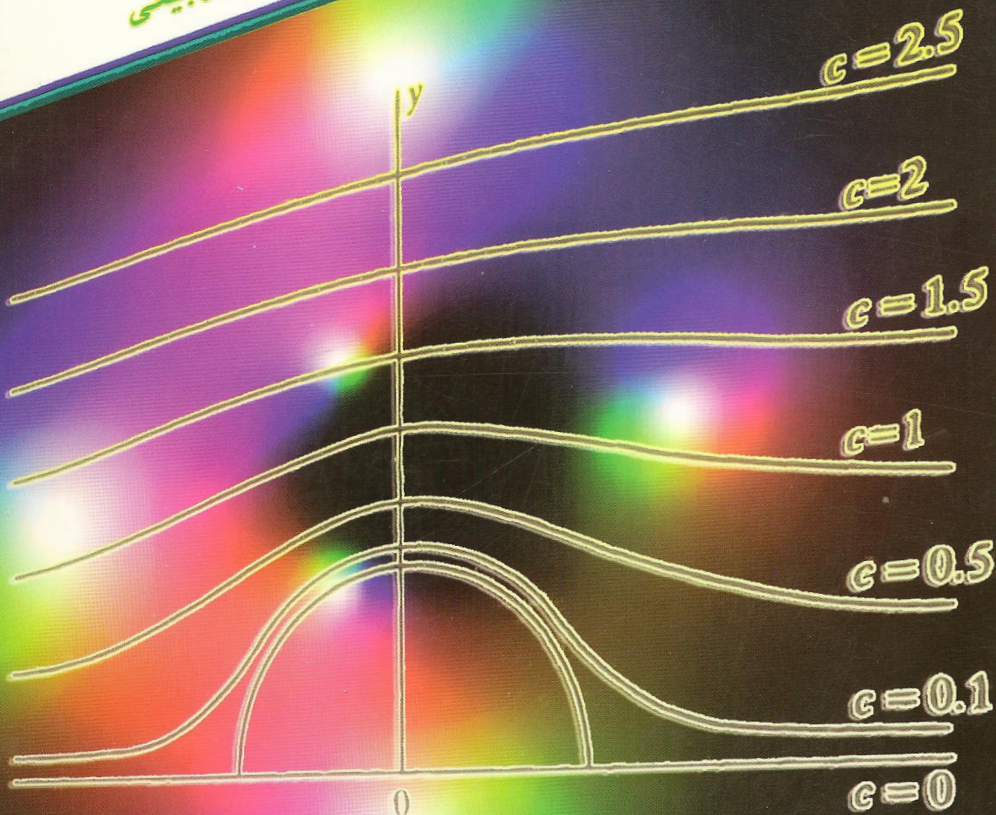


# دعوت به آنالیز مختلط

تالیف: رالف فیلیپ بواس

برگردان: زهرا خوانین شیرازی-دکتر مریم ربیعی



# Invitation to complex analysis

Ralph , Philip boas

Zahra khavanin Shirazi-Dr.Maryam Rabiei

هدف من این است که خواننده علاوه بر این که فهم دقیقی از مطالب پیچیده آنالیز مختلط داشته باشد روشهای اصلی برای استفاده از آن در مسائل ریاضیات و فیزیک را بداند. دانشجویانی که این کتاب را به پایان رسانده‌اند بدون این که هراسی از مطلب ناآموختگی داشته باشند می‌توانند جلو بروند.

آر.پی. بواس

هیچ ریاضیدانی را نمی‌یابید که او را نشناسد. هر کس که زمانی متغیرهای حقیقی را درس داده باشد کتاب کوچک او تحت عنوان «نخستین درس در توابع حقیقی» را می‌شناسد حتی قدیمی‌ترین ما دوست دارند تا بدانند که بواس در این کتاب چه کرده است.

آر. پی. بارکل  
دانشگاه ایالت کانزاس

مجموعه تمرینهای این کتاب عالی است. تعداد زیادی تمرین مفید برای افزایش درک تئوری و فن محاسبه در آن وجود دارد. بیان غیر رسمی و تنوع تمرینها در این کتاب موجب می‌گردد که خواننده نیازهای تئوری و عملی خود را در هر سطحی از دقت بیابد.

جرالد. پی. فولاند  
دانشگاه واشنگتن

دعوت به  
آنالیز مختلط

نوشتۀ  
رالف. فیلیپ بواس

ترجمۀ  
زهرا خوانین شیرازی - دکتر مریم ربیعی

## پیشگفتار

این کتاب به عنوان یک مرجع برای اولین درس غیرمقدماتی آنالیز مختلط (در سطح کارشناسی ارشد یا کارشناسی) تهیه شده است؛ بعلاوه، بصورت مطالعه انفرادی نیز مفید است. فرض می‌شود که خوانندگان قبلاً درسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یا آنالیز حقیقی مقدماتی گذرانده باشند (دانستن مطالبی که در اولین بخش کتاب من تحت عنوان «نخستین درس توابع حقیقی» آمده است کافی است).

من در این کتاب روشی غیررسمی را در پیش گرفته‌ام، به این امید که دانشجویان بتوانند تمام کتاب را بخوانند، خصوصاً در آن معادلات شماره‌گذاری شده وجود ندارد. امیدوارم این روش، و پرهیز از نمادهای اختصاصی و اختصاری، شما را به اشتباه نیندازد. من عمداً سعی نکرده‌ام که نتایج را در کلی‌ترین صورت ممکن ارائه دهم. همچنین در مورد خواص توپولوژیکی مقید نبودم زیرا نمی‌دانم چگونه بدون استفاده از ابزارهای گسترده‌ای (مانند منحنی جوردن) آنها را ثابت کنم. من سعی نکردم که مطالب را به ترتیب منطقی صرف دنبال هم قرار دهم و هر جا گریز از موضوع جالب بوده، فراتر از محدوده مطالب رفته‌ام. چندین مبحث این کتاب در سطح غیرمعمول ولی جالب هستند و مشکل‌تر از مطالب متعارف نمی‌باشند. بخش‌های ۱۵.۳ و ۱۷.۴ تا ۱۷.۶ و ۱۸.۲ تا ۱۸.۳ و ۲۰.۴ تا ۲۰.۵ و ۲۱ و همه فصل ۵ مکمل مطلب اصلی کتاب هستند و در دوره‌های کوتاه‌مدت قابل حذف می‌باشند. از طرف دیگر می‌توان مطالب فصل ۵ را در صورت تمایل زودتر مطرح کرد و بخش ۳۰ بعد از بخش ۲۵، بخش ۳۱ و ۳۲ هر زمان بعد از بخش ۱۰، بخش ۳۳ بعد از بخش ۱۶ و بخش ۳۴ بعد از بخش ۱۴ قابل مطرح کردن هستند.

تعداد کمی مثال توضیحی در متن آمده است. در عوض معمولاً مثالهایی در قالب تمرین آمده که راه‌حل آنها در انتهای کتاب ارائه شده است. امیدوارم دانشجویان با حل تمرینها بجای خواندن راه‌حلها به موضوع علاقه‌مند شوند.

من معتقدم برای کسانی که مبتدی هستند، تئوری محض قدری خشک و بی‌روح است مگر کاربرد آن در جایی دیده شود. مهارت عملی مهم است. اگر شما می‌خواهید آنالیز مختلط را مثلاً برای محاسبه انتگرالها یا تشریح جریانهای سیال بکار ببرید، شما باید قادر به انجام صحیح آنها باشید. یک دانشمند باتجربه با بی‌دقتی واقعاً مسیر را گم نخواهد کرد، زیرا دنیای واقعی به سادگی گذشت

نمی‌کند. هرچند من دانشجویانی را دیده‌ام که با سعی در بکارگیری ریاضیاتی که کاملاً درک نکرده‌اند به شدت گیج شده‌اند. من مثالهایم را به چند کاربرد ساده و قابل فهم محدود کرده‌ام. آنالیز مختلط کاربردهای گوناگونی دارد که این یکی از دلایل اهمیت و مورد توجه بودن آن است. بسیاری از کاربردهای آن نیاز به مهارتهای مختلف یا نیاز به پیشینه قوی دارد که در یک کتاب کوچک نمی‌گنجد. من در مورد کاربرد تبدیلهای همدیس در مسایل پتانسیل با قدری تفصیل شرح داده‌ام، اما این کار را تنها بعد از شرح پیش‌دانسته‌های کافی انجام داده‌ام و پس از ارائه سابقه کافی، تا قابل فهم باشند.

از آنجایی که قضیهٔ کوشی را مفهومی محوری می‌دانم، آن را خیلی زود معرفی نمودم و مرتباً به آن پرداختم، فقط در مواقعی که نیاز به معرفی توابع مقدماتی خاص داشتم وقفه‌ای ایجاد نمودم؛ موضوع را با آن ادغام نمایم. خواص توابع بصورت هندسی به بعد موكول شده است تا مطالب گوناگون همزمان معرفی نشوند.

من نظریات تاریخی را بیان ننمودم، کتابهای بارکل و رمرت قطعاً مطالب تاریخی را بهتر از آنچه که من بتوانم جمع‌آوری کنم تهیه نموده‌اند.

چون سابقهٔ من با این موضوع به بیش از نیم قرن بازمی‌گردد، دریافتم که ممکن نیست اعتبار بیشتر موضوع‌ها را تعیین کنم، چون تقریباً هیچکدام از مطالب مرکزیت ندارند. شماره‌های نوشته‌شده در متن به یادداشتهای پایان بخش‌های اصلی اشاره دارد؛ کتابها در فهرست مرجعها با نام نویسندگان درج شده است.

افراد زیادی نظریات مفیدی ارائه داده‌اند. من خصوصاً خود را مدیون H. P. Boas، G. B. Folland، K. F. Clancey، S. M. Cargal، R. B. Bruckel، M. L. Boas، A. M. Trembinska، S. G. Krantz، S. Hellerstein و دانشجویان درس آنالیز مختلط خود در سال ۱۹۸۴-۱۹۸۳ می‌دانم.

آر. پی. بواسر

ایوانستون - ایلینوی

نوامبر ۹۸۶

## پیشگفتار مترجمین

کامبود کتابی به زبان فارسی که بتواند دانشجویان، اساتید و سایر علاقمندان را با زبانی ساده و شیوه‌ای روان با مثالهای متعدد و پاسخ‌های گوناگون با مفاهیم آنالیز مختلط آشنا سازد، ما را بر آن داشت تا با درک نیازهای واقعی مجامع آموزش عالی، اقدام به ترجمه این کتاب نمائیم.

شهرت مؤلف و نوآوری وی در شیوه نگارش و پیاده کردن ایده‌هایش و نیز مقبولیت وی در بین صاحب‌نظران علوم ریاضی از دیگر انگیزه‌های ترجمه این کتاب بوده است.

بدون شک این کتاب بعنوان یک مرجع بسیار مفید راهگشای درک مفاهیم پیچیده در قلمرو آنالیز مختلط، ابزار دست دانشجویان مقاطع کارشناسی ارشد، کارشناسی و سایر علاقمندان بوده و آنان را در درک مسایل کاربردی یاری خواهد نمود.

وجود واژه‌نامه انگلیسی به فارسی که نمایانگر واژه‌های بکاررفته در ترجمه این کتاب است، خواننده را در درک بهتر مطالب هدایت می‌کند.

لازم می‌دانیم که از زحمات همکار محترم جناب آقای ابوالقاسم لاله که با دقت و علاقمندی در ویرایش این کتاب ما را یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی نمائیم.

امید است خداوند تبارک و تعالی به کلیه عزیزانی که در جهت رشد و تعالی علمی و معنوی جامعه تلاش می‌نمایند توفیق روزافزون عنایت فرماید.

زهره خوانین شیرازی

دکتر مریم ربیعی

## درباره مؤلف

از وقتی ر. پی. بواس دکتراى خود را در سال ۱۹۳۷ از دانشگاه هاروارد گرفت، در بين همکاران خود به عنوان يک رياضى دان و به عنوان نويسنده‌اى فاضل مشهور و مورد احترام بوده است. پروفيسور بواس به مدت ۳۰ سال عضو هيأت علمى دانشگاه Northwestern بود و اکنون استاد بازنشسته رياضى Henry S. Noyes در آنجاست. سمت وى به عنوان مدير مسئول Mathematical REviews در دهه ۱۹۴۰ شهرت وى را دوچندان کرد. ۴ کتاب و بيش از ۱۵۰ مقاله نوشته است، از آن جمله کتاب تحسن برانگيز نخستين درس توابع حقيقى است. کارهاى وى به عنوان يک رياضى دان، اعتبارى تمام عيار برايش کسب کرده است.

اخيراً وى (همراه با ج. ليت من) دبىرى مجله آناليز رياضى و کاربردهاى آن، و سردبىرى مجله *Selecta Mathematica Sovietica* را عهده دار است. همچنين وى نايب رئيس و مسئول امور تجارى انجمن رياضى امريکا است، و به تبع آن عهده دار دبىرى مجله اصلى آن يعنى *The American Mathematical Monthly* و رئيس كميتۀ MAA درباره برنامه دوره کارشناسى رياضيات است.

## درباره کتاب

کتاب دعوت به آنالیز مختلط پروفیسور بواس مرجعی مناسب برای یک درس اولیه در آنالیز مختلط است. سبک نگارش غیررسمی کتاب، علاقه دانشجویان را جلب می‌کند و در ضمن تسهیل فهم مطالب سطح دقت ارائه را حفظ می‌کند. به علاوه، پروفیسور بواس اصلاحات زیادی نسبت به کتابهای دیگر انجام داده است. وی تعدادی از فرمولهای پیچیده را حذف کرده است تا بیان مطالب ساده‌تر شوند. همچنین با تغییر ترتیب سنتی مطالب، وی از ارائه همزمان ایده‌های بسیار زیاد اجتناب کرده است و مطالب جدید را تنها وقتی ایجاب می‌کنند عرضه کرده است. مثلاً وی قضیه کوشی را قبل از نگاشت هم‌مدیس می‌آورد و هندسه توابع مقدماتی را تا فصل ۴ به تعویق می‌اندازد تا دانشجویان با ابزار بهتری بتوانند از عهده مطالب برآیند. با این روش، پروفیسور بواس مسائل بسیاری را که دانشجویان در درس مقدماتی آنالیز مختلط با آن روبرو می‌شوند، حذف نموده و آنها را به سمت درک منسجمی از مطالب سوق می‌دهد.

تمرینهای متعدد این کتاب دانشجویان را قادر می‌سازد که تسلط خود را بر مفاهیم و روشها، هنگام عرضه آنها اندازه‌گیری کنند. جوابهای تشریحی تمام این تمرینها در انتهای کتاب آمده است، که این کتاب را بصورت خودآموز برای خواننده‌های مستقل و نیز دانشجویان علاقمند درمی‌آورد. تمرینهای تکمیلی، در آخر هر فصل قرار دارد، و وسیله آموزشی دیگری را فراهم می‌آورند. حل این تمرینها در کتاب نیامده است.

دعوت به آنالیز مختلط تمام مفاهیم اصلی درس مقدماتی آنالیز مختلط را پوشانده و همچنین شامل مباحث اختیاری و کاربردهایی در ریاضیات و فیزیک است. در نتیجه این کتاب برای تنوع وسیعی از درسها، از یک نیمسال کوتاه تا یک درس جامع یک‌ساله مناسب است.

این کتاب را می‌توان ادامه کتاب *A Primer of Real Functions* پروفیسور بواس به حساب آورد. هرکس آن کتاب را خوانده است به همان اندازه از روانی و دقت ارائه مطالب بهره‌مند خواهد شد.



## توصیه‌ای به دانشجو

شما می‌توانید این کتاب را به عنوان سیاحتی برای بازدید بخش‌های دیدنی یک کشور نگاه کنید، که در آن می‌توان مناظر معروف و مکانهای جذاب که به ندرت مورد توجه قرار گرفته‌اند را دید. شما از کوهها بالا نخواهید رفت و یا هیچ شهر صنعتی بزرگی را نخواهید دید، اما گهگاه از شما خواسته می‌شود تا از اتوبوس پیاده شوید و خودتان اطراف شهر را بگردید. شما همچنین امکاناتی با زبان بومی کسب خواهید کرد.

با کنار گذاشتن استعاره‌ها، اگر شما کتاب را بطور انفرادی مطالعه کنید می‌توانید بخش‌های ستاره‌دار را بدون از دست دادن تسلسل حذف کنید. اگر بخشی به نظراتان خیلی مشکل بیاید می‌توانید بدون آنکه چیز زیادی از دست بدهید به بخش بعدی بروید. من فرض می‌کنم شما با حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبعدی و همچنین با مفاهیم مقدماتی در مجموعه‌ها، حدها و همگرایی آشنا هستید. اگر برخی از آنها را فراموش کرده‌اید، ممکن است مجبور شوید برخی از قضایا را با اطمینان بپذیرید، اما باید بدانید که آنها چه می‌گویند.

برخی از تمرینها قضایای مهمی هستند که اثبات ساده‌ای دارند، برخی شامل نتایج کمکی و برخی صرفاً برای بکارگیری مهارتهاست. تمرینهای ستاره‌دار یا خارج از محدوده کتاب و یا بسیار مشکل هستند، اگر سعی کنید که خودتان تمرینها را انجام دهید، نتایج بهتری بدست خواهید آورد. راه‌حلهای در انتهای کتاب آورده شده‌اند (بجز تمرینهای تکمیلی) ولی شما خودتان می‌توانید راه‌حلهای مناسب‌تری پیدا کنید.

من سعی کرده‌ام که کتاب ساده‌تر ارائه شود. فقط چند نماد اختصاری و اختصاصی بکار گرفته شده، زیرا معتقدم بیشتر افراد کلمات را راحت‌تر از نمادها می‌خوانند. هر چه به آخر کتاب نزدیک می‌شویم، مطالب ریاضی دشوارتر می‌شود.

آنالیز مختلط عموماً بخاطر کاربردهایش رشد و گسترش یافته است، من سعی کرده‌ام برخی از این کاربردها را نشان دهم، هرچند در حال حاضر این موضوع جایگاه خاص و فعالی را با نتایج شگفت‌انگیز و ظریف خود دارا شده است. امیدوارم شما نیز جذابیت باطنی آن را همانند توانایی آن مورد توجه قرار دهید.

## فهرست مطالب

از اعداد مختلط تا قضیه کوشی	۱	فصل ۱
اعداد مختلط	۱	۱
توابع	۱۵	۲
سری توانی	۲۴	۳
بعضی از توابع مقدماتی	۳۰	۴
خم‌ها و انتگرالها	۳۹	۵
قضیه کوشی	۴۷	۶
کاربرد قضیه کوشی	۵۷	فصل ۲
فرمول انتگرال کوشی	۵۷	۷
نقاط منفرد تکین	۷۶	۸
محاسبه انتگرالهای معین	۸۸	۹
توابع لگاریتمی و نمایی	۱۰۱	۱۰
برخی دیگر انتگرالهای معین	۱۰۶	۱۱
ریشه‌های توابع تحلیلی	۱۱۶	۱۲
تک‌مقداری و وارونها	۱۲۵	۱۳
سری لوران	۱۲۹	۱۴
ترکیب سریهای توانی و سریهای لوران	۱۳۸	۱۵
اصل ماکزیمم	۱۴۷	۱۶
ادامه تحلیلی	۱۵۵	فصل ۳
نظریه ادامه تحلیلی	۱۵۵	۱۷
سری توانی روی دایره همگرایی	۱۶۷	۱۸

۱۷۷	توابع همساز، نگاشت همدیس	فصل ۴
۱۷۷	توابع همساز	۱۹
۱۸۶	توابع تحلیلی در یک گوی	۲۰
۱۹۵	توابع همساز و سریهای فوریه	۲۱
۲۰۲	نگاشتهای همدیس	۲۲
۲۰۷	برخی از کاربردهای نگاشت همدیس در فیزیک	۲۳
۲۱۰	برخی از جریانهای خاص	۲۴
۲۱۶	تبدیلهای مویوس	۲۵
۲۲۵	مثالهای دیگری از تبدیلهای و جریانها	۲۶
۲۳۳	مسائل دیریکله بطور عام	۲۷
۲۳۸	قضیه نگاشت ریمان	۲۸
۲۴۸	رویههای ریمان از جنبه شهودی	۲۹
۲۵۵	مباحث گوناگون	فصل ۵
۲۵۵	یک هندسه نااقلیدسی	۳۰
۲۵۹	حاصلضربهای بی پایان	۳۱
۲۶۸	نرخ رشد در مقابل تعداد ریشهها	۳۲
۲۷۳	تعمیمهای اصل ماکزیمم	۳۳
۲۸۰	سریهای مجانبی	۳۴
۲۸۹	بحث بیشتری در باب توابع تکمقداری	۳۵
۲۵۹	جواب تمرینها	
۳۹۳	کتابشناسی	
۳۹۵	فهرست (واژگان)	

## فصل ۱

# از اعداد مختلط تا قضیه کوشی

### ۱. اعداد مختلط

#### ۱.۱ چرا اعداد مختلط؟

تأکید اصلی این کتاب روی آنالیز مختلط است، استفاده از اعداد مختلط و توابع با مقادیر مختلط، علاوه بر این که خود موضوعی جالب است دارای کاربردهای عملی نیز می‌باشد. در واقع کاربردها را بدون استفاده از اعداد مختلط می‌توانیم به انجام برسانیم، اما مطمئناً آنالیز مختلط آنها را آسانتر و مفیدتر می‌نماید که امیدوارم شما نیز آن را اینگونه بیابید.

#### ۱.۲ تعریفها

در جبر مقدماتی، اعداد مختلط به شکل  $a + bi$  ظاهر می‌شوند که  $a$  و  $b$  دو عدد مختلط حقیقی و  $i^2 = -1$  است. اغلب اوقات  $i = \sqrt{-1}$  نوشته می‌شود بدون اینکه مشکل چندانی در این رابطه که کدامیک از دو ریشه دوم مورد نظر است داشته باشیم. اعمال جبری معمولی در اعداد مختلط برقرار است و هر جا به  $i^2$  برخوردیم عدد  $-1$  قرار می‌دهیم.

اگر به اندازه کافی اعمال جبری روی اعداد مختلط را انجام دهید دیر یا زود با عبارتهایی که معنای آن روشن نیست روبرو می‌شوید. به عنوان مثال چون

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$$

حال آیا  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$  یا  $\sqrt{i} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ ؟ این گونه سؤاها ریاضیدانان سه قرن پیش را به خود مشغول کرده بود، اما امروزه روشن شده است که نمادها بی معنی هستند مگر اینکه آنها را تعریف کنیم. با تعریف

اعداد مختلط شروع می‌کنیم. (تعریفهای دیگری نیز وجود دارد که ممکن است به نظر شما آموزنده‌تر باشند: به تمرینهای ۱.۲۴ و ۱.۲۶ مراجعه کنید.)

اعداد مختلط را بصورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی تعریف می‌کنیم. زوج مرتب بدین معنا که  $x$  به عنوان عضو اول و  $y$  به عنوان عضو دوم، با زوج مرتبی که  $y$  عضو اول و  $x$  عضو دوم آن باشد مخالف است (مگر اینکه  $x = y$ ). زوج مرتب اول را با نماد  $(x, y)$  نشان می‌دهیم. همچنین به جای  $(x, y)$  می‌توان نوشت  $x + iy$ ، و معمولاً  $(x, y)$  را با  $z$  یا هر حرف دیگری نمایش می‌دهیم. اگر دو عدد مختلط داشته باشیم می‌نویسیم،  $z_1 = (x_1, y_1)$  و  $z_2 = (x_2, y_2)$ ، یا  $z = (x, y)$  و  $w = (u, v)$ ، یا  $z = (x, y)$  یا  $\zeta = (\xi, \eta)$ . دو زوج مرتب  $(x, y)$  و  $(u, v)$  برابرند اگر و تنها اگر  $x = u$  و  $y = v$ .

جمع زوجهای مرتب بصورت جمع مؤلفه‌ها تعریف می‌شود  $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ . ضرب دو عدد مختلط بوسیلهٔ رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

البته این ضرب از دستور محاسبهٔ صوری زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}(x + iy)(u + iv) &= xu + iyu + ixv + i^2 yv \\ &= xu - yv + i(xv + yu)\end{aligned}$$

ضرب عدد مختلط  $(x, y)$  در هر عدد حقیقی  $c$  بوسیلهٔ رابطهٔ  $c(x, y) = (cx, cy)$  تعریف می‌شود. (به تمرین ۱.۲ مراجعه کنید.)

به سادگی می‌توان ثابت کرد که جمع و ضرب اعداد مختلط ویژگیهای تعویض‌پذیری، شرکت‌پذیری و غیره را دارند. شاید علاقمند باشید برخی از این ویژگیها را ثابت کنید. عدد مختلط  $(x, 0)$  را با عدد حقیقی  $x$  یکی می‌گیریم؛ لذا وقتی می‌نویسیم  $x$ ، یعنی  $(x, 0)$ .

تمرین ۱.۱ نشان دهید اگر  $i = (0, 1)$ ، آنگاه  $i^2 = (-1, 0) = -1$ .

اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی باشند، تمرین ۱.۱ نشان می‌دهد  $(x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, y)$  و چنانکه انتظار داریم، یعنی  $(x, y) = x + iy$ .

تمرین ۱.۲ نشان دهید  $c(x, y) = (c, 0)(x, y)$ . لذا ضرب کردن در یک عدد حقیقی با ضرب اعداد مختلط سازگار است.

عدد  $iy$  که  $y$  یک عدد حقیقی غیرصفر است موهومی محض نامیده می‌شود. تنها اصطلاح کلی رضایتبخش برای  $x + iy$ ،  $x \neq 0$ ،  $y \neq 0$  «غیرحقیقی» است؛ به این عدد «مختلط» نگوئید، زیرا اعداد حقیقی نیز مختلط هستند.

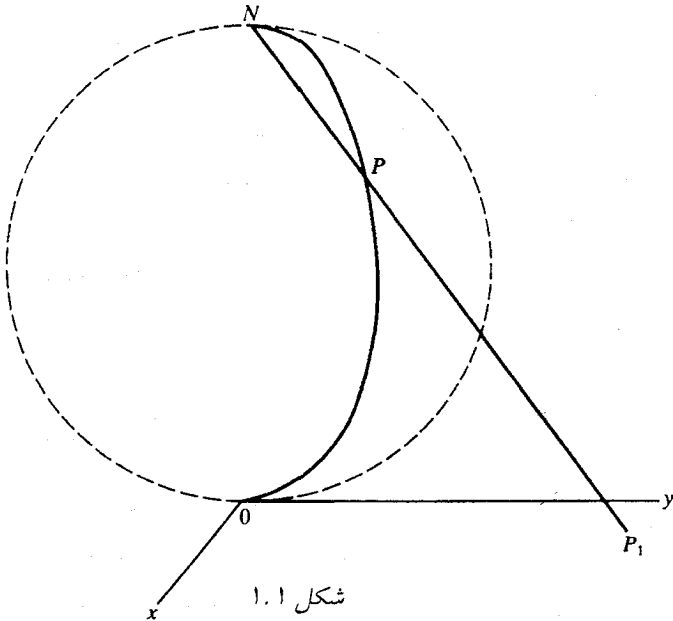
اگر اعداد مختلط را صرفاً به صورت زوجهای مرتب در نظر بگیریم ملاحظه می‌کنیم که زوجهای مرتب  $(x, y)$ ، صفحه اقلیدسی معمولی یا دقیقتر حاصل ضرب دکارتی مجموعه اعداد حقیقی هستند. پس می‌توانیم اعداد مختلط را به صورت نقاط یک صفحه تلقی کنیم؛ که این تعبیر اغلب، بسیار مفید است. اگر چنین تصور کنیم نام صفحه را صفحه مختلط\* می‌نامیم. این صفحه بعد از اینکه فاصله بین نقاط  $(x, y)$  و  $(u, v)$  را به صورت  $\frac{1}{2}\{(x-u)^2 + (y-v)^2\}$  تعریف کنیم به صفحه اقلیدسی مبدل می‌شود. با این تعریف، صفحه مختلط یک فضای متریک است. تنها اصل از اصول متریک بودن که در اینجا نیازمند بررسی می‌باشد اصل نامساوی مثلث است، که بعداً ثابت خواهیم کرد (تمرین ۱۰.۱).

### ۱.۳ نقطه در بینهایت

اغلب مفید است که تصور کنیم صفحه مختلط علاوه بر نقاط  $(x, y)$  شامل یک «نقطه در بینهایت» است. برای دیدن این‌که چگونه نقطه در بینهایت را لحاظ کنیم یک کره به قطر ۱ را در نظر می‌گیریم که بر صفحه‌ای گذرنده از مبدأ مماس است، سپس کره را به صورت زیر روی صفحه تصویر می‌کنیم: از قطب شمال  $N$  خطوطی به هریک از نقاط صفحه وصل کرده و این نقاط را به نقاطی که خط کره را قطع می‌کند نظیر می‌کنیم (شکل ۱۰.۱). این روش را تصویر گنجانگاری می‌نامند. نیم‌دایره‌های نصف‌النهاری روی کره به نیم‌خطهایی که از مرکز صفحه می‌گذرند تصویر می‌شوند.

روشن است که هر نقطه روی کره بجز  $N$  تنها با یک نقطه از صفحه تناظر می‌یابد. اگر به صفحه تک نقطه «ایده‌آل»  $\infty$  («بینهایت») را ملحق کنیم و آن را متناظر با  $N$  بگیریم آنگاه تناظر بین کره و صفحه یک به یک خواهد بود. تصور ما از  $\infty$  یک نقطه خارج هر قرص در صفحه است. فقط یک نقطه در بینهایت وجود دارد، و همه خطوط صفحه از آن می‌گذرند؛ خطوط موازی در صفحه متناظر دویاری از کره هستند که در نقطه  $N$  بر هم مماسند. این کره، به کره ریمان موسوم است، و صفحه مختلط به انضمام  $\infty$  صفحه گسترش‌یافته است. هرگاه بخواهیم بین صفحه بدون  $\infty$  و صفحه گسترش‌یافته تمایز قائل شویم، آن را صفحه با پایان می‌نامیم. کره که زیرمجموعه فضای اقلیدسی سه‌بعدی است یک فضای متریک است. فاصله بین دو نقطه طول وتری است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند. اگر این طول را به عنوان یک فاصله جدید بین نگاره‌های همان نقاط در صفحه منظور کنیم، یک متریک برای صفحه گسترش‌یافته به دست می‌آوریم.

نماد  $z \rightarrow \infty$  همان معنای نماد  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  را دارد. محاسبات با  $\infty$  را می‌توان با استفاده از قراردادهای  $\infty \cdot \infty = \infty$ ، اگر  $a \neq 0$ ؛  $a / 0 = \infty$ ؛ اگر  $a / \infty = 0$ ؛  $a \neq 0$  یا  $\infty + \infty = \infty$ ،  $\infty - \infty$ ،  $\infty \cdot 0 = 0$ ،  $0 \cdot \infty = 0$ ؛  $a \neq 0$ ؛  $a \pm \infty = \infty$  اگر  $a \neq \infty$  انجام داد. عبارتهای  $\infty + \infty$ ،  $\infty - \infty$ ،  $\infty \cdot 0$ ،  $0 \cdot \infty$  باید کنار گذاشته شوند. این عبارتها فقط برای مختصر کردن فرایندهای حدگیری می‌توانند واقع شوند.



شکل ۱.۱

#### ۱.۴ اصطلاحات صفحه مختلط

تعدادی از اصطلاحات صفحه مختلط اساسی هستند. مزدوج  $z = x + iy$ ،  $\bar{z} = x - iy$  است. (کسانی که نماد «-» را برای مقدار میانگین بکار می‌برند، به جای  $\bar{z}$  از  $z^*$  استفاده می‌کنند.) قسمت حقیقی  $z$ ،  $x$  است و آن را با  $\operatorname{Re} z$  (یا  $\operatorname{Re}(z)$  اگر عبارت پیچیده‌ای باشد.) نشان می‌دهیم. اما قسمت موهومی عدد  $z$ ،  $y$  است نه  $iy$  (که ظاهراً معقول به نظر نمی‌رسد، اما قراردادی است). نماد آن  $y = \operatorname{Im} z$  است. بنابراین  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$  و  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ . از نظر هندسی،  $z$  و  $\bar{z}$  نسبت به محور  $x$ ،  $z$  و  $-z$  نسبت به مبدأ قرینه‌اند (شکل ۱.۲). تقسیم اعداد مختلط اگر  $c + id \neq 0$ ، عبارت  $\frac{a + ib}{c + id}$  را عدد مختلطی به صورت  $p + iq$  تعریف می‌کنیم که  $(p + iq)(c + id) = a + ib$  و از آنجا داریم:

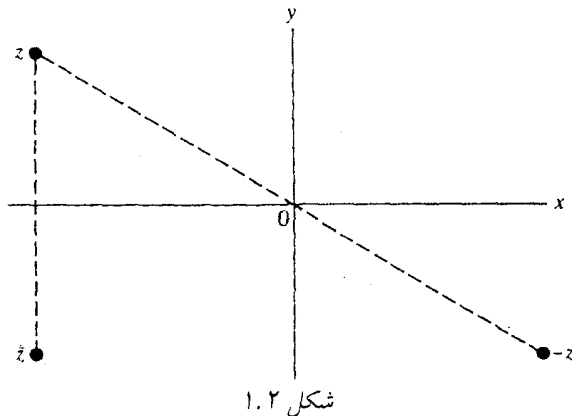
$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd + i(cb - ad)}{c^2 + d^2}$$

در اینجا صورت و مخرج را در مزدوج ضرب کردیم. برای اثبات، مشاهده می‌کنیم که تساوی  $(p + iq)(c + id) = a + ib$  با  $(pc - qd) + i(pd + qc) = a + ib$  هم‌ارز است. و از آنجا دو معادله

$$pc - qd = a,$$

$$pd + qc = b$$

به دست می‌آیند که برای  $p$  و  $q$  دارای جواب است اگر و فقط اگر  $c^2 + d^2 \neq 0$ .



شکل ۱.۲

تمرین ۱.۲ ثابت کنید  $z + \bar{z} = 2\text{Re } z$  و  $z - \bar{z} = 2i\text{Im } z$ . همچنین مزدوج مجموع، حاصل ضرب و تقسیم دو عدد مختلط برابر با مجموع، حاصل ضرب و تقسیم مزدوجهای آنهاست.

با استفاده از تمرین ۱.۳ می‌توان قسمتهای حقیقی و موهومی اعداد مختلط را بدون اجبار به داشتن قسمت دیگر محاسبه نمود. مثلاً

$$\begin{aligned} \text{Re} \left( \frac{2+3i}{3-4i} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{2+3i}{3-4i} + \frac{2-3i}{3+4i} \right) = \frac{(2+3i)(3+4i) + (2-3i)(3-4i)}{2(3+4i)(3-4i)} \\ &= \frac{-6}{25} \end{aligned}$$

تمرین ۱.۴ قسمتهای حقیقی و موهومی اعداد  $\frac{i+2}{i-3}$ ،  $(1+\sqrt{3}i)^2$ ،  $\frac{1}{1-i}$  و  $\frac{2-3i}{3i+2}$  را بیابید.

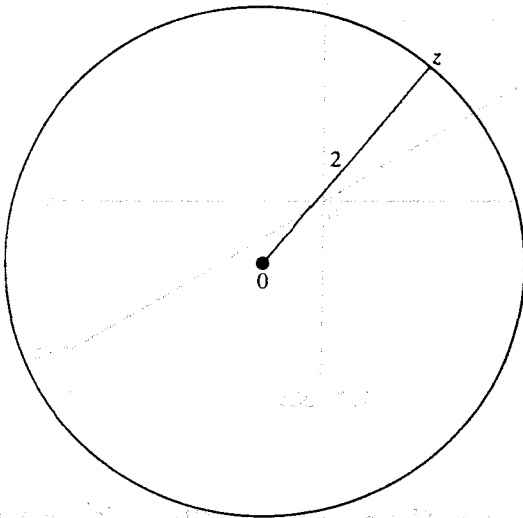
تعبیر هندسی حاصل ضرب  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ، به صورت مجذور فاصله نقطه  $z$  از مبدأ می‌باشد که آن را با  $|z|^2$  نشان می‌دهیم و  $|z|$  قدرمطلق  $z$  است. گاهی آن را هنگ  $z$  نیز می‌گویند، و از نماد “mod” استفاده می‌کنیم.

تمرین ۱.۵ نشان دهید  $|zw| = |z||w|$ ،  $|\bar{z}| = |z|$ ،  $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$  و  $|\text{Re } z| \leq |z|$  تساوی تنها وقتی برقرار است که  $z$  یک عدد حقیقی باشد.

تمرین ۱.۶ قدرمطلق اعداد ذکرشده در تمرین ۱.۴ را به دست آورید (محاسبه  $|z|$  از رابطه  $(z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$  معمولاً آسانتر از  $\{\frac{1}{2}(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2\}^{\frac{1}{2}}$  است).

نکته: قدرمطلق یک عدد حقیقی گاهی به عنوان عددی «بدون علامت آن» تعریف می‌شود که این برای اعداد مختلط برقرار نیست. به عنوان مثال، قدرمطلق  $2i$  برابر ۲ است، نه  $2i$ .





شکل ۱.۳

عبارت  $|z - w|$  را می‌توانیم به صورت فاصله اقلیدسی بین دو نقطه  $z$  و  $w$  تعبیر کنیم در نتیجه شکل‌های هندسی که به وسیله فاصله تعریف می‌شوند را می‌توانیم توسط تساویها یا نامساویهای بین قدرمطلقها تعبیر کنیم. به عنوان مثال، تساوی  $|z| = 2$  تمام نقاط  $z$  را که فاصله‌شان تا نقطه صفر برابر با ۲ است معرفی می‌کند؛ به بیان دیگر  $|z| = 2$  معادله یک دایره به مرکز صفر و شعاع ۲ است (شکل ۱.۳).

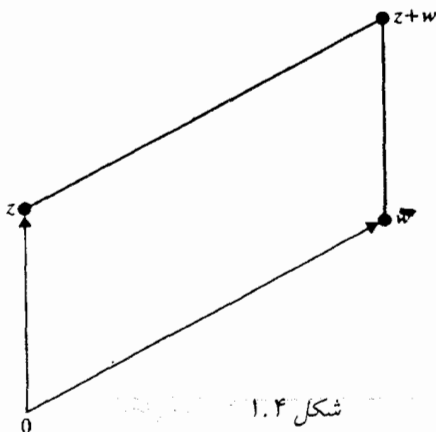
همان نتیجه را می‌توانیم به دست آوریم اگر معادله اول را به صورت  $x^2 + y^2 = 4$  بنویسیم و آن را به عنوان معادله یک دایره در نظر بگیریم. اما بهتر است در صورت امکان مستقیماً به تعبیر هندسی تساویها و نامساویها توجه کنیم.

معادله  $|z| = 1$  معرف دایره واحد است؛ و گوی واحد (باز)  $|z| < 1$ ، و گوی واحد (بسته)  $|z| \leq 1$  می‌باشد. نامعادله  $\text{Im } z > 0$  نیم‌صفحه بالایی و  $\text{Re } z > 0$  نیم‌صفحه سمت راست را تعریف می‌کنند.

تمرین ۱.۷ تعبیر هندسی رابطه‌های زیر را بیابید.

- |                             |                                 |                                      |
|-----------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| (الف) $ z  < 2$             | (ب) $ z  \geq 3$                | (پ) $ z - 2 + 3i  < 5$               |
| (ت) $\text{Re } z > 1$      | (ث) $\text{Re} [(2 + 3i)z] > 0$ | (ج) $\text{Im } z \geq \text{Re } z$ |
| (چ) $ z - i  +  z - 1  = 2$ | (ح) $ z - i  =  z + 1 $         | (خ) $\text{Re } z =  z - 2 $         |

تمرین ۱.۸ نشان دهید اگر عدد مختلط  $z$  با بردار از صفر تا  $z$  مشخص شود، جمع اعداد مختلط به وسیله جمع بردارها با قانون متوازی‌الاضلاع متناظر می‌شود (شکل ۱.۴).



شکل ۱.۴

همسایگی یک نقطه معمولاً با گوی باز به مرکز آن نقطه یا به طور کلی با هر مجموعه باز شامل آن نقطه معرفی می‌شود. (البته چنین مجموعه بازی شامل یک گوی باز به مرکز آن نقطه می‌باشد.) همسایگی  $\infty$  نقاط خارج یک گوی بسته است (به مرکز هر نقطه دلخواه).

### تمرینهای تکمیلی

۱ - قسمتهای حقیقی، موهومی و قدرمطلق اعداد زیر را بیابید.

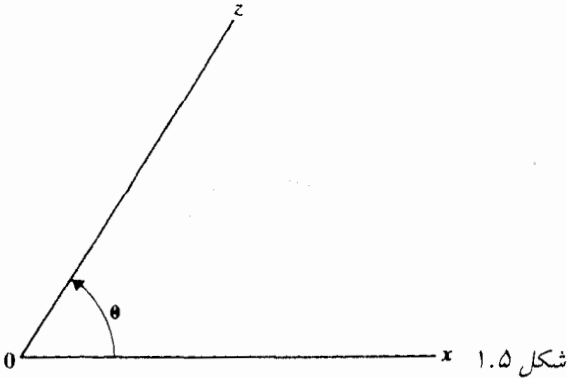
(الف)	$\frac{i-7}{6+2i}$	(ب)	$\frac{1}{(3i+2)(2i+3)}$	(پ)	$(2+i\sqrt{5})^2$
(ت)	$(2i-3)^3$	(ث)	$\frac{i-1}{i+1}$		

۲ - مجموعه نقاطی که به وسیله روابط زیر داده شده‌اند را تعبیر هندسی کنید.

(الف)	$ z+i  < 5$	(ب)	$ 2i-z  =  z+1+3i $
(پ)	$2 > \text{Re } z > -3$	(ت)	$\text{Re} [(3-4i)z] > 0$
(ث)	$(\text{Im } z)^2 \leq \text{Re } z$	(ج)	$2\text{Re } z <  z ^2$

### ۱.۵ نمایش قطبی اعداد مختلط

اعداد مختلط را می‌توان به صورت قطبی در صفحه نمایش داد. اگر  $x = r \cos \theta$  و  $y = r \sin \theta$  در این صورت  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  و  $r = |z|$ . البته برای  $z$  تعداد زیادی زاویه  $\theta$  وجود دارد که هریک را آرگومان  $z$  می‌نامند و با  $\arg z$  نمایش می‌دهند. آرگومان نقطه صفر را نمی‌توان تعریف کرد. در صورت لزوم می‌توان مقدار  $\theta$  را محدود نمود تا  $\arg z$  تک‌مقداری، یعنی یک تابع گردد. معمولاً، نه همیشه، مقدار اصلی  $-\pi < \arg z \leq \pi$  است. مقدار اصلی  $\arg z$  را می‌توان به عنوان زاویه



شکل ۱.۵ بالای \* «محور افقی  $ox$ » در نظر گرفت که به وسیله ناظری در مبدأ دیده می‌شود (شکل ۱.۵). همچنین  $\arg(z - a)$  (مقدار اصلی) زاویه‌ای است که نیم خط حقیقی مثبت در  $a$  با نیم خط  $oz$  در جهت مثبت تشکیل می‌دهد.

تمرین ۱.۹ قدرمطلق و مقدار اصلی آرگومان اعداد مختلط زیر را به دست آورید و در صفحه مختلط نشان دهید.

$$3 - 4i, \quad -4 - 11i, \quad 2/236 + 3/142i, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{2+i}{3-i}, \\ -1 + i\sqrt{3}, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right), \quad 2\left[\cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right)\right]$$

تمرین ۱.۱۰ (نامساوی مثلث) نشان دهید  $|z + w| \leq |z| + |w|$  و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر  $z$  و  $w$  روی نیم خطی که از مرکز می‌گذرد قرار داشته باشند. شکلی بکشید تا ببینید چرا آن را نامساوی مثلث می‌نامند. رابطه  $|z - w| \geq ||z| - |w||$  را از نامساوی مثلث نتیجه بگیرید.

به وسیله استقراء می‌توان از تمرین ۱.۱۰ نتیجه گرفت که

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

استدلال زیر آن را برای همه  $n$  ها اثبات می‌کند و شرط تساوی را بیان می‌کند.  $\sum z_k$  را در مختصات قطبی به صورت  $R(\cos \theta + i \sin \theta)$  می‌نویسیم. در این صورت

$$\left| \sum z_k \right| = R = \operatorname{Re} \left\{ (\cos \theta - i \sin \theta) \sum z_k \right\}$$

\* مترجمان: در این حالت بهتر است «مقدار اصلی»  $0 \leq \arg z < 2\pi$  باشد.

[چون  $1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = (\cos \theta - i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، لذا]

$$\left| \sum z_k \right| = \sum \operatorname{Re} \{ (\cos \theta - i \sin \theta) z_k \}$$

بنابراین با استفاده از تمرین ۱.۵ (قسمت آخر)

$$\left| \sum z_k \right| < \sum |(\cos \theta - i \sin \theta) z_k| = \sum |z_k|$$

مگر  $(\cos \theta - i \sin \theta) z_k$  (که  $\theta$  مستقل از  $k$  است) برای هر  $k$ ، حقیقی باشد. یعنی همه  $z_k$  ها روی یک نیم‌خط که از مبدأ می‌گذرد قرار داشته باشند.

چون معمولاً اعداد مختلط را به صورت قطبی می‌نویسیم لازم است مجدداً بعضی از فرمولهای مثلثات را به یاد آورید. (از طرف دیگر بعداً (بخش ۴.۵) خواهیم دید چگونه اعمال جبری اعداد مختلط در اثبات فرمولهای مثلثاتی به کار گرفته می‌شوند.) در تمرین زیر نیاز به عمل جمع سینوسها و کسینوسها داریم.

تمرین ۱.۱۱ نشان دهید  $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ . به این معنا که طرف راست یک مقدار ممکن برای طرف چپ است.\* یعنی اگر  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  و  $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$  آنگاه  $zw = rs(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$ .

پس، حاصل ضرب اعداد مختلط با حاصل ضرب قدرمطلقها و حاصل جمع آرگومانهای آنها برابر است.

توجه کنید در تمرین ۱.۱۱ حتی اگر با آرگومان اصلی عوامل شروع کنیم لزوماً برای حاصل ضرب، آرگومان اصلی حاصل نمی‌شود؛ اما نقطه منحصراً بفردی در صفحه به دست می‌آید. برای مثال  $1 = \cos \pi + i \sin \pi$  و  $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$ ، از آنجا  $-i = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2})$ . اما آرگومان اصلی  $-i$  برابر با  $-\frac{\pi}{2}$  است.

استفاده از روش تمرین ۱.۱۱ معمولاً آسانتر از به کار بردن تعریف اصلی ضرب (صفحه ۲) است.

تمرین ۱.۱۲ الف) مجذور  $(1 + i\sqrt{3})$  را با استفاده از تعریف ضرب و همچنین با استفاده از شکل قطبی آن به دست آورید. ب) حاصل ضرب  $(\sqrt{3} - i)(1 + i\sqrt{3})$  را با دو روش به دست آورید. پ)  $(1 + i\sqrt{3})^{99}$  را محاسبه کنید.

## تمرینهای تکمیلی

۱ - قدرمطلق و زاویه‌های (آرگومانهای) اصلی را برای اعداد مختلط زیر به دست آورید:

$$\frac{3+2i}{5i-4} \quad (\text{ب}) \quad 2/718 - 3/010i \quad (\text{ب}) \quad 2 - 5i \quad (\text{الف})$$

$$3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) \quad (\text{ث}) \quad \cos 250^\circ + i \sin 250^\circ \quad (\text{ت})$$

۲ - موارد زیر را برای زوایای اصلی و همچنین زوایای بین  $0^\circ$  و  $2\pi$  به دست آورید.

الف)  $\arg z + \arg \bar{z} = ?$

ب)  $\arg(z \pm \bar{z}) = ?$

پ)  $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = ?$

ت)  $\arg(\overline{z - \bar{z}}) = ?$

## ۱.۶ توانها و ریشه‌های اعداد مختلط

اگر از صورت مثلثاتی اعداد مختلط برای حاصل ضرب  $z \cdot z$  استفاده کنیم،  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  داریم  $(z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta))$  و با استقراء درمی‌یابیم که اگر  $n$  عدد صحیح مثبت باشد  $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  که این نمایش را فرمول دموآور می‌نامند.

تمرین ۱.۱۳ نشان دهید فرمول دموآور برای اعداد صحیح منفی  $n$  و  $z \neq 0$  نیز برقرار است.

تمرین بعدی مزایای استفاده از فرمول دموآور را به جای محاسبات معمول نشان می‌دهد.

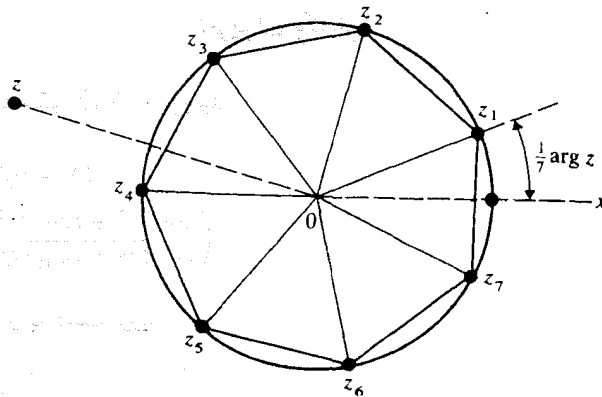
تمرین ۱.۱۴ قدرمطلق و آرگومان عدد  $z = \frac{i + \sqrt{3}}{-1 - i}$  را بیابید و  $z^{12}$  را محاسبه کنید.

اگرچه عدد حقیقی  $x$  دارای دو ریشه دوم است، علامت  $\sqrt{x}$  به معنای ریشه مثبت آن است. بنابراین  $\sqrt{(-2)^2}$  برابر ۲ است نه  $\pm 2$ . همچنین  $\sqrt{-1}$  همیشه به معنای عدد مختلط  $i$  است و ریشه دیگر  $-i$ ،  $-1$ ،  $i$  است. بجز  $z = 0$  و یا وقتی  $z$  یک عدد حقیقی مثبت و یا  $-1$  باشد، نماد  $\sqrt{z}$  مبهم است و باید توجه داشته باشیم درباره کدام یک از ریشه‌های دوم صحبت می‌کنیم. فرمول دموآور می‌گوید که اگر  $n$  مثبت (بزرگتر از یک) باشد چگونه ریشه  $n$ -ام تعریف می‌شود: ریشه  $n$ -ام یک عدد مختلط  $z$ ، عدد مختلطی است که توان  $n$  آن برابر با  $z$  است. بنابراین  $r^{\frac{1}{n}}[\cos(\frac{\theta}{n}) + i \sin(\frac{\theta}{n})]$  یقیناً تعریف می‌شود.

اما کدامیک از مقادیر  $\theta$  را به کار گیریم؟ و چه تعداد ریشه‌های  $n$ -ام متفاوت داریم؟

اگر  $\theta$  یک مقدار از  $\arg z$ ،  $\arg z$  باشد،  $(z \neq 0)$  باشد، آنگاه  $\theta \pm 2\pi$ ،  $\theta \pm 4\pi$ ، ... مقادیر ممکن برای

$\arg z$  می‌باشند و از آنجا مقادیر  $(\frac{\theta}{n}) \pm (\frac{2\pi}{n})$ ،  $(\frac{\theta}{n}) \pm (\frac{4\pi}{n})$ ، ... برای  $\arg z^{\frac{1}{n}}$  به دست می‌آیند. اما



شکل ۱.۶ هفت ریشه هفتم  $z$

اعداد مختلط با قدرمطلق  $r^{\frac{1}{n}}$  و زوایای  $(\frac{\theta}{n}) + (k \cdot \frac{2\pi}{n})$  همان اعداد مختلط  $r^{\frac{1}{n}} [\cos(\frac{\theta}{n}) + i \sin(\frac{\theta}{n})]$  هستند. به زبان دیگر فقط  $n$  عدد مختلط برای  $z^{\frac{1}{n}}$ ،  $z \neq 0$  داریم که همه دارای یک قدرمطلق هستند و روی  $n$  نیم خط قرار دارند. هر زوج متوالی با زاویه  $\frac{2\pi}{n}$  جدا می شود. بنابراین، ریشه های  $n$ -ام عدد  $z$ ،  $(z \neq 0)$  در رأسهای  $n$  ضلعی منتظم قرار دارند. (شکل ۱.۶).

تمرین ۱.۱۵ بدون استفاده از فرمول دموآور نشان دهید که هر عدد مختلط (بجز صفر) دارای دو ریشه دوم است. [با حل معادله درجه دو  $(u + iv)^2 = x + iy$ ، اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را بیابید]. ریشه دوم عدد  $1 + i$  را با این روش به دست آورید.

تمرین ۱.۱۶ ریشه های دوم  $i$  و  $1 + i$ ،  $1 + i\sqrt{3}$  و  $4 + 10i$ ، ریشه های چهارم  $-1$ ، ریشه های سوم  $8i$  و ریشه های ششم  $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  را (با استفاده از فرمول دموآور) به دست آورید.

در مورد ریشه های اعداد مختلط خصوصاً اگر بخواهیم آنها را در صفحه نشان دهیم اغلب مناسب است که برای اندازه گیری زاویه به جای رادیان از درجه استفاده کنیم. اول اینکه زاویه سنج رادیان متداول نیست و دوم اینکه حداقل نمی توانیم تصور ذهنی سریعی از زاویه  $\frac{2\pi}{8}$  حتی بعد از اعشاری کردن آن، مثلاً  $1/88496$  داشته باشیم، از طرفی زاویه  $108$  درجه به راحتی دیده می شود.

تمرین ۱.۱۷ نشان دهید مجموع  $n$  ریشه  $n$ -ام هر عدد مختلط غیر صفر  $w$  برابر صفر است. ( $n$  ریشه  $n$ -ام  $w$ ، ریشه های معادله  $z^n - w = 0$  است.)

تمرین ۱.۱۸ نشان دهید  $a, b, c$  رتوس یک مثلث متساوی الاضلاع است اگر و فقط اگر  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

## تمرینهای تکمیلی

۱ - اعداد زیر را به شکل  $a + ib$  بنویسید.

(الف)  $(1 - i\sqrt{3})^{85}$

(ب)  $\left(\frac{\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ}{\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ}\right)^{12}$

۲ - ریشه‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $(-2i)^{\frac{1}{7}}$

(ب)  $[4(1 - i)]^{\frac{1}{7}}$

(پ)  $(16i + 4)^{\frac{1}{7}}$

(ت) چهار ریشهٔ چهارم  $-i$

(ث) ریشه‌های سوم ۲۷

(ج) ریشه‌های هشتم  $256(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)$

۳ - مجموع مجذور ریشه‌های چهارم  $[\cos(4 \tan^{-1} \frac{4}{3}) + i \sin(4 \tan^{-1} \frac{4}{3})]$  را بدست آورید. (ساده‌تر از آن است که به نظر می‌رسد.)

۴ - اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را به نحوی به دست آورید که در معادلات زیر صدق کنند:

(الف)  $x + iy = 3i - 4$

(ب)  $2(x + iy) = (x + iy)^2$

(پ)  $|2 - (x - iy)| = x + iy$

(ت)  $|x + iy| = 2(x + iy)$

(ث)  $\frac{x - iy}{x + iy} = i$

(ج)  $|x + iy - 2i| = i(x - iy - 4)$

## ۱.۷ حد و پیوستگی

فاصلهٔ بین دو عدد مختلط  $z_1$  و  $z_2$  برابر با  $|z_1 - z_2|$  و فاصلهٔ بین دو عدد حقیقی  $x_1$  و  $x_2$  برابر با  $|x_1 - x_2|$  است. در نتیجه تمام خواص مجموعه‌هایی که منحصرأ با واژهٔ فاصله بیان می‌شوند، مانند تعریف حد یک دنباله از اعداد، و قضایای همگرایی، حدود، و غیره، به طور صوری در صفحهٔ مختلط و

روی اعداد حقیقی یکی است. برای مثال  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  بدین معناست که برای  $\varepsilon > 0$  داده شده عدد  $N > 0$  وجود دارد که اگر  $n > N$ ، آنگاه  $|z_n - z| < \varepsilon$ . توجه کنید هرچند برای اعداد حقیقی  $x_n$  می‌توانیم حد را با نوشتن  $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$  بیان کنیم اما در اعداد مختلط چیزی نظیر آن نداریم، زیرا اعداد مختلط مرتب نیستند.<sup>۴</sup>

به زبان دیگر، همه چیز مانند حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی است بجز اینکه فقط نامساویها را در اعداد حقیقی به کار می‌گیریم. بنابراین قضایایی را در رابطه با حد و همگرایی در نظر می‌گیریم که تأکید آن روی ویژگی‌هایی است که در صفحه مختلط و روی اعداد حقیقی تفاوت دارند. توجه کنید همگرایی در صفحه در حقیقت در یک فضای دوبعدی است که جهت معینی ندارد. این یکی از بزرگترین مشکلات مفاهیم در آنالیز مختلط است. ساده است که حد را وقتی  $z \rightarrow z_0$  مستقل از جهت در نظر بگیریم، اما تعریف نیز میل کردن را مستقل از جهت به دست می‌دهد. فرض کنید در نقطه  $z_0$  ایستاده‌اید و  $z$  مثل یک مگس دور شما می‌گردد، اگر مگس به شما نظیر یک حد نزدیک شود باید نهایتاً به شما بسیار نزدیک باقی بماند.

تمرین ۱.۱۹ نشان دهید  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  اگر و فقط اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  (که در آن  $z_n = x_n + iy_n$  و  $z_0 = x_0 + iy_0$ ).

تمرین ۱.۲۰ نشان دهید اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z_0|$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \arg z_0$  (برای هر آرگومان انتخابی)، آنگاه  $z_n \rightarrow z_0$ . (فرض می‌کنیم  $z_0 \neq 0$ ، زیرا آرگومان صفر تعریف نشده است.) به عکس، نشان دهید که اگر  $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$ ، آنگاه  $|z_n| \rightarrow |z_0|$  و  $\arg z_n \rightarrow \arg z_0$  را می‌توانیم به گونه‌ای مشخص کنیم که  $\arg z_n \rightarrow \arg z_0$ .

## ۱.۸ تمرینهای گوناگون اعداد مختلط

تمرین ۱.۲۱ توجه کنید یک عدد مختلط، صفر است اگر و فقط اگر قسمتهای حقیقی و موهومی آن هر دو صفر باشند. با به کار برد این اصل:

(الف) تمام اعداد مختلط  $z$  را که در رابطه  $z + iz = 2z$  صدق می‌کنند بیان کنید.

(ب) تمام اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را که در رابطه  $(x - iy)(2 + 3i) = 1 + x + iy$  صدق می‌کنند به دست آورید.

(پ) تمام اعداد حقیقی  $x$  و  $y$  را که در رابطه  $3 - iy = 2ix + 3$  صدق می‌کنند به دست آورید.

تمرین ۱.۲۲ نشان دهید اگر  $|w| < 1$  و  $|z| < 1$  آنگاه

$$\left| \frac{z-w}{\bar{w}z-1} \right| < 1$$



و همچنین اگر  $|w| < 1$  و  $|z| = 1$  آنگاه

$$\left| \frac{z-w}{\bar{w}z-1} \right| = 1$$

تمرین ۱.۲۳. چندجمله‌ای  $P_n(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  به ازای  $n \geq 1$  و  $a_n \neq 0$  مفروض است. نشان دهید وقتی  $|z| = R$  و به ازای  $R$  به اندازه کافی بزرگ، داریم:  $|P_n(z)| \geq \frac{1}{4} |a_n| R^n$ . به عبارت دیگر  $|P_n(z)| \rightarrow \infty$  وقتی  $|z| \rightarrow \infty$ ، بطوریکه سرعت بزرگ شدن  $|z|$  در تمام جهتها یکسان باشد.

تمرین ۱.۲۴. نشان دهید اگر عدد مختلط  $z = x + iy$  را به صورت ماتریس

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

و عدد مختلط  $w = u + iv$  را نیز بطور مشابه تعریف کنیم آنگاه ماتریس حاصلضرب

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

متناظر با  $zw$  است.

تمرین ۱.۲۵. تحقیق کنید ماتریس ارائه شده (تمرین ۱.۲۴) از اعداد مختلط ترکیب یک بزرگ‌نمایی (کوچک‌نمایی) با عامل  $r$  و دورانی به زاویه  $\theta$  حول مبدأ می‌باشد. همچنین نشان دهید اگر  $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$ ، آنگاه  $zw$  با بزرگ‌نمایی  $rs$  و دورانی به زاویه  $\theta + \phi$  حول مبدأ متناظر است.

تمرین ۱.۲۶. روش دیگری برای تعریف اعداد مختلط همانند کردن  $z = x + iy$  با بردار  $z = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  است و قتیکه  $\mathbf{i}$  و  $\mathbf{j}$  بردارهای واحد صفر می‌باشند  $\mathbf{i}$  را با  $i$  اشتباه نکنید. بررسی کنید که ضرب عددی  $z \cdot w$  قسمت حقیقی  $\bar{z}w$  است و مؤلفه  $k$ -ام ضرب برداری  $z \times w$  قسمت موهومی  $\bar{z}w$  است.

یادداشتها:

۱ - صفحه مختلط گاهی نمودار آرگاند خوانده می‌شود. تعبیر هندسی آرگاند از اعداد مختلط به سال ۱۸۰۶ برمی‌گردد، اما قبل از او بوسیلهٔ بسل در سال ۱۷۹۹ مطرح شد و این ایده توسط گاوس در سال ۱۸۳۱ رایج شد.

۱. از اعداد مختلط تا قضیه کوشی ۱۵

۲ - نمادگذاری دیگری که بیشتر مهندسين بکار می‌برند  $r \operatorname{cis} \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  است.

۳ - اصطلاحهای «زاویه» و «فاز» نیز بکار می‌رود. دوگانگی کاربرد اصطلاح «آرگومان» برای زاویه  $\theta$  و همچنین در مورد «آرگومان تابع» هر چند زیبا نیست، اما قراردادی است.

۴ - راه مفیدی برای مرتب کردن اعداد مختلط وجود ندارد به نحوی که بتوان در عین حال خواص جبری ترتیبی اعداد حقیقی را حفظ کرد. برای اعداد حقیقی، اگر  $x > 0$  و  $y > 0$  آنگاه  $xy > 0$ . اگر این مطلب برای اعداد مختلط برقرار باشد، آنگاه مثلاً اگر  $i > 0$  باید داشته باشیم  $i \cdot i = -1 > 0$ ؛ و اگر  $0 < i$  آنگاه  $0 < -i$  و بنابراین  $0 < -1 = (-i) \cdot (-i)$ . برای بحث کاملتری در رابطه با ترتیب روی اعداد مختلط به مقاله

R.C. Weimer, "Can the Complex Numbers Be Ordered?"

و

*Two-Year College Math. J.* 7, no. 4 (1976): 10-12.

مراجعه کنید.

## ۲. توابع

### ۲.۱ توابع از صفحه مختلط به صفحه مختلط

معمولاً مشخص کردن دامنه تابعی که مطالعه می‌کنیم مهم است. وقتی دامنه تابع را مشخص نمی‌کنیم، فرض بر این است که دامنه تابع تمام صفحه یا تمام صفحه بجز تعدادی نقطه منفرد است که در آنها تابع نامعین می‌باشد.

نکته‌ای درباره نمادگذاری: در حالت کلی باید مراقب وجه تمایز بین  $f$  که نام تابع است و  $f(z)$  که مقادیر  $f$  در نقطه  $z$  است، باشیم. اما با وجود این خصوصاً وقتی تابع با فرمول پیچیده بیان می‌شود، برای اختصار می‌توانیم از نام تابع استفاده کنیم.

یک تابع از صفحه مختلط به صفحه مختلط صرفاً به معنی اختصاص دادن یک عدد مختلط به هر نقطه از دامنه تابع می‌باشد، که به طور صوری با یک جفت «تابع دومتغیره حقیقی» یکسان است.

در واقع هر تابع  $f$  از صفحه مختلط به صفحه مختلط را می‌توان به صورت  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  نوشت که در آن  $u$  و  $v$  توابعی حقیقی هستند. اما در اینجا نیز شبیه مجموعه اعداد حقیقی، علاقه چندانی نداریم که درباره توابع در مفهوم کلی صحبت کنیم، لذا دسته نسبتاً محدودی از توابع را مطالعه می‌کنیم.

تعریفهای پیوستگی و مشتق از نظر صوری دقیقاً مشابه حالت توابع حقیقی با متغیر حقیقی هستند. اما همیشه باید به یاد داشته باشیم که حد در مفهوم دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. توجه کنید وقتی گفته

می‌شود تابعی «مشتق‌پذیر» است، در اینجا و در فضای دوبعدی حقیقی، دو مفهوم متفاوت مورد نظر است. در ریاضیات مقدماتی معمولاً تلاشی برای تعریف «مشتق» یک تابع در بعد بالاتر از یک نمی‌کنیم، بلکه تنها به مشتق‌های جزئی یا دیفرانسیل می‌پردازیم. اما در اینجا مشتق عدد منحصر به فرد

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

است، و حد در مفهوم دوبعدی گرفته شده است.

در صفحه مختلط توابعی که خواص جالبی دارند، توابعی هستند که در هر نقطه از یک مجموعه باز و همبند مشتق‌پذیرند. در اینجا «همبندی» یعنی اینکه هر نقطه از مجموعه را می‌توان بوسیله خط شکسته‌ای که خودش را قطع نمی‌کند و در داخل مجموعه قرار دارد به هم وصل کرد. یک مجموعه باز، همبند و غیرتهی را ناحیه<sup>۲</sup> می‌نامند. تابعی که در هر نقطه از یک ناحیه مشتق‌پذیر باشد، تحلیلی نامیده می‌شود (مترادف «هلمورفیک» است). توابعی که فقط در نقاط منفرد مشتق‌پذیرند چندان جالب نیستند. بنا به قرارداد، می‌گوئیم تابع  $f$  در یک نقطه تحلیلی است، اگر  $f$  در یک همسایگی از آن نقطه تحلیلی باشد. بعلاوه اگر  $S$  یک مجموعه باشد، می‌گوئیم  $f$  روی  $S$  تحلیلی است اگر  $f$  روی یک مجموعه باز شامل  $S$  تحلیلی باشد.

## ۲.۲ تعبیر نمادهای $O$ و $o$

این نمادها کار را بسیار ساده می‌کند. می‌نویسیم

$$f(z) = o(g(z))$$

(با این برداشت که  $z$  نزدیک نقطه‌ای مانند  $z_0$  است که مورد نظر ماست و این نقطه ممکن است  $\infty$  نیز باشد) به این معنا است که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

و می‌نویسیم

$$f(z) = O(g(z))$$

به این معنا که  $\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|$  در یک همسایگی  $z_0$  کراندار است. " $f(z) = o(g(z))$ " را می‌توانیم به این صورت تلقی کنیم که «مرتبه  $f$  وقتی  $z \rightarrow z_0$  از مرتبه  $g$  کوچکتر است» و در مورد " $f(z) = O(g(z))$ "، وقتی  $z \rightarrow z_0$ ،  $f$  مرتبه‌ای بزرگتر از مرتبه  $g$  ندارد. به عنوان مثال،  $f(z) = o(1)$  یعنی  $f(z) \rightarrow 0$ ، وقتی  $z \rightarrow 0$ . بنابراین وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $f(z) = o(z^2)$  یعنی  $f(z) \rightarrow 0$ ، بنابراین وقتی  $x \rightarrow 0$ ،  $x^2 = o(x)$  و  $1 + x + x^2 = O(1)$ ، در حالیکه وقتی  $x \rightarrow \infty$ ،  $x = o(x^2)$ ،  $1 + x + x^2 = O(x^2)$ .

معمولاً  $o(1)$  برای نمایش تابعی که در حد صفر است، و  $O(1)$  برای نمایش تابعی که کراندار است بکار می‌رود. توجه کنید که در “ $f(z) = o(g(z))$ ” تساوی از یک طرف برقرار است و نمی‌توان آن را به صورت “ $o(g(z)) = f(z)$ ” تغییر داد. به عبارتی این دو عبارت معادل نیستند. دلیل معرفی این نمادها در اینجا سهولت بخشیدن به تعریف مشتق است، چون:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow f'(z_0), \quad z \rightarrow z_0 \text{ وقتی}$$

داریم:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + o(1)$$

و یا:

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)f'(z_0) + o(z - z_0)$$

### تمرینات تکمیلی

۱ - عبارات زیر را مطابق روش متن با استفاده از نمادهای  $o$  و  $O$  بنویسید.

الف)  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$  وقتی  $x \rightarrow 0$

ب)  $5x^2 < f(x) \leq 5x^2$  برای  $x > 500$

پ)  $x^2 f(x) \rightarrow 0$

ت)  $|x^2 f(x)| \rightarrow \infty$

۲ - آیا از عبارت  $f(x) = o(g(x))$  مطلبی درباره  $g(x)$  نتیجه می‌شود؟ اگر جواب مثبت است، چه مطلبی؟

۳ - اگر  $f(x) \neq o(g(x))$ ، آیا می‌توان گفت  $g(x) = o(f(x))$ ؟ اگر نه، چه می‌توان گفت؟

۴ - اگر  $f(x) = o(x)$  وقتی  $x \rightarrow \infty$ ، آیا این درست است که بگوییم  $f(x) = O(x)$ ؟ یا  $f(x) = O(x^2)$  یا  $f(x) = O(x^{\frac{1}{2}})$ ؟ به سؤالهای مشابهی وقتی  $x \rightarrow 0$  جواب دهید.

### ۲.۳ مشتق

چون تعریفهای حد و مشتق از نظر صوری در حالت حقیقی و مختلط مشابه هستند، لذا انتظار داریم قوانین حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی برای مجموع، حاصل ضرب و حاصل تقسیم مشتق برقرار

باشد. بعلاوه، چندجمله‌ای‌ها و توابع گویا (حاصل تقسیم دو چندجمله‌ای) تحلیلی\* هستند و مشتق آنها از فرمولهای آشنایی چون  $z^n = n z^{n-1}$ ،  $\left(\frac{d}{dz}\right) z^n = n z^{n-1}$ ،  $n \in \mathbb{Z}$  تبعیت می‌کند. برای مثال وقتی  $n > 0$  این رابطه با بررسی صحت آن در حالت  $n = 1$  و کاربرد مکرر آن حاصل می‌شود. ولی نمی‌توان آن را برای  $n$  های غیر صحیح به کار برد چون ما حتی  $z^{\frac{1}{2}}$  را که ساده‌تر از  $z^\pi$  است تعریف نکرده‌ایم. [اگر اظهار کنید جذر  $z$  را در بخش ۱.۶ تعریف کرده‌ایم یادآوری می‌کنیم که در آنجا دو ریشهٔ توان دوم  $z$  را بیان کردیم و هنوز  $z^{\frac{1}{2}}$  را به عنوان تابع (تک‌مقداری) تعریف نکرده‌ایم.]

در اینجا خواص راه‌نمای حالت حقیقی کم‌کم از دست می‌روند. روی مجموعه اعداد حقیقی تابع می‌تواند همه‌جا مشتق‌پذیر باشد اما مشتق دوم نداشته باشد (برای مثال به انتگرال تابع پیوسته هیچ‌جا مشتق‌پذیر توجه کنید). در مقابل در بخش ۷.۳ خواهیم دید که در صفحهٔ مختلط هر تابع تحلیلی روی یک مجموعه باز دارای مشتق از هر مرتبه‌ای است بعد از این بخش توجه‌مان را روی توابع تحلیلی متمرکز خواهیم کرد.

به خصوص توجه کنید که قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$$

هم برای توابع مختلط و هم برای توابع حقیقی صحیح است. اثبات صوری این مطلب را در بخش ۲.۲ ارائه می‌دهیم.

چون

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)[f'(z_0) + o(1)]$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(g(z)) - f(g(z_0)) &= [g(z) - g(z_0)][f'(g(z_0)) + o(1)] \\ &= (z - z_0)[g'(z_0) + o(1)][f'(g(z_0)) + o(1)] \\ &= (z - z_0)g'(z_0)f'(g(z_0)) + o(1) \end{aligned}$$

در اینجا به طور ضمنی از این خاصیت که ضرب  $o(1)$  در یک تابع کراندار هنوز  $o(1)$  است استفاده کردیم.

حالا از شما می‌خواهیم که تمرینهای زیر را حل کنید. بعد از این‌که سعی کردید قضایا را خودتان اثبات کنید توابع تحلیلی را بهتر خواهید شناخت و اگر خیلی بی‌صبرید می‌توانید اثبات آنها را از انتهای کتاب بخوانید.

\* مترجمان: تابع  $f$  در نقطهٔ  $z$  تحلیلی است هرگاه در هر نقطه از یک همسایگی  $z$  مشتق‌پذیر باشد.

تمرین ۲.۱ نشان دهید اگر  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  در  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند و اگر تابع  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در نقطه  $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$  مشتق پذیر باشد آنگاه مشتق جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  در  $z_0$  وجود دارند و بعلاوه در نقطه  $z_0$  داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

این روابط را معادلات کوشی-ریمان می نامیم. نشان دهید رابطه بالا را می توان با یک معادله مختلط به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

(حد در تعریف مشتق، در مفهوم دوبعدی است اگر این حد موجود باشد می توان آن را با فرض  $z \rightarrow z_0$  در امتداد هر خم دلخواه، بخصوص در امتداد خطی موازی با قسمت مثبت محور  $x$  ها و محور  $y$  ها بدست آورد. تعریف مشتق را برای هریک از این حالتها بنویسید و نتایج را مساوی هم قرار دهید.) دیده اید که معادلات کوشی-ریمان یک شرط لازم برای وجود مشتق در یک نقطه است، اما کافی نیستند؛ به تمرین زیر توجه کنید.

تمرین ۲.۲ (الف) تابع  $f$  را به صورت  $f(z) = \frac{z^4}{|z|^3}$  برای  $z \neq 0$  و  $f(0) = 0$  تعریف می کنیم. نشان دهید  $f$  در نقطه  $z = 0$  مشتق پذیر نیست، هرچند که در شرایط کوشی-ریمان صدق می کند. (پیشنهاد:  $f(x)$  را در مختصات قطبی بنویسید.)

(ب) فرض کنید  $f(z) = |z|^{\frac{4}{3}}$ . نشان دهید  $f$  در صفر مشتق پذیر است ولی در هر نقطه دیگر مشتق پذیر نیست، در نتیجه  $f$  در صفر تحلیلی نیست.

در عمل، وجود حالتی که شرایط کوشی-ریمان برای آن برقرار است اما تابع تحلیلی نیست نادر است.

در تمرین بعدی دانستن مفهوم دیفرانسیل (یا دیفرانسیل کامل) در حالت دوبعدی لازم است. اگر  $g$  و مشتق جزئی مرتبه اول آن در یک همسایگی  $(x_0, y_0)$  پیوسته باشند، آنگاه در این همسایگی با نمادهای بخش ۲.۲،

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + o(x - x_0) + o(y - y_0)$$

و یا با نمادگذاری اختصاری برای مشتقهای جزئی (که بسیار به کار خواهیم برد)،

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = (x - x_0) u_1(x_0, y_0) + (y - y_0) u_2(x_0, y_0) + o(x - x_0) + o(y - y_0)$$

در اینجا اگر اثبات آن را به یاد نمی‌آورید، آن را ارائه می‌دهیم؛  
داریم

$$\begin{aligned} u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) &= u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0 + h, y_0) \\ &\quad + u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) \\ &= hu_1(x_0 + h', y_0) + ku_2(x_0 + h, y_0 + k') \end{aligned}$$

که در آن بنا به قضیه مقدار میانی  $h'$  بین  $x_0 + h$  و  $x_0$  و  $k'$  بین  $y_0 + k$  و  $y_0$  قرار دارد. چون  $u_1$  و  $u_2$  توابعی پیوسته هستند، می‌توانیم (از تعریف پیوستگی) بنویسیم:

$$u_1(x_0 + h', y_0) = u_1(x_0, y_0) + o(1)$$

و همین‌طور برای  $u_2$ .

تمرین ۲.۳ فرض کنید در یک همسایگی  $N$  از  $z_0$ ،  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  و  $u$  و  $v$  پیوسته و دارای مشتق‌های جزئی مرتبه اول پیوسته در این همسایگی باشند. نشان دهید، اگر معادلات کوشی-ریمان در این همسایگی برقرار باشد آنگاه  $f$  در  $z_0$  مشتق‌پذیر است و (البته در سراسر این همسایگی)<sup>۳</sup>. راهنمایی:  $u$  و  $v$  در  $N$  دیفرانسیل کامل دارند؛ در تعریف مشتق،  $f$  را برحسب  $u$  و  $v$  بنویسید و از معادلات کوشی-ریمان استفاده کنید.

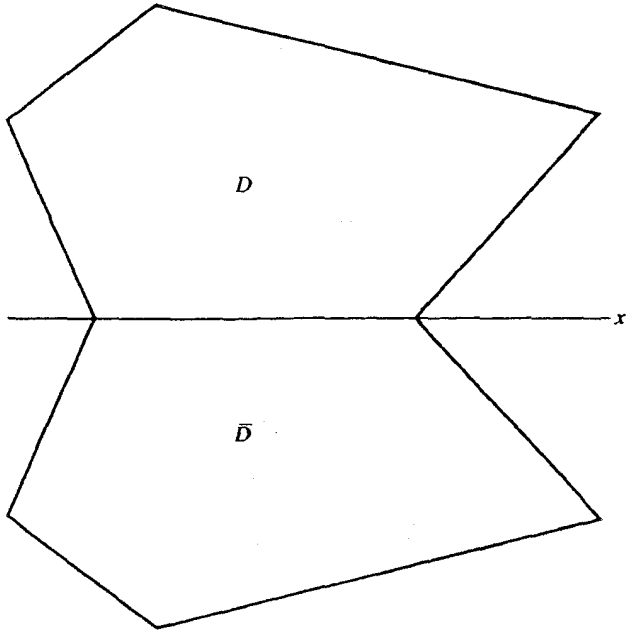
تمرین ۲.۴ همچنین می‌توانیم بنویسیم  $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$  که در آن  $(r, \theta)$  در مختصات قطبی هستند. نشان دهید اگر  $f$  در  $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) \neq 0$  مشتق‌پذیر باشد آنگاه در نقطه  $z_0$ ؛

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

(اینها معادلات کوشی-ریمان برای  $z$  در مختصات قطبی هستند و  $f(z)$  در مختصات دکارتی است.)

تمرین ۲.۵ فرض کنید  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  و  $f$  در معادلات کوشی-ریمان در مجموعه  $D$  صدق کند. فرض کنید  $\bar{D}$  قرینه  $D$  نسبت به محور  $x$  ها است. بدین معنا که اگر  $(x, y) \in D$  اگر  $(x, -y) \in D$  (شکل ۲.۱) تابع  $g$  را در  $\bar{D}$  با ضابطه  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  تعریف کنید. نشان دهید  $g$  در  $\bar{D}$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کند.

تمرین ۲.۶ فرض کنید  $f$  در معادلات کوشی-ریمان در قرص  $|z| < R$  صدق کند. برای  $z$  در بیرون این قرص تعریف کنید  $g(z) = \overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$ ، نشان دهید  $g$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کند (از مختصات قطبی استفاده کنید).



شکل ۲.۱

نکته تمرین ۲.۶ این است که نقطه  $\frac{R^2}{\bar{z}}$  قرینه  $z$  نسبت به دایره  $|z| = R$  نام دارد و نقشی مشابه نقش قرینه نسبت به خط مستقیم دارد.

راه دیگری برای نگاه به معادلات کوشی-ریمان وجود دارد که جالب و گاهی مفید است. داریم که

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{1}{2}i(z - \bar{z})$$

اگر یک محاسبه صوری کامل برای پیدا کردن  $\frac{\partial f}{\partial z}$  انجام دهیم (بدون اینکه در صدد دانستن معنای آن باشیم) خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

اگر  $f$  در معادلات کوشی-ریمان صدق کند، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$$

به همین نحو داریم (هنوز به صورت صوری)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



اگر  $f$  در معادلات کوشی-ریمان صدق کند، نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

به عکس این معادله منتهی به معادلات کوشی-ریمان می‌شود. این نوع محاسبات، ریاضیدانان را به یک باور نسبتاً قدیمی هدایت کرد که یک تابع تحلیلی «مستقل از  $\bar{z}$ » است. عبارت اخیر برحسب ظاهر هیچ مفهومی ندارد؛ البته می‌توانیم عملگر  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  را بصورت

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

تعریف کنیم، که در این صورت وقتی  $f$  تحلیلی باشد داریم  $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})f(z) = 0$ . عملگر  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  در زمینه‌های گوناگون مفید است. بعنوان مثال قضیه گرین در صفحه معمولاً به صورت

$$\int u \, dx + v \, dy = \iint \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy$$

بیان می‌شود، اما آن را می‌توان به اختصار با فرض  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  به صورت

$$\int f(z) \, dz = 2i \iint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \, dx \, dy$$

نوشت. در واقع:

$$\begin{aligned} \int_c f(z) \, dz &= \int_c (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int (u \, dx - v \, dy) + i \int (v \, dx + u \, dy) \end{aligned}$$

اگر از صورت معمولی قضیه گرین در هر انتگرال استفاده کنیم به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_c f(z) \, dz &= \iint \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = i \iint \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= 2i \iint \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

تمرین ۲.۷ نشان دهید رابطه مقدار میانی  $f(w) - f(z) = (w - z)f'(t)$  برای  $t$  بین  $w$  و  $z$ ، در حالت کلی برای توابع تحلیلی در صفحه مختلط برقرار نیست. پیشنهاد:  $f(w) = w^2$ ،  $w = i$  و  $z = 1$  را در نظر بگیرید؛ یا سعی کنید خودتان مثالی ارائه دهید.

تمرین ۲.۸ نشان دهید اگر  $f$  تحلیلی و  $f'$  در ناحیه  $D$  پیوسته و  $|f|$  در  $D$  ثابت باشد آنگاه  $f$  در  $D$  ثابت است.

تمرین ۲.۹ نشان دهید اگر  $f$  تحلیلی و  $f'$  در  $D$  پیوسته و برد  $f$  حقیقی باشد آنگاه  $f$  در  $D$  ثابت است. بنابراین نشان دهید اگر در یک گوئی از  $D$ ،  $f \equiv 0$ ، آنگاه در سراسر  $D$ ،  $f \equiv 0$ .

تنها توابع تحلیلی که تاکنون دیده‌ایم چندجمله‌ایها و توابع گویا هستند. در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی با توابع مثلثاتی، لگاریتمی، نمایی و غیره که آنها را توابع مقدماتی نیز می‌گویند سروکار داریم. برای انجام آن در حالت مختلط باید بدانیم نمادهایی مانند:  $e^{5+i}$ ،  $\log(2+3i)$  و  $\sin i$  چه معنایی دارند. زیرا نمادها تا وقتی تعریف نشوند هیچ معنایی ندارند. لذا بهتر است تعریف این نمادها را بدانیم. قبل از اینکه تعریف خاصی در هر حالت ارائه دهیم، توابع مقدماتی اصلی را به عنوان حد چندجمله‌ایها تعریف می‌کنیم، این روش منطقی است. زیرا چندجمله‌ایها و حد را می‌شناسیم. در واقع می‌خواهیم نوع خاصی از حد چندجمله‌ای را به کار ببریم، (یعنی، سری توانی) که موضوع بخش بعد است.

## یادداشتها:

۱ - مثلاً به H. Blumberg, "New Properties of All Real Functions," *Trans. Amer. Math. Soc.* 24 (1922): 113-128.

مراجعه کنید.

۲ - اصطلاح «دامنه» اغلب به جای «ناحیه» بکار می‌رود و در نتیجه اصطلاح «ناحیه» در تعبیر ما، به معنی ناحیه‌ای که برخی یا همه نقاط مرزی خود را دارد به کار می‌رود. استفاده از اصطلاح «دامنه» مناسب نیست زیرا ممکن است عبارتی مانند «دامنه  $f$  یک دامنه است» ثقیل به نظر بیاید.

۳ - اگر معادلات کوشی-ریمان برقرار باشند شرایط ضعیفتری از پیوستگی مشتقهای جزئی برای تحلیلی بودن  $f = u + iv$  وجود دارند. یکی از ساده‌ترین آنها این است که اگر  $|f|$  موضعاً (لبگ) انتگرالپذیر باشد، و مشتقهای جزئی مرتبه اول  $u$  و  $v$  موجود، با پایان و تقریباً همه جا در  $D$  در معادلات کوشی-ریمان صدق کند آنگاه  $f$  در  $D$  تحلیلی است. این مطلب توسط G.H.Sindalovskii در مقاله زیر ثابت شده است:

"The Cauchy-Riemann Conditions in the Class of Functions with Symmable Modulus, and Some Boundary Properties of Analytic Functions", *Mat. Sb.* 128 (170), no. 3 (1985): 364-382;

ترجمه انگلیسی آن را می‌توان در *Math. USSR Sb.* 57 (1987), no. 2.

پیدا کرد. برای خلاصه‌ای از آن به *Soviet Math. Dokl.* 29 (1984), 504-505.

مراجعه کنید. یک حالت خاص، قضیه کلاسیک Looman-Menshov است، که در آن فرض می‌شود  $f$  پیوسته است و مشتقهای جزئی آن بجز روی یک مجموعه شمارا موجودند. برای مراجعه به این قضیه و تعمیم آن به Burckel, p. 51 مراجعه کنید.

## ۳. سریهای توانی

## ۳.۱ اصطلاحات علمی

یک سری بی‌پایان از اعداد مختلط دقیقاً مانند سری اعداد حقیقی به وسیله دنباله مجموع جزئی آن تعریف می‌شود. مجموع سری (اگر سری همگرا باشد) بوسیله حد دنباله مجموع جزئی تعریف می‌شود. در نتیجه اغلب آنچه شما در رابطه با سریهای بی‌پایان می‌دانید در حالت مختلط نیز بکار می‌رود. موارد استثنایی به مرتب بودن اعداد حقیقی مربوط می‌شوند؛ مثلاً، آزمون سریهای متناوب را نداریم زیرا «تناوب در علامت» یک مفهوم معنی‌دار در اعداد مختلط نیست<sup>۱</sup> (به یادداشت ۴، در بخش ۱ مراجعه کنید).

می‌توانیم به طور غیرصوری سریهای توانی را یک چندجمله‌ای از درجه بینهایت در نظر بگیریم، یعنی

به صورت

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots \quad \text{یا} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

لذا مجموع این سری مانند حالت حقیقی بصورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

تعریف می‌شود.

برای دنباله مفروضی از ضرایب و  $z$  مفروضی، این حد ممکن است وجود داشته و یا وجود نداشته باشد؛ اگر حد به ازای  $z \in S$  وجود داشته باشد، تابعی را روی  $S$  تعریف می‌کند. یک سری به صورت

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

نیز یک سری توانی نامیده می‌شود.

تمرین ۳.۱ نشان دهید سری  $\lim_{k \rightarrow \infty} (z + \frac{1}{k})^k$  در مجموعه  $|z + \frac{1}{k}| < 1$  همگرا است، اما اگر توانهای  $(z + \frac{1}{k})$  را در هم ضرب کنیم و نتیجه را بصورت یک سری از توانهای  $z$  مرتب کنیم، این سری توانی در نقطه  $z = -1$  همگرا نیست، هرچند خود سری در این نقطه همگرا است.

سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$  نیز اغلب سری توانی نامیده می‌شود. اما در حالت کلی سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [f(x)]^k$$

بجز  $f(z) = z - z_0$ ، یک سری توانی نیست؛ هرچند که یک سری از توانهای  $f$  است.

### ۳.۲ دامنه همگرایی سری توانی

احتمالاً بخاطر می‌آورید که سری توانی حقیقی  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  دارای یک فاصله همگرایی است که ممکن است به یک نقطه کاهش یافته یا تمام مجموعه اعداد حقیقی باشد. قضیه نظیر آن برای سریهای توانی مختلط این است که سری، تنها در یک نقطه، یا در یک گوی و یا در تمام صفحه همگراست. شاید تعجب کنید که در اینجا چند حالت وجود دارد، اما اگر یک بازه باز از فضای یک‌بعدی را با یک گوی باز (مجموعه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه داده‌شده کمتر از  $r$  باشد) نظیر کنید کمتر تعجب خواهید کرد. اینک اثبات را برای سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  ارائه می‌دهیم؛ اثبات برای سریهای  $\sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$  نیز مشابه است، فقط جای بیشتری می‌گیرد. برای شروع توجه کنید  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  به ازای  $z = 0$  همیشه همگراست، زیرا به ازای  $z = 0$  همه جمله‌ها بجز اولی صفرند (چون  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  همان  $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$  است. جمله اول  $a_0$  با قرار دادن  $z = 0$  به دست می‌آید، بعد قرار دهید  $z = 0$ ). ممکن است به ازای هر مقدار دیگر  $z$  سری همگرا نباشد.

تمرین ۳.۲ نشان دهید  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$  واگراست بجز وقتی که  $z = 0$ .

اکنون فرض کنید  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$  به ازای  $z = b$  که  $b \neq 0$ ، همگرا باشد. چون (درست شبیه حالت حقیقی) جملات سری همگرا، به صفر نزدیک می‌شوند داریم  $a_k b^k \rightarrow 0$  یعنی به ازای هر عدد مثبت  $\varepsilon$  (به اندازه کافی کوچک) داریم  $|a_k b^k| < \varepsilon$ ، اگر  $k$  به اندازه کافی بزرگ باشد، مثلاً برای  $k \geq N$ . جمله اول سری اثری در همگرایی آن ندارند، بنابراین لازم است فقط به جملاتی با  $k \geq N$  توجه کنیم. برای این جملات،  $|a_k z^k| = |a_k| \left| \frac{z}{b} \right|^k |b|^k \leq \varepsilon \left| \frac{z}{b} \right|^k$  یعنی قدرمطلق هر جمله از سری (بعد از  $N$  امین) کوچکتر یا مساوی جمله نظیرش در سری  $\sum \left| \frac{z}{b} \right|^k$  است. در این حالت می‌گوییم که سری دوم بر سری اول غلبه دارد. اگر  $|z| < |b|$ ، سری غالب، یک سری هندسی با قدر نسبت کوچکتر از یک و بنابراین همگراست. لذا بنا بر آزمون مقایسه سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  همگراست (تمرین بعدی).

تمرین ۳.۳ آزمون مقایسه را برای سریهای مختلط ثابت کنید: اگر  $c_k$  اعداد نامنفی و  $\sum c_k$  همگرا و غالب بر  $\sum z_k$  باشد، آنگاه  $\sum z_k$  همگراست.

تمرین ۳.۳ نشان می‌دهد که مانند سریهای حقیقی، سریهای همگرای مطلق، همگرایند. همچنین نشان می‌دهد اگر  $\sum |z_k|$  همگراست آنگاه  $\sum \operatorname{Re} z_k$  و  $\sum \operatorname{Im} z_k$  همگرایند، زیرا  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$  و  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ . همچنین نتیجه مهمتری از تمرین ۱.۱۹ به دست می‌آید که اگر  $\sum z_k$  همگرا باشد آنگاه  $\sum \operatorname{Re} z_k$  و  $\sum \operatorname{Im} z_k$  همگرایند.

تا اینجا نشان داده‌ایم که اگر  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  در  $z = b$  همگرا باشد آنگاه در گوی  $|z| < |b|$  همگراست. اگرچه ممکن است به ازای برخی از نقاطی که در قدرمطلق بزرگتر از  $|b|$  و یا همه نقاط همگرا باشد.

تمرین ۳.۴ نشان دهید  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$  به ازای هر  $z$  همگراست. [مجبورید  $z$  های مثبت حقیقی را در نظر بگیرید (چرا؟)].

اگر سری توانی به ازای هر  $z$  همگرا نباشد پس  $z$  هایی وجود دارند که به ازای آنها سری واگراست. در این صورت برای  $z$  های با قدرمطلق بزرگتر نیز واگراست.

تمرین ۳.۵ حکم بالا را ثابت کنید.

از این رو سری توانی که به ازای برخی  $z \neq 0$  نه برای همه  $z$  ها همگرا باشد باید در نقاط داخل گویی به مرکز صفر همگرا و خارج گویی بزرگتر واگرا باشد. پس گویی (بنام گوی همگرایی وجود دارد) که در نقاط داخل گوی سری همگرا و در نقاط خارج آن واگراست.

تمرین ۳.۶ حکم قبلی را ثابت کنید با فرض اینکه  $r$  کوچکترین کران بالای اعدادی مانند  $s$  است که سری برای  $|z| < s$  همگراست.

توجه کنید چیزی درباره اینکه سری روی نقاط مرزی گوی همگرایی، همگراست یا نه نمی‌گوییم.

تمرین ۳.۷ سری توانی را بیابید که (الف) در تمام نقاط مرزی گوی همگرایی، همگرا باشد، یا (ب) در هیچ نقطه مرزی همگرا نباشد. تمرین ۴.۱۸ را ببینید.

شعاع گوی همگرایی را شعاع همگرایی گویند. مرز گوی همگرایی، دایره همگرایی نام دارد. (شاید شما این واژه را در برخی از کتابها برای گوی همگرایی بیابید زیرا کتابهای قدیمی‌تر بین واژه گوی و مرز آن تفاوتی نگذاشته‌اند).

اگر ضرایب سری توانی  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  را بشناسیم، می‌توانیم شعاع همگرایی  $R$  را از فرمول

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

بدست آوریم. بخاطر داشته باشید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = L$$

یعنی وقتی  $L$  بی‌نهایت نیست، برای هر  $\varepsilon > 0$  داده شده، هر دو رابطه  $x_n < L + \varepsilon$  برای  $n$  های به اندازه کافی بزرگ، و  $x_n > L - \varepsilon$  را برای یک دنباله نامتناهی از  $n$  ها داریم.

اگر از فرمول، مقدار  $\frac{1}{R}$  برابر با صفر شود بدین معناست که  $R = \infty$  یعنی سری برای تمام  $z$  ها همگراست؛ اگر  $\frac{1}{R} = \infty$  یعنی سری فقط در  $z = 0$  همگراست.

تمرین ۳.۸  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \infty$  را به صورت یک فرمول درآورید.

تمرین ۳.۹ فرمول  $\frac{1}{R}$  را ثابت کنید، وقتی  $R = \infty$  و  $R = 0$  آن را بررسی کنید.

تمرین ۳.۱۰ شعاع همگرایی سریهای زیر را به دست آورید. بکار بردن فرمول  $\frac{1}{R}$  لزوماً روش کارایی نیست.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{2n+2} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i)^n \quad (\text{الف})$$

$$1 + 3z + 2z^2 + 9z^3 + \dots + 2^n z^{2n} + 3^{n+1} z^{2n+1} + \dots \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^p z^p}{(2p)!} \quad (\text{ث}) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{\sqrt{m}} \quad (\text{ت})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} (z+2)^k \quad (\text{ج}) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^{2s} (s!)^2}{(2s)!} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2 \log n z^n \quad (\text{خ}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n} \quad (\text{ح})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left\{ \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right\}^n \quad (\text{ذ}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n} \sqrt{(2n!)}}{n!} \quad (\text{د})$$

تمرین ۳.۱۱ فرض کنید  $R$  شعاع همگرایی سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  و  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید سریهای  $\sum_{k=0}^{\infty} k^m a_k z^k$  و  $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m)a_k z^k$  هر دو دارای شعاع همگرایی  $R$  هستند.

### تمرینهای تکمیلی

۱ - دامنه همگرایی سریهای توانی زیر را به دست آورید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} (z-3)^n}{n!} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2i-z)^n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-2} \cdot z^n \quad (\text{ت}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2z-3i)^{2n} \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2-z)^{2n} \quad (\text{ج}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} z^n \quad (\text{ث})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{n}} z^{n^2} \quad (\text{ح}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot z^n \quad (\text{ج})$$

۲ - نشان دهید مجموع  $\sum (m+ni)^2$  برای تمام اعداد غیرصفر  $m$  و  $n$  همگرایی مطلق است.

## ۳.۳ مشتقگیری از توابع تعریف شده به وسیله سریهای توانی

تمرین ۳.۱۲ با استفاده از تمرین ۳.۱۱ نشان دهید اگر از یک سری توانی به طور صوری،  $m$  بار مشتق بگیریم آنگاه سریهای مشتق و سری اولیه دارای شعاع همگرایی برابرند.

دیدیم که مشتق صوری یک سری توانی و سری اولیه دارای یک شعاع همگرایی اند. این مطلب نمی گوید که تابع تعریف شده به وسیله یک سری توانی، خود دارای مشتق است یا اگر این سری دارای مشتق است، سری مشتق همگرا به مشتق تابع باشد. در واقع این دو عبارت معتبرند، اما باید ثابت شوند. بعداً در بخش ۷.۴ می توانیم اثباتی خیلی کوتاه با استفاده از انتگرال بیاوریم. حال مستقیماً با استفاده از سری توانی، اثبات را ارائه می دهیم، اما کمی خسته کننده است.<sup>۲</sup> شاید از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته (یا آنالیز مقدماتی) بخاطر داشته باشید که از سری بی پایان تابعی روی بازه حقیقی می توانیم جمله به جمله مشتق بگیریم، اگر سری مشتق همگرایی یکنواخت باشد، اما بکار بردن این قضیه در حالت مختلط ساده نیست. بنابراین فعلاً فرض می کنیم سری توانی جمله به جمله مشتق پذیر است؛ در واقع بعداً خواهید دید که قضیه را برای اثبات بخشی از آن بکار نگرفته ایم.

## تمرین تکمیلی

۱ - برای هریک از موارد زیر سری توانی بنویسید.

الف) مشتق

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

ب) مشتق

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! z^{2n}}{(2n)!}$$

پ) مشتق  $k$ -ام

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, (k = 1, 2, 3, \dots)$$

## ۳.۴ همگرایی یکنواخت در سریهای توانی

اکنون می توانیم نشان دهیم که سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  در هر گوی  $|z-z_0| < R_1 < R_2$  همگرایی یکنواخت است، یعنی در هر گویی که کاملاً در داخل گوی همگرایی سری قرار دارد همگرایی یکنواخت است. (توجه کنید: این بدین معنا نیست که همگرایی در گوی باز همگرایی، باید یکنواخت

باشد. البته همگرایی لزوماً در گوی بسته یکنواخت نیست، زیرا سریها حتی در گوی بسته لزوماً همگرا نیستند؛ تمرین ۳.۷) یادآوری می‌کنم که همگرایی یکنواخت به چه معناست: سری  $\sum \Phi_n(z)$  روی مجموعه  $S$  همگرای یکنواخت است بدین معناست که معیار کوشی برای همگرایی به محل  $z$  در  $S$  بستگی نداشته باشد؛ یعنی برای هر  $\varepsilon > 0$  عددی مانند  $T$  مستقل از  $z$  در  $S$  وجود دارد بطوری که داریم

$$\left| \sum_P^Q \phi_n(z) \right| < \varepsilon$$

هرگاه  $P$  و  $Q$  از  $T$  بزرگتر باشند. به طور هم‌ارز، می‌توان گفت شرط همگرایی یکنواخت آنست که

$$\sup_{z \in S} \left| \sum_{n=P}^Q \phi_n(z) \right| \rightarrow 0$$

هرگاه  $P, Q \rightarrow \infty$ .

از این تعریف روشن است که شرط کافی برای همگرایی یکنواخت  $\sum \phi_n(z)$  در  $S$  آن است که یک سری همگرا از اعداد  $\sum M_n$  وجود داشته باشد که  $|\phi_n(z)| \leq M_n$  برای تمام  $n$  های به اندازه کافی بزرگ و تمام  $z$  ها در  $S$ . (این آزمون  $M$ -و ایراشتراس برای همگرایی یکنواخت است؛  $M$  ابتدای کلمه "majorant" \* است). به عبارت دیگر این آزمون بیان می‌کند که  $\sum \phi_n(z)$  بوسیله یک سری همگرا از اعداد  $M_n$  که مستقل از  $z$ ،  $z \in S$  هستند، مغلوب شده است.

تمرین ۳.۱۳. نشان دهید که  $M$ -آزمون شرط لازم برای همگرایی یکنواخت نیست، یعنی مثالی از یک سری همگرایی یکنواخت ارائه دهید که برای آن سری  $\sum M_n$  مناسب وجود ندارد.

تمرین ۳.۱۴. به طور دقیق بررسی کنید  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  به ازای  $|z| < 1 - \delta$  همگرای یکنواخت است ( $0 < \delta < 1$ ) اما روی  $|z| < 1$  همگرای یکنواخت نیست.

برای سهولت، اثبات همگرایی یکنواخت سریهای توانی را برای  $z = 0$  ارائه می‌دهیم؛ و در حالت کلی همه جا  $z$  را با  $z - z_0$  جایگزین می‌کنیم.

در بخش ۳.۲ ثابت کردیم که همگرایی سریهای توانی در  $z = b$  همگرایی سری را برای  $|z| < |b|$  نتیجه می‌دهد. ما در واقع نشان دادیم  $|a_k z^k| \leq \varepsilon \left(\frac{z}{b}\right)^k$  هرگاه  $|a_k z^k| < |b|$ ، بنابراین اگر  $|z| < c < |b|$ ، سری  $\sum a_k z^k$  بوسیله سری هندسی  $\sum \varepsilon \left(\frac{c}{b}\right)^k$  مغلوب شده است. لذا این سری بنا به  $M$ -آزمون برای  $|z| < c$  همگرایی یکنواخت است.

همگرایی یکنواخت سریهای توانی دارای نتایج مهمی است که بعداً به آنها خواهیم پرداخت.



## تمرین تکمیلی

۱ - همگرایی یکنواخت سریهای زیر را در مجموعه‌های داده‌شده بررسی کنید.

$$\text{الف) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (|z| < 1)$$

$$\text{ب) } \sum_{n=1}^{\infty} [nz^n - (n+1)z^{n+1}] \quad (|z| < 1)$$

$$\text{پ) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z-2)^n \quad (|z-2| < \frac{1}{2})$$

$$\text{ت) } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\sin x)^n \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

## یادداشتها:

۱ - اگر به اثبات آزمون سریهای متناوب توجه کنیم می‌توانیم آزمون تقریباً مشابهی را برای سریهای مختلط بیابیم. به تمرین ۱۸.۱ مراجعه کنید.

۲ - برای اینکه مستقیماً نشان دهیم که می‌توانیم از یک سری توانی همگرا جمله به جمله مشتق بگیریم باید عبارت  $\sum_{n=0}^{\infty} h^{-1} a_n [(z+h)^n - z^n] = \sum_{n=0}^{\infty} h^{-1} a_n [(z+h)^n - z^n]$  را تشکیل دهیم. چون معمولاً ساده‌تر است که نشان دهیم حد برابر صفر است تا عدد دیگری، باید مشتق صوری سری را محاسبه و تفاضل آن را از عبارت بالا به دست آوریم و نشان دهیم حد این تفاضل صفر است. طبیعی است که بسط  $(z+h)^n$  را بوسیله بسط دو جمله‌ای بدست آوریم و آنچه را که باقی می‌ماند تخمین بزنیم. بقیه اثبات مربوطه محاسبه می‌شود. در صورت تمایل می‌توانید به بخش ۷.۴ مراجعه کنید و اثبات بسیار فشرده‌ای را که می‌توان بعد از بکارگیری مفاهیم پیشرفته ارائه داد، ببینید و مقایسه کنید.

## ۴. بعضی از توابع مقدماتی

## ۴.۱ توابع نمایی و مثلثاتی

اکنون می‌خواهیم از سریهای توانی برای تعریف بسیاری از توابع آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی که به جای تعریف شدن روی اعداد حقیقی در صفحه مختلط تعریف شده‌اند استفاده کنیم. ایده سراسر است: با استفاده از همگرایی سریهای مکملون در حساب دیفرانسیل و انتگرال، توابع نمایی، سینوس، کسینوس روی تمام اعداد حقیقی نمایش داده می‌شوند. چون اکنون می‌دانیم که سری توانی

به ازای همه  $z$  های حقیقی همگراست، باید برای همه  $z$  های مختلط نیز همگرا باشد، ما به آسانی بوسیله همان سریهای توانی، این توابع را تعریف می‌کنیم. (کار کردن با وارون این توابع بسیار مشکل است، و در بخش ۱۰.۴ به آنها خواهیم پرداخت.) به عنوان مثال:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

گاهی به جای  $e^z$  می‌نویسیم  $\exp(z)$ ، خصوصاً وقتی  $z$  پیچیده است. این سریها بقدری زیاد بکار برده می‌شوند که باید آنها را حفظ کنید. توجه کنید چون ضرایب سریها اعداد حقیقی هستند، هریک از این توابع در نقطه مزدوج مقدار مزدوج را می‌گیرد.

این تعریفها ممکن است کاملاً معقول بنظر بیاید، اما واقعاً باید نگران بود که آیا توابع جدید مطابق با نامشان رفتار مور دنظر را دارند؟ بعنوان مثال: آیا  $e^z e^w = e^{z+w}$ ؟ آیا  $\cos z$  مشتق  $\sin z$  است؟ آیا  $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$ ؟ آیا  $|\sin z| \leq 1$ ؟ در بخش ۴.۴ نشان می‌دهیم که جواب سه سؤال اول «مثبت» است؛ ولی مستقیماً می‌توانیم ببینیم که جواب چهارمی، «منفی» است.

تمرین ۴.۱ با استفاده از سری  $\sin z$  نشان دهید  $|\sin z| > 1$ . (تمرین ۴.۱۴ نتیجه قوی‌تری را بیان می‌کند.)

بعداً در بخش ۷.۷ خواهیم دید که یک اصل کلی وجود دارد که به طور اجمال می‌گوید، فرمولهایی که فقط شامل جمع، تفریق و ضرب هستند در دامنه مختلط درستند. اما آنهایی که شامل مقادیر قدرمطلق هستند، معمولاً درست نیستند.

## ۴.۲ جبر سریهای توانی

اغلب می‌خواهیم دو (یا چند) سری توانی،  $\sum a_n(z-z_0)^n$  و  $\sum b_n(z-z_0)^n$ ، (با  $z_0$  یکسان) را مانند چندجمله‌ایها، با جمع کردن جمله به جمله، جمع ببندیم. مادامی که  $z$  در اشتراک گوی همگرایی آنها باشد، این کار مجاز است، زیرا هر دو سری همگرا را می‌توانیم بدرستی جمله به جمله جمع ببندیم. همچنین می‌توانیم سریهای توانی را درست مانند ضرب چندجمله‌ایها با دسته‌بندی کردن عباراتی که در ضرب هم‌درجه هستند، ضرب کنیم. بعنوان مثال، برای ضرب  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  در  $\sum_{m=0}^{\infty} [m+1]z^m$

می‌نویسیم:

$$\begin{array}{r}
 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \\
 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots \\
 \hline
 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \\
 2z + 2z^2 + 2z^3 + \dots \\
 3z^2 + 3z^3 + \dots \\
 4z^3 + \dots \\
 \hline
 1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + \dots \quad (\text{حاصل ضرب})
 \end{array}$$

اغلب راحت‌تر است که برای به دست آوردن ضرایب حاصلضرب از فرمول استفاده کنیم، که به صورت

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

می‌باشد. (بحث زیر را ببینید)

در مثال بالا،  $b_k = k + 1$ ،  $a_k = 1$  و

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sum_{k=0}^n (n - k + 1) \\
 &= \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
 \end{aligned}$$

این روش آنقدر طبیعی است که اگر کار نکنند، باعث تعجب است، اما اگر مقید هستیم باید ثابت کنیم که کار می‌کند. محاسبه فرمول به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} b_{n-k} z^{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n
 \end{aligned}$$

این مطلب قدری مشکوک به نظر می‌رسد، شاید ترجیح دهید درباره مرحله دوم مانند تبدیل انتگرالهای مکرر  $\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} f(x, y) dy$  و  $\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(x, y) dx$  به یکدیگر، فکر کنید. ظاهراً بنا به آموزشی قراردادی اکثراً کار کردن با انتگرالها را به جمع ترجیح می‌دهند.

برای ارائه اثباتی دقیق از اینکه حاصلضرب سریهای به دست آمده با این روش، به حاصلضرب توابع بیان شده بوسیله دو سری همگراست، به اطلاعاتی از قضیه تجدید آرایش برای همگرایی مطلق سریهای دوگانه (که اثبات آن خسته کننده است)، یا برخی نتایج بعدی این کتاب (بخش ۱۵.۲) نیاز داریم (که مشابه بخش ۳.۳، ارتباطی به آنچه اکنون در اینجا انجام داده ایم ندارد).

بعداً (در بخشهای ۱۵.۴ و ۱۵.۵) خواهیم دید که تحت تجدیدهای طبیعی، سری توانی خارج قسمت دو سری و حتی ترکیب دو سری توانی را می توانیم به طور دقیق از محاسبات صوری به دست آوریم.

### \* ۴.۳ ضرب سریهای عددی

جالب توجه است که ضرب سریهای توانی، روش تشکیل ضرب دو سری عددی  $\sum a_n$  و  $\sum b_n$  را به دست می دهد. سریهای توانی مربوط به  $\sum a_n z^n$  و  $\sum b_n z^n$  را تشکیل دهید، آنها را در هم ضرب کنید و بعد قرار دهید  $z = 1$ . نتیجه این فرایند، که به نام حاصلضرب کوشی معروف است، سری  $\sum c_n$  را که

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

به دست می دهد.

در سریهای همگرایی مطلق، یا حتی (قضیه مرتنس) برای سریهای همگرایی که یکی از آنها همگرایی مطلق باشد این مطلق همیشه حاصلضرب درست را به دست می دهد. اگر هر دو سری همگرایی مشروط باشند، حاصلضرب آنها ممکن است واگرا باشد.

\* تمرین ۲.۴ نشان دهید حاصلضرب کوشی سری همگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}$  در خودش واگرا است.

در هر حال اگر هر سه سری همگرا باشند مجموع حاصلضرب سریها مطمئناً برابر با حاصلضرب مجموع عاملهاست (تمرین ۱۸.۲).

### \* ۴.۴ برخی از خواص توابع مقدماتی

تمرین ۴.۳ سری توانی تابع  $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$  را بیابید.

تمرین ۴.۴ با بکارگیری سریهای توانی متناظر، نشان دهید که  $e^z e^w = e^{z+w}$  و  $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ .

تمرین ۴.۵ نشان دهید  $e^z$  هیچگاه صفر نیست.

تمرین ۴.۶ نشان دهید  $\left(\frac{d}{dz}\right) \sin z = \cos z$  و  $\left(\frac{d}{dz}\right) e^z = e^z$ .

تمرین ۴.۷ چند جمله از سری ماکلورن  $(\cos z)^2$  را با به توان رساندن سری  $\cos z$  بیابید.

تمرین ۴.۸ سری ماکلورن  $\frac{e^z}{1-z}$  را با ضرب سری‌های  $e^z$  و  $(1-z)^{-1}$  بیابید.

تمرین ۴.۹ نشان دهید که اگر  $f$  تحلیلی و  $f'$  پیوسته در ناحیه  $D$  و  $\operatorname{Re} f$  در  $D$  ثابت باشد آنگاه  $f$  در  $D$  ثابت است (به  $e^f$  توجه کنید).

### تمرینهای تکمیلی

۱ - سری ماکلورن  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  را بیابید.

۲ - با کمک سریهای توانی ثابت کنید  $\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$ .

۳ -  $\sinh z$  را برحسب تابع سینوس بنویسید.

۴ - ثابت کنید  $\sinh z$  تعداد بی‌پایان ریشه دارد.

۵ - نشان دهید  $e^{nz} = \cosh nz + \sinh nz$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

۶ - اگر  $a_n \geq 0$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  به ازای  $0 \leq x \leq 1$  همگرا باشد، نشان دهید  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  در همان بازه همگرا است.

### ۴.۵ رابطه بین توابع نمایی و مثلثاتی

فرض کنید  $\theta$  یک عدد حقیقی باشد،  $e^{i\theta}$  را در نظر بگیرید. با استفاده از سری نمایی داریم:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)$$

دو سری سمت راست به ترتیب  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  هستند. بنابراین داریم:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$$

اما برحسب مختصات قطبی در صفحه داریم  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$|e^{i\theta}| = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ زیرا } r = |z| \text{، اینجا } z = re^{i\theta}$$

اکنون می‌توانیم فرمول دموآور را به صورت فشرده‌تر  $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$  بنویسیم. همچنین می‌توانیم ریشه‌های  $n$ -ام  $z$  را به صورت  $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$  ،  $k = 1, 2, \dots, n-1$  بنویسیم.

تمرین ۴.۱۰ نشان دهید

$$z \operatorname{nis} i + z \operatorname{soc} = z^i e$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = z \operatorname{soc} \text{ , و } \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z \operatorname{nis}$$

(دو فرمول اخیر، فرمولهای اویلر برای سینوس و کسینوس هستند.)

فرمولهای زیر کراراً بکار خواهند رفت:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ و } |e^{i\theta}| = 1$$

با استفاده از فرمولهایی مانند  $e^{im\theta} e^{in\theta} = e^{i(m+n)\theta}$  ، بسیاری از تمرینهای بخش ۱ را می‌توانیم ساده‌تر حل کنیم.

اگر از فرمولهای اویلر شروع کنیم و آنها را به عنوان تعریفهای توابع مثلثاتی، در نظر بگیریم، اثبات فرمولهای مثلثاتی ساده‌تر می‌شود. به عنوان مثال چون،

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$$

داریم:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)$$

و اگر ضرب را انجام دهیم و قسمتهای حقیقی و موهومی را مساوی قرار دهیم، فرمولهای جمع سینوس و کسینوس را یکجا بدست می‌آوریم.

تمرین ۴.۱۱ مستقیماً نشان دهید (بدون استفاده از فرمولهای جمع)  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$  و  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ .

تمرین ۴.۱۲ فرمولهای  $\cos 3\theta$  و  $\sin 3\theta$  را بدست آورید.

البته، تمام تساویهای مثلثاتی را می‌توانیم برحسب توابعی از  $e^{i\theta}$  محاسبه کنیم.

توجه کنید اگر  $w = ze^{i\phi}$  و  $\arg z = \theta$  ، آنگاه  $\arg w = \theta + \phi$  : یعنی، ضرب یک عدد مختلط در  $e^{i\phi}$  ، همه شعاعهای  $oz$  را به اندازه زاویه  $\phi$  دوران می‌دهد. به این معنا که ضرب در  $e^{i\phi}$  یک

دوران در صفحه است. اکنون آنها را در مختصات دکارتی شرح می‌دهیم. اگر  $z = re^{i\theta} = x + iy$ ،  
 $x = r \cos \theta$ ،  $y = r \sin \theta$  و

$$e^{i\phi} z = re^{i(\theta+\phi)} = r[\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)]$$

بنابراین مختصات  $X$  و  $Y$  نقطه دوران

$$X = x \cos \phi - y \sin \phi$$

$$Y = y \cos \phi + x \sin \phi$$

می‌باشد که همان فرمولهای معمولی برای دوران هستند.

تمرین ۴.۱۳ نشان دهید  $e^z = 1$  تنها اگر  $z$  مضرب صحیحی از  $2\pi i$  باشد.

تمرین ۴.۱۴ نشان دهید

$$|\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x = \sinh^2 y + \sin^2 x$$

برای  $|\cos z|^2$  فرمول مشابهی بیابید. با استفاده از فرمول اول  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$   $\lim_{x \rightarrow \infty} |\sin(x + iy)|$  را بیابید.

### تمرینهای تکمیلی

۱ - نشان دهید که  $e^z$  تناوب  $2\pi i$  دارد. تناوب  $|e^z|$  چیست؟

۲ - آیا یک تابع تحلیلی (غیرثابت) می‌تواند تناوب به دلخواه کوچک داشته باشد؟ بدین معنا که آیا می‌توانیم داشته باشیم  $f(z + p_n) = f(z)$  با  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$  و  $p_n \neq 0$ ؟

۳ - آیا  $e^z + e^{2z}$  تناوبی است؟ آیا  $\exp[(1 + \sqrt{2})z]$  تناوبی است؟ آیا  $\exp(z) + \exp(z\sqrt{2})$  تناوبی است؟

۴ - اگر  $z = x + iy$ ،  $\operatorname{Im} [\sin(3i + 2z)]$  را بیابید.

۵ - آیا  $\tan z$  می‌تواند برابر با  $i$  شود؟

۶ - تساویهای زیر را با استفاده از صورت مختلط توابع مثلثاتی ثابت کنید:

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = \frac{1}{4} \cos 4\theta + \frac{3}{4} \quad (\text{الف})$$

$$\cot 2\theta + \csc 2\theta = \cot \theta \quad (\text{ب})$$

## ۴.۶ یکتایی سریهای توانی

توجه می‌کنیم که سری توانی همگرای  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  همان سری تیلور این مجموع (حول نقطه  $z_0$ ) است.

تمرین ۴.۱۵ مطلب بالا را ثابت کنید.

خصوصاً هر تابع داده‌شده فقط یک سری توانی می‌تواند داشته باشد. به طور هم‌ارز، اگر دو تابع یکسان باشند، سری تیلور آنها حول یک نقطه معین، ضرایب یکسان دارد؛ یا اگر در سرتاسر یک همسایگی از  $z = 0$  داشته باشیم  $\sum a_n z^n = \sum b_n z^n$  آنگاه  $a_n = b_n$  به ازای همه  $n$  ها. در واقع می‌توانیم نتیجه قوی‌تری را ثابت کنیم، اینکه اگر در یک مجموعه از نقاط که صفر نقطه حدی است داشته باشیم  $f(z) = g(z)$  آنگاه (با فرض اینکه  $f$  و  $g$  هر دو بوسیله سری ماکلورن در یک همسایگی صفر نمایش داده شده باشند)  $f$  و  $g$  در یک همسایگی  $z = 0$  مساوی هستند. این مطلب مانند این است که بگوییم اگر  $f(z_k) = 0$  ( $z_k \neq 0$ ) و  $z_k \rightarrow 0$  آنگاه همه ضرایب ماکلورن  $f$  برابر با صفر هستند. به دلیل اینکه اگر  $f(z) \equiv 0$  نباشد یکی از ضرایب ماکلورن باید غیر صفر باشد، فرض کنید  $a_p \neq 0$  و  $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$  لذا در گوی همگرایی سری ماکلورن داریم

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots = z^p (a_p + z a_{p+1} + \dots) = z^p g(z)$$

چون  $a_p \neq 0$  و  $g(0) = a_p \neq 0$  پیوسته است لذا در یک همسایگی از صفر،  $g(z) \neq 0$ . بنابراین  $f(z) \neq 0$  در یک همسایگی از صفر بجز در صفر. این مطلب با فرض وجود یک دنباله از ریشه‌های  $f$  با نقطه حدی صفر متناقض است.

بخصوص، تنها سری توانی که تابع ثابت صفر را نمایش می‌دهد سری  $f(z) = 0$  است که همه ضرایب آن صفر هستند. در واقع این خاصیت نسبتاً جالبی است که اگر این قدر معروف نبود، قدرش را بیشتر می‌دانستیم. اگر مجموعه دیگری از چند جمله‌ایها را به جای  $\{z^n\}$ ، برای بسط توابع انتخاب کرده بودیم، ممکن بود سری می‌داشتیم که صفر را نمایش دهد ولی همه ضرایب آنها صفر نباشد. بعنوان مثال فرض کنید:

$$p_0(z) = -1, \quad p_1(z) = 1 - z, \quad p_n(z) = \frac{z^n}{n!} - \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

به وضوح  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) = 0$  اما ضرایب صفر نیستند. لذا بسط برحسب  $\{p_n(z)\}$  یکتا نیست. به این معنا که یک تابع داده‌شده (در این حالت، مانند تابع صفر) می‌تواند بیش از یک بسط داشته باشد. در واقع صفر دارای بسط  $0 + 0p_1 + \dots + 0p_n + \dots$  علاوه بر بسط داده‌شده بالا است. به همین نحو

$$e^z = -2p_0 - P_1 + p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots = -P_0 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots$$



## \* ۴.۷ تمرینهای گوناگون دربارهٔ سریهای توانی

تمرین ۴.۱۶ نشان دهید تابع  $f$ ، با ضابطه  $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z}\right)$ ،  $f(0) = 0$  و  $z \neq 0$  در معادلات کوشی-ریمان در هر نقطه از صفحهٔ با پایان صدق می‌کند، اما بوسیلهٔ سری ماکلورن خودش نمایش داده نمی‌شود.

تمرین ۴.۱۷ از تصاعد هندسی  $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{in\theta}$ ، قسمت‌های حقیقی و موهومی را پیدا کنید و همچنین فرمولهای مختصر و مفیدی برای

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$$

و

$$\frac{1}{z} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$$

بدست آورید (این فرمولها در رابطه با سریهای فوریه مفیدند.)<sup>۱</sup>

تمرین ۴.۱۸ نشان دهید که  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n n$  در هر نقطه از دایرهٔ واحد ( $z = e^{i\theta}$ )، بجز ۱ همگراست. (این مسئله به راحتی با تمرین (۱۸.۱) حل می‌شود.)

تمرین ۴.۱۹ مجموع فواصل ریشه‌های دیگر  $n$ -ام ۱ را از نقطهٔ ۱ به دست آورید. حاصل را بر  $n$  تقسیم کنید، فرض کنید  $n \rightarrow \infty$  و نتیجه بگیرید، میانگین فواصل نقاط روی  $|z| = 1$  از نقطهٔ ۱، برابر با  $\frac{4}{\pi}$  است.

تمرین ۴.۲۰ مجموع مربعات فواصل در تمرین ۴.۱۹ را بیابید.

تمرین ۴.۲۱ قسمت حقیقی  $\cos(z + 3z)$  را بیابید.

تمرین ۴.۲۲ فرض کنید  $\omega$ ،  $\omega^2$  سه ریشهٔ سوم عدد ۱ باشد. فرض کنید  $g(z) = a_n (\cos z)(\cos(\omega z))(\cos(\omega^2 z))$ . نشان دهید سری ماکلورن  $g$  دارای ضرایب غیرصفر  $a_n$  است تنها اگر  $n$  مضرب ۳ باشد.

## یادداشتها:

۱ - حاصلجمع کسینوسها، هستهٔ دیریکله نام دارد و در مطالعه همگرایی سریهای فوریه به کار می‌آید. گفته می‌شود که چون دیریکله مطالب بیشتری از مثلثات می‌دانسته قادر به اثبات قضیهٔ همگرایی بوده است که فوریه ماهرانه آن را نادیده گرفته است.

۲ - این مسئله را از S.L. Zabell یاد گرفتم.

## ۵. خمها و انتگرالها

### ۵.۱ اصطلاحات علمی و فنی

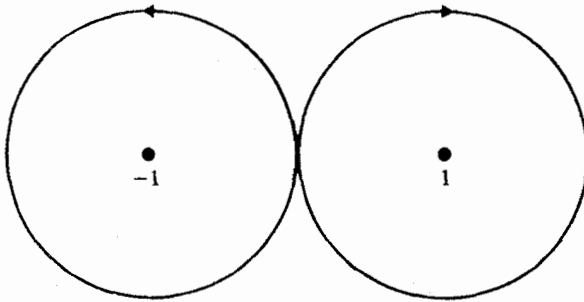
بسیاری از جالبترین بخشهای موضوع ما از قضیه کوشی بدست می‌آید، یکی از صورتهای آن بدین شرح است که اگر تابعی درون و روی خم بسته  $C$  تحلیلی باشد آنگاه  $\int_C f(z) \cdot dz = 0$ . این مطلب ممکن است پذیرفتنی باشد یا نباشد: ادعا شده است<sup>۱</sup> که این رابطه به قدری شگفت‌آور است که تنها اثبات، به آن اعتبار می‌دهد. در هر صورت بنظر معقول‌تر است که واژه‌هایمان را تعریف کنیم: خم چیست، درون آن چیست و چه نوع انتگرالی به کار رفته است؟ مطابق معمول، باید با اصطلاحات علمی بیشتری شروع کنیم.

در بخش ۲.۱ ناحیه را یک مجموعه غیرتهی، باز و همبند تعریف کردیم، تابع پیوسته  $f$  را روی ناحیه  $D$  در نظر می‌گیریم. در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، از توابع، روی بازها انتگرال می‌گیریم. در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته از توابع، روی خمها انتگرال می‌گیریم، که آن راه انتگرال منحنی‌الخط می‌نامیم («خط» یک نشان منسوخ‌شده است و «خط» به معنی «خم» می‌باشد، همانطور که امروزه معمولاً خط را یک حالت خاص خم در نظر می‌گیریم).

تعریف‌ها از انتگرال توابع مختلط روی خم، به انتگرال توابع مختلط روی فاصله‌های حقیقی تبدیل خواهد شد. آنچه که می‌خواهیم تعریف کنیم با نماد  $\int_C f(z) dz$  نشان داده می‌شود که در آن  $c$  یک خم است. بهتر است بگوییم که منظور ما از یک خم چیست.

منظور ما از خم، یک خم پارامتری در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی است. یعنی یک جفت تابع پیوسته  $x = x(t)$  و  $y = y(t)$  روی یک فاصله حقیقی، با این شرط اضافه که دارای مشتقهای پیوسته بوده که همزمان بجز در تعداد با پایان نقطه صفر نباشند. می‌توان جمله اخیر را خلاصه‌تر کرد بدین نحو که بگوییم تابع، قطعه قطعه پیوسته - مشتق‌پذیر هستند، یا این‌که خم دارای مماسی است که بجز در تعداد با پایان نقطه، پیوسته‌وار می‌چرخد. می‌توان معادله خم را به صورت مختلط  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$  نوشت که یک تابع مختلط با دامنه حقیقی است و مشتق‌پذیری به مفهوم یک‌بعدی آن است. برد تابع، مجموعه نقاطی است که آن را مسیر خم می‌نامیم، مسیر همان چیزی است که وقتی کلمه «خم» را می‌بینیم تصور می‌کنیم. البته یک خم می‌تواند خود را قطع کند با خودش مماس یا حتی منطبق شود در حالیکه مسیر آن یک مجموعه است و دارای نقطه تکراری نیست.

برای مثال  $z = e^{i\theta}$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  یک خم است که مسیر آن دایره واحد می‌باشد؛  $z = e^{i\theta}$ ،  $0 \leq \theta \leq 4\pi$  یک خم با همان مسیر است اما یک خم متفاوتی است که معمولاً آن را «دایره واحد دو بار طی شده» می‌خوانیم. خم  $z = -1 + e^{i\theta}$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  و  $z = 1 + e^{-i\theta}$ ،  $2\pi \leq \theta \leq 4\pi$  دارای یک مسیر متشکل از دو دایره است؛ اولی دایره‌ای در جهت مثلثاتی و دومی دایره‌ای در خلاف جهت مثلثاتی می‌باشد. (شکل ۵.۱)



شکل ۵.۱

نقاط  $z(a)$  و  $z(b)$  اگر متفاوت باشند نقاط شروع و پایان خم (نقاط انتهایی) نامیده می‌شوند. اگر  $z(a) = z(b)$  خم بسته است (با معنای «بسته» توپولوژیکی متفاوت است). اگر  $z(a) \neq z(b)$  معمولاً خم را کمان می‌نامیم؛ منظور از کانتور یک خم و یا یک کمان است. کماتی که  $z(c) = z(d)$  هرگاه  $a \leq c < d \leq b$ ، با خودش «مماس یا متقاطع» است، و در غیر اینصورت یک کمان یک به یک است که آن را ساده می‌نامند. به طور مشابه، یک خم بسته که با خودش «مماس یا متقاطع» نباشد ساده نامیده می‌شود؛ خمها و کمانهای ساده را خمهای زوردان و کمانهای زوردان نیز می‌نامند.

تمرین ۵.۱ نشان دهید مسیر یک خم بسته ساده یک مجموعه بسته از نقاط است.

به طور خلاصه می‌گوییم خم  $C$  درون ناحیه  $D$  قرار دارد اگر مسیر  $C$  یک زیرمجموعه از  $D$  باشد؛ و نقطه  $z$  روی خم  $C$  است اگر  $z$  یک نقطه از مسیر  $C$  باشد. مسیر یک خم معمولاً شبیه یک خم هندسی است که ممکن است دارای گوشه باشد یا خودش را قطع کند و یا بخشی از آن روی بخش دیگر قرار گیرد؛ لذا باید جهت آن را «از  $z(a)$  به  $z(b)$ » در نظر گرفت. خم در جهت مخالف با  $z(a+b-t)$  تعریف می‌شود. بعنوان مثال شکل ۵.۲ خمهای متفاوتی با مسیرهای یکسان را نشان می‌دهد.

## ۵.۲ انتگرالها

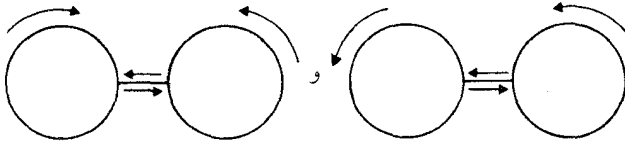
بالاخره اکنون می‌توانیم  $\int_C f(z) \cdot dz$  را تعریف کنیم. این یک نماد اختصاری برای عدد مختلط

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t) dt$$

است، که قاعده زنجیری آن را به دست می‌دهد (بخش ۲.۳).

اگر  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، می‌توانیم انتگرال را صریحاً بصورت

$$\int_a^b f[x(t) + iy(t)][x'(t) + iy'(t)] dt = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt$$



شکل ۵.۲

بنویسیم. انتگرال‌های منحنی‌الخط در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی به همین روش تعبیر می‌شوند:

$$\int_c u dx + v dy = \int_a^b u[x(t), y(t)] x'(t) dt + \int_a^b v[x(t), y(t)] y'(t) dt$$

اصولاً  $f$  می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد که روی مسیر  $C$  پیوسته است (یا در زبان غیررسمی، روی  $C$  پیوسته باشد).

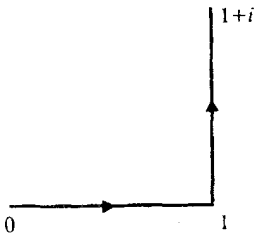
مطالب را با یک مثال توضیح می‌دهیم، فرض کنید  $C$  با  $z = t$ ،  $0 \leq t \leq 1$ ؛  
 $z = 1 + i(t - 1)$ ،  $1 \leq t \leq 2$  تعریف شود. مسیر این خم در شکل ۵.۳ نشان داده شده است.  
 این با تعریف مطابق است، اما معمولاً ساده‌تر است که خم را با نوشتن

$$z = x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad z = 1 + iy, \quad 0 \leq y \leq 1$$

پارامتری کنیم.

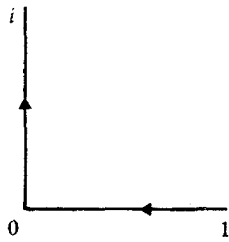
اگر بخواهیم انتگرال  $f(z) = \bar{z}$  را روی این خم بدست آوریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 - iy) dy = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{i}{2}\right) = 1/2 - 0/2 i$$

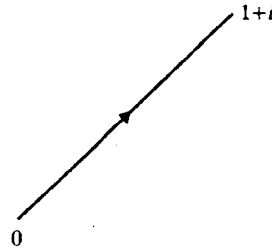


شکل ۵.۳

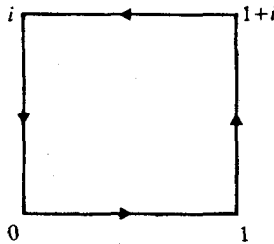
تمرین ۵.۲ خمهای مشخص‌شده زیر را پارامتری کنید و انتگرالها را مستقیماً از تعریف محاسبه کنید.



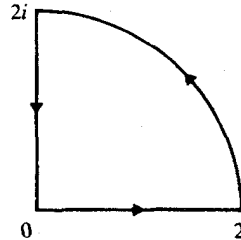
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۵.۴

الف)  $\int_{C_1} \bar{z} dz$  ، که در شکل ۵.۴ (الف) نشان داده شده است.

ب)  $\int_{C_2} \bar{z} dz$  ، که در شکل ۵.۴ (ب) نشان داده شده است.

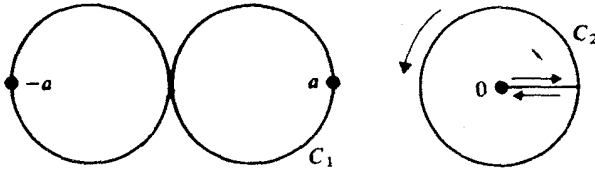
پ)  $\int_{C_3} \bar{z} dz$  ، که در شکل ۵.۴ (پ) نشان داده شده است.

ت)  $\int_C z^{-1} dz$  ، که  $C$  دایره واحد ( $|z| = 1$ ) است که یکبار در جهت مثبت طی شده است.

ث)  $\int_C \bar{z} dz$  ، که در شکل ۵.۴ (ت) نشان داده شده است.

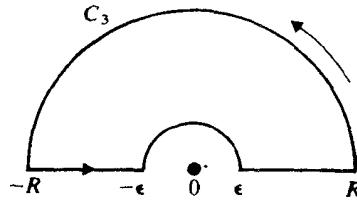
تمرین ۵.۳ خمهای شکل ۵.۵ را پارامتری کنید. اینگونه مسائل به صورت زیر تعبیر می‌شوند: «فرض کنید شکل مفروض مسیر یک خم است، یک خم پارامتری با همین مسیر بسازید.» در صورت نبودن دستورات صریح، باید خمی را بیابید که هیچ قسمتی از مسیر بیش از آنچه که لازم است طی نشود؛ همیشه یک روش منحصر به فردی برای انجام این کار موجود نیست.

توجه کنید (تمرین ۵.۲ (ب) را با صفحه قبل) مقایسه کنید که  $\int_C f(z) dz$  هم به  $f$  بستگی دارد و هم به  $C$  ، (به طور کلی) تنها به  $C$  یا به  $f$  بستگی ندارد. مثلاً اگر قرار دهیم  $z_1 = e^{it}$  ،  $C_1$  ،



(الف)

(ب)



(ب)

شکل ۵.۵

اما خمهای متفاوتی هستند.  $0 \leq t \leq 2\pi$  و  $0 \leq t \leq 4\pi$ ،  $C_2: z_2 = e^{it}$ . این خمها دارای یک مسیرند (دایره واحد).

تمرین ۵.۴ اگر  $C_1$  و  $C_2$  خمهای بالا باشند تابعی مانند  $f$  بیاید که

$$\int_{C_1} f(z) dz \neq \int_{C_2} f(z) dz$$

تمرین ۵.۵ اگر  $C$  دایره به شعاع ۱ و به مرکز ۱  $z = 1$  (در جهت پادساعتگرد) باشد،  $\int_C \frac{1+z}{1-z} \cdot dz$  را محاسبه کنید.

بنا به تعریف، تغییر پارامتر در یک خم، خم دیگری ارائه می‌دهد. اگر  $z(t)$ ،  $a \leq t \leq b$  یک خم باشد، آنگاه برای  $z[t(u)]$  برای  $r \leq u \leq s$  وقتی  $t(r) = a$  و  $t(s) = b$  خمی تعریف می‌کند که مسیرش همان نقاط را در همان جهت دربر می‌گیرد، به شرطی که  $t$  یک تابع صعودی با مشتق قطعه قطعه پیوسته باشد. لذا می‌توانیم دو خم را «یکسان» بدانیم؛ یعنی آنها را به عنوان یک خم در نظر بگیریم. به زبان صوری‌تر، می‌توانیم بگوییم اصطلاح «خم» واقعاً اکنون به معنای ردهٔ خمهای هم‌ارز است که در ابتدا تعریف شده است.

تمرین ۵.۶ نشان دهید  $\int_C f(z) dz$  روی خمهای هم‌ارز  $C$  یک مقدار است.

اگر  $C$  با  $z = z(t) = x(t) + i y(t)$   $z$  تعریف شده باشد آنگاه  $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$  و می‌بینیم قسمتهای حقیقی و موهومی  $z'(t)$  (به استثناء تعداد با پایان نقطه) مؤلفه‌های بردار مماس بر

$C$  می‌باشند. همین‌طور  $ds = |z'(t)| dt$  دیفرانسیل طول مکان می‌باشد، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف شده است، لذا طول  $C$  با  $\int_a^b |z'(t)| dt$  داده می‌شود (این طول خم است، نه لزوماً طول مسیر آن). ما اغلب انتگرال طول را به صورت  $\int_C |dz|$  و انتگرال  $\int_a^b f(z) |z'(t)| dt$  را به صورت  $\int_C f(z) |dz|$  خلاصه می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر  $C$  به صورت  $z = re^{i\theta}$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  باشد آنگاه طول  $C$  برابر است با  $\int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$ .

### تمرینهای تکمیلی

خمهای مشخص‌شده را پارامتری کنید و انتگرالها را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

۱ -  $\int_C z dz$ ، که  $C$  خم نشان‌داده‌شده در شکل ۵.۶ (الف) می‌باشد.

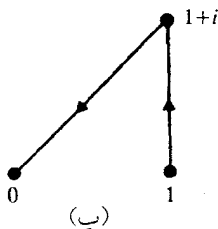
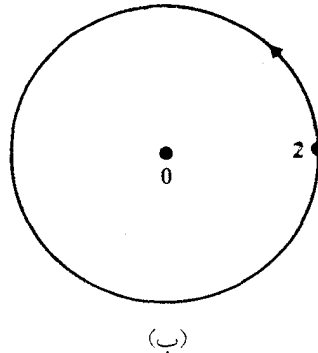
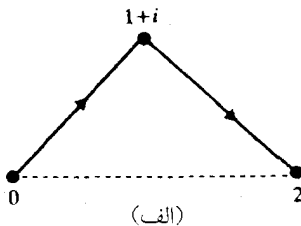
۲ -  $\int_C \left(\frac{1}{z}\right) dz$ ، که  $C$  خم نشان‌داده‌شده در شکل ۵.۶ (ب) می‌باشد.

۳ -  $\int_C \bar{z} dz$ ، که  $C$  خم نشان‌داده‌شده در شکل ۵.۶ (پ) می‌باشد.

۴ - مقدار

$$\int_C \frac{2z+3}{z-4i}$$

را به دست آورید که در آن  $C$  دایره‌ای به شعاع ۴ و به مرکز  $z = 4i$ ، در جهت مثلثاتی است.



شکل ۵.۶

### ۵.۳ نامساویها در انتگرالها

اغلب به نامساویهای

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \max |f(z)| \cdot (\text{طول } C)$$

و به صورت کلی‌تر

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]| |z'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz|$$

نیازمندیم. اینها صورتهای مختلط نامساویهای آشنای مقدماتی

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

برای توابع حقیقی روی بازه‌های حقیقی هستند؛ همچنین آنها صورتهای پیوسته نامساویها برای مجموعه‌های ارائه‌شده در تمرین ۱.۱۰ می‌باشند.

اثباتها کاملاً بدیهی نیستند. فرض می‌کنیم  $\int_C f(z) dz = Ae^{i\phi}$ ؛ در این صورت

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| = A &= \operatorname{Re} \left[ e^{-i\phi} \int_C f(z) dz \right] = \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\phi} \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \int_a^b e^{-i\phi} f[z(t)] z'(t) dt \right\} \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \{ e^{-i\phi} f[z(t)] z'(t) \} dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\phi} f[z(t)] z'(t)| dt \\ &= \int_a^b |f[z(t)]| |z'(t)| dt \\ &= \int_C |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$



مرحله‌ای از استدلال که ممکن است روشن نباشد رسیدن از  $\operatorname{Re} \int \{\dots\}$  به  $\int \operatorname{Re} \{\dots\}$  است. این حکم درست است زیرا  $\int (p + iq) dt = \int p dt + i \int q dt$  در حساب دیفرانسیل و انتگرال «حقیقی» قضیه میانگین را داریم:

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) f(c)$$

که در آن  $a < c < b$ . این قضیه اغلب در حالت مختلط در انتگرالگیری کانتور برقرار نیست.

تمرین ۵.۷ نشان دهید که قضیه مقدار میانگین برای  $\int_0^{1+i} z dz$  برقرار نیست، که در آن انتگرالگیری روی خم شکل ۵.۳ است.

## ۵.۴ برخی انتگرالگیریهای آسان

رده وسیعی از انتگرالها هستند که با عملیات کم یا بدون عملیات محاسبه می‌شوند.

غالباً  $\int_C f(z) dz$  را وقتی  $f$  پیوسته و در ناحیه شامل  $C$  (یا به طور دقیقتر، مسیر  $C$ ) دارای تابع اولیه  $F$  است محاسبه می‌کنیم. بخصوص وقتی  $f$  یک چندجمله‌ای، یا یک ترکیب خطی از توابعی مانند  $e^z$  یا  $\sin z$  که مشتق آنها معلوم است، یا وقتی  $f$  با سری توان که گوی همگرای آن شامل  $C$  است تعریف می‌شود، می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

در واقع اگر  $f(x) = F'(z)$  و  $C$  با  $z = z(t)$  ،  $a \leq t \leq b$  تعریف شده باشد داریم

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b F'[z(t)] z'(t) dt$$

یادآوری می‌کنیم انتگرال سمت راست یک انتگرال معمولی از یک تابع مختلط با دامنه تعریف  $[a, b]$  است، و قوانین معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال کار می‌کند. تابع زیر انتگرال، مشتق  $F[z(t)]$  نسبت به  $t$  (بنا به قاعده زنجیری) است. بنابراین انتگرال برابر است با

$$F[z(b)] - F[z(a)]$$

و این مقدار (برای  $f$  داده شده) به نقاط انتهایی  $C$  بستگی دارد. یعنی اگر  $C_1$  و  $C_2$  دو خم با نقاط انتهایی  $P$  و  $Q$  (از  $P$  به  $Q$  مشخص شده باشد) آنگاه

$$\int_{C_1} f(z) dz = F(Q) - F(P) = \int_{C_2} f(z) dz$$

بخصوص اگر  $C$  یک خم بسته باشد (ساده یا غیرساده) آنگاه (با مفروضات ما)  $\int_C f(z) dz = 0$ . توجه کنید که ما (هنوز) نمی‌دانیم که  $f$  مشتق‌پذیر است اگر خود مشتق یک تابع باشد (به بخش ۷.۳ توجه کنید).

مثلاً  $\int_C P(z) dz = 0$  برای هر چندجمله‌ای و هر خم بسته  $C$ ؛ همچنین  $\int_C z^{-2} dz = 0$  روی هر خم بسته که از مرکز عبور نکند.

در نتیجه، مسائلی نظیر تمرین ۵.۲ (پ) بدیهی هستند زیرا  $z$  یک چندجمله‌ای است و بنابراین

$$\int_P^Q z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_P^Q = \frac{Q^2 - P^2}{2}$$

مستقل از خمی است که در امتداد آن انتگرال می‌گیریم.

به همین نحو  $\int_C f(z) dz = 0$  اگر  $C$  درون گوی همگرایی سری توانی  $f$  باشد، زیرا با توجه به بخش ۳.۴ هر سری توانی روی  $C$  همگرایی یکنواخت است و بنابراین جمله به جمله می‌توان از آن انتگرال گرفت؛ اما انتگرال هر جمله برابر صفر است. لذا مثلاً برای هر خم بسته  $C$  داریم  $\int_C \sin z dz = 0$ . از طرف دیگر توابعی وجود دارند که انتگرال آنها به خم  $C$  بستگی دارد؛ مثالهای ارائه شده درست قبل از تمرین ۵.۲ را با تمرین ۵.۲ (ب) مقایسه کنید.

انتظار داریم  $z^{-1}$  مشتق یک تابع باشد، در واقع مشتق  $\log z$  (که هنوز آن را تعریف نکرده‌ایم) است، اما اکنون می‌بینیم که  $\log z$  یک تابع (تک‌مقداری)، با خواص مورد انتظار در هر ناحیه شامل گوی به مرکز صفر نیست. در واقع اگر چنین تابعی وجود داشته باشد باید انتگرال مشتق آن حول محیط چنین گویی صفر شود اما چنین نیست: تمرین ۵.۲ (ت) را ببینید. لگاریتم‌ها در فصل ۱۰ بحث خواهند شد.

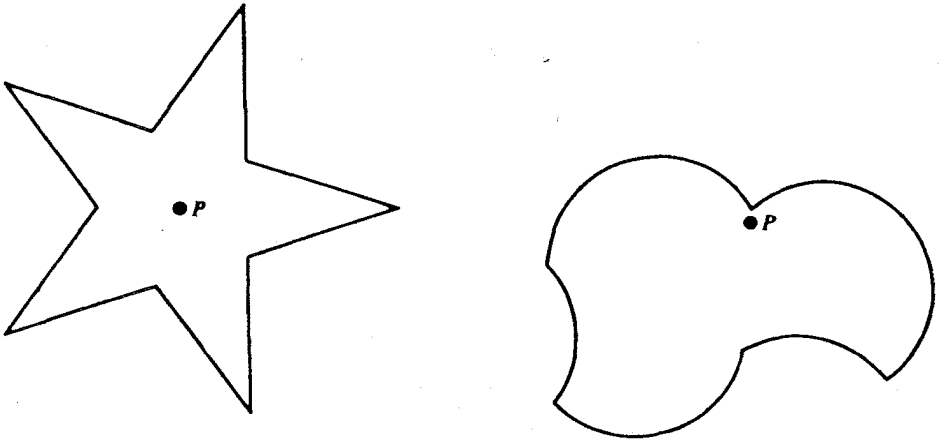
## یادداشت:

۱ - صفحه ۵، Jeffreys and Jeffreys

## ۶. قضیه کوشی

### ۶.۱ خمهای بسته ساده

یادآوری می‌کنیم که قضیه کوشی با نقاط درون خم بسته ساده و انتگرال پیرامون خم سر و کار دارد. اگر بخواهیم یک بیان مختصر و مفیدی از قضیه کوشی ارائه دهیم لازم است بدانیم چه نقاطی درون یک خم بسته ساده هستند و همچنین خم در کدام جهت پیموده شده است. ساده‌ترین روش (اما نه لزوماً مقدماتی‌ترین روش) جواب دادن به سؤلهایی مثل اینها مراجعه به قضیه خم ژوردان است که بیان می‌کند مسیر خم ساده بسته (و بدون هیچ فرضی درباره مشتق‌پذیری) صفحه گسترش‌یافته را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که یکی کراندار است و دیگری شامل  $\infty$  می‌باشد. ناحیه کراندار را درون خم می‌نامیم. اثبات قضیه خم ژوردان ساده نیست<sup>۱</sup>؛ اثبات، بیشتر به توپولوژی مربوط است تا به آنالیز، بنابراین برای راحتی



شکل ۶.۱

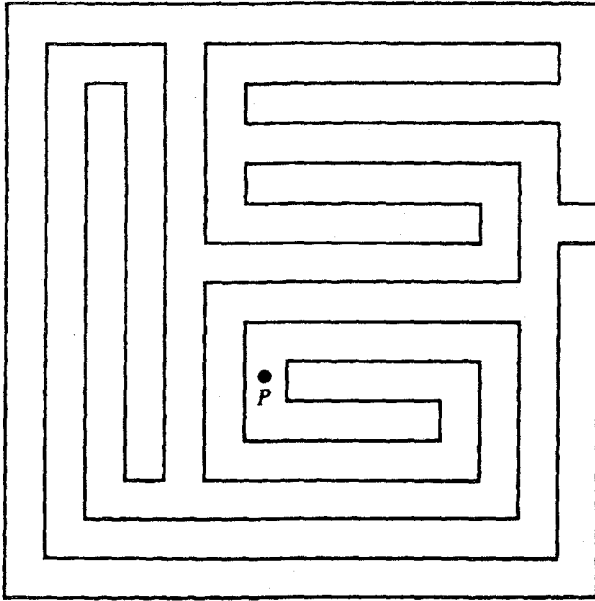
فرض می‌کنیم نتیجه برقرار است. در عین حال تصدیق می‌کنید که قضیه برای خمهایی که خیلی پیچیده نیستند نسبتاً شهودی است. این قضیه برای خمهای محدب یا کلی‌تر برای خمهای ستاره‌ای شکل به آسانی ثابت می‌شود. یک خم ساده  $C$ ، ستاره‌ای شکل است اگر نقطه  $P$  غیرواقع بر  $C$  موجود باشد که هر پاره‌خطی وصل از  $P$  به یک نقطه از  $C$  خم  $C$  را فقط و فقط در یک نقطه قطع کند. مثالهای بدیهی از خمهای ستاره‌ای شکل، دایره‌ها، مثلثها، مستطیلها و خمهایی مثل شکل ۶.۱ هستند. در اینجا درون  $C$  مشتمل بر اجتماع همه پاره‌خطهای باز از  $P$  به  $C$  (همراه با  $P$ ) است.

اما اگر  $C$  یک خم پیچیده باشد، همیشه نقاط درون  $C$  به راحتی دیده نمی‌شوند. به عنوان مثال به شکل ۶.۴ توجه کنید. نقطه  $p$  درون  $C$  است یا بیرون آن؟ یک راه مناسب برای تصمیم گرفتن، این است که نیمخطی از  $P$  به  $\infty$  رسم کنیم؛ اگر نیمخط،  $C$  را در تعداد دفعات فرد قطع کند،  $P$  درون  $C$  است؛ این مطلب را ثابت نمی‌کنیم.

## ۶.۲ همبندی ساده

ناحیه  $D$  درون یک خم ساده بسته  $C$  خاصیت همبندی ساده دارد، این خاصیت را می‌توان به چند طریق تعریف کرد.<sup>۲</sup> یکی از تعاریفها این است که، هر خم بسته در  $D$  را بتوان به صورت پیوسته بدون برخورد به مرز  $C$  در یک نقطه از  $D$  مجاله کرد. ناحیه‌های کلی‌تر از درون خم ساده بسته می‌توانند همبند ساده باشند. مثلاً ناحیه نشان داده‌شده در شکل ۶.۳ (الف) همبند ساده است، اما شکل ۶.۳ (ب) اینطور نیست. اگر یک ناحیه خیلی پیچیده نباشد، معمولاً به راحتی با مشاهده می‌توانیم بگوییم همبند ساده است یا نیست.

وقتی  $D$  کراندار نیست و  $\infty$  یک نقطه درونی آن است، می‌گوییم  $D$  همبند ساده است، اگر به عنوان



شکل ۶.۲

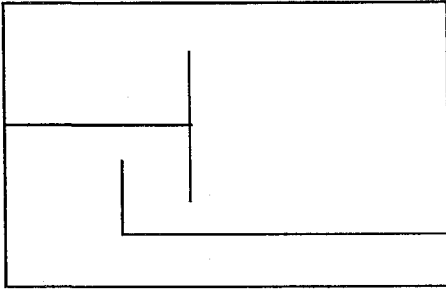
یک زیرمجموعه از کره ریمان همبند ساده باشد، یعنی به عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحه گسترش‌یافته همبند ساده باشد. مثلاً بیرون دایره (خارج گوی) در صفحه گسترش‌یافته همبند ساده است، اما در صفحه با پایان اینطور نیست.

خم  $C$  یک جهت‌القایی از جهت پارامتر فاصله دارد. یعنی اگر  $z = z(t)$ ،  $a \leq t \leq b$ ، آنگاه نقاط  $C$  برحسب مقادیر صعودی  $t$  مرتب شده باشند. برای یک خم ساده بسته  $C$  معمولاً می‌گوییم خم به طور مثبت جهت‌دار است، اگر پارامتری‌سازی انتخاب‌شده چنان باشد که خم در جهت پادساعتگرد پیموده شود، یعنی اگر روی خم به مفهوم مثبت\* حرکت کنید، درون خم در سمت چپ شما باشد. اما اگر  $\infty$  یک نقطه درونی باشد، جهت مثبت در جهت ساعتگرد است، به نحوی که  $\infty$  سمت چپ شما قرار گیرد.

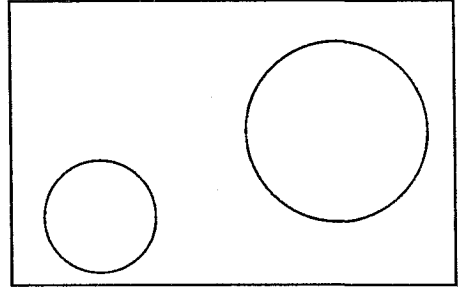
### ۶.۳ قضیه کوشی

چنان‌که در ۲.۱ گفتیم تابع  $f$  تحلیلی در ناحیه  $D$  است اگر  $f$  در هر نقطه از  $D$  مشتق داشته باشد؛  $f$  تحلیلی در نقطه  $P$  است اگر  $f$  در یک همسایگی از  $P$ ، یعنی در یک مجموعه باز شامل  $P$  تحلیلی باشد. اگر  $S$  یک مجموعه باشد،  $f$  در  $S$  تحلیلی است اگر  $f$  در یک مجموعه باز شامل  $S$  تحلیلی

\* مترجمان: یعنی در جهت افزایش پارامتر  $t$  حرکت کنیم.



(الف)



(ب)

شکل ۶.۳

باشد. مثلاً اگر  $f$  در گوی بسته  $|z| \leq 1$  تحلیلی باشد آنگاه  $f$  در گوی باز  $|z| < 1 + \varepsilon$  که  $\varepsilon > 0$  تحلیلی است. توابع تعریف شده بوسیلهٔ سریهای توانی (بخصوص) چندجمله‌ایها و توابع مقدماتی مطرح شده در بخش ۴ مثالهایی از توابع تحلیلی هستند. اکنون می‌توانیم یک بیان دقیقی از قضیهٔ کوشی ارائه دهیم (نه کلی‌ترین بیان ممکن، اما این برای آنچه که قصد داریم انجام دهیم کافی خواهد بود).

خم سادهٔ بستهٔ  $C$  که مشتق آن بجز در یک تعداد با پایانی از نقاط پیوسته است را در نظر بگیرید. فرض کنید  $C$  درون ناحیهٔ همبند سادهٔ  $D$  که  $f$  در آن تحلیلی است قرار گیرد. در این صورت

$$\int_C f(z) dz = 0$$

صورت کلی‌تر قضیهٔ کوشی<sup>۳</sup>، که اثبات آن مشکلتر است، این است که اگر  $f$  در ناحیهٔ  $D$  درون خم سادهٔ بستهٔ طول‌پذیر  $C$ ، تحلیلی و در بستار  $D$  پیوسته باشد آنگاه  $\int_C f(z) dz = 0$  (در اینجا فرض نمی‌کنیم که  $C$  قطعه قطعه مشتق‌پذیر است؛ یک خم طول‌پذیر، یک خم پیوسته با طول با پایان است. یعنی طول چندضلعی‌های محاط شده در  $C$  کوچکترین کران بالای با پایان دارند.) ابتدا قضیهٔ کوشی<sup>۴</sup> را در حالتی که  $C = C_1$  مرز مستطیل  $R_1$  است ثابت می‌کنیم. نکتهٔ اثبات این است که اگر  $C$ ، با طول  $P$ ، کران یک مستطیل بسیار کوچک  $R$  باشد آنگاه وقتی  $P \rightarrow 0$  داریم

$$\int_C f(w) dw = o(P^2)$$

این مطلب درست است زیرا اگر  $w$  روی  $C$  و  $z$  در درون آن باشد، از تعریف مشتق (به بخش ۲.۲ مراجعه کنید) داریم که:

$$f(w) = f(z) + f'(z)(w - z) + \varepsilon(w)(w - z)$$

که در آن  $\circ \rightarrow \varepsilon(w)$  وقتی  $\circ \rightarrow P$ . اگر از معادله بالا روی  $C$  نسبت به  $w$  انتگرال بگیریم، انتگرال دو جمله اول صفر است، زیرا قضیه کوشی برای چندجمله‌ایها برقرار است. بنابراین با توجه به نامساویهای بخش ۵.۳ وقتی  $\circ \rightarrow P$ ، داریم:

$$\left| \int_C f(w) dw \right| \leq P \cdot \max |w - z| \cdot \max |\varepsilon(w)| = o(P^2)$$

زیرا  $|w - z| < P$ .

توجه کنید که بدون استفاده از قضیه کوشی برای چندجمله‌ایها، فقط داریم:

$$\left| \int_C f(w) dw \right| \leq \max |f(w)| \cdot P$$

یعنی

$$\int_C f(w) dw = O(P)$$

بنابراین  $\int f(w) dw$  پیرامون یک مستطیل بسیار کوچک، برای یک تابع تحلیلی، بسیار کوچکتر از وقتی است که یک تابع کلی مورد نظر باشد. برای به دست آوردن قضیه کوشی روی یک مستطیل بزرگ، عملاً باید  $C$  را به مرز یک مستطیل بزرگ وسعت دهیم.

ساده‌تر است که از مستطیل بزرگ  $R_1$  با مرز  $C_1$  و طول  $L$  شروع کنیم، فرض کنید

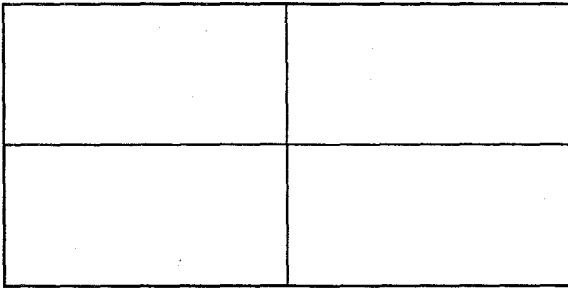
$$\int_{C_1} f(w) dw = A \neq 0$$

با تقسیم  $R_1$  به تکه‌های کوچک به تناقض می‌رسیم.

$R_1$  را به چهار مستطیل مشابه مانند شکل ۶.۴ تقسیم کنید. توجه کنید که چون  $R_1$  در ناحیه همبند ساده  $D$  قرار دارد، درون  $R_1$  در  $D$  است. هر مستطیل کوچک دارای محیطی برابر با  $\frac{L}{4}$  است. انتگرال  $f$  پیرامون مستطیل اصلی، برابر با مجموع انتگرالهای  $f$  پیرامون چهار مستطیل است، زیرا انتگرالها در امتداد رفت و برگشت روی اضلاع داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین حداقل یکی از انتگرالها روی پیرامون مستطیل کوچک (آن را  $R_2$  بنامید) قدرمطلقاً حداقل برابر با  $\frac{A}{4}$  دارد. در مرحله بعد  $R_2$  را به چهار مستطیل تقسیم کنید، محیط هر یک برابر با  $\frac{L}{16}$  است و مستطیل  $R_3$  را برای انتگرالی که حداقل قدرمطلق آن برابر با  $\frac{A}{16}$  است بدست آورید. این روش را ادامه دهید، در مرحله  $n$ -ام مستطیل  $R_n$  را با محیطی برابر با  $\frac{L}{4^n}$  داریم که حداقل قدرمطلق انتگرال برای آن برابر با  $\frac{A}{4^n}$  است. با استفاده از قضیه مجموعه تودرتوی کانتور<sup>۵</sup>، نقطه  $z_0$  ای که در تمام مستطیلهای  $R_k$  قرار دارد موجود است.

برای یک مستطیل  $R_n$  شامل  $z_0$ ، داریم

$$\left| \int_{R_n} f(w) dw \right| \geq \frac{A}{4^n}$$



شکل ۶.۴

محیط  $R_n$ ، برابر با  $P_n = 2^{-n}L$  است. بنابراین

$$\left| \int_{R_n} f(w) dw \right| \geq AL^{-2} P_n^2$$

برای  $n$  بزرگ، و این متناقض با چیزی است که اکنون ثابت کردیم، یعنی

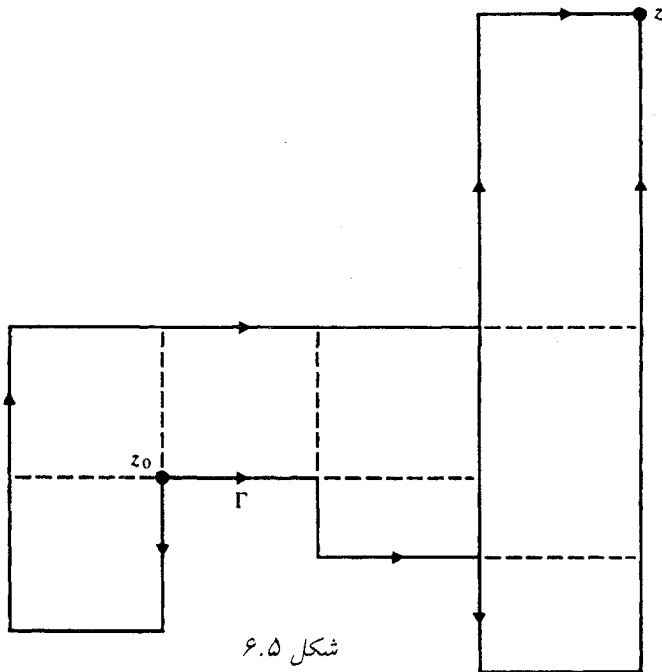
$$P_n \rightarrow 0 \text{ وقتی } \int_{R_n} f(w) dw = o(P_n^2)$$

بنابراین  $A$  باید صفر باشد.

بنابراین، قضیهٔ کوشی را در حالتی که  $C$  یک مستطیل است ثابت کرده‌ایم. حالا باید قضیه را برای هر خم دلخواه ثابت کنیم.

این مطلب را غیرمستقیم ثابت می‌کنیم، با نشان دادن اینکه تابع  $f$  مشتق<sup>۶</sup> یک تابع است. فرض کنید  $D$  یک ناحیهٔ همبند ساده در صفحه با پایان باشد. نقطهٔ مناسب  $z_0$  در  $D$  را انتخاب کنید و بگیرید  $F(z) = \int_C f(w) dw$ ، که در آن  $C$  یک کمان ساده از  $z_0$  به  $z$  در  $D$  است و از تعداد با پایانی پاره‌خط موازی محور حقیقی یا موهومی تشکیل شده است. ما یک چنین خمی را می‌توانیم پیدا کنیم زیرا (بنا به فرض) یک چندضلعی که  $z_0$  را به  $z$  در  $D$  مرتبط می‌کند وجود دارد و ما می‌توانیم آن را با چندضلعی دیگری از نوعی که لازم است تقریب بزنیم. حالا ادعا می‌کنیم  $F$  تابع است، یعنی اگر  $\Gamma$  خم دیگری از نوع مشابه باشد آنگاه  $\int_{\Gamma} f(w) dw = \int_C f(w) dw$ .

کافی است حالتی که  $\Gamma - C$  یک خم ساده بسته است را در نظر بگیریم. در واقع اگر از  $z_0$  شروع کنیم و روی  $C$  حرکت کنیم،  $z$  به عنوان اولین نقطه‌ای که  $C$ ، خم  $\Gamma$  را قطع می‌کند وجود خواهد داشت؛ یعنی کمان  $(z_0, z_1)$  از  $C$ ، همراه با کمان  $(z_1, z_0)$  از  $\Gamma$ ، یک خم ساده است. آنگاه از  $z_1$  شروع می‌کنیم و روند را تکرار می‌کنیم. در این روش می‌توانیم  $\Gamma - C$  را به صورت اجتماع با پایانی از خمهای ساده بسته، همراه با تعدادی پاره‌خط پیموده‌شده در جهت‌های مخالف [در امتدادی که  $\int f(w) dw = 0$ ] نمایش دهیم.



شکل ۶.۵

حال اگر  $\Gamma - C$  یک خم ساده بسته باشد، می‌توانیم با ترسیم خطوط موازی محورها، آن را به صورت اجتماع مرز مستطیلهای نمایش دهیم، مانند شکل ۶.۵. بنا به قضیه کوشی انتگرال پیرامون مستطیلهای برابر با صفر است و انتگرال روی پاره‌خطها در جهت رفت و برگشت یکدیگر را حذف می‌کنند. همبندی ساده  $D$  به کار می‌آید زیرا از پیدایش مستطیلی که شامل نقاط  $D$  نیست جلوگیری می‌کند.

تمرین ۶.۱ با استفاده از تعریف مشتق نشان دهید  $F'(z) = f(z)$ .

این تمرین، اثبات قضیه کوشی را کامل می‌کند.

تمرین ۶.۲ اگرچه قضیه کوشی می‌گوید که اگر  $f$  در ناحیه همبند ساده که شامل خم بسته ساده است تحلیلی باشد آنگاه  $\int_C f(z) dz = 0$ ، نباید فکر کنیم که اگر  $f$  تحلیلی نباشد و یا اگر ناحیه همبند ساده نباشد آنگاه  $\int_C f(z) dz$  مخالف صفر است. به عنوان مثال،

$$\int_{|z|=1} (\bar{z})^2 dz$$

۹

$$\int_{|z|=1} z^{-2} dz \quad \text{را در طوقه } \frac{1}{2} < |z| < 2 \text{ در نظر بگیرید.}$$

در نظر بگیرید.



## ۶.۴ قضیه اساسی جبر

به عنوان اولین کاربرد از قضیهٔ کوشی (که در اینجا آن را فقط برای دایره نیاز داریم) ثابت می‌کنیم که هر چندجمله‌ای از درجه مثبت حداقل یک ریشه دارد.<sup>۷</sup>

فرض کنید اینطور نباشد. چون هر چندجمله‌ای از درجه ۱ یک ریشه دارد، فرض کنیم چندجمله‌ای  $P(z)$  از درجه  $n > 1$  ریشه نداشته باشد. می‌توانیم فرض کنیم  $P$  روی محور حقیقی، حقیقی است.

تمرین ۶.۳ نشان دهید اگر  $P(z)$  روی محور حقیقی، حقیقی نباشد، آنگاه  $\bar{P}(z) = P(\bar{z})$  همان  $P$  با ضرایب مزدوج است (یک چندجمله‌ای است که روی محور حقیقی، حقیقی است و ریشه ندارد اگر  $P$  ریشه نداشته باشد).

چون  $P(z) \neq 0$ ،  $P(r \cos \theta) \neq 0$ . انتگرال

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{P(r \cos \theta)}$$

را در نظر بگیرید. چون  $P(z)$  به ازای  $z$  های حقیقی، حقیقی است و هرگز صفر نمی‌شود،  $P(r \cos \theta)$  همیشه یک علامت دارد، بنابراین  $I \neq 0$ . حالا  $I$  را به عنوان یک انتگرال روی دایرهٔ واحد در نظر بگیرید که به وسیلهٔ  $z = e^{i\theta}$ ،  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  پارامتری شده است:

$$I = -i \int_{|z|=1} \frac{dz}{zP(z+z^{-1})}$$

اگر  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} P\left(z + \frac{1}{z}\right) &= a_0 + a_1\left(z + \frac{1}{z}\right) + \dots + a_n\left(z + \frac{1}{z}\right)^n \\ &= z^{-n}Q(z) \end{aligned}$$

که در آن  $Q(z)$  یک چندجمله‌ای با  $a_n \neq 0$  می‌باشد. بنابراین تابع زیر انتگرال در  $I = 0$ ،  $\frac{z^{n-1}}{Q(z)}$ ، که  $n \geq 1$ ؛ که  $\frac{1}{Q(z)}$  تحلیلی است و بنابراین طبق قضیهٔ کوشی  $I = 0$ . این مطلب با نتیجهٔ قبلی تناقض دارد، بنابراین  $P$  باید حداقل یک ریشه داشته باشد.

## تمرینهای تکمیلی

۱ - یک چندجمله‌ای نمایی، مجموع با پایان  $\sum_{k=1}^n a_k \exp(b_k z)$  می‌باشد. آیا یک چندجمله‌ای

نمایی غیرثابت، لزوماً حداقل یک ریشه دارد؟

۲ - تابع  $f(z) = 2 + \cos z$  ریشه‌های حقیقی ندارد. آیا ریشه‌های غیرحقیقی دارد؟ در این صورت

آنها را بیابید.

## ۶.۵ قضیه گرین و قضیه کوشی

اگر با قضیه گرین در حساب دیفرانسیل و انتگرال دوبعدی آشنا باشید می‌توانید قضیه کوشی را برای توابعی که تحلیلی نیستند، اما مشتق پیوسته دارند، و برای همهٔ خمهایی که قضیه گرین برای آنها برقرار است ثابت کنید. حداقل می‌توانید آن را برای مستطیلهای ثابت کنید و بعد مانند بخش ۶.۳ ادامه دهید. برای هدفهای ما، قضیه گرین را می‌توان به صورت ساده‌تری با صورت مختلط در بخش ۲.۳ نوشت،

$$\int_C f(z) dz = 2i \int_D \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy$$

که انتگرال سمت چپ در امتداد خم ساده بسته  $C$  و انتگرال سمت راست روی ناحیه  $D$ ، محصور شده بوسیله  $C$ ، گرفته شده است. حالا اگر  $f$  تحلیلی در  $D$  باشد، داریم  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  در  $D$  و قضیه کوشی ثابت می‌شود.

## ۶.۶ عکس قضیه کوشی (قضیه مُره‌را)

تابع  $f(z)$  تحلیلی باشد یا نباشد، قضیه گرین می‌گوید:

$$\int_C f(z) dz = 2i \int_D \int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy$$

اگر انتگرال سمت چپ صفر باشد، آنگاه انتگرال سمت راست نیز صفر است. فرض کنید انتگرال سمت چپ به ازای هر خم  $C$  واقع در ناحیه‌ای مانند  $R$ ، که  $D$  درون  $C$  است، صفر شود.

تمرین ۶.۴ نشان دهید آنگاه تابع زیر انتگرال سمت راست همیشه صفر است، بدین معنا که  $f$  درون هر خم بسته در  $R$  تحلیلی است و بنابراین در  $R$  تحلیلی است.

قضیه مُره‌را: اگر  $f$  تابعی پیوسته و به ازای هر خم بسته  $C$  در  $R$ ،  $\int_C f(z) dz = 0$ ، آنگاه  $f$  در  $R$  تحلیلی است.

اصولاً اثباتی مشابه نشان می‌دهد که برای هر دایره یا مربع  $R$  در  $\mathbb{C}$  داشته باشیم  $\int_C f(z) dz = 0$ . همچنین می‌توانیم قضیه مُره‌را را با فرضهای ضعیف‌تری روی  $f$  با ساختن تابع  $F$  در بخش ۶.۳ ثابت کنیم. این مطلب نشان می‌دهد که  $f$  تابع اولیه است، اما تا بخش ۷.۳ این مطلب را که توابع اولیه لزوماً تحلیلی هستند، نخواهیم دید.

یک کاربرد قضیه مُره‌را در بخش ۷.۵ داده شده است.

## یادداشتها:

- ۱ - واقعاً اثبات ساده‌ای از قضیهٔ خم ژوردان، موجود نیست. می‌توانید به کتاب Burckel صفحهٔ ۱۱۶ مراجعه کنید.
- ۲ - Burckel در صفحهٔ ۳۴۴ کتاب خود، ۱۵ تمرین متفاوت (هم‌ارز) از همبندی ساده یک ناحیه ارائه می‌دهد.
- ۳ - برای اثبات صورت کلی قضیهٔ کوشی به کتاب Burckel صفحهٔ ۳۴۱ مراجعه کنید.
- ۴ - این مطلب اولین بار توسط گورسا (Goursat) انجام شد و در نتیجه گاهی به نام قضیهٔ کوشی-گورسا نامیده می‌شود.
- ۵ - قضیهٔ مجموعهٔ تودرتوی کانتور می‌گوید اگر  $S_n$  ها مجموعه‌های بسته، کراندار و غیرتهی باشند، بطوریکه  $S_n \supset S_{n+1}$  و قطر  $S_n$  به صفر میل کند آنگاه نقطهٔ یکتایی در همهٔ  $S_n$  وجود دارد.
- ۶ - D.V. Widder, "A Simplified Approach to Cauchy's Integral Formula", *Amer. Math. Monthly* 53 (1964): 359-363.
- ۷ - ۱۲ اثبات از قضیهٔ اساسی جبر موجود است. به Burckel صفحات ۱۱۸-۱۱۷ و همچنین به Remmert صفحات ۱۸۹-۱۸۷ مراجعه کنید. برای اثباتی که به تمرین ۱.۲۳ وابسته نیست به R.P. Boas, "Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra," *Amer. Math. Monthly* 71 (1946): 180 مراجعه کنید.
- ۸ - برای مطالب بیشتری در این مورد به L. Zalcman, "Real Proofs of Complex Theorems (and Vice Versa)," *Amer. Math. Monthly* 81 (1974): 115-137 مراجعه کنید.

## فصل ۲

# کاربردهای قضیه کوشی

### ۷. فرمول انتگرال کوشی

فرض می‌کنیم  $f$  روی ناحیه همبند ساده  $D$  تحلیلی باشد.

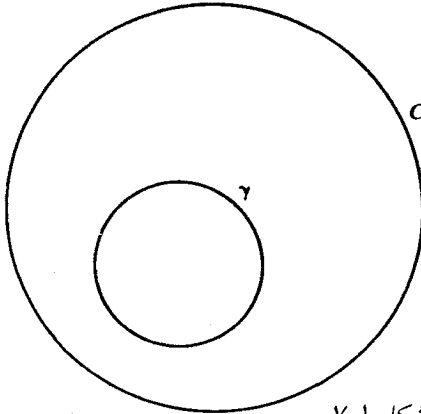
$C$  را یک خم بسته ساده با جهت مثبت  $D$  و نقطه  $z$  را درون  $C$  در نظر بگیرید. در این صورت بنا به فرمول کوشی به ازای هر  $z$  درون  $C$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{w - z}$$

این فرمول جالبی است، زیرا نشان می‌دهد که می‌توانیم تابع  $f$  را درون  $C$  تنها با داشتن مقادیرش روی  $C$  بازسازی کنیم. این فرمول کاربردهای بسیاری دارد، برخی از آنها کاملاً غیرمنتظره هستند و در بحث ما نقشی محوری دارند. در این بخش فرمول را اثبات می‌کنیم.

### ۷.۱ خمها درون خمها

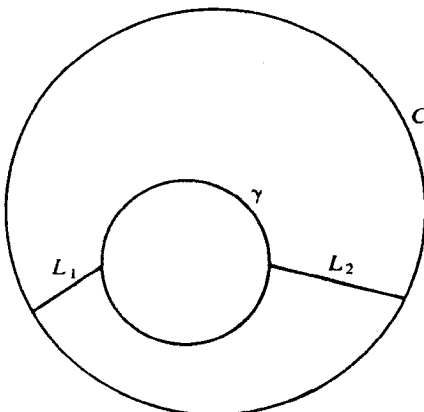
برای اثبات فرمول کوشی و برای استفاده آتی آن، نیاز به صورتی از قضیه کوشی داریم که روی ناحیه‌ای مانند ناحیه بین دو دایره  $C$  و  $\gamma$  به کار رود، شکل ۷.۱، و نیازمند تابعی مانند  $f$  هستیم که درون و روی  $C$  بجز در مرکز  $\gamma$  تحلیلی باشد. نمی‌توانیم مستقیماً از قضیه کوشی استفاده کنیم زیرا ناحیه همبند ساده نیست و نیز مرز آن فقط یک خم نیست. اما می‌توانیم این دو مشکل را برطرف کنیم، برای این منظور پاره‌خطهای  $L_1$  و  $L_2$  از  $\gamma$  به  $C$  را رسم می‌کنیم و  $\int f(z) dz$  را جداگانه در امتداد دو خم



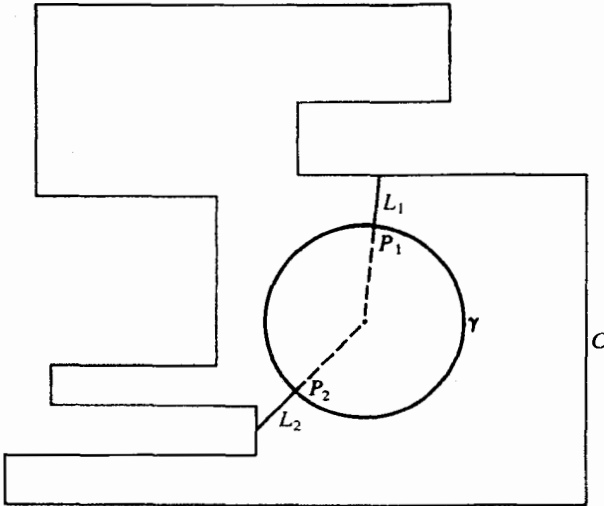
شکل ۷.۱

بالا و پایین در نظر می‌گیریم که بوسیلهٔ قسمتهایی از  $C$  و  $\gamma$  و  $L_1$  و  $L_2$  بوجود می‌آید. به شکل ۷.۲ مراجعه کنید. هریک از این خمها در ناحیهٔ همبند ساده‌ای قرار دارد که  $f$  روی آن تحلیلی است، لذا هریک از انتگرالها برابر با صفر است و انتگرالها در امتداد  $L_1$  و  $L_2$  حذف می‌شوند و در نتیجه داریم  $\int_C f(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$ . همچنین مادامی که  $C$ ،  $\gamma$  را قطع نکند به شعاع  $\gamma$  بستگی ندارد.

اگر  $C$  دایره نباشد ولی خم ساده‌ای با جهت مثبتی باشد، مثل آنچه در شکل ۷.۳ نشان داده شده است، می‌توانیم به همین روش عمل کنیم، به جز اینکه طریقهٔ رسم  $L_1$  و  $L_2$  کمتر روشن است. این حالت دو نقطهٔ دلخواه  $P_1$  و  $P_2$  را روی  $\gamma$  اختیار می‌کنیم و نیم‌خطهایی از مرکز  $\gamma$  به  $P_1$  و  $P_2$  را رسم می‌کنیم. این نیم‌خطها را ادامه می‌دهیم تا  $C$  را برای یک بار قطع کنند و فرض کنید  $L_1$  و  $L_2$  قسمتی از نیم‌خطهای بین  $C$  و  $\gamma$  باشند. [اولین نقطه از  $L_1$  (یا  $L_2$ ) که روی  $C$  باشد موجود است، زیرا مسیر  $C$  یک مجموعه- نقطهٔ بسته است.] در آن صورت می‌توانیم مانند قبل ادامه دهیم.



شکل ۷.۲



شکل ۷.۳

سرانجام اگر تابع  $f$  در چند نقطه درون  $C$  تحلیلی نباشد، می‌توانیم با انتخاب دایره‌های به اندازه کافی کوچک حول هریک از این نقاط و ترسیم پاره‌خط‌های مربوطه به صورت قبل عمل کنیم. در نتیجه لم زیر را داریم:

لم: فرض کنید  $D$  یک ناحیه همبند ساده،  $C$  یک خم ساده بسته در  $D$  و  $\Delta_k$ ،  $(k = 1, 2, \dots, n)$ ، گویه‌های جدا از هم در درون  $C$ ، با مرزهای  $\gamma_k$ ، و  $f$  در درون  $C$  بجز در مراکز  $\Delta_k$  تحلیلی باشد. در اینصورت

$$\int_{\gamma_1} f dz + \dots + \int_{\gamma_n} f dz = \int_C f dz$$

## ۷.۲ اثبات فرمول کوشی

فرمولی در آغاز بخش ۷.۱ بیان شده است. برای اثبات آن، لم پایانی بخش ۷.۱ (لم بالا) را به ازای  $n = 1$  برای تابع

$$\frac{f(w)}{w - z}$$

(برای  $z$  مفروض) به کار می‌بریم. این تابع درون و روی  $C$  بجز در نقطه  $z = w$  تحلیلی است. اگر  $\gamma$  یک دایره کوچک حول  $z$  باشد (بسیار کوچک درون  $C$ )، آنگاه داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

می‌توانیم آخرین انتگرال را به صورت

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta$$

بنویسیم که در آن شعاع دایره  $\gamma$  است. چون (بنا به تعریف حد)  $f(z + re^{i\theta}) \rightarrow f(z)$  وقتی که  $r \rightarrow 0$ ، به طور یکنواخت نسبت به  $\theta$ ، با استفاده از تمرین زیر (و جایگزینی  $n \rightarrow \infty$  با  $r \rightarrow 0$ ) بدست می‌آوریم

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta = f(z)$$

تمرین ۷.۱ (انتگرالگیری از دنباله‌های همگرای یکنواخت). نامساوی

$$\left| \int_C f(w) dw \right| \leq \int_C |f(w)| |dw|$$

از بخش ۵.۳ را بکار ببرید و نشان دهید اگر  $f_n(w) \rightarrow f(w)$  به طور یکنواخت روی خم کراندار  $C$ ، آنگاه  $\int_C [f_n(w) - f(w)] dw \rightarrow 0$ ، و از آنجا  $\int_C f_n(w) dw \rightarrow \int_C f(w) dw$

تمرین ۷.۲ نشان دهید اگر  $z$  بیرون  $C$  باشد، مقدار انتگرال فرمول کوشی برابر با صفر است.

### ۷.۳ مشتق‌گیری از توابع ارائه‌شده با فرمول کوشی

تابع  $f$  را تحلیلی تعریف کرده‌ایم اگر دارای مشتق  $f'$  (در یک ناحیه) باشد. اما هنوز نمی‌دانیم  $f'$  تحلیلی است. در واقع حالا با بکار بردن فرمول کوشی نشان می‌دهیم  $f'$  تحلیلی است. اثبات نتیجه زیر مشکل‌تر نیست.

هر تابع  $g$  تعریف‌شده با فرمول

$$g(z) = \int_C \frac{\varphi(w) dw}{w - z}$$

که  $\varphi$  یک تابع پیوسته،  $C$  یک خم ساده بسته و  $z$  درون  $C$  باشد،  $g$  در ناحیه‌ای درون  $C$  دارای مشتق است، و بعلاوه مشتقهای مراتب بالاتر دارد و لذا  $g$  درون  $C$  تحلیلی است.

توجه کنید که این انتگرال یک تابع تحلیلی در بیرون  $C$  را نیز تعریف می‌کند؛ به طور کلی ارتباط روشنی بین توابع تعریف‌شده بوسیله این دو انتگرال موجود نیست (بخش ۹.۵ را ببینید).

این مطلب باید معقول به نظر برسد، بخصوص اگر قاعده لایبنیس در مورد مشتق‌گیری از انتگرال معین نسبت به یک پارامتر را بدانیم، یعنی

$$g'(t) = \int_C \frac{\varphi(w) dw}{(w-z)^2}$$

می‌توانیم آن را به شکل زیر اثبات کنیم. مشتق  $g$  با استفاده از تعریف عبارتست از

$$\begin{aligned} \lim_{z_1 \rightarrow z} \left\{ \int_C \frac{\varphi(w) dw}{w-z_1} - \int_C \frac{\varphi(w) dw}{w-z} \right\} \frac{1}{z_1-z} \\ = \lim_{z_1 \rightarrow z} \frac{1}{z_1-z} \int_C \varphi(w) \left\{ \frac{1}{w-z_1} - \frac{1}{w-z} \right\} dw \\ = \lim_{z_1 \rightarrow z} \int_C \frac{\varphi(w) dw}{(w-z_1)(w-z)} \end{aligned}$$

چون  $z$  در فاصله مثبتی از  $C$  قرار دارد، مثلاً  $\delta > 0$  به ازای هر  $w$  روی  $C$ ، در نتیجه  $|z_1 - w| \geq \delta$  و از آنجا  $|w - z|$  دارای کران پایین مثبت است. در نتیجه

$$\frac{\varphi(w)}{(w-z_1)(w-z)} \rightarrow \frac{\varphi(w)}{(w-z)^2}$$

بطور یکنواخت نسبت به  $w$ . بنابراین (تمرین ۷.۱ را ببینید)

$$\lim_{z_1 \rightarrow z} \int_C \frac{\varphi(w) dw}{(w-z_1)(w-z)} = \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^2} dw$$

در اینجا  $z$  و  $z_1$  درون  $C$  و  $w$  روی مسیر  $C$  قرار دارد. چون مسیر، یک مجموعه بسته است (تمرین ۵.۱) فاصله‌های  $z$  و  $z_1$  تا  $C$  دارای کران پایینی مثبت است و از آنجا در واقع  $g$  دارای مشتق است و بعلاوه برای هر  $z$  درون  $C$

$$g'(z) = \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^2} dw$$

می‌توانیم به همان روش نشان دهیم که

$$g''(z) = 2 \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^3} dw$$

و به طور کلی

$$g^n(z) = n! \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

توجه کنید که در عین حال نشان داده‌ایم هر تابع تحلیلی دارای مشتق از تمام مراتب است.



این مطلب (برای مشتق مرتبه اول) همان چیزی است که برای تکمیل بحث قضیه مَره‌را در بخش ۶.۵ نیاز داشتیم.

چون بحث قبلی بدون ضریب  $\frac{1}{2\pi i}$  در جلوی انتگرال انجام شده بود به خصوص باید توجه کنیم، اگر  $f$  یک تابع تحلیلی باشد، فرمول کوشی برای مشتق به صورت زیر است

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

چون توابع تحلیلی مشتق‌های از تمام مرتبه‌ها را دارند، می‌توانیم بررسی کنیم پذیرفتن این فرض ظاهراً ضعیف که توابع، مشتق‌پذیرند چه محدودیتی را ایجاد می‌کند. بعلاوه بخش ۷.۶ را ببینید.

تمرین ۷.۳ فرمول را برای  $g''(z)$  اثبات کنیم.

تمرین ۷.۴ دانشجویی ادعا می‌کند که اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty, \quad z \in D$$

$M_n$  مستقل از  $z$ ، آنگاه  $\sum u_n(z)$  به طور یکنواخت در  $D$  همگرا است. این ادعا را بررسی کنید.

تمرین ۷.۵ با مفروضات فرمول کوشی، انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \frac{dw}{w-z}$$

را محاسبه کنید.

تمرین ۷.۶ فرض کنید  $|f(z)| \leq M$  روی محیط مربعی به ضلع  $l$ ،  $z_0$  را مرکز مربع بگیرید. اگر  $f$  در مربع تحلیلی باشد، نشان دهید  $|f'(z_0)| \leq \frac{4M}{\pi l}$ .

دو قضیه زیر معروف و بسیار مفید می‌باشند.

نامساوی کوشی: فرض می‌کنیم  $f$  در  $|z - z_0| \leq r$  تحلیلی و  $M = \max |f(z)|$  روی  $|z - z_0| \leq r$  اگر ضرایب سری تیلور  $f$  حول  $z_0$  باشد، آنگاه  $|a_n| \leq Mr^{-n}$ .

می‌دانیم:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w) dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

بنابراین، با استفاده از نامساوی ۵.۳، داریم

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot M \cdot \frac{1}{r^{n+1}} = Mr^{-n}$$

یک تابع که در تمام صفحه با پایان تحلیلی باشد تام<sup>۱</sup> نامیده می‌شود.

قضیه لئوویل: یک تابع تام که در تمام صفحه با پایان کراندار باشد، ثابت است.

برای اثبات، فرض می‌کنیم  $|f(z)| \leq M$  برای هر  $z$ ،  $R$  را چنان می‌گیریم که  $R > |z|$  و

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} f(w) \left( \frac{1}{w-z} - \frac{1}{w} \right) dw \\ &= \frac{z}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw \end{aligned}$$

در این صورت داریم:

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|MR}{R(R-|z|)}$$

به ازای هر  $z$ ، وقتی  $R \rightarrow \infty$  طرف راست به صفر نزدیک می‌شود، و بنابراین برای هر  $z$ ،  $f(z) - f(0) = 0$ .

تمرین ۷.۷. اگر  $P$  یک چندجمله‌ای با درجه حداقل ۱ و بدون ریشه باشد، قضیه لئوویل را برای  $\frac{1}{P(z)}$  به کار ببرید و به تناقض برسید. (تمرین ۱.۲۳ را ببینید.) این مطلب قضیه اساسی جبر را دوباره ثابت می‌کند.

تمرین ۷.۸. فرض می‌کنیم  $f$  تام و  $A$  و  $c$  اعداد ثابتی باشند که به ازای  $|z| \geq A$ ،  $|f(z)| \leq |z|^c$  نشان دهید  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $c$  است.

تمرین ۷.۹. نشان دهید اگر کراندار بودن  $f$  با کراندار بودن

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

جابجا شود، قضیه لئوویل برقرار است.

تمرین ۷.۱۰. نشان دهید اگر  $f$  در  $|z| < 1$  تحلیلی باشد و  $|f(z)| \leq 1 - |z|$ ، آنگاه  $f(z) \equiv 0$ .

تمرین ۷.۱۱ آیا یک تابع تحلیلی به ازای  $|z| < 1$  می‌تواند در رابطه  $\frac{1}{1-|z|} |f(z)| \geq$  صدق کند؟

تمرین ۷.۱۲ (مشتق از مرتبه بی‌پایان) فرض کنیم  $f(z)$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی باشد و  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(z) = g(z)$  بطور یکنواخت در  $|z| \leq R$ . نشان دهید روی  $|z| \leq R$ ،  $g(z) = ce^z$  که  $c$  ثابت است (راهنمایی:  $[f^{(n)}(z)]'$  چیست؟)

### تمرینهای تکمیلی

۱ - اگر  $\sum M_n$  یک سری همگرا از اعداد ثابت باشد و  $u_n(z) \leq M_n$ ، آیا  $\sum u_n(z)$  لزوماً همگرای یکنواخت است؟

۲ - اگر هر  $u_n(x)$  روی  $0 \leq x \leq 1$  پیوسته و روی  $0 \leq x < 1$  همگرای یکنواخت باشد، آیا  $u_n(x)$  لزوماً روی  $0 \leq x \leq 1$  همگرای یکنواخت است؟

۳ - آیا دنباله  $\{[4x(1-x)]^n\}$  روی  $0 < x < 1$  همگرای یکنواخت است؟

۴ - دنباله‌های  $\{x^n(1-x^n)\}$  و  $\{nx^n(1-x^n)\}$  هر دو روی  $0 \leq x \leq 1$  به صفر همگرای نقطه‌ای می‌باشند. آیا هیچ یک از دنباله‌ها همگرای یکنواخت است؟

۵ - قضیه لئوویل را از نامساوی کوشی بدست آورید.

۶ - توضیح دهید چرا  $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$  تمرین ۷.۸ را به ازای  $c = \frac{1}{3}$  نقض نمی‌کند.

۷ - فرض کنیم  $f$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی است. تعریف می‌کنیم:  $F_1(z) = \int_0^z f(w) dw$  و  $F_n(z) = \int_0^z F_{n-1}(w) dw$ . چه نتیجه‌ای (در صورت وجود) از فرض  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = g(z)$  بطور یکنواخت روی  $|z| \leq R_1 < R$  می‌توانید بدست آورید؟

### ۷.۴ همگرایی یکنواخت دنباله‌های توابع تحلیلی

یادآور می‌شوم که دنباله  $\{f_n\}$  از توابع روی مجموعه  $S$  همگرای یکنواخت است اگر

$$\sup_{z \in S} |f_n(z) - f_m(z)| \rightarrow 0$$

هرگاه  $m, n \rightarrow \infty$ ؛ و  $\{f_n\}$  روی  $S$  همگرای یکنواخت به  $f$  است اگر

$$\sup_{z \in S} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0$$

هرگاه  $n \rightarrow \infty$ .

یک سری از توابع، همگرایی یکنواخت است اگر دنباله مجموع جزئی آن همگرایی یکنواخت باشد. (با بخش ۳.۴ مقایسه کنید.)

احتمالاً می‌دانید که حد یک دنباله همگرایی یکنواخت از توابع پیوسته، پیوسته است. برای توابع تحلیلی، نتیجه بسیار قوی‌تری داریم. احتمالاً، با عباراتی که به سادگی به یاد بمانند، داریم: حد یک دنباله همگرایی یکنواخت از توابع تحلیلی، تحلیلی است. این مطلب خلاصه یک قضیه دقیقتر است.

**قضیه همگرایی یکنواخت:** اگر توابع  $f_n$  (از  $n$ -ای به بعد)، همگی در ناحیه همبند ساده  $D$  تحلیلی، و  $\{f_n\}$  روی خم ساده بسته  $C$  در  $D$  همگرایی یکنواخت باشند، آنگاه  $\{f_n\}$  در ناحیه  $S$  داخل  $C$  به تابع تحلیلی  $f$  همگرا است. علاوه  $f' \rightarrow f'_n$  بطور یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده از  $S$ ، و در نتیجه  $f'(z) \rightarrow f'_n(z)$  به ازای هر  $z$  در  $S$ .

بطور خلاصه، از یک سری همگرایی یکنواخت از توابع تحلیلی می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت. قضیه همگرایی یکنواخت به ما می‌گوید همگرایی روی  $C$  به داخل کشانده می‌شود. بعداً خواهیم دید (و حالا می‌توان اثبات کرد) که همگرایی به خارج نیز انتقال می‌یابد (بخش ۲۸.۴ را ببینید): اگر  $f_n$  تحلیلی و بطور یکنواخت کراندار باشد، و  $\{f_n\}$  روی یک زیرمجموعه از  $D$  که دارای یک نقطه حدی در داخل  $D$  است، همگرا باشد آنگاه  $\{f_n\}$  روی هر زیرمجموعه فشرده از  $D$  همگرایی یکنواخت است. به خصوص، چون یک سری توانی روی هر زیرمجموعه فشرده از گوی (باز) همگرایی خود، همگرایی یکنواخت است، نتیجه می‌گیریم که از یک سری توانی می‌توان جمله به جمله در داخل گوی همگرایی (نه لزوماً در گوی بسته) مشتق گرفت چنان که در بخش ۳.۳ ادعا کردیم.

به تفاوت این مطلب با وضعیت متناظر روی اعداد حقیقی توجه کنید، در آنجا یک سری همگرایی یکنواخت می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. اما لزوماً نمی‌توان جمله به جمله مشتق گرفت. برای اثبات قضیه همگرایی یکنواخت، با استفاده از فرمول کوشی  $f_n(z)$  را برای  $z$  در داخل  $C$  می‌نویسیم:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w)}{w-z} dw$$

بنابراین:

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w) - f_m(w)}{w-z} dw$$

چون مسیر  $C$  یک مجموعه بسته است که شامل  $z$  نیست، فاصله مثبت  $\delta$  بین  $z$  و مسیر  $C$  وجود دارد. از این رو

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \cdot (\text{طول } C) \cdot \sup_{w \in C} |f_n(w) - f_m(w)|$$

که یعنی  $\{f_n(z)\}$  همگراست. بعلاوه اگر  $z$  به یک زیرمجموعه فشرده  $T$  از  $S$  منحصر شود، فاصله بین  $T$  و مسیر  $C$  مثبت است. بنابراین همگرایی روی  $T$  یکنواخت است. اگر  $f_n \rightarrow f$ ، همچنین داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

پس  $f$  با فرمول کوشی ارائه شده و در نتیجه تحلیلی است (بخش ۷.۳ را ببینید). همچنین می‌دانیم

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw$$

و

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

بنابراین

$$|f'_n(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi\delta^2} (\text{طول } C) \cdot \sup_{w \in C} |f_n(w) - f_n(z)| \rightarrow 0$$

که این همگرایی یکنواخت  $\{f'_n\}$  به  $f'$  را ثابت می‌کند.

## ۷.۵ توابع تعریف شده بر حسب انتگرال با یک پارامتر

در بخشهای ۶.۶ و ۷.۳ قضیهٔ مِهره‌را ثابت کردیم، که اگر  $D$  ناحیهٔ همبند ساده‌ای باشد و به ازای هر خم سادهٔ بستهٔ  $C$ ،  $\int_C f(w) dw = 0$ ، آنگاه  $f$  در  $D$  تحلیلی است. این مطلب به عنوان عکس قضیهٔ کوشی ممکن است جالب اما تا اندازه‌ای غیرعملی به نظر بیاید، چگونه می‌توان فرضها را تأمین کرد؟ اینجا می‌خواهیم یکی از کاربردهای قضیهٔ مِهره‌را را برای نتایج نشان دهیم که اگر قضیه را به کار ببریم نسبتاً پیچیده می‌شود. به جای ارائهٔ قضیه در حالت کلی مطلب را با چند مثال خاص بررسی می‌کنیم. به لیمی نیاز داریم که به راحتی می‌توانید آن را ثابت کنید.

تمرین ۷.۱۳ نشان دهید که اگر  $\varphi$  تحلیلی در تمام صفحهٔ با پایان و  $g$  پیوسته روی  $[a, b]$  باشد،

$$\text{آنگاه } \int_a^b g(t) \varphi(zt) dt \text{ پیوسته است.}$$

حالا فرض کنید  $g$  روی  $[0, 1]$  پیوسته باشد و تعریف کنید  $F(z) = \int_0^1 g(t) \sin zt dt$ . نشان می‌دهیم  $F'$  در تمام صفحه با پایان تحلیلی است.

بنا به تمرین ۷.۱۳، برای هر خم بستهٔ  $C$

$$\int_C F(z) dz = \int_C \left\{ \int_0^1 g(t) \sin zt dt \right\} dz = \int_0^1 g(t) \left\{ \int_C \sin zt dz \right\} dt = 0$$

زیرا به ازای هر  $t$ ،  $\sin zt$  یک تابع تحلیلی از  $z$  است. تغییر ترتیب انتگرال‌گیری مجاز است زیرا اگر انتگرالها را بر حسب پارامتر روی  $C$  بنویسیم، می‌توانیم از قضایای مقدماتی تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، در انتگرال‌گیری مکرر استفاده کنیم.

به وضوح می‌توان  $[0, 1]$  را با هر بازه متناهی و  $\sin zt$  را با هر تابع پیوسته  $f(z, t)$  (به مفهوم دوبعدی) از  $z$  و  $t$  و به ازای هر  $t$  تحلیلی بر حسب  $z$  جایگزین کرد.  
یک انتگرال از نوع

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt$$

یک تبدیل لاپلاس نامیده می‌شود. اکنون، حداقل وقتی که  $\varphi$  پیوسته با شرط  $|\varphi(t)| \leq Ae^{ct}$  باشد، نشان می‌دهیم که تبدیل لاپلاس  $F$  در نیم‌صفحه  $\operatorname{Re} z > c$  تحلیلی است. برای  $x = \operatorname{Re} z > c$  و همه اعداد مثبت  $R$  و  $S$ ، با  $0 < R < S$  داریم:

$$\left| \int_R^S e^{-zt} \varphi(t) dt \right| \leq A \int_R^S e^{-xt} e^{ct} dt$$

در نتیجه، اگر  $\operatorname{Re} z > c + \delta$ ،  $\delta > 0$ ، انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt$$

به طور یکنواخت همگراست و در نتیجه با توجه به قضیه همگرایی یکنواخت (بخش ۷.۴) یک تابع تحلیلی از  $z$  است. تأکید می‌کنم که قضیه همگرایی یکنواخت فقط برای دنباله‌ها اثبات شده است، پس می‌توانیم دنباله زیر را در نظر بگیریم

$$\left\{ \int_0^n e^{-zt} \varphi(t) dt \right\}_{n=0}^{\infty}$$

تمرینهای تکمیلی

۱ - فرض کنید  $g$  در گوی واحد تحلیلی باشد. آیا

$$F(z) = \int_0^z g(t) \sin(z+t) dt$$

تحلیلی است، در این صورت در چه دامنه‌ای؟

۲ - سؤال ۱ را برای

$$F(z) = \int_0^{\infty} (\sin zt) g(t) dt$$

جواب دهید به شرطی که  $\int_0^{\infty} |g(t)| dt$  همگرا باشد.

۳ - اگر  $F(x) = \int_0^x f(x+t) dt$  و  $f$  تحدید یک تابع تام روی محور حقیقی باشد، آیا  $F$  نیز تحدید یک تابع تام است؟

## ۷.۶ سری تیلور

می‌توانیم با به‌کارگیری فرمول انتگرال کوشی، برای دایره  $C$ ، ثابت کنیم که اگر  $f$  در نقطه  $z$  تحلیلی باشد (به خاطر بیاورید که این بدان معناست که  $f$  در یک همسایگی  $z$  تحلیلی است)، آنگاه  $f$  همیشه بوسیله سری تیلور خودش در یک گوی به مرکز  $z$  نشان داده می‌شود.

برای انجام این کار، مجدداً از

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{w - z}$$

شروع می‌کنیم که در آن  $C$  پیرامون گوی به مرکز  $z$  واقع در ناحیه همبند ساده  $D$  است و  $f$  در آن تحلیلی می‌باشد و  $z$  درون  $C$  واقع است.

ایده بحث این است که اگر «هسته»  $(w - z)^{-1}$  را برحسب یک سری از توابعی که روی  $C$  بطور یکنواخت همگرا هستند بسط دهیم، می‌توانیم جمله به جمله انتگرال‌گیری کنیم و بسطی برای  $f(z)$  بدست آوریم. این یک روش مؤثر برای بدست آوردن انواع گوناگون بسطهای توابع است. در حالت اخیر چون یک سری از توانهای  $(z - z_0)$  را می‌خواهیم، به دنبال بسطی از  $(s - z)^{-1}$  برحسب توانهای  $(z - z_0)$  هستیم. احتمالاً این‌که این بسط چیست فوراً مشاهده نمی‌شود. اما، اگر ابتدا ساده‌ترین حالت را با  $z_0 = 0$  در نظر بگیریم، داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{w - z}$$

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

که در آن سری برای  $w$  روی  $C$  همگرای یکنواخت است و اگر  $z$  در درون هر گوی بسته به مرکز صفر و کاملاً در  $C$  باشد نسبت به  $w$  و  $z$  همگرای یکنواخت است، چون در این صورت  $\left|\frac{z}{w}\right|$  کمتر از عددی کوچکتر از ۱ است. از آنجا که در حالت کلی داریم

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

در اینجا  $1 < \frac{|z - z_0|}{|w - z_0|}$  و اگر  $z$  در گویی که کاملاً درون  $C$  قرار دارد در نظر گرفته شود سری همگرای یکنواخت است. اکنون می‌توانیم این سری را به جای  $(w - z)^{-1}$  در فرمول انتگرال کوشی جایگزین کنیم و جمله به جمله انتگرال بگیریم، برای  $z$  درون  $C$  بدست می‌آوریم.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_C \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}}$$

بنا به فرمول کوشی برای مشتق در بخش ۷.۳ داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

در سمت راست، فرمول معمولی ضرایب سری تیلور  $f$  را داریم. هم‌اکنون نیز روشی برای بیان ضرایب برحسب انتگرالها داریم.

حالا ثابت کرده‌ایم که هر تابع تحلیلی حول هر نقطه‌ای که در آن تحلیلی است بطور موضعی برحسب بسط تیلور خود، نمایش داده می‌شود؛ در واقع، سری تیلور در بزرگترین گوی به مرکز هر نقطه‌ای که تابع در آن تحلیلی است، همگراست.

بعلاوه راه دیگری برای پیدا کردن ضرایب یک سری توانی داریم. به عبارت دیگر، اگر دربارهٔ انتگرالده اطلاع کافی داشته باشیم می‌توانیم آن را به عنوان روشی برای محاسبهٔ نوع خاصی از انتگرالها به کار ببریم.

تمرین ۷.۱۴ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{|w|=1} \frac{\sin w dw}{(w - \frac{\pi}{4})^3}$$

تمرین ۷.۱۵ انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{|w|=2} \frac{e^{\pi w} dw}{(w - 1)^2}$$

## ۷.۷ ریشه‌های توابع تحلیلی

اکنون می‌دانیم که اگر  $f$  در  $z_0$  تحلیلی باشد آنگاه  $f(z)$  بوسیلهٔ سری تیلور خود در یک همسایگی  $z_0$  نمایش داده می‌شود. اگر چنانچه  $f(z_0) = 0$ ، می‌گوییم که  $f$  در  $z_0$  یک ریشه دارد، و در این صورت سری تیلور به شکل زیر است

$$f(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

بعضی از  $a_k$  ها صفر نیستند، مگر اینکه در یک همسایگی  $z_0$ ،  $f(z) \equiv 0$ ؛ فرض کنیم  $a_n$  اولین ضریب غیرصفر باشد، در این صورت داریم

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

یعنی

$$f(z) = (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$



که در آن  $\varphi$  در  $z$  تحلیلی است (چون مجموع یک سری توانی است) و  $a_n \neq 0$   $\varphi(z_0) =$  چون  $\varphi$  پیوسته است، لذا در یک همسایگی از  $z$  داریم  $\varphi(z) \neq 0$ . در نتیجه در یک همسایگی از  $z$  (بجز در  $z$ ) داریم  $f(z) \neq 0$ . عدد  $n$  را مرتبه ریشه  $f$  در  $z$  گویند. توجه کنید که مرتبه حتماً یک عدد صحیح است.

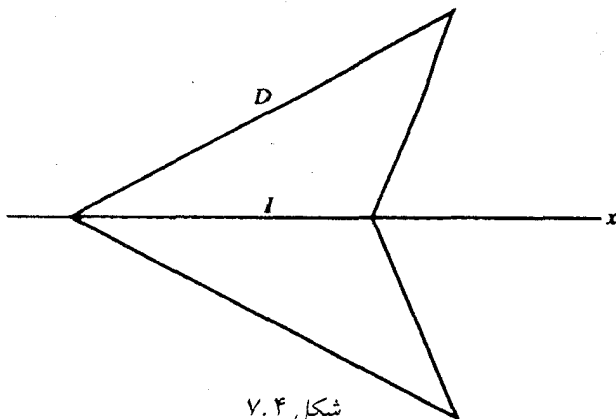
$z$  را می‌توانیم هر نقطه‌ای در نظر بگیریم که  $f$  در آن تحلیلی است؛ در نتیجه، می‌گوییم ریشه‌های یک تابع تحلیلی منفرد هستند. (اگر تابع در یک همسایگی یکی از آن نقاط متحد با صفر نباشد). این حکم، به تنهایی، ما را از عدم وجود یک نقطه حدی برای ریشه‌های منفرد  $f$  مطمئن نمی‌کند. اما اگر  $f$  دارای یک مجموعه از ریشه‌ها با نقطه حدی  $z$  باشد که در آن  $f$  تحلیلی است، آنگاه از پیوستگی نتیجه می‌گیریم که  $f(z_0) = 0$ .

فرض کردیم که  $f(z)$  در یک همسایگی  $z$ ، متحد با صفر نیست. اکنون نشان می‌دهیم اگر  $f(z) \equiv 0$  در یک همسایگی  $z$ ، آنگاه در سراسر هر ناحیه  $D$  شامل  $z$  که  $f$  در آن تحلیلی است،  $f(z) \equiv 0$ . در غیر این صورت، باید نقطه  $z_1$  در  $D$  وجود داشته باشد که  $f(z_1) \neq 0$ . فرض کنید  $S$  بزرگترین زیرمجموعه همبند  $D$  شامل  $z$  باشد که در آن  $f(z) = 0$ . اگر  $S$  همه  $D$  نباشد،  $S$  دارای یک نقطه مرزی  $z_2$  در  $D$  است. چون  $S$  همبند است،  $z_2$  یک نقطه منفرد  $S$  نیست؛ در نتیجه  $f(z_2) = 0$ . چون  $z_2$  یک نقطه حدی  $S$  است، در یک همسایگی  $z_2$ ،  $f(z) \equiv 0$ ؛ اما  $z_2$  نقطه مرزی است، لذا نقاط به دلخواه نزدیک به آن وجود دارند که در  $S$  نیستند. این یک تناقض است، بنابراین  $S$  باید همه  $D$  باشد، و  $f(z) \equiv 0$  در  $D$ . بنابراین می‌توانیم بگوییم:

ریشه‌های یک تابع تحلیلی منفرد هستند مگر اینکه تابع ثابت صفر باشد.

این مطلب نتیجه می‌دهد که اگر  $f$  و  $g$  هر دو در ناحیه  $D$  تحلیلی باشند و  $f(z) = g(z)$  به ازای  $z = z_n$  که در آن  $\{z_n\}$  دارای یک نقطه حدی در  $D$  است، آنگاه  $f$  و  $g$  در  $D$  یکسان هستند. توجه کنید که اگر نقطه حدی روی مرز  $D$  باشد، نمی‌توانیم ثابت کنیم  $f \equiv g$ . به عنوان مثال، تابع  $\sin \pi z$  و تابع صفر در مجموعه اعداد صحیح دارای مقادیر یکسان هستند؛ و توابع  $\sin(\frac{\pi}{z})$  و صفر دارای مقادیر یکسان در  $\frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) هستند.

اصل انطباق که می‌گوید دو تابع تحلیلی یکسان هستند اگر روی یک مجموعه که دارای نقطه حدی متعلق به مجموعه است برابر باشند، دارای کاربردهای زیادی است. در اینجا یک مثال ساده را ارائه می‌دهیم. بدیهی است که چندجمله‌ای  $P$  با ضرایب حقیقی در نقاط مزدوج مقادیر مزدوج می‌گیرد، یعنی  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ . به همین نحو، اگر  $f(z)$  دارای نمایش سری توانی  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$  با  $a_k$  و  $c$  حقیقی باشد، آنگاه در گوی همگرایی  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ . اکنون می‌توانیم مطلبی را که بسیار پذیرفتنی



شکل ۷.۴

اما کمتر واضح است ثابت کنیم، یعنی اگر  $f$  در ناحیه  $D$  که شامل یک بازه  $I$  از محور حقیقی است و نسبت به این محور متقارن است تحلیلی باشد (شکل ۷.۴)، و  $f(z)$  روی  $I$  حقیقی باشد، آنگاه  $f$  در نقاط مزدوج  $D$  مقادیر مزدوج می‌گیرد (حتی وقتی  $D$  یک گوی نیست). از تمرین ۲.۵ به یاد دارید که اگر  $f$  در معادلات کوشی-ریمان در ناحیه  $S$  صدق کند آنگاه تابع  $g$  روی قرینه  $S$  نسبت به محور حقیقی با معادله  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کند. در بحث ما،  $S$  و قرینه‌اش هر دو  $D$  هستند. لذا  $f$  و  $g$  در  $D$  تحلیلی و روی  $I$  یکسان هستند، بنابراین آنها در  $D$  یکسان‌اند.

به عنوان کاربردی دیگر، فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم اتحاد  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  را می‌توانیم به همه اعداد مختلط توسعه دهیم. البته می‌توانستیم برای اثبات اتحاد سریهای توانی متناظر را درهم ضرب کنیم. اما ساده‌تر است که تابع تحلیلی  $f(z) = \sin 2z - 2 \sin z \cos z$  را در نظر بگیریم.  $f$  در تمام صفحه تحلیلی و روی محور حقیقی برابر با صفر است (صفر شدن در  $0 < x < \pi$  کافی خواهد بود)، و لذا بنا بر اصل انطباق،  $f(z) \equiv 0$ .

تمرین ۷.۱۶ نشان دهید (بدون مراجعه به سری توانی یا فرمول اوایلر) که

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

### تمرینهای تکمیلی

۱ - نشان دهید که اتحادهای بخش ۴.۵ در تمرین تکمیلی ۶ صفحه ۳۶ معتبر هستند اگر  $\theta$  با هر  $z$  که به ازای آن، فرمولها معنا دهند عوض شود.

۲ - نشان دهید برای همه  $z$  های مختلط

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right)^k = e^z$$

۳ - فرض کنید برای هر  $n = 1, 2, \dots$  هرگاه  $f_n(z) \rightarrow L_n$  ،  $z \rightarrow z_0$  و  $|f_n(z)| \leq M_n$  ، ازای هر  $z$  و  $\sum M_n < \infty$  . نشان دهید که اگر  $P = P(z) \rightarrow \infty$  وقتی  $z \rightarrow z_0$  آنگاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_p(z)\} = \sum L_n$$

می‌توانید همه  $f_n(z)$  ها را در ناحیه مشترک  $D$  تحلیلی فرض کنید.

## ۷.۸ تابع گاما

تابع گاما به وسیله فرمول زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad , \quad \operatorname{Re} z > 0$$

این نخستین تابع صریح غیرمقدماتی ما است. برای دیدن اینکه  $\Gamma$  به ازای  $\operatorname{Re} z > 0$  تحلیلی است، لازم است بدانیم انتگرال (در ابتدا و انتها وقتی  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ) روی هر زیرمجموعه فشرده در نیم‌صفحه سمت راست، همگرایی یکنواخت است. اثبات بسیار شبیه اثباتی است که در بخش ۷.۵ برای تبدیل لاپلاس ارائه شد. اما جزئیات پیچیده‌تر بوده و چندان جالب نیستند، بنابراین آنها را حذف می‌کنیم. به راحتی، به ازای  $n$  صحیح و مثبت و یا صفر داریم  $\Gamma(n+1) = n!$  . در واقع، ظاهراً در ابتدا تابع  $\Gamma$  به عنوان یک تابع پیوسته که با فاکتوریل‌ها سر و کار دارد، شناخته شده است. به همین دلیل گاهی به جای  $\Gamma(x+1)$  ،  $x!$  نوشته می‌شود. اثبات اینکه  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  ، برای  $\operatorname{Re} z > 0$  کار سختی نیست. برای انجام این کار

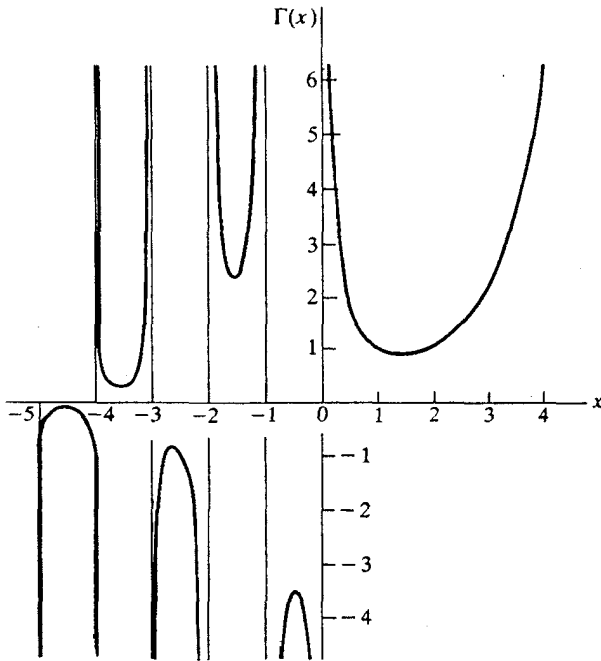
$$\int_0^R t^{z-1} e^{-t} dt$$

را در نظر بگیرید و به روش جزء به جزء انتگرال‌گیری کنید، با مشتق‌گیری از  $e^{-t}$  و تابع اولیه‌گیری از  $t^{z-1}$  ، به دست می‌آوریم

$$z^{-1} e^{-t} t^z \Big|_0^R + \frac{1}{z} \int_0^R t^z e^{-t} dt$$

وقتی  $R \rightarrow \infty$  ، عبارت تابع اولیه حذف می‌شود زیرا  $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R} R^z = 0$  و انتگرال برابر با  $\Gamma(z+1)$  می‌شود. لذا وقتی  $\operatorname{Re} z > 0$  برای تابع گاما معادله تابعی  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  را داریم. اکنون می‌توانیم  $\Gamma(z)$  را برای  $0 < \operatorname{Re} z < 1$  - با استفاده از معادله  $\Gamma(z) = z^{-1}\Gamma(z+1)$  تعریف کنیم. می‌توانیم این روش را تکرار کنیم و  $\Gamma(z)$  را به نوارهای متوالی  $-n < \operatorname{Re} z < -n+1$  توسعه دهیم. شکل ۷.۵ را برای نمودار<sup>۳</sup> مقادیر حقیقی  $z$  مشاهده کنید.

در زیر خواهیم دید که تابع  $\Gamma$  در صفحه با پایان بجز در صفر و نقاط صحیح منفی تحلیلی است؛ همچنین  $\Gamma(z)$  هرگز صفر نیست و در نتیجه  $\frac{1}{\Gamma}$  یک تابع تام است.



شکل ۷.۵ تابع  $\Gamma$  برای  $x$  حقیقی

اکنون می‌خواهیم یک فرمول مفید برای تابع گاما با استفاده از برخی روشهای زیرکانه انتگرالگیری قرن هیجدهم ارائه دهیم. با فرمول زیر شروع می‌کنیم

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad , \quad p > 0$$

و با فرض  $t = y^x$  بدست می‌آوریم

$$\Gamma(p) = x \int_0^{\infty} y^{xp-1} e^{-y^x} dy$$

و به همین نحو

$$\Gamma(q) = x \int_0^{\infty} x^{xq-1} e^{-x^x} dx$$

لذا

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = x^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{xq-1} y^{yp-1} e^{-(x^x+y^y)} dx dy$$

اکنون انتگرال دوگانه را در مختصات قطبی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^\tau} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta)^{\tau q-1} (r \sin \theta)^{\tau p-1} d\theta \\ &= \int_0^\infty r^{\tau p+\tau q-1} e^{-r^\tau} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\tau q-1} (\sin \theta)^{\tau p-1} d\theta \\ &= \tau \Gamma(p+q) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\tau q-1} (\sin \theta)^{\tau p-1} d\theta\end{aligned}$$

در اینجا اگر  $p = q = \frac{1}{\tau}$  بگیریم، بدست می‌آوریم

$$\int_0^\infty e^{-x^\tau} dx = \frac{1}{\tau} \pi^{\frac{1}{\tau}}$$

بعد فرض کنید  $x = \sin^\tau \theta$  و  $1-x = \cos^\tau \theta$  و  $dx = \tau \sin \theta \cos \theta$

$$\tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{\tau q-1} (\sin \theta)^{\tau p-1} d\theta = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

انتگرال اخیر تابع بتا  $B(p, q)$  است. حالا فرض کنید  $x = \frac{y}{1+y}$ ؛ آنگاه داریم

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1} dy}{(1+y)^{p+q}}$$

بنابراین بطور اتفاقی ثابت کرده‌ایم که

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

هرگاه  $0 < p < 1$  و  $q = 1-p$  داریم

$$\int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{1+y} dy = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

انتگرال سمت چپ مستقیماً در بخش ۱۱.۱ محاسبه خواهد شد: و وقتی  $0 < p < 1$ ، برابر با  $\frac{\pi}{\sin \pi p}$  است. بنابراین داریم

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad 0 < z < 1$$

طبق اصل انطباق، این معادله برای همه  $z$  هایی که توابع مربوطه، تحلیلی هستند برقرار است.

خصوصاً، می‌توانیم  $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$  را بگیریم و بدست آوریم  $\Gamma(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ . همچنین نتیجه می‌شود که  $\Gamma(z)$  هرگز صفر نیست، زیرا  $\Gamma(1-z) = \infty$  تنها وقتی که  $z = 0, 1, 2, \dots$ ، بعلاوه

$$\Gamma(z) \sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)}$$

قتیکه  $z \rightarrow 0$ ، یا

$$z \rightarrow 0 \text{ وقتی } z\Gamma(z) \frac{\sin \pi z}{\pi z} \rightarrow 1$$

چون  $1 \rightarrow \sin \pi z (\pi z)^{-1}$ ، داریم  $z\Gamma(z) \rightarrow 1$  وقتی  $z \rightarrow 0$ .

تمرین ۷.۱۷ نشان دهید  $\Gamma$  روی خط  $\text{Re } z = 0$  بجز در  $z = 0$  تحلیلی است.

### تمرینهای تکمیلی

۱ -  $\Gamma(\frac{2}{3})$  و  $\Gamma(-\frac{5}{3})$  را محاسبه کنید.

۲ -  $\Gamma(1/3) = 0.89747$  داده شده است،  $\Gamma(5/3)$  و  $\Gamma(-3/7)$  را بدست آورید.

۳ - نشان دهید که برای  $x > 0$ ،  $\Gamma''(x) > 0$  و بنابراین برای  $x$  های مثبت، نمودار  $\Gamma(x)$  تنها دارای یک نقطه می‌نیم است.

### ادداشت:

۱ - توابع تام، را توابع انتگرالی نیز می‌نامند، خصوصاً در کاربرد انگلیسی.

۲ - در واقع، چنانکه در بخش ۲۸.۴ خواهیم دید همگرایی  $\{f_n\}$  نه تنها در  $S$ ، بلکه در هر زیرمجموعه فشرده از  $D$  یکنواخت است.

۳ - نمودارهای دقیق‌تری از توابع گاما در تعدادی از منابع قابل دسترسی است. از آن جمله

E.P.R. Duval, "Graphs of the Functions  $\Gamma$  and  $\Psi$ ," *Ann. Math.* (2)

5 (1904): 64, 65.

که در کتاب Widder، صفحه ۳۷۰؛ و نیز در کتاب *Solutions*، نوشته M.L. Beas، صفحه ۳۴۷ و در کتاب Sibagaki صفحه ۸۷ مجدداً ارائه شده‌اند. با وجود این، نمودار این تابع در بسیاری از کتابهای مرجع به ازای  $x$  های منفی صحیح نیست. تابع گاما برای  $1 \leq x \leq 2$  جدول‌بندی شده و به ازای مقادیر حقیقی دیگر به راحتی از معادله تابعی بدست می‌آید.

## ۸. نقاط منفرد تکین

### ۸.۱ مثالهایی از نقاط تکین

نقطه تکین تابع  $f$  نقطه‌ایست که  $f$  در آن تحلیلی نیست، مثلاً، صفر برای  $f(z) = \frac{1}{z}$  یا  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ . صفر برای  $f(z) = \frac{z}{z}$  و  $f(z) = z^{-1} \sin z$ ، مثالهای دیگری می‌باشند. روشن است که تفاوتی بین دو مثال اول و دو مثال دوم وجود دارد. اگرچه هیچ‌یک از چهار تابع در نقطه صفر تحلیلی نیستند، زیرا در آن نقطه تعریف نشده‌اند، دو مثال دوم وقتی  $z \rightarrow 0$  به سمت حدی میل می‌کنند و اگر آنها را در صفر برابر با حدشان تعریف کنیم در صفر تحلیلی می‌شوند:  $1 = \frac{z}{z}$  و  $z^{-1} \sin z$  بوسیله مجموع سری

$$1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

تعریف می‌شود. از طرف دیگر،  $\frac{1}{z}$  وقتی  $z \rightarrow 0$  دارای حد با پایان نیست؛ و  $e^{\frac{1}{z}}$  وقتی  $z \rightarrow 0$ ، حد ندارد.

تمرین ۸.۱ نشان دهید  $e^{\frac{1}{z}}$  وقتی  $z \rightarrow 0$  به حدی میل نمی‌کند. (رفتار آن را روی اعداد حقیقی و اعداد موهومی محض وقتی  $z \rightarrow 0$  بررسی کنید.)

اینکه بگوییم  $\frac{z}{z}$  در نقطه صفر دارای نقطه تکین است قدری مصنوعی یا حتی تنگ‌نظرانه می‌آید: نقطه تکین فقط به این دلیل به وجود آمده که تابع را با فرمول مناسبی تعریف نکرده‌ایم. وجود نقطه تکین برای  $z^{-1} \sin z$  خیلی پیچیده نیست؛ اگر  $\sin z$  را برحسب سری مک‌لورن تعریف کرده بودیم، چنین موردی پیش نمی‌آمد.

در این مثالها، با توابعی سر و کار داریم که در همسایگی «محذوف» نقطه تکین تحلیلی هستند، یعنی در گویی به مرکز نقطه‌ای، که خودش حذف شده است. در این شرایط نقطه را یک نقطه تکین منفرد تابع می‌نامیم. نقاط تکین چهار مثال ارائه‌شده منفردند، اما می‌توان توابعی تحلیلی ارائه داد که دارای نقاط تکین غیرمنفرد باشند.

تمرین ۸.۲ نشان دهید نقطه تکین  $\tan(\frac{1}{z})$  در صفر منفرد نیست.

### ۸.۲ دسته‌بندی نقاط تکین منفرد

ظاهراً تمیز دادن سه نوع نقطه تکین منفرد مفید به نظر می‌رسد. فرض کنید  $z$  نقطه تکین باشد.

۱ -  $f(z)$  در همسایگی از  $z$  کراندار است.

۲ -  $|f(z)| \rightarrow \infty$  وقتی که  $z \rightarrow z_0$ .

۳ - هر امکان دیگری، (یعنی،  $|f(z)|$  کراندار نیست اما  $|f(z)| \not\rightarrow \infty$ ).

در حالت اول نقطه تکین را برداشتی می‌نامند. دلیل اطلاق این واژه اینست که (چنانکه نشان می‌دهیم) در این حالت  $f(z)$  یقیناً به حد (با پایان) نزدیک می‌شود وقتی که  $z \rightarrow z_0$  و تکین بودن از بین می‌رود اگر  $f(z_0)$  برابر با همین حد تعریف شود.

### ۸.۳ حذف نقطه تکین برداشتی

قضیه زیر بیان می‌کند که نه تنها می‌توانیم نقطه تکین برداشتی را حذف کنیم، بلکه روش انجام این کار را نیز می‌گوید.

قضیه ریمان درباره نقاط تکین برداشتی: اگر  $f$  روی همسایگی محذوف  $z_0$  تحلیلی و کراندار باشد آنگاه  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  وجود دارد؛ اگر  $f(z)$  برابر با این حد تعریف شود آنگاه  $f$  در  $z_0$  تحلیلی است.

برای اثبات قضیه، فرض کنید  $g$  تابع  $g$  با

$$g(z_0) = 0, \quad g(z) = (z - z_0)^2$$

تعریف شده باشد. می‌توانیم نشان دهیم  $g$  در  $z_0$  تحلیلی است. در واقع روشن است که  $g'$  به ازای هر  $z \neq z_0$  وجود دارد. داریم  $g'(z_0) = 0$  زیرا

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \rightarrow 0$$

وقتی که  $z \rightarrow z_0$ . چون  $g$  در یک همسایگی از  $z_0$  مشتق‌پذیر است، در  $z_0$  تحلیلی است. اگر بسط سری تیلور  $g$  را در  $z_0$  بنویسیم، دو جمله اول صفراند، بنابراین

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 h(z)$$

که  $h$  در  $z_0$  تحلیلی است (زیرا همه سریهای توانی همگرا معرف توابع تحلیلی‌اند) بنابراین  $h(z) = (z - z_0)^2 f(z)$  از آنجا  $h(z) = f(z)$  برای  $z \neq z_0$ . بعلاوه  $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z)$  وجود دارد و لذا  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  وجود دارد. اگر  $f(z_0)$  برابر با این حد تعریف شود، داریم  $f(z) \equiv h(z)$  و بنابراین  $f$  در  $z_0$  تحلیلی است.



متذکر می‌شویم که کراندار بودن  $|f(z)|$  را می‌توانیم با  $f(z) = O(|z - z_0|)^{-c}$  و قتیکه  $0 < c < 1$  جایگزین کنیم. و قتیکه نقطه تکین برداشتی است اغلب آن را برداشته‌شده در نظر می‌گیریم حتی اگر صریحاً بیان نکنیم.

تمرین ۸.۳ کدامیک از توابع زیر در نقاط مشخص شده دارای تکین برداشتی است:

$$\pi \text{ در } \frac{\sin z}{(\pi - z)^2} \quad (۲) \qquad \pi \text{ در } \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2} \quad (۱)$$

$$z \cot g \text{ در صفر} \quad (۴) \qquad \frac{1 - \cos z}{z} \text{ در صفر} \quad (۳)$$

$$\frac{\sin z}{z^2 + z} \text{ در صفر} \quad (۶) \qquad \frac{e - z - z^2}{2 - z} \text{ در } ۲ \quad (۵)$$

$$\frac{\pi}{۲} \text{ در } \frac{\cos z}{1 - \sin z} \quad (۷)$$

برای تمرینهای اضافی در رابطه با موضوع این فصل به تمرین ۸.۴ مراجعه کنید.

## ۸.۴ قطب‌ها

اگر  $f(z) \rightarrow \infty$  و قتیکه  $z_0 \rightarrow z$ ، گوئی به مرکز  $z_0$  وجود خواهد داشت که  $0 < c < |f(z)|$ . فرض کنید در این گوی  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  را در نظر بگیرید. در گوی محذوف،  $g$  تحلیلی و کراندار است پس  $g$  باید دارای یک نقطه تکین برداشتی در  $z_0$  باشد. و تکین بودن با قرار دادن  $g(z_0) = 0$  برداشته می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم  $g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$ ، که در آن  $\varphi$  در نقطه  $z_0$  تحلیلی و  $\varphi(z_0) \neq 0$  (بخش ۷.۷ را ببینید). می‌گوئیم  $f$  در  $z_0$  دارای قطب از مرتبه  $n$  است؛ توجه کنید  $n$  باید عدد طبیعی مثبت باشد. اگر  $n = 1$ ، قطب ساده است. اگر  $n > 1$ ، مرتبه قطب مرتبه ریشه تابع  $g$  است، یا به عبارت دیگر کوچکترین عدد طبیعی  $n$  بطوریکه  $(z - z_0)^n f(z)$  در یک همسایگی  $z_0$  کراندار باشد. اصطلاح «قطب» به این دلیل استفاده می‌شود که نمودار  $|f(z)|$  در صفحه  $(x, y)$  به صورت میخ تیز یا قطب در  $z_0$  است. اگر مقادیر  $f$  روی کره ریمان باشد می‌توانیم بگوئیم که  $f(z_0) = \infty$ ، قطب شمال کره است (برداشت دیگری از کلمه «قطب»).

تابعی که در ناحیه‌ای بجز قطبها تحلیلی باشد روی آن ناحیه مرمورفیک نامیده می‌شود.

اکنون می‌بینیم که تابع گاما (بخش ۷.۸ را ببینید) یک تابع مرمورفیک است که نقاط  $0$  و  $-1$  و  $-2$  و  $\dots$  قطبهای ساده آن هستند.

تمرین ۸.۴ مرتبه قطبهای توابع زیر را در نقاط مشخص شده بیابید:

(الف)  $\frac{e^{z^2} - 1}{z^2}$  در صفر

(ب)  $\frac{\cos z - 1}{z^2}$  در صفر

(پ)  $\frac{z}{1 - \sin z}$  در صفر

(ت)  $\tan^2 z$  در  $\frac{\pi}{2}$

(ث)  $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n z^n$  در -۱

(ج)  $\frac{\cos z}{[\frac{\pi}{2} - z]^2}$  در  $\frac{\pi}{2}$

تمرینهای تکمیلی

تکین‌های برداشتنی یا قطبهای توابع زیر را در نقاط مشخص شده دسته‌بندی کنید. مرتبه هر قطب را بیابید.

۱ -  $\frac{z}{(\sin z)^2}$  در صفر

۲ -  $\frac{-1}{e^{z^2} - 1}$  در صفر

۳ -  $\frac{(\sin z)^2}{(z - \pi)^2}$  در  $\pi$

۴ -  $\frac{z \cos z - \sin z}{z^2}$  در صفر

۵ -  $\frac{1}{z} \int_0^z e^{t^2} dt$  در صفر

۶ -  $\frac{\pi^2 - z^2}{(\sin z)^2}$  در  $\pi$

۷ -  $\frac{z^2 - 4z + 4}{z - 2}$  در ۲

۸ -  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sin z)^n$  در  $\frac{\pi}{2}$

۹ -  $\frac{e^z}{z^2 - z - 6}$  در ۳

۱۰ -  $\frac{(e^z - 1)^2}{z^6}$  در صفر

## ۸.۵ نقاط تکین اساسی

نقاط تکین اساسی نقاط تکین منفردی هستند که نه قطب و نه نقاط تکین برداشتنی باشند. برای یک نقطه تکین اساسی  $z_0$ ، تابع  $f(z)$  روی دنباله‌های متفاوتی که به  $z_0$  میل می‌کنند به سمت حدهای مختلفی میل می‌کند. قضیه زیر حتی این حکم را قویتر می‌کند.

قضیه ویراشتراس کاسوراتی<sup>۲</sup>: در هر همسایگی یک نقطه تکین اساسی تابع  $f$ ،  $f(z)$  مقادیر به دلخواه نزدیک به هر عدد مختلط را می‌گیرد.

در واقع، فرض کنید عدد  $A$  وجود دارد بطوریکه مقادیر  $f$  (در همسایگی  $z_0$ ) همگی در حداقل  $\delta > 0$  فاصله از  $A$  هستند. یعنی در یک همسایگی از  $z_0$  داریم  $|f(z) - A| > \delta$ . بنابراین  $\frac{1}{|f(z) - A|}$  در همسایگی از  $z_0$  کراندار است، لذا  $z_0$  یک نقطه تکین برداشتنی می‌باشد و  $\frac{1}{[f(z) - A]}$  وقتیکه  $z \rightarrow z_0$  دارای حدی برابر با  $L$  است. اگر  $L = 0$ ،  $f(z) - A$  بی‌پایان می‌باشد و  $f$  دارای یک قطب است، که آن را برداشته‌ایم. اگر  $L \neq 0$ ،  $f(z) - A \rightarrow \frac{1}{L}$ ،  $f$  در  $z_0$  یک تکین برداشتنی دارد، که احتمالاً آن را نیز خارج کردیم.

مثلاً،  $e^{\frac{1}{z}}$  در هر همسایگی صفر دارای مقادیر بطور دلخواه نزدیک به هر عدد مختلط است. به این معنا که می‌توانیم دنباله‌ای از نقاط  $z_n$  بیابیم که  $z_n \rightarrow 0$  و  $e^{\frac{1}{z_n}} \rightarrow 1$  و روی دنباله دیگری  $e^{\frac{1}{z_n}} \rightarrow \infty$  و روی دنباله دیگری  $e^{\frac{1}{z_n}} \rightarrow 100$  و غیره.

بهر حال قضیه ویراشتراس-کاسوراتی به هیچ وجه همه رفتار بی‌نظم یک تابع تحلیلی را در همسایگی یک نقطه تکین اساسی بیان نمی‌کند. قضیه پیکارد که خارج از بحث این کتاب است بیان می‌کند که در هر همسایگی از  $z_0$  حداکثر دو نقطه در صفحه گسترش یافته وجود دارد که در واقع تابع آنها را بینهایت بار اختیار نمی‌کند. برای  $e^{\frac{1}{z}}$  این دو نقطه  $0$  و  $\infty$  هستند.

## ۸.۶ مانده‌ها

فرض کنید  $f$  تابعی با نقطه تکین منفرد، از هر نوع، در  $z_0$  باشد. انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

را در نظر بگیرید که در آن  $C$  خم ساده و با جهت مثبت حول نقطه  $z_0$  است و شامل نقطه تکین دیگری از  $f$  نیست. مقدار این انتگرال مانده  $f$  در نقطه  $z_0$  نامیده می‌شود. بنابر لم بخش ۷.۱ مانده به انتخاب خم  $C$  بستگی ندارد، چون  $C$  را می‌توانیم با هر دایره به مرکز  $z_0$  در داخل  $C$  عوض کنیم. بنابراین معمولاً  $C$  را چنین دایره‌ای فرض می‌کنیم.

همچنین از بخش ۷.۱ بدست می‌آید که:

اگر  $C$  تعداد متناهی نقطه تکین منفرد را دربر گیرد، انتگرال مزبور برابر با مجموع مانده‌ها در نقاط تکین درون  $C$  است. این همان قضیه مانده است.

تمرین ۸.۵ (الف) نشان دهید اگر  $f$  دارای قطب ساده در  $z_0$  با مانده  $R$  باشد، آنگاه

$$f(z) - \frac{R}{z - z_0}$$

دارای نقطه تکین برداشتنی در  $z_0$  است.

(ب) نشان دهید همیشه مانده در نقطه تکین برداشتنی متناهی برابر با صفر است.

مانده‌ها در  $\infty$  در بخش ۸.۷ تعریف می‌شوند و مورد بحث قرار خواهند گرفت.

روشن نیست چرا مانده‌ها مفید خواهند بود؛ در واقع، اگر تنها به تعریف تکیه کنیم، کاربرد آنها چندان ساده نخواهد بود. بنابراین قبل از پرداختن به برخی از کاربردهای آن، روش محاسبه مانده‌ها (بدون انتگرال‌گیری) را ارائه می‌کنیم. معمولاً می‌خواهیم مانده‌ها در یک قطب را بیابیم.

قطبهای ساده: فرض کنید  $f$  در  $z_0$  دارای یک قطب ساده است. از بخش ۸.۴، داریم

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \varphi(z)$$

که در آن  $\varphi(z_0) \neq 0$  و  $\varphi$  در  $z_0$  تحلیلی است. در این صورت مانده  $f$  در  $z_0$  بنا بر تعریف برابر است با

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{z - z_0} dz$$

و انتگرال سمت راست بنا بر فرمول کوشی برابر با  $\varphi(z_0)$  است. از طرف دیگر، بنا بر تعریف  $\varphi(z)$ ، داریم  $\varphi(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$ ، که معمولاً به سادگی محاسبه می‌شود. بطور خلاصه:

مانده تابع  $f$  در قطب  $z_0$  در صورت وجود برابر با  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$  است (و بنابراین قطب ساده است).

این قاعده بخصوص برای مواقعی که توابعی نظیر

$$\frac{e^z}{(z-2)(z-3)}$$

داریم که مخرج حاصلضرب عوامل می‌باشد، مناسب است. لذا مانده در  $z = 2$  بلافاصله محاسبه و

$$\frac{e^2}{2-3} = -e^2$$

از طرف دیگر، قطبها همیشه بطور صریح ارائه نشده‌اند.

تمرین ۸.۶ فرض کنید  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ، که در آن  $h$  دارای یک ریشه ساده در  $z_0$  است و

$$g(z_0) \neq 0, \quad \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \neq 0.$$

به عنوان مثال، مانده  $\frac{e^{z_0}}{\sin z}$  در  $z = \pi$  برابر با  $-e^{z_0}$  است.

قطبهای چندگانه: وقتی که  $f$  در نقطه  $z_0$  دارای قطب چندگانه  $n > 1$  است محاسبه مانده سادهتر است. داریم:

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0$$

در این صورت مانده برابر است با:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^n}$$

که دقیقاً  $\frac{1}{(n-1)!}$  برابر فرمول کوشی برای  $\varphi^{(n-1)}(z_0)$  است (بخش ۷.۳ را ببینید). بنابراین

مانده  $f$  در قطب از مرتبه  $n$  برابر است با

$$\frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} \{f(z) (z - z_0)^n\}$$

یعنی برای پیدا کردن مانده،  $f(z)$  را در  $(z - z_0)^n$  ضرب کنید، سپس مشتق  $(n-1)$ -ام آن را بگیرید و بر  $(n-1)!$  تقسیم کنید و در  $z_0$  محاسبه کنید.

چون برآورد بالاتر مرتبه یک قطب ساده است، خوشبختانه اگر  $f$  را در  $(z - z_0)^m$ ،  $m > n$  ضرب کنیم و مشتق  $(m-1)$ -ام را بگیریم سپس بر  $(m-1)!$  تقسیم کنیم و در  $z_0$  محاسبه کنیم هنوز مانده درست را بدست می‌آوریم.

تمرین ۸.۷ ادعای بالا را ثابت کنید.

تمرین ۸.۸ چه اتفاقی می‌افتد اگر مرتبه قطب را کمتر از مقدار واقعی در نظر بگیریم.

در بکارگیری این قاعده، مفید است که بتوانیم مشتق  $(n-1)$ -ام،  $f(z)(z - z_0)^n$ ، را با استفاده از قاعده لایب‌نیتز برای مشتق حاصلضرب بنویسیم:

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + \binom{k}{1} f^{(k-1)}g' + \binom{k}{2} f^{(k-2)}g'' + \dots + fg^{(k)}$$

که در آن  $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$  ضریب دو جمله‌ای است. قاعده لایب‌نیتز به سادگی با استقرا اثبات می‌شود.

تمرین ۸.۹ گاهی تعمیم‌های نادرستی انجام می‌شود. نشان دهید وقتی  $h$  در  $z_0$  صفر مرتبه ۲ دارد، آنگاه مانده  $\frac{g(z)}{h(z)}$  در  $z_0$  برابر با  $\frac{g(z_0)}{h''(z_0)}$  نیست؛ و همچنین مانده

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^2 h(z)}, \quad h(z_0) \neq 0$$

برابر با

$$\frac{1}{h(z_0)} \left\{ \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} \right\}$$

نیست.

تمرین ۸.۱۰ نشان دهید با دانستن سری تیلور تابع  $g(z)$  در نقطه  $z_0$  مانده  $\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}$  به سادگی بدست می‌آید. مانده  $e^{-z^2} - z^{-2}$  را در  $z=0$  بدست آورید.

مانده در نقاط مزدوج: اغلب دانستن این مطلب که وقتی  $f(z)$  روی محور حقیقی فقط مقادیر حقیقی می‌گیرد، مانده  $f$  در قطب  $z_0$  برابر با مزدوج مانده در  $\bar{z}_0$  است، مفید می‌باشد. بطور دقیق‌تر:

فرض کنید  $f$  در ناحیه  $D$  که نسبت به محور حقیقی متقارن است مرمورفیک و روی محور حقیقی مقادیر حقیقی بگیرد؛ در این صورت مانده  $f$  در  $z_0$  و  $\bar{z}_0$  مزدوجند.

در اینجا اثبات را برای قطبهای ساده ارائه می‌کنیم؛ برای حالت کلی تمرین ۸.۱۱ را ببینید. چون مقادیر  $f$  در نقاط مزدوج، مزدوج‌اند (بخش ۷.۷ را ببینید)، اگر  $z_0$  با  $\text{Im } z_0 > 0$  قطب  $f$  باشد آنگاه  $f$  قطبی از همان مرتبه در  $\bar{z}_0$  دارد. فرض می‌کنیم  $z_0$  قطب ساده با مانده  $R$  باشد و مانده  $f$  در  $\bar{z}_0$  برابر با  $S$  باشد. در این صورت

$$R = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0), \quad S = \lim_{z \rightarrow \bar{z}_0} f(z)(z - \bar{z}_0)$$

و لذا می‌توانیم بنویسیم

$$S = \lim_{w \rightarrow \bar{z}_0} f(w)(w - \bar{z}_0)$$

حالا می‌توانیم  $w$  را  $\bar{z}$  بنامیم، بنابراین

$$S = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} f(\bar{z})(\bar{z} - \bar{z}_0) = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} \overline{f(z)(z - z_0)}$$

زیرا  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ . گفتن  $\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0$  مثل گفتن  $z \rightarrow z_0$  می‌باشد. بنابراین

$$S = \lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)(z - z_0)} = \bar{R}$$

تمرین ۸.۱۱ همین نتیجه را برای قطبهای از هر مرتبه ثابت کنید.

تمرین ۸.۱۲ مانده توابع زیر را در نقاط مشخص شده بیابید.

(الف)	در $\frac{z}{(2-3z)(4z+3)}$ در $\frac{2}{3}$ و $-\frac{3}{4}$	(ب)	در $\frac{e^{z-1}}{e^z-1}$ در صفر
(پ)	در $\frac{2z^2+1}{z^2+25}$ در $5i$	(ت)	در $\frac{e^{i\pi z}}{16-z^4}$ در $2$
(ث)	در $\frac{\sin z}{1-2\cos z}$ در $\frac{\pi}{3}$	(ج)	در $\frac{\sinh z - z}{z^8}$ در صفر
(ح)	در $\frac{\cos^2 z}{(2\pi - z)^3}$ در $2\pi$	(ح)	در $\frac{\pi}{3} z \tan z$
(خ)	در $\frac{z^2}{z^2+1}$ در $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$	(د)	در $\frac{z+1}{(z^2+4)^2}$ در $2i$

تمرین ۸.۱۳ (الف) آیا مانده  $f+g$  در  $z=a$  با مجموع ماندههای  $f$  و  $g$  برابر است؟

(ب) آیا مانده  $fg$  با حاصلضرب ماندههای  $f$  و  $g$  برابر است؟

(ج) مانده  $f$  در یک قطب ساده  $z=a \neq 0$  را با مانده  $zf(z^2)$  در  $z=a^{\frac{1}{2}}$  مقایسه کنید.

### تمرینهای تکمیلی

مانده توابع زیر را در نقاط تعیین شده بیابید.

$$1 - \frac{z^2}{(i-z)(4z+5)} \text{ در } i \text{ و } -\frac{5}{4}$$

$$2 - \frac{4z}{z^2-5z+6} \text{ در } 2 \text{ و } 3$$

$$3 - \frac{z - \frac{1}{6}z^2 - \sin z}{z^8} \text{ در صفر}$$

$$4 - \frac{1 - \cos z}{2 \sin z - \sqrt{3}} \text{ در } \frac{\pi}{3}$$

$$5 - \frac{z^2+1}{z^4-1} \text{ در } 1 \text{ و } i$$

$$6 - \frac{\cot z}{z-\pi} \text{ در } \pi$$

$$7 - \frac{2z+3}{(z^2-9)^2} \text{ در } 3$$

$$8 - \frac{(\sin z)^2}{(z-\pi)^2} \text{ در } \pi$$

## ۸.۷ نقطه در بینهایت به عنوان نقطه تکین منفرد

اگر تابع  $f$  در قسمتی از صفحه با پایان یعنی خارج گویی تحلیلی باشد، ظاهراً منطقی است بگوییم  $f$  در  $\infty$  یک نقطه تکین منفرد دارد. نقاط تکین منفرد در  $\infty$  را اینچنین دسته‌بندی می‌کنیم که  $f(z)$  دارای همان نوع نقاط تکین در  $\infty$  است که  $f(\frac{1}{z})$  در صفر دارد: بنابراین ممکن است نقاط تکین برداشتنی قطبها، یا نقاط تکین اساسی در  $\infty$  وجود داشته باشد. مثلاً،  $\frac{1}{z}$  نقطه تکین برداشتنی در  $\infty$  و  $z$  یک قطب ساده در  $\infty$ ، و  $e^z$  یک نقطه تکین اساسی در  $\infty$  دارد. اگر  $f$  در  $\infty$  نقطه تکین برداشتنی داشته باشد معمولاً  $f$  را در  $\infty$  تحلیلی می‌گوییم (با این فرض که تکین بودن برداشته شده است).

مانده  $f$  در یک نقطه تکین منفرد در  $\infty$  مانند مانده یک نقطه تکین متناهی به صورت  $\int_C f(z) dz$  (با  $2\pi i$ )<sup>-1</sup> تعریف می‌شود، که در آن  $C$  دایره (یا هر خم ساده بسته دیگری) است که تمام نقاط تکین دیگر  $f$  (اگر وجود داشته باشند) را در بر می‌گیرد. اما باید به خاطر داشته باشیم که  $C$  نسبت به  $\infty$  باید در جهت مثبت جهتدار شده باشد، لذا وقتی روی  $C$  حرکت می‌کنید  $\infty$  باید در طرف چپ شما باشد. یعنی،  $C$  در جهت ساعتگرد جهتدار شده باشد.

چون بنا به تعریف تابع  $f$  در  $\infty$  همان نوع نقطه تکین را دارد که  $f(\frac{1}{z})$  در صفر داراست، ممکن است حدس بزنیم مانده  $f$  در  $\infty$  باید برابر با مانده  $f(\frac{1}{z})$  در صفر باشد. این مطلب درست نیست! به عنوان مثال: مستقیماً از تعریف داریم مانده  $\frac{1}{z}$  در  $\infty$ ، برابر با  $-1$  است؛ این مطلب نشان می‌دهد که یک تابع ممکن است مانده غیرصفر در  $\infty$  داشته باشد حتی وقتی که تابع در  $\infty$  تحلیلی است، مانده تابع  $z$  در  $\infty$  برابر با صفر است؛ بنابراین مانده یک تابع ممکن است در یک قطب ساده در  $\infty$  صفر شود.

تمرین ۸.۱۴ اگر  $f$  یک تابع گویا یا به طور کلی، اگر  $f$  در صفحه گسترش‌یافته به جز در تعداد با پایان نقطه تکین منفرد، تحلیلی باشد، آنگاه مجموع تمام مانده‌های  $f$  در صفحه گسترش‌یافته برابر با صفر است.

تمرین ۸.۱۵ نشان دهید مانده  $z^{-n}$ ،  $n \geq 2$  در  $\infty$  برابر با صفر است.

تمرین ۸.۱۶ نشان دهید برای هر تابع گویای  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  که درجه  $Q$  حداقل دو تا بیشتر از درجه  $P$  است، مانده  $R$  در  $\infty$  برابر با صفر است.

گاهی بهتر است برای پیدا کردن مانده تابع در  $\infty$  روشهای محاسباتی بیشتری داشته باشیم. نشان می‌دهیم که مانده  $f$  در  $\infty$  با مانده  $f(\frac{1}{z})$  در صفر برابر است. این مطلب را می‌توانیم با یک تبدیل صوری انتگرالی که مانده را تعریف می‌کند ببینیم. چنان که انتظار داریم، اگر قرار دهیم  $w = \frac{1}{z}$

انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$



که در آن  $C$  دایره  $|z| = R$  در جهت ساعتگرد می باشد، به

$$\frac{1}{2\pi i} \int f\left(\frac{1}{w}\right) \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw$$

تبدیل می شود که  $w$  دایره  $|w| = \frac{1}{R}$  در جهت ساعتگرد [زیرا  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$ ] می توانیم این روند صوری را با پارامتری کردن  $C$  توجه کنیم. فرض کنیم مانده  $f$  در  $\infty$  برابر با  $A$  باشد. در این صورت

$$A = \frac{R}{2\pi} \int_{2\pi}^{\circ} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

در اینجا با یک انتگرال روی یک بازه حقیقی سر و کار داریم و می توانیم با روشهای معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال کار کنیم. لذا

$$A = -\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

حال اگر قرار دهیم  $R = \frac{1}{r}$  و  $\theta = -\varphi$ ، بدست می آوریم

$$A = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{-2\pi} f(r^{-1} e^{-i\varphi}) e^{-i\varphi} d\varphi$$

اگر قرار دهیم  $z = r e^{i\varphi}$ ، بدست می آوریم

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(z^{-1}) z^{-1} d\varphi$$

که می توانیم آن را به صورت انتگرال مسیری

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z^{-1}) z^{-2} dz$$

در نظر بگیریم. که در آن  $\Gamma$  دایره  $|z| = r$  در جهت پادساعتگرد است؛ این انتگرال در واقع مانده  $-z^{-2} f\left(\frac{1}{z}\right)$  در صفر است.

در اینجا می توانیم مانده در  $\infty$  را با روشهای بخش ۸.۶ محاسبه کنیم.

تمرین ۸.۱۷ نشان دهید اگر  $f$  در تمام نقاط صفحه گسترش یافته تحلیلی باشد آنگاه  $f$  ثابت است.

تمرین ۸.۱۸ نشان دهید اگر  $f$  در صفحه گسترش یافته مرمورفیک باشد آنگاه  $f$  یک تابع گویا است.

## تمرینهای تکمیلی

مانده توابع زیر را در  $\infty$  بدست آورید.

$$1 - \frac{z^2 + 3}{5z^4 - 7z^2 + 6z}$$

$$2 - \frac{2z^2}{z^3 + 27}$$

$$3 - \frac{z^2 + 5z + 6}{z}$$

$$4 - \frac{2z - 3}{z^2}$$

۵ - با در نظر گرفتن اینکه  $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+1)}$  و برای مقادیر بزرگ مثبت  $x$ ،  $f(x)$  مثبت باشد.  $f(z)$  را در یک همسایگی  $\infty$  تعریف کنید و مانده  $f$  را در  $\infty$  بیابید.

## ۸.۸ مانده‌ها و کسرهای جزئی

می‌توانیم مانده‌ها را به کار ببریم تا یک روش منظم (نه لزوماً کاراترین روش برای هر حالت خاص) برای پیدا کردن بسط کسرهای جزئی از یک تابع گویای  $\frac{P(z)}{Q(z)}$ ، بدون عامل مشترک که در آن درجه  $P$  کمتر از درجه  $Q$  است، ارائه دهیم. بهتر است ضریب بزرگترین درجه  $Q$  را یک فرض کنیم. فرض کنیم ریشه‌های  $Q$ ،  $w_1$  و  $w_2$  و ... به ترتیب با درجه‌های  $n$  و  $m$  و ... باشند. در اینصورت بسط صورت

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{(z-w_1)^n} + \frac{A_2}{(z-w_1)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{z-w_1} + \frac{B_1}{(z-w_2)^m} + \dots + \frac{C_1}{(z-w_2)^p} + \dots$$

می‌باشد. می‌بینیم که  $A_1$  مانده  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  در  $(z-w_1)^{n-1}$  در  $w_1$ ،  $A_2$  مانده  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  در  $(z-w_1)^{n-2}$  در  $w_1$  و به همین ترتیب،  $A_n$  مانده  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  در  $w_1$  است و غیره.

اگر بخواهیم  $A_k$  و  $B_k$  و ... را به طور صریح بدست آوریم معمولاً بهتر است  $Q$  را به صورت حاصلضرب عاملهای خطی،  $Q(z) = (z-w_1)^n(z-w_2)^m \dots$  بنویسیم. در اینصورت مانده  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  برابر با مانده

$$\frac{P(z)}{(z-w_1)^{n-k}(z-w_2)^m \dots} = \frac{P(z)}{(z-w_1)^{n-k}S(z)}, \quad S(z) = \frac{Q(z)}{(z-w_1)^n}$$

است و بنابراین برابر است با

$$z = w_1 \quad \text{در} \quad \frac{1}{(n-k-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-k-1} \left\{ \frac{P(z)}{S(z)} \right\}$$

خصوصاً اینکه

$$A_1 = \frac{P(w_1)}{(w_1 - w_2)^m (w_1 - w_3)^p \dots}$$

یادداشتها:

۱ - کتاب Osgood صفحه‌های ۳۷۰ - ۳۷۱.

۲ - در نوشته‌های روسی قضیه وایراشتراس - کاسوراتی اغلب قضیه سوهوتسکی نامیده می‌شود (لذا ترجمه این نام در ترجمه زبانهای مختلف با صورتهای گوناگونی ظاهر می‌شود).

## ۹. محاسبه انتگرالهای معین

قضیه کوشی و فرمول انتگرال کاربردهای زیادی برای توابع تحلیلی به صورت کلی دارند. قبل از پرداختن به آنها، یکی از کاربردی‌ترین آنها را که در واقع ظاهراً باعث کشف فرمول کوشی شده است را ارائه می‌دهیم. این کاربرد، محاسبه انتگرالهای معین<sup>۱</sup> است.

### ۹.۱ انتگرال توابع مثلثاتی روی یک دوره تناوب

به عنوان اولین مثال

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \cos \theta}$$

که می‌توانیم آن را به وسیله انتگرال نامعین (که نسبتاً سخت است) یا با روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی محاسبه کنیم، در نظر بگیرید. این مثال ایده روش کوشی را به طریق ساده نشان می‌دهد. ابتدا کسینوس را برحسب توابع نمایی بنویسید.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{5 + \frac{3}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{10 + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{3e^{2i\theta} + 10e^{i\theta} + 3}$$

می‌توانیم (وقتیکه به این ایده فکر می‌کنیم) انتگرال آخر را به عنوان انتگرال بر روی دایره واحد می‌توانیم (وقتیکه به این ایده فکر می‌کنیم) انتگرال آخر را به عنوان انتگرال بر روی دایره واحد  $C: \{z = e^{i\theta}\}$  در نظر بگیریم، بنابراین

$$I = -2i \int_C \frac{dz}{3z^2 + 10z + 3}$$

اگر مخروط ریشه‌ای در دایره واحد نداشته باشد انتگرال اخیر صفر می‌شود، اما مخروط برابر با  $(z+3)(z+1)$  است و انتگرال به صورت

$$I = -\frac{2i}{3} \int_C \frac{dz}{(z+\frac{1}{3})(z+3)}$$

درمی‌آید. این انتگرال شبیه و در واقع مثالی از فرمول انتگرال کوشی (یا قضیه مانده) است. خم  $C$ ، نقطه  $z = -\frac{1}{3}$  را دربر می‌گیرد اما نقطه  $z = 3$  را نه، بنابراین

$$I = 2\pi i \left( \frac{-2i}{3} \right) \frac{3}{8} = \frac{\pi}{2}$$

چون تابع زیر انتگرال اصلی، یک تابع زوج است، همچنین داریم

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{5+3\cos\theta} = \frac{\pi}{4}$$

اصولاً همین ایده برای هر تابع گویایی از  $\sin\theta$  و  $\cos\theta$  یا  $(e^{i\theta})$  تا زمانی که مخروط به ازای  $\theta$  حقیقی، ریشه نداشته باشد بکار می‌رود، بدین معنی که تابع تحلیلی متناظر، قطبی روی دایره واحد نداشته باشد.

تمرین ۹.۱ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13-5\sin\theta}$       ب)  $\int_0^\pi \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$  ،  $0 \leq r < 1$

پ)  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta d\theta}{5+3\sin\theta}$       ت)  $\int_0^\pi \frac{d\theta}{(3+2\cos\theta)^2}$

ث)  $\int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$  که  $|a| > |b|$  و  $a, b$  حقیقی

تمرینهای تکمیلی

۱-  $\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta d\theta}{5-3\cos\theta}$

۲-  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

۳-  $\int_0^{2\pi} \frac{(\sin\theta)^2 d\theta}{5+4\cos\theta}$

۴-  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\sin\theta)^2}$

۵-  $\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} d\theta}{2-e^{i\theta}}$

۹.۲ انتگرال توابع گویا روی  $(-\infty, +\infty)$ 

اگر  $P$  و  $Q$  چندجمله‌ای باشند که  $Q$  ریشه حقیقی نداشته باشد و درجه  $Q$  حداقل ۲ تا بیشتر از درجه  $P$  باشد، آنگاه

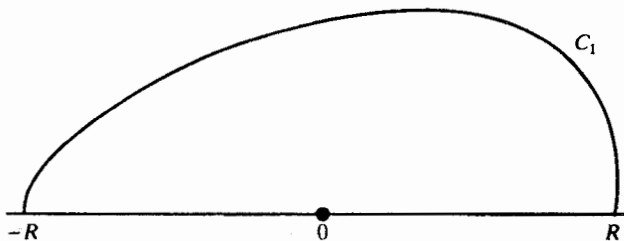
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

همگرا است زیرا رفتار  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  بوسیله عبارتی کسری با بزرگترین درجه وقتی  $|x| \rightarrow \infty$  کنترل می‌شود. این انتگرال همواره بوسیله تجزیه تابع زیر انتگرال به کسرهای جزئی و استفاده از جدول انتگرال و احتمالاً با استفاده از برنامه کامپیوتری مناسب برای محاسبه انتگرال نامعین، محاسبه می‌شود. اگر  $\frac{P}{Q}$  اصلاً پیچیده نباشد و ما به انتگرال معین علاقمند باشیم آسانتر است که از قضیه مانده به روشی که در زیر توضیح داده خواهد شد استفاده نماییم (برای مثال تمرینهای ۹.۲ و ۹.۳ را ببینید). این روش برای برخی از انتگرالهای معین که انتگرالهای نامعین آنها برحسب توابع مقدماتی قابل بیان نباشد قابل استفاده است. به عنوان مثال  $\int x^{-1} \sin x dx$  یک تابع مقدماتی نیست اما  $\int_0^{\infty} x^{-1} \sin x dx$  را دقیقاً می‌توانیم با استفاده از انتگرال‌گیری مرزی، چنانکه در بخش ۹.۴ خواهیم دید محاسبه کنیم، اما این کاربرد برای انتگرال توابع گویا در عمل روش آسانتری را نشان می‌دهد.

در نگاه اول، انتگرال  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{P(x)}{Q(x)} \right] dx$  نسبت به انتگرالهایی که در بخش ۹.۱ دیدیم، تا حدی متفاوت به نظر می‌رسد. در آنجا، وقتی انتگرال را به عنوان انتگرال مسیری در نظر می‌گیریم، می‌توانیم از قضیه مانده مستقیماً استفاده کنیم. در اینجا ظاهراً یک مسیر بسته نداریم، با وجود این، اگر وضعیت را روی کره ریمان در نظر بگیریم، مسیر بسته بطور ضمنی وجود خواهد داشت. جایی که محور حقیقی به دایره‌ای مبدل می‌شود که از نقطه‌ای در بی‌نهایت می‌گذرد. هنوز نمی‌توانیم مستقیماً از قضیه مانده استفاده کنیم، زیرا قضیه را فقط برای خمهای کراندار ثابت کردیم. اما دست‌کم اگر انتگرالده در نزدیکی نقطه بی‌نهایت کوچک باشد، می‌توانیم استدلال کنیم که استفاده از قضیه مانده روی یک خم بسته در صفحه با پایان که دایره گذرا از  $\infty$  (روی کره) را تقریب می‌زند، باید به اندازه کافی خوب باشد. یک چنین خمی ممکن است شبیه شکل ۹.۱ باشد، که در آن  $R$  بزرگ و قطبهای  $\frac{P}{Q}$  درون خم بسته‌ای که بوسیله  $C_1$  و بازه  $(-R, R)$  روی محور حقیقی ساخته می‌شود قرار دارد و وقتی  $R \rightarrow \infty$ ،  $C_1$  به سمت بی‌نهایت می‌رود. حالا بنا به قضیه مانده داریم

$$\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -2\pi i \left( \frac{P}{Q} \text{ مجموع مانده‌های} \right) - \int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

وقتی  $R \rightarrow \infty$ ، حد انتگرال سمت چپ برابر با  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  است، مجموع مانده‌ها تغییر



شکل ۹.۱

نمی‌کند، و این حدس معقول است (تحت فرضهای روی  $P$  و  $Q$ ) که

$$\int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow 0$$

وقتی  $R \rightarrow \infty$ . بنابراین انتظار داریم که

اگر  $Q$  ریشه حقیقی نداشته باشد و درجه  $Q$  حداقل ۲ درجه بیشتر از درجه  $P$  باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \left( \text{مجموع مانده‌های } \frac{P}{Q} \text{ در نیم‌صفحه بالایی} \right)$$

این مطلب محاسبه انتگرال معین را به محاسبه تعدادی مانده (نصف درجه  $Q$  اگر  $Q$  زوج و با مقدار حقیقی روی محور حقیقی باشد) تقلیل می‌دهد. توجه کنید که اگر  $Q$  از درجه فرد و حقیقی مقدار روی محور حقیقی باشد، بالاجبار حداقل یک ریشه حقیقی دارد، و در شرایط ما صدق نمی‌کند؛ لیکن بخش ۹.۳ را ببینید.

تا اینجا آنچه ثابت نشده این است که انتگرال در امتداد  $C_1$  وقتی  $R \rightarrow \infty$ ، به صفر نزدیک می‌شود. طبیعتاً اگر  $C_1$  یک معادله ساده داشته باشد، اثبات ساده‌تر است و انتخاب بدیهی برای  $C_1$ ، یک نیم‌دایره است. به جای ارائه یک اثبات کلی، یک مثال خاص را مفصلاً بررسی می‌کنیم. در این صورت چگونگی اثبات در حالت کلی ساده‌تر خواهد بود.

انتگرال

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

را در نظر می‌گیریم. تمام آنچه که برای انجام محاسبه  $I$  لازم داریم عبارتند از، ابتدا مجموع مانده‌های تابع زیر انتگرال در نیم‌صفحه بالایی یعنی مانده در  $i - 1$  و اثبات اینکه

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} \rightarrow 0$$

وقتی  $R \rightarrow \infty$  که در آن  $C_1$  نیم‌دایره و  $|z| = R$  و  $\text{Im } z \geq 0$  و  $R \rightarrow \infty$  می‌باشد. بنا به تمرین ۸.۶ مانده برابر با  $\frac{1}{2i}$  است. بنابراین مقدار  $I$  برابر است با  $\frac{2\pi i}{2i}$ .  
برای نشان دادن اینکه

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} \rightarrow 0$$

از نامساوی  $|z^2 + 2z + 2| > \frac{1}{4} R^2$  برای  $|z| = R$  و  $R$  به اندازه کافی بزرگ (تمرین ۱.۲۳) و از نامساوی برای انتگرالها در بخش ۵.۳ استفاده می‌کنیم؛ در نتیجه

$$\left| \int_{C_1} \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} \right| \leq \frac{(C_1 \text{ طول}) \times 2}{R^2} = \frac{2\pi}{R}$$

چون سمت راست به صفر میل می‌کند اثبات تمام است.

استدلال مشابهی برای هر تابع گویای  $\frac{P}{Q}$  به کار می‌رود به شرطی که درجه  $Q$  حداقل ۲ درجه بیشتر از درجه  $P$  باشد.

دقیقاً این روش برای وقتی که  $\frac{P}{Q}$  روی محور حقیقی، حقیقی مقدار نیست کار می‌کند، هرچند غالباً در عمل چنین انتگرالهایی مشاهده نمی‌شود. اگر  $\frac{P}{Q}$  روی محور حقیقی، حقیقی مقدار باشد، مقدار انتگرال معین حقیقی خواهد بود، این مطلب نسبتاً بدیهی است اما تحقیق کردن آن مفید است. همچنین به یاد داشته باشید که اگر تابع زیر انتگرال مثبت باشد، انتگرال باید مثبت شود.

تمرین ۹.۲ از نتایج کلی بالا برای محاسبه انتگرالهای زیر استفاده کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+4}{(x^2+2x+2)(x^2+9)} dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2ix-2)(x+i)} \quad (\text{ب})$$

$$[\text{توجه: این انتگرال نصف انتگرال روی } (-\infty, \infty) \text{ است.}] \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+8} \quad (\text{پ})$$

تمرین ۹.۳ با استفاده از روش این بخش  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$  را بدست آورید. همچنین  $I$  را با مراجعه به جدول انتگرال نامعین محاسبه کنید. اگر دقت نکنید جواب  $I = 0$  را بدست می‌آورید. آیا می‌توانید تناقض را توضیح دهید. توجه: در تمرین ۱۱.۲ روش نسبتاً ساده‌تری برای انتگرالهای مشابه خواهیم دید.

تمرینهای تکمیلی

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} \quad - ۱$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2x}{(9x^2 + 4)(x^2 + 25)} \quad - ۲$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x - 2i)(x + 3i)(x + 4i)} \quad - ۳$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x + 3) dx}{(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 2x + 10)} \quad - ۴$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x^2 + 1} \quad - ۵$$

### ۹.۳ انتگرالهای مقادیر اصلی

انتگرالهای بخش ۹.۲ در معنایی نسبتاً واضح همگرا بودند؛ یعنی  $\int_{-\infty}^{\infty} [P(x)/Q(x)] dx$  و  $\int_0^{\infty} [P(x)/Q(x)] dx$  هر دو همگرا هستند. در عمل گاهی می‌خواهیم، مقداری را به انتگرالهایی که در اصطلاح واگرا هستند نسبت دهیم، مثلاً به

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)} \quad \text{یا} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$$

در انتگرال اولی، تابع زیر انتگرال به ازای  $|x|$  بزرگ، به قدر کافی کوچک نیست تا امکان همگرایی انتگرال را فراهم آورد؛ در دومی، تابع زیر انتگرال یک قطب روی بازه انتگرال‌گیری دارد. غالباً مفید است که این انتگرالها را به صورت حد متقارن در نظر بگیریم. یعنی به صورت

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$$

و

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{\infty} \right\} \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

اینها را مقادیر اصلی (یا مقادیر اصلی کوشی) می‌گویند و با نماد  $\int \dots PV$  نشان می‌دهند.

تمرین ۹.۴ برای مشاهده اینکه اگر حد متقارن را به کار نبریم چه اتفاقی می‌افتد،

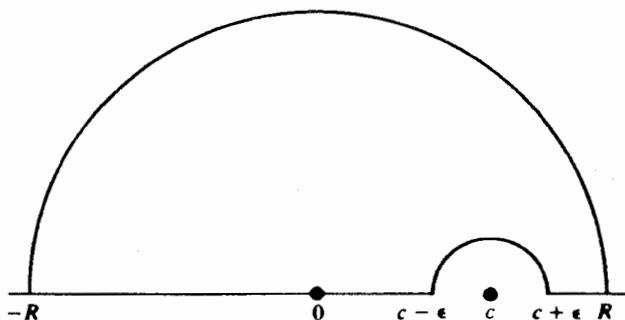
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{2R} \frac{x dx}{1+x^2}$$

را محاسبه کنید و آن را با

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x dx}{1+x^2}$$

مقایسه کنید.





شکل ۹.۲

تمرین ۹.۵ ثابت کنید که اگر  $C$  حقیقی باشد و  $Q(z)$  در  $C$  ریشه ساده داشته و ریشه حقیقی دیگری نداشته باشد و  $P(c) \neq 0$  آنگاه

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

(که درجه  $Q$  حداقل برابر با درجه  $P$  به اضافه ۲ است) مساوی با  $2\pi i$  (برابر مجموع مانده‌های  $\frac{P}{Q}$  در نیم صفحه بالایی به اضافه نصف مانده در  $C$  است) (شکل ۹.۲ را ببینید) تأثیر این است که می‌توانیم مسیر انتگرال‌گیری را گذرنده از قطب در نظر بگیریم. به این بها که نصف مانده را در محاسبه دخالت دهیم.

قاعده مطرح شده در تمرین ۹.۵ به صورتی واضح به توابع گویا با چند قطب ساده روی محور حقیقی قابل توسعه است.

تمرین ۹.۶ با بررسی  $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z^2}$ ، نشان دهید که مقدار اصلی برای یک قطب دوگانه موجود نیست.

تمرین ۹.۷ محاسبه کنید

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(2-x)(x^2+4)} \quad (\text{الف})$$

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+4x+5} \quad (\text{ب})$$

تمرین ۹.۸ نشان دهید اگر  $f$  درون و روی خم بسته  $C$  به جز در یک قطب ساده  $z_0$ ، تحلیلی باشد و  $C$  دارای یک گوشه با زاویه داخلی  $\alpha$  باشد، آنگاه

$$\text{PV} \int_C f(z) dz$$

مساوی با  $i\alpha$  برابر مانده  $f$  در  $z$  است. (با تمرین ۹.۵ مقایسه کنید).

تمرین ۹.۹ با استفاده از روش بخش ۹.۲ برای مسیر نیم‌دایره

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$$

را پیدا کنید، و نشان دهید انتگرال روی نیم‌دایره به حدی که برابر با صفر نیست میل می‌کند.

### تمرینهای تکمیلی

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - x^2 + x - 1} - 1$$

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 5x} - 2$$

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2) dx}{(3-x)(x^2+3x+3)} - 3$$

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 13x - 45} - 4$$

(توجه: بدون محاسبه می‌توانید مجموع مانده‌های تابع زیر انتگرال را پیدا کنید).

۵ - فرض کنید  $f$  در گوی بسته کراندار شده بوسیله دایره  $C$  تحلیلی باشد. اگر  $z$  نقطه‌ای روی دایره  $C$  باشد انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_C \frac{f(w) dw}{w-z}$$

### ۹.۴ ضرب توابع گویا در توابع مثلثاتی

انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

نمونه‌ای از دسته انتگرالهایی است که انتگرال نامعین اولیه ندارد. اما با این حال می‌توان آن را محاسبه کرد. ممکن است حدس اولیه این باشد که سعی کنید از  $\sin z z^{-1}$  (تابع زوج) در امتداد نیم‌دایره‌ای در نیم‌صفحه بالایی با قطر  $(-R, R)$  انتگرال‌گیری کنید. اما، چون تابع زیر انتگرال دارای نقطه تکین برداشتی در صفر است، انتگرال مسیری برابر با صفر است و بدست می‌آید

$$2 \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^{\pi} \frac{\sin(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = -i \int_0^{\pi} \sin[R(\cos \theta + i \sin \theta)] d\theta$$

$$= -i \int_0^\pi [\sin(R \cos \theta) \cosh(R \sin \theta) + i \cos(R \cos \theta) \sinh(R \sin \theta)] d\theta$$

چون سمت چپ حقیقی است، سمت راست نیز چنین است. بنابراین قسمت موهومی آن باید صفر باشد و داریم

$$2 \int_0^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \cos(R \cos \theta) \sinh(R \sin \theta) d\theta$$

چون انتگرال سمت راست مشکل‌تر از انتگرال سمت چپ به نظر می‌آید، بیشتر از این روش را ادامه نداده‌ایم.

چیزی که مناسب است این است که انتگرال

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

را حول مسیری در نیم‌صفحه بالایی در نظر بگیریم. این حدس خوبی است. زیرا  $|e^{iz}| = e^{-r \sin \theta}$  در نیم‌صفحه بالایی به جز به ازای  $\theta = 0$  کوچک است. بنابراین قسمت موهومی انتگرال در امتداد محور حقیقی، انتگرال  $x^{-1} \sin x$  است.  $C$  را مثلثی با رئوس  $R$  و  $iR$  و  $-R$  در نظر می‌گیریم (شکل ۹.۳). در این صورت داریم  $\pi i$  (مانده  $z^{-1} e^{iz}$  در صفر)  $= \int_C z^{-1} e^{iz} dz = \pi i$ . حد انتگرال در امتداد  $(-R, R)$  برابر است با

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x} dx &= \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

زیرا  $x^{-1} \cos x$  تابعی فرد است و بنابراین روی یک بازه متقارن دارای انتگرالی برابر با صفر است و  $x^{-1} \sin x$  زوج است و در نزدیکی  $x = 0$  کراندار می‌باشد. بنابراین آخرین انتگرال یک انتگرال معمولی است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که انتگرال روی یال دیگر مثلث به صفر میل می‌کند ثابت می‌شود

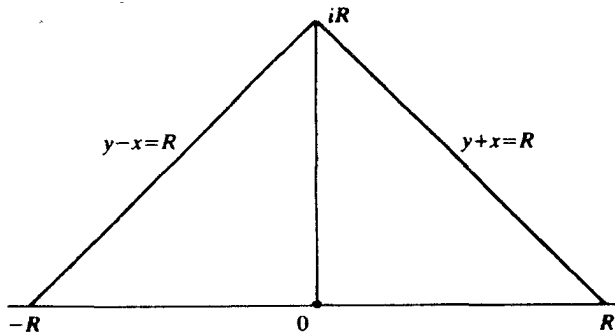
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

معادلات دو خط شیب‌دار به صورت  $y + x = R$  و  $y - x = R$ ، یا به صورت مختلط،  $z = x + i(R + x)$  و  $z = x + i(R - x)$  می‌باشند. بنابراین انتگرال  $z^{-1} e^{iz}$  روی خط شیب‌دار سمت راست برابر با

$$(1 - i) \int_0^R \frac{e^{i[x+i(R-x)]}}{x + i(R-x)} dx$$

است. و برای قدرمطلق مقدار آن داریم

$$|1 - i| \int_0^R \frac{e^{-(R-x)}}{|x + i(R-x)|} dx \leq \frac{2}{R} e^{-R} \int_0^R e^x dx = \frac{2}{R} e^{-R} (e^R - 1) \rightarrow 0$$



شکل ۹.۳

در اینجا از نامساوی  $|x+i(R-x)| \geq \frac{R}{\sqrt{2}}$ ، که از نامساوی  $|x+i(R-x)|^2 = x^2 + (R-x)^2 \geq \frac{R^2}{2}$  نتیجه می‌شود استفاده کردیم.

انتگرال دیگر به طریق مشابه تخمین زده می‌شود.

در اینجا اثبات  $\int_0^\infty x^{-1} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2}$  تکمیل می‌شود.

تمرین ۹.۱۰ همان انتگرال را روی مسیر مستطیل با رئوس  $\pm R + iR$  و  $\pm R$  محاسبه کنید.

با اثباتی مشابه، نتیجه کلی زیر را بدست می‌آوریم:

فرض کنید  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  که در آن  $P$  و  $Q$  دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و درجه  $Q$  حداقل یکی بیشتر از درجه  $P$  است. در این صورت  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos x \, dx$  قسمت حقیقی، و  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin x \, dx$  قسمت موهومی، عبارت  $\pi i$  برابر [دو برابر مجموع مانده‌های  $R(z)e^{iz}$  در نیم‌صفحه بالایی به اضافه مجموع مانده‌های  $R(z)e^{iz}$  روی محور حقیقی] می‌باشد.

تمرین ۹.۱۱ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید و در جای مقتضی از مقادیر اصلی استفاده کنید.

(ب)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$  (الف)  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{16x^2 + 9}$

(ت)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{4 - x^2}$  (پ)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 4)^2}$

(ث)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{(x-1)(x+2)}$

تمرین ۹.۱۲ بدون انجام هرگونه انتگرالگیری مسیری بیشتر، انتگرال  $\int_0^\infty t^{-1} \sin xt \, dt$  را محاسبه کنید و نشان دهید که تابعی ناپوسته از  $x$  است.

## تمرینهای تکمیلی

در صورت لزوم، انتگرالها را برحسب مقادیر اصلی بیان کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x + x^2} dx - ۱$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + ۹} dx - ۲$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x - ۲)(x^2 + ۱)} dx - ۳$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - ۹} dx - ۴$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x - \pi} - ۵$$

در تمرینهای زیر از مسیری که به صورت یک مستطیل دراز که ضلعی بر روی محور حقیقی و ارتفاع  $2\pi$  در تمرین ۶ و ارتفاع  $\pi$  در تمرین ۷ است استفاده کنید.

$$n = ۲, ۳, \dots, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{n} x}}{1 - e^x} dx - ۶$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sinh x} - ۷$$

## ۹.۵ انتگرال نوع کوشی

در بخش ۷.۳ دیدیم که

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

که در آن  $f$  روی خم بسته  $C$  پیوسته است، تابعی تحلیلی در درون  $C$  (و در بیرون  $C$  تابع دیگری) تعریف می‌کند. بعداً (در بخش ۲.۳ به نتیجه متناظری وقتی  $C$  یک کمان ساده (یا ژردان) است، به این مفهوم که خودش را قطع نمی‌کند، نیاز خواهیم داشت. درست مانند بخش ۷.۳ می‌توانیم نشان دهیم که اگر  $f$  روی کمان ساده  $A$  پیوسته باشد آنگاه

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_A \frac{f(w) dw}{w - z}$$

در صفحه با پایان بجز نقاط روی (مسیر)  $A$  تحلیلی است.

دو نوع انتگرال ذکرشده به انتگرالهای نوع کوشی معروف هستند. وقتی  $C$  یک خم بسته است، انتگرال نوع کوشی دو تابع  $\varphi_+$  و  $\varphi_-$  را که یکی درون  $C$  و دیگری بیرون  $C$  تعریف می‌کند. (وقتی  $f$  درون و روی  $C$  باشد، طبق قضیه کوشی، تابع در «بیرون» صفر است) در برخی از کاربردها<sup>۴</sup>، مهم است که حدود  $\varphi_+(z_0)$  و  $\varphi_-(z_0)$  را وقتی  $z$  به  $z_0$  که نقطه‌ای از  $C$  است میل می‌کند بدانیم. اگر  $z$  واقعاً روی  $C$  باشد، انتگرال باید به صورت یک مقدار اصلی  $\varphi_p(z)$  بیان شود، حد انتگرال در امتداد  $C$  همراه با یک تکه متقارن کوتاه حول  $z_0$  حذف شده‌اند. وقتی  $C$  یک کمان باشد،  $\varphi_+(z_0)$  را بعنوان حد انتگرال وقتی  $z$  از سمت چپ  $C$  به  $z_0$  میلی می‌کند ( $C$  را در جهت مثبت در نظر بگیرید) و  $\varphi_-(z_0)$  بعنوان حد از سمت راست تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم  $C$  در  $z_0$  مماس دارد؛ گوشه‌ها و نقاط انتهایی در حالت کمان، را می‌توان بطور مشابه مورد بحث قرار داد.

فرمولهای سوهتسکی (یا پلمیج) با استفاده از بحث روی مقدار اصلی انتگرالها در بخش ۹.۳ مطرح می‌شوند. آنها می‌گویند که

$$\varphi_+(z_0) = \frac{1}{\gamma} f(z_0) + \varphi_p(z_0) \quad \text{و} \quad \varphi_-(z_0) = -\frac{1}{\gamma} f(z_0) + \varphi_p(z_0)$$

وقتی  $f$  روی  $C$  (و درون  $C$  وقتی بسته است) تحلیلی باشد، اصولاً فرمولها را در بخش ۹.۳ ثابت کرده‌ایم. برای

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & z \text{ بیرون } C \\ f(z), & z \text{ درون } C \end{cases}$$

$$\varphi_+(z_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \text{درون}}} \varphi(z) = f(z_0) = \varphi_p(z_0) + \frac{1}{\gamma} f(z_0),$$

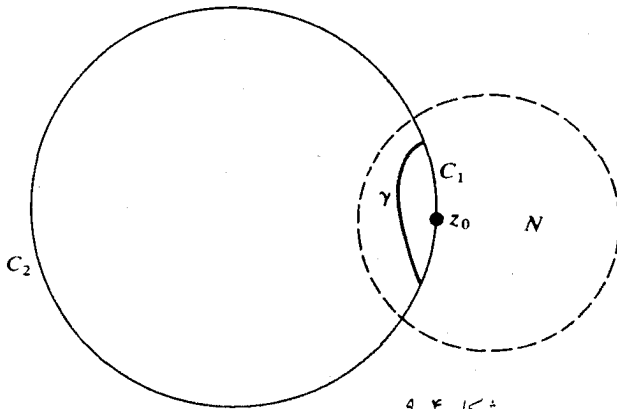
$$\varphi_p(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z_0} = \frac{1}{\gamma} f(z_0)$$

(با تمرین ۹.۸ مقایسه کنید)

حالا به طور کلی فرض کنید که  $f$  فقط در یک همسایگی  $N$  از  $z_0$ ، تحلیلی است. در این صورت  $C = C_1 + C_2$  که در آن  $C_1$  بخشی از  $C$  است که درون  $N$  است و  $C_2$  بقیه  $C$  می‌باشد. فرض کنید  $\gamma$  کمانی در  $C$  باشد که نقاط انتهایی  $C_1$  را به هم متصل می‌کند (شکل ۹.۴ را ببینید). در این صورت:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+C_1} \frac{f(t) dt}{t-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2+\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1-\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} \\ &= K(z) + F(z) \end{aligned}$$

که در آن  $K$  در همسایگی  $z_0$  تحلیلی است.



شکل ۹.۴

در این صورت وقتی که  $z$  به  $z_0$  از درون یا بیرون  $C$  میل می‌کند،  $K$  به همان حد نزدیک می‌شود. چون  $f$  در درون و روی  $C_1 - \gamma$  تحلیلی است، دقیقاً دیده‌ایم که

$$F_+(z) = F_p(z_0) + \frac{1}{\gamma} f(z_0)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \varphi_+(z_0) &= K_p(z_0) + F_+(z_0) = K_p(z_0) + F_p(z_0) + \frac{1}{\gamma} f(z_0) \\ &= \varphi_p(z_0) + \frac{1}{\gamma} f(z_0) \end{aligned}$$

فرمول دیگر و حالتی که  $C$  یک کمان باشد را می‌توان به طور مشابه مورد بحث قرار داد. می‌توان نشان داد، البته بسیار سخت‌تر، که وقتی  $f$  کراندار و روی  $C$  انتگرال‌پذیر باشد و در شرط هولدر  $|f(z) - f(z_0)| \leq C|z - z_0|^\alpha$ ،  $0 < \alpha \leq 1$ ، صدق کند، فرمول نتیجه می‌شود.

### یادداشتها:

- ۱ - ممکن است که تصور کنید در حال حاضر روشهای محاسبه انتگرال معین چندان مهم نیستند، زیرا انتگرالها بوسیله کامپیوتر بدست می‌آیند، اما، محاسبه کامپیوتر ممکن است به صورت تقریب اعشاری باشد در حالیکه استفاده از قضیه کوشی، آن را به صورت «دقیق» مانند  $\frac{3\pi}{8}$  یا  $6e$  بیان می‌کند که بسیار معتبرتر است چون اعدادی مانند  $e$  و  $\pi$  با دقت زیادی شناخته شده‌اند. بعلاوه محاسبه انتگرالها بوسیله انتگرال مسیری یک روش مهم در بسیاری از شاخه‌های ریاضی است.

۳ - Ahlfors، صفحه‌های ۱۵۷-۱۵۸، همچنین می‌توانیم مسیر نیم‌دایره در بخش ۹.۲ را به کار ببریم. اما اثبات اینکه انتگرال در امتداد نیم‌دایره به صفر میل می‌کند، با مشکلات بیشتری مواجه می‌شود.

۴ - به Carrier, Krook and Pearson, pp. 412 ff; Markushevich, *Theory of Functions*, pp. 309ff

و خصوصاً به فصل ۱۴ کتاب Henrici مراجعه کنید.

## ۱۰. توابع لگاریتمی و نمائی

کاملاً واضح نیست که چگونه لگاریتم اعداد مختلط را تعریف کنیم. دست‌کم چند قرن پیش روشن بود که وقتی ریاضیدانان بحث می‌کردند آیا  $-1$  دارای لگاریتم است و اگر هست، آیا این لگاریتم برابر با صفر یا چیز دیگری است، جای تعجب نیست زیرا همین ریاضیدانان حتی یک تعریف مناسب برای اعداد مختلط<sup>۱</sup> نداشتند.

### ۱۰.۱ تعریف $\log z$

دو راه نسبتاً طبیعی برای تعریف لگاریتم اعداد مختلط وجود دارد. یک راه آنست که چون  $z = re^{i\theta} = |z|e^{i \arg z}$  باید داشته باشیم

$$\log z = \ln r + i\theta = \ln |z| + i \arg z$$

اگر  $z \neq 0$ ،  $[\ln r]$  را برای لگاریتم معمولی و طبیعی (در پایه  $e$ ) یک عدد حقیقی مثبت بکار می‌بریم تا از اشتباه آن با لگاریتم اعداد مختلط کلی جلوگیری شود. چون  $\arg z$  یک تابع نیست (تک‌مقداری نیست)،  $\log z$  نیز یک تابع نیست. اما انتظار این را از قبل داشتیم. (بخش ۵.۴ را ببینید) این‌که کدام مقدار  $\arg z$  و لذا کدام مقدار  $\log z$  را به کار می‌بریم، بستگی دارد به این‌که لگاریتم را برای چه منظوری می‌خواهیم.

از طرف دیگر، تعریف آشنایی از لگاریتم به عنوان تابعی روی اعداد حقیقی مثبت وجود دارد یعنی

$$\ln x = \int_1^x t^{-1} dt$$

مانند این تعریف را می‌توانیم برای اعداد مختلط اعمال کنیم. ناحیه همبند ساده  $D$  را که شامل صفر و بی‌نهایت نیست در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $z \in D$  و هر مقدار قابل قبولی برای  $\arg z$  را اختیار کنید. در اینصورت تعریف می‌کنیم

$$\log z = \int_{z_0}^z w^{-1} dw + \log z_0.$$



انتگرال‌گیری در طول هر کمانی در  $D$  که  $z_0$  را به  $z$  متصل می‌کند می‌باشد. چون  $\frac{1}{w}$  در  $D$  تحلیلی است، بنا به قضیهٔ کوشی انتگرال مستقل از کمان بوده و تابع  $\log z$  را در  $D$  تعریف می‌کند. مانند بخش ۶.۳ می‌بینیم که  $\log z$  در  $D$  تحلیلی و مشتق آن  $\frac{1}{z}$  است. البته مقادیر مختلف  $\log z$  ممکن است توابع مختلفی ارائه دهند.

در اینجا باید ببینیم چگونه می‌توان این دو تعریف از  $\log z$  را بهم مربوط نمود. حتی وقتی  $D$  همبند ساده بوده و شامل صفر نباشد (مانند این حالت) روشن نیست  $\arg z$  بعنوان یک تابع چگونه در  $D$  تعریف شود. البته، مشکلی در یک همسایگی  $z_0$  نیست: در یک گوی کوچک  $A \subset D$ ،  $z_0$  مرکز  $z$  (چون شامل صفر نیست) می‌توانیم  $\arg z$  را مقدار اصلی در نظر بگیریم، مگر  $z_0$  یک مقدار حقیقی منفی باشد، که در این حالت  $\arg z$  را بین  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{7\pi}{4}$  در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر،  $\arg z$  بطور موضعی قابل تعریف است. بعلاوه تابع

$$L_1(z) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + i \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) = \ln r + i\theta$$

بطور موضعی تحلیلی است، که برقراری معادلات کوشی-ریمان برای آن را می‌توانیم بررسی کنیم.

تمرین ۱۰.۱ ادعای بالا را اثبات کنید.

چون  $L_1$  مشتق‌پذیر است، می‌توان مشتق آن را (مانند تمرین ۶۹.۱ محاسبه نمود که البته برابر با  $\frac{1}{z}$  بدست می‌آید.

تابع

$$L_2(z) = \int_{z_0}^z w^{-1} dw + L_1(z_0)$$

در  $D$  تحلیلی و نیز دارای مشتق  $\frac{1}{z}$  است. بنابراین  $L_1$  و  $L_2$  در  $\Delta$  فقط در یک مقدار ثابت متفاوتند و  $L_2(z_0) = L_1(z_0)$ . لذا در  $\Delta$  داریم  $L_2(z) \equiv L_1(z)$  و  $\operatorname{Re} L_2(z) = \ln r$  و  $\operatorname{Im} L_2(z) = \theta$ . اکنون  $\log z$  را در  $(D)$  برابر با  $L_2(z)$  و  $\arg z$  را (در  $D$ ) برابر با  $\operatorname{Im} \log z$  تعریف کنید. بنابراین در سراسر  $D$  یک تابع تحلیلی  $\log z$  را به صورت  $\ln r + i\theta$  داریم که بوسیلهٔ انتخاب اولیهٔ  $\arg z_0$  معین شده است. خصوصاً اکنون  $\arg z$  یک تابع روی  $D$  است، و چون مقادیر مختلف  $\arg z_0$  با مضارب صحیح  $2\pi$  تغییر می‌کند، توابع  $\log z$  مختلف با مضارب صحیح  $2\pi i$  تغییر می‌کنند. این توابع مختلف  $\log z$  را شاخه‌های  $\log z$  می‌نامیم؛ یک شاخهٔ خاص بوسیلهٔ ناحیهٔ  $D$  و مقدار  $\arg z$  در نقطه‌ای از  $D$  معین می‌شود.

تمرین بعدی نشان می‌دهد که این لگاریتم دارای خواص پایه‌ای است که از آن انتظار می‌رود.

تمرین ۱۰.۲ نشان دهید  $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$  اگر  $z_1$  و  $z_2$  و  $z_1 z_2$  همگی در ناحیهٔ  $D$  (که همبند ساده بوده و شامل صفر نیست)، واقع بوده و مقادیر اولیه برای لگاریتم‌ها (یا شاخه‌های توابع) بطور صحیح انتخاب شده باشند.

## ۱۰.۲ لگاریتم یک تابع

می‌توانیم (مقادیر بسیاری برای) عدد  $\log f(z)$  را وقتی که  $f(z) \neq 0$  تعریف کنیم. آنچه که نیاز داریم تعریف  $\log f$  به صورت یک تابع است. برای این منظور  $f$  باید روی ناحیه همبند ساده  $D$  تحلیلی و بدون ریشه باشد، در آن صورت تعریف می‌کنیم

$$\log f(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw + \log f(z_0)$$

که در آن  $\log f(z_0)$  هر مقدار معینی از مقادیر ممکن می‌باشد. داریم

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

و بنابراین هر دو شاخه در سراسر  $D$  در یک مقدار ثابت تفاوت دارند. در این صورت داریم

$$\log f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z), \quad z \in D$$

تنها ابهام اینست که کدام مقدار  $\arg f(z_0)$  انتخاب شده است.

مقدار اصلی مقدار اصلی لگاریتم معمولاً  $\ln |z| + i \arg z$  در نظر گرفته می‌شود که  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ، و برای  $-\pi < \arg z < \pi$  یک تابع تحلیلی است، اما روی اعداد حقیقی منفی ناپیوسته است.

تمرین ۱۰.۳ نشان دهید  $\log(zw) = \log z + \log w$  برای مقادیر اصلی لگاریتم همیشه برقرار نیست.

تمرین ۱۰.۴ نشان دهید  $e^{\log z} = z$  در چه صورتی  $\log(e^z) = z$  است؟

تمرین ۱۰.۵ تمام مقادیر  $\log(-1)$ ،  $\log i$ ، و  $\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{2}}\right)$  را بدست آورید.

## ۱۰.۳ توابع نمایی

$a^b$  را وقتی که  $a \neq 0$  و  $a \neq e$ ، به معنی (تمام مقادیر)  $e^{b \log a}$  تعریف می‌کنیم. دلیل اینکه  $a = e$  را خارج می‌کنیم برای پرهیز از تکرار است. می‌خواهیم  $e^z$  یک تابع تک‌مقداری باقی بماند و به معنی سری توانی باشد که در بخش ۴.۱ تعریف کردیم. بنابراین  $e^z$  چیزی غیر از  $e^{z \log(2.71828...)}$  را معنا نمی‌دهد.

اگر همیشه  $\exp(x)$  را بصورت سری توانی بنویسیم با ابهام کمتری روبرو می‌شویم و در آن صورت  $e$  را مانند هر عدد مختلط دیگری تلقی می‌کنیم. اما نماد  $e^z$  مرسوم است. اما ما نماد  $\exp()$  را به کار می‌گیریم، وقتی که عبارت داخل ( ) پیچیده است.

تمرین ۱۰.۶ تمام مقادیر  $i^{-2i}$ ،  $i^{(i+1)}$ ،  $i^{-\log i}$ ،  $(1+i)^i$ ،  $i^{i^2}$  را پیدا کنید و بخاط داشته باشید که  $a^{b^c}$  به معنی  $a^{(b^c)}$  است نه به معنی  $(a^b)^c$ .

تمرین ۱۰.۷ اگر  $n$  یک عدد صحیح مثبت باشد نشان دهید  $z^{\frac{1}{n}}$  فقط  $n$  مقدار مختلف دار (برای  $z \neq 0$ ).

تمرین ۱۰.۸ اگر  $\sqrt[p]{z}$  به معنای  $z^{\frac{1}{p}}$  باشد،  $\sqrt{-1}$  را بدست آورید.

شما از پیچیدگیهای مسایل مربوط به نماها اجتناب خواهید کرد، اگر بپذیرید که «قوانین نماها» بطو مطلق برقرار نیست مگر برای اعداد حقیقی مثبت.

تمرین ۱۰.۹ محاسبات  $1 = \sqrt[p]{\frac{z}{\pi i}} = e^{\frac{z}{\pi i}} = e^{2\pi i(z/2\pi i)}$  را در نظر بگیرید. نشان دهید  $5$  در حالت کلی  $(a^b)^c$  نسبت به  $a^{bc}$  و  $a^b a^c$  نسبت به  $a^{b+c}$  مقادیر بیشتری را میگیرد.

در یک ناحیه همبند ساده که  $f$  تحلیلی است و صفر نمی‌شود می‌توانیم یک شاخه از  $\log f(z)$  را تعریف کنیم و سپس با استفاده از آن  $f(z)^{g(z)}$  را وقتی که  $g$  تابعی تحلیلی است به صورت  $g(z) \log f(z)$  تعریف کنیم.

### تمرینهای تکمیلی

۱ - تمام مقادیر عبارتهای زیر را بدست آورید.

(الف)  $\log(-e)$

(ب)  $\log(ie)$

(پ)  $\log e^i$

(ت)  $\log \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

۲ - تمام مقادیر عبارتهای زیر را بدست آورید.

(الف)  $2^i$

(ب)  $(-i)^{-i}$

(پ)  $(\log i)^2$

(ت)  $(1+i)^{\frac{1}{1+i}}$

۳ - تمام مقادیر عبارتهای زیر را بدست آورید.

- (الف)  $\sin^{-1} 2$   
 (ب)  $\cos^{-1}(\sqrt[3]{i})$   
 (پ)  $\sin^{-1}(i)$   
 (ت)  $\tan^{-1}(1+i)$   
 (ث)  $\sec^{-1}(\frac{1}{i})$

### ۱۰.۴ توابع وارون مثلثاتی

بیدیم مقادیر  $\sin z$  و همچنین  $\cos z$  به فاصله  $[-1, 1]$  محدود نمی‌شوند. برای پیدا کردن مقادیر  $\cos z$ ، یعنی پیدا کردن برد تابع کسینوس، باید معادله  $w = \cos z$  را برای هر  $w$  حل کنیم. ابتدا یک حالت خاص، مثلاً  $w = 3$  را بررسی می‌کنیم (مقدار انتخاب شده برای تأکید بر این است که تابع کسینوس می‌تواند مقادیر حقیقی بیش از ۱ را بگیرد). باید معادله

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 3$$

معنی

$$e^{2iz} - 6e^{iz} + 1 = 0$$

! حل کنیم. مانند یک معادله درجه دوم برحسب  $e^{iz}$  عمل می‌کنیم و بدست می‌آوریم

$$e^{iz} = 3 \pm \sqrt{\lambda}$$

$$z = -i \log(3 \mp \sqrt{\lambda})$$

نه در آن باید تمام مقادیر لگاریتم را در نظر بگیریم. چون  $\frac{1}{(3 + \sqrt{\lambda})} = 3 - \sqrt{\lambda}$  می‌توانیم جواب را ساده‌تر بنویسیم:

$$z = \pm i \log(3 + \sqrt{\lambda}) = \mp i [\ln(3 + \sqrt{\lambda}) + 2k\pi i], \quad k \in Z$$

$$= 2k\pi \mp i \ln(3 + \sqrt{\lambda})$$

تمرین ۱۰.۱۰ عملیات اخیر را به جای ۳ با هر عدد مختلط دلخواه  $w$  انجام دهید و نشان دهید مقادیر  $\cos^{-1} w$  با فرمول

$$\cos^{-1} w = \pm i \log(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

به ازای تمام مقادیر لگاریتم، داده می‌شود. توجه کنید که  $\cos z$  (و همچنین  $\sin z$ ) تمام مقادیر مختلط را می‌گیرد.

برای  $w \sin^{-1}$  داریم

$$\begin{aligned}\sin^{-1} w &= \left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi - \cos^{-1} w \\ &= 2k\pi + \frac{1}{4}\pi \pm \log(w + \sqrt{w^2 - 1})\end{aligned}$$

که اغلب صورت معادل آن یعنی

$$\sin^{-1} w = -i \log(iw \mp \sqrt{1 - w^2})$$

نوشته می شود.

عبارت معادل هم‌ارزی عبارتها به این واقعیت مربوط می‌شود که  $\frac{i\pi}{4}$  یک مقدار  $\log i$  است.

تمرین ۱۰.۱۱ فرمولی برای  $\tan^{-1} w$  پیدا کنید و توجه داشته باشید که  $\pm i$  در برد تابع  $\tan z$  نیست.

### یادداشتها:

۱ - تعریف ما از یک عدد مختلط به صورت یک زوج مرتب از اعداد حقیقی به هامیلتون (Hamilton) در اواسط قرن نوزدهم برمی‌گردد. اگرچه (از دیدگاه جدید) تعریف عدد مختلط بعنوان یک نقطه در صفحه هم‌ارز با تعریف آن به عنوان زوج مرتب برحسب مؤلفه‌هایش است.

۲ - بعضی از مؤلفان معانی نمادهای  $\log$  و  $\ln$  را جابه‌جا می‌کنند.

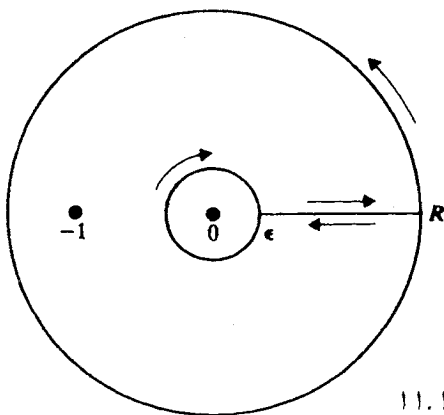
## ۱۱. برخی دیگر انتگرالهای معین

### ۱۱.۱ لگاریتم‌ها و توانها

حالا می‌توانیم برخی از انتگرالهای معین را که شامل لگاریتم‌ها یا توابع نمایی<sup>۱</sup> هستند، محاسبه کنیم. خصوصاً اولین مثال ما از این نوع است زیرا انتگرال نامعین تابع انتگرالده یک تابع مقدماتی نیست. فرض کنید

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

همگرایی انتگرال (یعنی  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\epsilon}^R$ ) از محاسبه  $I(\alpha)$  بدست می‌آید.



شکل ۱۱.۱

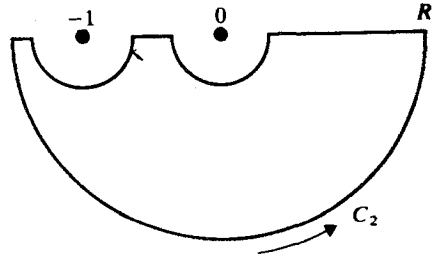
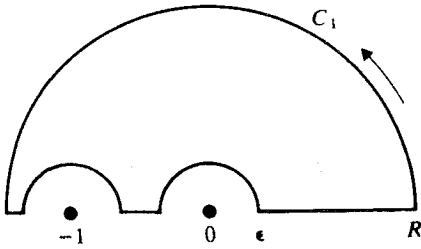
انتگرال

$$\int_C \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz$$

را بکار می‌بریم. که در آن مسیر شکل ۱۱.۱ است، شعاع از  $\varepsilon$  تا  $R$  دو بار، در هر جهت یکبار، پیموده می‌شود. توجه کنید که مقدار اصلی لگاریتم را به کار نمی‌بریم، اما قرار می‌دهیم  $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log z} = e^{(\alpha-1)(\ln r + i\theta)}$ ، و  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . نمی‌توانیم مستقیماً قضیه مانده را به کار ببریم زیرا مسیر در ناحیه همبند ساده‌ای که تابع انتگرالده در آن تحلیلی باشد قرار ندارد. البته، می‌توانیم دو مسیر  $C_1$  و  $C_2$  را همان‌طور که در شکل ۱۱.۲ مشخص شده است، در نظر بگیریم. تابع  $z^{\alpha-1} = \exp[(\alpha-1)(\log|z| + i\theta)]$  در ناحیه  $-\delta < \theta < \pi + \delta$  بجز در قطب  $-1$  تحلیلی است: شکل ۱۱.۳ را ببینید. در این صورت  $C_1$  در داخل  $D_1$  است و  $\int_{C_1} = 0$  زیرا هیچ قطبی در داخل  $C_1$  نیست. همچنین برای  $C_2$ ، جایی که  $z^{\alpha-1}$  با  $z^{\alpha-1}$  در  $\pi - \delta < \theta < 2\pi + \delta$  تعریف شده است. بنابراین  $\int_{C_2} = 0$ ، و وقتی که  $R \rightarrow \infty$  و  $\varepsilon \rightarrow 0$ . در زیر نشان داده می‌شود که انتگرالها روی هر دو نیم‌دایره (به مرکز صفر) به سمت صفر میل می‌کند. انتگرالهای حول نیم‌دایره‌های کوچک به مرکز  $-1$  با هم،  $2\pi i$  برابر مانده در  $-1$  را می‌دهند. در امتداد  $(-R, 0)$  مقادیر  $z^{\alpha-1}$  یکسانند و انتگرالهای در جهت‌های مخالف حذف می‌شوند؛ در امتداد  $(0, R)$ ، مقادیر  $z^{\alpha-1}$  مختلف‌اند. نتیجه نهایی این که با گرفتن  $(\theta = 0)$ ،  $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}$  در امتداد بالای محور حقیقی مثبت و  $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)}$  در طرف پایین آن، درست مثل وقتی که تابع در ناحیه همبند ساده، تحلیلی است، می‌توانیم در امتداد مسیر اصلی انتگرال‌گیری کنیم.

در نتیجه، مجموع انتگرالها در دو جهت مخالف روی محور حقیقی مثبت،  $2\pi i$  برابر مانده در  $-1$  است.

برای اینکه ببینیم انتگرالها روی دایره بزرگ و کوچک در شکل اولیه واقعاً به صفر نزدیک می‌شوند،



شکل ۱۱.۲

انتگرال را در امتداد دایره بزرگ بوسیله

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^{\alpha-1} R d\theta}{R-1} \leq 2\pi R^{\alpha-1} \times \frac{R}{R-1} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

و انتگرال دو دایره کوچک را با

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon^{\alpha-1} \epsilon}{1-\epsilon} d\theta \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

محاسبه کنیم.

مانده در  $z = -1$ ، با توجه به انتخاب ما از  $z^{\alpha-1}$ ، برابر با  $e^{i\pi(\alpha-1)}$  است. بنابراین داریم

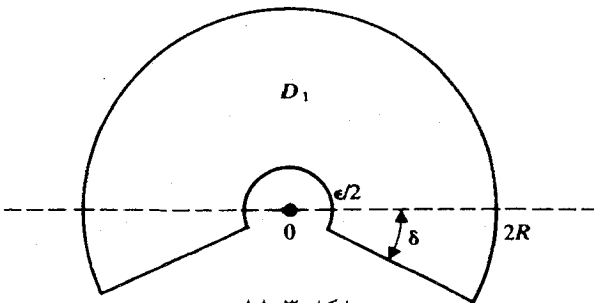
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{1+x} + \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} [1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}] dx = 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}$$

یا

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx [e^{-i\pi(\alpha-1)} - e^{i\pi(\alpha-1)}] = 2\pi i$$

یعنی

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$



شکل ۱۱.۳

تمرین ۱۱.۱ با روشهای این بخش انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } -1 < \lambda < 1, a > 0, \int_0^{\infty} \frac{x^\lambda}{a^2 + x^2} dx$$

$$\text{ب) } 0 < \lambda < 1, \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^\lambda(1+x)} dx$$

$$\text{پ) } a, b < 0, \int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{(a+x)(b+x)} dz \text{ را در نظر بگیرید.}$$

تمرین ۱۱.۲ با جایگزین کردن  $x^4 = t$  و بکار بردن روش این بخش  $\int_0^{\infty} (1+x^4)^{-1} dx$  را بدست آورید. توجه کنید بر خلاف تمرین ۹.۳ فقط باید یکی از دو مانده را محاسبه کنید.

تمرین ۱۱.۳ از ایده تمرین ۱۱.۲ استفاده کنید و انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 2x^2 + 2}$$

$$\text{ب) } \int_0^{\infty} \frac{x^3}{1+x^6} dx$$

$$\text{پ) } a > 0, \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

$$\text{ت*) } \int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^4} dx$$

### تمرینهای تکمیلی

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^2} dx - 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(1+x^2)} - 2$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^8} - 3$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{10} + 10} - 4$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 3x^3 + 2} - 5$$

$$\text{PV} \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx - 6^*$$

و از آنجا  $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  را پیدا کنید. (راهنمایی: از یک نیم‌دایره در نیم‌صفحه بالایی استفاده

کنید)



## ۱۱.۲ انتگرالهای نامعین

گاهی گفته می‌شود که روش انتگرال‌گیری مسیری، این اشکال را دارد که تنها در انتگرالهای معین به کار می‌رود. این ایراد کاملاً موجه نیست، زیرا انتگرال‌گیری مسیری حداقل انتگرالهای نامعین توابع گویا را محاسبه می‌کند. برای نشان دادن این مطلب انتگرال

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

را با این روش (البته با روشهای ابتدایی بدیهی است) بدست می‌آوریم. این معادل یافتن انتگرال نامعین است. کافی است

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$$

را محاسبه کنید.

انتگرال

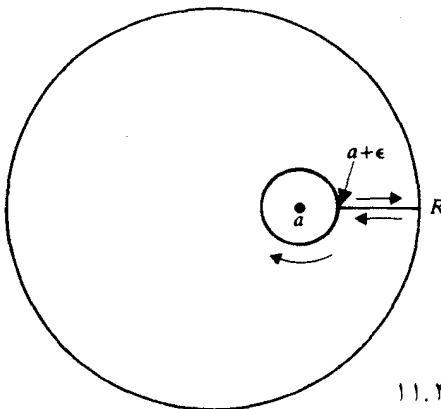
$$I = \int_C \frac{\log(z-a)}{z^2 + 2z + 2} dz$$

را حول مسیری شبیه به بخش ۱۱.۱ (شکل ۱۱.۴ را ببینید)، با گرفتن  $0 \leq \text{Im} \log(z-a) \leq 2\pi$  در نظر می‌گیریم. با استدلالی شبیه بخش ۱۱.۱ داریم

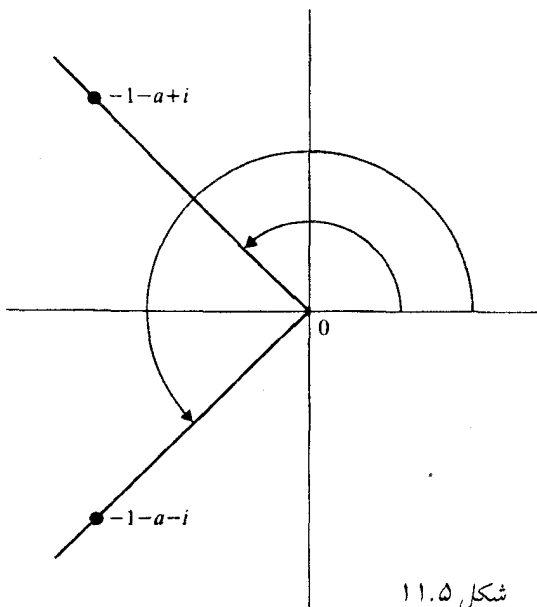
$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} I &= \int_a^\infty \frac{\ln(x-a) dx}{x^2 + 2x + 2} - \int_a^\infty \frac{\ln(x-a) + 2\pi i}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= 2\pi i \cdot (-1 \pm i) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = -\sum (\text{مانده‌ها})$$



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۱.۵

مانده‌ها عبارتند از

$$\frac{\ln|-1-a+i| + i \arg(-1-a+i)}{2i} \quad \text{و} \quad \frac{\ln|-1-a-i| + i \arg(-1-a-i)}{-2i}$$

که قسمتهای موهومی لگاریتم‌ها، زوایای نشان‌داده‌شده در شکل ۱۱.۵ هستند یعنی  $\pi + T$  و  $\pi - T$  که در آن مقدار اصلی  $\cot^{-1}(1+a)$  است. بنابراین عبارتهای لگاریتمی در جمع مانده‌ها حذف می‌شوند. (آنها لگاریتم قدرمطلق اعداد مختلط مزدوج هستند) و جمع مانده‌ها برابر با  $-T$  است. بنابراین نتگرال اولی برابر با  $T = \cot^{-1}(1+a)$  یا  $\frac{1}{4}\pi - \tan^{-1}(1+a)$  است.

تمرین ۱۱.۴ انتگرال

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \quad a > 0$$

را با این روش بدست آورید و بررسی کنید که نتیجه را درست بدست آورده‌اید.

تمرینهای تکمیلی

۱\* - با روش این بخش

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

را بدست آورید. [روش مشابه برای محاسبه انتگرال روی  $(a, \infty)$  را می‌توان به کار برد، اما محاسبات نسبتاً خسته‌کننده است].

## ۱۱.۳ تغییر متغیر در انتگرالهای ناسره

اصولاً هدف این بخش جلوگیری از اشتباهی است که ممکن است شما با این تصور ساده دچار آن شوید که انتگرالهای معین ناسره واقعاً به روشی که عملیات صوری عرضه می‌کنند رفتار می‌نمایند.

مثال ۱: انتگرال

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-t} dt$$

را در نظر بگیرید. چون انتگرال خیلی ساده است، بعید است که تغییر متغیر  $t = is$  را انجام دهید؛ اما اگر این کار را بکنید، خواهید داشت

$$I_2 = i \int_0^{\infty} e^{-is} ds$$

که به وضوح واگراست. بهر حال در شرایط پیچیده‌تر، اشتباهاتی که با محاسبات ساده بوجود می‌آیند ممکن است خیلی واضح نباشند و در واقع ممکن است شما دچار اشتباه شوید. برای اطمینان از آنچه در حالت‌های مشابه اتفاق می‌افتد باید هر دو انتگرال را به صورت انتگرالهای مسیری در نظر بگیریم. در حالت اخیر،

$$I_1 = \int_{C_1} e^{-z} dz \quad C_1 = \text{محور حقیقی مثبت}$$

$$I_2 = \int_{C_2} e^{-z} dz \quad C_2 = \text{محور موهومی مثبت}$$

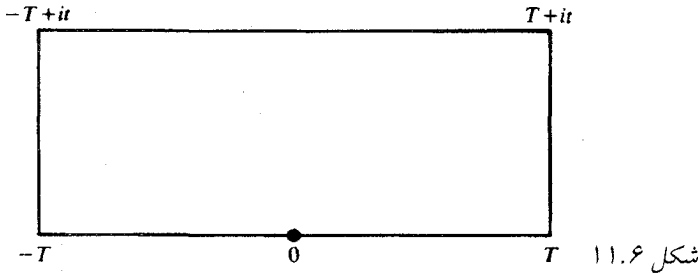
ممکن است با این استدلال که  $C_1 - C_2$  یک خم ساده بسته روی کرهٔ ریمان و تابع زیر انتگرال درون این منحنی تحلیلی است، اشتباهش نتیجه بگیرید  $I_1 - I_2 = 0$ . اما تابع زیر انتگرال حتی روی بستر ناحیهٔ محدودشده بوسیلهٔ خم، پیوسته نیست، بنابراین انتظار نداریم که قضیهٔ کوشی برای آن بکار رود. تنها رهیافت واقعی، در نظر گرفتن هر دو انتگرال به صورت حد و نزدیک شدن به مسیر در صفحهٔ متناهی و به کار بردن قضیهٔ کوشی و بررسی این مسئله است که آیا انتگرال اضافی به صفر میل می‌کند. در مثال اخیر انجام این مراحل ضروری نیست زیرا به وضوح  $I_2$  واگراست.

مثال ۲: با انتگرال

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

که از بخش ۷.۸ می‌دانیم برابر با  $\sqrt{\pi}$  است، شروع کنید، جایگزینی  $x = u + it$  را انجام دهید. آیا

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+it)^2} du$$



همگراست، در این صورت به چه مقداری؟

$J_T$  برابر با حد  $\int e^{-z^\gamma} dz$  در امتداد پاره‌خط  $(-T+it, T+it)$  است. چون  $e^{-z^\gamma}$  درون مستطیل شکل ۱۱.۶ نقطهٔ تکین ندارد،  $\int e^{-z^\gamma} dz = 0$  در روی مستطیل، و بنابراین

$$\int_{-T}^T e^{-u^\gamma} du - \int_{-T}^T e^{-(u+it)^\gamma} du + i \int_0^t e^{-(T+iy)^\gamma} dy - i \int_0^t e^{-(-T+iy)^\gamma} dy = 0$$

چون  $e^{-(T+iy)^\gamma} = e^{-T^\gamma} e^{-\gamma iTy} e^{y^\gamma}$ ، واضح است که

$$\int_0^t e^{-(T+iy)^\gamma} dy \rightarrow 0$$

وقتی  $T \rightarrow \infty$ ؛ به همین نحو برای انتگرال روی دیگر یال انتهایی مستطیل داریم؛ در نتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u+it)^\gamma} du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^\gamma} du = \pi^{\frac{1}{\gamma}}$$

همچنانکه استدلالی سطحی آن را پیشنهاد می‌کند.

مثال ۳: فرض کنید

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-\exp(\gamma x)} dx$$

این انتگرال همگرا است زیرا به ازای  $x$  های مثبت  $e^{-\exp(\gamma x)}$  بر  $e^x$  و به ازای  $x$  های منفی  $e^x$  بر  $e^{-\exp(\gamma x)}$  غلبه می‌کند.  $x$  را با  $u + i\pi$  جایگزین کنید، بدست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{u+i\pi-\exp(\gamma u+\gamma i\pi)} du = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{u-\exp(\gamma x)} du = -I$$

در نتیجه  $I = 0$ ، که غیرممکن است زیرا تابع زیر انتگرال مثبت است.

مثال ۴: در بخش ۷.۸ تعریف کردیم

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re } z > 0$$

اگر  $z$  را حقیقی بگیریم و از روی ناشیگری  $t$  را با  $is$  عوض کنیم داریم

$$\Gamma(x) = e^{\frac{i\pi x}{\gamma}} e^{-\frac{i\pi}{\gamma}} \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-is} i ds$$

$$(\cos \frac{1}{\gamma} \pi x - i \sin \frac{1}{\gamma} \pi x) \Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} \cos s ds - i \int_0^{\infty} s^{x-1} \sin s ds$$

که نتیجه می‌دهد

$$\Gamma(x) \cos\left(\frac{\pi x}{\gamma}\right) = \int_0^{\infty} s^{x-1} \cos s ds$$

$$\Gamma(x) \sin\left(\frac{\pi x}{\gamma}\right) = \int_0^{\infty} s^{x-1} \sin s ds$$

برای دیدن اینکه آیا این فرمولها درست هستند، انتگرال

$$\int_C t^{x-1} e^{-t} dt, \quad 0 < x < 1$$

را روی مستطیل با رئوس  $R$  و  $R + iR$  و  $R$  و  $0$  در نظر بگیرید. وقتی  $R \rightarrow \infty$  شبیه تمرین ۹.۱۰، انتگرال در امتداد محورهای حقیقی و موهومی به ترتیب به  $\Gamma(x)$  و  $e^{\frac{i\pi x}{\gamma}} \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-is} ds$  و دو انتگرال دیگر به صفر میل می‌کنند. بنابراین فرمولها درست هستند (و بعنوان تعاریف دیگری از  $\Gamma(x)$  می‌توانند به کار روند). این فرمولها را می‌توانیم با استفاده از اصل انطباق، به همه  $z$  هایی که انتگرال سمت راست همگراست تعمیم دهیم (بخش ۷.۷ را ببینید).

تمرین ۱۱.۵ تغییر متغیر  $x = iy$  در

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - i - 1}$$

انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{-idy}{y^2 + i + 1}$$

را نتیجه می‌دهد. آیا این نتیجه درست است؟

با توجه به مثالهای اخیر، ممکن است از هر تغییر متغیری در انتگرالهای مسیری حذر کنید. در واقع، تا وقتی که با خم‌های کراندار بطور پیوسته مشتق‌پذیر سر و کار دارید، مشکلی موجود نیست. فرض کنید  $C$  با  $z = c(t)$  و  $a \leq t \leq b$  تعریف شده باشد. در این صورت

$$I = \int_C f(z) dz = \int_a^b f[C(s)] C'(s) ds$$

آنچه احتمالاً می‌خواهید انجام دهید، جایگزین کردن  $\int_C f(z) dz$  با  $\int_{\gamma} f[g(w)] g'(w) dw$  است که در آن  $g$  یک تابع تحلیلی تک‌مقداری،  $w = g^{-1}(z)$  و  $\gamma(s) = g^{-1}[C(s)]$  یک خم در صفحه  $w$  متناظر با  $C$  می‌باشد. در اینصورت

$$\int_{\gamma} f[g(w)] g'(w) dw = \int_a^b f\{g[\gamma(s)]\} g'[\gamma(s)] \gamma'(s) ds = \int_C f(z) dz$$

با  $z = g(w)$

این درست آنچیزی است که در بخش ۸.۷، وقتی که مانده در  $\infty$  را محاسبه می‌کردیم، انجام دادیم.

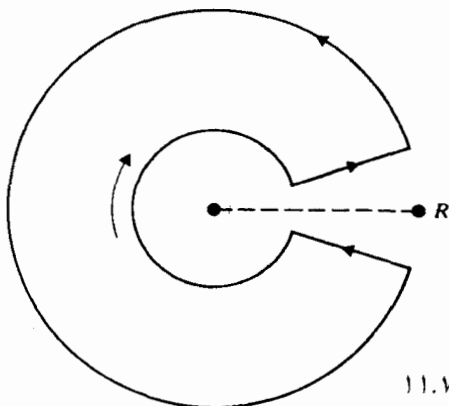
### تمرینهای تکمیلی

۱ -  $\int_C (z^4 + 16)^{-1} dz$  را در نظر بگیرید که در آن  $C$  شامل محور حقیقی از صفر تا  $R$ ، یک چهارم دایره  $|z| = R$  از  $R$  تا  $iR$ ، و محور  $y$  ها از  $iR$  تا صفر می‌باشد. انتگرال روی  $Q$  وقتی  $R \rightarrow \infty$  به صفر میل می‌کند. انتگرال در امتداد  $(0, R)$  به  $L$  میل می‌کند، انتگرال از  $iR$  تا صفر به صورت

$$\int_R^0 \frac{i dy}{y^4 + 16} = -i \int_0^R \frac{dy}{y^4 + 16} \rightarrow -iL$$

می‌باشد. این نشان می‌دهد که  $L = -iL$ . توضیح دهید چه اشتباهی شده است.

۲ - فرض کنید  $I = \int_0^{\infty} \exp(-x^3) dx$  قرار دهید  $x = iy$  و نتیجه بگیرید  $\int_0^{\infty} \exp(-y^3) dy = iI$ . مطلب را توضیح دهید.



شکل ۱۱.۷

### یادداشتها:

(۱) برای بسیاری از انتگرالهایی که می‌توان آنها را با انتگرال مسیری محاسبه کرد به Mitrinovic و Keckic مراجعه کنید. خصوصاً  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  را می‌توان با روش انتگرال مسیری (به چندین روش) محاسبه کرد. به Mitrinovic و Keckic صفحه ۱۵۸ و همچنین به Remmert صفحه ۲۹۷ مراجعه کنید.

(۲) شاید راه شهودی‌تر دیگر در نظر گرفتن مسیر شکل ۱۱.۱، این باشد که آن را به صورت حد مسیرهایی شبیه شکل ۱۱.۷ در نظر بگیریم. اما جزئیات انجام روند حدگیری به نظر من، خسته‌کننده‌تر از اثبات موجود در متن است.

(۳) برای تعمیم‌های بیشتر این ایده (بسیار قدیمی) به R.P. Boas and L. Schoenfeld, "Indefinite Integration by Residues" *SIAM Rev.* 8 (1966): 173-183 مراجعه کنید.

## ۱۲. ریشه‌های توابع تحلیلی

### ۱۲.۱ آرگومان اصلی

در بخش ۷.۷ نشان دادیم ریشه‌های توابع تحلیلی منفردند (بجز تابع صفر). اکنون می‌خواهیم اطلاعات خاص بیشتری دربارهٔ ریشه‌ها بوسیلهٔ یافتن فرمولی که تعداد ریشه‌های توابع را در داخل یک خم بسته می‌دهد بدست آوریم. اطلاعاتی نظیر این در مسایل نظری و همچنین در برخی از مسایل کاملاً عملی مفید است.<sup>۱</sup>

این به همان سادگی مطالعه توابع مرمورفیک و یافتن فرمولی برای تعداد ریشه‌های آن منهای تعداد قطبهایش است. در این صورت فرض می‌کنیم  $C$  یک خم بسته ساده و  $f$  مرمورفیک در ناحیهٔ کراندار  $D$  باشد که این ناحیه شامل  $C$  و درون  $C$  است و  $f$  روی  $C$  ریشه و قطب ندارد. بستر درون  $C$  مجموعه فشرده  $\Delta$  است. فقط تعداد با پایانی از ریشه‌ها درون  $C$  هستند، زیرا اگر تعداد ریشه‌ها بی‌پایان باشد، باید یک نقطهٔ حدی در  $\Delta$  و بنابراین در  $D$  داشته باشند، و بنا به بخش ۷.۷،  $f$  تابع صفر می‌شود. به همین نحو اگر تعداد قطب‌ها بی‌پایان باشد،  $\frac{1}{f}$  تابع صفر می‌شود.

حالا ببینیم تابع  $f$  در همسایگی ریشهٔ  $z_0$  چگونه رفتار می‌کند. اگر  $|z - z_0|$  به اندازهٔ کافی کوچک باشد، داریم  $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$  که در آن  $\varphi$  در  $z_0$  تحلیلی است و  $\varphi(z_0) \neq 0$  (بخش ۷.۷). در نتیجه،  $\log f(z) = n \log(z - z_0) + \log \varphi(z)$ . اگر  $z$  دایرهٔ کوچک  $\gamma$  حول  $z_0$  را در جهت مثبت بپیماید، آنگاه  $\arg f(z) = n \log |z - z_0| + ni \arg(z - z_0) + \log \varphi(z)$  و  $\arg(z - z_0)$  با اندازهٔ  $2\pi$  افزایش می‌یابد. جملات دیگر در  $\log f(z)$  به مقادیر اولیهٔ خود برمی‌گردند. لذا وقتی که  $z$  دایرهٔ  $\gamma$  را می‌پیماید،  $\log f(z)$  به اندازهٔ  $2\pi in$  افزایش می‌یابد؛ یا به عبارت دیگر  $\arg f(z)$  با اندازهٔ  $2\pi n$  افزایش می‌یابد. به همین نحو اگر  $f$  در نقطهٔ  $z_0$  قطب از مرتبهٔ  $m$  باشد می‌بینیم که  $\arg f(z)$  به اندازهٔ  $2\pi m$  کاهش می‌یابد. لذا قابل قبول است که اگر  $z \in C$  را در جهت مثبت بپیماید،  $\log f(z)$  با اندازهٔ  $2\pi(N - M)i$  تغییر می‌کند که در آن  $N$  تعداد ریشه‌های  $f$  در درون  $C$  و  $M$  تعداد قطب‌هاست؛ یا  $\arg f(z)$  به اندازهٔ  $2\pi(N - M)$  افزایش می‌یابد. این

بیانی غیرصوری از اصل آرگومان است، که بخاطر پیچیدگی ذاتی در ارائه دادن تعریفی دقیق از تغییر در  $\arg f(z)$  آن را تقریباً غیرمستقیم ثابت می‌کنیم.

هر شاخه‌ای از  $\log f(z)$  را که اختیار کنیم مشتق آن برابر با  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  است. لذا طبیعی است که انتگرال

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

را در نظر بگیریم. آن را می‌توانیم با استفاده از قضیه مانده محاسبه کنیم، زیرا تابع زیر انتگرال فقط تعداد با پایانی قطب در داخل  $C$  دارد. مانده‌های آن چه هستند؟

تمرین ۱۲.۱ نشان دهید مانده  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  در ریشه تابع  $f$ ، برابر با مرتبه ریشه است، و در یک قطب برابر با منفی مرتبه قطب است.

در نتیجه

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(N-M) = 2\pi i(C \text{ منهای تعداد قطبهای درون } C)$$

حال نقطه  $z_1$  را روی  $C$  اختیار کرده و فرض کنید

$$F(z) = \int_{z_1}^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

که انتگرال‌گیری در امتداد  $C$  و در جهت مثبت است. تابع  $F$  را مانند یک تابع روی مسیر  $C$  فرض می‌کنیم. لذا می‌توانیم  $\arg f(z)$  را به صورت قسمت موهومی  $F(z)$  تعریف کنیم. این تابع تا وقتی که  $z$  مجدداً به  $z_1$  برسد، تابعی پیوسته روی  $C$  خواهد بود و در این صورت به اندازه  $-2\pi(N-M)$  پرش خواهد داشت.

بنابراین اگر بخواهیم تعداد ریشه‌های تابع تحلیلی  $f$  را درون  $C$  بیابیم، با دانستن این که تعداد ریشه‌ها با پایان است و هیچ یک از آنها روی  $C$  نیست، می‌توانیم

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

یا افزایش  $\arg f(z)$  را وقتی  $z$ ،  $C$  را در جهت مثبت می‌پیماید، محاسبه کنیم. اصولاً، فرآیند اول را می‌توان به صورت عددی انجام داد. در واقع حتی نیازی به محاسبه خیلی دقیق ندارد، زیرا یک عدد صحیح را محاسبه می‌کنیم و اگر بتوانیم آن را تا حد  $\frac{1}{2}$  خطا تقریب بزنیم، اندازه دقیق آن را خواهیم دانست. در عمل، وقتی ریشه یک تابع پیچیده را باید به طور کاملاً دقیق بدست آوریم انجام می‌شود.



## ۱۲.۲ یافتن تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای در یک ناحیه

وقتیکه  $f$  یک تابع نسبتاً ساده است، احتمالاً توصیف یک شاخه از  $\arg f(z)$  ساده است و مقدار افزایش آن با دنبال کردن آن روی  $C$  بدست می‌آید. وضعیتی که در کاربردها پیش می‌آید این است که  $C$  خط  $x$  مساوی ثابت باشد و ما می‌خواهیم بدانیم چندجمله‌ای داده شده چند ریشه در یکی از نیم‌صفحه‌های محدود به  $C$  دارد. می‌توانیم  $C$  را با یک نیم‌دایره بزرگ در نیم‌صفحه مورد نظر جایگزین کنیم که به اندازه کافی بزرگ است و تمام ریشه‌ها درون آن باشند. اگر وقتی  $z$  مرز ناحیه نیم‌دایره را طی می‌کند، خمی را که توسط  $f(z)$  توصیف می‌شود رسم کنیم. تعداد دفعاتی که این خم حول صفر می‌گردد برابر با تغییر در  $\arg f(z)$  حول  $C$  است. نمودار این خم «نمودار نیکوئیت»<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. معمولاً لزومی ندارد که نمودار را بطور دقیق رسم کنیم؛ شکل تقریبی کفایت خواهد کرد.

در بسیاری از کاربردها تابع مورد بحث یک چندجمله‌ای است، اما درجه آن به اندازه کافی بزرگ، بطوریکه یافتن مکان ریشه‌هایش چندان بدیهی نیست.<sup>۲</sup> برای اینکه روش را توضیح دهیم مثال نسبتاً ساده  $P(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 2$  را در نظر می‌گیریم و سؤال می‌کنیم  $P$  در نیم‌صفحه  $\operatorname{Re} z > 0$  چند ریشه دارد. چون  $P$  روی محور حقیقی، حقیقی است و بوضوح روی محور حقیقی مثبت، ریشه ندارد، باید یک ریشه حقیقی منفی و دو ریشه مختلط مزدوج یا سه ریشه حقیقی منفی داشته باشد. ابتدا امکان دوم را رد می‌کنیم. اگر  $P$  سه ریشه حقیقی منفی داشته باشد، مشتق آن دو ریشه خواهد داشت، اما  $P'(z) = 3z^2 + 6z + 4$  دارای ریشه حقیقی نیست. بنابراین فقط باید تشخیص دهیم که ریشه‌های غیرحقیقی  $P$  در سمت راست نیم‌صفحه و یا در سمت چپ آن قرار دارند. چون  $P$  در نقاط مزدوج مقادیر مزدوج را می‌گیرد، می‌توانیم فقط ناحیه واقع در ربع اول که یک‌چهارم دایره (به مرکز صفر) است را در نظر بگیریم. از نقطه صفر با  $\arg P(z) = 0$  شروع می‌کنیم و شاخه پیوسته  $\arg P(z)$  را ابتدا در امتداد محور حقیقی از صفر تا یک عدد بزرگ مثبت  $R$  ادامه می‌دهیم. چون  $\log P(z)$  روی  $(0, R)$  پیوسته است، باید داشته باشیم  $\arg P(R) = 0$ ، زیرا تنها مقادیر مثبت  $\arg P(R)$  برابر با مضرب صحیحی از  $2\pi$  هستند. حالا فرض کنید  $z$  ربع دایره  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  را از  $R$  به  $iR$  طی می‌کند. داریم

$$P(z) = z^3 \left( 1 + \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{2}{z^3} \right)$$

اگر  $|z|$  بزرگ باشد، عبارت داخل پرانتز در گویی به مرکز ۱ و با شعاع کمتر از ۱ باقی می‌ماند؛ بنابراین آرگومان این عبارت از نزدیک صفر شروع می‌شود و در نزدیک صفر می‌ماند. از طرف دیگر، وقتیکه  $R$  بزرگ و  $z$  از  $R$  به  $iR$  می‌رود،  $\arg(z^3)$  به اندازه  $\frac{3\pi}{4}$  افزایش می‌یابد. بنابراین، وقتیکه  $R$  بزرگ و  $z = iR$  (به نزدیک  $i\infty$ )،  $\arg P(R)$  به  $\frac{3\pi}{4}$  نزدیک می‌شود.

بعد وقتیکه  $z = iy$  روی محور موهومی از  $i\infty$  به صفر می‌رود، تغییرات  $\arg P(z)$  را دنبال

می‌کنیم. داریم

$$P(iy) = -iy^3 - 3y^2 + 4iy + 2$$

و  $\arg P(iy)$  مقداری از  $\Theta = \tan^{-1} T$  است، که در آن

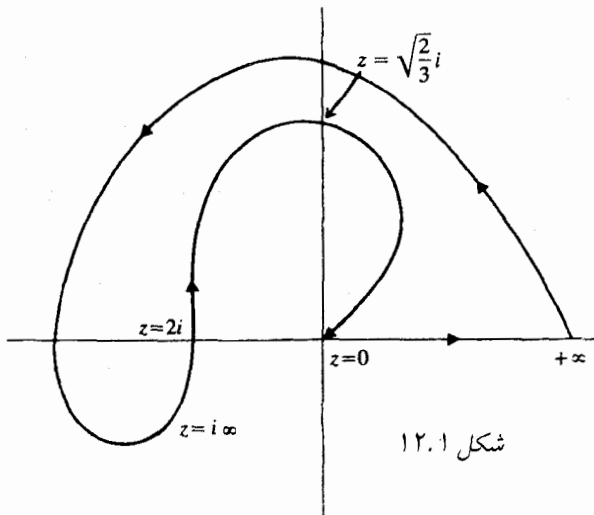
$$T = \frac{y(y^2 - 4)}{3y^2 - 2}$$

(نسبت  $\text{Im } P(iy)$  به  $\text{Re } P(iy)$ )

تغییرات  $\Theta$  وقتی که  $z$  از محور مثبت موهومی پایین می‌رود در جدول زیر نشان داده شده است.

$y$	$\tan \Theta$	ناحیه‌ای که $\Theta$ قرار دارد	$\Theta$
نزدیک $+\infty$	+	III	نزدیک $\frac{2\pi}{3}$
$\infty > y > 2$	+	III	$\frac{2\pi}{3} > \Theta > \pi$
$2$	$\circ$	از III به II	$\pi$
$2 > y > (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$	-	II	$\pi > \Theta > \frac{\pi}{2}$
$(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$	$\infty$	از II به I	$\frac{\pi}{2}$
$(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} > y > 0$	+	I	$\frac{\pi}{2} > \Theta > 0$

با جزئیات بیشتر، برای عدد بزرگ و مثبت  $y$ ،  $T$  بزرگ و مثبت و  $\Theta$  به  $\frac{2\pi}{3}$  نزدیک است، لذا باید یک زاویه در ربع سوم و نزدیک به  $\frac{2\pi}{3}$  باشد. وقتی  $y$  کاهش یابد،  $\Theta$  باید در ربع باقی بماند تا  $T$  از صفر یا از  $\infty$  عبور کند، جائیکه  $T$  تغییر علامت می‌دهد. این در ابتدا وقتی  $y = 2$  است، اتفاق می‌افتد؛ در اینجا  $T$  از صفر عبور می‌کند. چون  $\Theta$  در ربع سوم بوده است، باید به ربع دوم برود. در آنجا می‌ماند تا  $y$  به  $(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$  برسد، جائیکه  $T$  بی‌نهایت می‌شود و تغییر علامت می‌دهد. سپس  $\Theta$  ربع دوم را ترک می‌کند و باید به ربع اول برود. بالاخره وقتی  $y \rightarrow 0$ ،  $T$  نیز به صفر میل می‌کند و  $\Theta \rightarrow 0$ . مسیر  $P(z)$  (در صفحه  $P$ ) به طور کلی در شکل ۱۲.۱ نشان داده شده است. می‌بینیم که حول مبدأ نمی‌گردد. بنابراین تغییر در  $\arg P(z)$  صفر است. لذا  $P(z)$  در ربع اول ریشه ندارد. بنا به تقارن، ریشه‌ای در ربع چهارم نداشته و بنابراین ریشه‌های مزدوج مختلط در ربع‌های دوم و سوم واقع‌اند.



شکل ۱۲.۱

تمرین ۱۲.۲ ریشه‌های چندجمله‌ایهای زیر در کدام ربع صفحه واقع‌اند.

$$(الف) \quad z^4 - 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$$

$$(ب) \quad z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2$$

### تمرینهای تکمیلی

ریشه‌های چندجمله‌ای‌های زیر در کدام ربع صفحه است:

$$۱- \quad z^3 - 3z^2 + 4z - 1 \quad (\text{تنها یک ریشه حقیقی وجود دارد}).$$

$$۲- \quad z^4 + z^3 + 6z^2 + 3z + 5$$

$$۳- \quad z^4 - 2z^3 + 2z^2 + 1$$

$$۴- \quad z^4 - 3z + 5$$

$$۵- \quad z^6 - z^3 - 9z + 64 \quad (\text{ریشه حقیقی ندارد}).$$

### ۱۲.۳ قضیه روشه

اگر  $f$  درون و روی خم ساده و بسته  $C$  تحلیلی باشد و  $f$  را به اندازه کافی کوچک روی  $C$  تغییر دهیم، خوشبختانه، تعداد ریشه‌های  $f$  درون  $C$  تغییر نمی‌کند (چون یک عدد صحیح با تغییر کوچک، تغییر نمی‌کند) البته محل ریشه‌ها تغییر می‌کند. قضیه زیر این مطلب را دقیقاً بیان می‌کند.

قضیه روشه: توابع  $f$  و  $g$  را درون و روی خم بسته و ساده  $C$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم برای هر  $z$  روی  $C$   $|g(z)| < |f(z)|$ . در اینصورت تعداد ریشه‌های  $f(z) + g(z)$  و  $f(z)$  در درون  $C$  برابر است.

توجه کنید که نامساوی اکید در مفروضات نتیجه می‌دهد که  $f$  دارای ریشه نیست. همچنین توجه کنید مطلبی در رابطه با اندازه  $g$  درون  $C$  مطرح نشده است. دو اثبات ارائه می‌دهیم، یکی هندسی و دیگری محاسبه‌ای.

(الف) آرگومان اصلی می‌گوید تعداد ریشه‌های  $f + g$  در داخل  $C$ ، و تیکه  $z$  یکبار در جهت مثبت  $C$  را می‌پیماید،  $(2\pi)^{-1}$  برابر تغییر در  $\arg [f(z) + g(z)]$  است. می‌توانیم بنویسیم

$$\arg [f(z) + g(z)] = \arg \left\{ f(z) \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} = \arg f(z) + \arg \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]$$

وقتی که  $z$  خم  $C$  را می‌پیماید، بنا به فرض  $1 < \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right|$  یعنی  $\frac{g(z)}{f(z)}$  در گوی باز به مرکز صفر و شعاع ۱ باقی می‌ماند. در نتیجه  $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$  در گوی باز به مرکز یک و شعاع یک باقی می‌ماند و وقتی  $z$  خم  $C$  را می‌پیماید، نمی‌تواند حول صفر باشد. سپس  $\arg \left[ 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]$  به مقدار اصلی خود برمی‌گردد. بنابراین تغییر در  $\arg [f(z) + g(z)]$  برابر با تغییر در  $\arg f(z)$  است، که  $2\pi$  برابر تعداد ریشه‌های  $f$  در داخل  $C$  است.

(ب) برای یک اثبات دیگر، از صورت انتگرالی آرگومان اصلی استفاده می‌کنیم. اگر  $N$  تعداد ریشه‌های  $f + g$  در داخل  $C$  باشد داریم

$$2\pi i N = \int_C \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz$$

چون می‌خواهیم به  $\frac{f'(z)}{f(z)}$  برسیم، پس این مقدار را از تابع زیر انتگرال کم می‌کنیم:

$$\frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{f(z)[f(z) + g(z)]}$$

حال توجه کنید که

$$\frac{f(z)g'(z) - f'(z)g(z)}{[f(z)]^2}$$

مشتق تابع  $\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$  است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} &= \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\varphi'(z)f(z)}{f(z) + g(z)} \\ &= \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\varphi'(z)}{1 + \varphi(z)} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$2\pi i N = \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_C \frac{\varphi'(z)}{1 + \varphi(z)} dz$$

اولین انتگرال  $2\pi i$  برابر تعداد ریشه‌های  $f$  است. حالا فقط لازم است که نشان دهیم دومین انتگرال برابر با صفر است.

این یک کاربرد از قضیه کوشی نیست زیرا نمی‌دانیم  $\varphi$  درون  $C$  تحلیلی است (به خاطر ریشه‌های  $f$ ). اما

$$\frac{1}{1 + \varphi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\varphi(z)]^n$$

روی  $C$  همگرای یکنواخت است. بنابراین می‌توانیم آن را در  $\varphi'(z)$  ضرب کنیم و آنگاه جمله به جمله انتگرال بگیریم.

چون

$$\int \varphi'(z)[\varphi(z)]^n dz = \frac{1}{n+1}[\varphi(z)]^{n+1}$$

و  $\varphi$  روی  $C$  تحلیلی است لذا همه انتگرالها برابر با صفر هستند. در اینجا، این اصل (بخش ۵.۴) را که انتگرال مشتق حول یک خم بسته برابر با صفر است، بکار گرفته‌ایم.

اینجا کاربردی از قضیهٔ روشه برای توابع خاص ارائه می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم برای  $|z| < 0.7$  تابع  $z^3 + e^z$  دارای ریشه نیست اما برای  $|z| < 2$ ، ۳ ریشه دارد.

اگر  $|z| < 0.7$ ، در قضیهٔ روشه  $f(z) = e^z$  و  $g(z) = z^3$  را در نظر می‌گیریم، برای  $|z| = 0.7$  داریم  $|z|^3 < 0.35$  زیرا  $|e^z|$  در  $z = -0.7$  کوچکترین تعداد را دارد و  $0.49 > e^{-0.7}$ . از طرف دیگر اگر  $|z| = 2$ ، توابع  $f(z) = z^3$  و  $g(z) = e^z$  را در نظر می‌گیریم، آنگاه  $|f(z)| = 8 > e^2 = \max_{|z|=2} |e^z|$

تمرین ۱۲.۳ تعداد ریشه‌های  $2iz^2 + 2 \sin z$  در مستطیل  $|x| \leq \frac{\pi}{4}$  و  $|y| \leq 1$  چند تاست؟

تمرین ۱۲.۴ نشان دهید وقتی که  $f$  و  $g$  مرمورفیک هستند، از قضیهٔ روشه نتیجه می‌شود که تعداد ریشه‌های  $f + g$  منهای تعداد قطبهای  $f + g$  برابر با تعداد ریشه‌های  $f$  منهای تعداد قطبهای  $f$  است. مثالی بیابید که نشان دهد تعداد ریشه‌های  $f + g$  ممکن است از تعداد ریشه‌های  $f$  بیشتر باشد حتی وقتی  $f$  قطب ندارد.

تمرین ۱۲.۵ قضیهٔ اساسی جبر را با بکارگیری قضیهٔ روشه در یک دایرهٔ بزرگ با  $f(z) = z^n$  ثابت کنید.

در اینجا نتیجهٔ مفید دیگری از قضیهٔ روشه را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ هارویتز: اگر توابع  $f_n$  در ناحیهٔ  $D$  تحلیلی باشند و در  $D$  دارای ریشه نبوده و روی هر زیرمجموعهٔ فشرده از  $D$  همگرای یکنواخت به  $f$  باشند، آنگاه  $f(z) \equiv 0$  یا  $f$  در  $D$  دارای ریشه نیست.

دنبالهٔ  $\left\{ \frac{e^z}{n} \right\}$  نشان می‌دهد که ممکن است  $f(z) \equiv 0$  حتی اگر هیچ یک از  $f_n$  ها دارای ریشه نباشند. همچنین نتیجه می‌دهد که ریشه‌های  $f$  در  $D$  حد دنبالهٔ ریشه‌های  $\{f_n\}$  است.

تمرین ۱۲.۶ قضیهٔ هارویتز را ثابت کنید.

تمرین ۱۲.۷ با یک مثال نشان دهید که نقطه حدى ریشه‌های  $f_n(z)$ ، روی مرز  $D$ ، لزومی ندارد ریشه  $f$  باشد.

از قضیه هارویتز نتیجه می‌گیریم که مثلاً،  $\pi$  حد ریشه‌های مجموع جزئی سری توانی  $\sin z$  است.

تمرین ۱۲.۸<sup>۴</sup> فرض کنیم  $f$  در همسایگی صفر بجز وقتی که صفر یک نقطه تکین اساسی منفرد است تحلیلی باشد. همچنین فرض کنیم دنباله  $\{z_n\}$  از ریشه‌های  $f$  به صفر نزدیک شود. در اینصورت زیردنباله  $T_{m_n}$  از مجموع جزئی متقارن  $T_m = \sum_{k=-m}^m a_k z^k$  از سری لوران  $f$ ، و دنباله  $\{w_n\}$  که  $w_n \rightarrow 0$  وجود دارند، بطوریکه  $f(w_n) \rightarrow 0$  و  $T_{m_n}(w_n) = 0$ .

### تمرینهای تکمیلی

۱- ریشه‌های  $z - 3e^z$  در  $|z| < 1$  را بیابید.

۲- ریشه‌های  $e^z - ez^2$  در  $|z| < 1$  را بیابید.

۳- دنباله‌ای از توابع تحلیلی که در ناحیه  $D$  شامل صفر، همگرایی یکنواخت‌اند را در نظر می‌گیریم. اگر  $\exp[s_n(z)] \rightarrow f(z)$  و  $f(0) = 0$ ، درباره  $f$  چه می‌توان گفت؟

۴- تذکری را که بلافاصله بعد از تمرین ۱۲.۷ می‌آید، توجیه کنید.

۵-  $\left[1 + \left(\frac{z}{n}\right)^n\right]$  دارای ریشه است، چرا حد آن  $e^z$  ریشه ندارد؟

### ۱۲.۴ قضیه نگاشت باز

وقتی توابع حقیقی را روی مجموعه اعداد حقیقی مطالعه می‌کنیم می‌توانیم رابطه بین  $x$  و  $f(x)$  را با کشیدن یک نمودار مشاهده کنیم. برای توابع از صفحه مختلط به صفحه مختلط، حتی نمی‌توانیم تصور یک نمودار را داشته باشیم، زیرا باید در فضای ۴ بعدی رسم شوند. در نتیجه باید روشهای دیگری را برای به تصویر کشیدن رفتار توابع بکار ببریم. بهترین روش آن است که مجموعه‌های متفاوتی در صفحه  $z$  و تصاویرشان را در صفحه  $w = f(z)$  در نظر بگیریم، و نظیر این سؤالات را مطرح کنیم: تصاویر خمهای خاصی از صفحه  $z$  در صفحه  $w$  چیست؟ چه ویژگیهایی از یک مجموعه برای تصویرش باقی می‌ماند؟ سؤالاتی نظیر این در بخش آینده بررسی خواهند شد. البته ویژگی مهمی از تصویر یک مجموعه بوسیله یک تابع تحلیلی وجود دارد که می‌توانیم آن را با استفاده از قضیه ریشه به آسانی ثابت کنیم.

قضیه نگاشت باز: اگر  $f$  روی مجموعه باز  $S$  تحلیلی بوده و ثابت نباشد آنگاه تصویر  $S$  تحت

$$w = f(z)$$

یک مجموعه باز است.

برای اثبات قضیه نگاهت باز تابع  $f$  را که روی ناحیه  $D$  تحلیلی است و ثابت نیست، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $z_0 \in D$  و  $w_0 = f(z_0)$ . می‌خواهیم نشان دهیم که تصویر  $D$  تحت تابع  $w = f(z)$  شامل مجموعه بازی است که  $w$  را دربر می‌گیرد. این تضمین می‌کند که  $f$  هر زیرمجموعه باز از  $D$  را به یک مجموعه باز تصویر می‌کند. زیرا اگر  $\Sigma$  تصویر یک زیرمجموعه باز  $S$  از  $D$  باشد،  $z_0 \in \Sigma$  را تصویر وارون  $w_0 \in \Sigma$  می‌گیریم. تصویر  $S$  شامل مجموعه بازی که دربرگیرنده  $w_0$  است می‌باشد: یعنی  $\Sigma$  شامل یک مجموعه باز شامل  $w_0$  است، که به معنای باز بودن  $\Sigma$  است.

اکنون تابع  $g$  را که با رابطه  $g(z) = f(z) - w_0$  تعریف شده است در نظر می‌گیریم.  $g$  یک تابع تحلیلی غیرثابت است که  $z_0$  یک ریشه آن است. (در اینجا  $z_0$  یک ریشه ساده نیست) چون ریشه‌های  $g$  منفرد هستند باید شامل گوی  $|z - z_0| \leq r$  که روی محیط آن،  $\gamma$ ،  $g(z) \neq 0$  باشد. چون  $g$  پیوسته است  $\delta > 0$   $\inf_{z \in \gamma} |g(z)| = \delta$ . نشان خواهیم داد که گوی  $|w - w_0| < \delta$  :  $\Delta$  در تصویر  $D$  است، یعنی هر  $w$  در  $\Delta$  برای عضوی مانند  $z$  در  $D$  برابر  $f(z)$  است. برای نشان دادن این مطلب،  $w$  دلخواهی را در  $\Delta$  در نظر می‌گیریم و تابع  $h(z) = f(z) - w$  را تعریف می‌کنیم. چون  $h(z) = g(z) - (w - w_0)$ ، می‌توانیم قضیه روشه را برای  $h$  و  $g$  در  $\Delta$  در نظر بگیریم زیرا برای هر  $z$  روی  $\gamma$  داریم  $|g(z)| < \delta < |w - w_0|$  (با توجه به تعریف  $\delta$ ). بنا به قضیه روشه،  $h$  در  $D$  به همان تعداد ریشه‌های تابع  $g$  ریشه دارد، یعنی حداقل یکی. لذا حداقل یکبار برای  $z \in D$  داریم  $f(z) = w$ ، که می‌گوید تحت تابع  $f$ ،  $w$  تصویر عضوی مانند  $z$  است. چون  $w$  یک نقطه دلخواه از  $\Delta$  بود، مجموعه باز  $\Delta$  تصویر زیرمجموعه بازی از  $D$  است.

### یادداشتها:

۱- بعنوان مثال پایداری یک سیستم کنترل به این تصمیم برمی‌گردد که آیا تمام ریشه‌های چندجمله‌ای مربوط به معادله دیفرانسیل سیستم در نیم‌صفحه بخصوصی قرار دارند یا خیر.

۲- من مطمئنم که امروزه هر دانشجوی مهندسی، نمودار نیکوئیت را یاد می‌گیرد.

A. Jaffe "Ordering the Univrs: The Role of Mathematics" *SIAM Rev.* 26 (1984).

تعریف دقیق نمودار نیکوئیت از یک کتاب درسی به دیگری تغییر می‌کند.

۳- الگوریتمهای کامپیوتری برای یافتن ریشه‌های چندجمله‌ایها این روزها آنقدر سریع هستند که گمان می‌کنم دیگرامهای نیکوئیت کم‌کم کهنه و مهجور شوند.

۴- A. Abian, "On a Property of Finite Truncations of the Laurent Series of Analytic Functions," *Publ. Math. Debrecen* 30 (1983): 129-131.

۵- تصور کنید که شما اجازه کشیدن نمودار توابع در حساب دیفرانسیل و انتگرال را ندارید، اما فقط می‌توانید زیر مجموعه‌های محور حقیقی را مشاهده کنید و بینید تصاویرشان روی یک نسخه از خط حقیقی به چه چیز شبیه هستند. این شبیه وضعیتی است که ما در مطالعه توابع مختلط از صفحه مختلط به صفحه مختلط با آن مواجه هستیم، بنابراین عجیب نیست که درک آنالیز مختلط مشکلتر از آنالیز حقیقی است.

## ۱۳. تک‌مقداری و وارونها

### ۱۳.۱ توابع تک‌مقدار

چون نقطه  $w = f(z)$  یک ریشه  $f(z) - w$  است، بحث درباره ریشه‌های یک تابع با این سؤال که یک تابع تحلیلی هریک از مقادیرش را چند بار می‌گیرد، ارتباط نزدیکی دارد. می‌گوییم تابع  $f$  (که لزوماً تحلیلی نیست) روی مجموعه  $S$  (معمولاً یک ناحیه) تک‌مقداری<sup>۱</sup> است. اگر  $f$  روی  $S$ ، هریک از مقادیرش را دقیقاً یکبار بگیرد؛ به عبارت دیگر،  $f$  تک‌مقداری است اگر از  $f(z_1) = f(z_2)$  برای  $z_1$  و  $z_2$  در  $S$ ، نتیجه شود که  $z_1 = z_2$ . توجه کنید که در تعریف تک‌مقداری، تکرار را در نظر نمی‌گیریم، به عنوان مثال  $z^3$  در بازه  $[-1, 1]$  تک‌مقداری است هرچند که صفر، یک ریشه با تکرار ۳ است. یک فرق اساسی بین تک‌مقداری توابع حقیقی روی بازه‌های حقیقی و توابع تحلیلی در یک ناحیه موجود است. در حالت حقیقی یک تابع مشتق‌پذیر تک‌مقدار، یکنواست و مشتق آن نامنفی یا نامثبت است و می‌تواند مقدار صفر را بگیرد. از طرف دیگر اگر  $f$  یک تابع تحلیلی تک‌مقدار در ناحیه  $D$  باشد، آنگاه  $f'$  هیچ ریشه‌ای در  $D$  ندارد. اگر نقطه  $z$  را که به ازای آن  $f'(z) = 0$  بعنوان نقطه‌ای که  $f$  چندمقداری است در نظر بگیریم این حکم بدیهی خواهد بود، اما با تعریف ما این احتیاج به اثبات دارد. اکنون نشان می‌دهیم که اگر  $f'(z_0) = 0$ ، آنگاه  $f$  در هیچ همسایگی  $z_0$  تک‌مقداری نیست. چون  $f$  در یک همسایگی از  $z_0$  بوسیله سری تیلور قابل نمایش است می‌توانیم گوی به مرکز  $z_0$  بیابیم که

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k \varphi(z)$$

که  $k \geq 2$  و  $\varphi$  در  $z_0$  تحلیلی است و  $\varphi(z_0) \neq 0$  (مگر اینکه  $f$  ثابت باشد که در این حالت قطعاً تک‌مقداری نیست). می‌توانیم گوی  $\Delta$  به مرکز  $z_0$  را به قدری کوچک انتخاب کنیم که  $\Delta$ ،  $f' \neq 0$  بجز در  $z_0$  (زیرا صفرهای  $f'$  منفرد هستند) و همچنین  $\Delta$  شامل هیچ ریشه‌ای از  $h(z) = f(z) - f(z_0)$  بجز در  $z_0$  نباشد؛ بنابراین  $\delta$  مثبتی موجود است که روی مرز  $\Delta$  داریم  $0 < \delta \leq |h(z)|$ . حالا قضیه روزه (بخش ۱۲.۳) را برای  $h$  به جای  $f$  و  $-\delta$  به جای  $g$  به کار می‌بریم. در نتیجه  $h(z)$  و  $h(z) - \delta$  درون  $\Delta$  تعداد ریشه‌های یکسانی، مثلاً  $k$  دارند. بنابراین  $f$ ، مقدار  $\delta + f(z_0)$  را در درون



$\Delta$  مجموعه  $k$  بار می‌گیرد. اما  $f$  این مقدار را در  $z$  نمی‌تواند بگیرد، زیرا مقدار دیگری در  $z$  را از قبل گرفته است؛ در نقاط دیگر  $\Delta$ ،  $h'(z) = f'(z) \neq 0$ ، بنابراین  $h$  فقط ریشه‌های ساده دارد. این بدان معناست که  $f$  مقدار  $f(z_0) + \delta$  را در  $\Delta$  در  $k \geq 2$  نقطه متفاوت می‌گیرد، بنابراین  $f$  در  $\Delta$  تک‌مقداری نیست.

لذا نشان داده‌ایم که اگر  $f$  در ناحیه  $D$  تک‌مقداری باشد، مشتق آن،  $f'$ ، در  $D$  هرگز صفر نمی‌شود. اثبات دیگری از این مطلب که هندسی‌تر است، در بخش ۲۲.۱ ارائه می‌شود. اما نباید یکباره به این نتیجه برسید که اگر  $f$  در  $D$  تحلیلی باشد و  $f'(z) \neq 0$ ، آنگاه  $f$  در  $D$  تک‌مقداری است.

تمرین ۱۳.۱ ناحیه  $D$  و تابع تحلیلی  $f$  در ناحیه  $D$  را چنان بیابید که  $f'(z) \neq 0$ ، اما  $f$  در  $D$  تک‌مقداری نباشد.

با وجود این، اگر  $f$  در  $z_0$  باشد و  $f'(z_0) \neq 0$ ، آنگاه  $f$  در یک گوی حول  $z_0$  تک‌مقداری است. به عبارت دیگر اگر در ناحیه  $D$ ،  $f'(z) \neq 0$  آنگاه  $f$  به طور موضعی در  $D$  تک‌مقداری است. شاید آسانتر باشد که این مطلب را با استفاده از سری توانی ثابت کنیم. در گوی  $|z - z_0| \leq s < r$ ،  $(r > 0)$  داریم

$$f(z) = f(z_0) + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad a_1 = f'(z_0) \neq 0$$

فرض کنید  $z_1$  و  $z_2$  دو نقطه متفاوت در گوی  $|z - z_0| \leq r$  باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= a_1(z_1 - z_2) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k [(z_1 - z_0)^k - (z_2 - z_0)^k] \\ &= (z_1 - z_2) \left\{ a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k [(z_1 - z_0)^{k-1} + \right. \\ &\quad \left. (z_1 - z_0)^{k-2}(z_2 - z_0) + \dots + (z_2 - z_0)^{k-1}] \right\} \end{aligned}$$

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geq |z_1 - z_2| \left\{ |a_1| - \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k| s^{k-1} \right\}$$

سری اخیر همگراست زیرا جملات آن، قدرمطلق جملات مشتق سری تیلور  $f$  حول  $z_0$  هستند؛ در واقع اگر  $s$  از هر دوی  $|z_1 - z_0|$  و  $|z_2 - z_0|$  کمتر باشد، سری همگراست. لذا وقتی  $s \rightarrow 0$ ، سری، تابعی از  $s$  را تعریف می‌کند که از نوع  $O(s)$  است و داریم

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geq |z_1 - z_2| [|a_1| - O(s)], \quad s \rightarrow 0$$

بنابراین برای  $|z_1|$  و  $|z_2|$  به اندازه کافی کوچک و مثبت داریم  $|f(z_1) - f(z_2)| > 0$ . این به این معناست که  $f$  در یک همسایگی  $z = z_0$  تک‌مقداری است.

تمرین ۱۳.۲ ثابت کنید شرط کافی برای اینکه تابع تحلیلی  $f$  در گوی واحد  $D: |z - z_0| < 1$  تکمقداری باشد این است که برای  $|z - z_0| < 1$  داشته باشیم  $|f'(z) - f'(z_0)| < |f'(z_0)|$ .

### ۱۳.۲ توابع وارون

یک تابع تحلیلی تکمقداری (یعنی، یک به یک) بدون در نظر گرفتن خواص دیگری که ممکن است داشته باشد، به طور طبیعی دارای تابع وارون است که به طور مرسوم به  $f^{-1}$  نمایش داده می‌شود.<sup>۲</sup> قضیه نگاشت باز (بخش ۱۲.۴) نشان می‌دهد که این تابع وارون حداقل پیوسته است، زیرا  $f$  مجموعه باز را به مجموعه باز می‌نگارد، بنابراین تصویر وارون مجموعه‌های باز تحت  $f^{-1}$ ، باز هستند. البته آنچه می‌خواهیم ثابت کنیم این است که  $f^{-1}$  (وقتی  $f$  تکمقداری است) تحلیلی است و مشتق  $f^{-1}$  را با استفاده از فرمول حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌توانیم محاسبه کنیم که می‌گوید مشتق  $f^{-1}$  در  $w$  برابر با  $\frac{1}{f'(z)}$  است که در آن  $w = f(z)$ .  
به سادگی با محاسبه مشتق نشان می‌دهیم که  $f^{-1}$  تحلیلی است. اگر  $w = f(z)$  و  $w + \varepsilon = f(z + \delta)$ ، داریم  $z = f^{-1}(w)$  و  $z + \delta = f^{-1}(w + \varepsilon)$ . بنابراین

$$\delta = f^{-1}(w + \varepsilon) - f^{-1}(w) \rightarrow 0$$

وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، چون  $f^{-1}$  پیوسته است. در این صورت  $f(z + \delta) - f(z) \neq 0$  و  $f'(z) \neq 0$ ، چون  $f$  تکمقداری است. در نتیجه وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{f^{-1}(w + \varepsilon) - f^{-1}(w)}{\varepsilon} = \frac{\delta}{f(z + \delta) - f(z)} \rightarrow \frac{1}{f'(z)}$$

یعنی چنان که انتظار داشتیم

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

حتی اگر این فرمول را فراموش کنید می‌توانید آن را با استفاده از محاسبات صوری، با این فرض که  $f^{-1}$  مشتق‌پذیر است، مجدداً بدست آورید.

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{d}{dz} f^{-1}[f(z)] \frac{dz}{dw} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(z)}$$

سری توانی  $f^{-1}$  در بخش ۱۵.۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

تمرین ۱۳.۳ بیاد آورید که تابع تام، تابعی تحلیلی در تمام صفحه با پایان است. ثابت کنید که تنها توابع تام تکمقداری، توابع مستوی  $f(z) = az + b$  هستند.

تمرین ۱۳.۴ نشان دهید حد بکنواخت یک دنباله از توابع تک‌مقداری، تابعی ثابت یا تک‌مقداری است.

### تمرینهای تکمیلی

در این تمرینها «تک‌مقداری» به معنای «تحلیلی و تک‌مقداری است».

۱- نشان دهید  $z(1-z)^2$  در  $|z| < 1$  تک‌مقداری است.

۲- اگر  $f$  و  $g$  تک‌مقداری باشند آیا لزوماً تک‌مقداری است  $\frac{f+g}{\gamma}$ ؟

۳- اگر  $f$  تک‌مقداری و  $f(z) \neq 0$ ، آیا  $f'$  لزوماً تک‌مقداری است؟

۴- اگر  $f$  در یک همسایگی صفر تک‌مقداری باشد، آیا  $\int_0^z f(w) dw$  تک‌مقداری است؟

۵- ثابت کنید  $z(1-z)^3$  برای  $|z| < \frac{1}{4}$  تک‌مقداری است اما در هر گوی بزرگتر چنین نیست.

### ۱۳.۳ تک‌مقداری بودن روی خم، تک‌مقداری بودن درون آن را نتیجه می‌دهد

اغلب ساده‌تر است ثابت کنیم که تابع روی یک خم تک‌مقداری است تا اینکه در یک ناحیه تک‌مقداری می‌باشد. خوشبختانه قضیه زیر را داریم

اگر  $f$  درون و روی خم ساده بسته  $C$  تحلیلی و روی  $C$  تک‌مقداری باشد، آنگاه  $f$  درون  $C$  نیز تک‌مقداری است.

این حالت خاص و ساده قضیه داربو است که در بخش ۲۲.۴ شکل کلی‌تر آن را خواهیم دید. برای اثبات، فرض کنید  $w = f(z)$ ، چون  $f$  روی  $C$  تک‌مقداری است تصویر  $C$  خم ساده بسته‌ای مانند  $\Gamma$  در صفحه  $w$ ، با جهت مثبت می‌باشد (بخش ۱۲.۱). فرض کنید  $w$  یک نقطه درونی  $\Gamma$  باشد، در اینصورت  $\arg [f(z) - w_0] = (w - w_0)$ ؛ وقتی  $z$ ،  $C$  را طی می‌کند،  $2\pi$  افزایش می‌یابد، لذا بنا به اصل آرگومان  $f(z) - w_0$  دارای یک ریشه درون  $C$  است. به همین نحو، اگر  $w$  بیرون  $\Gamma$  باشد،  $f(z) - w_0$  دارای هیچ ریشه‌ای درون  $C$  نیست. یعنی،  $f$  هر مقدار درونی  $\Gamma$  را یکبار درون  $C$  می‌گیرد و وقتی  $z$  درون  $C$  است،  $f$  هیچ مقداری بیرون  $\Gamma$  را نمی‌گیرد.

این امکان باقی می‌ماند که  $f$ ، در برخی نقاط درونی  $C$ ، مقدار  $w_0$  را که روی  $\Gamma$  است بگیرد. اما می‌دانیم که نگاشت  $w = f(z)$ ، مجموعه باز را به مجموعه باز می‌نگارد، لذا در این حالت، تصویر

گوی، مرکز  $z_0$ ، شامل گویی به مرکز  $w_0$  خواهد بود و در نتیجه هم شامل نقاط درون هم شامل نقاط بیرون  $\Gamma$  خواهد شد؛ که الساعه دیدیم امکان‌پذیر نیست.

بنابراین ثابت کردیم نه تنها  $f$  در ناحیهٔ کرانه‌دار  $C$  تک‌مقداری است بلکه نگاشتی پوشا بر ناحیهٔ کراندارشده به وسیلهٔ  $\Gamma$  است.

تمرین ۱۳.۵ نشان دهید که عکس قضیهٔ داربو درست نیست: خم  $C$  و تابع  $f$  را چنان ارائه دهید که  $f$  درون  $C$  تک‌مقداری اما روی  $C$  تک‌مقداری نباشد.

## یادداشتها:

(۱) اصطلاحات زیر مترادف تک‌مقداری می‌باشد.

“one-to-one”, “simple”, “injective”, “biuniform”, “schlicht”

“Schlicht” در زبان آلمانی یعنی هموار “smooth”. در اواخر دههٔ ۱۹۳۰ شنیدم که کولیدج (J.L. Coolidge) بعد از یک سخنرانی دربارهٔ “Schlicht Functions” باشکوه پرسید آیا معادل انگلیسی برای این اصطلاح وجود دارد. اسگود (Osgood) جواب داد که شما می‌توانید آنها را “Univalent Functions” بنامید و همه می‌دانند که منظور شما “Schlicht” است.

(۲) نمادهای دیگری برای توابع وارون مطرح شدند، اما هیچ یک از آنها مورد پذیرش عام قرار نگرفت. نماد ما با این قرارداد که (مثلاً)  $\log^2 x$  به معنی  $\log(\log x)$ ، در مقابل  $\sin^2 x = (\sin x)^2$  مطابقت دارد. همیشه تلقی من از  $f^{-1}$  این بوده است که برای بدست آوردن  $x$  طرفین  $y = f(x)$  را بر  $f$  تقسیم می‌کنیم.

## ۱۴. سری لوران

### ۱۴.۱ نمایش توابع تحلیلی در یک طوقه

سری توانی را برای نمایش توابعی که در گوی  $|z - z_0| < R$  تحلیلی هستند بکار بردیم، اما این سریها طبیعتاً برای توابعی که بجز در نقطهٔ تکین منفرد  $z_0$  تحلیلی هستند در دسترس نمی‌باشند، چون ارائه سری تیلور برای توابع تحلیلی با فرمول انتگرال کوشی بسط هسته در یک سری آغاز شد، معقول است که بتوانیم کار مشابهی برای تابعی با یک نقطه تکین منفرد انجام دهیم. در واقع می‌توانیم کار بیشتری انجام دهیم: می‌توانیم یک بسط سری برای تابع تحلیلی  $f$  را در هر طوقهٔ بسته بین دو دایرهٔ هم‌مرکز ارائه دهیم. برای سادگی فرمولها از حالت  $z_0 = 0$  شروع می‌کنیم.

فرض کنید  $f$  در  $0 < r \leq |z| \leq R$  تحلیلی است. هرچند این طوقه همبند ساده نیست، اما هنوز می‌توانیم  $f(z)$  را برای  $z$  هایی که در طوقه بین دایره  $C_1 : |z| = r$  و  $C_2 : |z| = R$  قرار دارند با استفاده از فرمول کوشی با انتگرال‌گیری در جهت مثبت حول  $C_2$  و در جهت منفی حول  $C_1$  نمایش دهیم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w) dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w) dw}{w-z}$$

منطقی است که با ایجاد برشی در طوقه و تبدیل آن به یک ناحیه همبند ساده مطابق شکل ۱۴.۱ انتگرال‌گیری کنیم. بهر حال اگر همان ابزار بخشهای ۷.۱ و ۱۱.۱ را به کار ببریم اثبات ساده‌تر می‌شود. طوقه را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. در این صورت اگر  $z$  بین  $C_1$  و  $C_2$  باشد حول نیمه بالایی یا پائینی شکل ۱۴.۲ داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw = 0$$

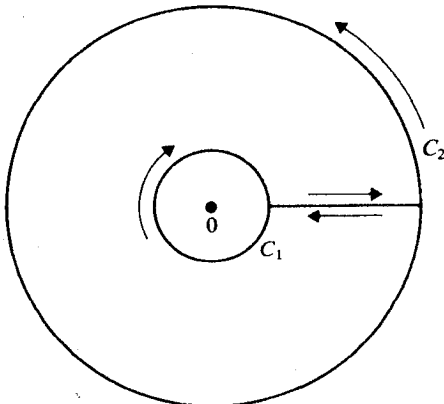
(نیمه بالایی، مطابق شکل رسم شده) و حول نیمه دیگر داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$$

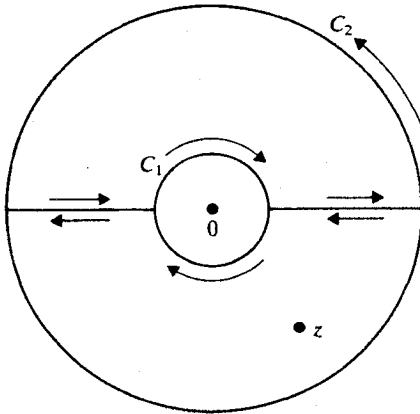
انتگرالها در امتداد پاره‌خطهای افقی یکدیگر را حذف می‌کنند. بنابراین

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f(w) dw}{w-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w) dw}{w-z} = f_2(z) + f_1(z)$$

انتگرال اول نمایانگر تابع  $f_2$  است که درون  $C_2$  تحلیلی می‌باشد (با بخش ۷.۳ مقایسه کنید) و انتگرال دوم نمایانگر تابع  $f_1$  است که بیرون  $C_1$  می‌باشد. در این صورت:



شکل ۱۴.۱



شکل ۱۴.۲

تمرین ۱۴.۱ نشان دهید

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

با

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

که در آن  $C$  هر خم ساده بسته درون  $C_2$  و احاطه‌کننده  $C_1$  است، و به همین نحو

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$$

با

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C w^{n-1} f(w) dw, \quad (n \geq 1)$$

(انتگرال‌گیری در هر دو حالت در جهت مثبت است.)

اکنون داریم

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

برای هر  $z$  بین  $C_1$  و  $C_2$ ، این سری، سری لوران  $f$  در طوقه بین  $C_1$  و  $C_2$  است. نمی‌توانیم فقط از «سری لوران برای  $f$ » صحبت کنیم. چون ممکن است در طوقه‌های دیگر  $f$  سری لوران دیگری داشته باشد. این که یک تابع فقط یک سری لوران در طوقه داده‌شده دارد، در بخش ۱۴.۲ نشان داده خواهد شد.

توجه کنید که وقتی  $n \geq 0$ ، لزوماً  $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$  را نداریم، در واقع در حالت کلی این رابطه را نداریم، چون لزومی ندارد  $f$  در  $z = 0$  تحلیلی باشد. همچنین برای  $n = -1$ ، انتظار نداریم که داشته باشیم  $c_{-1} = 0$  زیرا  $f$  در حالت کلی درون  $C_1$  تحلیلی نیست. اگر برحسب اتفاق  $f$  درون  $C_1$  بجز در قطب صفر تحلیلی باشد، آنگاه  $c_{-1}$  مانده  $f$  در صفر است. این یک روش ساده برای پیدا کردن مانده است به شرط آنکه سری لوران به طریق دیگری به دست آمده باشد. اگر طوقه‌ای به مرکز  $z_0$  به جای صفر مورد نظر باشد، سری لوران به صورت زیر است.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

با

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w) (w - z_0)^{-n-1} dw \quad -\infty < n < \infty$$

که در آن  $C$  در هر خم ساده بسته درون  $C_2$  و احاطه‌کننده  $C_1$  است.

همچنین در حالت حدی وقتی  $R \rightarrow \infty$  می‌توانیم  $C_2$  را به عنوان یک دایره به دلخواه بزرگ در نظر بگیریم و سری لوران در بیرون  $C_1$  به  $f(z)$  همگرا است.

تمرین ۱۴.۲ نشان دهید که اگر  $f$  دارای یک قطب از مرتبه  $n$  در  $z_0$  باشد و در  $R < |z - z_0| < \infty$  تحلیلی باشد آنگاه سری لوران  $f$  در گوی محذوف، جملات با اندیس کمتر از  $-n$  ندارد و  $c_{-n} \neq 0$ .

تمرین ۱۴.۳ فرض کنید سری لوران  $f$  بیرون گوی که شامل همه نقاط تکین با پایان  $f$  است به صورت  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  باشد، نشان دهید  $c_{-1}$  مانده  $f$  در  $\infty$  است (بخش ۸.۳ را ببینید).

## ۱۴.۲ روشهای یافتن سری لوران

استفاده از فرمولهای انتگرال‌گیری برای تعیین ضرایب همیشه (شاید معمولاً) بهترین راه پیدا کردن ضرایب برای تابعی که با فرمول صریحی تعریف شده است، نیست. قبل از پرداختن به روشها، باید بدانیم که هر تابع داده‌شده فقط یک سری لوران در طوقه تعیین‌شده دارد (چنان که در بالا اشاره کردیم ممکن است سریهای لوران دیگری در طوقه‌های دیگر داشته باشد). اجمالاً سریهای لوران در این مفهوم یکتا هستند. یکتایی سری لوران به این دلیل است که بر سری لوران جمع دو سری توانی برحسب  $(z - z_0)$  و  $\frac{1}{z - z_0}$  می‌باشد.

هریک از این سریها را می‌توانیم در توانی از  $(z - z_0)^{-m}$  ( $m$  عدد صحیح) ضرب کنیم و حول دایره‌ای واقع در ناحیه همگرایی سری، انتگرال‌گیری کنیم (بخش ۷.۴ و ۳.۴ را ببینید).

تمرین ۱۴.۴ یکتایی سری لوران را ثابت کنید: یعنی ثابت کنید که یک تابع فقط یک سری لوران را یک طوقه مشخص دارد.

اکنون نتیجه می‌شود که اگر بتوانیم یک سری لوران همگرا برای تابع  $f$  در یک طوقه، با هر روشی، بدست آوریم، مثلاً به طور جبری، این سری باید سری لوران  $f$  در آن طوقه باشد. به عنوان مثال سه سری لوران برای

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

را به دو طریق مختلف ارائه می‌دهیم. سه سری وجود دارند زیرا  $f(z)$  را می‌توانیم در گوی محذوف  $0 < |z| < 1$  در طوقه  $1 < |z| < 2$  یا در بیرون گوی  $|z| \leq 2$  بسط دهیم.

روش ۱: در این روش  $f$  را با استفاده از تبدیلهای جبری و قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم. ابتدا  $f$  را به صورت مجموع کسره‌های جزئی می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

در گوی محذوف  $0 < |z| < 1$ ، کسره‌های دوم و سوم را با استفاده از قضیه دوجمله‌ای بسط می‌دهیم. در اینصورت بدست می‌آوریم

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n = \frac{1}{2z} + \sum_{n=0}^{\infty} (1-2)^{-n-2} z^n$$

که سری لوران  $f$  در  $0 < |z| < 1$  می‌باشد.

وقتی  $1 < |z| < 2$  می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \\ &= -\frac{1}{2} z^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n \end{aligned}$$



خصوصاً توجه کنید که ضریب  $\frac{1}{z}$  در این سری مانده  $f$  در صفر نیست. به همین نحو برای  $|z| > 2$  می‌نویسیم

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{\frac{1}{z}}{1 - (\frac{1}{z})} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{2}{z}}$$

و کسرها را برحسب توانهای  $\frac{1}{z}$  بسط می‌دهیم.

تمرین ۱۴.۵ سری لوران را در این حالت بدست آورید.

روش ۲: در این روش ضرایب  $c_n$  از سری لوران را با انتگرال

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

تعریف می‌کنیم و آنها را با محاسبه مانده‌ها بدست می‌آوریم.

از طرفی  $f$  برای  $|z| < 1$  بجز در قطب صفر، تحلیلی است، بنابراین می‌توانیم  $C_r$  را هر خم درون دایره  $|z| = 1$  و حول مبدأ بگیریم؛ در اینصورت  $c_n$  ضرایب سری لوران  $f$  است که همگرا در  $|z| < 1$  خواهد بود.

اکنون می‌بینیم که  $c_n$  مانده  $\frac{f(w)}{w^{n+1}}$  در مبدأ است یعنی مانده

$$\frac{1}{w^{n+2}} \cdot \frac{1}{w-1} \cdot \frac{1}{w-2}$$

است. توجه کنید وقتی  $n < -1$ ، داریم  $-1 > -n - 2$  بنابراین  $-n - 2$  مثبت یا صفر است.

در نتیجه

$$\frac{w^{-n-2}}{(w-1)(w-2)}, \quad n < -1$$

در صفر تحلیلی است، مانده‌اش برابر با صفر است و بنابراین سری لوران در  $|z| < 1$  فقط یک جمله با اندیس منفی دارد. این مشخصه‌ای برای قطب از مرتبه ۱ است.

مجموع جملات با اندیس منفی در سری لوران  $f$  در یک همسایگی نقطه تکین منفرد  $z$  را قسمت

اصلی  $f$  در  $z$  می‌نامیم. بنا به تمرین ۱۴.۲:

یک قطب بوسیله وقوع تنها تعدادی با پایان (نه این که هیچ یک) جملات غیرصفر در قسمت اصلی  $f$  مشخص می‌شود. در یک نقطه تکین اساسی، تعدادی بی‌پایان جمله غیرصفر در قسمت اصلی وجود دارد. بالاخره در نقطه تکین برداشتنی تابع قسمت اصلی ندارد.

به مثال خودمان برگردیم، جمله‌ای با  $n = -1$  را در نظر می‌گیریم که ضریب  $c_{-1}$  برابر با مانده

$$\frac{1}{w(w-1)(w-2)}$$

در صفر می‌باشد. از روش محاسبه مانده در قطب ساده (بخش ۸.۶) مقدار  $\frac{1}{4} = c_{-1}$  حاصل می‌شود. وقتی  $n \geq 0$  مانده

$$\frac{1}{w^{n+2}} \frac{1}{(w-1)(w-2)}$$

برابر با

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{d}{dw}\right)^{n+1} \frac{1}{(w-1)(w-2)}$$

است. این مقدار به سادگی با محاسبات زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{d}{dw}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{w-2} - \frac{1}{w-1}\right) \\ = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{(n+1)!} \left[ \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(w-2)^{n+2}} - \frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(w-1)^{n+2}} \right] \\ = -2^{-n-2} + 1 \end{aligned}$$

با آنچه از روش ۱ یافته‌ایم مطابقت دارد، در واقع روش ۱ نسبتاً سریعتر بنظر می‌رسد. اما روش ۲، برای سری لوران دوم در  $1 < |z| < 2$  بهتر به نظر می‌رسد. اینجا داریم

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw$$

که در آن  $C_r$  دایره  $|z| = r$ ،  $1 < r < 2$  است. داریم:

$$\int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = \int_{C_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw + (w=1 \text{ در } f(w) w^{-n-1} \text{ مانده})$$

که در آن مانده برابر با مانده

$$\frac{1}{(w-1)(w-2)w^{n+2}}$$

در  $w=1$  است. مانده به سادگی برابر با

$$\lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{(w-2)w^{n+2}} = -1$$

می‌باشد و بنابراین سری لوران با اضافه شدن  $-z^n$ ،  $-\infty < n < \infty$  به جمله با اندیس  $n$  در سری لوران برای  $1 < |z| < 2$  بدست می‌آید، که مانند قبل تأثیری مشابه روی همان سری حاصل می‌کند.

تمرین ۱۴.۶ ضرایب سری لوران برای  $|z| > 2$  را از ضرایب برای  $1 < |z| < 2$  با اضافه کردن مانده در  $w = 2$  بدست آورید.

هر دو روش برای هر تابع مرومورفیک در صفحه گسترش یافته، کار می‌کند. (در تمرین ۸.۱۸ دیدیم که این یعنی تابع گویا است) اما برای بسیاری از توابع مقدماتی، مانند  $\log(1 - \sin^{-1} z)$ ،  $e^{\sin z}$  یا  $\tanh z$ ، معمولاً آسانتر است با استفاده از ترکیب سریهای ساده کار کنیم: بخش ۱۵ را ببینید.

تمرین ۱۴.۷ چند جمله سری لوران هریک از توابع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{z+1}{z^3(z-2)} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{z^3}{(2z+1)(3z-2)} \quad (\text{ب})$$

در انتهای بخش ۸.۶ ثابت کردیم که یک تابع مرومورفیک که دارای مقادیر حقیقی روی محور حقیقی است در قطبهای مزدوج، مانده‌های مزدوج دارد. اکنون می‌توانیم اثباتی ساده‌تر از این واقعیت مفید ارائه دهیم.

می‌دانیم که در یک همسایگی  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{با مانده } c_{-1}$$

در یک همسایگی  $\bar{z}_0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (z - \bar{z}_0)^n, \quad \text{با مانده } \gamma_{-1}$$

است. در این صورت داریم

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (\bar{z} - \bar{z}_0)^n$$

همچنین داریم

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_n (z - z_0)^n$$

و بنابراین مانده  $f$  در  $z_0$  برابر با  $\bar{\gamma}_{-1}$  است.

تمرین ۱۴.۸ اگر  $\log z = \ln r + i\theta$ ،  $0 < \theta < 2\pi$ ، مانده‌های  $\frac{\log z}{1+z^2}$  در  $z = \pm i$  را

بیابید. چرا آنها مزدوج نیستند؟

تمرین ۱۴.۹ تابع تعریف شده بوسیله

$$\frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{2}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

دارای قطبی در صفر است. آیا مانده در صفر برابر ۲، ۱، یا مقدار دیگری است؟ توضیح دهید.

تمرین ۱۴.۱۰ فرض کنید  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی باشند و  $a < b$  و فرض کنید که  $f(z) =$

$$\frac{1}{4}(z-b)^{\frac{1}{4}}(z-a)^{\frac{1}{4}}$$

مثبت حقیقی، مثبت هستند. مانده  $f$  در  $\infty$  را پیدا کنید و از آنجا

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$$

را محاسبه کنید.<sup>۱</sup>

### تمرینهای تکمیلی

سری لوران توابع زیر را (بر حسب توانهای  $z$ ) پیدا کنید.

$$-۱ \quad \frac{z}{(z+1)(3-z)} \quad (\text{سری ۳})$$

$$-۲ \quad \frac{1}{z^2(4z-1)} \quad (\text{سری ۲})$$

$$-۳ \quad \frac{z^2+1}{z(2z+3)} \quad (\text{سری ۲})$$

$$-۴ \quad \frac{z^2+1}{z(z-2)(z+5)} \quad (\text{سری ۳})$$

### یادداشت:

(۱) یک جدول جامع منبع خوبی برای یافتن انتگرالها است. روش محاسبه انتگرال با روشهای «حقیقی» معمولاً در دروسهای حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی می‌شوند. انتگرالهای مشابهی در فیزیک مطرح می‌شود، که در آنجا استفاده انتگرال مسیری از انجام عملیات جبری لازم بوضوح آسانتر است. با

## ۱۵. ترکیب سریهای توانی و سریهای لوران

## ۱۵.۱ ترکیبات خطی

اگر سری مک‌لورن  $2 \sin z - 3 \cos z$  را بخواهیم، مشتق‌گیری مکرر از توابع برای بدست آوردن ضرایب، نامعقول خواهد بود. چون با سریهای

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

و

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

آشنا هستیم، می‌توانیم یکباره بنویسیم

$$2 \sin z - 3 \cos z = -3 + 2z + \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$$

اعمال جبری روی سریها می‌گوید که می‌توانیم سریهای همگرا را به این طریق ترکیب کنیم تا یک سری همگرا بدست آوریم و منحصر به فرد بودن سری توان برای تابع داده‌شده در ناحیه مشخص شده (بخش ۴.۵) تضمینی برای درستی تساوی است.

بطور کلی، اگر سریهای توان یا سریهای لوران دو تابع  $f$  و  $g$  دارای ناحیه همگرایی مشترک باشند، آنگاه حداقل در آن ناحیه ترکیب خطی  $af + bg$  با ضرایب ثابت  $a$  و  $b$  با سری توان یا لورانی مشخص می‌شوند که ضرایب آن همان ترکیب خطی ضرایب  $f$  و  $g$  است. یعنی

$$a \sum f_n z^n + b \sum g_n z^n = \sum (af_n + bg_n) z^n$$

همچنین اگر  $f$  و  $g$  سریهای از توانهای  $(z - z_0)$ ، با  $z$  مشترک برای هر دو سری باشند، دقیقاً می‌توان همان روش را در پیش گرفت.

توجه داشته باشید که لزومی ندارد  $f$  و  $g$  دارای یک ناحیه یکسان همگرایی باشند. تنها کافی است گوی یا طوقی به مرکز  $z_0$  وجود داشته باشد که هر دو سری روی آن همگرا باشند. از طرف دیگر امکان دارد که ناحیه همگرایی ترکیب خطی بزرگتر از ناحیه همگرایی هریک از سریها باشد؛ بعنوان مثال به  $f(z) - f(z)$  توجه کنید.

## ۱۵.۲ ضرب سریهای توان

سری  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$  در  $|z| < r_1$  و سری  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$  در  $|z| < r_2$  را در نظر می‌گیریم.  $f$  و  $g$  هر دو در گوی  $|z| < \min(r_1, r_2)$  تحلیلی‌اند و در نتیجه حاصلضرب آنها

نیز تحلیلی است. لذا این حاصلضرب دارای سری توانی است که حداقل در  $|z| < \min(r_1, r_2)$  همگراست؛ حالا چگونه می‌توانیم ضرایب  $c_n$  آن را بیابیم؟ در بخش ۴.۲ برای فرمول

$$c_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}$$

محاسبه دقیقی ارائه دادیم. می‌توانیم با مراجعه به فرمول، نتیجه را توجیه کنیم

$$c_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{dz} \right)^n f(z) g(z) \Big|_{z=0}$$

و با بکار گرفتن قاعده لاپینتز برای مشتق حاصلضرب:

$$\frac{d}{dz}(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned} f(z) g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [f(z) g(z)]^{(n)} \Big|_{z=0} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \end{aligned}$$

که حداقل در گوی  $|z| < \min(r_1, r_2)$  و احتمالاً در گوی بزرگتر برقرار است.

توجه کنید که این فرمول،  $c_n$  را بصورت یک جمع با پایان ارائه می‌دهد لذا می‌توانیم هر تعداد جمله مورد نظر از حاصلضرب سری را صریحاً بدست آوریم.

در حالت‌های خاص، اغلب مناسبتر و ساده‌تر است که دو سری را نوشته و آنها را مانند چندجمله‌ایها در هم ضرب کنید، فقط جملاتی با توانهای مناسب (هم‌درجه) را نگه دارید (و باید دقت کرد که هیچ جمله‌ای نادیده گرفته نشود). این روش در بخش ۴.۲ ارائه شده است.

می‌توانیم سری لوران را با این روش ضرب کنیم، به شرطی که آنها دارای طوقه همگرایی مشترک باشند و هر دو سری تنها تعداد با پایانی جمله با زیرنویس منفی داشته باشند. در حالت کلی این مشکل را داریم که ضرایب حاصلضرب، سری بی‌پایان هستند، بنابراین حاصلضرب صوری خیلی مفید نخواهد بود.

## تمرینهای تکمیلی

چند جمله اول سری مک‌لورن یا سری لوران توابع زیر را در همسایگی صفر بیابید.

$$\frac{\sin z}{z(1-z)} \quad -۱$$

$$z^{-4}(e^{z^2} - 1) \quad -۲$$

$$e^{-z} \sin z \quad -۳$$

$$[\log(1-z)]^2 \quad -۴$$

$$z \sin z \quad -۵$$

۶- سری لوران  $\frac{e^z}{1-z}$  را در همسایگی  $\infty$  پیدا کنید (با تمرین ۴.۸ مقایسه کنید).

۷- اگر  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  برای هر  $z$  در یک همسایگی باشد، ضرایب مک‌لورن  $\frac{f(z)}{1-z}$  را بیابید.

۱۵.۳ کاربرد سری مک‌لورن  $\tan z$ 

این یک کاربرد غیربديهی اما خاص از اعمال جبری سریهای توانی است که با یافتن سری مک‌لورن

$$A(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n$$

شروع می‌کنیم. فرد تیزبین توجه دارد که

$$A(t) + \frac{1}{2}t = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} = \frac{1}{2}t \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{1}{2}t \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{1}{2}t \coth\left(\frac{t}{2}\right)$$

در این صورت روشن است که  $A(t) + \frac{1}{2}t$  یک تابع زوج است، لذا تمام ضرایب توانهای فرد در  $A(t)$  بجز اولی، برابر با صفر هستند. حالا

$$e^t A(t) = A(t) + t$$

یعنی

$$e^t \sum_{k=0}^{\infty} Q_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k t^k + t$$

اگر بنویسیم  $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$  و آن را در معادله بالا قرار دهیم و دو سری را ضرب کنیم و توانهای  $t$  را در دو طرف مقایسه کنیم، بدست می‌آوریم

$$Q_k = \sum_{j=0}^k \frac{Q_j}{(k-j)!}, \quad k > 1$$

یا

$$k!Q_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j! Q_j, \quad k > 1$$

اگر تعریف کنیم  $B_k = k!Q_k$ ، در این صورت داریم

$$B_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B_j$$

و

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$$

$B_k$  ها اعداد برنولی هستند، چند تای اول آن عبارتند از  $B_0 = 1$ ،  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ،  $B_2 = \frac{1}{6}$ ،  $B_3 = -\frac{1}{4}$ ،  $B_4 = \frac{1}{30}$ ،  $B_5 = -\frac{1}{42}$ ،  $B_6 = \frac{1}{42}$ ،  $B_7 = -\frac{1}{30}$ ،  $B_8 = -\frac{1}{30}$ ،  $B_{2k+1} = 0$  برای  $k > 0$ . توجه کنید چون برخی از کتابها نمادهای مختلف بکار می‌برند، بهتر است همیشه چند عدد اول از اعداد برنولی را قبل از بکارگیری فرمولهای کتاب بدست آورید. اعداد برنولی را می‌توانیم بطور بازگشتی از فرمول بالا محاسبه کنیم، اکنون چند صدتای آن هم بطور واضح در دسترس<sup>۱</sup> است. صورت ساده‌شده چند عدد اولیه برنولی شگفت‌انگیز است، مثلاً

$$B_{20} = -\frac{174611}{330}$$

شکل  $B_6$  (بصورت یک کسر ساده‌شده) ۴۳ رقم اعشاری دارد.

حالا می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{t}{e^t + 1} = \frac{t}{e^t - 1} - \frac{2t}{e^{2t} - 1}$$

بنابراین

$$\frac{t}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (1 - 2^k) t^k$$

و در نتیجه

$$\frac{2t}{e^{2t} + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (1 - 2^k) 2^k t^k$$



بنابراین

$$t \frac{e^{-t} - e^t}{e^t + e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (1 - 2^k) 2^k t^k - t$$

حالا قرار دهید  $t = iz$  و توجه کنید که  $B_1 = -\frac{1}{2}$ 

$$iz \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (1 - 2^k) 2^k i^k z^k$$

جمله‌های با اندیس فرد همه صفراند، بنابراین داریم

$$\tan z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (1 - 2^{2k}) 2^{2k} (-1)^k z^{2k-1}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}$$

همچنین می‌توانیم ضرایب لوران  $\cot z$  و  $\csc z$  (اما نه  $\sec z$ ) را بوسیلهٔ اعداد برنولی ارائه دهیم. بطور دقیق

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} + O(z^{11}), \quad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

### تمرینهای تکمیلی

چند جمله از سری لوران توابع زیر را در همسایگی  $z = 0$  بیابید.

$$\frac{1}{e^z - 1} \quad -1$$

$$\frac{e^z}{\sin z} \quad -2$$

$$\frac{3z}{e^{3z} - 1 - 3z} \quad -3$$

$$\frac{1}{\log(1-z)} \quad -4$$

با بکارگیری سری لوران ماندهٔ توابع زیر را در نقطهٔ مورد نظر بیابید.

$$z = 0 \text{ در } \frac{z^2(\cos z)}{\log(1+z)} \quad -5$$

$$z = 0 \text{ در } z^6(\tan z)e^{z^2} \quad -6$$

## ۱۵.۴ تقسیم

اگر  $f$  و  $g$  بوسیله سری توانی تعریف شوند و بخواهیم سری توانی  $\frac{f}{g}$  را محاسبه کنیم، نه تنها به گوی مشترک همگرایی سریها نیاز داریم بلکه باید  $g(0) \neq 0$ . البته اگر  $g(0) = 0$  و  $[g(z) \neq 0]$  می‌توانیم بنویسیم  $g(z) = z^m h(z)$  با  $h(0) \neq 0$ ،  $f$  را بر  $h$  تقسیم کنید تا یک کسر  $q$  را بدست آورید و بعد بنویسید

$$\frac{f(z)}{g(z)} = z^{-m} \frac{f(z)}{h(z)}$$

سری لوران  $\frac{f}{g}$  را بدست می‌آوریم که در گوی محذوف  $0 < |z| < r$  همگراست.

اصولاً اگر  $\frac{f}{g} = q$ ، آنگاه  $f = gq$ ، و ضرایب سری مک‌لورن  $q$  با مقایسه ضرایب حاصلضرب بدست می‌آید. بنابراین وقتی که فقط تعداد کمی از جملات سری تقسیم را نیاز داریم معمولاً مناسب است مانند چندجمله‌ایها یکی از سریها را بر دیگری تقسیم کنیم.

تمرین ۱۵.۱ چند جمله از سری توانی  $\tan z$  را این بار با تقسیم  $\sin z$  بر  $\cos z$  بیابید.

این روند تقسیم گاهی روش راحتی برای پیدا کردن مانده  $\frac{f}{g}$  در ریشه  $g$  است. مثلاً فرض کنید،

می‌خواهیم مانده  $\frac{e^{z^2}}{\sin(z^2)}$  را در صفر بدست آوریم. با روش بخش ۸.۶ باید دو بار از  $\frac{z^2 e^{z^2}}{\sin(z^2)}$  مشتق بگیریم. اما، اگر سری  $e^{z^2}$  را بر سری  $\sin(z^2)$  تقسیم کنیم و حاصل عبارت یعنی کسر  $1 + z^2 + \dots$  را بر  $z^3$  تقسیم کنیم، جمله  $\frac{1}{z}$  بدست می‌آید و بنابراین مانده برابر ۱ است.

تمرین ۱۵.۲ تقسیم بالا را انجام دهید.

## ۱۵.۵ ترکیب

یافتن بیش از چند جمله از سری توانی تابع ترکیب بوسیله مشتق می‌تواند بسیار مشکل باشد زیرا مشتق تابع ترکیب سریعاً پیچیده می‌شود. فرض کنید  $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(z-a)^m$  و  $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w-b)^n$  می‌خواهیم سری توانی  $f[g(z)]$  را بر حسب توانهای  $(z-a)$  بیابیم. می‌توانیم  $f[g(z)]$  را فقط برای نقاط  $z$  که  $g(z)$  در دامنه  $f$  می‌باشد در نظر بگیریم. ممکن است یافتن بُرد مقادیر  $g$  بطور صریح ساده نباشد، اما اگر فرض کنیم  $g(a)$  درون گوی همگرایی  $f$  است آنگاه گویی به مرکز  $g(a)$  شامل نقاط  $g(z)$  وجود دارد که  $z$  به اندازه کافی به  $a$  نزدیک است. یعنی  $f[g(z)]$  حداقل در یک همسایگی نقطه  $z = a$  تعریف می‌شود. یک روش طبیعی این است که بنویسیم

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n[g(z) - b]^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[ \sum_{m=0}^{\infty} g_m(z-a)^m - b \right]^n$$

و سعی کنیم مجدداً آن را به صورت یک سری از توانهای  $(z - a)$  مرتب کنیم. اگر  $n$ -امین توان را به صورت سری توانی از  $(z - a)$  بسط دهیم و جمع کنیم،  $F(z)$  را به صورت سری

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

بدست می‌آوریم. در زیر نشان خواهیم داد که در واقع این سری، در گوتی به مرکز  $z = a$ ، به  $F(z)$  همگراست (اگر نقطهٔ صفر در این گوی باشد می‌توانیم بعداً سری  $F$  را دوباره برحسب توانهای  $z$  مرتب کنیم اما این لزوماً آن چیزی نیست که در یک مسئلهٔ خاص نیاز داریم).

ساده‌ترین حالت وقتی است که  $g_0 = b$ ، چون در این صورت هریک از ضرایب سری  $F(z) = \sum c_n (z - a)^n$  یک مجموع با پایان است، بنابراین اگر حوصله داشته باشیم می‌توانیم ضرایب  $c_n$  را یکی پس از دیگری بیابیم. این روند ممکن است کسل‌کننده باشد، اگرچه از محاسبهٔ  $\frac{F^{(n)}(a)}{n!}$  راحت‌تر (و تا اندازه‌ای اشتباه آن کمتر) است.

اکنون سری دوگانه

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} g_m (z - a)^m - b \right\}^n$$

را به صورت یک سری از توانهای  $(z - a)$  مرتب می‌کنیم. اگرچه سریهای داخلی (یک سری برای هر  $n$ ) همگرای مطلق‌اند، اما روشن نیست که سری دوگانه نیز خود همگرای مطلق باشد. مطلب را بطور غیرمستقیم دنبال می‌کنیم.

برای هر  $n$  تابع  $[g(z) - b]^n$  مثلاً روی  $|z - a| < r$  تحلیلی است. بنابراین  $[g(z) - b]^n$  یک سری تیلور مانند

$$[g(z) - b]^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} (z - a)^k, \quad |z - a| < r$$

دارد. این سری را می‌توان با ضرب کردن

$$\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} g_m (z - a)^m - b \right\}^n$$

بدست آورد، زیرا همانطور که می‌دانیم، یک حاصلضرب با پایان از سریهای توانی همگرا می‌توان به صورت یک سری توانی دوباره مرتب کرد. فرض کنید  $s \leq r < |z - a|$  یک گوی باشد که در آن مقادیر  $|g(z)|$  در گوی همگرایی  $f$  است. در این صورت در  $|z - a| < s$  داریم

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} (z - a)^k \right\}$$

از طرف دیگر،  $F$  دارای سری تیلور

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (z-a)^k$$

است. آنچه می‌خواهیم نشان دهیم این است که

$$\lambda_k = \sum_{n=0}^{\infty} f_n c_{kn}$$

اگر قرار دهیم  $z = a$ ، داریم

$$\lambda_0 = F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n c_{0n}$$

این همان است که برای  $k = 0$  می‌خواستیم.

حالا اگر  $f(w) = \sum f_n (w-b)^n$  برای  $|w| < R$ ، سری  $\sum f_n (w-b)^n$  برای  $|w| < R_1 < R$  همگرایی یکنواخت است. از این رو چون فرض کردیم  $|g(z) - b| < R$ ، داریم

$$\sum f_n \{g(z) - b\}^n = \sum_n f_n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} (z-a)^k \right\}$$

که در  $|z - a| < s$  همگرایی یکنواخت است. این یک سری توانی نیست، اما بنا به قضیه همگرایی یکنواخت (بخش ۷.۴)، می‌توان از آن جمله به جمله مشتق‌گیری کرد. اگر از آن مشتق بگیریم داریم

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_{kn} k (z-a)^{k-1} \right]$$

برای  $z = a$ ، می‌بینیم که

$$\lambda_1 = F'(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n c_{1n}$$

با ادامه این روش داریم

$$\lambda_i = \sum_{n=0}^{\infty} f_n c_{in}$$

چنان که انتظار داشتیم.

جایگزینی یک سری لوران در یک سری دیگر همیشه امکان‌پذیر نیست. اگر برای  $r_1 < |w| < r_2$ ،  $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n$  و برای  $s_1 < |z| < s_2$ ،  $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n z^n$ ، لزوماً باید مقادیر  $w$  از  $g(z)$  در زیر طوقه‌ای از  $s_1 < |z| < s_2$  را که در  $r_1 < |w| < r_2$  قرار دارند بشناسیم. به نظر می‌رسد مانند حالت سریهای توانی روش ساده‌ای برای تضمین این مطلب موجود نباشد.

تمرین ۱۵.۳ چند جمله از سریهای توانی توابع زیر را در نقطه  $z = 0$  بیابید.

الف)  $e^{\sin z}$       ب)  $e^{\cos z}$       پ)  $\log(1 + ze^z)$

## ۱۵.۶ سری توانی توابع وارون

فرض می‌کنیم در یک همسایگی  $z = 0$  ،

$$w = f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

و  $a_1 \neq 0$  . تابع وارون  $f^{-1}(w)$  در یک همسایگی  $w = a = f(0)$  تعریف می‌شود (بخش ۱۳.۲ را ببینید) و دارای سری توانی

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - a)^n$$

است. در این صورت  $0 = f^{-1}[f(0)] = f^{-1}(a) = b_0$  . داریم

$$\begin{aligned} z &= f^{-1}[f(z)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \right\}^n \end{aligned}$$

در اصل می‌توانیم توانها را بسط داده و ضرایب توانهای  $z$  را در دو طرف تساوی مقایسه نماییم، تا ضرایب  $b_n$  را تا آنجایی که می‌خواهیم بدست آوریم. چون جمله ثابت سریها برابر با صفر است، برای هر  $b_n$  تنها تعدادی با پایان جمله را باید در نظر بگیریم، پس می‌توانیم  $b_n$  ها را به صورت بازگشتی محاسبه کنیم. بنابراین

$$a_1 b_1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{a_1}$$

$$0 = b_1 a_2 + b_2 a_1^2 = \frac{a_2}{a_1} + b_2 a_1^2$$

$$b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3} \quad \text{و} \quad b_3 = -\frac{a_3}{a_1^4} + 2\frac{a_2^2}{a_1^5}$$

و الی آخر. البته اعمال جبری با افزایش  $n$  خیلی زود پیچیده می‌شود. فرمولهایی برای محاسبه  $b_n$  در دسترس هستند.<sup>۳</sup>

## تمرینهای تکمیلی

چند جمله از سری مک‌لورن توابع زیر را بیابید.

$$\sin(e^z - 1) \quad -1$$

$$\log(1 + \sin z) \quad -۲$$

$$\exp \frac{z}{(1-z)} \quad -۳$$

$$\sin(\sin z) \quad -۴$$

یادداشتها:

D.E. Knuth and T.J. Buckholtz "Computation of Tangent, Euler and (1) Bernoulli Numbers", *Math. of Comp.* (1967): 653-688.

(۲) فرمول فرانسیسکو فا دی برانو برای مشتق  $n$ -ام از یک تابع ترکیب را می‌توان در کتابهای ترکیبات پیدا کرد، مثلاً Comtet, pp. 138 ff. اخیراً بحث ساده‌ای بوسیله رومن در مقاله "The Formula of Faa di Bruno", *Amer. Math. Monthly* 87 (1980): 805-809

ارائه شده است.

(۳) فرمولها در بسیاری از کتابها ارائه شده‌اند. کامتت ضرایب را به طور صریح برای  $n \leq 8$  (pp. 148 ff) داده است. مراحل معمولاً به «وارونه‌سازی سری» معروف است. برای دیدن بحثهای نسبتاً تازه‌ای برحسب سریهای توانی محض به

P. Henrici, "An Algebraic Proof of the Lagrange-Bürmann Formula", *J. Math. Analysis Appl.* 8 (1964) : 218 - 224 ; "Die Lagrange-Bürmannsche Formel, bei formalen potenzreihen," *Jahresber, Deutsch, Math. Verein.* 86 (1984): 115-134.

مراجعه کنید.

## ۱۶. اصل ماکزیمم

### ۱۶.۱ ساده‌ترین صورتها

یک بیان غیرصوری از اصل ماکزیمم (یا قضیه ماکزیمم قدرمطلق) این است که یک تابع تحلیلی ماکزیمم خود را روی مرز می‌گیرد. این ممکن است که در حافظه باقی بماند، اما از طرف دیگر کارایی ندارد، هم به دلیل این که توابع با مقادیر مختلط نمی‌توانند یک ماکزیمم داشته باشند و هم به دلیل این که نمی‌گویند مجموعه مرزی به چه محدود می‌شود. راههایی برای دقیق نمودن این حکم مبهم موجود است.

۱. فرض کنید  $f$  یک تابع تحلیلی در ناحیه کراندار  $D$  و پیوسته در  $\bar{D}$  (بستار  $D$ ) باشد و  $|f(z)| \leq M$  برای هر  $z \in \partial D$  (مرز  $D$ ). در این صورت  $|f(z)| \leq M$  در  $D$ ، بعلاوه اگر به ازای  $z \in D$  داشته باشیم  $|f(z)| = M$  آنگاه  $f$  در  $D$  ثابت است.

۲. ماکزیمم  $|f(z)|$  روی مرز هر ناحیه‌ای که مورد نظر است، گرفته می‌شود و این تنها در حالت  $f$  ثابت، استثنا است.

۳. فرض کنید  $f$  در ناحیه  $D$  (نه لزوماً کراندار) تحلیلی باشد. در این صورت  $|f(z)|$  نمی‌تواند ماکزیمم موضعی سیره‌ای در  $D$  داشته باشد و تنها وقتی که  $f$  در  $D$  ثابت است می‌تواند ماکزیمم موضعی (از هر نوع) در  $D$  داشته باشد.

به یاد آورید که  $z_0$  یک ماکزیمم موضعی سره برای  $f$  است اگر  $|f(z)| > |f(z_0)|$  برای هر  $z$  در یک همسایگی محذوف  $z_0$ .

بدیهی است که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود زیرا  $|f|$ ، به عنوان یک تابع پیوسته روی یک دامنه فشرده، دارای ماکزیمم در  $\bar{D}$  است و (۲) می‌گوید این ماکزیمم نمی‌تواند در درون  $D$  ظاهر شود مگر  $f$  ثابت باشد و با داشتن اطلاعاتی از مقادیر  $f$  روی مرز به مطالبی درباره  $f$  در  $D$  برسیم، همچنانکه از فرمول انتگرال کوشی انتظار داشتیم.

همچنین (۳)، (۲) را نتیجه می‌دهد (و قوی‌تر است زیرا ماکزیمم موضعی و همچنین ماکزیمم سراسری را استثنا می‌کند). در واقع، فرضهای (۲) نتیجه می‌دهد که  $|f|$  ماکزیمم دارد و (۳) می‌گوید که ماکزیمم نمی‌تواند در یک نقطه از  $D$  واقع شود. حکم (۳) کاربرد مفیدی برای نواحی غیرکراندار دارد. در حالیکه (۱) و (۲) به این صورت، چنین نیستند (به مطالب زیر نگاه کنید).

احکام (۲) و (۳) را می‌توانیم به طور همزمان، با ایجاد تناقض ثابت کنیم، (از فرمول کوشی شروع کنید؛ (۲) قدری آسانتر است و روشی را در ساده‌ترین شکل خود ارائه می‌کند. فرض کنید  $|f(z)|$  مقدار ماکزیمم  $M$  را در  $z_0 \in D$  دارد و  $|f(z)| \leq |f(z_0)| = M$  در گوی  $|z - z_0| < R$ . فرض کنید  $R < r$ ،  $f(z)$  را با استفاده از فرمول کوشی نمایش دهید:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z_0} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

چون  $M = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} M d\theta$  داریم،

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [|f(z_0 + re^{i\theta})| - M] d\theta \geq 0$$

چون  $|f(z_0 + re^{i\theta})| - M \leq 0$ ، در نامساوی اخیر لازم است که  $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$  برای تقریباً همه  $\theta$  ها و بنابراین (چون  $|f|$  پیوسته است) برای همه  $\theta$  ها.

این بدان معناست که اولاً  $|f|$  نمی‌تواند ماکزیمم سره‌ای در  $z_0$  داشته باشد، آن‌چنان که از حکم (۲) نتیجه می‌شود؛ و ثانیاً اگر  $|f|$  دارای یک ماکزیمم سره باشد، آنگاه  $|f(z)|$  بر روی هر دایره به اندازه کافی کوچک  $|z - z_0| = r$  و در نتیجه روی گوی  $|z - z_0| < r$  ثابت و برابر با  $M$  است. اما با استفاده از تمرین ۲.۸ این بدان معناست که  $f(z)$  در یک همسایگی  $z_0$  و در نتیجه طبق بخش ۷.۷، در  $D$  ثابت است.

تمرین ۱۶.۱ یک صورت ضعیف از اصل ماکزیمم را با استفاده از فرمول کوشی برای  $[f(z)]^m$  ثابت کنید، ریشه‌های  $m$ -ام قدرمطلق را در نظر بگیرید و  $m$  را به بی‌نهایت میل دهید ( $m \rightarrow \infty$ ).

تمرین ۱۶.۲ نشان دهید  $\operatorname{Re} f$  و  $\operatorname{Im} f$  هر دو از اصل ماکزیمم تبعیت می‌کنند.

اصلی می‌نیمم در حالت کلی وجود ندارد زیرا کمترین مقدار  $|f(z)|$  وقتی است که  $f(z) = 0$ ، اگرچه:

تمرین ۱۶.۳ نشان دهید که اگر تابع تحلیلی و غیرثابت  $f$  هیچ ریشه‌ای در ناحیه  $D$  نداشته باشد، آنگاه  $|f|$  نمی‌تواند درون  $D$  می‌نیمم موضعی داشته باشد.

تمرین ۱۶.۴ نشان دهید که قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع غیرثابت تحلیلی در ناحیه  $D$ ، نمی‌تواند درون  $D$  می‌نیمم داشته باشد.

کاربرد زیر از اصل ماکزیمم بسیار مفید است.

لم شوارتس: اگر  $f$  در گوی بسته  $\Delta$  به شعاع ۱ و به مرکز  $z_0$  تحلیلی باشد و اگر  $f(z_0) = 0$  و  $|f(z)| \leq M$  روی مرز  $\Delta$ ، در این صورت  $|f(z)| \leq M|z - z_0|$  برای هر  $z$  درون  $\Delta$ ، و تساوی در یک نقطه درونی برقرار است فقط اگر  $f(z) = e^{i\lambda}(z - z_0)$  ( $\lambda$  حقیقی).

تمرین ۱۶.۵ لم شوارتس را ثابت کنید. ( $\frac{f(z)}{z - z_0}$  را در نظر بگیرید).

تمرین ۱۶.۶ تحت فرضهای لم شوارتس، درباره  $f'(z_0)$  چه می‌توان گفت؟ (تمرین ۲۵.۶ را نیز ببینید).



تمرین ۱۶.۷ فرض کنید که  $f$  در  $|z| \leq 1$  تحلیلی و  $|f(z)|$  برای  $|z| \leq 1$  در  $z$  با  $|z| = 1$  ماکزیمم شده باشد. ثابت کنید  $f'(z_0) \neq 0$  مگر  $f$  ثابت باشد.

### تمرینهای تکمیلی

۱- مثالی ارائه دهید که نشان دهد صورت (۱) اصل ماکزیمم (در شروع بخش ۱۶.۱) برای نواحی غیرکراندار برقرار نیست.

۲- بزرگترین مقدار  $\sin x$  روی  $0 \leq x \leq 2\pi$  در نقطه درونی  $x = \frac{\pi}{4}$  است. چرا این مطلب با اصل ماکزیمم تناقض ندارد.

۳- لم شوارتس را برای گوی به شعاع  $R$  بازنویسی کنید.

۴- تمرین تکمیلی ۳ را برای اثبات قضیه لیوویل (بخش ۷.۳) بکار ببرید.

۵- تمرین تکمیلی ۳ را در اثبات قضیه «وایراشتراس-کاسوراتی» (بخش ۸.۵) برای توابع تام متعالی (یعنی آنهایی که چندجمله‌ای نیستند) بکار ببرید.

۶- فرض کنید  $f$  در گوی واحد بسته تحلیلی باشد،  $f(0) = 0$  و  $|f(z)| \leq |e^z|$  برای  $|z| = 1$ ،  $|f(\log 2)|$  چقدر می‌تواند بزرگ باشد.

### ۱۶.۲ بهبود شرایط و مثالهای نقیض

حکم (۱) بالا را می‌توانیم با تعویض فرض  $|f(z)| \leq M$  روی  $\partial D$  با فرض  $\sum |f(z)| \leq M$  وقتی  $z$  به هر نقطه از مرز نزدیک می‌شود (حتی اگر  $f$  روی مرز تعریف نشده باشد)، تعمیم دهیم. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که اگر برای هر  $z_0 \in \partial D$  و هر  $\varepsilon > 0$ ، همسایگی  $U$  از  $z_0$  موجود باشد بطوریکه  $|f(z)| \leq M + \varepsilon$  در  $U \cap D$ ، آنگاه  $|f(z)| \leq M$  در درون  $D$  و  $|f(z)| = M$  برای عضوی مانند  $z$ ، تنها اگر  $f$  در  $D$  ثابت باشد.

این فرضها به طریقی واضح، نتیجه نمی‌دهند که  $|f|$  در  $D$  کراندار است. لذا اکنون مطلب را دست‌کم با نشان دادن کراندار بودن  $|f|$  در  $D$  شروع می‌کنیم. فرض کنیم این طور نباشد، در این صورت نقاط  $z_n$  از  $D$  موجودند که  $|f(z_n)| > n$ . بنابراین وقتی  $n \rightarrow \infty$ ،  $f(z_n) \rightarrow \infty$ . دنباله  $\{z_n\}$  که کراندار است، دارای زیردنباله  $\{z_{n_k}\}$  همگرا به  $z_\infty$  است. نقطه  $z_\infty$  نمی‌تواند در  $D$  باشد، چون  $f(z_\infty)$  ناچاراً باید بی‌نهایت باشد. در نتیجه  $z_\infty \in \partial D$  و برای  $\varepsilon$  مثبت داریم  $|f(z_{n_k})| \leq M + \varepsilon$  اگر  $k$  به اندازه کافی بزرگ باشد. اما این با  $|f(z_{n_k})| \rightarrow \infty$  متناقض است. بنابراین  $|f|$  در  $D$  واقعاً کراندار است.

حالا فرض کنید  $N$  کوچکترین کران بالای  $|f(z)|$  برای  $z$  متعلق به  $D$  باشد بطوریکه نقاط  $z_n$  (نه لزوماً همان نقاط قبلی) در  $D$  موجودند که  $|f(z_n)| \rightarrow N$ . مجدداً زیردنباله همگرایی انتخاب کنید و حد آن را  $z_\infty$  بنامید. اگر  $z_\infty \in D$ ،  $|f(z_\infty)| = N$  و  $|f(z)|$  در  $z_\infty$  ماکزیمم می‌شود، و این تنها وقتی اتفاق می‌افتد که  $f(z)$  ثابت  $c$  باشد، ولی در این صورت  $|c| \leq M$ . از طرف دیگر اگر  $z_\infty \in \partial D$ ، داریم  $|f(z_{n_k})| \leq M + \varepsilon$  برای  $k$  به اندازه کافی بزرگ و بنابراین  $N \leq M$ . اکنون به این سؤال می‌پردازیم که آیا می‌توانیم فرض  $\limsup |f(z)| \leq M$  را در هر نقطه از  $\partial D$  قدری ملایم‌تر کنیم. ممکن است تصور کنیم که یک نقطه نک نمی‌تواند اختلاف زیادی ایجاد کند، اما در واقع حتی یک نقطه استثنایی می‌تواند قضیه را خراب کند. در این باره مثال  $f(z) = \exp\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$  گوی  $|z| < 1$  ارائه شده است. اگر  $z = re^{i\theta}$ ،  $r < 1$ ، وقتی  $\theta = 0$  داریم  $|f(z)| \rightarrow \infty$  وقتی  $r \rightarrow 1$ . ولی اگر  $\theta \neq 0$ ، داریم  $f(z) \rightarrow \exp[-i \cot(\frac{\theta}{2})]$  وقتی  $r \rightarrow 1$ . لذا  $|f(z)| \rightarrow 1$  وقتی  $r \rightarrow 1$  برای همه مقادیر  $\theta$  بجز صفر، در حالیکه  $|f|$  کراندار نیست.

عدم مقبولیت یک نقطه استثنایی در اصل ماکزیمم حتی واضح‌تر می‌شود وقتی که نقطه استثنایی در  $\infty$  باشد. یعنی، وقتی توابع در ناحیه غیرکراندار در نظر گرفته می‌شود. این هنوز صحیح است که تابع تحلیلی غیرثابت در ناحیه غیرکراندار  $D$  نمی‌تواند ماکزیمم موضعی در  $D$  داشته باشد مگر آنکه تابع در  $D$  ثابت باشد. اما عدم برقراری حکم (۱) از اصل ماکزیمم بوسیله مثال  $f(z) = e^z$  در نیم‌صفحه سمت راست،  $x \geq 0$  ثابت می‌شود: روی مرز (محور موهومی)  $|f(z)| = 1$  در حالیکه  $|f(z)| = e^x$  بیکران است.

در بخش ۳۳ خواهیم دید که وقتی نقطه استثنایی موجود باشد اصل ماکزیمم همچنان باقی می‌ماند، اگر یک شرط اضافی روی تابع در همسایگی نقطه استثنایی بگذاریم.

### ۱۶.۳ نامساوی کاراتودوری

یک تعمیم کاملاً متفاوت از اصل ماکزیمم موجود است که مبتنی بر این ایده می‌باشد که بدانیم یک کران بالا برای قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی حتماً مطلبی درباره اندازه قدرمطلق مقدار تابع بیان می‌کند. هرآنچه بگوید فارغ از دغدغه نیست: اگر  $f$  ثابت موهومی محض باشد ما اطلاعاتی بدست نمی‌آوریم. همچنین در گوی واحد تابع  $f(z) = i \log(z+1)$  بیکران است اما قسمت حقیقی آن کراندار می‌باشد. این ثابت می‌کند که کرانداری  $\operatorname{Re} f(z)$  در گوی باز نمی‌تواند کرانداری  $|f(z)|$  را در تمام گوی نتیجه دهد. هرچند اگر سعی کنیم اطاله کلام نکنیم، می‌توانیم حرف مفیدی بزنیم.

نامساوی کاراتودوری: فرض کنیم  $f$  بر  $|z| \leq R$  تحلیلی و  $A(r)$  ماکزیمم  $\operatorname{Re} f(z)$  روی دایره  $|z| = r < R$  (بنابراین طبق بخش ۱۶.۱، در  $|z| \leq r$  باشد. در این صورت:

$$|f(re^{i\theta})| \leq |f(0)| + \frac{r}{R-r} [A(R) - \operatorname{Re} f(0)], \quad 0 < r < R$$

اگر  $f$  ثابت باشد، چیزی برای اثبات وجود ندارد. اگر  $f$  ثابت نباشد با حالت  $f(\circ) = \circ$  شروع می‌کنیم. تابع  $g$  با ضابطه

$$g(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{A(R)} - f(z)}$$

را در نظر بگیرید. چون قسمت حقیقی مخرج نمی‌تواند صفر باشد، مخرج خودش صفر نمی‌شود. در نتیجه  $g$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی است و  $g(\circ) = \circ$ ، بعلاوه در حالت اخیر  $A(R) > \circ$ ، چون  $f(\circ) = \circ$  و  $f$  ثابت نیست. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 &= \frac{|f(z)|^2}{[\sqrt{A(R)} - \operatorname{Re} f(z)]^2 + [\operatorname{Im} f(z)]^2} \\ &= \frac{|f(z)|^2}{\{A(R) + [A(R) - \operatorname{Re} f(z)]\}^2 + [\operatorname{Im} f(z)]^2} \leq 1 \end{aligned}$$

زیرا  $A(R) > \circ$  و طبق اصل ماکزیمم  $A(R) - \operatorname{Re} f(z) > \circ$ . اکنون می‌توانیم لم شوارتس را برای  $g(z)$  بکار ببریم:

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \frac{|z|}{R} (< 1), \quad |z| < R \\ \text{اما طبق تعریف } g, \quad g(z) &= f(z) / (\sqrt{A(R)}g(z) - f(z)) \text{، در نتیجه،} \\ f(z)[1 + g(z)] &= \sqrt{A(R)}g(z) \end{aligned}$$

به یاد آورید که  $A(R) > \circ$ ، داریم

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{\sqrt{A(R)}|g(z)|}{|1 + g(z)|} \leq \sqrt{A(R)} \frac{|z|}{R} \cdot \frac{1}{1 - |g(z)|} \\ &\leq \sqrt{A(R)} \frac{|z|}{R} \frac{1}{1 - (|z|/R)} \\ &= \sqrt{A(R)} \frac{|z|}{R - |z|} \end{aligned}$$

این مطلب نامساوی را در حالت  $f(\circ) = \circ$  ثابت می‌کند، اگر  $\circ \neq f(\circ)$  تابع این عنوان یک کاربرد از قضیه کاراتودوری، مشابه قضیه لیوریل را برای  $f_1$  بکار ببرید.

ثابت می‌کنیم. فرض کنید  $f$  تام و  $\operatorname{Re} f$  از بالا کراندار باشد در این صورت  $f$  ثابت است.

برای اثبات این مطلب، هر مقدار (بزرگ)  $R$  را انتخاب کنید و قرار دهید  $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ، در این صورت بنا به قضیه کاراتودوری، برای  $|z| \leq r$  داریم:

$$|f(z)| \leq |f(\circ)| + \sqrt{2} \left[ \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(Re^{i\theta}) - \operatorname{Re} f(\circ) \right]$$

چون طرف راست از بالا کراندار و مستقل از  $R$  است، این نامساوی نتیجه می‌دهد که  $|f|$  کراندار است و بنابراین  $f$  طبق قضیه لیوریل ثابت است.

تمرین ۱۶.۸ قضیه اخیر را با استفاده از قضیه لیوریل برای تابع تام  $e^f$  ثابت کنید.

تمرین ۱۶.۹ نشان دهید اگر  $f$  تام و  $\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) = o(r^\lambda)$  (یکنواخت بر حسب  $\theta$ ) آنگاه  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از  $\lambda$  است.

### یادداشتها:

(۱) این اثبات از E. Landau نشأت گرفته است.

(۲) به نظر می‌رسد اولین بار بوسیله

K. Löwner; cf. polya and szegö, problems III 290, 291, pp. 162, 373

مورد بررسی قرار گرفته شده باشد.

(۳) اولین بار بوسیله J. Hadamard ثابت شد.

## فصل ۳

# ادامهٔ تحلیلی

### ۱۷. نظریهٔ ادامهٔ تحلیلی

#### ۱۷.۱ تعریفها

سری

$$\frac{1+i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-i)^n} (z+i)^n$$

روی هر زیرمجموعهٔ فشرده از گوی  $\sqrt{2} < |z+i|$  همگرای یکنواخت است، و بنابراین یک تابع تحلیلی در این گوی ارائه می‌کند. انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-(z+1)t} dt$$

در زیرمجموعه‌های فشرده نیم‌صفحه  $\operatorname{Re} z > -1$ ، همگرای یکنواخت است و یک تابع تحلیلی آنجا ارائه می‌کند. در واقع هر دو تابع دارای مقدار  $\frac{1}{1+z}$  در دامنهٔ مربوط به خود می‌باشند، و طبیعی است که تصور کنیم آنها تابع یکسانی هستند، اگرچه به صورتی متفاوت و روی نواحی مختلف تعریف می‌شوند. این برداشت ما را به تعریف زیر می‌رساند: اگر  $f_1$  در ناحیهٔ  $D_1$  و  $f_2$  در ناحیهٔ  $D_2$  تحلیلی باشند، و اگر  $D_1$  و  $D_2$  در یک مجموعهٔ ناتهی مشترک باشند (لزوماً باز)، و اگر  $f_1(z) = f_2(z)$  برای هر  $z$  در  $D_1 \cap D_2$ ، گوئیم که  $f_2$  ادامهٔ تحلیلی مستقیم (یا توسیع)  $f_1$  از  $D_1$  به  $D_1 \cup D_2$ ، یا به طور هم‌ارز  $f_1$  ادامهٔ تحلیلی مستقیم  $f_2$  است. آنچه که این تعریف را توسعه‌پذیر می‌کند این است که اگر ما توسعه‌ای را به دو طریق انجام دهیم، نتیجه یکی خواهد شد، بدین معنی که اگر  $f_1$  در  $D_1$  تحلیلی و  $f_2$  و  $f_3$  ادامهٔ تحلیلی مستقیم  $f_1$  به  $D_2$  باشند، آنگاه برای تمام نقاط  $D_2$ ،  $f_2(z) = f_3(z)$ .

این مطلب نتیجه اصل انطباق (بخش ۷.۷) است، چون در سراسر مجموعه باز  $D_1 \cap D_2$ ،  
 $f_2(z) = f_3(z)$  است.

اگر  $f_1$  را به طور تحلیلی از  $D_1$  به  $D_2$  ادامه دهیم، تابعی تحلیلی در  $D_1 \cup D_2$  بدست می‌آوریم.  
 این تابع ممکن است ادامه تحلیلی مستقیم به ناحیه  $D_3$  داشته باشد و غیره. یک ادامه تحلیلی از  $f_1$   
 (بدون قید و شرط) به معنای تعداد با پایانی از ادامه‌های تحلیلی مستقیم است. بسیار اتفاق می‌افتد که  
 ادامه‌های تحلیلی یک تابع سرانجام به مقادیر متفاوتی در ناحیه‌ای منجر شود، خصوصاً می‌توانیم به ناحیه  
 اولی با مقادیر مختلفی برگردیم. نتیجه اجرای همه ادامه‌های تحلیلی ممکن یک تابع به تابع تحلیلی کامل  
 معروف است، چون ممکن است مقادیر مختلفی در یک نقطه داشته باشد، که به معنای دقیق، یک تابع  
 نیست. به این مطلب در رابطه با توابعی مانند  $\sqrt{z}$  و  $\log z$  در بخش ۲۹ برخواهیم گشت.

## ۱۷.۲ ادامه به وسیله سری‌های توان

در بخش ۷.۶ نشان دادیم اگر  $f$  در گوی  $|z - z_0| < R$  :  $\Delta$  تحلیلی و حول نقطه  $z_1$  در  $\Delta$   
 دارای سری تیلور  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n$  باشد، آنگاه سری جدید در بزرگترین گوی باز به مرکز  $z_1$   
 که زیرمجموعه  $\Delta$  است، همگرا می‌باشد. هنوز مطلبی در مورد همگرایی سری جدید در گوی بزرگتر  
 نمی‌توانیم بگوئیم، اگر چیزی بتوانیم بگوئیم، ادامه تحلیلی  $f$  به خارج  $\Delta$  میسر خواهد شد.  
 به عنوان مثال، فرض کنید

$$f(z) = (1 - z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

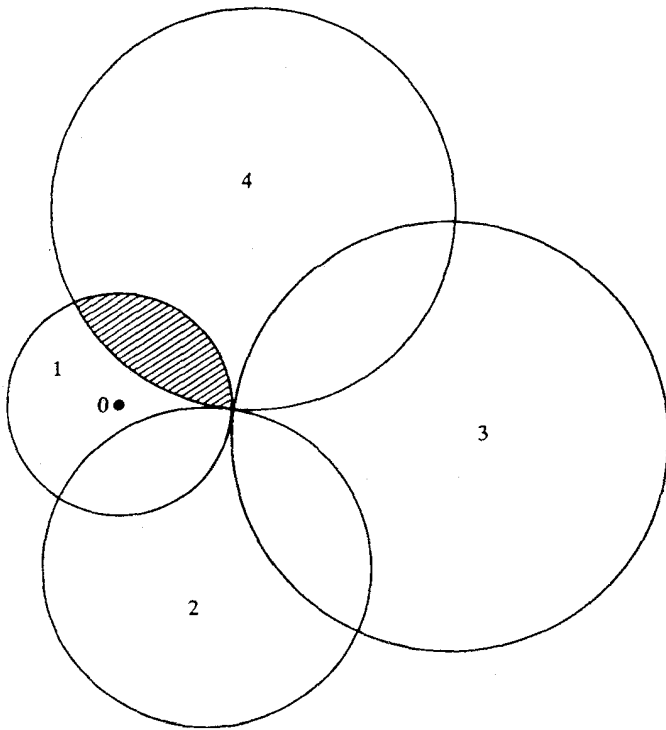
اگر  $f$  را حول نقطه  $z = -\frac{1}{2}$  بسط دهیم، داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(z + \frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

با شروع همگرایی  $\frac{2}{3}$ . از این رو  $f$  را در دامنه‌ای که در واقع شامل دامنه اولیه است بسط داده‌ایم. چون  
 واقعاً  $f$  در تمام صفحه بجز نقطه  $z = 1$  تحلیلی است، تمام ادامه‌های بدست آمده از بسط‌های تکرار شده  
 در سری توان، همان تابع را نمایش خواهند داد.  
 از طرف دیگر اگر قرار بود در  $|z| < 1$ ، از

$$(1 - z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-z)^n$$

شروع کنیم و در زنجیری از گوی‌ها ادامه دهیم تا به نقاطی در گوی اولیه برگردیم، می‌توانستیم به شاخه  
 دیگری از ریشه دوم برسیم، چنان که در شکل ۱۷.۱ نشان داده شده است.



شکل ۱۷.۱

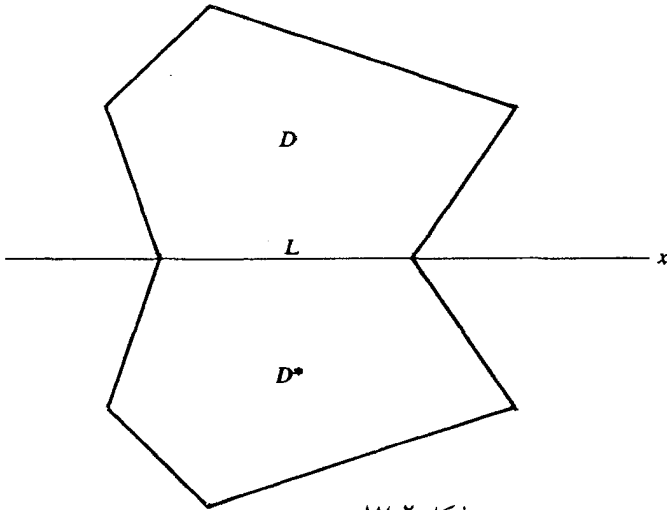
ادامه در طول زنجیری از گوی‌ها یک روش پایه‌ای ادامه تحلیلی است، وقتی که اساساً ادامه ممکن باشد؛ در بخش ۱۷.۶ مثال‌هایی از سریهای توان خواهیم دید که هیچ ادامه‌ای از آن به بیرون گوی اولیه امکان‌پذیر نیست.

### ۱۷.۳ ادامه با انعکاس

قضیه زیر اصل انعکاس شوآرتس است که با شرایط خاص اما مفید سروکار دارد، و این مزیت را دارد که صریحاً یک ادامه تحلیلی را ارائه می‌دهد.

فرض کنید  $f$  روی ناحیه  $D$  در نیم‌صفحه بالایی تحلیلی، و مرز  $D$  یعنی  $\partial D$ ، محور حقیقی را در پاره‌خط  $L$  قطع کند و  $f$  روی  $L \cup D$  پیوسته و فقط مقادیر حقیقی روی  $L$  را بگیرد. اگر  $D^*$  انعکاس  $D$  نسبت به محور حقیقی باشد (شکل ۱۷.۲ را ببینید)، آنگاه  $f$  را می‌توانیم از طریق  $L$  به  $D^*$  با قرار دادن  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ ،  $(z \in D^*)$  به طور تحلیلی ادامه دهیم.

قضیه را می‌توانیم به حالتی که  $D$  نسبت به خط دیگری یا نسبت به کمانی در یک دایره انعکاس می‌یابد تعمیم دهیم و شرط پیوستگی را می‌توانیم ضعیف‌تر کنیم.<sup>۱</sup>



شکل ۱۷.۲

اصل شوارتس فوراً از یک نتیجه کلی تر بدست می‌آید (که خود مجدداً یک حالت خاص از موردی کلی تر است):

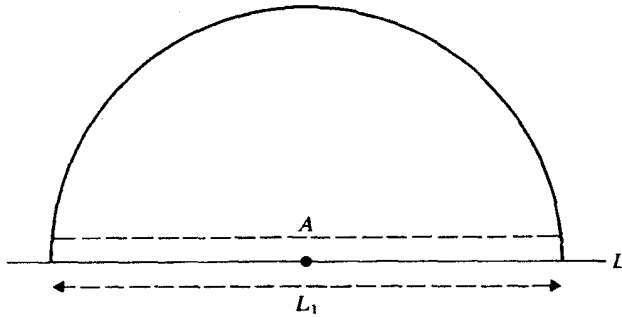
با همان  $D$  و  $L$  حکم اصل شوارتس فرض کنید که  $f_1$  در  $D$  تحلیلی و در  $D \cup L$  پیوسته است، هم‌چنین فرض کنید  $f_2$  در  $D^*$  تحلیلی و در  $D^* \cup L$  پیوسته باشد و بالاخره فرض کنید برای تمام  $z \in L$ ،  $f_1(z) = f_2(z)$ . در این صورت  $f_2$  یک ادامه تحلیلی از  $f_1$  از طریق  $L$  است. اصل شوارتس در حالت  $f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$  است.

اثبات گزاره اخیر آسان خواهد بود، اگر صورت قویتر قضیه کوشی را داشته باشیم که مستلزم تحلیلی بودن  $f$  روی  $C$  نیست، و تنها تحلیلی بودن  $f$  درون  $C$  و پیوستگی آن را در ناحیه بسته محدود به  $C$  لازم دارد. اثبات این مطلب در حالت کلی<sup>۲</sup> ساده نیست، اما حالت خاصی که این‌جا نیاز داریم کمی ساده‌تر است. زیرا تنها لازم است بدانیم که  $f$  را می‌توان از طریق محور حقیقی ادامه داد، کافی است گوی  $\Delta$  را که مرکز آن روی  $L$  و نیمه بالایی آن در  $D$  است در نظر بگیریم و نشان دهیم که  $f$  را می‌توانیم از طریق قطر  $L_1$  از  $\Delta$  ادامه دهیم. در این صورت موقعیتی شبیه به شکل ۱۷.۳ داریم، که در آنجا  $A$  پاره‌خطی موازی  $L$  و آن‌قدر نزدیک به  $L$  که  $\int_A f(z) dz$  و  $\int_{L_1} f(z) dz$  به یکدیگر نزدیک باشند. این کار عملی است زیرا  $f$  در  $D \cup L$  پیوسته یکنواخت است. اگر  $C$  نیمه بالای  $\partial\Delta$  (مرز  $\Delta$ ) و  $C_1$  قسمتی از  $\partial\Delta$  بالای  $A$  باشد بنا بر قضیه کوشی داریم  $\int_{AUC_1} f(z) dz = 0$  و می‌توانیم

$$\left| \int_A f(z) dz - \int_{L_1} f(z) dz \right|$$

را به اندازه کافی کوچک کنیم. لذا  $\int_{LU\partial\Delta} f(z) dz = 0$





شکل ۱۷.۳

حال فرض کنیم  $C^*$  نیمه پایین  $\partial\Delta$  باشد و قرار می‌دهیم

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C \cup C^*} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

در آن صورت  $F$  درون  $\Delta$  تحلیلی است. فرض کنید  $z \in \Delta \cap D$ . می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_C \frac{f(w) dw}{w-z} + \int_{L_1} \frac{f(w) dw}{w-z} \right] \\ &\quad + \left[ \int_{C^*} \frac{f(w) dw}{w-z} - \int_{L_1} \frac{f(w) dw}{w-z} \right] \\ &= f_1(z) + f_2(z) \end{aligned}$$

داریم  $f_1(z) = f(z)$  و  $f_2(z) = 0$  (زیرا  $z \in \Delta \cap D$ ).

همچنین، برای  $z \in \Delta \cap D^*$ ، که  $\Delta \cap D$  انعکاس  $A \cap D$  نسبت به  $L$  است  $f_1(z) = 0$ . بنابراین  $F$  ادامه تحلیلی  $f$  از  $\Delta \cap D$  به  $\Delta \cap D^*$  است. استدلال مشابهی را به هر گوی دیگری ساخته‌شده شبیه  $\Delta$  بکار می‌بریم و بنابراین  $f$  دارای یک ادامه تحلیلی  $D^*$  است. یک صورت قویتر از اصل شوآرتس در بخش ۲۰.۶ ارائه خواهد شد.

### ۱۷.۴ \* فراهمگرایی

وقتی که یک تابع با یک سری توانی با شعاع همگرایی با پایان تعریف می‌شود، گاهی ممکن است تابع را با دسته دسته کردن جمله‌های سری یعنی با در نظر گرفتن فقط یک زیردنباله از مجموعهای جزئی به بیرون گوی همگرایی توسعه داد. یک سری توانی با این خاصیت فراهمگرا نامیده می‌شود. می‌خواهیم مثالی از یک سری توانی فراهمگرا بسازیم. در واقع ساده‌تر است که ابتدا سری دسته‌بندی‌شده را بسازیم و بعد پرانتزها را برداریم تا سری توانی بدست آید.

لم ساده‌یی کلید ساختن است که بعداً (در بخش ۱۷.۶) دوباره به آن احتیاج خواهیم داشت، آن را به عنوان یک تمرین ارائه می‌کنیم.

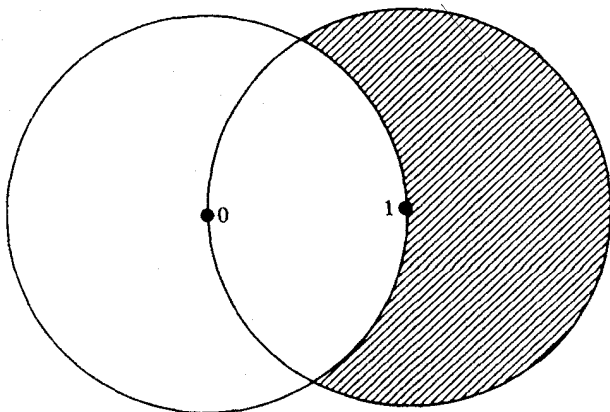
**تمرین ۱۷.۱** فرض کنید دنباله  $\{n_k\}$  از اعداد صحیح مثبت چنان باشد که  $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1$  و فرض کنید  $p$  عدد صحیح مثبتی با  $p > 1/(\lambda - 1)$  باشد. آنگاه چندجمله‌ای  $P_k(z) = [z^p(1+z)]^{n_k}$  وقتی که برحسب توان‌های  $z$  بسط داده شود، شامل هیچ توانی از  $z$  نیست که در هر  $p_j$  دیگری ( $j \neq k$ ) ظاهر می‌شود.

تابع  $f$  را به صورت  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(z)$  تعریف می‌کنیم، که در آن  $\frac{1}{a_k}$  ضریبی با بزرگترین قدرمطلق در بسط دوجمله‌ای  $(1-z)^{n_k}$  است. با توجه به تمرین ۱۷.۱ (با  $-z$  بجای  $z$ )،  $P_k(z)$  شامل هیچ توانی که در هر  $P_j(z)$  دیگری ظاهر می‌شود نیست. در نتیجه، اگر هر  $P_k(z)$  را با بسط آن از توان  $z$  جای‌گزین کنیم، سری توانی  $S = \sum c_k z^k$  را به دست می‌آوریم که مجموع جزئی مرتبه  $(P+1)n_k$  آن همان مجموع جزئی سری  $\sum P_k(z)$  است. به علاوه  $S$  دارای تعداد بی‌پایانی جمله از  $z^m$  با ضریب ۱ است که قدرمطلق ضریب هیچ یک بزرگتر از ۱ نیست. بنابراین شعاع همگرایی  $S$  برابر با ۱ است. اکنون نشان می‌دهیم که  $\sum P_k(z)$  در مجموعه‌ای که به خارج دایره  $|z| = 1$  توسعه می‌یابد همگرا است. این بدین معناست که دنباله مجموع جزئی  $S$  (یعنی، آنهایی که با  $n_k$  اندیس شده‌اند) در مجموعه‌ای که شامل نقاطی با  $|z| > 1$  همگراست؛ به عبارت دیگر،  $S$  فراهمگرا است. این مطلب وجود نقاطی مانند  $w$  خارج گوی واحد با  $1 < \sigma < |w^p(1-w)|$  را نتیجه می‌دهد، چون در این صورت  $\sum a_k p_k(w)$  مغلوب  $\sum |a_k| \sigma^{n_k}$  با  $|a_k| \leq 1$  می‌شود. وجود یک چنین نقاطی روشن است زیرا اگر  $|1-w| < \varepsilon$ ،  $0 < \varepsilon < 1$ ، داریم  $|w^p(1-w)| < |w|^p \varepsilon < \sigma$ ، اگر  $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} < |w| < \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$ ، که اگر  $\sigma > \varepsilon > 1$  امکان  $|w| = 1 + \sigma$  را مجاز می‌کند.

بنابراین نتیجه می‌گیریم سری  $S$  در همسایگی ۱، وقتی که  $\lambda > 1$  و  $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \frac{1}{\lambda-1}$  فراهمگرا است. سری  $S$  حفره‌های طولانی (وجود ضرایب صفر) دارد: نسبت کوچکترین توان قبل از یک حفره به بزرگترین توان بعد از حفره به صورت  $(n_{k+1}/n_k)p/(p+1) > 1$  است.

توجه کنید دنباله مجموع جزئی که در خارج گوی واحد همگرا است متشکل از مجموعه‌های جزئی است که به یک حفره منتهی می‌شود.

می‌توانیم نشان دهیم که وجود تعداد بی‌پایانی حفره از نوعی که در نظر گرفته شده است برای فراهمگرایی در همسایگی هر نقطه دایره همگرایی که مجموع سری تحلیلی است، کافی است. (در تمرین ۱۷.۴ خواهیم دید که داشتن مجموع سری تحلیلی در هر نقطه از دایره همگرایی امکان‌پذیر نیست). وجود حفره‌های طولانی نیز برای فراهمگرایی ضروری است، یعنی یک سری فراهمگرا با شعاع همگرایی ۱ همیشه برابر با مجموع یک سری همگرا در گوی بزرگتر و یک سری با حفره‌های طولانی فراهمگرایی می‌باشد.<sup>۳</sup>



شکل ۱۷.۴

تمرین ۱۷.۲ نشان دهید وقتی  $p = 1$  و  $\lambda > 2$ ، سری فراهگرایی که هم‌اکنون ساخته شد زبردنباله‌ای از مجموعه‌های جزئی دارد که حداقل در اجتماع گوی شعاع ۱ و گوی  $|z - 1| < 1$  همگرا است (شکل ۱۷.۴ را ببینید).

### ۱۷.۵ مانعی برای ادامهٔ تحلیلی

روشن است که  $\frac{1}{1-z}$  را در نقطهٔ ۱ نمی‌توانیم ادامه دهیم، زیرا نقطهٔ ۱ قطب است. آنچه چندان واضح نیست این است که یک سری توانی با ضرایب مثبت نمی‌تواند مستقیماً از طرف نقطه حقیقی مثبت روی دایره همگرایی خود ادامه یابد. به عبارت دقیقتر، اگر  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  با  $a_k \geq 0$  و شعاع دایره همگرایی  $R$ ، آنگاه نمی‌توانیم یک ادامهٔ تحلیلی مستقیم  $f$  از یک نقطه روی  $(0, R)$  به هر نقطه‌ای با قدرمطلق بیشتر از  $R$  بسازیم.

این قضیهٔ ویوانتی پرینگشیم است.

لذا وقتی  $a_k \geq 0$ ، نقطهٔ  $R$  لزوماً یک نقطهٔ تکین  $f$  است، حتی اگر  $\sum a_k R^k$  همگرا باشد. (این نقطه لزوماً یک نقطهٔ تکین از نوعی که تا به حال بحث کرده‌ایم نیست). البته برای سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  نقطهٔ تکین در  $z_0 + R$  خواهد بود.

همچنین توابعی وجود دارند که در  $|z| < R$  تحلیلی هستند اما در خارج این گوی نمی‌توانند بطور تحلیلی ادامه یابند. می‌گوییم این گونه توابع روی دایره  $|z| = R$  دارای مرز طبیعی‌اند. بعد از اثبات قضیهٔ ویوانتی پرینگشیم یک مثال خواهیم دید.

تمرین ۱۷.۳ نشان دهید اگر  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  در  $|z| < R$  و همچنین در نقطهٔ  $z = R$  تحلیلی باشد، آنگاه همیشه ساختن یک توسعهٔ تحلیلی مستقیم از  $f$  به نقطه‌ای در خارج  $|z| \leq R$  امکان‌پذیر است.

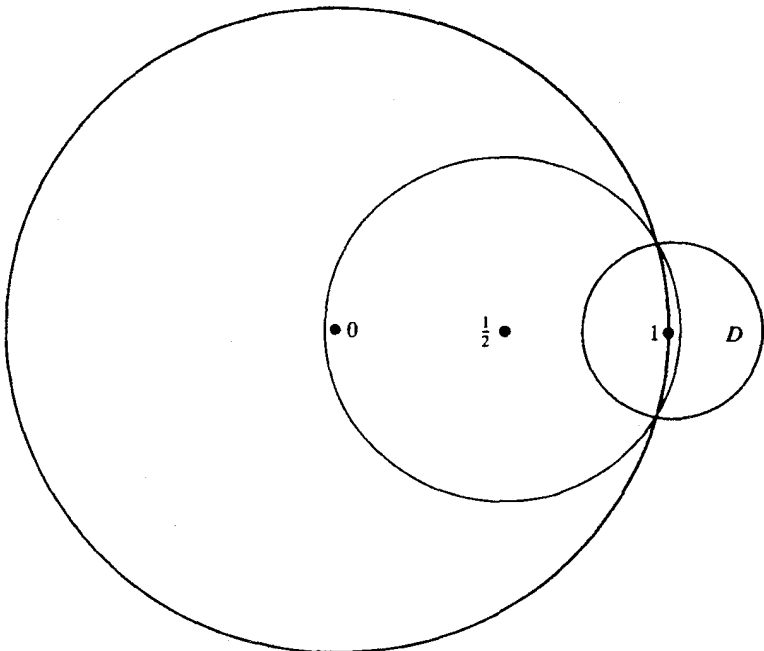
تمرین ۱۷.۴ در ادامه تمرین ۱۷.۳، نشان دهید اگر  $f$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی باشد آنگاه  $|z| \leq R$  گوی همگرایی  $f$  نمی‌تواند باشد.

حکم این تمرین اغلب به این صورت بیان می‌شود که  $f$  باید حداقل یک نقطه تکین روی دایره همگرایی داشته باشد.

تمرین ۱۷.۵ نشان دهید اگر  $\sum a_n z^n$  دارای شعاع همگرایی ۱،  $a_n \geq 0$  و  $\sum a_n$  واگرا باشد آنگاه  $f(x) \rightarrow \infty$  وقتی  $x \rightarrow 1$  در امتداد شعاع  $(0, 1)$ .

اثبات قضیه ویوانتی پرینگشیم خصوصاً وقتی  $\sum a_n$  واگراست ساده است، چنان که تمرین ۱۷.۵ نشان می‌دهد. البته مثال ساده  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n_1)}$  نشان می‌دهد که نقطه  $z = 1$  می‌تواند یک نقطه تکیه باشد. حتی وقتی که  $\sum |z_n|$  همگراست.

برای اثبات صورت کلی قضیه ویوانتی پرینگشیم ابتدا فرض می‌کنیم نادرست است و به تناقض می‌رسیم. فرض کنید که شعاع همگرایی  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ،  $a_n \geq 0$ ، برابر با ۱ است و یک ادامه تحلیلی مستقیم بعد از نقطه ۱ دارد. آنگاه تابع توسعه‌یافته در گوی مانند  $D$  به مرکز ۱ تحلیلی خواهد بود و یک گوی به مرکز  $\frac{1}{2}$  با شعاع  $r$  بزرگتر از  $\frac{1}{2}$  در اجتماع  $\{|z| < 1\}$  و  $D$  قرار خواهد گرفت (شکل ۱۷.۵ را ببینید). در این صورت خواهیم داشت:



شکل ۱۷.۵

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}$$

و سری تیلور  $f$  حول  $\frac{1}{2}$  برای عدد حقیقی  $x > 1$  به صورت

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \end{aligned}$$

می‌باشد.

این‌جا همه چیز مثبت است و بنابراین بدست می‌آوریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n}$$

سری داخلی یک سری دو جمله‌ای است برای

$$\left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right]^k = x^k$$

است، لذا خواهیم داشت

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x > 1$$

اما این سری توانی اولیه برای  $f$  به ازای  $x > 1$  است، هرچند در شروع فرض کردیم که در گوی با شعاع بزرگتر از 1 به مرکز صفر تحلیلی نیست (توجه داشته باشید که همگرایی برای  $x > 1$  همگرایی را برای همه  $z$  هایی که  $|z| < x$  نتیجه می‌دهد). این تناقض نشان می‌دهد که  $f$  نمی‌تواند مستقیماً از طریق  $x = 1$  ادامه یابد. [با وجود این مثال  $\frac{1}{1-z}$   $f(z) = \frac{1}{1-z}$  نشان می‌دهد که ممکن است بتوانیم  $f$  را به طور غیرمستقیم در نقاطی روی نیم‌خط  $x > 1$  ادامه دهیم.]

اگر فرض کنیم که تمام ضرایب بجز تعدادی با پایان مثبت باشند، این استدلال مفید نخواهد بود.

تمرین ۱۷.۶ نشان دهید اگر  $\sum a_n z^n$  و  $\sum (\operatorname{Re} a_n) z^n$  شعاع همگرایی یکسان  $R$  داشته باشند آنگاه قضیه ویوانتی پرینگشیم تنها وقتی که فرض کنیم  $\operatorname{Re} a_n \geq 0$ ، برقرار است. (به عبارت دیگر، بجای اینکه فرض کنیم  $a_n \geq 0$ ، کافی است فرض کنیم  $\operatorname{Re} a_n \geq 0$  مگر  $\sum (\operatorname{Re} a_n) z^n$  شعاع همگرایی بزرگتری از شعاع همگرایی  $\sum a_n z^n$  داشته باشد.)

## \* ۱۷.۶ سریهای توانی غیرقابل ادامه

همین حالا دیدیم که یک سری توانی با ضرایب مثبت را مستقیماً نمی‌توان به خارج از نقاط مثبت حقیقی روی دایره همگرایی ادامه داد. اکنون می‌خواهیم به شرایطی بپردازیم که ادامه یک سری توانی را به بیرون گوی همگرایی اصلاً در هیچ جهتی امکان‌پذیر نمی‌سازد، بنابراین دایره همگرایی یک مرز طبیعی است. ابتدا نشان می‌دهیم چنین توابعی وجود دارند.

تمرین ۱۷.۷ نشان دهید  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$  را نمی‌توان بیرون گوی واحد ادامه داد. قضیه ویوانتی پرینگشیم نشان می‌دهد که  $f$  به آن طرف نقطه ۱ ادامه‌ای ندارد. اکنون  $f(ze^{i\pi/q})$  که در آن  $q$  و  $q$  اعداد صحیح هستند را در نظر بگیرید.

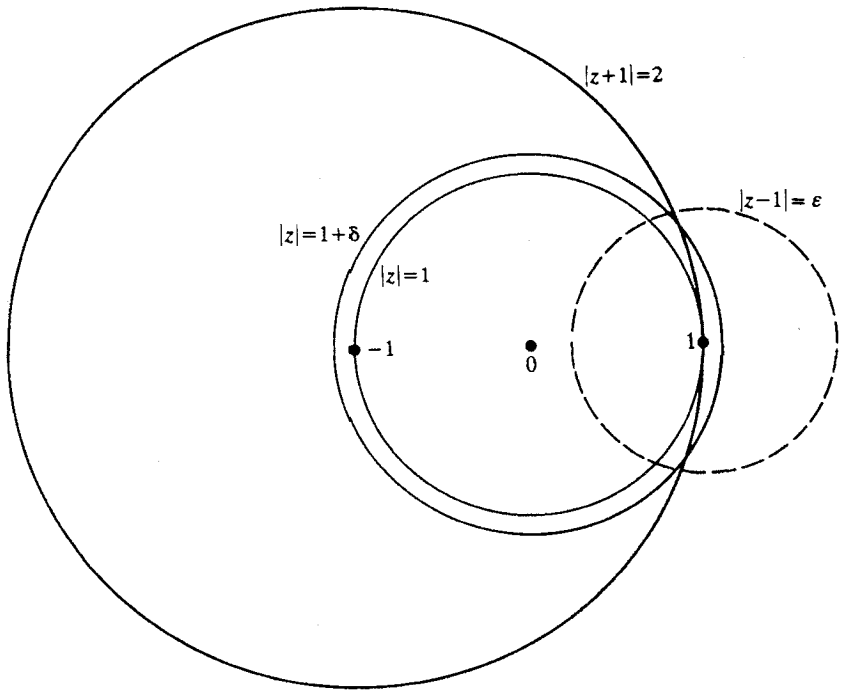
یک نتیجه کلی‌تر، قضیه هادامارد است که می‌گوید  $f(z) = \sum a_n z^n$  با شعاع همگرایی با پایان را نمی‌توان به بیرون دایره همگرایی ادامه داد اگر  $a_n = 0$  به جز برای  $n = n_k$  که در آن  $\lambda > 1 > \frac{n_{k+1}}{n_k}$ . در زیر یک اثبات ارائه می‌دهیم. در ابتدا توجه کنید اگر ثابت کنیم که برای فراهمگرایی در یک همسایگی از هر نقطه روی دایره همگرایی که سری توانی در آن تحلیلی است، وجود حفره‌های طولانی کفایت می‌کند. آنگاه بی‌درنگ قضیه هادامارد نتیجه خواهد شد.

تمرین ۱۷.۸ این مطلب را ثابت کنید.

اما قضیه هادامارد آخرین کلام درباره ادامه‌ناپذیری سریهای توانی نیست. یک نتیجه عمیقتر قضیه حفره فابری است که می‌گوید شرط حفره‌ای ضعیفتر  $\frac{n_k}{k} \rightarrow \infty$  برای ادامه‌ناپذیری سری  $\sum a_k z^{n_k}$  کفایت می‌کند.<sup>۴</sup>

برای اثبات قضیه هادامارد، فرض می‌کنیم شعاع همگرایی برابر با ۱ باشد. کافی است ثابت کنیم  $f$  در  $z = 1$  نمی‌تواند تحلیلی باشد، چون سری توانی  $f$  و  $f(ze^{i\alpha})$  دارای حفره‌های یکسان هستند. لذا فرض کنیم  $f$  در  $z = 1$  تحلیلی باشد. سعی می‌کنیم یک تناقض بدست آوریم. تابع  $g(z) = f\left\{\left[\frac{1}{p}z^p(1+z)\right]^{n_k}\right\}$  با  $p > \frac{\lambda}{\lambda-1}$  را در نظر بگیرید. تمرین ۱۷.۱ نشان می‌دهد که هر  $\left[\frac{1}{p}z^p(1+z)\right]^{n_k}$  به مجموع توانهایی از  $z$  بسط می‌یابد که در بسطهای مجموع متناظر برای مقادیر دیگر  $n_k$  ظاهر نمی‌شوند. بنابراین سری که بوسیله  $g$  تعریف کردیم دقیقاً سری مک‌لورن  $g$  برحسب جملات دسته‌بندی شده آن می‌باشد، یعنی، مجموع جزئی آن زیرمجموعه‌ای از مجموع جزئی سری مک‌لورن  $g$  است. در نتیجه  $g$  هر جا که سری مک‌لورن  $g$  همگرا است، تحلیلی می‌باشد.

حال چون شعاع همگرایی  $\sum a_k z^{n_k}$  برابر با ۱ است، مجموعه  $S$  جایی که  $g$  تحلیلی باشد حداقل شامل مجموعه‌ای است که  $1 > \left| \frac{1}{p}z^p(1+z) \right|$ . این مجموعه لااقل شامل اشتراک مجموعه‌هایی است



شکل ۱۷.۶

که  $|z| < 1$  و  $|z+1| < 2$ . مجموعهٔ دوم گوی به شعاع ۲ به مرکز ۱- است و شامل همهٔ نقاط گوی که  $|z| \leq 1$  به جز  $z = 1$  می‌باشد. اما چون فرض کردیم که  $f$  در  $z = 1$  تحلیلی است، نقطهٔ ۱ نیز به  $S$  متعلق است، زیرا به ازای  $z = 1$ ،  $\frac{1}{z} z^p (z+1) = 1$ . چون  $S$  شامل ۱ می‌باشد شامل یک گوی به شعاع مثبت  $\epsilon$  و مرکز ۱ است و بنابراین شامل یک گوی به مرکز صفر و شعاع  $1 + \delta > 1$  (شکل ۱۷.۶ را ببینید) است. یعنی سری مک‌لورن  $g$  دارای شعاع همگرایی بزرگتر از ۱ می‌باشد و بنابراین  $\sum a_k [\frac{1}{z} r^p (r+1)]^{n_k}$  برای  $r > 1$  همگرا است. اما  $\frac{1}{z} r^p (r+1) > 1$  وقتی  $r > 1$  و بنابراین  $\sum a_k w^{n_k}$  به ازای  $w > 1$  همگرا است، و این مطلب با فرض اینکه سری دارای شعاع همگرایی ۱ است تناقض دارد. در نتیجه قضیه هادامارد اثبات می‌شود.

### تمرینهای تکمیلی

۱- ثابت کنید  $\frac{1}{1-z}$  را می‌توان بیرون گوی واحد با استفاده از بسط سری تیلور آن حول  $z = -h$ ،  $0 < h < 1$  ادامه داد.

۲- آیا بسط  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  برحسب توانهای  $(z+1)$  ادامهٔ تحلیلی  $f$  را فراهم می‌آورد؟

۳- فرض کنید  $S_n$  مجموع جزی  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  و سری  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  دارای شعاع همگرایی ۱ باشد و  $S_n = 0$  به جز وقتی  $n$  توانی از ۲ است. ثابت کنید این حالت  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  را به بیرون گوی واحد نمی توان ادامه داد.

۴- فرض کنید  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (e^{z-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$  ،  $|z| < 1$  ، آیا  $\sum a_n$  همگرا است.

۵- اشتباه استدلال زیر را پیدا کنید.

فرض کنید  $f$  در گوی بسته محدود شده به وسیله دایره  $C$  ، تحلیلی باشد. بنا به قضیه کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw$$

می توانیم بنویسیم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

که در آن  $C_1$  و  $C_2$  نیم دایره بالایی و پایینی هستند. بنا به استدلالهای بخش ۷.۵ ،  $f_1$  در تمام صفحه به جز روی  $C_1$  تحلیلی است و  $f_2$  به جز روی  $C_2$  همه جا تحلیلی است. اما بنا به مطالب بخش ۷.۲ ، برون  $C$  ،  $f_1(z) + f_2(z) = 0$  ، درون  $C$  ،  $f_1(z) + f_2(z) = f(z)$  ، بنابراین  $f(z) \equiv 0$  .

## یادداشتها:

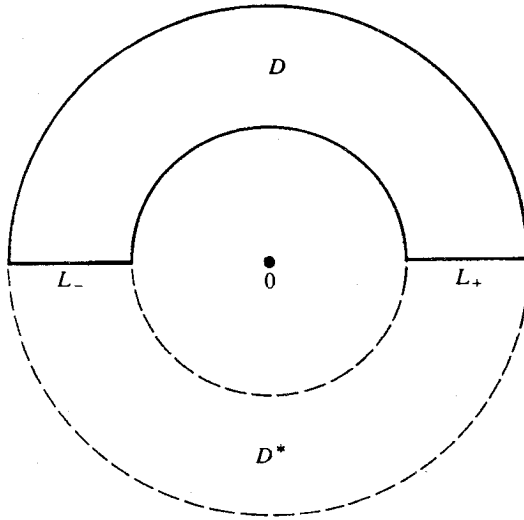
(۱) برای دیدن صورت های قوی تر اصل انعکاس به Hille ، جلد ۱ ، صفحات ۱۸۴ تا ۱۸۷ مراجعه کنید.

توجه کنید که ادامه به وسیله اصل شوآرتس ، لزوماً به توابع تحلیلی در تمام ناحیه متشکل از  $D$  و  $D^*$  و بازه حقیقی مبین آنها منتهی نمی شود. به عنوان مثال اگر  $D$  مطابق شکل ۱۷.۱۷ و  $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$  شاخه اصلی ریشه دوم باشد آنگاه  $f$  در  $D$  تحلیلی و روی  $L_+$  حقیقی است ، اما ادامه آن به اطراف  $L_+$  ، تابعی را که در اجتماع  $D$  ،  $D$  ،  $L_+$  و  $L_-$  تحلیلی باشد فراهم نمی آورد. حتی اگر  $f$  را بتوان در اطراف  $L_-$  ادامه تحلیلی داد.

(۲) به بخش ۶.۳ و یادداشت ۳ ، بخش ۶ مراجعه کنید.

(۳) فراهمگرایی به وسیله پورتر در سال ۱۹۰۶ کشف شد. قضیه عکس به وسیله آستروسکی بعداً ثابت شد. برای دیدن جزئیات به کتاب دنیس صفحه ۳۷۰ مراجعه کنید.





شکل ۱۷.N، برای یادداشت ۱

(۴) برای جزئیات بیشتر روی قضایای حفره، کتابهای

Dienes, chaps. 10, 11, 14; Polya; and Levinson

را ببینید.

## ۱۸. سری توانی روی دایره همگرایی

### ۱۸.۱ قضیهٔ آبل

طبیعی است فرض کنیم چون  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  همگرا است، حاصل جمع سری باید مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = \log(1+z)$  و در  $z=1$  برابر با  $\ln 2$  باشد. اما تاکنون به هیچ وجه گفته نشده است که می‌توانیم از سری تیلور روی دایره همگرایی، حتی وقتی که در یک نقطه از این دایره همگرا باشد، استفاده نمائیم. با وجود این شهود در این حالت صحیح است. به طور کلی قضیهٔ زیر را داریم:

قضیهٔ آبل: اگر  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  به ازای  $|z| < R$  همگرا به  $f(z)$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  به  $A$  همگرا باشد، آنگاه  $\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = A$ . نماد  $x \rightarrow R^-$  یعنی حد در امتداد شعاع از درون گوی  $|z| < R$  گرفته شده است.

از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر  $\sum a_n R^n e^{in\theta} = A$  آنگاه در امتداد شعاع  $z = re^{i\theta}$  وقتی  $r \rightarrow R^-$  داریم  $f(z) \rightarrow A$ . البته اگر در سری به جای صفر، از مرکز  $z$  استفاده کنیم، نتیجهٔ متناظری وجود دارد.

توجه کنید که عکس قضیهٔ آبل درست نیست، به عنوان مثال اگر به ازای  $1 < |z|$ ،  $f(z) = (1+z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$  آنگاه  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  وجود دارد اما سری  $\sum (-1)^n$  واگرا است.

قضیهٔ آبل برای مسیرهای تا محدودی کلی‌تر از شعاع‌ها، درست است. اما نه برای هر مسیر دلخواهی با انتهای  $z = R$ . نشان دادن این مطلب نسبتاً سخت است و اینجا توضیح داده نخواهد شد.<sup>۱</sup> برای اثبات قضیهٔ آبل، می‌توانیم فرض کنیم  $R = 1$  (در غیر این صورت  $f(Rz)$  را در نظر می‌گیریم). همچنین می‌توانیم فرض کنیم  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ ؛ این کار منطقی است زیرا می‌توانیم به جای  $f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ،  $f(z)$  را در نظر بگیریم. حالا می‌نویسیم  $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$  و  $s_{-1}$  را برابر با صفر تعریف می‌کنیم، بنابراین داریم  $s_n - s_{n-1} = a_n$ . برای  $|x| < 1$  داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= s_0 + (s_1 - s_0)x + (s_2 - s_1)x^2 + \dots \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} [s_0 + (s_1 - s_0)x + \dots + (s_N - s_{N-1})x^N] \end{aligned}$$

مجموع داخل کروشه را می‌توان به صورت

$$s_0(1-x) + s_1(x-x^2) + \dots + s_{N-1}(x^{N-1} - x^N) + s_N x^N$$

مرتب کنیم، چون  $s_N x^N \rightarrow 0$  داریم

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$$

اکنون ممکن است قابل قبول به نظر بیایند که وقتی  $x \rightarrow 1^-$ ،  $f(x) \rightarrow 0$ ، اما فوراً بدیهی به نظر می‌رسد که مجموع سری در عامل  $(1-x)$  تأثیری نداشته باشد. در چنین شرایطی می‌توانیم از اصل «تقسیم-و-قانون» استفاده کنیم. سعی می‌کنیم مجموع را به دو قسمت تقسیم کنیم و نشان دهیم که هر قسمت بعد از ضرب در  $(1-x)$  به دلایل متفاوت به صفر میل می‌کنند. برای انجام این کار، عدد مثبت دلخواه (کوچک)  $\varepsilon$  را انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم.

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=1}^M s_k x^k + (1-x) \sum_{k=M+1}^{\infty} s_k x^k = s_1 + s_2$$

$M$  چنان انتخاب می‌شود که  $|s_k| < \varepsilon$  برای  $k > M$  (این امکان‌پذیر است چون  $s_k \rightarrow 0$ ). بنابراین

$$|s_2| \leq (1-x)\varepsilon \sum_{M+1}^{\infty} x^k \leq (1-x)\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \varepsilon$$

اکنون برای  $M$  ثابت،  $0 \rightarrow s_1$  وقتی  $x \rightarrow 1$ ، زیرا  $s_1$  مجموع تعداد با پایانی از عبارتهای کراندار است که همگی در  $(1-x)$  ضرب شده‌اند. در نتیجه  $|s_1| < \varepsilon$  وقتی  $x$  به اندازهٔ کافی به ۱ نزدیک شود، بنابراین داریم  $|f(x)| \leq 2\varepsilon$  برای  $x$  به اندازهٔ کافی نزدیک به ۱، که یعنی  $f(x) \rightarrow 0$ . روشی که در مورد سری برای  $f(x)$  استفاده کردیم به مجموعیابی جزئی موسوم است. این مشابه گسستهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌باشد و می‌توان در بسیاری از مسایل از آن استفاده کرد.

تمرین ۱۸.۱. قضیهٔ همگرایی آبل<sup>۲</sup> را ثابت کنید: اگر  $a_n$  نزولی به سمت صفر باشد و  $\sum b_n$  دارای مجموع جزئی کراندار  $B_n$ ، داشته باشد. آنگاه  $\sum a_n b_n$  همگرا است. [اگر  $b_n = (-1)^n$  آزمون همگرایی سری آشنای متناوب بدست می‌آید.]

وقتی  $b_n$ ، لزوماً حقیقی نباشد، تا وقتی که مجموع جزئی  $B_n$ ، کراندار باشد بحث مشابهی بکار می‌رود. برای مثال سری  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} i^n$  با  $a_n = \frac{1}{n}$ ،  $b_n = i^n$  را در نظر بگیرید. در این صورت  $B_n = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$ ،  $i$  یا صفر است بنابراین  $B_n = O(1)$  و در نتیجه سری مذکور همگرا است.

تمرین ۱۸.۲. قضیهٔ معرفی شده در بخش ۴.۳ را ثابت کنید: این که اگر سری‌های  $A$  و  $B$  همگرا، و  $C$  برابر با حاصل ضرب صوری آنها و همگرا باشد، آنگاه مجموع  $C$  حاصل ضرب مجموع  $A$  و  $B$  است.

تمرین ۱۸.۳. با استفاده از تمرین ۴.۱۷ نشان دهید که وقتی  $a_n$  و  $b_n$  نزولی به سمت صفر باشند، سری‌های  $\sum a_n \cos nx$  و  $\sum b_n \sin nx$  به ترتیب به ازای  $0 < x < \pi$  و  $0 \leq x \leq \pi$  همگرا هستند.

تمرین ۱۸.۴. اگر فرضهای قضیهٔ آبل را ضعیف کنیم، نتایج ضعیفتری بدست می‌آوریم. نشان دهید اگر  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  برای  $|z| < R$  همگرا و  $\sum a_n R^n$  مجموع جزئی کراندار داشته باشد، آنگاه  $f(x)$  روی  $(0, R)$  کراندار است.

تمرین ۱۸.۵. اگر  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  برای  $|z| < R$  و  $\sum a_n R^n = +\infty$  آنگاه  $f(x) \rightarrow \infty$  وقتی  $x \rightarrow R^-$  (این از تمرین ۱۷.۵ قوی‌تر است).

### تمرینهای تکمیلی

۱- با استفاده از قضیهٔ آبل ثابت کنید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

۲- فرض کنید  $\binom{n}{k}$  ضریب  $x^k$  در بسط دوجمله‌ای  $(1+x)^n$  باشد. با استفاده از قضیه آبل (بدون هیچ آزمون همگرایی) نشان دهید  $\sum (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$  واگرا است.

۳- نشان دهید

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \dots$$

همگرا است.

۴- اگر  $a_n$  نزولی به صفر باشد برای کدام مقدار حقیقی  $\lambda$ ،  $\sum a_n \cos(nx + \lambda)$  همگرا است.

## \* ۱۸.۲ مجموعه‌یابی سریهای واگرا

قضیه آبل را می‌توان این‌چنین تعبیر کرد که اگر یک سری همگرا باشد، مجموع آن را می‌توان به جای حد گرفتن از مجموع جزئی با درج عوامل  $x^n$  و سپس فرض  $x \rightarrow 1$  بدست آورد. گذشته از کاربرد موردی این قضیه برای مجموعه‌یابی سریهای همگرایی مانند  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ، قضیه آبل به دلیل ارائه روشی برای نسبت دادن مجموعه‌هایی به سریهای واگرا مانند  $\sum a_n$  نیز جالب است. برای مثال،  $\sum (-1)^n$  واگرا است اما  $\frac{1}{1+x} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n (-1)^n = \frac{1}{1+x}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  در امتداد شعاع  $0 < x < 1$  در گوی واحد. می‌گوییم  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  به  $\frac{1}{2}$  با روش آبل جمع‌پذیر یا جمع‌پذیر آبل است. این روش مجموع بسیاری از سریهای واگرای دیگر را به دست می‌دهد.

تمرین ۱۸.۶ مجموع  $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$  را به روش آبل بیابید.

اما روش آبل مجموع یک سری توانی در بیرون گوی همگرایی به دست نمی‌دهد.

تمرین ۱۸.۷ حکم اخیر را ثابت کنید.

هر روش اصولی برای نسبت دادن یک مجموع به یک سری واگرا، روش مجموعه‌یابی<sup>۳</sup> نامیده می‌شود (معمولاً یک روش مجموعه‌یابی می‌خواهیم که مجموع معمولی را نیز به یک سری همگرا به دست دهد). شاید ساده‌ترین روش که بعضی از سریهای واگرا را جمع می‌کند روش  $Y$ <sup>۴</sup> باشد که حد متوسط مجموعه‌های جزئی متوالی را بدست می‌آورد، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n + s_{n+1}}{2}$$

تمرین ۱۸.۸ با روش  $Y$ ،  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  را بیابید.

یک روش غالباً کاربردی‌تر، روش  $(C, 1)$  است ( $C$  نشانه Cesaro است) که در آن میانگین  $n$  مجموع جزئی اول را بدست می‌آوریم؛ یعنی  $(s_1 + s_2 + \dots + s_n) n^{-1}$  را تشکیل می‌دهیم و امیدواریم که وقتی  $n \rightarrow \infty$ ، به حدی میل کند. اگر  $\sum a_n$  همگرا باشد این عبارت به یک حد نزدیک می‌شود. این گزاره بی‌درنگ از تمرین زیر نتیجه می‌گردد، که گاهی آن را لم کرونکر می‌نامند.

تمرین ۱۸.۹ اگر  $s_n$  یک دنباله از اعداد و  $s_n \rightarrow L$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  ، آنگاه

$$n^{-1}(s_1 + \dots + s_n) \rightarrow L$$

از نظر هندسی تمرین ۱۸.۹ بیان می‌کند که مرکز ثقل  $n$  جمله اول یک دنباله همگرا دارای همان حد دنباله است.

به موازات اثبات قضیه آبل می‌توان نشان داد که هر سری  $(C, 1)$  جمع‌پذیر، جمع‌پذیر آبل به همان مجموع، نیز می‌باشد. در نتیجه روش آبل قوی‌تر از روش  $(C, 1)$  است، اما برای استفاده ممکن است سخت‌تر باشد. به یک معنا روش  $(C, 1)$  نسبت به روش آبل به همگرایی شبیه‌تر است، بنابراین ممکن است برای تعمیم همگرایی مساعدتر بنظر بیاید. اگر علامت  $(C, 1)$  این گمان را در شما بوجود آورد که روشهای  $(C, k)$  نیز وجود دارد، حق با شماست اما در اینجا درباره آنها بحث نمی‌کنیم.

تمرین ۱۸.۱۰ نشان دهید روش  $(C, 1)$  سری  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  را جمع می‌بندد اما مجموع  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$  با روش  $(C, 1)$  موجود نیست.

هرچند روش آبل سری توانی در بیرون گوی همگرایی (بسته) را (و نه همیشه روی دایره همگرایی) مجموعیابی نمی‌کند، روشهای پیچیده‌تری موجودند که سری توانی را، اگر مجموع آن بصورت تحلیلی بیرون گوی ادامه داشته باشد مجموعیابی می‌کند. یکی از روشهایی که این منظور را برمی‌آورد، بوسیله بورل پیشنهاد شد. برای جمع زدن  $\sum a_n$  با این روش، انتگرال

$$\int_0^{\infty} e^{-u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n u^n}{n!} du$$

را تشکیل دهید. اگر سری زیر انتگرال برای همه  $u$  های مثبت همگرا و انتگرال با پایان باشد، آنگاه مقدار انتگرال مجموع بورل سری است. انگیزه این تعریف مشاهده این مطلب است که اگر به طور صوری ترتیب جمع و انتگرال را تغییر دهیم، دقیقاً  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  را بدست می‌آوریم. اکنون روش بورل را برای  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$  بکار می‌بریم. اولاً باید سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n u^n}{n!}$$

را تشکیل دهیم که خوشبختانه بطور صریح حاصل جمع آن  $w^{-uz}$  می‌باشد. در این صورت انتگرال بورل برابر با

$$\int_0^{\infty} e^{-u(1+z)} du$$

است که همگرا و برابر با  $\frac{1}{1+z}$  است وقتی  $\text{Re } z > -1$  . بنابراین با روش بورل، جمع  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$  برابر با  $\frac{1}{1+z}$  است وقتی  $\text{Re } z > -1$  ، یعنی در نیم‌صفحه‌ای که دربرگیرنده گوی باز همگرایی است.

یک تعمیم مستقیم‌تر روش آبل، به دست آوردن مجموع  $\sum a_n$  در صورت وجود  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\delta \varphi(n)}$  می‌باشد که در آن  $\delta$  مقادیر مثبت را می‌گیرد. وقتی  $\varphi(n) = n$  این روش آبل است. وقتی  $\varphi(n) = n \ln n$  این روش لیندلف است که بسیار مفیدتر می‌باشد. ثابت می‌شود (البته نه به آسانی) که این روش هر سری توانی را در ستاره میتاج-لفلر (Mittage-Leffler) جمع می‌زند، که با رسم شعاعهایی از مرکز نقاط تکین مجموع سری و ادامه تحلیلی آن و حذف از صفحه آن بخشهایی از شعاعها را که آنسوی نقاط تکین قرار دارند بدست می‌آید. ستاره میتاج-لفلر برای  $\frac{1}{1+z}$  تمام صفحه به استثنای شعاع از  $-1$  به  $-\infty$  است.

کسی انتظار ندارد که سری واگرا به  $+\infty$  را جمع بزند. با وجود این، اخیراً ثابت شده است<sup>۵</sup> روشی وجود دارد که سری  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$  را در تمام صفحه بجز در  $z = -1$  جمع می‌زند، و حتی مجموع سری در  $z = -1$  برابر با  $+\infty$  است.

روشهای مجموعیایی دیگری وجود دارند که برای اهداف خاصی مفید هستند. وجود آنها ممکن است ما را متحیر کند که چرا این قدر روی همگرایی معمولی سریها تأکید می‌کنیم. یک توضیح ممکن است این باشد که جبر سریهای همگرا (مانند اضافه یا حذف کردن جمله‌ها، تجدید آرایش و غیره) را نمی‌توان در سریهای مجموع‌پذیر بکار برد.

تمرین ۱۸.۱۱ افزودن جمله صفر در یک سری همگرا، مجموع آن را تغییر نمی‌دهد. نشان دهید اگرچه سری

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots$$

$(C, 1)$  مجموع‌پذیر است ولی مجموع آن برابر با  $\frac{1}{2}$  نیست.

دلیل دیگر برای رجحان همگرایی معمولی این است که وقتی یک روش مجموعیایی برای سری همگرا به کار می‌رود ممکن است، اساساً تقریب ضعیفتری نسبت به مجموع جزئی سری، برای جمع سری ارائه دهد.

### ۱۸.۳ قضایای تاویری

دیدیم که عکس قضیه آبل درست نیست: اگر  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  و  $f(x) \rightarrow L$  وقتی  $x \rightarrow 1$  در این صورت لزوماً نتیجه نمی‌شود که  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ ، اگرچه عکسهای شرطی معتبری وجود دارند که اگر فرضهای اضافی را روی  $\{a_n\}$  بگذاریم همراه با  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L$ ، نتیجه خواهد شد  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ . قضایایی از این نوع تا وقتی مفیدند که ما به یافتن مجموع عددی سری نسبت به نشان دادن این‌که تابع به حدی میل می‌کند، علاقه‌مندتر باشیم.

به عنوان اولین مثال از چنین عکس شرطی، ثابت می‌کنیم که اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  برای  $|x| < 1$  و اگر  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = L$  و  $a_n \geq 0$  آنگاه  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ . این صورت جالب دیگری از قضیه ویوانتی-پرینگشیم است. چون  $a_n \geq 0$  داریم

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leq L, \quad 0 \leq x \leq 1$$

بنابراین  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k \leq L$  و لذا  $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n \leq L$ . از طرف دیگر  $s_n \geq \sum_{k=0}^n a_k x^k = f(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = f(x) - R_n(x)$  کنید که  $f(x) > L - \varepsilon$  بعد  $n$  را بقدری بزرگ بگیرید که  $R_n(x) < \varepsilon$  (این امکان‌پذیر است زیرا  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  به ازای این  $x$  همگرا است). در نتیجه  $s_n \geq L - 2\varepsilon$  و چون  $\varepsilon$  دلخواه است  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf s_n \geq L$ . بنابراین  $s_n \rightarrow L$ .

اگر بگیریم  $L = \infty$ ، این قضیه، تمرین ۱۷.۵ می‌شود. یک قضیه مشکل‌تر این است که شرط  $a_n = o(\frac{1}{n})$  به جای  $a_n \geq 0$  قرار گیرد.

**قضیه تاوبر:** اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  برای  $|x| < 1$  همگرا و  $f(x) \rightarrow L$  وقتی  $x \rightarrow 1^-$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$  آنگاه  $na_n \rightarrow 0$ .

قضایایی از این نوع، یعنی عکسهای شرطی برای قضایای حدی، به تاوبری معروف هستند. قضایای بدون فرضهای اضافی، به آبلی موسوم‌اند. قضیه آبل نوعی قضیه آبلی است. قضیه تاوبر اولین مثال از قضیه تاوبری یا حداقل اولین مورد جالب است، فرض اضافی در قضیه تاوبر بیش از حد لازم محدودکننده است. در حقیقت کافی بود که  $na_n$  کراندار باشد. این قضیه لتیلوود<sup>۶</sup> است. چون این نتیجه بسیار سخت‌تر است، آن را ثابت نمی‌کنیم.

برای اثبات قضیه تاوبر، دوباره می‌توانیم فرض کنیم  $L = 0$ ، لذا باید نشان دهیم  $s_n \rightarrow 0$ . چون  $na_n \rightarrow 0$  بنا به تمرین ۱۸.۹ با (اینجا)  $n|a_n| = s_n$  (آنجا)  $s_n$ ، نشان می‌دهد که اگر  $\varepsilon$  عدد مثبت (کوچک) دلخواه باشد، می‌توانیم  $N$  را به قدری بزرگ اختیار کنیم که وقتی  $n > N$  داشته باشیم  $|na_n| < \varepsilon$  و همچنین  $\sum_{k=0}^N k|a_k| < \varepsilon$ . حالا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| + \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - x^n) \right| = S_1 + S_2 \end{aligned}$$

و  $x$  (نزدیک ۱) چنان انتخاب کنیم که  $N^{-1} < 1 - x \leq (N + 1)^{-1}$  در این صورت داریم

$$S_1 = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N+1} \cdot \frac{1}{1-x} < \frac{\varepsilon}{N+1} (N+1) = \varepsilon$$

و

$$\begin{aligned} S_2 &\leq (1-x) \sum_{n=0}^N |a_n| (1+x+\dots+x^{n-1}) \\ &\leq (1-x) \sum_{n=1}^N n |a_n| \leq N(1-x) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N n |a_n| \leq \varepsilon N(1-x) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

لذا

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq 2\varepsilon$$

و طبق فرض وقتی  $x \rightarrow 1^-$ ،  $f(x) \rightarrow 0$ ؛ بنابراین  $\sum_{n=0}^N a_n \rightarrow 0$  وقتی  $N \rightarrow \infty$ .

تمرین ۱۸.۱۲ از قضیهٔ تاوبر با فرض ضعیفتر، نتیجهٔ ضعیفتری بدست می‌آید. نشان دهید اگر  $a_n = O(\frac{1}{n})$  و  $f(x)$  وقتی  $x \rightarrow 1^-$  کراندار باشد، آنگاه  $\sum a_n$  دارای مجموع جزئی کراندار است.

تمرین ۱۸.۱۳ نشان دهید اگر  $a_n = O(\frac{1}{n})$  و  $f(x) \rightarrow +\infty$  وقتی  $x \rightarrow 1^-$ ، آنگاه  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ .

قضیهٔ تاوبری جالب دیگری که اینجا ثابت نمی‌شود، قضیهٔ فاتو<sup>۷</sup> است که اگر  $a_n \rightarrow 0$  و  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  را بتوان به طور تحلیلی بعد از  $z = 1$  ادامه داد، آنگاه  $\sum a_n$  همگرا است.

### یادداشتها:

(۱) برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مطالب این بخش، کتابهای Hardy، Pitt و Postnikov را ببینید.

(۲) این یکی از مفیدترین آزمونهای همگرایی است که متأسفانه در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال ذکر نشده است.

(۳) خصوصاً کتاب Hardy را ببینید.



(۴) روش  $Y$  در کتاب Szasz این چنین نامیده شده است.

(۵) L. Tomm, "A Regular Summability Method Which Sums the Geometric Series to its Proper Value in the Whole Complex Plane" *Canadian Math. Bull.* 26 (1983): 171-189.

(۶) اثبات قضایای تاوبری در کتابها آمده است، برای اثباتی از طریق آنالیز مختلط، به

W.B. Jurkat, "Über die Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes mit funktionentheoretischen Methoden" *Math. Z.* 67(1957): 211-222

مراجعه کنید.

(۷) برای دو اثبات مختلف به Tichmarsh، صفحهٔ ۲۱۸ و Dienes، صفحهٔ ۴۶۷ مراجعه کنید.

## فصل ۴

# توابع همساز؛ نگاشت همدیس

### ۱۹. توابع همساز

#### ۱۹.۱ تعریفها

اینکه می‌گوییم  $u = u(x, y)$  در ناحیه  $D$  همساز است بدین معناست که در معادله لاپلاس صدق می‌کند،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

که بهتر است با اندیس به صورت  $u_{11} + u_{22} = 0$  بنویسیم، مرسوم است که فقط توابع همساز حقیقی را در نظر بگیریم.

سرانجام قادر خواهیم بود که نشان دهیم (بخش ۲۰ را ببینید) اگر  $u$  در ناحیه‌ای پیوسته و به اندازه کافی مشتق‌پذیر باشد و در رابطه لاپلاس صدق کند، آنگاه دارای مشتق جزئی پیوسته از تمام مراتب است. البته عجالتاً می‌پذیریم که توابع همساز دارای مشتقهای جزئی اول و دوم پیوسته بوده و در معادله لاپلاس در یک ناحیه صدق می‌کنند.

رابطه بین توابع همساز و توابع تحلیلی آن است که، چون توابع تحلیلی دارای مشتق دوم پیوسته‌اند (همانطور که در بخش ۷.۳ دیدیم)، قسمت‌های حقیقی و موهومی  $u$  و  $v$  یک تابع تحلیلی مانند  $f$  در معادله لاپلاس صدق می‌کند. این از مشتقگیری معادلات کوشی-ریمان بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

چون مشتقهای دوم آمیخته با هم برابرند،  $u$  همساز است. به همین نحو (یا برای اینکه  $v$  قسمت حقیقی  $-if$  است)،  $v$  همساز است.

چون همیشه به دنبال این هستیم که شرط کافی به شرط لازم تبدیل شود، امیدواریم، به عکس، هر تابع همساز قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی شود.

البته این مطلب کاملاً درست نیست. به عنوان مثال  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  (با ریشه دوم مثبت) در طوقه  $0 < |z| < 2$  همساز است، اما هیچ تابع (تک‌مقداری) در این طوقه که قسمت حقیقی آن  $u$  باشد وجود ندارد. در حقیقت  $u$  قسمت حقیقی  $\log z$  است که در طوقه تحلیلی نیست.

اما تابعی که در ناحیه همبند ساده  $D$ ، همساز است در حقیقت قسمت حقیقی تابعی مانند  $f$  می‌باشد که در  $D$  تحلیلی است.

ما می‌توانیم (و می‌خواهیم) در واقع با ساختن تابعی مانند  $f$  مطلب را ثابت کنیم. (به طور طبیعی  $f$  فقط در حد جمع با یک عدد ثابت موهومی تعیین می‌شود.) قسمت موهومی  $f$  مزدوج همساز  $u$  خوانده می‌شود (این مزدوج منحصر بفرّد نیست زیرا برای هر عدد حقیقی  $c$ ،  $f(z) + ic$  نیز همان قسمت حقیقی  $f$  را دارد.)

کلمه «مزدوج» در اینجا معنی «وابستگی» را می‌رساند همچنان‌که در اصطلاح «مزدوجهای مختلط»، هرچند نوع وابستگی در دو عبارت کاملاً متفاوت است.

چون توابع همساز با توابع تحلیلی به طریقی که همین حالا ذکر شد مرتبط‌اند، قضایائی را که درباره قسمت حقیقی توابع تحلیلی اثبات کرده‌ایم (بعنوان مثال تمرین ۱۶.۲ و ۱۶.۴ یا قضیه لثویل در بخش ۱۶.۳) در واقع قضایائی درباره توابع همساز می‌باشند.

اصطلاح «همساز» به دویعدی محدود نمی‌شود اما به دنبال توابع همساز در فضا نیستیم: یک جواب معادله لاپلاس در هر بعدی همساز نامیده می‌شود. متأسفانه هیچ نظریه‌ای از توابع تحلیلی در بعد بیشتر از ۲ که به توابع همساز به همان روش دویعدی مربوط شود، موجود نیست. در نتیجه، مطالعه معادله لاپلاس، و مسایل فیزیکی مربوط به آن، در بعد بالاتر مشکلتر است. از طرف دیگر، در حالت یک‌بعدی، توابع همساز درست همان توابع مستوی  $ax + b$  هستند، که مطلب چندانی برای گفتن ندارد.

## ۱۹.۲ یافتن مزدوج همساز

فرض کنید حالا تابع همساز  $u$  را در ناحیه همبند ساده  $D$  داریم. در جستجوی یک مزدوج همساز مانند  $v$  هستیم که  $u + iv = f$  در  $D$  تحلیلی و در معادله کوشی-ریمان  $u_1 = v_2$  و  $u_2 = -v_1$  صدق کند. اولین معادله می‌رساند که ما باید قادر باشیم  $v$  را با انتگرال‌گیری از  $u_1$  برحسب  $y$  بیابیم، چون  $v_2 (= u_1)$  از مشتق‌گیری  $v$  برحسب  $y$  حاصل شده است. این رهیافت به طور موضعی کار می‌کند و

لزوماً روی همه  $D$  نیست، برای اینکه وقتی از نقطه داده شده  $(x_0, y_0)$  از  $D$  شروع می‌کنیم، نمی‌توانیم فقط با دنبال کردن جهت  $y$  به تمام نقاط  $D$  دست یابیم. بدین ترتیب می‌توانیم  $v$  را در همسایگی  $(x_0, y_0)$  بسازیم، و سپس  $f$  را موضعی ساخته و به امید ادامه تحلیلی جلو رویم، اما چنان که خواهیم دید این روش برای بعضی توابع خاص کار می‌کند. همچنین می‌توانیم  $v$  را با انتگرال‌گیری از  $u_2 - u_1$  بر حسب  $x$  بدست آوریم. همین‌طور که جلو می‌رویم، بنظر می‌آید که این دو روش را ترکیب کنیم و از  $u_1 - u_2$  طول کمائی در  $D$  از  $(x_0, y_0)$  تا  $(x, y)$  انتگرال بگیریم، یعنی

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} [u_1(s, t) dt - u_2(s, t) ds]$$

را در نظر بگیریم. اگر این فرمول تابعی مانند  $v$  را تعریف کند، باید انتگرال مستقل از مسیر انتگرال‌گیری باشد. اکنون بنا به قضیه گرین این انتگرال به مسیر وابسته نیست (در ناحیه ساده همبند)، به شرطی که  $u$  در معادله لاپلاس صدق کند.

تمرین ۱۹.۱ مشتق جزئی  $v$  را محاسبه کنید و سپس نشان دهید  $u$  و  $v$  قسمتهای حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی در  $D$  می‌باشند.

### ۱۹.۳ فرمولها

گاهی تابع همساز، داده می‌شود، و می‌خواهیم مزدوج همساز یا تابع تحلیلی وابسته را به طور صریح بیابیم. اگر  $u$  را داشته و  $v$  را بخواهیم، اغلب ساده‌تر است که انتگرال‌گیری را به طور موضعی و در چند مرحله انجام دهیم. اگر از  $u_1$  نسبت به  $y$  انتگرال «جزئی» بگیریم تابع  $f(x, y)$  را بعد از اضافه کردن تابعی مانند  $\varphi(u)$  که با  $v(x, y)$  برابر خواهد شد بدست می‌آوریم. اکنون نسبت به  $x$  مشتق گرفته تا  $v_1(x, y) = -u_2(x, y) + \varphi'(x)$  بدست آید. و حالا می‌توانیم  $\varphi(x)$  را با اضافه کردن یک مقدار ثابت بدست آوریم و بنابراین یک فرمول برای  $v$  بدست می‌آید. یک مثال روش را روشن می‌کند. فرض کنید  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ، آنگاه  $u_1 = 2x$ ،  $f(x, y) = \int u_1 dy = 2xy + \varphi(x) = v(x, y)$ ،  $u_2 = 0$ ، بنابراین  $v_1(x, y) = 2y + \varphi'(x) = -u_2(x, y) = 2y$  آنجا  $v(x, y) = 2xy + c$ .

تمرین ۱۹.۲ مزدوج همساز توابع زیر را بیابید.

الف)  $x^3 - 3xy^2$       ب)  $e^{-y} \cos x$       پ)  $\log(x^2 + y^2)$

ت)  $\frac{y}{[(1-x)^2 + y^2]}$

اغلب علاقه‌مندتریم که  $f$  را صریحاً برحسب  $z$  بدست آوریم تا اینکه  $v$  را بیابیم. در مثال  $u = x^2 - y^2$ ، بسادگی حدس می‌زنیم که ثابت  $f(z) = z^2$  است. اما در حالت‌های مشکل‌تر بیان  $u + iv$  به شکل  $f(z)$  همیشه ساده نیست حتی وقتی که فرمولهای  $u$  و  $v$  را بطور صریح داشته باشیم. چند روش میان‌بُر برای انجام این کار وجود دارد، که برای مراجعه در زیر ارائه کرده‌ام. توجه کنید: اگر از یک  $u$  که همساز نیست شروع کنید و روش کلی را بکار گیرید، خود به خود در جایی متوقف خواهید شد. اما اگر از یک  $u$  همساز شروع نکنید روشهای میان‌بُر ممکن است نتایج نادرست ارائه دهند.

سه روش خاص برای یافتن  $f(z)$  وجود دارد. آنها در نظر اول، بنظر مشکوک می‌آیند، اما واقعاً همگی درست هستند، چنان که بعد از شرح و توضیح آنها نشان خواهیم داد. ممکن است ترجیح دهید، جلو بروید و ابتدا اثبات را بخوانید قبل از اینکه روشها را امتحان کنید.<sup>۱</sup>

**قانون A:** اگر  $u$  را بشناسیم و بدانیم که در گوئی شامل یک بازه  $I$  از اعداد حقیقی همساز است، رابطه

$$f'(z) = u_1(z, 0) - iu_2(z, 0)$$

را تشکیل دهید و با انتگرال‌گیری از  $f'$ ،  $f$  را در یک همسایگی از  $I$  بدست آورید، آنگاه با ادامهٔ تحلیلی  $f$  را گسترش دهید.

توجه کنید که مشتقهای مشخص شده باید قبل از جایگزینی  $(x, y)$  با  $(z, 0)$  محاسبه شوند.

**قانون B:** اگر  $u$  در همسایگی  $z$  همساز باشد آنگاه در این همسایگی صرف‌نظر از یک مقدار ثابت موهومی اضافه‌شونده داریم

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i}\right) - u(x_0, y_0)$$

اگر  $u$  در همسایگی صفر همساز باشد می‌توانیم بگیریم  $z_0 = 0$ .

**قانون C:** اگر  $u$  و  $v$  را بشناسیم و بدانیم آنها در همسایگی صفر مزدوج همساز هستند آنگاه

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$$

در نگاه اول این قوانین نسنجیده بنظر می‌آیند، زیرا هنوز نمی‌دانیم که جایگزین کردن  $x$  و  $y$  با یک عدد مختلط دارای معنا است. بنابراین مطلب را با مثالهایی شروع می‌کنیم که نشان می‌دهند این قوانین ارزش آن را دارند تا کوششی را که برای اثبات کارایی آنها می‌شود توجیه کنند.

مثال ۱.  $u(x, y) = x^2 - y^2$ . در اینجا  $u_1 = 2x$  و  $u_2 = -2y$  و از قانون A داریم

$$f'(z) = 2z, \quad f(z) = z^2 + \text{ثابت}$$

بنا به قانون B و با  $z_0 = 0$  ،

$$f(z) = \gamma u \left( \frac{z}{\gamma}, \frac{z}{\gamma i} \right) = \gamma \left( \frac{z^2}{\gamma} + \frac{z^2}{\gamma} \right) = z^2$$

از قانون C ، باید بدانیم که  $v(x, y) = \gamma xy$  ، آنگاه

$$f(z) = z^2$$

مثال ۲.  $u(x, y) = e^{-y} \sin x$  .

بنا به قانون A ،

$$f'(z) = \cos z + i \sin z = e^{iz}$$

$$f(z) = -ie^{iz} + ic \quad (c \text{ حقیقی است})$$

با قانون B ، به ازای  $z_0 = 0$  ،

$$\begin{aligned} f(z) &= \gamma \exp \left( \frac{-z}{\gamma i} \right) \sin \left( \frac{z}{\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{i} \exp \left( \frac{iz}{\gamma} \right) \left( e^{\frac{iz}{\gamma}} - e^{-\frac{iz}{\gamma}} \right) \\ &= -ie^{iz} + i \end{aligned}$$

با قانون C ، اگر  $f(z) = \sin z + i(-\cos z) = -ie^{iz}$  ،  $v = -e^{-y} \cos x$  ،

مثال ۳.

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad , \quad u_1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad , \quad u_2 = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

بنا به قانون A ،

$$f'(z) = -\frac{z^2}{z^2} = -\frac{1}{z^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

بنا قانون B ،

$$\begin{aligned} f(z) &= \gamma \frac{\frac{(z+\bar{z}_0)}{\gamma}}{\left[ \frac{(z+\bar{z}_0)}{\gamma} \right]^2 + \left[ \frac{(z-\bar{z}_0)}{\gamma i} \right]^2} - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} \\ &= \frac{z + \bar{z}_0}{\gamma \bar{z}_0} - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} = \frac{1}{z} + i \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

قانون C با وضع فعلی قابل اجرا نیست. اما تمرین بعدی را ببینید.

تمرین ۱۹.۳ قانون C را برای حالتی که  $u$  و  $v$  در همسایگی  $z_0 \neq 0$  مزدوج همساز هستند، تعدیل کنید.

تمرین ۱۹.۴ توابع تحلیلی را که قسمتهای حقیقی آن توابع تمرین ۱۹.۲ و همچنین تابع  $\cos\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$  است بیابید.

### تمرینهای تکمیلی

توابع تحلیلی بیابید که قسمتهای حقیقی آن توابع زیر باشد:

$$1 - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$2 - x^3y - xy^3$$

$$3 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$4 - [\exp(x^2 - y^2)] \cos(2xy)$$

$$5 - \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 - x)^2 + y^2}$$

$$6 - \tan^{-1} \frac{2y}{1 - x^2 - y^2}$$

### ۱۹.۴ نمایش توابع همساز بوسیله سریهای تیلور

می‌توانیم قوانین A و B و C را با ترکیب جالبی از ایده‌های آنالیز حقیقی و مختلط بررسی کنیم. همزمان نتیجه مهمی بدست می‌آوریم که توابع همساز بوسیله سریهای تیلور دوگانه ارائه خواهند شد، یعنی، اگر  $u$  در گوی به مرکز  $(x_0, y_0)$  همساز باشد، آنگاه در این گوی داریم (منظور از اندیس‌ها مشتقهای جزئی هستند)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + (x - x_0) u_1 + (y - y_0) u_2 \\ &+ \frac{1}{2} [(x - x_0)^2 u_{11} + 2(x - x_0)(y - y_0) u_{12} + (y - y_0)^2 u_{22}] \\ &+ \dots \end{aligned}$$

که همه مشتقها در  $(x_0, y_0)$  محاسبه شده‌اند.

برای شروع، اگر  $u$  در همسایگی  $(x_0, y_0) = z_0$  همساز باشد، در این همسایگی یک مزدوج همساز  $v$  وجود دارد که  $f = u + iv$  در  $z_0$  تحلیلی است، و لذا در  $z_0$  با سری تیلور نمایش داده می‌شود.

برای آسان کردن فرمول،  $z_0 = 0$  می‌گیریم [در غیر این صورت فرض می‌کنیم  $g(z) = f(z + z_0)$  آنگاه

$$u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

که سری در گوی  $|z| < 2R$  همگرایی مطلق است. (ضریب ۲ برای آسان کردن فرمول‌های بعدی است). یعنی

$$\sum |c_n| |x + iy|^n = \sum |c_n| (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}}$$

که سری وقتی  $x^2 + y^2 < (2R)^2$  همگراست، بنابراین  $|t|^n$  وقتی که  $|t| < 2R$ ، همگراست، و بنابراین  $\sum |c_n| (|x| + |y|)^n$  وقتی  $|x| + |y| < 2R$ ، همگراست.

در نتیجه، توانها را با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای بسط داده و سری حاصل را چون تمام جمله‌ها نامنفی هستند مجدداً مرتب می‌کنیم، بنابراین سری  $\sum c_n (x + iy)^n$  امکان مرتب شدن مجدد به هر شکل را بعد از بسط توانها با استفاده از قضیهٔ دو جمله‌ای دارد، حتی اگر  $x$  و  $y$  را با اعداد مختلط با قدرمطلق کمتر از  $R$  جایگزین کنیم. همین مطلب در مورد  $\sum \bar{c}_n (x - iy)^n$  درست است زیرا قدرمطلق جمله‌ها در هر دو سری یکسان است.

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$f(x + iy) = u + iv = \sum \operatorname{Re} [c_n (x + iy)^n] + i \sum \operatorname{Im} [c_n (x + iy)^n]$$

توانها را بسط داده و جابجا کنید تا بسط زیر به دست آید

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n + i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mn} x^m y^n$$

که در آن  $a_{mn}$  و  $b_{mn}$  حقیقی هستند، حتی  $x$  و  $y$  می‌توانند، تا زمانی که  $|x|$  و  $|y|$  از  $R$  کمترند، مختلط باشند. می‌توانیم همین کار را برای  $g(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n (x - iy)^n$  انجام دهیم.

در این صورت می‌بینیم که  $u$  و  $v$  بوسیلهٔ سری توان دوگانه وقتی که  $|x| < R$  و  $|y| < R$  ارائه می‌شوند، و بنابراین دارای مشتقهای جزئی از تمام مراتب هستند. بعلاوه، سریهای دوگانه، سریهای تیلور  $u$  و  $v$  هستند زیرا در دو بعدی، شبیه حالت یک‌بعدی، یک تابع فقط یک بسط سری توانی حول نقطهٔ مفروض دارد. در واقع ضرایب در

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

بوسیلهٔ فرمول

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ (x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y)_{x_0, y_0}$$



تعیین می‌شوند. می‌پذیریم که، اثبات نیازمند به دانستن این است که سریهای توانی دوگانه جمله به جمله مشتق‌پذیرند.

اکنون نشان داده‌ایم که هر تابع  $u(x, y)$  که در  $|x| < R$  و  $|y| < R$  همساز باشد با یک سری توان همگرای مطلق نمایش داده می‌شود. بنابراین قضیه را در حالت «حقیقی» با بکارگیری توابع مختلط تحلیلی ثابت کردیم.

آنچه که بعداً انجام می‌دهیم شبیه به دست آوردن گوی همگرایی (بخش ۳.۲) برای سری توانی است که در ابتدا فقط یک بازه همگرایی حقیقی دارند، سپس  $x$  را با  $z$  جایگزین می‌کنیم، یا به طور دقیق‌تر، سری را به جای محور حقیقی روی ناحیه مختلط در نظر می‌گیریم. حالا از یک سری توانی حقیقی دوگانه با توانهای  $x$  و  $y$ ، همگرای مطلق در  $|x| < R$  و  $|y| < R$ ، (که اینها قدرمطلقهای حقیقی معمولی هستند) شروع می‌کنیم. اکنون اگر  $x$  و  $y$  را با اعداد مختلط  $z$  و  $w$  با قدرمطلق کمتر از  $R$  جایگزین کنیم، سری هنوز یک سری همگرای مطلق است زیرا همگرایی مطلق (البته) فقط به قدرمطلق جمله‌ها وابسته است. حالا  $u$  و  $v$  به توابعی گسترش داده شده‌اند که در همسایگی مختلط  $z$  با سری توانی دوگانه مختلط نمایش داده شده‌اند. بنابراین کاملاً بامعناست که  $u$  و  $v$  توابع مختلط باشند.

### ۱۹.۵ توجیه فرمول $f$ برحسب $u$ و $v$

اکنون می‌توانیم قوانین A و B و C بخش ۱۹.۳ را توجیه کنیم. ابتدا با قانون C که در آن  $u$  و  $v$  مزدوج همساز هستند شروع کنیم، که  $u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$ . تابع  $g$ ، که با  $g(z) = u(z, 0) + iv(z, 0)$  تعریف می‌شود، دارای سری توانی است که از  $u(z, w) + iv(z, w)$  با جایگزینی  $w = 0$ ، بدست می‌آید، بنابراین در همسایگی  $z = 0$  تحلیلی است. برای  $x$  حقیقی نزدیک صفر، داریم  $g(x) = f(x)$ . لذا  $g(z) - f(z)$  یک تابع تحلیلی با ریشه‌های غیرمنفرد است و بنابراین برابر با صفر است (بخش ۷.۷)؛ به عبارت دیگر  $f$  و  $g$  ادامه تحلیلی یکدیگرند. این چیزی است که قانون C می‌گوید.

به همان روش می‌توان قانون A را توجیه کرد. اگر  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، آنگاه بنا به معادله کوشی-ریمان داریم  $f'(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y) = u_1(x, y) - iv_2(x, y)$ . وقتی  $z$  روی محور حقیقی باشد،  $z = x$ ، و

$$f'(x) = u(x, 0) - iv_2(x, 0)$$

چون دو طرف تساوی توابع تحلیلی‌اند، نتیجه می‌شود

$$f'(z) = u_1(z, 0) - iv_2(z, 0)$$

قانون B مشکلتتر است. ابتدا فرض می‌کنیم  $u$  در صفر همساز است، بنابراین می‌توانیم بگیریم  $z_0 = 0$ . فرض کنیم  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ ، با  $f(z) = \sum c_n z^n$ ،  $g(z) = \sum \bar{c}_n z^n$  تعریف می‌کنیم. در اینصورت داریم (با  $x$  و  $y$  حقیقی)

$$f(x + iy) + g(x - iy) = \sum (c_n z^n + \bar{c}_n \bar{z}^n) = 2\operatorname{Re} f(x + iy) = 2u(x, y)$$

از بحث ۱۹.۳ می‌دانیم که دو طرف تساوی

$$2u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

وقتی  $y$  ثابت است توابع تحلیلی از  $x$  و وقتی  $x$  ثابت است توابع تحلیلی از  $y$  هستند. لذا این تساوی برای  $x$  و  $y$  مختلط برقرار است. با گرفتن  $x = \frac{z}{2}$  و  $g = \frac{\bar{z}}{2}$  داریم

$$\begin{aligned} 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{\bar{z}}{2}\right) &= f\left(\frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2}\right) + g\left(\frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2}\right) \\ &= f(z) + g(0) \end{aligned}$$

به خصوص با گرفتن  $z = 0$ ، داریم

$$u(0, 0) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}g(0)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{\bar{z}}{2}\right) - u(0, 0) &= f(z) + g(0) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}g(0) \\ &= f(z) + \frac{1}{2}[g(0) - f(0)] \end{aligned}$$

اما  $f(0) = c_0$  و  $g(0) = \bar{c}_0$ ، بنابراین  $g(0) - f(0) = \bar{c}_0 - c_0$  یک عدد موهومی محض است. این مطلبی است که قانون B می‌گوید.

تمرین ۱۹.۵ قانون B را در حالت کلی بدست آورید.

دوباره تأکید می‌کنم قبل از بکار بردن قوانین A، B یا C باید بررسی کنید که تابع  $u$  (یا توابع  $u$  و  $v$ ) واقعاً همساز است زیرا قوانین، هیچ بررسی ساختاری در این رابطه ندارند. تمرین زیر را ببینید.

تمرین ۱۹.۶ قانون B را برای  $u(x, y) = 4x^2y$  بکار برید و بررسی کنید که «جواب»،  $u$  را به عنوان قسمت حقیقی خود ندارد.

(۱) برای توضیح بیشتر این قوانین مثلاً به

E.V. Laitone, "Relation of the Conjugate Harmonic Functions to  $f(z)$ ," *Amer. Math. Monthly* 84 (1977): 281-283

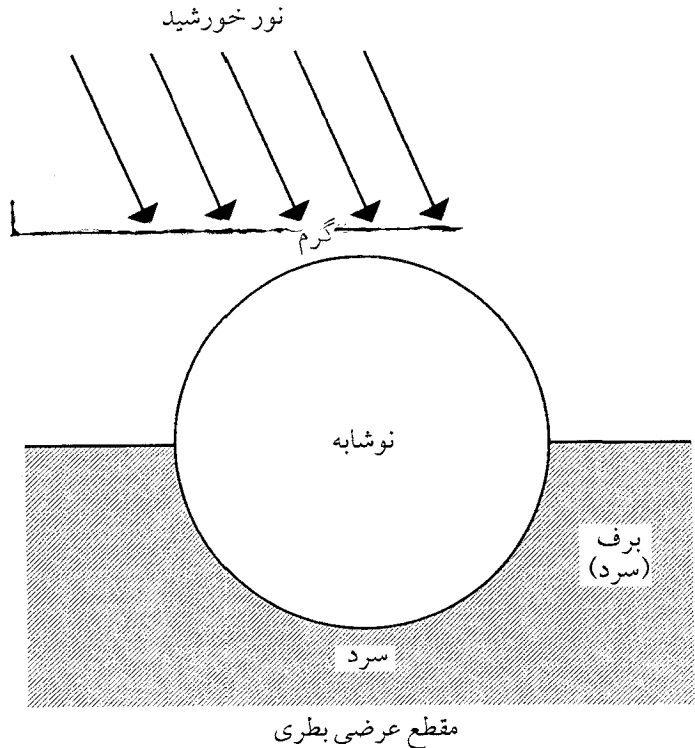
(و به مروری از این مقاله در *Math. Rev.* 55 # 10646 مراجعه کنید.) اثبات قانون B، در شکل فشرده‌تر، با استفاده از توابع تحلیلی با دو متغیر مختلط، به طور صریح در کتاب کارتان در صفحه‌های ۱۲۷-۱۲۶ ارائه شده است.

## ۲۰. توابع تحلیلی در یک گوی

### ۲۰.۱ مسایل دیریکله

اگر اساساً با معادلات دیفرانسیل عادی آشنا هستید، به یاد دارید که یکی از مسایل پایه‌ای آن نه تنها پیدا کردن یک جواب از معادله دیفرانسیل، بلکه یافتن جوابی است که در شرایط مرزی یا اولیه معینی، صدق می‌کند. غالباً برای این کار صورت کلی جوابهای معادله دیفرانسیل را پیدا می‌کنیم و بعد جواب خاص را چنان مشخص می‌کنیم که در شرایط اضافی صدق کند. برای معادلات دیفرانسیل جزئی این روش به آن خوبی کار نمی‌کند، زیرا مجموعه جوابهای کلی معمولاً خیلی بزرگ است. برای مثال فرض کنید به دنبال یک جواب معادله لاپلاس در گوی با مقادیر مرزی معین روی محیط گوی باشیم. این مسئله دیریکله برای گوی است. چون جوابهای معادله لاپلاس فقط توابع همساز هستند. روشن نیست که چطور یکی از آنها را که دارای مقادیر مرزی تعیین‌نشده هست، انتخاب کنیم. در واقع چند بخش بعد به روشهای حل چنین مسایلی اختصاص دارد.

چنان که مفصلاً در بخش ۲۳ خواهیم دید مسائل دیریکله در بسیاری از مباحث فیزیکی مطرح می‌شوند. در اینجا یک مثال خاص را بررسی می‌کنیم، تصور کنید یک بطری نوشابه در یک روز آفتابی به طور افقی در مخزن برفی قرار بگیرد. نیمه پائینی شیشه سرد و نیمه بالایی گرم خواهد بود، ما می‌خواهیم حرارت توزیع شده در نوشابه را پیدا کنیم. برای بدست آوردن یک مدل ریاضی مناسب، بطری را بعنوان یک استوانه مدور صلب بی‌پایان در نظر می‌گیریم، با همه مقاطع عرضی مشابه، بطوری که هر یک از مقاطع عرضی را بتوان انتخاب کرد. شکل ۲۰.۱ را ببینید. با این ایدآل‌سازی، مسئله به یک حالت دوبعدی تقلیل می‌یابد، بطوری که مدل ما (چنان که در فیزیک نشان داده شده است) به یافتن تابع همساز  $T$  درون گوی  $\Delta$  نیاز دارد، که ممکن است گوی واحد در نظر گرفته شود. وقتی مرز نیمه بالایی به دمای  $T_1$  و مرز نیمه پائینی به  $T_2$  رسیده باشد؛ مقادیر معقول  $T_1 = 100$  و  $T_2 = 32$  (درجه فارنهایت) هستند؛



شکل ۲۰.۱

$T$  لزوماً روی محیط  $\Delta$  همساز نیست. شرایط مرزی بعنوان حد  $T$  وقتی  $z$  به مرز  $\Delta$  از درون گوی نزدیک می‌شود در نظر گرفته می‌شود. آنچه می‌توانیم انجام دهیم این است که فرمولی برای  $T$  در نقاط درون گوی بدست آوریم و نشان دهیم که مقادیر  $T$  در نقاط درون  $\Delta$  واقعاً به مقادیر مرزی داده‌شده نزدیک می‌شوند، هرگاه  $z$  به مرز نزدیک می‌شود. خوشبختانه می‌توانیم نشان دهیم که این مطلب همواره برای مسائل دیریکله با مرزهای «معقول» و انواعی از نواحی «معقول» حداقل برای بیشتر نقاط مرزی، اتفاق می‌افتد. خصوصاً درمی‌یابیم (تمرین ۲۱.۱) که این مسئله دیریکله خاص بوسیله

$$T = T(r, \theta) = \frac{68}{\pi} \tan^{-1} \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} + 66, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

حل می‌شود.

برای  $0 < \theta < \pi$  داریم  $T \rightarrow 100$  وقتی  $r \rightarrow 1^-$ ؛ برای  $\pi < \theta < 2\pi$ ،  $T \rightarrow 32$  وقتی  $r \rightarrow 1^-$  در  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$  (در این حالت)  $T = 66$  مستقل از  $r$  است بطوری که می‌بینیم حد  $T$ ، میانگین مقادیر مرزی آن روی دو طرف نقاط  $z = \pm 1$  می‌باشد. توجه کنید که مقادیر مرزی را صرفاً با جایگزینی  $r = 1$  در فرمول  $T$  نمی‌توان بررسی کرد.

مطلب مهم این است که فقط یک جواب از یک مسئله دیریکله برای یک ناحیه محدودشده بوسیله

خم ساده بسته وجود دارد. جواب یکتا است زیرا اختلاف دو جواب تابعی همساز با مقادیر مرزی صفر است و لذا بنا به اصل ماکزیمم و می نیمم برای توابع همساز، متحد با صفر می شود (تمرین ۱۶.۲ و ۱۶.۴ را ببینید).

در نواحی غیرکراندار این مطلب لزوماً صحیح نیست.

تمرین ۲۰.۱ قسمت موهومی  $\exp(\frac{1}{z})$ ،  $v(x, y)$ ، را در نیم صفحه بالا بدست آورید (آن را در صفر برابر با صفر تعریف کنید). در این صورت  $v(x, y)$  برای  $y > 0$  همساز است و  $v(x, 0) = 0$ . لذا  $v$  در حل مسئله دیریکله در نیم صفحه بالایی با مقادیر مرزی صفر، روی محور  $x$  ها ظاهر می شود. اما صفر در نیم صفحه بالایی با مقادیر مرزی صفر نیز همساز است. نشان دهید  $\lim_{y \rightarrow 0} v(0, y) \neq 0$ .

در این تمرین، دو «جواب» منطبق نیستند زیرا یک نقطه مرزی استثنایی می تواند اصل ماکزیمم را خدشه دار کند (با بخش ۱۶.۲ مقایسه کنید).

یکتایی به طریق دیگری نیز می تواند از بین برود. مثلاً در نوار  $0 \leq y \leq 1$ :  $D$  در صفحه  $(x, y)$ ، تابع  $u(x, y)$  یک جواب مسئله دیریکله برای  $D$  با مقادیر مرزی صفر، روی  $y = 0$  و  $y = 1$  می باشد. اما  $\text{Im}(z + e^{\pi z}) = y + e^{\pi x} \sin \pi y$  نیز همینطور است. در کاربردهای فیزیکی، جواب دوم قابل قبول نیست زیرا برای  $x$  های بزرگ، خیلی بزرگ می شود. برای دیدن علت، به تعبیر فیزیکی آن توجه کنید. که جواب این مسئله توزیع حرارت حالت مانا در یک صفحه فلزی نازک پوشاننده  $D$ ، با وجوه عایق شده و یالهای  $y = 0$  و  $y = 1$  که به ترتیب دارای حرارت های  $0$  و  $1$  می باشد. این مطلب حتی برای ریاضیدانان محض نیز خوشایند نیست که تحت این شرایط، حرارت در صفحه به ازای  $y = \frac{1}{4}$  وقتی  $x \rightarrow \infty$  بسیار بزرگ شود. این مثال نشان می دهد که مسئله دیریکله برای نواحی غیرکراندار دارای جواب یکتا است تنها اگر محدودیتی روی میزان رشدی که جواب می تواند داشته باشد وقتی  $z \rightarrow \infty$  گذاشته شود. در بخش ۳۳ نشان خواهیم داد که در مسئله خاص ما کافی خواهد بود که جواب در  $D$  کراندار باشد.

اساساً دو حالت خاص مسئله دیریکله را بررسی خواهیم کرد: مسئله ای با مقادیر مرزی کلی برای یک گوی و مسئله ای وقتی که مقادیر مرزی قطعه قطعه ثابت هستند. (بخش ۲۳.۱ را ببینید).

## ۲۰.۲ نمایش انتگرالی برای توابع همساز در یک گوی

می خواهیم یک نمایش، مشابه فرمول انتگرال کوشی برای تابعی که درون یک گوی همساز است را برحسب مقادیرش روی پیرامون آن پیدا کنیم. این مطلب را نباید با مسئله دیریکله که هدف آن پیدا کردن تابعی با مقادیر مرزی داده شده است، وقتی که نمی دانیم چنین تابعی وجود دارد، اشتباه کنیم. هرچند یافتن فرمول نمایش، اولین گام به سمت حل مسئله دیریکله است.

ابتدا گوی واحد  $|z| \leq 1$  را در نظر می‌گیریم و فرمول انتگرال کوشی را برای تابع  $f$  که در گوی بسته تحلیلی است می‌نویسیم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{w - z}, \quad C: |w| = 1$$

صرف گرفتن قسمتهای حقیقی دو طرف، به نمایش  $\operatorname{Re} f(z)$  بر حسب  $\operatorname{Re} f(w)$  منتهی نمی‌شود زیرا هسته در فرمول کوشی حقیقی نیست. اما چون نقطه  $\frac{1}{z}$  قرینه  $z$  نسبت به دایره واحد (بعد از تمرین ۲.۶ تعریف شده) بیرون گوی است، همچنین داریم:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\bar{z} f(w)}{1 - w\bar{z}} dw$$

با جمع کردن دو انتگرال بدست می‌آوریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{1}{w - z} + \frac{\bar{z}}{1 - w\bar{z}} \right) f(w) dw$$

چون  $|w| = 1$ ،  $\bar{w} = \frac{1}{w}$ ،  $w = e^{i\theta}$  و داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{(w - z)(\bar{w} - \bar{z})} f(w) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{w + z}{w - z} \right) f(w) d\varphi \end{aligned}$$

با قرار دادن  $z = re^{i\theta}$  در انتگرال اخیر داریم

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$$

این فرمول انتگرال پواسون برای  $f(z)$  است که تاکنون تنها وقتی  $f$  در درون گوی بسته تحلیلی باشد در نظر گرفته شده است. بعداً خواهیم دید که این فرمول برای وقتی که  $f$  در گوی باز تحلیلی و در گوی بسته پیوسته باشد برقرار است.

چون «هسته»  $P(r, \theta - \varphi)$  داده شده با

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)} = 2\pi P(r, \theta - \varphi)$$

حقیقی است، اکنون می‌توانیم قسمتهای حقیقی دو طرف را در فرمول پواسون گرفته و آن را برای نمایش قسمت حقیقی  $f$  بر حسب مقادیر مرزی اش  $u(1, \theta)$  بکار ببریم.

چون هر تابع همساز در گوی واحد قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است، بنابراین فرمولی را بدست آورده‌ایم که مقادیر تابع همساز در گوی واحد را که مقادیرش داده شده در روی مرز نشان می‌دهد.

تمرین ۲۰.۲ فرمول پواسون را برای گوی  $|z| < R$  بنویسید.

### ۲۰.۳ مسئلهٔ دیریکله برای گوی واحد

اکنون فرض می‌کنیم مجموعه‌ای از مقادیر مرزی  $\psi(\theta)$  را داریم. آیا فرمول پواسون تابعی مانند  $V$  را که در گوی باز همساز است و وقتی  $z$  به مرز نزدیک می‌شود به مقادیر مرزی مفروض نزدیک شود، ارائه می‌دهد؟ (به خاطر داشته باشید که فرمول انتگرال کوشی همانطور که در بخش ۷.۳ دیدیم، چنین خاصیتی ندارد). در وهلهٔ اول باید فرض کنیم  $\psi$  دارای تناوب  $2\pi$  است و انتگرال در فرمول پواسون وجود دارد.

به چند واقعیت بدیهی دیگر نیز نیاز داریم.

۱- توابع ثابت همساز هستند و بنابراین بوسیلهٔ فرمول پواسون نمایش داده می‌شوند.

$$2- P(r, \theta) > 0$$

$$3- \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta) d\theta = 1 \quad \text{که این از (۱) نتیجه می‌شود.}$$

۴- عملگر  $L$  که  $\psi$  را به  $U$  می‌برد خطی و «مثبت» است؛ یعنی، توابع غیرمنفی را به توابع غیرمنفی می‌برد و بنابراین حافظ نامساویها است: اگر  $\psi_1 \geq \psi_2$  آنگاه  $L[\psi_1] \geq L[\psi_2]$ .

اکنون فرض کنید

$$U(z) = U(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) P(r, \theta - \varphi) d\varphi$$

اولاً  $U$  در گوی  $|z| < 1$  همساز است. این را می‌توانیم به آسانی با نوشتن روابط زیر ببینیم.

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \operatorname{Re} \frac{w+z}{w-z} d\varphi \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{w+z}{w-z} \psi(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

با توجه به دلایل بخش ۷.۷، انتگرال، یک تابع تحلیلی را نمایش می‌دهد و بنابراین قسمت حقیقی آن  $U$  همساز است. در حالت کلی‌تر

$$\int_a^b P(r, \theta - \varphi) \psi(\varphi) d\varphi$$

که در آن  $(a, b)$  کاملاً در داخل  $(-\pi, \pi)$  است، هر جایی بیرون کمان  $a < \theta < b$  از محیط دایره واحد، یک تابع همساز را نمایش می‌دهد.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که  $\psi(\theta) \rightarrow U(z) \rightarrow e^{i\theta}$  وقتی  $z \rightarrow$  از درون گوی واحد، به شرطی که  $\psi$  در  $\theta$  پیوسته باشد. اگر این کار را انجام دهیم یک جواب مسئله دیریکله برای تابع قطعه قطعه پیوسته مرزی  $\psi$  داریم. نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که  $U(z)$  در نقاط ناپیوستگی  $\psi$  به  $\psi(\theta)$  میل کند، هرچند، اگر  $\psi$  کراندار باشد، آنگاه  $U$  کراندار است و می‌توانیم نشان دهیم که جواب دیگری برای این مسئله دیریکله وجود ندارد. این واقعیت که

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}[\psi(\theta_+) + \psi(\theta_-)]$$

وقتی حد سمت راست موجود باشد در ارتباط با سریهای فوریه مورد توجه است، اما ربط چندانی به مسائل دیریکله ندارد و ما نمی‌خواهیم به آن پردازیم.

برای بررسی همگرایی  $U(z)$  در  $\theta_0$  نقطه پیوستگی  $\psi$ ، با نوشتن روابط زیر شروع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} U(z) - \psi(\theta_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \varphi) [\psi(\varphi) - \psi(\theta_0)] d\varphi \\ &= \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} P(r, \theta - \varphi) [\psi(\varphi) - \psi(\theta_0)] d\varphi + \int_{\theta_0 + \varepsilon}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\theta_0 - \varepsilon} \\ &= I_1 + I_r + I_3 \end{aligned}$$

چنانکه در بالا دیدیم انتگرالهای  $I_2$  و  $I_3$  توابع همساز روی کمان  $(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$  از  $|z| = 1$  را نشان می‌دهند و حد آنها وقتی  $|z| \rightarrow 1$  روی آن کمان برابر با صفر هستند، زیرا، همانطور که از فرمول صریح  $P(r, \theta - \varphi)$  می‌بینیم، هسته پواسون وقتی  $r \rightarrow 1$  روی هر کمانی که  $\cos(\theta - \varphi)$  کراندار و دور از ۱ است، به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند.

باقی می‌ماند نشان دهیم که  $I_1 \rightarrow 0$  وقتی  $e^{i\theta} \rightarrow z$ . برای هر  $\delta$  مثبت داده شده، می‌توانستیم  $\varepsilon$  را چنان انتخاب کنیم که  $|\psi(\varphi) - \psi(\theta_0)| < \delta$  وقتی  $|\varphi - \theta_0| < \varepsilon$ . آنگاه واقعیت‌های بدیهی ۲ و ۳ بالا را داریم.

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} P(r, \theta - \varphi) [\psi(\varphi) - \psi(\theta_0)] d\varphi \right| \\ &\leq \delta \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} P(r, \theta - \varphi) d\varphi \leq \delta \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \varphi) d\varphi = \delta \end{aligned}$$

چون  $\delta$  دلخواه است، نتیجه می‌شود که  $I_1 \rightarrow 0$ .

بنابراین جواب یک مسئله دیریکله برای مقادیر مرزی قطعه قطعه پیوسته را بدست آورده‌ایم. در واقع این تنها جواب کراندار است. چون در بخش ۳۳.۱ نشان می‌دهیم که تنها یک تابع همساز کراندار با مقادیر مرزی معین شده بجز در تعداد با پایان نقطه وجود دارد. (جواب غیرکراندار از نظر فیزیکی مطلوب نیست).



اکنون می‌توانیم به انتهای بخش ۲۰.۲ بازگردیم و ببینیم که نمایش پواسون برای توابعی که در  $|z| < 1$  همساز و در  $|z| \leq 1$  پیوسته هستند نتیجه می‌شود. فرض کنیم  $u$  چنین تابعی است، تابع  $U$  را با فرمول پواسون و مقادیر مرزی  $u$  می‌سازیم. در این صورت  $U - u$  در گوی باز همساز، در گوی بسته پیوسته با مقادیر مرزی صفر است؛ بنابراین طبق اصل ماکزیمم و مینیمم برای توابع همساز  $U - u \equiv 0$ .

اکنون مسئله دیریکله برای گوی در وضعیت رضایت بخش‌تری است، زیرا انتگرال پواسون به آسانی در هر گوی، در هر اندازه‌ای (تمرین ۲۰.۲) و در هر موقعیتی قابل تطبیق است. برای نواحی دیگر، هنوز مسیری شبیه فرمول پواسون نداریم هرچند ممکن است که گمان کنید که فرمولی باید وجود داشته باشد. این حدس که مشابهی وجود دارد، در واقع نتیجه نسبتاً عمیقی است که باید آن را تا وقتی که درباره توابع همدیس به تفصیل بحث می‌کنیم به تعویق بیندازیم. بهر حال، استفاده از انتگرال پواسون همیشه بهترین روش برای حل مسئله دیریکله خاص نیست. چنان که در بخش ۲۴ خواهیم دید، بسیاری از کاربردهای توابع همساز، مستلزم مسائل دیریکله با مقادیر مرزی قطعه قطعه ثابت هستند که گاهی می‌توان آنها را بطور کاملاً صریح حل کرد.

## ۲۰.۴ نقاط تکین برداشتنی برای توابع همساز

اگر یک تابع تحلیلی در همسایگی یک نقطه تکین منفرد کراندار باشد، این نقطه تکین برداشتنی است (بخش ۸.۳). قضیه مشابهی برای توابع همساز می‌گوید که:

اگر  $u$  تابعی همساز و در همسایگی محذوف نقطه  $z$  کراندار باشد، آنگاه  $u$  را می‌توان در  $z$  بصورت تابعی همساز تعریف کرد (یعنی، در همسایگی  $z$ ).

اگر فرض کنیم  $z_0 = z$ ، کلیت مسئله از بین نمی‌رود.

انتگرال پواسون برای  $|z| < r$  با مقادیر  $u$  روی  $|z| = r$  تابع  $h$  را که روی  $|z| < r$  همساز است، و روی  $|z| = r$ ،  $h = u$  فراهم می‌آورد. اگر بتوانیم نشان دهیم برای  $|z| \leq r$ ،  $u - h \leq 0$ ، و همچنین برای  $0 < |z| \leq r$ ،  $h - u \leq 0$ ، اگر تعریف کنیم  $u(0) = h(0)$ ، نتیجه می‌شود  $u = h$ .

اگر  $\psi$  را یکی از  $u - h$  یا  $h - u$  بگیریم و تعریف کنیم

$$\psi_\varepsilon(z) = \psi(z) + \varepsilon \log \left( \frac{|z|}{r} \right), \quad 0 < |z| \leq r, \quad \varepsilon > 0$$

در اینصورت  $\psi_\varepsilon$  برای  $0 < |z| < r$  همساز است و  $\psi_\varepsilon(z) = 0$  برای  $|z| = r$ ، و  $\lim_{z \rightarrow 0} \sup \psi_\varepsilon(z) < 0$  زیرا  $\psi_\varepsilon$  کراندار است. در اینصورت  $\psi_\varepsilon(z) \leq 0$  در گوی محذوف

$\delta < |z| \leq r$  . چون  $\psi_\varepsilon$  در طوقه  $\delta \leq |z| \leq r$  همساز و روی مرز طوقه غیرمثبت است لذا در طوقه داریم  $\psi_\varepsilon(z) \leq 0$  . چون  $\delta$  دلخواه است، برای  $\delta < |z| \leq r$  داریم  $\psi_\varepsilon(z) \leq 0$  . با فرض  $\varepsilon \rightarrow 0$  برای  $\delta < |z| \leq r$  داریم  $\psi(z) \leq 0$  . بنابراین برای  $\delta < |z| \leq r$  داریم  $h - u \leq 0$  و  $u - h \leq 0$  ، یعنی، برای  $\delta < |z| \leq r$  ،  $u$  و  $h$  با هم مساویند. اگر  $u(0) = h(0)$  آنگاه برای  $|z| \leq r$  داریم  $u \equiv h$  .

## ۲۰.۵ مشخصه ذاتی توابع همساز

اگر  $u(z)$  در  $z_0$  همساز باشد، آنگاه  $u$  قسمت حقیقی تابع تحلیلی  $f$  در همسایگی  $z_0$  است. در بخش ۱۶.۱ با استفاده از فرمول کوشی دیدیم که برای  $r$  کوچک داریم

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

بنابراین

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

که این یعنی:

مقدار یک تابع همساز در یک نقطه متوسط مقادیر آن روی هر دایره به اندازه کافی کوچک به مرکز نقطه مزبور می‌باشد.

این خاصیت متوسط برای توابع همساز است. مانند بخش ۱۶.۱ نتیجه می‌شود که یک تابع با خاصیت متوسط نه می‌تواند ماکزیمم یا مینیمم مطلق و نه هر ماکزیمم یا مینیمم دیگری داشته باشد، مگر تابع ثابت باشد.

اکنون می‌توانیم نشان دهیم که هر تابع پیوسته مانند  $f$  که دارای خاصیت متوسط است همساز می‌باشد، بدون این که هیچ فرضی در رابطه با مشتقهای جزئی  $f$  داشته باشیم. برای نشان دادن این مطلب، با استفاده از انتگرال پواسون، تابع همساز  $g$  را که در دایره  $|z - z_0| = r$  همان مقادیر  $f$  را می‌گیرد بسازید. تفاوت  $g - f$  نیز برای همان  $r$  دارای خاصیت متوسط است، و چون روی دایره برابر با صفر است در درون صفر می‌شود (بنا به اصل ماکزیمم و مینیمم برای این گونه توابع). در نتیجه  $f$  در یک همسایگی  $z_0$  و لذا در همه جا همساز است، چون  $z_0$  دلخواه است. بنابراین در واقع  $f$  دارای مشتق از تمام مراتب بوده و در معادله لاپلاس صدق می‌کند.

این بدین معناست که می‌توان تابعی همساز تعریف کرد فقط اگر پیوسته و دارای خاصیت متوسط باشد. هرچند ترجیح می‌دهیم که بتوانیم بگوئیم  $f$  همساز است تنها اگر پیوسته و دارای خاصیت

مشتق‌پذیری به اندازه کافی باشد بطوری که  $f_{11} + f_{22}$  تعریف و برابر با صفر شود. برای اثبات، تابع همساز  $g$  را که دارای مقادیر برابر با  $f$  روی دایره  $C$  به مرکز  $z_0$  است می‌سازیم، و فرض می‌کنیم  $h = g - f + p(x - x_0)^2$  که  $p$  عدد مثبت کوچکی است. اگر  $h$  یک ماکزیمم داشته باشد، مشتق جزئی مرتبه دوم آن در نقطه ماکزیمم منفی یا صفر خواهند بود، بنابراین در آن نقطه  $h_{11} + h_{22} \leq 0$  است. اما  $h_{11} + h_{22} = g_{11} + g_{22} - f_{11} - f_{22} + 2p = 2p > 0$ . در اینصورت  $h$  دارای ماکزیمم (در ناحیه مورد نظر) نیست. نتیجه می‌گیریم که روی محیط گوهی به مرکز  $z_0$  با شعاع  $r$ ،  $g - f = 0$  و داریم  $g(z) - f(z) + p(x - x_0)^2 \leq pr^2$ . اکنون اگر  $p \rightarrow 0$ ، بدست می‌آوریم  $g - f \leq 0$ . به همین طریق، می‌توانیم نشان دهیم که  $g - f \leq 0$ . بنابراین  $f \equiv g$  و  $f$  همساز است.

این گزاره که یک تابع با خاصیت متوسط، همساز است، می‌تواند به روشهای مختلف ضعیف شود. مثلاً، اگر  $D$  ناحیه‌ای باشد که مسئله دیریکله در آن را بتوان حل کرد، یک تابع حقیقی که در  $\bar{D}$  پیوسته باشد همساز است اگر صرفاً دارای خاصیت متوسط ضعیفتر باشد که هر نقطه  $D$  مرکز دایره‌ای در  $\bar{D}$  بوده و  $f$  در آن نقطه دارای خاصیت متوسط است.

## ۲۰.۶ اصل انعکاس شوآرتس برای توابع همساز

نظیر بخش ۱۷.۳، فرض کنیم  $D$  ناحیه همبند ساده در نیمه بالایی صفحه است، و  $\partial D$  محور حقیقی را در پاره‌خط  $L$  قطع کند. همچنین فرض کنیم  $\beta$  یک تابع همساز در  $D$  است و  $\beta(z) \rightarrow 0$  وقتی  $z \rightarrow L$ . اگر  $D^*$  انعکاس  $D$  نسبت به محور حقیقی باشد و اگر تعریف کنیم  $v(z) = \beta(z)$  برای  $z \in D$ ، آنگاه  $v(z) = -\beta(\bar{z})$  برای  $z \in D^*$ ، و  $v(z) = 0$  برای  $z \in L$ ،  $v$  در  $S = D \cup D^* \cup L$  همساز است.

چون  $v$  در  $D$  و  $D^*$  همساز است، فقط باید نشان دهیم  $v$  روی  $L$  یعنی روی همسایگی هر نقطه از  $L$ ، همساز است. گوی کوچک  $\Delta$  به مرکز نقطه  $P$  روی  $L$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $\int_{\partial\Delta} v$  برابر با مجموع انتگرالها حول نیمه بالایی و پائینی  $\Delta$  است. انتگرالهای رفت و برگشتی در امتداد قطر  $\Delta$  حذف می‌شوند. مقادیر  $v$  روی کمان بالایی و پائینی  $\Delta$ ، قرینه یکدیگرند. لذا  $\int_{\partial\Delta} v = 0 = v(P)$ . بنابراین  $v$  روی گویهایی که مرکزشان روی  $L$  است، دارای خاصیت متوسط بوده و همچنین این خاصیت روی گویهای کوچکی به مراکز دیگر نقاط روی  $D$  وجود دارد، بنابراین، با آنچه که اکنون ثابت کردیم،  $v$  در  $S$  همساز است.

چنانکه در بخش ۱۷.۳ گفته شد، در اصل انعکاس شوآرتس ممکن است به جای  $f$  فقط  $\text{Im } f$  را روی  $D \cup L$  پیوسته بگیریم، بنابراین صورت قویتری از اصل شوآرتس داریم. (این مطلب در بخش

۲۸.۵ مورد نیاز خواهد بود). در واقع، فرض کنیم  $\beta = \text{Im } f$  و  $\beta$  را مثل بالا به  $S$  تعمیم می‌دهیم. در اینصورت  $v$  در ناحیهٔ قرینه دارای تابع مزدوج همساز  $-u$ ، صرف‌نظر از یک ثابت جمعی، می‌باشد. نقطهٔ  $z_0$  را در  $D$  و مقدار ثابت را طوری انتخاب کنید که  $u = \text{Re } [f(z_0)]$ . آنگاه در سراسر  $S$ ،  
 $u = \text{Re } f(z)$

### یادداشتها:

(۱) این مرحله ظاهراً بدون انگیزه بنظر می‌آید، در بخش ۲۶.۵ دلیل آن آشکار خواهد شد.

(۲) برای بحث و بیان دقیقتر به

R.B. Burckel "A Strong Converse to Gauss's Mean-Value Theorem",  
*Amer. Math. Monthly* 87 (1980): 814-820.

مراجعه کنید.

## ۲.۱. توابع همساز و سریهای فوریه

### ۲۱.۱ بسط سری هسته پواسون

این بخش گریزی (از بحث اصلی) است. اگر شما از قبل مطالبی دربارهٔ سریهای فوریه می‌دانید، این بخش به شما نشان خواهد داد چگونه سری‌های فوریه به توابع همساز مربوطند، اگر مطلب چندانی دربارهٔ سری‌های فوریه نمی‌دانید اکنون می‌آموزید که آنها چه هستند و چگونه مورد استفاده قرار می‌گیرند تا توابع همساز محاسبه شوند. انتگرال پواسون یک فرمول جذاب است، اما معمولاً جمع کردن سری‌های عددی آسانتر از محاسبهٔ انتگرالها است، و ضمناً می‌توانیم روش دیگری (علاوه بر روشهای بخش ۱۹) برای یافتن مزدوج همساز یک تابع همساز بیاموزیم.

با بسط هستهٔ پواسون به توانهای  $r$  شروع می‌کنیم. این کار از راههایی که من می‌دانم ساده نیست. آسانترین روش اینست که از نتیجه شروع کنیم و به عقب برگردیم. اما با روش زیر بدون بکارگیری مهارت زیاد فرمول بدست می‌آید.

اکنون با صورت اصلی هسته پواسون در بخش ۲۰.۲ شروع می‌کنیم، که  $w = e^{i\varphi}$  و  $\varphi = 0$ ،

یعنی

$$2\pi P(r, \theta) = \frac{1 - |z|^2}{(1 - z)(1 - \bar{z})} = \frac{1 - z\bar{z}}{(1 - z)(1 - \bar{z})}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} 2\pi P(r, \theta) - 1 &= \frac{1 - z\bar{z} - (1 - z - \bar{z} + z\bar{z})}{(1 - z)(1 - \bar{z})} \\ &= \frac{z(1 - \bar{z}) + \bar{z}(1 - z)}{(1 - z)(1 - \bar{z})} \\ &= \frac{z}{1 - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \end{aligned}$$

بنابراین با  $z = re^{i\theta}$  داریم

$$\begin{aligned} 2\pi P(r, \theta) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \end{aligned}$$

آنگاه انتگرال پواسون تابع انتگرال پذیر  $\psi$  را می توانیم به صورت

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$$

نوشت. هرگاه  $0 < r < 1$  می توانیم از سری جمله به جمله انتگرال بگیریم زیرا سری  $\sum r^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$  به واسطه عوامل  $r^{|n|}$ ، روی  $(-\pi, \pi)$  همگرای یکنواخت است. در نتیجه انتگرال پواسون  $\psi$  را می توانیم به صورت

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi$$

ارائه دهیم. در اینجا انتگرالهای

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

مستقل از  $r$  و  $\theta$  هستند، بنابراین تابع همساز با مقادیر مرزی  $\psi(0)$  (در هر نقطه پیوستگی  $\psi$ ) به صورت

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

نوشته می شود که در آن ضرایب  $c_n$  (ضرایب فوریه) بوسیله فرمول انتگرال بالا بدست می آیند. اگر (بطور صوری) قرار دهیم  $r = 1$ ، سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

را بدست می‌آوریم.

این سری ممکن است همگرا نباشد، اما حتماً حداقل در نقاط پیوستگی  $\psi$  جمع‌پذیر آبل به  $\psi(\theta)$  است (بخش ۱۸.۲). این سری فوری  $\psi$  است. معمولاً می‌نویسیم

$$\psi(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

که در آن نماد « $\sim$ » (بخوانید «متناظر با»، اغلب «twiddle» تلفظ می‌شود) نشان می‌دهد که سری خواه همگرا باشد یا نباشد، دارای ضرایبی است که با فرمول انتگرال زیر تعریف می‌شود

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

به یاد داشته باشید که سری  $\sum c_n e^{in\theta}$  یک سری فوری است تنها اگر ضرایب آن به طریق خاصی تعریف شوند. در غیر این صورت تنها یک سری مثلثاتی است.

سری فوری اغلب برحسب «سینوس و کسینوس» نوشته می‌شود.

$$\psi(\theta) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

برای این که سری فوری مورد نظر را به این صورت بنویسیم، تعریف می‌کنیم

$$\varphi_c(\theta) = \frac{1}{2} [\psi(\theta) + \psi(-\theta)], \quad \varphi_s(\theta) = \frac{1}{2} [\psi(\theta) - \psi(-\theta)]$$

توجه کنید که  $\psi_c$  زوج و  $\psi_s$  فرد است و  $\psi = \psi_c + \psi_s$ . بنابراین

$$\begin{aligned} \psi_c(\theta) &\sim \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos n\theta \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_s(\theta) &\sim \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} i(c_n - c_{-n}) \sin n\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \end{aligned}$$

و که در آن

$$\begin{aligned} a_n = c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) (e^{-in\theta} + e^{in\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi)(e^{-in\varphi} - e^{in\varphi}) d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) \sin n\varphi d\varphi, \quad n \geq 1$$

می‌نویسیم  $c_0 = \frac{a_0}{2}$  لذا  $a_0$  مشابه فرمول انتگرال  $a_n$  به ازای  $n = 0$  تعریف می‌شود. توجیه این محاسبات صوری بدیهی نیست، اما ما قصد نداریم هیچ استفاده‌ای از صورت سینوس و کسینوس داشته باشیم.

اکنون به جای نوشتن انتگرال پواسون تابع  $\psi$ ، می‌توانیم همان تابع همساز را با محاسبه ضرایب  $c_n$  (یا  $a_n$  و  $b_n$ ) به دست آوریم و با نوشتن سری فوریه  $\psi$  جواب مسئلهٔ دیریکله با مقادیر مرزی  $\psi(\theta)$  را بدست آوریم.

تمرین ۲۱.۱ فرض کنید  $\psi(\theta) = 0$  برای  $0 < \theta < \pi$  و  $\psi(\theta) = 1$  برای  $\pi < \theta < 2\pi$ . یک سری برای تابع  $U(r, \theta)$  بنویسید که در گوی واحد با این مقادیر مرزی<sup>۱</sup> همساز باشد. با استفاده از این سری مقدار عددی  $u(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4})$  را محاسبه کنید.

تمرین ۲۱.۲ یک فرمول انتگرال برای مجموع جزئی سری فوریه بدست آورید (با تمرین ۴.۱۷ مقایسه کنید).

تمرین ۲۱.۳ اگر یک تابع همساز بوسیلهٔ سری

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

برای  $|z| < 1$  نمایش داده شود، ثابت کنید تابع مزدوج همساز با سری

$$-i \sum (\operatorname{sgn} n) c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

داده می‌شود (معادلات کوشی-ریمان را در مختصات قطبی بکار ببرید - تمرین ۲.۳).

این سؤال که آیا سری فوریه واقعاً به تابعی که ما بدست آورده‌ایم همگرا است مطلبی است که ما را از بحثمان خیلی دور می‌کند. اما در اینجا حقایقی قابل طرح‌اند.<sup>۲</sup> سری فوریه  $\psi$  تقریباً برای همهٔ  $x$  ها به  $\psi(x)$  همگرا است اگر  $|\psi|^2$  انتگرال‌پذیر باشد و بخصوص، اگر  $\psi$  پیوسته باشد؛ اما لزوماً آن همه‌جا همگرا نیست. اگر  $|\psi|$  تنها انتگرال‌پذیر باشد، سری فوریه ممکن است در هیچ جا همگرا نباشد. سری فوریه یک تابع انتگرال‌پذیر، نه تنها در نقاط پیوستگی جمع‌پذیر آبل است بلکه حتی  $(c, 1)$  جمع‌پذیر، به مقادیر تابع است. اگر  $\psi$  دارای تغییرات کراندار باشد، مثلاً اگر نمودار  $\psi$  از تعداد با پایان قطعه یکنوای

کراندار تشکیل شده باشد («شرایط دیریکله»)، سری همه جا با مجموع  $\frac{1}{4}[\psi(\theta_+) + \psi(\theta_-)]$  همگرا است.

### تمرینهای تکمیلی

تمرینهای زیر مقادیر مرزی  $\psi(\theta)$  را برای مسائل دیریکله در گوی واحد می‌دهد. برای این مسائل سری جوابها را بنویسید.

$$\begin{aligned} ۱) \quad \psi(\theta) &= 0, & -\pi < \theta < 0 \\ &= 1, & 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ &= 0, & \frac{\pi}{4} < \theta < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad \psi(\theta) &= 0, & -\pi < \theta < 0 \\ &= \theta, & 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

$$۳) \quad \psi(\theta) = \sin \theta, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad \psi(\theta) &= 0, & -\pi < \theta < 0 \\ &= \sin \theta, & 0 < \theta < \pi \end{aligned}$$

$$۵) \quad \psi(\theta) = e^{iw\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi \quad (w \text{ عدد صحیح نیست})$$

$$۶) \quad \psi(\theta) = |\theta|, \quad -\pi < \theta < \pi$$

$$۷) \quad \psi(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad 0 < \theta < \pi \quad (\varphi \text{ روی } (-\pi, \pi) \text{ فرد باشد.})$$

### ۲۱.۲ سری فوریه از معادله لاپلاس

جالب است که ببینیم چگونه سری فوریه برای جواب یک مسئله دیریکله برای یک گوی را می‌توان مستقیماً از معادله لاپلاس بدون انتگرال پواسون بدست آورد. می‌خواهیم  $u_{11} + u_{22} = 0$  را حل کنیم، در مختصات قطبی، این معادله به صورت

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

می‌باشد. جوابی را می‌خواهیم که در شرط مرزی  $u(1, \theta) = \psi(\theta)$  صدق کند. از یک ایده غیربديهی شروع می‌کنیم و سعی می‌کنیم جوابهایی از نوع  $R(r)\Theta(\theta)$  را که در معادله لاپلاس صدق می‌کنند اما لزوماً در شرایط مرزی صادق نیستند کنار هم قرار دهیم. یک جواب از این نوع باید در

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) \Theta + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

صدق کند. بنابراین

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$



چون سمت چپ فقط به  $r$  و سمت راست فقط به  $\theta$  وابسته است هر دو طرف باید ثابت باشند یعنی

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = k^2 = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

مزبور، جواب باید تابعی (از  $\theta$ ) با تناوب  $2\pi$  باشد،  $k$  باید عدد صحیح شود (اگر ثابتی که با  $k^2$  نمایش می‌دهیم، منفی باشد  $\Theta$  تناوبی نخواهد بود).

اکنون  $R$  در

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = k^2 R$$

صدق می‌کند و با کمی تأمل  $R = r^k$  به عنوان یک جواب است. چون جواب باید در صفر با پایان باشد بگیرد  $k \geq 0$ . بنابراین درمی‌یابیم که  $r^k e^{\pm ik\theta}$ ،  $k = 0, 1, 2, \dots$ ، جوابهای قابل قبول از معادله لاپلاس هستند. چون معادله خطی است، هر ترکیب خطی از این جوابها، جواب است و این معقول بنظر می‌رسد که یک ترکیب خطی بی‌پایان

$$u(r, \theta) = c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{ik\theta}$$

یک جواب باشد. اگر مقادیر مرزی  $\psi(\theta)$  را وقتی  $r \rightarrow 1$  باید داشته باشیم، آنگاه (حداقل به صورت صوری) لازم است

$$\psi(\theta) = c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$$

اکنون چگونه ضرایب  $c_n$  را پیدا می‌کنیم؟ توجه کنید که توابع  $e^{ik\theta}$  بر یکدیگر عمودند یعنی

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} e^{-il\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 2\pi & k = l \end{cases}$$

بنابراین (مجدداً به طور صوری) اگر سری برای  $\psi(\theta)$  در  $e^{-in\theta}$  ضرب و انتگرال‌گیری کنیم بدست می‌آوریم

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta) e^{-in\theta} d\theta = c_n$$

و بنابراین

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

با این ضرایب  $c_n$ .

با این روش، اکنون یک جواب پیشنهادی برای مسئله دیریکله به صورت یک سری بی‌پایان داریم؛ تنها باید بررسی کنیم آیا این واقعاً یک جواب است. در مورد همگرایی در درون گوی واحد به دلیل عوامل  $r^n$  مشکلی نداریم. قسمت مشکل این است که نشان دهیم جمع سری در مقادیر مرزی نیز همگرا است. این روش مثالی از روش جدایی متغیرها است، که کاربردهای زیادی در دیگر مسائل مقدار مرزی در حالت دوبعدی یا بیشتر دارد، که در آنجا روشهای آنالیز مختلط همیشه در دسترس نیستند.

تمرین ۲۱.۴ مسئله دیریکله را برای طوقه‌ای به مرکز صفر و شعاع داخلی  $l$  و شعاع خارجی  $\sigma$  حل کنید. باید جوابهای

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) = k^2 R$$

متناظر با  $k \leq 0$  را اضافه کنید که در بالا به دلیل این که در صفر بیکران بودند، در نظر گرفته نشده‌اند. این جوابها نه تنها توابع  $r^k$ ، به ازای  $k < 0$ ، بلکه  $\ln r$  نیز می‌باشند.

### تمرینهای تکمیلی

سری‌هایی برای جوابهای مسائل دیریکله زیر در طوقه  $1 \leq |z| \leq 2$  بنویسید. (تمرین ۲۱.۴ را ببینید).

۱- برای  $r = 2$  و  $\psi(\theta) = \cos 2\theta$ ، برای  $r = 1$ ،  $\psi(\theta) = \sin \theta$ .

۲- برای  $r = 2$  و  $\psi(\theta) = 1$  که  $0 < \theta < \pi$ ؛  $\pi < \theta < 2\pi$ ، برای  $r = 1$ ،  $\psi(\theta) = 0$ .

۳- برای  $r = 2$  و  $\psi(\theta)$  مانند تمرین تکمیلی ۲؛ برای  $r = 1$  و  $\psi(\theta) = 0$  به ازای  $0 < \theta < \pi$  و  $\varphi(\theta) = 1$  به ازای  $\pi < \theta < 2\pi$ .

۴- برای  $r = 2$ ،  $\psi(\theta) = |\theta|$ ، که  $-\pi < \theta < \pi$ ، برای  $r = 1$ ،  $\psi(\theta) = 100$ .

### یادداشتها:

(۱) سری را می‌توان به صورت دقیق جمع زد، برای روشی دیگر از حل همان مسئله که مستقیماً به صورت دقیق منتهی می‌شود، تمرین ۲۴.۲ را ببینید.

(۲) اشاره به مدت زمانی که این پیشرفت طول کشیده است جالب است. آزمون دیریکله برای همگرایی سری‌های فوریه به سال ۱۸۲۹ برمی‌گردد. قضیه فی‌جرز روی جمع‌پذیری  $(c, 1)$  تا ۱۹۰۴ ظاهر نشد، قضیه کارلسون درباره همگرایی سری فوریه توابعی که مجذور انتگرال‌پذیر دارند در سال

۱۹۶۶ ارائه شد. کولر موگرود اولین بار ساختمان سری فوریه‌ای را که همه جا واگرا بود در سال ۱۹۲۶ ارائه داد. آزمون «تغییرات کراندار» البته می‌بایستی تا معرفی مفهوم تغییرات کراندار که ظاهراً بوسیلهٔ جوردن در ۱۸۹۳ ارائه شده است، به تعویق بیفتد.

## ۲۲. نگاشتهای هم‌مدیس

### ۲۲.۱ توابع تحلیلی بعنوان نگاشتهای هم‌مدیس

برای دستیابی به مفاهیم پیشرفته‌تر در مسائل دیریکله (و به دلایل دیگر)، باید توابع تحلیلی  $w = f(z)$  را به صورت نگاشتهایی از ناحیهٔ  $D$  در صفحهٔ  $z$  به ناحیهٔ  $\Delta$  در صفحهٔ  $w$  مورد بحث قرار دهیم. یک نگاشت یک به یک که اندازه و جهت زوایای بین خمها<sup>۱</sup> را حفظ کند هم‌مدیس نامیده می‌شود. به عبارت دقیقتر، یک نگاشت در نقطهٔ  $z$  هم‌مدیس است اگر زوایای بین خمها را در نقطهٔ  $z$  حفظ کند؛ و در ناحیهٔ  $D$  هم‌مدیس است، اگر در هر نقطهٔ  $D$  هم‌مدیس و در  $D$  یک به یک باشد. نکات اصلی عبارتند از

اگر  $w = f(z)$  و  $f$  در  $z$  تحلیلی و  $f'(z_0) \neq 0$ ، آنگاه نگاشت در  $z_0$  هم‌مدیس است. اگر  $f'(z_0) = 0$ ، آنگاه نگاشت در  $z_0$  هم‌مدیس نیست، به عکس، اگر  $w = f(z) = \varphi(x, y)$ ، آنگاه نگاشت هم‌مدیس از ناحیهٔ  $D$  به روی ناحیهٔ  $\Delta$  باشد آنگاه  $f$  در  $D$  تحلیلی و  $f'(z) \neq 0$  در  $D$  است.

بهتر است دقیقاً بگوئیم جملهٔ «زوایا را حفظ می‌کند» چه معنایی دارد؟ فرض کنید خم پیوستهٔ  $C$  از نقطهٔ  $z_0$  می‌گذرد و  $\Gamma$  تصویر  $C$  در صفحهٔ  $w$  باشد. اگر  $z_1$  یک نقطهٔ نزدیک (به  $z_0$ ) روی  $C$  باشد، آنگاه  $\arg(z - z_0)$  زاویه‌ای است که وتر گذرنده از  $z_0$  و  $z_1$  با جهت مثبت محور حقیقی می‌سازد و  $\arg[f(z_1) - f(z_0)]$  زاویهٔ متناظر در صفحهٔ  $w$  است. آنگاه

$$\theta = \arg \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$$

زاویه‌ای است که وتر توسط نگاشت دوران کرده است. (به صورت دقیقتر، این زاویه‌ای بین جهت‌های وتر قبلی و وتر جدید است و تصویر وتر اولیه لزوماً یک پاره‌خط نیست هرچند وقتی  $z_1$  به  $z_0$  نزدیک باشد تقریباً چنین است). اگر  $f'(z_0) \neq 0$  حد  $\theta$  وقتی  $z \rightarrow z_0$  برابر با  $\arg f'(z_0)$  است، که به خم  $C$  وابسته نیست. بنابراین دو خم که با زاویهٔ  $\gamma$  در نقطهٔ  $z_0$  تلاقی می‌کنند به دو خم متقاطع با همان اندازهٔ زاویه تصویر می‌شوند (هرچند که ممکن است هر دو خم از جهت اولیهٔ خود منحرف شوند).

از طرف دیگر، اگر  $f'(z_0) = 0$ ، فرض می‌کنیم که  $f'(z) \neq 0$ . چون در غیر این صورت  $f$  ثابت است، و مطلب زیادی دربارهٔ تبدیلی که یک ناحیه را به یک نقطه تصویر می‌کند نداریم. آنگاه در همسایگی  $z_0$  داریم  $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n g(z)$ ، که در آن  $n \geq 2$  مرتبهٔ ریشهٔ  $f(z) - f(z_0)$  است. اگر  $z_1$  یک نقطه در نزدیکی  $z_0$  باشد، داریم  $\arg [f(z_1) - f(z_0)] = n \arg (z_1 - z_0) + \arg g(z_1)$  بنابراین خم‌هایی که با زاویهٔ  $\gamma$  در نقطهٔ  $z_0$  متقاطع‌اند به خم‌هایی که با زاویهٔ  $n\gamma$  در نقطهٔ  $f(z_0)$  متقاطع‌اند تبدیل می‌شوند. این بدان معناست که بگوئیم زوایای  $z_0$  در  $z$  ضرب شده‌اند. یک زاویهٔ بزرگتر از  $\pi$  به بیشتر از  $2\pi$  تبدیل می‌شود، بنابراین اگر به تصویر زوایای بزرگتر و بزرگتر فکر کنیم، سرانجام تصویر یک همسایگی  $z_0$  که با خودش متداخل است را داریم، و  $f$  دارای وارون نیست. این مطلب دوباره نشان می‌دهد که چنان که در بخش ۱۳.۱ دیدیم یک تابع  $f$  در همسایگی یک نقطه که در آن  $f' = 0$  نمی‌تواند تک‌مقداری باشد. اگر  $f$  را تنها در یک زاویهٔ با رأس  $z_0$  و کمتر از  $\frac{\pi}{n}$  فرض کنیم، می‌توانیم یک شاخه از وارون  $f$  را در تقاطع این زاویه با همسایگی  $z_0$  تعریف کنیم که تابع وارون خم‌هایی را که با زاویهٔ  $\gamma$  متقاطع‌اند به خم‌هایی که در زاویهٔ  $\frac{\gamma}{n}$  متقاطع‌اند تبدیل می‌کند. به عنوان مثال، اگر  $w = z^2$  را فقط در ربع اول در نظر بگیریم، محور حقیقی مثبت و محور موهومی به دو خم تبدیل می‌شوند (در واقع دو نیم‌خط) که یکدیگر را با زاویهٔ  $\pi$  قطع می‌کنند، به عکس تابع وارون  $z = \sqrt{w}$  محور حقیقی را به ضعفهای ربع اول تبدیل می‌کند توجه کنید به خصوص جهت‌های زوایا حفظ می‌شوند حتی اگر اندازهٔ آنها تغییر یابد. یعنی اگر  $w$  در امتداد محور حقیقی ضمن عبور از صفر از طرف چپ به راست برود، در این صورت  $\sqrt{w}$  روی مرز ربع اول روی محور موهومی سمت پائین به سمت راست روی قسمت مثبت محور حقیقی در صفحه  $z$  می‌رود.

چون نگاشتهای همدیس یک بیک‌اند، ترتیب نسبی نقاط با تبدیل همدیس حفظ می‌شود. یعنی اگر  $A$  و  $B$  و  $C$  نقاطی از یک کمان به ترتیب باشند، تصاویر آنها  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  باید روی تصویر کمان به همان ترتیب ظاهر گردند. این اصل ارزش تذکر را دارد زیرا می‌تواند از پرداختن به نگاشت غیرممکن جلوگیری کند.

## ۲۲.۲ نگاشتهای همدیس بعنوان توابع تحلیلی

این مطلب درستی است، اما اثبات آن چندان آسان نیست، اگر  $w = f(z)$  یک هم‌ریختی (یک به یک، پیوسته، با وارون پیوسته) از  $D$  به  $\Delta$  باشد، و اگر برای هر نقطهٔ  $z_0$  از  $D$

$$\arg \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}$$

وقتی  $z \rightarrow z_0$  دارای حد با پایان باشد، آنگاه  $f$  روی  $D$  تحلیلی است. این مطلب را فقط وقتی که  $f$  مشتق‌های اول و دوم پیوسته دارد ثابت می‌کنیم.

فرض کنید  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در نقطه  $z_0$  یک نگاشت همدیس ایجاد می‌کند. قرار دهید  $z = z_0 + re^{i\theta}$  ؛ آنگاه (چون وجود مشتق‌های پیوسته را فرض کرده‌ایم) داریم

$$f(z) - f(z_0) = r(f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta) + o(r) \quad \left( f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ در } z_0 \text{ و الی آخر} \right)$$

در نتیجه به جز وقتی که در  $z_0$  ،  $f_1 = f_2 = 0$  ، هرگاه  $z$  به  $z_0$  نزدیک شود، داریم

$$\arg [f(z) - f(z_0)] = \arg T(\theta) + o(1)$$

که در آن

$$T(\theta) = f_1(x_0, y_0) \cos \theta + f_2(x_0, y_0) \sin \theta$$

از این رو، اگر دو نقطه  $z_1$  و  $z_2$  را در نظر بگیریم، زاویه بین  $z_1 - z_0 = re^{i\theta}$  و  $z_2 - z_0 = re^{i\theta}$  برابر با  $\theta_1 - \theta_2$  است، در صورتیکه زاویه بین  $f(z_1) - f(z_0)$  و  $f(z_2) - f(z_0)$  برابر با  $\arg T(\theta_1) - \arg T(\theta_2) + o(1)$  چون نگاشت همدیس است، نتیجه می‌شود که

$$\arg T(\theta_1) - \arg T(\theta_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad (\text{به پیمانه } 2\pi)$$

این به نوبه خود، نتیجه می‌دهد که  $T(\theta)$  مضرب ثابتی از  $e^{i\theta}$  است. چون اگر بگیریم  $\theta = \theta_1$  و  $\theta_2 = 0$ ، داریم،  $\arg T(\theta) - \arg T(0) = \arg e^{i\theta}$ ، یا ثابت  $\arg T(\theta) = \theta +$  یا  $T(\theta) = ke^{i\theta}$ .

بنابراین، بجز وقتی که در  $z_0$  ،  $f_1 = f_2 = 0$ ، داریم

$$f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta = ke^{i\theta}$$

به ازای  $\theta = 0$  داریم  $f_1 = k$  و به ازای  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ،  $f_2 = ki$  . بنابراین در  $z_0$  داریم  $f_1 = -if_2$  . که شکل مختلط معادلات کوشی-ریمان است. در نتیجه معادلات کوشی-ریمان در هر نقطه که تبدیل همدیس است برقرار می‌باشد، مگر وقتی که  $f_1 = f_2 = 0$  ، اما در حالت اخیر معادلات کوشی-ریمان خود بخود برقرار است. از این رو  $f(z)$  تحلیلی است، و نمی‌تواند  $f_1 = f_2 = 0$  برقرار باشد. زیرا اگر در نقطه  $z_0$  ،  $f_1 = f_2 = 0$  آنگاه چنان که در بالا دیدیم، تابع نمی‌تواند در نزدیکی  $z_0$  یک‌به‌یک بماند.

## ۲۲.۳ نگاشتهای همدیس و توابع همساز

خاصیتی از توابع همدیس که در مسائل دیریکله مفید است، از این قرار است که، آنها جواب یک معادله لاپلاس را به جواب یک معادله لاپلاس تبدیل می‌کنند، یعنی، توابع همساز را به توابع همساز تبدیل

می‌کنند. وقتی که یک نگاشت همدیس در بستر یک ناحیه پیوسته باشد، خود بخود نقاط مرزی را به نقاط مرزی تصویر می‌کند.

برای نشان دادن اینکه نگاشت همدیس توابع همساز را حفظ می‌کند فرض کنید  $w = f(z)$  ناحیه  $D$  در صفحه  $z$  را به ناحیه  $\Delta$  در صفحه  $w$  تبدیل کند، به طوری که  $w = u + iv$  ،  $u = u(x, y)$  و  $v = v(x, y)$  و فرض کنید  $\varphi(u, v)$  در  $\Delta$  همساز باشد. می‌خواهیم نشان دهیم  $\varphi[u(x, y), v(x, y)]$  در معادله لاپلاس برحسب  $x$  و  $y$  صادق است.

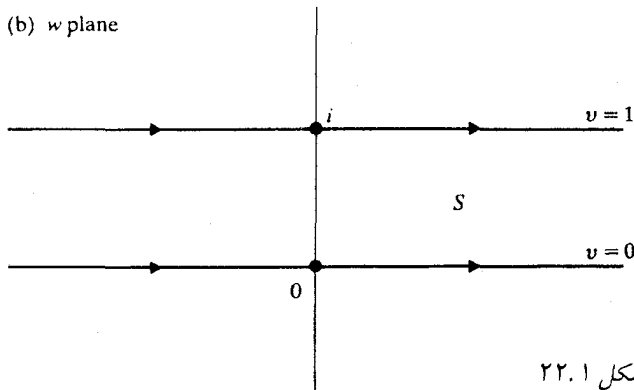
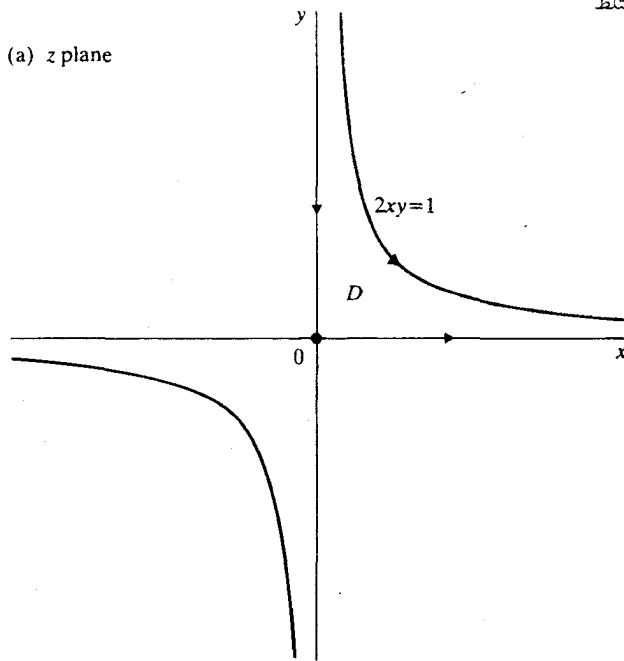
تمرین ۲۲.۱ مشتقهای  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  ،  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  ،  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$  و  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  را با بکارگیری قانون زنجیری محاسبه کنید و بررسی کنید وقتی که  $\varphi(u, v)$  ،  $u(x, y)$  و  $v(x, y)$  در معادله لاپلاس و مشتقهای  $u$  و  $v$  در معادله کوشی-ریمان صدق کنند چه اتفاقی می‌افتد.

## ۲۲.۴ ارتباط ناحیه‌ها

در استفاده از نگاشتهای همدیس، باید بتوانیم نشان دهیم واقعاً ناحیه‌های خاصی تحت نگاشتی به هم متناظر می‌شوند. در حالات ساده بطور مستقیم و براحتی می‌توان ثابت کرد که نواحی مورد بحث به طور یک به یک بهم متناظر می‌شوند. در حالات مشکلاتر ممکن است نشان دادن اینکه مرزها به طور یک به یک متناظرند آسانتر است و بعد با استفاده از قضیهٔ داربو (بخش ۱۳.۳) ثابت می‌کنیم که ناحیه‌ها خودشان متناظر هستند.

در عمل اغلب می‌خواهیم قضیهٔ داربو را در حالتی که  $D$  یا  $S$  هر دو یا یکی کراندار نباشند، بکار گیریم. فقط حالتی را که  $D$  و  $S$  نقاط بیرونی دارند در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $a$  یک نقطهٔ بیرونی  $D$  باشد در اینصورت تبدیل  $w = \frac{1}{z-a}$  به وضوح  $D$  را به طور یک به یک و همدیس به ناحیهٔ کراندار  $D'$  می‌برد. به طریق مشابه، اگر  $b$  یک نقطه در بیرون  $S$  باشد، نگاشت  $\zeta = \frac{1}{(w-b)}$  ناحیهٔ  $S$  را به ناحیهٔ کراندار  $S'$  می‌برد. حالا قضیهٔ داربو را برای  $D'$  و  $S'$  بکار می‌بریم و بنابراین تحت ترکیب نگاشتها برای  $D$  و  $S$  بکار گرفته می‌شود.

تبدیل زیر را که می‌توان مستقیماً و به آسانی بررسی کرد، بکارگیری قضیهٔ داربو را روشن خواهد کرد. دوباره این تبدیلات را در بخش ۲۶ خواهیم دید. تبدیل  $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  را در نظر بگیرید، و فرض کنید که علاقه‌مندیم بدانیم تصویر ناحیه  $0 < v \leq 1$  (نوار عمودی) در صفحهٔ  $w$  چیست. چون  $v = 2xy$  ، نقاط صادق در  $2xy = 1$  یا  $2xy = 0$  به  $v = 1$  و  $v = 0$  تصویر می‌شوند (شکل ۲۲.۱). یک حدس خوب این است که ناحیهٔ  $D$  محدود به مرز شاخه‌ای از هذلولی  $2xy = 1$  و دو نیمه محور، تصویر همدیس نقاط درونی نوار  $S$  ؛ متشکل از نقاط  $0 < v < 1$  در صفحهٔ  $w$  باشد. مطابق قضیهٔ داربو کافی است که بدانیم تصویر بین مرزها یک به یک است. روش بعدی که برای این مثال ساده واقعاً ضروری است، اما برای موارد پیچیده‌تر روش کار را ارائه می‌نماید.



شکل ۲۲.۱

شعاع  $x > 0$  و  $y = 0$  را در نظر بگیرید. آنگاه  $u = x^2$ ،  $v = 0$  وقتی  $x$  از صفر به سمت  $\infty$  می‌رود،  $u$  (بطور اکید) از صفر به  $\infty$  افزایش می‌یابد، بطوریکه  $w$  فقط یکبار محور  $u$  را از صفر تا  $\infty$  طی می‌کند. روی شعاع  $x = 0$ ؛  $y > 0$ ،  $u = -y^2$ ،  $v = 0$ ، و وقتی  $y$  از  $\infty$  به صفر می‌رود،  $u$  از  $-\infty$  به صفر افزایش می‌یابد. بنابراین سمت چپ و مرز پائین  $D$ ، که از بالا به راست از طریق صفر طی می‌شود، بطور یک به یک متناظر با محور  $u$  از  $-\infty$  تا  $+\infty$  است.

اکنون به شاخه بالایی  $2xy = 1$  هندولی توجه کنید. در این صورت  $u = x^2 - \frac{1}{4x^2}$ ،  $v = 1$ . وقتی  $x$  از صفر به  $+\infty$  می‌رود  $u$  از  $-\infty$  به  $+\infty$  می‌رود. بعلاوه  $u$  همیشه صعودی است زیرا  $\frac{du}{dx} = 2x + \frac{1}{2x^3} > 0$ . حالا تناظر بین مرزهای  $D$  و  $S$  را داریم که در شکل ۲۲.۱ نشان داده شده

است. از این نتیجه می‌شود که نگاشت بین  $D$  و  $S$  یک به یک است. استدلال مشابهی برای هر هذلولی  $xy = c$ ، یا برای تمام ربع اول (که به نیم‌صفحه بالایی در صفحه  $w$  تصور می‌شود) بکار می‌رود.

## یادداشتها:

(۱) گاهی یک نگاشت را مستقیماً همدیس می‌نامیم اگر به مفهوم تعریف‌شده در بخش ۲۲.۱ همدیس باشد و آن را همدیس می‌گوئیم اگر فقط اندازه زاویه را حفظ کند.

(۲) بوسیله  $D. Menshov [Mechoff]. Math. Ann. 95 (1926): 641-670$  ثابت شده است. جزئیات این بحث و نتایج کلی‌تر در  $Markushevich, Selected Chapters$  آمده است.

## ۲۳. برخی از کاربردهای نگاشت همدیس در فیزیک

در بخش ۲۰.۱ دیدیم که مسائلی در فیزیک موجودند که برای حل آنها به مسئله دیریکله با مقادیر مرزی قطعه قطعه ثابت نیازمندیم. به دلیل خصوصیات هندسی، گاهی این نوع مسائل دیریکله را می‌توان با بررسی دقیق یا استفاده از سری فوریه حل کرد. در وضعیتهای کلی‌تر نگاشت همدیس مفید است زیرا یک نگاشت همدیس توابع همساز را به توابع همساز می‌برد. در نتیجه ممکن است یک مسئله ظاهراً پیچیده را با حل یک مسئله ساده‌تر حل کنیم و بعد جواب را بوسیله نگاشت همدیس منتقل کنیم. به عنوان مثال این روش برای حل مسائلی درباره جریان سیال، الکترواستاتیک و گرما بکار می‌روند. برای توضیح چگونگی استفاده از آن به برخی از اصطلاحات فیزیکی نیازمندیم که من اول از جریان سیال شروع می‌کنم، شاید به این دلیل که بیشترین کاربرد شهودی را دارد. باید بدانیم که مدل‌های ریاضی از چنین پدیده‌هایی فقط تقریب‌های اولیه کاملاً ساده‌شده مسائل حقیقی هستند. با وجود این آنها از نظر فیزیکی مفیدند و مسائل جالب ریاضی را مطرح می‌کنند.

### ۲۳.۱ اصطلاح علمی جریان سیال

یک سیال که در یک نهر یا دریاچه در عمق یکنواخت و در یک لایه افقی جریان دارد، را در نظر بگیرید. بطوریکه برش عرضی در هر سطحی، نمایشگر تمام جریان باشد. سپس ممکن است به صورت ایده‌آل، جریان را به صورت دوبعدی تصور کنیم، و به آن به صورت یک سیال مسطح هموار دوبعدی در یک ناحیه بنگریم. یک بردار سرعت  $v = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$  که سرعت در هر نقطه را معین می‌کند وجود دارد. فرض کنیم این سیال تراکم‌ناپذیر (به همان معنایی که اصطلاح القا می‌کند) و بدون چسبندگی باشد. عبارت اخیر



بدان معنی است که اصطکاک داخلی وجود ندارد و سیال به مرز ناحیه‌ای که در آن جریان دارد نمی‌چسبد. همچنین فرض کنیم جریان غیردورانی باشد که در زبان ریاضی یعنی  $\text{curl } \mathbf{v} = 0$  و در زبان فیزیک یعنی گرداب موضعی در سیال موجود نیست: یک چرخ پره‌دار کوچک در سیال تمایلی برای چرخیدن ندارد. تحت این فرضها در فیزیک ثابت می‌شود که بردار سرعت برابر با گرادیان پتانسیل  $\varphi$  است، که  $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  و  $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  همساز است. بنابراین  $\varphi$  پتانسیل سرعت نامیده می‌شود و منحنی‌های تراز،  $\varphi = \text{ثابت}$  هم‌پتانسیل هستند. تابع مزدوج همساز  $\psi$  (که اگر جریان در ناحیه همبند ساده باشد، معمولاً چنین فرضی را می‌کنیم، موجود است) یک تابع جریان است و خم‌های تراز  $\psi = \text{ثابت}$  عمود بر سطوح هم‌پتانسیل هستند. چون مشتق  $\varphi$  در امتداد یک سطح هم‌پتانسیل، به وضوح صفر است، جریان باید در امتداد خم‌های تراز  $\psi = \text{ثابت}$  باشد که خطوط جریان هستند. انتگرال  $\int_A \left(\frac{d\varphi}{dn}\right) ds$  در امتداد یک کمان  $A$  از یک سطح هم‌پتانسیل متناسب با مقدار سیال گذرنده از کمان  $A$  در هر واحد زمان می‌باشد. تابع تحلیلی  $f = \varphi + i\psi$  پتانسیل مختلط است و  $f'$  سرعت مختلط و  $|f'(z)|$  تندی در  $z$  نامیده می‌شود.

تمرین ۲۳.۱ نشان دهید که بردار سرعت  $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$  دارای مؤلفه‌های  $p = \text{Re } f'$  و  $q = -\text{Im } f'$  است.

چون تابع  $f(z)$  نیز تحلیلی است،  $\psi$  و  $\varphi$  پتانسیل سرعت و تابع جریان برای جریان دیگری هستند که خطوط جریان آن سطوح هم‌پتانسیل جریان اصلی می‌باشند. معمولاً خطوط جریان نسبت به سطوح هم‌پتانسیل بیشتر مورد توجه هستند، زیرا اگر خطوط جریان را رسم کنیم به سادگی می‌توانیم بینیم جریان چه شکلی دارد. توجه کنید اگر  $f'(z_0) = 0$ ، تندی در  $z_0$  صفر است. بنابراین  $z_0$  یک نقطه توقف نامیده می‌شود. از طرف دیگر، اگر  $f'(z) \rightarrow \infty$  وقتی  $z \rightarrow z_0$ ، مدل ریاضی جریان در نزدیکی  $z_0$  متلاشی می‌شود، بهر حال می‌توانیم نتیجه بگیریم که تندی باید در نزدیکی  $z_0$  بسیار بزرگ باشد.

اگر جریان در ناحیه‌ای که مرز آن شامل خم  $C$ ، جایی که سیال نمی‌تواند جریان پیدا کند، اتفاق بیفتد - یعنی یک مرز نفوذناپذیر صلب - بردار سرعت در نقاط  $C$  باید بر  $C$  مماس باشند. بنابراین یک مرز صلب همیشه یک خط جریان است لذا یک تابع تحلیلی که قسمت موهومی آن روی هرکدام از یک یا چند مرز صلب، ثابت است (معمولاً روی مرزهای ثابت، مقادیر ثابت متفاوت) پتانسیل مختلط جریانی می‌باشد که این مرزها بعنوان خطوط جریان دارد. از طرف دیگر اگر یک جریان داشته باشیم و یک مرز صلب در امتداد همه یا بخشی از خطوط جریان را قرار دهیم منظر جریان نمی‌کند.

تمرین ۲۳.۲ نشان دهید اگر  $C$  یک خم ساده بسته باشد و جریان درون  $C$  اتفاق بیفتد  $C$  بعنوان تنها خط جریان باشد، آنگاه پتانسیل مختلط در درون  $C$  ثابت است (یعنی چیزی در حال جریان نیست).

از این مطلب نتیجه می‌شود که می‌توانیم جریان جالبی درون یک خم ساده بسته داشته باشیم، تنها اگر نقاط تکین روی  $C$  موجود باشد. نقاطی که در آن سیال یا ذخیره می‌شود و یا هدر می‌رود. برای یک ناحیه کراندار مثلاً نوار بین دو خط موازی، قسمت‌های مختلف مرز می‌توانند خطوط جریان مختلف با یک نقطه تکین در  $\infty$  باشند.

در عمل انتظار می‌رود که بخواهیم مسئله عکس را حل کنیم: یک جریان با خطوط جریان تعیین نشده در امتداد مرز را شرح دهیم (به عبارت دیگر، تابع همساز با مقادیر مرزی قطعه قطعه ثابت پیدا کنیم). یعنی می‌خواهیم مسئله دیریکله با مقادیر مرزی قطعه قطعه ثابت را حل کنیم. چنین مسئله‌ای تا وقتی که فرض‌های مناسبی در مورد رفتار جواب در نقاط تکین نداشته باشیم یکتا نیست. (بخش‌های ۲۰.۱ و ۲۴.۲ را ببینید).

## ۲۳.۲ تعییرات فیزیکی دیگر

هر مسئله جریان را می‌توان به عنوان یک مسئله دربارهٔ جریان گرما یا پتانسیل‌های الکترواستاتیک تعبیر کرد. البته اصطلاح فیزیکی متفاوت است. مسئله گرما یک مسئله دمای حالت مانا در یک لایهٔ دوبعدی، با صفحات عایق‌شده، یا در شکل دیگر، یک استوانهٔ همگن صلب با مقاطع عرضی موازی با صفحه داده‌شده و هم‌شکل (نه لزوماً دایره)، با شرایط مرزی معین روی یال‌های لایه یا سطح استوانه می‌باشد. در یخچال یک مثال ساده و آشنا از این مدل با توزیع دمای داده‌شده در درون و بیرون سطوح می‌باشد. دمای  $T$  در معادله لاپلاس صدق می‌کند، خم‌های  $T = \text{ثابت}$  هم‌دما هستند. اگر  $U$  تابع مزدوج همساز  $T$  باشد آنگاه خم‌های  $U = \text{ثابت}$  خطوطی هستند در امتدادی که گرما جریان دارد. مقدار گرمای عرضی یک خم  $A$  در واحد زمان با  $\int_A \frac{\partial T}{\partial n} ds$  متناسب است. هرگاه روی  $A$ ،  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ، هیچ گرمایی در  $A$  جریان نمی‌یابد و می‌گوییم که  $A$  عایق شده است.

تمرین ۲۳.۳ نشان دهید که یک نگاشت همدیس مرز عایق را به مرز عایق می‌فرستد.

می‌توانیم خطوط جریان گرما را با خطوط هم‌دما عوض کنیم تا مسئله حرارت دیگری بدست آوریم و می‌توانیم مسئله گرما را بعنوان مسئلهٔ جریان سیال (به دو طریق) تعبیر کنیم. مسائل الکترواستاتیک دوبعدی، مقاطع عرضی مسائل سه‌بعدی هستند که همهٔ مقاطع عرضی موازی با صفحهٔ خاصی، قابل انطباق هستند. یک هادی، مقطع عرضی یک هادی واقعی است و یک بار نقطه‌ای، مقطع عرضی یک خط بار یکنواخت عمود به صفحه‌ای است که در نظر گرفته‌ایم (نه یک بار نقطه‌ای منفرد در فضای سه‌بعدی). بنابراین پتانسیل  $\varphi$  در ناحیه‌ای که شامل هیچ باری نیست همساز است؛ اگر  $\psi + i\varphi$  تابع تحلیلی  $f(z)$  باشد، در این صورت نیرو روی واحد بار با  $|f'(z)|$  متناسب است. خم‌های  $\psi = \text{ثابت}$ ، خطوط نیرو هستند و هادی‌ها،  $\varphi = \text{ثابت}$ ، هم‌پتانسیل می‌باشند.

برای نشان دادن مطلب، تابع همساز در گوی واحد یا مقادیر مرزی  $a$  روی نیم‌دایره بالایی و  $b$  روی پائینی را می‌توان به چند راه تعبیر کرد: به صورت توصیف یک جریان از یک منبع در  $-1$  به یک چاهک در  $+1$ ، به طوری که دماهایی را در گوی وقتی مرز بالایی در دمای  $a$  و مرز پائینی در دمای  $b$  نگه داشته شده‌اند به دست می‌دهد؛ به صورت توصیف میدان الکتریکی در گوی وقتی مرز بالایی در پتانسیل  $a$  و مرز پائینی در پتانسیل  $b$  و ذراتی از عایق در  $\pm 1$  موجود باشند مطرح می‌شود. در حالت اخیر یک ذخیره‌کننده<sup>۲</sup> داریم. همچنین می‌توانیم خطوط هم‌پتانسیل و خطوط جریان یا میدان را با هم عوض کنیم و سیال یا جریان گرمایی از یک منبع توسعه‌یافته در امتداد نیم‌دایره بالایی به نیم‌دایره پائین داشته باشیم، یا نقاط باردار در  $\pm 1$  با جریانی که بین آنها موجود است، داشته باشیم. یکی از نظرگاهها ممکن است برای مسائل فیزیکی مفروضی مناسبتر از دیگری باشند.

## یادداشتها:

(۱) برخی مؤلفین سرعت را منفی گرادیان پتانسیل در نظر می‌گیرند. با در نظر گرفتن این مطلب کاربردهای بیشتری را در کتابهای دیگر جستجو کنید.

(۲) واژه قدیمی "Condenser" هنوز در بعضی از نوشته‌های ریاضی به جای گنجایش استفاده می‌شود.

## ۲۴. برخی از جریانهای خاص

با ساختن جریانهای که بوسیله برخی از توابع ساده تحلیلی بوجود می‌آیند شروع می‌کنیم. آنگاه می‌توانیم با استفاده از نگاشتهای همدیس جریانهای پیچیده‌تری بسازیم، از این اصل که استفاده می‌کنیم نگاشت همدیس جواب مسئله دیریکله را به جواب مسئله دیریکله دیگری منتقل می‌کند.

### ۲۴.۱ جریانهای یکنواخت

ساده‌ترین جریان، دارای پتانسیل مختلط  $z$  است. (بطور کلی  $cz$  با  $c > 0$ ؛ اما می‌توانیم فرض کنیم واحدها چنان انتخاب شده‌اند که  $c = 1$ ). بنابراین  $\frac{dw}{dz} = 1$ ، و لذا سرعت ثابت، موازی محور  $x$  ها و از سمت چپ به راست است. اگر محورهای حقیقی را بعنوان یک مرز صلب بگیریم. یک جریان یکنواخت در نیمه بالای صفحه داریم، همچنین اگر خط  $y = k$  را به عنوان یک مرز صلب بگیریم، یک جریان در کانال بین دو خط موازی داریم. در هر یک از این حالات جریان را یک جریان یکنواخت می‌نامند. خطوط جریان خطوط، ثابت  $y =$ ، است.

ممکن است از این جریان یکنواخت تعجب کنید؛ سیال از کجا می‌آید و به کجا می‌رود؟ باید به منبعی از سیال در  $\infty$  و یک چاهک فکر کنیم، جایی که سیال حرکت داده می‌شود، همچنین در  $\infty$ ، به نوعی تنظیم شده که سیال منبع را ترک کند، به سمت راست روان شود و بعداً در  $\infty$  ناپدید شود. باید از منابع و چاهکها یک توجیه ریاضی داشته باشیم و ساده‌ترین کار آنست که قبل از این که آنها را با هم در نظر بگیریم، منبع و چاهک را بطور جداگانه در دو نقطه با پایان بررسی کنیم.

## ۲۴.۲ منابع و چاهکها

پتانسیل مختلط  $w = m \log z$  را در نظر می‌گیریم. چون یک تابع تک‌مقداری نیست باید آن را فقط در صفحه‌ای در نظر بگیریم که نقاط صفر تا  $\infty$  از آن برداشته شده است. به عنوان مثال در طول محور حقیقی مثبت با  $\log z$  بین صفر و  $2\pi$ . سرعت مختلط عبارتست از  $\frac{m}{z} = \frac{m}{r}(\cos \theta - i \sin \theta)$ . بنابراین تندی برابر با  $\frac{m}{r}$  است (سیال خیلی سریع صفر را ترک می‌کند و تندی آن بتدریج هرچه پیش می‌رود کاهش می‌یابد). جریان در امتداد شعاع از صفر ( $\theta$  ثابت) به سمت بیرون است زیرا بردار سرعت عبارتست از  $\frac{m}{r}(i \cos \theta + j \sin \theta)$ . بنابراین قسمت برداشته‌شده در طول محور حقیقی مثبت در امتداد خط جریان است، و می‌توان حضورش را نادیده گرفت. اکنون فرض کنیم سیال دارای چگالی واحد باشد و می‌خواهیم ببینیم چقدر سیال از دایره  $|z| = r > 0$  در واحد زمان می‌گذرد، یعنی

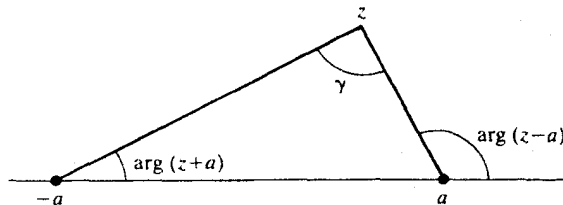
$$\int_{|z|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial(m \log r)}{\partial r} r d\theta = \int_0^{2\pi} m d\theta = 2\pi m$$

به نحوی که همان مقدار سیال (در واحد زمان) از هر دایره به مرکز صفر می‌گذرد. این چیزی است که به وضوح از یک منبع نقطه‌ای انتظار خواهیم داشت که به میزان  $2\pi m$  در واحد زمان منتشر شود. بنابراین می‌گوئیم  $m \log z$  پتانسیل مختلط یک منبع با قوت  $m$  در صفر است. به زبان فیزیکی، می‌توانیم یک جریان پیوسته و منظم داشته باشیم فقط اگر منبع با یک چاهک (یا توزیع چاهکها) متوازن شده باشد. به نحوی که سیال جایی برای رفتن داشته باشد. یک چاهک به صورت منفی یک منبع تعریف می‌شود و پتانسیل مختلط آن، اگر در نقطه با پایان  $z_0$  مستقر شده باشد برابر با  $-m \log(z - z_0)$  است.

اگر یک جریان دارای پتانسیل مختلط  $g(z) + \log(z - z_0)$  باشد که در آن  $g$  در همسایگی  $z_0$  کراندار است، هنوز می‌گوئیم یک منبع در  $z_0$  وجود دارد چون نزدیک  $z_0$  لگاریتم،  $g$  را بی‌اثر می‌کند. در این حالت گوئیم جریان، جریانی وابسته به  $g$  است. اما با حضور یک منبع تنظیم یا تعدیل شده است. یک مثال ساده تولید جریان است، اگر یک منبع در یک جریان یکنواخت قرار گرفته باشد. بنظر منطقی است که انتظار داشته باشیم خطوط جریان شبیه به آنهایی باشد که برای منبع نزدیک  $z_0$  است، اما به راست کشیده شده، در صورتی که دور از  $z_0$  بیشتر شبیه آن جریانهای یکنواخت خواهد بود. این توقع در تمرین زیر توجیه شده است.

تمرین ۲۴.۱ برای جریانی با پتانسیل مختلط  $w = z + \log z$  ، بعضی از خطوط جریان را بکشید، خصوصاً وقتی که  $v$  مقادیر  $0, 1, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7\pi}{4}$  را می‌گیرد. یک یا دو مسئله فیزیکی با این مدل‌های جریان ارائه دهید.

همچنین می‌توانیم یک چاهک را در جریانی از منبع داخل کنیم (یا به عکس). چون پتانسیل مختلط هر جریان، در نقطهٔ تکین دیگری تحلیلی است، می‌گوئیم جریان با ترکیبی از یک منبع منفرد و یک چاهک منفرد تولید شده است. فرض کنید منبع در  $z = a$  و چاهک در  $z = -a$  قرار دارند، آنگاه پتانسیل مختلط برابر با  $m \log \frac{z-a}{z+a}$  است، و خطوط جریان، خم‌های  $\text{Im } f(z) = \text{Im } f(z)$  ثابت هستند. تابع جریان  $m[\arg(z-a) - \arg(z+a)] = \text{Im } f(z)$  است، ثابت، بدین معناست که زاویهٔ  $\gamma$  در  $z$  در شکل ۲۴.۱ ثابت است.



شکل ۲۴.۱

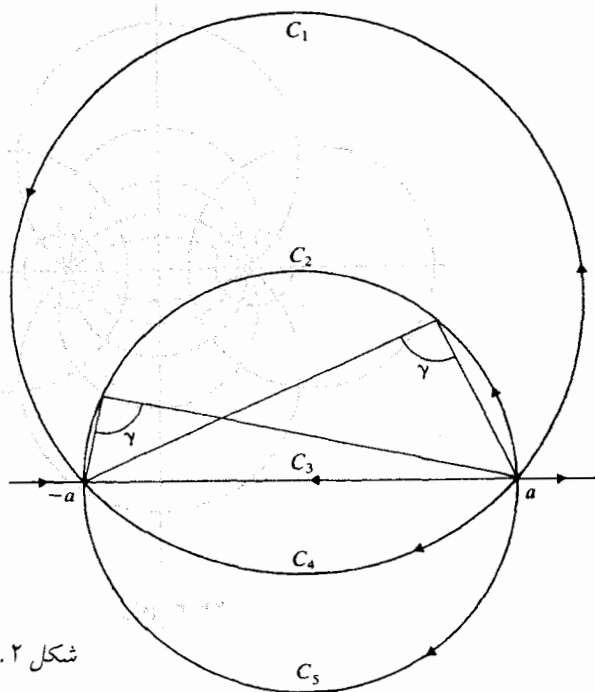
در نتیجه خطوط جریان بخشهایی از دایره هم‌محور گذرنده از دو نقطهٔ  $+a$  و  $-a$  هستند؛  $C_1, \dots, C_5$  چند نمونه در شکل ۲۴.۲ را نمایش می‌دهند. شکل ۲۴.۳ خط‌های جریان و هم‌پتانسیلها را نشان می‌دهد.

تمرین ۲۴.۲ نشان دهید تابع همساز که با انتگرال پواسون (در بخش ۲۰.۲) برای  $|z| < 1$  با  $\psi = +1$  در  $0 < \theta < \pi$  و  $\psi = -1$  در  $-\pi < \theta < 0$  داده شده، برابر با مضرب ثابتی از تابع جریان برای پتانسیل مختلط  $\log \left[ \frac{(1+z)}{(1-z)} \right]$  یعنی  $\tan^{-1} \left[ \frac{2y}{(1-x^2-y^2)} \right]$  است.

اکنون فرض می‌کنیم که  $a \rightarrow \infty$  ،  $m$  را با  $am$  جایگزین می‌کنیم، لذا وقتی منبع و چاهک از یکدیگر دور می‌گردند قوی‌تر می‌شوند (اگر این عمل را انجام ندهیم، نباید انتظار داشته باشیم اثر بیشتری را روی قسمتهای با پایان صفحه داشته باشیم). آنگاه اگر  $z$  ثابت شد،  $\frac{z}{a}$  کوچک است و وقتی  $a \rightarrow \infty$

$$ma \log \frac{a+z}{a-z} = ma \left[ \frac{2z}{a} + O(a^{-2}) \right]$$

در حد  $2mz$  را بدست می‌آوریم که پتانسیل مختلط یک جریان یکنواخت است. این مطلب روشن می‌کند که چرا یک جریان یکنواخت را مثل یک جریان از جفت منبع و چاهک در  $\infty$  می‌توان تلقی کرد. این جفت را جفتی می‌نامند.



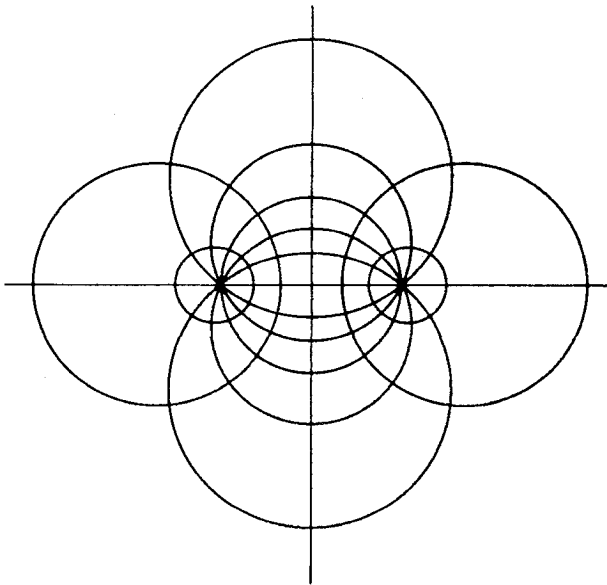
شکل ۲۴.۲

تابع  $z \mapsto z^2$  قطب ساده‌ای در  $\infty$  دارد. اگر پتانسیل‌های مختلط با قطب‌های از مرتبه بالاتر در  $\infty$ ، یا حتی با تکین‌های اساسی در  $\infty$  را در نظر بگیریم تدریجاً نمونه‌های پیچیده‌تر جریان را بدست خواهیم آورد. (تمرین ۲۴.۴ را ببینید).

همچنین می‌توانیم یک جفتی در یک نقطه با پایان مثلاً مرکز داشته باشیم. چون یک نگاشت همدیس معادله لاپلاس را حفظ می‌کند، خطوط جریان را به خطوط جریان انتقال می‌دهد. چون پتانسیل مختلط جفتی در  $\infty$ ، برابر با  $kz$  است، در نتیجه  $\frac{k}{z}$  پتانسیل مختلط جفتی در صفر است (جهت چنان است که منبع در سمت چپ قرار می‌گیرد و می‌توانیم جهت را با ضرب کردن در عامل  $e^{i\alpha}$  تغییر دهیم). به همین نحو،  $\frac{k}{z - z_0}$  پتانسیل مختلط یک جفتی در نقطه  $z_0$  است.

تمرین ۲۴.۳ نشان دهید خطوط جریان یک جفتی در  $z_0$  دایره مماس به خطوط افقی گذرنده از  $z_0$  هستند. شکلی بکشید که جهت جریان را نشان دهد.

برای توصیف یک جریان یکنواخت در نیم صفحه، یافتن یک تابع تحلیلی در نیم صفحه (مثلاً در  $y > 0$ ) با قسمت موهومی صفر روی مرز کافی نخواهد بود. مثلاً  $\operatorname{Im} z^2$  در نیمه بالایی صفحه همساز و روی محور حقیقی صفر است، اما پتانسیل مختلط  $z^2$  به جریان بسیار متفاوتی (بخش ۲۲.۴) تعلق دارد. مثال  $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$  جریان بسیار پیچیده‌تری را ایجاد می‌کند.



شکل ۲۴.۳

تمرین ۲۴.۴ برخی از خطوط جریان  $\text{Im } e^z$  را بکشید.

مفهومی وجود دارد که در آن می‌توان گفت  $\text{Im } z$  کوچکترین تابع (غیرصفر) است که در نیمه بالایی صفحه همساز و روی محور حقیقی برابر با صفر است. به عبارت دقیقتر اگر  $v$  در  $y > 0$  همساز و روی  $y \geq 0$  پیوسته و روی قسمت حقیقی  $z$  برابر با صفر باشد و اگر  $|v(x, y)| \leq Ay$ ، آنگاه  $v(x, y) = cy$  با  $-A \leq c \leq A$ .

برای دیدن این مطلب، با استفاده از اصل شوارتس (بخش ۲۰.۶)  $v$  را به نیم‌صفحه پایینی ادامه داده و بعد تابع تحلیلی  $f$  را که  $v$  قسمت موهومی آن است تشکیل می‌دهیم. بنا به نامساوی کاراتودوری (بخش ۱۶.۳)، داریم  $f(z) = O(|z|)$ . بنابراین بر اساس صورت کلی قضیه لیوویل برای توابع همساز (تمرین ۱۶.۹)،  $f(z) = az + b$ . چون به ازای  $y = 0$  داریم  $\text{Im } f = 0$ ، لذا  $b$  حقیقی است. با گرفتن  $a = c + i\beta$  داریم  $\text{Im } f = \text{Im} [(c + i\beta)(x + iy)] = \beta x + cy$ . چون روی محور حقیقی  $v = 0$  لذا  $\beta = 0$  و بنابراین  $v = cy$ .  
 خصوصاً اگر  $v$  به آرامی بزرگ شود که  $\frac{v(y)}{y} \rightarrow 0$  وقتی  $y \rightarrow \infty$ ، آنگاه  $v$  باید برابر با ثابت صفر باشد.

معمولاً جریان در یک ناحیه به معنای جریان بدست‌آمده بوسیله نگاشت همدیس از یک جریان یکنواخت فرض می‌شود.

تمرین ۲۴.۵ تابع  $\varphi(z) = z + \frac{1}{z}$  پتانسیل برای جریان یکنواخت توزیع شده بوسیله یک جفتی در صفر است. خطوط جریان در نیم صفحه بالایی را مورد بحث قرار دهید و مشاهده کنید که یک خط جریان، نیمه بالای دایره  $|z| = 1$  را دربر می‌گیرد؛ بنابراین جریان بیرون دایره، جریان حول یک نیم دایره مانع است. تندی در بالاترین نقطه دایره را پیدا کنید، و توجه کنید این بزرگترین تندی روی خط جریان متناظر است. یعنی بنا به اصل برنولی فشار با عکس تندی متناسب است) سیال یک نیرو به سمت بالا روی مانع اعمال می‌کند. این می‌گوید که یک رودخانه تمایل دارد تا مرحله‌ای که در بسترش قرار دارد بالا بیاید.

### تمرینهای تکمیلی

- ۱- پتانسیل مختلط برای جریان حاصل از قرار گرفتن یک چاهک در یک جریان یکنواخت را بنویسید.
  - ۲- پتانسیل مختلط را برای جریانی از یک جفت منبع در  $+1$  و  $-1$  بنویسید و برخی از خطوط جریان آن را رسم کنید.
  - ۳- اگر دو جفتی را که عکس هم جهتدار شده‌اند با قوت‌های مساوی در  $\pm a$  در نظر بگیریم و فرض کنیم  $a \rightarrow 0$  و تمرینهای جفتی‌ها بی‌پایان شوند، چیزی را به دست می‌آوریم که یک چهارقطبی در صفر نامیده می‌شود. پتانسیل مختلط آن را بیابید.
- (پتانسیل یک جفتی به این طریق بدست می‌آید، روش بکاررفته در متن در اینجا نیز برای جفتی کار می‌کند، اما نه به همان سادگی)

### ۲۴.۳ اصول انعکاس

توزیع نقطه‌ای تکی‌ها (منبع‌ها، چاهک‌ها، جفتی‌ها و غیره) در نقاط با پایان در نیم صفحه باز بالایی را در نظر بگیرید. فرض کنید پتانسیل مختلط آن  $f(z)$  باشد. انتظار نداریم که محور حقیقی، خط جریانی از جریان متناظر باشد، اما یافتن یک جریان با همان تکی‌ها در نیم صفحه بالایی که محور حقیقی یک خط جریان آن باشد، آسان است. جریان جدید را می‌توان بعنوان جریان اصلی ایجاد شده به وسیله گذاشتن یک دیوار در امتداد محور حقیقی تصور کرد. در واقع پتانسیل مختلط جدید به سادگی  $f(z) + g(z)$  است که در آن  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ . برای دیدن این مطلب به یاد آورید که (تمرین ۲.۵)  $g$  در نیم صفحه پائینی تحلیلی خواهد بود بجز برای تکی‌هایی در نقاط با پایان که مزدوج نقاط تکی  $f$  هستند، و بنابراین همگی در نیم صفحه پائینی هستند (با اصل شوارتس مقایسه کنید، بخش ۱۷.۳) روی محور حقیقی  $\bar{z} = z$  و  $\overline{f(\bar{z})} = \overline{f(z)}$ ؛ بنابراین  $f(z) + g(z)$  روی محور حقیقی، حقیقی است، یعنی قسمت موهومی آن روی محور حقیقی صفر است در نتیجه محور حقیقی بعنوان خط جریان برای  $f + g$  است و  $f + g$  در نیم صفحه بالایی همان منابع، چاهک‌ها و... را دارد.



بعنوان مثال  $(z - i)^{-1}$  پتانسیل مختلط یک جفتی در  $i$  است. بنابراین  $g(z) = (z + i)^{-1}$  و لذا  $(z - i)^{-1} + (z + i)^{-1} = \frac{2z}{z^2 + 1}$  در امتداد محور حقیقی هستند. اثر همان است که اگر یک جفتی با همان قوت را در تصویر آینه‌ای جفتی اولیه قرار می‌دادیم (همچنین در حالت کلی)؛ در الکترواستاتیک این فرایند را روش تصویرها می‌نامند. روش مشابهی برای انعکاس در یک دایره به جای یک خط راست وجود دارد، در هیدرودینامیک آن به قضیهٔ دایره<sup>۱</sup> میلن-تامسون معروف است. می‌توان آن را با یک تبدیل همدیس که محور حقیقی را به دایره می‌فرستد، بدست آورد، اما حدس زدن جواب ساده‌تر است. اگر جریان اصلی (که اکنون ممکن است یک تکین در  $\infty$  داشته باشد) فقط دارای نقاط تکین منفرد در هر جایی از صفحه باشد که هیچ یک از آنها در گوی  $|z| \leq a$  نباشند. آنگاه قرار دادن دایره  $C: |z| = a$  بعنوان یک مانع پتانسیل مختلط را از  $f(z)$  به  $f(z) + f^*(\frac{a}{z})$  تغییر می‌دهد که در آن  $f^*$  با مزدوج کردن ضرایب ماکلورن بدست می‌آید. اثبات ساده است: روی  $C$ ،  $\bar{z} = \frac{a}{z}$  و بنابراین  $w = f(z) + f^*(\bar{z})$  روی  $C$  حقیقی است؛  $\text{Im } w = 0$  روی  $C$ ، بنابراین  $C$  یک خط جریان است. هرگاه  $z$  بیرون  $C$  باشد  $\frac{a}{z}$  درون آن است، بنابراین  $s$  دارای همان نقاط تکین  $f$  در بیرون  $C$  می‌باشد و مشمول نقطهٔ  $\infty$  است. به عنوان یک مثال، قرار دادن دایرهٔ  $|z| = 1$  به عنوان یک مانع بر سر راه جریان یکنواخت  $w = z$  است. بنابراین پتانسیل مختلط برابر با  $z + \frac{1}{z}$  است که پتانسیل جریان یکنواخت ایجادشده بوسیلهٔ یک جفتی نیز می‌تواند باشد (تمرین ۲۴.۵).

### یادداشت:

(۱) برای اطلاعات بیشتر در مورد قضیهٔ دایره به

O. Popa, "Four New Expression of the Circle Theorem". *Rev., Roumaine Math., Pures Appl.* 27, no. 4. (1982): 489-494 (*Math. Rev.* 83k: 30041)

مراجعه کنید.

## ۲۵. تبدیلات مویوس

دیدیم که تعدادی مسائل فیزیکی خاص را می‌توان با استفاده از توابع تحلیلی بخصوصی حل کرد. اما هنوز استفادهٔ بیشتری از نگاشت همدیس نکرده‌ایم. در بخش ۲۶ خواهیم دید که چگونه می‌توانیم از نگاشت همدیس برای ساختن جوابهای برخی مسائل غیرشفاف استفاده کنیم. ابتدا لازم است که با دستهٔ خاصی از نگاشتها که در بسیاری از زمینه‌های محض و کاربردی، مفید هستند آشنا شویم، آنها تبدیلات مویوس هستند.

## ۲۵.۱ تعریفها؛ ویژگیهای ساده

یک تبدیل موبیوس<sup>۱</sup>، تابعی به صورت

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

است که در آن  $a, b, c, d$  اعداد مختلط هستند و  $ad - bc \neq 0$ . (اگر  $ad = bc$ ، آنگاه  $w$  یک ثابت است و تبدیل را به دلیل جالب نبودن کنار می‌گذاریم.) تبدیل‌های موبیوس را در صفحه گسترش یافته در نظر می‌گیریم. فرمولهای مستلزم  $\infty$  بعنوان حدهای متناظر تعبیر شده‌اند.

چند مطلب بدیهی است. تبدیل موبیوس نگاشتی یک به یک از صفحه گسترش یافته  $z$  به صفحه گسترش یافته  $w$  است که  $w = 0$  وقتی  $az + b = 0$  و  $w = \infty$  وقتی  $cz + d = 0$ . هرگاه  $z = 0$ ،  $w = \frac{b}{d}$ ، به شرطی که  $d \neq 0$  و  $w = \infty$  اگر  $d = 0$ .

یک تبدیل موبیوس ترکیبی از بزرگ (کوچک) سازیه‌ها، دورانها، انتقالها و تبدیل  $w = \frac{1}{z}$  می‌باشد. اگر  $c = 0$  این مطلب بی‌درنگ دیده می‌شود. اگر  $c \neq 0$  بگیرد  $w_1 = cz + d$  [بزرگ (کوچک) سازی و دوران به دنبال انتقال آمده‌اند]؛  $w_2 = \frac{1}{w_1}$ ،  $w_3 = [b - \frac{(ad)}{c}] w_2$  [دوران و بزرگ (کوچک) سازی دیگر]،  $w_4 = w_3 + (\frac{a}{c})$ .

تبدیلات موبیوس یک گروه تشکیل می‌دهند. اگر تبدیل موبیوس را با ماتریس

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

نظیر کنیم، به آسانی می‌بینید که ترکیب دو تبدیل با ضرب ماتریسهای آنها متناظر می‌شود و تبدیل وارون با ماتریس وارون متناظر است.

تمرین ۲۵.۱ یک تبدیل موبیوس که محور حقیقی را به محور حقیقی تصویر کند را می‌توان با ضرایب حقیقی  $a, b, c, d$  نوشت.

بدیهی است که تبدیل موبیوسی وجود دارد که هر سه نقطه متمایز را به سه نقطه متمایز دلخواه تصویر کند.

## ۲۵.۲ نسبت ناهمساز<sup>۲</sup>

نسبت ناهمساز ۴ نقطه متمایز با

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}$$

تعریف می‌شود. اگر یکی از ۴ نقطه  $\infty$  باشد بطور بدیهی نسبت ناهمساز با گرفتن حد بیان می‌شود. می‌خواهیم این واقعیت تا اندازه غیرشهودی را ثابت کنیم که نسبت ناهمساز تحت تبدیل مویوس پایا است. با ارائه تبدیل  $T$  شروع می‌کنیم که روی نقاط  $z$  به صورت  $Tz = [z, z_2, z_3, z_4]$  عمل می‌کنند. به وضوح  $T$  یک تبدیل مویوس است که  $z_2, z_3, z_4$  را به ترتیب به  $0, 1$  و  $\infty$  تصویر می‌کند. بعلاوه  $T$  تنها تبدیل مویوسی است که  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  را به  $0, 1$  و  $\infty$  می‌نگارد، در واقع فرض کنید  $S$  نیز همین ویژگی را داشته باشد. در این صورت  $ST^{-1}$  یک تبدیل مویوس است {به دلیل ویژگی گروه که  $0, 1$  و  $\infty$  را ثابت نگه می‌دارد (علامت  $ST$  را به معنی  $(ST)(z) = S[T(z)]$  بکار می‌بریم}.

تمرین ۲۵.۲ نشان دهید تبدیل مویوسی که  $0, 1$  و  $\infty$  را به ترتیب به  $0, 1$  و  $\infty$  می‌برد، همانی است.

حالا فرض کنید  $S$  هر تبدیل مویوسی باشد، نسبت ناهمساز  $[Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4]$  را تشکیل دهید، فرض کنید  $T$  تبدیل تعریف شده در بالا باشد. در این صورت  $TS^{-1}$  نقاط  $Sz_2$  و  $Sz_3$  و  $Sz_4$  را به  $0, 1$  و  $\infty$  می‌برد. بنابراین بنا به ویژگی یکتایی که همین حالا بیان شد  $[Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4]$  تصویر  $Sz_1$  تحت  $TS^{-1}$  است که بیان می‌کند  $TS^{-1}z_1 = Tz_1 = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ ، لذا  $[Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ . این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

پایایی نسبت ناهمساز روشی برای ارائه تبدیل مویوس به دست می‌دهد که هر سه نقطه متمایز مفروض را به سه نقطه معین می‌برد. در واقع تبدیل مویوسی که با رابطه  $[w, w_2, w_3, w_4] = [z, z_2, z_3, z_4]$  تعریف می‌شود تبدیل مویوسی است که نقاط  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  را (به ترتیب) به نقاط  $w_2$  و  $w_3$  و  $w_4$  (به ترتیب) می‌برد.

این یک فرمول کلی جذاب است، اما همیشه مناسبترین راه بدست آوردن یک تبدیل مویوس خاص نمی‌باشد زیرا عملیات جبری، مستلزم حل  $w$  برحسب  $z$  است. در واقع وقتی نقاط مورد نظر اعداد ساده‌ای هستند، اغلب آسانتر است که مستقیماً با تعریف اولیه تبدیل مویوس کار کنیم. در اینجا با یک مثال روش را ارائه می‌دهیم.

مثال: تبدیل مویوسی را پیدا کنید که نقاط  $0, 1$  و  $i$  را به  $i, 1$  و  $\infty$  (به ترتیب) ببرد. از

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

شروع می‌کنیم. چون  $0$  به  $1$  می‌رود باید  $\frac{b}{d} = 1$ ، بنابراین

$$w = \frac{az + b}{cz + b}$$

بعد  $i$  به  $\infty$  می‌رود،  $z = i$  باید مخرج را صفر کند. لذا  $ci + b = 0$  و  $b = -ic$  و در نتیجه

$$w = \frac{az - ic}{cz - ic}$$

سرانجام،  $a$  به  $i$  می‌رود

$$a = c(1 + 2i) \quad i = \frac{a - ic}{c - ic}$$

ضریب  $c$  به انتخاب ماست ( $c = 0$  را انتخاب نکنید)، با گرفتن  $c = 1$ ، آنگاه

$$w = \frac{(1 + 2i)z - i}{z - i}$$

این روند را می‌توان همیشه بکار گرفت؛ در بدترین حالت، به دستگاهی از سه معادله خطی از اعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  می‌رسیم که نهایتاً یکی از آنها بطور دلخواه انتخاب می‌شود. البته نباید سعی کنید ضرایب را خیلی زود مشخص کنید. مثلاً، اگر از شما یک تبدیل موبیوس که  $0$ ،  $1$  و  $1 + i$  را به  $1$ ،  $\infty$  و  $i$  می‌برد خواسته شود، از قبل نباید  $a = 1$  بگیرید، زیرا نگاشت باید  $w = \frac{1}{1-z}$  باشد.

همچنین بخش ۲۵.۵ را برای روش‌های دیگر پیدا کردن نگاشتهای خاص موبیوس ببینید.

اگر نقاط  $z_1$ ،  $z_2$  و  $z_3$  همه حقیقی باشند (یکی از آنها ممکن است  $\infty$  باشد) آنگاه تعریف نگاشت  $T$  نشان می‌دهد  $Tz$  حقیقی است، وقتی  $z$  حقیقی است، و البته نظیر این مطلب برای  $T^{-1}$  صحیح است. در نتیجه تصویر محور حقیقی توسعه‌یافته (با یک نقطه  $\infty$ ) محور حقیقی توسعه‌یافته است هرگاه  $T$  برای  $z$  حقیقی، حقیقی باشد.

### ۲۵.۳ تبدیل دایره‌ها

نشان می‌دهیم که هر تبدیل موبیوس محور حقیقی را به یک دایره یا یک خط راست می‌برد و به عکس، هر دایره یا خط راست تصویر محور حقیقی تبدیل موبیوسی است.

وقتی  $T$  با یک بزرگساز با دوران یا ترکیبی از چند تبدیل از این‌گونه است روشن است که تصویر محور حقیقی یک خط راست و تصویر یک دایره، یک دایره است. چون هر تبدیل موبیوس ترکیبی از این تبدیلهای معکوس  $w = \frac{1}{z}$  است. فقط باید نشان دهیم که ترکیب تبدیل اخیر با انتقال‌ها و دوران‌ها محور حقیقی را به دایره یا خط راستی می‌برد. برای این منظور، کافی است تبدیل  $T_z = \frac{1}{z - \lambda}$  را در نظر بگیریم. اگر  $z$  حقیقی باشد  $w = \frac{1}{z - \lambda}$  می‌گوید که  $z = w^{-1} + \lambda$ ، و  $\text{Im}(w^{-1} + \lambda) = 0$ . چون  $\text{Im}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{v}{|w|^2}$ ، بنابراین  $\lambda$  حقیقی است،  $v = 0$  (قسمت حقیقی محور  $w$ )، یا  $\text{Im } \lambda = \frac{v}{|w|^2}$  یعنی  $\text{Im } \lambda - v = 0$  یا  $(w^2 + v^2) \text{Im } \lambda - v = 0$ ، که معادله یک دایره است. بنابراین تصویر محور حقیقی همیشه یک دایره یا یک خط راست است.

به عکس، باید نشان دهیم هر دایره یا خط راست تصویر محور حقیقی تحت تبدیل مویوس می‌باشد. واضح است که هر خط راست تصویر محور حقیقی تحت یک انتقال (اگر خط موازی محور حقیقی باشد) یا یک دوران به مرکز محل تقاطع خط با محور حقیقی است. برای دایره آن را چنان انتقال دهید که از مبدأ بگذرد و مرکزش در قسمت حقیقی مثبت در نقطه  $p$  قرار گیرد. بنابراین یک معادله بصورت  $|z - p| = p$ ،  $(p \neq 0)$  داریم. تحت  $z = \frac{1}{w}$  این معادله به  $|1 - pw| = p|w|$  یا

$$(1 - pw)(1 - p\bar{w}) = p^2 w \bar{w}$$

تبدیل می‌شود که سرانجام به صورت  $\operatorname{Re} w = \frac{1}{(2p)}$  ساده می‌شود. در واقع این معادله یک خط راست است. دایره اولیه تصویر محور حقیقی تحت ترکیب وارون این تبدیل هاست.

اکنون ساده است که ببینیم هر تبدیل مویوس یک خط راست یا دایره مجدداً یک خط راست یا یک دایره می‌نگارد (هرچند دایره‌ها ممکن است به یک خط راست تبدیل شوند). فرض کنیم  $C$  یک دایره یا یک خط راست و  $\Gamma$  شکل مشابه دیگری باشد. چون  $C$  تصویر محور حقیقی تحت یک تبدیل مویوس  $T$  است، و  $\Gamma$  تصویر محور حقیقی تحت یک تبدیل مویوس  $S$ ، لذا  $C$  تحت  $T$  به محور حقیقی و تحت  $S^{-1}T^{-1}$  به  $\Gamma$  نگاشته می‌شود.

## ۲۵.۴ حفظ تقارن

اکنون نشان خواهیم داد که نه تنها تبدیل مویوس یک دایره یا یک خط راست را به یک دایره یا یک خط راست تبدیل می‌کند، بلکه یک زوج از نقاط متقارن نسبت به شکل اولیه را به یک زوج متقارن نسبت به دومین شکل تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر، ویژگی تقارن یک زوج فقط تحت تبدیل‌های مویوس حفظ می‌شود. این مطلب را می‌توان مستقیماً ثابت کرد. اما بحث زیر زیباتر است. چون تبدیل‌های مویوس نسبت‌های ناهمساز را حفظ می‌کنند، اگر  $z_1, z_2, z_3$  و  $z_4$  سه نقطه روی دایره مفروض باشند و  $T$  تبدیل مویوس دلخواهی باشد، داریم

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4]$$

اکنون این اصل را مکرراً بکار می‌بریم تا نسبت ناهمساز  $[z_1^*, z_2, z_3, z_4]$  را تغییر دهیم. ابتدا انتقالی بکار برید تا

$$[z_1^*, z_2, z_3, z_4] = [z_1^* - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a]$$

را بدست آورید که در آن مرکز دایره است. بنا بر تعریف

$$z_1^* - a = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

بنابراین داریم

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = \left[ \frac{R^y}{\bar{z} - \bar{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a \right]$$

اکنون تبدیل  $Tz = \frac{R^y}{z}$  را بکار برید تا بدست آورید

$$\left[ \bar{z} - \bar{a}, \frac{R^y}{z_2 - a}, \frac{R^y}{z_3 - a}, \frac{R^y}{z_4 - a} \right]$$

و چون  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  روی دایره قرار دارند، و بنابراین تحت تقارن ثابت می‌مانند،

$$[\bar{z} - \bar{a}, \bar{z}_2 - \bar{a}, \bar{z}_3 - \bar{a}, \bar{z}_4 - \bar{a}]$$

روشن است که مزدوج یک نسبت ناهمساز، نسبت ناهمساز مزدوج‌های آن‌ها است، بنابراین داریم:

$$[\overline{z - a}, \overline{z_2 - a}, \overline{z_3 - a}, \overline{z_4 - a}] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

لذا می‌بینیم که یک زوج از نقاط  $z$  و  $z^*$  متقارن نسبت به دایره‌ای که از نقاط  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  می‌گذرد در رابطه

$$[z^*, z_2, z_3, z_4] = [\bar{z}, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4]$$

صدق می‌کنند. این معادله را می‌توان به عنوان تعریف دیگری از تقارن  $z$  و  $z^*$  نسبت به دایره‌ای که از  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  می‌گذرد تلقی کرد، چون استدلال اخیر را می‌توان قدم به قدم در جهت عکس ارائه کرد. اکنون فرض کنیم  $T$  یک تبدیل مویوس دلخواه باشد، آنگاه، چون  $T$  نسبت‌های ناهمساز را حفظ می‌کند،

$$[z, z_2, z_3, z_4] = [Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4]$$

و

$$[z, z_2, z_3, z_4] = [\overline{z^*, z_2, z_3, z_4}] = [Tz^*, Tz_2, Tz_3, Tz_4]$$

در نتیجه، اگر  $z$  و  $z^*$  نسبت به  $C$  متقارن باشند، آنگاه  $Tz$  و  $Tz^*$  نسبت به دایره‌ای که از  $Tz_2$  و  $Tz_3$  می‌گذرد متقارن‌اند.

همچنین، اما ساده‌تر، می‌توان نشان داد که همان معادله، تقارن  $z$  و  $z^*$  را نسبت به خط راستی که شامل  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  است مشخص می‌کند. کافی است این مطلب را وقتی خط محور حقیقی است نشان دهیم، زیرا هر خط دیگری را می‌توان با یک حرف صلب به محور حقیقی تبدیل کرد و آن نیز تقارن نقاط نسبت به یک خط را حفظ می‌کند. به وضوح برای خط حقیقی داریم

$$[\bar{z}, z_2, z_3, z_4] = [\overline{z, z_2, z_3, z_4}]$$

اگر  $z_2$  و  $z_3$  و  $z_4$  همگی حقیقی باشند.

اکنون فرض می‌کنیم  $T$  هر تبدیل دلخواه مویوس و  $z$  و  $z^*$  نسبت به یک دایره  $C$  (یا خط مستقیم راست) متقارن باشند. چون  $T$  نسبت‌های ناهمساز را حفظ می‌کند، و  $Tz$  و  $Tz_k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) مانند  $z$  و  $z_k$  در معادله یکسانی صدق می‌کنند، بنابراین  $Tz$  و  $Tz^*$  دو نقطه متقارن‌اند.

## ۲۵.۵ ساختن تبدیلهای مویوس خاص

این گزاره که تبدیل مویوس نقاط متقارن را به یکدیگر تبدیل می‌کند، برای یافتن تبدیلهای مویوسی که دارای اثر مطلوبی هستند مفید می‌باشد. اگر بخواهیم با یک تبدیل مویوس گوی دلخواهی را به یک گوی دیگری (یا نیم‌صفحه) تبدیل کنیم، نزدیکترین راه در نظر گرفتن سه نقطه مرزی متناظر با سه نقطه مرزی است، [مراقب باشید: باید مطمئن شویم که درون مجموعه اولیه با درون مجموعه نهایی متناظر است، این کار را با شماره‌گذاری نقاط انجام می‌دهیم به طوری که وقتی روی نقاط جلو می‌رویم داخل هر دو ناحیه یا در سمت راست (یا هر دو در سمت چپ) قرار گیرند]. این روش ممکن است به عملیات جبری خسته‌کننده‌ای منجر شود. غالباً ساده‌تر است که یک نقطه مرزی را به یک نقطه مرزی، و یک نقطه درونی و متقارن آن را به یک نقطه درونی و متقارن آن متناظر کنید.

مثلاً فرض کنیم یک تبدیل مویوس از نیمه بالای صفحه به گوی واحد می‌خواهیم. می‌توانیم  $0$  را به  $1$  و نقاط متقارن  $i$  و  $-i$  را به نقاط متقارن  $0$  و  $\infty$  نسبت دهیم. در این صورت، اگر  $w = \frac{(az+b)}{(cz+d)}$  و  $z = 0$  را متناظر با  $w = 1$  قرار دهیم نتیجه می‌گیریم  $b = d$ . بعد  $z = i$  را به  $w = 0$  و  $z = -i$  را به  $w = \infty$  متناظر کنید، آنگاه  $a + bi = 0$  و  $-ci + d = -ci + b = 0$ ، بنابراین  $a = ib$  و  $c = -ib$

$$w = \frac{ibz + b}{-ibz + b} = \frac{i - z}{i + z}$$

تمرین ۲۵.۳ نشان دهید کلی‌ترین تبدیل مویوس از نیمه بالای صفحه به گوی واحد به صورت

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \mu}{z - \bar{\mu}}$$

است، که در آن  $\theta$  حقیقی و  $\mu$  هر نقطه دلخواه در نیمه بالای صفحه می‌باشد.

حالا کلی‌ترین صورت تبدیل مویوس از گوی واحد به گوی واحد را بدست می‌آوریم. اینجا نقاط  $z = 0$  و  $z = \infty$  به نقاط متقارن  $w$  و  $\frac{1}{w}$ ، و نقاط  $w = 0$  و  $w = \infty$  به نقاط متقارن  $\alpha$  و  $\frac{1}{\alpha}$  متناظر می‌شوند.

تمرین ۲۵.۴ با استفاده از روش بالا نشان دهید

$$w = e^{i\lambda} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}, \quad |\alpha| < 1, \quad \lambda \text{ حقیقی}$$

اکنون می‌توانیم رمز ظهور نقطهٔ متقارن را در به دست آوردن فرمول پوآسون در بخش ۲۰.۲ درک کنیم. برای یک تابع همساز  $u$  در گوی واحد (بطور ضمنی در بخش ۱۶.۱ و بطور صریح در بخش ۲.۵) نمایش زیر را برای مقدار  $u$  در مرکز داشتیم

$$u(\circ) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta, \quad re^{i\theta} = \zeta$$

تبدیل

$$w = T(\zeta) = \frac{\zeta + z}{\bar{z}\zeta + 1}$$

گویی بسته  $|\zeta| \leq 1$  را به روی  $|w| < 1$  تصویر می‌کند که  $\zeta = 0$  را با  $w = z$  متناظر می‌کند. آنگاه  $U(\zeta) = u[T(\zeta)]$  در  $|\zeta| < 1$  همساز است. با بکارگیری نمایش بالا برای  $U(\circ)$  داریم

$$U(\circ) = u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u[T(\zeta)] d \arg \zeta$$

اما  $\zeta$  با تبدیل وارون

$$\zeta = \frac{w - z}{1 - \bar{z}w}$$

داده می‌شود و

$$\begin{aligned} d \arg \zeta &= -i \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= -i \left( \frac{1}{w - z} + \frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}w} \right) dw \end{aligned}$$

این جایی است که در شروع به دست آوردن فرمول در صفحه ۱۸۹ بودیم. اما الگویی که در دو مثال اخیر از تبدیل موبیوس خاص بکار بردیم همیشه مناسب نیستند.

تمرین ۲۵.۵ کلی‌ترین صورت تبدیل موبیوس از نیم‌صفحهٔ بالایی به نیم‌صفحهٔ بالایی را پیدا کنید (توجه: خیلی آسان است) بعد کلی‌ترین صورت تبدیل موبیوس از نیم‌صفحهٔ سمت راست به نیم‌صفحهٔ سمت راست را پیدا کنید.

می‌توانیم از توانایی تبدیل موبیوس در حرکت دادن نقاط صفحه استفاده کنیم و قضایایی را که اصولاً به نقاط خاص وابسته هستند تعمیم دهیم. بعنوان مثال، وقتی  $|f(z)| \leq 1$  در  $|z| \leq 1$  و  $f(\circ) = 0$ ، (با استفاده از لم شوارتس) در تمرین ۱۶.۶ نشان دادیم که  $|f'(\circ)| \leq 1$ .

تمرین ۲۵.۶ نشان دهید اگر  $|f(z)| \leq 1$  در  $|z| \leq 1$ ، آنگاه  $|f'(\circ)| \leq 1$  خواه  $f(\circ)$  برابر با صفر باشد یا نباشد.



تمرین ۲۵.۷ نشان دهید اگر  $F$  تحلیلی و  $\operatorname{Re} F < 0$  در  $|z| \leq 1$  آنگاه  
 $|F'(0)| \leq -2\operatorname{Re} F(0)$ .

تمرین ۲۵.۸ فرض کنید  $f$  تحلیلی و  $1 < |f(z)| < \infty$  در  $|z| \leq 1$ . نشان دهید  
 $|f'(0)| \leq \frac{2}{e}$ .

یک کاربرد از تبدیل‌های مویبوس در هندسهٔ غیراقلیدسی در بخش ۳۰ ارائه شده است. اکنون می‌توانید آن را بخوانید زیرا هیچیک از موضوعهای میانی در آن بکار نمی‌رود.

### تمرینهای تکمیلی

در هر حالت تبدیل مویبوس را پیدا کنید.

- ۱-  $0$  و  $i$  و  $-1$  را به ترتیب به  $-1$  و  $0$  و  $i$ .
- ۲-  $0$  و  $1$  و  $\infty$  را به ترتیب به  $2$  و  $0$  و  $2i$ .
- ۳-  $0$  و  $1$  و  $-1$  را به ترتیب به  $2$  و  $1$  و  $\infty$ .
- ۴- گوی واحد را به گوی واحد و  $i \frac{1}{2}$  را به  $0$ .
- ۵- صورت کلی تبدیل مویبوس از گوی واحد به خارج گوی واحد را بیابید.

۶- کدامیک از زوج شکل‌ها در شکل ۲۵.۱ ت، تحت نگاشتهای هم‌دیس هم‌ارز هستند.

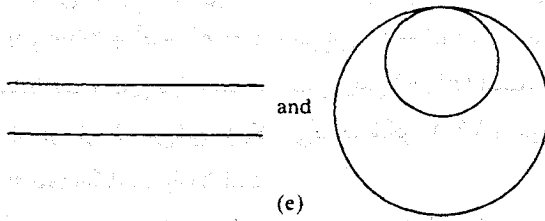
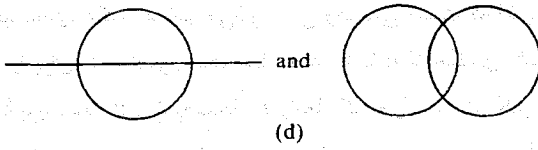
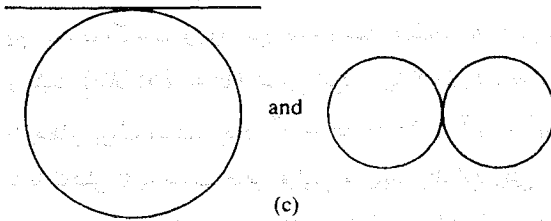
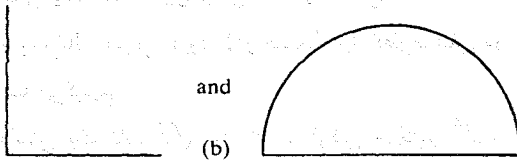
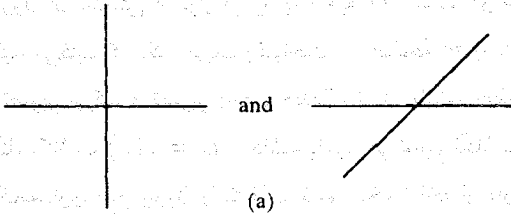
۷- فرض کنید  $f$  در  $|z| \leq 1$  تحلیلی،  $|f(z)| \leq 1$  و  $f(a) = 0$  که در آن  $|a| < 1$ . مقدار  $|f'(a)|$  تا چه اندازه می‌تواند بزرگ باشد؟ (اگر بدست آورید  $2 \leq |f'(a)|$ ، به قدر کافی تلاش نکرده‌اید.)

۸- فرض کنید  $f$  در نیم‌صفحهٔ بالایی تحلیلی،  $|f(z)| \leq 1$ ،  $f(c) = 0$  ( $\operatorname{Im} c > 0$ ). مقدار  $|f'(c)|$  تا چه اندازه می‌تواند بزرگ باشد؟

### یادداشتها:

(۱) تبدیل‌های مویبوس، تبدیل‌های خطی کسری یا تبدیل‌های کسری خطی یا تبدیل‌های دوخطی یا تبدیل‌های خطی یا تبدیل‌های هموگرافیک نیز نامیده می‌شوند.

(۲) بیشتر این بخش از سخنرانهای آلفرس تهیه شده، آن را با بخش ۳، فصل ۳ کتاب او مقایسه کنید.



شکل ۲۵.۱ ت

## ۲۶. مثال‌های دیگری از تبدیل‌ها و جریان‌ها

### ۲۶.۱ نگاشت‌های وارون

در بخش ۲۲.۴ نشان دادیم که نگاشت  $w = z^2$ ، نگاشت همدینی از ناحیه  $D$  واقع بین محورهای مختصات و شاخه بالایی هذلولی  $2xy = 1$  در صفحه  $z$  به نوار  $0 \leq v \leq 1$  در صفحه  $w$  می‌باشد. همچنین خطهای  $v = c$  تصاویر شاخه بالایی خم‌های  $2xy = c$  هستند. چون نگاشت یک به یک

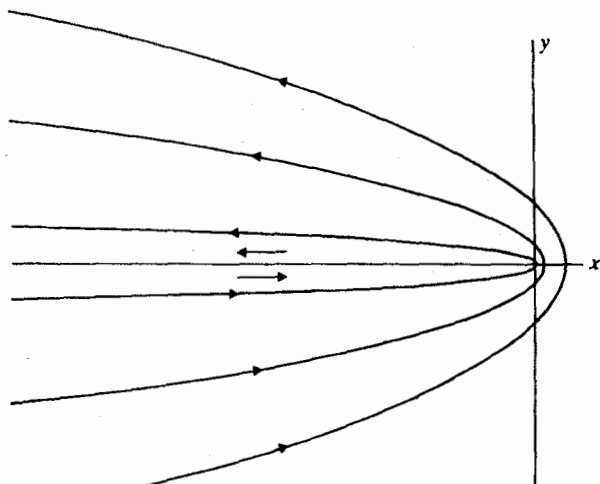
است و ارون آن نگاشتی از نوار مزبور به ناحیه  $D$  است. در عمل احتمالاً روی نگاشت و ارون به این دلیل تأکید می‌کنیم که یک جریان یکنواخت در صفحه  $w$  را به جریانی در صفحه  $z$  که به آن سادگی نیست، تصویر می‌کند و تصویر و ارون خطهای  $v = \text{ثابت}$ ، خطهای جریان در صفحه  $z$  هستند.

هرگاه نگاشت  $w = f(z)$  را داشته باشیم می‌توانیم نگاشت و ارون را نیز مطالعه کنیم به شرطی که شاخه تک‌مقداری تابع و ارون را انتخاب کنیم، یک شاخه از و ارون  $w = z^2$  شاخه  $w = \sqrt{z}$  است. اما برای داشتن یک نمادگذاری توافق‌شده در مسائل مختلف نگاشت و ارون را به صورت  $w = \sqrt{z}$  می‌نویسیم و به دنبال تصویر و ارون (در صفحه  $z$ ) خطوط افقی در صفحه  $w$  یا ناحیه‌های کراندار بوسیله این نوع خطها می‌گردیم.

برای داشتن یک تابع  $w = \sqrt{z}$ ، فرض می‌کنیم  $z = re^{i\theta}$  و  $w = r^{1/2}e^{i\theta/2}$  که در آن  $-\pi < \theta < \pi$ . بنابراین  $z$  را در صفحه‌ای که قسمت منفی محور حقیقی از آن حذف شده در نظر می‌گیریم. اکنون نگاشت و ارون مرز نیمه راست صفحه  $w$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $w$  از  $u = 0$  و  $v$  بزرگ و مثبت (مثلاً  $w = i\infty$ ) شروع شود و (با کاهش  $v$ ) به عقب حرکت کند، آنگاه  $z$  حقیقی، منفی و در قدرمطلق بزرگ است. چون  $-v^2 = u^2 - v^2 + 2iuv = z$  و  $\frac{dz}{dv} = -2v$  منفی است و  $z = x$  با کاهش  $v$  به سمت صفر افزایش می‌یابد. بنابراین وقتی  $w$  به عقب رفتن ادامه می‌دهد،  $z$  منفی است،  $v$  منفی است و  $v$  به سمت  $-\infty$  کاهش می‌یابد. لذا خط  $u = 0$  دو بار به محور حقیقی منفی در جهت‌های عکس متناظر می‌شود. این وضعیتی نیست که قضیه داربو مستقیماً بکار می‌رود اما می‌توانیم قضیه را برای  $-z$  تصویر یک خط  $u = c$  با  $c$  کوچک و مثبت، برای نشان دادن این که نگاشت بین صفحه بریده‌شده  $z$  و نیم‌صفحه  $w$  واقعاً یک به یک است بکار ببریم.

حالا می‌خواهیم خم‌هایی در صفحه  $z$  را بیابیم که به خطهای  $u = c > 0$  نظیر می‌شوند. اگر  $u = c$  و  $z = c^2 - v^2 + 2ivc$ ، بنابراین  $x = c^2 - v^2$ ،  $y = 2vc$ ، یعنی  $y^2 = 4c^2(c^2 - x)$ . این معادله یک سهمی باز به سمت چپ با رأس  $(c^2, 0)$  است. وقتی  $c \rightarrow 0$ ، سهمی به محور حقیقی منفی که دو بار طی می‌شود نزدیک می‌گردد. شکل ۲۶.۱ را ببینید. هر سهمی تصویر یک به یک خط  $u = c$  تحت نگاشت و ارون است.

با گرفتن محور حقیقی منفی و یک سهمی تنها بعنوان مرز، نگاشتی هم‌دیس بین درون سهمی با مانعی در امتداد بخشی از محور آن و نواری قائم در صفحه  $w$  بدست می‌آوریم. (از این طریق نمی‌توانیم نگاشتی از نوار به تمام درون سهمی بدست آوریم.<sup>۱</sup>) می‌توانیم جریان متناظر را بعنوان جریان حول یک موج‌شکن خطی در یک خلیج سهموی تعبیر کنیم. لذا تندی  $\left|\frac{dw}{dz}\right|$  در  $z = 0$  بی‌نهایت است. این نوع رفتار مشخصه جریان‌ها در ناحیه‌هایی است که مرزشان گوشه‌های تیز دارد؛ وقتی آن اتفاق می‌افتد، چنین تلقی می‌شود که ریاضیات، فیزیک را خیلی خوب به صورت مدل در نمی‌آورد. (هرچند در زبان فیزیک هیچ مانع اکیداً ۱- بعدی وجود ندارد.) این منطقی است که در یک وضعیت فیزیکی واقعی، فرض کنیم تندی نزدیک انتهای مانع باید بی‌نهایت بزرگ باشد.



شکل ۲۶.۱

## ۲۶.۲ جریان‌های تولیدشده بوسیله تابع سینوس و وارون آن

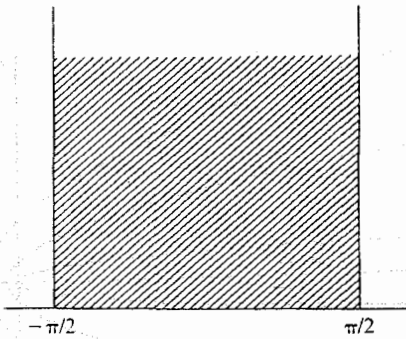
یک مثال جالب، جریان درون یک نوار نیمه نامتناهی، با تمامی مرز بعنوان یک خط جریان تنها می‌باشد، آن را بعنوان نگاشت همدیس از یک جریان یکنواخت در نیم‌صفحه در نظر بگیرید. می‌توانیم به طور صوری آن را به صورت نیم‌صفحه‌ای که مرز آن به روی اضلاع و قاعده نوار نیمه نامتناهی تا شده در نظر بگیریم. این که پتانسیل مختلط چه باید باشد واضح نیست، اما می‌خواهیم نشان دهیم نگاشت  $w = \sin z$  نگاشت همدیسی از نیم‌نوار  $y > 0$  و  $|x| < \frac{\pi}{4}$  به روی نیم‌صفحه بالایی  $v > 0$  را به دست می‌دهد. در واقع داریم

$$w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

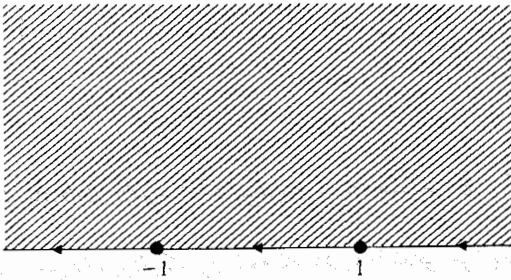
به طوری که  $v = 0$  هرگاه  $x = \pm \frac{\pi}{4}$  و هرگاه  $y = 0$ . دست‌کم این قویاً پیشنهاد می‌کند که مرز نیم‌نوار  $D$  با محور حقیقی در صفحه  $w$  متناظر است، اما واقعاً باید آن را ثابت کنیم. پس فرض کنید  $z$  از  $y = \infty$  روی نیم‌خط  $x = \frac{\pi}{4}$  شروع و  $y$  نزول کند. آنگاه  $w = \cosh y$  و  $w$  نزول می‌کند تا به ازای  $y = 0$  داشته باشیم  $w = 1$ . در این نقطه  $\frac{dw}{dz} = 0$  و  $z$  باید ۹۰ درجه به سمت راست از دیدگاه  $z$  به سمت چپ بچرخد، چنان که در شکل ۲۶.۲ می‌بینیم.

اکنون  $y = 0$  و  $w = \sin x$ ، بنابراین وقتی  $x$  نزول می‌کند،  $w$  تا  $x = -\frac{\pi}{4}$  نزول می‌کند، وقتی مجدداً  $\frac{dw}{dz} = 0$ . حالا  $z$  دوباره به اندازه ۹۰ درجه به سمت راست می‌چرخد و  $y \rightarrow \infty$ ؛ وقتی  $y$  زیاد می‌شود،  $v$  نزول می‌کند. بنابراین در واقع یک رابطه یک به یک بین مرز  $D$  و محور حقیقی در صفحه  $w$  موجود است، همانطور که در شکل مشخص شده است. بنابراین رابطه یک به یکی نیز بین

(a)  $z$  plane



(b)  $w$  plane



شکل ۲۶.۲

نیم‌نوار و نیمه بالایی صفحه (نه نیمه پائینی، زیرا در هر صفحه ناحیه مورد نظر وقتی که  $w$  یا  $z$  مرز را طی می‌کند در سمت راست قرار می‌گیرد) موجود است.

چون جریان یکنواخت در صفحه  $w$  پتانسیل مختلط  $w$  با خطوط جریان، ثابت  $v =$  دارد جریان  $D$  دارای خطوط جریان، ثابت  $\text{Im } \sin z = \cos x \sinh y =$  است، نمونه‌هایی از آن در شکل ۲۶.۳ کشیده شده است.

جریان در صفحه  $w$  یک جفتی در  $\infty$  دارد، اما جریان در صفحه  $z$  به آن آسانی نیست، چون خطهای  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  خطوط جریان یک جفتی در  $\infty$  نیست. این اختلاف متناظر با وضعیتی است که پتانسیل مختلط جریان یکنواخت در  $\infty$  دارای قطب ساده باشد، در صورتی که  $\sin z$  نقطه تکین اساسی در  $\infty$  دارد و تمام جملات سری توان  $\sin z$  در آن شرکت می‌کنند.

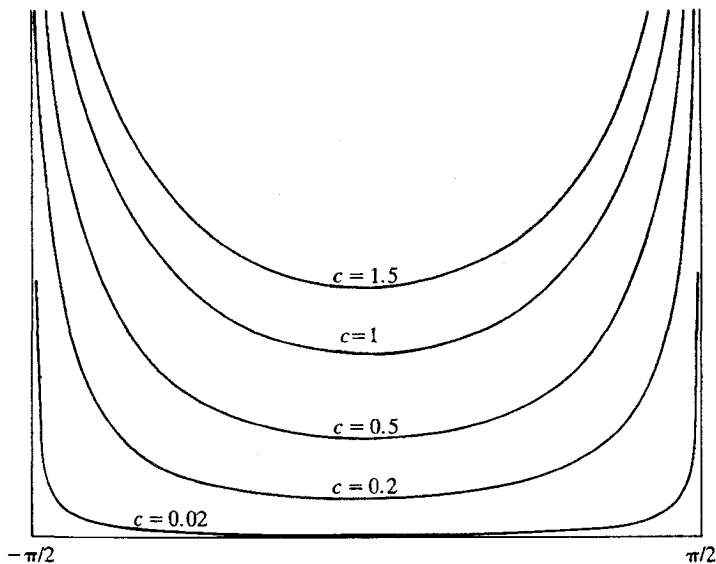
همچنین نگاهت وارون (ناحیه‌ای متفاوت) جریان جالبی را ایجاد می‌کند، تصاویر خطهای  $x = c$ ،  $|c| < \frac{\pi}{2}$  را تحت  $w = \sin z$  در نظر بگیرید، چون

$$u + iv = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

آنگاه، اگر  $x = c$ ،

$$u = \sin c \cosh y \quad , \quad v = \cos c \sinh y$$

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$



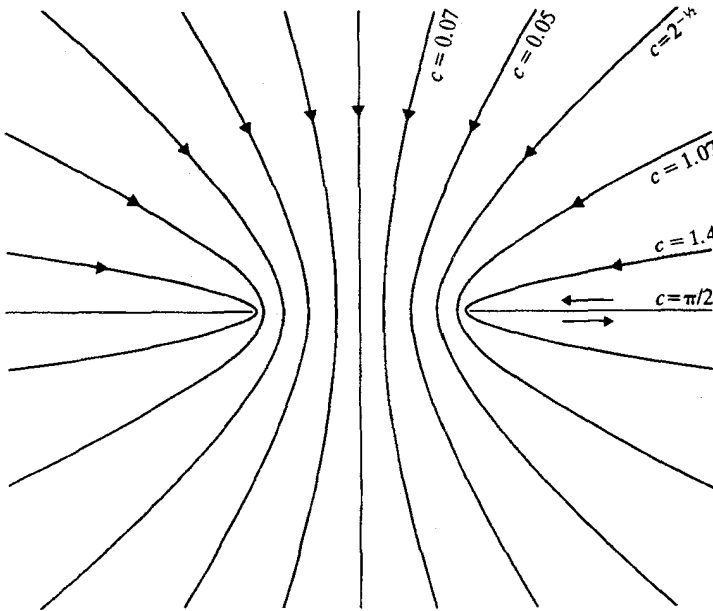
شکل ۲۶.۳

معادلهٔ اخیر معادلهٔ یک هذلولی با کانونها در  $(\pm 1, 0)$  است. اگر  $0 < c < \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه  $\sin c > 0$  و نقطهٔ  $(\sin c, 0)$  روی شاخهٔ سمت راست هذلولی است. اگر  $-\frac{\pi}{4} < c < 0$ ، نقطهٔ  $(\sin c, 0)$  روی شاخهٔ سمت چپ است. بنابراین تصویر خط  $x = c$  از شاخه‌ای از هذلولی است که شامل رأس  $(\sin c, 0)$  می‌باشد. وقتی که  $c \rightarrow \pm \frac{\pi}{4}$ ، هذلولی به یک جفت نیم‌خط  $u < -1$  و  $u > 1$  تبدیل می‌شود که هریک دو بار توصیف می‌شود. با گرفتن این خطوط بعنوان مرز، جریانی از نیمهٔ بالای صفحهٔ  $w$  به نیمهٔ پائینی صفحهٔ  $w$  در طول یک حفره در محور  $u$  ما داریم، همان‌طور که در شکل ۲۶.۴ نشان داده شده است.

سرعت مختلط کار با  $\frac{dz}{dw} = \sec z$  است، که وقتی  $z \rightarrow \pm \frac{\pi}{4}$  ( $u \rightarrow \pm 1$ )،  $\infty$  می‌شود، بنابراین سرعت در لبهٔ حفره  $\infty$  می‌شود. شاید این غیرمنطقی نباشد که جریان را بصورت ازدحامی از مردم تصور کنید که با شتاب از راهرو باریک یک تئاتر بزرگ به سمت در خروجی می‌روند. اگر بتوانید به چنین موقعیتی از بالا نگاه کنید، خطوط جریان، با در نظر گرفتن چگونگی نامطلوب شدن جریان در این حالت، به طرز عجیبی شبیه شکل هستند.

### ۲۶.۳ ترکیب نگاهتها

با یک مسئلهٔ ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید به دنبال خطهای جریان برای یک جریان در نیم‌صفحهٔ بالایی یا محورهای حقیقی منفی و مثبت به عنوان خطوط جریان مختلف  $\psi = 0$  و  $\psi = \pi$  هستیم. در صفر یک نقطهٔ تکین خواهیم داشت. اما اینکه به چه چیزی شبیه است، جای نگرانی نیست. اگر بتوان نگاهت

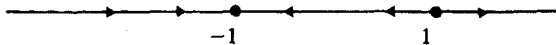


شکل ۲۶.۴

$w = f(z)$  را از نیمه بالای صفحه  $z$  به نوار  $0 < v < \pi$  پیدا کنیم، بطوریکه  $v = \pi$  که با محور حقیقی منفی و  $v = 0$  با محور حقیقی مثبت متناظر شود آنگاه  $\psi = \text{Im } f(z)$  مسئله را حل خواهد کرد.

تمرین ۲۶.۱ نشان دهید  $f(z) = \log z$  دارای شرایط مورد نیاز است.

بنابراین  $\psi(x, y) = \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$  مسئله <sup>۲</sup> را حل می‌کند. خطهای جریان نیم‌خطهایی هستند که از مبدأ خارج می‌شوند. در بخش ۲۴.۲ دیدیم که پتانسیل مختلط  $w = \log \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]$  در نیم‌صفحه بالایی محور حقیقی را بعنوان اجتماعی از خطهای جریان دارد که در شکل ۲۶.۵ مشخص شده است، دارد.



شکل ۲۶.۵

همچنین می‌توانیم این پتانسیل را به صورت ترکیب  $w = \log \zeta$  با  $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$  بدست آوریم. اکنون تبدیلی را که در بخش ۲۶.۲ داشتیم در نظر بگیریم،  $z = \sin s$ ،  $s = \sigma + it$ ، که نیم‌صفحه بالایی صفحه  $z$  را به نیم‌نوار  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ،  $-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}$  در صفحه  $s$  تصویر می‌کند. حالا جریان متفاوتی را در نیم‌نوار در نظر می‌گیریم. خطهای جریان تصاویر وارون خطهای جریان صفحه  $z$  تحت

نگاشت  $z = \sin(\sigma + it) = \sin \sigma \cosh t + i \cos \sigma \sinh t$  است. اما خطهای جریان در صفحه  $z$  عبارتند از خمهای

$$\text{Im} \log \frac{z-1}{z+1} = \text{ثابت}$$

چون

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}$$

قسمت موهومی لگاریتم این تابع عبارتست از

$$\begin{aligned} \tan^{-1} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} &= \tan^{-1} \frac{2 \cos \sigma \sinh t}{\sin^2 \sigma \cosh^2 t + \cos^2 \sigma \sinh^2 t - 1} \\ &= \tan^{-1} \frac{2 \cos \sigma \sinh t}{\sinh^2 t - \cos^2 \sigma} \end{aligned}$$

را به صورت  $\tan \theta = \frac{(\cos \sigma)}{\sinh t}$  تعریف کنید، آنگاه

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cos \sigma \sinh t}{\sinh^2 t - \cos^2 \sigma} = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

و خطهای جریان عبارتند از

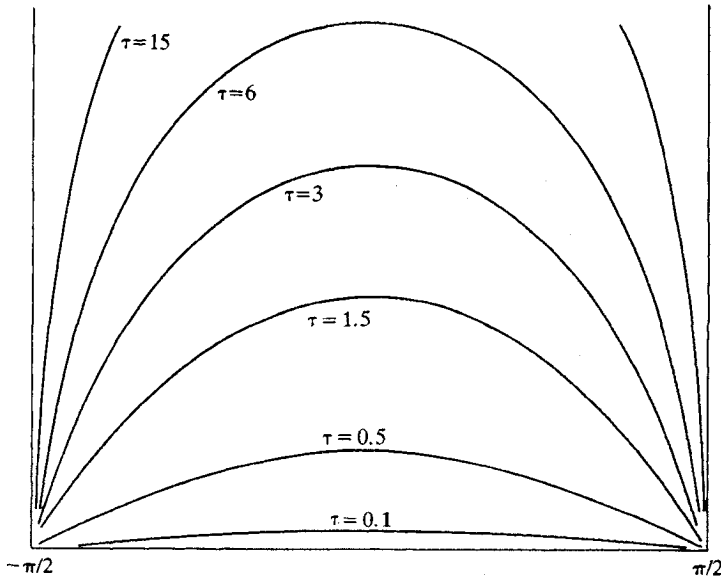
$$\begin{aligned} c = \tan^{-1} \frac{2 \cos \sigma \sinh t}{\sinh^2 t - \cos^2 \sigma} &= \tan^{-1}(2 \tan 2\theta) = 2\theta \\ &= 2 \tan^{-1} \frac{\cos \sigma}{\sinh t} \end{aligned}$$

یا  $t = \sinh^{-1}(\tau \cos \sigma)$  که در آن  $\tau = \cos(\frac{c}{2})$ . برخی از آنها در شکل ۲۶.۶ نشان داده شده‌اند. تبدیلات مویوس اغلب برای یافتن تبدیلی همدیس بین یک شکل ساده و شکلی پیچیده، مفید است. به عنوان مثال نیمه بالایی صفحه  $z$  را به نیمه گوی  $|\zeta| < 1$ ،  $\text{Im} \zeta > 0$  (نیمه بالایی گوی واحد) تصویر می‌کنیم. در بخش ۲۲.۴ دیدیم که  $w = \sqrt{z}$  نیمه بالایی صفحه  $z$  را به ربع اول صفحه  $w$  تصویر می‌کند. بنابراین مسئله ما تصویر کردن ربع صفحه به نیمه گوی می‌باشد. اکنون ربع صفحه و نیمه گوی هر یک توسط دو کمان عمود بر هم از «دایره‌ها» به مفهوم توسعه یافته «دایره یا خط راست» کراندارند و بنابراین می‌توان آنها را توسط یک تبدیل مویوس به یکدیگر تصویر کرد.

فرض کنید ربع اول صفحه  $w$  به نیمه گوی  $|\zeta| < 1$ ،  $\text{Im} \zeta > 0$  تصویر شود. برای یافتن تبدیل مزبور توجه می‌کنیم تبدیل مویوسی که ۱ را به  $\infty$ ، نیمدایره را به نیم خط و تبدیل مویوسی که  $-1$  را به صفر و صفر را به ۱ می‌نگارد، قطر دایره را به قسمت مثبت محور حقیقی تصویر می‌کند. در بخش ۲۵.۲ دیدیم که این تبدیل را می‌توان بصورت یک نسبت ناهمساز نوشت، در این صورت

$$\zeta = \frac{w-1}{1+w} \quad \text{یا} \quad w = \frac{\zeta+1}{1-\zeta}$$





شکل ۲۶.۶

که بسادگی تحقیق می‌شود. بنابراین

$$\zeta = \frac{\sqrt{-z} - 1}{1 + \sqrt{z}}$$

نیم‌صفحه  $z$  را به نیم‌گوی  $\zeta$  تصویر می‌کند.

تمرین ۲۶.۲ تبدیل همدیسی از یک نیم‌گوی به گوی بنویسید.

تمرین ۲۶.۳ تبدیل همدیسی از یک گوی واحد بریده‌شده در طول شعاع از صفر تا ۱ به تمام گوی بنویسید.

تمرین ۲۶.۴ مکمل پاره‌خط  $[-1, 1]$  را به گوی واحد تصویر کنید.

می‌توان مثالهای بسیاری از جریانها را به وسیله ساختن تبدیلات همدیس مثالهایی که قبلاً شناخته‌ایم به وجود آورد، و اگر نتایج مفید بنظر آمدند در کتابی<sup>۴</sup> مرجع جمع‌آوری کرد. مسایل ناحیه‌هایی که پتانسیل آنها مثبت هستند، به آسانی حل می‌شوند. شروع کردن با خطهای جریان مورد نظر و یافتن دنباله‌ای از نگاشتها که آن را از یک جریان یکنواخت حاصل کند، بسیار مشکلتر است. اگر مرز ناحیه یک چندضلعی باشد، تبدیل شوآرتس- کریستوفل (که در این کتاب مورد بحث واقع نشده است) احتمالاً مفید است. سرانجام، روش‌های محاسبه‌ای جدیدی برای تبدیل همدیس عددی که احتمالاً برای بسیاری از مقاصد کاربردی رضایتبخش‌تر از حل پیچیده نظری است وجود دارند.

## یادداشتها:

(۱) نگاشت  $w = \tan^2\left(\frac{\pi z}{4}\right)$  در جدولها بعنوان نگاشتی از داخل سهمی به گوی واحد در صفحه  $w$  آمده است. گوی واحد به سادگی به نیم‌صفحه تصویر می‌شود (بخش ۲۵.۵) و اگر نیم‌صفحه، نیم‌صفحه بالائی صفحه  $s$  باشد، آنگاه  $\zeta = \log s$  این نیم‌صفحه را به نوار  $0 < \text{Im } \zeta < \pi$  تصویر می‌کند.

(۲) می‌توان آن را بطور مستقیم‌تری پیدا کرد، توجه کنید که  $\theta = \arctan \frac{y}{x}$  قسمت موهومی  $\log z$  در نیم‌صفحه بالائی است، بنابراین همساز است و روی محور حقیقی منفی و مثبت،  $\pi$  یا صفر است.

(۳) برای یک مجموعه وسیع از نگاشتهای همدیس، Kober را ببینید.

(۴) فصل ۱۶ کتاب Henrici را ببینید.

## ۲۷. مسایل دیریگله بطور عام

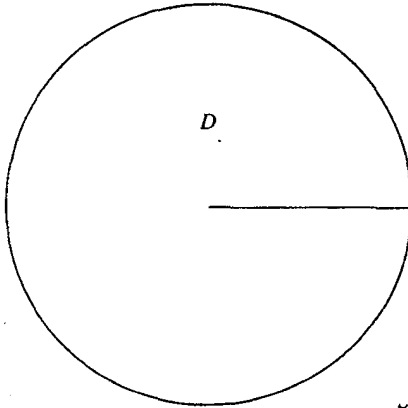
### ۲۷.۱ نگاشتهای بین گوی‌ها و سایر ناحیه‌ها

دیدیم که مسایل دیریگله برای گوی و همچنین برای ناحیه‌هایی که بستر آنها تصاویر همدیس گوی‌هاست<sup>۱</sup> حل می‌شود. در بخش ۲۸، قضیه نگاشت ریمان را ثابت خواهیم کرد، که می‌گوید هر ناحیه همبند ساده با حداقل دو نقطه مرزی بطور همدیس به گوی واحد تصویر می‌شود.

تمرین ۲۷.۱ کدام ناحیه‌های همبند ساده کمتر از دو نقطه مرزی دارند و چرا نمی‌توانیم آنها را بطور همدیس به یک گوی تصویر کنیم.

در نتیجه می‌توان گفت که هر ناحیه همبند ساده با حداقل دو نقطه مرزی بطور همدیس به هر ناحیه دیگری مثلاً نیم‌صفحه تصویر می‌شود.

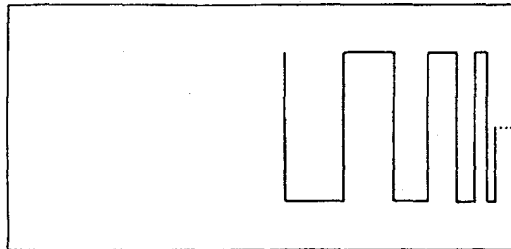
اگر بخواهیم تابعی همساز با مقادیر مرزی یعنی روی یک ناحیه همبند ساده  $D$  ارائه دهیم، می‌توانیم (در اصل)  $D$  را به گوی واحد  $\Delta$  تصویر کرده، مسئله دیریگله متناظر را در  $\Delta$  حل کنیم و برگردیم. برای مسایل دیریگله ساده مانند مثالهایی که کار کردیم این روش مؤثر است. برای مقادیر مرزی پیوسته، در بخش‌های ۲۷.۲ و ۲۷.۳ خاطرنشان خواهیم کرد که چگونه می‌توان ثابت کرد که مسایل دیریگله برای ناحیه‌های همبند ساده حل می‌شود. همچنین آن را می‌توان برای توابع مرزی ناپیوسته نه‌چندان نامأنوس که



شکل ۲۷.۱

در مسایل ساده فیزیکی واقع می‌شوند نیز حل کرد، مشروط بر اینکه همگرایی نقاط ناپیوستگی تابع مرزی را انتظار نداشته باشیم. یک مسئله دیریکله برای ناحیه‌ای مانند  $D$  در شکل ۲۷.۱ اگر بریدگی را به عنوان حد تیغ‌های تیز تصور کنیم معنی قابل قبولی است، در اینجا دو طرف بریدگی باید دارای مقادیر مختلف مرزی باشند، و لذا باید (به نوعی) مجموعه‌های متفاوتی تصور می‌شوند. وضعیت‌هایی مانند این می‌تواند در نظریه<sup>۲</sup> «پایانه‌های اولیه» بحث شود، که در این حالت یک توپولوژی معین می‌شود که در آن نقاط دو طرف بریدگی متفاوت می‌شوند و تناظر یک به یکی بین بستر گوی واحد و بستر  $D$  وجود دارد. همچنین این نظریه از عهده بیشتر انواع مرزی پیچیده‌تر برمی‌آید، مثلاً یک نمونه در شکل ۲۷.۲ مشخص شده که در آن خط سینوسی بر یک بازه متراکم می‌شود.

نواحی و مقادیر مرزی وجود دارند که در آنجا مسئله دیریکله جواب ندارد. بطور مثال گوی محذوف  $0 < |z| < 1$  با  $u(z) = 0$  برای  $|z| = 1$  و  $u(0) = 1$ . اگر جوابی مانند  $u$  وجود داشته باشد، بنا بر قضیه نقاط تکین برداشتنی (بخش ۲۰.۴) باید کراندار باشد و بنا بر قضیه میانگین برای توابع همساز در صفر برابر با صفر است. این نقطه مرزی منفردی است که باعث مشکل می‌شود.



شکل ۲۷.۲

## ۲۷.۲ تابع گرین

فرمول پواسون جواب کم و بیش صریحی از مسئلهٔ دیریکله برای گوی ارائه می‌دهد. چنان که در بخش ۲۰.۳ اشاره کردم می‌توان به چیزی مانند آن برای سایر ناحیه‌ها غیر از گوی‌ها امیدوار بود، که در اینجا خواهیم دید. بحث ما بسیار صوری خواهد بود، صرفاً می‌خواهم ایده‌ای به شما بدهم که چطور انتگرال پواسون می‌تواند تعمیم بیابد.

تابع گرین<sup>۲</sup> برای  $D$  با «قطب»  $z_0$  (به کاربرد جدید اصطلاح «قطب» توجه کنید) تابعی به صورت  $g(z, z_0) = -\log r + g_1(z)$  است که در آن  $r = |z - z_0|$ ،  $g_1$  تابعی همساز روی  $D$  با مقادیر مرزی  $\log r$  روی  $D$  است، مرز  $\partial D$  به اندازهٔ کافی هموار، و مشتق قائم  $g$  روی  $\partial D$  وجود دارد. بنابراین  $g$  با مقادیر مرزی صفر یک جواب مسئله دیریکله می‌باشد و چون در  $z_0$  همساز نیست هم‌ارز با صفر نمی‌شود. اگر  $D$  کراندار باشد، تابع گرین در صورت وجود منحصر بفرد است، زیرا تفاضل دو تابع گرین با همان قطب در  $D$  همساز با مقادیر مرزی صفر خواهد بود.

قبل از سعی در ساختن  $g$  بینیم اگر آن را می‌ساختیم به چه کاری می‌آمد. در اینجا باید قضیهٔ استوکس در صفحه را بدانید، در غیر این صورت قضیهٔ گرین را که در بخش ۲.۳ دیدیم به یاد آورید. بنا به آن قضیه، برای هر ناحیهٔ همبند ساده  $D$  با مرز به اندازهٔ کافی هموار  $C$  داریم

$$\iint_D \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) ds = \int_C (p dy - q dx)$$

فرض کنید توابع  $u$  و  $v$  داده شده باشند، قرار می‌دهیم  $p = u \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$  و  $q = u \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ . در این صورت داریم

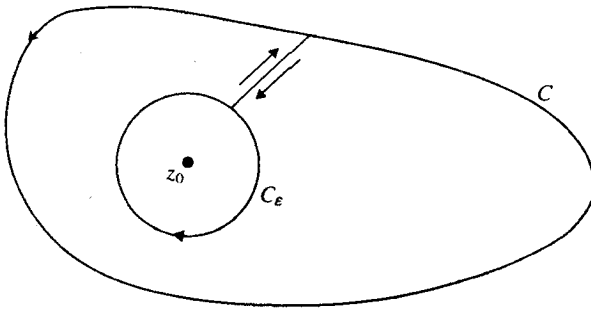
$$\iint_D (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) ds = \int_C u \left( \frac{\partial v}{\partial x} dy - \frac{\partial v}{\partial y} dx \right) = \int_C u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} ds$$

که در آن  $\mathbf{n}$  قائم بر  $C$  و به سمت خارج است، اگر  $u$  و  $v$  را جابجا و کم کنیم، داریم:

$$\iint_D (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) ds = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$

اکنون فرض کنید  $u$  همساز باشد،  $v = g(z, z_0)$ ، و معادلهٔ اخیر را در  $D$  برای یک گوی کوچک به شعاع  $\varepsilon$  و مرز  $C_\varepsilon$  حول  $z_0$  محذوف و یک برش برای ساختن یک ناحیهٔ همبند ساده جدید بکار بگیرید: شکل ۲۷.۳ را ببینید. طرف چپ حذف می‌شود، لذا انتگرال در طول رفت و برگشت روی برش محاسبه می‌شود و داریم

$$\int_C u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{C_\varepsilon} \left( u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds$$



شکل ۲۷.۳

(انتگرال در طول  $C_\epsilon$ ، در جهت مثبت). چون  $g(z, z_0) = -\log r + g_1(z)$ ، که در آن  $r = |z - z_0|$  داریم

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{\epsilon} + \frac{\partial g_1}{\partial r}, \quad g = -\log \epsilon + g_1$$

$$\int_C u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_0^{2\pi} \epsilon \left\{ u \left( -\frac{1}{\epsilon} + \frac{\partial g_1}{\partial r} \right) + (\log \epsilon - g_1) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} d\theta$$

چون  $\frac{\partial g_1}{\partial r}$  و  $g_1$  و  $\frac{\partial u}{\partial r}$  همگی در  $z_0$  پیوسته هستند و  $\log \epsilon \rightarrow 0$  و  $\epsilon \rightarrow 0$ ، بدست می‌آوریم

$$\int_C u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = -2\pi u(z_0)$$

بنابراین

$$u(z_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds$$

یک نمایش برای تابع همساز  $u$  در درون  $C$  ارائه می‌دهد که در آن  $s$  طول کمان روی  $C$  است. یعنی تابع گرین، یک نمایش برای تابع همساز در  $D$  برحسب مقادیرش روی مرز  $D$  ارائه می‌دهد (فرض می‌کنیم تابع گرین برای  $D$  کار می‌کند که یقیناً این حالت محقق می‌شود اگر  $C$  از نوع خم‌هایی باشد که در جای دیگری در نظر می‌گیریم) مشابه بخش ۲۰.۳ اگر با تابع مرزی شروع کنیم باید بتوانیم تابع همساز با آن مقادیر مرزی بسازیم.

حالا که دیدیم از تابع گرین چگونه می‌توان استفاده کرد، اکنون می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان آن را بدست آورد. فرض کنید بدانیم تابع  $f$ ، ناحیه  $D$  را به دایره واحد می‌نگارد که  $z$  را به صفر تصویر می‌کند. (بر اساس قضیهٔ ریمان اگر  $D$  همبند ساده باشد ولی تمام صفحه نباشد چنین تابعی موجود است، بخش ۲۸ را ببینید). ادعا می‌کنیم که  $-\log |f(z)|$  تابع گرین در  $D$  با قطب  $z_0$  است، به شرطی که  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}$  روی  $\partial D$  موجود باشد.

برای اثبات فرض کنید در یک همسایگی  $z$ .

$$f(z) = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

می‌دانیم  $a_1 \neq 0$ ، زیرا نگاشت همدیس است. چون  $f(z) \neq 0$ ، برای  $z \neq z_0$  (نگاشت یک به یک است). داریم

$$-\log |f(z)| = -\log r + (\text{تابع همساز})$$

وقتی  $\partial D \rightarrow z$ ،  $|f(z)| \rightarrow 1$  و  $\log |f(z)| \rightarrow 0$  بنابراین  $-\log |f(z)|$  خواص تابع گرین را دارد و لذا تابع گرین است.

اثبات عکس آن مشکل‌تر است، یعنی، اگر بدانیم تابع گرین  $g$  موجود است می‌توانیم نگاشت را بسازیم؛ بعد می‌توانیم مزدوج همساز  $h$  را برای  $g$  بسازیم؛ و  $w = \exp(-g - ih)$  نگاشت مورد نظر است. وجود تابع گرین و در نتیجه وجود تابع نگاشت ابتدا در مسائل فیزیکی واضح تلقی می‌شد: تابع گرین، پتانسیل الکترواستاتیکی یک بار ذره‌ای در  $z$  با وجود یک هادی متصل در طول  $C$  است.

### ۲۷.۳ هسته پواسون از یک تابع گرین

تاکنون باید حدس زده باشید که هسته پواسون درست  $(2\pi)^{-1}$  برابر منفی مشتق قائم تابع گرین برای گوی واحد است. از تمرین ۱.۲۲ یا ۲۵.۴ نتیجه می‌شود که

$$w = \frac{z - z_0}{z\bar{z}_0 - 1}$$

گوی واحد را به گوی واحد و  $z$  را به صفر تصویر می‌کند و لذا

$$g(z, z_0) = \text{Re} \log \frac{\bar{z}_0 z - 1}{z - z_0}$$

لگاریتم را به صورت  $\log(\bar{z}_0 z - 1) - \log(z - z_0)$  بنویسید و قرار دهید  $z = Re^{i\varphi}$  و  $z_0 = re^{i\theta}$ . از نسبت به  $R$  مشتق بگیرید و فرض کنید  $R \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 1} \left\{ \frac{(\frac{\partial}{\partial R})(\bar{z}_0 R e^{i\varphi} - 1)}{\bar{z}_0 z - 1} - \frac{(\frac{\partial}{\partial R})(R e^{i\varphi} - z_0)}{z - z_0} \right\} &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{z_0 e^{i\varphi}}{\bar{z}_0 z - 1} - \frac{e^{i\varphi}}{z - z_0} \\ &= \frac{r e^{i(\varphi - \theta)}}{r e^{i(\varphi - \theta)} - 1} - \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - r e^{i\theta}} \\ &= \frac{r}{r - e^{i(\theta - \varphi)}} - \frac{1}{1 - r e^{i(\theta - \varphi)}} \end{aligned}$$

بنابراین قسمت حقیقی آن عبارت است از:

$$\frac{1}{2}r \left\{ \frac{1}{r - e^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{1}{r - e^{-i(\theta-\varphi)}} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - re^{i(\theta-\varphi)}} + \frac{1}{1 - re^{-i(\theta-\varphi)}} \right\}$$

$$= \frac{r^2 - 1}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}$$

حالا از آنچه درباره نگاشتهای همدیس می‌دانیم نتیجه می‌شود که تابع گرین  $D_z$  با نگاشت  $D_w$  تابع گرین  $D_w$  را به روی  $D_w$  می‌نگارد که قطب‌ها را متناظر می‌کند. بنابراین اگر تابع نگاشت از گوی  $D$  را بشناسیم و آن به اندازه کافی روی  $|z| = 1$  هموار باشد، می‌توانیم تابع گرین  $D$  را پیدا کنیم و مسئله دیریکله را برای  $D$  حل کنیم چون مسئله دیریکله برای گوی را می‌توانیم حل کنیم. این ممکن است مدت زمانی را که ما برای مسائل دیریکله روی گوی صرف کرده‌ایم، توجیه کند.

تمرین ۲۷.۲ هسته پواسون برای نیم‌صفحه بالایی را پیدا کنید.<sup>۴</sup>

## یادداشتها:

(۱) به طور دقیقتر در بین ناحیه‌های بسته، به آنهایی نیاز داریم که تصاویر همدیس گوی‌ها تحت نگاشت‌های پیوسته و یک به یک هستند.

(۲) برای مثال به Collingwood و Lohwater مراجعه کنید.

(۳) اغلب کتابها هنوز می‌گویند «تابع گرین»، اما دیگر نمی‌گویند «سریهای فوریه». با Jackson، صفحه ۸ مقایسه کنید.

(۴) برای بحثی از جنبه‌های مختلف به

R. Lange, and R.A Walsh, "A Heuristic for the Poisson Integral for the Half Plane and Some Caveats," *Amer. Mat. Monthly* 92 (1985): 356-358

مراجعه کنید. برای بحث بیشتر در مورد مسائل دیریکله، فصل ۱۵ کتاب Henrici را ببینید.

## ۲۸. قضیه نگاشت ریمان

### ۲۸.۱ صورتبندی و طرح اثبات

قضیه نگاشت بیان می‌کند که اگر  $D$  یک ناحیه همبند ساده در صفحه توسعه یافته باشد که مرزش بیش از یک نقطه دارد، آنگاه تابع تحلیلی و یک به یک  $f$  در  $D$  وجود دارد که  $D$  را بر روی گوی واحد  $|w| < 1$  می‌نگارد.

این قضیه ساده‌ای نیست. ایدهٔ راهنما این است که چون به تابعی که خصوصاً تحلیلی، یک به یک و کراندار در  $D$  باشد نیاز داریم، با خانوادهٔ همهٔ این‌گونه توابع شروع می‌کنیم و سعی می‌کنیم آنقدر از آن حذف کنیم که دقیقاً شامل تابع مورد نظر باشد. در ابتدا توابع را با شرط  $f(c) = 0$  که در آن  $c$  نقطه‌ای در  $D$  است به صورت نرمال درمی‌آوریم، چون باید نقطه‌ای از  $D$  به صفر تصویر شود. هر تابع،  $D$  را به مجموعه‌ای که در یک گوی به مرکز صفر واقع می‌شود تصویر می‌کند. بعلاوه با فرض  $f'(c) = 1$ ، توابع را نرمال‌تر می‌کنیم و سپس به دنبال تابعی می‌گردیم (اگر موجود باشد) که  $D$  را به کوچکترین گوی ممکن تصویر کند. بنظر منطقی می‌آید که کوچکترین گوی موجود باشد، چون در غیر این صورت باید یک تابع حدی داشته باشیم که  $D$  را به نقطهٔ صفر تصویر می‌کند. همچنان که خواهیم دید، این غیرممکن است زیرا  $f'(c) \neq 0$ . بعد از میزان قابل ملاحظه‌ای کار، روشن خواهد شد که تصویر یعنی  $f(d)$  باید تمام کوچکترین گوی باشد. زمانی که  $D$  بر روی گویی نگاشته شود (بطور بدیهی) می‌تواند بر روی گوی واحد نیز نگاشته شود.

در اینجا به تعدادی از قضایا و تعریفهای اولیه نیاز داریم که در جاهای دیگر نیز مفید هستند.

## ۲۸.۲ خانواده‌های نرمال و یکسان پیوستگی

خانوادهٔ  $\mathcal{F}$  (نه لزوماً شمارش‌پذیر) از توابع  $f$  را نرمال در ناحیهٔ  $D$  می‌گوئیم اگر از هر دنباله از توابع در  $\mathcal{F}$ ، بتوان زیردنبالهٔ همگرای یکنواختی روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ  $D$  (نه لزوماً به عضوی از  $\mathcal{F}$ ) تشکیل داد.<sup>(۱)</sup>

در متون دیگر، خانواده نرمال، دنباله‌ای فشرده نامیده می‌شود، اما در آنالیز مختلط اصطلاح «نرمال» مرسوم است. ما فقط به خانوادهٔ نرمال از توابع تحلیلی علاقمندیم، (گاهی بهتر است فرض کنیم «نرمال»، امکان این را که تابع حدی تابع ثابت  $\infty$  باشد نیز دربر می‌گیرد).

همچنین باید ویژگی را که یکسان پیوستگی نامیده می‌شود تعریف کنیم. یک بیان اجمالی این است که خانوادهٔ  $\mathcal{F}$  از توابع پیوسته روی  $D$  یکسان پیوسته نامیده می‌شود اگر تعریف پیوستگی روی  $D$  و روی خانوادهٔ  $\mathcal{F}$  بطور یکنواخت برقرار شود. به عبارت دقیق‌تر، برای هر  $\varepsilon > 0$  داده‌شده  $\delta > 0$  ای موجود است بطوریکه  $\varepsilon > |f(z_1) - f(z_2)|$  هرگاه  $|z_1 - z_2| < \delta$ ، به ازای هر  $z_1, z_2 \in D$  و هر  $f$  در  $\mathcal{F}$ ، که در آن  $\delta$  مستقل از  $f$  و  $z_1$  و  $z_2$  است.

اولین قضیه‌ای که لازم داریم عبارت است از

قضیهٔ آرتسلا- آسکولی: یکسان پیوستگی و کراندار یکنواخت خانواده‌ای از توابع پیوسته شرط کافی برای نرمال بودن خانواده است.

قبل از ارائهٔ اثبات قضیهٔ آرتسلا- آسکولی می‌خواهیم ببینیم چرا این قضیه با اثبات قضیهٔ نگاشت ریمان مرتبط است. برای اثبات قضیهٔ زیر را لازم داریم:



قضیه مُنتل: هر خانواده از توابع تحلیلی و کراندار یکنواخت در ناحیه  $D$ ، لزوماً در  $D$  نرمال هستند.

اگر ثابت کنیم هر چنین خانواده‌ای روی زیرمجموعه‌های فشرده  $D'$  از  $D$  یکسان پیوسته است، با توجه به قضیه آرتسلا-آسکولی این قضیه نتیجه می‌شود.

هرگاه  $D'$  مجموعه ساده‌ای باشد مثلاً یک گوی بسته، این قضیه یکسان پیوستگی از فرمول انتگرال کوشی به راحتی نتیجه می‌شود. هرگاه  $D'$  یک گوی بسته است فرض کنید  $|f(z)| \leq M$  برای هر  $f \in \mathcal{F}$  و  $z \in D'$ . فاصله  $D'$  از  $\partial D$  دارای کران پائین مثبت  $\delta$  است، زیرا  $\partial D$  بسته و  $D'$  فشرده است. اگر  $z_1$  و  $z_2$  در  $D'$  و  $L$  پاره‌خط واصل آنها باشد، آنگاه همه نقاط  $L$  حداقل فاصله  $\delta$  از  $\partial D$  دارند. با انتگرال‌گیری در امتداد  $L$  خواهیم داشت.

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_{z_1}^{z_2} f'(w) dw \right| \leq |z_1 - z_2| \sup_{w \in L} |f'(w)|$$

بنا به فرمول کوشی

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)}{(t-w)^2} dt$$

که در آن  $\gamma$  مرز  $D''$  که  $D' \subset D''$  و دارای طول  $\lambda$  است. چون فاصله بین مرز  $D$  و  $\gamma$  حداقل برابر با  $\delta$  است

$$|f'(w)| \leq \frac{M\lambda}{2\pi\delta^2}$$

در نتیجه  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{M\lambda|z_1 - z_2|}{2\pi\delta^2}$  بطور یکنواخت برای  $z_1$  و  $z_2$  در  $D''$  و  $f$  در  $\mathcal{F}$ . اکنون مجموعه فشرده کلی  $D'$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $\sigma$  کوتاهترین فاصله نقاط  $D'$  از  $\partial D$  باشد (مجدداً،  $\sigma$  موجود است زیرا  $D'$  فشرده و  $\partial D$  بسته است) می‌توانیم هر نقطه  $z \in D'$  را با گوی  $\Delta$  به قطر  $\frac{\sigma}{4}$  (مرکز  $z$ ) با  $\Delta \subset D$ ، پوشانیم. بنا به ویژگی کلی مجموعه‌های فشرده،  $\varepsilon > 0$  وجود دارد که برای هر  $z_1$  در  $D'$ ، گوی  $\Delta$  چنان موجود است که هر نقطه از گوی  $d$  حول  $z_1$  و شعاع  $\delta$  در  $\Delta$  واقع است. اگر  $z_2$  در  $d$  باشد، هر نقطه از پاره‌خط  $L$  واصل بین نقاط  $z_1$  و  $z_2$  در  $d$  است. استدلال اخیر را تکرار کنید.

در اینجا، اگر بخواهید می‌توانید به بخش ۲۸.۳ مراجعه کنید و اثبات قضیه نگاشت ریمان را بخوانید. اکنون قضیه آرتسلا-آسکولی را ثابت می‌کنیم. در مرحله اول نشان می‌دهیم که اگر  $\mathcal{F}$  یک خانواده بی‌پایان از توابع باشد که بطور یکنواخت روی  $D$  کراندارند و  $\{z_n\}$  یک دنباله شمارش‌پذیر از نقاط  $D$  باشد، آنگاه دنباله  $\{f_k\}$  از توابع در  $\mathcal{F}$  وجود دارد که  $\{f_k\}$  در هر نقطه از  $\{z_n\}$  همگرا است. چون  $\{f(z_1)\}$  به ازای  $f \in \mathcal{F}$  یک مجموعه کراندار از اعداد مختلط است، لذا شامل یک دنباله همگرا  $\{f_{n'}(z_1)\}$  است. یک زیردنباله دیگر  $\{f_{n''}(z_2)\}$  همگرا است (و البته  $\{f_{n''}(z_1)\}$  نیز همگرا

است). با ادامه این روند، دنباله همگرای  $\{f_{n(m)}(z_k)\}$  برای  $k = 1, 2, \dots, m$  و هر  $m$  را خواهیم داشت. اکنون بنا به روش قطری کانتور، دنباله  $\{f_n(z)\} = \{f_k(z)\}$  را تشکیل می‌دهیم که شامل  $n$ -امین عبارت در  $n$ -امین دنباله است. این دنباله در  $z = z_m$  برای هر  $m$  همگرا است.

حالا فرض کنید  $D'$  یک زیرمجموعه فشرده از  $D$  باشد.  $D'$  را با شبکه‌ای از مربعهای با اندازه‌های به دلخواه کوچک، مثلاً با رسم خطهای موازی محورهای مختصات می‌پوشانیم. گوشه‌های این مربعها که در  $D'$  هستند، تشکیل یک مجموعه شمارش‌پذیر مانند  $\{z_n\}$  را می‌دهد. چنان که اکنون نشان دادیم، دنباله  $\{f_k\}$  از اعضای  $\mathcal{F}$  وجود دارد که در همه نقاط  $z_n$  همگرا است. می‌خواهیم با استفاده از ویژگی یکسان پیوستگی ثابت کنیم که  $\{f_k\}$  در هر نقطه دیگری از  $D'$  نیز همگرا است.

فرض کنید  $\varepsilon > 0$  مفروض باشد بنا به تعریف یکسان پیوستگی  $\delta > 0$  وجود دارد که اگر  $|z' - z''| < \delta$  و  $|z' - z''| < \delta$  باشد آنگاه  $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$  باشد. چون  $D'$  کراندار است، مجموعه با پایان از مربعها با قطری کمتر از  $\frac{\delta}{\sqrt{4}}$  در شبکه وجود دارند که  $D'$  را می‌پوشاند؛ فرض کنید  $S$  مجموعه گوشه‌های این مربعها باشد. دنباله  $\{f_m(z)\}$  روی  $S$  همگرای یکنواخت است، زیرا  $S$  یک زیرمجموعه با پایان از  $\{z_k\}$  است. یعنی به ازای هر  $\varepsilon > 0$  داده‌شده،  $N$ -ای وجود دارد که به ازای هر  $z_k$  در  $S$ ،

$$|f_m(z_k) - f_{m'}(z_k)| < \varepsilon$$

اگر  $m, m' > N$  اما اگر  $z$  هر نقطه در  $D'$  باشد،  $z_k \in S$  با  $|z - z_k| < \delta$  وجود دارد و لذا بنا به تعریف  $\delta$ ، (برای همه  $m$  ها)

$$|f_m(z) - f_m(z_k)| < \varepsilon$$

با ترکیب دو نامعادله اخیر، داریم

$$|f_m(z) - f_{m'}(z)| \leq |f_m(z) - f_m(z_k)| + |f_m(z_k) - f_{m'}(z_k)| + |f_{m'}(z_k) - f_{m'}(z)| < 3\varepsilon$$

بنابراین دنباله  $\{f_n\}$  را پیدا کرده‌ایم که همگرای یکنواخت در  $D'$  است.

تمرین ۲۸.۱ علاوه نشان دهید که دنباله تنهای  $\{f_n\}$  که همگرا در هر  $z$  در  $D$ ، و همگرای یکنواخت در  $D'$  باشد وجود دارد.

## ۲۸.۳ اثبات

حالا مطالبی را که برای اثبات قضیه نگاشت ریمان لازم داریم در اختیار ماست. دسته  $H$  را که متشکل از توابعی تحلیلی، کراندار و یک به یک در  $D$  است تعریف می‌کنیم.  $H$  غیرتهی است. این مطلب را

می‌توانیم به صورت زیر بررسی کنیم. اولاً، اگر مکمل  $D$  دربرگیرنده یک گوی باشد، مرکز آن را نقطه  $p$  بگیرید، آنگاه  $\frac{1}{z-p}$  کراندار و یک به یک و بنابراین در  $H$  است. در غیر این صورت بنا به فرض  $D$  شامل حداقل دو نقطه مرزی است. یکی از نقاط مرزی باید با پایان باشد. اگر دیگری در  $\infty$  بود (و نقطه دیگری وجود نداشت)  $D$  باید صفحه محذوف باشد که همبند ساده نیست. لذا فرض می‌کنیم که دو نقطه مرزی  $a$  و  $b$  وجود دارند. اکنون می‌توانیم یک شاخه تحلیلی  $B(z)$  از  $\sqrt{(z-a)/(z-b)}$  را انتخاب کنیم (این جایی است که از همبندی ساده  $D$  استفاده می‌کنیم). برای تعریف  $B$ ، ابتدا یک شاخه از  $\log(z-a)$  را انتخاب کنید که این امکان‌پذیر است زیرا  $D$  همبند ساده است و  $a$  در  $D$  نیست. به همین نحو شاخه‌ای از  $\log(z-b)$  را بیابید. آنگاه  $B(z) = \exp\{\frac{1}{2}[\log(z-a) - \log(z-b)]\}$ .  $B$  یک به یک است زیرا تبدیل مویوس  $w = \frac{z-a}{z-b}$  یک به یک است. اگر  $w_1 \neq 0$ ،  $\infty$  نقطه‌ای در تصویر  $D_1$  از  $D$  تحت  $B$  است، یک همسایگی از  $w_1$  در  $D_1$  قرار می‌گیرد و بنابراین یک همسایگی  $-w_1$  در  $D_1$  واقع نمی‌گردد. لذا مکمل  $D$  شامل یک گوی به مرکز نقطه‌ای مانند  $d$  می‌باشد و بنابراین بنا به حالت بررسی‌شده در بالا  $\frac{1}{B-d}$  به  $H$  تعلق دارد.

حالا فرض کنید  $c$  نقطه‌ای در  $D$  باشد.  $M$  را دسته توابع  $f$  که در  $D$  تحلیلی، کراندار و یک به یک هستند و  $f(c) = 0$  و  $f'(c) = 1$  در نظر بگیرید. دسته  $M$  غیرتهی است زیرا می‌دانیم که توابع تحلیلی، کراندار و یک به یک  $g$  در  $D$  وجود دارند؛ چون آنها یک به یک هستند،  $g'(z) \neq 0$  در  $D$ ؛ لذا  $\frac{g(z) - g(c)}{g'(c)}$  به  $M$  تعلق دارد.

هر  $f$  در  $M$ ،  $c$  را به صفر و  $D$  را به ناحیه‌ای مانند  $D'$  تصویر می‌کند و  $m_f = \sum_{z \in D} |f(z)|$  با پایان است. فرض کنید  $s = \inf m_f$  برای  $f$  در  $M$ . بنا به تعریف بزرگترین کران پائین، توابع  $f_n$  در  $M$  وجود دارند که  $\sum_{z \in D} |f_n(z)| \leq s + \frac{1}{n}$ . توابع  $f_n$  در  $D$  بطور یکنواخت کراندار (بوسیله  $s+1$ ) هستند و بنابراین یک خانواده نرمال تشکیل می‌دهند. لذا زیردنباله  $\{f_{n_k}\}$  از  $\{f_n\}$  دارای تابع حدی  $f$  با  $f(c) = 0$  می‌باشد. چون همگرایی روی زیرمجموعه‌های فشرده  $D$ ، یکنواخت است، داریم  $f'(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_{n_k}(c) = 1$  (بنا به قضیه‌ای درباره مشتق‌گیری دنباله‌های همگرایی یکنواخت، در بخش ۷.۴). چون  $|f_n(z)| \leq s + \frac{1}{n}$ ، داریم  $|f(z)| \leq s$ . اما  $f(z) \not\equiv 0$ ، چون  $f'(c) \neq 0$ . بنابراین  $s > 0$ . سرانجام  $f$  بنا به قضیه هرویتس (تمرین ۱۳.۴) یک به یک است. در نتیجه  $f$  به  $M$  تعلق دارد و  $D$  را به زیرمجموعه‌ای از گوی  $|z| < s$  تصویر می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که  $f$  در واقع  $D$  را به تمام گوی  $S$  تصویر می‌کند. برای انجام این کار فرض می‌کنیم که تصویر  $D$  یک زیرمجموعه سره از  $S$  باشد و تابع جدیدی می‌سازیم که  $D$  را به گویی که هنوز کوچکتر از  $D$  است تصویر کند، که با تعریف  $S$  متناقض می‌شود.

لذا فرض کنید  $f$ ،  $D$  را به زیرمجموعه‌ای سره از  $S$  بنگارد. تصویر  $D$  دارای نقطه مرزی  $b$  در  $S$  است، باید  $b \neq 0$ ، چون  $c$  که یک نقطه داخلی  $D$  است، به صفر تصویر می‌شود؛ لذا بنا به قضیه نگاهت باز (بخش ۱۲.۴) تصویرش یک نقطه داخلی در تصویر  $D$  است.

حالا فرض کنید  $w = f(z)$  و بگیرید

$$w_1 = s \left( \frac{s(w-b)}{s^2 - \bar{b}w} \right)^{\frac{1}{r}}$$

چون  $w \neq b$  هرگاه  $z \in D$ ، و نقطه متقارن  $\frac{s^2}{b}$  بیرون  $S$  است، داریم  $|w_1| < s$  و چنان که در بالا برای  $B(z)$  داشتیم، می‌بینیم که یک شاخه تحلیلی از ریشه دوم وجود دارد (می‌توانیم شاخه دیگر را انتخاب کنیم) چون تبدیل مویبوس یک تابع یک به یک است،  $w_1$  یک به یک می‌شود، و ریشه دوم تصویر  $S$  را کوچکتر می‌کند. اما وقتی  $z = c$  و  $w = 0$ ،  $w_1$  صفر نیست بنابراین  $w_1$  در  $M$  نیست (وقتی به عنوان تابعی از  $z$  تلقی می‌شود). می‌توانیم با در نظر گرفتن  $w_1$  به عنوان یک تبدیل مویبوس  $c$  را به صفر ببریم بطوریکه بدست آوریم

$$w_2 = \frac{s^2[w_1 - w_1(0)]}{s^2 - w_1(0)w_1}$$

اگر  $\frac{dw_2}{dz}$  در  $z = c$  برابر با یک نباشد با تقسیم کردن بر آن بدست می‌آوریم

$$w_3 = \frac{w_2}{\left(\frac{dw_2}{dz}\right)_{z=c}}$$

لذا  $w_3$  متعلق به  $M$  می‌شود.

حالا  $\frac{dw_3}{dz}$  را در  $z = c$  محاسبه می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم در  $z = c$ ،  $\left|\frac{dw_3}{dz}\right| > 1$  و در نتیجه چون  $|w_3| \leq s$  و علاوه  $m_{w_3} < s$ ؛ این با تعریف  $s$  متناقض است. نتیجه می‌گیریم که  $f$  ناحیه  $D$  را بر روی  $S$  تصویر می‌کند و از قبل می‌دانیم که چگونه  $S$  را بر روی  $\Delta$  تصویر کنیم. در اینجا محاسبات را می‌آوریم.

$$w_1(0) = s^{\frac{1}{r}}(-b)^{\frac{1}{r}} \quad \text{و} \quad z = c \quad \frac{dw}{dz} = 1$$

بنابراین

$$\left.\frac{dw_1}{dz}\right|_{z=c} = \left.\frac{dw_1}{dw}\right|_{w=0} = \frac{1}{r} s^{-\frac{r}{r}} (-b)^{-\frac{1}{r}} (s^2 - |b|^2)^{\frac{1}{r}}$$

$$\left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{w=0} = s^2 \frac{s^2 - |w_1(0)|^2}{(s^2 - |w_1(0)|)^2} = \frac{s^2}{s^2 - |b|^2}$$

$$\left.\frac{dw_3}{dz}\right|_{w=0} = \left(\frac{dw_2}{dw_1} \cdot \frac{dw_1}{dw}\right)_{w=0}$$

$$= \frac{1}{r} s^{-\frac{r}{r}} (-b)^{-\frac{1}{r}} (s^2 - |b|^2)^{\frac{1}{r}} \cdot \frac{s^2}{s(s - |b|)}$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{-b}} \frac{s + |b|}{s^{\frac{1}{r}}}$$

$$\left|\frac{dw_3}{dz}\right|_{w=0} = \frac{s + |b|}{r(s|b|)^{\frac{1}{r}}} > 1$$

زیرا

$$s + |b| - 2(s|b|)^{\frac{1}{2}} = (s^{\frac{1}{2}} - |b|^{\frac{1}{2}})^2 > 0$$

## ۲۸.۴ کاربردهای از خانواده‌های نرمال

از قضیهٔ مُنتل می‌توانیم برای اثبات بسیاری از نتایج مفید استفاده کنیم. دو تا از آنها را اینجا می‌آوریم.

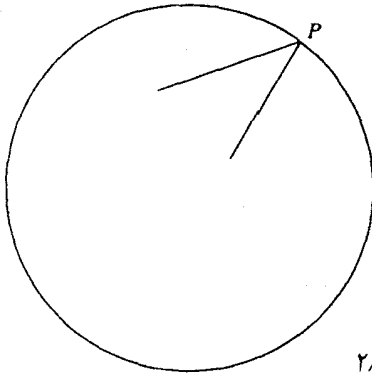
اولین کاربرد صورتبندی دقیق این اصل است که همگرایی روی یک زیرمجموعهٔ به اندازهٔ کافی بزرگ در ناحیهٔ  $D$ ، همگرایی روی همهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ  $D$  را موجب می‌شود. ثابت می‌کنیم که:

**قضیهٔ ویتالی:** فرض کنید توابع  $f_n$  در ناحیهٔ  $D$  تحلیلی و کراندار یکنواخت و  $\{f_n\}$  روی زیرمجموعهٔ  $S$  از  $D$  که دارای نقطهٔ حدی  $p$  در  $D$  است (درون نه روی مرز) همگرا باشند. در این صورت  $\{f_n\}$  روی هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ  $D$  از همگرایی یکنواخت است.

توجه کنید که  $S$  نباید خیلی بزرگ باشد فقط لازم است که یک زیرمجموعهٔ بی‌پایان از یک زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از  $D$  باشد.

دنبالهٔ  $\{f_n\}$ ، بنا به قضیهٔ مُنتل، نرمال است و لذا دارای یک زیردنباله به طور یکنواخت همگرا روی هر زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از  $D$ ، به تابع تحلیلی  $f$  (تمرین ۲۸.۱) می‌باشد. ادعا می‌کنیم که در واقع  $f_n \rightarrow f$  بطور یکنواخت روی هر زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از  $D$ ، در غیر این صورت باید یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ بی‌پایان  $E$  از  $D$  که  $\{f_n\}$  روی آن همگرای یکنواخت نیست موجود باشد. این بدان معنا خواهد بود که برای  $\delta > 0$  زیردنبالهٔ  $\{g_n\}$  از  $\{f_n\}$  وجود دارد که  $\sup_E |g_n - f| \geq \delta$  به ازای هر  $n$ . (با صورتبندی دوم همگرایی یکنواخت در بخش ۷.۴ مقایسه کنید). اما  $\{g_n\}$  یک خانوادهٔ نرمال نیز است، بنابراین یک زیردنباله از  $\{g_n\}$  روی  $D$  به تابع تحلیلی  $g$  همگرا است، و لذا  $f = g$  روی  $S$ . چون  $S$  دارای یک نقطهٔ حدی در  $D$  است همه جا در  $D$  داریم  $f = g$  (ریشه‌های تفاضل، منفردند مگر تفاضل برابر با صفر باشد). (این همان جایی است که همبندی  $D$  اساسی است). این تناقض انتخاب  $\{g_n\}$  نشان می‌دهد که در واقع  $f_n$  به  $f$  همگرا<sup>۲</sup> است.

بعنوان کاربردی دیگر، این اصل کلی را نشان می‌دهیم که (به طور غیرصوری) اگر  $f$  در  $D$  تحلیلی و کراندار و  $f(z)$  در امتداد کمان  $A$  که به نقطهٔ مرزی  $p$  از  $D$  میل می‌کند به حد  $L$  نزدیک شود، آنگاه  $f \rightarrow L$  وقتی که  $z \rightarrow p$  در طول همه کمانهای دیگری که به اندازهٔ کافی به  $A$  نزدیکند. خصوصاً اگر  $D$  نیم‌نوار مثلاً  $x > 0$ ،  $a < y < b$ ، شامل محور حقیقی مثبت باشد و  $f$  تحلیلی و کراندار در  $D$  (با پایان  $L$ )  $f(x) \rightarrow L$  وقتی که  $x \rightarrow \infty$ ، آنگاه برای  $a + c < y < b - c$  و  $0 < c < b - a$   $f(x) \rightarrow L$  بطور یکنواخت.



شکل ۲۸.۱

اثبات به این ایده برمی‌گردد که اگر  $n$  عددی صحیح مثبت باشد آنگاه  $f(z+n)$  در بسیاری از ویژگیها با  $f(z)$  یکسان است. فرض کنید توابع  $f_n$  با  $f_n(z) = f(z+n)$  در ناحیه  $0 < x < 2$  حقیقی  $G : a < y < b$  تعریف شوند. آنگاه  $f_n(z) \rightarrow L$  وقتی که  $n \rightarrow \infty$  به ازای هر  $z$  حقیقی در  $G$ ، بنا بر قضیه ویتالی برای  $a+c < y < b-c$  و  $\frac{1}{p} \leq x \leq \frac{1}{q}$ ،  $f_n(z) \rightarrow L$  یکنواخت. اگر  $\{z_k\} = \{x_k + iy_k\}$  هر دنباله‌ای از نقاط واقع در  $a+c \leq y \leq b-c$  باشد آنگاه  $x_k = m + x$  که  $m$  یک عدد صحیح و  $\frac{1}{p} \leq x \leq \frac{1}{q}$  بنابراین  $f(x_k) \rightarrow L$ .

این نتیجه را (که بنام «قضیه مُنتل» مشهور است) می‌توان بوسیله مفهوم تبدیل همدیس به هر موقعیت مشابهی که هندسه به قدر کافی ساده دارد انتقال داد. بعنوان مثال،  $D$  می‌تواند زاویه  $\alpha < |\arg z| < \beta$ ، با  $f(z) \rightarrow L$  وقتی که  $z \rightarrow \infty$  در طول شعاعی در این زاویه باشد یا  $D$  می‌تواند یک گوی و  $f(z) \rightarrow L$  وقتی که  $z \rightarrow p \in \partial D$  در یک زاویه درون  $D$  باشد که رأس آن روی  $L$  است (شکل ۲۸.۱ را ببینید). برای نتایج دیگر در این راستا بخش ۳۳.۲ را ببینید.

این قضیه که خانواده کراندار یکنواخت نرمال است قطعاً بهترین امکان است. این قضیه می‌گوید که اگر  $f_n$  ها تحلیلی و همگی، هیچ مقدار خارج گویی را نگیرند آنگاه  $\{f_n\}$  نرمال است. خارج گوی را می‌توان به نقاط داخلی یک گوی کوچک انتقال داد، به نحوی که خانواده  $\{f_n\}$  که اعضایش مقادیر داخل گوی مذکور را نمی‌گیرند نرمال است. نهایت تعمیم این ایده این است که خانواده‌ای از توابع تحلیلی که اعضایشان دو نقطه از صفحه با پایان (مثلاً ۰ و ۱) را نگیرند، نرمال است؛ خانواده‌ای از توابع مرمورفیک که اعضایشان ۳ نقطه در صفحه توسعه‌یافته (همان سه نقطه برای همه اعضای خانواده) را نگیرند در معنای کلی‌تری که خانواده نرمال ممکن است  $\infty$  را بعنوان حد داشته باشد، نرمال است. البته در اینجا اثبات این قضیه بسیار مشکل است.

این قضیه را می‌توان در اثبات قضیه عملی پیکارد بکار برد، که می‌گوید یک تابع تام (غیرثابت) حداکثر می‌تواند یک مقدار با پایان (مانند آنچه  $e^z$  می‌کند) را نگیرد، یک تابع مرمورفیک (غیرثابت)

حداکثر دو مقدار را (مانند  $z$ ،  $\tan z$ ،  $i$  و  $-i$ ) می‌تواند بگیرد، در حالت کلی‌تر، یک تابع تحلیلی نمی‌تواند بیش از دو نقطه در هر همسایگی از نقطهٔ تکین اساسی را بگیرد که این تعمیم نهایی قضیهٔ کاسوراتی-ویراشتراس است. (۳)

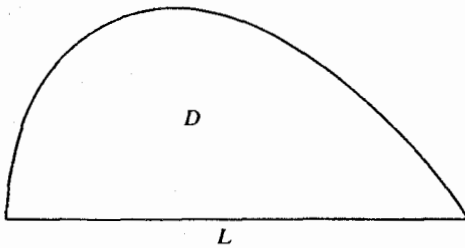
## ۲۸.۵ توسعهٔ نگاشت همدیس به مرز

اثباتی از قضیهٔ نگاشت ریمان را ارائه داده‌ایم، اما این قضیه برای حل مسایل دیریکله کافی نیست. در بخش ۲۷.۲ خط سیری از تابع نگاشت به تابع گرین و در نتیجه تعمیمی از فرمول پواسون را بطور خلاصه توضیح دادیم. اما این کاربرد فرمول گرین را در شرایطی کلی‌تر از آنچه شما احتمالاً می‌دانید و کلی‌تر از آنچه من می‌خواهم در اینجا عرضه کنم، طلب می‌کند. یک روش مستقیم‌تر نیاز به شناختن نگاشتی بین گوی  $\Delta$  و ناحیهٔ  $D$  دارد که می‌تواند به نقاط مرزی هر دو ناحیه توسعه یابد. اگر مرز  $D$  به اندازهٔ کافی پیچیده باشد، گاهی این کار همیشه امکان‌پذیر نیست. در واقع اگر  $D$  یک ناحیهٔ ژوردان (یعنی، اگر مرز آن خم ژوردان باشد) می‌توان نشان داد که تابع نگاشت را می‌توان به یک هم‌ریختی بین بستر دو ناحیه توسعه یابد، اما اینهم قضیهٔ مشکلی است و فقط برخی از حالت‌های خاص را در نظر خواهیم گرفت.<sup>۴</sup>

ابتدا ببینیم چرا توسعه، مسایل دیریکله را حل می‌کند. فرض کنید  $\varphi(w)$  یک تابع مرزی پیوسته روی  $\partial D$  باشد. تابع  $\psi$  با ضابطهٔ  $\varphi \circ [f^{-1}(z)] - \psi \circ (z)$  روی مرز  $\Delta$  پیوسته است زیرا هر تابع پیوسته یک به یک دارای تابع وارون پیوسته است. بنابراین می‌توان انتگرال پواسون را برای یافتن تابع  $\psi$  که در  $\Delta$  همساز با تابع مرزی  $\psi$  است بکار برد. لذا تابع  $\varphi$  با ضابطهٔ  $\varphi(w) = \psi(f(w))$  به  $\varphi(w)$  نزدیک می‌شود وقتی  $w \rightarrow w$ ، و  $\varphi$  روی  $D$  همساز است.

در بسیاری از کاربردها، یک نگاشت همدیس داریم که می‌تواند به مرز توسعه یابد. بعنوان مثال در جریان حول یک گوشه (بخش سیاه ۲۲.۴ را ببینید)، ناحیه بین دو شاخهٔ هذلولی به نوار عمودی با تناظر پیوسته از بستارهای دو ناحیه تصویر می‌شود. اگر بتوانیم مسئلهٔ دیریکله را برای نوار حل کنیم، می‌توانیم مسئلهٔ دیریکله را برای ناحیهٔ بین دو خم هذلولی حل کنیم.

همچنین می‌توانیم یک نگاشت همدیس را به نقاط مرزی (و در واقع ورای آن) توسعه دهیم به شرطی که هندسهٔ مرز به قدر کافی ساده باشد. بعنوان مثال، نگاشت  $f$  از  $D$  به  $\Delta$  را در نظر بگیرید و فرض کنید بخشی از مرز  $D$  فاصلهٔ باز  $L$  است که روی خط مستقیم قرار دارد (که می‌توان محور حقیقی گرفت، با یک انتقال یا دوران روی  $D$  اگر لازم باشد). فرض کنید (مانند شکل ۲۸.۲) بتوانیم حول هر نقطهٔ  $L$  دایره‌ای رسم کنیم که مرز  $D$  را فقط در نقاط  $L$  قطع کند. بدین وسیله می‌توان از اینکه بقیه نقاط مرزی به  $L$  بسیار نزدیک شوند جلوگیری کرد: می‌خواهیم از وضعیتی که در شکل ۲۸.۳ بوجود آمده جلوگیری کنیم، که در آن قسمتهایی از مرز به سمت  $L$  متراکم می‌شوند، در این حالت اثبات کار نمی‌کند. اگر وضعیت مشابه شکل ۲۸.۲ باشد، یک نیم‌گوی به مرکز  $w$  روی  $L$  و به اندازهٔ کافی

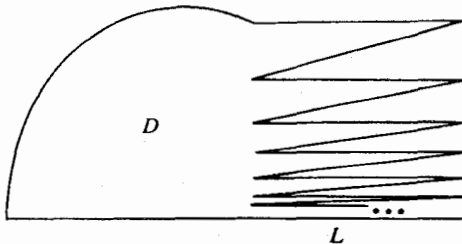


شکل ۲۸.۲

کوچک و واقع در  $D$  شامل تصویر وارون صفر تحت تابع نگاشتی  $z = f(w)$  نخواهد بود. بنابراین شاخه‌ای از  $\log f(w)$  که قسمت حقیقی آن به صفر میل می‌کند وقتی که  $w \rightarrow w_0$  در آن نیم‌گوی وجود خواهد داشت، زیرا با توجه به تمرین زیر  $1 \rightarrow |f(w)|$  وقتی که  $w \rightarrow w_0$ .

تمرین ۲۸.۲ اگر  $z = f(w)$ ،  $D$  را بطور همدیس روی  $\Delta$  تصویر کند آنگاه اگر  $w$  به یک نقطه مرزی  $D$  نزدیک شود. مقادیر  $f(w)$  «به مرز  $\Delta$  نزدیک می‌شود» یعنی اگر  $w_n \rightarrow w_0$ ، که در آن  $w_0$  روی مرز  $D$  باشد، آنگاه هر زیردنباله همگرا از  $\{f(w_n)\}$  به نقطه‌ای از  $\partial\Delta$  نزدیک می‌شود (با درک این حقیقت که زیردنباله‌های مختلف ممکن است به نقاط مختلف نزدیک شوند).

بنابراین  $i \log f$  روی قطر نیم‌گوی حقیقی است و می‌توان آن را بطور تحلیلی در امتداد  $L$  توسط اصل انعکاس قوی شوآرتس (بخش ۲۵.۶) ادامه داد؛ در نتیجه،  $f$  را می‌توان در امتداد  $L$  ادامه داد به خصوص  $f$  باید روی  $L$  پیوسته باشد. اگر  $L$  کماتی از یک دایره یا خمی از همان نوع کلی<sup>۵</sup> باشد می‌توان استدلالی مشابه ارائه داد. این اصل برای انواع تبدیلیهائی که در بخش ۲۶ مطرح شدند، قابل اجراست.



شکل ۲۸.۳

### یادداشتها:

- (۱) همگرایی یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده معمولاً همگرایی «فشرده» یا «نرمال» نامیده می‌شود. قضیه ویتالی مستقلاً بوسیله م.ب. پورتر اثبات شده بود (وی اولین فردی بود که فوق‌همگرایی را مطرح کرد) و بعضی اوقات قضیه ویتالی-پورتر نامیده می‌شود.



(۲) این ترتیب اثبات بوسیله گ.ب. فولند ارائه شده بود.

(۳) در واقع، ماجرا همین جا خاتمه نمی‌یابد: قضایای پیکارد در توزیع مقادیر توابع تحلیلی به نحو گسترده و چشمگیری مطرح شده است، و رشد آن تا به امروز ادامه دارد.

(۴) برای هر چیزی که به قضیه نگاشت ریمان مربوط می‌شود، به Henrici, chap 16 و Burked, chap. IX مراجعه کنید. عکس این قضیه نیز برقرار است: اگر تبدیلی بطور پیوسته به مرز گسترش یابد، آنگاه مرز یک خم ژوردان است.

(۵) کلی‌ترین شکل وقتی است که  $L$  یک خم تحلیلی باشد، یعنی یک خم ساده‌ای که با  $z = z(t)$  تعریف می‌شود که در آن  $z(t)$  تحدید یک تابع تحلیلی به محور حقیقی با  $z'(t) \neq 0$  است.

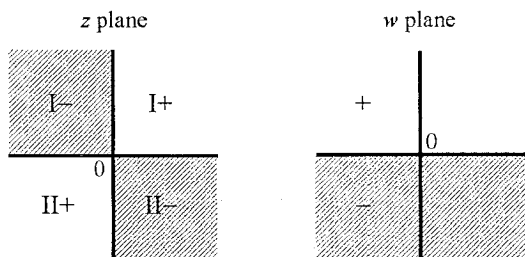
## ۲۹. رویه‌های ریمان از جنبه شهودی

این بخش مقدمه‌ای غیرصوری برای رویه ریمان به کمک ارائه مثالهاست. هدف روشن کردن هندسه تبدیلات همدیسی است که بوسیله توابعی که در تمام صفحه یک به یک نیستند (که اکثر آنها اینگونه‌اند: تمرین ۱۳.۳ را ببینید)، بوجود می‌آیند.

با تبدیل  $w = z^2$  شروع می‌کنیم. این تبدیل در بخش ۲۲.۴ بررسی شده بود. در آنجا نشان دادیم ربع اول صفحه  $z$  به نیمه بالای صفحه  $w$  تصویر می‌شود. می‌توانیم به همین روش نشان دهیم که ربع دوم صفحه  $z$  به نیمه پائین صفحه  $w$  تصویر می‌شود. بنابراین چه چیزی به دو ربع دیگر صفحه  $z$  تصویر می‌شود؟

می‌توانیم به همان مسئله به روش دیگری نگاه کنیم.<sup>۱</sup> اگر بگیریم  $w = \sqrt{z}$  و توجه کنیم که در هر همسایگی هر نقطه  $w \neq 0$  یا  $\infty$  می‌توانیم دو شاخه تحلیلی از  $\sqrt{w}$  تعریف کنیم، و اینکه مسیرهائی وجود دارند که روی آن ادامه تحلیلی از یک شاخه به شاخه دیگر منتهی می‌شود. البته تابع تک‌مقداری فرض شده؛ یک طریق اجتناب از مشکل معرفی یک برش در صفحه  $w$  و گرفتن یک شاخه تک‌مقداری از  $\sqrt{w}$  می‌باشد. این روش محتمل است تا اندازه‌ای بنظر مصنوعی بیاید، زیرا دلیل چندانی نداریم که برش را در هر جای خاصی قرار دهیم.

آنچه انجام می‌دهیم (به تبعیت از ریمان) ارائه دادن دو صفحه (ورقه)  $w$  است. یکی در بالای دیگری.  $\sqrt{w}$  را مانند یک تابع (تک‌مقداری) روی صفحه دوگانه تعریف می‌کنیم. این مثالی از رویه ریمان است. بنابراین در زمینه سؤال اصلی ما، تصویر نیمه پائینی صفحه  $z$  دومین ورقه رویه ریمان خواهد بود. ورقه‌ها در صفر متصلند و در امتداد (مثلاً) محور حقیقی مثبت مرتبطند به طریقی که مسیر گذرنده از این نیم‌خط، از یک ورقه به دیگری می‌رود. بنابراین اگر  $w = re^{i\theta}$ ، داریم  $z = r^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$  در ورقه اول از  $\theta = 0$  به  $\theta = 2\pi$ ، در ورقه دوم از  $2\pi$  به  $4\pi$ ؛ و در ورقه اول از  $4\pi$  به  $6\pi$  برمی‌گردیم، و به همین

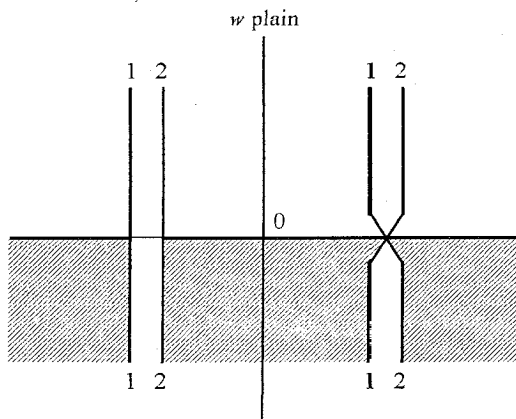


شکل ۲۹.۱

نحو ادامه می‌دهیم. روی این رویه نگاشت بین صفحه دوگانه  $w$  و صفحه تنهای  $z$  یک به یک است. و به راحتی می‌توان دید که وقتی  $\sqrt{w}$  بطور تحلیلی در امتداد مسیر داده شده ادامه پیدا کند چه اتفاقی می‌افتد. روشن است که نمونه‌ای مشابه این رویه در فضای سه‌بعدی نمی‌توان ساخت، ولی می‌توان آن را به صورت مجرد به عنوان یک خمینه<sup>۲</sup> دوبعدی تلقی کرد. برای توضیح این که چگونه این کار را انجام می‌دهیم شما را به کتابهایی در زمینه رویه‌های ریمان ارجاع می‌دهیم، برای منظور ما، تعریفهای دقیق لازم نیست.

در بخش ۲۲.۴ دیدیم که ربع اول صفحه  $z$  متناظر با نیم‌صفحه بالایی در صفحه  $w$  است. اگر ربع‌های دیگر را به همین روش در نظر بگیریم آنچه را که در شکل ۲۹.۱ نشان داده شده است، بدست خواهیم آورد که در آن  $+$  و  $-$  به نیم‌صفحه بالایی و پائینی صفحه  $w$ ، و  $I$  و  $II$  به ورقه‌ها ارجاع داده می‌شود و نیم‌صفحه پائینی در صفحه  $w$  و تصاویر آن در صفحه  $z$  در شکل سایه‌دار هستند.

در شکل ۲۹.۲ سعی کرده‌ایم ارتباط بین ورقه‌ها را نشان دهیم. در اینجا به منظور نشان دادن این که چگونه صفحات در امتداد محور حقیقی بهم متصل می‌شوند، تصور کنید پاره‌خطهای شماره‌های ۱ و ۲ در ورقه‌های ۱ و ۲ به اندازه ۹۰ درجه در فضای سه‌بعدی دوران داده شده است. در امتداد محور حقیقی منفی، یک نقطه متحرک در همان ورقه می‌ماند، در امتداد محور حقیقی مثبت، آن نقطه ورقه‌ها را تغییر می‌دهد. این اتصال را می‌توان در امتداد هر خط دیگری، یا حتی در امتداد یک خم، به همان نحو انجام داد. در این صورت رویه حاصل از نظر تجریدی همان رویه است.



شکل ۲۹.۲

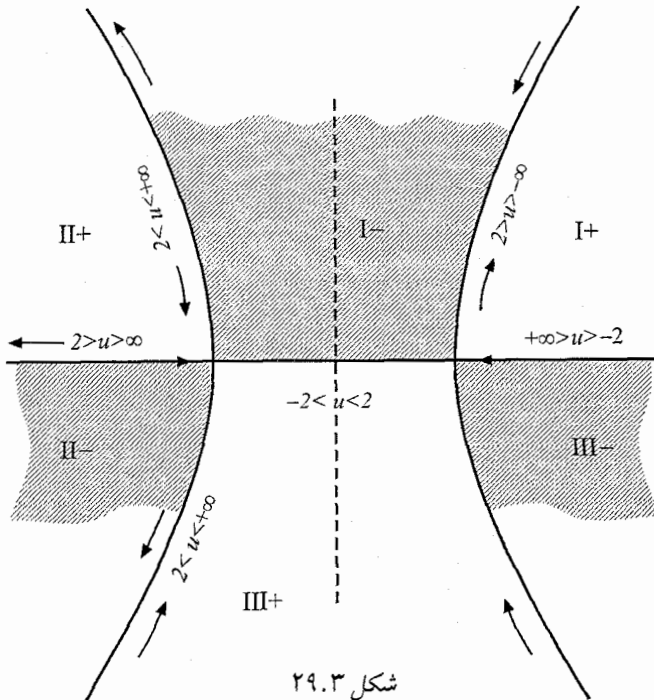
هر جفت از چهار ربع صفحه  $z$  که ناحیه‌های متناظر با تمام صفحه  $w$  هستند، دامنه‌های اصلی نامیده می‌شوند.

اکنون می‌توانیم  $z = \sqrt{w}$  را به عنوان تابعی روی رویهٔ ریمان تصور کنیم. اگر  $w$ ، مثلاً، از ربع اول در جهت پادساعتگرد حول صفر مسیر بسته‌ای را طی کند، به نقطهٔ شروع خود در ورقهٔ ۲ برمی‌گردد؛ دومین دور آن را به نقطهٔ شروع در ورقهٔ ۱ برمی‌گرداند. اگر  $+1$  را ریشهٔ دوم ۱ در ورقهٔ اول بدانیم، می‌توانیم از شکل بینیم علامت هر ریشهٔ دوم نتیجهٔ تعقیب یک مسیر خاص است.

تمرین ۲۹.۱ یک رویهٔ ریمان برای  $z = \log w$  (یا  $w = e^z$ ) بسازید. دامنه‌های اصلی چه هستند؟ توجه کنید تناوبی بودن  $e^z$  در این واقعیت انعکاس می‌یابد که دامنه‌های اصلی بطور ساده با انتقال به یکدیگر تبدیل شوند.

تمرین ۲۹.۲ رویهٔ ریمان  $w = \sin z$  را بسازید (برای شروع بخش ۲۶.۲ را ببینید) خصوصاً اگر دامنه‌های اصلی را که در امتداد  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$  بهم متصل می‌شوند با همان اعداد رومی برچسب زنند، رویه‌ای منظم خواهید داشت.

$w = z^3 - 3z$  مثالی با شفافیت کمتر است. هیچ راه ساده‌ای برای نوشتن سه مقدار  $z$  برحسب  $w$  وجود ندارد، اما اگر رویهٔ ریمان را روی صفحهٔ  $w$  بسازیم، می‌توانیم بینیم که وقتی  $w$  تغییر می‌کند،  $z$  چگونه رفتار می‌کند (شکل ۲۹.۳).



داریم

$$w = (x + iy)^2 - 3(x + iy) = u + iv$$

$$u = x^2 - 3xy^2 - 3x$$

$$v = 3x^2y - y^3 - 3y = 3y(x^2 - \frac{1}{3}y^2 - 1)$$

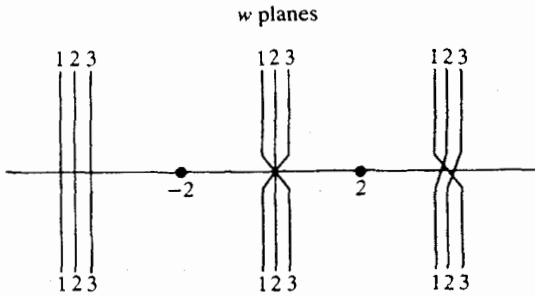
نقاطی را روی محور  $z$  در نظر بگیرید؛ فرض کنید  $w$  از  $+\infty$  روی محور حقیقی شروع شود و به سمت چپ حرکت کند. در این صورت  $\frac{dw}{dz} = 3(x^2 - 1)$  و  $u = x^2 - 3x$  و بنابراین  $\frac{du}{dx} > 0$  از  $x = +\infty$  تا  $x = 1$  که با  $u = -2$  متناظر است. بنابراین یک تناظر یک به یک بین این قسمت‌های محورهای حقیقی داریم. حال فرض کنید  $w$  به سمت چپ ادامه حرکت دهد. چون در  $x = 1$ ، داریم  $\frac{dw}{dz} = 0$ ، همدیسی در این نقطه از بین می‌رود و  $z$  به راست برمی‌گردد، لذا  $x^2 - \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$ ، زیرا این در حالتی اتفاق می‌افتد که  $v = 0$  و  $y \neq 0$ . بنابراین  $z$  روی یکی از شاخه‌های هذلولی  $3x^2 - y^2 = 3$  با  $y > 0$  قرار دارد. چون  $u = x^2 - 3xy^2 - 3x$ ، داریم  $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$ . وقتی  $x$  و  $y$  مثبت هستند،  $y$  با کاهش  $u$ ، افزایش می‌یابد، لذا  $z$  شاخه سمت راست هذلولی را در نیم‌صفحه بالایی می‌پیماید. در این صورت ناحیه  $I+$  بین محور  $z$  حقیقی و این شاخه، باید به نیم‌صفحه بالایی  $w$  متناظر شود.

حالا با  $w$  روی محور حقیقی در  $u = -\infty$  شروع می‌کنیم و فرض می‌کنیم  $z$  در امتداد همان بخش از هذلولی برگردد. وقتی  $u$  افزایش می‌یابد،  $y$  کاهش می‌یابد و وقتی  $w$  به  $-2$  می‌رسد،  $z$  به  $+1$  برگشته است. مجدداً در اینجا چون  $\frac{dw}{dz} = 0$ ، لذا  $z$  باید به سمت راست برگردد و روی محور حقیقی ادامه حرکت دهد تا زمانی که  $z$  به  $-1$  در  $w = +2$  برسد و بعد بخش بالایی شاخه سمت چپ هذلولی را طی می‌کند، وقتی  $u$  از  $+2$  به  $+\infty$  می‌رود. حالا ناحیه برچسب‌زده شده  $I-$  در شکل ۲۹.۳ باید به نیم‌صفحه پائینی متناظر شود، زیرا وقتی  $w$  در امتداد محور حقیقی از  $-\infty$  به  $+\infty$  می‌رود، آن در سمت راست قرار دارد. بنابراین نیم‌صفحه بالایی  $w$  باید در امتداد مرز مشترک  $I+$  و  $I-$  یعنی بینی  $-\infty$  و  $-2$ ، متصل شود.

اکنون  $w$  را از  $+\infty$  با  $z$  در بخش بالایی شاخه سمت چپ هذلولی شروع می‌کنیم، و فرض می‌کنیم  $u$  کاهش یابد. هرگاه  $u$  به  $+2$  برسد،  $z = -1$ ، و وقتی  $w$  از  $+2$  به  $+\infty$  می‌رود  $z$  باید برگردد و روی محور حقیقی از  $+2$  به  $-\infty$  برود. حالا ناحیه  $II+$  در صفحه  $z$  باید به نیم‌صفحه بالایی متفاوتی در صفحه  $w$  متناظر شود که فرض می‌کنیم ورقه ۲ باشد. بنابراین  $I-$  ناحیه  $II+$  را از  $w = +2$  تا  $w = +\infty$  وصل می‌کند.

با ادامه این روش تناظری که در شکل ۲۹.۳ نشان داده شده است بدست می‌آید و ورقه‌ها مطابق شکل ۲۹.۴ بهم متصل می‌شوند.

اکنون می‌توانیم از شکل ۲۹.۴ تشخیص دهیم که تابع وارون  $w = z^2 - 3z$  چگونه بعنوان تابعی



شکل ۲۹.۴

روی رویهٔ ریمان رفتار می‌کند. بعنوان مثال اگر  $w$  در ورقهٔ ۱ از نقطه‌ای مانند  $3 + i$  شروع شود و در جهت پادساعتگرد حول ۲ بچرخد اما حول  $-2$  نچرخد،  $w$  به  $3 + i$  برمی‌گردد در حالی که به ورقهٔ ۳ رفته است و سپس به ورقهٔ ۱ برگشته است، و  $z$  به مقدار اولیهٔ خودش برمی‌گردد. اما اگر  $w$  هم حول ۲ و هم حول  $-2$  بچرخد و برگردد، در این صورت تا وقتی نیم‌خط  $(2, +\infty)$  قطع می‌کند در ورقهٔ ۱ باقی می‌ماند، بنابراین با مقدار متفاوتی برای  $z$  به ورقهٔ ۳ برمی‌گردد.

### تمرینهای تکمیلی

در هر مورد رویهٔ ریمان را بسازید.

$$1. \quad w = z^3$$

$$2. \quad w = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

$$3. \quad w = z^3 - 3z^2$$

$$4. \quad w = z + \frac{1}{z}$$

### یادداشتها:

(۱) معمولتر است که  $w$  و  $z$  با هم عوض شوند به نحوی که  $w = \sqrt{z}$  را در نظر می‌گیریم اما به نحو سازگاری تبدیلهای را به طریق دیگر هم نوشته بودیم، یک تغییر در نماد ممکن است باعث اشتباه شود. ایده‌آل این است که با تغییر نماد، اشتباه رخ ندهد، اما احتیاجی نیست خود را به زحمت بیاندازیم.

توجه کنید که همیشه نمی‌توان یک شاخه تابع به دیگری، ادامه داد. برای مثال  $w = 2^z$  تعداد بی‌پایان تابع متفاوت تعریف می‌کند.

(۲) چون رویه‌های ریمان نمی‌توانند در فضای معمولی بدون اینکه خودشان را قطع کنند رسم شوند، آنها بنظر مرموز می‌آیند، هرچند درجهٔ مجرد مورد نیاز بیشتر از آنچه که برای اعداد مختلط لازم است، نیست. می‌توان روی یک مدل از یک رویهٔ ریمان به همان سادگی چنبره یا بطری کلاین بازی شطرنج کرد. اما نمی‌توانیم تصور کنیم که منظور آلدوس هاکسلی چه بود وقتی شخصیت‌های وی در رمان «شکوه دنیای جدید»، «تنیس رویه زیمان» بازی می‌کردند.

(۳) مطالعه مفصل‌تری از این رویه در کتاب Osgood صفحهٔ ۳۸۸ff موجود است.

## فصل ۵

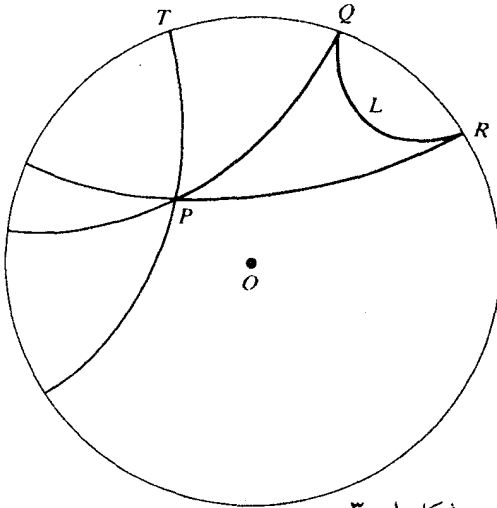
# مباحث گوناگون

### ۳۰. یک هندسه نااقلیدسی

#### ۳۰.۱ هندسه نااقلیدسی

یکی از کاربردهای تبدیلات موبیوس، ساختن یک هندسه نااقلیدسی است. شما می دانید که یکی از اصول هندسه اقلیدسی آنست که از یک نقطه خارج یک خط مستقیم، تنها یک خط مستقیم موازی آن می توان رسم کرد. (این بیان اصلی اقلیدس نیست، اما معادل آنست.). در هندسه نااقلیدسی برخی از اصول هندسه اقلیدسی نقض می شود؛ معمولاً این اصل خاص با چیز دیگری جایگزین می گردد. یکی از بزرگترین کشفهای قرن نوزدهم این بود که هندسه های نااقلیدسی بدین معنا که دستگاههای هندسی که در آن نقاط و «خطوط مستقیم» که در تمامی اصول اقلیدس بجز اصل توازی صادقند، وجود دارند، اما در آن موازی خطی که از نقطه غیرواقع بر آن می گذرد وجود ندارد و یا بیشتر از یکی وجود دارد. می توان این هندسه را به روش اصل موضوعی درست مانند هندسه اقلیدسی ساخت. اما برای اینکه واقعاً متقاعد شوید نیاز است مثالهایی واقعی ببینید. برای وقتی که از یک نقطه هیچ موازی رسم نمی شود، می توان سطح یک کره را در نظر گرفت. در آنجا «خطوط مستقیم» دایره عظیمه هستند. اما ساختن نمونه ای که از یک نقطه بیش از یک موازی رسم شود مشکلتر است. می خواهیم یک مدل از این هندسه (که ابتدا توسط پوانکاره ارائه شده است) بسازیم. اگر می خواهید در این هندسه شکلهایی رسم کنید باید بتوانید متقارن هر نقطه داده شده را نسبت به یک دایره بدست آورید؛ و دایره گذرنده از دو نقطه درون یک دایره و عمود بر آن را رسم کنید. برای توضیحات بیشتر بخش ۳۰.۲ را ببینید.

«صفحه» ما یک گوی واحد و «خطهای مستقیم» کمانهای عمود بر دایره خواهند بود. دایره خودش قسمتی از صفحه نیست، کمانهایی که روی دایره متقاطعند «موازی» هستند. شکل ۳۰.۱ را ببینید. «خط



شکل ۳۰.۱

مستقیم» داده شده  $L$  و نقطه  $P$  غیرواقع بر خط  $L$  را در نظر می‌گیریم. دو کمان  $PQ$  و  $PR$  که  $L$  را روی دایره قطع می‌کنند با  $L$  موازی و کمان  $TP$ ،  $L$  را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

می‌توان ثابت کرد که «خطهای مستقیم» در تمام اصول موضوعه هندسه اقلیدسی بجز اصل موضوع توازی صادقند. اگر «حرکات صلب» را به عنوان تبدیلات مویبوس از دایره واحد به خودش در نظر بگیریم می‌توان دو شکل را قابل انطباق نامید اگر تحت چنین حرکت صلبی هم‌ارز باشند. «فاصله» بین نقاط، که تحت حرکات صلب پایا است، وجود دارد اگر فرضهای معقولی در رابطه با خواصی که باید داشته باشیم، بسازیم می‌توان برای این فاصله فرمولی برحسب نقاط بدست آورد. باید فاصله غیرمنفی؛ متقارن؛ پایا تحت حرکات صلب؛ جمع‌پذیر برای نقاط واقع بر یک خط مستقیم نااقلیدسی بوده و برای فواصل کوتاه تقریباً اقلیدسی باشد یعنی،

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d(0, z)}{|z|} = 1$$

مطلب را با یافتن فرمولی برای  $d(r) = d(0, r)$  شروع می‌کنیم. تبدیل  $z$  به  $ze^{i\theta}$  یک حرکت صلب نااقلیدسی است، بنابراین  $d(0, z) = d(0, |z|)$ . شعاع گوی واحد قسمتی از خط مستقیم نااقلیدسی است، بنابراین اگر  $0 < r < r+h < 1$

$$d(0, r+h) = d(0, r) + d(r, r+h)$$

تبدیل  $w = \frac{z-r}{1-rz}$  یک حرکت صلب نااقلیدسی است که  $z = r$  را به  $w = 0$  و  $z = r+h$  را به  $w = \frac{h}{1-hr-r^2}$  نگارد. چون حرکت‌های صلب فاصله‌ها را حفظ می‌کنند، داریم

$$d(r, r+h) = d\left(0, \frac{h}{1-hr-r^2}\right)$$



$$d(0, r+h) - d(r) = d\left(\frac{h}{1-hr-r^2}\right)$$

بر  $h$  تقسیم کنید و خواص حدی فرض شده را بکار برید. بدست می آوریم  $d'(r) = \frac{1}{1-r^2}$ ، و بنابراین  $d(r) = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$ . یک حرکت صلب ناقلیدسی  $z_1$  و  $z_2$  را به  $w = 0$  و  $w = \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2}$  می نگارد. چون چنین حرکتی فاصله را حفظ می کند،

$$d(z_1, z_2) = d\left(0, \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|\right)$$

و وقتی فرمول را برای  $d(0, r)$  بکار ببریم، بدست می آوریم

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}$$

اکنون می توانیم «صورت پایای» لم شوارتس را که بوسیله ج - پیک بدست آمده بیان کنیم:

فرض کنید  $f$  در  $|z| < 1$  تحلیلی و  $|f(z)| < 1$ . در این صورت یا برای  $z_1 \neq z_2$ ،  $d[f(z_1), f(z_2)] < d(z_1, z_2)$  که در آن  $|z_1| < 1$  و  $|z_2| < 1$ ؛ یا  $d[f(z_1), f(z_2)] < d(z_1, z_2)$  همیشه با  $d(z_1, z_2)$  برابر است و  $f$  یک تبدیل موبیوس از گوی واحد بر روی خودش می باشد.

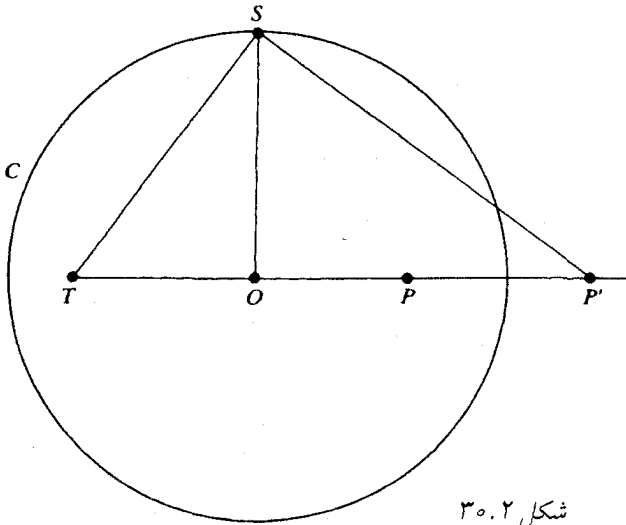
## ۳۰.۲ ساختارها

به منظور رسم نمودارهای مناسب در هندسه ناقلیدسی، لازم است بتوانیم دو ساختار هندسی انجام دهیم: ساختن نقطه متقارن یک نقطه داده شده نسبت به دایره و ساختن دایره ای که از دو نقطه داده شده بگذرد و بر دایره اول عمود باشد.

مسئله اول: دایره  $C$  به مرکز  $O$  و شعاع  $r$  و نقطه  $P$  داده شده اند. نقطه  $P'$  را چنان بیابید که  $OP \cdot OP' = r^2$ . شکل ۳۰.۲ را ببینید.

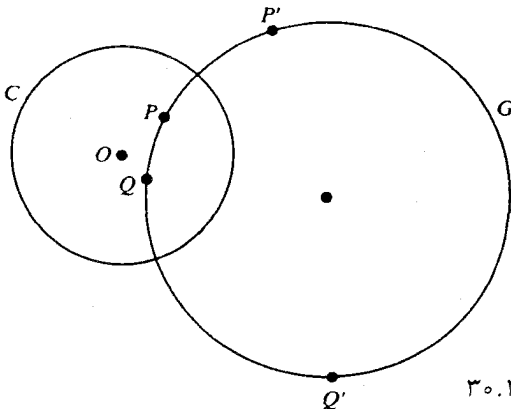
در اینجا  $OS$  بر  $OP$  عمود است،  $TO = OP$ ،  $SP'$  بر  $TS$  عمود است،  $OS = r$  و  $OP \cdot OP' = r^2$  زیرا مثلث های  $OP'S$  و  $TOS$  متشابه هستند. بنابراین  $\frac{OP'}{r} = \frac{r}{OT} (= \frac{r}{OP})$ .

مسئله دوم: نقاط  $P'$  و  $Q'$  را که متقارنهای  $P$  و  $Q$  نسبت به دایره  $C$  هستند بیابید. دایره ای رسم کنید که از سه نقطه از نقاط  $P$  و  $P'$  و  $Q$  و  $Q'$  بگذرد. شکل ۳۰.۳ را ببینید (برای انجام این کار مرکز دایره را محل تلاقی عمود منصف های (مثلاً)  $PP'$  و  $PQ'$  در نظر بگیرید).

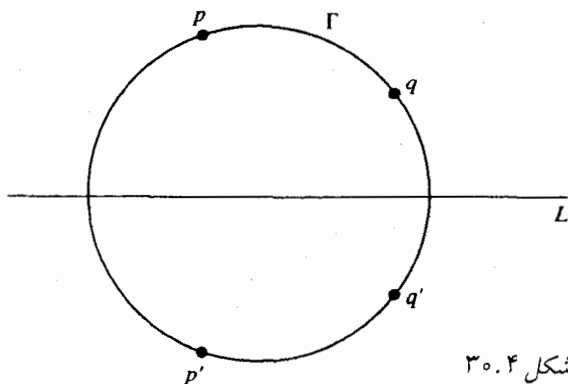


شکل ۳۰.۲

ادعا می‌کنم که این دایره  $G$  بر دایره  $C$  عمود است و از هر ۴ نقطه می‌گذرد. این مطلب را می‌توانیم با عملیات جبری نشان دهیم اما ساده‌تر است که از تبدیل مویبوس استفاده کنیم. فرض کنید  $T$  تبدیلی باشد که  $C$  را به خط  $L$  می‌برد (شکل ۳۰.۴ را ببینید). تصاویر  $p$  و  $p'$  از  $P$  و  $P'$  و همچنین تصاویر  $q$  و  $q'$  از  $Q$  و  $Q'$  نسبت به خط  $L$  متقارن هستند. دایره  $\Gamma$  که از  $p$ ،  $q$ ،  $p'$  و  $q'$  می‌گذرد به آسانی ساخته می‌شود (مرکز آن روی  $L$  است و بوضوح بر  $L$  عمود است). تحت تبدیل وارون  $T^{-1}$ ،  $\Gamma$  به دایره‌ای گذرنده از  $P$ ،  $Q$ ،  $P'$  و  $Q'$  نگاشته می‌شود و عمود بر  $C$  است، زیرا یک تبدیل مویبوس نه تنها دایره و خطوط مستقیم را به دایره و خطوط مستقیم می‌برد بلکه چون همدیس است زاویه بین آنها را حفظ می‌کند. به عکس، می‌بینیم که اگر دایره  $G$  بر  $C$  عمود باشد و نقاط  $P'$  و  $Q'$  روی  $G$  باشند نقاط متقارن آنها نسبت به دایره  $C$  روی  $G$  خواهند بود.



شکل ۳۰.۳



شکل ۳۰.۴

تمرین ۳۰.۱ چگونگی ساختن یک دایره عمود بر  $C$  و گذرنده از دو نقطه روی  $C$  را نشان دهید.

تمرین ۳۰.۲ یک مثلث نااقیدسی با رئوس داده شده بسازید. مجموع زوایا در ارتباط با  $180^\circ$  چگونه است؟

### ۳۱. حاصل ضربهای بی پایان

حاصل ضربهای بی پایان بطور طبیعی وقتی مطرح می شوند که سعی کنیم فرایند تجزیه به عوامل در چندجمله ایها را به تجزیه عوامل مشابهی از توابع تام متعالی (یعنی، غیر چندجمله ایها) تعمیم دهیم. اگر سعی کنیم این کار را انجام دهیم یکباره با مشکلات زیادی روبرو می شویم. در قدم اول، یک تابع تام ممکن است اصلاً ریشه ای نداشته باشد ( $e^z$ ). ثانیاً یک تابع تام متعالی معمولاً دارای تعداد بی پایان ریشه  $z_n$  (با نقطه حدی  $\infty$ ) است، و یک حاصل ضرب بی پایان جملات  $(z - z_n)$  بنظر محتمل نمی آید، حتی اگر عوامل  $1 - (\frac{z}{z_n})$  را بکار گیریم، لزوماً یک حاصل ضرب همگرا بدست نمی آوریم (همانطور که در زیر خواهیم دید). برای نیل به مقصود ابتدا نیاز به مطالعه همگرایی حاصل ضربهای بی پایان داریم. شاید انتظار داشته باشید که نظریه جداگانه ای درباره حاصل ضربهای بی پایان غیر ضروری است زیرا، همیشه می توانیم حاصل ضربها را با گرفتن لگاریتم به مجموع برگردانیم. اما خواهیم دید که قضایای همگرایی در حاصل ضربها کاملاً شبیه قضایای همگرایی در سریها نیست.

#### ۳۱.۱ همگرایی حاصل ضربهای بی پایان

قابل قبول بنظر می رسد که حاصل ضرب  $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$  را بمعنای حد حاصل ضربهای جزئی  $\prod_{n=1}^N z_n$  تعریف کنیم. (یک حاصل ضرب تهی را به معنای ۱ می گیریم، زیرا لگاریتم آن یک مجموع تهی خواهد شد، که معمولاً صفر در نظر گرفته می شود.) اندکی تأمل نشان می دهد که اگر حاصل ضربهای جزئی

امکانی برای نزدیک شدن به حدی غیر از صفر داشته باشد بهتر است  $z_n \rightarrow 1$  را داشته باشیم. بنابراین صورت متعارف یک حاصل ضرب بی‌پایان عبارت است از

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$$

که در آن  $a_n$  ها اعداد مختلط‌اند. می‌گوئیم حاصل ضرب همگراست اگر، اولاً حاصل ضربهای جزئی به سمت حد با پایان  $L$  نزدیک شوند؛ ثانیاً  $1 - a_n \neq 0$  برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ (مثلاً برای  $n > N_0$ )؛ و ثالثاً

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{N_0+1}^N (1 + a_n) \neq 0$$

سومین شرط سبب می‌شود که  $1 + a_n \rightarrow 1$ ، و بنابراین برای یک حاصل ضرب همگرا،  $a_n \rightarrow 0$ . در نتیجه، ممکن است همیشه برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ فرض کنیم  $|a_n| < \frac{1}{4}$ ، چون در غیر اینصورت حاصل ضرب مطمئناً واگراست. توجه کنید که یک حاصل ضرب همگرا ممکن است حد صفر داشته باشد، البته تنها وقتی که حداقل یکی از فاکتورها صفر است. هرگاه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{N_0}^N (1 + a_n) = 0$$

برای همه  $N_0$  ها، (به دلایلی که در زیر می‌آید) می‌گوئیم حاصل ضرب به صفر واگراست.

اکنون ارتباط بین همگرایی یک حاصل ضرب را با همگرایی سری لگاریتم وابسته به آن بررسی می‌کنیم. اگر  $0 \neq L = \prod_{N_0}^{\infty} (1 + a_n)$  در این صورت از تمرین ۱.۲۰ می‌دانیم که  $|1 + a_n| \rightarrow |L|$  و بنابراین می‌توانیم جملات و زاویه  $L$  را چنان انتخاب کنیم که  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \arg(1 + a_n) \rightarrow \arg L$ . در نتیجه  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \log(1 + a_n)$  با تعیین شاخه هر لگاریتم، همگراست. به عکس، اگر  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \log(1 + a_n)$  با تعیین شاخه هر لگاریتم به  $S$  همگرا باشد، آنگاه  $\prod_{N_0}^{\infty} (1 + a_n)$  به  $e^S \neq 0$  همگراست. این نشان می‌دهد چرا  $\prod (1 + a_n)$  واگراست. اگر برای همه  $N_0$  ها،  $\prod_{N_0}^{\infty} (1 + a_n) \rightarrow 0$ ، زیرا  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \log(1 + a_n)$  به  $-\infty$  واگرا خواهد بود.

تمرین ۳۱.۱ نشان دهید در واقع اگر  $\prod (1 + a_n)$  همگراست (به حد مخالف صفر)، آنگاه  $\sum \log(1 + a_n)$ ، وقتی که  $\log$  مقدار اصلی لگاریتم است، همگراست.

سادگی می‌توان آزمونهایی برای همگرایی حاصل ضربهای بی‌پایان ارائه داد، آزمونهایی که مستقیماً با جملات  $a_n$  بیان می‌شوند.

تمرین ۳۱.۲ نشان دهید هرگاه  $|z| < \frac{1}{4}$ ، داریم

$$|\log(1 + z) - z| \leq |z|^2$$

$$\left| \log(1+z) - z + \frac{1}{4}z^2 \right| \leq |z|^3$$

$$\left| \log(1+z) - z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{3}z^3 \right| \leq |z|^4$$

و الی آخر.

اکنون می‌توانیم برخی از شرایط کافی ساده برای همگرایی  $\prod(1+a_n)$  را بنویسیم. ابتدا، اگر  $a_k \geq 0$ ، آنگاه  $\prod(1+a_k)$  همگراست اگر و تنها اگر  $\sum a_k$  همگرا باشد (اگر  $a_k$  ها حقیقی باشد ولی تغییر علامت دهند لزوماً برقرار نیست؛ تمرین ۳۱.۴ را ببینید). برای اثبات، فرض می‌کنیم  $\sum a_k$  همگرا و  $a_k \geq 0$  است، آنگاه  $\sum a_k^2$  همگراست، زیرا نهایتاً  $0 \leq a_k < 1$  آنگاه  $a_k^2 \leq a_k$ . بنا به تمرین ۳۱.۲،  $\sum |\log(1+a_k) - a_k|$  مغلوب  $\sum a_k^2$  می‌شود و بنابراین همگراست. لذا سری  $\sum \log(1+a_k)$  همگرا و از آنجا  $\prod(1+a_k)$  همگراست. بعکس، فرض کنیم  $\prod(1+a_k)$  همگرا و  $a_k \geq 0$ . آنگاه  $\sum \log(1+a_k)$  همگراست (تمرین ۳۱.۱) و می‌توانیم فرض کنیم  $a_k < \frac{1}{4}$ . حالا داریم

$$\begin{aligned} \log(1+a_k) &= a_k - \frac{1}{4}a_k^2 + \frac{1}{3}a_k^3 - \dots \\ &= a_k \left( 1 - \frac{1}{4}a_k + \frac{1}{3}a_k^2 - \dots \right) \\ &\geq a_k \left( 1 - \frac{1}{4}a_k \right) \geq \frac{3}{4}a_k \end{aligned}$$

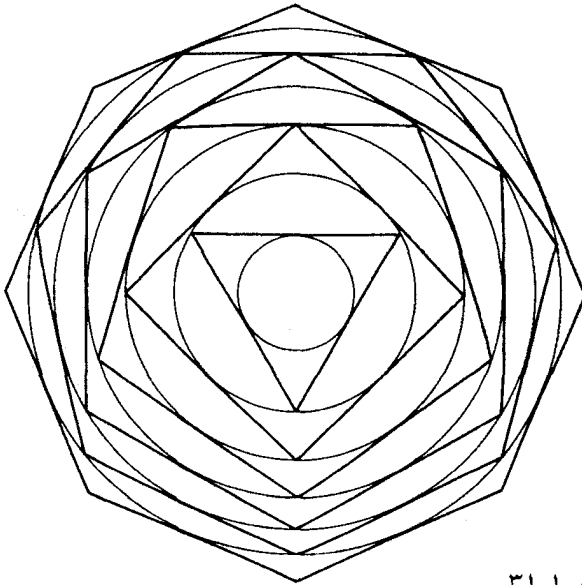
چون  $a_k \leq \frac{1}{4}$ . بنابراین  $\sum a_k$  همگراست.

تمرین ۳۱.۳ نشان دهید  $\prod(1+a_k)$  همگراست اگر هر دو سری  $\sum a_k$  و  $\sum |a_k|^2$  همگرا باشند.

تمرین ۳۱.۴ همگرایی  $\prod(1+a_k)$  را در حالت‌های زیر بررسی کنید:

- الف)  $a_k = (-1)^k k^{-\frac{1}{2}}$   
 ب)  $a_{2n+1} = (2n+1)^{-\frac{1}{2}}$ ،  $a_{2n+2} = -(2n)^{-\frac{1}{2}}$ ،  $n = 1, 2, 3, \dots$   
 پ)  $a_k = \frac{z}{k}$ ،  $1, 2, 3, \dots$   
 ت)  $a_n = -\frac{z^n}{n}$   
 ث)  $a_{2n} = \frac{z}{n}$ ،  $a_{2n-1} = -\frac{z}{n}$ ،  $n = 1, 2, 3, \dots$

ج) شکل ۳۱.۱ را در نظر بگیرید. اگر روش رسم تا بینهایت ادامه یابد، آیا شکل کراندار باقی می‌ماند؟



شکل ۳۱.۱

می‌گوئیم حاصل ضرب  $\prod [1 + (a_n)]$  همگرای یکنواخت است، اگر سری لگاریتم وابسته به آن همگرای یکنواخت باشد.

تمرین ۳۱.۵ نشان دهید  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$  روی هر مجموعه فشرده منهای نقاط  $\pm n$  همگرای یکنواخت است.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که چرا معمولاً نمی‌توانیم یک تابع تام با تعداد بی‌پایان ریشه  $z_n$  را به صورت

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n)$$

نمایش داد، یا حتی به صورت

$$z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

که در آن  $g$  تام است. مثلاً، اگر همه  $z_n$  ها مثبت باشند آنگاه وقتی که  $z$  حقیقی و منفی است، حاصل ضرب همگراست تنها اگر  $\sum \frac{1}{z_n} < \infty$  (بنا به آزمونی که بلافاصله بعد از تمرین ۳۱.۲ داده شد). این شرط می‌گوید که  $|z_n|$  باید کمی سریعتر افزایش یابد. مثلاً، در  $z_n = n$  برقرار نیست و لذا  $\frac{1}{\Gamma(-z)}$  را نمی‌توان با حاصل‌ضربی از این نوع نمایش داد. تابع  $\sin \pi z$  دارای ریشه‌های صحیح است.

نمی‌توانیم  $\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$  را داشته باشیم. اما  $(\pi z)^{-1} \sin \pi z = \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$

همگراست، و در واقع در بخش ۳۱.۲ نشان خواهیم داد که

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

این حاصل ضرب اولر برای تابع سینوس است.

### تمرینهای تکمیلی

همگرایی حاصل ضربهای بی‌پایان را در تمرینهای تکمیلی ۱ تا ۴ بررسی کنید:

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n n^{-\frac{1}{2}}] \quad -1$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n n^{-\frac{2}{3}}] \quad -2$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \quad -3$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right) \exp[n^{-\frac{1}{2}}z + (2n)^{-1}z^2] \quad -4$$

۵- به ازای  $0 < x < 1$ ، تابع  $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n})$  را در نظر می‌گیریم. روشن است که این حاصل ضرب همگراست. به کدام تابع همگراست؟

۶-  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{n^2})$  برای  $|z| < 1$  به یک تابع  $f(z)$  همگراست. آیا تابع  $f$  می‌تواند در نقطه  $z = 1$  بطور تحلیلی ادامه یابد.

### ۳۱.۲ نمایش حاصل ضرب اولر $\sin \pi z$

به جای اثبات مستقیم این که حاصل ضرب اولر،  $\sin \pi z$  را نمایش می‌دهد، می‌خواهیم به طور غیرمستقیم از طریق محاسبه مانده‌ها روشی را برای نمایش  $\sin \pi z$  بیابیم، که حاصل آن فرمول اولر باشد. ساده‌تر است که حالت کلی را در نظر بگیریم و بعد برای بدست آوردن آنچه که می‌خواهیم حالت خاص را در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(w) dw}{w(w-z)}$$

که در آن  $f$  یک تابع، مرمورفیک در صفحه با پایان، با قطبهای ساده  $a_n$  و با مانده ۱ است و تحلیلی در صفر می‌باشد. بعلاوه فرض می‌کنیم که  $C_n$  ها خم‌های بسته ساده با طول  $O(n)$  باشند که به سمت

$\infty$  می‌روند. وقتی  $n \rightarrow \infty$  روی آن کراندار است. البته این بحث بی‌استفاده خواهد بود مگر اینکه بدانیم توابع  $f$  و خم‌های  $C_n$  با همه این ویژگیها واقعاً وجود دارند. در واقع آنها وجود دارند.

تمرین ۳۱.۶ نشان دهید  $f(w) = \cot w - w^{-1}$  دارای این ویژگیها است، اگر  $C_n$  مستطیلی با رئوس  $\pm(n + \frac{1}{4})\pi \pm n\pi i$  باشد. همچنین نشان دهید  $I_n \rightarrow 0$ .

اکنون بینیم قضیه مانده درباره  $I_n$  چه می‌گوید. این انتگرال برابر با مجموع مانده‌های تابع زیر انتگرال در همه قطبهای داخل  $C_n$  است، که در (۱) صفر، (۲)  $z$ ، و (۳) قطبهای  $a_n$  از  $f$  است. مانده‌های مربوطه عبارتند از

$$(۱) \quad \frac{-f(0)}{1}$$

$$(۲) \quad \frac{f(z)}{(z)}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{a_n(a_n - z)} = \left( -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - z} \right) \frac{1}{z}$$

(بیاد بیاورید که مانده‌های  $f$  در  $a_n$  همگی برابر با ۱ هستند.) بنابراین، چون  $I_n \rightarrow 0$  وقتی  $n \rightarrow \infty$  داریم

$$f(z) = f(0) + \sum_m \left( \frac{1}{a_m} - \frac{1}{a_m - z} \right)$$

که در آن مجموع روی  $a_m$  های داخل  $C_n$  است و بعد فرض کنید  $n \rightarrow \infty$ . خصوصاً، این برای  $\cot \pi z$  یک سری نمایشی معرفی می‌نماید، اما آن چیزی نیست که فعلاً مورد توجه ما باشد.

اکنون تعریف می‌کنیم  $g(z) = z^{-1} \sin z$  و قرار می‌دهیم،

$$f(w) = \frac{g'(w)}{g(w)} = \left( \frac{d}{dw} \right) \log g(w) = \cot w - w^{-1}$$

در این صورت  $a_n = n\pi$  ( $n \neq 0$ ).

تمرین ۳۱.۷ نشان دهید  $f(0) = 0$ .

اکنون داریم

$$\frac{d}{dz} \log \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n\pi - z} \right)$$

که در آن مجموع، حد مجموع‌ها روی  $-N < n < N$  ( $n \neq 0$ ) است. وقتی  $N \rightarrow \infty$ ، و همگرایی روی مجموعه‌های فشرده‌ای که فاقد نقاط  $n\pi$  هستند یکنواخت است. پس از آن روی مسیری از صفر تا  $z$  انتگرال می‌گیریم: با یک انتخاب برای هریک از لگاریتم‌ها داریم

$$\log \frac{\sin z}{z} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[ \frac{z}{n\pi} + \log(n\pi - z) - \log n\pi \right]$$



چه میزان ابهام با لگاریتم‌ها معرفی می‌شود؟ برای پاسخ به این سؤال، مقدار حقیقی  $x$  از  $z$  را در نظر می‌گیریم. آنگاه جمله‌های لگاریتمی عبارتند از

$$\log(n\pi - x) - \log n\pi = \log \frac{n\pi - x}{n\pi} = \log \left( 1 - \frac{x}{n\pi} \right)$$

یا، اگر جملات را با  $n$  های مثبت و منفی ترکیب کنیم،

$$\log \left( 1 - \frac{x}{n\pi} \right) + \log \left( 1 + \frac{x}{n\pi} \right) = \log \left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

که در آن چون  $\left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$  یک عدد حقیقی مثبت و یا یک عدد حقیقی منفی است، لگاریتم صرف‌نظر از اضافه کردن  $k\pi i$  ( $k$  طبیعی است) معین می‌شود. بنابراین داریم

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

صرف‌نظر از اینکه  $e^{ikn} = \pm 1$ .

اما وقتی  $x = 0$  حاصل ضرب باید برابر با ۱ باشد، و بنابراین  $k$  یک عدد زوج است. پس داریم

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2} \right)$$

برای هر عدد حقیقی  $x$ . چون حاصل ضرب روی هر مجموعه فشرده فاقد نقاط  $n\pi$  همگرای یکنواخت است (تمرین ۳۱.۵) حاصل ضرب یک تابع تحلیلی معرفی می‌کند، که برای هر  $x$  که با هر  $n\pi \neq z$  جایگزین شود برقرار است. لذا ما حاصل ضرب اوایلر را برای تابع سینوس بدست آوردیم. توجه کنید که هیچ یک از حاصل ضربهای

$$\prod_{n>0} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right) \quad \text{و} \quad \prod_{n<0} \left( 1 - \frac{z}{n\pi} \right)$$

بطور جداگانه همگرا نیستند.

### ۳۱.۳ فرمول والیس

در اینجا با قرار دادن  $z = \frac{\pi}{2}$  در حاصل ضرب اوایلر فرمول معرفی را بدست می‌آوریم

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{4n^2} \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \left( 1 + \frac{1}{4} \right) \right] \left[ \left( 1 - \frac{1}{16} \right) \left( 1 + \frac{1}{16} \right) \right] \cdots \left[ \left( 1 - \frac{1}{4N^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4N^2} \right) \right]$$

یعنی

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2N-1}{2N} \cdot \frac{2N+1}{2N} \cdots$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[(2N)!]^2 (2N+1)}{2^{2N} (N!)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2N)^2}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2N-1)^2 (2N+1)}$$

این حاصل ضرب والیس است. که نتیجه می شود

$$\sqrt{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2N)}{1 \cdot 3 \cdots (2N-1) N^{\frac{1}{2}}}$$

## ۳۱.۴ حاصل ضربهای عوامل همگرا

چون وقتی  $|z/z_n| < 1$ 

$$\log \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) = -\frac{z}{z_n} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{z_n^2} - \cdots$$

بنابراین وقتی  $|z_n|$  بزرگ است، احتمال همگرایی حاصل ضرب

$$\prod \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{\frac{z}{z_n}}$$

نسبت به حاصل ضرب  $\prod (1 - \frac{z}{z_n})$  باید بیشتر باشد و احتمال همگرایی حاصل ضرب

$$\prod \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{z_n^2} \right)$$

باید حتی بیشتر باشد، و الی آخر. در واقع وایرستراس نشان داد که هر تابع نام  $f$  را می توان به صورت

$$z^m e^{g(z)} \prod \left( 1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left( \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{z_n^2} + \cdots + \frac{1}{k_n} \frac{z^{k_n}}{z_n^{k_n}} \right)$$

نمایش داد، که در آن  $k_n \rightarrow \infty$  به اندازه کافی سریع و  $g$  یک تابع نام است  $[e^{g(z)}$  دارای ریشه نیست) و  $z_n$  ها به ترتیب افزایش قدرمطلق اختیار شده اند. این نمایش بسیار کلی است لذا خیلی مفید نخواهد بود. نمایش حاصلضربی مفیدتر برای توابع نام از مرتبه  $\rho$  با پایان به معنای زیر وجود دارد. قرار دهید  $M(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$ ؛ آنگاه  $f$  را از مرتبه  $\rho$  گویند اگر بزرگترین کرانه پائین اعدادی مانند  $s$  باشد که  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sup r^{-s} \log M(r) < \infty$ . [به طور کلی  $M(r)$  خیلی بزرگتر از  $\exp(r^\rho)$  نیست، و گاهی به همان اندازه است.] در اینصورت نمایش حاصل ضرب هادامارد می گوید:

اگر  $f$  از مرتبه  $\rho$  با ریشه‌های (احتمالاً) در صفر و  $z_n$  آنگاه

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \left[ \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p} \left(\frac{z}{z_n}\right)^p \right]$$

که در آن  $p \leq \rho$  و  $P(z)$  چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $\rho$  باشد.

بعنوان مثال،  $\sin \pi z$  از مرتبه ۱ است؛ حاصل ضرب اوایلر صورت درهم‌ریخته حاصل ضرب هادامارد با  $p = 1$  است. معکوس تابع گاما نیز از مرتبه ۱ است، حاصل ضرب هادامارد آن عبارتست از

$$\frac{1}{\Gamma(z)} z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

که در آن  $\gamma$  ثابت اوایلر و برابر است با

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

(هرچند  $\gamma$  تا هزارم اعشاری محاسبه شده است، هنوز مشخص نیست که  $\gamma$  گویا یا اصم است.)  
ما در صدد محاسبه فرمول حاصل ضرب برای معکوس تابع گاما نیستیم، اما توجه می‌کنیم که، ترکیب شدن با حاصل ضرب اوایلر برای سینوس، دوباره نشان می‌دهد که

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

**یادداشتها:**

(۱) این شکل بوسیله دیوید ب. سینگ‌مستر کشیده شده است و در

*London Math. Soc. Newsletter*, no. 122 (October 1985)

موجود است. در اینجا دوباره با اجازه دکتر سینگ‌مستر ارائه گردید. دکتر جان رنچ چندین مرجع با شکل‌های مشابه، با چندضلعی‌های متفاوت جهت‌دار شده برای من، تهیه کرده است، قدیمیترین آنها عبارتست از:

*Mathematics and The Imagination*, by E. Kasner and J. Newman  
(Simon & Schuster, New York, 1940) p. 312.

شکل گاهی به کپلر نسبت داده می‌شود که وی ظاهراً شکل دوگان را (وقتی که چندضلعی‌ها متوالیاً به جای محیط شدن محاط می‌شوند) مورد توجه قرار داده است. اما فقط در چند مرحله اول آن.

(۲) اثباتهای مقدماتی مختلف و مناسبی برای فرمول اویلر وجود دارد. برای مثال

W.F. Eberlein, "On Euler's Infinite Product for the Sine," *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977): 147-151.

و همچنین *Math. Rev.* 83e:01032 را ببینید.

## ۳۲. نرخ رشد در مقابل تعداد ریشه‌ها

### ۳۲.۱ یک اصل عمومی

یک تابع نام از مرتبه بالا، یعنی تابعی که ماکزیمم قدرمطلق  $M(r)$ ، وقتی  $r \rightarrow \infty$  به سرعت افزایش یابد، ممکن است چندین ریشه یا حتی هیچ ریشه‌ای نداشته باشد  $[\exp(z^n)$  یا  $\exp(e^z)$  را در نظر بگیرید]. از طرف دیگر، اگر تابع دارای ریشه‌های بسیار زیاد  $z_n$  در گوی با شعاع  $r$  باشد، حاصل ضرب  $\prod(1 - \frac{z}{z_n})$  همگرا نخواهد بود  $z_n = n$  را در مقابل  $z_n = n^2$  در نظر بگیرید). قضیه هادامارد که در بخش ۳۱.۴ ذکر شد، اظهار می‌کند که وجود تعداد ریشه‌های بیشتر، بزرگتر بودن مرتبه  $M(r)$  را ایجاب می‌کند. این شاید بنظر تناقض بیاید، زیرا ممکن است یک تابع با ریشه‌های بسیار، دارای قدرمطلق کوچک باشد. وضعیت واقعی کاملاً متفاوت است: اصلی وجود دارد که می‌گوید وقتی یک تابع دارای ریشه‌های بیشماری است، قدرمطلق آن باید معمولاً بزرگ باشد تا موازنه برقرار شود، اگر قدرمطلق بزرگ نباشد، یک تابع تحلیلی با ریشه‌های بسیار در خطر هم‌ارز شدن با صفر است. ما از قبل حالتی سرحدی را می‌دانیم که اصل را می‌توان به طور کمی تعیین کرد. اگر  $M(r) = \theta(r^n)$  وقتی که  $r \rightarrow \infty$ ، آنگاه بنا به تمرین ۷.۸ می‌دانیم که تابع یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه  $n$  است و لذا حداکثر  $n$  ریشه دارد. اکنون به دنبال نتایج کلی بیشتری هستیم که بر مبنای همان اصل می‌باشد.

### ۳۲.۲ فرمول پینسن

تابع  $f$  را که در گوی  $|z| \leq R$  تحلیلی و غیرصفر است، در نظر می‌گیریم، همچنین فرض می‌کنیم (برای سادگی فرمول) که  $f(0) \neq 0$ . فرض کنیم  $f$  در  $|z| < R$  دارای ریشه‌های  $\{z_k\}$ ،  $k = 1, 2, \dots$ ، روی  $|z| = R$ ،  $f(z) \neq 0$  باشد. آنگاه قضیه پینسن می‌گوید که

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \sum_{j=1}^n \log \frac{R}{|z_j|}$$

توجه کنید اگر  $f$  ریشه‌ای نداشته باشد آنگاه  $\log |f|$  همساز است و قضیه نینسن به قضیه مقادیر میانگین برای توابع همساز تقلیل می‌یابد (بخش‌های ۱۶.۱ و ۲۰.۵). در حالت کلی فرمول نشان می‌دهد که اگر  $|f(Re^{i\theta})|$  بزرگ نباشد بنا به اصل کلی در  $|z| < R$  نمی‌توان بیش از اندازه ریشه داشت. طرف راست فرمول نینسن را می‌توان با ظرافت بیشتری برحسب  $n(t)$ ، تابع شمارنده ریشه‌ها نوشت (یعنی تعداد ریشه‌های با قدرمطلق کمتر از  $t$ ): آن  $\int_0^R t^{-1} n(t) dt$  است. زیرا  $n(t)$  یک تابع پله‌ای است که به اندازه  $k$  پرش دارد، وقتی که  $t$  از مقداری که به ازای محیط دایره  $|z| = t$  شامل  $k$  صفر است عبور می‌کند (یک ریشه مکرر بر طبق تکررش محاسبه شود). آسانترین محاسبه ضروری برای انجام، وقتی است که هیچ دایره  $|z| = t$  بیش از یک ریشه (ساده) ندارد؛ حالت کلی نیز به همین نحو انجام می‌شود. داریم  $n(0) = 0$ ، زیرا  $f(0) \neq 0$ ، و  $n(t) = 0$  برای  $0 < t < |z_1|$ . لذا  $n(t) = 1$  از  $|z_1|$  به  $|z_2|$ ،  $n(t) = 2$  از  $|z_2|$  به  $|z_3|$  و ... الی آخر. بنابراین داریم.

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt &= \int_{|z_1|}^{|z_2|} \frac{dt}{t} + 2 \int_{|z_2|}^{|z_3|} \frac{dt}{t} + 3 \int_{|z_3|}^{|z_4|} \frac{dt}{t} + \dots + N \int_{|z_N|}^R \frac{dt}{t} \\ &= \log |z_2| - \log |z_1| + 2(\log |z_3| - \log |z_2|) + \dots + N(\log R - |z_N|) \\ &= \log |z_1| - \log |z_2| - \dots - \log |z_N| + N \log R \\ &= \log \frac{R}{|z_1|} + \log \frac{R}{|z_2|} + \dots + \log \frac{R}{|z_N|} \end{aligned}$$

اکنون قضیه نینسن را ثابت می‌کنیم. در تمرین ۱۲.۱ دیدیم که، وقتی  $z$  یک ریشه  $f$  است، تابع  $\frac{f'}{f}$  یک قطب ساده در  $z$  با مانده ۱ است. در نتیجه، وقتی  $g$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی است، داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum g(z_n)$$

که  $z_n$  ها ریشه‌های  $f$  درون  $|z| = R$  می‌باشند [فرض کنید روی  $|z| = R$ ،  $f(z) \neq 0$ ]. بنظر می‌آید که طرف راست فرمول نینسن باید به

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\log z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

وابسته باشد اما  $g(z) = \log z$  تحلیلی نیست (چون تک‌مقداری نیست). در هر صورت، می‌توان همان انتگرال را وقتی  $C$  دایره  $|z| = R$  با برشی در طول محور حقیقی مثبت از صفر تا  $R$  است در نظر گرفت، اگر  $f$  روی برش ریشه داشته باشد،  $f(z)$  را با  $f(z e^{i\lambda})$  جابجا می‌کنیم در حالیکه  $\lambda$  طوری اختیار می‌شود که  $f(z e^{i\lambda})$  روی برش ریشه نداشته باشد. این چنین  $\lambda$  وجود دارد، زیرا فقط تعداد با پایان ریشه قابل اجتناب دارد و این جابجایی روی قدرمطلق ریشه‌ها اثر نمی‌گذارد. تابع  $\log z$  در گوی

برش داده شده با در نظر گرفتن  $\log(-1) = i\pi$  تعریف می شود. در اینصورت تابع زیر انتگرال در  $J$  ،  
بجز روی قطبهای ساده در ریشه های  $f$  درون  $C$  تحلیلی است و داریم

$$J = \sum_{j=1}^N \log z_j$$

از طرف دیگر، می توانیم  $J$  را به صورت مجموع سه انتگرال بنویسیم، یکی در امتداد طرف بالایی برش،  
یکی در امتداد طرف پائینی و یکی در امتداد دایره. مانند بخش ۱۱، انتگرال در امتداد طرف بالایی برابر  
است با

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^R (\log x) \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

انتگرال در امتداد طرف پائینی برش برابر است با

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_0^R (\log x + 2\pi i) \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

و مجموع آنها عبارتست از

$$-\int_0^R \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(\circ) - \log f(R)$$

انتگرال حول دایره را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (\log z) [\log f(z)]' dz$$

بعد از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\frac{1}{2\pi i} (\log z) \log f(z) \Big|_{|z|=R} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \log f(z) \frac{dz}{z}$$

با در نظر گرفتن سه انتگرال و جدا کردن قسمت حقیقی، داریم

$$\sum_{j=1}^N \log |z_j| = \operatorname{Re} J = \log |f(\circ)| - \log |f(R)| + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} (\log z) \log f(z) \Big|_{|z|=R} \right\} \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log f(R e^{i\theta}) d\theta$$

هنوز باید تغییر  $(\log z) \log f(z)$  را حول  $|z| = R$  محاسبه کنیم.

وقتی  $z$  به دور دایره  $|z| = R$  می گردد،  $\log z$  از  $\log R$  شروع می کند و در  $\log R + 2\pi i$  پایان  
می یابد. همچنین  $\log f(z)$  از  $\log f(R)$  شروع کرده و در  $\log f(R) + 2\pi i N$  پایان می یابد اگر  $N$   
ریشه داشته باشیم (بنا به اصل آرگومان). لذا تغییر در  $(\log f(z))(\log z)$  حول  $|z| = R$  عبارتست از

$$\begin{aligned}
 & (\log R + \gamma\pi i)[\log f(R) + \gamma\pi iN] - (\log R)[\log f(R)] \\
 & = \gamma\pi i[\log |f(R)| + N(\log R + \gamma\pi i)]
 \end{aligned}$$

اگر عبارت را بر  $\gamma\pi i$  تقسیم کنیم و قسمت حقیقی را بگیریم، داریم

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\gamma\pi i} (\log z) \log f(z) \Big|_{|z|=R} = \log |f(R)| + N \log R$$

بنابراین نتیجه دقیق محاسبه  $J$  از دو طریق برابر است با

$$\sum_{j=1}^N \log |z_j| = \log |f(\circ)| + N \log R - \frac{1}{\gamma\pi} \int_0^{\gamma\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta$$

یعنی

$$\frac{1}{\gamma\pi} \int_0^{\gamma\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(\circ)| = \sum_{j=1}^N \log \frac{R}{|z_j|}$$

که نتیجه قضیه یسن است.

وقتی که  $f$  مرمورفیک با ریشه‌های  $z_n$  و قطبهای  $p_n$  است اثبات به آسانی تعدیل می‌شود. بنابراین

$$\frac{1}{\gamma\pi} \int_0^{\gamma\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(\theta)| = \sum_{j=1}^N \log \frac{R}{|z_j|} - \sum_{k=1}^M \log \frac{R}{|p_k|}$$

### ۳۲.۳ برخی نتایج قضیه یسن

ابتدا توجه کنید که اگر  $|f(\circ)| = 1$  و  $|f(z)| \leq M$  برای  $|z| \leq R$ ، آنگاه

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \leq \max_{|z|=R} \log |f(z)|$$

این نامساوی محدودیتی روی تعداد ریشه‌هایی می‌گذارد که چنین توابعی می‌توانند در گوی  $|z| < r < R$  داشته باشند، بعنوان مثال،

$$n\left(\frac{R}{\gamma}\right) \log \gamma = n\left(\frac{R}{\gamma}\right) \int_{\frac{R}{\gamma}}^R \frac{dt}{t} \leq \int_{\frac{R}{\gamma}}^R \frac{n(t)}{t} dt \leq \log M$$

و هنوز احکام دقیقتری می‌توان بیان کرد.

تمرین ۳۲.۱ فرض کنیم  $f$  یک تابع نام و  $|f(z)| \leq Ae^{B|z|}$  ( $A$  و  $B$  ثابت و  $B < 1$ ).

فرض کنیم  $z_n$  ها ریشه‌های  $f$  با  $n = 1, 2, \dots, |z_n| = n$  باشند. نشان دهید  $f(z) \equiv 0$ .

تمرین ۳۲.۲ فرض کنیم  $f$  یک تابع تام و  $|f(z)| \leq Ae^{B|z|^\gamma}$ . اگر  $f$  حداقل  $n$  ریشه روی هر دایره  $|z| = n$ ،  $n = 1, 2, 3, \dots$ ، داشته باشد، آنگاه  $f(z) \equiv 0$  به شرطی که  $B < \frac{1}{\gamma}$ .

حالا فرض کنید  $f$  در گوی  $|z| < 1$  تحلیلی و کراندار و  $f(0) \neq 0$ . در واقع کاملاً امکان دارد که  $f$  تعداد بی‌پایان ریشه در گوی واحد داشته باشد. فرض کنیم  $|f(z)| \leq M$  و تعداد ریشه‌ها به ترتیب افزایش قدرمطلق‌ها باشد. آنگاه قضیهٔ یسن می‌گوید که، وقتی  $R < 1$ ، داریم

$$\begin{aligned} \sum_{|z_j| < R} \log \frac{R}{|z_j|} &\leq \left| \log |f(0)| \right| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \left| \log |f(0)| \right| + \log M \end{aligned}$$

چون سمت راست به  $R$  بستگی ندارد، می‌توان فرض کرد  $R \rightarrow 1$  و نامساوی

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{1}{|z_j|} \leq \left| \log |f(0)| \right| + \log M$$

را بدست آورد.

چون  $|z_j| \rightarrow 1$  وقتی که  $j \rightarrow \infty$  (در غیر اینصورت نقطهٔ حدی ریشه‌ها می‌توانست در داخل دایره واحد باشد)، این نامساوی نشان می‌دهد که قدرمطلق ریشه‌ها نمی‌تواند آنچنان آهسته به ۱ نزدیک شود که سری واگرا شود. یک راه روشن‌تر برای بیان آن اینست که بگوئیم  $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_j|)$  باید همگرا باشد. زیرا

$$\log \frac{1}{|z_j|} = -\log[1 - (1 - |z_j|)] = (1 - |z_j|) + \frac{1}{2}(1 - |z_j|)^2 + \dots \geq 1 - |z_j|$$

از تمام توان این شرط که  $|f(z)|$  کراندار است استفاده نکردیم؛ کافی بود فرض کنیم

$$\int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$$

از بالا کراندار است.

توجه کنید که قضیهٔ یسن به ما این امکان را می‌دهد که  $\int_0^R t^{-1} n(t) dt$  را بر اساس  $\max_{|z|=R} \log |f(z)|$  کراندار کنیم نه بر اساس چیز دیگری. بعنوان مثال ممکن است  $f$  هیچ ریشه‌ای نداشته باشد یا  $|f(z)|$  بسیار کوچک بوده بطوریکه  $\log |f(z)|$  منفی و در قدرمطلق بزرگ باشد.



### تمرینهای تکمیلی

- ۱- فرض کنید  $f$  یک تابع تام از مرتبه کمتر از ۲ باشد یعنی  $|f(z)| \leq A \exp(B|z|^{2-\varepsilon})$  در آن  $\varepsilon > 0$  و  $A$  و  $B$  مقادیر ثابتی هستند و فرض کنید  $f(m + in) = 0$  برای همه اعداد صحیح  $m$  و  $n$ . نشان دهید  $f(z) \equiv 0$ .
- ۲- فرض کنید  $f$  در گوی واحد تحلیلی و کراندار باشد و  $f[\exp(-\frac{1}{n})] = 0$  و  $n = 1, 2, \dots$  نشان دهید  $f(z) \equiv 0$ .
- ۳- فرض کنید  $f$  تابعی تام و  $|f(z)| \leq Ae^{C|z|}$  که در آن  $C < 4$  و  $f(n) = f(in) = 0$  برای  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  نشان دهید  $f(z) \equiv 0$ .

### ۳۳. تقسیمهای اصل ماکزیم

#### ۳۳.۱ قضیه فراگمن-لیندلف

فراگمن و لیندلف ثابت کردند که اصل ماکزیم تا نزدیکی یک نقطه استثنایی برقرار است، اگر تابع دارای یک شرط اضافی باشد که بنظر نمی‌رسد خودش برای تضمین نتایج به اندازه کافی قوی باشد. به عبارت دیگر اگر  $|f(z)| \leq M$  روی مرز  $D$  به جز یک نقطه (غالباً  $\infty$ )، در این صورت یا  $|f(z)| \leq M$  در  $D$  یا این که  $|f|$  باید فوق‌العاده بزرگ شود وقتی که  $z$  به نقطه استثنایی نزدیک می‌شود. اکنون ایده اصلی قضیه فراگمن-لیندلف را با اثبات ساده‌ترین قضیه از این نوع، نشان می‌دهیم:

اگر  $\limsup |f(z)| \leq M$  وقتی که  $z$  به هر نقطه در مرز ناحیه همبند ساده  $D$  به جز یک نقطه  $z_0$  نزدیک شود، و اگر  $|f(z)| \leq N$  در  $D$ ، در واقع آنگاه  $|f(z)| \leq M$  در  $D$ . (طبیعتاً فرض بر این است که  $N > M$ ).

ایده اثبات این است که ابتدا به ازای هر  $\varepsilon$  خانواده‌ای از توابع  $g_\varepsilon(z)$  می‌یابیم که  $g_\varepsilon(z)$  در  $D$  تحلیلی،  $|g_\varepsilon(z)| \leq M$ ،  $g_\varepsilon(z) \rightarrow 0$  وقتی  $z \rightarrow z_0$  و  $|g_\varepsilon(z)| \rightarrow 1$  وقتی  $z \rightarrow \infty$  و  $z \neq z_0$ . اگر چنین خانواده‌ای داشته باشیم آنگاه  $\limsup |f(z)g_\varepsilon(z)| \leq M$  وقتی  $z$  به هر نقطه در مرز  $D$  نزدیک شود زیرا وقتی  $z \rightarrow z_0$  آنگاه  $|f(z)g_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$ . بنابراین بنا به بخش ۱۶.۲ داریم  $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq M$  برای  $z \in D$ . چون طرف راست مستقل از  $\varepsilon$  است، می‌توانیم فرض کنیم  $\varepsilon \rightarrow 0$  که در نتیجه  $|f(z)| \leq M$  برای  $z \in D$  زیرا  $|g_\varepsilon(z)| \rightarrow 1$  برای هر  $z \neq z_0$ .

آنچه لازم داریم این است که خانواده مناسب  $g_\varepsilon$  را بیابیم. وقتی  $D$  کراندار باشد این مطلب آسان است. فرض کنید  $K$  ماکزیم  $|z - z_0|$  برای  $z$  متعلق به بستار  $D$  باشد. در این صورت

$\varepsilon > 0$ ، دارای ویژگیهای مطلوب است؛ می‌توانیم هر شاخه‌ای را برای توان انتخاب کنیم.

تمرین ۳۳.۱ همین قضیه را وقتی که  $z = \infty$  و  $D$  غیرکراندار و دارای یک نقطه بیرونی  $z_1$  است، ثابت کنید.

قضیهٔ متناظری را برای توابع همساز به همین روش می‌توان ثابت کرد، اما اگر  $u$  در ناحیهٔ همبند ساده  $D$  همساز باشد استدلال ثابت می‌گردد. در این صورت  $u = \operatorname{Re} f$ ،  $f$  تحلیلی (بخش ۱۹.۱)، و  $|ef| = e^u$  کراندار است اگر و تنها اگر  $u$  از بالا کراندار باشد. به جای یک نقطه مرزی استثنائی می‌توانیم تعداد با پایانی نقطهٔ مرزی استثنائی داشته باشیم.

اکنون صورت کلی‌تر اصل ماکزیمم را نسبت به قبل داریم. اما اگر شکل  $D$  را نیز در نظر بگیریم این فرض که  $f$  کراندار است قوی‌تر از آن چیزی است که لازم داریم. دو قضیهٔ بعدی ممکن است قدری خاص بنظر آیند اما کاربردهای جالبی دارند.

برای مشاهدهٔ این که  $e^z$  روی محور موهومی، کراندار است اما در طرف راست نیم‌صفحهٔ چپین نیست، باید بررسییم چه نوع شرطی باید روی تابع  $f$  که در نیم‌صفحهٔ سمت راست تحلیلی و روی موهومی کراندار است بگذاریم تا حتماً در نیم‌صفحهٔ راست کراندار شود. قدرمطلق  $e^z$  در نیم‌صفحهٔ راست مانند  $e^{2x}$  بزرگ می‌شود، تابع  $\exp(z^\delta)$ ،  $0 < \delta < 1$ ، کندتر بزرگ می‌شود، اما روی محور موهومی کراندار نیست، بنابراین شاید این رشد آهسته با کرانداری روی محور موهومی سازگار نباشد. در اینجا معلوم می‌شود که این درست است.

بسیار مفید و واضح است که توابعی را در نظر بگیریم که در یک زاویه  $\alpha$ ،  $|\arg z| \leq \alpha$ ،  $\alpha < \pi$ ، تحلیلی هستند. فرض خواهیم کرد که  $f$  در درون زاویه وقتی  $z \rightarrow \infty$ ، «خیلی سریع» رشد نکند و امیدواریم که نتیجه‌گیری کنیم که اگر  $f$  روی یالهای زاویه کراندار باشد، آنگاه، در واقع باید،  $f$  درون زاویه در تمام امتدادها کراندار باشد.

قضایا برای زوایایی که نسبت به محور حقیقی مثبت متقارن نیستند را می‌توان با یک تغییر متغیر (واقعاً با دورانی در صفحه) به حالت متقارن تبدیل کرد. اکنون قضیهٔ اصلی فراگمن-لیندلف را ثابت می‌کنیم.

اگر  $f$  در  $|\arg z| < \alpha$ ،  $\alpha < \pi$ ، تحلیلی و در زاویه بسته پیوسته باشد و اگر  $|f(z)| \leq M$  روی یالهای زاویه و  $|f(z)| \leq A \exp(B|z|^\mu)$  که در آن  $0 < \mu < \frac{\pi}{\alpha}$  و  $A$  و  $B$  ثابتهای مثبت هستند، آنگاه  $|f(z)| \leq M$  در درون زاویه.

در اینجا شرط  $\mu$  اکیداً کمتر از  $\frac{\pi}{\alpha}$  اساسی است، اعداد  $A$  و  $B$  صرفاً برای اجتناب از پیچیدگی در نزدیکی  $z = 0$  هستند. شرط  $\alpha < \pi$  از اینکه زاویه روی خودش بیفتد جلوگیری می‌کند.

برای اثبات، به نتایجی مانند  $g_\varepsilon$  از قضیه قبل نیاز داریم. لازم است  $g_\varepsilon$  در درون زاویه تحلیلی،  $|g_\varepsilon(z)| \leq 1$  روی یالهای زاویه،  $g_\varepsilon(z) \rightarrow 0$  وقتی  $z \rightarrow \infty$  و  $|g_\varepsilon(z)| \rightarrow 1$  وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  برای هر  $z$  در درون زاویه. احتمالاً بدیهی نیست که چگونه چنین تابعی را پیدا کنیم، اما قبلاً درباره آن فکر کرده‌ایم، به راحتی می‌توانیم ببینیم که آن در اینجا نیز کار می‌کند. تعریف می‌کنیم  $g_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon z^\sigma)$  که در آن  $\frac{\pi}{\alpha} < \sigma < \mu$  و  $z^\sigma$  مقدار اصلی خود را دارد. در واقع اگر  $\arg z = \theta$ ،

$$\begin{aligned} z^\sigma &= \exp[\sigma(\ln |z| + i \arg z)] = |z|^\sigma e^{i\sigma\theta} \\ g_\varepsilon(z) &= \exp[-\varepsilon |z|^\sigma (\cos \sigma\theta + i \sin \sigma\theta)] \\ |g_\varepsilon(z)| &= \exp(-\varepsilon |z|^\sigma \cos \sigma\theta) \end{aligned}$$

روی نیم‌خطهای  $\theta = \pm \alpha$  داریم  $|\sigma\theta| < \frac{1}{2}\pi$  و  $\cos \sigma\theta$  مثبت است. بنابراین  $|g_\varepsilon(z)| \leq 1$  روی یالهای زاویه و در اینجا  $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq M$ . از طرف دیگر روی کمان  $|z| = R$ ،  $|\theta| < \alpha$ ،

$$\begin{aligned} |f(z)g_\varepsilon(z)| &\leq A \exp[BR^\mu - \varepsilon R^\sigma \cos(\sigma\theta)] \\ &\leq A \exp[BR^\mu - \varepsilon R^\sigma \cos(\sigma\alpha)] \end{aligned}$$

زیرا  $\cos \sigma\theta$  از  $\cos \sigma\alpha$  نمی‌تواند کمتر باشد. حالا چون  $\sigma > \mu$ ، لذا برای  $R$  بزرگ، نما منفی است و  $|f(z)g_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$  وقتی  $R \rightarrow \infty$  بطور یکنواخت نسبت به  $\theta$ . در نتیجه  $f(z)g_\varepsilon(z)$  در نقاط داخلی زاویه کراندار است و از این نتیجه می‌شود که  $|f(z)g_\varepsilon(z)| \leq M$  در تمام زاویه. حالا با فرض  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، نتیجه قضیه بدست می‌آید.

توجه کنید که اگر  $\mu = \frac{\pi}{\alpha}$ ، اثبات کار نمی‌کند، به این که  $\sigma$  بطور اکید بین  $\mu$  و  $\frac{\pi}{\alpha}$  باشد وابسته است. اما، اگر فرضهای دیگر را قوی کنیم می‌توانیم یک قضیه با  $\mu = \frac{\pi}{\alpha}$  بدست آوریم. برای سادگی، قضیه متناظر را تنها برای نیم‌صفحه  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ارائه می‌دهیم. اینجا فرض می‌کنیم  $|f(z)| \leq M$  روی محور موهومی و  $|f(z)| \leq A \exp(\delta|z|)$  برای هر  $\delta$  مثبت (تنها مقادیر کوچک  $\delta$  کافی هستند) که در آن عدد  $A$  ممکن است به  $\delta$  وابسته باشد. با این فرضها، مجدداً بدست می‌آید که  $|f(z)|$  در نیم‌صفحه  $\operatorname{Re} z > 0$  توسط  $M$  کراندار می‌شود.

اکنون تابع  $g(z) = f(z) e^{-\delta z}$  را در ربع اول و چهارم در نظر می‌گیریم. چون  $|g|$  روی محور موهومی با  $M$  و روی محور حقیقی مثبت با  $A$  کراندار شده است، می‌توانیم قضیه اخیر را در هر ربع بکار ببریم و نتیجه بگیریم که در هر ربع  $|f(z) e^{-\delta z}| \leq \max(M, A)$ . حالا فرض کنید که برای هر  $\delta$  مثبت،  $f(z) = O(e^{\delta|z|})$ . همچنین برای هر  $\delta$  مثبت،  $f(z) = O(e^{\frac{\delta|z|}{4}})$ . بنابراین، خصوصاً،  $f(x) = O(e^{\frac{\delta x}{4}})$  وقتی  $x \rightarrow +\infty$  و بنابراین  $f(x) e^{-\delta x} \rightarrow 0$  و بنابراین  $f(x) e^{-\delta x} \rightarrow 0$  وقتی  $x \rightarrow \infty$ . در اینجا باید  $A \leq M$ ، چون در غیر این صورت  $|f(z) e^{-\delta z}|$  در نیم‌صفحه سمت راست در تعداد با پایان نقطه داخلی ماکزیمم خواهد شد. در نتیجه  $|f(z) e^{-\delta z}| \leq M$  در نیم‌صفحه بالایی، که  $M$  مستقل از  $\delta$  است. با فرض  $\delta \rightarrow 0$  بدست می‌آوریم  $|f(z)| \leq M$  در نیم‌صفحه بالایی.

در این قضیه و قضایای مشابه، همیشه کافی است که کران بالایی روی  $|f|$  در درون زاویه، فقط روی یک دنباله از کمان‌هایی که به  $\infty$  میل می‌کنند را داشته باشیم چون می‌توانیم اصل ماکزیمم را برای ناحیه‌های کراندار شده به وسیله جفتهای متوالی کمانها و بخشهایی از اضلاع زاویه بکار ببریم.

## ۳۳.۲ برخی کاربردهای قضایای فراگمن-لیندلف

اولین کاربرد به قضیهٔ دوم بخش ۲۸.۴ مربوط می‌شود. فرض کنید  $f$  تحلیلی و درون زاویه بسته بین  $\arg z = \alpha$  و  $\arg z = \beta$  که  $|\alpha - \beta| < 2\pi$ ، کراندار باشد و فرض کنید  $f(z) \rightarrow L$  وقتی  $r \rightarrow \infty$  در امتداد هر دو شعاع. در این صورت  $f(z) \rightarrow L$  بطور یکنواخت در درون زاویه وقتی که  $|z| \rightarrow \infty$ .

می‌توانیم مسئله را با فرض  $L = 0$  ساده کنیم (در غیر این صورت  $L - f(z)$  را در نظر می‌گیریم). و ابتدا فرض می‌کنیم که  $|\alpha - \beta| < \pi$  (این فرض بعداً حذف می‌شود). سپس مسئله را با دوران صفحه بطوریکه  $\beta = -\alpha$ ،  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ، ساده‌تر می‌کنیم. حالا

$$g(z) = \frac{z}{z+k} f(z), \quad k > 0$$

را در نظر بگیرید، برای  $|z|$  بزرگ داریم

$$|g(z)| \leq \frac{|z|}{|z+k|} |f(z)| \leq \frac{r}{(r^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} |f(z)|$$

همچنین بنا به فرض در زاویه به ازای  $M$  داریم:  $|f(z)| \leq M$ ، و  $|f(z)| < \varepsilon$  اگر  $|g(z)| \leq |f(z)| < \varepsilon$  در این صورت وقتی  $|z| > r_1$  داریم  $r_1 = r_1(\varepsilon)$  برای  $\arg z = \pm\alpha$  که مستقل از  $k$  است. اکنون بگیرد  $k = \frac{r_1 M}{\varepsilon}$ . هرگاه  $|z| < r_1$  داریم

$$|g(z)| \leq \frac{rM}{(r^2 + r_1^2 \frac{M^2}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{r\varepsilon M}{(r\varepsilon^2 + r_1^2 M^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{r\varepsilon M}{r_1 M} < \varepsilon$$

بنابراین  $|g(z)| < \varepsilon$  در سراسر زاویه،

$$|f(z)| = |g(z)| \left| \frac{z+k}{z} \right| < \varepsilon \frac{|z+k|}{|z|}$$

و این نامساوی بیان می‌کند که اگر  $|z| > k$ ، آنگاه  $|f(z)| < 2\varepsilon$ . به عبارت دیگر  $f(z) \rightarrow 0$  بطور یکنواخت در درون زاویه.

اگر  $|\beta - \alpha| > \pi$ ، می‌توانیم  $h(w) = f(w^p)$  را برای عدد صحیح و به اندازهٔ کافی بزرگ  $p$ ، در نظر بگیریم، آنگاه  $h$  به ازای  $w$  در درون زاویه باز  $|\beta - \alpha|^{\frac{1}{p}} < \pi$  تحلیلی است، اگر  $p$  به اندازهٔ کافی بزرگ باشد.

می‌توانیم گزارهٔ اخیر را برای اثبات این که اگر  $f$  در زاویهٔ  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$  تحلیلی و کراندار و  $f(z) \rightarrow L$  در امتداد یک ضلع زاویه و  $f(z) \rightarrow M$  در امتداد ضلع دیگر، وقتی  $z \rightarrow \infty$  بکار ببریم، در این صورت  $L = M$  (و در زاویه  $f(z) \rightarrow L$  بطور یکنواخت<sup>۱</sup>).

برای انجام این کار تابع  $g(z) = [f(z) - L][f(z) - M]$  نیز که درون زاویه تحلیلی و کراندار است را در نظر بگیرید که وقتی  $z \rightarrow \infty$  روی هر دو ضلع زاویه، به صفر نزدیک می‌شود. بنا به گزارهٔ اخیر  $g(z) \rightarrow 0$  بطور یکنواخت در درون زاویه که بیان می‌کند

$$[f(z) - L][f(z) - M] \rightarrow 0$$

بطور یکنواخت در درون زاویه.

از این مطلب نتیجه می‌گیریم  $L = M$  و این که  $f(z) - L \rightarrow 0$  فرض کنید  $\varepsilon^2 > 0$  داده شده باشد، آنگاه برای  $|z|$  به اندازهٔ کافی بزرگ بطور همزمان داریم  $|f(z) - L| < \varepsilon$  روی  $\arg z = \alpha$  و  $|f(z) - M| < \varepsilon^2$  روی  $\arg z = \beta$  یا  $|f(z) - L| < \varepsilon$  یا  $|f(z) - M| < \varepsilon$  (یا هر دو). اگر  $\alpha \leq \arg z \leq \beta$  برای همهٔ نیم‌خطهای درون زاویه، آنگاه برای  $\varepsilon$  کوچک، وقتی  $\arg z = \beta$  تناقض خواهیم داشت (اگر  $M \neq L$ ). اگر  $|f(z) - L|$  گاهی بزرگتر از  $\varepsilon$  باشد، باید  $\theta$ -ای ( $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ) وجود داشته باشد که هر دو نامساوی برقرار شوند. (به کوچکترین کران بالایی  $\theta$  هایی که برای آنها  $|f(z) - L| < \varepsilon$  توجه کنید).

اگر در نزدیکی  $\alpha$  داشته باشیم  $|f(z) - M| < \varepsilon$  استدلال مشابهی را به کار برید. در این صورت از نامساوی مثلث برای  $|z|$  به اندازهٔ کافی بزرگ داریم

$$|f(z) - M| + |f(z) - L| \leq 2\varepsilon \quad (\arg z = \theta)$$

چون  $\varepsilon$  دلخواه است،  $M = L$  و نتیجه حاصل می‌شود.

دیدیم که اگر قدرمطلق تابع  $f$  در نیم‌صفحهٔ «خیلی بزرگ» نباشد و روی مرز نیم‌صفحه کراندار باشد آنگاه تابع واقعاً در نیم‌صفحه کراندار است. ممکن است انتظار داشته باشیم که بتوانیم در مقابل کم شدن سریع  $|f|$  روی مرز،  $|f|$  را در درون نیم‌صفحه بزرگتر فرض کنیم. آنچه که واقعاً اتفاق می‌افتد این است که  $|f|$  نمی‌تواند خیلی سریع روی مرز کاهش یابد مگر  $f \equiv 0$ . بطور دقیق‌تر، یک تابع تحلیلی (غیرمتحد با صفر) نمی‌تواند در نیم‌صفحه آهسته‌تر از شکل نمایی بزرگ شود، و در عین حال به سرعت به صورت نمایی روی مرز به صفر نزدیک شود. قضیهٔ زیر از ف-کارلسون این اصل را به طور کتبی بیان می‌کند: فرض کنید  $f$  برای  $\operatorname{Re} z > 0$  تحلیلی و در  $\operatorname{Re} z \geq 0$  پیوسته باشد و در شرایط  $|f(z)| \leq Ae^{k|z|}$  به ازای  $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$  و  $|f(iy)| \leq Be^{-\varepsilon|y|}$  که در آن  $A$  و  $B$  و  $\varepsilon$  و  $k$  اعداد مثبت هستند ( $\varepsilon$  معمولاً کوچک و  $k$  بزرگ) صدق کند. در این صورت  $f(z) \equiv 0$ . ایدهٔ پشت قضیه

این است که کاهش نمایی روی مرز، به نیمخطهایی که به اندازه کافی نزدیک محورهای موهومی منحنی و مثبت هستند، سرایت می‌کنند. بعد بنا به قضیه اصلی فراگمن- لیندلف کرانداری  $|f|$  را در یک زاویه باز کمتر از  $\pi$  خواهیم داشت و بنابراین کرانداری در نیم صفحه بدست می‌آید، و به آسانی دیده می‌شود  $f(z) \equiv 0$ .

جزئیات اثبات فوق‌العاده دقت نظر می‌خواهد. توجه کنید که همه جا قضیه اصلی فراگمن- لیندلف را مستقیماً نمی‌توانیم برای  $f$  یا حتی  $f(z) e^{-kz}$  بکار ببریم زیرا، زاویه  $\frac{\pi}{4} < \arg z$  به اندازه کافی کوچک نیست. آنچه انجام می‌دهیم تقسیم صفحه به دو زاویه کوچکتر، و در نظر گرفتن توابع کمکی مناسب برای هریک می‌باشد. برای شروع به  $g(z) = f(z) e^{-kz} e^{-\varepsilon z}$  در ربع اول با  $\varepsilon > 0$  توجه کنید. داریم  $|g(x)| \leq A$  و  $|g(iy)| \leq B$  و از قضیه اصلی فراگمن- لیندلف برای زاویه باز  $\frac{\pi}{4}$ ، در ربع اول نامساوی  $|g(z)| \leq C = \max\{A, B\}$  حاصل می‌شود [فقط لازم است که  $|f(z)| < P \exp(q|z|^\gamma)$  در این صورت روی نیمخط  $\arg z = \theta$ ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ، داریم

$$|f(z)| \leq C \exp(kr \cos \theta - \varepsilon r \sin \theta)$$

طرف راست نامساوی بوسیله  $C$  کراندار می‌شود، اگر  $k \cos \theta = \varepsilon \sin \theta$  یعنی  $\tan \theta = \frac{k}{\varepsilon}$ . با استدلالی مشابه در نیم صفحه پائینی داریم.  $|f(x)| \leq C$  برای  $z = re^{i\theta}$  با  $\tan \theta = \frac{-k}{\varepsilon}$ . اکنون  $|f|$  بوسیله  $C$  روی دو نیمخطی که زاویه‌ای به اندازه  $\pi < \tan^{-1}(\frac{k}{\varepsilon}) < \pi$  می‌سازند کراندار است و بنابراین در درون زاویه کراندار است. همچنین  $|f(z)| \leq C$  روی محور موهومی و روی نیمخطها و در نتیجه (بنا به قضیه فراگمن- لیندلف، مجدداً این بار برای زوایای  $\theta < \arg z < -\theta$ ) روی بقیه نیم صفحه کراندار است.

اکنون داریم  $|f(z)| \leq C$  در نیم صفحه سمت راست و  $|f(iy)| < Be^{-\varepsilon|y|}$ . تابع  $g(z) = f(z) e^{pz}$  را که در آن  $p$  عدد مثبت بزرگی است در نظر بگیرید. در این صورت  $|g(iy)| = |f(iy)| \leq Be^{-\varepsilon|y|}$ . بنابراین  $g$  در فرضهای مشابه برای  $f$  به جز اندازه توان  $k'$  که در رابطه  $C = \max(A, B)$  ظاهر نمی‌شود، صدق می‌کند. بنابراین آنچه تا اینجا انجام داده‌ایم نتیجه می‌دهد که در نیمه صفحه  $|g(z)| \leq C$  یعنی  $|f(z)| \leq Ce^{-px}$  که  $C$  مستقل از  $p$  است. با فرض  $p \rightarrow \infty$  می‌بینیم که  $f(z) \equiv 0$ .

سرانجام قضیه‌ای را که اکنون ثابت شد برای اثبات یک نتیجه حتی جالبتر موسوم به قضیه کارلسون استفاده می‌کنیم. این قضیه تلویحاً می‌گوید که  $\sin \pi z$  کوچکترین تابعی است که در نیم صفحه سمت راست تحلیلی، در نقاط صحیح مثبت صفر می‌شود و هم‌ارز با صفر نیست. بطور دقیقتر اگر  $f(z)$  برای  $x \geq 0$  تحلیلی و  $|f(z)| \leq Ae^{\tau|z|}$  با  $\tau < \pi$  و اگر  $f(n) = 0$  برای  $n = 0, 1, 2, \dots$ ، در این صورت  $f(z) \equiv 0$ . مثال  $f(z) = \sin \pi z$  نشان می‌دهد که شرط  $\tau < \pi$  اساسی است.

طبیعی است که از تابع  $g(z) = \frac{f(z)}{\sin \pi z}$  شروع کنیم، چون  $g$  در نیم صفحه سمت راست (بعد از حذف نقاط تکین برداشتنی) تحلیلی خواهد شد. چون  $|\sin \pi iy| = |\sinh \pi y|$ ، داریم

برای استفاده از قضیه اخیر به نامعادله‌ای برای  $|g|$  به صورت  $|g(z)| \leq ae^{k|z|}$  در نیم‌صفحه سمت راست نیاز داریم. برای بدست آوردن این نامعادله به کران‌های پائین  $|\sin \pi z|$  نیازمندیم. بنا به تمرین ۴.۱۴

$$|\sin \pi z| = (\sinh^2 \pi y + \sin^2 \pi x)^{\frac{1}{2}} \geq \begin{cases} \sinh \pi |y| \\ |\sin \pi x| \end{cases}$$

اگر  $|y| \geq 1$ ، از اولین نامعادله نتیجه می‌شود  $|\sin \pi z| \geq \sinh z$ ، و بنابراین  $|g(z)| \leq A_1 e^{\tau|z|}$  با  $A_1 = \frac{A}{\sinh \pi}$  هرگاه  $|\operatorname{Im} z| \geq 1$ .

اگر  $|y| < 1$  یک کران بالا برای  $|g(z)|$  با توجه به ناحیه‌های  $S_n$  تعریف‌شده با  $|y| \leq 1$ ،  $|x - n| \leq \frac{1}{4}$ ،  $n = 1, 2, \dots$  بدست می‌آید. از قبل می‌دانیم  $|f(z)| \leq Ae^{\tau|z|}$  و بنابراین روی اضلاع قائم داریم که  $|f(z)| \leq A \exp[\tau(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}] \leq A \exp[\tau(n + 1)]$ . چون  $|\sin \pi z| \geq |\sin \pi x|$ ، داریم  $|\sin \pi z| \geq 1$  هرگاه  $z = x + iy$ ،  $x = n + \frac{1}{4}$  و بنابراین روی مرز  $S_n$  و در نتیجه بنا به اصل ماکزیمم در درون  $S_n$  داریم

$$|g(z)| \leq A \exp[\tau(n + 1)]$$

اما  $n \leq |z| + 1$  برای  $z$  متعلق به  $S_n$ ، و در نتیجه

$$|g(z)| \leq A \exp[\tau(|z| + 2)] = Ae^{2\tau} e^{\tau|z|}$$

مستطیل  $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$  باید جداگانه بررسی شود. در اینجا  $g$  تحلیلی است و دارای کران بالای  $B$  است؛ در نامعادله اخیر به جای  $Ae^{2\tau}$  مقداری بزرگتر از  $Ae^{2\tau}$  و  $B$  قرار دهید. در این صورت  $g$  فرضهای قضیه اخیر صدق می‌کند و از این نتیجه می‌شود که  $g(z) \equiv 0$ ، بنابراین  $f(z) \equiv 0$ .

### تمرین تکمیلی

۱- فرض کنید که تابع تام  $f$  در شرط  $|f(z)| \leq A(\varepsilon) e^{\varepsilon|z|}$  برای هر  $\varepsilon > 0$  صدق می‌کند. نشان دهید که اگر  $f$  روی محور حقیقی کراندار باشد آنگاه  $f$  ثابت است.

### یادداشت:

(۱) این نتیجه اغلب اصل لیبندلف نامیده می‌شود. فرضها را واقعاً می‌توان ضعیفتر کرد: به مقاله‌ای از Sindalovskii که در یادداشت ۳ از بخش ۲ آمده است مراجعه کنید.

## ۳۴. سری‌های مجانبی

## ۳۴.۱ یک مثال

تابع

$$E(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

یکی از چندین تابع معروف برای انتگرال نمایی است. البته مقدار آن به ازای  $x$  های خیلی بزرگ، بسیار کوچک است، اما چون احتمالاً مضرب عوامل بزرگ قرار می‌گیرد، ممکن است دانستن مقادیر نسبتاً دقیق آن مورد نظر باشد. با تکرار انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} E(x) &= - \int_x^\infty \frac{1}{t} d(e^{-t}) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt = \dots \\ &= e^{-x} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{x^k} \right] + (-1)^n n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt \end{aligned}$$

بنابراین

$$e^x E(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} + R_n, \quad R_n = (-1)^n e^x n! \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}} dt$$

هرچند

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{x^k}$$

به ازای هر  $x$  و اگر است، باقیمانده  $R_n$  بعد از جمله در شرط  $|R_n| \leq n! x^{-n-1}$  صدق می‌کند. هرگاه  $x \rightarrow \infty$ ، مرتبه  $R_n$  از  $n$ -امین جمله سری کمتر است، بعنوان مثال اگر ۴ جمله سری را در نظر بگیریم و  $x = 10$ ، مقدار  $e^{10} E(10)$  با خطای کمتر از  $10^{-4} \times 2/4$  بدست می‌آید. وقتی  $x = 100$  با همان تعداد جملات،  $e^{100} E(100)$  با خطای کمتر از  $10^{-9} \times 2/4$  حاصل می‌شود.

## ۳۴.۲ ویژگیهای سری‌های مجانبی

سری‌ای که نوع تقریبی را که هم‌اکنون بحث کردیم ایجاد می‌کند به سری مجانبی (دقیق‌تر، سری توانی مجانبی) معروف است. در یک سری توانی همگرا، با انتخاب تعداد جملات بیشتر به ازای هر  $x$  داده شده تقریب بهتری برای تابع بدست می‌آید. از طرف دیگر در یک سری مجانبی با بزرگ و بزرگتر کردن  $x$  برای



تعداد مفروضی جمله (معمولاً کوچک) تقریب بهتری برای تابع حاصل می‌شود. بهر حال، اگر تعداد جملات بیشتری را در نظر بگیریم، معمولاً تقریب ضعیفتری داریم.

تعریف صوری این است که  $\sum a_n z^{-n}$  یک سری مجانبی برای تابع تحلیلی در زاویه  $\alpha < \arg z < \beta$  است اگر برای هر  $n$  در هر زاویه داخلی،

$$\lim z^n \left\{ f(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} \right\} = 0$$

بطور یکنواخت، یعنی وقتی که  $|z| \rightarrow \infty$  در درون زاویه

$$f(z) \sim \sum a_k z^{-k}$$

در حالت کلی‌تر  $f(z) \sim \varphi(z) \sum a_k z^{-k}$  یک نمایش مجانبی  $f(z)$  است اگر

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \sim \sum a_k z^k$$

باید مراقب باشید که اصطلاحات از یک کتاب به کتاب دیگر تغییر می‌کند. در تعریف ما یکنواختی نمایش در زاویه و تحلیلی بودن  $f$  لازم است.

تمرین ۳۴.۱ نشان دهید که اگر تابع (تکمقداری)  $f$ ، در زاویه داده‌شده دارای دو سری توانی مجانبی باشد آنگاه سری‌ها دارای ضرایب یکسان هستند.

هرچند ممکن است که تابعی دارای دو بسط مجانبی متفاوت در دو زاویه متفاوت باشد. این به پدیده استوکس معروف است.

محاسبه با سری‌های مجانبی بسیار شبیه محاسبه با سری‌های توانی همگرا است، اما سری‌های مجانبی جالب، معمولاً واگرا هستند و نمایش مجانبی از یک تابع را فقط در زاویه بین دو نیمخط  $\arg z = \alpha$  و  $\arg z = \beta$  تأمین می‌کنند. همچنین برخلاف سری توانی همگرا، سری‌های مجانبی یکسان می‌توانند بیش از یک تابع را نمایش دهند. برای مثال اگر  $E(z)$  تابع تعریف‌شده در بخش ۳۴.۱ باشد آنگاه  $e^z E(z) - e^{-z}$  دارای بسط مجانبی  $e^z E(z)$  در زاویه  $-\frac{\pi}{4} + \varepsilon < \theta < -\frac{\pi}{4} - \varepsilon$  به ازای  $\varepsilon > 0$  است زیرا  $z^n e^{-z} \rightarrow 0$  بطور یکنواخت در هر زاویه درونی و برای هر  $n$ . یعنی تابع، یک سری ارائه می‌دهد اما سری لزوماً یک تابع تعیین نمی‌کند.

اگر زاویه‌ای که سری مجانبی یک تابع تحلیلی را نمایش می‌دهد تمام صفحه باشد و تقریب در صفحه یکنواخت باشد، با گرفتن  $n = 0$  تعریف فوراً نشان می‌دهد که  $f$  دارای یک نقطه تکین برداشتنی در  $\infty$  است و  $f$  بوسیله سری توانی همگرای  $\sum b_n z^{-n}$  در بیرون گوی نمایش داده می‌شود. بنابراین سری مجانبی برای توابع تک‌مقداری فقط در زاویه‌های باز کمتر از  $2\pi$  جالب هستند.

به روشنی جمع سری‌های مجانبی جمله به جمله صورت می‌گیرد.

تمرین ۳۴.۲ نشان دهید که اگر (در زاویه یکسان)  $f(z) \sim \sum a_n z^{-n}$  و  $g(z) \sim \sum b_n z^{-n}$ ، در این صورت  $f(z)g(z) \sim \sum c_n z^{-n}$  که در آن  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  (مشابه فرمول ضرب دو سری توانی همگرا. بخش‌های ۴.۲ و ۱۵.۲ را ببینید).

همچنین می‌توان از یک سری مجانبی جمله به جمله انتگرال گرفت، به این مفهوم که اگر  $f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$  در یک زاویه، آنگاه در همان زاویه، با انتگرال‌گیری در امتداد یک نیم‌خط:

$$\int_z^{\infty} [f(w) - a_0 + a_1 w^{-1}] dw \sim \sum_{k=2}^{\infty} a_k (1-k)^{-1} z^{-k+1}$$

داریم

$$f(w) - \sum_{k=0}^n a_k w^{-k} = g(w) w^{-n}$$

که  $g(w) \rightarrow 0$  بطور یکنواخت هرگاه  $w \rightarrow \infty$  در هر زاویه درونی. در این صورت

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} [f(w) - a_0 - a_1 w^{-1}] dw &= \int_z^{\infty} \sum_{k=2}^n a_k w^{-k} dw + \int_z^{\infty} g(w) w^{-n} dw \\ &= - \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k-1} z^{-k+1} + \int_z^{\infty} g(w) w^{-n} dw \end{aligned}$$

اکنون لازم است که نشان دهیم انتگرال اخیر از نوع  $o(z^{-n+1})$  است. با فرض  $w = te^{i\lambda}$  و  $z = re^{i\lambda}$ ، انتگرال به صورت

$$e^{-i(n-1)\lambda} \int_r^{\infty} g(te^{i\lambda}) t^{-n} dt$$

درمی‌آید و قدرمطلق آن به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، در صورتی که  $r$  به اندازه کافی بزرگ باشد، از مقدار زیر

بیشتر نیست

$$\int_r^{\infty} |g(te^{i\lambda})| t^{-n} dt < \varepsilon \int_r^{\infty} t^{-n} dt = \varepsilon \frac{r^{-n+1}}{n-1}$$

وضعیت مشتق در مورد سری‌های مجانبی تا اندازه‌ای متفاوت است.

تمرین ۳۴.۳ با همان  $E(z)$  بخش ۳۴.۱ نشان دهید که  $g(x) = e^x E(x) + e^{-x} \sin(e^x)$

دارای یک سری مجانبی برای  $x$  های حقیقی مثبت است، اما مشتق آن اینطور نیست؛ همچنین

نشان دهید که سری، یک سری مجانبی به مفهومی که ما در هر زاویه باز مثبت بیان کردیم نیست.

این مطلب بیان می‌کند که چرا برخی از کتابها می‌گویند که از سری مجانبی نمی‌توان همواره جمله به جمله مشتق گرفت. اما اگر  $f$  در زاویه  $A$  تحلیلی و دارای یک سری مجانبی (بر اساس تعریف ما) در  $A$  باشد، آنگاه  $f'$  دارای یک سری مجانبی است که از فرمول مشتق بدست می‌آید. یعنی اگر

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} + o(z^{-n})$$

آنگاه

$$f'(z) = \sum_{k=0}^n (-k) a_k z^{-k-1} + o(z^{-n-1})$$

در هر زاویه داخلی  $A_1$  داریم

$$f(w) = \sum_{k=0}^n a_k w^{-k} + o(w^{-n})$$

بطور یکنواخت. بنا به فرمول کوشی

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

که در آن  $C$  یک دایره به مرکز  $z$  و شعاع  $\lambda|z|$  است که  $\lambda$  بسیار کوچک می‌باشد و  $C$  در درون  $A_1$  واقع گردد. در این صورت اگر  $\varepsilon > 0$  داده شده باشد و  $|z|$  به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (w-z)^{-2} \left( \sum_{k=0}^n a_k w^{-k} + \varphi(w) \right) dw, \quad |\varphi(w)| < \frac{\varepsilon}{|w|^n}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \left| f'(z) - \sum_{k=1}^n k a_k z^{-k-1} \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{\varphi(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z + \lambda|z|e^{i\theta})}{\lambda|z|e^{i\theta}} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda|z|} \{ |z|(1+\lambda) \}^{-n} \varepsilon = \varepsilon O(|z|^{n-1}) \end{aligned}$$

به طور یکنواخت در  $A_1$ . این مطلب نشان می‌دهد که  $f'$  دارای سری مجانبی بدست‌آمده از مشتق سری  $f$  است.

همچنین ترکیب سری توانی همگرا با یک سری مجانبی می‌تواند سری مجانبی ترکیب دو تابع را حاصل کند، بطور دقیق‌تر، اگر  $f$  در یک گوی تحلیلی و  $f$  دارای بسط مجانبی با  $f(\infty)$  در گوی همگرایی  $g$  باشد، آنگاه بسط مجانبی  $g[f(z)]$  از جایگزینی صوری بدست می‌آید.<sup>۱</sup>

## تمرینهای تکمیلی

۱- برای  $\operatorname{erfc}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} x e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)$  (مشابه بخش ۳۴.۱) یک سری مجانبی ارائه دهید، که

$$\operatorname{erfc}(x) = e\pi^{-\frac{1}{2}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

۲- یک سری مجانبی برای  $\Gamma(n, x) = x^{1-n} e^{x^2} \Gamma(n, x)$  بیابید که در آن  $\Gamma(n, x) = \int_x^\infty t^{n-1} e^{-t} dt$  است. (تابع گامای ناقص)

۳- فرض کنید

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

یک سری توانی مجانبی برای  $f(x^{-1})$  بدست آورید.

## ۳۴.۳ سری‌های مجانبی برای تبدیلات لاپلاس

یک روش بسیار مفید برای پیدا کردن سری مجانبی، یک سری مجانبی برای توابعی را بدست می‌دهد که با تبدیل لاپلاس نمایش داده می‌شوند؛ توابع بسیاری را می‌توان به این طریق نمایش داد. این روش (معروف به لم واتسون) برای نمایش تابع جالبی مانند  $F$

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-zw} f(w) dw$$

بکار می‌رود که در آن  $\operatorname{Re} z > 0$ ، انتگرال برای  $\operatorname{Re} z > x$  به ازای برخی مقادیر  $x$  همگراست،  $f$  در  $w = 0$  و روی تمام محور حقیقی مثبت تحلیلی و  $f(0) \neq 0$ . در این صورت  $f$  را با سری مک‌لورن بسط دهید و جمله به جمله انتگرال بگیرید. جنبه بسیار مهمی از این روش وجود دارد که حتی وقتی سری مک‌لورن  $f$  فقط در یک گوی کراندار همگرا باشد، به کار می‌آید. از محاسبات بدست می‌آید

$$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! a_k}{z^{k+1}}$$

که در آن  $a_k$  ها ضرایب مک‌لورن  $f$  هستند. اثبات این که واقعاً یک سری مجانبی ایجاد می‌شود نسبتاً پیچیده است و من از آن صرف‌نظر می‌کنم.<sup>۲</sup>

۳۴.۴ با این روش سری مجانبی

$$J_0(z) = \int_0^\infty e^{-zt} (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dt$$

را پیدا کنید. ( $J_0$  تابع بسل از مرتبه صفر است.)

### ۳۴.۴ فرمول استرلینگ

فرمول استرلینگ اولین جمله بسط مجانبی تابع گاما است. کار کردن با سطحی که شامل فاکتوریل است مفید می‌باشد، به عنوان مثال در نظریه احتمال، مکانیک آماری و حتی در مباحث همگرایی انواع سری‌های بی‌پایان که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شود (اگر بخواهیم دانشجویان کارشناسی نیز درباره آن بدانند).

فرمول استرلینگ می‌گوید که برای  $-\pi + \varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ )

$$\Gamma(z + 1) \sim z^{z + \frac{1}{2}} e^{-z} (\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}}$$

که در آن  $\sim$  یعنی اینکه نسبت دو طرف به ۱ میل می‌کند (بخوانید «مجاناب است به»). فرمول را وقتی که  $z$  عدد صحیح مثبت است ثابت می‌کنیم. توجه کنید که اختلاف بین دو طرف فرمول واقعاً با  $|z|$  افزایش پیدا می‌کند، هرچند نسبت آنها به ۱ میل می‌کند.

فرمول را می‌توان حتی برای  $n$  کوچک با یک تغییر کوچک بطور دقیقتر بیان کرد. (۳)

$$\Gamma(n + 1) \sim n^n e^{-n} \left( \sqrt{2\pi} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

که به راحتی به خاطر می‌ماند. تقریب حتی نزدیکتر می‌شود اگر یک جمله بیشتر از سری مجانبی در نظر گرفته شود. سری با

$$\Gamma(z + 1) \sim z^{z + \frac{1}{2}} e^{-z} (\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \dots \right)$$

شروع می‌شود. ۴

ما از فرمول

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{2}[f(1) + f(n)] - \int_1^n f'(t) P(t) dt$$

شروع می‌کنیم. که در آنجا  $f'$  پیوسته و  $P(t) = [t] - t + \frac{1}{2}$  تابعی متناوب با دوره تناوب ۱ و با متوسط صفر روی یک دوره تناوب است.  $[t]$  به معنای، بزرگترین عدد صحیح کمتر یا برابر با ۱ است. این ساده‌ترین صورت فرمول اولر-مکلورن مربوط به انتگرالها و مجموع است که به آسانی با نوشتن انتگرالها بصورت مجموع انتگرالها روی  $((n-1), n), (n-2, n-1), \dots, (2, 3), (1, 2)$  و با انتگرال‌گیری جزء به جزء ثابت می‌شود.

هرگاه  $f(t) = \log t$  ، نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \log n! &= \int_1^n \log t \, dt + \frac{1}{\gamma} \log n + \int_1^n t^{-1} P(t) \, dt \\ &= n \log n - n + 1 + \frac{1}{\gamma} \log n + \int_1^n t^{-1} P(t) \, dt \end{aligned}$$

و بنابراین

$$n! \sim n^{n+(\frac{1}{\gamma})} e^{-n} C(n)$$

که در آن  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = C$  وجود دارد، به دلیلی که اغلب برای همگرایی انتگرال

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

بکار می‌رود.

تمرین ۳۴.۶ وجود  $C$  را ثابت کنید.

این فرمول استرلینگ است ولی هنوز باید نشان دهیم  $C = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$  . در بسیاری از کاربردها مقدار دقیق  $C$  خارج از موضوع است.

راههای گوناگونی برای محاسبه  $C$  وجود دارد، هیچ یک از آنها آسان نیست. در راهی که ارائه می‌کنم ابتدا نشان می‌دهیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n!} = 1$$

تا قدری آسانتر است که ثابت کنیم

$$\frac{n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 2)} \rightarrow 1$$

و معادله تابعی را برای تابع گاما بکار می‌بریم تا به آنچه که می‌خواهیم برسیم. از بخش ۷.۸ داریم<sup>۵</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n + 2)} &= B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} (1-e^{-t})^{\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} \, d\theta \\ &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} \, d\theta - \int_0^{\infty} [t^{\frac{1}{2}} - (1-e^{-t})^{\frac{1}{2}}] e^{-(n+\frac{1}{2})t} \, dt \end{aligned}$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \int_0^1 \left[t^{\frac{1}{2}} - (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}}\right] e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt$$

$$- \int_1^\infty \left[t^{\frac{1}{2}} - (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}}\right] e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt$$

جمله اول برابر با  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)n^{-\frac{3}{2}}[1 + o(1)]$  است پس باید نشان دهیم دو جمله دیگر  $O(n^{-\frac{3}{2}})$  هستند. در واقع می توان نشان داد که آنها  $O(n^{\frac{1}{2}})$  هستند. برای انجام آن به برخی نامساویهای مقدماتی نیاز داریم.

تمرین ۳۴.۷ نشان دهید که

- (الف)  $1 - e^{-t} < t$ ,  $0 < t < \infty$   
 (ب)  $1 - e^{-t} > t - \frac{1}{2}t^2$ ,  $0 < t < 1$   
 (ج)  $(1 - \frac{1}{2}t)^{\frac{1}{2}} > 1 - \frac{1}{2}t$ ,  $0 < t < 1$

حالا می خواهیم برای هر انتگرال یک کران بدست آوریم. اولی برابر است با

$$\int_0^1 \left[t^{\frac{1}{2}} - (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}}\right] e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt$$

بسط داخل کروشه ها با توجه به تمرین ۳۴.۷ (ب) کمتر است از

$$\left[t^{\frac{1}{2}} - \left(t - \frac{1}{2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = t^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}t\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

که این نیز با توجه به تمرین ۳۴.۷ (ب) از  $t^{\frac{3}{2}}$  کمتر است. در نتیجه اولین انتگرال از

$$\int_0^1 t^{\frac{3}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt < \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

بیشتر نمی شود.

در دومین انتگرال (با حدهای ۱ و  $\infty$ ) ما تمرین ۳۴.۷ (الف) را برای بسط داخل کروشه ها بکار می بریم تا بدست آوریم (چون  $t > 1$ )

$$\int_1^\infty \left[t^{\frac{1}{2}} - (1 - e^{-t})^{\frac{1}{2}}\right] e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt < \int_1^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt < \int_1^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt$$

$$< \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})t} dt = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

پس هر دو انتگرال  $O(n^{-\frac{5}{2}})$  هستند و در واقع داریم

$$\frac{n^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{n!} \rightarrow 1$$

حالا بطور صریح  $\Gamma(n + \frac{1}{2})$  را محاسبه می‌کنیم. با بکارگیری مکرر معادلات تابعی، تابع گاما را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \dots = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2n} n!}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\frac{n^{\frac{1}{2}} (2n)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(n!)^2 2^{2n}} \rightarrow 1$$

حال فرمول استرلینگ را (با عامل نامشخص  $C$ ) برای فاکتوریل‌های اخیر بکار می‌بریم، داریم

$$\frac{n^{\frac{1}{2}} (2n)^{2n} e^{-2n} (2n)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) C}{n^{2n} e^{-2n} n \cdot 2^{2n} C^2} \rightarrow 1$$

و بنابراین  $1 = \frac{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{C}$  و از آنجا  $C = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$

تمرین ۳۴.۸  $C$  را مستقلاً با استفاده از فرمول والیس (بخش ۳۱.۳) محاسبه کنید.

### تمرینهای تکمیلی

۱- در رابطه با تمرین ۳۴.۶ نشان دهید  $\int_0^{\infty} \lambda(x) \sin x \, dx$  همگراست اگر  $\lambda(x)$  کراندار و وقتی  $x \rightarrow \infty$  به سمت صفر میل کند (به طور نزولی).

۲-  $n!$  را برای بزرگترین مقدار  $n$  که ماشین حساب شما اجازه می‌دهد محاسبه کنید، و با آنچه که از فرمول استرلینگ بدست می‌آورد، مقایسه کنید.

۳- شعاع همگرایی  $\sum \frac{z^n \Gamma(n + \frac{1}{2})}{n!}$  را بدست آورید.

۴- فرمول اویلر-مکلورن (تمرین ۳۴.۵) را بکار برید و تعیین کنید چند جمله از  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  نیاز است تا مجموع سری با خطایی کمتر از  $10^{-10} \times 5$  بدست آید. (تقریباً با ۹ رقم اعشار).

راهنمایی: فرمول اویلر-مکلورن را با حد پائین  $M$  و حد بالایی  $\infty$  بنویسید. تذکر: این راه خوبی برای محاسبه مجموع سری که مقدار حقیقی آن برابر با  $\frac{\pi^2}{6}$  است، نمی‌باشد.



۵- ثابت اویلر  $\gamma$  ، با

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

تعریف می‌شود. با استفاده از فرمول اویلر-مک‌لورن، چند جمله از سری همساز نیاز است تا  $\gamma$  را با حداکثر خطای  $10^{-10} \times 5$  تخمین بزنیم. فرض کنید لگاریتم‌های لازم در دسترس هستند.

### یادداشتها:

(۱) E.R. Love, "Functions of Asymptotic Expansions", *Bull. Austral. Math. Soc.* 6 (1972): 307-312.

(۲) برای اثبات لم واتسون، برای مثال صفحه ۲۱۸ Copson را ببینید.

(۳) N.D. Mermin "Improving an Improved Approximation to  $n!$ ," *Amer. J. Phys.* 51 (1983): 776.

(۴) چند جمله بعدی (نقل شده از صفحه ۷۱ کتاب Sibaguki) عبارتند از

$$\frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \frac{163879}{209018880z^5} + \frac{5246819}{75246796800z^6} - \frac{534703531}{9029615616000z^7}$$

(۵) این محاسبات از روی Titchmarsh, p.58 (Sec. 1.87) آورده شده است.

## ۳۵. بحث بیشتری در باب توابع تک‌مقداری

توابعی مانند  $f$  را در نظر بگیرید که در گوی واحد تحلیلی و تک‌مقداری باشند، به عبارت دیگر، توابعی که گوی واحد را بطور همدیس به ناحیه‌ای مانند  $D$  تصویر می‌کنند. چون  $D$  می‌تواند هر ناحیه همبند ساده با حداقل دو نقطه مرزی باشد بنظر می‌آید مطلب زیادی برای گفتن نباشد، اما معلوم می‌شود که می‌توان هم درباره سری توان  $f$  و هم درباره تصاویر گوی‌های  $1 < r \leq |z|$  صحبت کرد به شرطی که، با فرض  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 1$ ،  $f$  را نرمال کنیم. می‌توان این را با اضافه کردن یک مقدار ثابت به  $f$  انجام داد، که تقریباً  $D$  را انتقال می‌دهد و  $f$  در یک مقدار ثابت ضرب کنیم که حداکثر یک تغییر مقیاس و یک دوران است. بنابراین فرض می‌کنیم

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

رده توابع تک‌مقداری که به این روش نرمال شده است، معمولاً  $S$  نامیده می‌شود (حرف اول اصطلاح "Schicht"). قبلاً در مسیر رسیدن به  $S$  کشف شده بود که آسانتر است با رده  $U$  توابع

$|z| > 1$  ازای که به ازای  $f \in S$ ، شروع کنیم. اینها دقیقاً توابعی هستند که به ازای  $1 < |z|$  تحلیلی اند، به جز برای یک قطب ساده در  $\infty$  با مانده ۱ و همچنین آنها یک به یک اند. داریم

$$\frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots} = \frac{z}{1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots} = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$$

برای رده  $U$  می توان قضیه مساحت گرونوال را اثبات کرد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1$$

برای اثبات بگیرد  $r > 1$  و مساحت ناحیه کراننداری را که مرزش تصویر  $|z| = r$  تحت  $F(z) = w$  است، محاسبه کنید. این مرز یک خم ساده بسته است (زیرا  $F$  یک به یک است)، آن را به صورت معادله  $w = R e^{i\varphi}$  می نویسیم، در این صورت با محاسبات ابتدائی مساحت برابر با  $\frac{1}{4} \int R^2 d\varphi$  خواهد بود. اگر معادلات کوشی-ریمان را در مختصات قطبی بکار ببریم می توانیم مساحت را به صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int R^2 d\varphi &= \frac{1}{4} \int R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int R^2 \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} d\theta \\ &= \frac{1}{4} r \int_0^{2\pi} R \frac{\partial R}{\partial r} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{\partial (R^2)}{\partial r} d\theta \\ &= \frac{1}{4} r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} r \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} |re^{i\theta} + \alpha_0 + \alpha_1 r^{-1} e^{-i\theta} + \dots|^2 d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} r \frac{\partial}{\partial r} (r^2 + |\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 r^{-2} + \dots) \\ &= \frac{\pi}{2} r (2r - 2r^{-3} |\alpha_1|^2 - 4r^{-5} |\alpha_2|^2 - \dots) \\ &= \pi (r^2 - r^{-2} |\alpha_1|^2 - \dots) \end{aligned}$$

مطلب اصلی این است که چون مساحت نمی تواند منفی باشد، بنابراین داریم

$$r^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 r^{-2n}$$

با فرض  $r \rightarrow 1$ ، بدست می آوریم (۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leq 1$$

این نتیجه را می‌توانیم برای اثبات قضیهٔ ضرایب بایرباخ بکار ببریم: اگر  $f \in S$  آنگاه  $|a_n| \leq 2$ .  
 در قضیهٔ بایرباخ داریم وقتی که  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$  برای اثبات توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} f(z^2) &= z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \dots \\ &= z^2(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots) \end{aligned}$$

می‌توانیم  $g(z)$  را به صورت  $[f(z^2)]^{\frac{1}{2}} = z(1 + a_2 z^2 + \dots)^{\frac{1}{2}}$ ، و انتخاب شاخه‌ای از ریشهٔ دوم که در  $z = 0$  برابر با  $1 +$  شود، تعریف کنیم.

تمرین ۳۵.۱ نشان دهید  $g(z)$  به  $S$  متعلق است.

بنابراین  $\frac{1}{g(\frac{1}{z})}$  در  $U$  است. سری لوران آن بوسیله

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots\right) \\ \frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)} &= z \left(1 + \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots\right)^{-1} \\ &= z \left(1 - \frac{1}{2} a_2 z^{-2} + \dots\right) \\ &= z - \frac{1}{2} a_2 z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

بدست می‌آید. اکنون با توجه به قضیهٔ مساحت،  $\frac{1}{2} |a_2| \leq 1$  و  $|a_2| \leq 2$ .  
 بعنوان یک کاربرد از قضیهٔ بایرباخ، می‌توانیم یک ویژگی هندسی نگاشتی از گوی واحد تحت  $f \in S$  را بررسی کنیم. فرض کنید  $c$  یک نقطه بیرون تصویر گوی واحد باشد. در این صورت

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_2 + c^{-1}) z^2 + \dots$$

نیز در  $S$  است. بنابراین

$$\left| a_2 + \frac{1}{c} \right| \leq 2, \quad \left| \frac{1}{c} \right| \leq 4, \quad |c| \geq \frac{1}{4}$$

در نتیجه اگر  $f \in S$ ، آنگاه  $f$  همهٔ مقادیر در گوی باز به مرکز صفر و شعاع  $\frac{1}{4}$  را می‌گیرد. به عبارت دیگر تصویر گوی واحد تحت  $f$  باید این گوی را بپوشاند. این حداکثر مطلبی است که می‌توان گفت، زیرا وقتی  $f(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$  نقطهٔ  $\frac{1}{4}$  در تصویر  $|z| = 1$  قرار دارد. عدد  $\frac{1}{4}$  را ثابت کوئب می‌گویند (زیرا وجود چنین عددی را کوئب ثابت کرد).

در سال ۱۹۱۶ بایرباخ حدس زد که اگر  $f \in S$  آنگاه  $|a_n| \leq n$ . این حدس سرانجام در سال ۱۹۸۴ بوسیله ل. د. برانجز ثابت شد.

در حالت خاص وقتی که  $a_n$  ها همگی حقیقی هستند، اثبات این که  $|a_n| \leq n$  نسبتاً آسان است. در واقع این نامعادله برای توابعی که  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 1$  و مقادیر حقیقی را فقط روی محور حقیقی می‌گیرند نتیجه می‌شود. این گونه توابع را نوعاً حقیقی می‌گویند. فرض کنید  $f(z) = u + iv$  روی محور حقیقی حقیقی را بگیرد. در این صورت چون  $f$  روی محور حقیقی، حقیقی است دارای سری مک‌لورن با ضرایب حقیقی است یعنی می‌توانیم بنویسیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \text{ حقیقی}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} v(re^{i\theta}) &= \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n (\cos n\theta + i \sin \theta) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta \end{aligned}$$

که یک تابع فرد از  $\theta$  است. برای  $0 < \theta < \pi$ ،  $v$  دارای علامت ثابت است. چون اگر  $v$  به ازای  $\theta$  و  $r$  -ای تغییر علامت دهد،  $f$  باید در  $re^{i\theta}$  حقیقی باشد که خلاف فرض است. در نتیجه

$$|a_n r^n| = \frac{r}{\pi} \left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta \right| \leq \frac{r}{\pi} \left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) n \sin \theta \, d\theta \right|$$

زیرا  $|\sin n\theta| \leq n |\sin \theta|$  که با استقراء می‌توانیم ببینیم

$$\begin{aligned} |\sin n\theta| &= |\sin[(n-1)\theta + \theta]| = |\sin(n-1)\theta \cos \theta + \cos(n-1)\theta \sin \theta| \\ &\leq (n-1) |\sin \theta| + |\sin \theta| = n |\sin \theta| \end{aligned}$$

بنابراین چون  $v$  تغییر علامت نمی‌دهد،

$$|a_n r^n| \leq \frac{rn}{\pi} \left| \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta \, d\theta \right| = n |a_1 r| \leq nr$$

و از این (با فرض  $r \rightarrow 1$ ) نتیجه می‌شود که  $|a_n| \leq n$ .

هرچند گفتیم که ثابت کوئب نمی‌تواند بهبود یابد اما در واقع، می‌توان کمی بیشتر بحث نمود. (۴) فرض کنید که  $c_1$  و  $c_2$  مقادیر حذف شده توسط  $f$  باشند که روی یک پاره‌خط گذرنده از صفر و در دو طرف صفر قرار می‌گیرند. در این صورت یکی از دو مقدار  $c_1$  و یا  $c_2$  در قدرمطلق بیشتر از  $\frac{1}{4}$  است.

برای اثبات این مطلب فرض کنید  $f$  مقدار  $c_1$  را نگیرد، تابع  $\frac{c_2 f(z)}{c_2 - f(z)}$  (چنانکه در بالا دیدیم) در  $K$  قرار دارد، و بنابراین نمی‌تواند هیچ عددی با قدرمطلق کمتر از  $\frac{1}{4}$  را نگیرد. اما اگر  $f$ ، مقدار  $c_1$

را اختیار نکند در این صورت  $\frac{c_2 f}{c_2 - f}$  مقدار  $\frac{c_1 c_2}{c_2 - c_1}$  را نمی‌گیرد بنابراین  $\frac{1}{4} \geq \frac{|c_1 c_2|}{|c_2 - c_1|}$  و در نتیجه

$$\left| \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right| = \frac{1}{|c_1|} + \frac{1}{c_2} \leq 4$$

(در اینجا از این فرض که  $c_1$  و  $c_2$  در دو طرف صفر و روی خط گذرنده از صفر قرار دارند استفاده کردیم.)

تمرین ۳۵.۲ اگر  $f$  و  $g$  در  $S$  باشند آیا توابع زیر در  $S$  هستند

(الف)  $\frac{1}{z}(f+g)$       (ب)  $z f'(z)$       (پ)  $\frac{1}{z} \int_0^z f(w) dw$

قضیهٔ مساحت برای اثبات ویژگی هم‌محیطی بکار برده شده است.<sup>۵</sup> مساحت درون یک منحنی ساده بسته با طول  $L$ ، از  $\frac{L^2}{4\pi}$  بیشتر نیست.

### تمرینهای تکمیلی

- ۱- نشان دهید که حد عناصر  $S$  (حد یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده) در  $S$  قرار می‌گیرد.
  - ۲- نشان دهید که عدد  $K$ -ای وجود دارد که بستار تصویر گوی واحد تحت یک عضو از  $S$  باید شامل مثلی با مساحت حداقل  $K$  باشد و نشان دهید که بزرگترین مقدار  $K$  به ازای عضوی از  $S$ ، اتفاق می‌افتد.
  - ۳- با توجه به حدس بایبرباخ، آیا عضوی از  $S$  وجود دارد که  $f'(\frac{1}{4}) = 13$  ؟
  - ۴- اگر  $f \in S$  آیا  $f'(\frac{1}{4}z)$  لزوماً در  $S$  است؟
- تمرینات تکمیلی بخش ۱۳.۲ نیز مربوط به این قسمت است.

### یادداشتها:

- (۱) ردهٔ  $U$  اغلب با  $\Sigma$  نمایش داده می‌شود.
- (۲) اثبات اخیر می‌تواند مورد انتقاد واقع شود به دلیل اینکه در تعیین علامت مناسب برای مساحت دقت نکرده‌ایم. در واقع برای دیدن درستی آن می‌توانستیم از فرمول انتگرالی استفاده کنیم که از شکل دقیق قضیهٔ گرین (یا استوکس) حاصل می‌شود. (برای مثال به Sagan, pp. 544ff ، یا Buck and Buck, pp. 478ff مراجعه کنید) و یا به شکل آشناتر فرمول انتگرال برای مساحت درون خم به طور مثبت جهت‌دار شده مراجعه کنید،

$$A = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

(برای مثال به تمرین ۶ از Buck and Buck, p. 496 مراجعه کنید). فرمول حاصل را به صورت مورد نظر ما برسانید (به Littlewood, p. 299 مراجعه کنید). بهر حال می‌توانیم بطور اجمالی اما با ظرافت کمتری بگوئیم که یا مساحت را با علامت یکسانی برای همه توابع  $U$  بدست می‌آوریم و یا منفی آن را، زیرا هیچ یک از ویژگیهای توابع، فراتر از آنهایی که از تعریف نتیجه شده‌اند به کار نرفته‌اند. اگر مساحت را با علامت نادرست بدست آورده باشیم باید برای تمام اعضای  $F$  در  $U$  داشته باشیم  $r^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 r^{-2n}$ . اما تابع  $f(z) = z$  در  $U$  قرار دارد و برای آن همه  $a_n = 0$ ، لذا نامعادله اخیر نشان می‌دهد که  $r^2 \leq 0$ . از این رو چه تصادفاً و چه از روی دقت، حتماً مساحت را بدرستی محاسبه کرده‌ایم.

L. de Branges "Proof of the Bieberbach Conjecture," *Acta, Math.* (۳) 154 (1985): 137-152.

(۴) این مطلب بوسیله G. Szego تذکر داده شد.

(۵) اثبات‌های زیادی از نامعادله هم‌محیطی وجود دارد، این مورد در

M. Materljjevic and M. Pavlovic "New Proof of the Isoperimetric Inequality and Some Generalizations," *J. Math. Analysis and Appl.* 98 (1984): 25-30

ارائه شده است.

## جواب تمرین‌ها

## بخش ۱

۱.۱. تعریف حاصل ضرب دو زوج مرتب را بکار برید.

$$1.2. (c, \circ)(x, y) = (cx + \circ y, \circ x + cy) ; c(x, y) = (cx, cy)$$

۱.۳. بخش اول بررسی مستقیم مطلب است. قبل از اینکه مزدوج‌گیری را امتحان کنید، برای تقسیم، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنید.

۱.۴. جوابها عبارتند از:

$$\frac{i+2}{i-2} = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$(1+i\sqrt{3})^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{2-3i}{3i+2} = -\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i$$

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 \quad 1.5$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right|^2 = \left(\frac{z}{w}\right)\left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right) = \frac{|z|^2}{|w|^2}$$

$$|\operatorname{Re} z| = |x| < (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y = 0 \text{ مگر این که}$$

۱.۶. از  $|z|^2 = z\bar{z}$  استفاده کنید. در این صورت  $1 = \frac{i+2}{i-2}$  زیرا  $\frac{|z|}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}$  و  $|\bar{z}| = |z|$  ،

$$|i + i\sqrt{3}|^2 = |2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})|^2 = 4$$

$$\left|\frac{1}{1-i}\right| = \left|\frac{1}{2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})}\right| = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left|\frac{2-3i}{3i+2}\right| = \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

یا چون  $\overline{3i+2} = 2-3i$  ، این مثال دیگری از  $\frac{z}{\bar{z}}$  است.

۱.۷. (الف) گوی باز، مرکز صفر، شعاع ۲.

(ب) دایره، مرکز صفر، شعاع ۳، همراه با بیرون آن.

(پ) گوی باز به شعاع ۵ و مرکز  $3i-2$ .



(ت) نیم صفحه سمت راست محور موهومی.

(ث) نیم صفحه سمت راست خط  $y = \frac{2}{3}x$ .

(ج) نیم صفحه بسته سمت چپ خط  $y = x$ .

(چ) بیضی با کانون‌های  $i$  و  $1$ ، و قطر اطول  $2$ .

(ح) منصف عمودی پاره خطی که  $z = i$  را به  $z = -1$  وصل می‌کند.

(خ) سهمی، کانون در  $z = 2$ ، خط هادی محور موهومی.

۱.۸. قانون متوازی‌الاضلاع، که بیان جبری آن به صورت زیر است:

$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ ، بردارهای  $(x, y)$  و  $(u, v)$  را با  $x + iy$  و  $u + iv$  یکی می‌گیرد.

$$3 - 4i = 5(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = -0.927 = -53.13^\circ \quad 1.9$$

$$-4 - 11i = 11.7(\cos \theta + i \sin \theta), \quad -\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = -0.927 = -53.13^\circ$$

$$2.236 + 3.142i = 3.856(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \tan^{-1} 1.405 = 0.952 \text{ یا } 54.6^\circ$$

$$\frac{1+i}{1-i} = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{1+i}{2} = 2^{-\frac{1}{2}}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) = 2[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)]$$

۱.۱۰. اثبات سیستم جبری امکان‌پذیر است اما قدری پیچیده است. ساده‌تر است بحث را در صفحه

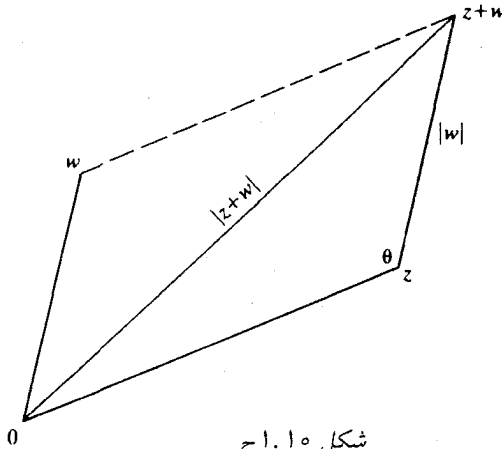
هندسی ارائه دهیم که در آنجا هر ضلع یک مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کمتر است مگر مثلث تشکیل نشود. اثبات می‌تواند به صورت تحلیلی با استفاده از قانون کسینوسها در مثلث ارائه شود

(شکل ۱.۱۰ ج را ببینید):

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|\cos \theta \\ &= (|z| + |w|)^2 - 2|z||w|(1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

چون  $1 + \cos \theta \geq 0$  لذا  $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$  و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\theta \equiv \pi \text{ (بیمانه } 2\pi)$$



شکل ۱.۱۰ ج

به توضیح زیر صورت تمرین توجه کنید. برای  $|z - w|$ ، نامساوی مثلث را برای  $(z - w)$  و  $w$  بکار برید و بدست آورید.  $|z| \leq |z - w| + |w|$ ، بنابراین  $|z| - |w| \leq |z - w|$ . اگر  $|w| > |z|$ ، جای  $w$  و  $z$  را عوض کنید.

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos \theta + i \sin \theta) s(\cos \varphi + i \sin \varphi) & 1.11 \\ &= rs[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi)] \\ &= rs[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)] \end{aligned}$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \quad 1.12$$

(الف)  $(1 + i\sqrt{3})^2 = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{6} + i \sin \frac{2\pi}{6} \right) = 4 \left( -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)$

(ب)  $(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - 1) = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] 2 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$   
 $= 4 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$   
 $= 2(\sqrt{3} + i)$

(پ)  $2^{99} \left( \cos \frac{99\pi}{6} + i \sin \frac{99\pi}{6} \right) = 2^{99} (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{99}$

۱.۱۳ فرض کنید  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  و  $\frac{1}{z} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  در این صورت

$$1 = z \cdot z^{-1} = r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]$$

بنابراین  $r\rho = 1$  و  $\varphi + \theta$  مضرب صحیحی از  $2\pi$  است، به عبارت دیگر  $\rho = \frac{1}{r}$  و  
(مضرب صحیح  $2\pi$ )  $\varphi = -\theta +$  یا

$$\frac{1}{z} = r^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta) = r^{-1}[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

چون  $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n$ ، حال از استقراء استفاده کنید.

$$\begin{aligned} \left(\frac{i + \sqrt{3}}{-1 - i}\right)^{123} &= \left[\frac{2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)}{-\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}\right]^{123} & 1.14 \\ &= -2^{\frac{123}{2}} \left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right]^{123} \\ &= -2^{61.5} (\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) \\ &= -2^{61}(1 - i) \end{aligned}$$

1.15. از رابطه  $(u + iv)^2 = x + iy$  بدست می‌آوریم که  $u^2 - v^2 + 2iuv = x + iy$  بنابراین  
 $u^2 - v^2 = x$  و  $2uv = y$ . معادله دوم را بر حسب  $v$  حل کنید و در معادله اول جایگزین  
نمایید و بدست آورید

$$\begin{aligned} 4u^2 - 4u^2x - y^2 &= 0, \\ u^2 &= \frac{x \pm (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned}$$

چون  $u^2$  مثبت است علامت  $+$  را در نظر می‌گیریم و بنابراین دو مقدار حقیقی برای  $u$  بدست  
می‌آوریم و  $v = \frac{y}{2u}$  بنابراین دو مقدار برای  $x + iy$  (با علامت‌های مخالف) بدست می‌آوریم.  
اگر  $z = 4 + 10i$ ، در این صورت  $u^2 = 2 + \sqrt{29}$ ،  $u = \pm 2.718$ ،  $v = \frac{10}{2u} = \pm 1.840$  که در آن هر دو علامت مثبت و یا هر دو علامت منفی بکار می‌رود.

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) & 1.16 \\ &= \pm 2^{-\frac{1}{2}}(1 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+i} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \pm 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \\ &= 1.099 + 0.455i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 + 10i &= 2\sqrt{29}(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \\ \sqrt{4 + 10i} &= \pm 2^{\frac{1}{2}} \cdot 29^{\frac{1}{4}} \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

یا (اگر به دنبال جوابهای صریح باشیم)

$$\sqrt[4]{4 + 10i} = 10/77(\cos 68/20^\circ + i \sin 68/20^\circ)$$

$$\sqrt[4]{4 + 10i} = \pm \sqrt[4]{3/28}(\cos 34/10^\circ + i \sin 34/10^\circ) = \pm(\sqrt[4]{2/72} + i/\sqrt[4]{84})$$

$$\sqrt[4]{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \pm \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$= \pm \sqrt[4]{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \pm(1/\sqrt[4]{225} + 0/707i)$$

$$(-1)^{\frac{1}{4}} = (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$= \sqrt[4]{2}^{-1}(\pm 1 \pm i)$$

$$(8i)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$= (\pm\sqrt[4]{3} + i), \quad -2i$$

$$[\sqrt[4]{64}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}[\cos(10^\circ + k \cdot 60^\circ) + i \sin(10^\circ + k \cdot 60^\circ)]$$

$$= \sqrt[4]{2}[\cos(10^\circ, 70^\circ, 130^\circ, 190^\circ, 250^\circ, 310^\circ) + i \sin(10^\circ, 70^\circ, 130^\circ, 190^\circ, 250^\circ, 310^\circ)]$$

$$= 1/970 + 0/347i, \quad 0/684 + 1/879i, \\ -1/286 + 1/532i, \quad -1/970 - 0/347i, \\ -0/684 - 1/879i, \quad 1/286 - 1/532i$$

۱.۱۷. مجموع ریشه‌های معادله چندجمله‌ای  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$  است (اگر

با این مطلب معروف آشنا نیستید، ریشه‌ها را  $r_1, r_2, \dots, r_n$  و  $r_n$  بنامید. در این صورت معادله

هم‌ارز  $(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n) = 0$  می‌باشد. ضریب  $z^{n-1}$  را از حاصل ضرب

بالا بدست آورید). مجموع  $n$  ریشه  $w$ ، مجموع ریشه‌های معادله  $z^n - w = 0$  می‌باشد که در

نتیجه برابر با صفر است. همچنین ممکن است اما خسته‌کننده، که ریشه‌های  $n$  ام را به صورت

مثلثاتی بنویسید و آنها را با هم جمع کنید. از تساوی‌های جبری و مثلثاتی استفاده کنید.

۱.۱۸. در اینجا دو اثبات، یکی جبری و دیگری هندسی ارائه می‌شود.

۱. اگر  $z_1$  و  $z_2$  و  $z_3$  رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع و  $\lambda$  مرکز ثقل مثلث باشد در این

صورت سه عدد  $z_k - \lambda$ ،  $k = 1, 2, 3$ ، سه ریشه سوم عددی مانند  $w$  هستند، یعنی سه

ریشه معادله  $z^3 - w = 0$ . در این صورت جمع آنها (جمع ریشه) (با جواب تمرین ۱.۱۷ مقایسه کنید) و همچنین مجموع حاصل ضرب دو به دو ریشه‌ها صفر است. به عبارت دیگر

$$(z_1 - \lambda) + (z_2 - \lambda) + (z_3 - \lambda) = 0$$

یعنی

$$z_1 + z_2 + z_3 - 3\lambda = 0$$

و

$$(z_1 - \lambda)(z_2 - \lambda) + (z_1 - \lambda)(z_3 - \lambda) + (z_2 - \lambda)(z_3 - \lambda) = 0$$

یعنی با حل معادله

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 3\lambda^2$$

اگر معادله  $z_1 + z_2 + z_3 = 3\lambda$  را به توان دو برسانیم، بدست می‌آوریم

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = 9\lambda^2$$

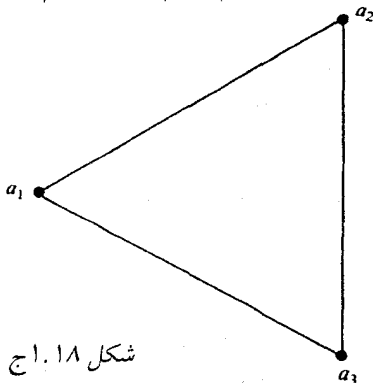
و با استفاده از معادله اخیر،

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3\lambda^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

برای عکس مطلب،  $\lambda$  را از رابطه  $z_1 + z_2 + z_3 = 3\lambda$  بدست آورید و در جهت عکس برگردید.

۲. فرض کنید  $a_1, a_2$  و  $a_3$  رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع ناتبه‌یافته باشند. رئوس را در جهت عکس مثلثاتی شماره‌گذاری کنید، همچنانکه در شکل ۱۸. ا.ج نشان داده شده است. در این صورت آرگومان سه زاویه برابر می‌تواند طوری انتخاب شود که

$$\arg \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \arg \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2}$$



شکل ۱۸. ا.ج

چون اضلاع با هم برابرند،

$$\left| \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \right| = \left| \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2} \right|$$

بنابراین

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{a_3 - a_2}{a_1 - a_2}$$

که پس از ساده کرده

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$$

چون معادله برحسب اندیسهای ۱ و ۲ و ۳ متقارن است، مهم نیست که رئوس را نامگذاری کنیم.

به عکس، می‌توانیم از آخرین معادله شروع کنیم و در جهت عکس که شروع کرده بودیم به عقب برگردیم.

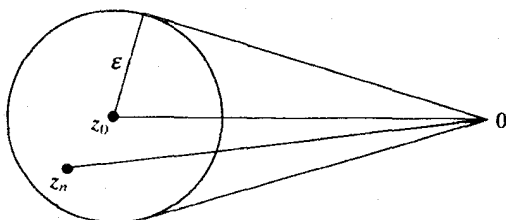
۱.۱۹.  $\lim z_n = z_0$  بدین معنا است که  $|z_n - z_0| < \varepsilon$  اگر  $n > N$ . حال

$|z_n - z_0| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$ ، بنابراین اگر  $|x_n - x_0| < \frac{1}{2}\varepsilon$  و  $|y_n - y_0| < \frac{1}{2}\varepsilon$  (که برای  $N$  به اندازه کافی بزرگ درست است) داریم  $|z_n - z_0| < \varepsilon$ .

به عکس،  $|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|$  زیرا  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  برای هر  $z$ .

۱.۲۰. اولاً  $z_n - z_0 = |z_n - z_0|(\cos \theta_n - i \sin \theta_n)$  که در آن فرض می‌کنیم  $\theta_n$  به حدی میل

می‌کند. چون  $|\cos \theta_n + i \sin \theta_n| = 1$  نتیجه می‌گیریم که  $z_n - z_0 \rightarrow 0$  عکس مطلب از طریق هندسی واضحتر از طریق جبری است. فرض کنید  $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$  در این صورت برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ،  $z_n$  در گوی شکل ۱.۲۰ قرار دارد و به  $\arg z$  و  $\arg z_n$  می‌توان مقادیری را نسبت داد که اختلافشان کمتر از زاویه‌ای به رأس  $O$  است که اضلاع آن بر گوی مماس‌اند. بنابراین  $|\arg z_n - \arg z_0|$  حداکثر  $2 \sin^{-1} \left( \frac{\varepsilon}{|z_0|} \right)$  است. چون  $z_n \neq 0$ ، این حد وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$  به صفر میل می‌کند.



شکل ۱.۲۰

۱.۲۱. الف)  $|z - i|$  حقیقی و غیرمنفی است، همچنین  $2z + i$  حقیقی و غیرمنفی است. این بدان معناست که  $2z = r - i$  که در آن  $r$  حقیقی و  $r \geq 0$ . بنابراین  $|z - i| = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}i - i = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}i$  یعنی  $r^2 = \frac{4}{9} + \frac{9}{4} = r^2$ . این نتیجه می‌دهد که  $r^2 = 3$  و (چون  $r \geq 0$ )  $r = \sqrt{3}$ . لذا  $z = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$ .

ب)  $1 + x + iy = 2x + 3y + i(3x - 2y)$ . اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی را در دو طرف مساوی هم قرار دهید بدست می‌آید  $x + 1 = 2x + 3y$  و  $x + 1 = 2x + 3y$  و  $y = 3x - 2y$ . از این معادلات داریم  $y = x$  و لذا  $x = \frac{1}{4}$ .

$$\text{ب) } x = -\frac{1}{4}, y = 3$$

۱.۲۲. مربع قدمطلق  $\frac{z-w}{\bar{w}-1}$ ، برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{z-w}{\bar{w}-1} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{w}}{w\bar{z}-1} &= \frac{|w|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z + |z|^2}{|w|^2|z|^2 - w\bar{z} - \bar{w}z + 1} \\ &= \frac{|w|^2 - 2\operatorname{Re} w\bar{z} + |z|^2}{|w|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re} w\bar{z} + 1} \end{aligned}$$

اگر

$$\begin{aligned} |w|^2 + |z|^2 &\leq |w|^2|z|^2 + 1 \\ |w|^2(1 - |z|^2) &\leq 1 - |z|^2 \end{aligned}$$

نامعادله اخیر نشان می‌دهد که  $|z| \leq 1$  زیرا  $|w| < 1$  و رابطه اکید است مگر  $|z| = 1$ .

۱.۲۳. از تمرین ۱.۱۰ می‌بینیم

$$|P_n(z)| \geq \left| |a_n z^n| - (|a_{n-1} z^{n-1}| + \dots + |a_0|) \right|$$

$$\frac{|P_n(z)|}{R^n} > |a_n| - (|a_{n-1}|R^{-1} + \dots + |a_0|R^{-n})$$

عبارت داخل پرانتز می‌تواند با بزرگ کردن  $R$  به دلخواه کوچک شود و خصوصاً می‌تواند کمتر از  $\frac{|a_n|}{2}$  شود.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & xv + yu \\ -xv - yu & xu - yv \end{pmatrix} \quad ۱.۲۴$$

متناظر با  $(xu - yv, xv + yu)$ .

۱.۲۵. (در صورت لزوم به هندسه تحلیلی مراجعه کنید). یک دوران حول صفر به اندازه زاویه  $\theta$  دارای

ماتریس

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

می‌باشد. ماتریس بزرگسازي تحت  $r$  به صورت

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

است و ماتریس ترکیب به صورت

$$\begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

است. حاصل ضرب به صورت زیر است

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \cos \varphi & s \sin \varphi \\ -s \sin \varphi & s \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} rs(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) & rs(\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) \\ -rs(\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi) & rs(-\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi) \end{pmatrix} \\ &= rs \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) & \sin(\theta + \varphi) \\ -\sin(\theta + \varphi) & \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

۱.۲۶. بجز احتمالاً برای  $z \times w$  واضح است. داریم

$$z \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = k(xv - yu)$$

بخش ۲

۲.۱ اگر

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



موجود باشد، آنگاه خصوصاً برای  $z \rightarrow z_0$  با مقادیر حقیقی یا موهومی محض نیز حد وجود دارد. در حالت حقیقی

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x_0 + h, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h}$$

وجود دارد. بنا به تمرین ۱.۱۹ هریک از  $h$  های زیر وجود دارند

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}$$

که در نتیجه

$$f'(z_0) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{z=z_0}$$

همچنین

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0 + h) - iv(x_0, y_0)}{ih}$$

وجود دارد و بنابراین

$$f'(z_0) = \left( -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{z=z_0}$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی دو عبارت مربوط به  $f'(z_0)$  را مساوی قرار دهید. معادلات کوشی-ریمان بدست می‌آید.

اگر معادلات کوشی-ریمان را برای دو عبارت  $f'(z)$  بکار ببریم، در این صورت داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = -i \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

۲.۲. (الف) در مختصات قطبی  $f(z) = r(\cos \varphi\theta + i \sin \varphi\theta)$ ، واضح است که روی محورهای

حقیقی و موهومی،  $f(z) = r$ ، بنابراین،  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  در  $x = y = 0$  و بنابراین

معادلات کوشی-ریمان در نقطهٔ صفر برقرارند. اما، اگر  $\arg z = \frac{\pi}{\varepsilon}$ ، داریم  $f(z) = -r$

و

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{-r}{r(\cos \frac{\pi}{\varepsilon} + i \sin \frac{\pi}{\varepsilon})} = \frac{-\sqrt{r}}{1+i}$$

بنابراین  $f$  در صفر مشتق ندارد.

(ب)  $f(z) = \frac{z\bar{z}}{|z|^{\frac{1}{\varepsilon}}}$  وقتی  $z \rightarrow 0$  بنابراین  $f'(0) = 0$  اگر  $f = u + iv$ ، آنگاه

$v \equiv 0$  و معادلات کوشی-ریمان می‌توانند برقرار باشند تنها اگر  $u$  ثابت باشد.

۲.۳. با فرض  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، داریم

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_1(x_0, y_0)[1 + o(x - x_0)] + u_2(x_0, y_0)[1 + o(y - y_0)]$$

چون  $|x - x_0| \leq |z - z_0|$  و  $|y - y_0| \leq |z - z_0|$  می‌توانیم عبارتهای  $o$  دار را با  $o(z - z_0)$  ترکیب کنیم و چون معادلات مشابهی برای  $v$  وجود دارند داریم

$$f(z) - f(z_0) = (x - x_0) u_1(x_0, y_0) + (y - y_0) u_2(x_0, y_0) + \\ i(x - x_0) v_1(x_0, y_0) + i(y - y_0) v_2(x_0, y_0) + o(z - z_0)$$

با این نمادگذاری، معادلات کوشی-ریمان را به صورت  $u_1 = v_2$  و  $u_2 = -v_1$  در نظر بگیرد. لذا داریم

$$f(z) - f(z_0) = (x - x_0)(u_1 - iu_2) + (y - y_0)(u_2 - iu_1) + o(z - z_0) \\ (\text{مشتقها در } z_0 \text{ محاسبه شده‌اند}) \\ = (x - x_0)(u_1 - iu_2) + i(y - y_0)(u_1 - iu_2) + o(z - z_0) \\ = (z - z_0)(u_1 - iu_2) + o(z - z_0)$$

اگر بر  $z - z_0$  تقسیم کنیم می‌بینیم که  $f'(z_0)$  وجود دارد.

۲.۴. با فرض  $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$ ،

$$\frac{\partial f}{\partial r} = U_r + iV_r = f'(z) = \frac{\partial z}{\partial r} = e^{i\theta} f'(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = U_\theta + iV_\theta = f'(z) = \frac{\partial z}{\partial \theta} = ire^{i\theta} f'(z)$$

دو عبارت بدست آمده برای  $e^{i\theta} f'(z)$  را با هم مساوی بگیرد

$$U_r = r^{-1} V_\theta \quad \text{و} \quad V_r = -r^{-1} U_\theta$$

قسمت‌های حقیقی و موهومی دو عبارت برای  $f'(z)$  را با هم مساوی قرار می‌دهیم، معادلات مورد نیاز را بدست می‌آوریم. معادلات کوشی-ریمان در مختصات قطبی، همراه با پیوستگی مشتقهای جزئی برای مشتق‌پذیری  $f$  (اگر  $z \neq 0$ ) کافی هستند. اثبات بسیار شبیه تمرین ۲.۳ است.

۲.۵. اگر  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در این صورت

$$g(z) = u(x, -y) - iv(x, -y) = U(x, y) + iV(x, y)$$

بنابراین

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u_1(x, -y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -u_2(x, -y), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -v_1(x, -y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = v_2(x, -y)$$

و چون بنا به معادلات کوشی-ریمان داریم  $u_1(x, -y) = v_2(x, -y)$  و نتیجه  $v_2(x, -y) = -u_1(x, -y)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

۲.۶. این شبیه تمرین ۲.۵ است بجز این که مشتقهای جزئی آن نیازمند ابتکار بیشتر است. مانند تمرین ۲.۴ فرض کنید  $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$  در این صورت چون  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg z$  فرض کنید

$$g(z) = U\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right) - iV\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta)$$

حال

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^r}{r^r} U_1\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{R^r}{r^r} V_1\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = U_2\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right), \quad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -V_2\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right)$$

تابع  $f$  در معادلات کوشی-ریمان تمرین ۲.۴ صادق است و بنابراین  $U_1(r, \theta) = r^{-1} V_2(r, \theta)$  اگر  $r$  را با  $\frac{R^r}{r}$  عوض کنیم و به یاد داشته باشیم که  $Q = -V$ ، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{R^r}{r^r} U_1\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right) = -\frac{R^r}{r^r} \frac{r}{R^r} V_2\left(\frac{R^r}{r}, \theta\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

همچنین برای

۲.۷.  $f(w) - f(z) = 0$ ، اما  $f'(t) = rt^r = 0$  فقط به ازای  $t = 0$ ، که بین نقاط  $z$  و  $w$  نیست.

۲.۸ و ۲.۹. چون ثابت  $|f|^2 = u^2 + v^2$ ، داریم

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

اما با توجه به معادلات کوشی-ریمان، معادله دوم نتیجه می‌دهد که

$$-u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

حالا جفت معادلات زیر را داریم

$$-u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

که دارای جواب غیرصفر برای دو مشتق هستند تنها اگر  $u^2 + v^2 = 0$ . بنابراین (مجدداً بنا به معادلات کوشی-ریمان) همه مشتق‌های اول  $u$  و  $v$  در  $D$  صفر هستند. یعنی  $f'(z) \equiv 0$  در  $D$ . حال ثابت می‌کنیم که یک تابع تحلیلی که مشتقش هم‌ارز صفر در ناحیه  $D$  باشد در  $D$  ثابت است، گزاره‌ای که بعداً مهم خواهد بود.

در مرحله اول،  $f'(z) \equiv 0$  نتیجه می‌دهد که  $f$  در یک همسایگی هر نقطه شروع مناسب  $z \in D$  ثابت است. برای دیدن این مطلب، (چنانکه در مورد توابع حقیقی عمل می‌کنیم) نمی‌توانیم از قضیه مقدار میانگین استفاده کنیم، زیرا در تمرین ۲.۷ دیدیم که این مطلب درست نیست. اما می‌توانیم، قضیه مقدار میانگین معمولی را برای  $u$  و  $v$ ، به عنوان توابعی از  $x$  و  $y$  بطور جداگانه بکار ببریم، تا ببینیم که در یک همسایگی  $z$  ثابت، و بنابراین  $f$  ثابت است. فرض کنید  $c \equiv f(z)$  در یک همسایگی  $z$ . حال بزرگترین زیرمجموعه همبند  $E$  از  $D$  را که شامل  $z$  و در آن  $f(z) = c$ ، در نظر بگیرید. (به سادگی می‌توان  $E$  را به عنوان اجتماع همه زیرمجموعه‌های همبند در  $D$  که شامل  $z$  است و در آن  $f(z) = c$ ، تعریف کرد). اگر  $E$  همه  $D$  نباشد، در این صورت  $E$  باید دارای یک نقطه مرزی در  $D$  باشد. یعنی نقطه‌ای مانند  $z_1$  از  $E$  که هر همسایگی  $z_1$  شامل نقاطی از  $E$  و نقاطی از  $D$  می‌باشد که در  $E$  نیستند. اما با استدلالی مشابه  $z$  برای  $z_1$ ، داریم  $f(z) = c$  در یک همسایگی  $z_1$  و در نتیجه در نقاطی از  $D$  که در  $E$  نیستند، و این با تعریف  $E$  متناقض است.

برای تمرین ۲.۹، توجه کنید که از فرضها نتیجه می‌شود  $v \equiv 0$ ، لذا معادلات کوشی-ریمان نشان می‌دهد که  $f' \equiv 0$ .

### بخش ۳

۳.۱. سری  $\sum_{k=0}^{\infty} (z + \frac{1}{4})^k$  دارای شعاع همگرایی برابر با ۱ است، لذا خصوصاً در  $z = -1$  همگرا است.

اگر توانهای  $(z + \frac{1}{z})$  را بنا به قضیهٔ دو جمله‌ای بسط دهیم داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^j \left(\frac{1}{z}\right)^{k-j}$$

که اگر بعنوان سری توانی  $z$ ، تجدید آرایش کنیم، حاصل می‌شود

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{k=j}^{\infty} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{z}\right)^{k-j}$$

با فرض  $k = j + l$ ، بدست می‌آید

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{l=0}^{\infty} \binom{j+l}{j} \frac{1}{z^l}$$

مجموع داخلی بسط دو جمله‌ای  $(1 - \frac{1}{z})^{-j-1}$  است بنابراین بدست می‌آوریم

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^{j+1}$$

این سری به ازای  $z = -1$  واگرا است.

۳.۲. اگر  $|z| \geq 1$  عبارت به وضوح به صفر میل نمی‌کند. وقتی  $1 < |z| < \infty$ ، نتیجه مشابهی داریم مادامی که  $n$  بقدری بزرگ باشد که  $|z| > 1/n$ . به طریقی دیگر، آزمون نسبت نتیجه می‌دهد:

$$\frac{n^{n+1}}{n^n} \cdot \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| = n|z| \rightarrow \infty$$

$$\left| \sum_{k=m}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |z_k| \leq \sum_{k=m}^n c_k \rightarrow 0 \quad ۳.۳$$

۳.۴. بنا به تمرین ۳.۳ فقط نشان می‌دهیم که  $\sum \frac{|z|^n}{n^n}$  همگرا است. مادامی که  $|z| < N < n$ ، سری بوسیله سری هندسی  $\sum \frac{|z|^n}{N^n}$  مقلوب می‌شود. یا این که، آزمون نسبت را بکار برید.

۳.۵. فرض کنید  $\sum a_n z^n$  به ازای  $z$  ای واگرا باشد. در این صورت باید برای هر  $Z$  با  $|Z| > |z|$  واگرا شود، زیرا بر اساس آنچه که ثابت کرده‌ایم اگر  $\sum a_n Z^n$  همگرا باشد،  $\sum a_n z^n$  نیز همگرا خواهد بود.

۳.۶.  $r$  را مانند حکم تمرین تعریف کنید. اگر  $r$  صفر یا  $\infty$  نباشد، در این صورت بنا به تعریف  $r$  سری در هر گوی  $|z| < r_1$  با  $r_1 < r$  و در نتیجه هرگاه  $|z| < r$  همگرا است و بیرون گوی  $|z| \leq r_2$  و اگر  $r_2 > r_1$  و در نتیجه هرگاه  $|z| > r$  واگراست. حالت‌های  $r = 0$  و  $r = \infty$  به طور مشابه صورت می‌گیرد.

۳.۷. بعنوان مثال، (الف)  $\sum \frac{z^n}{n!}$ ، (ب)  $\sum n z^n$ .

۳.۸.  $\limsup x_n = \infty$  اگر برای هر عدد مثبت  $N$ ،  $x_n > N$  برای تعداد نامتناهی از  $n$ ‌ها.

۳.۹. اولاً فرض کنید  $0 < R < \infty$ ، برای  $\varepsilon > 0$  داده شده، داریم  $\frac{1}{R-\varepsilon} \leq |a_n|^{\frac{1}{n}}$  برای هر  $n$  به اندازه کافی بزرگ، بنابراین  $|a_n| \leq (R-\varepsilon)^{-n}$  و  $|a_n z^n| \leq \left(\frac{|z|}{R-\varepsilon}\right)^n$ . اگر  $|z| < R$ ، می‌توانیم  $\varepsilon$  را طوری انتخاب کنیم که  $|z| < R - \varepsilon$  در این صورت سری توانی بوسیله  $\sum \left(\frac{|z|}{R-\varepsilon}\right)^n$  مقلوب می‌شود.

بطور مشابه، تعداد بی‌پایان مقدار از  $n$  موجود است بطوریکه  $|a_n| \geq (R+\varepsilon)^{-n}$ . اگر  $|z| > R$ ، آنگاه می‌توانیم  $\varepsilon$  را چنان انتخاب کنیم که  $R + \varepsilon < |z|$  و در این صورت  $|a_n z^n| > (R+\varepsilon)^{-n} |z|^n > 1$ . در نتیجه  $\sum a_n z^n$  واگراست زیرا جملات آن به صفر میل نمی‌کنند.

اگر  $R = 0$ ، دنباله بی‌پایانی از اعداد صحیح  $n$  وجود دارد که  $|a_n| > k^n$ ، این که چقدر عدد  $k$  بزرگ گرفته می‌شود مهم نیست. برای هر  $z$ ، می‌گیریم  $k > \frac{1}{|z|}$ ؛ در این صورت برای بینهایت جمله  $|a_n z^n| > 1$ ، بنابراین  $\sum a_n z^n$  به ازای این مقدار از  $z$  نمی‌تواند همگرا باشد (اما برای  $|z|$  کوچک مادامی که مثبت است ممکن است همگرا باشد). لذا، اگر  $R = 0$  سری توانی تنها به ازای  $z = 0$  همگرا است.

اگر  $R = \infty$ ،  $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ ، یعنی  $|a_n|^{\frac{1}{n}} \rightarrow 0$  برای  $\varepsilon > 0$  دلخواه، داریم  $|a_n| < \varepsilon^n$  برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ، بنابراین  $|a_n z^n| < |\varepsilon z|^n$ ، و سری توانی بوسیله یک سری هندسی، تا وقتی که  $|z| < \frac{1}{\varepsilon}$ ، مقلوب می‌شود. بنابراین سری توانی برای هر  $z$  با پایان همگرا است.

۳.۱۰. مقایسه مستقیم با سری هندسی نشان می‌دهد که برای  $R = 1$  (الف) و  $R = 2^{-\frac{1}{p}}$  برای (ب). در (ب) فرمول برای  $\frac{1}{R}$  نتیجه می‌دهد که  $R = 3^{-\frac{1}{p}}$  (جملات با اندیس زوج هیچ اثری ندارند). برای (ت) اگر با سری  $\sum |z|^n$  مقایسه شود داریم  $R = 1$ . برای (ث) آسانترین راه استفاده از آزمون نسبت است:

$$\frac{2|z|(2p)!}{(2p+2)!} = \frac{2|z|}{(2p+2)(2p+1)} \rightarrow 0$$

برای هر  $z \neq 0$ ، لذا  $R = \infty$ .

برای (ج)، از آزمون نسبت داریم

$$\frac{|z|^\gamma (S+1)^\gamma}{(\gamma S+1)(\gamma S+2)} \rightarrow \frac{|z|^\gamma}{\gamma}$$

لذا  $R = \gamma$ .

برای (چ) از آزمون نسبت داریم

$$\frac{(k+1)|z+\gamma|k^k}{(k+1)^{k+1}} = |z+\gamma| \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = |z+\gamma| \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \rightarrow \frac{|z+\gamma|}{e}$$

لذا،  $R = e$ .

برای (ح)، اگر  $k = 2^n$ ، داریم  $a_k = k$ ، در غیر این صورت  $a_k = 0$ . بنابراین داریم

$$\frac{1}{R} = \limsup k^{\frac{1}{k}} = 1$$

برای (خ)، چون  $\gamma \log n = n \log \gamma$ ، داریم  $R = 1$ .

برای (د) از آزمون نسبت داریم

$$\frac{|z|^\gamma [(\gamma n+1)(\gamma n+2)]^{\frac{1}{\gamma}}}{n+1} \rightarrow \gamma |z|^\gamma$$

بنابراین  $R = \gamma^{-\frac{1}{\gamma}}$ .

برای (ذ) استفاده مستقیم از فرمول برای  $\frac{1}{R}$  نشان می‌دهد که  $\frac{1}{R} = 1$ .

۳.۱۱ (الف)  $(k^m |a_k|)^{\frac{1}{k}} = k^{\frac{m}{k}} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ . چون  $k^{\frac{m}{k}} \rightarrow 1$ ، داریم

$$\limsup (k^m |a_k|)^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_k|^{\frac{1}{k}}$$

(ب)  $\frac{1}{R} = \limsup [k(k-1)\cdots(k-m)]^{\frac{1}{k}} |a_k|^{\frac{1}{k}}$  داریم

$$(k-m)^m \leq [k(k-1)\cdots(k-m)] \leq k^m$$

$$(k-m)^{\frac{m}{k}} \leq [k(k-1)\cdots(k-m)]^{\frac{1}{k}} \leq k^{\frac{m}{k}}$$

و

طرف چپ و راست هر دو حدی برابر با ۱ دارند.

۳.۱۲. اگر بطور صوری مشتق مرتبه  $n$  ام  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  را در نظر بگیریم، بدست می‌آوریم

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1) z^{k-m}$$

که دارای همان شعاع همگرایی

$$\sum_m^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1) z^k$$

است. در تمرین ۳.۱۱،  $m$  و  $m-1$  را با هم عوض کنید.

۳.۱۳. هر سری همگرایی مشروط از اعداد، بعنوان مثال  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ .

۳.۱۴. اگر  $\delta < 1 - |z|$ ، آنگاه  $\sum z^n$  بوسیله  $\sum (1 - \delta)^n$ ، یک سری همگرا از اعداد، مقلوب می‌شود.

اگر تنها فرض کنیم که  $|z| < 1$ ، باقیمانده سری بعد از  $z^{M-1}$  برابر با  $\frac{z^M}{1-z}$  است. اگر  $z = 1 - \frac{1}{M}$ ، این مقدار به اندازه دلخواه به  $\frac{1}{e}$ ، برای  $M$  های بزرگ، نزدیک می‌شود، بنابراین باقیمانده سری نمی‌تواند بطور یکنواخت به صفر میل کند.

#### بخش ۴

$$|\sin i| = \left| i \left( 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots \right) \right| > 1 \quad .4.1$$

۴.۲. جمله  $n$  ام سری حاصل ضرب

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k}}$$

هریک از ریشه‌های دوم، کمتر از  $\sqrt{n}$  است، بنابراین

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k}} > \frac{n-1}{n}$$

بنابراین جمله  $n$  ام حاصل ضرب نمی‌تواند به صفر همگرا باشد.

$$\begin{aligned} \cosh &= \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots \right) + \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) \right] \quad .4.3 \\ &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \cos(iz) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 e^{z+w} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k} n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{w^j}{j!}
 \end{aligned} \quad .۴.۴$$

۴.۵. چون  $1 = e^z e^{-z}$ ، هیچ عاملی نمی‌تواند صفر شود (زیرا هیچ یک بی‌پایان نیست).

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{d}{dz} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad .۴.۶$$

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$1 - z^2 + \frac{z^4}{3} - \frac{z^6}{45} - \dots \quad .۴.۷$$

$$\begin{aligned}
 \frac{e^z}{1-z} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 + z + z^2 + \dots\right) \\
 &= 1 + 2z + z^2 \left(1 + 1 + \frac{1}{2!}\right) + z^3 \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) + \dots
 \end{aligned} \quad .۴.۸$$

ضرب  $z^n$ ،  $n$  امین مجموع جزئی سری  $e$  است. همچنین ضرب  $z^n$  در سری توانی  $\frac{f(z)}{1-z}$  برابر با مجموع اولین  $n+1$  ضرایب سری توانی  $f$  است.

۴.۹. تابع  $e^f$  مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته است. داریم  $|e^f| = e^{\operatorname{Re} f}$  ثابت، لذا بنا به تمرین ۲.۸،  $e^f$  ثابت است، پس  $f$  ثابت است.

$$\begin{aligned}
 e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + i \left( z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\
 &= \cos z + i \sin z
 \end{aligned} \quad .۴.۱۰$$

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

بنابراین

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

$$.۴.۱۱ \quad e^{2i\theta} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta}$$

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$$

قسمتهای حقیقی و موهومی را مساوی قرار دهید.

$$۴.۱۲. \quad e^{3i\theta} = (e^{i\theta})^3, \quad \text{بنابراین}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \end{aligned}$$

بنابراین

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

۴.۱۳. اگر  $e^{x+iy} = 1$ ، آنگاه  $|e^{x+iy}| = 1$  اما  $|e^{iy}| = 1$ ، بنابراین  $e^x = 1$ ، زیرا برای هر  $x$  حقیقی  $e^x > 0$ . چون  $e^x$  اکیداً صعودی است لذا  $x = 0$  و  $z = e^{iy}$ . این بدان معنا است که  $\cos y + i \sin y = 1$  که نتیجه می‌دهد  $\sin y = 0$  و  $\cos y = 1$ . اگر  $\sin y = 0$ ، آنگاه  $y$  مضارب صحیح  $\pi$  است و مضارب صحیح باید زوج باشند چون تنها برای مضارب زوج  $\cos y = 1$  داریم  $\pi$ . لذا  $z = 2k\pi i$ ،  $k$  عدد صحیح.

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy \quad ۴.۱۴$$

$$= \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x$$

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x \cosh^2 y + \sinh^2 y \cos^2 x \\ &= \cosh^2 y (1 - \cos^2 x) + \sinh^2 y \cos^2 x \\ &= \cosh^2 y + \cos^2 x (\sinh^2 y - \cosh^2 y) \\ &= \cosh^2 y - \cos^2 x = \sinh^2 y + \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \right|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \sinh^2 y \end{aligned}$$

بنابراین

$$|\sin(x + iy)|^2 = \frac{1}{4}(e^{2y} + e^{-2y} + 2) - \cos^2 x$$

و

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{|\sin(x + iy)|^2}{e^{2|y|}} = \frac{1}{4}$$

۴.۱۵. اگر  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ، باید نشان دهیم  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ . چون می‌دانیم که جمله به جمله مشتق گرفتن از سری درست است، فقط سری را باید برای  $f^{(n)}(z)$  بنویسیم و سپس قرار دهیم  $z = z_0$ .

۴.۱۶. برای  $z \neq 0$ ، تابع بوضوح مشتق‌پذیر است. همچنین داریم  $f(x) = f(ix)$ ، و می‌توانیم از تعریف  $f'$ ، نشان دهیم که  $f'(0) = 0$ . هرچند با استقرا می‌توانیم نشان دهیم که همه مشتقات  $f$  در صفر برابر با صفر هستند، بنابراین  $f$  را نمی‌توان بوسیله سری مک‌لورن خودش نمایش داد.

۴.۱۷

$$S_n = 1 + e^{i\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S_n &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \theta + \cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} S_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1 - \cos \theta}$$

حالا فرمولهای

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2},$$

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

را بکار می‌بریم تا بدست آوریم

$$\operatorname{Re} S_n - \frac{1}{2} = \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2} \theta \right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

همچنین

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta = \operatorname{Im} (S_n)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} - \frac{1 - e^{-i(n+1)\theta}}{1 - e^{-i\theta}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin \theta + \sin n\theta - \sin(n+1)\theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( \frac{n+1}{2} \theta \right) \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( \frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin \left( \frac{n}{2} \theta \right) \sin \left( \frac{n+1}{2} \theta \right)}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

۴.۱۸. مجموع  $\sum_{k=1}^n \sin k\theta$  و  $\sum_{k=1}^n \cos k\theta$  (بطور یکنواخت بر حسب  $n$ )، روی هر بازه  $(\delta, \pi - \delta)$  با  $0 < \delta < \pi$ ، بنا به فرمولهای تمرین ۴.۱۷ کراندار هستند. در نتیجه، آزمون آبل (تمرین ۱۸.۱) نشان می‌دهد که قسمت‌های حقیقی و موهومی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}$  بجز احتمالاً برای  $\theta = 0$  یا  $\theta = \pi$ ، همگرا هستند. برای  $\theta = 0$  قسمت حقیقی واگرا است، برای  $\theta = \pi$  قسمت موهومی، صفر و قسمت حقیقی سری همگرای  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  است.

بنابراین مثالی از سری توانی داریم که بجز برای یک نقطه روی دایره همگرایی‌اش، همگرا است. بوضوح ضرایب  $\frac{1}{n}$  را می‌توان با هر عدد  $\varphi(n)$  جایگزین کرد، مادامی که  $\varphi(n)$  یکنوای نزولی به صفر است.

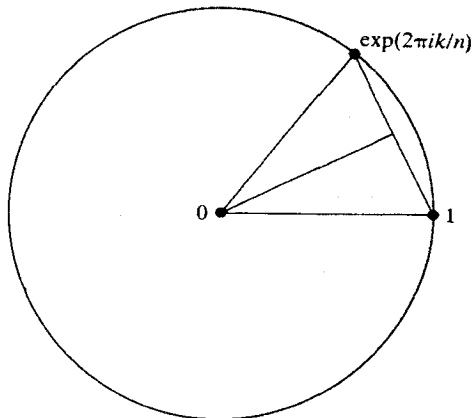
۴.۱۹. فاصله ۱ از یک ریشه  $\exp\left(\frac{\gamma\pi ik}{n}\right)$  برابر با  $2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  است (شکل ۴.۱۹ ج را ببینید) و مجموع لازم  $S$  برابر با  $2 \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$  است (جمله  $k = n$  برابر با صفر است).

بنا به تمرین ۴.۱۷، برای  $\theta = \frac{\pi}{n}$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{n} \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) / \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\ &= 2 \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

$n - 1$  ریشه وجود دارند، میانگین آنها برابر با مجموع آنها تقسیم بر  $n - 1$  است، یعنی

$$\frac{2}{n-1} \cot \frac{\pi}{2n} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$



شکل ۴.۱۹ ج

وقتی  $n \rightarrow \infty$  توزیع ریشه‌ها روی دایره واحد متراکم‌تر می‌شود بنابراین، میانگین فاصله ۱ از یک نقطه روی دایره خوشبختانه  $\frac{4}{\pi}$  است. این مطلب را می‌توان با انتگرال امتحان نمود: فاصله ۱ از  $e^{i\theta}$  برابر با  $2 \sin \frac{\theta}{2}$  است، و اگر میانگین این مقدار را روی  $(0, 2\pi)$  بدست آوریم بطور حتم داریم  $\frac{4}{\pi}$ .

۴.۲۰. مجموع مربع فاصله

$$\begin{aligned} 4 \sum_{k=1}^n \sin^2 \left( \frac{k\pi}{n} \right) &= 2 \sum_{k=1}^n \left[ 1 - \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \right] \\ &= 2n - 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} e^{\frac{2k\pi i}{n}} \\ &= 2n - 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k\pi i}{n}} \right\} \\ &= 2n \end{aligned}$$

است، زیرا مجموع همه  $n$  ریشه ۱ برابر با صفر است (تمرین ۱.۱۷).

$$\begin{aligned} \cos(z + 3i) &= \cos[x + (y + 3)i] \\ &= \cos x \cos i(y + 3) - \sin x \sin i(y + 3) \end{aligned} \quad ۴.۲۱$$

از فرمولهای اویلر، اگر  $R$  نمایش یک عدد حقیقی باشد، آنگاه  $\cos(iR)$  حقیقی ( $= \cosh R$ ) و  $\sin(iR)$  موهومی محض است. بنابراین

$$\operatorname{Re} [\cos(z + 3i)] = \cos x \cosh(y + 3)$$

۴.۲۲. بوضوح  $g(z) = g(wz) = g(w^2z)$  بنابراین

$$3g(z) = g(z) + g(wz) + g(w^2z)$$

فرض کنید  $g(z) = \sum a_n z^n$  در این صورت

$$3g(z) = \sum a_n (1 + w^n + w^{2n}) z^n$$

اگر  $n$  مضربی از ۳ باشد، در این صورت  $w^n$  و  $w^{2n}$ ، برابر با ۱ هستند. اگر  $n$  مضرب ۳ نیست، در این صورت  $w^n$ ،  $w^{2n}$  و  $w$  با همین ترتیب یا ترتیب دیگری برابر است، و بنابراین  $1 + w^n + w^{2n} = 0$  (تمرین ۱.۱۷).

۵.۱. مسیر یک خم بسته مجموعه‌ای کراندار است، زیرا توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده، کراندار هستند. فرض کنید  $z$  یک دنباله از نقاط مختلف روی مسیر خم با نقطه حدی  $z_0$  باشد. چون خم ساده است داریم  $z_n = z(t_n)$  که در آن  $t_n$  بطور یکتا تعیین می‌شود. مجموعه  $\{t_n\}$  (کراندار است) دارای یک نقطه حدی  $t_0$  می‌باشد و یک زیردنباله  $\{t_{n_k}\}$  از  $\{t_n\}$  به  $t_0$  همگرا است. چون  $z(t)$  پیوسته است،  $z_{n_k} = z(t_{n_k}) \rightarrow z(t_0)$ ، چون  $z_n \rightarrow z_0$  و  $z_{n_k} \rightarrow z(t_0)$ ، نتیجه می‌گیریم  $z_0 = z(t_0)$  و  $z_0$  یک نقطه از مسیر است لذا مسیر یک مجموعه بسته است.

۵.۲. الف)  $C_1: z(t) = x \quad x = 0 \text{ تا } x = 1$

از  $z(t) = iy \quad y = 0 \text{ تا } y = 1$

$$\int_{C_1} \bar{z} dz = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy = 0$$

ب)  $C_2: z = (1+i)t, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$\int_{C_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (1-i)t(1+i) dt = 2 \int_0^1 t dt = 1$$

پ)  $\int_0^1 x dx + i \int_0^1 (1+iy) dy + \int_1^0 (x+i) dx + i \int_1^0 iy dy = 0$

ت)  $z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

ث)  $z = t, \quad 0 \leq t \leq 2; \quad z = 2e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad z = it, \quad 2 \geq t \geq 0$

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^2 t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i\theta} 2i e^{i\theta} d\theta - \int_0^2 t dt$$

۵.۳. الف)  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(a + ae^{i\theta}), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

با هر علامت انتخابی.  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(-a + ae^{i\phi}), \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$

ب)  $z = x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$

$z = u, \quad 1 \geq u \geq 0$

پ)  $z = x, \quad -R \leq x \leq -\varepsilon, \quad \varepsilon \leq x \leq R;$

$z = \varepsilon e^{i\phi}, \quad \pi \geq \phi \geq 0; \quad z = R e^{i\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$

$$۵.۴. \text{ بعنوان مثال } f(z) = \frac{1}{z}$$

۵.۵. انتگرال را به صورت  $1 - 2(1-z)^{-1}$  بنویسید. خم را با  $z = 1 + e^{i\theta}$  پارامتری کنید سپس انتگرال برابر است با  $-4\pi i$ .

۵.۶. باید نشان دهیم

$$\int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = \int_p^q f\{z[t(u)]\} z'[t(u)] t'(u) du$$

که با قضایای مقدماتی درباره انتگرالها بدست می‌آید.

۵.۷. قضیه مقدار میانگین می‌گوید برای برخی از مقادیر  $z$  روی منحنی ساده بسته  $z = i(1+i)$ . اما این بدان معنا است که  $\frac{1+i}{2} = z \frac{i}{1+i}$  که روی منحنی ساده بسته نیست.

## بخش ۶

۶.۱. می‌توانیم بنویسیم

$$F(z) = \int_{z_0}^{x_1+iy} f(w) dw + \int_{x_1+iy}^{x_1+iy} f(w) dw$$

که در آن  $x_1$  چنان انتخاب می‌شود (و بعد تثبیت می‌شود) که انتگرال دوم در امتداد پاره خط موازی محور حقیقی باشد. در این صورت با فرض  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$F(z) = \int_{z_0}^{x_1+iy} f(w) dw + \int_0^{x-x_1} u(x_1+t, y) dt + i \int_0^{x-x_1} v(x_1+t, t) dt$$

پس می‌توانیم  $\frac{\partial F}{\partial x}$  را با استفاده از قضیه اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای دو انتگرال اخیر بطور جداگانه بدست آوریم

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy)$$

همچنین، با محاسبه انتگرال دوم در امتداد پاره خط موازی محور موهومی، بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(x + iy)$$

بنابراین

$$-i \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

در نتیجه  $F$  در صورت مختلط معادلات کوشی-ریمان (ص ۱۸) صدق می‌کند و بنابراین مشتق‌پذیر است. مشتق آن  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ، که نشان دادیم  $f(z)$  است.

$$\int_{|z|=1} z^{-2} dz = i \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0 \quad ۶.۲$$

وقتی  $|z|=1$ ،  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  و انتگرال اول به انتگرال دوم ساده می‌شود.

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad \bar{P}(z) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k z^k \quad ۶.۳$$

اگر  $z$  حقیقی باشد  $\bar{P}(z) = \overline{P(z)}$ ، بنابراین  $|P(z)|^2 = P(z)\bar{P}(z)$  برای  $z$  های حقیقی، یعنی  $P\bar{P}$  برای  $z$  های حقیقی، حقیقی (و مثبت) است. برای همه  $z$  ها  $\bar{P}(z) = \overline{P(\bar{z})}$ ، بنابراین اگر  $\bar{P}$  در  $z$ ، دارای ریشه باشد،  $P$  در  $\bar{z}$  دارای ریشه خواهد بود.

۶.۴ اگر  $\phi$  تابع پیوسته‌ای باشد که  $\iint_D \phi(x, y) dx dy = 0$  برای هر گوی  $D$  (یا هر مستطیل) در این صورت  $\iint_D \operatorname{Re} \phi = 0$  و  $\iint_D \operatorname{Im} \phi = 0$ . اما اگر در نقطه‌ای مانند  $z_0$ ،  $\operatorname{Re} \phi \neq 0$ ، آنگاه  $\operatorname{Re} \phi$  در  $z_0$  مثبت یا منفی است. لذا در یک همسایگی  $z_0$  مثبت (و یا منفی) است (زیرا پیوسته است). این باعث می‌شود که  $\iint_D \operatorname{Re} \phi = 0$  روی هر گوی  $D$  غیرممکن شود. استدلالی مشابه را برای  $\operatorname{Im} \phi$  بکار برید.

## بخش ۷

۷.۱ اگر  $f_n(w) \rightarrow f(w)$  روی  $C$  بطور یکنواخت، در این صورت برای  $\delta > 0$  مفروض، داریم  $|f_n(w) - f(w)| < \delta$  به ازای  $n$  به اندازه کافی بزرگ (مستقل از  $w$ ) و بنابراین

$$\left| \int_C f_n(w) dw - \int_C f(w) dw \right| \leq \left| \int_C [f_n(w) - f(w)] dw \right| < \delta \cdot (C \text{ طول})$$

اگر  $z$  بیرون  $C$  باشد در این صورت  $\frac{f(w)}{z-w}$  (بعنوان تابعی از  $w$ ) برای  $w$  های درون و روی  $C$  تحلیلی است لذا بنا به قضیه کوشی انتگرال برابر با صفر است.

۷.۳ چون

$$g'(z) = \int_C \frac{g(w)}{(w-z)^2} dw$$



داریم

$$\begin{aligned} g'(z_1) - g'(z) &= \int_C g(w) \left\{ \frac{1}{(w-z_1)^2} - \frac{1}{(w-z)^2} \right\} dw \\ &= \int_C g(w) \frac{z^2 - z_1^2 + 2wz_1 - 2wz}{(w-z_1)^2(w-z)^2} dw \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\frac{g'(z_1) - g'(z)}{z_1 - z} = \int_C g(w) \frac{2w - (z + z_1)}{(w-z_1)^2(w-z)^2} dw$$

چون مخرج صفر نمی‌شود، می‌توانیم در زیر انتگرال  $z_1$  را به  $z$  نزدیک کنیم. بنابراین

$$g''(z) = 2 \int_C g(w) \frac{w-z}{(w-z)^4} dw = 2 \int_C g(w) \frac{dw}{(w-z)^3}$$

۷.۴. این استدلال نشان نمی‌دهد که  $\sum_{k=m}^n |u_k(z)| \rightarrow 0$  بطور یکنواخت برحسب  $z$  برای یک مثال نقض، (مثلاً)  $u_n(z) = x^n - x^{n+1}$ ،  $0 \leq x \leq 1$ ، در نظر بگیرید که مجموع جزئی  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$  عبارت است از

$$\begin{aligned} S_n &= (1-x) + x(1-x) + \dots + x^n(1-x) \\ &= (1-x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

$S_n$  روی  $0 \leq x \leq 1$  همگرای یکنواخت نیست زیرا  $S_n \rightarrow 1$  برای  $0 \leq x < 1$  در حالیکه  $S_n \rightarrow 0$  برای  $x = 1$ . بنابراین حد دنباله  $\{S_n\}$  متشکل از توابع پیوسته، ناپیوسته است که همگرایی یکنواخت را غیرممکن می‌کند (راه دیگر،  $|\sup_x |S_n(x) - 1|$  را روی  $(0, 1)$  بدست آورید و نشان دهید که به صفر میل نمی‌کند). اما  $\{u_n\}$  در شرط تمرین صدق می‌کند، چون

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(x)| = 1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} = \sum M_n$$

۷.۵. نمی‌دانیم که  $\frac{f(w) - f(z)}{w - z}$  در  $z$  تحلیلی است (اما می‌توانید بخش ۸.۳ را ببینید) اگر انتگرال را به صورت

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w) dw}{(w-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} f(z) \int_C \frac{dw}{(w-z)^2}$$

بنویسیم می‌بینیم مقدارش برابر با  $f'(z)$  است.۷.۶. برای ساده شدن فرمولها، بگیرید  $z_0 = z$ . در این صورت

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^2} dw$$

که در آن  $C$  مرز مربع است. طول  $C$  برابر با  $4L$  است و  $|w| \geq \frac{L}{\gamma}$  روی  $C$ ، بنابراین

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} 4LM \cdot \frac{4}{L^2} = \frac{8M}{\pi L}$$

۷.۷. فرض کنید  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  با  $a_n \neq 0$ . اگر  $P$  دارای ریشه نباشد،  $\frac{1}{P(z)}$  در تمام صفحه با پایان تحلیلی است. بنا به تمرین ۱.۲۳،  $|P_n(z)| \geq \frac{1}{\gamma} |a_n|$ ،

بطور یکنواخت برای  $|z|$  به اندازه کافی بزرگ، و بنابراین  $\frac{1}{P_n(z)}$  برای  $|z|$  بزرگ کراندار است.

اما  $\frac{1}{P(z)}$  پیوسته و بنابراین برای  $z$  در هر گوی کراندار است. بنا به قضیه لیوویل،  $\frac{1}{P(z)} = c$

به ازای عدد ثابتی مانند  $c$ . حالت  $c = 0$  غیرممکن است و اگر  $c \neq 0$ ، داریم  $P(z) = \frac{1}{c}$ .

۷.۸. اگر از  $f(z)$ ، جمله اول سری مک‌لورن آن را که  $m \geq c$ ، کم کنیم، تفاضل به صورت  $z^m \phi(z)$  است که  $\phi(z)$  یک سری توانی همه جا همگرا و بنابراین همه جا تحلیلی است. چون

داریم

$$\phi(z) = \frac{f(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1})}{z^m}$$

بدست می‌آوریم

$$|\phi(z)| \leq 1 + \left| \frac{a_0}{z^m} + \dots + \frac{a_m}{z} \right| \leq B$$

به ازای ثابتی مانند  $B$ ، هرگاه  $|z| \geq A$ ، و وقتی  $|z| \leq A$ ،  $|\phi(z)|$  کراندار است. قضیه لیوویل می‌گوید  $\phi(z)$  ثابت است. این بدان معناست که  $f$  یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $m$  است.

۷.۹. اثبات شبیه قضیه لیوویل است بجز اینکه ما  $|f(z) - f(0)|$  را بوسیله

$$\frac{|z|}{2\pi(R-|z|)} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta$$

تقریب می‌زنیم.

۷.۱۰. اگر  $r < 1$ ، داریم  $|f(re^{i\theta})| \leq 1 - r$ . برای هر  $z$  داده‌شده با  $|z| < r$ ، از فرمول

کوشی داریم

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r)r}{r-|z|} d\theta$$

$z$  را ثابت نگه دارید و فرض کنید  $r \rightarrow 1$ ، بدست می‌آید  $|f(z)| = 0$ ، بنابراین  $f(z) \equiv 0$ .

۷.۱۱. فرض کنید چنین  $f$  ای وجود دارد. اگر  $|f(z)| > (1 - |z|)^{-1}$ ، آنگاه  $f(z) \neq 0$  بنابراین  $\frac{1}{f(z)}$  در فرضهای تمرین ۷.۱۰ صدق می‌کند و بنابراین هم‌ارز با صفر است که غیرممکن است.

۷.۱۲. به ازای  $|z| \leq R$ ،  $f^{(n)}(z) \rightarrow g(z)$  بطور یکنواخت، همچنین  $f^{(n+1)}(z) \rightarrow g'(z)$  بطور یکنواخت. از طرف دیگر، قضیه مشتق (بخش ۷.۳) می‌گوید که  $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]' \rightarrow g'(z)$  بنابراین  $g(z) = g'(z)$  یعنی  $g(z) - g'(z) = 0$ .  
در این صورت

$$\frac{d}{dz}[e^{-z}(g(z))] = e^{-z}g'(z) - e^{-z}g(z) = 0$$

در نتیجه به ازای مقدار ثابتی مانند  $c$ ،  $e^{-z}g(z) = c$  و  $g(z) = ce^z$

۷.۱۳.  $w$  و  $z$  را به یک مجموعه فشرده محدود کنید. در این صورت همه نقاط  $wt$  و  $zt$  در یک مجموعه فشرده مانند  $S$  قرار دارند. چون  $\phi$  روی  $S$  بطور یکنواخت پیوسته است داریم  $g(t)\phi(wt) \rightarrow g(t)\phi(zt)$  بطور یکنواخت هرگاه  $w \rightarrow z$ . طبق قضیه همگرایی یکنواخت،

$$\int_a^b g(t)\phi(wt) dt \rightarrow \int_a^b g(t)\phi(zt) dt$$

۷.۱۴. چون  $\frac{\pi}{4} < 1$ ، انتگرال برابر است با

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times (w = \frac{\pi}{4} \text{ در } \sin w \text{ برابر مشتق دوم } 2\pi i)$$

و بنابراین برابر است با  $\frac{-\pi i}{\sqrt{2}}$ .

۷.۱۵. انتگرال برابر است با

$$\left(\frac{1}{3!}\right) \times [(z=1) \text{ در } e^z \text{ سوم مشتق سوم } 2\pi i]$$

و بنابراین برابر است با  $9\pi i e^3$ .

۷.۱۶.  $w$  را ثابت نگه دارید و نشان دهید که

$$\sin(z+w) - (\sin z \cos w + \cos z \sin w) = 0$$

برای هر  $z$ . حال  $z$  را ثابت نگه دارید و به طریق مشابه با  $w$  استدلال کنید.

۷.۱۷. چون  $\Gamma(1+z)$  تحلیلی است و برای  $\operatorname{Re} z = 0$ ، صفر نیست بنابراین بجز در  $z = 0$

$$\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{\Gamma(1+z) \sin \pi z}$$

بخش ۸

۸.۱. برای  $z = x > 0$  ،  $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow \infty$  ؛ برای  $z = x < 0$  ،  $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$  ؛ برای  $z = iy$  ؛  $e^{\frac{1}{z}} \rightarrow 0$  ،  $e^{\frac{1}{z}} = e^{-\frac{i}{y}}$  ، حد ندارد.

۸.۲. در نقاطی که  $\frac{1}{z}$  مضرب فردی از  $\frac{\pi}{2}$  است،  $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$  تعریف نشده است لذا تمام نقاط  $z = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  نقاط تکین هستند.

۸.۳. الف) نزدیک  $z = \pi$

$$\sin z = -\sin(z - \pi) = -(z - \pi) + \frac{(z - \pi)^3}{6} - \dots$$

بنابراین  $\frac{\sin z}{z - \pi} \rightarrow -1$  ، نقطه تکین برداشتی است.

ب) در این حالت

$$\frac{\sin z}{(z - \pi)^2} = -\frac{1}{z - \pi} + \dots \rightarrow \infty$$

نقطه تکین برداشتی نیست.

ب) نزدیک  $z = 0$

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots , \quad \frac{1 - \cos z}{z} \rightarrow 0$$

نقطه تکین برداشتی است.

ت) وقتی  $z \rightarrow 0$  ،

$$z \cot z = z \frac{\cos z}{\sin z} \rightarrow 1$$

نقطه تکین برداشتی است.

$$\frac{e - z - z^2}{2 - z} = \frac{(3 + z)(2 - z)}{2 - z} \rightarrow 5$$

د) (ث)

نقطه تکین برداشتی است.

$$\frac{\sin z}{z^2 + z} - \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z + 1} \rightarrow 1$$

ج) (ج)

نقطه تکین برداشتی است.

ج) نزدیک  $z = \frac{\pi}{4}$

$$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) , \quad \sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\cos z}{1 - \sin z} = -\frac{\sin(z - \frac{\pi}{4})}{1 - \cos(z - \frac{\pi}{4})} = \frac{-(z - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{6}(z - \frac{\pi}{4})^2 - \dots}{\frac{1}{4}(z - \frac{\pi}{4})^2 - \dots}$$

نقطه تکین برداشتنی نیست.

۸.۴. (الف) ۱: (ب) ۰؛ (پ) قطب نیست؛ (ت) ۲؛ (ث) سری تابع  $\frac{-z}{(1+z)^2}$  را نمایش می دهد، لذا از مرتبه ۱۲ است؛ (ج) ۶.

۸.۵. (الف)

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} [R + (z - z_0)\varphi(z)]$$

$\varphi$  در  $z_0$  تحلیلی است. بنابراین در نزدیکی  $z_0$ ،  $f(z) - \frac{R}{z - z_0}$  کراندار است.

(ب) خواه نقطه تکین برداشته شده باشد یا نه، انتگرالی که مانده را تعریف می کند یکسان است. اما بعد از اینکه تکین برداشته شد، بنا به قضیه کوشی، انتگرال برابر با صفر است.

۸.۶. قطب ساده است و مانده برابر است با  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \frac{z - z_0}{h(z)}$ .

۸.۷. فرض کنید  $f$  دارای قطب از مرتبه  $n$  باشد. مانده برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(z)(z - z_0)^{m-n}}{(z - z_0)^n} dz \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-1} [\phi(z)(z - z_0)^{m-n}] \Big|_{z=z_0} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \left( \frac{d}{dz} \right)^k (z - z_0)^{m-n} \times \\ &\quad \left( \frac{d}{dz} \right)^{m-k-1} \phi(z) \Big|_{z_0} \end{aligned}$$

مشتقهای  $(z - z_0)^{m-n}$  همگی در  $z_0$  برابر با صفر هستند بجز وقتی که  $k = m - n$ ، بنابراین تنها جمله  $k = m - n$ ، باقی می ماند و نتیجه مانند قبل برابر است با

$$\frac{1}{(m-1)!} (m-n)! \frac{(m-1)! \phi^{(n-1)}(z_0)}{(m-n)!(n-1)!} = \frac{\phi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

۸.۸. اگر قطبی از مرتبه  $n$  موجود باشد،

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \phi(z), \quad \phi(z) \neq 0$$

اگر طرفین را در  $(z - z_0)^m$  ، ضرب کنیم ، در این صورت

$$f(z)(z - z_0)^m = (z - z_0)^{m-n} \phi(z)$$

در  $(m - 1)$  مشتق ، هر جمله یک توان منفی از  $z - z_0$  دارد بنابراین هر جمله وقتی  $z \rightarrow \infty$  به  $\infty$  میل می‌کند.

۸.۹. برای هر قسمت یک مثال نقض کافی است ، برای قسمت اول بگیرد  $g(z) = 1$  ،  $h(z) = z^2$  ،

$$z_0 = 0 . \text{ در این صورت مانده } \frac{g}{h} \text{ برابر با صفر است اما } \frac{g(z_0)}{h''(z_0)} = \frac{1}{2}$$

برای قسمت دوم ، بگیرد  $g(z) = 1 + z$  ،  $h(z) = 1 + z$  ،  $z_0 = 0$  . در

این صورت  $g(z)z^{-2} = z^{-2} + (1+z)^{-1}$  که مانده آن برابر با صفر است ، در حالیکه

$$h(0) = 1 \text{ و مانده } \frac{g(z)}{z^2} \text{ برابر با ۱ است.}$$

۸.۱۰. اگر  $g(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$  ، مانده  $g(z)(z - z_0)^{-k}$  برابر

$$\text{با ضریب } \frac{1}{z - z_0} \text{ در سری } \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \text{ است یعنی } a_{k-1}$$

برای  $e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots$  ، مانده  $z^{-\nu} e^{-z^2}$  برابر با  $-\frac{1}{3!}$  است.

$$R = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [f(z)(z - z_0)^n] \Big|_{z=z_0} \quad ۸.۱۱$$

و

$$S = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} [f(z)(z - \bar{z}_0)^n] \Big|_{z=\bar{z}_0}$$

در حالت  $n = 2$  :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}_0} \frac{d}{dz} [f(z)(z - \bar{z}_0)^2] \\ &= \lim_{w \rightarrow \bar{z}_0} \frac{d}{dw} [f(w)(w - \bar{z}_0)^2] \\ &= \lim_{w \rightarrow \bar{z}_0} [f'(w)(w - \bar{z}_0)^2 + 2f(w)(w - \bar{z}_0)] \\ &= \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} [f'(\bar{z})(\bar{z} - \bar{z}_0)^2 + 2f(\bar{z})(\bar{z} - \bar{z}_0)] \\ &= \lim_{z \rightarrow \bar{z}_0} [f'(z)(z - z_0)^2 + 2f(z)(z - z_0)] \\ &= \bar{R} \end{aligned}$$

۸.۱۲. قاعده تمزین ۸.۶ را هر جای که قابل استفاده است، بکار برید.

- |       |                                |     |                 |     |                         |
|-------|--------------------------------|-----|-----------------|-----|-------------------------|
| (الف) | $-\frac{2}{51}, -\frac{3}{68}$ | (ب) | $e^{-1}$        | (پ) | $4/9i$                  |
| (ت)   | $-\frac{1}{32}$                | (ث) | $\frac{1}{2}$   | (ج) | $\frac{1}{\sqrt{!}}$    |
| (چ)   | ۱                              | (ح) | $\frac{\pi}{2}$ | (خ) | $2^{-\frac{5}{4}}(1-i)$ |
| (د)   | $-\frac{1}{32}i$               |     |                 |     |                         |

۸.۱۳. (الف) بله، از تعريف مانده‌ها توسط انتگرالها.

(ب) نه همیشه، بعنوان مثال  $f(z) = g(z) = \frac{1}{z}$  در  $z = 0$

(پ) در نزديکی  $z = a$  داریم

$$f(z) = \frac{b}{z-a} + \phi(z)$$

که در آن  $\phi$  در  $z = a$  تحليلی است. مانده  $f$  برابر  $b$  است.

در نزديکی  $a^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} z f(z^2) &= \frac{bz}{z^2-a} + z\phi(z^2) \\ &= \frac{bz}{2a^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z-a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{z+a^{\frac{1}{2}}} \right)} + z\phi(z) \end{aligned}$$

مانده  $z f(z^2)$  برابر  $\frac{b}{2}$  است.

۸.۱۴. فرض کنید  $C$  تمام نقاط تکین  $f$  در صفحه با پایان را دربر بگیرد. در این صورت

$\int_C f(z) dz = (2\pi i)^{-1}$  برابر با مجموع مانده‌ها در صفحه با پایان است، و منفی آن مانده در  $\infty$  است.

۸.۱۵. با محاسبه مستقیم و یا استفاده از تمزین ۸.۱۴ ( $z^{-2}$  دارای یک نقطه تکین متناهی، با مانده

صفر است).

۸.۱۶. فرض کنید  $Q(z) = \sum_{k=0}^n q_k z^k$ ،  $P(z) = \sum_{k=0}^m P_k z^k$ ،  $n \geq m+2$ ،

$q_n \neq 0$  برای  $|z| = R$  بزرگ، از نامساوی مثلث (تمزین ۱.۱۰) و تمزین ۱.۲۳، داریم

که در آن  $A$  و  $B$  فقط به ضرایب بستگی دارند. بنابراین قدرمطلق مقدار انتگرال

که حدش با مانده برابر است، از  $AB^{-1} R^{m-n+1}$  بیشتر نیست. چون  $-1 \leq m-n+1$ ،

وقتی  $R \rightarrow \infty$ ، انتگرال به صفر میل می‌کند.

۸.۱۷. اگر  $f$  در  $\infty$  تحلیلی باشد،  $f(\frac{1}{z})$  در صفر تحلیلی است و بنابراین در گویی حول صفر کراندار است. لذا  $f$  بیرون گوی کراندار است. اما  $f$  در درون گوی نیز کراندار است، بنابراین در تمام صفحه با پایان کراندار است و در نتیجه بنا به قضیه لیوویل، ثابت است.

۸.۱۸. از تعریف مرتبه قطب، برای هر قطب با پایان مانند  $z_k$ ، چندجمله‌ای  $P_k(z)$  موجود است بطوریکه  $f(z) - (z - z_k)^{-n_k} P_k(z)$  در  $z_k$  قطب ندارد. در این صورت  $g(z) = f(z) - \sum (z - z_k)^{-n_k} P_k(z)$  در صفحه با پایان قطب ندارد.  $g$  منهای یک چندجمله‌ای در صفحه توسعه یافته بدون قطب است؛ تمرین ۸.۱۷ را بکار ببرید.

## بخش ۹

۹.۱. الف) جواب تمرین ۹.۱ (ث) را در زیر ببینید.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2} \quad (\text{ب}) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-e^{i\theta} dt}{re^{2i\theta} - (1 + r^2)e^{i\theta} + r} \\ &= i \int \frac{dz}{rz^2 - (1 + r^2)z + r} \end{aligned}$$

ریشه‌های مخرج عبارتند از  $z = \frac{1}{r}$  و  $z = r$  که تنها اولی درون  $|z| = 1$  قرار دارد. مانده در  $z = r$  برابر است با

$$\left. \frac{i}{2rz - (1 + r^2)} \right|_{z=r} = \frac{i}{r^2 - 1}$$

بنابراین انتگرال مسیری برابر با  $\frac{2\pi}{1 - r^2}$  است و انتگرال اصلی برابر با  $\frac{\pi}{1 - r^2}$  است.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{5 + 3 \sin \theta} d\theta &= \int_C \frac{(z + z^{-1})^2 dz}{4iz[5 + 3(2i)^{-1}(z - z^{-1})]} \quad (\text{پ}) \\ &= \int_C \frac{(z^2 + 1)^2 dz}{6z^2(z + 3i)(z + \frac{i}{3})} \end{aligned}$$

مانده در  $-\frac{i}{3}$  برابر است با:

$$\frac{(-\frac{1}{3} + 1)^2}{6 \times (-\frac{1}{3})} \frac{1}{(-\frac{i}{3}) + 3i} = \frac{4i}{9}$$

مانده در صفر برابر است با:

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \frac{(z^2 + 1)^2}{3z^2 + 10iz - 3} \right|_{z=0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-10i}{9} = -\frac{5i}{9}$$



(روی روش دقت کنید: وقتی مانده در یک قطب چندگانه را محاسبه می‌کنیم، شکل جبری مشتق را نمی‌نویسیم، فقط مقدار متناظر  $z$  را جایگزین می‌کنیم). لذا مقدار انتگرال مسیری برابر است با  $\frac{2\pi}{9} i = \frac{2\pi}{9} i \cdot 2\pi i = \left(\frac{4}{9} - \frac{5}{9}\right) i \cdot 2\pi i$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(3 + 2\cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \int_C \frac{dz}{iz(3+z+z^{-1})^2} \quad (\text{ت})$$

$$= \frac{1}{2i} \int_C \frac{z dz}{(z^2 + 3z + 1)^2}$$

ریشه‌های  $z^2 + 3z + 1$ ،  $\omega$  و  $\omega' = \frac{1}{\omega}$  با  $|\omega| < 1$ ،  $\omega + \omega' = -3$  و  $\omega - \omega' = \sqrt{5}$  هستند.  $\pi$  برابر مانده تابع زیر انتگرال در  $\omega$  را می‌خواهیم. این مقدار برابر است با

$$\left. \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - \omega')^2} \right|_{z=\omega} = \frac{-(\omega + \omega')}{(\omega - \omega')^2} = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

و انتگرال اصلی برابر است با  $-\frac{3\pi}{5\sqrt{5}}$ .

(ث) فرض می‌کنیم  $a > 0$ ، چون در غیر این صورت می‌توانیم منفی انتگرالی که می‌خواهیم محاسبه کنیم، و بعد برای بدست آوردن جواب، علامت را تغییر دهیم. انتگرال مسیری متناظر

$$\int_C \frac{dz}{iz} \frac{2i}{2ia + bz - \left(\frac{b}{z}\right)} = \int_C \frac{2dz}{bz^2 + 2iaz - b}$$

است. ریشه‌های مخرج  $\omega$  و  $\omega'$  به صورت  $\frac{-i}{b}(a \pm \sqrt{a^2 - b^2})$  هستند. چون حاصل ضرب آنها برابر با 1 است، تنها یکی از آنها درون دایره واحد قرار می‌گیرد. فرض کنید  $\omega$  این ریشه باشد که بوضوح ریشه‌ای با علامت منفی است. در این صورت عبارت زیر انتگرال به صورت

$$\frac{2}{b(z - \omega)(z - \omega')}$$

است و مانده آن در  $\omega$ ،

$$\frac{2}{b(\omega - \omega')} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - b^2}}$$

می‌باشد. بنابراین انتگرال برابر است با

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

۹.۲ (الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+4}{(x^2+2x+2)(x^2+9)} dx$$

قطبهای مربوط  $i + 1$  و  $3i$  هستند. مانده در  $3i$  برابر است با

$$\frac{3i + 4}{(-9 + 6i + 2) 6i} = \frac{3 - 4i}{6(-7 + 6i)} = \frac{-9 + 2i}{102}$$

و در  $i + 1$  برابر است با

$$\frac{-1 + i + 4}{[2(-1 + i) + 2][(-1 + i)^2 + 9]} = \frac{3 + i}{2(2 + 9i)} = \frac{9 - 15i}{102}$$

است. مجموع مانده‌ها  $\frac{-13i}{102}$  و انتگرال برابر با  $\frac{13\pi}{51}$  است.

(ب) تابع زیر انتگرالها دارای قطبهایی در  $i \pm 1$  و  $-i$  است که آخری مورد نیاز نیست. اما به سادگی می‌توان دید که مانده در  $\infty$  برابر با صفر است (تمرین ۸.۱۶) و بنابراین مجموع دو مانده در نیم‌صفحه بالایی برابر با منفی مانده در  $-i$  است (تمرین ۸.۱۴) لذا ما تنها این مانده را محاسبه می‌کنیم که فوراً می‌بینیم  $-\frac{1}{8}$  به دست می‌آید.

(پ) عبارت زیر انتگرال

$$\frac{1}{x^4 + 6x^2 + 8} = \frac{1}{(x^2 + 2)(x^2 + 4)}$$

با قطبهای  $i\sqrt{2}$  و  $2i$  (در نیم‌صفحه بالایی) است. مجموع مانده‌ها برابر با

$$\frac{1}{-4i \times 2\sqrt{2} + 12i\sqrt{2}} + \frac{1}{32i + 24i} = \frac{-i\sqrt{2} - 1}{4 \cdot 2}$$

می‌باشد و انتگرال برابر با  $\frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{8}$  است.

۹.۳. برای  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^4)^{-1} dx$  قطبهایی در  $e^{\frac{i\pi}{4}}$  و  $e^{\frac{3i\pi}{4}}$  وجود دارد. مجموع مانده‌ها برابر است با

$$\frac{1}{4e^{\frac{3i\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{i\pi}{4}}} = -\frac{i}{4}\sqrt{2}$$

و انتگرال برابر است با  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ .

از جداول انتگرال، بدست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \log \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + 2 \tan^{-1} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \right\}$$

در  $\pm\infty$ ، لگاریتم صفر است بنابراین، بوضوح

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

اما، توجه کنید که انتگرال نامعین باید یک تابع پیوسته باشد. در نتیجه، وارون تانژانت نمی‌تواند همیشه مقدار اصلی داشته باشد، چون  $\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$  در  $x = \pm 1$ ، نامعین است. اگر وارون تانژانت را در  $-\infty$  با مقدار صفر شروع کنیم، وقتی  $x$  به  $-1$  صعود می‌کند دارای مقدار مثبت خواهد بود؛ در این صورت مقدار اصلی آن از  $\frac{\pi}{4}$  به  $-\frac{\pi}{4}$  می‌پرد؛ بنابراین، برای پیوسته بودن، وارون تانژانت باید مقادیری بیشتر از  $\frac{\pi}{4}$  را بگیرد. در  $x = +1$ ، پدیده مشابهی داریم و وارون تانژانت بالاجبار مقادیر بیشتر از  $\frac{3\pi}{4}$  را داراست؛ وقتی  $x \rightarrow +\infty$ ، وارون تانژانت به  $2\pi$  نزدیک می‌شود. بنابراین انتگرال معین برابر با  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$  است.

$$\int_R^{2R} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_{-R}^{2R} = \frac{1}{2} \log \frac{1+4R^2}{1+R^2} \rightarrow \log 2 \quad 9.4$$

$$\int_{-R}^R \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_{-R}^R = 0$$

9.5. انتگرال روی نیم‌دایره بزرگ به صفر میل می‌کند، مانند قبل، و انتگرال مسیری  $2\pi i$  برابر مجموع مانده‌های زیر انتگرال در نیم‌صفحه بالایی است. روی نیم‌دایره کوچک،  $z = c + \varepsilon e^{i\theta}$ ، اما  $\frac{P(c)}{A(c)}$ ، مانده  $\frac{P}{Q}$  در  $c$  است.  $Q(z) = A(z)(z-c)$  که در آن  $A(z)$  به مانده  $Q$  در  $c$  نزدیک می‌شود وقتی که  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

9.6.  $z^{-2}$  دارای قطب مرتبه 2 در صفر است و وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow \infty$$

9.7. (الف) قطب‌های مربوط در 2 و  $2i$  با مانده‌های به ترتیب  $-\frac{1}{8}$  و  $\frac{1}{8(1+i)}$  هستند. بنابراین

$$-\frac{i\pi}{8} + \frac{\pi i}{4(1+i)} = \frac{\pi}{8}$$

است.

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 5)} \quad (ب)$$

قطب‌های مربوط در  $-1$  و  $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{19})$  هستند، مانده‌ها عبارتند از  $\frac{1}{2}$  و

$$\frac{1}{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2} + 1\right)(1+i\sqrt{19}-1)} = \frac{2}{(3i-\sqrt{19})\sqrt{19}} = -\frac{3i+\sqrt{19}}{14\sqrt{19}}$$

بنابراین انتگرال برابر است با

$$2\pi i \left( \frac{1}{14} + \frac{-3i-\sqrt{19}}{14\sqrt{19}} \right) = \frac{3\pi}{7\sqrt{19}}$$

۹.۸. مشابه تمرین ۹.۵،  $C$  را که کمان‌هایی از دایره با شعاع  $\varepsilon$  از گوشه‌های آن خارج شده است در نظر بگیرید و بنویسید  $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$  با فرض  $z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ ، داریم

$$\int \frac{g(z)}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int g(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

با انتگرال‌گیری روی  $\theta$  در بازه‌ای به طول  $\alpha$ . وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، حد آخرین انتگرال برابر با  $\alpha i g(z_0)$  است و  $g(z_0)$  مانده  $f$  در  $z_0$  است.

۹.۹. در اینجا (مانند بخش ۹.۲) به

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^R \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx + i \int_0^\pi \frac{2Re^{i\theta}+3}{R^2 e^{2i\theta}+2Re^{i\theta}+2} Re^{i\theta} d\theta \right\}$$

که انتگرال روی نیم‌دایره بزرگ است توجه کنید. این مقدار  $2\pi i$  برابر مجموع مانده‌های  $\frac{2z+3}{z^2+2z+2}$  در نیم‌صفحه بالایی است. انتگرال دوم را می‌توان به صورت

$$i \int_0^\pi \frac{2e^{i\theta} + \frac{3e^{i\theta}}{R}}{e^{2i\theta} + (\frac{2}{R})e^{i\theta} + (\frac{2}{R^2})} d\theta$$

نوشت و حد آن را که برابر با  $2\pi i$  است، می‌توان بدست آورد. زیرا از یک دنباله همگرای یکنواخت می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت. تنها قطب

$$\frac{2z+3}{z^2+2z+2}$$

در نیم‌صفحه بالایی در  $z = -1 + i$  است و مانده در آن برابر با  $1 - \frac{1}{2}i$  است. در نتیجه

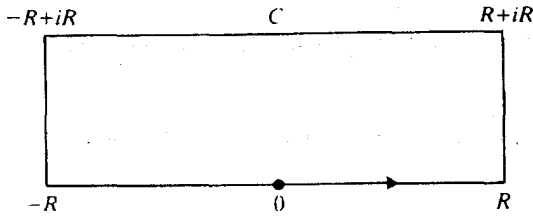
$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx + 2\pi i = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{2}i\right)$$

و انتگرال مورد نظر مسئله برابر با  $\pi$  است.

۹.۱۰. در اینجا مسیر را مطابق شکل ۹.۱۰ ج در نظر می‌گیریم. انتگرال در امتداد  $(-R, R)$  روی محور حقیقی یک مقدار اصلی شبیه متن را نشان می‌دهد.

انتگرال در امتداد  $(R, R + iR)$  به صورت

$$i \int_0^R \frac{e^{i(R+iy)}}{R+iy} dy$$



شکل ۹.۱۰ ج

نوشته می‌شود. قدرمطلق مقدار آن نمی‌تواند از مقدار زیر بیشتر شود

$$\int_0^R \frac{e^{-y}}{|R+iy|} dy = \int_0^R \frac{e^{-y} dy}{(R^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{R} \int_0^R e^{-y} dy = \frac{1}{R}(1 - e^{-R}) \rightarrow 0$$

انتگرال در امتداد ضلع دیگر مستطیل به همین طریق محاسبه می‌شود. انتگرال باقیمانده برابر با

$$\int_{R+iR}^{-R+iR} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{ix-R}}{x+iR} dx$$

است و قدرمطلق مقدار آن از

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-R}}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} dx \leq \frac{e^{-R}}{R} \int_{-R}^R dx = 2e^{-R} \rightarrow 0$$

بیشتر نیست.

۹.۱۱. (الف) انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_C \frac{ze^{iz}}{16z^2 + 9} dz$$

تنها قطب مربوط در  $z = \frac{3}{4}i$  است و مانده در آن برابر با  $\frac{1}{32}e^{-\frac{3}{4}}$  می‌باشد. بنابراین

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{16x^2 + 9} dx = \frac{1}{32}\pi e^{-\frac{3}{4}}$$

(ب) انتگرال مسیری

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z+1)(z^2+4)} dz$$

را در نظر بگیرید. قطب‌های مربوط در  $z = -1$  و  $z = 2i$  هستند. مانده در  $z = -1$

برابر با  $\frac{e^{-1}}{5}$  و در  $z = 2i$  برابر با

$$\frac{e^{-2}}{(2i+1)4i} = -\frac{i+2}{20e^2}$$

می‌باشد. بنابراین

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{i\pi}{5} (\cos 1 - i \sin 1) - \frac{2\pi i}{20e^2} (i+2)$$

و انتگرال مورد نظر، قسمت حقیقی آن یعنی

$$\frac{1}{10} \pi (2 \sin 1 + e^{-2})$$

است. همچنین مقدار

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{(x+1)(x^2+4)}$$

برابر با  $\frac{1}{10} \pi (\cos 1 - e^{-2})$  است.

(پ) در این حالت تنها قطب (مرتبه ۲) مربوط در  $2i$  است و مانده در آن

$$\frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+2i)^2} \Big|_{z=2i} = \frac{3}{32e^2 i}$$

است. بنابراین انتگرال اصلی [روی  $(0, \infty)$ ] برابر با  $\frac{3\pi}{32e^2}$  است. البته انتگرال با  $\sin x$ ، صفر است، زیرا تابع زیر انتگرال یک تابع فرد است.

(ت) قطب‌های  $\frac{ze^{iz}}{4-z^2}$ ، در  $\pm 2$  هستند و مانده‌ها در آنها  $-\frac{1}{4}e^{2i}$  و  $-\frac{1}{4}e^{-2i}$  می‌باشند. جمع مانده‌ها برابر با  $-\cos 2$  است. بنابراین انتگرال اصلی برابر با  $-\pi \cos 2$  است.

(ث) مانده‌های

$$\frac{e^{iz}}{(z-1)(z+2)}$$

هستند بنابراین انتگرال قسمت موهومی  $\frac{-e^{-2i}}{3}$  و  $\frac{e^i}{3}$

$$-\frac{1}{3} \pi i (\cos 1 + i \sin 1) - (\cos 2 - i \sin 2)$$

یعنی  $\frac{1}{3} \pi (\cos 1 - \cos 2) = 1/00159$  است.

۹.۱۲. انتگرال را می‌توان به صورت

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{xt} d(xt)$$

نوشت. اگر  $x > 0$ ، می‌توانیم بگیریم  $u = xt$  و بدست آوریم

$$\int_0^{\infty} u^{-1} \sin u du = \frac{\pi}{2}$$

اگر  $x < 0$ ، انتگرال برابر با  $-\frac{\pi}{2}$  است. بنابراین انتگرال برابر  $\frac{1}{2} \pi \operatorname{sgn} x$  است. توجه کنید که تابع زیر انتگرال پیوسته است، اما انتگرال اینطور نیست.

بخش ۱۰

۱۰.۱. اگر  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  و  $v(x, y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$  ، با

محاسبات مقدماتی داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

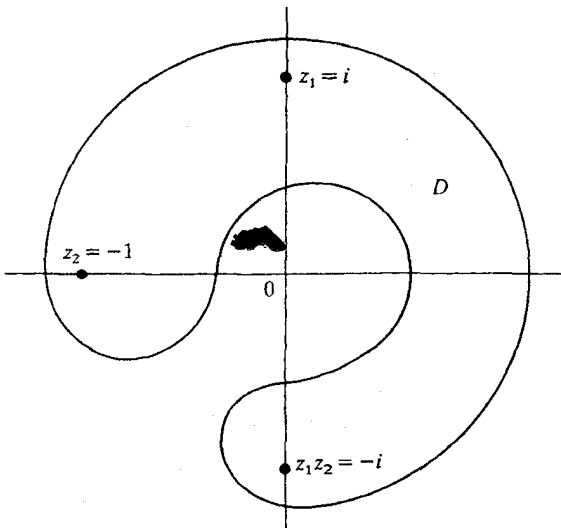
۱۰.۲. داریم

$$\log z_1 = \ln |z_1| + i \arg z_1$$

$$\log z_2 = \ln |z_2| + i \arg z_2$$

$$\log(z_1 z_2) = \ln |z_1| + \ln |z_2| + i \arg(z_1 z_2)$$

که در آن سه آرگومان با توجه به ناحیه و  $\arg z$  به ازای نقطه خاصی در ناحیه بدست می‌آیند. بنابراین مقداری از لگاریتم حاصل ضرب برابر با مجموع مقداری از لگاریتم عامل اول و مقداری از لگاریتم عامل دوم است. اما اگر ناحیه مانند شکل ۱۰.۲ ج در نظر گرفته شود، داریم  $\arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{4}$  ولی  $\arg z_2 = \pi$  ،  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$



شکل ۱۰.۲ ج

۱۰.۳. بعنوان مثال، لگاریتم اصلی  $-1$  برابر با  $i\pi$  است اما لگاریتم اصلی  $1 = (-1)(-1)$  برابر با صفر است.

۱۰.۴. مشتق  $w = e^{\log z}$  برابر با  $\frac{w}{z} = z^{-1} e^{\log z}$  است. بنابراین  $z \left(\frac{dw}{dz}\right) - w = 0$ ،  $\left(\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{w}{z}\right) = 0$  (بجز در  $z = 0$ ) و در نتیجه  $\frac{w}{z} = c$ ، به ازای مقدار ثابتی مانند  $c$ . در  $z = 1$ ،  $w = 1$ ، بنابراین  $c = 1$  و  $w = z$ ،  $z \neq 0$ .

$$\log(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad 10.5$$

$$\log(i) = i\left(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right)$$

$$\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \log e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{i\pi}{3} + 2k\pi i$$

$$i^{-2i} = e^{-2i(\log i)} = e^{-2i\left(\frac{i\pi}{2} + 2k\pi\right)} = e^{\pi(2k+1)} \quad 10.6$$

توجه کنید که همه مقادیر حقیقی هستند.

$$\begin{aligned} i^{(1+i)} &= \exp\left[(1+i)i\left(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi\right)\right] = \exp\left[i\left(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi\right) - \frac{1}{2}\pi - 2n\pi\right] \\ &= i \exp\left(-\frac{1}{2}\pi - 2n\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= e^{i \log(1+i)} = \exp\left[i(\ln \sqrt{2} + \log e^{\frac{i\pi}{4}})\right] \\ &= \exp\left[\frac{i}{2} \ln 2 + i\left(\frac{i\pi}{4} + 2k\pi i\right)\right] \\ &= \left[\cos\left(\frac{1}{2} \ln 2\right) + i \sin\left(\frac{1}{2} \ln 2\right)\right] e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{-\log i} &= e^{-(\log i)(\log i)} \\ &= \exp\left[-\left(\frac{i\pi}{2} + 2k\pi i\right)\left(\frac{i\pi}{2} + 2m\pi i\right)\right] \\ &= \exp\left[-\left(\frac{-\pi^2}{4} - k\pi^2 - m\pi^2 - 4mk\pi^2\right)\right] \\ &= \exp\left[\pi^2\left(\frac{1}{4} + n\right)\right] \end{aligned}$$

زیرا همه مقادیر صحیح  $n$  می‌توانند به صورت  $k + m + 4mk$  نمایش داده شوند.

برای  $i^i$ ، ابتدا

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$$

را بدست می‌آوریم. در این صورت

$$i^i = \exp\left[e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)i\right]$$



که در آن  $k$  و  $m$  همه مقادیر صحیح (مثبت و منفی)، مستقل از یکدیگر هستند.

توجه کنید که  $(i^i)^i = -ie^{2n\pi}$ .

$$z^{\frac{1}{n}} = \exp(n^{-1} \log z) = r^{\frac{1}{n}} \exp\left(\frac{i\theta}{n} + \frac{\gamma k \pi i}{n}\right) \quad 10.7$$

بنابراین تنها  $n$  مقدار متفاوت برای  $e^{\frac{\gamma k \pi i}{n}}$  وجود دارد. چون،  $e^{2\pi i \frac{k}{n}} = e^{2\pi i \frac{k+n}{n}}$

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} &= (-1)^{-i} = e^{-i \log(-1)} = e^{-i(i\pi + 2k\pi i)} \\ &= e^{\pi(2k+1)} \end{aligned} \quad 10.8$$

(امیدوارم اشتباهاً مسئله را به صورت  $i^{\frac{1}{i}}$  نخوانید.)

10.9. محاسبات ذکر شده از دو فرض اثبات نشده استفاده می‌کند:  $a^{bc} = (a^b)^c$  و  $1^z = 1$  که هیچ

یک از این فرضها همواره درست نیستند.

$$\begin{aligned} a^{bc} &= e^{bc \log a} = \exp\{bc[\ln |a| + i(\arg a + 2k\pi)]\} \\ (a^b)^c &= \exp(c \log a^b) \\ &= \exp[c \log(e^{b \log a})] \\ &= \exp[c \log(e^{b(\ln |a| + i \arg a + 2k\pi i)})] \\ &= \exp[c(b \ln |a| + ib \arg a + 2bk\pi i + 2m\pi i)] \\ &= \exp[bc \ln |a| + ibc(\arg a + 2k\pi) + 2cm\pi i] \end{aligned}$$

بنابراین  $(a^b)^c$  مقدار بیشتری از  $a^{bc}$  دارد.

همچنین  $1^z = e^{z \log 1} = e^{z \cdot 2k\pi i}$ .

$$a^b a^c = e^{b \log a} e^{c \log a} \quad \text{توجه کنید که}$$

$$= |a|^{b+c} \exp[i(b \arg a + c \arg a + 2k\pi b + 2m\pi c)]$$

در حالیکه

$$a^{b+c} = |a|^{b+c} \exp[i(b+c)(\arg a + 2k\pi)]$$

10.10. باید

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = w$$

و یا

$$e^{\gamma iz} - 2we^{iz} + 1 = 0$$

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$$

را حل کنیم.

دو ریشه معادله درجه دو عکس یکدیگرند (زیرا، حاصل ضرب آنها مقدار ثابت ۱ است)، بنابراین

$$iz = \pm \log[w + (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$$

که در آن یکی از دو ریشه دوم را انتخاب می‌کنیم و سپس همه مقادیر لگاریتم را در نظر می‌گیریم.

$$w = \tan z = -i(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz}) \quad ۱۰.۱۱ \text{ اگر}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} e^{iz}w + e^{-iz}w &= -ie^{iz} + ie^{-iz} \\ e^{\pm iz} &= \frac{i-w}{i+w} \end{aligned}$$

چون تابع نمایی هیچگاه مقادیر ۰ و  $\infty$  را نمی‌گیرد،  $\tan z$  نمی‌تواند مقادیر  $\pm i$  را بگیرد. برای مقادیر دیگر  $w$  داریم

$$\tan^{-1} w = -\frac{1}{2}i \log \frac{i-w}{i+w} = -\frac{1}{2}i \log \frac{1+iw}{1-iw}$$

که در آن همه مقادیر لگاریتم قابل قبول هستند.

## بخش ۱۱

۱۱.۱. (الف) بگیرد  $x^{\lambda} = a^{\lambda}t$ . انتگرال به صورت

$$\frac{1}{2}a^{\lambda-1} \int_0^{\infty} \frac{t^{-1+\frac{(1+\lambda)}{2}}}{1+t} dt$$

می‌شود. با مثال بخش ۱۱.۱، این مقدار برابر  $\frac{\pi a^{\lambda-1}}{2 \cos \frac{1}{2}\pi\lambda}$  است.

اگر  $-1 < \lambda < 1$ ، در این صورت  $0 < \frac{1}{2}(1+\lambda) < 1$ .

$$\int_C \frac{\log z}{z^{\lambda}(1+z)} dz = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\lambda}(1+x)} dx - \int_0^{\infty} \frac{\ln x + \pi i}{x^{\lambda}e^{\pi i\lambda}(1+x)} dx \quad (\text{ب})$$

مانده در  $-1$  برابر با  $i\pi e^{-i\pi\lambda}$  است. بنابراین

$$\begin{aligned} -2\pi^{\lambda}e^{-i\pi\lambda} &= (1 - e^{-2\pi i\lambda})I - 2\pi i e^{-\pi i\lambda} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}(1+x)} \\ -2\pi^{\lambda} &= 2iI \sin \pi\lambda - 2\pi i e^{-\pi i\lambda} \frac{\pi}{\sin \pi\lambda} \end{aligned}$$

که در آن  $I$  انتگرال اصلی است، در مثال متن، بگیرد  $\lambda - 1 = \alpha$ .

قسمت موهومی سمت راست باید برابر با صفر باشد، بنابراین داریم

$$2I \sin \pi \lambda - 2\pi \cos \pi \lambda \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} = 0$$

$$I = \pi^\gamma \cot \pi \lambda \csc \pi \lambda$$

توجه کنید که  $I > 0$  هرگاه  $\lambda < \frac{1}{2}$ ،  $I < 0$  هرگاه  $\lambda > \frac{1}{2}$  و  $I = 0$  وقتی  $\lambda = \frac{1}{2}$ . این مطلب چندان تعجب آور نیست زیرا با جایگزینی  $y = \frac{1}{x}$  بدست می آوریم

$$I = - \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^{1-\lambda}(x+1)} dx$$

و هرگاه  $\lambda = \frac{1}{2}$ ، داریم  $I = -I$ .

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x dx}{(a+x)(b+x)} \tag{ب}$$

اگر از

$$\int_C \frac{\log z}{(a+z)(b+z)} dz$$

شروع کنید درمی یابید که هیچ اطلاعاتی درباره انتگرال اصلی بدست نمی آورید. در عوض به انتگرال زیر توجه کنید:

$$\int_C \frac{(\log z)^\gamma}{(a+z)(b+z)} = 2\pi i (-b \text{ و } -a \text{ در مجموعه مانده‌ها})$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\ln x)^\gamma dx}{(a+x)(b+x)} - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi i)^\gamma dx}{(a+x)(b+x)}$$

$$= -2\pi i I + 2\pi^\gamma \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(b+x)}$$

مانده‌ها عبارتند از:

$$\frac{(\ln a + i\pi)^\gamma}{b-a} \quad \text{در } -a$$

$$\frac{(\ln b + i\pi)^\gamma}{a-b} \quad \text{در } -b$$

بنابراین

$$2\pi i \left[ \frac{(\ln a)^\gamma + 2\pi i \ln a - \pi^\gamma}{b-a} - \frac{(\ln b)^\gamma + 2\pi i \ln b - \pi^\gamma}{b-a} \right]$$

$$= -2\pi i I + 2\pi^\gamma \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(b+x)}$$

قسمت‌های موهومی دو طرف را با هم مساوی قرار دهید:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{b-a} [(\ln a)^{\sqrt{2}} - (\ln b)^{\sqrt{2}}] = -\sqrt{2}\pi I$$

$$I = \frac{(\ln b)^{\sqrt{2}} - (\ln a)^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(b-a)} = \frac{\ln(ab) \ln(\frac{b}{a})}{\sqrt{2}(b-a)}$$

چون

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{a}$$

داریم

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{(a+x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\ln a}{a}$$

چنان که مستقیماً با انتگرال‌گیری جزء به جزء می‌توانستیم بدست آوریم.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}}{1+t} dt \quad ۱۱.۲$$

انتگرال اخیر مثال متن به ازای  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  است بنابراین

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{\sqrt{2}})} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

۱۱.۳ (الف)

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}}$$

بگیرید  $t = x^{\sqrt{2}}$  ، بنابراین

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}t + \sqrt{2})}$$

انتگرال

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_C \frac{dz}{z^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(z^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z + \sqrt{2})}$$

را در نظر بگیرید که در آن  $C$  حد مسیر سوراخ کلید شکل ۱۱.۱ و  $0 \leq \arg z \leq \sqrt{2}\pi$  است. این انتگرال برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\pi \text{ مجموع مانده‌ها} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x + \sqrt{2})} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi}}(x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x + \sqrt{2})} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}x + \sqrt{2})} = \sqrt{2}I \end{aligned}$$

قطبها در

$$z = -1 + i = e^{\frac{\sqrt{2}\pi i}{4}} \sqrt{2}$$

$$z = -1 - i = e^{\frac{5\sqrt{2}\pi i}{4}} \sqrt{2}$$

هستند. بنابراین ماندهها برابر با مقدار  $z^{-\frac{1}{4}}(2z + 2)$  در هر قطب می‌باشند یعنی

$$\frac{e^{-\frac{\sqrt{2}\pi i}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}}}{2i} \quad \text{و} \quad \frac{e^{-\frac{5\sqrt{2}\pi i}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}}}{-2i}$$

مجموع ماندهها برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2i} (e^{-\frac{\sqrt{2}\pi i}{4}} - e^{-\frac{5\sqrt{2}\pi i}{4}}) &= \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2} (e^{-\frac{\sqrt{2}\pi i}{4}} e^{-\frac{i\pi}{2}} - e^{-\frac{5\sqrt{2}\pi i}{4}} e^{-\frac{i\pi}{2}}) \\ &= \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2} (e^{-\frac{\sqrt{2}\pi i}{4}} - e^{-\frac{9\sqrt{2}\pi i}{4}}) \\ &= \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2} (e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}) \\ &= -2^{-\frac{1}{4}} i \sin \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

بنابراین  $I = 2^{-\frac{5}{4}} \pi \sin \frac{\pi}{4}$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^r}{1+x^r} dx \quad (\text{ب})$$

بگیرید  $x^r = t$ ، در این صورت با توجه به قضیه بخش ۱۱.۱،

$$I = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{r}}}{1+t} dt = \frac{1}{r} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{r}} = 3^{-\frac{r}{4}} \pi$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^r + a^r)^r}, \quad a > 0 \quad (\text{پ})$$

اولاً بگیرید  $x^r = t$ ، در این صورت

$$I = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{r}}}{(t+a^r)^r} dt$$

حال

$$\frac{1}{r} \int_C \frac{z^{-\frac{1}{r}}}{(z+a^r)^r} dz = \frac{1}{r} \cdot 2\pi i (z^{-\frac{1}{r}}(z+a^r)^{-r})$$

را در نظر بگیرید. یک قطب مرتبه ۳ در  $z = -a^r$  وجود دارد. مانده برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left( \frac{d}{dz} \right)^2 z^{-\frac{1}{r}} \Big|_{z=-a^r} &= \frac{1}{r} \left( -\frac{2}{r} \right) \left( -\frac{5}{r} \right) z^{-\frac{5}{r}} \Big|_{z=-a^r} \\ &= \frac{5}{9} a^{-\frac{5}{r}} e^{-\frac{5\pi i}{r}} = -\frac{5}{9} a^{-\frac{5}{r}} e^{\frac{\pi i}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\pi i}{3} \cdot \frac{5}{9} a^{-\lambda} e^{\frac{\pi i}{3}} &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(x+a^3)^3} dx - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{(x+a^3)^3} dx \\
 -\frac{10\pi i}{9} a^{-\lambda} &= (e^{-\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{\pi i}{3}}) \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(x+a^3)^3} dx \\
 &= -2i \sin \frac{\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}} dx}{(x+a^3)^3}
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \frac{5\pi}{9} a^{-\lambda} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{2}{3}} dx}{(x+a^3)^3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3I \\
 I &= \frac{10\pi}{27\sqrt{3}a^{\lambda}}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^3} dx = \frac{1}{16} \int_0^{\infty} \frac{\log t dt}{(1+t)t^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{16} I \quad (ت)$$

مسیر شکل ۱۱.۱ را بکار برید، برای انتگرال مسیر با توجه به انتگرال بخش ۱۱.۱ داریم

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{\log x dx}{(1+x)x^{\frac{2}{3}}} - i \int_0^{\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{(1+x)x^{\frac{2}{3}}} dx &= (1-i)I + 2\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^{\frac{2}{3}}} \\
 &= (1-i)I + 2^{\frac{2}{3}}\pi^2
 \end{aligned}$$

اما انتگرال مسیری،  $2\pi i$  برابر مانده در  $-1$  است که برابر با

$$2\pi i \frac{\log(-1)}{(-1)^{\frac{2}{3}}} = -2\pi^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}(1+i)$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 (1-i)I + 2^{\frac{2}{3}}\pi^2 &= 2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}(1+i) \\
 (1-i)I &= 2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}(i-1) \\
 I &= -2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}
 \end{aligned}$$

و انتگرال اصلی برابر با  $\frac{-2^{\frac{1}{3}}\pi^{\frac{2}{3}}}{16}$  است.

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\log(t-a)}{1+z^\gamma} dz &= 2\pi i \text{ (مجموع مانده‌ها)} \\ &= \int_a^\infty \frac{\ln(x-a)}{1+x^\gamma} dx - \int_a^\infty \frac{\ln(x-a) + 2\pi i}{1+x^\gamma} dx \\ &= -2\pi i \int_a^\infty \frac{dx}{1+x^\gamma} \end{aligned}$$

مانده‌ها عبارتند از

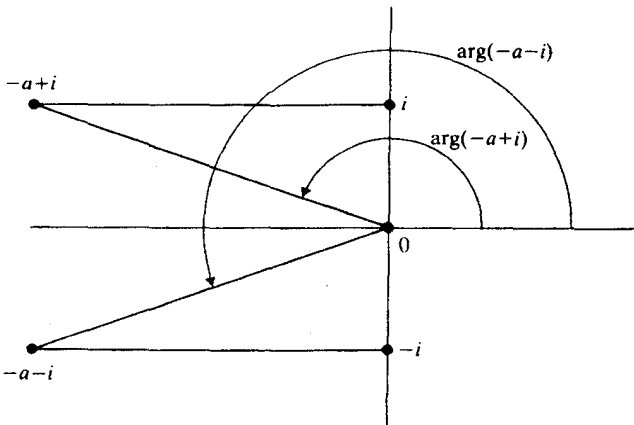
$$\begin{aligned} \frac{\log(i-a)}{2i} &: \text{ در } i \\ \frac{\log(-i-a)}{-2i} &: \text{ در } -i \end{aligned}$$

مجموع مانده‌ها برابر است با

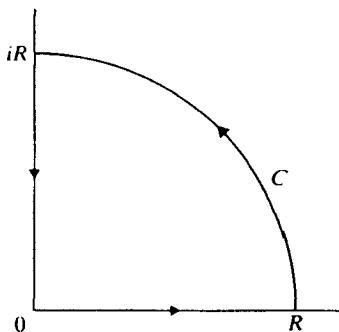
$$\frac{1}{2i} [i \arg(-a+i) - i \arg(-a-i)] = - \int_a^\infty \frac{dx}{1+x^\gamma}$$

بنابراین (شکل ۱۱.۴ ج را ببینید)

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{1+x^\gamma} &= \frac{1}{\gamma} [\arg(-a-i) - \arg(-a+i)] \\ &= \cot^{-1} a = \frac{\pi}{\gamma} - \tan^{-1} a \end{aligned}$$



شکل ۱۱.۴ ج



شکل ۱۱.۵ ج

۱۱.۵. انتگرال اصلی برابر است با

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{x^\gamma - i - 1} = \lim I_1$$

انتگرال «تبدیل یافته»

$$\lim \int \frac{-idy}{y^\gamma + i + 1} = \lim I_2$$

است. انتگرال  $I_2$  را می‌توان به صورت

$$- \int_{iR}^0 \frac{dz}{z^\gamma - i - 1}$$

تعبیر کرد. اکنون انتگرال

$$\int_C \frac{dz}{z^\gamma - i - 1}$$

را در نظر بگیرید که  $C$  در شکل ۱۱.۵ نشان داده شده است. انتگرال در امتداد ربع دایره به صفر میل می‌کند هرگاه  $R \rightarrow \infty$ . اما انتگرال مسیری  $2\pi i$  برابر مانده تابع زیر انتگرال در  $\frac{1}{\gamma} (i + 1) \neq \lim I_1 \neq \lim I_2$  در نتیجه برابر با صفر نیست.

## بخش ۱۲

۱۲.۱. اگر  $z$  ریشه  $f$  باشد در این صورت نزدیک  $z_0$ ، داریم

$$f(z) = (z - z_0)^k \phi(z)$$



که  $\phi$  در  $z_0$  تحلیلی و  $\phi(z_0) \neq 0$ . بنابراین

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} \phi(z) + (z - z_0)^k \phi'(z)$$

و

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

چون  $\frac{\phi'}{\phi}$  در  $z_0$  تحلیلی است، مانده  $\frac{f'}{f}$  در  $z_0$  برابر با  $k$  است، که مرتبه ریشه است. برای یک قطب محاسبات مشابهی با  $k < 0$  داریم.

۱۲.۲ (الف) به وضوح هیچ ریشه‌ای روی محور حقیقی منفی وجود ندارد. روی محور حقیقی مثبت، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 \\ &= x^2(x^2 - 4x + 4) + 7(x^2 - 2x + 1) + 3 > 0 \end{aligned}$$

بنابراین  $P(x) \neq 0$  روی محور حقیقی مثبت. اگر  $\arg P(z)$  را با مقدار صفر در مبدأ شروع کنیم، برای  $z = iy$ ،  $y$  بزرگ برابر با  $\frac{\pi}{4} = 2\pi$  می‌شود. روی محور موهومی

$$P(iy) = y^4 + 4iy^3 - 11y^2 - 14iy + 10$$

$$\Phi = \arg P(iy) = \tan^{-1} \frac{4y^3 - 14y}{y^4 - 11y^2 + 10} = \tan^{-1} \frac{2y(2y^2 - 7)}{(y^2 - 10)(y^2 - 1)}$$

در این صورت  $\Phi = \arg P(iy)$  علامت را متوالیاً در  $\sqrt{10}$ ،  $\sqrt{\frac{7}{2}}$  و ۱ تغییر می‌دهد و بنابراین  $\Phi$  از نزدیک  $2\pi$  شروع می‌کند و در ربع اول برای  $y$  نزدیک  $+\infty$  به سمت دومین ربع می‌رود و وقتی که  $y$  از  $\sqrt{10}$  می‌گذرد، در  $\sqrt{\frac{7}{2}}$  به سمت ربع سوم و در ۱ به سمت ربع چهارم می‌رود. بنابراین  $\arg P(z)$  به اندازه  $4\pi$  حول یک‌چهارم گوی بزرگی در اول ربع صعود می‌کند. بنابراین دو ریشه در اولین ربع و دو ریشه در چهارمین ربع وجود دارند.

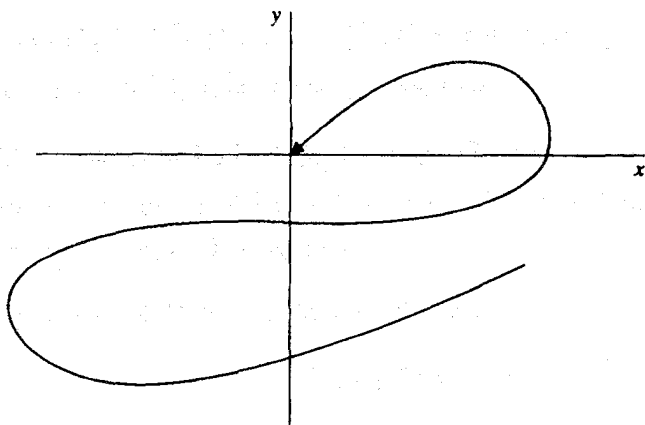
(ب) برای  $x \geq 0$  داریم  $P(x) > 0$ . اگر  $z = -x$  ( $x > 0$ )،

$$P(z) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 2$$

$$P(-x) \geq x^2(x^2 - 2x + 3) > x^2(x - 1)^2 > 0, \quad 0 < x < 2 \text{ هرگاه}$$

$$P(-x) \geq x^2(x - 2) + x(3x - 1) > 0, \quad x > 2 \text{ هرگاه}$$

بنابراین  $P$  روی محور حقیقی ریشه ندارد. جدول نشان می‌دهد که وقتی  $y$  از  $+\infty$  به صفر می‌رود  $\Phi = \arg P(iy)$  چگونه تغییر می‌کند. شکل ۱۲.۲ ج را ببینید.



شکل ۱۲.۲ ج

$y$	$\tan \Phi$	ربعی که $\Phi$ واقع است	$\Phi$
نزدیک $\infty$	-	۴	نزدیک $2\pi$
$\infty > y > 2^{\frac{1}{2}}$	-	۴	$2\pi > \Phi > \frac{3\pi}{4}$
$2^{\frac{1}{2}}$	$\infty$	۳ به ۴	$\frac{3\pi}{4}$
$2^{\frac{1}{2}} > y > 1$	+	۳	$\frac{3\pi}{4} > \Phi > 2\pi$
۱	$\infty$	۴ به ۳	$\frac{3\pi}{4}$
$1 > y > 2^{-\frac{1}{2}}$	-	۴	$\frac{3\pi}{4} < \Phi < 2\pi$
$2^{-\frac{1}{2}}$	۰	۱ به ۴	$2\pi$
$2^{-\frac{1}{2}} > y > 0$	+	۱	$2\pi < \Phi < \frac{5\pi}{4}$
۰	۰		$2\pi$

بنابراین هیچ ریشه‌ای در ربع اول و در نتیجه در ربع‌های دیگر وجود ندارد.

۱۲.۳. قضیه روشه را برای  $z^2 iz^2$  بعنوان  $f$  و  $\sin z$  به عنوان  $g$  بکار می‌بریم. برای  $z = x \pm iy$ ،

$$|\sin z| = (\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y)^{\frac{1}{2}} < \cosh y < 1, 5431$$

$$، z = \frac{1}{2}\pi + iy \text{ برای}$$

$$|y| \leq 1, |\sin z| = \cosh y \leq \cosh 1$$

از طرف دیگر  $2 \geq |z|^2$  . در نتیجه  $|\sin z| < |z|^2$  روی مرز مستطیل، و دو ریشه در درون وجود دارند (یکی از آنها به وضوح در صفر است).

۱۲.۴. اثبات قسمت اول قضیهٔ روشه را برای  $f$  و  $g$  مورمورفیک تکرار کنید و مشاهده کنید که همه چیز مشابه است بجز برای آنچه که تغییرات  $\arg f$  و  $\arg(f+g)$  نشان می‌دهد. مثلاً:  $f = 1$  ،  $g(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$  ،  $C =$  دایره واحد.

۱۲.۵. اگر  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_0$  ، داریم

$$P(z) = z^n + g(z)$$

که در آن  $|g(z)| < |z|^n$  روی دایره  $C$  ، به اندازه کافی بزرگ با مرکز صفر (تمرین ۱.۲۳). قضیهٔ روشه بیان می‌کند که  $P(z)$  دقیقاً همان تعداد ریشه درون  $C$  دارد که  $z^n$  دارد، یعنی  $n$  تا.

۱۲.۶. اثبات بر اساس تناقض است. فرض کنید  $f(z_0) = 0$  برای  $z_0$  ای در  $D$  . در این صورت با توجه به بخش ۷.۷ یک گوی محذوف  $\Delta$  به مرکز  $z_0$  موجود است که در آن  $f(z) \neq 0$  . فرض کنید  $C$  مرز  $\Delta$  و  $|f(z)| > m$  روی  $C$  . چون  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  روی  $C$  بطور یکنواخت، اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد، روی  $C$  داریم  $|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{4}$  . برای یک چنین  $n$  ای قرار دهید  $g(z) = f_n(z) - f(z)$  . در این صورت روی  $C$  ،  $|f(z) + g(z)| = |f_n(z)| < |f(z)|$  و قضیهٔ روشه می‌گوید که  $f$  و  $f_n$  تعداد یکسانی ریشه در  $\Delta$  دارند، یعنی ۱. این با فرض  $f_n(z) \neq 0$  تناقض دارد.

۱۲.۷. برای مثال  $1 - \frac{z^n}{n} \rightarrow 1$  روی  $|z| \leq 1$  بطور یکنواخت، اما  $f_n(z) = 0$  در  $n$  ریشه  $n$  ام،  $n$  ، که همهٔ نقاط گوی واحد را بعنوان نقاط حدی دارند، زیرا  $1 \rightarrow n^{\frac{1}{n}}$  (مقدار اصلی).

۱۲.۸. فرض کنید  $\delta_n \rightarrow 0$  .  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  را چنان انتخاب کنید که  $|f(z)| < \delta_n$  در گوی  $T_m(z) \rightarrow f(z)$  در  $D$  داریم  $D_n : |z - z_n| < \varepsilon_n$  . اگر  $n$  خاصی را در نظر بگیریم، در  $D$  داریم  $T_m(z) \rightarrow f(z)$  بطور یکنواخت وقتی  $m \rightarrow \infty$  . لذا بنا به قضیهٔ هروتیز تعداد بی‌پایان  $T_m$  در  $D_n$  ریشه دارند. فرض کنید  $T_{m_k}$  چنین مجموع جزئی باشد و فرض کنید  $w_n \in D_n$  ،  $T_{m_k}(w_n) = 0$  . چون  $D_n \rightarrow 0$  ، داریم  $w_n \rightarrow 0$  .

### بخش ۱۳

۱۳.۱. مثلاً  $e^z$  در تمام صفحه (یا در هر گوی با شعاع بزرگتر از  $\pi$ )؛ یا  $f(z) = z^2$  در گوی بریده‌شده،  $0 < |z| < 1$  ،  $0 < \arg z < 2\pi$  .

۱۳.۲. فرض کنید  $z_1$  و  $z_2$  نقاطی در  $D$  باشند. در این صورت با انتگرال‌گیری در امتداد پاره‌خط  
 واصل  $z_1$  و  $z_2$ ، داریم

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(w) dw = \int_{z_1}^{z_2} \{[f'(w) - f'(z_0)] + f'(z_0)\} dw \\ &= f'(z_0)(z_2 - z_1) + \int_{z_1}^{z_2} [f'(w) - f'(z_0)] dw \\ |f(z_2) - f(z_1)| &\geq |f'(z_0)| |z_2 - z_1| - \int_{z_1}^{z_2} |f'(w) - f'(z_0)| |dw| \\ &\geq |f'(z_0)| |z_2 - z_1| - |z_2 - z_1| \max |f'(w) - f'(z_0)| \end{aligned}$$

که در آن ماکزیمم روی  $w$  هایی گرفته می‌شود که روی پاره‌خط  $(z_1, z_2)$  واقع هستند اما بنا به  
 فرض  $|f'(w) - f'(z_0)| < |f'(z_0)|$  لذا

$$|f(z_2) - f(z_1)| > 0$$

یعنی  $f(z_2) \neq f(z_1)$ .

۱۳.۳. تنها چندجمله‌ای‌های یک به یک از نوع  $az + b$  هستند، چون چندجمله‌ای‌های با درجه بیشتر  
 مقادیر را بیش از یکبار می‌گیرند. یک تابع تام متعالی دارای یک تکین اساسی در  $\infty$  است و یک  
 به یکی با قضیه کاسوراتی- وایراشتراس تناقض دارد (بخش ۸.۵).

چند اثبات دیگر بوسیله ر.ک. ویلیامز در

“On the Linearity of One-to-One Entire Functions”, *Delta 6* (1976): 72-77

ارائه شده است. اغلب این اثبات‌ها به مطالبی خارج از مباحث این کتاب مربوط می‌شوند.

۱۳.۴. فرض کنید  $f(z) = \lim f_n(z)$ ، که  $f_n$  ها تحلیلی و یک به یک و همگرای یکنواخت در  $D$   
 هستند. فرض کنید  $z_0$  نقطه‌ای در  $D$  باشد و بنا به  $\{f_n(z) - f(z_0)\} = \{g_n(z)\}$  که همگرا  
 به  $f(z) - f(z_0)$  است را در نظر بگیرید. بنا به قضیه هرویتز (بخش ۱۲.۳ تمرین ۱۲.۶) یا  
 $f(z) - f(z_0) \equiv 0$  یا  $f(z) - f(z_0)$  بدون ریشه است زیرا این مطلب برای هر  $z_0$  در  $D$  درست  
 است لذا  $f$  یا هیچ مقداری را دو بار نمی‌گیرد یا  $f$  ثابت است.

۱۳.۵. فرض کنید  $f(z) = z^2$  در نیم‌گوی  $|z| < 1$ ،  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . می‌توانیم داشته باشیم  $z_2^2 = z_1^2$   
 تنها اگر  $z_1 = \pm z_2$ . اگر  $z_1$  در درون نیم‌گوی باشد،  $-z_1$  در بیرون است لذا  $f$  درون نیم‌گوی یک  
 به یک است. از طرف دیگر اگر  $z$  روی قطر مرزی قرار گیرد  $f(z) = f(-z)$ .

## بخش ۱۴

۱۴.۱. روی  $C_2$ 

$$\frac{1}{w-z} = \frac{w^{-1}}{1 - \left(\frac{z}{w}\right)} = w^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n$$

با همگرایی یکنواخت نسبت به  $z$ ؛ همچنین  $f(w)$  برای  $w$  روی  $C_2$  کراندار است. بنابراین می‌توانیم با انتگرال‌گیری جمله به جمله بدست آوریم

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C_2} \frac{f(w) dw}{w^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

همچنین روی  $C_1$ 

$$\frac{1}{w-z} = \frac{z^{-1}}{\left(\frac{w}{z}\right) - 1} = -z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} z^{-n}$$

بنابراین

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \int_{C_1} w^{n-1} f(w) dw$$

با انتگرال‌گیری در جهت مثبت.

۱۴.۲. اگر  $f$  دارای قطب مرتبه  $n$  در  $z$  باشد، آنگاه

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \phi(z)$$

که در آنجا  $\phi$  تحلیلی است و در  $z_0$  برابر با صفر نیست. بنابراین

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(w)(w - z_0)^{n-1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (w - z_0)^{-n} (w - z_0)^{n-1} \phi(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi(w) dw}{w - z_0} = \phi(z_0) \neq 0 \end{aligned}$$

در صورتی که وقتی  $m > n$ ،

$$\begin{aligned} c_{-m} &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (w - z_0)^{-n} (w - z_0)^{m-1} \phi(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (w - z_0)^{n-m-1} \phi(w) dw = 0 \end{aligned}$$

زیرا تابع زیر انتگرال در  $z_0$  تحلیلی است.

۱۴.۳. مانده  $f$  در  $\infty$  برابر با  $(2\pi i)^{-1} \int_C f(z) dz$  است که  $C$  حول همه نقاط تکین با پایان  $f$  است، و در جهت مثلثاتی طی می‌شود. چون  $\int_C z^n dz = 0$  برای  $n \neq -1$  و  $\int_C z^{-1} dz = 2\pi i$ ، نتیجه بدست می‌آید.

۱۴.۴. اگر  $f$  دارای دو سری لوران با طوقه‌های همگرایی مشترک باشد، اختلاف این دو سری صفر است. در این صورت فرمول انتگرال ضرایب نشان می‌دهد که اختلاف دارای ضرایب صفر است.

$$14.5 \quad \frac{1}{2z} - \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) + \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \dots$$

۱۴.۶. مانده

$$\frac{1}{(w-1)(w-2)w^{n+2}}$$

در  $w = 2$  برابر با  $2^{-n-2}$  است. بنابراین سری لوران سوم برابر است با مجموع سری لوران دوم و سری

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n-2} z^n$$

یعنی

$$-\frac{1}{2z} - \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-2} z^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-n-2} z^n = -\sum_{n=2}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n-2} z^{-n}$$

۱۴.۷. (الف)

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z^2(z-2)} &= \frac{1}{z^2} \left( \frac{z-2+3}{z-2} \right) = \frac{1}{z^2} \left( 1 + \frac{3}{z-2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^n \right\} \\ &= \frac{-1}{2z^2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^{n-2} \end{aligned}$$

هرگاه  $0 < |z| < 2$

وقتی  $|z| < 2$ ، به ضرب  $z^n$ ، مانده  $\frac{w+1}{(w-2)w^{n+2}}$  در  $w = 3$ ، یعنی  $\frac{3}{2^{n+2}}$  را اضافه می‌کنیم.

(ب)

$$\begin{aligned} \frac{z^{\frac{3}{2}}}{(\frac{1}{2}z+1)(\frac{3}{2}z-\frac{1}{2})} &= \frac{-z^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}(1+\frac{3}{2}z)(1-\frac{1}{2}z)} \\ &= -\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} \left( \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}z} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z} \right) \cdot \frac{6}{\sqrt{1}} \\ &= -\frac{3z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} \sum_{n=\frac{3}{2}}^{\infty} \left[ (-2)^{n-\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{3}{2}} \right] z^n \end{aligned}$$

برای  $0 < |z| < \frac{1}{2}$ 

برای  $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$  باید به ضریب  $z^n$ ، مانده  $\frac{w^{-n+\frac{3}{2}}}{\sqrt{1}(w+\frac{1}{2})(w-\frac{3}{2})}$  در  $w = -\frac{1}{2}$  یعنی  $-\frac{1}{\sqrt{1}}(-2)^{n-\frac{3}{2}}$  را اضافه کنیم.

برای  $|z| > \frac{3}{2}$ ، به علاوه باید به ضریب  $z^n$  مانده در  $w = \frac{3}{2}$  یعنی  $\frac{1}{\sqrt{1}}(\frac{1}{2})^{n-\frac{3}{2}}$  را اضافه کنیم.

۱۴.۸.  $\frac{\log i}{2i} = \frac{\pi}{4}$  و  $\frac{\log(-i)}{-2i} = -\frac{3\pi}{4}$ . اینها مزدوج مختلط ندارند زیرا  $\log z$  روی محور حقیقی منفی، حقیقی نیست.

۱۴.۹. سری فقط برای  $|z| > 1$  همگرا است بنابراین آن سری لوران تابع در همسایگی صفر نیست. مانده برابر با ۱ است.

۱۴.۱۰. برای پیدا کردن مانده بنویسید

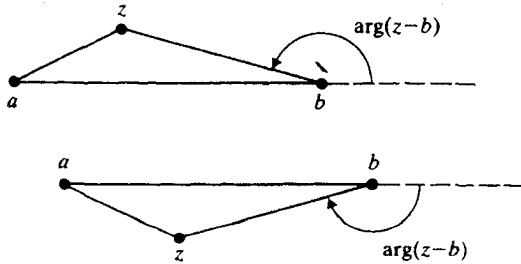
$$f(z) = z \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

و ریشه‌های دوم را بوسیله قضیه دو جمله‌ای بسط دهید و سری لوران  $f$  حول  $\infty$  را بدست آورید

$$f(z) = z \left\{ 1 - \frac{a}{2z} - \frac{a^2}{8z^2} + O(z^{-3}) \right\} \left\{ 1 - \frac{b}{2z} - \frac{b^2}{8z^2} + O(z^{-3}) \right\}$$

ضریب  $\frac{1}{z}$  برابر با  $-\frac{1}{8}(a-b)^2$  یا  $-\frac{1}{8}(a^2+b^2)$  است؛ مانده برابر با منفی این مقدار است. حالا فرض کنید  $C$  یک مسیر باشد که بازه  $[a, b]$  را احاطه می‌کند و در جهت ساعتگرد طی می‌شود؛ داریم

$$\int_C f(z) dz = \infty \quad \text{برابر مانده در } \frac{1}{4}\pi i(a-b)^2$$



شکل ۱۴.۹ ج

اگر  $C$  را از پایین به سمت بازه‌اش منقبض کنیم. طرف بالای بازه مزبور را از چپ به راست، به اضافه طرف پایینی را از راست به چپ داریم. وقتی  $z$  به نقطه  $x$  روی بازه از بالا نزدیک می‌شود از شکل ۱۴.۹ ج واضح است که باید قرار دهیم  $\arg(x-a) = 0$  و  $\arg(x-b) = \pi$ . بنابراین  $(x-b)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{(b-x)}$  و برای  $x$  واقع در طرف پایین  $\arg(x-b) = -\pi$ . بنابراین بدست می‌آوریم  $(x-b)^{\frac{1}{2}} = -i\sqrt{(b-x)}$

$$\lim \int_C f(z) dz = 2i \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx$$

چون  $\int_C f(z) dz = (4\pi i)^{-1}(a-b)^2$  سرانجام داریم:

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{1}{8}\pi(a-b)^2$$

## بخش ۱۵

۱۵.۱. برای نتیجه نهایی بخش ۱۵.۳ را ببینید.

۱۵.۲

$$\frac{e^{z^2}}{z^{-2} \sin(z^2)} = \frac{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^6 + \dots}{1 - \frac{1}{6}z^6 + \dots}$$

$$1 + \frac{z^6}{6} + \dots \frac{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^6 + \dots}{1 + z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^6 + \dots}$$

$$\frac{1}{z^2 + \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{6}z^6 + \dots}$$

۱۵.۳. (الف) بگیرد  $u = \sin z$ . در این صورت



$$\begin{aligned}
 e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + \dots \\
 u &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + O(z^4) \\
 u^2 &= z^2 - \frac{2z^3}{2} + O(z^4) \\
 u^3 &= z^3 - \frac{3z^4}{2} + O(z^5) \\
 u^4 &= z^4 + O(z^5) \\
 u^5 &= z^5 + O(z^6)
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 e^u &= 1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots \\
 &\quad + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} + \dots \\
 &\quad + \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{12} + \dots \\
 &\quad + \frac{z^4}{24} + \dots \\
 &\quad + \frac{z^5}{120} + \dots \\
 &\quad + \dots \\
 &= 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{8} - \frac{z^4}{15} + O(z^5)
 \end{aligned}$$

(ب) فرض کنید  $u = \cos z - 1$  در این صورت

$$\begin{aligned}
 u &= -\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + O(z^8) \\
 &= z^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{720} + \dots \right) + O(z^8) \\
 u^2 &= z^4 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{12} + O(z^4) \right) \\
 u^3 &= -\frac{z^6}{8} + O(z^8) \\
 e^u &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + O(z^8) \\
 &\quad + \frac{z^4}{8} - \frac{z^6}{144} + O(z^8) \\
 &\quad - \frac{z^6}{288} + O(z^8) \\
 &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{6} - \frac{31}{720} z^6 + O(z^8)
 \end{aligned}$$

$$e^{\cos z} = e \cdot e^{\cos z - 1} = e \left[ 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{6} - \frac{z^6}{120} + O(z^8) \right]$$

(پ) فرض کنید  $u = ze^z$

$$\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \dots$$

$$u = ze^z = z + z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{24}z^5 + O(z^6)$$

$$-\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}z^2 e^{2z} = -\frac{1}{2}(z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \frac{4}{3}z^5) + O(z^6)$$

$$\frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}z^3 e^{3z} = \frac{1}{3}(z^3 + 3z^4 + \frac{9}{2}z^5) + O(z^6)$$

$$-\frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{4}z^4 e^{4z} = -\frac{1}{4}(z^4 + 4z^5) + O(z^6)$$

$$\frac{1}{5}u^5 = z^5 e^{5z} = \frac{1}{5}z^5 + O(z^6)$$

$$\begin{aligned} \log(1+u) &= z + z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{24}z^5 \\ &\quad - \frac{1}{2}z^2 - z^3 - z^4 - \frac{2}{3}z^5 \\ &\quad + \frac{1}{3}z^3 + z^4 + \frac{3}{2}z^5 \\ &\quad - \frac{1}{4}z^4 - z^5 \\ &\quad + \frac{1}{5}z^5 + O(z^6) \\ &= z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{12}z^4 + \frac{3}{40}z^5 + O(z^6) \end{aligned}$$

### بخش ۱۶

$$[f(z)]^m = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{[f(w)]^m}{w-z} dw \quad .16.1$$

فرض کنید  $L$  طول  $C$  و  $\delta \min |w-z|$  که  $w$  روی  $C$  می‌باشد. در این صورت

$$|f(z)|^m \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L}{\delta} \max_{w \in C} |f(w)|^m$$

$$|f(z)| \leq \left( \frac{L}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{m}} \max_{w \in C} |f(w)| \rightarrow \max_{w \in C} |f(w)|$$

وقتی  $m \rightarrow \infty$

۱۶.۲.  $e^{f(z)}$  تحلیلی است اگر  $f$  تحلیلی باشد؛ داریم  $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$  و ماکزیمم  $\operatorname{Re} f(z)$ ، ماکزیمم  $|e^{f(z)}|$  است. همچنین برای  $\operatorname{Im} f(z)$ ، رابطه  $|e^{-if(z)}| = e^{\operatorname{Im} f(z)}$  را بکار برید.

۱۶.۳. اصل ماکزیمم را در مورد  $\frac{1}{f(z)}$  بکار برید.

۱۶.۴. تمرین ۱۶.۳ را در مورد  $e^{f(z)}$  یا  $e^{-if(z)}$  بکار برید.

۱۶.۵.  $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  را در  $\Delta$  در نظر بگیرید. در این صورت روی  $\partial\Delta$ ،  $|g(z)| \leq M$  و  $g$  دارای تکین برداشتنی در  $z_0$  است که می‌توانیم آن را نادیده بگیریم. اصل ماکزیمم برای  $g$  می‌گوید که  $|g(z)| \leq M$  در  $\Delta$ ، لذا  $|f(z)| \leq M|z - z_0|$ .

۱۶.۶.  $|f'(z_0)| \leq M$  زیرا  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

۱۶.۷. اگر  $f'(z_0) = 0$ ، آنگاه در یک همسایگی  $z_0$ ،  $|z - z_0| < \varepsilon$  با  $\varepsilon$  بسیار کوچک که  $f$  در  $U$  تحلیلی باشد، می‌توانیم  $f$  را با سری تیلور آن حول  $z_0$  نمایش دهیم. اگر  $f \not\equiv 0$ ، داریم

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k \left[ a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k} \right], \quad a_k \neq 0, \quad k \geq 2$$

وقتی  $\varepsilon$  کوچک باشد، بخشی از  $U$  درون  $|z| = 1$  نزدیک به نیمی از گوی است و  $\arg z$  تقریباً به اندازه  $\pi$  روی  $S$  بخشی از  $\partial U$  که درون  $|z| = 1$  است، تغییر می‌کند. در نتیجه  $\arg [f(z) - f(z_0)]$  تقریباً به اندازه  $k\pi$  ( $k \geq 2$ ) روی  $S$  تغییر می‌کند و این سبب می‌شود که  $w = f(z)$  به بیرون گوی  $|w| \leq |f(z_0)|$  برود. در نتیجه  $|f|$  مقادیر بیشتری از  $|f(z_0)|$  را در نقطه‌ای مانند  $z$  با  $|z| < 1$  می‌گیرد، که با فرض ماکزیمم بودن  $|f|$  در نقطه  $z_0$  برای  $|z| \leq 1$  متناقض است.

اثبات دوم (پیشنهادشده بوسیله آر. بی. بارکل): فرض می‌کنیم که  $|f(z_0)| = 1 = |f(1)|$ . چون  $f$  ثابت نیست، اصل ماکزیمم نشان می‌دهد که  $|f(z)| < 1$  در  $|z| < 1$ . اولاً فرض کنید  $f(0) = 0$ ، در این صورت بنا به لم شوارتس،  $|f| \leq |z|$  ( $|z| < 1$ )، لذا برای  $0 < x < 1$  داریم

$$\frac{|f(1) - f(x)|}{1 - x} \geq \frac{|f(1)| - |f(x)|}{1 - x} \geq \frac{1 - x}{1 - x} = 1$$

با فرض  $x \rightarrow 1$ ، داریم  $|f'(1)| \geq 1$

اما اگر  $f(0) = a \neq 0$  ، استدلال قبل را برای

$$g(w) = \frac{f(w) - a}{1 - \bar{a}f(w)}$$

به کار برید که در آن  $g(0) = 0$  و  $|g(1)| = 1$  زیرا  $|f(1)| = 1$  و

$$g'(1) = \frac{1 - |a|^2}{[a - \bar{a}f(1)]^2} f'(1) \neq 0$$

بنا به استدلال بکاررفته اخیر برای  $g$  . بنابراین در هر حالت  $f'(1) \neq 0$  .

۱۶.۸ . فرض کنید  $\operatorname{Re} f \leq M$  . در این صورت

$$|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq M$$

بنا به قضیه لیوویل،  $e^f$  ثابت است بنابراین  $f$  ثابت است.

۱۶.۹ . فرض کنید  $R = 2r$  ، در این صورت از نامعادله کاراتشودوری داریم،

$$|f(re^{i\theta})| = O[(2r)^\lambda]$$

## بخش ۱۷

۱۷.۱ . بزرگترین توان  $z$  در  $P_k(z)$  دارای نمای  $pn_k + n_k$  است؛ کمترین توان در  $P_{k+1}(z)$  دارای

نمای  $pn_{k+1}$  است. اختلاف این دو نما برابر است با  $pn_{k+1} - (p+1)n_k > 0$  ، زیرا

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} > \lambda > \frac{1}{p} - 1 = \frac{p-1}{p}$$

۱۷.۲ . اگر  $p = 1$  و  $\lambda > 2$  ، داریم  $p > \frac{1}{\lambda-1}$  و می‌خواهیم نشان دهیم

که  $\sum a_k p_k(z) = \sum a_k [z(1-z)]^{n_k}$  وقتی  $|1-z| < 1$  همگرا است. می‌دانیم که

سری برای  $|z| < 1$  همگرا است؛ زیرا اگر  $z$  و  $1-z$  را با هم عوض کنیم سری تغییر نمی‌کند،

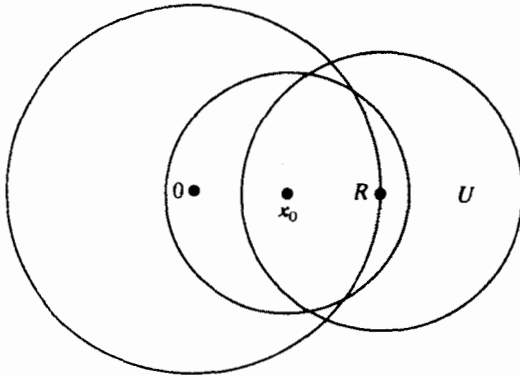
لذا برای  $|1-z| < 1$  نیز همگرا است.

۱۷.۳ . اگر  $f$  در  $z = R$  تحلیلی باشد، در این صورت  $f$  در یک همسایگی  $U$  از  $R$  تحلیلی

است. اگر  $f$  را حول هر نقطه‌ای مانند  $x_0$  ،  $x_0 < R$  ، بسط دهیم آنگاه گوی

$|z - x_0| < R - x_0 + \delta$  یا  $\delta$  به اندازه کافی کوچک و مثبت، در ناحیه تحلیلی  $f$  قرار

می‌گیرد (شکل ۱۷.۳ را ببینید).



شکل ۱۷.۳ ج

۱۷.۴. اگر  $f$  در  $|z| \leq R$  تحلیلی باشد، در یک گوی باز حول هر نقطه از پیرامون  $C: |z| = R$  تحلیلی است. بنا به قضیه هاینه-برل یک مقدار منتهای از گوی‌ها، پیرامون را می‌پوشانند، اجتماع آنها یک مجموعه باز شامل مسیر  $C$  است و بنابراین شامل دایره‌ای به مرکز صفر و شعاع بزرگتر از  $R$  می‌باشد.

۱۷.۵. چون  $a_n \geq 0$  و  $\sum a_n$  واگرا است، اگر  $k$  (بزرگ) مفروض باشد، می‌توانیم بگوییم  $\sum_{n=0}^M a_n > k$  اگر  $M$  به اندازه کافی بزرگ باشد. حال اگر  $0 < x < 1$ ،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq \sum_{n=0}^M a_n x^n \geq x^M \sum_{n=0}^M a_n > kx^M$$

با فرض  $x$  به اندازه کافی نزدیک ۱، داریم  $f(x) > \frac{k}{\epsilon}$ ، چون  $k$  دلخواه است لذا،  $f(x) \rightarrow \infty$ .

۱۷.۶. سری  $\sum (\operatorname{Re} a_n) z^n$  نمی‌تواند به بیش از  $z = R$  ادامه یابد. اگر  $f(z) = \sum a_n z^n$  بتواند ادامه یابد، در این صورت بسط تیلور  $f$  حول  $z = \frac{R}{\epsilon}$  در نقطه‌ای حقیقی مانند  $x = R + \epsilon$  یا  $\epsilon > 0$  همگرا است. لذا قسمت‌های حقیقی و موهومی باید بطور جداگانه همگرا باشند، و قسمت حقیقی دقیقاً بسط تیلور  $\sum (\operatorname{Re} a_n) x^n$  در  $x = \frac{R}{\epsilon}$  است، زیرا برای  $x$  حقیقی داریم  $\operatorname{Re} f(x) = \sum x^n \operatorname{Re} a_n$ .

۱۷.۷. وقتی  $n$  به اندازه کافی بزرگ است،  $\frac{n!p}{q}$  یک عدد زوج طبیعی و  $e^{\frac{in!p}{q}} = 1$  است. بنابراین سری توان  $(re^{\frac{in!p}{q}})$  وقتی  $n$  به اندازه کافی بزرگ است دارای ضرایب مثبت می‌باشد، و در

نتیجه  $f(ze^{\frac{i n \pi p}{q}})$  را نمی‌توان روی شعاع  $z = x$  بعد از ۱ ادامه داد. این مانند این است که بگوئیم  $f$  را نمی‌توان در امتداد شعاع  $\arg z = \frac{\pi p}{q}$  ادامه داد. چون این شعاعها محیط دایره واحد را در مجموعه‌ای چگال قطع می‌کنند،  $f$  نمی‌تواند در هیچ نقطه‌ای از محیط دایره تحلیلی باشد.

۱۷.۸. هر مجموع جزئی سری‌های توان در قضیه هادامارد برابر با یک مجموع جزئی است که با  $n_k$  اندیس‌گذاری شده است، لذا همگرایی زیردنباله مجموع جزئی معادل همگرایی دنباله کامل مجموعه‌های جزئی است.

## بخش ۱۸

۱۸.۱. مانند استدلال قسمت اول اثبات قضیه آبل عمل کنید تا با  $x = 1$  به دست آورید  $B_n = \circ$ .

$$\begin{aligned} B_n &= b_1 + \dots + b_n \\ \sum_{n=M}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^N a_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_M (B_M - B_{M-1}) + \dots + a_N (B_N - B_{N-1}) \\ &= -a_M B_{M-1} + B_M (a_M - a_{M+1}) + \dots \\ &\quad + B_{N-1} (a_{N-1} - a_N) + a_N B_N \end{aligned}$$

چون فرض کردیم  $B_k$  کراندار است، مثلاً  $|B_k| \leq P$ ، و  $a_k - a_{k-1} \geq \circ$ ، داریم

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=M}^N a_n b_n \right| &\leq P a_M + P [(a_M - a_{M+1}) + \dots + (a_{N-1} - a_N)] + P a_N \\ &\leq P a_M + P (a_M - a_N) + P a_N \end{aligned}$$

چون  $a_M \rightarrow \circ$ ، نتیجه می‌دهد که وقتی  $M, N \rightarrow \infty$ ،  $\sum_{n=M}^N a_n b_n \rightarrow \circ$ ، یعنی ضابطه کوشی برای همگرایی برقرار شده است.

۱۸.۲. فرض کنید توابع  $f$ ،  $g$  و  $h$  با سریهای

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n, \\ g(x) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} b_n x^n, \\ h(x) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} c_n x^n, \end{aligned}$$

تعریف شده‌اند، این سریها در  $|x| < 1$  همگرا هستند زیرا سری ضرایب همگرا فرض شده‌اند. چون سری‌های  $A$  و  $B$  همگرا هستند، قضیه آبل می‌گوید که  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \sum b_n$  اما  $h(x) = f(x)g(x)$  برای  $|x| < 1$ ، و چون  $\sum c_n$  همگرا است،  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ . لذا قضیه برقرار است.

۱۸.۳. بنا به تمرین ۴.۱۷،  $\sum \cos nx$  و  $\sum \sin nx$  به ترتیب برای هر  $x$  در  $0 < x \leq \pi$  و  $0 \leq x \leq \pi$  مجموع جزئی کراندار دارند (چون جملات سری سینوسی در  $x = 0$  یا  $x = \pi$  صفر هستند). حالا تمرین ۱۸.۱ را بکار ببرید.

۱۸.۴. اثبات قضیه آبل را عیناً بکار ببرید، فرض کنید  $\varepsilon$  یک کرانه بالا برای  $|s_k|$  (بنابراین لزوماً کوچک نیست). داریم

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=1}^M s_k x^k + (1-x) \sum_{k=M+1}^{\infty} s_k x^k = S_1 + S_2$$

در این صورت با بکارگیری استدلال قضیه آبل برای  $0 < x < 1$  داریم  $|S_2| \leq \varepsilon$  برای مقدار ثابت  $M$ ، مجموع  $S_1$  وقتی  $x \rightarrow 1^-$  هنوز هم به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین اگر  $0 < \delta < 1 - x$ ،  $|S_1| < \varepsilon$  به ازای برخی مقادیر  $\delta$  مثبت (کوچک). باقی می‌ماند که نشان دهیم  $S_1$  روی  $0 < x < 1 - \delta$  کراندار است. اما

$$|S_1| \leq \sum_{k=1}^M \varepsilon (1-\delta)^k \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} (1-\delta)^k = \frac{\varepsilon}{\delta}$$

بنابراین  $S_1$  در واقع به ازای  $0 < x < 1$  کراندار است.

۱۸.۵. ممکن است فرض کنیم  $R = 1$  و  $s_n \rightarrow +\infty$ . عدد دلخواه (بزرگ)  $Q$  را در نظر بگیرید و بنویسید

$$f(x) = (1-x) \sum_{k=1}^M s_k x^k + (1-x) \sum_{k=M+1}^{\infty} s_k x^k = S_1 + S_2$$

چون  $M$  چنان انتخاب شده که برای  $k > M$ ،  $s_k > Q$ ، اکنون  $M$  را ثابت نگهدارید، آنگاه  $S_1$  کراندار است و

$$S_2 \geq (1-x)Q \sum_{k=M+1}^{\infty} x^k = Qx^{M+1}$$

بنابراین اگر  $x$  به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود  $S_2 \geq \frac{Q}{4}$ . چون  $Q$  دلخواه است  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} (-1)^n$$

لذا داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n (-1)^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad x \rightarrow 1^-$$

۱۸.۷. فرض کنید شعاع همگرایی  $\sum a_n x^n$  برابر با ۱ است. اگر سری در  $z$  با  $|z| > 1$  جمع‌پذیر آیل باشد، باید  $\sum a_n z^n x^n$  برای  $z$  و  $0 < x < 1$  همگرا باشد. در این صورت  $\sum a_n w^n$  باید برای  $w$  هایی با  $|w| > 1$  همگرا باشد، که ایجاب می‌کند شعاع همگرایی  $\sum a_n z^n$  از ۱ بزرگتر باشد.

۱۸.۸. مجموع‌های جزئی عبارتند از  $s_0 = 1$  و  $s_1 = 0$  و  $s_2 = 1$  و  $s_3 = 0$  و غیره، که  $s_{2k} = 1$  و  $s_{2k+1} = 0$  را داریم. از این رو تمام جملات دنباله  $\{\frac{1}{2}(s_n + s_{n+1})\}$  برابر با  $\frac{1}{2}$  و بنابراین  $Y$  مجموع سری‌ها برابر با  $\frac{1}{2}$  است.

۱۸.۹. اثبات حالت کلی لم کرونگر مشکلتر نیست، یعنی، اگر  $s_n \rightarrow L$  و  $w_k$  اعداد مثبتی باشند به طوری که  $W_n = \sum_{k=1}^n w_k \rightarrow \infty$ ، آنگاه برای متوسط موزون آن داریم

$$\frac{1}{W_n} \sum_{k=1}^n w_k s_k \rightarrow L$$

اگر  $s_n \rightarrow L$ ، آنگاه برای  $n > N$ ،  $L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon$ ، و به ازای هر  $n$ ،  $|s_n|$  کوچکتر از عددی مانند  $A$  است. بنویسید

$$\frac{w_1 s_1 + w_2 s_2 + \dots + w_n s_n}{w_1 + \dots + w_n} = \frac{w_1 s_1 + \dots + w_N s_N}{W_n} + \frac{w_{N+1} s_{N+1} + \dots + w_n s_n}{W_n}$$

برای ثابت  $N$ ، کسر دوم بیشتر از  $\frac{(L-\varepsilon)(W_n - W_N)}{W_n}$  است، که اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد بطور دلخواه به  $L - \varepsilon$  نزدیک می‌باشد؛ و قدرمطلق اولین کسر از  $\frac{NA}{W_n}$  تجاوز نمی‌کند، که اگر  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد بطور دلخواه کوچک است. از طرف دیگر برای  $n$  بزرگ دومین کسر از  $\frac{(L+\varepsilon)(W_n - W_N)}{W_n}$  تجاوز نمی‌کند.

۱۸.۱۰. مجموع جزئی اولین سری  $s_{2k} = 0$ ،  $s_{2k+1} = 1$  است. آنگاه

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$



و

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{2n+1}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

اگر  $\frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} \rightarrow L$  ، آنگاه  $\frac{s_1 + \cdots + s_{n+1}}{n+1} \rightarrow L$  و همچنین در نتیجه  $\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_{n+1}}{n} \rightarrow L$

$$\frac{s_1 + \cdots + s_{n+1}}{n} - \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} \rightarrow 0$$

یعنی  $s_{n+1} \rightarrow 0$  اگر  $\sum a_n$  جمع‌پذیر  $(C, 1)$  باشد. برای سری  $\sum (-1)^n n$  ،  $\frac{s_{n+1}}{n}$  به صفر نزدیک نمی‌شود.

۱۸.۱۱. حاصل جمع جزئی برابر است با  $s_{2k+1} = 1$  و  $s_{2k} = 0$  و بنابراین  $s_{2k-1} = 0$  و  $s_{2k} = 0$  .  $\frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$  . سری جمع‌پذیر  $(C, 1)$  ، اما با  $\frac{1}{2}$  بجای  $\frac{1}{2}$  .

همان سری به هیچ عنوان به روش  $Y$  جمع‌پذیر نیست چون متوسط رونده در  $\frac{1}{2}$  زمان برابر با  $\frac{1}{2}$  و در بقیه برابر با صفر است.

۱۸.۱۲. اثبات قضیه تابر را با عدد  $\varepsilon$  بزرگی بجای اعداد کوچک تکرار کنید.

۱۸.۱۳.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > Q$  اگر  $x$  به اندازه کافی به ۱ نزدیک باشد. قرار دهید  $|na_n| < M$  ،  $Q$  بزرگ.

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n > Q$$

که  $x - 1$  تقریباً برابر با  $\frac{1}{N}$  است.

$$\left| \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n \right| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n} \right| < \frac{M}{N+1} \sum_{N+1}^{\infty} x^n < M$$

اما

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n > Q - \sum_{N+1}^{\infty} a_n x^n > Q - M$$

که مستقل از  $x$  است. با فرض  $x \rightarrow 1$  ، داریم  $\sum_{n=0}^N a_n > Q - M$  ، بنابراین  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$  .

۱۹.۱

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x,y)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} [-u_x(s,y) ds] = -u_x(x,y)$$

چون می‌توانیم مسیر انتگرال را چنان بگیریم تا پاره‌خطی عمود از  $(x, y)$  به  $(x+h, y)$  داشته باشیم. به همان نحو برای  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

۱۹.۲ (الف)  $3x^2y - y^3$

(ب)  $e^{-y} \sin x$

(پ)  $2 \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$

(ت)  $\frac{x-1}{(1-x)^2 + y^2}$

۱۹.۳ اگر  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  در  $z = x_0 + iy_0$  تحلیلی باشد  $g(\zeta) = f(\zeta + z_0)$  در  $\zeta = 0$  تحلیلی است.

$$\begin{aligned} f(z) = f(\zeta + z_0) &= f(\xi + x_0 + i[\eta + y_0]) \\ &= u(\xi + x_0, \eta + y_0) + iv(\xi + x_0, \eta + y_0) \\ &= u(\zeta + x_0, y_0) + iv(\zeta + x_0, y_0) \\ &= u(z - iy_0, y_0) + iv(z - iy_0, y_0) \end{aligned}$$

مثال:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{z - iy_0}{(z - iy_0)^2 + y_0^2} - \frac{iy_0}{(z - iy_0)^2 + y_0^2} = \frac{z - 2iy_0}{z^2 - 2izy_0} = \frac{1}{z}$$

۱۹.۴ (الف) بنا به قاعده  $B$

$$2 \left[ \left( \frac{z}{\lambda} \right)^2 - 3 \frac{z}{\lambda} \left( \frac{z}{\lambda i} \right)^2 \right] = 2 \left( \frac{z^2}{\lambda} + \frac{3z^2}{\lambda} \right) = z^2$$

(ب)  $f(z) = 2 \cos \frac{z}{2} e^{\frac{iz}{2} - 1}$

$$= 2 \cos \frac{z}{2} \left( \cos \frac{z}{2} + i \sin \frac{z}{2} \right) - 2$$

$$= 2 \left( \cos^2 \frac{z}{2} + \frac{i}{2} \sin z \right) - 2 = \cos z + i \sin z = e^{iz}$$

$$\sqrt[2]{\log z} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{-i}{1-z} \quad (\text{ت})$$

(ث) بهتر است که مختصات قطبی را بکار برید:  $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{Re} z^{\frac{1}{2}}$ .

۱۹.۵. فرض کنیم  $f$  در نقطه  $z_0 = x_0 + iy_0$  تحلیلی باشد. قرار دهید  $z = \zeta + z_0 = \xi + i\eta + z_0$ .  
آنگاه

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\zeta + z_0) = f[\xi + x_0 + i(\eta + y_0)] \quad (\text{در } \zeta = 0 \text{ تحلیلی}) \\ &= u(\xi + x_0, \eta + y_0) + iv(\xi + x_0, \eta + y_0) \\ &= \sqrt[2]{u\left(\frac{\zeta}{\sqrt[2]{}} + x_0, \frac{\zeta}{\sqrt[2]{}i} + y_0\right)} - u(x_0, y_0) \\ &= \sqrt[2]{u\left(\frac{z - z_0}{\sqrt[2]{}} + x_0, \frac{z - z_0}{\sqrt[2]{}i} + y_0\right)} - u(x_0, y_0) \\ &= \sqrt[2]{u\left(\frac{z + \bar{z}_0}{\sqrt[2]{}}, \frac{z - \bar{z}_0}{\sqrt[2]{}i}\right)} - u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \sqrt[2]{\frac{(z + \bar{z}_0)}{\sqrt[2]{}}} &= \sqrt[2]{\frac{z + \bar{z}_0}{\sqrt[2]{z}\sqrt[2]{\bar{z}_0}}} = \frac{z + \bar{z}_0}{z\bar{z}_0} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z} \\ f(z) &= \frac{1}{z} + \frac{1}{z_0} - \frac{x_0}{z_0\bar{z}_0} \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{|z_0|^2}(z_0 - x_0) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{|z_0|^2}(iy_0) \\ &= \frac{1}{z} + \text{محصص موهومی} \end{aligned}$$

۱۹.۶. بنا به قاعده  $B$  داریم

$$f(z) = \wedge \left[ \left( \frac{z}{\sqrt[2]{}} \right)^{\sqrt[2]{}} \left( \frac{z}{\sqrt[2]{}i} \right) \right] = -iz^{\sqrt[2]{}}$$

اما  $\operatorname{Re}(-iz^{\sqrt[2]{}}) = \sqrt[2]{}x^{\sqrt[2]{}}y - y^{\sqrt[2]{}} \neq \sqrt[2]{}x^{\sqrt[2]{}}y$

بخش ۲۰

۲۰.۱

$$e^{\frac{1}{z}} = \exp \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2)} \right] \exp \left[ \frac{-iy}{(x^2 + y^2)} \right]$$

آنگاه

$$\operatorname{Im} e^{\frac{1}{z}} = \exp \left[ \frac{x}{(x^2 + y^2)} \right] \sin \left[ \frac{y}{(x^2 + y^2)} \right]$$

روشن است که به ازای  $y = 0$  برابر با  $0$  است و برای  $y > 0$  هارمونیک است.

وقتی  $x = 0$  و  $y > 0$ ،  $\operatorname{Im} e^{\frac{1}{z}} = -\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ ، که وقتی  $y = \frac{2}{(2k+1)\pi}$  برابر با  $\pm 1$  است.

۲۰.۲. اگر  $U(z)$  برای  $|z| < R$  هارمونیک باشد، آنگاه  $U(Rz) = u(z)$  برای  $|z| < 1$  هارمونیک است؛

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\phi}) \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2|z| \cos(\theta - \phi)} d\phi$$

$$\begin{aligned} U(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(Re^{i\phi}) \frac{1 - \left|\frac{z}{R}\right|^2}{1 - \left|\frac{z}{R}\right|^2 - 2\left|\frac{z}{R}\right| \cos(\theta - \phi)} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - |z|^2}{R^2 - |z|^2 - 2R|z| \cos(\theta - \phi)} d\phi \end{aligned}$$

بخش ۲۱

۲۱.۱

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} d\theta, \quad c_0 = \frac{1}{2}$$

برای  $n \neq 0$ ،

$$c_n = -\frac{1}{2\pi ni} [1 - (-1)^n]$$

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\text{فرد } n} \frac{1}{n} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\text{فرد } n \geq 1} \frac{1}{n} (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{\sin n\theta}{n} \end{aligned}$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2} - \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} r^{2k+1}$$

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{r}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 0.72048\dots$$

در واقع سری  $u(r, \theta)$  را به صورت فشرده‌تری می‌توان جمع زد. داریم

$$\frac{1}{2} - \frac{r}{\pi} \sum_{\text{فرد } n} \frac{\sin k\theta}{k} r^k = \frac{1}{2} - \frac{r}{\pi} \text{Im} \sum_{\text{فرد } k} \frac{z^k}{k}, \quad z = re^{i\theta}$$

اما

$$r \sum_{\text{فرد } k} \frac{z^k}{k} = \log \frac{1+z}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

و

$$\text{Im} \log \frac{1+z}{1-z} = \tan^{-1} \frac{2r \sin \theta}{1-r^2}$$

همچنین این را می‌توان مستقیماً بدست آورد؛ بخش‌های ۲۴.۲ و ۲۶.۳ را مقایسه کنید.

برای مسئلهٔ بطری نوشابه (فرض می‌کنیم شعاع بطری ۱ واحد باشد) یک جواب معادله لاپلاس برای گوی واحد با مقادیر مرزی ۱۰۰ در نیم‌دایره بالایی و ۳۲ در نیم‌دایره پائینی را می‌خواهیم. می‌توانیم این را از تابع هارمونیک  $u(r, \theta)$  که دارای مقادیر ۰ (بالا) و ۱ (پائین) با در نظر گرفتن یک ترکیب خطی از ۱ و  $u(r, \theta)$  بدست آوریم، چون مقادیر ثابت جوابهای معادله لاپلاس هستند و ترکیب خطی جوابها نیز جواب است. نتیجه در متن (بخش ۲۰.۱) داده شده است.

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t) dt \quad .21.2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} dt$$

با فرمول مجموع سریهای هندسی،

$$\sum_{k=0}^n e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1}$$

$$\sum_{k=-n}^n e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - 1}{e^{iu} - 1} + \frac{e^{-i(n+1)u} - 1}{e^{-iu} - 1} - 1$$

$$= \frac{\cos nu - \cos(n+1)u}{1 - \cos u} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{1}{2}u}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(x-t)}{\sin \frac{1}{2}(x-t)} f(t) dt$$

۲۱.۳

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= r \frac{\partial u}{\partial r} \\ u &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \sum c_n |n| r^{|n|} e^{in\theta} \\ v &= \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n \frac{|n|}{in} r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= -i \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (\operatorname{sgn} n) r^{|n|} e^{in\theta} \end{aligned}$$

۲۱.۴. جوابی به صورت

$$c \ln r + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_k r^{|k|} + \mu_k r^{-|k|}) e^{ik\theta}$$

را امتحان کنید که به ازای  $r = \sigma$  به  $\omega(\theta)$  و به ازای  $r = \rho$  به  $\phi(\theta)$  ساده می‌شود. آنگاه

$$c \ln \sigma + \lambda_0 + \mu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\theta) d\theta = C.$$

$$c \ln \rho + \lambda_0 + \mu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\theta) d\theta = c.$$

و برای  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\lambda_k \rho^{|k|} + \mu_k \rho^{-|k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \phi(\theta) d\theta = c_k$$

$$\lambda_k \sigma^{|k|} + \mu_k \sigma^{-|k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} \omega(\theta) d\theta = C_k$$

در نتیجه،  $c \ln(\frac{\sigma}{\rho}) = C_0 - c$ ، که  $c$  را تعیین می‌کند و  $\lambda_k$  و  $\mu_k$  با معادلات بالا تعیین می‌شوند.

## بخش ۲۲

۲۲.۱. برای  $\phi[u(x, y), v(x, y)]$ ، محاسبه می‌کنیم

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_1 u_1 + \phi_2 v_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_1 u_2 + \phi_2 v_2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi_{11} u_1^2 + \phi_{11} u_{11} + \phi_{22} v_1^2 + \phi_2 v_{11} + 2\phi_{12} u_1 v_1$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \phi_{11} u_2^2 + \phi_2 u_{22} + \phi_{22} v_2^2 + \phi_2 v_{22} + 2\phi_{12} u_2 v_2$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \phi_{11}(u_1^2 + u_2^2) + \phi_{22}(v_1^2 + v_2^2)$$

(بنا به معادله لاپلاس برای  $u$  و  $v$  و معادلات کوشی-ریمان)

= ۰

(بنا به معادلات کوشی-ریمان و معادله لاپلاس برای  $\phi$ ).

## بخش ۲۳

۲۳.۱. داریم

$$v = \nabla \phi = i \frac{\partial \phi}{\partial x} + j \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

اما

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

بنابراین

$$v = i \frac{\partial \phi}{\partial x} - j \frac{\partial \psi}{\partial x} = i \operatorname{Re} f' - j \operatorname{Im} f'$$

۲۳.۲. اگر  $C$  یک خط جریان تنها باشد،  $\psi$  روی  $C$  ثابت است. اما یک تابع هارمونیک که روی منحنی بسته ثابت است بنا بر اصل ماکزیمم و می‌نیمم در درون نیز ثابت است، و همچنین تابع تحلیلی که آن تابع قسمت موهومی آن است (تمرین ۴.۹).

۲۳.۳. فرض کنید  $w = f(z)$  ناحیه  $D$  با مرز  $C$  را به ناحیه  $\Delta$ ، با مرز  $\Gamma$  در صفحه  $w$  بنگارد، به طوری که  $w = u + iv$ ، و فرض کنید  $\phi(u, v)$  در  $\Delta$  هارمونیک باشد. نشان می‌دهیم اگر  $\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$  روی کمان  $\Gamma_1$  از  $\Gamma$ ، آنگاه روی کمان متناظر  $C_1$  از  $C$  داریم:

$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  شرط  $\frac{\partial}{\partial n} \phi[u(x, y), v(x, y)] = 0$  بدین معناست که جریان حرارتی از  $\Gamma_1$  عبور نمی‌کند، بنابراین  $\Gamma_1$  یک هم‌دماست. این مسئله را با مسئله جریان سیالی که  $\Gamma_1$  خط جریان آن است و  $\phi$  سرعت پتانسیل آن است یکی بگیرید. نگاشت همدیس،  $\phi$  را به یک تابع هارمونیک می‌برد (بخش ۲۲.۳)، و مزدوج همساز آن،  $\psi$  را به یک خط جریان می‌برد، بنابراین مسیر افقی ثابت  $\phi = 0$  را به یک مسیر هم‌پتانسیل، که در آن  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  می‌برد.

توجه کنید که ما نگفتیم مقدار  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  تحت یک نگاشت همدیس حفظ می‌شود، فقط شرط  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$  حفظ می‌شود. این نکته مهمی است، زیرا جستجو برای یک تابع هارمونیک با  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  مفروض روی مرز یک ناحیه، مسئله نیومن است، که نمی‌توانیم آن را مثل یک مسئله دریشله حل کنیم.

## بخش ۲۴

۲۴.۱. پتانسیل مختلط  $az + b \log z$  است؛ برای ساده نگه داشتن فرمول  $a = b = 1$  بگیرید. ما فقط به نیمه بالایی صفحه نیاز داریم، چون جریان در نیمه پائینی صفحه بنا بر اصل بازتاب شوآرتز، بازتاب جریان در نیمه بالایی صفحه نسبت به محور حقیقی است. چون

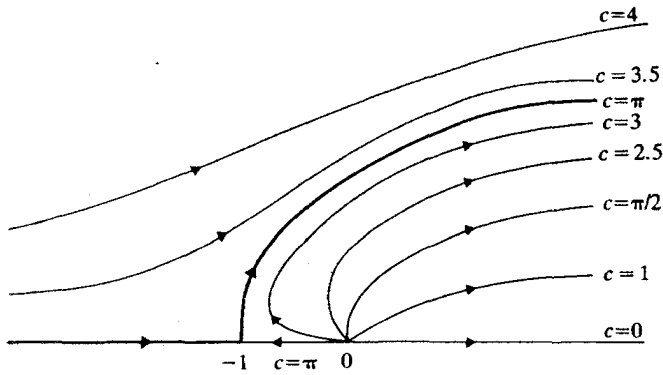
$$w = u + iv = x + \log |z| + i(y + \arg z)$$

تصویر خطهای  $v = c$  منحنی‌های  $y + \tan^{-1}(\frac{y}{x})$  است.

ابتدا تصویر نیم‌صفحه  $v > \pi$  را در نظر بگیرید. وقتی که  $c > \pi$ ،  $v = y + \tan^{-1} \frac{y}{x} = c$ ،  $c > \pi$ ، و بنابراین جریان از سمت چپ به راست و به سمت بالاست. اگر  $u \rightarrow -\infty$  آنگاه  $x \rightarrow -\infty$ ، و اگر  $u \rightarrow +\infty$  آنگاه  $x \rightarrow +\infty$ . اما وقتی که  $c = \pi$ ، می‌توانیم داشته باشیم  $y = 0$  و  $\arg z = \pi$ ، یا  $y = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \pi$  و  $y > 0$ .

ابتدا فرض کنید  $y = 0$ ، آنگاه  $u = x + \log |x|$ ، که از  $x \rightarrow -\infty$  با  $u \rightarrow -\infty$  شروع می‌شود؛ وقتی  $x$  افزایش می‌یابد،  $\frac{du}{dx} = 1 + (\frac{1}{x})$  با  $x = -1$  مثبت است، که مشتق پتانسیل مختلط یک ریشه ساده دارد. در نتیجه، خط جریان محور  $x$  ها را تا  $x = -1$  طی می‌کند، اما بعد  $90^\circ$  به سمت چپ می‌چرخد و خط پرننگ شکل ۲۴.۱ ج را در پیش می‌گیرد چون  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{du}{dx}$  هر دو هنوز مثبت‌اند. بنابراین نیم‌صفحه  $v \geq \pi$  در صفحه  $w$  به ناحیه بالایی خط پرننگ نگاشته می‌شود. برای بحث درباره نوار  $0 \leq v \leq \pi$ ، از  $v = 0$  شروع می‌کنیم، که باید داشته باشیم  $\arg z = 0$ ،  $y = 0$ ،  $u = x + \log x$  (با  $x > 0$ ). چون  $\frac{du}{dx} > 0$  و  $u \rightarrow +\infty$  وقتی که  $x \rightarrow +\infty$ ، خط  $v = 0$  با محور  $x$  ها متناظر می‌شود. هرگاه  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، داریم  $\arg z = \frac{\pi}{4} - y$  و بنابراین  $\arg z < \frac{\pi}{4}$ ؛ خطوط جریان در نیمه





شکل ۲۴.۱ ج

دست راست صفحه باقی می‌مانند. برای  $\frac{\pi}{2} < c < \pi$ ، خطوط جریان شروع به رفتن به نیمه سمت چپی صفحه  $z$  می‌کنند اما نمی‌توانند خط جریان متناظر با  $v = \pi$  را قطع کنند. بالاخره، وقتی که  $c = \pi$ ، دوباره  $c = \pi$ ،  $y = 0$  یا  $\arg z = \pi$ ،  $y > 0$  و  $y + \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \pi$  را داریم. اکنون اولین حالت پاره خط  $-1 < x < 0$  که از راست به چپ می‌رود و دومین حالت قسمت بالائی منحنی پررنگ را دوباره می‌دهد.

می‌توانیم به تصاویر، در صفحه عمودی فکر کنیم، برای  $v > \pi$ ، مثل نمایش یک جریان از یک باد (غیرتراکمی) که از چپ به راست مقابل یک تپه می‌وزد، که برش قائم آن خط پررنگی است. توجه کنید که نقطه  $z = -1$  یک نقطه ایستایی است، جاییکه سرعت باد صفر است؛ که جای خوبی برای توقف است اگر باد خیلی شدید باشد. اگر قسمت  $v > \pi$  را در طول محور حقیقی منعکس و آن را در صفحه افقی تعبیر کنیم، جریانی را که در رودخانه پیچ می‌خورد و به انتهای یک جزیره برخورد می‌کند، نمایش می‌دهد.

۲۴.۲. فرض کنید  $\psi_1$  تابع تمرین ۲۱.۱ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \psi &= 1 - 2\psi_1 \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} r^{2k+1} = \operatorname{Im} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)\theta}}{2k+1} r^{2k+1} \\ &= \operatorname{Im} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{Im} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \log \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

بنابراین  $\psi$ ،  $(\frac{z}{\pi})$  برابر تابع جریان برای پتانسیل مختلط

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \log(1+z) - \log(1-z)$$

که پتانسیل یک منبع در  $z = -1$  همراه با یک چاه در  $z = +1$  است.

۲۴.۳. برای ساده شدن فرمول،  $z_0 = 0$  می‌گیریم. پتانسیل مختلط برابر با  $\frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{z}$  است، بنابراین

خطوط جریان خم‌های  $c = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2}$  است. وقتی که  $c = 0$  این معادله به  $y = 0$  تبدیل می‌شود، در غیر اینصورت، یک دسته از دایره با مراکز  $(0, -\frac{1}{2c})$  که از مرکز می‌گذرند را نمایش می‌دهد. وقتی که  $c > 0$ ، دایره در نیمه پایینی صفحه و وقتی که  $c < 0$ ، در نیمه بالایی صفحه می‌باشند. بنابراین جریان یکنواخت از چپ به راست از نیمه بالایی صفحه  $w$  به جریان در نیمه پایینی صفحه  $z$  نگاشته می‌شود. سرعت مختلط عبارتست از

$$-\frac{1}{z^2} = \frac{y^2 - x^2 + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2}$$

و قسمت موهومی آن برابر است با

$$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

بردار سرعت دارای مؤلفه‌های

$$\left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

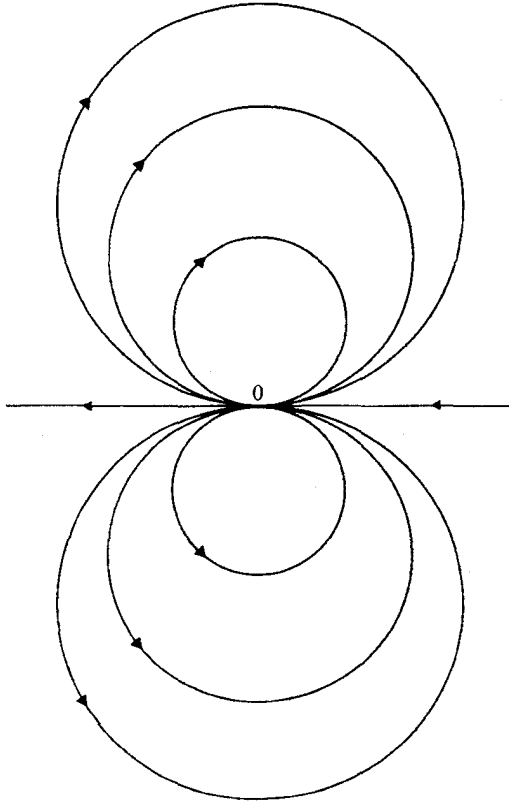
است. برای  $y < 0$ ، جریان به سمت بالاست وقتی  $x > 0$  و به سمت چپ یا راست است بسته به این که  $|y| < x$  یا  $|y| > x$ ، و جهت معکوس آن در نیمه بالایی صفحه است. وقتی  $c = 0$ ،  $y = 0$ ، و بردار سرعت در طول محور حقیقی در جهت منفی است تا جایی که در صفر بینهایت می‌شود. شکل ۲۴.۳ ج را ببینید.

۲۴.۴. برای پتانسیل مختلط  $e^z$ ، داریم

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

خطوط جریان  $v = c$  مربوط به خطوط جریان  $e^x \sin y = c$  می‌شوند. اگر  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  و  $-\infty < x < \infty$ ، آنگاه هر دو  $v$  و تمام مقادیر مثبت را می‌گیرند، بنابراین نوار  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  در صفحه  $z$  به ربع اول در صفحه  $w$  نگاشته می‌شود.

همچنین، نوار  $\frac{\pi}{2} < y < \pi$  به ربع دوم نگاشته می‌شود. بنابراین نوار  $0 < y < \pi$  به نیمه بالای صفحه  $z$  نگاشته می‌شود. همچنین،  $\pi < y < 2\pi$  به نیمه پایینی تصویر می‌شود. برخی



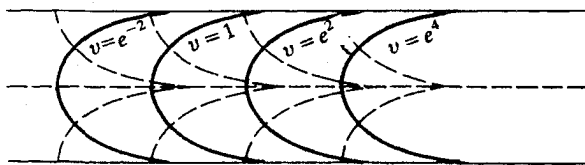
شکل ۲۴.۳ ج

از خم‌های  $v = c$  در شکل ۲۴.۴ رسم شده‌اند. خم‌ها همه هم‌ارزند زیرا معادله آنها بصورت  $x + \log \sin y = \log c$  است، لذا یک تغییر مکان در  $\log c$  مربوط به یک تغییر مکان در  $x$  است.

چون

$$\frac{dx}{dy} + \frac{\cos y}{\sin y} = 0$$

روی یک خط جریان چپ‌ترین نقطه در  $y = \frac{\pi}{2}$  است، یعنی در وسط نوار،  $y \rightarrow 0$  یا  $\pi$  و تیکه  $x \rightarrow +\infty$  و  $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$  و تیکه  $y \rightarrow 0$  یا  $\pi$ ، به نحوی که خطوط جریان دارای خطوط مجانب  $y = 0$  و  $y = \pi$  است. بخاطر متناوب بودن  $e^z$ ، نوارهای هم‌ارز در صفحه  $z$  هرکدام متناظر نیمه بالایی یا پایینی صفحه  $w$  هستند. هم‌پتانسیل‌های  $e^z \cos y = c$  خطوط جریان به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در جهت  $y$  انتقال داده شده‌اند، و البته بر خطوط جریان عمودند (برخی از هم‌پتانسیل‌ها در شکل با خطوط نقطه‌چین نشان داده شده‌اند).



شکل ۲۴.۴ ج

۲۴.۵. تابع جریان برای  $w = z + z^{-1}$ ،  $v = \text{Im } w = u - \frac{y}{(x^2 + y^2)}$  است. خط جریان  $v = 0$  در نگاه اول هم شامل محور حقیقی ( $y = 0$ ) و هم دایره  $x^2 + y^2 = 1$  است. این نمی‌تواند یک خط جریان تنها باشد، بنابراین باید تابع  $w = z + z^{-1}$  را با دقت بیشتری مطالعه کنیم. وقتی که  $y = 0$ ،  $w = x + x^{-1}$ ، فرض کنیم  $z$  از  $-\infty$  روی محور  $x$  ها شروع و به سمت راست حرکت می‌کند. آنگاه  $\frac{dw}{dz} = 1 - x^{-2}$  وقتی  $x < -1$  مثبت است. در  $x = -1$ ،  $\frac{dw}{dz} = 0$ ؛ و زوایا دو برابر شده و از صفحه  $z$  به صفحه  $w$  می‌روند، یا نصف شده و به راه دیگری می‌روند. بنابراین تصویر  $\text{Im } w = 0$  به اندازه  $90^\circ$  به سمت چپ در  $z = -1$  می‌چرخد و روی نیمدایره بالائی ادامه می‌دهد. در  $z = +1$  دوباره به چپ می‌چرخد و در طول محور حقیقی ادامه می‌دهد. بنابراین نیمه بالائی صفحه  $w$  متناظر قسمت بالائی محور حقیقی و دایره در صفحه  $z$  است. (شکل ۲۴.۵ ج (a) را ببینید).

اکنون بررسی کنیم که در داخل دایره چه اتفاقی می‌افتد. فرض کنیم  $z$  از  $-1$  شروع و در طول محور حقیقی به راست می‌رود؛ در اینصورت  $w$  از  $-2$  شروع،  $\frac{dw}{dx} < 0$ ، لذا  $w \rightarrow -\infty$  همینکه از چپ  $0 \rightarrow x$ . از بالای  $x = 0$  شروع کرده و به سمت راست می‌رویم،  $w$  از  $+\infty$  شروع می‌کند و در  $z = 1$  به  $2$  کاهش می‌یابد. آنگاه  $w$  به  $-2$  می‌رود اما  $z$  دایره را دور زده به  $-1$  برمی‌گردد. در این صورت خطوط جریان شبیه شکل ۲۴.۵ ج (b) می‌شود. می‌بینیم که نیمه پائینی صفحه  $w$  به داخل ناحیه نیمدایره‌یی تصویر می‌شود.

اگر همه طرح را به نیمه پائینی منعکس کنیم، تصویری شبیه شکل ۲۴.۵ ج (c) در صفحه  $z$  بدست می‌آوریم. روشن است که دایره  $|z| = 1$  می‌تواند جایگزین نقاط مرزی شود، و جریان خارج آن، یک جریان یکنواخت است که یک مانع مدور در برابر آن است.

سرعت مختلط برابر با  $\frac{1}{z^2} + 1$  است، که دارای قدرمطلق کمتر از  $2$  هرگاه  $|z| > 1$  و برابر با  $2$  است هرگاه  $z = i$ ، بنابراین بیشترین مقدار سرعت در نوک دایره است.

## بخش ۲۵

۲۵.۱. فرض کنید  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ . تصویر وارون صفر، حقیقی است، بنابراین  $\frac{b}{a}$  حقیقی است؛ تصویر  $\infty$  حقیقی است لذا  $\frac{d}{c}$  حقیقی است. (فرض کردم هیچ یک از ضرایب صفر نباشند؛ اگر ضریبی برابر با صفر باشد، مسئله ساده‌تر می‌شود).

باید صورت کلی تبدیل مویوس از نیمه سمت راست صفحه به نیمه سمت راست صفحه باشد. می‌توان آن را به صورت فشرده‌تر

$$w = i \frac{az - bi}{cz - di}$$

نوشت.

۲۵.۶. با تمرین ۲۵.۴ می‌بینیم که در

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\circ)}{f(\circ)f(z) - 1}$$

$g(\circ) = 0$ ،  $|g(z)| \leq 1$ ، لذا بنا به لم شوآرتز  $|g'(\circ)| \leq 1$ . اکنون بنا به اصل ماکزیم  $|f(\circ)| < 1$  مگر  $f$  ثابت باشد، در این صورت داریم

$$g'(\circ) = \frac{[\overline{f(\circ)}f(\circ) - 1] f'(\circ)}{[f(\circ)f(\circ) - 1]^2} = \frac{f'(\circ)}{|f(\circ)|^2 - 1}$$

بنابراین

$$1 \geq g'(\circ) = \frac{|f'(\circ)|}{1 - |f(\circ)|^2}, \quad |f'(\circ)| \leq 1 - |f(\circ)|^2 \leq 1$$

۲۵.۷. فرض می‌کنیم  $F(\circ) = \alpha$ . در این صورت  $w = F(z)$  گوی  $z$ ،  $|z| < 1$  به سمت چپ صفحه  $w$  می‌نگارد و صفر را به  $\alpha$  تصویر می‌کند. ما می‌توانیم نیمه صفحه را به گوی واحد در صفحه  $t$  با

$$t = g(w) = \frac{\alpha - w}{\bar{\alpha} + w}$$

تصویر کنیم. در این صورت  $g[F(z)]$  گوی واحد را به گوی واحد و صفر را به صفر تصویر می‌کند. بنا به لم شوآرتز،

$$\left| \frac{d}{dz} g[F(z)] \right| \leq 1$$

یعنی

$$\left| g'[F(\circ)] F'(\circ) \Big|_{z=\circ} \right| \leq 1$$

اما

$$g'(w) = \frac{-(\bar{\alpha} + w) - (\alpha - w)}{(\bar{\alpha} + w)^2} = \frac{-(\bar{\alpha} + \alpha)}{(\bar{\alpha} + w)^2}$$

$$g'(\alpha) = -\frac{1}{\bar{\alpha} + \alpha}, \quad \alpha = F(\circ)$$

تبدیل از بین می‌رود. اگر  $\infty$  متناظر  $\infty$  باشد، آنگاه  $c = 0$  و  $w = \frac{az}{d}$ . اگر ۱ متناظر ۱ باشد، تبدیل  $w = z$  می‌شود.

۲۵.۳. تبدیل باید  $z = 0$  را به  $w = e^{i\lambda}$  انتقال دهد ( $\lambda$  حقیقی است)، و (چون نقاط متقارن را به نقاط متقارن انتقال می‌دهد) یک نقطه دلخواه  $\mu$  را به نیمه بالائی صفحه، و مزدوج مختلط آن  $\bar{\mu}$  را به  $0$  و  $\infty$  انتقال می‌دهد. اگر  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ ، از  $z = 0$ ،  $\frac{b}{d} = e^{i\lambda}$  را بدست می‌آوریم. از  $a\mu + b = 0$  داریم  $a\mu + b = 0$  و  $c\bar{\mu} + d = 0$ . چون  $d = be^{-i\lambda}$ . لذا داریم  $a\mu + b = 0$  و  $c\bar{\mu} + be^{-i\lambda} = 0$ . در این صورت  $a = -\frac{b}{\mu}$ ،  $c = -\frac{be^{-i\lambda}}{\bar{\mu}}$ ،  $d = be^{-i\lambda}$ . تبدیل بصورت

$$\frac{\left(-\frac{b}{\mu}\right)z + b}{\left(-\frac{be^{-i\lambda}}{\bar{\mu}}\right)z + be^{-i\lambda}} = \frac{\bar{\mu} e^{i\lambda} - z + \mu}{\mu - z + \bar{\mu}} = e^{i\theta} \frac{\mu - z}{\bar{\mu} - z}$$

با  $\theta = \lambda - 2\arg \mu$  درمی‌آید.

۲۵.۴. فرض کنید  $w = \frac{az+b}{cz+d}$ . چون  $w = 0$  و  $\infty$  متناظر نقاط متقارن  $z = \alpha$  ( $|\alpha| < 1$ ) و  $1/\bar{\alpha}$  است، داریم  $b = -a\alpha$ ،  $c = -\bar{\alpha}d$ ،

$$w = -\frac{az - \alpha}{d\bar{\alpha}z - 1}$$

اما وقتی  $|z| = 1$ ،  $\left|\frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1}\right| = 1$  (تمرین ۱.۲۲)، و در این صورت  $-\frac{a}{d} = e^{i\lambda}$ .

۲۵.۵. از تمرین ۲۵.۱ می‌دانیم که تبدیل موبیوسی که محور حقیقی را به محور حقیقی انتقال می‌دهد می‌تواند با ضرایب حقیقی نوشته شود. به عکس، تبدیلی با ضرایب حقیقی محور حقیقی را به محور حقیقی انتقال می‌دهد. بنابراین تبدیل مورد نظر ما باید  $w = \frac{az+b}{cz+d}$  با ضرایب حقیقی باشد. برای متناظر نمودن نیمه بالائی صفحه به نیمه بالائی صفحه،  $z = i$  را متناظر یک نقطه  $w$  که  $\text{Im } w > 0$  قرار دهید؛ در این صورت

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{ac + bd - bci + adi}{c^2 + d^2}$$

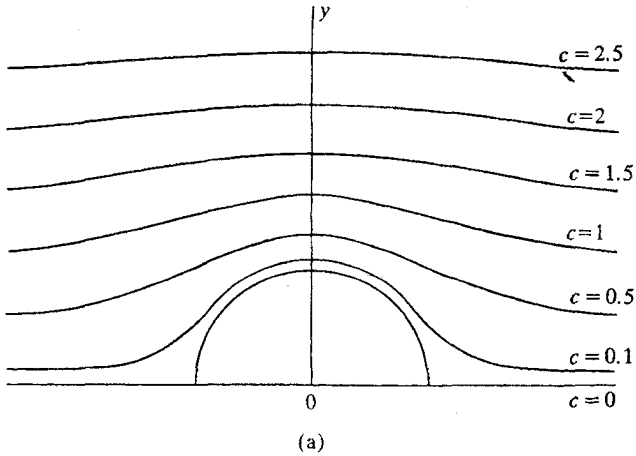
باید دارای قسمت موهومی مثبت باشد، لذا  $ad - bc > 0$ .

برای متناظر نمودن نیمه سمت راست صفحه با نیمه بالائی صفحه  $\zeta$  که  $\zeta = iz$ ؛

$$w = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

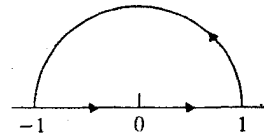
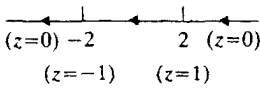
نیمه بالائی صفحه را به نیمه بالائی صفحه انتقال می‌دهد و با ضرب کردن در  $-i$  آن را به نیمه سمت راست صفحه برمی‌گرداند. در نتیجه،

$$w = -i \frac{aiz + b}{ciz + d} = \frac{az - bi}{ciz + d}, \quad ad - bc > 0$$

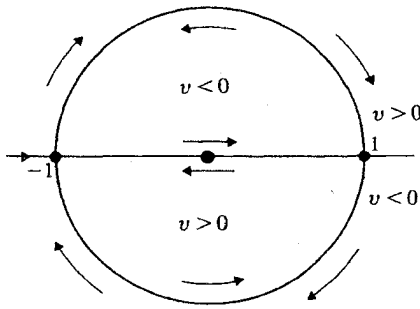


w plane

z plane



(b)



(c)

F

شکل ۲۴.۵ ج

اکنون می‌توان تبدیل را بصورت

$$w = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)z + 1}{\left(\frac{c}{d}\right)z + 1} = \frac{\alpha z + 1}{\beta z + 1}$$

نوشت، که  $\alpha$  و  $\beta$  حقیقی هستند.

۲۵.۲. اگر  $b = d = 0$ ،  $w$  ثابت و تبدیل از بین می‌رود. اگر  $d \neq 0$ ، چون صفر متناظر صفر است،  $\frac{b}{d} = 0$  و بنابراین  $b = 0$  و  $w = \frac{az}{cz + d}$ . در اینجا  $a \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت

بنابراین

$$\left| \frac{F'(\circ)}{\bar{\alpha} + \alpha} \right| \leq 1$$

$$|F'(\circ)| \leq |\bar{\alpha} + \alpha| = 2|\operatorname{Re} F(\circ)| = -2\operatorname{Re} F(\circ)$$

۲۵.۸. چون در  $|z| \leq 1$ ،  $f(z) \neq 0$ ، شاخه‌ای تحلیلی از  $F(z) = \log f(z)$  در این گوی می‌باشد. آنگاه  $\operatorname{Re} F(z) < 0$  زیرا  $|f(z)| < 1$ ، و تمرین قبلی نشان می‌دهد که

$$|F'(\circ)| \leq -2 \log |f(\circ)|,$$

$$\left| \frac{f'(\circ)}{f(\circ)} \right| \leq -2 \log |f(\circ)|,$$

$$|f'(\circ)| \leq -2|f(\circ)| \log |f(\circ)|$$

ماکزیمم  $-u \log u$  برای  $0 < u < 1$  مقدار  $\frac{1}{e}$  در  $u = \frac{1}{e}$  است، بنابراین  $|f'(\circ)| \leq \frac{2}{e}$ .

## بخش ۲۶

۲۶.۱. برای  $w = \log z = u + iv = re^{i\theta}$ ، روی محور حقیقی مثبت  $z$ ،  $v = 0$ ، روی محور حقیقی منفی  $v = \pi$ ، و برای  $z$  در نیمه بالای صفحه  $\operatorname{Im} w < \pi$  است. روشن است که تناظر روی مرز یک به یک است.

۲۶.۲. بعد از آنچه که همین حالا در متن انجام دادیم، کوتاهترین روش وارون کردن تصویر از نیم صفحه به نیمه گوی است، در این صورت تصویری از نیمه گوی به نیم صفحه داریم، و آنگاه نیم صفحه را به گوی تصویر کنید. در واقع رابطه

$$w = \left( \frac{\zeta + 1}{1 - \zeta} \right)^2$$

را از نیمه گوی  $\zeta$  به نیم صفحه  $w$  داشتیم، و در تمرین ۲۵.۳ رابطه

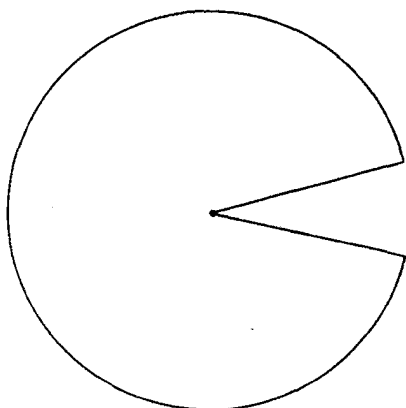
$$z = \frac{w - i}{w + i}$$

را (با تغییر نماد) از نیم صفحه به گوی واحد داشتیم.

تبدیل مورد نیاز، ترکیب اینهاست.

۲۶.۳. می‌توانیم فکر کنیم ناحیه حد یک گوی با یک قطاع کوچک حذف شده از آن باشد. تبدیل  $\zeta = \sqrt{z}$  این ناحیه را به نیمه گوی می‌نگارد، که در تمرین اخیر به یک گوی تصویر شده بود. شکل ۲۶.۳ ج را ببینید.





شکل ۲۶.۳ ج

۲۶.۴. تبدیل موپین  $\zeta = \frac{z+1}{z-1}$  نقطه  $-1$  را به صفر و  $1$  را به  $\infty$  می‌فرستد، وقتی که  $-1 < z < 1$ ،  $\zeta$  حقیقی و منفی است. بنابراین مکمل بازه  $[-1, 1]$  به صفحه‌ای که در امتداد محور منفی حقیقی بریده شده تصویر می‌شود. می‌توان این را مثل یک زاویه‌ای که به اندازه  $2\pi$  باز شده تصور کرد. آنگاه  $\sqrt{\zeta}$  با  $w = \sqrt{\zeta}$  یا  $\text{Re } w > 0$  آن را به زاویه‌ای که به اندازه  $\pi$  باز شده، انتقال می‌دهد، نیم‌صفحه طرف راست؛ و یک تبدیل موپوس آن را به گوی  $|w| < 1$  تبدیل می‌کند. (تمرین ۲۵.۳ و ۲۵.۵ را ببینید).

## بخش ۲۷

۲۷.۱. اگر ناحیه  $D$  نقاط مرزی نداشته باشد، صفحه گسترش یافته است (یا صفحه با پایان اگر  $\infty$  را بعنوان یک نقطه مرزی منظور نکنیم). تابعی که  $D$  را به گوی واحد تصویر می‌کند در تمام صفحه با پایان کراندار و تحلیلی خواهد بود، بنابراین بنا به قضیه لئوویل ثابت است.

ناحیه  $D$  با تنها یک نقطه مرزی در صفحه گسترش یافته، صفحه با پایان یا صفحه گسترش یافته با نقطه متناهی  $p$  محذوف است. در حالت اخیر، فرض کنید  $w = \phi(z)$  ناحیه  $D$  را به گوی واحد  $\Delta$  تصویر می‌کند؛ تابع  $\psi(z) = \frac{1}{z-p}$  ناحیه  $D$  را به صفحه با پایان  $\zeta$  انتقال می‌دهد؛ تابع وارون  $z = \psi^{-1}(\zeta)$  صفحه با پایان  $\zeta$  را به  $D$  انتقال می‌دهد؛  $w = \phi[\psi^{-1}(\zeta)]$  صفحه با پایان  $\zeta$  را به ناحیه  $D$  و پس از آن به  $\Delta$  انتقال می‌دهد. قبلاً دیده‌ایم که این تابع اخیر غیرممکن است.

۲۷.۲. تبدیل  $w = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$  با  $\text{Im } z_0 > 0$  نیمه بالایی صفحه را به گوی واحد و  $z_0$  را به صفر

تصویر می‌کند. آنگاه هسته پوایسون برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \left( \log \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \right)_{y=0} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial y} [\log(z-z_0) - \log(z-\bar{z}_0)]_{y=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{x-z_0} - \frac{i}{x-\bar{z}_0} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{y_0}{(x-x_0)^2} = y_0^{\prime} \end{aligned}$$

همچنین به یادداشت ۴ در آخر بخش ۲۷ توجه کنید.

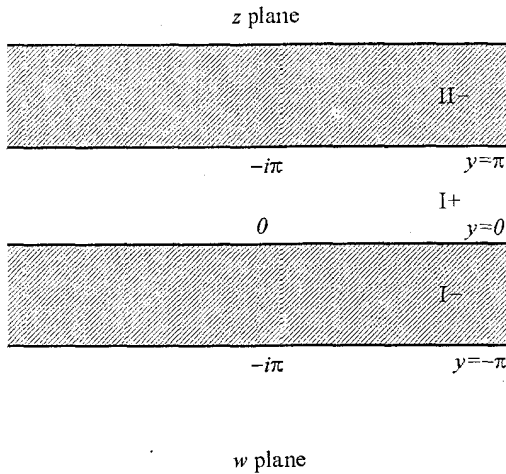
## بخش ۲۸

۲۸.۱. بشرط اینکه  $D$  شامل  $\infty$  نباشد، می‌توانیم دنباله صعودی از ناحیه‌های  $D'_n$  که از  $D$  خارج می‌شود ارائه دهیم. می‌توانیم، بعنوان مثال، صفحه را با شبکه‌ای از مربعهای به ضلع ۱ پوشانیم و  $D'_1$  را در نظر بگیریم که شامل همه مربعهای موجود در این شبکه که کاملاً در  $D$  و متصل (در  $D$ ) به مربعی مفروض باشد؛ آنگاه شبکه را ظریف نموده به نحوی که متشکل از مربعهای به ضلع  $\frac{1}{2}$  باشد و فرض می‌کنیم  $D'_2$  متشکل از  $D'_1$  و مربعهای جدید در  $D$  و متصل شده (در  $D$ ) به مربع مفروض باشد؛ و غیره...

برای هر  $D'_n$  دنباله  $\{f_m^{(n)}\}$  که همگرای یکنواخت روی  $D'_n \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_n$  است وجود دارد. دنباله قطری  $\{f_m^{(n)}\}$  که همگرای یکنواخت روی هر  $D'_n$  و بنابراین یکنواخت روی هر زیرمجموعه فشرده  $D$  است.

اکنون فرض کنید  $D$  شامل  $\infty$  است. اگر  $D$  صفحه گسترش یافته باشد، همه  $f_n$  ها ثابت اند و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر  $D$  شامل  $\infty$  باشد اما صفحه گسترش یافته نباشد  $D$  دارای نقطه مرزی  $b$  است، و می‌توان تبدیل  $w = \frac{1}{z-b}$  را در نظر گرفت. تصویر  $D$  در صفحه  $w$  ناحیه‌ای است که  $\infty$  را دربر ندارد. تابع  $f$  به  $g(w) = f\left[\frac{(1+bw)}{w}\right]$  تبدیل می‌شود، و این توابع تشکیل یک دسته نرمال را می‌دهند. بنابراین  $\{f\}$  نیز یک دسته نرمال است.

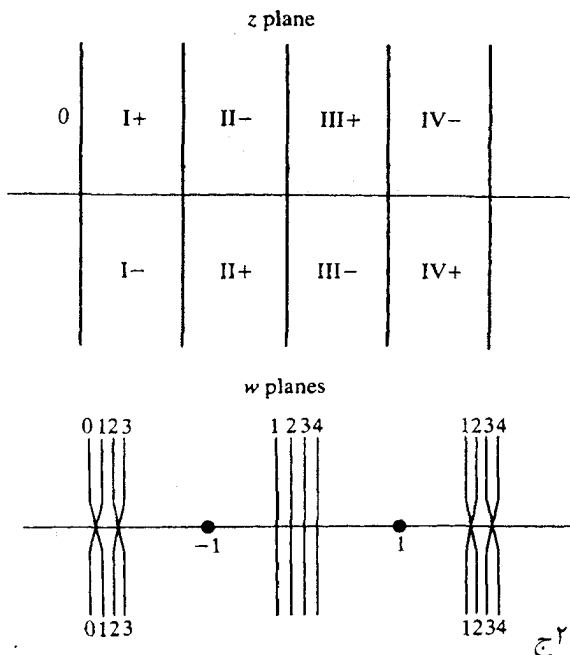
۲۸.۲. باید نشان دهیم اگر  $w_n$  به نقطه مرزی  $w$  از  $D$  نزدیک شود، آنگاه هر زیردنباله همگرای  $\{f(w_n)\}$  باید حدش روی مرز  $\Delta$  باشد. حد یک چنین زیردنباله‌ای، اگر روی مرز  $\Delta$  نیست، باید در درون باشد، فرض کنید که در درون است. اگر  $f(w_{n_k}) \rightarrow z_1$ ، آنگاه، چون وارون  $f$  پیوسته است،  $w_{n_k} \rightarrow f^{-1}(z_1)$ ، که می‌تواند یک نقطه درونی  $D$  باشد (زیرا تصویر وارون یک همسایگی باز از  $z_1$  یک مجموعه باز در  $D$  است). اما  $w_{n_k} \rightarrow w$ ، یک نقطه مرزی  $D$  است. دقت کنید که  $\Delta$  می‌تواند هر ناحیه دلخواهی باشد، و همدیسی نقشی بازی نمی‌کند: فقط لازم است همسانریختی باشد.



شکل ۲۹.۱ ج

بخش ۲۹

۲۹.۱.  $w = e^z$ . داریم  $w = e^z (\cos y + i \sin y)$ . وقتی که  $v = 0$ ،  $e^x \sin y = 0$ . بنابراین  $y = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) و  $u = e^x \cos y$ . قرار دهید  $y = 0$  و فرض کنید  $u$  از  $+\infty$  شروع شده و به چپ حرکت کند؛ آنگاه  $u = e^x$ ، و  $z$  بطور یکنواخت به سمت چپ حرکت کند تا  $u$  به صفر برسد. در اینصورت  $x = -\infty$ . اگر  $u$  به چپ ادامه یابد،  $e^x \cos y$  منفی است و  $y$  می‌تواند  $\pi$  باشد. آنگاه  $z$  از  $-\infty$  شروع می‌کند و  $x$  افزایش می‌یابد هرگاه  $u$  کاهش یابد، لذا  $z$  خط  $y = \pi$  را نمایش می‌دهد. ناحیه‌ای که در شکل ۲۹.۱ ج با  $I+$  نمایش داده شده و در سمت راست مسیر  $z$  است، لذا  $I+$  متناظر نیم‌صفحه بالائی است. مشابهاً،  $I-$  متناظر نیم‌صفحه پائینی است. آنگاه  $I+$  و  $I-$  در امتداد محور  $u$  مثبت وصل می‌شوند، همچنین در امتداد محور حقیقی منفی  $I+$  باید به نیم‌صفحه پائینی متفاوتی وصل شود ( $II-$ )؛ و غیرو. ورقه‌های رویه‌های ریمان که بهم وصل شده‌اند به دور صفر می‌گردند. چون  $e^z$  هرگز صفر نمی‌شود، نقطه صفر یک نقطه رویه نیست. توجه کنید اگر  $w$  دور صفر یک مدار بسازد، به ورقه‌ای که از آن شروع کرده نمی‌تواند برگردد مگر همان تعداد گردش را در جهت مخالف انجام دهد.

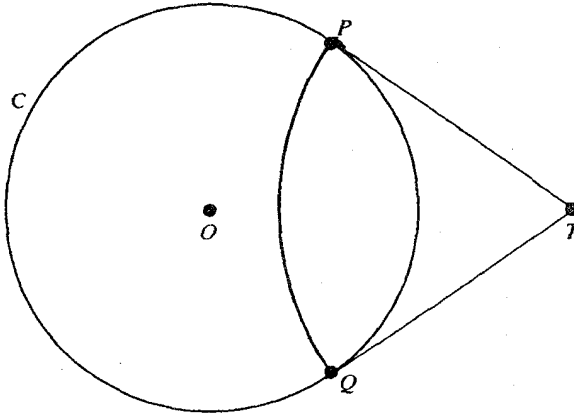


۲۹.۲.  $w = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ . در بخش ۲۶.۲ دیدیم که نیم‌نوار  $0 \leq y < \infty$ ،  $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  متناظر نیمه بالائی صفحه  $w$  است. همچنین نوار  $0 \leq y < \infty$  و  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$  متناظر نیم صفحه پائینی است.

برای یافتن ارتباط بین نواحی مختلف  $z$ ، به شکل ۲۹.۲ ج توجه کنید که وقتی  $z$  بازه  $y = 0$ ،  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$  را طی می‌کند، آنگاه  $\operatorname{Im} w = \sin x$  و  $w = \sin x$  بین  $-1$  و  $1$  است. بنابراین می‌توانیم نیم‌نوارهای  $I+$  و  $I-$  را بهم وصل کرده تا با تمام صفحه  $w$  متناظر گردد. وقتی  $z$  از  $I+$  به  $II-$  عبور می‌کند،  $x = \frac{\pi}{4}$ ،  $0 < y < \infty$ ،  $\operatorname{Re} w = \cosh y$ ،  $\operatorname{Im} w = 0$  با  $1$  آنگاه  $w$  محور حقیقی را بین  $1$  و  $\infty$  قطع می‌کند، و  $II-$  باید متناظر نیمه پائینی دومین ورقه رویه ریمان، و  $II+$  متناظر با نیمه بالائی باشد. در این صورت برش بالائی صفحه  $1$  را به برش پائینی ورقه  $2$  در طول نیم‌خط  $(1, \infty)$  وصل می‌کنیم. با ادامه این روش، تناظر مورد نظر را بدست می‌آوریم. توجه کنید که برش‌ها بطور متفاوت به دور  $+1$  و  $-1$  مرتبط می‌شوند.

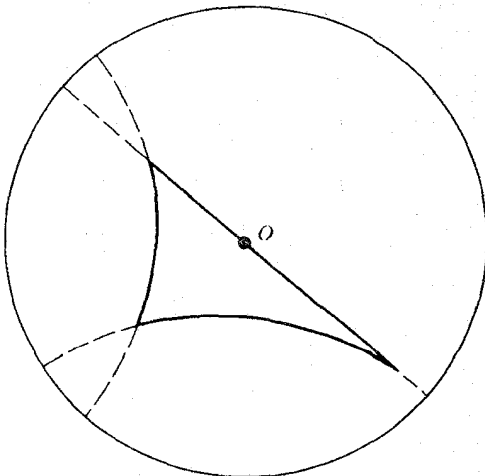
### بخش ۳۰

۳۰.۱. مرکز دایره عمودی محل تقاطع مماسهای به  $C$  در نقاط  $P$  و  $Q$  است، همانطور که در شکل ۳۰.۱ ج نشان داده شده است.



شکل ۳۰.۱ ج

۳۰.۲. همانطور که در شکل ۳۰.۲ نشان می‌دهد، اضلاع مثلث نااقلیدسی به سمت بیرون مقعر است چون مرکزها در خارج دایره احاطه‌شده هستند. بنابراین یک مثلث نااقلیدسی در داخل مثلث اقلیدسی با همان رئوس است، و لذا دارای زوایای کوچکتر است. در نتیجه مجموع زوایای مثلث نااقلیدسی کمتر از  $180^\circ$  است. مجموع بطور دلخواه می‌تواند به صفر نزدیک شود، چون یک مثلث که همه رئوس آن روی «خط بی‌پایان» است همه زوایایش صفر می‌باشد.



شکل ۳۰.۲ ج

۳۱.۱. اگر  $\sum \log(1 + a_n)$  برای برخی از مقادیر لگاریتم همگرا باشد، آنگاه

$$\sum [\log(1 + a_n) + 2\pi i h_n]$$

همگراست، و قتیکه هر یک از  $h_n$  ها یک عدد طبیعی است. آنگاه جمله عمومی این سری به سمت صفر میل می‌کند. اما  $\log(1 + a_n) \rightarrow 0$  زیرا  $1 + a_n \rightarrow 1$ . در نتیجه،  $h_n \rightarrow 0$ ، اما چون هر  $h_n$  یک عدد طبیعی است بر هر  $n$  به اندازه کافی بزرگ  $h_n = 0$ .

۳۱.۲. اگر  $|z| < \frac{1}{4}$ ،

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |\log(1 + z) - z| &\leq |z|^2 \left| \frac{1}{2} - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{4} - \dots \right| \\ &\leq |z|^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = |z|^2 \end{aligned}$$

$$\left| \log(1 + z) - z + \frac{z^2}{2} \right| \leq |z|^3 \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right| = |z|^3$$

و غیره.

۳۱.۳. با توجه به تمرین ۳۱.۲  $|\log(1 + a_k) - a_k| \leq |a_k|^2$ . بنابراین اگر  $\sum |a_k|^2$

همگراست آنگاه  $\sum [\log(1 + a_k) - a_k]$  نیز همگراست؛ و بنابراین اگر  $\sum a_k$  همگراست، لذا  $\sum \log(1 + a_k)$  همگراست.

۳۱.۴. (الف)

$$\left| \log(1 + a_k) - a_k + \frac{a_k^2}{2} - \frac{a_k^3}{3} \right| < |a_k|^4 = \frac{1}{k^4}$$

بنابراین

$$\sum \left[ \log(1 + a_k) - a_k + \frac{a_k^2}{2} - \frac{a_k^3}{3} \right]$$

همگراست (یکنواخت). اکنون  $\sum a_k$  و  $\sum a_k^2$  همگرا هستند (مشروط)، اما  $\sum a_k^3$  واگراست و لذا باید  $\sum \log(1 + a_k)$  واگرا باشد.

(ب)

$$\sum \left[ \log(1 + a_k) - a_k + \frac{a_k^2}{2} \right]$$

همگراست چون  $\sum |a_k^2|$  همگراست. بر حسب اینکه  $k$  فرد یا زوج باشد،

$$a_k + \frac{a_k^2}{2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k} \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{(k-2)^2} - \frac{1}{2(k-2)}$$

بنابراین  $\sum (a_k + \frac{1}{2}a_k^2)$  واگراست؛ لذا  $\sum \log(1 + a_k)$  واگراست.

(پ)

$$|\log(1 + a_k) - a_k| \leq \frac{|z|^2}{k^2}$$

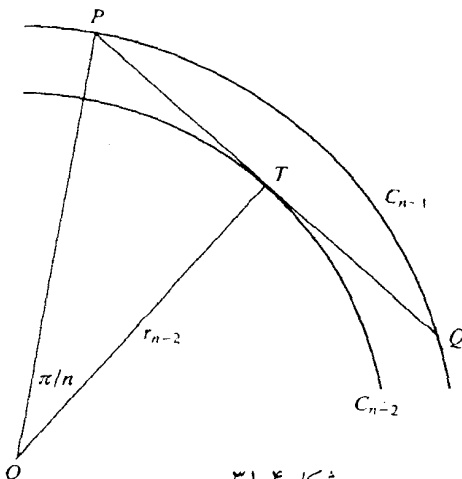
بنابراین  $\sum [\log(1 + a_k) - a_k]$  همگراست. اما چون  $\sum a_k$  واگراست، حاصلضرب واگراست.

(ت)  $\sum |a_k|$  و  $\sum [\log(1 + a_k) - a_k]$  همگراست، لذا حاصلضرب همگراست.

(ث) حاصلضرب جزئی یا یکی از حاصلضربهای جزئی در حاصلضرب (ت)، یا مضربی از یکی از اینها در عاملی که حدش برابر با ۱ شود. در این صورت حاصلضرب همگراست.

(ج) فرض کنید  $PQ$  ضلعی از یک  $n$  ضلعی و  $r_n$  شعاع  $C_n$  باشد. در شکل ۳۱.۴ ج به طور جزئی مطرح شده،  $PQ$  مماس بر  $C_{n-2}$  در نقطه  $T$ ، در این صورت  $OP = r_{n-1} = r_{n-2} \sec(\frac{\pi}{n})$  و  $r_2 = \sec(\frac{\pi}{2})$ ، و

$$r_n = \prod_{k=2}^{n-1} \sec \frac{\pi}{k}$$



شکل ۳۱.۴ ج

نمودار در داخل دایره‌ای است به شعاع

$$R = \prod_{k=3}^{\infty} \sec \frac{\pi}{k}$$

که اگر حاصلضرب برای  $\frac{1}{R}$  همگرا باشد حاصلضرب با پایان است. اکنون

$$\cos \frac{\pi}{k} = 1 - \frac{\pi^2}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

و حاصلضرب بنا بر تمرین ۳۱.۳ همگراست.

۳۱.۵. فرض کنید  $z$  به مجموعه فشرده  $k$  تعلق دارد که هیچ نقطه  $\pm n$  را دربر ندارد. چون  $k$  کراندار

است، هرگاه  $n$  به اندازه کافی بزرگ باشد، داریم  $\left|\frac{z^2}{n^2}\right| < \frac{1}{2}$  و

$$\left| \log \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right) + \frac{z^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{z^2}{n^2} \right|^2 \leq \frac{c}{n^4}$$

برای برخی از مقادیر  $c$ . چون  $\sum \frac{z^2}{n^2}$  روی  $k$  همگرایی یکنواخت است (با همان استدلال)،

$\sum \log \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$  روی  $k$  همگرایی یکنواخت است.

۳۱.۶. باید نشان دهیم  $\cot \pi \left( n + \frac{1}{2} + iy \right)$ ،  $-n \leq y \leq n$  و  $\cot(\pi x + n\pi i)$ ،

$-(n - \frac{1}{2}) \leq x \leq n + \frac{1}{2}$  کراندارند. چون

$$\left| \cot \pi \left( n + \frac{1}{2} + iy \right) \right| = \left| \frac{\cos \pi \left( n + \frac{1}{2} + iy \right)}{\sin \pi \left( n + \frac{1}{2} + iy \right)} \right| = \left| \frac{\sin iy}{\cos iy} \right| = \left| \frac{\sinh y}{\cosh y} \right|$$

کافی است که  $y$  را مثبت فرض کنیم. آنگاه یک کران بالا عبارتست از

$$\frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \leq 1$$

که این تکلیف اضلاع عمودی  $C_n$  را معلوم می‌کند. در اضلاع افقی داریم

$$\cos(\pi x + n\pi i) = \frac{\cos(\pi x + n\pi i)}{\sin(\pi x + n\pi i)} = \frac{\cos \pi x \cosh n\pi - i \sin \pi x \sinh n\pi}{\sin \pi x \cosh n\pi + i \cos \pi x \sinh n\pi}$$

$$\begin{aligned} |\cot(\pi x + n\pi i)|^2 &= \frac{\cos^2 \pi x \cosh^2 n\pi + \sin^2 \pi x \sinh^2 n\pi}{\sin^2 \pi x \cosh^2 n\pi + \cos^2 \pi x \sinh^2 n\pi} \\ &\leq \frac{\cosh^2 n\pi}{\sinh^2 n\pi} \end{aligned}$$



چون آخرین کسر زوج است می‌توانیم فرض کنیم  $n > 0$ . آنگاه

$$\frac{\cosh n\pi}{\sinh n\pi} = \left( \frac{e^{n\pi} + e^{-n\pi}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \right) \leq \left( \frac{2e^{n\pi}}{e^{n\pi} - 1} \right)^2$$

که به روشنی کراندار است. اکنون داریم

$$|I_n| \leq \int_{C_n} \frac{O(1)|dw|}{|w||w-z|} \leq O(1) \cdot (C_n \text{ طول}) \cdot \max_{C_n} \frac{1}{|w||w-z|}$$

که برای هر  $z$  به سمت صفر می‌رود.

۳۱.۷

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{d}{dw}(\log \sin w - \log w) \\ f(w) &= \frac{\cos w}{\sin w} - \frac{1}{w} = \frac{\cos w}{\sin w} - \frac{\sin w}{w} \cdot \frac{1}{\sin w} \\ &= \frac{1}{\sin w} \left( \cos w - \frac{\sin w}{w} \right) \\ &= \frac{1}{\sin w} \left[ \left( 1 - \frac{w^2}{2} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{w^2}{3!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{O(w^2)}{\sin w} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### بخش ۳۲

۳۲.۱. فرض کنید  $f(z) \neq 0$ . از فرمول پینسن داریم، وقتی  $f(0) \neq 0$

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|$$

هرگاه  $n(t)$  یک ریشه از  $z_k$  با  $|z_k| \leq t$ ، اگر  $f(0) = 0$ ، می‌توانیم  $\frac{f(z)}{z^p}$  را، وقتی  $p$  مرتبه ریشه در صفر است در نظر بگیریم. آنگاه از فرمول پینسن داریم

$$\int_0^k \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - p \log R - \log |f(0)|$$

چون  $f$  دارای یک ریشه با قدرمطلق  $k$ ،  $(k = 1, 2, \dots, [R])$  است، اگر زیاد دقیق نباشیم می‌توانیم  $n(t)$  را حداقل برابر با  $t$  در نظر بگیریم، بنابراین

$$\int_t^R t^{-1} n(t) dt \geq R$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \log A + BR$$

در این صورت برای  $R$  بزرگ اگر  $B < 1$  باشد به تناقض می‌رسیم. در زیر یک کاربرد دقیق از همان روش را می‌آوریم.

داریم  $n(t) = 0$  برای  $0 \leq t < 1$ ،  $n(t) \geq 1$  برای  $1 \leq t < 2$ ،  $n(t) \geq 2$  برای  $2 \leq t < 3$  و غیره. بنابراین، (جزء صحیح  $t$ )  $n(t) \geq [t]$ ، و

$$\begin{aligned} [R] - 1 - \log[R] &= \int_1^{[R]} \frac{t-1}{t} dt \leq \int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - p \log R - \log |f(0)| \end{aligned}$$

اما  $\log |f(Re^{i\theta})| \leq \log A + BR$  بنابراین داریم

$$[R] - 1 - \log[R] \leq \log A + BR - p \log R - \log f(0)$$

که برای  $R$  بزرگ اگر  $B < 1$ ، غیرممکن است.

۳۲.۲. مانند مثال ۳۲.۱، اگر فرض کنیم  $f(0) \neq 0$ ، داریم

$$n(t) \geq 1 + 2 + \dots + [t] = \frac{[t]([t] + 1)}{2}$$

یا تقریباً  $\frac{t^2}{2}$ . در این صورت  $\int_0^R t^{-1} n(t) dt$  تقریباً برابر با  $\frac{R^2}{4}$  است. بنابراین

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \log A + BR^2$$

و برای  $\frac{1}{4} < B$ ، به تناقض می‌رسیم.

به طور دقیقتر

$$n(t) \geq \frac{(t-1)t}{2}$$

برای  $1 \leq t \leq R$ ،

$$\int_0^R \frac{n(t)}{t} dt \geq \frac{1}{2} \int_1^{[R]} (t-1) dt \geq \frac{1}{4} ([R]-1)^2$$

که

$$\frac{1}{4} ([R]-1)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq \log A + BR^2$$

## بخش ۳۳

۳۳.۱. اگر  $D$  بی‌کران و دارای نقطهٔ بیرونی  $z_1$  باشد، آنگاه  $|z - z_1|^{-1}$  در  $D$  کراندار و برای  $\delta$  به اندازه کافی کوچک  $1 < \delta |z - z_1|^{-1}$  می‌توانیم بگیریم  $g_\varepsilon(z) = \left[ \frac{\delta}{(z - z_1)^\varepsilon} \right]$ .

## بخش ۳۴

۳۴.۱. فرض می‌کنیم  $f(z) \sim \sum a_n z^{-n}$  و همچنین  $f(z) \sim \sum b_n z^{-n}$  در این صورت

$$\sum_{k=0}^n a_k z^{-k} - \sum_{k=0}^n b_k z^{-k} = o(z^{-n})$$

بطور یکنواخت در زاویه‌ای که هر دو سری نمایش مجانبی  $f$  هستند.

آنگاه

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k) z^{-k} = o(z^{-n})$$

قرار می‌دهیم  $n = 0$ ؛ در این صورت  $a_0 - b_0 = o(1)$ ، که می‌گوید  $a_0 = b_0$ . اکنون، با داشتن  $a_0 = b_0$ ، قرار دهید  $n = 1$ ؛ آنگاه خواهیم داشت

$$(a_1 - b_1) z^{-1} = o(z^{-1})$$

و غیره.

۳۴.۲. داریم

$$z^n \sum_{k=1}^n a_k z^{-k} \rightarrow 0, \quad z^n \sum_{j=1}^n b_j z^{-j} \rightarrow 0$$

بطور یکنواخت هرگاه  $|z| \rightarrow \infty$  در یک زاویه. اگر حاصل ضرب

$$\sum_{k=1}^n a_k z^{-k} \sum_{j=1}^n b_j z^{-j} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k b_j z^{-(k+j)}$$

را تشکیل دهیم، با جملات  $k + j = m$ ،  $m \leq n$  به صورت

$$\sum_{m=0}^n c_m z^{-m}$$

می‌باشند که  $c_m = \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j}$ . جملات دیگر با توانهای  $m > n$  به صورت  $z^{-m}$  می‌باشند. در این صورت

$$z^n \left[ f(z) g(z) - \sum_{m=0}^n c_m z^{-m} \right] = z^n \left[ f(z) g(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} \sum_{j=0}^n b_j z^{-j} + \phi_n(z) \right]$$

وقتی که  $\phi_n(z)$  یک مجموع متناهی از جملات  $z^{-p}$  با  $p \geq n + 1$  است. در نتیجه  $z^p \phi_n(z) \rightarrow 0$  بطور یکنواخت.

۳۴.۳. تابع دارای یک سری مجانبی برای  $x$  حقیقی مثبت است زیرا

$$\left| e^{-x} \sin(e^x) \right| \leq e^{-x} = o(x^{-n})$$

برای هر  $n$  هرگاه  $x \rightarrow +\infty$ . البته مشتق  $e^{-x} \sin(e^x)$  برابر است با

$$-e^{-x} \sin(e^x) + \gamma e^x \cos(e^x)$$

که در هر زاویه‌ای که شامل محور حقیقی مثبت باشد به سمت صفر نمی‌رود. در واقع

$$\begin{aligned} \gamma \cos(e^x) &= \exp(i e^x) + \exp(-i e^x) \\ &= \exp(i e^x \cos \gamma - e^x \sin \gamma) \\ &\quad + \exp(-i e^x \cos \gamma + e^x \sin \gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\cos(e^x)| &\geq \exp(e^x \sin \gamma) - o(1), \quad (x > 0, \sin \gamma > 0) \\ &= \exp[e^{\gamma r \cos \theta} \sin(\gamma r \sin \theta)] - o(1) \end{aligned}$$

و

$$\gamma |e^x \cos(e^x)| \rightarrow \infty$$

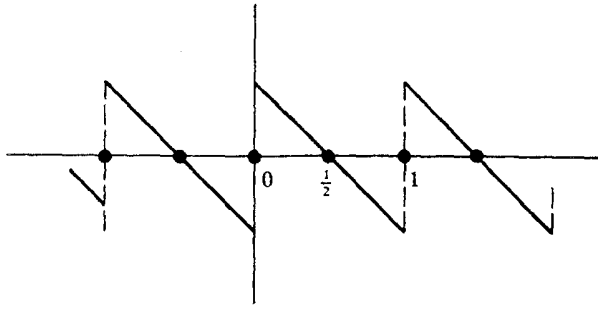
روی هر دنباله  $|z| = r_n$  که  $(\gamma \pi)$  (به پیمانۀ  $\gamma$ )  $\gamma r_n \sin \theta = \frac{\pi}{\gamma}$ . پس آشکار است که دنباله  $\{r_n\}$  برای هر  $\theta$ ،  $0 < \theta < \frac{\pi}{\gamma}$  وجود دارد.

۳۴.۴. داریم

$$(1+t^\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{\gamma n} \frac{(\gamma n)!}{\gamma^{\gamma n} (n!)^\gamma}$$

آنگاه

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} (t^\gamma + 1)^{-\frac{1}{\gamma}} dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(\gamma n)!]^\gamma}{\gamma^{\gamma n} (n!)^\gamma} z^{-\gamma n - 1}$$



شکل ۳۴.۵ ج

۳۴.۵. نمودار  $P(t)$  شبیه شکل ۳۴.۵ ج با  $P(n + \circ) = \frac{1}{\gamma}$  و  $P(n - \circ) = -\frac{1}{\gamma}$  است. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{k+\circ}^{k+1-\circ} f'(t) P(t) dt &= P(t) f(t) \Big|_{k+\circ}^{k+1-\circ} + \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &= -\frac{1}{\gamma} f(k+1) - \frac{1}{\gamma} f(k) + \int_k^{k+1} f(t) dt \end{aligned}$$

آنگاه

$$\begin{aligned} \int_1^n f'(t) P(t) dt &= \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \int_1^n f(t) dt \\ &= \frac{1}{\gamma} f(n) + \frac{1}{\gamma} f(1) - \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \int_1^n f(t) dt \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{\gamma} [f(n) + f(1)] + \int_1^n f(t) dt \end{aligned}$$

لذا

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{1}{\gamma} [f(n) + f(1)] - \int_1^n f'(t) P(t) dt$$

۳۴.۶. کافی است نشان دهیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n t^{-1} P(t) dt$$

وجود دارد. اگر بنویسیم

$$\int_1^n t^{-1} P(t) dt = \int_1^{\frac{\gamma}{\gamma}} + \int_{\frac{\gamma}{\gamma}}^{\frac{2\gamma}{\gamma}} + \dots + \int_{n-\frac{\gamma}{\gamma}}^n$$

از نمودار  $P$  روشن است که (و بسادگی بطور تحلیلی به دست می‌آید) که انتگرال‌های متوالی علامت متناوب دارند، در قدرمطلق نزولی‌اند، و به صفر نزدیک می‌شوند. بنابراین سری انتگرال‌ها همگراست.

۳۴.۷. (الف)

$$1 - e^{-t} = \int_0^t e^{-u} dy < \int_0^t dt = t$$

(ب)

$$1 - e^{-t} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \dots$$

اگر  $0 < t < 1$ ، قدرمطلق جملات کاهش می‌یابد و علامتها متناوبند، بنابراین  $1 - e^{-t} > t - \frac{1}{2}t^2$ .

(پ) برای  $0 < t < 1$ ، داریم  $0 < 1 - \frac{1}{2}t < 1 - \frac{1}{2}t^2 < 1 - \frac{1}{2}t$ ، بنابراین  $(1 - \frac{1}{2}t)^2 > 1 - \frac{1}{2}t$ .

۳۴.۸. در بخش ۳۱.۳ دیدیم که حاصلضرب والیس می‌تواند بصورت

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(2N)! (2N+1)^{\frac{1}{2}}}{2^{2N} (N!)^2}$$

نوشته شود.

با بکار بردن فرمول استرلینگ (برای  $c$  نامعلوم)، بدست می‌آوریم

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2^{2N} N^{2N} (2N)^{\frac{1}{2}} e^{-2N} C (2N+1)^{\frac{1}{2}}}{2^{2N} N^{2N} e^{-2N} C^2 N} = \frac{2}{C}$$

$$C = 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$$

بخش ۳۵

۳۵.۱. ابتدا،  $g(z_1) = g(z_2)$  نتیجه می‌دهد  $f(z_1) = f(z_2)$ ، بنابراین  $z_1^2 = z_2^2$  و  $z_1 = \pm z_2$ ، لذا  $g$  یک تابع فرد است، و از نتیجه می‌شود  $g(z_1) = -g(z_2)$ ، پس تنها ریشه صفر است. بنابراین  $g(0) = 0$ . بعد بنا به قضیهٔ دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} g(z) &= z(1 + a_2 z^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} = z[1 + (a_2 z^2 + \dots)]^{\frac{1}{2}} \\ &= z \left[ 1 + \frac{1}{2}(a_2 z^2 + \dots) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)(a_2 z^2 + \dots)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

با بخش ۱۵.۵ مقایسه کنید. بنابراین

$$g(z) = z + \frac{1}{4}a_2z^2 + o(z^2)$$

و سری توانی  $g$  در گوی واحد همگراست زیرا  $f(z^2)$  ریشه‌ای جز ریشه دوگانه در  $z = 0$  ندارد، و بنابراین یک ریشه دوم تحلیلی در  $|z| < 1$  دارد. پس  $g \in S$ .

۳۵.۲. لزوماً هیچ یک از  $a$  و  $b$  و  $c$  در  $S$  نیست.

(الف)  $g$  می‌تواند  $f -$  باشد.

(ب) اگر  $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ ،  $zf'(z) = z + 4z^2 + \dots$  در اینجا ضریب  $z^2$  بسیار بزرگ است.

(پ) مانند (ب)،  $\frac{f(z)^2}{z} = z + 4z^2 + \dots$ .

## کتابشناسی

- L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*. 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1979.
- M. L. Boas. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. 2d ed. New York: Wiley, 1983; *Solutions of Selected Problems*, New York: Wiley, 1984.
- R. P. Boas. *A Primer of Real Functions*. 3d ed. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1981.
- R.C. Buck and E. F. Buck, *Advanced Calculus*. 3d ed. New York: McGraw-Hill, 1978.
- R. B. Burckel. *An Introduction to Classical Complex Analysis*, vol. 1, New York: Academic Press, 1979.
- G. F. Carrier, M. Krook, and C. E. Pearson. *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963.
- E. F. Collingwood and A. J. Lohwater, *The Theory of Cluster Sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- L. Comtet. *Advanced Combinatorics*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1974.
- E. T. Copson. *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*. Oxford: Clarendon Press, 1935.
- P. Dienes. *The Taylor Series*. Oxford: Clarendon Press, 1931. Reprint. New York: Dover Publications, 1957.
- H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley. 2d ed. 1980.
- G. H. Hardy. *Divergent Series*. Oxford: Clarendon Press, 1949.
- P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*, vol. 3. New York: Wiley, 1986.
- E. Hille. *Analytic Function Theory*. Boston: Ginn & Co, 1959; (vol. 1), 1962; (vol. 2). Reprint, Chelsea, New York, 1974.



- J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 2d ed. New York: Wiley, 1975.
- H. Jeffreys and B. S. Jeffreys. *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1950.
- H. Kober. *Dictionary of Conformal Representations*. New York: Dover Publications, 1952.
- N. Levinson. *Gap and Density Theorems*. New York: American Mathematical Society, 1940.
- J. E. Littlewood. *Lectures on the Theory of Functions*. Oxford: Oxford University Press, 1944.
- A. I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*. vol. 1, Translated by R. A. Silverman. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1965.
- A. I. Markushevich. *Selected Chapters in the Theory of Analytic Functions*. In Russian. (*Izbrannye glavy teorii analiticheskikh funktsii*, Moscow: Nauka, 1976.
- L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. 2d ed. New York: Macmillan, 1950.
- D. S. Mitrinović and J. D. Kečkić. *The Cauchy Method of Residues. Theory and Applications*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1984.
- W. F. Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, vol. 1. 5th ed. Leipzig: Teubner, 1982. Reprint. New York: Chelsea, 1966.
- H. R. Pitt, *Tauberian Theorems*. Oxford: Clarendon Press, 1958.
- G. Pólya. *Collected Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1974.
- G. Pólya and G. Szegő. *Problems and Theorems in Analysis*, vol. 1. New York: Springer-Verlag, 1972.
- A. G. Postnikov. Tauberian Theory and Its Application. *Proc. Steklov Inst. Math.*, no. 2 (1980). [Translation of *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, no. 144 (1979).]
- R. Remmert. *Functionentheorie I*. New York: Springer-Verlag, 1984.
- H. Sagan. *Advanced Calculus*. Boston: Houghton-Mifflin, 1974.
- W. Sibagaki, *Theory and Applications of the Gamma Function* (in Japanese). Tokyo: Iwanami Syoten, 1952.
- O. Szász. *Introduction to the Theory of Divergent Series*. New York: Hafner, 1948.
- E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford: Clarendon Press, 1932.
- D. V. Widder. *Advanced Calculus*. 2d ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1961.

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abel .....	آبل
convergence theorem.....	قضیه همگرایی -
summation (summability).....	جمع (بندی) -
theorem on power series.....	قضیه - درباره سری توانی
Abelian theorem.....	قضایای آبل
absolute convergence .....	همگرایی مطلق
absolute value .....	مقدار مطلق
addition formulas .....	فرمولهای جمعی
affine function .....	تابع مستوی
algebra of series .....	جبر سری‌ها
alternating series .....	سری متناوب
analytic .....	تحلیلی
arc .....	خم -
derivatives.....	مشتق‌های -
in extended plane.....	- در صفحه گسترش یافته
bounded functin.....	- تابع کراندار
complete function.....	- تابع کامل
at infinity.....	- در بی‌نهایت
integral with parameter.....	انتگرال با پارامتر
in a region.....	- در یک ناحیه
on a set.....	- روی یک مجموعه
analytic continuation.....	ادامهٔ تحلیلی
barriers to.....	- مرز به
by power series.....	- بوسیله سری توانی
by reflection.....	- بوسیله انعکاس
analyticity of inverse.....	تحلیلی بودن وارون

angle	زاویه
of non-Euclidean triangle	— مثلث ناقلییدسی
principal	— اصلی
annulus	طوقه
Dirichlet problem for	— مسئله دیریکله برای
approaching the boundary	نزدیک شدن به مرز
arc	خم
Jordan, or simple	— ژردان یا ساده
arc length	طول خم
area theorem	قضیه مساحت
Argand diagram	نمودار آرگاند
argument	آرگومان
argument, principal	آرگومان، اصلی
Arzela-Ascoli theorem	قضیه آرزلا-اسکولی
asymptotic series	سری مجانبی
for Laplace transforms	— برای تبدیلات لاپلاس
average distance	فاصله متوسط
Bernoulli numbers	اعداد برنولی
Bernoulli's principle	اصل برنولی
beta function	تابع بتا
bilinear	دوخطی
binominal coefficients	ضرایب دو جمله‌ای
Borel summability	جمع پذیری بول
boundary, rigid	مرز، صلب
boundary behavior of mapping	رفتار مرزی نگاشت
bounded variation	تغییرات کراندار
branch	شاخه
of logarithm	— لگاریتم
of square root	— ریشه دوم
of $2^z$	— $2^z$
Cantor's theorem	قضیه کانتور

capacitor	ذخیره‌کننده
Carathéodory's inequality	نامعادله کاراتئودوری
Casorati-Weierstrass theorem	قضیه کاسورتی- وایراشتراس
Cauchy-Goursat theorem	معادلات کوشی-گورسا
Cauchy-Rieman equations	معادلات کوشی-ریمان
in polar coordinates	— در مختصات قطبی
Caychy's formula	فرمول کوشی
for points outside contour	— برای نقاط بیرون
Cauchy's inequalities	نامعادلات کوشی
Cauchy's theorem	قضیه کوشی
strong form	صورت قوی —
Cesàro summability	جمع‌پذیری سزارو
chain rule	قاعده زنجیری
changing variables	تغییر متغیرها
orthogonal	— متعامد
transformation of	تبدیل —
closed curve	خم‌بسته
closed form	فرم‌بسته
coincidence principle	اصل انطباق
combinations of series	ترکیب‌های سری‌ها
compact convergence	همگرای فشرده
comparison test	آزمون مقایسه
complete analytic function	تابع تحلیلی کامل
conjugate	— مزدوج
powers and roots	توان‌ها و ریشه‌های —
complex potential, velocity	پتانسیل مختلط، سرعت
composite function	تابع مرکب
Laurent series	سری‌های لوران —
mappings	نگاشت‌های —
power series	سری‌های توانی —
conductor	هادی
conformal mapping	نگاشت هم‌مدیس
correspondence of regions	تناظر نواحی —
extending to boundary	توسعه به مرز —
of general region onto disk	— ناحیه کلی روی گوی

of hyperbolic region. ....	ناحیه هذلولوی
of parabolic region. ....	ناحیه سهموی
of quadrant. ....	در ربع اول
conjugate .....	مزدوج
harmonic function. ....	تابع همساز
residues at conjugate points. ....	مانده‌ها در مزدوج نقاط
constant function .....	تابع ثابت
constructions, geometric .....	ساختارها هندسی
continuation, analytic .....	ادامه تحلیلی
continuity .....	پیوستگی
contour .....	مسیر
control system. ....	سیستم کنترل
Cauchy criterion for .....	محک کوشی برای
compact. ....	فشرده
disk of. ....	گوی
factors. ....	عوامل
of Fourier series. ....	سری فوریه
normal. ....	نرمال
uniform. ....	یکنواخت
cube roots .....	ریشه‌های سوم
Jordan. ....	ژردان
orientation of. ....	جهت
star-shaped. ....	ستاره‌ای شکل
trace of. ....	مسیر
Darboux's theorem .....	قضیه داربوکس
definite integrals .....	انتگرال معین
by substitutions. ....	بوسیله جایگزینی
De Moivre's formula. ....	فرمول دمواور
derivatives .....	مشتق
of composite functions. ....	توابع مرکب
of infinite order. ....	با مرتبه بی‌پایان
of inverse function. ....	سری تابع وارون
of power series. ....	سری توانی

diagram	نمودار
Argand	— آرگاند
Nyquist	— نیکوئیست
differentiation of	مشتق‌گیری از
asymptotic series	— سری مجانبی
Caychy's formula	— فرمول کوشی
composite function	— ترکیب تابع
power series	— سری توانی
differentiation term by term	مشتق‌گیری جمله به جمله
direct continuation	ادامهٔ تحلیلی مستقیم
Dirichlet problems	مسائل دیریکله
for annulus	— برای طوقه
for disk	— برای گوی
for flows	— برای جریان
uniquepeps	— یکتایی
unsolvable	— حل‌ناپذیر
Dirichlet's condition	شرط دیریکله
distance	فاصله
non-Euclidean	— نااقلیدسی
between sets	— بین مجموعه‌ها
divide and rule	تقسیم وقاعده
division of	تقسیم
complex numbers	— اعداد مختلط
power series	— سری‌های توانی
domain (region)	دامنه (ناحیه)
of convergence	— همگرایی
of function	— تابع
fundamental	— اصلی
dominate	مقلوب
double Taylor series	سری تیلوردوگانه
doublet	جفتی
electrostatics	الکترواستاتیک
elementary functions	توابع مقدماتی

endpoint	نقطهٔ انتهای
entire functions	توابع تام
product representation	نمایش حاصل ضرب -
transcendental	- متعالی
univalent	- تک مقدار
equations	معادلات
algebraic	- جبری
Cauchy-Riemann	- کشی-ریمان
polynomial	- چند جمله‌ای
roots of	ریشه‌های -
equicontinuity	هم‌پیوستگی
equilateral triangle	مثلث متساوی‌الاضلاع
equipotential	هم‌پتانسیل
equivalence class	ردهٔ هم‌ارزی
essential singular point	نقطهٔ تکین اساسی
Euclidean plane	صفحهٔ اقلیدسی
Euler-Maclaurin formula	فرمول اویلر-مکلورن
Euler's constant	ثابت اویلر
Euler's formulas	فرمول‌های اویلر
product, for sine	- حاصل ضرب، - برای سینوس
for trigonometric functions	- برای توابع مثلثاتی
exceptional point in maximum principle	نقطهٔ استثنایی در اصل ماکزیمم
exponential	نمایی
function	تابع -
integral	انتگرال -
polynomial	چند جمله‌ای -
exponents, laws of	نماها، قوانین
extending a map to the boundary	توسعه در یک نگاهت به مرز
extension of analytic function	توسیع تابع تحلیلی
factorial function	تابع فاکتوریل
flow	جریان
over cliff	- کنار دریا، ساحل
around corners	- در گوشه‌ها

through doorway . . . . .	به سمت راهرو
of fluid . . . . .	سیال
in half strip . . . . .	در نیم‌نوار
of heat . . . . .	گرما
inside parabola . . . . .	درون سهمی
over semicircle . . . . .	روی نیم‌دایره
uniform . . . . .	یکنواخت
fluid . . . . .	سیال
Fourier . . . . .	فوریه
coefficients . . . . .	ضرایب
series . . . . .	سری‌های
convergence of . . . . .	همگرایی
from Laplace's equation . . . . .	معادله لاپلاس
partial sums of . . . . .	مجموع جزئی
sine-cosine series . . . . .	سری‌های سینوس-کسینوس
fractional linear transformation . . . . .	تعدیل کسری خطی
fractions, partial . . . . .	کسرها، جزئی
functions . . . . .	توابع
analytic . . . . .	تحلیلی
domain . . . . .	دامنه
general . . . . .	کلی
notation for . . . . .	نماد برای
of two variables . . . . .	با دو متغیر
fundamental domain . . . . .	دامنه اصلی
fundamental theorem of algebra . . . . .	قضیه اصلی جبر
gamma function . . . . .	تابع گاما
alternative formulas . . . . .	فرمولهای دیگر
asymptotics . . . . .	مجانبی
functional equations . . . . .	معادلات تابعی
incomplete . . . . .	ناقص
product for . . . . .	حاصل ضرب برای
gaps . . . . .	حفره‌ها
geometric progression . . . . .	تصاعد هندسی



geometric series	سری هندسی
geometry, non-Euclidean	هندسه، ناقلیدسی
gradient	گرادیان
Green function	تابع گرین
for half plane	— برای نیم صفحه
normal derivative of	— مشتق نرمال
for unit disk	— برای گوی واحد
Green's theorem	قضیه گرین
Hadamard gap theorem	قضیه حفره‌ها دامارد
half disk	نیم‌گویی
half plane	نیم صفحه
half strip	نیم نوار
harmonic functions	توابع همساز
averaging property	— خاصیت متوسط
and conformal mapping	— و نگاشت هم‌دیس
conjugate	— مزدوج
integral representation of	— نمایش انتگرالی
intrinsic characterization	— مشخصه ذاتی
reflection principle	— اصل انعکاس
Taylor series for	— سری تیلور برای
heat flow	جریان گرما
Heine-Borel theorem	قضیه هاینه-برل
holomorphic	هلمورفیک
homeomorphism	همسانریختی
homographic	هموگرافیک
Hurwitz's theorem	قضیه هرولتز
ideal point	نقطه ایده‌آل
identifying curves	یکی کردن خم‌ها
identities	اتحادها
images, method of	— تصویرها، روش
imaginary	موهومی

imaginary part	قسمت موهومی
improper integrals	انتگرال ناسره
incomplete gamma functions	تابع گامای ناقص
incompressible	تراکم‌ناپذیر
indefinite integrals	انتگرال نامعین
inequity	نامساوی
Carathéodory's	— کاراتئودوری
for integrals	— برای انتگرالها
isoperimetric	— هم‌محیطی
triangle	— مثلث
infinite products	حاصل ضرب بی‌پایان
covergence	همگرایی —
divergence	واگرایی —
for $\Gamma$ functins	— برای تابع $\Gamma$
for sine	— برای سینوس
infinite series	سری بی‌پایان
infinity	بی‌نهایت
as singular point	— بعنوان نقطهٔ تکین
initial point	نقطهٔ شروع
injective	یک به یک
inside	درون
insulated boundary	مرز عایق شده
integral function	تابع انتگرال
integrals	انتگرال‌ها
of Caychy type	— نوع کوشی
changing variables in	تغییر متغیر در —
containing logarithms and powers	— شامل لگاریتم و توان
definite	— معین
differentiation of	مشتق‌گیری از —
exponential	— نمایی
of function	— تابع
as functions	— بعنوان تابع
improper	— ناسره
indefinite	— نامعین
inequities for	— نامساوی برای —

- line — خطی
- with parameter..... با پارامتر
- principal value..... مقدار اصلی
- of rational function..... تابع گویا
- of square root of polynomial..... ریشه دوم چندجمله‌ای
- of trogonometric function..... تابع مثلثاتی
- integration, easy..... انتگرال‌گیری، آسان
- integration of..... انتگرال‌گیری از
- asymptotic series..... سری‌های مجانبی
- derivative..... مشتق
- power series..... سری‌های توانی
- uniformly convergent sequence..... دنباله به طور یکنواخت همگرا
- invariance of cross ratio..... پایایی نسبت ناهمساز
- invariant form of Schwarz's lemma..... صورت پایایی لم شوارتس
- inverse..... وارون
- function..... تابع
- power series of..... سری توانی
- mapping..... نگاشت
- trigonometric functions..... تابع مثلثاتی
- irrotational..... غیرچرخشی
- isolated..... منفرد
- singular point..... نقطه تکین
- zeros..... ریشه‌های
- isoperimetric inequality..... نامعادله هم‌محیطی
- isothermal..... هم‌دما
- Jensen's formula, theorm..... فرمول یسن، قضیه
- Jordan..... ژردان
- arc, curve..... خم، کمان
- curve theorem..... قضیه خم
- region..... ناحیه
- kernel..... هسته

Caychy.....	کوشی
Dirichlet.....	دیریکله
Poisson.....	پواسون
keyhole contour.....	جاکلید
Lagrange-Bürmann formula.....	فرمول لاگرانژ-بیرمن
(notation).....	(نماد)
(maximum principle).....	(اصل ماکزیمم)
Laplace's equation.....	معادله لاپلاس
Laplace transform.....	تبدیل لاپلاس
Laurent series.....	سری لوران
methods for.....	روش‌های
principal part of.....	قسمت اصلی
uniqueness of.....	یکتایی
laws of exponents.....	قانون‌نماها
Leibniz's rule for differentiating.....	قانون لایب‌نیتز برای مشتق‌گیری
level curves.....	منحنی‌های تراز
Lindelöf principle.....	اصل لیندلف
linear combinations of series.....	ترکیب خطی سری‌ها
linear transformation.....	تبدیل خطی
line integrals.....	انتگرال خطی
lines of force.....	خطوط نیرو
Lioville's theorem.....	قضیه لیوویل
for real part.....	برای قسمت حقیقی
local univalence.....	یک به یکی موضعی
logarithms.....	لگاریتم
of a function.....	یک تابع
functional equation.....	معادله تابعی
integrals containing.....	انتگرال‌های شامل
natural.....	طبیعی
principal value.....	مقدار اصلی
Looman-Menshov theorem.....	قضیه لومن-منشاو

M test	آزمون M
Maclaurin series	سری مکلورن
magnification	بزرگنمایی
main Phragmén-Lindelöf theorem	قضیه پرگمن-لیندلف اصلی
mapping	نگاشت
conformal	— همدیس
at zero of function	— در ریشه تابع
matrix	ماتریس
maximum principle	اصل ماکزیمم
with exceptional point	— با نقطه استثنایی
generalizations	تعمیم‌ها —
mean value theorems	قضیه‌های مقدار میانگین
meromorphic	مرومورفیک
in extended plane	— در صفحه گسترش یافته
Mertens'es theorem	قضیه مرتنس
minification	کوچکسازی
minimum principle	اصل می‌نیمم
Möbius transformations	تبدیلات موبیوس
Montel's theorem	قضیه منتل
(normal family)	(خانواده نرمال)
(convergence)	(همگرایی)
Morera's theorem	قضیه مورا
application of	کاربرد —
multiple pole	قطب چندگانه
multiplication of	ضرب
asymptotic series	— سری مجانبی
complex numbers	— اعداد مختلط
numerical series	— سری‌های عددی
power series	— سری‌های توانی
natural boundary	مرز طبیعی
neighborhood	همسایگی
nested sets	مجموعه‌های تودرتو
Neumann problem	مسئله نومن

non-Euclidean	ناافلیدسی
angles of triangle	زوایای مثلث
distance	فاصله
geometry	هندسه
rigid motion	حرکت صلب
nonvisous	بدون چسبندگی
normal convergence	همگرای نرمال
normal family	خانواده نرمال
north pole	قطب شمال
number of zeros and poles	تعداد ریشه‌ها و قطب‌ها
Nyquist diagram	نمودار نیکویست
O, o notation	نماد O, o
one-to-one function	تابع یک به یک
open mapping theorem	قضیه نگاشت باز
ordered pair	زوج مرتب
order of	مرتبه
pole	– قطب
zero	– ریشه
ordering of complex numbers	ترتیب اعداد مختلط
orientation	جهت
orthogonal circles	دوایر متعامد
orthogonal functions	توابع متعامد
overconvergence	فراهمگرایی
parallel axiom	اصل توازی
parallelogram law	قانون متوازی الاضلاع
parametric curve	خم پارامتری
partial	جزئی
derivative	مشتق‌های
fractions	کسرهای
summation	مجموع‌یابی
periodic function	تابع تناوبی

phase	نماد
Phragmén-Lindelöf theorems	قضایای پراگمن-لیندلف
Picard's theorem	قضیهٔ پیکارد
piecewise differentiable	قطعه مشتق پذیر
plane	صفحه
complex	مختلط
Euclidean	اقلیدسی
extended	گسترش یافته
finite	با پایان
non-Euclidean	نااقلیدسی
point at infinity	نقطه در بی نهایت
point charge	بار نقطه‌ای
Poisson integral	انتگرال پواسون
generalized	تعمیم یافته
Poisson kernel	هسته پواسون
polar coordinates	مختصات قطبی
pole	قطب
at corner	در گوشه
double	دوگانه
of Green function	تابع گرین
multiple	چندگانه
north	شمال
simple	ساده
poles, number of	قطب‌ها، تعداد
polygons	چندضلعی‌ها
polynomials	چندجمله‌ای‌ها
positive orientation	جهت مثبت
potential	پتانسیل
power series	سری توانی
on circle of convergence	روی دایره همگرایی
composition of	ترکیب
differentiation of	مشتق‌گیری از
division of	تقسیم
of inverse function	تابع وارون
noncontinuable	غیرقابل ادامه

with positive coefficients.	با ضرایب مثبت
product of.	حاصل ضرب
substitution of.	جایگزینی
uniform convergence of.	همگرایی یکنواخت
powers of complex numbers	توان اعداد مختلط
integrals containing.	انتگرال‌های شامل
prime ends	پایانه اولیه
principal	قسمت اصلی
principal value of	مقدار اصلی
argument.	آرگومان
integral.	انتگرال
logarithm.	لگاریتم
product.	حاصل ضرب
Cartesian.	دکارتی
Caychy.	کوشی
of complex numbers	اعداد مختلط
empty.	تهی
infinite.	بی‌پایان
partial.	جزئی
of series.	سری‌ها
Wallis's.	والیس
progression, geometric	تصاعد هندسی
proper maximum	ماکزیمم سره
punctured.	محدوف
pure imaginary	موهومی محض
quadrupole	چهارقطبی
quotient of series	خارج قسمت سری
rational functions.	توابع گویا
integrals.	انتگرال
residues of.	مانده
real on real axis	حقیقی روی محور حقیقی



real part.....	قسمت حقیقی
reflection principles .....	اصول انعکاس
for flows.....	— برای جریانها
for harmonic functions.....	— برای توابع همساز
removable singular point of.....	نقطهٔ تکین برداشتنی از
analytic function.....	— تابع تحلیلی
harmonic function.....	— تابع همساز
residues .....	مانده‌ها
at conjugatte points.....	— در نقاط مزدوج
on contour.....	— روی مسیر
at infinity.....	— در بی‌نهایت
methods of calculating.....	— روشهای محاسبه
and partial fractions.....	— و کسرهای جزئی
at poles.....	— در قطب‌ها
of quotient.....	— خارج قسمت
of rational functions.....	— توابع گویا
residue theorem.....	قضیهٔ مانده
reversion of series .....	وارونه‌سازی سری‌ها
Riemann .....	ریمان
mapping theorem.....	— قضیهٔ نگاشت
sphere.....	— کره
surface.....	— رویه
games on.....	— بازی روی
theorem on singular points.....	— قضیه روی نقاط تکین
rigid boundary.....	مرز صلب
roots of.....	ریشه‌های
complex numbers.....	— اعداد مختلط
polynomials.....	— چندجمله‌ای‌ها
unity .....	— واحد
rotation.....	دوران
Rouché's theorem .....	قضیهٔ روشه
Schwarz reflection principle.....	اصل انعکاس شوارتس
Schwarz-Christoffel transformation.....	تبدیل شوارتس-کریستوفل

Schwarz's lemma	لم شوارتس
invariant form	صورت پایای -
secant	سکانت - خط، قاطع
semiinfinite strip	نوار نیم نامتناهی
separation of variables	جدایی متغیرها
series	سری‌ها
absolutely convergent	- همگرای مطلق
alternating	- متناوب
asymptotic	- مجانبی
composition of	- ترکیب -
division of	- تقسیم -
double	- دوگانه
geometric	- هندسی
infinite	- بی پایان
linear combinations of	- ترکیب خطی -
multiplication of	- ضرب -
power	- توانی
summation of	- مجموع‌یابی -
uniformly convergent	- همگرای یکنواخت
sheet	صفحه ورقه
simple	ساده
curve	خم -
function	تابع -
pole	قطب -
zero	ریشه -
simply connected	همبند ساده
singularity	تکینگی
singular points	نقاط تکین
on circle of convergence	- روی دایره همگرای
classification of	- دسته‌بندی -
essential	- اساسی
at infinity	- در بی نهایت
isolated	- منفرد
removeable	- برداشتنی
sink	چاهک

source.....	منبع
speed.....	تندی
square roots.....	ریشه‌دوم
stagnation point.....	نقطه‌ایستایی
star-shaped.....	ستاره‌ای شکل
stereographic projection.....	روش گچ‌نگاری
Stirling's formula.....	فرمول استرلینگ
Stoke's phenomenon.....	پدیده استوکس
Stoke's theorem.....	قضیه استوکس
stream function.....	تابع جریان
streamlines.....	خطوط جریان
strength of source.....	منبع نیرو
strip, semiinfinite.....	نوار، نیم‌نامتناهی
subscript notatin for derivatives.....	اندیس برای مشتق
substitution of a power series in another.....	جایگزینی سری توانی در دیگری
substitutions in integrals.....	جایگزینی در انتگرال
sum of.....	مجموع
angles of non-Euclidean triangle.....	— زوایای مثلث نائقلیدسی
summability.....	مجموع‌پذیری
Abel.....	— آبل
Borel.....	— بورل
of geometric series.....	— سری هندسی
summation by parts.....	مجموع‌یابی
summation method.....	روش مجموع‌یابی
symmetric point.....	نقطه قرینه (مقارن)
construction of.....	— ساختن
tangent function.....	تابع تانژنت
tangent vector.....	بردار مماس
Tauberian theorems.....	قضایای تابری
Taylor series.....	سری تیلور
double.....	— دوگانه
temperature.....	دما
terminal point.....	نقطه پایان

tests for convergence	آزمونهای واگرایی
alternating series	— سری متناوب
comparison	— مقایسه
M	— M
total differential	دیفرانسیل کلی
transcendental function	تابع متعالی
triangle	مثلث
equilateral	— متساوی‌الاضلاع
non-Euclidean	— نااقلیدسی
triangle inequality	نامساوی مثلث
triangular contour	مسیر مثلثی
typically real	نوعاً حقیقی
uniform convergence	همگرایی یکنواخت
differentiation and	مشتق‌گیری و —
integration and	انتگرال‌گیری و —
M test for	آزمون M برای —
of power series	— سری توانی
of product	— سری حاصل ضرب
of sequence of analytic functions	— دنباله توابع تحلیلی
uniform	جریان یکنواخت
uniqueness of	یکتایی
Laurent series	— سری‌های لوران
power series	— سری‌های توان
unit circle	دایره واحد
unit disk	گوی واحد
Möbius transformation of	تبدیل موبیوس روی —
univalence, local	یک به یکی، موضعی
univalent functions	توابع تک‌مقداری
coefficients of	— ضرایب
variables, change of	متغیرها، تغییر
vector	بردار

tangent .....	— مماس
velocity, complex .....	سرعت، مختلط
velocity potential .....	پتانسیل سرعت
velocity vector .....	بردار سرعت
Vitali-Porter theorem .....	قضیه ویتالی-پُرترو
Vitali's theorem .....	قضیه ویتالی
Vivanti-Pringsheim theorem .....	قضیه ویوانتی-پرنگشیم
Wallis's formula .....	فرمول والیس
Watson's lemma .....	لم واتسون
Y method .....	روش Y
zero, divergence to .....	ریشه، واگرایی
zero derivative .....	مشتق صفر
zeros of analytic functions .....	ریشه‌های توابع تحلیلی
of bounded function .....	— توابع کراندار
double .....	— مرتبه دو
isolated .....	— منفرد
numbers of .....	تعداد
order of .....	مرتبه
simple .....	— ساده
zeros of partial sums .....	ریشه‌های مجموع جزئی
zeros of polynomials .....	ریشه‌های چندجمله‌ای