرنها درست کرده‌اند، که به‌کمك آن و بدون هیچ محاسبه‌ای می‌توان روز هفته را برای هر تاریخ دلخواه مربوط به‌گذشته یاآینده پیداکرد. استفاده از این جدول فوق‌العاده ساده است (شکل ۲۵۶). فرض کنید که مثلاً بخواهیم بدانیم ۲۲



روزهای هفته: ۰ یکشنبه، ۱ دوشنبه، ۲ سه‌شنبه، ۳ چهارشنبه، ۴ پنجشنبه، ۵ جمعه، ۶ شنبه

شکل ۲۵۶

ژوئیه ۱۹۴۴ چه روزی از هفته بوده است. در جدولی کـه زیر نام «ماهها» قراردارد درسطر پنجم ماه VII را و در جدولی که زیر نام «روزهای ماه» قـرار دارد درستون دوم عدد ۲۲ را پیدا مـی کنیم. در محل برخورد سطر پنجم و ستون دوم بـه خانه‌ای می‌رسیم که یك خط چین از آن گذشته است، یك خط کش درطول این خط چین قرار می‌دهیم. سپس، درجدول «عدد قرنها» (در قسمت مربوط بـه تقویم گرگـوری) عدد ۱۹ (کـه در ردیـف چهـارم است) و در قسمت «سالهای قرن» عـدد ۴۴ (در ستون هفتم) را پیدا می کنیم. در محل برخورد این ستون با ردیف چهارم از جدول «عدد قرنها» به خانه‌ای می‌رسیم که یك خط چین از آن گذشته است، در طول این خط چین هم یك خط کش قرار می‌دهیم. این دو خط چین در عدد ۶ بـه هم برخورد می کنند. یعنی ۲۲ ژوئیهٔ سال ۱۹۴۴ روز شنبه بوده است.

۴ـ ماههای متحابه

همانطور که عددهای متحابه وجود دارد، می‌تـوان بعضی از ماهها را هم تحت همین نام در آورد . این مـاهها عبارتند از آوریل و ژوئیه، مارس و نـوامبر، سپتامبر و دسامبر. مثلاً اگـر آوریل و ژوئیه را درنظر بگیریم، روزهای متوالی ماه آوریل بـا هرروزی از هفته تطبیق کنند، روزهای متشابه آنها درماه ژوئیه هم بـا همان روزهای هفته تطبیق خواهند کرد. به‌همین ترتیب در مورد ماههای

مارس ونوامبر یا سپتامبر ودسامبر. همین رابطه بین ماههای مه و ژانویه هم وجود دارد، به‌شرطی که مه هرسال را باژانویهٔ سال بعد درنظر بگیریم. درسالهای کبیسه اول ژانویه همان روزی از هفته است که اول اکتبر، و اول فوریه، اول مارس و اول نوامبر هم همیشه با یکی از روزهای هفته شروع می‌شوند.

۵ـ سال ۱۸۹۹

این آخرین سال ازردیف سالهایی است که عدد صدهای آن مساوی مجموع عدد ده‌ها وعدد یکهای آنست. مثلاً سال ۹۴۵ هم همین خاصیت را دارد. بعد از سال ۱۸۹۹ هرگز بین رقمهای سال چنین رابطه‌ای وجود ندارد، درحالیکه قبل ازآن چنین سالهایی را به‌فراوانی می‌توان پیدا کرد. اثبات این مطلب را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶ـ تقویم جدید چگونه است

مردم ازتقویم راضی نیستند. ماهها برابرنیستند و از۲۸ تا ۳۱ روز تغییر می‌کنند (و چگونه می‌شود طرح مخارج را ریخت؟)، نیمسالها هم برابر نیستند: نیمسال اول ۱۸۱ یا ۱۸۲ روز و نیمسال دوم ۱۸۴ روز دارد.

علاوه برآن، کار محاسبه را مشکل می‌کند اگر بخواهیم معین کنیم فلان تاریخ به‌چه‌روزی ازهفته می‌افتد. اعتراضهای دیگری هم نسبت به‌تقویم گرگوری وجود دارد. پیشنهادهای مختلفی برای

برطرف کردن نارساییهای این تقویم شده است.

انقلاب فرانسه دستگاه جدیداندازه‌گیری وضع کرد که به‌نام دستگاه متری معروف شده است. همراه با دستگاه متری یك تقویم جدید انقلابی هم پیشنهاد شد.

طبق رأی کنوانسیون از ۲۴ نوامبر ۱۷۹۳ مقرر شد که روز اعتدال پاییزی که مصادف باروز بعد از اعلام جمهوری، یعنی ۲۲ نوامبر۱۷۹۲ است، به‌عنوان نخستین روزسال اول دوران جمهوری در نظرگرفته شود.

طبق این تقویم، سال به ۱۲ ماه و هرماه ۳۰ روز تقسیم شده بود، ۵ یا ۶ روز بقیه روزهای تکمیلی نامیده شد و به جشنهای جمهوری اختصاص داده شد. در تقویم جدید، به ماهها نامهای شاعرانه‌ای، به‌مناسبت چهارفصل سال داده شد.

ماههای پاییز

وانده می‌یر **Vendémiaire** ـ ماه انگورچینی

برومر **brumaire** ـ ماه ابرها

فریمر **frimaire** ـ ماه برف ریزه‌ها

ماههای زمستان

نیوز **nivôse** ـ ماه برفها

پلوویوز **pluviôse** ـ ماه بارانها

وانتوز **ventôse** ـ ماه بادها

ماههای بهار

ژرمینال germinal ـ ماه جوانه زدن
فلوره‌آل floréal ـ ماه گلها
پره ری‌آل prairial ـ ماه سبزه‌زارها

ماههای تابستان

مه‌سیدور messidor ـ ماه درو
ترمیدور thermidor ـ ماه گرمی
فروکتیدور fructidor ـ ماه میوه‌ها

حالا این تاریخها را بخوانید:

۹ ترمیدور سال دوم، ۱۲ ژرمینال سال سوم،
۱۸ فروکتیدور سال پنجم، ۱۸ برومر سال هشتم.

تاریخهای تقویم گرگوری که با این تاریخها تطبیق می کند، چنین است: ۲۷ ژوئیهٔ سال ۱۷۹۴، اول آوریـل سال ۱۷۹۵، ۴ سپتامبرسال ۱۷۹۷، ۹نوامبر سال ۱۷۹۹.

تقویم انقلابی سنت هفتهٔ ۷ روزه را هم پاره کرد و هرماه را به سه دهه (هردهه ۱۰ روز) تقسیم کرد. نام روزهای دهه بکلی غیر شاعرانه انتخاب شده بود: اول روز، دوم روز، سوم روز،... باید توجه کرد کـه دهه بیش از هفته طول می کشید، تا نهم روز تمام نمی‌شد روز تعطیل دهم روز فرا نمی‌رسید. به‌همین مناسبت ما هفتهٔ خودرا ترجیح می‌دهیم!

تقویم جمهوری تا سال دوازدهم دوام کرد و درسال ۱۸۰۴

به‌وسیلهٔ ناپلئون لغوشد. ظاهراً این‌تقویم نتوانست شایستگی دستگاه متری را بدست آوردکه «درهمهٔ زمانها و برای همهٔ ملتها» به وجود آمده بود.

تقویم دیگری هم وجود دارد به‌نام طرح سویسی تقویم که تقویم جهانی هم نامیده می‌شود.

سال به چهارفصل ۱۳ هفته‌ای تقسیم می‌شود، درهرفصل ماه اول ۳۱ روز ودوماه دیگر ۳۰ روز است.

هرفصل از یکشنبه شروع می‌شود و در تمام فصلها روزهای هفته بطور یکنواخت تقسیم شده‌اند، یعنی:

اول ماه اول ـ یکشنبه

اول ماه دوم ـ چهارشنبه

اول ماه سوم ـ جمعه

اول ماه چهارم ـ یکشنبه

اول ماه پنجم ـ چهارشنبه

اول ماه ششم ـ جمعه

اول ماه هفتم ـ یکشنبه

اول ماه هشتم ـ چهارشنبه

اول ماه نهم ـ جمعه

اول ماه دهم ـ یکشنبه

اول‌ماه‌یازدهم ـ چهارشنبه

اول‌ماه‌دوازدهم ـ جمعه

به‌این‌ترتیب مثلاً جشن اول‌ماه‌مه همیشه چهارشنبه خواهدبود.

ولی باحساب این تقویم، چهارفصل سال ۳۶۴ روزمی‌شود، پس روز سیصد وشصت وپنجمین کجاست؟

این روز سی و یکم دسامبر است. ولی این فقط یك تاریخ است و «روزی از هفته» نیست. این یك روز «سفید» است که بین شنبه ۳۰ دسامبر ویکشنبه اول ژانویه قرار دارد. این روز به‌بررسی کارسال گذشته وهمچنین برای استقبال ازسال جدید اختصاص دارد.

درسال کبیسه یك روز «سفید» دیگر درتاریخ ۳۱ژوئن خواهد بود. این‌روز، روز بازیهای المپیك است که هرچهار سال یکبار انجام می‌شود.

هوا خواهان تقویم جهانی می‌خواهند آنرا از سالی شروع کنند که اول ژانویه به یکشنبه افتاده باشد، مثلاً از سال ۱۹۶۱ یا سال ۱۹۶۷؛ زیرا دراین روز تقویم جهانی باتقویم گرگوری تطبیق می‌کند. این تطبیق تا پایان فوریه از تقویم گرگوری طول می‌کشد ولی بعد از آن برای روزهای بعداز فوریه تنها باتقویم جدیدجهانی عمل خواهد شدکه درآن ماه فوریه دارای ۳۰ روزاست.

III ـ عددهای غول و عددهای لی‌لی‌پود

به آسمـــان نگاه کنید با ستاره‌های درخشان آن، به دریای مواج وشنزارهای بیابان نگاه کنید، در ذهن شمــا مفهوم عددهای غول پیکر، عددهای بزرگی که تن به‌شمار نمی‌دهند، مفهوم بی‌نهایت بروز می‌کند. حالا به‌اندازه‌های گرد وغباری که در شعـاع روشن آفتاب می‌بینید، به‌قطر تارعنکبوت، به زمانی که یك حرکت پلك چشم طول می‌کشد فکر کنید؛ درمقابل شما افقی از مقادیر لمس‌ـ نشدنی، مقادیر بی‌نهایت کوچك گشوده می‌شود.

این عددهای غول و عددهای‌لی‌لی‌پود، در جـایی، در بی‌نهایت بی‌انجامی خودرا پنهان کرده‌اند، زیرا بـرای هرمقداری، هرچقدر کـه بزرگ یا کوچك باشد، می‌توان بـاز هم مقادیری بزرگتر یا کوچکتر درنظر گرفت.

۱ـ میلیون

برای آزمایش کسی که مطمئن است معنای میلیون را می‌داند وآماده است این مقدار را بدون هیچ زحمتی درمواردی کـه پیش می‌آید به‌کار برد، این سؤال را طرح می‌کنیم کـه بدون محاسبهٔ طولانی جواب بدهد: اگر یك موی سر انسان را یك میلیون برابر

کنیم چه‌قطری پیدا می کند. آیا می‌توان آنرا باحد متوسط تنهٔ درخت کاج یا بشکه‌ای بااندازه‌های بزرگ مقایسه کرد؟

اگرقطرموی انسان‌را یك‌میلیون برابر کنیم، قطری‌مساوی ۷۰ متر پیدا می کند. درداخل مقطع چنین «مویی» می‌توان باتومبیل به‌گردش رفت.

خیال می کنید درست نباشد!

ولی این یك واقعیت است. قطر متوسط موی آدمی ۰/۰۷ میلیمتراست که اگرآنرا یك میلیون برابر کنیم، همان ۷۰ متربدست می‌آید.

واگریك پشه (ازهمین پشه‌های معمولی مزاحم) را یك‌میلیون برابر کنیم، چه‌اندازه‌هایی پیدا می کند؟ بدون محاسبه حدس بزنید! بدون تردید، بعدازمثال اول، باسادگی بیشتری می‌توان‌اندازه‌های میلیونی این حشرهٔ کوچك را توجیه کرد، ولی با وجود این برای عدهٔ زیادی عجیب خواهدبود اگربشنوند که پشه دراین حالت طولی مساوی ۵ کیلومتر خواهد داشت.

یك ضرب ساده وکوتاه ما را به‌این حقیقت مطمئن می کند:

(میلیمتر) ۵ × ۱۰۰۰۰۰۰ = ۵۰۰۰۰۰۰ (میلیمتر) ≑ ۵ (کیلومتر)

یك ساعت‌جیبی معمولی وقتی که‌یك‌میلیون برابرشود، قطری مساوی ۵۰ کیلومتر پیدا می کند، قد انسان در این مقیاس ۱۷۰۰ کیلومتر می‌شود. اگر یك میلیون آدم شانه به‌شانهٔ هم بایستند، ۵۰۰ کیلومتر فاصله رامی‌گیرند. اگریك‌میلیون ازهمین نقطه‌های کوچك چاپی را روی یك نوار کاغذی پهلوی هم قرار دهیم، باید نوار را

به‌طول ۸۰۰ متر انتخاب کنیم. این کتابی که جلو شماست یك میلیون حرف ندارد. کتابی که یك میلیون صفحه داشته باشد، ضخامتی مساوی ۵۰ متر پیدا می کند. از شروع سال میلادی تـا کنون هنوز یك میلیون روز نگذشته است؛ برای اینکه یك میلیون روزازشروع سال میلادی گذشته باشد باید هنوز ۸۰۰ سال صبر کنیم.

اینها نمونه‌هایی ازمقایسه برای شناخت یك میلیون بود. ولی این تازه عدد یك میلیون است که می‌توان آنرا با چیزهای معمولی مقایسه کرد. پس دربارهٔ عددهای بزرگ غیرقابل‌قیاس چه می‌توان گفت!

۲ـ میلیارد ـ بیلیون

در تمام سندهای پولی: چك، سفته، برات، حوالـه جایی وجود داردکه بایددرآنجا جمع مبلغ‌را باتمام حروف‌نوشت. وقتی که سوءِ تفاهمی به وجود آید، این عبارت حرفی کـه جمع مبلغ را نشان می‌دهد، مشکل را حل می کند. ولی اگر در سند بانکی جمع مبلغها را بابیلیونها حساب کرده باشند، اختلاف پیش خواهد آمد. در چنین حـالتی اگر عدد مبلغ با رقم وجود نداشته باشد، عبارت حرفی جمع مبلغ برای محاسبه، مبنای کافی بدست نمی‌دهد.

در اینجا داستانی را نقل می کنیم که به‌خوبی این مطلب را روشن می کند.

وقتی که فرانسه در جنگ با پروس (سالهای ۱۸۷۰ ـ ۱۸۷۱) شکست خورد وقرارشدکه غرامتی معادل ۵بیلیون فرانك بـه‌آلمان

فاتح بپردازد، بسیاری از فرانسویها دچار یأس واقعی شدند. آنها در این قرارداد به‌روشنی ویرانی کامل اقتصاد کشور خود را می‌دیدند، زیرا دربسیاری از کشورها بیلیون را به‌معنای میلیون میلیون یعنی یك واحد همراه با ۱۲ صفر (10^{12}) می‌دانستند. بنابراین وقتی که به کمك رقمها متوجه شدند که صحبت «تنهــا» برسر ۵۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ یعنی ۵هزارمیلیون (10^{9}) است خودرا سبك‌تر وحتی «خوشحال» احساس کردند:

در آلمــان، انگلستان و بعضی از کشورهــای شمال اروپا مبنای شمار را برطبقه‌های شش رقمی گذاشته‌اند، یعنی:

میلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{6}

بیلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{12}

تریلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{18}

درامریکا، فرانسه و کشورهای جنوبی اروپا مبنای شمار را برطبقه‌های سه‌رقمی گذاشته‌اند، یعنی:

هزار = ۱۰۰۰ = 10^{3}

میلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{6}

بیلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{9}

تریلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{12}

کاتریلیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{15}

کوینتی‌لیون = ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ = 10^{18}

ازاین مقابله معلوم می‌شود که یك بیلیون آلمانی مساوی یك تریلیون فرانسوی است وغیره.

۳ . بیلیون، تریلیون و سایر ... لیونها

خانمی ضمن یك گفتگو دراین‌باره که خورشید درچه‌فاصله‌ای از زمین قراردارد، توضیح داد: خوب این معلوم است که خورشید میلیونها یابیلیونها کیلومتر ازما فاصله دارد: «میلیونها یا بیلیونها»! باید متذکرشد که حتی بسیاری از مردم درس خوانده هم به‌اختلاف میلیون و بیلیون و بدتراز آن به اختلاف بیلیون و تریلیون توجهی ندارند.

این افراد چقدر متعجب می‌شوند وقتی که بدانند یك میلیون ثانیه کمتراز ۲ هفته است، درحالیکه یك بیلیون ثانیه (بیلیون $= ۱۰^{۱۲}$) بیشتراز ۳۰۰۰۰سال طول می‌کشد! ازابتدای میلاد تنها نخستین میلیون از دقیقه‌ها گذشته است. ومیلیون، هزار مرتبه کمتراز بیلیون است.

اگر موی سرانسان را یك بیلیون بار ($۱۰^{۱۲}$) بزرگ کنیم ۸ بارکلفت‌تراز کرۀ زمین می‌شود واگرپشۀ مزاحم را یك‌بیلیون برابر کنیم ۵۰ برابر اندازه‌های حقیقی خورشید می‌شود ...

برای کسانی که می‌خواهند نام گروههای بعدی عددها را بدانند، جدول زیررا آورده‌ایم:

$۱۰^{۳۶}$ = سکس تیلیون

$۱۰^{۴۲}$ = سپتیلیون

$۱۰^{۴۸}$ = اوکتی لیون

$۱۰^{۵۴}$ = نونیلیون

$۱۰^{۶۰}$ = دتسی لیون

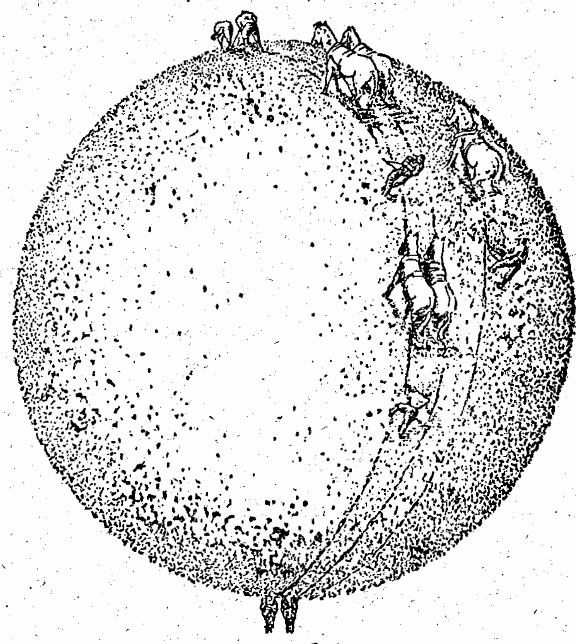
. . . .

$۱۰^{۶۰۰}$ = سن‌تزی‌لیون

وزن تمام عالم هستی، که تاکنون شناخته شده است، کمی بیش از ۲۰ نونیلیون گرم است. رشتهٔ فکر آدمی در بی‌انجامی این عددهای غول‌آسا گم می‌شود، ولی باوجود همهٔ اینها، قلب آدمی در جریان زندگی کوتاه او، بدون ایست و بدون خستگی، چند میلیارد بار می‌زند.

۴. دور دنیا

کسی ما را سرزنش به گزافه‌گویی نخواهد کرد، اگر بگوییم هر بچه‌ای از ۳ یا ۴ سالگی روزانه لااقل ۵ ساعت حرکت می‌کند. در هر ساعت بدون آنکه، عجله کند، می‌تواند ۴ کیلومتر راه برود. بنابراین هر بچه در روز ۲۰ کیلومتر راه می‌رود. این مقدار برای سال



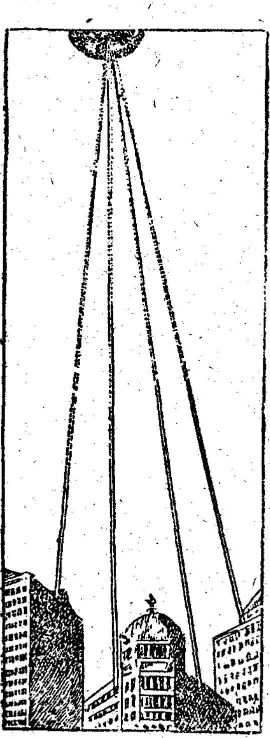
شکل ۲۵۷

مساوی ۲۰ × ۳۶۰ یعنی ۷۲۰۰ کیلومتر می‌شود.

طول استوای زمین، اگر گردشدهٔ آنرا درنظربگیریم، مساوی ۴۰۰۰۰ کیلومتراست. ازاینجا می‌توان به‌سادگی محاسبه کرد که هر بچه‌ای درمدت ۵ سال وچند ماه می‌تواند باپای پیاده کرهٔ زمین را دور بزند.

البته این محاسبه را خیلی بااحتیاط انجام‌دادیم. به‌این‌ترتیب می‌توان قبول کرد که هرآدم سالمی می‌تواند درسال ۷۲۰۰ کیلرمتر راه برود. یعنی یك آدم ۶۰ ساله توانسته است لااقل فاصلهٔ زمین تا ماه را راه برود: ۳۸۴۰۰۰ کیلومتر.

حالا حساب کنید که یك شخم‌زن در زندگی خود چندبار می‌تواند کرهٔ زمین را دوربزند (شکل۲۵۷).


شکل ۲۵۸

۵. مسافرت به‌ماه با آسانسور

یکی حساب کرده است که آسانسورچی یك آسمان خراش در۱۵ سال به‌اندازهٔ فاصلهٔ بین زمین تا ماه بالامی‌رود. اگربرای کسی که درطبقهٔ دوم یك ساختمان زندگی می‌کند، حساب کنیم که درسال‌چند پله یا چند متر بالا می‌رود از نتیجه‌ای که دربالاگرفته‌شده است تعجب نخواهیم کرد.

فرض کنیم که تا طبقهٔ دوم ۴۰ پله

وجود داشته باشد و کسی که در طبقهٔ دوم زندگی می کند بطور متوسط روزی سه‌بار از آنها بالا برود. به این مقدار تعداد پله‌های یك طبقه را اضافه می کنیم، چون برای کارهای دیگر از قبیل مشایعت مهمانان و غیره نیز احتیاج به‌رفت و آمد است؛ بنابراین روزانه از ۱۴۰ پله باید بالا برود. تعداد پله‌ها برای سال ۵۰۰۰۰ و برای ۴۰ سال ۲۰۰۰۰۰۰ می‌شود که به‌تقریب مساوی ۳۰۰ کیلومتر است. حالا فکر کنید: پستچی، روزنامه‌فروش ویا سایر افرادی که باطبقه‌های مختلف ساختمانها کاردارند درطول زندگی خود چند کیلومتر بالا می‌روند.

۶ـ عددهای لی‌لی‌پود وعددهای غول

بعداز عددهای خیلی بزرگ، به‌سراغ عددهای خیلی کوچك می‌رویم. در مورد این عددها هم، مثل عددهای غول پیکر، باید گفت که ما آنهارا بخوبی نمی‌شناسیم ومقایسهٔ آنها را هم بایکدیگر نمی‌توانیم بطور دقیق انجام دهیم.

به‌عنوان مثال $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ثانیه را انتخاب می کنیم. جزءِ خنده‌داری از زمان، آیا حقیقت ندارد؟ در ۰/۰۰۱ ثانیه چه حادثه‌ای ممکن است پیش آید؟

قطارعادی که درهرساعت ۳۶ کیلومترسرعت دارد، در ۰/۰۰۱ ثانیه ۱ سانتیمترجلو می‌رود، هواپیما هم در ۰/۰۰۱ ثانیه ۱۰ سانتیمتر حرکت می کند. دراین مدت صدا ۳۳ سانتیمتر وگلوله ۷۰ سانتیمتر را پشت سرمی گذارد. زمین در ۰/۰۰۱ ثانیه ۳۰ مترحرکت می کند. برق خیلی کمتر از ۰/۰۰۱ ثانیه طول می کشد، ولی دراین مدت کیلومترها جلو می‌رود.

حالا دیگر، بانمونه‌هایی که آوردیم، این جزء کوچك زمان خنده‌دار نیست وحتی قابل احساس‌است. حال به‌عدد بسیار کوچکتر از آن توجه می کنیم.

در $\frac{1}{1000000}$ ثانیه‌نور به‌اندازهٔ ۳۰۰متر جلومی‌رود. یك‌موج‌نوری‌در $\frac{1}{4000000000000000}$ ثانیه عبور می کند! ولی این جزء بی‌نهایت کوچك زمان «قابل توجه» به‌نظر خواهدآمد، وقتی‌که آنرا باموج شعاع رنگتون مقایسه‌کنیم کـه باعدد ۲۵۰۰۰ میلیون نوسان درثانیه مشخص می‌شود.

* * *

حالا دیگرمی‌دانیم که اگر اندازه‌های یك شیئ را یك‌میلیون برابر کنیم، به‌چه اندازه می‌شود: موی انسان ضخامتی مساوی ۷۰ متر پیدا می کند، طول پشه ۵ کیلومترمی‌شود، مگس به‌طول مساوی ۱۰۰ کیلومتر می‌رسد، قد انسان تا ۱۷۰۰ کیلومتر بلند می‌شود، برج معروف ایفل تقریباً به کرهٔ ماه می‌رسد. اگر اتم را یك میلیون برابر کنیم به چه چیزی تبدیل می‌شود؟ به‌یك نقطهٔ کوچك، کمی کوچکتر از نقطه‌ای کـه این عبارت به آن ختم می‌شود. اتم شبیه یك دستگاه کامل خورشیدی است، که در آن الکترونها حرکت می کنند. اگر اندازه‌های الکترون را بااندازه‌های یك‌غبار مقایسه‌کنیم، می‌توان گفت‌که نسبت الکترون به‌غبار برابراست بانسبت‌غبار به کرهٔ زمین.

* * *

عددهایی را که تاکنون نام بردیم، در واقع وجود داشتند، زیرا آنهارا در مقایسه با عددهای مشهور وروی مواردی از طبیعت انتخاب کردیم. ضمناً آنها را به‌صورت عددهایی بارقمهای مشخص وبا کسری ازواحد معرفی کردیم.

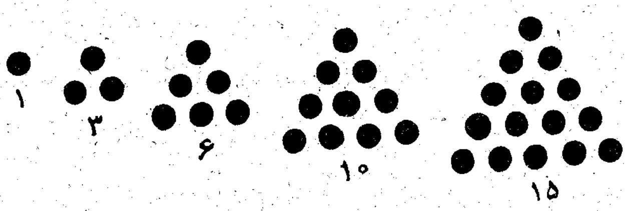
درزیر دوعدد فوق غول وفوق لی‌لی‌پود می‌بینید:

$$\frac{۱}{۹^{۹^{۹}}} \quad , \quad ۹^{۹^{۹}}$$

IV- خاصیتهای جالب عددها وعملهای ریاضی

۱ـ عددهای به‌صورت چند ضلعی

A. عددهای مثلثی. به شکلی که در اینجا داده شده است توجه کنید ویا بهتراست که تعدادی سکه‌های مساوی روی میز قرار دهید. اگر با این سکه‌ها مثلثهایی درست کنید، متوجه می‌شوید که



شکل ۲۵۹

بـرای ساختن مثلثهای بزرگتر باید از قانون ثابتی پیروی کنید. این عددها را عددهای مثلثی گویند.

روش بدست‌آوردن این عددها چنین است (البته بجز روشی که باتجربه ومشاهده بدست می‌آید):

در یک سطر واحدها را می‌نویسیم و در سطر زیر آنها رشتهٔ طبیعی‌عددها را. می‌توان گفت که هرعدد، سطردوم برابراست باعدد بلافاصله قبل از خودش به‌اضافهٔ عدد بالای آن، یعنی:

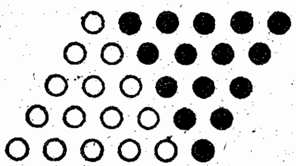
$$۲=۱+۱ \,,\quad ۳=۲+۱ \,,\quad ۴=۳+۱ \,,\quad \ldots$$

حالا اگر درسطرسوم زیر اولین ستون واحد را بنویسیم واز آن ببعد همان قاعدۀبالا را رعایت کنیم، یعنی‌هرعدد سطرسوم راهم مساوی عدد بلافاصله قبل از خودش به اضافۀ عددهای بـالای آن بگیریم، سطر عددهای مثلثی بدست می‌آید:

سطر اول :	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	...
سطر دوم :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	...
عددهای مثلثی :	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	۷۸	...

وقتی کـه سطر عددهای مثلثی را به این ترتیب تشکیل دادیم، چگونه می‌توان عدد مثلثی ردیف n ام را پیدا کرد؟

دوعدد مثلثی را، آنطور که در شکل ۲۶۰ نشان داده شده است، پهلوی هم قرار می‌دهیم. دراین شکل دو مثلث وجود دارد که هر کدام باپنج ردیف ساخته شده‌اند واز آنها متوازی‌الاضلاعی بدست می‌آیدکه در یکی از ضلعهای آن ۵ واحد و در دیگری ۶ واحد وجـود دارد؛ بنابراین متوازی‌الاضلاع شامل ۶×۵ یعنی ۳۰ واحد است. نصف این‌تعداد همـان عدد مثلثی است.



شکل ۲۶۰

با تعمیم این مثال می‌توان ثابت کرد که عدد مثلثی S ، کـه در ردیف n ام قرارگرفته است، چنین می‌شود:

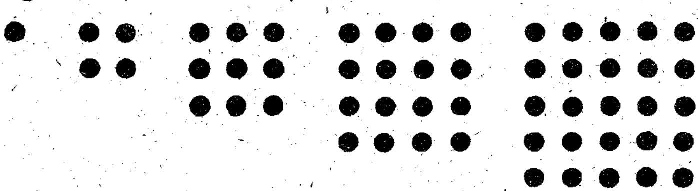
$$S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

هرعدد مثلثی برابر است بانصف حاصلضرب عددی که جای آنرا معین می‌کند در عدد بلافاصلۀ بعداز آن.

از این مطلب یك نتیجهٔ جالب بدست می‌آید: مربع هرعدد طبیعی برابر است بامجموع دو عدد مثلثی متوالی، یعنی مربع هرعدد طبیعی برابر است بامجموع عددمثلثی بلافاصله زیر آن وعدد مثلثی سمت‌چپ آن:

$$۲^۲=۳+۱\ ,\ ۳^۲=۶+۳\ ,\ ۴^۲=۱۰+۶\ ,\ \ldots$$

B. عددهای مربعی. عدد مربعی راهم می‌توان شبیه عددهای مثلثی بدست‌آورد، با این تفاوت که در اینجا در سطر اول بجای واحدها، عددهایی مساوی ۲ می‌نویسیم ودر سطر دوم باشروع از

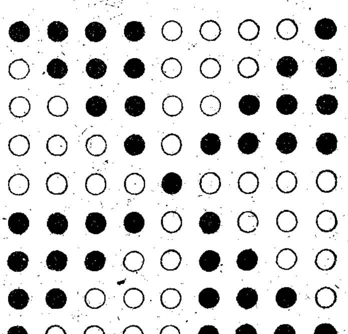


شکل ۲۶۱

واحد عددهای فرد را؛ درسطرسوم باهمان روش محاسبهٔ سطرسوم درعددهای مثلثی، عددهای مربعی رابدست می‌آوریم (شکل ۲۶۱).

سطر اول :	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	...
سطر دوم :	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱	۲۳	۲۵	...
عددهای مربعی :	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴	۱۶۹	...

عددهای مربعی عبارتند از همان مربعهای متوالی رشتهٔ عددهای طبیعی. از آنجا این نتیجهٔ آشنا هم بدست می‌آید که مجموع عددهای فرد متوالی برابر است با مربع تعداد این عددها.



شکل ۲۶۲

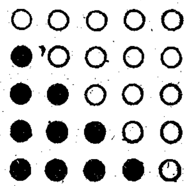
درشکل ۲۶۲ باتصویر این

قضیهٔ مشهور دیوفانت ثابت شده است که اگر یك واحد به‌هشت برابر یك عدد مثلثی اضافه کنیم، همیشه یك مربع کامل خواهد بود.

برای اینکه امتحان کنیم که آیا عدد n مثلثی است یانه، کافی است ببینیم آیا ۱+۸n مربع کامل می‌شود یانه؛ مثلاً

$$8 \times 66 + 1 = 529 = 23^2$$

یعنی ۶۶ یك عدد مثلثی است.

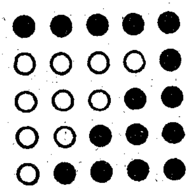


شکل ۲۶۳

قضیهٔ دیگر بیان می‌کند که هرعدد مربع کامل برابر است با مجموع عدد مثلثی همان ردیف و عدد مثلثی قبل از آن (شکل ۲۶۳).

رشتهٔ طبیعی :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲ ...
عددهای مثلثی :	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	۶۶	۷۸ ...
عددهای مربعی :	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	۱۲۱	۱۴۴ ...

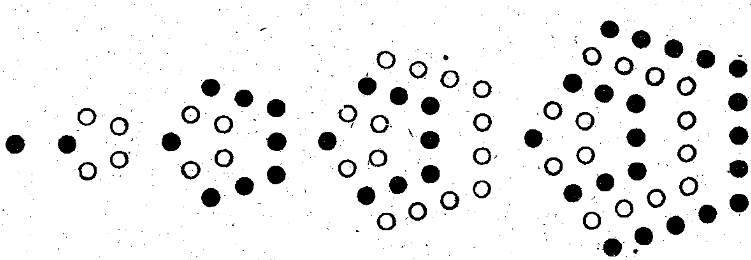
و بالاخره قضیهٔ سوم : هر عدد مربعی برابر است با عدد ردیف آن در رشتهٔ طبیعی عددها به‌اضافهٔ دوبرابرعدد مثلثی ردیف قبل (شکل ۲۶۴).



شکل ۲۶۴

C. عددهای به صورت پنج‌ضلعی.

طریقهٔ بدست‌آوردن این عددها کاملاً شبیه دوحالت قبل است، منتهی دراینجا باید درسطر اول بجای عددهای



شکل ۲۶۵

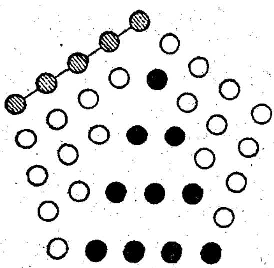
مساوی واحد یا ۲ (که در حالتهای قبل داشتیم)، عددهای مساوی ۳ را قرار دهیم (شکل ۲۶۵):

سطر اول : ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ۳ ...

سطر دوم : ۱ ۴ ۷ ۱۰ ۱۳ ۱۶ ۱۹ ۲۲ ۲۵ ۲۸ ۳۱ ۳۴ ...

عددهای پنج ضلعی : ۱ ۵ ۱۲ ۲۲ ۳۵ ۵۱ ۷۰ ۹۲ ۱۱۷ ۱۴۵ ۱۷۶ ۲۱۰ ...

به مناسبت این عددها، می‌توان حکمهای جالبی را نتیجه گرفت:

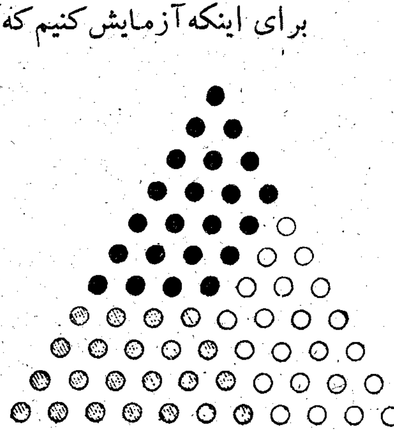

شکل ۲۶۶

۱ـ هر عدد به‌صورت پنج ضلعی برابر است با عدد ردیف آن به اضافهٔ سه برابر عدد مثلثی ردیف قبل از آن (شکل ۲۶۶).

۲ـ عدد به‌صورت پنج ضلعی برابر است با مجموع عدد مثلثی همان ردیف و دو برابر عدد مثلثی ردیف قبل از آن.

۳ـ سه برابر هر عدد به‌صورت پنج ضلعی، یك عدد مثلثی است.

برای اینکه آزمایش کنیم که آیا عددی مثل ۲۲ عدد به‌صورت پنج‌ضلعی است یانه، کافی است آنرا سه برابر کنیم و ببینیم عدد حاصل بین‌عددهای مثلثی وجود دارد یانه (شکل ۲۶۷). از حکم آخر نتیجه می‌شود که یك عدد به‌صورت پنج ضلعی نمی‌تواند به رقمهای ۳، ۴، ۸ و ۹ ختم شود، زیرا باضرب این واحدها


شکل ۲۶۷

در۳، حاصلضرب به ۹، ۲، ۴، و۷ ختم می‌شود وچنین رقمهایی در انتهای هیچ عدد مثلثی وجود ندارد.

۴ـ هر عدد به‌صورت پنج ضلعی برابر است با مربع شمارهٔ ردیف این عدد به‌اضافهٔ مجموع همهٔ عددهای طبیعی ردیفهای قبل ازآن، ویا بطور خلاصه هر عدد به‌صورت پنج ضلعی برابر است با مربع شمارهٔ ردیف‌آن به اضافهٔ عدد مثلثی ردیف قبل از آن،

مثلاً عدد به‌صورت پنج‌ضلعی ردیف نهم، یعنی ۱۱۷ را می‌توان چنین نوشت:

$$۱۱۷=۹^۲+۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸$$

مجموع هشت‌عدد طبیعی‌اولیه مساوی ۳۶ می‌شود واین یك عدد مثلثی است (عدد مثلثی ردیف هشتم)، یعنی:

$$۱۱۷=۹^۲+۳۶$$

عدد به‌صورت پنج ضلعی را می‌توان به کمك جدول زیر هم نشان داد (شکل ۲۶۸):

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

شکل ۲۶۸

$$۱+۲\times۲=۵$$
$$۱+۲+۳\times۳=۱۲$$
$$۱+۲+۳+۴\times۴=۲۲$$
$$۱+۲+۳+۴+۵\times۵=۳۵$$
$$۱+۲+۳+۴+۵+۶\times۶=۵۱$$

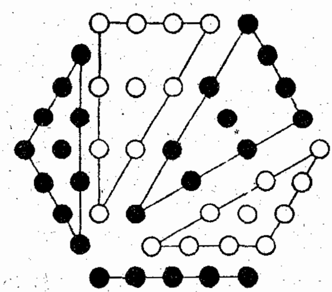
. . . .

وبطور کلی:

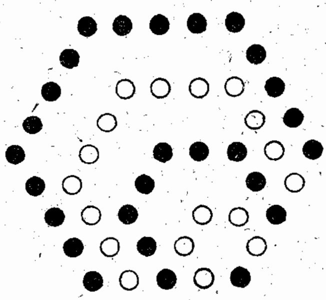
عدد به‌صورت پنج ضلعی $= 1+2+3+\dots+(n-1)+n^2$

D. عددهای به‌صورت شش ضلعی راهم می‌توان با همان روش قبل بدست‌آورد، منتهی در اینجا باید در سطر اول عددهای مساوی ۴ نوشت:

سطر اول:	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴ ...
سطر دوم:	۱	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵	۲۹	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵ ...
عددهای‌شش‌ضلعی:	۱	۶	۱۵	۲۸	۴۵	۶۶	۹۱	۱۲۰	۱۵۳	۱۹۰	۲۳۱	۲۷۶ ...



شکل ۲۶۹



شکل ۲۷۰

۱ـ هر عدد به‌صورت شش ضلعی برابر است با عدد ردیف آن به‌اضافهٔ چهار برابر عدد مثلثی ردیف قبل از آن (شکلهای ۲۶۹ و ۲۷۰).

۲ـ هرعدد به‌صورت شش ضلعی برابر است با عدد مثلثی همان ردیف به اضافهٔ سه برابر عدد مثلثی ردیف قبل.

۳ـ اگرعددهای مثلثی ردیفهای فرد راپشت‌سرهم بنویسیم، رشته عددهای به‌صورت شش ضلعی بدست می‌آید.

E. تعمیم. براساس آنچه که تاکنون گفتیم، می‌توان روش کلی‌تشکیل عددهای به‌شکل k ضلعی ورابطهٔ آنهارا باعددهای‌مثلثی پیدا کرد. عددهای به‌صورت k ضلعی‌را می‌توان باهمان روش قبل بدست‌آورد، به‌شرطی که در سطر اول عددهای مساوی $k-2$ را

قرار دهیم.

حکم I. هر عدد به شکل k ضلعی برابر است با عدد شمارهٔ ردیف آن به اضافهٔ (۲ — k) برابر عدد مثلثی ردیف قبل از آن.

حکم II. هر عدد به‌صورت k ضلعی برابر است با عدد مثلثی همان ردیف به اضافهٔ (۳ — k) برابر عدد مثلثی قبل از آن.

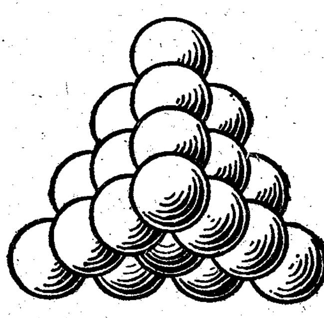
جدول عددهای به‌صورت چند ضلعی

شمارهٔ ردیف عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
عدد مثلثی	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵
عدد مربعی	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰
عدد پنج ضلعی	۱	۵	۱۲	۲۲	۳۵	۵۱	۷۰	۹۲	۱۱۷	۱۴۵
عدد شش ضلعی	۱	۶	۱۵	۲۸	۴۵	۶۶	۹۱	۱۲۰	۱۵۳	۱۹۰
عدد هفت ضلعی	۱	۷	۱۸	۳۴	۵۵	۸۱	۱۱۲	۱۴۸	۱۸۹	۲۳۵
عدد هشت‌ضلعی	۱	۸	۲۱	۴۰	۶۵	۹۶	۱۳۳	۱۷۶	۲۲۵	۲۸۰
عدد نه ضلعی	۱	۹	۲۴	۴۶	۷۵	۱۱۱	۱۵۴	۲۰۴	۲۶۱	۳۲۵
عدد ده ضلعی	۱	۱۰	۲۷	۵۲	۸۵	۱۲۶	۱۷۵	۲۳۲	۲۹۷	۳۷۰

شکل ۲۷۱

۲ـ عددهای هرمی

با ده گلولهٔ شیشه‌ای می‌توانیم یك مثلث درست کنیم. روی این گلوله‌ها قشر دوم را باشش گلوله درست می کنیم، سپس قشر سوم را که مثلثی است باسه گلوله و بالاخره قشر چهارم را که تنها شامل یك گلوله است. به این ترتیب هرمی درست



شکل ۲۷۲

می‌شود که قاعده و وجه‌های آن به‌شکل مثلث‌اند (شکل ۲۷۲). ضلع قاعده مساوی چهار گلوله و هریك از یالهایی‌هم که از رأس هرم می‌گذرد مساوی چهار گلوله است. شبیه این هرم را می‌توان باهر مثلثی که ازیك عدد مثلثی درست شده‌باشد، ساخت. رشته عددهایی به‌این‌ترتیب بدست می‌آید، که برای ساختن این‌نوع هرمها لازم‌اند و عددهای هرمی مثلثی نامیده می‌شود.

این رشته عدد را هم به همان ترتیب عددهای به‌صورت چند ضلعی می‌توان بدست آورد:

عددهای طبیعی :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
عددهای مثلثی :	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۴۵	۵۵	...
عددهای هرمی مثلثی :	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴	۱۲۰	۱۶۵	۲۲۰	...

بابررسی دقیق این جدول می‌توان حکم زیررا که برای‌تشکیل عددهای هرمی مثلثی به‌کار می‌رود، نتیجه‌گرفت:

شش برابر هر عدد مثلثی برابر است با حاصلضرب سه عدد متوالی، که نخستین آنها همان شمارهٔ ردیف این عدد هرمی است. مثلاً:

$$۶\times۱۰=۳\times۴\times۵\ ;\ ۶\times۳۵=۵\times۶\times۷$$

به‌این ترتیب nامین عدد هرمی مثلثی برابراست با:

$$\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

هرمهای مشابهی‌را می‌توان ساخت که‌بجای اینکه قاعدهٔ آنها مثلث باشد، از مربع، پنج ضلعی وغیره استفاده شده باشد وبه این ترتیب عددهای هرمی مربعی، پنج‌ضلعی وغیره را بدست‌آورد.

عددهای هرمی مربعی را می‌توان به‌کمك دوقضیهٔ زیرپیدا

کرد، ضمناً به‌سادگی می‌توان آنهـا را برای دیگر عددهای هرمی عمومیت داد.

۱ـ هر عدد هرمی مربعی را می‌توان بـا جمع کردن عدد هرمی مثلثی همان شمارهٔ ردیف وعدد هرمی مثلثی قبل ازآن بدستِ آورد.

۲ـ باتوجه به‌آنچه هم اکنون گفتیم می‌توان نتیجه‌گرفت که هرعدد هرمی مربعی ردیف n ام برابر است با:

$$\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}+\frac{(n-۱)n(n+۱)}{۶}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

و درحالت کلی: هرعدد هرمی باقاعدهٔ k ضلعی‌برابراست باعدد هرمی مثلثی همان ردیف به‌اضافهٔ $(k-۳)$ برابر عدد هرمی مثلثی قبل ازآن.

۳ـ عددهای کامل

فیثاغورثیهـا به‌عددی کامل می‌گفتند کـه مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های آن (البته‌بجزعدد مفروض) مساوی‌خودآن عددباشد.مثلاً:

$$۶=۱+۲+۳ \; ; \; ۲۸=۱+۲+۴+۷+۱۴$$

برای اینکه بدانیم عددی کامل است یا نه به این ترتیب عمل می‌کنیم: عاملهای اول عدد مفروض را (که با کمک آنها مقسوم‌علیه‌هـای مختلف عدد بدست می‌آید) پیدا می‌کنیم، سپس مجموع توانهای‌مختلف این‌عددهارا درهم ضرب می‌کنیم وازحاصلضرب، خـود عدد مفروض را کـم می‌کنیم. اگر تفـاضل بزرگتر از عدد مفروض بود، این عدد زیادتی دارد؛ اگرتفاضل کمترازعدد مفروض بود، این عدد کمی دارد؛ ودرحالتی که تفاضل مساوی‌عدد مفروض باشد، این عدد کامل است.

مطلب را با مثالهایی روشن کنیم. عدد ۷۲ عبارتست از حاصلضرب ۹×۸. عددهای اولی که بین این مقسوم علیه‌ها وجود دارد ۲ و ۳ است؛ مجموع توانهای این عددها $۲^۳+۲^۲+۲+۱$ و $۳^۲+۳+۱$ درضرب عدد ۱۳×۱۵ یعنی ۱۹۵ را می‌دهند. ۷۲ را از این حاصلضرب کم می‌کنیم به‌عدد۱۲۳ می‌رسیم که از۷۲ بزرگتر است، یعنی عدد ۷۲ عددی است که زیادتی دارد.

عدد ۱۴۷ را درنظرمی گیریم. تجزیه این عدد به‌عاملهای اول چنین است: $۱۴۷=۳\times۷^۲$، محاسبه می کنیم:

$$(۱+۳)(۱+۷+۷^۲)=۴\times۵۷=۲۲۸$$

تفاضل ۱۴۷ — ۲۲۸ یعنی۸۱ را بدست می‌آوریم که از۱۴۷ کوچکتر می‌شود، یعنی عدد ۱۴۷ عددی است که کمی دارد.

حالاعدد۴۹۶ را بررسی می کنیم. این‌یك عدد کامل است، زیرا داریم:

$$۴۹۶=۲^۴\times۳۱؛\ (۱+۲+۴+۸+۱۶)(۱+۳۱)=$$
$$=۳۱\times۳۲=۹۹۲\ ؛\ ۹۹۲-۴۹۶=۴۹۶$$

* * *

اقلیدس در ۳۰۰ سال قبل از میلاد، موضوع عددهای کامل را مورد مطالعه قرار داده بود. از آن زمان تا کنون کار در این باره خیلی کم پیش رفته است: با وجودی که دقت نظر ریاضیدانهای بزرگی چون دکارت واولر به‌عدد کامل جلب شده بود.

نظریهٔ عددهای کامل فرد هنوز به اندازهٔ کافی مورد بررسی قرار نگرفته است، ولی عددهای کامل زوج را می‌توان از رابطهٔ

زیر ، که از زمان اقلیدس شناخته شده است بدست آورد:

$$N=2^{p-1}\cdot(2^p-1)$$

که در آن (2^p-1) باید عددی اول باشد. ولی (2^p-1) تنها وقتی اول است که p عدد اول باشد.

در جدولی که (شکل ۲۷۳) نخستین عددهای کامل زوج داده شده است، بعضی از مقادیر p وجود ندارد، یعنی ۱۱، ۲۳ و ۲۹، زیرا عددهای متناظر آنها $(2^{11}-1)$، $(2^{23}-1)$ و $(2^{29}-1)$ عددهایی اول نیستند و به‌ترتیب بر عددهای ۲۳، ۴۷ و ۲۳۳ قابل قسمت‌اند.

در این جدول ضمناً دیده می‌شود که این عددهای کامل همه به ۶ یا ۸ ختم شده‌اند، می‌توان ثابت کرد که این وضع برای همهٔ عددهای کامل از این نوع وجود دارد.

p	2^{p-1}	2^p-1	عددهای کامل
۲	۲	۳	۶
۳	۴	۷	۲۸
۵	۱۶	۳۱	۴۹۶
۷	۶۴	۱۲۷	۸۱۲۸
۱۳	۴۰۹۶	۸۱۹۱	۳۳۵۵۰۳۳۶
۱۷	۶۵۵۳۶	۱۳۱۰۷۱	۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶
۱۹	۲۶۲۱۴۴	۵۲۴۲۸۵	۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸
۳۱	۱۰۳۷۷۴۱۸۲۴	۲۱۴۷۴۸۳۶۴۷	۲۳۰۵۸۴۳۰۰۸۱۳۹۹۵۲۱۲۸

شکل ۲۷۳

اگر کسی از ما بخواهد عدد کاملی پیدا کنیم که مضرب ۱۶

باشد، می‌توانیم آنرا به‌سادگی از جدول معین کنیم (شکل۲۷۳)، اما بدون جدول هم می‌توان به‌سادگی این مسأله را حل کرد.

عدد مجهول را ۱۶x می گیریم، دراینصورت باید داشته‌باشیم:

$$۱۶x=۱+۲+۴+۸+۱۶+x+۲x+۴x+۸x$$

و از آنجا بدست می آید ۳۱=x ، وعدد مجهول مساوی ۴۹۶ می‌شود.

•

بعضی‌ازریاضیدانهای یونانی، عددکامل را برای نوع دیگری از عددها نام گذاشته‌اند و به عددی کامل می گفتند که مساوی حاصلضرب مقسوم‌علیه خود باشد؛ مثلاً:

$$۸=۱\times۲\times۴\ ;\ ۱۰=۱\times۲\times۵\ ;\ ۱۴=۱\times۲\times۷$$

عدد ۶ را می‌توان کامل‌ترین عددها دانست، زیرا به‌هردومعنا یك عددکامل است:

$$۶=۱+۲+۳\ ,\ ۶=۱\times۲\times۳$$

۴ـ عددهای متحابه

وقتی که از فیثاغورث پرسیدند «دوست یعنی‌چه؟» جواب داد: «دوست یعنی دومین من، دوستی یعنی رابطهٔ عددهای ۲۲۰ و۲۸۴». احتمالاً ازاینجا باشد که نام غیرعادی «عددهای متحابه» بوجودآمده است. ولی چه خصوصیتی بین دوعدد متحابه (دوست) وجوددارد؟

دوعدد A و B را متحابه گویند وقتی که مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد A برابرباشد باعدد B وبرعکس مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد B برابرباشد با عدد A. البته در این محاسبه خود عدد را به ـ

عنوان مقسوم‌علیهی از آن نباید به‌حساب آورد.

۲۲۰  **۲۸۴**

از این «عددهای دوست»، طبق نمونهٔ فیثاغورث می‌توان از ۲۲۰ و ۲۸۴ نام برد. درحقیقت داریم:

$$۲۲۰=۱+۲+۴+۷۱+۱۴۲$$

یعنی ۲۲۰ برابراست با مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۸۴. درعین‌حال:

$$۲۸۴=۱+۲+۴+۵+۱۰+۱۱+۲۰+۲۲+۴۴+ +۵۵+۱۱۰$$

یعنی۲۸۴ هم مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های‌عدد ۲۲۰است.

رابطهٔ کلی‌برای پیداکردن‌عددهای متحابه به‌این‌صورت‌است:

$$A=۲^{n}a\ ;\ B=۲^{n}bc$$

که در آن a، b و c عددهای اولی به‌این صورت‌اند:

$$a=(۲^{k}+۱)^{۲}\times ۲^{۲n-k}-۱\ ;\ b=۲^{n}-۱+۲^{n-k};$$
$$c=۲^{n}-۱+۲^{n+k}$$

اگر $k=۱$ بگیریم، نخستین ردیف این عددها بدست می‌آید:

$$a=۳^{۲}\times ۲^{۲n-۱}-۱\ ;\ b=۳\times ۲^{n-۱}-۱\ ;$$
$$c=۳\times ۲^{n}-۱$$

برای عددهای متحابه هم، مثل عددهای کامل، می‌توان جدولی تشکیل داد، یا دقیق‌ترمی‌توان رشته جدولهایی برای مقادیر مختلف k درست کرد. برای $k=۱$ داریم (شکل ۲۷۴):

n	a	b	c	A	B
۲	۷۱	۵	۱۱	۲۸۴	۲۲۰
۴	۱۱۵۱	۲۳	۴۷	۱۸۴۱۶	۱۷۲۹۶
۷	۷۳۷۲۷	۱۹۱	۳۸۳	۹۴۳۷۰۵۶	۹۳۶۳۵۸۴

شکل ۲۷۴

علاوه براین جدول که تشکیل آن مستلزم کار زیاد است (و بخصوص اگر k را مساوی ۵، ۷، ۹ و... بگیریم)، در اینجا چند زوج از عددهای متحابه را می‌آوریم:

(۲۶۲۰ , ۲۹۲۴) ; (۵۰۲۰ , ۵۵۶۴) ; (۶۲۳۲ , ۶۳۶۸) ;
(۱۰۷۴۴ , ۱۰۸۵۶) ; (۱۷۲۹۶ , ۱۸۴۱۶) ; (۶۳۰۲۰ , ۷۶۰۸۴)
(۶۶۹۲۸ , ۶۶۹۹۲)

۵ـ حالتهای جالب تجزیهٔ مکعبها

مکعب عددهای رشتهٔ طبیعی را می‌توان به صورت مجموع جمله‌های متوالی تصاعدهای بسیار جالبی نشان داد:

$$۱ = ۱^۳ = ۱$$
$$۲+۶ = ۲^۳ = ۳+۵$$
$$۳+۹+۱۵ = ۳^۳ = ۶+۹+۱۲$$
$$۴+۱۲+۲۰+۲۸ = ۴^۳ = ۱۰+۱۴+۱۸+۲۲$$
$$۵+۱۵+۲۵+۳۵+۴۵ = ۵^۳ = ۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵$$

. . . .

جمله‌های اول تصاعدهایی که در سمت چپ قرار دارند، عبارتند از رشتهٔ طبیعی عددها: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...؛ جمله‌های اول تصاعد-

هایی که در سمت راست قرار دارند، عبارتند از عددهای مثلثی متوالی: ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...؛ جمله‌های آخر تصاعدهای سمت چپ رشته عددهای به‌شکل شش ضلعی وجمله‌های آخر تصاعدهای سمت راست رشته عددهای به‌شکل پنج ضلعی را تشکیل می‌دهند. قدر نسبتهای تصاعدهای سمت‌راست، باشروع ازسطردوم، عبارتند ازرشتهٔ طبیعی عددها: ۲، ۳، ۴، ۵، ...، قدرنسبتهای تصاعدهای سمت چپ درست دو برابر قدر نسبتهای تصاعدهای سمت راست هستند.

۶ـ رازهای عددهای دوری

در این عددها رازهای زیادی نهفته است. مثلاً اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ را در عددهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ (ونه در ۷) ضرب کنیم، درحاصلضربها عددهایی بدست می‌آید که رقمهای هریك تبدیل دوری رقمهای خود عدد ۱۴۲۸۵۷ است، به‌این ترتیب:

$$۲\times ۱۴۲۸۵۷=۲۸۵۷۱۴$$
$$۳\times ۱۴۲۸۵۷=۴۲۸۵۷۱$$
$$۴\times ۱۴۲۸۵۷=۵۷۱۴۲۸$$

این رشتهٔ رازگونهٔ ضربها در۷ قطع می‌شود، چون درآنجا داریم:

$$۷\times ۱۴۲۸۵۷=۹۹۹۹۹۹$$

ولی ازهمین ضرب نتیجه می‌شودکه عدد ۱۴۲۸۵۷ عبارتست از یك دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$، وقتی‌که آنرا به‌کسر دهدهی تبدیل می‌کنیم. همهٔ خاصیتهایی‌که در مورد عدد ۱۴۲۸۵۷ وجود دارد، برای هر عددی هم که دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{p}$ باشد درست است،

بشرطی که p عددی اول و این دورهٔ گردش دارای (۱ — p) رقم باشد.

مثلاً کسر $\frac{۱}{۱۷}$ هم یك عدد دوری به‌ما می‌دهد:

$$\frac{۱}{۱۷}=۰/(۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷)$$

اگر این دورهٔ گردش را ω بنامیم داریم:

$$۱\times\omega=۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷$$
$$۲\times\omega=۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴$$
$$۳\times\omega=۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱$$

. . . .

. . . .

$$۱۵\times\omega=۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵$$
$$۱۶\times\omega=۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲$$
$$۱۷\times\omega=۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹$$

کسر زیرهم دارای همین خاصیت است:

$$\frac{۱}{۲۹}=۰/(۰۳۴۴۸۲۷۵۸۶۲۰۶۸۹۶۵۵۱۷۲۴۱۳۷۹۳۱)$$

باامتیازترین این عددها ۱۹۱۳ است (که عددی اول است). دورهٔ گردش عدد دهدهی که با این مخرج بدست می‌آید از ۱۹۱۲ رقم تشکیل شده است، به‌این ترتیب:

$$\frac{۱}{۱۹۱۳}=۰/(۰۰۰۵۲۲۷۳۹۱۵۳۱\ \dots\ ۹۰۱۲۰۲۳)$$

. . . .

. . . .

$$\frac{۱۹۱۲}{۱۹۱۳}=۰/(۹۹۹۴۷۷۲۶۰۸۴۶۸\ \dots\ ۰۹۸۷۹۷۶)$$

اگر کسی قبول ندارد، می‌تواند آزمایش کند!

* * *

می‌توان ثابت کرد که هر کسر سادهٔ به‌صورت $\frac{۱}{p}$، که در آن p عددی است اول، ضمن تبدیل به کسر دهدهی، دورهٔ گردشی می‌دهد که تعداد رقمهای آن مقسوم علیهی از عدد $(p-۱)$ است.

روشن است که در تقسیم همیشه باقیمانده از مقسوم‌علیه کوچکتر است، بنابراین ضمن تقسیم واحد بر p، برای بدست آوردن کسر دهدهی، تعداد باقیمانده‌ها حداکثر مساوی $p-۱$ است و از آن به‌بعد گردش شروع می‌شود. مثلاً برای کسر $\frac{۱}{۷}$ به‌ترتیب بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۷}=۰/۱\frac{۳}{۷}=۰/۱۴\frac{۲}{۷}=۰/۱۴۲\frac{۶}{۷}=۰/۱۴۲۸\frac{۴}{۷}=۰/۱۴۲۸۵\frac{۵}{۷}=$$

$$=۰/۱۴۲۸۵۷\frac{۱}{۷}$$

ودر این لحظه صورت کسر تکرار شده است.

از همین‌جا این نتیجه هم گرفته می‌شود که اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ را به‌ترتیب در عددهای ۳، ۲، ۶، ۴، ۵ ضرب کنیم، درحاصلضرب همان دورهٔ گردش بدست می‌آید که به‌ترتیب از رقم دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم شروع شده است. اگر در تبدیل کسر $\frac{۱}{p}$ (p عددی‌است اول) به‌کسر دهدهی، برای دورهٔ گردش $\frac{p-۱}{۲}$ رقم بدست آید، دراینصورت بانوع دیگری ازعددهای دوری سروکار داریم. در این مورد ازضرب این دورهٔ گردش در عددهای از ۱ تا $p-۱$ به‌دو گروه عددهای دوری برخورد می‌کنیم.

بهتر است این مطلب را بامثالی روشن کنیم:

$$\frac{۱}{۱۳}=۰/(۰۷۶۹۲۳)$$

از ضرب دورهٔ ۰۷۶۹۲۳=ω در عددهای ۱، ۲، ...، ۱۲ دونوع عددهای دوری بدست می‌آوریم:

۲×ω=۱۵۳۸۴۶	۱×ω=۰۷۶۹۲۳
۵×ω=۳۸۴۶۱۵	۳×ω=۲۳۰۷۶۹
۶×ω=۴۶۱۵۳۸	۴×ω=۳۰۷۶۹۲
۷×ω=۵۳۸۴۶۱	۹×ω=۶۹۲۳۰۷
۸×ω=۶۱۵۳۸۴	۱۰×ω=۷۶۹۲۳۰
۱۱×ω=۸۴۶۱۵۳	۱۲×ω=۹۲۳۰۷۶

دوباره به‌عدد ۱۴۲۸۵۷ برمی‌گردیم ودربارهٔ خاصیت دیگری ازآن گفتگو می‌کنیم که هنوز به‌آن توجه نکرده‌ایم.

اگر دونیمهٔ عدد ۱۴۲۸۵۷ راباهم جمع کنیم، چنین می‌شود:

$$۱۴۲+۸۵۷=۹۹۹$$

درمورد همهٔ عددهای دوری به‌این‌خاصیت برخورد می‌کنیم، مثلاً اگر عدد ۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ (دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۱۷}$ ضمن تبدیل آن به‌کسر دهدهی) را به‌دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم، مجموع آنها چنین می‌شود:

$$\begin{array}{r} ۰۵۸۸۲۳۵۲\ + \\ ۹۴۱۱۷۶۴۷ \\ \hline ۹۹۹۹۹۹۹۹ \end{array}$$

عددهای دوری نوع دوم هم گاهی این خاصیت را دارند. برای دورهٔ ۰۷۶۹۲۳ (که از تبدیل کسر $\frac{۱}{۱۳}$ به کسر دهدهی بدست

می آید) داریم:

$$۰۷۶+۹۲۳=۹۹۹$$

ولی در مورد دورهٔ گردش کسر

$$\frac{۱}{۳۱}=۰/(۰۳۲۲۵۸۰۶۴۵۱۶۱۲۹)$$

دیگر نمی‌توان ازاین خاصیت صحبت کرد.

براساس این مطالب، می‌توان تبدیل کسرسادهٔ $\frac{1}{p}$ (p عددی است اول) به کسردهدهی راخیلی ساده‌تر انجام داد. وقتی که ضمن تقسیم بر p چند رقم دورهٔ گردش رابدست آوردیم، اگر درباقیمانده عدد نسبتاً کوچکی پیداشود، می‌توان بقیهٔ رقمهارا ازضرب خارج‌قسمت قبلی در باقیمانده پیدا کرد.

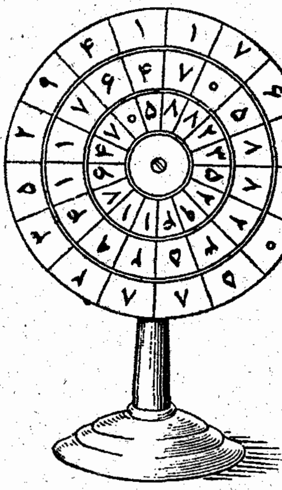
نمونه‌ای می‌تواند این موضوع را به‌خوبی روشن کند.

فرض کنیدکه بخواهیم کسر سادهٔ $\frac{۱}{۹۷}$ را به کسر دهدهی تبدیل کنیم. از تقسیم صورت برمخرج مثلاً رقمهای ۰/۰۱۰۳۰۹۲۷۸۳۵ و باقیماندهٔ ۵ بدست می آید، یعنی:

$$\frac{۱}{۹۷}=۰/۰۱۰۳۰۹۲۷۸۳۵\frac{۵}{۹۷}$$

روشن است که دنبالهٔ رقمهای دهدهی ازتبدیل کسر $\frac{۵}{۹۷}$ بدست می‌آیدکه عبارتست از $\frac{۱}{۹۷}\times ۵$. بنابراین بجای ادامهٔ تقسیم، می‌توان رقمهای بدست آمده را در ۵ ضرب کرد ویا بهتر ازآن، آنها را بر۲ تقسیم کرد وبه‌این ترتیب ۱۱ رقم دیگر دورهٔ گردش رابدست آورد.*

*) والبته روشن است که برای ادامهٔ تقسیم باید باقیماندهٔ جدید را هم ۵ برابر یعنی مساوی ۲۵ درنظرگرفت (مترجم).



شکل ۲۷۵

باتوجه به‌عددهای دوری، می‌توان صفحه‌ای با سه حلقهٔ دایره‌ای متحرك ساخت، که نوعی جادویی باشد. روی هریك از حلقه‌های متحرك این عدد را می‌نویسیم (شکل ۲۷۵):

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷

دو حلقهٔ اول به‌هر نحوی قرارگرفته باشند، می‌توان حلقهٔ سوم را طوری چرخاند که مجموع یا تفاضل عددهای دوحلقهٔ اول مساوی عدد حلقهٔ سوم شود:

۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸ −
۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷
―――――――――
۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱

۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷ +
۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸
―――――――――
۲۹۴۱۱۷۶۴۷۰۵۸۸۲۳۵

۷ـ رابطه‌هایی برای پیداکردن عددهای اول

بزرگترین ریاضیدانها از همهٔ ملتها ودرتمام تاریخ، بسیاری از نیروی خودرا صرف این کردند که قاعده‌ای کلی برای تعیین عددهای اول پیدا کنند. ولی این تلاشها نتوانست موفقیتی بدست آورد. با وجود این بسیاری ازدانشمندان به‌جوابی رسیدند که اگرچه کلی نیست، لااقل جالب و دیدنی است.

مثلاً لژاندر رابطهٔ $2x^2+29$ را پیدا کرد که به‌ازای همهٔ عددهای

از $x=0$ تا $x=28$، یعنی برای ۲۹ مقدار x ، عددی اول می‌دهد.

اولر پیدا کرد که حاصل عبارت x^2+x+41 به ازای همهٔ عددهای از $x=0$ تا $x=39$ عددی اول است، یعنی ۴۰ عدد اول بدست می‌دهد.

اسکوت امریکایی در رابطهٔ اولر x را به $x-40$ تغییر داد و عبارت $x^2-79x+1601$ را بدست آورد، که به ازای $x=0,1,2,\ldots,39$ عددهای اول می‌دهد: به ازای $x=0$ می‌دهد ۱۶۰۱، به‌ازای $x=1$ می‌دهد ۱۵۲۳، به‌ازای $x=2$ می‌دهد ۱۴۴۷ وبالاخره به‌ازای $x=39$ مساوی ۴۱ می‌شود. به‌ازای بقیهٔ مقادیر $x=40, 41, \ldots, 79$ این عبارت مساوی همین عددهای اول، منتهی ازجهت عکس می‌شود. به‌ازای $x=80$ دیگر بدست می‌آید:

$$80^2-79\times 80+1601=41^2$$

که عددی مرکب است.

رابطهٔ دیگری هم ازاین قبیل وجود دارد:

$$N_m=\frac{2^m+1}{3}$$

که اگر به‌جای m عددهای فردمتوالی قراردهیم، تاجایی عددهای اول می‌دهد:

$$N_3=3,\ N_5=11,\ N_7=43,\ N_9=683,\ N_{11}=2731,$$
$$N_{13}=43691,\quad N_{15}=174761,\quad N_{17}=2796203,$$
$$N_{19}=178956771,\ N_{21}=715827883,\ldots$$

ولی به‌ازای $n=37$ بدست می‌آید: $N_{37}=45812984491$ که عبارتست از حاصلضرب دوعدد ۱۷۷۷ و ۲۵۷۸۱۰۸۳.

۸ـ بعضی نشانه‌های جالب قابلیت تقسیم

قبل از آنکه به‌نشانه‌های ناآشنای قابلیت تقسیم بپردازیم، به‌اختصار نشانه‌های آشنا را که در کتابهای درسی دیده‌ایم بـه‌خاطر بیاوریم. براساس قابلیت تقسیم بر ۳، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۲۷، ۳۳، ۳۷، ۷۷، ۹۱، ۹۹، ۱۰۱، ۱۴۳، ۹۹۹ بسیاری مسأله‌های معمـایی روی عددها ویا نتیجهٔ عملها درست شده است.

دربارهٔ این معماها، که قابل شمارش نیستند، درجای دیگری به‌اندازهٔ کافی صحبت خواهیم کرد. به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که حتماً دربارهٔ لطیفه‌هایی ازاین قبیل، براساس نشانه‌هـای نا آشنای قابلیت تقسیم کـه در پایان این بند آمده است، فکر کند و خود را بیازماید. برای این منظور نه تنهـا مثالهایی از حساب، بلکه بعضی انواع حل جبری این پرسشها را نیزتوصیه می‌کنیم. ولی قبل‌از هر-چیز نشانه‌های آشنای قابلیت تقسیم را به‌خاطر بیاوریم.

عددی بر۳ قابل‌قسمت است که مجموع رقمهای‌آن بر۳قابل قسمت باشد، همچنین عددی بر ۹ قابـل قسمت است کـه مجموع رقمهای آن بر۹ قابل‌قسمت باشد.

عددی بر۱۱ قابل قسمت است که اختلاف مجموع رقمهای ردیف زوج (ازطرف راست) ومجموع رقمهای ردیف فردمساوی ۰ یا مضربی از۱۱ باشد.

مثلاً درمورد عدد ۳۴۵۷۹۶ بدست می‌آید:

$$6+7+4=17,\quad 9+5+3=17;\quad 17-17=0$$

یعنی عدد ۳۴۵۷۹۶ بر۱۱ قابل قسمت است.

به‌همین ترتیب درمورد عدد ۹۲۶۱۷۲۹۴ داریم:

۴+۲+۱+۲=۹، ۹+۷+۶+۹=۳۱ ؛ ۳۱−۹=۲۲

وچون ۲۲ بر ۱۱ قابل قسمت است، عدد ۹۲۶۱۷۲۹۴ هم بر ۱۱ قابل قسمت است.

عددی بر ۹۹، ۳۳ یا ۱۱ قابل قسمت است. وقتی که مجموع عددهای دورقمی که ازعدد مفروض (ازراست به‌چپ) جدا می‌شود بر ۹۹، ۳۳ یا ۱۱ قابل قسمت باشد.

مثلاً برای عدد ۲۰۳۷۳۵۴ داریم:

۵۴+۷۳+۰۳+۲=۱۳۲

وچون ۱۳۲ بر ۱۱ و۳۳ قابل قسمت است، عدد ۲۰۳۷۳۵۴ هم براین دوعدد قابل قسمت است.

به‌همین ترتیب برای عدد ۶۹۱۸۰۲۱ داریم:

۲۱+۸۰+۹۱+۶=۱۹۸

وچون ۱۹۸ بر ۱۱، ۳۳ و ۹۹ قابل قسمت است، ۶۹۱۸۰۲۱ هم بر این عددها قابل قسمت است.

عددی بر ۱۰۱ قابل قسمت است که اختلاف بین مجموع عددهای دورقمی ردیف‌زوج (ازراست به‌چپ) ومجموع عددهای دورقمی ردیف فرد، مضربی از ۱۰۱ باشد.

مثلاً برای عدد ۲۶۸۴۰۵۷۸۳ داریم:

۸۳+۴۰+۲=۱۲۵، ۵۷+۶۸=۱۲۵ ؛ ۱۲۵−۱۲۵=۰

عددی بر ۹۹۹، ۳۳۳، ۱۱۱، ۳۷ یا ۲۷ قابل قسمت است که مجموع عددهای سه رقمی تشکیل‌دهندهٔ عدداصلی (ازجهت راست) مضربی

از ۹۹۹، ۳۳۳، ۱۱۱، ۳۷ یا ۲۷ باشند.

مثلاً برای عدد ۷۷۶۲۲۳ داریم:

۲۲۳+۷۷۶=۹۹۹،

۹۹۹=۳×۳۳۳=۹×۱۱۱=۲۷×۳۷

و بنابراین عدد مفروض بر۹۹۹، ۳۳۳، ۱۱۱، ۳۷ و ۲۷ قابل‌قسمت است.

۹ـ ساده‌ترین‌ها برای تقسیم وضرب عددها

ساده‌تر از همه تقسیم ۳۵ بر۷ است؛ کافی است رقم ۳ را از سمت چپ عدد حذف کنیم. آیا عددهای دیگری از این قبیل وجود دارد؟

در بعضی حالتها ضرب در ۷ هم به‌همین اندازه ساده است: کافی است رقم آخرعدد را به ابتدای آن منتقل کنیم. ولی بخاطر سپردن این عدد برای ضرب در ۷ خیلی ساده نیست. این عدد چنین است: ۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹۷ ودرحقیقت:

۷×۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹۷=
=۷۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹

دراینجا دوعدد دیگرهم که از نظر ضرب در۷ خیلی ساده‌اند می‌آوریم:

۱۱۵۹۴۲۰۲۸۹۸۵۵۰۷۲۴۶۳۷۶۸،
۱۳۰۴۳۴۷۸۲۶۰۸۶۹۵۶۵۲۱۷۳۹

* * *

کوشش می‌کنیم عددی پیدا کنیم که باانتقال رقم آخر به قبل

از رقم اول، سه برابر شود.

باروش جبری این عدد به کمك معادلهٔ زیر پیدا می‌شود:

$$۳x+a\times ۱۰^{n-۱}+\frac{x-a}{۱۰}$$

که در آن x عبارتست از عددمجهول، a رقم آخرو n تعداد رقمهای آن. از این معادله بدست می آید:

$$x=\frac{۱۰^{n}-۱}{۲۹}\cdot a=\frac{\overbrace{۹۹۹...۹}^{n \text{ رقم}}}{۲۹}\cdot a$$

از اینجا نتیجه می‌شود که باید عددی پیدا کرد که با n رقم ۹ نوشته شده باشد و بر ۲۹ هم بدون باقیمانده قابل قسمت باشد. با انجام تقسیم، این عدد «کوچك» بدست می آید:

$$x=۳۴۴۸۲۷۵۸۶۲۰۶۸۹۶۵۵۱۷۲۴۱۳۷۹۳۱a$$

ضمناً معلوم است که $n=۲۸$.

حالا باید مقدار a را پیدا کنیم. تجربه نشان می‌دهد که a نمی‌تواند کوچکتر از ۳ باشد. بنابراین a برابر است با یکی از عددهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، یا ۹.

به‌این ترتیب برای عدد مجهول یکباره هفت جواب بدست می‌آید. اگر حوصله داشته باشیم بازهم می‌توان عددهای بیشتری با این خاصیت نوشت.

اگر یکی از این عددها را انتخاب کنیم، مثلاً (به ازای $a=۴$):

۱۳۷۹۰۰۰۵۵۱۷۲۴

و آنرا ۲، ۳، یا ۴ مرتبه به‌دنبال هم بنویسیم، دوباره عددی باهمین

خاصیت بدست می‌آید، مثلاً

۱۳۷۹ ... ۵۵۱۷۲۴۱۳۷۹ ... ۵۵۱۷۲۴

همچنین می‌توان این رشته عددها را به وسیلهٔ صفرهایی از هم جدا کرد، مثلاً

۱۳۷۹...۱۷۲۴۰۰۰۱۳۷۹...۱۷۲۴۰۱۳۷۹...۱۷۲۴۰۰۰۱۳۷۹ ... ۱۷۲۴ ...

و در این حالت هم کافی است رقم آخر ۴ را به‌ابتدای عدد بیاوریم تاعدد مفروض سه برابر شود.

۱۰ـ چند بررسی جالب

آیا می‌توان معلوم کرد که عدد $۷۷۷^{۷۷۷}$ با چه رقمی شروع و باچه رقمی ختم می‌شود؟

البته پرسش دشواری است، ولی ناامید نباید شد. آنچه که باید برای حل آن انجام داد چنین است:

ابتدا از جدول لگاریتم پنج رقمی پیدا می‌کنیم:

$$\log ۷۷۷ = ۲/۸۹۰۴۲ + \epsilon, \quad (\epsilon < ۰/۰۰۰۰۰۵)$$

از آنجا

$$۲/۸۹۰۴۱۵ < \log ۷۷۷ < ۲/۸۹۰۴۲۵$$

بنابراین

$$۷۷۷ \times ۲/۸۹۰۴۱۵ < \log ۷۷۷^{۷۷۷} < ۷۷۷ \times ۲/۸۹۰۴۲۵$$

یعنی

$$۲۲۴۵/۸۵۲۴ < \log ۷۷۷^{۷۷۷} < ۲۲۴۵/۸۶۰۳$$

عدد مجهول را باید به کمک مانتیسهای ۰/۸۵۲۴ و ۰/۸۶۰۳

پیدا کرد؛ برای این مانتیسها دوعدد بدست می‌آید که هردو با ۷ شروع می‌شوند. بنابراین عدد $۷۷۷^{۷۷۷}$ هم با عدد ۷ شروع می‌شود. رقم آخر هم مساوی ۷ است، زیرا عددهای ۷۷۷، $۷۷۷^{۲}$، $۷۷۷^{۳}$، $۷۷۷^{۴}$ به‌ترتیب به رقمهای ۷، ۹، ۳ و ۱ ختم می‌شوند. از این ببعد رقم آخر توانهای ۷۷۷ تکرار همین عددهاست و چون $۷۷۷=۴\times۱۹۴+۱$، بنابراین $۷۷۷^{۷۷۷}$ و $۷۷۷^{۱}$ هردو به‌رقم ۷ ختم می‌شوند.

* * *

می‌خواهیم تعداد رقمهایی را پیدا کنیم که برای نوشتن همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا N لازم است.

به‌عنوان مثال $N=۳۴۱$ فرض می‌کنیم.

به‌جدول کنارتوجه می‌کنیم که از رقمها وستاره‌ها درست شده است. در این جدول رویهم به اندازهٔ $۳\times(۳۴۱+۱)$ علامت (رقم وستاره) وجود دارد.

می‌بینید که درستون اول سمت راست‌یك ستاره، در ستون دوم ۱۰ ستاره ودر ستون سوم ۱۰۰ یعنی $۱۰^{۲}$ ستاره قرار دارد. درنتیجه برای تعداد رقمهای عددهای طبیعی از ۱ تا ۳۴۱ داریم:

$$(۳۴۱+۱)\times۳-(۱۰^{۲}+۱۰+۱)=$$
$$=(۳۴۱+۱)\times۳-۱۱۱$$

***
**۱
**۲
**۳
**۴
**۵
**۶
**۷
**۸
**۹
*۱۰
*۱۱
...
*۹۹
۱۰۰
۱۰۱
...
۳۴۰
۳۴۱

در حالت کلی، اگر فرض کنیم که عدد N دارای n رقم باشد، تعداد رقمهایی که برای نوشتن عددهای طبیعی از ۱

تا N لازم است، با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$(N+۱)\cdot n-\underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{n\ \text{رقم}}$$

یا

$$(N+۱)\cdot n-\frac{۱۰^n-۱}{۹}$$

مثلاً تعداد رقمهایی که برای نوشتن عددهای طبیعی از ۱ تا ۷۶۵۴ لازم است چنین می‌شود:

$$(۷۶۵۴+۱)\times۴-۱۱۱۱=۲۹۵۰۹\quad(\text{رقم})$$

* * *

برای نوشتن رشته عددهای طبیعی از ۱ تا ۹...۹۹۹۹۹ چند رقم لازم است؟

تعداد رقمهای لازم برای مرحله‌های مختلف چنین است:

۱×۹	$۱\times۹\times۱۰^۰=$	: یك رقمیها
۲۰×۹	$۲\times۹\times۱۰^۱=$	: دو رقمیها
۳۰۰×۹	$۳\times۹\times۱۰^۲=$	: سه رقمیها
۴۰۰۰×۹	$۴\times۹\times۱۰^۳=$	: چهار رقمیها
۵۰۰۰۰×۹	$۵\times۹\times۱۰^۴=$	: پنج رقمیها

. . . .

بنابراین برای اینکه عددهای طبیعی را از ۱ تا ۹... ۹۹۹۹۹ بنویسیم، به‌اندازهٔ ۹ × (... ۵۴۳۲۱) رقم لازم است.

عدد (... ۵۴۳۲۲) دارای همان تعداد رقمهای ۹ ... ۹۹۹۹۹ است و رقمهای آن از راست به چپ همان رشتهٔ عددهای طبیعی با شروع از واحد است.

مثلاً برای نوشتن عددهای از ۱ تا ۹۹۹۹۹۹ به‌اندازهٔ

۶۵۴۳۲۱ × ۹ = ۵۸۸۸۸۸۹

رقم لازم است.

یادآوری می‌کنیم کـه این مسأله را هم می‌توانستیم به کمك رابطه‌ای که قبلاً پیدا کردیم حل کنیم.

۱۱ـ ضرب متقاطع

این روش ضرب یکی ازجالب‌ترین روشها برای ضرب عددهای سه‌رقمی در یکدیگر است، که بسیاری از حسابدارهای معروف با موفقیت از آن استفاده می‌کرده‌اند. یك مثال برای آشنا شدن بااین روش کافی است.

فرض می‌کنیم که بخواهیم دوعدد ۴۷۱ و۱۳۵ را درهم ضرب کنیم.

ابتدا یکان دوعدد را درهم ضرب می‌کنیم، یکان حاصلضرب بدست می‌آید: ۱ × ۵ = ۵. سپس به‌ترتیب دهگان عدداول‌را دریکان عدد دوم ودهگان عدد دوم‌را دریکان عدداول ضرب وحاصلضربها راباهم جمع می‌کنیم: ۷ × ۵ + ۱ × ۳ = ۳۸ عدد ۸ دهگان حاصل‌ـ ضرب است و۳ باید به‌سدگان منتقل شود. سپس یکانهای هرعدد را درسدگان عدد دیگر ودو دهگان را درهم ضرب وحاصلضربها را باهم جمع می‌کنیم: ۴ × ۵ + ۷ × ۳ + ۱ × ۱ = ۴۲؛ ۳ راکه ازعمل قبل بدست آمده بود به‌این مجموع می‌افزاییم: ۴۲ + ۳ = ۴۵. رقم ۵ سدگان حاصلضرب است و ۴ به هـزارگان منتقل می‌شود. بعد

دهگان هرعدد را درسدگان عدد دیگرضرب وباهم جمع می‌کنیم: ۱۹=۱×۷+۳×۴؛ ۴ راکه از قبل مانده بود به این حاصلجمع اضافه می‌کنیم: ۲۳=۴+۱۹. رقم ۳ هزارگان است و ۲ به ده هزارگان منتقل می‌شود. بالاخره سدگان دوعدد را درهم ضرب و با ۲ جمع می‌کنیم: ۶=۲+۱×۴ که همان رقم ده هزارگان است.

این عملها را می‌توان به‌صورت طرح زیر نشان داد:

۴۷۱	۴۷۱	۴۷۱	۴۷۱	۴۷۱
|	×	>|<	×	|
۱۳۵	۱۳۵	۱۳۵	۱۳۵	۱۳۵
۵	۳|۸۵	۴|۵۸۵	۲|۳۵۸۵	۶۳۵۸۵

۱۲ـ روش ساده کردن ضرب بعضی عددها

اگر بخواهیم دوعدد نزدیك به ۱۰۰ را درهم ضرب کنیم، می‌توان به‌کمك به اصطلاح متممهای آنها عمل ضرب را خیلی ساده کرد.

فرض کنید منظور ضرب دو عدد ۹۴ و ۹۷ در یکدیگر باشد. متممهای این دوعدد تا ۱۰۰ به‌ترتیب مساوی ۶ و ۳ است.

برای بدست آوردن نخستین دو رقم حاصلضرب (از طرف چپ) باید ازهرعامل ضرب متمم دیگری را کم کنیم:

۹۴−۳=۹۷−۶=۹۱

دو رقم دیگر حاصلضرب از ضرب دو متمم بدست می‌آید: ۱۸=۳×۶. یعنی حاصلضرب دوعددمورد نظرمساوی ۹۱۱۸ است.

مبنای این روش چنین است:

$$۹۴\times۹۷=\begin{cases}۹۱\times۹۷=۹۱(۱۰۰-۳)=۹۱\times۱۰۰-۹۱\times۳\\ ۳\times۹۷=(۹۱+۶)\times۳= \qquad ۹۱\times۳+۶\times۳\\ \hline ۹۴\times۹۷= \qquad =۹۱\times۱۰۰ \qquad +۶\times۳\end{cases}$$

درحالت کلی اگر $x+a=۱۰۰$ و $y+b=۱۰۰$ باشد، داریم:

$$xy=(۱۰۰-a).(۱۰۰-b)=(۱۰۰-a-b)\times۱۰۰+ab$$

مثال:

$$۹۷\times۹۸=(۱۰۰-۳)(۱۰۰-۲)=$$
$$=(۱۰۰-۵)\times۱۰۰+۲\times۳=۹۵۰۶$$

۱۳ـ روش ابتکاری تقسیم بر عددهای نزدیك به صد، هزار و مشابه آن

می خـواهیم عدد ۲۴۳۸۹ را بر ۹۷ تقسیم کنیم. چنین است راه غیرعادی که برای این عمل درنظر می گیریم:

۲۴۳	۸۹	$: ۹۷=۲۵۱\frac{۴۲}{۹۷}$
۷	۲۹	
	۲۱	
۱	۳۹	
	۳	
۲۵۱	۴۲	

بهوسیلهٔخط قائمی بهتعداد رقمهایی که درمقسوم‌علیه وجود دارد از مقسوم جـدا می کنیم.

عددی‌را که درسمت چپ این‌خط قرارگرفته است (۲۴۳)، درمتمم مقسوم‌علیه نسبت صد، هزار وغیره (دراینجا این متمم مساوی۳ می‌شود) ضرب می کنیم؛ حاصلضرب (۷۲۹) را زیر رقمهـای مقسوم طوری می‌نویسیم که واحدهای مشابه زیرهم قرار گیرند. رقمهایی را که به‌این ترتیب سمت چپ خط قائم قرار می گیرند (در اینجا۷)

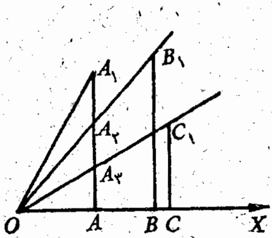
دوباره درهمان متمم (۳) ضرب می کنیم و به‌همان ترتیب اول زیر حاصلضرب قبلی (یعنی۷۲۹) می‌نویسیم. این عمل را ادامه می‌دهیم تا زمانی که دیگر در سمت چپ خط قائم رقمی پیدا نشود. در این موقع عددهای سمت راست خط قائم را باهم جمع می کنیم واگر رقمی از این حاصلجمع (۱۳۹) در سمت چپ خط قرار می‌گیرد، دوباره آنرا (یعنی عدد ۱را) درمتمم (یعنی۳) ضرب می کنیم و زیر مجموع قبلی می‌نویسیم. آخرین عددی که به‌عنوان مجموع درسمت چپ خط پیدا می‌شود (۲۵۱)، خارج قسمت و عددی که در سمت راست خط پیدا می‌شود (۴۲) باقیماندهٔ تقسیم است.

۱۴ـ حساب هندسی

بکارگرفتن‌شکل درعملهای مختلف حساب باعث‌جالب‌شدن ودرعین سادگی فوق‌العادهٔ مسأله‌ها می‌شود، واین چیزی است که ماآنرا حساب هندسی نامیده‌ایم.

بانی این رشتهٔ ریاضیات را هم فیثاغورث می‌دانند کـه ظاهراً ابتکار مربوط به‌رابطهٔ بین حساب وهندسه از اوست.

محاسبهٔ به کمك شکل، که ما بعضی از نمونه‌های‌آنها را در اینجا می‌آوریم، به‌تدریج رویهم جمع‌شده بود، ولی‌تنها درقرن‌نوزدهم توانست مورد استفادهٔ عملی پیدا کند.



شکل ۲۷۶

A. ضرب. سه عدد l_1، l_2 و l_3 داده شده است، می‌خواهیم

حاصلضرب آنها را پیدا کنیم.

روی محور Ox (شکل ۲۷۶) مساوی باطول واحدی که به‌دلخواه انتخاب کرده‌ایم، جدا می‌کنیم. از نقطهٔ A عمودی برمحور Ox اخراج می‌کنیم و روی این عمود پاره خطهای $AA_1=l_1$، $AA_2=l_2$ و $AA_3=l_3$ را جدا می‌کنیم.

سپس $OB=AA_1$ را درنظرمی‌گیریم وفرض می‌کنیم عمودی که در B بر Ox رسم شده است، OA_2 را درنقطهٔ B_1 قطع کند. حالا $OC=BB_1$ می‌گیریم واز نقطهٔ C عمودی بر Ox اخراج می‌کنیم تا OA_3 را در C_1 قطع کند.

پاره خطهای BB_1 و CC_1 به‌ترتیب عبارتند از حاصلضربهای $l_1 . l_2$ و $l_1 . l_2 . l_3$.

صحت این مطلب را می‌توان به‌سادگی و با توجه به‌تشابه مثلثهای OAA_2 و OBB_1 و همچنین مثلثهای OAA_3 و OCC_1 نتیجه گرفت درحقیقت داریم:

$$\frac{BB_1}{AA_2}=\frac{OB}{OA} \Longrightarrow BB_1=\frac{OB.AA_2}{OA}$$

از طرف دیگر

$$OA=1 \;,\; OB=OA_1=l_1 \;,\; AA_2=l_2$$

و بنابراین

$$BB_1=l_1.l_2$$

و به‌همین ترتیب

$$CC_1=BB_1.l_3=l_1.l_2.l_3$$

B. تقسیم. a و b را دوعددی می‌گیریم که باید خارج‌قسمت آنها را معین کنیم. پاره خطهای $OA=1$، $OB=b$ و $CB=a$ را

جدا می‌کنیم، دراینصورت پاره‌خط $\mathbf{AM}$ جـواب مسأله را به مـا می‌دهد (شکل ۲۷۷). درحقیقت داریم:

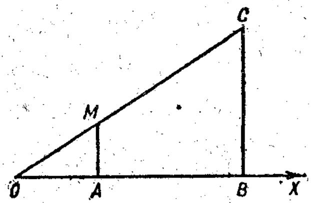
$$\frac{AM}{OA}=\frac{BC}{OB}$$

و ازآنجا

$$AM=\frac{BC.OA}{OB},$$

وچون $BC=a$ ، $OA=1$ و $OB=b$

بدست می‌آید:

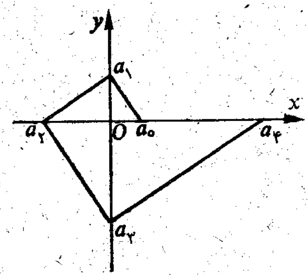


شکل ۲۷۷

$$AM=\frac{a}{b}$$

C. **به‌توان رساندن**: عددی راکه می‌خواهیم به‌توان برسانیم به‌صورت پاره خط a درنظر می‌گیریم (شکل ۲۷۸).

دو محور Ox و Oy را عمود بر هـم رسم می‌کنیم، روی محور Ox پاره‌خط $Oa_0=1$ و روی محـور Oy پـاره خط $Oa_1=a$ را جـدا می‌کنیم. a_0 را به a_1 وصل می‌کنیم وازنقطهٔ a_1 عمودی بر a_0a_1 اخراج می‌کنیم. این عمود، محور Ox درطرف چپ O درنقطهٔ a_2 قطع می‌کند؛ ازاین نقطه دوباره عمودی بر a_1a_2 اخراج می‌کنیم وغیره.



شکل ۲۷۸

ثابت می‌کنیم: $Oa_2=a^2$، $Oa_3=a^3$ ، $Oa_4=a^4$ و غیره.

براساس این قضیه‌کـه در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی است بین دوقطعه‌ای‌که روی وتر جدا می‌کند، داریم:

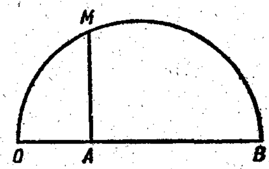
$$Oa_0 . Oa_2 = (Oa_1)^2 \implies Oa_2 = a^2,$$
$$Oa_1 . Oa_3 = (Oa_2)^2 \implies a . Oa_3 = a^4$$

یعنی
$$Oa_3 = a^3,$$
$$Oa_2 . Oa_4 = (Oa_3)^2 \implies a^2 . Oa_4 - a^6,$$

و ازآنجا
$$Oa_4 = a^4$$

و غیره.

D. **ریشهٔ دوم**. روش اول: کافی است پاره خط AM را طوری پیدا کنیم که واسطهٔ‌هندسی پاره‌خط‌های $OA = 1$ و AB (مساوی عددN) باشد (شکل ۲۷۹). درحقیقت داریم:

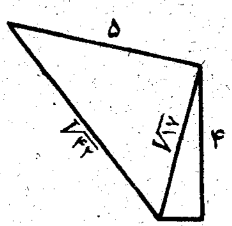


شکل ۲۷۹

$$AM = \sqrt{OA . AB} \implies AM = \sqrt{N}$$

اگرN عددی بزرگ باشد و بااین روش نتوان ریشهٔ دوم آن را بدست‌آورد، می‌توان ازروش زیر استفاده‌کرد.

روش دوم: این روش براساس این قضیه فرما قرار دارد که برطبق‌آن هرعدد صحیح یامربع‌کامل است ویا مساوی مجموع دو یا سه یا چهار مربع کامل. این مطلب به‌معنای آنست که هر عدد صحیح را می‌توان بـه مجموع مربعهـای کامل تجزیه کرد.



شکل ۲۸۰

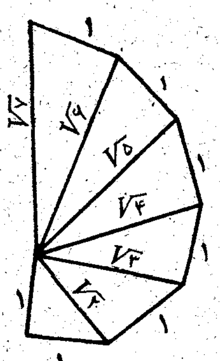
مثلاً فرض کنید بخواهیم ریشهٔ دوم عدد۴۲ را پیدا کنیم. این عددرا به‌مجموع‌مربعهای کامل‌تبدیل می‌کنیم: $۴۲ = ۱^۲ + ۴^۲ + ۵^۲$.

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلعهای مجاور به‌ـ

زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی ۱ و ۴ باشد (شکل ۲۸۰). وتر این مثلث را ضلع مجاور بـه زاویهٔ قـائمهٔ مثلث دیگری می گیریم که ضلع دوم مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی ۵ باشد. وتر مثلث جدید مساوی $\sqrt{۴۲}$ خواهد بود.

اگر عددی با روشهای متفاوت قابل تبدیل به مربعهای کامل باشد، باید ساده‌ترین آنها را انتخاب کرد. مثلاً:

$$۲۸=۱^۲+۳^۲+۳^۲+۳^۲$$
$$۲۸=۲^۲+۲^۲+۲^۲+۴^۲$$
$$۲۸=۱^۲+۱^۲+۱^۲+۵^۲$$
$$۲۸=۸^۲-۶^۲$$



شکل ۲۸۱

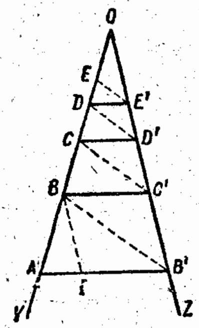
که ساده‌ترین آنها تساوی آخر است. کافی است مثلث قائم الزاویه‌ای بسازیم کـه وتر آن مساوی ۸ و یکـی از ضلعهـای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی ۶ باشد، در این‌ـ صورت ضلع سوم این مثلث مساوی $\sqrt{۲۸}$ خواهد شد.

برای ریشهٔ دوم عددها ازاین روش‌هم می‌توان استفاده‌کرد که ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمه درآن مساوی واحد باشد، دراینصورت وتراین مثلث مساوی $\sqrt{۲}$ می‌شود (شکل ۲۸۱). حالا اگرمثلث دیگری بسازیم که ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی $\sqrt{۲}$ و ۱ باشد، وتری مساوی $\sqrt{۳}$ بدست می‌آورد و به‌همین ترتیب می‌توان $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$ وغیره‌را بدست آورد.

* * *

E. تصاعد هندسی. این مسأله را به کمك شکل حل می کنیم:

بادردست داشتن دوجملهٔ اول از یك تصاعد هندسی نزولی، جمله‌های بعد آنرا پیدا کنید.



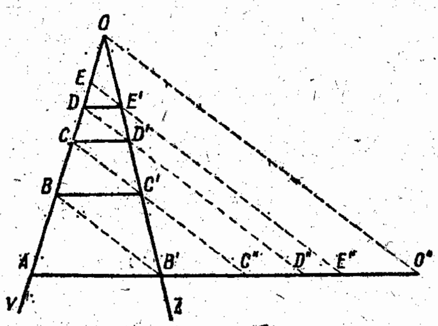
شکل ۲۸۲

پاره خط AB' را مساوی جملهٔ اول تصاعد رسم می کنیم (شکل ۲۸۲).

از نقطه‌های A و B' دوخط دلخواه OY و OZ را می کشیم که در نقطهٔ O به‌هم رسیده باشند. روی AB' پاره خط IB' را مساوی جملهٔ دوم تصاعد جدا می کنیم، از I خطی‌موازی OZ رسم می کنیم تا OY را در B قطع کند واز B خطی موازی AB' رسم می کنیم تا OZ را در C' قطع کند، سپس از C' خطی‌موازی $B'B$ می‌کشیم تا OY را در C قطع کند وغیره. در اینصورت داریم:

$$\frac{BC'}{AB'}=\frac{OB}{OA}=\frac{OC'}{OB'}=\frac{OC}{OB}=\frac{CD'}{BC'}=\cdots$$

یعنی جمله‌های متوالی این تصاعد هندسی عبارتند از پاره خطهای AB'، BC'، CD'، DE' و غیره.



شکل ۲۸۳

براساس آنچه که گفتیم بسادگی می‌توان مجموع

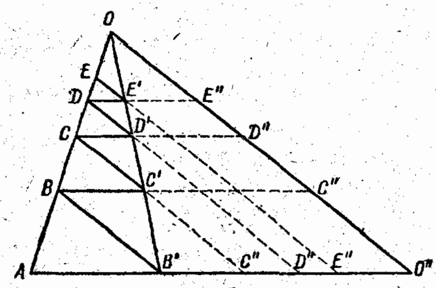
تعداد معینی از جمله‌های تصاعد هندسی نزولی را هم بدست آورد. کافی است خطهای CC'، DD'، EE'، ... را امتداد دهیم تاامتداد AB' را در نقطه‌های C''، D''، E'' وغیره قطع کنند (شکل۲۸۳).

روشن‌است که AC''، AD''، AE''،... عبارتند ازمجموع ۲، ۳، ۴، ... جمله از تصاعد.

* * *

اگر از نقطهٔ O خطی موازی BB' رسم کنیم‌تا امتداد AB' را در O'' قطع کند، پاره خط AO'' مساوی مجموع بی‌نهایت جملهٔ تصاعد هندسی نزولی می‌شود:

$$AO''=AB'+BC'+CD'+DE'+\dots$$



شکل ۲۸۴

در شکل ۲۸۴ پاره‌خطهای AB'، BC'، CD'، DE'،...عبارتنداز جمله‌های متوالی تصاعدهندسی نزولی، که قدر نسبت آن مساوی $(OC':OB')$ است، مجموع تمام جمله‌های این تصاعد هم مساوی AO'' است. ولی ضمناً در همین شکل داریم:

$$\frac{CC'}{BB'}=\frac{OC'}{OB'}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD'}{OC'}=\frac{DD'}{CC'}=\dots$$

ازاین نسبتهای مساوی این‌نتیجه بدست می‌آید که پاره‌خطهای BB'، CC'، DD'، EE'، ... هم جمله‌های متوالی یك تصاعد

هندسی نزولی هستند که قدر نسبت آن همان $(OC' : OB')$ است، منتهی جملهٔ اول آن باتصاعد قبلی فرق دارد.

بسادگی می‌توان متوجه شد که مجموع تمام جمله‌های تصاعد اخیر مساوی پاره خط OO'' می‌شود.

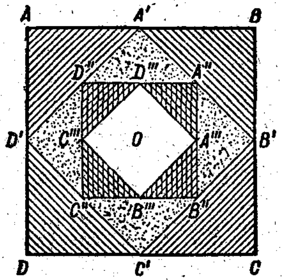
* * *

مجموع بعضی از تصاعدهای هندسی را به‌وسیلهٔ شکل بطور جالبی می‌توان نشان داد. باروش تصویر می‌توان نتیجه‌هایی را که صرفاً از راه حساب بدست می‌آید، به روشنی روی شکل دید.

مثلاً می‌دانیم که مجموع جمله‌های تصاعد

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots$$

برابراست با ۱. باروش تصویر می‌توان این تصاعد را درمربعی که ضلع آن وبنابراین مساحت آن مساوی واحد است، نشان داد.



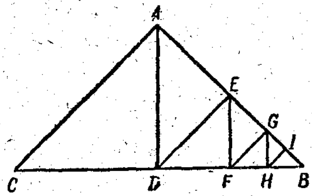
شکل ۲۸۵

درمربع اول (شکل ۲۸۵) مربع دوم راچنان محاط می‌کنیم که رأسهای آن بر وسط ضلعهای مربع اول قرار گرفته باشد. بسادگی ثابت می‌شود که مجموع مساحتهای مثلثهای هاشور-خورده:

$$AA'D' + BB'A' + CC'B' + DD'C'$$

مساوی نصف مساحت مربع $ABCD$، یعنی مساوی $\frac{۱}{۲}$ است. مجموع مساحتهای مثلثهای نقطه چین مساوی یکچهارم مساحت مربع $ABCD$ است؛ مجموع مساحتهای مثلثهای خانه خانه مساوی $\frac{۱}{۸}$

مساحت مربع است وغیره. اگر این تصاعد را تا بی‌نهایت ادامه دهیم، معلوم می‌شود که این مجموع در حد برابر است با مساحت مربع ABCD .



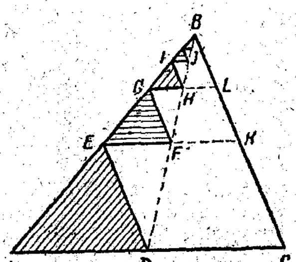
شکل ۲۸۶

اثبات به کمك مثلثهای قائم‌الزاویه خیلی به‌استدلال بالاشبیه است وما آنرا به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (شکل ۲۸۶ را ببینید). تنها این نکته را متذکرمی‌شویم که ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ AD و CD باید مساوی واحد انتخاب شوند.

برای نمونهٔ دوم ازنمایش مجموع جمله‌های یك تصاعدهندسی نزولی به‌وسیلهٔ شکل، مجموع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\ldots$$

فرض می‌کنیم که مثلث ABC (شکل ۲۸۷) مساحتی مساوی واحد داشته باشد. D و E را وسط ضلعهای AC و AB می‌گیریم؛ بنابراین BD میانه‌ای ازمثلث است که از رأس B عبور می‌کند.



شکل ۲۸۷

D و E را به‌هم وصل می‌کنیم، خط EF را موازی AC، سپس خط FG را موازی DE وغیره رسم می‌کنیم.

ازشکل به‌روشنی معلوم است که مثلثهای هاشورخوردهٔ ADE، EFG و غیره مساحتهایی مساوی $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۱۶}$، $\frac{۱}{۶۴}$، ... مساحت مثلث ABC دارند.

مجموع مساحتهای این مثلثها مساوی $\frac{۱}{۳}$ است، زیرا مساحت مثلث ADE مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت ذوزنقهٔ AEKC؛ مساحت مثلث EFG مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت ذوزنقهٔ EGLK است وغیره.

از آنجا مجموع مساحتهای مثلثهای ADE و EFG و ... برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC یعنی $\frac{۱}{۳}$. بنابراین

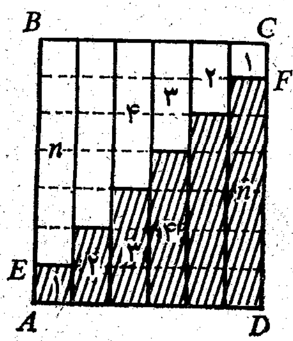
$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\ldots=\frac{۱}{۳}$$

وبالاخره

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۶۴}+\ldots=\frac{۴}{۳}$$

F. مجموع عددهای رشتهٔ طبیعی. چگونه می‌توان به‌کمك شکل مجموع عددهای رشتهٔ طبیعی‌را بدست‌آورد؟

شکل AEFD (شکل ۲۸۸) را درنظرمی‌گیریم. این شکل از مستطیلهایی تشکیل شده است که هرکدام آنها بترتیب شامل ۱، ۲، ۳، ۴، ...، n مربع مساوی است وهرکدام ازاین مربعهاهم مساحتی مساوی واحد دارد. مساحت شکل AEFD برابر است با S، مجموع n عدد



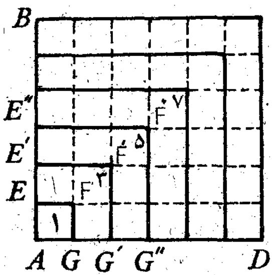
شکل ۲۸۸

طبیعی متوالی باشروع ازواحد. اگر شکل EFCB راکه شبیه شکل قبلی است ازبالا به‌آن اضافه کنیم، مستطیل ABCD بدست می‌آید که باتوجه به‌شکل شامل $n(n+۱)$ مربع ومساحت آن ۲S است.

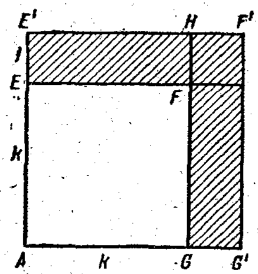
ازآنجا به‌این رابطه می‌رسیم:

$$S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

با همین روش می‌توان مجموع n عدد فرد اولیه را هم پیدا کرد.



شکل ۲۹۰



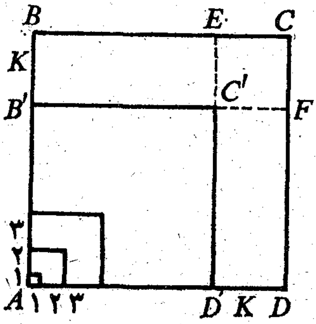
شکل ۲۸۹

مربعهای AEFG و AE'F'G' (شکل ۲۸۹) را انتخاب می‌کنیم، به نحوی که ضلعهای آنها مساوی k و $k+۱$ باشد. اختلاف مساحتهای این دو مربع (قسمت هاشور خوردهٔ EE'F'G'GF) از دومستطیل که مساحت هر کدام مساوی k است، ویك‌مربع به‌مساحت ۱ تشکیل شده است.

به‌این‌ترتیب اگر به‌مربع $k^۲$ عدد فرد $۲k+۱$ (مساحت قسمت هاشور خورده) را اضافه کنیم، مربع $(k+۱)^۲$ بدست می‌آید. اگر به مربع با مساحت مساوی واحد (که درشکل ۲۹۰ نشان داده شده

است) حاشیه‌ای به مساحت مساوی ۱+۱×۲ یعنی ۳ اضافه کنیم، مربع $AE'F'G'$ بدست می‌آید که مساحت آن $(۱+۱)^۲$ یعنی $۲^۲$ است. واگر به مربع اخیر حاشیه‌ای به مساحت ۱+۲×۲ یعنی ۵ اضافه کنیم، مربع $(۱+۲)^۲$ یعنی $۳^۲$ بدست می‌آید وغیره. به‌این‌ترتیب نتیجه می‌شود که اگر n عدد متوالی فرد باشروع از واحد را با هم جمع کنیم، مجموعی مساوی $n^۲$ پیدا می‌کنند:

مجموع عددهای فرد اولیه مساوی با مجذور تعداد آنهاست.



شکل ۲۹۱

تعبیر هندسی این محاسبه، همانطور که قبلاً هم گفتیم، احتمالاً مربوط به فیثاغورث باشد.

مجموع توانهای سوم k عدد طبیعی اولیه را هم می‌توان به‌سادگی به‌کمك شکل پیدا کرد.

ضلع مربع ABCD (شکل ۲۹۱) را مساوی مجموع

$$۱+۲+۳+\ldots+k$$

می‌گیریم، در این مربع، مربعهایی می‌سازیم که در رأس A مشترك وضلعهای آنها بترتیب چنین باشند:

$$۱،\quad ۱+۲،\quad ۱+۲+۳،\quad \ldots،\quad ۱+۲+۳\ldots+k$$

مساحت حاشیهٔ $BCDD'C'B'$ با عرضی مساوی k برابر است با:

$$BB'FC+DD'CE-CEC'F=۲k\,.\,AD-k^۲$$

ازطرف دیگر داریم:

$$AD=۱+۲+۳+\dots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$$

بنابراین مساحت حاشیه $BCDD'C'B'$ می‌شود:

$$k^۲(k+۱)-k^۲=k^۳$$

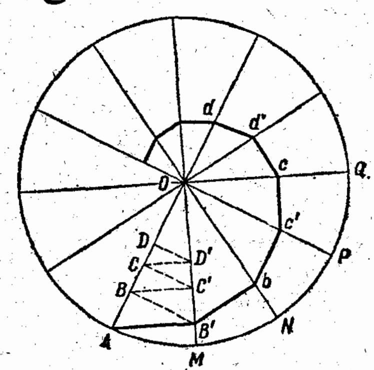
به‌این ترتیب مساحتهای حاشیه‌های جداگانه‌ای که در شکل نشان داده شده است، بترتیب مساوی $۱^۳$، $۲^۳$، $۳^۳$، ...، $k^۳$ می‌باشند. همانطور که می‌بینیم مجموع اینها برابر است بـا مساحت مربعی به‌ضلع مساوی $(۱+۲+۳+\dots+k)$. یعنی:

مجموع توانهای سوم k عدد طبیعی اولیه برابر است بـا مربع مجموع این عددها. یعنی:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+k^۳=\left[\frac{k(k+۱)}{۲}\right]^۲$$

G. یك مسألهٔ عکس. تـا اینجا به نوعی تعبیر هندسی و حل مسأله‌های حساب پرداختیم. ولی این‌مطلب جالب است که مسأله‌ای باخصوصیت عکس‌آن طرح کنیم، مسأله‌ای که ریشهٔ تصویری دارد ونتیجهٔ‌جالبی درحساب می‌دهد.

محیط دایـره‌ای را به‌چند قسمت مساوی AM؛ MN، NP، PQ وغیره تقسیم کرده‌ایم (شکل ۲۹۲). شعاعهایی را که از نقطه های A، M، N، P، Q، ... می گذرند رسم می کنیم.



شکل ۲۹۲

از A عمود AB' را برشعاع OM فرود می‌آوریم، سپس از نقطهٔ B' عمود $B'b$ را بر ON و غیره. می‌خواهیم مجموع همهٔ این عمودها را که از A به‌شکل مارپیچ جلو می‌رود ومرتباً به O نزدیک می‌شود، پیدا کنیم.

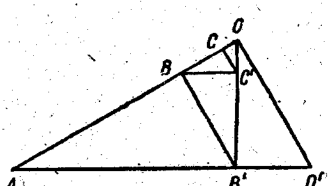
بسادگی معلوم می‌شود که طول خط شکستهٔ $AB'bc'cd'd...$ برابر است باطول خط شکستهٔ $AB'BC'CD'D...$.

همچنین معلوم است که پاره خطهای AB'، BC'، CD'، ... تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند و پاره خطهای $B'B$، $C'C$، $D'D$، ... هم تشکیل تصاعد هندسی باهمان قدرنسبت می‌دهند.

گذشته از آن تمام پاره خطهای AB'، $B'B$، BC'، $C'C$، CD'، $D'D$، ... هم تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند، زیرا داریم:

$$\frac{BB'}{AB'}=\frac{BC'}{BB'}=\frac{CC'}{BC'}=\frac{CD'}{CC'}=\frac{DD'}{CD'}=\cdots$$

بنابراین طول خط شکستهٔ $AB'bc'cd'd...$ برابر است با مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی.



شکل ۲۹۳

مسأله را برای حالتهایی که محیط دایره رابه ۶، ۸ و ۱۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، مورد بررسی قرارمی‌دهیم. شعاع‌دایره راهم همیشه مساوی واحد می‌گیریم.

وقتی که محیط دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم، در

مثلث AOO' (شکل ۲۹۳) داریم:

$$AO=۱\,,\quad \widehat{AOB'}=\widehat{AO'O}=۶۰°\,,\quad \widehat{OAO'}=۳۰°$$

بنابراین: $AO'=۲OO'$. ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$AO'=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\,,\ OO'=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

مجموع مورد نظر جمله‌های تصاعد هندسی نزولی

$$AB'+B'B+BC'+C'C+\ldots$$

تشکیل شده است از جمله‌های $AB'+BC'+\ldots$ که مجموع آنها مساوی پاره‌خط AO' است، وهمچنین جمله‌های $B'B+C'C+\ldots$ که مجموع آنها مساوی پاره‌خط OO' است. درنتیجه‌برای مجموع مورد نظر بدست می‌آید:

$$AO'+OO'=\frac{۲}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$$

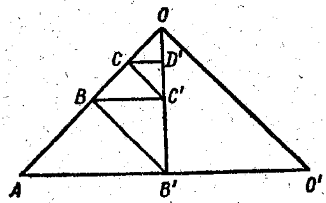
یعنی مساوی ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی که دردایرهٔ به‌شعاع واحد محاط شده باشد. وچون داریم:

$$AB'=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,,\ BB'=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\,,\ BC'=\frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

بنابراین خود این جمله‌ها هم تشکیل یک تصاعد هندسی نزولی می‌دهند:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\,,\ \frac{\sqrt{۳}}{۴}\,,\ \frac{\sqrt{۳}}{۸}\,,\ \ldots \qquad (\text{با قدر نسبت } \tfrac{۱}{۲})$$

وقتی که محیط دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم. داریم: $AO=OO'=۱$ (شکل ۲۹۴)، یعنی $AO'=\sqrt{۲}$.



شکل ۲۹۴

مجموع مورد نظر تشکیل شده‌است از:

$$OO'+AO'=۱+\sqrt{۲}$$

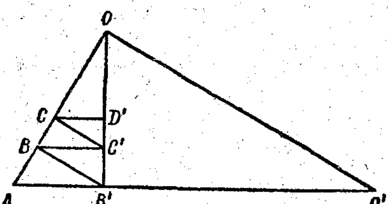
یعنی برابر است با شعاع دایره به اضافهٔ ضلع مربع محاط در این‌دایره، درعین‌حال جمله‌های این مجموع تشکیل یك تصاعد هندسی‌نزولی می‌دهند:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۴}, \ldots \quad (\frac{۱}{\sqrt{۲}} \text{ با قدر نسبت})$$

وقتی که محیط دایره را به دوازده قسمت مساوی تقسیم کرده باشیم. داریم:

$$AO=۱ \;,\quad \widehat{OAO'}=۶۰^\circ \;,\quad AO'=۲AO=۲$$

و از آنجا $OO'=\sqrt{۳}$ (شکل ۲۹۵).



شکل ۲۹۵

مجموع مورد نظر تشکیل شده است از:

$$AO'+OO'=۲+\sqrt{۳}$$

و بنابراین برابر است با قطر دایره به اضافهٔ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در این دایره. درعین حال جمله‌های این مجموع هم به‌تصاعد هندسی نزولی هستند:

$$\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۴}, \frac{۳}{۸}, \ldots \quad (\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ با قدر نسبت})$$

۱۵ـ موضوعهای کوچك ولی جالب دربارهٔ عددها

مثلث پاسکال بـه‌این ترتیب درست شده است کـه هرعدد آن (البته بجز واحدهای کنار) برابراست با مجموع نزدیکترین دوعدد بالای آن:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

. . . .

درنخستین ردیف قطری واحدها قراردارند، دردومین ردیف عددهای طبیعی و در ردیف سوم قطری عددهای مثلثی. فاصلهٔ بین عددهای مثلثی به‌وسیلهٔ عددهای طبیعی بیان می‌شود.

عددهای چهارمین ردیف قطری را می‌نویسیم:

۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ۳۵, ...

این عددها را می‌توان در یك فضای سه بعدی نشان داد کـه مـا آنها را می‌شناسیم؛ اینها عددهای هرمی هستند.

عددهای قطری ردیف پنجم چنین‌اند:

۱, ۵, ۱۵, ۳۵, ۷۰, ...

و برای اینکه بتوانیم آنها را به‌صورت تصویری نشان‌دهیم باید به‌

فضای چهار بعدی برویم. ولی ما فعلاً از این مسافرت صرفنظر می کنیم.

* * *

دربارهٔ عددهای مثلث پاسکال می‌توان مطالب خیلی بیشتری نوشت؛ ولی ما دراینجا تنها به‌این نکته توجه می کنیم که مجموع عددهای هرسطر افقی برابر است با توانی از۲:

$$۱ = ۲^{۰}$$
$$۱ + ۱ = ۲^{۱}$$
$$۱ + ۲ + ۱ = ۲^{۲}$$
$$۱ + ۳ + ۳ + ۱ = ۲^{۳}$$
$$۱ + ۴ + ۶ + ۴ + ۱ = ۲^{۴}$$

. . . .

* * *

درضرب عددهای متوالی در ۸ و سپس جمع رقمهای عددی که بدست می‌آید، به‌نتیجهٔ جالبی می‌رسیم:

		$۱ \times ۸ = ۸$
	$۱ + ۶ = ۷$	$۲ \times ۸ = ۱۶$
	$۲ + ۴ = ۶$	$۳ \times ۸ = ۲۴$
	$۳ + ۲ = ۵$	$۴ \times ۸ = ۳۲$
	$۴ + ۰ = ۴$	$۵ \times ۸ = ۴۰$
$۱ + ۲ = ۳$	$۴ + ۸ = ۱۲$	$۶ \times ۸ = ۴۸$
$۱ + ۱ = ۲$	$۵ + ۶ = ۱۱$	$۷ \times ۸ = ۵۶$
$۱ + ۰ = ۱$	$۶ + ۴ = ۱۰$	$۸ \times ۸ = ۶۴$

* * *

اگرعدد ۹۱ را به ترتیب در عددهای از ۱ تا ۹ ضرب کنیم، عددهای سه رقمی بدست‌می‌آیدکه درآنها نخستین رقمها از ۰تا۸، آخرین رقمها از ۱ تا۹ و رقمهای دوم از ۹ تا۱ هستند.

۱×۹۱=۰۹۱
۲×۹۱=۱۸۲
۳×۹۱=۲۷۳
۴×۹۱=۳۶۴
۵×۹۱=۴۵۵
۶×۹۱=۵۴۶
۷×۹۱=۶۳۷
۸×۹۱=۷۲۸
۹×۹۱=۸۱۹

اگرعدد ۳۳۶۷ را به‌ترتیب در جمله‌های متوالی یك تصاعد حسابی باجملهٔ اول و قدر نسبت ۳۳ ضرب کنیم، در حاصلضرب رقمهای یکسان بدست می‌آید:

۳۳×۳۳۶۷=۱۱۱۱۱۱
۶۶×۳۳۶۷=۲۲۲۲۲۲
۹۹×۳۳۶۷=۳۳۳۳۳۳
۱۳۲×۳۳۶۷=۴۴۴۴۴۴
۱۶۵×۳۳۶۷=۵۵۵۵۵۵
۱۹۸×۳۳۶۷=۶۶۶۶۶۶
۲۳۱×۳۳۶۷=۷۷۷۷۷۷
۲۶۴×۳۳۶۷=۸۸۸۸۸۸
۲۹۷×۳۳۶۷=۹۹۹۹۹۹

* * *

چگونه می‌توان عدد ۱۰۰ را به کمك نه‌عدد از ۱ تا۹نوشت؟
ازاین راهها می‌توان:

$$۱۰۰=۱۲+۳-۴+۵+۶۷+۸+۹$$
$$۱۰۰=۱۲۳+۴-۵+۶۷-۸۹$$
$$۱۰۰=۱۲۳-۴۵-۶۷+۸۹$$

جواب آخر از اینجهت جالب است که در آن تنها سه عمل انجام شده است؛ واین جواب منحصربفرد ازاین نوع است.

* * *

اگر p عددی اول باشد، عدد

$$۱\times۲\times۳\times...\times(p-۱)+۱$$

برعدد p بدون باقیمانده قابل قسمت است.

این قضیه در ریاضیات به‌نام قضیهٔ ویلسون مشهور است.

مثلاً برای $p=۵$ داریم:

$$۱\times۲\times۳\times۴+۱=۲۵$$

و ۲۵ بر۵ قابل قسمت است. برای $p=۷$ داریم:

$$۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶+۱=۷۲۱$$

و۷۲۱ بر۷ قابل قسمت است.

* * *

لئوناردو فیبوناچی اهل پیزا، ریاضیدان قرن هیجدهم، رشتهٔ جالبی ازعددها نوشت که به‌این ترتیب تشکیل‌شده است: جملهٔ اول وجملهٔ دوم رشته مساوی واحد است واز جملهٔ سوم به‌بعد، هرجمله برابر است بامجموع دوجملهٔ قبل از آن، یعنی:

$$۱،\ ۱،\ ۲،\ ۳،\ ۵،\ ۸،\ ۱۳،\ ۲۱،\ ۳۴،\ ۵۵،\ ۸۹،\ \ldots$$

اگر در رشتهٔ فیبوناچی نسبت هر دو عدد متوالی را در نظر بگیریم، به کسرهای جالبی می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۱},\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۳}{۵},\ \frac{۵}{۸},\ \frac{۸}{۱۳},\ \frac{۱۳}{۲۱},\ \frac{۲۱}{۳۴},\ \frac{۳۴}{۵۵},\ \frac{۵۵}{۸۹},\ \frac{۸۹}{۱۴۴},\ \ldots$$

که درمورد آنها داریم:

$$\frac{۱}{۲}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}$$

$$\frac{۲}{۳}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}}$$

$$\frac{۳}{۵}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}}}$$

$$\frac{۵}{۸}=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}}}}$$

و غیره.

علاوه‌براین، رشتهٔ فیبوناچی خاصیت جالب دیگری‌هم دارد: اگر ازمجذور یکی ازجمله‌های رشتهٔ فیبوناچی حاصلضرب دوجملهٔ

مجاور آنرا کم کنیم، همیشه تفاضلی مساوی واحد می‌دهد، منتهی یکبار باعلامت مثبت ویکبار باعلامت منفی:

$$۱^{۲} - ۱ \times ۲ = -۱$$
$$۲^{۲} - ۱ \times ۳ = +۱$$
$$۳^{۲} - ۲ \times ۵ = -۱$$
$$۵^{۲} - ۳ \times ۸ = +۱$$
$$۸^{۲} - ۵ \times ۱۳ = -۱$$
$$۱۳^{۲} - ۸ \times ۲۱ = +۱$$
$$۲۱^{۲} - ۱۳ \times ۳۴ = -۱$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

* * *

چقدر جذرگرفتن از عدد ۶۲۵ ساده است! کافی است رقم ۶ را ازآن حذف کنیم.

* * *

با چه روش عجیبی می‌توان کسرهای $\frac{۱۹}{۹۵}$ و $\frac{۴۹}{۹۸}$ را ساده کرد! کافی است ازصورت ومخرج هریك ازآنها رقم ۹ را حذف کنیم.

* * *

عددهای ۳۲۴ و ۶۴۸ دارای این خاصیت‌اندکه درهریك از آنها، رقم کنار (چه راست وچه چپ) یك هشتم عدد دورقمی دیگر است:

$$۳ = \frac{۲۴}{۸}, \quad ۴ = \frac{۳۲}{۸}, \quad ۶ = \frac{۴۸}{۸}, \quad ۸ = \frac{۶۴}{۸}$$

* * *

اینهم ضربهایی که درآنها همهٔ رقمهای ۰ تا ۹ وجود دارد و هیچکدام هم تکرار نشده است:

$$۴ \times ۳۹۰۷ = ۱۵۶۲۸$$
$$۳ \times ۶۸۱۹ = ۲۰۴۵۷$$
$$۴ \times ۷۰۳۹ = ۲۸۱۵۶$$
$$۶ \times ۵۸۱۷ = ۳۴۹۰۲$$
$$۷ \times ۹۴۰۳ = ۶۵۸۲۱$$

* * *

چند رابطهٔ جالب:

$$۸۸^۲ = ۸۸ \times ۸۸ = ۷۷۴۴,$$
$$۴۱^۲ + ۴۳^۲ + ۴۵^۲ = ۵۵۵۵,$$
$$۴۱^۲ = ۱۶۸۱, \qquad ۱۶ = ۴^۲, \qquad ۸۱ = ۹^۲$$

واین تنها ترکیب از نوع خود است.

$۳۳^۲ = ۱۰۸۹$ ، و عدد ۹۸۰۱ هم مربع کامل است، زیرا $۹۸۰۱ = ۹۹^۲$ ، حالتی که منحصربفرد است.

شاید هم منحصر بفرد نباشد، زیرا

$$۸۳۶^۲ = ۶۹۸ \times ۸۹۶$$

و اگر این دو عدد را مقلوب کنیم، باز هم حاصلضربشان مجذور کامل است. مگراینطور نیست؟

* * *

اینها همهٔ عددهای چهار رقمی هستند که فقط از رقمهای زوج درست شده‌اند وضمناً مجذور کامل‌اند:

$$۴۶۲۴=۶۸^۲$$
$$۶۰۸۴=۷۸^۲$$
$$۶۴۰۰=۸۰^۲$$
$$۸۴۶۴=۹۲^۲$$

* * *

اینهـا هم همهٔ عددهایی هستند که مساوی مجموع رقمهای مکعبشان می‌شوند:

$$۸^۳=۵۱۲ \qquad ۵+۱+۲=۸$$
$$۱۷^۳=۴۹۱۳ \qquad ۴+۹+۱+۳=۱۷$$
$$۱۸^۳=۵۸۳۲ \qquad ۵+۸+۳+۲=۱۸$$
$$۲۶^۳=۱۷۵۷۶ \qquad ۱+۷+۵+۷+۶=۲۶$$
$$۲۷^۳=۱۹۶۸۳ \qquad ۱+۹+۶+۸+۳=۲۷$$

* * *

اینهم نمونه‌هایی از کسرهایی که باروش عجیبی ساده‌می‌شوند:

$$\frac{۱۶}{۶۴}=\frac{۱}{۴}, \frac{۱۶۶}{۶۶۴}=\frac{۱}{۴}, \frac{۱۶۶۶}{۶۶۶۴}=\frac{۱}{۴}, \ldots$$
$$\frac{۱۹}{۹۵}=\frac{۱}{۵}, \frac{۱۹۹}{۹۹۵}=\frac{۱}{۵}, \frac{۱۹۹۹}{۹۹۹۵}=\frac{۱}{۵}, \ldots$$
$$\frac{۲۶}{۶۵}=\frac{۲}{۵}, \frac{۲۶۶}{۶۶۵}=\frac{۲}{۵}, \frac{۲۶۶۶}{۶۶۶۵}=\frac{۲}{۵}, \ldots$$

۷ـ ریاضیات در طبیعت جاندار

۱ـ ریاضیدان کوچك

ریاضیدان کوچکی، که طول او به‌زحمت به ۴ میلیمتر می‌رسد، به‌نام شپشك درخت توس احتمالاً در یکی از دانشکده‌ها (که لااقل از نظر مردمان دورمانده است)، ریاضیات عالی‌را یادگرفته است، زیرا می‌تواند چنان مسأله‌هایی را حل کند که حتی یکی از دانش‌آموزان هم حاضر نیست سرخودرا به‌خاطر آنها به‌دردآورد. شپشك ۱ (شکل ۲۹۶ را ببینید) خود را وارد برگ خلنگ، توسکا و راش می‌کند و آنرا از وسط به دوطرف تا کنار برگ می‌جود و شبیه ۳ منحنیهای پیچیده‌ای به‌وجود می‌آورد. سپس دو نیمهٔ برگ را بهم می‌پیچد و لوله‌ای درست می‌کند (آنطور که شبیه آن در ۴ دیده می‌شود) وتخمه‌های خود را درآن پنهان می‌کند تا به وسیلهٔ باران شسته نشود، در برابرآفتاب نسوزد و از دسترس پرندگان بیرون باشد. بعد خودرا درباد، مثل گاهوارهٔ بچه‌های آینده، آویزان می‌کند. برای حل چنین‌مسألهٔ دشواری، که نیاز به‌شکلها ومحاسبه‌های بسیاری دارد، شپشك تنها نیم ساعت وقت صرف می‌کند.

ببینیم تنهـا برای پی‌بردن به رازهای ریـاضی این حشرهٔ «با استعداد» چقدر وقت لازم است.

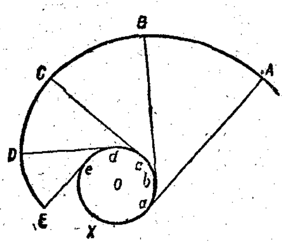
شکل ۲۹۶

اگر برگ همهٔ انواع درختهایی را که شپشك مورد استفاده قرار می‌دهد، بررسی کنیم، متوجه می‌شویم شکل منحنیهـایی کـه برگ درطول آن جویده می‌شود، کاملاً به انحنای کنارهٔ بـرگ ارتباط دارد. این شکل دولوپهٔ[۱] (گسترده) کنارهٔ برگ است، ومنحنی

۱) Développée

کنارهٔ برگ به‌نوبهٔ خود دولوپانت[1] (گسترش دهنده) شکلی است که به‌وسیلهٔ خرطوم هندسه‌دان کوچك رسم می‌شود.

لابد شما می‌پرسید که اینها چه هستند: دولوپه و دولوپانت؟ آیا اینهاهم حشره‌های جدیدی هستند؟ نه‌چندان... البته اینها به‌حلزون، یابهتربگوییم به‌صدف حلزون، شباهت دارند. درشکل۲۹۷ دومنحنی ABCDE و abcde دیده می‌شود، رابطهٔ این دومنحنی با یکدیگر به‌این ترتیب است که خطهای aA، bB، cC و ... بردایرهٔ abcde مماس وبرمنحنی ABCDE عمودند. ABCDE را دولوپانت دایرهٔ abcde و دایرهٔ abcde را دولوپهٔ منحنی ABCDE گویند. برای اینکه دولوپانت دایرهٔ adcde را رسم کنیم، از تختهٔ نسبتاً کلفتی دایره‌ای مساوی دایرهٔ مفروض می‌بریم و آنرا روی کاغذ محکم وبدون حرکت می‌کنیم، سپس نخی به‌دور آن درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیچیم. به انتهای نخ مدادی می‌بندیم. فرض می کنیم که مداد روی محیط دایرهٔ O درنقطهٔ x باشد. حالا اگرنوك تیزمداد را روی کاغذ طوری حرکت دهیم که همیشه نخ به صورت کشیده باقی بماند، دولوپانت رسم می‌شود. اگر داشته باشیم:



شکل ۲۹۷

$$eE=ex\,,\ Dd=dx\,,\ Cc=cx\,,\ Bb=bx\,,\ Aa=ax$$

در اینصورت دولوپانت همان منحنی ABCDE خواهد بود.

---

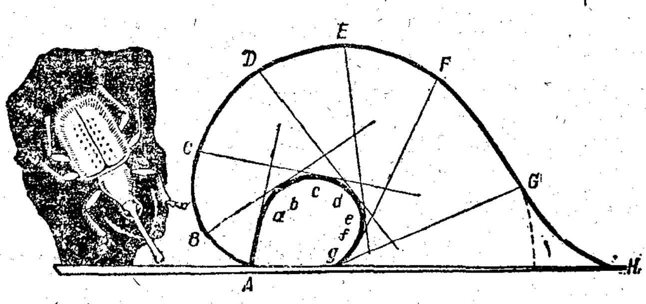
۱) Développante

ازروشی که برای رسم دولوپانت ذکر کردیم بەسادگی معلوم می‌شود کـه طول مماسهای بر دولوپه (کـه درعین حال شعاعهای دولوپانت‌هم هستند) برابرند باطول آن قسمت ازمحیط دولوپه که نخ ازدور آن باز شده است.

اگـر بخواهیم دولوپهٔ یك دولوپانت مفـروض را رسم کنیم، بایـد از یك رشته نقطه‌های آن عمودهایی (یا بەاصطلاح قائمهایی) رسم کنیم، از برخورد این قائمها خط شکسته‌ای بدست می‌آید، و دولوپهٔ مورد نظر عبارتست ازمنحنی مماس برپاره خطهای این خط شکسته.

شپشك هم درست همین مسأله را درمورد برگ درخت توس حل می‌کند. رد پای اورا تعقیب کنیم.

ABCDEFGH را نیمی از کنارهٔ بـرگ می‌گیریم (شکل ۲۹۸) وفرض می‌کنیم که بخواهیم دولوپهٔ منحنی ABCDEFG را پیدا کنیم.



شکل ۲۹۸

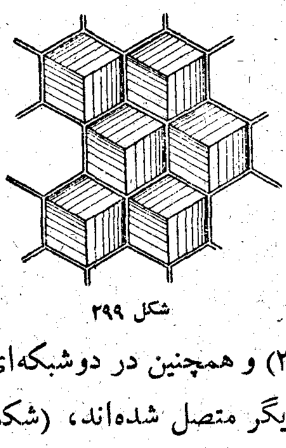
در این نقطه‌ها قائمهایی (یعنی عمودهایی برمنحنی مفروض) رسم می‌کنیم، دولوپهٔ abcdefg بدست می‌آید، کـه شپشك هم در

نیمهٔ اول برگ روی آن بریدگی به‌وجود می‌آورد. حشرهٔ «بااستعداد» برای نیمهٔ دوم برگ زحمت زیادی ندارد. او براساس صرفه‌جویی از کار، نیمهٔ دوم را روی نیمهٔ اول می‌پیچاند ونظراً نیمهٔ دوم دولوپه را رسم می‌کند.

۲ـ شاهکارهای ریاضی از موم

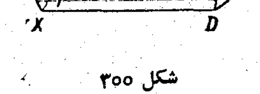
اگر وجود حشره‌ای می‌تواند، با حل سریع و درست یک مسألهٔ هندسی، ما را دچار شگفتی کند، می‌توان به‌آنچه که ساکنین کندوهای عسل ایجاد می‌کنند، شاهکارهای ریاضی نامید.

ساختمان شانه‌های کندو را بررسی می‌کنیم. این شانه‌ها از یك رشته شبکه‌های مومی شش وجهی تشکیل شده‌اند که در دوقشر چیده شده‌اند وباکفهای مشترکی بهم مربوط‌اند. شکل ۲۹۹ نمایشی ازسوراخها وشکل کفهای این شبکه‌ها را نشان می‌دهد.



شکل ۲۹۹

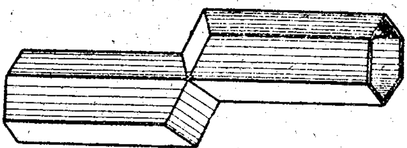
کفها مسطح نیستند: هر کف شکستگی دارد واز سه لوزی مساوی درست شده است. این مطلب راخیلی روشن‌ترمی‌توان دریك شبکهٔ جداگانه (شکل ۳۰۰) و همچنین در دوشبکه‌ای که به یکدیگر متصل شده‌اند، (شکل ۳۰۱) ملاحظه کرد.



شکل ۳۰۰

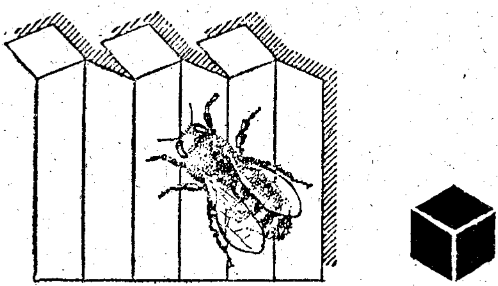
زاویهٔ ABC لوزی، و بنابراین

زاویهٔ CSA مساوی ′۲۸°۱۰۹ و زاویه‌های SCB و SAB مساوی ′۳۲°۷۰ اند. عمق شبکه ۱۱/۳ میلیمتر، عرض هریك از شش دیوارهٔ



شکل ۳۰۱

شبکه مساوی ۲/۷۱ میلیمتر و ضخامت آن مساوی ضخامت یك کاغذ نوشتنی معمولی است. اگر کسی می‌خواهد نمونهٔ بزرگ شدهٔ شبکهٔ کندوی زنبور عسل را بسازد، می‌تواند از باز شدهٔ طرح آن در شکل ۳۰۲ استفاده کند.



شکل ۳۰۲

ابتدا به شش گوش بودن شکل شبکه می‌پردازیم. بررسی این مطلب جالب است که چرا زنبورعسل برای مقطع منشورمومی خود، این شکل را انتخاب کرده است؟ این نتیجهٔ تلاش مصرف کردن حداقل سطح در داخل یك گوشهٔ تنگ است. قبل ازهمه باید چند ضلعی را به این شکل انتخاب کرد تا باتکرار آن بتوان سطح کندو را بدون هیچ فاصله وشکافی پوشانید. چه شکلهای منتظمی برای این منظور

مناسب‌اند (که البته به‌وسیلهٔ فیثاغورث کشف شد)؟ این چند ضلعیها عبارتند از مثلث، مربع و شش ضلعی. به همین مناسبت زنبورهای هوشمند دربارهٔ چند ضلعیهای دیگر حتی فکرهم نکرده‌اند، زیرا در اینصورت برای پرکردن سطح کندو می‌بایست از دو تا چند نوع مختلف شبکه استفاده کنند که مستلزم کار بیشتروپیچیده‌تری بود. به‌این ترتیب آنها تنهامی‌توانستند ازیکی ازاین سه‌نوع شکل استفاده کنند، و آنها از این سه حالت ممکن شش ضلعی را انتخاب کردند. چرا؟ برای اینکه دربین این سه شکل، وقتی که مساحتهای مساوی داشته باشند، شش ضلعی کمترین محیط را دارد. یعنی وقتی که خانه‌ها را باقاعدهٔ شش‌ضلعی می‌سازند، باحداقل مصرف موم، حداکثر حجم را بدست می‌آورند.

مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع وشش ضلعی منتظم را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم مساحتهای این سه شکل برابرباشد، ببینیم از مقایسهٔ محیط آنها چه نتیجه‌ای بدست می‌آید.

برای مثلث داریم:

$$S=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$$

واز آنجا برای ضلع مثلث بدست می‌آید:

$$a=۲\sqrt{\frac{S}{\sqrt{۳}}}$$

و محیط آن

$$P_{۱}=۳a=۶\sqrt{\frac{S}{\sqrt{۳}}}$$

ومحیط مربع بامساحت S چنین می‌شود:

$$P_{۲}=۴\sqrt{S}$$

و بالاخره مساحت شش ضلعی منتظم به‌ضلع c عبارتست از:

$$S=\frac{۳c^{۲}\sqrt{۳}}{۳}$$

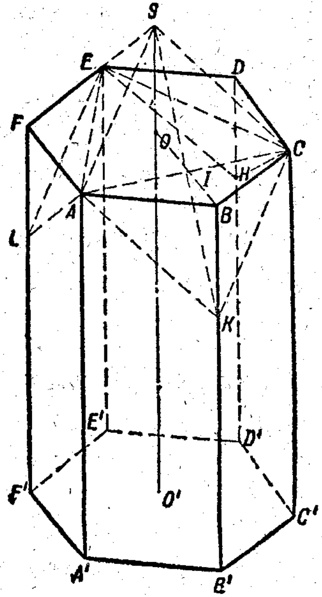
واز آنجا محیط شش‌ضلعی برحسب مساحت آن بدست می‌آید:

$$P_{۳}=۶c=۶\sqrt{\frac{۲S}{۳\sqrt{۳}}}$$

نسبت محیطهای این سه شکل می‌شود:

$$P_{۱} : P_{۲} : P_{۳}=۶\sqrt{\frac{S}{\sqrt{۳}}} : ۴\sqrt{S} : ۶\sqrt{\frac{۲S}{۳\sqrt{۳}}}=$$

$$=۱:\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}:\frac{۱}{۳}\sqrt{۶}=۱ : ۰/۹۰۵ : ۰/۸۱۶$$



شکل ۳۰۳

یعنی کمترین محیط متعلق‌به‌همان شش ضلعی است که به وسیلهٔ زنبورعسل انتخاب شده است.

ازنقطهٔ S (شکل۳۰۳) واقع بر امتداد 'OO، محور منشور، وازهرضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ACE سه صفحه می‌گذرانیم که از منشور سه هرم مثلث‌القاعدهٔ BACK، DCEH و FEAL را جدا کند که به‌جای آنها می‌توان یك‌هرم SACE را درنظر گرفت. بنابراین چند وجهی

جدید از بالا به‌سه‌لوزی SAKC، SCHE و SELA محدودمی‌شود. حجم شکل‌جدیدی که بدست آمده‌است برابر است باحجم منشوراولیهٔ $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ و به‌اینهم مربوط نیست که نقطهٔ S را روی محور OO' کجا انتخاب کرده باشیم، زیرا هرم SACE ازسه‌هرم SOAC، SOCE و SOEA تشکیل شده است که مساوی با هرمهایی هستندکه ما جدا کردیم، مثلاً $SOAC=KBAC$.

البته با ثابت بودن مقدار حجم، وقتی که زاویهٔ رأس کمتر یا بیشترشود (باتغییر جای S روی OO')، مساحت هریك از آنها مقدار ثابتی ندارد و بستگی به‌وضع S خواهد داشت. ببینیم به ازای چه مقداری از $SO=x$ این مساحت حداقل است.

AB را مساوی a و $BB'=OO'$ را مساوی b می‌گیریم، دراینصورت

$$AC=a\sqrt{3},$$

$$SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+a^2}$$

واز آنجا

$$SK=2SI=\sqrt{4x^2+a^2}$$

مساحت لوزی SAKC برابر است با نصف حاصلضرب دو قطرآن AC و SK، یعنی $\frac{1}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}$، ومساحت ذوذنقهٔ $CKB'C'$ برابر است با $\frac{1}{2}a(2b-x)$.

مساحت چند وجهی، بدون در نظر گرفتن قاعدهٔ آن، برابر می‌شود با:

$$\frac{3}{2}a\sqrt{3a^2+12x^2}+3a(2b-x)=3a\left[\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+\right.$$
$$\left.+2b-x\right]$$

ضریب $3a$ مقداری است ثابت و در حداکثر و حداقل سطح دخالتی ندارد، بنابراین باید حداقل مقدارداخل کروشه‌را پیدا کرد.

فرض می کنیم

$$\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+12x^2}+2b-x=m$$

ازاین رابطه معلوم می‌شود که $m>2b$.

بعد از ساده کردن بدست می آید:

$$8x^2-8(m-2b)x+[3a^2-4(m-2b)^2]=0$$

برای اینکه x مقداری مثبت باشد، قبل از همه باید مبین این معادلهٔ درجه دوم غیر منفی باشد:

$$\Delta=64(m-2b)^2-32[3a^2-4(m-2b)^2]\geqslant 0$$

ازآنجا

$$\Delta=192(m-2b)^2-96a^2\geqslant 0$$

یعنی

$$\Delta=192[(m-2b)^2-\frac{a^2}{2}]\geqslant 0$$

و برای اینکه این شرط برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$m-2b\geqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$$

از این نامساوی دیده می‌شود که حداقل مقدار m مساوی $2b+\frac{a}{\sqrt{2}}$ است. ازضرب این مقدار در $3a$، حداقل مساحت مورد نظر بدست می آید که برابراست با $6ab+\frac{3a^2}{\sqrt{2}}$ که مقدار متناظر آن برای x چنین است: $x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

مساحت سطح ABCDEFA'B'C'D'E'F'، بدون یکی از

قاعده‌ها برابرمی‌شودبا $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+6ab$. حداقل مساحت چندوجهی جدید کوچکتر از مساحت منشور قبلی با قاعدهٔ شش ضلعی است که مساحتی مساوی $\frac{3}{2}a^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ داشت.

به عبارت دیگر: اگر زنبورها کف خانه‌ها را کاملاً مسطح می‌گرفتند، برای حجمهای مساوی لازم بود، نسبت به‌چندوجهی با حداقل مساحت، موم بیشتری مصرف کنند.

به‌سادگی می‌توان متوجه شدکه در مثلث **KBI** نسبتهای

$$BK : BI : IK = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

به کار رفته است. از آنجا به‌کمك مثلثات مقدار زاویهٔ **BIK** بدست می‌آیدکه مساوی $35°15'12''$ است و متناظر با زاویهٔ $109°28'$ لوزی است. و این همان زاویه‌ای است که به حداقل مساحت چند وجهی‌جواب می‌دهد وزنبورها هم برای ساختن خانه‌های خودآنرا انتخاب کرده‌اند. به‌مناسبت این محاسبهٔ پرشکوه برای باصرفه‌ترین نوع ساختمان، قریب ۲٪ موم صرفه‌جویی می‌شود، به عبارت دقیق‌تر: بامومی که‌از صرفه جویی در ساختمان ۵۴ خانه بدست می‌آید، می‌توان یك خانهٔ کامل ساخت.

«نبوغ ریاضی» زنبورعسل حتی درزمانهای باستانی هم بشر را به شگفتی واداشته بود. ارسطو (سدهٔ چهارم قبل از میلاد) و پلینی بزرگ (سدهٔ اول میلادی) دراین باره صحبت کرده‌اند.

پاپی درسدهٔسوم میلادی نخستین کسی بودکه بررسی‌خانه‌های کندوی عسل را به‌عنوان یك ساختمان هندسی شروع کرد ومتوجه

بهترین خاصیت هندسی آنهـا از نقطه نظر حداقل محیط و پر کردن تمام سطح، بدون جا افتادگی، شد.

رئومور فیزیك‌دان مشهور، وقتی کـه به نوع انتخـاب زنبور عسل برای کف خانه‌های کندو برخورد کرد به کونیگ ریـاضیدان آلمـانی پیشنهاد کرد که بـا محاسبه معلـوم کند برای یـك حجم مفروض این لوزیها در چه نسبتی باید باشند تا حداقل مساحت را داشته باشند.

کونیگ بااستفاده ازروش حساب دیفرانسیل (در سال ۱۷۳۲) مشخص کرد که چنین لوزیهایی باید بازاویه‌های ′۲۶°۱۰۹ و ′۳۴°۷۰ ساخته شده باشند. ولی چهارسال بعد ماکلورن ثابت کرد که کونیگ در محاسبهٔ خود اشتباه کرده است ومقدار واقعی زاویه‌های لوزی باید ′۲۸°۱۰۹ و ′۳۲°۷۰ باشند.

۳ـ قانون نسبتها

«نسبت خدایی» ـ آنطور که درقدیم می‌گفتند، ویا آنطور که ریاضیدانهای قرون وسطی تقسیم طلایی یـا نسبت طلایی می‌نامیدند، در زمان ما از تخت زرین خود فرودآمده و به کتابهای دبیرستانی معمولی راه یافته است.

ولی به آنچه که در کتابهای درسی دربارهٔ نسبت طلایی وجود دارد، مطالب جالب دیگری هم می‌توان اضافه کرد.

تقسیم پاره خط به‌طول a به‌نسبت طلایی به‌این معناست که :

نسبت پاره خط به قطعهٔ بزرگتر برابر باشد بانسبت قطعهٔ بزرگتر به‌قطعه کوچکتر. ازاین تناسب بدست می‌آید:

$$a : x = x : (a - x)$$

این تناسب معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را می‌دهد:

$$x^{۲} + ax - a^{۲} = ۰$$

از آنجا نسبت $\frac{x}{a}$ ازتقسیم طلایی به‌صورت عدد $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$ در می‌آید، که به‌صورت کسر اعشاری مساوی ... ۰/۶۱۸۰۴ می‌شود و می‌توان آنرا با کسر مسلسل زیرهم نشان داد:

$$\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\dots}}}}}$$

* * *

اینجا پیش‌آمدجالب ریاضی بارشتهٔ مشهور فیبوناچی داریم:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ۵۵، ۸۹، ۱۴۴،...

اگراین رشته عددهارا به‌ترتیب صورت وبجزواحد اول، بقیه را مخرج کسرهایی‌درنظربگیریم، رشته کسرهای زیربدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۵}, \frac{۵}{۸}, \frac{۸}{۱۳}, \frac{۱۳}{۲۱}, \frac{۲۱}{۳۴}, \frac{۳۴}{۵۵}, \frac{۵۵}{۸۹}, \frac{۸۹}{۱۴۴}, \dots$$

اگر به‌این نسبتها توجه‌کنیم، می‌بینیم که مرتباً به‌نسبت طلایی نزدیکتر می‌شوند:

$$\frac{۱}{۲}=۰/۵۰۰$$

$$\frac{۲}{۳}=۰/۶۶۷$$

$$\frac{۳}{۵}=۰/۶۰۰$$

$$\frac{۵}{۸}=۰/۶۲۵$$

$$\frac{۸}{۱۳}=۰/۶۱۵$$

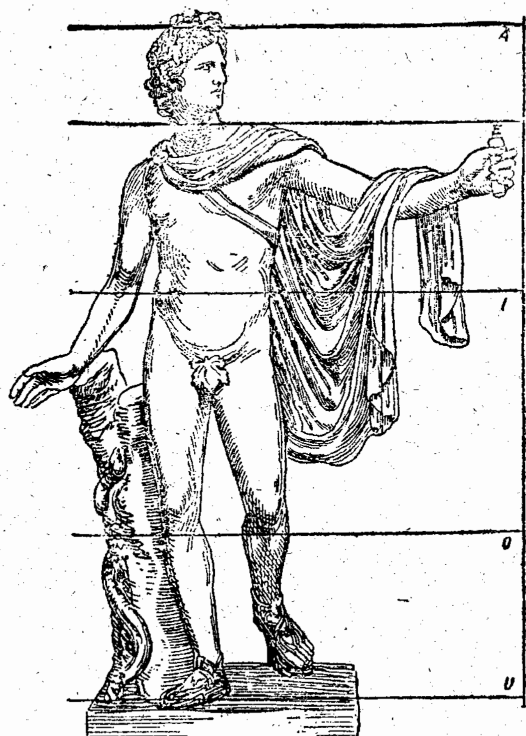
$$\frac{۱۳}{۲۱}=۰/۶۱۹۰$$

$$\frac{۲۱}{۳۴}=۰/۶۱۷۶$$

$$\frac{۳۴}{۵۵}=۰/۶۱۸۱$$

$$\frac{۵۵}{۸۹}=۰/۶۱۷۹$$

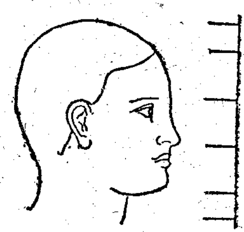
$$\frac{۸۹}{۱۴۴}=۰/۶۱۸۰۵$$



شکل ۳۰۴

تقسیم طلایی، با همهٔ پیچیدگی کـه در بیان عددی آن وجود دارد، تناسبی است که اغلب در طبیعت و در ساخته‌های دست بشر به‌آن برخورد می‌کنیم. بدن آدمی، ویا دقیق‌تر ساختمان بـدن مرد (که به‌اعتقاد قدیمیهـا کامل‌تر از بدن زن است)، چه در کل بدن و چه دربعضی از قسمتهای جداگانهٔ آن، اغلب ازقانون تقسیم‌طلایی پیروی کرده است.

در شکل ۳۰۴ مجسمهٔ معروف آپولون به نسبت تقسیم طلایـی قسمت‌شده است. خط I تمام تصویررا به دو قسمت به«نسبت خدایی» تقسیم می‌کند؛ خط E همین‌نسبت را بین سروقسمت بالای تنه نشان می‌دهد، بالاخره خط O تقسیم‌پاهارا درزانوها به‌نسبت‌طلایی‌مشخص می‌کند.


شکل ۳۰۵

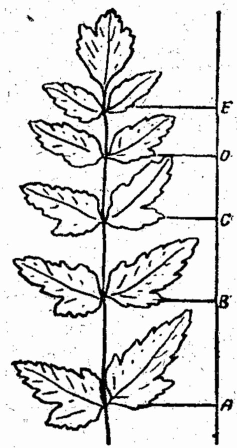
شکل ۳۰۶

این راهم باید اضافه کرد که اگر تن آدمی را به‌همین نسبت تقسیم کنیم، به‌نحوی‌که قسمت کوچکتر پایین وقسمت بـزرگتر بالا قرارگیرد، خط تقسیم ازانتهای انگشتهای دستها (به‌شرطی‌که بطور آزاد آویزان باشند) می‌گذرد.

تقسیم سر به قسمتهای اختصاصی هم یك رشته نسبت بـدست

می‌دهد کـه خیلی به‌نسبت طلایی نزدیکند (شکل ۳۰۵)، همین وضع درمورد دست و کف دست هم وجود دارد (شکل ۳۰۶).

اگرازعالم انسان به‌عالم گیاه برویم، درآنجاهم کاربرد شگفت‌آور نسبت طلایی را پیدا می‌کنیم.



شکل ۳۰۷

وضع قرار گرفتن برگها را روی یك ساقه بررسی می‌کنیم. می‌بینیم که بین هردو زوج برگ، سومی درجای‌تقسیم طلایی‌قرار گرفته است (شکل ۳۰۷).

اگر وضع قرارگرفتن برگها را روی شاخه‌ها وشاخه‌های جداگانه را روی ساقه مطالعه کنیم، باز هم به نتیجه‌هـای جالب تری می‌رسیم. به‌سادگی می‌توان متوجه شد کـه همهٔ برگها یکی روی دیگـری قرار نگرفته است، برگهای مجاوراغلب روی یك‌خط راست نیستند، بلکه شاخه را دورمی‌زنند. اگرنخی‌از پایهٔ یك برگ به‌پایهٔ برگ دوم واز آنجا به پایهٔ برگ سوم وغیره به‌نوبت ببندیـم، دیده می‌شود کـه نخ دور شاخه می‌پیچد و یك مارپیچ واقعـی درست می‌کند. این مطلب را می‌توان روی شکل ۳۰۸ به‌روشنی دید.

درگیاه شناسی استقرار برگها را در رستنیهـای مختلف بـا تعداد دورهای خط مارپیچ وتعداد برگهایی دریك‌دور وجود دارد، مشخص می‌کنند. دور به‌فاصلهٔ بین برگهایی گفته می‌شود که درست یکی روی دیگری در طول شاخه یا ساقه قرار گرفته باشند. بخاطر

سهولت کار وضع درخت را بااین نسبت مشخص می کنند، که صورت آن تعداد دورها ومخرج آن تعداد فاصله‌های بین بـرگها را نشان می‌دهد.

مثلاً اگربرای رسیدن ازیك برگ به‌برگی که درست روی آن

شکل ۳۰۸

(روی خط راستی که از برگ اول درامتداد شاخه‌یاساقه رسم می‌شود) قرارگرفته است، باید سه‌باردورشاخه پیچید وضمناً درفضا به‌هشت فاصله برخورد شود، گویند وضع استقراربرگها باکسر $\frac{3}{8}$ مشخص

می‌شود.

به‌سادگی فهمیده می‌شود که این کسر ضمناً زاویهٔ انحراف بین دوبرگ مجاور راهم بیان می‌کند؛ مثلاً $\frac{۳}{۸}$ دور به‌معنای ۱۳۵ درجه است. از اینجا روشن می‌شود که کسرهای $\frac{۳}{۸}$ و $\frac{۵}{۸}$ یك وضع را برای استقرار برگها مشخص می‌کنند، زیرا زاویه‌ای که مساوی $\frac{۳}{۸}$ دور باشد، به‌اندازهٔ $\frac{۵}{۸}$ دور بـا ۳۶۰ درجه اختلاف دارد. اختلاف عددها به‌این معناست که دریك حالت خط مارپیچ از راست به‌چپ حرکت کرده است ودر حالت دیگر از چپ به‌راست. گیاه شناسان در محاسبه‌های خودکه به‌کرات انجام داده‌اند وبه وضع زیر برای استقرار برگها برخورده‌اند:

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۸}, \frac{۵}{۱۳}, \frac{۸}{۲۱}, \ldots$$

و ضمناً متذکـر شده‌انـدکـه این رشته، خصوصیت جـالب و غیر منتظره‌ای هم دارد: هرکسر (با شروع ازکسر سوم) از دوکسرقبل به‌این ترتیب بدست می‌آید که صورتها را باهم و مخرجها را باهم جمع می‌کنیم. درحقیقت:

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۱+۱}{۲+۳}, \frac{۳}{۸}=\frac{۱+۲}{۳+۵}, \frac{۵}{۱۳}=\frac{۲+۳}{۵+۸}, \ldots$$

بنابراین کافی است دوکسر اول را پیداکنیم، تا بتوانیم تمام رشتهٔ کسرها را بنویسیم.

چرا این خصوصیت غیر منتظره است؟

اگر دراین رشته بجای کسرهای $\frac{۲}{۵}$، $\frac{۳}{۸}$، ... معادلهای آنها

را ازلحاظ گیاه‌شناسی قراردهیم (یعنی کسرهای $\frac{۳}{۵}$، $\frac{۵}{۸}$، ...) دوباره در صورت ومخرج کسرها به‌رشتهٔ فیبوناچی می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۵}, \frac{۵}{۸}, \frac{۸}{۱۳}, \frac{۱۳}{۲۱}, \ldots$$

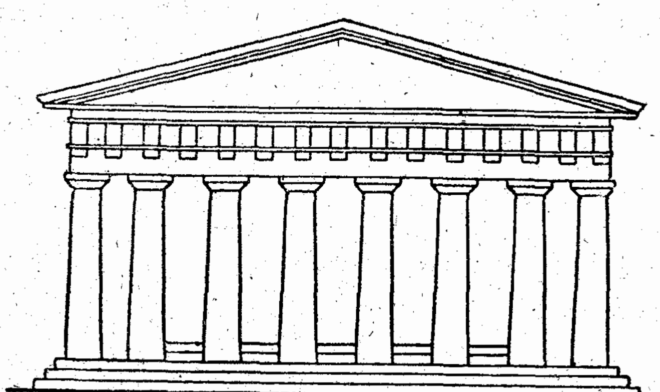
واین به‌معنای آنست که وضع استقرار برگها خیلی نزدیك به نسبت طلایی است.

دانشمندانی بوده‌اندکه بررسی خود را روی قسمتهای دیگری از رستنیها انجام داده‌اند و همه‌جا توانسته‌اند ارتباط بین دنیای گیاهان را بانسبت طلایی پیدا ،کنند.

* * *

در جهان هنر وبخصوص در معماری‌هم نسبت طلایی برای چشم خیلی خوش‌آیند ودلپسند است.

طول تیر بزرگ پارفه‌نون مشهور یونانی (شکل ۳۰۹) نسبت



شکل ۳۰۹

به ارتفاع تمام ساختمان مساوی ۱:۰/۶۱۸ است که نسبت طلایی را به‌خاطرمی‌آورد. دربسیاری ازقسمتهای دیگراین‌شاهکارمعماری کلاسیك هم می‌توان به‌نسبت طلایی برخوردکرد.

نسبت طلایی نه‌تنها برطبیعت حکومت می‌کند، بلکه برچشم آدمی وحتی‌گوش آدمی هم تسلط دارد، زیرا درموسیقی‌هم می‌توان رد پای مشخص نسبت طلایی را پیداکرد.

VI_ معماها و پیشگوییها

۱_ ستاره‌های عددی

روی ۱۶ صفحهٔ کاغذ ۱۶ عدد متوالی (روی هر کاغذ یك عدد) بنویسید؛ می‌شود عددها را از ۱ شروع کرد یاهر عدد دیگری، تنها نباید روی دو کاغذ دوعدد مساوی نوشته شود. کاغذها را مخلوط کنید وسپس به‌شکل یك صلیب قرار دهید:

A

۲

۱

۶

۹

D) ۱۳ ۱۵ ۱۱ ۷   ۱۴ ۳ ۵ ۱۰ (B

۱۲

۴

۸

۱۶

C

سپس از چهار نفر A، B، C، D بخواهید هریك از آنها در یکی‌ازاین‌شعاعها عددی‌را درنظر بگیرند و آنرا خوب به‌خاطر بسپارند،

البته بدون اینکه آنرا باصدای بلند نام ببرد.

آنوقت برگهای کاغذ را جمع کنید، ضمناً بدون اینکه کسی بفهمد آنها را به ردیفی پشت سرهم بگذارید که هرچهار برگی که روی یك شعاع بودند، پهلوی هم قرار گیرند، یعنی اول ردیف A را جمع کنید، بعد ردیف B وبالاخره ردیفهای C و D. برگهای کاغذ را دوباره به ترتیبی بچینید که هریك ازچهار برگ یکی از شعاعهای قبل دریکی ازچهار شعاع جدید قرار گیرد، آنوقت به نوبت ازهرنفر بپرسید که عدد انتخابی آنها در وضع جدید درکدام شعاع قرار گرفته است بلافاصله وبدون اشتباه آنها را پیدا خواهید کرد.

A

۱۵

۴

۳

۱

C) ۱۳ ۱۲ ۱۴ ۲ ۶ ۵ ۸ ۱۱ (B

۹

۱۰

۱۶

۷

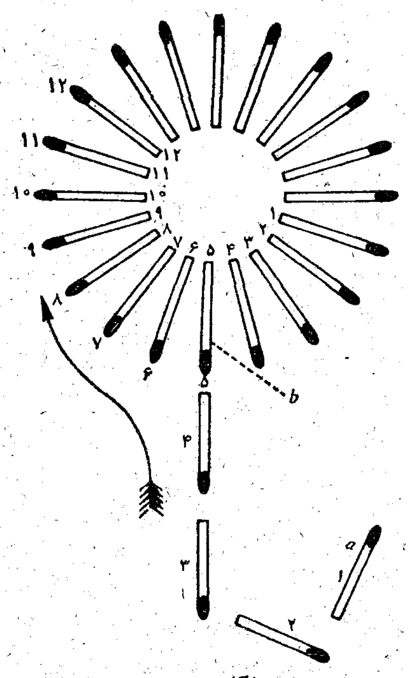
D

تنهایك دقیقه فکر کردن کافی است که راه سادهٔ این پیشگویی شناخته شود وبه همین مناسبت ما ازتوضیح مفصل آن خود داری می کنیم. همینقدراضافه می کنیم که این شوخی‌را می‌توان باموفقیت درمواردی‌هم که بجای‌ستارهٔ چهارپرازستارهٔ پنج‌یاشش‌پر یاهشت‌پر

استفاده می کنیم، بکار برد. ضمناً باید توجه کرد که تعداد برگهای کاغذ، وبنابراین تعداد عددهایی که روی آنها نوشته می‌شود، باید همیشه مساوی مجذور تعداد شعاعهای ستاره (۲۵، ۳۶، ۶۴) باشد، به‌نحوی که در هرشعاع تعداد عددها مساوی تعداد شعاعهای ستاره باشد.

۲ـ ستارهٔ دنباله‌دار باچوب کبریت

۲۴ چوب کبریت را آنطور که در شکل ۳۱۰ می‌بینید بچینید، سپس ازیکی از دوستانتان بخواهید عددی را پیش خود فکر کند (که البته خیلی بزرگ نباشد) وبا شروع ازابتدای دم ستاره، یعنی چوب کبریت a ، ودر جهتی که روی شکل نشان داده شده است تا عددی که فکر کرده است بشمارد وسپس ازهمانجابرگردد و دوباره به‌تعداد عددی که فکر کرده است روی محیط دایرهٔسر ستاره، چوب کبریتهارا بشمارد. شما می‌توانید از قبل و بدون هیچ زحمتی بگویید سر آخر به کدام چوب کبریت می‌رسد. عددهایی که کنار چوب کبریتها

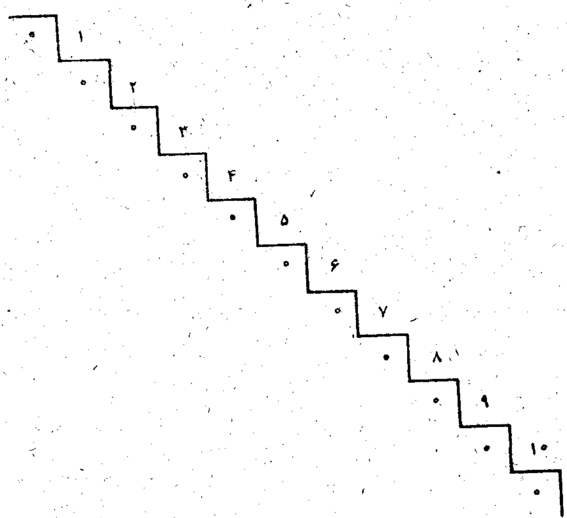


شکل ۳۱۰

نوشته شده است، راه پیشگویی را برای عدد ۱۲ روشن می کند. می‌توانید برای عددهای دیگرهم خودتان آزمایش کنید. برای‌تکرار این شوخی طول دم وتعداد چوب کبریتهای سرستاره را عوض کنید که دوستان شما خیلی‌زود متوجه علت سادهٔ این شوخی نشوند.

۳ـ پله‌کان عددی

ازکسی بخواهید عددی بین ۱ و ۱۰ را پیش خود فکر کند، آنرا ۳ برابر کند و به‌حاصلضرب ۹ واحد اضافه کند، سپس باشروع از عددی که فکرکرده است تا عددی که در نتیجهٔ ضرب و جمع بدست آورده است در ذهن خود بشمارد.



شکل ۳۱۱

ضمن شمردن باید رقمهای مختلفی از«پله‌کان» را نشان‌دهد. وقتی که کار شمردن او تمام شد می گوید: «تمام». در اینحالت او

روی پله کان درست همان عددی راکه فکر کرده است نشان می دهد.

بهتر است بایك مثال مطلب را روشن‌تر کنیم.

فرض کنید کسی عدد ۵ را پیش خود فکر کرده‌باشد، آنرا در ۳ضرب وبه حاصلضرب عدد ۹ را اضافـه می کند، عدد ۲۴ بدست می آید. سپس در فکر خود با شروع از ۵ می‌شمارد: ۶، ۷، ۸، ۹، . . . تا ۲۴. ضمناً این شمـارش بطـور منظم بـا حرکت دست همراهی می‌شود، هرحرکت بـرای یك عدد. در نـه حرکت اول می‌تواند هرعددی کـه مایل است روی «پله کان» (شکل ۳۱۱) نشان دهـد، ولـی باحرکت دهم عدد صفر راکـه قبل‌از ۱ قرار گـرفته است نشان می‌دهد وبعد به‌ترتیب از «پله‌ها» پایین می آید یعنی:

درحرکت ۱۰ (عدد ۱۵) ۰ رانشان می‌دهد، قبل‌از عدد ۱

» » ۱۱ (عدد ۱۶) ۱ » » »

» » ۱۲ (عدد ۱۷) ۰ » » » ، قبل‌از عدد ۲

» » ۱۳ (عدد ۱۸) ۲ » » »

» » ۱۴ (عدد ۱۹) ۰ » » » ، قبل‌ازعدد۳وغیره.

بعداز نونزده حرکت که در ذهن خود به‌عدد۲۴ می‌رسد می‌گویـد: «تمام» و در همین موقـع است کـه درست عدد ۵ را روی «پله کان» نشان داده است. اساس این معمـای جالب آنقـدر ساده است که هیچ نیازی به‌توضیح دربارهٔ آن نیست.

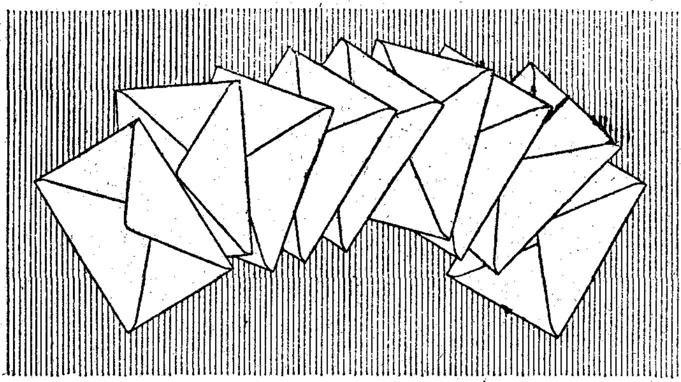
۴ـ چگونه می‌توان مبلغ لازم را، بدون بازکردن پاکتهای پول پرداخت

در نه پاکت دربسته (شکل ۳۱۲) رویهم ۳۰۰ تومان وجـود

دارد. اگر کسی ازشما مبلغی به‌عدد صحیح (که البته از ۳۰۰ تومان تجاوز نکند) بخواهد، شما می‌توانید بدون بازکردن حتی یکی از پاکتها پول مورد درخواست اورا بپردازید.

فرض کنید ازشما ۲۱۳ تومان خواسته باشند؛ پنج پاکت به‌او می‌دهید که وقتی او باز کند به‌ترتیب این مبلغها را پیدا می کند:

$$۱۲۸ + ۶۴ + ۱۶ + ۴ + ۱ = ۲۱۳ \quad \text{(تومان)}$$



شکل ۳۱۲

اگر یکی دیگر ۲۹۳ تومان درخواست کند، شما می‌توانید حتی خودتان پاکتها را انتخاب نکنید، تنها ازکسی می‌خواهید سه پاکت اول راکناربگذارد، درشش پاکت باقیمانده مبلغ موردنظر وجود دارد.

این یك شوخی جالبی است که درعین‌حال مبتنی برفکر بسیار ساده‌ای درست شده است. مبلغ کل در پاکتها به نسبت خاصی تقسیم شده است. یعنی باید در هشت پاکت پولها را به این ترتیب قرار داد:

پاکت اول:	۱	تومان	پاکت پنجم:	۱۶	تومان
» دوم:	۲	»	» ششم:	۳۲	»
» سوم:	۴	»	» هفتم:	۶۴	»
» چهارم:	۸	»	» هشتم:	۱۲۸	»

درپاکت نهم بقیهٔ مبلغ کل، یعنی ۴۵ تومان را قرار می‌دهیم وبرای اینکه جای آنرا تشخیص ندهند، می‌توان آنـرا در ردیف اول یابین پاکتهای چهارم وپنجم یاهرجای دیگری قرار داد.

اساس این شوخی براین حقیقت قـرار داردکـه از مجموع توانهای مختلف عدد ۲ می‌توان هرعددی را، کـه از مجموع این توانها تجاوز نکند، درست کرد. مبلغهایی‌هم کـه در هشت پاکت قرار دارد به‌ترتیب چنین‌اند:

$$۲^{۰} , ۲^{۱} , ۲^{۲} , ۲^{۳} , ۲^{۴} , ۲^{۵} , ۲^{۶} , ۲^{۷}$$

یعنی بااین‌هشت پاکت می‌توان هرعدد دلخواهی راکه بین۱ و ۲۵۵ باشد، درست کرد. واگر مبلغ مورد نظراز ۲۵۵ بیشتر باشد، برای محاسبهٔ آن می‌تـوان از پاکت نهم، کـه شامل ۴۵ تومان است، استفاده کرد.

هـ حدس رقم پاک شده

درفصل اول این کتاب تعدادی از اینگونه معماها را آوردیم که براساس‌قابلیت تقسیم عدد بر۹ قرارداشت. دراینجا به‌نمونه‌های پیچیده‌تری می‌پردازیم که براساس‌قابلیت تقسیم بر۹، ۱۱، ۹۹ و۱۰۱ قرار دارند.

۱. عدد کاملاً دلخواهی بنویسید، در ابتدا وانتهای آن یک رقم صفرقرار دهید؛ حالا ازسمت راست شروع کنید ورقم اول را با رقم دوم جمع کنید، همچنین رقم دوم را بارقم سوم، سپس رقم سوم رابارقم چهارم وغیره، درعددی که به‌این‌ترتیب بدست می آید یکی‌از رقمها راحذف کنید وبقیه‌را به‌من نشان دهید،من رقم حذف شده را خواهم گفت.

مثال: ۷۹۲۳؛ صفرها را می‌نویسیم: ۰۷۹۲۳۰ وجمعهای متوالی را انجام می‌دهیم: ۳=۳+۰ ، ۵=۲+۳ ، ۱۱=۹+۲ (۱ را نگه می‌داریم و ۱ دهگان را به مجموع بعد اضافه می‌کنیم) ۱۷=۱+۷+۹ (۷ را نگـه می‌داریم و ۱ دهگـان را به مجموع بعد اضافـه می کنیم)، بالاخره ۸=۱+۰+۷. بدست می‌آید ۸۷۱۵۳. دراین عدد رقم ۵ را حذف می‌کنیم و بجای‌آن ستاره قرار می‌دهیم: ۸۷۱*۳.

چگونه می‌توان این رقم را پیداکرد؟

عددی که رقمهای آن ازمجموع دو به‌دوی رقمهای عدد اصلی بدست می‌آید، برابراست باحاصلضرب عدد اصلی در۱۱:

$$\begin{array}{r} ۷۹۲۳۰+ \\ ۷۹۲۳ \\ \hline ۸۷۱۵۳ \end{array}$$

و بنابراین عدد حاصل بر۱۱ قابل قسمت است.

نشانهٔ اینکه عددی بر ۱۱ قابل قسمت باشد، اینست کـه یا مجموع رقمهای واقع در ردیفهای فرد ومجموع رقمهای واقع درردیفهای زوج یکی باشد ویا تفاضل این دو مجموع بر۱۱ قابل‌قسمت باشد، مثلاً درمورد عدد ۸۷۱۵۳:

$$۳+۱+۸=۱۲$$
$$۵+۷=۱۲$$

و اگر یکی ازرقمها حذف شده باشد، باید داشته باشیم:

$$۳+۱+۸=*+۷$$

یعنی ۱۲=*+۷ وازآنجا ۵=*.

* * *

۲. عددی را که انتخاب کرده‌اید ۱۳ برابر کنید، حاصل را به‌توان ۲ برسانید، ازنتیجه‌ای که بدست می‌آید مجذور دوبرابرعدد انتخابی را کم کنید. یکی از رقمهای حاصل را حذف کنید، من بلافاصله آنرا به‌شما خواهم گفت.

مثال : فرض‌کنید عدد انتخابی ۳ باشد. عملها را انجام می‌دهیم:

$$۱۳\times۳=۳۹\,;\ ۳۹^{۲}=۱۵۲۱\,;\qquad ۲\times۳=۶;\ ۶^{۲}=۳۶;$$
$$۱۵۲۱-۳۶=۱۴۸۵;$$
$$۱۴*۵;\ ۱+*=۴+۵;\ *=۸$$

* * *

مسألهٔ دیگری براساس مسألهٔ قبل.

عددی انتخاب کنید، آنرا ۷برابر کنید، حاصلضرب را مجذور کنید، ازاین مجذور، مجذور چهار برابر عدد انتخابی را کم کنید ویکی از رقمهای عددحاصل را حذف کنید تامن آنرا به‌شمابگویم.

مثال: اگرعدد انتخابی ۳ باشد:

$$۷\times۳=۲۱;\ ۲۱^{۲}=۴۴۱;\qquad ۴\times۳=۱۲;\ ۱۲^{۲}=۱۴۴;$$
$$۴۴۱-۱۴۴=۲۹۷\,;$$
$$*۹۷;\ *+۷=۹;\ *=۲$$

حل این مسأله و مسألهٔ قبل از آن براین اساس قرار دارد که عدد انتخابی را به‌عددی تبدیل کنیم که بر ۱۱ قابل قسمت باشد.

درحقیقت اگر عدد انتخابی را N فرض‌کنیم، عملهای موردنظرمسأله آنرا به‌اینصورت تبدیل می‌کند:

$$۱۳^{۲}N^{۲}+۲^{۲}N^{۲}=(۱۳^{۲}-۲^{۲})N^{۲}=(۱۳-۲)(۱۳+۲)N^{۲}=$$
$$=۱۱\times۱۵N^{۲};$$
$$۷^{۲}N^{۲}-۴^{۲}N^{۲}=(۷^{۲}-۴^{۲})N^{۲}=(۷+۴)(۷-۴)N^{۲}=$$
$$=۱۱\times۳N^{۲}$$

* * *

۳. عدد دلخواهی بنویسید، دوصفر درابتدا ودوصفر درانتهای آن بگذارید؛ رقم سوم (از سمت راست) را از رقم اول کم کنید (اگر ممکن نیست ۱۰ واحد به رقم اول اضافه کنید)، رقم چهارم را از رقم دوم و رقم پنجم را از رقم سوم و غیره. با این تفاضلها عدد جدیدی بدست می‌آید، جای یکی از رقمهای عدد جدید ستاره بگذارید وبه‌من نشان دهید تا رقم حذف‌شده را بگوییم.

مثال: ۶۴۷ ؛ صفرها را قرار دهید : ۰۰۶۴۷۰۰ ؛

۱۰ — ۷ = ۳؛ ۹ — ۴ = ۵؛ ۶ — ۶ = ۰؛ ۴ — ۰ = ۴؛
۶ — ۰ = ۶ ؛

۶۴۰۵۳؛ ۶۴۰۵*

عملهایی‌که انجام داده‌ایم، معادل عمل زیراست:

$$\begin{array}{r} 64700- \\ 647 \\ \hline 64053 \end{array}$$

عدد ۶۴۷ در ۱ — ۱۰۰ یعنی ۹۹ ضرب شده است، درنتیجه عدد حاصل بر ۹۹ قابل قسمت است وبنابراین بر۹ و ۱۱ قابل قسمت می‌شود.

اگر از قابل‌قسمت بودن عدد بر۹ استفاده‌کنیم، باید مجموع رقمهای آن بر۹ قابل قسمت باشد و در نتیجه ۳ = *.

اگر دراینحالت رقم حذف شده ۰ یا ۹ باشد کار به‌اشکال برمی‌خورد؛ مثلاً اگردرمثال اخیر۶۴*۵۳ داده شده باشد، به‌جای * می‌توان صفر یا۹ قرارداد، ولی توجه می‌کنیم که عدد درعین حال باید بر ۱۱ هم قابل قسمت باشد و بنابراین باید داشته باشیم:

$$6+*+3=4+5 \implies *+9=9$$

وازآنجا بدست می‌آید: $* = 0$

* * *

۴. عددی درنظربگیرید که تعداد رقمهای آن فرد باشد. همین عدد را به‌ترتیب عکس هم بنویسید. از این دو عدد، کوچکتر را از بزرگتر کم کنید. تفاضل را در عدد دلخواهی ضرب کنید و دو رقم حاصلضرب را با این دوشرط حذف کنید: ۱) هیچیك ازاین دورقم مساوی صفرنباشد، ۲) یکی از دورقم در ردیف زوج و دیگری در ردیف فرد واقع باشد. هردو رقم را می‌توان پیداکرد.

رمز کار دراینجاست که عدد حاصل بر۹۹ قابل قسمت است. درحقیقت اگر عدد انتخابی را پنج رقمی درنظر بگیریم:

$$۱۰۰۰۰a_۱+۱۰۰۰a_۲+۱۰۰a_۳+۱۰a_۴+a_۵$$

و «مقلوب» آنرا ازآن کم کنیم، بدست می‌آید:

$$۹۹۹۹(a_۱-a_۵)+۹۹۰(a_۲-a_۴)$$

و بنابراین عددی است قابل‌قسمت بر۹۹.

مثال: ۸۵۲۴۱ ؛ ۱۴۲۵۸ ؛ ۷۰۹۸۳ = ۱۴۲۵۸ − ۸۵۲۴۱.

این عدد را مثلاً در۲۳ ضرب می‌کنیم:

$$۲۳\times ۷۰۹۸۳=۱۶۳۲۶۰۹$$

رقمهایی‌را که درردیف اول وچهارم قراردارند حذف می‌کنیم: $۱۶۳x۶۰y$. این عدد باید بر ۹۹ قابل قسمت باشد. نشانهٔ قابل‌قسمت بودن بر ۹۹ شبیه حالت مربوط به‌قابل قسمت بودن بر۹ است، بااین تفاوت‌که دراینجا باید مجموع عددهای دورقمی (از سمت راست) بر۹۹ قابل قسمت باشد. داریم:

$$۱+۶۳+(۱۰x+۶)+y=۱۰x+y+۷۰$$

وبرای اینکه این مقدار بر۹۹ قابل‌قسمت باشد، باید داشته باشیم:

$$x=۲ \text{ و } y=۹$$

۶ـ حدس باقیماندهٔ تقسیم دو عدد نامعلوم بر یکدیگر

۱. یك عدد سه رقمی انتخاب کنید و آنرا دوبار بنویسید،

به‌نحوی که یك عدد شش رقمی بدست آید. به این عدد a را اضافه کنید و حاصلجمع را در b ضرب کنید. حاصلضرب را بر ۱۴۳ تقسیم کنید. من به‌شما می‌گویم باقیماندهٔ تقسیم چقدر است؟

$$۲۵۷;\ ۲۵۷۲۵۷;\ \ a=۲۳;\ ۲۵۷۲۵۷+۲۳=۲۵۷۲۸۰;$$

$$b=۱۷;\ ۲۵۷۲۸۰\times ۱۷=۴۳۷۳۷۶۰;$$

که از تقسیم ۴۳۷۳۷۶۰ بر۱۴۳ باقیمانده‌ای مساوی ۱۰۵ بدست می‌آید.

باقیمانده ازتقسیم ۲۳ × ۱۷ یعنی ۳۹۱ بر۱۴۳ بدست می‌آید، زیرا عدد انتخابی ۲۵۷۲۵۷ بر ۱۰۰۱ ودرنتیجه بر ۱۴۳ قابل‌قسمت است.

می‌توان بجای ۲۳ و ۱۷ دوعدد دلخواه دیگر انتخاب کرد، تنها باید باقیماندهٔ حاصلضرب‌آنها را بر۱۴۳ دانست.

* * *

۲. عددی اول انتخاب کنید که از۳بزرگترباشد. آنرا مجذور کنید وبه‌آن، مثلاً، ۱۶۲ واحد اضافه کنید. اگرحاصل را بر ۱۲ تقسیم کنید، از قبل می‌گویم که باقیماندهٔ تقسیم همیشه مساوی ۷ است.

این مسأله براساس حکم زیر درست شده است:

هرعدد اول Nبزرگتر از۳، به‌صورت $۶k\pm۱$ نوشته می‌شود، زیرا چنین عددی زوج نیست وبر۳ هم قابل قسمت نیست. بنابراین مجذورچنین عددی به‌اینصورت‌است:

$$N^۲=(۶k\pm۱)^۲=۳۶k^۲\pm۱۲k+۱$$

یعنی درتقسیم بر۱۲ باقیمانده‌ای مساوی واحد دارد. اگر به‌این مجذورعدد ۱۶۲ را اضافه کنیم، بدست می‌آید:

$$N^۲+۱۶۲=۱۲m+۷$$

بجای ۱۶۲ می‌توان هرعدد دیگری راانتخاب کردکه به‌هرحال برای پیدا کردن باقیماندهٔ مورد نظر باید یك واحد به‌این عدد انتخابی اضافه کرد و باقیمانده‌اش را بر۱۲ بدست‌آورد.

۷ـ حدس نتیجهٔ عملها روی عددهای نامعلوم

۱. عددی انتخاب کنید، سه‌صفر به‌ابتدا و سه صفر به انتهای آن اضافه کنید، سپس باشروع ازطرف راست رقم اول را بارقم چهارم، رقم دوم را با رقم پنجم، رقم سوم را با رقم ششم وغیره جمع کنید. عدد جدیدی که به‌این ترتیب بدست می‌آید به مراتب از عدد اول بزرگتر است. این عدد را بر ۷ برابر عدد قبلی تقسیم کنید وخواهید دید قبل ازآنکه شما عملها را تمام کنید، من خارج‌قسمت را نوشته‌ام.

اساس این مسأله براین مطلب استوار است‌که بعد ازعملهای مذکور عددی‌که بدست می‌آید ۱۰۰۱ برابر عدد قبلی است و ازتقسیم عدد۱۰۰۱ بر۷ همیشه عدد ۱۴۳ برای خارج قسمت بدست می‌آید.

مثال:

$$۷۳۸۶۴;\ ۰۰۰۷۳۸۶۴۰۰۰;\ ۰+۴=۴;\ ۰+۶=۶;$$
$$۰+۸=۸;\ ۴+۳=۷;\ ۶+۷=۱۳$$

(دراینجا واحد دهگان به‌مجموع بعد منتقل می‌شود).

$$۸+۰+۱=۹;\ ۳+۰=۳;\ ۷+۰=۷;$$
$$۷۳۹۳۷۸۶۴;\ ۷\times۷۳۸۶۴=۵۱۷۰۴۸;$$
$$۷۳۹۳۷۸۶۴ : ۵۱۷۰۴۸=۱۴۳$$

۲. سه رقم مختلف انتخاب کنید وباآنها شش عدد دو رقمی بسازید، به نحوی که هیچکدام از آنها از رقمهای مساوی درست نشده باشد. مجموع این شش عدد را برمجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. نتیجهٔ‌آخر این عملها را من از همین حالا می‌دانم.

عددهایی راکه از ترکیب سه رقم انتخابی بدست می‌آید، دورهای این رقمها گویند.

سه رقم A، B و C را درنظر می‌گیریم واز آنها شش‌عدد می‌سازیم:

$\overline{AB}$ یا $10A+B$

$\overline{AC}$ یا $10A+C$

$\overline{BC}$ یا $10B+C$

$\overline{BA}$ یا $10B+A$

$\overline{CA}$ یا $10C+A$

$\overline{CB}$ یا $10C+B$

که مجموع آنها به‌سادگی بدست می‌آید: $22(A+B+C)$ وواضح است که اگرآنرا بر $A+B+C$ تقسیم‌کنیم، همیشه عدد ۲۲ بدست می‌آید.

مثال:

$$۲,\ ۵,\ ۷;\ ۲۵+۵۲+۲۷+۷۲+۵۷+۷۵=۳۰۸;$$
$$۲+۵+۷=۱۴;\ ۳۰۸:۱۴=۲۲$$

اگر از سه رقم مفروض بجای شش عدد، نه عدد درست کنیم، یعنی علاوه برشش عدد قبل، عددهای $\overline{AA}$، $\overline{BB}$ و $\overline{CC}$ را هم در نظر بگیریم، دراینصورت مجموع این ۹ عدد ۳۳ برابر مجموع سه رقم خواهدبود.

برای اینکه مسأله را پیچیده‌ترکنیم، می‌توانیم مجموع بدست‌آمده را درعددی مثل k (۳، ۷ یا ۱۳ وغیره) ضرب‌کنیم، دراینصورت عدد مجهول خارج قسمت هم k برابر می‌شود.

* * *

۳. عدد سه رقمی n را بنویسید. آنرا در۳۷ ضرب کنید. به‌حاصلضرب عدد a را اضافه‌کنید. مجموع را ۲۷ برابر کنید وسپس عدد b را به‌آن اضافه‌کنید. عددی را که بدست می‌آید به دوعدد سه‌رقمی (باشروع ازطرف‌راست) تقسیم‌کنید. من‌می‌گویم مجموع این دوعدد چند است.

ازلحاظ جبری، این مسأله به‌این صورت درمی‌آید:

$$S=۲۷(۳۷n+a)+b=۹۹۹n+۲۷a+b$$

که ضمناً n عددی شش رقمی است.

هرعددی که بیشتر از سه رقم داشته باشد برابراست بامضربی از۹۹۹ به‌اضافهٔ مجموع عددهای سه رقمی که از این‌عدد از سمت راست جدا شده باشد. بنابراین مجموع این دوعدد سه رقمی در حالت مورد نظر ما مساوی $۲۷a+b$ می‌شود.

مثال :

$$۳۲۴;\ ۳۷\times۳۲۴=۱۱۹۸۸;\ a=۱۳;\ ۱۱۹۸۸+۱۳=۱۲۰۰۱;$$

$$۲۷\times۱۲۰۰۱=۳۲۴۰۲۷;\ b=۴۱;\ ۳۲۴۰۲۷+۴۱=۳۲۴۰۶۸;$$

$$۰۶۸+۳۲۴=۳۹۲=۲۷a+b=۲۷\times۱۳+۴۱$$

واضح است که برای مقادیر aو b می‌توان عددهای دیگری انتخاب کرد.

۴. عدد دلخواه n را اختیار وآنرا درعدد a ضرب کنید. به‌حاصلضرب an عدد b را اضافه کنید و یکبار هم از حاصلضرب عدد b را کم کنید، دو عدد بدست می‌آورید. تفاضل مجذورهای این دوعدد را برعددی که در ابتدا انتخاب کرده بودید تقسیم کنید. من ازحالا نتیجهٔ تقسیم را به‌شما می‌گویم.

حل جبری این مسأله بارابطهٔ زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{(an+b)^{۲}-(an-b)^{۲}}{n}=۴ab$$

مثال :

$$۴۷;\ a=۳;\ ۳\times۴۷=۱۴۱;\ b=۹;\ ۱۴۱+b=۱۵۰;$$

$$۱۴۱-b=۱۳۲;\ ۱۵۰^{۲}-۱۳۲^{۲}=۲۲۵۰۰-۱۷۴۲۴=۵۰۷۶;\ ۵۰۷۶:۴۷=۱۰۸;$$

$$۴ab=۴\times۳\times۹=۱۰۸$$

۸ـ چگونه می‌توان ازقبل مجموع عددهایی را که نوشته نشده است، پیدا کرد

از یکی از حاضرین خواهش کنید عدد پنج رقمی دلخواهی بنویسد. به‌سرعت‌نظری به‌این‌عدد بیندازید وعددی را روی یك کاغذ بنویسید، آنرا تاکنید درپاکتی بگذارید و به‌یکی دیگر از حاضرین بدهید. روی این کاغذ مجموع عددهایی را نوشته‌اید که بجزیکی از آنها، بقیه را هنوز باید بنویسند.

سپس کاغذ را به‌یکی دیگر ازحاضرین بدهید واز او خواهش کنید عدد دلخواه دیگری زیر عدد قبلی بنویسد. بعد خودتان عدد سوم را زیراین دوعدد بنویسید واز دارندهٔ پاکت خواهش کنیدآنرا بازکند وببیند که شما مجموع سه عددرا آنجا نوشته‌اید.

اگر نفراول مثلاً عدد ۷۳۲۶۵ را نوشته باشد، باید به‌عنوان مجموع عدد ۱۷۳۲۶۴ را بنویسید. نفر دوم عدد دلخواه دیگری و مثلاً ۱۴۳۸۲را می‌نویسد، شما باید زیراین عدد بنویسید: ۸۵۶۱۷:

نفراول	۷۳۲۶۵
نفردوم	۱۴۳۸۲
طرح‌کنندهٔ معما	۸۵۶۱۷
	۱۷۳۲۶۴

رمز این مسأله فوق‌العاده ساده است. تمام کارمربوط به‌اینست‌که باید به‌عدد دلخواهی‌که نفر اول نوشته است۹۹۹۹۹واحد اضافه‌کنیم وبه‌عنوان مجموع کل بنویسیم، وچون داریم:

$$۹۹۹۹۹ = ۱۰۰۰۰۰ - ۱$$

بنابراین یك واحد ازرقم سمت راست عددکم می‌کنیم و ضمناً رقم ششم آنرا هم واحد قرار می‌دهیم تامجموع کل بدست‌آید:

$$۷۳۲۶۵ + ۹۹۹۹۹ = ۱۷۳۲۶۴$$

این‌عددی است که ازقبل به‌عنوان مجموع می‌نویسیم. سپس بعد ازآنکه عدد دوم را یکنفر به‌طور دلخواه نوشت، ما بلافاصله و بـه‌سرعت عددی زیرآن می‌نویسیم که هررقم‌آن متمم رقم نظیرش درعدد دوم تا ۱۰ باشد:

$$۱۴۳۸۲ + ۸۵۶۱۷ = ۹۹۹۹۹$$

و همانطورکه می‌بینید کار خیلی ساده‌ای است.

۹ـ محاسبهٔ فوری حاصلضرب وخارج قسمت

این پیشگویی بر اساس خاصیتهای عددهای دوری قرار دارد، که ما قبلاً دربارهٔ آنها صحبت کرده‌ایم.

ساده‌ترین عدد دوری یعنی ۱۴۲۸۵۷ را انتخاب کنید وازیکنفر بخواهید که یك عدد دورقمی یا سه رقمی زیرآن بنویسد، شما می‌توانید تقریباً بلافاصله و ازچپ به‌راست حاصلضرب دوعدد را زیر آنها بنویسید.

جریان ازچه قرار است؟ می‌دانیم که ۱۴۲۸۵۷ دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$ است. بنابراین اگر بخواهیم مثلاً عدد ۳۷۴ را در ۱۴۲۸۵۷ ضرب کنیم، می‌توان ۳۷۴ را در $\frac{۱}{۷}$ ضرب کرد واین حاصلضرب‌را به‌کسراعشاری‌دوره‌ای تبدیل کرد.

این‌عمل را می‌توان به‌این ترتیب انجام داد.

در تقسیم عدد ۳۷۴ بر۷ بطور ذهنی بدست می‌آید: $۵۳\frac{۳}{۷}$ وبلافاصله باشروع از۵۳، حاصلضرب را می‌نویسیم می‌ماند $\frac{۳}{۷}$ کـه عبارتست از سه برابر ۱۴۲۸۵۷.

اینجا به‌این‌اشکال برمی‌خوریم که چگونه بتوانیم به‌سرعت‌حاصلضرب دورهٔ گـردش را درعدد ۳ از چپ براست بنویسیم. برای این منظور ابتدا آخرین رقم حاصلضرب ۱۴۲۸۵۷×۳ را معین می‌کنیم. این رقـم مساوی واحد است: $۳ \times ۷ = ۲۱$.

حالا دیگر معلوم است که بعد از۵۳ باید ازرقم بعد از واحد دردورهٔ

گردش ۱۴۲۸۵۷ شروع کرد، یعنی از ۴ وبعدازآن ۲۸۵. بالاخره ازآخرین دورقم (۷۱) باید دورقم اول ۵۳ را کم‌کرد تادورقم‌آخر حاصلضرب بدست آید. درنتیجه حاصلضرب چنین است:

$$۵۳ \mid ۴۲۸۵ \mid ۱۸$$

اگرکمی تمرین داشته باشید، می‌توانید اینگونه حاصلضربها را خیلی سریع‌وفوری انجام دهید. دراینجادونمونهٔ دیگربدون‌شرح مفصل می‌آوریم.

.A

$$\begin{array}{r} ۱۴۲۸۵۷\times \\ ۷۵۵ \\ \hline \end{array}$$

اول محاسبه می‌کنیم:

$$۷۵۵ : ۷ = ۱۰۷\frac{۶}{۷}$$

$۴۲ = ۷ \times ۶$ و بعد از ۲ در دورهٔ گردش ۸ قرار دارد یعنی رقمهای اول حاصلضرب از چپ به‌راست ۱۰۷۸۵۷ است؛ $۱۴۲ - ۱۰۷ = ۰۳۵$. بنابر-این حاصلضرب چنین است: ۱۰۷۸۵۷۰۳۵

.B فرض می‌کنیم بخواهیم این ضرب را انجام دهیم :

$$\begin{array}{r} ۱۴۲۸۵۷\times \\ ۳۷۸ \\ \hline \end{array}$$

محاسبه می‌کنیم:

$$۳۷۸ : ۷ = ۵۴ = ۵۳\frac{۷}{۷} ;\quad ۷\times ۱۴۲۸۵۷ = ۹۹۹۹۹۹ ;$$

$$۹۹ - ۵۳ = ۴۶$$

بنابراین حاصلضرب چنین است: ۵۳۹۹۹۹۴۶

برای اینکه همیشه به‌عنوان مضروب عدد۱۴۲۸۵۷را انتخاب نکنید، می‌توانید از ۹، ۱۱ یا ۱۳ برابر آن استفاده کنید، تنها دراین موارد باید به‌این ترتیب عمل کرد:

از دوستتان بخواهید عدد دلخواه دو رقمی یا سه رقمی را زیر مضروبی که انتخاب کرده‌اید (۹، ۱۱ یا ۱۳ برابر ۱۴۲۸۵۷) بنویسد، حاصلضرب را پیدا کند وسپس حاصلضرب را بر ۹ (یا ۱۱ یا ۱۳) تقسیم کند. شما می‌توانید ازقبل و بدون اینکه این عملها را انجام دهید، نتیجه را ازچپ به‌راست بنویسید، زیرا وقتی که یکبار عددی ۹ برابر بشود و یکبار در آخرکار حاصلضرب بر ۹ تقسیم شود، نتیجه همان عدد اصلی خواهد بود.

۱۰ـ پیشگویی فوری مجذور یا ریشهٔ عددها

۱. عددی بزرگتر از ۷ درنظر بگیرید، ۷ واحد به آن اضافه کنید، مجموع را مجذور کنید، سپس ۷ واحد از عددی که درنظر گرفته‌اید کم کنید، تفاضل را مجذور کنید، مجذوردوم را ازمجذور اول کم کنید و به‌تفاضل ۱۷ واحد اضافه کنید ـ نتیجه را به‌من بگویید تا فوراً عددی را که فکر کرده‌اید به‌شما بگویم.

به جای ۷ و ۱۷ می‌توان از هردوعدد دلخواه a و b استفاده کرد.

تساوی

$$(n+a)^۲-(n-a)^۲+b=۴an+b$$

به‌طور کامل رمز مسأله را روشن می‌کند: ازنتیجه‌ای که بدست می‌آید b را کم وتفاضل را بر ۴a تقسیم می‌کنیم.

مثال :

$$۱۳;\ a=۷;\ ۱۳+a=۲۰;\ ۱۳-a=۶;\ ۲۰^۲=۴۰۰;$$

$$۶^۲=۳۶;\ b=۱۷$$

$$۴۰۰-۳۶+۱۷=۳۸۱;\ ۳۸۱=۴an+b; ۳۸۱-b=۳۶۴;$$
$$۴a=۲۸;\ ۳۶۴ : ۲۸=۱۳$$

۲. عددی را که فکر کرده‌اید دریك واحد کمتر ازمجذور آن ضرب کنید. حـاصلضرب را به من بگویید، می‌گویم چه عددی را انتخاب کرده‌اید.

رمز کشف این عدد چنین است:

$$p=n(n^۲-۱)=n^۳-n$$

و چون
$$(n-۱)^۳<n^۳-n<n^۳$$

بنابراین
$$n-۱<\sqrt[۳]{p}<n$$

عدد n کمی بزرگتر ازریشهٔ سوم نتیجهٔ عملهاست وهمین وسیلهٔ کشف عدد است.

مثلاً اگر $n=۷$ باشد، داریم:

$$n^۲=۴۹,\ \ p=n(n^۲-۱)=۷\times۴۸=۳۳۶$$

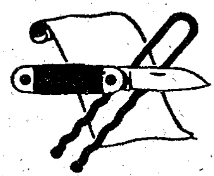
ازطرف دیگر معلوم است:

$$۶^۳=۲۱۶<۳۳۶,\ \ ۷^۳=۳۴۳>۳۳۶$$

یعنی $n=۷$.

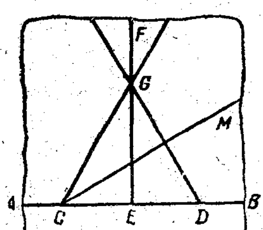
VII- هندسهٔ صفحهٔ تاشده، نوارها و کف پوشهای چوبی

۱- شکلهای مسطح از صفحهٔ تاشده



یك قلمتراش، مقداری سنجاق برای مشخص کردن نقطه‌ها و یك ورق سفید و صاف کاغذ همراه بامهارت دست، می‌تواند یک درس هندسه به‌ما بدهد، بدون اینکه به‌بیان لفظی نیازی باشد.

این وسیله‌های ساده را تهیه ببینید و ابتدا تجربه‌های ساده‌ای را انجام دهید، حتی لازم نیست در این تمرین مقدماتی هدف خاصی را دنبال کنید: با تاکردن کاغذ خط راست بسازید، خطهای موازی و عمود برهم درست کنید، مربع، مستطیل یا مثلث متساوی‌الاضلاع به‌وجود آورید. همهٔ این کارها را می‌توان به‌سادگی و با چندبار تاکردن کاغذ انجام داد (شکل ۳۱۳).



شکل ۳۱۳

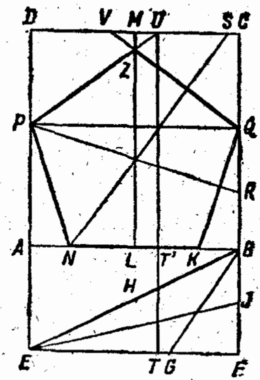
مثلث متساوی الاضلاع را کمی مشکل‌تر می‌توان بدست آورد.

کنارهٔ صفحهٔ کاغذ را از طرفی که شکل قائم دارد تا می کنیم، قاعدهٔAB ازمثلث بدست می آید.سپس کاغذرا رویEF وازوسط تا می کنیم ودردوطرف نقطهٔ E رأسهای C وD را علامت می گذاریم. حالا کاغذ را در امتداد خطی مثل CM چنان تا می کنیم که نقطهٔ D دقیقاً روی خط EF قرار گیرد؛ نقطهٔ G بدست می آید که رأس‌سوم مثلث است. حالا دیگر به‌سادگی می‌توان ضلعهای CG و DG را خم کرد.

* * *

برای ساختن پنج‌ضلعی منتظم به کمك تاکردن کاغذ، به‌شکلهای کمکی احتیاج داریم. ازیك صفحهٔ بدون شکل (به کمك تاکردن) مستطیل EFCD راجدا می کنیم (شکل ۳۱۴)، که در آن نسبت طول به‌عرض مساوی ۲:۳ باشد.

عرض EF=PQ را مساوی قطر پنج ضلعی مورد نظرمی‌گیریم.



شکل ۳۱۴

به‌خاطر می آوریم که ضلع پنج ضلعی منتظم برابر است باقسمت بزرگتر قطر آن، وقتی که به‌نسبت طلایی تقسیم شده باشد. بنابراین نخستین اشکال ودرعین‌حال مهمترین آنها، دراینست که بتوانیم پاره‌خط AB را به‌نسبت طلایی تقسیم کنیم (البته تنها به‌وسیلهٔ تاکردن صفحهٔ کاغذ).

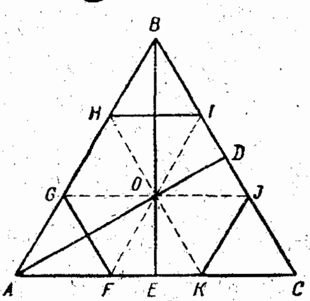
برای‌این منظورباید قسمت بالای مستطیل‌را، که به‌صورت‌مربع

ABCD به‌ما داده شده است، تقسیم کنیم؛ قسمت پایین ABFE نقش شکل کمکی را بازی می‌کند که در آن ضمناً روشن است که: $AE = \frac{1}{2}AB$. در این مستطیل کمکی با تا کردن روی قطر، خط BE را علامت می‌گذاریم. سپس با ثابت نگاه‌داشتن نقطهٔ B، زاویهٔ صفحه را طوری تا می‌کنیم که BF روی BE قرار گیرد؛ این به‌ما خط BG را می‌دهد، همچنین نقطهٔ H رِا که E در آن روی خط BE قرار می‌گیرد. بالاخره دوباره با ثابت نگاه داشتن نقطهٔ E، کاغذ را روی EJ تا می‌کنیم، به‌نحوی که خط EF برخط BE منطبق شود.

در این تا، جایی را که نقطهٔ H بر EF قرار می‌گیرد، T می‌نامیم. پاره خط ET ضلع پنج ضلعی مورد نظر خواهد بود.

به‌کمك تا کردن، عمودی از نقطهٔ T بر EF اخراج می‌کنیم، نقطهٔ T' بدست می‌آید. بعد می‌توان به‌سادگی محور و تقارن LM را رسم کرد، رأس K وسط پاره خط T'B خواهد بود، و سپس $LN = LK$. با ثابت نگاه‌داشتن نقطهٔ N، صفحه را روی NS تا می‌کنیم، به‌نحوی که نقطهٔ K روی AD قرار گیرد.

به‌این ترتیب رأس سوم پنج‌ضلعی مورد نظر پیدا می‌شود، یعنی نقطهٔ P. جستجوی بقیهٔ ضلعها و رأسها احتیاجی به‌توضیح ندارد.



شکل ۳۱۵

* * *

شش ضلعی منتظم را به‌سادگی می‌توان از مثلث متساوی‌الاضلاع ساخت (شکل ۳۱۵).

کافی است دو محور تقارن

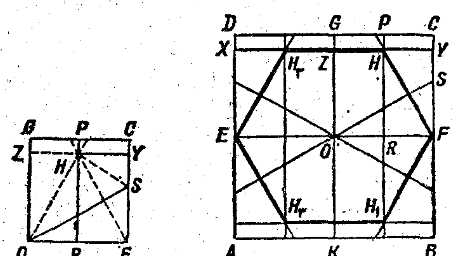
AD و BE از مثلث را پیدا کنیم، سپس سه رأس A، B و C از مثلث را تامحل تلاقی این دومحور (یعنی O) تا کنیم.

* * *

ساختن شش ضلعی منتظم بایك برگ مربع شکل کمی مشکل‌تر است (شکل ۳۱۶).

مربع ABCD را ابتدا روی خط EF وسپس روی خط GK تا می کنیم، به‌این ترتیب به‌چهار قسمت مساوی تقسیم می‌شود ومربع OGCF بدست می آید.

با روشی که می‌دانیم، مثلث متساوی‌الاضلاع OFH را روی قاعدهٔ OF می‌سازیم. سپس مربع را درH روی ZY موازی GC تا

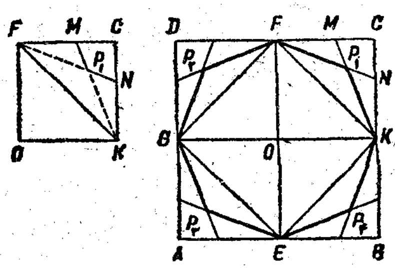


شکل ۳۱۶

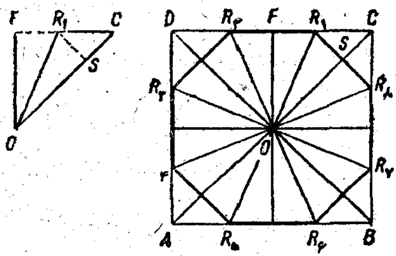
می کنیم؛ وقتی کاغذرا باز کنیم، شش‌ضلعی $FH_1H_3EH_2H$ بدست می آید.

* * *

باروش مشابهی می‌توان هشت ضلعی منتظم را دربرگ کاغذی که به‌شکل مربع است، ازراه تبدیل مربع ABCD به‌مربع کوچکتر OKCF (شکل۳۱۷) ویادرمثلث OFC (شکل۳۱۸) ساخت. روش



شکل ۳۱۷

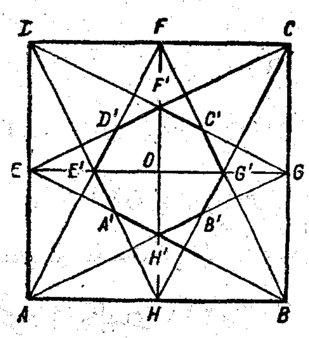


شکل ۳۱۸

کار از روی شکلها معلوم است ونیازی به‌توضیح اضافی ندارد.

* * *

بامربع سوم می‌توان شکل زیبایی بدست آورد که‌عبارتست از یك ستارهٔ هشت پر کـه بر یك هشت ضلعی منتظم محیط شده است (شکل ۳۱۹).



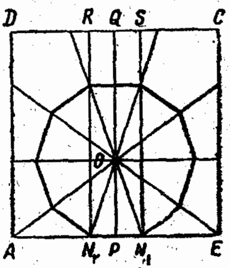
شکل ۳۱۹

در این حالت ضلع مربع را مساوی دو برابـر قطر دایرهٔ

محیطی هشت ضلعی مورد نظر، قبول می کنیم. روش تا کردن کاغذ احتیاجی به توضیح ندارد واز روی شکل معلوم است.

* * *

ده ضلعی منتظم را می‌توان به سادگی به کمك پنج ضلعی منتظم و یا مستقیماً با استفاده از تقسیم طلایی بدست آورد.



شکل ۳۲۰

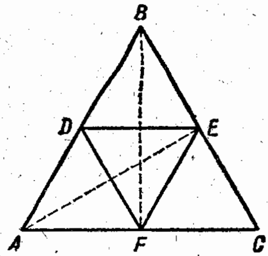
با روشی که قبلاً شرح داده‌ایم، نقطهٔ N_1 را طوری پیدا می کنیم که ضلع AE را به‌نسبت طلایی تقسیم کرده باشد (شکل ۳۲۰).

با پیدا کردن محور تقارن PQ پاره خطهای $PN_1 = PN_2$ را جدا می کنیم. سپس با ثابت نگاه داشتن نقطهٔ E، صفحهٔ کاغذ را طوری تا می کنیم که A روی PQ قرار گیرد. فرض می کنیم A روی نقطهٔ O قرار گیرد، که مرکز ده ضلعی منتظم مورد نظرماست. پیدا کردن بقیه رأسهای ده ضلعی دیگر مشکل نیست و از روی شکل روشن است.

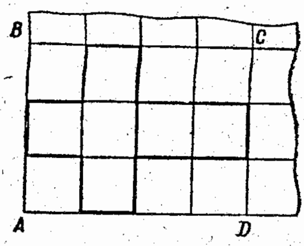
۲ـ ساختن چند وجهی‌های منتظم

ساختن چهار وجهی و شش وجهی منتظم به کمك تا کردن کاغذ به‌هیچوجه مشکل نیست وبه‌سادگی می‌توان طرح ساختن آنها راپیدا کرد (شکلهای ۳۲۱ و ۳۲۲)

ساختن هشت وجهی منتظم کمی مشکل‌تر است.



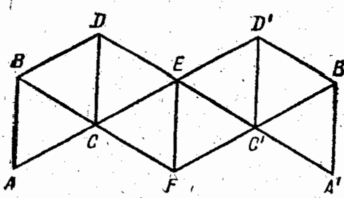
شکل ۳۲۱



شکل ۳۲۲

بایـد از ساختن مثلث متساوی‌الاضلاع ABC شروع کـرد (شکل ۳۲۳).

از یکطرف صفحهٔ کاغذ، ضلعهای AB و AC مثلث را می‌بریم، سپس مثلث را سه‌بار تا می کنیم، به‌نحوی که به‌ترتیب دور خطهای CB، CD، CE به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران کند، ضمناً کاغذ به‌ترتیب در طول خطهای BD، DE و CF تاشود. به‌این ترتیب شکل ABDEFC بدست می آید

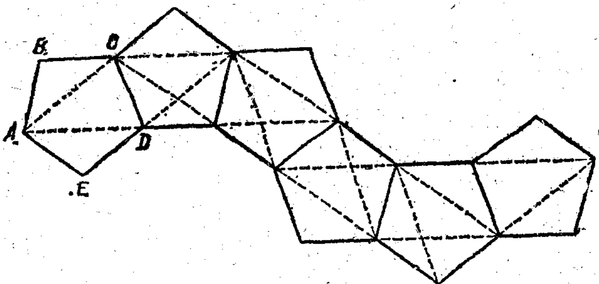


شکل ۳۲۳

که اگر آنـرا دور محور EF روی بقیهٔ کاغذ تا کنیم، شکل اصلی برای‌ما بدست می آید. دیگر به‌سادگی می‌توان خطهای ED'، D'B'، B'A، A'C' و C'F را پیدا کرد.

دوازده وجهی منتظم را به دوطریق می‌توان بدست آورد. روش اول چنین است:

دریکطرف نوار کاغذی عریضی، پنج ضلعی‌منتظم ABCDE را بدست می‌آوریم (شکل ۳۲۴)، این پنج ضلعی‌را به‌نحوی که روی شکل نشان داده شده است، چند بار تا می کنیم، سپس عین این‌شکل

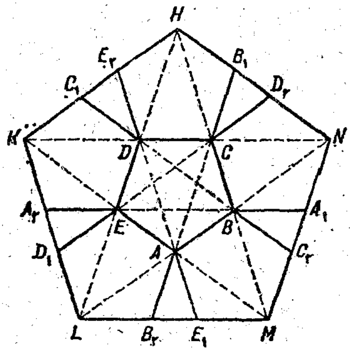


شکل ۳۲۴

را یکبار دیگر باپنج ضلعیهایی درست مساوی آن جدا می کنیم واز آنها دوازده وجهی را می‌سازیم.

روش دوم کمی قشنگ‌تر است.

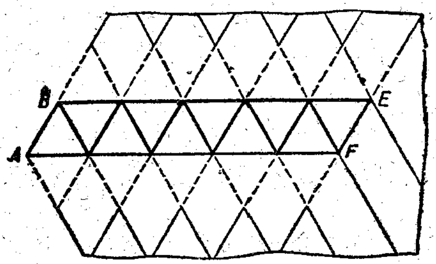
کاغذ را از وسط تا می کنیم ودو قسمت آنـرا رویهم قـرار می‌دهیم، از آن پنج‌ضلعی منتظم بزرگ HKLMN را می‌بـریم (شکل ۳۲۵)، به‌نحوی که یکی از ضلعهای آن، و مثلاً LM، روی خط تا قرارگرفته باشد.



شکل ۳۲۵

سپس در داخل این پنج‌ضلعی وبه کمك تاکردن، ستارهٔ پنج پری می‌سازیم کـه در وسط آن پنج ضلعی ABCDE نمایـان می‌شود ویکی‌از وجوه دوازده وجهی مورد نظر است. در این پنج‌ضلعی کوچك هم دوباره یك ستارهٔ پنج پر می‌سازیم کـه از ادامهٔ ضلعهای آن A_1A_2، B_1B_2، C_1C_2، وغیره بدست می‌آید. بالاخره مثلثهـای A_1BC_2، B_1CD_2، C_1DE_2 D_1EA_2 و E_1AB_2 را جدا

می کنیم؛ دوازده وجهی تقریباً آماده است؛ کافی است کاغذ را روی خط LM ببریم و وجود دوازده وجهی را به وضعی که لازم است قرار دهیم.



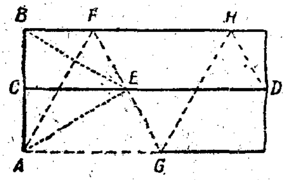
شکل ۳۲۶

بیست وجهی منتظم را هم خیلی به سادگی می‌توان با برش بدست آورد، شکل ۳۲۶ به‌اندازهٔ کافی راه را نشان می‌دهد.

۳ـ گره نوار کاغذی

با تا کردن نوار کاغذی که کناره‌های مستقیم و موازی داشته باشد، می‌توان شکلهای معمایی بسیار جالبی بدست آورد.

ساختن مثلث متساوی‌الاضلاع از نوار کاغذی خیلی ساده است. یك طرف نوار را روی خط AB می‌بریم (شکل ۳۲۷)، سپس نوار را از وسط تا می کنیم و خط CD را بدست می آوریم. با ثابت نگه داشتن نقطهٔ A نوار را تا می کنیم تا وقتی که نقطهٔ B روی خط CD در نقطهٔ E قرار گیرد؛ خط تا، یعنی AF، نقطهٔ F را به‌ما می‌دهد.



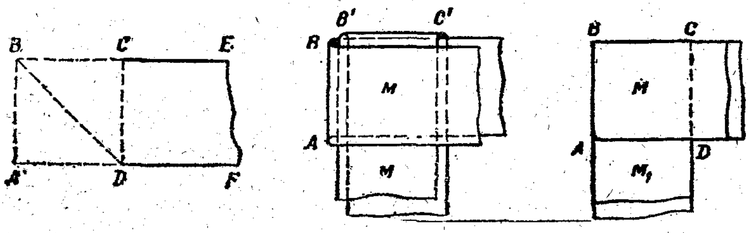
شکل ۳۲۷

اگر نوار را روی FE تا کنیم، رأس سوم مثلث، یعنی نقطهٔ G را مشخص می کند. دومین مثلث متساوی‌الاضلاع FGH را می‌توان با تا کردن نوار روی FG بدست آورد.

همچنین می‌توان با تا کردن نوار روی خطهای AE و BE، مثلث متساوی‌الاضلاعی روی ضلع AB بدست آورد.

مربع را می‌توان به‌سادگی در انتهای نوار بدست آورد و یا اگر دو نوار هم عرض داشته باشیم، آنها را رویهم قرار دهیم و انتهای یکی را جدا کنیم (شکل ۳۲۸).

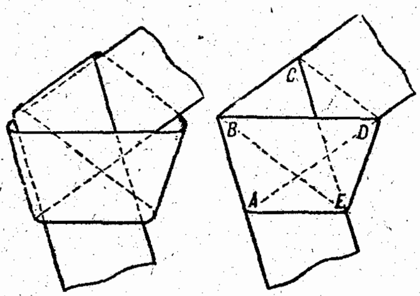
خیلی‌ساده می‌توان نوار کاغذی را به‌یك پنج ضلعی منتظم تبدیل



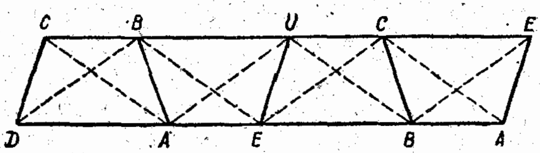
شکل ۳۲۸

کرده، کافی است برای این منظور به‌شکل ۳۲۹ توجه کنیم.

وقتی که گره بسته شد و هیچگونه تا خوردگی در کناره‌های نوار وجود نداشت، باید دو انتهای آنرا جدا کرد و پنج ضلعی ABCDE را بدست آورد. برای اینکه ثابت کنیم این پنج ضلعی واقعاً منتظم است، کافی‌است گره را «باز کنیم»، یك ردیف ذوزنقه بدست می‌آید که اثبات مساوی بودن آنها مشکل نیست (شکل ۳۳۰).

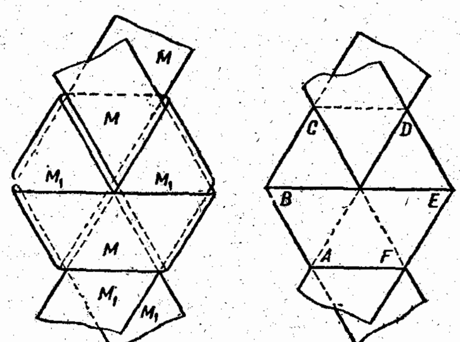


شکل ۳۲۹



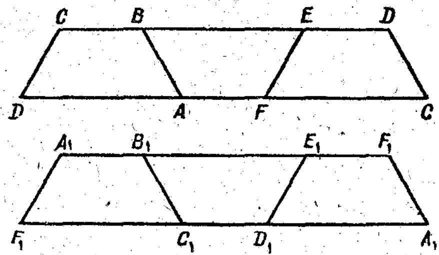
شکل ۳۳۰

برای شش ضلعی منتظم از دونوار هم عرض استفاده می کنیم. روش کار هم، همانطور که درشکل ۳۳۱ دیده می‌شود، بسیار ساده است.



شکل ۳۳۱

اثبات منتظم بودن این شکل هم مثل حالت قبل به کمک تساوی ذوزنقه‌هایی که در دونوار ایجاد می‌شود، انجام می گیرد (شکل ۳۳۲).



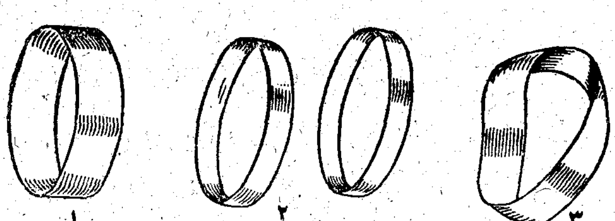
شکل ۳۳۲

درقرن هفدهم آربانودآویزو ریاضیدان ایتالیایی روی هندسه نوارهای تاخوردهٔ کاغذ کارکرده است.

فکرمربوط به‌درست‌کردن پنج‌ضلعی وشش‌ضلعی ازنوارهای کاغذی مربوط به‌اوست. بعد از او تنها در قرن نونزدهم مختصری سوندارا ـ رای هندی به‌این موضوع پرداخت و م. گ. وینر آلمانی که بطور اختصاصی روی ساختن چندضلعیهای منتظم کارکرده است.

۴ـ نوارهای ساده ونوارهای غیرعادی

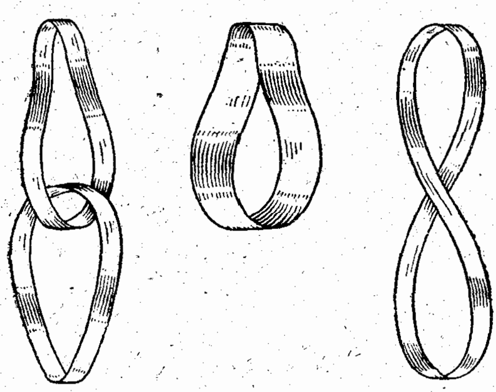
نوارکاغذی صاف وکم وبیش عریض انتخاب می‌کنیم. اگر



شکل ۳۳۳

دوانتهای این نوار را بهم وصل‌کنیم، آنطورکه در شکل ۳۳۳ ـ ۱ نشان داده شده است، وآنرا از وسط نصف‌کنیم، دو حلقهٔ کاغذی بدست می‌آید (شکل ۳۳۳ـ۲).

ولی اگر یك انتهای این نوار را ابتدا ۱۸۰ درجه بپیچانیم و سپس به‌انتهای دیگر آن وصل کنیم (شکل ۳۳۳ـ۳)، حلقه‌ای بدست می‌آید که درواقع خیلی عجیب است. این حلقه طوری است که زیر



۳ ۲ ۱

شکل ۳۳۴

و رو ندارد، نمی‌توان معین کرد که در کجا «روی» نوار تمام و در کجا «پشت» آن شروع می‌شود، یابرعکس. اگربخواهیم «یکطرف» این نوار را رنگ کنیم، تمام نوار رنگ می‌شود. چنین سطحی را سطح یك‌طرفهٔ موبیوس گویند.

اگر این «حلقه» را از وسط نوار به دوقسمت تقسیم کنید، یك «حلقه» جدید بدست می‌آید (شکل ۳۳۴ـ۱) که شکل آن شبیه نوار اصلی عریض است (شکل ۳۳۴ـ۲)، با این تفاوت که دراینجا یکی از کناره‌های نوار بعد از یك دوران ۳۶۰ درجه به کنارهٔ دیگری متصل شده است.

حال اگر «حلقه» جدید را دوباره از وسط نوار نصف کنیم، دو «حلقه» بدست می‌آید که مثل دوحلقهٔ زنجیر بهم وصل‌اند (شکل

۳۳۴ـ۳). اگر به بریدن نوار از وسط ادامه دهید به جایی می‌رسید که دیگر باز کردن گرههای آن برای شما غیرممکن می‌شود. ولی هروقت که بخواهید می‌توانید نوارها را از عرض قطع کنید و به سرگرمی خود خاتمه بدهید.

هـ ـ چیدن کف پوش چوبی (پارکت)

بسیاری ازخواننده‌ها تعجب‌خواهندکردکه همین کف‌پوشهای چوبی و تخته‌ای که هر روز در سرسراها و راهروها از روی آنها عبورمی کنیم، می‌توانند موضوع جالبی برای بررسی‌ریاضی باشند.

شکل این تخته‌ها معمولاً خیلی ساده است ومجموعهٔ ترکیبی آنها هم به‌ندرت ما را دچارشگفتی می‌کند، ولی بهرحال ولوبرای مدتی کوتاه می‌تواند ازنظررابطهٔ کف‌پوش با ریاضیات موردتوجه قرارگیرد.

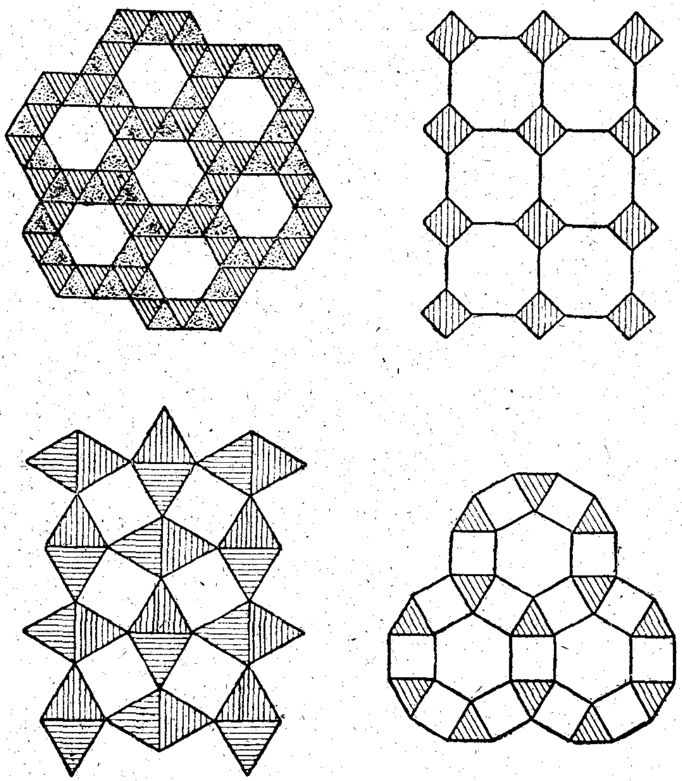
معمولاً دراین مورد سروکار ما باقانونهای مربوط به‌مثلث، مربع، شش‌ضلعی، هشت‌ضلعی و دوازده ضلعی است.

اینهاست نمونه‌هایی که اغلب در مجموعه‌های ترکیبی کف‌پوشها به آنها برخورد می کنیم (شکل ۳۳۵):

۱. از تخته‌هایی با دوشکل: مثلث وشش‌ضلعی، مربع و هشت‌ضلعی، مثلث ومربع.

۲. ازتخته‌هایی با سه شکل: مثلث، مربع و شش‌ضلعی.

می‌دانیم که فیثاغورث باید نخستین کسی باشدکه معلوم کردکه سطح اطراف یك نقطه را روی یك صفحه، تنها با سه نوع از



شکل ۳۳۵

شکلهای منتظم می‌توان، بدون فاصله، پوشانید: مثلث متساوی ـ الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظم. ولی در اینجا ما با مسألهٔ کلی‌تری روبرو هستیم ومی‌خواهیم این موضوع را بررسی کنیم که دراطراف یك نقطه، چگونه می‌توان باچندضلعیهای مختلف منتظم، سطح صفحه را بدون وجود شکاف وفاصله پوشانید.

اگرتعداد ضلعهای چندضلعی منتظم را n فرض کنیم، مجموع همهٔ زاویه‌های داخلی آن مساوی $(n-۲)۱۸۰$ درجه واندازهٔ هرزاویهٔ

آن مساوی $\frac{۱۸۰(n-۲)}{n}$ درجه می‌شود.

برای اینکه بتوانیم تعداد چند ضلعیهـای منتظمی که می‌توانند در یك نقطه، صفحه را بپوشانند، گروه بندی کنیم، باید توجه کنیم که مجموع زاویه‌هایی که دوراین نقطه قرار گرفته‌اند، مساوی چهار زاویهٔ قائمه، یعنی ۳۶۰ درجه، می‌شوند. کمترین تعداد گروه چند ضلعیهـای منتظمی کـه می‌توانند صفحه را دور یك نقطه پـر کنند، مساوی ۳ و بیشترین تعداد مساوی ۶ است.

دراولین نوع ازاین شکلها فرض می‌کنیم سه‌نوع چند ضلعی منتظم به‌ترتیب $n_۱$، $n_۲$ و $n_۳$ ضلع داشته باشند، ضمناً $n_۱ \leqslant n_۲ \leqslant n_۳$. دراین صورت اندازهٔ هریك از زاویه‌های داخلی این چند ضلعیهـا به‌ترتیب چنین است (برحسب درجه):

$$\frac{۱۸۰(n_۱-۲)}{n_۱} \text{ و } \frac{۱۸۰(n_۲-۲)}{n_۲} \text{ و } \frac{۱۸۰(n_۳-۲)}{n_۳}$$

وبنابراین مجموع این سه زاویه (برحسب درجه) چنین می‌شود:

$$۱۸۰\left[\frac{n_۱-۲}{n_۱}+\frac{n_۲-۲}{n_۲}+\frac{n_۳-۲}{n_۳}\right]$$

مجموع این‌سه زاویه باید مساوی ۳۶۰ درجه باشد، ازآنجا خواهیم داشت:

$$\frac{n_۱-۲}{n_۱}+\frac{n_۲-۲}{n_۲}+\frac{n_۳-۲}{n_۳}=۲$$

که بعداز تبدیلهای لازم چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}=\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

البته ساده ترین چند ضلعی منتظم مثلث است.

بنابراین فرض می کنیم که $n_1 = ۳$ و سعی می کنیم ببینیم کدام چند ضلعیها را می‌توان دریك نقطه به مثلث وصل کرد.

تساوی (۱) به‌اینصورت درمی آید:

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}=\frac{۱}{۲}$$

واز آنجا

$$\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}=\frac{۱}{۶}$$

باید داشته باشیم $۱۲ \geqslant n_۲ > ۶$، زیرا به ازای $n_۲ \leqslant ۶$ برای $n_۳$ جوابی بدست نمی آید ویااینکه منفی‌می‌شود، وبرای $n_۲ > ۱۲$ شرط $n_۳ > n_۲$ برقرارنمی‌شود، زیرا زاویهٔ دوازده ضلعی‌منتظم مساوی ۱۵۰ درجه است وزاویهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع هم ۶۰ درجه بود، مجموع این دو زاویه ۲۱۰ درجه می‌شود و $۳۶۰-۲۱۰=۱۵۰$، یعنی بزرگترین مقدار $n_۲$ مساوی ۱۲ است.

براساس آنچه‌که گفتیم نتیجه می‌شودکه:

$n_۲ = ۷$; $n_۳ = ۴۲$

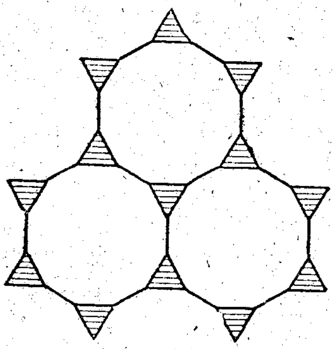
$n_۲ = ۸$; $n_۳ = ۲۴$

$n_۲ = ۹$; $n_۳ = ۱۸$

$n_۲ = ۱۰$; برای $n_۳$ عدد صحیحی بدست نمی‌آید

$n_۲ = ۱۲$; $n_۳ = ۱۲$

به‌ازای ترکیب اول: $n_1 = ۳$، $n_۲ = ۷$ و $n_۳ = ۴۲$ نمی‌توانیم کف پوش را روی صفحه قرار دهیم. در حقیقت درطرف یکی از ضلعها یادر کنار دوزاویهٔ مثلث می‌توان صفحه رابدون وجودفاصله با این سه نوع چند ضلعی پوشانید، ولـی این ترکیب را نمی‌توان در اطراف رأس سوم مثلث به‌نتیجه رسانید.



شکل ۳۳۶

ترکیبهای دوم وسوم هم نتیجهٔ خوبی نمی‌دهند. تنها ترکیبی که به‌کمك آن می‌توان نه‌تنها اطراف یک نقطه، بلکه تمام دورمثلث را، بدون وجود فاصله، پوشانید عبارتست از ترکیب $n_1 = ۳$ ، $n_2 = ۱۲$ و $n_3 = ۱۲$ (شکل ۳۳۶).

حالا به بررسی معادلهٔ (۱) با فرض $n_1 = ۴$ می‌پردازیم. در اینحالت:

$$\frac{۱}{n_2} + \frac{۱}{n_3} = \frac{۱}{۴}.$$

این معادله، با توجه به‌شرط $n_2 \leqslant n_3$ منجر به شرط $۴ \leqslant n_2 < ۸$ می‌شود.

دوباره به‌این ترکیبها می‌رسیم:

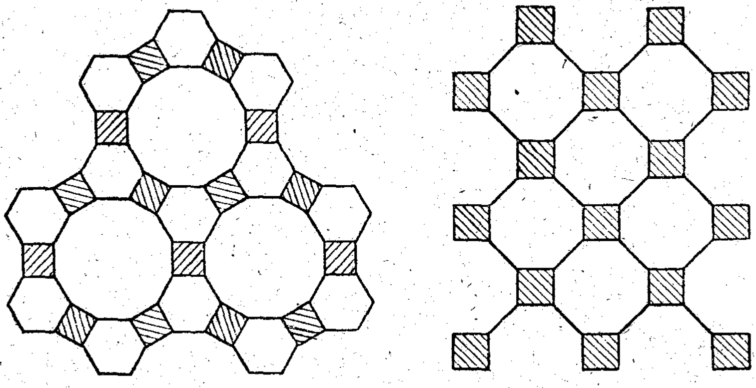
$n_2 = ۵$; $n_3 = ۲۰$

$n_2 = ۶$; $n_3 = ۱۲$

$n_2 = ۷$; برای n_3 عدد صحیحی بدست نمی‌آید

$n_2 = ۸$; $n_3 = ۸$

که ازبین این‌حالتها دوحالت: $n_1 = ۴$، $n_2 = ۶$، $n_3 = ۱۲$ وهمچنین $n_1 = ۴$، $n_2 = ۸$، $n_3 = ۸$ قابل قبول است. دراین دوحالت می‌توان صفحه را درتمام رأسهای مربع بطور کامل پوشانید (شکل ۳۳۷).



شکل ۳۳۷

به‌ازای $n=5$ هیچیك از ترکیبها ممکن نمی‌شود و این به‌معنای آنست که اگر بخواهیم در کف پوش پنج‌ضلعی منتظم داشته باشیم، باید برای پر کردن صفحه ازچند ضلعیهـای غیرمنتظم استفاده کنیم.

به‌این ترتیب، باتوجه به‌این شرط که درهر رأس تنها سه چند ضلعی منتظم وجود داشته باشد، تنها چهارحالت ممکن بدست می‌آید: مثلث، دوازده ضلعی ودوازده ضلعی؛ مربـع، شش ضلعی و دوازده ضلعی؛ مربع، هشت ضلعی و هشت ضلعـی؛ شش ضلعـی، شش ضلعی وشش‌ضلعی.

حالا به‌حالت ترکیب چهارتایی می‌پردازیم، یعنی وقتی کـه در نقطهٔ اتصال تخته‌ها بایـد چهار چند ضلعی منتظم وجـود داشته باشد. معادلهٔ قبل دراینجا به اینصورت در می‌آید:

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

وضمناً $n_1<n_2<n_3<n_4$.

بعداز استدلالی شبیه حالت قبل، به‌ترکیبهای زیرمی‌رسیم:

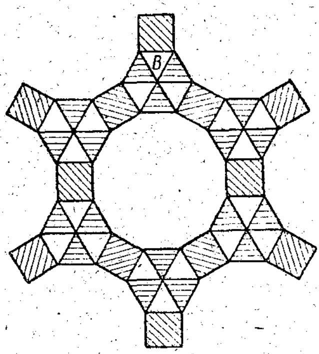
$n_1=3, \quad n_2=3, \quad n_3=4, \quad n_4=12$

$n_1=3, \quad n_2=3, \quad n_3=6, \quad n_4=6$

$n_1=3, \quad n_2=4, \quad n_3=4, \quad n_4=6$

$n_1=4, \quad n_2=4, \quad n_3=4, \quad n_4=4$

ترکیب اول قابل اجرا نیست. ولی اگررأس سوم مثلث را تنها بامثلثهایی پرکنیم، نقشی شبیه شکل ۳۳۸ بدست می آید.

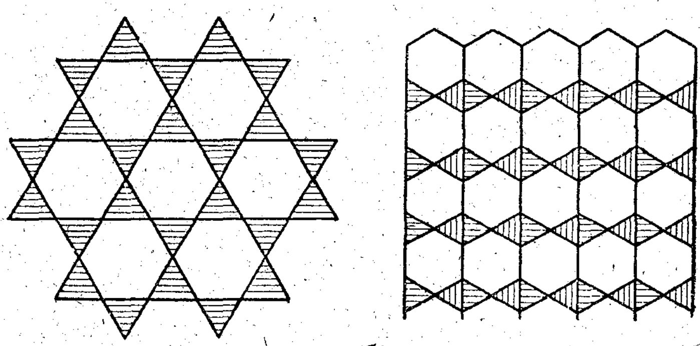


شکل ۳۳۸

ولی دراین نقش، مثلثهایی که دور نقطهٔ B گرد آمده‌اند، یک شش ضلعی منتظم تشکیل می‌دهند ودرنتیجه همان‌ترکیب سه‌تایی (۴، ۶، ۱۲) بدست‌می‌آید.

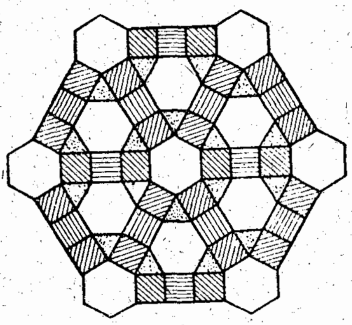
* * *

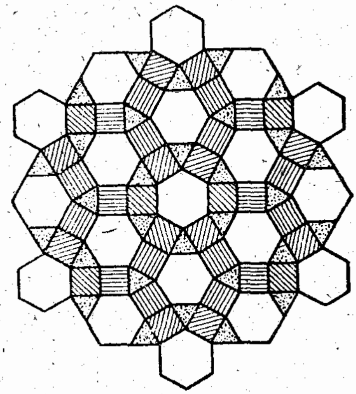
ترکیب دوم ممکن است ومی‌توان دو حالت ممکن آنرا در شکل ۳۳۹ دید.

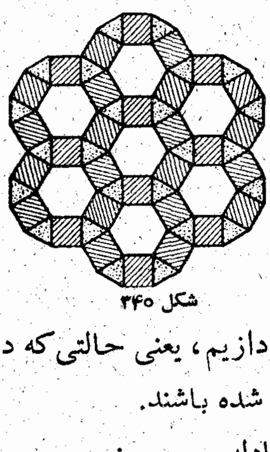


شکل ۳۳۹

ترکیب سوم سه نوع نقش جالب می‌دهد (شکل ۳۴۰).







شکل ۳۴۰

متذکر می‌شویم که دراین سه نقش، باوجودی که ازلحاظ قرارگرفتن تخته‌ها باهم اختلاف دارند، درهر نقطهٔ گرهی وضع قرار گرفتن چند ضلعیها باهم فرق دارد.

حالا به‌حالت ترکیب پنج‌تایی می‌پردازیم، یعنی حالتی‌که در هرنقطه، پنج چند ضلعی منتظم به‌هم وصل شده باشند.

شبیه حالتهای قبل دراینجا به‌این معادله می‌رسیم:

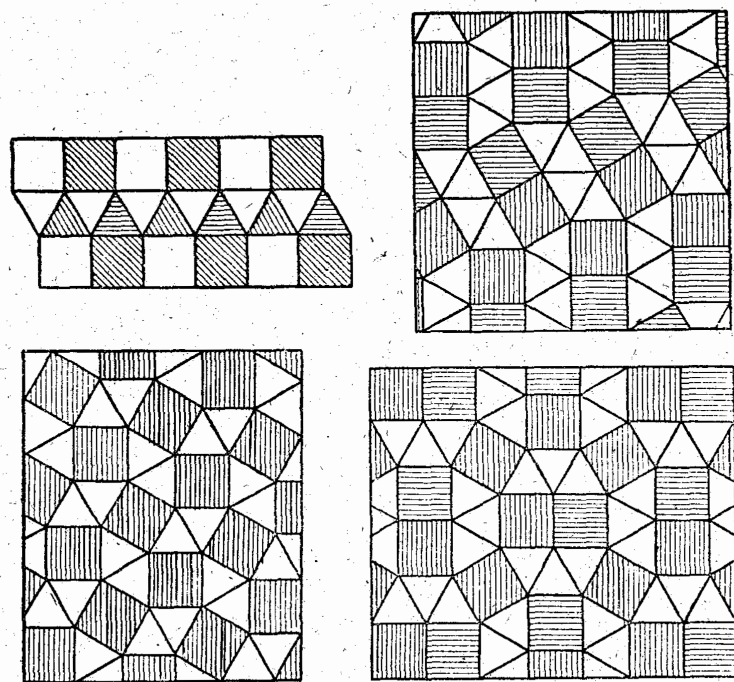
$$\frac{۱}{n_۱}+\frac{۱}{n_۲}+\frac{۱}{n_۳}+\frac{۱}{n_۴}+\frac{۱}{n_۵}=\frac{۳}{۲}$$

وضمناً $n_۱ \leq n_۲ \leq n_۳ \leq n_۴ \leq n_۵$

در اینحالت تنها دوترکیب پیدا می‌شود:

$$n_۱=۳,\quad n_۲=۳,\quad n_۳=۳,\quad n_۴=۴,\quad n_۵=۴$$

$$n_۱=۳,\quad n_۲=۳,\quad n_۳=۳,\quad n_۴=۳,\quad n_۵=۶$$

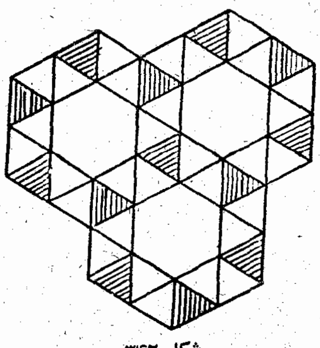


شکل ۳۴۱

ترکیب اول چهار نقش مختلف به‌وجود می‌آورد (شکل ۳۴۱).

* * *

نوع دوم از حالت ترکیب پنج تایی تنها یک نقش می‌دهد (شکل ۳۴۲).



شکل ۳۴۲

* * *

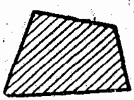
ترکیب شش‌تایی، یعنی حالتی که در هر نقطه شش چند

ضلعی به‌هم وصل شده باشند، تنها یك حالت دارد:

$$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=3$$

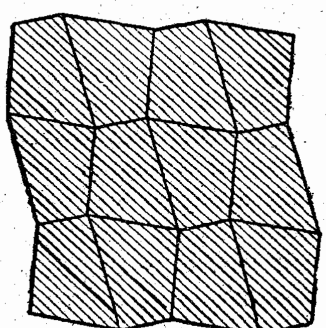
* * *

دریك کارخانهٔ چوب‌بری مقدار زیـادی پاره‌تخته‌های اضافی به شکل یك چهـار ضلعـی محدب نـامنظم (شکل ۳۴۳) رویهم جمع شده بود.



شکل ۳۴۳

به‌نظر می‌رسید کـه این پاره تخته‌ها مصرفی نداشته باشند، تا اینکه یك کارگر به‌این مطلب توجه کرد که مجموع زاویه‌های این چهارضلعی مساوی ۳۶۰ درجه، یعنی همان مقداری است که برای پر کردن صفحه دور یك نقطه لازم است. از همین نکته خوشحال شد وفکر کرد که می‌شود که ازاین پاره تخته‌ها به‌عنوان کف‌پوش استفاده کرد. البته نقشهٔ کف‌پوش نامنظم می‌ـ شود، ولـی همینکه برای پاره‌ـ تخته‌های اضافی مورد مصرفی پیدا می‌شود، می‌توانـد صرفه‌ـ جویی جالبی‌باشد (شکل۳۴۴).



شکل ۳۴۴

VIII- دستگاههای محاسبه

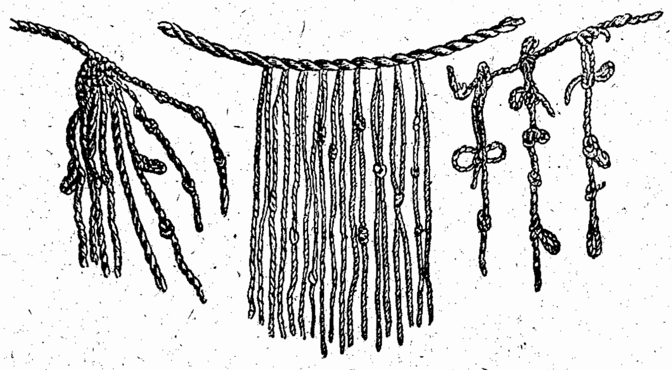
۱- ابزارهای محاسبهٔ اولیه

کشف عدد به‌وسیلهٔ انسانهای اولیه، که موضوع بسیارجالبی برای بررسیهای تاریخی است، بازحمت بسیار و به کندی توانست پیشرفت کند. بررسی این‌مطلب که نامگذاری عددها وعلت اختلاف آنها درزبانهای مختلف ازکجا سرچشمه می‌گیرد، تقریباً تردیدی به‌جا نمی‌گذارد که شمار، عددودستگاه عددشماری وغیرآن بستگی نزدیك با محاسبهٔ طبیعی، یعنی محاسبهٔ با انگشتهای دست، دارد؛ روشی که امروزهم هرکدام ازما هزاران بار از آن استفاده کرده‌ایم.

دراین باره که چینیها شمار به کمك انگشتها را به‌حد کمال رسانده بودند، قبلاً صحبت کرده‌ایم، به همین مناسبت در اینجا دیگر به این وسیلهٔ طبیعی محاسبه نمی‌پردازیم. تاهمین اواخر در گوشه و کنارهای لهستان برای محاسبه از شکافهایی که روی چوبها به‌وجود می‌آوردند، استفاده می‌کردند. این نشانه‌هایی که باچاقوی قلمتراش روی چوبها یا ترکه‌ها ایجاد می‌شد، احتمالاً تا اواخر سدهٔ هفدهم در انگلستان حتی در داد و ستدهای تجاری هم مورد استفاده قرار می‌گرفت. این ترکه‌ها، بعد از انجام محاسبه، از

وسط به دونیم می‌شد: یکی از دوقسمت به پرداخت کننده یا طلبکار داده می‌شد و قسمت دیگر نزد مؤسسه یا بدهکار باقی می‌ماند. این نیم ترکه‌ها به‌عنوان قبض، برات یاچك به‌حساب می آمدند.

یکی دیگر ازانواع محاسبه‌های عجیب، محاسبه باطناب بود که درآن‌عددها را به کمك گره‌هایی که روی طناب می‌زدند، نشانه‌گذاری می کردند.



شکل ۳۴۵

درشکل۳۴۵ چندنوع ازمحاسبهٔ باطناب که متعلق به پرو است و کوینو نامیده می‌شوند، نشان داده شده است. علامتگذاری روی طناب به کمك گره دراروپا و در روسیه هم به کار می‌رفته است.

باقیماندهٔ این عادت را هنوز هم می‌توان دید که افراد برای اینکه مطلبی را فراموش نکنند، دستمال خود را گره می‌زنند.

۲ـ چرتکه

از قدیمی‌ترین ایام، علاوه برانگشتها، چوب خطها وطنابهای گره‌دار، از وسایل دیگری هم مثل سنگریزه، مهره و غیره برای

محاسبه استفاده می کرده‌اند. ولی استفاده از این وسیله‌ها خیلی ساده و راحت نبود، تا اینکه یك مخترع گمنام به فکرش رسید که از سنگریزه‌ها یا ژتونهای یکنواخت می‌توان برای مقادیر مختلف استفاده کرد، به‌این معنی که صفحه را تقسیم بندی کنند و وقتی که یك ژتون در ستونی قرار گرفته است، عنوان آن ستون مقدار این ژتون را معین کند.

و چرتکه[1] به‌این ترتیب به وجود آمد که می‌توان آنرا نخستین وسیلهٔ محاسبه به‌معنای دقیق آن دانست.

شکل ۳۴۶

در قرنهای بعد، باید سپاس این مخترع باستانی را که ناشناخته باقی ماند، نگه می‌داشتند. نخستین کسی که از این وسیلهٔ محاسبه یاد می کند، هرودوت است که می نویسد: «مصریها روی سنگریزه‌ها

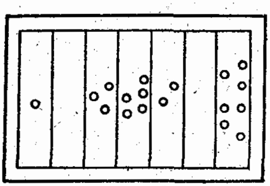
۱) آباك: کلمه‌ای با ریشهٔ یونانی به‌معنی «میز».

محاسبه می کنند و دست خود را از راست به چپ می‌برند، درحالیکه «الهنیها دست را ازچپ به راست می‌برند» (شکل ۳۴۶).

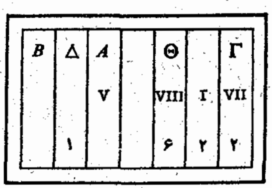
از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که چرتکه‌های اولیه را باخطهای‌عمودی تقسیم می کردند. طرح فرضی این چرتکه درشکل ۳۴۷داده شده است که درقسمتهای مختلف آن سنگریزه‌هایی گذاشته شده است که به حساب مصری عدد ۷۰۲۵۳۰۱ و به حساب یونانی ۱۰۳۵۲۰۷ می‌شود.

این جدولهای محاسبه‌ای نسبتاً به‌سرعت اصلاح وتکمیل شد. بجای گذاشتن سنگریزه‌ها، شروع به‌نوشتن روی این‌جدولها کردند، منتهی باعکس روشی که امروز به‌کارمی‌رود.

درزمان ما، دانش‌آموزان با گچ روی تخته سیاه می‌نویسند و رسم می‌کنند؛ در سده‌های دور تاریخ، دانش‌آموزان تمام تخته را با لایهٔ نازکی از خاك نرم آبی یا زرد رنگ می‌پوشاندند و با انگشتهای خود حرفها یا رقمها را روی آن نقش می کردند. بجای استفاده از تخته‌پاك‌کن که امروزبرای پاك‌کردن نوشتهٔ‌گچی ازتخته



شکل ۳۴۷



شکل ۳۴۸

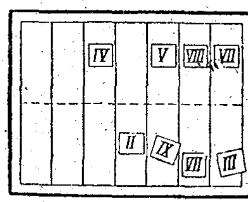
به‌کار می‌رود، درآنزمان خیلی ساده تخته را تکان می‌دادند، که در اثرآن نرمه خاکها دوباره بطور یکنواخت روی تخته قرار می‌گرفت ونوشته‌ها را ازبین می‌برد. خطهای تقسیم نازك ولی عمیق

بودند و به‌همین مناسبت همیشه دیده می‌شدند. در جدولی که در بالا داده شده است باحرف یونانی‌عدد ۲۰۱۴۹۰۳، با علامتهای رومی عدد ۵۰۸۱۷ و بـا رقمهای عربـی عدد ۱۰۰۶۲۲ نوشته شده است (شکل۳۴۷).

۳ـ میز فیثاغورث[1]

این نـام یکی از انواع چرتکه است که بطور جدی پیشرفته است و به‌وسیلهٔ رومیها به فیثاغورثیها نسبت داده شده است.

بهتر بودن این چرتکه مربوط به‌اینست که بجای سنگریزه‌ها، که درتقسیمهای متناظر چرتکه قرارمی گرفت، ازژتونهایی استفاده می‌شد که رقمها را روی‌آنها نوشته بودند. انتقال عددها، کـه بـا رقمهـای رومی نـوشته می‌شد، روی «میز فیثاغـورث»، کار خیلی ساده‌ای نبود. این عمل را درمورد عدد ۲۹۷۳، کـه خیلی هم بزرگ نیست، امتحان می کنیم. این عددرا



شکل ۳۴۹

با رقمهای رومی اینطور می‌نویسند:

MMCMLXXIII یا MMDCCCCLXXIII

قبل ازهمه باید این عدد را به‌مرتبه‌های دهدهی تقسیم کرد:

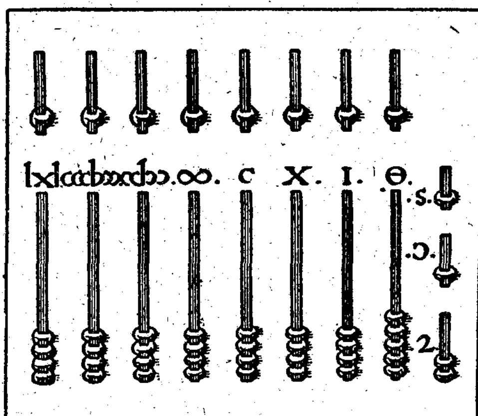
MM+DCCCC+LXX+III

سپس با معلوم شدن تعداد یکانها، دهگانها،سدگانها وهزارها باید ژتونهای متناظرآنها را درتقسیمهای اول، دوم، سوم وچهـارم از

۱) Mensa Pyphagoreana

(ازطرف راست) قرار داد. ما این عدد را در قسمت پایین جدول می‌بینیم. دربالای جدول عدد XLDLXXVII یعنی ۴۰۵۸۷نوشته شده است (شکل ۳۴۹).

وقتی عددهایی را که با حروف رومی نوشته شده‌اند، به ـ صورتی که درجدول دیده می‌شود بنویسیم، می‌فهمیم که چرتکه تا چه اندازه کار را ساده کرده است.



شکل ۳۵۰

کاملترین اینها، چرتکهٔ رومی از نوعی است که در موزهٔ نئوپولیتن نگاهداری می‌شود (شکل ۳۵۰ را ببینید). روی تخته‌ای شکافهایی درآورده‌اند که درطول آنها مهره‌های استخوانی حرکت می‌کند، ۸ شکاف بلند دارد که دریکی ازآنها ۵ مهره و درهرکدام از ۷تای دیگر ۴ مهره قراردارد، همچنین ۱۱شکاف کوتاهتر درآن به‌وجود آمده که درهریك ازآنها ۱ یا ۲ مهره وجود دارد.

روی شکافهای بلند این علامتها گذاشته شده است:

علامت ١ × ١ به‌معنای هزارهزارتا
» (((١))) » صد هزارتا
» ((١)) » ده‌هزارتا
» ∞ » هزارتا
» C » صدتا
» X » ده‌تا
» I » یکی
» θ » یك دوازدهم (اونتس)

هریك از مهره‌های شکافهای بالایی ۵ برابر مقدارمهرهٔ نظیر آنهادرشکافهای پایینی‌است؛ بنابراین مهره‌ای که‌دریکی ازشکافهای بالاقرار دارد نمایندهٔ ۵ واحد از مرتبهٔ مربوطه است. شکافی که بـا علامت θ مشخص شده است حالت استثنایـی دارد، درشکاف بلند پایین ۵ مهره وجود دارد، که به‌معنای ۵ اونتس یا $\frac{۵}{۱۲}$ است، مهره‌ای که درشکاف کوتاه بالای آن قرارگرفته است نماینده ۶ اونتس یعنی $\frac{۱}{۲}$ است.

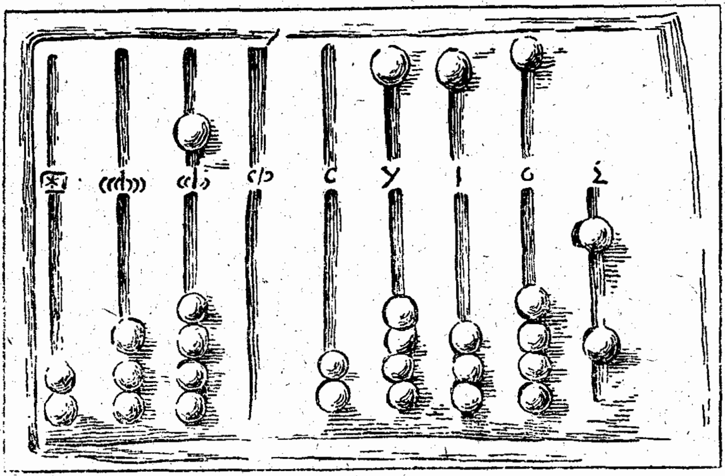
برای مهره‌هایی که در شکافهای کوتـاه سمت راست قرار گرفته‌اند:

.S. یعنی نصف اونتس
.Ↄ. » یکچهارم اونتس
.2. » یك ششم اونتس

دریکی از موزه‌ها چرتکه‌ای نگهداری شده است که درآن میخچه‌هایی درخانه‌های مربوط گذاشته شده است. مـا این چرتکه را تقریباً با اندازه‌های حقیقی دراینجا آورده‌ایم (شکل ۳۵۱).

دراین چرتکه می‌توان این عدد را خواند:

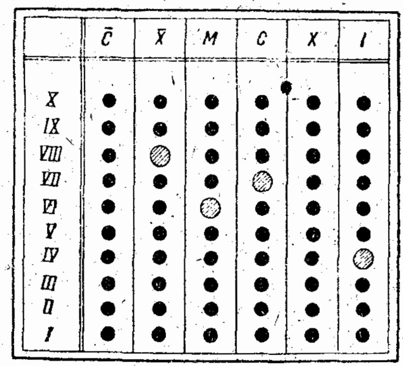
$$۲۳۹۰۲۹۸+\frac{۱۰}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۴۸}$$



شکل ۳۵۱

پیشرفت بزرگ بعدی در تاریخ این وسیلهٔ ابتدایی محاسبه مربوط به ثابت کردن علامتها بود، به نحوی که بتوان چرتکه را بدون ترس از جابجا شدن ژتونها به‌اینطرف و آنطرف برد. برای این‌منظور درستونهای چرتکه سوراخهایی به‌وجود آوردند وژتونهارا که به‌میخهایی متصل بودند درآنها فرو می‌کردند (شکل ۳۵۲).

این جدولها، به مناسبت وضع استقرار دوگانهٔ رقمها (در ردیفهای افقی وقائم)، نه‌تنها برای‌تکنیك، بلکه برای خود ریاضیات هم گام مهمی به‌جلو بود. در قدیم به کمك چرتکه نه تنها عملهای جمع وتفریق، بلکه باروشی که برای ما هم ناشناخته است عملهای ضرب، تقسیم وحتی ریشه گرفتن را هم انجام می‌دادند.



شکل ۳۵۲

۴ـ سوآن‌پان چینی و وسیله‌های محاسبهٔ روسی

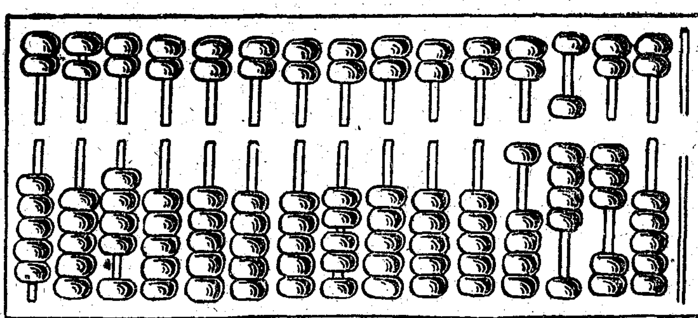
سوآن پان یك نوع چرتکه و یکی از وسایل محاسبهٔ چینی است. این وسیله که یك چرتکهٔ تکامل یافته است، از سه تا چهار هزار سال قبل در چین مورد استفاده است و بنابراین بدون تردید کشف خود چینیها است.

شکل ۳۵۳

سوآن پان از یك قاب چوبی ساخته شده و ازطرف طول به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است. ۹ تا ۱۵ ترکهٔ موازی با عرض قاب به‌آن محکم کرده‌اند (شکلهای ۳۵۳ و ۳۵۴).

به هرترکه در قسمت پایین قاب پنج مهره (از چوب یا استخوان) و در قسمت بالای قاب دومهره به‌بند کشیده شده است.

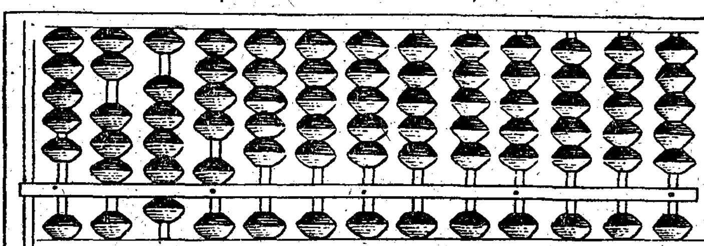
مهره‌هایی کـه در بالای قاب قرار دارند، بسته به اینکه روی کدام ترکه باشند به‌معنای ۵، ۵۰، ۵۰۰ وغیره هستند.



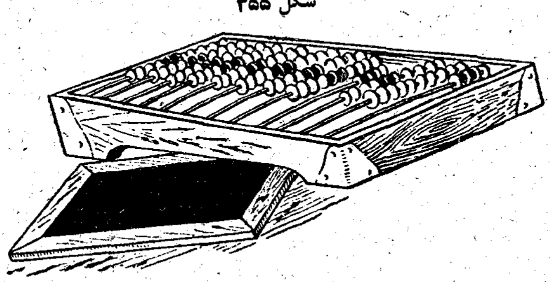
شکل ۳۵۴

چرتکهٔ ژاپونی به‌نام ساروبان ساده‌تر است (شکل ۳۵۵).

وسیلهٔ محاسبهٔ روسی، چرتکه‌های زمانی را به‌خاطرمی‌آورد که سنگریزه‌های بی‌نام را در قسمتهای بی‌نام قرار می‌دادند.



شکل ۳۵۵

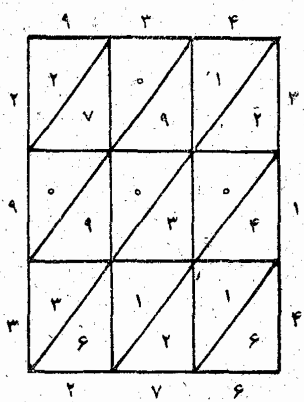


شکل ۳۵۶

این وسیلهٔ محاسبه (شکل ۳۵۶) هنوز هم باقی مانده است و دستهای ماهر محاسبه کنندگان ستونهای بزرگ جمع را به کمك آن انجام می‌دهند، آنهـا که مهارت بیشتری دارند حتی ضرب و تقسیم را هم می‌توانند روی این چرتکـه به‌سرعت به نتیجه برسانند.

۵ـ چوبخط نپر

قبل از آنکه به‌شرح کوتاهی درمورد حسابگرها (ماشینهـای حساب) بپردازیم، مختصری دربارهٔ دوفکرابتکاری صحبت می کنیم که درجهت ساده‌تر کردن عملهای یکنواخت حساب بود. جدول شکل ۳۵۷ عبارتست از روش ضرب هندی کـه بعد از قرون وسطی و در زمان رونسانس دراروپا منتشرشد.

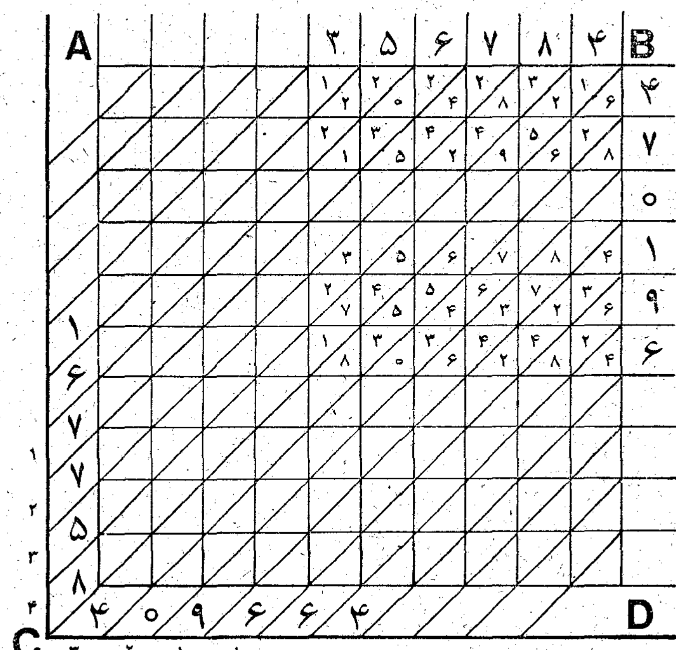

شکل ۳۵۷

عامل ۹۳۴ را در بـالا و عامل ۴۱۳ را در سمت راست جدول می‌نویسیم. ابتدا ۹۳۴ را در۳ ضرب می کنیم به‌این‌ترتیب که ۳ را در هریك از رقمهـای ۹۳۴ جداگانـه ضرب می کنیم (۲۷=۹×۳ ، ۹=۳×۳ ، ۱۲=۴×۳) وآنها را به‌ترتیب در خانه‌های جدول می‌نویسیم، به‌نحوی که رقم دهگان بالای خط قطری و رقم یکان زیر آن واقع شود. بـه همین ترتیب برای ضرب عدد ۹۳۴ در ۱ و ۴ عمل می کنیم. هرجا کـه رقم دهگـان وجـود نداشته باشد، آنرا صفر به‌حساب می‌آوریم، مثلاً اگرحاصلضرب

مساوی ۹ شد آنرا به‌صورت ۰۹ می‌نویسیم.

وقتی که مثلثها بارقمها پرشد، رقمهایی را که درردیف قطری پشت سرهم قرارگرفته‌اند باهم جمع می‌کنیم و حاصلجمع را زیر این ردیف و درسمت چپ آن می‌نویسیم؛ ضمناً جمع کردن را از مثلث مرزی سمت راست و پایین ترین ردیف (۶) شروع می‌کنیم. عدد ۲۹۳۲۷۶ که به‌این ترتیب بدست می‌آید، حاصلضرب کامل دو عدد ۳۱۴ و ۹۳۴ است.

مثال دیگری ازیك کتاب درسی که درسال ۱۶۲۰ در لهستان چاپ شده است و سالهای زیادی کتاب درسی دانش‌آموزان بوده است نقل می‌کنیم:



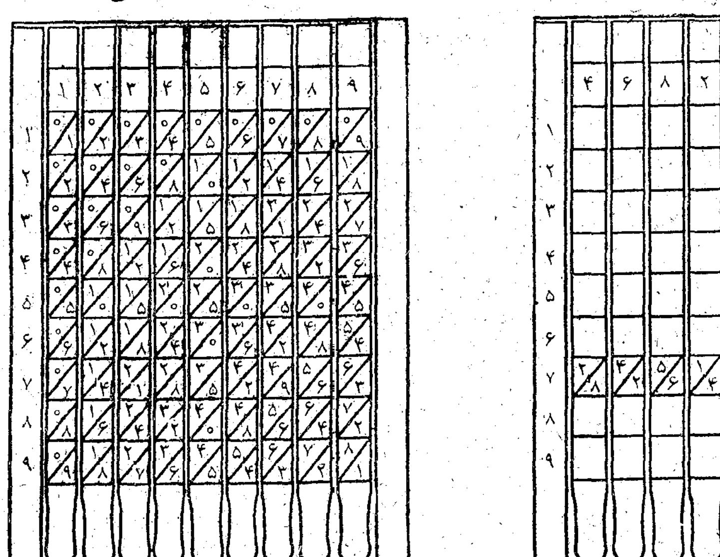
شکل ۳۵۸

بالای خط AB (شکل ۳۵۸) عدد ۳۵۶۷۸۴ ودرسمت راست جدول پهلوی خط قائم BD، عدد ۴۷۰۱۹۶ نوشته شده است. حاصلضربهای جداگانهٔ عددهای یك رقمی درخانه‌های شبکه نوشته شده است؛ مثلاً حاصلضرب ۷۲ = ۸ × ۹ درمحل تلاقی سطری که با رقم ۹ نشان داده شده است وستون بارقم ۸، قرارگرفته است.

برای ادامهٔ عمل به‌ترتیب رقمهایی از حاصلضرب را که بطور اریب نوشته شده است با هم جمع می‌کنیم و ابتدا روی خط DC (از راست به‌چپ)، سپس روی خط AC (ازپایین به‌بالا) می‌نویسیم؛ اگر دراین بین مجموع دورقمی بدست آمد، رقم دهگان را بیرون جدول زیر عدد بعدی می‌نویسیم.

درحاصلضرب عدد ۱۶۷۷۵۸۴۰۹۶۶۴ بدست می‌آید.

جان نپر (۱۶۱۷-۱۵۵۰) ریاضیدان مشهور انگلیسی و کاشف

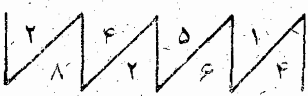


شکل ۳۵۹

لگاریتم، براساس این روش، فکر مربوط به‌نوع محاسبهٔ خود را، که به چوب‌خط نپر معروف است، پی‌ریزی کرده است (شکل ۳۵۹).

ستونهای وسط را می‌توان بادست جابجا کرد، ولی دوستون دوطرف ثابت وبدون حرکت‌اند.

فرض کنید که بخواهیم عدد ۴۶۸۲ را در ۷ ضرب کنیم. به‌سرعت ستونهای‌لازم را پهلوی ستون ثابت سمت‌چپ قرارمی‌دهیم، به‌نحوی که بالای این ستونها عدد۴۶۸۲ خوانده شود. دراینصورت مقابل عدد ۷ از ستون ثابت مجموعهٔ رقمهای زیر دیده می‌شود:



شکل ۳۶۰

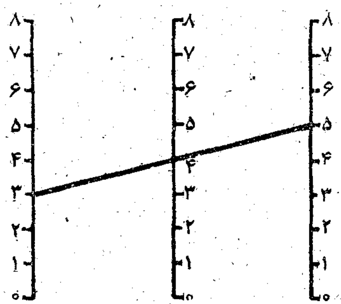
برای‌بدست‌آوردن حاصلضرب مجهول، کافی است مجموع رقمهای قطری را از راست به چپ پیدا کنیم، عدد ۳۲۷۷۴ بدست می‌آید که درحقیقت مساوی حاصلضرب ۷ در ۴۶۸۲ می‌باشد.

۶ـ نوموگراف

دربارهٔ بعضی ازروشهای ترسیمی که درعملهای حساب به‌کار

می‌رود، قبلاً تحت عنوان «حساب هندسی» مقداری صحبت کرده‌ایم. ولی همهٔ روشهایی که در آنجا آوردیم، با وجود سادگیشان، مستلزم کار زیادی درمورد تطبیق اندازهٔ پاره خطها با

واحدها بود به‌همین مناسبت این روشها نمی‌تواند برای محاسبه‌های فنی مورد استفادهٔ وسیع داشته باشد.



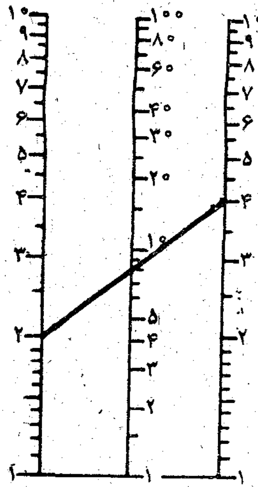
شکل ۳۶۱

موریس ـ اوکان ریاضیدان فرانسوی دربارهٔ این مبحث وسیع، یعنی حساب ترسیمی، روشی داده است که توانست کاربرد وسیعی درعمل پیدا کند. کار این دستگاه را که نوموگراف نامیده می‌شود و امکانات زیادی برای استفاده از آن وجود دارد، می‌توان به‌ـ سهولت باذکر چند مثال ساده متوجه شد.

سه خط موازی وقائم را (شکل ۳۶۱) به‌پاره‌خطهایی با یك نسبت تقسیم می کنیم. اگردو نقطه ازخطهای کناررا بایك‌خط راست به‌هم وصل کنیم، روی خط وسط، واسطهٔ حسابی پاره خطهای دو طرف را نشان می‌دهد؛ مثلاً $\frac{۳+۵}{۲}=۴$.

اگرمقیاس خط وسط نصف مقیاسهای دوخط کنار باشد، با وصل دونقطه ازخطهای کنار به یکدیگر، در محل برخورد با خط وسط، مجموع دوعدد خطهای کناردیده خواهدشد، یعنی ۵+۳=۸.

بالاخره، بجای تقسیم به پاره خطهای مساوی (که تا اینجا



شکل ۳۶۲

انجام دادیم)، تقسیم لگاریتمی خط را به‌کار می‌بریم (شکل ۳۶۲)؛ دراینصورت به‌جای مجموع $z = x + y$ که درحالت اول بدست می‌آوریم، مجموع لگاریتمهـای آنها را بدست خواهیم آورد:

$$\log z = \log x + \log y$$

وازآنجا

$$z = xy$$

یعنی روی خـط وسط، حاصلضرب دو عدد مربوط به‌خطهای کنار نشان داده‌خواهدشد:

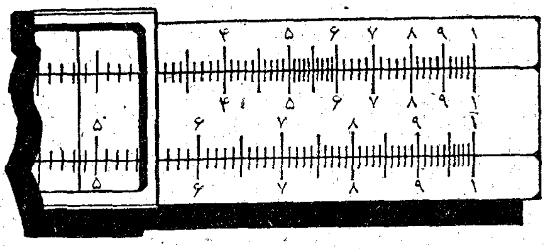
۸=۲×۴.

باتوجه به‌همین حالتهای ساده معلوم می‌شودکه چه امکانات زیادی درروش نوموگرافی وجوددارد. می‌توان مقیاسهای مختلفی برای تقسیم خطها به‌کاربرد، یا دوخط کنار را به‌فاصله‌های مساوی ازخط وسط دور یا نزدیك کرد، می‌توان بجای خطهای راست، از یك، دو یا سه خط منحنی استفاده کرد، و بالاخره به‌جـای اینکـه نقطه‌هایی از دوخط کنار را باخط مستقیم بهم وصل کنیم، می‌توان آنها را بـا یك خط منحنی مشخص بهم مربوط کـرد. به‌این ترتیب می‌توان نوموگرافهای زیادی درست کردکه هرکدام از آنها مورد استفادهٔ خاصی برای محاسبهٔ موردنظرداشته باشند.

۷ـ خط‌کش محاسبه یا خط‌کش لگاریتمی

هیچکدام ازانواع روشهای محاسبه به‌کمك ترسیم، نمی‌توانند

نتیجهٔ دقیق محاسبه را معلوم کنند و جوابی که از این راهها بدست می آید کم وبیش تقریبی است.



یکی از این نوع وسیله‌های محاسبه، که برای محاسبه‌های تقریبی بیش‌ازهمه به‌کارمی‌رود، خطکش محاسبه یا خطکش لگاریتمی، یعنی خط کشی‌است که روی آن مقیاسهای مختلفی گذاشته‌شده‌است. خط کش محاسبه ازدوقسمت متحرك تشکیل شده است که روی آنها قطعهٔ کوچك شفافی حرکت می کند. مقیاسهای دو قسمت متحرك خط کش برهمان اساس لگاریتمها، که دربارهٔ آن هم‌اکنون صحبت کردیم، قرار دارد، یعنی

$$log(a.b) = log a + log b,$$
$$log(a:b) = log a - log b$$

به‌مناسبت ارزانی خط کشهای محاسبه، آنقدر به‌فراوانی در دسترس همه است که می‌توان ازشرح مفصل ساختمان آن صرفنظر کرد، همینقدر متذکر می‌شویم که حتی درمورد کاملترین آنها (یعنی آنها که محاسبه‌های مفصل‌تر ودقیق‌تر را انجام می‌دهند)، همیشه کار به‌کندی پیش می‌رود و تمرین دائمی با آنها فقط تا حد کمی می‌تواند به‌سرعت محاسبه‌ها کمك کند.

براساس همین مقیاسهای مختلف قسمتهای متحرك، دایره‌های محاسبه هم ساخته شده‌اند.

۸ـ حسابگرها (ماشینهای حساب)

هرنوع محاسبه‌ای را می‌توان با حسابگرها انجام داد، که قریب سه‌قرن است برای کاملترکردن آنها کوشش می‌شود و هنوز بسیاری از ذهنهای ریاضی روی آن کار می‌کند.

سازندهٔ نخستین حسابگر، بلز پاسکال متفکر وریاضیدان بزرگ فرانسوی بود؛ دستگاهی که او ساخت می‌توانست با چرخاندن دسته به‌تعداد لازم، عملهای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را انجام دهد. فکرساختن چنین دستگاهی، در۱۵ سالگی برای پاسکال به‌وجود آمد وبرای به‌ثمر رساندن این فکر ده‌سال تمام سرسختانه کار کرد.

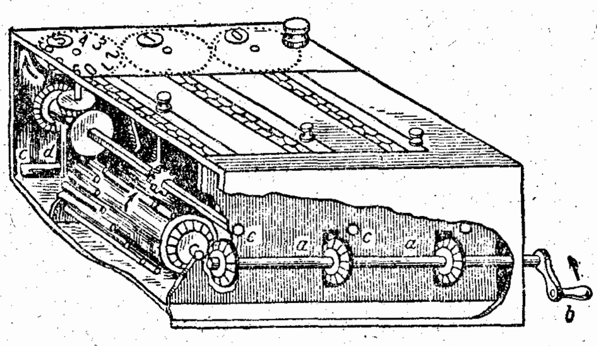
پاسکال بیش از ۵۰ نمونهٔ مختلف برای دستگاه مورد نظرخود ساخت، که درآنها آنقدرابتکار فنی وجود داشت که ادامه دهندگان راه او مثل یك ذخیرهٔ پربرکت ازآن استفاده می‌کردند. هیچیك از این نمونه‌ها، نابغهٔ جوان‌را راضی‌نمی‌کرد. بالاخره درسال ۱۶۴۶ ماشینی ساخت که به‌اندازهٔ کافی تولید شد و در دسترس همه قرار گرفت. چهارتا ازاین ماشینها تاامروز باقی‌مانده است. این ماشین اختصاصاً برای محاسبهٔ مالیاتها ساخته شده بود، که پدر بلز مأمور جمع‌آوری آنها درشهر بود. شکل این حسابگر، یك صندوق دراز را به‌خاطر می‌آورد. روی درآن هشت دایره باتقسیم بندیهایی روی آنها گذاشته شده بود که متناسب با واحدهای پول آنزمان

فرانسه‌بود (۱لیور + ۲۰سول = ۲۴۰دنیه). برای هردایره‌ای دستگیره‌ای وجود داشت، روی صفحهٔ دایره‌ها سوراخهایی بودکه در آنها عددها نشان داده می‌شد.

عیب بزرگ ماشین دراین بودکه می‌بایست هررقم را بطور جداگانه باحرکت دستهٔ مخصوصی که مربوط به‌عدد متناظر آن بود، تثبیت کرد. مثلاً برای تثبیت مالیات در ۲لیور ۱۵سول ۱۹دنیه لازم بود با سه دستگیره عمل شود. و اگر لازم بود به این مجموع مثلاً ۹۸لیور ۶سول ۴دنیه اضافه شود، دراینصورت پنج دستگیره برای انجام عمل لازم بود.

نخستین تلاشهای مخترعین بعدی دراین جهت بودکه بتوانند حرکت همهٔ دایره‌ها را با چرخاندن یك دستگیره انجام دهند، به‌ـ نحوی که درعین حال دایره‌ای که عددهای آن نباید تغییرکند از این حرکت استثنا باشد.

این مشکل را لیبنیس حل کرد.



شکل ۳۶۳

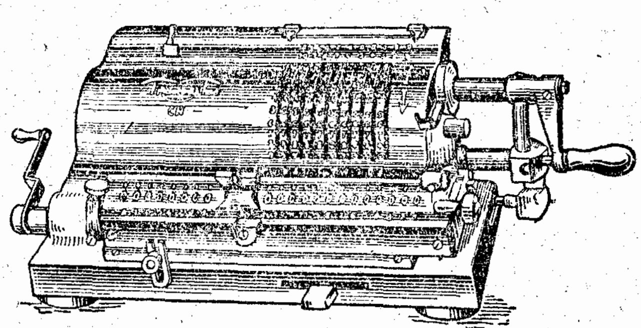
ازشکل ۳۶۳، که مقطع ساده‌ای ازاین دستگاه را نشان می‌ـ

دهد، می‌توان فهمید که با چه روشی این مشکل حل شده است.

گوس راه حل دیگری برای این مشکل پیدا کرد و ماشین کوچك وراحتی به‌شکل یك صندوقچهٔ گرد ساخت که درزمان او وبخصوص در آلمان مورد استقبال قرار گرفت.

ماشینهایی که درزمان ما رواج دارد، وبخصوص نوع تکامل یافتهٔ جدید آنها، بر مبنای طرحهای کلی حسابگرها قرار دارند (شکل ۳۶۴).

فرض کنیم که می‌خواهیم با یك حسابگر، مجموع دو عدد بزرگ و مثلاً ۱۷۰۷۷۵۶۷۰۱ و ۲۴۳۹۶۵۲۴۳ را پیدا کنیم. ابتدا



شکل ۳۶۴

چرخ دندهٔ کوچك را روی رقمهای ۱، ۰، ۷، ۶، ۵، ۷، ۷، ۰، ۷، ۱ ردیف می‌کنیم و دستگیره را یك دور کامل می‌چرخانیم، بلافاصله عدد اول درپنجرهٔ پایین نشان داده می‌شود. سپس چرخ دنده را با رقمهای ۳، ۴، ۲، ۵، ۶، ۹، ۳، ۴، ۲ ردیف می‌کنیم و دوباره دستگیره را یك دور کامل می‌چرخانیم، در پنجرهٔ پایین مجموع دوعدد، یعنی عدد ۱۹۵۱۷۲۱۹۴۴، ظاهرمی‌شود.

اگر بخواهیم عمل ضرب انجام دهیم و مثلاً ۸ برابر ۲۴۳۹۶۵۲۴۳ را پیدا کنیم، چرخ دنده را روی رقمهای مربوط ردیف می‌کنیم و هشت بار دستگیره را می‌چرخانیم. حاصلضرب ۱۹۵۱۷۲۱۹۴۴ درپنجرهٔ پایین ظاهر می‌شود.

برای ضرب دریك عدد چند رقمی، باید به هر چرخش کامل دستگیره معنایی مساوی ۱۰، ۱۰۰، ... برابر معنای یك چرخش معمولی داد. این عمل به کمك اهرم مخصوصی انجام می‌شود که در قسمت زیر ماشین قرار گرفته است. برای تفریق دستگیره را در جهت عکس می‌چرخانیم. تقسیم هم اساساً منجر به تفریق می‌شود. ولی به‌هرحال باید عمل تقسیم را حالتی استثنایی دانست و درهمهٔ ماشینها دشوارترین عمل به‌شمار می‌آید.

حسابگرهای کاملتر نه‌تنها این عملها را انجام می‌دهند، بلکه در عین حال نتیجهٔ آنها را با رقمهای خوانا روی نوار کاغذ می‌نویسند وحتی هرنتیجه را درقسمت مخصوص خود روی نوار ثبت می‌کنند. بسیاری از حسابگرهای جدیدتر به جای چرخ دنده، جا-انگشتیهایی دارند که روی آنها رقمها نوشته است و به سرعت محاسبه خیلی کمك می‌کند. لازم به گفتن نیست که حسابگرها جواب مسأله‌ها را کاملاً دقیق می‌دهند وبنابراین برای هرگونه محاسبه‌ای به کار می‌روند.

مدتی است که حسابگرهای الکترونی ساخته شده‌اند که هم باشکوه وشگفتی آور وهم تاحد زیادی پیچیده وغیرعادی هستند.

IX- مسأله‌های کم و بیش تاریخی

۱- سه مسألهٔ معروف قدیمی

بین بسیاری از مسأله‌های هندسه، سه مسألهٔ خاص بیش از همه علاقهٔ ریاضیدانهای یونانی را به‌خود جلب کرده بود.

این مسأله‌ها که بحث دربارهٔ آنها به‌سده‌های بعدهم کشانده شده بود، چنین‌اند:

۱. دوبرابر کردن مکعب: یعنی ساختن ضلع مکعبی که حجم آن مساوی دوبرابرحجم مکعب مفروض باشد.

۲. پیدا کردن یك سوم زاویه، یعنی تقسیم یك زاویهٔ مسطحه به‌سه قسمت مساوی.

۳. تبدیل دایره به‌مربع، یعنی ساختن مربعی که مساحت آن مساوی مساحت دایرهٔ مفروض باشد.[1]

این سه مسأله‌ای است که باید تنها با روش هندسی و به‌کمك یك پرگار ویك خط‌کش، که روی آنها هیچگونه تقسیم بندی وجود ندارد، حل شوند. در جریان ده قرن دانشمندان روی این مسأله‌ها

---

۱) این سه مسأله در نوشته‌های ریاضیدانهای ایرانی به ترتیب به «تضعیف مکعب» ، «تثلیث زاویه» و «تربیع دایره» معروف است «مترجم».

کار کردند، بدون اینکه بتوانند آنها را حل کنند و یا لااقل لاینحل بودن آنها را ثابت کنند. تنها ریاضیدانهای سدهٔ نوزدهم، که مجهز به‌روشهای جدید ریاضی بودند، توانستند ثابت کنندکه این سه‌مسأله باشرطهایی که داده شده است، قابل حل نیستند.

برای اثبات غیر قابل حل بودن دو مسألهٔ اول می‌توان تقریباً اینطور استدلال کرد: برای اینکه مکعبی به‌ضلع a را دوبرابر کنیم، باید پاره‌خط به‌طول x را طوری پیدا کرد که جواب معادله $x^۳ = ۲a^۳$ باشد.

برای تقسیم زاویه به‌سه‌قسمت مساوی، اگرسینوس این زاویه را مساوی a و سینوس زاویهٔ یك سوم آنرا x بگیریم، به معادلهٔ $۴x^۳ = ۳x - a$ می‌رسیم.

بااین روش هردو مسأله ازنظر تحلیلی منجر بـه معادلهٔ درجهٔ سوم می‌شوند. ولی دایره (که معادلهٔ آن $x^۲ + y^۲ + Ax + By + C = ۰$ است) و خط راست (با معادلهٔ $ax + by + c = ۰$) نمی‌توانند منجر به‌حل معادلهٔ درجهٔ سوم شوند، بنابراین این دو مسأله بااین محدودیتها قابل حل نیستند.

مسألهٔ سوم، تبدیل دایره به مربع، طبیعت دیگری دارد. این مسأله نه‌تنهاباشرطهای داده شده، یعنی‌تنها وجود خط کش وپرگار، قابل حل نیست، بلکه حتی بااستفاده از منحنیهایی که دومسألهٔ اول را حل می‌کنند، باز هم این مسأله حل نمی‌شود.

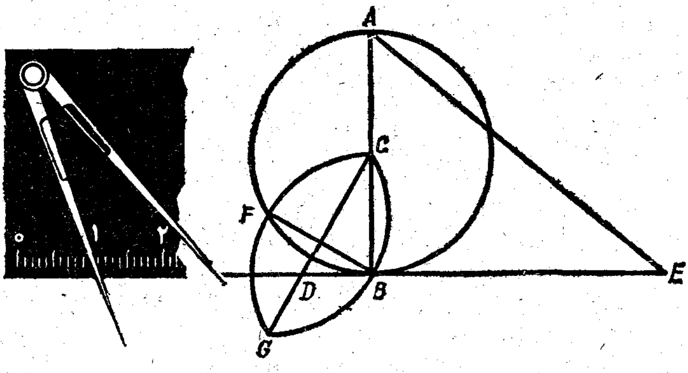
آیا به راستی نیروی عظیمی کـه ذهنهای پرنبوغ در جریان سده‌های بسیار، برای حل‌این‌مسأله‌ها صرف کرده‌اند، به کلی بی‌نتیجه

بوده است؟ نه! زیرا به‌خاطر این تلاش نتیجه‌های بی‌اندازه زیادی بدست‌آمد ومطالب فوق‌العاده‌ای کشف شد که چه در گذشته و چه امروز اهمیت درجهٔ اول داشته‌اند.

۲ـ فکر جالب دانشمند لهستانی درزمینهٔ تبدیل دایره به‌مربع

شاید مهمترین نتیجه‌ای راکه ضمن این موفقیتهای غیرمستقیم بدست‌آمد، بتوان دقیق‌تر کردن نسبت محیط دایره به‌قطرآن دانست، نسبتی که با حرف π نشان داده می‌شود. این علامت عددی اهمیت فوق‌العاده‌ای درریاضیات امروزی دارد. قبل ازآنکه به تاریخچهٔ کوتاهی ازاین علامت مشهور بپردازیم، یکی ازراه حلهای تقریبی مسألهٔ «تربیع دایره» را ذکرمی‌کنیم. این راه‌حل متعلق به‌آدام ـ آداماندی ـ کوخانسکی ریاضیدان لهستانی است. اوضمن آثارزیاد دیگرخود، درسال ۱۶۸۵ کتابی چاپ کرد که در آن روش جالبی برای تبدیل تقریبی محیط دایره به خط راست داده است، ضمناً تمام آنرا تنها بایك پرگار ثابت انجام داده است (شکل ۳۶۵).

شعاع دایره $AC = ۱$ می‌گیریم. درنقطهٔ B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم. $BF = BC$ را جدا می‌کنیم. به مرکزهای B و F وشعاع $AC = ۱$ دوقوس می‌کشیم. نقطهٔ G محل برخورد این دو قوس بدست می‌آید. وترمشترك این دوقوس، یعنی GC، مماس را در D قطع می‌کند. $DE = ۳BC$ را جدا می‌کنیم؛ در اینصورت طول AE به تقریب مساوی نصف محیط دایره خواهد شد. روشن



شکل ۳۶۵

است که:

$$AC = CB = BF = ۱$$

و ازآنجا

$$BD = tg۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

سپس

$$AE^۲ = AB^۲ + BE^۲ = ۲^۲ + (۳ - \frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲ = \frac{۴۰}{۳} - ۲\sqrt{۳} =$$
$$= ۱۳/۳۳۳۳۳۳... - ۳/۴۶۴۱۰۱۶... = ۹/۸۶۹۲۳۱۷...$$

و ازآنجا

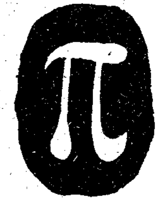
$$AE = \sqrt{۹/۸۶۹۲۳۱۷...} = ۳/۱۴۱۵۳۳۳۴...$$

بنابراین مقدار π بادقت تا پنج رقم درست پیدا می‌شود.

اشتباه عبارتست از ۲ × ۰/۰۰۰۰۵۹۳۱ یعنی قریب $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ شعاع دایره.

۳ـ نشانهٔ بزرگ هندسی

کمی بیش از دو قرن است که نسبت طول محیط دایره را

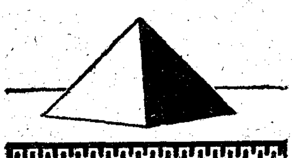


به‌قطر آن با نشانهٔ π می‌شناسند. این نشانه، حرف اول یك کلمهٔ یونانی به‌معنی محیط است.

برای نخستین‌بار ویلیام جون ریاضیدان انگلیسی درسال ۱۷۰۶ ازاین نشانه استفاده کرد وازمیانهٔ سدهٔ هیجدهم که لئونارد اولر کتاب «آنالیز» خودرا چاپ کرد، دیگر درهمه‌جا به‌کار رفت.

ولی خود مفهوم این عدد، البته بدون اینکه نشانه‌ای برای آن درنظر گرفته شده باشد، بیش‌از ۴۰۰۰ سال سابقه دارد. آنها که هرم مشهور خئوپس را مورد بررسی قرار داده‌اند، درنسبت اندازه‌های آن رد پاهای آشکاری ازاین نسبت، یعنی نسبت طول محیط دایره به‌قطر آن، دیده‌اند: خارج قسمتی که ازتقسیم مجموع دوضلع قاعده برارتفاع هرم بدست می‌آید مساوی ۳/۱۴۱۶ است و این همان مقدار عدد π است که تاسه رقم بعداز ممیز آن دقیق است.

پاپیروس معروف آهمس (قدیمی‌ترین «کتاب درسی» ریاضی که در ۲۰۰۰ سال قبل‌از میلاد نوشته شده است)، روش زیر را برای ساختن مربعی که سطحی مساوی سطح دایره داشته باشد، ذکر می‌کند: «ازقطر دایره یك‌نهم آنرا کناربگذارید ومربعی بسازیدکه ضلع آن مساوی اندازهٔ بقیهٔ قطر باشد، این مربع هم‌ارز دایره خواهد بود». از این مطلب نتیجه می‌شود که مقدار π برای آهمس مساوی ۳/۱۶۰۵ بوده است. ظاهراً سازندگان هرمها از راز این عدد مطلع بوده‌اند.



درجریان ۴۰۰۰ سال بعد، عدد π دچار دگرگونیهای زیادی شد. مقدارآن از $\frac{۲۲}{۷}$، که ارشمیدس داده بود وبه‌صورت اعشاری آن تا دورقم بعدازممیز درست است، به‌مقدار دقیق آن درسدهٔ نوزدهم رسیدکه تا ۷۰۷ رقم درست آن معلوم شد.

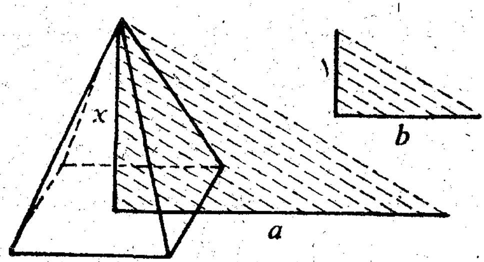
در زمان ما به کمك حسابگرهای الکترونی مقدار عدد π تـا بیش‌از ۲۰۰۰ رقم بعداز ممیز محاسبه شده است.

سال ۱۸۸۲ را می‌توان درتاریخ عدد π ، تاریخ دگـرگونی مهمی دانست. دراین‌سال لیندمان ریاضیدان آلمانی خصلت اسرار-آمیز این عدد را مشخص کرد: عدد π نمی‌تواند ریشهٔ یك معـادلهٔ جبری با ضریبهای صحیح باشد.

۴ـ مسألهٔ مشهور طالس

دراینجا، ضمن پی‌جویی مسأله‌های زیادی‌که حل آنها قرنها طول کشیده است، به‌چندمسأله می‌پردازیم که باوجود سادگی آنها، به‌اندازهٔ کافی وقت ریاضیدانهـای بزرگ راگرفته است، درحالیکه امروز تقریباً جزو مسأله‌های بچه‌گانه به‌حساب می‌آیند.

یکی از این مسأله‌هاکه به‌وسیلهٔ طالس (سده‌های هفتم تاششم قبل‌از میلاد) طرح شد، محاسبهٔ ارتفاع یك هـرم به کمك سایهٔ آن بود. به‌احتمال زیاد این محاسبه درلحظه‌ای از روز انجام‌گرفت که ارتفاع یك شیئ باطول سایـهٔ آن برابر می‌شود. شایدهم شاگـرد نابغهٔ کاهنان مصری، حتی درآن‌زمان می‌توانسته است ازخاصیت مثلثهای متشابه استفاده کند.



شکل ۳۶۶

اگر ارتفاع مجهول هرم را x ، طول سایهٔ آنرا a ؛ ارتفاع یك تیر قائم را ۱ وطول سایهٔ آنرا b بنامیم (شکل ۳۶۶)، خواهیم داشت:

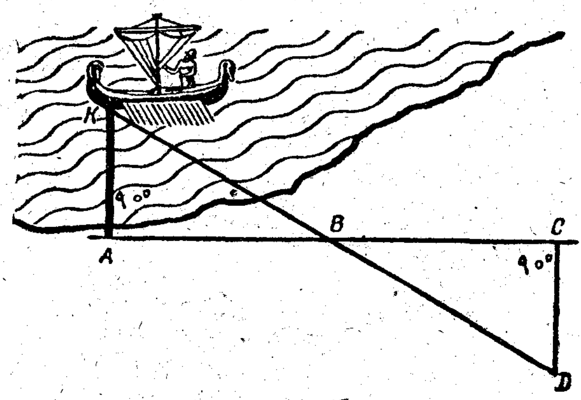
$$x : a = ۱ : b$$

واز آنجا

$$x = \frac{a}{b}$$

این مسأله که امروز اینقدر ساده به‌نظر می‌رسد، در آنزمان کشف فوق‌العاده‌ای بود.

همین طالس، وقتی که به‌یونان برگشت مسألهٔ معروف مربوط به‌تعیین فاصلهٔ کشتی ازساحل را حل کرد.



شکل ۳۶۷

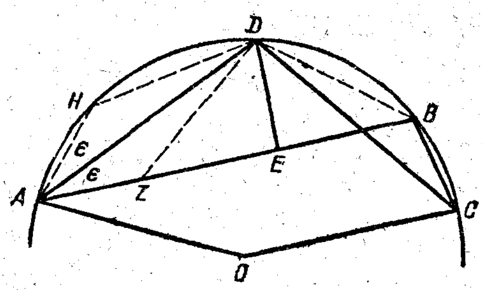
فرض می کنیم کشتی در نقطهٔ K (شکل ۳۶۷) واسکله در نقطهٔ A باشد. می‌خواهیم فاصلهٔ KA را پیدا کنیم.

طالس با ساختن زاویهٔ قائمه‌ای در نقطهٔ A، درطول ساحل دوپاره خط مساوی AB=BC راجدا کرد. در نقطهٔ C دوباره زاویهٔ قائمه‌ای ساخت وروی عمود CD تا جایی پیش رفت که از آنجا نقطهٔ K (کشتی) ونقطهٔ B را روی یك خط راست KBD ببیند.

مثلثهای BCD وAKB برابرمی‌شوند وبنابراین CD=AK. والبته پاره خط CD راهم می‌توان مستقیماً وبادقت اندازه گرفت.

هـ ـ چند مسأله از ارشمیدس

بیرونی ریاضیدان اهل‌خوارزم (سدهٔ‌دهم) قضیهٔ زیرراکه منسوب به ارشمیدس است می‌آورد: «اگر درقوس ABC خط شکسته‌ای که از دو وتر AB و BC تشکیل شده است محاط کنیم، سپس از نقطهٔ D وسط قوس AB عمودی بروتر AB رسم کنیم، نقطهٔ D خط شکستهٔ ABC را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، یعنی: AE=EB+BC» (شکل ۳۶۸).



شکل ۳۶۸

قریب ده روش مختلف برای اثبات این قضیه وجود دارد. ما روشی را ذکر می‌کنیم که منسوب به‌خود ارشمیدس است.

پاره خطهای $DH = DZ = DB$ را انتخاب می‌کنیم. چون $DH = DB$، بنابراین $\widehat{HAD} = \widehat{ZAD}$ واز آنجا دومثلث HAD و ZAD برابر می‌شوند، یعنی $AZ = AH$.

سپس: $DA - DH = DC - DB$، از آنجا $AH = BC$، یعنی $AZ + ZE = BC + EB$، وبالاخره $AE = EB + BC$.

برای بسیاری این پرسش پیش می‌آید که: چرا ارشمیدس و تفسیر نویسهای بعداز او تا این حد به‌قضیه‌ای که در اینجا آوردیم، اهمیت می‌دادند و دائماً در پی روشهای اثبات جدیدی برای آن بودند؟

این قضیه در بسیاری از مسأله‌های هندسی مورد نیاز است و حل آنها را بطور محسوس ساده می‌کند.

برای اینکه این مطلب را بهتر بفهمید، به‌حل این مسأله که به‌وسیلهٔ بیرونی طرح شده است فکر کنید:

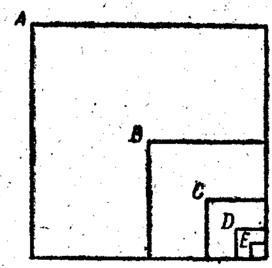
مثلثی بسازید که هرسه رأس آن روی دایرهٔ مفروض ومجموع دوضلع آن معلوم باشد.

نوع جدیدتر بیان این مسأله را می‌توان چنین نوشت:

از مثلث ABC ضلع $AB = c$ ومجموع دوضلع دیگر آن $BC + CA = a + b = m$ معلوم است. شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث هم داده شده است. چگونه می‌توان این مثلث را رسم کرد؟

* * *

۱ارشمیدس در یکی از اثرهای خود، ضمن مطالعهٔ مجموع جمله‌های تصاعد (که‌اغلب دربارهٔ آن بحث کرده است)، این قضیه را طرح می‌کند:


شکل ۳۶۹

اگر عددهای A، B، C، D و E مفروض باشند، به‌نحوی که هر عددمساوی چهار برابر عدد بعداز خودش باشد، وقتی به‌مجموع به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ کوچکترین عدد (E) اضافه کنیم، $\frac{۴}{۳}$ بزرگترین‌عدد (A) بدست می‌آید (شکل ۳۶۹).

منظور ریاضیدان نابغه پیدا کردن مجموع تصاعدی بوده است که به‌زبان امروزی چنین است:

$$۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}+\dots$$

ولی اثبات ارشمیدس برای این قضیه جالب است.

فرض کنید U، X، Y و Z به‌ترتیب مساوی $\frac{۱}{۳}$B، $\frac{۱}{۳}$C، $\frac{۱}{۳}$D و $\frac{۱}{۳}$E باشد، دراینصورت

$$B+U=\frac{۱}{۴}A+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۴}A=\frac{۱}{۳}A$$

وبه همین ترتیب

$$C+X=\frac{۱}{۳}B\,,\ D+Y=\frac{۱}{۳}C\,,\ E+Z=\frac{۱}{۳}D$$

وازآنجا

$$(B+C+D+E)+(U+X+Y+Z)=\frac{۱}{۳}(A+B+C+D)$$

ولی $$U+X+Y=\frac{۱}{۳}(B+C+D)$$

به‌این ترتیب

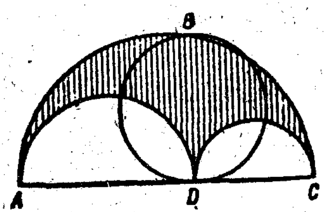
$$B+C+D+E+Z=\frac{۱}{۳}A$$

به‌این مجموع A را اضافـه و Z را به $\frac{۱}{۳}E$ تبدیل می کنیم، بدست می آید:

$$A+B+C+D+E+\frac{۱}{۳}E=\frac{۴}{۳}A$$

* * *

ارشمیدس ثابت کرد که مساحت قسمت هاشور خورده در شکل ۳۷۰ بـرابر است بـا مساحت دایرهٔ به‌قطر BD (BD عبارتست از پاره خط عمود بر قطر AC درنقطهٔ D تامحل برخورد آن بانیمدایرهٔ ABC).



شکل ۳۷۰

مساحت مورد نظر را S می گیریم:

$$S=\frac{\pi}{۸}[AC^۲-(AD^۲+DC^۲)]$$

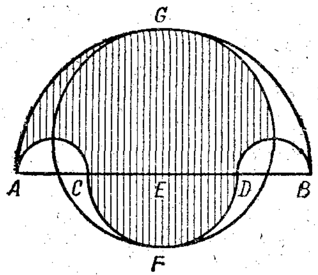
ازطرف دیگر $$AC^۲=(AD+DC)^۲$$

بنابراین

$$S=\frac{\pi}{۸}[(AD+DC)^۲-AD^۲-DC^۲]=\frac{\pi}{۴}\,.\,AD\,.\,DC$$

ولی $AD\,.\,DC=DB^۲$ وبنابراین $S=\frac{\pi}{۴}DB^۲$.

* * *



شکل ۳۷۱

درشکل ۳۷۱، شبیه حالت قبل، ارشمیدس ثابت می‌کند که‌مساحت قسمت‌هاشورخورده برابر است با مساحت دایرهٔ به‌قطر FG .

اگر مساحت مورد نظررا S بگیریم، داریم:

$$S=\frac{\pi}{8}(AB^2+CD^2-AC^2-DB^2)$$

که اگر تساویهای $AB=AD+DB$ ، $AC=DB$ و $AD=AC+CD$ را درنظر بگیریم، بدست می‌آید:

$$S=\frac{\pi}{4}(CD+DB)^2$$

ازطرف دیگر داریم:

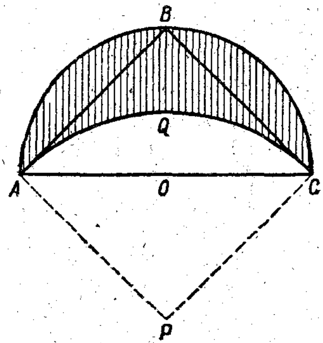
$$CD+DB=CE+ED+DB=CE+EB\ ,\quad CE=EF\ ,\ EB=EG$$

بنابراین بالاخره خواهیم داشت:

$$S=\frac{\pi}{4}(FE+EG)^2=\frac{\pi}{4}\ .\ FG^2$$

* * *

حالا کـه دربارهٔ نیمدایره‌های ارشمیدس صحبت کـردیم، یادی‌هم از نیمدایرهٔ بقراط (سدهٔ پنجم پیش از میلاد) بکنیم.



شکل ۳۷۲

در نیمدایرهٔ به مرکز O مثلث متساوی‌الساقین ABC را محاط می‌کنیم (شکل ۳۷۲). از نقطه‌های A و C عمودهایی بر AB و CB اخراج می‌کنیم تا در نقطهٔ P به‌هم برسند؛ P را مرکز دایره‌ای می‌گیریم و به شعاع PA قوس AQC را رسم می‌کنیم.

مساحت ABCQA (قسمت هاشور خورده) که بین دوقوس قرار گرفته است، برابر است بامساحت مثلث ABC.

مساحت مورد نظربرابراست بامساحت مثلث APC به‌اضافهٔ مساحت نیمدایرهٔ ABC منهای مساحت $\frac{1}{4}$ دایرهٔ به‌مرکز P یعنی PAQC.

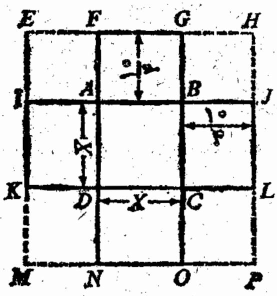
ولی $\frac{1}{2}$ دایرهٔ ABC و $\frac{1}{4}$ دایرهٔ PAQC مساحتهای مساوی دارند، زیرا $AO^2 = \frac{1}{2}AP^2$. دیگر با توجه به تساوی دو مثلث ABC و APC نتیجه می‌شود که مساحت مورد نظر برابر است با مساحت مثلث ABC.

۶ـ چند مسالهٔ جالب هندسی مربوط به‌زمانهای مختلف

محمدبن موسی خوارزمی ریاضیدان بزرگ قرن نهم میلادی در بحث مربوط به‌استفاده ازهندسه درمحاسبه‌های جبری، ضمن مطالب

دیگر، این مسأله‌ها را آورده است:

I. عددی را پیدا کنید که مجذور آن به‌اضافهٔ ۱۰ برابر خود عدد، مساوی ۳۹ شود.



شکل ۳۷۳

بازبان جبر، این مسأله به‌وسیلهٔ معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

$$x^۲+۱۰x=۳۹$$

خوارزمی مربع $ABCD=x^۲$ را می‌سازد (شکل ۳۷۳)، و روی هریك از ضلعهای آن مستطیلی می‌سازد که ضلع دیگر آن مساوی $\frac{۱۰}{۴}$ باشد. دراینصورت مساحت صلیب AFGBILCONDKJ مساوی $x^۲+۱۰x$، یعنی ۳۹ می‌شود.

این صلیب را تا مربع EHPM به‌وسیلهٔ چهار مربع کوچك AFEJ، BGHI، CLPO و DNMK پر می‌کنیم؛ مجموع مساحتهای این چهار مربع مساوی $۲۵=۴\times(\frac{۱۰}{۴})^۲$ می‌شود؛ به‌این ترتیب مساحت مربع EHPM مساوی ۳۹+۲۵ یعنی ۶۴ می‌شود.

از اینجا به‌سادگی معلوم می‌شود که ضلع این مربع مساوی ۸ است. بنابراین

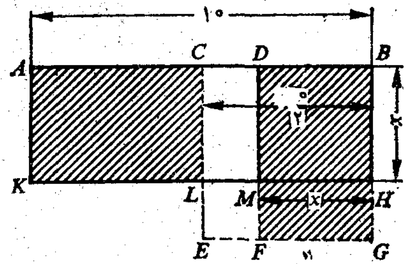
$$AB=x=IJ-۲BJ=۸-۲\times\frac{۱۰}{۴}=۳$$

یعنی عدد مجهول مساوی ۳ است.

II. عددی پیدا کنید که مجذور آن به اضافهٔ ۲۱ مساوی ۱۰ برابر خود عدد باشد.

بازبان جبری داریم: $x^{۲}+۲۱=۱۰x$

فرض کنید شکل ABHK (شکل ۳۷۴) مستطیلی به‌ضلعهای ۱۰ و x، و BDMH مربع $x^{۲}$ باشد. در اینصورت مستطیل ADMK مساوی $۱۰x-x^{۲}=۲۱$ خواهد شد.



شکل ۳۷۴

روی نصف پاره خط AB مربع CBGE را می‌سازیم. بنابراین پاره خط LM مساوی $(x-\frac{۱۰}{۲})$ خواهد شد. محاسبه می کنیم:

$$LMFE=CBGE-CDML-DBGF=$$
$$=CBGE-CDML-ACLK$$

چون دومستطیل ABGF و ACLK برابرند می‌توان نوشت:

$$LMFE=CEGB-ADMK$$

یا

$$LMFE=(\frac{۱۰}{۲})^{۲}-۲۱=۴$$

ازآنجا $LM^{۲}=۴$ و $LM=۲$ می‌شود وبالاخره

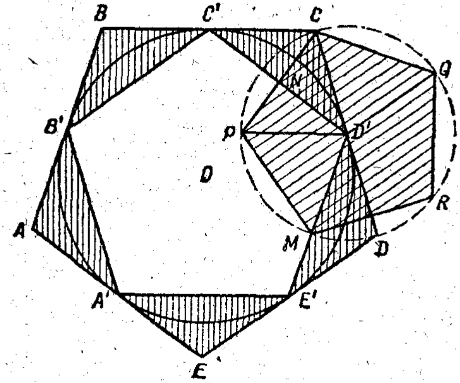
$$x=DB=\frac{۱۰}{۲}-۲=۳$$

درحقیقت: $۳^{۲}+۲۱=۳\times۱۰$.

* * *

دوفو ریاضیدان فرانسوی نیمهٔ اول‌سدهٔ هیجدهم رابطهٔ جالبی

بین مساحتهای چندضلعیهـای منتظم محاط در دایره ومحیط برهمان دایره پیدا کرده است.



شکل ۳۷۵

به‌این مناسبت که «درپی فیثاغورث» می‌رویم، به‌عنوان نمونه شکل مورد علاقـهٔ فیثاغورثیان، یعنی پنج ضلعـی منتظم را در نظر می‌گیریم. ولی این بررسی را می‌توان به‌سادگی عمومیت داد ودر مورد سایر چندضلعیهای منتظم هم نتیجه گرفت.

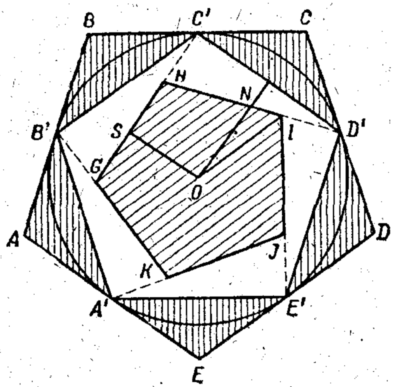
دوفو کشف کرد که اختلاف مساحتهای پنج‌ضلعی ABCDE و A'B'C'D'E' برابر است با مساحت پنج‌ضلعی منتظم محـاط در دایره‌ای که قطر آن مساوی ضلـع پنج‌ضلعی ABCDE باشد (شکل ۳۷۵).

مثلث C'CD' را می‌توان به دو مثلث قائم الزاویهٔ CNC' و CND' تقسیم کرد. به‌جای این مثلثها می‌توان مثلث متساوی‌الساقین PD'C را انتخاب کرد که زاویهٔ آن در رأس D برابراست بازاویهٔ روبرو به ضلع پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع CD' یـا قطر CD.

دیگر به‌سادگی معلوم است که مثلثهای $D'DE'$ ، $C'CD'$ ، $E'EA'$ ، $A'AB'$، و $B'BC'$ درمجموع، مساحتی مساوی‌مساحت پنج ضلعی منتظم $MPCQR$ دارند.

* * *

اگرپنج‌ضلعی منتظم $A'B'C'D'E'$ را دردایره‌ای محاط کنیم و عمودهای$A'J$ ، $B'K$، $C'G$ وغیره را برضلعهای آن رسم کنیم، این‌عمودها خود یك پنج‌ضلعی‌منتظم$GHIJK$ را تشکیل می‌دهند که مساحت آن برابراست با اختلاف مساحتهای دو پنج ضلعی محاطی ومحیطی درهمین دایره (شکل ۳۷۶).



شکل ۳۷۶

از نقطهٔ O مرکز دایره، عمودهای OS و ON را برGH و $C'D'$ رسم می‌کنیم، بدست می‌آید:

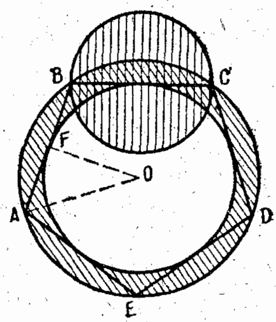
$$OS = C'N = \frac{C'D'}{۲}$$

بنابراین پاره‌خط OSبرابر است با پاره‌خط ND' از شکل

قبل (شکل ۳۷۵) و از آنجا:

$$GHIJK = MPCQR$$

اگر بجای پنج ضلعیهای محاطی و محیطی در یك دایره، دایره‌هایی را در نظر بگیریم که یکی در یك پنج ضلعی منتظم محاط و دیگری به همان پنج ضلعی محیط باشد، رابطهٔ مشابهی بین مساحتهای دو دایره بدست می آید (شکل ۳۷۷).



شکل ۳۷۷

OA را شعاع دایرهٔ محیطی و OF را شعاع دایرهٔ محاطی پنج ضلعی می گیریم؛ براساس خاصیت مثلث قائم الزاویهٔ OFA داریم:

$$OA^{2} = OF^{2} + AF^{2} = OF^{2} + \frac{AB^{2}}{4}$$

و از آنجا

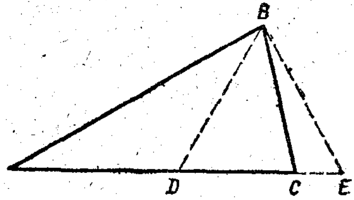
$$\pi(OA^{2} - OF^{2}) = \pi \cdot \frac{AB^{2}}{4}$$

و این به معنای آنست که اختلاف مساحتهای دایره‌های محاطی و محیطی یك پنج ضلعی منتظم برابر است با مساحت دایره‌ای که قطر آن مساوی ضلع همین پنج ضلعی است.

* * *

روش پیدا کردن مساحت مثلثی هم که یکی از رأسهای آن، و مثلاً B، در دسترس نباشد، جالب است.

به کمك گونیای با زاویهٔ ۶۰ درجه، دوخط راست DB و EB راچنان رسم می کنیم که درنقطهٔ B به هم برسند و با خط AC زاویهٔ


شکل ۳۷۸

۶۰ درجه بسازند؛ مثلث DBE متساوی الاضلاع خواهد بود (شکل ۳۷۸).

دو مثلث ABC و DBE دارای یك ارتفاع اند وبنابراین نسبت مساحتهای آنها مساوی نسبت قاعده‌های آنهاست، ازآنجا:

$$S_{ABC}=S_{DBE}\cdot\frac{AC}{DE}$$

ازطرف دیگر

$$S_{DBE}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\cdot DE^{۲}$$

وبنابراین

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\cdot AC\cdot DE$$

یعنی کافی است اندازه‌های AC و DE را پیدا کنیم تا بتوانیم مساحت مثلث مورد نظررا بدست آوریم.

* * *

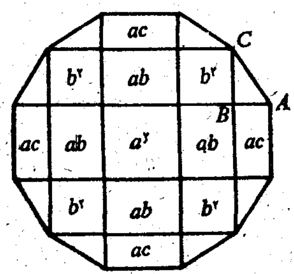
ایتالوجرسی ریاضیدان ومهندس‌معاصرایتالیایی روش ساده‌ای برای پیداکردن مساحت دوازده ضلعی منتظم بدست آورده است.

دوازده ضلعی را به‌نحوی که در شکل ۳۷۹ نشان داده شده است، تقسیم می‌کنیم. در مثلث ABC، ضلع AC را که مساوی

ضلع دوازده ضلعی است مساوی a ، ضلع CB را مساوی b وضلع AB را مساوی c می گیریم. روشن است $c=\frac{a}{۲}$، زیرا:

$$\widehat{BAC}=۱۵۰^\circ-۹۰^\circ=۶۰^\circ$$

وضمناً $b=\frac{a}{۲}\sqrt{۳}$.



شکل ۳۷۹

تمام مساحت دوازده ـ ضلعی بااین‌معادله‌بیان‌می‌شود:

$$S=a^۲+۴ac+۴b^۲+۴ab+۸\times\frac{bc}{۲}$$

ازاینجا، پس‌از قرار دادن مقادیر b و c برحسب a ، بدست می آید:

$$S=۳a^۲(۲+\sqrt{۳})$$

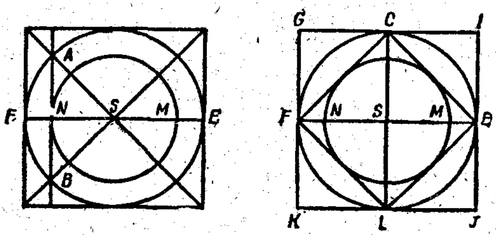
۷ـ مسأله‌های لئوناردو داوینچی ودیورر

این مسأله‌هارا بخاطرشهرت مؤلفین آنها می‌آوریم. دربارهٔ رابطهٔ نقاشی باریاضیات بررسیهـای خاصی انجام گـرفته است. ازبین نقاشها، آنهاکه باطراحی وپرسپکتیو به‌خوبی‌آشنا هستند، از هندسه خیلی خوب استفاده می کنند واین رشتهٔ ریاضی را برای کار

خود به‌رسمیت شناخته‌اند.

بین نوشته های لئوناردو داوینچی، آفریننده نابغه و دانشمند جامع، بررسیهای بکری در زمینهٔ ریاضی وجود دارد که از بین آنها مثلاً این مسألهٔ هندسی است:

اگر از نقطه‌های برخورد دایره محاط درمربع باقطرهای همین مربع خط ab را رسم کنیم واز نقطهٔ n ، محل برخورد خط ab با محور fe مربع، دایره‌ای به‌مرکز دایرهٔ قبل بگذرانیم، مساحت این دایرهٔ کوچك برابر می‌شود با مساحت بین دو دایره، وضمناً برابر می‌شود بانصف مساحت دایرهٔ بزرگتر.



شکل ۳۸۰

در شکل ۳۸۰ نقطه‌ها را با حرفهای بزرگ نشان داده‌ایم. پاره خط SA عبارتست از نصف قطر مربعی که بردایرهٔ به‌قطر NM محیط شده است وبرابر است با SF، یعنی نصف ضلع مربعی که بر دایرهٔ به‌قطر EF محاط است.

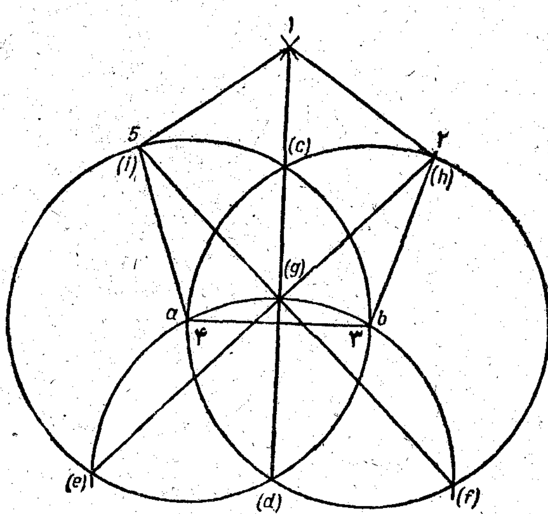
نصف قطر مربع FCEL که رأسهای آن بروسط ضلعهای مربع KGIJ قرار دارد مساوی FS می‌شود، یعنی FCEL مربع محیطی دایرهٔ به‌قطر NM است. ولی مساحت FCEL مساوی نصف مساحت KGIJ است، زیرا اولی شامل چهار مثلث ودومی شامل

۸ مثلث یکسان هستند. از اینجا نتیجه می‌شود که مساحت دایرهٔ به‌قطر NM برابر است با نصف مساحت دایرهٔ به‌قطر EF.

* * *

شکل ۳۸۱

آلبرخت دیورر نه‌تنها در نوشته‌ها، بلکه حتی در تابلوها و کتابهای خودهم ردپاهای زیادی ازاستعداد ریاضی‌خودرا نشان داده است. گواه ما مربع جادویی مشهور اوست که درتابلو «افسردگی» خود (شکل ۳۸۱) به‌جا گذاشته است ویکی ازقدیمی‌ترین مربعهای جادویی در اروپاست. گواه دیگر ما یك اثر کوچك دیورر است که در آن این نقاش نابغه راه‌حل بسیارساده وخوبی برای ساختن پنج ضلعی منتظم به کمك پرگار داده است، وقتی که تنها طول ضلع آن معلوم باشد.



شکل ۳۸۲

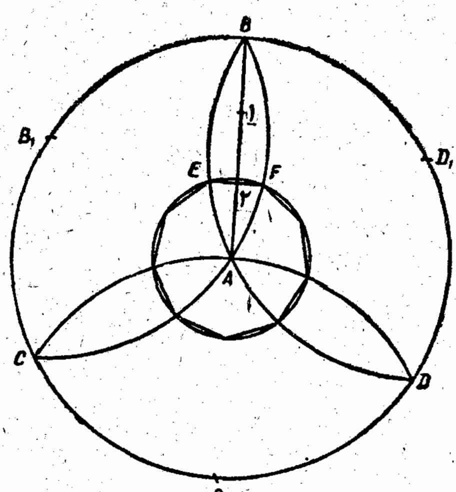
در شکل حرفهای a و b وعددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به‌همان صورتی است که خود دیورر گذاشته است، تنها حرفهایی که داخل پرانتز گذاشته شده است بعدها به‌آن اضافه شده است.

روش دیورر کاملاً دقیق نیست، ولی برای هدفهای عملی به‌اندازهٔ کافی خوب است. خود دیورر هم به‌این امر واقف بود ودر

حقیقت خط فاصلی بین شکلهای منتظم ریاضی و شکلهای منتظمی که درعمل لازم است، می کشد. شکل هم به‌قدری روشن است که نیازی به‌هیچ توضیح اضافی نیست.

در همین کتاب «دیورر»، رسم نه ضلعی منتظم هم جالب است (شکل ۳۸۳).

به این شکل باید چندنکته اضافه کرد. به‌مرکز A دایرهٔ‌بزرگ‌را رسم می کنیم؛ سپس به‌همین‌شعاع و به‌مرکز های B، C، و D (که دایره را به سه قسمت‌مساوی‌تقسیم کرده‌اند)، سه‌قوس

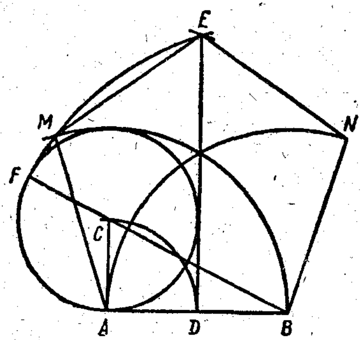


شکل ۳۸۳

می کشیم؛ Aرا به B وصل و آنرا به‌سه‌قسمت مساوی‌تقسیم می کنیم؛ از نقطهٔ $\frac{1}{3}AB$ و نزدیك به A عمود EF رابر AB اخراج می کنیم؛ پاره‌خط EF ضلع نه‌ضلعی‌منتظم محاط دردایرهٔ به‌شعاع $AE=AF$ خواهدبود. باید یادآوری کرد که این ترسیم‌هم تقریبی است.

۸ـ چند روش جالب برای ساختن پنج ضلعیهای منتظم

ما کم و بیش از روشهای ساختن چند ضلعیهای منتظم (که همیشه مورد علاقهٔ ریاضیدانها بوده است)، وقتی که ضلع یا شعاع دایرهٔ محیطی آن معلوم باشد، صحبت کرده‌ایم؛ ولی بدنیست از چند روش دیگر، که بعد از دیورر پیدا شده است، دربارهٔ ترسیم چند ـ ضلعیهای منتظم ومثلاً پنج‌ضلعی، گفتگو کنیم.



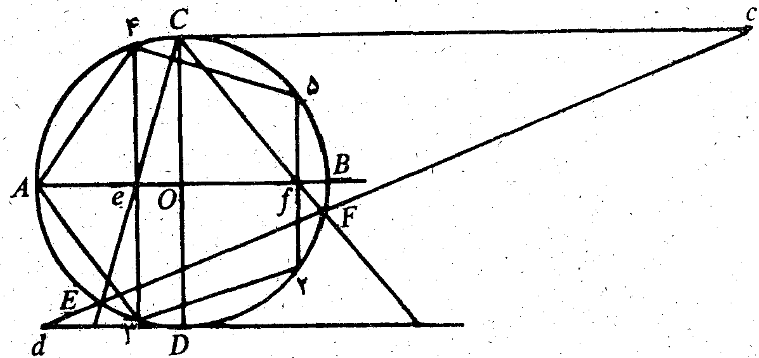
شکل ۳۸۴

ضلع AB داده شده‌است (شکل ۳۸۴). ازنقطهٔ D، وسط AB، وازنقطهٔ A عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم. به‌مرکز A و شعاع AD قوسی رسم می‌ـ کنیم تا عمود نقطهٔ A را در C قطع کند. به‌همین‌شعاع وبه‌مرکز C دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. B را بـه C وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا این دایره را در F قطع کند. به‌مرکز B وشعاع BF قوس FE را رسم می‌کنیم تاعمود منصف AB را قطع کند. نقطهٔ E رأس بالای پنج‌ضلعی خواهد بود. به‌مرکز A وشعاع AB قوسی‌می‌کشیم تا قوس FE را در M قطع کند، که یکی دیگر ازرأسهای پنج‌ضلعی خواهد بود. پیدا کردن رأس پنجم N دیگرکار مشکلی نیست.

* * *

واینهم روش محاط کردن پنج ضلعی منتظم در دایره، که به‌وسیلهٔ ریاضیدان و منجم آلمانی اوگان شرپوتر (سدهٔ هفدهم) داده شده‌است.

AB و CD را دو قطر عمود برهم دایره فرض می کنیم (شکل ۳۸۵)



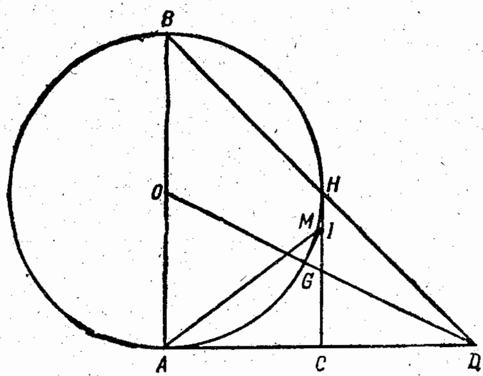
شکل ۳۸۵

پاره خط Cc مساوی ۴OA و موازی AB است. پاره خط Dd مساوی BO و بازموازی AB است. خطی که دونقطهٔ c و d را به‌هم وصل می کند، دایره را درنقطه‌های E و F قطع می کند. این دونقطه را به‌نقطهٔ C وصل می کنیم و ازنقطه‌های تلاقی این دوخط با AB ، یعنی ازنقطه‌های e و f عمودهایی برAB اخراج می کنیم. نقطه‌های برخورد این دوعمود بادایره، چهار رأس پنج ضلعی را می‌دهند (نقطه‌های ۲، ۳، ۴ و۵).

راه حل دیگر این مسأله، که از همین مؤلف است، خیلی جالب است.

روی مماس بردایره، AC را مساوی شعاع وAD را مساوی قطر جدا می کنیم (شکل ۳۸۶). D را به‌نقطه‌های O و B وصل می-

کنیم؛ خطهای DO وDB دایـره را در نقطه‌هایG وHقطع می‌کنند. سپس به ـ مرکـزD و شعـاع مساوی DG قوسی رسم می‌کنیم تاخط



شکل ۳۸۶

CHرا درنقطهٔ I قطع کند. I را باخط راستی به A وصل می‌کنیم، تـا دایره را درنقطهٔ M قطع کند. وتر AM ضلع مجهول پنج ضلعی منتظم محاط دردایرهٔ به‌قطرAB است.

اثبات صحت این شکل را، که به‌سادگی براساس استفـاده از تقسیم طلایی انجام می‌گیرد، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۹ـ یان بروژك

آنچه را که دراینجـا ازتاریخ ریاضیات می‌آوریم، به قصد اینست که از یان بروژك ریاضیدان بزرگ لهستانی و عضو آکادمی کراکوو (۱۵۸۵ ـ ۱۶۵۲) یادی کرده باشیم.

نام بروژك بخاطر تحقیقاتی که درزمینهٔ فلسفه، ریاضیات ونجوم کرده است، تحقیقاتی که باافکار خلاقه‌ای، دید ریاضی آن‌زمان را وسعت بسیار بخشید، درهمهٔ جهان مشهور است.

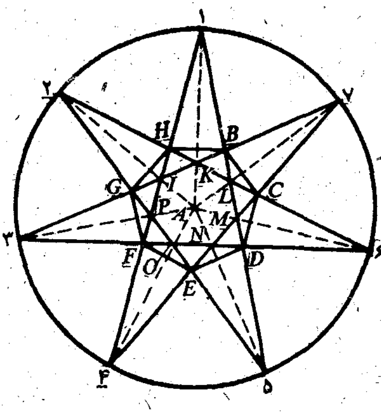
درحقیقت، او فرهنگ بزرگی از تفکرات آدمی بـود، زیرا

شاعر، فیلسوف ودانشمند بود وبه‌همهٔ مسأله‌هایی که در زمان او مطرح بود، علاقه داشت و بطور جدی درحل آنها می‌کوشید.

بروژك درزمینهٔ ریاضیات به‌هر مطلبی که مطرح بود پرداخت؛ برای نخستین‌بار به عددهای متحابه، دوعدد ۱۸۴۱۶ و ۱۷۲۹۶ را اضافه کرد؛ بطوروسیعی مسألهٔ مربوط به‌ساختمان خانه‌های کندوی عسل را مورد مطالعه قرارداد، برای نخستین بار کاربرد جدولهای نپر را درلهستان معمول کرد وغیره.

تازه‌ترین افکار ریاضی بروژك درکتاب او به‌نام «دفاع ازارسطو واقلیدس» آمده است که در پایان زندگی اوچاپ شد. دراین کتاب مطالب تازهٔ زیادی در زمینهٔ هندسه دارد و بخصوص روشهای تازه‌ای دربارهٔ ستاره‌های چندپر، که رشتهٔ ازیادرفته‌ای در هندسه بود، ارائه‌کرده است.

بروژك برای نخستین‌بار ثابت‌کرد که بین ستاره‌های چندپر که تعداد رأسهای آنها عددی فرد باشد، همیشه یك وضع حاکم است: مجموع زاویه‌های آنها برابراست بادوقائمه.



شکل ۳۸۷

بروژك برای نخستین بار روش ساختن انواع ستاره‌های چندپر را با معلوم بودن تعداد رأسهای آنها، مشخص کرد. او روش کاملاً تازه‌ای برای تشکیل چند ضلعیهای منتظم به‌کمك یك

چند ضلعی که همان تعداد رأس را دارد پیدا کرد.

بروژك برای اثبات اینکه مجموع زاویه‌های هرستاره با تعداد رأسهای فرد، دوقائمه است ابتدا از ستارهٔ هفت‌پر شروع می‌کند و سپس اثبات را برای سایر ستاره‌های چندپر تعمیم می‌دهد. اودایره را به هفت قسمت مساوی تقسیم می‌کند و با شروع از نقطهٔ ۱، هر نقطه را به‌نقطهٔ سوم وصل می‌کند (شکل ۳۸۷). به این ترتیب ستارهٔ هفت‌پر به‌وجود می‌آید که مجموع زاویه‌هـای داخلی آن (۱A۲، ۲A۳، ... ، ۷A۱) مساوی چهار قائمه می‌شود، و چـون هرزاویهٔ محـاطی مساوی نصف زاویـهٔ نظیر مرکـزی است، مجموع هفت زاویهٔ ستاره مساوی دو قائمه خواهد شد.

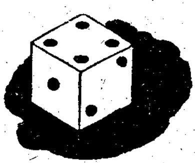
همین روش استدلال را در مورد ستاره‌های نه پر، یازده‌پر و غیره هم می‌توان به‌کاربرد.

X- بازیها، سرگرمیها و معماها

دراین‌قسمت دوباره به‌بازیها، ازنقطه‌نظر ریاضی برمی‌گردیم وبه‌آنچه که گفته‌ایم چیزهایی اضافه می‌کنیم. قبل ازهمه به‌بازیهایی می‌پردازیم که تاکنون ازآنها صحبت نکرده‌ایم.

۱- طاس

در بین بازیها باید جای اصلی را به بازی باطاس داد. این بازیها نه‌تنها یکی از قدیمی‌ترین بازیها در جهان است، بلکه یکی از ساده‌ترین آنها هم هست. این بازی چنان زمینهٔ محدودی ازلحاظ تفکر داردکه احتمالاً بسیاری از خوانندگان تعجب‌می‌کنندکه می‌توان دربازی با طاس ازترکیبهای ریاضی صحبت‌کرد.



درست است که این ترکیبها زیاد نیستند، ولی در بین آنها نمونه‌های‌جالبی‌می‌توان پیداکرد. همهٔ‌این بازیها براین اساس است که مجموع خالهای دوصفحهٔ مقابل مکعب در طاس همیشه رویهم مساوی ۷ است، یعنی ۱ و ۶ یا ۲ و ۵ یا ۳ و ۴.

برای اینکه از نمونهٔ بازی زیر سردرآوریم، ابتدا با مثال مشخصی شروع می‌کنیم وسپس صورت کلی آنرا می‌دهیم.

دو بازیکن A و B را درنظرمی‌گیریم.

A دو طاس می‌اندازد؛ B باید، بدون اینکه آنها را ببیند، تعداد خالهای هریك را بگوید.

روی طاسها، عددهای ۵ و ۴ است.

B از A می‌خواهد که تعدادخالهای زیرطاس اول را باتعداد خالهای روی طاس دوم جمع کند: ۶=۴+۲ . سپس می‌خواهد که مجموع تعداد خالهای زیررا درهردوطاس پیداکند ونتیجه رابگوید.

A درنتیجهٔ این عملها، دوعدد را ذکر می‌کند: ۶ و ۵.

B این دوعدد را جمع می‌کند (۱۱=۵+۶) و مجموع را از ۲۱ کم می‌کند (۱۰=۱۱−۲۱)؛ تفاضل را به ۲ تقسیم می‌کند (۵=۲ : ۱۰) و تعداد خالهای طاس اول را بدست می‌آورد: ۵ . سپس اولین عددی را که به او داده شده به۷اضافه می‌کند(۱۳=۶+۷)، از مجموع، دومین عددی را که به او داده شده کم می‌کند (۸=۵−۱۳). و تفاضل را نصف می‌کند (۴=۲ : ۸)، تعداد خالهای طاس دوم بدست می‌آید.

درحالت کلی: تعداد خالهای دوطاس را a و b می‌گیریم. اولین مجموع $۷-a+b$ ؛ دومین مجموع $۷-a+۷-b$ یعنی $۱۴-a-b$؛ مجموع این دومجموع:

$$(۷-a+b)+(۱۴-a-b)=۲۱-۲a$$

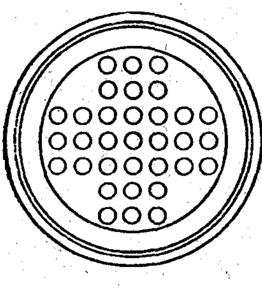
و غیره.

۲ـ «زاهد گوشه نشین»

این یکی از بازیهای قدیمی و در عین حال جالب است و می‌توان بدون وجود دیگری و به‌تنهایی به‌آن مشغول شد. از همین‌جا هم نام «زاهد گوشه نشین» به‌آن داده شده‌است.

باید در یك صفحهٔ چوبی ۳۳ حفره درست کنیم که در آنها گلوله‌های شیشه‌ای قرار دهیم (شکل ۳۸۸). به جای گلوله‌های شیشه‌ای، می‌توان به‌ـ همین تعداد سوراخ درست کرد و در آنها میخهایی قرار داد. هر حفره‌را بایك عدد دورقمی‌می‌شناسیم که رقم سمت چپ آن نمایندهٔ ردیف ستون (ازطرف چپ) ورقم سمت راست آن نمایندهٔ ردیف سطر (از پایین) باشد.

		۳۷	۴۷	۵۷		
		۳۶	۴۶	۵۶		
۱۵	۲۵	۳۵	۴۵	۵۵	۶۵	۷۵
۱۴	۲۴	۳۴	۴۴	۵۴	۶۴	۷۴
۱۳	۲۳	۳۳	۴۳	۵۳	۶۳	۷۳
		۳۲	۴۲	۵۲		
		۳۱	۴۱	۵۱		



شکل ۳۸۸

درابتدای بازی باید یکی از حفره‌ها خالی باشد و در هریك ازبقیه میخ یاگلوله‌های کوچك گذاشته شده باشد. بازی چنین‌است: یك گلوله «زده» می‌شود، وقتی که گلولهٔ دیگر در جهت افقی یاقائم ازروی آن به‌حفرهٔ خالی بپرد، تاوقتی که درآخرکار تنها یك گلوله

باقی بماند. هیچ حرکت دیگری، بجز پریدن یك گلوله به‌حفرهٔ‌خالی روی خط راست قابل قبول نیست. اگر مثلاً جای خالی در شمارهٔ ۴۴ باشد، این حرکتها ممکن است: از ۲۴ به ۴۴، از ۴۶ به ۴۴، از ۶۴ به ۴۴ و از ۴۲ به‌۴۴.

این حرکتها را به‌وسیلهٔ‌کسرهای زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{۲۴}{۴۴},\ \frac{۴۶}{۴۴},\ \frac{۶۴}{۴۴},\ \frac{۴۲}{۴۴}$$

درهریك از این چهار حرکت ممکن، یکی از حفره‌ها خالی می‌شود، زیرا گلوله‌ای‌که ازروی‌آن «پرش» انجام‌گرفته است، از گردونه خارج می‌شود؛ بنابراین درحالت مورد بحث، گلوله‌ای‌که دروضع ۳۴ یا ۴۵ یا ۵۴ یا ۴۳ قرارگرفته، برداشته می‌شود.

باشرط اضافی، درعین حال کـه بازی را مشکل‌تر می‌کند، آنرا جالب‌تر می‌سازد، این شرط می‌توانـد مشخص کردن جـای آخرین‌گلوله، بعداز آخرین‌حرکت باشد.

ما دراینجا به‌نظریهٔ‌کلی بازی «زاهد»، که جالب ولی پیچیده است، نمی‌پردازیم وبه‌جای‌آن چند نمونه ازآنرا می‌آوریم.

I. خانهٔ آزاد: ۴۴. آخرین‌گلوله‌هم درهمین‌خانه:

$$\frac{۶۴}{۴۴},\ \frac{۵۶}{۵۴},\ \frac{۴۴}{۶۴},\ \frac{۵۲}{۵۴},\ \frac{۷۳}{۵۳},\ \frac{۷۵}{۷۳},\ \frac{۴۳}{۶۳},\ \frac{۷۳}{۵۳},\ \frac{۵۴}{۵۲},\ \frac{۳۵}{۵۵},\ \frac{۶۵}{۴۵},$$

$$\frac{۱۵}{۳۵},\ \frac{۴۵}{۲۵},\ \frac{۳۷}{۳۵},\ \frac{۵۷}{۳۷},\ \frac{۳۴}{۳۶},\ \frac{۳۷}{۳۵},\ \frac{۲۵}{۴۵},\ \frac{۴۶}{۴۴},\ \frac{۲۳}{۴۳},\ \frac{۳۱}{۳۳},\ \frac{۴۳}{۲۳},$$

$$\frac{۵۱}{۳۱},\ \frac{۵۲}{۳۲},\ \frac{۳۱}{۳۳},\ \frac{۱۴}{۳۴},\ \frac{۳۴}{۳۲},\ \frac{۱۳}{۳۳},\ \frac{۳۲}{۳۴},\ \frac{۳۴}{۵۴},\ \frac{۶۴}{۴۴}$$

II. خانهٔ آزاد: ۷۴. آخرین گلوله درخانهٔ ۴۷:

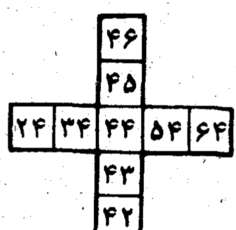
۵۱/۵۳، ۴۳/۶۳، ۳۲/۵۲، ۳۱/۵۱، ۵۱/۵۳، ۵۴/۵۲، ۷۴/۵۴، ۷۳/۵۳، ۴۴/۶۴، ۵۲/۵۴، ۵۴/۷۴،
۵۷/۵۵، ۵۴/۵۶، ۷۵/۵۵، ۵۶/۵۴، ۳۲/۳۴، ۱۳/۳۳، ۴۳/۲۳، ۱۵/۱۳، ۱۳/۳۳، ۳۴/۳۲، ۶۳/۴۳،
۴۵/۴۷، ۲۵/۴۵، ۴۴/۷۶، ۲۴/۴۴، ۶۵/۴۵، ۵۷/۵۵، ۴۵/۶۵، ۳۶/۵۶، ۳۷/۵۷

III. درست کردن صلیب با نه گلوله. خانهٔ آزاد: ۴۱ (شکل ۳۸۹):

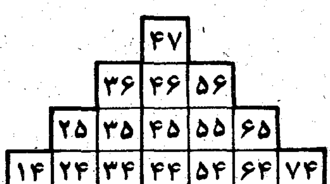
۴۴/۴۲، ۲۴/۴۴، ۴۵/۴۳، ۴۳/۴۱،
۴۶/۴۴، ۴۳/۴۵، ۴۱/۴۳، ۶۴/۴۴

IV. درست کردن هرم. خانهٔ آزاد: ۵۳ (شکل ۳۹۰):

۵۷/۳۷، ۵۵/۵۷، ۵۳/۵۵، ۷۴/۵۴، ۵۵/۵۳،
۴۴/۴۶، ۳۶/۵۶؛ ۳۳/۳۵، ۱۴/۳۴، ۳۵/۳۳،
۶۵/۴۵، ۳۵/۵۵، ۳۷/۳۵، ۲۵/۴۵، ۵۶/۳۶



شکل ۳۸۹



شکل ۳۹۰

ترکیبهای بسیار متنوع وزیادی می‌توان دربازی «زاهد» پیدا

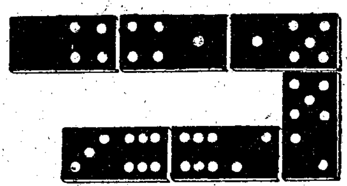
کرد و به‌همین مناسبت به‌این زودیها آدم را خسته نمی‌کند.

۳ـ دومینو

آیا می‌دانید چند ترکیب مختلف می‌توان در بازی معمولی دومینو، که‌شامل ۲۸ سنگ‌ است، پیدا کرد؟ درست ۳۹۷۹۶۱۴۹۶۵۷۶۰ ترکیب مختلف. روشن است که بازیهای یکجور را به حساب نیاورده‌ایم.

ما در اینجا به چند ملاحظهٔ اصلی می‌پردازیم و خواننده می‌تواند خود نمونه‌های فراوان دیگری پیدا کند.

در شکل ۳۹۱، شش سنگ دومینو طبق قاعدهٔ معمولی بازی چیده شده‌است، به‌نحوی که تعداد خالهای سنگها تشکیل یك تصاعد عددی با قدرنسبت واحد داده‌اند، یعنی: ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹. این



شکل ۳۹۱

پرسش پیش می‌آید: با شش سنگ دومینو چند تصاعد عددی (با قدر نسبت ۱ یا ۲) می‌توان درست کرد؟

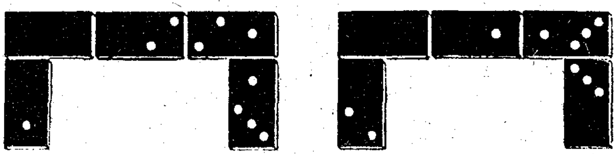
حساب کرده‌اند که از ۲۸ سنگ دومینو می‌توان ۲۰ تصاعد با قدرنسبت واحد و سه تصاعد با قدرنسبت ۲ به وجود آورد که البته رویهم تنها ۲۳ تصاعد می‌شود.

اگر کسی نسبت به این تعداد کم اعتراض دارد، می‌تواند خودش برای پیدا کردن ترکیبهای دیگر، سنگهای دومینو را امتحان

کند. این ۲۳ نوع تصاعد باسنگهای زیرشروع می‌شوند:

(۰ — ۰), (۰ — ۱), (۱ — ۰), (۰ — ۲), (۱ — ۱), (۲ — ۰),
(۰ — ۳), (۱ — ۲), (۲ — ۱), (۳ — ۰), (۰ — ۴), (۱ — ۳),
(۲ — ۲), (۳ — ۱), (۱ — ۴), (۲ — ۳), (۳ — ۲), (۲ — ۴),
(۳ — ۳), (۳ — ۴)

برای تصاعدهای با قدرنسبت واحد و سنگهای (۰ = ۰)، (۱ — ۰)، (۲ — ۰) برای تصاعدهای باقدر نسبت ۲.

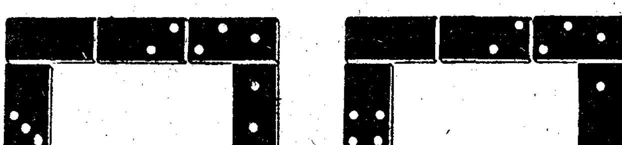


شکل ۳۹۲

در سمت چپ شکل ۳۹۲ پنج سنگ قرار دارد که مجموع خالهای سنگهای وسط مساوی ۵ و مجموع خالهای تمام سنگها مساوی ۱۰ است. از این نوع ترکیب چند جور می‌شود ساخت؟ ظاهراً فقط چهارجور، یعنی (شکل ۳۹۳):

(۱ — ۰), (۰ — ۰), (۰ — ۲), (۲ — ۱), (۱ — ۳)
(۲ — ۰), (۰ — ۰), (۰ — ۱), (۱ — ۳), (۳ — ۰)
(۳ — ۰), (۰ — ۰), (۰ — ۲), (۲ — ۱), (۱ — ۱)
(۴ — ۰), (۰ — ۰), (۰ — ۲), (۲ — ۱), (۱ — ۰)

اگر قبول ندارید، ترکیبهای دیگرش را خودتان پیدا کنید.

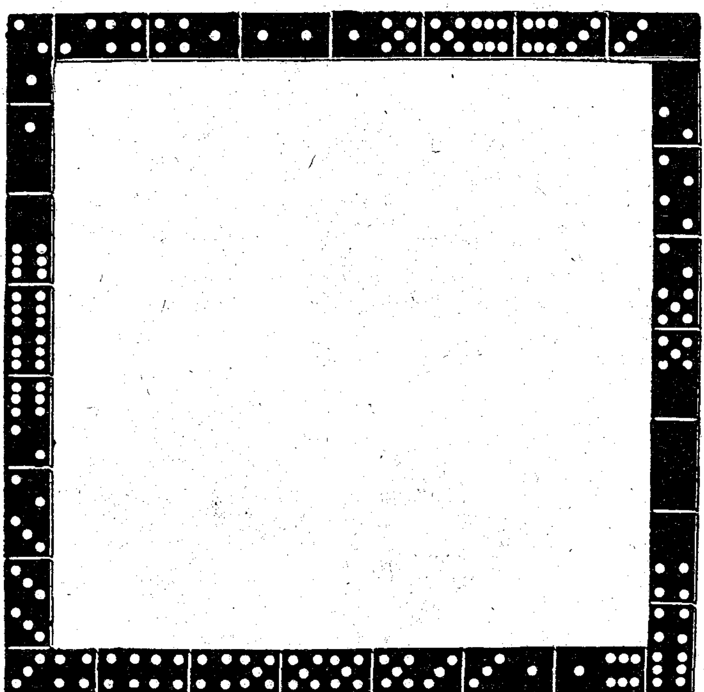


شکل ۳۹۳

این مسأله را دراین مورد آزمایش کنید که مجموع خالهای

سنگهای وسط مساوی ۶ یا ۷ومجموع خالهای تمام سنگها مساوی ۱۲ یا ۱۴ باشد.

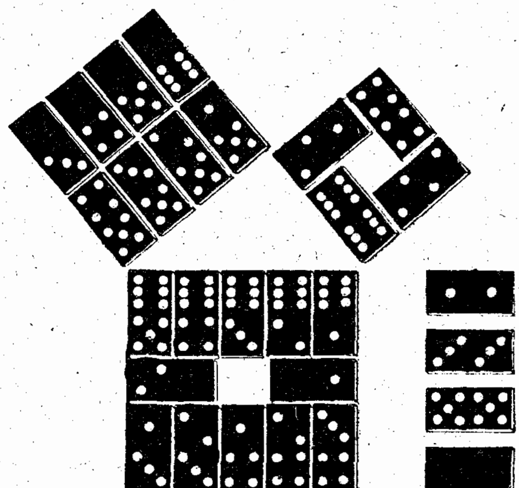
طبق قاعدهٔ بازی دومینو، هر ۲۸ سنگ را طوری بچینید که یك مربع کامل تشکیل دهند (شکل ۳۹۴). به‌سادگی معلوم می‌شود که مجموع خالهای ردیف بالا و ستون سمت چپ هرکدام ۴۴، ردیف پایین ۵۹ وستون سمت راست ۳۲ است.



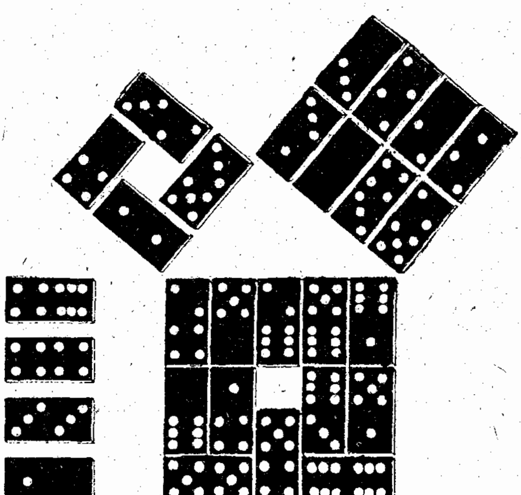
شکل ۳۹۴

آیا می‌توانید سنگهای دومینو را، طبق قاعدهٔ بازی‌آن، طوری به‌صورت یك مربع کامل بچینید که در هرضلع آن ۴۴ خال وجود داشته باشد؟ برای اینکه حل این مسأله را کمی ساده‌تر کنیم،

یادآوری می کنیم که در این ترکیب، سنگهایی که در گوشه‌های مربع قرار گرفته‌اند، باید ۸ خال داشته باشند، زیرا مجموع خالهای ۲۸ سنگ مساوی ۱۶۸ و ۴۴×۴ مساوی ۱۷۶ مـی‌شود. راه حلهـای



شکل ۳۹۵



شکل ۳۹۶

زیادی برای این مسأله می‌توان پیدا کرد.

* * *

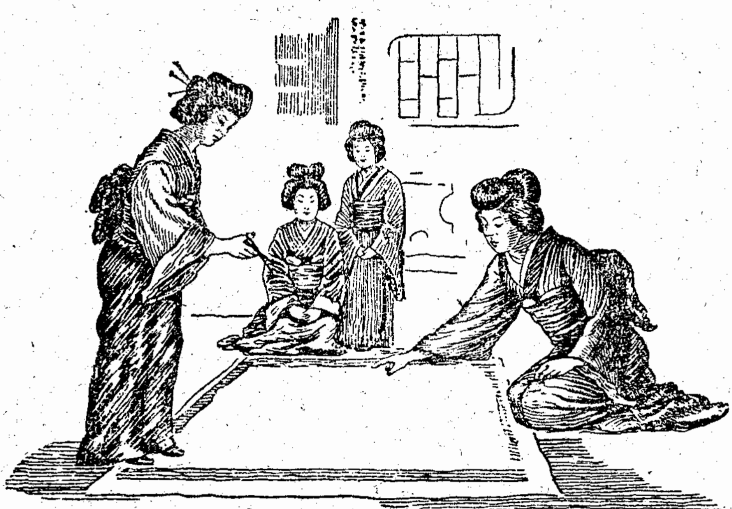
از آنجاکه ما دراین کتاب «درپی فیثاغورث» روانیم، اثبات جالبی از قضیهٔ بزرگ او می‌دهیم: مربع وتر برابر است بامجموع مربعهای دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه.

این اثبات را می‌توان اثبات «دومینویی» نامید. شکلهای ۳۹۵ و ۳۹۶ به‌اندازهٔ کافی موضوع را روشن می‌کنند.

۴ـ معماها

تعداد معماها آنقدر زیاد است (و بخصوص در هندسه) که واقعاً انتخاب کردن از بین آنها کار دشواری است.

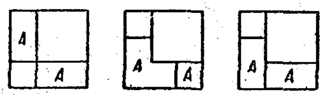
به‌همین مناسبت دراینجا تنها ازآنهایی نام می‌بریم که ازنظر ریاضیات جالب‌اند.



شکل ۳۹۷

A. تقسیم فرش

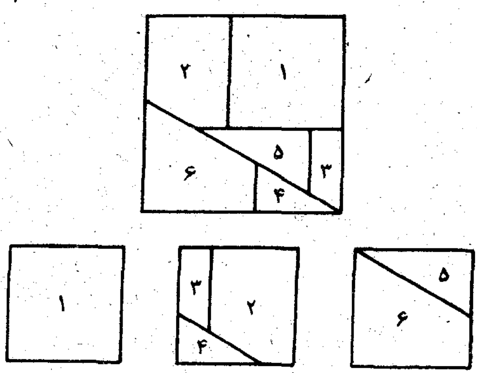
یك فرش مربع شکل به سه خواهر به ارث رسید، نگه‌داشتن این یادگار خانوادگی برای همهٔ آنها اهمیت داشت، به همین مناسبت تصمیم گرفتند آنرا طوری تقسیم کنند که هر کدام یك فرش مربع شکل داشته باشند (شکل ۳۹۷). چگونه توانستند به‌این نتیجه برسند؟ مدتی باهم بحث کردند. بالاخره تصمیم گرفتند که از تقسیم مساوی صرفنظر کنند و به‌این ترتیب مشکل خود را حل کردند که دوخواهر بزرگتر (که دوقلو بودند) هر کدام $\frac{۴}{۹}$ فرش را بردارند وخواهر کوچکتر سومی $\frac{۱}{۹}$ آنرا. برای این منظور هم سه راه‌حل پیدا کردند (شکل ۳۹۸): یکی



شکل ۳۹۸

مربع بزرگتر را گرفت، دومی مربعی به همان اندازه از دو قسمت A و A برداشت و سومی مربع کوچکتر را انتخاب کرد.

ولی یك ریاضیدان ماهر، دخترهای غمگین را تسلی داد و گفت که می‌تواند فرش را به شش قسمت چنان تقسیم کند، که از



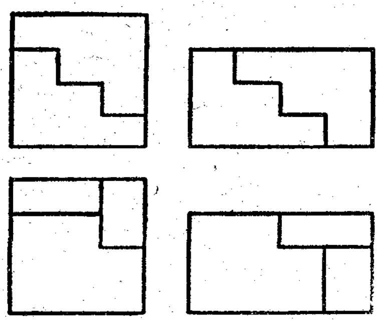
شکل ۳۹۹

آنها بتوان سه‌مربع مساوی درست کرد.

راه حل این ریاضیدان درشکل ۳۹۹ مشخص شده است، در این شکل یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم الزاویهٔ ۴ مساوی ۳۰ درجه است وارتفاع ذوزنقهٔ ۶، برابراست باضلع هریك ازسه مربع کوچك فرش.

یکی از خواهرها سهم خود را بـه صورت یك قطعهٔ کامل، ولی دوخواهر دیگر به‌صورت چند قطعه تحویل گرفتند.

ولی آنکه فرش یك تکه گرفته بود، خواست آنرا بـه‌ـصورت مستطیلی درآورد کـه نسبت طول وعرض آن مثل ۹ : ۱۶ باشد. این مشکل را هم ریاضی‌ـدان حل کرد ودو راه‌حل مختلف برای آن ارائه داد (شکل ۴۰۰).



شکل ۴۰۰

B. مسألهٔ ارشمیدس

در یکی ازکتابهای ریاضی عربی، مربوط به ریاضیدانهـای اسلامی، نقل‌شده است که ارشمیدس روش بسیارجالبی برای تقسیم مربع به ۱۴ قسمت پیدا کرد که هریك ازآنها را بتوان باکسرهایی که مخرج مشترك ۴۸ دارند، بیان کرد.

درمربع سمت چپ شکل ۴۰۱ روش این‌تقسیم ودرمربع سمت راست، مقدار صورت این کسرها داده شده است.

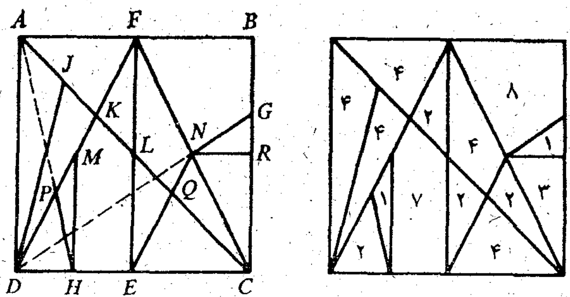
اگر مربع ABCD را واحد بگیریم، بدست می‌آید:

$$\text{مثلث } \mathbf{AJD} = \frac{۴}{۴۸}$$

$$\text{مثلث } \mathbf{PMH} = \frac{۱}{۴۸}$$

$$\text{چهارضلعی } \mathbf{FBGN} = \frac{۸}{۴۸}$$

وغیره.



شکل ۴۰۱

معمای جالبی خواهد بود که اگر بخواهیم قسمتهای این مربع را (بدون تغییر جای آنها) طوری گروه بندی کنند که:

۱) مربع به‌سه قسمت مساوی تقسیم شود، هر قسمت مساوی $\frac{۱۶}{۴۸}$؛

۲) مربع به شش قسمت مساوی وهر قسمت مساوی $\frac{۸}{۴۸}$ تقسیم شود؛

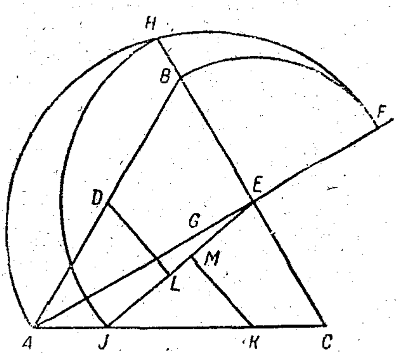
۳) مربع به‌سه قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای آنها سه عدد متوالی باشد، یعنی $\frac{۱۵}{۴۸}$، $\frac{۱۶}{۴۸}$ و $\frac{۱۷}{۴۸}$؛

۴) مربع به نه‌قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای متناظر آنها عددهای طبیعی از ۱ تا ۸ وعدد ۱۲ باشد.

C. چگونه می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاع را،

باحداقل تعداد تقسیمها، به‌مربع تبدیل کرد

راه‌حل درشکل ۴۰۲ داده شده است، که باوجود ساده نبودن آن، راه حل قشنگی‌است. دربارهٔ شکل بایدکمی توضیح داد. AB و BC را نصف می‌کنیم و نقطه‌های D و E را بدست می‌آوریم. میانهٔ AE را امتداد می‌دهیم و روی آن EF=EB را جدا می‌کنیم. به‌مرکز نقطهٔ G وسط AF نیمدایرهٔ AHF را رسم می‌کنیم.



شکل ۴۰۲

CB را تا H امتداد می‌دهیم. به‌مرکزE وشعاع EH قوس HJ را می‌کشیم. JK=BE جدا می‌کنیم. دنبالهٔ کار به‌اندازهٔ کافی روشن است.

طرح کنندهٔ معما با خوشحالی این مسأله را طرح کرد که یك قطعه مثلثی باسه برش به‌چهار قسمت چنان تقسیم شود که از آنها بتوان یك مربع درست کرد (شکل ۴۰۳).

برای شکل قبل (شکل ۴۰۲) این‌علامتها را درنظر می‌گیریم :

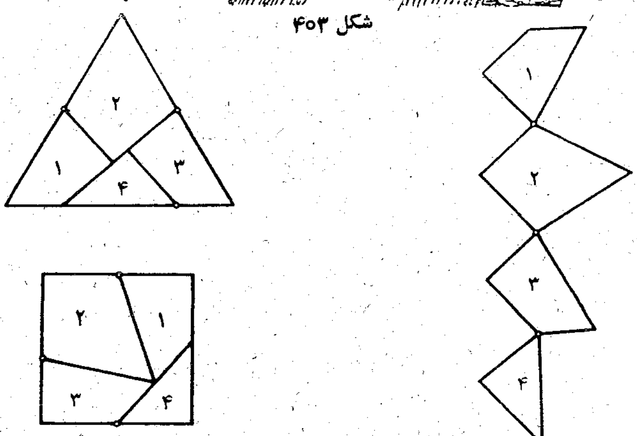
چهارضلعی JADL : شکل ۱

چهارضلعی DBEL : شکل ۲

چهارضلعی ECKM : شکل ۳

مثلث KJM : شکل ۴

شکل ۴۰۳

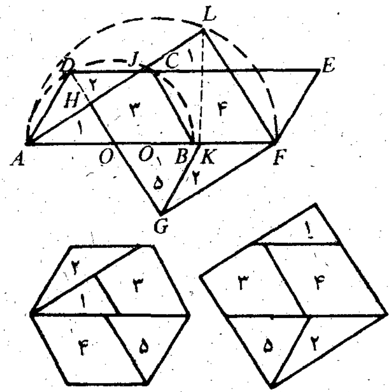


شکل ۴۰۴

اگر تختهٔ مثلثی کمی کلفت باشد، می‌توان درنقطه‌های D ، E و K لوله‌های کوچکی قرار داد، یك رشته شامل چهارشکل نامنظم بدست می‌آید که از آن می‌توان یك مربع یایك مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرد (شکل ۴۰۴).

D. چگونه می‌توان یك شش ضلعی منتظم را به مربع تبدیل کرد

قبل از همه باید ازدونیمهٔ شش‌ضلعی، یعنی ABCD وBCEF، متوازی‌الاضلاع AFED را ساخت (شکل ۴۰۵). به‌قطر پاره خط AF نیمدایره‌ای می کشیم؛ به مرکز F وشعاع مساوی واسطهٔ هندسی AF و ارتفاع متوازی الاضلاع، قوسی رسم می کنیم تانیمدایره را در L قطع کند. ادامهٔ کار روشن است.



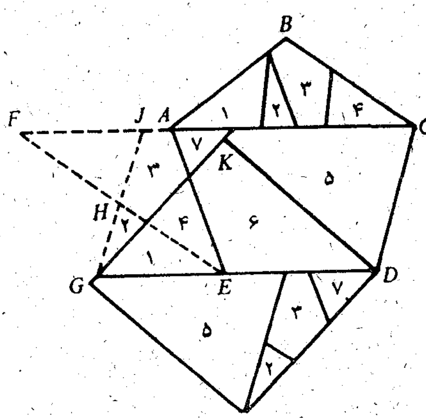
شکل ۴۰۵

E. تبدیل یك پنج ضلعی منتظم به مربع (پیچیده ترین نوع تبدیل)

قطر CA را امتداد می‌دهیم و AF=AB جدا می کنیم (شکل ۴۰۶)؛ نقطه‌های F و E را به هم وصل می کنیم. ذوزنقهٔ

FEDC هم ارز پنج ضلعی ABCDE می‌شود.

از نقطهٔ H وسط FE خط GJ را موازی CD رسم می‌کنیم.
متوازی الاضلاع JGDC هم ارز پنج ضلعی اولیه می‌شود. بنابراین از اینجا به‌بعد باید مثل مسألهٔ قبل عمل کرد.



شکل ۴۰۶

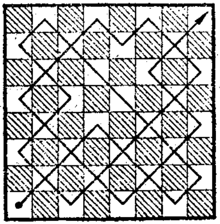
هـ مسافرت روی صفحهٔ شطرنج و دوازده وجهی

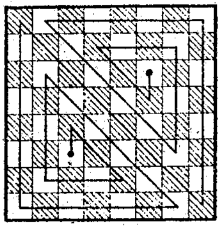
A. گردش درخانه‌های صفحهٔ شطرنج

ژولیت روی یکی ازخانه‌های صفحهٔ شطرنج، مثل بالکون یك منزل نشسته است و رومئو هم درخانهٔ دیگری است.

ژولیت با ناشکیبایی در انتظار رومئو است، در حالیکه رومئو نمی‌داند معشوقهٔ او در کدام خانه است. به‌همین مناسبت رومئو تصمیم می‌گیرد به‌همهٔ خانه‌ها سربزند و می‌خواهد کوتاهترین راه را برود و کمترین تعداد را دور بزند. چگونه باید راه خود را انتخاب کند (شکل ۴۰۷).

روز دیگر رومئو می‌داند که ژولیت دریك خانهٔ سفید به‌انتظار او





شکل ۴۵۷

نشسته است، به‌همین مناسبت اوخانه‌های سیاه را دور می‌زند وتنها به همهٔ خانه‌های سفید سرکشی می‌کند، تا اینکه در روز سوم دیگر مستقیماً جهت خود را پیدا می‌کند.

B. بازی هامیلتون

ویلیام هامیلتون، ریاضیدان ومنجم انگلیسی نیمهٔ اول سدهٔ نونزدهم، بازی بسیارجالبی درست کرد که به‌نام مسافرت روی دوازده وجهی معروف شده است.

مسافرت به‌این ترتیب است که باید ازیك رأس دوازده وجهی شروع کرد، ازهمهٔ رأسها گذشت وبه رأس اول برگشت.

اگر از یك رأس دوازده وجهی شروع کنیم وروی یك یال به‌رأس دیگربرسیم، دربرابرما این پرسش قرار می‌گیرد که آیا باید به‌طرف راست برویم یا به‌طرف چپ؟ واصل بازی‌هم مربوط به‌پیدا کردن همین مسیر حرکت است.

دراینجا دوراه حل از مسأله را می‌دهیم.

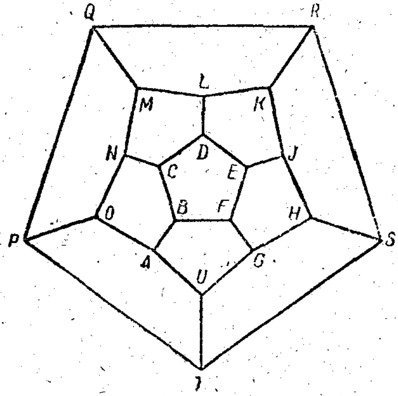
$p\,p\,p\,l\,l\,l\,p\,l\,p\,l\,p\,p\,p\,l\,l\,l\,p\,l\,p$

یا

$l\,l\,l\,p\,p\,p\,l\,p\,l\,p\,l\,l\,l\,p\,p\,p\,l\,p\,l$

حرف p به‌معنای حرکت به‌طرف راست، و l به‌طرف چپ است.

می‌توان روی نمونهٔ ساخته شده‌ای از دوازده وجهی آزمایش کرد و یا اگر این نمونه را در اختیار ندارید، می‌توانید مسافرت را روی طرحی که در شکل ۴۰۸ داده شده‌است دنبال کنید:



شکل ۴۰۸

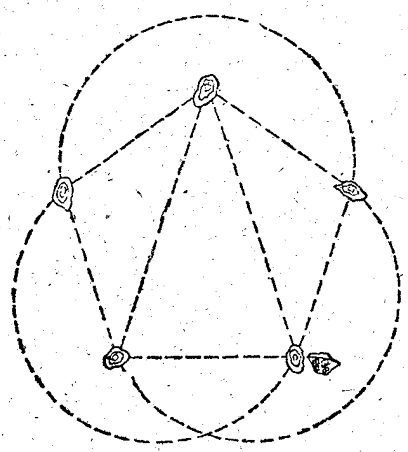
GFBAUTPONCDEJKLMQRSHG

یا

GFBAUTSRKLMQPONCDEJHG

C. دیدار از پنج جزیره

برای کسی که مسافرت روی دوازده وجهی را انجام داده



شکل ۴۰۹

است، خیلی ساده است که بتواند مسیر کشتی را معین کند که می‌خواهد از بندر یك جزیره حرکت، به‌هر پنج جزیره برود و دوباره به‌بندرگاه اول برگردد، به‌این‌شرط که روی هرخط تنهایکبارحرکت کند وبه‌هر جزیزه‌هم تنها یکمرتبه برود (شکل ۴۰۹).

این مسأله راه‌حلهای فراوان دارد.

جواب بعضی از مسأله‌ها :

صفحهٔ ۵۵ ـ ساقهٔ نیلوفر.

عمق آب در مسألهٔ اول مساوی $۳\frac{۳}{۴}$ آرنج و در مسألهٔ دوم مساوی ۱۲ پا است.

صفحهٔ ۵۶ ـ پرش بوزینه.

ارتفاع در ۳۰ آرنجی.

صفحهٔ ۷۲ ـ هرکسی چند سال دارد.

ترزا $۱\frac{۳}{۴}$ سال، یاس $۳\frac{۱}{۲}$ سال، نلی $۵\frac{۱}{۴}$ سال، سلاویك ۱۰ سال، ورا ۲۱ سال.

صفحهٔ ۷۶ ـ چند مسأله.

I. ۱۲ خرگوش و ۲۳ مرغ.

II. بعداز ۷۵ جست.

III. ۳۰ آلو.

IV. بعد از ۶۰ روز یکچهارم سطح آب برکه، بعد از ۶۲ روز نصف آن و بعداز ۶۴ روز تمام سطح آن پوشیده می‌شود.

زندگینامه

آپولونیوس (حدود سدهٔ دوم پیش از میلاد) ـ یکی از مشهورترین ریاضیدانهای مکتب اسکندریه. مشهورترین کار او دربارهٔ مقاطع مخروطی است. دکارت وفرما برای به‌وجودآوردن هندسهٔ‌تحلیلی ازکارهای‌آپولونیوس شروع کردند.

آریابهاتا (در سال ۴۷۶ متولد شده، سال مرگ او معلوم نیست) ـ ریاضیدان ومنجم هندی. بین‌آثارنجومی وریاضی اوبه‌ریشهٔ دوم وریشهٔ سوم، وهم حل مسأله‌های ساده ازراه معادله برمی‌خوریم.

آلکوئین (حدود سالهای ۷۳۵-۸۰۴)ـ دانشمند قرون وسطی ومعلم امپراتور شارل بزرگ. تألیفهای زیادی در زمینهٔ فلسفه، ریاضیات، معانی بیان و دستور زبان به او نسبت می‌دهند. مسأله‌های حساب را به صورت معمایی ارائه‌کرده است.

ارشمیدس (حدود سالهای ۲۸۷ ـ ۲۱۲ پیش از میلاد) ـ بزرگترین ریاضیدان و مکانیسین یونان باستان. او آموزش خود را نزد پدر منجم و ریاضیدان خود فیدیا بدست‌آورد. ارشمیدس مساحت وحجم شکلهای مختلف را باروشی بدست‌آوردکه تکامل بعدی‌آن منجربه‌پیدایش حساب انتگرال‌شد.

اوکان ـ موریس (۱۸۶۲ ـ ۱۹۳۸)ـ ریاضیدان فرانسوی. شهرت او مربوط به کارهایش در زمینهٔ نوموگرافی است. روش کلی برای ساختن نوموگرام بدست‌آورد و مقدمهٔ نظریهٔ‌کلی ساختمانهای نوموگرافی را بنیان گذاشت.

اولر ـ لئونارد (۱۷۰۷-۱۷۸۳)ـ ریاضیدان، فیزیکدان و مکانیسین بزرگ. در بازل متولد شد. از ۱۷۲۷ تا ۱۷۴۱ و سپس از سال ۱۷۶۶ تا آخرعمر درپترزبورگ زندگی کرد. دانش اولر به‌طور باورنکردنی وسیع بود و به همهٔ زمینه‌های علمی زمان خود: ریاضیات، مکانیك، فیزیك ریاضی دیدگانی، نظریهٔ ماشین‌ها، بالیستیك، نظریهٔ موسیقی وغیرآن تسلط داشت. اثرمهم اولر در ریاضیات مربوط به‌آنالیز ریاضی است که توانست آنرا نسبت به کارهای نیوتون و لایبنیتس فوق‌العاده تکامل ببخشد.

بطلمیوس ـ کلود (سدهٔ دوم میلادی) ـ دانشمند مشهور یونان باستان، کارهای او اهمیت فوق‌العاده‌ای ازلحاظ پیشرفت بسیاری از دانشها بخصوص نجوم، جغرافی ودیدگانی داشت. بطلمیوس مقدار π را دقیق‌ترکرد وجدول سینوسها را محاسبه‌کرد که تا قرنهای متمادی تنها وسیله برای حل مثلث بود.

پاپ اسکندرانی (نیمهٔ دوم سدهٔ سوم میلادی) ـ ریاضیدان یونان باستان، مؤلف مجموعهٔ ریاضی در ۸ کتاب که ازآنها ۶ کتاب آخر به‌ما رسیده است. اثر پاپ ارزش تاریخی زیادی در تاریخ ریاضیات یونانی دورهٔ الهٔنی دارد.

پاسکال ـ بلز(۱۶۲۳-۱۶۶۲) ریاضیدان،فیزیکدان وفیلسوف بزرگ فرانسوی. اوماشین حساب را ساخت، نشانهٔ‌کلی قابلیت تقسیم هرعددصحیح بر هرعدد صحیح را پیدا کرد، روش پیدا کردن تعداد ترکیبهای mتایی از n عنصررا معین‌کرد.

پلوتارك (حدود سالهای ۴۶-۱۲۶ میلادی)ـ نویسندهٔ یونان باستان. معروفترین اثراوآنست‌که اطلاعات تاریخی‌مهمی دربارهٔ فلسفهٔ یونانی‌بدست می‌دهد.

پلینی بزرگ (۲۳-۷۹ میلادی)ـ دانشمند ونویسندهٔ رومی ومؤلف اثر تاریخ طبیعی در ۳۷ کتاب که شامل دانشهای زمان او در زمینهٔ نجوم، فیزیك، جغرافی، حیوانشناسی، گیاه شناسی، طب و غیر آن می‌باشد. او د اثرآتش‌فشانی بزوو به‌هلاکت رسید.

دکارت ـ رنه (۱۵۹۶ - ۱۶۵۰)ـ فیلسوف، فیزیکدان، ریاضیدان و زیست شناس معروف فرانسوی. برای نخستین‌بار کمیتهای متغیر وتوابع را وارد ریاضیات کرد و روش مختصات دکارتی را به وجود آورد. دکارت ریاضیات را ایده‌آل وسرمشق همهٔ دانشها می‌دانست.

دیورر ـ آلبرت (۱۴۷۱ - ۱۵۲۸) ـ نقاش، حکاك و طراح بزرگ آلمانی.

دیوفانت (حدود سدهٔ سوم میلادی)ـ ریاضیدان یونانی از اسکندریه، مؤلف رسالهٔ حساب (که ۶کتاب از۱۳ کتاب آن و قسمتی از کتاب در بارهٔ عددهای چندضلعی باقیمانده است). دیوفانت معادلهٔ درجهٔچهارم‌را حل کرد. نوشته‌های او اساس بررسیهای فرما و اولر قرارگرفت.

رئومور ـ رنه آنتوان (۱۶۸۳ - ۱۷۵۷)ـ دانشمند فرانسوی علوم تجربی، مؤلف آثاری درزمینهٔ فیزیك، شیمی، جانـورشناسی، گیاه شناسی و سایرعلوم. حرارت‌سنج الکلی رئومور را باتقسیم بندی ۸۰ درجه‌ای کشف کرد.

زنون ایلیایی (حدود ۵۰۰سال پیش‌ازمیلاد)ـ فیلسوف یونان‌باستان. برای اثبات عـدم وجود حرکت، منجمله استدلال کرد که آشیل (قهرمـان افسانه‌ای) هرگزنمی‌تواند به‌لاك‌پشت برسد.

طالس (سده‌های هفتم و ششم پیش از میلاد) ـ فیلسوف ماتریالیست یونان قدیم. نام طالس بربسیاری از قضیه‌های حساب، هندسه ونجوم باقـی مانده است. اوطول سال را در۳۶۵روز معین‌کرد وبرای‌نخستین‌بار دریونان کسوف را پیش‌بینی‌کرد.

فرما ـ پیر (۱۶۰۱ - ۱۶۶۵)ـ ریاضیدان بزرگ فرانسوی ویکی از به‌وجودآورندگان نظریهٔ اعداد. درهندسه، قبل‌از دکارت و به شکل کاملاً منظم، روش مختصات را کشف‌کرد. در نوشته‌های فرما بطور منظم و جدی روی دواصل اساسی بی‌نهایت کوچکها، دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری، کارشده است، ولی ارتباط‌بین این‌دو، کشف نشده است. این ارتباط را لیبنیتس ونیوتون پیداکردند.

فیبوناچی ـ لئوناردو (حدود ۱۱۷۰ ـ بعداز ۱۲۲۸) ـ ریاضیدان ایتالیایی. لئوناردو ضمن مسافرت به‌شرق باریاضیات ملتهای اسلامی آشنا شد نوشته‌های او به‌انتقال دست‌آوردهای ریاضیدانهای شرق به‌غرب کمك فراوان کرد. کارهای اساسی لئوناردو رساله‌ای دربارهٔ حساب وجبر و اثری به‌نام هندسهٔ عملی است که شامل مسأله‌هایی درزمینهٔ کاربرد جبردر هندسه است.

کانتور ـ موریس (۱۸۲۹-۱۹۲۰) ـ مورخ آلمانی علوم ریاضی. اثر کانتور به‌نام درسی از تاریخ ریاضیات شامل اطلاعات بسیارزیادی درتاریخ ریاضی از قدیم‌ترین زمانها تا سال ۱۷۹۹ است.

گاره‌ده‌فر ـ گئورگی فیلیپ (۱۶۰۷ ـ ۱۶۵۸) ـ شاعر آلمانی و مؤلف ۵۰ جلد آثار مختلف به‌زبانهای آلمانی و لاتینی که به‌صورت گفتگو نوشته شده است ومربوط به‌رشته‌های مختلفی از دانش بشری است.

گاوس ـ کارل فریدریك (۱۷۷۷ ـ ۱۸۵۵) ـ ریاضیدان و منجم بزرگ آلمانی. او بود که منجمله روش ساختن چند ضلعیهای منتظم را به کمك خط کش و پرگار به‌ثمر رساند.

لایبنیتس ـ گوتفرید ویلهلم (۱۶۴۶- ۱۷۱۶) ـ دانشمند آلمانی و ریاضیدان بزرگ. مهمترین کار او به‌ثمر رساندن مبحث مربوط به حساب دیفرانسیل وانتگرال است.

لژاندر ـ آدرین ماری (۱۷۵۲ ـ ۱۸۳۳) ـ ریاضیدان فرانسوی. نظریهٔ نقشه‌برداری ومساحی را بنیان گذاشت. درآنالیز ریاضی بررسیهایی روی انتگرالهای اولر انجام داد.

ماکلورن ـ کولین (۱۶۹۸-۱۷۴۶)ـ ریاضیدان اسکاتلندی، شاگرد نیوتون و ادامه دهندهٔ کارهای او.

نپرـ جون (۱۵۵۰ ـ ۱۶۱۷) ـ ریاضیدان اسکاتلندی و کشف کنندهٔ لگاریتم. کشف لگاریتم نقش بزرگی در تکامل فن محاسبه داشت. همچنین راه حلهای ساده‌ای برای قابل محاسبهٔ لگاریتمی کردن رابطه‌های مربوط به‌مثلثهای کروی پیدا کرد.

نیوتون ـ ایزاك (۱۶۴۲ ـ ۱۷۲۷) ـ فیزیکدان، منجم و ریاضیدان نابغهٔ انگلیسی. قانونهای اساسی مکانیك‌کلاسیك را تدوین‌کرد، قانون جاذبهٔ عمومی راکشف‌کرد و (همزمان با لایبنیتس) حساب دیفرانسیل وانتگرال را به‌وجود آورد.

ویلسون ـ چارلز توماس زیس (متولد ۱۸۶۹)ـ فیزیکدان انگلیسی و استاد دانشگاه کمبریج. درسال ۱۹۱۲ دستگاهی ساخت (دوربین ویلسون) که به‌کمك‌آن می‌توان آثار ذرات ناپایدار را مشاهده‌کرد.

هرم خفرون ـ به‌وسیلهٔ خفرون فرعون مصر و برادر خئوپس ساخته شد. این هرم درردیف هرم خئوپس ساخته شده وارتفاع آن مساوی ۱۳۸/۴ متر است. نزدیك هرم روی یك صخره، ابوالهول عظیم باتنهٔ شیر و سرآدم تراشیده شده است.

هرم خئوپس ـ در زمان حکـومت خئوپس فرعون مصر ساخته شد (ابتدای هزارهٔ سوم پیش از میلاد). این هرم در نزدیکی آبادی امروزی گیزا قرار دارد و ارتفاع‌آن ۱۴۶/۵ متر است. بعد ازمرگ خئوپس، خیلی زود هرم او غارت شد و مومیایی خئوپس از بین رفت.

هرودوت (حدود سالهای ۴۸۴ ـ ۴۲۵ پیش ازمیلاد)ـ مورخ یونان باستان و مؤلف‌کتاب تاریخ جنگهای یونان و ایران کـه ضمناً شامل انتقاد‌های تاریخی هم می‌باشد. نوشته‌های هرودوت باهمهٔ اهمیت خود در بعضی موارد نادرست و خیال‌پردازانه است.